

თეორიული მექანიკა

მეორე შეცვრებული და შევსებული გამოცემა

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოს უმაღლესი და საშუალო
სპეციალური განათლების სახელმწიფო კომიტეტის მიერ მოწონებულია
სახელმძღვანელოდ უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის
ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის

გამომცემლობა „განათლება“

თბილისი — 1964

მეორე გამოცემის წინასიტყვაობა

მეორე გამოცემის მომზადებისას წიგნში შეტანილია მნიშვნელოვანი ცვლილებები და დამატებები. წინა გამოცემასთან შედარებით დამატებულია ორი თავი: თავი I — თეორიული მექანიკის შესავალი და თავი IX — ცვალებად მასის სხეულთა დინამიკის ელემენტები. გარდა ამისა, წიგნში შეტანილია 150-ზე მეტი ამოცანა დაწვრილებითი ამოხსნით. ეს ამოცანები ისეა შერჩეული, რომ მკითხველებს გაუადვილოს თეორიული მასალის შესწავლა და მისცეს მათ სათანადო ჩვევები პრაქტიკული საკითხების გადაწყვეტისათვის. შესამჩნევად არის შევსებული ზოგიერთი თავის მასალა, ასე მაგალითად, VI თავის მე-7 განყოფილებაში უფრო სრულყოფილად არის გადმოცემული გაწრფივების მეთოდი. ვიდრე პირველ გამოცემაში, IV თავში დამატებულია გულდინის დებულებები და სხვ. პირველ გამოცემაში სრიალა ვექტორთა თეორიის მოსდევდა ელემენტარული სტატისტიკა. გარკვეული მეთოდური ხასიათის მოსაზრებებით, მეორე გამოცემაში სრიალა ვექტორთა თეორიის შემდეგ გადმოცემულია კინემატიკის საკითხები, რომელსაც მოსდევს ელემენტარული სტატისტიკის საკითხების განხილვა.

ისე როგორც პირველ გამოცემაში, ანალიზური სტატისტიკის საკითხები გაბნეულია წერტილის დინამიკასა და მატერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკაში, რაც ამ საკითხების გადმოცემას მნიშვნელოვნად აძარცვავს. არაჰოლონომური ბმების შემთხვევაში ანალიზური სტატისტიკის ელემენტები წიგნში შეტანილია ამოცანების სახით.

ეს სახელმძღვანელო წარმოადგენს ლექციების იმ კურსის გადამუშავების შედეგს, რომელსაც ავტორი რიგი წლების მანძილზე კითხულობდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის.

ავტორი ცდილობდა სახელმძღვანელო ხელმისაწვდომი ყოფილიყო არა მარტო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის, არამედ პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვისაც. ამის გამო, წიგნი ისეა დაწერილი, რომ ისეთი სპეციალური საკითხები, როგორიცაა: მოძრაობის მდგრადობის თეორია (VI თავი, მე-7 განყოფილება), მატერიალურ წერტილთა სისტემის მცირე რხევების თეორია (VI თავი, მე-6 განყოფილება), მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის თეორია ჰოლონომური და არაჰოლონომური ბმების ერთობლიობის შემთხვევაში (VI თავი, მე-5 განყოფილება), მექანიკის ვარიაციული პრინციპები (VI თავი, მე-8 განყოფილება), ცვალებადი მასის სხეულთა დინამიკა (IX თავი) მკითხველმა შეიძლება გამოტოვოს, რითაც კურსის მთლიანობა არ დაირღვევა.

დასასრულ მინდა აღვნიშნო, რომ დოც. გ. მანჯავიძემ მთლიანად წაიკითხა ამ სახელმძღვანელოს ხელნაწერი და მომცა რამდენიმე მნიშვნელოვანი მითითება. დიდი დახმარება გამიწია ტერმინების დადგენისა და საერთოდ ტექსტის სტილის-ტურად გაუმჯობესების საქმეში გამომცემლობა „განათლებას“ რედაქტორმა ლ. კვატაშიძემ. ნახაზების შედგენაში მნიშვნელოვანი დახმარება გამიწია ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის მეცნიერ თანამშრომელმა პ. ბედოევამ. ჩემ სასიამოვნო მოვალეობად მიმაჩნია სამივე ხსენებულ ამხანაგს დიდი მადლობა მოვახსენო.

ავტორი

თეორიული მექანიკის შესავალი

§ 1. თეორიული მექანიკის საბანი

თეორიული მექანიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მატერიალური სხეულების მექანიკურ მოძრაობას. მატერიალური სხეულების მექანიკური მოძრაობა ეწოდება დროთა ვითარებაში სხეულებს შორის მდებარეობის შეცვლას. ამრიგად, მექანიკური მოძრაობა მატერიის მოძრაობის უმარტივესი ფორმაა, რომელიც განისაზღვრება დროთა ვითარებაში მატერიალური სხეულების მდებარეობის შეცვლით ერთმანეთის მიმართ.

მოძრაობა, ამ სიტყვის ფართო გაგებით, წარმოადგენს მატერიის ყოფიერების ფორმას, რომელიც მოიცავს სამყაროში მიმდინარე ყოველგვარ ცვლილებას, დაწყებული სივრცეში სხეულების უბრალო გადაადგილებიდან, დამთავრებული აზროვნებით. მაშასადამე, საზოგადოდ, მოძრაობის ქვეშ იგულისხმება არა მარტო სხეულის უბრალო გადაადგილება სივრცეში, არამედ ყოველგვარი ცვლილება, ყოველგვარი პროცესი, რომელიც მატერიალურ სამყაროში მიმდინარეობს, მოძრაობის უმაღლესი ფორმის—აზროვნების ჩათვლით. მოძრაობა მატერიის შინაგანი თვისებაა, ის წარმოუდგენელია მატერიის გარეშე, განუყოფელია მატერიისაგან. ენგელსის გამოთქმით, მატერია მოძრაობის გარეშე ისევე წარმოუდგენელია, როგორც მოძრაობა მატერიის გარეშე. მოძრაობის ყოველგვარი ფორმა წარმოადგენს მატერიის ყოფიერების გამოვლინებას.

მოძრაობის სხვადასხვა ფორმებს შორის შეიძლება არსებითი თვისობრივი განსხვავება იყოს და რაც მეტია ეს განსხვავება, მით უფრო განსხვავდება ერთმანეთისაგან მათი შესწავლის მეთოდებიც. მაგრამ, მოძრაობის სხვადასხვა ფორმები მჭიდრო კავშირში იმყოფებიან და შესაფერი პირობების შერჩევით გადადიან ერთიმეორეში. ენგელსი ამბობს: „ფიზიკაში ყოველი ცვლილება არის რაოდენობის გადასვლა თვისობრიობაში — შედეგი სხეულში თანარსებული ან მისთვის გადაცემული რომელიმე ფორმის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილებისა. ასე, მაგალითად, წყლის ტემპერატურას პირველ ხანებში არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს მისი წვეთობრივ-თხევადი მდგომარეობისათვის; მაგრამ თხევადი წყლის ტემპერატურის გადიდებისას ან შემცირებისას დგება მომენტი, როდესაც შეკავშირების ეს მდგომარეობა იცვლება და წყალი გადაიქცევა ხოლმე — ერთ შემთხვევაში ორთქლად, მეორე შემთხვევაში — ყინულად... ასევე, საჭიროა დენის ძალის განსაზღვრული მინიმუმი, რომ პლატინის მავთულმა იწყოს „შუქის მოცემა“ (კ. მარქსი და ფ. ენგელსი, ტ. XIV, გვ. 527).

ლენინი წერს: „მატერია არის ის, რაც მოქმედებს ჩვენს გრძნობათა ორგანოებზე და იწვევს შეგრძნებას, მატერია არის ობიექტური რეალობა, რო-

მელიც შეგრძნებაში გვეძლევა“ (ლენინი, ტ. XIII, გვ. 119—120). შემდეგ ლენინი განაგრძობს: „სამყაროს სურათი არის იმის სურათი, თუ როგორ მოძრაობს მატერია და როგორ „აზროვნებს მატერია““ (იქვე, გვ. 288).

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, მოძრაობა მატერიის შინაგანი თვისებაა. მატერიას არ შეიძლება მოვაცილოთ მოძრაობის თვისება და, როგორც ლენინი შენიშნავს, სამყაროში არ არსებობს სხვა არაფერი, გარდა მოძრავი მატერიისა. მაშასადამე, მოძრაობა მარადიულად არსებობს მატერიასთან ერთად და ისე, როგორც არ შეიძლება მოსპობა მატერიისა, არ შეიძლება მოსპობა მოძრაობისაც.

ასე ფართოდ გაგებული მოძრაობის შესწავლა მეცნიერების არც ერთ დარგს არ შეუძლია. მოძრაობის ფორმები შეიძლება არსებითად განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან და მათ შესწავლას მეცნიერების სხვადასხვა დარგი ემსახურება. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, თეორიული მექანიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების მოძრაობის უმარტივეს ფორმას — მექანიკურ მოძრაობას.

ვინაიდან მატერიალური სხეულების მექანიკურ მოძრაობას ჩვენ ვამჩნევთ ყველგან ჩვენს ირგვლივ ბუნებასა და ტექნიკაში, და მატერიალური სხეულების მექანიკური მოძრაობის კანონებს შეისწავლის თეორიული მექანიკა, ამიტომ ცხადი ხდება ის გამოყენება, რომელსაც თეორიული მექანიკა პოულობს საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა დარგებსა და ტექნიკაში. ტექნიკის თანამედროვე გიგანტური პროგრესი არსებითად ემყარება თეორიული მექანიკის კანონებს.

მატერიალური სხეულების მექანიკური მოძრაობა, ცხადია, ფიზიკური პროცესია, აზიტომ თეორიული მექანიკა, როგორც ამ პროცესის შემსწავლელი მეცნიერება, შეიძლებაოდა მიგვეკუთვნებინა ფიზიკური მეცნიერებისათვის. მაგრამ თეორიულ მექანიკაში კვლევის იარაღად მათემატიკური ანალიზის მეთოდები ისე ფართოდ არის გამოყენებული, აქსიომატიკა და აბსტრაქცია ისე დიდ როლს ასრულებს ამ დარგში, რომ თეორიული მექანიკა შეიძლება მიეკუთვნოს მათემატიკურ მეცნიერებას.

აღებული სხეულის მექანიკური მოძრაობის ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ ამ სხეულის ნაწილების განლაგების შეცვლასაც ერთმანეთის მიმართ (დეფორმაციასაც). თუ სხეული ისეთია, რომ მის ორ ნებისმიერ ნაწილს შორის მანძილი უცვლელი რჩება, მაშინ მას მყარ სხეულს უწოდებენ. ამრიგად, მყარი სხეული ისეთი სხეულია, რომელიც არავითარ დეფორმაციას არ განიცდის. ცხადია, მყარი სხეული ამ სიტყვის ზუსტი გაგებით (აბსოლუტურად მყარი სხეული) ბუნებაში არ არსებობს, მაგრამ, პრაქტიკული სინამდვილისათვის საკმარისი მიახლოებით, მთელი რიგი სხეულები შეიძლება განვიხილოთ. როგორც მყარი სხეულები. თუ სხეულში დეფორმაცია იმდენად დიდია, რომ ამა თუ იმ პრაქტიკული საკითხის განხილვის დროს მისი უგულებელყოფა არ შეიძლება, მაშინ სხეულს დეფორმადი სხეული ეწოდება. ამრიგად, მატერიალური სხეულები ჩვენ შეგვიძლია გავყოთ ორ ჯგუფად — დეფორმად და არადეფორმად სხეულებად. დეფორმადი სხეულების მოძრაობის საკითხები, რომელიც დრეკადობის თეორიასა და ჰიდრო-აერომექანიკაში შეისწავლება, წინამდებარე კურსში განხილული არ იქნება.

მატერიალურ სხეულს, რომლის განზომილებებიც იმდენად მცირეა, რომ მისი მექანიკური მოძრაობა. საკმარისად დიდი სიზუსტით, განისაზღვრება მისი

რომელიმე ერთი წერტილის მოძრაობით, ეწოდება მატერიალური წერტილი. მატერიალურ წერტილთა ისეთ ერთობლიობას, რომლის ყოველი წერტილის მდებარეობა და მოძრაობა დამოკიდებულია დანარჩენი წერტილების მდებარეობასა და მოძრაობაზე, ეწოდება მატერიალური წერტილთა სისტემა.

მატერიალური სხეულების მექანიკურ მოძრაობას, რომელსაც შემდეგში, უბრალოდ, მოძრაობას ვუწოდებთ, აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა არჩეულია ვარკვეული საფარდი სისტემა (მყარი სხეული), რომლის მიმართ სხეული მოძრაობს ან უძრავია. საფარდ სისტემად, როგორც წესი, განხილული იქნება კოორდინატთა ესა თუ ის სისტემა. თუ სხეული კოორდინატთა აღებული სისტემის მიმართ უძრავია, მაშინ ვიტყვით, რომ ის ამ სისტემის მიმართ წონასწორობაშია და, მაშასადამე, წონასწორობა განიხილება როგორც მოძრაობის კერძო შემთხვევა. ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ წონასწორობა და მოძრაობა ფარდობითი ცნებებია. ასე, მაგალითად, სხეული, რომელიც უძრავია ღეღამიწის მიმართ, მოძრაობს მზის მიმართ და სხვ.

§ 2. კვლევის ძირითადი მეთოდები თეორიულ მექანიკაში

თეორიულ მექანიკას, ისე როგორც ყოველ მეცნიერებას, გააჩნია კვლევის საკუთარი მეთოდები. ეს მეთოდები ძირითადად ემყარება დაკვირვებას, ცდას, პრაქტიკას. რომელიმე მოვლენაზე დაკვირვების დროს ან ამ მოვლენის ცდით განმეორების შემთხვევაში, საზოგადოდ, არ გვეძლევა საშუალება მოვლენა ერთბაშად ყოველმხრივ შევისწავლოთ. მოვლენაზე დაკვირვების დროს საჭიროა ყურადღება გავამახვილოთ ამ მოვლენის ისეთ ნიშნებზე, რომელნიც მას არსებითად ახასიათებენ, სხვა არაარსებითი ნიშნები კი დროებით უგულებელვყოთ. მოვლენის ძირითადი დამახასიათებელი ნიშნების დადგენისა და შესწავლის შემდეგ შეიძლება გათვალისწინებულ იქნეს სხვა ნიშნების გავლენაც. ასე, მაგალითად, მცირე განზომილების მყარი სხეული (მატერიალური წერტილი); შესწავლის გაადვილების მიზნით, შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც გეომეტრიული წერტილი. ამ დაშვებით მიღებული შედეგები საფუძვლად უდევს ჯერ მატერიალურ წერტილთა სისტემის, ხოლო შემდეგ მყარი სხეულის მოძრაობის შესწავლას. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, აბსოლუტურად მყარი სხეული ბუნებაში არ არსებობს, მაგრამ მთელი რიგი სხეულების (მაგალითად, საშენი მასალა) მყარ სხეულებად მიჩნევა სავსებით დასაშვებია და ასეთი გზით მიღებული შედეგები სავსებით ეთანადება პრაქტიკას. გარდა აღნიშნული აბსტრაქციის მეთოდისა, თეორიულ მექანიკაში გამოიყენება, აგრეთვე, მოძრაობის უმარტივესი ფორმებიდან რთულ ფორმებზე (შედეგნილ მოძრაობებზე) გადასვლის მეთოდი. რომელიც მოვლენის საფუძვლიანად შესწავლის მძლავრ საშუალებას წარმოადგენს.

საზოგადოდ, შეიძლება ითქვას, რომ გარეგანი სამყაროს ყოველი მოვლენა დაკავშირებულია მის წინამორბედ, მასთან ერთდროულ და მის მომდევნო მოვლენებთან. ამ მოვლენების ურთიერთკავშირის განხილვისას თეორიულ მექანიკაში გამოყოფენ ისეთ მოვლენებს, რომელნიც ამა თუ იმ თვალსაზრისით არსებით როლს თამაშობენ აღებული მოვლენის შესასწავლად, ხოლო მეორეხარისხოვან მოვლენებს უგულებელვყოფენ. აბსტრაქციის ისეთი მეთოდი, რომ

მელიც არსებითად ემყარება დაკვირვებას, ცდას, იძლევა აღებული მოვლენის შესწავლის შედარებით გამარტივებულ გზას. თეორიულ მექანიკაში საკითხის ასეთი გამარტივება სავსებით გამართლებულია და ასეთი გზით მიღებული შედეგები სავსებით ეთანადება პრაქტიკულ სინამდვილეს.

თეორიულ მექანიკაში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ფიზიკური სიდიდეების განსაზღვრას, რომელნიც არსებით როლს ასრულებენ ამა თუ იმ მოვლენის შესწავლის დროს. ფიზიკური სიდიდეების დახასიათებისას დიდი მნიშვნელობა აქვს მათი გაზომვის მეთოდიკას. ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა საზომი ერთეულის (ეტალონი) არჩევა, ხოლო შემდეგ იმ წესის შემუშავება, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გასაზომი ფიზიკური სიდიდე საზომ ერთეულს შევადაროთ; სხვანაირად რომ ვთქვათ, საჭიროა სათანადო ხელსაწყოთა შექმნა. საზომი ერთეული (ეტალონი) და ხელსაწყო საშუალებას იძლევა აღებულ მოვლენას შევუსაბამოთ გარკვეული რიცხვი, რომელიც გაზომვის შედეგად მიიღება. ამრიგად, ჩვენ საშუალება გვძლევა ფიზიკური მოვლენების გარკვეული თვალსაზრისით დასახასიათებლად მათემატიკური აპარატი გამოვიყენოთ.

გარდა აღნიშნული მეთოდებისა, თეორიულ მექანიკაში არსებით როლს ასრულებს აგრეთვე გარკვეული აქსიომები, რომელნიც დაუმტკიცებლად არიან მიღებული და რომელთა საფუძველზე დადგენილი კანონებიც სავსებით სწორად ასახავენ ფიზიკურ სინამდვილეს. დაკვირვება, ცდა და პრაქტიკა იძლევა აქსიომებზე დაყრდნობით მიღებული შედეგების სამართლიანობის შემოწმების საშუალებას.

მატერიალური სხეულების მოძრაობის შესწავლის მათემატიკური ანალიზის მეთოდები, ცდა, აბსტრაქცია და აქსიომატიკა — აი, ის ძირითადი მეთოდები, რომელთაც ეყრდნობა თეორიული მექანიკა და რომლის გამოც შეიძლება ის მათემატიკურ მეცნიერებას მივაკუთვნოთ.

§ 1. კლასიკური მექანიკა და მისი გამოყენების ფარგლები

წინამდებარე კურსში შეისწავლება ე. წ. კლასიკური მექანიკა, რომლის ძირითადი კანონებიც პირველად, დასრულებული სახით, ფორმულირებული იყო გალილეისა და ნიუტონის მიერ. ვინაიდან მექანიკურ მოძრაობაში იგულისხმება დროთა ვითარებაში სხეულის გადანაცვლება სივრცეში, ამიტომ, ცხადია, სივრცე და დრო მექანიკის ძირითადი ცნებებია. კლასიკურ მექანიკაში სივრცის ქვეშ იგულისხმება ევკლიდეს სივრცე, რომლის თვისებები ევკლიდურ გეომეტრიაში (ელემენტარული გეომეტრია) შეისწავლება (ჩვენ ევკლიდესობით, რომ ევკლიდეს სივრცის თვისებებს მკითხველი იცნობს). როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სხეულის მოძრაობის დასახასიათებლად უნდა გვქონდეს არჩეული გარკვეული საფარდი სისტემა, რომლის მიმართ მანძილების ცვლილებით დახასიათდება განსახილველი მოძრაობა. აღებული საფარდი სისტემა უნდა იყოს აღჭურვილი დროის საზომი ხელსაწყოთი, რომ შეგვეძლოს მოძრაობის სხეულის სხვადასხვა მდებარეობას დროის სხვადასხვა მნიშვნელობა (მომენტი) შევუსაბამოთ. დროის გაზომვის საშუალებას თვით ბუნება იძლევა მასში არსებული პერიოდული მოვლენების წყალობით. ასეთი პერიოდული მოვლენებია დღე-ღამე (ის დრო, რომელიც საჭიროა თავისი ღერძის გარშემო ე. წ. უძრავი ვარსკვლავების მიმართ დედამიწის

ერთხელ მობრუნებისათვის), წელიწადი (ის დრო, რომელიც საჭიროა მზის გარშემო დედამიწის ერთხელ შემოვლისათვის). დღე-ღამის 1/86400 ნაწილს ეწოდება სეკუნდი (წამი). კლასიკური მექანიკის მიხედვით, თუ აღებულ სხეულში მომხდარი ორი მოვლენა რომელიმე საფარდ სისტემაში რეგისტრირებულია როგორც ერთდროული, მაშინ ნებისმიერ სხვა საფარდ სისტემაშიც ისინი რეგისტრირებული იქნებიან, როგორც ერთდროული მოვლენები. ამრიგად, კლასიკური მექანიკის მიხედვით, სხვადასხვა სისტემაში გაზომილი დრო ერთნაირია, რის გამოც მას აბსოლუტურ დროს უწოდებენ.

საფარდ სისტემას, რომლის მიმართაც ადგილი აქვს ნიუტონის პირველ კანონს (ინერციის კანონი), ეწოდება ინერციული.

კლასიკური მექანიკის კანონები განსაკუთრებით მარტივ სახეს ღებულობს ინერციული საფარდი სისტემის მიმართ. კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავე მოთავსებულია მზის სისტემის ინერციის ცენტრში და ღერძები მიმართულია სამი ე. წ. უძრავი ვარსკვლავისაკენ, პრაქტიკული მიზნებისათვის საკმარისად დიდი სიზუსტით, შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ინერციული. ამ სისტემას უწოდებენ Φ ე. წ. სისტემას. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ მთელი რიგი მოვლენების შესასწავლად, რომლებიც დედამიწაზე ხდება, დასაშვებია დედამიწის მიჩნევა უძრავად. მართალია, დედამიწის არაინერციულ მოძრაობას გავლენა აქვს დედამიწის მიმართ მოძრავ სხეულებზე, მაგრამ ხშირად ეს გავლენა იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება პრაქტიკულად არც კი იქნეს მხედველობაში მიღებული. შევნიშნოთ, რომ კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონები ფორმულირებულია ინერციული სისტემის მიმართ.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, კლასიკური მექანიკის მიხედვით ყველა საფარდი სისტემისათვის დრო ერთი და იგივეა, ის უნივერსალურია სივრცის ყველა წერტილისათვის და, მაშასადამე, დროის მიმდინარეობა არ არის დამოკიდებული მოძრავ მატერიაზე. ასე, მაგალითად, თუ ძირითად სხეულად (საფარდ სისტემად) არჩეულია დედამიწა, მაშინ, კლასიკური მექანიკის მიხედვით, დასაშვებია დავადგინოთ სხვა სხეულზე მომხდარი მოვლენების ერთდროულობა, როგორც ან უნდა მოძრაობდეს ეს სხეული დედამიწის მიმართ. თუ ვიგულისხმებთ, რომ აღნიშნულ სხეულზე მომხდარი მოვლენების აღსანიშნავად დედამიწაზე მიიღება სიგნალები სინათლის სხივის სახით, ცხადი გახდება, რომ დროის აბსოლუტურად მიღება იმის ტოლფასია, რომ სინათლის სხივის სიჩქარე უსასრულოდ ჩავთვალოთ. მაშასადამე, იმის დაშვება, რომ დრო დამოუკიდებელია მოძრავი მატერიისაგან, წარმოადგენს რეალურ სამყაროში არსებული თანაფარდობის გარკვეულ მიახლოებით ასახვას.

მას შემდეგ, რაც არჩეულია დროის ერთეული (ეტალონი). დროის ყოველ მომენტს შეიძლება შევუსაბამოთ უსასრულო წრფის გარკვეული წერტილი. ამასთან, დროს შეიძლება მივანიჭოთ როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობა იმის მიხედვით, განსაზღვრული მოვლენა მოხდა ჩვენ მიერ არჩეულ მომენტამდე, თუ მის შემდეგ. ასეთი გზით შეიძლება მოვახდინოთ დროის არითმეტიზაცია, ე. ი. დავამყაროთ დამოკიდებულება ნამდვილ რიცხვებსა (წრფის წერტილებსა) და დროს შორის. ამრიგად, დრო განიზილება, როგორც ერთი განზომილების უწყვეტი მიმდევრობა, რომელსაც გრაფიკულად წრფის წერტილები შეესაბამება. ამ წრფეს დროთა ღერძი ეწოდება. დროთა ღერძის ყოველ წერტილს დროის გარკვეული მნიშვნელობა, ანუ, როგორც ამბობენ,

დროის გარკვეული მომენტი შეესაბამება. დროის ორი მომენტი განსაზღვრავს ე. წ. დროის შუალედს.

XIX საუკუნის ბოლო და XX საუკუნის პირველი მეოთხედი აღინიშნა დიდი პროგრესით ფიზიკის დარგში. ახალმა აღმოჩენებმა ელექტროდინამიკაში, რადიოტექნიკაში, ატომის აღნაგობაში და აგრეთვე ატომის უმცირესი ნაწილაკების მოძრაობის ახალი კანონების დადგენამ ცხადყო, რომ კლასიკური მექანიკის კანონების გამოყენების ფარგლები შეზღუდულია. გამოირკვა, რომ ძალიან მცირე ვანზომილების ნაწილაკების მოძრაობა ხშირად არ ექვემდებარება კლასიკური მექანიკის კანონებს. აღმოჩნდა, რომ სინათლის სხივის სიჩქარის სადარი სიჩქარით მოძრავი სხეულებისათვის კლასიკური მექანიკის კანონებია ძალას ჰკარგავს. ამასთან დაკავშირებით წარმოიშვა ე. წ. რელატივისტური მექანიკა. რომელიც მთლიანად აინშტაინის ფარდობითობის თეორიას ეყრდნობა.

კლასიკურ მექანიკაში დრო და სივრცე დამოუკიდებელია ერთმანეთისაგან. ფარდობითობის თეორია, კლასიკური მექანიკისაგან განსხვავებით. ამყარებს გარკვეულ დამოკიდებულებას სივრცესა და დროს შორის (და აგრეთვე მასასა და ენერგიას შორის). ფარდობითობის თეორიაში დრო არ განიხილება როგორც აბსოლუტური, ერთნაირი სივრცის ყველა წერტილისათვის და, მაშასადამე, ამ თეორიის მიხედვით, ათვლის ყოველ სისტემას, ყოველ მოძრავ სხეულს თავისი დრო, ე. წ. ადგილობრივი დრო გააჩნია. რაიმე სხეულში მომხდარი მოვლენის ხანგრძლივობა ათვლის სხვადასხვა სისტემისათვის შეიძლება იყოს სხვადასხვა. აუ, მაგალითად. თუ ერთი სისტემა მეორის მიმართ მოძრაობს საკმარისად დიდი სიჩქარით (სინათლის სხივის სიჩქარის სადარი სიჩქარით) და ხსენებული მოვლენის დასაწყისი და დასასრული ამ სისტემებზე მიიღება როგორც სიგნალები სინათლის სხივისა, მაშინ, ცხადია, მოვლენის ხანგრძლივობა ათვლის ამ ორი სისტემის მიმართ იქნება სხვადასხვა. ამავე მაგალითიდან ცხადია, რომ, თუ ხსენებული საფარდი სისტემები ერთმანეთის მიმართ მოძრაობენ სინათლის სიჩქარესთან შედარებით საკმაოდ მცირე სიჩქარით, მაშინ ამ ორი სისტემისათვის დრო დასაბოლოებით ერთნაირი იქნება. ფარდობათობის თეორიაში სინათლის სხივის სიჩქარე მიღებულია როგორც აბსოლუტურად მუდმივი ყველა ინერციული სისტემისათვის, ის ტოლია $299792,6 \cdot 10^8 \frac{მ}{სეკ}$. ვთქვათ, მოცემულია A_1, A_2, \dots, A_n ინერციული სისტემები; ამ სისტემებისათვის დაკვირვების შედეგად მიღებული ადგილობრივი დროის მნიშვნელობები იყოს t_1, t_2, \dots, t_n . ფარდობითობის თეორიაში განიხილება საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან ადგილობრივი დროები. ეს კავშირი ზოცრეიდლება იმის პოსტულატებით, რომ სინათლის სხივის სიჩქარე ყველა ინერციული სისტემისათვის ერთნაირია.

ფარდობათობის თეორია, ცხადია, არ უარყოფს კლასიკურ მექანიკას, არამედ ადგენს იმ საზღვარს, რომლის ფარგლებშიაც კლასიკური მექანიკის კანონები კარგად ასახავს რეალური სამყაროს მოვლენებს. კლასიკური მექანიკისა და რელატივისტური მექანიკის კანონებზე დაყრდნობით მიღებული შედეგების განსხვავება მხოლოდ მაშინ არის საგრძნობი, როცა მოძრავი სხეულის სიჩქარე უზღოვდება სინათლის სხივის სიჩქარეს. თუ მას ადგილი არა აქვს, მაშინ განსხვავება იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მხედველობაში არც კი იქნეს მიღებული. როცა-საქმე გვაქვს სინათლის სხივთან შედარებით ნელა მოძრავ სხეულ-

ლებთან და აგრეთვე სხეულების განზომილება ძალიან მცირე არ არის, მაშინ კლასიკური მექანიკის კანონებით სარგებლობა სავსებით მიზანშეწონილია და, მაშასადამე, კლასიკური მექანიკა არასოდეს არ დაკარგავს თავის მნიშვნელობას.

წინამდებარე კურსში შეისწავლება კლასიკური მექანიკა, რომელსაც ზმირად ნიუტონის მექანიკას უწოდებენ; ფარდობითობის თეორიას ჩვენ ამ კურსში არ შევეხებით.

§ 4. თეორიული მექანიკის დასოფა სტატიკად, კინემატიკად და დინამიკად

თეორიულ მექანიკას, ჩვეულებრივ, სამ ნაწილად ყოფენ: სტატიკად, კინემატიკად და დინამიკად.

სტატიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების წონასწორობის პირობებს.

კინემატიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების მოძრაობის გეომეტრიულ მხარეს. ის არ აქცევს ყურადღებას იმ მიზეზებს (ძალებს), რომლებმაც გამოიწვიეს მოძრაობა. ამრიგად, კინემატიკა შეისწავლის გეომეტრიული ობიექტების მოძრაობას დროში. კინემატიკას ხშირად უწოდებენ ოთხგანზომილებიანი სივრცის გეომეტრიას, სადაც მეოთხე განზომილებად მიღებულია დრო.

დინამიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების მოძრაობის კანონებს მოძრაობის გამომწვევ მიზეზებთან (ძალებთან) დამოკიდებულებით.

ძალა თეორიულ მექანიკაში განიხილება როგორც მატერიალური სხეულების ურთიერთქმედების შედეგი. სხეულების ურთიერთქმედება იწვევს მათი მოძრაობის შეცვლას. ძალა ეწოდება იმ სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს სხეულების ერთმანეთზე მექანიკური მოქმედების ზომას. ყოველდღიური პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ძალა ვექტორული სიდიდეა.

დინამიკა თავის მხრივ სამ ნაწილად იყოფა: წერტილის დინამიკა, მატერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკა და მყარი სხეულების დინამიკა. სხეულის მოძრაობა განსაზღვრულად ჩაითვლება მხოლოდ მაშინ, როცა მისი შემადგენელი ყველა ნაწილაკის მოძრაობა ცნობილია. ამიტომ, ბუნებრივია, მატერიალურ წერტილთა სისტემისა და მყარი სხეულების დინამიკის შესწავლას წინ უნდა უძღოდეს მატერიალური წერტილის დინამიკის შესწავლა. სტატიკას და დინამიკას ერთად კინეტიკას უწოდებენ. მატერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკას, რომელიც მთლიანად დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის თეორიას ეყრდნობა, ხშირად ანალიზურ მექანიკას უწოდებენ.

§ 5. თეორიული მექანიკის განვითარების მოკლე ისტორიული მიმოხილვა

მექანიკის წარმოშობა და განვითარება უშუალოდაა დაკავშირებული ტექნიკის განვითარებასთან. ტექნიკა მეცნიერების წინაშე აყენებდა ახალ ამოცანებს, რომელთა გადაწყვეტასაც მექანიკა ემსახურებოდა. მექანიკის კანონების გამოყენებით კი ხდებოდა ტექნიკის ახალი პროგრესი. ტექნიკისა და მექანიკის ასეთი ურთიერთგავლენის ვითარებაში ხდებოდა თეორიული მექანიკის, როგორც მეცნიერების, წარმოშობა და განვითარება.

მექანიკის წარმოშობის ისტორიული ფესვები შორეულ წარსულში უნდა ეძიოთ. ისეთ დიდ ნაგებობათა მშენებლობის დროს, როგორიცაა ეგვიპტის პირამიდები, მშენებლები ემყარებოდნენ გამოცდილების შედეგად შემუშავებ-

ბულ პრიმიტიულ კანონებს. მძიმე ტვირთების გადასატანად იყენებდნენ ბერ-კეტს, ბლოკებს, დახრილ სიბრტყეს და სხვ. ასეთ საშუალებათა თანდათან სრულყოფიან და განვითარების შედეგად ყალიბდებოდა მექანიკის პირვანდელი კანონები. მექანიკის კანონების ჩამოყალიბება უნდა განვიხილოთ როგორც ხანგრძლივი პროცესი, რომელიც ყოველდღიურ პრაქტიკაში, დაგროვილ ცოდნასა და ცდაზე დაყრდნობით ხდებოდა. პირველად წარმოიშვა და განვითარდა თეორიული მექანიკის ყველაზე უფრო მარტივი დარგი — სტატიკა, რომელიც მატერიალური სხეულების წონასწორობის პირობებს სწავლობს. მექანიკის სხვა დარგები, განსაკუთრებით დინამიკა, გაცილებით გვიან განვითარდა (ნიუტონის დროიდან).

ბერკეტის წონასწორობის ზოგიერთ საკითხს და აგრეთვე ერთ წერტილზე ზოდებულ და ერთსა და იმავე წრფეზე მიმართულ ძალთა შეკრების კანონს იცნობდა დიდი ბერძენი ფილოსოფოსი არისტოტელე (384—322 წ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). ბერკეტის წონასწორობის საკითხის ბოლომდე ამოხსნა არისტოტელემ ვერ შესძლო.

სტატიკას, როგორც მეცნიერებას, საფუძველი ჩაუყარა ძველი დროის ვენიკალურმა მეცნიერმა არქიმედემ (287—212 წ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). არქიმედი ცნობილია და მოღვაწეობდა სიცილიის მთავარ ქალაქ სირაკუზში. როგორც ცნობილია, არქიმედეს ეკუთვნის ბერკეტის წონასწორობის საკითხის ზუსტი გადაწყვეტა. მასვე ეკუთვნის ჰიდროსტატიკის საფუძვლების დამუშავება და საყოველთაოდ ცნობილი კანონი სითხეში ჩაძირული სხეულების შესახებ. არქიმედი ითვლება თავისი დროის უდიდეს გეომეტრად და გამოგონებლად. მას ეკუთვნის მრავალი ტექნიკური ხასიათის გამოგონება, მათ შორის სამხედრო საქმეში. არქიმედმა გამოიგონა ხრახნი, რომელიც ცნობილია არქიმედის ხრახნის სახელწოდებით. მას ეგვიპტელები იყენებდნენ მდინარე ნილოსის ნაპირებიდან წყლის სარწყავად გადასაცვანად.

უნდა აღინიშნოს, რომ მონათმფლობელური წყობილების დროს წარმოების დაბალი დონისა და მონების იაფფასიანი შრომის გამო არ იყო მოთხოვნილება ტექნიკის განვითარებისა, რის გამოც ამ პერიოდში არ შეიძლებოდა მექანიკის სწრაფი და სრულყოფილი განვითარება.

შუა საუკუნეების ეპოქა, ისე როგორც ყველა სხვა მეცნიერებაში, თეორიულ მექანიკაშიაც ხასიათდება, როგორც განვითარების თითქმის მთლიანად შეჩერების ეპოქა. აღნიშნულ შეჩერებას ხელს უწყობდა არსებული საზოგადოებრივი წყობილება (ბატონყმური წყობილება) და ის გარემოება, რომ მეცნიერებაში (განსაკუთრებით ფილოსოფიაში) გამეფებული იყო თეოლოგია. მეცნიერების ასეთი გაყინვა გრძელდებოდა ე. წ. აღორძინების პერიოდამდე (XV საუკუნის მეორე ნახევარი).

აღორძინების პერიოდში ვაჭრობის, ნაოსნობის, სამხედრო საქმის, ხელოსნობისა და შემდეგ მანუფაქტურის განვითარების შედეგად სწრაფად განვითარდა საერთოდ მეცნიერება და, კერძოდ, თეორიული მექანიკა.

ამ პერიოდის მრავალი ნიჭიერი მკვლევარი წარმატებით იწყებს მუშაობას თეორიულ მექანიკაში და ამდიდრებს მას ახალი აღმოჩენებით. ასეთ მკვლევართა რიცხვს ეკუთვნის გამოჩენილი იტალიელი მხატვარი ლეონარდო დე ვინჩი (1452—1519). მან შეისწავლა დახრილ სიბრტყეზე სხეულის მოძრაობის კანონები და აგრეთვე სრიალის შემთხვევაში ხახუნის თვისებები. ლეონარ-

ჟო და ვინჩი იყო არა მარტო გამოჩენილი მსატყარი, არამედ ბუმბერაზი მკვლევარი მეცნიერების მრავალ დარგში.

ლეონარდო და ვინჩის შემდეგ შუა საუკუნეობრივი სქოლასტიკისა და რელიგიის წინააღმდეგ ბრძოლაში უდიდესი მნიშვნელობა ჰქონდა დიდი პოლონელი ასტრონომის კოპერნიკის (1473—1543) აღმოჩენებს. კოპერნიკამდე, ათასეული წლების მანძილზე, გამეფებული იყო პტოლემეს გეოცენტრული სისტემა. რომლის მიხედვით დედამიწა ითვლებოდა უძრავად. შეიძლება ითქვას, რომ კოპერნიკმა მოახდინა გადატრიალება საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში თავისი ჰელიოცენტრული სისტემის დადგენით. ამ სისტემის მიხედვით, ციური მნათობების მოჩვენებითი მოძრაობა ახსნილია, როგორც დედამიწის თავისი ღერძისა და მზის გარშემო მოძრაობის შედეგი. ეს იყო იმ დროის უდიდესი აღმოჩენა, რომელმაც ლახვარი ჩასცა რელიგიას და დიდად შეუწყო ხელი საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა დარგების გიგანტური ნაბიჯით წინსვლას. კოპერნიკის აღმოჩენებმა საფუძველი ჩაუყარა ციურ მექანიკას — მეცნიერებას ციური სხეულების მოძრაობის შესახებ.

კოპერნიკის აღმოჩენებზე დაყრდნობით და მრავალ დაკვირვებათა ანალიზის საფუძველზე გერმანელმა მეცნიერმა კეპლერმა (1571—1630) აღმოაჩინა სამი კანონი მზის ირგვლივ პლანეტების მოძრაობის შესახებ. ეს კანონები, რომელთაც კეპლერის კანონები ეწოდება, შემდეგია: 1) ყოველი პლანეტა მოძრაობს ელიფსზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში მზე იმყოფება; 2) მზის ცენტრის მიმართ პლანეტის ცენტრის რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი შესაბამის დროის პროპორციულია (დროის ტოლ შუალედებში ტოლი ფართობები შემოიწერება). ამ კანონს ფართობთა კანონი ეწოდება; 3) მზის ირგვლივ პლანეტის ერთხელ შემოვლის დროის კვადრატი ტრაექტორიის დიდი ნახევარღერძის კუბის პროპორციულია, ე. ი. T^2/a^3 შეფარდება, სადაც a ტრაექტორიის (ელიფსის) დიდი ნახევარღერძია, T კი — ტრაექტორიის ირგვლივ ერთხელ შემოვლის დრო, ერთნაირია ყველა პლანეტისათვის.

ამ კანონების საფუძველზე ნიუტონმა იპოვა პლანეტების მამოძრავებელი ძალები და შემდეგ აღმოაჩინა „მსოფლიო მიზიდულობის კანონი“.

თეორიული მექანიკის განვითარებაში უდიდესი როლი ითამაშა დიდი იტალიელი მეცნიერის გალილეის (1564—1642) გამოკვლევებმა. გალილეი მექანიკის კანონების დადგენაში დიდ მნიშვნელობას ცდას ანიჭებდა. მას ეკუთვნის საყოველთაოდ ცნობილი ინერციის კანონის აღმოჩენა. მანვე შემოიღო პირველად სიჩქარისა და აჩქარების ცნება სწორხაზოვნად და გადატანით მოძრავი სხეულისათვის და თავისი ცდების საფუძველზე მოგვცა ზუსტი კანონი სიცარიელეში სხეულის ვარდნის შესახებ. მან აღმოაჩინა, რომ ყველა სხეული სიცარიელეში ვარდება ერთნაირი აჩქარებით წონისაგან დამოუკიდებლად. ამრიგად, ჯერ კიდევ არისტოტელეს დროიდან გამეფებული შეხედულება იმის შესახებ, რომ მძიმე წონის სხეული უფრო ჩქარა ვარდება დედამიწაზე, ვიდრე მსუბუქი, უარყოფილი იქნა გალილეის ამ აღმოჩენით. გალილეიმ შეისწავლა აგრეთვე დედამიწის პორიზონტიდან სიცარიელეში რაიმე კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის კანონები. მან დაამტკიცა, რომ სხეულის სიმძიმის ცენტრი იმოდრავებს პარაბოლაზე და იპოვა ე. წ. ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე და სიშორე. ამ აღმოჩენას მაშინ დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა ბალისტიკაში. გალი-

ლეი სამართლიანად ითვლება თეორიული მექანიკის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი დარგის — დინამიკის ფუძემდებლად.

დინამიკაში გალილეის შრომების შემდგომი განვითარება მოგვცა პოლანდიელმა მეცლევარმა პიუგენსმა (1629—1695). მან შეისწავლა ფიზიკური საქანის მოძრაობის კანონები. გარდა ამისა, პიუგენსმა გალილეის მიერ შემოღებული აჩქარების ცნება განაზოგადა მატერიალური წერტილის მრუდწირული მოძრაობისათვის და შემოიღო ცენტრისკენული ძალის ცნება. პიუგენსის რამდენიმე შრომა მიძღვნილია მყარი სხეულების დაჯახების მოვლენის შესწავლისადმი.

დინამიკის ძირითადმა კანონებმა, რომელთა შესწავლაც, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, დაიწყო გალილეიმ, დასრულებული სახე მიიღო უდიდესი ინგლისელი მეცნიერის ნიუტონის (1643—1727) გამოკვლევებში. ნიუტონმა ჩამოაყალიბა ე. წ. კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონები და ამ კანონებზე დაყრდნობით საგრძნობლად განავითარა დინამიკა. ამიტომ კლასიკურ მექანიკას ხშირად ნიუტონის მექანიკას უწოდებენ.

მისი წინამორბედების შრომების ანალიზისა და საკუთარი გამოკვლევების საფუძველზე ნიუტონმა დაწერა გენიალური ნაშრომი: „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები“. ამ ნაშრომში ნიუტონმა ჩამოაყალიბა კლასიკური მექანიკის ძირითადი ცნებები და პრინციპები. აღნიშნული პრინციპები, რომელთაც ნიუტონის კანონებს უწოდებენ, შემდეგია:

1) ყოველი სხეული იმყოფება მოსვენებითს მდგომარეობაში (უძრავად) ან მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად მანამ, სანამ მას გარეშე მიზეზი (ძალა) არ გამოიყვანს ამ მდგომარეობიდან (ინერციის კანონი).

2) აღებული ნაწილაკის მასისა და აჩქარების ნამრავლი ნაწილაკზე მოქმედი ძალის ტოლია

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad (5,1)$$

(ძალისა და აჩქარების პროპორციულობის კანონი).

3) ორი სხეული ერთმანეთზე მოქმედებს ძალებით, რომელნიც სიდიდით ტოლინი არიან, ხოლო გეზი აქვთ ერთმანეთის საწინააღმდეგო (ქმედებისა და უკუქმედების კანონი).

ამ კანონებიდან, როგორც აღვნიშნეთ, ინერციის კანონი აღმოჩენილი იყო გალილეის მიერ.

ეს კანონები ნიუტონმა გამოიყენა მექანიკის მნიშვნელოვანი ამოცანების გადასაწყვეტად, კერძოდ, წინააღმდეგობიან არეში სხეულების მოძრაობის შესასწავლად.

ნიუტონის ზემოხსენებულ წიგნში მოყვანილია, აგრეთვე, მისი საყოველთაოდ ცნობილი მსოფლიო მიზიდულობის კანონი, რომლის სამართლიანობამდე ნიუტონი კეპლერის კანონების ანალიზის საფუძველზე მივიდა. ეს კანონი შემდეგია:

ორი მატერიალური ნაწილაკი იზიდავს ერთმანეთს ძალით, რომელიც მათი მასათა ნამრავლის პირდაპირპროპორციულია, ხოლო მათ შორის მანძილის კუადრატის უკუპროპორციული:

$$F = f \frac{mM}{r^2}, \quad (5,2)$$

სადაც m და M აღნიშნული ნაწილაკების მასებია, r არის ნაწილაკებს შორის მანძილი, f პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელსაც გრავიტაციის მუდმივი ეწოდება, F ნაწილაკების მიზიდულობის ძალაა.

ამ კანონის ფორმულირების დროს ნაგულისხმევია, რომ სხეულების განზომილებები მათ შორის მანძილთან შედარებით მცირეა.

ამ კანონზე დაყრდნობით ნიუტონმა შეისწავლა მზის სისტემაში შემავალი პლანეტებისა და კომეტების მოძრაობის კანონები. მან აღმოაჩინა, რომ პლანეტებისა და კომეტების მამოძრავებელი ძალები წარმოადგენს მზის მიზიდულობით გამოწვეულ ცენტრალურ ძალებს (ძალას, რომლის მიმართულება ყოველთვის გადის ერთსა და იმავე უძრავ წერტილზე, ეწოდება ცენტრალური ძალა). შემდეგ ნიუტონმა აჩვენა, რომ მსოფლიო მიზიდულობის კანონიდან მიიღება კეპლერის კანონები.

მექანიკის კანონების დადგენისა და იმ დროისათვის მომწიფებული ამოცანების გადასაწყვეტად ნიუტონს დასჭირდა ცვლადი სიდიდის ცნების შემოტანა და ამასთან დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის მეთოდების დამუშავება. დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი მეთოდები, თითქმის ერთდროულად, ნიუტონისაგან დამოუკიდებლად დამუშავებული იყო გერმანელი ფილოსოფოსისა და მათემატიკოსის ლაიბნიცის მიერ. როცა ნიუტონმა ლაიბნიცს წერილით აცნობა, რომ მას შეუძლია მოცემული ფუნქციის მიხედვით გამოთვალოს წარმოებული¹ და, პირიქით, მოცემული წარმოებულის მიხედვით იპოვოს ფუნქცია, ლაიბნიცისაგან მიიღო პასუხი, რომ მისთვის ცნობილია ანალოგიური მეთოდები. ნიუტონისა და ლაიბნიცის მიერ შექმნილი დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის მეთოდებს ჰქონდა უდიდესი მნიშვნელობა ზუსტ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა განვითარებისათვის.

ნიუტონს დიდი დამსახურება მიუძღვის პიდროსტატიკისა და პიდროდინამიკის მთელ რიგ ამოცანათა გადაწყვეტაში. კერძოდ, მან შეისწავლა ცილინდრულ ჭურჭელში მძიმე სითხის ბრუნვის შედეგად მიღებული ფორმები.

ფიზიკაში ნიუტონმა დაწერა ფუნდამენტური ნაშრომი „ოპტიკა“, რომელშიც გადმოცემულია თანამედროვე ოპტიკის საფუძვლები. ნიუტონს დიდი დამსახურება მიუძღვის აგრეთვე ოპტიკური იარაღების კონსტრუირების საქმეში.

რელატივისტური მექანიკის წარმოშობა-განვითარებამ ცხადჰყო, რომ კლასიკური მექანიკის კანონების გამოყენების ფარგლები შეზღუდულია, რაზედაც ზემოთ გვქონდა საუბარი.

ნიუტონი მეტაფიზიკოსი მატერიალისტი იყო. დროს და სივრცეს ის იხილავდა როგორც აბსოლუტურს, დამოუკიდებელს მატერიისაგან. ნიუტონის მექანიკამ საკმაოდ დიდი როლი შეასრულა მექანიკური მატერიალიზმის ფორმირებაში. მთელი რიგი მნიშვნელოვანი საკითხების განხილვის დროს ნიუტონი იდეალიზმის პოზიციებზე იდგა. ნიუტონს მიაჩნდა, რომ ძატიერის არ ძალუძს იყოს მოძრავი, მატერიას პირველად მოძრაობა ღმერთმა მიანიჭა. მზის სისტემის მდგრადობის შესანარჩუნებლად, ნიუტონის აზრით, აუცილებელია ღმერთის ძალა.

სტატიკის კანონებმა შემდგომი განვითარება ჰპოვა ფრანგი მეცნიერის ვა რ ი ნ ი ს (1654—1722) შრომებში. ვარინიონმა პირველმა შემოიტანა

¹ წარმოებულის ნაცვლად ნიუტონი ხმარობდა ტერმინს „ფლუქსია“.

წერტილის მიმართ ძალის მომენტის ცნება და დაამტკიცა დებულება ტოლქმედის მომენტის შესახებ. ვარინიონის შრომებით მყარი სხეულის სტატიკამ მიიღო თითქმის დასრულებული სახე.

მექანიკის შემდგომი განვითარება მიმდინარეობდა მექანიკის ზოგადი პრინციპების ჩამოყალიბებისა და მექანიკური სისტემის მოძრაობის ანალიზური მეთოდებით შესწავლის მიმართულებით. მექანიკის ეს საკითხები შესწავლილი იქნა ძირითადად XVIII საუკუნეში. XVIII საუკუნეში მოცემული იყო აგრეთვე მნიშვნელოვანი გამოკვლევები ჰიდროდინამიკასა და ციური სხეულების მექანიკაში. ამ პერიოდის გამოჩენილ მექანიკოსთა რიცხვს ეკუთვნის: შვეიცარიელი მეცნიერები — ივანე ბერნული (1667—1748) და მისი შვილი დანიელ ბერნული (1700—1782); ეილერი (1707—1783), რომელმაც თავისი შემოქმედებითი სიცოცხლის უდიდესი ნაწილი გაატარა პეტერბურგში¹ როგორც პეტერბურგის აკადემიის წევრმა; ფრანგი მეცნიერები დალამბერი (1717—1783) და ლავრანჟი (1736—1813).

გვეცნოთ მოკლედ ამ მეცნიერების მიერ თეორიულ მექანიკაში მიღებულ შედეგებს.

ივანე ბერნულს ეკუთვნის შესაძლო გადაადგილების პრინციპის ზოგადი სახით ჩამოყალიბება. ეს პრინციპი იძლევა მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას. მასვე აქვს შესწავლილი მყარი სხეულების დაჯახების საკითხები.

დანიელ ბერნულმა, რომელიც პეტერბურგის აკადემიის წევრი იყო, დიდი წვლილი შეიტანა ჰიდროდინამიკის სხვადასხვა საკითხის დამუშავებაში. 1738 წელს გამოვიდა მისი ფუნდამენტური ნაშრომი „ჰიდროდინამიკა“, რომელშიაც მოცემულია ჰიდროდინამიკის ერთ-ერთი ძირითადი განტოლების გამოყვანა. ეს განტოლება ბერნულის განტოლების სახელწოდებით არის ცნობილი.

ლეონარდო ეილერმა, ისე როგორც მათემატიკის მთელ რიგ დარგებში, თეორიულ მექანიკაშიაც წარუშლელი კვალი დატოვა. ეილერმა დროულად მიაქცია ყურადღება მათემატიკური ანალიზის მეთოდების ფართოდ გამოყენებას მექანიკაში და ამ გზით მიიღო ფრიალ მნიშვნელოვანი შედეგები მექანიკის სხვადასხვა დარგში: მყარი სხეულების დინამიკაში, ჰიდრომექანიკაში, ბალისტიკაში და სხვ. ეილერს ეკუთვნის მყარი სხეულის მოძრაობის კინემატიკური და დინამიკური განტოლებების გამოყვანა, რომელნიც ეილერის კინემატიკური და დინამიკური განტოლებების სახელწოდებით არიან ცნობილი. ეილერმა შეისწავლა უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვა და მოგვცა უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ინერციით ბრუნვის სრული თეორია.

დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით მექანიკაში ეილერმა მიიღო ისეთი შედეგები, რომლებსაც ფართოდ იყენებენ ახლაც. ეილერი იყო უდიდესი ერუდიციის მეცნიერი, რომელმაც მრავალრიცხოვანი პირველხარისხოვანი გამოკვლევები დატოვა მათემატიკის ბევრ დარგში. ეილერმა დაწერა 750-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომი.

უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ინერციით ბრუნვის ფრიალ

¹ ეილერი დაიბადა შვეიცარიაში. 1727—1741 და 1766—1783 წლებში ცხოვრობდა და მოღვაწეობდა პეტერბურგში.

თვალსაზრისით გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემული აქვს ფრანგ მექანიკოსსა და გეომეტრს პუანსონს (1777—1859). ეს თეორია გეომეტრიულად იმდენად კარგად ახასიათებს მყარი სხეულის ინერციით ბრუნვას უძრავი წერტილის გარშემო, რომ მყარი სხეულის მოძრაობის ამ შემთხვევას ეილერ-პუანსონის შემთხვევას უწოდებენ.

დალაშქრება შემოიტანა გარკვეული პრინციპი დინამიკაში, რომელიც დალაშქრების პრინციპის სახელწოდებით არის ცნობილი და იძლევა დინამიკის ამოცანების სტატიკის ამოცანებამდე დაყვანის შესაძლებლობას. ამ პრინციპის დახმარებით არათავისუფალ მატერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკის ამოცანები დიფერენციალურ განტოლებათა გარკვეულ სისტემამდე დაიყვანება.

მექანიკის ძირითადი ამოცანების ამოხსნის ანალიზურმა მეთოდმა შემდგომი განვითარება კპოვა დიდი ფრანგი მეცნიერის ლაგრანჟის შრომებში. მან დაწერა წიგნი „ანალიზური მექანიკა“, რომელშიაც, შესაძლო გადაადგილების პრინციპის შემდგომი სრულყოფის საფუძველზე, მოცემულია მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის სრული თეორია. ეს თეორია შეტანილია თეორიული მექანიკის თითქმის ყველა კურსში. ლაგრანჟის შემოხსენებულ ნაშრომში მოცემულია მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები, როგორც დეკარტის კოორდინატებში, ისე ზოგად მრუდწირულ კოორდინატებში (ლაგრანჟის პირველი და მეორე გვარის განტოლებები). ლაგრანჟმა შეისწავლა აგრეთვე მატერიალურ წერტილთა სისტემის მცირე ჩხევები და უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვა ერთ მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევაში.

XIX საუკუნეში წარმოებდა ანალიზური მეთოდების თეორიულ მექანიკაში გამოყენების შემდგომი განვითარება და სრულყოფა. კვლევითი მუშაობა მიმდინარეობდა ძირითადად თეორიული მექანიკის ვარიაციული პრინციპების დადგენისა და მატერიალურ წერტილთა სისტემის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების მეთოდების დამუშავების მიმართულებით.

მექანიკის ზოგადი პრინციპის ქვეშ იჯულისხმება მოძრაობის დამახასიათებელი ისეთი საერთო თვისება, რომელიც იმდენად ზოგადია, რომ მასზე შეიძლება ავადგოთ მთელი საგანი; ამასთან ეს პრინციპი არ უნდა ეწინააღმდეგებოდეს პრაქტიკულ სინამდვილეს. მოძრაობათა ასეთ დამახასიათებელ თვისებებს შეიძლება ადგილი ჰქონდეს დროის აღებული მომენტისათვის ან დროის სასრული შუალედისათვის. პირველ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ პრინციპი დიფერენციალურია, მეორე შემთხვევაში კი — ინტეგრალური. ხსენებული ზოგადი ხასიათის პრინციპთა რიცხვს ეკუთვნის ვარიაციული პრინციპები. არავარიაციული პრინციპებისაგან განსხვავებით, ვარიაციული პრინციპების ამოცანა ვიპოვოთ სისტემის კოორდინატებსა და მათ წარმოებულებს შორის ისეთი ფუნქციონალური დამოკიდებულება, რომელიც სისტემის ნამდვილი მოძრაობისათვის მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას ე. წ. კინემატიკურად დასაშვებ მოძრაობებთან შედარებით.

ზემოაღნიშნული სახის ვარიაციულ პრინციპს ეკუთვნის პოლონოზური ბმების შემთხვევაში ინგლისელი მათემატიკოსის ჰამილტონის (1805—1863) მიერ ჩამოყალიბებული პრინციპი, რომელიც ჰამილტონის პრინციპის სახელწოდებით არის ცნობილი. ამ პრინციპს ხშირად სტაციონარული ქმედების პრინციპს უწოდებენ. ჰამილტონმა მოგვცა აგრეთვე მატერიალურ წერტილთა სის-

ტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ე. წ. კანონიკურ ცვლადებში. ამ განტოლებებს ჰამილტონის კანონიკურ განტოლებებს უწოდებენ.

ზოგადი სახის ვარიაციულ პრინციპს წარმოადგენს აგრეთვე „უმცირესი კმედების პრინციპი“, რომელიც პირველად ყოველგვარი დასაბუთების გარეშე გამოთქმული იყო ფრანგი ფილოსოფოსის მონპერტიეზის (1698—1759) მიერ. ამ პრინციპის ზუსტი ფორმულირება და დამტკიცება ეკუთვნის ლაგრანჟს. ამიტომ ხშირად ამ პრინციპს მონპერტიეზი-ლაგრანჟის პრინციპს უწოდებენ.

ვარიაციულ პრინციპთა რიცხვს ეკუთვნის აგრეთვე „უმცირესი იძულების პრინციპი“, რომელიც მოცემული იყო უდიდესი გერმანელი მათემატიკოსის გაუსის (1777—1855) მიერ და მას ახლა გაუსის პრინციპს უწოდებენ.

ვარიაციულ პრინციპს წარმოადგენს აგრეთვე ცნობილი გერმანელი ფიზიკოსის ჰერცის (1857—1894) მიერ მოცემული პრინციპი, რომელიც წარმოადგენს გალილეისა და ნიუტონის ინერციის კანონის განზოგადებას. ამ პრინციპს ჰერცის პრინციპს უწოდებენ.

ეს პრინციპები იმდენად ზოგადია, რომ მათგან მიიღება მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები (ლაგრანჟის I და II გვარის განტოლებები) და, პირიქით, აღნიშნული განტოლებების გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს ამ პრინციპების სამართლიანობა.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების მეთოდები მოცემულია ჰამილტონის, ფრანგი მეცნიერის პუასონის (1781—1840) და გერმანელი მეცნიერის იაკობის (1804—1851) შრომებში. პუასონს მოცემული აქვს ჰამილტონის კანონიკურ განტოლებათა სისტემის პირველი ინტეგრალების აგების მეთოდი. იაკობი ამყარებს დამოკიდებულებას მექანიკის კანონიკურ განტოლებებსა და გარკვეულ კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას შორის.

§ 8. რუსი მეცნიერების როლი თეორიული მექანიკის განვითარებაში

თეორიული მექანიკის განვითარებაში დიდი დამსახურება მიუძღვით რუს მეცნიერებს, მათ შორის ბევრია ისეთი, რომელთა ნაშრომები საყოველთაოდ ცნობილი და აღიარებულია.

თეორიული მექანიკის განვითარებაში დიდი როლი შეასრულა უდიდესმა რუსმა მეცნიერმა, პოეტმა, ფილოსოფოსმა, ქიმიკოსმა, გეოლოგმა და ინჟინერმა ლომონოსოვმა (1711—1765). ლომონოსოვის მიერ აღმოჩენილ კანონს, რომელსაც ნივთიერების შენახვის კანონი ეწოდება, უდიდესი მნიშვნელობა აქვს საერთოდ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებისათვის და, კერძოდ, თეორიული მექანიკისათვის. ეს კანონი ფორმულირებული იყო პირველად ლომონოსოვის მიერ 1749 წლის 5 ივლისს ეილერისადმი მიწერილ წერილში.

მათემატიკისა და მექანიკის განვითარებაში დიდი დამსახურება მიუძღვის ჩეხი მეცნიერის (1821—1894). ჩეხი მეცნიერი უდიდეს მნიშვნელობას ანიჭებდა თეორიული გამოკვლევების გამოყენებას პრაქტიკაში. მექანიკის დარგში ჩეხი მეცნიერი ითვლება მექანიზმებისა და მანქანების თეორიის რუსული სკოლის ფუძემდებლად. ჩეხი მეცნიერი თეორიულად დაამუშავა და ააგო 40-ზე მეტი ახალი მექანიზმი. კერძოდ, მას ეკუთვნის ახალი კონსტრუირება ისეთი მექანიზმისა, რომელიც ბრუნვით მოძრაობას გარდაქმნის სწორხაზოვან წარმტან მოძრაობად. უდიდესი კვალი დატოვა მისმა შრომებმა მათემატიკაში. ჩეხი მეცნიერი შექმნა ახა-

ლი მიმართულებები ფუნქციონათა თეორიაში, რიცხვთა თეორიასა და ალბათობათა თეორიაში.

თეორიული მექანიკის განვითარებაში უდიდესი როლი შეასრულა გენიალურმა მათემატიკოსმა ლიაპუნოვმა (1857 — 1918). მან თავის სადოქტორო დისერტაციაში ამომწურავი სისრულით შეისწავლა მექანიკური სისტემის მოძრაობის თეორიის ერთ-ერთი ურთულესი დარგი — მოძრაობის მდგრადობის თეორია. გარდა ამისა, ლიაპუნოვმა შეისწავლა უძრავი ღერძის გარშემო ერთგვაროვანი სითხის ბრუნვა, როცა სითხის ნაწილაკები იზიდავენ ერთმანეთს ნიუტონის მიზიდულობის კანონის მიხედვით, და მთელ რიგ შემთხვევებში იპოვა ის ფორმები, რომლებსაც ბრუნვის შედეგად ხსენებული სითხე ღებულობს. ამ საკითხის გადაწყვეტას დიდი მნიშვნელობა აქვს ასტრონომიაში, რადგან მასთან არის დაკავშირებული პლანეტებისა და ვარსკვლავების ფორმების დადგენისა და მზის სისტემის წარმოშობის საკითხი. მოძრაობის მდგრადობის თეორიას პირველხარისხოვანი მნიშვნელობა აქვს ტექნიკაში, კერძოდ, თვითმფრინავების მოძრაობის თეორიაში.

თეორიული მექანიკის განვითარებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა ოსტროგრადსკიმ (1801—1862). ოსტროგრადსკი მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის შესასწავლად, ისე როგორც ეილერი და ლაგრანჟი, იყენებდა ანალიზურ მეთოდს. მან განაზოგადა შესაძლო გადაადგილების პრინციპი იმ შემთხვევისათვის, როცა სისტემა ემორჩილება ცალმხრივ (არაღმკერ ბმას) და გამოიყენა ის დაჯახებათა ზოგად თეორიაში. ოსტროგრადსკის ეკუთვნის აგრეთვე ჰამილტონის პრინციპის განზოგადება. ამიტომ ამ პრინციპს ხშირად ჰამილტონ-ოსტროგრადსკის პრინციპს უწოდებენ. ოსტროგრადსკიმ ბევრი მნიშვნელოვანი ნაშრომი მიუძღვნა ჰიდროდინამიკისა და დრეკადობის თეორიის საკითხებს.

თეორიული მექანიკა თავისი მნიშვნელოვანი გამოკვლევებით გაამდიდრა სახელგანთქმულმა მეცნიერმა ქალმა კოვალევსკაიამ (1850 — 1891). როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის ზოგადი თეორია მოგვცა ეილერმა. ეილერმა, პუანსომ, ლაგრანჟმა და პუასონმა მოგვცეს გარკვეულ ორ შემთხვევაში (რომელთაც ეილერ-პუანსოს და ლაგრანჟ-პუასონის შემთხვევებს უწოდებენ) უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ბოლომდე ამოხსნა. ხსენებული ავტორების შემდეგ ბევრი მკვლევარი ამაოდ შეეცადა სხვა ინტეგრადი შემთხვევის დადგენას. 1888 წელს პარიზის აკადემიამ გამოაცხადა კონკურსი უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის საკითხზე საუკეთესო ნაშრომისათვის. ეს პრემია მიიღო კოვალევსკაიამ, რომელმაც დაადგინა ახალი შემთხვევა, როცა ზემოხსენებული განტოლებები (ეილერის კინემატიკური და დინამიკური განტოლებები) ბოლომდე ამოიხსნებიან. ხსენებულ შემთხვევას კოვალევსკაიას შემთხვევას უწოდებენ.

უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვას, კოვალევსკაიას შემდეგ, სწავლობდნენ ჩვენი ქვეყნის სახელგანთქმული მეცნიერები: ჟუკოვსკი, გორიაჩევი, ჩაპლიგინი, სტეკლოვი და სხვები.

დიდი მეცნიერი ჟუკოვსკი (1847—1921) ითვლება თანამედროვე თეორიული და ექსპერიმენტული აეროდინამიკის ფუძემდებლად. ჟუკოვსკის მკუთვნის მრავალი შრომა მექანიკის სხვადასხვა დარგში, განსაკუთრებით ჰიდრო

და აერომექანიკაში. უღ-ღესი დაშახტურება მიუძღვის ეუკოვსკის ავიაციის გან-
ვითარების საქმეში. ეუკოვსკის შესანიშნავი დებულება ე. წ. ამწევი ძალის შესა-
ვებ საფუძვლად უდევს თვითმფრინავის თანამედროვე თეორიას. ეუკოვსკი
სამართლიანად ითვლება რუსული ავიაციის მამად.

ეუკოვსკიმ შექმნა ჰიდრო-აერომექანიკის დარგში მრავალრიცხოვანი სკო-
ლა. ამ სკოლის ბრწყინვალე წარმომადგენელია ჩაპლიგინი (1869—1942).
ჩაპლიგინის მთავარი შრომები მიძღვნილია მყარი სხეულის დინამიკისა და
ჰიდრო-აერომექანიკის მნიშვნელოვანი საკითხებისადმი. ჩაპლიგინმა ერთ-ერთ
თავის შრომაში შეისწავლა სითხეში მყარი სხეულის მოძრაობა, რომელსაც
ეუკოვსკი დიდ შეფასებას აძლევდა. მთელი რიგი მნიშვნელოვანი შრომებისა
ჩაპლიგინმა მიუძღვნა თვითმფრინავის თეორიას. ამ შრომებში ჩაპლიგინი იძ-
ლევა თვითმფრინავის ფრთებზე ჰაერის წნევის გაანგარიშებას და იყენებს მას
ფრთის ფორმის მიხედვით ამწევი ძალის დასადგენად. გარდა ამისა, ჩაპლიგინმა
შეისწავლა თვითმფრინავის მდგრადობის საკითხი.

ცვლადი მასის შემთხვევაში მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონი
შეისწავლა მეშჩერსკიმ (1859—1935). აღნიშნულ შემთხვევაში მან მი-
იღო მატერიალური წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები და
განიხილა ბევრი საინტერესო ამოცანა. მეშჩერსკის მიერ მიღებული შედეგები
საფუძვლად უდევს რეაქტიული თვითმფრინავების, რაკეტის, მეტეორიტებისა
და კომეტების მოძრაობის შესწავლას. საყოველთაოდ ცნობილია მეშჩერსკის
მიერ შედგენილი ამოცანათა კრებული თეორიულ მექანიკაში.

ციოლკოვსკიმ (1857—1935) დაამუშავა რაკეტის სწორხაზოვანი
მოძრაობის თეორია. ციოლკოვსკის მიერ მიღებულმა ფორმულამ რაკეტის სიჩ-
ქარის განსაზღვრის შესახებ დიდი სახელი მოუხვეჭა ავტორს. ციოლკოვსკიმ და-
ამუშავა შედგენილი რაკეტის მოძრაობის თეორია.

დიდი როლი შეასრულა აკად. კრილოვის (1863—1946) გამოკვლე-
ვებმა მექანიკის დარგში. მისმა გამოკვლევებმა დიდი გამოყენება ჰპოვა გემთ-
მშენებლობაში.

ამ მოკლე მიმოხილვაში შეუძლებელია რამდენადმე სრულად იყოს გაშუ-
ქებული ჩვენს ქვეყანაში მექანიკის განვითარების ისტორია. ჩვენ შევეხეთ ძა-
ლიან მოკლედ იმ ძირითად შედეგებს, რომელნიც აღიარებულია ამჟამად, რო-
გორც კლასიკური შედეგები.

ჩვენი ქვეყნის მოწინავე მექანიკოსთა ზელმძღვანელობით საბჭოთა კავშირ-
ში ამჟამად მიმდინარეობს ინტენსიური მუშაობა თეორიული მექანიკის ყველა
დარგში. დიდი ღვაწლი მიუძღვით საბჭოთა მექანიკოსებს რაკეტული ტექნიკის
განვითარებისა და კოსმოსური სივრცის ათვისების საქმეში. პირველად საბჭოთა
კავშირში განხორციელდა გაშვება დედამიწის თანამგზავრებისა, რომელთაც
საბჭოთა კავშირის მოქალაქეები, გმირი კოსმონავტები მართავდნენ. რაკეტული
ტექნიკის მზარდი განვითარება ხელს შეუწყობს საპლანეტთაშორისო
სივრცის შემდგომ სრულყოფილ შესწავლას.

ვექტორთა ანალიზის ზოგადი საკითხი

გ ა ნ ე ი ლ ე ა ნ

სრულად ვექტორთა თეორია

ჩვენ აქ არ შევუდგებით ვექტორთა ალგებრის ძირითადი საკითხების გადმოცემას, ვგულისხმობთ, რომ მკითხველი მათ იცნობს ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან. აქ განვიხილავთ მხოლოდ ზოგიერთ დამხმარე საკითხს სრულად ვექტორთა თეორიიდან, რომელთაც დიდი გამოყენება ექნებათ თეორიული მექანიკის სხვადასხვა საკითხის განხილვის დროს. ასე, მაგალითად, შედგენილი მოძრაობის კინემატიკურად შესწავლა საგრძნობლად მარტივდება ამ თეორიის გამოყენებით. IV თავში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ყველაფერი ის, რაც აქ სრულად ვექტორების შესახებ იქნება ნათქვამი, თითქმის უცვლელად გადაიტანება მყარ სხეულზე მოდებული ძალებისათვის და, მაშასადამე, გეომეტრიული სტატიკის ძირითადი დებულებები შეიძლება მივიღოთ როგორც შედეგი სრულად ვექტორთა თეორიისა. ნათქვამიდან ცხადი ხდება, რომ სრულად ვექტორთა თეორიის ცალკე გამოყოფა, როგორც დამხმარე მასალისა, სავსებით მიზანშეწონილია.

სრულად ვექტორი ეწოდება ისეთ ვექტორს, რომლის დამახასიათებელ ელემენტებად ითვლება სიგრძე, გეზი და ფუძე (ის წრფე, რომელზედაც ვექტორია მოთავსებული), ხოლო ფუძეზე ვექტორის მდებარეობას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს (ვექტორის ფიზიკური აზრი არ შეიცვლება, თუ ვექტორს გადასრივლებზე ფუძის გასწვრივ). ორ ვექტორს, რომელთაც ეს სამი ელემენტი ერთნაირი აქვს, ეწოდება ეკვივალენტური. სრულად ვექტორის მაგალითს წარმოადგენს მყარ სხეულზე მოდებული ძალა. ერთსა და იმავე ფუძეზე მოთავსებულ ორ ვექტორს, რომელთაც აქვთ ერთნაირი სიგრძე, ხოლო გეზები—ერთმანეთის საწინააღმდეგო, ეწოდება პირდაპირ თანაწინააღმდეგო.

§ 1. სრულად ვექტორის მომენტი წერტილისა და ლერძის მიმართ

განვიხილოთ სრულად \vec{A} ვექტორი და სივრცის ნებისმიერი O წერტილი. აღვნიშნოთ \vec{r} -ით \vec{A} ვექტორის სათავის (მოდების წერტილის) რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ (ნახ. 1).

ვექტორულ ნამრავლს

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{A}],$$

(1,1)

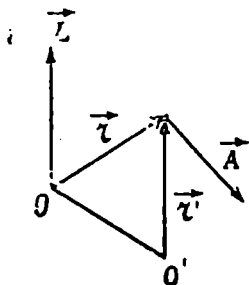
რომელიც მოდებულია O წერტილზე, ეწოდება \vec{A} ვექტორის მომენტი O წერტილის მიმართ. ვექტორული ნამრავლის განმარტების ძალით, \vec{L} ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{A}| \sin(\vec{r}, \vec{A}),$$

საიდანაც მივიღებთ

$$|\vec{L}| = |\vec{A}| h, \quad (1,2)$$

ამასთან h აღნიშნავს O წერტილიდან \vec{A} ვექტორის ფუძეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს. O წერტილის ეწოდება მომენტის ცენტრი, ხოლო h -ს ვექტორის მხარი O წერტილის მიმართ.



ნახ. 1.

ვექტორული ნამრავლის ცნობილი თვისებებისა და (1,2) ფორმულის ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ \vec{A} ვექტორის მომენტი O წერტილის მიმართ არ შეიცვლება, თუ ამ ვექტორს ნებისმიერად გავსვრიდებთ ფუძის გასწვრივ.

თუ ახლა განვიხილავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას¹ სათავეთ O წერტილში და შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{L} = (L_x, L_y, L_z),$$

მაშინ (1,1) ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგვემიღებთ მივიღებთ

$$\begin{aligned} L_x &= y A_z - z A_y, \\ L_y &= z A_x - x A_z, \\ L_z &= x A_y - y A_x. \end{aligned} \quad (1,3)$$

თუ ახლა \vec{A} ვექტორის მომენტს ახალი O' ცენტრის მიმართ აღვნიშნავთ \vec{L}' -ით, მივიღებთ

$$\vec{L}' = [\vec{r}' \cdot \vec{A}], \quad (1,4)$$

სადაც \vec{r}' წარმოადგენს \vec{A} ვექტორის სათავეს რადიუს-ვექტორს O' ცენტრის მიმართ. ცხადია, გვექნება (ნახ. 1)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a},$$

სადაც $\vec{a} = \vec{OO}'$.

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (1,4) ფორმულა მოგვცემს

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{a} \cdot \vec{A}]. \quad (1,5)$$

ცხადია, რომ $[\vec{a} \cdot \vec{A}]$ ვექტორი წარმოადგენს O' წერტილზე მოდებული \vec{A} ვექტორის მომენტს O წერტილის მიმართ, ამიტომ, (1,5) ტოლობის ძალით, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. ახალი ცენტრის მიმართ ვექტორის მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ მომენტს გამოკლებულ

¹ მთელი კურსის მანძილზე, როცა ლაპარაკი იქნება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაზე, ნაგულისხმევი იქნება მარცხენა სისტემა.

ახალ ცენტრზე მოდებული ამავე ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ.

(1,5) ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილება მოგვეცემს

$$L'_x = L_x - (a_y A_z - a_z A_y),$$

$$L'_y = L_y - (a_z A_x - a_x A_z),$$

$$L'_z = L_z - (a_x A_y - a_y A_x).$$

განვიხილოთ ახლა რაიმე Δ ღერძი და განვსაზღვროთ სრიალა \vec{A} ვექტორის მომენტი ამ ღერძის მიმართ.

\vec{A} ვექტორის მომენტი Δ ღერძის მიმართ ეწოდება ამ ღერძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ \vec{A} ვექტორის მომენტის გეგმილს ამავე ღერძზე. ამრიგად, თუ Δ ღერძის მიმართ \vec{A} ვექტორის მომენტს აღვნიშნავთ L_Δ -ით, განმარტების ძალით მივიღებთ

$$L_\Delta = \text{გეგ}_\Delta [\vec{r} \cdot \vec{A}] = \text{გეგ}_\Delta \vec{L},$$

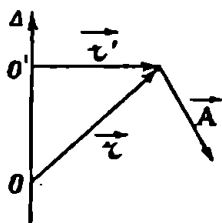
სადაც \vec{r} წარმოადგენს \vec{A} ვექტორის სათავეს რადიუს-ვექტორს Δ ღერძის რაიმე O წერტილის მიმართ (ნახ. 2).

როგორც აღვნიშნეთ, Δ ღერძის მიმართ მომენტი არ არის დამოკიდებული ამ ღერძზე O წერტილის მდებარეობისაგან. მართლაც, თუ O წერტილის ნაცვლად Δ ღერძის სხვა O' წერტილს ავიღებთ, (1,5) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$L'_\Delta = L_\Delta - \text{გეგ}_\Delta [\vec{OO'} \cdot \vec{A}],$$

მაგრამ, ცხადია, $\text{გეგ}_\Delta [\vec{OO'} \cdot \vec{A}] = 0$ და მივიღებთ $L'_\Delta = L_\Delta$, რაც გვარწმუნებს ნათქვამის სამართლიანობაში.

ზემომოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ (1,3) ფორმულებით განსაზღვრული L_x , L_y და L_z სიდიდეები წარმოადგენენ შესაბამის x , y და z ღერძების მიმართ მომენტებს.



ნახ. 2.

§ 2. ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი

განვიხილოთ ახლა სრიალა ვექტორთა სასრული რაოდენობა: $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$, რომელსაც შემდეგში სრიალა ვექტორთა სისტემას ვუწოდებთ. ამ ვექტორების გეომეტრიულ ჯამს, რომელსაც \vec{R} -ით აღვნიშნავთ:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \quad (2,1)$$

ეწოდება აღებული სისტემის ნაკრები ვექტორი (მთავარი ვექტორი).

აღვნიშნოთ ახლა სივრცის რაიმე O წერტილის მიმართ \vec{A}_i ($i=1, 2, \dots, n$) ვექტორის მომენტი \vec{L}_i -ით. ამ მომენტების გეომეტრიულ ჯამს, რომელსაც \vec{L} -ით აღვნიშნავთ:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{A}_i], \quad (2,2)$$

სადაც \vec{r}_i წარმოადგენს \vec{A}_i ვექტორის სათავეს რადიუს-ვექტორს O ცენტრის მიმართ, ეწოდება აღებული სისტემის ნაკრები მომენტი (მთავარი მომენტი) O წერტილის მიმართ. განმარტების ძალით, ნაკრები ვექტორი არ არის დამოკიდებული O ცენტრისაგან, ხოლო ნაკრები მომენტი, საზოგადოდ, მასზე არის დამოკიდებული.

აღნიშნოთ ახლა ნაკრები მომენტი ახალი O' ცენტრის მიმართ \vec{L}' -ით, ცხადია, გვექნება

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^n \vec{L}'_i, \quad (2,3)$$

სადაც \vec{L}'_i წარმოადგენს \vec{A}_i ვექტორის მომენტს O' ცენტრის მიმართ. წინა პარაგრაფში მოყვანილი დებულების ძალით (იხ. (1,5) ფორმულა) (2,3) ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^n (\vec{L}_i - [\vec{a} \cdot \vec{A}_i]) = \vec{L} - \left[\vec{a} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \right] = \vec{L} - [\vec{a} \cdot \vec{R}].$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{a} \cdot \vec{R}], \quad (2,4)$$

ე. ი. ახალი ცენტრის მიმართ ნაკრები მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ ნაკრებ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე მოდებული ნაკრები ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ.

(2,4) ფორმულიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ ნაკრები მომენტი დამოუკიდებელია მომენტთა ცენტრისაგან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია.

ვთქვათ ახლა, სრიალა ვექტორთა ფუნქციები ერთ წერტილში იკვეთება. ასეთ სისტემას თავმოყრილ ვექტორთა სისტემა ეწოდება. ვინაიდან მოცემული სისტემა სრიალა ვექტორთა სისტემას წარმოადგენს, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყველა ვექტორი თავმოყრის M წერტილშია მოდებული. თუ ახლა აღებული სისტემის ნაკრებ მომენტს სივრცის რაიმე O წერტილის მიმართ აღნიშნავთ \vec{L} -ით, მივიღებთ

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r} \cdot \vec{A}_i] = \left[\vec{r} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \right] = [\vec{r} \cdot \vec{R}],$$

სადაც \vec{r} აღნიშნავს M წერტილის რადიუს-ვექტორს მომენტთა O ცენტრის მიმართ. ამრიგად, ჩვენ ვრწმუნდებით ვარინიონის შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. თავმოყრილ ვექტორთა სისტემის ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ უდრის ამ სისტემის

ნაკრები ვექტორის მომენტის ამავე წერტილის მიმართ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნაკრები ვექტორი თავმოყრის წერტილშია მოდებული.

§ 3. ელემენტარული მოქმედებები. ტოლფასი სისტემები

შემდეგში ჩვენ ხშირად დაგვიტყობს შემდეგი მოქმედებები:

1°. ვექტორის გასრიალება ფუძის გასწვრივ,

2°. თავმოყრილი ვექტორების შეკრება,

3°. ვექტორის დაშლა თავმოყრილ ვექტორებად.

ამ მოქმედებებს ელემენტარული მოქმედებები ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია სრიალა ვექტორთა ორი სისტემა $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$ და $\overline{B_1}, \overline{B_2}, \dots, \overline{B_k}$, რომელთაც, სიმოკლისათვის, ასე აღვნიშნავთ: (A) და (B). ჩვენ ვიტყვი, რომ სრიალა ვექტორთა ეს ორი სისტემა ტოლფასია, თუ ისინი ერთმანეთზე დაიყვანება ელემენტარული მოქმედებებით. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ სრიალა ვექტორთა (A) და (B) სისტემა ცალ-ცალკე მესამე (C) სისტემის ტოლფასია, მაშინ ისინი ერთმანეთის ტოლფასია.

წინა პარაგრაფში დამტკიცებული დებულების ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ სრიალა ვექტორთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ინვარიანტულია ელემენტარული გარდაქმნების მიმართ (ელემენტარული მოქმედებები არ ცვლის სისტემის ნაკრებ ვექტორსა და ნაკრებ მომენტს). ამიტომ ორ ტოლფას (A) და (B) სისტემას ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი აქვს.

თუ არსებობს ისეთი ვექტორი \overline{R} , რომელიც მოცემული სისტემის ტოლფასია, მაშინ \overline{R} ვექტორს ეწოდება ამ სისტემის ტოლქმედი.

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თავმოყრილ ვექტორთა სისტემისათვის ყოველთვის არსებობს ტოლქმედი. ის უდრის აღებული სისტემის ნაკრებ ვექტორს და თავმოყრის წერტილშია მოდებული (რა თქმა უნდა, იგი, როგორც სრიალა ვექტორი, შეიძლება გადავიტანოთ თავისი ფუძის გასწვრივ). ცხადია, აგრეთვე, რომ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ვექტორთა ტოლქმედი ნულის ტოლია.

ვთქვათ ახლა, სრიალა ვექტორთა სისტემა შედგება ორი პარალელური ერთმხრივ მოგებული \overline{A} და \overline{B} ვექტორისაგან. ვაჩვენოთ, რომ ასეთი სისტემის ტოლქმედი არსებობს. \overline{A} და \overline{B} ვექტორების მოდების წერტილები იყოს შესაბამისად M და N (სრიალა ვექტორების რაიმე დაფიქსირებულ მდებარეობას განვიხილავთ). ჩვენს სისტემას დავუმატოთ M და N წერტილებზე მოდებული \overline{C} და $-\overline{C}$ ვექტორები, რომელნიც MN მონაკვეთის პარალელური არიან და რომელთა სიგრძეც ნებისმიერად არის აღებული (ნახ. 3). შევკრიბოთ ახლა M წერტილზე მოდებული \overline{A} და \overline{C} ვექტორები, აგრეთვე N წერტილზე მოდებული \overline{B} და $-\overline{C}$ ვექტორები, მივიღებთ შესაბამისად $\overline{P_1}$ და $\overline{P_2}$ ვექტორებს. გავასრიალოთ ეს ვექტორები ფუძის გასწვრივ და მოვდოთ ისინი ფუძეთა გადაკვეთის D წერტილზე. შევკრიბოთ ახლა D წერტილზე მოდებული $\overline{P_1}$ და $\overline{P_2}$ ვექტორები, მივიღებთ ერთ \overline{R} ვექტორს. გავასრიალოთ \overline{R}

ვექტორი და მოვდოთ ის იმ E წერტილზე, სადაც \overrightarrow{R} ვექტორის ფუძე კვეთს MN მონაკვეთს. ცხადია, \overrightarrow{R} ვექტორი ტოლფასია აღებული პარალელური ვექტორების და მაშასადამე, მათ ტოლქმედს წარმოადგენს. ამის გარდა, ცხადია, რომ

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{C}) + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}.$$

(I) და (II) სამკუთხედების მსგავსების გამო გვექნება (ნახ. 3)

$$\frac{DE}{|A|} = \frac{ME}{|C|}.$$

(III) და (IV) სამკუთხედების მსგავსების გამო კი ვღებულობთ

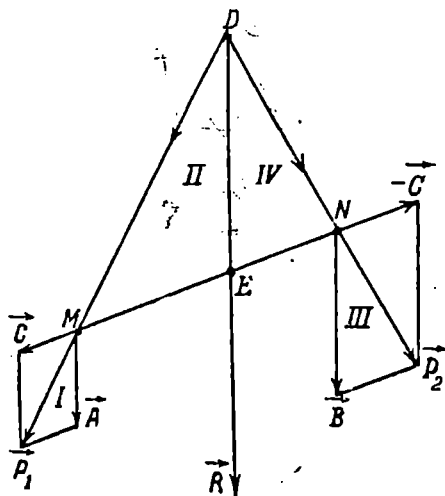
$$\frac{|B|}{DE} = \frac{|C|}{EN}.$$

ორ უკანასკნელ ტოლობათა გადამრავლებით მივიღებთ

$$\frac{|B|}{|A|} = \frac{ME}{EN}. \quad (3,1)$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ერთმხრივ მოგებული ორი პარალელური ვექტორი ტოლფასია ერთი ვექტორისა, რომელიც აღებული ვექტორების ჯამის ტოლია; მისი მოდების E წერტილის დაშორება აღებული ვექტორების მოდების წერტილებიდან, ვექტორთა სიდიდეების უკუპროპორციულია.

(3,1) ტოლობის ძალით, ცხადია, რომ E წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ \overrightarrow{A} და \overrightarrow{B} ვექტორებს ნებისმიერად მოვაბრუნებთ მათი მოდების M და N წერტილების ირგვლივ ისე, რომ მობრუნების შემდეგაც დარჩენ პარალელური და ერთმხრივ მოგებული.



ნახ. 3.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, აგრეთვე, რომ ნებისმიერი სრიალა ვექტორი მისი ტოლფასი ორი ერთმხრივ მოგებული პარალელური ვექტორით შეიძლება შევცვალოთ. ამასთან, თუ ხსენებული პარალელური ვექტორებიდან ერთ-ერთი წინასწარ მოცემულია, მეორე ცალსახად განისაზღვრება.

განვიხილოთ ახლა სხვადასხვახმობივ მოგებული პარალელური \overrightarrow{A} და \overrightarrow{B} ვექტორები. ვიგულისხმობთ, რომ მათი ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, დაუშვათ $|B| > |A|$. ვისარგებლოთ ახლა ზემონათქვამით და დავშალოთ \overrightarrow{B} ვექტორი ერთმხრივ მოგებულ ორ პარალელურ ვექტორად, ამასთან ერთი

შესაყრები იყოს M წერტილზე მოდებული $-\vec{A}$ ვექტორი (ნახ. 4), მაშინ, როგორც აღვნიშნეთ, მეორე შესაყრები ცალსახად განისაზღვრება. ეს შესაყრები იქნება $\vec{B} + \vec{A}$ ვექტორი, რომლის მოდების E წერტილი, ზემოთ ნათქვამის ძალით, შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$\frac{MN}{NE} = \frac{|B| - |A|}{|A|},$$

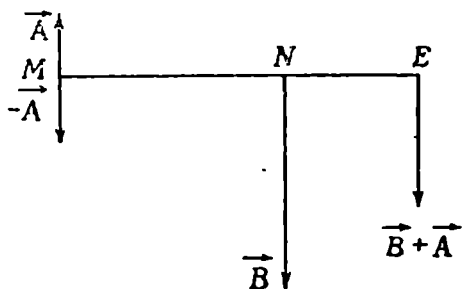
საიდანაც, პროპორციის ცნობილი თვისების ძალით, მივიღებთ

$$\frac{MN + NE}{NE} = \frac{|B| - |A| + |A|}{|A|},$$

ანუ, რაც იგივეა

$$\frac{ME}{NE} = \frac{|B|}{|A|}. \quad (3,2)$$

მაგრამ M წერტილზე მოდებული ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ვექტორი ნულის ტოლფასია და საბოლოოდ დაგვრჩება E წერტილზე მოდებული $\vec{B} + \vec{A}$ ვექტორი, ე. ი. განსახილველ შემთხვევაში არსებობს ტოლქმედი.



ნახ. 4.

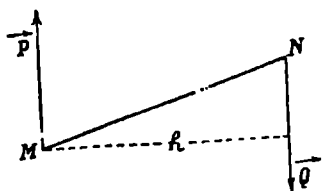
ამრიგად, სხვადასხვა მხრივ მოგებული სხვადასხვა სიგრძის ორი პარალელური ვექტორი ტოლფასია ერთი ვექტორისა, რომლის სიგრძე უდრის აღებული ვექტორების სიგრძეთა სხვაობას. მისი გეზი ემთხვევა უდიდესი სიგრძის ვექტორის გეზს.

ის მოდებულია MN -ის გაგრძელებაზე უდიდესი სიგრძის ვექტორის მხარეს ისე, რომ მისი მოდების წერტილის დაშორება აღებული ვექტორების მოდების წერტილებიდან უკუპროპორციულია ვექტორების სიგრძის.

(3,2) ტოლობიდან ცხადია, რომ E წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ განსახილველ ვექტორებს ნებისმიერი კუთხით მოვაბრუნებთ მათი მოდების M და N წერტილების ირგვლივ.

თუ ახლა მოცემულია რამდენიმე პარალელური ვექტორისაგან შემდგარი ისეთი სისტემა, რომლის ნაქრები ვექტორი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ ზემონაჩვენები წესის მკმდელობით გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ ტოლქმედის არსებობა და კიდევაც ვიპოვოთ ის.

(3,2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ, როცა $|B| \rightarrow |A|$, მაშინ $E \rightarrow \infty$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ სხვადასხვა მხრივ მოგებულ ერთი და იმავე სიგრძის პარალელურ ვექტორთა სისტემას არა აქვს ტოლქმედი. ასეთ პარალელურ



ნახ. 5.

ვექტორთა სისტემას ეწოდება წვეილვექტორი (ნახ. 5). წვეილვექტორის აღსანიშნავად შემდეგში ვიხმართ ასეთ სიმბოლოს: $(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})$. განმარტების ძალით $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} = 0$.

ამოცანები

1. Ox ღერძზე ამ ღერძის მიმართულებით მოთავსებულია $\overrightarrow{A_1}$ და $\overrightarrow{A_2}$ სრიალა ვექტორები, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით $\overrightarrow{B_1}$ და $\overrightarrow{B_2}$ სრიალა ვექტორები. თუ Ox ღერძზე ამ ღერძის მიმართულებით მოვდებთ \overrightarrow{X} სრიალა ვექტორს, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით $n\overrightarrow{X}$ ($n \neq 1$) ვექტორს, მაშინ მათი ტოლქმედი ნულის ტოლი გახდება. ვიპოვოთ \overrightarrow{X} ვექტორის მნიშვნელობა.

ვინაიდან, პირობის ძალით, $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{B_1}, \overrightarrow{B_2}, \overrightarrow{X}$ და $n\overrightarrow{X}$ ვექტორთა სისტემის ტოლქმედი¹ ნულის ტოლია, ამიტომ, ცხადია, Ox ღერძზე ამ ვექტორების აღგებრულ მნიშვნელობათა ჯამი ნულის ტოლი უნდა იყოს და, მაშასადამე, გვექნება

$$A_1 + A_2 - B_1 - B_2 + X - nX = 0,$$

საიდანაც

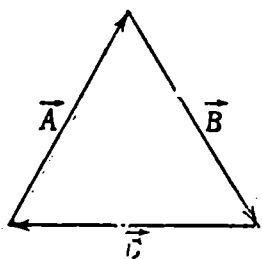
$$X = \frac{A_1 + A_2 - B_1 - B_2}{n - 1}.$$

2. მოენახოთ პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ და \overrightarrow{C} ვექტორები, რომ მათგან სამკუთხედის შედგენა შეიძლებოდეს (ნახ. 6).

ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ ამ ვექტორების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია:

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = 0,$$

მაშინ მათგან შეიძლება სამკუთხედი შევადგინოთ.



ნახ. 6.

3. ვთქვათ, მოცემულია ერთ წერტილზე მოდებული $\overrightarrow{A_1}$ და $\overrightarrow{A_2}$ ვექტორი, რომელთა შორის კუთხე უდრის 60° და რომელთა სიგრძე ცალ-ცალკე 12 სანტიმეტრია. ვიპოვოთ \overrightarrow{R} ტოლქმედის სიდიდე.

ვინაიდან $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2}$ და, როგორც ადვილი მისახვედრია, \overrightarrow{R} ვექტორი შეადგენს როგორც $\overrightarrow{A_1}$, ისე $\overrightarrow{A_2}$ ვექტორთან 30° კუთხეს, ამიტომ ადვილად მივიღებთ

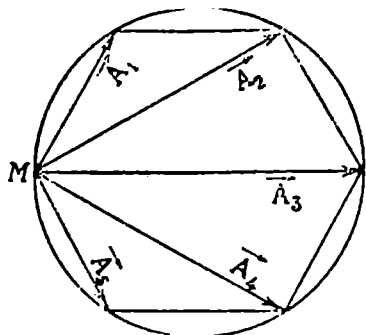
$$R = 12\sqrt{3} \text{ სმ.}$$

4. წესიერი ექვსკუთხედის ერთ-ერთ M წვეროზე (ნახ. 7) მოდებულია 5 ვექტორი: $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3}, \overrightarrow{A_4}, \overrightarrow{A_5}$, რომელნიც M წვეროს მიმდევრობით ექვსკუთხედის სხვა წვეროებთან აერთებენ. ვიპოვოთ ტოლქმედი.

¹ სრიალა ვექტორთა ეს სისტემა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც თავმოყრილ ვექტორთა სისტემა, ან, ცხადია, ტოლქმედი არსებობს.

შპირველეს ყოვლისა შევნიშნათ, რომ \vec{A}_3 ვექტორი ემთხვევა ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრს.

აღვიღად დავრწმუნდებით, რომ $\vec{A}_1 + \vec{A}_4 = \vec{A}_3$, ასევე, ცხადია, $\vec{A}_2 + \vec{A}_5 = \vec{A}_3$, ამიტომ $\vec{R} = 3\vec{A}_3$, $|\vec{R}| = 6r$, სადაც r არის აღნიშნულ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.



ნახ. 7.

§ 4. წყვილვექტორის თვისებები

ვინაიდან წყვილვექტორის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ამიტომ § 2-ში ნათქვამის ძალით, წყვილვექტორის ნაკრები მომენტი, რომელსაც შემდეგში უბრალოდ წყვილვექტორის მომენტს ვუწოდებთ, დამოუკიდებელია მომენტთა ცენტრისაგან. მაშასადამე, წყვილვექტორის მომენტი თავისუფალი ვექტორია. წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების ფუძეებს შორის მანძილს (რომელსაც h -ით აღვნიშნავთ) ეწოდება წყვილვექტორის მხარი. თუ (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილვექტორის მომენტს \vec{L} -ით აღვნიშნავთ, ხოლო ვექტორების ზოდების წერტილებს M და N -ით (ნახ. 5), მივიღებთ

$$\vec{L} = [\vec{NM}, \vec{P}] = [\vec{MN}, \vec{Q}], \quad (4,1)$$

საიდანაც, ცხადია, გვექნება

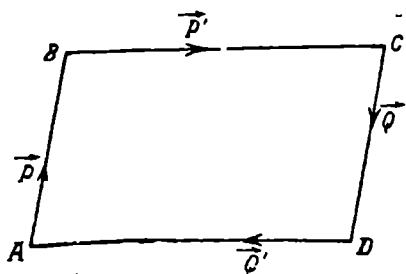
$$|\vec{L}| = |\vec{P}| h, \quad (4,2)$$

ამასთან h წყვილვექტორის მხარია.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება:

დებულება 1. ორი წყვილვექტორი, რომელთაც ერთნაირი მომენტები აქვთ, ტოლფასია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი წყვილვექტორი (\vec{P}, \vec{Q}) და (\vec{P}', \vec{Q}') . რომელთაც, პირობის ძალით, ერთნაირი მომენტები აქვთ. ვაჩვენოთ, რომ ეს წყვილვექტორები ელემენტარული მოქმედებებით ერთიმეორეზე დაიყვანება.



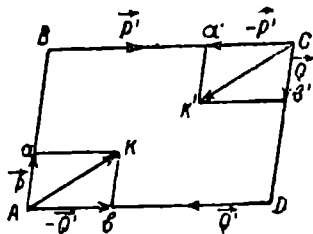
ნახ. 8.

ვინაიდან წყვილვექტორის მომენტი მართობია წყვილვექტორის სიბრტყისა, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, (\vec{P}, \vec{Q}) და (\vec{P}', \vec{Q}') წყვილვექტორების სიბრტყეები პარალელურია.

განვიხილოთ პირველად ის შემთხვევა, როცა ორივე წყვილვექტორი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული და

პირველი წყვილვექტორის ვექტორები მეორე წყვილვექტორის ვექტორების პარალელური არ არის. მაშინ ცხადია, რომ წყვილვექტორთა შემადგენელი ვექტორების ფუძეების გადაკვეთის შედეგად მიიღება $ABCD$ პარალელოგრამი (ნახ. 8).

\overline{P} , \overline{Q} , $\overline{P'}$, $\overline{Q'}$ ვექტორების გასრიალებით ყოველთვის შეგვიძლია მივადწიოთ იმას, რომ ისინი აღნიშნული პარალელოგრამის წვეროებზე იყვნენ მოდებული. წყვილვექტორთა მომენტების ტოლობის ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ \overline{P} , \overline{Q} , $\overline{P'}$, $\overline{Q'}$ ვექტორები $ABCD$ პარალელოგრამის შიგა წერტილებს ერთი და იმავე გეზით უვლიან. გაჩვენოთ ახლა, რომ $(\overline{P}, \overline{Q})$ წყვილვექტორისაგან ელენტიარული მოქმედებებით მიიღება $(\overline{P'}, \overline{Q'})$ წყვილვექტორი. ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს მხოლოდ $(\overline{P}, \overline{Q})$ წყვილ-



ნახ. 9.

ვექტორი, რომელიც $ABCD$ პარალელოგრამის მიმართ ისეა განლაგებული, როგორც ზემოთ აღენაწნეთ. მოვდოთ $ABCD$ პარალელოგრამის B და C წვეროებზე $\overline{P'}$ და $-\overline{P'}$ პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ვექტორები (ნახ. 9). მოვდოთ აგრეთვე ამავე პარალელოგრამის D და A წვეროებზე პირდაპირ თანაწინააღმდეგი $\overline{Q'}$ და $-\overline{Q'}$ ვექტორები.

ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ \overline{P} , \overline{Q} , $\overline{P'}$, $\overline{Q'}$, $-\overline{P'}$, $-\overline{Q'}$ ვექტორებისაგან შემდგარ სისტემას, რომელიც, ცხადია, $(\overline{P}, \overline{Q})$ წყვილვექტორის ტოლფასია. შევკრიბოთ ახლა A წერტილზე მოდებული \overline{P} და $-\overline{Q'}$ ვექტორები; შევკრიბოთ აგრეთვე C წერტილზე მოდებული \overline{Q} და $-\overline{P'}$ ვექტორები. მივიღებთ \overline{AK} და $\overline{CK'}$ ვექტორებს, რომელთაც ერთნაირი სიგრძე აქვთ. დავამტკიცოთ, რომ ეს ვექტორები დამთხვეულია $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალზე და, მაშასადამე, წარმოადგენენ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ვექტორებს. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან წყვილვექტორთა მომენტები ტოლია, ამიტომ ადვილი აქვს ტოლობას (იხ. (4,2) ფორმულა)

$$|P|h = |P'|h',$$

ანუ, რაც იგივეა

$$|Aa|h = |Ab|h', \quad (4,3)$$

სადაც h და h' აღნიშნავენ $(\overline{P}, \overline{Q})$ და $(\overline{P'}, \overline{Q'})$ წყვილვექტორთა მხრებს.

ცხადია, აგრეთვე, რომ ადვილი აქვს ტოლობას

$$|AB|h = |AD|h' \quad (4,4)$$

(ვინაიდან ტოლობის ორივე მხარე ერთი და იმავე პარალელოგრამის ფართობს გამოსახავს). (4,3) ტოლობის (4,4) ტოლობაზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{|Aa|}{|AB|} = \frac{|Ab|}{|AD|}.$$

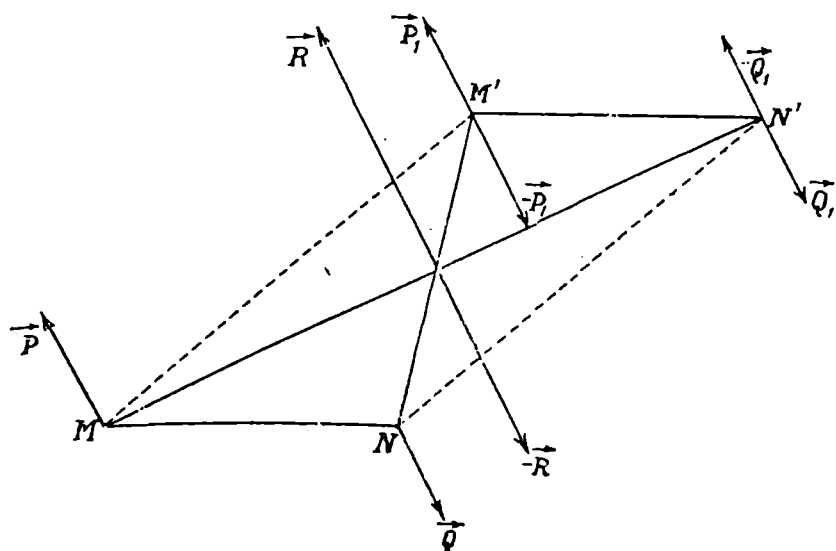
უკანასკნელი ტოლობა ამტკიცებს, რომ $AaKb$ პარალელოგრამი მსგავსია $ABCD$ პარალელოგრამისა. ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $Ca'K'b'$ პარალელოგრამი იმავე $ABCD$ პარალელოგრამის მსგავსია. ამის შემდეგ ცხადია, რომ \overline{AK} და $\overline{CK'}$ ვექტორები დამთხვეულია $ABCD$ პარალელოგრამის AC დიაგონალზე, მაშასადამე, წარმოადგენენ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ვექტორ-

რებს. ვინაიდან პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ვექტორები ნულის ტოლფასია, ამიტომ ზემოაღნიშნული 6 ვექტორიდან გვრჩება ($\overline{P'}$, $\overline{Q'}$) წყვილვექტორი.

ვთქვათ ახლა, (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორები პარალელურია ($\overline{P'}$, $\overline{Q'}$) წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების. განვიხილოთ ახალი ($\overline{P''}$, $\overline{Q''}$) წყვილვექტორი, რომელიც (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორის სიბრტყეშია მოთავსებული და რომლის შემადგენელი ვექტორებიც არ არის პარალელური (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების; ამასთან დაეუშვათ, რომ ($\overline{P''}$, $\overline{Q''}$) წყვილვექტორის მომენტი ტოლია (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორის მომენტის. ცხადია, ასეთი ($\overline{P''}$, $\overline{Q''}$) წყვილვექტორის აღება ყოველთვის შეიძლება. ზემოაღნიშნულის ძალით, (\overline{P} , \overline{Q}) და ($\overline{P'}$, $\overline{Q'}$) წყვილვექტორები ცალ-ცალკე ($\overline{P''}$, $\overline{Q''}$) წყვილვექტორის ტოლფასია და, ზაშასაღმე, ისინი ერთიმეორის ტოლფასია.

ამრიგად, დებულება დამტკიცებულია იმ შემთხვევაში, როცა ორივე წყვილვექტორი ერთსა და იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული.

დავამტკიცოთ ახლა დებულება იმ შემთხვევაში, როცა (\overline{P} , \overline{Q}) და ($\overline{P'}$, $\overline{Q'}$) წყვილვექტორთა სიბრტყეები პარალელურია. ცხადია, დებულება დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ელემენტარული მოქმედებებით წყვილვექტორი შეიძლება მის პარალელურ სიბრტყეში გადავიტანოთ.



ნახ. 10.

\overline{P} და \overline{Q} ვექტორების მოძვრის წერტილები იყოს, როგორც ზემოთ, M და N . განვიხილოთ ($\overline{P'}$, $\overline{Q'}$) წყვილვექტორის სიბრტყეში $M'N'$ მონაკვეთი, რომელიც MN მონაკვეთის პარალელურია და $|M'N'| = |MN|$ (ნახ. 10). მოვდოთ ახლა M' და N' წერტილებზე პირდაპირ თანაწინააღმდეგი $\overline{P_1}$, $-\overline{P_1}$ და $\overline{Q_1}$, $-\overline{Q_1}$ ვექტორები, სადაც $\overline{P_1} = \overline{P}$, $\overline{Q_1} = \overline{Q}$. გვექნება 6 ვექტორისაგან შემდგარი სისტემა, რომელიც, ცხადია, (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორის

ტოლფასია. შევკრიბოთ ახლა M და N' წერტილებზე მოდებული \vec{P} და $-\vec{Q}_1$ ერთმხრივ მოგებული პარალელური ვექტორები და აგრეთვე N და M' წერტილებზე მოდებული \vec{Q} და $-\vec{P}_1$ ერთმხრივ მოგებული პარალელური ვექტორები. როგორც ადვილი მისახვედრია, მივიღებთ MN და $M'N'$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე მოდებულ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ \vec{R} და $-\vec{R}$ ვექტორებს, რომელნიც ნულის ტოლფასია, და დაგვრჩება ზემოაღნიშნული 6 ვექტორის ნაცვლად (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) წყვილვექტორი, რომელიც, ცხადია, (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილვექტორის მის პარალელურ სიბრტყეში გადატანით არის მიღებული. ამით დებულება დამტკიცებულია მთლიანად.

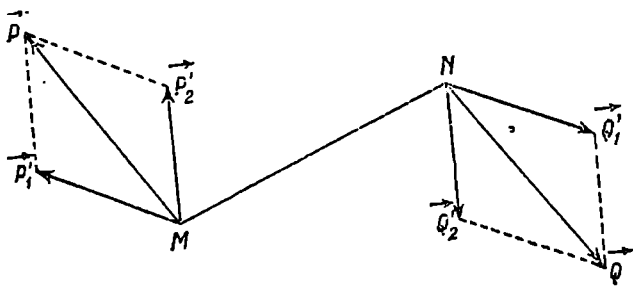
დამტკიცებული დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ წყვილვექტორი მთლიანად დახასიათებულია მისი მომენტის საშუალებით. ამიტომ, ცხადია, წყვილვექტორის მოცემა ნიშნავს მისი მომენტის მოცემას და პირიქით.

ამავე დებულებიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ელემენტარული მოქმედებების საშუალებათ წყვილვექტორი ნებისმიერად შეიძლება მოვაბრუნოთ თავის სიბრტყეში, გადავიტანოთ მის პარალელურ სიბრტყეში, შევცვალოთ წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების სიგრძე, თუ შესაბამად შევცვლით მხარის სიგრძეს.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

დებულება 2. სასრული რაოდენობა წყვილვექტორისაგან შემდგარი სისტემა ტოლფასია ერთი წყვილვექტორისა, რომლის მომენტი უდრის აღებული წყვილვექტორების მომენტების ჯამს.

დავიწყოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა მოცემულია ორი (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) და (\vec{P}_2, \vec{Q}_2) წყვილვექტორი, რომელთა სიბრტყეები არ არიან პარალელური. ხსენებულ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი სიგრძის MN



ნახ. 11.

მონაკვეთი და გარდავქმნათ ზემოაღნიშნული წესით წყვილვექტორები ისე, რომ მათი მხარი იყოს MN . გარდავქმნის შემდეგ მიღებული წყვილვექტორები იყოს (\vec{P}_1', \vec{Q}_1') , (\vec{P}_2', \vec{Q}_2') . M და N წერტილებზე მოდებული \vec{P}_1' , \vec{P}_2' და \vec{Q}_1' , \vec{Q}_2' ვექტორების შეკრებით (ნახ. 11) მივიღებთ ერთ (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილვექტორს, რომელიც, ცხადია, მოცემულ (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) და (\vec{P}_2, \vec{Q}_2) წყვილვექტორთა სისტემის ტოლფასია.

ტოლფასობის გამო, ცხადია, რომ (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილვექტორის მომენტი

მოცემული (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) და (\vec{P}_2, \vec{Q}_2) წყვილვექტორთა მომენტების ჯამის ტოლია და დებულება განსახილველ შემთხვევაში დამტკიცებულია.

თუ წყვილვექტორთა სიბრტყეები პარალელურია, მაშინ ელემენტარული მოქმედებებით ერთ წყვილვექტორს გადავიტანთ მეორის სიბრტყეში, რის შემდეგაც დებულება დამტკიცდება ზემონაჩვენები წესით.

თუ ზემომოყვანილ დამტკიცებას მიმდევრობით გამოვიყენებთ, დავრწმუნდებით დებულების სამართლიანობაში ნებისმიერი რაოდენობის წყვილვექტორთა შემთხვევაშიც.

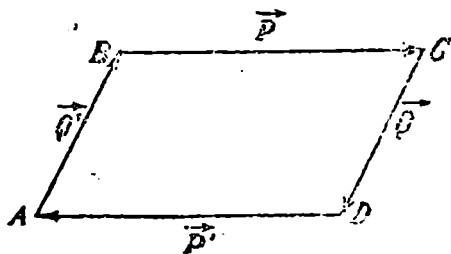
ამრიგად, მოცემული წყვილვექტორთა სისტემა $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1), (\vec{P}_2, \vec{Q}_2), \dots, (\vec{P}_n, \vec{Q}_n)$, რომელთა მომენტებია $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_n$, ტოლფასია ერთი (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილვექტორისა, რომლის მომენტი \vec{L} გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n.$$

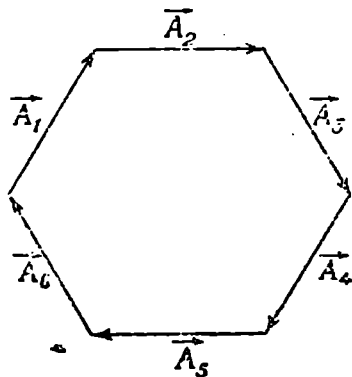
(\vec{P}, \vec{Q}) წყვილვექტორს ეწოდება ტოლქმედი წყვილვექტორი, ხოლო (\vec{P}_i, \vec{Q}_i) ($i=1, 2, \dots, n$) წყვილვექტორებს შესაკრები წყვილვექტორები.

ამოცანები

5. ორი (\vec{P}, \vec{P}') და (\vec{Q}, \vec{Q}') წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორები ემთხვევა $ABCD$ პარალელოგრამის. გვერდებს ისე, როგორც ეს ნახაზზეა მოცემული (ნახ. 12). ვიპოვოთ ამ წყვილვექტორების ტოლქმედი წყვილვექტორის მომენტი.



ნახ. 12.



ნახ. 13.

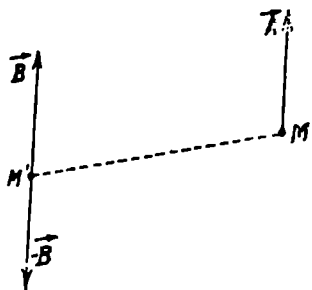
ვინაიდან (\vec{P}, \vec{P}') და (\vec{Q}, \vec{Q}') წყვილვექტორებიდან ყოველი მათგანის მომენტის სიდიდე ტოლია $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობის, ამატოვ, მე-2 დებულების ძალით, ტოლქმედი წყვილვექტორის მომენტის სიდიდე უდრის გაორკეცებულ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობს.

6. წესიერი ექვსკუთხედის გვერდებზე დამთხვეულია $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_6$ ვექტორები (ნახ. 13). დაამტკიცეთ, რომ ამ ვექტორების ტოლქმედი წყვილვექტორის მომენტი უდრის ექვსკუთხედის გაორკეცებულ ფართობს.

მითითება. ცხადია, აღნიშნული 6 ვექტორი დაიყოფა 3 წყვილვექტორად. გამოთვალეთ მათი ნაკრები მომენტი ექვსკუთხედის ცენტრის მიმართ.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ნებისმიერ სკიალა ვექტორთა სისტემის ერთ ვექტორად და ერთ წვეილვექტორად დაყვანის კანონს. ამ მიზნით, უპირველეს ყოვლისა, გავცნოთ მოცემული ვექტორის მოდების წერტილის ნებისმიერ სხვა წერტილში გადატანის წესს.

ვთქვათ, მოცემულია სკიალა \vec{A} ვექტორი, რომელიც მოდებულია M წერტილზე. განვიხილოთ სივრცის ნებისმიერი M' წერტილი და მოვდოთ



ნახ. 14.

მასზე ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი \vec{B} და $-\vec{B}$ ვექტორი, სადაც $\vec{B} = \vec{A}$. ჩვენ მივიღებთ სამი \vec{A} , \vec{B} , $-\vec{B}$ ვექტორისაგან შემდგარ სისტემას (ნახ. 14), რომელიც, ცხადია, ტოლფასია \vec{A} ვექტორის. მეორე მხრივ, ცხადია რომ $(\vec{A}, -\vec{B})$ წვეილვექტორს წარმოადგენს, რომლის მომენტიც ტოლია \vec{A} ვექტორის მომენტისა M' ცენტრის მიმართ.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

დებულება 1. მოცემული \vec{A} ვექტორის მოდების M წერტილი შეგვიძლია ნებისმიერ სხვა M' წერტილში გადავიტანოთ, თუ სამაგიეროდ მას დავუმატებთ წვეილვექტორს, რომლის მომენტიც ტოლია მოცემული \vec{A} ვექტორის მომენტისა მოდების ახალი M' წერტილის მიმართ (ცხადია, ასეთი მოქმედების შედეგად ტოლფასობა არ ირღვევა).

ვთქვათ, გვაქვს სკიალა ვექტორთა სისტემა $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$. ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი O წერტილი და აღვნიშნოთ \vec{A}_i ($i=1, \dots, n$) ვექტორის მომენტი O ცენტრის მიმართ \vec{L}_i -თ. გადავიტანოთ ყოველი \vec{A}_i ვექტორის მოდების წერტილი O ცენტრში ზემონაჩვენები წესით. მივიღებთ O წერტილზე მოდებულ $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ ვექტორთა სისტემას და $(\vec{A}_1, -\vec{B}_1), (\vec{A}_2, -\vec{B}_2), \dots, (\vec{A}_n, -\vec{B}_n)$ წვეილვექტორთა სისტემას, სადაც $\vec{B}_i = \vec{A}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), ამასთან $(\vec{A}_i, -\vec{B}_i)$ წვეილვექტორის მომენტი უდრის \vec{L}_i -ს (ე. ი. \vec{A}_i ვექტორის მომენტს O წერტილის მიმართ). წინა პარაგრაფის მე-2 დებულების ძალით, წვეილვექტორთა ხსენებული სისტემა ტოლფასია ერთი (\vec{P}, \vec{Q}) წვეილვექტორის, რომლის მომენტი $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$. შევკრიბოთ ახლა O წერტილზე მოდებული $\vec{B}_i = \vec{A}_i$ ვექტორები; მივიღებთ O წერტილზე მოდებულ ერთ \vec{R} ვექტორს, რომელიც, ცხადია, სისტემის ნაკრებ ვექტორს წარმოადგენს.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

დებულება 2. სკიალა ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა ტოლფასია სივრცის ნებისმიერ O წერტილზე მოდებული ერთი \vec{R} ვექტორისა, რომელიც სისტემის ნაკრები ვექტო-

რის ტოლია და ერთი (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორისა, რომლის მომენტიც უდრის აღებული სისტემის ნაკრებ მომენტს O ცენტრის მიმართ.

O წერტილს ეწოდება სისტემის დაყვანის ცენტრი, ხოლო სისტემის ზემოაღნიშნულ გარდაქმნას — სისტემის დაყვანა მოცემულ O ცენტრამდე. ამრიგად, ნებისმიერი სრიალა ვექტორთა სისტემა დაიყვანება მის ტოლფას სამ ვექტორამდე (\overline{R} ვექტორამდე და (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორამდე). თუ ახლა (\overline{P} , \overline{Q}) წყვილვექტორს ელემენტარული მოქმედებებით ისე გარდავექმნით, რომ მისი ერთ-ერთი ვექტორი დაყვანის O ცენტრზე იყოს მოდებული და შევეკრებთ ამ წერტილზე მოდებულ ვექტორებს, დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი სრიალა ვექტორთა სისტემა საბოლოოდ მის ტოლფას 2 ვექტორამდე დაიყვანება.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

დებულება 3. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ სრიალა ვექტორთა ორი სისტემა იყოს ტოლფასი, მდგომარეობს იმაში, რომ მათ ქონდეთ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ.

ვინაიდან ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ინვარიანტულია ელემენტარული გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ პირობის აუცილებლობა ცხადია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა, ე. ი. ვაჩვენოთ, რომ თუ სრიალა ვექტორთა ორ სისტემას აქვს ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ ისინი ტოლფასი იქნებიან (ე. ი. დაიყვანებიან ერთიმეორეზე ელემენტარული მოქმედებებით).

განვიხილოთ სივრცის რაიმე O წერტილი და დავიყვანოთ ორივე სისტემა O ცენტრამდე ზემონაჩვენები წესით. პირველი სისტემის დაყვანის შედეგად მივიღებთ O ცენტრზე მოდებულ ერთ $\overline{R'}$ ვექტორს და ($\overline{P'}$, $\overline{Q'}$) წყვილვექტორს. მეორე სისტემის დაყვანის შედეგად მიიღება იმავე O ცენტრზე მოდებული $\overline{R''}$ ვექტორი და ($\overline{P''}$, $\overline{Q''}$) წყვილვექტორი. პირობის ძალით $\overline{R'} = \overline{R''}$ და ($\overline{P'}, \overline{Q'}$) და ($\overline{P''}, \overline{Q''}$) წყვილვექტორებს აქვთ ერთნაირი მომენტები. წინა პარაგრაფის 1 დებულების ძალით ეს წყვილვექტორები ტოლფასია და ამით დებულება დამტკიცებულია.

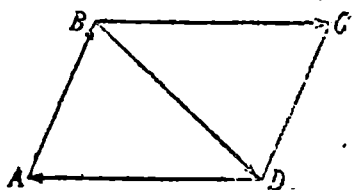
შევნიშნოთ ახლა, რომ, თუ სრიალა ვექტორთა ორ სისტემას აქვს ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ მათ ექნებათ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართაც.

მართლაც, ნათქვამის სამართლიანობაში აღვლად დავრწმუნდებით, თუ გავიხსენებთ ახალი ცენტრის მიმართ მომენტის გამოსახულებას (იხ. (2,4) ფორმულა).

აზოცანა

7. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი (ნახ. 15); დავამტკიცოთ, რომ \overline{AB} , \overline{BD} და \overline{DA} ვექტორებისაგან შემდგარი სისტემა ტოლფასია (\overline{BC} , \overline{DA}) წყვილვექტორისა.

ცხადია, \overline{AB} , \overline{BD} და \overline{DA} სისტემის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ხოლო მათი ნაკრები მომენტის ნებისმიერი წერტილის მიმართ (კერძოდ, D წერტილის მიმართ) უდრის $(\overline{BC}, \overline{DA})$ წყვილ ვექტორის მომენტს. მე-3 დებულების ძალით, ეს ორი სისტემა ტოლფასია (ადვილად დამტკიცდება მათი ტოლფასობა ელემენტარული მოქმედებებითაც).



ნახ. 15.

§ 6. ორმაგი ვექტორული ნამრავლის მკაფიო თვისებების შესახებ

განვიხილოთ სამი \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} ვექტორისაგან შედგენილი ორმაგი ვექტორული ნამრავლი $[\overline{A} [\overline{B} \overline{C}]]$. დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$[\overline{A} [\overline{B} \overline{C}]] = \overline{B} (\overline{A} \cdot \overline{C}) - \overline{C} (\overline{A} \cdot \overline{B}). \quad (6,1)$$

ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overline{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \overline{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad \overline{C} = (C_x, C_y, C_z).$$

გამოვთვალოთ ცალ-ცალკე (6,1)-ის მარცხენა და მარჯვენა მხარის გვეგზილები კოორდინატთა ღერძებზე. x ღერძზე დაგვეგზილება მოგვეცემს

$$[\overline{A} [\overline{B} \overline{C}]]_x = A_y [\overline{B} \overline{C}]_z - A_z [\overline{B} \overline{C}]_y = A_y (B_z C_y - B_y C_z) - A_z (B_x C_y - B_y C_x) - A_x (B_z C_x - B_x C_z) = A_y B_z C_y + A_x B_z C_x - A_y B_y C_z - A_z B_x C_y - A_x B_x C_z.$$

(6,1)-ის მარჯვენა მხარის x ღერძზე დაგვეგზილებით კი მივიღებთ

$$B_x (\overline{A} \cdot \overline{C}) - C_x (\overline{A} \cdot \overline{B}) = B_x (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) = A_y B_z C_y + A_x B_z C_x - A_y B_y C_z - A_z B_x C_y - A_x B_x C_z.$$

ამრიგად, ეს გვეგზილები ტოლია. ასევე დამტკიცდება, რომ y და z ღერძებზე გვეგზილებიც ტოლია და ამით (6,1) ტოლობის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ, რომ ამავე სახის ფორმულას ექნება ადგილი $[[\overline{A} \cdot \overline{B}] \cdot \overline{C}]$ სახის ორმაგი ვექტორულ ნამრავლისათვისაც.

მართლაც, ვინაიდან $[[\overline{A} \cdot \overline{B}] \cdot \overline{C}] = -[\overline{C} \cdot [\overline{A} \cdot \overline{B}]]$, ამიტომ (6,1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$[[\overline{A} \cdot \overline{B}] \cdot \overline{C}] = \overline{B} (\overline{A} \cdot \overline{C}) - \overline{A} (\overline{B} \cdot \overline{C}). \quad (6,2)$$

ადვილად დამტკიცდება აგრეთვე შემდეგი ტოლობა:

$$(\overline{A} \cdot [\overline{B} \overline{C}]) = (\overline{B} \cdot [\overline{C} \overline{A}]) = (\overline{C} \cdot [\overline{A} \overline{B}]). \quad (6,3)$$

§ 7. სკალარული ნამრავლის რეპროდუცირება. ბოლძეშვილის პრინციპი

ჩაიწიე ოპერაციის მიმართ ინვარიანტი ისეთ სიდიდეს ეწოდება, რომელიც არ იცვლის თავის მნიშვნელობას ამ ოპერაციის შედეგად. ჩვენ აქ გვინდა

ტერესებს სრიალა ვექტორთა სისტემის ინვარიანტები დაყვანის ცენტრის მიმართ. ერთ ასეთ ინვარიანტს, როგორც უკვე იყო აღნიშნული, წარმოადგენს სისტემის ნაკრები ვექტორი \vec{R} .

დავამტკიცოთ ახლა, რომ ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის სკალარული ნამრავლი წარმოადგენს ინვარიანტს დაყვანის ცენტრის მიმართ.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემული სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე O ცენტრის მიმართ არის \vec{R} და \vec{L} , ხალი O' ცენტრის მიმართ კი — შესაბამის \vec{R}' , \vec{L}' , სადაც $\vec{R}' = \vec{R} - [\vec{OO'}, \vec{R}]$ (ნაკრები ვექტორის ინვარიანტობის გამო). (2,4) ფორმულის ძალით

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{OO'}, \vec{R}].$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ სკალარულად $\vec{R} = \vec{R}'$ ვექტორზე, მივიღებთ

$$(\vec{R} \cdot \vec{L}) - (\vec{R} \cdot [\vec{OO'}, \vec{R}]) = (\vec{R} \cdot \vec{L}') = (\vec{R}' \cdot \vec{L}'). \quad (7,1)$$

მაგრამ ვექტორული ნამრავლი $[\vec{OO'}, \vec{R}]$ მართობაა \vec{R} ვექტორის, ამიტომ

$$(\vec{R} \cdot [\vec{OO'}, \vec{R}]) = 0$$

და (7,1) ტოლობა მოგვცემს

$$(\vec{R} \cdot \vec{L}) = (\vec{R}' \cdot \vec{L}'), \quad (7,2)$$

რაც ამტკიცებს ნათქვამის სამართლიანობას.

ცხადია,

$$(\vec{R} \cdot \vec{L}) = |\vec{R}| |\vec{L}| \cos(\vec{R}, \vec{L}),$$

საიდანაც

$$\cos \angle \vec{R} \vec{L} = |\vec{L}| \cos(\vec{R}, \vec{L}) = \frac{(\vec{R} \cdot \vec{L})}{|\vec{R}|}. \quad (7,3)$$

(7,3) ტოლობის მარჯვენა მხარე, როგორც ორი ინვარიანტის შეფარდება, ინვარიანტია და, მაშასადამე, სისტემის ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორზე ინვარიანტია დაყვანის ცენტრის მიმართ.

ანრიგად, დაყვანის ცენტრის მიმართ ინვარიანტებია: სისტემის ნაკრები ვექტორი \vec{R} , სისტემის ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის სკალარული ნამრავლი $(\vec{R} \cdot \vec{L})$ და სისტემის ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორზე.

ვთქვათ ახლა, სრიალა ვექტორთა მოცემული სისტემა დავიყვანეთ რაიმე O ცენტრამდე, რომლის მიმართ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი \vec{R} და \vec{L} და განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემის მეორე ინვარიანტი ნულია:

$$(\vec{R} \cdot \vec{L}) = 0. \quad (7,4)$$

ამას ადგილი ექნება, თუ დაცულია ერთ-ერთი შემდეგი 4 შემთხვევიდან:

1. $\vec{L} = 0, \vec{R} \neq 0,$
2. $\vec{R} = 0, \vec{L} \neq 0,$
3. $\vec{R} = 0, \vec{L} = 0,$
4. $\vec{R} \perp \vec{L}, \vec{R} \neq 0, \vec{L} \neq 0.$

პირველ შემთხვევაში, ცხადია, სისტემა ტოლფასია დაყვანის O ცენტრზე მოდებული \vec{R} ვექტორისა და, მაშასადამე, ეს უკანასკნელი წარმოადგენს სისტემის ტოლქმედს.

მეორე შემთხვევაში სისტემის ნაკრები მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრზე, ამიტომ არ არსებობს ისეთი დაყვანის ცენტრი, რომლის მიმართ ნაკრები მომენტი ნულია. ამრიგად, განსაზღვრულ შემთხვევაში სისტემა ტოლფასია ერთი წყვილვექტორისა და, მაშასადამე, არ დაიყვანება ტოლქმედამდე.

მესამე შემთხვევაში, ცხადია, სისტემა ნულის ტოლფასია.

განვიხილოთ ახლა მეოთხე შემთხვევა. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს დაყვანის ისეთი O' ცენტრი, რომლის მიმართ ნაკრები მომენტი $\vec{L}' = 0$.

(2,4) ფორმულის ძალით

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{a} \cdot \vec{R}] \quad (\vec{a} = \vec{OO}'). \quad (7,5)$$

შევარჩიოთ ახლა \vec{a} ვექტორი (და, მაშასადამე, O' ცენტრი) ისე, რომ \vec{L}' ტოლი იყოს ნულის, ე. ი. ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$[\vec{a} \cdot \vec{R}] = \vec{L}. \quad (7,6)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს არაერთგვაროვან ვექტორულ განტოლებას \vec{a} ვექტორის მიმართ.

განვიხილოთ (7,6) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვანი განტოლება

$$[\vec{a} \cdot \vec{R}] = 0. \quad (7,7)$$

ვინაიდან ეს უკანასკნელი, როგორც ცნობილია, წარმოადგენს \vec{a} და \vec{R} ვექტორების პარალელობის პირობას, ამიტომ მის ზოგად ამოხსნას ექნება სახე¹

$$\vec{a}_0 = c\vec{R},$$

სადაც c ნებისმიერი სკალარული სიდიდეა. თუ ამ ამოხსნას დავუმატებთ (7,6) განტოლების რაიმე კერძო ამოხსნას, მივიღებთ, ცხადია, მის [(7,6) განტოლების] ზოგად ამოხსნას.

(7,6) განტოლების რაიმე კერძო ამოხსნის მოსაძებნად გავამრავლოთ მისი ორივე მხარე ვექტორულად \vec{R} ვექტორზე, მივიღებთ

$$[\vec{R} \cdot [\vec{a} \cdot \vec{R}]] = [\vec{R} \cdot \vec{L}]. \quad (7,8)$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ (7,6) და (7,8) ტოლფასი განტოლებებია. ამისათვის (7,8) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$[\vec{R} \cdot ([\vec{a} \cdot \vec{R}] - \vec{L})] = 0.$$

ეს უკანასკნელი კი \vec{R} და $[\vec{a} \cdot \vec{R}] - \vec{L}$ ვექტორთა პარალელობის პირობას წარმოადგენს, ამიტომ

$$[\vec{a} \cdot \vec{R}] - \vec{L} = k\vec{R}, \quad (7,9)$$

¹ ვაჩვენოთ, რომ განსაზღვრულ შემთხვევაში $\vec{R} \neq 0$.

სადაც k სკალარი სიდიდეა. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ სკალარულად \overline{R} ვექტორზე, (7,4) ტოლობის ძალით მივიღებთ

$$(\overline{R} \cdot [\overline{a} \cdot \overline{R}]) = kR^2.$$

მაგრამ, ვინაიდან $(\overline{R} \cdot [\overline{a} \cdot \overline{R}]) = 0$ და $R^2 \neq 0$, ამიტომ $k=0$. ამრიგად, (7,9) განტოლება ემთხვევა (7,6) განტოლებას და, მაშასადამე, ესენი ტოლფასი განტოლებებია.

თუ ახლა გამოვიყენებთ (6,1) ფორმულას, (7,8) განტოლება მოგვცემს

$$[\overline{R} \cdot [\overline{a} \cdot \overline{R}]] = \overline{a} R^2 - \overline{R} (\overline{a} \cdot \overline{R}) = [\overline{R} \cdot \overline{L}]. \quad (7,10)$$

ვეძებთ ამ უკანასკნელის ისეთი ამოხსნა, რომლისათვისაც $(\overline{a} \cdot \overline{R}) = 0$. ასეთ ამოხსნას ექნება სახე

$$\overline{a}_1 = \frac{[\overline{R} \cdot \overline{L}]}{R^2}.$$

ამრიგად, ეს უკანასკნელი წარმოადგენს (7,6) განტოლების გარკვეულ კერძო ამოხსნას (რაც პირდაპირ შეგვეძლო შეგვემოწმებინა).

მაშასადამე, (7,6) განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე: $\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1$, ანუ

$$\overline{a} = c \overline{R} + \frac{[\overline{R} \cdot \overline{L}]}{R^2}. \quad (7,11)$$

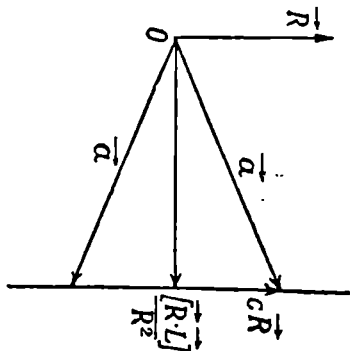
ვინაიდან c ნებისმიერი პარამეტრია, ამიტომ, ცხადია, (7,11) წარმოადგენს წრუდის ვექტორულ განტოლებას (ნახ. 16). ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში არსებობს მთელი წრე, რომლის წერტილების მიმართ სისტემის ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია. მაშასადამე, მეოთხე შემთხვევა დაიყვანება პირველ შემთხვევამდე.

მარტივად დამტკიცდება შემდეგი დებულების სამართლიანობა:

დებულება. თუ ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ სრიალა ვექტორთა სისტემა დაიყვანებოდეს ტოლქმედამდე მდგომარეობის იმაში, რომ $(\overline{R} \cdot \overline{L})$ ინვარიანტი ტოლი იყოს ნულის.

აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე. მაშინ, ცხადია, ნაკრები მომენტი ტოლქმედის ფუძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ნულის ტოლია ($\overline{L} = 0$) და მაშასადამე, $(\overline{R} \cdot \overline{L}) = 0$. $(\overline{R} \cdot \overline{L})$ სკალარული ნამრავლის ინვარიანტობის გამო ის ნულის ტოლი იქნება სივრცის ნებისმიერი წერტილის მიმართ და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობის დამტკიცება. ვიგულისხმობთ ახლა, რომ $(\overline{R} \cdot \overline{L}) = 0$. თუ $\overline{L} = 0$, მაშინ სისტემა ტოლქმედამდეა დაყვანილი (იხილეთ ზემოთ მოყვანილი



ნახ. 16.

პირველი შემთხვევა); თუ $\overline{L} \neq 0$, მაშინ ჩვენ გვექნება შემთხვევა $\overline{R} \neq 0$, $\overline{L} \neq 0$. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ამ შემთხვევაში სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე და ამით საკმარისობაც დამტკიცებულია.

სრიალა ვექტორთა სისტემას ეწოდება ბრტყელი, თუ ისინი მოთავესებული არიან ერთსა და იმავე სიბრტყეში. ასეთი სისტემის ნაკრები ვექტორია, ცხადია, ამავე სიბრტყეშია მოთავესებული, ხოლო აღნიშნული სიბრტყის წერტილების მიმართ ნაკრები მომენტი მართობია ამ სიბრტყის. ამიტომ ბრტყელი სისტემისათვის მეორე ინვარიანტი ყოველთვის ნულის ტოლია. ზემომოყვანილი დებულების ძალით, თუ ბრტყელი სისტემის ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე. თუ ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ აღნიშნული სისტემა ან ნულის ტოლ-დასია (როცა $\overline{L} = 0$), ან—წყვილვექტორისა (როცა $\overline{L} \neq 0$).

§ 8. სრიალა ვექტორთა სისტემის ცენტრალური ლერძი

ეთქვათ, მოცემულია სრიალა ვექტორთა სისტემა, ამ სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე O ცენტრის მიმართ აღნიშნოთ \overline{R} -ით და \overline{L} -ით. ვიგულისხმობთ, რომ მეორე ინვარიანტი $(\overline{R} \cdot \overline{L}) \neq 0$. ვიპოვოთ დაყვანის ისეთი O' ცენტრი, რომლის მიმართ ნაკრები მომენტი \overline{L}' პარალელურია \overline{R} -ის.

ვინაიდან ნაკრები მომენტის გვეგმილი ნაკრებ ვექტორზე ინვარიანტია, ამიტომ ნაკრებ მომენტს მინიმალური სიგრძე ექნება მაშინ, როცა ის ნაკრები ვექტორის პარალელურია. მაშასადამე, ზემოაღნიშნული თვისების მქონე დაყვანის O' ცენტრის პოვნა ნიშნავს ისეთი წერტილის პოვნას, რომლის მიმართ ნაკრები მომენტის სიგრძეს ექნება მინიმალური მნიშვნელობა.

(2,4) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\overline{L}' = \overline{L} - [\vec{a} \cdot \overline{R}] \quad (\vec{a} = \overrightarrow{OO'}). \quad (8,1)$$

\overline{R} და \overline{L}' ვექტორთა პარალელობის პირობა მოგვცემს

$$[\overline{R} \cdot \overline{L}'] = 0. \quad (8,2)$$

თუ ახლა განვიხილავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სათავეთ O წერტილში, მაშინ \overline{R} და \overline{L}' ვექტორების პარალელობის პირობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{yR_x - zR_y - L_z}{R_x} = \frac{zR_x - xR_z - L_y}{R_y} = \frac{xR_y - yR_x - L_z}{R_z}, \quad (8,3)$$

სადაც x, y, z -ით აღნიშნულია $\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$ ვექტორის კოორდინატები. ცხადია, (8,3) წრფის განტოლებებს წარმოადგენს და, მაშასადამე, არსებობს მთელი წრფე, რომლის წერტილებსაც აქვს ზემოაღნიშნული თვისება.

ამ წრფეს ეწოდება სრიალა ვექტორთა აღებული სისტემის ცენტრალური ლერძი. თუ ამ ლერძის რაიმე წერტილამდე დავიყვანთ მოცემულ სისტემას, მივიღებთ ერთ \overline{R} ვექტორს და ერთ წყვილვექტორს, რომლის მომენტიც პარალელურია \overline{R} -ის. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვი, რომ სისტემა დაყვანილია ხრახნამდე, ანუ დინამამდე.

განვიხილოთ k პარამეტრი, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$k = \frac{1}{R^2} (\overline{R} \cdot \overline{L}). \quad (8,4)$$

(8,4) ტოლობით განსაზღვრულ k სიდიდეს ეწოდება ხრახნის პარამეტრი. როცა $k > 0$, ხრახნს მარცხენა ხრახნი ეწოდება, ხოლო, როცა $k < 0$ — მარჯვენა ხრახნი. ცხადია, მარცხენა ხრახნისათვის $(\overline{R} \cdot \overline{L}) > 0$, ხოლო მარჯვენა ხრახნისათვის კი გვექნება $(\overline{R} \cdot \overline{L}) < 0$.

ვინაიდან ცენტრალური ღერძის წერტილების მიმართ ნაკრები მომენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$|L| = \text{გვგ} \overline{R} \cdot \overline{L} = \frac{|(\overline{R} \cdot \overline{L})|}{|R|},$$

ამიტომ ზემომოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლქმედი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მეორე ინვარიანტი ნულის ტოლია (იგულისხმება, რომ ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან), რაც უკვე გვქონდა დამტკიცებული (იხ. წინა §-ის დეპულება).

§ 9. პარალელურ ვექტორთა ცენტრი

ეთქვათ, მოცემულია დაბმულ პარალელურ ვექტორთა სისტემა $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$, რომლის ნაკრები ვექტორი \overline{R} განსხვავებულია ნულისაგან. თუ მოვიქცევით ისე, როგორც § 3-ში, დავრწმუნდებით, რომ ამ სისტემისათვის არსებობს ტოლქმედი.

ტოლქმედის ფუძის ისეთ C წერტილს, რომლის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ ყველა ვექტორს ერთდროულად მოვაბრუნებთ მათი მოდების წერტილების ირგვლივ ერთი და იმავე ნებისმიერი კუთხით, ეწოდება ადგილზე პარალელურ ვექტორთა ცენტრი. ამრიგად, პარალელურ ვექტორთა ცენტრი ისეთი წერტილია, რომელზედაც ყოველთვის გაივლის ტოლქმედის ფუძე, როცა ვექტორებს ერთდროულად ვაბრუნებთ ერთი და იმავე ნებისმიერი კუთხით მათი მოდების წერტილების ირგვლივ.

ვიპოვოთ C წერტილის რადიუს-ვექტორი რაიმე O წერტილის მიმართ. ეთქვათ, \overline{e}^0 ერთეული ვექტორია, რომელიც მოცემული ვექტორების პარალელურია. ცხადია, გვექნება

$$\overline{A}_i = A_i \overline{e}^0, \quad (9,1)$$

სადაც $A_i = \pm |A_i|$, ამასთან ზედა ნიშანი აიღება მაშინ, როცა \overline{A}_i და \overline{e}^0 ვექტორების გეზი ერთნაირია, ხოლო ქვედა ნიშანი — წინააღმდეგ შემთხვევაში. ასევე გვექნება

$$\overline{R} = R \overline{e}^0. \quad [(9,2)]$$

თუ სისტემის ნაკრებ მომენტს რაიმე O წერტილის მიმართ აღვნიშნავთ \overline{L} -ით, ხოლო C წერტილის მიმართ \overline{L}_c -ით, (2,4) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$\overline{L}_c = \sum_{i=1}^n [\overline{r}_i \cdot \overline{A}_i] - [\overline{r}_c \cdot \overline{R}], \quad (9,3)$$

სადაც \vec{r}_i წარმოადგენს \vec{A}_i ვექტორის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორს O ცენტრის მიმართ, \vec{r}_c კი C წერტილის რადიუს-ვექტორია O წერტილის მიმართ. მაგრამ, ვინაიდან მოცემული სისტემა C წერტილზე მოდებული \vec{R} ვექტორის ტოლფასია, ამიტომ $\vec{L}_c = \text{მომ. } \vec{R} = 0$. მაშასადამე, (9,3) ტოლობა მოგვცემს

$$[\vec{r}_c \cdot \vec{R}] - \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{A}_i] = 0.$$

(9,1) და (9,2) ტოლობების ძალით ეს უქანასკნელი ასე გადაიწერება:

$$\left[\left(\vec{r}_c \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{i=1}^n A_i \vec{r}_i \right) \cdot \vec{e}^0 \right] = 0. \quad (9,4)$$

მაგრამ, ვინაიდან C წერტილის მდებარეობა არ არის დამოკიდებული მოცემულ $\vec{A}_i (i=1, 2, \dots, n)$ ვექტორთა საერთო მიმართულებაზე, ამიტომ (9,4) ტოლობას ადგილი ექნება, როგორც არ უნდა იყოს ერთეული \vec{e}^0 ვექტორის გეზი. ეს კი მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა (9,4) ტოლობის მარცხენა მხარეში \vec{e}^0 ვექტორთან მდგომი მამრავლი ნულის ტოლია, საიდანაც გვექნება

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (9,5)$$

ამრიგად, პარალელურ ვექტორთა სისტემის ცენტრი მონახულია.

თუ ავიღებთ კოორდინატთა სისტემას სათავეთ O წერტილში და (9,5) ტოლობას დაგავებმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (9,6)$$

ა მ ო ც ა ნ ა

8. მოცემულია ერთნაირი სიგრძის n პარალელური ვექტორი $\vec{P}_i (i=1, 2, \dots, n)$, რომელთა მოდების წერტილებია M_1, M_2, \dots, M_n . დავუშვათ, რომ M_1, M_2, \dots, M_{n-1} წერტილები უძრავია, ხოლო M_n წერტილი მოძრაობს გარკვეულ Δ წრფეზე. დავამტკიცოთ, რომ ამ პარალელურ ვექტორთა ცენტრი იმოძრაავებს Δ წრფის პარალელურად.

ვთქვათ, P არის \vec{P}_i ვექტორების აღებრულები მნიშვნელობანი პარალელურ ვექტორთა საერთო მიმართულებაზე. აღვნიშნოთ \vec{r}_i -თ M_i წერტილის

რადიუს-ვექტორი რაიმე უძრავი O წერტილის მიმართ. M_n წერტილის გადაადგილება Δ წრფის გასწვრივ აღენიშნოთ \vec{p} -ით.

M_n წერტილის გადაადგილებამდე პარალელურ ვექტორთა ცენტრი მოიცემა ფორმულით (იხ. (9,5) ფორმულა)

$$\vec{r}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \quad (\vec{r}_c = \overrightarrow{OC}).$$

M_n წერტილის გადაადგილების შემდეგ კი ხსენებულ პარალელურ ვექტორთა ცენტრი გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{r}'_c = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_{n-1} + \vec{r}_n + \vec{p}}{n} = \vec{r}_c + \frac{1}{n} \vec{p},$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\vec{r}'_c - \vec{r}_c = \frac{1}{n} \vec{p}.$$

უკანასკნელი ტოლობა ამტკიცებს, რომ პარალელურ ვექტორთა ცენტრის გადაადგილება პარალელურია M_n წერტილის გადაადგილებისა.

გ ა ნ ე რ ი ლ ი ბ ა 2

ვექტორ-ფუნქცია

§ 10. ვექტორის წარმომავალი სპალარული არგუმენტით. ინტეგრალი

ისეთ ვექტორს, რომლის სიგრძე და გეზი დამოკიდებულია რაიმე t ცვლადზე, ეწოდება ამ ცვლადის ვექტორ-ფუნქცია. როცა \vec{A} ვექტორი t ცვლადის ფუნქციაა:

$$\vec{A} = \vec{A}(t),$$

მაშინ, ცხადია, მისი კოორდინატებიც ამავე ცვლადის ფუნქციები იქნება¹

$$A_x = A_x(t), \quad A_y = A_y(t), \quad A_z = A_z(t).$$

განვმარტოთ ახლა \vec{A} ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული.

თუ \vec{A} ვექტორს რაიმე ფიქსირებულ O წერტილზე მოვდებთ და t -ს მივანიჭებთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მაშინ მისი ბოლო წერტილი გარკვეულ წირს შემოწერს, რომელსაც \vec{A} ვექტორის პოლოგრაფი ეწოდება.

მივცეთ დამოუკიდებელ ცვლადს ორი მნიშვნელობა t და $t + \Delta t$; ვექტორ-ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობანი იყოს $\vec{A}(t)$ და $\vec{A}(t + \Delta t)$. სხვაობას $\Delta \vec{A} = \vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)$ ეწოდება \vec{A} ვექტორის ნაზრდი (ნახ. 17). განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

¹ ამ ფორმულების დახმარებით ცვლადი ვექტორის ზღვარი ისევე განიშარტება, როგორც ანალიზში ცვლადი სიდიდის ზღვარი და დადგინდება ზღვართა თეორიის კანონები.

თუ ამ შეფარდების ზღვარი არსებობს, როცა t ცვლადის ნაზრდი $\Delta t \rightarrow 0$, მაშინ მას ეწოდება \vec{A} ვექტორის წარმოებული t ცვლადით და აღინიშნება ჩვეულებრივად $\frac{d\vec{A}}{dt}$. ამრიგად, განმარტების ძალით

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

აღნიშნული განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{A}(t)$ ვექტორის წარმოებული ამავე ვექტორის ჰოდოგრაფის მხებს წარმოადგენს.

ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის ზემომოყვანილი განმარტების ძალით ადვილად დამტკიცდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა¹:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}, \quad (10,1)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} \right) + \left(\vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \right), \quad (10,2)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{A} \cdot \vec{B}] = \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} \right] + \left[\vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \right], \quad (10,3)$$

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) \vec{A}(t) = \frac{d\alpha}{dt} \vec{A} + \alpha \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (10,4)$$

ამასთან, უკანასკნელ ტოლობაში $\alpha(t)$ წარმოადგენს t ცვლადის სკალარულ ფუნქციას.

ვინაიდან $\vec{A}(t)$ ვექტორი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\vec{A}(t) = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}.$$

სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} წარმოადგენენ x , y , z ღერძების მგეზავებს, ამიტომ (10,1) ფორმულის ძალით მივიღებთ²

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right). \quad (10,5)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ტეილორის ფორმულაც სამართლიანია ვექტორ-ფუნქციისათვის:

$$\begin{aligned} \vec{A}(t + \Delta t) &= \vec{A}(t) + \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 \vec{A}(t)}{dt^2} \Delta t^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{d^3 \vec{A}(t)}{dt^3} \Delta t^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n \vec{A}(t)}{dt^n} \Delta t^n + \vec{E}_{n+1}, \end{aligned} \quad (10,6)$$

სადაც \vec{E}_{n+1} წარმოადგენს ნაშთს (ცხადია, იგულისხმება ტოლობაში შემავალი წარმოებულების არსებობა).

¹ ცხადია, იგულისხმება ამ ფორმულებში შემავალი წარმოებულების არსებობა.

² ამ ფორმულის დაწერისას იგულისხმება, რომ კოორდინატთა ღერძები უძრავია. თუ კოორდინატთა ღერძები იცვლიან მიმართულებას (ე. ი. \vec{i} , \vec{j} და \vec{k} ვექტორები გვხვს იცვლიან) მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, ეს ფორმულა არ იქნება სამართლიანი (იხ. თავი III, § 26).

თუ $(\overline{A} \cdot \overline{A}) = A^2$ ტოლობას გავაწარმოებთ და გამოვიყენებთ (10,2) ფორმულას, მივიღებთ

$$\left(\overline{A} \cdot \frac{d\overline{A}}{dt} \right) = A \frac{dA}{dt}. \quad (10,7)$$

(10,7) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ ვექტორის სიგრძე მუდმივია, მაშინ $\left(\overline{A} \cdot \frac{d\overline{A}}{dt} \right) = 0$, ამრიგად, მუდმივი სიგრძის ცვლადი ვექტორის წარმოებული ამავე ვექტორის მართობია.

თუ $\frac{d\overline{A}}{dt} = \overline{a}(t)$, მაშინ $\overline{A}(t)$ ვექტორს ეწოდება $\overline{a}(t)$ ვექტორის განუზღვრელი ინტეგრალი და აღინშნება ასე:

$$\overline{A}(t) = \int \overline{a}(t) dt.$$

ცხადია, რომ, თუ $\overline{A}(t)$ არის $\overline{a}(t)$ ვექტორიდან აღებული ინტეგრალის რაიმე მნიშვნელობა, მაშინ $\overline{A}(t) + \overline{C}$, სადაც \overline{C} ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია, იქნება ინტეგრალის ზოგადი სახე. $\overline{A}(t)$ ვექტორს ეწოდება პირველყოფილი.

განსაზღვრულ ინტეგრალს (t_0, t) შუალედში ეწოდება პირველყოფილი ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობას:

$$\int_{t_0}^t \overline{a}(t) dt = \overline{A}(t) - \overline{A}(t_0).$$

განსაზღვრული ინტეგრალი, ისე როგორც სკალარული ფუნქციის შემთხვევაში, შეიძლება განსაზღვროთ აგრეთვე, როგორც გარკვეული ჯამის ზღვარი და დავადგინოთ ინტეგრალურ აღრიცხვაში ცნობილი მთელი რიგი ფორმულების სამართლიანობა.

§ 11. წირის მთავარი ნორმალი და სიმკრძღე

ვთქვათ, მოცემულია სივრცის რაიმე გაწრფევადი C წირი, რომელზედაც არჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულება. ამ წირზე წერტილის მდებარეობა დავახასიათოთ s რეალური აბსცისით (ბუნებრივი პარამეტრით), რომლის ათვლის წერტილიც იყოს M_0 (ნახ. 18).

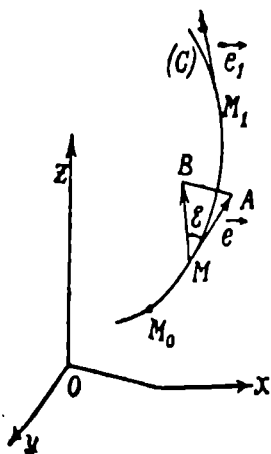
ვთქვათ ახლა აღებული წირის პარამეტრული განტოლებათა $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$. ვივლისხმით, რომ $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია მეორე რიგამდე ჩათვლით s პარამეტრის მიმართ.

ავიღოთ წირზე ნებისმიერი M წერტილი, რომლის შესაბამის რეალური აბსცისა იყოს s . გავავლოთ M წერტილზე წირის მხები¹, რომლის მგეზავიც² იყოს \overline{e} . ცხადია, \overline{e} ვექტორი იქნება s პარამეტრის ფუნქცია. განვიხილოთ M წერტილის მეზობელი M_1 წერტილი, რომელზედაც გავვლებულობ³ მხების მგეზავი იყოს \overline{e}_1 . მოვდოთ \overline{e}_1 ვექტორი M წერტილზე და გავავლოთ \overline{e} და

¹ ზემოთხსენილი პირობის ძალით, აღებულ წირს ყოველ წერტილში აქვს მხები, რომელიც უწყვეტად იცვლება.

² ივლისხმება, რომ \overline{e} მოგებულია s პარამეტრის ზრდის მიმართულებით.

\vec{e}_1 ვექტორებზე 'იბრტყე. ამ სიბრტყის ზღვარს, როცა M , წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ C წირის გასწვრივ, ეწოდება წირის მიმხედი სიბრტყე M წერტილში. M წერტილში გავლებული მდებარე ყოველ მართობ წრფეს ეწოდება ნორმალა. იმ ნორმალს, რომელიც მიმხედი სიბრტყეშია მოთავსებული, ეწოდება მთავარი ნორმალა, იმ ნორმალს კი, რომელიც მიმხედი სიბრტყის მართობია—ბინორმალა. ცხადია, მხები, მთავარი ნორმალა და ბინორმალა ერთმანეთის პერპენდიკულარულია.



აღვნიშნოთ ახლა \vec{e} და \vec{e}_1 ვექტორებს შორის კუთხე ε -ით. შედარდებამ $\frac{\varepsilon}{|\Delta s|}$, სადაც $|\Delta s|$ არის MM_1 , რკალის სიგრძე, ეწოდება ამ რკალის საშუალო სიზრუდე, ხოლო ზღვარს $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{|\Delta s|}$, რომელსაც $\frac{1}{\rho}$ -თი აღვნიშნავთ:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{|\Delta s|},$$

ეწოდება აღებული წირის სიზრუდე M წერტილში. ρ სიდიდეს ეწოდება სიზრუდის რადიუსი.

ნახ. 18.

გამოვთვალოთ ახლა მხების \vec{e} მგეზავის წარმოებული s პარამეტრით. ვინაიდან \vec{e} ვექტორის სიგრძე მუდმივია (ერთის ტოლია), ამიტომ $\frac{d\vec{e}}{ds} \perp \vec{e}$ (იხ. წინა §). ამის გარდა, ვინაიდან

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}}{\Delta s},$$

$$|\Delta \vec{e}| = 2 \sin \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ამიტომ}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{|\Delta s|} = \frac{1}{\rho}.$$

ამასთან, როგორც აღვილი მისახვედრია, $\frac{d\vec{e}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{|\Delta s|} = \frac{1}{\rho}$. ამიტომ $\frac{d\vec{e}}{ds}$ ვექტორი მოთავსებულია M წერტილში s პარამეტრის მიხედვით, რომელიც მხების \vec{e} ვექტორის პერპენდიკულარულია. ამიტომ აღვილი მისახვედრია, რომ $\frac{d\vec{e}}{ds}$ ვექტორი მოთავსებულია M წერტილში s პარამეტრის მიხედვით, რომელიც მხების \vec{e} ვექტორის პერპენდიკულარულია. ამიტომ აღვილი მისახვედრია, რომ $\frac{d\vec{e}}{ds}$ ვექტორი მოთავსებულია M წერტილში s პარამეტრის მიხედვით, რომელიც მხების \vec{e} ვექტორის პერპენდიკულარულია.

აღვნიშნოთ ახლა M წერტილის კოორდინატები x, y, z -ით. ვინაიდან

$$\vec{e} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right),$$

ამიტომ

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2} \right),$$

ვინაიდან აღებული წირის წერტილის მიმდინარე კოორდინატებს აქვთ მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულება s რეალური აბსცისით, ამიტომ, ცხადია, წირს ექნება უწყვეტი სიმრუდე ყოველ წერტილში.

თ ა ვ ი III

კ ი ნ ე მ ა ტ ი კ ა

§ 1. შესავალი

როგორც უკვე აღვნიშნეთ (იხ. I თავის § 4), კინემატიკა არის თეორიული მექანიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის მატერიალური სხეულების მოძრაობის გეომეტრიულ მხარეს, გეომეტრიული ობიექტების (წერტილის, წერტილთა სისტემის, ფართეულის, სხეულის) მოძრაობას. კინემატიკა მოძრაობას განიხილავს ძალებისგან დამოუკიდებლად. ვინაიდან მოძრაობა სივრცეა და დროში ხდება, ამიტომ მოძრაობის ცნება მჭიდროდაა დაკავშირებული სივრცისა და დროის ცნებასთან. სივრცის თვისებებს გეომეტრია შეისწავლის. კინემატიკა გეომეტრიისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ის სივრცის ცნებას უკავშირებს დროის ცნებას. ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ კინემატიკა არის ოთხგანზომილებიანი სივრცის გეომეტრია, სადაც მეოთხე განზომილებად დრო არის მიღებული.

მოძრაობა, ისე როგორც წონასწორობა, ფარდობითი ცნებაა, ამიტომ, როცა მოძრაობაზე ვლაპარაკობთ, უნდა გვექონდეს საფარდი სისტემა — რაიმე მყარი სხეული, რომლის ზიმართაც განიხილება აღნიშნული მოძრაობა. როცა საფარდი სისტემაზე ვლაპარაკობთ, ჩვენ ვგულისხმობთ მთელ გარემოს (სივრცეს), რომელიც ამ სისტემასთან უძრავად არის დაკავშირებული. ამასთან, გარემო ეწოდება ერთიმეორის იგივეური გეომეტრიული ობიექტების უწყვეტ ერთობლიობას. ასე, მაგალითად, წრფოვანი ფართეული, როგორც გარემო, წარმოადგენს წრფეთა უწყვეტ ერთობლიობას ან კიდევ გეომეტრიული წერტილების უწყვეტ ერთობლიობას. მოცემული გეომეტრიული ობიექტის მოძრაობა რაიმე გარემოში იმით ხასიათდება, რომ დროთა განმავლობაში მოძრავი ობიექტი ემთხვევა თავის იგივეურ ობიექტს აღებულ გარემოში. მაგრამ, რომ დავახასიათოთ აღებულ გარემოში ერთი და იმავე ობიექტის სხვადასხვა მდებარეობა, საჭიროა გვექონდეს ზემოხსენებული საფარდი სისტემა. ამრიგად, მოძრაობის დასახასიათებლად უნდა ვიცოდეთ: გარემო (სივრცე), რომელშიაც ხდება მოძრაობა; ის ობიექტი, რომელიც მოძრაობს, და საფარდი სისტემა, რომლის მიმართაც მანძილის ცვლილებით ხასიათდება აღებული ობიექტის მოძრაობა. მაგალითად, თუ გარემოდ აღებულია წრფე, მოძრავ ობიექტად გეომეტრიული წერტილი, ხოლო საფარდი სისტემად აღებულ წრფეზე ფიქსირებული რაიმე წერტილი, მაშინ მოძრაობა ხასიათდება დროთა ვითარებაში მოძრავი ობიექტის (გეომეტრიული წერტილის) წრფის უძრავ წერტილამდე მანძილის ცვლილებით.

ნიუტონის მექანიკაში სივრცე წარმოადგენს ევკლიდეს ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეს.

როგორც I თავში იყო აღნიშნული, დროის გაზომვის საშუალებას თვით ბუნება იძლევა მასში არსებული აერიოდული მოვლენების წყალობით. ასეთი პერიოდული მოვლენებია: დღე-ღამე, თვე, წელიწადი და სხვ. დროის ერთეულად მიღებულია სიკუნდი (წამი), რომელაც წარმოადგენს საშუალო დღე-ღამის $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ ნაწილს. მას შემდეგ, რაც არჩეული გვაქვს დროის ერთეული, დროის რაიმე განსაზღვრულა მნიშვნელობა (მომენტი) შეიძლება მივიღოთ საწყისად ($t=0$ მომენტად) და ამ მომენტიდან დრო გავზომოთ ზემოხსენებული ერთეულით. ამასთან, დროს, რომელსაც შემდეგში ყოველთვის t -თი აღვნიშნავთ, შეიძლება მივანიჭოთ როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი მნიშვნელობაც, იმის მიხედვით, განსახილველი მოვლენა მოხდა ჩვენ მიერ არჩეულ $t=0$ მომენტის შემდეგ, თუ მანამდე. ასეთი გზით შეიძლება მოვახდინოთ დროის არითმეტიზაცია, ე. ი. დავამყაროთ დამოკიდებულება ნამდვილ რიცხვებსა და დროს შორის: ამრიგად, დროის არითმეტიზაციის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ დრო განიხილება, როგორც ერთი განზომილების უწყვეტი მიმდევრობა, რომელსაც გრაფიკულად წრფის წერტილები შეესაბამება. ამ წრფეს დროთა ღერძი ეწოდება. აღნიშნული წრფის ყოველ წერტილს დროის გარკვეული მნიშვნელობა, ანუ, როგორც ანბობენ, დროის გარკვეული მომენტი შეესაბამება. დროის ორი მომენტი განსაზღვრავს ე. წ. დროის შუალედს. დროთა ღერძზე აღებულ საწყის წერტილს დროის საწყისი მომენტი შეესაბამება.

კინემატიკის საკითხებას განხილვას ჩვენ დავიწყებთ წერტილის კინემატიკით.

შემდეგში, ყოველთვის, სხეულების მოძრაობის დასახასიათებლად ჩვენ განვიხილავთ კოორდინატთა გარკვეულ სისტემას, რომელსაც, პირობით, ხშირად, უწოდებენ სისტემას ვუწოდებთ.

ბ ა ნ ჟ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

წერტილის კინემატიკა

§ 2. წერტილის მოძრაობის განტოლებები

წერტილის მოძრაობის დასახასიათებლად განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა. ამ სისტემასთან უძრავად დაკავშირებული გარემოს წერტილების გეომეტრიულ ადგილს, რომელზედაც დროთა ვითარებაში მოძრავი წერტილი გაივლის, ეწოდება ამ წერტილის ტრაექტორია. ჩვენ ვიტყვით, რომ წერტილის მოძრაობა მოცემულია, თუ ცნობილია მისი მდებარეობა დროის ყოველი მომენტისათვის.

აღვნიშნოთ მოძრავი M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის (კოორდინატთა სისტემის სათავეს) მიმართ $\vec{r}=(x, y, z)$ -ით. ცხადია, წერტილის მოძრაობა ცნობილი იქნება, თუ ცნობილია მისი რადიუს-ვექტორი \vec{r} როგორც დროის ფუნქცია (ნახ. 19):

$$\vec{r}=\vec{r}(t). \quad (2,1)$$

ამრიგად, (2,1) განტოლება წარმოადგენს წერტილის მოძრაობის ვექტორულ განტოლებას.

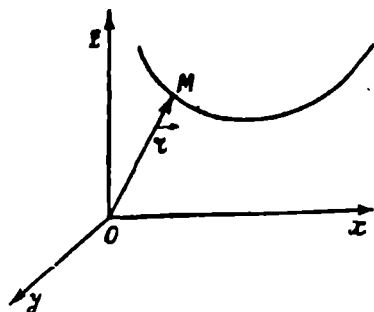
(2,1) განტოლების კოორდინატთა ღერძებზე დაგვემიღებთ მივიღებთ განტოლებებს:

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \quad (2,2)$$

რომელთაც ეწოდება მოძრაობის განტოლებები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში. თუ ამ განტოლებებიდან t -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებებს:

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0,$$

რომელნიც წერტილის ტრაექტორიის განტოლებებს წარმოადგენენ (აქ ტრაექტორია წარმოდგენილია როგორც ორი ფართეულის თანაკვეთა).



ნახ. 19.

როცა წერტილი მოძრაობს ტრაექტორიაზე, მისი ორთოგონალური გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე გარკვეულ მოძრაობებს ასრულებენ, რომელთა განტოლებებიც (2,2) ფორმულებით არის მოცემული.

ჩვენ შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ (2,2) ფორმულებით განსაზღვრული ფუნქციები არიან უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი მეორე რიგამდე.

თუ წერტილი მოძრაობს xoy სიბრტყეში (მოძრაობა ბრტყელია), მაშინ მოძრაობის განტოლებები იქნება¹

$$x=x(t), \quad y=y(t).$$

ამ განტოლებებიდან დროის გამოვრცხვით მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$f(x, y)=0.$$

სავსებით ანალოგიურად შეიძლება დავწეროთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში სიბრტყეზე, ცილინდრულ კოორდინატებში, სფერულ კოორდინატებში და სხვ.

განვიხილოთ ახლა x, y, z ცვლადების ცალსახა უწყვეტი ფუნქციები

$$q_1=q_1(x, y, z), \quad q_2=q_2(x, y, z), \quad q_3=q_3(x, y, z).$$

ვიგულისხმებთ, რომ ეს განტოლებები ამოხსნადია ცალსახად x, y, z ცვლადების მიმართ. ამოხსნის შედეგად გვექნება:

$$x=x(q_1, q_2, q_3), \quad y=y(q_1, q_2, q_3), \quad z=z(q_1, q_2, q_3),$$

სადაც x, y, z წარმოადგენენ q_1, q_2, q_3 ცვლადების ცალსახა უწყვეტ ფუნქციებს.

¹ შემდეგში ყოველთვის, როცა წერტილის მოძრაობის განტოლებები ამ სახითაა მოცემული ($x=x(t), y=y(t)$), ბრტყელი მოძრაობა იქნება ნაგულისხმევი.

ვინაიდან x, y, z ცვლადებსა და q_1, q_2, q_3 ცვლადებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება, ამიტომ q_1, q_2, q_3 სიდიდეებსაც შეიძლება ვუწოდოთ $M(x, y, z)$ წერტილის კოორდინატები. ამ კოორდინატებს ეწოდება განზოგადებული კოორდინატები, ანუ ზოგადი მრუდწირული კოორდინატები.

ცხადია, წერტილის მოძრაობის განტოლებებს განზოგადებულ კოორდინატებში შემდეგი სახე ექნებათ:

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t) \quad q_3 = q_3(t). \quad (2,3)$$

ცხადია აგრეთვე, რომ ზემოხსენებული პოლარული კოორდინატები სიბრტყეზე, ცილინდრული კოორდინატები და სფერული კოორდინატები წარმოადგენენ განზოგადებული კოორდინატების კერძო სახეებს (იხ. § 8).

ამოცანები

1. ვთქვათ, დეკარტის კოორდინატებში წერტილის მოძრაობის განტოლებებია

$$x = a + b f(t), \quad y = a_1 + b_1 f(t), \quad z = a_2 + b_2 f(t),$$

სადაც a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 მუდმივებია, $f(t)$ გარკვეული ფუნქციაა. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია.

t პარამეტრის გამორიცხვით ვღებულობთ:

$$\frac{x-a}{b} = \frac{y-a_1}{b_1} = \frac{z-a_2}{b_2}.$$

ამრიგად, ტრაექტორია წარმოადგენს წრფეს, რომელიც $M(a, a_1, a_2)$ წერტილზე გადის და $\vec{B} = (b, b_1, b_2)$ ვექტორის სარალელურია.

2. წერტილის მოძრაობის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos^2 kt, \\ y &= a \sin 2kt, \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც a და k მუდმივებია. ვიპოვოთ ტრაექტორია.

(1)-ის მეორე განტოლება გვაძლევს $y = 2a \sin kt \cos kt$, ამიტომ ადვილად მივიღებთ:

$$\frac{x}{2a} + \frac{y^2}{(2a \cos kt)^2} = 1.$$

(1)-ის პირველი ტოლობის ძალით, ეს უკანასკნელი ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{x}{2a} + \frac{y^2}{2ax} = 1,$$

საიდანაც

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

ამრიგად, ტრაექტორია წარმოადგენს a რადიუსიან წრეწირს, რომელიც კოორდინატთა სათავეში გადის და ეხება y ღერძს.

3. წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოცემულია შემდეგი სახით:

$$x = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}), \quad y = \frac{a}{2} (e^{kt} - e^{-kt}), \quad (2)$$

სადაც a და k მუდმივებია. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია. (2) განტოლებებიდან, შეკრება-გამოკლებით, გვექნება:

$$e^{kt} = \frac{x+y}{a}, \quad (3)$$

$$e^{-kt} = \frac{x-y}{a}. \quad (4)$$

(3) და (4) ტოლობების გადამრავლებით ვღებულობთ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

ამრიგად, ტრაექტორია წარმოადგენს ჰიპერბოლას.

4. წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt,$$

სადაც a , ω და b მუდმივებია. ვიპოვოთ ტრაექტორია. მოძრაობის განტოლებებიდან გვექნება:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = bt. \quad (5)$$

ვინაიდან $\sin \omega t$ და $\cos \omega t$ ფუნქციების პერიოდია $\frac{2\pi}{\omega}$, ამიტომ, (5)-ის ძალით, ცხადია, რომ წერტილი მოძრაობს წრიულ ცილინდრულ ზედაპირზე ისე, რომ ერთხელ შემოვლის შემდეგ ის აიწევს $h = \frac{2\pi b}{\omega}$ სიმაღლეზე. ამრიგად, ტრაექტორია არის ხრახნწირი, რომლის ბიჯიც $\frac{2\pi b}{\omega}$ -ს ტოლია.

§ 3. წმინდილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლება. სპალარული სიჩქარე და აჩქარება

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე გაწრფევალი L წირი, რომელიც მოძრავი M წერტილის ტრაექტორიას წარმოადგენს. L წირზე ავირჩიოთ გარკვეული დადებითი მიმართულება და დავახსიათოთ მასზე M წერტილის მდებარეობა ბუნებრივი s პარამეტრით, რომლის ათვლის წერტილად მივიღოთ წირზე დაფიქსირებული რაიმე M_0 წერტილი (ნახ. 20). s პარამეტრს მივანიჭებთ დადებით მნიშვნელობას, როცა M წერტილი მდებარეობს M_0 წერტილიდან იმ მხარეს, საითაც არჩეულია წირზე დადებითი მიმართულება, წინააღმდეგ შემთხვევაში s პარამეტრს ვანიჭებთ უარყოფით მნიშვნელობას. ცხადია, რომ M წერტილის მდებარეობა L წირზე სავსებით დახასიათებულია $s = M_0 M$ ბუნებრივი პარამეტრით (რეალური ანსისით). ამიტომ ცხადია, რომ აღებული ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$s = s(t).$$

ამ განტოლებას ეწოდება წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლება.

ვინაიდან L წიკი განიხილება როგორც მოძრავი წერტილის ტრაექტორია, ამიტომ, თვით მოძრაობის ბუნებიდან გამომდინარეობს, რომ $s(t)$ ფუნქცია იქნება t ცვლადის ცალსახა, უწყვეტი ფუნქცია. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $s(t)$ ფუნქცია არის უწყვეტად წარმოებადი მეორე რიგამდე ჩათვლით.

ვთქვათ, დროის t და $t+\Delta t$ მომენტში, სადაც Δt დროის უსასრულოდ მცირე ნაზრდია, მოძრავ M წერტილს L ტრაექტორიაზე შეესაბამება ბუნებრივი პარამეტრის s და $s+\Delta s$ მნიშვნელობები (ე. ი. Δs წარმოადგენს რკალური აბსცისის ნაზრდს Δt დროში). შეფარდებას $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ეწოდება სკალარული სიჩქარე Δt დროში, ხოლო ამ შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, ეწოდება სკალარული სიჩქარე (t მომენტში). ამრიგად, თუ სკალარულ სიჩქარეს აღვნიშნავთ v -თი, განმარტების ძალით მივიღებთ:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (3,1)$$

ამრიგად, სკალარული სიჩქარე წარმოადგენს წერტილის რკალური აბსცისის (განვიღო მანძილის) დროით წარმოებულს.

თუ სკალარული სიჩქარე v მუდმივია, მაშინ მოძრაობას ეწოდება თანაბარი. ამ შემთხვევაში (3,1) ტოლობა მოგვცემს:

$$s = vt + C, \quad (3,2)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ მოცემულია $t=t_0$ მომენტისათვის $s=s_0$, მაშინ (3,2) ტოლობიდან მივიღებთ $C=s_0-vt_0$. თუ ამ მნიშვნელობას (3,2) გამოსახულებაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$s-s_0=v(t-t_0). \quad (3,3)$$

ამრიგად, თანაბარი მოძრაობის შემთხვევაში s წარმოადგენს დროის წრფივ ფუნქციას. პირიქით, თუ s წარმოადგენს t ცვლადის წრფივ ფუნქციას, მაშინ (3,3) გამოსახულების გაწარმოებით დავრწმუნდებით, რომ მოძრაობა იქნება თანაბარი.

როგორც განმარტებიდან გამომდინარეობს, სიჩქარის განზომილება იქნება:

$$[v] = L T^{-1} = \frac{L}{T},$$

სადაც L არის სიგრძის განზომილება, ხოლო T —დროის განზომილება. თუ სიგრძის ერთეულად მიღებულია სანტიმეტრი, ხოლო დროის ერთეულად სეკუნდი, მაშინ სიჩქარის განზომილება იქნება $\frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$.

თუ (3,3) ტოლობაში $t-t_0=1$ და $s-s_0=1$, მაშინ $v=1$ და, მაშასადამე, თუ დროის ერთეულში განვიღო გზა უდრის სიგრძის ერთეულს, მაშინ სიჩქარეც ტოლი იქნება ერთის. ამრიგად, სიჩქარის ერთეულად მიღებულია ისეთი თანაბრად მოძრავი წერტილის სიჩქარე, რომელიც დროის ერთეულში გადის სიგრძის ერთეულის ტოლ მანძილს.

ვთქვათ, დროის t და $t + \Delta t$ მომენტისათვის სკალარული სიჩქარე არის შე-
საბამად v და $v + \Delta v$. შეფარდებას $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ეწოდება საშუალო სკალარული
აჩქარება, ხოლო ამ შედარების ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, ეწოდება სკა-
ლარული აჩქარება (t მომენტში). თუ სკალარულ აჩქარებას w -თი აღვნიშ-
ნავთ, განმარტების ძალით, მივიღებთ:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (3,4)$$

ამრიგად, სკალარული აჩქარება წარმოადგენს სკალარული სიჩქარის წარ-
მოებულს დროით, ანუ, რაც იგივეა, რკალური აბსცისის მეორე რიგის წარ-
მოებულს დროით.

მოძრაობას ეწოდება თანაბრად ცვლადი, თუ სკალარული აჩქარე-
ბა არის მუდმივი. ვთქვათ, საწყისი ჰირობა ასეთია: როცა $t = t_0$, მაშინ $v = v_0$,
 $s = s_0$. ამ შემთხვევაში, (3,4) ტოლობიდან, ორჯერ ინტეგრებით და საწყისი
პირობების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$s = \frac{w}{2} (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + s_0. \quad (3,5)$$

პირიქით, თუ რკალური აბსცისის განოსახულებას აქვს (3,5) სახე, სადაც w ,
 v_0 , s_0 მუდმივებია, მაშინ მისი ორჯერ გაწარმოებით ვრწმუნდებით, რომ მოძ-
რაობა იქნება თანაბრად ცვლადი.

თანაბრად ცვლად მოძრაობას ეწოდება თანაბრად აჩქარებული
აღებულ მომენტში, თუ ამ მომენტში სიჩქარეს და აჩქარებას აქვთ ერთნაირი
ნიშანი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოძრაობას ეწოდება თანაბრად შენე-
ლებული.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ აჩქარების განზომილება მოიცემა
ფორმულით:

$$[w] = \frac{L}{T^2}.$$

თუ სიგრძის ერთეულად მიღებულია სანტიმეტრი, ხოლო დროის ერთეულად
სეკუნდი, მაშინ აჩქარების განზომილება იქნება $\frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}^2}$.

თუ მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის კოორ-
დინატებში:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (3,6)$$

და გვინდა ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლება, მაშინ
ვისარგებლებთ ცნობილი ფორმულით

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad (3,7)$$

საიდანაც ინტეგრებით ვიპოვით მოძრაობის ბუნებრივ განტოლებას.

5. მოძრავი წერტილი გამოდის $M_0(1, 2, 4)$ წერტილიდან $t=0$ მომენტში და მოძრაობს თანაბრად, v_0 სიჩქარით, წრფეზე, რომლის გეზის კოსინუსებია $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cos \gamma > 0$. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია, წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლება და წერტილის მოძრაობის განტოლებები.

ვინაიდან გეზის კოსინუსების კვადრატების ჯამი 1-ის ტოლია, ამიტომ $\cos \gamma = \frac{2}{3}$, და, ცხადია, ტრაექტორიის განტოლებები იქნება

$$\frac{x-1}{1} = \frac{x-2}{2} = \frac{x-4}{2}.$$

თუ ბუნებრივი პარამეტრის ათვლის წერტილად მივიღებთ M_0 წერტილს, მაშინ გვექნება

$$s = v_0 t.$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, მოძრაობის განტოლებები იქნება:

$$x = 1 + \frac{1}{3} v_0 t, \quad y = 2 + \frac{2}{3} v_0 t, \quad z = 4 + \frac{2}{3} v_0 t.$$

6. ვთქვათ, წერტილის მოძრაობის განტოლებებია $x = 4t^2$, $y = 6t^2$. ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლება, სკალარული სიჩქარე და აჩქარება.

ცხადია, ტრაექტორია წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეში გამავალ წრფეს $3x - 2y = 0$. თუ ბუნებრივი პარამეტრის ათვლის წერტილად მივიღებთ კოორდინატთა სათავეს, მაშინ გვექნება:

$$s^2 = x^2 + y^2 = 52t^4,$$

$$s = 2\sqrt{13}t^2.$$

$$v = 4\sqrt{13}t, \quad w = 4\sqrt{13}.$$

7. წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$, სადაც a , b და ω მუდმივებია. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია და სკალარული სიჩქარე.

მოძრაობის განტოლებები ასე გადაწეროთ:

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t.$$

თუ ამ განტოლებებს ავახარისხებთ კვადრატში და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ამრიგად, ტრაექტორია არის ელიფსი.

ცხადია, სკალარული სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით

$$|v| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = |\omega| \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}.$$

8. მატარებელი დამუხრუჭების დაწყებიდან მოძრაობდა თანაბრად შენელებულად და გაიარა გაჩერებამდე 200 მეტრი 40 სკუნდის განმავლობაში. ვიპოვოთ მოძრაობის w აჩქარება და განესაზღვროთ რა v_0 სიჩქარე ჰქონდა მატარებელს დამუხრუჭების დაწყების წინ.

საწყის მომენტად მივიღოთ დამუხრუჭების დაწყების მომენტი, მაშინ $t_0 = s_0 = 0$ და (3,5) ფორმულა მოგვცემს:

$$s = \frac{wt^2}{2} + v_0 t, \quad v = \frac{ds}{dt} = wt + v_0.$$

თუ ამ განტოლებებში მოცემულ პირობებს გავითვალისწინებთ, მივიღებთ

$$200 = 80w + 40v_0, \quad 40w + v_0 = 0.$$

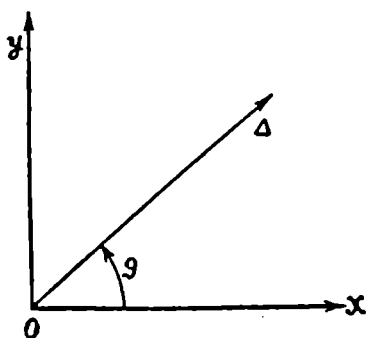
ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ

$$v_0 = 10 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}, \quad w = -\frac{1}{4} \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}^2}.$$

ამრიგად, როგორც მოსალოდნელი იყო, სიჩქარეს და აჩქარებას აქვს ერთმანეთის საწინააღმდეგო ნიშანი (მოძრაობა თანაბრად შენელებულია).

§ 4. სკალარული კუთხური სიჩქარე და აჩქარება. წრიული მოძრაობა

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე სიბრტყე, რომელზედაც არჩეულია ბრუნვის გარკვეული დადებითი მიმართულება. მაგალითად, საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულება და, ვთქვათ, ამ სიბრტყეზე მოცემულია რაიმე Ox ღერძი. განვიხილოთ O წერტილიდან გამომავალი Δ ღერძი, რომელიც აღნიშნულ სიბრტყეზე ბრუნავს და აღენიშნოთ φ -თი ის დადებითი ან უარყოფითი



ნახ. 21.

კუთხე, რომლითაც უნდა მოგვებრუნოთ Ox ღერძი ბრუნვის დადებითი ან უარყოფითი მიმართულებით, რომ ეს შეუთავსდეს Δ ღერძს (ნახ. 21). Δ ღერძის მდებარეობა საესებით განსაზღვრული იქნება, თუ ცნობილია φ კუთხე, როგორც დროის ფუნქცია, რომელსაც მობრუნების კუთხე ეწოდება. ამრიგად, Δ ღერძის ბრუნვის განტოლება ბუნებრივია ვეწოდოთ განტოლებას

$$\varphi = \varphi(t).$$

გარკვეულობისათვის, ვიგულისხმობთ, რომ φ კუთხე გაიზომება რადიანებში. ვთქვათ, დროის ორ მეზობელ t და $t + \Delta t$ მომენტში მობრუნების კუთხეებია

შესაბამის φ და $\varphi + \Delta\varphi$. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ შეფარდებას ეწოდება საშუალო სკალარული

კუთხური სიჩქარე, ხოლო მის ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$ — სკალარული კუთხური სიჩქარე. ამრიგად, თუ სკალარულ კუთხურ სიჩქარეს ω -თი აღვნიშნავთ, განმარტების ძალით, მივიღებთ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4,1)$$

თუ $\omega = \text{const}$, მაშინ ბრუნვას ეწოდება თანაბარი. ამ შემთხვევაში ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\varphi = \omega(t - t_0) + \varphi_0, \quad (4,2)$$

სადაც φ_0 მობრუნების კუთხეს აღნიშნავს საწყის $t = t_0$ მომენტში.

ვინაიდან φ კუთხე განყენებული რიცხვია, ამიტომ, ცხადია, კუთხური სიჩქარის განზომილება იქნება

$$[\omega] = \frac{1}{T}.$$

ვთქვათ, t და $t + \Delta t$ მომენტებისათვის სკალარული კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობებია შესაბამისად ω და $\omega + \Delta\omega$. შეფარდებას $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ეწოდება საშუალო სკალარული კუთხური აჩქარება, ხოლო მის ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$ — სკალარული კუთხური აჩქარება. ამრიგად, თუ სკალარულ კუთხურ აჩქარებას აღვნიშნავთ α -თი, განმარტების ძალით მივიღებთ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

თუ $\alpha = \text{const}$, მაშინ ბრუნვას ეწოდება თანაბრად ცვლადი. ამ შემთხვევაში გვექნება

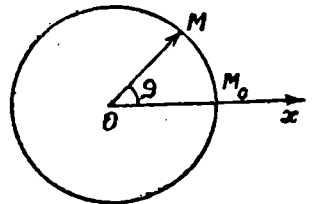
$$\varphi = \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \varphi_0, \quad (4,3)$$

სადაც φ_0 და ω_0 წარმოადგენენ მობრუნების კუთხისა და სკალარული კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობებს საწყის $t = t_0$ მომენტში.

ცხადია, კუთხური აჩქარების განზომილება იქნება

$$[\alpha] = \frac{1}{T^2}.$$

განვიხილოთ ახლა წერტილის მოძრაობა r რადიუსიან წრეწირზე. მივიღოთ აღნიშნულ წრეწირზე ბრუნვის დადებით მიმართულებად საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება და გადავლოთ წრეწირის O ცენტრზე რაიმე Ox ღერძი, რომელიც წრეწირის M_0 წერტილში გადავვიყვანო (ნახ. 22).



ნახ. 22.

ბუნებრივი პარამეტრის ათვლის წერტილად მივიღოთ M_0 წერტილი. ცხადია, მოძრავე M წერტილის მდებარეობა წრეწირზე სავსებით განისაზღვრება იმ φ კუთხით, რომელსაც \overline{OM} ვექტორი შეადგენს Ox ღერძთან¹. თუ M წერტილის შესაბამის ბუნებრივ პარამეტრს s -ით აღვნიშნავთ², მივიღებთ³

¹ φ აღნიშნავს იმ დადებით ან უარყოფით კუთხეს, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ Ox ღერძი შეიძლება ბრუნვის დადებითი ან უარყოფითი მიმართულებით, რაჟ ის შეუთავსდება OM -ს.

² თუ M წერტილი მოძრაობს წრეწირზე ბრუნვის დადებითი მიმართულებით, მაშინ s -ს ვანიჭებთ დადებით ნიშნს და ავთვლით მას M_0 წერტილიდან ბრუნვის დადებითი მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი s -ს ვანიჭებთ უარყოფით ნიშნს და ავთვლით M_0 წერტილიდან ბრუნვის უარყოფითი მიმართულებით.

³ როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, φ კუთხე გაზომილია რადიანებში.

$$s=r\varphi. \quad (4,4)$$

ვინაიდან სკალარული სიჩქარე $v = \frac{ds}{dt}$, ამიტომ (4,4) ტოლობა მოგვცემს

$$v=r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \quad (4,5)$$

ამრიგად, წრიული მოძრაობის დროს სკალარული სიჩქარე უდრის წრეწირის რადიუსისა და სკალარული კუთხური სიჩქარის ნამრავს.

(4,5) ტოლობის გაწარმოება მოგვცემს

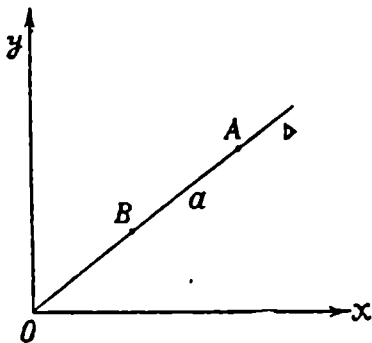
$$w=r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\alpha, \quad (4,6)$$

ე. ი. წრიული მოძრაობის დროს სკალარული აჩქარება უდრის წრეწირის რადიუსისა და სკალარული კუთხური აჩქარების ნამრავს.

ამოცანები

9. წერტილი მოძრაობს თანაბრად 2,5 მეტრ რადიუსიან წრეწირზე $9 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}$ სიჩქარით. ვიპოვოთ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

თუ ვისარგებლებთ (4,5) ფორმულით და შევიტანთ მასში $v=9 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}$ და $r=2,5\text{მ}$, მივიღებთ $\omega=3,6 \frac{1}{\text{სეკ}}$. ამრიგად, დროის ერთეულში (სეკუნდში) მოძრაობის წერტილის რადიუს-ვექტორი მობრუნდება $\frac{180}{\pi}$. 3,6 გრადუსიანი კუთხით.



ნახ. 23.

10. Oxy სიბრტყეში O წერტილის ირგვლივ მოძრაობს Δ ლერძი, რომლის A და B წერტილების სიჩქარეებია v_A და v_B (ნახ. 23). მანძილი A და B წერტილებს შორის უდრის a -ს. ვიპოვოთ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და $r=OB$ მანძილი.

(4,5) ფორმულის ძალით გვექნება:

$$v_A=(r+a)\omega, \quad v_B=r\omega.$$

ამ განტოლებებიდან ვღებულობთ:

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{a}, \quad r = \frac{v_B}{v_A - v_B} a.$$

§ 5. ვექტორული სიჩქარე და აჩქარება

ვთქვათ, L წირი წარმოადგენს მოძრაობის M წერტილის ტრაექტორიას. განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ უძრავი სისტემა და დროის t მომენტში M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ

აღნიშნოთ $r = (x, y, z)$ -ით. როგორც ვიცით (იხ. § 2), წერტილის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (5,1)$$

საიდანაც

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (5,2)$$

განვიხილოთ დროის ორი მახლობელი t და $t + \Delta t$ მნიშვნელობა. პათი შესაბამის რადიუს-ვექტორები იყოს \vec{r} და $\vec{r} + \Delta \vec{r}$, სადაც $\vec{r} + \Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t)$, ე. ი. $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ (ნახ. 24).

$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ შეფარდებას ეწოდება M წერტილის საშუალო ვექტორული

სიჩქარე, ხოლო ამ შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, ეწოდება M წერტილის ვექტორული სიჩქარე t მომენტში. თუ ვექტორულ სიჩქარეს $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ -ით აღვნიშნავთ. განმარტების ძალით მივიღებთ¹

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (5,3)$$

ცხადია, რომ მოძრავე M წერტილის ვექტორული სიჩქარე, რომელიც წარმოადგენს წერტილის რადიუს-ვექტორის წარმოებულს დროით, ტრეკტორიის მხებია M წერტილში.

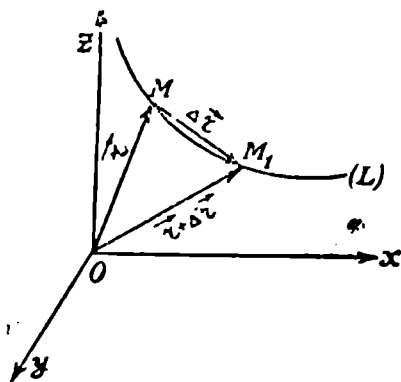
(5,3) ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (5,4)$$

როგორც აღვილი მისახვედრია, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ წარმოადგენენ კოორდინატთა ღერძებზე M წერტილის ორთოგონალურ გეგმილთა სკალარულ სიჩქარეებს. ამიტომ, (5,4) ტოლობების ძალით, ცხადია, რომ მოძრავე M წერტილის კოორდინატთა ღერძებზე ორთოგონალური გეგმილების სკალარული სიჩქარეები უდრის ამ ღერძებზე ვექტორული სიჩქარის გეგმილებს. მაგრამ, ვინაიდან წებისზეირი ღერძი შეიძლება ერთ-ერთ საკოორდინატო ღერძად დავილოთ, ამიტომ ცხადია, რომ მოძრავე M წერტილის რაიმე ღერძზე ორთოგონალური გეგმილის სკალარული სიჩქარე უდრის ამ ღერძზე ვექტორული სიჩქარის გეგმილს.

ვთქვათ, დროის ორი მახლობელი t და $t + \Delta t$ მომენტისათვის ვექტორულ სიჩქარეთა მნიშვნელობებია შესაბამისად \vec{v} და $\vec{v} + \Delta \vec{v}$, სადაც $\vec{v} + \Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t)$.

$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ შეფარდებას ეწოდება საშუალო ვექტორული აჩქარება. ხოლო ამ



ნახ. 24.

¹ იხილეთ II თავის (10,5) ფორმულა.

შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$ — ვექტორული აჩქარება. ამრიგად, თუ ვექტორულ აჩქარებას $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ -ით აღვნიშნავთ, განმარტების ძალით მივიღებთ

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (5,5)$$

თუ ამ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგვეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (5,6)$$

(5,6) ფორმულების ძალით, ისე როგორც ვექტორული სიჩქარის შემთხვევაში, აჩქარების შემთხვევაშიც დავრწმუნდებით, რომ მოძრავე M წერტილის რაიმე ღერძზე ორთოგონალური გეგმილის სკალარული აჩქარება უდრის ვექტორული აჩქარების გეგმილს ამავე ღერძზე.

ვინაიდან MM_1 რკალის სიგრძე (ნახ. 24) $(|\overline{MM_1}| = \Delta s)$ და $|\Delta r|$ ტოლფასი უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, ამიტომ, ცხადია, ვექტორული სიჩქარის სიდიდე უდრის სკალარულ სიჩქარეს სათანადო ნიშნით, ე. ი. $v = \pm \frac{ds}{dt}$. ამ გარემოებას, საზოგადოდ, ადგილი არა აქვს. აჩქარებისათვის, ე. ი. აჩქარების სიდიდე, საზოგადოდ, არ უდრის სკალარულ აჩქარებას (იხ. მომდევნო პარაგრაფი).

ვთქვათ, მოცემულია მოძრავე M წერტილის ვექტორული სიჩქარე, როგორც დროის ფუნქცია:

$$\vec{v} = \vec{f}(t), \quad (5,7)$$

ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია. ვინაიდან $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, ამიტომ (5,7) ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{f}(t) dt + \vec{C}, \quad (5,8)$$

სადაც \vec{C} ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია. ვთქვათ, მოცემულია საწყისი პირობა: როცა $t = t_0$, მაშინ $\vec{r} = \vec{r}_0$. ამ საწყისი პირობის ძალით, (5,8) ტოლობა მოგვცემს $\vec{C} = \vec{r}_0$. თუ ამ მნიშვნელობას (5,8) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(t) dt.$$

ეს უკანასკნელი ტრაექტორიის ვექტორულ განტოლებას წარმოადგენს. თუ ამ განტოლებას კოორდინატთა ღერძებზე დაეგვეგმილებთ, შეიღებთ

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f_1(t) dt, \quad y = y_0 + \int_{t_0}^t f_2(t) dt, \quad z = z_0 + \int_{t_0}^t f_3(t) dt,$$

სადაც x_0, y_0, z_0 წარმოადგენენ \vec{r}_0 ვექტორის კოორდინატებს, $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ კი $\vec{f}(t)$ ვექტორის კოორდინატებს. უკანასკნელი განტოლებები მოძრა-
ვი M წერტილის ტრაექტორიის პარამეტრული განტოლებებია.

თუ აჩქარება მოცემულია, როგორც დროის ფუნქცია:

$$\vec{w} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{\varphi}(t), \quad (5,9)$$

და საწყისი პირობებია: როცა $t = t_0$, მაშინ $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$, სადაც \vec{r}_0 და \vec{v}_0 მოცემული მუდმივი ვექტორებია, მაშინ წერტილის მოძრაობის განტოლება (ტრაექტორიის განტოლება) მიიღება (5,9) ტოლობიდან ორჯერ ინტეგრირებით და საწყისი პირობების გათვალისწინებით. ამრიგად, თუ საწყის $t = t_0$ მომენტში მოცემულია მოძრაი M წერტილის მდებარეობა და სიჩქარე, მაშინ (5,9) ტოლობიდან ტრაექტორია ცალსახად განისაზღვრება.

შემდეგში ყოველთვის, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების ქვეშ ნაგულისხმევი იქნება ვექტორული სიჩქარე და ვექტორული აჩქარება.

ვინაიდან $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, ამიტომ (5,4) ტოლობების ძალით მივიღებთ

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (5,10)$$

ამის გარდა, ცხადია, რომ

$$\cos(\vec{v}, x) = \frac{v_x}{|v|} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

(5,11)

$$\cos(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{|v|} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

$$\cos(\vec{v}, z) = \frac{v_z}{|v|} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \quad (5,12)$$

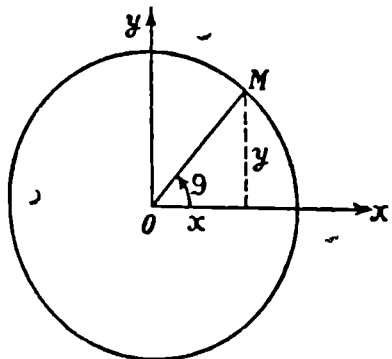
$$\cos(\vec{w}, x) = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\cos(\vec{w}, y) = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}, \quad (5,13)$$

$$\cos(\vec{w}, z) = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}.$$

ამოცანები

11. M წერტილი თანაბრად მოძრაობს r რადიუსიან წრეწირზე o კუთხური სიჩქარით (ნახ. 25). ვიპოვოთ M წერტილის ვექტორული სიჩქარე და აჩქარება და აგრეთვე სიჩქარის ჰოდოგრაფი.



ნახ. 25.

თუ საწყის $t=0$ მომენტად მივიღებთ იმ მომენტს, როცა OM ვექტორი ემთხვევა Ox ღერს, მაშინ, (4,2) ფორმულის ძალით, გვცქნება

$$\varphi = \omega t. \quad (1)$$

ცხადია აგრეთვე, რომ წერტილის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t, \quad (2)$$

საიდანაც

$$x' = -r\omega \sin \omega t, \quad y' = r\omega \cos \omega t, \quad (3)$$

$$\vec{v} = r\omega (-\sin \omega t, \cos \omega t), \quad |v| = r|\omega|.$$

(3) ტოლობების ძალით

$$x' = -r\omega^2 \cos \omega t, \quad y' = -r\omega^2 \sin \omega t, \quad (4)$$

$$\vec{w} = -r\omega^2 (\cos \omega t, \sin \omega t), \quad |\vec{w}| = r\omega^2.$$

(2) და (4) ტოლობების შედარება გვაძლევს

$$\vec{w} = -\omega^2 \vec{OM}. \quad (5)$$

მაშასადამე, აჩვენება მატობია სიჩქარის და მიმართულია O ცენტრისაკენ. თუ (3) ტოლობებს ავსახარისებთ კვადრატში და შევკრებთ, მივიღებთ

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \omega^2. \quad (6)$$

ამრიგად, სიჩქარის პოდოგრაფი არის $r|\omega|$ რადიუსიანი წრეწირი.

12. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$, სადაც a , b და ω მუდმივებია. ვიპოვოთ სიჩქარის პოდოგრაფი და აჩვენება.

გვექნება

$$x' = -a\omega \sin \omega t, \quad y' = b\omega \cos \omega t, \quad (7)$$

საიდანაც

$$\frac{x'^2}{a^2 \omega^2} + \frac{y'^2}{b^2 \omega^2} = 1. \quad (8)$$

ამრიგად, სიჩქარის პოდოგრაფი ელიფსია.

(7) ტოლობებიდან გვექნება

$$x'' = -a\omega^2 \cos \omega t, \quad y'' = -b\omega^2 \sin \omega t,$$

$$\vec{w} = -\omega^2 (a \cos \omega t, b \sin \omega t). \quad (9)$$

უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ აჩვენება მიმართულია ტრაექტორიის (ელიფსის) ცენტრისაკენ.

§ 6. აჩვენების დაშლა მხებ და ნორმალურ აჩვენებებად

ეთქვათ, როგორც წინა პარაგრაფში, L წირი წარმოადგენს მოძრაი M წერტილის ტრაექტორიას, რომელზედაც არჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულება. დავახასიათოთ M წერტილის მდებარეობა L წირზე ბუნებრივი s პარამეტრით, რომელიც ამ წირის რაიმე M_0 წერტილიდან (ნახ. 20) ისე აითვლება, როგორც § 3-ში იყო აღნიშნული. ვენაიდან M წერტილის სიჩქარე (ვექტორული სიჩქარე) მტებია ტრაექტორიისა, ამიტომ, როგორც აღვილი მისახვედრია, გვექნება

$$\vec{v} = v \vec{e}, \quad (6,1)$$

სადაც v წარმოადგენს M წერტილის სკალარულ სიჩქარეს, ხოლო \vec{e} — მტების მგზავს, რომელიც მოგეზულია იმ მხარეს, სადაც წირზე არჩეულა დადებითი მიმართულება (ე. ი. s პარამეტრის ზრდის მხარეს).

(6,1) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e} + v \frac{d\vec{e}}{dt}. \quad (6,2)$$

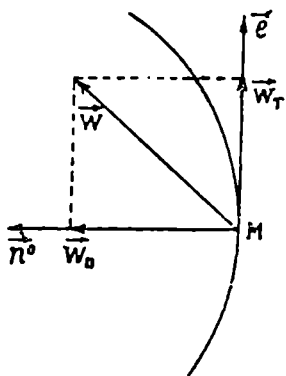
ცხადია, გვექნება

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} v,$$

როგორც II თავის § 11-ში იყო ნაჩვენები,

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{\vec{n}^0}{\rho},$$

სადაც \vec{n}^0 არის წირის MI წერტილზე გავლებული მთავარი ნორმალის მგეზავი, რომელიც სიმრუდის ცენტრისაკენ არის მოგებული, ხოლო ρ — სიმრუდის რადიუსი, ამიტომ წინა ტოლობა მოგვეცემს



$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{n}^0.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (6.2) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ (ნახ. 26).

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n. \quad (6,3)$$

სადაც

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{e}, \quad (6,4)$$

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0. \quad (6,5)$$

ნახ. 26.

(6.3) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ აჩქარება

შედგება ორი შესაკრებისაგან: $\vec{w}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{e}$ შესაკრებს, რომელიც დამთხვეულია მხებზე, ეწოდება მხები აჩქარება, მისი სიდიდე სკალარული აჩქარების ტოლია; $\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0$ შესაკრებს კი, რომელიც დამთხვეულია მთავარ ნორმალზე, ეწოდება ნორმალური აჩქარება.

ამრიგად, წერტილის აჩქარება, რომელიც წარმოადგენს მხებ და ნორმალურ აჩქარებათა ჯამს, მოთავსებულია მიმხების ბრტყეში. აქედან გამომდინარეობს, რომ აჩქარების გეგმილი ბინორმალზე ნულის ტოლია.

თუ (6.4) ტოლობას დავაგვემიღებთ მხებზე, ხოლო (6.5) ტოლობას მთავარ ნორმალზე, მივიღებთ

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (6,6)$$

ვინაიდან $\frac{dv}{dt}$ წარმოადგენს წერტილის სკალარულ აჩქარებას, ამიტომ,

(6.6) ტოლობების ძალით, ვექტორული აჩქარების სიდიდე დამთხვევა სკალარულ აჩქარებას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნორმალური აჩქარება ნულის ტოლია.

განვიხილოთ წერტილის მოძრაობა r რადიუსიან წრეწირზე. თუ ვისარგებლებთ იმ აღნიშვნებით, რომელიც § 4-ის ბოლოს გექონდა და მოვიგონებთ (4,5) ფორმულას:

$$v = r\omega,$$

მაშინ, (6,6) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$w_T = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha, \quad (6,7)$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2, \quad (6,8)$$

სადაც r წრეწირის რადიუსია, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ წარმოადგენს $O.M$ ექტორის (ნახ. 22)

ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს, α კი — კუთხურ აჩქარებას.

w_n აჩქარებას ეწოდება ცენტრისკენული აჩქარება, w_T -ს კი მხები აჩქარება.

(5,3) ფორმულის ძალით გვექნება

$$w^2 = w_T^2 + w_n^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v^2} \sqrt{w^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \quad (6,9)$$

თუ წერტილის მოძრაობის განტოლებები ცნობილია დეკარტის კოორდინატებში:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)^1,$$

მაშინ

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad (6,10)$$

$$w^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 \quad (6,11)$$

და, ცხადია, (6,9) ფორმულა მოგვცემს საშუალებას გამოვვალთ წირის სიჭრუდე აღებულ წერტილში.

ამოცანები

12. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები

$$x = \frac{1}{4} t^2 + \ln(1+t), \quad y = \frac{2}{3} t + \ln(2+t).$$

ვიპოვოთ მხები აჩქარება მოძრაობის დაწყებიდან 1 სეკუნდის შემდეგ (საწყის მომენტად მიღებულია $t=0$).

¹ ე. ი. ცნობილია წირის პარამეტრული განტოლებები.

თუ გავაწარმოებთ $v^2 = x'^2 + y'^2$ ტოლობას, მივიღებთ

$$v \frac{dv}{dt} = x' x'' + y' y'',$$

საიდანაც

$$w_T = \frac{dv}{dt} = \frac{x' x'' + y' y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (1)$$

თუ მოძრაობის განტოლებებიდან გავთავსდეთ x' , x'' , y' , y'' და შევცადოთ (1) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=1} = \frac{5}{36\sqrt{2}}.$$

14. ვიპოვოთ მხები და ნორმალური აჩქარებები, თუ წერტილის მოძრაობის განტოლებებია: $x = at$, $y = bt + ct^2$, სადაც a , b , c მუდმივებია.

მოძრაობის განტოლებებიდან გვქვია $x' = a$, $y' = b + 2ct$, $x'' = 0$, $y'' = 2c$, ამიტომ, (1) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$w_T = \frac{dv}{dt} = \frac{2c(b + 2ct)}{\sqrt{a^2 + (b + 2ct)^2}}. \quad (2)$$

თუ ვისარგებლებთ ფორმულით $v^2 = x'^2 + y'^2$, მივიღებთ

$$v = 2c.$$

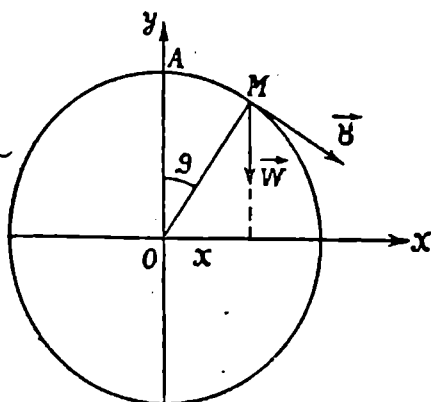
ვინაიდან $w^2 = w_T^2 + w_n^2$, ამიტომ ადვილად მივიღებთ

$$w_n^2 = w^2 - w_T^2 = \frac{4a^2c^2}{a^2 + (b + 2ct)^2}, \quad (3)$$

საიდანაც

$$w_n = \frac{2ac}{\sqrt{a^2 + (b + 2ct)^2}}. \quad (4)$$

15. ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს r რადიუსიან წრეწირზე ისე, რომ აჩქარება ყოველთვის x ღერძის მართობია (ნახ. 27). მოცემულია, რომ A მდებარეობს სათვლის M წერტილის სიჩქარე \vec{v}_0 (\vec{v}_0 , ცხადია, პარალელურია Ox ღერძის). აღვნიშნოთ θ -თი ის კუთხე, რომელსაც \vec{OM} ვექტორი შეადგენს Oy ღერძთან, და ვიპოვოთ M წერტილის ვექტორული აჩქარების სიდიდე, როგორც θ -ს ფუნქცია.



ნახ. 27.

ვინაიდან, პირობის ძალით, გვბო, $\vec{w} = 0$, ამიტომ

$$x_s = x' = \text{const}. \quad (5)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ A წერტილში სიჩქარე უდრის v_0 -ს, მივიღებთ $x_s = v_0$. გარდა ამისა, ცხადია, რომ

საიდანაც

$$v \cos \varphi = v_x = v_0$$

$$v = \frac{v_0}{\cos \varphi} \quad (6)$$

ადვილი მისახვედია ავრეთვე, რომ

$$w_n = w \cos \varphi = \frac{v^2}{r} \quad (7)$$

საიდანაც

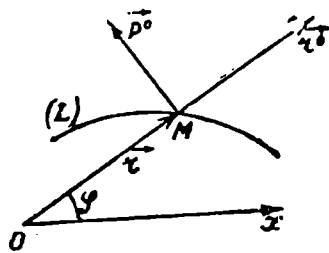
$$w = \frac{v^3}{r \cos \varphi} = \frac{v_0^3}{r \cos^3 \varphi} \quad (8)$$

§ 7. სიჩქარისა და აჩქარების დაშლა რადიალურ და ტანგენციალურ მდებარეობაზე

განვიხილოთ რაიმე სიბრტყე, რომელზედაც არჩეულია ბრუნვის გარკვეული დადებითი მიმართულება (მაგალითად, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება) და დავუწვდით, რომ წერტილის ტრაექტორია წარმოადგენს ამ სიბრტყეზე მდებარე გარკვეულ L წირს. ავიღოთ ზემოხსენებულ სიბრტყეზე პოლარული Ox ღერძი და დავახასიათოთ მოძრავი M წერტილის მდებარეობა L წირზე φ და r პოლარული კოორდინატებით. φ არის ის დადებითი ან უარყოფითი კუთხე, რომლითაც უნდა მოვებრუნოთ Ox ღერძი შესაბამისად ბრუნვის დადებითი ან უარყოფითი მიმართულებით, რომ ის დაემთხვეს OM ვექტორს, r წარმოადგენს $OM = r$ ვექტორის სიგრძეს (ნახ. 28).

ცხადია, რომ M წერტილის პოლარული კოორდინატები r , φ წარმოადგენს t პარამეტრის (დროის) გარკვეულ ფუნქციებს: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

აღვნიშნოთ \vec{r}^0 -ით r ვექტორის მგზავი და გავვლოთ M წერტილზე ორი ერთმეორეს მართობი ღერძი, რომელთაგან ერთი მათგანის მგზავია \vec{r}^0 , ხოლო მეორის \vec{p}^0 , ამასთან \vec{p}^0 ვექტორი მიიღება \vec{r}^0 ვექტორისაგან, თუ ამ უკანასკნელს მოვებრუნებთ M წერტილის ირგვლივ სიბრტყეზე არჩეული ბრუნვის დადებითი მიმართულებით



ნახ. 28.

$\frac{\pi}{2}$ კუთხით. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ სიჩქარისა და აჩქარების მდგენელები ამ ორ ღერძზე, რომელთაც პოლარული საკოორდინატო ღერძები ეწოდება.

M წერტილის რადიუს-ვექტორი \vec{r} , ცხადია, ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\vec{r} = r \vec{r}^0 \quad (7,1)$$

თუ ამ ტოლობას გავაწარმოებთ დროით, მივიღებთ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + r \frac{d\vec{r}^0}{dt} \quad (7,2)$$

მივცეთ φ პოლარულ კუთხეს უსასრულოდ მცირე $\Delta\varphi$ ნაზრდი და \vec{r}^0 -ის შესაბამის ნაზრდი აღვნიშნოთ $\Delta\vec{r}^0$ -ით. ვინაიდან, როგორც აღვიღო მისახვედრია, $|\Delta\vec{r}^0|$ და $|\Delta\varphi|$ ტოლფასი უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, ამიტომ $|d\vec{r}^0| = |\Delta\vec{r}^0|$. თუ, ამას გარდა, მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\frac{d\vec{r}^0}{dt} \perp \vec{r}^0$, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\frac{d\vec{r}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0. \quad (7,3)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (7,2) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0. \quad (7,4)$$

ამრიგად, სიჩქარე შედგება ორი შესაკრებისაგან, რომელთაგან ერთი დამოუკიდებელია \vec{r}^0 -ის მიმართულებაზე, მეორე კი \vec{p}^0 -ის მიმართულებაზე. თუ პირველ შესაკრებს აღვნიშნავთ \vec{v}_r -ით, მეორეს კი \vec{v}_p -ით, მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p,$$

სადაც

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0, \quad (7,5)$$

$$\vec{v}_p = r \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0. \quad (7,6)$$

\vec{v}_r -ს ეწოდება სიჩქარის რადიალური მდგენელი, ხოლო \vec{v}_p -ს ტრანსვერსალური მდგენელი.

ვინაიდან $\vec{v}_r \perp \vec{v}_p$, ამიტომ ცხადია

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad (7,7)$$

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}. \quad (7,8)$$

(7,4) ტოლობის გაწარმოებით ზევ-ღებთ

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{r}^0 + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{r}^0}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0 + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{p}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{p}^0}{dt}. \quad (7,9)$$

(7,3) ტოლობის ანალოგიურად მიიღება, რომ

$$\frac{d\vec{p}^0}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{r}^0. \quad (7,10)$$

თუ (7,3) და (7,10) მნიშვნელობებს (7,9) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{w} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{r}^0 + \left[r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right] \vec{p}^0. \quad (7,11)$$

ამრიგად, ისე როგორც სიჩქარე, აჩქარებაც შედგება ორი შესაქრებისაგან, რომელთაგან ერთი \vec{r}^0 ვექტორის მიმართულებას ემთხვევა, მეორე კი — \vec{p}^0 -ის მიმართულებას. თუ ამ შესაქრებებს აღვნიშნავთ შესაბამად \vec{w}_r -ით და \vec{w}_p -ით, მივიღებთ

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_p,$$

სადაც

$$\vec{w}_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{r}^0, \quad (7,12)$$

$$\vec{w}_p = \left[r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right] \vec{p}^0. \quad (7,13)$$

\vec{w}_r -ს ეწოდება აჩქარების რადიალური მდგენელი, ხოლო \vec{w}_p -ს — ტრანსვერსალური მდგენელი.

ცხადია, რომ

$$w^2 = w_r^2 + w_p^2,$$

სიჩქარისა და აჩქარების გამოთვლა ზემონახვენები წესით განსაკუთრებით ხელსაყრელია მაშინ, როცა წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში.

თუ (7,5) და (7,12) ტოლობებს დავაგეგმილებთ \vec{r}^0 ვექტორის მიმართულებაზე, ხოლო (7,6) და (7,13) ტოლობებს \vec{p}^0 -ის მიმართულებაზე, მივიღებთ

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_p = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad (7,14)$$

$$w_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad (7,15)$$

$$w_p = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (7,16)$$

განვიხილოთ ორი უცანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი წევრები ცალ-ცალკე. $\frac{d^2 r}{dt^2}$ წარმოადგენს წერტილის რადიუს-ვექტორის გასწვრივ მოძრაობის შესაბამ აჩქარებას (რადიუს-ვექტორის გასწვრივ წერტილის ფარდობითი მოძრაობის აჩქარებას). $r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = r\omega^2$, ცხადია, წარმოადგენს აჩქარების ნორმალურ მდგენელს იმ შემთხვევაში, როცა წერტილი r რადიუსიან წრეწირზე მოძრაობს (იხ. (6,8) ფორმულა). ამ აჩქარებას ცენტრისკენული აჩქარება ეწოდება. $r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = r\dot{\omega}$ წარმოადგენს r რადიუსიან წრე-

წირზე მოძრაობის დროს მხებ აჩქარებას. $2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$ სიდიდეს ეწოდება დამატებითი აჩქარება, ანუ კარიოლისის აჩქარება, რომელსაც დაწვრილებით შევისწავლით ამ თავის ბოლოს. (7,16) ტოლობა, ცხადია, კიდევ ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$w_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (7,17)$$

როგორც შემდეგში ვნახავთ $r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ წარმოადგენს ე. წ. გარკვეულ დართობულ (სექტორულ) სიჩქარეს (იხ. § 9).

§ 8. სიჩქარისა და აჩქარების გვეგმილში ზოგად მრუდწირულ დინამიკაში

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა $Oxyz$ სისტემა და, ვთქვათ, ამ სისტემაში წერტილის x, y, z კოორდინატებსა და რაიმე q_1, q_2, q_3 პარამეტრებს შორის ადგილი აქვს წყნდევნი სისტემის ურთიერთკავშირსა დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \\ y &= \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \\ z &= \varphi_3(q_1, q_2, q_3), \end{aligned} \quad (8,1)$$

სადანაც

$$\begin{aligned} q_1 &= \psi_1(x, y, z), \\ q_2 &= \psi_2(x, y, z), \\ q_3 &= \psi_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (8,2)$$

ამასთან φ_x და ψ_x ($x=1, 2, 3$) თავიანთი არგუმენტების ცალსახა, უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია მცირე რიგამდე ჩათვლით. ცხადია, წერტილის მდებარეობას x, y, z კოორდინატების გარდა განსაზღვრავს q_1, q_2, q_3 კოორდინატებიც, რომელთაც ჩვენ ზემოთ (იხ. § 2) განზოგადებული კოორდინატები, ანუ ზოგადი მრუდწირული კოორდინატები გუწოდებთ.

ვთქვათ, q_1, q_2, q_3 კოორდინატებიდან ერთ-ერთს მივანიჭებთ მუდმივი მნიშვნელობა, მაგალითად, $q_1 = C_1$, სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. მაშინ (8,2) ტოლობებიდან პირველი მოგვცემს

$$\psi_1(x, y, z) = C_1.$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, წარმოადგენს გარკვეულ ფართეულთა ოჯახს (C_1 მუდმივ პარამეტრზე დამოკიდებულს). ამ ფართეულებს, რომელთა გასწვრივ იცვლება მხოლოდ q_2 და q_3 კოორდინატები, ვუწოდებთ (q_2, q_3) საკოორდინატო ფართეულებს. ასევე განსაზღვრება (q_1, q_2) და (q_1, q_3) საკოორდინატო ფართეულები. ვინაიდან x, y, z და q_1, q_2, q_3 სიდიდეებს შორის ადგილი აქვს ურთიერთკავშირსა დამოკიდებულებას, ამიტომ სივრცის ყოველ წერტილზე გაივლის სამი და მხოლოდ სამი საკოორდინატო დარღვეული, ანრიგად, სივრცის ყოველი წერტილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სამი საკოორდინატო ფართეულის თანაკვეთა.

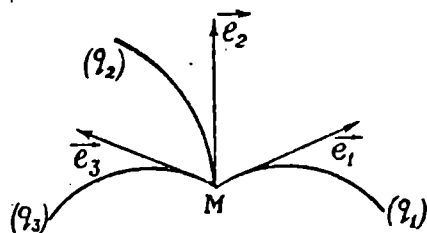
ვთქვათ, q_1 ნებისმიერად იცვლება, ხოლო $q_2 = C_2, q_3 = C_3$, სადაც C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია. მაშინ (8,1) ტოლობები მოგვცემს

$$x = \varphi_1(q_1, C_2, C_3), \quad y = \varphi_2(q_1, C_2, C_3), \quad z = \varphi_3(q_1, C_2, C_3). \quad (8,3)$$

ეს განტოლებები C_2, C_3 ნუღმივ პარამეტრებზე დამოკიდებულ წერათა ოჯახის განტოლებებია. ამ წირებს, რომელთა გასწვრივ იცვლება მხოლოდ q_1 პარამეტრი,

მეტრი, ეწოდება (q_1) საკოორდინატო წირები. ზემოხსენებული ცალსახობის ძალით, სივრცის ყოველ წერტილზე ერთი და მხოლოდ ერთი წირი გაივლის ხსენებულ ოჯახიდან. ცხადია, (q_1) საკოორდინატო წირები წარმოადგენენ (q_1, q_2) და (q_1, q_3) საკოორდინატო დართეულების თანაკვეთას. ასევე განისაზღვრება (q_2) და (q_3) საკოორდინატო წირები. ცხადია, რომ სივრცის ყოველ წერტილზე გაივლის სამი და მხოლოდ სამი საკოორდინატო წირი, რომელნიც აღნიშნულ წერტილზე გამავალ საკოორდინატო დართეულთა თანაკვეთას წარმოადგენენ.

ავიღოთ სივრცის რაიმე M წერტილი და გავავლოთ ამ წერტილზე (q_1) (q_2) და (q_3) საკოორდინატო წირები, მივიღებთ ე. წ. მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემას. აღნიშნულ წირთა მგეზავები იყუ შესაბამად $\vec{e}_1 =$



ნახ. 29.

$= (e_{1x}, e_{1y}, e_{1z})$, $\vec{e}_2 = (e_{2x}, e_{2y}, e_{2z})$, $\vec{e}_3 = (e_{3x}, e_{3y}, e_{3z})$. ვიგულისხმობთ, რომ ეს ვექტორები მოგებულია სათანადო წირზე განზოგადებული კოორდინატის ზრდის მხარეს. ასე, მაგალითად, \vec{e}_1 მოგებულია იმ მხარეს, საითაც (q_1) წირზე იზრდება q_1 კოორდინატი. M წერტილზე გავლებულ ღერძებს, რომელთა მგეზავებია \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 , ეწოდება ზოგადი მრუდწირული ღერძები (ნახ. 29).

თუ ზემოხსენებული მგეზავები ურთიერთმართობია, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ აღებული მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურ სისტემას წარმოადგენს. ამრიგად, ორთოგონალური სისტემისათვის

$$(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) = 0.$$

მოვძებნოთ ახლა \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 მგეზავები. ამისათვის აღვნიშნოთ M წერტილის რადიუს-ვექტორი $Oxyz$ სისტემის O სათავის მიმართ \vec{r} -ით და განვიხილოთ წერტილი, რომელიც მოძრაობს ერთ-ერთ (q_α) წირზე იმ მხარეს, საითაც მასზე q_α პარამეტრი იზრდება. ვინაიდან

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} q'_3$$

და (q_α) წირის გასწვრივ მხოლოდ q_α პარამეტრი იცვლება, ამიტომ (q_α) წირზე მოძრავი წერტილის სიჩქარე იქნება

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha.$$

ამის შემდეგ, ცხადია, რომ

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , წარმოადგენენ x , y , z ღერძების მგეზავებს, მაშინ მივიღებთ

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)^2}} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

ანუ, (8,1) ტოლობებსაა ძალით,

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial q_\alpha} \vec{i} + \frac{\partial p_2}{\partial q_\alpha} \vec{j} + \frac{\partial p_3}{\partial q_\alpha} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_\alpha}\right)^2}}. \quad (8,4)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით,

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial p_1}{\partial q_\alpha}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial p_2}{\partial q_\alpha}, \quad e_{\alpha\gamma} = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial p_3}{\partial q_\alpha} \quad (8,5)$$

($\alpha = 1, 2, 3$),

სადაც

$$a_{\alpha\alpha} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_\alpha}\right)^2. \quad (8,6)$$

წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ მიერ განხილული M წერტილი წარმოადგენს რაიმე L წირზე ზოტარე წერტილს და ვიცავით მისი სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები ზოგად ჩრუდწირულ ღერძებზე (ე. ი. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ვეძებთ მისი მიმართულებაზე). თუ \vec{v} სიჩქარისა და \vec{w} აჩქარების გეგმილებს ხსენებულ ღერძებზე აღვნიშნავთ შესაბამად v_1, v_2, v_3 -ით და w_1, w_2, w_3 -ით, ცხადია, მივიღებთ

$$v_\alpha = (\vec{v} \cdot \vec{e}_\alpha) = v_x e_{\alpha x} + v_y e_{\alpha y} + v_z e_{\alpha z},$$

$$w_\alpha = (\vec{w} \cdot \vec{e}_\alpha) = w_x e_{\alpha x} + w_y e_{\alpha y} + w_z e_{\alpha z}.$$

(8,5) ტოლობების ძალით, უკანასკნელი ტოლობები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left(v_x \frac{\partial p_1}{\partial q_\alpha} + v_y \frac{\partial p_2}{\partial q_\alpha} + v_z \frac{\partial p_3}{\partial q_\alpha} \right), \quad (8,7)$$

$$w_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left(w_x \frac{\partial p_1}{\partial q_\alpha} + w_y \frac{\partial p_2}{\partial q_\alpha} + w_z \frac{\partial p_3}{\partial q_\alpha} \right). \quad (8,8)$$

(8,1) ტოლობების გაწარმოებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial p_1}{\partial q_3} q'_3, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial p_2}{\partial q_3} q'_3, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial p_3}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial p_3}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial p_3}{\partial q_3} q'_3. \end{aligned} \quad (8,9)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (8,7) ტოლობაში შევიტანთ, ადვილად მივიღებთ

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} (a_{\alpha 1} q'_1 + a_{\alpha 2} q'_2 + a_{\alpha 3} q'_3), \quad (8,10)$$

სადაც

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_\beta} \quad (8,11)$$

($\alpha, \beta = 1, 2, 3$).

(8,11) ტოლობებიდან, როცა $\alpha = \beta$, მიიღება $a_{\alpha\alpha}$ მნიშვნელობა, რომელიც (8,6) ტოლობით იყო წარმოდგენილი.

განვიხილოთ ახლა ფუნქცია¹

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ (8,9) მნიშვნელობებს, ადვილად მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\beta} q'_\alpha q'_\beta, \quad (8,12)$$

სადაც $a_{\alpha\beta}$ კოეფიციენტები (8,11) ფორმულებით არიან განსაზღვრული. უკანასკნელი ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = a_{\alpha 1} q'_1 + a_{\alpha 2} q'_2 + a_{\alpha 3} q'_3,$$

ამიტომ (8,10) ტოლობები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (8,13)$$

ამრიგად, სიჩქარის გვეგმილები ზოგად მრუდწირულ ღერძებზე (8,13) ფორმულებით გამოითვლება, სადაც T ფუნქცია განსაზღვრულია (8,12) ტოლობით. ვიპოვოთ ახლა აჩქარების გვეგმილები აღნიშნულ ღერძებზე.

(8,8) ტოლობები, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} w_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\alpha} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_\alpha} \frac{dv_z}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} v_x + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\alpha} v_y + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_\alpha} v_z \right) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left(v_x \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} + v_y \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\alpha} + v_z \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_\alpha} \right). \end{aligned}$$

¹ როგორც წერტილის დინამიკაში ვნახეთ, T წარმოადგენს ერთეული მასის მქონე მატერიალური წერტილის კინეტიკურ ენერგიას (ცოცხალ ძალას).

საიდანაც

$$\frac{\partial v_x}{\partial q_x} = \frac{\partial}{\partial q_x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_x \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_x \partial q_2} q'_2 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_x \partial q_3} q'_3$$

(8.16)

გეორგ მხრივ, ცხადია,

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_x} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_1 \partial q_x} q'_1 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_2 \partial q_x} q'_2 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_3 \partial q_x} q'_3$$

(8.17)

ვინაიდან $\varphi_1(q_1, q_2, q_3)$ ფუნქციას აქვს მეორე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები, ამიტომ, ზეარცის დებულების ძალით,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_x \partial q_\beta} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_\beta \partial q_x} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

ამის შედეგ (8.16) და (8.17) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს (8.15) ტოლობის სამართლიანობაში.

საესებით ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

დინამიკური ტოლობების ძალით, ცხადია, რომ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} + v_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial q_\alpha}$$

($\alpha = 1, 2, 3$).

ამ ტოლობების (8.14) შედეგად,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial v_\alpha}{\partial q_\alpha}$$

$$w_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (8,18)$$

ამრიგად, აქსარების გეგმილები ზოგად მრუდწირულ ღერძებზე გამოითვლება (8,18) ფორმულებით.

ვთქვათ აქლა, აღებულ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურ სისტემას წარმოადგენს, ე. ი.

$$(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = 0, \text{ როცა } \alpha \neq \beta. \quad (8,19)$$

(8,4) ტოლობების ძალით

$$(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}}} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}}} a_{\alpha\beta},$$

ამიტომ (8,19) პირობა მოგვცემს

$$a_{\alpha\beta} = 0, \text{ როცა } \alpha \neq \beta. \quad (8,20)$$

ამრიგად, აღებული მრუდწირული სისტემა წარმოადგენს ორთოგონალურ სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია (8,20) პირობა. განსახილველ შემთხვევაში (8,12) ტოლობა მოგვცემს.

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (a_{11} q_1'^2 + a_{22} q_2'^2 + a_{33} q_3'^2). \quad (8,21)$$

პოლარული, ცილინდრული და სფერული კოორდინატები წარმოადგენენ განზოგადებული კოორდინატების კერძო შემთხვევას.

განვიხილოთ ჯერ ცილინდრული კოორდინატების შემთხვევა.

ვთქვათ, M წერტილის ცილინდრული კოორდინატებია r, φ, z , ანასთან r, φ წარმოადგენენ xOy სიბრტყეზე M წერტილის m ორთოგონალური გეგმის პოლარულ კოორდინატებს, $z = mM$ (ნახ. 30).

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

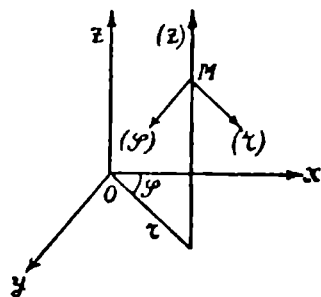
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (8,22)$$

მივიღოთ, რომ $q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z$.

(r) წირები, ცხადია, იქნება Oz ღერძის მართობი წრეები, (φ) წირები— xOy სიბრტყის პარალელური წრეწირები, (z) წირები კი იქნება Oz ღერძის პარალელური წრეები.

(8,22) ტოლობების ძალით, ადვილად მიიღება, რომ

$$T = \frac{1}{2} (r'^2 + r^2 \varphi'^2 + z'^2).$$



ნახ. 30.

ამრიგად, ცილინდრული მრუდწირული სისტემა ორთოგონალურ სისტემას წარმოადგენს, რაც გეომეტრიულადაც ცხადია.

(8,13) ფორმულების ძალით, მივიღებთ

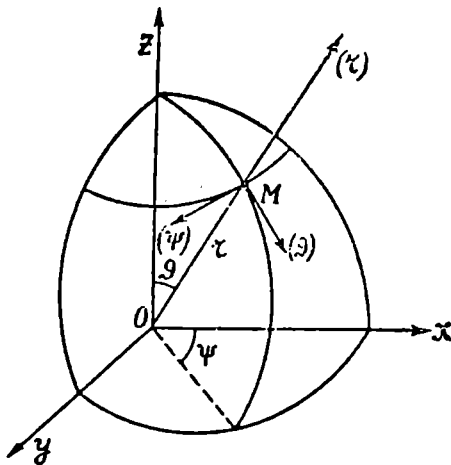
$$v_1 = v_r = r', \quad v_2 = v_\varphi = r\varphi', \quad v_3 = v_z = z'. \quad (8,23)$$

(8,18) ფორმულების ძალით კი გვექნება

$$w_1 = w_r = r'' - r\varphi'^2, \quad w_2 = w_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\varphi'), \quad w_3 = w_z = z''. \quad (8,24)$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ პოლარული მრუდწირული სისტემა სიბრტყეზე ორთოგონალური სისტემაა. ამ შემთხვევაში, პოლარულ ღერძებზე სიჩქარისა და აჩქარების გვეზილების მისაღებად, (8,23) და (8,24) ფორმულებში უნდა ჩავსვათ $z=0$. როგორც მოსალოდნელი იყო, მივიღებთ წინა პარაგრაფში გამოყვანილ (7,14), (7,15) და (7,16) ფორმულებს.

განვიხილოთ ახლა სფერული კოორდინატების შემთხვევა. აღვნიშნოთ M წერტილის სფერული კოორდინატები r , ϑ და ψ -თი (ნახ. 31):



ნახ. 31.

$r = OM$, ϑ არის კუთხე \overline{OM} ვექტორსა და Oz ღერძს შორის, ხოლო ψ არის კუთხე, რომელსაც M წერტილზე და Oz ღერძზე გამავალი სიბრტყე ადგენს xOz სიბრტყესთან.

მივიღოთ, რომ $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \psi$. როგორც ადვილი მისახვედრია, კოორდინატთა (r) წირები იქნება O წერტილზე გამავალი სხივები, (ϑ) წირები — მერიდიანები M წერტილზე გამავალი სფეროსი, რომლის ცენტრიც ემთხვევა O წერტილს; (ψ) წირები — ხსენებული სფეროს პარალელები.

თუ M წერტილის დეკარტის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x , y , z -ით, მივიღებთ

$$x = r \sin \vartheta \cos \psi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \psi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (8,25)$$

ამ ფორმულების ძალით, ადვილად მივიღებთ

$$2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta, \quad (8,26)$$

საიდანაც ცხადია, რომ სფერული მრუდწირული სისტემა ორთოგონალურ სისტემას წარმოადგენს, ამასთან განსახილველ შემთხვევაში

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = r^2, \quad a_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

(8,13) და (8,18) ფორმულების ძალით, ვღებულობთ

$$v_1 = v_r = r', \quad v_2 = v_\vartheta = r\dot{\vartheta}, \quad v_3 = v_\psi = r\dot{\psi} \sin \vartheta, \quad (8,27)$$

$$w_1 = w_r = r'' - r(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \varphi),$$

$$w_2 = w_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) - r \dot{\psi}^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (8,28)$$

$$w_3 = w_\psi = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\psi} \sin^2 \varphi).$$

ამოცანები

16. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში

$$r = at, \quad \varphi = bt, \quad (1)$$

სადაც a და b მუდმივებია. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია, აგრეთვე, სიჩქარის და აჩქარების რადიალური და ტრანსვერსალური მდგენელები.

(1) განტოლებებიდან t -ს განოჩიცივით მივიღებთ

$$\varphi = \frac{b}{a} r.$$

ამრიგად, ტრაექტორია არის არქიმედის ხვია.

(7,14), (7,15) და (7,16) ფორმულების გამოყენებით ვღებულობთ

$$v_r = a, \quad v_\varphi = abt, \quad v^2 = a^2(1 + b^2 t^2),$$

$$w_r = -ab^2 t, \quad w_\varphi = 2ab, \quad w^2 = a^2 b^2(4 + b^2 t^2).$$

17. ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს r რადიუსიან წრეწირზე. ვიპოვოთ სიჩქარის და აჩქარების რადიალური და ტრანსვერსალური მდგენელები.

ცხადია, წერტილის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$r = \text{const}, \quad \varphi = \varphi(t).$$

ადვილად მივიღებთ

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega,$$

$$w_r = -r\omega^2, \quad w_\varphi = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\alpha,$$

სადაც ω კუთხური სიჩქარეა, ხოლო α —კუთხური აჩქარება.

18. მოძრავი წერტილი შემოწერს ლემნისკატას, რომლის განტოლებაც არის $r = a \sqrt{\cos 2\varphi}$. პოლარული კუთხე φ დროზე შემდეგნაირად არის დამოკიდებული: $\varphi = kt$, სადაც k მუდმივია. ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარის სიდიდე.

ცხადია, წერტილის მოძრაობის განტოლებებს პოლარულ კოორდინატებში ექნება სახე

$$r = a \sqrt{\cos 2kt}, \quad \varphi = kt.$$

ადვილად მივიღებთ

$$v_r = -\frac{ak \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad v_\varphi = ak \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad v = \frac{ak}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

19. ვთქვათ, წერტილის სიჩქარის მიმართულება რადიუს-ვექტორთან შეადგენს $\varphi = \frac{\pi}{6} t$ კუთხეს, ხოლო მისი სიდიდე ტოლია $4 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}$. ვიპოვოთ წერტილის

ტილის ტრაექტორია პოლარულ კოორდინატებში, თუ $t=0$ საწყის მომენტში $r=0$, $\varphi=0$.

როგორც ადვილი მასახეურია,

$$v_r = 4 \cos \frac{\pi}{6} t, \quad v_\varphi = 4 \sin \frac{\pi}{6} t.$$

ვინაიდან

$$\frac{dr}{dt} = v_r \text{ და } r \frac{d\varphi}{dt} = v_\varphi, \text{ ამატომ გვექნება}$$

$$\frac{dr}{dt} = 4 \cos \frac{\pi}{6} t, \quad r \frac{d\varphi}{dt} = 4 \sin \frac{\pi}{6} t.$$

ამ განტოლებებიდან საწყისი პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$r = \frac{24}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} t, \quad \varphi = \frac{\pi}{6} t.$$

t პარამეტრის გამორიცხვით გვექნება

$$r = \frac{24}{\pi} \sin \varphi. \quad (2)$$

ცხადია, ადვილი აქვს ტოლობენს

$$x = r \cos \varphi = \frac{24}{\pi} \sin \varphi \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = \frac{24}{\pi} \sin^2 \varphi.$$

φ კუთხის გამორიცხვით ვღებულობთ

$$x^2 + y^2 - \frac{24}{\pi} y = 0.$$

ეს უკანასკნელი ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$x^2 + \left(y - \frac{12}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{12}{\pi}\right)^2. \quad (3)$$

ამრიგად, ტრაექტორია პოლარულ კოორდინატებში მოიცემა (2) განტოლებით. (3) ტოლობის ძალით, ცხადია, ტრაექტორია წარმოადგენს წრეწირს, რომლის რადიუსიც ტოლია $\frac{12}{\pi}$ ზეტრის, მისი ცენტრი ზოთავსებულია Oy

ღერაზე და ის სათავეში ეხება Ox ღერძს.

25. მოცემულია მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში

$$r = ae^{kt}, \quad \varphi = bt.$$

ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია, აგრეთვე სიჩქარისა და აჩქარების რადიალური და ტრანსვერსალური მდგენელები.

t პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ

$$r = ae^{\frac{k}{b}\varphi}.$$

და მაშასადამე, ტრაექტორია არის ლოგარიფმული ხეია. მარტივი გამოთვლებით ვღებულობთ:

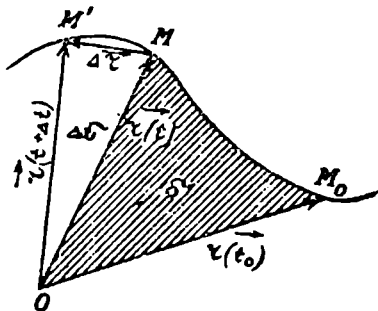
$$v_r = ake^{kt}, \quad v_\varphi = abe^{kt},$$

$$w_r = ae^{kt}(k^2 - b^2), \quad w_\varphi = 2abke^{kt}.$$

ვთქვათ, წერტილის მოძრაობის განტოლება მოცემულია შემდეგი სახით:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

სადაც $\vec{r} = \overline{OM}$ აღნიშნავს M წერტილის რადიუს-ვექტორს $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის სათაგის მიმართ. ვთქვათ, ტრაექტორიაზე არჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულება და საწყის $t = t_0$ მომენტში მოცემული წერტილი ემთხვევა ტრაექტორიის M_0 წერტილს. როცა M წერტილი, დაწყებული M_0 წერტილიდან, მოძრაობს ტრაექტორიაზე, მისი $\vec{r}(t)$ რადიუს-ვექტორი შემოწერს გარკვეულ კონუსურ ფართეულს, რომლის მინიმალურ წირსაც წერტილის ტრაექტორია წარმოადგენს. აღვნიშნოთ σ -თი ფართობი კონუსური ფართეულისა, რომელიც $\vec{r}(t_0)$, $\vec{r}(t)$ რადიუს-ვექტორებით და წერტილის ტრაექტორიის M_0M რკალით არის შემოსაზღვრული (ნახ.32). აღვნიშნულ ფართობს მივანიჭებთ დადებით ნიშანს, როცა წერტილი ტრაექტორიაზე მოძრაობს დადებითი მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში — უარყოფით ნიშანს. ცხადია, σ დროის გარკვეულ ფუნქციას წარმოადგენს:



ნახ. 32.

$$\sigma = \sigma(t).$$

მივცეთ t -ს უსასრულოდ მცირე Δt ნაზრდი და ზემოაღნიშნული ფართობისა და რადიუს-ვექტორის ნაზრდები აღვნიშნოთ შესაბამისად $\Delta \sigma$ -თი და $\Delta \vec{r}$ -ით. შეფარდებას $\frac{\Delta \sigma}{\Delta t}$ ეწოდება M წერტილის საშუალო სკალარული ფართობული სიჩქარე O წერტილის მიმართ, ხოლო ამ შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$. ეწოდება M წერტილის სკალარული ფართობული სიჩქარე O წერტილის მიმართ. ამრიგად, განმარტების თანახმად, ზემოაღნიშნული ფართობის წარმოებული დროით $\frac{d\sigma}{dt}$ წარმოადგენს წერტილის ფართობულ სიჩქარეს.

განვიხილოთ $\Delta \sigma$ ვექტორი, რომელიც შემდეგი ტოლობით არის განსაზღვრული:

$$\Delta \vec{\sigma} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \Delta \vec{r}]. \quad (9,1)$$

ცხადია, ამ ვექტორის სიგრძე წარმოადგენს OMM' სამკუთხედის ფართობს. $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ ვექტორს, რომელიც წარმოადგენს $\frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta t}$ შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, ეწოდება M წერტილის ვექტორული ფართობული სიჩქარე O წერტილის მიმართ.

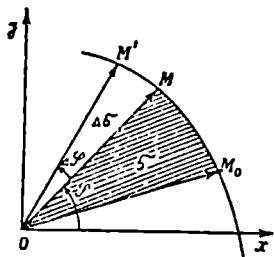
(9,1) ტოლობის ძალით, ფართობული სიჩქარისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$2 \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{r} \cdot \vec{v}]. \quad (9,2)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ვექტორის სიგრძე (ვექტორული ფართობული სიჩქარის სიდიდე) სკალარული ფართობული სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლია. ფართობული სიჩქარე, ცხადია, დამოკიდებულია O წერტილის მდებარეობაზე. (9,1) ტოლობის ძალით, ადვილად მივიღებთ აგრეთვე, რომ $\frac{d\sigma}{dt}$ მართობია $d\sigma$ ფართობით ელემენტის.

(9,2) ტოლობა გვარწმუნებს შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. მოძრავი M წერტილის სიჩქარის მომენტი რაიმე O წერტილის მიმართ უდრის გაორკეცებულ ვექტორულ ფართობულ სიჩქარეს ამავე წერტილის მიმართ.



ნახ. 33.

როგორც ადვილი მისახვედრია, წერტილის ფართობული სიჩქარის რომელიმე დერძზე დაგეგმვით შესაბამის ფართობი გეგმილდება ამ დერძის ზარბაზნის სიბრტყეში, ამიტომ (9,2) ტოლობის კოორდინატა დერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ

$$2 \frac{d\sigma_{yz}}{dt} = yv_z - zv_y = yz' - zy',$$

$$2 \frac{d\sigma_{zx}}{dt} = zv_x - xv_z = zx' - xz', \quad (9,3)$$

$$2 \frac{d\sigma_{xy}}{dt} = xv_y - yv_x = xy' - yx',$$

სადაც $\frac{d\sigma_{yz}}{dt}$ წარმოადგენს yOz სიბრტყეზე M წერტილის ორთოგონალური გეგმილის სკალარულ ფართობულ სიჩქარეს O წერტილის მიმართ. ანალოგიური მნიშვნელობა აქვთ $\frac{d\sigma_{zx}}{dt}$ და $\frac{d\sigma_{xy}}{dt}$ გეგმილებს.

ვთქვათ, წერტილის ტრაექტორია წარმოადგენს ბრტყელ წირს, რომელიც მოთავსებულია xOy სიბრტყეში (ნახ. 33).

აღვნიშნოთ M წერტილის პოლარული კოორდინატები r -ით და φ -ით. ვინაიდან O, M, M' სამკუთხედის ფართობი საკმარისად დიდი სიზუსტით ტოლია $\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$, ამიტომ, ცხადია, რომ

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9,4)$$

ეს ფორმულა იძლევა საშუალებას, ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში, სკალარული ფართობული სიჩქარე გამოვსახოთ პოლარულ კოორდინატებში.

(7,17) ფორმულის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$w_p = \frac{2}{r} \frac{d^2\sigma}{dt^2}, \quad (9,5)$$

სადაც w_p წარმოადგენს აჩქარების ტრანსვერსალურ მდგენელს.

$\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ -ს ეწოდება ფართობული აჩქარება.

ამოცანები

21. OA წრფეზე, რომელიც ბრუნავს O წერტილის გარშემო, მოძრაობს M წერტილი შემდეგი წესით: $OM=at$, სადაც a მუდმივია. ვიპოვოთ M წერტილის ტრაექტორია, თუ ცნობილია, რომ O წერტილის გარშემო OA წრფე ისე ბრუნავს, რომ M წერტილის ფართობული სიჩქარე $\frac{C}{2}$ მუდმივის ტოლია.

(9,4) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$-\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{2}, \quad (1)$$

სადაც $r=OM=at$. (1) ტოლობის ინტეგრებით ვდებულობთ

$$\varphi = -\frac{C}{a^2 t} + C_1,$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. ვთქვათ, საწყისი პირობები ასეთია: როცა $t=t_0$, მაშინ $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0=0$. ამ პირობების გამოყენებით ადვილად მივიღებთ

$$\varphi = \frac{C}{a} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right).$$

ამრიგად, წერტილის ტრაექტორია ჰიპერბოლურ ხეიას წარმოადგენს.

22. წერტილი მოძრაობს ლოგარითმულ ხეიაზე $r=ae^{k\varphi}$ ისე, რომ მისი ფართობული სიჩქარე უდრის $\frac{C}{2}$ მუდმივს. ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში.

(9,4) ფორმულის ძალით ვდებულობთ

$$a^2 e^{2k\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

საიდანაც ინტეგრებით

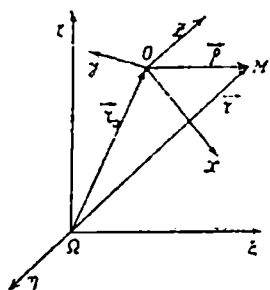
$$\frac{1}{2k} e^{2k\varphi} = \frac{C}{a^2} t + C_1,$$

ამასთან C_1 ნებისმიერი მუდმივია. ვთქვათ, საწყისი პირობა ასეთია: როცა $t=0$, მაშინ $\varphi=0$. მივიღებთ $C_1 = \frac{1}{2k}$,

$$\varphi = \frac{1}{k} \ln \sqrt{\frac{2kC}{a^2} t + 1},$$

$$r = ae^{\frac{1}{k} \ln \sqrt{\frac{2kC}{a^2} t + 1}}.$$

განვიხილოთ კოორდინატთა $Ox\eta z$ და $Oxyz$ სისტემები. $Ox\eta z$ სისტემასთან უძრავად დაკავშირებული წერტილთა უცვლადი სისტემა აღვნიშნოთ (Σ) თი, ხოლო $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემასთან უძრავად დაკავშირებული წერტილთა უცვლადი სისტემა — (S)-ით. აჩვენებ, (Σ) და (S) საფარდი სისტემები წარმოდგენილი გვაქვს როგორც მყარი სხეულები. ცხადია, (S) სისტემის მოძრაობა (Σ -ს მიმართ სავსებით დახასიათდება $Oxyz$ სისტემის მოძრაობით $Ox\eta z$ სისტემის მიმართ (ნახ. 34). აქ (S) სისტემა უძრავია (Σ) ს მიმართ, მაშინ ცხადია, რომ ორივე სისტემა ერთსა და იმავე საფარდ სისტემას წარმოადგენს, ხოლო აქ (S) სისტემა მოძრაობს (Σ) ს მიმართ, მაშინ წერტილის მოძრაობა ამ სისტემების მიმართ სხვადასხვა იქნება.



ნახ. 34.

ჩვენი მიზანია შევსწავლოთ ერთი და იგივე M წერტილის მოძრაობა სხვადასხვა $Ox\eta z$ და $Oxyz$ სისტემის მიმართ.

ძირითად საფარდ სისტემად მივიღოთ (Σ) სისტემა და აჩვენებთ მას უძრავი სისტემა ვუწოდოთ, ხოლო (S) სისტემას — მოძრავი სისტემა. ცხადია, აქ ცნობილია M წერტილის მოძრაობა (S) სისტემის მიმართ და (S) სისტემის მოძრაობა (Σ) ს მიმართ, მაშინ ცნობილი იქნება M წერტილის მოძრაობა (Σ) სისტემის მიმართაც.

(S) სისტემის მოძრაობას (Σ) სისტემის მიმართ ($Oxyz$ სისტემის მოძრაობას $Ox\eta z$ სისტემის მიმართ) ვუწოდოთ წარმტანი მოძრაობა. M წერტილის მოძრაობას (Σ) სისტემის მიმართ ($Ox\eta z$ სისტემის მიმართ) აბსოლუტური მოძრაობა ვუწოდოთ, ტრეკტორიას ამ სისტემაში — აბსოლუტური ტრეკტორია, სიჩქარეს და აჩქარებას — აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება. M წერტილის მოძრაობას (S) მოძრავი სისტემის მიმართ ($Oxyz$ სისტემის მიმართ) ვუწოდოთ ფარდობითი მოძრაობა, სიჩქარეს და აჩქარებას ამ სისტემაში — ფარდობითი სიჩქარე და ფარდობითი აჩქარება.

განვსაზღვროთ ახლა ე. წ. წარმტანი სიჩქარე და აჩქარება. M წერტილის წარმტანი სიჩქარე (აჩქარება) ეწოდება მოძრავი (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარეს (აჩქარებას), რომელზედაც აღებულ მომენტში მოძრავი M წერტილი იმყოფება. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ M წერტილის წარმტანი სიჩქარე (აჩქარება) იქნებოდა ამ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე (აჩქარება, რომ ის (S) სისტემაში უძრავი ყოფილიყო.

აღვნიშნოთ \vec{v}_a -თი M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, \vec{v}_r -ით — ფარდობითი სიჩქარე, \vec{v}_s -თი — წარმტანი სიჩქარე. დავამტკიცოთ, რომ

$$\vec{v}_a = \vec{v}_s + \vec{v}_r. \quad (10,1)$$

აღვნიშნოთ M წერტილის რადიუს-ვექტორი \vec{R} და O წერტილების მიმართ შესაბამედ \vec{r} -ით და \vec{r}_0 -თი, ხოლო O წერტილის რადიუს-ვექტორი \vec{R} -ს მიმართ \vec{r}_0 -ით. ცხადია, გვექნება

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{p}. \quad (10,2)$$

უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოება დროთი მოგვეცემს:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (10,3)$$

სადაც \vec{v}_0 წარმოადგენს O წერტილის აბსოლუტურ სიჩქარეს. ცხადია,

$$\vec{\rho} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (10,4)$$

სადაც \vec{i} , \vec{j} და \vec{k} წარმოადგენენ x , y და z ღერძების მგეზავებს, x , y , z წარმოადგენენ M წერტილის კოორდინატებს $Oxyz$ სისტემაში. ვინაიდან, განსახილველ შემთხვევაში, საზოგადოდ, იცვლება, როგორც x , y , z , ისე \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , ამიტომ (10,4) ტოლობის დროთი გაწარმოება მოგვეცემს:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევითანთ (10,3) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (10,5)$$

როგორც აღვილი მისახვედრია,

$$\vec{v}_r = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (10,6)$$

თუ დავუშვებთ, რომ M წერტილი უძრავია (S) სისტემის მიმართ და გავითვალისწინებთ, რომ ამ შემთხვევისათვის $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, მაშინ, წარმტანი სიჩქარის განმარტების ძალით. მივიღებთ:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (10,7)$$

თუ (10,6) და (10,7) მნიშვნელობებს შევითანთ (10,5) ტოლობაში, დავრწმუნდებით (10,1) ტოლობის სამართლიანობაში. ამრიგად, აბსოლუტური სიჩქარე უდრის წარმტანის და ფარდობითი სიჩქარეების ჯამს. ამ კანონს, როჩელსაჲ სიჩქარეთა შეკრების კანონი ეწოდება, საზოგადოდ აღვილი არა აქვს აჩქარებებისათვის, ე. ი. აბსოლუტური აჩქარება საზოგადოდ არ წარმოადგენს წარმტან და ფარდობით აჩქარებათა ჯამს.

ვთქვათ, (S) სისტემა ისე მოძრაობს, რომ x , y , z ღერძების მგეზავები უცვლელი რჩება. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ (S) სისტემა (Σ)-ს მიმართ გადატანით მოძრაობს (წარმტანი მოძრაობა გადატანითია). (10,1) ტოლობის გაწარმოება მოგვეცემს:

$$-\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt},$$

ანუ

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \vec{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (10,8)$$

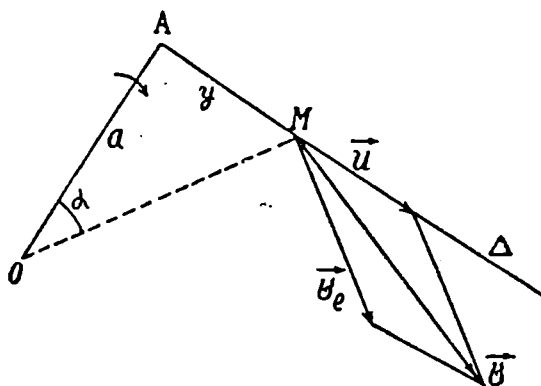
მაგრამ, ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, ამიტომ როგორც ადვილი მისახვედრია, $\frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{w}_s$ და (10,8) ტოლობა მოგვცემს:

$$\vec{w}_u = \vec{w}_s + \vec{w}_r. \quad (10,9)$$

ამრიგად, როცა წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, მაშინ აბსოლუტური აჩქარება უდრის წარმტან და ფარდობით აჩქარებათა ჯამს.

ამოცანები

23. მუდმივსივრცის $OA = a$ ღეროს A ბოლოზე მძვავრებულია მისი მართობი Δ ღერო (ნახ. 35). OA ღერო ბრუნავს O წერტილის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. OA და Δ ღერო რჩება ერთსა და იმავე უძრავ სიბრტყეზე. Δ ღეროზე მოძრაობს M წერტილი, რომლის სიჩქარეც ამ ღერძის მიმართ (ფარდობითი სიჩქარე) უდრის u -ს. ვიპოვოთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე.



ნახ. 35.

(10,1) ფორმულის ძალით, M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე იქნება

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_s.$$

წარმტანი სიჩქარის განმარტების თანახმად, \vec{v}_s იქნებოდა M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, რომ ის Δ ღერძზე უძრავი ყოფილიყო. ამიტომ, ცხადია,

$$|\vec{v}_s| = r\omega,$$

სადაც

$$r = |OM| \text{ და } \vec{v}_s \perp OM.$$

ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$|\vec{v}| = \sqrt{u^2 + v_s^2 + 2|u||v_s|\cos\alpha}, \quad (1)$$

სადაც α არის კუთხე \vec{u} და \vec{v}_s სიჩქარეებს შორის.

მაგრამ ცხადია, რომ

$$v_s^2 = r^2\omega^2 = (a^2 + y^2)\omega^2, \quad \cos\alpha = \frac{a}{r},$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (1) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$|v| = \sqrt{(u + aw)^2 + \omega^2 y^2}.$$

24. მივიღოთ (S) სისტემად პოლარული (r) ლერძი, რომელიც ბრუნავს O წერტილის გარშემო (ნახ. 28) და, სიჩქარეთა შეკრების (10,1) ფორმულის გამოყენებით, ვიპოვოთ სიჩქარის რადიალური და ტრანსვერსალური მდგენელები.

ფარდობითი მოძრაობა ჩვენს შემთხვევაში იქნება (r) ლერძის გასწვრივ მოძრაობა, ამიტომ ფარდობითი სიჩქარე (r) ლერძზეა დამთხვეული და მისი სიდიდე იქნება $\frac{dr}{dt} \left(v_r = \frac{dr}{dt} \right)$. ცხადია, M წერტილის წარმტანი სიჩქარე ის სიჩქარეა, რომელიც ექნებოდა M წერტილს, რომ ის (r) ლერძზე უძრავი ყოფილიყო, ე. ი., რომ ის მოძრაობდეს r რადიუსიან წრეწირზე. ნათქვამის ძალით ცხადია, რომ წარმტანი სიჩქარე მართლაც (r) ლერძის და $v_s = v_r = r \frac{d\varphi}{dt}$. ამის შემდეგ ცხადია, რომ აბსოლუტური სიჩქარე \vec{v} ასე წარმოიდგინება:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0 + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^\perp.$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ის შედეგები, რომელნიც § 7-ში სხვა გზით გვეკონდა მიღებული.

გ ა ნ ა ჯ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

მყარი სხეულის ქინემატიკა

§ 11. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები

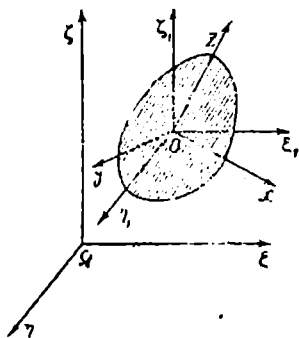
როგორც უკვე იყო აღნიშნული (იხ. თავი I § 1) მყარი სხეული ეწოდება მატერიალურ წერტილთა უცვლად სისტემას (ე. ი. ისეთ სისტემას, რომლის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება). ცხადია, მყარი სხეულის მდებარეობას განსაზღვრავს მისი ისეთი სამი M_1, M_2, M_3 წერტილის მდებარეობა, რომელნიც ერთ წრფეზე არ არიან მოთავსებული. M_1, M_2, M_3 წერტილების მდებარეობა განისაზღვრება 9 კოორდინატით, რომელნიც დამოუკიდებელნი ვერ იქნებიან, რადგან ხსენებული წერტილები მყარი სხეულის წერტილებია და ამიტომ მათ შორის მანძილი არ იცვლება:

$$M_2 M_3 = \text{const}, \quad M_3 M_1 = \text{const}, \quad M_1 M_2 = \text{const}.$$

ამრიგად, ზემოხსენებული 9 კოორდინატი დაკავშირებულია ერთმანეთთან სამი დამოკიდებულებით და, მაშასადამე, თუ სხეული არ ემორჩილება ბმას, ე. ი. მისი მოძრაობა არ არის შეზღუდული რაიმე გარეშე გეომეტრიული პირობით, მაშინ მათ შორის დამოუკიდებელი იქნება 6. იმ დამოუკიდებელ პარამეტრთა რიცხვს, რომელნიც განსაზღვრავენ სხეულის მდებარეობას დროის ყოველ მომენტში, ეწოდება აღებული სხეულის თავისუფლების ხარისხი. ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სხეული არ ემორჩილება ბმას (თავისუფალია), მაშინ მისი თავისუფლების ხარისხი 6-ის ტოლია. თუ მატერიალური

წერტილი ბმას არ ემორჩილება, მაშინ მისი თავისუფლების ხარისხი 3-ის ტოლია. თუ მატერიალური წერტილის მოძრაობა ზეზღუდულია ისე, რომ ის იძულებულია ყოველთვის მოთავსდეს ცუცხრის რაიონში ფართულზე ან წირზე, მაშინ მისი თავისუფლების ხარისხი შესაბამისად 2-ის ან 1-ის ტოლია.

განხილეთ ახლა რა სახით შეიძლება იყოს მოცემული ზემოხსენებული 6 დამოუკიდებელი პარამეტრი. ამისათვის განვიხილოთ კოორდინატთა $O\xi\eta\zeta$ სისტემა და სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა (ნახ. 36). განვიხილოთ აგრეთვე კოორდინატთა $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ სისტემა, რომლის სათავე $Oxyz$ სისტემის სათავეს ემთხვევა და ღერძები პარალელურია უძრავი საკოორდინატო ღერძების. ამ სისტემას დამხმარე სისტემა ვუწოდოთ. ცხადია, რომ სხეულის მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში განსაზღვრული იქნება, თუ ცნობილია დროის ყოველ მომენტში O წერტილის მდებარეობა და $Oxyz$ სისტემის მდებარეობა $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ დამხმარე სისტემის მიმართ.



ნახ. 36.

ცხადია აგრეთვე, რომ O წერტილის მდებარეობა უძრავი სისტემის მიმართ განისაზღვრება მისი ξ_0, η_0, ζ_0 კოორდინატებით, ხოლო $Oxyz$ სისტემის მდებარეობა დამხმარე სისტემის მიმართ, როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდანაა ცნობილი, შეიძლება განისაზღვროს სამი დამოუკიდებელი პარამეტრით. ხსენებულ სამ დამოუკიდებელ პარამეტრად შეიძლება მივიღოთ ეილერის φ, ψ, θ კუთხეები. ამრიგად, სხეულის მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში ცნობილი იქნება, თუ ცნობილია $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \varphi, \psi, \theta$ სიდიდეები, როგორც დროს ფუნქციები:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0(t), \quad \eta_0 = \eta_0(t), \quad \zeta_0 = \zeta_0(t), \\ \varphi &= \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t). \end{aligned} \quad (11,1)$$

ამ განტოლებებს მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები ეწოდება.

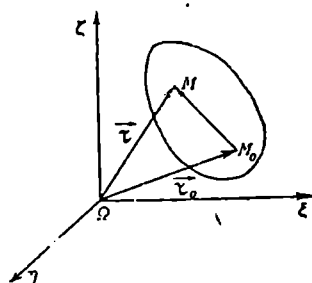
მყარი სხეულის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მისი ნებისმიერი ორი წერტილის სიჩქარეთა გეგმილები ამ წერტილების შემაერთებელ წრფეზე ტოლია.

მართლაც, ავიღოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი M_0 და M წერტილები და აღვნიშნოთ მათი რადიუს-ვექტორები \vec{r}_0 წერტილის მიმართ შესაბამისად \vec{r}_0 -ით და \vec{r} -ით. (ნახ. 37). ცხადია, გვექნება

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{M_0M}.$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{M_0M}}{dt}. \quad (11,2)$$



ნახ. 37.

მაგრამ, ვინაიდან M_0 და M მყარი სხეულის წერტილებია, ამიტომ $\overline{M_0 M}$ ვექტორის სიგრძე მუდმივია და, მაშასადამე, $-\frac{dM_0 M}{dt}$ მართობია $\overline{M_0 M}$ ვექტორის. თუ ამას გავითვალისწინებთ და (11,2) ტოლობას დავაგვემიღებთ $\overline{M_0 M}$ ვექტორზე, დავრწმუნდებით ნათქვამის სამართლიანობაში.

სანამ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის შესწავლას შევუდგებოდეთ, შევისწავლოთ მყარი სხეულის მოძრაობის რამდენიმე მარტივი შემთხვევა.

§ 12. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

ამბობენ, რომ მყარი სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას, თუ ამ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული ყოველი წრფე სხეულის მოძრაობის დროს რჩება თავისი თავის პარალელური. განვიხილოთ კოორდინატთა $O\xi\eta\zeta$ უძრავი სისტემა და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა, ამასთან ვიგულისხმობთ, რომ საწყის მომენტში Ox, Oy, Oz ღერძები პარალელურია შესაბამის $O\xi, O\eta, O\zeta$ ღერძების. რადგან ვგულისხმობთ, რომ სხეული გადატანით მოძრაობს, ამიტომ Ox, Oy, Oz ღერძები ყოველთვის აპარალელური იქნება უძრავი საკოორდინატო ღერძების (ნახ. 38). აქედან ცხადია, რომ განსასილველ შემთხვევაში მყარი სხეულის მდებარეობა სავსებით იქნება განსაზღვრული O წერტილის ξ_0, η_0, ζ_0 კოორდინატებით, ამიტომ სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებებს ექნება სახე (11,1) განტოლებები:

$$\xi_0 = \xi_0(t), \eta_0 = \eta_0(t), \zeta_0 = \zeta_0(t).$$

შემონათქვამიდან ცხადია, რომ გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი სამის ტოლია.

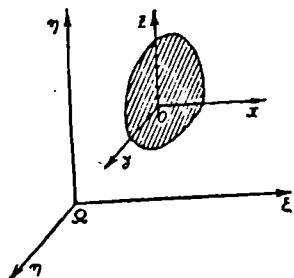
თუ მოცემულია მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებები, მაშინ მყარი სხეულის ნებისმიერი $M(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოიცემა კოორდინატთა გარდაქმნის შემდეგი ფორმულებით:

$$\xi = \xi_0 + x, \eta = \eta_0 + y, \zeta = \zeta_0 + z,$$

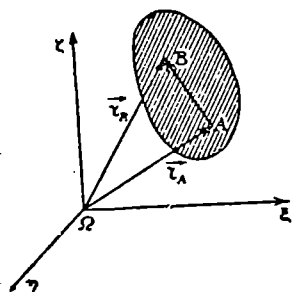
სადაც x, y, z არის M წერტილის კოორდინატები $Oxyz$ სისტემაში (x, y, z მუდმივებია).

დავამტკიცოთ ახლა, რომ გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში მყარი სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე და აჩქარება აქვს.

მართლაც, განვიხილოთ მყარი სხეულის ორი ნებისმიერი A და B წერტილი. მათი რადიუს-ვექტორი Ω წერტილის მიმართ იყოს \vec{r}_A და \vec{r}_B (ნახ. 39). ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას



ნახ. 38.



ნახ. 39.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}, \quad (12,1)$$

საიდანაც, გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt},$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\vec{AB}}{dt}. \quad (12,2)$$

მაგრამ, ვინაიდან A და B მყარი სხეულის წერტილებია, ამიტომ $|\vec{AB}| = \text{const.}$ ამის გარდა, გადატანითი მოძრაობის განმარტების ძალით, \vec{AB} ვექტორის გეზიც არ იცვლება, მაშასადამე, $\vec{AB} = \overrightarrow{\text{const}}$ და $\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$. უკანასკნელი ტოლობის ძალით (12,2) ტოლობა მოგვეცემს

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

საიდანაც გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\vec{w}_A = \vec{w}_B.$$

ამით ზემონათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ პირიქით, თუ მყარი სხეულის ორ ნებისმიერ წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს, მაშინ სხეული გადატანით მოძრაობს.

მართლაც, (12,1) ტოლობის გაწარმოება მოგვეცემს

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\vec{AB}}{dt},$$

მაგრამ, პირობის ძალით $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, ამიტომ $\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$, ე. ი. $\vec{AB} = \overrightarrow{\text{const}}$. ეს უკანასკნელი ამტკიცებს, რომ სხეული გადატანით მოძრაობს.

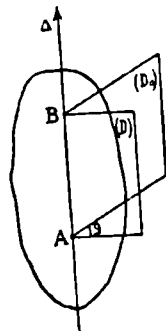
ყოველივე ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა საეცებით დახასიათდება მისი ერთ-ერთი წერტილის მოძრაობით.

ვინაიდან გადატანითი მოძრაობის დროს მყარი სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე და აჩქარება აქვს, ამიტომ ამ შემთხვევაში შეიძლება ვილაპარაკოთ სხეულის სიჩქარეზე და აჩქარებაზე. საზოგადოდ კი სხეულის სიჩქარეზე და აჩქარებაზე ლაპარაკი არ შეიძლება, ვინაიდან სხეულის სხვადასხვა წერტილს სხვადასხვა სიჩქარე და აჩქარება შეიძლება ჰქონდეს.

§ 13. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

ვთქვათ, მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი ორი A და B წერტილი უძრავი რჩება. მაშინ უძრავი იქნება მყარი სხეულის ყველა წერტილი, რომელიც A და B წერტილების შემაერთებელ წრფეზე მდებარეობს, ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, აღნიშნულ წრფეზე მდებარე მყარი სხეულის ორ წერტილს შორის მანძილი არ იქნებოდა მუდმივი. მყარი სხეულის ასეთ მოძ-

რაობას ეწოდება ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო (A და B წერტილებზე გამავალი ღერძის გარშემო), რომელსაც Δ -თი აღვნიშნავთ. მივანიჭოთ ამ ღერძს გარკვეული გეზი და წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომელიც მოძრაობას უყურებს იმ მხრიდან, საითაც Δ ღერძია მოგებული. ჩვენ ვიტყვით, რომ წყარი სხეული ბრუნავს Δ ღერძის გარშემო დადებითი მიმართულებით, თუ ხსენებული დამკვირვებლისათვის ბრუნვა ხდება მარცხნიდან მარჯვნივ, ე. ი. საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (მარცხენა ხრახნის მიხედვით). განვიხილოთ Δ ღერძზე გამავალი რაიმე უძრავი (D_0) სიბრტყე და ამავე ღერძზე გამავალი, მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული (D) სიბრტყე. ამ ორ სიბრტყეს შორის კუთხე აღვნიშნოთ φ -თი (ნახ. 40). φ იმ დადებით ან უარყოფით კუთხეს აღვნიშნავს, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ (D_0) სიბრტყე ბრუნვის დადებით ან უარყოფით მიმართულებით, რამაც ის შეუთავსდეს (D) სიბრტყეს. ცხადია, სხეულის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება φ კუთხით და, მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში, სხეულის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია, ამასთან სხეულის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე



ნახ. 40.

$$\varphi = \varphi(t).$$

განვიხილოთ ახლა $\vec{\omega}$ ვექტორი, რომელიც შემდეგი პირობებით არის განსაზღვრული:

- 1) ამ ვექტორის სიგრძე სკალარული კუთხური სიჩქარის სიდიდის ტოლია,
- 2) ის ემთხვევა ბრუნვის Δ ღერძს,
- 3) მოგებულია ისე, რომ დამკვირვებლისათვის, რომელიც მოძრაობას ამ ვექტორის ბოლოდან უყურებს, სხეულის ბრუნვა ხდება დადებითი მიმართულებით (საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით).

შემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\omega}$ სრიალა ვექტორია. ამ ვექტორის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ეწოდება.

განვიხილოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილი. მანძილი ამ წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე აღვნიშნოთ ρ -თი. ვინაიდან M წერტილი და Δ ღერძი მყარ სხეულთან უძრავად არის დაკავშირებული, ამიტომ, ცხადია, M წერტილის ტრაექტორია იქნება წრეწირი, რომლის რადიუსი არის ρ და რომლის ცენტრიც ბრუნვის ღერძზეა მოთავსებული. ამრიგად, სხეულის ყოველი წერტილის ტრაექტორია წრეწირის წარმოდგენს. ცხადია, რომ M წერტილის სკალარული სიჩქარე იქნება

$$v = \rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho \omega,$$

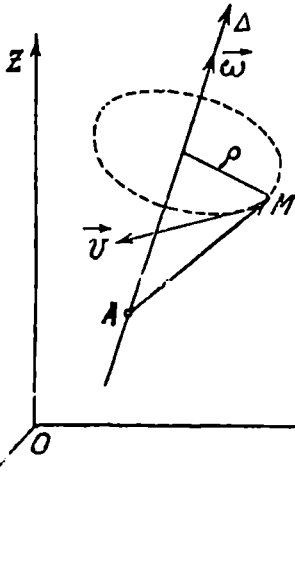
ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, M წერტილის ვექტორული სიჩქარე წარმოიდგინება ფორმულით

$$\vec{v} = \text{მომ}_M \vec{\omega}. \quad (13,1)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\vec{\omega}$ ვექტორი მოდებულია A წერტილზე (ნახ. 41), მაშინ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{r} = [\vec{MA} \cdot \vec{\omega}] = [\vec{\omega} \cdot \vec{AM}]. \quad (13,2)$$

თუ ახლა ავიღებთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემას და აღვნიშნავთ A წერტილის კოორდინატებს x_0, y_0, z_0 -ით, ხოლო M წერტილის კოორდინატებს x, y, z -ით და (13,2) ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ



$$\begin{aligned} v_x &= q(z-z_0) - r(y-y_0), \\ v_y &= r(x-x_0) - p(z-z_0), \\ v_z &= p(y-y_0) - q(x-x_0), \end{aligned} \quad (13,3)$$

სადაც p, q, r წარმოადგენენ $\vec{\omega}$ ვექტორის კოორდინატებს.

თუ ახლა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემას ისე ავიღებთ, რომ ბრუნვის Δ ღერძი გადიოდეს ამ სისტემის სათავეში (O წერტილში) და ვიგულისხმებთ, რომ $\vec{\omega}$ სრიალა ვექტორი მოდებულა O წერტილში (რაც ყოველთვის განხორციელდება $\vec{\omega}$ ვექტორის გასრიალებით ფუძის გასწვრივ), მაშინ (13,2) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}], \quad (13,4)$$

სადაც \vec{r} აღნიშნავს სხეულის M წერტილის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ. კოორდინატთა ღერძებზე (13,4) ტოლობის დაგეგმილება მოგვცემს

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry, \\ v_y &= rx - pz, \\ v_z &= py - qx. \end{aligned} \quad (13,5)$$

თუ ბრუნვის ღერძი Oz ღერძის პარალელურია, მაშინ $p = q = 0, r = \omega$ და (13,3) ტოლობების ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega(y-y_0), \\ v_y &= \omega(x-x_0), \\ v_z &= 0, \end{aligned} \quad (13,6)$$

თუ ბრუნვის ღერძი Ox ღერძს ემთხვევა, მაშინ (13,5) ტოლობები მოგვცემს

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega y, \\ v_y &= \omega x, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \quad (13,7)$$

ამოცანები

25. ცილინდრი, რომლის ფუძის დიამეტრი ტოლია 13 სმ-ის, თანაბრად ბრუნავს ცენტრალური ღერძის გარშემო. ცილინდრის ერთ-ერთ წერტილზე დამაგრებულია ძაფი. ვიპოვოთ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ 3 წუთში ცილინდრზე დაეხვევა 44.107 მ სიგრძის ძაფი.

ვინაიდან ცილინდრის განივკვეთში მიღებული წრეწირის სიგრძე ტოლია 13π სმ-ის, ამიტომ ბრუნთა რიცხვი წუთში (მინუტში) იქნება

$$n = \frac{4410,7}{13\pi \cdot 3} \approx 36.$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ თუ მობრუნების კუთხე გაზომილია რადიანებში, მაშინ

$$\omega = \frac{36 \cdot 2\pi}{60} \frac{1}{\text{სეკ}} \approx 3,77 \frac{1}{\text{სეკ}}.$$

26. ბორბალი, რომლის რადიუსი ტოლია 1,25 მ-ის, წუთში ასრულებს 48 ბრუნს. ვიპოვოთ ბორბლის კუთხური და სკალარული სიჩქარეები.

ცხადია,

$$\omega = \frac{48 \cdot 2\pi}{60} \frac{1}{\text{სეკ}} = 5,024 \frac{1}{\text{სეკ}},$$

$$v = \frac{1,25 \cdot 48 \cdot 2\pi}{60} \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}} = 6,28 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}.$$

27. სხეულის ბრუნვის განტოლებაა

$$\varphi = a \sin kt,$$

სადაც a და k მუდმივებია. ვიპოვოთ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\overline{\omega}$ და გამოვარკვიოთ როგორ მოძრაობს $\overline{\omega}$ ვექტორის ბოლო წერტილი, თუ მისი სათავე დამაგრებულია.

ცხადია, $\overline{\omega}$ ემთხვევა ბრუნვის ღერძს და მისი სიდიდე მოიცემა ფორმულით

$$\omega = ak \cos kt.$$

ამიტომ $\overline{\omega}$ ვექტორის ბოლო წერტილის აბსცისა ბრუნვის ღერძზე იქნება $ak \cos kt$ და, მაშასადამე, ბრუნვის ღერძზე სხენებული ბოლო წერტილის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$s = ak \cos kt.$$

28. ვთქვათ, ბრუნვის ღერძი გადის კოორდინატთა სათავეში და ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, რომლის სიდიდე ტოლია a სი, ადგენს კოორდინატთა ღერძებთან α , β , γ კუთხეებს. ვიპოვოთ სხეულის $M(x, y, z)$ წერტილის სიჩქარე.

ცხადია, გვექნება

$$p = a \cos \alpha, \quad q = a \cos \beta, \quad r = a \cos \gamma.$$

ამიტომ, (13,5) ფორმულების ძალით, მივიღებთ

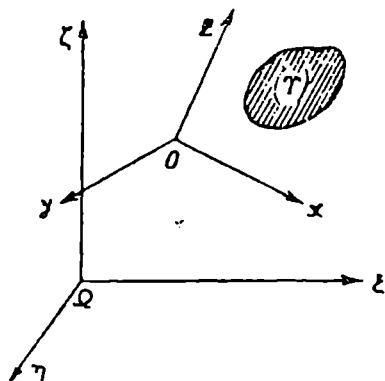
$$v_x = za \cos \beta - ya \cos \gamma,$$

$$v_y = xa \cos \gamma - za \cos \alpha,$$

$$v_z = ya \cos \alpha - xa \cos \beta.$$

§ 14. შედგენილი მოძრაობა

ისე როგორც § 10-ში, $\Omega x y z$ და $Oxyz$ -ით აღვნიშნოთ, შესაბამად, კოორდინატთა უძრავი და მოძრავი სისტემები. როგორც ყოველთვის, ამ სისტემებთან ერთად ჩვენ განვიხილავთ მათთან უძრავად დაკავშირებულ (Σ) და (S) საფარდ სისტემებს (იხ. § 10). განვიხილოთ სხეული (T) , რომელიც მოძრაობს (S) სისტემის მიმართ. (S) სისტემის წარმტან მოძრაობას (ე. ი. (S) სისტემის მოძრაობას (Σ) სისტემის მიმართ) ვუწოდოთ პირველი მოძრაობა, ხოლო (T) სხეულის მოძრაობას (S) სისტემის მიმართ—მეორე მოძრაობა (ნახ. 42). თუ ცნობილია პირველი და მეორე მოძრაობა, მაშინ სავესებით განსაზღვრული იქნება (T) სხეულის აბსოლუტური მოძრაობა ((Σ) სისტემის მიმართ მოძრაობა), ამიტომ ჩვენ ვიტყვი, რომ სხეულის მოძრაობა შედგება ზემოხსენებული ორი მოძრაობისაგან.



ნახ. 42.

განვიხილოთ სხეულის ნებისმიერი M წერტილი და მისი წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეები აღვნიშნოთ შესაბამად \vec{v}_1 -ით და \vec{v}_2 -ით. (10,1) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (14,1)$$

სადაც \vec{v} წარმოადგენს აღნიშნულ M წერტილის აბსოლუტურ სიჩქარეს. ვინაიდან \vec{v}_1 წარმოადგენს (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარეს, რომელზედაც აღებულ მომენტში M წერტილი იმყოფება, ხოლო \vec{v}_2 წარმოადგენს M წერტილის ფარდობით სიჩქარეს, ამიტომ მათ შეიძლება ვუწოდოთ პირველ და მეორე მოძრაობათა შესაბამის სიჩქარეები.

თუ თავის მხრივ (S) სისტემის მიმართ მოძრაობს (S_1) სისტემა, რომლის მიმართაც (T) სხეული მოძრაობს, მაშინ (14,1)-ის ნაცვლად, როგორც აღვილი მისახვედრია, მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3,$$

სადაც \vec{v}_1 ის სიჩქარეა, რომელიც (Σ) სისტემის მიმართ (S) სისტემის მოძრაობას წევსაბამება, ე. ი. \vec{v}_1 არის (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელზედაც აღებულ მომენტში M წერტილი იმყოფება; \vec{v}_2 ის სიჩქარეა, რომელიც (S) სისტემის მიმართ (S_1) სისტემის მოძრაობას წევსაბამება, ე. ი. \vec{v}_2 არის (S_1) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარე (S) სისტემის მიმართ, რომელზე-

დაც აღებული მომენტში M წერტილი იმყოფება; დაბოლოს, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ წერტილების ფარდობით სიჩქარეს (S_1) სისტემის მიმართ.

თუ სხეულის მოძრაობა შედგება n მოძრაობისაგან, მაშინ ზენოწაჩენები წესით მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n, \quad (14,2)$$

სადაც $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, შემადგენელ მოძრაობათა შესაბამისი სიჩქარეებია.

§ 15 გადატანით მოძრაობათა მათემატიკა

ვთქვათ, (S) სისტემა მოძრაობს (Σ) ს მიმართ გადატანით და (T) სხეული მოძრაობს (S) სისტემის მიმართ აგრეთვე გადატანით. მაშინ, ცხადია, (T) სხეულის მოძრაობა (Σ)-ს მიმართ იქნება აგრეთვე გადატანითი და (14,1) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

სადაც \vec{v} წარმოადგენს (Σ)-ს მიმართ (T) სხეულის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეს, \vec{v}_1 —(S) სისტემის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეს (Σ) სისტემის მიმართ, ხოლო \vec{v}_2 არის (S) სისტემის მიმართ (T) სხეულის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე.

თუ მოძრაობა შედგენილია n გადატანითი მოძრაობისაგან, მაშინ სხეულის აბსოლუტური მოძრაობა (Σ)-ს მიმართ იქნება გადატანითი და ადგილი ექნება ტოლობას

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n,$$

სადაც $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ შემადგენელ გადატანით მოძრაობათა სიჩქარეებია.

§ 16. ბრუნვითი მათემატიკა

ვთქვათ, § 14-ში განხილული პირველი და მეორე მოძრაობები ბრუნვითი მოძრაობებია, რომელთა კუთხური სიჩქარეებიც არის

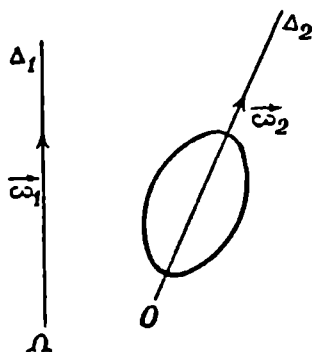
ω_1 და ω_2 ; სხვანაირად რომ ვთქვათ, (T) სხეული ბრუნავს Δ_2 ღერძის გარშემო ω_2 კუთხური სიჩქარით, ხოლო Δ_2 ღერძი თავის მხრივ ბრუნავს უძრავი Δ_1 ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით (ნახ. 43). მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე, ცხადია, გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{v} = \text{მომ}_M \vec{\omega}_1 + \text{მომ}_M \vec{\omega}_2. \quad (16,1)$$

ასევე დავრწმუნდებით, რომ თუ მყარი სხეულის მოძრაობა შედგება n ბრუნვითი მოძრაობისაგან, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$, მაშინ გვექნება

$$\vec{v} = \text{მომ}_M \vec{\omega}_1 + \text{მომ}_M \vec{\omega}_2 + \dots + \text{მომ}_M \vec{\omega}_n. \quad (16,2)$$

ამრიგად, ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:



ნახ. 43.

დებულება. თუ მყარი სხეულის მოძრაობა შედგენილია n ბრუნვითი მოძრაობისაგან, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$, მაშინ ამ სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე უდრის ხსენებულ კუთხურ სიჩქარეთა ნაკრებ მომენტს ამავე M წერტილის მიმართ.

განვიხილოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი შემთხვევა:

1°. ვთქვათ, ზემოხსენებულ კუთხურ სიჩქარეთა $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ ვექტორები თავმოყრილია. მაშინ, როგორც ვიცით (იხ. II თავის § 3), ვექტორთა ამ სისტემას აქვს ტოლქმედი, როგორც ამ ვექტორების ჯამის ტოლია და მათი თავმოყრის წერტილშია მოდებული. ამიტომ, განსახილველ შემთხვევაში, (16,2) ფორმულა მოგვცემს

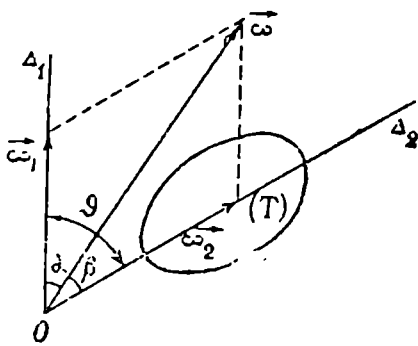
$$\vec{v} = \text{მომ}_M \vec{\omega}, \quad (16,3)$$

სადაც

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i,$$

ამასთან ეს უკანასკნელი $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ ვექტორების თავმოყრის წერტილშია მოდებული.

(16,3) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ, განსახილველ შემთხვევაში, მყარი სხეულის ყოველი წერტილის სიჩქარე ისეთია, თითქოს სხეუ-



ნახ. 44.

ლი ბრუნავდეს თავმოყრის წერტილში გამავალი გარკვეული Δ ღერძის გარშემო. $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით.

სხეულის მოძრაობა, როგორც ადგილი მისახვედრია, არ იქნება Δ ღერძის გარშემო ბრუნვა $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 44), მაგრამ დროის ყოველ მომენტში სიჩქარეთა განაწილება მყარ სხე-

ულში ისეთია, თითქოს ბრუნვას ჰქონდეს ადგილი გარკვეული Δ ღერძის გარშემო $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. ამიტომ, Δ ღერძს ბრუნვის მყისი ღერძი ეწოდება, ხოლო $\vec{\omega}$ -ს—ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარე.

ამრიგად, თანამკვეთი ღერძების გარშემო რამდენიმე ერთდროული ბრუნვითი მოძრაობის შედეგი არის მყისი ბრუნვა $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, სადაც $\vec{\omega}$ აღებულ ბრუნვათა კუთხური სიჩქარეების ნაკრებ ვექტორს წარმოადგენს და მოდებულია ღერძების თანამკვეთის წერტილში.

2°. ვთქვათ ახლა, $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ წარმოადგენს პარალელურ ვექტორთა სისტემას, რომლის ნაკრები ვექტორი ნული არ არის. როგორც ვიცით (იხ. II თავის § 9), ამ შემთხვევაშიაც არსებობს ტოლქმედი, რომელიც აღებულ პარალელურ ვექტორთა ნაკრები ვექტორის ტოლია და რომლის ფუძეც მათ

ცენტრში გადის, ამიტომ, განსახილველ შემთხვევაში, (16,2) ფორმულა მოგვცენს

$$\vec{v} = \text{მომ}_{M} \vec{\omega},$$

სადაც $\vec{\omega}$ ზემოსხენებული ნაკრები ვექტორია, რომელიც $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ პარალელურ ვექტორთა სისტემის ცენტრშია ნოდებული (იხ. 11 თავის (9,5) ფორმულა).

ამრიგად, თუ ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ სიჩქარეთა განაწილება სხეულში, მაშინ პარალელური ღერძების გარშემო რამდენიმე ერთდროული ბრუნვითი მოძრაობის შედეგი არის ერთი მყისი ბრუნვა $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, რომელიც ზემომოყვანილი წესით არის განსაზღვრული (იგულისხმება, რომ კუთხურ სიჩქარეთა ნაკრები ვექტორი განხვავებულია ნულისაგან).

3°. დავუშვათ, რომ მყარი სხეულის მოძრაობა შედგება ორი ბრუნვისაგან, რომელთა კუთხური სიჩქარეები შეადგენენ $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ წყვილვექტორს $(\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2)$. ვინაიდან წყვილვექტორის მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტის ცენტრისაგან, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, აღებულ მომენტში (როცა $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$) სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე ექნება და, მაშასადამე, სიჩქარეები სხეულში ისეა განაწილებული, თითქმის ის ასრულებდეს გადატანით მოძრაობას. თუ დროის ყოველ მომენტში $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$, მაშინ სხეულის მოძრაობა ნამდვილად იქნება გადატანითი. პირიქით. თუ სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას \vec{v}_0 სიჩქარით, მაშინ ყოველთვის შეიძლება ისეთი $(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$ წყვილვექტორი ავიღოთ, რომლის მომენტიც \vec{v}_0 -ის ტოლია და, მაშასადამე, თუ გვაინტერესებს მხოლოდ სიჩქარეთა განაწილება სხეულში, გადატანითი მოძრაობა შეიძლება ბრუნვათა წყვილით შევცვალოთ.

§ 17. ხრახნული მოძრაობა

ვთქვათ, მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი ორი A და B წერტილი მოთავსებულია ყოველთვის გარკვეულ Δ ღერძზე. ცხადია, ამ შემთხვევაში სხეულს შეუძლია როგორც სრიალი Δ ღერძის გასწვრივ, ისე მის გარშემო ბრუნვა და, მაშასადამე, სხეულის მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც შედგენილი ორი მოძრაობისაგან, რომელთაგან, ერთი წარმოადგენს Δ ღერძის გასწვრივ გადატანით მოძრაობას, ხოლო მეორე - ბრუნვას ამავე ღერძის გარშემო (ნახ. 45).

ვინაიდან, ზემოხსენებულ გადატანით მოძრაობას დაახასიათებს სხეულის A წერტილის მოძრაობა Δ ღერძის გასწვრივ, რომელიც თავის მხრივ $OA = z$ კოორდინატით დაახასიათდება, ხოლო ბრუნვით მოძრაობას დაახასიათებს მობრუნების φ კუთხე (ნახ. 45), ამიტომ განსახილველ შემთხვევაში, სხეულის თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია, ამასთან, ცხადია, სხეულის მოძრაობის განტოლებები იქნება

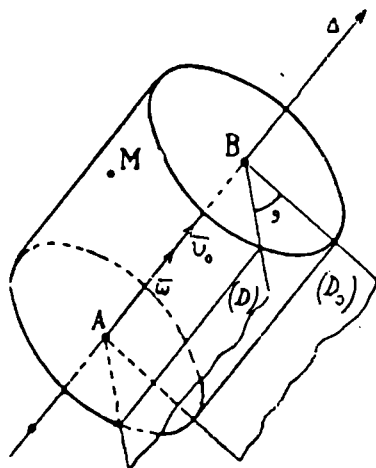
$$z = z(t),$$

$$\varphi = \varphi(t).$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე ასე წარმოდგინდება:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \text{მომ}_{M} \vec{\omega}, \quad (17,1)$$

სადაც \vec{w} წარმოადგენს Δ ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს, ხოლო \vec{v}_0 არის სხეულის A წერტილის Δ ღერძზე სრიალის სიჩქარე (გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე). ცხადია, რომ \vec{v}_0 დამთხვეულია Δ ღერძზე და მისი გეგმილი ამ ღერძზე უდრის $\frac{dz}{dt}$, სადაც z არის A წერტილის კოორდინატი Δ ღერძზე, რომელზედაც სათავედ გარკვეული O წერტილია აღებული



ნახ. 45.

($z = OA$). ადვილი წარმოსადგენია აგრეთვე, რომ სხეულის ნებისმიერი M წერტილის ტრაექტორია იქნება წირი, რომელიც იმ წრიულ ცილინდრზე მოთავსებული, რომლის ღერძსაც Δ ღერძი წარმოადგენს და რომლის განივკვეთის რადიუსი M წერტილიდან ბრუნვის Δ ღერძამდე მანძილის ტოლია.

აღვნიშნოთ \vec{v}_0 -ის და \vec{w} -ს გეგმილები Δ ღერძზე წესაბამად v_0 -ით და ω -თი. ცხადია, $v_0 = \frac{dz}{dt}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

განვიხილოთ შეფარდება: $\frac{v_0}{\omega} = k$.

თუ ეს შეფარდება მუდმივია, მაშინ მოძრაობას ხრახნულ მოძრაობას,

ანუ, უბრალოდ, ხრახნვას უწოდებენ, ხოლო k მუდმივ რიცხვს—ხრახნვის პარამეტრს. ვინაიდან $\frac{v_0}{\omega} = \frac{dz}{dt} : \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dz}{d\varphi}$, ამიტომ $\frac{dz}{d\varphi} = k$, საიდანაც გვექნება

$$z = k\varphi + C, \quad (17,2)$$

ამასთან C ნებისმიერი მუდმივია. თუ $z=0$ მნიშვნელობისათვის მობრუნების კუთხე $\varphi=0$, მაშინ $C=0$ და (17,2) ტოლობა მოგვცემს

$$z = k\varphi. \quad (17,3)$$

ხრახნული მოძრაობის შემთხვევაში მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის ტრაექტორიას ხრახნწირი ეწოდება.

$k=2\pi k$ სილიდეს ხრახნწირის ბიჯი ეწოდება. ხრახნწირის ბიჯი, (17,3) ტოლობის ძალით, ის მანძილია, რომლითაც სხეულის M წერტილი გადაინაცვლებს Δ ღერძის გასწვრივ, როცა სხეული ერთხელ მობრუნდება აღნიშნული ღერძის გარშემო.

თუ ხრახნვის k პარამეტრი დადებითია, მაშინ ვიტყვი, რომ გვაქვს მარცხენა ხრახნი, ხოლო როცა k უარყოფითია—მარჯვენა ხრახნი.

§ 18. გადატანით და ბრუნვით მოძრაობათა ერთობლიობა

ვთქვათ, მყარი სხეულის მოძრაობა შედგება რამდენიმე გადატანითი და რამდენიმე ბრუნვითი მოძრაობისაგან. როგორც ვიცით (იხ. § 16), ყოველი გადატანითი მოძრაობა შეიძლება ბრუნვითა-წყვილით შევცვალოთ და, მაშა-

სადაც, საბოლოოდ გვექნება მხოლოდ ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა, რომელთა შესაბამისი კუთხური სიჩქარეები იყოს $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$. მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე, (16,2) ფორმულის ძალით, ასე წარმოდგინდება:

$$\vec{v} = \text{მომ}_M \vec{\omega}_1 + \text{მომ}_M \vec{\omega}_2 + \dots + \text{მომ}_M \vec{\omega}_n, \quad (18,1)$$

ე. ი. სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე უდრის ამ წერტილის მიმართ კუთხური სიჩქარეების ნაკრებ მომენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ კუთხური სიჩქარეებს შეეცვლით მათი ტოლფასი $\vec{\omega}'_1, \vec{\omega}'_2, \dots, \vec{\omega}'_n$ სისტემით, ამით სიჩქარეთა განაწილება სხეულში არ შეიცვლება.

ავიღოთ რაიმე O წერტილი და $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ სისტემა დავიყვანოთ O ცენტრამდე II თავის § 5-ში ნაჩვენები წესით. მივიღებთ O წერტილზე მოდებული $\vec{\omega}$ ვექტორს, რომელიც განსახილველი სისტემის ნაკრები ვექტორის ტოლია და ერთ $(\vec{\omega}', -\vec{\omega}')$ წყვილვექტორს, რომლის \vec{v}^0 მომენტიც უდრის სისტემის ნაკრებ მომენტს O წერტილის მიმართ:

$$\vec{v}^0 = \text{მომ}_O \vec{\omega}_1 + \text{მომ}_O \vec{\omega}_2 + \dots + \text{მომ}_O \vec{\omega}_n. \quad (18,2)$$

ვინაიდან ბრუნვათა წყვილი გვაძლევს მყის გადატანით მოძრაობას, ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ განსახილველ მოძრაობათა ერთობლიობა დაიყვანება ერთ მყის ბრუნვამდე და ერთ მყის გადატანამდე.

ამრიგად, თუ ჩვენ გვინტერესებს მხოლოდ სიჩქარეთა განაწილება სხეულში, მაშინ განსახილველ ბრუნვათა კუთხური სიჩქარეების ერთობლიობა დაიყვანება ერთ $\vec{\omega}$ ვექტორამდე და ერთ $(\vec{\omega}', -\vec{\omega}')$ წყვილვექტორამდე, რომლის მომენტიც გამოითვლება (18,2) ფორმულით. ცხადია, \vec{v}^0 წარმოადგენს სხეულის O წერტილის სიჩქარეს.

დაყვანის ცენტრად ავიღოთ სხვა O' წერტილი, რომლის მიმართაც ნაკრები მომენტი აღენიშნოთ $\vec{v}^{0'}$ -ით. II თავის (2,4) ფორმულის ძალით, მივიღებთ

$$\vec{v}^{0'} = \vec{v}^0 - [\vec{OO'} \cdot \vec{\omega}],$$

ანუ

$$\vec{v}^{0'} = \vec{v}^0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{OO'}]. \quad (18,3)$$

ახალი დაყვანის ცენტრი ისე შევარჩიოთ, რომ $\vec{v}^{0'}$ პარალელური იყოს $\vec{\omega}$ -სი. როგორც ვიცით (იხ. II თავის § 8) ასეთი ცენტრის პოვნა ყოველთვის შეიძლება, თუ ნაკრები ვექტორი $\vec{\omega} \neq 0$.

თუ ავიღებთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემას და O' წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x, y, z -ით, (18,3) ტოლობით განსაზღვრული $\vec{v}^{0'}$ ვექტორისა და $\vec{\omega} = (p, q, r)$ ვექტორის პარალელობის პირობა მოგვცემს

$$\frac{v_x^{0'} + qx - ry}{p} = \frac{v_y^{0'} + rx - pz}{q} = \frac{v_z^{0'} + py - qx}{r}. \quad (18,4)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ ვექტორთა სისტემის ცენტრალური ლერძის განტოლებას (იხ. II თავის (8,3) ფორმულა).

ამრიგად, გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა დაიყვანება ერთ მყის ბრუნვამდე $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით და ერთ მყის გადატანა-

მდე, რომლის შესაბამისი სიჩქარე \vec{v} ბრუნვის ღერძის პარალელურია. ამის შემდეგ ცხადია, რომ მყარი სხეულის წერტილებს ისეთი სიჩქარეები ექნებათ, თითქოს ადგილი ჰქონდეს ხრახნვას (იხ. წინა პარაგრაფი), რომელსაც მყისი ხრახნვას ვუწოდებთ¹. (18,4) ტოლობებით განსაზღვრულ ღერძს მყისი ხრახნვის ცენტრალურ ღერძს ვუწოდებთ. ცხადია, ამ ღერძის გარშემო მყისი ხრახნვის სრიალის სიჩქარე იქნება \vec{v} , რომელიც განსაზღვრულია (18.3) ტოლობით.

ადგილი მისახედრია, რომ ცენტრალური ღერძის ყველა წერტილს ადგილზე მომენტში ერთნაირი \vec{v} სიჩქარე აქვს.

ვინაიდან \vec{v} წარმოადგენს ცენტრალური ღერძის წერტილების მიმართ ნაკრებ მომენტს, ამიტომ, ცენტრალური ღერძის წერტილების მიმართ ნაკრები მომენტის შესახებ II თავის § 8-ში ნათქვამის ძალით, \vec{v} ვექტორს აქვს უმცირესი სიგრძე სხვა წერტილების მიმართ ნაკრებ მომენტებთან შედარებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ცენტრალური ღერძის წერტილების სიჩქარე განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სხეულის არც ერთი წერტილის სიჩქარე ნული არ იქნება.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სხეულის რომელიმე წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია, მაშინ \vec{v} იც ნულის ტოლი იქნება და მაშასადამე, ადგილი ექნება მყისი ბრუნვას (18,4) ტოლობებით განსაზღვრული ღერძის გარშემო.

ზემოთ ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $\vec{\omega} \neq 0$. თუ $\vec{\omega} = 0$, მაშინ, ცხადია, გვექნება მყისი გადატანა \vec{v} სიჩქარით.

ამოცანები

29. ვთქვათ, მყარი სხეულის მოძრაობა შედგება ორი თანამკვეთი ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისაგან, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$. კუთხე ბრუნვის ღერძებს შორის იყოს φ (ნახ. 44). ვიპოვოთ მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$.

თანამკვეთი ღერძების გარშემო ბრუნვის შემთხვევისათვის მე-16 პარაგრაფში მიღებული შედეგების ძალით გვექნება

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2,$$

ამიტომ, ცხადია,

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2|\omega_1||\omega_2|\cos\varphi}.$$

ტრიგონომეტრიიდან კარგად ცნობილი სინუსების თეორემის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ კუთხეები, რომელთაც $\vec{\omega}$ ვექტორი Δ_1 და Δ_2 ღერძებთან შეადგენს (ნახ. 44), გამოითვლება ფორმულებით

¹ მყისი ხრახნვის პარამეტრი. ცხადია, გამოითვლება ფორმულით

$$k = \frac{v^0}{|\vec{\omega}|} = \frac{(\vec{v}^0 \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} = \frac{v^0_x p + v^0_y q + v^0_z r}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

$$\sin \alpha = \frac{|\omega_2|}{|\omega|} \cdot \sin \varphi,$$

$$\sin \beta = \frac{|\omega_1|}{|\omega|} \sin \varphi.$$

30. (D_1) დისკო ბრუნავს თავის სიბრტყეში O_1 წერტილის გარშემო (ნახ. 46) საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და ასრულებს n_1 ბრუნვას სეკუნდში. (D_2) დისკოზე O_2 სასხრის საშუალებით მიმაგრებულია მეორე (D_2) დისკო, რომელიც ბრუნავს O_2 წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და ასრულებს n_2 ბრუნვას სეკუნდში (D_1 -ის მიმართ, $n_1 \neq n_2$. ვიპოვოთ მყისი ბრუნვის ღერძი და მყისი კუთხური სიჩქარე.

ვინაიდან (D_1) და (D_2) დისკოები მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეში, ამიტომ ბრუნვის ღერძები პარალელურია, ამასთან ცხადია, რომ ω_1 და ω_2 ვექტორებს აქვთ ერთმანეთის საწინააღმდეგო გეზი.

ამოცანის პირობის ძალით

$$|\omega_1| = 2\pi \cdot n_1, \quad |\omega_2| = 2\pi \cdot n_2.$$

თუ დაეუშვებთ, რომ $n_1 > n_2$, მაშინ მყისი ბრუნვის კუთხური სიჩქარის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$|\omega| = (n_1 - n_2) \cdot 2\pi.$$

ბრუნვის მყისი ღერძი, რომელზედაც დამთხვეულია $\overline{\omega}$, გადაკვეთს O_2 O_1 -ის გაგრძელებას C წერტილში, რომლის მდებარეობაც განისაზღვრება პირობით (იხ. 11 თავის § 3).

$$\frac{O_1 C}{O_2 C} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|} = \frac{n_2}{n_1}.$$

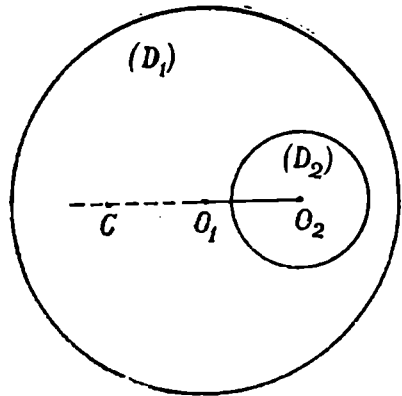
უკანასკნელი ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

$$O_1 C = \frac{a n_2}{n_1 - n_2}, \quad O_2 C = \frac{a n_1}{n_1 - n_2}, \quad a = O_1 O_2.$$

საესებით ანალოგიურად განიხილება ის შემთხვევა, როცა $n_2 > n_1$.

31. მატარებლის ვაგონი მოძრაობს სწორხაზოვან გზაზე $36 \frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}$ სიჩქარით. ვიპოვოთ წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარე ვაგონის ბორბლის იმ M წერტილისა, რომლის დაშორება ბრუნვის ღერძიდან ბორბლის რადიუსის ნახევარის ტოლია.

ვაგონის მოძრაობა დედამიწის მიმართ მივიღოთ წარმტან მოძრაობად; მაშინ ბორბლის M წერტილის მოძრაობა ვაგონის მიმართ იქნება ფარდობით



ნახ. 45.

თი. ამრიგად, M წერტილის მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც 'მედ-გენილი' ორი მოძრაობისაგან: წარმტანი მოძრაობისაგან, რომელიც გადატანით მოძრაობას წარმოადგენს და ვაგონის მიმართ ბრუნვითი მოძრაობისაგან.

როგორც აღეილი მისახედრია, ზემონათქვამის გათვალისწინებით, გვექნება

$$r_e = 36 \frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}, \quad v_r = 18 \frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}.$$

§ 19. ბრტყელი მოძრაობა. სიჩქარეთა განაწილება ბრტყელი მოძრაობის დროს. ცენტროიდები

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე სიბრტყე (D_0), რომელსაც უძრავ სიბრტყეს ვუწოდებთ და, ვთქვათ, მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი ყოველი წერტილიდან ამ სიბრტყემდე მანძილი მუდმივი რჩება. ასეთ შემთხვევაში სხეულის მოძრაობას ეწოდება ბრტყელი მოძრაობა (მოძრაობა სიბრტყის პარალელურად). შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ბრტყელი მოძრაობის დროს სხეულთან უძრავად დაკავშირებული ყოველი წრფე, რომელიც შემოსეწებული სიბრტყის მართობია, მოძრაობს გადატანით—თავისი თავის პარალელურად. მართლაც, განვიხილოთ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული AB მონაკვეთი, რომელიც (D_0) სიბრტყის მართობია. ვთქვათ, ამ მონაკვეთმა გარკვეული დროის შემდეგ დაიკავა $A'B'$ მდებარეობა (ნახ. 47). ვინაიდან A და B წერტილები მყარი სხეულის წერტილებია, ამიტომ $AB = A'B'$. ამის გარდა, ვინაიდან A და B წერტილები (D_0) სიბრტყის პარალელურად მოძრაობენ, ამიტომ $AA' \parallel BB'$. ამის შემდეგ ცხადია, რომ $AB \parallel A'B'$ და ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ზემონათქვამიდან ცხადია აგრეთვე, რომ აღნიშნული AB მართობის ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობა მთლიანად დაახასიათებს მყარი სხეულის ყველა იმ წერტილის მოძრაობას, რომელიც ამ მართობზეა მოთავსებული. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობა სავსებით დაახასიათდება ამ სხეულის (D_0) სიბრტყის პარალელური (S) კვეთის მოძრაობით თავისივე სიბრტყეში. აღნიშნოთ (Σ -თი (D_0) სიბრტყის პარალელური უძრავი სიბრტყე, რომელზედაც შემოსეწებული (S) ბრტყელი კვეთაა მოთავსებული. ცხადია, მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია შევისწავლოთ (S) ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა (Σ) უძრავ სიბრტყეში.

ბრტყელ (S) ფიგურასთან ერთად ჩვენ განვიხილავთ მთელს სიბრტყეს, რომელიც ამ ფიგურასთან უძრავად (მკვიდრად) არის დაკავშირებული. ამ სიბრტყეს, შემდეგში, ბრტყელი (S) ფიგურის სიბრტყეს ან უბრალოდ, (S) სიბრტყეს ვუწოდებთ.

1) განვიხილოთ (Σ) სიბრტყესთან უძრავად დაკავშირებული მწკ სისტემა. რომელსაც ხშირად (Σ) სისტემას ვუწოდებთ და განვიხილოთ აგრეთვე (S) ფიგურასთან (მოძრავ სიბრტყესთან) უძრავად დაკავშირებული Oxy სისტემა,

რომელსაც ხშირად (S) სისტემას ვუწოდებთ. (ნახ. 48). განვიხილოთ კიდევ დამსმარე $O\xi_1\eta_1$ სისტემა, რომლის ღერძები უძრავი კოორდინატთა ღერძების პარალელურია და აღენიშნოთ ამ სისტემასთან უძრავად დაკავშირებული სიბრტყე (Σ_1) -ით. ვიგულისხმობთ, რომ ხსენებული კოორდინატთა სისტემები ერთი და იმავე ტიპისაა, ე. ი. (Σ) სიბრტყეში მოძრაობით ეს სისტემები შეიძლება ერთმანეთს დავამთხვიოთ.

აღენიშნოთ φ -თი კუთხე $O\xi_1$ და Ox ღერძებს შორის. ცხადია, ბრტყელი (S) ფიგურის მდებარეობა ცნობილი იქნება დროის ყოველ მომენტში, თუ ცნობილია O წერტილის ξ_0, η_0 კოორდინატები და მობრუნების φ კუთხე, როგორც დროის ფუნქციები და, მაშასადამე, მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებებს ექნება სახე:

$$\xi_0 = \xi_0(t), \quad \eta_0 = \eta_0(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი სამის ტოლია.

თუ მოცემულია მოძრაობის განტოლებები, მაშინ (S) ფიგურის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოიცემა კოორდინატთა გარდაქმნის ცნობილი ფორმულებით:

$$\xi = \xi_0 + x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \eta = \eta_0 + x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

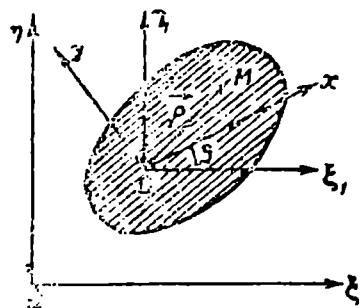
სადაც ξ, η ალებული M წერტილის კოორდინატებია (Σ) სისტემაში $(x, y$ არ იცვლება, რადგან Oxy სისტემა (S) ფიგურასთან უძრავად არის დაკავშირებული).

განვიხილოთ (S) ფიგურის ნებისმიერი M წერტილი და მისი სიჩქარე (აბსოლუტური სიჩქარე) აღენიშნოთ \vec{v} -თი. თუ M წერტილის მოძრაობას (Σ) სიბრტყის მიმართ განვიხილავთ როგორც აბსოლუტურს, ხოლო დამხმარე სისტემის მიმართ—როგორც ფარდობითს (იხ. § 10), მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_* + \vec{v}_r, \quad (19,1)$$

სადაც \vec{v}_* არის M წერტილის ფარდობითი სიჩქარე, ე. ი. სიჩქარე $O\xi_1\eta_1$ დამხმარე სისტემის მიმართ, \vec{v}_r კი არის M წერტილის წარმტანი სიჩქარე, ე. ი. დამხმარე სისტემის (და, მაშასადამე, (Σ_1) სიბრტყის) იმ წერტილის სიჩქარე, რომელზედაც ალებულ მომენტში (S) ბრტყელი ფიგურის M წერტილი იმყოფება. ვინაიდან (Σ_1) სიბრტყე გადატანით მოძრაობს, ხოლო გადატანითი მოძრაობის დროს სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს (იხ. § 12), ამიტომ $\vec{v}_* = \vec{v}_0$, სადაც \vec{v}_0 წარმოადგენს O წერტილის სიჩქარეს. ამის გარდა, ვინაიდან (S) ფიგურის მოძრაობა დამხმარე სისტემის მიმართ $((\Sigma_1)$ სიბრტყის მიმართ) წარმოადგენს ბრუნვას O წერტილის ირგვლივ (რასაც მყარი სხეულის ბრუნვა წვესაბამება გარკვეული ღერძის გარშემო), ამიტომ, (13,4) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\vec{v}_r = [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}],$$



ნახ. 48.

სადაც \vec{p} წარმოადგენს M წერტილის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ (ნახ. 48), $\vec{\omega}$ — ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს, რომელიც (Σ) სიბრტყის მართობია

$$\left(|\omega| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \right).$$

როგორც აღვნიშნეთ მისახვედრია

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

თუ კოორდინატა Oxy სისტემის მარცხენა Ox მართკუთხა სისტემამდე შევავსებთ და ასევე მოვიქცევით Oxy სისტემის მიმართაც, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega).$$

ზემომოყვანილი ტოლობების ძალით, (19,1) ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{p}]. \quad (19,2)$$

თუ M წერტილის კოორდინატებს Ox სისტემის მიმართ აღვნიშნავთ ξ, η -თი, ხოლო Oxy სისტემის მიმართ კი x, y -ით და (19,2) ტოლობას ჯერ უძრავ, ხოლო შემდეგ მოძრავ კოორდინატა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$v_\xi = v_{0\xi} - \omega(\eta - \eta_0), \quad (19,3)$$

$$v_\eta = v_{0\eta} + \omega(\xi - \xi_0)$$

$$v_x = v_{0x} - \omega y, \quad (19,4)$$

$$v_y = v_{0y} + \omega x.$$

ვთქვათ, ბრტყელი ფიგურის რომელიმე C წერტილი უძრავია. მაშინ, ცხადია, აღნიშნული ფიგურის მოძრაობა იწვევა ბრუნვა C წერტილის გარშემო, რასაც მყარი სხეულის ბრუნვა შეესაბამება იმ ღერძის გარშემო, რომელიც მართობია (Σ) სიბრტყის და გადის C წერტილში.

აღვნიშნოთ C წერტილს კოორდინატები უძრავ სისტემაში ξ_c, η_c -თი. ვინაიდან C წერტილი, პირობის ძალით, უძრავია და, მაშასადამე, მისი სიჩქარე ნულის ტოლია ($v_\xi = v_\eta = 0$), ამიტომ ξ_c, η_c კოორდინატები შემდეგ სისტემას უნდა აკმაყოფილებდნენ

$$v_{0\xi} - \omega(\eta_c - \eta_0) = 0, \quad (19,5)$$

$$v_{0\eta} + \omega(\xi_c - \xi_0) = 0.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (19,3) ტოლობებს გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$v_\xi = -\omega(\eta - \eta_c), \quad (19,6)$$

$$v_\eta = \omega(\xi - \xi_c).$$

სავსებით ანალოგიურად მივიღებთ

$$v_x = \omega(y - y_c), \quad (19,7)$$

$$v_y = \omega(x - x_c),$$

სადაც x_c , y_c წარმოადგენენ C წერტილის კოორდინატებს მოძრავ Oxy სისტემაში.

დაეუბრუნდეთ ბრტყელი (S) ფიგურის მოძრაობის ზოგად შემთხვევას და განვიხილოთ (S) სიბრტყის ისეთი $C(\xi_c, \eta_c)$ წერტილი, რომლის სიჩქარე დროის ალბებულ მომენტში ნულის ტოლია. ცხადია, ამ წერტილის კოორდინატები, (19,3) ტოლობების ძალით, შემდეგ სისტემას უნდა აკმაყოფილებდნენ:

$$v_{0\xi} - \omega(\eta_c - \eta_0) = 0, \quad (19,8)$$

$$v_{0\eta} + \omega(\xi_c - \xi_0) = 0,$$

საიდანაც, თუ $\omega \neq 0$, მივიღებთ

$$\xi_c = -\frac{v_{0\eta}}{\omega} + \xi_0, \quad (19,9)$$

$$\eta_c = \frac{v_{0\xi}}{\omega} + \eta_0.$$

ასევე დავრწმუნდებით, რომ C წერტილის x_c , y_c კოორდინატები შემდეგ სისტემას უნდა აკმაყოფილებდნენ:

$$v_{0x} - \omega y_c = 0, \quad v_{0y} + \omega x_c = 0, \quad (19,10)$$

საიდანაც

$$x_c = -\frac{v_{0y}}{\omega}, \quad y_c = \frac{v_{0x}}{\omega}. \quad (19,11)$$

ამრიგად, თუ ალბებულ მომენტში $\omega \neq 0$, მაშინ არსებობს ისეთი C წერტილი, რომლის სიჩქარე ამ მომენტში ნულის ტოლია და რომლის კოორდინატებიც გამოითვლება უძრავ და მოძრავ სისტემაში შესაბამის (19,9) და (19,11) ფორმულებით.

(19,3) ტოლობები, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$v_\xi = -\omega \left[\eta - \left(\frac{v_{0\xi}}{\omega} + \eta_0 \right) \right],$$

$$v_\eta = \omega \left[\xi - \left(\xi_0 - \frac{v_{0\eta}}{\omega} \right) \right],$$

საიდანაც, (19,9) ტოლობების ძალით,

$$v_\xi = -\omega(\eta - \eta_c), \quad (19,12)$$

$$v_\eta = \omega(\xi - \xi_c).$$

სავსებით ასევე მივიღებთ

$$v_x = -\omega(y - y_c), \quad v_y = \omega(x - x_c). \quad (19,13)$$

თუ (19,12) და (19,13) ფორმულებს შევადარებთ (19,6) და (19,7) ფორმულებს, დავრწმუნდებით, რომ ალბებულ მომენტში სიჩქარეები ისეა სხეულში განაწილებული, თითქოს (S) ფიგურა ბრუნავდეს C წერტილის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. როგორც აღვილი მისაწვდერია, საზოგადოდ, (S) ფიგურის მოძრაობა არ იქნება უბრალო ბრუნვა C წერტილის გარშემო. ამიტომ C წერტილს ბრუნვის მყისი ცენტრი ეწოდება.

ამრიგად, თუ აღებულ მომენტში $\omega \neq 0$, მაშინ ბრტყელ (S) ფიგურაში სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს ის ბრუნადეს C წერტილის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. C წერტილი, საზოგადოდ, უძრავი არ არის. ის მოძრაობს როგორც უძრავ, ისე წერტილში. C წერტილზე გეომეტრიულ ადგილს (Δ) სისტემაში ეწოდება უძრავი ცენტროიდი, ხოლო მათ გეომეტრიულ ადგილს მოძრავ (Δ) სისტემაში—მოძრავი ცენტროიდი. ცხადია, (19,9) განტოლებები წარმოადგენენ უძრავი ცენტროიდის პარამეტრულ განტოლებებს, ხოლო (19,11) განტოლებები—მოძრავი ცენტროიდის პარამეტრულ განტოლებებს.

თუ აღებულ მომენტში $\omega = 0$, მაშინ (19,2) ტოლობა ზოგეცმს

$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

და, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (S) ფიგურის ყველა წერტილის ერონაირი სიჩქარე ექნება. ამრიგად, როცა $\omega = 0$, მაშინ (S) ფიგურის წერტილების სიჩქარეები ისეთია, თითქოს ის ასრულებდეს გადატანით მოძრაობას. სხეულის ნაწილობრივი მოძრაობა წეილება არ იქნება გადატანითი, რადგან შემდგომ მომენტში წეილება ω უნდა არ იყოს. თუ ω ყოველთვის ნულია, მაშინ მოძრაობა ნამდვილად იქნება გადატანითი.

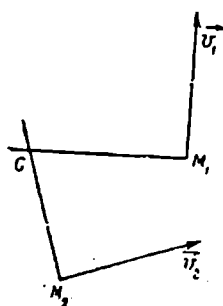
გადატანითი მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ბრუნვა უსასრულოდ შორეული წერტილის გარშემო და, მაშასადამე, როცა $\omega = 0$, მაშინ მყისი ცენტრი მოთავსებულია უსასრულოდ შორეულში.

თუ დროის აღებულ მომენტში ცნობილია ბრუნვის მყისი ცენტრი C და ω კუთხური სიჩქარე, მაშინ, ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის ძალით, (S) ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \overline{CM}], \quad |\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot CM, \quad (19,14)$$

ამიტომ მყისი ცენტრის მოძებნას დიდი მნიშვნელობა აქვს.

ხშირ შემთხვევაში მყისი ცენტრი წეილება ეპოვებათ გარკვეული გეომეტრიული აგებით. სახელდობრ, თუ აღებულ მომენტში ცნობილია



ნახ. 49.

(S) ფიგურის რაიმე ორი M_1 და M_2 წერტილის სიჩქარეთა მიმართულება, მაშინ მყისი ცენტრი სავსებით განსაზღვრულია. ამისათვის ვაჩვენოთ, რომ სიჩქარეთა მართობები, რომელნიც CM_1 და CM_2 წერტილებშია გავლებული, გადაიკვეთება ბრუნვის მყისი ცენტრში. მართლაც, ვთქვათ აღნიშნული თანაკვეთა არსებობს (ნახ. 49). ვინაიდან აღებულ მომენტში (S) ფიგურის წერტილების სიჩქარეები ისეთია, თითქოს C წერტილის გარშემო ბრუნვას აქონდეს ადგილი, ამიტომ, ცხადია, ზემოხსენებულმა მართობებმა C წერტილში უნდა გაიკვეთა.

როს და, მაშასადამე, ამ მართობების თანაკვეთა იქნება C წერტილი (ბრუნვის მყისი ცენტრი). თუ სხენებული მართობები პარალელურია, მაშინ აღებულ მომენტში მყისი ცენტრი არ არსებობს, ე. ი. ამ მომენტში (S) ფიგურაში სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს გადატანით მოძრაობას აქონდეს ადგილი.

ვთქვათ ზემოხსენებული მართობები თანამხებეულია (ნახ. 50 ა, 30 ბ).
გავავლოთ \vec{v}_1 და \vec{v}_2 ვექტორების ბოლო წერტილებზე წრფე. ამ წრფესა და
აღნიშნული მართობის თანავეთა (თუ ეს თანავეთა არსებობს) იკნება მყისი
ცენტრი. მართლაც, გვეჩვენება

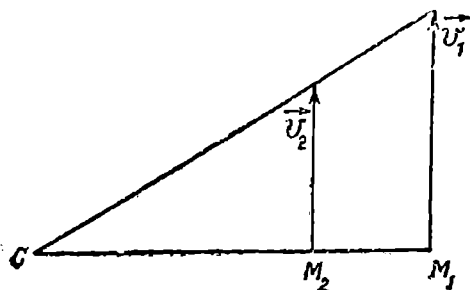
$$|CM_1| \cdot |\omega| = |v_1|, \quad |CM_2| \cdot |\omega| = |v_2|,$$

საიდანაც

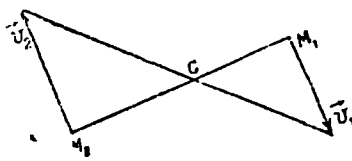
$$\frac{|CM_1|}{|CM_2|} = \frac{|v_1|}{|v_2|},$$

რაც ამტკიცებს ნათქვამის სამართლიანობას.

თუ $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, მაშინ აღნიშნული თანავეთა არ არსებობს და, როგორც
აღვლი მიხატელობა, ამ შემთხვევაში
(S) ფიგურაში სიჩქარეები ისეა განა-
წილებული, თითქოს ადგილი ჰქონდეს
გადატანით მოძრაობას.



ნახ. 50 ა.



ნახ. 50 ბ.

§ 20. აჩქარებათა განაწილება ზრტხელი მოძრაობის შემთხვევაში. აჩქარებათა მშისი ცენტრი

ვინაიდან ბრტყელი (S) ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე გა-
მოისახება (19,2) ფორმულით, ამიტომ აჩქარებისათვის მივიღებთ (ვსარგებ-
ლობით იმ აღნიშვნებით, რომელნიც წინა პარაგრაფში გვექონდა)

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + \left[\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right]. \quad (20,1)$$

როგორც წინა პარაგრაფში იყო აღნიშნული, $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ წარმოადგენს M წერტი-
ლის \vec{v}_r ფარდობით სიჩქარეს (ნახ. 48), ამიტომ

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_r = [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}].$$

თუ ამ მნიშვნელობას (20,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]], \quad (20,2)$$

სადაც \vec{w}_0 წარმოადგენს O წერტილის აჩქარებას.

ვინაიდან დამხმარე სისტემა გადატანით მოძრაობს, ამიტომ \vec{w}_0 წარმო-
ადგენს M წერტილის წარმტან აჩქარებას, ე. ი. (Σ_1) სისტემის იმ წერტილის

აჩქარებას, რომელზედაც აღებულ მომენტში ბრტყელი ფიგურის M წერტილი იმყოფება და, მაშასადამე, (10,9) ფორმულის ძალით, მივიღებთ

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_r. \quad (20,3)$$

(20,3)-ის და (20,2)-ის შედარება გვარწმუნებს, რომ

$$\vec{w}_r = \left[\frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + [\vec{w} \cdot [\vec{w} \cdot \vec{\rho}]]. \quad (20,4)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ O წერტილი უძრავია და, მაშასადამე, ბრტყელი (S) ფიგურა ბრუნავს O წერტილის გარშემო, მაშინ (20,2) ფორმულა მოგვცემს

$$\vec{w} = \left[\frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + [\vec{w} \cdot [\vec{w} \cdot \vec{\rho}]]. \quad (20,5)$$

II თავის (6,1) ფორმულის ძალით,

$$[\vec{w} \cdot [\vec{w} \cdot \vec{\rho}]] = \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} w^2.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (20,2) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \left[\frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} w^2. \quad (20,6)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\vec{w} = (0, 0, w), \quad \frac{d\vec{w}}{dt} = \left(0, 0, \frac{dw}{dt} \right),$$

$$\vec{\rho} = (\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$$

და (20,6) ტოლობას დავაგეგმილებთ უძრავ კოორდინატთა ლერძებზე, მივიღებთ

$$w_\xi = w_{0\xi} - \frac{dw}{dt} (\eta - \eta_0) - w^2 (\xi - \xi_0), \quad (20,7)$$

$$w_\eta = w_{0\eta} + \frac{dw}{dt} (\xi - \xi_0) - w^2 (\eta - \eta_0).$$

საესებით ანალოგიურად, (20,6) ტოლობის მოძრავ ლერძებზე დავგეგმილება მოგვცემს

$$w_x = w_{0x} - \frac{dw}{dt} y - w^2 x, \quad (20,8)$$

$$w_y = w_{0y} + \frac{dw}{dt} x - w^2 y.$$

(S) სისტემის ისეთ C^* (ξ^* , η^*) წერტილს, რომლის აჩქარება აღებულ მომენტში ნულის ტოლია, ეწოდება აჩქარების მყისი ცენტრი. (20,7) ტოლობის ძალით, C^* წერტილის კოორდინატები შემდეგ სისტემას უნდა აკმაყოფილებდნენ:

$$\omega^2(\xi^* - \xi_0) + \frac{d\omega}{dt}(\eta^* - \eta_0) = u_{02},$$

$$-\frac{d\omega}{dt}(\xi^* - \xi_0) + \omega^2(\eta^* - \eta_0) = u_{01}.$$

ვინაიდან ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \omega^2, & \frac{d\omega}{dt} \\ -\frac{d\omega}{dt}, & \omega^2 \end{vmatrix} = \omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2,$$

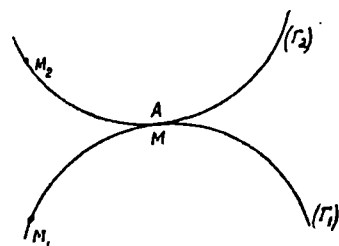
ამიტომ, ცხადია, აჩქარების მყისი ცენტრი იარსებებს, თუ აღებულ მომენტში $\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \neq 0$, ე. ი. თუ აღებულ მომენტში ერთდროულად კუთხური სიჩქარე და აჩქარება ნული არ არის.

§ 21. უსრიალო მოკვა

ვთქვათ, მოცემულია (Σ) სიბრტყეში უძრავი (Γ_1) წირი და (S) სისტემასთან უძრავად დაკავშირებული (Γ_2) წირი (ვსარგებლობთ იმ აღნიშვნებით, რომელიც § 19-ში გვექონდა) და, ვთქვათ, ამ ორ წირს დროის ყოველ მომენტში თანახების M წერტილი აქვს (ნახ. 51).

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

დებულება 1. (S) სიბრტყის $[(S)$ ფიგურასთან უძრავად დაკავშირებული სიბრტყის] იმ A წერტილის სიჩქარე, რომელიც აღებულ მომენტში (Γ_1) და (Γ_2) წირების თანახების M წერტილში იმყოფება, წარმოადგენს ამ ორი წირის საერთო მხედს.



ნახ. 51.

მართლაც, ამ ორი წირის თანახების M წერტილის აბსოლუტურ ტრაექტორიას წარმოადგენს (Γ_1) წირი, ხოლო ფარდობით ტრაექტორიას (ე. ი. ტრაექტორიას (S) სიბრტყეში) — (Γ_2) წირი. ამაიტომ სიჩქარეთა შეკრების კანონის ძალით (იხ. § 10):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_s + \vec{v}_r, \quad (21,1)$$

სადაც \vec{v}_a არის თანახების M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, \vec{v}_r — ამ წერტილის ფარდობითი სიჩქარე (სიჩქარე (S) სისტემაში), ხოლო \vec{v}_s არის წარმტანი სიჩქარე, ე. ი. (S) სიბრტყის იმ A წერტილის სიჩქარე, რომელსაც აღებულ მომენტში თანახების M წერტილი ემთხვევა. ამრიგად, \vec{v}_s არის ის სიჩქარე, რომელიც დებულებაში იყო მოხსენებული.

ცხადია, \vec{v}_a და \vec{v}_r წარმოადგენენ M წერტილში (Γ_1) და (Γ_2) წირთა მხედებს; ეს მხედები ერთმანეთს ემთხვევა (რადგან აღნიშნულ ორ წირს, პირობის ძალით, საერთო მხედი აქვს).

ვინაიდან (21,1) ტოლობის ძალით

$$\bar{v}_s = \bar{v}_a - \bar{v}_r,$$

ამიტომ \bar{v}_s ზემოხსენებულ საერთო მცხვრელ და მათემატიკურ და ამით დებულა დამტკიცებულია.

დაეუშვათ, რომ საწყის $t=t_0$ მომენტში M_1 და M_2 წერტილები იყვნენ თანახებაში (ნახ. 51). აღვნიშნოთ $\overline{M_1 M} = s_1$, $\overline{M_2 M} = s_2$. თუ დროის ყოველ მომენტში $s_1 = s_2$, მაშინ ვიტყვით, რომ (Γ_2) წირი უსრიალოდ გორავს (Γ_1) წირზე. ვინაიდან $\frac{ds_1}{dt} = v_a$, $\frac{ds_2}{dt} = v_r$ და უსრიალოდ გორვის შემთხვევაში $s_1 = s_2$, ე. ი. $v_a = v_r$, ამიტომ, (21,1) ტოლობის ძალით, დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაში $\bar{v}_s = 0$. ამრიგად, თუ (Γ_2) წირი უსრიალოდ გორავს (Γ_1) წირზე, მაშინ $\bar{v}_s = 0$. ვთქვათ, პირიქით, $\bar{v}_s = 0$. მაშინ (21,1) ტოლობის ძალით, $\bar{v}_a = \bar{v}_r$ და, მაშასადამე,

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{ds_2}{dt},$$

საიდანაც

$$s_1 = s_2 + C,$$

ამასთან C ნებისმიერი მუდმივია. ვინაიდან საწყის $t=t_0$ მომენტში $s_1 = s_2 = 0$, ამიტომ $C=0$ და, მაშასადამე, $s_1 = s_2$. ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ (Γ_2) წირი უსრიალოდ გორავდეს (Γ_1) წირზე, იმაში მდგომარეობს, რომ (S) სიბრტყის იმ A წერტილის სიჩქარე, რომელიც აღებულ მომენტში თანახების წერტილს ემთხვევა, ტოლი იყოს ნულის.

ამ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ უსრიალო გორვის შემთხვევაში (S) ფიგურის ბრუნვის მყისი ცენტრი მოთავსებულია თანახების ხსენებულ წერტილში.

როგორც აღვილი მისახვედრია, უსრიალო გორვის ცნება გამოდგება მაშინაც, როცა (Γ_1) წირიც მოიზავია და განიხილება (Γ_2) -ის ფარდობითი მოძრაობა (Γ_1) -ის მიმართ.

აღვნიშნოთ (γ_1) -ით და (γ_2) -ით შესაბამად უძრავი და მოძრავი ცენტრები (იხ. § 19). როგორც ვიცით, ამ ორ წირს ყოველ მომენტში აქვს საერთო წერტილი—მყისი ცენტრი C . C წერტილის აბსოლუტურ ტრაექტორიას წარმოადგენს (γ_1) წირი, ფარდობით ტრაექტორიას კი— (γ_2) წირი. ვინაიდან C წერტილის წარმტანი სიჩქარე ტოლია ნულის ($\bar{v}_s = 0$), ამიტომ სიჩქარეთა შესაკრების კანონი მოგვცემს

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r, \quad (21,2)$$

სადაც \bar{v}_a და \bar{v}_r წარმოადგენენ C წერტილის აბსოლუტურ და ფარდობით სიჩქარეს. უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ (γ_1) და (γ_2) წირებს დროის ყოველ მომენტში თანახების წერტილი აქვთ, ამასთან (S) სიბრტყის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც აღებულ მომენტში თანახების წერტილს ემთხვევა, ნულის ტოლია და, მაშასადამე, (γ_2) წირი უსრიალოდ გორავს (γ_1) წირზე. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ კოშის შემდეგი დებულება:

დებულება 2. ბრტყელი (S) ფიგურის მოძრაობის დროს მოძრავე ცენტროიდი უსრიალოდ გორავს უძრავ ცენტროიდზე.

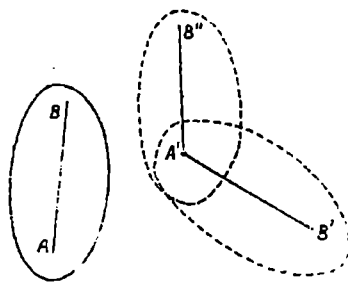
(21,2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ მყისი ცენტრი უძრავია უძრავ სისტემაში ($\vec{v}_u=0$) ან S სისტემაში ($\vec{v}_r=0$), მაშინ ის უძრავი იქნება ორივე სისტემაში.

§. 22. ბრტყელი მოძრაობის გეომეტრიული დახასიათება

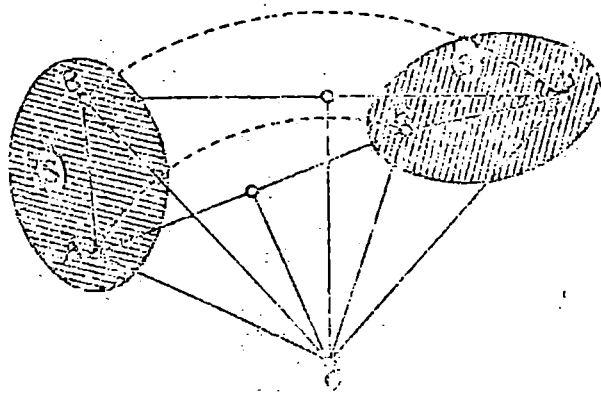
დავამტკიცოთ შემდეგი დებულებები:

დებულება 1. ბრტყელი (S) ფიგურის ნებისმიერი გადაადგილება (Σ) სიბრტყეში მიიღება, როგორც გადატანითი მოძრაობისა და ნებისმიერი ცენტრის გარშემო მობრუნების შედეგი:

მართლაც, ბრტყელი (S) ფიგურის მოძრაობა სავსებით დახასიათდება ამ ფიგურასთან უძრავად დეკავირებული რაიმე AB მონაკვეთის მოძრაობით. განვიხილოთ ამ მონაკვეთის ორი მდებარეობა: AB და A'B' (ნახ. 52). გადავიტანოთ AB მონაკვეთი თავისი თავის პარალელურად ისე, რომ A დაემთხვეს A'-ს; მივიღებთ A'B'' მონაკვეთს. ცხადია, AB მონაკვეთის აღნიშნულ გადაადგილებას შეესაბამება ბრტყელი (S) ფიგურის გადატანითი მოძრაობა. მოვაბრუნოთ ახლა A'B'' მონაკვეთი A' წერტილის გარშემო B''A'B' კუთხით. ასეთი ორი მოძრაობის შედეგად AB შეუთავსდება A'B' მონაკვეთს და, მაშასადამე, ბრტყელი ფიგურის პირველი მდებარეობიდან მიიღება მეორე მდებარეობა. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ AB მონაკვეთი შეიძლება ნებისმიერად იყოს აღებული ბრტყელ ფიგურაში, დავრწმუნდებით დებულების სამართლიანობაში.



ნახ. 52.



ნახ. 53.

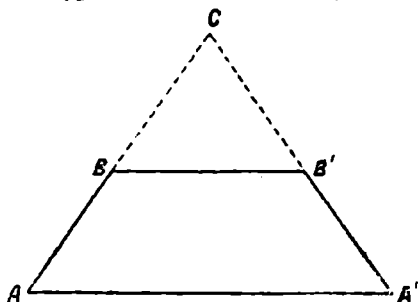
დებულება 2. ბრტყელი (S) ფიგურის ნებისმიერი გადაადგილება (Σ) სიბრტყეში მიიღება, როგორც გარკვეული წერტილის გარშემო მობრუნების ან, კერძო შემთხვევაში, გადატანითი მოძრაობის შედეგი.

მართლაც, განვიხილოთ ბრტყელი (S) ფიგურის ორი

მდებარეობა (ნახ. 53) და ვთქვათ ეს მდებარეობანი დახასიათებულია (S) ფიგურაში უძრავად აღებული მონაკვეთის AB და A'B' მდებარეობებით. შევა-

ერთოთ A და A' და აგრეთვე B და B' წერტილები სწორი ხაზის მონაკვეთებით. გაავლოთ AA' და BB' მონაკვეთების ზუაწერტილებიდან მართობები და დაუშვათ, რომ ეს მართობები იკვეთებიან რაიმე C წერტილში. დამტკიცოთ, რომ პირველი მდებარეობიდან მიიღება მეორე მდებარეობა C წერტილის გარშემო (S) ფიგურის ACA' კუთხით მობრუნებით. ამისათვის A, A', B, B' წერტილები შევუერთოთ წრფის მონაკვეთებით C წერტილს. ვინაიდან $\triangle AAC$ და $\triangle BB'C$ ტოლფერდა სამკუთხედებია, ამიტომ $AC = A'C$, $BC = B'C$. ამის გარდა, $AB = A'B'$ (A და B მყარი სხეულის წერტილებია, რის გამოც მათ შორის მანძილი არ იცვლება), მაშასადამე, $\triangle ABC = \triangle A'B'C$. თუ პირველი მდებარეობიდან (S) ფიგურას მოვებრუნებთ C წერტილის გარშემო ACA' კუთხით, ცხადია, ABC სამკუთხედი შევთავსდება $A'B'C$ სამკუთხედს და, მაშასადამე, პირველი მდებარეობიდან მიიღება მეორე მდებარეობა C წერტილის გარშემო ბრუნვით.

ვთქვათ, AA' და BB' მონაკვეთების ზუაწერტილებიდან გაღებული მართობები პარალელურია. მაშინ, როგორც ადვილი მისახედრია, $ABA'B'$ ოთხკუთხედი ან პარალელოგრამია ან ტრაპეცია. პირველ შემთხვევაში (S) ფიგურის პირველი მდებარეობიდან მეორე მდებარეობა მიიღება გადატანითი მოძრაობით, ხოლო მეორე შემთხვევაში—ტრაპეციის ფერდების ვაგრძელების გადაკვეთის C წერტილის გარშემო ACA' კუთხით მობრუნებით (ნახ. 54) და ამით დებულებაც დამტკიცებულია.



ნახ. 54.

თუ განვიხილავთ (S) ფიგურის უსასრულოდ მცირე გადაადგილებას; მაშინ უკანასკნელი დებულების ძალით, საკმარისად დიდი სიზუსტით, შეაძლება ითქვას, რომ პირველი მდებარეობიდან მეორე მდებარეობამდე მოძრაობა არის ან ბრუნვა გარკვეული წერტილის გარშემო ან გადატანითი მოძრაობა. თუ სასრულ გადაადგილებას განვიხილავთ, როგორც უსასრულოდ მცირე გადაადგილებათა ერთობლიობას, დავრწმუნდებით, რომ ყოველ მომენტში სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს ბრუნვით მოძრაობას, ან კერძო შემთხვევაში, გადატანით მოძრაობას ჰქონდეს ადგილი. მაშასადამე, როგორც ადვილი მისახედრია, ასეთი გზითაც შეიძლება ბრტყელი მოძრაობის შესახებ წინა პარაგრაფებში მოყვანილი შედეგების მიღება.

ბრტყელი მექანიზმის სხვადასხვა ნაწილის ბრუნვის მყისი ცენტრების მოძებნისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს შემდეგ დებულებას (არონჰოლდის დებულება):

განვიხილოთ რაიმე სიბრტყის გასწვრივ მოძრავე (S_1), (S_2) და (S_3) ბრტყელი ფიგურები (საკმარისად მცირე სისქის ფირფიტები). აღვნიშნოთ (S_i) ფიგურის მიმართ (S_i) ($i=2, 3$) ფიგურის მოძრაობის შესაბამის მყისი ცენტრი C_i -თი. ასევე, (S_2)-ის მიმართ (S_3) ფიგურის მოძრაობის შესაბამის მყისი ცენტრი იყოს C_{23} . სამივე ეს წერტილი (C_{12} , C_{13} და C_{23}) მოთავსებულია ერთსა და იმავე წრფეზე.

განვიხილოთ რაიმე სიბრტყის გასწვრივ მოძრავე (S_1), (S_2) და (S_3) ბრტყელი ფიგურები (საკმარისად მცირე სისქის ფირფიტები). აღვნიშნოთ (S_i) ფიგურის მიმართ (S_i) ($i=2, 3$) ფიგურის მოძრაობის შესაბამის მყისი ცენტრი C_i -თი. ასევე, (S_2)-ის მიმართ (S_3) ფიგურის მოძრაობის შესაბამის მყისი ცენტრი იყოს C_{23} . სამივე ეს წერტილი (C_{12} , C_{13} და C_{23}) მოთავსებულია ერთსა და იმავე წრფეზე.

მართლაც, აღნიშნული სამი მოძრაობის შესაბამის კუთხური სიჩქარეები იყოს $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{13}$ და $\bar{\omega}_{23}$. თუ (S_1) ფიგურის მიმართ მოძრაობას განვიხილავთ როგორც აბსოლუტურს, მაშინ (S_3) -ის მოძრაობა (S_1) -ის მიმართ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი მოძრაობისაგან შედგენილი: (S_2) -ის მოძრაობისაგან (S_1) -ის მიმართ და (S_2) -ის მოძრაობისაგან (S_2) ის მიმართ. ბრუნვათა ერთობლიობის შესახებ § 16-ის 2^ო პუნქტში ნათქვამის ძალით, $\bar{\omega}_{13}$ არის $\bar{\omega}_{12}$ და $\bar{\omega}_{23}$ ვექტორების ტოლქმედი და მაშასადამე, სამივე ამ ვექტორის მოდებებს წერტილები $(C_{13}$, C_{12} და $C_{23})$ ერთ წრფეზეა მოთავსებული. ამით დებულება დამტკიცებულია.

ამოცანები

32. მოცემულია ბრტყელი მოძრაობისათვის v_{0x} , v_{0y} , ა როგორც დროის ფუნქციები და აგრეთვე, სხეულის საწყისი მდებარეობა; ვიპოვოთ ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები.

ცხადია, მობრუნების φ კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$\varphi = \int \omega(t) dt + C_1. \quad (1)$$

სადაც C_1 მუდმივია, რომელიც საწყისი პირობით განისაზღვრება. კოორდინატთა გარდაქმნის ცნობილი ფორმულების ძალით ვღებულობთ

$$v_{0\xi} = v_{0x} \cos \varphi - v_{0y} \sin \varphi; \quad (2)$$

$$v_{0\eta} = v_{0x} \sin \varphi + v_{0y} \cos \varphi.$$

ამრიგად, $v_{0\xi}$ და $v_{0\eta}$ მოიძებნება, როგორც დროის ფუნქციები. ვინაიდან

$$v_{0\xi} = \frac{d\xi_0}{dt}, \quad v_{0\eta} = \frac{d\eta_0}{dt},$$

ამიტომ

$$\xi_0 = \int v_{0\xi}(t) dt + C_2, \quad \eta_0 = \int v_{0\eta}(t) dt + C_3, \quad (3)$$

სადაც C_2 და C_3 მუდმივებია, რომელნიც საწყისი პირობებით განისაზღვრებიან.

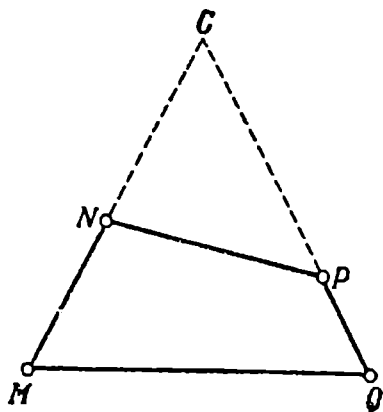
(1) და (3) განტოლებები სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებებს წარმოადგენენ.

33. დავამტკიცოთ, რომ ალბეულ მომენტში ბრტყელი (S) ფიგურის სხვადასხვა წერტილის ტრანექტორიების მართობები ერთ წერტილში იკვეთებიან (მყის ცენტრში) ან პარალელურნი არიან (თუ ალბეულ მომენტში მოძრაობა გადატანითია).

მართლაც, ვინაიდან (S) ფიგურის რაიმე წერტილის ტრანექტორიის მართობი ამ წერტილის სიჩქარის მართობია, ამიტომ ეს მართობი მყის ცენტრზე გაივლის (თუ ის არსებობს). თუ მყისი ცენტრი არ არსებობს, მაშინ ალბეულ მომენტში (S) ფიგურის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს და მაშასადამე, სიჩქარეთა მართობები პარალელურია.

34. განვსაზღვროთ ოთხბოლიანი $MNPQ$ მექანიზმის (ნახ. 55) NP ბარბაცას ბრუნვის მყისი ცენტრი, თუ MQ რგოლი უძრავია.

ცხადია, N და P წერტილების სიჩქარეები შესაბამად MN და QP მონაკვეთების მართობია, ამიტომ საძიებელი მყისი ცენტრი C მოთავსებულია MN და QP წრფეების გადაკვეთაზე.

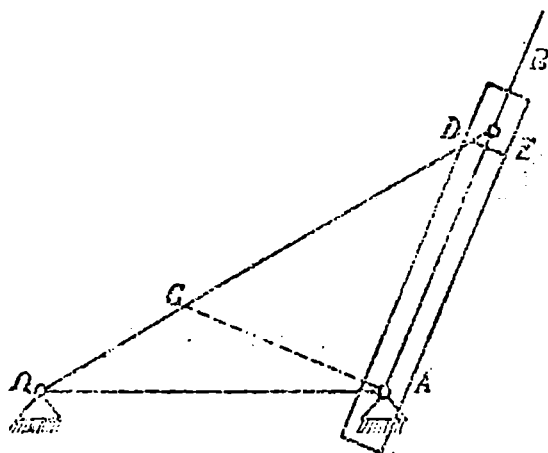


ნახ. 55.

E მცოცის წერტილს და მაშასადამე, E მცოცის D წერტილის სიჩქარე ED -ს მართობია. ამის შემდეგ ცხადია, რომ საძიებელი მყისი ცენტრი C მოთავსე-

ვანში OA დამაგრებულია უძრავად (ნახ. 56). მექანიზმის აღებული მდებარეობისათვის ვიპოვოთ E მცოცის ბრუნვის მყისი ცენტრი.

ვთქვათ, E მცოცი გაფარძელეთ (წარმოღვენით) მანამდე, სანამ ის A ბრუნვის ცენტრს არ მოიცავს. მაშინ, ცხადია, E მცოცის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც აღებულ მომენტში A წერტილს ემთხვევა, AB წრფეზეა დამთხვეული. ამის გარდა ცხადია, რომ ED მრუდმხარას D წერტილი წარმოადგენს



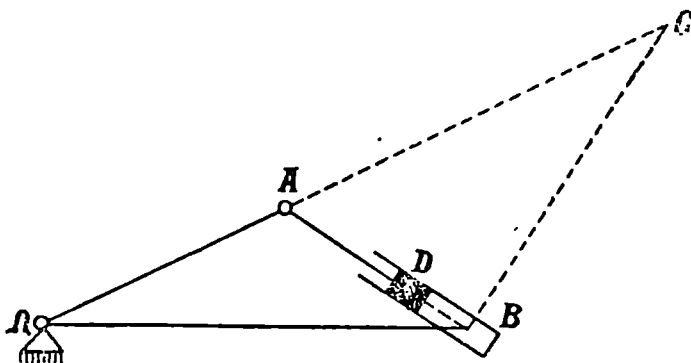
ნახ. 56.

ბულია AB წრფის A წერტილში აღმართული მართობისა და ED წრფის გადაკვეთაზე.

36. ორთქლის მანქანის ცილინდრის შეუძლია ბრუნვა B წერტილში გაშვებული ღერძის გარშემო (ნახ. 57). AD ჭოკის ერთი ბოლო მიმაგრებულია დგუშთან, რომელიც ცილინდრშია მოთავსებული, ხოლო მეორე ბოლო სახსრითაა მიმაგრებული OA მრუდმხარასთან. ვიპოვოთ AD ჭოკის ბრუნვის მყისი ცენტრი.

ცხადია, ჭოკის A წერტილის სიჩქარე მართობია OA მონაკვეთის. ვთქვათ, AD ჭოკი გაფარძელებულია მანამდე, სანამ ის B წერტილს არ მოიცავს. მაშინ, როგორც აღვილი მისახვედრია, ამ ჭოკის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც აღებულ მომენტში B წერტილს ემთხვევა, AD ჭოკის გასწვრივაა მიმართული.

ამის შემდეგ ცხადია, რომ საძიებელი მყისი ცენტრი მოთავსებულია AD წრფის B წერტილში გავლებული მართობისა და OA წრფის გადაკვეთზე.



ნახ. 57.

37. OA მრუდმხარა თანაბრად ბრუნავს O წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და AB ბარბაცას საშუალებით B მცოცს ამოძრავებს (ნახ. 58). მოცემულია, რომ $OA = a$, $AB = b$ ($a < b$). მოვინახოთ მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის: 1) AB ბარბაცას ბრუნვის მყისი ცენტრი და კუთხური სიჩქარე, 2) AB ბარბაცას B წერტილის სიჩქარე.

AB ბარბაცას A წერტილი იმავე დროს OA მრუდმხარას ეკუთვნის, ამიტომ A წერტილის სიჩქარე მართობია OA წრფის. AB მრუდმხარას მეორე B წერტილი O -ზე ღერძზე სრიალებს, ამიტომ მისი სიჩქარე დამთხვეულია ამ ღერძზე. ამის შემდეგ ცხადია, რომ AB ბარბაცას მყისი ცენტრი C მოთავსებულია O -ზე ღერძის B წერტილში გავლებული მართობისა და OA წრფის გადაკვეთის წერტილში.

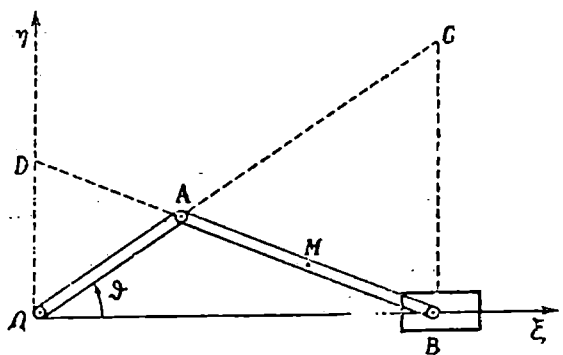
ვიზოვით ახლა AB ბარბაცას ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. აღვნიშნოთ მისი სიდიდე ω -ით. OA მრუდმხარას ბრუნვის კუთხური სიჩქარის სიდიდე იყოს ω

($\omega = \frac{d\varphi}{dt}$). თუ AB ბარბაცას A წერტილის სიჩქარეს აღვნიშნავთ v -ით, ცხადია, გვექნება (იხ. (19,14) ფორმულა)

$$|v| = \omega \cdot AC. \quad (4)$$

ვინაიდან A წერტილი იმავე დროს OA მრუდმხარას ეკუთვნის, ამიტომ

$$|v| = \omega \cdot OA = \omega a. \quad (5)$$



ნახ. 58.

თუ ამ მნიშვნელობას (4)-ში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\omega_1 = \omega \frac{a}{AC}. \quad (6)$$

$\triangle AD$ და ABC სამკუთხედების მსგავსების გამო გვექნება

$$\frac{a}{AC} = \frac{AD}{b}.$$

ამრიგად, ვღებულობთ

$$\omega_1 = \omega \frac{a}{AC} = \omega \frac{AD}{b}. \quad (7)$$

აღვნიშნოთ ახლა B წერტილის სიჩქარის სიდიდე v_1 -ით. ვინაიდან B წერტილი AB ბარბაცას ეკუთვნის, ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$v_1 = \omega_1 \cdot CB.$$

(7)-ის ძალით, ეს უკანასკნელი გვაძლევს

$$v_1 = \frac{AD \cdot CB}{b} \omega. \quad (8)$$

ზემოთ განხილული სამკუთხედების მსგავსება გვაძლევს

$$\frac{CB}{b} = \frac{QD}{AD}. \quad (9)$$

უკანასკნელის ძალით, (8) ფორმულიდან ვღებულობთ

$$v_1 = \frac{AD \cdot CB}{b} \omega = QD \cdot \omega. \quad (10)$$

AB ბარბაცას ბრუნვის $\overrightarrow{\omega_1}$ კუთხური სიჩქარისა და B წერტილის $\overrightarrow{v_1}$ სიჩქარის გეზების განსაზღვრისათვის შევნიშნოთ, რომ, როცა: 1) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, მაშინ AB ბარბაცა ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და მაშასადამე, $\overrightarrow{\omega}$ და $\overrightarrow{\omega_1}$ ვექტორებს ერთმანეთის საწინააღმდეგო გეზი აქვთ, ხოლო $\overrightarrow{v_1}$ სიჩქარეს აქვს $\overrightarrow{\omega}$ ღერძის საწინააღმდეგო გეზი, 2) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$, მაშინ $\overrightarrow{\omega}$ და $\overrightarrow{\omega_1}$ -ს აქვთ ერთნაირი გეზი (AB ბარბაცა ბრუნავს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით), $\overrightarrow{v_1}$ -ს ისევ $\overrightarrow{\omega}$ ღერძის საწინააღმდეგო გეზი აქვს, 3) $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, მაშინ $\overrightarrow{\omega}$ და $\overrightarrow{\omega_1}$ ვექტორებს ერთნაირი გეზი აქვთ, $\overrightarrow{v_1}$ სიჩქარეს აქვს $\overrightarrow{\omega}$ ღერძის გეზი, 4) $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$, მაშინ AB ბარბაცა ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და მაშასადამე, $\overrightarrow{\omega_1}$ და $\overrightarrow{\omega}$ -ს აქვთ ერთმანეთის საწინააღმდეგო გეზი; $\overrightarrow{v_1}$ სიჩქარეს აქვს ისევ $\overrightarrow{\omega}$ ღერძის გეზი.

38. ვთქვათ, წინა ამოცანაში $\Omega A = AB = 10$ სმ, $\omega = 10 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$. ვიპოვოთ

AB ბარბაცას $M(\xi, \eta)$ შუაწერტილის მოძრაობის განტოლებები და ტრაექტორია (ნახ. 58), თუ საწყის მომენტში B მცოცს ეკავა მარჯვენა კიღურა შდებარეობა.

ცხადია,

$$\varphi = \omega t = 10 t.$$

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \eta = \frac{\eta_1}{2}, \quad (11)$$

სადაც ξ_1, η_1 A წერტილის კოორდინატებია, ხოლო ξ_2 არის B წერტილის აბსცისა.

როგორც აღვილი მისახვედრია, აღვილი აქვს ტოლობებს

$$\xi_1 = 10 \cos 10 t, \quad \eta_1 = 10 \sin 10 t, \quad \xi_2 = 20 \cos 10 t.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (11) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\xi = 15 \cos 10 t, \quad \eta = 5 \sin 10 t, \quad (12)$$

საიდანაც

$$\frac{\xi^2}{15^2} + \frac{\eta^2}{5^2} = 1. \quad (13)$$

ამრიგად, ბარბაცას M შუაწერტილის მოძრაობის განტოლებები მოცემულია (12) ფორმულებით, ხოლო მისი ტრაექტორია არის ელიფსი, რომლის განტოლება მოცემულია (13) ფორმულით.

39. ვთქვათ, (I_2) წირი უსრიალოდ გორავს უძრავ (I_1) წირზე. ცხადია, (I_2) წირთან უძრავად დაკავშირებული რაიმე M წერტილი გარკვეულ წირს შემოწერს, რომელსაც რუღეტი ეწოდება. დავამტკიცოთ, რომ ხსენებული M წერტილის ტრაექტორიის ნორმალს გადის (I_1) და (I_2) წირების თანახების წერტილში.

მართლაც, რუღეტის M წერტილზე გავლებული ნორმალს სიჩქარის მართობა და მაშასადამე, მან მყის ცენტრზე უნდა გაიაროს. მაგრამ, როგორც ვიცით, მყისი ცენტრი ხსენებული თანახების წერტილშია მოთავსებული და ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

40. ვთქვათ, მოცემულია მყარი ღერო AB , რომლის A და B ბოლო წერტილები სრიალებენ უძრავ თანამართობ $\Omega\xi$ და $\Omega\eta$ ღერძებზე (ნახ. 59). ამ გეგანიზმს ეწოდება ელიფსური ფარგალი. დავამტკიცოთ, რომ AB ღეროს ყოველი წერტილი ელიფსს შემოწერს და ვიპოვოთ ამ ღეროს ცენტროიდები.

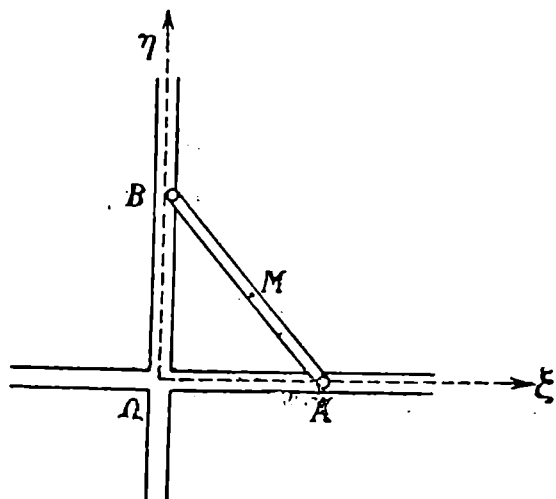
განვიხილოთ AB ღეროს ნებისმიერი $M(\xi, \eta)$ წერტილი და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$AM = b, \quad BM = a, \quad \angle \Omega AB = \varphi.$$

ცხადია, გვექნება $\xi = a \cos \varphi$, $\eta = b \sin \varphi$, საიდანაც

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

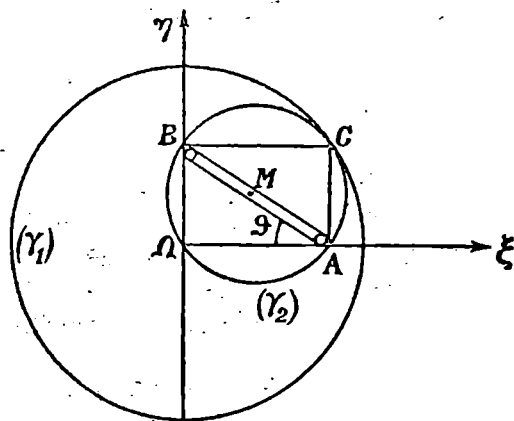
ამრიგად, AB ღეროს ნებისმიერი M წერტილის ტრაექტორია არის ელიფსი, რომლის მთავარი ღერძებია $\Omega\xi$ და $\Omega\eta$. თუ M წერტილი AB მონაკვეთს ზუაზე ყოფს ($a=b$), მაშინ, ცხადია, ტრაექტორია იქნება წრე-წირი. თუ M წერტილი A ან B ბოლო წერტილს ემთხვევა, მაშინ ტრაექ-



ნახ. 59.

ტორია იქნება წრფის მონაკვეთი, რომელიც $\Omega\xi$ ან $\Omega\eta$ ღერძზე იქნება მოთავსებული.

ვიპოვოთ ახლა AB ღეროს ცენტროიდები. ვინაიდან A წერტილი სრიალებს $\Omega\xi$ ღერძზე, ხოლო B წერტილი — $\Omega\eta$ ღერძზე და, მაშასადამე, მათი სიჩ-



ნახ. 60.

ქარეები ამ ღერძებზეა დამთხვეული, ამიტომ მყისი ცენტრი C მოთავსებული იქნება ამ ღერძების A და B წერტილებზე გავლებული მართობების თანაკვეთაზე (ნახ. 60). ცხადია, რომ $\Omega C = AB$.

ამრიგად, უძრავი (γ_1) ცენტროიდი არის წრეწირი, რომლის რადიუსი უდრის AB -ს. მეორეს მხრივ, $\angle ACB$ მართია, ამიტომ ის შეიძლება განვიხილოთ, როგორც AB დიამეტრზე დაყრდნობილი კუთხე და მაშასადამე, C წერტილი ყოველთვის მოთავსებული იქნება წრეწირზე, რომლის დიამეტრსაც AB ღერო წარმოადგენს (ნახ. 60). ეს წრეწირი, ცხადია, მოძრავ (γ_2) ცენტროიდს წარმოადგენს.

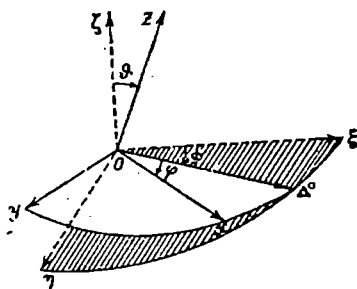
ამრიგად, უძრავი და მოძრავი ცენტროიდები წრეწირებია, ამასთან უძრავი ცენტროიდის რადიუსი ორჯერ მეტია მოძრავი ცენტროიდის რადიუსზე. § 21-ის მეორე დებულების ძალით, AB ღეროს მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მოძრავი (γ_2) ცენტროიდის უძრავ (γ_1) ცენტროიდზე უსრიალო გარკვის შედეგი.

ზემოთ ნაჩვენები იყო, რომ AB დიამეტრის ყოველი წერტილი ელიფსს შემოწერს. სრული სიმეტრიის გამო ცხადია, რომ ასეთივე შედეგს მივიღებთ თუ AB დიამეტრის ნაცვლად ავიღებთ (γ_2) წრეწირის ნებისმიერ სხვა დიამეტრს და მაშასადამე, (γ_2) წრეწირით შემოსაზღვრულ წრესთან უძრავად დაკავშირებული ნებისმიერი წერტილი ელიფსს შემოწერს. ასევე ცხადია, რომ (γ_2) წრეწირის ნებისმიერი წერტილი (ისე, როგორც AB დიამეტრის ბოლო წერტილები) Ω წერტილზე გამავალი წრფის გარკვეულ მონაკვეთს შემოწერს.

§ 23. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო

ვთქვათ, მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი ერთი რომელიმე O წერტილი უძრავია. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო. განვიხილოთ კოორდინატა $O\xi\eta\zeta$ სისტემა, რომელსაც პირობით უძრავ სისტემას (ძირითად სისტემას) ვუწოდებთ და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა. ცხადია, მყარი სხეულის მოძრაობას სავსებით დაახასიათებს $Oxyz$ სისტემის მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ. მაგრამ, როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდანაც ცნობილი, მოძრავი კოორდინატა ღერძების მდებარეობა უძრავი ღერძების მიმართ სავსებით დაახასიათდება სამი დამოუკიდებელი პარამეტრით. ასეთ პარამეტრებად, კერძოდ ეილერის φ , ψ , θ კუთხეები შეიძლება მივიღოთ.

მოვიგონოთ ეილერის კუთხეების განმარტება. ვთქვათ, კოორდინატა $O\xi\eta\zeta$ და $Oxyz$ სისტემები მარცხენა სისტემებს შეადგენენ (ნახ. 61). Oxy სიბრტყეში ბრუნვის დადებით მიმართულებად, როგორც ყოველთვის, მივიღოთ ის მიმარ-



ნახ. 61.

თულება, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ $\frac{\pi}{2}$ კუთხით Ox ღერძი, რომ ის შეუთავსდეს Oy ღერძს. ანალოგიურად განვსაზღვრავთ ბრუნვის დადებით მიმართულებას $O\xi\eta$ სიბრტყეში. აღვნიშნოთ Oxy და $O\xi\eta$ სიბრტყეთა თანაკვეთა Δ^0 -თ. გარკვეულობისათვის ის მოგვგზოთ ისე, რომ $O\xi$, Ox , Δ^0 ღერძები

მარცხენა სისტემას შეადგენდენ. φ არის კუთხე $O\xi$ და Δ° ლერძებს შორის. ეს კუთხე მოთავსებულია $(0, 2\pi)$ შუალედში და აითვლება $O\xi$ ლერძიდან $O\xi$ სიბრტყეში ბრუნვის დადებითი მიმართულებით. φ არის კუთხე Δ° ლერძსა და Ox ლერძს შორის. ის მოთავსებულია აგრეთვე $(0, 2\pi)$ შუალედში და აითვლება Δ° ლერძიდან Oxy სიბრტყეში ბრუნვის დადებითი მიმართულებით. ბოლოს, ϑ არის კუთხე $O\xi$ და Ox ლერძებს შორის, რომელიც იცვლება $(0, \pi)$ შუალედში.

ამრიგად, სხეულის მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში ცნობილი იქნება, თუ ცნობილია φ , ψ , ϑ კუთხეები, როგორც დროის ფუნქციები და, მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში, სხეულის მოძრაობის განტოლებები იქნება (იხ. (11,1) განტოლებები)

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

ამ განტოლებებს უძრავი O წერტილის გარშემო ბრუნვის განტოლებები ეწოდება.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვის შემთხვევაში მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი სამის ტოლია.

ვთქვათ, მოცემულია უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვის განტოლებები; ვიპოვოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილის მოძრაობის განტოლებები. ვინაიდან x, y, z აღებული M წერტილის კოორდინატებია მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემის მიმართ, ამიტომ სხეულის მოძრაობის დროს ეს კოორდინატები არ იცვლებიან. აღვნიშნოთ ხსენებული M წერტილის კოორდინატები $O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ ξ, η, ζ -თი. ანალიზურ გეომეტრიაში კარგად ცნობილი კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულების ძალით, გვექნება

$$\xi = l_1x + l_2y + l_3z,$$

$$\eta = m_1x + m_2y + m_3z, \quad (23,1)$$

$$\zeta = n_1x + n_2y + n_3z,$$

სადაც l_1, m_1, n_1 წარმოადგენენ Ox ლერძის გეზის კოსინუსებს უძრავი სისტემის მიმართ, ე. ო.

$$l_1 = \cos(Ox, O\xi), \quad m_1 = \cos(Ox, O\eta), \quad n_1 = \cos(Ox, O\zeta).$$

ასეთივე მნიშვნელობები აქვთ l_2, m_2, n_2 და l_3, m_3, n_3 სიდიდეებს, როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდანაა ცნობილი,

$$l_1 = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta,$$

$$m_1 = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi,$$

$$n_1 = \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$l_2 = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$m_2 = \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \psi \sin \varphi,$$

$$n_2 = \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$l_2 = \sin \psi \sin \vartheta,$$

$$m_3 = -\cos \psi \sin \vartheta,$$

$$n_3 = \cos \vartheta.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (23,1) ტოლობებში და გავითვალისწინებთ, რომ φ , ψ , ϑ დროის ცნობილი ფუნქციებია, მივიღებთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს.

გამოვთვალოთ ახლა მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე. (23,1) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} v_\xi &= \frac{d\xi}{dt} = l'_1 x + l'_2 y + l'_3 z, \\ v_\eta &= \frac{d\eta}{dt} = m'_1 x + m'_2 y + m'_3 z, \\ v_\zeta &= \frac{d\zeta}{dt} = n'_1 x + n'_2 y + n'_3 z, \end{aligned} \quad (23,2)$$

სადაც l'_1 , l'_2 , l'_3 , ..., წარმოადგენენ l_1 , l_2 , l_3 , ..., გეზის კოსინუსების წარმოებულებს. ეს ფორმულები იძლევიან სიჩქარის კოორდინატებს უძრავი ლერძების მიმართ.

გამოვთვალოთ ახლა სიჩქარის გვეგმილები მოძრავ $Oxyz$ სისტემის ლერძებზე.

თუ M წერტილის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ აღვნიშნავთ $\vec{\rho}$ -თი, გვექნება

$$\vec{\rho} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , როგორც ყოველთვის, Ox , Oy , Oz ლერძების მგეზავებია¹. ვინაიდან x , y , z სხეულის მოძრაობის დროს არ იცვლება, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის დროის მიხედვით გაწარმოება მოგვეცემს

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (23,3)$$

აღვნიშნოთ \vec{v} სიჩქარის გვეგმილები Ox , Oy , Oz ლერძებზე v_x , v_y , v_z -ით. ვინაიდან

$$v_x = (\vec{i} \cdot \vec{v}), \quad v_y = (\vec{j} \cdot \vec{v}), \quad v_z = (\vec{k} \cdot \vec{v}),$$

ამიტომ, (23,3) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$v_x = x \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \quad (23,4)$$

¹ ცხადია, ზემოთ განხილული l_1 , m_1 , n_1 ; l_2 , m_2 , n_2 და l_3 , m_3 , n_3 წარმოადგენენ შესაბამის \vec{i} , \vec{j} და \vec{k} ვექტორების კოორდინატებს უძრავი სისტემის მიმართ: $\vec{i} = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{j} = (l_2, m_2, n_2)$, $\vec{k} = (l_3, m_3, n_3)$.

$$\begin{aligned}
 v_y &= x \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\
 v_z &= x \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right).
 \end{aligned}
 \tag{23,4}$$

ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$(\vec{i} \cdot \vec{i}) = (\vec{j} \cdot \vec{j}) = (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1.$$

ამ ტოლობების გაწარმოება მოგვცემს

$$\left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) = \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) = \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობების ძალით, (23,4) ფორმულები ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned}
 v_x &= y \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\
 v_y &= x \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + z \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\
 v_z &= x \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right).
 \end{aligned}
 \tag{23,5}$$

ვინაიდან

$$(\vec{k} \cdot \vec{j}) = (\vec{i} \cdot \vec{k}) = (\vec{j} \cdot \vec{i}) = 0,$$

ამიტომ, ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\begin{aligned}
 \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) &= - \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \quad \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = - \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right), \\
 \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) &= - \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right).
 \end{aligned}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\begin{aligned}
 p &= \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) = - \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\
 q &= \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = - \left(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right), \\
 r &= \left(\vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) = - \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right),
 \end{aligned}
 \tag{23,6}$$

მაშინ (23,5) ტოლობები ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned}
 v_x &= qz - ry, \\
 v_y &= rx - pz, \\
 v_z &= py - qx.
 \end{aligned}
 \tag{23,7}$$

უკანასკნელი ტოლობები ვექტორულად, ცხადია, ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\vec{v} = [\vec{w} \cdot \vec{p}], \quad (23,8)$$

სადაც \vec{w} ვექტორია, რომლის გვეგმილებიც მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე არის p, q, r : $\vec{w} = (p, q, r)$.

როგორც ვნახეთ მოძრავი კოორდინატთა ღერძების გეზის კოსინუსები ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ვექტორების კოორდინატები $O\xi\eta\zeta$ სისტემაში) გამოისახება ელემენტარულად. ეილერის კუთხეების საშუალებით, ამიტომ თუ სხეულის მოძრაობის განტოლებები ცნობილია, მაშინ \vec{w} ვექტორი განისაზღვრება (23,6) ტოლობებით და სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე გამოითვლება (23,8) ფორმულით.

თუ მოვიგონებთ მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის შემთხვევაში მიღებულ (13,4) ფორმულას და შევადარებთ მას (23,8) ფორმულას, დავრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 1. როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო, მაშინ დროის ყოველ მომენტში სხეულში სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს ადგილი ჰქონდეს O წერტილზე გამავალი გარკვეული Δ ღერძის გარშემო ბრუნვას \vec{w} კუთხური სიჩქარით.

Δ ღერძს, რომელზედაც აღებულ მომენტში \vec{w} ვექტორია დამთხვეული, ეწოდება ბრუნვის მყისი ღერძი, ხოლო \vec{w} -ს—მყისი კუთხური სიჩქარე. ცხადია, სხეულის მოძრაობა, საზოგადოდ, არ იქნება უბრალო ბრუნვა ღერძის გარშემო, რადგან დროთა ვითარებაში ზემოხსენებული Δ ღერძი იცვლის მდებარეობას როგორც მოძრავ, ისე უძრავ სისტემაში.

ვინაიდან ბრუნვის მყისი ღერძის ყოველი წერტილის სიჩქარე აღებულ მომენტში ნულის ტოლია, ამიტომ ამ ღერძის წერტილებისათვის (23,8) ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{v} = [\vec{w} \cdot \vec{p}] = 0,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}. \quad (23,9)$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, წარმოადგენს ბრუნვის Δ მყისი ღერძის განტოლებას მოძრავ სისტემაში. ამავე ღერძის განტოლებას უძრავი სისტემის მიმართ შემდეგი სახე ექნება:

$$\frac{\xi}{P} = \frac{\eta}{Q} = \frac{\zeta}{R}, \quad (23,10)$$

სადაც P, Q, R წარმოადგენენ \vec{w} ვექტორის კოორდინატებს უძრავ სისტემაში.

ბრუნვის მყისი ღერძი, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არ არის უძრავი. იმ ფართეულს, რომელსაც ეს ღერძი უძრავ სისტემაში შემოწერს, ეწოდება უძრავი აქსოიდი, ხოლო იმ ფართეულს, რომელსაც ის მოძრავ სისტემაში შემოწერს—მოძრავი აქსოიდი.

თუ (23,9) განტოლებებიდან დროს (t -ს) გამოვრიცხავთ, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \quad (23,11)$$

რომელიც, როგორც აღვილი მისახვედრია, მოძრავი აქსოიდის განტოლებას წარმოადგენს. ასევე დავრწმუნდებით, რომ უძრავი აქსოიდის განტოლებას ექნება სახე:

$$F\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) = 0. \quad (23,12)$$

ამ ორ კონუსურ ფართეულს, რომელთა წვეროც არის O წერტილი, დროის ყოველ მომენტში საერთო Δ წრფე აქვს, რომლის გასწვრივაც ისინი ეხებიან ერთმანეთს (ნახ. 62). ეს Δ წრფე, როგორც აღვილი მისახვედრია, ბრუნვის მყის ღერძს წარმოადგენს, ამიტომ მისი წერტილების სიჩქარეები აღებულ მომენტში ნულის ტოლია.

შემოვიღოთ ერთი ფართეულის მეორეზე უსრიალოდ გორვის ცნება.

ჩვენ ვიტყვი, რომ მოძრავი (I_2) ფართეული უსრიალოდ გორავს უძრავ (I_1) ფართეულზე, თუ ეს ფართეულები ყოველთვის თანახებაშია (აქვთ საერთო მხები სიბრტყე) და (I_2)

ფართეულის იმ წერტილების სიჩქარე, რომლითაც ის (I_1) ფართეულს ეხება, ნულის ტოლია. უსრიალო გორვის ცნება, ცხადია, გამოდგება მაშინაც, როცა (I_1) ფართეული მოძრავია და განიხილება (I_2) -ის ფარდობითი მოძრაობა (I_1) -ის მიმართ.

დავამტკიცოთ პუანსოს შემდეგი დებულება:

დებულება 2. როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო, მაშინ მოძრავი აქსოიდი უსრიალოდ გორავს უძრავ აქსოიდზე.

მართლაც, განვიხილოთ დროის აღებულ t მომენტში აღნიშნული ორი ფართეულის საერთო შემკმნელის ნებისმიერი A წერტილი. ვთქვათ, (γ_1) და (γ_2) ის წირებია, რომელნიც A წერტილის მიერ არის შემოწერილი უძრავ (I_1) და მოძრავ (I_2) აქსოიდებზე. სავსებით ისევე, როგორც უძრავი და მოძრავი ცენტროიდების შემთხვევაში იყო ნაჩვენები, (იხ. § 21) შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (γ_2) წირი უსრიალოდ გორავს (γ_1) წირზე და, მაშასადამე, ამ ორ წირს A წერტილში საერთო $\vec{\tau}$ მხები აქვს. ვინაიდან $\vec{\tau}$ უძრავი და მოძრავი აქსოიდების საერთო მხებისა წარმოადგენს, ამიტომ ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ (I_1) და (I_2) ფართეულებს საერთო შემკმნელი და ერთი საერთო მხები წრფე აქვთ. ამის შემდეგ ადვილად დავასკვნით, რომ აღნიშნულ შემკმნელზე და მხებზე გამავალი სიბრტყე იქნება მათი საერთო მხები სიბრტყე. თუ ამის გარდა მოვიგონებთ, რომ საერთო შემკმნელის (Δ ღერძის) წერტილთა სიჩქარეები აღებულ მომენტში ნულის ტოლია, დავრწმუნდებით დებულების სამართლიანობაში.

განვიხილოთ ბრუნვის მყის ღერძზე ერთეული ვექტორი (Δ ღერძის მგეზავი) \vec{OK} . როცა მყარი სხეული მოძრაობს, მაშინ K წერტილი მოძრაობს, როგორც უძრავი $Ox\eta$ სისტემის, ისე მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. აღვნიშნოთ K წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე \vec{v}_a -თი, ხოლო ფარდობითი სიჩქარე \vec{v}_r -ით. (10,1) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\vec{v}_a = \vec{v}_\omega + \vec{v}_r, \quad (23,13)$$

სადაც \vec{v}_ω არის K წერტილის წარმტანი სიჩქარე. ვინაიდან K წერტილი Δ ღერძზე მდებარეობს, ამიტომ, ცხადია, $\vec{v}_\omega = 0$ და (23,13) ფორმულა მოგვცემს

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r. \quad (23,14)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ K წერტილი უძრავია უძრავი სისტემის ($Ox\eta$ სისტემის) ან მოძრავი სისტემის ($Oxyz$ სისტემის) მიმართ, მაშინ ის უძრავი იქნება ორივე სისტემის მიმართ. რადგან \vec{OK} ვექტორი Δ ღერძზეა მოთავსებული, ამიტომ იგივე ითქმის ამ ღერძის მიმართაც. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

დებულება 3. თუ Δ ღერძი უძრავია უძრავი სისტემის მიმართ ან მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული სისტემის მიმართ, მაშინ ის უძრავი იქნება ორივე სისტემის მიმართ და მაშასადამე, მყარი სხეულის მოძრაობა იქნება ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო.

§ 24. აჩქარებათა განაწილება უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის მოძრაობის შემთხვევაში. რივალსის ფორმულა

(23,8) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + \left[\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right].$$

ვინაიდან $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{w} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]]. \quad (24,1)$$

II თავის (6,1) ფორმულის ძალით,

$$[\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]] = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} \omega^2. \quad (24,2)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (24,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{w} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} \omega^2. \quad (24,3)$$

ამრიგად, აჩქარების გამოსათვლელად გვაქვს (24,1), ანუ რაც იგივეა, (24,3) ფორმულა.

აჩქარების გამოსახულებას შეიძლება კიდევ სხვა სახე მივცეთ. აღვნიშნოთ ამ მიზნით $\vec{\omega}$ -ით $\vec{\omega}$ ვექტორის მგეზავი. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$, (24,2) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$[\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]] = \omega^2 [\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}] = \omega^2 [\omega^2 \rho - \vec{\rho}] = \omega^2 \vec{a}, \quad (24,4)$$

სადაც

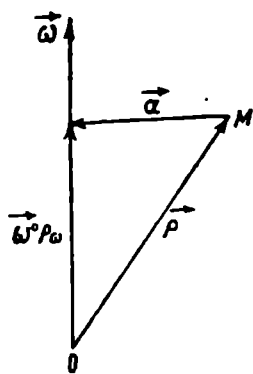
$$\vec{a} = \rho \omega^2 - \vec{\rho},$$

ამასთან (ნახ. 63)

$$\rho \omega = \text{მზგ } \vec{\omega} \cdot \vec{\rho}.$$

თუ (24,4) მნიშვნელობას (24,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ რივალსის შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{w} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + \omega^2 \vec{a}. \quad (24,5)$$



ნახ. 63.

$\omega^2 \vec{a}$ სიდიდეს ეწოდება ლერძისკენული აჩქარება.

ვინაიდან

$$\vec{\omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k},$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \frac{dp}{dt} \vec{i} + \frac{dq}{dt} \vec{j} + \frac{dr}{dt} \vec{k} + \\ &+ p \frac{d\vec{i}}{dt} + q \frac{d\vec{j}}{dt} + r \frac{d\vec{k}}{dt}. \end{aligned} \quad (24,6)$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ვექტორის გეგმილები Ox , Oy , Oz ლერძებზე იქნება $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$. ამისათვის (24,6) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად \vec{i} -ზე, მივიღებთ

$$\text{მზგ } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{i} \right) = \frac{dp}{dt} + p \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + q \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + r \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right).$$

როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები

$$\left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} \right) = 0, \quad \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \right) = -r, \quad \left(\vec{i} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = q.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს უკანასკნელ ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\text{მზგ } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\text{მზგ } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dq}{dt}, \quad \text{მზგ } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

ამრიგად, მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში აღილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt} \right).$$

თუ ამას გავითვალისწინებთ და (24,3) ტოლობას დავაგეგმილებთ მოძრავ კოორდინატთა ლერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x, \\ w_y &= \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y, \\ w_z &= \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z. \end{aligned} \quad (24,7)$$

(24,3) ტოლობის უძრავ კოორდინატთა ლერძებზე დავგეგმილება მოგვეცემს

$$\begin{aligned} w_\xi &= \frac{dQ}{dt} \zeta - \frac{dR}{dt} \eta + P(P\xi + Q\eta + R\zeta) - \xi(P^2 + Q^2 + R^2), \\ w_\eta &= \frac{dR}{dt} \xi - \frac{dP}{dt} \zeta + Q(P\xi + Q\eta + R\zeta) - \eta(P^2 + Q^2 + R^2), \\ w_\zeta &= \frac{dP}{dt} \eta - \frac{dQ}{dt} \xi + R(P\xi + Q\eta + R\zeta) - \zeta(P^2 + Q^2 + R^2), \end{aligned}$$

სადაც P, Q, R წარმოადგენენ $\vec{\omega}$ ვექტორის კოორდინატებს უძრავ სისტემაში; ξ, η, ζ არის \vec{p} ვექტორის კოორდინატები ამავე სისტემაში.

§ 25. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა

ისე როგორც § 11-ში, განვიხილოთ $\vec{\omega}$ უძრავი სისტემა (Σ სისტემა) და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა (S სისტემა). განვიხილოთ აგრეთვე $O\xi, \eta, \zeta$ დამხმარე სისტემა, რომლის სათავე $Oxyz$ სისტემის სათავეს ემთხვევა და რომლის ლერძებიც პარალელურია უძრავი კოორდინატთა ლერძების (ნახ. 64).

მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა $\vec{\omega}$ სისტემის მიმართ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შედგენილი ორი მოძრაობისაგან: 1) დამხმარე სისტემის მოძრაობისაგან უძრავი სისტემის მიმართ, რომელიც გადატანით მოძრაობას წარმოადგენს და 2) დამხმარე სისტემის მიმართ მყარი სხეულის მოძრაობისაგან (ანუ რაც იგივეა, მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის დამხმარე სისტემის მიმართ მოძრაობისაგან), რომელიც წარმოადგენს ბრუნვას O წერტილის გარშემო. დამხმარე სისტემის გადატანით მოძრაობას განსაზღვრავს O წერტილის მოძრაობა, ხოლო $Oxyz$ სისტემის მოძრაობას დამხმარე სისტემის მიმართ, როგორც § 11-ში იყო აღნიშნული, დაახასიათებს ეილერის φ, ψ, θ კუთხეები.

სხეულის მოძრაობის განტოლებებს აქვთ სახე (იხ. (11,1) განტოლებები):

$$\xi_0 = \xi_0(t), \quad \eta_0 = \eta_0(t), \quad \zeta_0 = \zeta_0(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

თუ მოცემულია სხეულის მოძრაობის განტოლებები, მაშინ შეიძლება დავეწეროთ მისი ნიბისმიერი M წერტილის მოძრაობის განტოლებები.

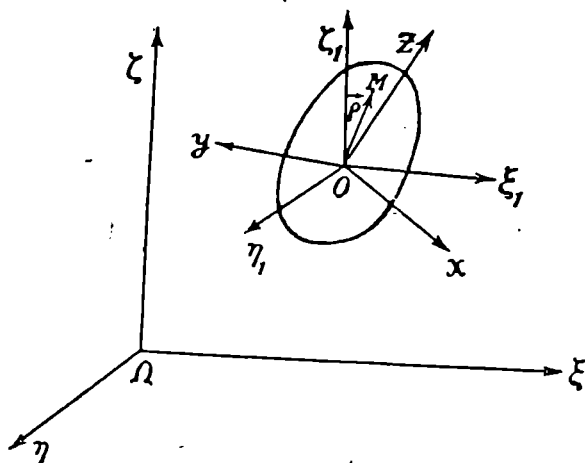
მართლაც, აღვნიშნოთ ξ, η, ζ -თი M წერტილის კოორდინატები $\Omega\xi\eta\zeta$ სისტემაში, ხოლო ამ წერტილის კოორდინატები $Oxyz$ სისტემაში იყოს x, y, z . ცხადია, გვექნება

$$\xi = \xi_0 + l_1 x + l_2 y + l_3 z,$$

$$\eta = \eta_0 + m_1 x + m_2 y + m_3 z,$$

$$\zeta = \zeta_0 + n_1 x + n_2 y + n_3 z,$$

სადაც l_1, m_1, n_1 წარმოადგენენ Ox ღერძის გეზის კოსინუსებს დამხმარე სისტემის მიმართ; ანალოგიური მნიშვნელობა აქვთ l_2, m_2, n_2 და l_3, m_3, n_3 სი-



ნახ. 64.

დიდებებს. თუ გავითვალისწინებთ, რომ l_i, m_i, n_i ($i=1, 2, 3$) გამოისახებიან ეილერის კუთხეების საშუალებით (იხ. § 23), დავრწმუნდებით, რომ ზემოთ დაწერილი ფორმულები იძლევიან M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს (x, y, z კოორდინატები სხეულის მოძრაობის დროს არ იცვლებიან, რადგან $Oxyz$ სისტემა მყარ სხეულთან დაკავშირებულია უძრავად).

გამოვთვალოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე. M წერტილის მოძრაობა უძრავ $\Omega\xi_1\eta_1\zeta_1$ სისტემის მიმართ განვიხილოთ, როგორც აბსოლუტური, ხოლო დამხმარე $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ სისტემის მიმართ—როგორც ფარდობითი. $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ სისტემის მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ იქნება წარმტანი მოძრაობა. სიჩქარეთა შეკრების კანონის ძალით (იხ. (10,1) ფორმულა), მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_* + \vec{v}_r, \quad (25,1)$$

სადაც \vec{v} არის M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, \vec{v}_r —ფარდობითი სიჩქარე, ხოლო \vec{v}_* —წარმტანი სიჩქარე (ე. ი. დამხმარე სისტემის იმ წერტილის

სიჩქარე, რომელზედაც აღებული მომენტში M წერტილი იმყოფება). ვინაიდან წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, ხოლო გადატანითი მოძრაობის დროს სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს, ამიტომ, ცხადია

$$\vec{v}_* = \vec{v}_0, \quad (25,2)$$

სადაც \vec{v}_0 წარმოადგენს მყარი სხეულის O წერტილის სიჩქარეს. ამის გარდა, ვინაიდან ფარდობითი მოძრაობა წარმოადგენს მყარი სხეულის ბრუნვას O წერტილის გარშემო, ამიტომ (იხ. (23,8) ფორმულა)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}_r = [\vec{\omega} \cdot \vec{p}], \quad (25,3)$$

სადაც \vec{p} არის M წერტილის რადიუს ვექტორი O წერტილის მიმართ (ნახ. 63), $\vec{\omega}$ — მყარი სხეულის O წერტილის გარშემო ბრუნვის შესაბამისი მყისი კუთხური სიჩქარე.

თუ (25,2) და (25,3) მნიშვნელობებს (25,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{p}]. \quad (25,4)$$

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ Ox , Oy , Oz ღერძებზე, მივიღებთ

$$v_x = v_{0x} + \omega_z y - \omega_y z,$$

$$v_y = v_{0y} + \omega_x z - \omega_z x,$$

$$v_z = v_{0z} + \omega_y x - \omega_x y.$$

ანალოგიურად გამოითვლება სიჩქარის გეგმილები უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე:

$$v_x = v_{0x} + \omega_z (\zeta - \zeta_0) - R(\eta - \eta_0),$$

$$v_y = v_{0y} + R(\xi - \xi_0) - P(\zeta - \zeta_0),$$

$$v_z = v_{0z} + P(\eta - \eta_0) - Q(\xi - \xi_0).$$

ზემოთ ვნახეთ, რომ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შედგება გადატანითი და O წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისაგან. O წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობა კი დაიყვანება O წერტილზე გამავალი გარკვეული ღერძის გარშემო მყის ბრუნვამდე $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. როგორც § 18-ში იყო ნაჩვენები, გადატანით და ბრუნვით მოძრაობათა ერთობლიობა დაიყვანება მყის ხრახნვამდე და მაშასადამე, მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც მყისი ხრახნვა. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი დებულება:

დებულება. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის შემთხვევაში დროის ყოველ მომენტში მასში სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს ადგილი ჰქონდეს მყის ხრახნვას.

ვთქვათ $\vec{\omega} \neq 0$, მაშინ მყისი ხრახნვის ცენტრალური ღერძის განტოლებებს აქვთ სახე (იხ. (18,4) განტოლებები):

$$\frac{v_x^2 + \omega_z^2 y^2 - 2\omega_z y v_y}{p} = \frac{v_y^2 + \omega_x^2 z^2 - 2\omega_x z v_z}{q} = \frac{v_z^2 + \omega_y^2 x^2 - 2\omega_y x v_x}{r}.$$

აქ მყისი ხრახნვის ცენტრალური ღერძის განტოლებები დაწერილია (S) სისტემაში (მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ *Oxyz* სისტემაში). ამავე ღერძის განტოლებებს (Σ) სისტემაში ექნება სახე:

$$\frac{v_{\xi}^0 + Q(\zeta - \zeta_0) - R(\eta - \eta_0)}{P} = \frac{v_{\eta}^0 + R(\xi - \xi_0) - P(\zeta - \zeta_0)}{Q} =$$

$$= \frac{v_{\zeta}^0 + P(\eta - \eta_0) - Q(\xi - \xi_0)}{R}.$$

მყისი ხრახნვის პარამეტრი გამოითვლება ფორმულით:

$$k = \frac{(\vec{v}^0 \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} = \frac{v_x^0 P + v_y^0 Q + v_z^0 R}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

მყისი ხრახნვის ცენტრალური ღერძი, რომელსაც Δ-თი აღვნიშნავთ, უძრავი არ არის. ის მოძრაობს, საზოგადოდ, როგორც (S) სისტემაში, ისე (Σ) სისტემაში. ფართეულს, რომელსაც Δ ღერძი შემოწერს (Σ) სისტემაში, ეწოდება ხრახნვის უძრავი აქსოიდი, ხოლო ფართეულს, რომელსაც ის (S) სისტემაში შემოწერს—ხრახნვის მოძრავი აქსოიდი.

აღვნიშნოთ (Γ₁)-ით და (Γ₂)-ით, შესაბამად, ხრახნვის უძრავი და მოძრავი აქსოიდები. ეს ფართეულები წრფოვანი ფართეულებია, მაგრამ, საზოგადოდ, არ არის კონუსური ფართეულები. ამ ფართეულებს დროის ყოველ მომენტში აქვთ საერთო შემქმნელი—ხრახნვის ცენტრალური ღერძი Δ.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ეს ფართეულები დროის ყოველ მომენტში თანახე-
ბაშია Δ ღერძის გასწვრივ. მართლაც, გავავლოთ (Γ₁) ფართეულზე რაიმე წი-
რი (γ₂) და მისი გადაკვეთა Δ ღერძთან აღვნიშნოთ K-თი. ცხადია, K წერ-
ტილი მოძრაობს (γ₂)-ზე და (Γ₁) ფართეულზე მოხაზავს გარკვეულ (γ₁) წირს.
ამრიგად, (γ₂) იქნება K წერტილის ფარდობითი ტრაექტორია (S)-სისტემაში,
(γ₁) კი—აბსოლუტური ტრაექტორია (Σ) სისტემაში. (Σ) სისტემაში სიჩქარე
იყოს \vec{v}_s , ხოლო (S) სისტემაში \vec{v}_r . სიჩქარეთა შეკრების კანონი გვაძლევს

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{v}_r',$$

სადაც \vec{v}_r' წარმტანი სიჩქარეა, ე. ი. (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარეა, რომელსაც აღებულ მომენტში K წერტილს ემთხვევა. ვინაიდან K წერტილი Δ ღერძის წერტილია, ამიტომ \vec{v}_r' დამთხვეულია Δ ღერძზე. ამის შემდეგ ცხა-
დია, რომ \vec{v}_s , \vec{v}_r და Δ ღერძი ერთ სისტემაშია მოთავსებული. ეს სიბრტყე
ხრახნვის ორივე აქსოიდის მხებია და მაშასადამე, (Γ₁) და (Γ₂) ფართეულები
თანახედაშია Δ ღერძის გასწვრივ.

ვთქვათ, რაიმე მოძრავი წრფოვანი ფართეული მუდამ თანახედაშია მეო-
რე უძრავ წრფოვან ფართეულთან და ვთქვათ თანახედაშია შემქმნელის წერტი-
ლების სიჩქარეები ამ შემქმნელის გასწვრივაა მიმართული, მაშინ ჩვენ ვიტყ-
ვით, რომ პირველი ფართეული გორსრიალეებს მეორე ფართეულზე.

შემომოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ მყარი სხეუ-
ლის ნებისმიერი მოძრაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რო-
გორც ხრახნვის მოძრავი აქსოიდის გორსრიალი ხრახნვის
უძრავ აქსოიდზე.

გამოთვალათ ახლა მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის აჩქარებას \vec{w} . M წერტილის მოძრაობა (Σ) სისტემაში განვიხილოთ როგორც აბსოლუტური, ხოლო დამხმარე სისტემაში ($O\xi, \eta, \zeta$ სისტემაში), როგორც ფარდობითი. ვინაიდან წარმტანი მოძრაობა (დამხმარე სისტემის მოძრაობა) გადატანითია, ამიტომ, (10,9) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_r, \quad (25,5)$$

სადაც $\vec{w}_0 = \vec{w}_0$ წარმტანი აჩქარებაა, ხოლო \vec{w}_r — ფარდობითი. ვინაიდან ფარდობითი მოძრაობა წარმოადგენს მყარი სხეულის ბრუნვას O წერტილის გარშემო, ამიტომ, (24,1) ფორმულის ძალით,

$$\vec{w}_r = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]].$$

თუ ამ მნიშვნელობას (25,4) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]]. \quad (25,6)$$

როგორც ადვილი მისახედრია, ამ ფორმულის მიღება შეიძლებოდა (25,4) ტოლობის გაწარმოებით დროის მცმართ. (24,2) ტოლობის ძალით, ეს უკანასკნელი ასე შეიძლება გადავწყვიროთ:

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} \omega^2. \quad (25,7)$$

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ მოძრავ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} w_x &= w_{0x} + \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x, \\ w_y &= w_{0y} + \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y, \\ w_z &= w_{0z} + \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z. \end{aligned} \quad (25,8)$$

ანალოგიურად გამოითვლება აჩქარების გეგმილები უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე.

ამოცანები

41. ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო. ვიპოვოთ $\vec{\omega}$ მყისი კუთხური სიჩქარის გეგმილები უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე. (23,8) ტოლობის უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე დავგეგმილებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} v_\xi &= Q\zeta - R\eta, \\ v_\eta &= R\xi - P\zeta, \\ v_\zeta &= P\eta - Q\xi. \end{aligned} \quad (1)$$

მეორეს მხრივ, როგორც ვიცით (იხ. (23,2) ფორმულები)

$$\begin{aligned}v_{\xi} &= l'_1 x + l'_2 y + l'_3 z, \\v_{\eta} &= m'_1 x + m'_2 y + m'_3 z, \\v_{\zeta} &= n'_1 x + n'_2 y + n'_3 z.\end{aligned}\quad (2)$$

კოორდინატა გარდაქმნის ცნობილი ფორმულების ძალით,

$$\begin{aligned}x &= l_1 \xi + m_1 \eta + n_1 \zeta, \\y &= l_2 \xi + m_2 \eta + n_2 \zeta, \\z &= l_3 \xi + m_3 \eta + n_3 \zeta.\end{aligned}\quad (3)$$

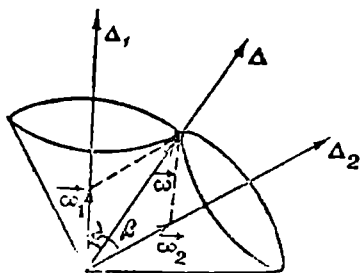
თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (2)-ში და შევიადარებთ (1)-ს, მივიღებთ

$$\begin{aligned}P &= m_1 n'_1 + m_2 n'_2 + m_3 n'_3 = -(m'_1 n_1 + m'_2 n_2 + m'_3 n_3), \\Q &= n_1 l'_1 + n_2 l'_2 + n_3 l'_3 = -(n'_1 l_1 + n'_2 l_2 + n'_3 l_3), \\R &= l_1 m'_1 + l_2 m'_2 + l_3 m'_3 = -(l'_1 m_1 + l'_2 m_2 + l'_3 m_3).\end{aligned}$$

42. ვთქვათ, რაიმე უცვლადი (S) სისტემა ბრუნავს უძრავი Δ_1 ღერძის გარშემო თანაბრად $\bar{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით და ვთქვათ, (T) მყარი სხეული ბრუნავს (S) სისტემასთან უცრავად დაკავშირებული Δ_2 ღერძის გარშემო აგრეთვე თანაბრად $\bar{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით ($\bar{\omega}_2$ მუდმივი ვექტორია (S) სისტემაში). დავუშვათ, რომ ბრუნვის ღერძები იკვეთებიან. (T) სხეულის ზემოთ განხილულ მოძრაობას წესიერი პრეცესია ეწოდება. ვიპოვოთ განსახილველი მოძრაობის აქსოიდები.

§ 16-ის 1° პუნქტში ნათქვამის ძალით, $\bar{\omega}$ მყისი კუთხური სიჩქარე არის ტოლქმედი $\bar{\omega}_1$ და $\bar{\omega}_2$ თავმოყრილი ვექტორებისა და მაშასადამე, $\bar{\omega}$ იქნება $\bar{\omega}_1$ და $\bar{\omega}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალზე დამთხვეული (ნახ. 65).

როგორც ადვილი მისახვედრია, განსახილველი მოძრაობის შემთხვევაში, Δ ღერძი, რომელზედაც $\bar{\omega}$ ვექტორია დამთხვეული, Δ_1 ღერძთან შეადგენს



ნახ. 65.

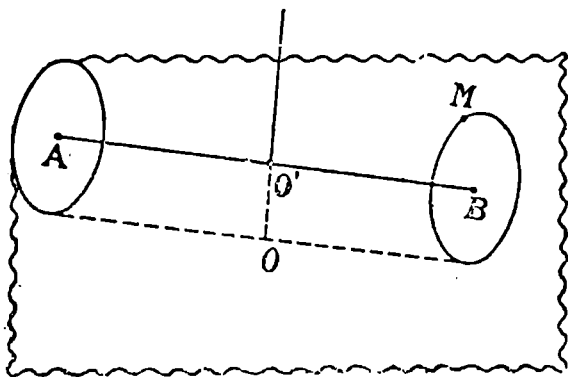
მუდმივ α კუთხეს და, მაშასადამე, უძრავი აქსოიდი წარმოადგენს წრიულ კონუსს, რომლის გაშლის კუთხეც 2α -ს ტოლია. ასევე, Δ ღერძი Δ_2 ღერძთან შეადგენს მუდმივ β კუთხეს და, მაშასადამე, მოძრავი აქსოიდი აგრეთვე წრიული კონუსია, რომლის გაშლის კუთხეც უდრის 2β -ს.

$\bar{\omega}_1$ და $\bar{\omega}_2$ ვექტორების მნიშვნელობების მიხედვით შეიძლება ადგილი აქონდეს შემდეგ სამ შემთხვევას: 1) მოძრავი და უძრავი აქსოიდები ერთმანე-

თის გარეთ არიან მოთავსებული, 2) მოძრავი აქსოიდი უძრავის შიგნითაა მოთავსებული და 3) მოძრავი აქსოიდი უძრავის გარეთაა მოთავსებული.

43. ვთქვათ, ჰორიზონტალური AB ღერძის A და B ბოლოებზე ჩამოცმულია ორი ერთნაირი თხელი დისკო რადიუსით R და ვთქვათ, $AB = 4R$. დავუშვათ, რომ AB ღერო ბრუნავს მის შუაწერტილში გამავალი OO' ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი ω_1 კუთხური სიჩქარით (ნახ. 66). ზემოხსენებული დისკოები ეხებიან ჰორიზონტალურ სიბრტყეს, რომელზედაც გორაკ-ვენ (AB ღეროს OO' ღერძის გარშემო ბრუნვის გამო) უსრიალოდ. ვიპოვოთ ერთ-ერთი დისკოსათვის მოძრაობის უძრავი აქსოიდები და მოვინახოთ დისკოს წრეწირის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე.

განვიხილოთ B დისკო. გარკვეულობისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ AB ღერო ბრუნავს OO' ღერძის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (მარცხენა სისტემის მიხედვით უარყოფითი გეზით), მაშინ, ცხადია B დისკო AB ღერძის გარშემო ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

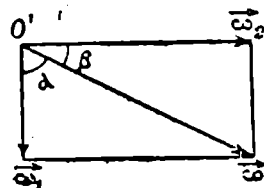


ნახ. 66.

ბით. ამ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იყოს ω_2 . ზემოწათქვამის მიხედვით შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{\omega}_1$ ვექტორს $\vec{OO'}$ ვექტორის გეზი აქვს, ხოლო $\vec{\omega}_2$ ვექტორი მოგვხვდება $\vec{O'B}$ ვექტორის მიმართულებით. ვინაიდან, როცა AB ღერო ერთხელ შემოუვლის OO ღერძს, მაშინ B წერტილი შემოწერს $4\pi R$ სიგრძის წრეწირს, ხოლო B დისკოს წრეწირის სიგრძე ტოლია $4\pi R$ -ის, ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$|\omega_2| = 2|\omega_1|.$$

ვინაიდან $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორები იკვეთებიან O' წერტილში, ამიტომ ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$ წარმოადგენს ამ ორი თავმოყრილი ვექტორის ტოლქმედს (ნახ. 66 ა.).



ნახ. 66 ა.

ამის შემდეგ ცხადია, რომ უძრავი აქსოიდი არის წრიული კონუსი, რომლის წვერო მოთავსებულია O' წერტილში და რომლის ღერძიც OO' -ს ემთხვევა. ამ კონუსის წვერქმენელი $O'O$ ღერძთან შეადგენს მუდმივ α კუთხეს, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

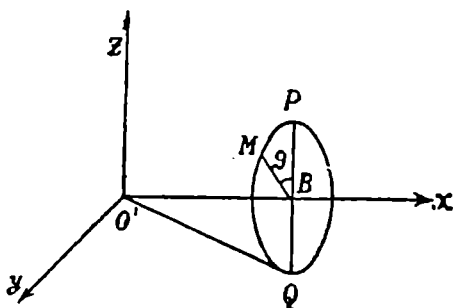
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

მოძრავი აქსოიდი, ცხადია, წარმოადგენს აგრეთვე წრიულ კონუსს, რომლის წვერო O' წერტილშია მოთავსებული და რომლის ღერძიც ემთხვევა $O'B$ -ს. ამ კონუსის წემგმწელი $O'B$ ღერძთან შეადგენს მუდმივ β კუთხეს, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

ვიპოვოთ ახლა B დისკოს M წერტილის სიჩქარე.

ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით O' წერტილში ისე, რომ $O'x$ ემთხვეოდეს $O'B$ ღერძს, ხოლო $O'z$ ღერძი დავამთხვიოთ $\overrightarrow{OO'}$ -ს (ნახ. 66 ბ).



ნახ. 66 ბ.

კუთხე, რომელსაც \overrightarrow{BM} ვექტორი შეადგენს \overrightarrow{QP} ვექტორთან, აღვნიშნოთ φ -თი. M წერტილის კოორდინატები იყოს x, y, z . ცხადია, გვექნება¹

$$\vec{\omega} = 2\omega_0 \vec{i} - \omega_0 \vec{k},$$

$$\text{სადაც } \omega_0 = |\omega_1|.$$

ასევე ცხადია, რომ

$$x = 2R, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = R \cos \varphi.$$

ამის შემდეგ (23,8) ფორმულის ძალით, გვექნება²

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'M}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ 2R & R \sin \varphi & R \cos \varphi \end{vmatrix},$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$|\vec{v}| = \omega_0 R \sqrt{5 \sin^2 \varphi + 4(1 + \cos \varphi)^2}.$$

44. ორი კონუსური კბილანა ბრუნავს უძრავი, თანამკვეთი Δ_1 და Δ_2 ღერძების გარშემო $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარეებით. მოცემულია პირველი კბილანას $\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარე და α, β კუთხეები (ნახ. 67). ვიპოვოთ მეორე კბილანას ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}_2$ და აგრეთვე მეორე კბილანას პირველ კბილანაზე ფარდობითი მოძრაობის მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$.

ვინაიდან კბილანები უსრიალოდ გორავენ ერთმანეთზე, ამიტომ თანახების წერტილში მათ ერთნაირი სიჩქარე ექნებათ და, მაშასადამე, ვღებულობთ

$$r_1 |\omega_1| = r_2 |\omega_2|, \quad (4)$$

¹ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, როგორც ყოველთვის, აღვნიშნავენ x, y, z ღერძების მგზავებს.

² თუ ვიცვალისმებთ, რომ საწყის $t=0$ მომენტში BM ემთხვევა BP ვერტიკალს, მაშინ, ცხადია, $\varphi=2\omega_0 t$.

სადაც r_1 და r_2 შესაბამად პირველი და მეორე კბილანას ფუძის რადიუსებია. მაგრამ, ცხადია,

$$r_1 = l \sin \alpha, \quad r_2 = l \sin \beta, \quad (5)$$

სადაც

$$l = \Omega K.$$

მე-(5) მნიშვნელობების (4)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$|\omega_2| = |\omega_1| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

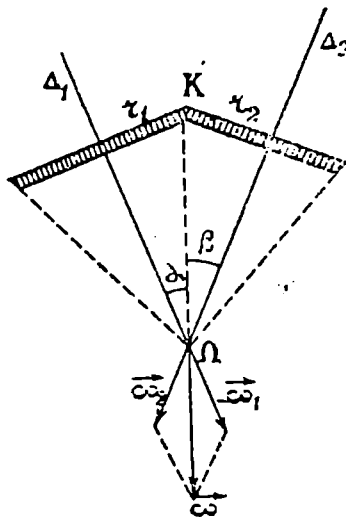
$\vec{\omega}_2$ ვექტორის გეზიც ადვილად განისაზღვრება, რადგან მეორე კბილანას ბრუნვის გეზი განსაზღვრულია პირველი კბილანას ბრუნვის გეზით.

განვიხილოთ ახლა მეორე კბილანას პირველზე ფარდობითი მოძრაობა. ამ მოძრაობის შესაბამისი მყისი ღერძი იქნება ამ კონუსების თანახმების შემქმნელი. მეორე კონუსის აბსოლუტური მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შედგენილი პირველი კონუსის მოძრაობისაგან და მეორე კონუსის მოძრაობისაგან პირველის მიმართ. ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, გვექნება (ნახ. 67)

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}$$

და მაშასადამე,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1.$$

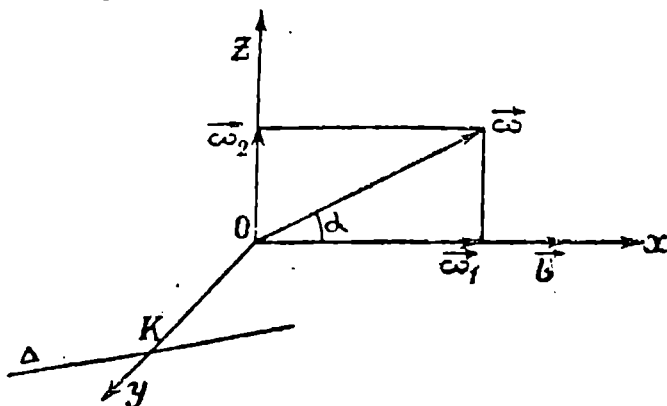


ნახ. 67.

46. მყარი სხეულის მოძრაობა შედგება

Ox და Oy ღერძების გარშემო ბრუნვითი

მოძრაობებისაგან $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარეებით და Ox ღერძის გასწვ-



ნახ. 68.

რივ გადატანითი მოძრაობისაგან \vec{v} სიჩქარით (ნახ. 68). ვიპოვოთ მყისი ხრახნის ცენტრალური ღერძი Δ .

გადატანითი მოძრაობა შეიძლება შევცვალოთ ბრუნვათა წყვილით $(\vec{\omega}', -\vec{\omega}')$, რომლის მომენტი ტოლია \vec{w} -სი. ამრიგად, ჩვენ გვექნება ბრუნვა-თა ერთობლიობა კუთხური სიჩქარეებით: $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}', -\vec{\omega}'$. ამ სისტემის ნაკრები ვექტორი იქნება

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

ეს ვექტორი Ox ღერძთან შეადგენს α კუთხეს, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$\cos \alpha = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.$$

დაწვრივ ახლა მყისი ხრახნის ცენტრალური ღერძის განტოლება (იხ. (18,4) განტოლებები).

ჩვენს შემთხვევაში $p = \omega_1, q = 0, r = \omega_2, \vec{v}^0 = \vec{v}$ და მაშასადამე, Δ ღერძის განტოლებები იქნება:

$$\frac{v - \omega_1 y}{\omega_1} = \frac{\omega_2 x - \omega_1 z}{0} = \frac{\omega_1 y}{\omega_2},$$

საიდანაც

$$z = \frac{\omega_2}{\omega_1} x, \quad y = -\frac{\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} v.$$

ამ ორი სიბრტყის გადაკვეთა გვაძლევს საძიებელ ღერძს. ცხადია, ეს ღერძი პარალელურია $\vec{\omega}$ ვექტორის, ის Oy ღერძს კვეთს K წერტილში, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$OK = \frac{\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} v.$$

ვიპოვოთ ახლა ამ ღერძზე სრიალის სიჩქარე v^0 .

ცხადია, $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}', -\vec{\omega}'$ სრიალა ვექტორთა სისტემის ნაკრები მომენტი O წერტილის მიმართ ტოლია \vec{w} -სი. ვინაიდან ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორზე ინვარიანტია, ამიტომ გვექნება¹

$$\text{გეგმა } \vec{v} = \text{გეგმა } \vec{\omega} \quad \vec{v}^0 = v^0,$$

საიდანაც

$$v^0 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} v.$$

გ ა ნ ე რ ზ ი ლ ე ბ ა III

ნაჩილის უარყოფითი მოძრაობა

§ 26. ვიძებოკის უარყოფითი (ლოკალური) წაძრევადი

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა $Oxyz$ სისტემა და, ვთქვათ, ცვლადი a ვექტორის კოორდინატები ამ სისტემის მიმართ არის a_x, a_y, a_z . როგორც ვიცით, თუ კოორდინატთა აღებული სისტემა უძრავია, მაშინ

¹ \vec{v}^0 , ხრახნის ცენტრალური ღერძის განმარტების თანახმად, პარალელურია $\vec{\omega}$ ვექტორის.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right). \quad (26,1)$$

თუ კოორდინატთა სისტემა მოძრაობს ისე, რომ მისი ღერძების მიმართულება დროთა ვითარებაში იცვლება, მაშინ (26,1) ტოლობა არ არის სამართლიანი. ამ შემთხვევაში (26,1) ტოლობით განსაზღვრულ წარმოებულს ეწოდება ვექტორის ფარდობითი, ანუ ლოკალური წარმოებული და აღინიშნება

სიმბოლოთი: $\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt}$. ამრიგად, განმარტების თანახმად

$$\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right), \quad (26,2)$$

მაშასადამე, ფარდობითი წარმოებულის გამოთვლა ისე ხდება, თითქოს $Oxyz$ სისტემა უძრავი იყოს.

ფარდობითი წარმოებულისაგან განსასხვავებლად \vec{a} ვექტორის ჩვეულებრივ $\frac{d\vec{a}}{dt}$ წარმოებულს ეწოდებთ აბსოლუტურ წარმოებულს.

ვიპოვოთ, რა დამოკიდებულება არსებობს \vec{a} ვექტორის $\frac{d\vec{a}}{dt}$ აბსოლუტურ წარმოებულსა და $\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt}$ ფარდობით წარმოებულს შორის. ცხადია, გვექნება

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (26,3)$$

სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , როგორც ყოველთვის, Ox , Oy , Oz ღერძების მგეზავებია. ამ ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k} + a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

(26,2) ტოლობის ძალით, ეს უკანასკნელი მოგვცემს

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (26,4)$$

განვიხილოთ ახლა იმ მყარი სხეულის მოძრაობა, რომელიც აღებულ $Oxyz$ სისტემასთან უძრავად არის დაკავშირებული. ვინაიდან \vec{i} წარმოადგენს Ox ღერძზე აღებული გარკვეული წერტილის რადიუს-ვექტორს, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია (იხ. (25,3) ფორმულა);

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{i}].$$

სადაც $\vec{\omega}$ წარმოადგენს სხეულის O წერტილის გარშემო ბრუნვის მყის კუთხურ სიჩქარეს. ასევე გვექნება

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{j}], \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{k}].$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (25,4) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + [\vec{\omega} \cdot (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})],$$

ანუ რაც იგივეა,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + [\vec{\omega} \cdot \vec{a}], \quad (26,5)$$

უკანასკნელი ტოლობა ამყარებს დამოკიდებულებას მოცემულ \vec{a} ვექტორის აბსოლუტურ და ფარდობით წარმოებულებს შორის.

§ 27. წმინდის ფარდობითი მოძრაობა. კოორდინატის დებულება

§ 10-ში ჩვენ განვიხილეთ ფარდობითი მოძრაობის შემთხვევაში სიჩქარეთა შეკრების კანონი და აჩქარებათა შეკრების კანონი ერთ კერძო შემთხვევაში (როცა წარმტანი მოძრაობა გადატანითია). ახლა ჩვენი მიზანია აჩქარებათა შეკრების კანონის მიღება ზოგად შემთხვევაში. ისე როგორც § 10-ში, განვიხილოთ უძრავი $\Omega x'z'$ და მოძრავი $Oxyz$ სისტემები [(Σ) და (S) სისტემები]. § 10-ში ჩვენ განვსაზღვრეთ აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები და ვაჩვენეთ, რომ

$$\vec{v}_a = \vec{v}_s + \vec{v}_r, \quad (27,1)$$

სადაც \vec{v}_a არის M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, \vec{v}_s — წარმტანი სიჩქარე, ხოლო \vec{v}_r — ფარდობითი სიჩქარე.

აღვნიშნოთ მოძრავი M წერტილის რადიუს-ვექტორები \vec{r} და

O წერტილების მიმართ შესაბამისად \vec{r} -ით და $\vec{\rho}$ -ით. ცხადია, გვექნება (ნახ. 69)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}, \quad (27,2)$$

სადაც \vec{r}_0 არის O წერტილის რადიუს ვექტორი Ω წერტილის მიმართ. ამ ტოლობის გაწარმოება t -ს მიმართ მოგვცემს

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (27,3)$$

სადაც \vec{v}_0 არის O წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე. (26,5) ფორმულის ძალით,

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]. \quad (27,4)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (27,3) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}] + \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt}. \quad (27,5)$$

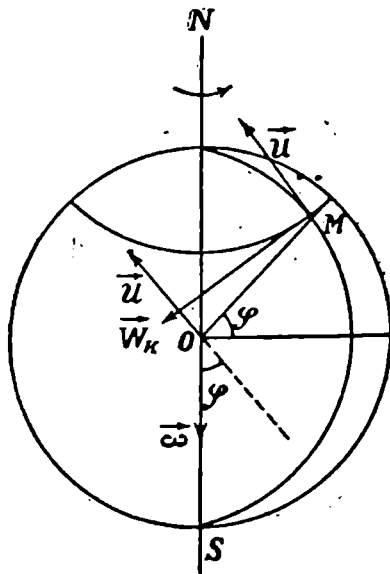
ლოთ მხელველობაში დედამიწის მოძრაობა მხოლოდ თავის ღერძის გარშემო (მზის გარშემო მოძრაობას უგულებელვყოფთ) და გამოვთვალოთ კორიოლისის აჩქარება M წერტილისათვის, რომელიც ჩრდილო ნახევარსფეროში მოძრაობს მერიდიანზე ჩრდილოეთ პოლუსისაკენ.

აღებულ მომენტში წერტილის სიგანედი აღვნიშნოთ φ -თი, ფარდობითი სიჩქარე დედამიწის მიმართ იყოს \vec{u} (ნახ. 70).

ვინაიდან დედამიწა ბრუნავს დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ, ამიტომ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$ დამთხვეულია ბრუნვის ღერძზე და მოგებულია სამხრეთ პოლუსისაკენ (მარცხენა სისტემის მიხედვით), მისი სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$|\omega| = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{1}{\text{სეკ.}}$$

კორიოლისის აჩქარების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ზემოთ მოყვანილი წესით: მოვდოთ $\vec{\omega}$ და \vec{u} ვექტორები O წერტილზე და წარმოვიდგინოთ, რომ ამ ორი ვექტორისაგან შედგენილი ზრტყელი ფიგურა მყარი სხეულივით მოძრაობს დედამიწასთან ერთად. მაშინ \vec{u} ვექტორის H ბოლო წერტილის გაორკეცებული სიჩქარე ტოლი იქნება კორიოლისის აჩქარების. ცხადია, კორიოლისის აჩქარება მართობი იქნება M წერტილზე გამავალი მერიდიანის სიბრტყის და მამასადამე, M წერტილზე გამავალი პარალელის მხებზე იქნება დამთხვეული, ამასთან ის მოგებული იქნება დასავლეთისაკენ, ე. ი. მარცხნივ იმ დამკვირვებლისათვის, რომელიც წერტილის მოძრაობის მიმართულებით იყურება.



ნახ. 70.

კორიოლისის აჩქარების სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

$$|w_k| = 2|\omega||u|\sin(180^\circ - \varphi) = 2|\omega||u|\sin\varphi.$$

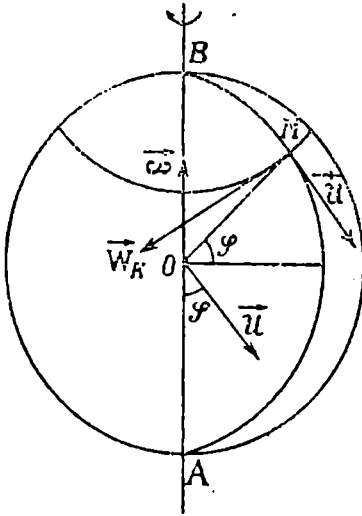
თუ M წერტილი მოძრაობს ჩრდილო ნახევარსფეროში მერიდიანზე სამხრეთ პოლუსის მიმართულებით, მაშინ, როგორც აღვილი მისახედრია, კორიოლისის აჩქარება მოგებული იქნება აღმოსავლეთისაკენ. ე. ი. ისევე მარცხნივ იმ დამკვირვებლისათვის, რომელიც იყურება M წერტილის მოძრაობის მიმართულებით.

აღვიღად დავრწმუნდებით აგრეთვე, რომ თუ წერტილის მოძრაობა განიხილება სამხრეთ ნახევარსფეროში მერიდიანის გასწვრივ. მაშინ კორიოლისის აჩქარება მოგებული იქნება მარჯვნივ იმ დამკვირვებლისათვის, რომელიც წერტილის მოძრაობის მიმართულებით იყურება.

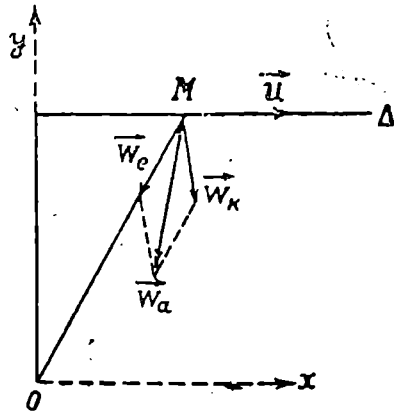
46. R რადიუსიანი მყარი სფერო ბრუნავს AB დიამეტრის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ω კუთხური სიჩქარით (ნახ. 71). M წერტილი მოძრაობს ზედა ნახევარსფეროში მერიდიანის გასწვრივ ქვედა ნახევარსფეროს მიმართულებით u სიჩქარით. გამოვთვალოთ კორიოლისის აჩქარება აღებულ მომენტში.

თუ კორიოლისის აჩქარების გამოსათვლელად გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ წესს, დავრწმუნდებით, რომ ის დამთხვეულია M წერტილზე გამავალი პარალელის მხებზე და მოგვხვდება სფეროს ბრუნვის მიმართულებით. ცხადია, კორიოლისის აჩქარების სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

$$|w_k| = 2 |\omega| |u| \sin \varphi,$$



ნახ. 71.



ნახ. 72.

სადაც φ არის აღებულ მომენტში M წერტილის სიგანედი.

47. 23-ე ამოცანის პირობებში ვიგულისხმობთ, რომ M წერტილის ფარდობითი სიჩქარე u მუდმივია და ვიპოვოთ ამ წერტილის აბსოლუტური აჩქარება.

ვინაიდან ფარდობითი სიჩქარე მუდმივია, ამიტომ, ცხადია, ფარდობითი აჩქარება ნულის ტოლია ($\vec{w}_r = 0$) და, (27,14) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_k.$$

ვინაიდან წარმართი აჩქარების განმარტების ძალით, \vec{w}_e იქნებოდა M წერტილის აჩქარება, რომ ის Δ ღერძზე უძრავი ყოფილიყო, ამიტომ გვექნება (ნახ. 72)

$$\vec{w}_e = -\vec{OM} \cdot \omega^2.$$

ცხადია, \vec{w}_k მართობია Δ ღერძის და მისი სიდიდე იქნება

$$|w_k| = 2 |\omega| |u|.$$

ავიღოთ კოორდინატა Oxy სისტემა ისე, როგორც ნახაზზეა მოცემული. აღვიღოთ მივიღებთ

$$w_{ax} = -\omega^2 x,$$

$$w_{ay} = -a \omega^2 - 2 \omega y,$$

სადაც u აღნიშნავს \vec{u} ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას Ox ღერძზე, a არის მანძილი Ox და Δ ღერძებს შორის.

48. r რადიუსიანი წრეწირი თანაბრად ბრუნავს თავისი ცენტრის გარშემო თავისივე სიბრტყეში $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. წრეწირზე მოძრაობს M წერტილი აგრეთვე თანაბრად \vec{v}_r თაჩდობითი სიჩქარით. ვიპოვოთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აჩქარება, თუ წრეწირის ბრუნვა და M წერტილის მოძრაობა წრეწირზე ერთი და იმავე მიმართულებით ხდება.

აღვილად დავრწმუნდებით, რომ \vec{v}_a ემთხვევა წრეწირის მხეცს და მოგეზულია წრეწირის ბრუნვის მიმართულებით, ხოლო \vec{w}_a აჩქარება მიმართულია წრეწირის ცენტრისაკენ. მათი სიდიდეების გამოსაყვლად ვღებულობთ

$$|v_a| = |\omega| r + |v_r|,$$

$$|w_a| = \omega^2 r + 2 |\omega| |v_r| + \frac{v_r^2}{r}.$$

სრიალ პეჟოტა თეორიის გამოყენება სავიკაში. გომეზიულის სავიკა

§ 1. შესავალი

სხეულის მოძრაობის დასახასიათებლად ჩვენ განვიხილავთ კოორდინატთა რაიმი სისტემას, რომელსაც პირობით, ხშირად, უძრავ სისტემას ვუწოდებთ. იმ წერტილების ერთობლიობას, რომელიც ამ სისტემასთან დაკავშირებულია უძრავად, ვუწოდებთ მკვიდრ სივრცეს.

თუ სხეული დროის განმავლობაში უძრავი რჩება (გარკვეული სისტემის მიმართ), მაშინ ვიტყვი, რომ ის წონასწორობაშია (ამ სისტემის მიმართ).

სტატიკა არის თეორიული მექანიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის მატერიალური სხეულების წონასწორობის პირობებს.

როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, მატერიალური სხეულების წონასწორობის საკითხების შესწავლაში არსებით როლს თამაშობს ძალთა სისტემის ტოლფასობის საკითხი, ამიტომ სტატიკის კურსში განიხილება ძალთა სისტემის ტოლფასობისა და მასთან მჭიდროდ დაკავშირებული ეკვივალენტური გარდაქმნების საკითხები.

ამ კურსში ჩვენ განვიხილავთ არსებითად მხოლოდ მატერიალური წერტილისა და მყარი სხეულების წონასწორობის საკითხებს¹.

მატერიალური წერტილი, ანუ მატერიალური ნაწილაკი ეწოდება იმდენად მცირე განზომილების სხეულს, რომლის მოძრაობაც, საკმარისად დიდი სიზუსტით განისაზღვრება მისი ერთი წერტილის მოძრაობით. აბრეგად, მატერიალური წერტილი ისეთი მატერიალური სხეულია, რომლის განზომილებები პრაქტიკულად ნულის ტოლად არის მიღებული (მაგრამ, რომელსაც გააჩნია გარკვეული მასა).

მატერიალურ წერტილთა ისეთ ერთობლიობას, რომლის ყოველი წერტილის მოძრაობა დამოკიდებულია დანარჩენი წერტილების მდებარეობასა და მოძრაობაზე, ეწოდება მატერიალურ წერტილთა სისტემა.

მყარი სხეული ეწოდება მატერიალურ წერტილთა ისეთ სისტემას, რომლის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება. ამრიგად, მყარი სხეული მატერიალურ წერტილთა უცვლად სისტემას წარმოადგენს, რომელიც არავითარ დეფორმაციას არ განიცდის. გარკვეული მიჯნოებით, მთელი რიგი სხეულებისა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მყარი სხეული.

¹ თხევარი და დრეკადი სხეულების წონასწორობის საკითხებს, რომელიც ჰიდრომექანიკისა და დრეკადობის თეორიის საგანს შეადგენს, ჩვენ აქ არ შევეხებით; გამანაკლისს შეადგენს იდეალური ძაფის წონასწორობის საკითხი.

საერთოდ, თეორიული მექანიკა და კერძოდ, სტატიკა დამყარებულია რამდენიმე მარტივ აზრინციზე, რომელთაც დაუმტკიცებლად ვლებულობთ და რომელთა საფუძველზე ზუსტი ლოგიკური მსჯელობით მიღებული შედეგები საესებით ეთანადება ფიზიკურ სინამდვილეს. ქვემოთ მოყვანილია სტატიკის ძირითადი აქსიომები, რომელთა საფუძველზე მიღებული შედეგების სამართლიანობა მოწმდება ყოველდღიური დაკვირვებით, პრაქტიკით, ექსპერიმენტით. მექანიკის სხვა პრინციპები განხილული იქნება თეორიული მექანიკის სხვა ნაწილებში, სათანადო ადგილას.

აქვე აუცილებლად უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ თავში განხილული გეომეტრიული სტატიკით არ ამოიწურება სტატიკის კურსი. სტატიკის ზოგიერთ სხვა საკითხს, კერძოდ, წონასწორობის ანალიზურ თეორიას, რომელიც ემყარება ლაგრანჟის ე. წ. განუსაზღვრელ მამრავლებს, ჩვენ განვიხილავთ სათანადო ადგილას მარტივად აღწერილი წერტილისა და წერტილთა სისტემის დინამიკაში.

ბ ა ნ უ ო ზ ი ლ ე ბ ა 1

სტატიკის ძირითადი პრინციპები და მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები

§ 2. ძალა

პირვანდელ წარმოდგენას ძალაზე გვაძლევს ჩვენი კონთური შეგრძნება, როცა შეეცდებით რაიმე სხეულის აწორადგებას. საზოგადოდ, ყოველდღიური პრაქტიკა; ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, რომ მატერიალურ სხეულთა ურთიერთქმედება გარკვეული ფიზიკური სიდიდეებით ხასიათდება, რომელთაც ძალებს ვუწოდებთ. აღებულ სხეულზე მოქმედი ძალა, ახასიათებს რა ამ სხეულზე სხვა სხეულის მოქმედების მიმართულებას და ინტენსივობას, იწვევს მისი მოძრაობის გარკვეულ ცვლილებას. ფიზიკური თვალსაზრისით ძალა მრავალგვარია (მიზიდულობის ძალა, განზიდვის ძალა, ორთქლის წნევის ძალა, გრავიტაციის ძალა, დაჭიმულობის ძალა და სხვ.), მაგრამ რა გვარისაც არ უნდა იყოს ძალა, მას ყოველთვის მატერიალური წყარო გააჩნია, ის ყოველთვის წარმოგვიდგება, როგორც მატერიალურ სხეულთა ურთიერთქმედების შედეგი, ამასთან ძალა სხეულის გარკვეულ წერტილზე მოქმედებს.

ამრიგად, ძალას ახასიათებს მოდების წერტილი, ინტენსივობა (სიდიდე) და გარკვეული გეზი.

რომ შეიძლებოდეს ძალის ცნების გამოყენება ზუსტ მეცნიერებაში, საჭიროა მას მიეცეს საესებით გარკვეული შინაარსი. ამ მიზნით; ძალის ცნებას ჩვენ შემოვიტანთ გარკვეული პრინციპით, რომელსაც ვლებულობთ დაუმტკიცებლად და რომლის სამართლიანობაც ექსპერიმენტით დასტურდება.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ როგორც ქვემოთ მოყვანილი პრინციპი, აგრეთვე ამ განყოფილებაში მოყვანილი სხვა პრინციპებიც უნდა განვიხილოთ, როგორც ძალის ცნების განსაზღვრა.

პრინციპი. ყოველ ძალას აქვს გარკვეული მოდების წერტილი, სიდიდე და გეზი. ეს სამი ელემენტი საესებით განსაზღვრავს აღებულ ძალას.

ამრიგად, ძალა ვექტორული სიდიდეა. შემდეგში, ვექტორულ სიდიდეს, უბრალოდ, ვექტორს ვუწოდებთ. ზემომოყვანილი პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ ძალა საზოგადოდ, დაბმული ვექტორია¹.

როცა ვლაპარაკობთ ძალის სიდიდეზე, უპირველეს ყოვლისა უნდა გვქონდეს მისი საზომი ერთეული. ნებისმიერად არჩეული რაიმე ძალის სიდიდე შეიძლება მივიღოთ საზომ ერთეულად და ამ ერთეულით გავზომოთ ყოველი დანარჩენი ძალის სიდიდე. გაზომვის შედეგად მიიღება გარკვეული რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს ჩვენ მიერ არჩეულ რამდენ ერთეულს წეიცავს გასაზომი ძალის სიდიდე.

ყოველ სხეულზე, რომელიც დედამიწის ზედაპირის გარკვეულ მახლობლობაში იმყოფება, მოქმედებს ვერტიკალურად მიმართული სიმძიმის ძალა; ამ ძალის სიდიდეს აღებული სხეულის წონა ეწოდება. ძალის ერთეულად მიღებულია კილოგრამი, რომელიც წარმოადგენს ერთი კუბური დეციმეტრი წმინდა წყლის წონას ცელსიუსის 4° ზე 760 მილიმეტრი ატმოსფერული წნევის დროს.

კილოგრამის ნიშნუში—ეტალონი, როგორც წონის საერთაშორისო ერთეული, ინახება სევრში, პარიზის მახლობლად.

კილოგრამის მათასედ ნაწილს ეწოდება გრამი, ხოლო ათას კილოგრამს—ტონა.

მას შემდეგ, რაც არჩეულია ძალის ერთეული, საჭიროა გვქონდეს ხელსაწყო, რომელიც მოგვცემს აღებული ძალის სიდიდის გაზომვის საშუალებას. ასეთ ხელსაწყოს დინამომეტრი ეწოდება. დინამომეტრის უმარტივეს სახეს წარმოადგენს ზამბარიანი სასწორი. დინამომეტრის ზამბარის გარკვეულ დაკიშვლობას (დეფორმაციას) გასაზომი ძალის გარკვეული სიდიდე შეესაბამება.

აქვე აუცილებლად უნდა შევნიშნოთ, რომ აღებული სხეულის წონა დედამიწის სხვადასხვა ადგილას, საზოგადოდ, სხვადასხვაა, მაგრამ განსხვავება იმდენად მცირეა, რომ პრაქტიკულად შეიძლება არც იქნეს მხედველობაში მიღებული.

§ 3. მასა

გალილეო აჩვენა, რომ დედამიწის ზედაპირის ერთსა და იმავე ადგილზე სიტარიელეში თავისუფლად ვარდნილ ყველა სხეულს ენიჭება ერთნაირი აჩქარება g , რომელსაც სიმძიმის ძალის აჩქარება ეწოდება².

აღვნიშნოთ დედამიწის ზედაპირის აღებულ ადგილზე რომელიმე სხეულის წონა p -თი, ხოლო სიმძიმის ძალის აჩქარება— g -თი. ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, რომ შეფარდება

$$\frac{p}{g} = m \quad (3,1)$$

დამოკიდებულია მხოლოდ აღებულ სხეულზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, სხეული დედამიწის ზედაპირის რომელ ადგილზე იმყოფება. ამ შეფარ-

¹ ქვემოთ ჩვენ ენახათ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა სრიალა ვექტორია.

² ისე როგორც სხეულის წონას, აგრეთვე სიმძიმის ძალის აჩქარებას g -ს დედამიწის სხვადასხვა ადგილზე აქვს სხვადასხვა მნიშვნელობა, მაგრამ განსხვავება მცირეა და პრაქტიკულად შეიძლება არც კი მივიღოთ მხედველობაში.

დებას (რომელსაც m -ით აღვნიშნავთ) ეწოდება აღებული სხეულის წონადი მასა.

წონადი მასის ერთეულად მიღებულია 1 კილოგრამი წონის სხეულის მასის მეათასედი ნაწილი. ამ ერთეულს ეწოდება გრამ-მასა.

განვიხილოთ ახლა მატერიალური წერტილი M , რომელზედაც მოქმედებს გარკვეული ძალა \vec{F} . ნიუტონის პირველი კანონის ძალით (იხ. I თავის § 5), მატერიალური წერტილი იქნება უძრავად ან იმოძრავეს სწორხაზოვნად და თანაბრად მანამ, სანამ მასზე ძალა არ დაიწყებს მოქმედებას. მაშასადამე, ძალის მოქმედების შედეგად მატერიალური წერტილი აუცილებლად მიიღებს აჩქარებას, რომელსაც აღვნიშნავთ w -ით. ექსპერიმენტის საფუძველზე ნიუტონი მივიდა იმ დასკვნამდე, რომ ძალას და აჩქარებას აქვთ ერთნაირი გეზი და მათი სიდიდეების შეფარდება არ არის დამოკიდებული მოქმედ ძალაზე, ე. ი. შეფარდება:

$$\frac{F}{w} = m \quad (3,2)$$

მუდმივი სიდიდეა. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ აღებულ მატერიალურ წერტილზე და არ არის დამოკიდებული მასზე მოქმედ ძალასა და ამ ძალით გამოწვეულ აჩქარებაზე. ამრიგად, აღებულ მატერიალურ წერტილს ძალა ანიჭებს ძალის პროპორციულ აჩქარებას. ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$m\vec{w} = \vec{F}. \quad (3,3)$$

ეს ტოლობა იძლევა ნიუტონის მეორე კანონს (იხ. I თავის (5,1) ფორმულა): მატერიალური წერტილის მასისა და აჩქარების ნამრავლი ამ წერტილზე მოქმედი ძალის ტოლია.

(3,3) ტოლობაში მონაწილე პროპორციულობის კოეფიციენტს m -ს ეწოდება მატერიალური წერტილის ინერტული მასა. ამრიგად, ინერტული მასა განიხილება როგორც პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს კინემატიკურ სიდიდეს—აჩქარებას და კინეტიკურ სიდიდეს—ძალას.

როგორც აღვიღო მისახვედრია, წონადი და ინერტული მასების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სხეულის ინერტული მასა მისი წონადი მასის ტოლია. ჯერ ნიუტონმა, ხოლო შემდეგ ბესელმა და ეტვერმა მრავალი ცდის საფუძველზე უშუალოდ დაადასტურეს, რომ სხეულის ინერტული და წონადი მასა ერთი და იგივეა.

(3,2) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$[m] = \frac{[F] \cdot T^2}{L}, \quad (3,4)$$

სადაც $[m]$ აღნიშნავს მასის განზომილებას, $[F]$ —ძალის განზომილებას, T —დროის განზომილებას, ხოლო L —სიგრძის განზომილებას. (3,4) ტოლობა ამყარებს კავშირს მასისა და ძალის განზომილებებს შორის.

შემდეგში ჩვენ საქმე გვექნება ერთეულების ორ სისტემასთან: აბსოლუტურ და ტექნიკურ სისტემასთან. აბსოლუტურ სისტემაში სიგრძის ერთეულად

მიღებულია სანტიმეტრი, დროის ერთეულად—სეკუნდი, ხოლო მასის ერთეულად—გრამმასა. ძალის ერთეული ამ სისტემაში მიიღება, როგორც წარმოებული ერთეული:

$$\text{ძალის ერთეული} = \frac{\text{გრამმასა} \cdot \text{სმ}}{\text{სეკ}^2} \quad (3,5)$$

ძალის ამ ერთეულს დინი ეწოდება. ამრიგად, დინი არის ის ძალა, რომელიც 1 გრამი მასის მატერიალურ წერტილს მიანიჭებს $1 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}^2}$ აჩქარებას. ტექნიკურ სისტემაში ძალის ერთეულად მიღებულია კილოგრამი, სიგრძის ერთეულად მეტრი, ხოლო დროის ერთეულად—სეკუნდი. ამ სისტემაში მასის ერთეული მიიღება, როგორც წარმოებული ერთეული:

$$\text{მასის ერთეული} = \frac{\text{კგ} \cdot \text{სეკ}^2}{\text{გ}} \quad (3,6)$$

ასე მაგალითად, 3 კგ წონის სხეულის მასა ტექნიკურ სისტემაში უდრის $\frac{3}{9,8}$ ერთეულს. ცხადია, 9,8 კგ წონის სხეულის მასა ამ სისტემაში უდრის ერთს.

სხეულის მასის შეფარდებას მის მოცულობასთან ეწოდება საშუალო სიმკვრივე. თუ სხეულის სხვადასხვა ადგილას გამოვყოფთ ერთნაირი მოცულობის ნაწილებს, მაშინ ამ ნაწილებში მოთავსებული მასები, საზოგადოდ, იქნება სხვადასხვა. განვიხილოთ ახლა სხეულის ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილი და ავიღოთ შეკრულობა S ფართეული ისე, რომ M წერტილი მოთავსებული იყოს ამ ფართეულის შიგნით ან მის ზედაპირზე. აღვნიშნოთ S ზედაპირით შემოსაზღვრული არის მოცულობა ΔV -თი, ხოლო ამ არეში მოთავსებული მასა— Δm -ით. განვიხილოთ $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ შეფარდების ზღვარი, როცა S ფართეული აღებულ M წერტილში იკუმშება. თუ ეს ზღვარი $\sigma(x, y, z)$ არსებობს, მას ეწოდება სხეულის სიმკვრივე აღებულ $M(x, y, z)$ წერტილში:

$$\sigma(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (3,7)$$

ცხადია, $\sigma(x, y, z)$, საზოგადოდ, იქნება სხეულის წერტილის კოორდინატების ფუნქცია. თუ სხეულის ყველა წერტილისათვის $\sigma(x, y, z)$ სიმკვრივეს აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა, მაშინ სხეულს ეწოდება ერთგვაროვანი.

ცხადია, სიმკვრივის განზომილებისათვის გვაქვს:

$$[\sigma] = \frac{[m]}{L^3} \quad (3,8)$$

აქედან მიიღება, რომ

$$\text{სიმკვრივის ერთეული} = \frac{\text{გრამმასა}}{\text{სმ}^3} \quad (3,9)$$

განვიხილოთ მატერიალური წერტილი, რომლის მასა არის m . აღვნიშნოთ მისი სიჩქარე v -თი. mv ნამრავლს ეწოდება მატერიალური წერტილის

მოდრაობის რაოდენობა. მოძრაობის რაოდენობის დროით წარმოებულს: $\frac{d}{dt}(m\bar{v})$ სიდიდეს ეწოდება მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება (ნიუტონის ტერმინოლოგიის მიხედვით).

ცხადია, მოძრაობის რაოდენობის განზომილება მოიცემა ფორმულით:

$$[m\bar{v}] = \frac{[m] \cdot L}{T} \quad (3,10)$$

და მაშასადამე, მოძრაობის რაოდენობის ერთეული იქნება

$$\text{მოძრაობის რაოდენობის ერთეული} = \frac{\text{გრამმასა} \cdot \text{სმ}}{\text{სეკ}} \quad (3,11)$$

გარდა ზემოთ მოყვანილი ნიუტონის პირველი და მეორე კანონისა, მექანიკის განვითარებაში დიდი როლი შეასრულა აგრეთვე ნიუტონის მესამე კანონმა, რომელსაც ქმედებისა და უკუქმედების კანონი ეწოდება (იხ. I თავის § 5). როგორც I თავში იყო ნათქვამი, პირველი კანონი (ინერციის კანონი) ნიუტონზე ადრე აღმოჩენილი იყო გალილეის მიერ, ამიტომ ამ კანონს ხშირად გალილეი-ნიუტონის კანონს უწოდებენ.

§ 4. ინერციული სისტემები

როგორც უკვე იყო აღნიშნული (იხ. I თავის § 3), ისეთ საფარდ სისტემას, რომლის მიმართაც ადგილი აქვს ნიუტონის პირველ კანონს (ინერციის კანონს) ეწოდება ინერციული. ცხადია, ყოველი სისტემა, რომელიც ინერციული სისტემის მიმართ მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად (ინერციით) იქნება აგრეთვე ინერციული და, მაშასადამე, თუ დაეუფებთ, რომ ბუნებაში არსებობს ერთი მაინც ინერციული სისტემა, მაშინ იარსებებს უამრავი რაოდენობა ასეთი სისტემებისა. მრავალი დაკვირვების შედეგად დადგენილი იქნა, რომ ჰელიოცენტრული სისტემა¹, საკმარისად დიდი სიზუსტით, წარმოადგენს ინერციულ სისტემას.

შევნიშნოთ, რომ კლასიკური მექანიკის კანონები საკმარისად მარტივ სახეს ღებულობენ ინერციული სისტემის მიმართ. ამ კანონების ფორმულირების დროს ნიუტონს სწორედ ინერციული სისტემა ჰქონდა მხედველობაში.

სტატიკას საფუძვლად უდევს რამდენიმე მარტივი პრინციპი. ეს პრინციპები, რომელნიც არსებითად დამოკიდებულნი არიან საფარდ სისტემაზე, სამართლიანია სწორედ ინერციული სისტემისათვის.

მთელი რიგი მოვლენების შესასწავლად, რომლებიც დედამიწაზე ხდება, ძალიან ხშირად დასაშვებია დედამიწის უძრავად მიღება. მართალია, დედამიწის არაინერციულ მოძრაობას გავლენა აქვს დედამიწის მიმართ მოძრაე

¹ როგორც ვიცით (I თავის § 3), საფარდ სისტემას, რომლის სათავე მოთავსებულია მზის სისტემის ინერციის ცენტრში, ხოლო ლერძები მიმართულია სამი, ე, წ. უძრავი ვარსკვლავისაკენ, ეწოდება ჰელიოცენტრული. ამ განმარტებაში ნახსენებია მზის სისტემის ინერციის ცენტრი, რომლის განსაზღვრაც მოყვანილი იქნება § 15-ში.

სხეულებზე, მაგრამ ხშირად ეს გავლენა იმდენად უმნიშვნელოა, რომ პრაქტიკულად შეიძლება არც კი იქნეს მხედველობაში მიღებული.

დედამიწის არაინერციული მოძრაობით გამოწვეულ ეფექტებს განვიხილავთ, სათანადო ადგილას, დინამიკაში.

§ 5. ძალთა სისტემების ტოლფასობა

ძალთა ერთობლიობას, რომელიც განიხილება, როგორც ერთი მთლიანი, ძალთა სისტემა ეწოდება.

ერთ წრფეზე მოთავსებულ ორ ძალას, რომელთაც ერთნაირი სიდიდე აქვთ, გეზი კი—ერთმანეთის საწინააღმდეგო, ეწოდება პირდაპირ თანაწინააღმდეგი. თუ მოცემულ ძალთა (S) სისტემის შემადგენელ ძალებს შევცვლით პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალებით, მივიღებთ ძალთა სისტემას, რომელსაც ($-S$)-ით აღვნიშნავთ და რომელსაც მოცემული სისტემის პირდაპირ თანაწინააღმდეგ სისტემას ვუწოდებთ.

ჩვენ ვიტყვით, რომ ძალთა ორი (S_1) და (S_2) სისტემა ტოლფასია, თუ ისინი ცალ-ცალკე ერთსა და იმავე მყარ სხეულზე ერთნაირ პირობებში ერთნაირ მექანიკურ მოქმედებას ახდენენ (ე. ი. ანიჭებენ ერთნაირ მექანიკურ მოძრაობას).

ამ განმარტებიდან გამომდინარე, ჩვენ ვიტყვით, რომ ძალთა სისტემა წონასწორობაშია, ანუ ნულის ტოლფასია, თუ ეს სისტემა არავითარ მექანიკურ მოქმედებას არ ახდენს მყარ სხეულზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ნულის ტოლფასი სისტემა შეიძლება მოვდოთ მყარ სხეულზე ან მოვაცილოთ მას, რითაც ამ სხეულის მექანიკური მოძრაობა არ შეიცვლება.

ამ განმარტებიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ თუ მყარ სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ ნულის ტოლფასი ძალთა სისტემა და საწყის მომენტში მყარი სხეული უძრავი იყო, მაშინ ის შემდეგშიც უძრავი დარჩება. ამის შემდეგ ცხადია, რომ მყარი სხეულის წონასწორობა და მასზე მოქმედ ძალთა სისტემის წონასწორობა ერთი და იგივეა.

ზემომოყვანილი განმარტების ძალით, ძალთა ორი სისტემა, რომელიც ცალ-ცალკე მესამის ტოლფასია, ერთიმეორის ტოლფასია.

თუ არსებობს ისეთი ერთი ძალა \overline{F} , რომელიც მოცემულ ძალთა სისტემის ტოლფასია, მაშინ ამ ძალას აღებული სისტემის ტოლქმედი ეწოდება.

ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ, რომ ტოლფასობის ზემოთ მოყვანილი განმარტება და სრიალა ვექტორთა სისტემის შემთხვევაში მოყვანილი ტოლფასობის განმარტება ერთი და იგივეა.

ძალთა სისტემას ეწოდება ბრტყელი, თუ სისტემაში შემავალი ყველა ძალა მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეში.

§ 6. სტატიკის ძირითადი პრინციპები

სტატიკა დამყარებულია რამდენიმე ზარტივ პრინციპზე, რომელთაც ჩვენ დაუმტკიცებლად ვლებულობთ და რომელთა საფუძველზე მიღებული შედეგებიც სავსებით ეთანხმება ფიზიკურ სინამდვილეს.

პრინციპი 1. ერთ წერტილზე მოდებული ძალთა სისტემა ტოლფასია ერთი ძალისა, რომელიც აღებული სისტემის ნაკრები ვექტორის ტოლია და ამავე წერტილშია მოდებული.

ამრიგად, ერთ წერტილზე მოდებულ ძალთა სისტემისათვის არსებობს ტოლქმედი, რომელიც ამ ძალების ნაკრები ვექტორის ტოლია და ძალების თავმოყრის წერტილშია მოდებული.

ამ კანონს ეწოდება ძალთა შეკრების კანონი.

ვთქვათ, აღებულ M წერტილზე მოქმედი ძალებია $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. ვექტორების შეკრების შესახებ ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილი წესის გამოყენებით, ტოლქმედის გამოთვლა ხდება შემდეგნაირად: \vec{F}_1 ძალის ბოლოზე მოვდოთ \vec{F}_2 ძალა, ამ უკანასკნელის ბოლოზე \vec{F}_3 ძალა და ა. შ. სანამ არ ამოიწურება ყველა ძალა. მივიღებთ გარკვეულ მრავალგვერდას. \vec{F} ძალა, რომელიც M წერტილზეა მოდებული და ხსენებული მრავალგვერდას ჩამკეტს წარმოადგენს, იქნება ტოლქმედი.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. ვთქვათ, აღებულ M წერტილზე მოქმედ ყველა ძალას ერთნაირი გეზი აქვს. მაშინ, ცხადია, ტოლქმედსაც იგივე გეზი ექნება და მისი სიდიდე ტოლი იქნება შემადგენელი ძალების სიდიდეების ჯამის.

2. ვთქვათ, M წერტილზე მოქმედი ძალების ერთ ნაწილს აქვს ერთნაირი გეზი, დანარჩენ ნაწილს კი — საწინააღმდეგო გეზი. მაშინ ცალ-ცალკე უნდა შევკრიბოთ ერთნაირი გეზის ძალთა სიდიდეები და უდიდეს ჯამს გამოვკლოთ უმცირესი. მიღებული რიცხვი იქნება ტოლქმედის სიდიდე, მისი გეზი ემთხვევა იმ ძალთა გეზს, რომელთა სიდიდეების ჯამი უდიდესია.

3. ვთქვათ, M წერტილზე მოდებულია \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალა, რომელთა შორის კუთხე იყოს φ . ცხადია, ამ ძალების ტოლქმედი იქნება მათზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალი, რომელიც მოგვზუღია M წვეროდან მისი მოპირდაპირე წვეროსაკენ (ნახ. 73).

ტოლქმედის სიდიდის გამოსათვლელად, ცხადია, გვექნება

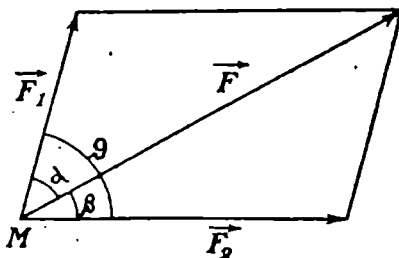
$$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\varphi}. \quad (6,1)$$

გამოვთვალოთ ახლა α და β კუთხეები, რომელთაც ტოლქმედი შეადგენს \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალებთან. სინუსების თეორემის ძალით, გვექნება

$$\frac{\sin\alpha}{|\vec{F}_2|} = \frac{\sin\beta}{|\vec{F}_1|} = \frac{\sin\varphi}{|\vec{F}|},$$

საიდანაც

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}|} \sin\varphi, \quad \sin\beta = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}|} \sin\varphi.$$



ნახ. 73.

ძალთა შეკრების ამ წესს ეწოდება პარალელოგრამის წესი.

ცხადია, ამ წესის მიმდევრობით გამოყენებით შეიძლება ვიპოვოთ აღებულ წერტილზე მოქმედი რამდენიმე ძალის ტოლქმედი.

4. ვთქვათ, გვაქვს M წერტილზე მოდებული $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ და \overline{F}_3 ძალები. ცხადია, ტოლქმედი იქნება ამ ძალებზე აგებული პარალელეპიპედის დიაგონალზე დამთხვეული.

ცხადია, რომ ყოველი ძალა შეგვიძლია დავშალოთ მდგენელებად და წარმოვიდგინოთ, როგორც რამდენიმე ძალის ტოლქმედი. აღებული ძალის დაშლა მდგენელებად, თუ დამატებითი პირობები არა გვაქვს, განუზღვრელი ამოცანაა, რადგან ნებისმიერი მრავალგვერდია, რომელიც აღებული ძალის მოდების წერტილზე იწყება და მის ბოლო წერტილზე თავდება, იძლევა აღებული ძალის მდგენელებს.

ავიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა $Oxyz$ და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\overline{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \overline{F} = (X, Y, Z),$$

სადაც \overline{F}_i ($i=1, 2, \dots, n$) წარმოადგენენ აღებულ M წერტილზე მოქმედ ძალებს, ხოლო \overline{F} კი—მათ ტოლქმედს. ტოლქმედის გამოსათვლელად გვაქვს ფორმულა:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i. \quad (6,2)$$

თუ ამ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგვემიღებთ, მივიღებთ

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (6,3)$$

ეს ფორმულები გვაძლევენ ტოლქმედის ანალიზურად გამოთვლის საშუალებას. კუთხეები α, β, γ , რომელთაც ტოლქმედი კოორდინატთა ღერძებთან შეადგენს, ცხადია, გამოითვლება ფორმულებით:

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad (6,4)$$

ამასთან

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

თუ \overline{F}_i ძალები მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეში და კოორდინატთა Oxy სისტემას ამ სიბრტყეზე ავიღებთ, მაშინ გვექნება

$$\overline{F}_i = (X_i, Y_i) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \overline{F} = (X, Y)$$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (6,5)$$

პრინციპი 2. ერთ წერტილზე მოდებულ ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ამ სისტემის ტოლქმედი ნულის ტოლი იყოს:

$$\overline{F'} = \sum_{i=1}^n \overline{F_i} = 0. \quad (5,6)$$

თუ ამ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ ერთ წერტილზე მოდებულ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობებს შემდეგი სახით:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (6,7)$$

განვიხილოთ ახლა მატერიალური წერტილის წონასწორობის საკითხი. ჯერ განვსაზღვროთ თავისუფალი და არათავისუფალი მატერიალური წერტილი.

ჩვენ ვიტყვით, რომ მატერიალური წერტილი თავისუფალია, თუ მისი მოძრაობა რაიმე გეომეტრიული პირობებით არ არის შეზღუდული, ე. ი. თუ მას შეუძლია სივრცეში ნებისმიერი ადგილი დაიკავოს, ხოლო მის სიჩქარეს ჰქონდეს ნებისმიერი სიდიდე და მიმართულება. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ჩვენ ვიტყვით, რომ წერტილი არათავისუფალია, ანუ ემორჩილება ბმას. ასე, მაგალითად, თუ წერტილი იძულებულია ყოველთვის მოთავსებული იყოს რაიმე სფერულ ზედაპირზე, მაშინ ის ბმას ემორჩილება, რადგან მას არ შეუძლია შევიდეს სივრცის იმ ნაწილში, რომელიც აღებული სფერული ზედაპირით არის შემოსაზღვრული. შეიძლება მატერიალური წერტილი ერთდროულად რამდენიმე ბმას ემორჩილებოდეს. ასე, მაგალითად, როცა წერტილი მოძრაობს წირზე, რომელიც ორი ფართეულის თანაკვეთას წარმოადგენს, მაშინ ის ემორჩილება ორ ბმას.

ასევე შეიძლება განვსაზღვროთ თავისუფალი და არათავისუფალი მატერიალურ წერტილთა სისტემა: ჩვენ ვიტყვით, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემა თავისუფალია, თუ სისტემაში შემავალი ყოველი წერტილი თავისუფალია; წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ვიტყვით, რომ სისტემა ემორჩილება ბმას.

ანალოგიურად განისაზღვრება თავისუფალი და არათავისუფალი მყარი სხეული.

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ მატერიალური წერტილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც საკმარისად მცირე განზომილების მყარი სხეული, მაშინ ცხადი გახდება, რომ ზემოთ ჩამოყალიბებული პრინციპი იძლევა აგრეთვე თავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას. ამრიგად, თუ თავისუფალ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალებია $\overline{F_i} = (X_i, Y_i, Z_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), მაშინ წერტილის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შესრულებული იყოს (6,6) პირობა, ანუ, რაც იგივეა, (6,7) პირობები.

აქვე აუცილებლად უნდა შევნიშნოთ, რომ როცა წერტილის წონასწორობის პირობებს ვაყალიბებთ, ვგულისხმობთ, რომ მატერიალური წერტილი თავიდან უძრავი იყო. თუ წერტილი თავიდან უძრავი არ იყო, მაშინ ძალთა სისტემის წონასწორობა არ ნიშნავს წერტილის წონასწორობას (უძრავად ყოფ-

ნას). ამ შემთხვევაში, მიუხედავად იმისა, რომ ტოლქმედი ნულია, წერტილი იმობრავებს სწორხაზოვნად და თანაბრად (ინერციით).

ზემოთ განხილული იყო თავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობის საკითხი. ახლა კი შევისწავლოთ არათავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობა. ამისათვის განვიხილოთ ერთი პრინციპი, რომლის ძალით არათავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობის საკითხი დაიყვანება თავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობის საკითხამდე.

პრინციპი 3. ყოველი არათავისუფალი მატერიალური წერტილი შეგვიძლია გავათავისუფლოთ ბმისაგან, თუ სამაგიეროდ მას მოვდებთ გარკვეულ ძალას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყოველი ბმის მექანიკური მოქმედება მატერიალურ წერტილზე ტოლფასია გარკვეული ძალის. ამ ძალას რეაქციის ძალა ეწოდება.

ასეთივე პრინციპს ადგილი აქვს არათავისუფალი მყარი სხეულისათვისაც: ყოველი ბმის მექანიკური მოქმედება მყარ სხეულზე ტოლფასია გარკვეული ძალის (რეაქციის ძალის) ისე, რომ თუ სხეულზე დამატებით ამ ძალას მოვდებთ, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ის თავისუფალია ხსენებული ბმისაგან.

რეაქციის ძალისაგან განსხვავებით დანარჩენ ძალებს (ე. ი. თავიდან აღებულ ძალებს) ვუწოდებთ უშუალოდ მოქმედ ძალებს.

ზემოთ მოყვანილი პრინციპის ძალით, არათავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მასზე უშუალოდ მოქმედი ძალებისა და რეაქციის ძალის ტოლქმედი ტოლი იყოს ნული, ე. ი.

$$\vec{F} + \vec{R} = 0,$$

სადაც \vec{F} აღნიშნავს უშუალოდ მოქმედი ძალების ტოლქმედს, ხოლო \vec{R} რეაქციის ძალას.

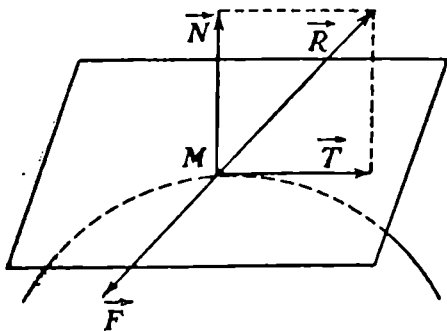
რეაქციის ძალა, საზოგადოდ, უცნობია როგორც სიდიდით, ისე გეზით; მაგრამ, ხშირ შემთხვევაში, მოცემული ბმის ხასიათის მიხედვით, რეაქციის ძალის ზოგიერთი ელემენტი შეიძლება თავიდან იყოს ცნობილი (იხ. ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი).

შემდეგში ჩვენ დაგვჭირდება აგრეთვე ქვემოთ მოყვანილი პრინციპი (ნიუტონის III კანონი), რომელსაც ქმედებისა და უქუქმედების პრინციპი ეწოდება.

პრინციპი 4. ორი მატერიალური წერტილი მოქმედებს ერთმეორეზე ძალებით, რომელნიც სიდიდით ტოლნი არიან და ერთმანეთის საწინააღმდეგო გეზი აქვთ.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ მატერიალური წერტილი M , რომელზედაც მოქმედებს \vec{F} ძალა, მოთავსებულია უძრავი სხეულის (S) ზედაპირზე (ნახ. 74). თუ წერტილი წონასწორობაშია, მაშინ რეაქციის ძალა \vec{R} და უშუალოდ მოქმედი ძალა \vec{F} იქნებიან პირდაპირ თანაწინააღმდეგო

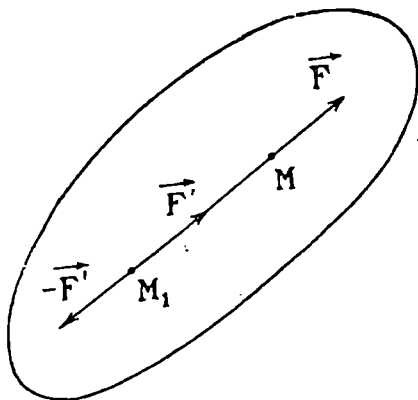
(რეაქციის ძალა აწონასწორებს წერტილზე უშუალოდ მოქმედ \overline{F} ძალას). ცხადია, რეაქციის ძალა ის ძალაა, რომლითაც ზედაპირი მოქმედებს წერტილზე, მაგრამ ქმედებისა და უკუქმედების პრინციპის ძალით (იხ. მე-3 და მე-4 პრინციპი), წერტილიც მოქმედებს ზედაპირზე გარკვეული ძალით და წონასწორობის შემთხვევაში ეს ძალა უდრის \overline{F} -ს. დავშალოთ \overline{R} ძალა ორ მდგენელად, რომელთაგან ერთი მოთავსებულია ფართეულის ნორმალზე, მეორე კი—ფართეულის მხებ სიბრტყეზე. პირველ მათგანს, რომელსაც \overline{N} -ით აღვნიშნავთ, ვუწოდებთ ნორმალური რეაქციის ძალას, მეორეს კი, რომელსაც \overline{T} -ით აღვნიშნავთ—მხები რეაქციის ძალას, ანუ ხახუნის ძალას. თუ ყოველთვის $T=0$, მაშინ ამბობენ, რომ (S) ზედაპირი გლუვია, ანუ ბმა იდეალურია. აბსოლუტურად გლუვი ზედაპირი არ არსებობს, მაგრამ მთელი რიგი მატერიალური ზედაპირებისა, გარკვეული მიახლოებით, შეიძლება განხილული იქნეს,



ნახ. 74.

როგორც გლუვი. გლუვი ზედაპირისათვის $\overline{R} = \overline{N}$ და მაშასადამე, რეაქციის ძალის მიმართულება გარკვეულია (ის ნორმალზეა დამთხვეული), სიდიდე კი უცნობია.

პრინციპი 5. ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა წონასწორობაშია (ნულის ტოლფასია), ანუ, რაც იგივეა, ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა არავითარ მექანიკურ მოქმედებას არ ახდენს მყარ სხეულზე. ე. ი. მყარი სხეულის მოძრაობის, თუ წონასწორობის მდგომარეობა არ დაირღვევა; თუ სხეულზე დამატებით მოვდებთ, ან მას მოვაცილებთ, ორ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ძალას.



ნახ. 75.

ამ პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა სრიალად ვექტორია.

მართლაც, ვთქვათ მყარი სხეულის გარკვეულ M წერტილზე მოქმედებს \overline{F} ძალა. განვიხილოთ ძალის ფუძეზე ნებისმიერი M_1 წერტილი და მოვდოთ მასზე ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი $\overline{F'}$ და $-\overline{F'}$ ძალა, სადაც $\overline{F'} = \overline{F}$ (ნახ. 75).

ცხადია, რომ M წერტილზე მოდებული \overline{F} ძალა და M_1 წერტილზე მოდებული $-\overline{F}$ ძალა პირდაპირ თანაწინააღმდეგე ძალებს წარმოადგენენ, ამიტომ, ხსენებული პრინციპის ძალით, ისინი არავითარ მექანიკურ მოქმედებას არ ახდენენ სხეულზე და, მაშასადამე, შეიძლება მოვაცილოთ მას. ამრიგად, დავგვრჩება M_1 წერტილზე მოდებული \overline{F} ძალა, რომელიც ცხადია, \overline{F} ძალის ტოლფასია და ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

პრინციპი 6. როცა მყარ სხეულზე მოქმედებს ორი ძალა, მაშინ წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ეს ძალები იყოს პირდაპირ თანაწინააღმდეგე.

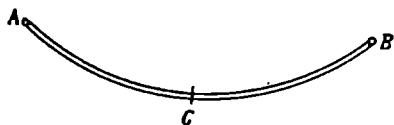
დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

დებულება. თუ ძალთა (S) და (S') სისტემები ტოლფასია, მაშინ (S)+($-S'$) სისტემა, სადაც ($-S'$) წარმოადგენს (S') სისტემის პირდაპირ თანაწინააღმდეგე სისტემას, წონასწორობაშია.

მართლაც, ცხადია (S')+($-S'$) სისტემა წონასწორობაშია (ვინაიდან ეს სისტემა შედგება მხოლოდ პირდაპირ თანაწინააღმდეგე ძალებისაგან, ხოლო პირდაპირ თანაწინააღმდეგე ძალები ნულის ტოლფასია). მაგრამ, ვინაიდან პირობის ძალით, (S') ტოლფასია (S)-ის, ამიტომ, ცხადია (S)+($-S'$) სისტემა წონასწორობაშია და ამით დებულება დამტკიცებულია.

ამოცანები

შემოვიღოთ ძაფის (თოკის) დაჭიმულობის ძალის ცნება, რომელიც ქვემოთ დავგვირდებ. მატერიალურ წერტილთა სისტემას, რომელიც უწყვეტადაა განლაგებული რაიმე AB წივზე ეწოდება ძაფი. თუ ძაფის სიგრძე მის ორ წერტილს შორის არ იცვლება, მაშინ მას ეწოდება უჭიმადი ძაფი. ვთქვათ



ნახ. 76.

AB ძაფი წონასწორობაშია. გავკრათ ის C წერტილში და მოვაშოროთ მას CB ნაწილი (ნახ. 76). იმისათვის, რომ AC ნაწილი დარჩეს ისევ წონასწორობაში, საჭიროა C წერტილზე მოვდოთ გარკვეული ძალები. თუ ეს ძალები ტოლფასია C წერტილზე მოდებული ერთი

ძალისა, რომელიც ძაფის მხებია C წერტილში, მაშინ ძაფს ეწოდება იდეალური, ხოლო ხსენებულ ძალას ძაფის დაჭიმულობის ძალა. ამრიგად, ძაფის დაჭიმულობის ძალა არის ის ძალა, რომლითაც CB ნაწილი მოქმედებს AC ნაწილზე¹. დაჭიმულობის ძალის სიდიდეს ეწოდება ძაფის დაჭიმულობა.

1. სიბრტყეზე მოცემულია ორი მიმართულება, რომელნიც განსაზღვრულია \vec{u} და \vec{v} ერთეულოვანი ვექტორებით. აღებული $\vec{F} = O\vec{M}$ ძალა დაეშალოთ ორ მდგენელად, რომელნიც მოცემული მიმართულებების პარალელურნი არიან.

¹ ძაფის წონასწორობის საკითხი დაწვრილებით განხილულია შემდეგ განყოფილებაში.

ავიღოთ კოორდინატა სისტემა ისე, რომ მისი სათავე ემთხვეოდეს ძალის მოდების O წერტილს, ხოლო ღერძები u და v ვექტორების პარალელური იყოს. გავავლოთ \vec{F} ძალის M ბოლო წერტილიდან Oy და Ox ღერძების პარალელური წრფეები და აღვნიშნოთ A და B -თი მათი გადაკვეთა Ox და Oy ღერძებთან (ნახ. 77).
ცხადია, გვექნება

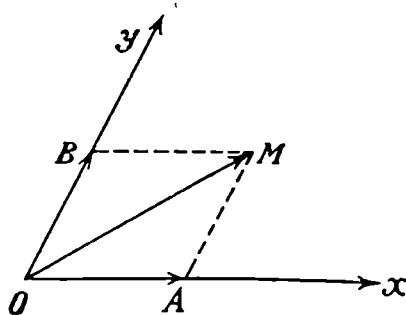
$$\vec{F} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

საცხებით ანალოგიურად შეიძლება მოცემული ძალა დავშალოთ სამი ისეთი მიმართულების პარალელურად, რომელნიც ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურნი არ არიან.

2. P და Q კილოგრამი წონის ტვირთები ჰკიდია თოჯნე სხვადასხვა ადგილას ისე, რომ პირველი ტვირთი (P კილოგრამი წონის ტვირთი) უფრო დაბლა ჰკიდია, ვიდრე მეორე. ვიპოვოთ ძაფის დაჭიმულობის ძალა.

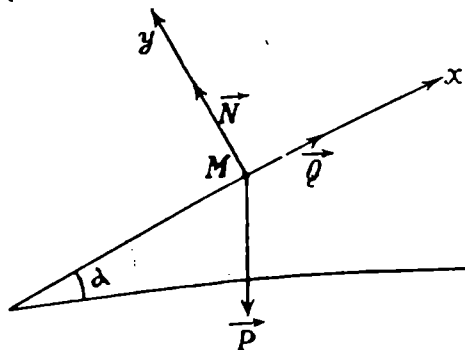
თუ მოვიგონებთ ძაფის დაჭიმულობის ძალის განსაზღვრას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თოჯინის დაჭიმულობა იქნება P კილოგრამი და $P+Q$ კილოგრამი.

3. გლუვ დახრილ სიბრტყეზე მოთავსებულია P წონის მატერიალური წერტილი, რომელზედაც მოქმედებს დახრილი სიბრტყის მიმართულებით \vec{Q} ძალა. მოცემულია მატერიალური წერტილის წონა P და სიბრტყის დახრილობის კუთხე $\alpha < 90^\circ$. საძიებელია წონასწორობის შემთხვევაში \vec{Q} ძალის სიდიდე და ნორმალური რეაქციის ძალა \vec{N} (ნახ. 78 ა).



ნახ. 77.

M წერტილზე მოქმედებენ შემდეგი უშუალოდ მოქმედი ძალები: მატერიალური წერტილის სიმძიმის ძალა \vec{P} და დახრილი სიბრტყის პარალელური ძალა \vec{Q} . გარდა ამ ძალებისა, წერტილზე მოქმედებს ნორმალური რეაქციის ძალა \vec{N} . შევადგინოთ ამ ძალების მრავალგვერდა, რომელიც ძალების ციის ძალა \vec{N} . წონასწორობის გამო იქნება შეკრული (ნახ. 78 ბ). ეს მრავალგვერდა, ცხადია, მართკუთხა სამკუთხედი, რომელიც გვაძლევს



ნახ. 78 ა.



ნახ. 78 ბ.

ტერიალური წერტილის სიმძიმის ძალა \vec{P} და დახრილი სიბრტყის პარალელური ძალა \vec{Q} . გარდა ამ ძალებისა, წერტილზე მოქმედებს ნორმალური რეაქციის ძალა \vec{N} . შევადგინოთ ამ ძალების მრავალგვერდა, რომელიც ძალების ციის ძალა \vec{N} . წონასწორობის გამო იქნება შეკრული (ნახ. 78 ბ). ეს მრავალგვერდა, ცხადია, მართკუთხა სამკუთხედი, რომელიც გვაძლევს

$$Q = P \sin \alpha, \quad N = P \cos \alpha. \quad (1)$$

ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება მივიღოთ ანალიზურად შემდეგი წესით: ავიღოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა ისე, როგორც ნახაზზე. კოორდინატთა ღერძებზე ძალების გვეგმილების ჯამი გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ

$$\text{გვზ} \vec{N} + \text{გვზ} \vec{Q} + \text{გვზ} \vec{P} = 0, \quad (2)$$

$$\text{გვზ} \vec{N} + \text{გვზ} \vec{Q} + \text{გვზ} \vec{P} = 0.$$

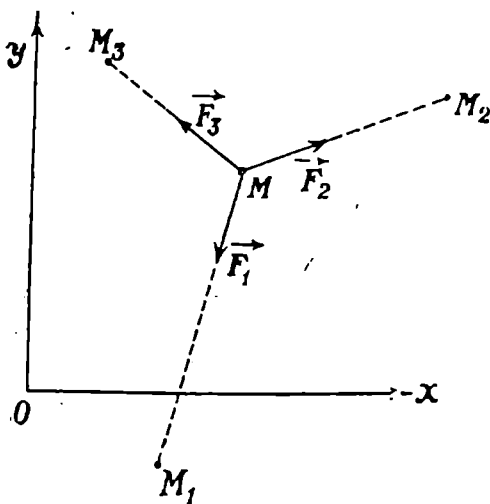
ცხადია, გვექნება

$$\text{გვზ} \vec{N} = 0, \quad \text{გვზ} \vec{Q} = Q, \quad \text{გვზ} \vec{P} = -P \sin \alpha,$$

$$\text{გვზ} \vec{N} = N, \quad \text{გვზ} \vec{Q} = 0, \quad \text{გვზ} \vec{P} = -P \cos \alpha.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (2)-ში შევითანთ, მივიღებთ ისევ (1)-ს.

4. Oxy სიბრტყეზე მოთავსებულია მატერიალური წერტილი M , რომელიც მიიზიდება სამი უძრავი $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ წერტილი-საქენ ისეთი ძალებით, რომელნიც პროპორციულია შესაბამის MM_1 , MM_2 , MM_3 მანძილების (ნახ. 79). მოცემულია პროპორციულობის კოეფიციენტები k_1 , k_2 , k_3 და საძიებელია მატერიალური წერტილის წონასწორობის მდებარეობა.



ნახ. 79.

წონასწორობის პირობას აქვს სახე:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \sum_{i=1}^3 k_i (x - x_i, y - y_i) = 0.$$

კოორდინატთა ღერძებზე ამ ტოლობის დაგვეგმილებით ვღებულობთ:

$$k_1(x - x_1) + k_2(x - x_2) + k_3(x - x_3) = 0,$$

$$k_1(y - y_1) + k_2(y - y_2) + k_3(y - y_3) = 0,$$

საიდანაც

$$x = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{k_1 + k_2 + k_3},$$

$$y = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3}{k_1 + k_2 + k_3}.$$

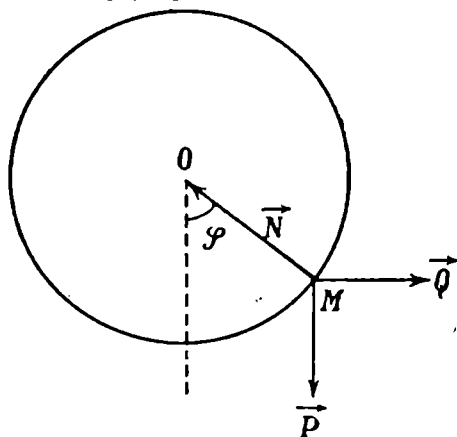
აღვნიშნოთ \vec{F}_i -თ ის ძალა, რომლითაც $M_i(x_i, y_i)$ წერტილი იზიდავს $M(x, y)$ წერტილს. ცხადია, პირობის ძალით, გვექნება

$$\vec{F}_i = k_i (x - x_i, y - y_i)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

5. წრიულ გლუვ მავთულზე, რომელიც ვერტიკალურ სიბრტყეშია მოთავსებული, ჩამოცმულია მცირე განზომილების მძამე ბირთვი. ბირთვზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა \vec{P} და ჰორიზონტალურად მიმართული \vec{Q} ძალა (ნახ. 80 ა). საძიებელია ბირთვის (რომელიც განიხილება, როგორც მატერიალური წერტილი) წონასწორობის მდებარეობა და რეაქციის ძალა.

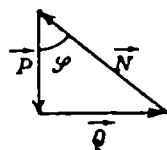
M წერტილის მდებარეობა წრეწირზე, ცხადია, განისაზღვრება φ კუთხით, რომელსაც OM რადიუსი შეადგენს სიმძიმის ძალის მიმართულებასთან.



ნახ. 80 ა.

წონასწორობის შემთხვევაში ძალთა მრავალგვერდა, რომელიც მართკუთხა სამკუთხედს წარმოადგენს (ნახ. 80 ბ), უნდა იყოს შეკრული. ხსენებული სამკუთხედიდან გვექნება

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}, \quad N = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

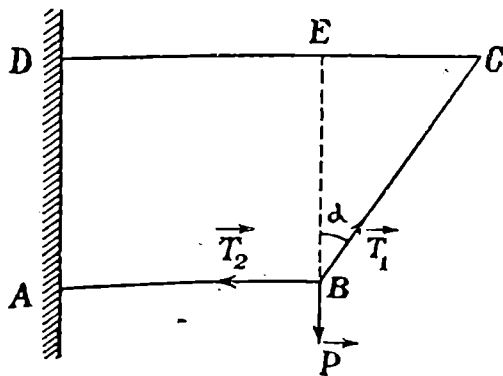


ნახ. 80 ბ.

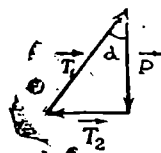
6. P კგ წონის ტვირთი ჩამოკიდებულია ABC თოკის B წერტილში. თოკის ერთი A ბოლო მიმაგრებულია AD ვერტიკალზე, მეორე C ბოლო კი — DC ჰორიზონტალზე (ნახ. 81 ა). ვიპოვოთ თოკის BC და AB ნაწილების T_1

და T_2 დაჭიმულობანი, თუ $AB = 1,1$ მ, $BC = 1,8$ მ, $DC = 2$ მ.

წონასწორობის გამო დაჭიმულობის ძალებისა და \vec{P} ძალის შესაბამისი მრავალგვერდა (სამკუთხედი) იქნება შეკრული (ნახ. 81 ბ). დავუშვათ მართობი B წერტი-



ნახ. 81 ა.



ნახ. 81 ბ.

ლიდან DC მონაკვეთზე და $\angle EBC$ აღენიშნოთ α -თი. აღვიღად მივიღებთ, რომ

$$EC = 0,9 \text{ მ}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

ძალთა სამკუთხედიდან გვექნება

$$T_1 = \frac{2P}{\sqrt{3}}, \quad T_2 = \frac{P}{\sqrt{3}}.$$

§ 7. ელემენტარული მოქმედებები, წყვილქალა, ქალთა სისტემის დაშვანა მათ ქალამდე და მათ წყვილქალამდე

ისე, როგორც სრიალა ვექტორების შემთხვევაში, ძალთა სისტემებისათვისაც ელემენტარულ მოქმედებებს ჩვენ ვუწოდებთ შემდეგ მოქმედებებს:

1°. ძალის გასრიალებას ფუძის გასწვრივ,

2°. თავმოყრილი ძალების შეკრებას,

3°. ძალის დაშლას თავმოყრილ ძალებად.

ელემენტარული მოქმედებების კერძო სახეებია აგრეთვე შემდეგი მოქმედებები:

ა) ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალის მოსპობა (მათი მოცილება მყარი სხეულიდან),

ბ) ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალის მოდება.

ამ მოქმედებებს ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ.

წინა პარაგრაფში მოყვანილი პრინციპების საფუძველზე ჩვენ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ძალთა სისტემაზე ელემენტარული მოქმედებების შედეგად მიიღება აღებული სისტემის ტოლფასი სისტემა. ამიტომ ცხადია, რომ ყველა ის შედეგი, რომელიც II თავში სრიალა ვექტორთა ტოლფასობის შესახებ ელემენტარული მოქმედებებით იყო მიღებული, სამართლიანია მყარ სხეულზე მოქმედი ძალთა სისტემისათვისაც. კერძოდ, ყველა ის შედეგი, რომელიც პარალელურ ვექტორთა და წყვილვექტორთა შესახებ II თავის §§ 3, 4-ში იყო ნათქვამი, ყოველგვარი ცვლილების გარეშე, სამართლიანია პარალელური ძალებისა და წყვილძალების შემთხვევაშიაც. მაშასადამე, პარალელური ძალთა სისტემისათვის ყოველთვის არსებობს ტოლქმედი, თუ ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან. წყვილძალებისათვის ადგილი აქვს II თავის § 4-ის 1 და 2 დებულებებს:

დებულება 1. ორი წყვილძალა, რომელთაც ერთნაირი მომენტი აქვს, ტოლფასია.

დებულება 2. სასრული რაოდენობა $(\overline{P_1}, \overline{Q_1}), (\overline{P_2}, \overline{Q_2}), \dots, (\overline{P_n}, \overline{Q_n})$ წყვილძალებისაგან შემდგარი სისტემა ტოლფასია ერთი $(\overline{P}, \overline{Q})$ წყვილძალისა, რომლის მომენტი უდრის აღებული წყვილძალების მომენტების ჯამს.

ცხადია, ძალთა სისტემისათვის სამართლიანია II თავის § 5-ში მოყვანილი 1 დებულება და აგრეთვე შემდეგი დებულება (იხ. II თავის § 5-ის 2 დებულება):

დებულება 3. ძალთა ნებისმიერი სისტემა ტოლფასია დაყვანის ნებისმიერ O ცენტრზე მოდებული ერთი \overline{F} ძალისა, რომელიც სისტემის ნაკრები ვექტორის ტოლია და $(\overline{P}, \overline{Q})$ წყვილძალისა, რომლის მომენტიც უდრის აღებული სისტემის ნაკრებ მომენტს დაყვანის O ცენტრის მიმართ.

§ 8. სტატიკის ძირითადი დებულება

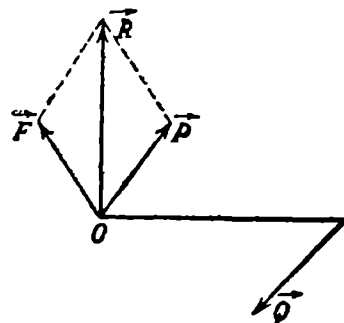
დავამტკიცოთ ახლა სტატიკის შემდეგი ძირითადი დებულება:

დებულება 1. მყარ სხეულზე მოდებულ ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ამ სის-

ტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულის ტოლი იყოს.

მართლაც, დაიყვანოთ ჩვენი სისტემა რაიმე O წერტილამდე. მივიღებთ O წერტილზე მოდებული ერთ $\vec{I'}$ ძალას, რომელიც აღებული სისტემის ნაკრები ვექტორის ტოლია და ერთ (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალას, რომლის მომენტიც უდრის სისტემის ნაკრებ მომენტს O წერტილის მიმართ, ამასთან წყვილძალა ისე შეიძლება ავიღოთ, რომ \vec{P} ვექტორი მოდებული იყოს O წერტილზე (ნახ. 82).

აუცილებლობის დამტკიცება. დაუშვათ, სისტემა წონასწორობაშია და შევკრიბოთ O წერტილზე მოდებული \vec{F} და \vec{P} ძალები, მივიღებთ $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}$ ძალას. ამის შემდეგ ჩვენ გვექნება ორი \vec{R} და \vec{Q} ძალისაგან შემდგარი სისტემა, რომელიც, პირობის ძალით, წონასწორობაშია, ამიტომ, § 6-ის მე-6 პრინციპის ძალით, $\vec{R} + \vec{Q} = 0$, ანუ $\vec{P} + \vec{F} + \vec{Q} = 0$. მაგრამ, ვინაიდან $\vec{P} + \vec{Q} = 0$, ამიტომ $\vec{F} = 0$. ამის შემდეგ ჩვენ გვრჩება ისევ ორი ძალა \vec{P} და \vec{Q} , რომელნიც წონასწორობაშია და, მაშასადამე, ზემოხსენებული პრინციპის ძალით, ისინი პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ძალებს წარმოადგენენ. ამრიგად, (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალის მომენტი, ცხადია, ნულის ტოლია და ამით აუცილებლობა დამტკიცებულია.



ნახ. 82.

საკმარისობის დამტკიცება. დაუშვათ, რომ აღებული ძალთა სისტემის ნაკრები \vec{F} ვექტორი და ნაკრები \vec{L} მომენტი რაიმე O წერტილის მიმართ ნულის ტოლია. თუ სისტემას დაიყვანოთ O ცენტრამდე და გავითვალისწინებთ ტოლობებს

$$\vec{F} = \vec{L} = 0,$$

დავრწმუნდებით, რომ სისტემა დაიყვანება მის ტოლფას ორ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ \vec{P} და \vec{Q} ვექტორამდე, რომელიც წონასწორობაშია და ამით საკმარისობაც დამტკიცებულია.

დავწეროთ ახლა თავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობის განტოლებები. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალთა სისტემა იყოს $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სათავით რაიმე O წერტილში და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

ზემოდამტკიცებული დებულების ძალით, მყარი სხეულის წონასწორობის განტოლებებს შემდეგი სახე ექნება:

¹ თუ აღებული სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულის ტოლია, მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, ის ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერი სხვა წერტილის მიმართაც (იხ. II თავის § 5-ის ბოლოს მოყვანილი შენიშვნა).

$$(X, Y, Z) = \overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F_i} = 0, \quad (8,1)$$

$$(L_x, L_y, L_z) = \overrightarrow{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r_i} \cdot \overrightarrow{F_i}] = 0. \quad (8,2)$$

სადაც $\vec{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ წარმოადგენს $\overrightarrow{F_i}$ ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორის კოორდინატთა სისტემის სათავეს მიმართ.

თუ (8,1) და (8,2) ტოლობებს დაეგვემიღებთ კოორდინატთა ღერძებზე, წონასწორობის შემდეგ განტოლებებს მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0, \quad (8,3)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \quad (8,4)$$

თუ ძალთა სისტემა ბრტყელია, მაშინ წონასწორობის განტოლებებს ექნება სახე:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad (8,5)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

ამასთან კოორდინატთა სისტემა ისეა აღებული, რომ xOy სიბრტყე ემთხვევა იმ სიბრტყეს, რომელზედაც აღებული ძალთა სისტემაა მოთავსებული.

ახლა მარტივად დამტკიცდება შემდეგი დებულება:

დებულება 2. ძალთა ორი სისტემის ტოლფასობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ისინი ერთიმეორეზე დაიყვანებოდნენ ელემენტარული მოქმედებებით.

ვინაიდან ელემენტარული მოქმედებები ტოლფასობას არ ცვლის, ამიტომ პირობის საკმარისობა ცხნდება.

დავამტკიცოთ ახალი პირობის აუცილებლობა. ამისათვის ვიგულისხმობთ, რომ (S) და (S') სისტემები ტოლფასია და ვაჩვენოთ, რომ ისინი ელემენტარული მოქმედებებით ერთიმეორეზე დაიყვანება.

§ 6-ის ბოლოს დამტკიცებული დებულების ძალით, (S) + (—S') სისტემა წონასწორობაშია, ამიტომ, ზემოდამტკიცებული დებულების ძალით, ამ უკანასკნელი სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე O წერტილის მიმართ ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ (S) და (S') სისტემებს აქვთ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი. მაგრამ, როგორც II თავის § 5-ის 3 დებულების დამტკიცების დროს იყო აღნიშნული, ასეთი სისტემები ერთიმეორეზე დაიყვანება ელემენტარული მოქმედებებით და ამით დებულება დამტკიცებულია.

დამტკიცებული დებულება გვიჩვენებს, რომ სრიალა ვექტორთა სისტემისათვის II თავის § 3-ში მოყვანილი ტოლფასობის განმარტება და ძალთა სისტემისათვის § 5-ში მოყვანილი ტოლფასობის განმარტება ერთი და იგივეა. ისე როგორც სრიალა ვექტორების შემთხვევაში, ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას (იხ. II თავის § 5-ის მე-3 დებულება):

დებულება 3. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ძალთა ორი სისტემა იყოს ტოლფასი, მდგომარეობს იმაში, რომ მათ ჰქონდეთ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ.

ამის შემდეგ ცხადია, რომ ყველაფერი, რაც ნათქვამი იყო II თავში სრიალა ვექტორთა სისტემის შესახებ, სამართლიანია ძალთა სისტემისათვისაც (იგულისხმება მყარ სხეულზე მოდებულ ძალთა სისტემა), ზოგიერთ მათგანს ჩვენ შემდეგ პარაგრაფში ჩამოვაყალიბებთ.

§ 9. ინვარიანტები. ტოლქმედის პრინციპი.

ძალთა ხრახნი (დინამა)

ისე როგორც სრიალა ვექტორების შემთხვევაში, მყარ სხეულზე მოქმედ ძალთა სისტემისათვისაც დაყვანის ცენტრის მიმართ ინვარიანტებია:

1. მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი \vec{F} ,

2. მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის და ნაკრები მომენტის სკალარული ნამრავლი $(\vec{F} \cdot \vec{L})$,

3. ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორზე.

როცა მეორე ინვარიანტი ნულის ტოლია, მაშინ მოცემულ ძალთა სისტემა დაიყვანება ან წყვილძალამდე (როცა $\vec{F}=0$) ან ტოლქმედამდე. ამასთან დაკავშირებით ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას:

დებულება 1. როცა მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი $\vec{F} \neq 0$, მაშინ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ სისტემა დაიყვანებოდეს ტოლქმედამდე მდგომარეობს იმაში, რომ მეორე ინვარიანტი $(\vec{F} \cdot \vec{L})=0$.

თუ მეორე ინვარიანტი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ დაყვანის ისეთი წერტილები, რომელთა მიმართ ნაკრები მომენტი პარალელურია ნაკრები ვექტორის (ანუ, რაც იგივეა, დაყვანის შედეგად მიღებული წყვილძალის სიბრტყე მართობია \vec{F} -ის). ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვი, რომ ძალთა სისტემა დაყვანილია ძალთა ხრახნამდე, ანუ დინამამდე.

ზემოხსენებული წერტილების გეომეტრიული ადგილი წარმოადგენს წრფეს, რომელსაც აღებული სისტემის ცენტრალური ღერძი ეწოდება (ძალთა ხრახნის ღერძი) და რომელიც მოცემულია II თავის (8,3) განტოლებებით.

როგორც II თავის § 8-ში იყო აღნიშნული, k სიდიდეს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$k = \frac{1}{F^2} (\vec{F} \cdot \vec{L}), \quad (9,1)$$

ეწოდება ძალთა ხრახნის პარამეტრი (დინამის პარამეტრი). როცა $k > 0$, მაშინ ძალთა ხრახნს მარცხენა ხრახნი ეწოდება, ხოლო როცა $k < 0$ — მარჯვენა.

როგორც ხსენებულ პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, ცენტრალური ღერძის წერტილების მიმართ ნაკრებ მომენტს აქვს უმცირესი სიდიდე.

თუ ყოველივე ზემოთქვამს გავითვალისწინებთ, ჩვენ მივალთ შემდეგ დასკვნამდე: თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ ის დაიყვანება მის ტოლფას წყვილძალამდე; თუ ნაკრები მომენტიც ნულის ტოლია, მაშინ ის წონასწორობაშია (ნულის ტოლფასია). თუ ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან, მაგრამ მეორე ინვარიანტი ნულის ტოლია:

$$(\vec{F} \cdot \vec{L}) = XL_x + YL_y + ZL_z = 0, \quad (9,2)$$

მაშინ სისტემა დაიყვანება ტოლქვედამდე. ყველა დანარჩენ შემთხვევაში სისტემა დაიყვანება ნამდვილ ძალთა ხრახნამდე, როცა არც ნაკრები ვექტორი და არც ნაკრები მომენტი ნულის ტოლი არ არის. ძალთა ხრახნის ცენტრალური ღერძის განტოლებებია:

$$\frac{L_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{L_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{L_z - (xY - yX)}{Z}, \quad (9,3)$$

სადაც $\vec{F} = (X, Y, Z)$, $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი კოორდინატთა სისტემის სათავეს მიმართ, ხოლო x, y, z — ცენტრალური ღერძის მიმდინარე კოორდინატები.

თუ ძალთა სისტემა ბრტყელია (მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეში), მაშინ, როგორც აღეილი მისახვედრია, ნაკრები ვექტორი მართობია ნაკრები მომენტის და მაშასადამე, თუ ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ყოველთვის არსებობს ტოლქვედი.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

დებულება 2. თუ ძალთა აღებული სისტემის ნაკრები მომენტები სამი ისეთი წერტილის მიმართ, რომელნიც ერთსა და იმავე წრფეზე არ არიან მოთავსებული, ნულის ტოლია, მაშინ სისტემა წონასწორობაშია.

ხსენებული სამი წერტილი იყოს A, B, C . ვინაიდან ნაკრები მომენტი A წერტილის მიმართ ნულია, ამიტომ სისტემა დაიყვანება ერთადერთ \vec{F} ძალამდე, რომელიც A წერტილზე იქნება მოდებული. ცხადია, \vec{F} ძალა აღებული სისტემის ტოლფასია და მაშასადამე, მისი მომენტი B წერტილის მიმართ ნულია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ \vec{F} ძალის მიმართულება B წერტილში უნდა გადიოდეს. ასევე დავრწმუნდებით, რომ \vec{F} ძალის მიმართულება უნდა გადიოდეს C წერტილში. ვინაიდან A, B და C წერტილები ერთსა და იმავე წრფეზე არ არიან მოთავსებული. ამიტომ, ცხადია, $\vec{F} = 0$ და დებულება დამტკიცებულია.

§ 10. მუხარამ სხეულის აბათავისუფალი მოძრაობის ზოგადი
შემთხვევა. კამაქიის ძალების განსაზღვრა. სტატიკურად
განსაზღვრული შემთხვევა

განვიხილოთ პირველად ის შემთხვევა, როცა მყარ სხეულს აქვს ერთი უცრავი წერტილი. ავიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სის-

ტემა სათავით უძრავ O წერტილში და დაეუშვათ, რომ სხეულზე უშუალოდ მოქმედი ძალებია

$$\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

უძრავი წერტილის რეაქციის ძალა იყოს $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, რომელიც, ცხადია, მოდებულია უძრავ O წერტილში.

სხეულის წონასწორობის განტოლებების მისაღებად $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, \vec{A} ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი უძრავი O წერტილის მიმართ უნდა გავუტოლოთ ნულს; მივიღებთ

$$\vec{A} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (10,1)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i] = 0. \quad (10,2)$$

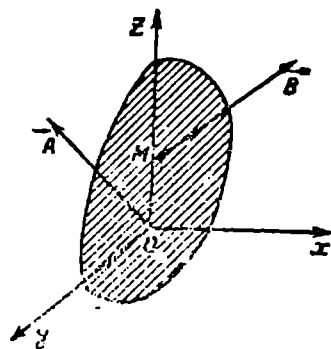
სადაც \vec{r}_i წარმოადგენს \vec{F}_i ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორს უძრავი O წერტილის მიმართ.

(10,1) ტოლობიდან განისაზღვრება რეაქციის ძალა, ხოლო (10,2) ტოლობა, რომელიც რეაქციის ძალას არ შეიცავს (რეაქციის ძალის მომენტი უძრავი O წერტილის მიმართ ნულის ტოლია), წარმოადგენს იმ პირობას, რომელსაც მოცემული ძალები უნდა აკმაყოფილებდეს წონასწორობის შემთხვევაში, ე. ი. წარმოადგენს სხეულის წონასწორობის პირობას.

ვთქვათ, სხეულს აქვს ორი უქრავი წერტილი O და M (სხეულის მოძრაობა შეიძლება იყოს მხოლოდ ბრუნვა ამ ორ წერტილზე გამავალი ღერძის გარშემო).

კოორდინატთა სისტემის სათავედ მივიღოთ O წერტილი და Ox ღერძი მივმართოთ ისე, რომ ის M წერტილზე გადიოდეს.

O და M წერტილების რეაქციის ძალები იყოს შესაბამისად $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ და $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ (ნახ. 83).



ნახ. 83.

თუ სხეულზე უშუალოდ მოდებული ძალებია $\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ ($i=1, \dots, n$), მაშინ აღებული მყარი სხეულის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები მიიღებენ სახეს:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{A} + \vec{B} = 0, \quad (10,3)$$

$$\vec{L} + [\vec{OM} \cdot \vec{B}] = 0, \quad (10,4)$$

სადაც \vec{L} წარმოადგენს უშუალოდ მოქმედ ძალთა სისტემის ნაკრებ მომენტს O წერტილის მიმართ (რეაქციის \vec{A} ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ, ცხადია, ნულის ტოლია).

რეაქციის ძალები, რომელნიც საძიებელ სიდიდეებს წარმოადგენენ, უნდა განისაზღვრონ ამ პირობებიდან.

(10,3) ტოლობის კოორდინატთა ლერძებზე დაგეგმილება მოგვცემს

$$\begin{aligned} X + A_x + B_x &= 0, \\ Y + A_y + B_y &= 0, \\ Z + A_z + B_z &= 0, \end{aligned} \quad (10,5)$$

სადაც X, Y, Z უშუალოდ მოქმედ ძალთა სისტემის ნაქრები ვექტორის კომპონენტებია.

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$|\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & h \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

სადაც h წარმოადგენს \overrightarrow{OM} ვექტორის გეგმილს z ლერძზე, და დავაგეგმილებთ (10,4) ტოლობას კოორდინატთა ლერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} L_x - h B_y &= 0, \\ L_y + h B_x &= 0, \\ L_z &= 0. \end{aligned} \quad (10,6)$$

(10,5) და (10,6) განტოლებებიდან ჩანს, რომ რეაქციის ძალების კომპონენტები არ შედის მხოლოდ (10,6)-ის უკანასკნელ განტოლებაში, ამიტომ $L_z = 0$ ტოლობა წარმოადგენს იმ პირობას, რომელსაც აკმაყოფილებს მოცემული ძალები წონასწორობის შემთხვევაში. ამრიგად,

$$L_z = 0 \quad (10,7)$$

პირობა წარმოადგენს სხეულის წონასწორობის პირობას.

(10,5) და (10,6) სისტემების პირველი ხუთი განტოლებიდან უნდა მოიძებნოს რეაქციის ძალების 6 კომპონენტი: $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$. ხსენებული 5 განტოლებიდან ეს 6 სიდიდე ცალსახად არ განისაზღვრება.

ამრიგად, ჩვენ საკმე გვაქვს ისეთ შემთხვევასთან, როცა განტოლებათა რიცხვი არ არის საკმარისი რეაქციის ძალების მოსაძებნად. ასეთ შემთხვევას ჩვენ ვუწოდებთ სტატისტიკურად განუსაზღვრელ შემთხვევას.

ცხადია, (10,6)-ის პირველი ორი განტოლებიდან მივიღებთ

$$B_x = -\frac{L_y}{h}, \quad B_y = \frac{L_x}{h}. \quad (10,8)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (10,5)-ის პირველ ორ განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$A_x = \frac{L_y}{h} - X, \quad (10,9)$$

$$A_y = \frac{L_x}{h} - Y.$$

$$A_s + B_s = -Z.$$

(10,10)

ამრიგად A_s, A_y, B_s, B_y სიდიდეები (10,9) და (10,8) ტოლობებით განისაზღვრებიან. A_s და B_s სიდიდეების მოსაძებნად კი გვაქვს ერთი განტოლება (სახელდობრ (10,10) განტოლება) და, მაშასადამე, ადგილი აქვს განუზღვრელობას.

ცხადია, განუზღვრელობას არ ექნება ადგილი, თუ A_s და B_s სიდიდეებიდან ერთ-ერთი ცნობილია; ასე, მაგალითად, თუ O წერტილი დამაგრებულია საქუსლის ან სახსრის საშუალებით, ხოლო M წერტილზე გვაქვს საკისარი. ამ შემთხვევაში, ცხადია, $B_s = 0$ და $A_s = -Z$.

თუ ახლა O წერტილზედაც გვაქვს საკისარი, მაშინ სხეულს არა მხოლოდ ბრუნვა შეუძლია OZ ღერძის გარშემო, არამედ სრიალიც. ამ შემთხვევაში $A_s = B_s = 0$, ამიტომ წონასწორობის (10,7) პირობას დაემატება აგრეთვე პირობა $Z = 0$. რეაქციის ძალების სხვა კომპონენტები ისე მოიძებნება, როგორც ზემოთ.

მყარი სხეულის ბრუნვა მკვიდრი ღერძის გარშემო, ცხადია, შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ისეთი არათავისუფალი მოძრაობა სხეულისა, როცა ბრუნვის ღერძზე მოთავსებული მისი რამდენიმე M_1, M_2, \dots, M_m წერტილი სახსრითაა დამაგრებული¹. ამ წერტილებს შეესაბამება სათანადო რეაქციის ძალები: $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m$. თუ ბრუნვის ღერძს მივიღებთ x ღერძად და მოვიქცევით ისე, როგორც ზემოთ, დავრწმუნდებით, რომ მყარი სხეულის წონასწორობის პირობას ექნება ისევ (10,7) სახე. რეაქციის ძალების $3m$ კომპონენტის მოსაძებნად მივიღებთ ისევ 5 განტოლებას. ამრიგად, როცა $m \geq 2$, საქმე გვექნება სტატიკურად განუსაზღვრელ შემთხვევასთან. მკითხველს ვანდობთ ხსენებული 5 განტოლების შედგენას და იმის გამორკვევას, თუ რა სახის განუსაზღვრელობასთან გვექნება საქმე.

ვთქვათ ახლა, მყარი სხეული სასრული რაოდენობა M_1, M_2, \dots, M_n წერტილებით ეყრდნობა გარკვეულ სიბრტყეს. აღვნიშნოთ შესაბამის რეაქციის ძალები $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$ -ით. ავიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ x და y ღერძები მოთავსებული იყოს ხსენებულ სიბრტყეზე, ხოლო z ღერძი მოგებული იყოს მყარი სხეულისაკენ. უშუალოდ მოქმედ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი კოორდინატთა სისტემის სათავეს (O წერტილის) მიმართ იყოს შესაბამად $\bar{F} = (X, Y, Z)$ და $\bar{L} = (L_x, L_y, L_z)$. აღვნიშნოთ $\bar{r}_i = (x_i, y_i, 0)$ -ით ($i = 1, 2, \dots, n$) \bar{N}_i ვექტორის მოდების M_i წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ.

დავუშვათ, რომ რეაქციის ძალები მართობია იმ სიბრტყის, რომელზედაც სხეულია დაყრდნობილი. ასეთ შემთხვევაში $\bar{N}_i = (0, 0, N_i)$, სადაც N_i წარმოადგენს \bar{N}_i ძალის გვერდის z ღერძზე. ცხადია, რომ $N_i \geq 0$.

მყარი სხეულის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები მოგვცემს

¹ შეიძლება ერთი წერტილი იყოს სახსრით დამაგრებული, დანარჩენ წერტილებზე კი გვექნდეს საკისარი.

$$\vec{F} + \sum_{i=1}^n \vec{N}_i = 0,$$

$$\vec{L} + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{N}_i] = 0.$$

ამ ტოლობების კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმვლებით მივიღებთ

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + \sum_{i=1}^n N_i = 0,$$

$$L_x + \sum_{i=1}^n y_i N_i = 0, \quad L_y - \sum_{i=1}^n x_i N_i = 0, \quad L_z = 0.$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ შემდეგი ტოლობები:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad L_z = 0, \quad (10,11)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i = -Z, \quad \sum_{i=1}^n x_i N_i = L_y, \quad \sum_{i=1}^n y_i N_i = -L_x. \quad (10,12)$$

(10,11) პირობები, როგორც რეაქციის ძალებს არ შეიცავენ, წარმოადგენენ იმ პირობებს, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდნენ უშუალოდ მოქმედი ძალები წონასწორობის შემთხვევაში. N_1, N_2, \dots, N_n სიდიდეები უნდა მოიცვებოდნენ (10,12) განტოლებებიდან. ამრიგად, n სიდიდის მოსაძებნად გვექნება 3 განტოლება და, მაშასადამე, როცა $n > 3$, გვაქვს სტატიკურად განუსაზღვრელი შემთხვევა.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა $n = 3$, ამასთან ვიგულისხმობთ, რომ M_1, M_2, M_3 ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. ამ შემთხვევაში (10,12) სისტემა ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 &= -Z, \\ x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 &= L_y, \\ y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3 &= -L_x. \end{aligned} \quad (10,13)$$

ვინაიდან, პირობის ძალით, M_1, M_2, M_3 წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ, ამიტომ, როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix}$$

განსხვავებულია ნულისაგან და, მაშასადამე, (10,13) სისტემა ამოხსნადია N_1, N_2, N_3 სიდიდეების მიმართ.

წონასწორობას მართლაც რომ ჰქონდეს ადგილი, ამისათვის აუცილებელია $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0$. ვნახოთ რა შემთხვევაში შეიძლება ამ პირობის შესრულება.

(10,11) ტოლობების ძალით, ცხადია, რომ წონასწორობის შექონევაში მყარ სხეულზე უშუალოდ მოქმედ ძალთა სისტემის ნაკრები ენქტორი ძართობია xOy სიბრტყის (იმ სიბრტყის, რომელზედაც მყარი სხეულია დაყრდნობილი), ხოლო ნაკრები მომენტი პარალელურია ამ სიბრტყის, ამიტომ $(\vec{F}, \vec{L}) = 0$. მაგრამ, როგორც § 9-ში იყო აღნიშნული, ეს უკანასკნელი წარმოადგენს იმის პირობას, რომ უშუალოდ მოქმედ ძალთა სისტემა დაიყვანებოდეს ტოლქმედამდე. ამრიგად, წონასწორობის შემთხვევაში უშუალოდ მოქმედ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე. ეს ტოლქმედი, ცხადია, უნდა გაწონასწორდეს რეაქციის $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ ძალებით. რომელნიც პარალელურ ძალებს წარმოადგენენ. აქედან გამომდინარეობს, რომ ტოლქმედის ფუძე აუცილებლად უნდა გადიოდეს M, M_2, M_3 სამკუთხედის შიგნით ან მის საზღვარზე; ამასთან ის მოგვხვდება უნდა იყოს x ღერძის საწინააღმდეგოდ, ე. ი. მყარი სხეულიდან სიბრტყისაკენ.

იმ შემთხვევის განილვას, როცა მყარი სხეული ერთი ან ორი წერტილით ეყრდნობა გლუვ სიბრტყეს, მკითხველს ვანდობთ.

§ 11. მატერიალური წერტილის წონასწორობა ზედაპირზე. ხახუნის ძალა

ვთქვათ მატერიალური M წერტილი იმყოფება რაიმე უძრავი სხეულის S ზედაპირზე. გავავლოთ შეხების M წერტილზე ფართეულის ნორმალს და მხები სიბრტყე. მატერიალურ წერტილზე უშუალოდ მოქმედი ძალა და ზედაპირის რეაქციის ძალა აღენიშნოთ შესაბამისად \vec{T} -ით და \vec{R} -ით. ცხადია, რომ რეაქციის \vec{R} ძალა შეიძლება დავშალოთ ორ შესაკრებად: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$, სადაც \vec{N} მოთავსებულია ფართეულის ნორმალზე, ხოლო \vec{T} კი—მხებ სიბრტყეში.

\vec{T} ძალას ეწოდება ხახუნის ძალა, ხოლო \vec{N} -ს ნორმალური რეაქციის ძალა.

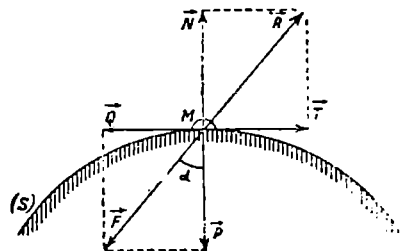
ჩვენ ვიტყვით, რომ S ზედაპირი გლუვია, ანუ ბმა იდეალურია, თუ \vec{R} მართობია მხები სიბრტყის (ე. ი. თუ ხახუნის ძალა $\vec{T} = 0$).

დავშალოთ ახლა უშუალოდ მოქმედი \vec{F} ძალაც ორ შესაკრებად: $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$, სადაც \vec{P} (რომელსაც ნორმალური წნევის ძალა ეწოდება) მოთავსებულია ნორმალზე, \vec{Q} კი—მხებ სიბრტყეში (ნახ.

84). წონასწორობის შემთხვევაში, ცხადია, გვექნება

$$\vec{R} = -\vec{F}, \quad \vec{N} = -\vec{P}, \quad \vec{T} = -\vec{Q}. \quad (11,1)$$

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ \vec{F} ძალის \vec{P} მდგენელი არ იცვლება, ხოლო \vec{Q} მდგენელის სიდიდე თანდათან დიდდება. დადგება მომენტი, როცა მატერიალური წერტილი ამოძრავდება ზედაპირზე. აღენიშნოთ სახუნის ძალა დაძვრის მომენტში \vec{T}_0 -ით. ფრანგმა მეცნიერმა კულონმა 1781 წელს მრავალი ექსპერიმენტით დაადასტურა, რომ $|\vec{T}_0|$ პროპორციულია $|\vec{P}|$ -სი.



ნახ. 84.

ამრიგად,

$$|T_0| = k|P|.$$

k მუდმივს, რომელიც მხოლოდ შეხებაში მყოფ სხეულებზეა დამოკიდებული, ეწოდება ხახუნის კოეფიციენტი. ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს $|Q| \leq |T_0|$ უტოლობას, ანუ რაც იგივეა

$$|Q| \leq k|P|. \quad (11,2)$$

მაგრამ, (11,1) ტოლობების ძალით, წონასწორობის დროს $|P| = |N|$, $|Q| = |T|$, ამიტომ, (11,2)-ის გამო, წონასწორობისათვის გვექნება

$$|T| \leq k|N|.$$

φ კუთხეს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\operatorname{tg} \varphi = k, \quad (11,3)$$

ეწოდება ხახუნის კუთხე. თუ ახლა α -თი აღვნიშნავთ იმ კუთხეს, რომელსაც F ძალა ფართეულის M წერტილში გავლენულ შიგა ნორმალთან ადგენს, ცხადია, მივიღებთ (ნახ. 84).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|Q|}{|P|}.$$

(11,2) უტოლობის ძალით, წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq k = \operatorname{tg} \varphi. \quad (11,4)$$

აეგოთ ახლა წრიული კონუსი, წვეროთი O წერტილში, რომლის ღერძი ემთხვევა ფართეულის ნორმალს და რომლის გაშლის კუთხე ტოლია 2φ -ს. (11,4) უტოლობის ძალით, წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი $\alpha \leq \varphi$. ზემოხსენებულ კონუსს ეწოდება ხახუნის კონუსი.

ყოველივე იმას, რაც ზემოთ იყო აღნიშნული, ადგილი აქვს იმ შემთხვევაშიც, როცა უძრავ ზედაპირს ეყრდნობა რაიმე მყარი სხეული გარკვეულ წერტილში.

ამოცანები

1. ერთგვაროვანი მავთულისაგან დანზადებული $ABCD$ კვადრატისაგან ჩამოჭრილია CD გვერდი. ეს კვადრატი B კუთხით ღუსმანზეა ჩამოკიდებული. იპოვეთ კუთხე α , რომელსაც AB გვერდი ადგენს ვერტიკალურ მიმართულებასთან (ნახ. 85).

კვადრატზე მოქმედებენ სიმძიმის ძალები, რომელნიც მოდებული არიან K , E და F წერტილებში¹ და აგრეთვე B წერტილის რეაქციის ძალა. აღვნიშნოთ კვადრატის ერთი გვერდის წონა P -თი. სიმძიმის ძალები წარმოადგენენ პარალელურ ძალებს. K და F წერტილებზე მოდებული ძალების შეკრება გაძლევს $2\vec{P}$ ძალას, რომელიც KF მონაკვეთის O შუაწერტილშია მოდებული. შევკრიბოთ ახლა E წერტილზე მოდებული \vec{P} და O წერტილზე მოდებული $2\vec{P}$ ძალები; მივიღებთ O , წერტილზე მოდებულ $3\vec{P}$ ძალას. ცხადია,

¹ ცხადია, K , E და F წარმოადგენენ კვადრატის გვერდების შუაწერტილებს.

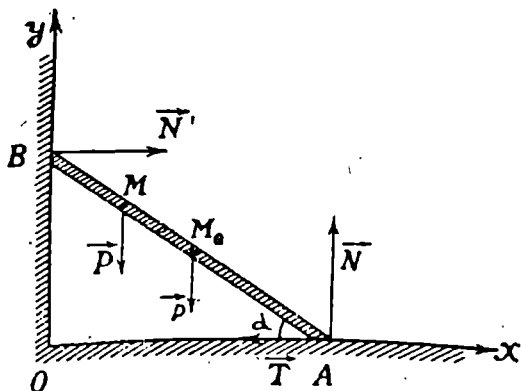
$EO_1 = \frac{2}{3} a$, სადაც a -თი აღნიშნულია კვადრატის გვერდის ნახევარი ($AB = 2a$). ცხადია, O_1 წერტილზე მოდებული $3\vec{P}$ ძალა უნდა გაწონასწორდეს B წერტილის რეაქციის ძალით და, მაშასადამე, ამ ძალის მიმართულება უნდა გადიოდეს B წერტილში. გვექნება

$EB = a$, $EO_1 = \frac{2}{3} a$, ამიტომ, ცხადია,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$

8. l სიგრძის ერთგვაროვანი AB ღერო, რომლის წონა უდრის p -ს, ეყრდნობა პარიზონტალურ Ox იატაკს და ვერტიკალურ Oy კედელს. ღეროს M წერტილზე დაკიდებულია P წონის ტვირთი, $AM = s$. კედელი გლუვია, ხოლო იატაკი მკისეა, ხახუნის კოეფიციენტი უდრის k -ს. ღერო წონასწორობაშია, $\angle OAB = \alpha$. ვიპოვოთ რეაქციის ძალები (ნახ. 86).

ღეროზე მოქმედებენ შემდეგი ძალები: უშუალოდ მოქმედი ვერტიკალურად მიმართული \vec{P} და \vec{p} ძალები (p არის AB ღეროს წონა), B წერტილზე მოდებული ნორმალური რეაქციის ძალა \vec{N}' , რომელიც კედლის მართობია, A წერტილზე მოდებული ნორმალური რეაქციის ძალა \vec{N} და ხახუნის ძალა \vec{T} . აღვნიშნოთ ძალების სიდიდეები იმავე ასოებით, მხოლოდ ვექტორის ნიშნის (ისრის) გარეშე.

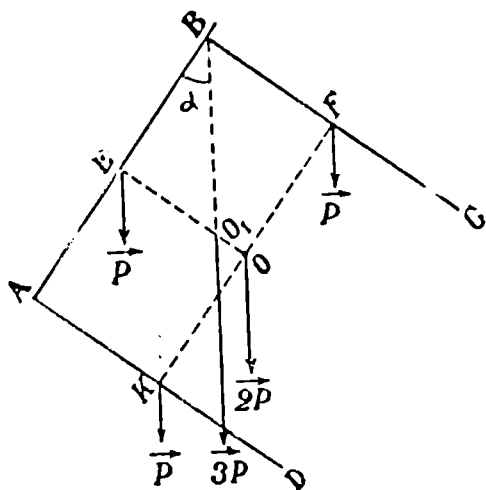


ნახ. 86.

მაშინ წონასწორობის განტოლებებს ექნება სახე:

$$\vec{P} + \vec{p} + \vec{N}' + \vec{N} + \vec{T} = 0,$$

$$[\vec{AM}_0, \vec{p}] + [\vec{AM}, \vec{P}] + [\vec{AB}, \vec{N}'] = 0.$$



ნახ. 85.

ვინაიდან ყველა ძალა მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეში, ამიტომ წონასწორობის სამი განტოლება გვექნება შესაძგენი (იხ. (8,1) განტოლებები).

თუ მომენტთა ცენტრად ავიღებთ A წერტილს,

ავილოთ კოორდინატა Oxy სისტემა ისე, როგორც ნახაზზეა და შევა-
სოთ ის, Ox ღერძის ალებით, მარცხენა სამღერძამდე. ზედა ტოლობების კოორ-
დინატა ღერძებზე დაგეგმილებით ვლებულობთ:

$$\begin{aligned} N' - T &= 0, \\ N - P - p &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$-l N' \sin \alpha + \left(sP + \frac{lp}{2} \right) \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

ამ განტოლებების ამოხსნა გვაძლევს:

$$T = N = \left(\frac{sP}{l} + \frac{p}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha, \quad (3)$$

$$N = P + p.$$

რადგან წონასწორობას აქვს ადგილი, ამიტომ, ცხადია, $T \leq kN$. თუ ამ
უქანასენელში შევიტანთ (3) მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$\left(\frac{sP}{l} + \frac{p}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha \leq k(P + p).$$

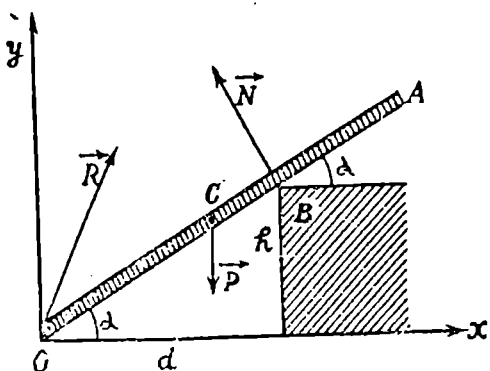
საიდანაც

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{\frac{sP}{l} + \frac{p}{2}}{k(P + p)}. \quad (4)$$

ამრიგად, წონასწორობისათვის α კუთხე აუცილებლად უნდა აკმაყოფი-
ლებდეს (4) პირობას. როცა $s=l$ და მაშასადამე, P წონის ტვირთი დაკიდე-
ბულია ღეროს B ბოლოში, მაშინ α კუთხე უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2P + p}{2k(P + p)}.$$

9. ერთგვაროვანი გლუვი OA ღერო ერთი ბოლოთი დამაგრებულია



ნახ. 87.

უძრავ O წერტილში სახს-
რის საშუალებით და ეყრდ-
ნობა ვერტიკალური კედ-
ლის B კუთხეს (ნახ. 87).
მოცემულია: ღეროს სიგრძე
 $OA=2l$, ღეროს წონა p ,
 B წერტილის კოორდინატე-
ბი d და h (კოორდინატა
სისტემა ისეა აღებული, რო-
გორც ნახაზზეა ნაჩვენები).
საძიებელია O სახსრისა და
 B კუთხის რეაქციის ძალები.
ღეროზე მოქმედებენ

შემდეგი ძალები: უშუალოდ მოქმედი \vec{p} ძალა, რომელიც, ცხადია, OA ღე-
როს შუაწერტილშია მოდებული, რეაქციის ძალები \vec{R} და \vec{N} . \vec{N} ძალა, OA ღე-

როს სიგლუვის გამო, ღეროს მართობია, მისი სიდიდე უცნობია, $\vec{R} = (R_x, R_y)$ რეაქციის ძალა უცნობია. ამრიგად, საძიებელია N, R_x, R_y სიდიდეები.

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\vec{p} + \vec{R} + \vec{N} = 0. \quad (5)$$

$$[\vec{OC} \cdot \vec{p}] + [\vec{OB} \cdot \vec{N}] = 0, \quad (6)$$

(მომენტთა ცენტრად მიღებულია O წერტილი).

(5) ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილება მოგვცემს

$$\begin{aligned} R_x - N \sin \alpha &= 0, \\ -p + R_y + N \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

α კუთხე შეიძლება ჩავთვალოთ მოცემულად, რადგან $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d}$. თუ ახლა აღებულ კოორდინატთა სისტემას, Ox ღერძის აღებით, შევაყვანებთ მარცხენა სამღერძამდე და (6) ტოლობას Ox ღერძზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$-lp \cos \alpha + N(d \cos \alpha + h \sin \alpha) = 0,$$

ანუ

$$-lp \cos \alpha + N \sqrt{d^2 + h^2} = 0,$$

საიდანაც

$$N = \frac{lp \cos \alpha}{\sqrt{d^2 + h^2}}. \quad (8)$$

უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით (7) განტოლებები მოგვცემს

$$R_x = \frac{lp \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{d^2 + h^2}}, \quad (9)$$

$$R_y = p - \frac{lp \cos^2 \alpha}{\sqrt{d^2 + h^2}}. \quad (10)$$

ამრიგად, რეაქციის ძალები გამოითვლება მე-(8), მე-(9) და მე-(10) ტოლობებით.

10. მოცემულია ორი ძალა: $\vec{F}_1 = (4, 0, 0)$ და $\vec{F}_2 = (0, 4, 0)$, რომელთა მოდების წერტილებია შესაბამისად $M_1(0, 0, 3)$ და $M_2(3, 0, 0)$. ძალთა ეს სისტემა დავიყვანოთ ძალთა ხრახნამდე (ნახ. 88).

ცხადია, გვექნება

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (4, 4, 0),$$

$$\vec{L} = [\vec{OM}_1 \cdot \vec{F}_1] + [\vec{OM}_2 \cdot \vec{F}_2].$$

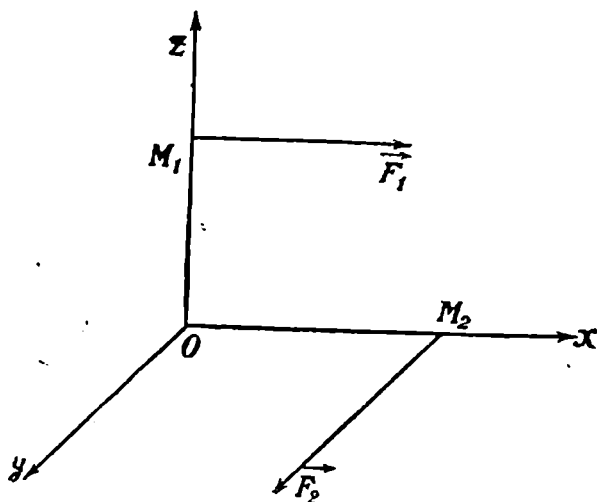
მარტივი გამოთვლებით ვღებულობთ

$$\vec{L} = (0, 12, 12).$$

შევადგინოთ ახლა ძალთა ხრახნის ცენტრალური ღერძის (9,3) განტოლებები. გვექნება

$$x - y = 3, \quad z = \frac{3}{2}.$$

ამრიგად, ცენტრალური ღერძი წარმოადგენს xOy კუთხის ბისექტრისის პარალელურ წრფეს, რომელიც მოთავსებულია Oxy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში ($z = \frac{3}{2}$ სიბრტყეში).



ნახ. 88.

გ ა ნ ყ რ დ ე ბ ა 2

ილალური ძაუის წონასწორობა

§ 12. მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობის შესახებ

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ მატერიალურ წერტილთა უცვლადი სისტემის (მყარი სხეულის) წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ეს პირობები მოცემული იყო (8,3) და (8,4) განტოლებებით.

ვთქვათ ახლა, მოცემულია მატერიალურ წერტილთა ნებისმიერი სისტემა, რომელიც შეიძლება შეადგენდეს როგორც მყარ სხეულს, ისე დრეკად და თხევად სხეულებსაც.

მატერიალურ წერტილთა მოცემულ სისტემაზე მოქმედ ისეთ ძალებს, რომელნიც სისტემაში შემავალი მატერიალური წერტილებით არიან გამოწვეული, ეწოდება შიგა ძალები, ხოლო ისეთ ძალებს, რომელნიც სისტემაში შემავალი წერტილებით არ არიან გამოწვეული, ეწოდება გარე ძალები.

ქმედებისა და უქუქმედების პრინციპის ძალით, ყოველ შიგა ძალას შეესაბამება მისი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი შიგა ძალა, ამიტომ შიგა ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ ნულის ტოლია.

თუ დავუშვებთ, რომ სისტემა წონასწორობაშია და სისტემის ყოველ წერტილზე მოქმედ შიგა და გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს და ნაკრებ მომენტს გავუტოლებთ ნულს, მიღებულ განტოლებებს შევაჯამებთ და გავითვალისწი-

ნებთ, რომ შიგა ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია, მივიღებთ

$$\vec{F}=0, \quad (12,1)$$

$$\vec{L}=0,$$

ანუ, რაც იგივეა

$$\begin{aligned} X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \\ L_x=0, \quad L_y=0, \quad L_z=0, \end{aligned} \quad (12,2)$$

სადაც $\vec{F}=(X, Y, Z)$, $\vec{L}=(L_x, L_y, L_z)$ წარმოადგენენ გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს და ნაკრებ მომენტს რაიმე წერტილის მიმართ. (12,1), ანუ რაც იგივეა (12,2), რომელნიც მყარი სხეულისათვის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს წარმოადგენენ, დრეკადი და თხევადი სხეულებისათვის წარმოადგენენ წონასწორობის მხოლოდ აუცილებელ პირობებს.

ვთქვათ, გვაქვს მატერიალურ წერტილთა ნებისმიერი სისტემა, რომელიც წონასწორობაშია. წარმოვიდგინოთ, რომ ამ სისტემიდან გამოყოფილია რაიმე ნაწილი, რომელიც, ცხადია, წონასწორობაში იქნება. ვინაიდან გამოყოფილი ნაწილიც წარმოადგენს მატერიალურ წერტილთა გარკვეულ სისტემას, ამიტომ მისთვის ძალაშია (12,1) განტოლებები:

$$\vec{F}^*=0, \quad \vec{L}^*=0, \quad (12,3)$$

მხოლოდ უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ განტოლებებში ასაღებია ის გარე ძალები, რომელნიც მოქმედებენ გამოყოფილ ნაწილზე. ამრიგად, ზოგი ძალა, რომელიც მთლიანი სისტემისათვის შიგა ძალას წარმოადგენდა, გამოყოფილი ნაწილისათვის გადაიქცევა გარე ძალად (სახელდობრ. ის ძალები, რომლითაც გამოყოფილ ნაწილზე მოქმედებს დანარჩენი ნაწილი).

ზემონათქვამის ძალით, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობა არ დაირღვევა, თუ ამ სისტემის რაიმე ნაწილი მყარ სხეულად (უცვლად სისტემად) გადაიქცევა და თუ ამ ნაწილზე მოქმედ გარე ძალთა სისტემა უცვლელი დარჩება.

მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ მატერიალურ წერტილთა აღებული სისტემის რაიმე ნაწილი გამყარდა ისე, რომ ამ ნაწილზე მოქმედი გარე ძალები უცვლელი დარჩა. ვინაიდან ეს გარე ძალები აკმაყოფილებენ (12,3) განტოლებებს, რომელნიც მყარი სხეულის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს წარმოადგენენ, ამიტომ გამყარებული ნაწილი წონასწორობაში დარჩება და ამით დებულება დამტკიცებულია.

ეს დებულება „გამყარების პრინციპის“ სახელწოდებით არის ცნობილი.

„გამყარების პრინციპი“, ხშირად, საშუალებას იძლევა არსებითად გავამარტივოთ მყარ სხეულთა სისტემის წონასწორობის ამოცანების ამოხსნა. ხსენებული სისტემის წონასწორობის განტოლებების მისაღებად თითოეული სხეული უნდა განვიხილოთ, როგორც თავისუფალი და დავწეროთ მისთვის წონასწორობის განტოლებები. მაგრამ, ზემოდამტკიცებული დებულების ძალით, შეიძლება რამდენიმე სხეული ერთად დავაჯგუფოთ და განვიხილოთ ისინი, როგორც მყარად დაკავშირებული ერთმანეთთან, ან კიდევ მთელი სისტემა

შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ერთი მყარი სხეული და ასეთი გზით დავეწეროთ წონასწორობის განტოლებები. დაჯგუფებულ ნაწილში შემაველ სხეულებს შორის ურთიერთმიზიდულობის ძალები ახლა არ არის მხედველობაში მისაღები, რადგან ისინი ამ ნაწილისათვის შიგა ძალებს წარმოადგენენ, ამიტომ, ასეთი გზით დაწერილი განტოლებები, ხშირად, გაცილებით უფრო მარტივია (განსაკუთრებით მაშინ, როცა ზოგიერთი რეაქციის ძალის მოძებნა საჭირო არ არის).

§ 13. უპიკადი და იდეალური კაზის წონასწორობა

მატერიალური წერტილების ისეთ ერთობლიობას, რომელიც რაიმე AB წირზე უწყვეტად არის განრიგებული ეწოდება ძაფი. ვიგულისხმობთ, რომ AB ძაფზე არჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულება, მაგალითად, მიმართულება A -დან B -სკენ. წერტილის მდებარეობა ძაფზე (AB წირზე) დავახასიათოთ ბუნებრივი s პარამეტრით, რომლის ათვლის წერტილად მივიღოთ A წერტილი.

თუ ძაფის სიგრძე მის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის არ იცვლება, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ ძაფი უჭიმადია.

ვთქვათ ძაფი წონასწორობაშია; გავკრათ ის ნებისმიერ C წერტილში და მოვაცილოთ CB ნაწილი. CB ნაწილის მექანიკური მოქმედება AC ნაწილზე გარკვეული ძალებით ხასიათდება. თუ ეს ძალები ტოლფასია ერთადერთი \vec{T} ძალას, რომელიც მხებია AB ძაფისა C წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ ძაფი იდეალურია, ანუ სავსებით ღუნვადია. \vec{T} ძალას ეწოდება დაჭიმულობის ძალა. ამ ძალის მექანიკური მოქმედება AC ნაწილზე ისეთია, როგორიც BC ნაწილის მოქმედება მასზე. ცხადია, \vec{T} ძალა დამოკიდებულია C წერტილის მდებარეობისაგან AB წირზე.

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ უჭიმად იდეალურ ძაფებს.

დაჭიმულობის ძალების გარდა, ძაფზე მოქმედებენ აგრეთვე გარკვეული გარე ძალები. ვიგულისხმობთ, რომ ეს ძალები უწყვეტადაა განაწილებული ძაფის გასწვრივ ისე, რომ ამ ძაფის ყოველ უსასრულოდ მცირე Δs სიგრძის ab რკალზე მოქმედი ძალები შეიძლება გამოვსახოთ ერთი ძალით, რომელსაც შემდეგი სახე ექნება:

$$\vec{F}\Delta s, \quad (13,1)$$

სადაც \vec{F} წარმოადგენს სიგრძის ერთეულზე ათვლილ გარე ძალას. (13,1) ძალის მოდების წერტილად შეიძლება მივცლოთ ab რკალის ნებისმიერი წერტილი (კერძოდ a წერტილი). ცხადია, როგორც \vec{T} , ისე \vec{F} ძალა ბუნებრივი s პარამეტრის ფუნქციაა.

განვიხილოთ ახლა ზემოხსენებული Δs ელემენტი (რომლის ბოლო წერტილებია a და b), როგორც მატერიალური წერტილი და დავწეროთ მისი წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. ab ელემენტის b წერტილზე მოქმედი დაჭიმულობის ძალა იყოს \vec{T} , ხოლო ამ ელემენტის a წერტილზე მოქმედი დაჭიმულობის ძალა იყოს \vec{T} , (ნახ. 89). ვინაიდან ძაფის ყოველ წერტილზე მოქმედებს (ქმედებისა და უკუქმედების პრინციპის ძალით) ორი პარადაპირ თანაწინააღმდეგი დაჭიმულობის ძალა, ამიტომ, ცხადია

$$\vec{T} = -\vec{T}_1 + \Delta\vec{T}, \quad (13,2)$$

სადაც $\Delta\vec{T}$ უსასრულოდ მცირე სიგრძის ვექტორია.

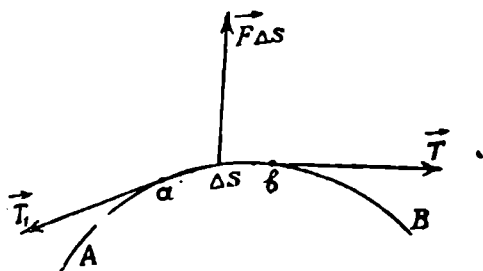
Δs ელემენტზე მოქმედებს აგრეთვე გარე ძალა, რომელსაც ზემონათქვამის ძალით, აქვს სახე: $\vec{F}\Delta s$. ამრიგად, აღებული ელემენტის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება

$$\vec{T} + \vec{T}_1 + \vec{F}\Delta s = 0,$$

რომელიც, (13,2) ტოლობის ძალით, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} + \vec{F}(s) = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta s \rightarrow 0$, მივიღებთ



ნახ. 89.

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} + \vec{F}(s) = 0. \quad (13,3)$$

ეს განტოლება სხვა სახითაც შეიძლება ჩავწეროთ. ამისათვის AB ძაფის მგეზავი აღებულ $M(s)$ წერტილზე აღვნიშნოთ \vec{e} -თი. ცხადია, გვექნება

$$\vec{T} = T\vec{e},$$

სადაც T წარმოადგენს \vec{T} ძალის ალგებრულ მნიშვნელობას \vec{e} მგეზავის მიმართულებაზე. თუ ამ მნიშვნელობას (13,3) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{dT}{ds} \vec{e} + T \frac{d\vec{e}}{ds} + \vec{F} = 0, \quad (13,4)$$

როგორც II თავის § 11-ში იყო ნაჩვენები

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}^{\circ}, \quad (13,5)$$

სადაც ρ წარმოადგენს AB წირის სიმრუდის რადიუსს $M(s)$ წერტილში. \vec{n}° მთავარი ნორმალის მგეზავია ამ წერტილში, რომლის გეზიც მიმართულია მრუდის ჩაზნექილობისაკენ. თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (13,4) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{dT}{ds} \vec{e} + \frac{T}{\rho} \vec{n}^{\circ} + \vec{F} = 0. \quad (13,6)$$

განვიხილოთ ახლა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა და აღვნიშნოთ $M(s)$ წერტილის კოორდინატები $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ -ით. ვინაიდან

$$\vec{e} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right),$$

ამიტომ, ცხადია, გვექნება¹

$$\frac{\vec{n}^0}{\rho} = \frac{d\vec{e}}{ds} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2} \right).$$

თუ ამ ტოლობებს გავითვალისწინებთ და (13,6) ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z &= 0, \end{aligned} \quad (13,7)$$

სადაც X, Y, Z წარმოადგენენ \vec{F} ძალის კოორდინატებს, რომელთაც მოცემულად ვთვლით.

თუ მოვიგონებთ, რომ s ბუნებრივი პარამეტრია, ცხადია, გვექნება

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1. \quad (13,8)$$

(13,7) და (13,8) ოთხი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემიდან უნდა მოიძებნოს 4 უცნობი: x, y, z, T . ამრიგად, ხსენებული სისტემიდან უნდა განისაზღვროს ძაფის წონასწორობის მდებარეობა და დაჭიმულობის ძალა ძაფის ყოველ წერტილში.

დავწეროთ (13,7) და (13,8) განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემა ისეთი სახით. რომელიც ამოხსნილი იქნება უცნობთა უმაღლესი რიგის წარმოებულების მიმართ. ამისათვის ჯერ (13,8) ტოლობა გავაწარმოოთ s ცვლადით, მივიღებთ:

$$\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} = 0. \quad (13,9)$$

(13,7) სისტემა ახლა ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} T \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \frac{dx}{ds} + X &= 0, \\ T \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \frac{dy}{ds} + Y &= 0, \\ T \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \frac{dz}{ds} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (13,10)$$

¹ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ წონასწორობის მდგომარეობაში ძაფის წერტილების კოორდინატებს აქვთ მხოლოდ რიგამდე უწყვეტი წარმოებულებები s რეალური აბსცისით.

ამ სისტემის განტოლებები გავამრავლოთ შესაბამად $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ სიდიდეებზე და შევკრიბოთ, (13,9) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\frac{dT}{ds} \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] = - \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right). \quad (13,11)$$

თუ ამ ტოლობიდან განსაზღვრულ $\frac{dT}{ds}$ -ს შევიტანთ (13,10) სისტემაში, დავრწმუნდებით, რომ (13,10) და (13,11) სისტემა ამოხსნაღია x , y , z , T უცნობთა უმაღლესი რიგის წარმოებულების მიმართ $\left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}, \frac{dT}{ds} \right)$ წარმოებულების მიმართ) და მაშასადამე, ეს სისტემა წარმოადგენს ნორმალური

ტიპის სისტემას. ამ სისტემის ზოგადი ინტეგრალი, როგორც ეს ცნობილია დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან, შეიცავს 7 ნებისმიერ მუდმივს. ხსენებული ინტეგრალი აუცილებლად უნდა აკმაყოფილებდეს (13,8) პირობას. ვაჩვენოთ, რომ ამ პირობის შესრულებაზე დაიხარჯება ერთი ნებისმიერი მუდმივი. უპირველეს ყოვლისა ვაჩვენოთ, რომ (13,9) ტოლობა შედეგია (13,10) და (13,11) განტოლებების (სხვანაირად რომ ვთქვათ, (13,10) და (13,11) სისტემის ნებისმიერი ამოხსნა აკმაყოფილებს (13,9) პირობას იგივეურად). ამისათვის ვიგულისხმობთ, რომ (13,10) და (13,11) სისტემის ზოგადი ამოხსნა შეტანილია ამავე სისტემაში, გავამრავლოთ (13,10) სისტემის განტოლებები შესაბამად $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ სიდიდეებზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$T \left[\frac{d^2x}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{dz}{ds} \right] + \frac{dT}{ds} \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] + X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0.$$

(13,11) ტოლობის ძალით, ეს უკანასკნელი გვაძლევს (13,9) ტოლობას, რომელიც ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{dT}{ds} \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] = 0,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = \text{const.}$$

ამით ნაჩვენებია, რომ ხსენებული ზოგადი ინტეგრალი იგივეურად აკმაყოფილებს ამ პირობას და, მაშასადამე, თუ (13,10) და (13,11) სისტემის ზოგადი ინტეგრალის საშუალებით შევადგენთ (13,8) ტოლობის მარცხენა მხარეს, მასში შევა მხოლოდ ზემოხსენებული 7 ნებისმიერი მუდმივი (დამოუკიდებელი s ცვლადი მასში არ შევა). ამის შემდეგ ცხადია, რომ (13,8) პირობის ძალით ხსენებული 7 ნებისმიერი მუდმივიდან ერთი განისაზღვრება და გამო-

ისახება დანარჩენი 6-ის საშუალებით. მაშასადამე, ზოგად ინტეგრალში საბოლოოდ შევა 6 ნებისმიერი მუდმივი. ეს მუდმივები შეიძლება განესაზღვროთ ძაფის A და B ბოლოებზე გარკვეული პირობების მოთხოვნით.

თუ დაუშვებთ, რომ A და B ბოლოები, რომელთა კოორდინატებია x_0, y_0, z_0 და x_1, y_1, z_1 , დამაგრებულია, მაშინ ზემოხსენებული 6 ნებისმიერი მუდმივის მოსაძებნად გვექნება შემდეგი პირობები: როცა $s=0$, მაშინ $x=x_0, y=y_0, z=z_0$, ხოლო როცა $s=l$, მაშინ $x=x_1, y=y_1, z=z_1$, ამასთან l აღებული ძაფის სიგრძეს აღნიშნავს. ამ პირობების ძალით, ზემოხსენებული მუდმივები ცალსახად განისაზღვრებიან.

ზოგად ამოხსნაში შემავალი ნებისმიერი მუდმივების მოსაძებნად შეიძლება გვექონდეს სხვა პირობებიც. ასე, მაგალითად, ბოლოებზე შეიძლება მოცემული იყოს დაჭიმულობის ძალები. ამ შემთხვევაშიც 6 მუდმივის მოსაძებნად გვექნება ისევ 6 პირობა.

წონასწორობაში მყოფი AB ძაფის ნებისმიერ M წერტილზე გავავლოთ მხები, მთავარი ნორმალის და ბინორმალის. მათი გვეზავები იყოს შესაბამად $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$. თუ ახლა (13,6) ტოლობას გავამრავლებთ სკალარულად \vec{b} ვექტორზე და გავითვალისწინებთ, რომ $(\vec{e} \cdot \vec{b}) = (\vec{n} \cdot \vec{b}) = 0$, მივიღებთ

$$(\vec{F} \cdot \vec{b}) = 0.$$

ამრიგად, როცა ძაფი წონასწორობაშია, გარე ძალების გეგმილი ბინორმალზე ნულია, ე. ი. გარე ძალები მხები სიბრტყეშია მოთავსებული.

ვთქვათ ახლა, ძაფზე მოქმედებენ პარალელური გარე ძალები, რომელთა საერთო მიმართულება განსაზღვრულია \vec{u} ერთეული ვექტორით.

ცხადია, ასეთ შემთხვევასთან გვექნება საქმე, როცა ძაფზე მოქმედებენ სიმძიმის ძალები (იხ. შემდეგი პარაგრაფი).

თუ (13,3) ტოლობას ვექტორულად \vec{u} ვექტორზე გავამრავლებთ და გავითვალისწინებთ, რომ $[\vec{u} \cdot \vec{F}] = 0$, მივიღებთ

$$\left[\vec{u} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} \right] = 0.$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{ds} [\vec{T} \cdot \vec{u}] = 0,$$

საიდანაც

$$[\vec{T} \cdot \vec{u}] = \text{const.} \quad (13,12)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ თუ პარალელური გარე ძალების მოქმედების შედეგად ძაფი წონასწორობაშია, მაშინ აღნიშნული პარალელური ძალები და დაჭიმულობის ძალები ერთ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული, ამასთან, ცხადია, ძაფს ექნება ბრტყელი წირის ფორმა, რომელიც მოთავსებული იქნება ზემოაღნიშნულ სიბრტყეში.

ვთქვათ ახლა, AB ძაფზე მოქმედი გარე ძალები ისეთია, რომ მათი მიმართულება ყოველთვის გადის ერთსა და იმავე O წერტილში. ასეთ ძალებს ეწოდება ცენტრალური ძალები, O წერტილს კი—ძალთა ცენტრი.

ავილოთ კოორდინატთა სისტემა სათავეთ O წერტილში და AB ძაფის ნებისმიერი M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ \vec{r} -ით. ვინაიდან გარე ძალების მიმართულება გადის O წერტილში, ამიტომ, ცხადია, $\vec{r}=(x, y, z)$ ვექტორი ძაფის AB წერტილზე მოქმედი გარე ძალის პარალელურია. თუ ახლა (13,3) ტოლობას გავამრავლებთ ვექტორულად \vec{r} ვექტორზე და გავითვალისწინებთ, რომ $[\vec{r}, \vec{F}]=0$, მივიღებთ

$$\left[\vec{r}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right] = 0. \quad (13,13)$$

ცხადია, გვექნება (იხ. II თავის (10,3) ფორმულა)

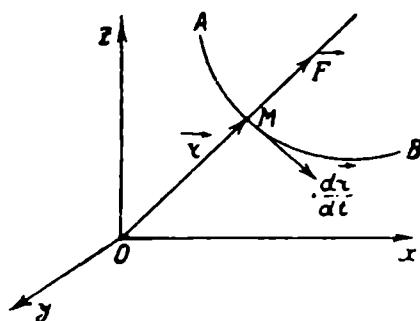
$$\frac{d}{ds} [\vec{r} \cdot \vec{T}] = \left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{T} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right]. \quad (13,14)$$

ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის განმარტების ძალით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ვექტორი AB წირის მხეებს ემთხვევა (ნახ. 90), ამიტომ, ცხადია, $\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{T} \right] = 0$. ამის შემდეგ, (13,13) ტოლობის ძალით, (13,14) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{d}{ds} [\vec{r} \cdot \vec{T}] = 0,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$[\vec{r} \cdot \vec{T}] = \text{const.}$$



ნახ. 90.

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} yT_z - zT_y &= C_1, \\ zT_x - xT_z &= C_2, \\ xT_y - yT_x &= C_3, \end{aligned} \quad (13,15)$$

სადაც C_1, C_2, C_3 მუდმივებია. (13,15) ტოლობები გავამრავლოთ შესაბამის x, y, z -ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0. \quad (13,16)$$

(13,16) წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეში გამავალი სიბრტყის განტოლებას.

ამრიგად, თუ ცენტრალური ძალების მოქმედებით AB ძაფი წონასწორობაშია, მაშინ მას ექნება ბრტყელი წირის

ფორმა და მოთავსებული იქნება (13,16) განტოლებით განსაზღ-
რულ ძალთა ცენტრში გამავალ სიბრტყეში.

ვთქვათ ახლა, დაფზე მოქმედებს მხოლოდ დაჭიმულობის ძალები, გარე.
ძალები კი ნულის ტოლია ($\vec{F}=0$). ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში დაჭიმუ-
ლობის ძალა ყველგან მუდმივია, ხოლო ძაფს ექნება წრფივი
ფორმა.

მართლაც, (13,3) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ $\vec{T}=\vec{T}_0=\overline{\text{const.}}$ (13,7),
ტოლობები კი, როგორც ადვილი მისახვედრია, მოგვცემს

$$\frac{dx}{ds}=a_1, \quad \frac{dy}{ds}=a_2, \quad \frac{dz}{ds}=a_3,$$

სადაც a_1, a_2, a_3 მუდმივებია. უკანასკნელი ტოლობები გვაძლევს $x=a_1s+b_1$,
 $y=a_2s+b_2$, $z=a_3s+b_3$. ეს განტოლებები კი წრფის განტოლებებია და ამით
ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

დავაგეგმილოთ (13,6) ტოლობა ძაფის მხებზე, ნორმალზე და ბინორ-
მალზე (\vec{e} -ზე, \vec{n} -ზე და \vec{b} -ზე), მივიღებთ

$$\frac{dT}{ds}+F_s=0, \quad \frac{T}{\rho}+F_n=0, \quad F_b=0, \quad (13,17)$$

სადაც F_s, F_n და F_b აღნიშნავენ \vec{F} ძალის გეგმილებს \vec{e} -ზე, \vec{n} -ზე და \vec{b} -ზე
შესაბამად.

(13,17) განტოლებებს ეწოდება ძაფის წონასწორობის ბუნებრივი
განტოლებები.

დავუშვათ, რომ ძაფი დაჭიმულია რაიმე გლუვ ზედაპირზე და გარდა-
ზედაპირის რეაქციის ძალებისა და ძაფის ბოლოებზე მოქმედი ძალებისა, სხვა
გარე ძალები ძაფზე არ მოქმედებენ. დავამტკიცოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში
ძაფის ყოველ წერტილზე მთავარი ნორმალის ემთხვევა ზედაპირის ნორმალს.
მართლაც, განსახილველ შემთხვევაში \vec{F} აღნიშნავს რეაქციის ძალას და, ზე-
დაპირის სიგლუვის გამო, $F_s=0$. გარდა ამისა, რადგან $\vec{F}_b=0$, ამიტომ \vec{F} ძა-
ლას აქვს ძაფის მთავარი ნორმალის მიმართულება. მეორეს მხრივ, \vec{F} ძალას
აქვს ზედაპირის ნორმალის მიმართულება და ამით ნათქვამის სამართლიანობა
დამტკიცებულია.

ზედაპირზე აღებულ წირს, რომლის ყოველ წერტილზე მთავარი ნორმა-
ლი ემთხვევა ფართეულის ნორმალს, ეწოდება გეოდეზიური წირი. ვარია-
ციათა აღრიცხვაში მტკიცდება, რომ ზედაპირის ორ წერტილს შორის (ზე-
დაპირზევე დარჩენით) უმოკლეს გზას წარმოადგენს გეოდეზიური წირი. მაშა-
სადამე, ზედაპირის ორ წერტილს შორის დაჭიმული ძაფი გვაძლევს უმოკლეს
მანძილს ამ წერტილებს შორის.

§ 14. მატემატიკური მნიშვნელობის წონასწორობა. ჯაბაფიჩი

ვთქვათ ახლა, დაფზე მოქმედებენ მხოლოდ სიმძიმის ძალები და ძაფი.
წონასწორობაშია. ვინაიდან ძაფის სხვადასხვა წერტილზე მოქმედი სიმძიმის-
ძალები შეიძლება განვიხილოთ როგორც პარალელური ძალები, ამიტომ, წინა-

პარაგრაფში აღნიშნულის ძალით, წონასწორობის მდგომარეობაში დაფი მო-
თავსებული იქნება ვერტიკალურ სიბრტყეში. მივიღოთ ეს სიბრტყე xOy სიბ-
რტყედ, ამასთან y ღერძი ავიღოთ ვერტიკალზე და მოვგვზოთ ის სიმძიმის
ძალის მიმართულების საწინააღმდეგოდ. დაფის Δs ელემენტზე მოქმედი გარე
ძალა იქნება $\vec{F}\Delta s$, სადაც \vec{F} წარმოადგენს სიგრძის ერთეულზე ათვლილ სიმ-
ძიმის ძალას. ვიგულისხმობთ, რომ დაფი ერთგვაროვანია, ე. ი. $\vec{F} = \text{const}$. ცხა-
დია, გვექნება $\vec{F} = (0, -\gamma)$, სადაც γ გარკვეული დადებითი მუდმივია.

ლია, გვექნება $\vec{F} = (0, -\gamma)$, სადაც γ გარკვეული დადებითი მუდმივია.

(13,7) სისტემა ჩვენი შემთხვევისათვის მოგვცემს

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -\gamma.$$

(14,1)

$T \frac{dx}{ds} = C_0$, სადაც C_0 მუდმივია. თუ ამ (14,2)-ში, მივიღებთ

$$\frac{dx}{ds} = \frac{C_0}{T}.$$

(14,2)

(14,1)

ბილდს

ტოლობიდან

განესაზღვრ

ანული

ტოლ

ამიტომ (14,5) ტოლობის ძალით გვექნება

$$-y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{-\frac{x}{a}}. \quad (14,6)$$

(14,5) და (14,6) ტოლობებიდან

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad (14,7)$$

საიდანაც ინტეგრებით ვღებულობთ

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + C_1,$$

ამასთან C_1 ნებისმიერი მუდმივია. თუ კოორდინატთა სისტემის სათავე ისეა აღებული, რომ, როცა $x=0$, გვექნება $y=a$ (ნახ. 91), მაშინ (14,7) ტოლობიდან მივიღებთ $C_1=0$ და საბოლოოდ ვღებულობთ

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \quad (14,8)$$

ეს უკანასკნელი ჯაქეწირის განტოლებაა. ამრიგად, თუ სიმძიმის ძალების მოქმედებით ერთგვაროვანი დაფი წონასწორობაშია, მაშინ მას ჯაქეწირის ფორმა ექნება.

ვიპოვოთ ახლა დაკიმულობის ძალა. ზემოთ ჩვენ გვქონდა, რომ $T \frac{dx}{ds} = C_0$.

საიდანაც

$$T = C_0 \frac{ds}{dx} = C_0 \sqrt{1+y'^2}.$$

ვინაიდან $C_0 = a\gamma$, ამიტომ

$$T = a\gamma \sqrt{1+y'^2}. \quad (14,9)$$

(14,5) ტოლობიდან $\sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x}{a}} - y'$. თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში y' -ის ნაცვლად შევიტანთ მის მნიშვნელობას (14,7)-დან, მივიღებთ

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (14,9) ტოლობა მოგვცემს.

$$T = \gamma \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \gamma y.$$

ბ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

სიმძიმის სხვაობა. ინერციის სხვაობა.

§ 15. პარალელურ ძალთა სისტემის ცენტრი. სიმძიმის ცენტრი. ინერციის ცენტრი

ვთქვათ, მოცემულია პარალელურ ძალთა სისტემა: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, რომლის წაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან. ასეთ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, არსებობს ტოლქმედი. პარალელურ ძალთა სისტემის

ცენტრი ეწოდება მოცემული ძალების შესაბამ პარალელურ ვექტორთა ცენტრს (II თავი § 9).

განვიხილოთ \vec{F}^0 ერთეული ვექტორი, რომელიც მოცემული ძალების პარალელურია და აღენიშნოთ \vec{F}_i ძალების ($i=1, 2, \dots, n$) ალგებრული მნიშვნელობა \vec{F}^0 ვექტორის მიმართულებაზე F_i -თი. ცხადია, გვექნება (იხ. II თავის (9,1) ფორმულა):

$$\vec{F}_i = F_i \vec{F}^0.$$

ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატა სისტემა სათავით რაიმე O წერტილში და აღენიშნოთ ძალთა ცენტრის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ -თი, ხოლო \vec{F}_i ძალების მოდების წერტილების რადიუს-ვექტორები იმავე O წერტილის მიმართ $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ -თი. II თავის (9.5) ფორმულის ძალით, მოცემულ ძალთა სისტემის ცენტრის რადიუს-ვექტორის გამოსათვლელად გვექნება

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (15,1)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (15,2)$$

განვიხილოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემა: M_1, M_2, \dots, M_n ; რომელზედაც მოქმედებენ სიმძიმის ძალები. ვიგულისხმობთ, რომ წერტილებს შორის მანძილები დედამიწის რადიუსთან შედარებით მცირეა. M_i მატერიალურ წერტილზე მოქმედი სიმძიმის ძალა იყოს \vec{P}_i , ხოლო ამ წერტილის მასა m_i (იხ. § 3). საკმარისად დიდი სიზუსტით \vec{P}_i ($i=1, 2, \dots, n$) ძალები პარალელურ ძალთა სისტემას შეადგენს. ამ პარალელურ ძალთა სისტემის ცენტრს ეწოდება მოცემულ მატერიალურ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრი. ამრიგად, (15,1) ფორმულის ძალით, მატერიალურ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის რადიუს-ვექტორი გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad (15,3)$$

სადაც \vec{r}_i აღნიშნავს M_i წერტილის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ, P_i კი— M_i ნაწილაკზე მოქმედი სიმძიმის ძალის სიდიდეს (ე. ი. აღებული მატე-

რიალური ნაწილაკის წონას). ვინაიდან $P_i = m_i g$, სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, ამიტომ (15,3) ფორმულა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (15,4)$$

პარალელურ ძალთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნები:

1. თუ მატერიალურ წერტილთა სისტემა მოთავსებულია რაიმე წრფეზე (ან სიბრტყეზე), მაშინ სიმძიმის ცენტრიც მოთავსებულია ამ წრფეზე (ან სიბრტყეზე).

2. თუ მატერიალურ წერტილთა სისტემა მოთავსებულია რაიმე შეკრული ამოზნექილი ფართეულის შიგნით, მაშინ სიმძიმის ცენტრიც მოთავსებულია ამ ფართეულის შიგნით.

3. ვთქვათ, მოცემული სისტემა დაყოფილია რამდენიმე ნაწილად და თითოეული ნაწილის სიმძიმის ცენტრზე მოდებულია ამ ნაწილის წონის გამომსახველი სიმძიმის ძალა. ასეთი გზით მიღებული სისტემის სიმძიმის ცენტრი იქნება თავიდან აღებულ მატერიალურ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრი.

4. როცა მატერიალურ წერტილთა სისტემა სიმეტრიულია რაიმე სიბრტყის (ან წრფის) მიმართ, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია ამავე სიბრტყეზე (ან წრფეზე). თუ სისტემა სიმეტრიულია რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ სიმძიმის ცენტრი ამ წერტილს ემთხვევა.

ვთქვათ ახლა, გვაქვს მატერიალურ წერტილთა უცვლადი სისტემა, რომელიც მყარ სხეულს შეადგენს. წარმოვიდგინოთ მყარი სხეული, როგორც ერთობლიობა საკმარისად მცირე განზომილების მატერიალური ნაწილაკებისა და დაეწეროთ ამ უკანასკნელისათვის სიმძიმის ცენტრის რადიუს-ვექტორის (15,4) გამოსახულება. გადავიდეთ შემდეგ ზღვარზე, როცა ყოველი ნაწილაკის განზომილებები მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \iiint_M \vec{r} dm = \frac{1}{M} \iiint_V \vec{r} \sigma dV, \quad (15,5)$$

სადაც M -ით აღნიშნულია მთელი სხეულის მასა, V -ით—მისი. მოცულობა, ხოლო $\sigma(x, y, z)$ აღნიშნავს სიმკვრივეს (x, y, z) წერტილში:

$$\sigma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

C წერტილს, რომლის რადიუს-ვექტორი განსაზღვრულია (15,5) ფორმულით, ანუ, რაც იგივეა, ფორმულებით

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{M} \iiint_V x \sigma(x, y, z) dV, \\
 y_c &= \frac{1}{M} \iiint_V y \sigma(x, y, z) dV, \\
 z_c &= \frac{1}{M} \iiint_V z \sigma(x, y, z) dV,
 \end{aligned}
 \tag{15,6}$$

ეწოდება აღებული მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი.

თუ მყარი სხეული წარმოადგენს მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობას, რომელიც რაიმე S ფართეულის გასწვრივ უწყვეტად არის განლაგებული, მაშინ (15,5) ფორმულის ნაცვლად გვექნება

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \iint_S \vec{r} \sigma(x, y, z) dS, \tag{15,7}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{M} \iint_S x \sigma(x, y, z) dS, \\
 y_c &= \frac{1}{M} \iint_S y \sigma(x, y, z) dS, \\
 z_c &= \frac{1}{M} \iint_S z \sigma(x, y, z) dS.
 \end{aligned}
 \tag{15,8}$$

თუ მატერიალურ წერტილთა სისტემა განლაგებულია უწყვეტად რაიმე l წირის გასწვრივ, მაშინ გვექნება

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_l \vec{r} \sigma(x, y, z) dl, \tag{15,9}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$x_c = \frac{1}{M} \int_l x \sigma(x, y, z) dl, \quad y_c = \frac{1}{M} \int_l y \sigma(x, y, z) dl, \quad z_c = \frac{1}{M} \int_l z \sigma(x, y, z) dl. \tag{15,10}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ სხეული ერთგვაროვანია, ე. ი. $\sigma = \text{const}$, მაშინ (15,5) ფორმულა მოგვცემს

$$\vec{r}_c = \frac{\sigma}{M} \iiint_V \vec{r} dx dy dz,$$

მაგრამ, ვინაიდან $M = \sigma V$, უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{r} dx dy dz. \tag{15,11}$$

განსახილველ შემთხვევაში, (15,7) და (15,9) ფორმულები მოგვცემს

$$\vec{r}_c = \frac{1}{S} \iint_S \vec{r} ds, \tag{15,12}$$

$$\vec{r}_e = \frac{1}{l} \int_l \vec{r} dl. \quad (15.13)$$

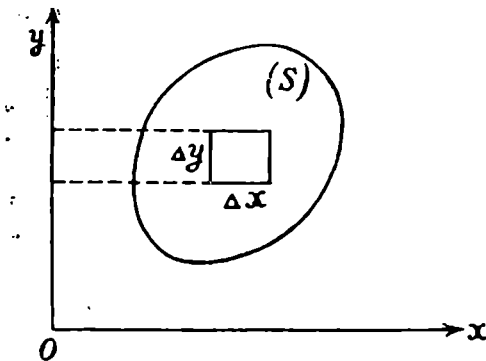
თუ მოვიგონებთ, რომ პარალელურ ძალთა ცენტრი ის წერტილია, რომლის მდებარეობა არ შეიცვლება, როცა ძალებს ვაბრუნებთ მათი მოდების წერტილების ირგვლივ ნებისმიერი კუთხით, ცხადი გახდება, რომ სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა სხეულის ზიმათ არ შეიცვლება, თუ სხეულს ნებისმიერად გადავადგილებთ (გადავიტანთ და მოვაბრუნებთ).

(15.4) ტოლობის მარჯვენა მხარეს აზრი აქვს არა მხოლოდ ისეთ სისტემისათვის, რომელიც დედამიწის მიზიდულობის არეში იმყოფება, არამედ ნებისმიერი მატერიალური წერტილებისათვის: M_1, M_2, \dots, M_n , რომელთა მასებია¹ შესაბამად m_1, m_2, \dots, m_n . ამ შემთხვევაში C წერტილს, რომლის რადიუს-ვექტორი განსაზღვრულია (15.4) ტოლობით, ეწოდება ალბეულ მატერიალურ წერტილთა სისტემის ინერციის ცენტრი. ასევე განისაზღვრება მყარი სხეულის ინერციის ცენტრი.

§ 16. გულდინის დეზულეგები

დავამტკიცოთ ახლა გულდინის შემდეგი დებულებები:

დებულება 1. სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ბრტყელი (S) ფიგურის ბრუნვით ღერძის გარშემო, რომელიც ამ ფიგურის სიბრტყეშია მოთავსებული და მას არ კვეთს, უდრის (S) ფიგურის ფართობისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლს, რომლის რადიუსიც ტოლია ხსენებული ფიგურის სიმძიმის ცენტრიდან ბრუნვის ღერძამდე მანძილის.



ნახ. 92.

ალგინით დებულებაში მოხსენებული ფიგურის ფართობი S -ით, ხოლო მანძილი ამ ფიგურის სიმძიმის ცენტრიდან ბრუნვის ღერძამდე h -ით. უნდა დავამტკიცოთ, რომ ბრუნვითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V = 2\pi h \cdot S. \quad (16.1)$$

განსახილავი (S) ფიგურის სიბრტყეში ავიღოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა ისე, რომ Oy ღერძი ემთხვეოდეს ბრუნვის

ღერძს. განვიხილოთ (S) ფიგურის ფართობი ელემენტი (x, y) წერტილში, რომლის ფართობიც $\Delta S = \Delta x \Delta y$ (ნახ. 92).

ამ ფართობი ელემენტის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, როგორც პარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, იქნება

$$\Delta V = 2\pi x \Delta x \Delta y + \pi \Delta x^2 \Delta y.$$

¹ მასის ქვეშ ამ შემთხვევაში იგულისხმება ინერტული მასა, რომლის განსაზღვრა მოყვანილია § 3-ში.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ საძიებელი მოცულობა მიიღება, როგორც ზღვარი სხეულის ფართობი ელემენტის ბრუნვის შედეგად მიღებული მოცულობების ჯამისა, ადვილად მივიღებთ

$$V = 2\pi \iint_{(S)} x dx dy. \quad (16,2)$$

თუ ახლა (15,8) ტოლობების პირველ ფორმულას გამოვიყენებთ ერთგვაროვანი (S) ბრტყელი არისათვის, მივიღებთ

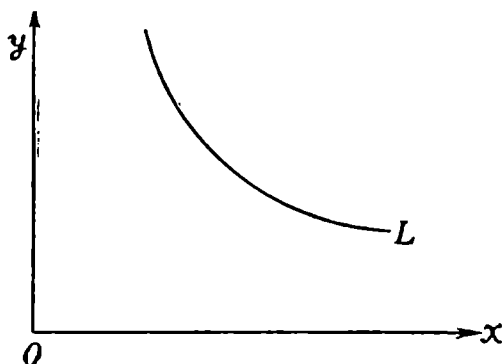
$$h = x_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dx dy,$$

საიდანაც

$$\iint_{(S)} x dx dy = h \cdot S.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევითავსებთ (16,2) ტოლობაში, მივიღებთ დასამტკიცებელ (16,1) ფორმულას.

დებულება 2. ბრუნვითი ფართეულის ფართობი, რომელიც მიიღება რაიმე ბრტყელი L წირის ბრუნვით ღერძის გარშემო, რომელიც ამ წირის სიბრტყეში მდებარეობს და მას არ კვეთს, უდრის წირის სიგრძისა და ისეთი წრეწირის სიგრძის ნამრავლს, რომლის რადიუსიც უდრის მანძილს ხსენებული წირის სიმძიმის ცენტრიდან ბრუნვის ღერძამდე (ნახ. 93).



ნახ. 93.

ამრიგად, დასამტკიცებელია ტოლობა

$$S = 2\pi h \cdot l, \quad (16,3)$$

სადაც h არის მანძილი L წირის სიმძიმის ცენტრიდან ბრუნვის ღერძამდე, l აღნიშნავს L წირის სიგრძეს, S საძიებელი ფართობია.

ავიღოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა L წირის სიბრტყეში ისე, რომ Oy ღერძი ემთხვეოდეს ბრუნვის ღერძს.

როგორც ანალიზის კურსიდან ცნობილია

$$S = 2\pi \int_L x dl. \quad (16,4)$$

თუ (15,10)-ის პირველ ფორმულას ერთგვაროვანი L წირისათვის გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$h = x_c = \frac{1}{l} \int_L x dl,$$

$$\int_L x dl = h \cdot l.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (16,4) ტოლობაში, მივიღებთ (16,3) ტოლობას.

განვიხილოთ მაგალითები გულდინის დებულებების გამოყენებაზე.

1. ეთქვათ, წრე ბრუნავს ღერძის გარშემო, რომელიც წრის სიბრტყეში იმყოფება და მას არ კვეთს. ბრუნვის შედეგად მიიღება სხეული, რომელსაც წრიული რგოლი (ტორი) ეწოდება. გულდინის 1 დებულების გამოყენებით გამოვთვალოთ ხსენებული წრიული რგოლის მოცულობა V . ცხადია, გვექნება

$$V = 2 \pi h \cdot \pi r^2 = 2 \pi^2 r^2 h,$$

სადაც h არის მანძილი აღებული წრის ცენტრიდან ბრუნვის ღერძამდე, r — წრის რადიუსი.

2. განვიხილოთ სფერო როგორც ბრუნვითი სხეული, რომელიც მიღებულია ნახევარი წრის დიამეტრის გარშემო ბრუნვით და გამოვთვალოთ მანძილი ნახევარი წრის სიმძიმის ცენტრიდან დიამეტრამდე.

ვინაიდან სფეროს მოცულობა უდრის $\frac{4}{3} \pi r^3$, ამიტომ გულდინის 1 დებულება გვძლევს

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \pi^2 r^2 h,$$

სადაც h არის საძიებელი მანძილი, r — წრის რადიუსი. უკანასკნელ ტოლობიდან ვღებულობთ

$$h = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}.$$

ასევე მარტივად დამტკიცდება, რომ მანძილი ნახევარი წრეწირის სიმძიმის ცენტრიდან დიამეტრამდე იქნება $\frac{2}{\pi} r$.

ამოცანები

განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი ამოცანა სიმძიმის ცენტრების მოძებნაზე. ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ სხეული ერთგვაროვანია.

ხშირად, როცა სხეული სიმეტრიულია, სიმძიმის ცენტრი უშუალოდ მოიძებნება. მაგალითად, სფეროს სიმძიმის ცენტრი მის ცენტრს ემთხვევა, მართკუთხა ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი მისი დიაგონალების გადაკვეთაზე იმყოფება, წრფივი მონაკვეთის სიმძიმის ცენტრი მის შუაწერტილს ემთხვევა და ა. შ.

11. მოვძებნოთ ტეხილის სიმძიმის ცენტრი. ცხადია, ყოველი L_i გვერდის სიმძიმის ცენტრი მის M_i შუაწერტილშია მოთავსებული, ამიტომ, (15,3) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$\vec{r}_c = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i p_i, \quad (1)$$

სადაც p_i არის L_i გვერდის წონა, \vec{r}_i აღნიშნავს M_i წერტილის რადიუს-ვექტორს აღებული $Oxyz$ სისტემის O სათავეს მიმართ, r_c ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორია O წერტილის მიმართ, $p = \sum_{i=1}^n p_i$, n ტეხილის გვერდების რიცხვია.

ცხადია, გვექნება

$$p_i = l_i \cdot \sigma, \quad p = l \cdot \sigma, \quad (2)$$

სადაც l_i არის L_i გვერდის სიგრძე, σ —სიმკვრივე, l —ტეხილის პერიმეტრი.

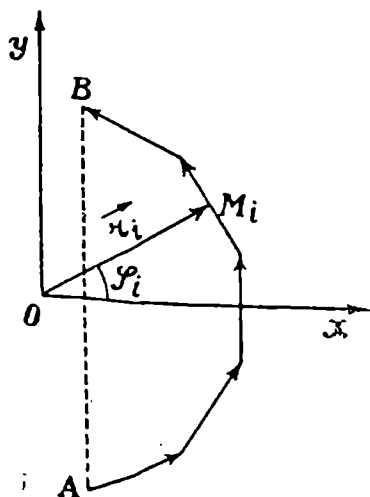
$$\left(l = \sum_{i=1}^n l_i \right).$$

მე-(2) ტოლობების ძალით, (1) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i l_i. \quad (3)$$

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა ტეხილი წესიერია და ტეხილის სიბრტყეზე ავიღოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა ისე, რომ მისი სათავე ტეხილში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს ემთხვეოდეს და Ox ღერძი ტეხილს კვეთდეს ორ ტოლ ნაწილად (ნახ. 94). სიმეტრიის გამო ცხადია, რომ სიმძიმის ცენტრი C მოთავსებული იქნება Ox ღერძზე. მე-(3) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$x_c = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n x_i l_i. \quad (4)$$



ნახ. 94.

ვინაიდან ტეხილი წესიერია, ამიტომ $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l^*$, სადაც l^* ტეხილის გვერდის სიგრძეს აღნიშნავს. ცხადია, აგრეთვე, რომ $x_i = r \cos \varphi_i$, სადაც r არის ტეხილის რადიუსი (ჩახაზული წრეწირის რადიუსი), ხოლო φ_i —კუთხე, რომელსაც $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ ვექტორი Ox ღერძთან შეადგენს. ამრიგად, გვაქვს

$$l_i x_i = r l^* \cos \varphi_i.$$

(5)

აღვილი მისახვედრია, რომ

$$l^* \cos \varphi_i = \text{გვერდი } \vec{l}_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

სადაც \vec{l}_i არის ტეხილის L_i გვერდზე დამთხვეული ვექტორი, რომელიც ისეა მოგებული, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. უკანასკნელი ტოლობის ძალით, მე-(5) გვაძლევს

$$l_i x_i = r \text{ გვერდი } \vec{l}_i.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ მე-(4) ტოლობაში, მივიღებთ

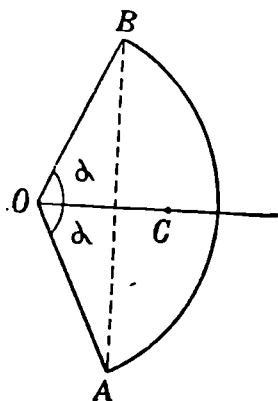
$$x_c = \frac{r}{l} \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cdot \vec{l}_i.$$

უკანასკნელი ტოლობა, საბოლოოდ, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$x_c = \frac{r \cdot AB}{l}, \quad (6)$$

სადაც AB აღნიშნავს ტეხილის ბოლო წერტილებს შორის მანძილს.

12. ვიპოვოთ წრეწირის რკალის სიმძიმის ცენტრი (ნახ. 95).



ნახ. 95.

ჩაეხაზოთ \widehat{AB} რკალში წესიერი ტეხილი, გამოვიყენოთ მისთვის მე-(6) ფორმულა და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა ტეხილის გვერდების რიცხვი უსასრულოდ იზრდება, მივიღებთ

$$x_c = \frac{r \cdot AB}{l}, \quad (7)$$

სადაც r წრეწირის რადიუსია, l არის \widehat{AB} რკალის სიგრძე, ხოლო AB აღნიშნავს რკალის ქორდის სიგრძეს.

ცხადია, რომ

$$\frac{1}{2} AB = r \sin \alpha, \quad l = r \cdot 2\alpha,$$

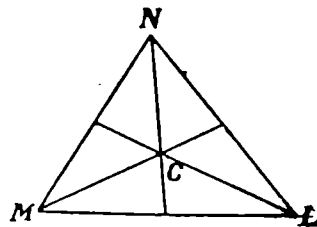
სადაც 2α აღნიშნავს AOB კუთხეს.

თუ ამ მნიშვნელობებს მე-(7) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$x_c = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (8)$$

13. ვიპოვოთ MLN სამკუთხედის (ფართობის) სიმძიმის ცენტრი (ნახ. 96).

დავანაწილოთ სამკუთხედი ML გვერდის პარალელური წრფეებით უსასრულოდ მცირე ზოლებად. ვინაიდან მონაკვეთის სიმძიმის ცენტრი იმყოფება მის შუაწერტილში, ამიტომ, როგორც აღვილი მისახვედრია, სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი ML გვერდის მედიანაზე იმყოფება. ასევე დავრწმუნდებით, რომ საძიებელი სიმძიმის ცენტრი MN და NL გვერდების მედიანებზეა მოთავსებული. ამრიგად, ნაჩვენებია, რომ სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი C მედიანების გადაკვეთაზე იმყოფება (ამით ნაჩვენებია აგრეთვე ელემენტარული გეომეტრიის დებულება, რომ სამკუთხედის მედიანები ერთ წერტილში იკვეთება). ელემენტარულ გეომეტრიაში ცნობილი დებულების ძალით, მანძილი C წერტილიდან მედიანის ფუძემდებ უღრის მედიანის მესამედს.

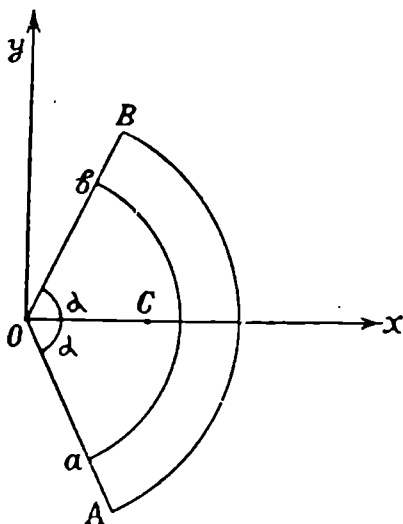


ნახ. 96.

14. ვიპოვოთ ახლა წრიული სექტორის სიმძიმის ცენტრი (ნახ. 97).

ავიღოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა ხსენებული სექტორის სიბრტყეში ისე, რომ მისი სათავე წრის ცენტრს ემთხვეოდეს და Ox ღერძი AB რკალს შუაზე ყოფდეს. $\angle AOB$ აღვნიშნოთ 2α -თი, წრის რადიუსი იყოს r . სიმეტრიის გამო, ცხადია, რომ სიმძიმის ცენტრი C მოთავსებულია Ox ღერძზე. ვიპოვოთ C წერტილის აბსცისა: $x_c = OC$. წრეწირის AB რკალში ჩავხაზოთ წესიერი ტეხილი და ამ ტეხილის წვეროები შევეერთოთ O წერტილს. როგორც ადვილი მოსახვედრია, ასეთი გზით მიღებული ყოველი სამკუთხედი შეიძლება შევცვალოთ მისი სიმძიმის ცენტრით, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ცენტრის წონა ხსენებული სამკუთხედის წონას უდრის. სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრის დაშორება O წერტილიდან უდრის $2/3$ h -ს, სადაც h სამკუთხედის სიმაღლეა. თუ ამის შემდეგ გადავალთ ზღვარზე, როცა ტეხილის გვერდების რიცხვი უსასრულოდ დიდდება, დავრწმუნდებით, რომ თავიდან აღებული OAB წრიული სექტორის სიმძიმის ცენტრი უდრის ისეთი წრეწირის ab რკალის სიმძიმის ცენტრს, რომლის რადიუსიც $2/3$ r -ის ტოლია¹. თუ ამის შემდეგ მე-(8) ფორმულას გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$x_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$



15. გამოვთვალოთ ახლა ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც შემოსაზღვრულია ცილინდრული ფართეულით და ორი პარალელური სიბრტყით. დავყოთ ცილინდრი ფუძეების პარალელურ უსასრულოდ მცირე სისქის შრეებად. ამ შრეების სიმძიმის ცენტრების გეომეტრიული ადგილი იქნება წრფის მონაკვეთი, რომელიც ფუძეების სიმძიმის ცენტრებს აერთებს. ამის შემდეგ ცხადია, რომ განსახილველი სხეულის სიმძიმის ცენტრი ხსენებულ მონაკვეთს შუაზე ყოფს.

ნახ. 97.

სავსებით ანალოგიურად გამოითვლება პრიზმის სიმძიმის ცენტრი.

16. ვიპოვოთ პირამიდის სიმძიმის ცენტრი. განვიხილოთ ჯერ სამკუთხა პირამიდა. დავყოთ პირამიდა ფუძის პარალელურ უსასრულოდ მცირე სისქის შრეებად. ცხადია, შრეების სიმძიმის ცენტრების გეომეტრიული ადგილი იქნება წრფის მონაკვეთი, რომელიც პირამიდის წვეროს მის მოპირდაპირე ფუძის სიმძიმის ცენტრთან აერთებს. ამრიგად, სამკუთხა პირამიდის სიმძიმის ცენტრი წარმოადგენს იმ წრფეების თანაკვეთას, რომელნიც წვეროებს მოპირდაპირე ფუძეთა სიმძიმის ცენტრებთან აერთებს (ეს წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება). ელემენტარულ გეომეტრიაში ცნობილი დებულების ძალით, სამკუთ-

¹ ცხადია, როცა ტეხილის გვერდების რიცხვი უსასრულოდ იზრდება, მაშინ $h \rightarrow r$.

ხა პირამიდის სიმძიმის ცენტრის დაშორება ფუძიდან ტოლი იქნება სიმაღლის ერთი მეოთხედის.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი პირამიდა. თუ ამ პირამიდას დავეყოფთ ფუძის პარალელურ უსასრულოდ მცირე სისქის შრეებად, დავრწმუნდებით, რომ სიმძიმის ცენტრი იმყოფება წრფის მონაკვეთზე, რომელიც პირამიდის წვეროს ფუძის სიმძიმის ცენტრთან აერთებს. დავყოთ ახლა პირამიდის ფუძე სამკუთხედებად და ამის მიხედვით—პირამიდა სამკუთხა პირამიდეებად. ყოველი სამკუთხა პირამიდის სიმძიმის ცენტრის დაშორება ფუძიდან იქნება სიმაღლის მეოთხედი და მაშასადამე, თავიდან აღებული პირამიდის სიმძიმის ცენტრის დაშორება ფუძიდან სიმაღლის მეოთხედის ტოლია.

ასეთივე შედეგს მივიღებთ კონუსისათვის, რადგან კონუსი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მასში ჩახაზული პირამიდის ზღვარი.

ნეკროლის დინამიკა

განმარტება 1

ნეკროლის მოძრაობის დინამიკური განმარტებები

§ 1. შესავალი

როგორც თავის დროზე აღვნიშნეთ (იხ. თავი IV, § 1), მატერიალური წერტილი, ანუ მატერიალური ნაწილაკი ეწოდება იმდენად მცირე განზომილების სხეულს, რომლის მოძრაობაც, საკმარისად დიდი სიზუსტით, განისაზღვრება მისი ერთი წერტილის მოძრაობით. ამრიგად, მატერიალური წერტილის ქვეშ პრაქტიკულად შეიძლება ვიგულისხმოთ გეომეტრიული წერტილი, რომელსაც გააჩნია გარკვეული მასა.

წერტილის დინამიკა შეისწავლის მატერიალური წერტილის მოძრაობას იმ მიზეზებთან (ძალებთან) დაკავშირებით, რომლებმაც გამოიწვიეს განსახილველი მოძრაობა.

წერტილის დინამიკა ეყრდნობა ნიუტონის მეორე კანონს (იხ. თავი IV, § 3):

მატერიალური წერტილის მასისა და აჩქარების ნამრავლი უდრის წერტილზე მოქმედ ძალას:

$$m \vec{w} = \vec{F}, \quad (1,1)$$

ამ ტოლობაში მასა განიხილება, როგორც პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს აჩქარებას და ძალას.

თუ (1,1) ტოლობას აჩქარებისა და ძალის საერთო მიმართულებებზე დავაგვიგმილებთ, მივიღებთ

$$mw = F. \quad (1,2)$$

(1,2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ აღებული მატერიალური წერტილისათვის ძალისა და აჩქარების სიდიდეთა შეფარდება მუდმივია: $\frac{F}{w} = m = \text{const.}$ ამ მუდმივ სიდიდეს, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც ძალაზე, არც მოძრაობის ხასიათზე, არამედ დამოკიდებულია მხოლოდ აღებულ მატერიალურ წერტილზე, ეწოდება ამ წერტილის ინერტული მასა (იხ. თავი IV, § 3).

ვთქვათ, მოცემულია ორი მატერიალური წერტილი, რომელთა მასებია m_1 და m_2 . (1,2) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$\begin{aligned} m_1 w_1 &= F_1, \\ m_2 w_2 &= F_2, \end{aligned} \quad (1,3)$$

სიდაც F_1 და F_2 განსახილველ მატერიალურ წერტილებზე მოქმედი ძალების სიდიდეებს აღნიშნავენ, ხოლო w_1 და w_2 — აჩქარებათა სიდიდეებს. თუ $m_1 = m_2$, მაშინ (1,3) ტოლობები მოგვცემს

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_1}{F_2}, \quad (1,4)$$

და, მაშასადამე, სხვადასხვა ძალები ერთი და იმავე მატერიალურ წერტილს ანიჭებენ ძალების პირდაპირ პროპორციულ აჩქარებებს.

ვთქვათ, (1,3) ტოლობებში $F_1 = F'_2$, მაშინ

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

და, მაშასადამე, ერთი და იგივე ძალა სხვადასხვა მასის მქონე წერტილებს ანიჭებს მასების უკუპროპორციულ აჩქარებებს.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ მატერიალურ წერტილზე ძალის მოქმედების ეფექტი დამოკიდებულია მასაზე.

(1,2) ტოლობიდან გვაქვს

$$w = \frac{F}{m}.$$

მაშასადამე, რამდენადაც უფრო დიდია მასა, მით უფრო ნაკლებია აჩქარება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, რაც მეტია მატერიალური ნაწილაკის მასა, მით მეტი უნარი შესწევს ნაწილაკს წინააღმდეგობა გაუწიოს მოძრაობის ცვლილებას, ე. ი. მით მეტია ინერცია.

თუ მატერიალური ნაწილაკის წონას (სიმძიმის ძალას) აღვნიშნავთ p -თი, სიმძიმის ძალის აჩქარებას g -თი, (1,2) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$m = \frac{p}{g}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ინერტული მასისა და წონადი მასის რიცხვითი მნიშვნელობანი ერთი და იგივეა.

ვინაიდან, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, რაც მეტია მატერიალური ნაწილაკის მასა, მით მეტი უნარი შესწევს ნაწილაკს წინააღმდეგობა გაუწიოს მოძრაობის ცვლილებას, ამიტომ, შეიძლება ითქვას, რომ მასა წარმოადგენს მატერიალური ნაწილაკის ინერციის ზომას.

(1,4) ტოლობა, რომელიც იძლევა საშუალებას ერთი და იმავე ნაწილაკზე მოქმედი ძალები შევადაროთ ერთმანეთს, შეიძლება საფუძვლად დაედოს ძალის გაზომვას.

შენიშვნა. გარკვეული პრინციპის საფუძველზე ჩვენ შემოვიტანეთ ძალის ცნება და (1,1) ტოლობის ძალით მასის ცნება მივიღეთ როგორც წარმოებული ცნება. შეიძლებოდა გავვეყენებინა პირიქით. ჯერ შემოგვეტანა მასის ცნება და შემდეგ ძალის ცნება მიგვეღო, როგორც წარმოებული ცნება.

დინამიკის სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნის დროს დაგვეტირდება ერთეულების აბსოლუტური და ტექნიკური სისტემა, რომელთა განსაზღვრაც მოყვა-

ნილია IV თავის მე-2 და მე-3 პარაგრაფებში. ამ პარაგრაფებში მოყვანილია ძალისა და მასის ერთეულები როგორც ერთ, ისე მეორე სისტემაში.

§ 2. მატერიალური წერტილის მოძრაობის დინამიკური განტოლებები

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა $Oxyz$ სისტემა და მატერიალური M წერტილი, რომლის მასაც იყოს m . M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ აღნიშნოთ \vec{r} -ით. (1,1) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (2.1)$$

სადაც \vec{F} არის M წერტილზე მოქმედი ძალა (ნახ. 98).

ყოველდღიური დაკვირვება და ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, რომ ძალა შეიძლება დამოკიდებული იყოს წერტილის მდებარეობაზე, მის სიჩქარეზე და დროზე. ამრიგად, ძალა შეიძლება დამოკიდებული იყოს \vec{r} -ზე, \vec{v} -ზე და t -ზე. ე. ი. x, y, z, x', y', z' და t სიდიდეებზე, ამასთან x', y', z' აღნიშნავენ x, y, z კოორდინატების დროით წარმოებულებს. ძალის არგუმენტებად კოორდინატების მეორე და უფრო მაღალი რიგის წარმოებულებს არ განიხილავენ.

სხეულის მდებარეობაზე დამოკიდებული ძალის მაგალითს წარმოადგენს ზამბარის დაჭიმულობის ძალა. ვთქვათ, ზამბარის ერთი ბოლო დამაგრებულია უძრავად, მის მეორე ბოლოზე კი მიმაგრებულია მატერიალური წერტილი, რომელიც Ox ღერძზე მოძრაობს. ცხადია, ზამბარის დაჭიმულობის ძალა იქნება მოძრავი წერტილის x კოორდინატის (მდებარეობის) ფუნქცია.

ვთქვათ, უძრავი M_1 მატერიალური წერტილი, რომლის მასა m_1 -ის ტოლია, იზიდავს ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონის ძალით M მატერიალურ წერტილს, რომლის მასა m -ის ტოლია. მიზიდულობის ძალა წერტილებს შორის r მანძილის ფუნქციას წარმოადგენს (იხ. I თავის (5,2) ფორმულა):

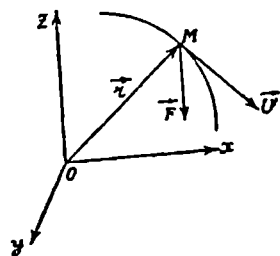
$$F = f \frac{m_1 m}{r^2}.$$

კულონის კანონის ძალით, ორი დამუხტული ნაწილაკის ელექტროსტატიკური ურთიერთქმედების ძალა იქნება

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

სადაც r ნაწილაკებს შორის მანძილია, e_1 და e_2 ნაწილაკების მუხტებს აღნიშნავენ.

სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალის მაგალითს წარმოადგენს ხახუნის ძალა. ასე მაგალითად, როცა მყარი სხეული მოძრაობის დროს ეიება მეორე მყარ სხეულს, მაშინ ხახუნის ძალა დამოკიდებული იქნება ერთი სხეულის სიჩქარეზე მეორის მიმართ.



ნახ. 98.

სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალის მაგალითს წარმოადგენს, აგრეთვე, გარემოს წინააღმდეგობის ძალა. ასე მაგალითად, რაც მეტია ატმოსფეროში მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარე, მით მეტი იქნება ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა.

თუ (2,1) ვექტორულ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x(t, x, y, z, x', y', z'), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y(t, x, y, z, x', y', z'), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z(t, x, y, z, x', y', z'), \end{aligned} \quad (2,2)$$

სადაც F_x, F_y, F_z წარმოადგენენ \vec{F} ძალის გეგმილებს Ox, Oy, Oz ღერძებზე.

(2,2) სისტემა წარმოადგენს მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ჩვენ შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ F_x, F_y, F_z ფუნქციები წარმოადგენენ თავიანთი არგუმენტების უწყვეტ ფუნქციებს და აკმაყოფილებენ ლიფშიცის პირობას x, y, z, x', y', z' სიდიდეების მიმართ (იმ არეში, სადაც წერტილის მოძრაობა განიხილება). როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, აღნიშნულ პირობებში (2,2) სისტემისათვის ადგილი აქვს ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემას. (2,2) სისტემის ზოგად ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (2,3)$$

სადაც C_1, C_2, \dots, C_6 ნებისმიერი მუდმივებია. ეს მუდმივები ცალსახად განისაზღვრებიან, თუ საწყის $t = t_0$ მომენტში ცნობილია წერტილის მდებარეობა და სიჩქარე:

$$\text{როცა } t = t_0, \text{ მაშინ } \begin{cases} x = x_0, & x' = x'_0, \\ y = y_0, & y' = y'_0, \\ z = z_0, & z' = z'_0, \end{cases}$$

სადაც $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ საწყის მდებარეობას განსაზღვრავს, ხოლო $\vec{v}_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$ — საწყის სიჩქარეს, მასთან საწყისი მდებარეობა და საწყისი სიჩქარე (ე. ი. x_0, y_0, z_0 და x'_0, y'_0, z'_0) ნებისმიერად არის მოცემული.

ამ საწყისი პირობების ძალით, (2,3) ფორმულები მოგვეცემს

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), & x'_0 &= x'(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y_0 &= y(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), & y'_0 &= y'(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z_0 &= z(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), & z'_0 &= z'(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (2,4)$$

როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, ამ განტოლებებიდან C_1, C_2, \dots, C_6 მუდმივები ცალსახად განისაზღვრება და მივიღებთ

$$C_k = f_k(t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0) \quad (k=1, 2, \dots, 6).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (2,3) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ (2,2) სისტემის ისეთ ამოხსნას, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

აღვნიშნოთ q_1, q_2, q_3 -ით M წერტილის ზოგადი მრუდწირული კოორდინატები (იხ. III თავის § 8). აჩქარების გეგმილები ზოგად მრუდწირულ ლერძებზე იყოს w_1, w_2, w_3 . III თავის (8,18) ფორმულის ძალით,

$$w_k = \frac{1}{m \sqrt{a_{kk}}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \quad (k=1, 2, 3), \quad (2,5)$$

სადაც

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} q'_i q'_j, \quad (2,6)$$

ამასთან

$$a_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_k}.$$

T ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია (2,6) ტოლობით, ეწოდება მატერიალური წერტილის ცოცხალი ძალა, ანუ კინეტიკური ენერგია. თუ (2,1) ტოლობას ზოგად მრუდწირულ ლერძებზე დავაგეგმილებთ და გავითვალისწინებთ (2,5) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1, 2, 3), \quad (2,7)$$

სადაც

$$Q_k = \sqrt{a_{kk}} F_k,$$

ამასთან F_k აღნიშნავს \overline{F} ძალის გეგმილს q_k ლერძზე. ცხადია, Q_k საზოგადოდ დამოკიდებულია $t, q_1, q_2, q_3, q'_1, q'_2, q'_3$ სიდიდეებზე.

III თავის (8,4) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\begin{aligned} F_k &= (\overline{F} \cdot \overline{e_k}) = F_x e_{kx} + F_y e_{ky} + F_z e_{kz} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_{kk}}} \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \end{aligned}$$

და მაშასადამე,

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}. \quad (2,7')$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, (2,7) წარმოადგენს q_1, q_2, q_3 სიდიდეების მიმართ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

შევნიშნოთ, რომ ხშირ შემთხვევაში განზოგადებული კოორდინატები შეიძლება ისე იყოს შერჩეული, რომ (2,7) სისტემის ინტეგრება უფრო მარტივად ხდებოდეს, ვიდრე (2,2) სისტემისა.

(2,7) განტოლებებს ეწოდება ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები. ცილინდრულ კოორდინატებში ეს განტოლებები, III თავის (8,24) ფორმულების ძალით, შემდეგ სახეს ღებულობენ:

$$m(r'' - r\varphi'^2) = F_r,$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \varphi') = F_\varphi, \quad (2,8)$$

$$m\dot{\varphi}'' = F_\varphi,$$

სადაც r, φ, z წარმოადგენენ M წერტილის ცილინდრულ კოორდინატებს F_r, F_φ, F_z არიან \vec{F} ძალის გეგმილები ცილინდრულ მრუდწირულ ღერძებზე,
 $r'' = \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}.$

III თავის (8,28) ფორმულების ძალით, სფერულ კოორდინატებში წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები შემდეგ სახეს ღებულობენ:

$$m[r'' - r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2)] = F_r,$$

$$m \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\vartheta}') - r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \right] = F_\vartheta, \quad (2,9)$$

$$\frac{m}{r \sin \vartheta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}') = F_\varphi,$$

სადაც r, ϑ, φ არიან M წერტილის სფერული კოორდინატები, $F_r, F_\vartheta, F_\varphi$ წარმოადგენენ \vec{F} ძალის გეგმილებს $(r), (\vartheta), (\varphi)$ სფერულ მრუდწირულ ღერძებზე (ხაზ. 31).

თუ (2,1) ტოლობას ბუნებრივ სამღერძზე, ე. ი. ტრაექტორიის მხებზე, მთავარ ნორმალზე და ბინორმალზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ (იხ. III თავის § 6)

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau,$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n, \quad (2,10)$$

$$0 = F_b,$$

სადაც F_τ, F_n, F_b წარმოადგენენ \vec{F} ძალის გეგმილებს მხებზე, მთავარ ნორმალზე და ბინორმალზე.

მოვიგონოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის პირველი ინტეგრალის განსაზღვრა.

(2,2) სისტემის პირველი ინტეგრალი ეწოდება t, x, y, z, x', y', z' სიდიდეებს შორის ისეთ დამოკიდებულებას, რომელიც იგივეურად მუდმივის ტოლი არ არის, მაგრამ გაუტოლდება მუდმივს, თუ ამ დამოკიდებულებაში x, y, z კოორდინატებისა და მათი წარმოებულების ნაცვლად შეტანილია (2,2) სისტემის რომელიმე ამოხსნა და მათი წარმოებულები. ამრიგად, t, x, y, z, x', y', z' სიდიდეებსა და C მუდმივს შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას

$$\Phi(t, x, y, z, x', y', z') = C, \quad (2,11)$$

რომელიც მართებულია (2,2) სისტემის ძალით, ეწოდება ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი.

ვთქვათ, ცნობილია (2,2) სისტემის (2,3) ზოგადი ინტეგრალი. (2,3) ტოლობების გაწარმოებით ვღებულობთ

$$x' = x'(t, C_1, C_2, \dots, C_6),$$

$$y' = y'(t, C_1, C_2, \dots, C_6),$$

$$z' = z'(t, C_1, C_2, \dots, C_6).$$

თუ (2,3) და უქანასკნელი ტოლობებიდან ამოვხსნით C_1, \dots, C_6 მუდმივებს, მივიღებთ 6 პირველ ინტეგრალს:

$$\phi_k(t, x, y, z, x', y', z') = C_k \quad (k=1, 2, \dots, 6).$$

პირიქით, თუ ცნობილია (2,2) სისტემის 6 პირველი ინტეგრალი, რომელნიც დამოუკიდებელნი არიან ერთმანეთისაგან, მაშინ ზოგადი ინტეგრალის დაწერა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ზემოთ ჩვენ მოვიყვანეთ პირველი ინტეგრალის განსაზღვრა (2,2) სისტემისათვის. ცხადია, ასევე განისაზღვრება პირველი ინტეგრალი, როცა წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოცემულია (2,7) სახით.

მატერიალური წერტილის მოძრაობის ზემოთ განხილული განტოლებები დაწერილია თავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის. თუ წერტილი არ არის თავისუფალი (ის ემორჩილება ბმას), მაშინ უშუალოდ მოქმედ ძალებს უნდა დაემატოს აგრეთვე რეაქციის ძალები (იხ. § 19).

მატერიალური წერტილის მოძრაობის ზემოდაწერილი დიფერენციალური განტოლებები იძლევიან საშუალებას განვიხილოთ ორი ამოცანა:

1) წერტილის მოცემული მოძრაობის მიხედვით ვიპოვოთ წერტილზე მოქმედი ძალა, რომელმაც ეს მოძრაობა გამოიწვია; 2) მოცემული ძალის მიხედვით ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის კანონი.

პირველი ამოცანა, რომელსაც დინამიკის პირდაპირ ამოცანას უწოდებენ, მარტივად იხსნება. მართლაც, თუ ცნობილია წერტილის მოძრაობის კანონი, ე. ი. წერტილის \vec{r} რადიუს-ვექტორი, როგორც დროის ფუნქცია, მაშინ, (2,1) ტოლობის ძალით, წერტილზე მოქმედი ძალის მოსაძებნად საკმარისია \vec{r} რადიუს-ვექტორის მეორე რიგის წარმოებულის მოძებნა.

მეორე ამოცანის ამოხსნა, რომელსაც დინამიკის შებრუნებულ ამოცანას უწოდებენ, მოითხოვს (2,2) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრებას. ამ სისტემის ინტეგრება F_x, F_y, F_z ფუნქციების ზოგადი მნიშვნელობისათვის მეტად ძნელია. ასეთ ზოგად შემთხვევაში, ამოხსნის კვადრატურებში წარმოდგენა, საზოგადოდ, შეუძლებელია. მაგრამ, ხშირად, მოცემული ძალის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის, ამ სისტემის ამოხსნა შეიძლება კვადრატურებში იყოს გამოსახული.

კეპლერის კანონებზე დაყრდნობით პლანეტის მამოძრავებელი ძალის მოძებნის ამოცანა, რომელსაც ჩვენ § 16-ში განვიხილავთ, წარმოადგენს დინამიკის პირველი ამოცანის მაგალითს, ხოლო § 17-ში განხილული ნიუტონის ამოცანა—მეორე ამოცანის მაგალითს.

შემდეგში, ჩვენ განვიხილავთ არსებითად მხოლოდ მეორე ამოცანას, ვინაიდან, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, პირველი ამოცანის ამოხსნა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

1. 980 კგ წონის სხეულზე მოქმედებს მუდმივი ძალა და ანიჭებს მას $w = 0,5 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}^2}$ აჩქარებას. ვიპოვოთ სხეულზე მოქმედი ძალა.

როგორც ვიცით (იხ. IV თავის § 3), ტექნიკურ სისტემაში ძალის ერთეულად მიღებულია კილოგრამი, სიგრძის ერთეულად—მეტრი, დროის ერთეულად კი—სეკუნდი. მასის ერთეული ამ სისტემაში მიიღება, როგორც წარმოებული ერთეული:

$$\text{მასის ერთეული} = \frac{\text{კგ} \cdot \text{სეკ}^2}{\text{მ}}.$$

$$\text{ამ სისტემაში 980 კგ წონის სხეულის მასა იქნება}^1 \quad m = \frac{980 \text{ კგ}}{9,8 \text{ მ/სეკ}^2}.$$

ვინაიდან $F = mw$, ამიტომ გვექნება

$$F = \frac{980 \text{ კგ}}{9,8 \text{ მ/სეკ}^2} \cdot 0,5 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}^2} = 50 \text{ კგ}.$$

აბსოლუტურ სისტემაში მასის ერთეულად მიღებულია გრამმასა, სიგრძის ერთეულად—სანტიმეტრი, დროის ერთეულად—სეკუნდი. ძალის ერთეული ამ სისტემაში მიიღება, როგორც წარმოებული ერთეული:

$$\text{ძალის ერთეული} = \frac{\text{გრამ მასა} \cdot \text{სმ}}{\text{სეკ}^2}.$$

ძალის ამ ერთეულს დინი ეწოდება.

ჩვენს შემთხვევაში, ცხადია, გვექნება

$$m = 980000 \text{ გრამმასას}, \quad w = 50 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}^2},$$

ამიტომ, ცხადია,

$$F = 98 \cdot 10^4 \cdot 50 \text{ დინს} = 490 \cdot 10^6 \text{ დინს}.$$

2. ვიპოვოთ ის მუდმივი ძალა, რომელიც 196 კგ წონის სხეულს 5 სეკუნდში მიაწევს $10 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}$ სიჩქარეს.

ცხადია, გვექნება

$$mw = F, \quad v = wt,$$

საიდანაც

$$F = \frac{mv}{t}.$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ მოცემულ მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$F = \frac{196}{9,8} \cdot \frac{10}{5} = 40,$$

$$F = 40 \text{ კგ}.$$

¹ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მიახლოებით სიმძიმის ძალის აჩქარება $g = 9,8 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}^2}$.

3. ავტომობილი, რომლის წონა უდრის 1 ტონას, მოძრაობს ამოზნექილ ხილზე $10 \frac{მ}{სეკ}$ სიჩქარით. სიმრუდის რადიუსი ხიდის შუა ადგილას უდრის 50 მეტრს. ვიპოვოთ ავტომობილის წნევის ძალა ხილზე. როცა ავტომობილი ხიდის შუა ადგილზე გაივლის.

ავტომობილის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{R},$$

სადაც \vec{P} ავტომობილის სიმძიმის ძალაა, \vec{R} —რეაქციის ძალა. თუ ამ ტოლობას ხიდის პროფილის შიგა მთავარ ნორმალზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{\rho} = P - N,$$

სადაც N არის ნორმალური რეაქციის ძალა (ე. ი. ხილზე ავტომობილის წნევის საძიებელი ძალა).

ცხადია, ჩვენს შემთხვევაში $m = \frac{1000}{9,8}$ (ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში), $P = 1000$ კგ, $\rho = 50$ მეტრს, $v = 10 \frac{მ}{სეკ}$. თუ ამ მნიშვნელობებს უკანასკნელ ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$N = 796 \text{ კგ.}$$

4. 6 კგ წონის ქვა მიმაგრებულია $r = 1$ მ სიგრძის ძაფზე და მოძრაობს ვერტიკალურ წრეწირზე ა კუთხური სიჩქარით. განვსაზღვროთ ა კუთხური სიჩქარის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ხდება ძაფის გაწყვეტა, თუ ცნობილია, რომ ძაფი წყდება მაშინ, როცა დაჭიმულობის ძალა გახდება 64,8 კგ.

ცხადია, ძაფი განიცდის მაქსიმალურ დაჭიმვას მაშინ, როცა მას აქვს სიმძიმის ძალის მიმართულება და ტვირთი იმყოფება ვერტიკალური დიამეტრის ქვედა ბოლო წერტილში¹. ძაფის დაჭიმულობა ტვირთის აღნიშნული მდებარეობისათვის იქნება

$$T = mr\omega^2 + G.$$

ამ ტოლობაში მოცემული მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ

$$64,8 = \frac{6}{9,8} \omega^2 + 6,$$

საიდანაც

$$\omega = 9,8 \frac{1}{სეკ}.$$

¹ ამ მდებარეობაში ძაფის დაჭიმულობის ძალა უდრის ცენტრიდანული ძალისა ($mr\omega^2$ ძალისა) და ტვირთის სიმძიმის ძალის ჯამს.

ნაჩილის ღინამიკის ძირითადი კანონები

§ 3. მოძრაობის რაოდენობის კანონი

ვთქვათ, მოცემულია მატერიალური წერტილი, რომლის მასა არის m . \vec{K} ვექტორს, რომელიც შემდეგი ტოლობით არის განსაზღვრული:

$$\vec{K} = m \vec{v}, \quad (3,1)$$

ეწოდება ალბულის წერტილის მოძრაობის რაოდენობა. ამრიგად, მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობა წარმოადგენს ამ წერტილის მასისა და სიჩქარის ნამრავს.

წერტილზე მოქმედი ძალისა და დროის დიფერენციალის ნამრავს ($\vec{F}dt$ -ს) ეწოდება ძალის ელემენტარული იმპულსი. განვიხილოთ დროის სასრული (t_0, t) შუალედი. ინტეგრალს

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt, \quad (3,2)$$

ეწოდება ძალის იმპულსი (t_0, t) შუალედში.

განვიდან ვგულისხმობთ, რომ ალბულის წერტილის მასა არ იცვლება მოძრაობის დროს, ამიტომ მატერიალური წერტილის მოძრაობის (2,1) განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt. \quad (3,3)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვარწმუნებს შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის დიფერენციალი ამ წერტილზე მოქმედი ძალის ელემენტარული იმპულსის ტოლია.

ეს დებულება მოძრაობის რაოდენობის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი.

თუ $t=t_0$ მომენტში სიჩქარის მნიშვნელობას \vec{v}_0 -ით აღვნიშნავთ, (3,3) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt, \quad (3,4)$$

და, მაშასადამე, მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის სასრულ (t_0, t) შუალედში უდრის ძალის იმპულსის ამავე დროის შუალედში.

ამრიგად, (3,4) ტოლობა გვაძლევს მოძრაობის რაოდენობის კანონს სასრული დროის შუალედისათვის.

(3,4) ტოლობიდან ცხადია, რომ თუ (t_0, t) შუალედი უსასრულოდ მცირეა და ძალის სიდიდე სასრულია, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება იქნება უსასრულოდ მცირე. მაგრამ არის ისეთი მოვლენები, რომლისთვისაც მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის უსასრულოდ მცირე შუალედში

სასრული სიდიდეა. ასეთ მოვლენებს, რომელთაც დაჯახების მოვლენები (დარტყმის მოვლენები) ეწოდება, ჩვენ დაწვრილებით შემდეგ შევისწავლით. ახლა შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ დაჯახების შემთხვევაში ძალა არის უსასრულოდ დიდი $\frac{1}{t-t_0}$ -ის რიგის. მართლაც, საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით, (3,4) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = (t-t_0)\vec{F}^*, \quad (3,5)$$

სადაც \vec{F}^* -ით აღნიშნულია \vec{F} ძალის მნიშვნელობა (t_0, t) შუალედის გარკვეული წარტილისათვის. (3,5) ფორმულის ძალით, ნათქვამის სამართლიანობა ცხადია.

(3,1) აღნიშვნის ძალით, (3,3) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}. \quad (3,6)$$

თუ \vec{K} ვექტორს მოვდებთ რომელიმე ფიქსირებულ წერტილზე, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა გვარწმუნებს, რომ \vec{K} ვექტორის ბოლო წერტილის სიჩქარე \vec{F} ძალის ტოლია.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $\vec{F}=0$, მოძრაობის რაოდენობის კანონი გვაძლევს წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შემდეგ სამ პირველ ინტეგრალს:

$$x' = C_1, \quad y' = C_2, \quad z' = C_3. \quad (3,7)$$

თუ \vec{F} ძალის ერთი რომელიმე კოორდინატია მხოლოდ ნულის ტოლი, მაშინ მივიღებთ ერთ პირველ ინტეგრალს, ასე მაგალითად, თუ $F_x=0$, მაშინ

$$x' = C_1.$$

თუ ძალის ორი კოორდინატი F_x და F_y ნულის ტოლია, მაშინ გვექნება ორი პირველი ინტეგრალი: $x' = C_1, \quad y' = C_2$.

§ 4. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი

განვიხილოთ მატერიალური M წერტილის მოძრაობის განტოლება

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

სადაც \vec{r} არის M წერტილის რადიუს-ვექტორი $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის სათავეს მიმართ, და გადავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (4,1)$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან ვექტორულად \vec{r} -ზე, მივიღებთ

$$\left[\vec{r} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (4,2)$$

ვინაიდან

$$\left[\vec{r} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] - \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot m \vec{v} \right]$$

და ამასთან $\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot m \vec{v} \right] = m [\vec{v} \cdot \vec{v}] = 0$, ამიტომ (4,2) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (4,3)$$

ვინაიდან $[\vec{r} \cdot m \vec{v}]$ წარმოადგენს მოძრაობის რაოდენობის მომენტს O წერტილის მიმართ, ხოლო $[\vec{r} \cdot \vec{F}]$ — ძალის მომენტს იმავე O წერტილის მიმართ (ნახ. 98), ამიტომ (4,3) ტოლობა გვარწმუნებს შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 1. რაიმე წერტილის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებული დროით უდრის მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალის მომენტს ამავე წერტილის მიმართ.

ეს დებულება მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი.

თუ (4,3) ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} (yz' - zy') &= yF_z - zF_y = \text{მომ}_{Ox} \vec{F}, \\ m \frac{d}{dt} (zx' - xz') &= zF_x - xF_z = \text{მომ}_{Oy} \vec{F}, \\ m \frac{d}{dt} (xy' - yx') &= xF_y - yF_x = \text{მომ}_{Oz} \vec{F}. \end{aligned} \quad (4,4)$$

თუ ძალის მომენტი რომელიმე ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, მაშინ მივიღებთ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა (2,2) სისტემის ერთ პირველ ინტეგრალს. მართლაც, ვთქვათ \vec{F} ძალის მომენტი Ox ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, მაშინ (4,4) სისტემის პირველი ტოლობა მოგვცემს

$$yz' - zy' = C_4,$$

სადაც C_4 მუდმივია და ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია. თუ ძალის მომენტი Ox და Oy ღერძების მიმართ ნულია, მაშინ მივიღებთ შემდეგ ორ პირველ ინტეგრალს:

$$\begin{aligned} yz' - zy' &= C_4, \\ zx' - xz' &= C_5. \end{aligned}$$

ვთქვათ, ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ ნულია:

$$[\vec{r} \cdot \vec{F}] = 0, \quad (4,5)$$

მაშინ (4,4) სისტემა მოგვცემს წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შემდეგ პირველ ინტეგრალებს:

$$yz' - zy' = C_4,$$

$$zx' - xz' = C_5, \quad (4,6)$$

$$xy' - yx' = C_6.$$

ვინაიდან (4,5) პირობა წარმოადგენს \vec{r} და \vec{F} ვექტორების პარალელურობის აუცილებელ და საკმარის პირობას, ხოლო r და F ვექტორებს საერთო M წერტილი აქვთ, ამიტომ, ცხადია, (4,5) პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ \vec{F} ძალის ფუძე გადიოდეს ყოველთვის O წერტილში. ძალას, რომლის ფუძე ყოველთვის გადის ერთ და იმავე წერტილში ეწოდება ცენტრალური ძალა.

ამრიგად, თუ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალა ცენტრალურია, მაშინ გვაქვს (4,6) პირველი ინტეგრალები.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ ცენტრალური ძალის გავლენით მატერიალური წერტილი ბრტყელ მოძრაობას ასრულებს, ე. ი. ბრტყელ წირს შემოწერს.

მართლაც, როცა წერტილზე მოქმედი ძალა ცენტრალურია, მაშინ გვაქვს (4,6) პირველი ინტეგრალები. თუ (4,6) სისტემის პირველ ტოლობას x -ზე, მეორეს y -ზე და მესამეს z -ზე გავაზრავლებთ და შევკრებთ, მივიღებთ

$$C_4x + C_5y + C_6z = 0. \quad (4,7)$$

ეს უკანასკნელი კოორდინატთა სისტემის სათავეში გამავალი სიბრტყის განტოლებას წარმოადგენს და ნათქვამის სამაჩაღლიანობა დამტკიცებულია.

თუ ძალა ცენტრალურია, ე. ი. იდგალი აქვს (4,5) ტოლობას, მაშინ, (4,3) ტოლობის ძალით,

$$[\vec{r} \cdot \vec{v}] = \text{const}, \quad (4,8)$$

და, მაშასადამე, სიჩქარის მომენტი O წერტილის მიმართ მუდმივია.

ეთქვათ, პირიქით, სიჩქარის მომენტი O წერტილის მიმართ მუდმივია, ე. ი. ადგილი აქვს (4,8) ტოლობას; ვაჩვენოთ, რომ წერტილზე მოქმედი ძალა იქნება ცენტრალური. მართლაც, (4,8) ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ

$$[\vec{r} \cdot \vec{w}] = 0,$$

ანუ, m -ზე გამრავლებით

$$[\vec{r} \cdot m\vec{w}] = 0.$$

მაგრამ, ვინაიდან $m\vec{w} = \vec{F}$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$[\vec{r} \cdot \vec{F}] = 0,$$

და, მაშასადამე, ძალა ცენტრალურია.

ეთქვათ, ძალა ცენტრალურია; აღვნიშნოთ M წერტილის რადიუს-ვექტორის მიერ დროის $(0, t)$ შუალედში შემოწერილი ფართობი σ -თი.

ვინაიდან სიჩქარის მომენტის სიდიდე გაირკვებული ფართობული სიჩქარის ტოლია (იხ. III თავის § 9), ამიტომ, (4,8) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$2 \frac{d\sigma}{dt} = |[\vec{r} \cdot \vec{v}]| = C, \quad (4,9)$$

სადაც C მუდმივია. უკანასკნელი ტოლობიდან

$$\sigma = \frac{C}{2}t + C_0,$$

სადაც C_0 ნებისმიერი მუდმივია. ვინაიდან $t=0$ მომენტში $\sigma=0$, ამიტომ $C_0=0$ და უკანასკნელი ტოლობა გადაღვეს

$$\sigma = \frac{C}{2}t. \quad (4,10)$$

ამრიგად, ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 2. თუ მატერიალური წერტილი მოძრაობს ცენტრალური ძალის გავლენით, მაშინ წერტილის ტრაექტორია არის ბრტყელი წირი და ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი დროის პროპორციულია.

ეს დებულება ფართობთა კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი. (4,10) ტოლობაში შემავალ C მუდმივს ეწოდება ფართობთა მუდმივი.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებას:

დებულება 3. თუ მატერიალური წერტილი ბრტყელ მოძრაობას ასრულებს, ისე რომ წერტილის რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი დროის პროპორციულია, მაშინ წერტილზე მოქმედი ძალა ცენტრალურია.

მართლაც, ვინაიდან რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი დროის პროპორციულია, ამიტომ

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$$

მაგრამ, ვინაიდან გაორკეცებული ფართობული სიჩქარე ტოლია სიჩქარის მომენტის სიდიდის, ამიტომ

$$|[\vec{r}, \vec{v}]| = 2 \frac{d\sigma}{dt} = \text{const.} \quad (4,11)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ, პირობის ძალით, წერტილის ტრაექტორია ბრტყელი წირია, რომელიც, ცხადია, \vec{r} და \vec{v} ზე გამავალ სიბრტყეშია მოთავსებული, (4,11) ტოლობიდან ადვილად დავასკვნით, რომ

$$[\vec{r}, \vec{v}] = \overline{\text{const.}}$$

მაგრამ, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, როცა სიჩქარის მომენტი O წერტილის მიმართ მუდმივია, მაშინ ძალა ცენტრალურია და ამით დებულება დამტკიცებულია.

როგორც ვნახეთ, გარკვეულ კერძო შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს (3,7) და (4,6) პირველი ინტეგრალები. ეს პირველი ინტეგრალები არ არიან დამოუკიდებელნი. მართლაც, (3,7) და (4,6) ტოლობები ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\vec{v} = \vec{C}',$$

$$[\vec{r}, \vec{v}] = \vec{C}'',$$

სადაც $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$, $\vec{C}' = (C_4, C_5, C_6)$. ცხადია, $(\vec{v} \cdot [\vec{r}, \vec{v}]) = 0$ და, მაშასადამე, გვექნება

$x'(y\dot{x}' - \dot{y}x') + y'(zx' - \dot{z}x') + z'(xy' - yx') = C_1C_4 + C_2C_5 + C_3C_6 = 0$.
ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

§ 5. ელემენტარული მუშაობა

ეთქვას, მატერიალურმა წერტილმა \vec{r} ძალის მოქმედებით მიიღო $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ ელემენტარული გადაადგილება. \vec{F} და $d\vec{r}$ ვექტორების სკალარულ ნამრავს, რომელსაც $d'A$ -თი აღვნიშნავთ:

$$d'A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}), \quad (5,1)$$

ეწოდება \vec{F} ძალის ელემენტარული მუშაობა $d\vec{r}$ გადაადგილებაზე. ვინაიდან $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, ამიტომ (5,1) ტოლობა მოგვცემს

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (5,2)$$

დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობას ეწოდება სიმძლავრე. თუ სიმძლავრეს E -თი აღვნიშნავთ, (5,2) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$E = \frac{d'A}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}. \quad (5,3)$$

აბსოლუტურ სისტემაში მუშაობის განზომილება ასეთია: $[A] = \text{დინი} \cdot \text{სმ} = \text{ერგი}^1$, ტექნიკურ სისტემაში კი $[A] = \text{კვ} \cdot \text{მ}$. ამიტომ, ცხადია, სიმძლავრის განზომილება აბსოლუტურ სისტემაში იქნება: $[E] = \frac{\text{ერგი}}{\text{სეკ}}$, ტექნიკურ სისტე-

მაში კი $[E] = \frac{\text{კვ} \cdot \text{მ}}{\text{სეკ}}$.

პრაქტიკაში სიმძლავრის ერთეულად ლეზულობენ უფრო დიდ ერთეულებს. აბსოლუტურ სისტემაში სიმძლავრის ერთეულად იღებენ $10^7 \frac{\text{ერგი}}{\text{სეკ}}$. ამ ერთეულს ვატი ეწოდება. ტექნიკურ სისტემაში სიმძლავრის ერთეულად ლეზულობენ $75 \frac{\text{კვ} \cdot \text{მ}}{\text{სეკ}}$, რომელსაც ცხენის ძალა ეწოდება. 1000 ვატს კილოვატი ეწოდება.

თუ მატერიალური წერტილის $d\vec{r}$ გადაადგილება შესრულებულია $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მოქმედებით, მაშინ ელემენტარული მუშაობა ასე გამოითვლება:

$$d'A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}) = (\vec{F} \cdot d\vec{r}),$$

¹ ერგი არის ის მუშაობა, რომელსაც ერთი დინი ძალა 1 სანტიმეტრ მანძილზე ასრულებს.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

ამრიგად, ელემენტარულ გადაადგილებაზე რამდენიმე ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა უდრის აღებული ძალების ნაქრები ძალის მიერ შესრულებულ მუშაობას ამავე გადაადგილებაზე.

ვთქვათ ახლა, $d\vec{r}$ ელემენტარული გადაადგილება დაშლილია რამდენიმე ელემენტარულ გადაადგილებათა ჯამად:

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^n d\vec{r}_i.$$

ცხადია, გვექნება

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \sum_{i=1}^n (\vec{F} \cdot d\vec{r}_i).$$

და, მაშასადამე, $d\vec{r}$ გადაადგილებაზე \vec{F} ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია ამავე ძალის მიერ შემადგენელ გადაადგილებებზე შესრულებულ მუშაობათა ჯამისა.

განვიხილოთ რაიმე გაწრფევადი AB წირი. ამ წირზე \vec{F} ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელსაც A -თი აღვნიშნავთ, შემდეგი წირითი ინტეგრალით გამოითვლება:

$$A = \int_{AB} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{AB} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (5,4)$$

§ 6. ცოცხალი ძალის კანონი

(4,1) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად $d\vec{r} = \vec{v} dt$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ

$$m(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (6,1)$$

ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობას

$$v^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

ამ ტოლობის გადიფერენციალება მოგვცემს

$$(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = v dv = d \frac{v^2}{2}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (6,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (6,2)$$

ვინაიდან $\frac{mv^2}{2}$ არის მატერიალური წერტილის ცოცხალი ძალა (კინეტიკური ენერგია), ამიტომ (6,2) ტოლობის ძალით, ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 1. მატერიალური წერტილის ცოცხალი ძალის დიფერენციალი ამ წერტილზე მოქმედი ძალის ელემენტარული მუშაობის ტოლია.

ეს დებულება ცოცხალი ძალის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი. ეს კანონი გარკვეულ კერძო შემთხვევაში მოგვეცემს ჰირველ ინტეგრალს.

ვთქვათ, \vec{F} ძალა მხოლოდ წერტილის კოორდინატების ფუნქციაა, ე. ი. $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

დებულება 2. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ $(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ სამწევრი იყოს რაიმე ფუნქციის სრული დიფერენციალი იმაში მდგომარეობს, რომ არსებობდეს ისეთი $U(x, y, z)$ ფუნქცია, რომლისათვისაც ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (6,3)$$

პირობის საკმარისობა ცხადია, ვინაიდან, თუ ადგილი აქვს (6,3) ტოლობებს, მაშინ

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU. \quad (6,4)$$

დავამტკიცოთ (6,3) პირობების აუცილებლობა. ამისათვის დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი $U(x, y, z)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც ადგილი აქვს (6,4) ტოლობას. ეს ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\left(F_x - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(F_y - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(F_z - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz = 0. \quad (6,5)$$

ვინაიდან dx, dy, dz სიდიდეები დამოუკიდებელნი არიან (წერტილი თავისუფალია), ამიტომ (6,5) ტოლობაში ამ სიდიდეების კოეფიციენტები ნულის ტოლი უნდა იყოს და, მაშასადამე, ადგილი ექნება (6,3) ტოლობებს.

ჩვენ ვიტყვი, რომ \vec{F} ძალა პოტენციალურია, თუ ის აკმაყოფილებს (6,3) პირობებს. ამ შემთხვევაში U ფუნქციას ეწოდება \vec{F} ძალის პოტენციალი, თვით \vec{F} ძალას $U(x, y, z)$ სკალარული ფუნქციის გრადიენტს უწოდებენ და სწერენ

$$\vec{F} = \text{grad } U. \quad (6,6)$$

ამრიგად, (6,6) ტოლობა წარმოადგენს (6,3) პირობების ვექტორულ ჩაწერას.

როცა \vec{F} ძალა პოტენციალურია, მაშინ (5,2) ტოლობა მოგვეცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = dU,$$

საიდანაც

$$\frac{mv^2}{2} = U + h. \quad (6,7)$$

ამასთან h ნებისმიერი მუდმივია.

ეს ტოლობა, რომელიც ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - U(x, y, z) = h,$$

იძლევა წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს. ამრიგად, თუ წერტილზე მოქმედი ძალა პოტენციალურია, მაშინ გვაქვს (6,7) პირველი ინტეგრალი, რომელსაც ცოცხალი ძალის ინტეგრალი ეწოდება.

V ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$V = -U, \quad (6,8)$$

ეწოდება წერტილის პოტენციალური ენერგია. ვინაიდან პოტენციალი U განსაზღვრულია ნებისმიერი მუდმივი შესაყრების სიზუსტით, ამიტომ პოტენციალური ენერგიაც განსაზღვრულია ნებისმიერი მუდმივი შესაყრების სიზუსტით.

(6,8) ტოლობის ძალით, (6,7) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{mv^2}{2} + V = h, \quad (6,9)$$

და, მაშასადამე, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდითაა. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამს ეწოდება წერტილის სრული მექანიკური ენერგია.

ამრიგად, როცა წერტილზე მოქმედი ძალა პოტენციალურია, მაშინ აღდილი აქვს ენერგიის შენახვის კანონი.

ძალას, რომლისათვისაც აღდილი აქვს ენერგიის შენახვის კანონი, ხშირად კონსერვატიულ ძალას უწოდებენ.

ვებოვით ის პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული ძალა, რომ ის იყოს პოტენციალური.

(6,9) ტოლობების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}. \quad (6,10)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ \vec{F} ვექტორის კომპონენტებს აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები, ე. ი. $U(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები, მაშინ ცხადია $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$ და

(6,10) ტოლობა მოგვცენს

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0. \quad (6,11)$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad (6,12)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$$

(6,11) და (6,12) პირობები, ცხადია, წარმოადგენენ აუცილებელ პირობებს იმისა, რომ \vec{F} ძალა იყოს პოტენციალური.

როგორც ანალიზის კურსიდან ცნობილია, ეს პირობები საკმარისიცაა იმისათვის, რომ $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ იყოს სრული დიფერენციალი (ე. ი., რომ \vec{F} ძალა იყოს პოტენციალური).

განვიხილოთ ვექტორ-ფუნქცია $\vec{\varphi}(x, y, z) = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ რომლის კომპონენტებსაც აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები x, y, z კოორდინატების მიხედვით $\vec{\varphi}$ ვექტორ-ფუნქციის როტორი ეწოდება ვექტორს. რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\varphi} &= \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, როგორც ყრველთვის, Ox, Oy, Oz ღერძების გვეზავენ. ვინაიდან (6,11) და (6,12) პირობები ასე შეიქმნა ჩვენთვის:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0, \quad (6,13)$$

ამიტომ გვაქვს: აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ \vec{F} ძალა იყოს პოტენციალური, მდგომარეობს იმაში, რომ ამ ძალის როტორი ტოლი იყოს ნულის.

§ 7. ძალთა ველი

გთქვამთ, გვაქვს სივრცის რაიმე არე, რომლის ყოველ წერტილზე მოქმედებს გარკვეული, ცალსახად განსაზღვრული ძალა, რომელიც წერტილის კოორდინატების უწყვეტ და უწყვეტად წარმოებად ვექტორ ფუნქციას წარმოადგენს. ასეთ არეს ძალთა ველი ეწოდება.

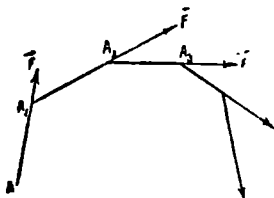
ძალთა ველს ერთგვაროვანი ეწოდება, თუ შესაბამის \vec{F} ძალა მუდმივია. თუ ძალა ცხადად არ არის დროზე დამოკიდებული, მაშინ ძალთა ველს სტაციონარული ეწოდება; თუ \vec{F} ძალა ცხადად არის დროზე დამოკიდებული, მაშინ—არასტაციონარული.

განვიხილოთ ძალთა ველში გარკვეული წირი, რომლის ყოველ წერტილზე მოქმედი ძალა წარმოადგენს ამ წირის მხებს. ასეთ წირს ძალთა წირი ეწოდება. ძალთა წირის ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილზე გავავლოთ მხები წრფე და განვიხილოთ ამ მხებზე $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ ელემენტარული გადაადგილება. ვინაიდან $d\vec{r}$ პარალელურია \vec{F} ძალის, ამიტომ გვექნება

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}. \quad (7,1)$$

(7,1) განტოლებები, ცხადია, ძალთა წირის დიფერენციალურ განტოლებებს წარმოადგენენ.

ავილოთ ძალთა ველში რაიმე A_0 წერტილი და ამ წერტილზე მოქმედი ძალის მიმართულებაზე ავილოთ საკმარისად მცირე სიგრძის A_0A_1 მონაკვეთი. A_1 წერტილზე მოქმედი ძალის მიმართულებაზე ავილოთ აგრეთვე საკმარისად მცირე სიგრძის A_1A_2 მონაკვეთი და ა. შ. ჩვენ მივიღებთ ტეხილ წირს, რომლის წვეროები ემთხვევა ამ წერტილებზე გამავალ ძალთა წირს. რაც უფრო ახლოსაა ერთმანეთთან ხსენებული წერტილები, მით უფრო უახლოვდება ტეხილი წირი A_0 წერტილზე გამავალ ძალთა წირს (ნახ. 99). ამრიგად, მოცემულ ძალთა ველში მოცემულ A_0 წერტილზე გამავალ ძალთა წირის აპროქსიმირება შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით ტეხილი წირით.



ნახ. 99.

ვთქვათ განსახილველი $\vec{F}(x, y, z)$ ძალა პოტენციალურია:

$$\vec{F} = \text{grad } U, \quad (7,2)$$

მაშინ ძალთა ველს პოტენციალური ძალთა ველი ეწოდება. ამ შემთხვევაში ძალთა წირის (7,1) განტოლებები ასე გადაიწერება:

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}. \quad (7,3)$$

ვინაიდან \vec{F} ძალის კომპონენტები წერტილის კოორდინატების უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ცალსახა ფუნქციებია, ამიტომ (7,2) ტოლობის ძალით, $U(x, y, z)$ ფუნქცია იქნება ცალსახა. უწყვეტი და მეორე რიგამდე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია ხსენებული კოორდინატების მიმართ.

განვიხილოთ ფართეული, რომლის განტოლებასაც შემდეგი სახე აქვს:

$$U(x, y, z) = C, \quad (7,4)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ამ ფართეულს დონე ფართეული, ანუ ეკვიპოტენციალური ფართეული ეწოდება. თუ C მუდმივს მიეცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ სხვადასხვა დონე ფართეულს. ვინაიდან $U(x, y, z)$ ცალსახა ფუნქციაა, ამიტომ ორ სხვადასხვა დონე ფართეულს არ შეიძლება საერთო წერტილები ჰქონდეს.

განვიხილოთ (7,4) დონე ფართეულის მხებ სიბრტყეზე $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ ელემენტარული გადაადგილება და განვიხილოთ სკალარული ნამრავლი:

$$(\text{grad } U \cdot d\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU. \quad (7,5)$$

ამ ტოლობაში $\text{grad } U$ და $d\vec{r}$ აღებულია დონე ფართეულის ერთი და იმავე წერტილისათვის.

ვინაიდან დონე ფართეულის გასწვრივ $U = \text{const}$, ამიტომ (7,5) ტოლობა მოგვცემს

$$(\text{grad } U \cdot d\vec{r}) = 0. \quad (7,6)$$

ამრიგად, $\text{grad } U(x, y, z)$ არის $M(x, y, z)$ წერტილზე გამავალი დონე ფართეულის მხებ სიბრტყეში მოთავსებული ყოველი $d\vec{r}$ ელემენტარული გადაადგი-

ლების მართობი და, მაშასადამე, ხსენებული დონე ფართეულის მართობი (ე. ი. ამ ფართეულის მხები სიბრტყის მართობი) $M(x, y, z)$ წერტილში.

განვიხილოთ პოტენციალურ ძალთა ველში რაიმე (l) წირი, რომლის რკალური აბსცისა იყოს s . ამ წირზე წერტილის მდებარეობა შეიძლება დავახასიათოთ s პარამეტრით და, მაშასადამე, ამ წირის მიმდინარე წერტილის კოორდინატები იქნება s რკალური აბსცისის ფუნქციები. (l) წირის მგეზავი აღვნიშნოთ \vec{l} -ით. ცხადია, გვექნება

$$\vec{l} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right), \quad (7,7)$$

ამიტომ

$$(\text{grad } U \cdot \vec{l}) = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial U}{\partial s}. \quad (7,8)$$

$\frac{\partial U}{\partial s}$ გამოსახულებას ეწოდება U ფუნქციის წარმოებული (l) წირის მხები სიბრტყის მართობი.

თუ \vec{l} -ის ნაცვლად ავიღებთ დონე ფართეულის \vec{n} ნორმალს, (7,8) ფორმულის ძალით, მივიღებთ

$$(\text{grad } U \cdot \vec{n}) = \text{გეგ } \vec{n} \cdot \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

მაგრამ, ვინაიდან $\text{grad } U$ დონე ფართეულის ნორმალის პარალელურია, ამიტომ

$$|(\text{grad } U \cdot \vec{n})| = \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| = |\text{grad } U|.$$

განვიხილოთ ახლა პოტენციალურ ძალთა ველში რაიმე ab წირი და გამოვთვალოთ \vec{F} ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ამ წირზე. თუ ამ მუშაობას A -თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$A = \int_{ab} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{ab} dU = U_b - U_a. \quad (7,9)$$

ვინაიდან

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}),$$

ამიტომ (7,9) ტოლობა მოგვეცემს

$$A = \int_{ab} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \frac{mv_b^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = U_b - U_a. \quad (7,10)$$

თუ ინტეგრალი აღებულია შეკრულ კონტურზე, ე. ი. $a=b$, მაშინ, ცხადია, $A=0$ და (7,10) ტოლობის ძალით, რა სიჩქარითაც მატერიალური წერტილი გამოვა შეკრული კონტურის a წერტილიდან, იმავე სიჩქარით დაბრუნდება უკან.

ამრიგად, როცა კონტური შეკრულია, ე. ი. როცა $a=b$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{mv_b^2}{2} - U_b = \frac{mv_a^2}{2} - U_a,$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\frac{mv_b^2}{2} + V_b = \frac{mv_a^2}{2} + V_a,$$

და, მაშასადამე, რა სრული მექანიკური ენერგიაც გააჩნია მატერიალურ წერტილს შეკრული კონტურის რომელიმე a წერტილზე, იმავე მექანიკური ენერგიით დაუბრუნდება ის a წერტილს შეკრული კონტურის ირგვლივ ერთხელ შემოვლის შემდეგ.

ამრიგად, პოტენციალურ ძალთა ველში შეუძლებელია პერპეტუუმ მოზილე.

§ 8. პოტენციალურ ძალთა ველის რამდენიმე მაგალითი

განვიხილოთ პოტენციალური ძალის რამდენიმე მაგალითი:

1°. ვთქვათ, მატერიალურ წერტილზე მოქმედ ძალას აქვს სახე:

$$\vec{F} = \vec{i} X(x) + \vec{j} Y(y) + \vec{k} Z(z),$$

სადაც X, Y, Z წარმოადგენენ ცალ-ცალკე x -ის, y -ის და z -ის ფუნქციებს. ასეთი ძალა პოტენციალურია, ვინაიდან

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = X(x) dx + Y(y) dy + Z(z) dz = dU,$$

სადაც U შემდეგი განუზღვრელი ინტეგრალია:

$$U = \int [X(x) dx + Y(y) dy + Z(z) dz] + C, \quad (8,1)$$

ამასთან C ნებისმიერი მუდმივია.

2°. განვიხილოთ ასლა ის შემთხვევა, როცა მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალები წარმოადგენენ რამდენიმე უძრავი მატერიალური ნაწილაკის მიზიდვის ან განზიდვის ძალებს.

ვთქვათ, მოცემულია უძრავი მატერიალური ნაწილაკები M_1, M_2, \dots, M_n , რომელთა მასებია m_1, m_2, \dots, m_n . აღვნიშნოთ \vec{r}_i -ით M_i ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი $Oxyz$ სისტემის სათავეს მიმართ. მოძრავი M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ იყოს \vec{r} (ნახ. 100).

ვთქვათ, M მატერიალურ წერტილზე მოქმედ ძალას, რომელიც გამოწვეულია M_i მატერიალური წერტილით, აქვს სახე

$$\vec{F}_i = F_i(\rho_i) \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\rho_i},$$

სადაც $\rho_i = |\vec{M} - \vec{M}_i|$, $F_i(\rho_i)$ წარმოადგენს \vec{F}_i ძალის ალგებრულ ნიშვნელობას $\vec{M} - \vec{M}_i$ ვექტორის მიმართულებაზე, ე. ი. $F_i > 0$, როცა \vec{F}_i ძალას $\vec{M} - \vec{M}_i$ ვექტორის გეზი აცეს, სოლო $F_i < 0$ წინააღმდეგ წემახევეში.

M მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალების ნაკრები ვექტორი იქნება

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i(\rho_i) \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\rho_i}.$$

ამიტომ $d\vec{r}$ ელემენტარულ გადაადგილებაზე \vec{F} ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, ცხადია, გამოითვლება ფორმულით

$$d'A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \sum_{i=1}^n F_i(\rho_i) \frac{((\vec{r}-\vec{r}_i) \cdot d\vec{r})}{\rho_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i(\rho_i) \frac{d(\vec{r}-\vec{r}_i)^2}{\rho_i} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i(\rho_i) \frac{d\rho_i^2}{\rho_i} = \sum_{i=1}^n F_i(\rho_i) d\rho_i,$$

და მაშასადამე,

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = dU,$$

სადაც

$$U = \sum_{i=1}^n \int F_i(\rho_i) d\rho_i + C, \quad (8,2)$$

ამასთან C ნებისმიერი მუდმივია (ინტეგრალი განუზღვრელია).

ვთქვათ, M_i ($i=1, 2, \dots, n$) წერტილები იზიდავენ M წერტილს ნიუტონის მიზიდულობის ძალით:

$$F_i = -\frac{k^2 m_i}{\rho_i^2} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8,3)$$

სადაც k^2 დადებითი კოეფიციენტი. (8,2) ფორმულის ძალით, ამ შემთხვევაში მივიღებთ

$$U = k^2 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i} + \text{const.} \quad (8,4)$$

ვთქვათ ახლა, M_i წერტილები იზიდავენ M წერტილს $\rho_i = |M, \vec{M}_i|$ მანძილის პროპორციული ძალით:

$$F_i = -k^2 m_i \rho_i,$$

სადაც k^2 პროპორციულობის კოეფიციენტი. (8,2) ფორმულის ძალით, ამ შემთხვევაში, მივიღებთ

$$U = -\frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 + \text{const.} \quad (8,5)$$

განმზიდი ძალების შემთხვევაში კი გვექნება

$$U = \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 + \text{const.} \quad (8,6)$$

3°. ვთქვათ, მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა. თუ Oz ღერძს ავიღებთ ვერტიკალზე და მოვგვზავთ ზემოთ, მაშინ სიმძიმის ძალისათვის გვექნება

$$\vec{F} = (0, 0, -mg),$$

ამიტომ

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -mgdz$$

და, მაშასადამე,

$$U = -mgz + \text{const.}$$

ცხადია, $U=C$ დონე ფართეულები ამ შემთხვევაში წარმოადგენენ Oxy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებს.

თუ მატერიალური წერტილი სიმაღლის ძალის გავლენით ვარდება უსაწყისო სიჩქარით h სიმაღლიდან, მაშინ (7,10) ფორმულის ძალით, დაცემის მომენტში სიჩქარისათვის გვექნება

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

საიდანაც ვღებულობთ გალილეის ცნობილ ფორმულას

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (8,7)$$

ამოცანები

5. მატერიალური წერტილი, რომლის მასა უდრის m -ს, მოძრაობას ელიფსზე შემდეგი კანონით

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t, \quad (1)$$

სადაც a , b და ω მუდმივებია. ვიპოვოთ წერტილზე მოქმედი ძალის იმპულსი ელიფსის გარშემო ერთხელ შემოვლის დროის განმავლობაში.

თუ საწყის მომენტად მივიღებთ $t=0$ მომენტს, მაშინ, ცხადია, ელიფსის გარშემო ერთხელ შემოვლას დასჭირდება დრო $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

ვინაიდან $F_x = mx''$, $F_y = my''$, ამიტომ (1) ტოლობის ძალით გვექნება

$$F_x = -ma\omega^2 \cos \omega t, \quad F_y = -m b \omega^2 \sin \omega t. \quad (2)$$

თუ ახლა \vec{F} ძალის იმპულსს $\left(0, \frac{2\pi}{\omega}\right)$ შუალედში აღვნიშნავთ \vec{J} -თი, მე-(2) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$J_x = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_x dx = 0, \quad J_y = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_y dy = 0.$$

6. ყუმბარა, რომლის წონა 7 კილოგრამია, გამოდის ქვემეხის ლულიდან $700 \frac{გ}{სეკ}$ სიჩქარით. ვიპოვოთ აფეთქების შედეგად წარმოშობილი გაზების წნევის ძალა, თუ ცნობილია, რომ ყუმბარა ლულაში მოძრაობდა 0,01 სეკუნდის განმავლობაში.

(3,4) ფორმულის გამოყენებით, აღვიღად მივიღებთ

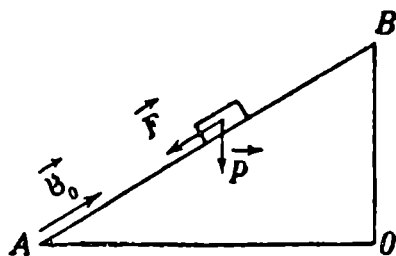
$$F = 50000 \text{ კგ.}$$

7. სხეული, რომლის წონა $P = 10 \text{ კგ}$, მოძრაობს დახრილ სიბრტყეზე A -დან B -სკენ (ნახ. 101) $v_0 = 5 \frac{მ}{სეკ}$ სიჩქარით.

რამდენ ხანს იმოძრაეობს სხეული გაჩერებამდე, თუ ჰორიზონტთან დახრის

კუთხე $\alpha = 30^\circ$ და ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,1$.

დადებით მიმართულებად AB ღერძზე ავიღოთ მიმართულება A -დან B -სკენ. მოძრაობის რაოდენობის კანონი $d(mv) = \vec{F} dt$ ამ შემთხვევაში მოგვცენს



ნახ. 101

$$0 - \frac{P}{g} v_0 = -(P \sin \alpha + P f \cos \alpha) t,$$

საიდანაც

$$t = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = 0,87 \text{ სეკ.}$$

8. მატერიალურ წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალის კომპონენტები წარმოადგენენ წერტილის კოორდინატების წრფივ ფუნქციებს:

$$\begin{aligned} F_x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ F_y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ F_z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \quad (3)$$

სადაც a_{ik} მუდმივებია. ვიპოვოთ ის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდნენ a_{ik} კოეფიციენტები, რომ \vec{F} ძალა იყოს პოტენციალური.

როგორც ვიცით, აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ \vec{F} ძალა იყოს პოტენციალური, მდგომარეობს იმაში, რომ ადგილი ქონდეს ტოლობებს

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0,$$

რაც გვაძლევს $a_{22} = a_{33}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{21} = a_{12}$. ამრიგად, მე-(3) ფორმულებით განსაზღვრული \vec{F} ძალა იქნება პოტენციალური, თუ a_{ik} კოეფიციენტები სიმეტრიულია.

ვიპოვოთ ახლა პოტენციალი

$U(x, y, z)$.

ვინაიდან

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU,$$

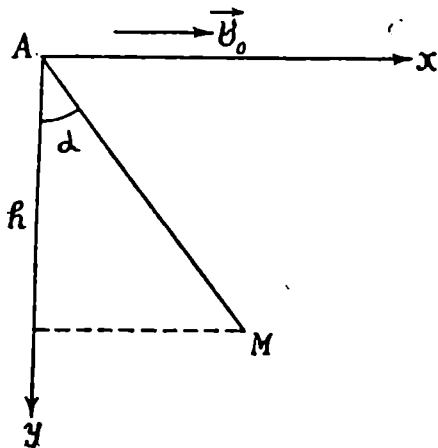
ამიტომ გვქმნება

$$\begin{aligned} dU &= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)dx + \\ &+ (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)dy + \\ &+ (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)dz, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2) + \\ &+ a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}xz + C. \end{aligned}$$

დონე ზედაპირი (ეკვიპოტენციალური ზედაპირი), ცხადია, იქნება $U = \text{const}$ ელიფსოიდი.



ნახ. 102.

9. თვითმფრინავი მიდრინავს დედამიწის ზედაპირიდან h მანძილზე მუდმივი ჰორიზონტალური v_0 სიჩქარით. როგორი უნდა იყოს ის კუთხე α , რომელსაც AM შიზარტულდება შეადგენს ვერტიკალთან (ნახ. 102), რომ A თვითმფრინავიდან გადმოგდებული ტყვართი დაეცეს დედამიწის ზედაპირის M წერტილში. ჰაერის წინააღმდეგობა მხედველობაში არ მიიღება.

თუ კოორდინატთა სისტემას ისე ავიღებთ, როგორც ეს ნახაზზეა, მაშინ ტვირთის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg,$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ $x = v_0 t$, $y = \frac{gt^2}{2}$.

თუ უკანასკნელი ტოლობებიდან t -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

ვინაიდან M წერტილში $y = h$, ამიტომ M წერტილის აბსცისა იქნება

$$x = \sqrt{\frac{2h}{g}} v_0.$$

ამის შემდეგ, ცხადია,

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{gh}} v_0.$$

ბ ა ნ ე ო ზ ი ლ ე ბ ა 3

თავისუფალი მატერიალური წერტილის წრფივი მოძრაობა

§ 9. წრფივი მოძრაობის განათმეგობრება

მატერიალური წერტილის წრფივი მოძრაობის პირობას იძლევა შემდეგი დებულება:

დებულება 1. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ მატერიალური წერტილი მოძრაობდეს რომელიმე წრფეზე, იმაში მდგომარეობს, რომ საწყის მომენტში ის ამ წრფეზე იმყოფებოდეს და მასზე მოქმედ ძალას და საწყის სიჩქარეს ჰქონდეს ამავე წრფის მიმართულება.

ხსენებული წრფე Ox ღერძად მივიღოთ.

თუ წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე, მაშინ

$$y = z = 0. \quad (9,1)$$

ამ ტოლობების t -თი გაწარმოება გვაძლევს

$$y' = z' = 0 \quad (9,2)$$

და, მაშასადამე, სიჩქარეს ექნება ყოველთვის Ox ღერძის მიმართულება; კერძოდ, საწყის სიჩქარესაც ექნება ამ ღერძის მიმართულება.

(9,2) ტოლობის დროის მიმართ გაწარმოება მოგვცემს

$$y'' = z'' = 0. \quad (9,3)$$

თუ მოვიგონებთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} mx'' &= F_x, \\ my'' &= F_y, \\ mz'' &= F_z, \end{aligned} \quad (9,4)$$

(9,3) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$F_y = my'' = 0, \quad F_z = mz'' = 0.$$

მაშასადამე, \overline{F} ძალას ექნება Ox ღერძის მიმართულება, ამით დებულების პირობების აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავუშვათ, რომ წერტილი საწყის მომენტში Ox ღერძზე იმყოფება, ამასთან საწყის სიჩქარეს და ძალას აქვს Ox ღერძის მიმართულება. ვაჩვენოთ, რომ წერტილი იმოძრაეფს Ox ღერძზე. ვინაიდან ძალას აქვს Ox ღერძის მიმართულება ($F_y = F_z = 0$), ამიტომ (9,4) განტოლებები მოგვცემს

$$y'' = z'' = 0,$$

საიდანაც $y' = a$, $z' = b$, ამასთან a და b მუდმივებია. ვინაიდან საწყის სიჩქარეს აქვს Ox ღერძის მიმართულება, ამიტომ $a = b = 0$ და, მაშასადამე,

$$y' = z' = 0,$$

საიდანაც $y = a_1$, $z = b_1$, ამასთან a_1 და b_1 მუდმივებია. ვინაიდან საწყის მომენტში წერტილი Ox ღერძზე იმყოფება, ამიტომ $a_1 = b_1 = 0$ და, მაშასადამე,

$$y = 0, \quad z = 0.$$

მაგრამ ეს განტოლებები Ox ღერძის განტოლებებს წარმოადგენენ და პირობების საკმარისობაც დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ზეგნევი დეკლემბა:

დეკლემბა 2. თუ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი \overline{F} ძალა ცენტრალურია და საწყის სიჩქარეს აქვს ძალის მიმართულება, მაშინ წერტილის მოძრაობა წრფივია.

როგორც ვიცით (იხ. § 4) ცენტრალური ძალის მოქმედებით წერტილი ბრტყელ მოძრაობას ასრულებს. xOy სიბრტყედ მივიღოთ ის სიბრტყე, რომელზედაც წერტილის ტრაექტორია იწებება მოთავსებული, ამასთან O სათავედ ძალთა ცენტრი ავიღოთ.

ვინაიდან ცენტრალური ძალის მოქმედებით მოძრაობის შემთხვევაში სიჩქარის ნომენტი მუდმივია (იხ. (4,6) ფორმულა), ამიტომ

$$[\vec{r} \cdot \vec{v}] = C, \quad (9,5)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია.

რადგანაც პირობის ძალით, საწყის სიჩქარეს აქვს \overline{F} ძალის მიმართულება და, მაშასადამე, ეს მიმართულება გადის O წერტილში, ამიტომ $C = 0$ და (9,5) ტოლობა მოგვცემს

$$[\vec{r} \cdot \vec{v}] = 0.$$

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ Ox ღერძზე, მივიღებთ

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 0,$$

ანუ

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

საიდანაც

$$y = ax,$$

ამასთან a ნებისმიერი მუდმივია. ეს უკანასკნელი წრფის განტოლებას წარმოადგენს და დებულებაც დამტკიცებულია.

1 დებულების ძალით, Ox ღერძზე მატერიალური წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X(t, x, x'), \quad (9,6)$$

სადაც $X(t, x, x')$ წარმოადგენს წერტილზე მოქმედ $\vec{F} = (X, 0, 0)$ ძალის გეგმილს Ox ღერძზე.

ვიგულისხმობთ, რომ $X(t, x, x')$ არის თავისი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც x და x' სიდიდეების მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.

(9,6) განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომლისათვისაც ადგილი აქვს ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის დებულებას. ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე:

$$x = x(t, C_1, C_2), \quad (9,7)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, რომელნიც შემდეგი საწყისი პირობებით განისაზღვრებიან:

$$\text{როცა } t = t_0, \text{ მაშინ } x = x_0, \quad x' = x'_0 = v_0. \quad (9,8)$$

(9,8) პირობების ძალით, (9,7) მოგვცემს

$$x_0 = x(t_0, C_1, C_2),$$

$$x'_0 = x'(t_0, C_1, C_2).$$

თუ ამ ტოლობებიდან ნაპოვნ C_1 და C_2 მუდმივებს შევიტანთ (9,7) ტოლობაში, მივიღებთ (9,6) დიფერენციალური განტოლების ისეთ ამოხსნას, რომელიც (9,8) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი შემთხვევა:

1^o. ძალა მხოლოდ დროის ფუნქციაა: $X = X(t)$. ამ შემთხვევაში (9,6) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t X(t) dt + C_1,$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$x = C_2 + \int_{t_0}^t \left[C_1 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t X(t) dt \right] dt, \quad (9,9)$$

სადაც C_2 აგრეთვე ნებისმიერი მუდმივია. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს, განსახილველ შემთხვევაში, (9,6) განტოლების ზოგად ინტეგრალს. (9,8) საწყისი პირობების ძალით, ადვილად მივიღებთ

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = x_0.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (9,9) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \left[v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t X(t) dt \right] dt. \quad (9,10)$$

2°. ძალა მხოლოდ მდებარეობის ფუნქციაა: $X = X(x)$. ამ შემთხვევაში (9,6) განტოლება მოგვცემს

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X(x).$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს $dx = v dt$ -ზე გავამრავლებთ, ადვილად მივიღებთ (იხ. (6,2) ფორმულა)

$$d \frac{mv^2}{2} = X(x) dx, \quad (9,11)$$

საიდანაც

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{x_0}^x X(x) dx + C_1, \quad (9,12)$$

ამასთან C_1 ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$\frac{dx}{dt} = v = \varphi(x, C_1), \quad (9,13)$$

სადაც

$$\varphi(x, C_1) = \sqrt{\frac{2}{m} \int_{x_0}^x X(x) dx + \frac{2C_1}{m}}.$$

(9,13) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{dx}{\varphi(x, C_1)} = dt,$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\varphi(x, C_1)} = t + C_2. \quad (9,14)$$

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$x = \psi(t, C_1, C_2). \quad (9,15)$$

C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივები განისაზღვრებიან (9,8) საწყისი პირობებით. ამ პირობების ძალით, (9,12) და (9,14) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$C_1 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad C_2 = -t_0.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (9,15)-ში შევიტანთ, მივიღებთ ისეთ ამოხსნას, რომელიც (9,8) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

30. ძალა მხოლოდ სიჩქარის ფუნქციაა: $X = X(v)$. ამ შემთხვევაში (9,6) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{m dv}{X(v)} = dt,$$

საიდანაც ინტეგრებით ვღებულობთ

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{X(v)} = t + C_1.$$

თუ ეს უკანასკნელი ამოხსნადია v -ს მიმართ, მივიღებთ

$$v = \frac{dx}{dt} = \Omega(t, C_1),$$

საიდანაც

$$x = \int_{t_0}^t \Omega(t, C_1) dt + C_2.$$

C_1 და C_2 , ისე როგორც ზემოგანხილულ შემთხვევებში, განისაზღვრებიან (9,8) საწყისი პირობებით.

§ 10. ჰარმონიული რხევა

* განვიხილოთ მატერიალური M წერტილის მოძრაობა x ღერძზე ამ ღერძის უძრავი O ცენტრისაკენ მიზიდულობის ძალის მოქმედებით, რომლის სიდიდეც ამ ცენტრიდან მატერიალური წერტილის გადახრის პროპორციულია.

როგორც ადვილი მისახვედრია, ამ შემთხვევაში O ცენტრისაკენ მიზიდულობის ძალის გეგმის x ღერძზე ექნება სახე (ნახ. 103).

ნახ. 103.

$$X = -kx, \quad (10,1)$$

სადაც k დადებითი რიცხვია, რომელიც ზემოხსენებულ პროპორციულობის კოეფიციენტს წარმოადგენს, ამასთან x ღერძზე სათავედ მიღებულია მიზიდულობის O ცენტრი. უკანასკნელი ტოლობის ძალით, მატერიალური წერტილის მოძრაობის (9,6) დიფერენციალური განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (10,2)$$

ეს უკანასკნელი ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (10,3)$$

სადაც

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

ვთქვათ, საწყის მომენტში მატერიალური M წერტილი იმყოფება O სათავის მარჯვნივ x_0 მანძილზე (ნახ. 103) და, ვთქვათ, წერტილი იწყებს მოძრაობას ნულის ტოლი საწყისი სიჩქარით.

ვინაიდან M წერტილზე მოქმედებს O ცენტრისაკენ მიზიდულობის ძალა, ამიტომ ის დაიწყებს მოძრაობას O ცენტრისაკენ. როცა წერტილი O ცენტრს მიაღწევს, (10,1) ტოლობის ძალით, მასზე მოქმედი ძალა ნული გახდება, მაგრამ ის ინერციით გააგრძელებს მოძრაობას O წერტილის მარცხნივ და როგორც ქვემოთ ვნახავთ, იმოდრავებს აღნიშნული მიმართულებით მანამდე, სანამ მისი კოორდინატი— x_0 არ გახდება. ამის შემდეგ M წერტილი, O ცენტრის მიზიდულობის ძალის გავლენით, დაიწყებს მოძრაობას უკან O ცენტრისაკენ, გადაცდება მას და მიაღწევს საწყის მდებარეობას, რომელიც x_0 კოორდინატით არის განსაზღვრული. ამის შემდეგ პერიოდულად განმეორდება აღწერილი მოძრაობა. წერტილის ასეთ მოძრაობას ჰარმონიული რხევა ეწოდება.

გაჩვენოთ ახლა ანალიზურად, რომ M წერტილის მოძრაობას ზემოაღწერილი ხასიათი აქვს, ე. ი. ეს მოძრაობა ჰარმონიულ რხევას წარმოადგენს.

გვძებნოთ (10,3) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა შემდეგი სახით:

$$x = e^{\lambda t}, \quad (10,4)$$

სადაც λ საძიებელი მუდმივია. თუ ამ მნიშვნელობას (10,3) განტოლებაში შევიტანთ, λ მუდმივის მოსაძებნად მივიღებთ შემდეგ მახასიათებელ განტოლებას

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda = \pm i\omega \quad (i = \sqrt{-1}).$$

თუ ამ მნიშვნელობას (10,4) გამოსახულებაში შევიტანთ, მივიღებთ (10,3) დიფერენციალური განტოლების შემდეგ ორ კერძო ამოხსნას:

$$x_1^0 = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t,$$

$$x_2^0 = e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t.$$

ვინაიდან (10,3) განტოლების კომპლექსური ამოხსნის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებიც ამავე განტოლების ამოხსნებს წარმოადგენენ, ამიტომ, ცხადია,

$$x_1 = \cos \omega t, \quad x_2 = \sin \omega t$$

ფუნქციები ხსენებული განტოლების ამოხსნებს წარმოადგენენ. ვინაიდან ეს ამოხსნები წარმოადგენენ (10,3) განტოლების ამოხსნათა ფუნდამენტალურ სისტემას (წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნებს), ამიტომ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში კარგად ცნობილი დებულების ძალით, ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (10,5)$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია. A და B ნებისმიერი მუდმივების ნაცვლად განვიხილოთ α და ε ნებისმიერი მუდმივები, რომელნიც A და B მუდმივებთან შემდეგი ტოლობებით არიან დაკავშირებული:

$$\begin{aligned} A &= a \sin \varepsilon, \\ B &= a \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (10,6)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (10,5) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$x = a \sin (\omega t + \varepsilon). \quad (10,7)$$

ამრიგად, (10,3) განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს (10,7) სახე, რომელიც წერტილის მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებას წარმოადგენს.

α მუდმივს ეწოდება რხევის ამპლიტუდა, $\omega t + \varepsilon$ სიდიდეს — რხევის ფაზა, ε -ს — საწყისი ფაზა (ფაზა $t=0$ მომენტისათვის). როგორც აღვილი მისახედრია, α წარმოადგენს მაქსიმალურ გადახრას O ცენტრიდან.

(10,7) ფორმულას ძალით, ცხადია, რომ M წერტილის მოძრაობა პერიოდულია. თუ უმცირეს პერიოდს T -თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$\sin[\omega(t+T) + \varepsilon] = \sin(\omega t + \varepsilon),$$

საიდანაც

$$\omega T = 2\pi$$

და, მაშასადამე,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10,8)$$

T პერიოდი, ცხადია, წარმოადგენს იმ დროს, რომელიც საჭიროა ერთი სრული რხევისათვის.

პერიოდის შებრუნებულ სიდიდეს, რომელსაც ν -თი აღვნიშნავთ:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (10,9)$$

ეწოდება რხევის სიხშირე. ცხადია, ν წარმოადგენს რხევათა რიცხვს დროის ერთეულში.

(10,7) ტოლობიდან ცხადია, რომ წერტილის მოძრაობას ზემოაღწერილი ხასიათი აქვს.

განვსაზღვროთ (10,7) განტოლებაში შემავალი α და ε ნებისმიერი მუდმივები შემდეგი საწყისი პირობების მიხედვით:

$$\text{როცა } t=0, \text{ მაშინ } x=x_0, \quad x' = v = v_0. \quad (10,10)$$

აღვიღად მივიღებთ, რომ

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{x_0 \omega}{v_0}, \quad \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega}{v_0}. \quad (10,11)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (10,7) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას, რომელიც (10,10) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

(10,11) ტოლობებიდან ცხადია, რომ როცა $v_0 \neq 0$, მაშინ ამპლიტუდა მეტია საწყის გადახრაზე. თუ $v_0 = 0$, მაშინ $\alpha = x_0$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ და (10,7) განტოლება მოგვცემს

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (10,12)$$

ვინაიდან რხევის პერიოდი (და, მაშასადამე, სიხშირეც) არ არის დამოკიდებული წერტილის საწყის გადახრაზე, ამიტომ, როცა საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია, მატერიალური წერტილი $\frac{T}{4}$ დროში მიაღწევს მიზიდულობის ცენტრს

რაც x_0 მანძილითაც არ უნდა იყოს ის დაშორებული ამ ცენტრიდან. ასეთ მოძრაობას ტაეტოხრონული მოძრაობა ეწოდება. ამრიგად, წერტილის პარამიულ რხევას აქვს ტაეტოხრონობის თვისება.

ვთქვათ, x ღერძზე მოძრავე მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს წინა პარაგრაფში აღნიშნული ძალის გარდა აგრეთვე წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც მოძრაობის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული და სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია. თუ ხსენებული წინააღმდეგობის ძალის¹ გეგმილს x ღერძზე აღვნიშნავთ X' -ით, მივიღებთ

$$X' = -2bmx',$$

სადაც პროპორციულობის კოეფიციენტი აღებულია $2bm$ -ის სახით, ამასთან b გარკვეული მუდმივია, m —მატერიალური წერტილის მასა. როგორც აღვილი მისახვედრია, განსახილველ შემთხვევაში, წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2bmx',$$

რომელიც შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2bx' + \omega^2 x = 0, \quad (11,1)$$

სადაც

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

ვცდებით (11,1) განტოლების ამოხსნა შემდეგი სახით:

$$x = e^{\alpha t}, \quad (11,2)$$

სადაც α საძიებელი მუდმივია. თუ ამ მნიშვნელობას (11,1) განტოლებაში შევიტანთ, α მუდმივის მოსაძებნად მივიღებთ შემდეგ მახასიათებელ განტოლებას:

$$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0, \quad (11,3)$$

საიდანაც

$$\alpha = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}. \quad (11,4)$$

ვთქვათ, წინააღმდეგობის ძალა იმდენად მცირეა, რომ $b < \omega$, მაშინ (11,4) ტოლობა მოგვცემს

$$\alpha = -b \pm i\omega^*,$$

სადაც

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - b^2}. \quad (11,5)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (11,2) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ (11,1) განტოლების შემდეგ ორ ამოხსნას:

$$x_1^0 = e^{-bt} e^{i\omega^* t},$$

$$x_2^0 = e^{-bt} e^{-i\omega^* t}.$$

ვინაიდან მიღებული კომპლექსური ამოხსნების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები აგრეთვე ამოხსნებს წარმოადგენენ, ამიტომ ამ ამოხსნებიდან მივი-

¹ იგულისხმება, რომ ეს ძალა x ღერძის პარალელურია.

ღებთ შემდეგ წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნებს (ფუნდამენტალურ ამოხსნათა სისტემას):

$$x_1 = e^{-bt} \cos \omega^* t,$$

$$x_2 = e^{-bt} \sin \omega^* t.$$

ამის შემდეგ, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში კარგად ცნობილი დებულების ძალით, (11,1) განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე:

$$x = e^{-bt} (A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t),$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია. თუ A და B ნებისმიერი მუდმივების ნაცვლად განვიხილავთ a და ε ნებისმიერ მუდმივებს, რომელნიც A და B მუდმივებთან (10,6) ტოლობებით არიან დაკავშირებული, მივიღებთ

$$x = e^{-bt} a \sin (\omega^* t + \varepsilon). \quad (11,6)$$

უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მატერიალური წერტილის x ღერძზე მოძრაობას აქვს რხევითი ხასიათი. რხევის ამპლიტუდა დამოკიდებულია დროზე, მას აქვს სახე:

$$A = a e^{-bt}. \quad (11,7)$$

მაშასადამე, როცა დრო იზრდება, ამპლიტუდა კლებულობს, როცა $t \rightarrow \infty$, ამპლიტუდა მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამიტომ, განსახილველ შემთხვევაში რხევას ეწოდება მიღწეადი რხევა.

თუ $\sin (\omega^* t + \varepsilon)$ ფუნქციის პერიოდს T^* -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}.$$

ვინაიდან $\omega^* < \omega$ (იხ. (11,5) ტოლობა), ამიტომ $T^* > T$, სადაც T წინა პარაგრაფში განხილული რხევის პერიოდია. ამრიგად, წინააღმდეგობის ძალა აღიღებს პერიოდს და, მაშასადამე, ამცირებს სიხშირეს.

(11,7) ტოლობიდან ცხადია, რომ $t=0$ მომენტში ამპლიტუდა არის

$$A_0 = a, \quad \frac{T^*}{2} \text{ დროის შემდეგ ამპლიტუდა იქნება } A_1 = a e^{-\frac{bT^*}{2}}, \text{ ერთი პერიოდის}$$

გავლის შემდეგ ამპლიტუდა იქნება $A_2 = a e^{-bT^*}$ და ა. შ. ამრიგად, ამპლიტუდა კლებულობს როგორც გეომეტრიული პროგრესია, რომლის მნიშვნელიც

$$\text{არის } e^{-\frac{1}{2} b T^*}. \text{ თუ ავიღებთ } \varepsilon = \frac{\pi}{2}, \text{ მაშინ } t=0 \text{ მომენტში მატერიალური}$$

წერტილის გადახრა O ცენტრიდან ტოლი იქნება $A_0 = a$ და (11,6) განტოლების გრაფიკს ქვემოთ მოყვანილი სახე ექნება (ნახ. 104).

ჩვენ აქამდე ვიხილავდით შემთხვევას $b < \omega$. ვთქვათ, ახლა $b > \omega$. ამ შემთხვევაში, (11,4) ტოლობის ძალით, (11,1) განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$x = e^{-bt} (C_1 e^{bt} + C_2 e^{-bt}), \quad (11,8)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, $\delta = \sqrt{b^2 - \omega^2} < b$. (11,8) ტოლობა გვარწმუნებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში პერიოდულ რხევით მოძრაობას არ ექნება ადგილი, არამედ ადგილი ექნება ე. წ. აპერიოდულ მოძრაობას. ამას გარდა ცხადია, რომ როცა $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$.

ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი საწყისი პირობები:

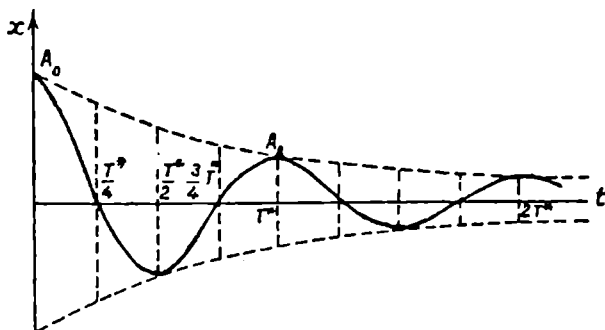
$$\text{როცა } t=0, \text{ მაშინ } x=x_0, \dot{x}=0.$$

(11,8) ტოლობაში შემავალი მუდმივებისათვის ეს საწყისი პირობები მოგვცემს

$$C_1 = \frac{x_0(l+\delta)}{2\delta}, \quad C_2 = \frac{x_0(\delta-l)}{2\delta}.$$

ვთქვათ ახლა $l=\omega$. ამ შემთხვევაში $\alpha=-\omega$ წარმოადგენს (11,3) მახასიათებელი განტოლების ჯერად ფესვს და (11,1) განტოლების წრფივად დაშოუკიდებელი ამოხსნები იქნება

$$x_1 = e^{-\omega t}, \quad x_2 = te^{-\omega t}.$$



ნახ. 104.

მაშასადამე, ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$x = e^{-\omega t}(C_1 + C_2 t),$$

სადაც C_1 და C_2 აგრეთვე ნებისმიერი მუდმივებია. ამ შემთხვევაშიც მოძრაობა იქნება აპერიოდული, ამასთან $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$.

§ 12. იძულებითი რხევა

ვთქვათ, წინა პარაგრაფში განხილული ძალების გარდა მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს ე. წ. შემზფოთებელი პერიოდული ძალა, რომელიც x ღერძის პარალელურია და რომლის გეგმილსაც x ღერძზე აქვს სახე

$$P_0 \sin pt,$$

სადაც P_0 და p გარკვეული მუდმივებია. ცხადია, მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m\ddot{x} = -kx - 2bmx' + P_0 \sin pt,$$

რომელიც შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\ddot{x} + 2bx' + \omega^2 x = P \sin pt, \quad (12,1)$$

სადაც

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad P = \frac{P_0}{m}.$$

აღნიშნული ძალების მოქმედებით წერტილის მოძრაობას იძულებით რხევას უწოდებენ.

(12,1) წარმოადგენს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან, წრფივ, არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, ამ განტოლების ზოგადი ამოხსნა წარმოადგენს მისი რაიმე კერძო ამოხსნისა და შესაბამის ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამოხსნის ჯამს.

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $b < a$. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით (იხ. (11,6) ფორმულა), (12,1)-ის შესაბამის ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$x_0 = ae^{-bt} \sin(\omega^* t + \varepsilon). \quad (12,2)$$

(12,1) განტოლების კერძო ამოხსნა ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$x_1 = Q \sin(pt + \eta), \quad (12,3)$$

სადაც Q და η საძიებელი მუდმივებია, რომელნიც ისე უნდა განისაზღვრონ, რომ (12,3) იყოს (12,1) განტოლების ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$pt + \eta = \theta$$

და (12,3) მნიშვნელობას შევიტანთ (12,1) განტოლებაში, ადვილად მივიღებთ.

$$\begin{aligned} Q(\omega^2 - p^2) \sin \theta + 2bQp \cos \theta &= P \sin pt = P \sin(\theta - \eta) = \\ &= P(\cos \eta \sin \theta - \sin \eta \cos \theta). \end{aligned}$$

უკანასკნელ ტოლობაში $\sin \theta$ და $\cos \theta$ ფუნქციების კოეფიციენტების გატოლება მოგვცემს

$$\begin{aligned} Q(\omega^2 - p^2) &= P \cos \eta, \\ 2Qbp &= -P \sin \eta, \end{aligned} \quad (12,4)$$

საიდანაც, კვადრატში ახარისხებისა და შეკრების შედეგად, ვღებულობთ

$$Q = \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}.$$

თუ (12,4)-ის მეორეს პირველზე გაეყოფთ, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \eta = -\frac{2bp}{\omega^2 - p^2}, \quad \eta = \arctg \frac{2bp}{p^2 - \omega^2}. \quad (12,5)$$

ამრიგად, გვაქვს (12,1) განტოლების შემდეგი კერძო ამოხსნა:

$$x_1 = \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \sin(pt + \eta), \quad (12,6)$$

სადაც η განსაზღვრულია (12,5) ტოლობებით.

ზემონათქვამის ძალით, (12,1) განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$x = ae^{-bt} \sin(\omega^* t + \varepsilon) + \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \sin(pt + \eta). \quad (12,7)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში მატერიალური წერტილი ასრულებს რთულ რხევით მოძრაობას, რომელიც ორი რხევის ერთობლიობას წარმოადგენს. პირველი მათგანი, რომელსაც საკუთარი

რხევა ეწოდება, წარმოადგენს მიღვეად რხევის და დახასიათებულია (12,7) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაყრებით, მეორე კი, რომელსაც იძულებითი რხევა ეწოდება, დახასიათებულია (12,7)-ის მარჯვენა მხარის მეორე შესაყრებით. საკუთარი რხევის სიხშირე უდრის $\frac{\omega^*}{2\pi}$ -ს, ხოლო იძულებითი

რხევის სიხშირე კი $\frac{p}{2\pi}$.

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა წინააღმდეგობის ძალა არა გვაქვს, ე. ი. $\nu=0$. ამ შემთხვევაში (12,1) განტოლება მოგვცემს

$$x'' + \omega^2 x = P \sin pt, \quad (12,8)$$

რომლის ზოგად ამოხსნასაც, (12,7) ტოლობის ძალით, აქვს სახე

$$x = a \sin(\omega t + \epsilon) + \frac{P}{\omega^2 - p^2} \sin pt. \quad (12,9)$$

ამ შემთხვევაში საკუთარი რხევის სიხშირე ტოლია $\frac{\omega}{2\pi}$. შევიწყვლოთ ის

შემთხვევა, როცა საკუთარი რხევის სიხშირე ემთხვევა იძულებითი რხევის სიხშირეს, ე. ი. $\omega = p$. ამ შემთხვევაში (12,9) ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაყრები, რომელიც (12,8) განტოლების კერძო ამოხსნას წარმოადგენს, აზრს კარგავს. ვიპოვოთ (12,8) განტოლების ისეთი კერძო ამოხსნა, რომელსაც აზრი ექნება იმ შემთხვევაშიც, როცა $p \rightarrow \omega$. ამისათვის (12,9)

ამოხსნაში შევიტანოთ $a = -\frac{P}{\omega^2 - p^2}$ და $\epsilon = 0$, მივიღებთ შემდეგ კერძო

ამოხსნას:

$$x_0 = \frac{P}{\omega^2 - p^2} (\sin pt - \sin \omega t).$$

ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \omega} x_0 &= P \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{\sin pt - \sin \omega t}{\omega^2 - p^2} = \\ &= P \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{\frac{d}{dp} (\sin pt - \sin \omega t)}{\frac{d}{dp} (\omega^2 - p^2)} = -\frac{P}{2\omega} t \cos \omega t, \end{aligned}$$

და, მაშასადამე,

$$x_1 = -\frac{P}{2\omega} t \cos \omega t$$

წარმოადგენს

$$x'' + \omega^2 x = P \sin \omega t \quad (12,10)$$

განტოლების გარკვეულ კერძო ამოხსნას, რაშიაც პირდაპირ შემოწმებითაც დავრწმუნდებით. ამრიგად, (12,10) განტოლების ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$x = a \sin(\omega t + \epsilon) - \frac{P}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (12,11)$$

(12,11) ამოხსნიდან ცხადია, რომ განსახილველ შემთხვევაში იძულებითი რხევის ამპლიტუდა, რომელიც $\frac{P}{2\omega}$ t -ს ტოლია, უსასრულოდ იზრდება, როცა $t \rightarrow \infty$. ასეთ მოვლენას რეზონანსის მოვლენა ეწოდება. ამრიგად, როცა წინააღმდეგობის ძალა ნულის ტოლია ($b=0$) და საკუთარი რხევის სიხშირე ემთხვევა იძულებითი რხევის სიხშირეს, მაშინ ადგილი აქვს რეზონანსის მოვლენას, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს აკუსტიკაში, რადიოტექნიკაში, ნავებობათა დინამიკურ გაანგარიშებაში და სხვ.

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას ($b \neq 0$) და გამოვარკვიოთ თუ როდის მიაღწევს იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მაქსიმუმს, ე. ი. რა შემთხვევაში ექნება ადგილი რეზონანსის მოვლენას. ამ მიზნით, იძულებითი რხევის ამპლიტუდა ასე გადავწეროთ:

$$Q = \frac{\frac{P}{\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{p^2}{\omega^2} \frac{b^2}{\omega^2}}}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \beta = \frac{b^2}{\omega^2}, \quad (12,12)$$

მივიღებთ

$$Q = \frac{P}{\omega^2 \sqrt{f(\alpha)}}, \quad (12,13)$$

სადაც

$$f(\alpha) = (1 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta. \quad (12,14)$$

ვთქვათ, α დაფიქსირებულია, ხოლო p შეიძლება ვცვალოთ.

ცხადია, Q მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას მაშინ, როცა $f(\alpha)$ მიაღწევს მინიმუმს. ადვილად მივიღებთ, რომ

$$f'(\alpha) = 4\alpha[(2\beta - 1) + \alpha^2],$$

ამიტომ, როცა $\beta = \frac{b^2}{\omega^2} < \frac{1}{2}$ და α საკმარისად მცირეა, მაშინ $f'(\alpha) < 0$. ამრი-

გად, როცა α დაწყებული ნულიდან მატულობს თანდათან ისე, რომ საკმარისად მცირე რჩება, მაშინ ყოველთვის $f'(\alpha) < 0$ და, მაშასადამე, $f(\alpha)$ კლებულობს დაწყებული $f(0) = 1$ -დან. $f'(\alpha) = 0$ განტოლება მოგვცემს შემდეგ ფესვებს: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pm \sqrt{1 - 2\beta}$, α_3 ფესვებისათვის, როგორც ადვილი მისახვედრია, $f(\alpha)$ აღწევს მინიმუმს და, მაშასადამე, (12,13) ტოლობის ძალით, Q აღწევს მაქსიმუმს, ე. ი. ადგილი აქვს რეზონანსის მოვლენას. თუ წინააღმდეგობის ძალა საკმარისად მცირეა, მაშინ $\beta = \frac{b^2}{\omega^2}$ საკმარისად მცირეა და

რეზონანსის მოვლენას ექნება ადგილი, როცა $\alpha = \frac{p}{\omega} \approx 1$.

§ 13. სხეულის ვარდნა ძალიან დიდი სიმაღლიდან

ვთქვათ, სხეული ვარდება ნულის ტოლი საწყისი სიჩქარით ძალიან დიდი სიმაღლიდან დედამიწის ცენტრის მიზიდულობის ძალის გავლენით. ვიპოვოთ სხეულის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა, თუ პაერის წინააღმდეგობის ძალა მხედველობაში არ არის მიღებული. თუ Ox ღერძის სათავედ მივიღებთ დედამიწის ცენტრს და სხეულის მასას აღვნიშნავთ m -ით, ნიუტონის მიზიდულობის კანონის ძალით, სხეულის სიმძიმის ცენტრზე მოქმედი ძალის გეგმილს Ox ღერძზე ექნება სახე:

$$X = -\frac{\mu m}{x^2}, \quad (13,1)$$

სადაც μ დადებითი რიცხვია. ცხადია, სხეულის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$mx'' = -\frac{\mu m}{x^2},$$

ამიტომ, (9,11) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$d\frac{mv^2}{2} = -\frac{\mu m}{x^2} dx,$$

საიდანაც

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\mu m}{x} + C,$$

ამასთან C ნებისმიერი მუდმივია. ვინაიდან, როცა $t=0$, მაშინ $x=\infty$, $v=0$ (სხეული ვარდება ძალიან დიდი სიმაღლიდან ნულის ტოლი საწყისი სიჩქარით), ამიტომ $C=0$ და, მაშასადამე, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{x}}. \quad (13,2)$$

თუ დედამიწის რადიუსს R -ით აღვნიშნავთ, (13,2) ფორმულის ძალით, დედამიწაზე დაცემის დროს სხეულის სიჩქარე იქნება

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}. \quad (13,3)$$

ვინაიდან დედამიწის მახლობლობაში სიმძიმის ძალა mg -ს ტოლია, ამიტომ, (13,1) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$mg = \frac{\mu m}{R^2},$$

საიდანაც $\mu = gR^2$. თუ ამ მნიშვნელობას (13,3) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$v = \sqrt{2gR} \approx 11\,000 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}.$$

ამრიგად, დედამიწაზე დაცემის დროს სიჩქარე სასრულია. თუ სხეული h სიმაღლიდან ვარდება; მაშინ გალილეის ფორმულის მიხედვით, დედამიწაზე დაცემის დროს სიჩქარე იქნება

$$v = \sqrt{2gh}.$$

თუ $h = \infty$, მაშინ $v = \infty$, რაც ზემომოყვანილ დასკვნას ეწინააღმდეგება. ეს წინააღმდეგობა იმითაა გამოწვეული, რომ გალილეის ფორმულის გამოყენების დროს სიმძიმის ძალა mg -ს ტოლად იყო ნაგულისხმევი, რაც მხოლოდ დედამიწის მახლობლობაშია სამართლიანი და რასაც ადგილი არა აქვს, თუ სხეული ძალიან დიდი მანძილითაა დაშორებული დედამიწის ზედაპირიდან.

ამოცანები

10. წერტილი, რომლის მასა უდრის m -ს, მოძრაობს წრფივად შემდეგი კანონით:

$$x = A \cos kt + B \sin kt,$$

სადაც A , B და k მუდმივებია. ვიპოვოთ მამოძრავებელი ძალა, როგორც x -ის ფუნქცია.

გაწარმოებით ვლებულობთ

$$F = mx'' = -mk^2 (A \cos kt + B \sin kt) = -mk^2 x,$$

$$F = -mk^2 x.$$

11. წერტილი, რომლის მასა არის m , მოძრაობს წრფივად შემდეგი კანონით:

$$x^2 = \frac{\mu t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2, \quad (1)$$

სადაც μ , x_0 , v_0 მუდმივებია. ვიპოვოთ ძალა, როგორც x -ის ფუნქცია.

(1) ტოლობიდან გაწარმოებით ვლებულობთ

$$xx' = \frac{\mu t}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)v_0 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) t + x_0 v_0.$$

საიდანაც

$$x^2 x'^2 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right)^2 t^2 + 2x_0 v_0 t \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) + x_0^2 v_0^2. \quad (2)$$

(1) ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$x^2 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) t^2 + 2x_0 v_0 t + x_0^2,$$

საიდანაც

$$x^2 - x_0^2 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) t^2 + 2x_0 v_0 t. \quad (3)$$

განვიხილოთ გამოსახულება

$$Q = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) (x^2 - x_0^2) + x_0^2 v_0^2.$$

ჩავსვათ ამ უკანასკნელში $x^2 - x_0^2$ -ის ნაცვლად მისი მნიშვნელობა (3)-დან, მივიღებთ

$$Q = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right)^2 t^2 + 2x_0 v_0 t \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) + x_0^2 v_0^2.$$

ამ უკანასკნელის შედარება მე-(2) ტოლობასთან გვაძლევს

$$x^2 x'^2 = Q = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) (x^2 - x_0^2) + x_0^2 v_0^2.$$

თუ ამ ტოლობიდან ვიპოვიტ x'^2 -ს, მივიღებთ

$$x'^2 = \frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 - \frac{\mu}{x^2}.$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით, გვექნება

$$x' x'' = \frac{\mu}{x^3} x', \quad x'' = \frac{\mu}{x^3}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ ვღებულობთ

$$F = m x'' = \frac{m \mu}{x^3}. \quad (4)$$

12. ბირთვი, რომლის მასა 10 გრამია, მოძრაობს ვერტიკალზე ზევიდან ქვევით სიმძიმის ძალის მოქმედებით და განიცდის ჰაერის წინააღმდეგობას. განვსაზღვროთ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, როგორც სიჩქარის ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ ბირთვი (მისი ცენტრი) მოძრაობს შემდეგი კანონით:

$$x = 327t - 109(1 - e^{-3t}), \quad (5)$$

ამასთან x გამოსახულია სანტიმეტრებში (Ox ღერძი მოგებულია სიმძიმის ძალის მიმართულებით).

(5) ტოლობის ძალით, წერტილის სიჩქარე იქნება

$$v = \frac{dx}{dt} = 327(1 - e^{-3t}), \quad (6)$$

ხოლო აჩქარებისათვის გვექნება

$$w = \frac{d^2x}{dt^2} = 981 \cdot e^{-3t}.$$

ცხადია, წერტილის მამოძრავებელი ძალა (აბსოლუტურ სისტემაში) იქნება

$$F = mw = 10 \cdot 981 \cdot e^{-3t}. \quad (7)$$

თუ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალას აღვნიშნავთ R -ით, ცხადია, გვექნება

$$R = mg - F = 10 \cdot 981 - 10 \cdot 981 \cdot e^{-3t},$$

$$R = 10 \cdot 981(1 - e^{-3t}). \quad (8)$$

(6) ტოლობის ძალით,

$$1 - e^{-3t} = \frac{v}{327}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (8)-ში შევიტანთ, მივიღებთ

$$R = 30v \text{ დინი}. \quad (9)$$

13. m მასის ბირთვი ვარდება ვერტიკალზე უსაწყისო სიჩქარით (ნულის ტოლი საწყისი სიჩქარით). ცნობილია, რომ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია: $R = kmv$, სადაც k მუდმივია. ვიპოვოთ ბირთვის მოძრაობის კანონი.

ვერტიკალური მიმართულება მივიღოთ x ღერძად და მოვგვზოთ ის ზევიდან ქვევით (სიმძიმის ძალის მიმართულებით). ცოცხალი ძალის კანონი გვაძლევს

$$d \frac{mv^2}{2} = (mg - kmv) dx. \quad (10)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $dx = v dt$ და მოვახდენთ ცვლადთა განცალკევებას, მივიღებთ

$$\frac{dv}{g - kv} = dt,$$

საიდანაც

$$t = -\frac{1}{k} \ln(g - kv) + C. \quad (11)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ, როცა $t=0$, $v=0$, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს $C = \frac{1}{k} \ln g$. თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (11)-ში, ადვილად მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}),$$

საიდანაც

$$x = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} e^{-kt} + C. \quad (12)$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ, როცა $t=0$, $x=0$, (12)-დან მივიღებთ $C = -\frac{g}{k^2}$,

$$x = \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}). \quad (13)$$

14. ვიპოვოთ მატერიალური M წერტილის მოძრაობა x ღერძზე ამ ღერძის O ცენტრიდან ისეთი განმზიდი ძალის მოქმედებით, რომელიც O ცენტრიდან მატერიალური წერტილის გადახრის პროპორციულია.

მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალის გეგმილს x ღერძზე, ცხადია, ექნება სახე $X = k^2 mx$, სადაც k^2 დადებითი მუდმივია. წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება

$$mx'' = k^2 mx, \quad x'' - k^2 x = 0.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამოხსნა ასე წარმოიდგინება:

$$x = c_1 e^{-kt} + c_2 e^{kt},$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ეს მუდმივები შევარჩიოთ შემდეგი საწყისი პირობებით: როცა $t=0$, მაშინ $x=x_0$, $v=v_0$. მივიღებთ

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{k} \right), \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{k} \right),$$

$$x = x_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{v_0}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2},$$

$$x = x_0 \operatorname{ch} kt + \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} kt. \quad (14)$$

15. მატერიალური წერტილი იწყებს წრფივ მოძრაობას წინააღმდეგობიან არეში უსაწყისო სიჩქარით. წერტილზე უშუალოდ მოქმედი ძალისა და წინააღმდეგობის ძალის ტოლქმედი უდრის $a + bv - cv^2$, სადაც v წერტილის სიჩქარეა, ხოლო a , b , c დადებითი მუდმივებია. ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე და განვლილი გზა, როგორც დროის ფუნქცია.

წერტილის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m \frac{dv}{dt} = a + bv - cv^2, \quad (15)$$

საიდანაც

$$\frac{dv}{a + bv - cv^2} = \frac{dt}{m}. \quad (16)$$

აღვნიშნოთ $a + bv - cv^2$ სამწევრის ფესვები α და β -თი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ α და β დადებითი სიდიდეებია. ცხადია, გვექნება

$$v + bv - cv^2 = c(\alpha - v)(v + \beta).$$

თუ ამ მნიშვნელობას (16) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{dv}{(\alpha - v)(v + \beta)} = \frac{cdt}{m}. \quad (17)$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{dv}{\alpha - v} + \frac{dv}{v + \beta} = \frac{c(\alpha + \beta)dt}{m},$$

საიდანაც

$$\ln \frac{v + \beta}{\alpha - v} = kt + c_1, \quad (18)$$

სადაც c_1 ნებისმიერი მუდმივია.

$$k = \frac{c(\alpha + \beta)}{m}. \quad (19)$$

ვინაიდან $t=0$ საწყის მომენტში $v=0$, ამიტომ $c_1 = \ln \frac{\beta}{\alpha}$ და (18) მოგვცემს

$$\ln \frac{v + \beta}{\alpha - v} = kt + \ln \frac{\beta}{\alpha},$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \frac{v + \beta}{\alpha - v} &= \frac{\beta}{\alpha} e^{kt}, \\ \frac{dx}{dt} &= v = \frac{\alpha\beta(1 - e^{-kt})}{\beta + \alpha e^{-kt}}. \end{aligned} \quad (20)$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ინტეგრირებით ვღებულობთ

$$x = \alpha \int \frac{\beta(1 - e^{-kt})}{\beta + \alpha e^{-kt}} dt + c_2, \quad (21)$$

სადაც c_2 ნებისმიერი მუდმივია. ცხადია, გვექნება

$$\int \frac{\beta(1-e^{-kt})}{\beta + \alpha e^{-kt}} dt = \int \frac{(\beta + \alpha e^{-kt}) - (\alpha + \beta)e^{-kt}}{\beta + \alpha e^{-kt}} dt =$$

$$= t + \frac{\alpha + \beta}{\alpha k} \ln(\beta + \alpha e^{-kt}).$$

თუ ამ მნიშვნელობას (21) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$x = \alpha t + \frac{\alpha + \beta}{k} \ln(\beta + \alpha e^{-kt}) + c_2.$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ, როცა $t=0$, $x=0$, გვექნება

$$c_2 = \frac{\alpha + \beta}{k} \ln(\alpha + \beta)$$

და, მაშასადამე,

$$x = \alpha t + \frac{\alpha + \beta}{k} \ln \frac{\beta + \alpha e^{-kt}}{\alpha + \beta}. \quad (22)$$

(20) და (22) ფორმულები იძლევიან სიჩქარეს და განვლილ გზას, როგორც დროის ფუნქციებს. (20) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \alpha.$$

ბ ა ნ წ ო ზ ი ლ ე ბ ა 4

თავისუფალი მაგარიალური ნერგილის მრავლწიკლი მოძრაობა

§ 14. მატერიალური წერტილის მოძრაობა სივრცეში სიმძიმის ძალის მოქმედებით

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა ისეთი $Oxyz$ სისტემა, რომლის Ox ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად და მოგეზულია ქვევიდან ზევით. ვინაიდან, განსახილველ შემთხვევაში სიმძიმის ძალას ექნება სახე

$$\vec{F} = (0, 0, -mg),$$

სადაც m არის წერტილის მასა, ხოლო g —სიმძიმის ძალის აჩქარება, ამიტომ, (2,2) ფორმულების ძალით, გვექნება

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g. \quad (14,1)$$

ამ სისტემის ინტეგრებით მივიღებთ

$$x = C_1 t + C_4,$$

$$y = C_2 t + C_5, \quad (14,2)$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_6,$$

სადაც C_1, C_2, \dots, C_6 ნებისმიერი მუდმივებია. ვთქვათ, საწყის პირობებს აქვთ სახე:

$$\text{როცა } t=0, \text{ მაშინ } \begin{cases} x=y=z=0, \\ x'=v_0 \cos \alpha, \\ y'=0, \\ z'=v_0 \sin \alpha. \end{cases} \quad (14,3)$$

ამრიგად, საწყის მომენტში მატერიალური ნაწილაკი კოორდინატა სისტემის სათავედან გასროლილია xOz სიბრტყეში \vec{v}_0 სიჩქარით, ამასთან \vec{v}_0 სიჩქარე Ox ღერძთან გარკვეულ α კუთხეს შეადგენს.

(14,3) საწყისი პირობების ძალით, (14,2) ტოლობებიდან მივიღებთ: $C_4=C_5=C_6=0$, $C_1=v_0 \cos \alpha$, $C_2=0$, $C_3=v_0 \sin \alpha$. თუ ამ მნიშვნელობებს (14,2) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ

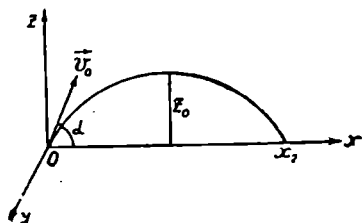
$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= 0, \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \end{aligned} \quad (14,4)$$

(14,4) ტოლობები გვარწმუნებს, რომ წერტილი იმოძრაებს xOz სიბრტყეში. ამ ტოლობებიდან t პარამეტრის გამოორიცხვის შედეგად მივიღებთ

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (14,5)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს პარაბოლის განტოლებას, რომლის სიმეტრიის ღერძიც Oz ღერძის პარალელურია და, მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში წერტილი იმოძრაებს ამ პარაბოლაზე.

ვიპოვოთ მოცემული α -სათვის მატერიალური წერტილის ფრენის სიშორე, ე. ი. ის მაქსიმალური მანძილი, რომლითაც ის საწყის მდებარეობას ჰორიზონტზე დაშორდება. ამისათვის ვიპოვოთ (14,5) პარაბოლის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები (ნახ. 105), მივიღებთ



ნახ. 105.

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0,$$

საიდანაც ადვილად ვღებულობთ

$$x_1=0, \quad x_2=\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (14,6)$$

ცხადია, x_2 წარმოადგენს მოცემული α -სათვის ფრენის სიშორეს, რომელსაც ექნება მაქსიმალური მნიშვნელობა, როცა $\alpha = \frac{\pi}{4}$. თუ ამ მაქსიმალურ დაშორებას h_0 -ით აღვნიშნავთ, (14,6) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$h_0 = \frac{v_0^2}{g}. \quad (14,7)$$

ვინაიდან, $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$, ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

მივიღებთ $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ და, მაშასადამე, (14,6)-ის ძალით, გვექნება

$$x_2 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta.$$

ამრიგად, ფრენის სიშორე იქნება ერთნაირი, განუჩიევლად იმისა, მატერიალური ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე ჰორიზონტთან α კუთხეს შეადგენს, თუ

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ კუთხეს. ამ გარემოებას იყენებენ არტილერიაში.}$$

ვიპოვოთ ახლა მოცემული α -სათვის ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე. ამისათვის ვიპოვოთ x -ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც (14,5) ტოლობით განსაზღვრული x ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს. როგორც ცნობილია, x -ის ხსენებული მნიშვნელობა უნდა მოიძებნოს ტოლობიდან

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

საიდანაც

$$x_0 = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \quad (14,8)$$

ვინაიდან $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} < 0$, ამიტომ, ანალიზის კურსიდან ცნობილი დებულების ძალით, (14,8) მნიშვნელობა (14,5) ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციას მართლაც მიაწევს მაქსიმუმს. ამრიგად, თუ (14,8) მნიშვნელობას (14,5) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$z_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad (14,9)$$

სადაც z_0 -ით აღნიშნულია მოცემული α -სათვის ჰორიზონტიდან წერტილის მაქსიმალური დაშორება. ამ დაშორებას, (14,9) ტოლობის ძალით, უდიდესი მნიშვნელობა ექნება $\alpha = \frac{\pi}{2}$ -სათვის და, მაშასადამე, თუ ჰორიზონტიდან ამ უდიდეს დაშორებას H_0 -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$H_0 = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (14,10)$$

(14,5) ფორმულით განსაზღვრული პარაბოლა დამოკიდებულია α კუთხეზე. თუ ამ კუთხეს ვცვლით, მივიღებთ სხვადასხვა პარაბოლას. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$p = \operatorname{tg} \alpha,$$

მაშინ (14,5) ფორმულა ასე გადაიწერება:

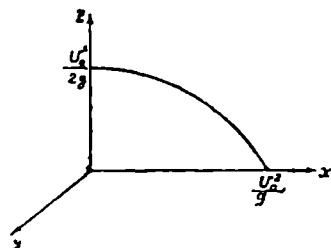
$$z = xp - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + p^2).$$

ადვილად მივიღებთ, რომ ერთ ρ პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ამ ოჯახის მომვლელ წირს ექნება სახე

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (14,11)$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, აგრეთვე პარაბოლას წარმოადგენს. ეს პარაბოლა Ox ღერძს გადაკვეთს წერტილზე, რომლის აბსცისაც არის h_0 , სადაც h_0 (14,7) ტოლობით არის განსაზღვრული. თუ (14,11) ტოლობაში $x=0$ ჩავსვამთ, მივიღებთ H_0 -ს, სადაც H_0 (14,10) ტოლობით განსაზღვრული სიდიდეა (ნახ. 106).

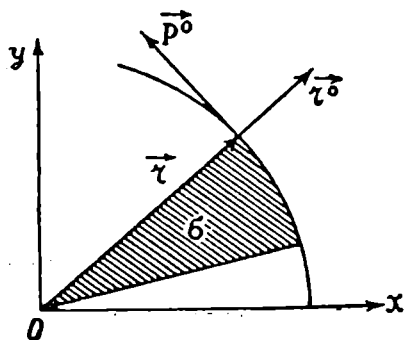
როგორც ადვილი მისახვედრია, (14,11) პარაბოლა ის წირია, რომლის გარეთაც მოცემული \vec{v}_0 საწყისი სიჩქარით გასროლილი მატერიალური ნაწილაკი ვერ მოხვდება როგორც არ უნდა იყოს \vec{v}_0 ვექტორის მიერ პორიზონტთან შედგენილი α კუთხე.



ნახ. 106.

§ 15. ბინძვს ფორმულა

ვთქვათ, მატერიალურ M წერტილზე მოქმედებს ცენტრალური ძალა. როგორც § 4-ში ვაჩვენეთ, ცენტრალური ძალის მოქმედებით წერტილი პრტყელ მოძრაობას ასრულებს. ავიღოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ



ნახ. 107.

ძალთა ცენტრი და xOy სიბრტყედ მივიღოთ ის სიბრტყე, რომელზედაც წერტილის ტრაექტორია იქნება მოთავსებული. ვინაიდან ცენტრალური ძალის გავლენით მოძრაობის შემთხვევაში ადგილი აქვს ფართობთა კანონს, ამიტომ გვექნება

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{C}{2}, \quad (15,1)$$

სადაც C ფართობთა მუდმივია (იხ.

(4,9) ფორმულა), $\frac{d\sigma}{dt}$ — ფართობული

სიჩქარე. თუ წერტილის პოლარულ კოორდინატებს r , φ -ით აღვნიშნავთ მივიღებთ (იხ. III თავის (9,4) ფორმულა)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (15,2)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (15,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \quad (15,3)$$

როგორც ვიცით (იხ. III თავის (7,4) ფორმულა), M წერტილის სიჩქარე ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ (ნახ. 107):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0, \quad (15,4)$$

სადაც \vec{r}^0 და \vec{p}^0 პოლარულ კოორდინატთა ლერძების მგეზავებია, \vec{r} არის M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ.

უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს

$$d\vec{r} = dr \vec{r}^0 + r d\varphi \vec{p}^0. \quad (15,5)$$

თუ (15,4) ტოლობის ორივე მხარეს ავახარისხებთ კვადრატში, მივიღებთ

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}.$$

თუ ამ უკანასკნელში dt -ს ნაცვლად შევიტანთ მის მნიშვნელობას (15,3) ტოლობიდან, გვექნება

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (15,6)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{1}{r} = u, \quad (15,7)$$

უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]. \quad (15,8)$$

ცოცხალი ძალის კანონი გვაძლევს

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \quad (15,9)$$

სადაც \vec{F} წარმოადგენს წერტილზე მოქმედ ცენტრალურ ძალას, რომელიც პარალელურია \vec{r} -ის. (15,5) ტოლობის ძალით ცხადია გვექნება

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F dr, \quad (15,10)$$

სადაც F არის \vec{F} ძალის გეგმილი \vec{r} ვექტორზე¹, ე. ი. $F = |\vec{F}|$, თუ \vec{F} ძალას და \vec{r} ვექტორს ერთნაირი გეზი აქვთ (განმზიდი ძალის შემთხვევაში) და $F = -|\vec{F}|$ წინააღმდეგ შემთხვევაში (O ცენტრისაკენ მიმზიდველი ძალის შემთხვევაში). უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (15,9) ტოლობა მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = F dr, \text{ ე. ი. } \frac{d}{d\varphi} \frac{mv^2}{2} = F \frac{dr}{d\varphi}.$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ v^2 -ის მნიშვნელობას (15,8) ტოლობიდან, ადვილად მივიღებთ

$$mC^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \frac{du}{d\varphi} = F \frac{dr}{d\varphi}. \quad (15,11)$$

¹ ვინაიდან \vec{F} ცენტრალური ძალაა, ამიტომ ის პარალელურია \vec{r}^0 -ის და, მაშასადამე, მართობია \vec{p}^0 -ის.

(15,7) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\frac{du}{d\varphi} = -u^2 \frac{dr}{d\varphi}.$$

თუ $\frac{du}{d\varphi}$ -ის მნიშვნელობას (15,11) ტოლობის მარცხენა მხარეში შევიტანთ, მივიღებთ ბინეს შემდეგ ფორმულას:

$$mC^2u^3 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) = -F, \quad (15,12)$$

რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს ციური სხეულების მექანიკაში.

§ 16. კიპლერის კანონები. ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონი

ციურ მექანიკას საფუძვლად უდევს სამი კანონი, რომელიც აღმოაჩინა კეპლერმა (1571—1630) მრავალრიცხოვან დაკვირვებათა ანალიზის საფუძველზე. ეს კანონები შემდეგია:

1. ყოველი პლანეტა (და აგრეთვე კომეტა) მოძრაობს ბრტყელ ტრაექტორიაზე, რომელიც კონუსურ კვეთას წარმოადგენს და რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე.

2. მზის ცენტრის მიმართ პლანეტის ცენტრის რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი შესაბამის დროის პროპორციულია (ადგილი აქვს ფართობთა კანონს).

3. მზის ირგვლივ პლანეტის ერთხელ შემოვლის დროის კვადრატი ტრაექტორიის დიდი ნახევარღერძის კუბის პროპორციულია, ე. ი. $\frac{T^2}{a^3}$ შეფარდება, სადაც a ტრაექტორიის

დიდი ნახევარღერძია, T კი—ტრაექტორიის ირგვლივ ერთხელ შემოვლის დრო, ერთნაირია ყველა პლანეტისათვის.

ამ კანონების საფუძველზე ნიუტონმა იპოვა პლანეტების მამოძრავებელი ძალები და შემდეგ აღმოაჩინა „მსოფლიო მიზიდულობის კანონი“.

§ 4-ში მოყვანილი მე-3 დებულების ძალით, კეპლერის პირველი და მეორე კანონიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ პლანეტების მამოძრავებელი ძალები წარმოადგენენ ცენტრალურ ძალებს, რომელთა მიმართულებებიც მზის ცენტრში გადის. ვიანოვით ახლა რა სახე ექნება ამ ძალებს.

როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, კონუსური კვეთის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში აქვს სახე

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (16,1)$$

სადაც e არის ექსცენტრისიტეტი, p —პარამეტრი, ამასთან ელიფსისა და ჰიპერბოლის შემთხვევაში $p = \frac{b^2}{a}$, სადაც a არის კონუსური კვეთის დიდი ნახევარღერძი, b —მცირე ნახევარღერძი, r და φ პოლარული კოორდინატებია.

(16,1) ტოლობის ძალით,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას ბინეს (15,12) ფორმულაში შევიტანთ, ადვილად მივიღებთ

$$F = - \frac{\mu m}{r^2}, \quad (16,2)$$

სადაც

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{aC^2}{b^2}. \quad (16,3)$$

ამრიგად, (16,2) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ პლანეტაზე მოქმედი ძალა წარმოადგენს მზის ცენტრის მიზიდულობის ძალას, რომელიც პლანეტის მასის პირდაპირპროპორციულია, ხოლო პლანეტიდან მზის ცენტრამდე მანძილის კვადრატის უკუპროპორციული.

პროპორციულობის μ კოეფიციენტს ეწოდება გაუსის მუდმივი.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ გაუსის მუდმივი ერთნაირია ყველა პლანეტისათვის. ვინაიდან ფართობთა მუდმივი უდრის გაორკეცებულ ფართობულ სიჩქარეს, ამიტომ

$$C = 2 \frac{d\sigma}{dt}.$$

მაგრამ, რადგან პლანეტის ტრაექტორია არის ელიფსი, რომლის ფართობიც ტოლია πab -სი, ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$C = \frac{2\pi ab}{T},$$

საიდანაც

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} p.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \frac{C^2}{p} = \mu. \quad (16,4)$$

აქედან ნათქვამის სამართლიანობა ცხადია, ვინაიდან $\frac{a^3}{T^2}$, კეპლერის მე-3 კანონის ძალით, ერთნაირია ყველა პლანეტისათვის.

ამრიგად, მზეს, როგორც მიზიდულობის ცენტრს, აქვს თავისი გაუსის მუდმივი, ის დამოკიდებულია მხოლოდ მზეზე. განვიხილოთ ნებისმიერი პლანეტა, როგორც მიზიდულობის ცენტრი, პლანეტის მასა იყოს m , გაუსის მუდმივი პლანეტისათვის აღნიშნოთ γ -თი. ცხადია, აღნიშნულ პლანეტაზე მოქმედებს მზის მიზიდულობის ძალა, რომლის სიდიდეც, (16,2) ტოლობის ძალით, იქნება $\frac{\mu m}{r^2}$. მაგრამ მზეზეც მოქმედებს აღებული პლანეტის მიზიდუ-

ლობის ძალა, რომლის სიდიდეც, ცხადია, იქნება $\frac{\nu M}{r^2}$, სადაც M არის მზის მასა. ქმედებისა და უკუქმედების პრინციპის ძალით

$$\frac{\mu m}{r^2} = \frac{\nu M}{r^2},$$

საიდანაც

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\nu}{m}.$$

ამრიგად, აღებული პლანეტის, როგორც მიზიდულობის ცენტრის, გაუსის მუდმივის შეფარდება მისივე მასასთან მუდმივია:

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\nu}{m} = \frac{\nu_n}{m_n} = f,$$

სადაც f მუდმივია, რომელსაც გრავიტაციის მუდმივი ეწოდება. უკანასკნელი ტოლობებიდან

$$\mu = f M.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (16,2) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$|F| = f \frac{mM}{r^2}.$$

ასეთი გზით ნიუტონი მივიდა შემდეგ კანონამდე:

ორი სხეული იზიდავს ერთმანეთს ძალით, რომელიც მათი მასათა ნამრავლის პირდაპირპროპორციულია და ინერციის ცენტრებს შორის მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია.

ამ კანონს ეწოდება „მსოფლიო მიზიდულობის კანონი“.

§ 17. ნიუტონის ამოცანა

ვიპოვოთ მატერიალური ნაწილაკის ტრაექტორია, თუ ცნობილია, რომ მასზე მოქმედებს გარკვეული ცენტრის მიზიდულობის ძალა, რომელიც ამ ნაწილაკის მასის პირდაპირპროპორციულია, ხოლო—აღებული ნაწილაკიდან მიზიდულობის ცენტრამდე მანძილის კვადრატის უკუპროპორციული.

ნიუტონის ამ ამოცანის ამოხსნისათვის ვსარგებლობთ ბინეს ფორმულით. ამოცანის პირობის ძალით

$$F = - \frac{\mu m}{r^2}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას ბინეს (15,12) ფორმულაში შევიტანთ, ადვილად მივიღებთ

$$\frac{d^2 u}{d \varphi^2} + u = \frac{\mu}{C^2}.$$

ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას, ცხადია, შემდეგი სახე აქვს:

$$u = \alpha \sin(\varphi + \epsilon) + \frac{\mu}{C^2},$$

სადაც α და ε ნებისმიერი მუდმივებია. ეს უკანასკნელი შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$u = \alpha \cos(\varphi - \beta) + \frac{\mu}{C^2} = \frac{\mu}{C^2} \left[1 + \frac{\alpha C^2}{\mu} \cos(\varphi - \beta) \right],$$

სადაც

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\frac{\mu}{C^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\alpha C^2}{\mu} = e,$$

და გავიხსენებთ, რომ

$$u = \frac{1}{r},$$

უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

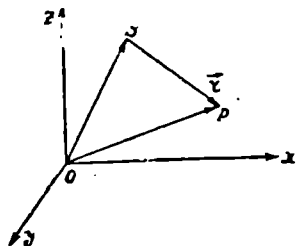
$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \beta)}. \quad (17,1)$$

ეს უკანასკნელი კონუსური კვეთის განტოლებას წარმოადგენს პოლარულ კოორდინატებში.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ, მოცემული საწყისი პირობების მიხედვით, ხსენებული კონუსური კვეთა შეიძლება იყოს როგორც ელიფსი, ისე ჰიპერბოლა და პარაბოლა (ამას მკითხველს ვანდობთ).

§ 18. ორი სხეულის ამოცანა. კეპლერის მესამე კანონის შესწორება

ვთქვათ, მოცემულია ორი მატერიალური ნაწილაკი S და P , რომელთა მასებია შესაბამისად M და m . აღვნიშნოთ \vec{r}_s -ით და \vec{r}_p -ით ამ წერტილების



რადიუს-ვექტორები რაიმე უძრავი O წერტილის მიმართ (ნახ. 108). ვიგულისხმობთ, რომ ეს წერტილები მიიზიდებიან ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონის თანახმად; ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ მიზიდულობის ძალას \vec{F} -ით აღვნიშნავთ, გვექნება

$$|\vec{F}| = f \frac{mM}{r^2},$$

ნახ. 108.

სადაც r არის მანძილი S და P წერტილებს შორის.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ერთი წერტილის ფარდობითი მოძრაობა მეორე წერტილის მიმართ.

ცხადია, S და P წერტილების მოძრაობის განტოლებებია

$$M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = f \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (18,1)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} = -f \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (18,2)$$

სადაც \vec{r} არის P წერტილის რადიუს-ვექტორი S წერტილის მიმართ. თუ ამ ტოლობებიდან პირველს გავამრავლებთ m -ზე, მეორეს M -ზე და შემდეგ მეორიდან პირველს გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -f \frac{m(m+M)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (18,3)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს S წერტილის მიმართ P წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებას. ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ P წერტილის მოძრაობა S წერტილის მიმართ ისე ხდება, თითქოს S წერტილი უძრავი იყოს, მაგრამ მისი მასა ტოლი იყოს $M+m$.

ასევე დაიწერება S წერტილის მოძრაობის განტოლება P წერტილის მიმართ.

ვიგულისხმობთ, რომ S არის მზის ცენტრი, ხოლო P რომელიმე პლანეტის (მაგალითად, დედამიწის) ცენტრი. მაშინ (18,3) წარმოადგენს მზის მიმართ პლანეტის მოძრაობის განტოლებას. მეორეს მხრივ, (16,2) ფორმულის ძალით, მზის ცენტრის მიმართ პლანეტის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (18,4)$$

სადაც μ არის გაუსის მუდმივი. (18,3)-ის და (18,4)-ის შედარება გვარწმუნებს, რომ მზისათვის გაუსის მუდმივს აქვს სახე

$$\mu = (m + M) f. \quad (18,5)$$

ჩვენ წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ თუ მზე ნაგულისხმევია უძრავ მიმზიდველ ცენტრად, მაშინ გაუსის მუდმივი ყველა პლანეტისათვის ერთნაირია. როცა მზე უძრავად არ არის ნაგულისხმევი, მაშინ ეს დასკვნა არ არის სწორი. მართლაც, განვიხილოთ ორი პლანეტა, რომელთა მასებია m_1 და m_2 , მათი შესაბამის გაუსის მუდმივები, (18,5) ტოლობის ძალით, იქნება

$$\mu_1 = (m_1 + M) f, \quad \mu_2 = (m_2 + M) f,$$

საიდანაც

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_1 + M}{m_2 + M} = \frac{1 + \frac{m_1}{M}}{1 + \frac{m_2}{M}}.$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ $\mu_1 \neq \mu_2$, მაგრამ ვინაიდან პლანეტების m_1 და m_2 მასები მზის მასასთან შედარებით ძალიან პატარაა, ამიტომ $\mu_1 \approx \mu_2$,

(16,4) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$\mu_1 = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}, \quad \mu_2 = \frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2},$$

საიდანაც

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \left(\frac{a_1^3}{T_1^2} \right) : \left(\frac{a_2^3}{T_2^2} \right) = \frac{1 + \frac{m_1}{M}}{1 + \frac{m_2}{M}}.$$

უკანასკნელი ტოლობა იძლევა კეპლერის მესამე კანონის გარკვეულ დაზუსტებას.

10. M წერტილი, რომლის მასა m -ის ტოლია, მიიზიდება უძრავი O ცენტრისაკენ $F = \mu^2 m r$ ძალით, სადაც μ მუდმივია, ხოლო r — მანძილი მიზიდულობის O ცენტრსა და M წერტილს შორის. საწყის $t=0$ მომენტში $r=a$, $v=v_0$ და საწყისი სიჩქარე \vec{v}_0 ადგენს საწყის OM_0 მიმართულებასთან α კუთხეს. ვიპოვოთ M წერტილის მოძრაობის კანონი და ტრაექტორია.

ვინაიდან მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალა ცენტრალურია, ამიტომ მოძრაობა ბრტყელია; წერტილი იმოძრაეობს O ცენტრსა და \vec{v}_0 სიჩქარის მიმართულებაზე გაშვალ სიბრტყეზე. კოორდინატა Oxy სისტემა ამ სიბრტყეზე ისე ავიღოთ, რომ Ox ღერძი ემთხვეოდეს \overline{OM} რადიუს-ვექტორის საწყის მიმართულებას, ე. ი. \overline{OM}_0 ვექტორს.

მატერიალური M წერტილის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2 y = 0. \quad (1)$$

თუ პარამონიული რხევის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნებს გავიხსენებთ (იხ. § 10, განტოლება (10,3), ფორმულა (10,7)) დავრწმუნდებით, რომ (1) სისტემის ზოგად ამოხსნას ექნება სახე:

$$x = A \sin(\mu t + \epsilon), \quad y = B \sin(\mu t + \eta), \quad (2)$$

სადაც A , B , ϵ , η ნებისმიერი მუდმივებია. მოცემული საწყისი პირობების ძალით, გვექნება

$$\begin{aligned} A \sin \epsilon &= a, \quad B \sin \eta = 0, \\ A\mu \cos \epsilon &= v_0 \cos \alpha, \quad B\mu \cos \eta = v_0 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + \frac{v_0^2}{\mu^2} \cos^2 \alpha}, \quad \epsilon = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{v_0^2}{\mu^2} \cos^2 \alpha}}, \quad \eta = 0, \\ B &= \frac{v_0 \sin \alpha}{\mu}. \end{aligned}$$

(3)-ის ძალით, (2) ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$x = A (\sin \mu t \cos \epsilon + \cos \mu t \sin \epsilon) = a \cos \mu t + \frac{v_0 \cos \alpha}{\mu} \sin \mu t, \quad (4)$$

$$y = B \sin \mu t = \frac{v_0 \sin \alpha}{\mu} \sin \mu t. \quad (5)$$

ამრიგად, მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონი მოცემულია (4)-და (5) განტოლებებით.

ვიპოვოთ ახლა წერტილის ტრაექტორია. ამისათვის (4) და (5) ტოლობებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი. (4) ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$x = a \cos \mu t + y \operatorname{ctg} \alpha,$$

საიდანაც

$$a \cos \mu t = x - y \operatorname{ctg} \alpha. \quad (6)$$

(5) ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$a \sin \mu t = \frac{a}{B} y. \quad (7)$$

(6) და (7) ტოლობებს თუ ავახარისხებთ კვადრატში და შევკრებთ, მივიღებთ

$$x^2 - 2xy \operatorname{ctg} \alpha + y^2 \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{a^2}{B^2} \right) = a^2. \quad (8)$$

ეს უკანასკნელი ელიფსის განტოლებაა და მაშასადამე, ტრაექტორია წარმოადგენს ელიფსს ცენტრით O წერტილში.

17. ამოვსხნათ წინა ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა M წერტილი () ცენტრიდან განიზიდება $F' = \mu^2 m r$ ძალით. საწყისი პირობები და კოორდინატთა სისტემა ისე ავიღოთ, როგორც წინა ამოცანაში.

წერტილის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu^2 x = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - \mu^2 y = 0. \quad (9)$$

ამ სისტემის ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$x = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}, \quad y = c_3 e^{\mu t} + c_4 e^{-\mu t}, \quad (10)$$

სადაც c_1, c_2, c_3, c_4 ნებისმიერი მუდმივებია. საწყისი პირობების ძალით ვღებულობთ

$$c_1 = \frac{1}{2\mu} (a\mu + v_0 \cos \alpha), \quad c_2 = \frac{1}{2\mu} (a\mu - v_0 \cos \alpha),$$

$$c_3 = \frac{v_0 \sin \alpha}{2\mu}, \quad c_4 = -\frac{v_0 \sin \alpha}{2\mu}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (10) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$x = \frac{a}{2} (e^{\mu t} + e^{-\mu t}) + \frac{v_0 \cos \alpha}{2\mu} (e^{\mu t} - e^{-\mu t}),$$

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha}{2\mu} (e^{\mu t} - e^{-\mu t}).$$

ტრაექტორია იქნება ჰიპერბოლა ცენტრით O წერტილში:

$$x^2 - 2xy \operatorname{ctg} \alpha + y^2 \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{\mu^2 a^2}{v_0^2 \sin^2 \alpha} \right) = a^2.$$

18. ყუმბარის საწყისი სიჩქარეა $v_0 = 490 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}$. პორიზონტისადმი რა კუთხით უნდა იყოს გასროლილი ყუმბარა, რომ ის მოხვდეს სამიზნეს კოორდინატებით $x = 700$ მ, $y = 680$ მ, სადაც კოორდინატთა Oxy სისტემა ისეა აღებული, რომ Oy ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად და მოგებულია ქვევიდან ზევით, ყუმბარის გასროლა ხდება O წერტილიდან.

(14,5) ტოლობის ძალით, ყუმბარის ტრაექტორია იქნება

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (11)$$

სადაც α საძიებელი კუთხეა. (11) ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha.$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ $x=700$ მ, $y=680$ მ, ადვილად მივიღებთ $\alpha=45^\circ$.

19. ვთქვათ, მატერიალური წერტილი, რომელზედაც მოქმედებს ცენტრალური ძალა, მოძრაობს ლოგარითმულ ხეიაზე:

$$r = ae^{\lambda \varphi},$$

სადაც a და λ მუდმივებია. ვიპოვოთ წერტილზე მოქმედი ძალა.

ვისარგებლათ ბინეს ფორმულით

$$F = -mc^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right), \quad (12)$$

სადაც $u = \frac{1}{r}$. ცხადია, გვექნება

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\varphi^2} = \frac{\lambda^2}{a} e^{-\lambda \varphi} = \frac{\lambda^2}{r}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (12)-ში, მივიღებთ

$$F = -\frac{mc^2 (\lambda^2 + 1)}{r^3}.$$

ამრიგად, წერტილზე მოქმედებს ცენტრის მიზიდულობის ძალა, რომელიც მანძილის კუბის უკუპროპორციულია.

ბ ა ნ ა ო ფ ი ლ ე ბ ა 5

მაგარიკალური წარმართის არათავისუფალი მოძრაობა

§ 19. ბ ბ ბ ბ

ჩვენ აქამდე განვიხილავდით თავისუფალ მატერიალურ წერტილს, ე. ი. ისეთ წერტილს, რომლის მოძრაობაც არ იყო შეზღუდული რაიმე გეომეტრიული პირობით. ვთქვათ, წერტილი არ არის თავისუფალი—ის ემორჩილება ბმას. ამ შემთხვევაში წერტილის x , y , z კოორდინატებს შორის იარსებებს გარკვეული ფუნქციონალური დამოკიდებულება, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში წერტილი თავისუფალი იქნებოდა. ხსენებულ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ბმის განტოლებას უწოდებენ. თუ მატერიალური წერტილი იძულებულია მოთავსებული იყოს ყოველთვის რაიმე ფართეულზე, რომლის განტოლებას აქვს სახე

$$f(x, y, z) = 0. \quad (19,1)$$

მაშინ, ცხადია, ეს უკანასკნელი ბმის განტოლება იქნება.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: მოცემულია l სიგრძის ღერო, რომლის ერთი ბოლო გარკვეულ O წერტილში სახსრითაა დამაგრებული, ხოლო მეორე

ბოლოზე მოთავსებულია მატერიალური M ნაწილაკი. ცხადია, M წერტილს შეუძლია მოძრაობა მხოლოდ l რადიუსიან სფერულ ზედაპირზე და, მაშასადამე, თუ კოორდინატა $Oxyz$ სისტემას ავიღებთ სათავეთ O წერტილში, მაშინ ბმის განტოლებას ექნება სახე

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

ბმის (19,1) განტოლებაში დრო ცხადად არ მონაწილეობს. ბმას, რომლის განტოლებაში დრო ცხადად არ მონაწილეობს, ეწოდება სტაციონარული ბმა.

ბმას, რომლის განტოლებაშიც დრო ცხადად მონაწილეობს, ეწოდება არასტაციონარული ბმა. ამრიგად, არასტაციონარული ბმის განტოლებას აქვს სახე

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (19,2)$$

განვიხილოთ არასტაციონარული ბმის შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ, ზემოხსენებული ღეროს A ბოლო $\vec{s}_0 = (a, b, c)$ მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს გარკვეულ Δ წრფეზე, ხოლო მეორე ბოლოზე მოთავსებულია $M(x, y, z)$ მატერიალური ნაწილაკი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ ხსენებული წრფე $Oxyz$ სისტემის სათავეში გადის და $t=0$ მომენტში აღებული ღეროს A ბოლო წერტილი O წერტილს ემთხვევა, მაშინ ბმის განტოლებას ექნება სახე¹ (ნახ. 109)

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 - l^2 = 0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ ღეროს სიგრძე l ერთეულით იცვლება დროის ერთეულში, მაშინ უკანასკნელი განტოლების ნაცვლად გვექნება

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 - (l - kt)^2 = 0. \quad (19,3)$$

კერძოდ, თუ Δ ღერძი Ox ღერძს ემთხვევა, მაშინ უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$(x - at)^2 + y^2 + z^2 - (l - kt)^2 = 0.$$

წერტილი შეიძლება ერთდროულად ორ ბმას ემორჩილებოდეს. ასე, მაგალითად, თუ წერტილი იძულებულია მოთავსებული იყოს რაიმე წირზე, მაშინ წერტილის კოორდინატები ამ წირის განტოლებებს უნდა აკმაყოფილებდნენ და, მაშასადამე, ბმის განტოლებებს ექნება სახე

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &= 0, \\ f_2(x, y, z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (19,4)$$

აქ წირი განხილული გვაქვს როგორც ორი ფართეულის თანაკვეთა.

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ ისეთი შემთხვევები, როცა ბმის განტოლებაში სიჩქარის კომპონენტები არ მონაწილეობენ. ბმებს, რომელთა განტოლებაში სიჩქარის კომპონენტები არ მონაწილეობენ, ჰოლონომური ბმები ეწოდება.

¹ ვინაიდან \vec{s}_0 პარალელურია Δ ღერძის, ამიტომ, ცხადია,

$$\vec{OA} = \vec{s}_0 \cdot t = (at, bt, ct).$$

ბმებს, რომელთა განტოლებაში სიჩქარის კომპონენტები მონაწილეობენ, არაპოლონომური ბმები ეწოდება. არაპოლონომური ბმის განტოლებას ექნება სახე

$$f(x, y, z, x', y', z', t) = 0. \quad (19,5)$$

ზემოთ განხილულ შემთხვევებში ბმა ტოლობით არის დახასიათებული, ასეთ ბმას ორმხრივი (დამკერი) ბმა ეწოდება.

პოლონომური ბმა უშუალოდ შეზღუდვას ადებს მხოლოდ წერტილის კოორდინატებს, არაპოლონომური ბმა კი — წერტილის კოორდინატებს და სიჩქარის კომპონენტებს.

თუ ბმა უტოლობით არის დახასიათებული, მაშინ მას ცალმხრივი (არადამკერი) ბმა ეწოდება. ასე, მაგალითად,

$$f(x, y, z, t) \leq 0 \quad (19,6)$$

უტოლობით დახასიათებული ბმა წარმოადგენს ცალმხრივ, პოლონომურ, არასტაციონარულ ბმას.

მოვიყვანოთ ცალმხრივი ბმის მაგალითი. ვთქვათ, უჭიმადი იდეალური ძაფი (იხ. IV თავის § 13) ერთი ბოლოთი დამაგრებულია O წერტილში, ხოლო მის მეორე ბოლოზე მოთავსებულია მატერიალური M წერტილი. თუ კოორდინატთა სისტემის სათავედ მივიღებთ O წერტილს, მაშინ ბმა დახასიათდება შემდეგი უტოლობით:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0,$$

სადაც l არის ძაფის სიგრძე. ეს უტოლობა გვიჩვენებს, რომ მატერიალური წერტილი l რადიუსიანი სფეროს გარეთ ვერ გამოვა, ის მოთავსებული იქნება ამ სფეროს შიგნით, ან ზედაპირზე.

ჩვენ შემდეგში განვიხილავთ მხოლოდ პოლონომური, ორმხრივი ბმების შემთხვევას. არაპოლონომურ ბმებს განვიხილავთ წერტილთა სისტემის დინამიკაში.

ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს ფართეულზე, რომლის განტოლებას (19,1) ან (19,2) სახე აქვს. როგორც ვიცით (იხ. IV თავი, § 6, პრინციპი 3), აღებული ბმის მექანიკური მოქმედება მატერიალურ წერტილზე ტოლფასია გარკვეული \overline{R} ძალის, რომელსაც რეაქციის ძალა ეწოდება. ეს ძალა შეგვიძლია დავშალოთ ორ შესაკრებ ძალად

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{T}, \quad (19,7)$$

სადაც \overline{N} ემთხვევა ფართეულის ნორმალს აღებულ წერტილში, ხოლო \overline{T} მოთავსებულია ფართეულის მხებ სიბრტყეში.

როგორც ვიცით (იხ. IV თავის § 11), \overline{T} ძალას ეწოდება ხახუნის ძალა, ხოლო \overline{N} -ს ნორმალური რეაქციის ძალა (წნევის ძალა). ჩვენ ვიტყვით, რომ ფართეული (ზედაპირი) გლუვია, ანუ ბმა იდეალურია, თუ \overline{R} ძალა ფართეულის მართობია (ხახუნის ძალა $\overline{T} = 0$).

ნორმალური რეაქცია წარმოადგენს იმ ძალას, რომლითაც ბმა აწევს სხეულს, ხოლო ხახუნის ძალა წარმოიშვება მოძრავ სხეულთან ბმის (ზედაპირის) ხახუნის შედეგად. თუ ზედაპირი ისეთია, რომ ხახუნს ადგილი არა აქვს,

მაშინ $\overline{T}=0$. საზოგადოდ, ხახუნის ძალა არის შედეგი ორი სხეულის ურთიერთქმედებისა, როცა ეს სხეულები ეხებიან ერთმანეთს და ამასთან მოძრაობენ ერთიმეორის მიმართ. ხახუნის ძალა წარმოიშვება სხეულების შეხების წერტილში, ის მოთავსებულია სხეულების ზედაპირთა თანახების საერთო სიბრტყეში და მიმართულია ერთი სხეულის მეორის მიმართ ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგოდ. ორი სხეულის შეხებისას ხახუნი მაშინ წარმოიშვება, როცა შემხები ზედაპირები არ არიან აბსოლუტურად გლუვი—ზედაპირები ხორკლიანია. ხახუნის ძალა წარმოადგენს იმ ძალას, რომელიც საჭიროა ხორკლიანობის შედეგად წარმოშობილი შებმულობის დასაძლევად. მე-18 საუკუნეში კულონმა ცდებით დაადასტურა, რომ ხახუნის ძალა მოთავსებულია სხეულების თანახების სიბრტყეში, ის მიმართულია ერთი სხეულის მეორის მიმართ ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგოდ და მისი სიდიდე პროპორციულია ნორმალური რეაქციის ძალის სიდიდისა:

$$|T| = k|N|, \quad (19,8)$$

სადაც k არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელსაც ხახუნის კოეფიციენტს უწოდებენ (იხ. IV თავის § 11).

§ 20. ნამდვილი და შესაძლო გადაადგილევები

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი ემორჩილება ბმას, რომლის განტოლებასაც აქვს სახე

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (20,1)$$

და ვთქვათ, აღებულ t მომენტში წერტილის მდებარეობა დახასიათებულია $\vec{r} = (x, y, z)$ რადიუს-ვექტორით. უსასრულოდ მცირე dt დროში რადიუს-ვექტორის ნაზრდი აღენიშნათ $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ -ით. dt დროში შესრულებულ $d\vec{r}$ გადაადგილებას, რომელიც თავსებადია ბმასთან, ეწოდება წერტილის ნამდვილი გადაადგილება. ნამდვილი გადაადგილების კომპონენტები, (20,1) ტოლობის ძალით, შემდეგ განტოლებას აკმაყოფილებენ:

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = 0. \quad (20,2)$$

თუ (20,2) ტოლობის მარცხენა მხარეში მდებარე ფუნქციას გავშლით ტეილორის მწკრივად, უკუვაგდებთ მეორე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს და გავითვალისწინებთ (20,1) ტოლობას, მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (20,3)$$

ცხადია, ეს პირობა ასე ჩაიწერება:

$$(d\vec{r} \cdot \text{grad } f) + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \quad (20,3')$$

სადაც $\text{grad } f$ აღებულია x, y, z ცვლადების მიმართ, ე. ი.

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

ამრიგად, ნამდვილი გადაადგილების კომპონენტები აკმაყოფილებენ (20,3) პირობას.

თუ ბმა სტაციონარულია, მაშინ $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ და (20,3) მოგვეცემს

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \quad (20,4)$$

დაეტოვოთ ახლა t უცვლელად და განვიხილოთ \vec{r} რადიუს-ვექტორის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, რომელიც თავსებადია ბმის განტოლებასთან თავიდან აღებული t -სათვის, ე. ი.

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, t) = 0. \quad (20,5)$$

ასეთ გადაადგილებას ეწოდება შესაძლო გადაადგილება.

შესაძლო გადაადგილება არ არის დაკავშირებული ნამდვილ მოძრაობასთან, რადგან დროის ცვლილების გარეშე გადაადგილება არ მოხდება, მაგრამ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ამ ცნების შემოღებას დიდი მნიშვნელობა აქვს მოძრაობის დასახასიათებლად.

საესებით ისე, როგორც (20,2) ტოლობიდან მიღებული იყო (20,3) ტოლობა, (20,5) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \quad (20,6)$$

ამრიგად, შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები აკმაყოფილებენ (20,6) პირობას. ეს პირობა, ცხადია, ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$(\vec{dr} \cdot \text{grad } f) = 0. \quad (20,6')$$

(20,4) და (20,6) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს, რომ როცა ბმა სტაციონარულია, მაშინ მატერიალური წერტილის ნამდვილი გადაადგილება დაემთხვევა ერთ-ერთ შესაძლო გადაადგილებას. როგორც აღვილი მისახვედრია, ამ გარემოებას აღვილი არ ექნება არასტაციონარული ბმისათვის.

(20,3) ტოლობის ძალით, (20,1) განტოლებით მოცემული ბმა $\vec{r} = (x', y', z')$ სიჩქარეს აღებს შემდეგ შეზღუდვას:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (20,7)$$

თუ ბმა სტაციონარულია, მაშინ გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0. \quad (20,8)$$

ეს პირობები, ცხადია, ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (20,7')$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } f) = 0. \quad (20,8')$$

(20,7) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ იმ პირობას, რომელსაც ბმა ადებს აჩქარებას. ამ პირობას, ცხადია, შემდეგი სახე ექნება:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + \varphi(t, x, y, z, x', y', z') = 0, \quad (20,9)$$

სადაც φ არის t, x, y, z, x', y', z' სიდიდეებზე დამოკიდებული საესეებით-გარკვეული ფუნქცია. ეს პირობა ასე შეიძლება ჩაეწეროს:

$$(\vec{w} \cdot \text{grad } f) + \varphi(t, x, y, z, x', y', z') = 0. \quad (20,10)$$

§ 21. მატერიალური წერტილის მოძრაობა ფართეულზე

ეთქვას, მატერიალური M წერტილი იძულებულია იმოძრაოს ფართეულზე, რომლის განტოლებას აქვს სახე

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (21,1)$$

ვიგულისხმობთ, რომ ფართეული გლუვია (ბმა იდეალურია) და აღენიშნობთ \vec{N} -ით ნორმალური რეაქციის ძალა. ვინაიდან $\text{grad } f$ არის (21,1) ფართეულის ნორმალის პარალელური (იხ. § 7) და, მაშასადამე, $\vec{N} \parallel \text{grad } f$, ამიტომ გვექნება

$$\vec{N} = \lambda \text{grad } f, \quad (21,2)$$

სადაც λ პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც ფართეულის წერტილისა და დროის საძიებელ ფუნქციას წარმოადგენს.

IV თავის § 6-ში მოყვანილი მესამე პრინციპის ძალით, განსახილველ შემთხვევაში წერტილის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$m \vec{w} = \vec{F} + \lambda \text{grad } f, \quad (21,3)$$

სადაც m არის წერტილის მასა, \vec{F} — უშუალოდ მოქმედი ძალა. თუ ამ განტოლებას კოორდინატთა ლერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (21,4)$$

(21,1) და (21,4) წარმოადგენენ 4 განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას, საიდანაც მოიძებნებიან x, y, z, λ სიდიდეები, როგორც დროის ფუნქციები. ცხადია, თუ λ მოძებნილია, მაშინ, (21,2) ტოლობის ძალით, ცნობილი იქნება რეაქციის ძალაც.

ცოცხალი ძალის კანონი (იხ. § 6), განსახილველ შემთხვევაში, მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + \lambda (\text{grad } f \cdot d\vec{r}). \quad (21,5)$$

$$(\text{grad } f \cdot d\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

ამიტომ, (20,3) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$(\text{grad } f \cdot d\vec{r}) = - \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (21,5) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

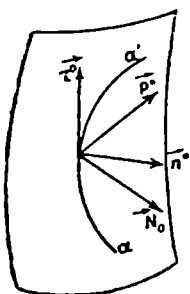
$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (21,6)$$

თუ ბმა სტაციონარულია, მაშინ $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (21,7)$$

ამრიგად, თუ ბმა სტაციონარულია, მაშინ ცოცხალი ძალის კანონს არათავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის ისეთივე სახე აქვს, როგორც თავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის.

განვიხილოთ ახლა რაიმე ფართეულზე მოძრავი წერტილის ტრაექტორიის ელემენტი aa' (ნახ. 110) და გავვლოთ აღებულ წერტილზე ტრაექტორიის მხები, ტრაექტორიის მთავარი ნორმალი და ფართეულის ნორმალი. მათი მგეზავები შესაბამად იყოს



ნახ. 110.

\vec{r} , \vec{n} , \vec{N} . ფართეულზე მოთავსებულ წირს, რომლის ყოველ წერტილზე გავლებული მთავარი ნორმალი ემთხვევა ფართეულის ნორმალს, ეწოდება გეოდეზიური წირი. აღვნიშნოთ მ-თი კუთხე \vec{n} და \vec{N} ვექტორებს შორის. ცხადია, ტრაექტორია აღებულ წერტილზე დაემთხვევა ამ წერტილზე გამავალ ფართეულის გეოდეზიურ წირს, თუ $\varphi = 0$.

\vec{r} და \vec{N} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყე მოგვცემს ფართეულზე ნორმალურ კვეთას, რომლის ბინორმალის მგეზავიც იყოს \vec{p} . ცხადია, \vec{p} მოთავსებულია ფართეულის მხებ სიბრტყეზე და მართობია \vec{r} -ის. \vec{r} , \vec{N} და \vec{p} ურთიერთმართობია, მათი გეზები ასე შევარჩიოთ: \vec{r} მოგვგზოთ ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, \vec{N} —ფართეულის შიგა ნორმალის მიმართულებით, ხოლო \vec{p} ისე მოგვგზოთ, რომ \vec{r} , \vec{N} და \vec{p} ვექტორებმა მარცხენა სისტემა შეადგინონ. თუ აჩქარებას დავშლით მხებ და ნორმალურ აჩქარებებად, მივიღებთ

$$m \left(\frac{dv}{dt} \vec{r} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \right) = \vec{F} + \vec{N},$$

სადაც ρ აღებულ წერტილში ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსს აღნიშნავს.

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ ტრაექტორიის მხებზე, ფართეულის ნორმალზე და ნორმალური კვეთის ბინორმალზე, მივიღებთ

$$m \frac{dv}{dt} = F_r,$$

$$\frac{mv^2}{\rho} \cos \vartheta = F_N + N,$$

$$\frac{mv^2}{\rho} \sin \vartheta = F_p.$$

ამ განტოლებებს წერტილის ფართეულზე მოძრაობის ბუნებრივი განტოლებები ეწოდება.

განვიხილოთ წერტილის ინერციით მოძრაობა ფართეულზე ($\vec{F}=0$). ამ შემთხვევაში, უკანასკნელი განტოლებები მოგვცემს

$$m \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$\frac{mv^2}{\rho} \cos \vartheta = N,$$

$$\frac{mv^2}{\rho} \sin \vartheta = 0,$$

საიდანაც $v = \text{const}$, $\vartheta = 0$. ამრიგად, თუ ფართეულზე მოძრავე წერტილზე უშუალოდ მოქმედი ძალა ნულის ტოლია, მაშინ წერტილი იმოძრაებს გეოდეზიურ წირზე მუდმივი სკალარული სიჩქარით და, მაშასადამე, ფართეულზე მდებარე გეოდეზიური წირი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფართეულზე ინერციით მოძრავე მატერიალური წერტილის ტრაექტორია.

§ 22. მატერიალური წერტილის წირზე მოძრაობის განტოლებები. ცოცხალი ძალის ძანონი

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი მოძრაობს წირზე, რომლის განტოლებებსაც აქვს სახე

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &= 0, \\ f_2(x, y, z, t) &= 0. \end{aligned} \quad (22,1)$$

აქ წირი განხილულია როგორც ორი ფართეულის თანაკვეთა. ვიგულისხმობთ, რომ ის ფართეულები გლუვია (ბმები იდეალურია).

ცხადია, მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$m \vec{w} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (22,2)$$

სადაც \vec{R} აღებული წირის რეაქციის ძალაა. შეიძლება დავწეროთ

$$\vec{R} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2, \quad (22,3)$$

სადაც N_1 და \vec{N}_2 ზემოხსენებული ფართეულების შესაბამის რეაქციის ძალებია. მაგრამ, ვინაიდან ხსენებული ფართეულები გლუვია, ამიტომ გვექნება (იხ. (21,2) ფორმულა)

$$\vec{N}_1 = \lambda_1 \text{grad } f_1, \quad (22,4)$$

$$\vec{N}_2 = \lambda_2 \text{grad } f_2,$$

λ_1, λ_2 საძიებელი მამრავლებია.

(22,3) და (22,4) ფორმულების ძალით, (22,2) განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$m \vec{w} = \vec{F} + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2. \quad (22,5)$$

თუ ამ ტოლობას კოორდინატთა სისტემაზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (22,6)$$

ამ განტოლებებს უნდა დავუმატოთ აგრეთვე ბმის (22,1) განტოლებები. (22,1) და (22,6) განტოლებები წარმოადგენენ 5 განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას, საიდანაც მოიძებნებიან $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ სიდიდეები, როგორც დროის ფუნქციები.

(22,1) ტოლობების ძალით, ნამდვილი გადაადგილების კომპონენტები შემდეგ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ (იხ. (20,3) ფორმულა):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz + \frac{\partial f_2}{\partial t} dt &= 0, \end{aligned} \quad (22,7)$$

ხოლო შესაძლო გადაადგილებების კომპონენტები—შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z &= 0. \end{aligned} \quad (22,8)$$

განსახილველ შემთხვევაში, ცხადია, ცოცხალი ძალის კანონი მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + \lambda_1 (\text{grad } f_1 \cdot d\vec{r}) + \lambda_2 (\text{grad } f_2 \cdot d\vec{r}). \quad (22,9)$$

ვინაიდან

$$(\text{grad } f_1 \cdot d\vec{r}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz,$$

ამიტომ, (22,7)-ის პირველი ტოლობის ძალით, გვექნება

$$(\text{grad } f_1 \cdot d\vec{r}) = -\frac{\partial f_1}{\partial t} dt.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$(\text{grad } f_2 \cdot d\vec{r}) = -\frac{\partial f_2}{\partial t} dt.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (22,9) ტოლობაში შევითავსებთ, მივიღებთ

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} dt. \quad (22,10)$$

თუ ბმები სტაციონარულია, მაშინ $\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

ამრიგად, თუ ბმები სტაციონარულია მაშინ, ცოცხალი ძალის კანონს წირზე მოძრავი არათავისუფალი წერტილისათვის ისეთივე სახე აქვს, როგორც თავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის.

§ 23. არათავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობის პირობები

ვიგულისხმობთ ჯერჯერობით, რომ მატერიალური წერტილი ემორჩილება ერთ იდეალურ ბმას, რომლის განტოლებასაც აქვს სახე

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (23,1)$$

როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები აკმაყოფილებენ პირობას (იხ. (23,6) ტოლობა)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (23,2)$$

(23,1) განტოლების ძალით, განსახილველ შემთხვევაში წერტილის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას ექნება სახე (იხ. IV თავის § 6, პრინციპი 3)

$$\vec{F} + \lambda \text{grad } f = 0.$$

თუ ამ ტოლობას დავაგვევილებთ კოორდინატთა ლერძებზე, მივიღებთ

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (23,3)$$

(23,1) და (23,3) განტოლებებიდან განისაზღვრება x, y, z, λ სიდიდეები, ე. ი. განისაზღვრება წერტილის წონასწორობის მდებარეობა და რეაქციის ძალა¹.

¹ თუ λ ცნობილია, მაშინ (21,2) ტოლობის ძალით, რეაქციის ძალაც ცნობილი ექნება.

გამოვარკვეით რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს უშუალოდ მოქმედი ძალა, რომ ადგილი ჰქონდეს წონასწორობას.

გავამრავლოთ (23,3) სისტემის პირველი ტოლობა δx -ზე, მეორე δy -ზე, მესამე δz -ზე და შევკრიბოთ. (23,2) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = (\vec{F} \cdot \delta \vec{r}) = 0. \quad (23,4)$$

უკანასკნელი ტოლობა, ცხადია, წონასწორობის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს. დავამტკიცოთ, რომ ეს პირობა საკმარისიცაა წონასწორობისათვის.

(23,2) ტოლობის ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\lambda (\text{grad } f \cdot \delta \vec{r}) = 0,$$

სადაც λ განუსაზღვრელი მამრავლია. თუ ამ უკანასკნელს შევკრებთ (23,4) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$(\vec{F} + \lambda \text{grad } f) \cdot \delta \vec{r} = 0,$$

ანუ

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) \delta z = 0. \quad (23,5)$$

ვინაიდან δx , δy , δz შესაძლო გადაადგილებების კომპონენტები (23,2) პირობას აკმაყოფილებენ, ამიტომ მათ შორის დამოუკიდებელია მხოლოდ ორი, მაგალითად, δx და δy . შევარჩიოთ λ ისე, რომ (23,5) ტოლობაში δz -ის კოეფიციენტი ტოლი იყოს ნულის¹:

$$F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (23,6)$$

მაშინ (23,5) ტოლობა მოგვცემს

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y = 0.$$

მაგრამ, ვინაიდან δx და δy დამოუკიდებელნი არიან, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (23,7)$$

(23,6) და (23,7) პირობების (23,3) ტოლობებთან შედარება გვარწმუნებს ნათქვამის სამართლიანობაში.

ამრიგად, როცა მატერიალური წერტილი ემორჩილება (21,1) სახის იდეალურ ბმას, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას:

დებულება. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ მატერიალური წერტილი იყოს წონასწორობაში, იმაში მდგომარეობს, რომ მასზე უშუალოდ მოქმედი (აქტიური)

¹ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ (23,1) განტოლება ამოხსნაღია z -ის მიმართ და მაშასადამე,

$\frac{\partial f}{\partial z}$ განსაზღვრულია ნულისაგან. რის გამოც λ შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს (23,6) ტოლობას.

ძალის მხრე შესრულებული მუშაობა ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლი იყოს ნულის.

ეს დებულება შესაძლო გადაადგილებების პრინციპის სახელწოდებით არის ცნობილი.

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი იძულებულია იმოძრაოს წირზე, ე. ი. ემორჩილება (22,1) სახის ბმეს. (22,5) განტოლების ძალით, წერტილის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება

$$\vec{F} + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 = 0, \quad (23,8)$$

ანუ

$$\begin{aligned} F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \\ F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (23,9)$$

(22,1) და (23,9) ტოლობებიდან განისაზღვრება $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ სიდიდეები, ე. ი. განსაზღვრება წერტილის წონასწორობის მდებარეობა და რეაქციის ძალა.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\vec{\delta r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ შესაძლო გადაადგილება და გავამრავლოთ (23,9) სისტემის პირველი განტოლება δx -ზე, მეორე δy -ზე, მესამე δz -ზე და შევეკრიბოთ; (22,8) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = (\vec{F} \cdot \vec{\delta r}) = 0. \quad (23,10)$$

ამრიგად, უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს წონასწორობის აუცილებელ პირობას. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ის საკმარისიცაა წონასწორობისათვის. მართლაც, (22,8) პირობების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\lambda_1 (\text{grad } f_1 \cdot \vec{\delta r}) + \lambda_2 (\text{grad } f_2 \cdot \vec{\delta r}) = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევეკრიბებთ (23,10) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$((\vec{F} + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2) \cdot \vec{\delta r}) = 0,$$

რომელიც ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} \left(F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \delta x + \left(F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \delta y + \\ + \left(F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \delta z = 0. \end{aligned} \quad (23,11)$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ (22,8) პირობებს. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ (22,8) სისტემიდან შესაძლო გადაადგილების ორი კომპონენტი ამოიხსნება და გამოისახება მესამის საშუალებით და, მაშასადამე, $\delta x, \delta y, \delta z$ სიდიდეებიდან მხოლოდ ერთი არის დამოუკიდებელი. ვთქვათ, δx არის დამოუკიდებელი, ხოლო δy და δz გამოისახება δx -ის საშუალებით. შეცარჩიოთ λ_1 და λ_2 სიდიდეები ისე, რომ

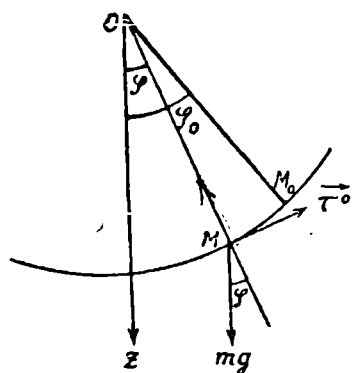
(23,11) ტოლობაში δy და δz სიდიდეების კოფიციენტები ტოლი იყოს ნულის¹. მაშინ დაგვიჩვენა ისეთი წევრი, რომელიც δx კომპონენტს შეიცავს, ამასთან δx ნებისმიერია და, მაშასადამე, მისი კოფიციენტიც ნული უნდა იყოს. ამრიგად, (23,11) ტოლობიდან ზიოდება (23,9) ტოლობები და ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაშიც ადგილი აქვს ზემოთ მოყვანილ დებულებას.

ზემოთ ჩვენ მივიღეთ წონასწორობის პირობები მხოლოდ დამკვერი ბმების შემთხვევაში. ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის პირობები არადამკვერი ბმების შემთხვევაშიც (იხ. № 20 და № 21 ამოცანები).

§ 24. მათემატიკური საძანო

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი, რომელზედაც მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა, იძულებულია იმოძრაოს ვერტიკალურ წრეწირზე. ასეთ მატერიალურ წერტილს მათემატიკური საქანი ეწოდება. ამრიგად, მათემატიკური



ნახ. 111.

საქანი წარმოადგენს მატერიალურ წერტილს, რომელიც ვერტიკალურ წრეწირზე მოძრაობს სიმძიმის ძალის გავლენით. ავიღოთ კოორდინატთა სისტემის სათავე ხსენებული წრეწირის ცენტრში და Oz ღერძი მივმართოთ ვერტიკალზე ისე, რომ ის მოგეზული იყოს დედამიწის ცენტრისაკენ (ნახ. 111). წრის რადიუსი, რომელსაც საქანის სიგრძე ეწოდება, აღვნიშნოთ l -ით. წრეწირზე ბრუნვის დადებით მიმართულებად მივიღოთ ის მიმართულება, რომელიც ხსენებულ l რადიუსიან წრეს მარცხნივ ტოვებს. წრეწირის მხეში მოგეგზოთ ბრუნვის დადებითი მიმართულებით.

აღვნიშნოთ კუთხე \overrightarrow{OM} ვექტორსა და Oz ღერძს შორის φ -თი. φ კუთხეს ვანიჭებთ დადებით ნიშანს, როცა M წერტილი იმყოფება Oz -ის მარჯვნივ, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — უარყოფით ნიშანს.

მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას, ცხადია, ექნება სახე

$$m\ddot{w} = \vec{P} + \vec{N}. \quad (24,1)$$

სადაც \vec{P} არის სიმძიმის ძალა, ხოლო \vec{N} წრეწირის რეაქციის ძალა (ძაფის დაჭიმულობის ძალა), რომელიც O ცენტრისაკენ არის მიმართული. თუ ამ ტოლობას დავაგეგმავთ ტრაექტორიის მხეზე და ნორმალზე, მივიღებთ

¹ λ_1 და λ_2 სიდიდეებს ასე შერჩევა შესაძლებელია, რადგან ვგულისხმობთ, რომ (22,1) სისტემა ანოხსნადია y , z ცვლადების მიმართ და, მაშასადამე, მეორე რიგის ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(y, z)}$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi, \quad (24,2)$$

$$\frac{mv^2}{l} = -mg \cos \varphi + N. \quad (24,3)$$

მ წერტილის რკალური აბსცისის ათვლის წერტილად მივიღოთ ის წერტილი, რომელზედაც Oz ღერძი ზემოხსენებულ წრეწირს გადაკვეთს. s რკალურ აბსცისის ვანიკებთ დადებით ნიშანს, თუ წერტილი Oz ღერძის მარჯვნივაა მოთავსებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — უარყოფით ნიშანს. ვინაიდან $s = l\varphi$ და, მაშასადამე, $v = l \frac{d\varphi}{dt}$, ამიტომ (24,2) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (24,4)$$

თუ ამ განტოლებიდან φ მოძებნილია, მაშინ $v = l \frac{d\varphi}{dt}$ და (24,3) ტოლობიდან განისაზღვრება რეაქციის ძალა.

(24,4) მეორე რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს, რომლის ამოხსნის სასრული სახით წარმოდგენა არ შეიძლება.

განვიხილოთ მათემატიკური საქანის მცირე რხევა, ე. ი. ის შემთხვევა, როცა φ უსასრულოდ მცირეა. ამ შემთხვევაში $\sin \varphi \approx \varphi$ და (24,4) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (24,5)$$

რომლის ზოგად ამოხსნასაც აქვს სახე

$$\varphi = a \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varepsilon \right),$$

სადაც a და ε ნებისმიერი მუდმივებია, რომელნიც საწყისი პირობებით განისაზღვრებიან. ამრიგად, მათემატიკური საქანის მცირე რხევას პარმონიული რხევის ხასიათი აქვს. რხევის პერიოდი, ცხადია, გააოთვლება ფორმულით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (24,6)$$

შევისწავლოთ მათემატიკური საქანის ნებისმიერი მოძრაობა და გამოვიტვალოთ რხევის პერიოდი ამ შემთხვევისათვის.

ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში ბმა სტაციონარულია, ამიტომ, წინა პარაგრაფში მოყვანილი დებულების ძალით, ცოცხალი ძალის კანონი მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = mg dz,$$

საიდანაც

$$\frac{mv^2}{2} = mgz + h, \quad (24,7)$$

ამასთან h ნებისმიერი მუდმივია. განვსაზღვროთ ეს მუდმივი. აღვნიშნოთ φ_0 -ით მათემატიკური საქანის მაქსიმალური გადახრის კუთხე (ნახ. 111). ცხა-

დია, რომ, როცა $\varphi = \varphi_0$, მაშინ $v = 0$, $z = z_0$, სადაც z_0 არის მოძრაობის დადებითი მიმართულებით მაქსიმალური გადახრის შესაბამისი კოორდინატი Oz ღერძზე. ამ პირობებზე დალით, (24,7) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $k = -n_1 g z_0$. თუ ამ მნიშვნელობებს (24,7) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$v^2 = 2g(z - z_0). \quad (24,8)$$

ცხადია, გვექნება (ნახ. 111)

$$z = l \cos \varphi, \quad z_0 = l \cos \varphi_0.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (24,8) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$v^2 = 2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (24,8')$$

შევისწავლოთ საქანის რხევა Oz ღერძის მარცხნივ მაქსიმალური გადახრიდან მარჯვნივ მაქსიმალურ გადახრამდე. ცხადია, ამ მოძრაობისათვის $v \geq 0$. მოძრაობის მეორე ნახევრისათვის (Oz ღერძის მარჯვნივ მაქსიმალურ გადახრიდან მარცხნივ მაქსიმალურ გადახრამდე) საცვებით ანალოგიური სურათი გვექნება. (24,8') ტოლობიდან მოძრაობის ზემოაღნიშნული პირველი ნახევრისათვის გვექნება¹

$$v = \sqrt{2gl} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}.$$

მაგრამ, ვინაიდან $v = l \frac{d\varphi}{dt}$, $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $\cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

$$\sqrt{\frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} dt.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \alpha, \quad (24,9)$$

მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt,$$

საიდანაც, ინტეგრებით, ვღებულობთ

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t + C, \quad (24,10)$$

ამასთან C ნებისმიერი მუდმივია. მივიღოთ $t = 0$ საწყის მომენტად ის მომენტი, როცა საქანს ევრტიკალური მდებარეობა უკავია. ამ მომენტში, ცხადია, $\varphi = 0$ და, მაშასადამე, (24,9)-ის მეორე ტოლობის ძალით, $\alpha = 0$. ამიტომ, ცხადია, $C = 0$ და (24,10) მოგვეცემს

¹ მოძრაობის მეორე ნახევრისათვის, ცხადია, გვექნება

$$v = -\sqrt{2gl} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}.$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (24,11)$$

მათემატიკური საქანის მოძრაობა სავსებით დახასიათებულია (24,11) ტოლობაში შემავალი ელიფსური ინტეგრალით. ეს ინტეგრალი შეიძლება გამოვთვალოთ მიახლოებით, ნებისმიერი სიზუსტით და, მაშასადამე, α შეიძლება განვსაზღვროთ, ნებისმიერი სიზუსტით, როგორც t -ს ფუნქცია. მაგრამ, თუ α ცნობილია, მაშინ ცნობილია φ კუთხეც და, მაშასადამე, მათემატიკური საქანის მოძრაობაც განსაზღვრული იქნება, ამასთან რეაქციის ძალა მოინახება (24,3) ტოლობიდან.

როგორც აღვილი მისახვედრია, როცა $t = \frac{T}{4}$, მაშინ $\varphi = \varphi_0$ და (24,9)

ტოლობების ძალით, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. ამიტომ, (24,11) ტოლობა მოგვცემს

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4},$$

საიდანაც

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (24,12)$$

თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას მწკრივად გავშლით:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \alpha + \dots$$

და გამოვიყენებთ ცნობილ ფორმულას:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \alpha d\alpha = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

მივიღებთ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right].$$

თუ ამ მნიშვნელობას (24,12) ტოლობაში შევიტანთ და გავითვალისწინებთ, რომ $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$, ადვილად მივიღებთ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]. \quad (24,13)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდი დამოკიდებულია საწყის ფი გადახრაზე და, მაშასადამე, მათემატიკური საქანის რხევას ტაქტობრონობის თვისება არა აქვს (იხ. § 10-ის დასასრული).

§ 25. ციკლოიდური საქანი

განვიხილოთ მატერიალური M წერტილის არათავისუფალი მოძრაობა ციკლოიდზე სიმძიმის ძალის გავლენით. აღებული ციკლოიდის წარმომქმნელი წრის რადიუსი აღვნიშნოთ a -თი. Oz ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად და მოვვებოთ ქვევიდან ზევით (სიმძიმის ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით). აღვნიშნოთ M წერტილის რეალური აბსცისა s -ით¹ ($\overline{OM} = s$) (ნახ. 112). როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია,

$$s^2 = 8az. \quad (25,1)$$

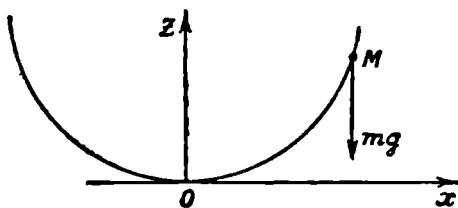
რადგან ბმა სტაციონარულია, ამიტომ ცოცხალი ძალის კანონი მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = -mgdz,$$

საიდანაც

$$\frac{mv^2}{2} = -mgz + h, \quad (25,2)$$

ამასთან h ნებისმიერი მუდმივია. ეს მუდმივი განისაზღვრება საწყისი პირობით: როცა $z = z_0$, მაშინ $v = 0$, ამასთან z_0 განსაზღვრავს წონასწორობის მდებარეობიდან M წერტილის მაქსიმალურ გადახრას. ამ პირობის



ნახ. 112.

ძალით, $h = mgz_0$. თუ ამ მნიშვნელობას (25,2) ტოლობაში შევიტანთ და გავითვალისწინებთ (25,1) ტოლობას, ადვილად მივიღებთ²

$$v = \sqrt{2g} \sqrt{z_0 - z} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{s_0^2 - s^2}.$$

ვინაიდან, $v = \frac{ds}{dt}$, ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} dt,$$

¹ s -ს ვანიჭებთ დადებით ნიშანს, როცა M წერტილი O სათავის მარჯვნივ იმყოფება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — უარყოფით ნიშანს.

² ისე როგორც მათემატიკური საქანის შემთხვევაში, განვიხილება მოძრაობის ის ნახევარი, რომლისთვისაც $v > 0$; მოძრაობის მეორე ნახევარისათვის ანალოგიური სურათი განმეორდება.

საიდანაც ინტეგრებით ვღებულობთ

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t + C,$$

ამასთან C ნებისმიერი მუდმივია. თუ საწყის $t=0$ მომენტად მივიღებთ იმ მომენტს, როცა $s=s_0$, სადაც s_0 არის Ox -ის მაჩვენებელზე მაქსიმალური გადახრის შესაბამისი რეალური აბსცისა, მაშინ $C=\frac{\pi}{2}$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$s = s_0 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t \right). \quad (25,3)$$

(25,3) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ წერტილი ასრულებს პერიოდულ რხევას, რომლის პერიოდიც არის

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ პერიოდი არ არის დამოკიდებული წონასწორობის მდებარეობიდან წერტილის საწყის გადახრაზე და, მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში წერტილს ზოცრაობას აქვს ტაღლიტობის თვისება (იხ. § 10-ის დასასრული). სიმძიმის ძალის მოკმედეგით, ციკლოიდზე მოძრაე მატერიალურ წერტილს ციკლოიდური საქანი ეწოდება.

§ 26. ბრახისტოხრონა

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი M , რომლის მასა m -ის ტოლია, მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში მოთავსებულ AB წირზე სიმძიმის ძალის გავლენით. დაუწვავთ, რომ A წერტილში სიჩქარე (საწყისი სიჩქარე) ნულის ტოლია. კოორდინატთა სისტემა ავიღოთ სათავეთ A წერტილში, y დერძი მიემართოთ ვერტიკალური მიმართულებით და მოვეგზოთ ის ზევიდან ქვევით. ცოცხალი ძალის კანონი (იხ. (6,2) ტოლობა) მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} = mg dy, \quad (26,1)$$

საიდანაც

$$\frac{mv^2}{2} = mgy + h. \quad (26,2)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ როცა $t=0$, მაშინ $y=0$, $v=0$, მივიღებთ, რომ $h=0$ და, მაშასადამე, გვექნება

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}. \quad (26,3)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx, \quad (26,4)$$

საიდანაც დრო t , რომლის განმავლობაშიც M წერტილი $A(0, 0)$ მდებარეობდა $B(x_1, y_1)$ მდებარეობამდე გაივლის, მოიცემა ფორმულით

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (26,5)$$

ვთქვათ, AB წირის განტოლება არის

$$y = y(x),$$

მაშინ (26,5), რომელიც ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx, \quad (26,6)$$

წარმოადგენს ისეთ გამოსახულებას, რომელიც დამოკიდებულია $y = y(x)$ წირზე, ე. ი. წარმოადგენს წირის ფუნქციას, ანუ, როგორც იტყვიან ფუნქციონალს. ცხადია, სხვადასხვა წირისათვის ამ ფუნქციონალს, საზოგადოდ, სხვადასხვა მნიშვნელობა ექნება.

$y = y(x)$ წირის შესახებ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ის არის ცალსახა, უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი მეორე რიგამდე ჩათვლით.

დავსვათ ახლა შემდეგი ამოცანა: ზემოხსენებულ ვერტიკალურ სიბრტყეში მოთავსებულ A და B წერტილებზე გაშვალ წირებს შორის ვიპოვოთ ის, რომელზედაც მოძრაობით მძიმე მატერიალური წერტილი უმცირეს დროში მივა A მდებარეობიდან B მდებარეობამდე. (26,6) ტოლობის ძალით, ცხადია, რომ საძიებელი წირი ის წირია, რომელიც (25,6) ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციონალს მინიჭებს მინიმუმს. ასეთ წირს უწოდებენ ბრახისტოხრონას (ბრახისტოხრონა ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს უმცირეს დროს).

ეს ამოცანა პირველად დასვა და ამოხსნა იოჰან ბერნულიმ. ამ ამოცანის ამოხსნით ბერნულმა საფუძველი ჩაუყარა ანალიზის ფრიად მნიშვნელოვან დარგს ვარიაციათა აღრიცხვას.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი სახის გამოსახულება

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad (26,7)$$

სადაც F წარმოადგენს x -ის, $y = y(x)$ -ის და $y' = \frac{dy}{dx}$ სიდიდეების გარკვეულ

ფუნქციას x, y ცვლადების ცვლილების რაიმე R არეში, x_0 და x_1 მუდმივებია. J ინტეგრალის მნიშვნელობა დამოკიდებულია $y = y(x)$ წირზე და, მაშასადამე, ის წარმოადგენს წირის ფუნქციას—ფუნქციონალს. (26,7)-ის სახით ჩვენ გვაქვს (26,6)-ის ტიპის ზოგადი სახის ფუნქციონალი. ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს ზემდეგში: R არეში მოთავსებულ და ამ არის ორ მოცემულ $A(x_0, y_0)$ და $B(x_1, y_1)$ წერტილებზე გაშვალ წირთა შორის ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც (26,7) ტოლობით განსაზღვრულ J ფუნქციონალს მინიჭებს მინიმუმს.

დავუშვათ, რომ $F(x, y, y')$ არის თავისი არგუმენტების ცალსახა, უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია მესამე რიგამდე ჩათვლით.

ვარიაციითა აღრიცხვაში მტკიცდება, რომ თუ $y = y(x)$ ანიჭებს მინიმუმს (26,7) ტოლობით განსაზღვრულ ინტეგრალს, მაშინ ის აუცილებლად დააკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (26,8)$$

რომელიც ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (26,9)$$

(26,9) წარმოადგენს მცირე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელსაც აუცილებლად უნდა აკმაყოფილებდეს ის $y = y(x)$ ფუნქცია, რომელიც (26,7) ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციონალს მინიმუმს მინიმუმს (თუ ასეთი ფუნქცია არსებობს). (26,8) განტოლებას ეილერის განტოლებას უწოდებენ.

ვარიაციითა აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა მოგვაგონებს აბსოლუტური ექსტრემუმის ამოცანას, რომელიც დიფერენციალურ აღრიცხვაში განიხილება, მაგრამ ზათ შორის არსებითი განსხვავებაა. ეს განსხვავება არსებითად იმაში მდგომარეობს, რომ ვარიაციითა აღრიცხვის შემოსწავლულ ძირითად ამოცანას ყოველთვის არა აქვს ამოხსნა, მაშინ როდესაც დიფერენციალური აღრიცხვის აბსოლუტური ექსტრემუმის ამოცანას ყოველთვის აქვს ამოხსნა (ცხადია, გარკვეული ზოგადი ხასიათის პირობების შესრულების შემთხვევაში).

დავუბრუნდეთ ახლა (26,6) ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციონალს. ამ შემთხვევაში ეილერის (26,8) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} - \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} = 0. \quad (26,10)$$

თუ ამ განტოლებას y' -ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} \right) y' - \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} \right) y' = 0. \quad (26,11)$$

ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} \right) y' &= \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} \right) - \\ &- y'' \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}}. \end{aligned}$$

თუ ამ მნიშვნელობას (26,11) ტოლობაში შევიტანთ, ადვილად მივიღებთ

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} \right) - \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} = 0, \quad (26,12)$$

საიდანაც

$$y' \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{2yy}} = \text{const.} \quad (26,13)$$

უკანასკნელი ტოლობიდან, სათანადო გამარტივების შემდეგ, გვექნება

$$y(1 + y'^2) = c, \quad (26,14)$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. თუ (26,14) ტოლობას $y' = \frac{dy}{dx}$ -ის მიმართ ამოგვხსნით, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}} \quad (26,15)$$

აღვნიშნოთ $y = c \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi)$. თუ ამ მნიშვნელობას (26,15) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

საიდანაც

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{c \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = c \sin \frac{2\varphi}{2} d\varphi = \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

ინტეგრებით ვღებულობთ

$$x = \frac{c}{2} (\varphi - \sin \varphi) + c_1.$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $y = y(x)$ წირი $A(0, 0)$ წერტილზე უნდა გადიოდეს, ადვილად მივიღებთ $c_1 = 0$. ამრიგად ჩვენ ვღებულობთ

$$x = \frac{c}{2} (\varphi - \sin \varphi), \quad (26,16)$$

$$y = \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi).$$

c ნებისმიერი მუდმივი განისაზღვრება იმ პირობით, რომ $y = y(x)$ წირი უნდა გადიოდეს $B(x_1, y_1)$ წერტილზე.

(26,16) ტოლობით განსაზღვრული წირი წარმოადგენს ციკლოიდს, რომლის წარმომქმნელი წრის რადიუსი $\frac{c}{2}$ -ის ტოლია.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ (26,6) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციონალისათვის ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითად ამოცანას აქვს ამოხსნა, მაშინ ეს ამოხსნა მოცემულია (26,16) განტოლებებით. ვარიაციათა აღრიცხვის ერთი დებულების გამოყენებით შეიძლება ჩვენება, რომ ამ ფუნქციონალისათვის ხსენებულ ამოცანას მართლაც აქვს ამოხსნა. მაშასადამე, ბრახისტოხრონა არსებობს და ის (26,16) განტოლებებით განსაზღვრულ ციკლოიდს წარმოადგენს.

20. ვიპოვოთ პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდნენ შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები იმ შემთხვევაში, როცა მატერიალური წერტილი ემორჩილება არადამკერ ბმებს.

ვუკვებთ, მატერიალური წერტილი ემორჩილება შემდეგი სახის სტაციონარულ არადამკერ ბმას

$$f(x, y, z) \geq 0.$$

ეს ბმა შეიძლება ასეთი სახით ჩავწეროთ

$$f(x, y, z) = c, \quad (1)$$

სადაც $c \geq 0$. მივცეთ წერტილს შესაძლო გადაადგილება $\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$. (1)-ის ძალით, მივიღებთ

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = c + \delta c, \quad (2)$$

სადაც $\delta c = 0$, თუ წერტილი არ ტოვებს ბმას, ხოლო $\delta c \neq 0$ და ამასთან მას აქვს საესეებით გარკვეული ნიშანი, თუ წერტილი ტოვებს ბმას. თუ მოვიქცევით ისე, როგორც დამკერი ბმის შემთხვევაში, (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = \delta c. \quad (3)$$

ასეთივე შედეგს მივიღებთ იმ შემთხვევაში, როცა წერტილი ემორჩილება არასტაციონარულ არადამკერ ბმას.

ვთქვათ ახლა, წერტილი ემორჩილება შემდეგ არადამკერ ბმებს:

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2,$$

სადაც $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$.

თუ მოვიქცევით ისე, როგორც (3) პირობის მიღების დროს, ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z &= \delta c_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z &= \delta c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

სადაც δc_1 და δc_2 სიდიდეებს აქვთ ცალ-ცალკე საესეებით გარკვეული ნიშანი.

21. ვთქვათ, მატერიალური წერტილი ემორჩილება არადამკერ ბმებს, ვიპოვოთ წონასწორობის პირობები.

ვთქვათ, წერტილი, რომელზედაც მოქმედებს $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ძალა, ემორჩილება არადამკერ ბმას

$$f(x, y, z) = c, \quad (5)$$

სადაც $c \geq 0$. წერტილის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას ექნება სახე

$$\vec{F} + \vec{N} = 0,$$

სადაც \vec{N} არის ბმის ნორმალური რეაქციის ძალა. ვინაიდან წერტილმა ბმა შეიძლება დატოვოს მხოლოდ იმ მხარეს, საითაც არის მიმართული ნორმა-

ლური რეაქციის ძალა \vec{N} , ამიტომ \vec{r} შეადგენს \vec{N} -თან ან მართ კუთხეს ან მახვილ კუთხეს, და მაშასადამე, $(\vec{N}, \vec{dr}) \geq 0$. ვინაიდან წონასწორობისას ადგილი აქვს ტოლობას

$$(\vec{F} \cdot \vec{dr}) + (\vec{N} \cdot \vec{dr}) = 0,$$

ამიტომ არაღამქერი ბმის შემთხვევაში წონასწორობის პირობას ექნება სახე:

$$(\vec{F} \cdot \vec{dr}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz \leq 0. \quad (6)$$

იგივე პირობა გვექნება იმ შემთხვევაშიაც, როცა წერტილი ემორჩილება (5) სახის ორ არაღამქერ ბმას.

საზოგადოდ, როცა წერტილი ემორჩილება (5) სახის დანჭერ ან არაღამქერ ბმებს, მაშინ წონასწორობის პირობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = d\pi, \quad (7)$$

სადაც $d\pi = 0$, თუ ბმები დამჭერია და $d\pi \leq 0$, თუ ბმები არაღამქერია.

გავამრავლოთ (3) ტოლობა ლაგრანჟის λ მამრავლზე და შევკრიბოთ მე (7) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) dz = \lambda dc + d\pi. \quad (8)$$

განვიხილოთ ახლა ისეთი გადაადგილებები \vec{dr} , რომლისთვისაც წერტილი არ ტოვებს ბმას; მაშინ თუ მოვიქცევით ისე, როგორც § 13-ში, მივიღებთ

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

ამ განტოლებებს უნდა დაეუმატოთ აგრეთვე ბმის განტოლება

$$f(x, y, z) = c.$$

ამ ოთხი განტოლებიდან განისაზღვრება x , y , z და λ .

(9)-ის ძალით, (8) ტოლობა მოგვეცემს

$$\lambda dc + d\pi = 0, \quad (10)$$

მაგრამ, ვინაიდან $d\pi \leq 0$, ამიტომ $\lambda dc \geq 0$, და მაშასადამე, λ -ს უნდა ჰქონდეს იგივე ნიშანი, რაც dc სიდიდეს. ამრიგად, როცა წერტილი ემორჩილება არაღამქერ ბმას, მაშინ წონასწორობის მდებარეობა შეზღუდულია დამატებითი პირობით, რომ λ და dc სიდიდეებს ჰქონდეთ ერთნაირი ნიშანი.

ვთქვათ წერტილი ემორჩილება ორ არაღამქერ ბმას

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2, \quad (11)$$

სადაც $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$.

ამ შემთხვევაში შესაძლო გადაადგილებების კომპონენტები აკმაყოფილებენ (4) პირობებს. წონასწორობის პირობას ამ შემთხვევაშიც აქვს მე-(7) სახე, სადაც $d\pi \leq 0$. გავამრავლოთ მე-(4) ის პირველი λ_1 -ზე, მეორე კი λ_2 -ზე და შევკრიბოთ (7) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left(F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dx + \left(F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dy + \\ & + \left(F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dz = d\pi + \lambda_1 dc_1 + \lambda_2 dc_2. \end{aligned} \quad (12)$$

თუ ახლა განვიხილავთ ისეთ შესაძლო გადაადგილებებს, რომელთათვისაც წერტილი არ ტოვებს ბმებს, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} & \left(F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \delta x + \left(F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \delta y + \\ & + \left(F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \delta z = 0. \end{aligned}$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ვლედულობთ (იხ. § 23, ფორმულა (23,11))

$$\begin{aligned} F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \\ F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

ამ განტოლებებს უნდა დავუმატოთ ბმის (11) განტოლებები. მივიღებთ 5 განტოლებას $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ სიდიდეების შოსაცენად.

მე-(12) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$\delta\pi + \lambda_1 \delta c_1 + \lambda_2 \delta c_2 = 0,$$

ვინაიდან $\delta\pi \leq 0$, ამიტომ გვექნება

$$\lambda_1 \delta c_1 + \lambda_2 \delta c_2 \geq 0. \quad (14)$$

ამრიგად, λ_1 და λ_2 სიდიდეების ნიშანი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს (14) პირობას და მაშასადამე, წონასწორობა ამ შემთხვევაში შეზღუდულია ამ დამატებითი პირობით. თუ დავუშვებთ, რომ წერტილი ტოვებს პირველ ბმას, მეორეს კი არ ტოვებს, მაშინ $\delta c_2 = 0$ და მივიღებთ $\lambda_1 \delta c_1 \geq 0$. თუ პირიქით, წერტილი ტოვებს მეორე ბმას, პირველს კი—არა, მაშინ $\delta c_1 = 0$ და (14) მოგვცემს $\lambda_2 \delta c_2 \geq 0$.

შენიშვნა. ზემოთ განხილული წონასწორობის პირობები მიღებულია იმ მომენტისათვის, როცა წერტილი ტოვებს ბმებს. ბმების დატოვების შემდეგ წერტილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც თავისუფალი, სანამ ის ისევ არ დაემორჩილება ბმას.

22. ეთქვას, მატერიალური წერტილი ემორჩილება ბმას

$$Ax + By + Cz + Dt^2 + Et + F = 0, \quad (15)$$

სადაც A, B, C, D, E, F მუდმივებია. დავახსიითოთ ბმა გეომეტრიულად და ვიპოვოთ ის პირობა, რომელსაც ის ადებს აჩქარებას.

ცხადია, წერტილი იძულებულია მოთავსებული იყოს (15) ტოლობით მოცემულ მოძრავ სიბრტყეზე. როგორც ადვილი მისახვედრია, ეს სიბრტყე მოძრაობს გადატანით თავისთავის პარალელურად, მისი საწყისი მდებარეობა მოცემულია განტოლებით

$$Ax + By + Cz + F = 0. \quad (16)$$

(15) ტოლობის ორჯერ t -თი გაწარმოებით მივიღებთ

$$Ax'' + By'' + Cz'' + 2D = 0, \quad (17)$$

ეს უკანასკნელი ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$(\overline{H} \cdot \overline{w}) + 2D = 0, \quad (18)$$

სადაც $\overline{H} = (A, B, C)$. (18) ტოლობა წარმოადგენს იმ პირობას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს წერტილის აჩქარება.

23. ვთქვათ, მატერიალური წერტილი ემორჩილება ბმებს

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \cos^2 \alpha \geq 0, \quad R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0,$$

რა ხასიათისაა წერტილის მოძრაობის შეზღუდულობა.

ადგილი მისახვედრია, რომ წერტილი შეიძლება მოძრაობდეს მხოლოდ ორ კონცენტრულ სფეროს შორის, რომელთა რადიუსებია $R \cos \alpha$ და R .

24. ვთქვათ, წერტილი, რომელზედაც ნოქმედებს სიმძიმის ძალა, იძულებულია იმოძრაოს R რადიუსიან სფეროზე. ვიპოვოთ წერტილის წონასწორობის მდებარეობა სფეროზე.

ავიღოთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა სათავით სფეროს ცენტრში და Oz ღერძი მიემართოს ვერტიკალზე, მოგვეზოთ ის ქვევიდან ზევით. ცხადია, ბმის განტოლება იქნება

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (18')$$

(18') ტოლობის ძალით შესაძლო გადაადგილებების კომპონენტები აკმაყოფილებენ პირობას (იხ. (20,6) ტოლობა)

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0. \quad (19)$$

წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მოგვცემს (იხ. § 22-ის დებულება)

$$-mg \delta z = 0. \quad (20)$$

თუ ახლა (19) ტოლობას ლაგრანჟის განუსაზღვრელ λ მანრავლზე გავამრავლებთ და შევეკრებთ მე-(20) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$2\lambda x\delta x + 2\lambda y\delta y + (2\lambda z - mg)\delta z = 0. \quad (21)$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= 0, \\ 2\lambda y &= 0, \\ 2\lambda z - mg &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

ამ განტოლებებს უნდა დავუმატოთ კიდევ ბმის განტოლება (18'). (22) და (18') განტოლებებიდან უნდა ვიპოვოთ x, y, z, λ . (22) ტოლობებიდან გვექნება

$$4\lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2) = m^2 g^2,$$

$$4R^2 \lambda^2 = m^2 g^2,$$

$$\lambda = \pm \frac{mg}{2R}.$$

რადგან $\lambda \neq 0$, ამიტომ (22) ტოლობებიდან ვღებულობთ $x = y = 0, z = \frac{mg}{2\lambda} = \pm R$.

ამრიგად, წონასწორობას ადგილი ექნება $A(0, 0, R)$ და $B(0, 0, -R)$ წერტილებზე, ე. ი. სფეროს ვერტიკალური დიამეტრის ბოლო წერტილებზე.

25. ვთქვათ, მატერიალური წერტილი, რომელზედაც მოქმედებს სიმძიმის ძალა, ემორჩილება ბმას

$$f \equiv ax + by + cz + d = 0, \quad (23)$$

სადაც x ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად და მოგებულია ქვევით, a, b, c, d მუდმივებია. ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები.

(21,4) განტოლებები განსახილველ შემთხვევაში მოგვცემს

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda a, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda b, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda c - mg. \quad (24)$$

(23) ტოლობის ორჯერ t -თი გაწარმოებით მივიღებთ

$$ax'' + by'' + cz'' = 0,$$

რომელიც ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$(\vec{w} \cdot \text{grad } f) = 0. \quad (25)$$

(24) განტოლებები ვექტორული სახით ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$m \vec{w} = \lambda \text{grad } f + (0, 0, -mg).$$

თუ ამ ტოლობას სკალარულად $\text{grad } f = (a, b, c)$ ვექტორზე გავამრავლებთ და გავითვალისწინებთ (25) ტოლობას, მივიღებთ

$$\lambda = \frac{mgc}{a^2 + b^2 + c^2} = \text{const} = \lambda_0.$$

ამის შემდეგ (24) განტოლებებიდან გვექნება

$$x = \frac{\lambda_0 a}{2m} t^2 + C_1 t + C_2,$$

$$y = \frac{\lambda_0 b}{2m} t^2 + C_3 t + C_4,$$

$$z = \frac{\lambda_0 c - mg}{2m} t^2 + C_5 t + C_6.$$

სადაც $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ ნებისმიერი მუდმივებია, რომელნიც საწყისი პირობებით უნდა განისაზღვრონ.

(21,2) ტოლობის ძალით, ნორმალურ რეაქციის ძალა მოიძებნება შემდეგი ფორმულებით

$$N_x = a\lambda_0, \quad N_y = b\lambda_0, \quad N_z = c\lambda_0,$$

$$\vec{N} = \lambda_0 (a, b, c).$$

გ ა ნ ა ჯ ო ფ ი ლ ა ბ ა 6

მაგნიტული ნაწილის ფარდობითი მოძრაობისა და ნონარეზონანსის განვლილება

§ 27. დალაგების პრინციპი

მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad (27,1)$$

ასე გადავწეროთ:

$$\vec{F} + (-m\vec{w}) = 0. \quad (27,2)$$

$(-m\vec{w})$ სიდიდეს ეწოდება ინერციის ძალა. ეს ძალა, ცხადია, წერტილზე არ მოქმედებს, ის ფიქტიურია.

(27,2) ტოლობის ძალით, წერტილზე მოქმედი ძალა და ინერციის ძალა ყოველთვის წონასწორობაშია. ამაში მდგომარეობს დაღამბერის პრინციპი თავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის. ცხადია, რომ დაღამბერის პრინციპიდან ნიუტონის მეორე კანონი მიიღება.

თუ მატერიალური წერტილი ბმას ემორჩილება, მაშინ, როგორც ვიცით, (27,1) განტოლების ნაცვლად გვექნება

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (27,3)$$

სადაც \vec{R} აღებული ბმის რეაქციის ძალაა. უკანასკნელი ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{w}) = 0.$$

მაშასადამე, წერტილზე უშუალოდ მოქმედი ძალა, რეაქციის ძალა და ინერციის ძალა ყოველთვის წონასწორობაშია. ამაში მდგომარეობს დაღამბერის პრინციპი არათავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის.

დაღამბერის პრინციპის ძირითადი მნიშვნელობა ის არის, რომ მისი საშუალებით დინამიკის ამოცანა სტატიკის ამოცანამდე დაიყვანება.

§ 28. მატერიალური წერტილის უაღრესიტი მოძრაობის განტოლება

ვთქვათ, მოცემულია კოორდინატთა უძრავი (ძირითადი) $Ox\eta$ სისტემა და მოძრავი $Oxyz$ სისტემა (იხ. III თავის § 10 და § 27, ნახ. 34). ვგულისხმობთ, რომ $Ox\eta$ ინერციულ სისტემას წარმოადგენს¹ (იხ. IV თავის § 4), ხოლო $Oxyz$ შეიძლება იყოს არაინერციული. თავისუფალი მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას ძირითადი ($Ox\eta$) სისტემის მიმართ აქვს სახე

$$m\vec{w}_a = \vec{F}, \quad (28,1)$$

სადაც \vec{w}_a წერტილის აბსოლუტური აჩქარებაა, ხოლო \vec{F} — წერტილზე უშუალოდ მოქმედი ძალა. კოორდინატების დებულების ძალით (იხ. III თავის § 27),

$$\vec{w}_a = \vec{w}_s + \vec{w}_r + \vec{w}_k, \quad (28,2)$$

სადაც \vec{w}_s არის წარმტანი აჩქარება, \vec{w}_r — ფარდობითი აჩქარება, \vec{w}_k — კოორდინატების აჩქარება, ამასთან

$$|\vec{w}_k| = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_r]. \quad (28,3)$$

(28,2) ტოლობის ძალით, (28,1) განტოლება მოგვეცემს

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + (-m\vec{w}_s) + (-m\vec{w}_k). \quad (28,4)$$

ეს განტოლება წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებას წარმოადგენს.

($-m\vec{w}_s$) სიდიდეს ეწოდება წარმტანი ინერციის ძალა, ხოლო ($-m\vec{w}_k$)-ს — კოორდინატების ინერციის ძალა. ორივე ეს ძალა ფაქტიურად მოქმედებს მატერიალურ წერტილზე. ამრიგად, წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლება რომ დავწეროთ, საჭიროა უშუალოდ მოქმედ \vec{F} ძალას

¹ კოორდინატთა სისტემას ეწოდება ინერციული, თუ ამ სისტემის მიმართ ადგილი აქვს ნიუტონის პირველ კანონს.

დავუშვათ წარმტანი ინერციის ძალა და აგრეთვე კორიოლისის ინერციის ძალა.

თუ $Oxyz$ სისტემა ძირითადი სისტემის მიმართ ინერციით მოძრაობს (სწორხაზოვნად და თანაბრად) მაშინ, ცხადია, $\vec{w}_* = \vec{w}_* = 0$ და მივიღებთ

$$m\vec{v}_r = \vec{F}.$$

ამრიგად, თუ $Oxyz$ სისტემა ძირითადი სისტემის მიმართ ინერციით მოძრაობს, მაშინ აბსოლუტური და ფარდობითი მოძრაობის განტოლებები ერთნაირია.

ჩვენ განვიხილეთ თავისუფალი მატერიალური წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლება. ვთქვათ, მატერიალური წერტილი ემორჩილება იდეალურ ბმას, რომლის განტოლებასაც აქვს სახე

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნორმალური რეაქციის ძალა ასე შეიძლება წარმოვადგინდოთ (იხ. (21,2) ტოლობა):

$$\vec{N} = \lambda \text{grad } f,$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \lambda \text{grad } f + (-m\vec{w}_*) + (-m\vec{w}_*).$$

თუ დავუშვებთ, რომ წერტილი ემორჩილება ორ იდეალურ ბმას

$$f_1(x, y, z, t) = 0,$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0,$$

მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, ფარდობით მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე (იხ. (22,5) განტოლება)

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 + (-m\vec{w}_*) + (-m\vec{w}_*).$$

§ 29. წერტილის ფარდობითი წონასწორობის განტოლება

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი იმყოფება ფარდობით წონასწორობაში, ე. ი. ის უძრავია $Oxyz$ სისტემის მიმართ. მაშინ, ცხადია, $\vec{w}_r = 0$, $\vec{v}_r = 0$ და, (28,3) ტოლობის ძალით, $\vec{w}_* = 0$. ამ ტოლობების ძალით, (28,4) ტოლობა მოგვეცემს

$$\vec{F} + (-m\vec{w}_*) = 0. \quad (29,1)$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, ფარდობითი წონასწორობის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს პირობა საკმარისიცაა ფარდობითი წონასწორობისათვის. მართლაც, (29,1) ტოლობის ძალით (28,4) განტოლება მოგვეცემს

$$\vec{w}_r + \vec{w}_* = 0. \quad (29,2)$$

(28,3) ტოლობის ძალით, ცხადია $\vec{w}_* \perp \vec{v}_r$, ამიტომ, თუ უკანასკნელ ტოლობას გავაძრავლებთ სკალარულად \vec{v}_r -ზე, მივიღებთ

$$(\vec{v}_r \cdot \vec{w}_*) = 0. \quad (29,3)$$

მაგრამ, ვინაიდან $\vec{w}_r = \frac{\tilde{d} \vec{v}_r}{dt}$ (იხ. III თავის § 27), სადაც $\frac{\tilde{d} \vec{v}_r}{dt}$ წარმოადგენს \vec{v}_r ვექტორის ფარდობით (ლოკალურ) წარმოებულს, ამიტომ (29,3) ტოლობა მოგვეცემს¹

$$0 = (\vec{v}_r \cdot \vec{w}_r) = \left(\vec{v}_r \cdot \frac{\tilde{d} \vec{v}_r}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{d}}{dt} (\vec{v}_r \cdot \vec{v}_r) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{d}}{dt} v_r^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v_r^2,$$

საიდანაც, ცხადია, $v_r = \text{const.}$ თუ ვიგულისხმებთ, რომ საწყის მომენტში მატერიალური წერტილის ფარდობითი სიჩქარე ნულია, მაშინ $v_r = 0$ და ნათქვამის სამართლიანობაც დამტკიცებულია. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

დებულება. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ მატერიალური წერტილი იყოს ფარდობით წონასწორობაში, იმაში მდგომარეობს, რომ წერტილზე უშუალოდ მოქმედი ძალისა და წარმტანი ინერციის ძალის ჯამი ტოლი იყოს ნულის.

მაგალითი. ვთქვათ, გვაქვს ყუთი, რომელშიაც ზამბარიან სასწორზე ჰკიდია P წონის ტვირთი. თუ ყუთი უძრავია ან მოძრაობს ვერტიკალზე სწორხაზოვნად და თანაბრად (ცნერციით), მაშინ ზამბარიანი სასწორი გვიჩვენებს, რომ ტვირთის წონა არის P . თუ ზემოხსენებული ყუთი ეშვება ვერტიკალურად ქვევით a აჩქარებით, მაშინ ტვირთზე იმოქმედებს წარმტანი ინერციის ძალა, რომელიც მიმართული იქნება ვერტიკალზე ზევით და ზამბარიანი სასწორი აჩვენებს წონას

$$P^* = P - \frac{P}{g} a.$$

თუ $a = g$, მაშინ $P^* = 0$ და ტვირთი დაკარგავს წონას აღებულ სისტემაში. თუ ყუთი ვერტიკალურად ზევით მოძრაობს a აჩქარებით, მაშინ ზამბარიანი სასწორი უჩვენებს წონას

$$P^* = P + \frac{P}{g} a.$$

§ 30. წმინდის ფარდობითი მოძრაობა დედამიწის ზედაპირზე

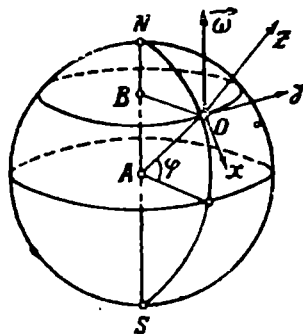
დედამიწა, ცხადია, არ წარმოადგენს ინერციულ სისტემას, რადგან მისი მოძრაობა ლერძისა და მზის გარშემო არ არის ინერციული. გამოვარკვეოთ რა გავლენას მოახდენს დედამიწის ლერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობა მის ზედაპირზე მოძრავ სხეულებზე, თუ დედამიწის მზის გარშემო ბრუნვას არ მივიღებთ მხედველობაში.

განვიხილოთ, უპირველეს ყოვლისა, მატერიალური ნაწილაკის ვარდნა სიმძიმის ძალის გავლენით და ნულოვანი საწყისი სიჩქარით. ავიღოთ Oxy

¹ ვინაიდან ვექტორის სიგრძე არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემაზე, ამიტომ

$$\frac{d}{dt} v_r^2 = \frac{d v_r^2}{dt}.$$

კოორდინატთა სისტემის O სათავედ მატერიალური ნაწილაკის საწყისი მდებარეობა, მიემართოთ Ox ღერძი ამ წერტილზე გამავალი მერიდიანის მხებზე და მოვეგზოთ ის სამხრეთისაკენ, Oy ღერძად მივიღოთ O წერტილზე გამავალი პარალელის მხები და მოვეგზოთ ის აღმოსავლეთისაკენ, Oz ღერძად მივიღოთ ვერტიკალური მიმართულება და მოვეგზოთ ის ქვევიდან ზევით (სიმძიმის ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით) (ნახ. 113). მივიღებთ კოორდინატთა მარჯვენა სისტემას. ვინაიდან დედამიწა მოძრაობს დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ, ამიტომ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$ მიმართული იქნება დედამიწის ბრუნვის ღერძის პარალელურად და მოგვზული იქნება ჩრდილოეთისაკენ (მარჯვენა სისტემის შესაბამისად).



ნახ. 113.

მატერიალურ წერტილზე მოქმედებენ შემდეგი ძალები:

1) ის ძალა, რომლითაც დედამიწის ცენტრი მატერიალურ წერტილს იზიდავს ნიუტონის მიზიდულობის კანონის მიხედვით. აღვნიშნოთ ეს ძალა \vec{F}_1 -ით.

2) წარმტანი ინერციის ძალა, რომლის სიდიდე, ცხადია, $m\omega^2$ -ის ტოლია, სადაც r არის მანძილი მატერიალური წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე ($r = OB$), m წერტილის მასაა. აღვნიშნოთ ეს ძალა \vec{F}_2 -თი.

3) კორიოლისის ინერციის ძალა, რომელიც ($-m\vec{\omega} \times \vec{v}$)-ს ტოლია.

\vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ტოლქმედი აღვნიშნოთ \vec{P} -თი

$$\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

\vec{P} არის ის ძალა, რომელსაც სიმძიმის ძალას ვუწოდებთ, ამასთან შეფარდებას $g = \frac{P}{m}$ სიმძიმის ძალის აჩქარება ეწოდება.

ზემოთ აღნიშნულისა და (28,4) ფორმულის ძალით, მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m\vec{w}_r = \vec{P} + (-m\vec{\omega} \times \vec{v}).$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\vec{w}_r = -g\vec{z}^0 - 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_r], \quad (30,1)$$

სადაც \vec{z}^0 არის Oz ღერძის მგეზავი.

ამ ტოლობის ერთხელ ინტეგრებით მივიღებთ

$$\vec{v}_r = -gt\vec{z}^0 - 2[\vec{\omega} \cdot \vec{p}] + \vec{C},$$

სადაც \vec{p} წარმოადგენს მოძრავე M წერტილის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ, \vec{C} მუდმივი ვექტორია. ვინაიდან საწყის მომენტში მატერიალური წერტილი კოორდინატთა სისტემის სათავეში იმყოფება და მისი საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია, ამიტომ $\vec{C} = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{v}_r = -gt\vec{z}^0 - 2[\vec{\omega} \cdot \vec{p}]. \quad (30,2)$$

ამოვსნათ ეს განტოლება მიმდევრობითი მიახლოების წესით. ვინაიდან ω საკმარისად მცირეა: $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}$, ამიტომ, თუ (30,2) ტოლობაში $\vec{\omega} = 0$ ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$\vec{v}_r = -gt\vec{e}^0,$$

საიდანაც

$$\vec{p} = -\frac{gt^2}{2}\vec{e}^0. \quad (30,3)$$

ამ მნიშვნელობის (30,2) ტოლობაში შეტანისა და ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\vec{p} = -\frac{gt^2}{2}\vec{e}^0 + \frac{gt^3}{3}[\vec{\omega} \cdot \vec{e}^0]. \quad (30,4)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (30,2) ტოლობაში შევიტანთ და ისევ მოვახდენთ ინტეგრაციას, მივიღებთ

$$\vec{p} = -\frac{gt^2}{2}\vec{e}^0 + \frac{gt^3}{3}[\vec{\omega} \cdot \vec{e}^0] - \frac{gt^4}{6}[\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{e}^0]]. \quad (30,5)$$

ეს პროცესი შეიძლება გავავრცელოთ და გამოვთვალოთ ნებისმიერი მიახლოება. თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ

$$\vec{\omega} = [-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi],$$

სადაც φ აღებული წერტილის სიგანედს აღნიშნავს, და (30,5) ტოლობას დავაგვემიღებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} x &= \frac{gt^2}{12} \omega^2 \sin 2\varphi, \\ y &= \frac{gt^3}{3} \omega \cos \varphi, \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{\omega^2 gt^4}{6} \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (30,6)$$

უკანასკნელი ტოლობები გვიჩვენებს, რომ მატერიალური წერტილი გადაიხრება სამხრეთ აღმოსავლეთით, ამასთან აღმოსავლეთით გადახრა უფრო საგრძნობია, ვინაიდან x -ის გამოსახულებაში შედის მამრავლად ω^2 , როცა y -ის გამოსახულებაში შედის მხოლოდ ω . აღნიშნული გადახრა გამოწვეულია კოორიოლისის ინერციის ძალით.

განვიხილოთ სხელი, რომელიც მოძრაობს ჩრდილო ნახევარსფეროში მერიდიანის პარალელურად ჩრდილოეთისაკენ. როგორც ადვილი მისახვედრია, კოორიოლისის ინერციის ძალა, რომელიც სხელზე იმოქმედებს, მიმართული იქნება სხელის მოძრაობის მიმართულებიდან მარჯვნივ, ე. ი. აღმოსავლეთისაკენ¹. ამით აიხსნება შემდეგი შემჩნეული ფაქტები: 1) ჩრდილოეთ ნახევარ-

¹ ვინაიდან $\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_r]$ და \vec{v}_r მიმართულია მერიდიანის მხებზე ჩრდილო პოლუსისაკენ, ამიტომ ცხადია, $\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ მიმართული იქნება დასავლეთისაკენ და, მაშასადამე, — $m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ (კოორიოლისის ინერციის ძალა) მიმართული იქნება აღმოსავლეთისაკენ.

სფეროში მერიდიანის გასწვრივ ჩრდილოეთისაკენ მიმავალი მატარებლებისათვის მარჯვენა რელსები უფრო ცვდება, ვიდრე მარცხენა, 2) ჩრდილო ყინულოვანი ოკეანისაკენ მიმდინარე მდინარეები მარჯვენა ნაპირს უფრო რეცხავენ, ვიდრე მარცხენას, 3) ჩრდილოეთის ქარებს აქვთ ტენდენცია გადაიხარონ აღმოსავლეთისაკენ და სხვ.

ადვილი მისახვედრია, რომ სამხრეთ ნახევარსფეროში, პირიქით, მარცხენა რელსები უფრო ცვდება, ვიდრე მარჯვენა, მდინარეების მარცხენა ნაპირები უფრო ირეცხება, ვიდრე მარჯვენა და სხვ.

ამოცანები

26. ვიპოვოთ რა სახე ექნება ცოცხალი ძალის კანონს წერტილის ფარდობითი მოძრაობისათვის.

როგორც ვიცით, წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + (-m\vec{w}_s) + (-m\vec{w}_k), \quad (1)$$

თუ ამ ტოლობას გავამრავლებთ \vec{v}_r -ზე სკალარულად და გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{v}_r \perp \vec{w}_k$, მივიღებთ

$$m \left(\vec{v}_r \cdot \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right) = (\vec{F} \cdot \vec{v}_r) - m (\vec{w}_s \cdot \vec{v}_r),$$

$$d \frac{mv_r^2}{2} = (\vec{F} \cdot \vec{v}_r dt) - m (\vec{w}_s \cdot \vec{v}_r dt).$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}}{dt}$ და მაშასადამე, $d\vec{r} = \vec{v}_r dt$,

უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$d \frac{mv_r^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) - m (\vec{w}_s \cdot d\vec{r}). \quad (2)$$

27. ვთქვათ $Oxyz$ სისტემა ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო $\vec{\omega}$ მყისი კუთხური სიჩქარით. ვიპოვოთ M მატერიალური წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებები, თუ მისი მასა m -ის ტოლია.

აღვნიშნოთ M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ $\vec{\rho}$ -თი. ცხადია, გვექნება

$$\vec{w}_r = \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2}, \quad \vec{v}_r = [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}],$$

$$\vec{w}_s = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]], \quad \vec{w}_k = 2[\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]].$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (1) ტოლობაში, მივიღებთ

$$m \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \vec{F} - m \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] - 3m [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]]. \quad (3)$$

მატერიალურ ნარკილთა სისჯავის ღინაჲქა

გ ა ნ ე ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

მატერიალურ ნარკილთა სისჯავის მოძრაობის განმარტებაჲ დეკარტის კოორდინატებში

§ 1. თავისუფალ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განმარტებაჲ

ვთქვათ, გვაქვს M_1, M_2, \dots, M_n მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობა, რომელთა მასებია m_1, m_2, \dots, m_n . მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობას მატერიალურ წერტილთა სისტემას უწოდებენ, თუ ამ ერთობლიობაში შემავალი ყოველი წერტილის მოძრაობა დამოკიდებულია დანარჩენი წერტილების მდებარეობასა და მოძრაობაზე. მატერიალურ წერტილთა სისტემის მაგალითს წარმოადგენს მზის სისტემა, ატომში მოძრავი ელექტრონები და სხვ.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის ძირითადი დამახასიათებელი ნიშანი არის სისტემაში შემავალ წერტილთა ურთიერთქმედება, რომელიც გარკვეული ძალებით გამოისახება.

მატერიალურ წერტილთა სისტემას ეწოდება თავისუფალი, თუ სისტემაში შემავალი ყოველი წერტილი თავისუფალია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვიან, რომ სისტემა არათავისუფალია, ანუ ემორჩილება ბმას. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თავისუფალი სისტემის წერტილებს შეუძლიათ ნებისმიერი მდებარეობა დაიკავონ სივრცეში და მათ სიჩქარეებს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი მნიშვნელობები. არათავისუფალი სისტემისათვის კი ამ გარემოებას ადგილი არ ექნება.

მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი ძალები შეიძლება გავყოთ ორ ჯგუფად შიგა და გარე ძალებად. მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე მოქმედ ძალებს, რომელნიც სისტემაში შემავალი წერტილებით არიან გამოწვეული, ეწოდება შიგა ძალები, ხოლო სისტემაზე მოქმედ ძალებს, რომელნიც არ არიან სისტემაში შემავალი წერტილებით გამოწვეული—გარე ძალები.

მაგალითი. განვიხილოთ დედამიწისა და მთვარისაგან შემდგარი სისტემა. დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმიზიდულობის ძალები, ცხადია, შიგა ძალებს წარმოადგენენ, ხოლო დედამიწაზე და მთვარეზე მოქმედი მზის მიზიდულობის ძალები—გარე ძალებს.

$M_i (i=1, 2, \dots, n)$ წერტილზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები ვექტორი აღნიშნოთ \vec{F}_i -ით, ხოლო ამ წერტილზე მოქმედ შიგა ძალთა ნაკრები ვექტორი კი \vec{F}'_i -ით. \vec{F}_i და \vec{F}'_i ძალები, საზოგადოდ, დამოკიდებულნი არიან მატერიალურ წერტილთა სისტემის მდებარეობასა, სისტემაში შემავალი წერტილების სიჩქარეებსა და დროზე. ამრიგად,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, t).$$

სადაც \vec{r}_j -თი ($j=1, 2, \dots, n$) აღნიშნულია M_j მატერიალური წერტილის რადიუს-ვექტორი $Oxyz$ სისტემის O სათავის მიმართ, \vec{v}_j აღნიშნავს M_j წერტილის სიჩქარეს. შემოვიღოთ შემდეგი შემოკლებული აღნიშვნები:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) = \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t),$$

$$\vec{F}'_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) = \vec{F}'_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t).$$

თუ დაწეროთ სისტემაში შემავალი ყოველი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას, მივიღებთ

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i, \quad (1,1)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i),$$

$$\vec{F}'_i = (X'_i, Y'_i, Z'_i)$$

და (1,1) ტოლობებს კოორდინატთა ლერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t) + X'_i(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t),$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t) + Y'_i(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t), \quad (1,2)$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t) + Z'_i(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t),$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

(1,2) წარმოადგენს მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ამ სისტემისათვის დაცულია ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის დებულების პირობები. როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის დებულებას ამ სისტემისათვის ყოველთვის ექნება ადგილი, თუ $X_i, Y_i, Z_i, X'_i, Y'_i, Z'_i$ წარმოადგენენ თავიანთი არგუმენტების: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_n, y'_n, z'_n$ t უწყვეტ ფუნქციებს და აკმაყოფილებენ ლიუვიცის პირობას $x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) სიდიდეების მიმართ.

(1,2) სისტემა წარმოადგენს თავისუფალ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებებს დეკარტის კოორდინატებში. ამ სისტემის

ზოგად ამოხსნას, როგორც ეს დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}), \\y_i &= y_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}), \\z_i &= z_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}),\end{aligned}\quad (1,3)$$

სადაც C_1, C_2, \dots, C_{6n} ნებისმიერი მუდმივებია. ეს მუდმივები განისაზღვრებიან შემდეგი საწყისი პირობებით (კოშის ამოცანის შესაბამის მონაცემებით):

$$\text{როცა } t=t_0, \text{ მაშინ } \begin{cases} x_i = x_i^0, & x'_i = x_i^{0'}, \\ y_i = y_i^0, & y'_i = y_i^{0'}, \\ z_i = z_i^0, & z'_i = z_i^{0'}, \end{cases} \quad (1,4)$$

სადაც $x_i^0, y_i^0, z_i^0, x_i^{0'}, y_i^{0'}, z_i^{0'}$ ($i=1, 2, \dots, n$) ნებისმიერად მოცემული რიცხვებია. (1,4) პირობები, ცხადია, განსაზღვრავენ სისტემის საწყის მდებარეობას და სისტემის წერტილების საწყის სიჩქარეებს.

(1,4) საწყისი პირობების ძალით C_1, C_2, \dots, C_{6n} მუდმივების მოსაძებნად მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned}x_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) &= x_i^0, \\y_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) &= y_i^0, \\z_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) &= z_i^0, \\x'_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) &= x_i^{0'}, \\y'_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) &= y_i^{0'}, \\z'_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) &= z_i^{0'}.\end{aligned}\quad (1,5)$$

თუ ამ სისტემიდან განსაზღვრულ C_1, C_2, \dots, C_{6n} მუდმივებს¹ შევითანთ (1,3) ტოლობებში, მივიღებთ (1,2) სისტემის ისეთ ამოხსნას, რომელიც (1,4) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

(1,1) განტოლების ძალით, მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას ექნება სახე

$$\vec{F}_i + \vec{F}'_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1,6)$$

ანუ რაც იგივეა,

$$\begin{aligned}X_i + X'_i &= 0, \\Y_i + Y'_i &= 0, \\Z_i + Z'_i &= 0.\end{aligned}\quad (1,7)$$

§ 2. ბ მ ე ბ ი

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა არ არის თავისუფალი, მისი მოძრაობა შეზღუდულია. პირობებს, რომელნიც ზღუდავენ სისტემის წერტილთა მოძრაობას, ეწოდება ბ მ ე ბ ი. ზოგად შემთხვევაში ბმები ანალიზურად გამოისახებიან განტოლებებით (ანუ უტოლობებით), რომელნიც ერთმანეთთან აკავ-

¹ ამ სისტემიდან C_1, C_2, \dots, C_{6n} მუდმივები განისაზღვრება ზემოხსენებული არსებობისა და ერთადერთობის დებულების ძალით.

შირებენ სისტემის წერტილთა კოორდინატებს და სიჩქარეთა კომპონენტებს. ვთქვათ, ბმის განტოლებას აქვს სახე

$$f(x_j, y_j, z_j, t) = 0, \quad (2,1)$$

სადაც

$$f(x_j, y_j, z_j, t) \equiv f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t). \quad (2,2)$$

(2,1) სახის ბმას ეწოდება ჰოლონომური, არასტაციონარული (თუ t ცხადად მონაწილეობს ბმის განტოლებაში), ორმხრივი (დამკერი) ბმა (იხ. V თავის § 19). თუ ბმის განტოლებაში დრო ცხადად არ მონაწილეობს, მაშინ ბმას ეწოდება სტაციონარული. თუ ბმის განტოლებაში შედის ალბულის სისტემის წერტილთა სიჩქარეები, მაშინ ბმას ეწოდება არაჰოლონომური. არაჰოლონომური ბმის განტოლებას აქვს სახე

$$f(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t) = 0, \quad (2,3)$$

ამასთან ვსარგებლობთ (2,2)-ის ანალოგიური შემოკლებული აღნიშვნით.

თუ ბმა დახასიათებულია უტოლობით, მაშინ მას ცალმხრივი (არადამკერი) ბმა ეწოდება. ასე მაგალითად,

$$f(x_j, y_j, z_j, t) \leq 0$$

ბმა წარმოადგენს ცალმხრივ ჰოლონომურ ბმას.

ჩვენ ჯერ განვიხილავთ ჰოლონომურ ბმებს (არაჰოლონომურ ბმებს განვიხილავთ ამ თავის მე-5 განყოფილებაში).

მატერიალურ წერტილთა სისტემა შეიძლება ემორჩილებოდეს ერთ ან რამდენიმე ბმას. ცხადია, როცა სისტემა ბმებს ემორჩილება, სისტემის წერტილების კოორდინატები: x_i, y_i, z_i ($i=1, 2, \dots, n$), რომელთაც შემდეგში სისტემის კოორდინატებს ეუწოდებთ, არ არიან დამოუკიდებელნი. იმ დამოუკიდებელი პარამეტრების რაოდენობას, რომელნიც განსაზღვრავენ სისტემის მდებარეობას დროის ყოველ მომენტში, ეწოდება სისტემის თავისუფლების ხარისხი.

ისე როგორც ეს გვექონდა ერთი მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, ბმების მექანიკური მოქმედება სისტემის წერტილებზე გარკვეული ძალების ტოლფასია, რომელთაც რეაქტიის ძალებს ეუწოდებთ. თუ ამ ძალებს მოვდებთ სისტემის წერტილებზე, მაშინ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ სისტემა თავისუფალია ბმებისაგან. ამაში მდგომარეობს რეაქტიის პრინციპი¹ მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის (იხ. IV თავის § 6, პრინციპი 3).

§ 3. ნაშლად და შესაძლო გადაადგილდები. იდეალური ბმები

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება k რაოდენობის ჰოლონომურ ორმხრივ ბმას ($k < 3n$):

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (3,1)$$

ამასთან

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) \equiv f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t).$$

¹ ამ პრინციპს ხშირად სისტემის ბმებისაგან გათავისუფლების პრინციპს ეუწოდებენ.

ჩვენ შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t)$ ($\alpha=1, 2, \dots, k$) ფუნქციები წარმოადგენენ თავიანთი არგუმენტების უწყვეტ და უწყვეტად წარმოებად ფუნქციებს მეორე რიგამდე ჩათვლით. გარდა ამისა, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ეს ბმები დამოუკიდებელი არიან შემდეგი გაგებით: სისტემის $3n$ კოორდინატიდან k რაოდენობა შეიძლება ამოვხსნათ (3,1) განტოლებებიდან და გამოვსახოთ დანარჩენი $3n-k$ კოორდინატის საშუალებით. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ k რიგის გარკვეული ფუნქციონალური დეტერმინანტი, რომელიც შედგენილია (3,1) განტოლებების მიხედვით, განსხვავებულია ნულისაგან.

ცხადია, განსახილველ შემთხვევაში, სისტემის თავისუფლების ხარისხი, რომელსაც s -ით აღვნიშნავთ, ტოლია $3n-k$ ($s=3n-k$).

ვთქვათ, აღებულ t მომენტში სისტემის მდებარეობა დახასიათებულია \vec{r}_i ($i=1, 2, \dots, n$) რადიუს-ვექტორებით. უსასრულოდ მცირე dt დროში \vec{r}_i რადიუს-ვექტორის ნაზრდი აღენიშნოთ $d\vec{r}_i = (dx_i, dy_i, dz_i)$ -ით. dt დროში შესრულებულ უსასრულოდ მცირე $d\vec{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) გადაადგილებებს, რომელნიც თავსებადნი არიან ბმების (3,1) განტოლებებთან, ეწოდება ნამდვილი გადაადგილებები. ნათქვამის ძალით, ნამდვილ გადაადგილებათა კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$f_\alpha(x_j + dx_j, y_j + dy_j, z_j + dz_j, t + dt) = 0 \quad (3,2)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

თუ (3,2) სისტემის მარცხენა მხარეში მდებარე ფუნქციებს გავშლით ტეილორის მწკრივად, უკუვაგდებთ მეორე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს და გავითვალისწინებთ (3,1) განტოლებებს, ადვილად მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (3,3)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

თუ ბმის განტოლებაში დრო ცხადად არ მონაწილეობს (ბმები სტაციონარულია), მაშინ $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) და უკანასკნელი სისტემა მოგვცემს

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) = 0 \quad (3,4)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

$d\vec{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) გადაადგილებათა ერთობლიობას სისტემის ნამდვილ გადაადგილებას ვუწოდებთ.

დავტოვოთ ახლა t უცვლელად და განვიხილოთ \vec{r}_i რადიუს-ვექტორების უსასრულოდ მცირე ნაზრდები: $d\vec{r}_i = (dx_i, dy_i, dz_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), რომელნიც თავსებადნი არიან (3,1) განტოლებებთან თავიდან აღებული t -სათვის. ასეთ გადაადგილებებს შესაძლო გადაადგილებები ეწოდება. ამრიგად, შესაძლო გადაადგილებები ეწოდება ისეთ უსასრულოდ მცირე გადაადგი-

ლებებს, რომელნიც თავსებადნი არიან ბმის განტოლებებთან დროის იმავე მომენტისათვის, რაც გადაადგილებამდე იყო. ზემონათქვამის ძალით, შესაძლო გადაადგილებათა კომპონენტები შემდეგ აიროვნებს ზნდა აკმაყოფილებდნენ:

$$f_{\alpha}(x_j + \delta x_j, y_j + \delta y_j, z_j + \delta z_j, t) = 0 \quad (3,5)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

თუ მოვიქცევით ისე, როგორც (3,4) პირობების მიღების დროს, გვექნება

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (3,6)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

ამრიგად, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) შესაძლო გადაადგილებათა კომპონენტები დამოუკიდებელნი არ არიან, არამედ დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან k რაოდენობის (3,6) სახის პირობებით. ეს პირობები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წრფივ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ სიდიდეების მიმართ. როგორც ადვილი მისახვედრია, (3,6) სისტემის მატრიცის რანგი k -ს ტოლია¹, მაშასადამე, (3,6) სისტემიდან k რაოდენობა შესაძლო გადაადგილებათა კომპონენტი შეიძლება ამოვხსნათ და გამოვსახოთ დანარჩენი $3n-k$ კომპონენტის საშუალებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ შესაძლო გადაადგილებათა კომპონენტებიდან დამოუკიდებელია $3n-k$, ე. ი. შესაძლო გადაადგილებათა დამოუკიდებელი კომპონენტების რიცხვი სისტემის თავისუფლების ხარისხის ტოლია. შემდეგში $\delta \vec{r}_i$ გადაადგილებათა ერთობლიობას სისტემის შესაძლო გადაადგილებას ვუწოდებთ.

(3,4) და (3,6) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს, რომ როცა ბმები სტაციონარულია, მაშინ სისტემის ნამდვილი გადაადგილება მის ერთ-ერთ შესაძლო გადაადგილებას დაემთხვევა. როგორც ადვილი მისახვედრია, ამ გარემოებას ადვილი არ ექნება, თუ ბმები არასტაციონარულია.

f_{α} ფუნქციის გრადიენტი $M_i(x_i, y_i, z_i)$ წერტილზე ვუწოდოთ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\text{grad}_{(i)} f_{\alpha} \equiv \text{grad}_{(x_i, y_i, z_i)} f_{\alpha} = \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \right).$$

ამ განმარტების ძალით, (3,3) პირობები, რომელთაც ნამდვილი გადაადგილების კომპონენტები აკმაყოფილებენ, ასე შეიძლება ჩაეწეროს:

$$\sum_{i=1}^n (\text{grad}_{(i)} f_{\alpha} \cdot d\vec{r}_i) + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0, \quad (3,3')$$

(3,6) პირობები, რომელთაც შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები აკმაყოფილებენ, ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{i=1}^n (\text{grad}_{(i)} f_{\alpha} \cdot d\vec{r}_i) = 0. \quad (3,6')$$

¹ (3,6) სისტემის მატრიცის რანგი k -ს ტოლია, ვინაიდან (3,1) განტოლებები დამოუკიდებელი არიან და, მაშასადამე, k რიგის გარკვეული ფუნქციონალური დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

(3,3) ტოლობების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} z'_i \right) + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (3,7)$$

($\alpha = 1, 2, \dots, k$).

ამრიგად, (3,1) სახის ბმები სიჩქარეთა კომპონენტებს ადებენ (3,7) სახის შეზღუდვებს. ეს პირობები, ცხადია, ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^n (\text{grad}_{(n)} f_{\alpha} \cdot \vec{v}_i) + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0. \quad (3,7')$$

(3,7) ტოლობების გაწარმოებით მივიღებთ იმ პირობებს, რომელთაც ბმები სიჩქარეთა კომპონენტებს ადებენ. ამ პირობებს ექნება სახე:

$$\sum_{i=1}^n (\text{grad}_{(n)} f_{\alpha} \cdot \vec{v}_i) + \varphi_{\alpha}(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t) = 0,$$

სადაც \vec{v}_i არის M_i წერტილის აჩქარება, φ_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) წარმოადგენენ $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, t$ სიდიდეების საესებით გარკვეულ ფუნქციებს¹.

აღვნიშნოთ M_i -ური წერტილის შესაბამის რეაქციის ძალა \vec{R}_i -ით. ჩვენ ვიტყვით, რომ (3,1) სახის ბმები იდეალურია, თუ შესაბამის რეაქციის ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია²:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (3,8)$$

იდეალური ბმების ამ განმარტებიდან, როგორც ადვილი მისახვედრია, მიიღება იდეალური ბმის ის განმარტება, რომელიც ჩვენ ერთი მატერიალური წერტილის შემთხვევაში შემოვიღეთ (იხ. V თავის § 19).

ისევე, როგორც სისტემაზე უშუალოდ მოქმედი ძალები (აქტიური ძალები), რეაქციის ძალებიც შეიძლება გავყოთ შიგა და გარე რეაქციის ძალებად.

§ 4 არათავისუფალ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში (ლაგრანჟის I გვარის განტოლებებით)

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება შემდეგი სახის პოლნომურ, იდეალურ, ორმხრივ ბმებს:

$$f_{\alpha}(x_j, y_j, z_j, t) = 0 \quad (4,1)$$

($\alpha = 1, 2, \dots, k$),

¹ ზემოთ ჩვენ ვიპოვეთ ის პირობები, რომელთაც ორმხრივი (დამკერძი) ბმები ადებენ სისტემის წერტილთა სიჩქარეებს და აჩქარებებს. ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ ის პირობები, რომელთაც ცალმხრივი (არადამკერძი) ბმები ადებენ სისტემის წერტილთა სიჩქარეებს და აჩქარებებს (იხ. ამ განყოფილების ბოლოს მოთავსებული № 8 ამოცანა).

² ცხადია, არ არის საველდებულო ყოველ წერტილზე მოქმედი რეაქციის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლი იყოს ნულის.

რომელნიც დამოუკიდებელი არიან ზემოთ აღნიშნული აზრით. სისტემის შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებენ (იხ. (3,6) ტოლობები):

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (4,2)$$

($\alpha = 1, 2, \dots, k$).

ვინაიდან ბმები იდეალურია, ამიტომ გვექნება (იხ. (3,8) ტოლობა)

$$\sum_{i=1}^n (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (4,3)$$

რეაქციის პრინციპის გამოყენებით, ცხადია, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები ასე დაიწერება:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i + \vec{R}_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4,4)$$

სადაც \vec{F}_i და \vec{F}'_i წარმოადგენენ M_i -ურ წერტილზე უშუალოდ მოქმედ გარე და შიგა ძალებს, \vec{R}_i არის M_i -ური წერტილის შესაბამი რეაქციის ძალა, \vec{r}_i კი— M_i წერტილის რადიუს-ვექტორია $Oxyz$ სისტემის O სათავის მიმართ. თუ (4,4) განტოლებებს კოორდინატთა ლერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + X'_i + R_{ix}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + Y'_i + R_{iy}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + Z'_i + R_{iz}, \end{aligned} \quad (4,5)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= (X_i, Y_i, Z_i), \\ \vec{F}'_i &= (X'_i, Y'_i, Z'_i). \end{aligned}$$

შემოვიტანოთ ჯერჯერობით უცნობი $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლები, რომელთაც ლაგრანჟის მამრავლებს უწოდებენ. გავამრავლოთ (4,2) ტოლობა λ_α -ზე და ავჯამოთ α ინდექსით, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \left(\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელს გამოვაკლებთ (4,3) ტოლობიდან, გვექნება

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\left(R_{ix} - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(R_{iy} - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \right. \\ \left. + \left(R_{iz} - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (4,6)$$

$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ კომპონენტებიდან დამოუკიდებელია $s=3n-k$ კომპონენტი, დანარჩენი კი მათი საშუალებით გამოისახება. შევარჩიოთ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლები ისე, რომ (4,6) ტოლობაში სისტემის შესაძლო გადაადგილების იმ კომპონენტების კოეფიციენტები, რომელნიც როგორც დამოუკიდებელი სიდიდეები არ განიხილება, ნული გახდეს. ეს ყოველთვის შესაძლებელია, რადგან (4,1) ბმები დამოუკიდებელნი არიან და, მაშასადამე, გარკვეული ფუნქციონალური დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, რაც უზრუნველყოფს $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლების ისე შერჩევას, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ. თუ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ სიდიდეებს ასე შევარჩევთ, მაშინ (4,6) ტოლობაში დარჩება მხოლოდ ისეთი წევრები, სადაც შესაძლო გადაადგილებათა დამოუკიდებელი კომპონენტები შედის და, მაშასადამე, ცხადია, მათი კოეფიციენტებიც ტოლი უნდა იყოს ნულის. ამრიგად, (4,6) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$R_{ix} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}, \quad R_{iy} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i}, \quad R_{iz} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i}. \quad (4,7)$$

($i=1, 2, \dots, n$).

თუ ამ მნიშვნელობებს (4,5) განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + X'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + Y'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + Z'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (4,8)$$

($i=1, 2, \dots, n$).

(4,8) სისტემას ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებებს უწოდებენ. ან განტოლებებს უნდა დაემატოთ აგრეთვე ბმის (4,1) განტოლებები. (4,8) და (4,1) განტოლებების სახით ჩვენ გვაქვს $3n+k$ განტოლება ამდენივე რაოდენობის $x_i, y_i, z_i, \lambda_{\alpha}$ უცნობებით. თუ აღნიშნული განტოლებებისაგან შემდგარ სისტემას ამოვხსნით, მაშინ გვეცოდინება სისტემის კოორდინატები და აგრეთვე რეაქციის ძალები (იხ. (4,7) ტოლობები).

როგორც აღვილი მისახედრია, (4,8) სისტემა ვექტორული სახით შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \text{grad}_{(x_i, y_i, z_i)} f_{\alpha}, \quad (4,9)$$

ხოლო (4,7) ტოლობები კი ასე:

$$\vec{H}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \text{grad}_{(x_i, y_i, z_i)} f_{\alpha}, \quad (4,10)$$

სადაც

$$\text{grad}_{(x_i, y_i, z_i)} f_{\alpha} = \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \right). \quad (4,11)$$

ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებების ნაკლი ის არის, რომ ბმების რიცხვის ზრდასთან ერთად იზრდება განტოლებათა რიცხვი ((4,8) და (4,1) განტოლებების რიცხვი $3n + k$ -ს ტოლია). ამ სისტემის დადებითი მხარე ის არის, რომ მისი ინტეგრების შემდეგ რეაქციის ძალები სირდაპირ გამოითვლება (4,10) ფორმულებით.

(4,8) განტოლებების ძალით, განსახილველ შემთხვევაში, სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს ექნება სახე

$$\begin{aligned} X_i + X'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} &= 0, \\ Y_i + Y'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} &= 0, \\ Z_i + Z'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} &= 0. \end{aligned} \quad (4,12)$$

(4,12) და (4,1) განტოლებებიდან განისაზღვრება x_i, y_i, z_i ($i=1, 2, \dots, n$) კოორდინატები და $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლები, ე. ი. განისაზღვრება სისტემის წონასწორობის მდებარეობა და რეაქციის ძალები¹ წონასწორობისათვის.

თუ მატერიალურ წერტილთა სისტემა თავისუფალია, მაშინ $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ და (4,12) პირობებიდან მიიღება თავისუფალი სისტემის წონასწორობის (1,7) პირობები.

თუ (4,12) ტოლობებს გავამრავლებთ შესაბამის $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ სიდიდეებზე, შევაჯამებთ i -ინდექსით და გავითვალისწინებთ (3,6) პირობებს, ადვილად მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n [(X_i + X'_i) \delta x_i + (Y_i + Y'_i) \delta y_i + (Z_i + Z'_i) \delta z_i] = 0. \quad (4,13)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, (4,13) პირობა წარმოადგენს წონასწორობის აუცილებელ პირობას.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ეს პირობა საკმარისიცაა წონასწორობისათვის. ამ მიზნით გავამრავლოთ (4,2) ტოლობა λ_{α} მამრავლზე, ავჯამოთ α ინდექსით და შევკრიბოთ (4,13) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\left(X_i + X'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(Y_i + Y'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \right. \\ \left. + \left(Z_i + Z'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (4,14)$$

საეცებით ისე როგორც (4,6) ტოლობიდან (4,7) ტოლობები იყო მიღებული, უკანასკნელი ტოლობიდან მიიღება (4,12) პირობები, რომელნიც სისტემის

¹ თუ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლები ცნობილია, მაშინ (4,7) ტოლობების ძალით, ცნობილი იქნება რეაქციის ძალებიც.

წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს წარმოადგენენ და ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

დებულება. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემა იყოს წონასწორობაში, იმაში მდგომარეობს, რომ სისტემაზე უშუალოდ მოქმედი ყველა შიგა და გარე ძალის მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლი იყოს ნულის.

ეს დებულება შესაძლო გადაადგილებების პრინციპის სახელწოდებით არის ცნობილი.

თუ სისტემა თავისუფალია, მაშინ $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) დამოუკიდებელი სდიდებებია და (4,13) სირობიდან პირდაპირ მიიღება წონასწორობის (1,7) პირობები. (1,7) სირობებიდან კი, ცხადია, მიიღება (1,13) პირობები და, მაშასადამე, ზემოთ ჩამოყალიბებული დებულება ერთნაირად ეხება, როგორც თავისუფალ, ისე არათავისუფალ სისტემას.

§ 5. დაღამბერ-ლაგრანჟის განტოლება (მექანიკის ზოგადი განტოლება)

ისე როგორც წინა §-ში, ვიგულისხმობთ, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება (4,1) სახის იდეალურ ბმებს და ამ სისტემის მოძრაობის (4,4) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\vec{F}_i + \vec{F}'_i + \vec{R}_i + (-m_i \vec{w}_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5,1)$$

სადაც $(-m_i \vec{w}_i)$ ინერციის ძალაა.

(5,1) ტოლობის ძალით, მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე უშუალოდ მოქმედი ძალები, რეაქციის ძალები და ინერციის ძალები იმყოფებიან წონასწორობაში. ამაში მდგომარეობს დაღამბერის პრინციპი მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის (იხ. V თავის § 27).

წინა §-ში მოყვანილი დებულების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\sum_{i=1}^n ((\vec{F}_i + \vec{F}'_i - m_i \vec{w}_i) \cdot \delta \vec{r}_i) = 0, \quad (5,2)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(X_i + X'_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i + Y'_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i + Z'_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] = 0. \quad (5,3)$$

ამ განტოლებას დაღამბერ-ლაგრანჟის განტოლებას (მექანიკის ზოგად განტოლებას¹⁾ უწოდებენ.

¹ ამ განტოლებას მექანიკის ზოგად განტოლებას იმიტომ უწოდებენ, რომ მისგან მიიღება როგორც თავისუფალი, ისე არათავისუფალი სისტემის მოძრაობის განტოლებები და წონასწორობის პირობები.

(5,3) განტოლებიდან მიიღება, როგორც თავისუფალი, ისე არათავისუფალი სისტემის მოძრაობის განტოლებები. მართლაც, თუ სისტემა თავისუფალია, მაშინ δx_i , δy_i , δz_i ($i = 1, 2, \dots, n$) დამოუკიდებელნი არიან, რის გამოც (5,3) ტოლობაში δx_i , δy_i , δz_i სიდიდეების კოეფიციენტები ნულის ტოლია და მივიღებთ

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + X'_i, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + Y'_i, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + Z'_i. \end{aligned} \quad (5,4)$$

ეს განტოლებები თავისუფალ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებებს წარმოადგენენ (იხ. (1,2) განტოლებები).

ეთქვათ, სისტემა არ არის თავისუფალი, მაშინ δx_i , δy_i , δz_i სიდიდეები აკმაყოფილებენ (3,6) ტოლობებს. გაემაჩვიოთ (3,6) ტოლობა λ_α მამრავლზე, ავჯამოთ α ინდექსით და დავუმატოთ (5,3) ტოლობას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\left(X_i + X'_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(Y_i + Y'_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \left(Z_i + Z'_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (5,5)$$

შევარჩიოთ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლები ისე, რომ სისტემის შესაძლო გადაადგილების დამოკიდებულ კომპონენტთა კოეფიციენტები ნულის ტოლი გახდეს ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ მამრავლების ასე შერჩევა ყოველთვის შეიძლება), რის შემდეგაც დავგრჩება მხოლოდ ისეთი წევრები, სადაც მონაწილეობს შესაძლო გადაადგილების დამოუკიდებელი კომპონენტები, რომელთა კოეფიციენტებიც ნულის ტოლი უნდა იყოს. ამრიგად, (5,5) ტოლობიდან ვღებულობთ

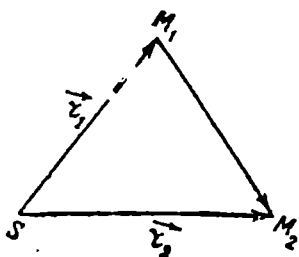
$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + X'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + Y'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + Z'_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (5,6)$$

ეს უკანასკნელი ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებებს წარმოადგენს და ამით ზემონათქვამის საპართლიანობა დამტკიცებულია. მოძრაობის განტოლებებიდან, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, მიიღება წონასწორობის განტოლებებიც

და, მაშასადამე, მექანიკის ზოგადი განტოლებიდან მიიღება როგორც თავისუფალი, ისე არათავისუფალი სისტემის მოძრაობისა და წონასწორობის განტოლებები.

ამოცანები

1. დედამიწაზე და მთვარეზე მოქმედი ძალებიდან მხედველობაში მივიღოთ მხოლოდ მზის მიზიდულობის ძალები და დავწეროთ მათი მოძრაობის განტოლებები მზის ცენტრის მიმართ. აღვნიშნოთ m_1 -ით, m_2 -ით და M -ით დედამიწის, მთვარის და მზის მასები. დედამიწის რადიუს-ვექტორი მზის ცენტრის მიმართ აღვნიშნოთ \vec{r}_1 ით, ხოლო მთვარის რადიუს-ვექტორი მზის ცენტრის მიმართ \vec{r}_2 ით (ნახ. 114).



ნახ. 114.

თუ დედამიწას და მთვარეს განვიხილავთ როგორც მატერიალურ წერტილთა სისტემას, მაშინ M_1 წერტილზე (დედამიწაზე) მოქმედი შიგა ძალა იქნება

$$\vec{F}'_1 = f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}, \quad (1)$$

სადაც f გრავიტაციის მუდმივია.

$$\vec{F}''_2 = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}, \quad (2)$$

M_1 და M_2 წერტილზე მოქმედი გარე წარმოიდგინებთან ფორმულებით

$$\vec{F}_1 = -f \frac{m_1 M}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \quad (3)$$

$$\vec{F}_2 = -f \frac{m_2 M}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ დედამიწისა და მზის ცენტრის მიმართ შემდეგი სხვე ექნებათ:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -f \frac{m_1 M}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -f \frac{m_2 M}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

თუ კოორდინატთა სისტემები ლოპას კოორდინატთა სისტემას, შემდგომ სისტემას, ვექტორები.

2. ვთქვათ...

ეს ღერო მეორე ბოლოთი სახსრითაა დამაგრებული O წერტილში. $M_1(x_1, y_1)$ მატერიალურ ნაწილაკთან სახსრითაა მიწაგრებული l_1 სიგრძის უწონადი ღერო, რომლის ბოლო წერტილში მოთავსებულია $M_2(x_2, y_2)$ მატერიალური ნაწილაკი, რომელზედაც აგრეთვე მხოლოდ სიმძიმის ძალა მოქმედებს. ვთქვათ, ღეროებს შეუძლიათ მოძრაობა მხოლოდ xOy ვერტიკალურ სიბრტყეში (ნახ. 115). დავეწროთ ბმის განტოლებები და ვიპოვოთ სისტემის თავისუფლების ხარისხი.

აღებულ სისტემას ორმაგი მათემატიკური საკანნი ეწოდება.

ცხადია, ბმის განტოლებებს შემდეგი სახე ექნებათ:

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 &= 0, \\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 &= 0.\end{aligned}$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, აღებული სისტემის (ორმაგი მათემატიკური საკანის) თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია; სისტემის მდებარეობა საყსებით დახასიათდება φ და ψ კუთხეებით, სადაც

φ ის კუთხეა, რომელსაც \overline{OM}_1 ვექტორი შეადგენს Oy ღერძთან, ხოლო ψ — კუთხე, რომელსაც $\overline{M_1M_2}$ ვექტორი Oy ღერძთან შეადგენს.

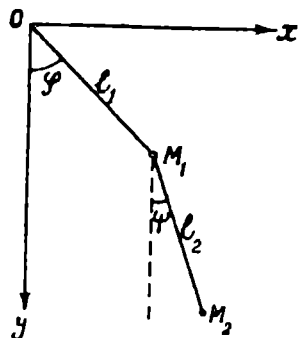
2. ვთქვათ, $y = x^2$ პარაბოლაზე მოთავსებულია ორი მატერიალური წერტილი $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$, რომელთა მასებია m_1 და m_2 და, ვთქვათ, M_1 წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედია $\vec{F}_1 = (X_1, Y_1)$, ხოლო M_2 წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედია $\vec{F}_2 = (X_2, Y_2)$. დავუშვათ, რომ M_1 და M_2 წერტილები ერთმანეთთან დაკავშირებულია l სიგრძის ღეროთი (ნახ. 116). დავწეროთ ამ წერტილების მოძრაობის ლაგრანჟის I გვარის განტოლებები.

ცხადია, ბმის განტოლებები იქნება

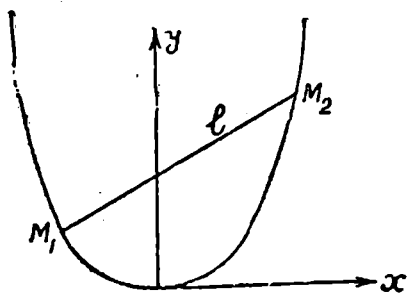
$$\begin{aligned}f_1 &= y_1 - x_1^2 = 0 \\f_2 &= y_2 - x_2^2 = 0, \\f_3 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

ლაგრანჟის I გვარის განტოლებები ასე დაიწერება:

$$\begin{aligned}m_1 x''_1 &= X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = X_1 - 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_3 (x_2 - x_1), \\m_1 y''_1 &= Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_1} = Y_1 + \lambda_1 - 2\lambda_3 (y_2 - y_1), \\m_2 x''_2 &= X_2 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = X_2 - 2\lambda_2 x_2 + 2\lambda_3 (x_2 - x_1), \\m_2 y''_2 &= Y_2 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_2} = Y_2 + \lambda_2 + 2\lambda_3 (y_2 - y_1).\end{aligned}$$



ნახ. 115.



ნახ. 116.

ამ განტოლებებს უნდა დავუმატოთ ბმის (5) განტოლებები და მივიღებთ 7 განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას ამდენივე რაოდენობის $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ უცნობით.

თუ M_1 და M_2 წერტილებზე მოქმედებენ მხოლოდ სიმძიმის ძალები და Oy ღერძი მოგვზულია ვერტიკალზე ქვევიდან ზევით, მაშინ, ცხადია,

$$X_1 = X_2 = 0, Y_1 = -m_1 g, Y_2 = -m_2 g.$$

4. ვთქვათ, ქალზე გადაკიდებულია უქმიადი, სავსებით ღუნვადი (იდეალური) ძაფი (იხ. IV თავის § 13), რომლის ბოლოებზე დაკიდებულია ტვირთები, რომელთა მასებია m_1 და m_2 , ამასთან $m_2 > m_1$. ვიპოვოთ m_2 მასის მქონე ნაწილაკის აჩქარება.

ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Oz ღერძი მიმართული იყოს ვერტიკალურად სიმძიმის ძალის მიმართულებით (ნახ. 117). ბმის განტოლებას, ცხადია, ექნება სახე

$$z_1 + z_2 = \text{const.} \quad (6)$$

დალამბერ—ლაგრანჟის განტოლება, განსახილველ შემთხვევაში, შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$(m_1 g - m_1 z''_1) \delta z_1 + (m_2 g - m_2 z''_2) \delta z_2 = 0. \quad (7)$$

(6) ტოლობის ძალით, წესდლო გადაადგილებების კომპონენტები შემდეგ ჰერობას უნდა აკმაყოფილებდნენ:

$$\delta z_1 + \delta z_2 = 0.$$

თუ ამ ტოლობას გავამრავლებთ λ მანრავლზე და შევკრებთ (7) განტოლებასთან, მივიღებთ

$$(m_1 g + \lambda - m_1 z''_1) \delta z_1 + (m_2 g + \lambda - m_2 z''_2) \delta z_2 = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ ლაგრანჟის I გვარის განტოლებებს

$$\begin{aligned} m_1 z''_1 &= m_1 g + \lambda, \\ m_2 z''_2 &= m_2 g + \lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

ვინაიდან (6) ტოლობის ძალით,

$$z''_1 = -z''_2,$$

ამიტომ, თუ (8) სისტემის პირველ ტოლობას მეორეს გამოვაკლებთ, ადვილად მივიღებთ

$$z''_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g. \quad (9)$$

ამრიგად, m_2 ნაწილაკი ვარდება $\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g < g$ აჩქარებით.

5. ვთქვათ M_1, M_2 მატერიალურ წერტილებზე, რომელთა მასებია m_1, m_2 მოქმედებენ მხოლოდ სიმძიმის ძალები. ეს წერტილები შეერთებულია უწონადი l სიგრძის ღეროთი. M_1 წერტილი უხახუნოდ სრიალებს ჰორიზონტალურ Ox ღერძზე, ხოლო M_1, M_2 ღერო აწარმოებს მოძრაობას Oxy ვერტიკალურ სიბრტყეში (ნახ. 118). ვიპოვოთ სისტემის მოძრაობის განტოლებები.

ბმის განტოლებებს აქვს სახე

$$f_1 = y_1 = 0,$$

$$f_2 = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 - l^2] = 0.$$

ლაგრანჟის პირველი გეარის განტოლებები განსახილველ შემთხვევაში მოგვცემს

$$m_1 x''_1 = -\lambda_2 (x_2 - x_1),$$

$$m_1 y''_1 = m_1 g + \lambda_1,$$

$$m_2 x''_2 = \lambda_2 (x_2 - x_1),$$

$$m_2 y''_2 = m_2 g + \lambda_2 y_2.$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, სისტემის თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია.

6. ვთქვათ, სისტემა შედგება ოთხი წერტილისაგან $M_i (x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) რომელნიც ერთ-

მანეთთან დაკავშირებული არიან იმ პირობით, რომ ტეტრაედრის მოცულობა, რომელსაც წვეროები ამ წერტილებში აქვთ, იცვლება, როგორც დროის წრფივი ფუნქცია. ვიპოვოთ ბმის ანალიზური გამოსახულება.

თუ გავიხსენებთ ტეტრაედრის მოცულობის გამოსათვლელ ფორმულას, ამოცანის პირობის ძალით, მივიღებთ

$$f = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} + at + b = 0,$$

სადაც a და b გარკვეული მუდმივებია.

7. ვთქვათ, სისტემა შედგება n მატერიალური წერტილისაგან, რომელნიც მოძრაობენ სიბრტყეზე

$$ax + by + cz + d = 0.$$

ვიპოვოთ ბმის განტოლებები.

ცხადია, ბმის განტოლებები იქნება

$$f_\alpha = ax_\alpha + by_\alpha + cz_\alpha + d = 0.$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

8. ვთქვათ, სისტემა ემორჩილება შემდეგი სახის ცალმხრივ ბმებს

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) \geq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (10)$$

ვიპოვოთ ის პირობები, რომელთაც ეს ბმები ადებენ სიჩქარის და აჩქარების კომპონენტებს.

ვთქვათ, t არის ის მომენტი, როცა სისტემა ტოვებს ბმებს, ე. ი.

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) = 0, \quad (11)$$

ხოლო

$$f_\alpha(x_j + dx_j, y_j + dy_j, z_j + dz_j, t + dt) > 0, \quad (12)$$

სადაც dx_j, dy_j, dz_j აღნიშნავენ უსასრულოდ მცირე dt დროში სისტემის ნამდვილ გადაადგილებათა კომპონენტებს.

შეგნიშნოთ, რომ (10)-ის მარცხენა მხარე შეიძლება განხილული იყოს, როგორც t ცვლადის რთული ფუნქცია, რომელიც ამ ცვლადს შეიცავს როგორც უშუალოდ, აგრეთვე წერტილების კოორდინატების საშუალებით და, მაშასადამე, (11) და (12) დანოკიდებულებები ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$f_{\alpha}(t) = 0, \quad (13)$$

$$f_{\alpha}(t + dt) > 0. \quad (14)$$

თუ (14)-ის მარცხენა მხარეს გავშლით მწკრივად და გავითვალისწინებთ (13)-ს, მივიღებთ

$$\frac{df_{\alpha}}{dt} dt + \frac{d^2 f_{\alpha}}{dt^2} dt^2 + \epsilon_3 > 0, \quad (15)$$

სადაც ϵ_3 არის მესამე რიგის უსასრულოდ მცირე dt -ს მიმართ. თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ (15) უტოლობას უნდა ჰქონდეს ადგილი როგორც მცირეც არ უნდა იყოს დადებითი dt სიდიდე, დავრწმუნდებით, რომ

$$\frac{df_{\alpha}}{dt} \geq 0. \quad (16)$$

ეს უკანასკნელი კიდევ ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{df_{\alpha}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\text{grad}_{(i)} f_{\alpha} \cdot \vec{v}_i) + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \geq 0. \quad (17)$$

(17) უტოლობები წარმოადგენენ იმ პირობებს, რომელთაც (10) სახის ცალმხრივი ბმები ადებენ სისტემის წერტილთა სიჩქარეებს.

თუ დაუშვებთ, რომ იმ მომენტისათვის, როცა სისტემა ტოვებს ბმებს, ადგილი აქვს უტოლობებს $\frac{df_{\alpha}}{dt} > 0$, მაშინ (15)-დან ცხადია, რომ $\frac{d^2 f_{\alpha}}{dt^2}$ სიდიდეს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი ნიშანი და მაშასადამე, ამ შემთხვევაში აჩქარებებს არ ედებათ შეზღუდვები. თუ დაუშვებთ, რომ $\frac{df_{\alpha}}{dt} = 0$, მაშინ (15)-დან, ცხადია, გვექნება

$$\frac{d^2 f_{\alpha}}{dt^2} \geq 0, \quad (18)$$

და, მაშასადამე, ეს უკანასკნელი ის პირობებია, რომელთაც (10) სახის ცალმხრივი ბმები ადებენ სისტემის წერტილთა აჩქარებებს.

9. ვთქვათ, სისტემა ემორჩილება (10) სახის ცალმხრივ ბმებს. ვიპოვოთ ის პირობები, რომელთაც შესაძლო გადაადგილებათა კომპონენტები აკმაყოფილებენ.

ვთქვათ, როგორც წინა ამოცანაში, t არის ის მომენტი, როცა სისტემა ტოვებს ბმებს, ე. ი.

$$f_{\alpha}(x_j, y_j, z_j, t) = 0, \quad (19)$$

ამასთან აღებული t -სათვის ადგილი აქვს უტოლობებს

$$f_{\alpha}(x_i + \delta x_j, y_j + \delta y_j, z_j + \delta z_j, t) > 0, \quad (20)$$

სადაც $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ წარმოადგენენ \vec{r}_j რადიუს-ვექტორთა უსასრულო მცირე ნაზრდებს (შესაძლო გადაადგილებებს). თუ ახლა (20)-ის მარცხენა მხარეს გავწლით ნწკრივად და გავითვალისწინებთ (19)-ს, მივიღებთ

$$\delta f = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f}{\partial z_j} \delta z_j \right) \geq 0.$$

ეს უკანასკნელი ის პირობებია, რომელთაც შესაძლო გადაადგილებების კომპონენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ.

ბ ა ნ ე რ ზ ი ლ ე ბ ა 2

მაგნიტული ნაპრატი სისტემის დინამიკის ძირითადი კანონები

§ 6. მოძრაობის ჩაოღმნობის კანონი

ვთქვათ, ისე როგორც წინა §-ში, მოცემულია მატერიალურ წერტილთა სისტემა M_1, M_2, \dots, M_n , რომელთა მასებია m_1, m_2, \dots, m_n . M_i -ურ წერტილზე მოქმედი გარე ძალთა ნაკრები ვექტორი აღვნიშნოთ ისევე \vec{F}_i -თი, ხოლო ამავე წერტილზე მოქმედი შიგა ძალთა ნაკრები ვექტორი \vec{F}'_i -ით. თუ სისტემა არათავისუფალია, მაშინ ამ ძალებს მივაკუთვნებთ შესაბამის გარე და შიგა რეაქციის ძალებს.

აღებულ სისტემაში შემავალი მატერიალური წერტილების მოძრაობის ჩაოღმნობის ჯანს ეწოდება ამ სისტემის მოძრაობის ჩაოღმნობა. ამრიგად, თუ სისტემის მოძრაობის ჩაოღმნობას აღვნიშნავთ \vec{K} -თი, განმარტების ძალით, მივიღებთ

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (6,1)$$

მატერიალურ წერტილთა სისტემის ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი განისაზღვრება ფორმულით (იხ. IV თავის § 15)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (6,2)$$

სადაც \vec{r}_i არის M_i წერტილის რადიუს-ვექტორი $Oxyz$ სისტემის სათავის მიმართ, $M = \sum_{i=1}^n m_i$ ამ ტოლობის გაწარმოების შედეგად ვღებულობთ

$$M \vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{K}. \quad (6,3)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის ჩაოღმნობა უდრის ამ სისტემის ინერციის ცენტრის მოძრაობის ჩაოღმნობას, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ამ უკანასკნელში თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა.

გადავიხილოთ მოძრაობის განტოლებებს, როგორც

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$d(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i dt + \vec{F}'_i dt.$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = 0,$$

მივიღებთ

$$d \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = d\vec{K} = \vec{F} dt, \quad (6,4)$$

სადაც

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

(6,4) ტოლობის ძალით, ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის დიფერენციალი ამ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალთა ნაკრები ვექტორის ელემენტარული იმპულსის ტოლია.

ეს დებულება სისტემის მოძრაობის რაოდენობის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი.

(5,4) ტოლობის ძალით, გვაქვს

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \quad (6,5)$$

საიდანაც, (6,3) ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$M\vec{w}_e = \vec{F}. \quad (6,6)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით ჩვენ მივიღეთ სისტემის ინერციის ცენტრის მოძრაობის კანონი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მატერიალურ წერტილთა სისტემის ინერციის ცენტრი ისე მოძრაობს, თითქოს მასში თავმოყრილი იყოს მთელი სისტემის მასა და მოქმედებდეს ძალა, რომელიც სისტემაზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები ვექტორის ტოლია.

(6,5) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt,$$

სადაც \vec{K}_0 არის მოძრაობის რაოდენობის მნიშვნელობა $t=t_0$ მომენტისათვის. უკანასკნელი ტოლობა იძლევა მოძრაობის რაოდენობის კანონს დროის სასრული შეაღებისათვის.

მოძრაობის რაოდენობის კანონს მარტივი მექანიკური აზრი აქვს. სახელობრ, თუ ავაგებთ \vec{K} ვექტორის ჰოდოგრაფს და გამოვთვლით ჰოდოგრაფზე \vec{K} ვექტორის ბოლო წერტილის სიჩქარეს, ეს უკანასკნელი სისტემაზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს დაემთხვევა.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედი გარე ძალთა ნაკრები ვექტორი $\vec{F}=0$, მოძრაობის რაოდენობის კანონი გვაძლევს მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შემდეგ პირველ ინტეგრალებს:

$$\sum_{i=1}^n m_i x'_i = C_1, \quad \sum_{i=1}^n m_i y'_i = C_2, \quad \sum_{i=1}^n m_i z'_i = C_3,$$

სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში $\vec{K} = \overline{\text{const}}$, ამიტომ, (6,3) ტოლობის ძალით, $v_0 = \overline{\text{const}}$ და, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში სისტემის ინერციის ცენტრი იმოდრავებს სწორხაზოვნად და თანაბრად.

მაგალითი. როგორც ცნობილია, ქენენიდან გასროლილი ყუმბარის სიმძიმის ცენტრი მოძრაობს პარაბოლაზე. ვთქვათ ყუმბარა ტრაექტორიაზე გარკვეულ მდგომარეობაში ფეთქდება; როგორ ამოძრავებს აფეთქების შემდეგ ნამსხვრევების, როგორც მატერიალურ წერტილთა სისტემის, სიმძიმის ცენტრი. აფეთქების შემდეგად წარმოშობილ შიგა ძალთა ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ამიტომ აფეთქების შემდეგაც ინერციის ცენტრისათვის მოძრაობის იგივე განტოლება გვექნება, რაც აფეთქებამდე გვექნდა. ამრიგად, ყუმბარის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა არ შეიცვლება აფეთქების შემდეგ.

§ 7. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი

M_i ური მატერიალური წერტილისათვის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს აქვს სახე (იხ. V თავის (4,3) ფორმულა)

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i] = [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i] + [\vec{r}_i \cdot \vec{F}'_i]$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

თუ მოვაქდნთ ამ ტოლობების შეჯამებას და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{F}'_i] = 0,$$

მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i]. \quad (7,1)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i], \quad (7,2)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i], \quad (7,3)$$

მაშინ (7,1) ტოლობა ასე შეიძლება ჩაეწეროს:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{L}. \quad (7,4)$$

\vec{G} ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია (7,2) ფორმულით, ეწოდება სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი. (7,3) ფორმულით განსაზღვრული \vec{L} ვექტორი, ცხადია, სისტემაზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ მომენტს წარმოადგენს.

(7,1) ანუ: რაც იგივეა, (7,4) ტოლობა ჩვენ გვარწმუნებს შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებული დროით უდრის სისტემაზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ მომენტს.

ეს დებულება მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი.

ამ კანონის მექანიკური აზრი შემდეგში მდგომარეობს: მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ჰოდოგრაფის რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროით გარე ძალთა ნაკრები მომენტის ტოლია.

თუ (7,1) ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) &= \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (z_i x'_i - x_i z'_i) &= \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i), \end{aligned} \quad (7,5)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (x_i y'_i - y_i x'_i) = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i),$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც

$$(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{F}_i.$$

თუ სისტემაზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ (7,5) ტოლობები მოგვცემს სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის [(1,2) სისტემის] შემდეგ პირველ ინტეგრალებს:

$$\sum_{i=1}^n m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) = C_4,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (z_i x'_i - x_i z'_i) = C_5,$$

(7,6)

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i y'_i - y_i x'_i) = C_6,$$

სადაც C_4, C_5, C_6 ნებისმიერი მუდმივებია.

როგორც კინემატიკიდან ცნობილია, O წერტილის მიმართ წერტილის სიჩქარის მომენტის სიდიდე გარაკეცებული ფართობული სიჩქარის ტოლია, ამიტომ, გვექნება

$$y_i z'_i - z_i y'_i = 2 \frac{d\sigma_{iz}}{dt},$$

$$z_i x'_i - x_i z'_i = 2 \frac{d\sigma_{iy}}{dt},$$

$$x_i y'_i - y_i x'_i = 2 \frac{d\sigma_{ix}}{dt},$$

(7,7)

სადაც $\frac{d\sigma_{iz}}{dt}$ წარმოადგენს M_i მატერიალური წერტილის yOz სიბრტყეზე ორთოგონალური გეგმილის ფართობულ სიჩქარეს. ანალოგიური მნიშვნელობა აქვთ $\frac{d\sigma_{iy}}{dt}$ და $\frac{d\sigma_{ix}}{dt}$ სიდიდეებს.

(7,7) ტოლობების ძალით, (7,6) ტოლობები ასე გადაიწერება:

$$\sum_{i=1}^n 2m_i \frac{d\sigma_{iz}}{dt} = C_4,$$

$$\sum_{i=1}^n 2m_i \frac{d\sigma_{iy}}{dt} = C_5,$$

$$\sum_{i=1}^n 2m_i \frac{d\sigma_{ix}}{dt} = C_6.$$

(7,8)

უკანასკნელი ტოლობები იძლევიან ერთი მატერიალური წერტილის შემთხვევაში ცნობილ ფართობთა კანონის ანალოგს მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის.

განვიხილოთ კოორდინატთა $Cx'y'z'$ მოძრავი სისტემა, რომელსაც სათავე აქვს მატერიალურ წერტილთა სისტემის ინერციის ცენტრში და ღერძები პარალელურია $Oxyz$ სისტემის ღერძების. ცხადია, ეს სისტემა შეიძლება ასრულებდეს მხოლოდ გადატანით მოძრაობას (ნახ. 119). ვაჩვენოთ, რომ ამ სისტემის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონის ისეთივე სახე აქვს, როგორიც უძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. ცხადია, გვექნება (ნახ. 119)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i, \quad (7,9)$$

სადაც \vec{r}_c არის C წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ, \vec{r}_i — M_i წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ, \vec{r}'_i — M_i წერტილის რადიუს-ვექტორი C წერტილის მიმართ. (6,2) ტოლობის ძალით, გვუძენება

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_c.$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ \vec{r}_i ვექტორის მნიშვნელობას (7,9) ტოლობიდან, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = 0. \quad (7,10)$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = 0, \quad (7,11)$$

სადაც \vec{v}'_i არის M_i წერტილის სიჩქარე $Cx'y'z'$ სისტემის მიმართ. (7,9) ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i. \quad (7,12)$$

თუ (7,9) და (7,12) მნიშვნელობებს შევიტანთ (7,1) ტოლობაში და გავითვალისწინებთ (7,10) და (7,11) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_c \cdot M \vec{v}_c] + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_i \cdot m_i \vec{v}'_i] = [\vec{r}_c \cdot \vec{F}] + \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_i \cdot \vec{F}'_i]. \quad (7,13)$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_c \cdot M \vec{v}_c] = [\vec{r}_c \cdot M \vec{v}_c] = [\vec{r}_c \cdot \vec{F}],$$

ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_i \cdot m_i \vec{v}'_i] = \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_i \cdot \vec{F}'_i]. \quad (7,14)$$

(7,14) ტოლობა ამტკიცებს ზემონათქვამის სამართლიანობას.

§ 8. ცოცხალი ძალის კანონი

მატერიალურ წერტილთა სისტემის ცოცხალი ძალა (კინეტიკური ენერგია) ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების ცოცხალი ძალების ჯამს:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (8,1)$$

თუ შევინარჩუნებთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს და ამ უკანასკნელში \vec{v}_i -ის ნაცვლად შევიტანთ მის მნიშვნელობას (7,12) ტოლობიდან, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) =$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \vec{v}_c \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2.$$

(7,11) ტოლობის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2, \quad (8,2)$$

(8,2) ტოლობა გვარწმუნებს კენიგის შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:
დებულება: მატერიალურ წერტილთა სისტემის ცოცხალი ძალა შედგება ორი შესაქარებისაგან, რომელთაგან პირველი წარმოადგენს ინერციის ცენტრის ცოცხალ ძალას, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მასში თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა; მეორე შესაქარები წარმოადგენს ცოცხალ ძალას იმ სისტემის მიმართ, რომელსაც სათავე აქვს ინერციის ცენტრში და რომლის ღერძებიც უძრავი $Oxyz$ სისტემის ღერძების პარალელურია.

M_i -ური მატერიალური წერტილისათვის ცოცხალი ძალის კანონი გვაძლევს (იხ. V თავის (6,2) ფორმულა)

$$d \frac{m_i v_i^2}{2} = (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) + (\vec{F}'_i \cdot d\vec{r}_i),$$

სადაც $d\vec{r}_i$ წარმოადგენს M_i წერტილის ნამდვილ გადაადგილებას. თუ უკანასკნელ ტოლობებს შევაჯამებთ i ინდექსით, მივიღებთ

$$dT = d \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{F}'_i \cdot d\vec{r}_i). \quad (8,3)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვარწმუნებს შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:
დებულება. მატერიალურ წერტილთა სისტემის ცოცხალი ძალის დიფერენციალი უდრის სისტემაზე მოქმედ შიგა და გარე ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამს სისტემის ნამდვილ გადაადგილებაზე.

ეს დებულება ცოცხალი ძალის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი

§ 9. პოტენციალური ძალები. ცოცხალი ძალის ინტეგრალი

ჩვენ ვიტყვით, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე მოქმედ $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \dots, \vec{\Phi}_n$ ძალები პოტენციალურია. თუ ამ ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ნებისმიერ $d\vec{r}_i = (dx_i, dy_i, dz_i)$ გადაადგილებაზე წარმოადგენს გარკვეული $W(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ამასთან W მხოლოდ სისტემის მდებარეობის ფუნქციას წარმოადგენს. ამრიგად, თუ აღნიშნული ძალები პოტენციალურია, მაშინ

$$\sum_{i=1}^n (\vec{\Phi}_i \cdot d\vec{r}_i) = dW.$$

W ფუნქციას ეწოდება აღებული ძალების პოტენციალი, ხოლო $-W$ -ს—ამ ძალების პოტენციალური ენერგია.

უკანასკნელი ტოლობა, ცხადია, შემდეგი ტოლობების ტოლფასია:

$$\phi_{ix} = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad \phi_{iy} = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad \phi_{iz} = \frac{\partial W}{\partial z_i}.$$

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი შიგა ძალები წარმოადგენენ ურთიერთმიზიდულობის ან განზიდვის ძალებს, რომელნიც მხოლოდ მიმზიდველ (ან განმზიდველ) წერტილებს შორის მანძილზეა დამოკიდებული და რომელნიც შემდეგი სახით შეიძლება იყოს წარმოდგენილი:

$$\vec{F}_{ij} = F(\rho_{ij}) \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\rho_{ij}}, \quad (9,1)$$

სადაც \vec{F}_{ij} არის ძალა, რომლითაც M_i -ურ წერტილზე მოქმედებს M_j -ური წერტილი, $F(\rho_{ij}) = |F_{ij}|$, \vec{r}_j არის M_j წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის (კოორდინატთა სისტემის სათავის) მიმართ, \vec{r}_i არის M_i წერტილის რადიუს-ვექტორი იმავე O წერტილის მიმართ, ρ_{ij} —მანძილი M_i და M_j წერტილებს შორის (ნახ. 120).

ქმედებისა და უკუქმედების კანონის ძალით

$$\vec{F}_{ji} = -F(\rho_{ij}) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\rho_{ij}}. \quad (9,2)$$

(9,1) და (9,2) ტოლობების ძალით, \vec{F}_{ij} და \vec{F}_{ji} ძალების ელემენტარული მუშაობათა ჯამი, რომელსაც $\delta A'_{ij}$ -ით აღვნიშნავთ, იქნება

$$\begin{aligned} \delta A'_{ij} &= F(\rho_{ij}) \frac{1}{\rho_{ij}} \{ ((\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i) - ((\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_j) \} = \\ &= - \frac{F(\rho_{ij})}{\rho_{ij}} ((\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)) = - \frac{F(\rho_{ij})}{\rho_{ij}} \frac{1}{2} d\rho_{ij}^2 = - F(\rho_{ij}) d\rho_{ij}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\delta A'_{ij} = - dV'_{ij},$$

სადაც V'_{ij} წარმოადგენს შემდეგ განუზღვრელ ინტეგრალს:

$$V'_{ij} = \int F(\rho_{ij}) d\rho_{ij}.$$

თუ ყველა შიგა ძალის მიერ შესრულებულ ელემენტარულ მუშაობათა ჯამს აღვნიშნავთ $\delta A'$ -ით, როგორც ადვილი მისახვედრია, მივიღებთ

$$\delta A' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n F(\rho_{ij}) d\rho_{ij}.$$

კოეფიციენტი $1/2$ აღებულია იმიტომ, რომ ორმავ ჯამში ყოველი წყვილი მატერიალური წერტილებისა ორჯერ მიიღებს მონაწილეობას. ამის შემდეგ ცხადია, რომ

$$\delta A' = -dV',$$

სადაც

$$V' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int F(\rho_{ij}) d\rho_{ij}.$$

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში შიგა ძალები წარმოადგენენ პოტენციალურ ძალებს, რომელთა პოტენციალური ენერგიაა არის V' .

დავუშვათ, რომ გარე ძალებიც პოტენციალურია, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) = -dV,$$

სადაც V არის გარე ძალების შესაბამის პოტენციალური ენერგია.

ამ შემთხვევაში ცოცხალი ძალის კანონი (იხ. (8,3) ტოლობა) მოგვცემს

$$dT = -dV - dV',$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$T + V + V' = h, \quad (9,3)$$

სადაც h ნებისმიერი მუდმივია. ეს უკანასკნელი, რომელიც მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს წარმოადგენს, ცნობილია ცოცხალი ძალის ინტეგრალის სახელწოდებით. ამრიგად, თუ სისტემაზე მოქმედი შიგა და გარე ძალები პოტენციალურია, მაშინ ადგილი აქვს ცოცხალი ძალის ინტეგრალს.

(9,3) ტოლობის ძალით, როცა სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, მაშინ კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. ამ კანონს ენერგიის შენახვის კანონი ეწოდება.

ხშირად $T + V$ გამოსახულებას სისტემის გარე ენერგიას უწოდებენ, ხოლო V' —შიგა ენერგიას და, მაშასადამე, გარე და შიგა ენერგიების ჯამი. (9,3) ტოლობის ძალით, მუდმივია.

ამოცანები

10. ორი მძიმე მატერიალური წერტილი, რომელთა მასებია m_1 და m_2 , მოთავსებულია ვერტიკალზე ერთი მეორის ზევით. პირველი წერტილი, რომელიც მოთავსებულია მეორის ზევით, ვარდება უსაწყისო სიჩქარით, ხოლო ერთდროულად მეორე წერტილი გასროლილია ვერტიკალურად ზევით v_0 საწყისი სიჩქარით. ვიპოვოთ ამ წერტილების სიმძიმის ცენტრის საწყისი სიჩქარე.

z ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად და აღვნიშნოთ z_1 -ით და z_2 -ით მატერიალური წერტილების კოორდინატები. სიმძიმის ცენტრის კოორდინატი გამოითვლება ფორმულით

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}, \quad (1)$$

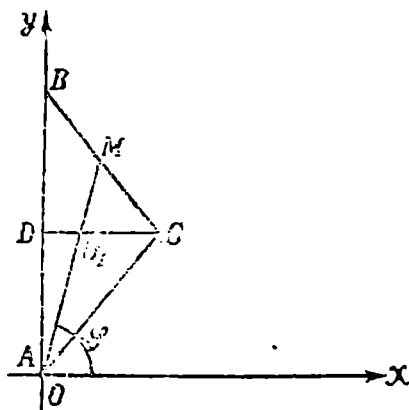
საიდანაც გაწარმოებით ვღებულობთ

$$v_c = \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 \frac{dz_1}{dt} + m_2 \frac{dz_2}{dt} \right). \quad (2)$$

ამოცანის პირობის ძალით, საწყის მომენტში $\frac{dz_1}{dt} = 0$, $\frac{dz_2}{dt} = v_0$, ამიტომ (2) ფორმულა საწყისი მომენტისათვის მოგვცემს

$$v_c^0 = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}.$$

11. ABC ფირფიტა, რომელსაც სწორკუთხოვანი ტოლფერდა სამკუთხედის ფორმა აქვს და რომლის პიაოტენუზაც 12 სანტიმეტრის ტოლია, ეყრდნობა A წვეროთი გლუვ პორიზონტალურ იატაკს, ხოლო AB ჰიპოტენუზა ვერტიკალურ მიმართულებას ემთხვევა. თავისუფლად გაშვებული ფირფიტა იწყებს ვარდნას სიმძიმის ძალის მოქმედებით. ვიკოვთ ის წირი, რომელსაც BC გვერდის M შუაწერტილი შემოწერს (ნახ. 121).



ნახ. 121.

Oy ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად, Ox ღერძი კი პორიზონტალურად, ისე როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე.

ვინაიდან სიმძიმის ძალა, რომელიც ფირფიტაზე მოქმედ გარე ძალას წარმოადგენს, არ იცვლება მოძრაობის დროს, ამიტომ, სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის კანონის ძალით, ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი O_1 დაეშვება ვერტიკალურად და, მაშასადამე, მისი აბსცისა $x_0 = DO_1 = \text{const.}$

თუ M წერტილის კოორდინატებს

აღვნიშნავთ x და y -ით, ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} x &= x_0 + O_1M \cos \varphi, \\ y &= OM \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

ზადაც φ ის კუთხეა, რომელსაც OM ვექტორი შეადგენს Ox ღერძთან.

აღვილად მივიღებთ, რომ $BC = \frac{12}{\sqrt{2}}$,

$$DC^2 = BC^2 - 36 = 36, \quad DC = 6, \quad \text{რის შემდეგაც, ცხადია, } x_0 = \frac{6}{3} = 2.$$

OMC სამკუთხედიდან ვღებულობთ

$$OM = \sqrt{90}, \quad O_1M = \frac{\sqrt{90}}{3}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (3)-ში შევიტანთ, მივიღებთ

$$x = 2 + \frac{\sqrt{90}}{3} \cos \varphi,$$

$$y = \sqrt{90} \sin \varphi.$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან φ პარამეტრის გამორიცხვით ვღებულობთ

$$9(x-2)^2 + y^2 = 90. \quad (4)$$

ამრიგად, M წერტილის ტრაექტორია წარმოადგენს ელიფსს, რომელიც ვანსაზღვრულია (4) განტოლებით.

გ ა ნ წ ო ჟ ი ლ ე ბ ა 3

მ ა ზ ა რ ი ა ლ უ რ წ ა რ ჭ ი ლ თ ა ს ი ს ჯ ა ე ი ს მ ო ქ რ ა ო ბ ა ე ბ ის გ ა ნ წ ო ლ ე ბ ე ბ ი გ ა ნ წ ო გ ა დ ა ზ ო ლ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი

§ 10. ლ ა ბ რ ა ნ შ ი ა მ ო რ ა მ გ ვ ა რ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი

ვთქვათ, ისე როგორც 1 განყოფილებაში, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება ჰოლონომურ, ორმხრივ (დამპყრ), საზოგადოდ არასტაციონარულ იდეალურ ბმებს, რომელთა განტოლებებია¹

$$f_\alpha(x_j, y_j, z, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k) \quad (10,1)$$

და, ვთქვათ, ეს ბმები დამოუკიდებელი არიან იმ გაგებით, როგორც ეს ხსენებულ განყოფილებაში იყო აღნიშნული, ე. ი. ბმის ამ განტოლებებიდან ამოიხსნება სისტემის k კოორდინატი და გამოისახება დანარჩენი $3n-k$ კოორდინატის საშუალებით. ცხადია, სისტემის თავისუფლების ხარისხი ტოლია $3n-k$ -სი ($s = 3n-k$).

განვიხილოთ $s = 3n-k$ რაოდენობის დამოუკიდებელი პარამეტრი q_1, q_2, \dots, q_s , რომელთა საშუალებითაც სისტემის დეკარტის კოორდინატები ასე გამოისახებიან:

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ y_i &= \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ z_i &= \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ (i &= 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (10,2)$$

სადაც $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ წარმოადგენენ თავიანთი არგუმენტების ცალსახა, უწყვეტ და მეორე რიგამდე უწყვეტად წარმოებად ფუნქციებს, ამასთან, რაც არსებითია, ეს დამოკიდებულებანი აკმაყოფილებენ ბმის (10,1) განტოლებებს q_1, \dots, q_s პარამეტრების მიმართ იგივეურად; თუ ბმები სტაციონარულია, მაშინ (10,2) გამოსახულებაში დრო ცხადად არ მონაწილეობს.

q_1, q_2, \dots, q_s პარამეტრებს, რომელთაც ზემოხსენებული თვისება აქვთ, ეწოდება სისტემის განზოგადებული კოორდინატები.

¹ როგორც ყოველთვის, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ f_α ფუნქციები არიან თავიანთი არგუმენტების უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები მეორე რიგამდე.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, სისტემის დეკარტის $3n$ კოორდინატიდან k კოორდინატი (10,1) სისტემიდან შეიძლება ამოვხსნათ და გამოვსახოთ დანარჩენი $3n-k$ კოორდინატის საშუალებით. ხსენებულ $s=3n-k$ კოორდინატისათვის დაცული იქნება ყველა ის პირობა, რომელიც განზოგადებული კოორდინატების მიმართ ზემოთ იყო აღნიშნული და, მაშასადამე, დეკარტის ეს $3n-k$ კოორდინატი შეიძლება მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატებად. მოყვანილი მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ არსებობს სისტემის განზოგადებული კოორდინატები, რომელთაც ზემოჩამოთვლილი თვისებები აქვთ, ამასთან, ცხადია, არსებობს უამრავი სისტემა ასეთი კოორდინატებისა.

დალამბერ-ლაგრანჟის განტოლება (მექანიკის ზოგადი განტოლება) შემდეგი სახით შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^n [(m_i x_i'' - X_i) \delta x_i + (m_i y_i'' - Y_i) \delta y_i + (m_i z_i'' - Z_i) \delta z_i] = 0, \quad (10,3)$$

სადაც

$$(X_i, Y_i, Z_i) = \overline{F_i},$$

წარმოადგენს მატერიალურ წერტილთა სისტემის M_i -ურ წერტილზე მოქმედ ყველა შიგა და გარე ძალების ნაკრებ ვექტორს (რეაქციის ძალა ამ განტოლებაში არ მონაწილეობს) $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ სისტემის შესაძლო გადაადგილებების კომპონენტებია.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \equiv \varphi_i(q_i, t) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

ცხადია, გვექნება

$$\delta x_i = \varphi_i(q_j + \delta q_j, t) - \varphi_i(q_j, t).$$

თუ ახლა $\varphi_i(q_j + \delta q_j, t)$ გამოსახულებას დავშლით მწკრივად და უკლავადებთ δq_j სიდიდების მიმართ მეორე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს, მივიღებთ

$$\varphi_i(q_j + \delta q_j, t) = \varphi_i(q_j, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

ამის შემდეგ, ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ \delta y_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ \delta z_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j, \end{aligned} \quad (10,4)$$

სადაც ორი უკანასკნელი ტოლობა დაწერილია პირველის ანალოგიურად.

თუ ამ მნიშვნელობებს დალამბერ-ლაგრანჟის (10,3) განტოლებაში შევიტანთ და მოვახდენთ აჯამვის რიგის შეცვლას, აღვიღალ მივიღებთ

სადაც

$$\sum_{j=1}^n (\Omega_j - Q_j) \delta q_j = 0, \quad (10,5)$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \quad (10,6)$$

$$\Omega_j = \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (10,7)$$

ვარდავეყნათ უკანასკნელი გამოსახულება. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ იგივობებს:

$$\begin{aligned} x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - x_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \\ y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \right) - y_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (10,8)$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) - z_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}.$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'}. \quad (10,9)$$

მართლაც, ცხადია, გვექნება

$$x_i' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} q_j' + \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (10,10)$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას გავაწარმოებთ q_j' -ის მიმართ, მივიღებთ (10,9) ტოლობას. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_j} = \frac{\partial y_i'}{\partial q_j'}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \frac{\partial z_i'}{\partial q_j'}, \quad (10,11)$$

ამასთან ორი უკანასკნელი ტოლობა დაწერილია პირველის ანალოგიურად.

ადვილად დავრწმუნდებით, აგრეთვე, შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_j}. \quad (10,12)$$

მართლაც,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_j} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_j} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_j} q_n' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j}. \quad (10,13)$$

ვინაიდან

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} q_n' + \frac{\partial x_i}{\partial t},$$

ამიტომ

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_n} q_n' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}. \quad (10,14)$$

პირობის ძალით, მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია, ამიტომ შეარ-
ცის დებულების თანახმად, (10,13) და (10,14) ტოლობების მარჯვენა მხარეები
ერთნაირია და, მაშასადამე, მარცხენა მხარეებიც ერთნაირი უნდა იყოს,
რითაც (10,12) ტოლობის სამართლიანობაც დამტკიცებულია. ამრიგად, ჩვენ
ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} = \frac{\partial y'_i}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \frac{\partial z'_i}{\partial q_j}, \quad (10,15)$$

სადაც ორი უკანასკნელი ტოლობა დაწერილია პირველის ანალოგიურად.

თუ (10,11) და (10,15) მნიშვნელობებს (10,8) ტოლობებში შევიტანთ,
მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q'_j} \right) - x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q_j}, \\ y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j} \right) - y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q_j}, \\ z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j} \right) - z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (10,16)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს Ω_j -ის გამოსახულებაში შევიტანთ, ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned} \Omega_j &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q'_j} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j} \right) - \\ &- \sum_{i=1}^n m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q_j} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q_j} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q'_j} \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

სადაც

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \quad (10,17)$$

წარმოადგენს სისტემის ცოცხალ ძალას (კინეტიკურ ენერგიას).

თუ Ω_j -ის მიღებულ მნიშვნელობას (10,5) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (10,18)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ დამოუკიდებელი სიდი-
დეებია, დავრწმუნდებით, რომ (10,18) ტოლობაში ამ სიდიდეების კოეფი-
ციენტები ნულის ტოლი უნდა იყოს და მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (10,19)$$

ამ სისტემას, რომელიც ზუსტად იმდენ განტოლებას შეიცავს, რამდენიც არის დამოუკიდებელი კოორდინატების რიცხვი, ეწოდება ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები. რაც მეტია ბმების რიცხვი, მით ნაკლებია ამ სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიცხვი, რაც საყესებით ბუნებრივია და რასაც ლაგრანჟის ! გვარის განტოლებებისათვის ადგილი არა აქვს.

Q_1, Q_2, \dots, Q_s სიდიდეებს ეწოდება განზოგადებული ძალის კომპონენტები.

(10,19) სისტემა, როგორც ადვილი მისახვედრია, წარმოადგენს განზოგადებული კოორდინატების მიმართ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ეს სისტემა რომ ფაქტიურად დაეწეროს, საკმარისია სისტემის ცოცხალი ძალა გამოვსახოთ განზოგადებულ კოორდინატებში, რაც მომდევნო პარაგრაფში იქნება გაკეთებული.

(10,6) ტოლობიდან ცხადია, რომ Q_j ($j=1, 2, \dots, s$) სიდიდეებს, რომელთაც ჩვენ ზემოთ განზოგადებული ძალის კომპონენტები ვუწოდეთ, საზოგადოდ, შეიძლება არ ჰქონდეთ ძალის განზომილება. თუ განზოგადებულ კოორდინატებს აქვთ სიგრძის განზომილება, მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, Q_j სიდიდეებს ექნებათ ძალის განზომილება. მაგრამ, სრულებით არ არის აუცილებელი განზოგადებულ კოორდინატებს სიგრძის განზომილება ჰქონდეთ¹. განზოგადებული ძალის კომპონენტებად Q_j სიდიდეების სახელწოდება მაინც გამართლებულია იმით, რომ ჯამი

$$\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i).$$

გამოსახავს მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალების მუშაობათა ჯამს ამ სისტემის შესაძლო გადაადგილებაზე. Q_1, Q_2, \dots, Q_s სიდიდეებს შემდეგში, უბრალოდ, განზოგადებულ ძალებს ვუწოდებთ.

თუ სისტემა თავისუფალია, მაშინ განზოგადებულ კოორდინატებად შეიძლება მივიღოთ დეკარტის კოორდინატები და, როგორც ადვილი მისახვედრია, ამ შემთხვევაში განზოგადებული ძალები დაემთხვევა სისტემაზე მოქმედ ძალთა პროექციებს სათანადო ღერძებზე.

შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ (10,2) სისტემიდან შეიძლება ამოვხსნათ q_1, q_2, \dots, q_s განზოგადებული კოორდინატები და გამოვსახოთ ისინი დეკარტის კოორდინატების საშუალებით.

ეს მოთხოვნა იმის ტოლფასია, რომ s რიგის გარკვეული ფუნქციონალური დეტერმინანტი, რომელიც შედგენილია x_i, y_i, z_i ფუნქციების საშუალებით, განსხვავებულია ნულისაგან.

§ 11. ცოცხალი ძალის გამოხატვა განზოგადებულ კოორდინატებში

(10,2) ტოლობების ძალით, გვექნება

$$x_i' = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} q_j' + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad y_i' = \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_i}{\partial q_j} q_j' + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \quad z_i' = \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_i}{\partial q_j} q_j' + \frac{\partial z_i}{\partial t}. \quad (11,1)$$

¹ განზოგადებული კოორდინატები შეიძლება, მაგალითად, კუთხეებს წარმოადგენდნენ.

თუ ბმები სტაციონარულია, მაშინ (10,2) დამოკიდებულებებში φ_i , ψ_i და θ_i ფუნქციები ცხადად დროს არ შეიცავენ და გვექნება

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0. \quad (11,2)$$

თუ x'_i , y'_i , z'_i სიდიდეების (11,1) მნიშვნელობებს შევიტანთ ცოცხალი ძალის (10.7) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} q'_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial y_i}{\partial q_j} q'_j + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial z_i}{\partial q_j} q'_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right].$$

კვადრატში აყვანისა და აჯამების რიგის შეცვლის შედეგად, აღვიღად მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s A_{\alpha\beta} q'_\alpha q'_\beta + \sum_{\alpha=1}^s A_\alpha q'_\alpha + \frac{1}{2} A, \quad (11,3)$$

სადაც

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} + \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial q_\beta} + \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial z_i}{\partial q_\beta} \right), \quad (11,4)$$

$$A_\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right), \quad (11,5)$$

$$A = \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (11,6)$$

(11,4) ტოლობის ძალით, ცხადია, რომ $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ და მაშასადამე, $\|A_{\alpha\beta}\|$ სიმეტრიულ მატრიცს წარმოადგენს.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s A_{\alpha\beta} q'_\alpha q'_\beta, \quad (11,7)$$

$$T_1 = \sum_{\alpha=1}^s A_\alpha q'_\alpha, \quad (11,8)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} A, \quad (11,9)$$

მაშინ (11,3) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$T = T_2 + T_1 + T_0. \quad (11,10)$$

დაეუშვათ, რომ $\Delta=0$. მაშინ, ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} A_{11}q'_1 + A_{12}q'_2 + \dots + A_{1n}q'_n &= 0, \\ A_{21}q'_1 + A_{22}q'_2 + \dots + A_{2n}q'_n &= 0, \\ . &. \\ A_{m1}q'_1 + A_{m2}q'_2 + \dots + A_{mn}q'_n &= 0, \end{aligned}$$

ქენება არატრევიალური ამოხსნა, რომლისთვისაც, (11,13) ტოლობის ძალით, ცოცხალი ძალა $T=0$. ამრიგად, განსახილველი სტაციონარული ბმების შემთხვევაში ცოცხალი ძალა ნულის ტოლია, როცა ყველა განზოგადებული სიჩქარე ნულის ტოლი არ არის, რაც შეუძლებელია და, მაშასადამე, $\Delta \neq 0$.

ვთქვათ ახლა ბმები არასტაციონარულია. განვიხილოთ დროის ნების-
მიერი $t=t_0$ მომენტი და დავამტკიცოთ, რომ ამ მომენტში $\Delta \neq 0$. (10,1) და
(10,2) ტოლობებში იქ, სადაც t ცხადად მონაწილეობს, შევიტანოთ t -ს ნაცვ-
ლად $t=t_0$ მნიშვნელობა და განვიხილოთ სისტემის დამხმარე მოძრაობა, რო-
მელიც დახასიათებულია ტოლობებით

$$\begin{aligned}x_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t_0), \\y_i &= \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t_0), \\z_i &= \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t_0).\end{aligned}$$

ამ დამხმარე მოძრაობისათვის ზემოხსენებული დეტერმინანტი იგივე იქნება, რაც ჩვენი სისტემის არასტაციონარული მოძრაობისათვის $t = t_0$ მომენტში. მაგრამ, ვინაიდან სისტემის დამხმარე მოძრაობა სტაციონარულ მოძრაობას წარმოადგენს, ამიტომ, ზემოდაშტკიცებულის ძალით, $\Delta \neq 0$ და ამით, არასტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაშიაც, დებულება დამტკიცებულია.

თუ გავითვალისწინებთ ცოცხალი ძალის (11,3) გამოსახულებას და შევადგენთ (10,19) განტოლებებს, ადვილად მივიღებთ

$$\sum_{\beta=1}^s A_{\alpha\beta} q_{\beta}'' + \sum_{\beta=1}^s \sum_{\gamma=1}^s B_{\alpha\beta\gamma} q_{\beta}' q_{\gamma}' + \sum_{\beta=1}^s B_{\alpha\beta} q_{\beta}' + B_{\alpha} = Q_{\alpha} \quad (11,14)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, s),$$

სადაც $B_{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\alpha\beta}$, B_{α} გარკვეული ფუნქციებია, რომელნიც გამოისახებიან $A_{\alpha\beta}$, A_{α} , A ფუნქციების საშუალებით და რომელთა მნიშვნელობების ამოწერა არაავითარ სიძინელს არ წარმოადგენს.

(11,14) სისტემა, ცხადია, წარმოადგენს მეორე რიგის არაწრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც ამოხსნაღია მეორე რიგის წარმოებულების მიმართ, რადგან, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, $\Delta = \det \|A_{\alpha\beta}\| \neq 0$.

განზოგადებულ კოორდინატებს ეწოდება ორთოგონალური, თუ $A\alpha=0$, როცა $\alpha \neq \beta$. სტაციონარული მოძრაობისათვის, ამ შემთხვევაში, ცოცხალ ძალას ექნება სახე

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} q_1'^2 + A_{22} q_2'^2 + \dots + A_{nn} q_n'^2). \quad (11,15)$$

შევადგინოთ ამ შემთხვევაში ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T'}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (11,16)$$

(11,15) ტოლობის ძალით,

$$\frac{\partial T'}{\partial q_\alpha'} = A_{\alpha\alpha} q_\alpha', \quad \frac{\partial T'}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial A_{\beta\beta}}{\partial q_\alpha} q_\beta'^2.$$

ცხადია, გვექნება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial q'_\alpha} = A_{\alpha\alpha} q_\alpha'' + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial A_{\alpha\alpha}}{\partial q_\beta} q_\beta' q_\alpha'.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (11,16) განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$A_{\alpha\alpha} q_\alpha'' + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial A_{\alpha\alpha}}{\partial q_\beta} q_\alpha' q_\beta' - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial A_{\beta\beta}}{\partial q_\alpha} q_\beta'^2 = Q_\alpha \quad (11,17)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

§ 12. ცოცხალი ძალის ინტეგრალი ლაგრანჟის პირველი და მეორე გვარის განტოლებებისათვის

თუ M_i -ური მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ყველა შიგა და გარე ძალების ნაქრებ ვექტორს აღვნიშნავთ

$$\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)\text{-ით.}$$

და ვიგულისხმებთ, როგორც ყოველთვის, სისტემა ემორჩილება (10,1) სახის იდეალურ ბმებს, მაშინ ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები, ვექტორული სახით, ასე დაიწერება (იხ. § 4):

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \lambda_1 \text{grad}_{(i)} f_1 + \lambda_2 \text{grad}_{(i)} f_2 + \dots + \lambda_k \text{grad}_{(i)} f_k, \quad (12,1)$$

სადაც $\text{grad}_{(i)}$ აღნიშნავს გრადიენტს M_i -ური წერტილის კოორდინატების მიმართ. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ სკალარულად $d\vec{r}_i$ -ზე, სადაც $d\vec{r}_i$ სისტემის ნამდვილი გადაადგილებებია და შევნიშნავთ, რომ

$$m_i \left(\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \cdot d\vec{r}_i \right) = m_i \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt \right) = (m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i) = d \frac{m_i v_i^2}{2},$$

მივიღებთ

$$d \frac{m_i v_i^2}{2} = (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) + \lambda_1 (\text{grad}_{(i)} f_1 \cdot d\vec{r}_i) + \dots + \lambda_k (\text{grad}_{(i)} f_k \cdot d\vec{r}_i),$$

ანუ, რაც იგივეა

$$d \frac{m_i v_i^2}{2} = X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i + \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i} dz_i \right) +$$

$$+ \dots + \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} dz_i \right).$$

თუ მოვახდენთ შეჯამებას i ინდექსით, მივიღებთ

$$dT = d \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) + \\ + \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i} dz_i \right) + \\ + \dots + \lambda_k \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} dz_i \right).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ სისტემის ნამდვილი გადაადგილების კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს (იხ. § 3):

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \\ (\alpha = 1, 2, \dots, k),$$

მაშინ, უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ ცოცხალი ძალის კანონს შემდეგი სახით:

$$dT = \sum_{i=1}^n (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} dt - \dots - \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t} dt. \quad (12,2)$$

თუ ბმები სტაციონარულია, მაშინ $\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = \dots = \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$ და (12,2) ტოლობა მოგვცემს

$$dT = \sum_{i=1}^n (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i). \quad (12,3)$$

ამრიგად, როცა სისტემა სტაციონარულ ბმებს ემორჩილება, მაშინ ამ სისტემისათვის ცოცხალი ძალის კანონის ისეთივე სახე აქვს, როგორიც თავისუფალი სისტემის შემთხვევაში.

თუ ამ შემთხვევაში სისტემაზე მოქმედი \overline{F}_i ძალები პოტენციალურია:

$$\sum_{i=1}^n (\overline{F}_i \cdot d\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = -dV, \quad (12,4)$$

მაშინ (12,3) ტოლობა მოგვცემს

$$d(T+V) = 0, \\ T+V = \text{const}. \quad (12,5)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ლაგრანჟის I გვარის განტოლებების გარკვეულ პირველ ინტეგრალს, რომელსაც ცოცხალი ძალის ინტეგრალი ეწოდება.

ამრიგად, როცა ბმები სტაციონარულია და უშუალოდ მოქმედი ძალები — პოტენციალური, მაშინ ლაგრანჟის პირ-

ველი გვარის განტოლებებისათვის ადგილი აქვს ცოცხალი ძალის ინტეგრალს.

ცხადია, (12,5) ტოლობაში T და V ფუნქციები დეკარტის კოორდინატებშია გამოსახული.

განვიხილოთ ახლა ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (12,6)$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე dq_j -ზე და ავჯამოთ j ინდექსით, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} dq_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j. \quad (12,7)$$

ცხადია შემდეგი იგივობის სამართლიანობა:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} dq_j = \frac{dq_j}{dt} d \frac{\partial T}{\partial q'_j} = d \left(q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q'_j} dq'_j.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (12,7) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$d \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_j} dq'_j = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j.$$

ვინაიდან

$$dT = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_j} dq'_j + \frac{\partial T}{\partial t} dt,$$

ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$d \left(\sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_j} - T \right) + \frac{\partial T}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j. \quad (12,8)$$

(11,10) ტოლობის ძალით,

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (12,9)$$

სადაც T_2 , T_1 , T_0 განსაზღვრულნი არიან (11,7), (11,8), (11,9) ტოლობებით.

(11,9) ტოლობის ძალით, $\frac{\partial T_0}{\partial q'_j} = 0$, ამიტომ, გვქვია

$$\frac{\partial T}{\partial q'_j} = \frac{\partial T_2}{\partial q'_j} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_j}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (12,8) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$d \left(\sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T_2}{\partial q'_j} + \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T_1}{\partial q'_j} - T \right) = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j - \frac{\partial T}{\partial t} dt. \quad (12,10)$$

ერთგვაროვანი ფორმების შესატყვის ეილერის ცნობილი დებულების ძალით,

$$\sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T_2}{\partial q'_j} = 2T_2, \quad \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T_1}{\partial q'_j} = T_1.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (12,10) ტოლობაში შევიტანთ და გავითვალისწინებთ (12,9) ტოლობას, მივიღებთ

$$d(T_2 - T_0) = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j - \frac{\partial T}{\partial t} dt, \quad (12,11)$$

რომელიც იძლევა ცოცხალი ძალის კანონს გარკვეული ფორმით.

ვთქვათ, სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, ე. ი. ადგილი აქვს (12,4) ტოლობას, რომელიც, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} -dV &= \sum_{i=1}^n (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = \\ &= \sum_{j=1}^s dq_j \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial t} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial t} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) dt = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j - \\ &- \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) dt = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j - \frac{\partial V}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

პოტენციალი $U = -V$ მხოლოდ სისტემის წერტილთა კოორდინატების ფუნქციაა, ე. ი. V ცხადად t -ს არ შეიცავს და, მაშასადამე, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ

$$\sum_{j=1}^s Q_j dq_j = -dV.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (12,11) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$d(T_2 - T_0) = -dV - \frac{\partial T}{\partial t} dt. \quad (12,12)$$

თუ T ცხადად დროს არ შეიცავს, მაშინ $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$T_2 - T_0 + V = \text{const.} \quad (12,13)$$

ეს უკანასკნელი ლაგრანჟის მეორე გვარის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს წარმოადგენს. ამრიგად, როცა ძალები პოტენციალურია და ცოცხალი ძალა T ცხადად დროს არ შეიცავს, მაშინ გვაქვს (12,13) პირველი ინტეგრალი. როცა ბმები არასტაციონარულია, მაგრამ T ცხადად დროს არ შეიცავს, მაშინ $T_2 - T_0$ არ წარმოადგენს სისტემის ცოცხალ ძალას და ამიტომ (12,13) ინტეგრალს არ შეიძლება ცოცხალი ძალის ინტეგრალი ვუწოდოთ. ამ შემთხვევაში (12,13) ინტეგრალს ეწოდება ცოცხალი ძალის განზოგადებული ინტეგრალი (ენერგიის განზოგადებული ინტეგრალი). ამ ინტეგრალს ხშირად იაკობის ინტეგრალს უწოდებენ.

თუ ბმები სტაციონარულია, მაშინ $\frac{\partial T'}{\partial t} = 0$, $T_0 = 0$, $T_2 = T$ და (12,13) ტოლობა მოგვცემს ცოცხალი ძალის ინტეგრალს (ენერგიის ინტეგრალს)

$$T' + V = \text{const.}$$

მივიღეთ ისევ (12,5) პირველი ინტეგრალი, რომელიც ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებების გარკვეულ პირველ ინტეგრალს წარმოადგენს. ცხადია, აქ იგულისხმება, რომ T' და V ფუნქციები განზოგადებულ კოორდინატებშია გამოსახული.

სტაციონარული ბმების შემთხვევაში, (12,11) ტოლობა მოგვცემს

$$dT = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j. \quad (12,14)$$

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას

$$\sum_{j=1}^s Q_j dq_j = \sum_{i=1}^n (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

დავრწმუნდებით, რომ (12,14) ტოლობა იძლევა ცოცხალი ძალის კანონს, რომელიც ზემოთ (12,3) ტოლობით იყო დახასიათებული. ამრიგად ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ცოცხალი ძალის კანონი შეიძლება მივიღოთ ლაგრანჟის როგორც პირველი, ისე მეორე გვარის განტოლებებიდან.

§ 13. პოტენციალური ძალები. კინეტიკური პოტენციალი

ვთქვათ, სისტემაზე მოქმედი ძალები

$$\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$$

პოტენციალურია. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad (13,1)$$

სადაც V პოტენციალურ ენერგიას წარმოადგენს. ვაჩვენოთ, რომ განზოგადებული ძალებიც იქნება პოტენციალური. მართლაც, (10,6) ფორმულის ძალით, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (13,2)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ლაგრანჟის (10,19) განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ V ფუნქცია განზოგადებულ სიჩქარეებს არ შეიცავს და, მაშასადამე, $\frac{\partial V}{\partial q'_j} = 0$; უკანასკნელი სისტემა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial q'_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0. \quad (13,3)$$

L ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$L = T - V, \quad (13,4)$$

და, მაშასადამე, წარმოადგენს კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების სხვაობას, ეწოდება კინეტიკური პოტენციალი, ანუ ლაგრანჟის ფუნქცია. (13,4) აღნიშვნის ძალით, (13,3) განტოლებები ასე გადაიწერება:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq'_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (13,5)$$

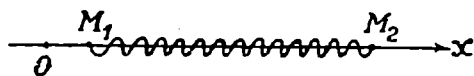
ამრიგად, როცა სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, მაშინ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს (13,5) სახე აქვთ. თუ დავუშვებთ, რომ ბმები სტაციონარულია, მაშინ (13,5) სისტემის ერთ-ერთ პირველ ინტეგრალს ექნება სახე

$$T + V = \text{const},$$

რომელიც ცოცხალი ძალის ინტეგრალს წარმოადგენს.

§ 14. ორი წერტილის ღრეპადი ჩხევა

განვიხილოთ Ox ღერძზე მოძრავი M_1 და M_2 მატერიალური წერტილები, რომელთა მასებია m_1 და m_2 . ვთქვათ. ეს წერტილები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ზამბარით (ნახ. 122).



ნახ. 122.

აღვნიშნოთ ზამბარის სიგრძე თავისუფალ მდგომარეობაში l -ით. ვიგულისხმობთ, რომ წერტილებზე მოქმედებს ურთიერთმიზიდულობის ძალები, რომელნიც ზამბარის წაგრძელების პროპორციულია. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ M_1 და M_2 წერტილების კოორდინატები Ox ღეროზე: $q_1 = OM_1$, $q_2 = OM_2$. ზემონათქვამის ძალით, წერტილებზე მოქმედი ძალები იქნება

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sigma(q_2 - q_1 - l), \\ Q_2 &= -\sigma(q_2 - q_1 - l). \end{aligned} \quad (14,1)$$

სადაც σ პროპორციულობის კოეფიციენტია, აზასთან, ცხადია, $\sigma > 0$; $q_2 - q_1 - l$ ზამბარის წაგრძელებას წარმოადგენს.

ცხადია, სისტემის ცოცხალ ძალას აქვს სახე

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2'^2. \quad (14,2)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, სისტემის პოტენციალური ენერგია იქნება¹ (14,3)

სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ $m_1 = m_2 = m$. მაშინ ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{\sigma}{2} (q_2 - q_1 - l)^2. \quad (14,4)$$

დავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (14,5)$$

(14,4) ტოლობის ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m \ddot{q}_1, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m \ddot{q}_2, \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \sigma (q_2 - q_1 - l), & \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\sigma (q_2 - q_1 - l). \end{aligned}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (14,5) განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m \ddot{q}_1 - \sigma (q_2 - q_1 - l) &= 0, \\ m \ddot{q}_2 + \sigma (q_2 - q_1 - l) &= 0. \end{aligned} \quad (14,6)$$

მივიღეთ მეორე რიგის მუდმივ კოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომლის ინტეგრება არაავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

(14,6) განტოლებების შეკრება მოგვცემს

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0, \quad (14,7)$$

ამასთან C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. თუ q_2 -ის ამ მნიშვნელობას შევითანთ (14,6) სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\ddot{q}_1 + \frac{2\sigma}{m} q_1 = \frac{\sigma}{m} (C_1 t + C_2 - l). \quad (14,8)$$

ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$q_1 = a \sin \left(\sqrt{\frac{2\sigma}{m}} t + \epsilon \right) + \frac{1}{2} (C_1 t + C_2 - l),$$

¹ ცხადია, რომ

თუ ამ მნიშვნელობას (14,7) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

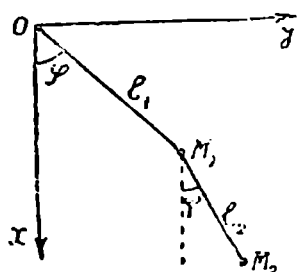
$$q_2 = -a \sin \left(\sqrt{\frac{2\sigma}{m}} t + \varepsilon \right) + \frac{1}{2} (C_1 t + C_2 + l). \quad (14,9)$$

(14,8) და (14,9) ტოლობებით განსაზღვრული q_1 და q_2 სიდიდეები წარმოადგენენ (14,6) სისტემის ზოგად ამოხსნას.

a , ε , C_1 , C_2 ნებისმიერი მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით.

§ 15. ორგამი მათემატიკური საძიებო

ვთქვათ, M_1 და M_2 მატერიალური წერტილები, რომელნიც სიმძიმის ძალის მოქმედებით მოძრაობენ ვერტიკალურ სიბრტყეში, დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან l_1 და l_2 ღეროებით, ამასთან l_1 ღეროს შეუძლია ბრუნვა გარკვეული O წერტილის გარშემო, ხოლო l_2 ღეროს — M_1 წერტილის გარშემო. ავიღოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა, ისე, რომ Ox ღერძი მოგეზული იყოს სიმძიმის ძალის მიმართულებით და აღვნიშნოთ φ -ით და ψ -ით ის კუთხეები, რომელთაც l_1 და l_2 ღეროები Ox ღერძთან შეადგენენ (ნახ. 123).



ნახ. 123.

განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ φ და ψ კუთხეები და შევადგინოთ ლაგრანჟის

მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T'}{\partial \varphi} = Q_1, \quad (15,1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \psi'} - \frac{\partial T'}{\partial \psi} = Q_2.$$

ცხადია, გვექნება

$$x_1 = l_1 \cos \varphi, \quad y_1 = l_1 \sin \varphi, \quad (15,2)$$

$$x_2 = l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \psi,$$

სადაც x_1 , y_1 და x_2 , y_2 არიან M_1 და M_2 წერტილების დეკარტის კოორდინატები. ცხადია აგრეთვე, რომ

$$X_1 = m_1 g, \quad X_2 = m_2 g, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0,$$

ამიტომ, განზოგადებული ძალებისათვის მივიღებთ

$$Q_1 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = -m_1 g l_1 \sin \varphi -$$

$$-m_2 g l_1 \sin \varphi = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi,$$

$$Q_2 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \psi} = -m_2 g l_2 \sin \psi.$$

როგორც ამ ტოლობებიდან ჩანს, განზოგადებულ ძალებს აქვთ მუშაობის განზომილება.

კინეტიკურ ენერგიას ჩვენს შემთხვევაში აქვს სახე

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}'_1 + \dot{y}'_1)^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}'_2 + \dot{y}'_2)^2.$$

თუ (15,2) ტოლობებიდან გამოვთვლით \dot{x}'_1 , \dot{y}'_1 , \dot{x}'_2 , \dot{y}'_2 წარმოებულებს და შევიტანთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულებაში, ადვილად მივიღებთ

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}'^2 + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}'^2 + l_2^2 \dot{\psi}'^2 + 2l_1 l_2 \cos(\psi - \varphi) \dot{\varphi}' \dot{\psi}']. \quad (15,4)$$

თუ (15,4) და (15,3) მნიშვნელობებს შევიტანთ (15,1) განტოლებებში. მარტივი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}'' + l_1 l_2 m_2 \ddot{\psi}'' \cos(\psi - \varphi) - l_1 l_2 m_2 \dot{\psi}'^2 \sin(\psi - \varphi) = \\ = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi, \\ m_2 l_2^2 \ddot{\psi}'' + l_1 l_2 m_2 \ddot{\varphi}'' \cos(\psi - \varphi) + l_1 l_2 m_2 \dot{\varphi}'^2 \sin(\psi - \varphi) = \\ = -l_2 m_2 g \sin \psi. \end{aligned} \quad (15,5)$$

განვიხილოთ ახლა ორმაგი მათემატიკური საქანის უსასრულოდ მცირე რხევა ვერტიკალური ღერძის მახლობლობაში. ამ შემთხვევაში, თუ $\psi'^2 \sin(\psi - \varphi)$, $\dot{\varphi}'^2 \sin(\psi - \varphi)$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს უკუვადებთ, $\cos(\psi - \varphi)$ -ს მივიღებთ ერთის ტოლად და გავითვალისწინებთ, რომ $\sin \psi \approx \varphi$, $\sin \psi \approx \psi$, მაშინ (15,5) სისტემა მოგვცემს

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}'' + m_2 l_2 \ddot{\psi}'' = -(m_1 + m_2) g \varphi, \\ m_2 l_2 \ddot{\psi}'' + m_2 l_1 \ddot{\varphi}'' = -m_2 g \psi. \end{aligned} \quad (15,6)$$

უქანასკნელი წარმოადგენს მეორე რიგის მუდმივ კოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომლის ინტეგრაციაც ძნელი არ არის.

ამოცანები

12. ვთქვათ, მატერიალური M წერტილი მოძრაობს Oxy სიბრტყეში ცენტრალური ძალის მოქმედებით და, ვთქვათ, კოორდინატთა სისტემის სათავე აღებულია ძალთა ცენტრში. აღვნიშნოთ M წერტილის პოლარული კოორდინატები r -ით და φ -ით. ეს კოორდინატები მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატებად და შევადგინოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები.

განზოგადებული ძალები იქნება: $Q_1 = Q_r = F$, $Q_2 = Q_\varphi = 0$, სადაც F აღვნიშნავს წერტილზე მოქმედი ძალის გეგმილს რადიუს-ვექტორზე. ადვილად მივიღებთ, რომ

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}'^2),$$

და ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს ექნებათ სახე

$$\begin{aligned} m(\ddot{r}'' - r\dot{\varphi}'^2) &= F, \\ r\ddot{\varphi}'' + 2\dot{\varphi}'\dot{r}' &= 0. \end{aligned}$$

ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში აღვნიშნავთ φ -ს ფართობთა კანონს, ამიტომ გვექნება (იხ. V თავის (15,3) ფორმულა)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C, \quad (1)$$

სადაც C ფართობთა მუდმივია. უკანასკნელი ტოლობის ძალით, სისტემის პირველი განტოლება მოგვცემს

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F + \frac{mC^2}{r^3}. \quad (2)$$

უკანასკნელი განტოლება გვიჩვენებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში რადიუს-ვექტორის გასწვრივ წერტილის ფარდობითი მოძრაობა ისე ხდება, თითქოს წერტილზე მოქმედებდეს \vec{F} ძალის გარდა დამატებითი ძალა $\frac{mC^2}{r^3} \vec{r}$, სადაც \vec{r} რადიუს-ვექტორის მგზავია.

13. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები დავიყვანოთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე.

თუ გავიხსენოთ, რომ $\det \|A_{\alpha\beta}\| \neq 0$ და (11,14) სისტემას ამოვხსნით განზოგადებული კოორდინატების მეორე რიგის წარმოებულების მიმართ, მივიღებთ

$$q_\alpha'' = P_\alpha(t, q_j, q_j') \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

სადაც $P_\alpha(t, q_j, q_j')$ წარმოადგენენ $t, q_1, \dots, q_s, q_1', \dots, q_s'$ სიდიდეების გარკვეულ ფუნქციებს.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$q_\alpha^{(1)} = \frac{dq_\alpha}{dt}$$

მაშინ (3) სისტემა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{dq_1^{(1)}}{P_1} = \frac{dq_2^{(1)}}{P_2} = \dots = \frac{dq_s^{(1)}}{P_s} = \frac{dq_1}{q_1^{(1)}} = \frac{dq_2}{q_2^{(1)}} = \dots = \frac{dq_s}{q_s^{(1)}} = \frac{dt}{1}. \quad (4)$$

(4)-ის სახით ჩვენ მივიღეთ q_α და $q_\alpha^{(1)}$ სიდიდეების მიმართ $2s$ განტოლები-საგან შემდგარი სისტემა, რომელიც ცხადია, (3) სისტემის ტოლფასია. თუ (4) სისტემის ყველა $2s$ პირველი ინტეგრალი მოძებნილია, მაშინ (3) სისტემის ზოგადი ამოხსნა პირდაპირ დაიწერება.

14. ვთქვათ, m მასის მძიმე მატერიალური წერტილი მოძრაობს გარკვეულ π სიბრტყეზე, რომელიც ბრუნავს თანაბრად ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია.

ავიღოთ $Oxyz$ სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი ემთხვეოდეს ბრუნვის ჰორიზონტალურ ღერძს, ხოლო Oz ღერძს ჰქონდეს სიძიმის ძალის საწინააღმდეგო მიმართულება. განვიხილოთ π სიბრტყეზე მართკუთხა Oq_1q_2 სისტემა და წერტილის კოორდინატები ამ სისტემაში აღვნიშნოთ q_1 -ით და q_2 -ით. ეს კოორდინატები მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატებად (ნახ. 124).

ცხადია, გვექნება

$$x=q_1, \quad y=q_2 \cos \omega t, \quad z=q_2 \sin \omega t, \quad (5)$$

$$T=\frac{m}{2}(q_1'^2+q_2'^2+q_2^2\omega^2).$$

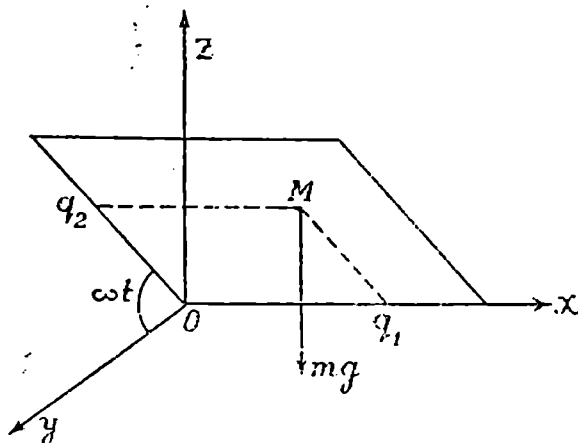
პოტენციალური ენერგია იქნება

$$V=mgz=mgq_2 \sin \omega t.$$

ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე

$$L=T-V=\frac{m}{2}(q_1'^2+q_2'^2+q_2^2\omega^2)-mgq_2 \sin \omega t.$$

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები მოგვცემს



ნახ. 124.

$$q_1''=0, \quad (6)$$

$$q_2''-\omega^2 q_2+g \sin \omega t=0.$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ

$$q_1=C_1 t+C_2,$$

$$q_2=C_3 e^{\omega t}+C_4 e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t, \quad (7)$$

სადაც C_1, C_2, C_3, C_4 ნებისმიერი მუდმივებია.

ვთქვათ, როცა $t=0$, მაშინ $q_1=q_2=0$, $q_1'=a$, $q_2'=\frac{g}{2\omega}$. ამ პირობების ძალით, $C_1=a$, $C_2=C_3=C_4=0$. თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (7)-ში, მივიღებთ

$$q_1=at, \quad q_2=\frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

ამ მნიშვნელობების (5) ტოლობებში შეტანით, ვღებულობთ

$$x=at, \quad y=\frac{g}{4\omega^2} \sin 2\omega t, \quad z=\frac{g}{2\omega^2} \sin^2 \omega t. \quad (8)$$

თუ მე-(8)-ს ორი უკანასკნელი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ t -ს, მივიღებთ

$$y^2 + \left(z - \frac{y}{4\omega^2} \right)^2 = \left(\frac{y}{4\omega^2} \right)^2. \quad (9)$$

ეს უკანასკნელი yOz სიბრტყეზე, წარმოადგენს წრეწირს, რომლის ცენტრი მოთავსებულია Oz ღერძზე და რომელიც სათავეში ეხება Ox ღერძს. ამრიგად, ტრაექტორია წარმოადგენს ხრახნწირს, რომელიც მოთავსებულია მე-(9) ტოლობით განსაზღვრულ ცილინდრზე.

გ ა ნ ზ ო ზ ი ლ ე ბ ა 4

მაგარიალურ წარგილთა სისტემის მოძრაობის კანონიკური განვლოებები

§ 16. განზოგადებული იმპულსები. კანონიკური ცვლადები

ისე როგორც წინა განყოფილებაში, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება (10,1) სახის ბმებს და შევინარჩუნებთ იმ აღნიშვნებს, რომელნიც ხსენებულ განყოფილებაში გვქონდა.

p_1, p_2, \dots, p_s სიდიდეებს, რომელნიც შემდეგი ტოლობებით არიან განსაზღვრულნი:

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (16,1)$$

უწოდებენ განზოგადებულ იმპულსებს. თუ გავიხსენებთ ცოცხალი ძალის (11,3) გამოსახულებებს, უკანასკნელი ტოლობები მოგვცემენ

$$p_\alpha = A_{\alpha 1} q'_1 + A_{\alpha 2} q'_2 + \dots + A_{\alpha s} q'_s + A_\alpha \quad (16,2)$$

($\alpha = 1, 2, \dots, s$).

ამრიგად, განზოგადებული იმპულსები წარმოადგენენ განზოგადებული სიჩქარეების წრფივ ფუნქციებს. (16,2) სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{vmatrix}, \quad (16,3)$$

როგორც ეს § 11-ში იყო ნაჩვენები, განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ (16,2) სისტემიდან შეიძლება ამოვხსნათ q'_1, q'_2, \dots, q'_s და გამოვსახოთ ისინი განზოგადებული იმპულსების საშუალებით.

როცა სისტემის მოძრაობა სტაციონარულია (ბმის განტოლებებში დრო ცხადად არ მონაწილეობს), მაშინ $A_\alpha = 0$ და (16,2) ტოლობები მოგვცემს

$$p_\alpha = A_{\alpha 1} q'_1 + A_{\alpha 2} q'_2 + \dots + A_{\alpha s} q'_s \quad (16,4)$$

($\alpha = 1, 2, \dots, s$).

$q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$ ცვლადებს ხშირად კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ც ვ ლ ა დ ე ბ ს უწოდებენ, ხოლო $q_1, q_2, \dots, q_s, q'_1, q'_2, \dots, q'_s$ სიდიდეებს — ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს ც ვ ლ ა დ ე ბ ს.

დავუშვათ, რომ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია და განვიხილოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები, რომელთაც, პოტენციალური ძალების შემთხვევაში, შემდეგი სახე აქვთ (იხ. (13,5) სისტემა):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (17,1)$$

ეს სისტემა, როგორც თავის დროზე იყო აღნიშნული, წარმოადგენს q_1, q_2, \dots, q_s ცვლადების მიმართ s განტოლებისაგან შემდგარ, მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც მეორე რიგის წარმოებულების მიმართ ამოხსნადია. ასეთი სისტემა, როგორც ეს დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, შეიძლება დაიყვანოს $2s$ განტოლებისაგან შემდგარ პირველი რიგის სისტემამდე. სახელდობრ, თუ ახალ საძიებელ ცვლადებად შემოვიტანთ $\frac{dq_j}{dt} = q'_j$ ($j = 1, 2, \dots, q_s$) სიდიდეებს. მა-

შინ $q_1, q_2, \dots, q_s, q'_1, \dots, q'_s$ სიდიდეების მიმართ (ლაგრანჟის ცვლადების მიმართ) მივიღებთ $2s$ განტოლებისაგან შემდგარ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

ჰამილტონის მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ (17,5) სისტემა დაიყვანოს პირველი რიგის სისტემამდე არა ლაგრანჟის ცვლადების, არამედ კანონიკური ცვლადების მიმართ.

ვინაიდან $\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}$, ამიტომ, (16,1) ტოლობების ძალით, გვექნება

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (17,2)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (17,1) სისტემაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}. \quad (17,3)$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$H = \sum_{\alpha=1}^s q'_\alpha p_\alpha - L. \quad (17,4)$$

სადაც L ლაგრანჟის ფუნქციაა: $L = T - V$. ვინაიდან L არის $q_1, q_2, \dots, q_s, q'_1, q'_2, \dots, q'_s$ ლაგრანჟის ცვლადების ფუნქცია, ამიტომ, ცხადია H იქნება ლაგრანჟის ამ ცვლადებისა და განზოგადებული იმპულსების ფუნქცია. თუ ახლა გავიხსენებთ წინა პარაგრაფში აღნიშნულს იმის შესახებ, რომ განზოგადებული სიჩქარეები შეიძლება (16,2) სისტემიდან ამოვხსნათ და გამოვსახოთ განზოგადებული იმპულსების და განზოგადებული კოორდინატების საშუალებით, დავრწმუნდებით, რომ საბოლოოდ H იქნება $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$ კანონიკური ცვლადების ფუნქცია და, აგრეთვე, არასტაციონარული ბმების შემთხვევაში, t ცვლადის ფუნქცია. შემოვიღოთ შემოკლებული აღნიშვნა:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) \equiv H(q, p, t).$$

(17,4) ტოლობით განსაზღვრულ H ფუნქციას, გამოსახულს კანონიკური ცვლადების საშუალებით, ეწოდება ჰამილტონის ფუნქცია.

აღვნიშნოთ ჰამილტონის ფუნქციის ვარიაცია δH -ით:

$$\begin{aligned}\delta H &= H(q + \delta q, p + \delta p, t) - H(q, p, t) = \\ &= H(q_1 + \delta q_1, \dots, q_s + \delta q_s, p_1 + \delta p_1, \dots, p_s + \delta p_s, t) - \\ &\quad - H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t),\end{aligned}$$

სადაც $\delta q_\alpha, \delta p_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) კანონიკური ცვლადების უსასრულოდ მცირე ნაზრდებია. თუ $H(q + \delta q, p + \delta p, t)$ ფუნქციას დავშლით მწკრივად და უკუვაგდებთ $\delta q_\alpha, \delta p_\alpha$ სიდიდეების მიმართ მეორე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს, მივიღებთ

$$\delta H = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha. \quad (17,5)$$

თუ შევნიშნავთ, რომ ჰამილტონის ფუნქცია, (17,4) ტოლობის ძალით, გამო-
სახულია ლაგრანჟის ცვლადების საშუალებით, ადვილად მივიღებთ

$$\delta H = \sum_{\alpha=1}^s q'_\alpha \delta p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \delta q'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} \delta q'_\alpha. \quad (17,6)$$

(17,2) ტოლობების ძალით, (17,6) ტოლობების მარჯვენა მხარის მეორე და უკანასკნელი წევრები ერთმანეთს მოსაობს და მივიღებთ

$$\delta H = \sum_{\alpha=1}^s q'_\alpha \delta p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (17,7)$$

თუ გავითვალისწინებთ (17,3) ტოლობას და (17,7) ტოლობიდან (17,5) ტოლობას გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$\sum_{\alpha=1}^s \left[\left(q'_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(p'_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] = 0. \quad (17,8)$$

ვინაიდან ამ ტოლობას იგივეურად უნდა ჰქონდეს ადგილი და ამის გარდა, δp_α და δq_α დამოუკიდებელი ვარიაციებია, ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში ამ ვარიაციების კოეფიციენტები ნულის ტოლი უნდა იყოს და ვღებულობთ

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (17,9)$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

ეს სისტემა წარმოადგენს ჰამილტონის კანონიკურ განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემას ხშირად მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის კანონიკურ განტოლებებს უწოდებენ.

დავუშვათ ახლა მოძრაობა სტაციონარულია და გამოვარკვეოთ ჰამილტონის ფუნქციის ფიზიკური შინაარსი. (17,4) ტოლობის ძალით, გვქნება

$$H = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha - T + V. \quad (17,10)$$

ენიანიდან, განსახილველ შემთხვევაში, ცოცხალი ძალა წარმოადგენს განზოგადებული სიჩქარეების კვადრატულ ფორმას, ამიტომ, ეილერის ცნობილი ფორმულის ძალით ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ, ვლებულობთ

$$\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = 2T,$$

და (17, 4) ტოლობა მოგვცემს

$$H = T + V.$$

ამრიგად, როცა მოძრაობა სტაციონარულია, მაშინ ჰამილტონის ფუნქცია წარმოადგენს სისტემის სრულ ენერგიას.

ჩვენ გამოვიყვანეთ მოძრაობის კანონიკური განტოლებები პოტენციალური ძალების შემთხვევაში. ვნახოთ ახლა რა სახე ექნება ამ განტოლებებს არაპოტენციალური ძალების შემთხვევაში.

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი ძალები შეიძლება გავყოთ ორ ჯგუფად: პოტენციალურ და არაპოტენციალურ ძალებად. მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, განზოგადებული ძალებიც გაიყოფა ორ ჯგუფად: $Q_\alpha = Q'_\alpha + Q''_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) სადაც Q'_α განზოგადებული პოტენციალური ძალებია (კერძოდ, შეიძლება $Q'_\alpha = 0$), Q''_α — არაპოტენციალური. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები ამ შემთხვევაში ასე დაიწერება:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + Q''_\alpha,$$

სადაც $-V$ წარმოადგენს Q'_α ძალების შესაბამ პოტენციალს. უკანასკნელი სისტემა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q''_\alpha, \quad (17,11)$$

სადაც

$$L = T - V.$$

შემოვიტანოთ q_α, p_α კანონიკური ცვლადები, სადაც, როგორც ზემოთ

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}. \quad (17,12)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (17,11) სისტემა ასე გადაიწერება:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + Q''_\alpha. \quad (17,13)$$

ისე როგორც პოტენციალური ძალების შემთხვევაში, ადვილი ექნება (17,5), და (17,7) ტოლობებს, რომელთა სხვაობა მოგვცემს

$$\sum_{\alpha=1}^s \left[\left(q'_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] = 0.$$

თუ (17,13) ტოლობიდან განსაზღვრულ $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ -ს შევიტანთ უკანასკნელ ტოლობაში, მივიღებთ

$$\sum_{\alpha=1}^s \left[\left(q'_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\frac{dp_\alpha}{dt} - Q''_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] = 0,$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q''_\alpha. \end{aligned} \quad (17,14)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ჰამილტონის კანონიკურ განტოლებებს არაპოტენციალური ძალების შემთხვევაში. თუ ყველა ძალები პოტენციალურია, მაშინ $Q''_\alpha = 0$ და (17,14) სისტემა (17,9) სისტემას დაემთხვევა.

ვთქვათ, ცნობილია (17,9) კანონიკური სისტემის $2s$ პირველი ინტეგრალი:

$$\begin{aligned} f_1(q, p, t) &= C_1, \\ f_2(q, p, t) &= C_2, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{2s}(q, p, t) &= C_{2s}, \end{aligned} \quad (17,15)$$

რომელნიც დამოუკიდებელნი არიან, ე. ი.

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_{2s})}{D(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \neq 0.$$

თუ (17,15) სისტემას ამოვსხნით q_α, p_α ($\alpha=1, 2, \dots, s$) ცვლადების მიმართ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} q_\alpha &= q_\alpha(C_1, C_2, \dots, C_{2s}, t), \\ p_\alpha &= p_\alpha(C_1, C_2, \dots, C_{2s}, t), \end{aligned}$$

რომელნიც (17,9) სისტემის ზოგად ამოხსნას წარმოადგენენ. C_1, \dots, C_{2s} მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ, როცა მოძრაობა სტაციონარულია, მაშინ $H = \text{const}$ წარმოადგენს (17,9) სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს. მართლაც, განსახილველ შემთხვევაში H ფუნქცია ცხადად t -ს არ შეიცავს და გვექნება

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} p'_\alpha.$$

(17,9) სისტემის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

საიდანაც $H = \text{const}$ და ნათქვამის სამართლიანობაც დამტკიცებულია.

§ 18. ციკლური კოორდინატები

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, ბმები კი — სტაციონარული.

q_α ($\alpha=1, 2, \dots, s$) განზოგადებული კოორდინატებიდან იმ კოორდინატებს,

რომელნიც ცხადად არ მონაწილეობენ L ფუნქციაში (ლაგრანჟის ფუნქციაში) ეწოდება ციკლური კოორდინატები. ვთქვათ, q_1, q_2, \dots, q_r ($r \leq s$) ციკლური კოორდინატებია, მაშინ $L = L(q_{r+1}, \dots, q_s, q'_1, \dots, q'_s)$ და ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები, რომელთაც პოტენციალური ძალების შემთხვევაში აქვთ სახე

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (18,1)$$

მოგვცემენ

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r), \quad (18,2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = r+1, \dots, s). \quad (18,3)$$

ვინაიდან მოძრაობა სტაციონარულია, ამიტომ, (18,2) სისტემა გვაძლევს

$$p_\alpha = A_{\alpha 1} q'_1 + A_{\alpha 2} q'_2 + \dots + A_{\alpha r} q'_r = C_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r). \quad (18,4)$$

უკანასკნელი ტოლობების ძალით, ჩვენ გვაქვს (18,1) სისტემის r პირველი ინტეგრალი, რომელნიც, ცხადია, ჰამილტონის (17,9) კანონიკური სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალებს წარმოადგენენ.

გარდაეჭმნათ ახლა L ფუნქცია ისე, რომ მის გამოსახულებაში არ მონაწილეობდნენ ციკლური კოორდინატების წარმოებულები. ვთქვათ, $A_{\alpha\beta}$ კოეფიციენტები ციკლურ კოორდინატებზე არ არიან დამოკიდებული და, ვთქვათ, (18,4) სისტემიდან შეიძლება ამოვხსნათ q'_1, q'_2, \dots, q'_r სიდიდეები და, მაშასადამე, გამოვსახოთ ისინი $C_1, C_2, \dots, C_r, q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_s, q'_{r+1}, \dots, q'_s$ სიდიდეების საშუალებით. თუ q'_α ($\alpha = 1, 2, \dots, r$) ნაპრვან მნიშვნელობებს შევიტანთ L ფუნქციის გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$L(q_{r+1}, \dots, q_s, q'_1, q'_2, \dots, q'_s) = L^*(q_{r+1}, \dots, q_s, q'_{r+1}, \dots, q'_s, C_1, \dots, C_r).$$

ცხადია, გვექნება

$$\frac{\partial L^*}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial L}{\partial q'_i} \frac{\partial q'_i}{\partial q'_\alpha} \quad (\alpha = r+1, \dots, s), \quad (18,5)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial L}{\partial q'_i} \frac{\partial q'_i}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = r+1, \dots, s). \quad (18,6)$$

თუ ახლა გავიხსენებთ, რომ

$$\frac{\partial L}{\partial q'_i} = p_i = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

(18,5) და (18,6) ტოლობები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q'_\alpha} \left(L^* - \sum_{i=1}^r C_i q'_i \right), \quad (\alpha = r+1, \dots, s)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(L^* - \sum_{i=1}^r C_i q'_i \right).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (18,3) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ რაუსის (Routh) შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = r+1, \dots, s). \quad (18,7)$$

სადაც

$$R = L^* - \sum_{i=1}^r C_i q'_i. \quad (18,8)$$

უკანასკნელი ტოლობით განსაზღვრულ R ფუნქციას რაუსის ფუნქციას უწოდებენ.

თუ q'_i ($i=1, 2, \dots, r$) სიდიდეებს, ისე როგორც ზემოთ, გამოვსახავთ $q_{r+1}, \dots, q_s, q'_{r+1}, \dots, q'_s, C_1, \dots, C_r$ სადიდეების საშუალებით, დავრწმუნდებით, რომ რაუსის ფუნქცია არ შეიცავს ციკლურ კოორდინატებს და მათ წარმოებულებს და, მაშასადამე, (18,7) სისტემა შეიძლება ცალკე ვაინტეგროთ. თუ ეს სისტემა ინტეგრებულია, ე. ი. q_i ($i=r+1, \dots, s$) სიდიდეები მონახულია, როგორც ღროის ფუნქცია, მაშინ q'_i ($i=1, 2, \dots, r$) სიდიდეები განისაზღვრება (18,4) სისტემიდან და მაშასადამე, ინტეგრებით მოინახება q_i ($i=1, 2, \dots, r$) სიდიდეები.

ამრიგად, როცა r კოორდინატი ციკლურია, მაშინ ლაგრანჟის განტოლებათა (18,1) სისტემა, რომელიც s განტოლებისაგან შედგება, დაიყვანება რაუსის (18,7) სისტემამდე, რომელიც $s-r$ განტოლებისაგან შედგება.

ვინაიდან

$$\sum_{\beta=1}^s A_{\alpha\beta} q'_\beta = p_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \dots, s)$$

და პირობის ძალით, $A_{\alpha\beta}$ სიდიდეები ციკლურ კოორდინატებს არ შეიცავენ, ამიტომ q'_β ($\beta=1, 2, \dots, s$) შეიძლება გამოვსახოთ როგორც $p_1, p_2, \dots, p_s, q_{r+1}, \dots, q_s$ სიდიდეების ფუნქცია, რის შედეგადაც, (17,4)-ის ძალით, ცხადია, რომ ჰამილტონის ფუნქცია ციკლურ კოორდინატებს არ შეიცავს:

$$H = H(q_{r+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s),$$

განვიხილოთ ახლა ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (18,9)$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

და დავუშვათ, რომ ყველა განზოგადებული კოორდინატი ციკლურია. მაშინ, (18,4) ტოლობების ძალით,

$$p_\alpha = C_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \dots, s)$$

და გვექნება

$$H = H(p_1, \dots, p_s) = H(C_1, \dots, C_s) = \text{const.}$$

ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, (18,9) სისტემის პირველი s განტოლება განსახილველ შემთხვევაში მოგვცემს

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \gamma_\alpha = \text{const},$$

საიდანაც

$$q_\alpha = \gamma_\alpha t + C'_\alpha,$$

ამასთან γ_α გარკვეული მუდმივებია.

ამრიგად, როცა ყველა განზოგადებული კოორდინატი ციკლურია, მაშინ ფუნქციები

$$\begin{aligned} p_\alpha &= C_\alpha, \\ q_\alpha &= \gamma_\alpha t + C'_\alpha \\ (\alpha &= 1, 2, \dots, s), \end{aligned}$$

სადაც C_α და C'_α ნებისმიერი მუდმივებია, წარმოადგენენ (18,9) სისტემის ზოგად ინტეგრალს.

§ 19. იაკობი-ოსტროგრადსკის მეთოდი

სანამ იაკობი-ოსტროგრადსკის მეთოდის განხილვას შევეუდგებოდეთ, გავიხსენოთ ზოგიერთი ცნება კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან.

ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი სახის კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალური განტოლება

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (19,1)$$

სადაც x_1, x_2, \dots, x_n დამოუკიდებელი ცვლადებია, z —საძიებელი ფუნქცია,

$p_\alpha = \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). ამ განტოლების ისეთ ამოხსნას, რომელიც n ნების-

მიერ a_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) მუდმივზეა დამოკიდებული:

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (19,2)$$

ეწოდება სრული ინტეგრალი.

ვთქვათ, (19,1) განტოლებაში საძიებელი z ფუნქცია უშუალოდ არ მონაწილეობს. ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ, თუ z არის (19,1) განტოლების რაიმე ამოხსნა, მაშინ მისივე ამოხსნა იქნება $z + \text{const}$ და მაშასადამე, სრულ ინტეგრალში ერთ-ერთი მუდმივი შევა შესაყარების სახით:

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) + a_n. \quad (19,3)$$

თუ (19,1) განტოლებაში z ცხადად არ მონაწილეობს, ე. ი. კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (19,4)$$

მაშინ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = -\frac{dp_1}{X_1} = -\frac{dp_2}{X_2} = \dots = -\frac{dp_n}{X_n}, \quad (19,5)$$

სადაც

$$P_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha}, \quad X_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \quad (19,6)$$

ეწოდება ადგილი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი სისტემა.

დავუბრუნდეთ ჰამილტონის (17,9) კანონიკურ სისტემას:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \end{aligned} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (19,7)$$

რომელიც, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{\frac{dq_1}{\partial H}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{\frac{dq_2}{\partial H}}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \dots = \frac{\frac{dq_s}{\partial H}}{\frac{\partial H}{\partial p_s}} = -\frac{\frac{dp_1}{\partial H}}{\frac{\partial H}{\partial q_1}} = -\frac{\frac{dp_2}{\partial H}}{\frac{\partial H}{\partial q_2}} = \dots = -\frac{\frac{dp_s}{\partial H}}{\frac{\partial H}{\partial q_s}} = \frac{dt}{1}. \quad (19,8)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ (19,4) სახის განტოლების მახასიათებელ სისტემას (19,5) სახე აქვს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (19,8) სისტემა წარმოადგენს

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0 \quad (19,9)$$

კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ სისტემას. (19,9) განტოლებაში საძიებელი S ფუნქცია ცხადად არ მონაწილეობს. ამ S ფუნქციას, რომელსაც იაკობის მთავარ ფუნქციას უწოდებენ, ჩვენ შევხვდებით კიდევ მექანიკის ვარიაციული პრინციპების განხილვის დროს.

(19,9) განტოლებას იაკობ-ოსტროგრადსკის განტოლებას უწოდებენ.

ზემოაღნიშნულის ძალით, (19,9) განტოლების სრულ ინტეგრალს აქვს სახე

$$S = w(t, q_1, q_2, \dots, q_s, a_1, a_2, \dots, a_s) + a_{s+1}, \quad (19,10)$$

სადაც a_1, a_2, \dots, a_{s+1} ნებისმიერ მუდმივებს წარმოადგენენ. ვიგულისხმობთ, რომ w ფუნქცია უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი თავისი არგუმენტების მიმართ მეორე რიგამდე ჩათვლით.

სრული ინტეგრალის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი Δ , რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial S}{\partial q_1}, & \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial S}{\partial q_2}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial S}{\partial q_s} \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial S}{\partial q_1}, & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial S}{\partial q_2}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial S}{\partial q_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial a_s} \frac{\partial S}{\partial q_1}, & \frac{\partial}{\partial a_s} \frac{\partial S}{\partial q_2}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial a_s} \frac{\partial S}{\partial q_s} \end{vmatrix} = \frac{D\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right)}{D(a_1, a_2, \dots, a_s)}$$

განსხვავებულია ნულისაგან. მართლაც, დავუშვათ, რომ $\Delta = 0$, მაშინ, როგორც

ანალიზის კურსიდან ცნობილია, $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}$ სიდიდეებს შორის იარსებებს შემდეგი სახის ფუნქციონალური დამოკიდებულება:

$$\Omega \left(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s} \right) = 0, \quad (19.11)$$

რომელიც a_1, a_2, \dots, a_s მუდმივებს არ შეიცავს და რომელშიც არ შედის $\frac{\partial S}{\partial t}$ წარმოებული.

ამრიგად, (19.11) კერძო წარმოებულთან დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც $\frac{\partial S}{\partial t}$ წარმოებულს არ შეიცავს, აკმაყოფილებს S ფუნქცია. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $S = w(t, q_1, \dots, q_s, a_1, a_2, \dots, a_s) + a_{s+1}$ წარმოადგენს (19.9) განტოლების სრულ ინტეგრალს, ხოლო სრული ინტეგრალი ცალსახად განსაზღვრავს იმ კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას, რომელსაც ის მიეკუთვნება და, მაშასადამე, a_1, \dots, a_s მუდმივების გამოორიცხვა სისტემიდან

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial w}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

მიგვიყვანს აუცილებლად (19.9) სახის სისტემამდე. რომელიც $\frac{dS}{dt}$ -ს შეიცავს.

ამით დამტკიცებულია, რომ $\Delta \neq 0$.

შევადგინოთ (19.9) განტოლების სრული ინტეგრალის საშუალებით შემდეგი სისტემა:

$$\frac{\partial S}{\partial a_\alpha} = b_\alpha, \quad (19.12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (19.13)$$

სადაც b_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) ნებისმიერი მუდმივებია. დავამტკიცოთ იაკობ-ოსტროგრადსკის შემდეგი დებულება¹.

დებულება. თუ S ფუნქცია წარმოადგენს (19.9) განტოლების სრულ ინტეგრალს, მაშინ (19.12) და (19.13) სისტემები იძლევიან ჰამილტონის (19.7) სისტემის ყველა $2s$ პირველ ინტეგრალს და, მაშასადამე, განსაზღვრავენ (19.7) სისტემის ზოგად ამოხსნას.

ვინაიდან ფუნქციონალური დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, (19.12) სისტემა ამოხსნადია q_1, q_2, \dots, q_s სიდიდეების მიმართ და, მაშასადამე, (19.12) და (19.13) სისტემები განსაზღვრავენ q_α, p_α სიდიდეებს როგორც t ცვლადისა და a_α, b_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) ნებისმიერი მუდ-

¹ ეს დებულება ბევრ სახელმძღვანელოში მოყვანილია, როგორც იაკობის დებულება. მაგრამ, როგორც გამოირკვეა, იაკობზე ადრე ის დანტკიცებული იყო ოსტროგრადსკის მიერ (იხ. Космодемьянский А. А., Курс теоретической механики, Москва, 1955 г.).

მივების ფუნქციას. ეაჩვენოთ, რომ q_α , p_α სიდიდეების ეს მნიშვნელობები დააკმაყოფილებენ (19,7) სისტემას.

ვთქვათ, q_α , p_α სიდიდეების ხსენებული მნიშვნელობები შეტანილია (19,12) და (19,13) სისტემაში. მაშინ (19,12) ტოლობების გაწარმოება t ცვლადით მოგვცემს

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\alpha \partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial a_\alpha \partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial t} = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, s). \quad (19,14)$$

ვიგულისხმობთ, რომ S სრული ინტეგრალის მნიშვნელობა შეტანილია (19,9) განტოლებაში და გავაწარმოოთ ეს განტოლება a_α -ს მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\alpha \partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial a_\alpha} = 0. \quad (19,15)$$

(19,13) სისტემის ძალით $p_\beta = \frac{\partial S}{\partial q_\beta}$. თუ ამ მნიშვნელობებს (19,14) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\alpha \partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial a_\alpha \partial q_\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, s). \quad (19,16)$$

(19,14) და (19,16) სისტემების შედარება გვარწმუნებს, რომ $\frac{dq_\beta}{dt}$ და $\frac{\partial H}{\partial p_\beta}$ ($\beta=1, 2, \dots, s$) სიდიდეები აკმაყოფილებენ ერთი და იმავე ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემის დეტერმინანტი არის ზემოთ განხილული ფუნქციონალური დეტერმინანტი Δ , რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან და, მაშასადამე,

$$\frac{dq_\beta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \quad (\beta=1, 2, \dots, s). \quad (19,17)$$

გავაწარმოოთ (19,13) განტოლებები t ცვლადის მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \frac{dq_\beta}{dt}. \quad (19,18)$$

თუ S სრული ინტეგრალის მნიშვნელობას შევიტანთ (19,9) განტოლებაში და გავაწარმოებთ მას q_α -ს მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} = 0.$$

უკვე დამტკიცებული (19,17) ტოლობების ძალით, ეს უკანასკნელი ასე გადაიწერება:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\beta}{dt}. \quad (19,19)$$

(19,13) ტოლობების ძალით,

$$\frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (19,19) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \frac{dq_\beta}{dt}. \quad (19,20)$$

(19,18) და (19,20) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს, რომ

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (19,21)$$

ამრიგად, (19,12) და (19,13) სისტემების შედეგად ჩვენ მივიღეთ (19,17) და (19,21) განტოლებები, რომელიც ჰამილტონის კანონიკურ განტოლებებს წარმოადგენენ და ამით დებულება დამტკიცებულია.

იაკობ-ოსტროგრადსკის დებულება საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებების ზოგადი ინტეგრალი, თუ მოძებნილია იაკობ-ოსტროგრადსკის (19,9) განტოლების სრული ინტეგრალი. ბევრ შემთხვევაში (19,9) განტოლების სრული ინტეგრალის მოძებნა უფრო ადვილია, ვიდრე ჰამილტონის კანონიკური განტოლებების ინტეგრება და ასეთ შემთხვევაში იაკობ-ოსტროგრადსკის დებულებით სარგებლობა ხელსაყრელია.

ვთქვათ, ჰამილტონის ფუნქცია H ცხადად t -ს არ შეიცავს, ე. ი. (19,9) განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s} \right) = 0. \quad (19,22)$$

ვეძებთ ამ განტოლების ამოხსნა, შემდეგი სახით:

$$S = -ht + W(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (19,23)$$

სადაც h ნებისმიერი მუდმივია.

ვინიდან

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s),$$

ამიტომ, (19,22) განტოლება მოგვცემს

$$H \left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s} \right) = h, \quad (19,24)$$

რომლის სრულ ინტეგრალს აქვს სახე

$$W = W_\bullet(q_1, q_2, \dots, q_s, a_1, a_2, \dots, a_{s-1}, h) + a_s.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (19,23) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$S = -ht + W_\bullet(q_1, \dots, q_s, a_1, \dots, a_{s-1}, h) + a_s. \quad (19,25)$$

დამტკიცებული დებულების ძალით, ჰამილტონის კანონიკური განტოლებების ამოხსნა, განსახილველ შემთხვევაში, მიიღება შემდეგი სისტემიდან

$$\frac{\partial S}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial W_0}{\partial a_\alpha} = b_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s-1),$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial W_0}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (19,26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = -t + \frac{\partial W_0}{\partial h} = t_0, \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial W_0}{\partial h} = t + t_0.$$

სადაც t_0 ნებისმიერი მუდმივია.

(19,23) ტოლობაში შემაჯავლი W ფუნქცია, რომელსაც კანონიკური ფუნქცია ეწოდება, შეგვხვდება კიდევ მექანიკის ვარიაციული პრინციპების განხილვის დროს.

შენიშნოთ ბოლოს, რომ (19,9) განტოლებას ლიტერატურაში ხშირად უწოდებენ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას.

§ 20. პუასონის ფაჩხილები. პუასონის იგივობა

პუასონის მეთოდი საშუალებას იძლევა, გარკვეულ პირობებში, ვიპოვოთ მოძრაობის კანონიკური განტოლებების ახალი პირველი ინტეგრალი, თუ ცნობილია ამ სისტემის რომელიმე ორი პირველი ინტეგრალი (იხ. მომდევნო პარაგრაფი). სანამ, ამ მეთოდის გადმოცემას დაეიწყებდეთ, დავამტკიცოთ ერთი ლემა და იგივობა, რომლებიც შემდეგში დავგვირდებო.

ვთქვათ, f ფუნქცია x_1, x_2, \dots, x_{2s} დამოუკიდებელი ცვლადების უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა მეორე რიგამდე ჩათვლით. აღვნიშნოთ $A(f)$ -ით ამ ფუნქციის საშუალებით შედგენილი შემდეგი დიფერენციალური გამოსახულება:

$$A(f) = \sum_{\alpha=1}^{2s} A_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \quad (20,1)$$

სადაც A_α ($\alpha=1, 2, \dots, 2s$) x_1, x_2, \dots, x_{2s} ცვლადების წარმოებადი ფუნქციებია. აღვნიშნოთ $B(f)$ -ით ანალოგიური ოპერაცია

$$B(f) = \sum_{\alpha=1}^{2s} B_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლემა. $A[B(f)] - B[A(f)]$ სხვაობა f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულებს არ შეიცავს.

მართლაც, ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} A[B(f)] &= \sum_{\alpha=1}^{2s} A_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sum_{\beta=1}^{2s} B_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} = \sum_{\alpha=1}^{2s} \sum_{\beta=1}^{2s} A_\alpha B_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{2s} \sum_{\beta=1}^{2s} A_\alpha \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

$$B[A(f)] = \sum_{\beta=1}^{2s} B_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \sum_{\alpha=1}^{2s} A_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{2s} \sum_{\beta=1}^{2s} A_{\alpha} B_{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{2s} \sum_{\beta=1}^{2s} B_{\beta} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}}.$$

თუ შევადგენთ $A[B(f)] - B[A(f)]$ სხვაობას, დავრწმუნდებით ლემის სამართლიანობაში.

განვიხილოთ ახლა x_1, x_2, \dots, x_{2s} ცვლადების ნაცვლად $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$ კანონიკური ცვლადები და განვიხილოთ ამ ცვლადებისა და აგრეთვე t პარამეტრის მიმართ უწყვეტი და მეორე რიგამდე უწყვეტად წარმოებადი φ და ψ ფუნქციები. ამ ფუნქციების საშუალებით შედგენილ (φ, ψ) გამოსახულებას, რომელიც შემდეგი ტოლობით არის განსაზღვრული:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}} \right), \quad (20,2)$$

ეწოდება პუასონის ფრჩხილი.

როგორც ადვილი მისახვედრია, პუასონის ფრჩხილი წარმოადგენს ცალცალკე როგორც φ -ს, ისე ψ -ს მიმართ ზემოგანხილული სახის დიფერენციალურ გამოსახულებას. ასე, მაგალითად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$(\varphi, \psi) = A(\psi),$$

ამასთან, ცხადია, $A(\psi)$ ოპერაციის კოეფიციენტები φ ფუნქციის წარმოებულების საშუალებით არის შედგენილი.

პუასონის ფრჩხილის განმარტებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს მისი შემდეგი თვისებები:

- 1°. $(\varphi, -\psi) = (-\varphi, \psi) = -(\varphi, \psi)$,
- 2°. $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$,
- 3°. $(\varphi, c) = (c, \varphi) = 0$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია,
- 4°. $(\varphi, c\psi) = (c\varphi, \psi) = c(\varphi, \psi)$,
- 5°. $[(\varphi_1 + \varphi_2), \psi] = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$,
- 6°. $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$.

დავამტკიცოთ უკანასკნელი ტოლობის სამართლიანობა. ცხადია, გვექნება

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial p_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial q_{\alpha}} \right) = \\ = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}} \right) + \\ + \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

გაქვით. f , φ და ψ კანონიკური ცვლადებისა და t ცვლადის უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია მეორე რიგამდე.

დავამტკიცოთ პუასონის შემდეგი იგივობა:

$$(f, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) \equiv 0. \quad (20,3)$$

როგორც ადგილი მისახვედრია, (20,3)-ის მარცხენა მხარის ყოველ წევრში შედის f , φ და ψ ფუნქციებიდან ერთ-ერთის მეორე რიგის წარმოებული, ამიტომ, თუ დავამტკიცებთ, რომ (20,3)-ის მარცხენა მხარეში ამ ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებულები არ შედის, ამით (20,3) იგივობის სამართლიანობა დამტკიცებული იქნება. (20,3)-ის მარცხენა მხარეში f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულებს შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ შემდეგი ჯამი:

$$(\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)).$$

ცხადია, გვექნება

$$(\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) = (\varphi, (\psi, f)) - (\psi, (\varphi, f)). \quad (20,4)$$

ვინაიდან პუასონის ფრჩხილი წარმოადგენს ზემოგანხილული სახის დიფერენციალურ ოპერაციას, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$(\varphi, \psi) = A(\psi), \quad (\psi, f) = B(f)$$

და, მაშასადამე (20,4) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$(\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) = A[B(f)] - B[A(f)].$$

მაგრამ ზემომოყვანილი ლემის ძალით $A[B(f)] - B[A(f)]$ სხვაობა f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულებს არ შეიცავს. ასევე დამტკიცდება, რომ (20,3) ტოლობის მარცხენა მხარე φ და ψ ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებულებს არ შეიცავს. მაგრამ, ვინაიდან (20,3)-ის მარცხენა მხარეში არ არის ისეთი წევრი, რომელშიაც აღნიშნული ფუნქციებიდან ერთის მეორე რიგის წარმოებული მაინც არ შედიოდა, ამიტომ (20,3) იგივობის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

§ 21. პუასონის დებულება

განვიხილოთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (21,1)$$

და დავწეროთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ

$$f(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) = C, \quad (21,2)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, წარმოადგენდეს (21,1) სისტემის პირველ ინტეგრალს.

ვთქვათ, (21,2) წარმოადგენს (21,1) სისტემის პირველ ინტეგრალს. თუ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ტოლობაში q_α, p_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) სიდიდეების ნაცვლად შეტანილია (21,1) სისტემის რაიმე ამოხსნა (მაშინ ეს ტოლობა იგივობად გადაიქცევა) და გავაწარმოებთ მას t -ს მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} p'_\alpha \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

(21,1) ტოლობების ძალით, ეს უკანასკნელი შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (21,3)$$

(20,2) აღნიშვნის ძალით. უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \quad (21,4)$$

ამრიგად, (21,4) ტოლობა წარმოადგენს აუცილებელ პირობას იმისა, რომ (21,2) გამოსახულება იძლეოდეს (21,1) სისტემას პირველ ინტეგრალს. ვაჩვენოთ ახლა, რომ თუ მუდმივისაგან განსხვავებული f ფუნქცია აკმაყოფილებს (21,4) განტოლებას, მაშინ $f=C$ იქნება (21,1) სისტემის პირველი ინტეგრალი. თუ მოვიგონებთ პუასონის ფრჩხილის განმარტებას, (21,4) ტოლობა (21,3) სახით გადაიწერება. (21,3) და, მაშასადამე, (21,4), ცხადია, წარმოადგენს f -ის მიმართ პირველი რიგის წრფივ კერძო წარმოებულთან დიფერენციალურ განტოლებას. რომლის მახასიათებელ სისტემას აქვს სახე

$$\frac{\frac{\partial q_1}{\partial H}}{\frac{\partial p_1}{\partial H}} = \frac{\frac{\partial q_2}{\partial H}}{\frac{\partial p_2}{\partial H}} = \dots = \frac{\frac{\partial q_s}{\partial H}}{\frac{\partial p_s}{\partial H}} = - \frac{\frac{\partial p_1}{\partial H}}{\frac{\partial q_1}{\partial H}} = \dots = - \frac{\frac{\partial p_s}{\partial H}}{\frac{\partial q_s}{\partial H}} = \frac{dt}{1}. \quad (21,5)$$

ვინაიდან, პირობის ძალით, f არის (21,4) და, მაშასადამე, (21,3) კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა, ამიტომ, როგორც კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, $f=C$ იქნება (21,5), ანუ რაც იგივეა, (21,1) სისტემის პირველი ინტეგრალი. ამით ზემონათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ $f=C$ იყოს (21,1) სისტემის პირველი ინტეგრალი იმაში მდგომარეობს, რომ f აკმაყოფილებდეს (21,4) განტოლებას.

ვთქვათ ახლა, მოცემულია (21,1) სისტემის ორი პირველი ინტეგრალი

$$\varphi(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = a,$$

$$\psi(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = b.$$

დავამტკიცოთ პუასონის შემდეგი დებულება:

დებულება. თუ $\varphi=a$, $\psi=b$ წარმოადგენენ (21,1) სისტემის პირველ ინტეგრალებს, მაშინ

$$(\varphi, \psi) = C$$

იქნება ამავე სისტემის პირველი ინტეგრალი. თუ პუასონის ფრჩხილი (φ, ψ) იგივეურად მუდმივის ტოლი არ არის.

ვინაიდან $\varphi=a$ და $\psi=b$ წარმოადგენენ (21,1) სისტემის პირველ ინტეგრალებს, ამიტომ, ზემოდამტკიცებულის ძალით, გვექნება

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0. \quad (21,6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0. \quad (21,7)$$

შევადგინოთ ახლა H , φ , ψ ფუნქციებისაგან პუასონის იგივობა

$$(H, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, H)) + (\psi, (H, \varphi)) \equiv 0. \quad (21,8)$$

(21,6) და (21,7) ტოლობების ძალით

$$(\psi, H) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (H, \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (21,9)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (21,8) იგივობაში, მივიღებთ

$$(H, (\varphi, \psi)) - \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \equiv 0, \quad (21,10)$$

ანუ

$$((\varphi, \psi), H) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv 0. \quad (21,11)$$

ეს უკანასკნელი კიდევ ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi, \psi) + ((\varphi, \psi), H) = 0. \quad (21,12)$$

თუ ამ უკანასკნელს შევადარებთ (21,4) ტოლობას, დაერწმუნდებით, რომ $(\varphi, \psi) = C$ იქნება (21,1) სისტემის პირველი ინტეგრალი, თუ $(\varphi, \psi) \neq \text{const}$; ამით პუასონის დებულება დარტიკებულია.

ცხადია, საზოგადოდ, ორი პირველი ინტეგრალის საშუალებით (21,1) სისტემის ყველა პირველი ინტეგრალი არ აივება ზემონაჩვენები წესით, რადგან, შეიძლება რამდენიმე პირველი ინტეგრალის აგების შემდეგ მათგან დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალი ვერ მივიღოთ ან კიდევ პუასონის ფრჩხილი შეიძლება იგივეურად მუდმივი იყოს.

ვთქვათ, H ფუნქცია t ცვლადზე ცხადად არ არის დამოკიდებული. მაშინ, როგორც ვიცით, $H = C$ იქნება (21,1) სისტემის პირველი ინტეგრალი. თუ $\varphi = a$ წარმოადგენს ამ სისტემის რაიმე პირველ ინტეგრალს, მაშინ, პუასონის დებულების თანახმად, $(\varphi, H) = C$ იქნება აგრეთვე (21,1) სისტემის პირველი ინტეგრალი. მაგრამ ვინაიდან

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0, \quad (21,13)$$

ამიტომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(\varphi, H) = -C, \quad (21,14)$$

იქნება ხსენებული სისტემის პირველი ინტეგრალი. მაგრამ, თუ $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C$ პირველი ინტეგრალია, მაშინ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C$ იქნება აგრეთვე პირველი ინტეგრალი და ა. შ. თითქოს ასეთი გზით მივიღებთ უამრავ პირველ ინტეგრალს. მაგრამ ეს ასე არ არის, რადგან თუ φ ცხადად t -ზე არ არის დამოკიდებული, მაშინ $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \dots = 0$ და, მაშასადამე, t ცვლადით კერძო წარმოებულები არ იძლევიან პირველ ინტეგრალს. თუ φ ცხადად t -ს შეიცავს, მაშინ ან გარ-

კვეთილი რიგიდან t ცვლადით კერძო წარმოებული ნული გახდება ან ამ ოპერაციის შემდგომი გამოყენებისას ახალ პირველ ინტეგრალებს ვერ მივიღებთ.

ამოცანები

15. განვიხილოთ თავისუფალი მატერიალური წერტილის მოძრაობა პოტენციალური ძალის გავლენით და შევადგინოთ მისთვის ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები.

განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ დეკარტის x, y, z კოორდინატები. განზოგადებული იმპულსები აღვნიშნოთ p_x, p_y, p_z -ით. პოტენციალური ენერგია იყოს $V(x, y, z)$. ვინაიდან

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (1)$$

ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}. \quad (2)$$

ამის გარდა ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} H = T + V &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \end{aligned}$$

ჰამილტონის კანონიკური განტოლებებს ექნება სახე

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m} p_x, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m} p_y, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{m} p_z, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

ამ განტოლებებიდან მიიღება შემდეგი განტოლებები

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z. \quad (4)$$

რომელნიც თავისუფალი მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებებს წარმოადგენენ დეკარტის კოორდინატებში.

16 ვთქვათ, გვაქვს ორი მატერიალური წერტილი, რომელნიც იზიდავენ ერთმანეთს ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონის მიხედვით. ვიგულისხმობთ, რომ ერთ-ერთი წერტილი უძრავია და ვიპოვოთ ლაგრანჟის და ჰამილტონის ფუნქციები, თუ მოძრავი წერტილის განზოგადებულ კოორდინატებად მიღებულია სფერული კოორდინატები: r, φ, θ .

თუ უძრავი მატერიალური წერტილის მასას აღვნიშნავთ M -ით, მოძრავისას m -ით, აღვიღად მივიღებთ

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta). \quad (5)$$

$$V = -f \frac{mM}{r}, \quad (6)$$

სადაც f გრავიტაციის მუდმივია.

ლაგრანჟის ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელობას:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \varphi'^2 + r^2 \dot{\varphi}'^2 \sin^2 \varphi) + f \frac{mM}{r}.$$

როგორც ამ ტოლობიდან ჩანს, L ფუნქცია ცხადად არ შეიცავს φ კოორდინატს და, მაშასადამე, ეს უკანასკნელი ციკლურ კოორდინატს წარმოადგენს. განზოგადებული იმპულსებისათვის გვექნება

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial r'} = mr', \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}'} = mr^2 \dot{\varphi}', \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = mr^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}'.$$

ვინაიდან φ ციკლური კოორდინატია, ამიტომ

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}' \sin^2 \varphi = C, \quad (7)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ადვილად მიიღება, რომ

$$H = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \dot{\varphi}'^2 + r^2 \dot{\varphi}'^2 \sin^2 \varphi) - f \frac{mM}{r} = T + V.$$

კანონიკურ ცვლადებში H ფუნქციას ექნება სახე

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} p_\varphi^2 \right) - f \frac{mM}{r}. \quad (8)$$

17. ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობა, რომლის თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია, დახასიათებულია q_1 და q_2 განზოგადებული კოორდინატებით და ვთქვათ სისტემის კინეტიკურ და პოტენციალურ ენერგიებს აქვთ სახე

$$T = \frac{1}{2} \frac{q_1'^2}{a_1 + a_2 q_2^2} + \frac{1}{2} q_2'^2, \quad (9)$$

$$V = a_3 + a_4 q_1^2, \quad (10)$$

სადაც a_1, a_2, a_3, a_4 გარკვეული მუდმივებია. შევადგინოთ რაუსის განტოლება და განვსაზღვროთ სისტემის მოძრაობა.

ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე

$$L = T - V = \frac{1}{2} \frac{q_1'^2}{a_1 + a_2 q_2^2} + \frac{1}{2} q_2'^2 - a_3 - a_4 q_1^2. \quad (11)$$

ამ გამოსახულებიდან ცხადია, რომ q_1 არის ციკლური კოორდინატი. ცხადია, გვექნება

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1'} = \frac{q_1'}{a_1 + a_2 q_2^2} = C, \quad (12)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. (12) ტოლობიდან

$$q_1' = C (a_1 + a_2 q_2^2). \quad (13)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (11)-ში, მივიღებთ

$$L(q_2, q_1', q_2') = L^*(q_2, q_2', C) = \frac{C^2}{2} (a_1 + a_2 q_2^2) + \frac{1}{2} q_2'^2 - a_3 - a_4 q_1^2.$$

(18,8) ფორმულის ძალით, რაუსის ფუნქციას ექნება სახე

$$R = L^* - Cq_1' = L^* - C^2(a_1 + a_2q_2^2) = -\frac{C^2}{2}(a_1 + a_2q_2^2) + \frac{1}{2}q_2'^2 - a_3 - a_4q_2^3.$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ რაუსის განტოლება:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_1'} - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0 \quad (14)$$

მოგვცემს:

$$q_2'' + (2a_4 + a_2C^2)q_2 = 0, \quad (15)$$

საიდანაც

$$q_2 = a \sin(\sqrt{2a_4 + a_2C^2}t + \epsilon), \quad (16)$$

სადაც a და ϵ ნებისმიერი მუდმივებია.

თუ (16) მნიშვნელობას შევიტანთ (13) ტოლობაში და მოვახდენთ ინტეგრაციას, ვიპოვით აგრეთვე q_1 -ს. როგორც მოსალოდნელი იყო, ზოგად ამოხსნაში შევა 4 ნებისმიერი მუდმივი, რომელნიც საწყისი პირობებით განისაზღვრებიან.

18. გამოვსახოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის ცოცხალი ძალა კანონიკურ ცვლადებში.

დავუშვათ, რომ მოძრაობა სტაციონარულია. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, ცოცხალ ძალას აქვს სახე

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s A_{\alpha\beta} q'_\alpha q'_\beta. \quad (17)$$

(16,2) ტოლობების ძალით,

$$p_\alpha = A_{\alpha 1} q'_1 + A_{\alpha 2} q'_2 + \dots + A_{\alpha s} q'_s, \quad (18)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

თუ ამ სისტემიდან ამოვხსნით q'_1, q'_2, \dots, q'_s და შევიტანთ (17) ტოლობაში, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=2}^s B_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta,$$

სადაც $B_{\alpha\beta}$ წარმოადგენენ q_1, q_2, \dots, q_s განზოგადებული კოორდინატების სავსებით გარკვეულ ფუნქციებს.

ვინაიდან T ნულის ტოლი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $q'_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). ამიტომ ცხადია, რომ T ნულის ტოლი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა განზოგადებული იმპულსები p_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) ნულის ტოლია.

¹ (18) სისტემა ამოხსნაღია q'_1, \dots, q'_s სიდიდეების მიმართ, რადგან ამ სისტემის დეტერმინანტი: $\det \|A_{\alpha\beta}\|$, როგორც ვიცით, განსხვავებულია ნულისაგან.

მათემატიკური ნაწილის სისტემის მოძრაობის განვლილება
პოლონომაჟი და პარპოლონომაჟი ბმების შემთხვევაში

§ 22. პოლონომაჟი და პარპოლონომაჟი ბმების ერთობლიობა

როგორც უკვე იყო აღნიშნული (იხ. § 2), ბმას, რომლის განტოლება-შიაც სიჩქარის კომპონენტები მონაწილეობენ, ეწოდება არაპოლონომაჟი ბმა და, მაშასადამე, არაპოლონომაჟი ბმის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t) = 0, \quad (22,1)$$

ამასთან, ვსარგებლობთ შემოკლებული აღნიშვნით:

$$\begin{aligned} \Phi(x_j, y_j, z_j, x'_j, y'_j, z'_j, t) &\equiv \\ &\equiv \Phi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_n, y'_n, z'_n, t). \end{aligned}$$

არაპოლონომაჟი ბმებს სწორად დიფერენციალურ ბმებს უწოდებენ. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ არაპოლონომაჟი ბმებს, რომელთა განტოლებაში სიჩქარის კომპონენტები მონაწილეობენ წრფივად. ამ შემთხვევაში არაპოლონომაჟი ბმის განტოლებას აქვს სახე

$$\sum_{i=1}^n (a_i x'_i + b_i y'_i + c_i z'_i) + a = 0, \quad (22,2)$$

ანუ

$$\sum_{i=1}^n (a_i dx_i + b_i dy_i + c_i dz_i) + a dt = 0, \quad (22,3)$$

სადაც a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, \dots, n$) და a წარმოადგენენ x_i, y_i, z_i კოორდინატებისა და t ცვლადის უწყვეტ და უწყვეტად წარმოებად ფუნქციებს.

თუ ჩვენ განვიხილავთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის უსასრულოდ მცირე რხევას რაიმე კონფიგურაციის მახლობლობაში, მაშინ (22,1) სახის განტოლება, გარკვეული სიზუსტით, შეიძლება (22,2) სახით გადავწეროთ. ამისათვის საკმარისია აღნიშნული კონფიგურაციის მახლობლობაში Φ ფუნქცია გავშალოთ მწკრივად x'_j, y'_j, z'_j ($j=1, 2, \dots, n$) სიდიდეების მიმართ და უკუვადლოთ მეორე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეები.

(22,2) სახის ბმას ეწოდება არაინტეგრებადი, თუ (22,3) ტოლობის პარცენა მხარე არ წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. (22,2) სახის ინტეგრებადი ბმა პირდაპირ პოლონომაჟი ბმამდე დაიყვანება. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ არაინტეგრებად დიფერენციალურ ბმებს.

შემდეგში, როცა ჩვენ ვიტყვით, რომ (22,2) სახის ბმა სტაციონარულია, ვიგულისხმებთ, რომ კოეფიციენტები a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, \dots, n$) t -ზე ცხადად არ არიან დამოკიდებული და $a \equiv 0$.

(22,2) განტოლება ადებს გარკვეულ შეზღუდვას სიჩქარის კომპონენტებს. თუ ამ განტოლებას გავაწარმოებთ t ცვლადის მიმართ, მივიღებთ იმ პირობას, რომელსაც არპოლონომაჟი ბმა ადებს აჩქარების კომპონენტებს. ამ პირობას, ცხადია, ექნება სახე

$$\sum_{i=1}^n (a_i x_i'' + b_i y_i'' + c_i z_i'' + \Omega(x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', t)) = 0,$$

სადაც Ω წარმოადგენს $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' (i=1, 2, \dots, n)$ სიდიდეებისა და t -ს გარკვეულ ფუნქციას.

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება k რაოდენობა პოლონომურ და r რაოდენობა არაპოლონომურ ბმებს, რომელთა განტოლებებსაც აქვთ სახე

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (22,4)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_{\beta i} x_i' + b_{\beta i} y_i' + c_{\beta i} z_i') + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r). \quad (22,5)$$

სისტემის ნამდვილი და შესაძლო გადაადგილებები, პოლონომური და არაპოლონომური ბმების ერთობლიობის შემთხვევაშიაც ისევე განიზარტება, როგორც პოლონომური ბმების შემთხვევაში (იხ. § 2).

(22,4) ტოლობების ძალით, სისტემის ნამდვილი და შესაძლო გადაადგილების კომპონენტებს ედებათ, შესაბამად, შემდეგი პირობები:

$$\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (22,6)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0. \quad (22,7)$$

(22,5) განტოლებები, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^n (a_{\beta i} dx_i + b_{\beta i} dy_i + c_{\beta i} dz_i) + a_\beta dt = 0 \quad (22,8)$$

$$(\beta = 1, 2, \dots, r).$$

ამრიგად, (22,5) განტოლებები სისტემის ნამდვილი გადაადგილების კომპონენტებს ადებენ (22,8) სახის პირობებს.

ვინაიდან შესაძლო გადაადგილების შემთხვევაში $dt=0$, ამიტომ (22,8) ტოლობების ძალით, შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები შემდეგ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ:

$$\sum_{i=1}^n (a_{\beta i} \delta x_i + b_{\beta i} \delta y_i + c_{\beta i} \delta z_i) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r). \quad (22,9)$$

ამრიგად, (22,5) სახის არაპოლონომური ბმები სისტემის შესაძლო გადაადგილების კომპონენტებს ადებენ (22,9) სახის პირობებს.

შემომოყვანილი ტოლობების ძალით, ცხადია, რომ სისტემის ნამდვილი გადაადგილება დაემთხვევა მის ერთ-ერთ შესაძლო გადაადგილებას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა როგორც პოლონომური, ისე არაპოლონომური ბმები სტაციონარულია.

ჩვენ, შემდეგში, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ (22,7) და (22,9) ტოლობები დამოუკიდებელნი არიან და, მაშასადამე, ეს პირობები δx_i , δy_i , δz_i ($i=1, 2, \dots, n$) კომპონენტებს აღებენ $k+r$ დამოუკიდებელ პირობას. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ (22,4) და (22,5) განტოლებები დამოუკიდებელნი არიან. ამის გარდა ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $k+r < 3n$ და, მაშასადამე, δx_i , δy_i , δz_i კომპონენტებს შორის დამოუკიდებელი (ნებისმიერი) იქნება $3n-k-r$. დამოუკიდებელ შესაძლო გადაადგილებების კომპონენტების რიცხვს, ე. ი. $3n-k-r$ -ს ეწოდება, განსახილველ შემთხვევაში, სისტემის თავისუფლების ხარისხი.

წერის გამარტივების მიზნით, სისტემის წერტილების კოორდინატებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

M_1 წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_1, x_2, x_3 -ით,

M_2 " " " " x_4, x_5, x_6 -ით,

.....

M_n წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ $x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}$ -ით.

M_1 წერტილის მასა აღვნიშნოთ ან m_1 -ით ან m_2 -ით ან m_3 -ით ($m_1 = m_2 = m_3$).

M_2 წერტილის მასა აღვნიშნოთ ან m_4 -ით ან m_5 -ით ან m_6 -ით ($m_4 = m_5 = m_6$),

.....

M_n წერტილის მასა აღვნიშნოთ ან m_{3n-2} -ით, ან m_{3n-1} -ით, ან m_{3n} -ით.

(22,4) და (22,5) განტოლებები ამ აღნიშვნებში ცხადია, ასე ჩაიწერებიან:

$$f_\alpha(x_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, 3n), \quad (22,10)$$

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} x'_i + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r), \quad (22,11)$$

ამასთან, $a_{\beta i}$ შედგენილია ზემოგანხილული $a_{\beta i}$, $b_{\beta i}$, $c_{\beta i}$ ფუნქციებისაგან გარკვეული წესით.

(22,6), (22,7), (22,8) და (22,9) ტოლობები ახალ აღნიშვნებში, ასე ჩაიწერებიან:

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k); \quad (22,12)$$

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (22,13)$$

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} dx_i + a_\beta dt = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r). \quad (22,14)$$

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} \delta x_i = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r). \quad (22,15)$$

ისე როგორც კოლონომური ბმების შემთხვევაში, ჩვენ ვიტყვით, რომ (22,10) და (22,11) ბმები იდეალურია, თუ მათი შესაბამისი რეაქციის ძალები

ბის მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია. მაშინ, როგორც ადვილი მისაჩვედრია, დალამბერ-ლაგრანჟის განტოლებას (მექანიკის ზოგად განტოლებას) იგივე სახე ექნება, რაც ჰოლონომური ბმების შემთხვევაში. ეს განტოლება ახალ აღნიშვნებში ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i x_i'') \delta x_i = 0, \quad (22,16)$$

სადაც სისტემაზე მოქმედი ძალების კოორდინატებისათვის შემოღებული ისეთივე აღნიშვნები, როგორიც წერტილების კოორდინატებისათვის.

§ 23. ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება (22,10) და (22,11) სახის იდეალურ ბნებს. შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები აკმაყოფილებენ (22,13) და (22,15) პირობებს, ამიტომ δx_i ($i=1, 2, \dots, 3n$) სიდიდეებს შორის დამოუკიდებელია $3n - k - r$. გავამრავლოთ (22,13) ტოლობა λ_α -ზე, (22,15) ტოლობა μ_β -ზე, სადაც λ_α და μ_β ჯერჯერობით უცნობი მამრავლებია, ავჯამოთ ეს ტოლობები α და β ინდექსით და დავუმატოთ ერთი მეორეს, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^r \mu_\beta a_{\beta i} \right) \delta x_i = 0. \quad (23,1)$$

შევკრიბოთ ეს უკანასკნელი (22,16) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(X_i - m_i x_i'' + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^r \mu_\beta a_{\beta i} \right) \delta x_i = 0. \quad (23,2)$$

შევარჩიოთ λ_α ($\alpha=1, 2, \dots, k$) და μ_β ($\beta=1, 2, \dots, r$) მამრავლები ისე, რომ დამოკიდებული შესაძლო გადაადგილების კომპონენტების კოეფიციენტები ნულად იქცენ. მაშინ დაგვრჩება ისეთი წევრები, რომლებშიაც შედის დამოუკიდებელი შესაძლო გადაადგილების კომპონენტები. ვინაიდან (23,2) ტოლობა იგივეურად უნდა იყოს დაცული, ამიტომ ხსენებული დამოუკიდებელი კომპონენტების კოეფიციენტებიც ნულის ტოლი უნდა იყოს და, მაშასადამე, (23,2) ტოლობიდან ვღებულობთ შემდეგ სისტემას:

$$m_i x_i'' = X_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^r \mu_\beta a_{\beta i} \quad (23,3)$$

$$(i=1, 2, \dots, 3n),$$

უკანასკნელი განტოლებები ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებებს წარმოადგენენ. ამ განტოლებებს უნდა დავუმატოთ ბმის განტოლებები

$$f_\alpha(x_j, t) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, k).$$

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} x_i' + a_\beta = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, r). \quad (23,4)$$

(23,3) და (23,4) განტოლებების სახით, გვაქვს $3n + k + r$ განტოლება ამდენივე უცნობებით: x_i ($i = 1, 2, \dots, 3n$), λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, k$), μ_β ($\beta = 1, \dots, r$).

თუ სისტემა ემორჩილება მხოლოდ ჰოლონომურ ბმებს, მაშინ ცხადია; (23,3) სისტემიდან მიიღება ის განტოლებები, რომელნიც ჩვენ ჰოლონომური ბმების შემთხვევაში § 4-ში გვქონდა გამოყვანილი.

(23,3) განტოლებებიდან მიიღება აგრეთვე სისტემის წონასწორობის შემდეგი განტოლებები:

$$X_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^r \mu_\beta a_{\beta i} = 0 \quad (23,5)$$

($i = 1, 2, \dots, 3n$).

თუ უკანასკნელ ტოლობას გავამრავლებთ dx_i -ზე, შევაჯამებთ i ინდექსით და გავითვალისწინებთ (22,13) და (22,15) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i dx_i = 0. \quad (23,6)$$

ამრიგად, უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს სისტემის წონასწორობის აუცილებელ პირობას. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს საკმარისიცაა წონასწორობისათვის. ამისათვის შევადგინოთ (23,1) ტოლობა და დავუმატოთ ის (23,6) ტოლობას, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(X_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^r \mu_\beta a_{\beta i} \right) dx_i = 0. \quad (23,7)$$

თუ მოვიქცევით ისე, როგორც (23,2) ტოლობიდან (23,3) სისტემის მიღების დროს, დავრწმუნდებით, რომ (23,7) ტოლობიდან მიიღება (23,5) განტოლებები და ამით ზემონათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ამრიგად, (23,6) ტოლობა წარმოადგენს მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას.

ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებების საშუალებით ადვილად შეიძლება მივიღოთ ცოცხალი ძალის კანონი. ამისათვის გავამრავლოთ (23,3) ტოლობა dx_i -ზე და ავჯამოთ i ინდექსით, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i'' dx_i = \sum_{i=1}^{3n} X_i dx_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \sum_{\beta=1}^r \mu_\beta \sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} dx_i. \quad (23,8)$$

მაგრამ ვინაიდან

$$x_i'' dx_i = x_i' dx_i' = d \frac{x_i'^2}{2},$$

ამიტომ, ცხადია

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i'' dx_i = d \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i'^2 = dT,$$

სადაც T არის სისტემის ცოცხალი ძალა. ამის გარდა, თუ გავითვალისწინებთ (22,12) და (22,14) ტოლობებს, (23,8) ტოლობიდან მივიღებთ

$$dT = \sum_{i=1}^{3n} X_i dx_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{df_\alpha}{dt} dt - \sum_{\beta=1}^r \mu_\beta a_\beta dt. \quad (23,9)$$

ეს უკანასკნელი გამოსახავს ცოცხალი ძალის კანონს დიფერენციალური სახით მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის პოლონომური და არაპოლონომური ბნეისის ერთობლიობის შემთხვევაში.

თუ ბმები სტაციონარულია, ე. ი. $\frac{df_\alpha}{dt} = 0$, $a_\beta = 0$, მაშინ (23,9) ტოლობა მოგვცემს

$$dT = \sum_{i=1}^{3n} X_i dx_i. \quad (23,10)$$

ამრიგად, თუ ბმები სტაციონარულია, მაშინ ცოცხალი ძალის კანონს აღებული არათავისუფალი სისტემისათვის ისეთივე სახე აქვს, როგორც თავისუფალი სისტემის შემთხვევაში.

თუ ძალები პოტენციალურია, ე. ი. $\sum_{i=1}^{3n} X_i dx_i = -dV$, მაშინ (23,10)

ტოლობიდან მივიღებთ ცოცხალი ძალის ინტეგრალს: $T + V = \text{const.}$

§ 24. ლაგრანჟის მეორე მზარის განტოლებები

ვთქვათ, ისე როგორც წინა §-ში, სისტემა ემორჩილება შემდეგი სახის ბმებს

$$f_\alpha(x_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (24,1)$$

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} x'_i + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r). \quad (24,2)$$

გავითვალისწინოთ ჯერჯერობით მხოლოდ (24,1) ბმები და ისე როგორც § 10-ში, შემოვიყვანოთ q_1, q_2, \dots, q_s ($s = 3n - k$) განზოგადებული კოორდინატები. გვექნება

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3n).$$

ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\delta x_i = \sum_{v=1}^s \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_v} \delta q_v.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევითავსებთ (22,15) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\sum_{v=1}^s \delta q_v \sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial q_v} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial q_v} = B_{\beta v} \quad (\beta = 1, 2, \dots, r, \quad v = 1, 2, \dots, s), \quad (24,3)$$

მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\sum_{v=1}^s B_{\beta v} \delta q_v = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r). \quad (24,4)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ როცა სისტემა ემორჩილება (24,1) სახის პოლონომური ბმების გარდა (24,2) სახის არაპოლონომურ ბმებს, მაშინ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ დამოუკიდებელი სიდიდეები არ არიან, არამედ დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან (24,4) პირობებით. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ეს პირობები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი პირობებია და, მაშასადამე, $\delta q_v (v = 1, 2, \dots, s)$ სიდიდეებს შორის დამოუკიდებელია მხოლოდ $s - r = 3n - k - r$.

თუ, დროებით, (24,2) სახის ბმებს არ მივაქცევთ ყურადღებას და მოვიქცევით ზუსტად ისე, როგორც § 10-ში, მივიღებთ (იხ. (10,18) ფორმულა)

$$\sum_{v=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v} - Q_v \right) \delta q_v = 0, \quad (24,5)$$

სადაც T სისტემის ცოცხალი ძალაა:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i'^2, \quad (24,6)$$

$$Q_v = \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_v}.$$

ვინაიდან $\delta q_v (v = 1, 2, \dots, s)$ ვარიაციები დამოუკიდებელი სიდიდეები კი არ არიან, არამედ ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან (24,4) პირობებით, ამიტომ (24,5) ტოლობაში ამ ვარიაციების კოეფიციენტები ნულის ტოლი არ იქნება.

გავამრავლოთ (24,4) ტოლობები ρ_β განუზღვრელ მამრავლებზე, ავჯამოთ β ნიშნაკით და გამოვაკლოთ (24,5) ტოლობიდან, მივიღებთ

$$\sum_{v=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v} - Q_v - \sum_{\beta=1}^r \rho_\beta B_{\beta v} \right) \delta q_v = 0. \quad (24,7)$$

თუ მოვიგონებთ, რომ $\delta q_v (v = 1, 2, \dots, s)$ სიდიდეებს შორის დამოუკიდებელია $s - r$, ამის გარდა გვაქვს კიდევ $\rho_\beta (\beta = 1, 2, \dots, r)$ დამოუკიდებელი სიდიდეები და ჩავატარებთ ისეთ მსჯელობას, როგორც ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებების მიღების დროს იყო ჩატარებული, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v} = Q_v + \sum_{\beta=1}^r \rho_\beta B_{\beta v} \quad (v = 1, 2, \dots, s). \quad (24,8)$$

უკანასკნელ განტოლებებს, რომელნიც პოლონომური და არაპოლონომური ბმების ერთობლიობის შემთხვევაში ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს წარმოადგენენ, უნდა დავუმატოთ ბმის (24,2) განტოლებები, რომელნიც განზოგადებულ კოორდინატებში უნდა იქნენ გამოსახული.

(24,8) განტოლებების მიღების ზემომოყვანილი მეთოდი, რომელიც § 10-ში მოყვანილი ლაგრანჟის მეთოდისა და განუზღვრელი მამრავლების ლაგრანჟისავე მეთოდის კომბინაციას წარმოადგენს, ეკუთვნის რაუსს, ამიტომ (24,8) განტოლებებს რაუსის განტოლებებს უწოდებენ.

ცხადია, გვექნება

$$x'_i = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} q'_\nu + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, 3n).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (24,2) განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\sum_{\nu=1}^i q'_\nu \sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + a_\beta = 0$$

$$(\beta = 1, 2, \dots, r).$$

თუ გავითვალისწინებთ (24,3) აღნიშვნებს, უკანასკნელი ტოლობები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\sum_{\nu=1}^i B_{\beta\nu} q'_\nu + \sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + a_\beta = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, r). \quad (24,9)$$

(24,8) და (24,9) განტოლებების სახით ჩვენ გვაქვს $s+r$ განტოლება ამდენივე უცნობით: $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_r$.

როცა სისტემა მხოლოდ ჰოლონომურ ბმებს ემორჩილება, მაშინ $B_{\beta\nu}=0$ და (24,8) სისტემა დავმთხვევა (10,19) სისტემას.

§ 25. აპელის განაოლებები

ვთქვათ, ისე როგორც წინა პარაგრაფში, სისტემა ემორჩილება (24,1) და (24,2) სახის ბმებს. ვინაიდან

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t),$$

ამიტომ გვექნება

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} q'_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (25,1)$$

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (i=1, 2, \dots, 3n). \quad (25,2)$$

(24,9) ტოლობების ძალით q'_1, q'_2, \dots, q'_s სიდიდეებს შორის დამოუკიდებელია მხოლოდ $s-r$. ვთქვათ, ეს დამოუკიდებელი სიდიდეებია q'_1, \dots, q'_{s-r} . მაშინ ცხადია, q'_α ($\alpha=s-r+1, \dots, s$) სიდიდეები გამოისახება q'_1, \dots, q'_{s-r} სიდიდეების საშუალებით და (25,1) ტოლობები ასე გადაიწერება:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{s-r} C_{ij} q'_j + C_i \quad (i=1, 2, \dots, 3n), \quad (25,3)$$

სადაც C_{ij} და C_i განზოგადებული კოორდინატებისა და t ცვლადის გარკვეული ფუნქციებია.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ ვარიაციები დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან (24,4) აირობებით და მოვიქცევით ისე, როგორც (25,3) ტოლობების მიღების დროს, (25,2) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{s-r} C_{ij} \delta q_j \quad (i=1, 2, \dots, 3n). \quad (25,4)$$

(25,3) და (25,4) ტოლობების მიღების დროს q_1, \dots, q_s განზოგადებული კოორდინატებიდან დამოუკიდებელ კოორდინატებად მიღებულია q_1, q_2, \dots, q_{s-r} კოორდინატები.

დავწეროთ მექანიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i x_i'') \delta x_i = 0,$$

შევიტანოთ მასში δx_i -ის ნაცვლად (25,4) მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{s-r} \delta q_j \sum_{i=1}^{3n} m_i C_{ij} x_i'' = \sum_{j=1}^{s-r} \delta q_j \sum_{i=1}^{3n} C_{ij} X_i. \quad (25,5)$$

(25,1) ტოლობის t -ს მიმართ გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = x_i'' = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} q_j'' + \varphi_i(q, q', t), \quad (25,6)$$

სადაც $\varphi_i(q, q', t)$ ($i=1, 2, \dots, 3n$) განზოგადებული კოორდინატების, განზოგადებული სიჩქარეების და t -ს გარკვეულ ფუნქციებს წარმოადგენენ. (25,6) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$\frac{\partial x_i''}{\partial q_j''} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (i=1, 2, \dots, 3n, j=1, 2, \dots, s). \quad (25,7)$$

(25,3) ტოლობის t -ს მიმართ გაწარმოებით ვღებულობთ

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{s-r} C_{ij} q_j'' + \psi_i, \quad (25,8)$$

სადაც ψ_i ($i=1, 2, \dots, 3n$) გარკვეული ფუნქციებია, რომელნიც განზოგადებული კოორდინატების მეორე რიგის წარმოებულებს არ შეიცავენ. უკანასკნელი ტოლობებიდან გვექნება

$$\frac{\partial x_i''}{\partial q_j''} = C_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, 3n, j=1, 2, \dots, s-r). \quad (25,9)$$

(25,7) და (25,9) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$C_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (i=1, 2, \dots, 3n, j=1, 2, \dots, s-r).$$

უკანასკნელი ტოლობებისა და (25,9) ტოლობების ძალით, ვღებულობთ

$$\sum_{i=1}^{3n} C_{ij} X_i = \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, s-r), \quad (25,10)$$

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i C_{ij} x_i'' = \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i'' \frac{\partial x_i''}{\partial q_j''} = \frac{\partial}{\partial q_j''} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i''^2 = \frac{\partial \Omega}{\partial q_j''}, \quad (25,11)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i''^2. \quad (25.12)$$

(25,10) და (25,11) ტოლობების ძალით, (25,5) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\sum_{j=1}^r \frac{\partial \Omega}{\partial q_j''} \delta q_j = \sum_{j=1}^r Q_j \delta q_j.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{s-r}$ დამოუკიდებელი სიდიდეებია. უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ აქელის შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_j''} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, s-r). \quad (25.13)$$

ამ განტოლებებს უნდა დაემატოს აგრეთვე (24,9) განტოლებები

$$\sum_{\nu=1}^s B_{\beta\nu} q_\nu' + \sum_{i=1}^{3n} a_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + a_\beta = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, r). \quad (25.14)$$

თუ (25,12) ტოლობაში x_i'' -ის ნაცვლად შევიტანთ (25,8) მნიშვნელობას და, მაშასადამე, Ω ფუნქციას გამოვსახავთ განზოგადებულ კოორდინატებში. დავრწმუნდებით, რომ (25,13) და (25,14)-ის სახით ჩვენ გვაქვს q_1, q_2, \dots, q_s სიდიდეების მოსაძებნად ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. რომელიც s განტოლებისაგან შედგება.

(25,12) ტოლობით განსაზღვრულ Ω ფუნქციას, რომელიც აჩქარების კომპონენტების საშუალებით იმავე წესით არის შედგენილი, რა წესითაც კინეტიკური ენერგიაა შედგენილი სიჩქარის კომპონენტების საშუალებით. ეწოდება აჩქარების ენერგია.

გ ა ნ ც ო ფ ი ლ ე ბ ა 6

მაგარიკაური ნაჩვილთა სისჯების მხიარუ ახევეები მღვრალი წონანწორობის მახლობლობაში

მთელ ამ განყოფილებაში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება § 10-ში განხილული სახის პოლონომურ იდეალურ ორმხრივ ბმებს, რომელთა განტოლებებსაც აქვთ სახე

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, k).$$

ვიგულისხმებთ, რომ ეს ბმები დამოუკიდებელნი არიან და სისტემის მოძრაობას დაეხასიათებთ q_1, q_2, \dots, q_s განზოგადებული კოორდინატებით. შემდეგში, გადმოცემის გამარტივების მიზნით q_1, q_2, \dots, q_s კოორდინატებს შევესაბამებთ s განზომილებიანი სივრცის გარკვეულ $M(q_1, q_2, q_s)$ წერტილს. M_i წერტილს. რომლის კოორდინატებია $q_i=0$ ($i=1, 2, \dots, s$), ვუწოდებთ ხსენებულ s განზომილებიან სივრცეში კოორდინატთა სისტემის სათავეს. წერტილთა სიმრავლეს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობას

$$|q_j| \leq \varepsilon,$$

სადაც ε გარკვეული რიცხვია, ვუწოდებთ $M_0(0, \dots, 0)$ წერტილის ε მიდამოს.

ზემომოყვანილი ტერმინოლოგიის მიხედვით ცხადია, რომ ალგებულ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობა სავსებით დახასიათდება s განზომილებიან სივრცეში $M(q_1, \dots, q_s)$ წერტილის მოძრაობით. ამიტომ, შემდეგში, როცა ლაპარაკი იქნება M წერტილის ტრაექტორიაზე s განზომილებიან სივრცეში, ნაგულისხმევი იქნება ალგებულ სისტემის წერტილების ტრაექტორიები ჩვეულებრივ 3 განზომილებიან სივრცეში.

§ 26. ნიშანგანსაზღვრული, მუდმივნიშნა და ცვალებადნიშნა ფუნქციები

განვიხილოთ q_1, q_2, \dots, q_s განზოგადებული კოორდინატების უწყვეტი $\omega(q_1, \dots, q_s)$ ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია, როცა ყველა $q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) (კოორდინატთა სისტემის სათავეში). შემოვიღოთ შემდეგი განმარტებები:

1°. ჩვენ ვიტყვი, რომ $\omega(q_1, q_2, \dots, q_s)$ არის ნიშანგანსაზღვრული ფუნქცია, თუ მოიძებნება $M_0(0, \dots, 0)$ წერტილის ისეთი მიდამო

$$|q_j| \leq h \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (26,1)$$

სადაც ეს ფუნქცია არსად ნულის ტოლი არ ხდება (გარდა M_0 წერტილისა) და ინარჩუნებს ერთსა და იმავე ნიშანს. თუ ω ფუნქცია ყველგან დადებითია აღნიშნულ მიდამოში, მაშინ მას დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას უწოდებენ. ანალოგიურად განიმარტება უარყოფითად განსაზღვრული ფუნქცია.

2°. ჩვენ ვიტყვი, რომ $\omega(q_1, q_2, \dots, q_s)$ არის მუდმივნიშნა ფუნქცია, თუ არსებობს M_0 წერტილის ისეთი მიდამო, განსაზღვრული (26,1) უტოლობებით, სადაც ეს ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის, მაგრამ გარდა სათავეისა (M_0 წერტილისა) შეიძლება აღნიშნული მიდამოს სხვა წერტილებზედაც იყოს ნულის ტოლი.

3°. ω ფუნქციას ვუწოდებთ ცვალებადნიშნა ფუნქციას, თუ არ არსებობს M_0 წერტილის ისეთი მიდამო, სადაც ის ნიშანს არ იცვლიდეს.

მაგალითები. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $s=3$, მაშინ ფუნქციები

$$\omega = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,$$

$$\omega = q_1^2 + 2q_1q_2 + 2q_2^2 + q_3^2 = (q_1 + q_2)^2 + q_2^2 + q_3^2,$$

წარმოადგენენ დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციებს, როგორიც არ უნდა იყოს (26,1) უტოლობებში მონაწილე h რიცხვი.

ფუნქცია

$$\omega = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_3^3$$

არის აგრეთვე დადებითად განსაზღვრული მხოლოდ არა ნებისმიერი h -სათავეის, არამედ საკმარისად მცირე h -სათავეის.

ცხადია, აგრეთვე, რომ ფუნქცია

$$\omega = (q_1 + q_2)^3 + q_3^2$$

წარმოადგენს მუდმივნიშნა ფუნქციას, რადგან ის ყველგან არაუარყოფითია და გარდა $q_1=q_2=q_3=0$ წერტილისა, ნულის ტოლი ხდება აგრეთვე, როცა $q_1 = -q_2, q_3=0$.

ადგილი მისახვედრია აგრეთვე, რომ

$$\omega = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2, \quad \omega = q_1$$

წარმოადგენენ ცვალებადნიშნა ფუნქციებს.

საკიროდ მიგვაჩნია შევნიშნოთ, რომ არ არსებობს ზოგადი კრიტერიუმი, რომლის მიხედვითაც შეიძლებოდა დადგენა როდის არის აღებული ფუნქცია ნიშანგანსაზღვრული, მუდმივნიშნა და ცვალებადნიშნა, მაგრამ მთელ რიგ კონკრეტულ შემთხვევებში ამ საკითხების გამორკვევა ცნელი არ არის.

ვთქვათ, $\omega(q_1, q_2, \dots, q_s)$ წარმოადგენს m -ური რიგის ერთგვაროვან ფორმას და, მაშასადამე, აკმაყოფილებს პირობას

$$\omega(\lambda q_1, \lambda q_2, \dots, \lambda q_s) = \lambda^m \omega(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (26,2)$$

სადაც λ ნებისმიერი რიცხვია. როგორც ადგილი მისახვედრია, როცა m კენცია, ω ცვალებადნიშნა ფუნქცია იქნება.

(26,2) ტოლობის ძალით, ადგილი მისახვედრია აგრეთვე, რომ, თუ m -ური რიგის ერთგვაროვანი ფორმა ნიშანგანსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ ამ გარემოებას ადგილი ექნება, როგორიც არ უნდა იყოს (26,1) უტოლობაში მონაწილე k რიცხვი და, მაშასადამე, — მთელს სივრცეში. კერძოდ, თუ კვადრატული ფორმა არის ნიშანგანსაზღვრული, მაშინ ნიშანგანსაზღვრულობას ადგილი ექნება მთელს სივრცეში (ლამბა-რაკია q_1, \dots, q_s კოორდინატების ცვალების სივრცეზე). ამ გარემოებით ჩვენ შემდეგში ხშირად ვისარგებლებთ.

§ 27. მდგრადი წონასწორობისა და მდგრადი მოძრაობის ცნება

სისტემის რაიმე მდებარეობას, განსაზღვრულს q^1, q^2, \dots, q^s განზოგადებული კოორდინატებით, ვუწოდებთ წონასწორობის მდებარეობას, თუ სისტემა ამ მდებარეობაში დარჩება უძრავად, როცა საწყისი სიჩქარეები ამ მდებარეობისათვის ნულის ტოლია. მაგალითად, მათემატიკური საქანის ვერტიკალური მდებარეობა წარმოადგენს წონასწორობის მდებარეობას.

ზოგადობის შეუზღუდველად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ სისტემის წონასწორობის ერთ-ერთი მდებარეობა განსაზღვრულია $q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) კოორდინატებით. მართლაც, თუ წონასწორობას ადგილი აქვს, როცა $q_j = \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$), სადაც α_j გარკვეული რიცხვებია, მაშინ შემოვიღებთ რა ახალ q^* , განზოგადებულ კოორდინატებს, რომელნიც შემდეგი ტოლობებით არიან განსაზღვრული

$$q^{*j} = q_j - \alpha_j \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

დაერწმუნდებით, რომ წონასწორობის მდებარეობისათვის $q^{*j} = 0$ და ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ჩვენ ვიტყვით, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობის მდებარეობა, განსაზღვრული $q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) განზოგადებული კოორდინატებით, წარმოადგენს მდგრადი წონასწორობის მდებარეობას, თუ ყოველი წინასწარ აღებული დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა სისტემის q^j გადაადგილება მოცემული მდებარეობიდან და ამ გადაადგილების შესაბამის $(q^j)^0$ საწყისი სიჩქარეები აკმაყოფილებენ პირობებს $|q^j| < \delta$, $|(q^j)^0| < \delta$, მაშინ, სისტემის მთელი შემდგომი მოძრაობის პერიოდში, ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|q_j| < \epsilon, |q'_j| < \epsilon \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

სხვანაირად, რომ ვთქვათ სისტემის მოცემულ წონასწორობის მდებარეობას ეწოდება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობა, თუ სისტემას მივანიჭებთ ამ მდებარეობიდან მცირე გადახრას მცირე სიჩქარეებით, მაშინ ის მთელი შემდგომი მოძრაობის დროს იქნება საკმარისად მცირედ გადახრილი ამ მდებარეობიდან და მისი სიჩქარეებიც იქნება საკმარისად მცირე.

ჩვენ ვიტყვით, რომ სისტემა ასიმპტოტურად უახლოვდება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობას, თუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} q'_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

როგორც ადგილი მისახვედრია, მათემატიკური საქანის ვერტიკალური მდებარეობა, რომელიც განსაზღვრულია $\varphi=0$ გადახრის კუთხით, წარმოადგენს მდგრადი წონასწორობის მდებარეობას.

განვმარტოთ, ე. წ. მდგრადი მოძრაობის ცნება.

განვიხილოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობა შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$\text{როცა } t=t_0, \text{ მაშინ } q_j=q_j^0, \quad q'_j=(q'_j)^0 \quad (j=1, 2, \dots, s)$$

და ვთქვათ ამ საწყის პირობებში სისტემის მოძრაობა დახასიათებულია განტოლებებით

$$q_j = f_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (27,1)$$

სადაც $f_j(t)$ გარკვეული ფუნქციებია. ავიღოთ შემდეგი შეცვლილი საწყისი პირობები

$$\text{როცა } t=t_0, \text{ მაშინ } q_j=q_j^0 + \alpha_j, \quad q'_j=(q'_j)^0 + \beta_j,$$

სადაც α_j და β_j მუდმივი რიცხვებია. ვთქვათ, ამ პირობებში სისტემის მოძრაობა დახასიათებულია განტოლებებით

$$q_j = f_j(t) + \xi_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობა, დახასიათებული (27,1) განტოლებებით, წარმოადგენს მდგრად მოძრაობას, თუ ყოველი წინასწარ მოცემული დადებითი ϵ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა დატულია პირობები

$$|\alpha_j| < \delta, |\beta_j| < \delta \quad (j=1, 2, \dots, s),$$

მაშინ ყოველთვის ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|\xi_j| < \epsilon, |\xi'_j| < \epsilon \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

ამრიგად, სისტემის მოძრაობას ეწოდება მდგრადი, თუ საწყისი პირობების მცირედ შეცვლა იწვევს მოძრაობის საკმარისად მცირედ შეცვლას.

ვინაიდან მატერიალური წერტილის ჰარმონიული რხევის შემთხვევაში (იხ. V თავის § 10) რხევის პერიოდი არ არის დამოკიდებული საწყის გადახრაზე, ამიტომ, როგორც ადგილი მისახვედრია, წერტილის ჰარმონიული რხევა, ნებისმიერ საწყის პირობებში, წარმოადგენს მდგრად მოძრაობას.

ასევე დავასკვნით, რომ ციკლოიდური საქანის მოძრაობა წარმოადგენს მდგრად მოძრაობას. ვინაიდან მათემატიკური საქანის პერიოდი დამოკიდებული

ბულია საქანის საწყის გადახრაზე, ამიტომ, როგორც აღვნიშნეთ, მისხვედრია, მათემატიკური საქანის მოძრაობა არ იქნება მდგრადი. ეს იმით არის გამოწვეული, რომ საწყისი გადახრის შეცვლა პერიოდს ცვლის და ამიტომ დროთა ვითარებაში მოძრაობათა განსხვავება საგრძნობი გახდა როგორი მცირეც არ უნდა იყოს საწყისი გადახრის ცვლილება.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მცირე რხევები მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში. მდგრად მოძრაობასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს შემდეგ განყოფილებაში შევისწავლით. აქ მხოლოდ შევნიშნავთ რომ, ლიაპუნოვის შრომების წყალობით, მოძრაობის მდგრადობის თეორია მექანიკის მეტად საინტერესო და მნიშვნელოვან დარგს შეადგენს.

§ 28. ლეჟან-დირიხლეს დებულება

როგორც § 4-ში იყო ნაჩვენები, მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი სისტემაზე უშუალოდ მოქმედი ყველა შიგა და გარე ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლი იყოს ნულის:

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0. \quad (28,1)$$

ეტქვათ, სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, ბმები კი—სტაციონარული, მაშინ, როგორც ვიცით,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

სადაც V არის სისტემის პოტენციალური ენერგია. თუ გავითვალისწინებთ, რომ δq_j ($j = 1, 2, \dots, s$) დამოუკიდებელი ვარიაციებია, (28,1) პირობის ძალით, სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები მიიღებს სახეს

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (28,2)$$

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში, სისტემის წონასწორობის მდებარეობებს იძლევა განზოგადებული კოორდინატების ის და მხოლოდ ის მნიშვნელობები, რომელნიც აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s} = 0. \quad (28,3)$$

რადგან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ბმები სტაციონარულია, ამიტომ განსახილველ შემთხვევაში ადგილი აქვს ცოცხალი ძალის ინტეგრალს

$$T + V = \text{const.} \quad (28,4)$$

დავამტკიცოთ ლეჟან-დირიხლეს შემდეგი დებულება:

დებულება. თუ სისტემის წონასწორობის მდებარეობისათვის პოტენციალური ენერგიას აქვს მინიმალური მნიშვნელობა (პოტენციალს აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა), მაშინ

ეს მდებარეობა იქნება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობა.

ზოგადობის შეუზღუდველად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $V(q_1, \dots, q_s)$ ფუნქცია ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას კოორდინატა სათავეში, ე. ი. როცა $q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). ამის გარდა, ვინაიდან პოტენციალური ენერგია V განსაზღვრულია ნებისმიერი მუდმივი შესაყარების სიზუსტით, ამიტომ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ V ფუნქციის ზემოხსენებული მინიმუმი ტოლია ნულის: $V(0, 0, \dots, 0) = 0$. დაუშვათ, რომ $q_j = 0$ წერტილის მახლობლობაში $V(q_1, q_2, \dots, q_s)$ ფუნქციას სხვა მინიმუმი არა აქვს. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს სათავის ისეთი მიდამო, რომლის არც ერთ წერტილზე (გარდა სათავისა) V ფუნქცია ნულის ტოლი არ ხდება და, მაშასადამე, $V(q_1, q_2, \dots, q_s)$ წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას.

განვიხილოთ $q_j = 0$ წერტილის გარკვეული მიდამო და აღებული (q_1, q_2, \dots, q_s) წერტილისათვის $|q_j|$ ($j = 1, 2, \dots, s$) სიდიდეებს შორის უდიდესი აღენიშნოთ q -თი:

$$q = \max(|q_1|, |q_2|, \dots, |q_s|). \quad (28,5)$$

ავიღოთ საკმარისად მცირე დადებითი ε რიცხვი და განვიხილოთ q_1, q_2, \dots, q_s კოორდინატების ცვლილების D არე, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$q = \varepsilon. \quad (28,6)$$

ცხადია, ε იმდენად მცირე შეიძლება ავიღოთ, რომ $V(q_1, q_2, \dots, q_s)$ ფუნქცია D არეში მეტი იყოს ნულზე.

აღენიშნოთ V ფუნქციის ნამდვილი ქვედა საზღვარი D არეში N -ით. ვინაიდან V დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, $N > 0$ და, მაშასადამე, D არეში გვექნება

$$V(q_1, q_2, \dots, q_s) \geq N > 0. \quad (28,7)$$

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემას უკავია მდებარეობა, განსაზღვრული $q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) ტოლობებით და ვთქვათ, სისტემას მივანიჭეთ საკმარისად მცირე გადაადგილება საკმარისად მცირე სიჩქარეებით, ე. ი. განვიხილოთ სისტემის მოძრაობა შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$\text{როცა } t = t_0, \text{ მაშინ } q_j = \alpha_j, \quad q'_j = \beta_j,$$

სადაც α_j და β_j ($j = 1, 2, \dots, s$) საკმარისად მცირე რიცხვებია (თუ რამდენად მცირე, ამას ქვევით დავაზუსტებთ). (28,4) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$T + V = T_0 + V_0, \quad (28,8)$$

სადაც T_0 და V_0 აღნიშნავენ საწყის კინეტიკურ და პოტენციალურ ენერგიებს.

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s A_{ij} \beta_i \beta_j, \quad V_0 = V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

თუ $V(q_1, q_2, \dots, q_s)$ ფუნქციას გავშლით ხარისხოვან მწკრივად $q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$) წერტილის მახლობლობაში, მივიღებთ¹

¹ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ეს გაშლა შესაძლებელია.

$$V(q_1, q_2, \dots, q_s) = V(0, \dots, 0) + q_1 \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \right)_0 + \dots + q_s \left(\frac{\partial V}{\partial q_s} \right)_0 + \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_s^2} \right)_0 q_s^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots \right] + \dots \quad (28,9)$$

ვინაიდან V ფუნქციას $q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) წერტილზე აქვს მინიმუმი, ამიტომ, ცხადია

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (28,10)$$

თუ ამასთან ერთად გავითვალისწინებთ, რომ $V(0, \dots, 0) = 0$ და (28,9) ტოლობაში მესამე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრებს უკუვაგდებთ, მივიღებთ

$$V(q_1, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s b_{ij} q_i q_j, \quad (28,11)$$

სადაც

$$b_{ji} = b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0. \quad (28,12)$$

(28,11) ტოლობების ძალით, ვღებულობთ

$$V_0 = V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s b_{ij} \alpha_i \alpha_j.$$

ამრიგად, T_0 წარმოადგენს β_1, \dots, β_s სიდიდეების მიმართ კვადრატულ ფორმას, ხოლო V_0 კი $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ სიდიდეების მიმართ—აგრეთვე კვადრატულ ფორმას. ამიტომ, ცხადია, α_j და β_j ($j = 1, 2, \dots, s$) სიდიდეები იმდენად მცირე შეიძლება ავიღოთ, რომ

$$T_0 + V_0 < N.$$

(28,8) ტოლობის ძალით, უკანასკნელი უტოლობა გვაძლევს

$$T + V < N. \quad (28,13)$$

მაგრამ, ვინაიდან T' წარმოადგენს q'_1, \dots, q'_s სიჩქარეების მიმართ დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას, ამიტომ (28,13) უტოლობა მოგვცევს

$$V(q_1, q_2, \dots, q_s) < N. \quad (28,14)$$

(28,7) და (28,14) უტოლობების შედარება გვარწმუნებს, რომ ზემომოყვანილ საწყის პირობებში ყოველთვის $|q_j| < \varepsilon$ ($j = 1, 2, \dots, s$), რადგან თუ რომელიმე $|q_j|$ გახდება ε -ის ტოლი, მაშინ ადგილი ექნება (28,7) უტოლობას, რომელიც (28,14) უტოლობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, სისტემა ისე იმოძრაავებს, რომ ყოველთვის $|q_j| < \varepsilon$.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს $|q'_j| < \varepsilon$.

როგორც ვიცით, T წარმოადგენს განზოგადებული სიჩქარეების მიმართ დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას. როგორც შემდეგ პარაგრაფში იქნება ნაჩვენები (იხ. (29,4) ფორმულა), სათანადო სიზუსტით ის ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s a_{ij} q'_i q'_j, \quad (28,15)$$

სადაც a_{ij} გარკვეული მუდმივებია.

განვიხილოთ ახლა q'_j სიდიდეების ცვლილების არე D' , რომელიც შემდეგი ტოლობით არის განსაზღვრული

$$q' = \max(|q'_1|, |q'_2|, \dots, |q'_s|) = \varepsilon. \quad (28,16)$$

აღვნიშნოთ ამ არეში T ფუნქციის ნამდვილი ქვედა საზღვარი N' -ით. ცხადია, D' არეში გვექნება

$$T' \geq N' > 0. \quad (28,17)$$

თუ ამის შემდეგ მოვიტყევით ზუსტად ისე როგორც ზემოთ, დავრწმუნდებით, რომ ყოველთვის $|q'_j| < \varepsilon$ და ამით ლეჟან-დირიხლეს დებულება დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ლეჟან-დირიხლეს დებულება იძლევა მდგრადი წონასწორობის მხოლოდ საკმარის პირობას.

**§ 29. სისტემის ცოცხალი ძალისა და პოტენციალური ენერგიის
გამოსახულება მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში
მცირე რხევების შემთხვევაში**

ისე როგორც წინა პარაგრაფში, ვიგულისხმობთ, რომ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, ბმები კი—სტაციონარული. აღვნიშნოთ სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები, როგორც ყოველთვის, T -თი და V -თი. ვიგულისხმობთ, რომ V ფუნქციას აქვს მინიმუმი $q_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, s$) წერტილზე. როგორც ვიცით

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s A_{ij} q'_i q'_j. \quad (29,1)$$

დავშალოთ A_{ij} ფუნქციები მწკრივად $q_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, s$) წერტილის მახლობლობაში (გულისხმობთ, რომ ასეთი დაშლა შესაძლებელია), მივიღებთ

$$\begin{aligned} A_{ij} = & A_{ij}(0, 0, \dots, 0) + q_1 \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_1} \right)_0 + \dots + q_s \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_s} \right)_0 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (29,2)$$

თუ უქანასკნელ ტოლობაში უკუვაგდებთ q_j ($j=1, 2, \dots, s$) სიდიდეების მიმართ პირველი და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრებს, მივიღებთ

$$A_{ij} = a_{ij}, \quad (29,3)$$

სადაც

$$a_{ij} = A_{ij}(0, \dots, 0).$$

თუ (29,3) მნიშვნელობებს (29,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s a_{ij} q'_i q'_j, \quad (29,4)$$

ამასთან, ცხადია, $a_{ij} = a_{ji}$, $\det \| a_{ij} \| = \det \| A_{ij}(0, \dots, 0) \| \neq 0$.

როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, პოტენციალური ენერგია მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე წევრების სიზუსტით ასე წარმოიდგინება:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} q_i q_j, \quad (29,5)$$

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i} \right)_0 = b_{ji}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $\det \|h_{ij}\| \neq 0$. ამისათვის (29,5) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$2V = (b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + \dots + b_{1s}q_s)q_1 +$$

$$+ (b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + \dots + b_{2s}q_s)q_2 +$$

$$\dots$$

$$+ (b_{s1}q_1 + b_{s2}q_2 + \dots + b_{ss}q_s)q_s \quad (29,6)$$

$$b_{i1}q_1 + b_{i2}q_2 + \dots + b_{is}q_s = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (29,7)$$

§ 30. მატერიალურ წესრიგთან სისტემის ჰარმონიული რხევა

$$f_{\alpha}(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (30,1)$$

¹ ვგულისხმობთ, რომ V ფუნქციას აქვს მეორე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები.

ლეჟან-დირიხლეს დებულების ძალით, თუ მატერიალურ წერტილთა სისტემას $q_i = 0$ მდებარეობიდან მივანიჭებთ საკმარისად მცირე გადახრას, საკმარისად მცირე სიჩქარეებით, მაშინ მთელი შემდგომი მოძრაობის დროს სისტემა იქნება საკმარისად მცირედ გადახრილი აღნიშნული მდებარეობიდან და სისტემის წერტილების სიჩქარეებიც იქნება საკმარისად მცირე.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობა $q_i = 0$ წერტილის მახლობლობაში.

შემოაღნიშნულ პირობებში, სისტემის მოძრაობას $q_j = 0$ წერტილის მახლობლობაში ვუწოდებთ სისტემის ჰარმონიულ რხევას.

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს აქვთ სახე

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (30,2)$$

სადაც

$$L = T - V.$$

ვინაიდან

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s a_{ij} \dot{q}'_i \dot{q}'_j, \quad (30,3)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s b_{ij} q_i q_j, \quad (30,4)$$

ამიტომ

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial q'_j} = 0$$

და (30,2) სისტემა ასე გადაიწერება:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}'_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

(30,3) და (30,4) ტოლობების ძალით, ეს უკანასკნელი კიდევ ასე შეიძლება გადაწეროთ:

$$a_{\alpha 1} q_1'' + a_{\alpha 2} q_2'' + \dots + a_{\alpha s} q_s'' + b_{\alpha 1} q_1 + b_{\alpha 2} q_2 + \dots + b_{\alpha s} q_s = 0 \quad (30,5)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

(30,5) სისტემა წარმოადგენს მეორე რიგის ჩვეულებრივ, მუდმივკოეფიციენტებიან, ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ასეთ განტოლებებს მკითხველი იცნობს დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან.

ვედებოთ (30,5) სისტემის ამოხსნა შემდეგი სახით:

$$q_j = A_j e^{\lambda t} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (30,6)$$

სადაც A_j ($j = 1, 2, \dots, s$) და λ საძიებელი რიცხვებია, რომელნიც ისე უნდა განისაზღვრონ, რომ (30,6) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები (30,5) სისტემას აკმაყოფილებდნენ.

(30,6) ტოლობების ძალით,

$$q_j'' = \lambda^2 A_j e^{\lambda t}. \quad (30,7)$$

თუ (30,6) და (30,7) მნიშვნელობებს შევითავსებთ (30,5) სისტემაში, $\epsilon^{i,j}$ -ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ

$$(a_{\alpha 1} \lambda^2 + b_{\alpha 1})A_1 + (a_{\alpha 2} \lambda^2 + b_{\alpha 2})A_2 + \dots + (a_{\alpha s} \lambda^2 + b_{\alpha s})A_s = 0 \quad (30,8)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, წარმოადგენს ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას A_1, A_2, \dots, A_s კოეფიციენტების მიმართ. აღენიშნოთ ამ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta(\lambda)$ -თი:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12} & \dots & a_{1s}\lambda^2 + b_{1s} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22} & \dots & a_{2s}\lambda^2 + b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}\lambda^2 + b_{s1} & a_{s2}\lambda^2 + b_{s2} & \dots & a_{ss}\lambda^2 + b_{ss} \end{vmatrix}. \quad (30,9)$$

როგორც ცნობილია ალგებრის კურსიდან, (30,8) სისტემას ექნება არატრივიალური (ნულისაგან განსხვავებული) ამოხსნა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ე. ი. როცა

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (30,10)$$

(30,10) განტოლებას, რომელიც წარმოადგენს λ^2 -ის მიმართ s რიგის (და, მაშასადამე, λ -ს მიმართ $2s$ რიგის) ალგებრულ განტოლებას, ეწოდება (30,5) სისტემის მახასიათებელი განტოლება.

ვინაიდან $\Delta(0) = \det \|b_{ij}\| \neq 0$, ამიტომ (30,10) განტოლების არც ერთი ფესვი ნულის ტოლი არ არის.

განვიხილოთ (30,10) განტოლების რომელიმე მარტივი λ ფესვი და დავამტკიცოთ, რომ ამ ფესვისათვის შედგენილი $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის $n-1$ რიგის მინორებიდან (რომელნიც მიიღებოდა $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტიდან თითო სტრიქონის და თითო სვეტის ამოშლით) ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

მართლაც, ცხადია გვექნება

$$\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda^2} 2\lambda,$$

საიდანაც, დეტერმინანტის გაწარმოების ცნობილი წესის გამოყენებით, ვღებულობთ

$$\frac{1}{2\lambda} \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda^2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22} & \dots & a_{2s}\lambda^2 + b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}\lambda^2 + b_{s1} & a_{s2}\lambda^2 + b_{s2} & \dots & a_{ss}\lambda^2 + b_{ss} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12} & \dots & a_{1s}\lambda^2 + b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,1}\lambda^2 + b_{s-1,1} & a_{s-1,2}\lambda^2 + b_{s-1,2} & \dots & a_{s-1,s}\lambda^2 + b_{s-1,s} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix}. \quad (30,11)$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდებარე დეტერმინანტს დაეშლით გაწარმოებული სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მაშინ ამ ელემენტებთან

მამრავლებად გვექნება $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის $n-1$ რიგის მინორები. თუ დავეუშვებთ, რომ აღებული λ -სათვის ყველა $n-1$ რიგის მინორი ნულის ტოლია, მაშინ $\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda^2} = 0$ და, მაშასადამე, ცხადია, აღებული λ იქნება $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის ჯერადი ფესვი. ამით ზემონათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ეთქვათ, მოცემული λ მარტივი ფესვისათვის $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის ის მინორი, რომელიც მიიღება უკანასკნელი სტრიქონისა და უკანასკნელი სვეტის ამოშლით, განსხვავებულია ნულისაგან. აღენიშნოთ ეს მინორი $\Delta_s(\lambda)$ -თი. ასეთ პირობებში, როგორც ალგებრის კურსიდან ცნობილია, აღებული λ ფესვისათვის (30,8) განტოლებებიდან დამოუკიდებელი იქნება $s-1$, ხოლო ერთ-ერთი განტოლება იქნება დანარჩენის შედეგი. შეიძლება, ზოგადობის შეუზღუდველად ვიგულისხმოთ, რომ (30,8) სისტემის უკანასკნელი განტოლება დანარჩენის შედეგია და ამ სისტემის პირველი $s-1$ განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} (a_{\alpha 1} \lambda^2 + b_{\alpha 1}) \frac{A_1}{A_s} + (a_{\alpha 2} \lambda^2 + b_{\alpha 2}) \frac{A_2}{A_s} + \dots + \\ + (a_{\alpha, s-1} \lambda^2 + b_{\alpha, s-1}) \frac{A_{s-1}}{A_s} = - (a_{\alpha s} \lambda^2 + b_{\alpha s}) \end{aligned} \quad (30,12)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, s-1).$$

ეს უკანასკნელი $\frac{A_1}{A_s}, \frac{A_2}{A_s}, \dots, \frac{A_{s-1}}{A_s}$ სიდიდეების მიმართ წარმოადგენს ალგებრულ განტოლებათა წრფივ არაერთგვაროვან სისტემას, რომლის დეტერმინანტი $\Delta_s(\lambda)$ განსხვავებულია ნულისაგან. თუ ამ სისტემას ამოვხსნით კრამერის კარგად ცნობილი წესის მიხედვით, როგორც ადვილი მისახვედრია, მივიღებთ

$$\frac{A_1}{A_s} = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta_s(\lambda)}, \quad \frac{A_2}{A_s} = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta_s(\lambda)}, \dots, \quad \frac{A_{s-1}}{A_s} = \frac{\Delta_{s-1}(\lambda)}{\Delta_s(\lambda)}, \quad (30,13)$$

სადაც $\Delta_1(\lambda), \Delta_2(\lambda), \dots, \Delta_{s-1}(\lambda), \Delta_s(\lambda)$ წარმოადგენენ $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების შესაბამის მინორებს. (30,13) ტოლობები, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{A_1}{\Delta_1(\lambda)} = \frac{A_2}{\Delta_2(\lambda)} = \dots = \frac{A_{s-1}}{\Delta_{s-1}(\lambda)} = \frac{A_s}{\Delta_s(\lambda)}. \quad (30,14)$$

თუ (30,14) შეფარდებათა საერთო მნიშვნელობას გავუტოლებთ ნებისმიერ C მუდმივს, მივიღებთ

$$A_j = C \Delta_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

როგორც ადვილი შესამოწმებელია, მიღებული A_j რიცხვები აკმაყოფილებენ (30,8) სისტემის უკანასკნელ განტოლებასაც.

თუ მივიღებთ $C=1$, მაშინ გვექნება

$$A_j = \Delta_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (30,15)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, A_j რიცხვებად ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტების შესაბამის $n-1$ რიგის მინორები, თუ ამ მინორებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. თუ (30,15) მნიშვნელობებს შევითანთ (30.6) ტოლობებში, მივიღებთ

$$q_i = \Delta_j(\cdot) e^{\lambda_i}. \quad (30,16)$$

ამრიგად, $\Delta(\lambda)=0$ განტოლების ყოველ მარტივ λ ფესვს შეესაბამება (30,5) სისტემის (30,16) ტოლობებით განსაზღვრული ამოხსნა.

ეთქვათ, (30,10) განტოლების ყველა $2s$ ფესვი მარტივია. ვინაიდან $\Delta(\lambda)$ წარმოადგენს λ^2 -ის მიმართ s ხარისხის პოლინომს, ამიტომ ხსენებული $2s$ ფესვი შეიძლება წყვილ-წყვილად დავალაგოთ:

$$(\lambda_1, -\lambda_1), (\lambda_2, -\lambda_2), \dots, (\lambda_s, -\lambda_s).$$

(30,16) ფორმულის ძალით, ამ ფესვების შესაბამის ამოხსნები იქნება

$$\begin{aligned} q_j &= \Delta_j(\lambda_\alpha) e^{\lambda_\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots, s), \\ q_j^* &= \Delta_j(\lambda_\alpha) e^{-\lambda_\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (30,17)$$

ამ ამოხსნების დაწერის დროს გათვალისწინებულია, რომ

$$\Delta_j(-\lambda_\alpha) = \Delta_j(\lambda_\alpha),$$

რაც სამართლიანია, რადგან $\Delta_j(\lambda)$ მინორები წარმოადგენენ λ -ს მიმართ ლუწი ხარისხის პოლინომებს.

ვინაიდან $\Delta_j(\lambda_\alpha) e^{\lambda_\alpha}$ და $\Delta_j(\lambda_\alpha) e^{-\lambda_\alpha}$ ($j=1, 2, \dots, s$, $\alpha=1, 2, \dots, s$), როგორც ადვილი მისახვედრია, წარმოადგენენ (30,5) სისტემის ამოხსნათა ფუნდამენტალურ სისტემას, ამიტომ (30,5) სისტემის ზოგადი ამოხსნა ასე წარმოიდგინება:

$$q_j = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_j(\lambda_\alpha) (C_\alpha e^{\lambda_\alpha} + D_\alpha e^{-\lambda_\alpha}), \quad (30,18)$$

სადაც C_α და D_α ნებისმიერი მუდმივებია.

(30,18) ფორმულა იძლევა (30,5) სისტემის კომპლექსურ ამოხსნებს. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ამ სისტემის არსი (ნამდვილი) ამოხსნები.

ვაჩვენოთ, რომ $\Delta(\lambda)=0$ განტოლების ნებისმიერი λ ფესვის კვადრატი არის ნამდვილი უარყოფითი რიცხვი. აღვნიშნოთ λ ფესვის შესაბამის A რიცხვები A_1, A_2, \dots, A_s -ით. გავამრავლოთ (30,8) ტოლობა Ax -ზე და ავჯამოთ α ინდექსით, მივიღებთ

$$\lambda^2 \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s a_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta + \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s b_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = 0, \quad (30,19)$$

ანუ, რაც იგივეა

$$\lambda^2 T(A) + V(A) = 0. \quad (30,20)$$

სადაც

$$T(A) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s a_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta, \quad V(A) = \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s b_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta. \quad (30,21)$$

(30,20) ტოლობის ძალით ვღებულობთ

$$\lambda^2 = - \frac{V(A)}{T(A)}. \quad (30,22)$$

დავუშვათ, რომ λ^2 არის კომპლექსური რიცხვი:

$$\lambda^2 = M + iN. \quad (30,23)$$

ცხადია, კომპლექსურ λ^2 -ს შესაბამემა (30,8) სისტემის არატრივიალური კომპლექსური ამოხსნები:

$$A_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (30,24)$$

ვინაიდან (30,10) განტოლების კოეფიციენტები არსია, ამიტომ ამ განტოლების ფესვი იქნება (30,23) კომპლექსური ფესვის შეუღლებულიც:

$$\lambda'^2 = M - iN.$$

ამ ფესვის შესაბამი A'_j რიცხვებიც, ცხადია, იქნება (30,24) ტოლობებით განსაზღვრული რიცხვების კომპლექსურად შეუღლებული:

$$A'_j = \alpha_j - i\beta_j \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (30,25)$$

დავწეროთ (30,8) განტოლება აღებული λ ფესვისათვის, გავამრავლოთ A'_α -ზე და ავჯამოთ, მივიღებთ

$$\lambda^2 T(A, A') + V(A, A') = 0. \quad (30,26)$$

სადაც

$$T(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s a_{\alpha\beta} A_\alpha A'_\beta, \quad (30,27)$$

$$V(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^s b_{\alpha\beta} A_\alpha A'_\beta. \quad (30,28)$$

დავწეროთ (30,8) ტოლობა λ' ფესვისათვის:

$$(a_{\alpha_1} \lambda'^2 + b_{\alpha_1}) A'_1 + (a_{\alpha_2} \lambda'^2 + b_{\alpha_2}) A'_2 + \dots + (a_{\alpha_s} \lambda'^2 + b_{\alpha_s}) A'_s = 0,$$

გავამრავლოთ A_α -ზე და ავჯამოთ α ინდექსით, მივიღებთ

$$\lambda'^2 T(A, A') + V(A, A') = 0.$$

(30,26) და უკანასკნელი ტოლობის სხვაობა მოგვცემს

$$(\lambda^2 - \lambda'^2) T(A, A') = 0.$$

ვინაიდან $\lambda^2 \neq \lambda'^2$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$T(A, A') = 0, \quad (30,29)$$

და, მაშასადამე, (30,26) ტოლობის ძალით,

$$V(A, A') = 0. \quad (30,30)$$

ზემომოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ საზოგადოდ, A_α და A'_α აღნიშნავენ ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ λ და λ' ფესვების შესაბამ რიცხვებს, მაშინ აუცილებლად ადგილი ექნება (30,29) და (30,30) ტოლობებს.

ვინაიდან აღგილი აქვს ადვილად შესაწოწნებელ ტოლობებს

$$A_j A'_k + A_k A'_j = 2(\alpha_k \alpha_j + \beta_k \beta_j) \quad (j, k = 1, 2, \dots, s),$$

ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$T(A, A') = T(\alpha) + T(\beta),$$

$$V(A, A') = V(\alpha) + V(\beta),$$

სადაც

$$T(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} \alpha_k \alpha_j, \quad T(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} \beta_k \beta_j,$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s b_{kj} \alpha_k \beta_j, \quad V(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s b_{kj} \beta_k \beta_j.$$

თუ მოვიგონებთ, რომ $T(\alpha)$, $T(\beta)$, $V(\alpha)$, $V(\beta)$ დადებითად განსაზღვრული ფორმებია, (30,29) და (30,30) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$T(\alpha) = 0, \quad T(\beta) = 0,$$

$$V(\alpha) = 0, \quad V(\beta) = 0,$$

საიდანაც

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

თუ გავითვალისწინებთ (30,24) და (30,25) ტოლობებს, მივიღებთ $A_k = A'_k = 0$. მაგრამ A_k და A'_k (როცა λ^2 კომპლექსურია) აღნიშნავენ (30,8) სისტემის არატრივიალურ (არანულოვან) ამოხსნებს. მიღებული წინააღმდეგობა გვარწმუნებს, რომ λ^2 არ არის კომპლექსური რიცხვი. ის არსი რიცხვია. მაგრამ როცა λ^2 არსია, მაშინ მისი შესაბამი A_1, \dots, A_s რიცხვებიც არსია და ვინაიდან არსი A_j რიცხვებისათვის $T(A)$ და $V(A)$ დადებითია (T და V დადებითად განსაზღვრული ფორმებია), ამიტომ, (30,22) ტოლობის ძალით, დავასკვნით, რომ λ^2 უარყოფითი რიცხვია:

$$\lambda^2 = -\mu^2, \quad \lambda = \pm i\mu.$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\Delta(\lambda) = 0$ განტოლების ნებისმიერი ფესვის კვადრეტი უარყოფითი რიცხვია, ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$\lambda_k = \pm i\mu_k \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

სადაც μ_k არსი დადებითი რიცხვია. თუ ამ მნიშვნელობებს (30,17)-ში შევიტანთ, მივიღებთ

$$q_j^k = \Delta_j(\lambda_k) e^{i\mu_k t},$$

$$q_j^{*k} = \Delta_j(\lambda_k) e^{-i\mu_k t}.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში შემდეგ ფორმულებს:

$$e^{i\mu_k t} = \cos \mu_k t + i \sin \mu_k t,$$

$$e^{-i\mu_k t} = \cos \mu_k t - i \sin \mu_k t,$$

და გავითვალისწინებთ, რომ კომპლექსური ამოხსნის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებიც (30,5) სისტემის ამოხსნა იქნება, დავრწმუნდებით, რომ ამ სისტემის ზოგად ამოხსნას არს ფუნქციებში ექნება სახე:

$$q_j = \sum_{k=1}^s \Delta_j(\lambda_k) (M_k \cos \mu_k t + N_k \sin \mu_k t), \quad (30,31)$$

სადაც M_k და N_k ნებისმიერი არის. მუდმივებია. M_k და N_k ნებისმიერი მუდმივების ნაცვლად შემოვიტანოთ H_k და ϵ_k ნებისმიერი მუდმივები შემდეგი ტოლობების საშუალებით:

$$M_k = H_k \sin \epsilon_k,$$

$$N_k = H_k \cos \epsilon_k.$$

მაშინ, ცხადია, (30,31) ტოლობები ასე გადაიწერება:

$$q_j = \sum_{k=1}^s \Delta_j(\lambda_k) H_k \sin(\mu_k t + \epsilon_k) \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (30,32)$$

ამრიგად, ყოველი განზოგადებული კოორდინატი წარმოადგენს s რაოდენობა პარმონიული რხევის:

$$H_1 \sin(\mu_1 t + \epsilon_1), H_2 \sin(\mu_2 t + \epsilon_2), \dots, H_s \sin(\mu_s t + \epsilon_s)$$

ერთობლიობას. ხსენებულ პარმონიულ რხევათა პერიოდებია

$$\frac{2\pi}{\mu_1}, \frac{2\pi}{\mu_2}, \dots, \frac{2\pi}{\mu_s},$$

რომელთა შებრუნებული სიდიდეებიც რხევათა სიხშირეებს წარმოადგენენ.

ამრიგად, მარტივი ფესვების შემთხვევაში, მატერიალურ წერტილთა სისტემის უსასრულოდ მცირე რხევები მთლიანად დახასიათებულია (30,32) ტოლობებით.

ჩვენ განვიხილეთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა (30,10) განტოლების ყველა ფესვი მარტივია. შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის პარმონიული რხევის შესწავლის სხვა მეთოდს, რომელიც სამართლიანია ჯერადი ფესვების შემთხვევაშიაც. აქ შევნიშნავთ მხოლოდ რომ, თუ λ წარმოადგენს (30,10) განტოლების ჯერად ფესვს, მაშინ, როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, ამ ფესვის შესაბამ ამოხსნას (ლაპარაკია (30,5) სისტემის ამოხსნაზე), საზოგადოდ, შემდეგი სახე აქვს:

$$q_j = (A^1_j + A^2_j t + \dots + A^k_j t^{k-1}) e^{\lambda t} \quad (30,33)$$

$$(j = 1, 2, \dots, s).$$

სადაც A^v_j ($j = 1, 2, \dots, s$, $v = 1, 2, \dots, k$) მუდმივებია.

(30,33) ტოლობების საფუძველზე ლაგრანჟი ფიქრობდა, რომ $q_j \rightarrow \infty$, როცა $t \rightarrow \infty$ და რომ ამ შემთხვევაში არ ექნებოდა ადგილი მდგრად წონასწორობას. ამ შეხედულებას დიდხანს იზიარებდნენ, სანამ ვეიერშტრასმა 1858 წელს არ დაამტკიცა, რომ ეს სწორი არ არის. ვეიერშტრასმა აჩვენა, რომ ჯერადი ფესვის შესაბამ ამოხსნებსაც აქვს (30,6) სახე.

§ 31. მთავარი კოორდინატები. მთავარი რხევები

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი განზოგადებული კოორდინატები, რომელთაც ის თვისება აქვთ, რომ ყოველი მათგანისათვის გვექ-

ნება ერთი ჰარმონიული რხევა. სანამ ამ საკითხის განხილვას შევუდგებოდეთ, მოვიყვანოთ ალგებრის კურსიდან კარგად ცნობილი ერთი დებულება, რომელიც ქვემოთ დაგვჭირდება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი დადებითად განსაზღვრული A და B კვადრატული ფორმა:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k,$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{jk} x_j x_k.$$

არსებობს ისეთი წრფივი გარდაქმნა

$$x_j = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \dots + a_{jn}y_n,$$

რომელიც აღებულ კვადრატულ ფორმებს მიიყვანს შემდეგ კანონიკურ სახემდე:

$$A = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_s^2),$$

$$B = \frac{1}{2} (p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \dots + p_s y_s^2),$$

სადაც p_1, p_2, \dots, p_s შემდეგი s რიგის ალგებრული განტოლების ამოხსნებია:

$$\det \parallel \beta_{jk} - p\alpha_{jk} \parallel = \begin{vmatrix} \beta_{11} - p\alpha_{11} & \beta_{12} - p\alpha_{12} & \dots & \beta_{1s} - p\alpha_{1s} \\ \beta_{21} - p\alpha_{21} & \beta_{22} - p\alpha_{22} & \dots & \beta_{2s} - p\alpha_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} - p\alpha_{s1} & \beta_{s2} - p\alpha_{s2} & \dots & \beta_{ss} - p\alpha_{ss} \end{vmatrix} = 0,$$

ამასთან ამ განტოლების ყველა p_1, p_2, \dots, p_s ფესვი დადებითია¹.

ზემომოყვანილი დებულების ძალით, არსებობს ისეთი განზოგადებული $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ კოორდინატები, რომელნიც დაკავშირებული არიან q_1, \dots, q_s კოორდინატებთან ტოლობებით

$$q_j = a_{j1}\theta_1 + a_{j2}\theta_2 + \dots + a_{jn}\theta_n \quad (31,1)$$

და რომელთა მიმართაც T და V კვადრატულ ფორმებს ექნებათ სახე

$$T = \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_s^2), \quad (31,2)$$

$$V = \frac{1}{2} (p_1\theta_1^2 + p_2\theta_2^2 + \dots + p_s\theta_s^2), \quad (31,3)$$

სადაც p_1, p_2, \dots, p_s დადებითი რიცხვებია, რომელნიც

$$\det \parallel \beta_{jk} - p\alpha_{jk} \parallel = 0 \quad (31,4)$$

¹ ეს დებულება სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა A და B ფორმებიდან მხოლოდ A არის დადებითად განსაზღვრული, ხოლო B — ნებისმიერი; ამ შემთხვევაში, ცხადია, არაა სავალდებულო ყველა p_k რიცხვი დადებითი იყოს.

განტოლების ამოხსნებს წარმოადგენენ, ამასთან ω_k სავსებით განსაზღვრული რიცხვებია.

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ კოორდინატებს მთავარი კოორდინატები ეწოდება, მათ შესაბამ რხევებს — მთავარი რხევები.

ვინაიდან V დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა, ამიტომ, როგორც აღვილი მისახვედრია, არც ერთი ρ_j ($j=1, 2, \dots, s$) ნულის ტოლი არ არის.

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს მთავარი კოორდინატების მიმართ შემდეგი სახე ექნებათ:

$$\theta_j'' + \rho_j \theta_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (31,5)$$

ამ სისტემის ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$\theta_j = H_j \sin(\sqrt{\rho_j} t + \varepsilon_j) \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (31,6)$$

სადაც H_j, ε_j ($j=1, 2, \dots, s$) ნებისმიერი მუდმივებია.

ამრიგად, ყოველი მთავარი კოორდინატის მიმართ გვაქვს ერთი პარამონიული რხევა.

(30,10) და (31,4) განტოლებების შედარება გვარწმუნებს, რომ $\lambda^2 = -\rho$, ამიტომ, როგორც აღვილი მისახვედრია,

$$\mu_j = \sqrt{\rho_j} \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (31,7)$$

სადაც μ_j ის რიცხვებია, რომელნიც (30,32) ამოხსნებში მონაწილეობენ.

თუ ამ მნიშვნელობებს (31,6) ამოხსნებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\theta_j = H_j \sin(\mu_j t + \varepsilon_j) \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (31,8)$$

ამრიგად, მთავარ კოორდინატებზე გადასვლით არ იცვლება რხევათა პერიოდები და სიხშირეები.

თუ (31,8) მნიშვნელობებს შევიტანთ (31,1) ტოლობებში, მივიღებთ q_i განზოგადებული კოორდინატების მიმართ ისევ (30,32) სახის ამოხსნებს.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ თუ წინა პარაგრაფში განხილული $\Delta(\lambda) = 0$ განტოლების ყველა ფესვი მარტივია და ეს ფესვები მოძებნილია, მაშინ მთავარ კოორდინატებზე გადასვლა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, q_1, q_2, \dots, q_s განზოგადებული კოორდინატების ნაცვლად შემოვიღოთ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ კოორდინატები შემდეგი წრფივი დამოკიდებულებით

$$q_i = \sum_{k=1}^s \Delta_{ik} \theta_k, \quad (31,9)$$

სადაც $\Delta_{ik} = \Delta_i(\lambda_k)$, ამასთან $\Delta_i(\lambda_k)$ ის მინორებია, რომელნიც წინა პარაგრაფში იყო განხილული.

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ ცოცხალი ძალის გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^s a_{ik} q'_i q'_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \theta'_i \theta'_j \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s a_{ik} \Delta_{il} \theta_{kl}. \quad (31,10)$$

ანალოგიურად ვღებულობთ

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \theta_j \theta_i \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s b_{ik} \Delta_{il} \Delta_{kj}. \quad (31,11)$$

თუ ახლა მოვიგონებთ, რომ $\Delta_k(\lambda_j)$ მინორები ტოლია λ_j ფესვის შესაბამის A_1, A_2, \dots, A_s რიცხვების, მაშინ (30,29) და (30,30) ტოლობების ძალით, დავრწმუნდებით, რომ ჯამები

$$T'(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^s a_{ik} \Delta_{il} \Delta_{kj},$$

$$V'(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^s b_{ik} \Delta_{il} \Delta_{kj},$$

სადაც A და A' რიცხვები აღებულია λ_j და λ_i ფესვების შესაბამად, იქცევიან ხელად, როცა $j \neq i$. ამრიგად, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^s a_{ik} \Delta_{ij} \Delta_{kj} = a_j, \quad (31,12)$$

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^s b_{ik} \Delta_{ij} \Delta_{kj} = b_j, \quad (31,13)$$

მაშინ (31,10) და (31,11) ფორმულების ძალით, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s a_j \theta_j^2, \quad (31,14)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s b_j \theta_j^2. \quad (31,15)$$

a_j და b_j დადებითი სიდიდეებია, რადგან (31,12) და (31,13) ფორმულების ძალით ისინი წარმოადგენენ, შესაბამად, ცოცხალი ძალისა და პოტენციალური ენერგიის მნიშვნელობებს არსი $\Delta_{1j}, \Delta_{2j}, \dots, \Delta_{sj}$ არგუმენტებისათვის.

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ კოორდინატების მიმართ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები მოგვცემს

$$\theta_j'' + \frac{b_j}{a_j} \theta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (31,16)$$

საიდანაც გვექნება

$$\theta_j = H_j \sin \left(\sqrt{\frac{b_j}{a_j}} t + \epsilon_j \right), \quad (31,17)$$

ამასთან H_j და ϵ_j ნებისმიერი მუდმივებია.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ θ_j ახალ კოორდინატებზე გადასვლით რხევათა სიხშირეები არ იცვლება. მართლაც, (31,12) და (31,13) ფორმულების ძალით, გვექნება

$$\frac{b_j}{a_j} = \frac{V(A)}{T(A)}, \quad (31,18)$$

სადაც A რიცხვები λ_j ფესვის შესაბამი რიცხვებია.

(30,22) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$\frac{b_j}{a_j} = \frac{V(A)}{T(A)} = -\lambda_j^2 = \mu_j^2 \quad (31,19)$$

და, მაშასადამე,

$$\sqrt{\frac{b_j}{a_j}} = \mu_j.$$

(31,16) და (31,17) ფორმულების ძალით ვასკენით, რომ (31,9) ჩასმებით განსაზღვრული $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ კოორდინატები მთავარ კოორდინატებს წარმოადგენენ.

§ 32. გაზანაწივის ფუნქცია. სისტემის მიღვევადი რხევა

ვთქვათ, პოტენციალური ძალების გარდა სისტემაზე მოქმედებენ სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციული წინააღმდეგობის ძალები. თუ M_j -ურ მატერიალურ წერტილზე მოქმედ წინააღმდეგობის ძალას აღვნიშნავთ

$$\vec{F}^0_j = (X^0_j, Y^0_j, Z^0_j)\text{-ით}$$

ნათქვამის ძალით, მივიღებთ

$$\vec{F}^0_j = -\sigma_j \vec{v}_j \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (32,1)$$

სადაც σ_j გარკვეული დადებითი რიცხვებია.

აღნიშნული ძალების მოქმედებით სისტემის მოძრაობას სისტემის მიღვევად რხევას უწოდებენ.

(32,1) ტოლობების კოორდინატთა ლერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ

$$X^0_j = -\sigma_j x'_j, \quad Y^0_j = -\sigma_j y'_j, \quad Z^0_j = -\sigma_j z'_j. \quad (32,2)$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_j (x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2). \quad (32,3)$$

რომელიც სისტემის ცოცხალი ძალისაგან იმით განსხვავდება, რომ m_j -ის ნაცვლად σ_j არის აღებული. (32,2) ტოლობები, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$X^0_j = -\frac{\partial F}{\partial x'_j}, \quad Y^0_j = -\frac{\partial F}{\partial y'_j}, \quad Z^0_j = -\frac{\partial F}{\partial z'_j}. \quad (32,4)$$

თუ წინააღმდეგობის ძალების შესაბამ განზოგადებულ ძალებს აღვნიშნავთ Q^0_j -ით ($j=1, 2, \dots, s$), მივიღებთ

$$Q^{\circ}_j = \sum_{i=1}^n \left(X^{\circ}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y^{\circ}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z^{\circ}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) =$$

$$= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial z'_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (32,5)$$

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებების გამოყენების დროს ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_j} = \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (32,5) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$Q^{\circ}_j = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial q'_j} + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j} + \frac{\partial F}{\partial z'_i} \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j} \right) = - \frac{\partial F}{\partial q'_j}. \quad (32,6)$$

თუ, ისე როგორც ყოველთვის, სისტემის ცოცხალ ძალას აღვნიშნავთ T -თი, ხოლო პოტენციალური ძალების შესაბამის პოტენციალურ ენერგიას V -თი¹, დავრწმუნდებით, რომ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს, განსახილველი შემთხვევისათვის, ექნება სახე

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial q'_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = Q^{\circ}_j = - \frac{\partial F}{\partial q'_j}.$$

თუ T და V ფუნქციების (29,4) და (29,5) გამოსახულებებს გავიხსენებთ, დავრწმუნდებით, რომ $\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial q'_j} = 0$ და უკანასკნელი სისტემა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial q'_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (32,7)$$

ვინაიდან F ფუნქციას ისეთივე სახე აქვს, როგორც ცოცხალ ძალას, ამიტომ განზოგადებულ კოორდინატებში მის გამოსახულებას ექნება სახე

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n c_{ij} q'_i q'_j, \quad (32,8)$$

სადაც c_{ij} მუდმივი რიცხვებია, ამასთან $c_{ij} = c_{ji}$. ისე როგორც სისტემის ცოცხალი ძალა, F წარმოადგენს განზოგადებული სიჩქარეების მიმართ დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას.

F ფუნქციას უწოდებენ გაფანტვის ფუნქციას. ეს ფუნქცია პირველად შემოყვანილი იყო რელეის მიერ, ამიტომ მას აგრეთვე რელეის ფუნქციას უწოდებენ. გამოვარკვეოთ ამ ფუნქციის ფიზიკური შინაარსი. ამ მიზნით (32,7) ტოლობები გავამრავლოთ q'_j -ზე და ავჯამოთ j ინდექსით, მივიღებთ

¹ ისე როგორც წინა პარაგრაფში, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $q_j = 0$ წერტილზე V ფუნქციას აქვს მინიმუმი და ეს მინიმუმი ნულის ტოლია.

$$\sum_{j=1}^s q'_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} + \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial V}{\partial q_j} = - \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial F}{\partial q'_j}. \quad (32,9)$$

თუ გავითვალისწინებთ ადვილად შესამოწმებელ იგივობას

$$q'_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} = \frac{d}{dt} \left(q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q'_j} q_j'',$$

შუკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_j} q_j'' + \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial q_j} q'_j = - \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial F}{\partial q'_j}. \quad (32,10)$$

ვინაიდან T და F კვადრატული ფორმებია, ამიტომ გვექნება

$$\sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_j} = 2T, \quad \sum_{j=1}^s q'_j \frac{\partial F}{\partial q'_j} = 2F. \quad (32,11)$$

ამის გარდა ცხადია, რომ

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_j} q_j'', \quad \frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial q_j} q'_j. \quad (32,12)$$

(32,11) და (32,12) ტოლობების ძალით, (32,10) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = - 2F. \quad (32,13)$$

შუკანასკნელი ტოლობა, რომელიც ახასიათებს სისტემის სრული ენერგიის დაცემის ზომას, იძლევა გაფანტვის ფუნქციის ფიზიკურ შინაარსს. ამ ფუნქციის ასეთი სახელწოდება სწორედ აღნიშნულ გარემოებასთან არის დაკავშირებული.

თუ გავითვალისწინებთ სისტემის ცოცხალი ძალის, პოტენციალური ენერგიის და გაფანტვის ფუნქციის (29,4) (29,5) და (32,8) გამოსახულებებს, (32,7) სისტემა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} a_{k1} q_1'' + a_{k2} q_2'' + \dots + a_{ks} q_s'' + c_{k1} q'_1 + c_{k2} q'_2 + \dots + \\ + c_{ks} q'_s + b_{k1} q_1 + b_{k2} q_2 + \dots + b_{ks} q_s = 0 \end{aligned} \quad (32,14)$$

$$(k = 1, 2, \dots, s).$$

ამ სისტემას მიღევადი რხევის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას უწოდებენ. ვეძებთ ამ სისტემის ამოხსნა შემდეგი სახით:

$$q_j = A_j e^{\lambda t} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (32,15)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (32,14) სისტემაში შევიტანთ, $e^{\lambda t}$ -ზე შეკვეცის შემდეგ, მივიღებთ A_j მუდმივების მიმართ შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} (a_{k1} \lambda^2 + c_{k1} \lambda + b_{k1}) A_1 + (a_{k2} \lambda^2 + c_{k2} \lambda + b_{k2}) A_2 + \dots + \\ + (a_{ks} \lambda^2 + c_{ks} \lambda + b_{ks}) A_s = 0 \end{aligned} \quad (32,16)$$

$$(k = 1, 2, \dots, s).$$

ამ სისტემას რომ ჰქონდეს არატრივიალური ამოხსნა, აუცილებელია და საკმარისი სისტემის დეტერმინანტი ტოლი იყოს ნულის და, მაშასადამე, λ აკმაყოფილებდეს შემდეგ განტოლებას:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + c_{11}\lambda + b_{11}, & \dots, & b_{1s}\lambda^2 + c_{1s}\lambda + b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}\lambda^2 + c_{s1}\lambda + b_{s1}, & \dots, & a_{ss}\lambda^2 + c_{ss}\lambda + b_{ss} \end{vmatrix} = 0. \quad (32.17)$$

ამ განტოლებას (32.14) სისტემის მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ. ვინაიდან (32.17) განტოლება წარმოადგენს λ -ს მიმართ $2s$ რიგის განტოლებას, ამიტომ მას ექნება $2s$ ფესვი.

ვთქვათ, $\lambda = \alpha + i\beta$ და $\lambda' = \alpha - i\beta$ წარმოადგენენ (32.17) განტოლების კომპლექსურად შეუღლებულ ფესვებს. (32.16) სისტემის ამოხსნები, რომელნიც ამ ფესვებს შეესაბამებიან და რომელთაც A_j და A'_j -ით აღვნიშნავთ, იქნებიან კომპლექსურად შეუღლებულნი:

$$A_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad A'_j = \alpha_j - i\beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

თუ λ ნამდვილი ფესვია, მაშინ $A_j = A'_j = \alpha_j$.

გავამრავლოთ (32.16) ტოლობა A'_k -ზე და ავჯამოთ k ინდექსით, მივიღებთ

$$\lambda^2 T(A, A') + \lambda F(A, A') + V(A, A') = 0, \quad (32.18)$$

სადაც

$$T(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} A_k A'_j, \quad (32.19)$$

$$F(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{kj} A_k A'_j, \quad (32.20)$$

$$V(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s b_{kj} A_k A'_j. \quad (32.21)$$

თუ (32.16) სისტემას შევადგენთ λ' ფესვისა და მის შესაბამ A'_j კოეფიციენტებისათვის, შემდეგ გავამრავლოთ A_k -ზე და შევაჯამებთ k ინდექსით, მივიღებთ λ' -ის მიმართ ისევ (32.18) განტოლებას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$A_k A'_j + A_j A'_k = 2(\alpha_k \alpha_j + \beta_k \beta_j)$$

და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\|a_{kj}\|$, $\|c_{kj}\|$, $\|b_{kj}\|$ სიმეტრიული მატრიცებია, ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned} T(A, A') &= T(\alpha) + T(\beta), \\ F(A, A') &= F(\alpha) + F(\beta), \\ V(A, A') &= V(\alpha) + V(\beta), \end{aligned} \quad (32.22)$$

სადაც

$$T(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} \alpha_k \alpha_j.$$

ანალოგიური მნიშვნელობა აქვთ $F(\alpha)$, $V(\alpha)$, $T(\beta)$, $F(\beta)$, $V(\beta)$ გამოსახულებებს.

(32,22) ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ $T(A, A')$, $F(A, A')$, $V(A, A')$ სიდიდეები, რომელნიც (32,18) კვადრატული განტოლების კოეფიციენტებს წარმოადგენენ, ნამდვილი დადებითი სიდიდეებია. აქედან გამომდინარეობს, რომ λ არ შეიძლება იყოს ნამდვილი დადებითი რიცხვი.

(32,18) განტოლებიდან, ცხადია, გვექნება

$$\lambda = \frac{-F(A, A') \pm \sqrt{F^2(A, A') - 4T(A, A')V(A, A')}}{2T(A, A')}, \quad (32,23)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\lambda = \frac{-[F(\alpha) + F(\beta)] \pm \sqrt{[F(\alpha) + F(\beta)]^2 - 4[T(\alpha) + T(\beta)][V(\alpha) + V(\beta)]}}{2[T(\alpha) + T(\beta)]}. \quad (32,24)$$

აღვნიშნოთ (32,18) განტოლების დისკრიმინანტი ∇ -თი:

$$\nabla = F^2 - 4TV = [F(\alpha) + F(\beta)]^2 - 4[T(\alpha) + T(\beta)][V(\alpha) + V(\beta)]. \quad (32,25)$$

განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

1°. ვთქვათ, წინააღმდეგობის ძალა იმდენად დიდია, რომ ყოველთვის $\nabla > 0$, ე. ი.

$$F^2 > 4TV.$$

მაშინ, (32,23) ფორმულის ძალით, ყველა ფესვი იქნება ნამდვილი უარყოფითი. თუ ამის გარდა ვიგულისხმებთ, რომ ყველა ფესვი მარტივია და მოექცევიტ ისე, როგორც § 30-ში, დავრწმუნდებით, რომ (32,14) სისტემის ზოგადი ამოხსნა იქნება

$$q_j = \sum_{k=1}^{2s} A_k^j C_k e^{\lambda_k t} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (32,26)$$

სადაც A_k^j გარკვეული რიცხვებია, C_k ნებისმიერი მუდმივებია. უკანასკნელი ფორმულები გვიჩვენებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში სისტემის მოძრაობა იქნება აპერიოდული, ამასთან $q_j \rightarrow 0$, როცა $t \rightarrow \infty$ და, მაშასადამე, სისტემა ასიმპტოტურად უახლოვდება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობას. როგორც ადვილი მისახედრია, ეს შედეგი რჩება ძალაში ჯერადი ფესვების შემთხვევაშიაც.

2°. ვთქვათ, $\nabla = 0$, ე. ი.

$$F^2 = 4TV.$$

ამ შემთხვევაში აუცილებლად λ იქნება ჯერადი ფესვი, ამასთან (32,23) ფორმულის ძალით, λ იქნება უარყოფითი. ამ ფესვის შესაბამ ამოხსნას ექნება სახე

$$(A'_j + A''_j; t) e^{\lambda t}.$$

ვინაიდან $\lambda < 0$, ამიტომ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაშიაც სისტემა ასიმპტოტურად უახლოვდება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობას.

3°. ვთქვათ, წინააღმდეგობის ძალები იმდენად მცირეა, რომ ყოველთვის $\nabla < 0$, ე. ი.

$$F^2 - 4TV < 0.$$

(32,24) ფორმულის ძალით, ყველა ფესვი იქნება კომპლექსური, ამასთან, (32,18) განტოლების ძალით,

$$\lambda + \lambda' = 2\nu = - \frac{F(A, A')}{T(A, A')} = - \frac{F(\alpha) + F(\beta)}{T(\alpha) + T(\beta)}, \quad (32,27)$$

და. მაშასადამე, ყოველი ფესვის ნამდვილი ნაწილი იქნება უარყოფითი.

თუ დავუშვებთ, რომ λ ფესვისათვის $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის $n-1$ რიგის მინორებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და მოვიქცევით ზუსტად ისე, როგორც § 30-ში, მივიღებთ (იხ. (30,14) ტოლობები)

$$\frac{A_1}{\Delta_1(\lambda)} = \frac{A_2}{\Delta_2(\lambda)} = \dots = \frac{A_s}{\Delta_s(\lambda)} = C',$$

საიდანაც

$$A_j = \Delta_j(\lambda) C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, რომელიც ერთის ტოლად შეიძლება მივიღოთ $C=1$. (32,15) ტოლობების ძალით, ვღებულობთ

$$q_j = \Delta_j(\lambda) e^{(\nu_k + i\mu_k)t} \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

ვივლისხმობთ, რომ $\Delta(\lambda) = 0$ განტოლების ყველა ფესვი მარტივია და განვიხილოთ კომპლექსურად შეუღლებული ფესვები

$$\lambda_k = \nu_k + i\mu_k,$$

$$\lambda'_k = \nu_k - i\mu_k.$$

ცხადია, ამ ფესვების შესაბამ კერძო ამოხსნებს ექნება სახე

$$\Delta_j(\lambda_k) e^{(\nu_k + i\mu_k)t},$$

$$\Delta_j(\lambda'_k) e^{(\nu_k - i\mu_k)t}.$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, $\Delta_j(\lambda'_k)$ წარმოადგენს $\Delta_j(\lambda_k)$ -ს კომპლექსურად შეუღლებულს.

ამ კერძო ამოხსნების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები აგრეთვე ამოხსნები იქნება და მაშასადამე, ამ ამოხსნებიდან ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ $2s$ ნამდვილი (არსი) ამოხსნა, რომელნიც (32,14) სისტემის ამოხსნათა ფუნდამენტალურ სისტემას შეადგენენ. თუ ამ ნამდვილ ამოხსნებს გავამრავლებთ ნებისმიერ მუდმივებზე და შევკრებთ. დავრწმუნდებით, რომ (32,14) სისტემის ზოგად ამოხსნას არს ფუნქციებში ექნება სახე

$$q_j = \sum_{k=1}^s e^{\nu_k t} (M^k_j \cos \mu_k t + N^k_j \sin \mu_k t), \quad (32,28)$$

სადაც M^k_j და N^k_j მუდმივებია, რომელნიც $2s$ ნებისმიერ მუდმივს შეიცავენ.

ამრიგად, როცა წინააღმდეგობის ძალები საკმარისად მცირეა, მაშინ სისტემის რხევა მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში საესებით დახასიათდება (32,28) ფორმულებით. ვინაიდან $\nu_k < 0$ (იხ. (32,27) ფორმულა), ამიტომ სისტემის რხევას განსახილველ შემთხვევაში ეწოდება მიღევადი რხევა, ამასთან ცხადია, $q_j \rightarrow 0$, როცა $t \rightarrow \infty$ და მაშასადამე, სისტემა ასიმპტოტურად უახლოვდება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობას. თუ ჯერადი ფესვების შესაბამ ამოხსნებს დავწერთ და შემდეგ შევადგენთ (32,14) სისტემის ზოგად ამოხსნას, დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაშიც ადვილი ექნება აღნიშნულ გარემოებას.

თუ წინააღმდეგობის ძალები არა გვაქვს, ე. ი. $F \equiv 0$, მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, (32,28) ამოხსნები დაემთხვევა (30,32) ამოხსნებს.

§ 33. მატერიალურ წარმართა სისტემის იძულებითი რხევა

ეთქვან, წინა პარაგრაფში განხილული პოტენციალური ძალებისა და წინააღმდეგობის ძალების გარდა სისტემაზე მოქმედებენ ე. წ. შემფოთებელი პერიოდული ძალები, რომელთა შესაბამ განზოგადებულ ძალებს აქვს სახე

$$Q_j^* = P_j \cos pt \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (33,1)$$

სადაც P_j და p გარკვეული მუდმივი რიცხვებია.

აღნიშნული ძალების მოქმედებით მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობას სისტემის იძულებით რხევას უწოდებენ.

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს, ამ შემთხვევაში, ცხადია, შემდეგი სახე ექნებათ

$$\begin{aligned} a_{k1} \dot{q}_1'' + a_{k2} \dot{q}_2'' + \dots + a_{ks} \dot{q}_s'' + c_{k1} q_1' + c_{k2} q_2' + \dots + c_{ks} q_s' + \\ + b_{k1} q_1 + b_{k2} q_2 + \dots + b_{ks} q_s = P_k \cos pt \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (33,2)$$

(33,2) სისტემა წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ, მუდმივკოეფიციენტებთან, არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემის ზოგადი ამოხსნა წარმოადგენს მისი რაიმე კერძო ამოხსნისა და შესაბამი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამოხსნის ჯამს. (33,2) სისტემის კერძო ამოხსნის მოსაძებნად განვიხილოთ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned} a_{k1} \dot{q}_1'' + a_{k2} \dot{q}_2'' + \dots + a_{ks} \dot{q}_s'' + c_{k1} q_1' + c_{k2} q_2' + \dots + c_{ks} q_s' + \\ + b_{k1} q_1 + b_{k2} q_2 + \dots + b_{ks} q_s = P_k e^{ipt} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (33,3)$$

ცხადია; ამ სისტემის ამოხსნის ნამდვილი ნაწილი იქნება (33,2) სისტემის ამოხსნა. ვეძებთ (33,3) სისტემის კერძო ამოხსნა შემდეგი სახით:

$$q_k = B_k e^{ipt} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (33,4)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (33,3) სისტემაში შევიტანთ, B_k კოეფიციენტების მოსაძებნად მივიღებთ შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} (-a_{k1} p^2 + i p c_{k1} + b_{k1}) B_1 + (-a_{k2} p^2 + i p c_{k2} + b_{k2}) B_2 + \dots + \\ + (-a_{ks} p^2 + i p c_{ks} + b_{ks}) B_s = P_k \quad (k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (33,5)$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი, ცხადია, ტოლია $\Delta(ip)$ -სი, სადაც $\Delta(\lambda)$ ის დეტერმინანტია, რომელიც წინა პარაგრაფში იყო განხილული. ვიგულისხმობთ, რომ ip არ არის $\Delta(\lambda) = 0$ განტოლების ფესვი, ე. ი. $\Delta(ip) \neq 0$. თუ (33,5) სისტემას ამოვხსნით კრამერის ცნობილი წესის მიხედვით, ცხადია, მივიღებთ

$$B_r = \frac{\Delta_{r1}(ip) P_1 + \Delta_{r2}(ip) P_2 + \dots + \Delta_{rs}(ip) P_s}{\Delta(ip)} \quad (r = 1, 2, \dots, s), \quad (33,6)$$

სადაც $\Delta_{rk}(ip)$ წარმოადგენს $\Delta(ip)$ დეტერმინანტის k -ური სტრიქონისა და r სვეტის შესაბამი ელემენტის ალგებრულ დამატებას.

განვიხილოთ $\Delta(\lambda) = 0$ განტოლება და ვიგულისხმობთ, რომ წინააღმდეგობის ძალები საკმარისად მცირეა. მაშინ, როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, ამ განტოლების ყველა ფესვი კომპლექსურია:

$$\lambda_k = \nu_k + i\mu_k \quad (k = 1, 2, \dots, 2s), \quad (33,7)$$

ამასთან $\nu_k < 0$. ამ ფესვებში, ცხადია, მოთავსებულია კომპლექსურად შეუღლებული ფესვები.

ვინაიდან $\Delta(\lambda)$ წარმოადგენს λ -ს მიმართ $2s$ რიგის პოლინომს, ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$\Delta(\lambda) = a \prod_{k=1}^{2s} (\lambda - \lambda_k), \quad (33,8)$$

სადაც

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix}. \quad (33,9)$$

(33,7) და (33,8) ფორმულების ძალით ვღებულობთ

$$\Delta(ip) = a \prod_{k=1}^{2s} [-\nu_k + i(p - \mu_k)]. \quad (33,10)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (33,6) ტოლობებში შევიტანთ, გვექნება

$$B_r = \frac{\sum_{\alpha=1}^s \Delta_{r\alpha}(ip) P_\alpha}{a \prod_{k=1}^{2s} [-\nu_k + i(p - \mu_k)]}. \quad (33,11)$$

თუ $\sum_{\alpha=1}^s \Delta_{r\alpha}(ip) P_\alpha$ კომპლექსური გამოსახულების მოდულს და არგუმენტს აღვნიშნავთ შესაბამისად K_r -ით და γ_r -ით, მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=1}^s \Delta_{r\alpha}(ip) P_\alpha = K_r e^{i\gamma_r}. \quad (33,12)$$

ასევე გვექნება

$$-\nu_k + i(p - \mu_k) = \sqrt{\nu_k^2 + (p - \mu_k)^2} e^{i\vartheta_k}. \quad (33,13)$$

თუ (33,12) და (33,13) მნიშვნელობებს (33,11) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$B_r = \frac{K_r e^{i(\gamma_r - \vartheta)}}{a \prod_{k=1}^{2s} \sqrt{\nu_k^2 + (p - \mu_k)^2}} \quad (r=1, 2, \dots, s), \quad (33,14)$$

სადაც

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{2s} \vartheta_k.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (33,4) ტოლობებში, გვექნება (33,3) სისტემის შემდგომი ამოხსნა:

$$q_r = \frac{K_r}{a \prod_{k=1}^{2s} \sqrt{\nu_k^2 + (p - \mu_k)^2}} e^{i(\gamma_r - \vartheta)}. \quad (33,15)$$

თუ ამ მოხსნიდან გამოვყოფთ არს ნაწილს, მივიღებთ (33,2) სისტემის შემდეგ კერძო ამოხსნას:

$$q_r = \frac{K_r}{a \prod_{k=1}^{2s} \sqrt{\nu_k^2 + (p - \mu_k)^2}} \cos(pt + \gamma_r - \delta) \quad (r=1, 2, \dots, s). \quad (33,16)$$

თუ მოვიგონებთ, რომ, განსახილველი მცირე წინააღმდეგობის ძალების შემთხვევაში, (33,2) სისტემის შესაბამის ერთვეაროვანი სისტემის ზოგად ამოხსნას აქვს (32,28) სახე, დავრწმუნდებით, რომ (33,2) სისტემის ზოგადი ამოხსნა წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულებით:

$$q_r = \frac{K_r}{a \prod_{k=1}^{2s} \sqrt{\nu_k^2 + (p - \mu_k)^2}} \cos(pt + \gamma_r - \delta) + \sum_{k=1}^s e^{\nu_k t} (M_r^k \cos \mu_k t + N_r^k \sin \mu_k t) \quad (r=1, 2, \dots, s). \quad (33,17)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები, რომელიც სისტემის იძულებით რხევას ახასიათებს, წარმოადგენს პარმონიულ რხევას, მეორე შესაკრები კი, რომელიც სისტემის საკუთრივ რხევას ახასიათებს, წარმოადგენს მიღევად რხევას.

ეთქვათ, წინააღმდეგობის ძალები არ მოქმედებენ სისტემაზე, მაშინ $\epsilon_k = 0$ და (33,2) სისტემა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$a_{k1} q_1'' + a_{k2} q_2'' + \dots + a_{ks} q_s'' + b_{k1} q_1 + b_{k2} q_2 + \dots + b_{ks} q_s = P_k \cos pt. \quad (33,18)$$

როგორც § 10-ში იყო ნაჩვენები, ამ შემთხვევაში $\Delta(\lambda) = 0$ განტოლების ყველა ფესვი წმინდა წარმოსახვითი რიცხვია, ამიტომ $\nu_k = 0$ და (33,18) სისტემის კერძო ამოხსნას, (33,16) ტოლობების ძალით, ექნება სახე

$$q_r = \frac{K_r}{a \prod_{k=1}^{2s} (p - \mu_k)} \cos(pt + \gamma_r - \delta) \quad (r=1, 2, \dots, s). \quad (33,19)$$

ამის გარდა, თუ მოვიგონებთ, რომ (33,18) სისტემის შესაბამის ერთვეაროვანი სისტემის ზოგადი ამოხსნა (30,32) ფორმულებით წარმოიდგინება, დავრწმუნდებით, რომ (33,18) სისტემის ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$q_r = \frac{K_r}{a \prod_{k=1}^{2s} (p - \mu_k)} \cos(pt + \gamma_r - \delta) + \sum_{k=1}^s \Delta_r(\lambda_k) H_k \sin(\mu_k t + \epsilon_k) \quad (r=1, 2, \dots, s). \quad (33,20)$$

უკანასკნელი ტოლობები გვიჩვენებს, რომ როცა იძულებითი რხევის სიხშირე დაემთხვევა საკუთრივი რხევის ერთ-ერთ μ_k სიხშირეს, მაშინ იძულებითი რხევის ამპლიტუდა აღწევს უსასრულობას და ადგილი აქვს ე. წ. რეზონანსის მოვლენას.

მოძრაობის მდგრადობის ზოგიერთი საკითხი

§ 34. შემფოთებული მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

ამ განყოფილებაში ჩვენ განვიხილავთ, მოძრაობის მდგრადობის თვალსაზრისით, მექანიკურ სისტემას, რომლის მოძრაობაც დახასიათდება შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით:

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (34,1)$$

ამ სისტემის ყოველ ამოხსნას ხსენებული მექანიკური სისტემის გარკვეული მოძრაობა შეესაბამება. როგორც ადვილი მისახვედრია, ის განტოლებები, რომელთაც აქამდე ვიხილავდით, (34,1) სისტემის სახით შეიძლება იქნენ წარმოდგენილი. ცხადია, ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (34,2)$$

(34,1) სახის სისტემას მიეკუთვნება. თუ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს, ჩვეულებრივი მეთოდით, პირველი რიგის სისტემამდე დავიყვანთ, მივიღებთ სწორედ (34,1) სახის სისტემას. როგორც მყარი სხეულების დინამიკაში იქნება ნაჩვენები, მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები (34,1) სახით შეიძლება იქნენ წარმოდგენილი. უკვე ნათქვამიდან ცხადია, რომ (34,1) სახის სისტემამდე მიიყვანება თეორიულ მექანიკაში განხილული ყოველი მექანიკური სისტემის მოძრაობა.

შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ (34,1) სისტემისათვის დაცულია ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის დებულების პირობები.

განვიხილოთ (34,1) სისტემის რაიმე კერძო ამოხსნა

$$y_k = \varphi_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (34,3)$$

ეს ამოხსნა, ცხადია, განსაზღვრავს აღებული მექანიკური სისტემის მოძრაობას გარკვეულ საწყის პირობებში.

მექანიკური სისტემის მოძრაობას, რომელიც დახასიათებულია (34,3) კერძო ამოხსნით, ვუწოდოთ არაშეშფოთებული მოძრაობა. ამრიგად, არაშეშფოთებულ მოძრაობად შეიძლება მივიღოთ მექანიკური სისტემის ყოველი კერძო მოძრაობა. ყოველ სხვა მოძრაობას, რომელიც განსხვავდება აღებული არაშეშფოთებული მოძრაობისაგან, ეწოდება შეშფოთებული მოძრაობა.

განვიხილოთ (34,2) სისტემის რაიმე ამოხსნა:

$$y_k = y_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (34,4)$$

რომელიც განსხვავებულია (34,3) ამოხსნისაგან. სხვაობებს

$$y_k(t) - \varphi_k(t) \quad (k=1, \dots, m)$$

ეწოდება შეშფოთება.

განმარტება. მექანიკური სისტემის არაშეშფოთებულ მოძრაობას, რომელიც დახასიათებულია (34,3) ტოლობებით, ეწოდება მდგრადი, თუ ყოველი წინასწარ მოცემული დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყოველი შეშფოთებული $y_k = y_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, m$) მოძრაობისათვის, რომლისათვისაც საწყის $t=t_0$ მომენტში დაცულია უტოლობა

$$|y_k(t_0) - \varphi_k(t_0)| < \delta,$$

მთელი შემდგომი მოძრაობის დროს ადგილი ექნება უტოლობას

$$|y_k(t) - \varphi_k(t)| < \varepsilon, \text{ როცა } t \geq t_0.$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის მოძრაობის მდგრადობის ეს განმარტება იგივეა, რაც § 27-ში მოცემული განმარტება.

თუ არაშეშფოთებული მოძრაობა მდგრადია და ამასთან δ შეიძლება იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ როცა $|y_k(t_0) - \varphi_k(t_0)| < \delta$, ადვილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_k(t) - \varphi_k(t)] = 0, \quad (34,5)$$

მაშინ ვიტყვი, რომ ხსენებული არაშეშფოთებული მოძრაობა არის ასიმპტოტურად მდგრადი.

როგორც § 27-ში იყო აღნიშნული, წერტილის ჰარმონიული რხევა და ციკლოიდური საქანის რხევა, ნებისმიერ საწყის პირობებში, მდგრად მოძრაობებს წარმოადგენენ; მათემატიკური საქანის მოძრაობა კი არ არის მდგრადი. წერტილის მიღვეადი რხევა, რომელიც ნებისმიერად აღებულ საწყის პირობებს შეესაბამება, ასიმპტოტურად მდგრადია. ასევე, მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში მატერიალურ წერტილთა სისტემის ჰარმონიული რხევა და მიღვეადი რხევა მდგრად მოძრაობებს წარმოადგენენ, ამასთან სისტემის მიღვეადი რხევა ასიმპტოტურად მდგრადია.

y_1, y_2, \dots, y_m ფუნქციების ნაცვლად შემოვიღოთ x_1, \dots, x_m ფუნქციები, რომელნიც y_1, \dots, y_m ფუნქციებთან დაკავშირებულნი არიან ტოლობებით

$$x_k = y_k - \varphi_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (34,6)$$

ამასთან $y_k = \varphi_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, m$) სისტემის არაშეშფოთებული მოძრაობის განტოლებებია.

(34,6) ტოლობების ძალით, (34,1) სისტემა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (34,7)$$

სადაც

$$\begin{aligned} X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_m) = & f_k(t, x_1 + \varphi_1, x_2 + \varphi_2, \dots, x_m + \varphi_m) - \\ & - f_k(t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m). \end{aligned} \quad (34,8)$$

(34,7) სისტემას ეწოდება აღებული მექანიკური სისტემის შეშფოთებული მოძრაობის განტოლებები.

(34,8) ტოლობის ძალით,

$$X_k(t, 0, 0, \dots, 0) = 0,$$

ამიტომ, როგორც ადგილი მისახვედრია, $x_k=0$ ($k=1, 2, \dots, m$) აკმაყოფილებს (34,7) სისტემას, ამასთან, ცხადია, (34,3) არაშეშფოთებული მოძრაობისათვის $x_k=0$ ($k=1, 2, \dots, m$).

ზემონათქვამის ძალით, მდგრადი მოძრაობა ასე შეიძლება განვსაზღვროთ:

მექანიკური სისტემის არაშეშფოთებული მოძრაობა, რომელიც დახასიათებულია განტოლებებით

$$x_k=0 \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (34,9)$$

წარმოადგენს მდგრად მოძრაობას, თუ ყოველი წინასწარ აღებული დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა

$$|x_k(t_0)| < \delta,$$

მაშინ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x_k(t)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0;$$

თუ, ამასთან, δ იმდენად მცირე შეიძლება ავიღოთ, რომ $\lim_{t \rightarrow \infty} x_k(t)=0$, მაშინ

ვიტყვიან, რომ $x_k=0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა ასიმპტოტურად მდგრადია.

დავწეროთ მათემატიკური საქანის შეშფოთებული მოძრაობის განტოლებები. მათემატიკური საქანის რხევის განტოლებას აქვს სახე¹

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (34,10)$$

სადაც φ არის ვერტიკალური მდებარეობიდან საქანის გადახრის კუთხე, l საქანის სიგრძეს აღნიშნავს, g — სიმძიმის ძალის აჩქარებას. განვიხილოთ შემდეგი საწყისი პირობები:

$$\text{როცა } t=t_0, \text{ მაშინ } \varphi=\varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt}=0.$$

ამ საწყის პირობებში (34,10) სისტემის ამოხსნა იყოს

$$\varphi=\varphi(t).$$

ამ განტოლებით დახასიათებული მოძრაობა მივიღოთ არაშეშფოთებულ მოძრაობად.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x=\varphi-\varphi(t), \quad (34,11)$$

მაშინ (34,10) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin [x + \varphi(t)] + \frac{g}{l} \sin [\varphi(t)]. \quad (34,12)$$

ეს უკანასკნელი მათემატიკური საქანის შეშფოთებული მოძრაობის განტოლებას წარმოადგენს. ცხადია, $x=0$, რომელიც ამ განტოლების ამოხსნაა, საქანის აღებულ არაშეშფოთებულ მოძრაობას განსაზღვრავს.

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ე. წ. დამდგარ მოძრაობებს, ე. ი. ისეთ შემთხვევებს, როცა X_k ფუნქციებში t პარამეტრი ცხადად არ მონაწილეობს.

¹ ცხადია, ეს განტოლება მიიყვანება ორი განტოლებისაგან შემდგარ პირველი რიგის სისტემამდე.

(34,7) სახის სისტემისათვის მდგრადობის ამოცანის გადასაწყვეტად იყენებენ ორ მეთოდს.

პირველი მეთოდი, რომელსაც გაწრფივების მეთოდი ეწოდება, იმაში მდგომარეობს, რომ $X_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქციებს შლიან ხარისხოვან მწკრივად $x_k=0$ ($k=1, 2, \dots, m$) წერტილის მახლობლობაში და მეორე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს უკუაგდებენ. მიიღება ე. წ. გაწრფივებული სისტემა, რომელიც პირველი რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას წარმოადგენს. ასეთი სისტემისათვის, ზოგადი ამოხსნის მოძებნის გზით, შეიძლება გადაწყვეტილი იქნეს მოძრაობის მდგრადობის საკითხი. მაგრამ ამ მეთოდით სარგებლობის დროს საჭიროა გამორკვეული იქნეს შემდეგი საკითხი: გაწრფივებული სისტემისათვის მდგრადობის საკითხის გადაწყვეტით გადაწყვეტილია თუ არა მდგრადობის საკითხი თავიდან აღებული სისტემისათვის? ხსენებული პირველი მეთოდი მოიცავს აგრეთვე იმ შემთხვევას, როცა (34,7) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი შეიძლება პირდაპირ იქნეს აგებული. ამ შემთხვევაში ხსენებული სისტემისათვის აღვილად წყდება მოძრაობის მდგრადობის პრობლემა.

მეორე მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ (34,7) სახის სისტემისათვის მისი ამოხსნის გარეშე გადაწყვეტილი იქნეს მოძრაობის მდგრადობის საკითხი. ამ მეთოდში არსებით როლს თამაშობს ე. წ. ნიშანგანსაზღვრული, მუდმივნიშნა და ცვალებადნიშნა ფუნქციები (იხ. § 26).

ორივე ეს მეთოდი ამომწურავად იყო დამუშავებული დიდი რუსი მათემატიკოსის ლიაპუნოვის სადოქტორო დისერტაციაში.

ჩვენი მიზანია მკითხველს გავაცნოთ ამ მეთოდების მოკლე შინაარსი.

§ 35. ბაწრფივების მეთოდი

განვიხილოთ დამდგარი შეშფოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (35,1)$$

და დავუშვათ, რომ $X_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქციები იშლებიან მწკრივად $x_k=0$ ($k=1, 2, \dots, m$) წერტილის გარკვეულ მიდამოში. დიდძალი მექანიკური ამოცანისათვის X_k ფუნქციების ასეთნაირად დაშლა შესაძლებელია. ვინაიდან $X_k(0, 0, \dots, 0)=0$, ამიტომ ხსენებულ დაშლას ექნება სახე

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + \dots + p_{km}x_m + X_k^*(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (35,2)$$

სადაც p_{kj} მუდმივებია:

$$p_{kj} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right)_0, \quad (35,3)$$

$X_k^*(x_1, x_2, \dots, x_m)$ წარმოადგენენ x_1, x_2, \dots, x_m ცვლადების მიმართ მეორე და უფრო მაღალი ხარისხის წევრების ერთობლიობას.

განვიხილოთ (35,2) სისტემის შესაბამის წრფივი სისტემა

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + \dots + p_{km}x_m \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (35,4)$$

თეორიიდან კარგად ცნობილი შედეგები და დავწეროთ (35,4) სისტემის ის ამოხსნები, რომელნიც ხსენებულ ჯერად ფესვს შეესაბამებიან. დავუშვათ ჯერჯერობით, რომ მოცემული n -ჯერადი λ ფესვისათვის $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის $m-1$ რიგის მინორებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ამ შემთხვევაში (35,4) სისტემის ამოხსნა იქნება

$$x_k = f_k(t) e^{\lambda t} \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (35,8)$$

სადაც $f_k(t)$ გარკვეული პოლინომებია, რომელთა შორის ერთი მაინც არის ისეთი, რომლის რიგი უდრის ზუსტად $n-1$ -ს. როგორც ადვილი შესამოწმებელია, თუ (35,8) ამოხსნაში $f_k(t)$ პოლინომებს შევცვლით მათი წარმოებულებით, მივიღებთ აგრეთვე ამოხსნებს და, მაშასადამე, ჩვენ ვღებულობთ (35,4) სისტემის შემდეგ n ამოხსნას

$$x_k^{(\alpha)} = \frac{d^\alpha f_k(t)}{dt^\alpha} e^{\lambda t} \quad (\alpha=0, 1, \dots, n-1), \quad (35,9)$$

სადაც

$$\frac{d^0 f_k(t)}{dt^0} \equiv f_k(t).$$

ყველა ეს ამოხსნა წრფივად დამოუკიდებელია, მათ შორის უკანასკნელს აქვს (35,5) სახე. განსახილველ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ ალბულ λ ჯერად ფესვს შეესაბამება ერთი ჯგუფი ამოხსნებისა.

დავუშვათ ახლა, რომ ალბული n -ჯერადი λ ფესვისათვის $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის ყველა $m-1$ რიგის მინორი ნულის ტოლია, ხოლო $m-2$ რიგის მინორებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან ($\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის რანგი უდრის $m-2$ -ს). ამ შემთხვევაში (35,4) სისტემას აკმაყოფილებს შემდეგი ორი სისტემა ფუნქციებისა:

$$x_k = \varphi_k(t) e^{\lambda t} \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (35,10)$$

$$x_k^* = \psi_k(t) e^{\lambda t} \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (35,11)$$

სადაც $\varphi_k(t)$ და $\psi_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, m$) პოლინომებია, რომელთა უმაღლესი რიგებია შესაბამად p და q , ამასთან $p+q=n-2$. ისე როგორც ზემოთ, ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ (35,10) და (35,11) ამოხსნებში $\varphi_k(t)$ და $\psi_k(t)$ პოლინომებს შევცვლით მათი წარმოებულებით, მივიღებთ ისევ ამოხსნებს და, მაშასადამე, ვღებულობთ შემდეგ n ამოხსნას:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha \varphi_k(t)}{dt^\alpha} e^{\lambda t} \quad (\alpha=0, 1, \dots, p), \\ \frac{d^\beta \psi_k(t)}{dt^\beta} e^{\lambda t} \quad (\beta=0, 1, \dots, q). \end{aligned} \quad (35,12)$$

ამ ამოხსნებში აუცილებლად არის ორი ისეთი ამოხსნა, რომელთაც (35,5) სახე აქვთ. ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში ჩვენ ვღებულობთ ორ ჯგუფს ამოხსნებისა, რომელნიც შედგებიან შესაბამად $p+1$ და $q+1$ ამოხსნისაგან და რომელთა საერთო რაოდენობა იქნება $p+q+2=n$.

ვთქვათ ახლა, $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის რანგი უდრის $m-1$ -ს. ამ შემთხვევაში λ ფესვს შეესაბამება ისევ n ამოხსნა, მხოლოდ ეს ამოხსნები დაიყოფა

(35,12)-ის მსგავს l ჯგუფად. ყოველ ჯგუფში იქნება თითო ამოხსნა (35,5) ამოხსნის სახისა. $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის რანგი არ შეიძლება ნაკლები იყოს $m - n$ -ზე ($l \leq n$), რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში λ ფესვის ჯერადობა, როგორც ეს ადვილი შესამოწმებელია, მეტი იქნებოდა n -ზე. თუ $\Delta(\lambda)$ დეტერმინანტის რანგი უდრის $m - n$ -ს, მაშინ ამ ფესვის შესაბამი ამოხსნები დაიყოფა n ჯგუფად, ამასთან ყოველ ჯგუფში იქნება თითო ამოხსნა და, მაშასადამე, ყოველ ამოხსნას ექნება (35,5) სახე.

თუ განვიხილავთ $\Delta(\lambda) = 0$ განტოლების ყველა ფესვს, მაშინ ჩვენ მივიღებთ (35,4) სისტემის m წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნას. ეს ამოხსნები, საზოგადოდ, იქნებიან კომპლექსური. ვთქვათ, $\lambda = \gamma + i\mu$, მაშინ (35,5) სახის ამოხსნა მოგვცემს

$$x_k = (P_k \cos \mu t - Q_k \sin \mu t) e^{\gamma t}, \quad x_k = (P_k \sin \mu t + Q_k \cos \mu t) e^{\gamma t}, \quad (35,13)$$

სადაც P_k და Q_k მუდმივებია, რომელნიც წარმოადგენენ A_k რიცხვების ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. (35,8) სახის ამოხსნები აღებული კომპლექსური ფესვისათვის მოგვცემენ ნამდვილ ამოხსნებს

$$\begin{aligned} x_k &= f_k^{(1)} \cos \mu t - f_k^{(2)} \sin \mu t e^{\gamma t}, \\ x_k &= (f_k^{(1)} \sin \mu t + f_k^{(2)} \cos \mu t) e^{\gamma t}, \end{aligned} \quad (35,14)$$

სადაც $f_k^{(1)}(t)$ და $f_k^{(2)}(t)$ გარკვეული პოლინომებია. ვინაიდან (35,7) მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილია, ამიტომ $\lambda = \gamma + i\mu$ ფესვის შეუღლებულიც ამავე განტოლების ფესვი იქნება და, როგორც ადვილი მისახვედრია, $\lambda' = \gamma - i\mu$ შეუღლებული ფესვის შესაბამ ნამდვილ ამოხსნებს იგივე სახე ექნებათ, რაც $\lambda = \gamma + i\mu$ ფესვის შესაბამ ნამდვილ ამოხსნებს. ასეთი გზით ჩვენ მივიღებთ (35,4) სისტემის m წრფივად დამოუკიდებელ ნამდვილ ამოხსნას და, მაშასადამე, (35,4) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამოხსნა წარმოიღვინება, როგორც (35,13) და (35,14) სახის ამოხსნების წრფივი კომბინაცია.

ამის შემდეგ მდგრადობის საკითხის გამოკვეთა პირველი მიახლოებით (35,4) სისტემისათვის არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, ვთქვათ მახასიათებელი განტოლების ყოველი ფესვის ნამდვილი ნაწილი უარყოფითია. ამ შემთხვევაში (35,13) და (35,14) ტოლობების ძალით, ვრწმუნდებით, რომ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,4) პირველი მიახლოებითი სისტემისათვის მდგრადია ასიმპტოტურად. თუ მახასიათებელი განტოლების ფესვებს შორის ერთი მაინც არის ისეთი, რომლის ნამდვილი ნაწილი დადებითია, მაშინ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,4) სისტემისათვის არამდგრადია. ვთქვათ ახლა, მახასიათებელი განტოლების ფესვებს შორის არის ისეთი, რომლის ნამდვილი ნაწილი ნულის ტოლია, ხოლო დანარჩენი ფესვების ნამდვილი ნაწილები უარყოფითია. თუ ნულოვანი ნამდვილი ნაწილის მქონე ფესვი მარტივია ან ჯერადია, მაგრამ მისი შესაბამი ამოხსნათა ჯგუფების რაოდენობა ტოლია ფესვის ჯერადობის, მაშინ ამ ფესვის შესაბამ ამოხსნათა ჯგუფებს, (35,13) ფორმულების ძალით, ექნებათ სახე:

$$x_k = P_k \cos \mu t - Q_k \sin \mu t, \quad x_k = P_k \sin \mu t + Q_k \cos \mu t. \quad (35,15)$$

თუ საწყისი მონაცემები საკმარისად მცირეა, მაშინ ზოგად ამოხსნაში ამ ამოხსნების კოეფიციენტები იქნება საკმარისად მცირე და, როგორც ადვილი

მისახვედრია, ამ შემთხვევაში ადგილი ექნება მდგრადობას უბრალოდ (არა-ასიმპტიკურად). თუ ნულოვანი ნამდვილი ნაწილის მქონე ფესვი ჯერადია და ამ ფესვის შესაბამე ჯგუფთა რაოდენობა არ უდრის ფესვის ჯერადობას, მაშინ, ცხადია, არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,3) სისტემისათვის არა-მდგრადია.

ამრიგად, ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 1. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,4) პირველი მიახლოებითი სისტემისათვის იყოს ასიმპტოტურად მდგრადი, მდგომარეობს იმაში, რომ (35,7) მახასიათებელი განტოლების ყველა ფესვის ნამდვილი ნაწილი იყოს უარყოფითი. თუ ხსენებულ ფესვებს შორის ერთი მაინც არის ისეთი, რომლის ნამდვილი ნაწილი დადებითია, მაშინ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,4) სისტემისათვის არამდგრადია. არაშეშფოთებული მოძრაობა ამ სისტემისათვის იქნება უბრალოდ (არა-ასიმპტოტურად) მდგრადი, თუ მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ისეთი ფესვები, რომელთა ნამდვილი ნაწილები დადებითია, მაგრამ აქვს ფესვები, რომელთა ნამდვილი ნაწილები ნულის ტოლია და ამასთან ეს ფესვები მარტივია ან ჯერადია, მაგრამ მათი შესაბამის ამოხსნების ჯგუფთა რაოდენობა ფესვთა ჯერადობის ტოლია. თუ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, რომელთა ნამდვილი ნაწილები ნულის ტოლია და ამასთან მათი შესაბამის ჯგუფთა რაოდენობა არ უდრის ჯერადობას, მაშინ არაშეშფოთებული მოძრაობა არამდგრადია.

მდგრადობის საკითხის გადაწყვეტა პირველი მიახლოებითი სისტემისათვის მთელ რიგ შემთხვევებში იძლევა ამ საკითხის გადაწყვეტას სრული სისტემისათვის. ამ საკითხთან დაკავშირებით ადგილი აქვს ლიაპუნოვის შემდეგ დებულებებს (რომელნიც დაუმტკიცებლად მოგვყავს):

დებულება 2. თუ პირველი მიახლოებითი სისტემის მახასიათებელი განტოლების ყველა ფესვის ნამდვილი ნაწილი უარყოფითია, მაშინ $x_1=0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა სრული სისტემისათვის ((35,2) სისტემისათვის) მდგრადია ასიმპტოტურად.

დებულება 3. თუ პირველი მიახლოებითი სისტემის მახასიათებელი განტოლების ფესვებს შორის ერთი მაინც არის ისეთი, რომლის ნამდვილი ნაწილი დადებითია, მაშინ არაშეშფოთებული მოძრაობა სრული სისტემისათვის არა-მდგრადია.

დებულება 4. თუ პირველი მიახლოებითი სისტემის მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ფესვები, რომელთა ნამდვილი ნაწილები დადებითია, მაგრამ აქვს ფესვები ნულოვანი ნამდვილი ნაწილით, მაშინ შეშფოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში უმაღლესი ხარისხის წევრები ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ არაშეშფოთებული

მოძრაობა სრული სისტემისათვის, ჩვენი სურვილის მიხედვით, იყოს მდგრადი ან არამდგრადი.

უკანასკნელი დებულება გვიჩვენებს, რომ პირველი მიახლოებითი სისტემისათვის მდგრადობის საკითხის გადაწყვეტა ყოველთვის არ ნიშნავს ამ საკითხის გადაწყვეტას სრული სისტემისათვის.

ამრიგად, (35,1) სახის სისტემისათვის მდგრადობის საკითხის განხილვის დროს საქმე გვექნება არსებითად ორ შემთხვევასთან: პირველი, როცა მდგრადობის საკითხი წყდება პირველი მიახლოებითი სისტემის შესწავლით და მეორე, როცა მდგრადობის საკითხის შესასწავლად არ არის საკმარისი პირველი მიახლოებითი სისტემის განხილვა, არამედ აუცილებელი ხდება მეორე და უფრო მაღალი ხარისხის წევრების მხედველობაში მიღება. პირველ შემთხვევას უწოდებენ არაკრიტიკულ შემთხვევას, ხოლო მეორე შემთხვევას — კრიტიკულ შემთხვევას.

კრიტიკული შემთხვევის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^3, \quad (35,16)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay^3,$$

სადაც a მუდმივია. ამ სისტემის შესაბამ პირველ მიახლოებით სისტემას აქვს სახე

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \quad (35,17)$$

ცხადია, ამ სისტემის შესაბამი მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0, \quad (35,18)$$

საიდანაც $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. ამრიგად, ორივე ფესვის ნამდვილი ნაწილი ნულის ტოლია და მაშასადამე, მე-4 დებულების ძალით, საქმე გვაქვს კრიტიკულ შემთხვევასთან. 1 დებულების ძალით, $x=y=0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,17) სისტემისათვის მდგრადია უბრალოდ (არაასიმპტოტურად), არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,17) სისტემისათვის რომ მდგრადია, ამაში დავრწმუნდებით უშუალოდ, 1 დებულების გამოყენების გარეშე. მართლაც, (35,17) სისტემიდან x ცვლადის გამორიცხვით მივიღებთ

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \quad (35,19)$$

რომლის ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$y = \alpha \sin(t + \beta), \quad (35,20)$$

სადაც α და β ნებისმიერი მუდმივებია. (35,17) სისტემის მეორე განტოლება მოგვცემს

$$x = \alpha \cos(t + \beta). \quad (35,21)$$

ამრიგად, (35,21) და (35,20) ტოლობები იძლევიან (35,17) პირველი მიახლოებითი სისტემის ზოგად ამოხსნას. განვიხილოთ შემდეგი საწყისი პირობები: როცა $t=0$, მაშინ $x=x_0$, $y=y_0$. ამ პირობების ძალით ადვილად მივიღებთ

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}. \quad (35,22)$$

უკანასკნელის ძალით, (35,21) და (35,20) ტოლობები მოგვცემენ

$$x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos(t + \beta), \quad y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin(t + \beta).$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ ყოველი წინასწარ მოცემული მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის x_0 და y_0 იმდენად მცირე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ ყოველთვის ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x| < \varepsilon, \quad |y| < \varepsilon$$

და მაშასადამე, $x=y=0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,17) სისტემისათვის მდგრადია უბრალოდ (არაასიმპტოტურად).

ვნახოთ რას მოგვცემს (35,16) სისტემა. ვთქვათ, $x=x(t)$, $y=y(t)$ წარმოადგენენ ამ სისტემის რაიმე ამოხსნას. ცხადია, გვექნება

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [x^2(t) + y^2(t)] = x(t) \frac{dx}{dt} + y(t) \frac{dy}{dt}.$$

თუ ამ უკანასკნელში $\frac{dx}{dt}$ და $\frac{dy}{dt}$ სიდიდეების ნაცვლად შევიტანთ მათ მნიშვნელობებს (35,16) სისტემიდან, მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [x^2(t) + y^2(t)] = a[x^4(t) + y^4(t)]. \quad (35,23)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1°. $a > 0$. ამ შემთხვევაში (35,23) ტოლობის ძალით, $x^2 + y^2$ ფუნქციის წარმოებული ყოველთვის დადებითია და, მაშასადამე, ეს ფუნქცია წარმოადგენს ზრდად ფუნქციას და ის დროთა ვითარებაში საკმარისად დიდი გახდება. ნათქვამიდან ცხადია, რომ $x=y=0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,16) სისტემისათვის, როცა $a > 0$, არ არის მდგრადი.

2°. $a < 0$. (35,23) ტოლობის ძალით, ამ შემთხვევაში $x^2 + y^2$ არის კლებადი ფუნქცია და, როგორც ადვილი მისახვედრია, $x=y=0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,16) სისტემისათვის იქნება მდგრადი ასიმპტოტურად.

ამრიგად, ადებული $x=y=0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,16) სისტემისათვის შეიძლება იყოს როგორც მდგრადი (როცა $a < 0$), ისე არამდგრადი (როცა $a > 0$), მაშინ როცა ადებული არაშეშფოთებული მოძრაობა (35,17) სისტემისათვის ყოველთვის მდგრადია.

§ 36. მართკუთხედან ფორმებთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი

ვთქვათ, მოცემულია $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქცია, რომელიც k რიგის ერთგვაროვან ფორმას წარმოადგენს x_j ($j=1, 2, \dots, m$) ცვლადების მიმართ. ცხადია, გვექნება

$$V(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^k V(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (36,1)$$

სადაც λ ნებისმიერი პარამეტრია. უკანასკნელი ტოლობის ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ თუ λ კენტი რიცხვია, მაშინ $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფორმა იქნება ნიშანცვლადი ფუნქცია და, მაშასადამე, თუ V არის ნიშანგანსაზღვრული ფუნქცია, მაშინ აუცილებლად λ ლუწი რიცხვი იქნება. როგორც § 26-ში იყო აღნიშნული, არ არსებობს ზოგადი კრიტერიუმი, რომლის მიხედვითაც შეიძლებოდა დადგენა როდის იქნება აღებული ფუნქცია ნიშანგანსაზღვრული, მუდმივნიშნა და ცვალებადნიშნა. რა თქმა უნდა, ეს იმას არ ნიშნავს, რომ გარკვეულ კონკრეტულ შემთხვევაში ამ საკითხის გადაწყვეტა არ შეიძლებოდა. განვიხილოთ მაგალითისათვის კვადრატული ფორმა

$$2\Omega(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i x_j. \quad (36,2)$$

როგორც ალგებრის კურსიდან ცნობილია, ყოველთვის არსებობს ისეთი არა-განსაკუთრებული წრფივი ჩასმა¹

$$x_i = \beta_{i1} y_1 + \beta_{i2} y_2 + \dots + \beta_{im} y_m \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (36,3)$$

რომელიც (36,2) კვადრატულ ფორმას შემდეგ კანონიკურ სახემდე მიიყვანს:

$$2\Omega = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_m y_m^2. \quad (36,4)$$

განვიხილოთ შემდეგი შესაძლო შემთხვევები:

1°. ვთქვათ, $\lambda_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, m$). ვინაიდან ამ შემთხვევაში Ω ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $y_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, m$). ამიტომ, (36,3) არაგანსაკუთრებული ჩასმის ძალით, ეს ფუნქცია ნულის ტოლი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $x_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, m$). თუ, ამის გარდა, მივიღებთ მხედველობაში, რომ, (36,4) ტოლობის ძალით, Ω ყოველთვის დადებითია, ადვილად დავასკვნით, რომ ის წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას.

2°. ვთქვათ, ყველა λ_j უარყოფითია ($\lambda_j < 0$ ($j=1, 2, \dots, m$)). ამ შემთხვევაში, წინა შემთხვევაში ნათქვამის ანალოგიურად, დავასკვნით, რომ V იქნება უარყოფითად განსაზღვრული ფუნქცია.

3°. ვთქვათ λ_j სიდიდეებიდან ნაწილი ნულის ტოლია, ნაწილი კი დადებითია; ასე, მაგალითად, $\lambda_j > 0$ ($j=1, 2, \dots, \nu$), $\lambda_{\nu+1} = \dots = \lambda_m = 0$. მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, V წარმოადგენს მუდმივნიშნა ფუნქციას, სახელდობრ — დადებითნიშნა ფუნქციას. თუ λ_j სიდიდეებიდან ნაწილი ნულის ტოლია, ნაწილი კი უარყოფითია, მაშინ V იქნება უარყოფითნიშნა ფუნქცია.

4°. ვთქვათ, λ_j კოეფიციენტებიდან ნაწილი დადებითია, ნაწილი კი უარყოფითი. მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, V ფუნქცია იქნება ნიშანცვლადი.

ამრიგად, კვადრატული ფორმებისათვის ზემოდასმული საკითხის გადაწყვეტა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს².

¹ წრფივ ჩასმას ეწოდება არაგანსაკუთრებული, თუ ამ ჩასმის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

² როგორც უმაღლესი ალგებრის კურსიდანაა ცნობილი, არსებობს კრიტერიუმები, რომელნიც არკვევენ კვადრატული ფორმის განსაზღვრულობის საკითხს უშუალოდ, კანონიკურ სახეზე დაუყვანლად.

ვთქვათ, V წარმოადგენს k -ური რიგის ერთგვაროვან ფორმას. განვიხილოთ $W(x_1, x_2, \dots, x_m)$ უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც შემდეგ პირობას აკმაყოფილებს:

$$|W(x_1, x_2, \dots, x_m)| \leq A(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|)^k, \quad (36,5)$$

სადაც A მუდმივი რიცხვია. დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

დებულება. თუ $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ არის k რიგის ერთგვაროვანი ნიშანგანსაზღვრული ან ცვალებადნიშნა ფორმა, მაშინ $U(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქცია, განსაზღვრული ტოლობით

$$U(x_1, \dots, x_m) = V(x_1, \dots, x_m) + W(x_1, \dots, x_m), \quad (36,6)$$

სადაც W ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც (36,5) პირობას აკმაყოფილებს, იქნება შესაბამად ნიშანგანსაზღვრული ან ცვალებადნიშნა საკმარისად მცირე A რიცხვისათვის, რომელიც მხოლოდ V ფორმაზეა დამოკიდებული.

ვიგულისხმოთ, რომ V დადებითად განსაზღვრული ფორმაა და შემოვიღოთ x_j ცვლადების ნაცვლად α_j ცვლადები, რომელნიც x_j ცვლადებთან დაკავშირებულნი არიან შემდეგი ტოლობებით:

$$x_j = \rho \alpha_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (36,7)$$

სადაც

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}. \quad (36,8)$$

(36,7) ტოლობებიდან, კვადრატში აყვანით და შეკრებით, ვღებულობთ

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2 = 1. \quad (36,9)$$

m განზომილებიანი სივრცის წერტილების ერთობლიობას, რომელთა $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, m)$ კოორდინატები აკმაყოფილებენ (36,9) განტოლებას, ვუწოდოთ ერთეულ რადიუსიანი სფეროს ფერო. ამრიგად, როცა x_j კოორდინატები იცვლებიან მათი ცვლილების მთელს სივრცეში, მაშინ α_j კოორდინატები იცვლებიან ერთეულ რადიუსიან სფეროზე.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ V არის k რიგის ერთგვაროვანი ფორმა, (36,6) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$U(x_1, \dots, x_m) = \rho^k V(\alpha_1, \dots, \alpha_m) + W(\rho \alpha_1, \dots, \rho \alpha_m). \quad (36,10)$$

აღვნიშნოთ $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ფუნქციის ნამდვილი ქვედა საზღვარი (36,9) სფეროს ფეროზე l -ით, გვექნება

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \geq l. \quad (36,11)$$

ვინაიდან V არის დადებითად განსაზღვრული ერთგვაროვანი ფორმა, ამიტომ, ცხადია, $l > 0$.

(36,5) უტოლობის ძალით,

$$|W(\rho \alpha_1, \dots, \rho \alpha_m)| \leq A \rho^k (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|)^k \leq A \rho^k m^k. \quad (36,12)$$

(36,11) უტოლობა მოგვცემს

$$\rho^k V(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \geq \rho^k l. \quad (36,13)$$

(36,12) და (36,13) უტოლობათა ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ (36,10) ტოლობით განსაზღვრული $U(x_1, \dots, x_m)$ ფუნქცია იქნება დადებითად განსაზღვრული, თუ ადგილი ექნება უტოლობას

$$\rho^k l > A \rho^k m^k,$$

საიდანაც

$$A < \frac{l}{m^k}.$$

ამით განსახილველ შემთხვევაში დებულება დამტკიცებულია. საგსებით ანალოგიურად დამტკიცდება დებულება იმ შემთხვევაში, როცა V არის უარყოფითად განსაზღვრული ფორმა.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ თუ $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ნიშანცვლადია, მაშინ U ფუნქციაც იქნება ნიშანცვლადი. მართლაც, რადგან V ფუნქცია ნიშანცვლადია, ამიტომ (36,9) ჰიპერსფეროზე მოინახება წერტილები α'_1 და α'_2 , რომელთათვისაც გვექნება

$$V(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m) = a \text{ და } V(\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_m) = -b,$$

სადაც a და b დადებითი რიცხვებია. (36,12) უტოლობის ძალით, (36,10)

ტოლობიდან ადვილად დავრწმუნდებით, რომ როცა $A < \frac{a}{m^k}$ და $A < \frac{b}{m^k}$,

მაშინ $\alpha_i = \alpha'_i$ -სათვის U იქნება დადებითი, ხოლო $\alpha_i = \alpha''_i$ -სათვის U იქნება უარყოფითი. ამით დებულება დამტკიცებულია მთლიანად.

ამ დებულებიდან მიიღება შემდეგი შედეგები:

1. ვთქვათ, V არის k რიგის ერთგვაროვანი ფორმა. განვიხილოთ ჯამი

$$U = V + W. \quad (36,14)$$

თუ V ნიშანგანსაზღვრული ან ცვალებადნიშნა ფორმაა, ხოლო W წარმოადგენს k რიგის ფორმას საკმარისად მცირე კოეფიციენტებით, მაშინ U ფუნქცია იქნება, შესაბამად, ნიშანგანსაზღვრული ან ცვალებადნიშნა ფორმა.

მართლაც, რადგან W არის k რიგის ერთგვაროვანი ფორმა საკმარისად მცირე კოეფიციენტებით, ამიტომ ის დააკმაყოფილებს (36,5) უტოლობას საკმარისად მცირე A რიცხვისათვის და, მაშასადამე, ზემოდამტკიცებული დებულების ძალით, U იქნება ნიშანგანსაზღვრული თუ V ნიშანგანსაზღვრულია და U იქნება ნიშანცვლადი თუ V ნიშანცვლადია.

2. ვთქვათ, V ფორმა იშლება მწკრივად $x_i = 0$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში და ვთქვათ მისი დაშლა იწყება k -ური რიგის წევრებიდან. ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$V = V_k + V^*,$$

სადაც V_k არის k რიგის ფორმა, ხოლო V^* წარმოადგენს უფრო მაღალი ხარისხის წევრების ერთობლიობას. როგორც ადვილი მისახვედრია, $x_i = 0$ წერტილის გარკვეულ მახლობლობაში, V^* -სათვის ადგილი ექნება (36,5) სახის უტოლობას საკმარისად მცირე A კოეფიციენტით და, მაშასადამე, თუ V_k არის ნიშანგანსაზღვრული ან ცვალებადნიშნა ფორმა, მაშინ, 1 შედეგის ძალით, V იქნება შესაბამად ნიშანგანსაზღვრული ან ცვალებადნიშნა ფუნქცია.

დავუბრუნდეთ ისევ შემფოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (37,1)$$

და განვიხილოთ უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქცია. თუ x_1, x_2, \dots, x_m სიდიდეები აკმაყოფილებენ (37,1) სისტემას, მაშინ, ცხადია, გვექნება

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k.$$

შემდეგში, ჩვენ ვიტყვით, რომ V ფუნქციის სრული წარმოებული t ცვლადის მიმართ შედგენილია (37,1) სისტემის მიხედვით, თუ

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^m X_k \frac{\partial V}{\partial x_k}. \quad (37,2)$$

დავამტკიცოთ ლიაპუნოვის შემდეგი ძირითადი დებულება.

დებულება 1. თუ არსებობს ისეთი ნიშანგანსაზღვრული $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქცია, რომლის სრული წარმოებული, შედგენილი (37,1) სისტემის მიხედვით, ან ნულის ტოლია ან წარმოადგენს მუდმივნიშნა ფუნქციას, რომელსაც V ფუნქციის საწინააღმდეგო ნიშანი აქვს, მაშინ $x_j=0$ ($j=1, 2, \dots, m$) არაშეფოთებული მოძრაობა მდგაღია.

ვიგულისხმობთ, რომ V ფუნქცია არის დადებითად განსაზღვრული¹, ხოლო მისი სრული წარმოებული, შედგენილი (37,1) სისტემის მიხედვით, არის ან ნულის ტოლი ან — უარყოფითნიშნა ფუნქცია. ასეთ შემთხვევაში ვაჩვენოთ, რომ $x_i=0$ არაშეფოთებული მოძრაობა მდგაღია.

ვთქვათ, V ფუნქცია დადებითად განსაზღვრულია არეში

$$|x_i| \leq h. \quad (37,3)$$

აღვნიშნოთ x -ით უდიდესი $|x_i|$ ($i=1, 2, \dots, m$) რიცხვებს შორის:

$$x = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|).$$

და განვიხილოთ x_i ცვლადების ცვლილების არე

$$x = \varepsilon, \quad (37,4)$$

სადაც ε წინასწარ აღებული დადებითი რიცხვია, ამასთან $\varepsilon < h$. აღვნიშნოთ $V(x_1, \dots, x_m)$ ფუნქციის ნამდვილი ქვედა საზღვარი (37,4) ტოლობით განსაზღვრულ არეში l -ით; ხსენებულ არეში გვექნება

$$V(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq l, \quad (37,5)$$

¹ დამტკიცება საცხებით ანალოგიურად ჩატარდება იმ შემთხვევაში, როცა V უარყოფითად განსაზღვრული ფუნქციაა.

ამასთან, რადგან V დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა, $l > 0$. ავიღოთ $t = t_0$ მომენტში საწყისი x_i^0 შემოფოთება, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობას

$$|x_i^0| < \eta,$$

სადაც $\eta < \varepsilon$.

(37,1) სისტემის ის ამოხსნა, რომელიც ამ საწყის შემოფოთებას შეესაბამება, იყოს $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$). დებულების პირობის თანახმად,

$$\frac{dV[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]}{dt} \leq 0$$

და, მაშასადამე, $V[x_1(t), \dots, x_m(t)]$ წარმოადგენს კლებად ფუნქციას, რის გამოც, ცხადია, გვექნება

$$V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)] \leq V(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0). \quad (37,6)$$

ვინაიდან $|x_i^0| < \eta < \varepsilon < h$, ამიტომ t ცვლადის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელიც საკმარისად ახლოსაა t_0 -თან $|x_i(t)| \leq h$ ($i=1, 2, \dots, m$) და, მაშასადამე, t ცვლადის ასეთი მნიშვნელობებისათვის $x_i(t)$ ფუნქციები არ გამოდის (37,3) არიდან (სადაც V ფუნქცია დადებითად განსაზღვრულია).

ვაჩვენოთ, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $t \geq t_0$, ყოველთვის $|x_i(t)| < \varepsilon$. ვინაიდან V უწყვეტ ფუნქციას წარმოადგენს, ამასთან $V(0, \dots, 0) = 0$, ამიტომ η შეიძლება იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ, როცა $|x_i^0| < \eta$, მაშინ

$$V(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) < l.$$

უკანასკნელი უტოლობის ძალით, (37,6) უტოლობა მოგვცემს

$$V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)] < l. \quad (37,7)$$

დაეუშვათ, რომ როცა $t = \tau$, მაშინ $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$) ფუნქციებიდან ერთი მაინც გახდება ε -ის ტოლი. (37,7) უტოლობის ძალით, ხსენებული τ -სათვის გვექნება

$$V[x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_m(\tau)] < l. \quad (37,8)$$

შეორეს მხრივ, თუ რომელიმე $x_i(t)$ ფუნქცია მიაღწევს ε -ს, მაშინ ადგილი ექნება (37,5) უტოლობას, რომელიც უთავსადია (37,8) უტოლობასთან. ამრიგად, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ რომელიმე კოორდინატი t -ს რაიმე მნიშვნელობისათვის ტოლი გახდება ε -ის, არ არის სამართლიანი, მაშასადამე, ყოველთვის

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

და ამით დებულება დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა ლიპუნოვის მეორე დებულება, რომელიც ეხება მოძრაობის ასიმპტოტურად მდგრადობას.

დებულება 2. თუ არსებობს ისეთი ნიშანგანსაზღვრული $V(x_1, \dots, x_m)$ ფუნქცია, რომლის სრული წარმოებულზე t ცვლადის მიმართ, შედგენილი (37,1) სისტემის მიხედვით, წარმოადგენს აგრეთვე ნიშანგანსაზღვრულ ფუნქციას, რომელსაც V ფუნქციის საწინააღმდეგო ნიშანი აქვს, მაშინ $x_i = 0$ არაშემოფოთებული მოძრაობა იქნება ასიმპტოტურად მდგრადი.

ვთქვათ, $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ, პირობის ძალით, $\frac{dV}{dt}$ ფუნქცია იქნება უარყოფითად განსაზღვრული და, მაშასადამე, არსებობს $x_i=0$ წერტილის მიდამო $|x_i| \leq h$, სადაც ადგილი ექნება უტოლობებს

$$V(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq 0, \quad \frac{dV}{dt} \leq 0,$$

ამასთან ტოლობას ადგილი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i=0$. ვინაიდან დაცულია წინა დებულების პირობები, ამიტომ არაშეშფოთებული მოძრაობა იქნება ჯოველ შემთხვევაში მდგრადი და, მაშასადამე, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ (37,1) სისტემის ყოველი ამოხსნა $x_i=x_i(t)$, რომელიც $t=t_0$ საწყის მომენტში აკმაყოფილებს პირობას $|x_i^0|=|x_i(t_0)| \leq \eta$, შემდეგში ყოველთვის დააკმაყოფილებს პირობას $|x_i(t)| < \varepsilon$, როცა $t > t_0$. ვაჩვენოთ ახლა, რომ ამ ამოხსნისათვის ადგილი ექნება ტოლობას

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0.$$

განვიხილოთ V ფუნქციის მნიშვნელობა ადებულ $x_i=x_i(t)$ ამოხსნისათვის: $V[x_1(t), \dots, x_m(t)]$. დებულების პირობის ძალით, ამ ფუნქციის წარმოებული $\frac{dV}{dt}$ იქნება ყოველთვის უარყოფითი, ამასთან ეს წარმოებული ნულის

ტოლი არ გახდება t -ს არცერთი მნიშვნელობისათვის. მართლაც, ვთქვათ $\frac{dV}{dt}$

ნულის ტოლი ხდება, როცა $t=\tau$. ვინაიდან $\frac{dV}{dt}$ ნიშანგანსაზღვრულია, ამიტომ

გვექნება $x_i(\tau)=0$. ეს კი შეუძლებელია, რადგან თუ $t=\tau$ მომენტს მივიღებთ საწყის მომენტად, მაშინ გვექნება (37,1) სისტემის ორი ამოხსნა $x_i=0$ და $x_i=x_i(t)$, რომელნიც აკმაყოფილებენ ერთი და იმავე საწყის პირობას: $x_i(\tau)=0$,

რაც ამოხსნის ერთადერთობის ძალით შეუძლებელია. ამრიგად, $\frac{dV}{dt}$ იქნება ყო-

ველთვის უარყოფითი და მაშასადამე $V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]$ ფუნქცია იქნება მონოტონურად კლებადი, რის გამოც იარსებებს მისი ზღვარი, როცა $t \rightarrow \infty$. აღვნიშნოთ ეს ზღვარი α -თი, გვექნება

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)] = \alpha. \quad (37,9)$$

ვაჩვენოთ, რომ $\alpha=0$. დაეუშვათ წინააღმდეგი: $\alpha \neq 0$. მაშინ, ცხადია, $\alpha > 0$ და, (37,9) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)] > \alpha.$$

V ფუნქციის უწყვეტობის ძალით, უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x(t) = \max(|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots, |x_m(t)|) > a, \quad (37,10)$$

სადაც a დადებითი მუდმივია.

(37,10) უტოლობის გამო გვექნება

$$\frac{dV}{dt} < -b, \quad (37,11)$$

სადაც b დადებითი რიცხვია.

უკანასკნელი უტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} V[x_1(t), \dots, x_m(t)] &= V[x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)] + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt \leq \\ &\leq V[x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)] - b(t - t_0). \end{aligned} \quad (37,12)$$

ამ უტოლობიდან ცხადია, რომ საკმარისად დიდი t -სათვის მარჯვენა მხარე უარყოფითია და, მაშასადამე, V გახდება უარყოფითი. ეს კი შეუძლებელია, რადგან V დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა. ამრიგად, ჩვენ დაშვება იმის შესახებ, რომ $\alpha \neq 0$ არ არის სწორი და მაშასადამე გვექნება

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[x_1(t), \dots, x_m(t)] = 0. \quad (37,13)$$

თუ ახლა გავიხსენებთ, რომ V დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ, უკანასკნელი ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (37,14)$$

და ამით დებულება დამტკიცებულია.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ჰამილტონის კანონიკურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, s), \end{aligned} \quad (37,15)$$

სადაც H ჰამილტონის ფუნქციას წარმოადგენს. როგორც ვიცით, $H = T + V$, სადაც T და V წარმოადგენენ მატერიალურ წერტილთა სისტემის კინეტიკურ და პოტენციალურ ენერგიებს. ისე როგორც მე-6 განყოფილებაში, ვიგულისხმობთ, რომ V ფუნქციას $q_i = 0$ წერტილზე აქვს მინიმუმი და ეს მინიმუმი ტოლია ნულის. მაშინ, ცხადია, რომ $H = T + V$ წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას q_i, p_i ($i=1, 2, \dots, s$) ცვლადების მიმართ. ამის გარდა, (37,15) სისტემის ძალით, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{k=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} = \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0. \end{aligned}$$

ამრიგად, (37,15) სისტემისათვის არსებობს დადებითად განსაზღვრული H ფუნქცია, რომლის სრული წარმოებული, შედგენილი (37,15) სისტემის მიხედვით, ნულის ტოლია. ლიპუნოვის 1 დებულების თანახმად $q_i = p_i = 0$ არა-

შეშფოთებული მოძრაობა, რომელიც განსახილველ შემთხვევაში მატერიალურ წერტილთა სისტემის გარკვეულ მდებარეობას იძლევა, მდგრადია. როგორც ადვილი მისახვედრია, ჩამოყალიბებული შედეგი წარმოადგენს ლეჟან-დირიხლეს დებულებას, რომელიც § 28-ში გვექონდა დამტკიცებული. ამრიგად, ლეჟან-დირიხლეს დებულება მიღებულია, როგორც ლიაპუნოვის 1 დებულების შედეგი.

§ 38. ლიაპუნოვის დებულება არამდგრადი მოძრაობის შესახებ

დავამტკიცოთ ლიაპუნოვის შემდეგი დებულება:

დებულება 1. თუ არსებობს ისეთი $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქცია, რომლის სრული წარმოებული t ცვლადის მიმართ, შედგენილი (37,1) სისტემის მიხედვით, წარმოადგენს ნიშანგანსაზღვრულ ფუნქციას, ამასთან V არ წარმოადგენს ისეთ მუდმივნიშნა ფუნქციას, რომელსაც ხსენებული $\frac{dV}{dt}$ წარმოებული საწინააღმდეგო ნიშანი აქვს, მაშინ $x_i=0$ ($i=1, 2, \dots, m$) არაშეშფოთებული მოძრაობა არამდგრადია.

ვთქვათ, $\frac{dV}{dt}$, შედგენილი (37,1) სისტემის მიხედვით, წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას¹ (37,3) უტოლობით მოცემულ არეში. ვაჩვენოთ, რომ, როგორი მცირეც არ უნდა იყოს η რიცხვი, ყოველთვის მოიხილება ისეთი საწყისი შეშფოთება x^0 , რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$|x_i^0| \leq \eta \quad (38,1)$$

და რომლის შესაბამი $x_i=x_i(t)$ ამოხსნაც გამოვა ძირითადი (37,3) არიდან. ამით დებულება დამტკიცებული იქნება რადგან, თუ ავიღებთ $\varepsilon < h$, მაშინ არ იარსებებს ისეთი η , რომლისთვისაც დაცული იყოს (38,1) უტოლობა და შესაბამი ამოხსნისათვის ადგილი ჰქონდეს ყოველთვის $|x_i| < \varepsilon$ უტოლობას.

ვინაიდან $\frac{dV}{dt}$ არის დადებითად განსაზღვრული ფუნქცია და, მაშასადამე,

დამე, დებულების პირობის ძალით, V არ არის უარყოფითი ნიშნის მუდმივნიშნა ფუნქცია, ამიტომ როგორი მცირეც არ უნდა იყოს η რიცხვი, მოიძებნება ისეთი საწყისი შეშფოთება x^0 , რომლისთვისაც ადგილი ექნება უტოლობებს $|x_i^0| < \eta$ და

$$V(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_m) > 0. \quad (38,2)$$

ხსენებული x^0_i -ის შესაბამი ამოხსნა იყოს $x_i=x_i(t)$. ვაჩვენოთ, რომ სწორედ ეს არის ის ამოხსნა, რომელიც გამოვა (37,3) არიდან. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, ეს ამოხსნა არ გამოდის ხსენებული არიდან. განვიხილოთ ფუნქცია $V[x_1(t), \dots, x_m(t)]$. ვინაიდან $\frac{dV}{dt}$ დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა, ამიტომ $V[x_1(t), \dots, x_m(t)]$ იქნება ზრდადი და, მაშასადამე, გვექნება

$$V[x_1(t), \dots, x_m(t)] \geq V(x^0_1, \dots, x^0_m) > 0. \quad (38,3)$$

¹ დებულება საკმარისი ანალოგიურად დამტკიცდება იმ შემთხვევაში, როცა ხსენებული წარმოებული წარმოადგენს უარყოფითად განსაზღვრულ ფუნქციას.

უკანასკნელი უტოლობის ძალით, არსებობს დადებითი რიცხვი $\lambda > 0$, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობას

$$x(t) \geq \lambda > 0, \quad (38,4)$$

სადაც

$$x = \max (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|).$$

ვინაიდან $\frac{dV}{dt}$ დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა, ამიტომ, (38,4)

უტოლობის ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\frac{dV}{dt} \geq l > 0, \quad (38,5)$$

სადაც l მუდმივი დადებითი რიცხვია.

ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობას

$$V[x_1(t), \dots, x_m(t)] = V(x_0^1, \dots, x_0^m) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt. \quad (38,6)$$

(38,5) უტოლობის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$V[x_1(t), \dots, x_m(t)] \geq V(x_0^1, \dots, x_0^m) + l(t - t_0). \quad (38,7)$$

უკანასკნელი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[x_1(t), \dots, x_m(t)] = \infty. \quad (38,8)$$

ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $x_i = x_i(t)$ არ გამოვა (37,3) არიდან სამართლიანი რომ ყოფილიყო, მაშინ $V[x_1(t), \dots, x_m(t)]$ იქნებოდა შემოსაზღვრული. მიღებული წინააღმდეგობა გვარწმუნებს, რომ $x_i = x_i(t)$ ამოხსნა გამოვა (37,3) არიდან და ამით დებულება დამტკიცებულია.

ამ დებულების გაპოყენებით, ქვემოთ, ჩვენ დავამტკიცებთ მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის ერთ მნიშვნელოვან დებულებას.

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება პოლონომურ, სტაციონარულ ბმებს და ვთქვათ, სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია. აღვნიშნოთ პოტენციალი $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$ -ით. ვთქვათ, $q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$) წერტილზე U ფუნქციას აქვს მინიმუმი (და, მაშასადამე, პოტენციალურ ენერგიას აქვს მაქსიმუმი). ვინაიდან U განსაზღვრულია ნებისმიერი მუდმივი შესაქრების სიზუსტით, ამიტომ ხსენებული მინიმალური მნიშვნელობა შეიძლება ნულის ტოლად მივიღოთ.

თუ $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$ ფუნქციას დავშლით მწკრივად $q_i = 0$ წერტილის მახლობლობაში და მხეველობაში მივიღებთ ტოლობებს

$$U(0, \dots, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

მაშინ გვექნება

$$U(q_1, q_2, \dots, q_s) = U_1(q_1, \dots, q_s) + U_{k+1}(q_1, \dots, q_s) + \dots \quad (38,9)$$

სადაც U_k წარმოადგენს $k \geq 2$ რიგის ერთგვაროვან ფორმას, ხოლო U_{k+1} არის $k+1$ რიგის ერთგვაროვანი ფორმა. ვიგულისხმობთ, რომ U_k წარმოად-

გენს დადებითად განსაზღვრულ ფორმას. მაშინ, § 36-ში მოყვანილი დებულების მე-2 შედეგის ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ $U(q_1, \dots, q_s)$ ფუნქცია იქნება დადებითად განსაზღვრული ფუნქცია.

განვიხილოთ სისტემის ცოცხალი ძალა

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s A_{ij} q'_i q'_j.$$

თუ განზოგადებულ სიჩქარეებს გამოვსახავთ განზოგადებული იმპულსების საშუალებით, ადვილად მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s A^*_{ij}(q_1, \dots, q_s) p_i p_j. \quad (38,10)$$

A^*_{ij} ფუნქციები, ცხადია, ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$A^*_{ij} = \gamma_{ij} + \delta_{ij}(q_1, \dots, q_s), \quad (38,11)$$

სადაც $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = A^*_{ij}(0, \dots, 0)$, δ_{ij} ისეთი ფუნქციებია, რომელნიც ნული ხდება $q_i = 0$ წერტილზე. (38,11) ტოლობის ძალით, (38,10) ფორმულა მოგვცემს

$$2T = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s \gamma_{ij} p_i p_j + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s \delta_{ij} p_i p_j. \quad (38,12)$$

ვინაიდან T განზოგადებული იმპულსების მიმართ დადებითად განსაზღვრული

კვადრატული ფორმაა, ხოლო $\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s \delta_{ij} p_i p_j$ აგრეთვე კვადრატული ფორმაა,

რომლის კოეფიციენტებიც $q_i = 0$ წერტილის მახლობლობაში საკმარისად მცირეა, ამიტომ, § 36-ში მოყვანილი დებულების 1 შედეგის ძალით, კვადრატული ფორმა

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s \gamma_{ij} p_i p_j = 2T - \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s \delta_{ij} p_i p_j$$

წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ ფორმას.

დავწეროთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (38,13)$$

და განვიხილოთ V ფუნქცია, რომელიც შემდეგი ტოლობით არის განსაზღვრული:

$$V = \sum_{j=1}^s p_j q_j. \quad (38,14)$$

ცხადია, ეს ფუნქცია წარმოადგენს ცვალებადნიშნა ფუნქციას. შევადგინოთ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული (38,13) სისტემის მიხედვით და ვაჩვენოთ, რომ ეს წარმოებული იქნება დადებითად განსაზღვრული ფორმა. ამით ნაჩვენები იქნება, რომ (38,13) სისტემის სტაბილურობის დაცულია ზემოთ მოყვანილ

ნილი ლიაპუნოვის დებულების პირობები და, მაშასადამე, $q_i = p_i = 0$ არაშეშფოთებული მოძრაობა იქნება არამდგრადი.

(38,13) და (38,14) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^i \frac{dq_j}{dt} p_j + \sum_{j=1}^i \frac{dp_j}{dt} q_j = \sum_{j=1}^i p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^i q_j \frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $H = T - U$ და რომ U ფუნქცია p , სიდიდეებზე არ არის დამოკიდებული, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^i p_j \frac{\partial T}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^i q_j \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j}. \quad (38,15)$$

ვინაიდან T წარმოადგენს განზოგადებული იმპულსების მიმართ კვადრატულ ფორმას (იხ. (38,10) ფორმულა), ამიტომ, გვექნება

$$\sum_{j=1}^i p_j \frac{\partial T}{\partial p_j} = 2T. \quad (38,16)$$

(38,12) ტოლობის ძალით, ცხადია, აგრეთვე, რომ

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^i \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial \delta_{\alpha\beta}}{\partial q_j} p_{\alpha} p_{\beta}. \quad (38,17)$$

(38,9) ტოლობა გვაძლევს

$$\sum_{j=1}^i q_j \frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^i q_j \frac{\partial U_k}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^i q_j \frac{\partial U_{k+1}}{\partial q_j} + \dots = k U_k + (k+1) U_{k+1} + \dots \quad (38,18)$$

(38,16), (38,17) და (38,18) ტოლობების ძალით, (38,15) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \sum_{\beta=1}^i \sum_{\alpha=1}^i \gamma_{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta} + \sum_{\beta=1}^i \sum_{\alpha=1}^i \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i q_j \frac{\partial \delta_{\alpha\beta}}{\partial q_j} \right) p_{\alpha} p_{\beta} + \\ & + [k U_k + (k+1) U_{k+1} + \dots]. \end{aligned} \quad (38,19)$$

(38,19) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს; მეორე წევრი აგრეთვე კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს, რომლის კოეფიციენტებიც $q_i = 0$ წერტილის მახლობლობაში საკმარისად მცირე სიდიდეებია. § 36-ში დამტკიცებული დებულების 1 შედეგის ძალით, (38,19) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი და მეორე წევრების ჯამი დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას წარმოადგენს. ვინაიდან $k U_k$ არის დადებითად განსაზღვრული k რიგის ფორმა, ხოლო $(k+1) U_{k+1} \dots$ წარმოადგენენ უფრო მაღალი რიგის ფორმებს, ამიტომ, § 36-ში მოყვანილი დებულების მეორე შედეგის ძალით, (38,19) ტოლობის მარჯვენა მხარის კვადრატულ ფორმებში მოთავსებული წევრი დადებითად განსაზღვრულ ფუნქციას წარმოადგენს. ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ $\frac{dV}{dt}$ წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ

20. ვთქვათ, $U(x_1, x_2, \dots, x_m)$ წარმოადგენს k რიგის ერთგვაროვან ფორმას, მოვნახოთ k რიგის ერთგვაროვანი ფორმა $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ შემდეგი პირობით

$$\frac{dV}{dt} = U, \quad (5)$$

სადაც $\frac{dV}{dt}$ შედგენილია (35,3) პირველი მიახლოებითი სისტემის მიხედვით.

ვთქვათ, U ფორმის წევრები გადანომრილია გარკვეული წესით და ვთქვათ ამ ფორმის წევრთა კოეფიციენტებია b_1, b_2, \dots, b_N (N -ით აღნიშნულია k რიგის ერთგვაროვანი ფორმის წევრთა რაოდენობა). საძიებელი V ფორმის კოეფიციენტები იყოს a_1, a_2, \dots, a_N . a_i კოეფიციენტები ისე უნდა განისაზღვრონ, რომ დაკმაყოფილდეს მე (5) ტოლობა. V ფორმის (5)-ში შეტანის შედეგად მივიღებთ a_i კოეფიციენტების მოსაძებნად შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \dots + A_{iN}a_N = b_i \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

სადაც A_{ij} გარკვეული მუდმივებია, რომელნიც წარმოადგენენ p_{ij} კოეფიციენტების წრფივ კომბინაციას. თუ მე-(6) სისტემის დეტერმინანტი: $\det \|A_{ij}\|$ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ a_i კოეფიციენტები განისაზღვრება ცალსახად და, მაშასადამე, მოიძებნება k რიგის ერთგვაროვანი ფორმა, რომელიც მე-(5) პირობას დააკმაყოფილებს.

გ ა ნ ა ლ ი ზ ი ლ ე ჯ ა ზ

მეძანიქის პერიოდიული პრინციპები

§ 39. მეძანიქის ზოგადი პრინციპების შესახებ

მეძანიქის ზოგადი პრინციპის ქვეშ იგულისხმება მოძრაობათა ისეთი საერთო თვისებებია, რომელთაც ადგილი აქვთ ან დროის ალბულო მომენტისათვის ან დროის სასრული შუალედისათვის. პირველ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვი, რომ პრინციპი დიფერენციალურია, მეორე შემთხვევაში კი — ინტეგრალური. ხსენებულ ზოგადი ხასიათის პრინციპთა რიცხვს ეკუთვნის ვარიაციული პრინციპები. არავარიაციული პრინციპებისაგან განსხვავებით, ვარიაციული პრინციპების ამოცანაა ვიპოვოთ ისეთი ფუნქციონალური დამოკიდებულება, რომელიც ნამდვილი მოძრაობისათვის ლებულობს ექსტრემალურ მნიშვნელობას სხვა ე. წ. კინემატიკურად დასაშვებ მოძრაობებთან შედარებით.

დალაშქრის პრინციპი, რომელიც ჩვენ თავის დროზე განვიხილეთ, წარმოადგენს არავარიაციულ დიფერენციალურ პრინციპს. ენერგიის შენახვის კანონი, თუ მას მივიღებთ, როგორც პრინციპს, წარმოადგენს არავარიაციულ ინტეგრალურ პრინციპს.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობის შესახებ § 4-ში დამტკიცებული დებულება, რომელიც, როგორც თავის დროზე იყო აღნიშნული, შესაძლო გადაადგილების პრინციპის სახელწოდებით არის ცნობილი,

თუ მას მივიღებთ, როგორც პრინციპს, წარმოადგენს დიფერენციალურ ვარიაციულ პრინციპს. ამ პრინციპის ვარიაციული ხასიათი ცხადია, როცა ძალები პოტენციალურია. ამ შემთხვევაში, ხსენებული პრინციპი გვაძლევს

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (39,1)$$

სადაც V პოტენციალურ ენერგიას წარმოადგენს. (39,1) პირობების ძალით, განსახილველი სისტემის წონასწორობის მდებარეობა ყველა სხვა მდებარეობისაგან, რომელიც ბმებთან თავსებადია, იმით განსხვავდება, რომ წონასწორობის მდებარეობისათვის პოტენციალურ ენერგიას აქვს ექსტრემალური მნიშვნელობა.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ დალამბერ-ლაგრანჟის, გაუსის, ჰამილტონის და უმცირესი ქმედების პრინციპებს. ამ პრინციპებიდან პირველი ორი წარმოადგენს დიფერენციალურ ვარიაციულ პრინციპს, ხოლო ორი უკანასკნელი კი — ინტეგრალურ ვარიაციულ პრინციპს.

როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, ყოველი მათგანი ხსენებული პრინციპებიდან იმდენად ზოგადია, რომ მათგან მიიღება როგორც მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის, ისე წონასწორობის განტოლებები.

§ 40. დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპი

განვიხილოთ M_1, M_2, \dots, M_n მატერიალურ წერტილთა სისტემა, რომელიც ემორჩილება § 10-ში განხილული სახის პოლონომურ, იდეალურ, ორმხრივ ბმებს:

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

ცხადია, სისტემის მოძრაობა საესებით დახასიათდება x_i, y_i, z_i ($i=1, 2, \dots, n$) $3n$ კოორდინატით და, როგორც აღვნიშნავთ, M_1, M_2, \dots, M_n წერტილების მოძრაობას ევკლიდეს ჩვეულებრივ სამ განზომილებიან სივრცეში შეიძლება შევუსაბამოთ ერთი წერტილის მოძრაობა $3n$ განზომილებიან სივრცეში. ამიტომ შემდეგში, $3n$ განზომილებიან სივრცის წირის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ ჩვეულებრივ სამ განზომილებიან სივრცეში n წირთა ერთობლიობას, რომელნიც, კერძოდ, სისტემის წერტილთა ტრაექტორიებს შეიძლება წარმოადგენდნენ. თუ აღნიშნული წირი იძლევა სისტემის წერტილთა ტრაექტორიებს, მაშინ ხსენებული ტრაექტორიის კოორდინატებზე ბმის განტოლებები უნდა დააკმაყოფილონ (თავსებადნი უნდა იყვნენ ბმებთან). ჩვენ ვიტყვი, რომ ზემოხსენებული $3n$ განზომილებიანი სივრცის წირი თავსებადია ბმებთან, თუ ამ წირის შესაბამის 3 განზომილებიანი სივრცის n წირის წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ბმის განტოლებებს. განვიხილოთ ახლა ზემოხსენებული $3n$ განზომილებიანი სივრცის წირები, რომელნიც თავსებადნი არიან ბმებთან და აკმაყოფილებენ შემდეგ საწყის პირობებს: როცა $t=t_0$, მაშინ $x_i=x_i^0, y_i=y_i^0, z_i=z_i^0, x_i'=x_i^{0'}, y_i'=y_i^{0'}, z_i'=z_i^{0'}$, სადაც $x_i^0, y_i^0, z_i^0, x_i^{0'}, y_i^{0'}, z_i^{0'}$ მოცემული მუდმივებია. ასეთ წირებს კინემატიკურად დასაშვები წირები, ანუ კინემატიკურად დასაშვები მოძრაობები ეწოდება.

თუ გადავალთ q_1, q_2, \dots, q_s განზოგადებულ კოორდინატებზე, მაშინ, ცხადია, n წერტილის მოძრაობას 3 განზომილებიან სივრცეში შეესაბამება ერთი $M(q_1, q_2, \dots, q_s)$ წერტილის მოძრაობა q_1, q_2, \dots, q_s კოორდინატების ცვლილების s განზომილებიან სივრცეში. ვინაიდან q_1, q_2, \dots, q_s დამოუკიდებელი კოორდინატებია, რომელთაც ბმები შეზღუდვებს არ ადებენ, ამიტომ კინემატიკურად დასაშვები წირები შეიძლება ასედაც განვმარტოთ: ზემოხსენებული s განზომილებიანი სივრცის წირებს, რომელნიც აკმაყოფილებენ საწყის პირობებს: როცა $t = t_0$, მაშინ $q_i = q_i^0$, $q_i' = q_i^{0'}$ ეწოდება კინემატიკურად დასაშვები წირები (კინემატიკურად დასაშვები მოძრაობები).

დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპი საშუალებას იძლევა კინემატიკურად დასაშვები წირებიდან ვიპოვოთ ის წირი, რომელზედაც სისტემა ნამდვილად იმოძრაავს. ეს პრინციპი მდგომარეობს შემდეგში:

როცა სისტემა ემორჩილება ზემოაღნიშნულ სახის ბმებს, მაშინ დროის ყოველ მომენტში მისი ნამდვილი მოძრაობა კინემატიკურად დასაშვები მოძრაობებიდან იმით განსხვავდება, რომ მხოლოდ ნამდვილი მოძრაობისათვის სისტემაზე უშუალოდ მოქმედი (აქტიური) ძალების და ინერციის ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლია ნულის.

ამრიგად, დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპის ძალით, სისტემის ნამდვილი მოძრაობისათვის ადვილი აქვს ტოლობა

$$\sum_{i=1}^n ((\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \cdot \delta \vec{r}_i) = 0, \quad (40,1)$$

სადაც $\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ წარმოადგენს M_i წერტილზე მოქმედი ყველა შიგა და გარე ძალების ნაჯრებ ვექტორს. უკანასკნელი ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^n [(X_i - m_i x_i'') \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_i + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_i] = 0. \quad (40,2)$$

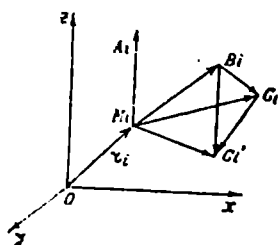
ეს უკანასკნელი მექანიკის ზოგად განტოლებას წარმოადგენს. როგორც § 5-ში იყო ნაჩვენები, ამ განტოლებიდან მიიღება მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები (სახელდობრ, ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები) და წონასწორობის განტოლებები. ნათქვამიდან ცხადია პრინციპის ზოგადი ხასიათი.

§ 41. ბაუსის პრინციპი (უმცირესი იმპულსის პრინციპი)

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება წინა პარაგრაფში აღნიშნული სახის ბმებს. განვიხილოთ M_i -ური მატერიალური წერტილი, რომლის მასაც არის m_i და განვიხილოთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა. M_i წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ იყოს $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (ნახ. 125).

ვთქვათ, t მომენტში, როცა M_i წერტილის მდებარეობა დახასიათებულია \vec{r}_i რადიუს-ვექტორით, ბმები მოიხსნა და, ვთქვათ, ამ მომენტში M_i წერ-

ტილზე ძალა არ მოქმედებს. ამ შემთხვევაში უსასრულოდ მცირე τ დროში წერტილის ინერციით გადაადგილება იყოს $\overrightarrow{M_i A_i}$. იმავე წერტილის გადაადგილება τ დროში, როცა ბმები მოხსნილია, მაგრამ ძალები მოქმედებენ, იყოს



ნახ. 125.

$\overrightarrow{M_i B_i}$; ხოლო ნამდვილი გადაადგილება, როცა მხედველობაში მიღებულია, როგორც ბმები, ისე ძალები, იყოს $\overrightarrow{M_i C_i}$. ცხადია, გვექნება

$$\overrightarrow{M_i A_i} = \vec{v}_i \tau, \quad (41.1)$$

სადაც \vec{v}_i არის M_i წერტილის სიჩქარე t მომენტში (აღებული M_i მდებარეობისათვის).

$\overrightarrow{OB_i}$ ვექტორის დაშლა $\tau=0$ მნიშვნელობის მახლობლობაში, τ -ს მიმართ მეორე რიგის სიზუსტით, მოგვცემს

$$\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{OM_i} + \tau \vec{v}_i + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\vec{F}_i}{m_i}.$$

თუ ასევე მოვიქცევით $\overrightarrow{OC_i}$ ვექტორის მიმართ, მივიღებთ

$$\overrightarrow{OC_i} = \overrightarrow{OM_i} + \tau \vec{v}_i + \frac{1}{2} \tau^2 \vec{w}_i,$$

სადაც \vec{w}_i აღნიშნავს M_i წერტილის აჩქარებას t მომენტში (როცა $\tau=0$). შევადგინოთ შემდეგი სხვაობა:

$$\overrightarrow{B_i C_i} = \overrightarrow{OC_i} - \overrightarrow{OB_i} = \frac{1}{2} \tau^2 \left(\vec{w}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i} \right). \quad (41.2)$$

აღებული სხვაობა, გარკვეული სიზუსტით, ახასიათებს M_i წერტილის თავისუფალი მოძრაობიდან გადახრას. Ω ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{w}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i} \right)^2, \quad (41.3)$$

ეწოდება მატერიალურ წერტილთა სისტემის თავისუფალი მოძრაობიდან გადახრის ზომა, ანუ სისტემის იძულება. უკანასკნელი ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადაწეროთ:

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i} \right)^2 + \left(y_i'' - \frac{Y_i}{m_i} \right)^2 + \left(z_i'' - \frac{Z_i}{m_i} \right)^2 \right]. \quad (41.4)$$

თუ კინემატიკურად დასაშვებ მოძრაობებს განვსაზღვრავთ ისე, როგორც წინა პარაგრაფში, მაშინ გაუსის პრინციპი ასე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ:

კინემატიკურად დასაშვები წირებიდან ნამდვილი მოძრაობა მოხდება იმ წირზე, რომლისათვისაც Ω ფუნქციას, დროის ყოველი მომენტისათვის, აქვს მინიმალური მნიშვნელობა.

ცხადია, Ω ფუნქცია დამოკიდებულია კინემატიკურად დასაშვებ წირებზე, ვინაიდან ასეთ წირებზე იცვლება $\vec{w}_i = (x_i'', y_i'', z_i'')$ აჩქარება. ამრიგად,

შ არის წირის ფუნქცია, ანუ როგორც ამბობენ, ფუნქციონალი. საძიებელია ისეთი კინემატიკურად დასაშვები წირი, რომლისათვისაც შ მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას. ნათქვამიდან სავსებით ცხადია პრინციპის ვარიაციული ხასიათი.

ვარიაციათა აღრიცხვაში მტკიცდება, რომ იმ წირებისათვის, რომელიც შ ფუნქციას ანიჭებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას (კერძოდ, მინიმალურს) ამ ფუნქციის ვარიაცია ნულის ტოლია:

$$\delta\Omega = 0, \quad (41,5)$$

ამასთან, განსახილველ შემთხვევაში, ვარიაცია აიღება აჩქარების მიმართ. უკანასკნელი ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\delta\Omega = \sum_{i=1}^n [(m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i) \delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i) \delta z_i] = 0. \quad (41,6)$$

ვაჩვენოთ, რომ გაუსის პრინციპიდან მიიღება სისტემის მოძრაობის განტოლებები (ლაგრანჟის I გვარის განტოლებები). ამით ნაჩვენები იქნება პრინციპის ზოგადი ხასიათი.

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება კოლონომურ ბმებს, რომელთა განტოლებებსაც აქვთ სახე

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (41,7)$$

თუ ამ ტოლობებს t -ს მიმართ ორჯერ გავაწარმოებთ, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \ddot{x}_j + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_j} \ddot{y}_j + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_j} \ddot{z}_j \right) + \\ + \Phi_\alpha(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (41,8)$$

სადაც Φ_α გარკვეული ფუნქციებია, რომელნიც აჩქარების კომპონენტებს არ შეიცავენ. (41,8) წარმოადგენენ იმ პირობებს, რომელთაც (41,7) სახის ბმები ადებენ აჩქარების კომპონენტებს. თუ (41,8) ტოლობის ვარიაციას ავიღებთ აჩქარების კომპონენტების მიმართ, როგორც ადვილი მისახვედრია, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \delta \ddot{x}_j + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_j} \delta \ddot{y}_j + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_j} \delta \ddot{z}_j \right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (41,9)$$

შემოვიტანოთ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ განუსაზღვრელი მამრავლები. გავამრავლოთ (41,9) ტოლობა λ_α -ზე, ავჯამოთ α ინდექსით და გამოვაკლოთ (41,8) ტოლობას, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^n \left[\left(m_j \ddot{x}_j - X_j - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \right) \delta x_j + \left(m_j \ddot{y}_j - Y_j - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_j} \right) \delta y_j + \right. \\ \left. + \left(m_j \ddot{z}_j - Z_j - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_j} \right) \delta z_j \right] = 0. \quad (41,10)$$

ვინაიდან $\delta x_i''$, $\delta y_j''$, $\delta z_i''$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ k რაოდენობა (41,9) პირობას, ამიტომ მათ შორის დამოუკიდებელია $3n - k$. შევარჩიოთ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ მამრავლები ისე, რომ (41,10) ტოლობაში დამოკიდებული $\delta x_i''$, $\delta y_j''$, $\delta z_i''$ სიდიდეების კოეფიციენტები ნულის ტოლი გახდეს. ვინაიდან (41,7) ბმები დამოუკიდებელნი არიან, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ მამრავლების ასე შერჩევა ყოველთვის შეიძლება. ამის შემდეგ (41,10) ტოლობაში დაგვრჩება ის წევრები, სადაც $\delta x_i''$, $\delta y_j''$, $\delta z_i''$ სიდიდეებიდან დამოუკიდებელი კომპონენტები შედის; მაგრამ, ვინაიდან (41,10) ტოლობას იგივეურად უნდა ჰქონდეს ადგილი, ამიტომ მათი კოეფიციენტებიც ნულის ტოლი უნდა იყოს. ამრიგად, (41,10) ტოლობიდან ვღებულობთ ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებებს:

$$\begin{aligned} m_j x_j'' &= X_j + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_j}, \\ m_j y_j'' &= Y_j + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_j}, \\ m_j z_j'' &= Z_j + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_j}. \end{aligned} \quad (41,11)$$

გაუსის პრინციპი, ისე როგორც დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპი, დიფერენციალური პრინციპია.

ვაჩვენოთ, რომ გაუსის პრინციპი მიიღება დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპიდან (მექანიკის ზოგადი განტოლებიდან). აღვნიშნოთ $\overline{M_i C_i'}$ -ით M_i წერტილის კინემატიკურად დასაშვები გადაადგილება τ დროში (ნახ. 125) და დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპის საფუძველზე ვაჩვენოთ, რომ $\overline{M_i C_i'}$ ნამდვილი გადაადგილება Ω ფუნქციას ანიჭებს მინიმუმს $\overline{M_i C_i'}$ კინემატიკურად დასაშვებ გადაადგილებებთან შედარებით. (41,2) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$\frac{1}{w_i} - \frac{\overline{F_i}}{m_i} = \frac{2\overline{B_i C_i'}}{\tau^2}. \quad (41,12)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევითავსებთ (41,3) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\Omega = \frac{2}{\tau^4} \sum_{i=1}^n m_i (\overline{B_i C_i'})^2. \quad (41,13)$$

აღვნიშნოთ კინემატიკურად დასაშვები $\overline{M_i C_i'}$ გადაადგილებისათვის Ω ფუნქციის მნიშვნელობა Ω' -ით. ცხადია, გვექნება

$$\Omega' = \frac{2}{\tau^4} \sum_{i=1}^n m_i (\overline{B_i C_i'})^2. \quad (41,14)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია (ნახ. 125),

$$\overline{B_i C_i'} = \overline{B_i C_i} + \overline{C_i C_i'},$$

$$Q' = \frac{1}{\tau^4} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{C}_i \vec{C}'_i)^2 + \frac{4}{\tau^4} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{B}_i \vec{C}_i \cdot \vec{C}_i \vec{C}'_i),$$

ამ ტოლობის წინებით (41,2) ტოლობას, ვღებულობთ

(41,15)

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{B}_i \vec{C}_i \cdot \vec{C}_i \vec{C}'_i) = -\frac{\tau^2}{2} \sum_{i=1}^n ((\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \cdot \vec{C}_i \vec{C}'_i) =$$

$$= -\frac{\tau^2}{2} \sum_{i=1}^n ((\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \cdot \delta \vec{r}_i).$$

მაგრამ, ვინაიდან დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპის ძალით,

$$\sum_{i=1}^n ((\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \cdot \delta \vec{r}_i) = 0,$$

ამიტომ

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{B}_i \vec{C}_i \cdot \vec{C}_i \vec{C}'_i) = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (41,15) ტოლობა გვაძლევს

$$Q' = Q + \frac{2}{\tau^4} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{C}_i \vec{C}'_i)^2,$$

საიდანაც

$$Q < Q'.$$

ამრიგად, Q ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს ნამდვილი მოძრაობისათვის და ამით ზემონათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

§ 42. იზოქრონული და სრული ვაკუუმიზმი

მოვიყვანოთ ზოგიერთი შედეგი იზოქრონული და სრული ვაკუუმიზმის შესახებ, რომელნიც შემდეგში დაგვჭირდება. ვთქვათ, მოცემულია უწყვეტი და მეორე რიგამდე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია

$$q = f(t). \quad (42,1)$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ $dq = f'(t)dt$. შევნიშნოთ, რომ აქ ფუნქციის ცვლილება მიღებულია არგუმენტის შეცვლის შედეგად. აღვნიშნოთ $\eta(t)$ -თი ნებისმიერი უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია და განვიხილოთ $q^*(t)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით

$$q^*(t) = f(t) + \varepsilon \eta(t), \quad (42,2)$$

სადაც ε ნებისმიერი მცირე სიდიდეა. რადგან ε საკმარისად მცირეა, ამიტომ (42,2) ფუნქცია მცირედ იქნება განსხვავებული (42,1) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციისაგან. ცხადია, აქ ჩვენ საქმე გვაქვს თვით ფუნქციის სახის შეცვლას-

თან არგუმენტის შეუცვლელად. δq სიდიდეს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\delta q = q^*(t) - q(t) = \varepsilon \eta(t) \quad (42,3)$$

ეწოდება $q = f(t)$ ფუნქციის იზოქრონული ვარიაცია. δq წარმოადგენს ფუნქციის ნაზრდს, რომელიც მიღებულია ფუნქციის სახის შეცვლით, არგუმენტის შეუცვლელად.

(42,3) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$\frac{d}{dt} \delta q = q'^* - q' = \varepsilon \eta'(t). \quad (42,4)$$

თუ (42,3) ტოლობაში q -ს ნაცვლად ავიღებთ $q'(t)$ ფუნქციას, მივიღებთ

$$\delta q' = (q')^* - q'(t) = \varepsilon \eta'(t). \quad (42,5)$$

(42,4) და (42,5) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \frac{dq}{dt} = \delta q'. \quad (42,6)$$

განვიხილოთ აღებული ფუნქციის Δq ვარიაცია, რომელიც მიიღება როგორც ფუნქციის სახის შეცვლის, ისე არგუმენტის შეცვლის შედეგად:

$$\Delta q = q^*(t + \Delta t) - q(t), \quad (42,7)$$

სადაც Δt აღნიშნავს t პარამეტრის ნაზრდს. ასეთ ვარიაციას ფუნქციის სრულ ვარიაციას უწოდებენ. (42,1) და (42,2) ტოლობების ძალით, (42,7) ტოლობა ასე შეიძლება გადაეწეროს:

$$\Delta q = f(t + \Delta t) + \varepsilon \eta(t + \Delta t) - f(t).$$

უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა მიმართ გარკვეული სიზუსტით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვეცემს

$$\Delta q = \varepsilon \eta(t) + \Delta t f'(t),$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\Delta q = \delta q + \Delta t q'(t). \quad (42,8)$$

უკანასკნელი ტოლობა ამყარებს დამოკიდებულებას აღებული ფუნქციის იზოქრონულ და სრულ ვარიაციებს შორის.

თუ (42,8) ტოლობას გავაწარმოებთ t პარამეტრით და ვისარგებლებთ (42,6) ტოლობით, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \Delta q = \delta q' + \Delta t q'' + q' \frac{d}{dt} \Delta t. \quad (42,9)$$

თუ (42,8) ტოლობაში q -ს ნაცვლად ავიღებთ $q'(t)$ ფუნქციას, მივიღებთ

$$\Delta q' = \delta q' + \Delta t q''. \quad (42,10)$$

ორი უკანასკნელი ტოლობის შედარება გვარწმუნებს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\frac{d}{dt} \Delta q = \Delta q' + q' \frac{d}{dt} \Delta t. \quad (42,11)$$

თუ ვარიაცია იზოქრონულია, მაშინ $\Delta t = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა დაემთხვევა (42,6) ტოლობას.

ვთქვათ, ისე როგორც წინა პარაგრაფებში, სისტემა ემორჩილება k რაოდენობა ატომურ, ორმხრივ იდეალურ ბმას. როგორც თავის დროზე იყო აღნიშნული (იხ. § 40), მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობა შეიძლება დაეახასიათოთ $s=3n-k$ განზომილებიან სივრცეში ერთი წერტილის მოძრაობით, რომლის კოორდინატებიც q_i ($i=1, \dots, s$) განზოგადებული კოორდინატებია. განვიხილოთ ხსენებულ s განზომილებიან სივრცეში წირები, რომელნიც გადიან ამ სივრცის ორ მოცემულ A და B წერტილებზე. ცხადია, ყოველ ასეთ წირს შეესაბამება ევკლიდეს 3 განზომილებიან სივრცეში „წირი“ (სისტემის წერტილთა შესაძლო ტრაექტორიები), რომელნიც თავსებადნი იქნებიან ბმებთან. A და B წერტილებს შეესაბამება მატერიალურ წერტილთა სისტემის გარკვეული ორი მდებარეობა, რომელთაც, პირობით, საწყისი და ბოლო მდებარეობა შეიძლება ვუწოდოთ. ვთქვათ A და B მდებარეობას t პარამეტრის t_0 და t_1 მნიშვნელობები შეესაბამება. კინემატიკურად დასაშვები წირები (მოძრაობები) ეუწოდოთ ზემოხსენებულ s განზომილებიან სივრცის წირებს, რომელნიც A და B წერტილებზე გადიან და რომელზედაც მოძრაობისას t_1-t_0 დროში მატერიალურ წერტილთა სისტემა გადავა A მდებარეობიდან B მდებარეობაში (საწყისი მდებარეობიდან ბოლო მდებარეობაში).

დავუშვათ ჯერჯერობით, რომ სისტემაზე უშუალოდ მოქმედი ძალები პოტენციალურია და განვიხილოთ ინტეგრალი

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad (43,1)$$

სადაც L არის ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = T - V. \quad (43,2)$$

(43,1) ტოლობით განსაზღვრულ S ფუნქციას ჰამილტონის ქმედებას უწოდებენ. ცხადია, ჰამილტონის ქმედება დამოკიდებულია კინემატიკურად დასაშვებ წირებზე. სხვადასხვა ასეთ წირზე S ღებულობს სხვადასხვა მნიშვნელობას. ჰამილტონის პრინციპი საშუალებას იძლევა კინემატიკურად დასაშვები წირებიდან ვიპოვოთ ის წირი, რომელზედაც ნამდვილად მოხდება სისტემის მოძრაობა. განსახილველი პოტენციალური ძალების შემთხვევაში ეს პრინციპი ასე ჩამოყალიბდება:

კინემატიკურად დასაშვები წირებიდან სისტემა ნამდვილად იმოძრაეებს იმ წირზე, რომლისთვისაც ჰამილტონის ქმედების იზოქრონული ვარიაცია ტოლია ნულის:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0. \quad (43,3)$$

როცა $\delta S = 0$, მაშინ ამბობენ, რომ S ღებულობს სტაციონარულ მნიშვნელობას, ამიტომ ამ პრინციპს ხშირად შემდეგი სახით აყალიბებენ:

კინემატიკურად დასაშვები წირებიდან სისტემა ნამდვილად იმოძრაეებს იმ წირზე, რომლისთვისაც ჰამილტონის

ქმედებას აქვს სტაციონარული მნიშვნელობა. აღნიშნულის გამო, ამ პრინციპს ხშირად სტაციონარული ქმედების პრინციპს უწოდებენ.

თუ (43,3) ტოლობაში L -ის ნაცვლად შევიტანთ (43,2) მნიშვნელობას და გავითვალისწინებთ, რომ

$$-\delta F = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j,$$

სადაც Q_j ($j=1, 2, \dots, s$) განზოგადებული ძალებია, მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \right) dt = 0. \quad (43,4)$$

არაპოტენციალური ძალების შემთხვევაში ჰამილტონის პრინციპი ასე ჩამოყალიბდება:

კინემატიკურად დასაშვები წირებიდან სისტემა ნამდვილად იმოძრაეებს იმ წირზე, რომლისთვისაც ადგილი აქვს (43,4) ტოლობას.

ვაჩვენოთ, რომ ჰამილტონის პრინციპიდან მიიღება სისტემის მოძრაობის ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები. ამით ნაჩვენები იქნება ამ პრინციპის ზოგადი ხასიათი. ცხადია, გვექნება

$$\delta T = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial q'_j} \delta q'_j \right). \quad (43,5)$$

(42,6) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$\frac{\partial T}{\partial q'_j} \delta q'_j = \frac{\partial T}{\partial q'_j} \frac{d}{dt} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_j} \delta q_j \right) - \delta q_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j}. \quad (43,6)$$

(43,5) და (43,6) ტოლობების გათვალისწინებით, (43,4) ტოლობა მოგვცემს

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} + Q_j \right) \delta q_j dt + \left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (43,7)$$

მაგრამ, ვინაიდან δq_j ნულის ტოლია A და B კონფიგურაციისათვის, ე. ი. როცა $t=t_0$ და $t=t_1$, ამიტომ

$$\left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0.$$

ვინაიდან (t_0, t_1) ნებისმიერად აღებული შუალედია, ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} + Q_j \right) \delta q_j = 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ δq_j ($j=1, 2, \dots, s$) დამოუკიდებელი ვარიაციებია და უკანასკნელი ტოლობა კი იგივეურად უნდა იყოს შესრულებული, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (43,8)$$

ეს უკანასკნელი ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს წარმოადგენენ და ზემონათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

თუ ძალები პოტენციალურია, მაშინ, ზემომოყვანილის ანალოგიურად (43,3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (43,9)$$

ჰამილტონის პრინციპი შეიძლება მივიღოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებიდან. მაგალითისათვის, განვიხილოთ პოტენციალური ძალების შემთხვევა. გავამრავლოთ (43,9) ტოლობა δq_j -ზე და ავჯამოთ, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (43,10)$$

(42,6) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q_j \right) - \frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q'_j.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (43,10) ტოლობაში შევიტანთ, გვექნება

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q'_j \right) = 0.$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\delta L = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q'_j \right),$$

ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

$$\int_{t_0}^t \delta L dt - \left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ A და B კონფიგურაციისათვის $\delta q_j = 0$, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\int_{t_0}^t \delta L dt = 0,$$

და ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (43,8) სისტემიდან მიიღება (43,4) ტოლობა.

განვიხილოთ იაკობ-ოსტროგრადსკის განტოლება (იხ. § 19):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_1, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) = 0 \quad (43,11)$$

და გამოვარკვიოთ რა კავშირი არსებობს იაკობის S მთავარ ფუნქციასა და ჰამილტონის ქმედებას შორის. როგორც ვიცით, (43,11) განტოლების სრულ ინტეგრალს აქვს სახე

$$S = S_0(t, q_1, \dots, q_s, a_1, \dots, a_s) + a_{s+1}, \quad (43,12)$$

სადაც a_1, a_2, \dots, a_{s+1} ნებისმიერი მუდმივებია.

თუ ჰამილტონის ქმედების გამოსახულებაში t_1 -ის ნაცვლად ავიღებთ t ცვლადს, მივიღებთ

$$S = \int_{t_0}^t L dt,$$

საიდანაც

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (43,13)$$

(43,12) ტოლობით განსაზღვრული მთავარი S ფუნქციისათვის, ცხადია, გვექნება

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} q'_i.$$

მაგრამ, ვინაიდან $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა, (43,11) ტოლობის გათვალისწინებით, ასე გადაიწერება:

$$\frac{dS}{dt} = -H + \sum_{i=1}^s p_i q'_i. \quad (43,14)$$

როგორც ვიცით, ჰამილტონის ფუნქციას აქვს სახე (იხ. § 17)

$$H = \sum_{i=1}^s p_i q'_i - L. \quad (43,15)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (43,14) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (43,16)$$

(43,13) და (43,16) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს, რომ ჰამილტონის ქმედება და იაკობის მთავარი ფუნქცია მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით შეიძლება განსხვავდებოდნენ.

ზემოთ განხილული პრინციპი სტაციონარული ბმების შემთხვევაში პირველად ჩამოყალიბებული და დასაბუთებული იყო ჰამილტონის მიერ. შემდეგ,

ჰამილტონის შედეგები არასტაციონარული ბმების შემთხვევაში განზოგადებული იქნა ოსტროგრადსკის მიერ, ამიტომ ამ პრინციპს, ხშირად, ჰამილტონ-ოსტროგრადსკის პრინციპს უწოდებენ.

§ 44. ჰამილტონის კანონიერი განტოლებების მიღება
ჰამილტონის პრინციპიდან

(43,15) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$L = \sum_{i=1}^s p_i q'_i - H.$$

თუ L -ის ამ მნიშვნელობას (43,3) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - p_i \delta q'_i - q'_i \delta p_i \right) dt = 0. \quad (44,1)$$

(42,6) ტოლობის ძალით, ცხადია შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$p_i \delta q'_i = p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - p'_i \delta q_i.$$

ამ მნიშვნელობის (44,1) ტოლობაში შეტანით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^s \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + p'_i \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - q'_i \right) \delta p_i \right] dt - \\ - \left[\sum_{i=1}^s p_i \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \end{aligned} \quad (44,2)$$

ვინაიდან A და B კონფიგურაციისათვის $\delta q_i = 0$, ამიტომ

$$\left[\sum_{i=1}^s p_i \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

თუ, ამის გარდა, გავითვალისწინებთ, რომ (t_0, t_1) შუალედი ნებისმიერად შეიძლება იყოს აღებული, (44,2) ტოლობა მოგვცემს

$$\sum_{i=1}^s \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + p'_i \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - q'_i \right) \delta p_i \right] = 0.$$

მაგრამ, ვინაიდან δq_i და δp_i დამოუკიდებელი ვარიაციებია, ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში მათი კოეფიციენტები ნულის ტოლი უნდა იყოს და ვღებულობთ

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p'_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (44,3)$$

ეს უკანასკნელი ჰამილტონის კანონიკური განტოლებებია და ამით ნაჩვენებია რომ ჰამილტონის პრინციპიდან პირდაპირ მიიღება ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები.

§ 45. უმცირესი ქმედების პრინციპი

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, ბმები კი — სტაციონარული. ვინაიდან $L = T - V = T + U$, სადაც U პოტენციალს აღნიშნავს, ამიტომ ჰამილტონის ქმედება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ ($t_0 = 0$):

$$S = \int_0^{t_1} (T + U) dt. \quad (45,1)$$

როგორც ვიცით, როცა სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციალურია, ბმები კი — სტაციონარული, მაშინ აღვილი აქვს ცოცხალი ძალის ინტეგრალს

$$T - U = h, \quad (45,2)$$

სადაც h ნებისმიერი მუდმივია (სისტემის საწყისი ენერგია). (45,2) ტოლობის ძალით, (45,1) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$S = \int_0^{t_1} 2T dt - ht_1, \quad (45,3)$$

ანუ

$$S = W - ht_1, \quad (45,4)$$

სადაც

$$W = \int_0^{t_1} 2T dt. \quad (45,5)$$

(45,5) ტოლობით განსაზღვრულ W ფუნქციას ეწოდება ლაგრანჟის ქმედება. (45,4) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ლაგრანჟის ქმედება ემთხვევა § 19-ში განხილულ IV კანონიკურ ფუნქციას.

ისე როგორც წინა პარაგრაფში, მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობა დავახსიათოთ s განზომილებიან სივრცეში ერთი წერტილის მოძრაობით. განვიხილოთ s განზომილებიანი სივრცის წირები, რომელნიც ორ ფიქსირებულ A და B წერტილებზე გაივლიან. ვთქვათ, ყოველ ასეთ წირზე სრული ენერგია h ერთნაირია. ისეთ წირებს, რომელნიც გადიან A და B წერტილებზე და ყოველ მათგანზე სისტემის მოძრაობას ერთი და იმავე h ენერგია შეესაბამება, ვუწოდოთ კინემატიკურად დასაშვები წირები. სხვადასხვა წირზე A -დან B -მდე მოძრაობის დრო შეიძლება იყოს სხვადასხვა, განსხვავებით წინა პარაგრაფში განხილული კინემატიკურად დასაშვები წირებისა.

უმცირესი ქმედების პრინციპი, რომელსაც ხშირად მოპერტიუი—ლაგრანჟის პრინციპს უწოდებენ, შემდეგში მდგომარეობს:

ზემოხსენებული კინემატიკურად დასაშვები წირებიდან სისტემა ნამდვილად იმოძრაავებს იმ წირზე, რომლის-

თვისაც ლაგრანჟის ქმედების სრული ვარიაცია ნულის ტოლია ($\Delta W=0$).

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებიდან მიიღება უმცირესი ქმედების პრინციპი. ამისთვის ლაგრანჟის განტოლებები

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (45,6)$$

გავამრავლოთ Δq_i სრულ ვარიაციაზე და ავჯამოთ, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i = 0. \quad (45,7)$$

ცხადია, გვექნება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial q'_i} \frac{d}{dt} \Delta q_i. \quad (45,8)$$

(42,11) ფორმულის ძალით,

$$\frac{d}{dt} \Delta q_i = \Delta q'_i + q'_i \frac{d}{dt} \Delta t.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (45,8) ტოლობაში შევითავსებთ, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q'_i - \frac{\partial L}{\partial q'_i} q'_i \frac{d}{dt} \Delta t. \quad (45,9)$$

უკანასკნელი მნიშვნელობის (45,7) ტოლობაში შეტანით ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i - \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q'_i \right) - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_i} q'_i \frac{d}{dt} \Delta t = 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_i} q'_i = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i = 2T,$$

$$\sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q'_i \right) = \Delta L,$$

უკანასკნელი ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i - \Delta L - 2T \frac{d}{dt} \Delta t = 0.$$

თუ მოვახდენთ ინტეგრირებას, მივიღებთ

$$\int_0^{t_1} \Delta L dt + \int_0^{t_1} 2T d\Delta t - \left[\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i \right]_0^{t_1} = 0.$$

მაგრამ, ვინაიდან A და B კონფიგურაციისათვის $\Delta q_i = 0$, ამიტომ

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Delta q_i \right]_0^{t_1} = 0$$

და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\int_0^{t_1} \Delta L dt + \int_0^{t_1} 2T d\Delta t = 0. \quad (45,10)$$

ვინაიდან ადგილი აქვს ტოლობებს

$$T' - U = h,$$

$$T + U = I,$$

ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$L = 2T' - h.$$

მაგრამ, ვინაიდან კინემატიკურად დასაშვებ წირებზე h ერთნაირია, ამიტომ $\Delta h = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\Delta L = \Delta 2T.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (45,10) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\int_0^{t_1} \Delta(2T) dt + \int_0^{t_1} 2T d\Delta t = 0. \quad (45,11)$$

ვაჩვენოთ, რომ $d\Delta t = \Delta dt$. ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$t^* = t + \varepsilon w(t),$$

სადაც ε უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, $w(t)$ —წარმოებადი ფუნქცია. ვინაიდან

$$\Delta t = t^* - t = \varepsilon w(t), \quad (45,12)$$

ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$d\Delta t = dt^* - dt = \varepsilon w'(t) dt. \quad (45,13)$$

თუ (45,12) ტოლობაში t -ს ნაცვლად ავიღებთ dt -ს, მივიღებთ

$$\Delta dt = dt^* - dt = \varepsilon w'(t) dt.$$

უკანასკნელი ტოლობის შედარება (45,13) ტოლობასთან გვაძლევს

$$d\Delta t = \Delta dt. \quad (45,14)$$

(45,14) ტოლობის ძალით, (45,11) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\int_0^{t_1} \Delta(2T) dt + \int_0^{t_1} 2T d\Delta t = \int_0^{t_1} \Delta(2T) dt = \Delta \int_0^{t_1} 2T dt = \Delta W = 0.$$

ამით ნაჩვენებია, რომ (45,6) განტოლებებიდან მიიღება უმცირესი ქმედების პრინციპი.

აღვილია ჩვენება აგრეთვე, რომ უმცირესი ქმედების პრინციპიდან მიიღება ლაგრანჟის (45,6) განტოლებები.

21. ერთნაირი მასის ორი მძიმე მატერიალური წერტილი M_1 და M_2 შეერთებულია ერთმანეთთან l სიგრძის ღეროთი, რომლის წონაც მხედველობაში არ მიიღება. ღერო მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში ისე, რომ მისი შუაწერტილის სიჩქარე ღეროს გასწვრივ არის მიმართული. დავწეროთ აღებული სისტემის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში (ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები).

ვიგულისხმობთ, რომ თითოეული წერტილის მასა ერთის ტოლია. კოორდინატთა Oxy სისტემა ავიღოთ ხსენებულ ვერტიკალურ სიბრტყეში. ვინაიდან ღეროს სიგრძე უცვლელია, ამიტომ თუ M_1 და M_2 წერტილების კოორდინატებს აღვნიშნავთ შესაბამად x_1, y_1 და x_2, y_2 -ით, მივიღებთ

$$f \equiv \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2] = 0. \quad (1)$$

თუ ღეროს შუაწერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_c, y_c -თი, გვექნება

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

საიდანაც ხსენებული შუაწერტილის სიჩქარისათვის ვღებულობთ

$$\vec{v}_c = \left(\frac{x_1' + x_2'}{2}, \frac{y_1' + y_2'}{2} \right).$$

პირობის ძალით $\vec{v}_c \perp \overline{M_1 M_2}$ და მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{x_1' + x_2'}{x_2 - x_1} = \frac{y_1' + y_2'}{y_2 - y_1},$$

საიდანაც

$$\varphi \equiv (x_2 - x_1)(y_1' + y_2') - (y_2 - y_1)(x_1' + x_2') = 0. \quad (2)$$

ამრიგად, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება (1) და (2) განტოლებებით განსაზღვრულ ბმებს, რომელთაგან (1) არის პოლონომური, ხოლო (2) არაპოლონომური. ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები განსახილველ შემთხვევაში მოგვცემს (იხ. § 23):

$$\begin{aligned} x_1'' &= -\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \\ y_1'' &= -g - \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1), \\ x_2'' &= \lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \\ y_2'' &= -g + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

სადაც λ და μ ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლებია. ამ განტოლებებს უნდა დავმატოთ აგრეთვე ბმების (1) და (2) განტოლებები. გვაქვს 6 განტოლება 6 უცნობით $x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda, \mu$. ამ სისტემის ინტეგრება ცნელი არ არის.

22. მძიმე მატერიალური წერტილი, რომლის წონა უდრის p -ს, მოძრაობს გლუვ სიბრტყეზე, რომელიც მოცემულია განტოლებით

$$f \equiv ax + by + cz + d = 0. \quad (3)$$

ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები და რეაქციის ძალა.

კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა ისე ავიღოთ, რომ Oz ღერძი მოგეზული იყოს სიმძიმის ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით. თუ სიმძიმის ძალას აღვნიშნავთ \vec{F} -ით, ცხადია გვექნება

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -p.$$

ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები მოგვცემს

$$mx'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad my'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad mz' = -p + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (4)$$

სადაც $m = \frac{p}{g}$. ამ განტოლებებს უნდა დავმატოს აგრეთვე ბმის (3) განტოლება. (3)-ის ძალით, (4) ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$mx'' = a\lambda, \quad my'' = b\lambda, \quad mz'' = -p + c\lambda. \quad (5)$$

ვიპოვოთ ჯერ λ . ამისათვის (3) ტოლობა ორჯერ გავაწარმოოთ t -ით და გავამრავლოთ m -ზე, მივიღებთ

$$amx'' + bmy'' + cmz'' = 0.$$

(15)-ის ძალით ეს უკანასკნელი მოგვცემს

$$(a^2 + b^2 + c^2)\lambda - cp = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda = \frac{cp}{a^2 + b^2 + c^2} = \lambda_0 = \text{const.} \quad (6)$$

(5)-დან ინტეგრებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda_0 a}{2m} t^2 + C_1 t + C_2, \\ y &= \frac{\lambda_0 b}{2m} t^2 + C_3 t + C_4, \\ z &= \frac{-p + \lambda_0 c}{2m} t^2 + C_5 t + C_6. \end{aligned} \quad (7)$$

ვინაიდან წერტილი თავისუფალი არ არის, ამიტომ C_1, C_2, \dots, C_6 მუდმივებს შორის იარსებებს გარკვეული დამოკიდებულებანი. ამ დამოკიდებულებების მოსაძებნად (7) მნიშვნელობები შევიტანოთ (3) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (\lambda_0 a^2 + \lambda_0 b^2 + \lambda_0 c^2 - pc) t^2 + (aC_1 + bC_3 + cC_5) t + \\ + C_2 + C_4 + C_6 + d = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

t^2 -ის კოეფიციენტი ნულის ტოლია (6)-ის ძალით, რომელიც ნებისმიერ მუდმივებს არ შეიცავს. (8)-დან t -ს პირველი ხარისხის კოეფიციენტისა და თავისუფალი წევრის ნულთან გატოლებით, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} aC_1 + bC_3 + cC_5 &= 0, \\ C_2 + C_4 + C_6 + d &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

ამრიგად, C_1, C_2, \dots, C_8 მუდმივებს შორის ნებისმიერი იქნება მხოლოდ 4, რომელნიც სათანადო საწყისი პირობებით განისაზღვრებიან.

ვიპოვოთ ახლა რეაქციის კომპონენტები. ცხადია, გვექნება

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (10)$$

სადაც \vec{R} რეაქციის ძალაა.

(10) ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგვემიღებოთ ვლელულობთ

$$mx'' = R_x, \quad my'' = R_y, \quad mz'' = -p + R_z. \quad (11)$$

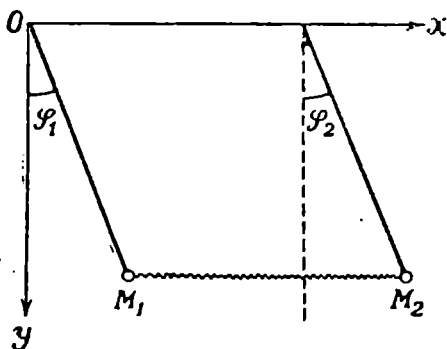
უკანასკნელი ტოლობების (5)-თან შედარება გვაძლევს

$$R_x = a\lambda_0, \quad R_y = b\lambda_0, \quad R_z = c\lambda_0. \quad (12)$$

23. ორი მათემატიკური საქანის დაკიდების წერტილები მოთავსებულია ერთსა და იმავე ჰორიზონტალურ წრფეზე. ვთქვათ, ორივე საქანს აქვს ერთნაირი მასა m და ერთნაირი სიგრძე l . ორივე საქანი ერთმანეთთან დაკავშირებულია ზამბარით, რომელიც დაუქიმავე მდგომარეობაში იმყოფება, მაშინ, როცა ორივე საქანს ვერტიკალური მდებარეობა უკავია. შევისწავლოთ აღებული სისტემის მცირე რხევა ვერტიკალურ სიბრტყეში მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში.

როგორც ადვილი მისახვედრია, ვერტიკალური მდებარეობა ორივე საქანის მდგრადი წონასწორობის მდებარეობას წარმოადგენს. სისტემაზე მოქმედებენ სიმძიმის ძალები და აგრეთვე ზამბარის დაქიზულების ძალა, რომელიც.

ჰუკის კანონის ძალით, ზამბარის წაგრძელების პროპორციულია. ავიღოთ ხსენებულ ვერტიკალურ სიბრტყეში კოორდინატთა Oxy სისტემა. ისე, რომ Ox ღერძი მიმართული იყოს ჰორიზონტალურად და გადიოდეს საქანების დაკიდების წერტილებზე, Oy ღერძი მოვგვზოთ სიმძიმის ძალის მიმართულებით. ვერტიკალურ მიმართულებასთან გადახრის კუთხეები იყოს φ_1 და φ_2 (ნახ. 126). ცხადია, მდგრად წონასწორობას ადვილი აქვს მაშინ, როცა $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. φ_1 და φ_2 კუთხეები, რომელნიც განსაზღვრავენ სისტემის მდებარეობას. მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატებად.



ნახ. 126.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სისტემის ცოცხალ ძალას განზოგადებულ კოორდინატებში ექნება სახე

$$T = \frac{a}{2} (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2), \quad (13)$$

სადაც $a = ml^2$.

ზამბარის წაგრძელება, უსასრულოდ მცირეთა გარკვეული სიზუსტით, იქნება

$$l |\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1| \approx l |\varphi_2 - \varphi_1|. \quad (14)$$

პუკის კანონის ძალით, ზამბარის დაჭიმულობის ძალის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

$$L' = \gamma l |\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1| \approx \gamma l |\varphi_2 - \varphi_1|, \quad (15)$$

სადაც γ პროპორციულობის კოეფიციენტი. ამის შემდეგ, როგორც ადვილი გამოსათვლელია, პოტენციალურ ენერგიას, უსასრულოდ მცირეთა გარკვეული სიზუსტით, ექნება სახე

$$V = mgl(1 - \cos \varphi_1) + mgl(1 - \cos \varphi_2) + \frac{\gamma l^2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (16)$$

თუ $\cos \varphi_1$ და $\cos \varphi_2$ ფუნქციებს დაეშლით მწკრივად $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ მნიშვნელობისათვის და მესამე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს უკუვაგდებთ, მივიღებთ

$$V = \frac{c}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - b\varphi_1\varphi_2, \quad (17)$$

სადაც

$$c = mgl + \gamma l^2, \quad b = \gamma l^2. \quad (18)$$

დავწეროთ ახლა ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1'} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2'} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

(13) და (17) ფორმულების ძალით, უკანასკნელი სისტემა მოგვცემს

$$\begin{aligned} a\varphi_1'' + c\varphi_1 - b\varphi_2 &= 0, \\ a\varphi_2'' + c\varphi_2 - b\varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

ამ სისტემის შესაბამ მახასიათებელ სისტემას ექნება სახე

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a\lambda^2 + c & -b \\ -b & a\lambda^2 + c \end{vmatrix} = (a\lambda^2 + c)^2 - b^2 = 0, \quad (21)$$

საიდანაც

$$\lambda^2 = \frac{-c \pm b}{a}. \quad (22)$$

თუ გავიხსენებთ a , b და c მუდმივების მნიშვნელობებს, დავრწმუნდებით, რომ λ^2 არის უარყოფითი რიცხვი. შეგვიძლია დავწეროთ $\lambda^2 = -\mu_1^2$, $\lambda^2 = -\mu_2^2$, სადაც

$$\mu_1^2 = -\frac{-c + b}{a}, \quad \mu_2^2 = \frac{c + b}{a}.$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ მახასიათებელი განტოლების ფესვები იქნება

$$\lambda_1 = i\mu_1, \quad \lambda_1' = -i\mu_1, \quad \lambda_2 = i\mu_2, \quad \lambda_2' = -i\mu_2.$$

თუ ვისარგებლებთ ზოგადი ამოხსნის დასაწერად (30,32) ფორმულებით, მივიღებთ

$$\varphi_1 = H_1 \sin(\mu_1 t + \varepsilon_1) + H_2 \sin(\mu_2 t + \varepsilon_2),$$

$$\varphi_2 = H_1 \sin(\mu_1 t + \varepsilon_1) - H_2 \sin(\mu_2 t + \varepsilon_2),$$

სადაც H_1 , H_2 , ε_1 , ε_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მყარი სხეულების დინამიკა

მატერიალურ წერტილთა ისეთ სისტემას, რომლის წერტილებს შორის მანძილი არ იცვლება, უცვლადი სისტემა ეწოდება. მატერიალურ წერტილთა უცვლად სისტემას მყარ სხეულს უწოდებენ. ჩვენ შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ხსენებული უცვლადი სისტემა უწყვეტად ავსებს სივრცის გარკვეულ ნაწილს, რომელიც რაიმე შეკრული S ფართეულით არის შემოსაზღვრული. ქვემოთ მოყვანილი ყველა შედეგი მარტივად გავრცელდება იმ შემთხვევისათვის, როცა მყარი სხეული შედგება დისკრეტულად განაწილებული მატერიალური წერტილებისაგან. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ იქ, სადაც უწყვეტი სხეულებისათვის ზოგიერთი სიდიდე ინტეგრალითაა წარმოდგენილი, დისკრეტული სისტემის შემთხვევაში ის გარკვეული ჯამის სახით იქნება წარმოდგენილი.

ბ ა ნ წ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

მ ო მ ე ნ ტ ე ბ ი

მყარი სხეულის დინამიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს სხეულში მასათა განაწილების კანონს. იმ სიდიდეებს, რომელნიც ახასიათებენ სხეულში მასათა განაწილებას, ეწოდება მ ო მ ე ნ ტ ე ბ ი. თეორიას, რომელიც სწავლობს მასათა განაწილებას სხეულში, ეწოდება მ ა ს ა თ ა გ ე ო მ ე ტ რ ი ა.

§ 1. სტატიკური მომენტები

ვთქვათ, მყარი სხეული დანაწილებულია საკმარისად მცირე განზომილების მატერიალურ ნაწილაკებად, რომელთა მასებია m_1, m_2, \dots, m_n . განვიხილოთ ვექტორი $\vec{H}_0^{(n)}$, რომელიც შემდეგი ტოლობით არის განსაზღვრული:

$$\vec{H}_0^{(n)} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (1,1)$$

სადაც $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ წარმოადგენს M_i ნაწილაკის რადიუს-ვექტორს კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის O სათავის მიმართ. თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა სხეულის დანაწილების რიცხვი უსასრულოდ იზრდება ისე, რომ ყოველი დანაყოფის განზომილებები მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, მივიღებთ

$$\vec{H}_0 = \iiint_M \vec{r} dm = \iiint_V \vec{r} \sigma(x, y, z) dx dy dz, \quad (1,2)$$

სადაც M არის სხეულის მასა, V — მოცულობა, $\sigma(x, y, z)$ — სიმკვრივე (x, y, z) წერტილში. \vec{H}_0 ვექტორს ეწოდება აღებული მყარი სხეულის სტატიკური მომენტი O წერტილის მიმართ (პირველი რიგის მომენტი O წერტილის მიმართ). ცხადია, $(1,1)$ ტოლობა, როცა n საკმარისად დიდია, იძლევა აღებული მყარი სხეულის სტატიკური მომენტის მიახლოებით მნიშვნელობას.

თუ მყარი სხეული წარმოადგენს n მატერიალურ წერტილისაგან შემდგარ უცვლად სისტემას, მაშინ $(1,1)$ ტოლობით განსაზღვრული ვექტორი წარმოადგენს სტატიკურ მომენტს O წერტილის მიმართ.

თუ $(1,2)$ ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} H_{0x} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) x dV, \\ H_{0y} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) y dV, \\ H_{0z} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) z dV. \end{aligned} \quad (1,3)$$

H_{0x} , H_{0y} და H_{0z} სიდიდეებს ეწოდება სტატიკური მომენტები შესაბამად yz , zx და xy სიბრტყეების მიმართ.

აღნიშნოთ \vec{r}_c -თი აღებული მყარი სხეულის ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი. როგორც ვიცით (იხ. IV თავის § 15),

$$M \vec{r}_c = \iiint_V \sigma(x, y, z) \vec{r} dV = \vec{H}_0.$$

უკანასკნელი ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილება გვაძლევს

$$\begin{aligned} H_{0x} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) x dV = M x_c, \\ H_{0y} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) y dV = M y_c, \\ H_{0z} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) z dV = M z_c. \end{aligned} \quad (1,4)$$

ვთქვათ, ინერციის ცენტრი მოთავსებულია რომელიმე სიბრტყეზე, მაგალითად, yOz სიბრტყეზე, მაშინ $x_c = 0$ და $H_{0x} = 0$. ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ სტატიკური მომენტი იმ სიბრტყის მიმართ, რომელზედაც მოთავსებულია ინერციის ცენტრი, ნულის ტოლია.

$(1,1)$ ტოლობის გამოყენებით ვრწმუნდებით, რომ იგივე შედეგი გვექნება დისკრეტული წერტილებისაგან შემდგარი უცვლადი სისტემისათვისაც.

მყარი სხეულების დინამიკაში ხშირად გვხვდება შემდეგი სიდიდეები:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) (y^2 + z^2) dV, \\ J_{yy} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) (x^2 + z^2) dV, \\ J_{zz} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) (x^2 + y^2) dV; \end{aligned} \quad (2,1)$$

$$\begin{aligned} J_{(yy)} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) x^2 dV, \\ J_{(xx)} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) y^2 dV, \\ J_{(zz)} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) z^2 dV; \end{aligned} \quad (2,2)$$

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) yz dV, \\ J_{zx} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) xz dV, \\ J_{xy} &= \iiint_V \sigma(x, y, z) xy dV; \end{aligned} \quad (2,3)$$

$$J_0 = \iiint_V \sigma(x, y, z) (x^2 + y^2 + z^2) dV, \quad (2,4)$$

რომელთაც მეორე რიგის მომენტები ეწოდება.

• J_{xx} გამოსახულებას ეწოდება მყარი სხეულის ინერციის მომენტი x ღერძის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ J_{xx} -ის გამოსახულებაში შემავალი ჯამი $y^2 + z^2$ გამოსახავს (x, y, z) წერტილიდან მანძილს Ox ღერძამდე. ასევე J_{yy} , J_{zz} წარმოადგენენ ინერციის მომენტებს შესაბამის Oy და Oz ღერძების მიმართ. $J_{(yy)}$ სიდიდეს, რომლის გამოსახულებაში შემავალი x^2 წარმოადგენს მანძილს (x, y, z) წერტილიდან yz სიბრტყემდე, ეწოდება მყარი სხეულის ინერციის მომენტი yz სიბრტყის მიმართ. ასევე $J_{(xx)}$ და $J_{(zz)}$ წარმოადგენენ ინერციის მომენტებს შესაბამის xz და xy სიბრტყეების მიმართ. (2,3) ტოლობებით განსაზღვრულ J_{yz} , J_{zx} , J_{xy} სიდიდეებს ეწოდება ინერციის ნამრავლები. (2,4) ტოლობით განსაზღვრულ J_0 სიდიდეს ეწოდება ინერციის მომენტი O წერტილის მიმართ, ანუ პოლარული მომენტი.

შემომოყვანილი ფორმულებიდან გამომდინარეობს მეორე რიგის მომენტების შემდეგი თვისებები:

- 1°. $J_{(yy)} + J_{(zz)} + J_{(xy)} = J_0$,
- 2°. $J_{xx} + J_{yy} + J_{zz} = 2J_0$,

3°. J_{xx} , J_{yy} და J_{zz} სიდიდეებს ისეთივე თვისება აქვთ, როგორიც სამკუთხედის გვერდებს, ე. ი. ორი მათგანის ჯამი ყოველთვის მეტია მესამეზე. ვაჩვენოთ, მაგალითად, რომ

$$J_{xx} + J_{yy} > J_{zz}. \quad (2,5)$$

(2,1) ფორმულების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$J_{xx} + J_{yy} = \iiint_V \sigma(x, y, z) (x^2 + y^2) dV + 2 \iiint_V \sigma(x, y, z) z^2 dV. \quad (2,6)$$

მაგრამ, ვინაიდან $2 \iiint_V \sigma(x, y, z) z^2 dV = 2J_{zz} > 0$, ამიტომ (2,6) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$J_{xx} + J_{yy} > \iiint_V \sigma(x, y, z) (x^2 + y^2) dV = J_{zz}.$$

დისკრეტული უცვლადი სისტემის შემთხვევაში

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2).$$

ანალოგიურად დაიწერება ამ შემთხვევაში სხვა მეორე რიგის მომენტების გამოსახულებაც. როგორც აღვილი მისახვედრია, ასეთი სისტემის შემთხვევაში

$$J_{xx} + J_{yy} \geq J_{zz}.$$

ტოლობას ექნება ადგილი, თუ აღებული დისკრეტული სისტემა განაწილებულია xOy სიბრტყეზე (ამ შემთხვევაში $J_{zz} = 0$).

ცხადია, მყარი სხეულის ინერციის მომენტი x ღერძის მიმართ შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$J_{xx} = M i_{xx}^2, \quad (2,7)$$

სადაც M არის მყარი სხეულის მთელი მასა. (2,7) ტოლობიდან განსაზღვრულ

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{J_{xx}}{M}}, \quad (2,8)$$

სიდიდეს ეწოდება ინერციის რადიუსი. როგორც აღვილი მისახვედრია, ინერციის რადიუსი წარმოადგენს მანძილს x ღერძამდე იმ წერტილიდან, სადაც უნდა მოვათავსოთ მთელი სხეულის მასა, რომ მისი მომენტი x ღერძის მიმართ ტოლი იყოს აღებული მყარი სხეულის მომენტისა ამავე ღერძის მიმართ. ცხადია, ხსენებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი წარმოადგენს წრიულ ცილინდრულ ფართეულს, რომლის რადიუსი i_{xx} -ის ტოლია და რომლის ცენტრალურ ღერძსაც x ღერძი წარმოადგენს.

განვიხილოთ ნებისმიერი Δ ღერძი და განვმარტოთ ამ ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი. განვიხილოთ სხეულის ნებისმიერი $N(x, y, z)$ წერტილი და მანძილი ამ წერტილიდან Δ ღერძამდე აღვნიშნოთ ρ -თი. $\sigma(x, y, z)$ იყოს სიმკვრივე აღებულ $N(x, y, z)$ წერტილში. J_Δ სიდიდეს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$J_{\Delta} = \iiint_V \rho^2 dm = \iiint_V \rho^2 \sigma(x, y, z) dV,$$

ეწოდება მყარი სხეულის ინერციის მომენტი Δ ღერძის მიმართ.

ვთქვათ, სხეული ერთგვაროვანია, ე. ი. $\sigma = \text{const}$, მაშინ, ცხადია, გვექნება

$$J_{\Delta} = \sigma \iiint_V \rho^2 dV = \sigma \iiint_V \rho^2 dx dy dz.$$

გამოსახულებას

$$\iiint_V \rho^2 dx dy dz$$

ეწოდება მყარი სხეულის გეომეტრიული მომენტი, ანუ მოცულობის გეომეტრიული მომენტი Δ ღერძის მიმართ. ცხადია, რაიმე ღერძის მიმართ ერთგვაროვანი მყარი სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელად საკმარისია ვიპოვოთ მოცულობის გეომეტრიული მომენტის მნიშვნელობა ამავე ღერძის მიმართ. სავესებით ანალოგიურად განიშარტება მყარი სხეულის მოცულობის გეომეტრიული მომენტი რაიმე სიბრტყის მიმართ.

როგორც ადვილი მისახვედრია, ღერძის მიმართ მყარი სხეულის ინერციის მომენტის განზომილება იქნება $[m] L^2$, სადაც $[m]$ აღნიშნავს მასის განზომილებას, ხოლო L კი — სიგრძის განზომილებას. მოცულობის გეომეტრიული მომენტის განზომილება იქნება L^3 (სიმკვრივის განზომილება უდრის $\frac{[m]}{L^3}$).

ვთქვათ, მყარი სხეული წარმოადგენს რაიმე S ფართეულის გასწვრივ უწყვეტად განლაგებულ უცვლად სისტემას. გამოვთვალოთ მისი ინერციის მომენტი Δ ღერძის მიმართ. ცხადია, გვექნება

$$J_{\Delta} = \iint_S \rho^2 dm = \iint_S \rho^2 \sigma ds.$$

თუ სხეული ერთგვაროვანია, მაშინ ვღებულობთ

$$J_{\Delta} = \sigma \iint_S \rho^2 ds.$$

გამოსახულებას $\iint_S \rho^2 ds$ ეწოდება ფართობის გეომეტრიული მომენტი

Δ ღერძის მიმართ. ფართობის გეომეტრიული მომენტის განზომილება იქნება L^4 .

ვთქვათ ახლა, მასა უწყვეტად განაწილებულია რაიმე l წირის გასწვრივ და, მაშასადამე, მყარი სხეული, გარკვეული მიახლოებით, შეიძლება განხილული იყოს, როგორც წირი. მაშინ Δ ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის გამოსათვლელად გვექნება ფორმულა

$$J_{\Delta} = \int_l \rho^2 dm = \int_l \rho^2 \sigma dl.$$

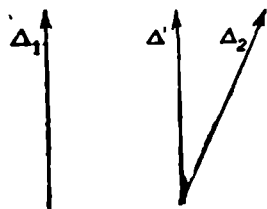
თუ სხეული ერთგვაროვანია, მაშინ ვღებულობთ

$$J_{\Delta} = \sigma \int_l \rho^2 dl.$$

გამოსახულებას $\int \rho^2 dl$ ეწოდება აღებული წირის გეომეტრიული მომენტი Δ

ღერძის მიმართ. წირის გეომეტრიული მომენტის განზომილება იქნება L^3 .

დავსვათ შემდეგი საკითხი, როგორ უნდა გამოვთვალოთ ნებისმიერი ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი, თუ რომელიმე ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი ცნობილია? ამ საკითხის გადაწყვეტისათვის საკმარისია ვიცოდეთ:



ნახ. 127.

1. მოცემული ღერძის პარალელურ წრფეთა კონის მიმართ ინერციის მომენტის გამოთვლა.

2. მოცემული ღერძის რომელიმე წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის მიმართ ინერციის მომენტის გამოთვლა.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია მყარი სხეულის ინერციის მომენტი რაიმე Δ_1 ღერძის მიმართ და გვინდა გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი ნებისმიერი Δ_2 ღერძის მიმართ (ნახ. 127). ამისათვის შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი Δ_1 ღერძის პარალელურ Δ' ღერძის მიმართ, რომელიც Δ_2 ღერძს კვეთს, ხოლო შემდეგ კი გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი Δ_2 ღერძის მიმართ.

§ 3. ინერციის მომენტი პარალელურ წრფეთა კონის მიმართ

განვიხილოთ ინერციის მომენტი Ox ღერძის მიმართ

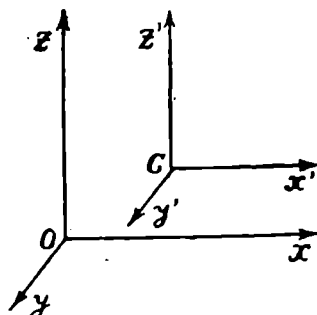
$$J_{xx} = \iiint_V \sigma(y^2 + z^2) dV \quad (3,1)$$

და გამოვსახოთ ის ინერციის C ცენტრში გამავალ Ox -ის პარალელურ x' ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის საშუალებით. ამისათვის ავიღოთ ახალი $Cx'y'z'$ მართკუთხა კოორდინატა სისტემა, რომლის ღერძებიც Ox , Oy და Oz ღერძების პარალელურია (ნახ. 128). ცხადია, ადგილი აქვს კოორდინატთა გარდაქმნის შემდეგ ფორმულებს:

$$\begin{aligned} x &= x_c + x', \\ y &= y_c + y', \\ z &= z_c + z', \end{aligned} \quad (3,2)$$

სადაც x_c , y_c , z_c ინერციის ცენტრის კოორდინატებია.

(3,2) ფორმულების ძალით, (3,1) ტოლობა მოგვცემს



ნახ. 128.

$$J_{xx} = \iiint_V \sigma(y'^2 + z'^2) dV + M(y_c^2 + z_c^2) + 2y_c \iiint_V \sigma y' dV + 2z_c \iiint_V \sigma z' dV, \quad (3,3)$$

სადაც M არის მთელი სხეულის მასა. ვინაიდან სტატიკური მომენტი იმ სიბრტყის მიმართ, რომელზედაც ინერციის ცენტრია მოთავსებული, ნულის ტოლია, ამიტომ, ცხადია, გვექნება

$$\iiint_V \sigma y' dV = \iiint_V \sigma z' dV = 0.$$

ამის გარდა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ (3,3) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი წარმოადგენს ინერციის მომენტს x' ღერძის მიმართ, (3,3) ტოლობა მოგვცემს

$$J_{xx} = J_{x'x'} + M(y_c^2 + z_c^2). \quad (3,4)$$

(3,4) ტოლობა გვარწმუნებს შტეინერის შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. რომელიმე ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი უდრის ინერციის ცენტრში გამავალ მისი პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს მიმატებული მთელი სხეულის მასა გამრავლებული ხსენებულ ღერძებს შორის მანძილის კვადრატზე.

განვიხილოთ Δ_1 და Δ_2 პარალელური ღერძები. აღვნიშნოთ ამ ღერძების მიმართ ინერციის მომენტები შესაბამად J_1 -ით და J_2 -ით. (3,4) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} J_1 &= J_c + M d_1^2, \\ J_2 &= J_c + M d_2^2, \end{aligned} \quad (3,5)$$

სადაც J_c არის ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გადის ინერციის ცენტრში და პარალელურია Δ_1 და Δ_2 ღერძების, d_1 და d_2 აღნიშნავენ მანძილებს ინერციის ცენტრიდან Δ_1 და Δ_2 ღერძებამდე შესაბამად.

(3,5) ფორმულების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$J_2 = J_1 + M(d_2^2 - d_1^2). \quad (3,6)$$

(3,6) ფორმულა იძლევა საშუალებას გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი პარალელურ წრფეთა კონის ნებისმიერი წრფის მიმართ, თუ ცნობილია მომენტის გამოსახულება ხსენებული წრფეთა კონის რომელიმე წრფის მიმართ.

სავსებით ისე როგორც (3,4) ფორმულა იყო მიღებული, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ანალოგიურ ფორმულებს ადგილი აქვს ყველა მეორე რიგის მომენტისათვის. ასე, მაგალითად,

$$\begin{aligned} J_{(yz)} &= J_{(y'z')} + M x_c^2, \quad J_{yz} = J_{y'z'} + M y_c z_c, \\ J_0 &= J_c + M(x_c^2 + y_c^2 + z_c^2). \end{aligned} \quad (3,7)$$

ცხადია, ყველა ზემომოყვანილი ფორმულა სამართლიანია უცვლადი დისკრეტული სისტემისათვისაც.

§ 4. ინერციის მომენტი ერთ წერტილზე გავავალ წრფეთა კონის მიმართ

განვიხილოთ ნებისმიერი l ღერძი და გამოვარკვიოთ რა სიდიდეებაა საჭირო იმისათვის, რომ შეგვეძლოს ამ ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის დაწერა. ავიღოთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა ისე, რომ l ღერძი გადიოდეს ამ სისტემის სათავეში და აღვნიშნოთ l ღერძის გეზის კოსინუსები (მგეზავის კოორდინატები) α , β , γ -თი. თუ l ღერძის მგეზავს აღვნიშნავთ \vec{l} -ით, მივიღებთ

$$\vec{l} = (\alpha, \beta, \gamma).$$

განვიხილოთ სხეულის ნებისმიერი $N(x, y, z)$ წერტილი და მანძილი ამ წერტილიდან l ღერძამდე აღენიშნოთ ρ -თი (ნახ. 129).

ინერციის მომენტის განმარტების ძალით, l ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს ექნება სახე

$$J_l = \iiint_V \sigma \rho^2 dV. \quad (4,1)$$

ცხადია, გვექნება (ნახ. 129)

$$\rho^2 = (ON)^2 - (OK)^2.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$(ON)^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad OK = (\vec{ON} \cdot \vec{l}) = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\begin{aligned} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2 = & (1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + \\ & + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz - 2\alpha\beta xy. \end{aligned} \quad (4,2)$$

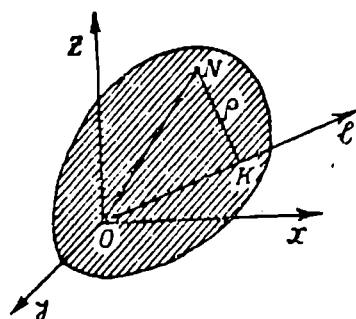
მაგრამ, ვინაიდან $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, ამიტომ

$$1 - \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad 1 - \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad 1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (4,2) ტოლობაში შევითანთ, ადვილად მივიღებთ

$$\rho^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz - 2\alpha\beta xy.$$

ამ მნიშვნელობის (4,1) ფორმულაში შეტანით, ვღებულობთ



ნახ. 129.

$$\begin{aligned} J_l = & \alpha^2 \iiint_V \sigma(y^2 + z^2) dV + \\ & + \beta^2 \iiint_V \sigma(x^2 + z^2) dV + \\ & + \gamma^2 \iiint_V \sigma(x^2 + y^2) dV - \\ & - 2\beta\gamma \iiint_V \sigma yz dV - 2\alpha\gamma \iiint_V \sigma xz dV - \\ & - 2\alpha\beta \iiint_V \sigma xy dV. \end{aligned}$$

თუ გავიხსენებთ კოორდინატთა ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებისა და ინერციის ნამრავლების გამოსახულებებს (იხ. (2,1) და (2,3) ფორმულები), უკანასკნელი ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$J_l = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\alpha\gamma - 2J_{xy}\alpha\beta. \quad (4,3)$$

ამრიგად, ნებისმიერი l ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის გამოთვლისათვის საჭიროა ვიცოდეთ კოორდინატთა ღერძების მიმართ ინერციის მომენტები და ინერციის ნამრავლები.

(4,3) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ l ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი წარმოადგენს ამ ღერძის გეზის კოსინუსების კვადრატულ ფორმას. ვინაიდან J_l , როგორც ეს (4,1) ტოლობიდან ცხადია, არ არის დამოკიდებული კოორ-

დინატოა სისტემის არჩევისაგან, ამიტომ (4,3) კვადრატული ფორმა არ არის დამოკიდებული კოორდინატა სისტემაზე.

(4,3) კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისაგან შევადგინოთ შემდეგი მატრიცი:

$$J = \begin{vmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix}, \quad (4,4)$$

რომელიც, ცხადია, სიმეტრიულ მატრიცს წარმოადგენს.

განვიხილოთ კვადრატული ფორმა

$$2\Phi(\xi, \eta, \zeta) = a_{xx}\xi^2 + a_{yy}\eta^2 + a_{zz}\zeta^2 + 2a_{xy}\xi\eta + 2a_{xz}\xi\zeta + 2a_{yz}\eta\zeta, \quad (4,5)$$

სადაც ξ, η, ζ წარმოადგენენ რაიმე ვექტორის კოორდინატებს, ხოლო კოეფიციენტები კოორდინატა (x, y, z) სისტემაზე დამოკიდებული სიმეტრიული სიდიდეებია. თუ ხსენებული კოეფიციენტები, კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, ისე იცვლება, რომ (4,5) ფორმა რჩება ინვარიანტული (უცვლელი), მაშინ ვიტყვით, რომ a_{xx}, a_{yy}, \dots სიდიდეების ერთობლიობა წარმოადგენს მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს. a_{xx}, a_{yy}, \dots სიდიდეებს ეწოდება ტენზორის კომპონენტები.

ვინაიდან (4,3) კვადრატული ფორმა ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ, ამიტომ, ცხადია, $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, -J_{xy}, -J_{xz}, -J_{yz}$ სიდიდეების ერთობლიობა წარმოადგენს მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს, რომელსაც ინერციის ტენზორი ეწოდება.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$J\vec{l} = (J_{xx}\alpha - J_{xy}\beta - J_{xz}\gamma)\vec{i} + (-J_{yx}\alpha + J_{yy}\beta - J_{yz}\gamma)\vec{j} + (-J_{zx}\alpha - J_{zy}\beta + J_{zz}\gamma)\vec{k},$$

მაშინ ადვილად მივიღებთ

$$(\vec{l}^0 \cdot J \vec{l}^0) = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yx}\beta\gamma - 2J_{xz}\alpha\gamma - 2J_{xy}\alpha\beta. \quad (4,6)$$

(4,3) და (4,6) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში

$$J_I = (\vec{l}^0 \cdot J \vec{l}^0). \quad (4,7)$$

§ 5. ინერციის ელიფსოიდი

1 ღერძზე ავიღოთ ნებისმიერი სიგრძის \vec{R} ვექტორი, რომელიც O წერტილშია მოდებული. თუ \vec{R} ვექტორის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x, y, z -ით, ცხადია, მივიღებთ

$$\alpha = \frac{x}{R}, \quad \beta = \frac{y}{R}, \quad \gamma = \frac{z}{R}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევითავსებთ (4,3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$J_I R^2 = J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yx}yz - 2J_{xz}xz - 2J_{xy}xy. \quad (5,1)$$

აღებულ O წერტილზე გამავალი ყოველი l ლერძისათვის $\vec{R} = (x, y, z)$ ვექტორი ისე შევარჩიოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$J_1 R^2 = k^2, \quad (5,2)$$

სადაც k^2 ნებისმიერად აღებული დადებითი რიცხვია. უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (5,1) ფორმულა მოგვცემს

$$2F(x, y, z) \equiv J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{xy}xz - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}xy = k^2. \quad (5,3)$$

(5,3) განტოლება, ცხადია, მეორე რიგის ფართეულის განტოლებას წარმოადგენს. ადგილი საჩვენებელია, რომ ეს ფართეული ელიფსოიდია. მართლაც, (5,2) ტოლობის ძალით,

$$R = \frac{k}{\sqrt{J_1}}.$$

ვინაიდან მყარი სხეულის ინერციის მომენტი არც ერთი ლერძის მიმართ ნულის ტოლი არ არის¹, ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობის ძალით, ხსენებულ ფართეულს უსასრულოდ შორეული წერტილი არა აქვს და, მაშასადამე, ის ელიფსოიდია.

როგორც ადგილი მისახედრია, (5,3) განტოლებით განსაზღვრული ელიფსოიდი, რომელსაც ინერციის ელიფსოიდი ეწოდება, დამოკიდებულია O წერტილის არჩევისაგან. ამიტომ (5,3) ელიფსოიდს აღებული O წერტილის შესაბამ ინერციის ელიფსოიდს უწოდებენ. ხსენებული ელიფსოიდის მთავარ ლერძებს ეწოდება სხეულის ინერციის მთავარი ლერძები. ცხადია, სხეულის ინერციის მთავარი ლერძები დამოკიდებულია O წერტილზე.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, k^2 ნებისმიერად აღებული დადებითი რიცხვია. ამ რიცხვის სხვადასხვა მნიშვნელობას მსგავსი ელიფსოიდები შეესაბამება, ამიტომ, ზოგადობის შეუზღუდველად, შეიძლება მივიღოთ $k^2 = 1$.

ინერციის ელიფსოიდი იძლევა საშუალებას გამოვთვალოთ O წერტილზე გამავალი ნებისმიერი l ლერძის მიმართ ინერციის მომენტი. მართლაც, აღვნიშნოთ ინერციის ელიფსოიდისა და l ლერძის გადაკვეთის წერტილი P -თი. (5,2) ტოლობის ძალით, l ლერძის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება

$$J_1 = \frac{k^2}{R^2}, \quad (R = OP), \quad (5,4)$$

ამრიგად, თუ O წერტილის შესაბამი ინერციის ელიფსოიდი აგებულია, მაშინ ამ წერტილზე გამავალი ნებისმიერი ლერძის მიმართ ინერციის მომენტი პირდაპირ გამოითვლება.

(5,4) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ J_1 -ს ექნება მინიმალური მნიშვნელობა, როცა R -ს აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა და პირიქით. ამრიგად, დიდ ნახევარღერძის მიმართ ინერციის მომენტს აქვს მინიმალური მნიშვნელობა, ხოლო მცირე ნახევარღერძის მიმართ მაქსიმალური მნიშვნელობა. ნათქვამიდან ცხადია, რომ ინერციის ელიფსოიდი იძლევა სხეულში მასათა განაწილების გარკვეულ გეომეტრიულ სურათს.

¹ გველისნმობთ, რომ განსაზღვრული მყარი სხეული ერთ წრფეზე მოთავსებულ უცვლად სისტემას არ წარმოადგენს.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სხეულის ინერციის მთავარი ღერძები, რომელნიც მოცემულ O წერტილს შეესაბამებიან, ეწოდება ამ წერტილის შესაბამის ინერციის ელიფსოიდის მთავარ ღერძებს. ინერციის ელიფსოიდის მთავარი ღერძების გასწვრივ, ცხადია, გვექნება

$$\vec{R} \parallel \vec{n}^0,$$

სადაც \vec{R} არის იმ წერტილის რადიუს-ვექტორი, სადაც მთავარი ღერძი ინერციის ელიფსოიდს გადაკვეთს, ხოლო \vec{n}^0 არის ინერციის ელიფსოიდის ნორმალის გვეზავი ამ წერტილში. ვინაიდან ინერციის ელიფსოიდის განტოლებას აქვს სახე

$$2F(x, y, z) \equiv J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}xz - 2J_{xy}xy = k^2,$$

და, როგორც ცნობილია (იხ. თავი V, § 7), $\text{grad } F$ პარალელურია $\vec{R} = \frac{k^2}{2}$

ფართეულის ნორმალის, ამიტომ მთავარი ღერძების გასწვრივ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\text{grad } F = \lambda \vec{R}, \quad (6,1)$$

სადაც λ პროპორციულობის კოეფიციენტი.

უკანასკნელი ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით ვღებულობთ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda z. \quad (6,2)$$

$F(x, y, z)$ ფუნქციის მნიშვნელობის გათვალისწინებით, უკანასკნელი სისტემა ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned} (J_{xx} - \lambda)x - J_{xy}y - J_{xz}z &= 0, \\ -J_{yx}x + (J_{yy} - \lambda)y - J_{yz}z &= 0, \\ -J_{zx}x - J_{zy}y + (J_{zz} - \lambda)z &= 0. \end{aligned} \quad (6,3)$$

(6,3) სისტემიდან მოძებნილი $\vec{R} = (x, y, z)$ ვექტორი, ზემოაღნიშნულის ძალით, იძლევა ინერციის ელიფსოიდის მთავარ ღერძს. ვინაიდან (6,3) სისტემა x, y, z სიდიდეების მიმართ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას წარმოადგენს, ამიტომ ამ სისტემას ექნება არატრივიალური ამოხსნა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6,4)$$

ამ განტოლების¹ ფესვები იყოს $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. ვიგულისხმობთ ჯერჯერობით, რომ ეს ფესვები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. ყოველ მათგანს შეესაბა-

¹ ეს განტოლება წარმოადგენს ე. წ. საუკუნოებრივ განტოლებას, რომლის ფესვებიც განსახილველ შემთხვევაში, როგორც ალგებრის კურსიდან ცნობილია, ნამდვილი რიცხვებია.

მება \vec{R} ვექტორის გარკვეული მნიშვნელობა და, მაშასადამე, გვექნება შემდეგი სამი მიმართულება:

$$\vec{R}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{R}_2 = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{R}_3 = (x_3, y_3, z_3).$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმართულებები ერთმანეთის მართობია. \vec{R}_1 და \vec{R}_2 ვექტორებისათვის, (6,1) განტოლების ძალით ვღებულობთ

$$(\text{grad } F)_1 = \lambda_1 \vec{R}_1, \quad (6,5)$$

$$(\text{grad } F)_2 = \lambda_2 \vec{R}_2, \quad (6,6)$$

სადაც $(\text{grad } F)_1$ და $(\text{grad } F)_2$ აღნიშნავენ $\text{grad } F$ ვექტორის მნიშვნელობებს (x_1, y_1, z_1) და (x_2, y_2, z_2) წერტილებში. თუ (6,5) ტოლობას გაავრცელებთ სკალარულად \vec{R}_2 -ზე, ხოლო (6,6) ტოლობას \vec{R}_1 -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 y_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 z_2 &= \lambda_1 (\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2 x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2 y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_2 z_1 &= \lambda_2 (\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2). \end{aligned} \quad (6,7)$$

პირდაპირ შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ (6,7) ტოლობათა მარცხენა მხარეები ტოლია და, მაშასადამე, გვექნება

$$(\lambda_1 - \lambda_2) (\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2) = 0.$$

მაგრამ, ვინაიდან $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ამიტომ

$$(\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2) = 0,$$

ე. ი. $\vec{R}_1 \perp \vec{R}_2$. ასევე დამტკიცდება, რომ $\vec{R}_1 \perp \vec{R}_3$ და $\vec{R}_2 \perp \vec{R}_3$.

ეს სამი მიმართულება, რომელნიც, ცხადია, ინერციის მთავარ ღერძებს წარმოადგენენ, მივიღოთ ახალ კოორდინატა ღერძებად. კოორდინატთა ეს ახალი სისტემა აღენიშნოთ $O\xi\eta\zeta$ -თი. ცხადია, $2F(x, y, z)$ კვადრატული ფორმა გარდაიქმნება სხვა $2F_1(\xi, \eta, \zeta)$ კვადრატულ ფორმაში:

$$2F_1(\xi, \eta, \zeta) = J_{\xi\xi}\xi^2 + J_{\eta\eta}\eta^2 + J_{\zeta\zeta}\zeta^2 - 2J_{\eta\zeta}\eta\zeta - 2J_{\xi\zeta}\xi\zeta - 2J_{\xi\eta}\xi\eta.$$

გამოვარკვეოთ ამ ფორმის კოეფიციენტების მნიშვნელობა. ამისათვის დავწეროთ (6,2) სისტემა $O\xi$ ღერძზე აღებული \vec{R}_1 ვექტორისათვის (ამ ვექტორისათვის $\eta = \zeta = 0$), მივიღებთ

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$J_{\xi\xi} = \lambda_1, \quad J_{\xi\eta} = 0, \quad J_{\xi\zeta} = 0.$$

ამრიგად, თუ $O\xi$ ღერძად მიღებულია ინერციის მთავარი ღერძი \vec{R}_1 , მაშინ ინერციის ნამრავლები, რომელნიც ξ კოორდინატს შეიცავენ, ნულის ტოლია და $\lambda_1 = J_{\xi\xi}$.

სავსებით ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ, როცა $O\eta$ ღერძად მიღებულია \bar{R}_2 ღერძი, მაშინ

$$J_{\eta\xi} = J_{\eta\zeta} = 0, \quad J_{\eta\eta} = \lambda_2.$$

ასევე, როცა $O\zeta$ ღერძად მიღებულია \bar{R}_3 ღერძი, მაშინ

$$J_{\xi\zeta} = J_{\zeta\eta} = 0, \quad J_{\zeta\zeta} = \lambda_3.$$

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ (6,4) განტოლების ფესვები ტოლია მთავარი ღერძების მიმართ ინერციის მომენტების. ვინაიდან ელიფსოიდი და მისი მთავარი ღერძები არ არიან დამოკიდებული კოორდინატთა ღერძების მიმართულებაზე, ამიტომ ცხადია, რომ (6,4) განტოლების ფესვები ინვარიანტულია კოორდინატთა ღერძების მიმართულების შეცვლის მიმართ. (6,4) განტოლების ფესვების ინვარიანტობიდან გამომდინარეობს, რომ ჯამი

$$J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}$$

აგრეთვე ინვარიანტულია. ამ თვისების სამართლიანობა ცხადია აგრეთვე § 2-ში მიღებული ტოლობიდან:

$$J_{xx} + J_{yy} + J_{zz} = 2J_0,$$

რადგან პოლარული მომენტი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა ღერძების მიმართულებაზე.

მთავარი ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებს ეწოდება მთავარი მომენტები.

ამრიგად, როცა კოორდინატთა ღერძებად მიღებულია ინერციის მთავარი ღერძები, მაშინ ინერციის ელიფსოიდის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$J_{\xi\xi} \xi^2 + J_{\eta\eta} \eta^2 + J_{\zeta\zeta} \zeta^2 = k^3.$$

ინერციის ტენზორი ამ შემთხვევაში წარმოგვიდგება, როგორც შემდეგი სახის დიაგონალური მატრიცი:

$$J = \begin{vmatrix} J_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta\zeta} \end{vmatrix}.$$

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით სხვადასხვა ფესვების შემთხვევას. ვთქვათ, $\lambda_1 = \lambda_2$. ამ შემთხვევაში $J_{\xi\xi} = J_{\eta\eta}$, ამიტომ ინერციის ელიფსოიდი წარმოადგენს ბრუნვით ელიფსოიდს და, როგორც აღვილი მისახვედრია, ბრუნვის ეკვატორიალურ სიბრტყეში მოთავსებული ყოველი მიმართულება, რომელიც O წერტილში გადის, იქნება ინერციის მთავარი ღერძი. თუ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, მაშინ ინერციის ელიფსოიდი სფეროს წარმოადგენს და ყოველი მიმართულება, რომელიც O წერტილზე გადის, ინერციის მთავარი ღერძი იქნება.

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, თუ კოორდინატთა სისტემის რომელიმე ღერძი ინერციის მთავარ ღერძს ემთხვევა, მაშინ ინერციის ნამრავლები, რომელნიც ამ ღერძის მიმართ კოორდინატებს შეიცავენ, ნულის ტოლია. ცხადია, პირიქითაც, თუ ინერციის ის ნამრავლები, რომელნიც აღებულია ღერძის მიმართ კოორდინატებს შეიცავენ ნულის ტოლია, მაშინ ეს ღერძი

იქნება ინერციის მთავარი ღერძი. მართლაც, ვთქვათ, $J_{xy} = J_{yz} = 0$. ამ შემთხვევაში ინერციის ელიფსოიდის განტოლებას აქვს სახე:

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz = k^2. \quad (6,8)$$

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ Ox ღერძი ინერციის ელიფსოიდის მთავარ ღერძს წარმოადგენს და ამით ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ერთგვაროვანი მყარი სხეული სიმეტრიულია რომელიმე ღერძის მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ ეს ღერძი იქნება ინერციის მთავარი ღერძი. მართლაც, მივიღოთ ეს ღერძი Ox ღერძად. ვინაიდან Ox ღერძი სიმეტრიის ღერძია და სხეული ერთგვაროვანია, ამიტომ, თუ ავიღებთ სხეულის ნაწილას, რომლის მასაა dm და კოორდინატებია (x, y, z) , მაშინ სხეულს ექნება სხვა ასეთივე ნაწილაკი მასით dm , რომლის კოორდინატებიც იქნება $(x, -y, -z)$ და, მაშასადამე, როგორც ადვილი მისახვედრია,

$$J_{xy} = \iiint xy dm = 0, \quad J_{xz} = \iiint xz dm = 0,$$

რითაც ნათქვამის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

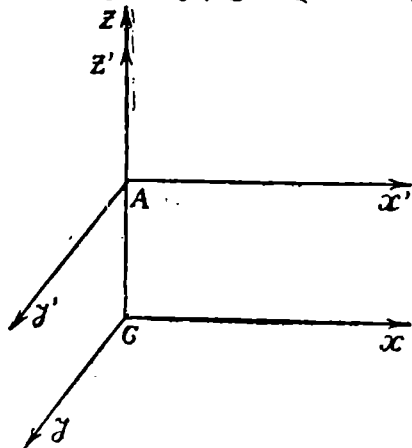
სავსებით ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ ერთგვაროვან მყარ სხეულს აქვს სიმეტრიის სიბრტყე, მაშინ ამ სიბრტყის ყოველი მართობი ღერძი იქნება ინერციის მთავარი ღერძი.

§ 7. ინერციის ცენტრალური ღერძები

მყარი სხეულის ინერციის ცენტრის შესაბამ ინერციის ელიფსოიდს ინერციის ცენტრალური ელიფსოიდი ეწოდება, ხოლო ინერციის ცენტრალური ელიფსოიდის მთავარ ღერძებს — ინერციის ცენტრალური ღერძები. ადვილი აქვს შემდეგ მარტივ დებულებას:

დებულება. ინერციის ცენტრალური ღერძის ნებისმიერი წერტილის შესაბამი ინერციის მთავარი ღერძები ინერციის ცენტრალური ღერძების პარალელურია.

მართლაც, ვთქვათ, $Cxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძები ემთხვევა ინერციის ცენტრალურ ღერძებს. ავიღოთ Cz ღერძზე ნებისმიერი A წერტილი და განვიხილოთ კოორდინატთა $Ax'y'z'$ სისტემა, რომლის ღერძებიც $Cxyz$ სისტემის ღერძების პარალელურ-



ნახ. 130.

რია (ნახ. 130). დავამტკიცოთ, რომ x' , y' და z' ღერძები A წერტილის შესაბამი ინერციის მთავარი ღერძები იქნება. ცხადია, ადვილი აქვს კოორდინატთა გარდაქმნის შემდეგ ფორმულებს:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' + a \quad (a = CA). \quad (7,1)$$

ვინაიდან x, y, z ინერციის ცენტრალური ღერძებია, ამიტომ $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$. ამის შემდეგ ცხადია, რომ

$$J_{xy} = J_{x'y'} = 0.$$

(7,1) ფორმულების ძალით ვღებულობთ

$$J_{xx} = \iiint xz dm = \iiint x'(z' + a) dm = \iiint x'z' dm + a \iiint x' dm = 0. \quad (7,2)$$

როგორც აღვილი მისახვედრია, $\iiint x' dm$ წარმოადგენს სტატიკურ მომენტს $y'z'$ სიბრტყის მიმართ, რომელზედაც ინერციის ცენტრია მოთავსებული და, მაშასადამე,

$$\iiint x' dm = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (7,2) ტოლობა მოგვეცემს

$$J_{xx} = J_{x'x'} = 0.$$

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ

$$J_{x'y'} = J_{x'z'} = 0,$$

და, მაშასადამე, x' ღერძი ინერციის მთავარ ღერძს წარმოადგენს. ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ y' და z' ღერძებიც ინერციის მთავარი ღერძებია და ამით დებულება დამტკიცებულია.

ამოცანები

1. მოცემულია ერთგვაროვანი სწორკუთხა პარალელებიპედი, რომლის წიბოები ტოლია $2a, 2b$ და $2c$ -სი. გამოვთვალოთ ინერციის მომენტები იმ ღერძების მიმართ, რომელნიც გადიან პარალელებიპედის ინერციის ცენტრში და პარალელური არიან წიბოების.

შემოხსენებული ღერძები მივიღოთ კოორდინატთა სისტემის ღერძებად. მაშინ, ცხადია, საძიებელი მომენტები იქნება J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} . (2,1) ფორმულების ძალით

$$J_{xx} = \sigma \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad J_{yy} = \sigma \iiint (x^2 + z^2) dx dy dz, \\ J_{zz} = \sigma \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz. \quad (1)$$

ცხადია, გვექნება

$$\sigma \iiint x^2 dx dy dz = \sigma \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c x^2 dx dy dz = \frac{1}{3} \sigma \cdot 2b \cdot 2c \cdot 2a^3 = \\ = \frac{1}{3} \sigma \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2c \cdot a^2 = \frac{1}{3} Ma^2,$$

სადაც $M = \sigma \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2c$ მთელი სხეულის მასას აღნიშნავს. ანალოგიურად მივიღებთ

$$\sigma \iiint y^2 dx dy dz = \frac{1}{3} Mb^2, \quad \sigma \iiint z^2 dx dy dz = \frac{1}{3} Mc^2.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (1)-ში, მივიღებთ

$$J_{xx} = \frac{1}{3} M(b^2 + c^2), \quad J_{yy} = \frac{1}{3} M(a^2 + c^2), \quad J_{zz} = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2). \quad (2)$$

2. მოცემულია ერთგვაროვანი სფერო, რომლის რადიუსი უდრის R -ს. გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი სფეროს დიამეტრის მიმართ J_A .

ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით სფეროს ცენტრში. ცხადია, სიმეტრიის გამო გვექნება

$$J_A = J_{xx} = J_{yy} = J_{zz}.$$

ვინაიდან $J_{xx} + J_{yy} + J_{zz} = 2J_0$, სადაც J_0 პოლარული მომენტია, ამიტომ გვექნება

$$J_A = \frac{2}{3} J_0. \quad (3)$$

თუ გადავალთ ρ , ψ , ϑ სფერულ კოორდინატებზე (იხ. III თავი, ნახ. 31, ფორმულა (8.25)), მივიღებთ

$$\begin{aligned} J_0 &= \sigma \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dV = \sigma \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\psi = \\ &= \frac{4}{5} \pi \sigma R^5 = \frac{3}{5} M R^2, \end{aligned} \quad (4)$$

სადაც $M = \sigma \frac{4}{3} \pi R^3$ მთელი სხეულის მასაა.

(3) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$J_A = \frac{2}{5} M R^2. \quad (5)$$

3. მოცემულია ერთგვაროვანი სხეული, შემოსაზღვრული ელიფსოიდით, რომლის ნახევარღერძებია a , b , c . ვიპოვოთ ინერციის მომენტები მთავარი დიამეტრების მიმართ.

თუ მთავარ დიამეტრებს მივიღებთ კოორდინატთა ღერძებად, მაშინ ელიფსოიდის განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (6)$$

თუ მოვახდენთ კოორდინატთა გარდაქმნას:

$$x = ax_1, \quad y = by_1, \quad z = cz_1, \quad (7)$$

მაშინ (6)-ის ნაცვლად მივიღებთ

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \quad (8)$$

მაშასადამე, (7) გარდაქმნა ელიფსოიდს გადაიყვანს ერთეულ რადიუსიან სფეროში.

საძიებელია მომენტები:

$$J_{xx} = \iiint (y^2 + z^2) dm, \quad J_{yy} = \iiint (x^2 + z^2) dm, \quad J_{zz} = \iiint (x^2 + y^2) dm. \quad (9)$$

გამოვთვალოთ ამ ფორმულებში შემავალი ინტეგრალები, ცხადია, გვექნება.

$$\iiint x^2 dm = \sigma \iiint x^2 dx dy dz. \quad (10)$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ (7) ჩასმას და მივიღებთ მხედველობაში, რომ იაკობიანი გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x_1, y_1, z_1)} = abc, \quad (11)$$

(10) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\iiint x^2 dm = a^3 bc \iiint c x_1^2 dx_1 dy_1 dz_1. \quad (12)$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალი გავრცელებულია ერთეულ რადიუსიან სფეროზე და ის ტოლია ამ სფეროს პოლარული მომენტის $1/3$ -ის. თუ ხსენებულ პოლარულ მომენტს J_0^* -ით აღვნიშნავთ. (4) ფორმულის ძალით, მივიღებთ ($R=1$):

$$J_0^* = \frac{4}{5} \pi \sigma.$$

ამის შემდეგ, ცხადია, (12) მოგვცემს

$$\iiint x^2 dm = \frac{4}{15} \pi abc \sigma \cdot a^2 = \frac{1}{5} M a^2,$$

სადაც $M = \frac{4}{3} \pi abc \sigma$ არის ელიფსოიდი შემოსაზღვრული სხეულის მასა. ანალოგიურად მივიღებთ

$$\iiint y^2 dm = \frac{1}{5} M b^2, \quad \iiint z^2 dm = \frac{1}{5} M c^2.$$

ამ მნიშვნელობების (9)-ში შეტანით ვღებულობთ

$$J_{xx} = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2), \quad J_{yy} = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2), \quad J_{zz} = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2). \quad (13)$$

4. მოცემულია ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრული მილი, რომლის შიგა ცილინდრის ფუძის რადიუსი უდრის R_1 -ს, ხოლო გარე ცილინდრის ფუძის რადიუსი უდრის R_2 -ს, ცილინდრის სიმაღლე არის h . გამოვთვალოთ ინერციის მომენტი ცილინდრის ცენტრალური ღერძის მიმართ.

კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა ისე ავიღოთ, რომ მისი სათავე მოთავსებული იყოს ცილინდრების ქვედა ფუძეთა ცენტრში, ხოლო z ღერძი ემთხვეოდეს ცილინდრის ღერძს. საძიებელი მომენტი, ცხადია, იქნება J_{zz} , რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$J_{zz} = \sigma \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz. \quad (14)$$

გადავიდეთ ცილინდრულ კოორდინატებზე: ρ , φ , z . ცხადია, გვექნება

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho.$$

(14) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$J_{zz} = \sigma \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \rho^2 dz d\rho d\varphi = \frac{\pi \sigma}{2} (R_2^4 - R_1^4) h. \quad (15)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, აღებული ცილინდრული მილის მასა იქნება

$$M = \pi \sigma h (R_2^2 - R_1^2). \quad (16)$$

(16) ტოლობის ძალით, (15) ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$J_{xx} = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2). \quad (17)$$

თუ $R_1 = 0$, მაშინ მთელი ცილინდრის ინერციის მომენტი იქნება

$$J_{xx} = \frac{1}{2} M R^2, \quad (18)$$

სადაც $R = R_2$ წარმოადგენს ცილინდრის ფუძის რადიუსს.

5. გამოვთვალოთ R რადიუსიანი წრიული არის (ფირფიტის) ინერციის მომენტი წრის ცენტრში გაშვებული ფირფიტის მართობი ღერძის მიმართ.

თუ Oxy სისტემის სათავეს ავიღებთ წრის ცენტრში, მაშინ საძიებელი მომენტისათვის გვექნება

$$J_{xx} = \sigma \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

თუ გადავალთ პოლარულ კოორდინატებზე, მივიღებთ

$$J_{xx} = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \pi \sigma R^4 = \frac{M}{2} R^2, \quad (19)$$

სადაც $M = \pi R^2 \sigma$ მთელი წრიული ფირფიტის მასას აღნიშნავს.

6. ადვილად დამტკიცდება, რომ ელიფსის ფორმის თხელი ფირფიტის ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გადის ელიფსის ცენტრში და მართობია ელიფსის სიბრტყის, უდრის

$$J = \frac{1}{4} M (a^2 + b^2), \quad (20)$$

სადაც a და b ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძებია (იგულისხმება, რომ ფირფიტა ერთგვაროვანია).

7. ადვილად დამტკიცდება აგრეთვე, რომ $2a$ სიგრძის მონაკვეთის ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც ამ მონაკვეთის შუაწერტილზე გადის და მისი მართობია, უდრის $\frac{1}{3} M a^2$, სადაც M აღებული მონაკვეთის მასას აღნიშნავს.

8. გამოვთვალოთ ინერციის ელიფსოიდის ნახევარღერძები, თუ ცნობილია ინერციის მთავარი მომენტები: $A = \frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{16}$, $C = \frac{1}{25}$.

თუ კოორდინატთა ღერძებად მივიღებთ ინერციის მთავარ ღერძებს, მაშინ ელიფსოიდის განტოლებას ექნება სახე

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

თუ ამ უქანასკნელში შევიტანთ A , B , C მომენტების მოცემულ მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1.$$

ამრიგად, $a=3$, $b=4$, $c=5$.

9. მოცემულია ელიფსური ფორმის ერთგვაროვანი თხელი ფირფიტა, რომლის დიდი და მცირე ნახევარღერძებია a და b . დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი დიამეტრის მიმართ ინერციის მომენტი J გამოითვლება ფორმულით

$$J = \frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (21)$$

სადაც $2r$ არის ხსენებული დიამეტრის სიგრძე.

აღვნიშნოთ φ -თი კუთხე, რომელსაც აღებული დიამეტრი შეადგენს ელიფსის დიდ ღერძთან. (4,3) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$J = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi, \quad (22)$$

სადაც A და B , შესაბამად, დიდი და მცირე ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებია.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$A = \frac{1}{4} M b^2, \quad B = \frac{1}{4} M a^2,$$

სადაც M ფირფიტის მასაა. ამ მნიშვნელობების (22) ტოლობაში შეტანით მივიღებთ

$$J = \frac{1}{4} M (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi). \quad (23)$$

თუ კოორდინატთა Oxy სისტემას ისე ავიღებთ, რომ სათავე მოთავსებული იყოს ელიფსის ცენტრში და ღერძები ემთხვეოდეს ელიფსის მთავარ ღერძებს, მაშინ ელიფსის განტოლება იქნება

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (24)$$

აღებული დიამეტრის ბოლო წერტილის კოორდინატებისათვის გვექნება $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$. თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (24) ტოლობაში, მივიღებთ

$$b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = \frac{a^2 b^2}{r^2}.$$

ამ მნიშვნელობების (23)-ში შეტანით მივიღებთ (21) ფორმულას.

გ ა ნ ე ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

მყარი სხეულის ღინაპიჯის ძირითადი ქანონები. მყარი სხეულის მოძრაობის განმარტებები

§ 8. მყარი სხეულის მოძრაობის კინემატიკა და მოძრაობის კინემატიკის განმარტება

ვთქვათ, მოცემულია მატერიალური წერტილები M_1, M_2, \dots, M_n , რომელთა მასებია m_1, m_2, \dots, m_n . როგორც თავის დროზე იყო აღნიშნული (თავი VI, § 6), აღებულ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება K ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (8,1)$$

სადაც \vec{v}_i ($i=1, 2, \dots, n$) M_i მატერიალური წერტილების სიჩქარეებია მწიფი ძირითადი სისტემის მიმართ. ამრიგად, დისკრეტულ წერტილთა უცვლადი სისტემის მოძრაობის რაოდენობა (8,1) ფორმულით გამოითვლება.

ვთქვათ, მყარი სხეული დანაწილებულია საკმარისად მცირე განზომილების ნაწილაკებად. შევადგინოთ ხსენებული ნაწილაკების მოძრაობის რაოდენობა და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა დაყოფათა რიცხვი უსასრულოდ გრძელდება, ხოლო ყოველი ნაწილაკის განზომილებები ნულისაკენ მიისწრაფვიან, მივიღებთ

$$\vec{K} = \iiint_V \vec{v} dm = \iiint_V \sigma \vec{v} dV. \quad (8,2)$$

უკანასკნელი ტოლობით განსაზღვრულ \vec{K} ვექტორს ეწოდება აღებული მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობა.

ვინაიდან $\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, სადაც \vec{p} არის მყარი სხეულის აღებული (ξ, η, ζ) წერტილის რადიუს-ვექტორი \vec{Q} წერტილის მიმართ, ამიტომ, გვექნება

$$\vec{K} = \iiint_V \frac{d\vec{p}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \iiint_V \vec{p} dm = M \frac{d\vec{p}_c}{dt} = M \vec{v}_c.$$

ამასთან \vec{v}_c მყარი სხეულის ინერციის ცენტრის სიჩქარეს აღნიშნავს, ხოლო M —სხეულის მასას. უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობა ტოლია ინერციის ცენტრის მოძრაობის რაოდენობის, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მასში თავმოყრილია მთელი სხეულის მასა.

ვინაიდან მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის მოძრაობის რაოდენობის კანონს აქვს სახე (იხ. თავი VI, § 6)

$$d \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{F}' dt,$$

ამიტომ, როგორც აღვიღო მისახვედრია, მყარი სხეულისათვის გვექნება

$$d\vec{K} = d \iiint_V \vec{v} dm = \vec{F}' dt,$$

ანუ

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \vec{v} dm = \vec{F}', \quad (8,3)$$

სადაც \vec{F}' მყარ სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს აღნიშნავს. უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს მყარი სხეულისათვის მოძრაობის რაოდენობის კანონს. ვინაიდან $\vec{K} = M\vec{v}_c$, ამიტომ (8,3) ტოლობა მოგვცემს

$$M \vec{w}_c = \vec{F}'. \quad (8,4)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს მყარი სხეულის ინერციის ცენტრის მოძრაობის კანონს, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მყარი სხეულის

ინერციის ცენტრი ისე მოძრაობს, თითქოს მასში თავმოყრილი იყოს მთელი სხეულის მასა და მოქმედებდეს ძალა, რომელიც სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები ვექტორის ტოლია.

განვიხილოთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის გარდა, რომელსაც უძრავ სისტემას ვუწოდებთ. აგრეთვე მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა. თუ (8,4) ტოლობას დავაგვემიღებთ უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლებებს შემდეგი სახით:

$$M \frac{d^2 \xi_c}{dt^2} = F'_\xi, \quad M \frac{d^2 \eta_c}{dt^2} = F'_\eta, \quad M \frac{d^2 \zeta_c}{dt^2} = F'_\zeta. \quad (8,5)$$

თუ ხსენებულ ტოლობას $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე დავაგვემიღებთ, მივიღებთ

$$Mw_{cx} = F_x, \quad Mw_{cy} = F_y, \quad Mw_{cz} = F_z. \quad (8,6)$$

როგორც კინემატიკიდან ცნობილია (იხ. თავი III, ფორმულა (25,7)),

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \left[\frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{\rho} \right] + \vec{w}(\vec{w} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} w^2, \quad (8,7)$$

სადაც \vec{w} მყარი სხეულის მყის კუთხურ სიჩქარეს აღნიშნავს.

თუ ამ ფორმულას ინერციის ცენტრის აჩქარებისათვის გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$\vec{w}_c = \vec{w}_0 + \left[\frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{\rho}_c \right] + \vec{w}(\vec{w} \cdot \vec{\rho}_c) - \vec{\rho}_c w^2,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} w_{cx} &= w_{0x} + \frac{dq}{dt} z_c - \frac{dr}{dt} y_c + p(px_c + qy_c + rz_c) - x_c(p^2 + q^2 + r^2), \\ w_{cy} &= w_{0y} + \frac{dr}{dt} x_c - \frac{dp}{dt} z_c + q(px_c + qy_c + rz_c) - y_c(p^2 + q^2 + r^2), \\ w_{cz} &= w_{0z} + \frac{dp}{dt} y_c - \frac{dq}{dt} x_c + r(px_c + qy_c + rz_c) - z_c(p^2 + q^2 + r^2), \end{aligned} \quad (8,8)$$

ამასთან p, q, r წარმოადგენენ \vec{w} ვექტორის გეგმილებს Ox, Oy, Oz ღერძებზე, შესაბამად. თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (8,6) განტოლებებში, მივიღებთ ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლებებს მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ.

§ 9. მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი (კინეტიკურ მომენტს) აქვს სახე

$$\vec{G}^0 = \sum_{i=1}^n [\vec{\rho}_i \cdot m_i \vec{v}_i], \quad (9,1)$$

სადაც \vec{p} აღნიშნავს M -ური მატერიალური ნაწილაკის რადიუს-ვექტორს. აღებულ მომენტთა O ცენტრის მიმართ, \vec{v} წარმოადგენს M -ი წერტილის სიჩქარეს ძირითადი (უძრავი) სისტემის მიმართ. თუ მატერიალურ წერტილთა უცვლადი სისტემა დისკრეტულად არ არის განაწილებული, არამედ უწყვეტად ავსებს სივრცის გარკვეულ V მოცულობას, მაშინ ჯამი შეიცვლება ინტეგრალით და მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტს (კინეტიკურ მომენტს) ექნება სახე

$$\vec{G}^0 = \iiint [\vec{p} \cdot \vec{v}] dm. \quad (9,2)$$

განვიხილოთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა, რომელიც მყარ სხეულთან დაკავშირებულია უძრავად და მომენტთა ცენტრად ავიღოთ მისი სათავე O წერტილი.

ვინაიდან მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე წარმოადგენს ფორმულით (იხ. III თავის (25,4) ფორმულა)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{p}], \quad (9,3)$$

სადაც $\vec{\omega}$ ბრუნვის მყის კუთხურ სიჩქარეს აღნიშნავს, ამიტომ (9,2) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\vec{G}^0 = \iiint [\vec{p} \cdot \vec{v}_0] dm + \iiint [\vec{p} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{p}]] dm.$$

II თავის (6,1) ფორმულის ძალით,

$$[\vec{p} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{p}]] = \vec{\omega} p^2 - \vec{p}(\vec{\omega} \cdot \vec{p}).$$

თუ ამ მნიშვნელობას უკანასკნელ ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{G}^0 = [\iiint \vec{p} dm \cdot \vec{v}_0] + \vec{\omega} \iiint p^2 dm - \iiint \vec{p}(\vec{\omega} \cdot \vec{p}) dm. \quad (9,4)$$

ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\iiint \vec{p} dm = M \vec{p}_c,$$

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (\vec{\omega} \cdot \vec{p}) = px + qy + rz,$$

სადაც \vec{p}_c ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორია O წერტილის მიმართ, M — სხეულის მთელი მასაა, p, q, r წარმოადგენენ $\vec{\omega}$ ვექტორის გეგმილებს $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე. თუ ამ მნიშვნელობებს (9,4) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\vec{G}^0 = M[\vec{p}_c \cdot \vec{v}_0] + \vec{\omega} \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dm - \iiint \vec{p}(px + qy + rz) dm. \quad (9,5)$$

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე, ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned} G_x^0 &= M(y_c v_{0z} - z_c v_{0y}) + J_{xx} p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ G_y^0 &= M(z_c v_{0x} - x_c v_{0z}) - J_{yz} p + J_{yy} q - J_{yx} r, \\ G_z^0 &= M(x_c v_{0y} - y_c v_{0x}) - J_{zx} p - J_{zy} q + J_{zz} r. \end{aligned} \quad (9,6)$$

სადაც J_{xx}, J_{yy}, \dots O წერტილის შესაბამის ინერციის ტენზორის კომპონენტებია. როგორც ადვილი მისახვედრია (9,5) ტოლობა, ანუ რაც იგივეა, (9,6) სისტემა ვექტორული სახით ასე ჩაიწერება:

$$\vec{G}^0 = M [\vec{\rho}_c \cdot \vec{v}_0] + J \vec{\omega}, \quad (9,7)$$

სადაც J წარმოადგენს (4,4) ტოლობით განსაზღვრულ მატრიცს, რომელსაც ხშირად, ინერციის ტენზორს უწოდებენ.

ცხადია, ასევე შეიძლება გამოვითვალოთ მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი \vec{L} უძრავი სისტემის სათავეს მიმართ და ვიპოვოთ მისი გეგმილები უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე.

თუ მყარი სხეულის O წერტილი უძრავია (ე. ი. $\vec{v}_0=0$), ან O წერტილი ემთხვევა ინერციის ცენტრს (ე. ი. $\vec{\rho}_c=0$), მაშინ $[\vec{\rho}_c \cdot \vec{v}_0]=0$ და (9,7) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$(\vec{r}^0 = J \vec{\omega}). \quad (9,8)$$

(9,6) ტოლობები ამ შემთხვევაში მოგვცემს

$$\begin{aligned} G^0_x &= J_{xx} p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ G^0_y &= -J_{yx} p + J_{yy} q - J_{yz} r, \\ G^0_z &= -J_{zx} p - J_{zy} q + J_{zz} r. \end{aligned} \quad (9,9)$$

თუ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის ღერძები ემთხვევა O წერტილის შესაბამის ინერციის მთავარ ღერძებს, მაშინ, როგორც ვიცით, ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია და (9,6) ფორმულები მოგვცემს

$$\begin{aligned} G^0_x &= M(y_c v_{0z} - z_c v_{0y}) + J_{xx} p, \\ G^0_y &= M(z_c v_{0x} - x_c v_{0z}) + J_{yy} q, \\ G^0_z &= M(x_c v_{0y} - y_c v_{0x}) + J_{zz} r. \end{aligned} \quad (9,10)$$

(9,9) ფორმულები კი ამ შემთხვევაში ასე გადაიწერება:

$$G^0_x = J_{xx} p, \quad G^0_y = J_{yy} q, \quad G^0_z = J_{zz} r. \quad (9,11)$$

აღვნიშნოთ უძრავი \vec{L} სისტემის სათავეს მიმართ მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი \vec{G}^0 -თი. როგორც ადვილი მისახვედრია \vec{G}^0 და \vec{G} ვექტორებს შორის ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$\vec{G} = [\vec{r}_0 \cdot \vec{K}] + \vec{G}^0 = M[\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_c] + \vec{G}^0, \quad (9,12)$$

სადაც \vec{r}_0 აღნიშნავს O წერტილის რადიუს-ვექტორს \vec{L} წერტილის მიმართ, \vec{K} —მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობას.

თუ (9,12) ტოლობას მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე დავაგეგმილებთ და გავითვალისწინებთ (9,6) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} G^w_x &= M(r_{0y} v_{cx} - r_{0z} v_{cy}) + M(y_c v_{0z} - z_c v_{0y}) + J_{xx} p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ G^w_y &= M(r_{0z} v_{cx} - r_{0x} v_{cz}) + M(z_c v_{0x} - x_c v_{0z}) - J_{yx} p + J_{yy} q - J_{yz} r, \\ G^w_z &= M(r_{0x} v_{cy} - r_{0y} v_{cx}) + M(x_c v_{0y} - y_c v_{0x}) - J_{zx} p - J_{zy} q + J_{zz} r, \end{aligned} \quad (9,13)$$

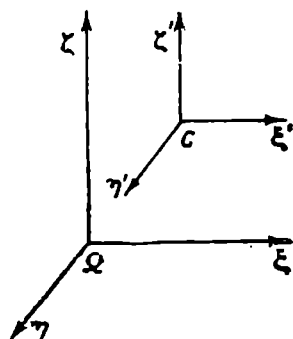
სადაც r_{0x}, r_{0y}, r_{0z} წარმოადგენენ \vec{r}_0 ვექტორის კოორდინატებს $Oxyz$ სისტემის მიმართ.

§ 10. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი მუხარი
სხეულისათვის

განვიხილოთ მუხარ სისტემა, რომელსაც უძრავ სისტემას ვუწოდებთ, და აღვნიშნოთ, როგორც წინა პარაგრაფში, \vec{G}^{ω} -თი მუხარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი \vec{L}^{ω} წერტილის მიმართ. თუ გავიხსენებთ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის (თავი VI, § 7), დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\frac{d\vec{G}^{\omega}}{dt} = \vec{L}^{\omega}, \quad (10,1)$$

სადაც \vec{L}^{ω} აღნიშნავს მუხარ სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ მომენტს \vec{L}^{ω} წერტილის მიმართ. უკანასკნელი ტოლობა იძლევა მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს მუხარი სხეულისათვის.



ნახ. 131.

განვიხილოთ კოორდინატთა $Cx'y'z'$ სისტემა, რომლის სათავე ემთხვევა მუხარი სხეულის ინერციის ცენტრს და რომლის ღერძებიც უძრავი საკოორდინატო ღერძების პარალელურია (ნახ. 131). ვაჩვენოთ, რომ ასეთი სისტემისათვის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს ისეთივე სახე აქვს, როგორიც უძრავი სისტემისათვის.

ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობების სამართლიანობაში:

$$\vec{G}^{\omega} = M [\vec{r}_c \cdot \vec{v}_c] + \vec{G}^c,$$

$$\vec{L}^{\omega} = \vec{L}^c + [\vec{r}_c \cdot \vec{F}],$$

სადაც \vec{r}_c არის C წერტილის რადიუს-ვექტორი \vec{r}_c წერტილის მიმართ, \vec{G}^c — მოძრაობის რაოდენობის მომენტი C წერტილის მიმართ, \vec{L}^c — გარე ძალთა ნაკრები მომენტი C წერტილის მიმართ. უკანასკნელი ტოლობების ძალით, (10,1) ტოლობა მოგვცემს

$$[\vec{r}_c \cdot M \vec{w}_c] + \frac{d\vec{G}^c}{dt} = \vec{L}^c + [\vec{r}_c \cdot \vec{F}]. \quad (10,2)$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$M \vec{w}_c = \vec{F},$$

ამიტომ (10,2) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\frac{d\vec{G}^c}{dt} = \vec{L}^c,$$

რაც ნათქვამის სამართლიანობას ამტკიცებს.

თუ (10,1) ტოლობას დავავებმიღებთ უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\frac{dG_{\xi}^{\omega}}{dt} = L_{\xi}^{\omega}, \quad \frac{dG_{\eta}^{\omega}}{dt} = L_{\eta}^{\omega}, \quad \frac{dG_{\zeta}^{\omega}}{dt} = L_{\zeta}^{\omega}. \quad (10,3)$$

III თავის (26,5) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\frac{d\vec{G}^w}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{G}^w}{dt} + [\vec{\omega} \cdot \vec{G}^w], \quad (10,4)$$

სადაც $\frac{\tilde{d}\vec{G}^w}{dt}$ აღნიშნავს \vec{G}^w ვექტორის თარღობით წარმოებულს მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემის მიმართ. უკანასკნელი ფორმულის ძალით, (10,1) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{\tilde{d}\vec{G}^w}{dt} + [\vec{\omega} \cdot \vec{G}^w] = \vec{L}^w. \quad (10,5)$$

თუ ამ ტოლობას $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{dG_x^w}{dt} + qG_y^w - rG_z^w &= L_x^w, \\ \frac{dG_y^w}{dt} + rG_z^w - pG_x^w &= L_y^w, \\ \frac{dG_z^w}{dt} + pG_y^w - qG_x^w &= L_z^w, \end{aligned} \quad (10,6)$$

სადაც (იხ. (9,13) ფორმულები)

$$\begin{aligned} G_x^w &= M(r_{0y}v_{cx} - r_{0z}v_{cy}) + M(y_0v_{0x} - z_0v_{0y}) + J_{xx}p - J_{xy}q - J_{xz}r, \\ G_y^w &= M(r_{0z}v_{cx} - r_{0x}v_{cz}) + M(z_0v_{0x} - x_0v_{0z}) - J_{yz}p + J_{yy}q - J_{yx}r, \\ G_z^w &= M(r_{0x}v_{cy} - r_{0y}v_{cx}) + M(x_0v_{0y} - y_0v_{0x}) - J_{zx}p - J_{zy}q + J_{zz}r, \end{aligned} \quad (10,7)$$

ამასთან

$$\vec{r}_0 = (r_{0x}, r_{0y}, r_{0z}) \quad (10,8)$$

წარმოადგენს $Oxyz$ სისტემის სათავის (O წერტილის) რადიუს-ვექტორის O წერტილის მიმართ,

$$\vec{v}_c = (v_{cx}, v_{cy}, v_{cz}) \quad (10,9)$$

აღნიშნავს ინერციის ცენტრის სიჩქარეს,

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \quad (10,10)$$

O წერტილის სიჩქარეა.

როგორც აღვილი მისახვედრია, p , q , r სიდიდეების მიმართ (10,6) წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

ვინაიდან მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის მიმართ ინერციის მომენტები და ინერციის ნამრავლები მუდმივია. ამიტომ \vec{G}^w ვექტორის დავგეგმილება Ox , Oy , Oz ღერძებზე უფრო ხელსაყრელია, ვიდრე უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე¹.

¹ სტეკლის მოძრაობასთან ერთად იცვლება ინერციის ტენზორის კომპონენტები უძრავი სისტემის მიმართ.

ნებისმიერ მატერიალურ წერტილთა სისტემის კინეტიკურ ენერგიას (ცოცხალ ძალას) აქვს სახე

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2, \quad (11,1)$$

ამიტომ, უწყვეტი მყარი სხეულისათვის გვექნება

$$T = \frac{1}{2} \iiint v^2 dm. \quad (11,2)$$

ისე როგორც წინა პარაგრაფებში, კოორდინატთა უძრავი სისტემა აღენიშნოთ $Ox\eta\xi$ -თი, ხოლო მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული სისტემა $Oxyz$ -ით.

ვინაიდან მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე წარმოიადგინება ფორმულით (იხ. III თავის (25,4) ფორმულა)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}], \quad (11,3)$$

ამიტომ, მყარი სხეულის კინეტიკურ ენერგიას შემდეგი სახე ექნება:

$$T = \frac{1}{2} \iiint v_0^2 dm + \iiint ([\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]] dm + \frac{1}{2} \iiint [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]^2 dm. \quad (11,4)$$

ცხადია, გვექნება

$$\iiint v_0^2 dm = M v_0^2, \quad (11,5)$$

$$\iiint ([\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]] dm = (\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \cdot \iiint \vec{\rho} dm]) = M(\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_c]). \quad (11,6)$$

როგორც ვიცით, ადგილი აქვს ტოლობას (იხ. II თავის (6,3) ფორმულა)

$$(\vec{A} \cdot [\vec{B} \cdot \vec{C}]) = (\vec{B} \cdot [\vec{C} \cdot \vec{A}]), \quad (11,7)$$

სადაც \vec{A} , \vec{B} და \vec{C} ნებისმიერი ვექტორებია. ამ ტოლობის გამოყენებით, ცხადია, გვექნება

$$[\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]^2 = ([\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}] \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]) = (\vec{\omega} \cdot [\vec{\rho} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]]). \quad (11,8)$$

II თავის (6,1) ფორმულის ძალით

$$[\vec{\rho} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]] = \vec{\omega} \rho^2 - \vec{\rho} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}).$$

თუ ამ მნიშვნელობას (11,8) ტოლობაში შევიტანთ, ადვილად მივიღებთ

$$[\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}]^2 = \omega^2 \rho^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})^2. \quad (11,9)$$

(11,5), (11,6) და (11,9) მნიშვნელობების (11,4) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + M(\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_c]) + \frac{1}{2} \iiint [\omega^2 \rho^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})^2] dm. \quad (11,10)$$

უძრავი ოქტის სისტემის მიმართ კოორდინატებში გვექნება

$$(\vec{v}_0 \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_c]) = \left\| \begin{array}{ccc} P, & Q, & R \\ \xi_c - \xi_0, & \eta_c - \eta_0, & \zeta_c - \zeta_0 \\ v_{0\xi}, & v_{0\eta}, & v_{0\zeta} \end{array} \right\|, \quad (11,11)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})^2 &= (P^2 + Q^2 + R^2) [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2] - [P(\xi - \xi_0) + Q(\eta - \eta_0) + R(\zeta - \zeta_0)]^2 = \\ &= [(\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2] P^2 + [(\zeta - \zeta_0)^2 + (\xi - \xi_0)^2] Q^2 + \\ &+ [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2] R^2 - 2(\eta - \eta_0)(\zeta - \zeta_0) QR - \\ &- 2(\zeta - \zeta_0)(\xi - \xi_0) PR - 2(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) PQ, \end{aligned} \quad (11,12)$$

სადაც P, Q, R წარმოადგენენ $\vec{\omega}$ ვექტორის გვერდებში უძრავი ოქტის სისტემის ღერძებზე, ξ, η, ζ არის მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები ამავე სისტემაში, ξ_0, η_0, ζ_0 აღნიშნავენ ინერციის ცენტრისა და O წერტილის კოორდინატებს უძრავ სისტემაში. (11,11) და (11,12) ტოლობების ძალით, (11,10) ფორმულა მოგვცემს

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v_0^2 + M \left\| \begin{array}{ccc} P, & Q, & R \\ \xi_c - \xi_0, & \eta_c - \eta_0, & \zeta_c - \zeta_0 \\ v_{0\xi}, & v_{0\eta}, & v_{0\zeta} \end{array} \right\| + \\ &+ \frac{1}{2} (J_{\xi\xi} P^2 + J_{\eta\eta} Q^2 + J_{\zeta\zeta} R^2 - 2J_{\eta\zeta} QR - 2J_{\xi\zeta} PR - 2J_{\xi\eta} PQ), \end{aligned} \quad (11,13)$$

სადაც $J_{\xi\xi}, J_{\eta\eta}, \dots$ წარმოადგენენ ინერციის ტენზორის კომპონენტებს $O\xi'\eta'\zeta'$ სისტემის მიმართ, რომლის ღერძებიც უძრავი კოორდინატთა ღერძების პარალელურია.

ასევე დაგრწმუნდებით, რომ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემის მიმართ კოორდინატებში კინეტიკურ ენერგიას ექნება სახე

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v_0^2 + M \left\| \begin{array}{ccc} p, & q, & r \\ x_c, & y_c, & z_c \\ v_{0x}, & v_{0y}, & v_{0z} \end{array} \right\| + \\ &+ \frac{1}{2} (J_{xx} p^2 + J_{yy} q^2 + J_{zz} r^2 - 2J_{yz} qr - 2J_{xz} pr - 2J_{xy} pq). \end{aligned} \quad (11,14)$$

თუ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული სისტემის სათავე ემთხვევა მყარი სხეულის ინერციის ცენტრს, მაშინ $x_c = y_c = z_c = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} (J_{xx} p^2 + J_{yy} q^2 + J_{zz} r^2 - 2J_{yz} qr - 2J_{xz} pr - 2J_{xy} pq). \quad (11,15)$$

თუ მყარი სხეულის O წერტილი უძრავია (განიხილება მყარი სხეულის ბრუნვა O წერტილის გარშემო), მაშინ $v_0 = 0$ და (11,14) ფორმულა მოგვცემს

$$2T = J_{xx} p^2 + J_{yy} q^2 + J_{zz} r^2 - 2J_{yz} qr - 2J_{xz} pr - 2J_{xy} pq. \quad (11,16)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ განსახილველ შემთხვევაში ადგილი აქვს (9,9) ტოლობებს, უკანასკნელი ტოლობა ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$2T = (\vec{G}^0 \cdot \vec{\omega}). \quad (11,17)$$

(11,14) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p} &= M(y_c v_{0x} - z_c v_{0y}) + J_{xx} p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ \frac{\partial T}{\partial q} &= M(z_c v_{0x} - x_c v_{0y}) - J_{yx} p + J_{yy} q - J_{yz} r, \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= M(x_c v_{0y} - y_c v_{0x}) - J_{zx} p - J_{zy} q + J_{zz} r. \end{aligned} \quad (11,18)$$

ამ ტოლობების (9,6) ფორმულებთან შედარება გვარწმუნებს შემდეგი ფორმულების სამართლიანობაში:

$$G^0_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad G^0_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad G^0_z = \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (11,19)$$

სადაც $\vec{G}^0 = (G^0_x, G^0_y, G^0_z)$ აღნიშნავს მყარი სხეულის კინეტიკურ მომენტს O წერტილის მიმართ.

უკანასკნელი ტოლობები ვექტორულად ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

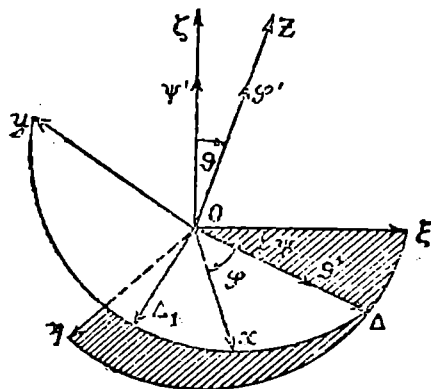
$$\vec{G}^0 = \text{grad}_{(p,q,r)} T. \quad (11,20)$$

ისევე როგორც მატერიალურ წერტილთა სისტემის შემთხვევაში, მყარი სხეულისათვისაც ცოცხალი ძალის კახონს აქვს სახე

$$dT = \delta A, \quad (11,21)$$

სადაც δA მყარ სხეულზე მოქმედ ძალთა ელემენტარულ მუშაობას აღნიშნავს.

§ 12. ვილჰელმის კინემატიკური განბოლმებები



ნახ. 132.

ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო. განვიხილოთ კოორდინატთა $Ox\eta\zeta$ უძრავი სისტემა და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა (ნახ. 132). ცხადია, მყარი სხეულის მდებარეობა უძრავი სისტემის მიმართ სავსებით განსაზღვრულია ეილერის φ, ψ, θ კუთხეებით. თუ ვიგულისხმებთ, რომ საწყის მომენტში მოძრავი და უძრავი სისტემები თანამთხვეველი იყო, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სხეულის ადებული მდებარეობა მისი საწყისი მდებარეობიდან მიიღება, როგორც შედეგი შემდეგი სამი ბრუნვისა:

1°. $O\zeta$ ღერძის გარშემო მობრუნება ψ კუთხით, რომლის შესაბამის კუთხური სიჩქარე იქნება $\dot{\psi}$, სადაც $\dot{\psi}$ წარმოადგენს ζ ღერძის მგებავს.

2°. xOy და $\xi O\eta$ სიბრტყეთა თანაკვეთის Δ ლერძის გარშემო მობრუნება φ კუთხით. ამ ბრუნვის შესაბამის კუთხური სიჩქარე იქნება $\varphi'\vec{\Delta}^0$, სადაც $\vec{\Delta}^0$ წარმოადგენს Δ ლერძის მგეზავს.

3°. Ox ლერძის გარშემო მობრუნება φ კუთხით, რომლის შესაბამის კუთხური სიჩქარე იქნება $\varphi'\vec{x}$, სადაც \vec{x} წარმოადგენს x ლერძის მგეზავს.

ბრუნვათა შეკრების შესახებ III თავის § 16-ში მოყვანილი დებულების თანახმად, ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$ იქნება ჯამი ხსენებული სამი ბრუნვის შესაბამის კუთხური სიჩქარეების და, მაშასადამე, გვექნება

$$\vec{\omega} = \varphi'\vec{\Delta}^0 + \varphi'\vec{x} + \varphi'\vec{z}. \quad (12,1)$$

განვიხილოთ xOy სიბრტყეში მოთავსებული Δ_1 ლერძი, რომელიც O წერტილზე გადის და მართობია Ox და Δ ლერძების. ცხადია, Δ_1 , Ox და Ox ლერძები ერთსა და იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული, ამიტომ $\varphi'\vec{\Delta}^0$ ვექტორი შეიძლება დაეშალოს Ox და Δ_1 ლერძებზე მდგენელებად:

$$\varphi'\vec{\Delta}^0 = \varphi' \cos \vartheta \vec{x} + \varphi' \sin \vartheta \vec{\Delta}_1, \quad (12,2)$$

სადაც $\vec{\Delta}_1$ წარმოადგენს Δ_1 ლერძის მგეზავს. თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (12,1) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\vec{\omega} = (\varphi' \cos \vartheta + \varphi')\vec{x} + \varphi' \sin \vartheta \vec{\Delta}_1 + \varphi' \vec{\Delta}^0. \quad (12,3)$$

ამ ტოლობის მოძრავ კოორდინატთა ლერძებზე დაგვემიღებოთ ვლევულობით

$$p = \varphi' \sin \vartheta \sin \varphi + \varphi' \cos \varphi,$$

$$q = \varphi' \sin \vartheta \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi, \quad (12,4)$$

$$r = \varphi' \cos \vartheta + \varphi'.$$

უკანასკნელი სისტემა, რომელიც იძლევა საშუალებას $\vec{\omega}$ ვექტორის კოორდინატები გამოვთვალოთ ეილერის კუთხეების საშუალებით, ეილერის კინემატიკური განტოლებების სახელწოდებით არის ცნობილი.

სავსებით ანალოგიურად შეიძლება გამოვთვალოთ $\vec{\omega}$ ვექტორის ვეგმონები უძრავ კოორდინატთა ლერძებზე. ადვილად მივიღებთ

$$P = \varphi' \sin \vartheta \sin \psi + \varphi' \cos \psi,$$

$$Q = -\varphi' \sin \vartheta \cos \psi - \varphi' \sin \psi, \quad (12,5)$$

$$R = \varphi' \cos \vartheta + \varphi'.$$

§ 13. მყარ სხეულის მოძრაობის განტოლებები

განვიხილოთ კოორდინატთა უძრავი მდგომარეობის სისტემა და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა. განვიხილოთ აგრეთვე $O\xi'\eta'\zeta'$ სისტემა, რომლის ლერძებიც უძრავ კოორდინატთა ლერძების პარალელურია. ამ სისტემას დამხმარე სისტემა ვუწოდოთ. ცხადია, მყარი სხეულის მოძრაობა დამხმარე სისტემის მიმართ წარმოადგენს ბრუნვას O წერტილის გარშემო, ამიტომ ამ სისტემის მიმართ მყარი სხეულის მდებარეობა შეიძლება დავახასიათოთ ეილერის φ , ψ , χ კუთხეებით. ცხადია, ადვილი ექნება ეილერის კინემატიკურ განტოლებებს

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \vartheta + \varphi'. \end{aligned} \quad (13,1)$$

მ წერტილის მიმართ მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი, ისე როგორც § 9-ში, აღენიშნათ \vec{G}^w -ით. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი გვაძლევს (10,6) განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \frac{dG_x^w}{dt} + qG_z^w - rG_y^w &= L_x^w, \\ \frac{dG_y^w}{dt} + rG_x^w - pG_z^w &= L_y^w, \\ \frac{dG_z^w}{dt} + pG_y^w - qG_x^w &= L_z^w. \end{aligned} \quad (13,2)$$

(13,1) და (13,2) სისტემებს უნდა დაეუმატოთ აგრეთვე ინერციის ცენტრის მოძრაობის (8,5) განტოლებები:

$$M \frac{d^2 \xi_c}{dt^2} = F_\xi, \quad M \frac{d^2 \eta_c}{dt^2} = F_\eta, \quad M \frac{d^2 \zeta_c}{dt^2} = F_\zeta. \quad (13,3)$$

$Oxyz$ სისტემის მიმართ ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლებებია

$$Mw_{cx} = F_x, \quad Mw_{cy} = F_y, \quad Mw_{cz} = F_z,$$

სადაც w_{cx}, w_{cy}, w_{cz} განსაზღვრული არიან (8,8) ფორმულებით.

(13,1), (13,2) და (13,3) სისტემები წარმოადგენენ $p, q, r, \varphi, \psi, \vartheta$ და ξ_c, η_c, ζ_c სიდიდეების მიმართ დიფერენციალურ განტოლებათა გარკვეულ სისტემას.

აღნიშნული სისტემა სავსებით განსაზღვრავს მყარი სხეულის მოძრაობას. მართლაც, თუ ეს სისტემა ინტეგრებულია, ე. ი. მოწინააღმდეგეა $\varphi, \psi, \vartheta, p, q, r, \xi_c, \eta_c, \zeta_c$ სიდიდეები, როგორც დროის ფუნქციები, მაშინ O წერტილის რადიუს-ვექტორი \vec{r}_0 წერტილის მიმართ, რომელსაც $\vec{r}_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ -ით აღვნიშნავთ, განისაზღვრება ტოლობით

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_c - \vec{\rho}_c;$$

სადაც $\vec{r}_c = (\xi_c, \eta_c, \zeta_c)$ წარმოადგენს ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ, ხოლო $\vec{\rho}_c = (x_c, y_c, z_c)$ — ხსენებული ცენტრის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ¹. ვინაიდან \vec{r}_0 ახასიათებს დამხმარე სისტემის მოძრაობას, ხოლო φ, ψ, ϑ კუთხეები კი მყარი სხეულის მოძრაობას დამხმარე სისტემის მიმართ, ამიტომ მყარი სხეულის მოძრაობა განსაზღვრული იქნება უძრავი სისტემის მიმართაც.

ზემომოყვანილ (13,1), (13,2) და (13,3) განტოლებებს, რომელნიც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სავსებით განსაზღვრავენ მყარი სხეულის მოძრაობას,

¹ ვინაიდან φ, ψ, ϑ კუთხეები განსაზღვრავენ მყარი სხეულის მდგომარეობას დამხმარე სისტემის მიმართ, ამიტომ x_c, y_c, z_c კოორდინატები ადვილად მოიწინააღმდეგება.

კუწოდებთ მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებებს. აქვე შევნიშნავთ, რომ ამ განტოლებების ინტეგრება, საზოგადოდ, ძალიან ძნელია. როგორც ჰევმით იქნება ნაჩვენები, იმ კერძო შემთხვევაშიაც კი, როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო მხოლოდ სიმძიმის ძალის მოქმედებით, ამ განტოლებების ინტეგრება საზოგადოდ არ შეიძლება. ცხადია, ამ სისტემის ამოხსნა ყოველთვის არსებობს (გარკვეულ ზოგად პირობებში); აქ ლაპარაკია მხოლოდ ამოხსნის მოძებნაზე.

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით თავისუფალ მყარ სხეულს. ვთქვათ, მყარი სხეული ემორჩილება ბმებს. ვინაიდან ბმები გარკვეული რეაქციის ძალების ტოლფასია (რეაქციის პრინციპი), ამიტომ თუ მყარ სხეულზე მოვდებთ რეაქციის ძალებს, მაშინ ის შეიძლება განვიხილოთ როგორც თავისუფალი ბმებისაგან და დავწეროთ მისი მოძრაობის განტოლებები. ამ განტოლებებში შევა საძიებელი რეაქციის ძალები, სამაგიეროდ მათ დავმატება ბმის განტოლებები.

დავუშვათ, რომ მყარი სხეულის O წერტილი უძრავია და ემთხვევა Ω წერტილს, მაშინ $\vec{r}_0 = 0$ და ადგილი აქვს (9,9) ფორმულებს. თუ, ამის გარდა, მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემის ღერძებად მიღებულია O წერტილის შესაბამისი ინერციის მთავარი ღერძები, მაშინ ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია და გვექნება (იხ. (9,11) ფორმულები)

$$G^0_x = A p, \quad G^0_y = B q, \quad G^0_z = C r, \quad (13,4)$$

სადაც A, B, C აღნიშნავენ ინერციის მომენტებს x, y, z ღერძების მიმართ.

(13,4) ტოლობების ძალით, (13,2) განტოლებები ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) q r &= L_x, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) p r &= L_y, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q &= L_z. \end{aligned} \quad (13,5)$$

ამ განტოლებებს ეილერის დინამიკური განტოლებები ეწოდება. ამ განტოლებების სიმარტივე გამოწვეულია იმით, რომ ის დაწერილია მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ და ამ სისტემის ღერძებად მიღებულია სხეულის ინერციის მთავარი ღერძები.

ვინაიდან უძრავი სისტემის მიმართ ინერციის მომენტები და ინერციის ნამრავლები იცვლებიან, ამიტომ მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებებს უძრავი სისტემის მიმართ გაცილებით უფრო რთული სახე აქვს (ამ განტოლებების მიღება შეიძლება (10,1) ტოლობის უძრავ მდგომარეობაში სისტემის ღერძებზე დაგვემიღებოთ). ზემოაღნიშნული გარემოება შემჩნეული იყო ეილერის მიერ, ამიტომ მან (10,1) ტოლობა დააგვემიღა მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე¹ და ამასთან x, y, z ღერძებად მიიღო ინერციის მთავარი ღერძები, რითაც მოძრაობის განტოლებები არსებითად გაამარტივა.

¹ ვინაიდან ეს ღერძები მყარ სხეულთან დაკავშირებული არიან უძრავად, ამიტომ მათ მიმართ ინერციის მომენტები და ნამრავლები არ იცვლებიან.

ვინაიდან, განსახილველ შემთხვევაში, მყარი სხეულის ერთი წერტილი უძრავია, ამიტომ ის ემორჩილება ბმას. ამ ბმის შესაბამისი რეაქციის ძალა, რომელსაც \vec{R} -ით აღვნიშნავთ, მოდებულია უძრავ O წერტილზე. ვინაიდან \vec{R} ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ ნულის ტოლია, ამიტომ მისი კომპონენტები ეილერის დინამიკურ განტოლებებში არ მონაწილეობს. რეაქციის ძალის მოსაძებნად გამოვიყენოთ ინერციის ცენტრის მოძრაობის კანონი (იხ. (8,4) ფორმულა), რომელიც, განსახილველ შემთხვევაში, მოგვცემს

$$M\vec{w}_e = \vec{F} + \vec{R}. \quad (13,6)$$

თუ ეილერის კინემატიკური და დინამიკური განტოლებები ინტეგრებულია, მაშინ \vec{w}_e ვექტორის კოორდინატები მოინახება (8,8) ფორმულებით, რის შემდეგაც (13,6) ტოლობიდან განისაზღვრება \vec{R} რეაქციის ძალა.

მყარი სხეულის უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვას დაწვრილებით ჩვენ შემდეგში შევისწავლით (იხ. V განყოფილება).

დავწეროთ ახლა მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები ინერციის ცენტრის მიმართ.

მივიღოთ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული სისტემის სათავედ მყარი სხეულის ინერციის ცენტრი C და, ისე როგორც § 10-ში, აღვნიშნოთ \vec{G}^e -თი მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი C წერტილის მიმართ. ინერციის ცენტრის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი მოგვცემს (იხ. § 10)

$$\frac{d\vec{G}^e}{dt} = \vec{L}^e, \quad (13,7)$$

სადაც \vec{L}^e აღნიშნავს სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ მომენტს C წერტილის მიმართ. უკანასკნელი ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} [\vec{\omega} \cdot \vec{G}^e] + [\vec{\omega} \cdot \vec{G}^e] = \vec{L}^e, \quad (13,8)$$

სადაც $\frac{d}{dt} [\vec{\omega} \cdot \vec{G}^e]$ აღნიშნავს \vec{G}^e ვექტორის ფარდობით წარმოებულს მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Cxyz$ სისტემის მიმართ, $\vec{\omega}$ წარმოადგენს მყარი სხეულის C წერტილის გარშემო ბრუნვის მყის კუთხურ სიჩქარეს. თუ (13,8) ტოლობას $Cxyz$ სისტემის ლერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{dG_x^e}{dt} + qG_x^e - rG_y^e &= L_x^e, \\ \frac{dG_y^e}{dt} + rG_x^e - pG_x^e &= L_y^e, \\ \frac{dG_z^e}{dt} + pG_y^e - qG_x^e &= L_z^e. \end{aligned} \quad (13,9)$$

განსახილველ შემთხვევაში, (9,6) ფორმულების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} G_x^e &= J_{xx}p - J_{xy}q - J_{xz}r, \\ G_y^e &= -J_{yx}p + J_{yy}q - J_{yz}r, \\ G_z^e &= -J_{zx}p - J_{zy}q + J_{zz}r. \end{aligned} \quad (13,10)$$

უკანასკნელი ტოლობების გათვალისწინებით, ცხადია, რომ (13,9) წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას p, q, r სიდიდეების მიმართ. თუ $Cxyz$ სისტემის ლერძებად მივიღებთ C წერტილის შესაბამის ინერციის მთავარ ლერძებს, მაშინ, როგორც ვიცით, ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია და (13,9) სისტემა შემდეგ მარტივ სახეს მიიღებს:

$$J_{xx} \frac{dp}{dt} + (L_{xx} - J_{yy}) pr = L_{cx},$$

$$J_{yy} \frac{dq}{dt} + (J_{xx} - J_{zz}) pr = L_{cy}, \quad (13,11)$$

$$J_{zz} \frac{dr}{dt} + (J_{yy} - J_{xx}) pq = L_{cz}.$$

ამ სისტემას უნდა დავუმატოთ ეილერის კინემატიკური განტოლებები:

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \vartheta + \varphi' \end{aligned} \quad (13,12)$$

და აგრეთვე ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლებები (იხ. (8,5) ფორმულები):

$$M \frac{d^2 \xi_c}{dt^2} = F_\xi, \quad M \frac{d^2 \eta_c}{dt^2} = F_\eta, \quad M \frac{d^2 \zeta_c}{dt^2} = F_\zeta. \quad (13,13)$$

(13,11), (13,12) და (13,13) წარმოადგენენ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას $p, q, r, \varphi, \psi, \vartheta, \xi_c, \eta_c, \zeta_c$ სიდიდეების მიმართ. ეს სისტემა, რომელიც მთლიანად ახასიათებს მყარი სხეულის ნებისმიერ მოძრაობას, წარმოადგენს სხეულის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ინერციის ცენტრის მიმართ. ამ სისტემას, ცხადია, უფრო მარტივი სახე აქვს, ვიდრე იმ სისტემას, რომელიც მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის შემთხვევაში ზემოთ იყო განხილული.

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ლერძის გარშემო

§ 14. მყარი სხეულის უძრავი ლერძის გარშემო ბრუნვის განტოლება

ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი ლერძის გარშემო. მივიღოთ ეს ლერძი უძრავი $Oxyz$ სისტემის Ox ლერძად. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი გვაძლევს

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{L}, \quad (14,1)$$

სადაც \vec{G} არის მყარი სხეულის კინეტიკური მომენტი O წერტილის მიმართ, \vec{L} — გარე ძალთა ნაკრები მომენტი იმავე წერტილის მიმართ. თუ (14,1) ტოლობას დავაგეგმილებთ x ლერძზე, მივიღებთ

$$\frac{dG_x}{dt} = L_x.$$

ვინაიდან

$$\frac{dG_z}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint (xy' - yx') dm = \iiint (xy'' - yx'') dm,$$

ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობა ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\iiint (xy'' - yx'') dm = L_z. \quad (14,2)$$

განვიხილოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი $A(x, y, z)$ წერტილი. ამ წერტილის ორთოგონალური გეგმილი xOy სიბრტყეზე აღენიშნოთ a -თი (ნახ. 133). ცხადია, აღვლილი ექნება ტოლობებს

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \text{const}, \quad (14,3)$$

სადაც $r = Oa$, φ არის კუთხე $\vec{r} = \vec{Oa}$ ვექტორსა და Ox ღერძს შორის. (14,3) ტოლობებიდან აღვიღად მივიღებთ

$$x' = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -y\omega,$$

$$y' = r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = x\omega,$$

ნახ. 133.

სადაც ω არის მყარი სხეულის Oz ღერძის გარშემო ბრუნვის სკალარული კუთხური სიჩქარე. უკანასკნელი ტოლობების გაწარმოების შედეგად ვღებულობთ

$$x'' = -x\omega^2 - y \frac{d\omega}{dt}, \quad (14,4)$$

$$y'' = -y\omega^2 + x \frac{d\omega}{dt}.$$

(14,4) ტოლობების ძალით აღვლილი აქვს ტოლობას

$$xy'' - yx'' = (x^2 + y^2) \frac{d\omega}{dt}. \quad (14,5)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (14,2) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$J_{zz} \frac{d^2\omega}{dt^2} = L_z, \quad (14,6)$$

(14,6) წარმოადგენს მყარი სხეულის Oz ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალურ განტოლებას. თუ ეს განტოლება ინტეგრებულია, ე. ი. მონახულია ω , როგორც t -ს ფუნქცია, მაშინ მყარი სხეულის მდებარეობა განსაზღვრული იქნება დროის ყოველ მომენტში.

ბრუნვის ღერძის მიმართ მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი გამოითვლება ფორმულით

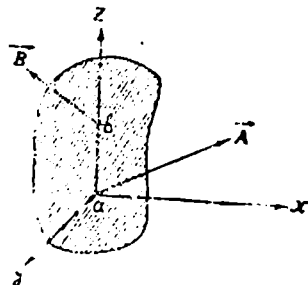
$$G_z = \iiint (xy' - yx') dm = \omega \iiint r^2 dm = J_{zz} \omega. \quad (14,7)$$

§ 15. ჩამატყვის ძალების განსაზღვრა, დინამიკური
და სტატიკური ჩამატყვის ძალები

ვიპოვოთ მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის შემთხვევაში რეაქციის ძალები. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ მყარი სხეულის ბრუნვა ღერძის გარშემო შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მოძრაობა მყარი სხეულისა, რომელსაც ორი უძრავი წერტილი აქვს. აღვნიშნოთ ეს წერტილები a და b -თი. მათი წესაბამისი რეაქციის ძალები იყოს \vec{A} და \vec{B} . კოორდინატთა სისტემის სათავედ მივიღოთ a წერტილი და ax ღერძი ავიღოთ ისე, რომ ის გადიოდეს b წერტილში (ნახ. 134).

მოძრაობის რაოდენობის კანონი განსახილველ შემთხვევაში მოგვცემს

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{F}, \quad (15,1)$$



ნახ. 134.

სადაც \vec{F} წარმოადგენს სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს, \vec{K} —მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობას:

$$\vec{K} = \iiint \vec{v} dm = M \vec{v}_c, \quad (15,2)$$

თუ (15,2) მნიშვნელობას (15,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$M \vec{w}_c = \vec{A} + \vec{B} + \vec{F}. \quad (15,3)$$

ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \vec{w}_c &= \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_c] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho}_c \right] + [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_c]] = \\ &= \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\rho}_c \right] + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_c) - \vec{\rho}_c \omega^2, \end{aligned}$$

სადაც $\vec{\rho}_c$ აღნიშნავს ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორს a წერტილის მიმართ. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega), \quad \vec{\rho}_c = (x_c, y_c, z_c),$$

უქანასკნელი ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგვგმილება მოგვცემს

$$\begin{aligned} w_{cx} &= -x_c \omega^2 - y_c \frac{d\omega}{dt}, \\ w_{cy} &= -y_c \omega^2 + x_c \frac{d\omega}{dt}, \\ w_{cz} &= 0. \end{aligned} \quad (15,4)$$

თუ (15,3) ტოლობას დაგვგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, (15,4) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 -Mx_c \omega^2 - My_c \frac{d\omega}{dt} &= A_x + B_x + F_x, \\
 -My_c \omega^2 + Mx_c \frac{d\omega}{dt} &= A_y + B_y + F_y,
 \end{aligned}
 \tag{15,5}$$

$$0 = A_z + B_z + F_z.$$

განსახილველ შემთხვევაში, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი გვაძლევს

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = [\vec{ab} \cdot \vec{B}] + \vec{L}, \tag{15,6}$$

სადაც

$$\vec{G} = \iiint [\vec{\rho} \cdot \vec{v}] dm.$$

ცხადია, გვექნება

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \iiint [\vec{\rho} \cdot \vec{w}] dm.$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (15,6) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\iiint [\vec{\rho} \cdot \vec{w}] dm = [\vec{ab} \cdot \vec{B}] + \vec{L}. \tag{15,7}$$

თუ ამ ტოლობას კოორდინატა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 \iiint (yz'' - zy'') dm &= -hB_y + L_x, \\
 \iiint (zx'' - xz'') dm &= hB_x + L_y, \\
 \iiint (xy'' - yx'') dm &= L_z,
 \end{aligned}
 \tag{15,8}$$

სადაც $h = ab$.

(14,3) და (14,4) ტოლობების ძალით, ვღებულობთ

$$yz'' - zy'' = yz\omega^2 - xz \frac{d\omega}{dt},$$

$$zx'' - xz'' = -xz\omega^2 - yz \frac{d\omega}{dt},$$

$$xy'' - yx'' = (x^2 + y^2) \frac{d\omega}{dt}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (15,8) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$J_{yy}\omega^2 - J_{xz} \frac{d\omega}{dt} = -hB_y + L_x, \tag{15,9}$$

$$-J_{xx}\omega^2 - J_{yz} \frac{d\omega}{dt} = hB_x + L_y,$$

$$J_{zz} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_z. \tag{15,10}$$

(15,10) წარმოადგენს ჩვენ მიერ უკვე მიღებულ განტოლებას, რომელშიაც რეაქციის ძალები არ მონაწილეობენ და რომელიც მყარი სხეულის მოძ-

რობას განსაზღვრავს. ვთქვათ, ეს განტოლება ინტეგრებულია, მაშინ რეაქციის ძალების $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ კომპონენტების მოსაძებნად გვექნება ხუთი განტოლება, სახელდობრ, (15,5) და (15,9) განტოლებები. (15,9)-დან და (15,5)-ის პირველი ორი განტოლებიდან ცალსახად განისაზღვრება A_x, A_y, B_x, B_y კომპონენტები. A_z და B_z კომპონენტების მოსაძებნად გვრჩება (15,5) სისტემის უკანასკნელი განტოლება, საიდანაც განისაზღვრება $A_z + B_z$ ჯამი. ამრიგად, თუ დამატებითი პირობა არა გვაქვს, მაშინ A_x და B_x ცალ-ცალკე არ განისაზღვრება და, მაშასადამე, საქმე გვაქვს ე. წ. სტატიკურად განუსაზღვრელ შემთხვევასთან (იხ. IV თავის § 10). თუ x წერტილზე საკისარი გვაქვს, მაშინ $B_x = 0$ და $A_x = -F_x$.

ვთქვათ, სხეულზე უშუალოდ მოქმედი ძალები და რეაქციის ძალები წონასწორობაშია და სხეული უძრავია. ამ შემთხვევაში რეაქციის ძალებს სტატიკურ რეაქციის ძალებს უწოდებენ. ვთქვათ, ხსენებული ძალები წონასწორობაშია, ხოლო სხეული ინერციით ბრუნავს გარკვეული ღერძის გარშემო. ამ შემთხვევაში რეაქციის ძალებს დინამიკური რეაქციის ძალები ეწოდება. ტექნიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს იმის გამოკვლევას, თუ რა შემთხვევაში არ შემოიტანს ინერციით ბრუნვა დამატებით რეაქციის ძალებს, ე. ი. სტატიკური რეაქციის ძალები რა შემთხვევაში უდრის დინამიკურ რეაქციის ძალებს?

საზოგადოდ, ეს ძალები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. მართლაც, ვთქვათ, სხეულზე უშუალოდ მოქმედი ძალები ნულის ტოლფასია და სხეული უძრავია. (15,5) და (15,9) განტოლებები გვიჩვენებენ, რომ ამ შემთხვევაში რეაქციის ძალები ნულის ტოლია. თუ დავუშვებთ, რომ სხეულზე უშუალოდ მოქმედი ძალები ნულის ტოლფასია, მაგრამ სხეული ინერციით ბრუნავს z ღერძის გარშემო, მაშინ $\omega \neq 0$ და (15,5), (15,9) განტოლებები გვიჩვენებენ, რომ რეაქციის ძალები ნულის ტოლი არ არის.

ზემომოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ აღებული z ღერძის გარშემო ინერციით ბრუნვა დამატებით რეაქციის ძალებს არ გამოიწვევს, თუ (15,5) და (15,9) ტოლობების მარცხენა მხარეები ნულის ტოლია იმ შემთხვევაში, როცა სხეულზე უშუალოდ მოქმედი ძალები ნულის ტოლფასია. ამრიგად, ღერძის გარშემო ბრუნვა დამატებით რეაქციის ძალებს არ შემოიყვანს, თუ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$-M\omega^2 x_c - M \frac{d\omega}{dt} y_c = 0, \quad (15,11)$$

$$-M\omega^2 y_c + M \frac{d\omega}{dt} x_c = 0,$$

$$J_{yz}\omega^2 - J_{zz} \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (15,12)$$

$$-J_{xz}\omega^2 - J_{yz} \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

(15,11) და (15,12) წარმოადგენენ ალგებრულ განტოლებათა სისტემებს x_c, y_c და J_{yz}, J_{xz} სიდიდეების მიმართ. ორივე სისტემის დეტერმინანტი ერთი და იგივეა, სახელდობრ,

$$\begin{vmatrix} -\omega^2, & -\frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt}, & -\omega^2 \end{vmatrix} = \omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

ვინაიდან ვგულისხმობთ, რომ ეს დეტერმინანტი ნულის ტოლი არ არის, ამიტომ (15,11) და (15,12) სისტემები გვაძლევს

$$x_c = y_c = 0, \quad (15,13)$$

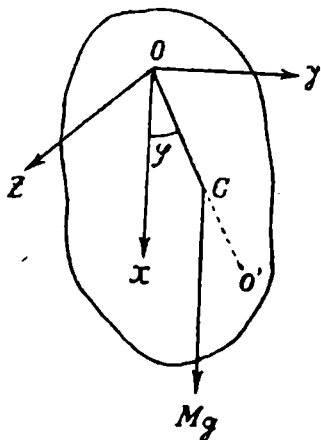
$$J_{xx} = J_{yy} = 0. \quad (15,14)$$

(15,13) გვიჩვენებს, რომ ინერციის ცენტრი უნდა იყოს მოთავსებული ბრუნვის ღერძზე (z ღერძზე), (15,14) ტოლობა კი გვიჩვენებს, რომ ეს ღერძი ინერციის მთავარი ღერძი უნდა იყოს. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება:

დებულება. რაიმე ღერძის გარშემო ინერციით ბრუნვა დამატებით რეაქციის ძალებს არ შემოიტანს (და, მაშასადამე, სტატიკური რეაქციის ძალები დინამიკური რეაქციის ძალების ტოლია) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ბრუნვის ღერძი წარმოადგენს ინერციის ცენტრალურ ღერძს.

§ 16. ფიზიკური საქანი

ფიზიკური საქანი ეწოდება მყარ სხეულს, რომელიც ბრუნავს პოარიზონტალური ღერძის გარშემო სიმძიმის ძალის გავლენით. ბრუნვის ღერძი მივიღოთ Oz ღერძად და Ox ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად სიმძიმის ძალის მიმართულებით.



ნახ. 135.

კოორდინატთა სისტემის სათავე ავიღოთ ისე, რომ სიმძიმის ცენტრი C მოთავსებული იყოს xOy სიბრტყეში (ნახ. 135). სიმძიმის ძალის მომენტი z ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით

$$L_z = -aMg \sin \varphi, \quad (16,1)$$

სადაც $a = OC$, M სხეულის მასაა, φ — მობრუნების კუთხე, g — სიმძიმის ძალის აჩქარება. თუ ამ მნიშვნელობას (14,6) განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{aMg}{J_0} \sin \varphi = 0, \quad (16,2)$$

სადაც J_0 წარმოადგენს ბრუნვის ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს.

თუ განვიხილავთ ფიზიკური საქანის უსასრულოდ მცირე რხევას, მაშინ $\sin \varphi \approx \varphi$ და უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{aMg}{J_0} \varphi = 0, \quad (16,3)$$

საიდანაც

$$\varphi = \alpha \sin \left(\sqrt{\frac{aMg}{J_0}} t + \varepsilon \right), \quad (16,4)$$

ამასთან α და ε ნებისმიერი მუდმივებია, რომელნიც საწყისი პირობებით განისაზღვრებიან.

(16,4) ტოლობიდან ცხადია, რომ, უსასრულოდ მცირე რხევის შემთხვევაში, ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი გამოითვლება ფორმულით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{aMg}}. \quad (16,5)$$

ფიზიკური საქანის ნებისმიერი მოძრაობის შესწავლის მიზნით, გავიხსენოთ მათემატიკური საქანის მოძრაობის განტოლება, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს (იხ. V თავის (24,5) ფორმულა):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (16,6)$$

სადაც l მათემატიკური საქანის სიგრძეს აღნიშნავს. (16,3) და (16,6) განტოლებათა შედარება გვარწმუნებს, რომ აღებული ფიზიკური საქანის მოძრაობა საეცებით დახასიათდება ისეთი მათემატიკური საქანის მოძრაობით, რომლის სიგრძე აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{g}{l} = \frac{aMg}{J_0}, \quad (16,7)$$

საიდანაც

$$l = \frac{J_0}{aM}. \quad (16,8)$$

ასეთ მათემატიკურ საქანს ეწოდება აღებული ფიზიკური საქანის შესაბამის მათემატიკური საქანი. ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ის შედეგები, რომელნიც მათემატიკური საქანის შესახებ V თავის § 24-ში იყო მოყვანილი, შეიძლება გავავრცელოთ ფიზიკური საქანისათვისაც. V თავის (24,13) ფორმულის ძალით, ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი წარმოიდგინება ფორმულით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{agM}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right], \quad (16,9)$$

სადაც φ_0 აღნიშნავს \overrightarrow{OC} ვექტორის საწყის გადახრას ვერტიკალიდან. § 3-ში მოყვანილი დებულების ძალით,

$$J_0 = J_c + Ma^2, \quad (16,10)$$

სადაც J_c აღნიშნავს ინერციის მომენტს C წერტილში გაშვებული ღერძის მიმართ, რომელიც Ox ღერძის პარალელურია. თუ გავიხსენებთ ინერციის რადიუსის ცნებას (იხ. (2,8) ფორმულა), გვექნება

$$J_0 = Mi_0^2, \quad J_c = Mic^2. \quad (16,11)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (16,10) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$i_0^2 = ic^2 + a^2. \quad (16,12)$$

(16,11)-ის პირველი ტოლობის ძალით, (16,8) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$l = \frac{z_n^2}{a} = \frac{z_c^2}{a} + a. \quad (16,13)$$

გადავზომოთ OC მონაკვეთის გაგრძელებაზე $CO' = \frac{z_c^2}{a}$ მონაკვეთი და გადმოვიტანოთ ბრუნვის ღერძი Ox ღერძის პარალელურად O' წერტილში; მივიღებთ გარკვეულ ფიზიკურ საქანს. ნაჩვენებია, რომ ამ ფიზიკური საქანის შესაბამის მათემატიკური საქანის სიგრძე ტოლი იქნება l -ის. მართლაც, თუ ამ ფიზიკური საქანის შესაბამის მათემატიკური საქანის სიგრძეს აღვნიშნავთ l' -ით, (16,13) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$l' = \frac{z_c^2}{CO'} + CO' = a + \frac{z_c^2}{a} = l.$$

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ზემონაჩვენები წესით მიღებული ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი იგივე იქნება, რაც თავიდან აღებული ფიზიკური საქანისა.

§ 17. ფიზიკური სისტემის ბრუნვის დროზე წნევის განსაზღვრა

ეთქვას, მყარი სხეული ერთგვაროვანია და xOy სიბრტყე წარმოადგენს ამ სხეულისათვის სიმეტრიის სიბრტყეს. ამ შემთხვევაში Ox ღერძი იქნება ინერციის მთავარი ღერძი (იხ. § 6-ის დასასრული), რის გამოც

$$J_{xx} = J_{yy} = 0. \quad (17,1)$$

ცხადია, აგრეთვე, რომ $L_x = L_y = 0$, $F_y = F_z = 0$, $F_x = Mg$, ამიტომ (15,9) ტოლობები მოგვცემს: $B_x = B_y = 0$. როგორც ადვილი მისახვედრია, განსახილველ შემთხვევაში $A_z = 0$, ამიტომ, (15,5)-ის უკანასკნელი ტოლობის ძალით, $B_z = 0$. (15,5)-ის პირველი ორი განტოლებიდან ვღებულობთ

$$A_x = -Mg - M\omega^2 x_c - M \frac{d\omega}{dt} y_c, \quad (17,2)$$

$$A_y = -M\omega^2 y_c + M \frac{d\omega}{dt} x_c. \quad (17,3)$$

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში რეაქციის ძალები ცალსახად განისაზღვრება.

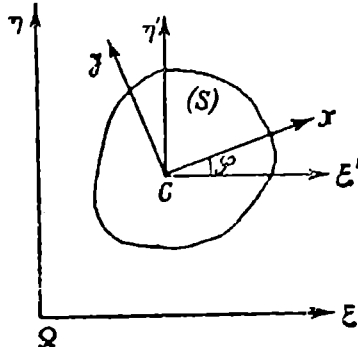
გ ა ნ ა ჯ ო ფ ი ლ ე ბ ა 4

მყარი სხეულის ბრუნული-პარალელური მოძრაობა

§ 18. მოძრაობის განტოლებები

ეთქვას, მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი ყოველი წერტილიდან განდილი რაიმე უძრავ (I_0) სიბრტყემდე მუდმივი რჩება. ასეთ შემთხვევაში სხეულის მოძრაობას ეწოდება ბრტყელი-პარალელური მოძრაობა. როგორც III თავის § 19-ში იყო ნაჩვენები, სხეულის ბრტყელი-პარალელური მოძრაობის შესწავლა დაიყვანება გარკვეულ (\sim) სიბრტყეში ბრტყელი (S) ფიგურის

მოძრაობის შესწავლამდე. ზოგადობის შეუზღუდველად შეიძლება ვიგულისხმოდეთ, რომ ინერციის ცენტრი C მოთავსებულია (Σ) სიბრტყეში. განვიხილოთ (Σ) სიბრტყეში უძრავი $\Omega\eta$ სისტემა და ბრტყელ (S) ფიგურასთან უძრავად დაკავშირებული Cxy სისტემა, რომლის სათავეც ემთხვევა სხეულის ინერციის ცენტრს. განვიხილოთ აგრეთვე დამხმარე $C\xi\eta'$ სისტემა, რომლის სათავე C წერტილშია მოთავსებული და რომლის ღერძებიც პარალელურია უძრავი კოორდინატთა ღერძების (ნახ. 136). ცხადია, ბრტყელი (S) ფიგურის მოძრაობა (და, მაშასადამე, აღებული მყარი სხეულის მოძრაობა) საესკებით დახასიათდება C წერტილის ξ_e, η_e კოორდინატებით და მობრუნების φ კუთხით.



ნახ. 136.

ინერციის ცენტრის მოძრაობის კანონი გაძღვეს

$$M\vec{w}_e = \vec{F}, \quad (18,1)$$

სადაც \vec{F} აღნიშნავს სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს.

(18,1) განტოლების უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით ვღებულობთ

$$M \frac{d^2 \xi_e}{dt^2} = F_{\xi}, \quad (18,2)$$

$$M \frac{d^2 \eta_e}{dt^2} = F_{\eta}.$$

ინერციის ცენტრის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი მოგვცემს

$$J_e \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = L_e, \quad (18,3)$$

სადაც J_e აღნიშნავს მყარი სხეულის ინერციის მომენტს იმ ღერძის მიმართ, რომელიც C წერტილში გადის და ბრტყელი (S) ფიგურის სიბრტყის მართობია, L_e არის სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები მომენტი აღნიშნული ღერძის მიმართ.

(18,2) და (18,3) განტოლებები, საიდანაც მოინახება ξ_e, η_e და φ სიდიდეები რაგორც დროის ფუნქციები, წარმოადგენენ განსახილველ შემთხვევაში მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებებს.

ამოცანები

10. ბორბალი, რომლის რადიუსი უდრის 50 სანტიმეტრს და წონა 100 კილოგრამს, მოძრაობს რელსზე უსრიალოდ ისე, რომ წუთში აკეთებს 60 ბრუნს. ვიპოვოთ ბორბლის მოძრაობის რაოდენობა.

ბორბლის მოძრაობის რაოდენობა უდრის მისი სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის რაოდენობას, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მასში თავმოყრილია მთელი

სხეულის მასა (იხ. § 8), ამიტომ თუ ბორბლის მოძრაობის რაოდენობის სიდიდეს აღვნიშნავთ K -თი, გვექნება

$$K = m v_c, \quad (1)$$

სადაც v_c არის სიძიმის ცენტრის სიჩქარე, m — ბორბლის მასა. ადვილად მივიღებთ, რომ

$$v_c = \pi \frac{a}{\text{სეკ}}, \quad m = \frac{100}{9,8} \frac{\text{კგ} \cdot \text{სეკ}^2}{\text{მ}}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (1) ტოლობაში, გვექნება

$$K = 10,2 \cdot \pi \text{კგ} \cdot \text{სეკ}.$$

11. ერთგვაროვანი თხელი დისკო, რომლის მასა უდრის M -ს და რადიუსი a -ს, ბრუნავს ცენტრში გამავალი პორიზონტალური ღერძის გარშემო და წუთში აკეთებს n ბრუნს. გამოვთვალოთ დისკოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი მისი ცენტრის მიმართ.

ვინაიდან დისკოს ყოველი წერტილის სიჩქარე მისი რადიუს-ვექტორის მართობია, ამიტომ, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის განმარტების ძალით, გვექნება

$$G_c = \iint \rho v \, dm = \sigma \iint \rho v \, dx \, dy = \sigma a \iint \rho^2 \, dx \, dy, \quad (2)$$

სადაც ω დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით ვღებულობთ

$$\sigma \iint \rho^2 \, dx \, dy = \sigma \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\rho \, d\varphi = \frac{\pi \sigma a^4}{2} = \frac{M a^2}{2}. \quad (3)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (2) მოგვცემს

$$G_c = \frac{\pi}{60} M n a^2. \quad (4)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, ამ მნიშვნელობის მიღება შეიძლება უშუალოდ (9,8) ფორმულიდან.

12. ერთგვაროვანი თხელი დისკო, რომლის მასა უდრის M -ს და რადიუსი a -ს, უსრიალოდ გორავს პორიზონტალურ წრეზე ისე, რომ წუთში აკეთებს n ბრუნს. გამოვთვალოთ: 1) დისკოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი მისი ცენტრის მიმართ, 2) დისკოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ხსენებულ წრეესთან შეხების წერტილის მიმართ.

ხსენებული მომენტების სიდიდეები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, G_c -თი და G_o -ით. (9,8) ფორმულის ძალით, ვღებულობთ

$$G_c = J_c \omega, \quad (5)$$

სადაც J_c არის ინერციის მომენტი სიძიმის ცენტრში გამავალ დისკოს მართობი ღერძის მიმართ. ცხადია (იხ. (3) ფორმულა),

$$J_c = \sigma \iint \rho^2 \, dx \, dy = \frac{M a^2}{2}. \quad (6)$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (7)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (5)-ში, მივიღებთ (შეადარეთ (4)-ს):

$$G_e = \frac{\pi}{60} M n a^2.$$

(9,8) ფორმულის ძალით, ცხადია, აგრეთვე, რომ

$$G_0 = J_0 \omega, \quad (8)$$

სადაც J_0 არის ინერციის მომენტი იმ ლერძის მიმართ, რომელიც შემოხსენებულ შეხების წერტილში გადის და დისკოს მართობია. § 3-ში დამტკიცებული შტეინერის დებულების ძალით,

$$J_0 = J_c + a^2 M \quad (9)$$

და, მაშასადამე, (8) ფორმულა მოგვცემს

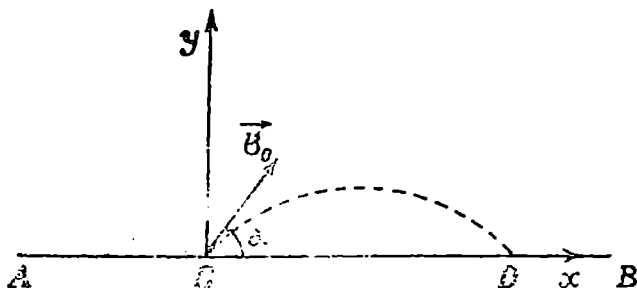
$$G_0 = J_c \omega + a^2 M \omega. \quad (10)$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ (6) და (7) მნიშვნელობებს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$G'_0 = \frac{\pi}{20} M n a^2. \quad (11)$$

13. AB ფიცრის C წერტილში ზის ბაყაყი. ფიცარი თავისუფლად ცურავს წყლის ზედაპირზე. რა მინიმალური სიჩქარით უნდა ახტეს ბაყაყი C წერტილიდან, რომ გადახტეს D წერტილამდე. მოცემულია, რომ ფიცრის მასა უდრის M -ს, ბაყაყის მასა m -ს და მანძილი C და D წერტილებს შორის არის a (ნახ. 137).

მოცემული v_0 სიჩქარისათვის მაქსიმალური დაშორება C წერტილიდან მიღწეული იქნება მაშინ, როცა $\alpha = 45^\circ$, სადაც α ის კუთხეა, რომელსაც სიჩქარის მიმართულება ჰორიზონტთან შეადგენს. ამიტომ, როგორც აღვილი მისახვედრია,



ნახ. 137.

საძიებელ v_0 სიჩქარეს ექნება მინიმალური მნიშვნელობა მაშინ, როცა ის AB ფიცრის მიმართულებასთან შეადგენს 45° . ვიპოვოთ ახლა \vec{v}_0 სიჩქარის სიდიდე-ვინაიდან ბაყაყის მოძრაობა ხდება შინაგანი ძალებით, ამიტომ ბაყაყის მოძ-

რაობის შედეგად საერთო მოძრაობის რაოდენობა არ შეიცვლება. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფიქარი ანოზრავდება უკან გარკვეული u სიჩქარით, ამასთან, ნათქვამის გამო, აღილი ექნება ტოლობას

$$Mu = mv_0 \cos 45^\circ, \quad (12)$$

საიდანაც

$$u = \frac{m}{M} v_0 \cos 45^\circ. \quad (13)$$

ვთქვათ, C მდებარეობიდან D -მდე გადასახტომად ბაყაყს სჭირდება t დრო. ვინაიდან t დროში ფიქარი უკან გაივლის ut მანძილს, ამიტომ D წერტილამდე გადასახტომად ბაყაყმა უნდა გაიაროს მანძილი პორიზონტალურად:

$$a - ut = a - \frac{t m v_0}{M} \cos 45^\circ. \quad (14)$$

ავილოთ კოორდინატა სისტემა სათავით C წერტილში ისე, რომ Cx ღერძი ემთხვეოდეს AB ფიქრის მიმართულებას, ხოლო Cy ღერძი იყოს მოგებული სიმიძმის ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 137). როგორც V თავის § 14-ში იყო ნაჩვენები,

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (15)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

(15)-ის მეორე ტოლობიდან საძიებელი t -სათვის მივიღებთ

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0 \sin 45^\circ}{g}. \quad (16)$$

ვინაიდან, ბაყაყის მიერ პორიზონტალური მიმართულებით განვლილი მანძილი, (15)-ის პირველი ტოლობის ძალით, უდრის $v_0 t \cos 45^\circ$, ამიტომ, (14)-ის ძალით, გვექნება

$$a - \frac{t m v_0 \cos 45^\circ}{M} = v_0 t \cos 45^\circ.$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ t -ს ნაცვლად მის მნიშვნელობას (16)-დან, შარტივად მივიღებთ

$$v_0 = \sqrt{\frac{M a g}{m + M}}.$$

14. ორი მყარი სხეული ბრუნავს ერთი და იმავე ღერძის გარშემო ω_1 და ω_2 კუთხური სიჩქარეებით. რა მოუვა ცოცხალ ძალას, თუ სისტემა გამყარდება, ე. ი. თუ ორივე სხეული მყარად დაუკავშირდება ერთმანეთს?

გამყარების შედეგად წარმოშობილი რეაქციის ძალები მიეკუთვნებიან შიგა ძალებს, ამიტომ სხეულების ერთმანეთთან მყარად დაკავშირების შედეგად არ შეიცვლება სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი. (14,7) ფორმულის გამოყენებით ვრწმუნდებით, რომ გამყარებამდე ბრუნვის ღერძის მიმართ აღებული სისტემის (ორივე სხეულის) მოძრაობის რაოდენობის მომენტი იქნება

$$J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2, \quad (17)$$

სადაც J_1 და J_2 აღნიშნავენ აღებული სხეულების ინერციის მომენტებს ბრუნვის ღერძის მიმართ. გამყარების შემდეგ ბრუნვის ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი გამოითვლება ფორმულით

$$(J_1 + J_2) \omega, \quad (18)$$

სადაც ω არის გამყარების შემდეგ სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. ზემოთ ნათქვამის ძალით, (17) და (18) სიდიდეები ტოლი უნდა იყოს:

$$J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = (J_1 + J_2) \omega,$$

საიდანაც

$$\omega = \frac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2}. \quad (19)$$

გამყარებამდე პირველი სხეულის ცოცხალი ძალა იქნება

$$T_1 = \frac{1}{2} \iiint v^2 dm = \frac{1}{2} \omega_1^2 \iiint r^2 dm = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2. \quad (20)$$

ასევე, მეორე სხეულის ცოცხალი ძალისათვის ვღებულობთ

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2. \quad (21)$$

ამრიგად, გამყარებამდე მთელი სისტემის ცოცხალი ძალა იქნება

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2. \quad (22)$$

როგორც აღვილი მისახვედრია, გამყარების შემდეგ სხეულების ცოცხალი ძალა იქნება

$$T' = \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega^2. \quad (23)$$

(19) ტოლობის ძალით, ეს უქანასკნელი მოგვცემს

$$T' = \frac{1}{2} \frac{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + 2J_1 J_2 \omega_1 \omega_2}{J_1 + J_2}. \quad (24)$$

მარტივი გამოთვლით ვღებულობთ

$$T - T' = \frac{1}{2} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} (\omega_1 - \omega_2)^2 > 0. \quad (25)$$

ამრიგად, სხეულების ერთმანეთთან მყარად შებმის შემთხვევაში აღვილი აქვს კინეტიკური ენერგიის დაცემას.

გ ა ნ ა ჯ ო ფ ი ლ ა ბ ა 5

მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო

§ 19. მოძრაობის განხილვები

განვიხილოთ კოორდინატა $Oxyz$ უძრავი სისტემა და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა, რომელთა სათავე ემთხვევა მყარი სხეულის უძრავ წერტილს, რომლის გარშემოც განიხილება სხეულის ბრუნ-

ვითი მოძრაობა. როგორც § 13-ში იყო ნაჩვენები, განსახილველ შემთხვევაში მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებებს აქვს სახე (იხ. (13,1) და (13,5) განტოლებები):

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \vartheta + \varphi', \end{aligned} \quad (19,1)$$

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= L_x, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr &= L_y, \end{aligned} \quad (19,2)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = L_z,$$

სადაც φ , ψ , ϑ ეილერის კუთხეებია, p , q , r — მყისი კუთხური სიჩქარის გეგმილები მოძრავ კოორდინატა ღერძებზე, A , B , C — მყარი სხეულის ინერციის მომენტები Ox , Oy , Oz ღერძების მიმართ, L_x , L_y , L_z — გარე ძალთა ნაკრები მომენტის გეგმილები აღნიშნულ ღერძებზე, ამასთან $Oxyz$ სისტემის ღერძებად მიღებულია O წერტილის წესაბამი ინერციის მთავარი ღერძები. თუ ეს სისტემები ინტეგრებულია, მაშინ რეაქციის ძალა მოინახება ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლებიდან:

$$M \vec{w}_c = \vec{F} + \vec{R}, \quad (19,3)$$

სადაც \vec{F} გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს აღნიშნავს, \vec{R} — რეაქციის ძალას. თუ უძრავი წერტილი ინერციის ცენტრს ემთხვევა, მაშინ $\vec{w}_c = 0$ და (19,3) ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{R} = -\vec{F}.$$

როგორც აღვილი მისახვედრია, მყარი სხეულისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებიც (იხ. V თავი, § 10). თუ განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღებთ ეილერის კუთხეებს, მაშინ ხსენებული განტოლებები ჩვენი შემთხვევისათვის შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_\psi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= Q_\vartheta, \end{aligned} \quad (19,4)$$

სადაც T მყარი სხეულის კინეტიკურ ენერგიას აღნიშნავს,

$$Q_\varphi = \sum_{i=1}^n \left(F_{i\varphi} \frac{\partial \xi_i}{\partial \varphi} + F_{i\psi} \frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} + F_{i\vartheta} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \varphi} \right), \quad (19,5)$$

$$Q\psi = \sum_{i=1}^n \left(F_{i\xi} \frac{\partial \xi_i}{\partial \psi} + F_{i\eta} \frac{\partial \eta_i}{\partial \psi} + F_{i\zeta} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \psi} \right). \quad (19,5)$$

$$Q\varphi = \sum_{i=1}^n \left(F_{i\xi} \frac{\partial \xi_i}{\partial \varphi} + F_{i\eta} \frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} + F_{i\zeta} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \varphi} \right),$$

ამასთან

$$\vec{F}_i = (F_{i\xi}, F_{i\eta}, F_{i\zeta}) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

წარმოადგენენ მყარი სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა სისტემას, რომელთა მოდების წერტილის კოორდინატები უძრავ სისტემაში აღნიშნულია ξ_i, η_i, ζ_i -თი¹.

(11,16) ფორმულის ძალით, განსახილველ შემთხვევაში მყარი სხეულის კინეტიკურ ენერგიას აქვს სახე²

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (19,6)$$

თუ ამ უკანასკნელში p, q, r -ის ნაცვლად შევიტანთ მათ მნიშვნელობებს (19.1) ტოლობებიდან, მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} [A(\psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi)^2 + (\psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi)^2 + (\psi' \cos \vartheta + \vartheta')^2]. \quad (19,7)$$

(19,7) ფორმულის ძალით, ცხადია, რომ (19,4) სისტემა წარმოადგენს ეილერის კუთხეების მიმართ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ეს სისტემა საესებით განსაზღვრავს განსახილველ შემთხვევაში მყარი სხეულის მოძრაობას.

აქვე შევნიშნავთ, რომ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები შეიძლება შევადგინოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობისათვისაც. ამ შემთხვევაში ეილერის კუთხეების გარდა განზოგადებულ კოორდინატებად შეიძლება მივიღოთ სხეულის რომელიმე ფიქსირებული წერტილის კოორდინატები.

§ 20. მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის მყარ ღერძის მიმართ

ბრუნვის მყისი ღერძის გეზის კოსინუსები, რომელთაც α, β, γ -თი აღვნიშნავთ, ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \gamma = \frac{r}{\omega},$$

სადაც p, q, r წარმოადგენენ ω მყისი კუთხური სიჩქარის კომპონენტებს მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემაში, ω მყისი კუთხური სიჩქარის სიდიდეა.

¹ ξ_i, η_i, ζ_i კოორდინატები, ცხადია, გამოისახებიან ეილერის კუთხეების საშუალებით.

² ვინაიდან $Oxyz$ სისტემის ღერძები ემთხვევა ინერციის მთავარ ღერძებს, ამიტომ ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია.

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (4,3) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\omega^2 J \omega = J_{xx} p^2 + J_{yy} q^2 + J_{zz} r^2 - 2J_{yx} q r - 2J_{xz} p r - 2J_{xy} p q,$$

სადაც $J \omega$ აღნიშნავს ინერციის მომენტს აღნიშნული ლერძის მიმართ, ამასთან ჩვენ აქ არ ვგულისხმობთ, რომ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემის ლერძები ემთხვევა ინერციის მთავარ ლერძებს. (11,16) ფორმულის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$J \omega = \frac{2T}{\omega^2}. \quad (20,1)$$

უკანასკნელი ტოლობა იძლევა საშუალებას გამოვთვალოთ ბრუნვის მყისი ლერძის მიმართ ინერციის მომენტი, თუ ვიცით მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია (ცოცხალი ძალა) და მყისი კუთხური სიჩქარის სიდიდე,

ამავე ფორმულით შეიძლება ვისარგებლოთ ცოცხალი ძალის გამოსათვლელად, თუ წინასწარ ვიცით ბრუნვის მყისი ლერძის მიმართ ინერციის მომენტი და მყისი კუთხური სიჩქარის სიდიდე. ამ შემთხვევაში ცოცხალი ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$2T = J \omega^2. \quad (20,2)$$

§ 21. მსახიობის ელიფსოიდი

აღნიშნოთ უძრავი O წერტილის მიმართ მყარი სხეულის მოძრაობის ჩაოდენობის მომენტი \vec{G} -თი. როგორც ვიცით (იხ. (9,9) ტოლობები), \vec{G} ვექტორის გეგმილებს მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის ლერძებზე აქვს სახე

$$\begin{aligned} G_x &= J_{xx} p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ G_y &= -J_{yx} p + J_{yy} q - J_{yz} r, \\ G_z &= -J_{zx} p - J_{zy} q + J_{zz} r. \end{aligned} \quad (21,1)$$

(11,17) ტოლობის ძალით,

$$T = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \cdot \vec{G}) = \frac{1}{2} (J_{xx} p^2 + J_{yy} q^2 + J_{zz} r^2 - 2J_{yx} q r - 2J_{xz} p r - 2J_{xy} p q). \quad (21,2)$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას გავაწარმოებთ p , q , r სიდიდეების მიმართ, მივიღებთ

$$G_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad G_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad G_z = \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (21,3)$$

უკანასკნელი ტოლობა ვექტორულად ასე გადაიწერება:

$$\vec{G} = \text{grad}_{(p,q,r)} T. \quad (21,4)$$

გადავზომოთ ბრუნვის მყის ლერძზე $\vec{\omega}$ ვექტორის პროპორციული \vec{R}_1 ვექტორი:

$$\vec{R}_1 = k_1 \vec{\omega}, \quad (21,5)$$

სადაც k_1 მუდმივი რიცხვია. თუ \vec{R}_1 ვექტორის გეგმილებს მოძრავ კოორდინატთა ლერძებზე აღნიშნავთ x_1 , y_1 , z_1 -ით, (21,5) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$x_1 = k_1 p, \quad y_1 = k_1 q, \quad z_1 = k_1 r, \quad (21,6)$$

თუ ამ ტოლობებიდან განსაზღვრულ p, q, r სიდიდეებს შევიტანთ (21,2) ტოლობაში, მივიღებთ

$$2\Phi(x_1, y_1, z_1) \equiv J_{xx}x_1^2 + J_{yy}y_1^2 + J_{zz}z_1^2 - 2J_{xy}x_1y_1 - 2J_{xz}x_1z_1 - 2J_{yz}y_1z_1 = 2Tk_1^2. \quad (21,7)$$

დავუშვათ, რომ $T = \text{const}$, მაშინ (21,7) ტოლობა მოგვცემს

$$2\Phi(x_1, y_1, z_1) = k_0^2, \quad (21,8)$$

სადაც

$$k_0^2 = 2Tk_1^2.$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, (21,8) წარმოადგენს ელიფსოიდის განტოლებას, რომელსაც ენერგიის ელიფსოიდი ეწოდება. (21,8) განტოლების (5,3) განტოლებასთან შედარება გვარწმუნებს, რომ ენერგიის ელიფსოიდი იმავე დროს წარმოადგენს გარკვეულ ინერციის ელიფსოიდს.

ენერგიის ელიფსოიდის წერტილებს, (21,5) ტოლობის ძალით, შეესაბამება ისეთი მყისი კუთხური სიჩქარეები:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{R}_1}{k_1}, \quad (21,9)$$

რომელთა შესაბამი კინეტიკური ენერგიაც მუდმივია, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ენერგიის ელიფსოიდის წერტილთა რადიუს-ვექტორების საშუალებით (21,9) ტოლობით განსაზღვრული მყისი კუთხური სიჩქარეები ერთნაირ კინეტიკურ ენერგიას იძლევიან.

(21,6) ტოლობების ძალით (21,3) ფორმულები მოგვცემენ

$$G_x = \frac{1}{k_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad G_y = \frac{1}{k_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad G_z = \frac{1}{k_1} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1},$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\vec{G} = \frac{1}{k_1} \text{grad}_{(x_1, y_1, z_1)} \Phi(x_1, y_1, z_1). \quad (21,10)$$

ვინაიდან $\text{grad}_{(x_1, y_1, z_1)} \Phi(x_1, y_1, z_1)$ პარალელურია $\Phi = \text{const}$ ელიფსოიდის ნორმალისა (x_1, y_1, z_1) წერტილში, ხოლო ეს უკანასკნელი ის წერტილია, რომელზედაც ელიფსოიდის მყისი კუთხური სიჩქარის მიმართულება გადაკვეთს, ამიტომ, (21,10) ტოლობის ძალით, ჩვენ გვაქვს შემდეგი შედეგი:

მყარის სხეულის \vec{G} კინეტიკური მომენტი პარალელურია ენერგიის ელიფსოიდის ნორმალისა იმ წერტილში, სადაც მას მყისი კუთხური სიჩქარის მიმართულება გადაკვეთს.

§ 22. დამოკიდებულება მყის კუთხური სიჩქარისა და კინეტიკური მომენტის შორის

$\vec{\omega}$ და \vec{G} ვექტორებს შორის დამოკიდებულება ხასიათდება (21,1) ტოლობებით. თუ მოძრავ კოორდინატთა ღერძებად მიღებულია ინერციის მთავარი ღერძები, მაშინ ეს ტოლობები გვაძლევს

$$G_x = Ap, \quad G_y = Bq, \quad G_z = Cr, \quad (22,1)$$

სადაც A, B, C წარმოადგენენ Ox, Oy, Oz ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებს. (22,1) ტოლობები გვიჩვენებს, რომ $\vec{\omega}$ და \vec{G} ვექტორები თანამთხვეულია ინერციის მთავარი ღერძების გასწვრივ. ვაჩვენოთ, რომ მათ თანამთხვევას ადგილი აქვს მხოლოდ ინერციის მთავარი ღერძების გასწვრივ. ამისათვის $\vec{\omega}$ და \vec{G} ვექტორების პარალელობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$[\vec{\omega} \ \vec{G}] = 0. \quad (22,2)$$

თუ ამ ტოლობას დავაგვიღებთ მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე, (22,1) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (C-B)qr &= 0, \\ (A-C)pr &= 0, \\ (B-A)pq &= 0. \end{aligned} \quad (22,3)$$

დავუშვათ ჯერჯერობით, რომ A, B, C სიდიდეები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. ამ შემთხვევაში (22,3) ტოლობები დაკმაყოფილდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p, q, r სიდიდეებიდან ნებისმიერი ორი მათგანი ნულის ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (22,3) პირობები შესრულდება მხოლოდ ინერციის მთავარი ღერძების გასწვრივ.

ვთქვათ, A, B, C სიდიდეებიდან ორი მათგანი ტოლია, მაგალითად, $B=C \neq A$. ამ შემთხვევაში (22,3) ტოლობებიდან პირველი დაკმაყოფილდება ავტომატურად, და, მაშასადამე, გვრჩება შემდეგი ორი პირობა:

$$\begin{aligned} (A-B)pr &= 0, \\ (B-A)pq &= 0. \end{aligned}$$

ეს პირობები შესრულდება ან მაშინ, როცა $q=r=0$, ან მაშინ, როცა $p=0$. პირველ შემთხვევაში თანამთხვევას ადგილი აქვს x ღერძის გასწვრივ, ე. ი. ისევ ინერციის მთავარი ღერძის გასწვრივ. მეორე შემთხვევაში კი თანამთხვევა ხდება yOz სიბრტყეში მოთავსებული O წერტილში გაშვალ ნებისმიერი ღერძის გასწვრივ. მაგრამ, როცა $B=C$, მაშინ ინერციის ელიფსოიდი ბრუნვით ელიფსოიდს წარმოადგენს და O წერტილში გაშვალ ნებისმიერი მიმართულება, რომელიც yOz სიბრტყეშია მოთავსებული, ინერციის მთავარი ღერძი იქნება და, მაშასადამე, თანამთხვევას ადგილი აქვს ისევ მთავარი ღერძების გასწვრივ.

როცა $A=B=C$, მაშინ (22,3) პირობები შესრულებულია ავტომატურად, ე. ი. $\vec{\omega}$ და \vec{G} ვექტორები ყოველთვის თანამთხვეულია. განსახილველ შემთხვევაში ინერციის ელიფსოიდი სფეროს წარმოადგენს და O წერტილში გაშვალ ნებისმიერი მიმართულება ინერციის მთავარი ღერძი იქნება. ამრიგად, თანამთხვევას ადგილი აქვს ისევ ინერციის მთავარი ღერძების გასწვრივ.

§ 23. მჟარის სხეულის გარშნავა უძრავი წერტილის გარშემო სიმძიმის ძალის გავლენით

ვთქვათ, მყარ სხეულზე, რომელსაც ერთი უძრავი წერტილი აქვს, მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა. უძრავი $O\xi\eta\zeta$ სისტემა ავიღოთ ისე, რომ $O\xi$ ღერძი მიმართული იყოს ვერტიკალურად სიმძიმის ძალის საწინააღმდეგო

ბიმართულებით. მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული სისტემა იყოს ისევ $Oxyz$, რომლის ღერძებიც სხეულის ინერციის მთავარ ღერძებს ემთხვევა. აღნიშნოთ $O\zeta$ ღერძის გეზის კოსინუსები $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -ით, ე. ი.

$$\vec{\zeta} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (23,1)$$

(13,2) ტოლობის ძალით, ცხადია, გვექნება

$$\vec{\zeta}' = \vec{\zeta}^0 \cos \vartheta + \vec{A}_1 \sin \vartheta, \quad (23,2)$$

სადაც \vec{A}_1 და $\vec{\zeta}^0$ წარმოდგენენ § 12-ში განხილული Δ_1 და Ox ღერძების მგეზავებს. თუ ამ ტოლობას $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \gamma_2 &= \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \gamma_3 &= \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (23,3)$$

დავწეროთ ეილერის კინემატიკური განტოლებები

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi}' \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta}' \cos \varphi, \\ q &= \dot{\varphi}' \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta}' \sin \varphi, \\ r &= \dot{\varphi}' \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (23,4)$$

(23,3) და (23,4) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს, რომ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ფუნქციები წარმოდგენენ ეილერის კინემატიკურ განტოლებებში φ' წარმოებულის კოეფიციენტებს. ნათქვამის ძალით (23,4) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} p &= \gamma_1 \dot{\varphi}' + \dot{\vartheta}' \cos \varphi, \\ q &= \gamma_2 \dot{\varphi}' - \dot{\vartheta}' \sin \varphi, \\ r &= \gamma_3 \dot{\varphi}' + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (23,5)$$

ვინაიდან $\vec{\zeta}^0$ მუდმივი ვექტორია, ამიტომ, გვექნება (იხ. III თავის (26,5) ფორმულა)

$$\frac{d\vec{\zeta}^0}{dt} = \frac{d\vec{\zeta}^0}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{\zeta}^0] = 0, \quad (23,6)$$

სადაც $\frac{d\vec{\zeta}^0}{dt}$ აღნიშნავს $\vec{\zeta}^0$ ვექტორის ფარდობით წარმოებულს, ე. ი.

$$\frac{d\vec{\zeta}^0}{dt} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right). \quad (23,7)$$

თუ გავითვალისწინებთ (23,7) ფორმულას და (23,6) ტოლობას დავაგეგმილებთ მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ -\frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (23,8)$$

ეს განტოლებები პირველად გამოყვანილი იყო პუასონის მიერ, ამიტომ მათ პუასონის განტოლებებს უწოდებენ.

დავწეროთ ეილერის დინამიკური განტოლებები:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= L_x, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= L_y, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= L_z. \end{aligned} \quad (23,9)$$

განსახილველ შემთხვევაში L_x , L_y , L_z წარმოადგენენ სიმძიმის ძალის მომენტებს Ox , Oy , Oz ღერძების მიმართ. ცხადია, სიმძიმის ძალა, რომელსაც \vec{P}_0 -ით აღვნიშნავთ, შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\vec{P}_0 = -Mg\vec{\zeta}^0. \quad (23,10)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით გვექნება

$$\vec{L} = [\vec{r}_c \cdot \vec{P}_0] = -Mg[\vec{r}_c \cdot \vec{\zeta}^0] = Mg[\vec{\zeta}^0 \cdot \vec{r}_c], \quad (23,11)$$

სადაც \vec{r}_c წარმოადგენს სიმძიმის ცენტრის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ. (23,11) ტოლობის მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე დაგვემიღებოთ ვლემულობა

$$\begin{aligned} L_x &= Mg(\gamma_2 z_c - \gamma_3 y_c), \\ L_y &= Mg(\gamma_3 x_c - \gamma_1 z_c), \\ L_z &= Mg(\gamma_1 y_c - \gamma_2 x_c). \end{aligned} \quad (23,12)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (23,9) განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= Mg(\gamma_2 z_c - \gamma_3 y_c), \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= Mg(\gamma_3 x_c - \gamma_1 z_c), \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= Mg(\gamma_1 y_c - \gamma_2 x_c). \end{aligned} \quad (23,13)$$

(23,8) და (23,13) წარმოადგენენ p , q , r , γ_1 , γ_2 , γ_3 სიდიდეების მიმართ პირველი რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. თუ ეს სისტემა ინტეგრებულია, მაშინ ეილერის φ , ψ , θ კუთხეების მოსაძებნად დაგვეჭიროება კიდევ (23,5) სისტემის ინტეგრება.

(23,8) და (23,13) განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემა კანონიკური სახით ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q} = \frac{dr}{R} = \frac{d\gamma_1}{\Gamma_1} = \frac{d\gamma_2}{\Gamma_2} = \frac{d\gamma_3}{\Gamma_3} = \frac{dt}{1}, \quad (23,14)$$

სადაც

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{A} [Mg(\gamma_2 z_e - \gamma_3 y_e) - (C - B)qr], \\ Q &= \frac{1}{B} [Mg(\gamma_3 x_e - \gamma_1 z_e) - (A - C)pr], \\ R &= \frac{1}{C} [Mg(\gamma_1 y_e - \gamma_2 x_e) - (B - A)pq], \end{aligned} \quad (23,15)$$

$$\Gamma_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \quad \Gamma_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \quad \Gamma_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p. \quad (23,16)$$

(23,14)-ის სახით ჩვენ გვაქვს 6 განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა. როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, ამ სისტემის ზოგადი ინტეგრალი შეიძლება დაწეროთ, თუ ვიცით მისი 6 პირველი ინტეგრალი. როგორც (23,15) და (23,16) ტოლობებიდან ჩანს, $P, Q, R, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ სიდიდეები t -ს ცხადად არ შეიცავენ, ამიტომ (23,14) სისტემის პირველი ხუთი განტოლება შეიძლება შევქცისაგან დამოუკიდებლად ვაინტეგრროთ. ამ სისტემის ინტეგრების შემდეგ დაგვჭირდება კიდევ ერთი კვადრატურა უკანასკნელი პირველი ინტეგრალის მოსაძებნად. ამრიგად, ჩვენ უნდა ვიაოგოთ 5 პირველი ინტეგრალი შემდეგი სისტემისა:

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q} = \frac{dr}{R} = \frac{d\gamma_1}{\Gamma_1} = \frac{d\gamma_2}{\Gamma_2} = \frac{d\gamma_3}{\Gamma_3}. \quad (23,17)$$

თუ (23,8) სისტემის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ γ_1 -ზე, მეორეს γ_2 -ზე, მესამეს γ_3 -ზე და შევკრებთ, მივიღებთ

$$\gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0,$$

საიდანაც

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \text{const.}$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ გეზის კოსინუსებია, გვექნება

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (23,18)$$

(23,18) ტოლობა იძლევა ზემოხსენებული სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს, რომელიც შეგვექნა აირდაპირ დაგვეწერა.

მოდრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი გვაძლევს

$$\frac{dG_\zeta}{dt} = L_\zeta.$$

ვინაიდან სიმძიმის ძალა პარალელურია $O\zeta$ ღერძის, ამიტომ $L_\zeta = 0$ და უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$G_\zeta = \text{const.} \quad (23,19)$$

ცხადია, გვექნება

$$G_\zeta = (\vec{G} \cdot \vec{\zeta}) = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (23,19) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ შემდეგ პირველ ინტეგრალს:

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.} \quad (23,20)$$

ერთ პირველ ინტეგრალს მოგვცემს, აგოთეფე, ცოცხალი ძალის კანონი

$$\begin{aligned} dT &= -Mg d\zeta, \\ \text{საიდანაც} \quad T + Mg \zeta &= \text{const.} \end{aligned} \quad (23,21)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\zeta = (\vec{r} \cdot \vec{\zeta}^0) = x\zeta_1 + y\zeta_2 + z\zeta_3,$$

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

(23,21) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + Mg(x\zeta_1 + y\zeta_2 + z\zeta_3) = \text{const.} \quad (23,22)$$

ამრიგად, ჩვენ მიერ ზემოხსენებული 5 პირველი ინტეგრალიდან (23,18), (23,20) და (23,22) ინტეგრალების სახით გვაქვს 3 პირველი ინტეგრალი.

დაუმტკიცებლად აღვნიშნავთ, რომ დარჩენილი ორი პირველი ინტეგრალიდან შეიძლება მოინახოს კიდევ ერთი პირველი ინტეგრალი იაკობის ე. წ. უკანასკნელი მამრავლის თეორიაზე დაყრდნობით¹. ამრიგად, (23,14) სისტემის ზოგადი ინტეგრალის დაწერისათვის საჭიროა კიდევ ერთი პირველი ინტეგრალის აგება. დამტკიცებულია, რომ ხსენებული უკანასკნელი პირველი ინტეგრალის აგება შეიძლება, საზოგადოდ, მხოლოდ შემდეგ სამ შემთხვევაში:

1°. როცა მყარი სხეულის ბრუნვა განიხილება სიმძიმის ცენტრის გარშემო სიმძიმის ძალის გავლენით. ამ შემთხვევას, რომელიც დაწვრილებით შეისწავლა, ეილერმა, ეილერის შემთხვევას უწოდებენ. ცხადია, ამ შემთხვევაში სიმძიმის ძალას აწონასწორებს უძრავი წერტილის რეაქცია. ეილერის შემთხვევის მეტად თვალსაჩინო გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ეკუთვნის პუანსოს, ამიტომ, ხშირად, განსახილველ შემთხვევას ეილერ-პუანსოს შემთხვევას უწოდებენ.

ეილერის მეთოდი გამოსაყენებელია იმ შემთხვევაშიც, როცა განიხილება მყარი სხეულის მოძრაობა ისეთ ძალთა მოქმედებით, რომელთა ნაკრები მომენტი უძრავი წერტილის მიმართ ნულის ტოლია ($\vec{L}=0$). ამ შემთხვევაში მყარი სხეულის მოძრაობას ეწოდება ინერციით ბრუნვა უძრავი O წერტილის გარშემო. ცხადია, ეილერის შემთხვევა წარმოადგენს უძრავი წერტილის გარშემო ინერციით ბრუნვის კერძო შემთხვევას.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეილერის მეთოდი, და აგრეთვე პუანსოს გეომეტრიული თეორია, გამოდგება იმ შემთხვევაშიც, როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო ინერციით, ამიტომ ამ შემთხვევასაც, შემდეგში, ეილერ-პუანსოს შემთხვევას ვუწოდებთ.

2°. ლაგრანჟ-პუანსონის შემთხვევაში, როცა ინერციის ელიფსოიდი წარმოადგენს ბრუნვით ელიფსოიდს და სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია ინერციის ელიფსოიდის ბრუნვის დინამიკურ ღერძზე. ერთგვაროვან მყარ

¹ იხ. Г. К. Суслов, Теоретическая механика, М.—Л., 1944 г., § XL (23,14) სისტემისთვის იაკობის უკანასკნელი მამრავლი ერთი ტოლია. როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, ამ შემთხვევაში შეიძლება ავაგოთ ხსენებული სისტემის პირველი ინტეგრალი, რომელიც ზემოაღნიშნული ინტეგრალებისაგან დამოუკიდებელი იქნება.

სხეულს, რომელიც ხსენებული დინამიკური ლერძის გარშემო ბრუნავს საკმა-
რისად დიდი კუთხური სიჩქარით, ეწოდება გიროსკოპი.

3°. კოვალევსკაიას შემთხვევაში, როცა ინერციის მომენტებს შორის
ადგილი აქვს დამოკიდებულებას $A=B=2C$, ამასთან სიმძიმის ცენტრი მოთაფ-
სებულია ინერციის ელიფსოიდის ბრუნვის ეკვატორულ სიბრტყეში.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ეს შემთხვევები ცალ-ცალკე. სანამ ამ შემ-
თხვევების შესწავლაზე გადავიდოდეთ, განვიხილოთ ელიფსურ ფუნქციათა
თეორიის ზოგიერთი საკითხი, რომელნიც შემდეგში დაგვპირდება.

§ 24. ელიფსურ ფუნქციათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი

განვიხილოთ ელიფსური ინტეგრალი

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (24,1)$$

სადაც k მუდმივაა, რომელსაც ელიფსური ინტეგრალის მოდული ეწოდება,
ამასთან $0 < k < 1$. (24,1) დამოკიდებულებიდან განვსაზღვროთ φ , როგორც
ფუნქცია u -სი, მივიღებთ¹

$$\varphi = \Phi(u). \quad (24,2)$$

ხშირად φ -ს ეწოდებენ ელიფსური ინტეგრალის ამპლიტუდას და წერენ

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (24,3)$$

განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციები:

$$\sin \varphi = \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u, \quad (24,4)$$

$$\cos \varphi = \cos \operatorname{am} u = \operatorname{cn} u, \quad (24,5)$$

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \operatorname{dn} u. \quad (24,6)$$

$\operatorname{sn} u$ -ს ეწოდება ელიფსური სინუსი, ხოლო $\operatorname{cn} u$ -ს — ელიფსური კოსინუსი.
ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ და $\operatorname{dn} u$ ფუნქციების ზოგიერთი თვის-
ება. (24,1) ტოლობის ცალით, ცხადია, რომ u ტოლია ნულის მაშინ და მხო-
ლოდ მაშინ, როცა $\varphi = 0$, ამიტომ (24,4), (24,5) და (24,6) ტოლობები გვაძლევს

$$\operatorname{sn} 0 = \sin 0 = 0,$$

$$\operatorname{cn} 0 = \cos 0 = 1,$$

$$\operatorname{dn} 0 = 1.$$

(24,1) ტოლობიდან ცხადია, რომ

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

საიდანაც

$$\frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \operatorname{dn} u, \quad (24,7)$$

¹ რადგანაც $\frac{du}{d\varphi} > 0$. ე. ი. $u(\varphi)$ ზრდადი ფუნქციაა, ამიტომ არსებობს u -ს უებრუნე-
ბული ფუნქცია.

ცხადია, გვექნება

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \frac{d \sin \varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{du} = \cos \varphi \operatorname{dn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

ამრიგად,

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \quad (24,8)$$

სავსებით ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u. \quad (24,9)$$

ცხადია აგრეთვე, რომ

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= \frac{d}{d\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{du} = \\ &= -\frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \operatorname{dn} u = -k^2 \sin \varphi \cos \varphi = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \quad (24,10)$$

(24,4), (24,5) და (24,6) ტოლობები გვეჩვენებენ, რომ $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ და $\operatorname{dn} u$ ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია, ამასთან, ცხადია, მათი პერიოდები ტოლია. აღვნიშნოთ ამ ფუნქციების პერიოდი K -თი. ვინაიდან $\sin \varphi$ -ს პერიოდი უდრის 2π -ს, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, გვექნება

$$\begin{aligned} u + K &= \int_0^{\varphi+2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს

$$K = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (24,11)$$

§ 25. ეილერ-პუანსონის შემთხვევა

განვიხილოთ მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი O წერტილის გარშემო ისეთ ძალთა მოქმედებით, რომელთა ნაკრები მომენტი ხსენებული უძრავი წერტილის მიმართ ნულის ტოლია. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ასეთ შემთხვევაში მყარი სხეულის მოძრაობას ეწოდება ინერციით ბრუნვა უძრავი წერტი-

ლის გარშემო. ცხადია, მძიმე მყარი სხეულის ინერციით ბრუნვა სიმძიმის ცენტრის გარშემო წარმოადგენს ზემოხსენებულის კერძო შემთხვევას.

ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში $\vec{L}=0$, ამიტომ ეილერის დინამიკური განტოლებები მოგვცემს

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= 0, \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)pr &= 0, \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= 0. \end{aligned} \quad (25,1)$$

განვიხილოთ, აგრეთვე, ეილერის კინემატიკური განტოლებები

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \vartheta + \varphi'. \end{aligned} \quad (25,2)$$

ვინაიდან (25,1) სისტემა ეილერის კუთხეებს არ შეიცავს, ამიტომ ის შეიძლება ვაინტეგრირებოთ (25,2) სისტემისაგან დამოუკიდებლად.

(25,1) სისტემის ორი პირველი ინტეგრალი შეიძლება პირდაპირ დაიწეროს. მართლაც, თუ (25,1) სისტემის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ p -ზე, მეორეს q -ზე, ხოლო მესამეს r -ზე და შევკრებთ, მივიღებთ

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0,$$

საიდანაც

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.} \quad (25,3)$$

(25,3) ტოლობა გვაძლევს (25,1) სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს. (19,6) ფორმულის ძალით (25,3) ტოლობა მოგვცემს

$$T = \text{const.} \quad (25,4)$$

გავამრავლოთ (25,1) სისტემის პირველი განტოლება Ap -ზე, მეორე Bq -ზე, მესამე Cr -ზე და შევაჯამოთ, მივიღებთ

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0,$$

საიდანაც

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const.} \quad (25,5)$$

(25,5) ტოლობა, რომელიც ითვლება (25,1) სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს, (22,1) ტოლობების ძალით, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$G^2 = \text{const.} \quad (25,6)$$

(25,5), ანუ რაც იგივეა, (25,6) ტოლობა შეგვიძლია (25,1) სისტემისაგან დამოუკიდებლად დავვწერა. მართლაც, რადგან განსახილველ შემთხვევაში $\vec{L}=0$, ამიტომ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი გვაძლევს

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0,$$

$$G^2 = \text{const},$$

ვეძებთ (25,1) სისტემის ამოხსნა შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} p &= \alpha \operatorname{cn} \sigma(t-t_0), \\ q &= \beta \operatorname{sn} \sigma(t-t_0), \\ r &= \gamma \operatorname{dn} \sigma(t-t_0), \end{aligned} \quad (25,7)$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ და აგრეთვე ელიფსურ ფუნქციებში მონაწილე k მუდმივები ისე უნდა განესაზღვროთ, რომ (25,7) იყოს (25,1) სისტემის ამოხსნა.

განვიხილოთ შემდეგი საწყისი პირობა: როცა $t=t_0$, მაშინ $p=p_0, q=0, r=r_0$, სადაც p_0 და r_0 ნებისმიერად მოცემული სიდიდეებია¹. ეს პირობები გვიჩვენებს, რომ საწყის მომენტში მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$ მოთავსებულია xOz სიბრტყეში. (25,7) ტოლობების ძალით ეს საწყისი პირობები გვაძლევს

$$\alpha = p_0, \quad \gamma = r_0. \quad (25,8)$$

დავუშვათ ჯერჯერობით, რომ A, B, C განსხვავებულია ერთმანეთისაგან; მაშინ ზოგადობის შეუზღუდველად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ

$$A > B > C. \quad (25,9)$$

თუ (25,7) მნიშვნელობებს შევიტანთ (25,1) სისტემაში, აღვიღად მივიღებთ

$$\begin{aligned} A\alpha\sigma + (B-C)\gamma\beta &= 0, \\ B\beta\sigma + (A-C)\alpha\gamma &= 0, \\ Ck^2\sigma\gamma + (A-B)\alpha\beta &= 0, \end{aligned} \quad (25,10)$$

საიდანაც, (25,8) ტოლობების გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \frac{p_0\sigma}{r_0\beta} &= -\frac{B-C}{A}, \\ \frac{\beta\sigma}{p_0r_0} &= -\frac{A-C}{B}, \\ \frac{k^2r_0\sigma}{p_0\beta} &= -\frac{A-B}{C}. \end{aligned} \quad (25,11)$$

ამრიგად, β, σ, k სიდიდეების მოსაძებნად გვქაქვს სამი განტოლება. თუ (25,11) სისტემის მეორე განტოლებას გავყოფთ პირველზე, მივიღებთ

$$\beta^2 = p_0^2 \frac{A(A-C)}{B(B-C)}. \quad (25,12)$$

გავამრავლოთ (25,11)-ის პირველი განტოლება მეორეზე, მივიღებთ

$$\sigma^2 = r_0^2 \frac{(B-C)(A-C)}{AB}. \quad (25,13)$$

¹ საწყისი პირობების ასეთი სახით აღება, რაც ამარტივებს ზოგიერთ გამოთვლას, არსებითი არ არის.

უკანასკნელად, (25,11) სისტემის მესამე განტოლება გავყოთ პირველზე, მივიღებთ

$$k^2 = \frac{p_0^2}{r_0^2} \frac{A(A-B)}{C(B-C)}. \quad (25,14)$$

β, σ, k სიდიდეების მოსაძებნად დაგვეჭირდება კიდევ ფესვის ამოღება, ფესვის წინ ნიშნები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ძალაში იყოს (25,11) სისტემა.

ვინაიდან ელიფსური ინტეგრალის მოდული $k < 1$, ამიტომ, (25,14) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$k^2 = \frac{p_0^2}{r_0^2} \frac{A(A-B)}{C(B-C)} < 1,$$

საიდანაც აღვიღალ მივიღებთ

$$A^2 p_0^2 + C^2 r_0^2 < B(A p_0^2 + C r_0^2), \quad (25,15)$$

ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში $\eta_0 = 0$, ამიტომ

$$A^2 p_0^2 + C^2 r_0^2 = G^2, \quad A p_0^2 + C r_0^2 = 2T.$$

უკანასკნელი ტოლობების ძალით, (25,15) უტოლობა მოგვცემს

$$G^2 < 2BT = Bh, \quad (25,16)$$

სადაც

$$2T = h = \text{const}, \quad G = \text{const}.$$

ამრიგად, საწყისი მონაცემები (ე. ი. p_0 და r_0) ისე უნდა იყოს აღებული, რომ კინეტიკური მომენტი და ცოცხალი ძალა, რომელნიც, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, მუდმივებს წარმოადგენენ, აკმაყოფილებდნენ (25,16) პირობას.

ვინაიდან ელიფსური ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია, ამიტომ, ცხადია, $\cos(t-t_0)$, $\sin(t-t_0)$, $\operatorname{dn}(t-t_0)$ წარმოადგენენ t ცვლადის პერიოდულ ფუნქციებს. თუ ამ ფუნქციების პერიოდს აღვნიშნავთ τ -თი, (24,11) ფორმულის ძალით, აღვიღალ მივიღებთ

$$\tau = \frac{4}{\sigma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (25,17)$$

ამ პერიოდის გავლის შემდეგ \vec{w} მყისი კუთხური სიჩქარე იგივე მდებარეობას დაიკავებს მყარი სხეულის მიმართ, რომელიც დასაწყისში ეკავა.

მოძებნილი გვაქვს რა p , q , r სიდიდეები, ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ეილერის კუთხეები.

ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში \vec{G} მუდმივი ვექტორია, ამიტომ $O\vec{L}$ ღერძი ისე შეიძლება ავიღოთ, რომ ის ემთხვეოდეს \vec{G} ვექტორის მიმართულებას. მაშინ, ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} Ap &= G\gamma_1, \\ Bq &= G\gamma_2, \\ Cr &= G\gamma_3, \end{aligned} \quad (25,18)$$

სადაც γ_1 , γ_2 , γ_3 წარმოადგენენ $O\vec{L}$ ღერძის გზის კოსინუსებს. (23,3) ფორმულების ძალით, (25,18) ტოლობები მოგვცემენ

$$\begin{aligned}Ap &= G \sin \vartheta \sin \varphi, \\ Bq &= G \sin \vartheta \cos \varphi,\end{aligned}\quad (25,19)$$

$$Cr = G \cos \vartheta.$$

(25,19) სისტემის უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\cos \vartheta = \frac{C}{G} r = \frac{Cr_0}{G} \operatorname{dn} \sigma(t-t_0), \quad (25,20)$$

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{Cr_0}{G} \operatorname{dn} \sigma(t-t_0) \right). \quad (25,21)$$

თუ (25,19) სისტემის პირველ ტოლობას მეორეზე გავეყოფთ, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq} = \frac{Ap_0 \operatorname{cn} \sigma(t-t_0)}{B\beta \operatorname{sn} \sigma(t-t_0)}, \quad (25,22)$$

$$\varphi = \arctg \frac{Ap_0 \operatorname{cn} \sigma(t-t_0)}{B\beta \operatorname{sn} \sigma(t-t_0)}. \quad (25,23)$$

ვინაიდან $p, q, r, \vartheta, \varphi$ მოძებნილია, ამიტომ ψ' შეიძლება განვსაზღვროთ (25,2) სისტემის ერთ-ერთი განტოლებიდან, მაგალითად, ხსენებული სისტემის უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$\psi' = \frac{r - \varphi'}{\cos \vartheta}, \quad (25,24)$$

საიდანაც

$$\psi = \int_{t_0}^t \frac{r - \varphi'}{\cos \vartheta} dt + \psi_0. \quad (25,25)$$

ამასთან

$$\psi_0 = \psi(t_0).$$

(25,21) და (25,23) ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ ϑ და φ პერიოდული ფუნქციებია, რომელთა პერიოდიც ტოლია π -სი, სადაც π განსაზღვრულია (25,17) ტოლობით. (25,24) ტოლობის ცალით, ψ' წარმოადგენს აგრეთვე პერიოდულ ფუნქციას, რომლის პერიოდიც π ს ტოლია, ამიტომ გვექნება

$$\psi'(t + \pi) - \psi'(t) = 0,$$

საიდანაც

$$\psi(t + \pi) - \psi(t) = \text{const.} \quad (25,26)$$

ამრიგად, ψ , საზოგადოდ, არ იქნება პერიოდული პუნქცია.

ჩვენ აქამდე განვიხილავდით იმ შემთხვევას, როცა A, B, C სიდიდეები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. ვთქვათ, ეს აირობა არ არის შესრულებული. მაშინ, როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, ამოხსნები ელემენტარული ფუნქციებით გამოისახება.

თუ $A=B=C$, მაშინ ეილერის დინამიკური განტოლებები მოგვცემს

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0, \quad (25,27)$$

სადაც p_0, q_0, r_0 ნებისმიერი მუდმივებია. ამ შემთხვევაში (25,19) სისტემა მოგვცემს

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \varphi = \varphi_0,$$

სადაც φ_0 და φ_0 აგრეთვე ნებისმიერი მუდმივებია. (25,2) სისტემის უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\psi' = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{r_0}{\cos \varphi_0}.$$

საიდანაც

$$\psi = -\frac{r_0}{\cos \varphi_0} t + \psi_0.$$

ეთქვან, A , B , C სიდიდეებიდან ორი მათგანი ტოლია, მაგალითად, $A = B \neq C$. ამ შემთხვევაში (25,1) სისტემის უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad r = r_0 = \text{const.} \quad (25,28)$$

(25,1) სისტემის პირველი ორი განტოლება, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{dp}{dt} + ap = 0, \quad (25,29)$$

$$\frac{dq}{dt} - ap = 0.$$

სიდანაც

$$a = \frac{(C - A)r_0}{A}. \quad (25,30)$$

ვიგულისხმობთ, რომ $a > 0$.

(25,29) სისტემის მეორე განტოლებიდან განვსაზღვროთ p და შევიტანოთ პირველში, მივიღებთ

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + a^2 q = 0. \quad (25,31)$$

ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$q = \alpha \sin(at + \epsilon). \quad (25,32)$$

სადაც α და ϵ ნებისმიერი მუდმივებია. (25,29) სისტემის მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ

$$p = \frac{1}{a} \frac{dq}{dt} = \alpha \cos(at + \epsilon). \quad (25,33)$$

ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ p , q , r სიდიდეები ცხადად.

ვიპოვოთ ეილერის კუთხეები φ , ψ , ϑ . (25,19) სისტემის უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$\cos \vartheta = \frac{Cr_0}{G} = \text{const.}$$

საიდანაც

$$\vartheta = \vartheta_0. \quad (25,34)$$

ამასთან ϑ_0 ნებისმიერი მუდმივია. ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში $\vartheta' = 0$, ამიტომ (25,2) სისტემის პირველი განტოლება მოგვცემს

$$p = \psi' \sin \vartheta_0 \sin \varphi.$$

თუ ამ უკანასკნელში p -ს ნაცვლად შევიტანთ მის მნიშვნელობას (25,19) სისტემის პირველი განტოლებიდან, მივიღებთ

$$\psi' = \frac{G}{A}, \quad (25,35)$$

საიდანაც

$$\psi = \frac{G}{A} t + \psi_0, \quad (25,36)$$

ამასთან ψ_0 ნებისმიერი მუდმივია.

(25,2) სისტემის უკანასკნელი განტოლებიდან ვღებულობთ

$$\varphi' = r_0 - \psi' \cos \vartheta_0 = r_0 - \frac{G}{A} \cos \vartheta_0. \quad (25,37)$$

(25,35) და (25,37) ტოლობების შედარება გვარწმუნებს, რომ φ' და ψ' სიდიდეებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\varphi' = r_0 - \psi' \cos \vartheta_0. \quad (25,38)$$

(25,37) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$\varphi = \left(r_0 - \frac{G}{A} \cos \vartheta_0 \right) t + \varphi_0, \quad (25,39)$$

ამასთან φ_0 აგრეთვე ნებისმიერი მუდმივია.

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში p , q , r , φ , ψ , ϑ სიდიდეები მოძებნილია ცხადად ელემენტარულ ფუნქციებში.

§ 26. კუანსოვს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

განიხილება მყარი სხეულის ინერციით ბრუნვა უძრავი O წერტილის გარშემო. ვინაიდან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემის ღერძები ემთხვევა სხეულის ინერციის მთავარ ღერძებს, ამიტომ ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია და ინერციის ელიფსოიდის განტოლებას ექნება სახე (იხ. (5,3) ტოლობა):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \quad (26,1)$$

სადაც A , B , C , როგორც ყოველთვის, ინერციის მომენტებია Ox , Oy , Oz ღერძების მიმართ, ამასთან (5,3) ტოლობაში შემავალი k^2 ერთის ტოლად არის მიღებული:

$$k^2 = 1, \quad (26,2)$$

რაც, ცხადია, ზოგადობას არ ზღუდავს.

(26,1) განტოლება, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (26,3)$$

სადაც

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}. \quad (26,4)$$

მყარი სხეულის უძრავი წერტილის გარშემო ინერციით ბრუნვის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, რომელიც პუანსოს ეკუთვნის, დახასიათებულია ჩამდენიმე მარტივი დებულებით, რომელნიც ქვემოთ მოგვყავს.

აღვნიშნოთ P -თი ის წერტილი, სადაც მყისი $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარის მიმართულება გადაკვეთს ინერციის ელიფსოიდს. ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას:

დებულება 1. მყისი $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარის გეგმილი კინეტიკური \vec{G} მომენტზე მუდმივია, ხოლო მისი სიდიდე პროპორციულია O წერტილის მიმართ P წერტილის რადიუს-ვექტორის სიდიდისა.

მართლაც, ცხადია, გვექნება

$$\omega_g = \text{გეგ} \vec{G} \vec{\omega} = \left(\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{G}}{|\vec{G}|} \right) = \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{G})}{|\vec{G}|}. \quad (26,5)$$

(11,17) ფორმულის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\omega_g = \frac{2T}{|\vec{G}|}. \quad (26,6)$$

როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები (იხ. (25,4) და (25,6) ფორმულები), განსახილველ შემთხვევაში მყარი სხეულის როგორც კინეტიკური ენერგია, ისე კინეტიკური მომენტი მუდმივია და, (26,6) ტოლობის ძალით, $\omega_g = \text{const.}$ ამით დებულების პირველი ნახევარი დამტკიცებულია.

აღვნიშნოთ P წერტილის კოორდინატები x, y, z -ით. ცხადია, გვექნება

$$x = \rho \frac{p}{a}, \quad y = \rho \frac{q}{a}, \quad z = \rho \frac{r}{a}, \quad (26,7)$$

სადაც $\rho = |OP|$. ვინაიდან P წერტილის კოორდინატები (26,1) განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდნენ, ამიტომ გვექნება

$$\frac{\rho^2}{a^2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1,$$

საიდანაც

$$\omega = \rho \sqrt{2T} = \rho \sqrt{h}, \quad (26,8)$$

ამასთან $2T = h = \text{const.}$ ამით დებულება დამტკიცებულია მთლიანად.

ვინაიდან $\vec{\omega}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{G} = \text{const.}$ ვექტორზე მუდმივია, ამიტომ, ცხადია, $\vec{\omega}$ ვექტორის სიგრძე იქნება მინიმალური, როცა $\vec{\omega} \parallel \vec{G}$. როგორც § 22-ში იყო ნაჩვენები, $\vec{\omega}$ და \vec{G} თანამთხვეულია მხოლოდ ინერციის მთავარი ღერძების გასწვრივ და, მაშასადამე, $\vec{\omega}$ ვექტორის სიგრძე მინიმალურია ინერციის მთავარი ღერძების გასწვრივ. ამ გარემოებით შეიძლება ვისარგებლოთ სხეულის ინერციის მთავარი ღერძების მოსაძებნად.

შენიშვნა. როგორც ადვილი მისახვედრია, (26,5) ტოლობა სამართლიანია უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის შემთხვევაშიც.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

დებულება 2. მანძილი O წერტილიდან ინერციის ელიფსოიდის P წერტილში გავლებულ მხეხ სიბრტყემდე მუდმივია.

ინერციის ელიფსოიდის $P(x, y, z)$ წერტილში მხეხი სიბრტყის განტოლებას აქვს სახე

$$AxX + ByY + CzZ = 1, \quad (26,9)$$

სადაც X, Y, Z წარმოადგენენ ხსენებული სიბრტყის მიმდინარე წერტილის კოორდინატებს. მანძილი O წერტილიდან (კოორდინატთა სისტემის სათავედან) ამ სიბრტყემდე გამოითვლება ფორმულით

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}. \quad (26,10)$$

თუ ამ უკანასკნელში x, y, z -ის ნაცვლად შევიტანთ მათ (26,7) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\delta = \frac{\omega}{\rho G}.$$

(26,8) ტოლობის ძალით, უკანასკნელი მოგვცემს

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{G} = \text{const.}$$

რითაც დებულება დამტკიცებულია.

აღნიშნოთ ზემოხსენებული მხეხი სიბრტყე π_0 -ით. როგორც § 21-ის ბოლოს იყო აღნიშნული, \vec{G} ვექტორი პარალელურია ინერციის ელიფსოიდის ნორმალისა იმ წერტილში, სადაც მას $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართულება გადაკვეთს, ამიტომ, ცხადია, \vec{G} მართობია π_0 სიბრტყისა. თუ გავიხსენებთ, რომ \vec{G} ვექტორი მუდმივია უძრავ $O\xi\eta\zeta$ სისტემაში და, მე-2 დებულების ძალით, მანძილი O წერტილიდან π_0 სიბრტყემდე აგრეთვე მუდმივია, დავასკვნით, რომ π_0 სიბრტყე უძრავია უძრავ $O\xi\eta\zeta$ სისტემაში. ამის შემდეგ ცხადია, რომ ინერციის ელიფსოიდი გორავს უძრავ π_0 სიბრტყეზე, რომელსაც პუანსოს უძრავი სიბრტყე ეწოდება. ვინაიდან π_0 სიბრტყისა და ინერციის ელიფსოიდის შეხების წერტილი წარმოადგენს ამავე დროს ბრუნვის მყისი ღერძის წერტილს, ამიტომ ცხადია, P წერტილის სიჩქარე აღებულ მომენტში ნულის ტოლია და, მაშასადამე, ადვილი აქვს უსრიალოდ გორვას. ამრიგად, ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 3. უძრავი O წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ინერციით ბრუნვის დროს ინერციის ელიფსოიდი უსრიალოდ გორავს პუანსოს უძრავ სიბრტყეზე.

იმ წირს, რომელსაც P წერტილი შემოწერს ინერციის ელიფსოიდზე, ეწოდება პოლოდია, ხოლო იმ წირს, რომელსაც ეს წერტილი პუანსოს უძრავ π_0 სიბრტყეზე შემოწერს, ეწოდება ჰერპოლოდია.

როგორც ადვილი მისახვედრია, პოლოდია ის წირია, რომელზედაც მოძრავი აქსოიდი ინერციის ელიფსოიდს გადაკვეთს, ხოლო ჰერპოლოდია წარმოადგენს უძრავი აქსოიდისა და π_0 სიბრტყის გადაკვეთას. ამრიგად,

პოლოდია და ჰერპოლოდია წარმოადგენენ მოძრავი და უძრავი აქსოიდების მიმართველ წირებს.

ამ წირების შესწავლის საფუძველზე შეიძლება გარკვეული თვალსაზრისით დავახასიათოთ მყარი სხეულის მოძრაობა (იხ. შემდეგი პარაგრაფი).

§ 27. პოლოდია

გამოვიყვანოთ პოლოდიის განტოლება. (26,10) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{1}{g^2} = D. \quad (27,1)$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, გარკვეული ელიფსოიდის განტოლებას წარმოადგენს.

როგორც ადვილი მისახვედრია, პოლოდიის წერტილის კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ (27,1) განტოლებას და ინერციის ელიფსოიდის განტოლებას, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \quad (27,2)$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას გავამრავლებთ D -ზე და მიღებულ გამოსახულებას გამოვაკლებთ (27,1) ტოლობას, მივიღებთ

$$A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0. \quad (27,3)$$

(27,3), ცხადია, წარმოადგენს კონუსური ფართეულის განტოლებას. ხსენებული კონუსის წვერო მოთავსებულია უძრავ O წერტილში და, როგორც ადვილი მისახვედრია, ამ კონუსისა და ინერციის ელიფსოიდის თანაკვეთა წარმოადგენს პოლოდიას. აღნიშნულ კონუსს პოლოდიის კონუსი ეწოდება.

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა A, B, C სიდიდეები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. მაშინ, ზოგადობის შეუზღუდველად შეიძლება დავუშვათ, რომ

$$A > B > C. \quad (27,4)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შეუძლებელია ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$D > A. \quad (27,5)$$

მართლაც, თუ ადგილი აქვს ამ უტოლობას, მაშინ

$$\frac{1}{\sqrt{D}} < \frac{1}{\sqrt{A}};$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$b < a.$$

ვინაიდან a ინერციის ელიფსოიდის მცირე ნახევარღერძია, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, უკანასკნელი უტოლობა შეუძლებელია და, მაშასადამე, შეუძლებელია ადგილი ჰქონდეს (27,5) უტოლობას. ნათქვამის სამართლიანობა გამომდინარეობს, აგრეთვე, იქიდან, რომ როცა ადგილი აქვს (27,5) უტოლობას, მაშინ (27,3) წარმოსახვით კონუსს იძლევა, რომელიც ინერციის ელიფსოიდს ნამდვილ წირზე ვერ გადაკვეთს.

სავსებით ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ შეუძლებელია ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$D < C. \quad (27,6)$$

განვიხილოთ ზღვრული შემთხვევები:

1°. ვთქვათ, $A = D$. მაშინ (27,3) განტოლება მოგვცემს

$$B(A - B)y^2 + C(A - C)z^2 = 0. \quad (27,7)$$

ვინაიდან $A - B > 0$ და $A - C > 0$. ამიტომ უკანასკნელი განტოლება დაკმაყოფილდება მხოლოდ მაშინ, როცა

$$y = 0, z = 0.$$

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში პოლოდიის კონუსი x ღერძად გადაიქცევა და, მაშასადამე, პოლოდია წარმოადგენს ინერციის ელიფსოიდისა და Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილს. როგორც ადვილი მისახვედრია, მყარი სხეულის მოძრაობა შეიძლება იყოს მხოლოდ ბრუნვა Ox ღერძის გარშემო. (26,8) ტოლობის ძალით, ბრუნვის კუთხური სიჩქარისათვის გვექნება

$$\omega = \rho \sqrt{h} = a \sqrt{h}, \quad (27,8)$$

საიდანაც $\omega = \text{const}$. ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში ადვილი აქვს მცირე ნახევარღერძის გარშემო განუწყვეტელ ბრუნვას (ე. წ. პერმანენტულ ბრუნვას). ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სხეულის ბრუნვა აღნიშნული ღერძის გარშემო მდგრადია. მართლაც, თუ სხეულს მივანიჭებთ მცირე საწყის შემფოთებას, მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, მთელ შემდგომ პერიოდში მისი მოძრაობა მცირედ იქნება განსხვავებული Ox ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისაგან.

2°. ვთქვათ, $D = C$. მაშინ (27,3) განტოლება მოგვცემს

$$A(A - C)x^2 + B(B - C)y^2 = 0. \quad (27,9)$$

ვინაიდან $A - C > 0$ და $B - C > 0$, ამიტომ უკანასკნელი განტოლება დაკმაყოფილდება მხოლოდ მაშინ, როცა $x = 0$, $y = 0$ და, მაშასადამე, პოლოდიის კონუსი გადაიქცევა Oz ღერძად, ხოლო პოლოდია ინერციის ელიფსოიდისა და Oz ღერძის გადაკვეთის წერტილად.

ისე როგორც წინა შემთხვევის დროს, დავრწმუნდებით, რომ მყარი სხეულის მოძრაობა წარმოადგენს Oz ღერძის გარშემო (დიდი ნახევარღერძის გარშემო) პერმანენტულ ბრუნვას, ამასთან ეს მოძრაობა იქნება მდგრადი.

3°. ვთქვათ, $D = B$. ამ შემთხვევაში (27,3) განტოლება მოგვცემს

$$A(A - B)x^2 - C(B - C)z^2 = 0, \quad (27,10)$$

საიდანაც

$$z = \pm \sqrt{\frac{A(A - B)}{C(B - C)}} x. \quad (27,11)$$

უკანასკნელი განტოლება გვაძლევს y ღერძზე გამავალ ორ სიბრტყეს, რომელთა თანაკვეთა ინერციის ელიფსოიდთან იძლევა პოლოდიას. ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში პოლოდია წარმოადგენს ინერციის ელიფსოიდის გადაკვეთას აღნიშნული სიბრტყეებით, ე. ი. ელიფსებს. ვინაიდან (27,11) განტოლებას აკმაყოფილებს $x = 0$, $z = 0$, ამიტომ მყარი სხეულის მოძრაობა შეიძლება იყოს ბრუნვა y ღერძის გარშემო, ამასთან, როგორც ადვილი მისახვედრია, ეს ბრუნვა არ იქნება მდგრადი.

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $A > D > B$, ან $B > D > C$. ორივე შემთხვევაში პოლოდიის კონუსი ნამდვილია და, მაშასადამე, პოლოდია წარმოადგენს ნამდვილ წირს, რომელიც მიიღება ინერციის ელიფსოიდისა და პოლოდიის კონუსის თანაკვეთით.

§ 28. ლაგრანჟ-პუანსონის შემთხვევა

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ამ შემთხვევაში ინერციის ელიფსოიდი წარმოადგენს ბრუნვით ელიფსოიდს და სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია ბრუნვის დინამიკურ ღერძზე. თუ დავუშვებთ, რომ $A = B \neq C$, მაშინ სიმძიმის ცენტრი O_z ღერძზე უნდა იყოს მოთავსებული.

უძრავ $O\xi\eta\zeta$ სისტემის ღერძები ისე ავიღოთ, რომ $O\zeta$ ღერძი მიმართული იყოს ვერტიკალურად სიმძიმის ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით. სიმძიმის ძალის მომენტს O წერტილის მიმართ ექნება სახე

$$\vec{L} = -[\vec{r}_c \cdot Mg\vec{\zeta}^0] = -Mg[\vec{r}_c \cdot \vec{\zeta}^0], \quad (28,1)$$

სადაც $\vec{\zeta}^0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ წარმოადგენს $O\zeta$ ღერძის მგეზავს, \vec{r}_c არის სიმძიმის ცენტრის რადიუს ვექტორი O წერტილის მიმართ (ნახ. 138). უკანასკნელი ტოლობის მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე დაგვგზავნილებით ვღებულობთ

$$L_x = Mg a \gamma_2,$$

$$L_y = -Mg a \gamma_1,$$

$$L_z = 0,$$

სადაც $a = |\vec{r}_c|$. ამ ტოლობების გათვალისწინებით ეილერის დინამიკური განტოლებები შემდეგ სახეს ღებულობენ:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr = Pa\gamma_2,$$

$$A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = -Pa\gamma_1, \quad (28,2)$$

$$C \frac{dr}{dt} = 0,$$

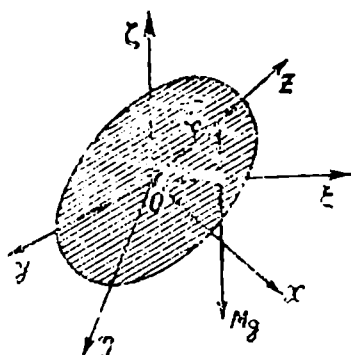
სადაც $P = Mg$.

(23,20) და (23,22) პირველი ინტეგრალები განსახილველ შემთხვევაში შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = C_1, \quad (28,3)$$

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2Pa\gamma_3 = C_2, \quad (28,4)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.



ნახ. 138.

(28,2) სისტემის უკანასკნელი განტოლება მოგვცეს

$$r = C_3, \quad (28,5)$$

სადაც C_3 აგრეთვე ნებისმიერი მუდმივია.

ზემომოყვანილ პირველ ინტეგრალებში შემავალი $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ გეზის კოსინუსები გამოისახება (23,3) ფორმულებით:

$$\gamma_1 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta. \quad (28,6)$$

C_1, C_2, C_3 მუდმივების განსასაზღვრავად განვიხილოთ შემდეგი საწყისი პირობები:

$$\text{როცა } t=0, \text{ მაშინ } p=q=0, \quad r=\omega_0, \quad \vartheta=\vartheta_0. \quad (28,7)$$

ამ საწყისი პირობების ძალით, ვღებულობთ

$$C_1 = C\omega_0 \gamma_{30} = C\omega_0 \cos \vartheta_0, \quad (28,8)$$

$$C_2 = C\omega_0^2 + 2Pa \cos \vartheta_0, \quad (28,9)$$

$$C_3 = \omega_0. \quad (28,9)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ, შესაბამად, (28,3), (28,4), (28,5) ტოლობებში, მივიღებთ

$$r = \omega_0, \quad (28,10)$$

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) = C\omega_0(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta), \quad (28,11)$$

$$A(p^2 + q^2) = 2Pa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta). \quad (28,12)$$

განვიხილოთ ეილერის კინემატიკური განტოლებები

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \vartheta + \varphi'. \end{aligned} \quad (28,13)$$

(28,10), (28,11) და (28,12) ტოლობებიდან გამოვრიცხოთ p, q, r სიდიდეები (28,13) ტოლობების დახმარებით.

(28,13) სისტემის უკანასკნელი განტოლების ძალით, (28,10) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\psi' \cos \vartheta + \varphi' = \omega_0. \quad (28,14)$$

(28,6) და (28,13) ტოლობების ძალით, ადვილად მივიღებთ

$$p\gamma_1 + q\gamma_2 = \psi' \sin^2 \vartheta. \quad (28,15)$$

ამ მნიშვნელობის (28,11) ტოლობაში შეიტანით ვღებულობთ

$$A\psi' \sin^2 \vartheta = C\omega_0(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta). \quad (28,16)$$

(28,13) სისტემის პირველი და მეორე ტოლობები ავიყვანოთ კვადრატში და შევეკრიბოთ, გვექნება

$$p^2 + q^2 = \psi'^2 \sin^2 \vartheta + \vartheta'^2. \quad (28,17)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (28,12) პირველ ინტეგრალში, მივიღებთ

$$A(\psi'^2 \sin^2 \vartheta + \vartheta'^2) = 2Pa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta). \quad (28,18)$$

(28,14), (28,16), (28,18) განტოლებების სახით ჩვენ გვაქვს φ, ψ და ϑ სიდიდეების მიმართ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

თუ ეს სისტემა ინტეგრებულია, მაშინ p, q, r პირდაპირ გამოითვლება (28,13) სისტემიდან.

(28,18) ტოლობიდან, ცხადია, გვექნება

$$\Phi'^2 = \frac{2Pa}{A} (\cos \Phi_0 - \cos \Phi) - \Phi'^2 \sin^2 \Phi. \quad (28,19)$$

თუ (28,16) ტოლობიდან განვსაზღვრავთ Φ' -ს და შევიტანთ უკანასკნელ ტოლობაში, მივიღებთ

$$\Phi'^2 = \frac{2Pa}{A} (\cos \Phi_0 - \cos \Phi) - \frac{C^2 \omega_0^2}{A^2 \sin^2 \Phi} (\cos \Phi_0 - \cos \Phi)^2. \quad (28,20)$$

უკანასკნელი წარმოადგენს პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას Φ -ს მიმართ. თუ ეს განტოლება ინტეგრებულია, მაშინ Φ მოინახება (28,16) განტოლებიდან, რის შემდეგაც φ მოინახება (28,14) განტოლებიდან. ამრიგად, საბოლოოდ საკითხი მიყვანილია (28,20) განტოლების ინტეგრებამდე.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ამ განტოლების ამოხსნა მოიცემა ელიფსურ ფუნქციებში. შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ ამ განტოლების მიახლოებით ამოხსნის მეთოდს.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, მყარ სხეულს, რომელიც განსახილველ შემთხვევაში ბრუნავს დინამიკური ღერძის გარშემო (Oz ღერძის გარშემო) საკმარისად დიდი ω_0 კუთხური სიჩქარით, ეწოდება გიროსკოპი, ამიტომ (28,20) განტოლებას გიროსკოპის განტოლებას უწოდებენ. ჩვენ ვიტყვი, რომ გიროსკოპი სიმეტრიულია, თუ მყარი სხეული ერთგვაროვანია და Oz ღერძი მისთვის სიმეტრიის ღერძია.

§ 29. გიროსკოპის განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა

(28,12) ტოლობიდან ცხადია, რომ $\cos \Phi_0 - \cos \Phi \geq 0$. თუ, ამის გარდა, გავითვალისწინებთ, რომ $C^2 \omega_0^2$ საკმარისად დიდია და (28,20) ტოლობის მარცხენა მხარე დადებითია, დავრწმუნდებით რომ $\cos \Phi_0 - \cos \Phi$ საკმარისად მცირეა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Phi = \Phi_0 + u. \quad (29,1)$$

ცხადია, გვექნება

$$\cos \Phi = \cos \Phi_0 \cos u - \sin \Phi_0 \sin u. \quad (29,2)$$

ვინაიდან u საკმარისად მცირე უნდა იყოს, ამიტომ გარკვეული მიახლოებით შეიძლება მივიღოთ

$$\cos u \approx 1, \quad \sin u \approx u. \quad (29,3)$$

უკანასკნელი ტოლობების ძალით, (29,2) ტოლობა მოგვცემს

$$\cos \Phi_0 - \cos \Phi = \sin \Phi_0 u. \quad (29,4)$$

შემომოყვანილ აღნიშვნებში (29,20) განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = -\frac{2Pa}{A} - u \sin \Phi_0 \left(1 - \frac{C^2 \omega_0^2}{2Pa A \sin^2 \Phi} \sin \Phi_0 u \right). \quad (29,5)$$

თუ დაეუშვებთ, რომ მიახლოებით

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0,$$

მაშინ უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = u \frac{C^2 \omega_0^2}{A^2} \left(\frac{2PAa \sin \varphi_0}{C^2 \omega_0^2} - u \right). \quad (29,6)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\alpha = \frac{C \omega_0}{A}, \quad \beta = \frac{2PAa \sin \varphi_0}{C^2 \omega_0^2}, \quad (29,7)$$

მაშინ უკანასკნელი განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\frac{du}{dt} = \alpha \sqrt{u(\beta - u)}, \quad (29,8)$$

საიდანაც

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(\beta - u)}} = \alpha t + C_1, \quad (29,9)$$

ამასთან, C_1 ნებისმიერი მუდმივია. თუ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას

$$u = \beta \sin^2 \gamma, \quad (29,10)$$

(29,9) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\gamma = \frac{\alpha t}{2} + C_2, \quad C_2 = \frac{C_1}{2}.$$

ამ მნიშვნელობის (29,10) ტოლობაში შეტანით ვღებულობთ

$$u = \beta \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} t + C_2 \right).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ, როცა $t=0$, მაშინ $u=0$, მივიღებთ $C_2=0$ და მაშასადამე,

$$u = \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2} t.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (29,1) ტოლობაში და გავითვალისწინებთ α და β მუდმივების (29,7) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2PaA \sin \varphi_0}{C^2 \omega_0^2} \sin^2 \left(\frac{C \omega_0}{2A} t \right). \quad (29,11)$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ცხადია, რომ

$$\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad (29,12)$$

სადაც

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{2PaA \sin \varphi_0}{C^2 \omega_0^2}. \quad (29,13)$$

განვიხილოთ ორი წრიული კონუსი, რომელთა წვეროებიც მოთავსებულია უძრავ წერტილში, ღერძად აქვთ ვერტიკალური OZ ღერძი და რომელთა გაშლის კუთხეებიც $2\varphi_0$ -ის და $2\varphi_1$ -ის ტოლია. როგორც ადვილი მისახვედრია,

ბრუნვის დინამიკური ღერძი (Oz ღერძი) ყოველთვის მოთავსებული იქნება ამ ორ წრიულ კონუსს შორის, რაც უფრო დიდია α_0 , მით უფრო α_0 და α_1 ახლოსაა ერთმანეთთან და, მაშასადამე, მით უფრო მცირეა α -ს ცვალებადობის საზღვარი. ამით არის გამოწვეული ის ცნობილი ფაქტი, რომ დიდი სიჩქარით მოძრავე ბზრიალა (გიროსკოპი) გამოსცემს გარკვეული ტონის ხმას.

§ 30. კოპალეპსკიას შემთხვევა

ამ შემთხვევაში $A=B=2C$ და სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია ინერციის ელიფსოიდის ბრუნვის ეკვატორულ სიბრტყეში (xOy) სიბრტყეში). ვინაიდან ინერციის ელიფსოიდი ბრუნვითი ელიფსოიდია ($A=B$) და ბრუნვითი ელიფსოიდისათვის ეკვატორულ სიბრტყეში მოთავსებული ყოველი მიმართულება, რომელიც O წერტილში გადის, ინერციის მთავარ ღერძს წარმოადგენს, ამიტომ $Oxyz$ სისტემის ღერძები ისე, შეიძლება ავიღოთ, რომ ისინი ემთხვეოდნენ ინერციის მთავარ ღერძებს და, ამასთან, Ox ღერძი გადიოდეს სიმძიმის ცენტრში. უძრავი $O\xi\eta\zeta$ სისტემა ისე ავიღოთ, როგორც წინა §-ში. სიმძიმის ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ, ცხადია, გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{L} = P [\vec{\zeta}^0 \cdot \vec{r}_c], \quad (30,1)$$

სადაც $\vec{\zeta}^0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, \vec{r}_c წარმოადგენს სიმძიმის ცენტრის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ, $P = Mg$. ცხადია, გვექნება

$$\vec{r}_c = (a, 0, 0), \quad a = |r_c|.$$

(30,1) ტოლობის დაგვემიღება მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე მოგვეცემს

$$L_x = 0, \quad L_y = aP\gamma_3, \quad L_z = -aP\gamma_2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A=B=2C$, ეილერის დინამიკური განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$2C \frac{dp}{dt} - Cqr = 0,$$

$$2C \frac{dq}{dt} + Cpr = aP\gamma_3,$$

$$C \frac{dr}{dt} = -aP\gamma_2.$$

ეს სისტემა, ცხადია, კიდევ ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$2 \frac{dp}{dt} - qr = 0,$$

$$2 \frac{dq}{dt} + pr = n\gamma_3, \quad (30,2)$$

$$\frac{dr}{dt} = -n\gamma_2,$$

სადაც

$$n = \frac{aP}{C}. \quad (30,3)$$

თუ (30,2) სისტემის მეორე განტოლებას გავამრავლებთ $i = \sqrt{-1}$ წარმოსახვით ერთეულზე და დავუმატებთ პირველს, ადვილად მივიღებთ

$$2 \frac{d}{dt} (p+iq) = -ir(p+iq) + in\gamma_3. \quad (30,4)$$

გავიხსენოთ პუასონის განტოლებები (იხ. (23,8) განტოლებები):

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (30,5)$$

თუ (30,5) სისტემის მეორე განტოლებას გააზ მრავლებთ i -ზე და მივუმატებთ პირველს, მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1 + i\gamma_2) = -ir(\gamma_1 + i\gamma_2) + i\gamma_3(p+iq). \quad (30,6)$$

(30,4) და (30,6) ტოლობებიდან გამოვრიცხოთ γ_3 . ამისათვის (30,4) გავამრავლოთ $p+iq$ -ზე, ხოლო (30,6) კი n -ზე და პირველს მეორე გამოვაკლოთ, მივიღებთ

$$2(p+iq) \frac{d}{dt} (p+iq) - \frac{d}{dt} n(\gamma_1 + i\gamma_2) = -ir[(p+iq)^2 - n(\gamma_1 + i\gamma_2)],$$

საიდანაც

$$\frac{d}{dt} [(p+iq)^2 - n(\gamma_1 + i\gamma_2)] = -ir[(p+iq)^2 - n(\gamma_1 + i\gamma_2)].$$

უკანასკნელი ტოლობა, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} \ln [(p+iq)^2 - n(\gamma_1 + i\gamma_2)] = -ir. \quad (30,7)$$

თუ ამ უკანასკნელში შეუღლებულზე გადავალთ, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \ln [(p-iq)^2 - n(\gamma_1 - i\gamma_2)] = ir. \quad (30,8)$$

(30,7) და (30,8) ტოლობების შეკრება მოგვცემს

$$\frac{d}{dt} \ln [(p+iq)^2 - n(\gamma_1 + i\gamma_2)][(p-iq)^2 - n(\gamma_1 - i\gamma_2)] = 0,$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$[(p+iq)^2 - n(\gamma_1 + i\gamma_2)][(p-iq)^2 - n(\gamma_1 - i\gamma_2)] = \text{const.} \quad (30,9)$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში ჩვენ გვაქვს ორი შეუღლებული სიდიდის ნამრავლი. თუ ამ ნამრავლს გამოვთვლით, მივიღებთ

$$(p^2 - q^2 - n\gamma_1)^2 + (2pq - n\gamma_2)^2 = \text{const.} \quad (30,10)$$

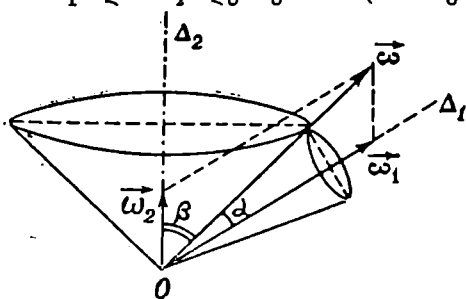
ცხადია, (30,10) წარმოადგენს მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა (30,2), (30,5) სისტემის გარკვეულ პირველ ინტეგრალს, რომელიც განსხვავებულია § 23-ში აგებული პირველი ინტეგრალებისაგან. ეს პირველი ინტეგრალი აგებული იყო კოვალევსკაიას მიერ.

თუ გავიხსენებთ § 23-ში მოყვანილ მსჯელობას დავრწმუნდებით, რომ განსახილველ შემთხვევაში შეიძლება ავაგოთ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ინტეგრალი.

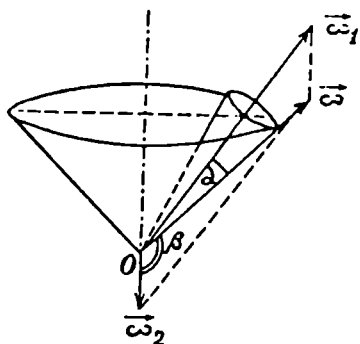
§ 31. რამზულაშვილი პრემისია

განვიხილოთ უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის ერთი კერძო შემთხვევა, რომელიც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში.

ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს ამ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული Δ_1 ლერძის გარშემო სიდიდით მუდმივი $\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით ($\omega_1 = \text{const}$), ხოლო Δ_1 ლერძი ბრუნავს უძრავი Δ_2 ლერძის გარშემო მუდმივი $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით ისე, რომ კუთხე ამ ლერძებს შორის მუდმივია. სხეულის ასეთ მოძრაობას ეწოდება რეგულარული პრეცესია. როგორც ადვილი მისახვედრია, ამ შემთხვევაში მოძრავი და უძრავი აქსოიდები წარმოადგენენ წრიულ კონუსებს, რომელთა წვეროები მყარი სხეულის უძრავ O წერტილს ემთხვევა და რომელთა ლერძებსაც Δ_1 და Δ_2 ლერძები წარმოადგენენ (ნახ. 139, 140). ცხადია, მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$ შეადგენს Δ_1 და Δ_2 ლერძებთან (მოძრავი და



ნახ. 139.



ნახ. 140.

უძრავი აქსოიდის ლერძებთან) მუდმივ კუთხეებს. აღვნიშნოთ ეს კუთხეები, შესაბამისად α -თი და β -თი. მოძრავ აქსოიდს ეწოდება საკუთარი ბრუნვის კონუსი, მის ლერძს — საკუთარი ბრუნვის ლერძი. უძრავ აქსოიდს ეწოდება პრეცესიის კონუსი, მის ლერძს — პრეცესიის ლერძი. ეს სახელწოდებები ასტრონომიულია. დედამიწის ლერძი არის საკუთარი ბრუნვის ლერძი (თუ დედამიწის ცენტრის მოძრაობას არ მივაქცევთ ყურადღებას). როგორც ცნობილია, ეს ლერძი მოძრაობს რა სივრცეში, დაახლოებით 26000 წელიწადში შემოწერს პრეცესიის კონუსს. პრეცესიის ლერძი მართობია ეკლიპტიკის სიბრტყის და შეადგენს დედამიწის ლერძთან დაახლოებით $23^{\circ}28'$ (ჩვენი დროისათვის).

განვიხილოთ მყარი სხეულის ინერციით ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო (ეილერ-პუანსოს შემთხვევა) იმ შემთხვევაში, როცა ინერციის ელიფ-

სოიდი ბრუნვითი ელიფსოიდა: $A=B$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვაქვს რეგულარულ პრეცესიასთან. მართლაც, (25,34), (25,35) და (25,37) ფორმულების ძალით გვექნება

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}, \quad (31,1)$$

$$\omega_1 = \varphi' = r_0 - \frac{G}{A} \cos \vartheta_0 = \text{const}, \quad (31,2)$$

$$\omega_2 = \psi' = \frac{G}{A} = \text{const}. \quad (31,3)$$

ამ ფორმულების ძალით ცხადია, რომ განსახილველ შემთხვევაში Oz ღერძი (გსარგებლობთ იმ აღნიშვნებით, რომელნიც § 25-ში გვექონდა) არის საკუთარი ბრუნვის ღერძი, ხოლო Oz ღერძი — პრეცესიის ღერძი.

პრეცესიას ეწოდება პირდაპირი, თუ კუთხე საკუთარი ბრუნვისა და პრეცესიის ღერძებს შორის მახვილია (ნახ. 139). თუ ამ ღერძებს შორის კუთხე ბლაგვია (ნახ. 140), მაშინ პრეცესიას შებრუნებულს უწოდებენ.

139 და 140 ნახაზებიდან ცხადია, რომ $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$ და $\bar{\omega}_2$ კუთხურ სიჩქარეებს შორის ადგილი აქვს დამოკიდებულებებს

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \quad (31,4)$$

$$\frac{\omega_2}{\sin \alpha} = \frac{\omega_1}{\sin \beta} = \frac{\omega}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (31,5)$$

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos(\alpha \pm \beta), \quad (31,6)$$

ამასთან $\alpha \pm \beta$ გამოსახულებაში ნიშანი „+“ ასაღებია პირდაპირი პრეცესიისათვის, ხოლო ნიშანი „-“ — შებრუნებულ პრეცესიისათვის.

ამოცანები

15. მყარ სხეულზე მოქმედ ძალთა სისტემის ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი გამოვსახოთ ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის საშუალებით.

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ძალთა სისტემა $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$. \vec{F}_i ძალის მოდების წერტილი იყოს $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. აღებული ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი იქნება

$$\delta A = \sum_{i=1}^k (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i), \quad (1)$$

სადაც $d\vec{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, k$) აღნიშნავს სხეულის $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ნაწილაკის ნამდვილ გადაადგილებას dt დროში (\vec{r}_i არის M_i წერტილის რადიუს ვექტორი უჩრავი-მდნელ სისტემის სათაგის მიმართ). ცხადია, გვექნება

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = (\vec{v}_0 + \vec{v}_i') dt, \quad (2)$$

სადაც \vec{v}_0 არის მყარი სხეულის ფიქსირებული O წერტილის სიჩქარე, ხოლო \vec{v}_i' არის M_i წერტილის ფარდობითი სიჩქარე იმ სისტემის მიმართ, რომელ-

საც სათავე O წერტილში აქვს და რომლის ღერძებიც Ox, Oy უძრავი სისტემის ღერძების პარალელურია. (2) ტოლობის ძალით, (1) მოგვცემს

$$\delta A = (\vec{F} \cdot \vec{v}_0) dt + (\vec{\omega} \cdot \vec{L}_0) dt, \quad (3)$$

სადაც \vec{F} მყარ სხეულზე მოქმედი ძალთა ნაკრები ვექტორია, $\vec{\omega}$ —სხეულის O წერტილის გარშემო ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარე, \vec{L}_0 —ძალთა ნაკრები მომენტი O წერტილის მიმართ.

ვთქვათ, მყარი სხეულის O წერტილი უძრავია; შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ის ემთხვევა O წერტილს. მაშინ (3)-დან გვექნება

$$\delta A = (\vec{\omega} \cdot \vec{L}) dt, \quad (4)$$

სადაც \vec{L} ნაკრები მომენტია უძრავი წერტილის მიმართ.

დავუშვათ ახლა, რომ O წერტილი ემთხვევა მყარი სხეულის ინერციის ცენტრს. მაშინ (3) ფორმულა მოგვცემს

$$\delta A = (\vec{F} \cdot \vec{v}_c) dt + (\vec{\omega} \cdot \vec{L}_c) dt, \quad (5)$$

სადაც \vec{v}_c არის ინერციის ცენტრის სიჩქარე, ხოლო \vec{L}_c —ნაკრები მომენტი C წერტილის (ინერციის ცენტრის) მიმართ.

16. ვისარგებლოთ ელემენტარული მუშაობის გამოსათვლელი ფორმულებით და დავწეროთ ცოცხალი ძალის კანონი მყარი სხეულისათვის.

მყარი სხეულისათვის ცოცხალი ძალის კანონი გვაძლევს (იხ. (11,21) ფორმულა)

$$dT = \delta A. \quad (6)$$

კენიგის დებულების ძალით (იხ. VI თავის § 8), გვექნება

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (7)$$

სადაც J_c არის მყარი სხეულის ინერციის მომენტი C წერტილში გაშვებული ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ. (5) და (7) ფორმულების ძალით, (6) მოგვცემს

$$d \left(\frac{M v_c^2}{2} + \frac{1}{2} J_c \omega^2 \right) = (\vec{F} \cdot \vec{v}_c) dt + (\vec{\omega} \cdot \vec{L}_c) dt. \quad (8)$$

ინერციის ცენტრის მოძრაობის კანონი გვაძლევს

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}. \quad (9)$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად $\vec{v}_c \cdot dt$ -ზე, მივიღებთ

$$d \left(\frac{M v_c^2}{2} \right) = (\vec{F} \cdot \vec{v}_c) dt. \quad (10)$$

თუ ამ ტოლობას გამოვაკლებთ (8) ტოლობიდან, გვექნება

$$d \left(\frac{1}{2} J_c \omega^2 \right) = (\vec{\omega} \cdot \vec{L}_c) dt. \quad (11)$$

(11) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ცოცხალი ძალის კანონი სამართლიანია მყარი სხეულის ინერციის ცენტრის მიმართ ფარდობითი მოძრაობისათვისაც.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო. ამ შემთხვევაში (4)-ის ძალით, (6) მოგვცემს

$$dT = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = (\vec{\omega} \cdot \vec{L}) dt, \quad (12)$$

სადაც J არის ინერციის მომენტი ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ. (12) ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ

$$dT = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = (L_x p + L_y q + L_z r) dt, \quad (13)$$

სადაც L_x, L_y, L_z აღნიშნავენ \vec{L} მომენტის გეგმილებს სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე, რომელნიც O წერტილის შესაბამის ინერციის მთავარ ღერძებს ემთხვევიან. ეილერის კინემატიკური განტოლებების ძალით (იხ. (12,4) სისტემა), (13) შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$dT = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = (L_x \sin \vartheta \sin \varphi + L_y \sin \vartheta \cos \varphi + L_z \cos \vartheta) d\psi + \\ + (L_x \cos \varphi - L_y \sin \varphi) d\vartheta + L_z d\varphi.$$

ეს უკანასკნელი, საბოლოოდ, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$dT = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = L_\zeta d\psi + L_\Delta d\vartheta + L_\varphi d\varphi, \quad (14)$$

სადაც

$$L_\zeta = L_x \sin \vartheta \sin \varphi + L_y \sin \vartheta \cos \varphi + L_z \cos \vartheta, \quad (15)$$

$$L_\Delta = L_x \cos \varphi - L_y \sin \varphi. \quad (16)$$

უკანასკნელი ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ

$$L_\zeta = \text{გეგოც } \vec{L}, \quad L_\Delta = \text{გეგდ } \vec{L},$$

ამასთან Δ ის ღერძია, რომელზედაც Oxy და $O\xi\eta$ სიბრტყეები იკვეთებიან (იხ. § 12).

ცხადია, გვექნება

$$\delta A = L_\zeta d\psi + L_\Delta d\vartheta + L_\varphi d\varphi, \quad (17)$$

ამიტომ, თუ მყარი სხეულის უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვის შემთხვევაში, განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღებთ ეილერის კუთხეებს, მაშინ განზოგადებული ძალებისათვის გვექნება

$$Q_\varphi = L_\varphi, \quad Q_\psi = L_\zeta, \quad Q_\vartheta = L_\Delta. \quad (18)$$

17. გამოვიყვანოთ ცოცხალი ძალის კანონი ეილერის დინამიკური განტოლებებიდან.

ეილერის დინამიკური განტოლებები ასე გადავწეროთ:

$$A \dot{d}p + (C - B) q r \, dt = L_x dt, \\ B \dot{d}q + (A - C) p r \, dt = L_y dt, \\ C \dot{d}r + (B - A) p q \, dt = L_z dt. \quad (19)$$

ამ განტოლებებიდან პირველი გავამრავლოთ p -ზე, მეორე q -ზე, მესამე r -ზე და შევეკრიბოთ, მივიღებთ

$$dT = (L_x p + L_y q + L_z r) dt. \quad (20)$$

ვინაიდან $T' = \frac{1}{2} J \omega^2$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = (L_x p + L_y q + L_z r) dt. \quad (21)$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ცოცხალი ძალის კანონი (იხ. (13) ფორმულა).

18. გამოვიყენოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებიდან ეილერის დინამიკური განტოლებები.

განვიხილოთ მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ ეილერის კუთხეები და დავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები (იხ. (18) განტოლებები):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi = L_z, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_\psi = L_\zeta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta = L_\Delta, \end{aligned} \quad (22)$$

სადაც

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

ცხადია გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} &= \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}'} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}'} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}'}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}'} &= \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}'} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}'} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}'}, \end{aligned}$$

ეილერის კინემატიკური განტოლებებიდან ვღებულობთ

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}'} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}'} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}'} = 1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}'} = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi, \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}'} = -\psi' \sin \theta \sin \varphi - \theta' \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}'} = 0.$$

ამ მნიშვნელობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} &= Cr, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} = C \frac{dr}{dt}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}'} &= \frac{\partial T}{\partial p} q - \frac{\partial T}{\partial q} p = A p q - B p q = (A - B) p q. \end{aligned}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევითავსებთ (22)-ის პირველში, მივიღებთ (19)-ის მესამე განტოლებას:

$$C \frac{dr}{dt} + (A - B) pq = I_{\alpha}.$$

ანალოგიურად მიიღება ეილერის დინამიკური განტოლებების დანარჩენი ორი განტოლება.

19. დავწეროთ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობისათვის ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები.

მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატებად ინერციის ცენტრის კოორდინატები და ინერციის ცენტრის გარშემო სხეულის ბრუნვის შესაბამისი ეილერის კუთხეები. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები შედგება 6 განტოლებისაგან. მარტივად მიიღება, რომ პირველი სამი იძლევა ინერციის ცენტრის მოძრაობის კანონს, ხოლო დანარჩენი სამი კი ეილერის დინამიკურ განტოლებებს.

20. № 16 ამოცანის განხილვის დროს ნაჩვენები იყო, რომ (იხ. ფორმულა (13)) როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო, მაშინ ადგილი აქვს ფორმულას

$$\frac{dT}{dt} = L_x p + L_y q + L_z r. \quad (23)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ფორმულის მიღება შეიძლება მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონიდან.

მართლაც, როგორც ვიცით, ადგილი აქვს ტოლობას (იხ. (11,17) ფორმულა)

$$T = \frac{1}{2} (\vec{G} \cdot \vec{\omega}). \quad (24)$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \cdot \vec{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{G} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right). \quad (25)$$

III თავის § 24-ში ნაჩვენები იყო, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dp}{dt} \vec{i} + \frac{dq}{dt} \vec{j} + \frac{dr}{dt} \vec{k}, \quad (26)$$

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ წარმოადგენენ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის ლერძების მგეზავებს. (26) ტოლობის ძალით, გვექნება

$$\begin{aligned} \left(\vec{G} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) &= G_x \frac{dp}{dt} + G_y \frac{dq}{dt} + G_z \frac{dr}{dt} = A p \frac{dp}{dt} + B q \frac{dq}{dt} + C r \frac{dr}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A p^2 + B q^2 + C r^2) = \frac{dT}{dt}. \end{aligned}$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (25) მოგვცემს

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \cdot \vec{\omega} \right). \quad (27)$$

მოდრაობის რაოდენობის მომენტის კანონის ძალით,

$$\frac{d\bar{G}}{dt} = \bar{L},$$

ამიტომ (27) მოგვცემს

$$\frac{dT}{dt} = (\bar{L} \cdot \bar{\omega}) = L_x p + L_y q + L_z r,$$

რაც ამტკიცებს (23) ფორმულის სამართლიანობას.

21. ბრუნვის ღერძიდან რა მანძილზე უნდა მივამაგროთ ფიზიკურ საქანს დამატებითი ტვირთი, რომ მისი რხევის პერიოდი არ შეიცვალოს?

ვთქვათ, ფიზიკური საქანის მასა უდრის M -ს, მანძილი სიმძიმის ცენტრიდან ბრუნვის ღერძამდე იყოს a , დამატებითი ტვირთის მასა აღვნიშნოთ m -ით. (16,8) ფორმულის ძალით, ფიზიკური საქანის შესაბამის მათემატიკური საქანის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$l = \frac{J_0}{aM}, \quad (28)$$

სადაც J_0 არის სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. აღვნიშნოთ x -ით საძიებელი მანძილი. როგორც აღვნიშნეთ, ტვირთის მიმაგრების შემდეგ ბრუნვის ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება

$$J = J_0 + mx^2. \quad (29)$$

ცხადია, ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი არ შეიცვლება, თუ შესაბამის მათემატიკური საქანის სიგრძე დარჩება უცვლელი, ამიტომ, ამოცანის პირობის ძალით, გვექნება

$$l = \frac{J}{aM + mx} = \frac{J_0 + mx^2}{aM + mx}. \quad (30)$$

თუ (28) ტოლობიდან განვსაზღვრავთ J_0 -ს და შევიტანთ (30)-ში, მივიღებთ

$$l = \frac{aMl + mx^2}{aM + mx},$$

საიდანაც

$$lmx = mx^2.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან ვღებულობთ ორ ამოხსნას: $x_1 = 0$ და $x_2 = l$.

22. სიმძიმის ცენტრიდან რა მანძილზე უნდა დავკიდოთ ფიზიკური საქანი, რომ მისი უსასრულოდ მცირე რხევის პერიოდი იყოს მინიმალური?

ფიზიკური საქანის უსასრულოდ მცირე რხევის პერიოდი გამოითვლება ფორმულით (იხ. (16,5) და (16,8) ფორმულები)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (31)$$

სადაც l არის ფიზიკური საქანის შესაბამის მათემატიკური საქანის სიგრძე. (16,13) ფორმულის ძალით

$$l = \frac{ic^2}{a} + a, \quad (32)$$

სადაც a არის მანძილი ბრუნვის ღერძიდან სიმძიმის ცენტრამდე, i_c არის სიმძიმის ცენტრის შესაბამის ინერციის რადიუსი.

შევარჩიოთ ახლა a ისე, რომ l -ს ჰქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა..
(32)-დან გვექნება

$$\frac{dl}{da} = -\frac{i_c^2}{a^2} + 1 = 0, \quad (33)$$

საიდანაც $a = i_c$. ნაპოვნი მნიშვნელობა l სიდიდეს (და მაშასადამე, რხევის პერიოდს) მართლაც მინიჭებს მინიმუმს, რადგან

$$\frac{d^2l}{da^2} = \frac{2i_c^2}{a^3} > 0. \quad (34)$$

ამრიგად, ფიზიკური საქანის უსასრულოდ მცირე რხევის პერიოდი იქნება მინიმალური მაშინ, როცა $a = i_c$.

23. მოცემულია წრიული ცილინდრი, რომლის ფუძის რადიუსი უდრის r -ს და სიმაღლე h -ს. როგორი უნდა იყოს შეფარდება $\frac{r}{h}$, რომ ინერციის ცენტრალური ელიფსოიდი გადაიქცეს სფეროდ. იგივე საკითხი გადავწყვიტოთ წრიული კონუსისათვის.

იმისათვის, რომ ინერციის ცენტრალური ელიფსოიდი გადაიქცეს სფეროდ, საჭიროა ინერციის ცენტრალური ღერძების მიმართ ინერციის მომენტები ტოლი იყოს.

ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი ბრუნვის ღერძის მიმართ იქნება (იხ. № 4 ამოცანა, ფორმულა (18))

$$J_3 = \frac{1}{2} M r^2, \quad (35)$$

სადაც M მთელი სხეულის მასაა. ადვილად მიიღება, რომ ორი დანარჩენი ინერციის ცენტრალური ღერძის მიმართ მომენტები იქნება

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{4} M r^2 + \frac{1}{12} M h^2. \quad (36)$$

თუ J_1 და J_2 მომენტებს გავუტოლოებთ ერთმანეთს, მივიღებთ

$$r^2 = \frac{1}{3} h^2,$$

საიდანაც

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (37)$$

მარტივი გამოთვლებით დავრწმუნდებით, რომ წრიული კონუსის ბრუნვის ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება

$$J_3 = \frac{3}{10} M r^2. \quad (38)$$

ორი დანარჩენი ინერციის ცენტრალური ღერძის მიმართ მომენტისათვის ვღებულობთ

$$J_1 = J_2 = \frac{3}{20} M r^2 + \frac{3}{80} M h^2. \quad (39)$$

თუ ახლა J_1 და J_3 -ს გავუტოლოებთ ერთმანეთს, მივიღებთ

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{2}. \quad (40)$$

თ ა ვ ი VIII

დაჯახებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ისეთ მოვლენებს, როცა მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება ძალების მოქმედების უსასრულოდ მცირე დროში უსასრულოდ მცირეა. მექანიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი მოვლენებიც, რომელთათვისაც ზემოაღნიშნულს ადგილი არა აქვს. ასეთ მოვლენებს დაჯახების (დარტყმის) მოვლენები ეწოდება.

ამრიგად, დაჯახების მოვლენები მოძრაობის ისეთ შემთხვევებს წარმოადგენენ, რომლის დროსაც მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება ძალების მოქმედების უსასრულოდ მცირე დროში სასრული სიდიდეა. დაჯახების მოვლენები გვხვდება, როგორც მატერიალური წერტილისათვის, ისე მატერიალურ წერტილთა სისტემისა და მყარი სხეულისათვის.

გ ა ნ წ ო ზ ი ლ ე ბ ა 1

მაგნიტული წერტილის დაჯახება

§ 1. წერტილის დაჯახების ძირითადი განმარტება

როგორც ვიცით (იხ. თავი V, § 3), მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის კანონი გვაძლევს

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt. \quad (1,1)$$

თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის ინტეგრებას დროის $(0, \tau)$ შუალედში, მივიღებთ

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^\tau \vec{F} dt, \quad (1,2)$$

სადაც \vec{v}_0 წარმოადგენს სიჩქარის მნიშვნელობას $t=0$ მომენტისათვის.

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით ისეთ მოვლენებს, რომლისთვისაც $m\vec{v} - m\vec{v}_0$ სიდიდე უსასრულოდ მცირე τ -სათვის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, ხშირად გვხვდება ისეთი მოვლენებიც, რომლის დროსაც მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება უსასრულოდ მცირე τ დროში სასრული სიდიდეა. ასეთ მოვლენებს დაჯახების (დარტყმის) მოვლენები ეწოდება.

ამრიგად, დაჯახების მოვლენები მოძრაობის ისეთი შემთხვევებია, რომლისთვისაც უსასრულოდ მცირე დროში ძალის მოქმედების ეფექტი, მოძრაო-

ბის რაოდენობის ცვლილების თვალსაზრისით, სასრული სიდიდეა. ისეთ ძალებს, რომლებიც უსასრულოდ მცირე დროში მოქმედების შედეგად იწვევენ მოძრაობის რაოდენობის სასრულ ცვლილებას, დაჯახების (დარტყმის) ძალებს უწოდებენ.

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით, (1,2) ფორმულა მოგვცემს

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \tau \vec{F}^*, \quad (1,3)$$

სადაც \vec{F}^* წარმოადგენს \vec{F} ძალის მნიშვნელობას (0, τ) შუალედის გარკვეულ წერტილზე. უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ დაჯახების მოვლენებისათვის ძალა წარმოადგენს $\frac{1}{\tau}$ რიგის უსასრულოდ დიდ სიდიდეს, რაც პრაქ-

ტიკულად მართლაც შეინიშნება; ამიტომ დაჯახების მოვლენების შესასწავლად არ არის მიზანშეწონილი წერტილის მოძრაობის

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad (1,4)$$

განტოლებით სარგებლობა.

თუ ძალის იმპულსს (0, τ) შუალედისათვის აღვნიშნავთ \vec{F}^0 -ით:

$$\int_0^\tau \vec{F} dt = \vec{F}^0, \quad (1,5)$$

მაშინ (1,2) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$m\Delta\vec{v} = \vec{F}^0, \quad (1,6)$$

სადაც $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ წარმოადგენს სასრულ სხვაობას.

ჩვეულებრივი სასრული ძალები დაჯახების ძალებისაგან იმით განსხვავდებიან, რომ დაჯახების უსასრულოდ მცირე τ დროში ჩვეულებრივი სასრული ძალების მოქმედების ეფექტი, დაჯახების ძალებით გამოწვეულ ეფექტთან შედარებით, უმნიშვნელოა. მართლაც, (1,3) ფორმულის ძალით, როცა \vec{F}^* სასრულია, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება იქნება τ -ს რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდე. ამრიგად, დარტყმის მოვლენების განხილვის დროს ჩვეულებრივი სასრული ძალების მოქმედების ეფექტი შეიძლება არც იქნეს მხედველობაში მიღებული.

(1,6) განტოლებას, რომელიც სასრულ სხვაობიან განტოლებას წარმოადგენს და რომელიც დაჯახების მოვლენებისათვის ისეთივე როლს ასრულებს, როგორსაც ჩვეულებრივი მოძრაობისათვის (1,4) განტოლება, ეწოდება მატერიალური წერტილის დაჯახების ძირითადი განტოლება. ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში მდებარე \vec{F}^0 ვექტორს, რომელიც, (1,5) ტოლობის ძალით, სასრულ სიდიდეს წარმოადგენს, ეწოდება დაჯახების იმპულსი.

გამოვითვალოთ მატერიალური წერტილის გადაადგილება დაჯახების უსასრულოდ მცირე τ დროში. ამისათვის (1,6) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \vec{F}^0.$$

თუ მატერიალური წერტილის რადიუს-ვექტორს რაიმე O წერტილის მიმართ აღვნიშნავთ \vec{r} -ით, მაშინ უკანასკნელი განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \vec{F}^0.$$

უკანასკნელი განტოლების $(0, \tau)$ შუალედში ინტეგრებით ვღებულობთ

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \tau + \frac{1}{m} \int_0^\tau \vec{F}^0 dt. \quad (1,7)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ დაჯახების იმპულსი სასრული სიდიდეა და, მაშასადამე, $(1,7)$ ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი ინტეგრალი τ -ს რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეს წარმოადგენს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ τ დროში მატერიალური წერტილის ვექტორული გადაადგილება: $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ წარმოადგენს τ -ს რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეს.

§ 2. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი წერტილის დაჯახების შემთხვევისათვის

$(1,6)$ განტოლება, რომელიც მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის კანონს იძლევა, გავმარავლოთ ვექტორულად \vec{r} რადიუს-ვექტორზე, მივიღებთ

$$[\vec{r} \cdot \Delta m \vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}^0]. \quad (2,1)$$

ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta [\vec{r} \cdot m \vec{v}] &= [(\vec{r} + \Delta \vec{r}) \cdot m(\vec{v} + \Delta \vec{v})] - [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = \\ &= [\vec{r} \cdot \Delta m \vec{v}] + [\Delta \vec{r} \cdot (m \vec{v} + \Delta m \vec{v})]. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Delta \vec{r}$ წარმოადგენს უსასრულოდ მცირე სიდიდეს და უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში უკუვადებთ იმ წევრს, რომელიც $\Delta \vec{r}$ -ს შეიცავს, მივიღებთ

$$\Delta [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = [\vec{r} \cdot \Delta m \vec{v}].$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, $(2,1)$ ტოლობა მოგვცემს

$$\Delta [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}^0]. \quad (2,2)$$

$(2,2)$ ტოლობის ძალით, მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ნაზრდი დაჯახების იმპულსის მომენტის ტოლია. ეს დებულება, წერტილის დაჯახების შემთხვევაში, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი.

§ 3. დაღაპვების პრინციპი

წერტილის დაჯახების ძირითადი განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\vec{F}^0 + (-\Delta m \vec{v}) = 0. \quad (3,1)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს დაღაპვების პრინციპს თავისუფალი მატერიალური წერტილის დაჯახების შემთხვევისათვის, რომელიც ასე შეიძლება

ჩამოვყალიბოთ: დაჯახების იმპულსი და ინერციის ძალის იმპულსი იმყოფებიან წონასწორობაში.

თუ მატერიალური წერტილი ემორჩილება ბმას, მაშინ მხედველობაში უნდა მივიღოთ აგრეთვე დარტყმის შედეგად გამოწვეული რეაქციის ძალის იმპულსიც. ამ შემთხვევაში წერტილის დაჯახების ძირითადი განტოლება იქნება

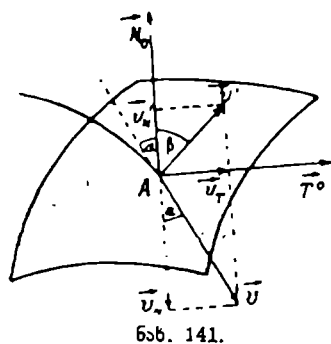
$$\Delta m\vec{v} = \vec{F}^0 + \vec{R}^0, \quad (3,2)$$

სადაც \vec{R}^0 წარმოადგენს რეაქციის ძალის იმპულსს. (3,2) ტოლობის ძალით, დალამბერის პრინციპი არათავისუფალი მატერიალური წერტილის დაჯახების შემთხვევაში შემდეგი ტოლობით დახასიათდება:

$$\vec{F}^0 + \vec{R}^0 + (-\Delta m\vec{v}) = 0. \quad (3,3)$$

§ 4. ღრმადი და არაღრმადი დაჯახებები

ვთქვათ, მოცემულია იდეალური (გლუვი) S ზედაპირი, რომელსაც მატერიალური წერტილი ეჯახება გარკვეული \vec{v} სიჩქარით. აღვნიშნოთ \vec{v}' -ით სიჩქარის მნიშვნელობა დაჯახების შემდეგ. მატერიალური წერტილის



ფართეულზე დაჯახების A წერტილზე გავავლოთ მხები წრფე, რომელიც მოთავსებულია A წერტილში ფართეულის \vec{N}^0 ნორმალსა და \vec{v} სიჩქარეზე გამავალ სიბრტყეში. ხსენებული მხების მგეზავი აღვნიშნოთ \vec{T}^0 -ით. ცხადია, გვექნება (ნახ. 141)

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_N, \quad (4,1)$$

სადაც \vec{v}_N და \vec{v}_T აღნიშნავენ \vec{v} სიჩქარის მდგენელებს შესაბამის \vec{N}^0 და \vec{T}^0 ვექტორების მიმართულებაზე (ფართეულის ნორმალზე და ზემოაღნიშნულ მხების მიმართულებაზე).

როგორც აღვილი მისახვედრია, წერტილის დაჯახების ძირითადი განტოლება ჩვენი შემთხვევისათვის შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{R}^0, \quad (4,2)$$

სადაც \vec{R}^0 წარმოადგენს დაჯახების რეაქციის ძალის იმპულსს. ვინაიდან განსახილველი S ზედაპირი იდეალურია (გლუვია), ამიტომ, ცხადია, \vec{R}^0 პარალელურია ფართეულის \vec{N}^0 ნორმალისა.

(4,2) ტოლობის ძალით, \vec{v} , \vec{v}' და \vec{N}^0 ვექტორები მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეში, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_N, \quad (4,3)$$

სადაც \vec{v}_T და \vec{v}'_N აღნიშნავენ \vec{v} სიჩქარის მდგენელებს შესაბამის \vec{T} და \vec{N} ვექტორების მიმართულებაზე. (4,2) ტოლობის \vec{T} ვექტორის მიმართულებაზე დაგეგმილებით ვრწმუნდებით, რომ

$$v_T = v'_T. \quad (4,4)$$

S ზედაპირს ეწოდება აბსოლუტურად დრეკადი, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{v}'_N = -\vec{v}_N. \quad (4,5)$$

S ზედაპირს ეწოდება აბსოლუტურად არადრეკადი, თუ $\vec{v}'_N = 0$, ხოლო ზედაპირს ეწოდება არასრულად დრეკადი, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{v}'_N = -k \vec{v}_N,$$

სადაც k მუდმივი რიცხვია, რომელიც მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის: $0 < k < 1$. ცხადია, სამივე შემთხვევა შეიძლება ერთ ტოლობაში გავაერთიანოთ და დავწეროთ

$$\vec{v}'_N = -k \vec{v}_N, \quad (4,6)$$

ამასთან $0 \leq k \leq 1$. k მუდმივს ეწოდება ალდგენის კოეფიციენტი.

თუ დაცემისა და უკუქცევის კუთხეებს აღვნიშნავთ შესაბამის α -თი და β -თი (ნახ. 141), ადვილად მივიღებთ

$$|v_T| = |v_N| \operatorname{tg} \alpha, \quad |v'_T| = |v'_N| \operatorname{tg} \beta,$$

საიდანაც

$$|v'_N| = |v_N| \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

(4,6) ტოლობის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (4,7)$$

(4,7) ტოლობა ალდგენის კოეფიციენტის პრაქტიკულად გამოთვლის საშუალებას იძლევა.

აღებული მასალისათვის k სიდიდის გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ აგრეთვე შემდეგი წესით: ვთქვათ, იდეალური ჰორიზონტალური ზედაპირიდან k მანძილზე სიმძიმის ძალის გავლენით უსაწყისო სიჩქარით ვარდება ბირთვი (იგულისხმება, რომ ბირთვი და ზედაპირი დამზადებულია ერთი და იმავე მასალისაგან, რომლისათვისაც გვინდა k სიდიდის გამოთვლა). ვთქვათ, ბირთვი დაცემის შემდეგ ზედაპირიდან აირეკლება k' მანძილზე. თუ დაცემის მომენტში სიჩქარეს აღვნიშნავთ \vec{v} -თი, ხოლო უკუქცევის მომენტში \vec{v}' -ით, ცხადია, გვექნება

$$|v| = \sqrt{2gh}, \quad |v'| = \sqrt{2gh'}, \quad (4,8)$$

სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებას აღნიშნავს. ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში

$$k = \frac{|v'|}{|v|},$$

ამიტომ, (4,8) ტოლობების ძალით, ვლებულობთ

$$k = \sqrt{\frac{h'}{h}}. \quad (4,9)$$

აღდგენის კოეფიციენტი k დამოკიდებულია დაჯახებაში მყოფ სხეულებზე და აგრეთვე დაჯახების მომენტში სიჩქარის სიდიდეზე. როცა $v \approx 2,8 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}}$, მაშინ ხისთვის $k \approx \frac{1}{2}$, სპილოს ძელისათვის $k \approx \frac{8}{9}$, მინისათვის $k \approx \frac{15}{16}$.

§ 5. ცოცხალი ძალის კანონი (კარნოს დემოლუმბა)

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი ეჯახება იდეალურ, აბსოლუტურად არადრეკად ზედაპირს (მყისვე შედის იდეალურ, აბსოლუტურად არადრეკად ბმაში) ან ემორჩილება რა აღნიშნული სახის ბმას, მყისვე გამოდის მისგან. ორივე შემთხვევაში ადგილი ექნება წერტილის დაჯახების შემდეგ ძირითად განტოლებას:

$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{R}^0. \quad (5,1)$$

განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა წერტილი მყისვე შედის იდეალურ აბსოლუტურად არადრეკად ბმაში. ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\vec{v}' \perp \vec{R}^0$, ამიტომ, თუ (5,1) ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად \vec{v}' -ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$m[v'^2 - (\vec{v} \cdot \vec{v}')] = (\vec{R}^0 \cdot \vec{v}') = 0,$$

საიდანაც

$$2v'^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{v}') = 0.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას $v^2 - v'^2$ სხვაობას დავუმატებთ, მივიღებთ

$$v^2 - v'^2 = v^2 - v'^2 + 2v'^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{v}') = (\vec{v} - \vec{v}')^2. \quad (5,2)$$

თუ მატერიალური წერტილის ცოცხალ ძალას დაჯახებამდე აღვნიშნავთ T -ით, ხოლო დაჯახების შემდეგ T' -ით:

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad T' = \frac{mv'^2}{2}.$$

ცხადია, გვექნება

$$T - T' = \frac{m}{2} (v^2 - v'^2).$$

(5,2) ტოლობის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$T - T' = \frac{m}{2} (\vec{v} - \vec{v}')^2. \quad (5,3)$$

$T-T'$ სხვაობას დანაკარგ ცოცხალ ძალას ვუწოდებთ, ხოლო $\vec{v}-\vec{v}'$ სხვაობას—დანაკარგ სიჩქარეს. (5,3) ტოლობის ძალით, ვრწმუნდებით კარნოს შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. როცა მატერიალური წერტილი მყისვე შედის იდეალურ, აბსოლუტურად არადრეკად ბშიში, მაშინ დანაკარგი ცოცხალი ძალა უდრის დანაკარგი სიჩქარის შესაბამ ცოცხალ ძალას.

ეს დებულება განსახილველი შემთხვევისათვის ცოცხალი ძალის კანონის სახელწოდებით არის ცნობილი.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა მატერიალური წერტილი მყისვე გამოდის იდეალური, აბსოლუტურად არადრეკადი ბმიდან. ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\vec{v} \perp \vec{R}$, ამიტომ, თუ (5,1) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ სკალარულად \vec{v} -ზე, მივიღებთ

$$v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{v}') = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, ცხადია, გვექნება

$$v'^2 - v^2 = v'^2 - v^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{v}') + 2v^2 = (\vec{v}' - \vec{v})^2. \quad (5,4)$$

თუ ბმიდან გამოსვლამდე ცოცხალ ძალას T -თი აღვნიშნავთ, ხოლო ბმიდან გამოსვლის შემდეგ T' -ით, მაშინ მივიღებთ

$$T' - T = \frac{m}{2} (v'^2 - v^2).$$

(5,4) ტოლობის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა მოგვეცემს

$$T' - T = \frac{m}{2} (\vec{v}' - \vec{v})^2. \quad (5,5)$$

(5,5) ტოლობა განსახილველი შემთხვევისათვის ამტკიცებს კარნოს დებულებას, რომელიც ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

როცა მატერიალური წერტილი მყისვე გამოდის იდეალური, აბსოლუტურად არადრეკადი ბმიდან, მაშინ შენაძენი ცოცხალი ძალა უდრის შესაძენი სიჩქარის შესაბამ ცოცხალ ძალას.

განმარტება 2

მატერიალური ნაწილაკის სისხვედრის დაჯახება

§ 6. მოძრაობის რაოდენობის კანონი

ვთქვათ, მოცემულია მატერიალურ წერტილთა სისტემა M_1, M_2, \dots, M_n . სისტემაში შემავალი წერტილების მასები, როგორც ყოველთვის, აღვნიშნოთ m_1, m_2, \dots, m_n -ით. M_i -ურ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი შიგა და გარე ძალების ტოლქმედი აღვნიშნოთ შესაბამად \vec{F}_i -თი და \vec{F}'_i -ით.

როგორც ვიცით (იხ. თავი VI, § 6), სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება \vec{K} ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i, \quad (6,1)$$

ამასთან \vec{v}_i აღნიშნავს M_i -ური წერტილის სიჩქარეს. მოძრაობის რაოდენობის კანონს მატერიალურ წერტილთა სისტემის შემთხვევაში შემდეგი სახე აქვს

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \quad (6,2)$$

სადაც \vec{F} წარმოადგენს სისტემაზე მოქმედ გარე ძალთა ნაჯრებ ვექტორს.

(0, τ) შუალედში (6,2) ტოლობის ინტეგრებით ვლებულობთ

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \int_0^\tau \vec{F} dt, \quad (6,3)$$

სადაც \vec{K}_0 წარმოადგენს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მნიშვნელობას $t=0$ მომენტისათვის.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ისეთ მოვლენებს, რომელთათვისაც მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება უსასრულოდ მცირე τ დროში აგრეთვე უსასრულოდ მცირეა.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის ისეთი მოვლენები, როცა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება ძალების მოქმედების უსასრულოდ მცირე τ დროში სასრული სიდიდეა. ასეთ მოვლენებს სისტემის დაჯახების მოვლენებს ვუწოდებთ, სათანადო ძალებს—დაჯახების ძალებს. ისე როგორც ერთი წერტილის დაჯახების შემთხვევაში, აქაც ჩვეულებრივი სასრული ძალების მოქმედების ეფექტი (მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თვალსაზრისით) უსასრულოდ მცირეა და შეიძლება მხედველობაში არც იქნეს მიღებული.

ზემონათქვამიდან ცხადია, რომ მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის დაჯახების მოვლენა იმაში მდგომარეობს, რომ სისტემის წერტილებზე მყისვე იმოქმედებენ დაჯახების ძალები, რომელნიც იწვევენ (მიუხედავად მოქმედების დროის სიმცირისა) მოძრაობის რაოდენობის სასრულ ცვლილებას.

სისტემაზე მოქმედ დაჯახების ძალებს გავყოფთ ორ ჯგუფად—შიგა და გარე დაჯახების ძალებად. გარე და შიგა დაჯახების ძალების იმპულსებს აღნიშნავთ შესაბამად \vec{F}_i^0 -ით და \vec{F}_e^0 -ით.

შემდეგში ნაცვლად იმისა, რომ ვთქვათ სისტემაზე მყისვე მოქმედებენ დაჯახების ძალები, ვიტყვი, რომ სისტემა განიცდის დაჯახებას.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\vec{F}^0 = \int_0^\tau \vec{F} dt, \quad (6,4)$$

მაშინ (6,3) ტოლობა ასე შეიძლება გადაწეროთ:

$$\Delta \vec{K} = \vec{F}^0, \quad (6,5)$$

სადაც

$$\Delta \vec{K} = \vec{K} - \vec{K}_0. \quad (6,6)$$

(6,5) ტოლობა იძლევა მოძრაობის რაოდენობის კანონს სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის, რომელიც ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება უსასრულოდ მცირე $(0, \tau)$ შუალედში უდრის დაჯახების გარე ძალთა ნაქრები ვექტორის იმპულსს იმავე $(0, \tau)$ შუალედში.

თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\vec{K} = M\vec{v}_c,$$

სადაც M არის მთელი სისტემის მასა, ხოლო \vec{v}_c —სისტემის ინერციის ცენტრის სიჩქარე, მაშინ $(6,5)$ ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$M\Delta\vec{v}_c = \vec{F}'^0. \quad (6,7)$$

§ 7. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი

როგორც ვიცით, ერთი მატერიალური წერტილის დაჯახების შემთხვევაში მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი მოცემულია $(2,2)$ ტოლობით. M_i -ური მატერიალური წერტილისათვის ამ ტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\Delta[\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i] = [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i^0] + [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i'^0], \quad (7,1)$$

სადაც \vec{r}_i აღნიშნავს M_i -ური წერტილის რადიუს-ვექტორს რაიმე უძრავი O წერტილის მიმართ, \vec{F}_i^0 ; და $\vec{F}_i'^0$; აღნიშნავენ M_i -ურ წერტილზე მოქმედ დაჯახების გარე და შიგა ძალთა იმპულსებს. თუ $(7,1)$ ტოლობას შევაჯამებთ i ინდექსით და გავითვალისწინებთ, რომ დაჯახების შიგა ძალთა იმპულსების მომენტების ჯამი ნულის ტოლია, მივიღებთ

$$\Delta\vec{G} = \vec{L}^0, \quad (7,2)$$

სადაც \vec{G} წარმოადგენს მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტს (კინეტიკურ მომენტს), ხოლო \vec{L}^0 წარმოადგენს სისტემაზე მოქმედ დაჯახების გარე ძალთა იმპულსების ნაქრებ მომენტს O წერტილის მიმართ.

$(7,2)$ ტოლობა იძლევა სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს, რომელიც ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

მატერიალურ წერტილთა სისტემის დაჯახების შემთხვევაში სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ნაზრდი უდრის სისტემაზე მოქმედ დაჯახების გარე ძალთა იმპულსების ნაქრებ მომენტს.

$(7,2)$ განტოლება, რომელიც სასრულ სხვაობიან განტოლებას წარმოადგენს, სისტემის დაჯახების შემთხვევაში ისეთივე როლს ასრულებს, როგორსაც სისტემის ჩვეულებრივი მოძრაობის შემთხვევაში განტოლება

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{L}. \quad (7,3)$$

სავსებით ისევე როგორც მატერიალურ წერტილთა სისტემის ჩვეულებრივი მოძრაობის შემთხვევაში, აქაც შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მოძრაობის რაოდენობის კანონი, დახასიათებული $(7,2)$ ტოლობით, სამართლიანია არა

მარტო კოორდინატთა უძრავი სისტემის მიმართ, არამედ ისეთი სისტემის მიმართაც, რომლის სათავე მოთავსებულია ინერციის ცენტრში და ძირითადი (უძრავი) სისტემის მიმართ მოძრაობს გადატანით.

§ 8. ცოცხალი ძალის კანონი სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის (კარნოს დებულება)

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემის დაჯახება მდგომარეობს შემდეგში:

1°. მატერიალურ წერტილთა სისტემა მყისვე შედის იდეალურ, აბსოლუტურად არადრეკად ბმაში;

2°. მატერიალურ წერტილთა სისტემა მყისვე გამოდის ზემოაღნიშნული სახის ბმიდან.

ორივე შემთხვევაში შეიძლება დავწეროთ ყოველი M_i -ური წერტილის დაჯახების შემდეგი ძირითადი განტოლება:

$$m_i \vec{v}'_i - m_i \vec{v}_i = \vec{R}^0_i. \quad (8,1)$$

პირველ შემთხვევაში

$$\sum_{i=1}^n (\vec{R}^0_i \cdot \vec{v}_i) = 0, \quad (8,2)$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$\sum_{i=1}^n (\vec{R}^0_i \cdot \vec{v}_i) = 0, \quad (8,3)$$

ამასთან \vec{v}_i და \vec{v}'_i აღნიშნავენ დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ M_i -ური წერტილის სიჩქარეებს¹.

განვიხილოთ ჯერ პირველი შემთხვევა, გავამრავლოთ (8,1) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად \vec{v}_i -ზე და ავჯამოთ i ინდექსით, (8,2) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n m_i [\vec{v}_i \cdot (\vec{v}'_i - \vec{v}_i)] = 0. \quad (8,4)$$

თუ დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ სისტემის ცოცხალ ძალას აღვნიშნავთ შესაბამისად T -ით და T' -ით და შევადგენთ $T - T'$ სხვაობას, მივიღებთ

$$T - T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^2 - v_i'^2). \quad (8,5)$$

თუ (8,4) სიდიდეს დავუმატებთ (8,5) ტოლობის მარჯვენა მხარეს, მივიღებთ

$$T - T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i - \vec{v}'_i)^2. \quad (8,6)$$

(8,6) ტოლობის ძალით, ჩვენ ვრწმუნდებით სისტემის დაჯახების შემთხვევაში კარნოს შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

¹ მატერიალურ წერტილთა სისტემის დაჯახების შემთხვევაში ეს ტოლობები შეიძლება დაედოს საფუძვლად აბსოლუტურად არადრეკადი ბმის განსაზღვრას.

დებულება. როცა მატერიალურ წერტილთა სისტემა მყისვე შედის იდეალურ, აბსოლუტურად არადრეკად ბმაში, მაშინ დანაკარგი ცოცხალი ძალა უდრის დანაკარგ სიჩქარეთა შესაბამ ცოცხალ ძალას.

ეს დებულება იძლევა ცოცხალი ძალის კანონს მატერიალურ წერტილთა სისტემის დაჯახების განსახილველი შემთხვევისათვის.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. თუ (8,1) ტოლობის ორივე მხარეს გავმრავლებთ \vec{v}_i -ზე, შევაჯამებთ i ინდექსით და გავითვალისწინებთ (8,3) ტოლობას, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n m_i [(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) - v_i^2] = 0. \quad (8,7)$$

ცხადია, გვექნება

$$T' - T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i'^2 - v_i^2).$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს გამოვაკლებთ (8,7) სიდიდეს, მივიღებთ

$$T' - T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i' - \vec{v}_i)^2. \quad (8,8)$$

უკანასკნელი ტოლობა იძლევა მატერიალურ წერტილთა სისტემის დაჯახების განსახილველ შემთხვევისათვის კარნოს დებულებას (ცოცხალი ძალის კანონს), რომელიც ასე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ:

როცა მატერიალურ წერტილთა სისტემა მყისვე გაშლის იდეალური, აბსოლუტურად არადრეკადი ბმებიდან, მაშინ სისტემის შენაძენი ცოცხალი ძალა უდრის შენაძენ სიჩქარეთა შესაბამ ცოცხალ ძალას.

§ 9. დალაშქარ-ლაგრანჟის განბოლება სისტემის დაჯახების შემთხვევაში

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა, რომელიც განიცდის დაჯახებას, ემორჩილება იდეალურ, ჰოლონომურ, ორმხრივ ბმებს. M_i -ურ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი რეაქციის ძალის იმპულსი აღვნიშნოთ \vec{R}_i -ით. ვინაიდან ბმები იდეალურია, ამიტომ ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = 0, \quad (9,1)$$

სადაც $\delta \vec{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) წარმოადგენს სისტემის შესაძლო გადაადგილებას.

თუ სისტემაში შემაგალი ყოველი მატერიალური წერტილისათვის დავწერთ წერტილის დაჯახების ძირითად განტოლებას, მივიღებთ

$$\Delta m_i \vec{v}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (9,2)$$

სადაც \vec{F}_i აღნიშნავს M_i -ურ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი დაჯახების შიგა და გარე ძალების ნაკრებ იმპულსს. თუ (9,2) ტოლობის ორივე მხარეს

გავამრავლებთ სკალარულად \vec{r}_i -ზე, შევაჯამებთ და გავითვალისწინებთ (9,1) ტოლობას, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n ((\vec{F}^0_i - \Delta m_i \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i) = 0. \quad (9,3)$$

ეს ტოლობა, ცხადია, კიდევ ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^n [(X^0_i - \Delta m_i x'_i) \delta x_i + (Y^0_i - \Delta m_i y'_i) \delta y_i + (Z^0_i - \Delta m_i z'_i) \delta z_i] = 0, \quad (9,4)$$

სადაც

$$(X^0_i, Y^0_i, Z^0_i) = \vec{F}^0_i.$$

(9,3), ანუ, რაც იგივეა, (9,4) განტოლება წარმოადგენს სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის დალამბერ-ლაგრანჟის განტოლებას (მექანიკის ზოგად განტოლებას).

§ 10. ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა ემორჩილება შემდეგი სახის იდეალურ, კოლონომურ, ორმხრივ ბმებს

$$f_\alpha(x_j, y_j, z_j, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (10,1)$$

როგორც VI თავის § 4-ში იყო ნაჩვენები, ამ ბმების შესაბამის რეაქტიის ძალები გამოითვლებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} R_{ix} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \\ R_{iy} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \\ R_{iz} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (10,2)$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ წარმოადგენენ ლაგრანჟის განუზღვრელ მამრავლებს.

ვთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა, რომელიც (10,1) სახის ბმებს ემორჩილება, განიცდის დაჯახებას. (10,2) ტოლობების საფუძველზე, რეაქტიის ძალების იმპულსები გამოითვლებიან ფორმულებით

$$\begin{aligned} R^0_{ix} &= \int_0^\tau \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dt, \\ R^0_{iy} &= \int_0^\tau \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dt, \\ R^0_{iz} &= \int_0^\tau \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dt. \end{aligned} \quad (10,3)$$

თუ (9,2) სისტემას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე და გავითვალისწინებთ (10,3) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned}\Delta m_i x'_i &= X^0_i + \int_0^T \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} dt, \\ \Delta m_i y'_i &= Y^0_i + \int_0^T \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} dt, \\ \Delta m_i z'_i &= Z^0_i + \int_0^T \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} dt.\end{aligned}\quad (10,4)$$

უკანასკნელი სისტემა წარმოადგენს ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებებს მატერიალურ წერტილთა სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის. ამ სისტემას უნდა დაეუმატოთ აგრეთვე ბმის (10,1) განტოლებები. (10,4) და (10,1) სისტემის სახით ჩვენ გვაქვს $3n + k$ განტოლება ამდენივე რაოდენობის x_i, y_i, z_i ($i=1, 2, \dots, n$), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ უცნობებით. ამრიგად, (10,4) და (10,1) განტოლებები შეადგენენ სისტემის დაჯახების შემთხვევაში განტოლებათა სრულ სისტემას.

§ 11. ლაგრანჟის მორალე გვარის განტოლებები სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის

ეთქვათ, მატერიალურ წერტილთა სისტემა, რომელიც ემორჩილება (10,1) სახის ბმებს, განიცდის დაჯახებას. ისე როგორც VI თავის § 10-ში, შემოვიღოთ განზოგადებული კოორდინატები q_1, q_2, \dots, q_s და სისტემის დეკარტის კოორდინატები გამოვსახოთ განზოგადებული კოორდინატების საშუალებით:

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t).\end{aligned}\quad (11,1)$$

ცხადია, გვექნება

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევითავსებთ დალამბერ-ლაგრანჟის (9,4) განტოლებას, მივიღებთ

$$\begin{aligned}& \sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{i=1}^n \left(X^0_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y^0_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z^0_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{i=1}^n \left[\Delta(m_i x'_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \Delta(m_i y'_i) \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \Delta(m_i z'_i) \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] = 0.\end{aligned}\quad (11,2)$$

ცხადია, გვექნება

$$\Delta(m_i x'_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \Delta \left(m_i x'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i x'_i \Delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \Delta(m_i x'_i) \Delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right). \quad (11,3)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, გარკვეული სიზუსტით ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\Delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \Delta x_i. \quad (11,4)$$

ვინაიდან დაჯახების დროის განმავლობაში სისტემის წერტილების გადაადგილება უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ გარკვეული მიახლოებით შეიძლება მივიღოთ, რომ $\Delta x_i = 0$ და, მაშასადამე, $\Delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = 0$. ამის შემდეგ, (11,3) ტოლობის ძალით, ცხადია გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta(m_i x'_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \Delta \left(m_i x'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right), \\ \Delta(m_i y'_i) \frac{\partial y_i}{\partial q_j} &= \Delta \left(m_i y'_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \right), \\ \Delta(m_i z'_i) \frac{\partial z_i}{\partial q_j} &= \Delta \left(m_i z'_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \end{aligned} \quad (11,5)$$

ამასთან ორი უკანასკნელი ტოლობა დაწერილია პირველის ანალოგიურად. თუ ამ მნიშვნელობებს (11,2) ტოლობაში შევითანთ, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^s Q^o_j \delta q_j - \sum_{j=1}^s \delta q_j \Delta \sum_{i=1}^n m_i \left(x'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + y'_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + z'_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = 0, \quad (11,6)$$

სადაც

$$Q^o_j = \sum_{i=1}^n \left(X^o_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y^o_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z^o_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right).$$

როგორც ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებების გამოყვანის დროს იყო ნაჩვენები (იხ. VI თავის § 10)

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_j} = \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j}.$$

უკანასკნელი ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \left(x'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + y'_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + z'_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{i=1}^n m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q'_j} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q'_j} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i) = \frac{\partial T}{\partial q'_j}, \end{aligned}$$

სადაც T სისტემის ცოცხალ ძალას აღნიშნავს.

თუ ამ მნიშვნელობას (11,6) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^s \left(\varphi_j - \Delta \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (11,7)$$

ვინაიდან $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ სიდიდეები დამოუკიდებელი ვარიაციებია, ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial q_j} = \varphi_j \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (11,8)$$

(11,8) სისტემა წარმოადგენს ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის.

გ ა ნ ა ზ ი ლ ა ბ ა 3

მყარ სხეულთა დაჯახება

§ 12. მიღების დინამიკური განბოლვებები ერთი უძრავი წერტილის მქონე მყარ სხეულზე დაჯახების შემთხვევაში

ვთქვათ, მოცემულია ერთი უძრავი წერტილის მქონე მყარი სხეული, რომელიც განიცდის დაჯახებას. თუ მყარ სხეულს წარმოვიდგენთ, როგორც მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობას და გავიხსენებთ მისთვის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს [იხ. (7,2) ტოლობა], მივიღებთ

$$\Delta \vec{G} = \vec{L}^0, \quad (12,1)$$

სადაც \vec{G} წარმოადგენს მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტს სხეულის უძრავი O წერტილის მიმართ, \vec{L}^0 — მყარ სხეულზე მოქმედ დაჯახების გარე ძალთა იმპულსების ნაკრებ მომენტს იმავე O წერტილის მიმართ. მოძრაობის რაოდენობის კანონს კი მყარი სხეულისათვის ექნება სახე

$$\Delta \vec{K} = \vec{F}^0 + \vec{R}^0, \quad (12,2)$$

სადაც \vec{K} მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობაა, \vec{F}^0 — დაჯახების გარე ძალთა ნაკრები იმპულსი, \vec{R}^0 — რეაქციის ძალის იმპულსი.

როგორც ვიცით, \vec{G} ვექტორის კომპონენტები გამოითვლება ფორმულებით

$$\begin{aligned} G_x &= J_{xx}\dot{p} - J_{xy}\dot{q} - J_{xz}\dot{r}, \\ G_y &= -J_{yx}\dot{p} + J_{yy}\dot{q} - J_{yz}\dot{r}, \\ G_z &= -J_{zx}\dot{p} - J_{zy}\dot{q} + J_{zz}\dot{r}, \end{aligned} \quad (12,3)$$

სადაც $J_{xx}, J_{xy}, \dots, J_{zz}$ ინერციის ტენზორის კომპონენტებია, ხოლო p, q, r წარმოადგენენ ბრუნვის $\vec{\omega}$ მყისი კუთხური სიჩქარის კოორდინატებს. თუ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის ღერძებად მივიღებთ მყარი სხეულის O წერტილის შესაბამის ინერციის მთავარ ღერძებს, მაშინ, როგორც ვიცით, ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია და (12,3) ტოლობები მოგვეცემს

$$G_x = A\dot{p}, \quad G_y = B\dot{q}, \quad G_z = C\dot{r}, \quad (12,4)$$

სადაც

$$A = J_{xx}, \quad B = J_{yy}, \quad C = J_{zz}.$$

თუ (12,1) ტოლობას დავეყვებით კოორდინატთა ღერძებზე და გავითვალისწინებთ (12,4) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} A(p-p_0) &= L^0_x, \\ B(q-q_0) &= L^0_y, \\ C(r-r_0) &= L^0_z, \end{aligned} \quad (12,5)$$

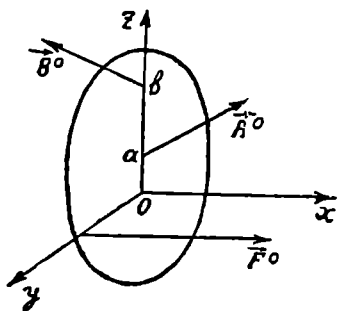
სადაც $\vec{w}_0 = (p_0, q_0, r_0)$ წარმოადგენს ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობას $t=0$ მომენტისათვის. (12,5) სისტემა წარმოადგენს ეილერის დინამიკურ განტოლებებს მყარი სხეულის დაჯახების განსახილველი შემთხვევისათვის. ამ სისტემას უნდა დაემატოს აგრეთვე ეილერის კინემატიკური განტოლებები:

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \theta + \varphi', \end{aligned} \quad (12,6)$$

სადაც φ, ψ, θ ეილერის კუთხეებია.

§ 13. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავ სხეულზე დაჯახება

ვთქვათ, გვაქვს მყარი სხეული, რომელსაც შეუძლია ბრუნვითი მოძრაობა რაიმე უძრავი ღერძის გარშემო. ვივილოთ ეს ღერძი Oz ღერძად. როგორც ვიცით, მყარი სხეულის ბრუნვა ღერძის გარშემო შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც სხეულის ისეთი არათავისუფალი მოძრაობა, როცა ბრუნვის ღერძზე



ნახ. 142.

მოთავსებული მისი რაიმე ორი a და b წერტილი უძრავია (ნახ. 142). ვთქვათ, ამ სხეულს ეჯახება სხვა რომელიმე სხეული \vec{F} ძალით, რომლის იმპულსიც არის \vec{F}^0 . დაჯახებით გამოწვეული რეაქციის ძალები იყოს \vec{A} და \vec{B} , მათი იმპულსები აღვნიშნოთ \vec{A}^0 და \vec{B}^0 -ით. მოძრაობის რაოდენობისა და მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონები მოგვცემენ

$$\Delta \vec{K} = \vec{A}^0 + \vec{B}^0 + \vec{F}^0, \quad (13,1)$$

$$\Delta \vec{G} = [\vec{Oa} \cdot \vec{A}^0] + [\vec{Ob} \cdot \vec{B}^0] + \vec{L}^0, \quad (13,2)$$

სადაც \vec{K} მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობაა, \vec{G} —მოძრაობის რაოდენობის მომენტი O წერტილის მიმართ, \vec{L}^0 —დაჯახების ძალის იმპულსის მომენტი იმავე O წერტილის მიმართ.

მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობა ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ (იხ. თავი VII, § 8):

$$\vec{K} = M \vec{v}_c = M [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_c], \quad (13,3)$$

სადაც \vec{r}_e წარმოადგენს ინერციის ცენტრის სიჩქარეს, ხოლო \vec{w} — ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს. თუ ამ მნიშვნელობას (13,1) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$M\Delta[\vec{w} \cdot \vec{r}_e] = \vec{A}^0 + \vec{B}^0 + \vec{F}^0. \quad (13,4)$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ინერციის ცენტრის გადაადგილება ძალის მოქმედების უსასრულოდ მცირე (0, τ) შუალედში უსასრულოდ მცირეა. მართლაც, (13,3) ტოლობა მოგვცემს

$$M \frac{d\vec{r}_e}{dt} = \vec{K},$$

საიდანაც

$$M(\vec{r}_e - \vec{r}_e^0) = \int_0^\tau \vec{K} dt. \quad (13,5)$$

ვინაიდან τ უსასრულოდ მცირეა, ხოლო \vec{K} — სასრული ვექტორი, ამიტომ ზემონათქვამის სამართლიანობა ცხადია.

ვინაიდან $\Delta\vec{r}_e$ უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ, გარკვეული სიზუსტით,

$$\Delta[\vec{w} \cdot \vec{r}_e] = [\Delta\vec{w} \cdot \vec{r}_e]. \quad (13,6)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (13,4) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$M[\Delta\vec{w} \cdot \vec{r}_e] = \vec{A}^0 + \vec{B}^0 + \vec{F}^0. \quad (13,7)$$

ამ ტოლობის კოორდინატა ღერძებზე დაგეგმილებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} -My_e\Delta\omega &= A_x^0 + B_x^0 + F_x^0, \\ Mx_e\Delta\omega &= A_y^0 + B_y^0 + F_y^0, \\ O &= A_z^0 + B_z^0 + F_z^0. \end{aligned} \quad (13,8)$$

ვინაიდან Oz ღერძი ემთხვევა ბრუნვის ღერძს, რომელზედაც დამთხვეულია ბრუნვის კუთხური საჩქარე \vec{w} , ამიტომ

$$\vec{w} = (0, 0, \omega)$$

და (12,3) ფორმულები მოგვცემს

$$G_x = -J_{xx}\omega, \quad G_y = -J_{yy}\omega, \quad G_z = J_{zz}\omega. \quad (13,9)$$

თუ (13,2) ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე და გაითვალისწინებთ (13,9) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} -J_{xx}\Delta\omega &= L_x^0 - hA_y^0 - h'B_y^0, \\ -J_{yy}\Delta\omega &= L_y^0 + hA_x^0 + h'B_x^0, \\ J_{zz}\Delta\omega &= L_z^0. \end{aligned} \quad (13,10)$$

სადაც

$$h = Oa, \quad h' = Ob.$$

უკანასკნელი განტოლება, რომელიც რეაქციის იმპულსებს არ შეიცავს, წარმოადგენს განსახილველ შემთხვევაში დაჯახების ძირითად განტოლებას. (13,8) სისტემიდან და (13,10)-ის პირველი ორი განტოლებიდან რეაქციის

ძალების იმპულსები უნდა განისაზღვრონ. $A^0_x, A^0_y, A^0_z, B^0_x, B^0_y, B^0_z$ 6 სიდიდის მოსაძებნად გვაქვს 5 განტოლება და, მაშასადამე, საქმე გვაქვს ჩვენთვის უკვე ცნობილ (იხ. თავი VII, § 15) სტატიკურად განუსაზღვრელი შემთხვევის ანალოგიურ შემთხვევასთან. როგორც აღვილი მისახედრია, ზემო-ხსენებული განტოლებებიდან ცალსახად განისაზღვრებიან $A^0_x, A^0_y, B^0_x, B^0_y$ სიდიდეები. (13,8) სისტემის უკანასკნელ განტოლებიდან განისაზღვრება $A^0_z + B^0_z$ ჯამი. თუ A^0_z და B^0_z სიდიდეებიდან ერთი მათგანი ცნობილია, მაშინ მეორე ცალსახად განისაზღვრება.

გამოვარკვეით თუ რა შემთხვევაში არ გადაეცემა დაჯახება ბრუნვის ღერძს.

თუ დაჯახება ბრუნვის ღერძს არ გადაეცემა, მაშინ $\vec{A}^0 = \vec{B}^0 = 0$ და (13,8) და (13,10) სისტემები მოგვცემენ

$$-My_c \Delta\omega = F^0_x, \quad (13,11)$$

$$Mx_c \Delta\omega = F^0_y,$$

$$F^0_z = 0, \quad (13,12)$$

$$-J_{xx} \Delta\omega = I^0_x, \quad (13,13)$$

$$-J_{yy} \Delta\omega = L^0_y.$$

(13,12) ტოლობის ძალით, \vec{F}^0 მართობი უნდა იყოს ბრუნვის ღერძისა და, მაშასადამე, ზოგადობის შეუზღუდველად, კოორდინატთა სისტემა ისე შეიძლება ავიღოთ, რომ \vec{F}^0 მოთავსებული იყოს xOy სიბრტყეში და ამასთან $\vec{F}^0 \parallel Oz$ (ნახ. 142). ამ შემთხვევაში, ცხადია, $L^0_x = L^0_y = 0$ და (13,13) ტოლობების ძალით $J_{xx} = J_{yy} = 0$. უკანასკნელი ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ ბრუნვის ღერძი უნდა იყოს ინერციის მთავარი ღერძი. ვინაიდან $F^0_y = 0$, ამიტომ (13,11) სისტემის მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ, რომ $x_c = 0$ და, მაშასადამე, ინერციის ცენტრი yOz სიბრტყეში უნდა იყოს მოთავსებული.

(3,10)-ის უკანასკნელი ფორმულის ძალით გვექნება

$$J_{xx} \Delta\omega = -\eta F^0_x,$$

სადაც η არის კოორდინატი იმ წერტილისა, სადაც \vec{F}^0 ვექტორის მიმართუ-ლება y ღერძს გადაკვეთს. უკანასკნელი ტოლობის ძალით (13,11) მოგვცემს

$$\eta = \frac{J_{xx}}{My_c}; \quad (13,14)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ η და y_c სიდიდეებს აქვთ ერთნაირი ნიშანი.

ამრიგად, თუ ბრუნვის ღერძს დაჯახება არ გადაეცემა, მაშინ აუცილებ-ლად: 1) \vec{F}^0 მართობია ბრუნვის ღერძის, 2) ბრუნვის ღერძი წარმოადგენს ინერციის მთავარ ღერძს, 3) თუ კოორდინატთა სისტემა ისეა არჩეული, რო-გორც ზემოთ იყო აღნიშნული, მაშინ ინერციის ცენტრი მოთავსებულია yOz სიბრტყეში, 4) დაჯახების ძალის სიდიდე (იგულისხმება, რომ \vec{F}^0 პარალელუ-რია Ox ღერძის) განისაზღვრება (13,11) სისტემის პირველი განტოლებით:

$$F^0_x = F^0 = -My_c \Delta\omega.$$

5) y ღერძს \vec{F}^0 ვექტორის მიმართულება გადაკვეთს ბრუნვის ღერძიდან იმ მხარეს, საითაც მოთავსებულია ინერციის ცენტრი, ამასთან \vec{F}^0 ვექტორის

მიმართულებისა და y ღერძის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატი η გამოითვლება (13,14) ფორმულით (η და y_c ერთმანეთთან დაკავშირებულია (13,14) ფორმულით)

ადვილია ჩვენება, რომ პირიქით, თუ ეს პირობები შესრულებულია, მაშინ დაჯახება არ გადაეცემა ბრუნვის ღერძს.

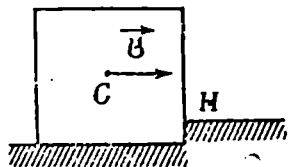
ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ დაჯახება ბრუნვის ღერძს არ გადაეცეს.

ამოცანები

1. ვთქვათ, კუბი, რომლის მასა უდრის M -ს და წიბო a -ს, სრიალებს პორიზონტალურ იატაკზე და v სიჩქარით ეჯახება უძრავ H საყრდენს (ნახ. 143), რომლის სიმაღლეც მხედველობაში არ მიიღება (სიმცირის გამო). გამოვთვალოთ დაჯახების შემდეგ სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე v_c , თუ დაჯახება აბსოლუტურად არადრეკადია. გამოვარკვიოთ, აგრეთვე, როგორი უნდა იყოს სიჩქარე v , რომ კუბი გადაბრუნდეს.

ვინაიდან დაჯახება არის აბსოლუტურად არადრეკადი, ამიტომ დაჯახების განმავლობაში კუბი იქნება შეხებაში H საყრდენთან და, მაშასადამე, დაჯახების შემდეგ კუბი დაიწყებს ბრუნვას H წერტილზე გამავალი პორიზონტალური ღერძის გარშემო (ნახ. 143) გარკვეული ω კუთხური სიჩქარით. (7,2) ტოლობის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ბრუნვის ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ იქნება ერთი და იგივე. დაჯახებამდე ხსენებული მომენტი გამოითვლება ფორმულით

$$G_0 = Mv \frac{a}{2} \quad (1)$$



ნახ. 143.

დაჯახების შემდეგ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, VII თავის (14,7) ფორმულის ძალით, იქნება

$$G = J_H \omega, \quad (2)$$

სადაც J_H არის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, v — ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ უნდა იყოს ერთი და იგივე, ამიტომ თუ (1) და (2)-ს ერთმანეთს გავუტოლობთ, მივიღებთ

$$Mv \frac{a}{2} = J_H \omega. \quad (3)$$

VII თავის § 3-ში დამტკიცებული შტეინერის დებულების ძალით, გვექნება

$$J_H = J_c + M \left(\frac{a}{2} \right)^2, \quad (4)$$

სადაც J_c არის ინერციის მომენტი სიმძიმის ცენტრში გამავალი პორიზონტალური ღერძის გარშემო, რომელიც ბრუნვის ღერძის პარალელურია. ადვილად მივიღებთ, რომ (იხ. VII თავის № 1 ამოცანა)

$$J_c = \frac{1}{6} M a^2. \quad (5)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (4)-ში, მივიღებთ

$$J_H = \frac{2}{3} M a^2. \quad (6)$$

(6)-ის ძალით, (3) მოგვცემს

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{v}{a}. \quad (7)$$

ვინაიდან დაჯახების შემდეგ გვაქვს ბრუნვა H წერტილზე გამავალი ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო, ამიტომ გვექნება

$$\vec{v}_c = [\vec{\omega} \cdot \vec{HC}],$$

საიდანაც

$$v_c = |CH| \omega = \frac{a}{\sqrt{2}} \omega = \frac{3\sqrt{2}}{8} v. \quad (8)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, კუბი რომ გადაბრუნდეს, ამისათვის საჭიროა დაჯახების შედეგად მისმა სიმძიმის ცენტრმა აიწიოს $\frac{a}{\sqrt{2}}$ სიმაღლეზე. ამრიგად, დაჯახების შედეგად კინეტიკური ენერგია უნდა იყოს იმდენად დიდი, რომ სიმძიმის ცენტრმა ხსენებულ სიმაღლეზე აიწიოს. VII თავის (20,2) ფორმულის ძალით, დაჯახების შემდეგ კინეტიკური ენერგია იქნება

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} M a^2 \cdot \left(\frac{3}{4} \frac{v}{a} \right)^2 = \frac{3}{16} M v^2. \quad (9)$$

ეს ენერგია უნდა დაიხარჯოს მუშაობაზე, რომელიც საჭიროა სიმძიმის ცენტრის $\frac{a}{\sqrt{2}}$ სიმაღლეზე ასაწევად, რის გამოც, ცოცხალი ძალის კანონის საფუძველზე, გვექნება

$$\frac{3}{16} M v^2 = M g \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} \right),$$

საიდანაც ვპოულობთ v -ს მინიმალურ მნიშვნელობას, რომელიც საჭიროა კუბის გადასაბრუნებლად:

$$v = 2 \sqrt{\frac{2}{3} a g (\sqrt{2} - 1)}. \quad (10)$$

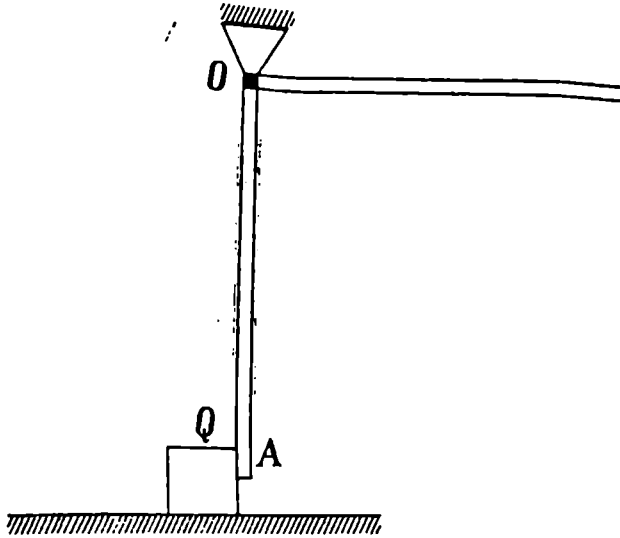
2. ძელი, რომლის მასა უდრის M -ს და სიგრძე l -ს, დაკიდებულია O წერტილში სახსრის საშუალებით. ეს ძელი ჰორიზონტალური მდებარეობიდან ვარდება ნულის ტოლი საწყისი სიჩქარით და როცა მიიღებს ვერტიკალურ მდებარეობას, ეჯახება m მასის მქონე Q ტვირთს და ანიჭებს მის გარკვეულ მოძრაობას ჰორიზონტალურ ხორკლიან სიბრტყეზე. ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f -ს, ხოლო დაჯახება არის აბსოლუტურად არადრეკადი. ვიპოვოთ ძელის O წერტილის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარე დაჯახების მომენტში ω_0 და აგრეთვე მანძილი, რომელსაც დაჯახების შედეგად ტვირთი გაივლის ზემოთ აღნიშნულ სიბრტყეზე (ნახ. 144).

$$T = Mg \frac{l}{2}, \quad (11)$$

სადაც T არის ძელის ცოცხალი ძალა დაჯახების მომენტში. VII თავის (20,2) ფორმულის ძალით

$$T = J \frac{\omega_0^2}{2}, \quad (12)$$

სადაც ω_0 არის დაჯახების მომენტში ძელის O წერტილის გარშემო ბრუნვის საძიებელი კუთხური სიჩქარე, ხოლო J არის ინერციის მომენტი O წერტილ-



ნახ. 144.

ში გავლებული Δ ღერძის გარშემო, რომელიც OA ძელის მართობია. ადვილად მივიღებთ, რომ $J = \frac{1}{3} Ml^2$ და მაშასადამე,

$$T = \frac{1}{6} Ml^2 \omega_0^2.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (11)-ში შევითანთ და განვსაზღვრავთ ω_0 -ს, მივიღებთ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}. \quad (13)$$

(7,2) ტოლობის გამოყენებით ვრწმუნდებით, რომ ბრუნვის Δ ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ ერთი და იგივეა, რის გამოც გვექნება

$$J\omega_0 = J\omega_0' + ml^2\omega_0',$$

სადაც ω_0' არის ძელის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე დაჯახების შემდეგ. უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\omega_0' = \frac{J \omega_0}{J + ml^2} = \frac{M}{M + 3m} \omega_0 = \frac{M}{M + 3m} \sqrt{\frac{3g}{l}}. \quad (14)$$

ცხადია, დაჯახების შემდეგ Q ტვირთის სიჩქარე იქნება

$$v = \omega_0' l = \frac{M}{M + 3m} \sqrt{\frac{3g}{l}} l = \frac{M}{M + 3m} \sqrt{3gl}. \quad (15)$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ Q ტვირთის კინეტიკური ენერგია გამოითვლება ფორმულით

$$T' = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{M}{M + 3m} \right)^2 mgl. \quad (16)$$

ეს კინეტიკური ენერგია იხარჯება მუშაობაზე, რომელიც საჭიროა ხორკლიან სიბრტყეზე Q ტვირთის გაჩერებამდე მოძრაობისათვის, ამიტომ, ცხადია,

$$T' = fmgx, \quad (17)$$

სადაც x არის საძიებელი მანძილი, რომელსაც Q ტვირთი დაჯახების შემდეგ გაივლის. (17) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$x = \frac{T'}{fmg} = \frac{3}{2} \left(\frac{M}{M + 3m} \right)^2 \frac{l}{f}. \quad (18)$$

3. სამი სავსებით დრეკადი სფერო, რომელთა მასებია m_1 , m_2 , m_3 , მოთავსებულია ერთი და იმავე წრფეზე. m_1 სფერო ეჯახება m_2 სფეროს მოცემული v სიჩქარით, რის გამოც m_2 სფერო ეჯახება m_3 სფეროს. როგორი უნდა იყოს m_2 მასა, რომ m_3 სფეროს სიჩქარე იყოს მაქსიმალური? (პიუგენსის ამოცანა).

ვთქვათ u_1 და u_2 არის პირველი და მეორე სფეროს სიჩქარეები მათი დაჯახების შემდეგ. ამ ორი სფეროს მოძრაობის რაოდენობა დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ უნდა იყოს ერთი და იგივე, რის გამოც გვექნება

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (19)$$

ცხადია აგრეთვე, რომ

$$m_1 v^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (20)$$

ამ ორი ტოლობიდან u_1 -ის გამორიცხვით ვღებულობთ

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (21)$$

მეორე სფეროს მესამეზე დაჯახების დროს u_2 სიჩქარე ისეთივე როლს თამაშობს, როგორსაც პირველის მეორეზე დაჯახების დროს v სიჩქარე, ამიტომ გვექნება

$$u_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (22)$$

ცხადია, ეს სიჩქარე იქნება მაქსიმალური, როცა გამოსახულება

$$\frac{m_2}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 m_3 + (m_1 + m_3)m_2 + m_1^2} \quad (23)$$

ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას, ანუ რაც იგივეა, როცა გამოსახულება

$$\frac{m_1 m_3}{m_2} + m_1 + m_3 + m_2 \quad (24)$$

ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას. ამრიგად, უნდა ვიპოვოთ ისეთი m_2 , რომლისთვისაც უკანასკნელი გამოსახულება ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას. მინიმუმის მოძებნის ჩვეულებრივი წესით ვღებულობთ, რომ

$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3} \quad (25)$$

ანიჭებს (24) გამოსახულებას მინიმუმს. ამრიგად, m_2 უნდა იყოს საშუალო გეომეტრიული m_1 და m_3 მასებს შორის, რომ m_2 სფეროს სიჩქარე u_2 იყოს მინიმალური.

სხალეგალი მასის სხეულთა ღინამიკის ელემენტები

§ 1. შ ე ს ა მ ა ლ ი

კლასიკურ მექანიკაში განიხილება მხოლოდ ისეთი სხეულის მოძრაობა რომლის მასა მოძრაობის დროს არ იცვლება (მასა მუდმივ სიდიდედ არის მიღებული), ამიტომ, ცხადია, კლასიკური მექანიკის კანონები არ იძლევიან საშუალებას შევისწავლოთ ისეთი მოვლენები, რომელნიც უშუალოდ არიან დაკავშირებული მასის ცვალებადობასთან.

შეიძლება დავასახელოთ მრავალი შემთხვევა მოძრაობისა, როცა სხეულის მასა განიცდის ცვლილებას: დედამიწის მასა მატულობს იმის შედეგად, რომ მასზე ეცემა მეტეორიტების ნაწილაკები, მეტეორიტის მასა კლებულობს იმის გამო, რომ ატმოსფეროში გავლის დროს გარკვეული ნაწილაკები შეიძლება მას მოცილდეს ან დაიწვას, სეტყვის კაკალი შეიძლება მატულობდეს ატმოსფეროში მოძრაობის დროს ატმოსფეროს ნაწილაკებისა და წყლის ორთქლის ნაწილაკების მასზე მიკვრის გამო, მზის მასა კლებულობს გამოსხივების შედეგად, მაგრამ მატულობს ე. წ. „კოსმოსური მტვრის“ მიერთების გამო. ზემოთ დასახელებული შემთხვევები მოძრაობის ისეთი შემთხვევებია, რომელთაც თვით ბუნება წარმოგვიდგენს. შეიძლება დავასახელოთ უამრავი შემთხვევა ხელოვნურად განხორციელებული მოძრაობებისა, რომლის დროსაც ადგილი აქვს აგრეთვე მასის ცვალებადობას. ასე მაგალითად: თითისტარი, რომელსაც მოძრაობის დროს ძაფი ეხვევა, ან რომლისგანაც ძაფი გადაიხვევა, წარმოადგენს ცვალებადი მასის სხეულის მოძრაობის შემთხვევას, ნაწვავი პროდუქტების და გაზის გამოგდების (გამოსროლის) შედეგად ადგილი აქვს მოძრავი რაკეტის მასის შემცირებას, საჰაერო რეაქტიული ძრავებით მოძრავი თვითმფრინავის მასა განუწყვეტლივ მატულობს და კლებულობს, მასის მომატებას აქვს ადგილი, როცა საჰაერო რეაქტიული ძრავი შეიწოვს ჰაერის დიდძალ ნაწილაკებს, ხოლო მასის დაკლებას აქვს ადგილი, როცა ძრავი ხსენებულ ნაწილაკებს ნაწვავ პროდუქტებთან ერთად გამოისვრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ყინულოვან ოკეანეში მოძრავი გემის მასა მატულობს იმის გამო, რომ მას ეკვრება ყინულის გარკვეული მასა.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითები გვიჩვენებენ, რომ მოძრაობის დროს სხეული შეიძლება ჰკარგავდეს მასას ან იძენდეს მასას ან შეიძლება ერთდროულად კიდევაც იძენდეს მასას და კიდევაც ჰკარგავდეს მას. ამ უკანასკნელ შემთხვევას, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ადგილი აქვს საჰაერო რეაქტიული ძრავებით მოძრავი თვითმფრინავებისათვის. დასახელებული მაგალითები იძლევიან ცვალებადი მასის სხეულთა მოძრაობის კანონების შესწავლის საჭიროების

საკმარის საფუძველს. თანამედროვე რაქეტული ტექნიკა ემყარება ცვალებადი მასის სხეულთა დინამიკის კანონებს.

ცვალებადი მასის სხეულთა მექანიკა XX საუკუნის მეცნიერებაა, მას საფუძველი ჩაუყარა ცნობილმა მეცნიერმა, ლენინგრადის პოლიტექნიკური ინსტიტუტის პროფესორმა ი. ვ. მეშერსკიმ, რომელმაც გამოიყვანა ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებები. ამ განტოლებებმა არსებითი როლი შეასრულეს თეორიული მექანიკის განვითარებისა და განსაკუთრებით რაქეტული დინამიკის კანონების დადგენის საქმეში.

მეშერსკის შედეგებზე დაყრდნობით კ. ე. ციოლკოვსკიმ შეისწავლა ცვალებადი მასის სხეულის მოძრაობის რამდენიმე შემთხვევა. კონკრეტული ამოცანის შესწავლის საფუძველზე მან პრინციპულად დაამტკიცა რეაქტიული მოძრაობის შესაძლებლობა. მან დაამტკიცა აგრეთვე, რომ თუ მოძრავი სხეულიდან რეგულარულად ხდება მასის გამოყოფა საკმარისად დიდი სიჩქარით, მაშინ შეიძლება სხეულის მოძრაობისათვის ნილწეულ იქნეს ძალიან დიდი (ე. წ. კოსმოსური) სიჩქარე. ციოლკოვსკიმ პირველმა შეაფასა მოძრავი სხეულიდან გამოგდებული მასის ეფექტიანობა და მიუთითა რეაქტიული ძრავის უპირატესობაზე დიდი სიჩქარის მისაღწევად. მან დაწვრილებით შეისწავლა საკითხი იმის შესახებ, თუ რა მარაგია საჭირო მაღალკალორიანი საწვავისა, რომ დაძლეულ იქნეს დედამიწის მიზიდულობა. ციოლკოვსკიმ წამოაყენა ბევრი საინტერესო იდეა რეაქტიული აპარატების კონსტრუირებისა საპლანეტთაშორისო მიმოსვლისათვის. ის სამართლიანად ითვლება საპლანეტთაშორისო მიმოსვლის თეორიის ფუძემდებლად.

ბ ა ნ წ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებები

§ 2. ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება (მეშერსკის განტოლება)

შემდეგში ყოველთვის ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ საკმარისად მცირე განზომილების სხეულს, რომლის მასა იცვლება დროთა ვითარებაში. მათემატიკური თვალსაზრისით, ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გეომეტრიული წერტილი, რომელსაც გააჩნია სასრული რაოდენობა დროის მიხედვით ცვალებადი მასისა. აღებული ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილი მთელი მოძრაობის პერიოდში განხილული იქნება, როგორც ძირითადი მოძრავი ობიექტი, რომლისაგანაც ხდება გამოგდება შედარებით მცირე მასის ნაწილაკებისა და დაეუფვებთ, რომ მასის გამოგდება (გამოსროლა) ხდება განუწყვეტლივ.

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლების გამოყვანის დროს ჩვენ ვიხელმძღვანელებთ საკონტაქტო ურთიერთქმედების დაშვებით, ე. ი. ვიგულისხმებთ, რომ მატერიალური წერტილიდან გამოგდებული რაიმე ნაწილაკი ამ წერტილის მოძრაობაზე ახდენს გავლენას მანამდე, სანამ ის მასთან კონტაქტში იმყოფება; გამოგდების მომენტში ხსენებული ნაწილაკი ცვლის წერტილის მოძრაობის რაოდენობას და შემდეგ პერიოდში კი მის მოძრაობაზე გავლენას არ ახდენს. ეს დაშვება არსებითად

ამარტივებს ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას. გარდა ამისა, ძირითადი მასიდან ნაწილაკის გამოგდება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დაჯახების მოვლენის ანალოგიური მოვლენა და ვისარგებლოთ დაჯახების თეორიის მეთოდებით.

თუ მოძრავი მატერიალური წერტილის მასა მატულობს იმის გამო, რომ მას უერთდება სხვა მატერიალური ნაწილაკი, მაშინ ძირითადი წერტილის მოძრაობაზე მიერთებული ნაწილი გავლენას ახდენს მხოლოდ მიერთების შემდეგ.

ვიგულისხმობთ, რომ ძირითადი მატერიალური წერტილიდან მასის გამოგდება ხდება შიგა ძალებით (მაგალითად, აფეთქების შედეგად წარმოშობილი ძალებით, რომელნიც შიგა ძალებს წარმოადგენენ).

ვთქვათ, ალებულ t მომენტში ცვალებადი მასის M წერტილის მასა უდრის m -ს. აღვნიშნოთ უსასრულოდ მცირე dt დროში m მასიდან გამოგდებული მასა $(-dm)$ -ით ($dm < 0$, $-dm > 0$). M წერტილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი მატერიალური წერტილის ერთობლიობა, რომელთა მასებია $m+dm$ და $(-dm)$. თუ ამ წერტილებს განვიხილავთ, როგორც მატერიალურ წერტილთა სისტემას, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის კანონი მოგვცემს

$$d\vec{K} = \vec{F} dt, \quad (2,1)$$

სადაც \vec{K} არის აღნიშნული სისტემის მოძრაობის რაოდენობა, ხოლო \vec{F} წარმოადგენს M წერტილზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრებ ვექტორს. თუ მოვახდენთ (2,1) ტოლობის ინტეგრებას $(t, t+dt)$ შუალედში, მივიღებთ

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \int_t^{t+dt} \vec{F} d\tau, \quad (2,2)$$

სადაც \vec{K} არის მოძრაობის რაოდენობა $t+dt$ მომენტში, ე. ი. M წერტილიდან $(-dm)$ მასის გამოგდებისთანავე, ხოლო \vec{K}_0 არის მოძრაობის რაოდენობა t მომენტში. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{F}^* dt, \quad (2,3)$$

სადაც \vec{F}^* არის \vec{F} ძალის მნიშვნელობა $(t, t+dt)$ შუალედის გარკვეულ წერტილზე. ვინაიდან dt უსასრულოდ მცირეა და ამის გარდა იგულისხმება, რომ \vec{F} ძალა დროის უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ, საკმარისად დიდი სიზუსტით, გვექნება

$$\vec{F}^* = \vec{F}$$

და, მაშასადამე, (2,3) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{F} dt. \quad (2,4)$$

აღვნიშნოთ t მომენტში M წერტილის სიჩქარე უძრავ $Oxyz$ სისტემის მიმართ \vec{v} -ით, გამოგდებული $(-dm)$ ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე (სიჩქარე $Oxyz$ სისტემის მიმართ) აღვნიშნოთ \vec{u} -ით. M წერტილის სიჩქარის ცვლილება, რომელიც გამოწვეულია $(-dm)$ ნაწილაკის გამოგდებით, აღვნიშნოთ $d\vec{v}$ -ით. ცხადია, $t+dt$ მომენტში M წერტილის სიჩქარე იქნება $\vec{v} + d\vec{v}$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\vec{K} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm)\vec{u}, \quad (2,5)$$

$$\vec{K}_0 = m\vec{v}. \quad (2,6)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (2,4) ტოლობაში და უკუვაგდებთ უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა ნამრავლს $dm d\vec{v}$ -ს, მივიღებთ

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} (\vec{u} - \vec{v}). \quad (2,7)$$

(2,7) განტოლება, ცხადია, შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}. \quad (2,7')$$

(2,7) ფორმულაში შეზავალი სხვაობა $\vec{u} - \vec{v}$, როგორც ადვილი მისახვედრია, წარმოადგენს გამოგდებული $(-dm)$ ნაწილაკის ფარდობით სიჩქარეს M წერტილის მიმართ. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_1, \quad (2,8)$$

მივიღებთ

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_1. \quad (2,9)$$

(2,7), ანუ, რაც იგივეა, (2,9) განტოლება პირველად მიღებული იყო 1897 წელს მეზჩერსკის მიერ, ამიტომ მას მეზჩერსკის განტოლებას უწოდებენ.

თუ განვიხილავთ ცვალებადი მასის ნებისმიერი სიდიდის სხეულის გადატანით მოძრაობას და დავუშვებთ, რომ გამოგდებული (გამოსროლილი) ნაწილიც გადატანით მოძრაობს, მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, აღებული სხეულის ინერციის ცენტრის მოძრაობისათვის გვექნება ისევ (2,7) განტოლება, სადაც m სხეულის მასაა, \vec{v} — სხეულის ინერციის ცენტრის სიჩქარე, \vec{u} — მოწყვეტილი ნაწილის ინერციის ცენტრის აბსოლუტური სიჩქარე, \vec{F} — სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები ვექტორი.

(2,7) განტოლებაში შემავალ წევრს

$$\vec{R} = \frac{dm}{dt} (\vec{u} - \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \vec{v}_1 \quad (2,10)$$

ეწოდება რეაქტიული ძალა. აქ dm უარყოფითი სიდიდეა, ამიტომ, თუ დავუშვებთ, რომ გამოგდებული ნაწილაკის აბსოლუტურ სიჩქარეს M წერტილის სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს (\vec{u} სიჩქარეს \vec{v} სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს), მაშინ $\frac{dm}{dt} (\vec{u} - \vec{v})$ ვექტორული სიდიდის გეგმილი მოძრაობის მიმართულებაზე დადებითია და მაშასადამე, ამ შემთხვევაში რეაქტიული ძალა აჩქარებს M წერტილის მოძრაობას. რაც უფრო მეტია გამოგდებული ნაწილაკის ფარდობითი სიჩქარე \vec{v}_1 , მით უფრო დიდია რეაქტიული ძალა \vec{R} . რეაქტიული ძალის გამოსახულებაში მონაწილე სიდიდე $\frac{dm}{dt}$ წარმოადგენს მასის ნახარჯს

დროის ერთეულში, ანუ, როგორც ამბობენ, მასის კლების სიჩქარეს.

(2,10) აღნიშვნის ძალით, (2,7) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (2,11)$$

მოდრავი M წერტილიდან მატერიალური ნაწილაკის გამოგდების მექანიზმი შეიძლება სხვადასხვაგვარი იყოს, მაგალითად, ნაწილაკის გამოგდება შეიძლება ხდებოდეს აფეთქების შედეგად, ან ქიმიური რეაქციის მეშვეობით და სხვა. მოძრაობის ამა თუ იმ შემთხვევისათვის შეიძლება დადგენილ იქნეს ნაწილაკის გამოგდების დამახასიათებელი სიდიდეები: ფარდობითი სიჩქარე $\vec{v}_1 = \vec{u} - \vec{v}$ და მასის ხარჯი დროის ერთეულში $\frac{dm}{dt}$. თუ ეს სიდიდეები ცნობილია, როგორც დროის ფუნქციები, მაშინ რეაქტიული ძალა განსაზღვრულია და მაშასადამე, (2,11) განტოლების მარჯვენა მხარე ცნობილი ფუნქცია იქნება. თუ ამ განტოლებას დავაგვიღებთ უძრავ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_z. \end{aligned} \quad (2,12)$$

უზოგადეს შემთხვევაში ამ სისტემის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს x, y, z, x', y', z', t სიდიდეების ფუნქციებს. (2,12) სისტემას უწოდებენ ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებებს (მეშჩერსკის განტოლებებს).

V თავის § 3-ში ჩვენ გვქონდა ტოლობა

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt,$$

ანუ, რაც იგივეა

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (2,13)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ (2,13) განტოლებაში მასა მუდმივი არ არის, არამედ წარმოადგენს t -ს უწყვეტ და უწყვეტად წარმოებად ფუნქციას, მაშინ ამ განტოლებიდან შეიძლება თუ არა მივიღოთ მეშჩერსკის განტოლება?

(2,13) განტოლებიდან, საზოგადოდ, მეშჩერსკის განტოლება არ მიიღება. მართლაც, (2,13) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dm}{dt} \vec{v}. \quad (2,14)$$

ეს განტოლება მეშჩერსკის (2,7) განტოლებას დავმთხვევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა გამოგდებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე $\vec{u} = 0$. ამრიგად,

ნითონის (2,13) განტოლება ცვალეზადი მასის მატერია-
ლური წერტილისათვის სამართლიანია მხოლოდ იმ კერ-
ძო შემთხვევაში, როცა გამოგდებული ნაწილაკის აბსოლუ-
ტური სიჩქარე უდრის ნულს.

(2,14) ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \vec{F}. \quad (2,15)$$

ამრიგად, როცა გამოგდებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე უდრის
ნულს, მაშინ ცვალეზადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტო-
ლება (მეშჩერსკის განტოლება) (2,15) სახით ჩაიწერება.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა გამოგდებული ნაწილაკის ფარ-
დობითი სიჩქარე $\vec{v}_1 = 0$. ამ შემთხვევაში (2,9) განტოლება მოგვცემს

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (2,16)$$

ამრიგად, როცა გამოგდებული ნაწილაკის ფარდობითი სიჩქარე ნულის
ტოლია, მაშინ მეშჩერსკის განტოლება ფორმალურად ემთხვევა მუდმივი მასის
მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას, მაგრამ უნდა გვახსოვდეს,
რომ (2,16) განტოლებაში m არის დროის ფუნქცია. თუ (2,16) განტოლებაში
 $\vec{F} = 0$, მაშინ $\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{const}$ და, მაშასადამე, ადვილი ექნება სწორხაზოვან თა-
ნაბარ მოძრაობას.

თანამედროვე რაკეტული ტექნიკის რიგი ამოცანისათვის გამოგდებული
ნაწილაკის ფარდობითი სიჩქარე მუდმივია და დამთხვეულია ტრაექტორიის
მხეზზე, ე. ი. პარალელურია \vec{v} სიჩქარის. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ

$$\vec{u} - \vec{v} = -v_1 \vec{\tau}^0 = \lambda(t) v \vec{\tau}^0, \quad (2,17)$$

სადაც $\lambda(t)$ პროპორციულობის კოეფიციენტია, $\vec{\tau}^0$ არის \vec{v} სიჩქარის მგეზავი.
უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (2,7) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \left(\frac{dm}{dt} v_1 \right) \vec{\tau}^0, \quad (2,18)$$

ანუ, კიდევ ასე:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \lambda(t) \frac{dm}{dt} v \vec{\tau}^0. \quad (2,19)$$

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა გარე ძალთა ნაკრები ვექტორი
პროპორციულია წერტილის მასისა, ე. ი. $\vec{F} = m \vec{a}$ და დავუშვათ, რომ $m(t) =$
 $= m_0 f(t)$. ამ შემთხვევაში (2,18) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} - \frac{v_1}{f(t)} \frac{df}{dt} \vec{\tau}^0.$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} - v_1 \vec{\tau}^0 \frac{d}{dt} \ln f(t). \quad (2,20)$$

თუ ახლა შემოვიღებთ აღნიშვნას $\ln f(t) = \psi(t)$, მივიღებთ

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a} - v_1 \frac{d\psi}{dt} \bar{r}_0. \quad (2,21)$$

ამ განტოლებას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს რაკეტული ტექნიკის გარკვეული ამოცანების შესწავლისათვის.

§ 3. მემოხარისხის განზოგადებული განტოლება

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ ცვალებადი მასის მატერიალური M წერტილის მოძრაობა, როცა ამ წერტილიდან ხდება მასის გამოგდება. განვიხილოთ ახლა ის ზოგადი შემთხვევა, როცა ერთდროულად ადგილი აქვს მასის გამოგდებასა და მიერთებას. ვთქვათ, t მომენტში M წერტილის მასა უდრის m -ს და ვთქვათ უსასრულოდ მცირე dt დროში ხდება $(-dm_1)$ ($dm_1 < 0$) მასის გამოგდება და dm_2 მასის მიერთება ($dm_2 > 0$). ცხადია, M წერტილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შედგენილი სამი წერტილისაგან, რომელთა მასებია $m + dm_1$, $-dm_1$ და dm_2 . ამ სისტემისათვის მოძრაობის რაოდენობის კანონი გვაძლევს

$$d\bar{K} = \bar{F}dt, \quad (3,1)$$

სადაც \bar{K} აღნიშნული სამი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის მოძრაობის რაოდენობაა, ხოლო \bar{F} წარმოადგენს M წერტილზე მოქმედ გარე ძალთა ნაქრებ ვექტორს. ისე როგორც წინა პარაგრაფში, უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\bar{K} - \bar{K}_0 = \bar{F}dt, \quad (3,2)$$

სადაც \bar{K} არის მოძრაობის რაოდენობის მნიშვნელობა $t + dt$ მომენტში, ხოლო \bar{K}_0 — ადებულ t მომენტში. აღვნიშნოთ ადებულ t მომენტში $(-dm_1)$ და dm_2 ნაწილაკების აბსოლუტური სიჩქარეები შესაბამის \bar{u}_1 -ით და \bar{u}_2 -ით, ცხადია, გვექნება

$$\bar{K} = (m + dm_1 + dm_2)(\bar{v} + d\bar{v}) + (-dm_1)\bar{u}_1, \quad (3,3)$$

$$\bar{K}_0 = m\bar{v} + dm_2\bar{u}_2, \quad (3,4)$$

სადაც $d\bar{v}$ არის M წერტილის სიჩქარის ნაზრდი dt დროში. თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3,2) ტოლობაში და უკუვაგდებთ უსასრულოდ მცირეთა ნაშრავლებს: $dm_1 d\bar{v}$ -სა და $dm_2 d\bar{v}$ -ს, ადვილად მივიღებთ

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm_1}{dt}(\bar{u}_1 - \bar{v}) + \frac{dm_2}{dt}(\bar{u}_2 - \bar{v}). \quad (3,5)$$

ამ განტოლებას უწოდებენ მემოხარისხის განზოგადებულ განტოლებას. თუ მასის მიერთებას ადგილი არა აქვს, მაშინ, ცხადია, ეს განტოლება დაემთხვევა (2,7) განტოლებას.

(3,5) განტოლებაში შემავალი სიდიდეები: $\bar{u}_1 - \bar{v}$ და $\bar{u}_2 - \bar{v}$ წარმოადგენენ შესაბამის $(-dm_1)$ და (dm_2) ნაწილაკთა ფარდობით სიჩქარეებს M წერტილის მიმართ. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\overline{u_1} - \overline{v} = \overline{v_1}, \quad \overline{u_2} - \overline{v} = \overline{v_2}, \quad (3,6)$$

მაშინ (3,5) განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$m \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F} + \frac{dm_1}{dt} \overline{v_1} + \frac{dm_2}{dt} \overline{v_2}. \quad (3,7)$$

დიდძალი ამოცანებისათვის, რომელთაც თანამედროვე ტექნიკა აყენებს, ფარდობითი სიჩქარეები $\overline{v_1}$ და $\overline{v_2}$ პარალელური არიან \overline{v} -სი და მისი საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ. ამ შემთხვევაში (3,7) განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალი ვექტორული სიდიდე

$$\overline{R_1} = \frac{dm_1}{dt} \overline{v_1}, \quad (3,8)$$

რომელიც ($-dm_1$) ნაწილაკის გამოგდებით წარმოშობილ რეაქტიულ ძალას წარმოადგენს, მიმართულია M წერტილის მოძრაობის მიმართულებით და აჩქარებს მის მოძრაობას. ეინაიდან $dm_2 > 0$ და $\overline{v_2}$ ფარდობით სიჩქარეს M წერტილის სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს, ამიტომ, ცხადია, (3,7) განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალ ვექტორულ სიდიდეს

$$\overline{R_2} = \frac{dm_2}{dt} \overline{v_2} \quad (3,9)$$

აქვს M წერტილის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება და მაშასადამე, ის ამუხრუჭებს მოძრაობას. (3,9) ტოლობით განსაზღვრულ $\overline{R_2}$ სიდიდეს უარყოფით რეაქტიულ ძალას უწოდებენ.

ცხადია, მოძრავი M წერტილის მასა დროის ნებისმიერი t მომენტი-სათვის გამოითვლება ფორმულით

$$m(t) = m_0 - |m_1| + m_2 = m_0 - \int_0^t \left| \frac{dm_1}{dt} \right| dt + \int_0^t \frac{dm_2}{dt} dt, \quad (3,10)$$

სადაც m_0 არის M წერტილის მასა $t=0$ მომენტისათვის, $|m_1|$ წარმოადგენს t დროის განმავლობაში M წერტილიდან გამოგდებულ მასათა რაოდენობას, ხოლო m_2 არის მასის რაოდენობა, რომელიც შეუერთდა M მატერიალურ წერტილს t დროის განმავლობაში.

თუ (3,5) განტოლებას დავაგეგმილებთ უძრავ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე მივიღებთ

$$\begin{aligned} mx'' &= F_x + \frac{dm_1}{dt} (\alpha_1 - x') + \frac{dm_2}{dt} (\alpha_2 - x'), \\ my'' &= F_y + \frac{dm_1}{dt} (\beta_1 - y') + \frac{dm_2}{dt} (\beta_2 - y'), \\ mz'' &= F_z + \frac{dm_1}{dt} (\gamma_1 - z') + \frac{dm_2}{dt} (\gamma_2 - z'), \end{aligned} \quad (3,11)$$

სადაც $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ და $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ წარმოადგენენ $\overline{u_1}$ და $\overline{u_2}$ აბსოლუტურ სიჩქარეთა კოორდინატებს $Oxyz$ სისტემის მიმართ. თუ ვიგულისხმებთ, რომ

$\frac{dm_1}{dt}, \frac{dm_2}{dt}, \vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ცნობილი უწყვეტი სიდიდეებია, მაშინ (3,11) წარმოადგენს მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომლის ინტეგრებითაც განისაზღვრება ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობა.

დავუშვათ ახლა, რომ წერტილის ტრაექტორია წარმოადგენს ბრტყელ წირს და ფარდობითი სიჩქარეები \vec{v}_1 და \vec{v}_2 დამთხვეულია ტრაექტორიის მხებზე. ვთქვათ, $\vec{v}_1 = -v_1 \vec{\tau}^0$, $\vec{v}_2 = -v_2 \vec{\tau}^0$, სადაც $\vec{\tau}^0$ მოძრავი M წერტილის სიჩქარის მგეზავია. თუ ამ შემთხვევაში (3,7) ტოლობას დავაგეგმილებთ ტრაექტორიის მხებზე და ნორმალზე (ბუნებრივ სამღერძზე), მივიღებთ

$$m \frac{dv}{dt} = F\tau - \frac{dm_1}{dt} v_1 - \frac{dm_2}{dt} v_2, \quad (3,12).$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = F_n,$$

სადაც ρ არის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი.

განვიხილოთ ახლა ცვალებადი მასის M მატერიალური წერტილის მოძრაობის ის კერძო შემთხვევა, როცა ამ წერტილიდან მასის გამოგდება არ ხდება, ადგილი აქვს მხოლოდ მასის მიერთებას. ამ შემთხვევაში (3,5) განტოლება მოგვცემს

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_2}{dt} (\vec{u}_2 - \vec{v}), \quad (3,13)$$

ანუ

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_2}{dt} \vec{v}_2.$$

განვიხილოთ ახლა ის მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როცა დროის ერთეულში მასის ხარჯი უდრის დროის ერთეულში მიერთებულ მასის რაოდენობას, ე. ი. $-\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$. ამ შემთხვევაში, (3,10) ფორმულის ძალით, M წერტილის მასა არ იცვლება და (3,5) განტოლება მოგვცემს

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2). \quad (3,14)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, მაშინ უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (3,15)$$

რომელიც ემთხვევა მუდმივი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას. თუ dm_2 ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე $u_2 = 0$, მაშინ (3,14) განტოლება მოგვცემს

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1. \quad (3,16)$$

(3,14) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ ფორმულის მიღების დროს დაშვებული პირობებში რეაქტიული ძალების მოქმედებით წერტილის აჩქარებას ადგილი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა $|u_1| > |u_2|^1$. თუ $|u_1| < |u_2|$, მაშინ რეაქტიულ ძალას ქარბობს უარყოფითი რეაქტიული ძალა და ხდება მოძრაობის შენელება, დამუხრუჭება. ამ შემთხვევასთან, კერძოდ, საქმე გვექნება მაშინ, როცა ადგილი აქვს მასის მიერთებას, ხოლო მასის გამოგდებას ადგილი არა აქვს (იხ. (3,13) ფორმულა).

ცხადია, გვექნება

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = \frac{md\vec{v}}{dt} + \frac{dm_1}{dt} \vec{v} + \frac{dm_2}{dt} \vec{v}, \quad (3,17)$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm_1}{dt} \vec{v} - \frac{dm_2}{dt} \vec{v}. \quad (3,18)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (3,5) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2. \quad (3,19)$$

თუ დაეუშვებთ, რომ გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა აბსოლუტური სიჩქარეები ნულის ტოლია ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = 0$), მაშინ უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს ნიუტონის განტოლებას

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (3,20)$$

ამრიგად, იმ კერძო შემთხვევაში, როცა გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა აბსოლუტური სიჩქარეები ნულის ტოლია, ნიუტონის განტოლება იძლევა ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას.

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის (3,7) განტოლებიდან მიიღება წონასწორობის შემდეგი განტოლება:

$$\vec{F} + \frac{dm_1}{dt} \vec{v}_1 + \frac{dm_2}{dt} \vec{v}_2 = 0. \quad (3,21)$$

ცხადია, თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ $\vec{v} = \text{const}$ და თუ საწყის $t = t_0$ მომენტში სიჩქარე ნულის ტოლია, მაშინ ყოველთვის $\vec{v} = 0$. პირიქით, თუ წონასწორობას აქვს ადგილი, ე. ი. $\vec{v} = 0$, მაშინ (3,7) განტოლება მოგვცემს (3,21) პირობას.

§ 4. ციოლკოვსკის განტოლება

რაკეტის კორპუსი მასში მოთავსებული საწვავი ნივთიერებით შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ცვალებადი მასის სხეული. მას აქვს გარკვეული კამერა, სადაც მიმდინარეობს წვა და საიდანაც გამოგდებული გაზები წარმოშობა

¹ იგულისხმება, რომ \vec{u}_1 და \vec{u}_2 სიჩქარეებს \vec{v} სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ, რის გამოც რეაქტიული ძალები მოძრაობის მიმართულების პარალელურია.

ბენ რეაქტიულ ძალას, რომელსაც რაკეტის მოძრაობის მიმართულება აქვს. განვიხილოთ რაკეტის მოძრაობა უპაერო სივრცეში მხოლოდ რეაქტიული ძალის მოქმედებით. ამ შემთხვევაში, (2,9) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$m \frac{dv}{dt} = -v_1 \frac{dm}{dt}, \quad (4,1)$$

სადაც v_1 არის ფარდობითი v_1 სიჩქარის სიდიდე. უკანასკნელი ტოლობიდან ინტეგრებით ვღებულობთ

$$v = v_0 - \int_{t_0}^t v_1 \frac{dm}{m}, \quad (4,2)$$

სადაც v_0 არის რაკეტის საწყისი სიჩქარე: $v_0 = v(t_0)$. თუ დაეუშვებთ, რომ $v_1 = \text{const}$, მაშინ უკანასკნელი ფორმულა მოგვცემს

$$v = v_0 + v_1 \ln \frac{m_0}{m}, \quad (4,3)$$

სადაც m_0 არის M წერტილის მასა $t = t_0$ საწყის მომენტში. ეს განტოლება პირველად მიღებული იყო ციოლკოვსკის მიერ, ამიტომ მას ციოლკოვსკის განტოლებას უწოდებენ.

საწვავი მასალის წვის პროცესის დამთავრების მომენტში სიჩქარის მნიშვნელობა აღენიშნოთ v^* -ით, ხოლო რაკეტის მასა ამ მომენტში იყოს m^* . (4,3) ფორმულის ძალით, ვღებულობთ

$$v^* = v_0 + v_1 \ln \frac{m_0}{m^*}. \quad (4,4)$$

(4,4) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ წვის პროცესის დამთავრების ბოლო ეტაპზე სიჩქარე v^* დამოკიდებულია v_0 საწყისი სიჩქარის გარდა v_1 ფარდობით სიჩქარეზე და $\frac{m_0}{m^*}$ შეფარდებაზე, ის არ არის დამოკიდებული საწვავი მასალის ხარჯვის რეჟიმზე (ძრავის მუშაობის რეჟიმზე).

აღენიშნოთ m' -ით წვის პროცესის დამთავრებისას მთლიანად გამოგდებული მასათა რაოდენობა (საწვავი მასალის მასა) და დაეუშვათ, რომ რაკეტის საწყისი სიჩქარე $v_0 = 0$. მაშინ (4,4) ფორმულა მოგვცემს

$$v^* = v_1 \ln \frac{m^* + m'}{m^*} = v_1 \ln \left(1 + \frac{m'}{m^*} \right). \quad (4,5)$$

ამ ფორმულას ციოლკოვსკის ფორმულა ეწოდება. ამ ფორმულაში შემაჯავლი შეფარდება $\frac{m'}{m^*}$ წარმოადგენს რაკეტაში მოთავსებული საწვავი მასალის მასის შეფარდებას რაკეტის კორპუსის მასასთან (საწვავი ნივთიერების გარეშე).

შეფარდებას $\frac{m'}{m^*} = z$ ეწოდება ციოლკოვსკის რიცხვი.

(4,5) ფორმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

1°. ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის სიჩქარე მასათა გამოგდების ბოლო ეტაპზე v^* მით უფრო დიდია, რაც უფრო დიდია ნაწილაკთა გამოგდების (გამოსროლის) ფარდობითი სიჩქარე v_1 .

2°. ხსენებული სიჩქარე v^* მით უფრო დიდია, რაც უფრო დიდია ციოლკოვსკის რიცხვი.

3°. მასათა გამოგდების ბოლო ეტაპზე ცვალებადი მასის წერტილის სიჩქარე v^* არ არის დამოკიდებული მასის ცვლილების კანონზე (ძრავის მუშაობის რეჟიმზე). მასათა გამოგდების ბოლო ეტაპზე ციოლკოვსკის რიცხვის მოცემულ მნიშვნელობას შეესაბამება წერტილის გარკვეული სიჩქარე v^* დამოუკიდებლად იმისა, ჩქარა თუ ნელა მიმდინარეობდა მასათა გამოგდების პროცესი (ჩქარა თავდებოდა წვის პროცესი, თუ ნელა).

ზემოთ მოყვანილი შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ მასათა გამოგდების ბოლო ეტაპზე დიდი სიჩქარის მისაღებად სასარგებლოა მივალწიოთ მასათა გამოგდების ფარდობითი სიჩქარის გადიდებას.

გამოვიყენოთ ახლა ცვალებადი მასის M წერტილისათვის განვლილი მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა იმ დაშვებით, რომ მოძრაობას ადგილი აქვს მხოლოდ რეაქტიული ძალის მოქმედებით და მასათა გამოგდების ფარდობითი სიჩქარე მუდმივია. (4,3) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - v_1 \ln f(t), \quad (4,6)$$

სადაც

$$f(t) = \frac{m}{m_0}. \quad (4,7)$$

(4,6) განტოლებიდან ინტეგრებით ვღებულობთ

$$s = v_0 t - v_1 \int_{t_0}^t \ln f(t) dt + C, \quad (4,8)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ვთქვათ, როცა $t = t_0$, მაშინ $s = s_0$. ამ საწყისი პირობის ძალით, მივიღებთ $C = s_0 - v_0 t_0$. მაშასადამე,

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) - v_1 \int_{t_0}^t \ln f(t) dt. \quad (4,9)$$

მანძილის გამოსათვლელად საჭიროა ვიცოდეთ $f(t)$ ფუნქცია, ე. ი. M წერტილის მოძრაობის პროცესში მასის ხარჯვის კანონი. ბევრი საინტერესო ამოცანის შესწავლის დროს განიხილავენ მასათა ცვლილების ორ კანონს: ე. წ. წრფივ კანონს და მაჩვენებლიან კანონს. პირველ შემთხვევაში $f(t) = 1 - \alpha t$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $f(t) = e^{-\alpha t}$, სადაც α გარკვეული მუდმივია. პირველი და მეორე შემთხვევისათვის (4,7) ფორმულა მოგვცემს შესაბამად

$$m = m_0(1 - \alpha t), \quad (4,10)$$

$$m = m_0 e^{-\alpha t}. \quad (4,11)$$

(4,10) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$\frac{dm}{dt} = -m_0 \alpha = \text{const}, \quad (4,12)$$

და მაშასადამე, როცა მასათა ცვლილება დახასიათებულია წრფივი კანონით: $f(t) = 1 - \alpha t$, მაშინ მასის ხარჯი დროის ერთეულში არის მუდმივი. ამ შემთხვევაში რეაქტიული ძალა R გამოითვლება ფორმულით

$$R = \left(- \frac{dm}{dt} \right) v_1 = \alpha m_0 v_1. \quad (4,13)$$

ვინაიდან ვგულისხმობთ, რომ $v_1 = \text{const}$, ამიტომ განსახილველ შემთხვევაში რეაქტიული ძალაც მუდმივია.

როცა $f(t) = e^{-\alpha t}$, მაშინ რეაქტიული ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$R = \left(- \frac{dm}{dt} \right) v_1 = m_0 \alpha e^{-\alpha t} v_1. \quad (4,14)$$

თუ ამ რეაქტიული ძალით გამოწვეულ აჩქარებას აღვნიშნავთ a -თი, გვექნება

$$ma = R = m_0 \alpha e^{-\alpha t} v_1 = m \alpha v_1, \quad (4,15)$$

საიდანაც

$$a = \alpha v_1 = \text{const}. \quad (5,16)$$

ამრიგად, ჩვენ ვრწმუნდებით, რომ თუ ნაწილაკთა გამოგდების ფარდობითი სიჩქარე v_1 მუდმივია და მასათა ცვლილება დახასიათდება მაჩვენებლიანი კანონით $f(t) = e^{-\alpha t}$, მაშინ რეაქტიული ძალით გამოწვეული აჩქარება მუდმივია.

თუ (4,9) ტოლობაში შევიტანთ რიცრიგობით $f(t) = 1 - \alpha t$ და $f(t) = e^{-\alpha t}$ და ვიგულისხმებთ, რომ $t_0 = 0$, მივიღებთ შესაბამად

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha v_1 t^2}{2}, \quad (4,17)$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{v_1}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t]. \quad (4,18)$$

§ 5. ციოლკოვსკის ამოცანა

ვთქვათ, ცვალებადი მასის M მატერიალური წერტილი მოძრაობს სიმძიმის ძალთა ველში ვერტიკალური მიმართულებით, ქვევიდან ზევით, v_0 საწყისი სიჩქარით და ვთქვათ M წერტილიდან გამოგდებულ ნაწილაკთა ფარდობითი სიჩქარე v_1 მუდმივია და მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ვიპოვოთ სიჩქარისა და მანძილის დროის მიხედვით ცვლილების კანონი.

ეს ამოცანა მასის ცვლილების სხვადასხვა შემთხვევისათვის დაწვრილებით აქვს შესწავლილი ციოლკოვსკის, ამიტომ მას ციოლკოვსკის ამოცანას უწოდებენ.

ვერტიკალური მიმართულება მივიღოთ Oz ღერძად და დავაგვიგმილოთ მასზე ცვალებადი მასის წერტილის მოძრაობის (2,9) განტოლება, მივიღებთ

$$m \frac{dr}{dt} = -mg - v_1 \frac{dm}{dt},$$

საიდანაც

$$dr = -gdt - \frac{v_1 dm}{m}. \quad (5,1)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $v_1 = \text{const}$, უკანასკნელი ტოლობის $(0, t)$ შუალედში ინტეგრებით გვექნება

$$v = v_0 - gt - v_1 \ln \frac{m}{m_0}, \quad (5,2)$$

სადაც m_0 არის M წერტილის მასა $t=0$ საწყის მომენტში. უკანასკნელი ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$v = v_0 - gt - v_1 \ln f(t), \quad (5,3)$$

სადაც

$$f(t) = \frac{m}{m_0}. \quad (5,4)$$

(5,3) ტოლობიდან ინტეგრებით ვღებულობთ

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} - v_1 \int_0^t \ln f(t) dt, \quad (5,5)$$

სადაც $s_0 = s(0)$.

(5,3) და (5,5) ფორმულები იძლევიან შესაბამად სიჩქარისა და მანძილის დროის მიხედვით ცვლილების კანონს, თუ ცნობილია $f(t)$ ფუნქცია, ე. ი. — მასის ცვლილების კანონი. თუ მივიღებთ, რომ $f(t) = e^{-\alpha t}$, სადაც α მუდმივია. მაშინ (5,5) ფორმულა მოგვცემს

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{1}{2} \alpha v_1 t^2, \quad (5,6)$$

ხოლო, თუ $f(t) = 1 - \alpha t$, მაშინ გვექნება

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{v_1}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t]. \quad (5,7)$$

ამ ფორმულების მიხედვით, მასის ცვლილების მოცემული შემთხვევისათვის, შეიძლება ვიპოვოთ მაქსიმალური სიმაღლე, რომელსაც მოძრავი წერტილი (რაკეტა) მიაღწევს.

გ ა ნ ე რ თ ი ლ ე ბ ა 2

ხვალეპალი მასის მაგარიკალური წერტილის დინამიკის ძირითადი კანონები

§ 6. ზოგიერთი აღნიშვნები და განმარტებები

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის დინამიკის ძირითადი კანონები მიიღებულიან სავსებით ისე, როგორც მუდმივი მასის მატერიალური წერტილის შემთხვევაში. სანამ ამ კანონების ჩამოყალიბებას შევუდგებოდეთ, შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა და განმარტება.

განვიხილოთ მეზერსკის განზოგადებული განტოლება [იხ. (3,5) განტოლება]:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt} (\vec{u}_1 - \vec{v}) + \frac{dm_2}{dt} (\vec{u}_2 - \vec{v}), \quad (6,1)$$

სადაც $\vec{v}(t)$ არის ცვალებადი მასის M წერტილის სიჩქარე, \vec{u}_1 და \vec{u}_2 აღნიშნავენ შესაბამად გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა აბსოლუტურ სიჩქარეებს (\vec{u}_1 არის გამოგდებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე გამოგდების შემდეგ, ხოლო \vec{u}_2 არის მიერთებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარე მიერთებამდე). (6,1) განტოლება, როგორც ვიცით (იხ. (3,19) განტოლება), შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2. \quad (6,2)$$

როგორც § 3-ში იყო აღნიშნული, სიდიდეებს

$$\vec{R}_1 = \frac{dm_1}{dt} (\vec{u}_1 - \vec{v}) = \frac{dm_1}{dt} \vec{v}_1, \quad (6,3)$$

$$\vec{R}_2 = \frac{dm_2}{dt} (\vec{u}_2 - \vec{v}) = \frac{dm_2}{dt} \vec{v}_2, \quad (6,4)$$

ევწოდებათ, შესაბამად, რეაქტიული ძალა და უარყოფითი რეაქტიული ძალა. ამ ფორმულებში \vec{v}_1 და \vec{v}_2 აღნიშნავენ შესაბამად გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა ფარდობით სიჩქარეებს. ამის გამო, \vec{R}_1 სიდიდეს შემდეგში ვუწოდებთ გამოგდებული ნაწილაკის ფარდობითი სიჩქარის შესაბამ რეაქტიულ ძალას, ხოლო \vec{R}_2 -ს — მიერთებული ნაწილაკის ფარდობითი სიჩქარის შესაბამ რეაქტიულ ძალას.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\vec{\Phi}_1 = \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1, \quad (6,5)$$

$$\vec{\Phi}_2 = \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2. \quad (6,6)$$

$\vec{\Phi}_1$ სვეწოდებთ გამოგდებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარის შესაბამ რეაქტიულ ძალას, ხოლო $\vec{\Phi}_2$ -ს — მიერთებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარის შესაბამ რეაქტიულ ძალას.

განვიხილოთ კიდევ შემდეგი სიდიდეები

$$\vec{\Psi}_1 = dm_1 \vec{v}, \quad (6,7)$$

$$\vec{\Psi}_2 = dm_2 \vec{v}. \quad (6,8)$$

ცხადია, $\vec{\Psi}_1$ იქნებოდა გამოგდებული ნაწილაკის მოძრაობის რაოდენობა, რომ მისი სიჩქარე ყოფილიყო \vec{v} , ამიტომ მას შემდეგში ვუწოდებთ გამოგდებულ

ბული ნაწილაკის წარმტანი სიჩქარის შესაბამ მოძრაობის რაოდენობას. ანალოგიურად, $\overline{\Psi}$, სიდიდეს ვუწოდებთ მიერთებული ნაწილაკის წარმტანი სიჩქარის შესაბამ მოძრაობის რაოდენობას. როგორც ადვილი მისახვედრია, $\overline{\Psi}$, იქნება მიერთებული ნაწილაკის მოძრაობის რაოდენობა მიერთების შემდეგ.

(6,1) და (6,2) განტოლებები ზემოთ მოყვანილ აღნიშვნებში შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2, \quad (6,9)$$

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2. \quad (6,10)$$

§ 7. მოძრაობის რაოდენობის კანონი

(6,10) განტოლება, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt + \vec{\Phi}_1 dt + \vec{\Phi}_2 dt. \quad (7,1)$$

(7,1) ტოლობა იძლევა ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის კანონს, რომელიც ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის დიფერენციალი უდრის წერტილზე მოქმედ გარე ძალთა ნაკრები ვექტორის ელემენტარულ იმპულსს მიმატებული გამოგდებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარისა და მიერთებული ნაწილაკის აბსოლუტური სიჩქარის შესაბამი რეაქტიული ძალების ელემენტარული იმპულსების ჯამი.

თუ გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა აბსოლუტური სიჩქარეები ნულის ტოლია, მაშინ, (6,5) და (6,6)-ის ძალით, $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_2 = 0$ და (7,1) ტოლობა მოგვცემს

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt, \quad (7,2)$$

საიდანაც (t_0, t) შუალედში ინტეგრებით ვღებულობთ

$$m\vec{v} - m_0\vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt, \quad (7,3)$$

ამ ფორმულებიდან ცხადია, რომ, თუ გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა აბსოლუტური სიჩქარეები ნულის ტოლია, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის კანონი ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილისათვის ისევე ჩამოვაყალიბდება, როგორც მუდმივი მასის მატერიალური წერტილისათვის.

(7,3) ტოლობაში თუ ვივსულისებთ, რომ $\vec{F} = 0$, მაშინ მივიღებთ

$$\vec{v} = \frac{m_0}{m} \vec{v}_0. \quad (7,4)$$

ცხადია,

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

საიდანაც

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) - \left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} \right) \vec{v}. \quad (7,5)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (6,9) განტოლებაში, მივიღებთ

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt + \vec{R}_1 dt + \vec{R}_2 dt + dm_1 \vec{v} + dm_2 \vec{v}. \quad (7,6)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს აგრეთვე მოძრაობის რაოდენობის კანონს, მხოლოდ სხვა ფორმით, რომელიც ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის დიფერენციალი უდრის წერტილზე მოქმედი გარე ძალისა და გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა ფარდობითი სიჩქარეების შესაბამ რეაქტიულ ძალთა ელემენტარული იმპულსების ჯამს მიმატებული გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა წარმტანი სიჩქარეების შესაბამი მოძრაობის რაოდენობანი.

თუ მატერიალურ ნაწილაკთა მიერთებას ადგილი არა აქვს, მაშინ, ცხადია, $\vec{\Phi}_2 = \vec{R}_1 = 0$ და (7,1) და (7,6) ტოლობები, შესაბამად, შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt + \vec{\Phi}_1 dt, \quad (7,7)$$

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt + \vec{R}_1 dt + dm\vec{v}, \quad (7,8)$$

სადაც

$$dm = dm_1.$$

§ 8. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი

აღნიშნოთ \vec{r} -ით ცვალებადი მასის M წერტილის რადიუს-ვექტორი $Oxyz$ უძრავი სისტემის სათავის მიმართ ($\vec{r} = \vec{OM}$). თუ (6,10) განტოლებას ვექტორულად \vec{r} ვექტორზე გაავრავლებთ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\left[\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} m \vec{v} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}], \quad (8,1)$$

მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}] + [\vec{r} \cdot \vec{\Phi}_1] + [\vec{r} \cdot \vec{\Phi}_2]. \quad (8,2)$$

ეს უკანასკნელი გვაძლევს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილისათვის, რომელიც ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის ადებულ ცენტრის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებული დროით უდრის წერტილზე მოქმედი გარე ძალისა და გამოგდებული და მიერთებული ნაწილაკების აბსოლუ-

ტურ სიჩქარეთა შესაბამის რეაქტიული ძალების მომენტების ჯამს იმავე ცენტრის მიმართ.

თუ გამოვდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა აბსოლუტური სიჩქარეები ნულის ტოლია, მაშინ, (6,5) და (6,6)-ის ძალით, $\vec{\phi}_1 = \vec{\phi}_2 = 0$ და (8,2) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (8,3)$$

ამრიგად, თუ გამოვდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა აბსოლუტური სიჩქარეები ნულის ტოლია, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებულ დროით უდრის წერტილზე მოქმედი გარე ძალის მომენტს და, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში, ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილისათვის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი ისევე ჩამოყალიბდება, როგორც მუდმივი მასის მატერიალური წერტილისათვის.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი კერძო შემთხვევა:

$$\vec{F} + \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 = 0. \quad (8,4)$$

ამ შემთხვევაში (8,2) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = 0,$$

საიდანაც

$$[\vec{r} \cdot m \vec{v}] = \vec{C} = \text{const}. \quad (8,5)$$

თუ (8,5) ტოლობას სკალარულად \vec{r} რადიუს-ვექტორზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$(\vec{r} \cdot \vec{C}) = 0.$$

ეს ტოლობა, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$ax + by + cz = 0, \quad (8,6)$$

სადაც a, b, c წარმოადგენენ \vec{C} ვექტორის კოორდინატებს: $\vec{C} = (a, b, c)$. უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ განსახილველ კერძო შემთხვევაში M წერტილის ტრაექტორია არის ბრტყელი წირი, რომელიც მოთავსებულია კოორდინატთა სისტემის სათავეში გამავალ (8,6) სიბრტყეზე.

აღვილად დავრწმუნდებით, რომ აღებული შემთხვევაში ფართობთა კანონს არ ექნება ადგილი. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ ცნობილ ფორმულას

$$|[\vec{r} \cdot \vec{v}]| = 2 \frac{d\sigma}{dt}, \quad (8,7)$$

სადაც $\frac{d\sigma}{dt}$ ფართობული სიჩქარეა (იხ. V თავის (4,11) ფორმულა), (8,5)

ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{C}{2m}, \quad (8,8)$$

სადაც C მუდმივი სიდიდეა. ვინაიდან მასა m არ არის მუდმივი, ამიტომ, ცხადია, $\frac{d\sigma}{dt}$ -ც არ იქნება მუდმივი და მაშასადამე, ფართობთა კანონს არა აქვს ადგილი.

თუ (6,9) ტოლობას ვექტორულად \vec{r} რადიუს-ვექტორზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\left[\vec{r} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{r} \cdot \vec{F}] + [\vec{r} \cdot \vec{R}_1] + [\vec{r} \cdot \vec{R}_2]. \quad (8,9)$$

დავუშვათ ახლა, რომ \vec{F} ძალა და აგრეთვე \vec{R}_1 და \vec{R}_2 რეაქტიული ძალები ცენტრალური ძალებია ცენტრით O წერტილში. მაშინ ცხადია, რომ (8,9) ტოლობის მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია და გვექნება

$$\left[\vec{r} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = m \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = m \frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot \vec{v}] = 0,$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$2 \frac{d\sigma}{dt} = |\vec{r} \cdot \vec{v}| = \text{const.} \quad (8,10)$$

ამრიგად, როცა გარე ძალა \vec{F} და რეაქტიული ძალები \vec{R}_1 და \vec{R}_2 ცენტრალურია, მაშინ ადგილი აქვს ფართობთა კანონს.

ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\begin{aligned} \left[\vec{r} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] &= \left[\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \right] - \left[\vec{r} \cdot \frac{dm}{dt} \vec{v} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] - \\ &- \left[\vec{r} \cdot \frac{dm}{dt} \vec{v} \right]. \end{aligned} \quad (8,11)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (8,9) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}] + [\vec{r} \cdot \vec{R}_1] + [\vec{r} \cdot \vec{R}_2] + \left[\vec{r} \cdot \frac{dm}{dt} \vec{v} \right]. \quad (8,12)$$

უკანასკნელი ტოლობა იძლევა მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონს. ცვლადი მასის მატერიალური წერტილისათვის გარკვეული ფორმით.

§ 9. ცოცხალი ძალის კანონი

(6,2) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2. \quad (9,1)$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად $d\vec{r} = \vec{v} dt$ გამოსახულებასზე, მივიღებთ

$$m(\vec{v} \cdot d\vec{v}) + v^2 dm = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) dm_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) dm_2. \quad (9,2)$$

ადვილად მიიღება, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$m(\vec{v} \cdot d\vec{v}) + v^2 dm = d \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} v^2 dm. \quad (9,3)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (9,1) ტოლობაში, მივიღებთ

$$d \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} v^2 dm = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) dm_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) dm_2. \quad (9,4)$$

ეს ტოლობა კიდევ ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$d \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} v^2 dm_1 + \frac{1}{2} v^2 dm_2 = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) dm_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) dm_2. \quad (9,5)$$

(6,5) და (6,6) ტოლობების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) dm_1 = (\vec{\Phi}_1 \cdot d\vec{r}), \quad (\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) dm_2 = (\vec{\Phi}_2 \cdot d\vec{r}). \quad (9,6)$$

(9,6) ტოლობების ძალით, (9,5) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$d \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} v^2 dm_1 + \frac{1}{2} v^2 dm_2 = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + (\vec{\Phi}_1 \cdot d\vec{r}) + (\vec{\Phi}_2 \cdot d\vec{r}). \quad (9,7)$$

(9,5), ანუ რაც იგივეა, (9,7) ტოლობა გვაძლევს ცოცხალი ძალის კანონს ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილისათვის, რომელიც შეიძლება ასე ჩამოვყალიბოთ:

ცვლადი მასის მატერიალური წერტილის ცოცხალი ძალის დიფერენციალს დამატებული გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკთა წარმტანი სიჩქარეების შესაბამისი კინეტიკური ენერგიები უდრის წერტილზე მოქმედი გარე ძალის ელემენტარულ მუშაობას მიმატებული გამოგდებულ და მიერთებულ ნაწილაკების აბსოლუტური სიჩქარეთა შესაბამისი რეაქტიული ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი.

თუ გამოგდებული და მიერთებული ნაწილაკების ფარდობითი სიჩქარეები ნულის ტოლია ($v_1 = v_2 = 0$), მაშინ $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{v}$ და (9,5) ტოლობა მოგვცემს

$$d \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2} v^2 dm_1 - \frac{1}{2} v^2 dm_2 = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (9,8)$$

თუ დავუშვებთ, რომ აბსოლუტური სიჩქარეები ნულია $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = 0$, მაშინ (9,5) ტოლობიდან მივიღებთ

$$d \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} v^2 dm_1 + \frac{1}{2} v^2 dm_2 = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (9,9)$$

გავამრავლოთ (6,9) ტოლობა $\vec{v} dt = d\vec{r}$ გამოსახულებაზე; ადვილად მივიღებთ

$$d \frac{mv^2}{2} = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + (\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}) + (\vec{R}_2 \cdot d\vec{r}) + \frac{1}{2} v^2 dm. \quad (9,10)$$

უკანასკნელი ტოლობა იძლევა აგრეთვე ცოცხალი ძალის კანონს გარკვეული ფორმით.

შენიშვნა: ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებებსა და ზემოთ მოყვანილ კანონებზე დაყრდნობით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილისათვის სამართლიანია მუდმივი მასის მატერიალური წერტილისათვის დადგენილი მთელი რიგი შედეგების ანალოგიური შედეგები.

პოტენციალები

§ 1. წერტილოვანი მასის პოტენციალი. დისკამეტრულად განაწილებულ მასათა პოტენციალი

ეთქვათ, მოცემულია ორი მატერიალური წერტილი M და P , რომელთა მასებიც იყოს შესაბამისად m და m' . ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონის მიხედვით, M წერტილი იზიდავს P წერტილს ისეთი ძალით, რომლის სიდიდეც განისაზღვრება ფორმულით (იხ. V თავის (16,5) ფორმულა)

$$|F| = f \frac{mm'}{r^2}, \quad (1,1)$$

სადაც f გრავიტაციის მუდმივია, r კი მანძილია აღნიშნულ წერტილებს შორის. ვიგულისხმობთ, რომ გრავიტაციის მუდმივი $f=1$ და ამის გარდა, P წერტილის მასა ერთეულის ტოლია; მაშინ (1,1) ფორმულა მოგვცემს

$$|F| = \frac{m}{r^2}. \quad (1,2)$$

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა $Oxyz$ სისტემა და აღვნიშნოთ $\vec{F}=(X, Y, Z)$ -ით ის ძალა, რომლითაც ფიქსირებული $M(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილი იზიდავს მოძრავ $P(x, y, z)$ წერტილს. (1,2) ფორმულის ძალით, ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{F} = - \frac{m}{r^2} \vec{r}, \quad (1,3)$$

სადაც

$$\vec{r} = \vec{MP} = (x-\xi, y-\eta, z-\zeta), \quad (1,4)$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \quad (1,5)$$

თუ (1,3) ტოლობას $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$X = - \frac{m}{r^2} \frac{x-\xi}{r}, \quad Y = - \frac{m}{r^2} \frac{y-\eta}{r}, \quad Z = - \frac{m}{r^2} \frac{z-\zeta}{r}. \quad (1,6)$$

განვიხილოთ ფუნქცია V , რომელიც შემდეგი ფორმულით არის განსაზღვრული:

$$V = \frac{m}{r}. \quad (1,7)$$

ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობების სამართლიანობაში:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \frac{x-\xi}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{m}{r^2} \frac{y-\eta}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{m}{r^2} \frac{z-\zeta}{r}. \quad (1,8)$$

(1,6) ფორმულების ძალით, ცხადია, გვექნება

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1,9)$$

უკანასკნელი ტოლობების ძალით, $V(x, y, z)$ წარმოადგენს \vec{F} ძალის პოტენციალს (იხ. V თავის § 6) და, მაშასადამე,

$$\vec{F} = \text{grad } V. \quad (1,10)$$

(1,7) ფორმულით განსაზღვრულ V ფუნქციას ეწოდება წერტილის ნიუტონის პოტენციალი.

(1,6) ტოლობით განსაზღვრულ X, Y, Z ფუნქციების გაწარმოება შესაბამად x, y, z ცვლადებით მოგვცემს

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= -m \frac{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 - 2(x-\xi)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= -m \frac{(z-\zeta)^2 + (x-\xi)^2 - 2(y-\eta)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= -m \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - 2(z-\zeta)^2}{r^5}. \end{aligned}$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \quad (1,11)$$

თუ შევიტანთ უკანასკნელ გამოსახულებაში X, Y, Z ფუნქციების (1,9) მნიშვნელობებს, ადვილად მივიღებთ

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (1,12)$$

$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ოპერატორს ეწოდება ლაპლასის ოპერატორი, ხოლო (1,12) განტოლებას—ლაპლასის განტოლება.

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ წერტილის ნიუტონის პოტენციალი წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ამოხსნას.

განვიხილოთ, ფიქსირებული მატერიალური წერტილები $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), M_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, M_n(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$, რომელთა მასებია m_1, m_2, \dots, m_n და აღვნიშნოთ $\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ -თი ის ძალა, რომლითაც ერთეული მასის $P(x, y, z)$ წერტილს იზიდავს M_i წერტილი. თუ ამ ძალის პოტენციალს აღვნიშნავთ V_i -თი, ცხადია, გვექნება

$$V_i = \frac{m_i}{r_i}, \quad (1,13)$$

სადაც $r_i = \sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2 + (z-\zeta_i)^2}$ წარმოადგენს მანძილს M_i და P წერტილებს შორის.

აღნიშნოთ P წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი \vec{F} -ით:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

ცხადია, გვექნება

$$\vec{F} = \text{grad } V,$$

სადაც

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}. \quad (1,14)$$

როგორც ადვილი მისახვედრია, (1,14) ტოლობით განსაზღვრული V ფუნქცია წარმოადგენს აგრეთვე ლაპლასის განტოლების ამოხსნას. ამ ფუნქციას დისკრეტულად განლაგებულ მასათა პოტენციალს ან კიდევ მატერიალურ წერტილთა სისტემის ნიუტონის პოტენციალს უწოდებენ.

§ 2. მოცულობითი მასის პოტენციალი

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე სხეული (T), რომელიც შემოსაზღვრულია საკმარისად გლუვი (S) ფართეულით¹. აღნიშნოთ $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ -თი სიმკვრივე სხეულისა $M(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილში (იგულისხმება, რომ, საზოგადოდ, სხეული არაერთგვაროვანია). განვიხილოთ სხეულის გარეთ მოთავსებული ნებისმიერი $P(x, y, z)$ წერტილი, რომლის მასაც ერთეულის ტოლია და გამოვთვალოთ ის ძალა, რომლითაც (T) სხეული ამ წერტილს იზიდავს. აღნიშნოთ dT -თი სხეულის უსასრულოდ მცირე ნაწილაკი ცენტრით $M(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილში. ამ ნაწილაკის მოცულობა იყოს $d\tau$, ხოლო მასა dm . ცხადია, რომ

$$dm = \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau. \quad (2,1)$$

$d\vec{F} = (dX, dY, dZ)$ იყოს ის ძალა, რომლითაც სხეულის აღნიშნული ნაწილაკი $P(x, y, z)$ წერტილს იზიდავს. (1,3) ფორმულის ძალით, ცხადია, გვექნება

$$d\vec{F} = - \frac{dm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2,2)$$

სადაც

$$\vec{r} = \vec{MP}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

(2,1) დამოკიდებულების ძალით, (2,2) ტოლობა მოგვცემს

$$d\vec{F} = - \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2,3)$$

თუ ამ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

¹ ამ §-ში ჩამოთვლილი შედეგების სამართლიანობისათვის საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ S ფართეულს აქვს უბან-უბან უწყვეტად ცვლადი ნორმალი.

$$\begin{aligned}
 dX &= - \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau}{r^2} \frac{x-\xi}{r}, \\
 dY &= - \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau}{r^2} \frac{y-\eta}{r}, \\
 dZ &= - \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau}{r^2} \frac{z-\zeta}{r}.
 \end{aligned}
 \quad (2,4)$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ ის ძალა, რომლითაც (T) სხეული $P(x, y, z)$ წერტილს იზიდავს, (2,3) ფორმულის ძალით, ასე წარმოიდგინება:

$$\vec{F} = - \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) \vec{r} d\tau}{r^3}. \quad (2,5)$$

(2,4) ტოლობათა ინტეგრაციის შედეგად ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
 X &= - \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) (x-\xi)}{r^3} d\tau, \\
 Y &= - \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) (y-\eta)}{r^3} d\tau, \\
 Z &= - \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) (z-\zeta)}{r^3} d\tau.
 \end{aligned}
 \quad (2,6)$$

ცხადია, (2,6) ტოლობები მიიღებიან, აგრეთვე, (2,5) ტოლობის კოორდინატ-თა ლერძებზე დაგეგმილებით.

განვიხილოთ $V(x, y, z)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგი ფორმულით არის განსაზღვრული:

$$V(x, y, z) = \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau, \quad (2,7)$$

ვიგულისხმობთ, რომ $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (T) სხეულის გარეთ. ამ შემთხვევაში (2,7) ტოლობის გაწარმოება ცალ-ცალკე x, y, z ცვლადებით მოგვცემს

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial x} &= - \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) (x-\xi)}{r^3} d\tau, \\
 \frac{\partial V}{\partial y} &= - \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) (y-\eta)}{r^3} d\tau, \\
 \frac{\partial V}{\partial z} &= - \iiint_{(T)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) (z-\zeta)}{r^3} d\tau.
 \end{aligned}
 \quad (2,8)$$

(2,6) ფორმულების ძალით, უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (2,9)$$

ანუ

$$\vec{F} = \text{grad } V. \quad (2,10)$$

V ფუნქციის ეწოდება (T) სხეულის ნიუტონის პოტენციალი, ან კიდევ—მოცულობითი მასის პოტენციალი.

განსახილველ შემთხვევაში (როცა $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (T) სხეულის გარეთ) (2,6) ტოლობების გაწარმოება, შესაბამად x -ით, y -ით და z -ით, მოგვცემს

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= - \iiint_{(T)} \frac{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 - 2(x-\xi)^2}{r^5} \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau, \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= - \iiint_{(T)} \frac{(z-\zeta)^2 + (x-\xi)^2 - 2(y-\eta)^2}{r^5} \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau, \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= - \iiint_{(T)} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - 2(z-\zeta)^2}{r^5} \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau. \end{aligned} \quad (2,11)$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad (2,12)$$

რომელიც, (2,9) ფორმულის ძალით, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2,13)$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

დებულება. როცა $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (T) სხეულის გარეთ, მაშინ ამ სხეულის ნიუტონის პოტენციალი წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ამოხსნას.

შევისწავლოთ $V(x, y, z)$ ფუნქციის ყოფაქცევა უსასრულოდ შორეული წერტილის მახლობლობაში. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ეს ფუნქცია, როცა $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (T) სხეულის გარეთ, წარმოადგენს x, y, z ცვლადების უწყვეტ ფუნქციას, რომელიც მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $P(x, y, z)$ წერტილი უსასრულოდ შორდება (T) სხეულს.

ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ ტოლობას:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RV(x, y, z) = M, \quad (2,14)$$

სადაც

$$M = \iiint_{(T)} \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau, \quad (2,15)$$

ხოლო R წარმოადგენს მანძილს კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის სათავესა და P წერტილის შორის:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

მოცულობითი მასის პოტენციალის განსაზღვრის დროს ნაგულისხმევი იყო, რომ სიმკვრივე $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ დადებითი ფუნქციაა ყველგან (T) არეში. მათემატიკური ფიზიკის ბევრი სხვადასხვა საკითხის შესწავლისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს (2,7) ფორმულით განსაზღვრული პოტენციალი განხილული იქნეს ნებისმიერი უწყვეტი სიმკვრივისათვის (და არა მარტო დადებითი სიმკვრივისათვის).

როგორც ადვილი მისახვედრია, ყველა ზემოთ მოყვანილი შედეგი სამართლიანია არა მარტო დადებითი, არამედ ნებისმიერი უწყვეტი სიმკვრივისათვისაც. შემდეგში, ყოველთვის, ასეთი განზოგადებული აზრით იქნება განხილული პოტენციალები.

§ 3. მოცულობითი მასის პოტენციალის თვისებები (T) არეში

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებული იყო (T) სხეულის გარეთ. განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (T) არეში. ამ შემთხვევაში $V(x, y, z)$ ფუნქციის გამოსახულებაში (იხ. (2,7) ფორმულა) ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უსასრულობა ხდება და გამოსარკვევია ინტეგრალი არის კრებადი თუ არა.

შემოვიღოთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემა პოლუსით $P(x, y, z)$ წერტილში და მოვახდინოთ ჩასმა

$$\xi = x + r\alpha, \quad \eta = y + r\beta, \quad \zeta = z + r\gamma, \quad (3,1)$$

სადაც α, β, γ წარმოადგენენ ერთეულ რადიუსიან (Ω) სფეროზე წერტილის კოორდინატებს:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (3,2)$$

ამ აღნიშვნების ძალით, $V(x, y, z)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ინტეგრალით

$$V(x, y, z) = \iiint_T \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) d\tau}{r}, \quad (3,3)$$

შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$V(x, y, z) = \iint_{(\Omega)} d\omega \int_0^R \sigma(x + r\alpha, y + r\beta, z + r\gamma) r dr, \quad (3,4)$$

სადაც R წარმოადგენს (T) სხეულის (S) საზღვრის წერტილების რადიუს-ვექტორის სიდიდეს, $d\omega$ არის (Ω) სფეროს ზედაპირის ფართობის ელემენტი.

ვინაიდან (3,4) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია სასრულია, ამიტომ ინტეგრალიც კრებადია და, მაშასადამე, $V(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს სასრული მნიშვნელობა (T) სხეულის ყოველ წერტილში.

ამავე ფორმულის ძალით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $V(x, y, z)$ ფუნქცია არის უწყვეტი ფუნქცია მთელს სივრცეში (T) სხეულისა და მისი (S) საზღვრის წერტილების ჩათვლით.

აღნიშნავთ დაუმტკიცებლად¹, რომ $V(x, y, z)$ პოტენციალს აქვს აგრეთვე შემდეგი თვისებები:

1. $V(x, y, z)$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულები: $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ არიან უწყვეტი ფუნქციები მთელს სივრცეში ((T) სხეულისა და მისი საზღვრის წერტილების ჩათვლით) და ნულად იქცევიან უსასრულობაში.

2. თუ $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ ფუნქციას აქვს პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები, მაშინ $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ არსებობენ ყველგან (T) არეში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma(x, y, z). \quad (3,5)$$

(3.5) განტოლებას ეწოდება პუასონის განტოლება.

ამრიგად, როცა $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (T) სხეულის გარეთ, მაშინ $V(x, y, z)$ ფუნქცია წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ამოხსნას, ხოლო, როცა $P(x, y, z)$ წერტილი (T) არეშია მოთავსებული—პუასონის განტოლების ამოხსნას.

§ 4. ერთგვაროვანი სფეროს პოტენციალი

ვთქვათ, (T) სხეული წარმოადგენს R რადიუსიან სფეროს, რომლის ცენტრიც მივიღოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ. ვივლით, რომ სფერო ერთგვაროვანია, ე. ი. $\sigma = \text{const.}$ ამ შემთხვევაში (2,7) ფორმულა მოგვცემს

$$V(x, y, z) = \sigma \iiint_{(\Omega)} \frac{d\tau}{r}, \quad (4,1)$$

სადაც (Ω) აღნიშნავს R რადიუსიან სფეროს. თუ შემოვიღებთ სფერულ კოორდინატებს: ρ , φ და θ -ს და მოვახდენთ ჩასმას

$$\xi = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad \zeta = \rho \cos \theta.$$

დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$V(x, y, z) = \sigma \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta}{r}. \quad (4,2)$$

სიმეტრიის ძალით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ V ფუნქციის მნიშვნელობა $P(x, y, z)$ წერტილში დამოკიდებულია მხოლოდ $\lambda = |OP|$ მანძილზე (O სფეროს ცენტრია, რომელიც კოორდინატთა სისტემის სათავედ არის მიღებული):

$$\lambda = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

¹ დაუმტკიცება შეიძლება იხილოთ, მაგალითად, წიგნში: Л. Н. Сретенский, теория Ньютоновского потенциала, М.-Л., 1946.

ამიტომ P წერტილად შეიძლება ავიღოთ $P'(0, 0, \lambda)$ წერტილი, ამასთან $V(P)=V(P')$. ამის შემდეგ, ცხადია, (4,2) ტოლობა მოგვცემს

$$V(x, y, z) = \sigma \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \frac{\rho^2 \sin \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\lambda\rho \cos \vartheta + \lambda^2}}. \quad (4,3)$$

ინტეგრების შედეგად ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\lambda\rho \cos \vartheta + \lambda^2}} &= \frac{1}{\lambda\rho} \sqrt{\rho^2 - 2\lambda\rho \cos \vartheta + \lambda^2} \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \\ &= \frac{1}{\lambda\rho} (\rho + \lambda - |\rho - \lambda|). \end{aligned} \quad (4,4)$$

განვიხილოთ ჯერჯერობით ის შემთხვევა, როცა P წერტილი მოთავსებულია (Ω) სფეროს გარეთ, ე. ი. $\lambda > R$. ვინაიდან $0 \leq \rho \leq R$, ამიტომ, განსახილველ შემთხვევაში, $\rho < \lambda$ და, (4,4) ფორმულის ძალით, მივიღებთ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\lambda\rho \cos \vartheta + \lambda^2}} = \frac{1}{\lambda\rho} [\rho + \lambda - (\lambda - \rho)] = \frac{2}{\lambda}. \quad (4,5)$$

უქანასკნელი ტოლობის ძალით, (4,3) ტოლობა გვაძლევს

$$V(x, y, z) = \frac{2\sigma}{\lambda} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \rho^2 d\rho d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{M}{\lambda},$$

სადაც $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma$ სფეროს მასას წარმოადგენს.

უქანასკნელა ტოლობის საფუძველზე ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება. აღებული სფეროს გარეშე მდებარე წერტილზე სფეროს პოტენციალის მნიშვნელობა უდრის სფეროს ცენტრის, პოტენციალის მნიშვნელობას ამ წერტილზე, თუ ვიგულისხმებთ, რომ სფეროს ცენტრში თავმოყრილია მთელი სხეულის მასა.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (Ω) სფეროს შიგნით, ე. ი. $\lambda < R$. თუ $0 \leq \rho \leq \lambda$, მაშინ, ცხადია.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\lambda\rho \cos \vartheta + \lambda^2}} = \frac{1}{\lambda\rho} [\rho + \lambda - (\lambda - \rho)] = \frac{2}{\lambda}.$$

ხოლო, როცა $\lambda \leq \rho \leq R$, მაშინ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\lambda\rho \cos \vartheta + \lambda^2}} = \frac{1}{\lambda\rho} [\rho + \lambda - (\rho - \lambda)] = \frac{2}{\rho}.$$

უკანასკნელი ტოლობების ძალით, (4,3) ტოლობა გვაძლევს

$$V(x, y, z) = \sigma \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int_{\rho=0}^{\lambda} \frac{2\rho^2 d\rho}{\lambda} + \int_{\rho=\lambda}^R 2\rho d\rho \right] d\varphi = \\ = 2\pi\sigma \left(R^2 - \frac{1}{3}\lambda^2 \right) = \frac{M}{2R} \left[3 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \right].$$

ამრიგად, თუ აღვნიშნავთ $V(\lambda)$ -თი პოტენციალის მნიშვნელობას იმ წერტილებზე, რომელნიც λ მანძილით არიან დაშორებული სფეროს ცენტრიდან, მივიღებთ

$$\frac{M}{\lambda}, \text{ როცა } \lambda > R, \\ V(\lambda) = \frac{M}{2R} \left[3 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \right], \text{ როცა } \lambda < R.$$

მარტივი გამოთვლების შედეგად დავრწმუნდებით, რომ ლაპლასის ოპერატორი:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ρ , φ , ϑ სფერულ კოორდინატებში ასე წარმოდგინება:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}.$$

როცა P წერტილი მოთავსებულია (Ω) სფეროს შიგნით, მაშინ, უკანასკნელი ფორმულის გამოყენებით, ვრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში

$$\Delta V = -4\pi\sigma.$$

ამრიგად, როცა P წერტილი მოთავსებულია (Ω) სფეროს შიგნით, მაშინ სფეროს პოტენციალი წარმოადგენს პუასონის განტოლების ამოხსნას.

ასევე დავრწმუნდებით, რომ, როცა P წერტილი მოთავსებულია (Ω) სფეროს გარეთ, მაშინ V წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ამოხსნას:

$$\Delta V = 0,$$

რაც დამტკიცებული გვქონდა, ზოგად შემთხვევაში, § 2-ში.

§ 5. ლიაპუნოვის უპირთელი

განვიხილოთ შეკრული, ან შეკრული კონტურით შემოსაზღვრული (S) ფართეული, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1°. (S) ფართეულს ყოველ წერტილზე აქვს სავსებით გარკვეული მხეები სიბრტყე.

2°. (S) ფართეულის ნებისმიერ ორ M და M_1 წერტილზე გატარებულ ნორმალებს შორის მახვილი კუთხე φ აკმაყოფილებს პირობას:

$$\varphi < \alpha r,$$

სადაც r მანძილია M და M_1 წერტილებს შორის, α გარკვეული მუდმივი რიცხვია.

3°. მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი μ , რომ სფერო (Ω), რომლის რადიუსი არის μ და ცენტრი მოთავსებულია (S) ფართეულის ნებისმიერ M წერტილზე, ამოკვეთს (S) ფართეულიდან ისეთ (ω) ნაწილს, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობა: აღნიშნულ M წერტილზე გავლებული ნორმალის ყოველი პარალელური წრფე გადაკვეთს (ω) ნაწილს არაუმეტეს ერთი წერტილისა.

შეკრულ ან შეკრული კონტურით შემოსაზღვრულ (S) ფართეულს, რომლისთვისაც შესრულებულია ზემოჩამოთვლილი პირობები, ეწოდება ლიაპუნოვის ფართეული.

1° თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ფართეულის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ კოორდინატა $Mxyz$ სისტემა ისე, რომ Mxy სიბრტყე ემთხვეოდეს M წერტილზე გატარებულ მხებ სიბრტყეს, ხოლო Mz ღერძი ემთხვეოდეს M წერტილზე გავლებულ ნორმალს. 3° პირობა გვიჩვენებს, რომ ზემოხსენებული (ω) ნაწილის განტოლება შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$z = f(x, y),$$

სადაც $f(x, y)$ წარმოადგენს x, y ცვლადების ცალსახა უწყვეტ ფუნქციას, როცა წერტილი კოორდინატებით x, y, z იცვლება (ω) ნაწილზე.

1° და 2° თვისებების ძალით, ადვილად დავრწმუნდებით აგრეთვე, რომ

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ წარმოებულები არსებობენ ფართეულის ყოველ M წერტილზე და წარმოადგენენ ამ წერტილის კოორდინატების განუწყვეტელ ფუნქციებს.

§ 6. მარტივი ფენის პოტენციალი

ვთქვათ, მოცემულია ლიაპუნოვის რაიმე შეკრული ფართეული (S). ამ ფართეულის ყოველ წერტილზე შიგა ან გარე ნორმალის მიმართულებით გადავზომოთ საკმარისად მცირე სიგრძის h მონაკვეთი. h მონაკვეთის ბოლო წერტილთა გეომეტრიული ადგილი აღვნიშნოთ (S')-ით და ვიგულისხმოთ, რომ (S) და (S') ფართეულებს შორის არე სავსეა რაიმე მიმზიდველი ნივთიერებით, რომლის სიმკვრივეც იყო ρ . განვიხილოთ (S) ფართეულის უსასრულოდ მცირე ელემენტი dS , რომლის საზღვრის წერტილებზედაც გავავლოთ ფართეულის ნორმალები. ხსენებული ნორმალები (S') ფართეულიდან ამოკვეთენ dS' ელემენტს. ასეთი გზით ჩვენ მივიღებთ გარკვეულ $d\sigma$ მოცულობით ელემენტს, რომელიც შემოსაზღვრულია dS და dS' ელემენტებით და dS ელემენტის საზღვრის წერტილებზე გატარებული ფართეულის ნორმალებით. $d\sigma$ მოცულობითი ელემენტის მასა, ცხადია, იქნება $\rho d\sigma$.

ვთქვათ, (S') ფართეული ყველა თავისი წერტილით თანდათან უახლოვდება (S) ფართეულს ისე, რომ ყოველი $d\sigma$ მოცულობითი ელემენტის მასა

რჩება უცვლელი. ზღვარზე გადასვლის შედეგად მივიღებთ, რომ (S) ფართეულის ყოველ dS ელემენტზე მოთავსებული მასა ტოლია ρdS -ის. ასეთი გზით ჩვენ მივიღებთ (S) ფართეულზე ე. წ. მარტივ ფენას. ρ ნამრავლს, რომელსაც ეწოდება მარტივი ფენის სიმკვრივე, შემდეგში აღვნიშნავთ σ -თი. ხსენებული აღნიშვნის ძალით, dS ელემენტის მასა იქნება

$$dm = \sigma dS. \quad (6,1)$$

ის ძალა, რომლითაც dS ელემენტზე მოთავსებული $dm = \sigma dS$ მასა იზიდავს ერთეული მასის $P(x, y, z)$ წერტილს, აღვნიშნოთ

$$d\vec{F} = (dX, dY, dZ)\text{-ით.} \quad (6,2)$$

თუ ხსენებული dS ელემენტის კოორდინატებია ξ, η, ζ , მაშინ, (1,3) ფორმულის ძალით, ვღებულობთ

$$d\vec{F} = -\frac{\sigma dS}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6,3)$$

სადაც $\vec{r} = \overline{MP}$, ამასთან $M(\xi, \eta, \zeta)$ არის S ფართეულის ის წერტილი, სადაც აღებული dS ელემენტია გამოყოფილი. ინტეგრების შედეგად, (6,3) ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{F} = - \iint_{(S)} \frac{\vec{r} \sigma dS}{r^3}, \quad (6,4)$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} X &= - \iint_{(S)} \frac{(x-\xi) \sigma}{r^3} dS, \\ Y &= - \iint_{(S)} \frac{(y-\eta) \sigma}{r^3} dS, \\ Z &= - \iint_{(S)} \frac{(z-\zeta) \sigma}{r^3} dS. \end{aligned} \quad (6,5)$$

ისე როგორც (6,4), აგრეთვე (6,5) ფორმულებში იგულისხმება, რომ $P(x, y, z)$ წერტილი (S) ფართეულზე არ არის მოთავსებული და, მაშასადამე,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ნულის ტოლი არ ხდება. ამის შემდეგ ცხადია, რომ ყოველი უწყვეტი $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ ფუნქციისათვის ზემოთ დაწერილ ინტეგრალებს აქვთ სასრული მნიშვნელობა სივრცის ყოველ $P(x, y, z)$ წერტილზე, რომელიც (S) ფართეულზე არ არის მოთავსებული.

განვიხილოთ ფუნქცია $V(x, y, z)$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$V(x, y, z) = \iint_{(S)} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) dS}{r}. \quad (6,6)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $P(x, y, z)$ წერტილი მოთავსებულია (S) ფართეულის გარეთ, მაშინ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= - \int \int_{(S)} \frac{(x-\xi) \sigma dS}{r^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= - \int \int_{(S)} \frac{(y-\eta) \sigma dS}{r^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= - \int \int_{(S)} \frac{(z-\zeta) \sigma dS}{r^3}.\end{aligned}\quad (6,7)$$

უკანასკნელი ტოლობების შედარება (6,5) ტოლობებთან გვაძლევს

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (6,8)$$

ანუ

$$\vec{F} = \text{grad } V. \quad (6,9)$$

(6,6) ტოლობით განსაზღვრულ $V(x, y, z)$ ფუნქციას ეწოდება მარტივი ფენის პოტენციალი.

მარტივი ფენის პოტენციალი განიხილება ნებისმიერი უწყვეტი $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ სიმკვრივისათვის, რომელიც შეიძლება ლებულობდეს, როგორც დადებით, ისე უარყოფით მნიშვნელობებს.

თუ (6,7) ტოლობებს გავაწარმოებთ შესაბამად x -ით, y -ით, z -ით და შევკრებთ, ადვილად მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (6,10)$$

ამრიგად, მარტივი ფენის პოტენციალი წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ამოხსნას.

სავსებით ისე როგორც მოცულობითი მასის პოტენციალისათვის (იხ. § 2), შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RV = M, \quad (6,11)$$

სადაც

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad M = \int \int_{(S)} \sigma dS. \quad (6,12)$$

§ 7. მარტივი ფენის პოტენციალის სასაზღვრო თვისებები

აღვნიშნოთ V პოტენციალის მნიშვნელობა $P(x, y, z)$ წერტილზე $P(P)$ -ით:

$$V(P) = \int \int_{(S)} \frac{\sigma(Q) dS_Q}{r(P, Q)}, \quad (7,1)$$

სადაც $Q(\xi, \eta, \zeta)$ ფართეულის ცვლადი (ინტეგრაციის) წერტილია, ხოლო $\sigma(Q) \equiv \sigma(\xi, \eta, \zeta)$, dS_Q ფართეულის ელემენტი $Q(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილზე, $r(P, Q)$ აღნიშნავს მანძილს P და Q წერტილებს შორის, ე. ი.

$$r(P, Q) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

განვიხილოთ პოტენციალის მნიშვნელობა ფართეულის ნებისმიერ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე:

$$V(P_0) = \iint_{(S)} \frac{\sigma(Q) dS_Q}{r(P_0, Q)}. \quad (7.2)$$

მიუხედავად იმისა, რომ ამ შემთხვევაში $r(P_0, Q)$ ნული ხდება, როცა P_0 ემთხვევა Q წერტილს, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ (7.2) ტოლობით განსაზღვრული ინტეგრალი არსებობს ფართეულის ყოველ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და წარმოადგენს P_0 წერტილის კოორდინატების უწყვეტ ფუნქციას.

შეიძლება აგრეთვე ვაჩვენოთ, რომ უწყვეტობას ადგილი აქვს მთელ სივრცეში, ე. ი. ყოველი წინასწარ აღებული დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $\eta(\varepsilon)$, რომ, როცა $r(P, P') < \eta$, ადგილი აქვს უტოლობას¹

$$|V(P) - V(P')| < \varepsilon.$$

აღვნიშნოთ D^+ -ით ის სასრული არე, რომელიც შემოსაზღვრულია (S) ფართეულით, ხოლო უსასრულო არე, მოთავსებული (S) ფართეულის გარეთ, აღვნიშნოთ D^- -ით. გავავლოთ ფართეულის $P_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე ნორმალს და მოვგვზოთ ის D^+ არისაკენ (შიგა ნორმალს). ავიღოთ აღნიშნულ ნორმალზე $P(x, y, z)$ წერტილი, რომელიც (S) ფართეულზე არა ძევს და განვიხილოთ $V(P)$ ფუნქციის ნორმალური წარმოებული:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dx} \cos nx + \frac{dV}{dy} \cos ny + \frac{dV}{dz} \cos nz.$$

ცხადია, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) &= - \frac{1}{r^2} \left(\frac{x - \xi}{r} \cos nx + \frac{y - \eta}{r} \cos ny + \frac{z - \zeta}{r} \cos nz \right) = \\ &= - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{QP}}{r} \cdot \vec{n} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{PQ}}{r} \cdot \vec{n} \right) = \frac{\cos \phi}{r^2}, \end{aligned}$$

სადაც ϕ არის კუთხე \vec{PQ} ვექტორსა და შიგა ნორმალის \vec{n} მკეზავს შორის. ამის შემდეგ, როგორც ადვილი მისახვედრია, (7.1) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{dV}{dn} = \iint_{(S)} \frac{\cos \phi}{r^2(P, Q)} dS_Q. \quad (7.3)$$

¹ როგორც უწყვეტობის ამ თვისების, აგრეთვე ქვემოთ მოყვანილი სხვა თვისებების დამტკიცება შეიძლება იხილოთ ზემოხსენებულ წიგნში: Л. Н. Сретенский, Теория Ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\frac{dV}{dn}$ ნორმალური წარმოებულის ზღვარი, როცა P წერტილი D^+ არიდან (D^- არიდან) ნორმალის გასწვრივ მიისწრაფვის ფართეულის P_0 წერტილისაკენ, არსებობს და წარმოადგენს P_0 წერტილის უწყვეტ ფუნქციას. ეს ზღვარი აღენიშნოთ $\left(\frac{dV}{dn}\right)_+$ -ით. ანალოგიური მნიშვნელობა აქვს $\left(\frac{dV}{dn}\right)_-$.

ნორმალური წარმოებულის პირდაპირი მნიშვნელობა P_0 წერტილზე იქნება

$$\iint_S \frac{\cos \phi_0}{r^2(P_0, Q)} dS_Q, \quad (7,4)$$

სადაც ϕ_0 არის კუთხე $\overline{P_0 Q}$ ვექტორსა და P_0 წერტილზე გავლებულ შიგა ნორმალს შორის.

აღვლი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან ფორმულებს

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_+ = -2\pi\sigma(P_0) + \iint_{(S)} \frac{\cos \phi_0}{r^2(P, Q)} dS_Q, \quad (7,5)$$

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_- = 2\pi\sigma(P_0) + \iint_S \frac{\cos \phi_0}{r^2(P, Q)} dS_Q.$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ მარტივი ფენის პოტენციალის ნორმალური წარმოებული განიცდის შემდეგი სახის წყვეტას:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_+ - \left(\frac{dV}{dn}\right)_- = -4\pi\sigma(P_0). \quad (7,6)$$

§ 8. ოკმავი ფენის პოტენციალი

ვთქვათ, როგორც ზემოთ, (S) აღნიშნავს ლიპუნოვის ტიპის შეკრულ ფართეულს. ამ ფართეულის ნორმალზე ერთი და იმავე მიმართულებით (მაგალითად, შიგა ნორმალის მიმართულებით) გადავზომოთ საკმარისად მცირე მუდმივი ε სიგრძის მონაკვეთები. ამ მონაკვეთების ბოლო წერტილების გეომეტრიული ადგილი აღენიშნოთ (S') -ით. ვთქვათ, (S) და (S') ფართეულებზე განაწილებულია მარტივი ფენები, რომელთა სიმკვრივეებია სათანადოდ σ და σ' . დავუშვათ, რომ ეს სიმკვრივეები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ტოლობით

$$\sigma dS = -\sigma' dS', \quad (8,1)$$

სადაც dS' წარმოადგენს (S') ფართეულზე აღებულ dS ელემენტის შესაბამ ელემენტს (S') ფართეულზე. ასეთი გზით ჩვენ მივიღებთ ე. წ. ორმაგ ფენას, რომლის შესაბამ პოტენციალსაც ორმაგი ფენის პოტენციალი ეწოდება.

თუ (S) მარტივი ფენის პოტენციალის მნიშვნელობას $P(x, y, z)$ წერტილზე აღენიშნავთ $V(x, y, z)$ -ით, ხოლო (S') მარტივი ფენის პოტენციალის მნიშვნელობას ამავე წერტილზე $V'(x, y, z)$ -ით, ცხადია, გვექნება

$$V(x, y, z) = \iint_{(S)} \frac{\sigma(Q) dS}{r(P, Q)}, \quad (8,2)$$

$$V'(x, y, z) = \iint_{(S')} \frac{\sigma'(Q') dS'}{r'(P, Q')}, \quad (8,3)$$

სადაც r არის მანძილი P და Q წერტილებს შორის, ხოლო r' —მანძილი P და Q' წერტილებს შორის, ამასთან Q' წარმოადგენს (S') ფართეულის იმ წერტილს, რომელიც (S) ფართეულზე ალებულ Q წერტილს შეესაბამება ზემონაჩვენები წესით.

თუ ორმაგი ფენის პოტენციალს აღვნიშნავთ $W(x, y, z)$ -ით, განმარტების ძალით, მივიღებთ

$$W = V + V'. \quad (8,4)$$

ვთქვათ, $Q(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილზე გავლებული შიგა ნორმალის მგეზავია $\vec{n}^0 = (\alpha, \beta, \gamma)$. $Q'(\xi', \eta', \zeta')$ წერტილისათვის (რომელიც ხსენებულ ნორმალზეა მოთავსებული) გვექნება

$$\xi' = \xi + \alpha \varepsilon, \quad \eta' = \eta + \beta \varepsilon, \quad \zeta' = \zeta + \gamma \varepsilon. \quad (8,5)$$

ცხადია, აგრეთვე, რომ

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi - \alpha \varepsilon)^2 + (y - \eta - \beta \varepsilon)^2 + (z - \zeta - \gamma \varepsilon)^2}}. \quad (8,6)$$

(8,6) ტოლობის მარჯვენა მხარე დავშალოთ მწკრივად ε -ის მიმართ და უკუვაგდოთ მეორე და უფრო მაღალი რიგის მცირე სიდიდეები, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{r} + \varepsilon \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2} \left(\alpha \frac{\xi - x}{r} + \beta \frac{\eta - y}{r} + \gamma \frac{\zeta - z}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{\varepsilon \cos \varphi}{r^2}, \end{aligned}$$

სადაც φ არის კუთხე \overline{PQ} და \vec{n}^0 ვექტორებს შორის. ამრიგად,

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{\varepsilon \cos \varphi}{r^2}. \quad (8,7)$$

(8,1) და (8,7) ტოლობების გათვალისწინებით, (8,3) ფორმულა გვაძლევს

$$V'(x, y, z) = - \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{r} + \iint_{(S)} \frac{\varepsilon \sigma \cos \varphi}{r^2} dS. \quad (8,8)$$

(8,2) და (8,8) ფორმულების ძალით, (8,4) ტოლობა მოგვცემს

$$W(x, y, z) = \iint_{(S)} \mu \frac{\cos \varphi}{r^2} dS, \quad (8,9)$$

სადაც $\mu = \varepsilon \sigma$ -ს ეწოდება ორმაგი ფენის სიმკვრივე.

ორმაგი ფენის პოტენციალის განმარტებიდან, ცხადია, რომ, როცა $P(x, y, z)$ არ არის მოთავსებული (S) ფართეულზე, $W(x, y, z)$ წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ამოხსნას:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0. \quad (8,10)$$

აღვნიშნოთ W_+ -ით და W_- -ით $W(x, y, z)$ ფუნქციის ზღვარი (S) ფართეულის P_0 წერტილზე, როცა P წერტილი შესაბამად D^+ ან D^- არიდან¹ ნებისმიერი გზით მიისწრაფვის P_0 წერტილისაკენ. აღვნიშნოთ აქვე შემდეგ მნიშვნელოვან ფორმულებს (მოგვეყავს დაუმტკიცებლად):

$$W_+ = -2\pi\mu(P_0) + W^0, \quad (8,11)$$

$$W_- = 2\pi\mu(P_0) + W^0, \quad (8,12)$$

სადაც W^0 წარმოადგენს W პოტენციალის პირდაპირ მნიშვნელობას ფართეულის P_0 წერტილზე.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ φ არის კუთხე გარე ნორმალსა და \overline{PQ} ვექტორს შორის, მაშინ, ცხადია, გვექნება

$$W_+ = 2\pi\mu(P_0) + W^0, \quad (8,13)$$

$$W_- = -2\pi\mu(P_0) + W^0. \quad (8,14)$$

(7,1) და (8,9) ფორმულებით განსაზღვრულ პოტენციალებს, ხშირად, ნიუტონის მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს უწოდებენ.

§ 9. ლოგარიტმული პოტენციალები

ვთქვათ L წარმოადგენს ბრტყელ, შეკრულ, საკმარისად გლუვ წირს.² განვიხილოთ $V(x, y)$ და $W(x, y)$ ფუნქციები, რომელნიც განსაზღვრულნი არიან შემდეგი ტოლობებით:

$$V(x, y) = \int_L \ln r \sigma(\xi, \eta) dS, \quad (9,1)$$

$$W(x, y) = \int_L \frac{\mu(\xi, \eta) \cos \varphi}{r} dS, \quad (9,2)$$

სადაც r აღნიშნავს მანძილს სიბრტყის $P(x, y)$ და ინტეგრაციის $Q(\xi, \eta)$ წერტილებს შორის, σ და μ უწყვეტი ფუნქციებია, φ არის კუთხე \overline{PQ} ვექტორსა და წირის \vec{n}^0 ნორმალს შორის.

(9,1) ტოლობით განსაზღვრულ V ფუნქციას ეწოდება მარტივი ფენის ლოგარიტმული პოტენციალი, ხოლო (9,2) ტოლობით განსაზღვრულ W ფუნქციას—ორმაგი ფენის ლოგარიტმული პოტენციალი.

იმის ანალოგიურად, როგორც ეს § 6-ში და § 8-ში იყო ნაჩვენები შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ამ პოტენციალებს აქვთ სავსებით გარკვეული ფიზი-

¹ D^+ და D^- არეების განსაზღვრა მოყვანილია წინა პარაგრაფში.

² ქვემოთ მოყვანილი შედეგების სამართლიანობისათვის საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ L წირს ჰქონდეს უწყვეტი სიბრტყე.

კური აზრი და ამის გარდა წარმოდგენენ სიბრტყეზე ლაპლასის განტოლების ამოხსნას. შეიძლება აგრეთვე ჩვენება იმისა, რომ ამ პოტენციალებს აქვთ ნიუტონის პოტენციალების შემთხვევაში ზემოთ მოყვანილი სასაზღვრო თვისებების ანალოგიური თვისებები.

მოვიყვანოთ ეს სასაზღვრო თვისებები დაუმტკიცებლად.

ორმაგი ფენის პოტენციალისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$V_+(P_0) = \pi\mu(P_0) + \int_L \frac{\mu(Q) \cos \varphi}{r} ds, \quad (9,3)$$

$$V_-(P_0) = -\pi\mu(P_0) + \int_L \frac{\mu(Q) \cos \varphi}{r} ds,$$

სადაც P_0 არის L წირის ნებისმიერი წერტილი, Q —ინტეგრების ცვლადი წერტილი, r მანძილია P_0 და Q წერტილებს შორის, φ აღნიშნავს კუთხეს $\vec{r} = \overrightarrow{QP_0}$ რადიუს-ვექტორსა და Q წერტილზე გავლებულ შიგა ნორმალს შორის. ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$V_+(P_0) - V_-(P_0) = 2\pi\mu(P_0), \quad (9,4)$$

$$V_+(P_0) + V_-(P_0) = 2 \int_L \frac{\mu(Q) \cos \varphi}{r} ds.$$

ცხადია, ეს ფორმულები (9,3) ფორმულების ტოლფასია. მათ შორის პირველი გვიჩვენებს, რომ ორმაგი ფენის პოტენციალი განიციდის საზღვარზე წყვეტას.

ადვილად დამტკიცდება, რომ მარტივი ფენის ლოგარითმული პოტენციალი საზღვარზე არ განიციდის წყვეტას. წყვეტას განიციდის საზღვარზე ამ პოტენციალის ნორმალური წარმოებული:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_+ = -\pi\mu(P_0) + \int_L \frac{\mu(Q) \cos \psi}{r} ds,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_- = \pi\mu(P_0) + \int_L \frac{\mu(Q) \cos \psi}{r} ds,$$

სადაც ψ არის კუთხე $\overrightarrow{QP_0}$ ვექტორსა და P_0 წერტილზე გავლებულ შიგა ნორმალს შორის.

- Аппель П., Теоретическая механика, том первый, Физматгиз, Москва, 1960 г.
- Аппель П., Теоретическая механика, том второй, Физматгиз, Москва, 1960 г.
- ბეგიაშვილი ა., თეორიული მექანიკა, გამომცემლობა „ცოდნა“, თბილისი, 1958 წ.
- Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, часть первая, Гостехиздат, 1948 г.
- Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, часть вторая, Гостехиздат, 1948 г.
- Бухгольц Н. Н., Воронков И. М. и Минаков А. П., Сборник задач по теоретической механике, ГОНТИ, М. — Л., 1938 г.
- Вебстер А., Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, ГТТИ, М. — Л., 1933 г.
- Веселовский И. Н., Сборник задач по теоретической механике, Гос. издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1955 г.
- Воронков И. М., Курс теоретической механики, Физматгиз, Москва, 1959 г.
- Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, Москва, 1960 г.
- Голдстейн Г., Классическая механика, Гос. издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957 г.
- გორგიძე ა., თეორიული მექანიკის კურსი, ნაწილი პირველი, სტატიკა, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის გამომცემლობა, თბილისი, 1959 წ.
- გორგიძე ა., თეორიული მექანიკის კურსი, ნაწილი მეორე, კინემატიკა, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის გამომცემლობა, თბილისი, 1961 წ.
- დოლიძე დ., თეორიული მექანიკის მოკლე კურსი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1956 წ.
- Жуковский Н. Е., Кинематика, Статика, Динамика точки, М. — Л., 1939 г.
- Жуковский Н. Е., Механика системы, динамика твердого тела, М. — Л., 1939 г.
- Жуковский Н. Е., Избранные сочинения, Гостехиздат, 1948 г.
- Зернов Б. С., Сборник задач по теоретической механике, Гос. технико-теоретическое издательство, М. — Л., 1932 г.
- Космодемьянский А. А., Курс теоретической механики, Учпедгиз, Москва, 1955 г.
- Кочия Н. Е., Векторное исчисление и начало тензорного исчисления, ОНТИ, 1937 г.
- Левн-Чивита Т. и Амальди У., Курс теоретической механики, том первый, часть первая и часть вторая, Москва, 1951 г.
- Левн-Чивита Т. и Амальди У., Курс теоретической механики, том второй, часть первая и часть вторая, Москва, 1951 г.
- Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. I, Гостехиздат, М. — Л., 1948 г.
- Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. II, Гостехиздат, М. — Л., 1948.
- Лялунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950 г.
- Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М. — Л., 1952 г.
- Мещерский И. В., Сборник задач по теоретической механике, Гостехиздат, 1947 г.
- Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, Гос. издательство технико-теоретической литературы, М. — Л., 1949 г.
- Мухелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М. — Л., 1954 г.

მ უ ს ხ ე ლ ი შ ვ ი ლ ი ნ., თეორიული მექანიკის კურსი, პირველი ნაწილი, სტატიკა, თბილისი, 1930 წ.

მ უ ს ხ ე ლ ი შ ვ ი ლ ი ნ., თეორიული მექანიკის კურსი, მეორე ნაწილი, კინემატიკა, თბილისი, 1932 წ.

Невзглядов В. Г., Теоретическая механика, Физматгиз, 1959 г.

Некрасов А. И., Курс теоретической механики, Гостехиздат, М.—Л., 1945 г.

Николан Е. Л., Теоретическая механика, т. I, Гос. издательство физико-математической литературы, Москва, 1958 г.

Николан Е. Л., Теоретическая механика, т. II, Гос. издательство физико-математической литературы, Москва, 1958 г.

Розе Н. В., Динамика твердого тела, Ленинград, 1932 г.

Теоретическая механика под редакцией проф. Розе Н. В., часть I, Гостехиздат, 1932 г.

Теоретическая механика под редакцией проф. Розе Н. В., часть II, Гостехиздат, 1933 г.

Суслов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946 г.

Сретенский Л. Н., Теория Ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946 г.

Уйттекер Е., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937 г.

Чаплыгин С. А., Механика системы, М.—Л., 1923—24 г.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

მეორე გამოცემის წინასიტყვაობა	3
-------------------------------	---

თ ა ვ ი I. თეორიული მექანიკის შესავალი

§ 1. თეორიული მექანიკის საგანი	5
§ 2. კვლევის ძირითადი მეთოდები თეორიულ მექანიკაში	7
§ 3. კლასიკური მექანიკა და მისი გამოყენების ფარგლები	8
§ 4. თეორიული მექანიკის დაყოფა სტატიკად, კინემატიკად და დინამიკად	11
§ 5. თეორიული მექანიკის განვითარების მოკლე ისტორიული მიმოხილვა	11
§ 6. რუსი მეცნიერების როლი თეორიული მექანიკის განვითარებაში	18

თ ა ვ ი II. ვექტორთა ანალიზის ზოგიერთი საკითხი.

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

სრიალა ვექტორთა თეორია

§ 1. სრიალა ვექტორის მომენტი წერტილისა და ღერძის მიმართ	21
§ 2. ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი	23
§ 3. ელემენტარული მოქმედებები. ტოლფასი სისტემები	25
ამოცანები	28
§ 4. წყვილვექტორის თვისებები	29
ამოცანები	33
§ 5. სრიალა ვექტორთა სისტემის დაყვანა ერთ ვექტორამდე და ერთ წყვილვექტორამდე	34
ამოცანა	35
§ 6. ორმაგი ვექტორული ნამრავლის ერთი თვისების შესახებ	36
§ 7. სრიალა ვექტორთა სისტემის ინვარიანტები. ტოლქმედის არსებობის პირობა	36
§ 8. სრიალა ვექტორთა სისტემის ცენტრალური ღერძი	40
§ 9. პარალელურ ვექტორთა ცენტრი	41
ამოცანა	42

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

ვექტორ-ფუნქცია

§ 10. ვექტორის წარმოებული სკალარული არგუმენტით. ინტეგრალი	43
§ 11. წირის მთავარი ნორმალი და სიმრუდე	45

თ ა ვ ი III. კინემატიკა

§ 1. შესავალი	48
---------------	----

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

წერტილის კინემატიკა

§ 2. წერტილის მოძრაობის განტოლებები	49
ამოცანები	51

§ 3. წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლება. სკალარული სიჩქარე და აჩქარება	52
ამოცანები	55
§ 4. სკალარული კუთხური სიჩქარე და აჩქარება. წრიული მოძრაობა	56
ამოცანები	58
§ 5. ვექტორული სიჩქარე და აჩქარება	58
ამოცანები	62
§ 6. აჩქარების დაშლა მხებ და ნორმალურ აჩქარებებად	63
ამოცანები	65
§ 7. სიჩქარისა და აჩქარების დაშლა რადიალურ და ტრანსვერსალურ მდგენელებად	67
§ 8. სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები ზოგად მრუდწირულ ლერძებზე	70
ამოცანები	77
§ 9. ფართობული სიჩქარე, დებულება სიჩქარის მომენტის შესახებ	79
ამოცანები	81
§ 10. წერტილის ფარდობითი მოძრაობა. სიჩქარეთა შეკრების კანონი	82
ამოცანები	84

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

მყარი სხეულის კინემატიკა

§ 11. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები	85
§ 12. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა	87
§ 13. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო	88
ამოცანები	91
§ 14. შედგენილი მოძრაობა	92
§ 15. გადატანითი მოძრაობათა ერთობლიობა	93
§ 16. ბრუნვათა ერთობლიობა	93
§ 17. ხრახნული მოძრაობა	95
§ 18. გადატანით და ბრუნვით მოძრაობათა ერთობლიობა	96
ამოცანები	98
§ 19. ბრტყელი მოძრაობა. სიჩქარეთა განაწილება ბრტყელი მოძრაობის დროს.	
ცენტროიდები	100
§ 20. აჩქარებათა განაწილება ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში. აჩქარებათა მყისი	
ცენტრი	105
§ 21. უსრიალო გორვა	107
§ 22. ბრტყელი მოძრაობის გეომეტრიული დახასიათება	109
ამოცანები	111
§ 23. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო	117
§ 24. აჩქარებათა განაწილება უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის მო-	
ძრაობის შემთხვევაში. რივალსის ფორმულა	123
§ 25. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა	125
ამოცანები	129

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

წერტილის ფარდობითი მოძრაობა

§ 26. ვექტორის ფარდობითი (ლოკალური) წარმოებული	134
§ 27. წერტილის ფარდობითი მოძრაობა. კორიოლისის დებულება	136
ამოცანები	140

თ ა ვ ი IV. სრიალა ვექტორთა თეორიის გამოყენება სტატიკაში.

გეომეტრიული სტატიკა

§ 1. შესავალი	142
---------------	-----

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

სტატიკის ძირითადი პრინციპები და მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები

§ 2. ძალა	143
§ 3. მასა	144
§ 4. ინერციული სისტემები	147
§ 5. ძალთა სისტემების ტოლფასობა	148
§ 6. სტატიკის ძირითადი პრინციპები	148
ამოცანები	154
§ 7. ელემენტარული მოქმედებები. წყვილძალა. ძალთა სისტემის დაყვანა ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე.	158
§ 8. სტატიკის იირითადი დებულება	158
§ 9. ინვარიანტები. ტოლქმედის არსებობის პირობა. ძალთა ხრახნი (დინამა)	161
§ 10. მყარი სხეულის არათავისუფალი მოძრაობის ზოგიერთი შემთხვევა. რეაქციის ძალების განსაზღვრა. სტატიკურად განუსაზღვრელი შემთხვევა	162
§ 11. ნატერიალური წერტილის წონასწორობა ზედაპირზე. ხახუნის ძალა	167
ამოცანები	168

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

იდეალური ძაფის წონასწორობა

§ 12. მატერიალურ წერტილთა სისტემის წონასწორობის შესახებ	172
§ 13. უქმძღი და იდეალური საფის წონასწორობა	174
§ 14. ერთგვაროვანი მძიმე ძაფის წონასწორობა. ჯაჭვწირი	180

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

სიმძიმის ცენტრი. ინერციის ცენტრი

§ 15. პარალელურ ძალთა სისტემის ცენტრი. სიმძიმის ცენტრი. ინერციის ცენტრი	182
§ 16. გულდინის დებულებები	186
ამოცანები	188

თ ა ვ ი V. წერტილის დინამიკა

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. შესავალი	193
§ 2. მატერიალური წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები	195
ამოცანები	203

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

წერტილის დინამიკის ძირითადი კანონები

§ 3. მოძრაობის რაოდენობის კანონი	202
§ 4. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი	203
§ 5. ელემენტარული მუშაობა	207
§ 6. ცოცხალი ძალის კანონი	208
§ 7. ძალთა ველი	211
§ 8. პოტენციალურ ძალთა ველის რამდენიმე მაგალითი	214
ამოცანები	216

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

თავისუფალი მატერიალური წერტილის წრფივი მოძრაობა

§ 9.	წრფივი მოძრაობის განტოლება	218
§ 10.	პარამონიული რხევა	222
§ 11.	მილევადი რხევა	225
§ 12.	იძულებითი რხევა	227
§ 13.	სხეულის ვარდნა ძალიან დიდი სიმაღლიდან ამოცანები	231 232

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 4

თავისუფალი მატერიალური წერტილის მრუდწირული მოძრაობა

§ 14.	მატერიალური წერტილის მოძრაობა სივრცეში სიძიმის ძალის მოქმედებით	236
§ 15.	ბინეს ფორმულა	239
§ 16.	კეპლერის კანონები. ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონი	241
§ 17.	ნიუტონის ამოცანა	243
§ 18.	ორი სხეულის ამოცანა. კეპლერის მესამე კანონის შესწორება ამოცანები	244 246

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 5

მატერიალური წერტილის არათავისუფალი მოძრაობა

§ 19.	ბმები	248
§ 20.	ნამდვილი და შესაძლო გადაადგილებები	251
§ 21.	მატერიალური წერტილის მოძრაობა ფართეულზე	252
§ 22.	მატერიალური წერტილის წირზე მოძრაობის განტოლებები. ცოცხალი ძალის კანონი	255
§ 23.	არათავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობის პირობები	257
§ 24.	მათემატიკური საქანი	260
§ 25.	ციკლოიდური საქანი	264
§ 26.	ბრახისტოხრონა ამოცანები	265 259

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 6

მატერიალური წერტილის ფარდობითი მოძრაობისა და წონასწორობის განტოლებები

§ 27.	ღალამბერის პრინციპი	273
§ 28.	მატერიალური წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლება	274
§ 29.	წერტილის ფარდობითი წონასწორობის განტოლება	275
§ 30.	წერტილის ფარდობითი მოძრაობა დედამიწის ზედაპირზე ამოცანები	276 279

თ ა ვ ი VI. მატერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკა

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები

დეკარტის კოორდინატებში

§ 1.	თავისუფალ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები	280
§ 2.	ბმები	282
§ 3.	ნამდვილი და შესაძლო გადაადგილებები. იდეალური ბმები	283

§ 4. არათავისუფალ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში (ლაგრანჟის 1 გვარის განტოლებები)	286
§ 5. ღალამბერ-ლაგრანჟის განტოლება (მექანიკის ზოგადი განტოლება)	290
ამოცანები	292

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

მატერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკის ძირითადი კანონები

§ 6. მოძრაობის რაოდენობის კანონი	297
§ 7. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი	299
§ 8. ცოცხალი ძალის კანონი	302
§ 9. პოტენციალური ძალები. ცოცხალი ძალის ინტეგრალი	303
ამოცანები	305

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობების განტოლებები განზოგადებულ კოორდინატებში

§ 10. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები	307
§ 11. ცოცხალი ძალის გამოსახვა განზოგადებულ კოორდინატებში	311
§ 12. ცოცხალი ძალის ინტეგრალი ლაგრანჟის პირველი და მეორე გვარის განტოლებებისათვის	315
§ 13. პოტენციალური ძალები. კინეტიკური პოტენციალი	319
§ 14. ორი წერტილის დრეკადი რხევა	320
§ 15. ორმაგი მათემატიკური საქანი	322
ამოცანები	323

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 4

მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის კანონიკური განტოლებები

§ 16. განზოგადებული იმპულსები. კანონიკური ცვლადები	326
§ 17. ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები	327
§ 18. ციკლური კოორდინატები	330
§ 19. იაკობ-ოსტროგრადსკის მეთოდი	333
§ 20. პუასონის ფრჩხილები. პუასონის იგივობა	338
§ 21. პუასონის დებულება	340
ამოცანები	343

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 5

მატერიალურ წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებები პოლონომური და არაპოლონომური ბმების შემთხვევაში

§ 22. პოლონომური და არაპოლონომური ბმების ერთობლიობა	346
§ 23. ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები	349
§ 24. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები	351
§ 25. აპელის განტოლებები	353

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 6

მატერიალურ წერტილთა სისტემის მცირე რხევები მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში

§ 26. ნიშანგანსაზღვრული, მუდმივნიშნა და ცვალებადნიშნა ფუნქციები	356
§ 27. მდგრადი წონასწორობისა და მდგრადი მოძრაობის ცნება	357

§ 28. ლევან-დირიხლეს დებულება	359
§ 29. სისტემის ცოცხალი ძალისა და პოტენციალური ენერგიის გამოსახულება მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში მცირე რხევების შემთხვევაში	362
§ 30. მატერიალურ წერტილთა სისტემის პარამონიული რხევა	363
§ 31. მთავარი კოორდინატები. მთავარი რხევები	370
§ 32. გაფანტვის ფუნქცია. სისტემის მიღწევადი რხევა	374
§ 33. მატერიალურ წერტილთა სისტემის იძულებითი რხევა	390

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 7

მოძრაობის მდგრადობის ზოგიერთი საკითხი

§ 34. შეშფოთებული მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები	383
§ 35. გაწრფივების მეთოდი	386
§ 36. ერთგვაროვან ფორმებთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი	392
§ 37. ლიაპუნოვის დებულებები მოძრაობის მდგრადობის შესახებ	396
§ 38. ლიაპუნოვის დებულება არამდგრადი მოძრაობის შესახებ	400
ამოცანები	404

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 8

მექანიკის ვარიაციული პრინციპები

§ 39. მექანიკის ზოგადი პრინციპების შესახებ	405
§ 40. დალამბერ-ლაგრანჟის პრინციპი	406
§ 41. გაუსის პრინციპი (უმცირესი იძულების პრინციპი)	407
§ 42. იზოქრონული და სრული ვარიაციები	411
§ 43. ჰამილტონის პრინციპი	413
§ 44. ჰამილტონის კანონიკური განტოლებების მიღება ჰამილტონის პრინციპიდან	417
§ 45. უმცირესი ქმედების პრინციპი	418
ამოცანები	421

თ ა ვ ი VII. მყარი სხეულების დინამიკა

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

მომენტები

§ 1. სტატიკური მომენტები	425
§ 2. მეორე რიგის მომენტები	427
§ 3. ინერციის მომენტი პარალელურ წრფეთა კონის მიმართ	430
§ 4. ინერციის მომენტი ერთ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის მიმართ	431
§ 5. ინერციის ელიფსოიდი	433
§ 6. ინერციის მთავარი ღერძების პოვნა	435
§ 7. ინერციის ცენტრალური ღერძები	438
ამოცანები	439

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

მყარი სხეულის დინამიკის ძირითადი კანონები.

მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები

§ 8. მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობა და მოძრაობის რაოდენობის კანონი	443
§ 9. მყარი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი	445
§ 10. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი მყარი სხეულისათვის	448
§ 11. მყარი სხეულის ცოცხალი ძალა. ცოცხალი ძალის კანონი	450

§ 12. ეილერის კინემატიკური განტოლებები	452
§ 13. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები	453

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

§ 14. მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის განტოლება	457
§ 15. რეაქციის ძალების განსაზღვრა. დინამიკური და სტატიკური რეაქციის ძალები	459
§ 16. ფიზიკური საქანი	462
§ 17. ფიზიკური საქანის ბრუნვის ღერძზე წნევის განსაზღვრა	464

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 4

მყარი სხეულის ბრტყელი — პარალელური მოძრაობა

§ 18. მოძრაობის განტოლებები	464
ამოცანები	465

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 5

მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო

§ 19. მოძრაობის განტოლებები	469
§ 20. მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ	471
§ 21. ენერგიის ელიფსოიდი	472
§ 22. დამოკიდებულება მყის კუთხურ სიჩქარესა და კინეტიკურ მომენტს შორის	473
§ 23. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო სიმძიმის ძალის გავლენით	474
§ 24. ელიფსურ ფუნქციათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი	479
§ 25. ეილერ-პუანსოს შემთხვევა	480
§ 26. პუანსოს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	486
§ 27. პოლოდი	489
§ 28. ლაგრანჟ-პუანსონის შემთხვევა	491
§ 29. გიროსკოპის განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა	493
§ 30. კოვალევსკაიას შემთხვევა	495
§ 31. რეგულარული პრეცესია	497
ამოცანა	498

თ ა ვ ი VIII. დაჯახებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

მატერიალური წერტილის დაჯახება

§ 1. წერტილის დაჯახების ძირითადი განტოლება	505
§ 2. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი წერტილის დაჯახების შემთხვევისათვის	507
§ 3. დალამბერის პრინციპი	507
§ 4. დრეკადი და არადრეკადი დაჯახებები	508
§ 5. ცოცხალი ძალის კანონი (კარნოს დებულება)	510

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

მატერიალურ წერტილთა სისტემის დაჯახება

§ 6. მოძრაობის რაოდენობის კანონი	511
§ 7. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი	513
§ 8. ცოცხალი ძალის კანონი სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის (კარნოს დებულება)	514
§ 9. დალამბერ-ლაგრანჟის განტოლება სისტემის დაჯახების შემთხვევაში	515
§ 10. ლაგრანჟის პირველი გვარის განტოლებები სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის	516
§ 11. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები სისტემის დაჯახების შემთხვევისათვის	517

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 3

მყარ სხეულთა დაჯახება

§ 12. ეილერის დინამიკური განტოლებები ერთი უძრავი წერტილის მქონე მყარ სხეულზე დაჯახების შემთხვევაში	517
§ 13. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავ სხეულზე დაჯახება ამოცანები	530
	523

თ ა ვ ი IX. ცვალებადი მასის სხეულთა დინამიკის ელემენტები	528
§ 1. შესავალი	528

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 1

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებები

§ 2. ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება (მეშჩერსკი! განტოლება)	529
§ 3. მეშჩერსკის განზოგადებული განტოლება	534
§ 4. ციოლკოვსკის განტოლება	537
§ 5. ციოლკოვსკის ამოცანა	540

გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა 2

ცვალებადი მასის მატერიალური წერტილის დინამიკის ძირითადი კანონები

§ 6. ზოგიერთი აღნიშვნები და განმარტებები	541
§ 7. მოძრაობის რაოდენობის კანონი	543
§ 8. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის კანონი	544
§ 9. ცოცხალი ძალის კანონი	546

თ ა ვ ი X. პოტენციალები

§ 1. წერტილოვანი მასის პოტენციალი. დისკრეტულად განწილებულ მასათა პოტენციალი	549
§ 2. მოცულობითი მასის პოტენციალი	551
§ 3. მოცულობითი მასის პოტენციალის თვისებები (T) არეში	554
§ 4. ერთგვაროვანი სფეროს პოტენციალი	555
§ 5. ლიპუნოვის ფართეული	557
§ 6. მარტივი ფენის პოტენციალი	558
§ 7. მარტივი ფენის პოტენციალის სასაზღვრო თვისებები	560
§ 8. ორმაგი ფენის პოტენციალი	562
§ 9. ლოგარითმული პოტენციალები	564
გამოყენებული ლიტერატურა	566