ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მარი, ა. მოსიძე,
ა. ტორონჯაძე, თ. ტორონჯაძე, თ. შერვაშიძე

ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის

ნ. ლაზრიევას რედაქციით

ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი
უმაღლესი სასწავლებელი „ESM-თბილისი"
ფონდი „ევრაზია"

თბილისი 2000

ნანული ლაზრიევა
მიხეილ მანია
გიორგი მარი
ალექსანდრე მოსიძე
ამირან ტორონჯაძე
თეიმურაზ ტორონჯაძე
თენგიზ შერვაშიძე

ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის

ნ. ლაზრიევას რედაქციით

რეცენზენტი: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის კათედრის გამგე ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი ელიზბარ ნადარაია.

წიგნი წარმოადგენს სახელმძღვანელოს ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში. მასში სისტემატიზირებულია და გადმოცემულია მათემატიკური სტატისტიკის ის განხრები, რომლებიც ყველაზე ხშირად გვხვდება ეკონომიკურ კვლევებში. ალბათობის თეორია იმ მოცულობითაა წარმოდგენილი, რაც აუცილებელია სტატისტიკური დასკვნების თეორიის ძირითადი იდეების აღსაქმელად. თეორიული მასალა ილუსტრირებულია მრავალრიცხოვანი მაგალითებით ეკონომიკისა და ბიზნესის სფეროდან.

წიგნი შედგება 21 თავისა და დანართისაგან. დანართში მოცემულია ცხრილები და საგნობრივი საძიებელი ინგლისური და რუსული შესატყვისებით.

წიგნი განკუთვნილია ეკონომიკურ სპეციალობათა მაგისტრანტებისა და ასპირანტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება აგრეთვე უმაღლესი სკოლის პედაგოგების, სტუდენტებისა და მკითხველთა ფართო წრისათვის.

წიგნი დაწერილია პროექტის „სახელმძღვანელო *ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის*" ფარგლებში. პროექტის მხარდაჭერა ამერიკის შეერთებული შტატების საერთაშორისო განვითარების სააგენტოს მიერ გამოყოფილი სახსრებით განახორციელა ფონდმა „ევრაზიამ" (გრანტი C 97–1030).

სარჩევი

ეძღვნება რევაზ ჩიტაშვილის ხსოვნას

წინასიტყვაობა

თანამედროვე ეკონომიკური მეცნიერება ფართოდ იყენებს მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებს. დღევანდელ ეკონომისტს თავის საქმიანობაში ხშირად უხდება განუსაზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილების მიღება, რაც მოითხოვს მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების ფართო სპექტრის ცოდნას. ასეთი ცოდნის შეძენა განსაკუთრებით აქტუალური ხდება საქართველოში საბაზრო ეკონომიკის დამკვიდრების პროცესში. გაჩნდა მოთხოვნა ისეთი სახელმძღვანელოების არსებობაზე, რომლებშიც ეკონომისტებისათვის მისაწვდომ მათემატიკურ დონეზე გადმოცემული იქნება საკმაოდ ფართო და მრავალმხრივი მასალა ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში, ილუსტრირებული ამოცანებით ეკონომიკისა და ბიზნესის სფეროდან. წინამდებარე წიგნი სწორედ ასეთი სახელმძღვანელოს შექმნის მცდელობა გახლავთ.

წიგნში არ გამოიყენება მძიმე მათემატიკური აპარატი და მის ათვისებას ადვილად შეძლებენ არა მარტო მაგისტრანტები და ასპირანტები, არამედ უფროსკურსელი სტუდენტებიც. ვიმედოვნებთ, იგი საინტერესო იქნება მკითხველთა ფართო წრისათვისაც.

საქართველოში ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სწავლების ტრადიცია დაკავშირებულია ა. რაზმაძის (1889-1929) სახელთან, რომელიც კითხულობდა ლექციების კურსს თბილისის ახლად დაარსებულ უნივერსიტეტში. ამ ტრადიციის გაგრძელებად შეიძლება ჩაითვალოს 1938 წელს ს. ნ. ბერნშტეინის წიგნის ქართული თარგმანის გამოცემა.

ჩვენში ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის როგორც მათემატიკის დარგის განვითარებას საფუძველი ჩაუყარა გ.მანიამ (1918-1985). მას ეკუთვნის პირველი ქართული სახელმძღვანელოები ამ დისციპლინებში, მათ შორის სახელმძღვანელო ეკონომისტებისათვის. მისი მოღვაწეობის შედეგად 50-იანი წლების მეორე ნახევრიდან შეიქმნა მეცნიერთა კოლექტივები, რომლებიც იკვლევდნენ ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის პრობლემებს და წყვეტდნენ პრაქტიკულ ამოცანებს ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებით. ამავე პერიოდში დაიწყო ამ მეთოდების დანერგვა ეკონომიკურ კვლევებში.

რ. ჩიტაშვილი (1942-1995) მეცნიერთა ამ წრის თვალსაჩინო წარმომადგენელი იყო. მან ღრმა კვალი დააჩნია საქართველოში ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის განვითარებას არა მარტო წმინდა მათემატიკური გამოკვლევებით, რომლებმაც მას საერთაშორისო აღიარება მოუპოვა, არამედ გამოყენებითი ხასიათის კვლევითაც, რაშიც ეკონომიკის მათემატიკურ მოდელებს განსაკუთრებული ადგილი ეკავა. სხვადასხვა დროს რ. ჩიტაშვილი კითხულობდა ლექციებს ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, გამოყენებითი სტატისტიკის, ეკონომეტრიკის და თვით ეკონომიკური თეორიის საკითხებზე. მანვე წაიკითხა ლექციათა პირველი კურსი სტოქასტურ ფინანსურ ანალიზში, რითაც სათავე დაედო ამ დარგის განვითარებას საქართველოში.

რ. ჩიტაშვილთან თანამშრომლობამ წარუშლელი კვალი დატოვა თითოეული ჩვენგანის მეხსიერებაში და მადლიერების დიდი გრძნობით ვუძღვნით ამ წიგნს მის ხსოვნას.

წიგნის ავტორთა ჯგუფი შედგება საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის და ნ. მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტების და უმაღლესი სასწავლებელის ESM-თბილისის თანამშრომლებისაგან, რომელთაც წლების მანძილზე მათემატიკური სტატისტიკის სწავლების გამოცდილება დაუგროვდათ.

წიგნი დაიწერა ფონდ ევრაზიას მხარდაჭერით (გრანტი 97–1030). ავტორები დიდ მადლობას უხდიან ფონდის დირექტორს ბ-ნ ლ. აივაზიანს, გრანტების მენეჯერის მოადგილეს ქ-ნ ა. ალაგარდოვას, განსაკუთრებით კი წიგნის დიდ გულშემატკივარს და მისი მომზადების პერიპეტიების მონაწილეს, ფონდის პროგრამების კოორდინატორს ქ-ნ ქ. ბაქრაძეს.

ავტორები ულრმეს მადლობას მოახსენებენ წიგნის რეცენზენტს ბ-ნ ე. ნადარაიას საგულისხმო რჩევებისა და მითითებებისათვის, რომლებიც გათვალისწინებულია წიგნის საბოლოო რედაქტირებისას.

წიგნზე მუშაობა მიმდინარეობდა ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორის ბ-ნ ი. კიღურაძისა და ESM-თბილისის რექტორის ბ-ნ ს. ქადაგიძის ხელშეწყობით, რისთვისაც ავტორები მათ დიდ მადლობას მოახსენებენ.

ავტორები ასევე დიდ მადლობას უხდიან ბ-ნ ზ. ციგროშვილის სასარგებლო რჩევებისა და შენიშვნებისათვის.

შესავალი

ისტორიულად ჩამოყალიბდა მათემატიკური სტატისტიკის შემდეგი განსაზღვრა: ეს არის მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის სტატისტიკური მონაცემების სისტემატიზაციის, ანალიზისა და გამოყენების მეთოდებს თეორიული და პრაქტიკული დასკვნების მიღების მიზნით. თავის მრავალ მიმართულებაში მათემატიკური სტატისტიკა ეფუძნება ალბათობის თეორიას, რაც საშუალებას იძლევა შევაფასოთ იმ დასკვნების საიმედოობა და სიზუსტე, რომლებიც მიღებულია შეზღუდული სტატისტიკური მასალის საფუძველზე.

დღემდე გასაანალიზებელ მონაცემთა სტატისტიკური დამუშავების თეორიის, მეთოდოლოგიისა და პრაქტიკის განვითარება არსებითად მიმდინარეობდა ორი პარალელური მიმართულებით. პირველი მათგანი წარმოდგენილია იმ მეთოდებით, რომლებიც ითვალისწინებს მონაცემთა დამუშავების შედეგად მიღებული სტატისტიკური დასკვნების ალბათური ინტერპრეტაციის შესაძლებლობას. სხვა სიტყვებით, მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები გაიგება, როგორც ამოსავალ მონაცემთა სტატისტიკური დამუშავების მხოლოდ ის მეთოდები, რომლებიც ეფუძნება ამ მონაცემთა ალბათურ ბუნებას. სწორედ ეს მეთოდები და მხოლოდ ისინია წარმოდგენილი მათემატიკური სტატისტიკის მონოგრაფიათა და სახელმძღვანელოთა დიდ უმრავლესობაში. მეორე მიმართულება, რომელიც მოიცავს საწყისი ინფორმაციის სტატისტიკური დამუშავების ისეთი მეთოდების ფართო სიმრავლეს, რომლებიც არ ეყრდნობა მონაცემთა ალბათურ ბუნებას, რჩება მათემატიკური სტატისტიკის, როგორც მეცნიერული დისციპლინის საყოველთაოდ მიღებული ჩარჩოების მიღმა. უნდა აღვნიშნოთ, რომ სწორედ პირველი მიმართულება განსაზღვრავს სტატისტიკის შინაარსს.

წინამდებარე წიგნი არსებითად წარმოადგენს სახელმძღვანელოს მათემატიკურ სტატისტიკაში, რომელშიც ძირითადი ყურადღება გამოყენებით ასპექტებს ეთმობა. წიგნში გადმოცემულია მათემატიკური სტატისტიკის ის განხრები, რომლებიც ყველაზე ხშირად გვხვდება ეკონომიკურ კვლევებში, თუმცა ეს მეთოდები უნივერსალურია და მათი გამოყენება შესაძლებელია მეცნიერების სხვა დარგებშიც.

სახელმძღვანელო პირობითად შეიძლება დაიყოს სამ ნაწილად:

1. აღწერითი (დესკრიფციული) სტატისტიკა;
2. ალბათობის თეორია;
3. სტატისტიკური დასკვნების თეორია.

აღწერითი სტატისტიკა გადმოცემულია წიგნის პირველ, მეორე და მესამე თავებში, რომლებიც ეხება მონაცემთა შეგროვების, კლასიფიკაციისა და პირველადი დამუშავების მეთოდებს. თვისებრივი მონაცემები ძირითადად ერთი ნიშნის დონეების სიხშირეთა განაწილებისა და რამდენიმე ნიშნის შეუღლების ცხრილების მეშვეობით, ხოლო გრაფიკულად სხვადასხვა ტიპის დიაგრამებით აღიწერება. რაოდენობრივი მონაცემებისათვის დაუჯგუფებელი და დაჯგუფებული მონაცემების ცხრილებს ემატება თვალსაჩინო გრაფიკული მეთოდები ინდივიდუალური თუ დაგროვილი სიხშირეებისათვის. მონაცემთა შეკუმშვის შემდგომი ფაზაა მათი დაყვანა სიხშირეთა განაწილების ცენტრალური ტენდენციის, გაბნევის და განაწილების ფორმის ერთიან მახასიათებლებზე. დაწვრილებითაა განხილული ამა თუ იმ გრაფიკულ თუ რიცხვით მახასიათებელთა უპირატესობანი მონაცემთა ერთიანად აღწერისათვის. აღწერითი სტატისტიკის მეთოდები ერთნაირია, როგორც მონაცემთა სრული ერთობლიობის, ისე მისი ნაწილის აღსაწერად. გადმოცემულია შესაბამისი ევრისტული მეთოდები, რომელთა დაზუსტება მომდევნო თავებში განვითარებული შესაბამისი მათემატიკური მეთოდებით ხერხდება.

აღწერითი სტატისტიკის მეთოდები ქმნიან საფუძველს მათემატიკური სტატისტიკის უფრო რთული მეთოდების გამოყენებისათვის. ამ მეთოდთა ძირითადი დანიშ-

ნულებაა მთელი პოპულაციის შესახებ დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გამოტანა ამ პოპულაციიდან აღებული შერჩევის საფუძველზე.

მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები ფაქტობრივად ალბათობის თეორიაზეა დაფუძნებული. ალბათობის თეორია წარმოადგენს ხიდს აღწერითი სტატისტიკისა და სტატისტიკური დასკვნების თეორიის მეთოდებს შორის, გვაძლევს რა საშუალებას გავიაზროთ, თუ როგორ იქმნება და გამოიყენება სტატისტიკური პროცედურები, როგორ შეიძლება „ითარგმნოს" ისინი მარტივ და გასაგებ ენაზე, როგორ ავიცილოთ თავიდან ამ მეთოდების არასწორი გამოყენება. სწორედ ამიტომ სახელმძღვანელოს მნიშვნელოვანი ნაწილი ალბათობის თეორიას ეთმობა.

მეოთხე თავიდან დაწყებული მეცხრე თავის ჩათვლით გადმოცემულია ალბათობის თეორიის ძირითადი ცნებები და დებულებები (ხდომილობა; ალბათობა; შემთხვევითი სიდიდე; განაწილების ფუნქცია; შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, პირობითი მათემატიკური ლოდინი; განაწილებათა ძირითადი სახეები; დიდ რიცხვთა კანონი; ცენტრალური ზღვარითი თეორემა და ა.შ.). მათი გადმოცემისას ჩვენ უარი ვთქვით სისტემატურად გამოგვეყენებინა ალბათობის თეორიის აქსიომატიკა, რომელიც ზომის თეორიას ეყრდნობა. ამის გამო მოყვანილმა დებულებებმა და ცნებებმა დაკარგეს გარკვეული სიმკაცრე, თუმცა ჩვენ შევეცადეთ შეგვენარჩუნებინა გადმოცემის კორექტულობა და ძირითადი ყურადღება გადავიტანეთ აღნიშნული ცნებებისა და დებულებების შინაარსობრივ მხარეზე, რაც იძლევა სტატისტიკური მეთოდების ინტერპრეტაციისა და დასაბუთების შესაძლებლობას.

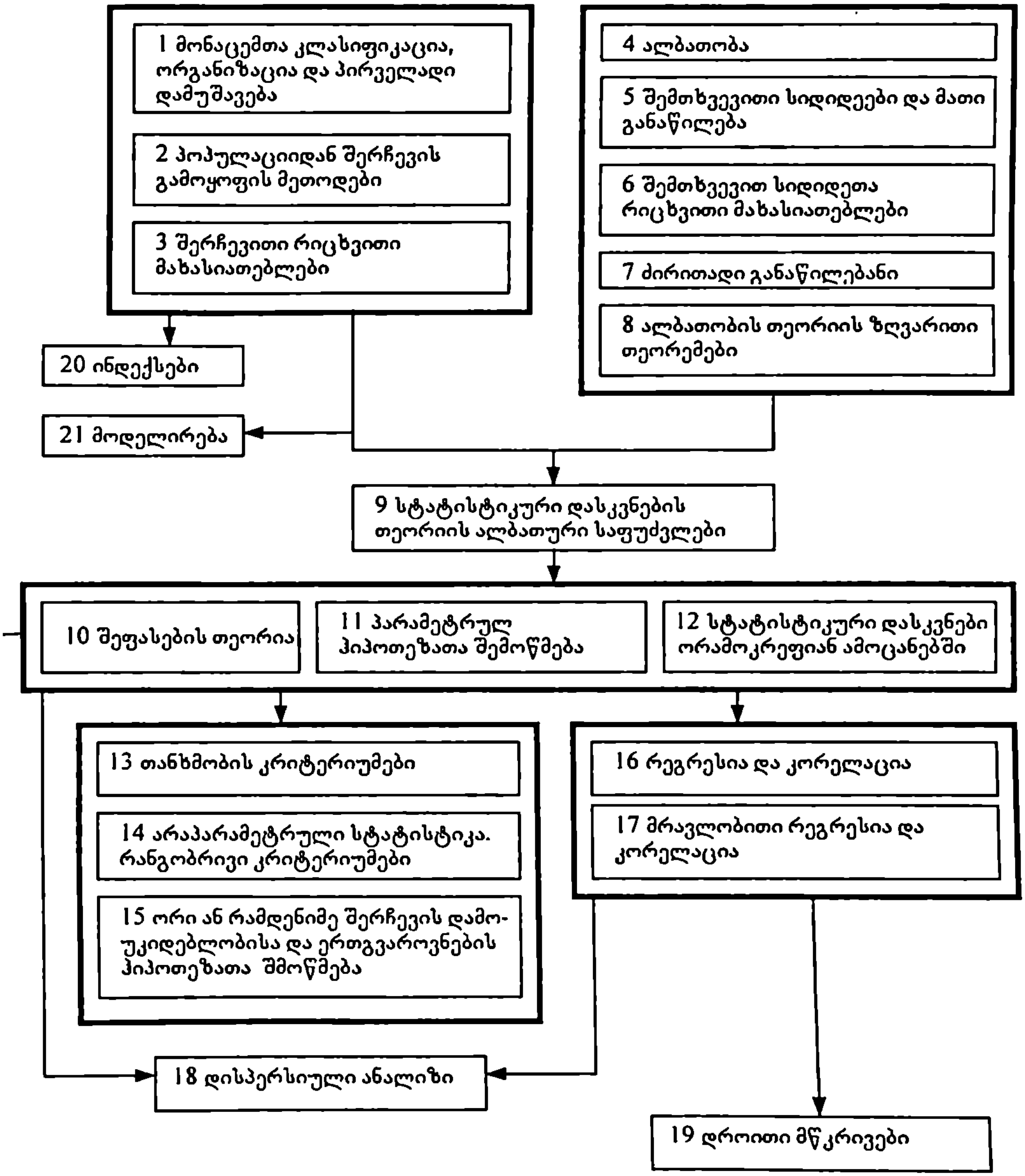
წიგნის მესამე, ძირითადი ნაწილი მიძღვნილია მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებისადმი და რაც არანაკლებ მნიშვნელოვანია, იქვე მოცემულია მრავალი მაგალითი, რომლებიცშემდეგ ორ მიზანს ემსახურება: ერთის მხრივ ეს მაგალითები შეიძლება იქნას განხილული, როგორც სტატისტიკური თეორიის მეთოდების საილუსტრაციო მასალა და მეორეს მხრივ ხელს უწყობს მოდელური აზროვნების განვითარებას ეკონომიკურ პრობლემების განხილვისას.

წიგნის მეათე – ოცდამეერთე თავებში გადმოცემულია წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასების, სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების მეთოდები, χ^2-ანალიზი, თანხმობის კრიტერიუმები, რეგრესიული და დისპერსიული ანალიზი, არაპარამეტრული სტატისტიკის მეთოდები, დროითი მწკრივების ანალიზი და პროგნოზირება. რადგან ეკონომიკურ თეორიაში დიდი როლი აქვს ე.წ. ფასების ინდექსებს, წიგნში ცალკე თავი ეძღვნება ამ თემას. კომპიუტერული რეალიზაციის გაადვილების მიზნით ერთი თავი მოდელირების საკითხებისადმია მიძღვნილი.

როგორც მოყვანილი ნუსხიდან ჩანს, წიგნი ფართო მასალას შეიცავს. პრაქტიკული ხასიათის ეკონომიკური საკითხების გადაჭრის მრავალი ნიმუში შეიძლება ვიხილოთ სხვადასხვა თავში მოყვანილი მაგალითების სახით.

წიგნის თავებს შორის არსებული ძირითადი სტრუქტურული კავშირები ნათელია ქვემოთ მოყვანილი სქემიდან. პირველი თორმეტი თავი შეესაბამება ძირითად კურსს სტუდენტებისათვის. მეცხრე – მეთექვსმეტე თავები, მეოცესა და ოცდამეერთესთან ერთად პასუხობენ წიგნის მთავარ დანიშნულებას – ძირითად კურსს მაგისტრანტებისა და ასპირანტებისათვის, იგივე კატეგორიის მკითხველისათვისაა გათვალისწინებული, ოღონდ სპეციალური კურსების სახით, მეჩვიდმეტე, მეთვრამეტე და მეცხრამეტე თავები.

მკითხველს ვურჩევთ პირველი წაკითხვისას გამოტოვოს *-ით აღნიშნული ნაწილები.


1 მონაცემთა კლასიფიკაცია, ორგანიზაცია და პირველადი დამუშავება
2 პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფის მეთოდები
3 შერჩევითი რიცხვითი მახასიათებლები
4 ალბათობა
5 შემთხვევითი სიდიდეები და მათი განაწილება
6 შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლები
7 ძირითადი განაწილებანი
8 ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები
20 ინდექსები
21 მოდელირება
9 სტატისტიკური დასკვნების თეორიის ალბათური საფუძვლები
10 შეფასების თეორია
11 პარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმება
12 სტატისტიკური დასკვნები ორამოკრეფიან ამოცანებში
13 თანხმობის კრიტერიუმები
14 არაპარამეტრული სტატისტიკა. რანგობრივი კრიტერიუმები
15 ორი ან რამდენიმე შერჩევის დამოუკიდებლობისა და ერთგვაროვნების ჰიპოთეზათა შმოწმება
16 რეგრესია და კორელაცია
17 მრავლობითი რეგრესია და კორელაცია
18 დისპერსიული ანალიზი
19 დროითი მწკრივები

1

მონაცემთა კლასიფიკაცია, ორგანიზაცია და პირველადი დამუშავება

§ 1. მონაცემები, პოპულაცია და შერჩევა. აღწერითი სტატისტიკის საგანი

მონაცემების ქვეშ იგულისხმება ობიექტთა რაიმე სიმრავლის რაოდენობრივ ან თვისებრივ მახასიათებელთა დაკვირვებული მნიშვნელობების ერთობლიობა. ამ ერთობლიობის ყოველ წევრს დაკვირვება, მონაცემი ანუ მონაცემი წერტილი ეწოდება. იგი შეიძლება იყოს ფიზიკური გაზომვის შედეგი (მაგალითად, წონა ან სიმაღლე), პასუხი კითხვაზე (კი ან არა) ან რაიმე ნიშნის მიხედვით კლასიფიკაციის შედეგი. ყველა შესაძლო დაკვირვებათა სიმრავლე შეადგენს სტატისტიკურ პოპულაციას. ამგვარად გვაქვს შემდეგი განსაზღვრება:

სტატისტიკური პოპულაცია არის კონკრეტული მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის ერთობლიობა.

უნდა აღინიშნოს, რომ სტატისტიკურ პოპულაციაზე საუბრისას (ზედსართავი სტატისტიკური ქვემოთ ხშირად გამოტოვებული იქნება) არ იგულისხმება, რომ ყველა შესაძლო მნიშვნელობა მართლაც დაკვირვებულია. პოპულაცია შეიძლება იყოს რეალური (როგორც, მაგალითად, 1998 წ. ზაფხულში ფოთის ნავსადგურში შემოსული გემებიდან გადმოტვირთული ხორბლის წონების ერთობლიობა), ისე წარმოსახვითი ანუ კონცეპტუალური (ვთქვათ, გარკვეული ცხოველის გარკვეულ პირობებში სიცოცხლის ხანგრძლივობის შესაძლო მნიშვნელობანი).

პოპულაციის საპირისპიროდ შერჩევა ანუ ამოკრეფა მხოლოდ ზოგიერთ დაკვირვებულ მნიშვნელობას შეიცავს.

შერჩევა ანუ ამოკრეფა[1] არის დაკვირვებათა ერთობლიობა, რომელიც შეადგენს პოპულაციის მხოლოდ რაიმე ნაწილს.

სტატისტიკური კვლევის საბოლოო მიზანი პოპულაციის შესწავლაა. იმ შემთხვევაში, როცა პოპულაცია სრულადაა მოცემული, ამბობენ, რომ ხელთა გვაქვს სრული აღწერის შედეგები. მაგრამ პრობლემა სწორედ ისაა, რომ ხშირად სრული აღწერა შეუძლებელი ან მიზანშეუწონელია და მკვლევარის განკარგულებაში მხოლოდ შერჩევაა.

---

[1] ჩვენ ვამჯობინებთ ტერმინს „ამოკრეფა“ და ზედსართავს „ამოკრეფითი“, მაგრამ „შერჩევა“ და „შერჩევითი“ მყარადაა დამკვიდრებული ეკონომიკურ ლიტერატურაში. ამ წიგნში ჩვენ დავიცავთ ტრადიციას. „ამოკრეფა“ იმიტომაა უკეთესი, ვიდრე „შერჩევა“, რომ უკანასკნელი გულისხმობს შერჩევის რაიმე წესს, ხოლო პირველი არა.

პოპულაციის ელემენტარული ერთეულები ეწოდება ობიექტებს, რომელთა მახასიათებლებიც პოპულაციას შეადგენენ. ერთი და იგივე ელემენტარული ერთეულების მეშვეობით, ბუნებრივია, შეიძლება შეიქმნას ბევრი სხვადასხვა პოპულაცია. მაგალითად, რომელიმე ფირმის მიერ დაქირავებულ მუშაკთა ერთობლიობა მოგვცემს მათი შემოსავლების პოპულაციას, მათი წონების პოპულაციას, მათი პოლიტიკური ორიენტაციების პოპულაციას და ა.შ. შესაბამისად განისაზღვრება შერჩევის ელემენტარული ერთეულები.

პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფისას გულისხმობენ, რომ არსებობს შერჩევათა ბაზისი, ანუ პოპულაციის ბაზისი, რომელშიც პოპულაციის ყოველი ელემენტარული ერთეული ასე თუ ისე რეგისტრირებულია. შერჩევათა ბაზისის ქვეშ ჩვეულებრივ ესმით პოპულაციის ელემენტების ჩამონათვალი სიების, რეესტრების, კარტოთეკების, კომპიუტერული ფაილების და ა.შ. სახით (ცხადია, რომ უკიდურესად დიდი მოცულობის პოპულაციებისათვის შერჩევათა ბაზისის შექმნა ძნელია). მაგალითად, რეგისტრირებულ ამომრჩეველთა სიაში ჩამოთვლილი პირები ის ბაზისია, რომელიც მოგვცემს არჩევნებში რეალურად მონაწილე პირთა ერთობლიობას.

ელემენტარულ ერთეულთა მახასიათებლის მიხედვით განირჩევა თვისებრივი და რაოდენობრივი პოპულაციები. ისინი სხვადასხვა მეთოდებით შეისწავლება. თვისებრივი ანუ ატრიბუტული მახასიათებელი ეწოდება ელემენტარული ერთეულის რაიმე თვისებას ან მდგომარეობას (მაგალითად სქესი, პროფესია, ფერი და სხვა). თვისებრივ მახასიათებელის კონკრეტულ დონეს ატრიბუტი ეწოდება. ატრიბუტებია, მაგალითად, პირის ქორწინებითი მდგომარეობის შემდეგი დონეები: მარტოხელა, დაქორწინებული, გაყრილი, ქვრივი. რაოდენობრივია ისეთი მახასიათებელი, რომლის ცალკეული მნიშვნელობები დაკვირვების, გაზომვის ან თვლის შედეგად მიიღება და რიცხვებით გამოიხატება (სიმაღლე, მასა, ხელფასი, წლიური მოგება და სხვა). რაოდენობრივი მონაცემები ობიექტების (ელემენტარულ ერთეულთა) გაზომვის შედეგებია, ხოლო თვით გაზომვა ნიშნავს საგნებისათვის რიცხვების მიწერას გარკვეული წესით. რიცხვების სხვადასხვა თვისების გამოყენება საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ გაზომვის ოთხი სხვადასხვა სკალა.

სახელდების სკალა მიიღება საგნების იმგვარი კლასიფიკაციისას, როდესაც ერთ კლასში მოთავსებული საგნები იდენტურია ან თითქმის იდენტურია გარკვეული თვისების ან ნიშნის მიხედვით. ამ კლასების იდენტიფიკაციისათვის ხშირად რიცხვებს იყენებენ. მაგალითად, საერთაშორისო სავალუტო ოპერაციების მაწარმოებელ ბანკებში ეროვნული ვალუტები კოდირებულია ნატურალური რიცხვებით, თანამედროვე სავაჭრო ტექნოლოგიის მიხედვით ყოველ საქონელს მინიჭებული აქვს სხვადასხვა რიცხვითი კოდი, ავტომობილს მინიჭებული აქვს სახელმწიფო ნომერი და სხვა. ის გარემოება, რომ ერთი კლასის ნომერი მეტია ან ნაკლებია მეორეზე, არაფერს არ მეტყველებს შესაბამისი კლასების ურთიერთმიმართებაზე გარდა იმისა, რომ ეს კლასები განსხვავებულ ობიექტებს შეიცავს. ამრიგად, სახელდების სკალა იყენებს მხოლოდ რიცხვებს შორის განსხვავების თვისებას და ამდენად სახელდების სკალით ჩატარებული გაზომვები კლასიფიკაციის შედეგია და არა გაზომვის. ამგვარ მონაცემებს ნომინალურ ანუ სახელდებით მონაცემებს უწოდებენ.

რიგის სკალა შეიძლება დაწესდეს იმ შემთხვევაში, როდესაც გასაზომი ობიექტები განსხვავდებიან რაიმე დამახასიათებელი თვისების ხარისხის მიხედვით, მაგრამ შეუძლებელია იმის განსაზღვრა, რამდენით ან რამდენჯერ აღემატება ერთი ობიექტი მეორეს ამ თვისების მიხედვით. მაგალითად შეიძლება გამოდგეს რიხტერის სკალა მიწისძვრისათვის, მზა პროდუქციის ხარისხები I, II, III,.., სამხედრო წოდებები, მინერალების სიმტკიცე და სხვა.

გაზომვა ინტერვალური სკალით შესაძლებელია მაშინ, როცა დამკვირვებელს შეუძლია განსაზღვროს არა მხოლოდ განსხვავება თვისების ხარისხებს შორის, არამედ შეადაროს ერთმანეთს გაზომვათა განსხვავებანი რაიმე ერთეულის მიხედვით. ობიექტს მიენიჭება ერთეულთა იმ რაოდენობის ტოლი რიცხვი, რომელიც თვისების ხარისხის ტოლფასია. წელთაღრიცხვა ინტერვალური სკალის მაგალითია, ისევე როგორც ტემპერატურის სკალები ცელსიუსით ან ფარენჰაიტით. აუცილებელია აღინიშნოს, რომ ნული ინტერვალურ სკალაზე არ ნიშნავს, რომ ობიექტს გასაზომი თვისება არ გააჩნია, მაგალითად 0^0C ნიშნავს გარკვეულ ტემპერატურას. წერტილი „0" ინტერვალურ სკალაზე ნებისმიერად აირჩევა, ამ სკალისათვის განმსაზღვრელია ის გარემოება, რომ რიცხვები შეიძლება ერთმანეთს გამოვაკლოთ და შევადაროთ ერთმანეთს სხვაობები.

ფარდობითი სკალა ინტერვალური სკალისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ნულოვანი წერტილი ნებისმიერი კი არაა, არამედ მიუთითებს გასაზომი თვისების არარსებობაზე. ამდენად ამ სკალით გაზომვის შემთხვევაში შესაძლებელია განისაზღვროს, თუ რამდენჯერ მეტად აქვს გამოხატული ესა თუ ის თვისება ერთ ობიექტს ვიდრე მეორეს. ამ სკალის მაგალითებია: ფულის ერთეულში გამოხატული გაზომვები, აბსოლუტური ტემპერატურა (კელვინის სკალით), სიმაღლე, წონა, მანძილი და სხვა. ფარდობით სკალას სხვა დანარჩენი სკალებისაგან განასხვავებს ის გარემოება, რომ შესაძლებელია რიცხვების გაყოფა, ანუ დადგენა იმისა, თუ რამდენჯერ აღემატება ერთი მეორეს.

ეს ოთხი სკალა განიხილება, როგორც გაზომვის ოთხი აღმავალი დონე.

ქვემოთ ჩვენ სისტემატურად შევისწავლით ფარდობითი და ინტერვალური მონაცემების სტატისტიკური დამუშავების მეთოდებს, თუმცა თვისებრივი მონაცემების შესწავლის მეთოდები, რომლებსაც ასევე ეთმობა გარკვეული ადგილი, ფაქტობრივად სახელდებითი მონაცემების შესწავლის საშუალებაცაა. შევხვდებით აგრეთვე რიგობრივი (რიგის სკალით გაზომილი) მონაცემების შესწავლის მეთოდებსაც (მაგალითად, ე.წ. რანგობრივ კრიტერიუმებს)

დაკვირვებული რაოდენობრივი მახასიათებლების მიხედვით შეიძლება განვასხვავოთ დისკრეტული და უწყვეტი მონაცემები. დისკრეტული მახასიათებელი ღებულობს მხოლოდ ცალკეულ იზოლირებულ მნიშვნელობებს, ხოლო უწყვეტ მახასიათებელს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი (ნამდვილი) რიცხვითი მნიშვნელობა რაიმე საზღვრებში. დისკრეტული მახასიათებელი ჩვეულებრივ თვლის შედეგად მიიღება. ასეთებია, მაგალითად, ოჯახის წევრთა რაოდენობა, მსხვილი ფირმების შვილობილი ფირმების რაოდენობა, ოთახების რაოდენობა ბინებში და ა.შ. ასეთ მონაცემებს დისკრეტული ეწოდება. დისკრეტული მონაცემების ალტერნატივა უწყვეტი მონაცემებია, როგორიცაა წონა, სიმაღლე, სიცოცხლის ხანგრძლივობა, შემოსავალი და სხვა. მაგალითად, წონა ბუნებითაა უწყვეტი მახასიათებელი, თორემ მოცემული სიზუსტით გაზომვისას ისიც კი შეიძლება დისკრეტულად ჩაითვალოს. ამდენად გაზომვის მოცემული საზუსტისათვის ალტერნატივა – დისკრეტული და უწყვეტი – პირობითია.

რიცხვითი მონაცემების სრული კლასიფიკაცია თვალსაჩინოებისათვის ნახ. 1.1-ზეა გამოსახული. უნდა აღინიშნოს, რომ დისკრეტულ მონაცემებს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი დონე გაზომვის ჩამოთვლილი ოთხი დონიდან, მაშინ როცა უწყვეტი მონაცემები მხოლოდ ინტერვალურია ან ფარდობითი.

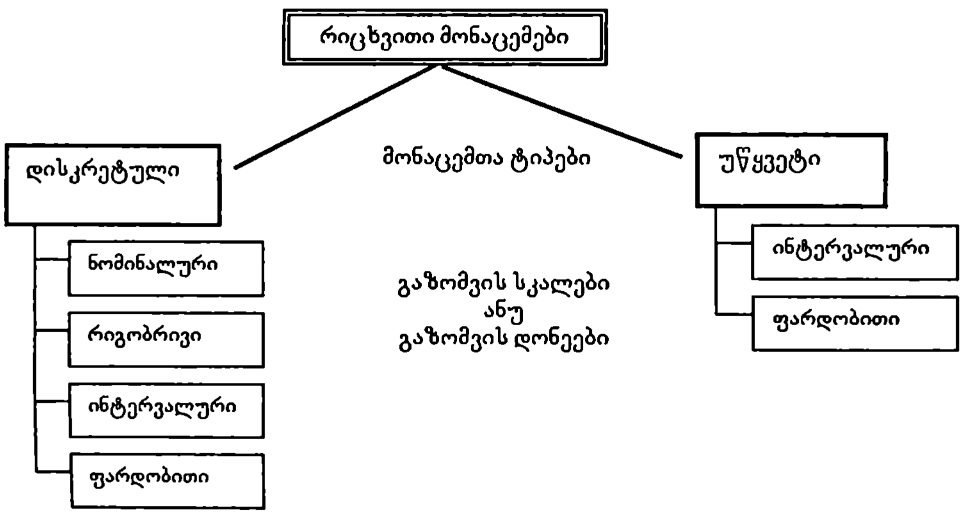
პოპულაციისა და შერჩევისათვის ჩვენ ქვემოთ ვიხმართ გამაერთიანებელ ტერმინს (სტატისტიკურ) ერთობლიობას. ერთობლიობაში შემავალ მონაცემთა რაოდენობას მისი მოცულობა ჰქვია. პოპულაციის მოცულობა სასრულიც შეიძლება იყოს

და, როცა პოპულაცია წარმოსახვითია, უსასრულოც. შერჩევა ყოველთვის სასრული მოცულობისაა.

ქვემოთ მკითხველი შეხვდება აგრეთვე ტერმინს „გენერალური ერთობლიობა", რაც „პოპულაციის" სინონიმია, „შერჩევის" მაგიერ კი ზოგჯერ „შერჩევითი ერთობლიობა" იხმარება.

თავდაპირველ მონაცემებს რაიმე აზრით დალაგების, დაჯგუფებისა და კრებსითი (ერთიანად) მიმოხილვის გარეშე ნედლი (დაუმუშავებელი) მონაცემები ეწოდება. ნედლი მონაცემების დამუშავების ამ თავში ჩამოთვლილი მეთოდები ერთნაირია ორივე ტიპის, როგორც დისკრეტული, ისე უწყვეტი ტიპის სტატისტიკური ერთობლიობისათვის. რაც შეეხება პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფის მეთოდებს, მათ შემდეგ თავში განვიხილავთ.

ნედლი მონაცემების დალაგების, დაჯგუფებისა და კრებსითი მიმოხილვის მეთოდოლოგია შეადგენს დესკრიფციულ ანუ აღწერით სტატისტიკას. სტატისტიკის განვითარების საწყის ეტაპზე სტატისტიკის ეს ნაწილი კიდევაც ამოწურავდა სტატისტიკის საგანს.



ნახ. 1.1. რიცხვითი მონაცემების კლასიფიკაცია

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ მონაცემთა თვალსაჩინო, კერძოდ ცხრილური და გრაფიკული წარმოდგენის მეთოდებს, რომელთა მიზანია გადმოგვცეს არსებული ინფორმაცია ისეთი შეკუმშული ფორმით, რომ მისი ძირითადი შინაარსი მარტივად აღსაქმელი იყოს.

§ 2. თვისებრივი მონაცემების სიხშირეთა განაწილება და მისი გრაფიკული წარმოდგენა

თვისებრივი ნიშნის (ატრიბუტების) განაწილება. შეუღლების ცხრილი. განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც ელემენტარული ერთეული ერთი თვისებრივი ნიშნით ხასიათდება, რომელსაც ორი დონე აქვს – A და მისი უარყოფა $\overline{A}$. მაშინ, თუ ერთობლიობას გადავნომრავთ 1, 2, ... , n რიცხვებით, ნედლ მონაცემებს ასეთი სახე ექნება:

ცხრილი 1.1

ელემენტარული ერთეული	1	2	...	n
ვარიანტი	A	$\overline{A}$	...	A

თუ ახლა 1.1 ცხრილის მონაცემებს დავაჯგუფებთ, გავაერთიანებთ რა პირველ ჯგუფში იმ ერთეულებს, რომელთათვის ადგილი აქვს A-ს და აღვნიშნავთ რა მათ რაოდენობას n_A სიმბოლოთი, ხოლო მეორე ჯგუფში – დანარჩენ $n_{\overline{A}} = n - n_A$ ერთეულს მოვათავსებთ, რომელთათვის A-ს ადგილი არა აქვს, გვექნება შემდეგი ცხრილი 1.2 (a)

ამგვარ დაჯგუფებას ორთანრიგიანი დაჯგუფება ეწოდება, n_A და $n_{\overline{A}}$ თანრიგების სიხშირეებია. ამგვარად 1.2 (a) ცხრილით მივიღეთ ორდონიანი ნიშნის სიხშირეთა განაწილება.

თუ ახლა n_A და $n_{\overline{A}}$ რიცხვებს n-ზე გავყოფთ, მივიღებთ $h_A = n_A/n$ და $h_{\overline{A}} = n_{\overline{A}}/n$ ფარდობით სიხშირეებს, სადაც $h_A + h_{\overline{A}} = 1$. ფარდობითი სიხშირეებით შეიძლება შეიცვალოს 1.2 (a) ცხრილის მეორე სტრიქონიც. შესაბამისად, n-ის ნაცვლად ბოლო სვეტში მოგვიწევს 1-ის ჩაწერა (იხ. ცხრილი 1.2 (b)).

ცხრილი 1.2

ვარიანტი	A	$\overline{A}$	ჯამი
სიხშირე	n_A	$n_{\overline{A}}$	n

(a)

ვარიანტი	A	$\overline{A}$	ჯამი
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{n_A}{n}$	$\frac{n_{\overline{A}}}{n}$	1

(b)

თუ ნიშანს აქვს ორზე მეტი დონე, A_1, ... , A_s, $s>2$, მაშინ შესაბამისი სიხშირეების n_1, ... n_s სიმბოლოებით აღნიშვნის შემდეგ ($n_1+n_2+\cdots + n_s = n$), მივიღებთ 1.2 (a) ცხრილის მსგავს შემდეგ ცხრილს:

ცხრილი 1.3

ვარიანტი	A_1	A_2	...	A_s	ჯამი
სიხშირე	n_1	n_2	...	n_s	n

1.3 ცხრილი ასახავს მრავალთანრიგიან (მრავლობით) დაჯგუფებას. აქაც შესაძლებელია $h_1 = n_1/n, \ldots, h_s = n_s/n$ ფარდობით სიხშირეებზე გადასვლა, $h_1 + \cdots + h_s = 1$.

ერთი ნიშნის მიხედვით დაჯგუფებას პირველი რიგის დაჯგუფებას უწოდებენ. თუ ახლა პირველი რიგის დაჯგუფების ყოველი ჯგუფი მეორე ნიშნის მიხედვით დაჯგუფდა, მივიღებთ მეორე რიგის დაჯგუფებას. 1.4 ცხრილი წარმოადგენს მეორე რიგის დაჯგუფების შესაბამის ცხრილს.

აქ n_A სიხშირის ჯგუფი დაიყო ორ ნაწილად II ნიშნის მიხედვით – ის ერთეულები, რომელთათვის A-სთან ერთად B-ც გვხვდება და მათი რაოდენობაა n_{AB}, და ის ერთეულები, რომელთათვის A-სთან ერთად B უკვე აღარ გვხვდება (ანუ ძალაშია $\overline{B}$) და მათი რაოდენობაა $n_{A\overline{B}}$. ასევე ორ ნაწილად დაიყო $n_{\overline{A}}$ სიხშირის ჯგუფი იმ ერთეულებისა, რომელთათვის A-ს ადგილი არ ჰქონდა (ანუ ძალაში იყო $\overline{A}$). შემდეგი ტოლობები კომენტარს არ საჭიროებს

ცხრილი 1.4

II ნიშანი / I ნიშანი	B	$\overline{B}$	ჯამი
A	n_{AB}	$n_{A\overline{B}}$	n_A
$\overline{A}$	$n_{\overline{A}B}$	$n_{\overline{A}\overline{B}}$	$n_{\overline{A}}$
ჯამი	n_B	$n_{\overline{B}}$	n

$$n_A = n_{AB} + n_{A\overline{B}}, \qquad n_{\overline{A}} = n_{\overline{A}B} + n_{\overline{A}\overline{B}},$$

$$n_B = n_{AB} + n_{\overline{A}B}, \qquad n_{\overline{B}} = n_{A\overline{B}} + n_{A\overline{B}},$$

$$n = n_A + n_{\overline{A}}, \qquad n = n_B + n_{\overline{B}}.$$

მაგალითი 1.1. ქოლერის საწინააღმდეგო აცრებსა და ქოლერით დაავადებას შორის კავშირი, იულისა და გრინვუდის 1915 წლის გამოკვლევის მიხედვით, 1.5 ცხრილით აღიწერება, რომელიც ნათლად მეტყველებს აცრების სასარგებლოდ.

ცხრილი 1.5

	არ დაავადებულა	დაავადდა	ჯამი
აიცრა	276	3	279
არ აცრილა	473	66	539
ჯამი	749	69	818

ადვილი წარმოსადგენია, რა შეიცვლება, თუ განვიხილავთ მესამე რიგის დაჯგუფებას, ანუ უმარტივეს შემთხვევაში ორ ორდონიან ნიშანს დაემატება კიდევ ერთი ორდონიანი ნიშანი.

თუ მეორე რიგის დაჯგუფებაში ორდონიანი ნიშნის ნაცვლად განვიხილავთ $A_1,\ldots,A_s$ დონეების მქონე პირველ ნიშანსა და $B_1,\ldots,B_l$ დონეების მქონე მეორე ნიშანს, და n_{ij} სიმბოლოთი აღვნიშნავთ იმ ერთეულების რაოდენობას (სიხშირეს), რომელთათვის შეთავსებულია ნიშნების A_i და B_j დონეები, გვექნება ორი ნიშნის შეუღლების ცხრილი 1.6.

აქ შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები: $n_{1\bullet}$, ... , $n_{s\bullet}$ არის პირველი ნიშნის A_1, ... , A_s დონეების შესაბამისი სიხშირეები, ხოლო $n_{\bullet 1}$, ... , $n_{\bullet l}$ – მეორე ნიშნის B_1, ... , B_l დონეების შესაბამისი სიხშირეები. გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} &n_{1\bullet}=n_{11}+\cdots+n_{1l}, \ldots, n_{s\bullet}=n_{s1}+\cdots+n_{sl}, \\ &n_{\bullet 1}=n_{11}+\cdots+n_{s1}, \ldots, n_{\bullet l}=n_{1l}+\cdots+n_{sl}, \\ &n_{\bullet\bullet}=n=n_{1\bullet}+\cdots+n_{s\bullet}=n_{\bullet 1}+\cdots+n_{\bullet l} \end{aligned} \tag{1.1}$$

(წერტილი ინდექსად ნიშნავს შესაბამისი ინდექსით შეკრებას).

ცხრილი 1.6

II (B_j) / I (A_i)	B_1	B_2	...	B_j	...	B_l	ჯამი
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1l}	$n_{1\bullet}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2l}	$n_{2\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{il}	$n_{i\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_s	n_{s1}	n_{s2}	...	n_{sj}	...	n_{sl}	$n_{s\bullet}$
	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	...	$n_{\bullet j}$	...	$n_{\bullet l}$	n

მაგალითი **1.2.** დავაკვირდეთ, როგორაა, შეუღლებული ორი ნიშანი – ქალაქში თუ სოფელში ცხოვრება (A და $\overline{A}$) და ოჯახის სულადობა სამცხე-ჯავახეთში 1998 წ. მონაცემების მაგალითზე (საქართველოს სტატისტიკის სახელმწიფო დეპარტამენტის მონაცემებით).

ცხრილი 1.7

ქალაქი ან სოფელი	ოჯახის სულადობა										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ჯამი
ქალაქი	5	6	6	8	2	9	4	0	1	1	42
სოფელი	10	20	13	11	24	11	0	0	0	0	89
ჯამი	15	26	19	19	26	20	4	0	1	1	131

ცხრილიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ოჯახის სულადობის მხრივ სოფლად და ქალაქად განსხვავებული მდგომარეობაა.

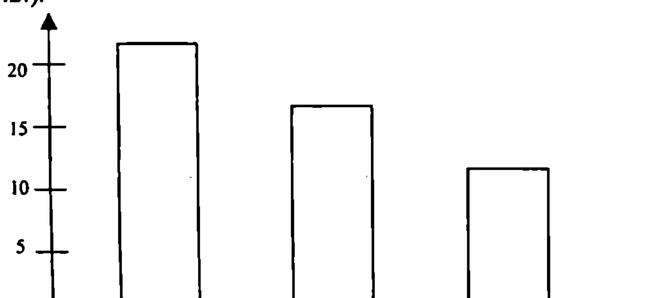
თვისებრივი მონაცემების განაწილების გრაფიკული წარმოდგენა. თვისებრივ მონაცემთა განაწილების გრაფიკული წარმოდგენისათვის ორი ძირითადი საშუალება არსებობს: მართკუთხედებიანი დიაგრამები და წრიული (სექტორებიანი) დიაგრამები.

მაგალითი **1.3.** ცხრილი 1.8 გვიჩვენებს ერთ-ერთი უნივერსიტეტის სტატისტიკის სპეციალობის სტუდენტთა დაყოფას კურსების მიხედვით.

ცხრილი 1.8.

კლასიფიკაცია კურსების მიხედვით	უმცროს-კურსელები	შუა-კურსელები	უფროს-კურსელები
სტუდენტთა რაოდენობა	16	22	12

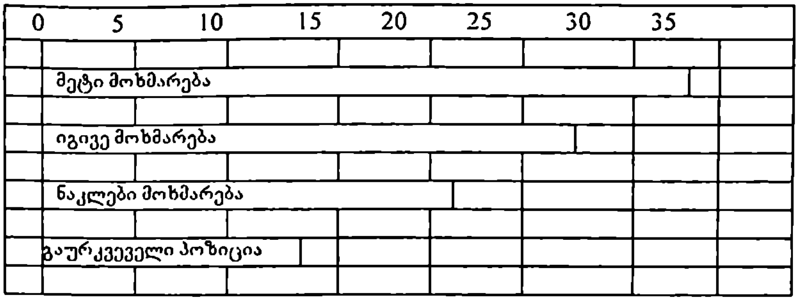
თუ ახლა 1.8 ცხრილის თვალსაჩინო წარმოდგენას მოვისურვებთ, ავიღოთ აბსცისათა ღერძზე მდებარე ტოლი ფუძეების მქონე სამი მართკუთხედი, რომელთა სიმაღლეები პროპორციულია სტუდენტთა რაოდენობისა კლასიფიკაციის ჯგუფებში და ისინი ერთმანეთისაგან ტოლი დაშორებით განვალაგოთ. ორდინატთა ღერძზე გადაიზომება სიხშირეები. ჯგუფები განვალაგოთ სიხშირეთა კლების მიხედვით (რაც, ცხადია, აუცილებელი არ არის, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც ვადარებთ სხვადასხვა ერთობლიობის ერთი და იგივე ტიპის ობიექტების დაყოფას თანამოსახელე ჯგუფებად, ან კიდევ ერთი და იგივე ერთობლიობის დაყოფას სხვადასხვა მომენტში). ასე მიღებულ ნახატს მართკუთხედებიანი დიაგრამა ვუწოდოთ. როცა მართკუთხედების ცვლადი სიმაღლე ორდინატთა ღერძის პარალელურია, ასეთ დიაგრამას სვეტოვან დიაგრამასაც უწოდებენ (ნახ. 1.2.).



ნახ. 1.2. სტუდენტთა კლასიფიკაცია კურსების მიხედვით

ცხადია, რომ ვერტიკალურ ღერძზე შეიძლებოდა გადაგვეზომა ფარდობითი სიხშირე სიხშირის მაგივრად.

ნახ. 1.3 გვიჩვენებს მართკუთხედებიან დაიგრამას ჰორიზონტალურად განლაგებული მართკუთხედებით, რომლის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ ამ მართკუთხედებში იოლად ისმება წარწერები.

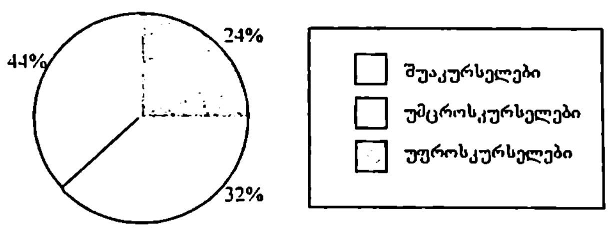


ნახ. 1.3. მართკუთხედებიანი დიაგრამა. ბუნებრივ აირზე 25%-იანი ფასდაკლების შემთხვევაში აირის მოხმარების შესაძლო ცვლილებების შესახებ გამოკითხვის შედეგები

მაგალითი 1.4. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს გამოკითხვის შედეგები ახლო მომავალში ბუნებრივი აირის ფასის 25%-ით დაკლების შემთხვევაში მოსახლეობის შესაძლო ქცევის შესახებ, რაც ასახულია შემდეგ მართკუთხედებიან დიაგრამაში (იხ. ნახ. 1.3.), რომელსაც დამატებითი კომენტარები აღარ ესაჭიროება.

წრიული დიაგრამა განკუთვნილია დროის მოცემულ მომენტში ან მოცემულ შუალედში ობიექტთა მოცემული რაოდენობის კომპონენტებად დაყოფის ანუ ამ ობიექტთა კლასიფიკაციის აღსანიშნავად, იგი უფრო მოხერხებულია პროცენტებში გამოთქმული ნაწილების ან ფარდობითი სიხშირეების გამოსახატავად

მაგალითი 1.5. (1.3 მაგალითის გაგრძელება) ნახ. 1.4 იძლევა 50 სტუდენტის სამ ჯგუფად დაყოფის 1.8 ცხრილში მოცემული მონაცემების წრიულ დიაგრამას. ამ დიაგრამის



ნახ. 1.4. წრიული დიაგრამა. სტუდენტთა განაწილება კურსების მიხედვით 1.8. ცხრილიდან

ასაგებად წრეში გავატაროთ სამი რადიუსი და ავაგოთ სექტორები (ვთქვათ, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით), რომლებიც შეადგენენ სრული კუთხის -360^0-ის შესაბამისად 22/50-ს ანუ 44%-ს (158.4^0), 16/50-ს ანუ 32%-ს (115.2^0), 12/50-ს ანუ 24%-ს (86.4^0).

§ 3. რაოდენობრივი მონაცემების სიხშირეთა განაწილება და მისი გრაფიკული წარმოდგენა

ვარიაციული მწკრივი. წერტილოვანი და მესერული დიაგრამები. ვთქვათ, ელემენტარული ერთეული ხასიათდება ერთი რაოდენობრივი x ნიშნით და ნედლი მონაცემები შედგება შემდეგი n დაკვირვებისაგან:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

პირველი, რაც შეიძლება სტატისტიკოსმა მოიმოქმედოს, ესაა ამ მიმდევრობის დალაგება არაკლებადი მიმდევრობის სახით:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)},$$

რასაც ვარიაციული მწკრივი ეწოდება. თუ ახლა $x^{(1)}$-ით ავღნიშნავთ მინიმალურ დაკვირვებულ მნიშვნელობას, $x^{(2)}$-ით – სიდიდით მეორე მნიშვნელობას ვარიაციულ მწკრივში და ა.შ. $x^{(s)}$-ით კი – მაქსიმალურს, მაშინ მივიღებთ ზრდად ვარიაციულ მწკრივს

$$x^{(1)} < x^{(2)} < \cdots < x^{(s)}$$

და თუ n_1-ით ავღნიშნავთ ვარიაციულ მწკრივში $x^{(1)}$-ის სიხშირეს (ანუ $x^{(1)}$-ის ტოლ მნიშვნელობათა რაოდენობას ვარიაციულ მწკრივში), n_2-ით – $x^{(2)}$-ის სიხშირეს და ა.შ., n_s-ით – $x^{(s)}$-ის სიხშირეს, მივიღებთ ზრდადი ვარიაციული მწკრივის შესაბამის სიხშირეებს, ანუ სიხშირეთა განაწილებას:

ცხრილი 1.9

$x^{(i)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	...	$x^{(s)}$	ჯამი
n_i	n_1	n_2	...	n_s	n

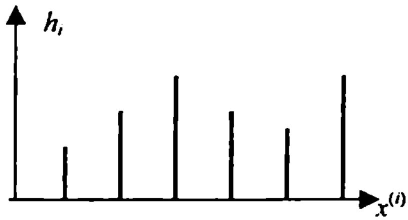
თუ გადავალთ $h_1 = n_1/n, \ldots, h_s = n_s/n$ ფარდობით სიხშირეებზე, სადაც $h_1 + h_2 + \cdots + h_s = 1$, ცხრილი 1.9-ის მაგიერ გვექნება ფარდობით სიხშირეთა განაწილება

ცხრილი 1.10

$x^{(i)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	...	$x^{(s)}$	ჯამი
h_i	h_1	h_2	...	h_s	1

1.9 და 1.10 ცხრილები შეიძლება წერტილოვანი დიაგრამის (ნახ. 1.5), ან მესერული დიაგრამის (ნახ. 1.6) სახით გამოისახოს (ეს დიაგრამები თვისებრივ მონაცემთა გამოსახვისათვისაც გამოდგება, ოღონდ აბსცისების ღერძზე უნდა გაკეთდეს შესაბამისი ჯგუფების აღმნიშვნელი წარწერები):

ნახ. 1.5. სიხშირეთა განაწილების წერტილოვანი დიაგრამა

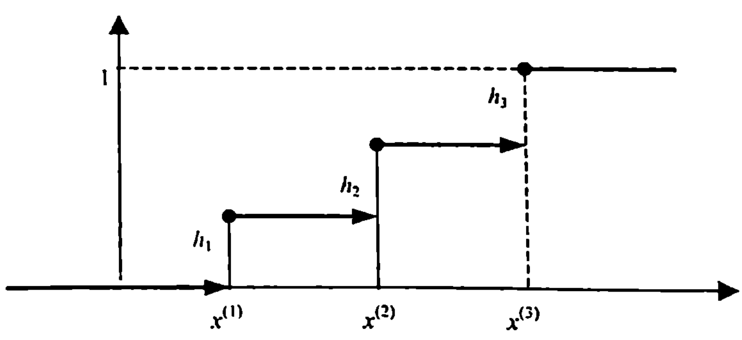


ნახ. 1.6. ფარდობით სიხშირეთა განაწილების მესერული დიაგრამა

დაგროვილ სიხშირეთა ფუნქცია (კუმულატა). ე.წ. დაგროვილ სიხშირეთა ან დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ფუნქციები, რომელთაც ჩვენ ახლა შემოვიღებთ, მოიცავენ სიხშირეთა განაწილებით და ფარდობით სიხშირეთა განაწილებით მოცემულ ინფორმაციას.

მოცემული ნამდვილი x რიცხვისათვის დაგროვილი სიხშირე $N_n(x)$ განისაზღვრება როგორც იმ $x^{(i)}$ მნიშვნელობათა სიხშირეების ჯამი, რომლებიც x-ს არ აღემატება (ანუ x-ზე ნაკლებია ან მისი ტოლია). თუ $N_n(x)$-ს n-ზე გავყოფთ, მივიღებთ $F_n(x)$ დაგროვილ ფარდობით სიხშირეს, რომელიც, ცხადია, იქნება იმ $x^{(i)}$ მნიშვნელობების ფარდობით სიხშირეთა ჯამი, რომლებიც არ აღემატება x-ს. ამრიგად, ვინაიდან $x^{(1)},\dots,x^{(k)}$ და მხოლოდ ისინი არ აღემატება იმ x-ს, რომელიც $x^{(k)}$-ზე ნაკლები არაა და ნაკლებია $x^{(k+1)}$-ზე, გვაქვს

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x^{(1)}, \\ \dfrac{n_1}{n}, & x^{(1)} \le x < x^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{n_1}{n} + \cdots + \dfrac{n_k}{n}, & x^{(k)} \le x < x^{(k+1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1, & x^{(s)} \le x. \end{cases} \tag{1.2}$$



ნახ.1.7. კუმულატას გრაფიკი (s=3)

როგორც აქედან ჩანს, $F_n(x)$ ფუნქცია უბან-უბან მუდმივია და მისი ზრდა ხდება $x^{(1)},...,x^{(s)}$ წერტილებში. $x^{(1)}$-ამდე $F_n(x)$ ნულია, $x^{(n)}$-ის მარჯვნივ (მისი ჩათვლით) კი – 1. ყოველ $x^{(k)}$ წერტილში $F_n(x)$ ფუნქცია მატულობს $h_k=n_k/n$ ფარდობითი სიხშირის ტოლი სიდიდით, სწორედ ეს უკანასკნელი გარემოება ნიშნავს, რომ $F_n(x)$ მოიცავს ფარდობით სიხშირეთა განაწილებით მოცემულ ინფორმაციას.

დაგროვილ (კუმულაციურ, კუმულატიურ) სიხშირეთა, ან ფარდობით სიხშირეთა ფუნქციას ზოგჯერ კუმულატას უწოდებენ.

მონაცემთა დაჯგუფება. სიხშირეთა ინტერვალური განაწილება. $x^{(1)},...,x^{(s)}$ ვარიანტების დიდი რაოდენობისათვის კუმულატა ძნელად აღსაქმელია და მისი გამოყენება შემდგომი ანალიზისათვის შეზღუდულია. ამ შემთხვევაში, განსაკუთრებით კი უწყვეტ მონაცემთა აღწერისას მიმართავენ დაჯგუფებას და სიხშირეებს და კუმულაციურ სიხშირეებს დაჯგუფებული მონაცემებისათვის გამოთვლიან.

დაჯგუფების მიზნით ინტერვალი, რომელშიც მოთავსებულია დაკვირვებული მნიშვნელობები $x_{\min}$ მინიმალური მნიშვნელობიდან $x_{\max}$ მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე დაიყოფა ტოლი ან არატოლი სიგრძის რამდენიმე ინტერვალად:

$$x_{\min} = a_0 \le x < a_1, \;\; a_1 \le x < a_2, \; . \; . \; . \; , a_{l-1} \le x \le a_l = x_{\max}.$$

შემდეგ გამოიყოფა ამ ინტერვალებში მოთავსებულ დაკვირვებათა ჯგუფები, რომელთა სიხშირეები $n_1,...,n_l$ სიმბოლოებით აღინიშნება.

თუ ახლა გავიხსენებთ $[a,b)=\{x\colon a\le x<b\}$ და $[a,b]=\{x\colon a\le x\le b\}$ აღნიშვნებს ნახევრად ღია და ჩაკეტილი ინტერვალებისათვის რიცხვით ღერძზე, მივიღებთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ინტერვალურ განაწილებებს, რომლებიც შემდეგი ცხრილით მოიცემა:

ცხრილი 1.11

ინტერვალი	$[a_0,a_1)$	$[a_1,a_2)$	...	$[a_{l-1},a_l]$	ჯამი
სიხშირე	n_1	n_2	...	n_l	n
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_l}{n}$	1

ზოგჯერ სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) ინტერვალური განაწილების ნაცვლად იხილავენ მის დისკრეტიზაციას ანუ განაწილებას, რომელიც ყოველი ინტერვალის შუაწერტილს მიაწერს ინტერვალის შესაბამის სიხშირეს (ფარდობით სიხშირეს).

ცხრილი 1.12

ინტერვალის ცენტრი	$(a_0+a_1)/2$	$(a_1+a_2)/2$	. . .	$(a_{l-1}+a_l)/2$	ჯამი
სიხშირე	n_1	n_2	. . .	n_l	n
ფარდობითი სიხშირე	n_1/n	n_2/n	. . .	n_l/n	1

ჰისტოგრამა. მონაცემების დაჯგუფებისას როგორც წესი, ტოლი სიგრძის ინტერვალებს ამჯობინებენ, თუმცა ზოგჯერ გამართლებულია განსხვავებული სიგრძის ინტერვალების განხილვაც. ინტერვალების არაერთგვაროვნების მაჩვენებელია შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, ერთი ინტერვალის სიგრძეა 10 და იგი 30 დაკვირვებას შეიცავს, მეორის სიგრძეა 4 და მასში 20 დაკვირვებაა. პირველში სიგრძის ერთეულზე მოდის საშუალოდ 3 დაკვირვება, ხოლო მეორეში – 5. ამდენად გამართლებულია სიხშირეთა სიმკვრივის, ანუ

$$\xi_k = \frac{n_k}{\Delta a_k}, \quad k=1, \ldots, l,$$

ფარდობის შემოღება, სადაც $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$. ანალოგიურად მივიღებთ ფარდობითი სიხშირის სიმკვრივესაც:

$$\eta_k = \frac{h_k}{\Delta a_k} = \frac{n_k}{n\Delta a_k}, \quad k=1, \ldots, l.$$

თუ ახლა 1.11 ცხრილის ინტერვალების სიხშირეთა სიმკვრივეებს შესაბამის ინტერვალებში Ox ღერძის პარალელური მონაკვეთებით გამოვსახავთ ღერძიდან ξ_k სიმაღლეზე, მივიღებთ $\xi(x)$ სიხშირეთა ჰისტოგრამას, ხოლო ფარდობით სიხშირეთა სიმკვრივეების ანალოგიური გამოსახვით Ox ღერძის პარალელური მონაკვეთებით ღერძიდან η_k სიმაღლეზე – $\eta(x)$ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამას, ყოველ $[a_{k-1},a_k)$ ინტერვალზე, როგორც ფუძეზე, აგებულია პირველ შემთხვევაში n_k ფართობის მართკუთხედი, ხოლო მეორეში – $\xi_k = \frac{n_k}{n}$ ფართობისა. $\xi(x)$ სიხშირეთა ჰისტოგრამისათვის ამ ფართობების ჯამია n, ხოლო $\eta(x)$ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამისათვის – 1.

ჰისტოგრამათა აგების მოყვანილი წესი მოკლედ 1.13 ცხრილით გამოისახება.

ცხრილი 1.13. სიხშირეთა ჰისტოგრამა $\xi(x)$ და ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა $\eta(x)$

ინტერვალი	$x < a_0$	$[a_0,a_1)$	$[a_1,a_2)$	...	$[a_{l-1},a_l)$	$x \geq a_l$
$\xi(x)$	0	$\xi_1=\frac{n_1}{\Delta a_1}$	$\xi_2=\frac{n_2}{\Delta a_2}$	...	$\xi_l=\frac{n_l}{\Delta a_l}$	0
$\eta(x)$	0	$\eta_1=\frac{h_1}{\Delta a_1}$	$\eta_2=\frac{h_2}{\Delta a_2}$	...	$\eta_l=\frac{h_l}{\Delta a_l}$	0

$\xi(x)$ და $\eta(x)=\xi(x)/n$ ფუნქციები ერთი და იგივე ნახაზზე გამოვსახოთ, ოღონდ $\eta(x)$-ის შემთხვევაში ორდინატთა ღერძზე მასშტაბი n-ჯერ მეტი უნდა ვიგულისხმოთ (იხ. ნახ.1.8).

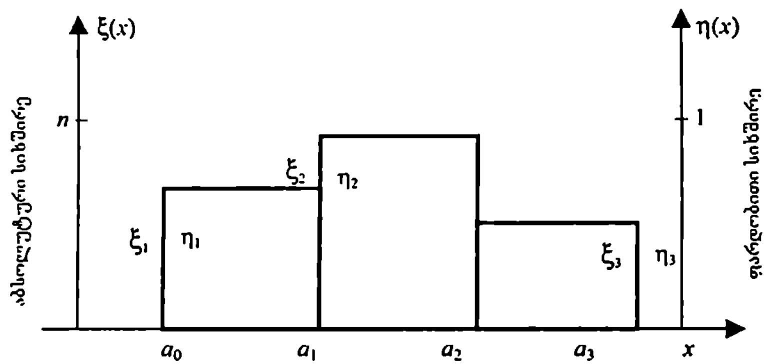
სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების აგებისას ინტერვალების რაოდენობისა და სიგანის განსაზღვრისათვის საყოველთაოდ მიღებული წესი არ არსებობს. სტატის-

ტიკურ ლიტერატურაში რეკომენდებულია 5-დან 20-მდე ტოლი სიგრძის ინტერვალის აგება, მაგრამ საკითხი ყოველ კერძო შემთხვევაში ცალკეა გადასაწყვეტი.

თუ ტოლი Δ სიგრძის ინტერვალებს ვაგებთ, მაშინ მათი l რაოდენობა

$$l = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta}$$

ფორმულით განისაზღვრება.



ნახ. 1.8. სიხშირეთა ჰისტოგრამა $\xi(x)$ და ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა $\eta(x)$ (l=3)

მაგალითი 1.6. ავაგოთ სიხშირეთა პოლიგონი დიდი ზომის ავტომანქანებში საწვავის დანახარჯზე 100 დაკვირვების მეშვეობით. 1.14 ცხრილი გვიჩვენებს გარბენის იმ მანძილს მილებში (1 მილი = 1.609 კმ), რომელსაც ყოფნის 1 გალონი (1 გალონი = 3.78 ლ) საწვავი (1 მილი/გალონზე = 1.426 კმ/ლ).

ცხრილი 1.14. საწვავის ხარჯზე 100 დაკვირვების შედეგები

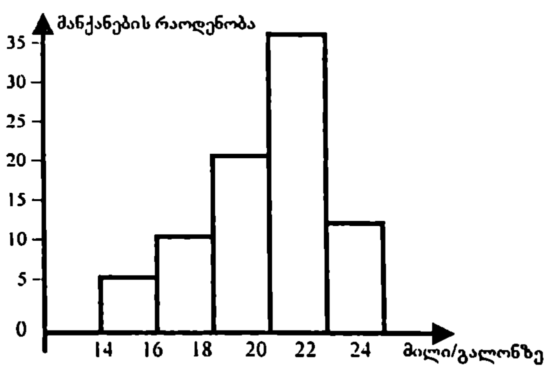
მილი / გალონზე									
19.0	20.8	22.0	22.7	20.0	18.9	16.6	16.8	20.8	14.7
15.1	21.8	21.1	21.5	21.1	15.5	19.3	15.1	20.6	16.8
18.2	20.5	15.3	16.2	16.3	22.8	22.7	21.9	22.5	17.1
19.1	21.6	19.0	18.3	18.6	22.1	17.5	22.9	21.7	18.7
21.9	20.2	14.5	14.1	22.9	20.2	17.3	22.6	19.3	21.7
21.5	22.6	18.7	19.2	22.8	21.6	21.7	20.5	22.7	20.4
18.8	15.1	16.5	20.5	19.1	17.4	19.7	19.2	16.4	21.9
14.3	19.2	19.7	17.1	21.4	21.9	21.7	19.2	23.9	19.6
20.9	18.5	20.2	18.2	20.2	22.4	20.4	21.6	21.3	22.4
20.5	18.1	20.7	21.3	16.9	20.3	23.9	18.8	21.1	21.9

თუ მოცემული პოპულაციისათვის დაჯგუფების 5 ინტერვალს ავირჩევთ, მაშინ $\Delta = (23.9-14.1):5=1.96$ (მილი/გალონზე). სიმარტივისათვის ეს მნიშვნელობა დავამრგვალოთ 2-ამდე და მინიმუმად ავიღოთ 14, ხოლო მაქსიმუმად – 24. ამრიგად, პირველი ინტერვალია [14.0;16.0), რომლის 2 ერთეულით მარჯვნივ გაწევით 4-ჯერ ზედიზედ მივიღებთ დაჯგუფების კიდევ 4 ინტერვალს, სიხშირეთა გამოთვლის შედეგები მოყვანილია 1.15 ცხრილში.

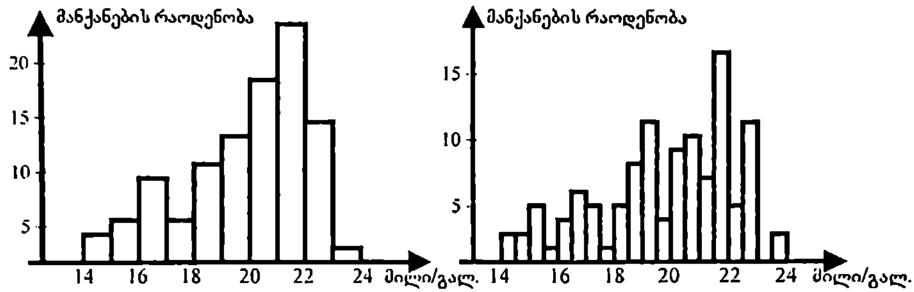
ცხრილი 1.15.

ინტერვალი	სიხშირეთა გამოთვლა	სიხშირე
[14.0;16.0)	卌 ||||	9
[16.0;18.0)	卌 卌 |||	13
[18.0;20.0)	卌 卌 卌 卌 ||||	24
[20.0;22.0)	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |||	38
[22.0;24.0)	卌 卌 卌 |	16
	სულ	100

1.15 ცხრილის მიხედვით აგებულია ნახ. 1.9. (a)-ზე გამოსახული სიხშირეთა ჰისტოგრამა. იგივე მონაცემები დაჯგუფების 10 და 20 ინტერვალით შესაბამისად იძლევიან 1.9 (b) და 1.9 (c) სურათებს. შევნიშნოთ, რომ ჰისტოგრამა სულ უფრო და უფრო დაკბილული ხდება დაჯგუფების ინტერვალთა რაოდენობის ზრდასთან ერთად. დაჯგუფების 5 და 10 ინტერვალი იძლევა მკაფიოდ გამოხატულ კანონზომიერებას, მაშინ როცა 20 ინტერვალის შემთხვევაში გაჩნდა ბევრი, მოვლენის შინაარსიდან გამომდინარე, აზრს მოკლებული ოსცილაცია, რაც გამოწვეულია მონაცემთა მოცემული რაოდენობისათვის დაჯგუფების ინტერვალთა დიდი რაოდენობით.



(a) 5 ინტერვალი



(b) 10 ინტერვალი (c) 20 ინტერვალი

ნახ. 1.9. საწვავის ხარჯის სიხშირეთა ჰისტოგრამები 100 მონაცემისათვის

ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა. სიხშირეთა განაწილება გრაფიკულად შეიძლება გამოისახოს აგრეთვე ე.წ. ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამით, რაც გულისხმობს მოცემული რიცხვებიდან ათობითი ნიშნის გამოყოფას (ფოთლები) და დანარჩენი ნიშნების შესაბამისი რიცხვების ზრდის მიხედვით ჩამოწერას თითოჯერ ზევიდან ქვემოთ ვერტიკალურად (ვერტიკალური ღერო), ხოლო შემდეგ, ვერტიკალურ ღეროზე დატანილი ფიქსირებული პირველი რამდენიმე საერთო ათობითი ნიშნის გვერდით, ამ რიცხვების ბოლო ათობითი ნიშნების (ფოთლების) ამოწერას რიგრიგობით ჰორიზონტალურად (ჰორიზონტალური ღერო).

მაგალითი **1.7.** (1.6 მაგალითის გაგრძელება) 1.6 მაგალითისათვის „ვერტიკალურ ღეროს“ შეადგენენ ორნიშნა რიცხვები (ერთეულები და ათეულები), „ფოთლებს“ – მეათედები, ხოლო მოცემული ორნიშნა რიცხვის შესაბამისი „ფოთლები“ – „ჰორიზონტალურ ღეროს“.

ცხრილი 1.16. ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა 1.7. მაგალითისათვის

ვერტიკალური ღერო

	ფოთლები (ბოლო ათობითი ნიშანი)
14.	3 5 1 7
15.	1 1 3 5 1
16.	5 2 3 9 6 8 4 8
17.	1 4 5 3 1
18.	2 8 5 1 7 3 2 6 9 8 7
19.	0 1 2 0 7 2 1 3 7 2 2 3 6
20.	9 5 8 5 2 2 7 5 0 2 2 3 4 5 8 6 4
21.	9 5 8 6 1 5 3 1 4 6 9 7 7 9 6 7 3 1 7 9 9
22.	6 0 7 9 8 8 1 4 7 9 6 5 7 4
23.	9 9

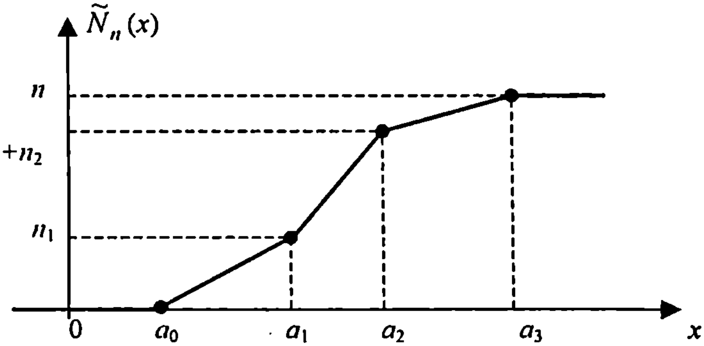
ჰორიზონტალური ღეროები

ვერტიკალური ხაზის მარჯვნივ მიწერილია მეათედები. მთლიანად სურათი არსებითად ჰისტოგრამის სახეს იღებს (თუ სურათს 90^0-ით მოვაბრუნებთ). ცხადია, რომ ათობითი ნიშნების დიდი რაოდენობისათვის ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა შეიძლება რთული ასაგები შეიქნეს. ამგვარი დიაგრამა თვალსაჩინოა და ზოგ სიტუაციაში

აადვილებს გამოთვლებს. მაშინ, როცა ჰისტოგრამის აგებისას მონაცემებში არსებული ინფორმაცია სრულად არ ინახება, ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა არ კარგავს არცერთ მონაცემს და ამას გარდა ჰისტოგრამის ფორმასაც იძენს. ეს დიაგრამა ე.წ. მონაცემთა დაზვერვითი ანალიზის ერთ-ერთი იარაღია; ამ დარგის შემქმნელია ცნობილი ამერიკელი სტატისტიკოსი ჯ. ტიუკი.

ოგივა. თუ ახლა წარმოვიდგენთ, რომ x წერტილი გაირბენს $[a_0,a_l]$ სეგმენტს და გამოვითვლით სიხშირეთა ჰისტოგრამასა და Ox ღერძს შორის მოთავსებული არის იმ ნაწილის ფართობს, რომელიც x წერტილში აღმართული მართობის მარცხნივაა, მივიღებთ $\widetilde{N}_n(x)$ დაგროვილ სიხშირეთა ფუნქციას (კუმულატას) ინტერვალური მონაცემებისათვის ანუ ოგივას, ხოლო ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამის შემთხვევაში – დაგროვილ ინტერვალურ ფარდობით სიხშირეთა $\widetilde{F}_n(x)$ ფუნქციას.

ამრიგად, თუ ინტერვალების გამყოფ წერტილებზე აღვმართავთ Ox ღერძის მართობულ მონაკვეთებს, რომელთა სიგრძეები დაგროვილი სიხშირეების ტოლია, მაშინ მართობების ბოლო წერტილების შეერთებით მივიღებთ ოგივას $[a_0,a_l]$ სეგმენტს. a_0-იდან მარცხნივ ოგივა იგივურად 0-ია, ხოლო a_l-ს მარჯვნივ კი n. ოგივას განტოლების ამოწერა არაა რთული. ჩვენ ამოვწერთ (1.2) ფორმულის ანალოგიურ ფორმულას ფარდობით სიხშირეთა ინტერვალური განაწილებისათვის



ნახ. 1.10. ოგივა ($l=s$)

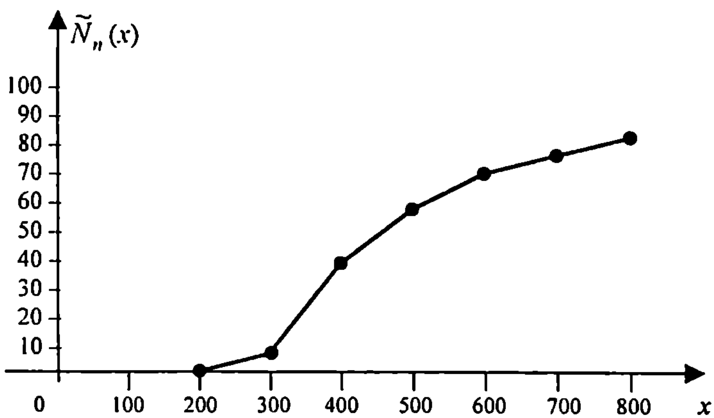
$$\widetilde{F}_n(x)=\begin{cases}0, \quad x\le a_0,\\ \dfrac{x-a_0}{a_1-a_0}\dfrac{n_1}{n}, \quad a_0\le x\le a_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{n_1}{n}+\dots+\dfrac{n_k}{n}+\dfrac{x-a_k}{a_{k+1}-a_k}\dfrac{n_{k+1}}{n}, \quad a_k\le x\le a_{k+1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 1, \quad a_l\le x.\end{cases}$$

მაგალითი **1.8.** მოცემულია ტელევიზორების გაყიდვის მონაცემები 100 მაღაზიაში. ავაგოთ ოგივა.

ცხრილი 1.17.

გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობა	მაღაზიების რაოდენობა – სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე
[100,200]	0	0
[200,300]	5	0+5 = 5
[300,400]	39	5+39 = 44
[400,500]	31	44+31 = 75
[500,600]	16	75+16 = 91
[600,700]	6	91+6 = 97
[700,800]	3	97+3 = 100

შესაბამისი ოგივა შემდეგი 7 წერტილით აიგება: (200;0), (300;5), (400;44), (500;75), (600;91), (700;97), (800;100).



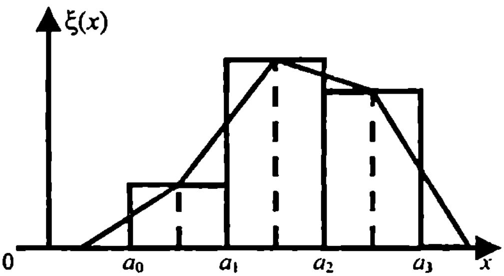
ნახ. 1.11. ოგივა გაყიდული ტელევიზორებისათვის

ასეთივე მრუდი დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეებისათვის მხოლოდ მასშტაბით განსხვავდება 1.11 ნახაზზე მოცემულისაგან.

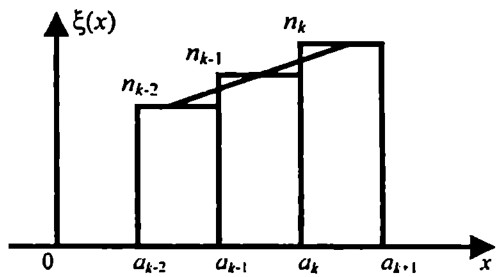
პოლიგონი. ჰისტოგრამასთან ერთად განიხილავენ ე.წ. პოლიგონსაც. დისკრეტული მონაცემებისათვის პოლიგონი მიიღება წერტილოვანი დიაგრამის წერტილების შეერთებით (იხ. ნახ. 1.2). ინტერვალური მონაცემებისათვის ხდება მათი დისკრეტიზაცია 1.12 ცხრილის მიხედვით და მონაკვეთებით აერთებენ მიღებულ წერტილებს. როდესაც $\Delta a_1 = \dots = \Delta a_l = \Delta$. Ox ღერძზე პირველი ინტერვალის მარცხნივ, მისი

შუაწერტილიდან Δ მანძილზე და ბოლო ინტერვალის შუაწერტილიდან მარჯვნივ იგივე Δ მანძილზე აიღება წერტილები და ისინიც უერთდება მიღებული ტეხილის უახლოეს წერტილებს (ნახ. 1.12). ამგვარად მიღებულ ტეხილს (რომელიც უკვე დასრულებული პოლიგონია) და Ox ღერძს შორის ფართობი სიხშირეთა შემთხვევაში n-ის ტოლია, ხოლო ფარდობით სიხშირეთა შემთხვევაში – 1-ისა.

პოლიგონსა და ცალკეულ ინტერვალს შორის მოთავსებული, ბოლოებზე აღმართული მართობებით შემოფარგლული ფიგურის ფართობი საზოგადოდ აღარ იქნება n_k სიხშირის ტოლი. ეს ასე იქნება იმ ინტერვალისათვის, რომლის შუაწერტილის და მეზობელი მარცხენა და მარჯვენა ინტერვალების შუაწერტილების შესაბამისი წერტილები პოლიგონზე ერთ წრფეზე მდებარეობენ (ნახ. 1.13).



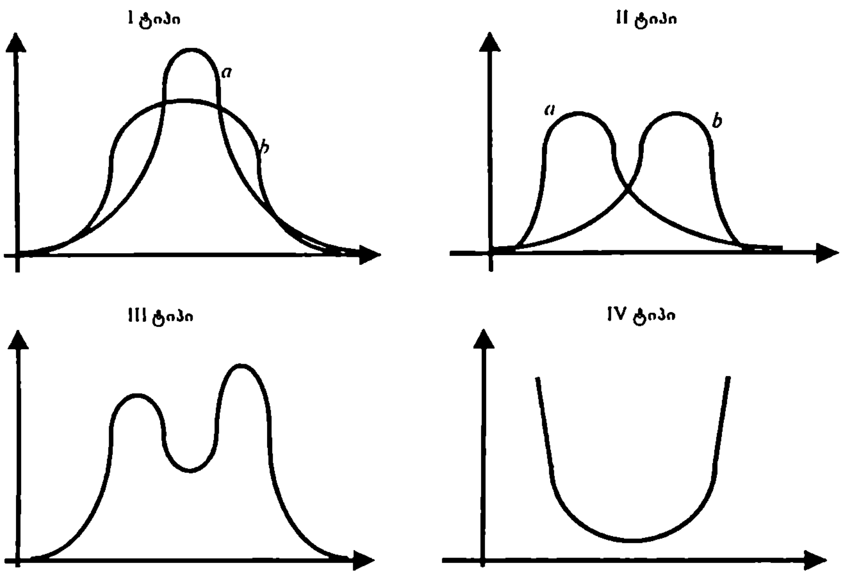
ნახ. 2.12. პოლიგონი



ნახ. 2.13. ჰისტოგრამის მართკუთხედისა და პოლიგონის ტრაპეციის ტოლდიდობის შემთხვევა

სიხშირეთა განაწილების ფორმები. ჰისტოგრამისა და პოლიგონის მეშვეობით ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ განაწილებათა ტიპობრივი ფორმები, რაც მნიშვნელოვანია განაწილებათა შედარებისას. უმნიშვნელოვანესი ტიპები ნახ. 1.14-ზეა გამოსახული. ცხადია, რომ რაც მეტია შერჩევის მოცულობა და დაჯგუფების ინტერვალთა რაოდენობა და რაც ნაკლებია ინტერვალის სიგრძე, მით უფრო გლუვი იქნებიან ჰისტოგრამა და პოლიგონი. ამიტომ განაწილების სავარაუდო ფორმები შეგვიძლია გლუვი წირების მეშვეობით წარმოვიდგინოთ.

პირველი ტიპის მრუდი იმ გარემოებას ასახავს, რომ კიდურა მნიშვნელობანი უფრო იშვიათად გვხვდება, ვიდრე შუალედური. ამასთან b მრუდი უფრო მდორედ იცვლება, ვიდრე a მრუდი. ორივე მრუდს ერთადერთი წვერო აქვს მნიშვნელობათა სიმრავლის შუაში და ამ მნიშვნელობის ირგვლივ ეს მრუდები სიმეტრიულია.



ნახ. 1.14. სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) განაწილების ტიპები

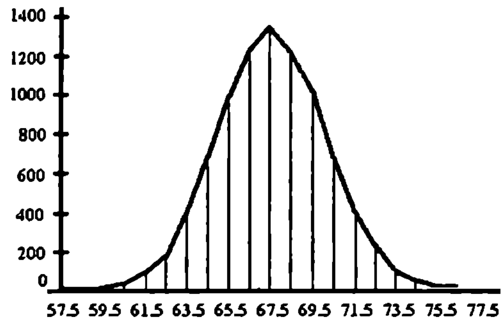
მაგალითი 1.9. განვიხილოთ ინგლისში, შოტლანდიასა და უელსში დაბადებული 8585 მოზრდილი მამაკაცის სიმაღლეთა განაწილება. აქ x სიმაღლეა დიუიმებში, n_x – ინტერვალის სიხშირე.

ცხრილი 1.18.

x	n_x	x	n_x
57 – 58	2	68 – 69	1230
58 – 59	4	69 – 70	1063
59 – 60	14	70 – 71	646
60 – 61	41	71 – 72	392
61 – 62	83	72 – 73	202
62 – 63	169	73 – 74	79
63 – 64	394	74 – 75	32
64 – 65	669	75 – 76	16
65 – 66	990	76 – 77	5
66 – 67	1223	77 – 78	2
67 – 68	1329	Σn_x	8585

თუ ახლა 67–68 ინტერვალიდან თანაბრად დაშორებულ ინტერვალებს განვიხილავთ, ვნახავთ, რომ მათთვის გვაქვს სიხშირეები 1223 და 1230, 990 და 1063, 669 და 646,

394 და 392, 83 და 79, 41 და 32, 14 და 16, 4 და 5, 2 და 2. ამ განაწილების სიმეტრია უფრო ცხადი შეიქნება, თუ ავაგებთ სიხშირეთა შესაბამის პოლიგონს.



ნახ. 1.15.

მეორე ტიპის განაწილება ასიმეტრიულია წვეროს შესაბამისი მნიშვნელობის (ინტერვალის) გარშემო. *b* მრუდი მარცხნივ დამრეცია, მარჯვნივ კი ციცაბოდ ეშვება. მაქსიმალური სიხშირის მნიშვნელობის მარცხნივ მნიშვნელობათა სპექტრი უფრო განიერია, ვიდრე მარჯვნივ, და ამ მნიშვნელობისაგან ერთი და იგივე მანძილზე გადახრათაგან მარცხენას უფრო მეტი სიხშირე აქვს ვიდრე მარჯვენას. ამგვარი ასიმეტრია არის მარცხენა ასიმეტრია. *a* მრუდი სიხშირეთა ზუსტად შებრუნებულ ყოფაქცევას გვიჩვენებს, ანუ მარჯვენა ასიმეტრია გააჩნია. უკიდურესად მარცხენა ასიმეტრიის მქონე მრუდს, რომელსაც მაქსიმალური სიხშირე მარჯვენა ბოლოში აქვს, ლათინური *j*-ს ფორმა აქვს, უკიდურესად მარჯვენა ასიმეტრიის მრუდი, რომელიც მაქსიმალური სიხშირიდან დაბლა ეშვება, *j*-ს სარკულ ანასახს დაემსგავსება.

მარცხენა ასიმეტრიის მაგალითია საწვავის ხარჯის მაგალითი 1.7, ხოლო მარჯვენასი – ტელევიზორების გაყიდვის მაგალითი 1.8. მარჯვენა ასიმეტრიის კიდევ ერთი მაგალითია.

მაგალითი **1.10.** x ასაკში კეთრით დაავადებულთა n_x რაოდენობები ჰავაის კუნძულებზე შემდეგი ცხრილითაა მოცემული. დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაა 1058. x-ისათვის ცხრილში მოცემულია ინტერვალი და შესაბამისი n_x ინტერვალური სიხშირე.

ცხრილი 1.19.

x	n_x	x	n_x	x	n_x
1 – 5	8	31 – 35	79	61 – 65	18
6 – 10	56	36 – 40	89	66 – 70	18
11 – 15	163	41 – 45	44	71 – 75	3
16 – 20	204	46 – 50	48	76 – 80	3
21 – 25	143	51 – 55	41	81 – 85	1
26 – 30	114	56 – 60	26	Σn_x	1058

მორიგი მაგალითი კვლავ მარჯვენა ასიმეტრიისაა, ოღონდ ამჯერად თითქმის უკიდურესად მარჯვენა ასიმეტრიისა.

მაგალითი **1.11.** x იყოს იონჯის მრგვალი მჭამელის მიერ დაზიანებული მარცვლების რაოდენობა იონჯის პარკში, n_x – შესაბამისი სიხშირეები, რომელთა ჯამია 1040.

ცხრილი 1.20.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σn_x
n_x	194	244	228	150	97	60	38	20	3	3	3	1040

მესამე ტიპის მრუდს რამდენიმე წვერო აქვს. ასეთი მრუდები მაშინ ჩნდება, როდესაც პოპულაცია, რომლის თვისებებსაც ასახავს პოპულაციიდან ამორჩეული მონაცემებით აგებული მრუდი, არაერთგვაროვანია, ე.ი. პოპულაცია ფაქტობრივად სხვადასხვა თვისებების მქონე რამდენიმე პოპულაციისაგან შედგება. მაგალითად, თუ ადამიანთა პოპულაციიდან, სადაც ქალებიც და მამაკაცებიც საკმაო რაოდენობითაა, გამოვყოფთ შერჩევას, მაშინ სიმაღლეთა პოლიგონს ორი წვერო ექნება. საქმე ისაა, რომ ცალკე ქალების და ცალკე მამაკაცების სიმაღლეთა განაწილება თითქმის სიმეტრიულია (იხ. მაგალითი 1.9) და მათ თავთავისი განსხვავებული ცენტრალური მნიშვნელობები გააჩნიათ, რომელთა გარშემოც თავს იჩენს სიმეტრია, ხოლო ამ ერთობლიობათა გაერთიანებას კი ექნება ორწვერა განაწილება.

მეოთხე ტიპის მრუდი გვიჩვენებს, რომ კიდურა მნიშვნელობები უფრო ხშირად გვხვდება, შუა მნიშვნელობები კი – იშვიათად. ეს მრუდიც სიმეტრიულია, მაგრამ ორი წვერო გააჩნია კიდურა მნიშვნელობებზე, სადაც მაქსიმალური სიხშირეებია. იგი დიდ ლათინურ U-ს წააგავს.

მაგალითი **1.12.** მეტეოროლოგიაში ღრუბლიანობა იზომება ბალებით. 0 ბალი გვიჩვენებს, რომ ცა სრულიად მოწმენდილია, 1 ნიშნავს, რომ ცის 1/10 ღრუბლებს უკავია, 2 – 2/10 და ა.შ. ვროცლავში (პოლონეთი) ღრუბლიანობაზე დაკვირვების მიხედვით 1876–1895 წლებში (სულ 3653 დაკვირვება) გვაქვს შემდეგი

ცხრილი 1.21.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σn_x
n_x	751	179	107	69	46	9	21	71	194	117	2089	3653

აქ x ბალია, n_x – შესაბამისი სიხშირე. ცხადია, რომ ესაა U-ს მაგვარი განაწილება.

* * *

ამ თავში გამოყენებული იყო წიგნები [60], [65], [53], [54], რომელშიც კიდევ საკმარისი მასალაა აქ გადმოცემული საკითხების უფრო ღრმად შესასწავლად.

სტატისტიკურ მონაცემთა ცხრილების შედგენის მეთოდოლოგიას, დაჯგუფების პრინციპებს და აღწერითი სტატისტიკის სხვა ხერხებს, სტატისტიკის ისტორიის და ტერმინოლოგიის საკითხებს შეგიძლიათ გაეცნოთ გ. გამყრელიძის [5], რომელიც

თეორიული სტატისტიკის ერთ-ერთი პირველი ორიგინალური სახელმძღვანელოა ქართულ ენაზე (სამწუხაროდ გამოიცა ამ წიგნის მხოლოდ პირველი ნაწილი).

ისევე როგორც ქართულ ენაზე დაწერილ სხვა წიგნებში ზოგადი, სოციალურ-ეკონომიკური და დემოგრაფიული სტატისტიკის საკითხებზე ტერმინოლოგიური ლექსიკონების ჩათვლით (იხ. [2], [4], [6], [7], [16], ეს მხოლოდ მცირე ნაწილია ქართულ ენაზე არსებული როგორც ორიგინალური, ისე ნათარგმნი ლიტერატურისა ამ დარგებში).

დასკვნები

სტატისტიკური პოპულაცია არის ობიექტთა გარკვეული სიმრავლის კონკრეტული მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა ერთობლიობა. ერთეული მონაცემი ანუ დაკვირვება არის ცალკეული ობიექტის ანუ ელემენტარული ერთეულის კლასიფიკაციის ან გაზომვის შედეგი. სტატისტიკური კვლევის მიზანია (სტატისტიკური) პოპულაციის შესწავლა, რისთვისაც, როგორც წესი, სხვა გზა არ არსებობს თუ არა პოპულაციის რაიმე ნაწილში ანუ შერჩევაში არსებული ინფორმაციის გამოყენება. პოპულაციის მონაცემები შესაძლოა სრულად პრინციპულადაც კი ვერ შეგროვდეს (ანუ სრული აღწერა შეუძლებელია), ამდენად ზოგი პოპულაცია მხოლოდ წარმოსახვითია. შერჩევათა ბაზისი, ანუ პოპულაციის ბაზისი არის პოპულაციის შემადგენელი ელემენტარული ერთეულების ჩამონათვალი.

პოპულაციისა და შერჩევის საერთო სახელია (სტატისტიკური) ერთობლიობა.

განირჩევიან თვისებრივი და რაოდენობრივი ერთობლიობანი. თვისებრივი მონაცემები ელემენტარულ ერთეულთა კლასიფიკაციის შედეგებია ერთი ან რამდენიმე თვისებრივი მახასიათებლის მიხედვით. რაოდენობრივი მონაცემები თვლის ან ფიზიკური გაზომვის შედეგებია. ისინი შეიძლება იყოს ან დისკრეტული ან უწყვეტი. დისკრეტულ მონაცემებს აქვთ ერთმანეთისაგან დაშორებული მნიშვნელობები, უწყვეტ მონაცემებს კი შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობა რაიმე ინტერვალიდან. რაოდენობრივი მონაცემები გაზომვის სკალების ან რაც იგივეა, გაზომვის დონის მიხედვით განასხვავებენ სახელდებით, რიგობრივ, ინტერვალურ და ფარდობით მონაცემებად. სახელდებითი მონაცემები კატეგორიებზე მიწერილი კოდებია; შემდეგი დონეა რიგობრივი მონაცემები, რომელთა რიგს მნიშვნელობა ენიჭება; ინტერვალურ მონაცემებში მნიშვნელოვანია როგორც რიგი, ისე მონაცემთა შორის სხვაობა, ხოლო ფარდობით მონაცემებს აქვთ ინტერვალური მონაცემების ყველა თვისება და შეიცავენ გარკვეულ ნულოვან წერტილსაც. სტატისტიკური ტექნიკის (გამოთვლების მეთოდების) უდიდესი ნაწილი არ განარჩევს ინტერვალურ და ფარდობით მონაცემებს, მაგრამ გულისხმობს, რომ მონაცემებს ინტერვალური დონე მაინც გააჩნიათ.

თავდაპირველ მონაცემებს დალაგებისა და დაჯგუფების გარეშე ნედლი მონაცემები ეწოდება.

მონაცემებს ერთი თვისებრივი ნიშნის დონეთა შესახებ უკავშირდება თვისებრივი ერთობლიობის პირველი რიგის დაჯგუფება და შესაბამის სიხშირეთა განაწილება. ჯგუფის სიხშირე იმ დაკვირვებათა რაოდენობაა, რომელიც ნიშნის ცალკეულ დონეს შეესაბამება. რამდენიმე ნიშნის შეთავსების მონაცემები განსაზღვრავს მაღალი (მეორე, მესამე და ა.შ.) რიგის დაჯგუფებებს და ჯგუფურ სიხშირეთა სისტემა შეადგენს თვისებრივ ნიშანთა ატრიბუტების შეუღლების ცხრილს. ერთი თვისებრივი ნიშნის

განაწილების გრაფიკული აღწერის საშუალებებია მართკუთხედებიანი დიაგრამა და წრიული დიაგრამა. მართკუთხედებიანი დიაგრამა თანაბარი სიგანისა და კლასების მოცულობის პროპორციული სიმაღლის ერთმანეთისაგან დაშორებული ვერტიკალური ან ჰორიზონტალური მართკუთხედების სისტემაა, ხოლო წრიული დიაგრამა დროის მოცემულ მომენტში ან შუალედში ერთობლიობის ნაწილებად დაყოფას გამოხატავს, რისთვისაც წრე პროპორციულ სექტორებად იყოფა.

მონაცემები ერთი რაოდენობრივი ნიშნის შესახებ შეიძლება განლაგდეს ამ ნიშნის ზრდის მიხედვით, რაც იძლევა ვარიაციულ მწკრივს. განსხვავებულ მნიშვნელობათა გამოყოფა გვაძლევს ზრდად ვარიაციულ მწკრივს და ამ უკანასკნელის წევრთა სიხშირეებს ანუ სიხშირეთა განაწილებას. თუ თითოეულ სიხშირეს გავყოფთ დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაზე (ანუ ერთობლიობის მოცულობაზე), მივიღებთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილებას. ამ განაწილების გრაფიკული გამოსახვის უმარტივესი საშუალებებია წერტილოვანი დიაგრამა და მესერული დიაგრამა სიხშირეებისა და ფარდობითი სიხშირეებისათვის (ამგვარი დიაგრამები ერთი თვისებრივი ნიშნის სიხშირეთა გრაფიკული გამოსახვისათვისაც გამოდგება), აგებენ აგრეთვე მონაცემთა ფოთლებიანი ღეროების მსგავს დიაგრამას, რომელიც არ კარგავს ინდივიდუალურ მონაცემებს და იმავდროულად თვალსაჩინოდ აღწერს სიხშირეთა განაწილების ფორმას.

ერთი რაოდენობრივი ნიშნის მნიშვნელობათა ზრდის კვალობაზე დაგროვილ სიხშირეთა ანალიზისათვის იყენებენ დაგროვილ სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) ფუნქციას, ანუ კუმულატას.

დისკრეტული მონაცემების დიდი მოცულობის ერთობლიობისა და უწყვეტი მონაცემებისათვის გამოყოფენ რაოდენობრივი ნიშნის ცვლილების ინტერვალის დაყოფას ნაწილებად და გამოთვლიან დაჯგუფების ინტერვალებში მოთავსებულ მონაცემთა სიხშირეებს, მოცემული ინტერვალური ვარიაციული მწკრივის (ინტერვალური განაწილების) გრაფიკული გამოსახვა ხდება სიხშირეთა ან ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამისა და პოლიგონის, ასევე ოგივას მეშვეობით. სიხშირეთა ჰისტოგრამა წარმოადგენს დაჯგუფების ინტერვალებზე, როგორც ფუძეებზე აგებული მართკუთხედების სისტემას, რომელთა სიმაღლეები ისე აირჩევა, რომ მართკუთხედის ფართობი სიხშირის ტოლი იყოს, პოლიგონი ამ მართკუთხედების ფუძეების პარალელური გვერდების შუაწერტილთა შემაერთებელი ტეხილია (ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა და პოლიგონი ასევე აიგება), ხოლო ოგივა მოცემულ წერტილში ჰისტოგრამის იმ ნაწილის ფართობის ტოლია, რომელიც ამ წერტილზე აღმართული Ox ღერძის მართობის მარცხნივაა.

რაოდენობრივი მონაცემების სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) განაწილების ძირითად ფორმებზე წარმოდგენის შესაქმნელად მოსახერხებელია ვიმსჯელოთ იმ იდეალური მრუდებით, რომელთაც დაემგვანებოდა ჰისტოგრამები და პოლიგონები მონაცემთა რაოდენობის ზრდისას და დაჯგუფების ინტერვალების სიგრძეთა შესაბამისი შემცირებისას. ძირითად ფორმებად შეიძლება ჩაითვალოს: I – სიმეტრიული მრუდი ერთი მაქსიმალური სიხშირით, II – ასიმეტრიული მრუდი ერთი მაქსიმალური სიხშირით, კერძოდ უკიდურესად ასიმეტრიული მრუდებიც: მაქსიმალური სიხშირით რაოდენობრივი ნიშნის ცვლილების ინტერვალის დასაწყისში (უკიდურესად მარჯვენა ასიმეტრია) ან ბოლოში (უკიდურესად მარცხენა ასიმეტრია); III – მრუდი რამდენიმე მაქსიმალური სიხშირით; IV – სიმეტრიული U-ს მაგვარი მრუდი ერთი მინიმალური სიხშირით (იხ. ნახ. 1.14).

სავარჯიშოები

1.1. სოფლის მეურნეობის ეკონომისტი აპირებს განსაზღვროს ვაზის მავნებლის – ჭრაქის მიერ მოტანილი ზარალი ქართლის ზვრებში. განსაზღვრეთ რა პოპულაციაა ეკონომისტის ინტერესის საგანი. იქნება თუ არა მისი კვლევის შედეგები გამოსადეგი კახეთის მევენახეებისათვის და რატომ?

1.2. მკვლევარ მედიკოსს სურს განსაზღვროს, ართრიტის ახალი წამალი უფრო ეფექტურია, თუ ტრადიციული საშუალებანი. განსაზღვრეთ, რა პოპულაცია ან პოპულაციებია საინტერესო მკვლევარისათვის. უნდა იქნეს გათვალისწინებული თუ არა შერჩევის გეგმაში ტკივილის სიძლიერე და ავადმყოფობის დასაწყისი და რატომ?

1.3. ბავშვთა ფსიქოლოგს აინტერესებს, რა დროს ხარჯავენ ბავშვები ტელეგადაცემათა საყურებლად. ის აგროვებს მონაცემებს 100 შემთხვევით შერჩეული ბავშვისაგან. არის თუ არა ეს შერჩევა და რა შეიძლება იყოს პოპულაცია?

1.4. ახსენით, შერჩევაა თუ პოპულაცია ქვემოთ ჩამოთვლილი მონაცემები:

(a) 40 სტუდენტს, რომლებიც შემთხვევით გააჩერეს უნივერსიტეტის ეზოში, შეკითხვები დაუსვეს და ჩაწერეს პასუხები;

(b) კითხვები დაეგზავნა 200 ადამიანს, რომლებიც შემთხვევით აარჩიეს ტელეფონების ნომრების წიგნიდან და მიღებულია პასუხები;

(c) ორი კარტის ყველა შესაძლო არჩევათა სია 52 კარტიდან.

1.5. ახსენით, უწყვეტია თუ დისკრეტული შემდეგი მონაცემები:

(a) 20 მასწავლებლის წლიური შემოსავლები;

(b) საქალაქთაშორისო სატელეფონო საუბრების ოდენობა მოცემული ფოსტიდან ყოველ თვეში;

(c) თითოეული საუბრის ხანგრძლივობა.

1.6. ჩამოთვლილ სიტუაციებში (1) დაასახელეთ ელემენტარული ერთეული; (2) დაასახელეთ მახასიათებელი ნიშანი; (3) დაადგინეთ, როგორია პოპულაცია – რაოდენობრივი თუ თვისებრივი.

(a) თავისი პოზიციის დასადგენად პოლიტიკოსი აპირებს შეისწავლოს ამომრჩეველთა აზრი ახალი კანონის შემოღების თაობაზე;

(b) საავიაციო კომპანიას სურს შეისწავლოს ოპერაციების ღირებულება თბილისი-ბათუმის ახალ რეისზე ფასების დასადგენად.

1.7. განსაზღვრეთ, საკმარისია თუ არა, რომ გრიპის ბოლო ეპიდემიის შედეგების შესწავლის მიზნით ჯანმრთელობის დაცვის სამინისტროს თანამშრომელმა გამოიყენოს ექიმთა ჩანაწერები იმ პირების შესახებ, რომლებიც გრიპით დაავადებულად ჩაითვალნენ.

1.8. როგორ ფიქრობთ, ნომინალური მონაცემები ყოველთვის უწყვეტია, თუ ყოველთვის დისკრეტული?

1.9. დაასახელეთ რიგობრივი მონაცემების მაგალითი, რომლებიც ინტერვალური არაა.

1.10. გაზომვის რა უმცირესი დონე უნდა ქონდეთ მონაცემებს, რომ შესაძლებელი იყოს ფარდობითი სიხშირის გამოთვლა?

1.11. ჩამოთვლილ რაოდენობრივ მახასიათებელთა შორის გამოყავით ნომინალური, რიგობრივი, ინტერვალური და ფარდობითი მახასიათებლები.

(a) კინოფილმის რეიტინგი 1-დან 10-მდე;
(b) მამაკაცის სიმაღლე;
(c) ნომერი ფეხბურთელის მაისურზე;
(d) მიწისძვრის ძალა რიხტერის სკალით;
(e) დღის უმაღლესი ტემპერატურა;
(f) გარკვეული დავალების შესრულების დრო.

1.12. ერთ-ერთი უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის ფაკულტეტის 25 თანამშრომლის განაწილება თანამდებობების მიხედვით შემდეგია:

ლაბორანტი	8
ადმინისტრაციული პერსონალი	4
მასწავლებელი	6
უფროსი მასწავლებელი	4
დოცენტი	2
პროფესორი	1

ააგეთ თანამშრომელთა თანამდებობების განაწილების წრიული დიაგრამა.

1.13. ფირმა „სულგუნის" მიერ წარმოებული და გაყიდული პროდუქციის მოცულობები უკანასკნელ ხუთ წელიწადში შემდეგი ცხრილითაა მოცემული

	გაყიდული პროდუქციის მოცულობა (ათასობით ლარებში)				
	1994	1995	1996	1997	1998
საშინაო ბაზარზე	250	300	350	390	400
სულ	300	350	500	520	600

ააგეთ მართკუთხედებიანი დიაგრამა ამ მონაცემებისათვის. დაშტრიხეთ იგივე ფუძეებზე აგებული საშინაო ბაზრის შესაბამისი უფრო დაბალი სიმაღლის მართკუთხედები.

1.14. შემდეგი მონაცემები იძლევიან გარკვეული ასაკის ბავშვების სიტყვათა მარაგის მოცულობას:

205, 377, 292, 300, 179, 240, 300, 190, 680, 250,
280, 170, 211, 266, 303, 350, 375, 288, 360, 225.

(a) როგორია ეს მონაცემები, დისკრეტული თუ უწყვეტი?

(b) ააგეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილება.

1.15. 1980 წლის აგვისტოში ათასობით პოლონელი მუშა ქუჩაში გამოვიდა ქვეყანაში ცუდი სამუშაო პირობების გამო პროტესტის ნიშნად. მათი ერთ-ერთი მოთხოვნა, უთუოდ შეთანხმებული პოლონეთის მუშათა დამოუკიდებელი კავშირის „სოლიდარობის" ხელმძღვანელობასთან, იყო უარი სავალდებულო 6-დღიან და 48-საათიან სამუშაო კვირაზე. ვთქვათ, რომ კომპანიამ შეისწავლა თავისი დაქირავებული თანამშრომლების აზრი სამუშაო კვირის ტიპის შესახებ, ანუ რა უფრო მოსწონთ: 6-დღიანი და 48-საათიანი სამუშაო კვირა; 5-დღიანი და 40-საათიანი სამუშაო კვირა; 4-დღიანი და 40-საათიანი სამუშაო კვირა თუ 3-დღიანი და 40-საათიანი სამუშაო კვირა. 25 თანამშრომლის პასუხები მოცემულია ცხრილში.

თანამშ.	სამუშაო კვირა	თანამშ.	სამუშაო კვირა
1	5 დღე 40 სთ	14	4 დღე 40 სთ
2	5 დღე 40 სთ	15	6 დღე 48 სთ
3	3 დღე 40 სთ	16	4 დღე 40 სთ
4	6 დღე 48 სთ	17	5 დღე 40 სთ
5	4 დღე 40 სთ	18	5 დღე 40 სთ
6	4 დღე 40 სთ	19	5 დღე 40 სთ
7	5 დღე 40 სთ	20	4 დღე 40 სთ
8	3 დღე 40 სთ	21	3 დღე 40 სთ
9	6 დღე 48 სთ	22	5 დღე 40 სთ
10	5 დღე 40 სთ	23	3 დღე 40 სთ
11	4 დღე 40 სთ	24	4 დღე 40 სთ
12	5 დღე 40 სთ	25	5 დღე 40 სთ
13	4 დღე 40 სთ		

(a) ააგეთ მართკუთხედებიანი და წრიული დიაგრამები მოსაწონი სამუშაო კვირის შესახებ;

(b) როგორია სიხშირე იმ თანამშრომლებისა, რომლებსაც აწყობთ 5-დღიანი და 40 საათიანი სამუშაო კვირა?

(c) როგორია ფარდობითი სიხშირე იმ თანამშრომლებისა, რომლებსაც აწყობთ 3-დღიანი და 40 საათიანი სამუშაო კვირა?

1.16. იმისათვის, რომ ამერიკულმა საავადმყოფოებმა მიიღონ დახმარება სხვადასხვა სამთავრობო თუ კერძო პროგრამისაგან, საჭიროა წლიური ფინანსური ანგარიშების წარდგენა, რომლის ერთ-ერთი მთავარი მახასიათებელია სრული რაოდენობა საწოლებისა, რომლებიც განკუთვნილია პაციენტებისათვის. ქვემოთ მოყვანილია მონაცემები იმ 54 საავადმყოფოში საწოლების რაოდენობის შესახებ, რომელთა ფინანსური ანგარიშიც დამაკმაყოფილებლად იქნა მიჩნეული.

303	550	243	282	195	310	288	188	190
335	473	169	292	492	200	478	182	172
231	375	171	262	198	313	600	264	311
371	145	242	278	183	215	719	519	382
249	350	99	218	300	450	337	330	252
400	514	427	533	930	319	210	550	488

ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილება დაჯგუფების 10 ინტერვალით.

1.17. ამოხსენით 1.16 სავარჯიშო დაჯგუფების სამი ინტერვალისათვის. შეადარეთ მიღებული განაწილება წინას. რომელი უფრო მეტ ინფორმაციას შეიცავს? რატომ ზღუდავს ინტერვალების შეუსაბამო რაოდენობა ფარდობით სიხშირეთა განაწილებაში არსებულ ინფორმაციას?

1.18. ამოხსენით 1.16 სავარჯიშო, ოღონდ უკვე 25 დაჯგუფების ინტერვალისათვის. შეადარეთ შედეგი წინა ორ სავარჯიშოს.

1.19. ქვემოთ მოყვანილია 32 სააქციო საზოგადოების აქციათა მფლობელების მოგებათა პროცენტების ცხრილი გადასახადების გადახდის შემდეგ.

10.6	10.8	14.8	10.8
12.5	6.0	10.7	11.0
14.6	6.0	12.8	10.1
7.9	5.9	10.0	10.6
10.8	16.2	18.4	10.7
10.6	13.3	8.7	15.4
6.5	10.1	8.7	7.5
11.9	9.0	12.0	9.1

(a) ამ მონაცემებით ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა შვიდი ტოლი ინტერვალით, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა 2 და პირველის მარცხენა ბოლოა 5.55;
(b) ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი;
(c) როგორია თქვენი აზრით იმის შანსი, რომ შემთხვევით არჩეული სააქციო საზოგადოების წევრის მოგების პროცენტი 15.55-ზე მეტია?
(d) როგორია იმის შანსი, რომ შემთხვევით არჩეული სააქციო საზოგადოების წევრის მოგების პროცენტი 9.55-ზე ნაკლებია?
(e) რა შანსი არსებობს იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული სააქციო საზოგადოების წევრის მოგების პროცენტი 9.55-სა და 15.55-ს შორისაა?

1.20. შემდეგი მონაცემები შეადგენენ მსოფლიოს 57 უდიდესი ჰიდროელექტროსადგურის სიმძლავრეებს მეგავატებში:

12600	4500	2700	2400	2100	1824	1950
10080	4150	2700	2400	2069	1807	1890
10060	4050	2700	2304	2031	1800	2100
6480	3600	2680	2300	2030	1800	2100
6400	3575	2650	2300	2000	1800	2500
6096	3409	2637	2250	2000	1800	2416
6000	3300	2610	2124	2000	1750	2715
5328	3200	2560	2100	1979	4600	2820
5225						

(a) ააგეთ ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა (ფოთლის ერთეული იყოს 10 მეგავატი, დაამრგვალეთ, ორი ნიშანი დაუტოვეთ ფოთოლს, დანარჩენი ღეროს მიაკუთვნეთ), მიიღებთ 12 ჰორიზონტალურ ღეროს. რა ინტერვალშია მოთავსებული მონაცემთა ძირითადი უმრავლესობა?
(b) ააგეთ ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა ისე, რომ (a) დავალების პასუხად უკვე აგებული თითოეული ჰორიზონტალური ღერო დაყოთ ორ ღეროდ: პირველი უნდა შედგებოდეს ფოთლებისაგან, რომელთა პირველი ციფრია რომელიმე 0-იდან 4-ის ჩათვლით ხოლო მეორე – ფოთლებისაგან, რომელთა საწყისი ციფრია რომელიმე დანარჩენთაგან. პირველი ღერო აღვნიშნოთ L-ით, მეორე – H-ით, მაგალითად, 2L და 2H ღეროები.

1.21. ოცდარვა პირი მონაწილეობდა სახელმწიფო პროგრამით სოციალურ სამუშაოზე თანამდებობათა დასაკავებელ კონკურსში. ტესტირების ჩატარების შედეგად მიღებულია შემდეგი ქულები:

79	97	86	76
93	87	98	68
84	88	81	91
86	87	70	94
77	92	66	85
63	68	98	88
46	72	59	79

(a) ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა 9 ქვეინტერვალით, პირველის მარცხენა ბოლო იყოს 44.5;

(b) ააგეთ ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა. იგივეა თუ არა ფორმა? რა დამატებით ინფორმაციას შეიცავს ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა ჰისტოგრამასთან შედარებით?

2

პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფის მეთოდები

ამ თავში ჩვენ შევეცდებით ზოგადი წარმოდგენა შევქმნათ პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფის მეთოდებზე. სასრული პოპულაციიდან ე.წ. შემთხვევითი შერჩევის მათემატიკური თეორია, რომელიც ალბათობის თეორიასა და სასრული პოპულაციის პარამეტრების შეფასების თეორიას ეყრდნობა, საკმაოდ ვრცელია იმისათვის, რომ დეტალურად იყოს წარმოდგენილი ამ წიგნში, დიდი მოცულობის სხვა აუცილებელ მასალასთან ერთად.

§ 1. რატომ ვამჯობინებთ შერჩევას?

პოპულაციის სრულ აღწერას ჩვენ შერჩევის გამოყოფას და მის შესწავლას ვამჯობინებთ თუნდაც იმიტომ, რომ ნაწილის დაკვირვება უფრო იაფია, ვიდრე მთელისა, თუმცა ხარჯების ეკონომიის გარდა შერჩევის უპირატესობას სხვა მოტივებიც განაპირობებენ.

ინფორმაციის დროულად მოპოვება მხოლოდ შერჩევის მეშვეობით შეიძლება, მაგალითად, პოლიტიკური ხასიათის გამოკითხვისას, როცა საჭიროა განისაზღვროს, ვისკენ იხრება ამომრჩეველთა სიმპათიები, დროის ფაქტორი გადამწყვეტი მნიშვნელობისაა. საქმე ისაა, რომ ამომრჩეველთა ნება ხშირად თვით არჩევნებამდეც კი მერყეობს და ამიტომ ყოველი გამოკითხვა (თუ ის სწრაფად ტარდება) მხოლოდ იმ მოკლე პერიოდს ასახავს, როცა ის შედგა. აქ სრული აღწერის ჩატარება კიდეც რომ იყოს შესაძლებელი, მისი შედეგები ვერ იქნებოდა ადეკვატური საზოგადოებრივი აზრის მნიშვნელოვანი ცვლილების გამო იმ ხნის განმავლობაში, რაც სრულ აღწერას ჭირდება. ზუსტად ასევე მუშაობს დროის ფაქტორი მარკეტინგულ გამოკვლევებშიც. არასოდეს არაა იმის საშუალება, რომ რაიმე ახალი პროდუქტის ან მომსახურების ახალი სახეობის თაობაზე მოსახლეობის 100%-ს შეექმნას აზრი. თუკი შერჩევამ ცხადი სურათი დახატა, ეს საკმაო საფუძვლად ითვლება დასკვნების გამოსატანად.

თუ პოპულაცია დიდი მოცულობისაა, ელემენტარული ერთეულიდან ინფორმაციის აღება ძალზე იაფიც რომ იყოს, სრულ აღწერას აზრი მაინც არ ექნება და შერჩევით უნდა დავკმაყოფილდეთ. ასეთივე დასკვნებამდე მივალთ, თუ პოპულაციის ერთეულების უმეტესობა მიუღწევადია. გასათვალისწინებელია არა მარტო ფიზიკური მიუღწევადობა: შესაძლოა ერთეულის გამოკვლევა იმდენად ძვირი იყოს, რომ შესაბამისი ელემენტარული ერთეული მიუღწევადად ჩავთვალოთ.

ზოგჯერ თვით დაკვირვების აქტიც კი სპობს ელემენტარულ ერთეულს. ასანთის კოლოფის ხარისხზე ყველაზე უფრო საიმედო დასკვნას მაშინ გამოვიტანთ, თუკი ყოველი ღერის ხარისხში დავრწმუნდებით, მაგრამ შედეგად ცარიელი კოლოფი დაგვრჩება. არავინ ამოწმებს ყოველ საავტომობილო ძრავას ან ყოველი ტელევიზორის კინესკოპს გაანგარიშებული სამუშაო ვადის ტოლფასი დატვირთვის მიცემით. სრული აღწერის მაგიერ, მსგავს სიტუაციებში იძულებული ვართ მხოლოდ შერჩევას მივმართოთ.

ბოლოს, შერჩევა შეიძლება იყოს უფრო ზუსტი, ვიდრე სრული აღწერა. ცუდად ჩატარებული სრულ აღწერას შეიძლება მოჰყვეს ბევრად უფრო არასაიმედო შედეგი, ვიდრე ზედმიწევნით ჩატარებულ შერჩევას, რაზეც შემდეგი მაგალითები მეტყველებენ.

მაგალითი **2.1.** ამბულატორული დიაგნოსტიკის საუკეთესო მეთოდის დადგენის მიზნით ტუბერკულოზის დადებითი და უარყოფითი ჩვენებების გამოსაყოფად 1256 რენტგენის სურათის ნახვა დაევალა ხუთ სპეციალისტს. მათ შეფასებებს შორის დიდი იყო განსხვავება. ერთმა მათგანმა, მაგალითად, 56 დადებითი სურათი აღმოაჩინა, მეორემ 100. როდესაც ორი თვის შემდეგ იგივე სპეციალისტებმა ხელმეორედ დაათვალიერეს სურათები, შეუსაბამობა მათ საკუთარ შედეგებშიც კი აღმოჩნდა. კერძოდ, ერთმა მათგანმა 59 დადებითი შეფასება დააფიქსირა პირველ ჯერზე და 78 მეორეზე, ამასთან 7% პირველად დადებითად აღიარებულთა შორის მეორედ უარყოფითად ჩათვალა, ხოლო 29% მეორე ჯერზე დადებითად ჩათვლილთა შორის პირველად უარყოფითი ეგონა.

მაგალითი **2.2.** აშშ-ში 1940 და 1950 წლებში ჩატარებულ სრულ აღწერებს შორის აღმოჩნდა ორი საკვირველი განსხვავება. 1950 წელს წინა აღწერასთან შედარებით 20-ჯერ გაიზარდა 14 წლის ასაკში დაქვრივებული გოგონების რაოდენობა და ამდენჯერვე გახშირდა ინდიელთა განქორწინების (რაც ძლიერ იშვიათია) ფაქტები. ეს ცვლილებები აუხსნელი აღმოჩნდა სოციოლოგიური არგუმენტებით. მონაცემების მოპოვებისა და დამუშავების პროცესის ანალიზის შედეგად დადგინდა, რომ ეს იყო პერფობარათებზე ინფორმაციის არასწორად გადატანის შედეგი.

§ 2. შერჩევის სახეობანი. შერჩევის ცდომილება

სიტყვა შერჩევა ამ წიგნში ორი აზრით მოიცემა. ერთი მხრივ ესაა პოპულაციის ნაწილი, მეორე მხრივ კი პროცედურა ამ ნაწილის გამოსაყოფად. ამიტომ პროცედურის როლში ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ სინონიმებს „მიღება", „გამოყოფა".[1]

შერჩევას ეწოდება წარმომადგენლობითი ანუ რეპრეზენტაციული, თუ იგი კარგად წარმოადგენს პოპულაციის პროპორციებს.

შერჩევის წესი განსაზღვრავს შერჩევითი ერთობლიობის ადეკვატურობას. მიღებული შერჩევის რეპრეზენტაციულობას ხელს უშლის შერჩევის ცდომილება.

შერჩევის შემთხვევითი ცდომილება ეს ის განსხვავებაა შერჩევასა და პოპულაციას შორის, რომელსაც განაპირობებენ მხოლოდ შერჩევაში მონაწილე კონკრეტული ელემენტარული ერთეულები. ასეთი ცდომილება ძალიან ადვილი წარმოსადგენია. თუ მაგალითად, ყუთში 70 ბირთვია 7 სხვადასხვა ფერისა, თითოეული 10-10 ოდენობით, მაშინ 10-ელემენტიან შერჩევაში შეიძლება ყველა წითელი აღმოჩნდეს და აქედან გაკეთებული დასკვნა იმის თაობაზე, რომ ყუთში ბირთვების უმეტესობა

[1] შეიძლებოდა გვეხმარა „შერჩევის ამოკრეფა", მაგრამ „ამოკრეფა" „შერჩევის" მეტოქედ განიხილება და „შერჩევის" ფართო გავრცელების გამო ეკონომიკურ ლიტერატურაში ჯერ არც კი ყოფილა მცდელობა ამ უკანასკნელში „შერჩევის" „ამოკრეფით" ჩანაცვლებისა (თუმცა ინგლისური sample selection მაშინ „ამოკრეფის შერჩევად" გადმოითარგმნებოდა და sampling – ასევე „შერჩევად").

წითელია, სწორი არ იქნება. შემთხვევითი ცდომილებიდან თავის დაღწევის მთავარი საშუალებაა შერჩევის მოცულობის გაზრდა.

შერჩევის სისტემატური ცდომილება ანუ (მის მიერ დასახატავი ჭეშმარიტი სურათის) ჩანაცვლება (მცდარი სურათით) ესაა ტენდენცია არჩეულ იქნას გარკვეული კერძო თვისებების მქონე ელემენტარული ერთეულები. ამგვარი ცდომილება, ცხადია, შერჩევის ცუდი დაგეგმვის შედეგია. განვიხილოთ პოლიტიკური აზრის გამოკითხვის შემდეგი კლასიკური მაგალითი.

მაგალითი **2.3.** 1936 წელს აშშ-ს გაზეთმა Literary Digest მოაწყო ამომრჩეველთა გამოკითხვა. არჩევნებში დემოკრატი ფრანკლინ დ. რუზველტი გამოდიოდა რესპუბლიკელი ალფრედ გ. ლანდონის წინააღმდეგ. რამდენიმე მილიონი გამოკითხულის რეაქცია იყო საფუძველი იმისა, რომ გაზეთმა გამოაცხადა, ლანდონი სარეკორდო შედეგით გაიმარჯვებსო. მოხდა სრულიად საპირისპირო, რუზველტმა მოიპოვა ამერიკის ისტორიაში უდიდესი გამარჯვება. გამოკვლევის მცდარი შედეგი შემდგომ კვალიფიცირებული იყო როგორც შერჩევის ჩანაცვლება.

საქმე ისაა, რომ გაზეთმა შერჩევა მოაწყო თავისი ხელმომწერების სიებიდან და სატელეფონო წიგნებიდან. ამერიკის ისტორიაში დიდი დეპრესიის სახელით ცნობილი პერიოდის მკაცრ პირობებში ორივე ეს წყარო შეიცავდა იმ წარმატებული პირების დისპროპორციულ რაოდენობას, რომელთაც მოსწონდათ რესპუბლიკელთა პლატფორმა. ვინაიდან უკმაყოფილო უმრავლესობას, რომელიც ცალსახად რუზველტს ამჯობინებდა, არც ტელეფონები გააჩნდა და არც გაზეთზე ხელმოწერა, იგი შერჩევაში ადეკვატურად არ იყო წარმოდგენილი.

შერჩევის ჩანაცვლების თავიდან აცილება სტატისტიკოსის ძირითადი ამოცანაა.

ცდომილების კიდევ ერთი წყაროა გაზომვის ან გამოკითხვის ცდომილება, რომელიც შეიძლება შეგვხვდეს როგორც სრული აღწერის, ისე შერჩევითი გამოკვლევის დროს. ამგვარი ცდომილების თავიდან აცილება განსაკუთრებული ზომების მიღებას საჭიროებს გამზომი ხელსაწყოების მოწესრიგებიდან და გაზომვათა ერთგვაროვნების პირობების მიღწევიდან დაწყებული, გამოკითხვის დარგში მსოფლიო გამოცდილების გათვალისწინებამდე, რასაც დიდძალი ლიტერატურა ეძღვნება.[1]

არსებობს შერჩევის მიღების სხვადასხვა ხერხი, რომლებიც ან შემთხვევითი ხასიათისაა და ექვემდებარება ალბათობის თეორიის მეთოდებით შესწავლას ან არაა ასეთი ხასიათის და ამდენად მათთვის ზუსტი თეორია არ არსებობს. ჯერ ჩამოვთვალოთ ისეთი გავრცელებული ხერხები, რომელთაც არა აქვთ შემთხვევითი ხასიათი.

1. შერჩევა იფარგლება პოპულაციის მხოლოდ მისაწვდომი ნაწილით (მისაწვდომი შერჩევა). ამის მაგალითია რკინიგზის ღია ვაგონიდან ქვანახშირის ამოღება მხოლოდ 15-20 სანტიმეტრის სიღრმიდან.
2. შერჩევა უწესრიგოდ წარმოებს (უწესრიგო შერჩევა). მაგალითად, თუ მკვლევარს სჭირდება ათი ბოცვერი ლაბორატორიაში მდებარე დიდი გალიიდან, იგი იმათ დაიჭერს, რომლებიც ხელში მოხვდება.

---

[1] გასათვალისწინებელია აგრეთვე სავარაუდო განსხვავება შესასწავლ პოპულაციასა (target population) და სამუშაო პოპულაციას (working population, sampled population) შორის (ეს უკანასკნელი შესასწავლი პოპულაციის ის ნაწილია, რომელიც მისაწვდომია შერჩევის გამოსაყოფად).

3. მცირე, მაგრამ არაერთგვაროვანი პოპულაციის გამოსაკვლევად ათვალიერებენ მთელ პოპულაციას და ირჩევენ ტიპობრივი ერთეულების მცირე რაოდენობას, ე.ი. ისეთ ერთეულებს, რომლებიც პასუხობენ საშუალო წარმოდგენას პოპულაციის შესახებ. ამგვარ მეთოდს მიზანმიმართული შერჩევა ეწოდება.

შერჩევის გამოყოფის სამივე ეს ხერხი ანუ გეგმა იძლევა ჩანაცვლებას, მაგრამ ზოგჯერ შერჩევითი გამოკვლევის სხვა საშუალება არ არსებობს. ჩამოთვლილი არაშემთხვევითი მეთოდები შესაბამის პირობებში შეიძლება სასარგებლო აღმოჩნდეს, თუნდაც წინასწარი ინფორმაციის მოპოვებისათვის, მაგრამ შერჩევითი მეთოდის თეორიის განვითარება ამ მეთოდებს არ უკავშირდება, ვინაიდან ისინი არ შეიცავენ შემთხვევითი (ანუ ალბათური) შერჩევის (იხ. ქვემოთ) ელემენტებს. რაც შეეხება ჩამოთვლილთაგან ამა თუ იმ მეთოდის ღირებულების გარკვევას, ამისი ერთადერთი გზაა იმ სიტუაციების მოძიება, როდესაც წინასწარ ცნობილია შედეგები მთელი პოპულაციისათვის (ან შემთხვევითი შერჩევისათვის) და მათთან რომელიმე დასახელებული მეთოდით წარმოებული კვლევის შედეგების შედარება. მაგრამ მაშინაც კი, თუ ერთი ამგვარი შედარება დამაკმაყოფილებელი აღმოჩნდება, ეს არ იძლევა იმის გარანტიას, რომ ასევე იქნება სხვა გარემოებებშიც.

§ 3. შემთხვევითი შერჩევა

შერჩევის უმნიშვნელოვანესი სახეობაა შემთხვევითი შერჩევა. აქ მკითხველს უნდა ვთხოვოთ, ნუ იქნება მაქსიმალისტი და მშვიდად აღიქვას ის, რომ თუმცა თვით სიტყვა „შერჩევა" გულისხმობს რაიმე წესს – უკეთესის ან უარესის შერჩევას, ნუ ჩათვლის „შემთხვევით შერჩევას" აბსურდულ კომბინაციად, რადგან ჯერჯერობით „შერჩევა" ითვლება sample-ს ქართულ ეკვივალენტად (საყოველთაოდ მიღებული უკეთესი შესატყვისის უქონლობის გამო; სინამდვილეში sample ნიშნავს ნიმუშს, სინჯს) და გაიგება როგორც პოპულაციის ნაწილი. ტერმინი „შემთხვევითი შერჩევა" ისევე უფლებამოსილია, როგორც, მაგალითად, „ცარიელი სიმრავლე" სიმრავლეთა თეორიაში.

შემთხვევითი შერჩევა გულისხმობს, რომ პოპულაციის ყოველი ელემენტისათვის განსაზღვრულია შერჩევაში მოხვედრის შანსი (ანუ ალბათობა, შესაძლებლობის ხარისხი, იხ. თავი 5; ამიტომ შემთხვევით შერჩევას ალბათურ შერჩევასაც უწოდებენ).

მარტივი შემთხვევითი შერჩევა. როდესაც შერჩევის გეგმა ისეთია, რომ პოპულაციის ყოველი ელემენტისათვის შერჩევაში მოხვედრის შანსი ერთნაირია, ამბობენ, რომ გვაქვს მარტივი შემთხვევითი შერჩევა.

მარტივი შემთხვევითი შერჩევა ლატარიის პრინციპით ეწყობა. თუ, მაგალითად, გვსურს შერჩევის მიხედვით წარმოდგენა შევიქმნათ მოცემული დაწესებულების თანამშრომელთა განათლების დონეზე, შეგვიძლია ე.წ. კადრების აღრიცხვის ბარათებიდან შემთხვევით ამოვიღოთ საჭირო რაოდენობის ბარათები. ტექნიკურად უმჯობესია მცირე ზომის ფურცლებზე დავწეროთ ბარათების ნომრები, მოვათავსოთ ყუთში, კარგად ავურიოთ და შემდეგ შემთხვევით ავირჩიოთ იმდენი ფურცელი, რამდენიც გვჭირდება. თუ ახლა შერჩეული ნომრების მიხედვით გადმოვიღებთ სააღრიცხვო ბარათებს, შემთხვევითი შერჩევაც მიღებული იქნება.

შერჩევა შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით. თუ პოპულაცია დანომრილია, იქიდან მარტივი შემთხვევითი შერჩევის მოწყობა იოლდება ე.წ. შემთხვევითი რიცხვების მეშვეობით. შემთხვევითი რიცხვები არის 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ციფრების შემთხვევითი მიმდევრობა, სადაც თითოეული ციფრი დაახლოებით ერთნაირი სიხშირით ჩნდება. მარტივი ილუსტრაციის სახით განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი **2.4.** საშუალო სკოლის დამამთავრებელი კლასების N=500 მოსწავლიდან საჭიროა n=20 მოცულობის შერჩევის გამოყოფა, რათა მოეწყოს გამოკითხვა მათი პროფესიული ორიენტაციის შესახებ.

ვისარგებლოთ ბოლშევისა და სმირნოვის სტატისტიკური ცხრილებით, რომელიც შეიცავს ე.წ. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების ვრცელ ცხრილს. ამ უკანასკნელის ფრაგმენტი წინამდებარე წიგნის ბოლოსაა დართული (იხ. დანართი, ცხრილი A14; იგი შემთხვევითი ციფრების 30 სტრიქონსა და 30 სვეტს შეიცავს). ცხრილში იმ ადგილის ასარჩევად, საიდანაც შემთხვევითი ციფრების წაკითხვას დავიწყებთ, არსებობს მეტ-ნაკლებად რთული წესები. ჩვენ უმარტივესზე შევჩერდეთ, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ცხრილის ფურცელზე ფანქრით "შემთხვევითი" წერტილი ავირჩიოთ.

ვთქვათ, მაგალითად, ფანქარი შეეხო ცხრილის მე-15 სტრიქონისა და მე-2-ე სვეტში მდებარე ცხრიანს. გავყვეთ მარჯვნივ ამ სტრიქონს და ავირჩიოთ შემთხვევითი ციფრების 20 სამეული ისე, რომ გამოვტოვოთ 500-ზე მეტი რიცხვები, ესენია:

467, 348, 176, 496, 089,286, 117, 174, 095, 058,
047, 012, 435, 177, 270,318, 223, 099, 027, 443.

ამრიგად, გამოსაყოფი შერჩევა შედგება პირებისაგან, რომელთა ნომრებია

12, 27, 47, 58, 89, 95, 99, 117, 174, 176,
177, 223, 270, 286, 318, 348, 435, 443, 467, 496.

ცხადია, შეგვეძლო სტრიქონის გასწვრივ გაგვევლო მარცხნივ, ან სვეტის გასწვრივ ზემოთ ან ქვემოთ, ან სულაც დიაგონალზე, ოღონდ აუცილებლად წინასწარ განსაზღვრული გეგმით და არა წაკითხულ რიცხვებზე დამოკიდებული ალგორითმით.

არსებობს შემთხვევითი რიცხვების ფიზიკური გენერატორები. შემთხვევითი რიცხვების არჩევა კომპიუტერული პროგრამების მეშვეობითაც შეიძლება. ამგვარი პროგრამები ფრიად გავრცელებულია.

მაგალითი **2.5.** შემთხვევითი რიცხვების ცხრილის გამოყენებით გამოვყოთ n=10 მოცულობის შერჩევა დიდ ბრიტანეთში დაბადებული N=8585 მოზრდილი მამაკაცის სიმაღლეების ერთობლიობიდან (მაგალითი 1.9).

თუ გადავნომრავთ მონაცემებს და გამოვთვლით დაგროვილ სიხშირეებს 1.18 ცხრილისათვის, მივიღებთ 2.1 ცხრილს, რომელიც გვიჩვენებს, რომელ ინტერვალში რა ნომერი მონაცემებია მოთავსებული.

ცხრილი 2.1. 1.18 ცხრილის დაგროვილი სიხშირეები

ინტერვალი დიუიმებში	ნომრები	ინტერვალი დიუიმებში	ნომრები	ინტერვალი დიუიმებში	ნომრები
57 – 58	1 – 2	64 – 65	708 – 1376	71 – 72	7858 – 8249
58 – 59	3 – 6	65 – 66	1377 – 2366	72 – 73	8250 – 8451
59 – 60	7 – 20	66 – 67	2367 – 3589	73 – 74	8452 – 8530
60 – 61	21 – 61	67 – 68	3590 – 4918	74 – 75	8531 – 8562
61 – 62	62 – 144	68 – 69	4919 – 6148	75 – 76	8563 – 8578
62 – 63	145 – 313	69 – 70	6149 – 7211	76 – 77	8579 – 8583
63 – 64	314 – 707	70 – 71	7212 – 7857	77 – 78	8584 – 8585

ახლა ავარჩიოთ შემთხვევითი ციფრების ათი ოთხეული 8585-ზე მეტი რიცხვების გამოტოვებით. ამისათვის გამოვიყენოთ იგივე ცხრილი და შემთხვევით ციფრთა არჩევა დავიწყოთ იგივე ადგილიდან, საიდანაც წინა მაგალითში დავიწყეთ. გვექნება ნომრები:

6734, 1764, 1826, 0892, 8117, 6741, 7468, 5095, 0580, 4776.

ამ ნომრების მქონე მონაცემების შესაბამისი ინტერვალები 2.1 ცხრილით განისაზღვრება. მივიღებთ შემდეგ შერჩევას:

ცხრილი 2.2. n=10 მოცულობის შერჩევა 2.1 ცხრილით აღწერილი ერთობლიობიდან

ინტერვალი დიუიმებში	სიხშირე
63 – 64	1
64 – 65	1
65 – 66	2
67 – 68	1
68 – 69	1
69 – 70	2
70 – 71	1
71 – 72	1

როგორც ვხედავთ, ეს პროცედურა საკმაოდ მარტივია, მაგრამ ძნელი გამოსაყენებელია რეალური შერჩევითი პრობლემებისადმი იმიტომ, რომ ხშირად არ არსებობს პოპულაციის ბაზისი და რომც არსებობდეს, იგი ხშირად დროში ცვალებადია ერთეულების გაქრობისა და ახალი ერთეულების გაჩენის გამო.

სისტემატური შემთხვევითი შერჩევა. თუ პოპულაციის ერთეულები გადანომრილია, შემთხვევითი რიცხვების დიდი რაოდენობის ამოწერის ან კომპიუტერული გენერაციის მაგივრად შეგვიძლია ავირჩიოთ შემთხვევითი ციფრი და ამ ნომრიანი ერთეუ-

ლიდან დაწყებული ავირჩიოთ ყოველი მე-10 ერთეული. ეს იქნება ე.წ. სისტემატური შერჩევა.

ამრიგად სისტემატური შერჩევა მიიღება ერთი ერთეულის შემთხვევითი შერჩევით და დანარჩენების როლში ამ ერთეულიდან გარკვეული ბიჯით დაშორებული ნომრების მქონე ერთეულების გამოყოფით მანამ, სანამ ერთეულების საჭირო რაოდენობა არ დაგროვდება. თუ ბიჯი არის k, პირველი ელემენტი ამოიღება შემთხვევით 1, 2, ... , k ნომრიანი ერთეულებიდან და თუ მისი ნომერია a, მაშინ სისტემატური შერჩევაა a, $a+k$, ... , $a+nk$, სადაც n შერჩევის მოცულობაა.

არსებობს შერჩევის სხვა მეთოდებიც, რომლებიც ერთი მხრივ ამარტივებენ შერჩევის პროცედურას, მეორე მხრივ კი ზრდიან მოპოვებულ ინფორმაციას.

განშრევებული შემთხვევითი შერჩევა. ზოგჯერ ჩვენი ამოცანაა უზრუნველვყოთ შერჩევაში პოპულაციის სხვადასხვა ჯგუფის წარმომადგენლობა. ამისათვის გამოყოფა ისე უნდა მოხერხდეს, რომ ამ ჯგუფების პროპორციები შერჩევაში ისეთივე იყოს, როგორც პოპულაციაში. პოპულაციის თითოეულ ჯგუფს შრეს უწოდებენ, ხოლო მიღებულ შერჩევას – განშრევებულ შერჩევას.

განშრევებას მაშინ მიმართავენ, როდესაც პოპულაცია არაერთგვაროვანია. არსებობს სხვა მიზეზიც, რის გამოც განშრევება სასურველია. კერძოდ, ხანდახან უფრო მოხერხებულია შერჩევათა მიღება რაიმე ტერიტორიის სხვადასხვა რაიონისათვის (ხანდახან განშრევებელ შერჩევას რაიონირებულ შერჩევასაც უწოდებენ). ადამიანების პოპულაციის განშრევება შეიძლება მოხდეს სქესის, ასაკის, პროფესიული კუთვნილების ან სამუშაოს ტიპის მიხედვით და ა.შ. განშრევება ისე უნდა მოეწყოს, რომ შრეები თანაუკვეთი გამოვიდნენ. როგორც კი პოპულაცია შრეებად დაიყოფა, ჩვენ შეგვიძლია თითოეულ შრეში მარტივი შემთხვევითი შერჩევა მოვაწყოთ.

კლასტერული შემთხვევითი შერჩევა. შემთხვევითი შერჩევის კიდევ ერთი ფორმა გამოიყენება უპირატესად მომხმარებელთა აზრის გამოკითხვისას, როდესაც უფრო ეკონომიურია, მაგალითად, რომ გამომკითხველმა ქალაქის შემთხვევით არჩეულ უბანში 50 ოჯახი კარდაკარ დაიაროს, ვიდრე ქალაქის მასშტაბით 50 შემთხვევით არჩეულ ოჯახს ესტუმროს.

თუ პოპულაციას დავყოფთ თანაუკვეთ ნაწილებად – კლასტერებად (ვთქვათ, ქალაქის მცხოვრებლებს გეოგრაფიული სიახლოვის მიხედვით უბნებად დავყოფთ), მაშინ შემთხვევითი შერჩევა შეიძლება ჯერ კლასტერის ან კლასტერების შემთხვევით შერჩევაში მდგომარეობდეს, ხოლო შემდეგ თითოეული შერჩეული კლასტერის სრულ აღწერაში. ამგვარ შერჩევას კლასტერული შერჩევა ეწოდება (ზოგჯერ კლასტერს ბუდეს უწოდებენ, ხოლო კლასტერულ შერჩევას – ბუდობრივ შერჩევას).

სისტემატური შერჩევა კლასტერულის კერძო შემთხვევაა. თუ k არის სისტემატური შერჩევის ბიჯი და პოპულაციის ყველა $N=mk$ ერთეული გადანომრილია, მაშინ გვაქვს k კლასტერი, რომლებიც შესაბამისად შემდეგ ნომრებს შეესაბამება

$$[1, k+1, \dots, (m-1)k+1], \dots, [k, 2k, \dots, mk]$$

და სისტემატური შერჩევა ნიშნავს კლასტერებიდან ერთერთის შემთხვევით შერჩევას და მის სრულ აღწერას.

კლასტერული შერჩევა ეკონომიურია, მაგრამ მას ხშირად თან სდევს ჩანაცვლება, ვინაიდან სოციალური გამოკვლევისას მეზობლობის პრინციპით შედგენილ კლასტერში შეიძლება ერთგვაროვანი შედეგები მივიღოთ და ამით პოპულაციის ადეკვატური სურათი არ გამოვიდეს, ვინაიდან განსხვავებული დაკვირვება სწორედ იმ კლასტერში დარჩეს, რომელიც არ არჩეულა.

ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ განშრევებული და კლასტერული შერჩევა ორივე ყოფს პოპულაციას ჯგუფებად, მაგრამ თუ შრე ერთგვაროვანი ელემენტებისაგან შედგება, კლასტერის აგების პრინციპია მეზობლობა და სიახლოვე. განშრევებულ შერჩევაში ყველა შრე მონაწილეობს, კლასტერში კი მხოლოდ რამდენიმე კლასტერია წარმოდგენილი, ოღონდ სრულად. თუ განშრევებული შერჩევა აზერხებს ჩანაცვლების ელიმინირებას (გამორიცხვას), კლასტერული შერჩევის უპირატესობა მხოლოდ ეკონომიურობაშია.

* * *

პოპულარულ შესავალს სტატისტიკურ მეთოდებში, კერძოდ პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფის მეთოდებში, რომლებიც ეკონომიკაში გამოიყენება, წარმოადგენს ბროუდის წიგნი [23]. იულისა და კენდალის მონოგრაფია [65] სხვადასხვა ტიპის შერჩევების ანალიზსა და მაგალითებს უხვად შეიცავს. შერჩევის გამოყოფის მათემატიკური თეორია შერჩევის მინიმალური მოცულობის განსაზღვრით მოცემული სიზუსტისა და საიმედოობის დონის პირობებში გადმოცემულია კოკრენის [38] ფუნდამენტურ მონოგრაფიასა და შვარცის შედარებით იოლად საკითხავ წიგნში [62]. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, შემთხვევითი რიცხვების ვრცელ ცხრილებს შეიცავს ბოლშევისა და სმირნოვის წიგნი [20].

ხსენებული წყაროების გარდა, რომელთაგან [38] და [62] დამატებითი ინფორმაციის მისაღებადაა მითითებული, ამ თავში გამოყენებულია მასალა [66] და [79] წიგნებიდან.

დასკვნები

შერჩევითი გამოკვლევის უპირატესობას პოპულაციის სრულ აღწერასთან შედარებით შემდეგი გარემოებები განაპირობებენ: ხარჯების ეკონომია (კერძოდ, ერთეულთა გამანადგურებელი დაკვირვების შემთხვევაში), დროის ეკონომია, პოპულაციის ზოგი ერთეულის მიუღწევადობა (რაც გამორიცხავს სრულ აღწერას), სიზუსტე.

წარმომადგენლობითი (რეპრეზენტაციული) შერჩევა ადეკვატურად ასახავს პოპულაციის პროპორციებს. შერჩევას შეიძლება ახლდეს ცდომილება, რაც გამოიხატება წარმომადგენლობითი შერჩევიდან ყოველგვარ გადახრაში. არსებობს შემთხვევითი ცდომილება, რომელიც ცალკეულ ერთეულებს ახასიათებს, სისტემატური ცდომილება (ჩანაცვლება), რომელიც შერჩევის მეთოდს შეიძლება ახლდეს თან. არაშერჩევითი ცდომილება არის გამზომი ხელსაწყოებისა და გამოკითხვის წესების ცდომილება. გასათვალისწინებელია შესასწავლი პოპულაციისა და ჩვენთვის მისაწვდომი ანუ სამუშაო პოპულაციის სავარაუდო განსხვავებაც.

განასხვავებენ პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფის შემდეგ ხერხებს ანუ შერჩევის შემდეგ გეგმებს: მისაწვდომი შერჩევა, უწესრიგო შერჩევა, მიზანმიმართული შერ-

ჩევა, შემთხვევითი შერჩევა. უკანასკნელი ნიშნავს პოპულაციის ყოველი ერთეულისათვის შერჩევაში მოხვედრის განსაზღვრული შანსის (ალბათობის, შესაძლებლობის ხარისხის) არსებობას. თუ ეს შანსები თანაბარია, მაშინ გვაქვს მარტივი შემთხვევითი შერჩევა. თუკი პოპულაციის ერთეულები გადანომრილია, მაშინ მარტივი შემთხვევითი შერჩევა ხორციელდება შემთხვევითი რიცხვების მეშვეობით. გადანომრილი პოპულაციიდან სისტემატური შერჩევა ნიშნავს საწყისი ერთეულის შემთხვევით შერჩევას და დანარჩენ ერთეულებზე მიმდევრობით გადასვლას მუდმივი ბიჯით. განშრევებული შერჩევა იძლევა შერჩევაში სხვადასხვა შრეებიდან შემთხვევით აღებული ერთეულების ჩართვის საშუალებას. კლასტერული შერჩევა ნიშნავს კლასტერებად დაყოფილ პოპულაციაში ერთი ან რამდენიმე შემთხვევით აღებული კლასტერის გამოყოფას და მათ სრულ აღწერას.

სავარჯიშოები

2.1. ჩამოთვლილ სიტუაციებში აღნიშნეთ, რა აჯობებს, სრული აღწერა თუ შერჩევა:

(a) შესამოწმებელია იმ კოსმოსური ხომალდის კომპონენტების ხარისხი, რომელიც ადამიანიანითურთ უნდა გაფრინდეს კოსმოსში;

(b) იმისათვის, რომ გააუმჯობესოს პაციენტების მომსახურება, საავადმყოფოს ადმინისტრაციას სურს შეისწავლოს ნამკურნალები პირების აზრი;

(c) მკვლევარ მედიკოსს სურს განსაზღვროს შესაძლო გვერდითი მოვლენები ართრიტის ტკივილგამაყუჩებელი ახალი საშუალების ხმარებისას.

2.2. შერჩევის ყოველი ჩამოთვლილი გეგმისათვის დაადგინეთ, რატომ არ ემთხვევა ერთმანეთს შესწავლილი და სამუშაო პოპულაციები:

(a) ბიბლიოთეკას აინტერესებს, წიგნების რა ნაწილია დაზიანებული. გადაწყდა, რომ შერჩევა შედგეს შემდეგნაირად: ყოველ თაროზე შეირჩეს წიგნი, რომელიც 30 სმ მანძილზეა მარცხენა კიდიდან;

(b) პოლიტიკურმა გამომკითხველმა ჩამოიარა 200 ბინა და დააფიქსირა შინ მყოფთაგან ვინ რომელ კანდიდატს დაუჭერს მხარს მეორე დღისათვის დაგეგმილ არჩევნებზე.

2.3. ვთქვათ, თქვენ უნდა გამოიყენოთ შერჩევითი მეთოდი იმის შესაფასებლად, თუ რამდენი სიტყვაა ნახატებიან წიგნში.

(a) არის თუ არა აქ პოპულაციის განსაზღვრის პრობლემა?

(b) მოიყვანეთ არგუმენტები იმის სასარგებლოდ ან საწინააღმდეგოდ, რომ შერჩევის ერთეულის როლში აღებული იქნას (1) გვერდი, (2) სტრიქონი.

2.4. ქალაქის ცნობარში, რომელიც ოთხი წლის წინაა გამოცემული, ჩამოთვლილია სახლების მისამართები იმ მიმდევრობით, როგორც ისინი ქუჩებზეა განლაგებული და მითითებულია თითოეულ მისამართზე მცხოვრებთა გვარები. რა ნაკლი

აქვს ამგვარ ბაზისს ქალაქის მცხოვრებთა შერჩევითი გამოკითხვისათვის დღეს? ამ ცნობარით მისამართების შერჩევას გამოყოფდით თუ მცხოვრებთა შერჩევას?

2.5. გარკვეული ინფორმაციის მისაღებად სასურველია გამოიკითხოს გარკვეულ ქალაქში მცხოვრები ოჯახების შემთხვევითი შერჩევა. სამართლიანია თუ არა ჩამოთვლილი მეთოდების გამოყენება ამ მიზნის მისაღწევად?

(a) ყოველი მეათე სახლის ან მრავალსართულიან სახლში ყოველი მეათე ბინის არჩევა;

(b) გზაჯვარედინზე დგომა და ზოგიერთი გამვლელის გამოკითხვა;

(c) ქალაქის სატელეფონო ცნობარში შემთხვევით არჩეულ ნომრებზე დარეკვა და გამოკითხვა.

რა პოპულაციებზე შეიძლება გავრცელდეს ამ მეთოდებით მიღებული შედეგები?

2.6. კითხვარი, რომელიც მომზადებულია მომხმარებელთა მყიდველობითი უნარის შესასწავლად, შეიცავს კითხვას: „რა ღირს თქვენი ავტომობილი?" რა შეცდომა შეიძლება გამოიწვიოს ამ შეკითხვამ?

მოიფიქრეთ სასურველი პასუხის მიღების უკეთესი გზა.

2.7. წამლის გვერდითი ეფექტის გამოსაცდელად პაციენტთა ორი ჯგუფია საჭირო. პირველი ჯგუფის პირები ღებულობენ გამოსაკვლევ წამალს, მეორე ჯგუფს აძლევენ უვნებელ ნივთიერებას (ხშირად მხოლოდ შაქრის აბს, რომელიც გარეგნულად წამალს გავს), რომელსაც ინგლისურად placebo ქვია.

რისთვის გამოიყენება placebo ?

2.8. რომელ შერჩევას ამჯობინებდით და რატომ შემდეგ სიტუაციებში, მისაწვდომს, მიზანმიმართულს, თუ შემთხვევითს, თუ მათ რომელიმე კომბინაციას?

(a) ქაღალდის მწარმოებელი ფირმის სარეკლამო აგენტი ამზადებს პროდუქციის ნიმუშებიან ჩანთას მისი მორიგი ვიზიტებისათვის პოლიგრაფიულ საწარმოებში;

(b) საკრებულოს სურს შეადაროს სახელმწიფო სამსახურში მდგარი საკანცელარიო მუშაკების ხელფასები იმ პირების ხელფასებს, ვისაც მსგავსი პოზიციები უკავია კერძო საწარმოებში.

(c) გაზეთის რედაქტორი არჩევს შრიფტს რედაქტორის სვეტის დასაბეჭდად გაზეთის პირველ გვერდზე (უპასუხეთ რედაქტორის პოზიციიდან).

2.9. გამოიყენეთ შემთხვევითი რიცხვების ცხრილი, რათა:

(a) 100-კაციანი ფირმიდან შემთხვევით შეარჩიოთ 30 თანამშრომელთა საბინაო მდგომარეობის შესაფასებლად;

(b) ერთობლიობიდან, რომელიც 10 კლასტერს შეიცავს შესაბამისად 15, 10, 20, 30, 5, 25, 35, 40, 5 ელემენტარული ერთეულით, ჯერ აარჩიოთ 3 კლასტერი და იქ შემდეგ მოაწყოთ სრული აღწერა. როგორი იქნება კლასტერული შერჩევის მოცულობა? განიხილეთ სამი სხვადასხვა ვარიანტი.

3

შერჩევითი რიცხვითი მახასიათებლები

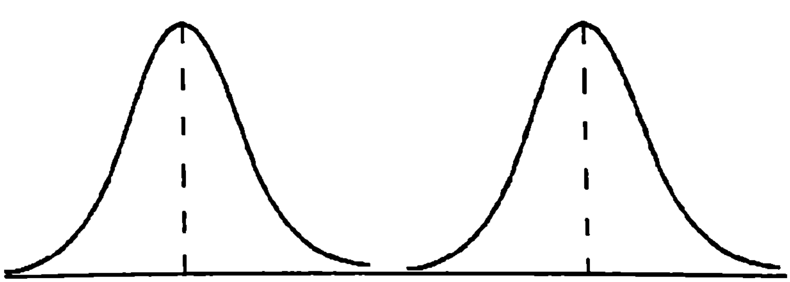
აქამდე მონაცემების აღსაწერად ჩვენ ვსარგებლობდით ისეთი მახასიათებლებით, როგორიცაა სიხშირეთა განაწილებები, სახელდობრ, ვაჯგუფებდით რა მონაცემებს, გრაფიკულად წარმოვაჩენდით სიხშირეთა განაწილებებს ჯგუფების მიხედვით. როგორც გვახსოვს, ასეთ მახასიათებლებია ჰისტოგრამა, პოლიგონი, ოგივა.

ამ თავში განვიხილული რიცხვითი მახასიათებლებიდან თითოეული საშუალებას იძლევა შეკუმშული ფორმით დავახასიათოთ რიცხვით მონაცემთა ესა თუ ის თვისება, კერძოდ, სად და როგორ არიან მონაცემები განლაგებული, სად არის მათი განაწილების ცენტრი, როგორია მათი გაფანტულობა, სიმეტრიულია თუ არა მონაცემთა განლაგება ცენტრის მიმართ, ასიმეტრიულობის რა ტიპთან გვაქვს საქმე და სხვა. გარდა ამისა, ეს რიცხვითი მახასიათებლები გვიადვილებს მონაცემთა ორი ჯგუფის, მაგალითად, ორი შერჩევის შედარებას ზემოჩამოთვლილი თვისებების მიხედვით. კერძოდ, მონაცემები, რომლებიც ხასიათდება სიხშირეთა განაწილების მსგავსი ფორმებით, შეიძლება განსხვავდებოდნენ ძირითადად ორი ნიშნით:

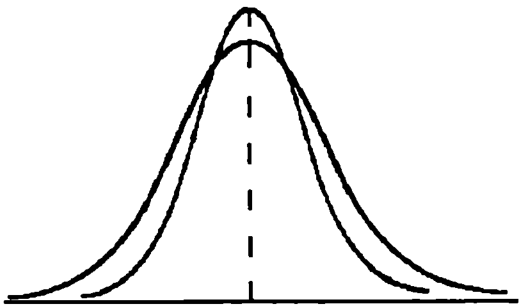
(1) დონით ანუ იმ ცენტრალური მნიშვნელობით, რომლის გარშემოც იყრიან თავს მონაცემები.
(2) დაკვირვებული მნიშვნელობების ცენტრის მიმართ გაბნევით ანუ გაფანტულობით.

სიტუაციების თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად იხ. ნახ. 3.1– 3.3, სადაც განაწილებათა ჰისტოგრამები სქემატურად, გაგლუვებული სახითაა მოცემული.

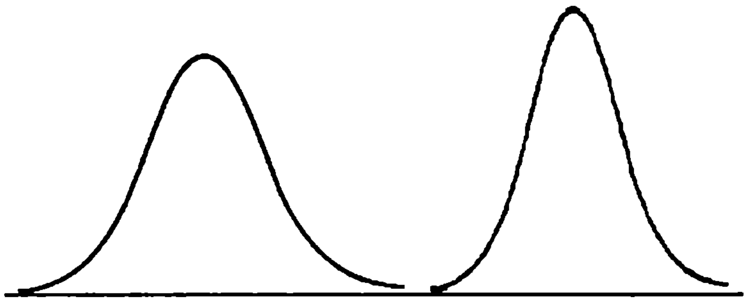
სწორედ ამ ორი ნიშნის შესაბამისად შემაჯამებელი (კრებსითი) რიცხვითი მახასიათებლები პირობითად შეგვიძლია დავყოთ ორ ძირითად ჯგუფად. პირველ ჯგუფს მიეკუთვნება მონაცემთა განლაგების ცენტრის, ანუ როგორც ამბობენ, ცენტრალური ტენდენციის საზომები. ესენია: შერჩევის საშუალო ანუ არითმეტიკული საშუალო, შერჩევის მედიანა და მოდა. მათ მონაცემთა ლოკალიზაციის საზომებსაც უწოდებენ.



ნახ. 3.1. განაწილებათა მსგავსი ფორმა, დონეთა (ცენტრების) განსხვავება.



ნახ. 3.2. განაწილებათა მსგავსი ფორმა, ერთნაირი დონე, განსხვავება გაფანტულობაში.



ნახ. 3.3. განაწილებათა მსგავსი ფორმა, დონეებისა და გაფანტულობის სხვაობა.

მეორე ჯგუფში შედის მონაცემთა გაბნეულობის ანუ ვარიაბელობის საზომები. ესენია: პროცენტილები, მაქსიმალური გაბნევა, შერჩევის დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა, ვარიაციის კოეფიციენტი. პროცენტილები ახასიათებს მონაცემთა პოზიციას მათი გამოჩენის სიხშირის მიხედვით, ამ თვალსაზრისით პროცენტილები მონაცემთა ლოკალიზაციის საზომსაც წარმოადგენს. შერჩევითი დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა ახასიათებს მონაცემთა გაფანტულობას საშუალოს მიმართ.

რიცხვითი მონაცემებისათვის ჩვენ განვიხილავთ კიდევ ორ მახასიათებელს: შერჩევის ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტებს, რომლებიც შესაბამისად ახასიათებს განაწილების სიმეტრიულობასა და წვეტიანობას.

თვისებრივი მონაცემებისათვის ყველაზე გავრცელებული და სასარგებლო რიცხვითი მახასიათებელია შერჩევითი პროპორცია (ფარდობითი სიხშირე), რომელიც მიგვითითებს, თუ რამდენად ხშირად გვხვდება რაიმე კერძო თვისების მქონე ობიექტი (ან ინდივიდი) შერჩევაში.

ამ თავში გადმოცემული მასალა მიუხედავად სათაურისა, საზოგადოდ, ყოველი სასრული სტატისტიკური ერთობლიობის მახასიათებლებს შეეხება, მაგრამ სათაურის არჩევაზე იმ გარემოებამ იმოქმედა, რომ სტატისტიკოსს, როგორც წესი, საქმე აქვს უპირატესად შერჩევასთან ანუ შერჩევით ერთობლიობასთან. მომდევნო თავებში (ზოგჯერ ამ თავშიც კი) ჩვენ ერთმანეთს შევადარებთ პოპულაციას და შერჩევას (გენერალურ და შერჩევით ერთობლიობებს) პოპულაციის და შერჩევის მახასიათებლებს (გენერალურ და შერჩევით მახასიათებლებს) და ა.შ.

§ 1. ცენტრალური ტენდენციის საზომები

არითმეტიკული საშუალო (საშუალო). არითმეტიკული საშუალო (ანუ, უბრალოდ საშუალო) წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულსა და გამჭირვალე შინაარსის მქონე საზომს.

ვთქვათ, ჩვენ გაგვაჩნია რომელიმე ფირმის წლიური საპროცენტო შემოსავალი ბოლო ათი წლის განმავლობაში. ესენია

$$8.1; -6.2; 20.9; -2.7; 33.6; 42.9; 24.4; 5.2; 3.1; 30.5.$$

როგორია ფირმის საშუალო წლიური შემოსავალი ამ ათი წლის განმავლობაში? საშუალო შემოსავალი გამოითვლება შემდეგი წესით: შევკრებთ ყველა მონაცემს და შემდეგ გავყოფთ წლების რაოდენობაზე, ე.ი. გამოითვლება მოყვანილი რიცხვების არითმეტიკული საშუალო:

$$\frac{8.1+(-6.2)+20.9+(-2.7)+33.6+42.9+24.4+5.2+3.1+30.5}{10}=16.$$

ამრიგად, საშუალო წლიური შემოსავალი არის 16%.

რადგანაც რიცხვითი მონაცემების ყოველი სიმრავლისათვის არითმეტიკული საშუალო გამოითვლება ერთი და იგივე გზით, ეს გამოთვლები მოსახერხებელია გამოისახოს სიმბოლურად.

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვებით გამოხატული n დაკვირვება (n მოცულობის შერჩევა რაიმე პოპულაციიდან), რომლებსაც ჩვენ აღვნიშნავთ x_1, ..., x_n სიმბოლოებით. მაშინ ამ მონაცემთა არითმეტიკული საშუალო აღინიშნება $\bar{x}$-ით და გამოითვლება ფორმულით:

$$\bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{3.1}$$

ანუ არითმეტიკული საშუალო წარმოადგენს დაკვირვებულ მნიშვნელობათა ჯამის ფარდობას დაკვირვებათა რაოდენობასთან.

არითმეტიკულ საშუალოს შეიძლება მიეცეს შემდეგი მარტივი ინტერპრეტაცია: არითმეტიკული საშუალო არის შერჩევის ერთ ინდივიდზე ან ობიექტზე მოსული ჯამურ დაკვირვებათა წილი (საშუალო რაოდენობა).

მაგალითი 3.1. შესწავლილია 10 ოჯახში ბავშვთა რაოდენობა. შესაბამისი მონაცემებია

$$3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 1,\ 2,\ 2.$$

მაშინ ერთ ოჯახზე მოსული ბავშვების საშუალო რაოდენობა იქნება

$$\frac{3+2+1+1+2+3+3+1+2+2}{10}=2,$$

ე.ი. 2 ბავშვი. ამრიგად, თუ 10 ოჯახს ჯამში ყავს 20 ბავშვი, მაშინ არითმეტიკული საშუალო უდრის ბავშვთა იმ რაოდენობას, რომელიც მოვიდოდა ერთ ოჯახზე ბავშვები თანაბრად რომ გაენაწილებინათ.

ვთქვათ n მუშის ჯამური ხელფასია P ლარი. მაშინ არითმეტიკული საშუალო ტოლია P/n ფარდობისა და იგი არის ერთ მუშაზე მოსული ხელფასი იმ შემთხვევაში, თუ ეს ხელფასი თანაბრად განაწილდებოდა ყოველ მათგანზე. მეორეს მხრივ, თუ ცნობილია, რომ n მუშის საშუალო ხელფასია $\bar{x} = M$ ლარი, მაშინ მათი ჯამური ხელფასი ყოფილა $P=nM$ ლარი. ეს ფაქტი ფორმალურად ასე გამოითქმის

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

მოვიყვანოთ არითმეტიკული საშუალოს თვისებები.

1) საშუალოდან გადახრების ჯამი ნულის ტოლია:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0. \tag{3.2}$$

მართლაც,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}\right) = n(\bar{x} - \bar{x}) = 0.$$

ეს თვისება იძლევა იმის ახსნას, თუ რატომ წარმოადგენს $\bar{x}$ მონაცემთა განლაგების ცენტრის მახასიათებელს. ამ მიზნით გავარკვიოთ არითმეტიკული საშუალოს ფიზიკური შინაარსი. წარმოვიდგინოთ უწონო ერთგვაროვანი ღერძი, რომელზედაც x_1, ..., x_n კოორდინატების მქონე წერტილებში განლაგებულია ერთეულოვანი მასები. ამ შემთხვევაში, მოყვანილი თვისებიდან გამომდინარე, $\bar{x}$ წარმოადგენს იმ საყრდენი წერტილის კოორდინატს, რომლის მიმართაც ღერძი წონასწორობაში იმყოფება ანუ $\bar{x}$ არის სიმძიმის ცენტრი. ამას ადვილად დავინახავთ, თუ გავიხსენებთ სიმძიმის ცენტრის ცნებას: ვთქვათ, x_1, ..., x_n წერტილებში მოთავსებულია m_1, ..., m_n მასები, მაშინ სიმძიმის ცენტრი არის იმ a კოორდინატის მქონე წერტილი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)m_i = 0. \tag{3.3}$$

ჩვენს შემთხვევაში $m_i = 1$, ე.ი. $a = \bar{x}$.

2) ნებისმიერი a რიცხვისათვის

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 , \tag{3.4}$$

ე.ი. არითმეტიკული საშუალო ის რიცხვია, რომლიდანაც ცალკეული დაკვირვებების გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალურია.

შევამოწმოთ ეს თვისება. დავაფიქსიროთ ნებისმიერი a რიცხვი. მაშინ

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-a)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+2(\bar{x}-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})+n(\bar{x}-a)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-a)^2\geq\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 .$$

შევნიშნოთ, რომ ბოლოს წინა ტოლობა მიღებულია $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$ ტოლობის გათვალისწინებით.

3) თუ არსებული $x_1, \ldots, x_n$ მონაცემებიდან შევქმნით ახალ მონაცემებს $y_1 = ax_1+b, \ldots ,$ $y_n = ax_n+b$, ე.ი. ძველ მონაცემებს შევუცვლით ათვლის წერტილსა და მასშტაბს (აქ a და b ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი წყვილია), მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=a\bar{x}+b \tag{3.5}$$

ანუ ახალი მონაცემების არითმეტიკული საშუალო მიიღება ძველისაგან ათვლის წერტილისა და მასშტაბის ისეთივე შეცვლით.

4) ვთქვათ, $x_1, \ldots, x_n$ და $y_1, \ldots, y_n$ ტოლი მოცულობის ორი შერჩევაა. შევქმნათ ახალი შერჩევა $z_1 = x_1 \pm y_1, \ldots, z_n = x_n \pm y_n$.
მაშინ ადვილად მოწმდება, რომ

$$\bar{z}=\bar{x}\pm\bar{y}. \tag{3.6}$$

5) თუ $x_1, \ldots, x_n$ და $y_1, \ldots, y_m$ ორი შერჩევაა, მაშინ

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$$

გაერთიანებული შერჩევის არითმეტიკული საშუალო მოიცემა ფორმულით:

$$\bar{z}=\frac{n}{n+m}\bar{x}+\frac{m}{n+m}\bar{y} \tag{3.7}$$

ანუ $\bar{z}$ არის ცალკეულ არითმეტიკულ საშუალოთა შეწონილი ჯამი, შესაბამისად, $\omega_1=\dfrac{n}{n+m}$ და $\omega_2=\dfrac{m}{n+m}$, წონებით. შევნიშნოთ, რომ $\omega_1+\omega_2=1$.

ეს თვისება მეტად მნიშვნელოვანია პრაქტიკული თვალსაზრისით: მონაცემთა ახალი მასივის გამოჩენა და მისი გაერთიანება ძველ მონაცემებთან არ საჭიროებს გაერთიანებული მონაცემების არითმეტიკული საშუალოს ხელმეორედ გამოთვლას, საკმარისია გამოითვალოს მონაცემთა ახალი მასივის არითმეტიკული საშუალო. გაერთიანებულ მონაცემთა არითმეტიკული საშუალო გამოითვლება როგორც ძველი მონაცემებისა და ახალი მასივის არითმეტიკულ საშუალოთა შეწონილი ჯამი.

იმის გამო, რომ საშუალო ადვილი გამოსათვლელია, გააჩნია მარტივი ინტერპრეტაცია და მასზე შეიძლება მათემატიკური ოპერაციების ჩატარება, ის წარმოადგენს მონაცემთა ცენტრის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ რიცხვით მახასიათებელს. საშუალო განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია გადაწყვეტილებების მიღების თვალსაზრისით, რადგან ხშირ შემთხვევებში ის ცენტრალური ტენდენციის საუკეთესო საზომია და

მასზე დაყრდნობით შესაძლებელია დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გაკეთება პოპულაციის განლაგების ცენტრის შესახებ.

მაგრამ საშუალო არითმეტიკულს გააჩნია ერთი სერიოზული ნაკლი, რომელიც გარკვეული აზრით არადამაკმაყოფილებელს ხდის მას, როგორც ლოკალიზაციის (ცენტრალური ტენდენციის) საზომს. იგი ზედმეტად რეაგირებს ექსტრემალური დაკვირვებების უმნიშვნელო რაოდენობაზეც კი. ექსტრემალური დაკვირვებები შეიძლება ორი ტიპის იყოს. პირველ ტიპს მიეკუთვნება ე.წ. „ამოვარდნილი" დაკვირვებები ანუ ის დაკვირვებები (მონაცემები), რომლებიც მკვეთრადაა განსხვავებული მონაცემთა ძირითადი მასივისაგან. ჩვენ ვნახავთ, რომ ამ შემთხვევაში საშუალო მკვეთრადაა წანაცვლებული „ამოვარდნილი" დაკვირვებების მიმართულებით. ექსტრემალურ დაკვირვებებთან საქმე გვაქვს იმ სიტუაციაშიც, როდესაც მონაცემებით აგებული (გაგლუვებული) ჰისტოგრამა ძლიერად ასიმეტრიულია რომელიმე მიმართულებით (ან მარჯვნივ ან მარცხნივ), ანუ მას გააჩნია რომელიმე მიმართულებით გაწელილი გრძელი „კუდი" და მოკლე „კუდი" საწინააღმდეგო მიმართულებით (რაც, მაგალითად, მიუთითებს შედარებით დიდი ექსტრემალური მნიშვნელობების მცირე პროპორციის არსებობაზე მარჯვნივ ასიმეტრიული ჰისტოგრამების დროს). ამ შემთხვევაშიც საშუალო წანაცვლებულია გრძელი „კუდის" მიმართულებით და მონაცემთა ძირითადი მასა მის ერთ მხარეს აღმოჩნდება. ასეთი მონაცემებისათვის საშუალო არ წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის საიმედო საზომს.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები.

მაგალითი 3.2. ვთქვათ, მუსიკალურ ნაწარმოებთა კატალოგიდან, რომელშიც მოცემულია ცალკეული ნაწარმოების შესრულების ხანგრძლივობა (გამოხატული წუთებში) შემთხვევით ავირჩიეთ 5 ნაწარმოები, რომელთა მონაცემებია $x_1 = 37$, $x_2 = 46$, $x_3 = 40$, $x_4 = 57$, $x_5 = 50$, მაშინ $\bar{x} = 46$. მაგრამ მეხუთე ნაწარმოების (ჩაიკოვსკის სიმფონიის) ნაცვლად ჩვენ რომ აგვერჩია ვაგნერის ოპერა ე.ი. $x_5=200$, მაშინ $\bar{x}=76$, ე.ი. საშუალომ გადაინაცვლა ექსტრემალური $x_5=200$ დაკვირვებისაკენ, ყველა დანარჩენი მონაცემი საგრძნობლად ნაკლებია 76-ზე. ყველა დათანხმდება იმას, რომ $\bar{x}$ არ არის განლაგების (ლოკალიზაციის) მდგრადი მახასიათებელი. შევნიშნოთ, რომ თუ მეხუთე მონაცემს შევცვლით $x_5 = 400$-ით, მაშინ $\bar{x} = 116$ და ა.შ.

მკვეთრად ასიმეტრიული (მარჯვნივ) ფორმა აქვს მოსახლეობის შემოსავლების სიხშირულ განაწილებებს, ამიტომ $\bar{x}$ მკვეთრად წანაცვლებული აღმოჩნდება მარჯვნივ (ექსტრემალურად დიდი შემოსავლების მიმართულებით) და გასაშუალოებული შემოსავლების გამოყენება ცხოვრების დონის აღსაწერად აზრს მოკლებულია.

მაგალითი 3.3. ქვევით მოყვანილია ავსტრალიის ერთ-ერთი უნივერსიტეტის თანამშრომელთა წლიური შემოსავლები (\$1000-ში):

$$28,\ 109,\ 26,\ 32,\ 30,\ 26,\ 29.$$

გვაქვს $\bar{x} = \frac{28+109+26+32+30+26+29}{7} = 40$. როგორც ვხედავთ, ყველა მონაცემი, გარდა ერთისა 40-ზე ნაკლებია და ამრიგად, $\bar{x} = 40$ არ აღწერს ტიპობრივ შემოსავალს.

მიუხედავად ამ პოტენციური დეფექტისა საშუალო წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ყველაზე პოპულარულ საზომს, რადგანაც არსებობს მრავალი პოპულაცია, რომელთათვის ექსტრემალური დაკვირვებები ძალიან მცირედაა მოსალოდნელი (მაგალითად, როდესაც გაგლუვებულ ჰისტოგრამას აქვს ე.წ. ნორმალური განაწილების

სიმკვრივის ფორმა). ასეთი პოპულაციებისათვის არითმეტიკული საშუალო მდგრადია და შერჩევის კარგი მახასიათებელია.

მედიანა. მედიანა განეკუთვნება მდებარეობის ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომების ჯგუფს.

საზოგადოდ, მონაცემთა რაიმე რიცხვითი მახასიათებლის მდგრადობა ნიშნავს, რომ დაკვირვებათა მცირე რაოდენობის ცვლილებას შეზღუდული გავლენა აქვს მასზე, მიუხედავად იმისა, თუ როგორია ამ ცვლილების სიდიდე. საშუალოს არ გააჩნია ეს თვისება, რადგან ჩვენ შეგვიძლია რაგინდ დიდი გავხადოთ იგი, შევცვლით რა მხოლოდ ერთ მონაცემს უფრო დიდი მონაცემით (იხ. მაგალითი 3.2).

როგორც ქვევით ვნახავთ, მედიანა მდგრადი აღმოჩნდება ზემოთ აღწერილი თვალსაზრისით. სწორედ ამ თვისების გამო მედიანა, არითმეტიკული საშუალოს შემდეგ, წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ყველაზე გავრცელებულ საზომს.

როგორც ცნობილია „მედიანა" არის „შუა"-ს სინონიმი. სინამდვილეშიც, მედიანა განიმარტება, როგორც მონაცემთა ვარიაციული მწკრივის (ანუ ზრდის მიხედვით დალაგებული დაკვირვებების მწკრივის) შუა მნიშვნელობა იმ აზრით, რომ მასზე ნაკლები რიცხვითი მნიშვნელობის მონაცემთა რაოდენობა მასზე დიდი რიცხვითი მნიშვნელობის მონაცემთა რაოდენობის ტოლია. თუ დაკვირვებათა რაოდენობა, n კენტია, მაშინ მედიანა მართლაც არის ვარიაციული მწკრივის შუა წევრი. თუ დაკვირვებათა რაოდენობა ლუწია, მაგალითად $n = 2k$, მაშინ ნებისმიერი მნიშვნელობა $(x_{(k)}, x_{(k+1)})$ ინტერვალიდან აკმაყოფილებს მედიანის განმარტებას. ამრიგად, ამ შემთხვევაში მედიანა ცალსახად არ განისაზღვრება. გაუგებრობის თავიდან აცილების მიზნით მიღებულია მედიანის შემდეგი განსაზღვრება.

ვთქვათ $x_1, \ldots, x_n$ შერჩევის ელემენტებია, ხოლო $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ შესაბამისი ვარაციული მწკრივია. მედიანა აღინიშნება $\widetilde{x}$ -ით და აიგება შემდეგი წესით:

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1/2)}, & \text{თუ } n \text{ კენტია,} \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{((n/2)+1)}}{2}, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases} \tag{3.8}$$

როგორც ვხედავთ, მედიანის მოსაძებნად საჭიროა ვარიაციული მწკრივის შექმნა, რაც დაკვირვებათა დიდი რაოდენობის დროს გარკვეულ სიძნელეებთან შეიძლება იყოს დაკავშირებული.

აღსანიშნავია მედიანის შემდეგი თვისებები, რომლებიც შესაბამისად საშუალოს 1) და 2) თვისებების ანალოგიურია.

a) მედიანა წარმოადგენს ისეთ სიდიდეს, რომლიდანაც ცალკეული დაკვირვებების გადახრების აბსოლუტური სიდიდეების ჯამი მინიმალურია, ანუ ნებისმიერი a რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \widetilde{x}| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|; \tag{3.9}$$

b) შერჩევის მედიანა წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამოხსნას

$$\sum_{i=1}^{n} \text{sign}(x_i - \tilde{x}) = 0$$

სადაც $\text{sign}\, x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$

ე.ი. დაკვირვებების მედიანისაგან გადახრის ნიშნების ჯამი ნულის ტოლია. არითმეტიკული საშუალოს 3) თვისება ძალაში რჩება მედიანასათვისაც;

c) მონაცემების ათვლის წერტილისა და მასშტაბის შეცვლით მიღებული ახალი მონაცემების მედიანა მიიღება ძველისაგან ათვლის წერტილისა და მასშტაბის იგივე გარდაქმნით ანუ თუ $y_i = ax_i + b$, $i = 1, 2, ..., n$,

$$\tilde{y} = a\tilde{x} + b. \tag{3.10}$$

მედიანისათვის აღარ რჩება ძალაში საშუალოს 4) და 5) თვისებები. ე.ი. თუ გვაქვს ორი შერჩევა $x_1, ..., x_n$ და $y_1, ..., y_n$ მაშინ ახალი შერჩევის $z_i = x_i \pm y_i$ მედიანა აღარ გამოისახება $\tilde{z} = \tilde{x} \pm \tilde{y}$ ფორმით, ასევე ორი შერჩევის გაერთიანების შედეგად მიღებული მედიანა აღარ გამოისახება თითოეული შერჩევის მედიანათა საშუალებით.

ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი დაგვარწმუნებს იმაში, რომ არსებობს შემთხვევები, როდესაც მედიანა უკეთ აღწერს ცენტრალურ ტენდენციას, ვიდრე საშუალო და ამასთან, იმ ფაქტშიც, რომ მედიანა უფრო მდგრადია ექსტრემალური დაკვირვებების მიმართ ანუ ექსტრემალური დაკვირვების გავლენა მედიანაზე უმნიშვნელოა.

მაგალითი **3.4.** ვთქვათ გვაქვს 3.3 მაგალითში მოყვანილი მონაცემები. დავალაგოთ ეს მონაცემები ზრდის მიხედვით ე.ი. წარმოვადგინოთ ვარიაციული მწკრივის სახით:

$$x_{(1)} = 26,\ x_{(2)} = 26,\ x_{(3)} = 28,\ x_{(4)} = 29,\ x_{(5)} = 30,\ x_{(6)} = 32,\ x_{(7)} = 109.$$

მაშინ, რადგან n კენტია, $\tilde{x} = x_{((n+1)/2)} = x_{(4)} = 29$. გავიხსენოთ, რომ $\bar{x} = 40$. როგორც ვხედავთ, მედიანა უკეთ აღწერს ტიპობრივ შემოსავალს, ვიდრე საშუალო.

ვთქვათ, დაკვირვება $x_{(7)} = 109$ შევცვალეთ 200-ით. მაშინ, შეცვლილი მონაცემებისათვის $\tilde{x} = 29$, ხოლო $\bar{x} = 53$. ამრიგად, მედიანა არ შეიცვალა, საშუალომ კი მნიშვნელოვნად წაინაცვლა დიდი დაკვირვების (200) მიმართულებით. ამრიგად, მედიანა მდებარეობის უფრო მდგრადი მახასიათებელია, ვიდრე საშუალო.

ვთქვათ, ახლა $x_{(3)} = 26$ შევცვალეთ 300-ით. მაშინ ახალი მონაცემების ვარიაციული მწკრივი იქნება:

$$x_{(1)} = 26, x_{(2)} = 28, x_{(3)} = 29, x_{(4)} = 30, x_{(5)} = 32, x_{(6)} = 109, x_{(7)} = 300.$$

ამიტომ $\tilde{x} = x_{(4)} = 30$, ე.ი. მედიანა შეიცვალა ერთი ერთეულით (გავიხსენოთ, რომ საწყისი მონაცემებისათვის $\tilde{x} = 29$), $\bar{x} \approx 78.85$, ე.ი. საშუალო მკვეთრად გაიზარდა (საწყისი მონაცემებისათვის $\bar{x} = 40$), რაც კვლავ მეტყველებს მედიანის, როგორც ცენტრის მახასიათებლის მდგრადობაზე.

მედიანას გააჩნია კიდევ ერთი სასარგებლო თვისება. იმ შემთხვევაში, როდესაც შერჩევის ინდივიდები დალაგებულია შესასწავლი ნიშნის (მაჩვენებლის) სიდიდის

მიხედვით (მაგალითად, ადამიანები – სიმაღლის მიხედვით) მედიანის გამოსათვლელად საჭირო არაა ყველა ინდივიდის მაჩვენებლის გაზომვა, არამედ მხოლოდ შუაში მოქცეული ინდივიდისა (როცა n კენტია) ან ორი შუა ინდივიდისა (როცა n ლუწია). მედიანას გამოთვლა შესაძლებელია ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამის მეშვეობითაც, მონაცემთა ხელმეორედ გადაწერის გარეშე.

ორივე, არითმეტიკული საშუალო და მედიანა წარმოადგენს მონაცემთა სიმრავლის ცენტრის საზომს, მაგრამ საზოგადოდ, ეს ორი სიდიდე ერთმანეთის ტოლი არაა, რადგანაც ისინი წარმოაჩენენ მონაცემთა სიმრავლის სხვადასხვა ასპექტს.

იმის გამო, რომ საშუალო ზედმეტად მგრძნობიარეა ექსტრემალური დაკვირვებების მიმართ, რაც იმაში გამოიხატება, რომ მცირე რაოდენობის ექსტრემალური დაკვირვებები (დაკვირვებათა ძირითადი მასისაგან სიდიდით გამორჩეული დაკვირვებები) საშუალოში ახშობენ ბევრი, უფრო მცირე სიდიდის დაკვირვების ეფექტს, მედიანა კი მდგრადია ექსტრემალური დაკვირვებების გავლენის მიმართ, ხშირ სიტუაციაში უპირატესობა ენიჭება მედიანას. იგი განსაკუთრებით მნიშვნელოვან ინფორმაციას იძლევა მაშინ, როდესაც მოცემულ შერჩევაში დაკვირვებების შედარებით მცირე რაოდენობა მნიშვნელოვნად განსხვავდება დანარჩენი სიმრავლისაგან. მაგალითად, მოსახლეობის გარკვეული ჯგუფის შემოსავლების განაწილების მონაცემებში მედიანა მოსახლეობის ამ ჯგუფის ცხოვრების დონის უფრო აზრიან სურათს იძლევა, ვიდრე საშუალო (რომელზედაც დიდ გავლენას ახდენს ერთი ინდივიდის დიდი შემოსავალი).

მაგრამ არ უნდა ვიფიქროთ, რომ მდგრადობის გამო მედიანას ყოველთვის უნდა მიენიჭოს უპირატესობა საშუალოსთან შედარებით. საშუალო გამოითვლება ყველა მონაცემის მეშვეობით (ყველა მონაცემის სიდიდის გათვალისწინებით) და შეიცავს მეტ ინფორმაციას, ვიდრე მედიანა, მისი მგრძნობიარობა კი ხშირ შემთხვევაში მას მოცემული შერჩევის კარგ მახასიათებლად აქცევს. უხეშად რომ ვთქვათ, საშუალო შეიძლება გამოყენებული იქნას როგორც საზომი, რომელიც ასახავს, თუ საშუალოდ რა სიდიდისაა შერჩევის ელემენტები. ორი სხვადასხვა ჯგუფის ელემენტების შედარების მიზნით ჩვეულებრივ ადარებენ მათ არითმეტიკულ საშუალოებს.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 3.5. ვთქვათ, მოცემულია ორი A და B ფირმის შემოსავლიანობა (პროცენტებში) ბოლო 10 წლის განმავლობაში:

ფირმა A	8.3	–6.2	20.9	–2.7	33.6	42.9	24.4	5.2	3.1	30.5
ფირმა B	12.1	6.4	12.2	27.8	25.7	18.2	10.7	–1.3	11.4	–2.8

გამოვთვალოთ საშუალოები A და B ფირმებისათვის,

$$\bar{x}_A = 16\%, \qquad \bar{x}_B = 12\%.$$

ამ ორი საშუალოს შედარება გვაძლევს საფუძველს ვიფიქროთ, რომ A ფირმის შემოსავლიანობა საშუალოდ უფრო მაღალია, ვიდრე B ფირმისა (საკითხის ზუსტი დასმა და გადაწყვეტა შეიძლება იხილოთ მე-11 თავში).

მოდა. ცენტრალური ტენდენციის მესამე საზომს წარმოადგენს მოდა. ის წარმოადგენს იმ მნიშვნელობას შერჩევიდან, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება. მაგალითად, თუ ჩვენი მონაცემებია

$$2,\ 3,\ 5,\ 4,\ 6,\ 4,\ 7,\ 1,$$

მაშინ მოდა იქნება 4, რადგანაც ის 2-ჯერ შეგვხვდა შერჩევაში, ყველა დანარჩენი დაკვირვება კი ერთხელ.

შეიძლება ისე მოხდეს, რომ შერჩევაში ასეთი მნიშვნელობა არ აღმოჩნდეს. ამ შემთხვევაში შეიძლება ვილაპარაკოთ ე.წ. მოდალურ ინტერვალზე, რომელიც ასე განიმარტება: თუ აგებული გვაქვს ასე თუ ისე მისაღები ჰისტოგრამა (ანუ ჰისტოგრამა, რომელიც ადეკვატურად აღწერს მონაცემთა სიხშირულ განაწილებას), მაშინ მოდალური ინტერვალი იქნება ის ინტერვალი, რომელსაც შეესაბამება ჰისტოგრამის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ამრიგად, მოდალური ინტერვალი წარმოადგენს იმ ინტერვალს, რომელშიც მოხვდა დაკვირვებათა ყველაზე დიდი რაოდენობა. გარკვეულობისათვის მოდას უწოდებენ მოდალური ინტერვალის შუა წერტილს. თუ შერჩევის მოცულობა დიდია, ამჯობინებენ მონაცემთა დაჯგუფებას და მოდალური ინტერვალის მოძებნას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მოდის (მოდალური ინტერვალის) მოძებნა საკმაოდ რთულია. იმ ინტერვალის მითითება, რომელშიც მოხვდა დაკვირვებათა მაქსიმალური რაოდენობა, დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ დავაჯგუფეთ მონაცემები. სახელდობრ, იმაზე თუ რა სიგრძის ინტერვალებად დავყავით ინტერვალი $[x_{(1)}, x_{(n)}]$. ამიტომ მოდალური ინტერვალის განსაზღვრას თან სდევს ყველა ის სირთულე, რომელიც დაკავშირებულია ჰისტოგრამების აგებასთან.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ის მნიშვნელობა, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება ორია ან ორზე მეტიც კი. შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ საქმე გვაქვს ე.წ. უნიმოდალურ განაწილებებთან ე.ი. როდესაც მოდა ერთადერთია, ანდა გვაქვს ერთადერთი მოდალური ინტერვალი. მოდაც, ისევე როგორც მედიანა ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომია. ის რეაგირებს შერჩევის ელემენტების მხოლოდ ზოგიერთ ცვლილებაზე და არა ყოველგვარზე, როგორც საშუალო.

განვიხილოთ შემდეგი მარტივი მაგალითი. ვთქვათ ჩვენი მონაცემებია:

$$4, \quad 4, \quad 5, \quad \boxed{7}, \quad 10$$

მაშინ $\bar{x} = 6$, $\tilde{x} = 5$, მოდა= 4. ვთქვათ, ჩარჩოში მოთავსებული მონაცემი შევცვალეთ 17-ით, ე.ი. ახალი მონაცემებია

$$4, 4, 5, 17, 10.$$

ცხადია, რომ კვლავ $\tilde{x} = 5$, მოდა= 4, $\bar{x} = 8$.

შერჩევითი მოდის ინტერპრეტაცია წააგავს ყოველდღიურ ცხოვრებაში სიტყვა „მოდის" მნიშვნელობას. როგორც ის, რაც „მოდაშია" (ანუ ყველაზე ხშირია, გავრცელებულია) შეიძლება სულაც არ აღწერდეს საერთო სტილს და ასევე შერჩევითი მოდაც ახასიათებს დაკვირვებათა მხოლოდ მცირე ნაწილს.

შერჩევითი მოდა იძლევა მნიშვნელოვან ინფორმაციას სხვადასხვა საქონლის გამომშვები ფირმისათვის, მაღაზიის მფლობელისათვის, კონსტრუქტორებისათვის, რომლებიც აწოდებენ საქონელს სპეციფიკურ ბაზრებს. მაგალითად, ტანსაცმლის მაღაზიის მფლობელმა უნდა იცოდეს კოსტუმების ყველაზე გავრცელებული ზომები,

რათა გაითვალისწინოს ეს ფაქტი საქონლის მომარაგებისას; საათების მწარმოებელმა უნდა იცოდეს, თუ რა კლასის საათები იყიდება ყველაზე ხშირად, იმ მიზნით, რომ გაზარდოს ამ კლასის პროდუქციის წარმოება.

კატეგორიზებული მონაცემებისათვის, ცხადია არითმეტიკულ საშუალოსა და მედიანის გამოყენება უაზრობაა. მოდა კი იძლევა სასარგებლო ინფორმაციას.

მონაცემთა განლაგების ცენტრის სამივე მახასიათებელი: არითმეტიკული საშუალო, მედიანა და მოდა წარმოადგენს პოპულაციის შესაბამისი მახასიათებლების: საშუალოს, მედიანისა და მოდის შერჩევით ანალოგებს (პოპულაციის მახასიათებლები უსასრულო პოპულაციებისათვის შემოღებული იქნება შემდეგ თავებში).

თუ პოპულაცია სასრულია და შედგება $x_1, \ldots, x_N$ რიცხვითი მონაცემისაგან, მაშინ პოპულაციის მახასიათებლები — საშუალო, მედიანა და მოდა იგივე გზით განისაზღვრება, როგორც შერჩევისათვის. მაგალითად, პოპულაციის საშუალოა

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \,. \tag{3.11}$$

ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ თუ შერჩევა წარმოებს დაბრუნების გარეშე, მაშინ რაც უფრო მეტია შერჩევის n მოცულობა, $\bar{x}_n$-ის რიცხვითი მნიშვნელობები მით უფრო კარგად წარმოადგენს პოპულაციის μ საშუალოს.

შერჩევის მოცულობის ზრდისას შერჩევის რიცხვითი მახასიათებლების კრებადობა (დაახლოება) პოპულაციის ანალოგიური მახასიათებლებისაკენ, როგორც ჩვენ შემდგომში ვნახავთ, წარმოადგენს ზოგად ფაქტს. აქედან გამომდინარე შერჩევითი მახასიათებლები შეიძლება ჩაითვალოს პოპულაციის მახასიათებლების შეფასებად და გამოყენებული იქნას ამ უკანასკნელის შესახებ სტატისტიკური დასკვნების მისაღებად (იხ. თავები შეფასების თეორია, ჰიპოთეზათა შემოწმება და ა.შ.).

და ბოლოს, ყურადღება გავამახვილოთ კიდევ ერთ მომენტზე. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არითმეტიკული საშუალო ზედმეტად მგრძნობიარეა „ამოვარდნილი" დაკვირვებების მიმართ, მაშინ როცა მედიანა თითქმის არ რეაგირებს მათზე. ასეთი, ორივე ტიპის ექსტრემალური ქცევა შეიძლება არასასურველი იყოს. მოკლედ შევეხოთ ისეთ ალტერნატიულ რიცხვით მახასიათებლებს, რომლებიც არც ისე „მგრძნობიარე" აღმოჩნდებიან „ამოვარდნების" მიმართ, როგორც საშუალო და არც ისე „უგრძნობი", როგორც მედიანა. ვარიაციული მწკრივიდან ერთი მონაცემის უკუგდებაც კი იწვევს საშუალოს ცვლილებას, მაშინ როცა მედიანა არ შეიცვლება, თუ ამოვყრით მონაცემთა მაქსიმალურ რაოდენობას ისე, რომ დარჩეს ერთი (თუ n კენტია) ან ორი (თუ n ლუწია) შუა წევრი. ამრიგად, საშუალოს გამოთვლისას „მოიჭრება" წევრთა 0%, ხოლო მედიანის შემთხვევაში კი მაქსიმალური შესაძლო რაოდენობა. ე.წ. მოჭრილი საშუალო $\bar{x}_{tr}$ წარმოადგენს კომპრომისულ ვარიანტს $\bar{x}$-სა და $\tilde{x}$-ს შორის. მაგალითად, 10%-იანი მოჭრილი საშუალო გამოითვლება შემდეგი წესით: ვარიაციული მწკრივის ორივე ბოლოდან მოიჭრება $[0.1n]$ რაოდენობის წევრი და აიღება დანარჩენების საშუალო; აქ $[a]$ არის a-ს მთელი ნაწილი. მაგალითად, თუ n=25, მაშინ $[0.1\cdot 25] = [2.5] = 2$ და 2-2 წევრი მოიჭრება. ზოგადად, თუ α რაიმე რიცხვია, $0<\alpha<1$, მაშინ 100α%-იანი მოჭრილი საშუალოს გამოთვლისას ორივე ბოლოდან მოიჭრება $[\alpha n]$ წევრი და გამოითვლება დანარჩენი წევრების არითმეტიკული საშუალო.

მაგალითი 3.6. ვთქვათ, გვაქვს გარკვეული ტიპის 20 ნათურის სიცოცხლის ხანგრძლივობის (მუშაობის ხანგრძლივობა გადაწვამდე) მონაცემები (საათებში), დალაგებული ზრდის მიხედვით:

612, 623, 666, 744, 883, 898, 964, 970, 983, 1003,
1016, 1022, 1029, 1058, 1085, 1088, 1122, 1135, 1197, 1201.

მაშინ $\bar{x} = 965$, $\tilde{x} = 1009.5$. 10%-იანი მოჭრილი საშუალო გამოითვლება შემდეგნაირად: რადგან ამ შემთხვევაში $\alpha = 0.1$, ამიტომ $[\alpha n] = 2$ და უნდა გადავაგდოთ ვარიაციული მწკრივის პირველი ორი (612, 623) და ბოლო ორი (1197, 1201) წევრი და დანარჩენი წევრები გავასაშუალოთ (ანუ გამოვთვალოთ მათი არითმეტიკული საშუალო). მივიღებთ $\bar{x}_{tr(10)} = 979.1$ (აქ $\bar{x}_{tr(\alpha \cdot 100)}$ აღნიშნავს α100%-იან მოჭრილ საშუალოს). ცხადია, $\bar{x} < \bar{x}_{tr(10)} < \tilde{x}$. თუ გამოვთვლით 20%-იან მოჭრილ საშუალოს, მივიღებთ $\bar{x}_{tr(20)} = 999.9$, რომელიც უფრო ახლოსაა მედიანასთან. აშკარაა, რომ მოჭრილი საშუალო ნაკლებ მგრძნობიარეა „ამოვარდნების" მიმართ, ვიდრე არითმეტიკული საშუალო და უფრო მგრძნობიარე, ვიდრე მედიანა. ამავე დროს მოჭრის სიდიდის ვარირებით ხდება ექსტრემალური დაკვირვებების გავლენის შეზღუდვა (მაგალითად, განხილულ მაგალითში 10%-იან მოჭრილ საშუალოზე არ იმოქმედებს ვარიაციული მწკრივის პირველი ორი და ბოლო ორი წევრების ნებისმიერი ცვლილება, 20%-იანში პირველი და ბოლო ოთხი წევრისა და ა.შ.). ასეთი ტიპის მახასიათებლები, რომელთა სიდიდეზე ექსტრემალური წევრების გავლენა შეზღუდულია, დიდ როლს თამაშობენ 70–80-იან წლებში განვითარებულ ე.წ. რობასტული შეფასების თეორიაში.

§ 2. მონაცემთა გაფანტულობის (გაბნევის) საზომები

ჩვენ შევისწავლეთ ცენტრალური ტენდენციის (ანუ მონაცემთა ცენტრის მდებარეობის) სამი რიცხვითი მახასიათებელი: შერჩევითი საშუალო, შერჩევითი მედიანა და შერჩევითი მოდა. აშკარაა, რომ ეს სამი მახასიათებელი სრულად ვერ აღწერს მონაცემთა სიმრავლის თვისებებს.

შემდეგი კითხვა, რომელიც დაგვებადება მონაცემთა სიმრავლის თვისებების გამოსაკვეთად იქნება, რამდენად ტიპიურია საშუალო მნიშვნელობა (ანდა მონაცემთა ცენტრის მახასიათებელი) მონაცემთა მთელი სიმრავლისათვის? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, როგორია მონაცემთა გაფანტულობა საერთოდ და კერძოდ, საშუალო მნიშვნელობის მიმართ? როგორია მონაცემთა ცვალებადობის (ვარიაბელობის) ხარისხი და რა სიდიდეებით შეიძლება მისი დახასიათება?

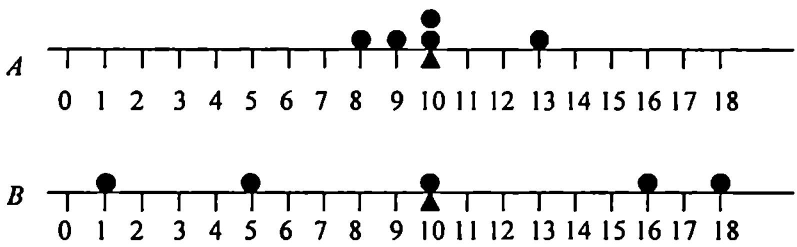
მაგალითი 3.7. ვთქვათ მოცემული გვაქვს მონაცემთა ორი მწკრივი:

A	8	9	10	10	13
B	1	5	10	16	18

გამოვთვალოთ თითოეული მათგანის საშუალო $\bar{x}_A = \frac{1}{5}(8+9+10+10+13) = 10$, $\bar{x}_B = \frac{1}{5}(1+5+10+16+18) = 10$. როგორც ვხედავთ, ორივე საშუალო ტოლია, მაგრამ ერთი

შეხედვითაც კი ცხადია, რომ B მწკრივის ელემენტების ცვალებადობა უფრო ძლიერია, ვიდრე A მწკრივისა: A მწკრივის წევრები მჭიდროდ არიან კონცენტრირებული საშუალოს ირგვლივ, რასაც ვერ ვიტყვით B მწკრივის შესახებ (იხ. ნახ. 3.4).

ხშირ შემთხვევაში იმის აღმოჩენა, თუ რომელი მწურივის ვარიაბელობა უფრო დიდია ორ მწკრივს შორის, თვალით შეუძლებელია. აშკარაა, რომ საჭიროა ვარიაბელობის ანუ გაფანტულობის საზომების შემოღება, ე.ი. ისეთი რიცხვითი მახასიათებლებისა, რომლებიც საშუალებას მოგვცემდა გაგვეკეთებინა დასკვნები მონაცემთა გაბნევის ხარისხის შესახებ.



ნახ. 3.4

გაბნევის დიაპაზონი. მონაცემთა გაფანტულობის ერთ-ერთი უმარტივესი რიცხვითი მახასიათებელია გაბნევის დიაპაზონი (range), რომელიც წარმოადგენს სხვაობას შერჩევის მაქსიმალურ (უდიდეს) და მინიმალურ (უმცირეს) წევრებს შორის. თუ $x_1,\ldots,x_n$ მოცემული n მოცულობის შერჩევაა, მაშინ

$$\text{გაბნევის დიაპაზონი} = \max_{i\le n} x_i - \min_{i\le n} x_i = x_{(n)} - x_{(1)}, \qquad (3.12)$$

სადაც $x_{(n)}=\max_{i\le n} x_i$ ($x_{(1)}=\min_{i\le n} x_i$) აღნიშნავს მაქსიმალური (მინიმალური) სიდიდის მონაცემს.

ზემოთ განხილულ მაგალითში A მწკრივის გაბნევის დიაპაზონი უდრის 13–8=5, ხოლო B მწკრივისა 18–1=17.

გაბნევის დიაპაზონი გამოთვლისა და ინტერპრეტაციის სიმარტივის გამო ფართოდ გამოიყენება ისეთი ამოცანების გადაწყვეტისას, სადაც გამოთვლის სისწრაფესა და მარტივ შინაარსს გადამწყვეტი როლი ენიჭება, მაგალითად ხარისხის კონტროლის სფეროში. სხვა შემთხვევებში კი ამ მახასიათებლის მიმართ წარმოიქმნება სერიოზული პრეტენზიები.

გაბნევის დიაპაზონზე დიდ გავლენას ახდენს იშვიათი ანდა ამოვარდნილი დაკვირვებები. წარმოვიდგინოთ, რომ რომელიმე რეგიონში ვაწარმოებთ შერჩევას მამაკაცთა სიმაღლის განაწილების შესწავლის მიზნით. ვთქვათ, ამ რეგიონში ცხოვრობს მამაკაცი, რომლის სიმაღლეა 2 მეტრი და 10 სმ. ცხადია, რომ თუ შერჩევაში შემთხვევით აღმოჩნდებოდა ეს მამაკაცი (რაც იშვიათი ხდომილობაა) გაბნევის დიაპაზონი უფრო დიდი იქნებოდა, ვიდრე იმ შემთხვევაში, როცა მის ნაცვლად შერჩევაში მოხდებოდა სხვა „ნორმალური“ სიმაღლის მქონე მამაკაცი. მსგავსი სურათი შეიძლება გვქონდეს

მოსახლეობის შემოსავლების განაწილების შესწავლისას, როდესაც განსაკუთრებით დიდი შემოსავლის მქონე პირი აღმოჩნდება (იშვიათი ხდომილობა) ჩვენს შერჩევაში.

შერჩევის გაბნევის დიაპაზონის, როგორც მონაცემთა გაფანტულობის საზომის მთავარი ნაკლი ისაა, რომ ის არ შეიცავს ინფორმაციას იმის შესახებ, თუ როგორაა გაბნეული დანარჩენი (საშუალედო) მონაცემები მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს შორის. შესაძლოა ეს მონაცემები გროვდებოდნენ საშუალო მნიშვნელობასთან, ანდა ექსტრემალური მნიშვნელობების $x_{(1)}$-ისა და $x_{(n)}$-ის მიდამოში, ან თანაბრად იყვნენ განაწილებულნი მათ შორის და სხვა.

საშუალედო მონაცემების განლაგებისა და შესაბამისად, მათი გაფანტულობის შესახებ ინფორმაციას იძლევა ე.წ. პროცენტილები.

ᲞᲠᲝᲪᲔᲜᲢᲘᲚᲔᲑᲘ, ᲙᲕᲐᲠᲢᲘᲚᲔᲑᲘ, ᲓᲔᲪᲘᲚᲔᲑᲘ. პროცენტილები ერთდროულად წარმოადგენს მონაცემთა განლაგებისა და მათი გაფანტულობის საზომს.

ვთქვათ, P რაიმე რიცხვია $0 < P < 100$.

მონაცემთა სიმრავლის P რიგის პროცენტილი (უბრალოდ P-პროცენტილი) ეწოდება ისეთ $\widetilde{x}_P$ მნიშვნელობას (სიდიდეს), რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისება: მონაცემთა არაუმეტეს P%-ისა ნაკლებია $\widetilde{x}_P$-ზე და არაუმეტეს $(1-P)$%-ისა მეტია $\widetilde{x}_P$-ზე.

თუ P რიცხვს წარმოვადგენთ როგორც $P = 100{\cdot}\alpha$, სადაც $0<\alpha<1$ (მაგალითად, თუ P=10, მაშინ $\alpha = 0.1$; თუ $P = 25$, მაშინ $\alpha = 0.25$), მაშინ P-პროცენტილის განსაზღვრება ფორმალურად ასე გამოითქმის: $\widetilde{x}_P$ ისეთი რიცხვია, რომ ერთდროულად უნდა სრულდებოდეს შემდეგი ორი უტოლობა

$$\begin{aligned} &\#\,\{x_i : x_i < \widetilde{x}_P\} \le \alpha n, \\ &\#\,\{x_i : x_i > \widetilde{x}_P\} \le (1-\alpha)n, \end{aligned} \tag{3.13}$$

სადაც $\#\{x_i : \cdots\}$ ნიშნავს იმ დაკვირვებების რაოდენობას, რომელთათვის სრულდება ორი წერტილის შემდეგ მოთავსებული თვისება. $P = 100{\cdot}\alpha$-პროცენტილი არის α-კვანტილის შერჩევითი ანალოგია.

სიმარტივისათვის, ქვევით მოყვანილ ყველა მსჯელობაში იგულისხმება, რომ $x_{(1)}<x_{(2)}<\cdots<x_{(n)}$, ე.ი. ვარიაციული მწკრივი მკაცრად ზრდადი მიმდევრობაა, თუმცა ყველა მტკიცება სამართლიანია ზოგად შემთხვევაშიც, როცა შერჩევაში გვხვდება განმეორებითი წევრები; ამ შემთხვევაში საჭიროა უფრო ფაქიზი (თუმცა მარტივი) მსჯელობის ჩატარება, რასაც თავად მკითხველს ვთავაზობთ.

შევნიშნოთ, რომ მედიანა წარმოადგენს 50-პროცენტილს. მართლაც, გავიხსენოთ მისი (3.8 განსაზღვრება)

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1/2)}, & \text{თუ } n \text{ კენტია,} \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{((n/2)+1)}}{2}, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

თუ n კენტია, მაშინ $\#\{x_i : x_i<\widetilde{x}\}=\#\{x_i : x_i>\widetilde{x}\}=\frac{n-1}{2}<0.5\,n$ ($\alpha=0.5$, თუ $P=50$). ხოლო თუ n ლუწია, მაშინ $\#\{x_i : x_i<\widetilde{x}\}=\#\{x_i : x_i>\widetilde{x}\}=0.5\,n$.

მედიანის მსგავსად შეგვიძლია მოვიყვანოთ $\widetilde{x}_P$-ს გამოსათვლელი გამოსახულება. ვთქვათ, $P=100\cdot\alpha$, მაშინ

$$\widetilde{x}_P=\begin{cases} x_{([n\alpha]+1)}, & \text{თუ } n\alpha \text{ არ არის მთელი რიცხვი,}\\ \dfrac{x_{(n\alpha)}+x_{(n\alpha+1)}}{2}, & \text{თუ } n\alpha \text{ მთელი რიცხვია.}\end{cases} \tag{3.14}$$

ვთქვათ $n=15$, $P=10$, მაშინ $\alpha=0.1$, $n\alpha=1.5$ და $n\alpha$ არაა მთელი რიცხვი, $[n\alpha]=1$, მაშინ (3.14) ფორმულის თანახმად

$$\widetilde{x}_P=x_{(2)},$$

ე.ი. 10-პროცენტილი ვარიაციული მწკრივის მეორე წევრის ტოლია. მართლაც,

$$\#\{x_i : x_i<x_{(2)}\}=1<n\alpha=1.5,\ \#\{x_i : x_i>x_{(2)}\}=13<n(1-\alpha)=13.5.$$

ვთქვათ, ახლა $n=20$, $P=10$, მაშინ $\alpha=0.1$, $n\alpha=2$ მთელი რიცხვია და კვლავ (3.14) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\widetilde{x}_P=\frac{x_{(2)}+x_{(3)}}{2}.$$

ე.ი. $\widetilde{x}_P$ არის $[x_{(2)},x_{(3)}]$ ინტერვალის შუა წერტილი. ამ შემთხვევაშიც $\#\{x_i : x_i<\widetilde{x}_P\}=2=n\alpha$, $\#\{x_i : x_i>\widetilde{x}_P\}=18=n(1-\alpha)$.

25-პროცენტილს ეწოდება პირველი კვარტილი და აღინიშნება Q_1-ით, 75-პროცენტილს ეწოდება მესამე კვარტილი და აღინიშნება Q_3-ით. 50-პროცენტილს ეწოდება მეორე კვარტილი და ცხადია, რომ ის მედიანის ტოლია. უხეშად რომ ვთქვათ, (Q_1, $\widetilde{x}$, Q_3) კვარტილები მონაცემთა სიმრავლეს ოთხ ტოლ ნაწილად ყოფენ.

კვარტილების მოსაძებნად (3.14) ფორმულის გამოყენების ნაცვლად შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი წესით: ჯერ მოვძებნოთ მედიანა, შემდეგ ვარიაციულ მწკრივში მის მარცხნივ განლაგებული მონაცემების მედიანა, რომელიც მოგვცემს პირველ კვარტილს, Q_1-ს, და ასევე, ვარიაციულ მწკრივში მის მარჯვნივ განლაგებული მონაცემების მედიანა, რომელიც მოგვცემს მესამე კვარტილს, Q_3-ს.

დაერწმუნდეთ იმაში, რომ ასეთი წესით გამოთვლილი Q_1 და Q_3 კვარტილები დაემთხვევა უშუალოდ (3.14) ფორმულით გამოთვლილებს.

მაგალითი **3.8.** მარკეტინგის კონსულტანტი შეისწავლის ბოსტნეულის მაღაზიის 50 მყიდველს. ერთ-ერთი სიდიდე, რომელიც მას აინტერესებს, არის თითოეულის მიერ დახარჯული თანხა. ვარიაციულ მწკრივად დალაგებული და დოლარის დამრგვალებული სიზუსტით მონაცემები შემდეგია:

2 6 6 8 9 10 11 11 12 12 13 13 <u>14</u> 14 14 15 15 16
17 18 18 18 19 19 20 || 20 20 21 23 26 27 28 29 30 31 32
33 <u>33</u> 34 36 37 39 40 43 45 52 61 63 64 69

მოვძებნოთ მედიანა. რადგან $n = 50$ ლუწია, ამიტომ

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{(25)} + x_{(26)}}{2} = 20.$$

აქ აუცილებლად უნდა შევნიშნოთ, რომ თუმცა $\tilde{x}=20$, ის არ ემთხვევა ვარიაციული მწკრივის არცერთ წევრს: მისი პოზიცია არის ვარიაციული მწკრივის 25-ე და 26-ე პოზიციების არითმეტიკული საშუალო (მიღებული შეთანხმებაა კვარტილების ზემოთ შემოთავაზებული წესით გამოთვლისას. ეს პოზიცია აღნიშნულია ||-ით), ამ პოზიციის მარცხნივ მოთავსებულია 25 წევრი, რომელთა მედიანა ანუ სრულ მონაცემთა პირველი კვარტილია ($n = 25$).

$$Q_1 = x_{\left(\frac{25+1}{2}\right)} = x_{(13)} = 14.$$

მედიანის ($\tilde{x}$-ის) მარჯვნივაც 25 წევრია მოთავსებული, რომელთა მედიანა, ანუ სრულ მონაცემთა მესამე კვარტილია მედიანის პოზიციიდან მარჯვნივ მე-13-ე პოზიციაზე მყოფი წევრი:

$$Q_3 = 33.$$

ამრიგად, მოყვანილი მონაცემებისათვის $\tilde{x}=20$, $Q_1=14$, $Q_3=33$. დავრწმუნდეთ, რომ (3.14)-ით გამოთვლილი კვარტილების მნიშვნელობა დაემთხვევა მიღებულს, ე.ი. $Q_1=14$, $Q_3=33$.

მართლაც, რადგან პირველი კვარტილის გამოთვლისას (რომელიც წარმოადგენს 25-პროცენტილს) $\alpha = 0.25$, $n = 50$, ამიტომ $n\alpha = 12.5$ მთელი არაა და $[n\alpha] = 12$, (3.14) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$Q_1 = x_{([n\alpha]+1)} = x_{(13)} = 14.$$

ანალოგიურად, მესამე კვარტილის გამოთვლისას $\alpha = 0.75$, $n\alpha = 37.5$, რომელიც არაა მთელი რიცხვი, $[n\alpha] = 37$, ამიტომ (3.14) ფორმულის თანახმად

$$Q_3 = x_{([n\alpha]+1)} = x_{(38)} = 33.$$

კვარტილები მედიანასთან ერთად, ე.ი. $\tilde{x}$, Q_1, Q_3 სამეული გვაძლევს გარკვეულ წარმოდგენას მონაცემთა ცენტრის, გაბნევისა და განაწილების (გაგლუვებული ჰისტოგრამის ან პოლიგონის) ფორმის შესახებ. ზემოთ განხილულ მაგალითში ის ფაქტი, რომ Q_3 უფრო შორსაა მედიანისაგან, ვიდრე Q_1 ანუ $13 = Q_3 - \tilde{x} > \tilde{x} - Q_1 = 6$, მიუთითებს იმაზე, რომ განაწილება მარჯვნივ ასიმეტრიულია (ანუ მისი მარჯვენა ბოლო უფრო გაწელილია, ვიდრე მარცხენა).

მანძილი კვარტილებს შორის წარმოადგენს გაფანტულობის მარტივ საზომს, რომელიც ახასიათებს ვარიაციულ მწკრივში კვარტილებს შორის მოთავსებულ მონაცემთა გაფანტულობის ხარისხს (შუა 50%-იანი ზონის გაბნევას). მას ეწოდება კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი (Interquartil range – IQR):

$$\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1$$

განხილულ მაგალითში IQR = 33–14 = 19.

Q_1 და Q_3 კვარტილები და კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი მდგრადი მახასიათებლებია. არცერთი მათგანი არ რეაგირებს $[Q_1, Q_3]$ ინტერვალის გარეთ მოთავსებულ დაკვირვებების ნებისმიერ ისეთ ცვლილებაზე, რომელიც ამ დაკვირვებებს კვლავ $[Q_1, Q_3]$ ინტერვალის გარეთ ტოვებს, თანაც ინტერვალის იმავე მხარეს, სადაც ადრე იმყოფებოდა. განხილულ მაგალითში, პირველი 12 წევრის ნებისმიერი ისეთი ცვლილება, რომ არცერთმა არ მიიღოს 14-ზე მეტი მნიშვნელობა და ბოლო 12 წევრის ისეთი ცვლილება, რომ არცერთმა მათგანმა არ მიიღოს 33-ზე ნაკლები მნიშვნელობა, არ შეცვლის არც Q_1-ს, Q_3-ს და არც IQR-ს.

რადგან მედიანა, პირველი და მესამე კვარტილები ($\tilde{x}$, Q_1, Q_3) არ შეიცავენ ინფორმაციას განაწილების (გაგლუვებული ჰისტოგრამების) კუდების შესახებ, ამიტომ განაწილების ფორმის შესახებ უფრო სრულ ინფორმაციას იძლევა ხუთეული

$$x_{\min}, \qquad Q_1, \qquad \tilde{x}, \qquad Q_3, \qquad x_{\max}.$$

ბოსტნეულის მაღაზიის მყიდველთა დანახარჯების მონაცემებისათვის (მაგალითი 3.7) ეს ხუთეულია

$$x_{\min} = 2, \qquad Q_1 = 14, \qquad \tilde{x} = 20, \qquad Q_3 = 34, \qquad x_{\max} = 69.$$

10-პროცენტილს დეცილი ეწოდება. მონაცემთა განაწილების დასახასიათებლად იყენებენ შემდეგ ხუთეულსაც:

პირველი დეცილი	Q_1	$\tilde{x}$	Q_3	მე-9-ე დეცილი
↓	↓	↓	↓	↓
10	25	50	75	9

პროცენტილები

მაგალითი **3.9.** მოვძებნოთ დასახელებული სიდიდეები მონაცემთა შემდეგი სიმრავლისათვის:

7 18 12 17 29 18 4 27 30 2 4 10 21 5 8

განვალაგოთ ეს მონაცემები ზრდის მიხედვით:

2 4 4 5 7 8 10 12 17 18 18 21 27 29 30

\\ = || = \\

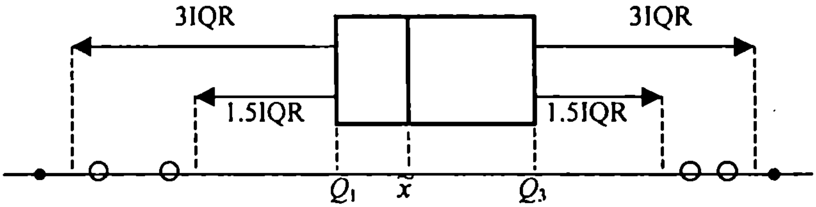
$x_{min} = 2$, $x_{max} = 30$, $n = 15$, ამიტომ $\widetilde{x} = x_{(8)} = 12$, $x_{(10)} = x_{([1.5]+1)} = x_{(2)} = 4$,
$Q_1 = x_{25} = x_{([3.75]+1)} = x_{(4)} = 5$ (პირველი 7 მონაცემის მედიანა),
$Q_3 = x_{75} = x_{([0.75 \cdot 15]+1)} = x_{(12)} = 21$ (ბოლო 7 მონაცემის მედიანა),
$x_{90} = x_{([0.9 \cdot 15]+1)} = x_{(14)} = 29$. საბოლოოდ,
$x_{min} = 2$, 1 დეცილი= 4, $Q_1 = 5$, $\widetilde{x} = 12$, $Q_3 = 21$, მე-9-ე დეცილი= 29, $x_{max} = 30$.

$$\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1 = 16, \quad 1.5\mathrm{IQR} = 24, \quad 3\mathrm{IQR} = 48.$$

საბოლოო ჯამში ეს 7 მახასიათებელი იძლევა მონაცემთა განაწილების ვიზუალური წარმოჩენის ახალ საშუალებას ე.წ. ბოქსპლოტს.

ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა და ჰისტოგრამა გვაძლევს მონაცემთა სიმრავლის ზოგად დახასიათებას. ბოლო წლებში განსაკუთრებული პოპულარობით სარგებლობს მონაცემთა სიმრავლის გრაფიკული დახასიათება – ბოქსპლოტი, რომელიც მდგრადი საზომების (Q_1, $\widetilde{x}$, Q_3, IQR) მეშვეობით საშუალებას იძლევა გამოიკვეთოს მონაცემთა სიმრავლის ზოგიერთი თავისებურება: (1) განლაგების ცენტრი, (2) გაფანტულობა, (3) გავრცობა და სიმეტრიულობიდან გადახრის ბუნება და ბოლოს, მოხდეს (4) „ამოვარდნილი" დაკვირვებების იდენტიფიკაცია.

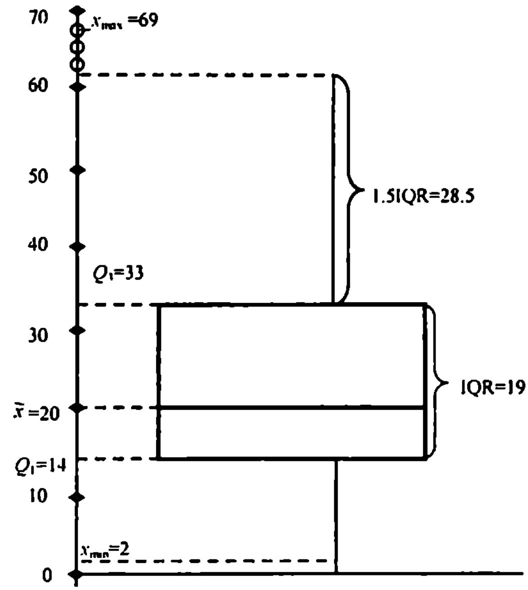
აღვწეროთ, თუ როგორ ხდება ბოქსპლოტის აგება (იხ. ნახ. 3.5)



ნახ. 3.5. ბოქსპლოტი

1. გაავლეთ ჰორიზონტალური ღერძი, რომელზედაც მონიშნულია Q_1, $\widetilde{x}$, Q_3.
2. ააგეთ მართკუთხედი, რომლის გვერდები მართობულია ჰორიზონტალური ღერძისა და რომლის მარცხენა გვერდი Q_1-ის, ხოლო მარჯვენა კი Q_3-ის ზემოთაა მოთავსებული.
3. გაავლეთ ვერტიკალური წრფე მართკუთხედში მედიანის ზევით.
4. მართკუთხედის თითოეული გვერდიდან გაავლეთ ჰორიზონტალური ღერძის პარალელური ორი წრფე, პირველზე გადაზომეთ 1.5 IQR, ხოლო მეორეზე – 3 IQR სიგრძის მონაკვეთები.
5. ყოველი მონაცემის შესაბამის წერტილზე, რომელიც მართკუთხედის გვერდიდან გადაზომილ 1.5IQR-სა და 3IQR-ს შორისაა მოთავსებული შემოხაზეთ წრეწირი; ამ მონაცემებს ეწოდება ზომიერი „ამოვარდნები", ხოლო იმ მონაცემების შესაბამის წერტილებზე, რომლებიც მოთავსებულია მართკუთხედის გვერდიდან გადაზომილი 3IQR-ის გარეთ შემოხაზეთ გამუქებული წრე: ასეთი წრეებით მონიშნულ მონაცემებს ექსტრემალური „ამოვარდნები" ეწოდება.

ხშირად გრაფიკს აბრუნებენ 90^0-იანი კუთხით და გამოსახავენ ოდნავ მოდიფიცირებული სახით. კერძოდ ვერტიკალურ ღერძზე გადაიზომება x_{min}, Q_1, $\tilde{x}$, Q_3, x_{max} და მხოლოდ 1.5IQR მანძილი მართკუთხედის გვერდებიდან (ნახ. 3.6) და ისიც მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც x_{min} ან x_{max} აღმოჩნდება მის გარეთ. ზოგჯერ ამ გრაფიკზე პირველ და მეცხრე დეცილსაც მიუთითებენ



ნახ. 3.6. ბოქსპლოტი მაგ. ბოსტნეულის მაღაზიის მყიდველთა დანახარჯების მონაცემებისათვის.

მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენ მივუთითეთ ზომიერი და ექსტრემალური „ამოვარდნების“ საიდენტიფიკაციო წესი, ფართოდ გავრცელებული უხეში წესი იმ მონაცემების აღმოსაჩენად, რომელთა შესახებ შეიძლება გაგვიჩნდეს ეჭვი, რომ ისინი არ არიან ტიპიური მონაცემთა მოცემული სიმრავლისათვის შემდეგია: გამოვყოთ ის მონაცემები, რომლებიც აღემატებიან (Q_3+1.5IQR)-ს, და ის მონაცემები, რომლებიც ნაკლებია (Q_1 – 1.5IQR)-ზე. 3.6 ნახაზზე ეს მონაცემებია 63, 64, 69 და აღნიშნულნი არიან o ნიშნებით. ეს ის მონაცემებია, რომლებიც, შესაძლოა, „ამოვარდნებს წარმოადგენს. იმის დასადგენად მართლაც არიან თუ არა ეს მონაცემები „ამოვარდნილები“ (ანუ მკვეთრად მოშორებულნი არიან მონაცემთა ძირითად მასივს), უნდა აიგოს ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა 3.8 მაგალითის მონაცემებისათვის.

სავარჯიშო. ააგეთ ეს დიაგრამა, დარწმუნდით, რომ სიხშირეთა განაწილება მკაცრად ასიმეტრიულია და მონაცემები 63, 64, 69 არ წარმოადგენენ „ამოვარდნილ“ მონაცემებს.

ეს მაგალითი მიგვითითებს, რომ ყოველი „საეჭვო“ მონაცემი უნდა შესწავლილი და გაანალიზებული იქნას, რათა საბოლოოდ მოხდეს მისი იდენტიფიცირება.

რანგები, პროცენტული რანგები და მათი კავშირი პროცენტილებთან.

ვთქვათ, გვაქვს n მოცულობის შერჩევა $x_1, \ldots, x_n$, სადაც $x_i \neq x_j$, თუ $i \neq j$, ე.ი. არც ერთი დაკვირვება არ მეორდება. დავალაგოთ მონაცემები ზრდის მიხედვით, ანუ შევადგინოთ ვარიაციული მწკრივი.

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)} .$$

x_i დაკვირვების რანგი ეწოდება ამ დაკვირვების ნომერს ვარიაციულ მწკრივში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, x_i -ს რანგი ეწოდება ისეთ მთელ r_i რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$x_{(r_i)} = x_i \tag{3.15}$$

ანდა

$$r_i = \# \{x_j : x_j \leq x_i\}.$$

განვიხილოთ შემდეგი მონაცემები:

5, 6, 2, 7, 9, 8, 10

და მივუწეროთ ყოველ მათგანს თავისი რანგი. ვარიაციული მწკრივია

2, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

ამიტომ, რანგები შემდეგნაირად მიეწერება:

5	6	2	7	9	8	10
2	3	1	4	6	5	7

ვთქვათ, მონაცემებია

18, 13, 15, 12, 16, 20.

მივუწეროთ რანგები

18	13	15	12	16	20
5	2	3	1	4	6

შევენიშნოთ, რომ რანგები ინვარიანტულია მონაცემთა ნებისმიერი გადალაგების მიმართ. მაგალითად, თუ მონაცემებია

15, 20, 12, 18, 13, 16.

(წინა მონაცემები დალაგებული სხვა თანმიმდევრობით), მაშინ რანგებია

15	20	12	18	13	16
3	6	1	4	2	5

ე.ი. ყოველ წევრს იგივე რანგი მიეწერა რაც ადრე.

ვთქვათ, ახლა მოცემულია შერჩევა $x_1, \ldots, x_n$, ისეთი, რომ პირობა $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, აღარ სრულდება, ანუ ზოგიერთი წევრი შერჩევაში მეორდება. როგორი წესით ხდება რანგების მიწერა ასეთ შემთხვევაში?

ვთქვათ, ჩვენი მონაცემებია

18, 28, 23, 29, 32, 18, 21, 14, 18, 14.

ძველი წესის მიხედვით რანგები ასე უნდა მიეწეროს

14, 14, 18, 18, 18, 21, 23, 28, 29, 32
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

მაგრამ 14-ის ტოლი დაკვირვება შეგვხვდა ორჯერ, ერთს მივაწერეთ რანგი 1 და მეორეს კი რანგი 2 და რატომღაც ერთ-ერთ მათგანს მივანიჭეთ უპირატესობა. უმჯობესია განმეორებადი დაკვირვებებისათვის მიგვეწერა ერთი და იგივე რანგი შემდეგი წესით: ტოლი დაკვირვებებიდან თითოეულს მივანიჭოთ მათზე მოსული რანგების არითმეტიკული საშუალო. მაგალითად, დაკვირვებებს, რომელთა მნიშვნელობები 14-ის ტოლია, უნდა მიენიჭოს რანგი 1,5 ($\frac{1+2}{2}$ = 1.5), 18-ის ტოლ დაკვირვებებს რანგი 4 ($\frac{3+4+5}{3}$ = 4).

შემდეგ თავებში, კერძოდ, არაპარამეტრული სტატისტიკის ამოცანებში ჩვენ შევხვდებით რანგებზე დაფუძნებულ კრიტერიუმებს.

იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც შერჩევაში არცერთი ელემენტი არ მეორდება, ელემენტის რანგის მითითება არ იძლევა ამომწურავ ინფორმაციას მის მდებარეობაზე, თუ ამავე დროს ჩვენთვის არ არის ცნობილი შერჩევის მოცულობაც. მაგალითად, თუ ვიცით, რომ x^* ელემენტს n მოცულობის შერჩევიდან და y^* ელემენტს მეორე, m მოცულობის შერჩევიდან გააჩნიათ ერთი და იგივე რანგი, მაინც ვერ დავასკვნით, რომ მათი პოზიციები იდენტურია, თუ არა გვაქვს დამატებითი ინფორმაცია, რომ $m = n$.

საზოგადოდ, როგორ შევადაროთ ერთმანეთს იმ ორი მონაცემის პოზიციები, რომლებიც განსხვავებული მოცულობის სხვადასხვა შერჩევას ეკუთვნის და რანგებიც განსხვავებულები აქვს?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა ე.წ. პროცენტული რანგის ცნება. ამ ცნებას ჩვენ შემოვიღებთ მარტივი მაგალითის საფუძველზე, რომელიც ამავე დროს გვიჩვენებს, რომ რანგის ცნების შემოსაღებად არ არის აუცილებელი გაგვაჩნდეს რიცხვითი მონაცემები, საკმარისია მხოლოდ ობიექტების ან ინდივიდების სიმრავლის რაიმე თვისების ან ნიშნის (მაგალითად ნიჭიერება, სიმაღლე, პოპულარობა და ა.შ.) გაძლიერების ან ზრდის მიხედვით დალაგება და ყოველი მათგანისათვის რიგობრივი ნომრის მიწერა.

მაგალითი **3.10**. ვთქვათ, კლასში 10 მოსწავლეა და გიორგის ნიშნები უფრო მაღალია, ვიდრე ხუთი მოსწავლისა ე.ი. კლასის მოსწავლეები დალაგებულია ნიშნების ზრდის მიხედვით და გიორგის რანგია 6. ვთქვათ, კოტე სწავლობს 50 მოსწავლისაგან შედგენილ კლასში და მისი რანგია 18. რომელს უკავია უკეთესი პოზიცია თავის კლასში, გიორგის თუ კოტეს?

ჩავატაროთ თითოეულის პოზიციის პროცენტული ანალიზი. გიორგი უკეთესია 5 მოსწავლეზე, რომლებიც შეადგენენ კლასის 50%-ს, თავად გიორგიზე მოდის 10%, 40%-ს კი გიორგიზე უკეთესი ნიშნები აქვს. ამ მონაცემებით გიორგის პროცენტული რანგია:

$$(50+5)\% = 55\%.$$

გამოვთვალოთ კოტეს პროცენტული რანგი: მისი ნიშნები უკეთესია 17 მოსწავლის ნიშნებზე, რომელიც შეადგენს კლასის 34%-ს, კოტეზე მოდის 2%, ამიტომ მისი პროცენტული რანგია 35%.

როგორც გამოთვლებიდან ჩანს მოცემული დაკვირვების პროცენტული რანგი წარმოადგენს ამ დაკვირვების ქვევით მდგომ მონაცემებზე მოსული პროცენტებისა და თავად დაკვირვებაზე მოსული პროცენტების ნახევარის ჯამს.

თუ n შერჩევის მოცულობაა, ხოლო დაკვირვების რანგია r, მაშინ ამ დაკვირვების პროცენტული რანგი მოიცემა ფორმულით:

$$\frac{r-1}{n}100\% + \frac{0.5}{n}100\% = \frac{2r-1}{2n}100\%. \tag{3.16}$$

ამრიგად, მოცემული დაკვირვების პროცენტული რანგი მიგვითითებს დაკვირვებულ მნიშვნელობათა რა პროცენტს (მინუს ამ დაკვირვებაზე მოსული პროცენტების ნახევარი) აღემატება ეს მონაცემი. ცხადია, რომ რაც უფრო მაღალია დაკვირვების პროცენტული რანგი, მით უფრო უკეთესია მისი პოზიცია (თუ ნიშნები განლაგებული აღმავლობის მიხედვით).

გიორგის პროცენტული რანგი (55) უფრო მაღალია, ვიდრე კოტესი (35), ამიტომ გიორგის პოზიცია თავის კლასში უკეთესია, ვიდრე კოტესი საკუთარ კლასში.

პროცენტილებსა და პროცენტულ რანგს შორის შემდეგი კავშირია: თუ შერჩევის ელემენტის პროცენტული რანგია P, მაშინ ეს ელემენტი წარმოადგენს შერჩევის P-პროცენტილს (თუმცა არ არის სავალდებულო, რომ P-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის P-პროცენტილი წარმოადგენდეს შერჩევის ელემენტს). მართლაც, ვთქვათ შერჩევის მოცულობაა n და რომელიმე ელემენტის პროცენტული რანგია P. ვიპოვოთ ამ ელემენტის რანგი r. (3.16) ფორმულის თანახმად

$$\frac{2r-1}{2n} = P/100 \equiv \alpha,$$

საიდანაც $r = \frac{2n\alpha+1}{2}$. ვაჩვენოთ, რომ $x_{(r)}$ წარმოადგენს P-პროცენტილს. მართლაც, რადგან r მთელი რიცხვია, ამიტომ $2n\alpha$ კენტია, $n\alpha$ არ არის მთელი რიცხვი და (3.14) ფორმულით გვექნება

$$x_P = x_{([n\alpha]+1)} = x_{([r-1/2]+1)} = x_{(r)}.$$

პროცენტილები და პროცენტული რანგები გამოიყენება როგორც შედარების საშუალება განათლების სფეროში, ფსიქოლოგიასა და სხვა დარგებში, რომლებსაც საქმე აქვთ შეფასებებთან (ნიშნებთან) და ბალებთან. მაგალითად, ამერიკის შეერთებული შტატების კოლეჯებში ჯერ შემსვლელთა პროცენტულ რანგებს განიხილავენ ნიშნების მიხედვით და მხოლოდ ამის შემდეგ – თავად ნიშნებს.

შეიძლება ვილაპარაკოთ რომელიმე ბანკის პროცენტულ რანგზეც ბანკების გარკვეულ ჯგუფში, ერთი რაიონის წარმოების დონის პროცენტულ რანგზე ქვეყნის წარმოებაში და სხვა.

დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

დისპერსია. დისპერსია წარმოადგენს მონაცემთა საშუალოს მიმართ გაფანტულობის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს საზომს.

სანამ მოვიყვანდეთ მის განმარტებას, ჩავატაროთ მარტივი მსჯელობა. კვლავ განვიხილოთ ამ პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილი ორი A და B მწკრივი

A	8	9	10	10	13
B	1	5	10	16	18

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 10$. ამავე დროს ისიც ითქვა, რომ იმის აღმოჩენა, რომ B მწკრივის ვარიაბელობა უფრო ძლიერია, ვიდრე A მწკრივისა, ვიზუალურადაც ადვილია. ამოსავალი წერტილი ამ დასკვნის მისაღებად იყო ის ფაქტი, რომ A მწკრივის წევრები უფრო ნაკლებად არიან გადახრილი არითმეტიკული საშუალოდან, ვიდრე B მწკრივისა. აშკარაა, რომ თუ მონაცემთა სიმრავლე დიდი მოცულობისაა, ასეთი ფაქტების ვიზუალურად აღმოჩენა შეუძლებელია. ხომ არაა შესაძლებელი ისეთი საზომის შემოღება, რომელიც გაგვიადვილებდა მონაცემების თავისი არითმეტიკული საშუალოს მიმართ გაფანტულობის შესახებ დასკვნის გაკეთებას? სწორედ ასეთ საზომს წარმოადგენს შერჩევითი დისპერსია. დისპერსიას ჩვენ შემოვიღებთ A და B მწკრივების მაგალითზე, შემდეგ კი მოვიყვანთ მის ფორმალურ განსაზღვრებას.

გამოვთვალოთ საშუალოდან გადახრები ორივე მწკრივისათვის (თითოეულ მონაცემს ვაკლებთ საშუალოს).

A	–2	–1	0	0	3
B	–9	–5	0	6	8

შეიძლება გვეფიქრა, რომ გაფანტულობის საზომად შეიძლებოდა აგვეღო ამ გადახრების არითმეტიკული საშუალო, მაგრამ ორივე შემთხვევაში გადახრათა ჯამი ნულის ტოლია (გავიხსენოთ საშუალოს 1) თვისება). ამიტომ გასაშუალოებული გადახრებიც ნულის ტოლი იქნება და ე.ი. არავითარ ინფორმაციას ეს სიდიდე არ მოგვცემს.

ამ სირთულიდან თავის დაღწევის ერთ-ერთი საშუალებაა არ მივაქციოთ ყურადღება გადახრათა ნიშნებს და ავიღოთ მათი მოდულების საშუალო. ასე გამოთვლილ სიდიდეს ეწოდება საშუალო აბსოლუტური გადახრა (Mean Absolute Deviation – *MAD*). გვექნება

$$MAD_A = \frac{1}{5}(2+1+3) = 1.2$$

$$\Rightarrow \qquad MAD_A < MAD_B$$

$$MAD_B = \frac{1}{5}(9+5+6+8) = 7.2$$

ფორმალურად *MAD*-ის გამოსახულება ასე გამოიყურება:

$$MAD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|.$$

როგორც ვხედავთ, გაფანტულობის ამ საზომმაც დაადასტურა ჩვენი ვარაუდი. სტატისტიკური დასკვნების თეორიაში ეს მაჩვენებელი საკმაო იშვიათად ფიგურირებს და როგორც შემდგომში ვნახავთ, ამ თეორიაში უდიდეს როლს ასრულებს შერჩევითი დისპერსია, რომელიც წარმოადგენს საშუალოდან გადახრების კვადრატების საშუალო არითმეტიკულს (აღინიშნება s^2-ით). გვაქვს

$$s_A^2 = \frac{1}{5}(4+1+9) = 2.6$$

$$\Rightarrow \quad s_A^2 < s_B^2$$

$$s_B^2 = \frac{1}{5}(81+25+36+64) = 41.2$$

ჩავწეროთ შერჩევითი დისპერსიის გამოსახულება ფორმულის მეშვეობით.

ვთქვათ, მოცემულია n მოცულობის $x_1, \ldots, x_n$ შერჩევა. გამოვთვალოთ არითმეტიკული საშუალო $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ და მისგან გადახრები

$$x_1-\bar{x}\ , x_2-\bar{x}\ , \ldots , x_n-\bar{x}$$

(შევნიშნოთ, რომ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = 0$, ამიტომ, როგორც უკვე ვთქვით, გაფანტულობის საზომად $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$ არ გამოდგება). გამოვთვალოთ გადახრათა კვადრატები

$$(x_1-\bar{x})^2, (x_2-\bar{x})^2, \ldots , (x_n-\bar{x})^2$$

და მათი არითმეტიკული საშუალო. გვექნება შერჩევითი დისპერსია

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\,[(x_1-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2]$$

ანუ

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\ . \tag{3.17}$$

თუ $x_1, \ldots, x_N$ წარმოადგენს პოპულაციას (და არა შერჩევას), მაშინ პოპულაციის საშუალოა

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\ ,$$

ხოლო

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 \tag{3.18}$$

გამოსახულებას ეწოდება პოპულაციის დისპერსია.

შემდეგ თავებში დისპერსიის ცნება შემოღებული იქნება უსასრულო პოპულაციისათვისაც. აქ კი შემოვიფარგლებით მხოლოდ იმ ფაქტის აღნიშვნით, რომ შერჩევითი დისპერსია წარმოადგენს პოპულაციის დისპერსიის ემპირიულ ანალოგს, რომელიც დაკვირვებათა რიცხვის უსასრულოდ ზრდისას მიისწრაფის პოპულაციის დისპერსიისაკენ.

შემდგომში ჩვენ ვნახავთ, რომ მოსახერხებელია გაფანტულობის ოდნავ მოდიფიცირებული საზომის განხილვა:

$$s_n'^2 = \frac{n}{n-1}\, s_n^2 \text{ შერჩევისათვის, } \sigma'^2 = \frac{N}{N-1}\sigma^2 \text{ პოპულაციისათვის} \tag{3.19}$$

ანუ

$$s_n'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,\ \sigma'^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\mu)^2. \tag{3.20}$$

ასეთი საზომის განხილვის ერთ-ერთი მოტივაცია შემდეგია: რადგან $(x_1-\overline{x})$, $(x_2-\overline{x})$, ..., $(x_n-\overline{x})$ სიდიდეებზე დადებულია ერთი ბმა $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$, ამბობენ, რომ მათი თავისუფლების ხარისხია $n-1$ (რადგან თუ ჩამოთვლილ სიდიდეთაგან ცნობილია რომელიმე $n-1$ ცალი, დარჩენილი ერთი სიდიდე გამოითვლება მათი მეშვეობით. მაგალითად, $x_1-\overline{x}=-\sum_{i=2}^{n}(x_i-\overline{x})$). ამიტომ, შესაძლოა, რომ s_n^2 სიდიდემ ქვემოდან შეაფასოს პოპულაციის დისპერსია. ამის თავიდან ასაცილებლად გადახრების კვადრატების ჯამს ყოფენ $(n-1)$-ზე (და არა n-ზე, როგორც s_n^2-ის გამოთვლისას).

შენიშვნა. თუ პოპულაციის μ საშუალო ცნობილია, მაშინ შერჩევითი დისპერსია განისაზღვრება ფორმულით

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2, \tag{3.21}$$

უცნობი საშუალოს შემთხვევაში კი μ-ს ნაცვლად უნდა ვისარგებლოთ $\overline{x}$-ით, მაგრამ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$, ანუ x_i-ები უფრო ახლოსაა $\overline{x}$-თან, ვიდრე μ-სთან. ამის საკომპენსაციოდ $s_n'^2$-ის ფორმულაში n-ის ნაცვლად გამოიყენება $n-1$.

მოვიყვანოთ შერჩევითი დისპერსიის ზოგიერთი თვისება:

ა) თუ არსებული x_1, ..., x_n მონაცემებიდან შევქმნით ახალ მონაცემებს

$$y_i = ax_i + b,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

მაშინ

$$s_y^2 = a^2 s_x^2, \qquad s_y'^2 = a^2 s_x'^2. \tag{3.22}$$

მართლაც, რადგან $\overline{y}=a\overline{x}+b$, ამიტომ $y_i-\overline{y}=ax_i+b-a\overline{x}-b=a(x_i-\overline{x})$ და მაშასადამე,

$$s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-\overline{x})^2 = a^2 s_x^2.$$

ბ) თუ x_1, ..., x_n და y_1, ..., y_m ორი შერჩევაა, მაშინ გაერთიანებული შერჩევისათვის

$$s^2 = \frac{n}{n+m}s_x^2 + \frac{m}{n+m}s_y^2 + \frac{mn}{(n+m)^2}(\overline{x}-\overline{y})^2;$$

$$s'^2 = \frac{n-1}{n+m}\, s_x'^2 + \frac{m-1}{n+m}\, s_y'^2 + \frac{mn}{(n+m-1)(n+m)}(\bar{x}-\bar{y})^2.$$

კერძოდ, თუ $m = n$ და $\bar{x} = \bar{y}$, მაშინ

$$s^2 = \tfrac{1}{2}\, s_x^2 + \tfrac{1}{2}\, s_y^2 .$$

მართლაც, რადგან გაერთიანებული შერჩევის საშუალოა $\frac{n}{n+m}\,\bar{x} + \frac{m}{n+m}\,\bar{y}$, გვექნება

$$s^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{n}{n+m}\bar{x} - \frac{m}{n+m}\bar{y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \frac{n}{n+m}\bar{x} - \frac{m}{n+m}\bar{y}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{n}{n+m}\, s_x^2 + \frac{m}{n+m}\, s_y^2 + \frac{mn}{(n+m)^2}\,(\bar{x}-\bar{y})^2.$$

რადგან შერჩევითი დისპერსიის გამოთვლამდე $\bar{x}$ უკვე გამოთვლილია, შერჩევითი დისპერსიის უფრო მარტივად გამოსათვლელი გამოსახულებაა

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 \;, \tag{3.23}$$

$$s'^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2\right). \tag{3.24}$$

როგორც ვხედავთ, შერჩევითი დისპერსია მკაცრად განსაზღვრულია, გამოითვლება ყველა დაკვირვების საფუძველზე და ადვილად ექვემდებარება ალგებრულ ოპერაციებს. ამასთან, შერჩევითი დისპერსიის განზომილება უდრის დაკვირვებათა განზომილების კვადრატს. მაგალითად, თუ დაკვირვებები იზომება წუთებში (კილოგრამებში, ლარებში, დოლარებში), მაშინ დისპერსიის საზომი ერთეულია წთ^2 (კგ^2, ლარი^2, დოლარი^2).

სტატისტიკოსს ხშირად ესაჭიროება გაფანტულობის ისეთი საზომი, რომელიც ამავე ერთეულებში იზომება, რაც საწყისი მონაცემები. ასეთი საზომი მარტივად მიიღება შერჩევითი დისპერსიიდან კვადრატული ფესვის ამოღებით.

სტანდარტული გადახრა. სტანდარტული გადახრა წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან

$$s = \sqrt{s^2}\;,$$

$$s' = \sqrt{s'^2}\;. \tag{3.25}$$

ასევე, პოპულაციის სტანდარტული გადახრა არის კვადრატული ფესვი პოპულაციის დისპერსიიდან

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}\;. \tag{3.26}$$

სტანდარტული გადახრა, ისევე როგორც დისპერსია, ზომავს გაფანტულობას საშუალოს მიმართ და გამოიყენება მაშინ, როდესაც მონაცემთა ცენტრის საზომად მიღებულია საშუალო.

ცხადია, რომ $s = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა x_i ტოლია.

უნდა აღინიშნოს, რომ სტანდარტული გადახრა არ წარმოადგენს გაფანტულობის მდგრად საზომს. ის გაცილებით უფრო მგრძნობიარეა ექსტრემალური დაკვირვებების მიმართ, ვიდრე საშუალო. საილუსტრაციოდ კვლავ განვიხილოთ მონაცემები

$$34 \qquad 46 \qquad 40 \qquad 57 \qquad 50.$$

მათთვის $\bar{x} = 46$. გამოვთვალოთ $s_x'^2$. ჯერ გამოვთვალოთ საშუალოდან გადახრები:

$$-9 \qquad 0 \qquad 6 \qquad 11 \qquad 4$$

გვაქვს

$$s'^2 = \frac{1}{4}(81+36+121+16) = 63.5, s' = \sqrt{63.5} \approx 8.$$

ახლა მონაცემთა განხილულ სიმრავლეში ერთ-ერთი მონაცემი, ვთქვათ 50, შევცვალოთ 200-ით, ე.ი. ახალი მონაცემებია

$$34 \qquad 46 \qquad 40 \qquad 57 \qquad 200.$$

გვექნება $\bar{x} = 76$. გამოვთვალოთ შერჩევითი დისპერსია

$$s'^2 = \frac{1}{4}(39^2 + 30^2 + 36^2 + 19^2 + 124^2) = 4383.5, \quad s' = \sqrt{4383.5} \approx 66.$$

ამრიგად, ერთი მონაცემის 50-ის 200-ით შეცვლამ გამოიწვია შემდეგი ცვლილებები:

$$\bar{x} = 46 \ \rightarrow \ \bar{x} = 76$$
$$s' = 8 \ \rightarrow \ s' = 66$$

ე.ი. სტანდარტული გადახრის რეაგირება უფრო ძლიერი აღმოჩნდა, ვიდრე საშუალოსი.

მკვეთრად ასიმეტრიული, მაგალითად, მარჯვნივ ასიმეტრიული განაწილებებისათვის, მარჯვენა მხარეს გაწელილი გრძელი კუდით, შერჩევითი დისპერსია დიდია და არ იძლევა სასარგებლო ინფორმაციას გაფანტულობის შესახებ.

შერჩევითი ვარიაციის კოეფიციენტი. მონაცემთა სიმრავლის ვარიაციის კოეფიციენტი (შერჩევითი ვარიაციის კოეფიციენტი), რომელიც აღინიშნება CV-თი მოიცემა ფორმულით

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \text{ ან } CV' = \frac{s'}{\bar{x}}, \ \bar{x} \neq 0. \tag{3.27}$$

ცხადია, რომ ვარიაციის კოეფიციენტი უგანზომილებო სიდიდეა.

თუ სტანდარტული გადახრა გამოიყენება მონაცემთა ერთი სიმრავლის ცვალებადობის დასახასიათებლად, ვარიაციის კოეფიციენტს უმეტეს შემთხვევაში იყენებენ მონაცემთა ორი სიმრავლის გაფანტულობის ხარისხის შესადარებლად. ვარიაციის კოეფიციენტი ითვალისწინებს საშუალოს სიდიდესაც და ფაქტობრივად, ზომავს საშუალოს ერთეულზე მოსულ სტანდარტულ გადახრას. შესაძლებელია, რომ მონაცემთა ერთი სიმრავლის სტანდარტული გადახრა უფრო დიდი აღმოჩნდეს მეორე სიმრავლის სტანდარტულ გადახრაზე, მაგრამ ვარიაციის კოეფიციენტებისათვის გვქონდეს შებრუნებული თანაფარდობა. ვარიაციის კოეფიციენტი საშუალოთა განსხვავების ფაქტორის გამორიცხვის საშუალებას იძლევა.

მაგალითი **3.11.** განვიხილოთ რაიმე ორი ფირმა, რომელიც უშვებს ერთი და იგივე ტიპის პროდუქციას (ვთქვათ, სათამაშოებს). ვთქვათ, ამ ფირმების წლიურ გაყიდვათა ზრდის ტემპი ცვალებადია წლიდან წლამდე და მოცემულია 3.1 ცხრილის მეშვეობით (მონაცემები გამოხატულია პროცენტებში).

ცხრილი 3.1

	I წელი	II წელი	III წელი	IV წელი	V წელი
ფირმა M	13.7	23.9	18.3	–52.8	39.1
ფირმა T	8.4	14.0	28.9	–19.9	50.0

დავრწმუნდეთ, რომ T ფირმის გაყიდვათა ზრდის ტემპი უფრო სტაბილურია, ვიდრე M ფირმისა, ანუ M ფირმის გაყიდვათა ზრდის ტემპის ვარიაბელობა უფრო ძლიერია T ფირმასთან შედარებით.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ ვარიაციის კოეფიციენტი თითოეული ფირმისათვის.

$$\bar{x}_M = 8.44\%, s_M^{'2} = \frac{1}{4}(5.26^2 + 15.46^2 + 9.86^2 + 61.24^2 + 30.66^2) \approx 1263.57(\%)^2,\ s_M^{'} = 35.55\%$$

$$\bar{x}_T = 16.28\%,\ s_T^{'2} = \frac{1}{4}(9.88^2 + 2.28^2 + 12.62^2 + 36.18^2 + 33.72^2) \approx 667(\%)^2,\ s_T^{'} = 26.02\%$$

$$CV_M^{'} = \frac{s_M^{'}}{\bar{x}_M} \approx 4.21,\ CV_T^{'} = \frac{s_T^{'}}{\bar{x}_T} \approx 1.6,\ \Rightarrow\ CV_M^{'} > CV_T^{'}$$

რადგან $CV_M^{'} > CV_T^{'}$, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ M ფირმის გაყიდვათა ზრდის ტემპის ვარიაბელობა წლების მიხედვით უფრო მაღალია, ვიდრე T ფირმისა.

მაგალითი **3.12.** ბოლო წლებში მცირე ინვესტორთათვის, როგორც საინვესტიციო ალტერნატივა, დიდი პოპულარობით სარგებლობს ინვესტიციების ჩადება საინვესტიციო ფონდებში – ტრესტებში. იმისათვის, რომ ინვესტორს გაუადვილდეს გადაწყვეტილების მიღება, თუ რომელ კონკრეტულ ტრესტში მოახდინოს ინვესტირება, ფინანსურ ჟურნალებში რეგულარულად ქვეყნდება ყოველი ცალკეული ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო ათი წლის განმავლობაში. პუბლიკაციებში ამასთან ერთად მითითებულია ყოველი ტრესტის რისკის დონე: მაღალი, საშუალო და დაბალი. რისკის დონეების კლასიფიკაცია კი ხდება საშუალო წლიური საპროცენტო შემოსავლის ისტორიული ცვალებადობის მიხედვით, რაც უფრო მაღალია წლიური საპროცენტო შემოსვალის ვარიაბელობა, მით უფრო მაღალია რისკის დონე.

ცხრილში 3.2 მოცემულია ორი ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავალის მონაცემები ბოლო 10 წლის განმავლობაში.

ცხრილი 3.2.

ტრესტი A	8.3	–6.2	20.9	–2.7	33.6	42.8	24.4	5.2	3.1	30.5
ტრესტი B	12.1	–2.8	6.4	12.2	27.8	25.3	18.2	10.7	–1.3	11.4

რომელი ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს, A თუ B ?

ამოხსნა. რადგან დისპერსია მონაცემთა ვარიაბელობის ყველაზე თვალსაჩინო საზომია, ყოველი ტრესტის მონაცემების მიხედვით უნდა გამოვთვალოთ თითოეული მათგანის შერჩევითი დისპერსია, $s_A'^2$ და $s_B'^2$ და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს.

თავდაპირველად გამოვთვალოთ საშუალოები, შემდეგ კი გამოვიყენოთ (3.24) ფორმულა.

$$\bar{x}_A = \frac{1}{10}(8.3 - 6.2 + 20.9 - 2.7 + 33.6 + 42.8 + 24.4 + 5.2 + 3.1 + 30.5) = 16\%$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{10}(12.1 - 2.8 + 6.4 + 12.2 + 27.8 + 25.3 + 18.2 + 10.7 - 1.3 + 11.4) = 50.12\%$$

$$s_A'^2 = \frac{1}{9}[(8.3)^2 + \cdots + (10.5)^2 - 10(16)^2](\%)^2 = \frac{1}{9}[5083.06 - 2560] = 280.34(\%)^2,$$

$$s_B'^2 = \frac{1}{9}[(12.1)^2 + \cdots + (11.4)^2 - 10(12)^2](\%)^2 = \frac{1}{9}[2334.36 - 1440] = 99.38(\%)^2,$$

$$s_A'^2 = 16.74\%, \quad s_B'^2 = 9.97\%, \quad CV_A' = 1.05, \quad CV_B' = 0.83.$$

კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ, რომ რადგან მონაცემები გამოსახულია (%)-ში, ამიტომ საშუალო არითმეტიკულებიც და სტანდარტული გადახრებიც (%)-შია გამოსახული, ხოლო შერჩევითი დისპერსიები $(\%)^2$-ში, ვარიაციის კოეფიციენტებს კი განზომილება არ გააჩნია.

ამრიგად, $s_A' > s_B'$ (ამავე დროს, $CV_A' > CV_B'$), ე.ი. A ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს (უფრო რისკიანია), ვიდრე B ტრესტი, სამაგიეროდ, $\bar{x}_A > \bar{x}_B$, ანუ A ტრესტის ამონაგები საშუალოდ უფრო მაღალია, ვიდრე B ტრესტისა. ეს ფაქტი სავსებით ეთანხმება ჩვენს ინტუიციას: ინვესტიცია, რომელიც დაკავშირებულია რისკის უფრო მაღალ დონესთან, უნდა იძლეოდეს უფრო მაღალ საშუალო ამონაგებსაც.

მაგალითი 3.13. მაგალითი 3.12-ის გაგრძელება. კვლავ განვიხილოთ A და B ტრესტების წლიური საპროცენტო შემოსავალის მონაცემები ბოლო 10 წლის მანძილზე.

წარმოვიდგინოთ, რომ 10 წლის წინ თქვენ მოახდინეთ ტოლი თანხების ინვესტირება A და B ტრესტებში, ე.ი. შექმენით საინვესტიციო პორტფელი, რომელშიც A და B ტრესტებში ინვესტიციათა წონები ტოლია და უდრის 1/2-ს. დავარქვათ ამ პორტფელს C. შევადაროთ A, B და C პორტფელები რისკიანობის თვალსაზრისით.

თუ ცნობილია ცალკეული ინვესტიციის შემოსავლიანობა R_A და R_B, მაშინ C პორტფელის შემოსავლიანობა (აღვნიშნოთ R_C-თი) გამოითვლება ფორმულით

$$R_C = \frac{1}{2}R_A + \frac{1}{2}R_B = \frac{1}{2}(R_A + R_B). \tag{3.28}$$

ზედმეტი არ იქნებოდა გაგვეხსენებინა, თუ რას ნიშნავს ინვესტიციის შემოსავლიანობა. ვთქვათ, საინვესტიციო თანხა წლის დასაწყისში უდრის P_0-ს და ამ თანხის ინვესტირებამ A და B ტრესტებში წლის ბოლოს მოგვცა, შესაბამისად, P_A და P_B თანხები. მაშინ A და B ტრესტების ამონაგები R_A და R_B შემდეგი ფორმულებით მოიცემა (ამონაგები გამოხატულია %-ში):

$$R_A = \frac{P_A - P_0}{P_0}100\%, \qquad R_B = \frac{P_B - P_0}{P_0}100\%.$$

ვთქვათ, ახლა $\frac{1}{2}P_0$-ის ტოლი თანხა ინვესტირებულია A ტრესტში, ხოლო $\frac{1}{2}P_0$-ის ტოლი თანხა კი B ტრესტში, ე.ი. შექმნილია C პორტფელი, რომელიც შედგება A და B ტრესტებში ტოლი წონების (1/2-ის ტოლი) ინვესტიციებისაგან. მაშინ წლის ბოლოს C პორტფელისაგან მიღებული თანხაა $\frac{1}{2}P_A + \frac{1}{2}P_B$. ამიტომ მისი ამონაგები იქნება

$$R_C = \frac{\left(\frac{1}{2}P_A + \frac{1}{2}P_B\right) - P_0}{P_0} = \frac{\frac{1}{2}\left(P_A - P_0\right) + \frac{1}{2}\left(P_B - P_0\right)}{P_0} = \frac{1}{2}R_A + \frac{1}{2}R_B.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ წინა მაგალითში მოყვანილი მონაცემები წარმოადგენს ბოლო 10 წლის დაკვირვებებს R_A-სა და R_B-ზე, მაშინ მოცემული ორი მწკრივით შეგვიძლია შევქმნათ C პორტფელის ამონაგებთა შესაბამისი მონაცემების მწკრივი:

C პორტფელი 10.2, –4.5, 13.65, 4.75, 30.7, 34.1, 21.3, 7.95, 0.9, 20.95.

სტანდარტული გადახრის მეშვეობით შევადაროთ C პორტფელის რისკიანობა A და B ტრესტებში ინვესტიციათა რისკიანობას.

თუ გავიხსენებთ საშუალოს 3) და 4) თვისებებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\bar{x}_C = \frac{1}{2}(\bar{x}_A + \bar{x}_B) = 14\%.$$

გამოვთვალოთ შერჩევითი დისპერსია (3.24) ფორმულით, გვექნება:

$$s_C'^2 = \frac{1}{9}\left[\left((10.2)^2 + \cdots + (20.95)^2\right) - 10(14)^2\right] = 159.45\ (\%)^2, \quad s_C' = 12.63\%, \quad CV_C' = 0.9.$$

ამრიგად, რისკიანობის მიხედვით A, B და C ინვესტიციები დალაგდა შემდეგი მიმდევრობით:

$$s_B' < s_C' < s_A',$$

$$CV_B' < CV_C' < CV_A',$$

ხოლო მათი ამონაგები კი შემდეგი მიმდევრობით:

$$R_A > R_C > R_B.$$

სტანდარტული გადახრის ინტერპრეტაცია. ჩებიშევის უტოლობა. მოყვანილმა მაგალითებმა ალბათ დაგარწმუნათ, რომ სტანდარტული გადახრა მეტად სასარგებლოა მონაცემთა ორი სიმრავლის გაფანტულობის ხარისხის შესადარებლად. როდესაც საქმე გვაქვს მონაცემთა ერთ სიმრავლესთან, სტანდარტული გადახრის ინტუიციური ინტერპრეტაცია გაგვიადვილდებოდა, თუ მისი მეშვეობით შესაძლებელი გახდებოდა დასკვნების გაკეთება სხვადასხვა ინტერვალებში მოხვედრილ მონაცემთა წილის შესახებ. ამის შესაძლებლობას იძლევა ჩებიშევის (П.А. Чебышёв) უტოლობა, რომელიც ასე ფორმულირდება:

დაკვირვებათა მოცემული $x_1,\ldots,x_n$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{\#\left\{x_i : |x_i-\bar{x}|\le ks\right\}}{n}\ge 1-\frac{1}{k^2}, \tag{3.29}$$

რაც სიტყვიერად ასე გამოითქმის: $[\bar{x}-ks,\ \bar{x}+ks]$ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე (ანუ ამ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობის ფარდობა შერჩევის n მოცულობასთან) არანაკლებია $\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$-ზე.

დავამტკიცოთ ეს უტოლობა. შერჩევითი დისპერსიის განსაზღვრების თანახმად

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{\substack{i\le n\\ \{i:|x_i-\bar{x}|\ge ks\}}}(x_i-\bar{x})^2+\frac{1}{n}\sum_{\substack{i\le n\\ \{i:|x_i-\bar{x}|\le ks\}}}(x_i-\bar{x})^2\ge\frac{k^2s^2}{n}\#\left\{x_i : |x_i-\bar{x}|\ge ks\right\},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{\#\left\{x_i : |x_i-\bar{x}|\ge ks\right\}}{n}\le\frac{1}{k^2},$$

რაც მოგვცემს

$$\frac{\#\left\{x_i : |x_i-\bar{x}|\le ks\right\}}{n}=1-\frac{\#\left\{x_i : |x_i-\bar{x}|\ge ks\right\}}{n}\ge 1-\frac{1}{k^2}.$$

3.3 ცხრილში მოცემულია $[\bar{x}-ks, \bar{x}+ks]$ ინტერვალში მოხვედრილ დაკვირვებათა ფარდობითი სიხშირისა და პროცენტული რაოდენობის ქვედა საზღვრები, როცა k=1, 2, 2.5, 3, 4.

ჩებიშევის უტოლობა იძლევა $[\bar{x}-ks,\ \bar{x}+ks]$ ინტერვალში მოხვედრილი დაკვირვებების ფარდობითი სიხშირის ქვედა საზღვარს, როდესაც $\bar{x}$-ისა და s-ის გარდა სხვა ინფორმაცია დაკვირვებათა განაწილების შესახებ არ გაგვაჩნია.

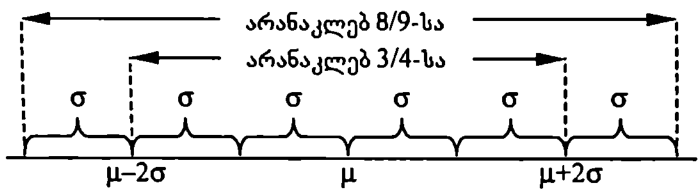
ცხრილი 3.3. ჩებიშევის უტოლობის ილუსტრაცია

ინტერვალი	ფარდობითი სიხშირე	პროცენტული რაოდენობა
$[\bar{x}-s,\ \bar{x}+s]$	≥ 0	$\ge 0\%$
$[\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s]$	$\ge 3/4$	$\ge 75\%$
$[\bar{x}-2.5s,\ \bar{x}+2.5s]$	$\ge 21/25$	$\ge 84\%$
$[\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s]$	$\ge 8/9$	$\ge 89.9\%$
$[\bar{x}-4s,\ \bar{x}+4s]$	$\ge 15/16$	$\ge 93.7\%$

როგორც შემდგომში ვნახავთ, ჩებიშევის უტოლობა სამართლიანია პოპულაციისათვისაც. სასრული პოპულაციისათვის მისი დამტკიცება მოყვანილის ანალოგიურია. უსასრული პოპულაციისათვის ჩებიშევის უტოლობა ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

ვთქვათ $y_1, \ldots, y_N$ არის პოპულაცია, რომლის საშუალოა μ და დისპერსია – σ^2. მაშინ $[\mu-k\sigma,\ \mu+k\sigma]$ ინტერვალში მოხვედრილი წევრების რაოდენობის ფარდობა პოპულაციის N მოცულობასთან არანაკლებია $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$-ზე

$$\frac{\#\{y_i : |y_i-\bar{y}|\le k\sigma\}}{N}\ge 1-\frac{1}{k^2}.$$



ნახ. 3.7

მაგალითი **3.14.** განვიხილოთ მონაცემები, რომლებიც წარმოადგენს რომელიმე ფირმის მოსამსახურეთა 30 სატელეფონო საუბრის ხანგრძლივობას (გამოხატულს წუთებში).

11.8	3.6	16.6	13.5	4.8	8.8
8.9	9.1	7.7	2.3	12.1	6.1
10.2	8.0	11.4	6.8	9.6	19.5
15.3	12.3	8.5	15.9	18.7	11.7
6.2	11.2	10.4	7.2	5.5	14.5

გამოვთვალოთ საშუალო და სტანდარტული გადახრა:

$$\bar{x}=\frac{1}{30}(11.8+8.9+\cdots+11.7+14.5)=10.26,$$

$$s^2=\frac{1}{30}[(11.8-10.26)^2+(8.9-10.26)^2+\cdots+(11.7-10.26)^2+(14.5-10.26)^2]=18.4,\ s=4.29.$$

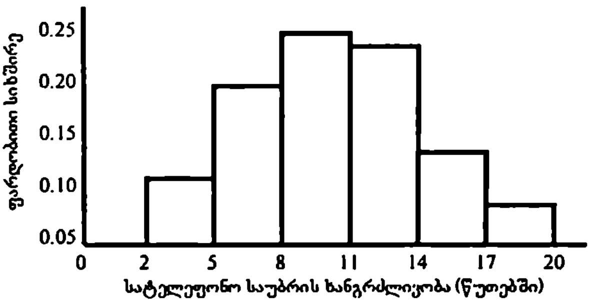
ჩებიშევის უტოლობა გვეუბნება, რომ თუ მონაცემთა განაწილების შესახებ სხვა არავითარი ინფორმაცია არ გაგვაჩნია (ე.ი. ცნობილია მხოლოდ $\bar{x}$ და s), მაშინ

$$[\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s]=[10.26-2\cdot4.29,\ 10.26+2\cdot4.29]=[1.68,\ 18.84]$$

ინტერვალში მოხვედრილ დაკვირვებათა პროცენტული რაოდენობა არანაკლებია 75%-ზე. სინამდვილეში [1.68,18.84] ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა პროცენტული რაოდენობაა 96.7%$=\frac{29}{30}\cdot100$% (ყველა დაკვირვება, გარდა უდიდესისა, მოხვდა მითითებულ ინტერვალში).

როგორც ვხედავთ, ეს რაოდენობა გაცილებით აღემატება 75%-ს, საიდანაც შეიძლება დავასკვნათ, რომ ამ შემთხვევაში ჩებიშევის უტოლობით დადგენილი ქვედა საზღვარი ძალიან დაწეულია.

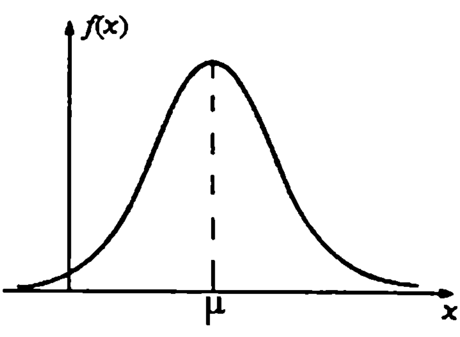
ჩვენი მონაცემების მეშვეობით ავაგოთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა და დავაკვირდეთ მის ფორმას (ნახ. 3.8).



ნახ. 3.8. 3.14 მაგალითის მონაცემების ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა

იგი თითქმის სიმეტრიულია $\bar{x}=10.26$-ის მიმართ, არაა მეტისმეტად ზემოთ გაწელილი $\bar{x}$-ის მიდამოში, აქვს „მსუბუქი" კუდები, რაც იმაში გამოიხატება, რომ საშუალოდან ორივე მიმართულებით დაშორებისას ის სწრაფად ნულდება. ზუსტად რომ ვთქვათ, სიხშირეთა ჰისტოგრამას მიახლოებით $\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$ ფუნქციის გრაფიკის ფორმა გააჩნია, ანუ აქვს ზარისებური ფორმა (ნახ. 3.9).

იმ მონაცემებისათვის, რომელთა ჰისტოგრამებს გააჩნია აღწერილი ფორმა, არსებობს გავრცელებული წესი, რომელიც იძლევა იმ მონაცემთა მიახლოებით პროცენტულ რაოდენობებს, რომლებიც $[\bar{x}-ks,\ \bar{x}+ks]$ (k=1,2,3,4) ინტერვალში არიან მოხვედრილი.



ნახ. 3.9. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ფუნქციის გრაფიკი

ემპირიული წესი. თუ სიხშირეთა ჰისტოგრამას აქვს ზარისებური ფორმა, მაშინ

ინტერვალი [$\bar{x}-s$, $\bar{x}+s$] შეიცავს მონაცემთა ~ 68%-ს,

ინტერვალი [$\bar{x}-2s$, $\bar{x}+2s$] შეიცავს მონაცემთა ~ 95%-ს,

ინტერვალი [$\bar{x}-3s$, $\bar{x}+3s$] შეიცავს მონაცემთა ~ 99%-ს,

ინტერვალი [$\bar{x}-4s$, $\bar{x}+4s$] შეიცავს პრაქტიკულად ყველა მონაცემს.

მაგალითში მოყვანილი მონაცემების 96.7% მოხვედრილია [$\bar{x}-2s$, $\bar{x}+2s$] ინტერვალში, რაც საკმაოდ ახლოსაა ემპირიული წესით მოცემულ სიდიდესთან, 95%.

შევნიშნოთ შემდეგი ფაქტიც. ამავე მაგალითში მოყვანილი მონაცემებისათვის $x_{\min} = 2.3$, $x_{\max} = 19.5$, გაბნევის დიაპაზონი= 17.2, ხოლო

$$s \sim \frac{\text{გაბნევის დიაპაზონი}}{4} = 4.29.$$

ხშირად, როცა სიხშირეთა ჰისტოგრამას აქვს ზარისებური ფორმა

$$s \sim \frac{\text{გაბნევის დიაპაზონი}}{4}$$

ფორმულას იყენებენ იმ ფაქტის სწრაფად შესამოწმებლად, რომ s-ის გამოთვლისას არაა დაშვებული უხეში შეცდომები, ანდა პირიქით ამ ფორმულას იყენებენ იმ ფაქტის სწრაფად (უხეშად) შესამოწმებლად, რომ მონაცემები მიღებულია ე.წ. ნორმალური განაწილების მქონე პოპულაციიდან.

ასიმეტრიისა და ექსცესის შერჩევითი კოეფიციენტები. ასიმეტრიის შერჩევითი კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{s^3}. \tag{3.30}$$

ეს კოეფიციენტი იძლევა სიხშირეთა ჰისტოგრამის სიმეტრიულობის (ან ასიმეტრიულობის) შესახებ დასკვნის გაკეთების საშუალებას მისი აგების გარეშე. კერძოდ, თუ

$$\hat{\alpha}_n \neq 0,$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სიხშირეთა ჰისტოგრამა არაა სიმეტრიული $\bar{x}$-ის მიმართ, უფრო მეტიც, თუ

$$\hat{\alpha}_n > 0 \qquad (\hat{\alpha}_n < 0)$$

მაშინ სიხშირეთა განაწილება მარჯვნივ (მარცხნივ) ასიმეტრიულია. მართლაც, თუ $\hat{\alpha}_n > 0$, მაშინ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3 > 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\bar{x}$-დან დადებით გადახრათა კუბების ჯამი აღემატება $\bar{x}$-დან უარყოფით გადახრათა კუბების ჯამს, რაც მიუთითებს

იმაზე, რომ $\overline{x}$-ის მარცხნივ მყოფი დაკვირვებები უფრო კონცენტრირებულნი არიან $\overline{x}$-თან, ვიდრე მარჯვენივ მყოფნი, ანუ სიხშირეთა განაწილება მარჯვენივ ასიმეტრიულია.

ექსცესის შერჩევითი კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს

$$\hat{e}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{s^4} - 3. \tag{3.31}$$

შემდგომ თავებში ჩვენ განვიხილავთ ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტებს პოპულაციისათვის და მათზე საუბარი დაწვრილებით იქ გვექნება. აქ შემოვიფარგლებით მხოლოდ იმის აღნიშვნით, რომ ექსცესის კოეფიციენტი არის სიხშირეთა ჰისტოგრამის $\overline{x}$-ის მიდამოში ზევით გაწელილობის (ანუ წვეტიანობის) საზომი.

§ 3. რიცხვითი მახასიათებლები დაჯგუფებული მონაცემებისათვის

რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის მნიშვნელოვანია ორი მიზეზის გამო. ერთი მიზეზი ისაა, რომ მონაცემთა მასივი შეიძლება ძალიან დიდი იყოს და მიუხედავად იმისა, რომ კომპიუტერის მეშვეობით შესაძლებელია ზუსტად გამოითვალოს ესა თუ ის რიცხვითი მახასიათებელი (საშუალო, მედიანა, პროცენტილები, დისპერსია და სხვა), შესაძლოა უფრო სწრაფი და იაფი აღმოჩნდეს მონაცემთა დაჯგუფება, სიხშირეთა ჰისტოგრამის აგება და მათი მეშვეობით სასურველი რიცხვითი მახასიათებლების მიახლოებითი გამოთვლა, რაც, შესაძლოა სრულიად აკმაყოფილებდეს ჩვენს მოთხოვნებს სიზუსტის შესახებ. მეორე მიზეზი კი, უბრალოდ ისაა, რომ ზოგჯერ მონაცემთა მოპოვება შესაძლებელია მხოლოდ დაჯგუფებული სახით და არ გაგვაჩნია პირველადი მონაცემების აღდგენის შესაძლებლობა. ასეთი ტიპის სიტუაციები ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. მაგალითად, როდესაც მონაცემები მოპოვებულია სამთავრობო პუბლიკაციებიდან (ამა თუ იმ ეკონომიკური, დემოგრაფიული, სოციალური და სხვა მაჩვენებლების შესახებ) და ამ შემთხვევაში არ გაგვაჩნია სხვა არჩევანი გარდა იმისა, რომ გამოვთვალოთ რიცხვითი მახასიათებლების მიახლოებითი მნიშვნელობები დაჯგუფებული მონაცემების მიხედვით.

პროცენტილების გამოთვლა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სიხშირეთა ან ფარდობით სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების 1.11 ცხრილი. მისი დახმარებით შევადგინოთ დაგროვილ სიხშირეთა ახალი ცხრილი.

ცხრილი 3.4. დაგროვილი სიხშირეები

ინტერვალი	$< a_1$	$< a_2$	$< a_3$	...	$\le a_l$
დაგროვილი სიხშირეები	n_1	$n_1 + n_2$	$n_1 + n_2 + n_3$	...	$\sum_{i=1}^{l} n_i = n$

ვთქვათ, მოსაძებნი გვაქვს $P = \alpha \cdot 100$-პროცენტილი, ანუ ისეთი $\tilde{x}_p$ მნიშვნელობა, რომ

$$\#\{x_i : x_i < \tilde{x}_p\} \le \alpha n, \qquad \#\{x_i : x_i > \tilde{x}_p\} \le (1-\alpha)n. \tag{3.32}$$

აღვწეროთ $\tilde{x}_p$-ს მოძებნის წესი ნაბიჯების მიხედვით.

1. მოვძებნოთ ისეთი ინტერვალი (აღვნიშნოთ მისი მარცხენა ბოლო L-ით, მარჯვენა –R-ით, სიგრძე კი l-ით), რომ

$$\#\{x_i : x_i < L\} < \alpha n$$

და

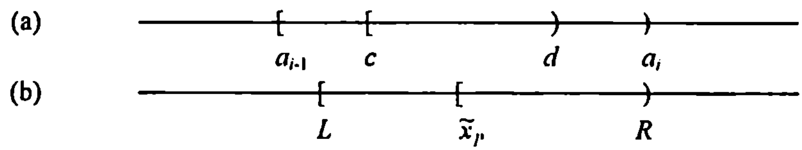
$$\#\{x_i : x_i < R\} \ge \alpha n.$$

ასეთი ინტერვალის მოძებნა შესაძლებელია 3.2 ცხრილის მეშვეობით.

2. 1.11 ცხრილის დახმარებით მოვძებნოთ $[L,R]$ ინტერვალში მოხვედრილ დაკვირვებათა რაოდენობა, ანუ სიხშირე და აღვნიშნოთ იგი f-ით.
3. $\tilde{x}_p$ გამოითვლება ფორმულით

$$\tilde{x}_p = L + \frac{g}{f}\, l, \tag{3.33}$$

სადაც $g = [\alpha n] - \#\{x_i : x_i < L\}$.



ნახ. 3.10

შენიშვნა.

ა) პროცენტილების ასეთი წესით მოძებნისას იგულისხმება, რომ დაყოფის ნებისმიერ $[a_{i-1}, a_i)$ ინტერვალში, $i = 1,2,\dots,l$, მოხვედრილი მონაცემები თანაბრადაა განაწილებული ამ ინტერვალში. ეს ნიშნავს, რომ ამ ინტერვალის ნებისმიერ $[c,d)$ ქვეინტერვალში (იხ. ნახ. 3.10 (a)) მოხვედრილ მონაცემთა მიახლოებითი რაოდენობა მოიცემა ფორმულით

$[c,d)$ ინტერვალში მოთავსებულ მონაცემთა რაოდენობა $\approx \left[n_i \dfrac{d-c}{a_i - a_{i-1}}\right], \quad a_{i-1} < c < d < a_i.$ (3.34)

ბ) რადგან $0 < g < f$, ამიტომ $L < \tilde{x}_p < R$.

გ) დავრწმუნდეთ, რომ აღწერილი წესით მოძებნილი $\tilde{x}_p$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს (3.32) თანაფარდობებს. მაგალითისათვის, შევამოწმოთ პირველი მათგანი.

$$\# \{x_i : x_i < \widetilde{x}_p\} = \# \{x_i : x_i < L\} + \# \{x_i : L \le x_i < \widetilde{x}_p\} = \# \{x_i : x_i < L\} + f \cdot \frac{\widetilde{x}_p - L}{l} =$$

$$= \# \{x_i : x_i < L\} + f \cdot \frac{\frac{g}{f} l}{l} = \# \{x_i : x_i < l\} + [g] \le \alpha n.$$

ტოლობათა ამ მიმდევრობიდან მეორე ტოლობის სამართლიანობა გამომდინარეობს (3.34) თანაფარდობიდან, მესამე ტოლობისა – იმ ფაქტიდან, რომ $\widetilde{x}_p - L = \frac{g}{f} l$ (იხ. ნახ. 3.10 (b)).

მაგალითი 3.15. მოვძებნოთ შერჩევითი მედიანა (50-პროცენტილი) და 35-პროცენტილი 3.5 ცხრილით მოცემული დაჯგუფებული მონაცემებისათვის.

ცხრილი 3.5. სიხშირეთა ინტერვალური განაწილება.

ინტერვალი	სიხშირე	ინტერვალი	სიხშირე	ინტერვალი	სიხშირე
[1.5.10.5)	18	[37.5.46.5)	119	[73.5.82.5)	160
[10.5,19.5)	32	[46.5.55.5)	80	[82.5.91.5)	140
[19.5,28.5)	50	[55.5.64.5)	140	[91.5,100.5]	60
[28.5.37.5)	81	[64.5.73.5)	120		

გვაქვს 11 ტოლი სიგრძის ინტერვალი (სიგრძე 9-ის ტოლია), $n = 1000$. შევადგინოთ დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი

ცხრილი 3.6. დაგროვილი სიხშირეები

ინტერვალი	სიხშირე	ინტერვალი	სიხშირე	ინტერვალი	სიხშირე
<10.5	18	<46.5	300	<82.5	800
<19.5	50	<55.5	380	<91.5	940
<28.5	100	<64.5	520	≤100.5	1000
<37.5	181	<73.5	640		

I. გამოვთვალოთ შერჩევითი მედიანა $\widetilde{x}$. რადგან ამ შემთხვევაში P=0.5·100, ამიტომ α=0.5, ხოლო αn = 500 და პროცენტილების მოძებნის აღწერილი წესის პირველი ნაბიჯის შესაბამისი ინტერვალია [55.5, 64.5), ე.ი. L = 55.5, R = 64.5, l = 9, f = 140 (იხ. 3.5 ცხრილი).

$$g = \alpha n - \# \{x_i : x_i < 55.5\} = 500 - 380 = 120$$

($\# \{x_i : x_i < 55.5\} = 380$ აღებულია 3.6 ცხრილიდან).

ამრიგად, (3.33) ფორმულაში შემავალი ყველა სიდიდე ცნობილია და გვექნება

$$\widetilde{x} = 55.5 + \frac{120}{140} \cdot 9 \approx 55.5 + 7.71 = 63.21.$$

II. გამოვთვალოთ 35 პროცენტილი, $\widetilde{x}_{35}$. ამ შემთხვევაში $\alpha = 0.35$, $\alpha n = 350$ და საძიებელი ინტერვალია [46.5, 55.5), ე.ი. $L = 46.5$, $R = 55.5$, $l = 9$, $f = 80$, $S = 350–300 = 50$. ამრიგად,

$$\widetilde{x}_{35} = 46.5 + \frac{50}{80} \cdot 9 \approx 46.5 + 5.62 = 52.125.$$

შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის გამოთვლა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის. კვლავ განვიხილოთ დაჯგუფებული მონაცემები, რომლებიც მოცემულია სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების 1.11 ცხრილით. ამ ცხრილის მიხედვით მონაცემები დაჯგუფებულია l რაოდენობის კლასად, თითოეული კლასი შეიცავს $[a_{i-1}, a_i)$ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემებს, რომელთა სიხშირეა n_i, $i = 1, 2,\ldots, l$, $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$, n შერჩევის მოცულობაა.

ამ პარაგრაფის მიზანს შეადგენს შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის მიახლოებითი გამოთვლა დაჯგუფებული მონაცემების მიხედვით.

კიდევ ერთხელ გავიხსენოთ, თუ რა მოსაზრებებით ხელმძღვანელობენ დაჯგუფების ინტერვალების რაოდენობის და სიგრძის დასადგენად. ესენია:

(a) იმ მონაცემთა მნიშვნელობები, რომლებიც მიეკუთვნება რომელიმე ინტერვალს, დიდი შეცდომების გარეშე შეიძლება გაიგივდეს ამ ინტერვალის შუა წერტილთან;

(b) ინტერვალების სიგრძეები შესაძლოდ დიდი უნდა იყოს, ამავე დროს ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ სრულდებოდეს (a) პირობა.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა ინტერვალის შუა წერტილთან გაიგივების დროს დაშვებული შეცდომები აისახება საშუალოსა და დისპერსიის მიახლოებითი გამოთვლის სიზუსტეში და მათი დასაშვები სიდიდე უნდა განისაზღვროს გამოთვლების სიზუსტეზე ჩვენი მოთხოვნების შესაბამისად.

შერჩევითი საშუალოს კარგი აპროქსიმაციის მიღება შესაძლებელია იმ დაშვებაში, რომ ყოველი i-ური $[a_{i-1}, a_i)$ ინტერვალის შუა წერტილი, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ m_i-ით, წარმოადგენს ამ ინტერვალში მოთავსებულ მონაცემთა არითმეტიკული საშუალოს მიახლოებით მნიშვნელობას. მაგალითად, ეს დაშვება სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როდესაც i-ურ ინტერვალში მყოფი მონაცემები თანაბრად სიმეტრიულადაა განაწილებული შუა წერტილის მიმართ, ანდა შესრულებულია (a) პირობა. ამ შემთხვევაში შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $[a_{i-1},a_i)$ ინტერვალში მოთავსებულ მონაცემთა ჯამი მიახლოებით $n_i m_i$-ს ტოლია. აქედან გამომდინარე, არითმეტიკული საშუალოს მიახლოებითი მნიშვნელობა ბუნებრივია განისაზღვროს ფორმულით

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i m_i . \tag{3.35}$$

რაც შეეხება შერჩევითი დისპერსიის მიახლოებით გამოთვლას, ამ შემთხვევაში დამაკმაყოფილებელი სიზუსტის მისაღებად საჭიროა უფრო მკაცრი დაშვება.

სახელდობრ დაშვება იმის შესახებ, რომ შესრულებულია (a) პირობა. ამ შემთხვევაში შერჩევითი დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობა მოიცემა ფორმულით

$$s'^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{l} n_i m_i^2 - n(\bar{x})^2\right], \tag{3.36}$$

სადაც $\bar{x}$ გამოთვლილია (3.35) ფორმულით.

მაგალითი 3.16. განვიხილოთ 3.15 მაგალითის მონაცემები და გამოვთვალოთ საშუალოსა და დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობანი. ამ მიზნით 3.5 ცხრილის მეშვეობით შევადგინოთ ახალი ცხრილი, რომელიც შეიცავს ყველა იმ სიდიდეს, რომელიც აუცილებელია (3.35) და (3.36) ფორმულების გამოსაყენებლად (იხ. ცხრილი 3.7):

ამრიგად, გვექნება

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i m_i = \frac{1}{1000}60639 = 60.639.$$

$$s'^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{l} n_i m_i^2 - n(\bar{x})^2\right] = \frac{1}{999}(4204233 - 1000(60.639)^2) \approx 527.$$

ცხრილი 3.7

ინტერვალის ნომერი i	შუა წერტილი m_i	m_i^2	სიხშირე n_i	$n_i m_i$	$n_i m_i^2$
1	6	36	18	108	648
2	15	225	32	480	7200
3	24	576	50	1200	28800
4	33	1089	81	2673	88209
5	42	1764	119	4998	209916
6	51	2601	80	4080	208080
7	60	3600	140	8400	504000
8	69	4761	120	8280	571320
9	78	6084	160	12480	973440
10	87	7569	140	12180	1059660
11	96	9216	60	5760	552960
Σ			1000	60639	4204233

მაგალითი 3.17. განვიხილოთ 3.14 მაგალითის მონაცემები. მათთვის გამოთვლილი იყო არითმეტიკული საშუალო, $\bar{x}$ =10.26 და შერჩევითი სტანდარტული გადახრა, s=4.29.

დავაჯგუფოთ ეს მონაცემები 6 ინტერვალის მიხედვით ისე, როგორც ქვემომოყვანილ 3.8 ცხრილშია მოცემული, გამოვთვალოთ ამ გზით დაჯგუფებული მონაცემებისათვის საშუალოსა და სტანდარტული გადახრის მიახლოებითი მნიშვნელობები და შევადაროთ ადრე გამოთვლილ ზუსტ მნიშვნელობებს.

ცხრილი 3.8

ინტერვალი $[a_{i-1},a_i)$	შუა წერტილი m_i	m_i^2	სიხშირე n_i	$n_i m_i$	$n_i m_i^2$
[2,5)	3.5	12.25	3	10.5	36.75
[5,8)	6.5	42.25	6	39.0	253.50
[8,11)	9.5	90.25	8	76.0	722.00
[11,14)	12.5	156.25	7	87.5	1093.75
[14,17)	15.5	240.25	4	62.0	961.00
[17,20)	18.5	342.25	2	37.0	684.50
Σ			30	312	3751.5

ამ ცხრილის დახმარებით ადვილად გამოვთვლით საძიებელ სიდიდეებს:

$$\bar{x} = \frac{1}{30}312 = 10.4, \qquad s^2 = \frac{1}{29}(3751.5 - 30(10.4)^2) \approx 17.47, \qquad s \sim 4.18.$$

როგორც ვხედავთ, მიუხედავად იმისა, რომ მონაცემები დავაჯგუფეთ 6 ინტერვალის მიხედვით, რომელთათვისაც (a) დაშვება საკმაოდ უხეშად სრულდება, მიახლოებით გამოთვლილი არითმეტიკული საშუალო და სტანდარტული გადახრა საკმაოდ ახლოსაა ზუსტად გამოთვლილ მნიშვნელობებთან (ზუსტი $\bar{x}$ =10.26, მიახლოებით გამოთვლილი $\bar{x}$ =10.4, ზუსტად გამოთვლილი s = 4.29, მიახლოებით გამოთვლილი s = 4.18).

კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტები. აქამდე ჩვენ ვიხილავდით მონაცემებს, რომლებიც წარმოადგენდა რაიმე ერთი მახასიათებლის დაკვირვებულ მნიშვნელობებს. მრავალი პრობლემის კვლევისას, კერძოდ, როდესაც შეისწავლება კავშირი ორ (ან რამდენიმე) მახასიათებელს შორის,ჩვენ უკვე საქმე გვაქვს ისეთ მონაცემებთან, რომლებიც წარმოადგენს ამ მახასიათებლების ერთდროულად დაკვირვებულ მნიშვნელობათა სიმრავლეს. მაგალითად, ვთქვათ, ვიკვლევთ საკითხს დამოკიდებულია თუ არა გამოცდების ჩაბარების ხარისხი სქესზე, ოჯახურ მდგომარეობაზე ან სხვა ფაქტორებზე. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში უნდა გაგვაჩნდეს მონაცემები ყველა ზემოჩამოთვლილი სიდიდის (მახასიათებლის) შესახებ. უამრავი ასეთი ტიპის მაგალითის ჩამოთვლა შეიძლება: არის თუ არა კავშირი აქციის დახურვისა და გახსნის ფასებს შორის? სადაზღვევო კომპანიის მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა კავშირი სადაზღვევო პოლისის ტიპსა და პოლისის მფლობელის სხვადასხვა მახასიათებელს შორის (მაგალითად, სიცოცხლის დაზღვევაზე გამოყოფილ თანხასა და ოჯახის შემოსავალს შორის), ფინანსურ მენეჯერს აინტერესებს შეისწავლოს კავშირი ცალკეული აქტივისა და ბაზრის ამონაგებებს შორის და ა.შ.

ყველა ზემოდასახელებულ პრობლემაზე პასუხის გასაცემად, რა თქმა უნდა, აუცილებელია გვქონდეს ამოცანაში მონაწილე ყველა სიდიდისა თუ მახასიათებლის ერთდროულად დაკვირვებული მნიშვნელობანი.

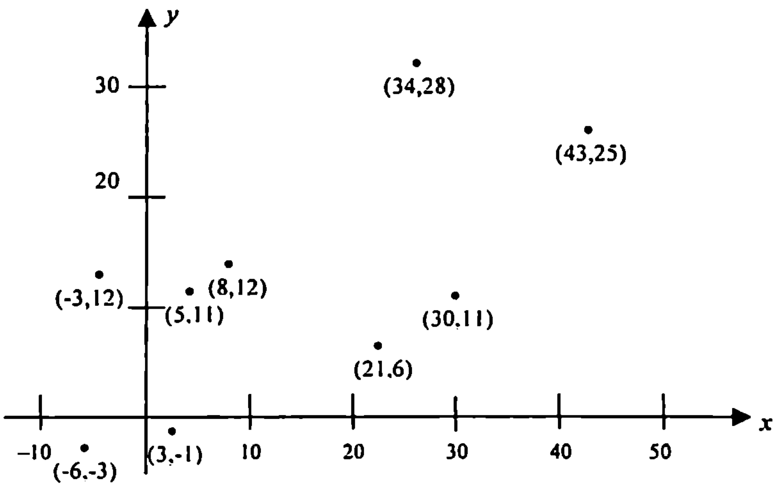
ამა თუ იმ ორ მახასიათებელს (ანდა ორ მაჩვენებელს) შორის კავშირის შესწავლის მიზნით ამ მახასიათებლების დაკვირვებული მნიშვნელობების სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წყვილების შემდეგი სიმრავლის სახით

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

ამ მონაცემების მიხედვით აგებენ ე.წ. გაბნევის დიაგრამას შემდეგი წესით: სიბრტყეზე კოორდინატთა მართკუთხა სისტემაში მონიშნულია წერტილები, რომელთა კოორდინატებია (x_i, y_i), $i = 1, 2,..., n$.

მაგალითი **3.18.** განვიხილოთ 3.12 მაგალითის მონაცემები და ავაგოთ მათთვის გაბნევის დიაგრამა. *A* ტრესტის მონაცემები გადავზომოთ x ღერძზე, *B* ტრესტისა კი y ღერძზე (სიმარტივისათვის მონაცემები დავამრგვალოთ მთელ რიცხვებამდე).

ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლოა, რომ გაბნევის დიაგრამამ ვიზუალურად აღმოგვაჩენინოს კავშირი მონაცემთა ორ სიმრავლეს შორის. მაგალითად, შესაძლოა, რომ (x_i, y_i) წერტილები დაჯგუფებულნი იყვნენ რაიმე წრფის ან სხვა მრუდის მახლობლობაში. შემდგომ თავებში ეს საკითხი დაწვრილებით იქნება შესწავლილი, აქ კი ჩვენ შემოვიფარგლებით ორ რაოდენობრივ ცვლადს (მაჩვენებელს) შორის კავშირის ერთ-ერთ უმთავრეს მახასიათებელს – კორელაციის კოეფიციენტს, რომელიც წარმოადგენს ორ ცვლადს შორის წრფივი კავშირის სიძლიერის საზომს.



ნახ. 3.11 გაბნევის დიაგრამა 3.12 მაგალითის მონაცემებისათვის

თავდაპირველად განვმარტოთ შერჩევითი კოვარიაციის კოეფიციენტი. იგი განიმარტება შემდეგი თანაფარდობით

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \tag{3.37}$$

სადაც $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი კი მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x s_y}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}. \tag{3.38}$$

მოვიყვანოთ კოვარიაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელი გამარტივებული ფორმულა

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\bar{x}\bar{y}. \tag{3.39}$$

ხშირად იყენებენ კორელაციის კოეფიციენტის შემდეგ ეკვივალენტურ გამოსახულებასაც

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i-\bar{y}}{s_y}\right). \tag{3.40}$$

ამ ფორმულის მიხედვით, თავდაპირველი მონაცემების კორელაციის კოეფიციენტი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც გარდაქმნილი

$$\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x},\frac{y_i-\bar{y}}{s_y}\right),\ i=1,2,\ldots,n,$$

მონაცემების კოვარიაციის კოეფიციენტი.

ახლა შევუდგეთ კორელაციის კოეფიციენტის თვისებების ჩამოყალიბებას.

1. $-1\le r\le 1$ ანუ $|r|\le 1$. r-ის დადებითი მნიშვნელობები მიუთითებს ცვლადებს შორის პოზიტიური დამოკიდებულების არსებობაზე, უარყოფითი მნიშვნელობანი კი უარყოფითზე;

ეს თვისება მარტივად გამომდინარეობს მათემატიკაში კარგად ცნობილი კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობიდან, რომლის ძალითაც

$$|\operatorname{cov}(x,y)|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right|\le\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\ \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

ანუ

$$|\operatorname{cov}(x,y)|\le s_x s_y, \tag{3.41}$$

თანაც (3.41) ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x და y ცვლადებს შორის არსებობს წრფივი კავშირი, ე.ი. მოიძებნება ისეთი a და b მუდმივები, რომ $y_i=ax_i+b$;

(3.41)-იდან ადვილად მივიღებთ სასურველ ფაქტს, მართლაც

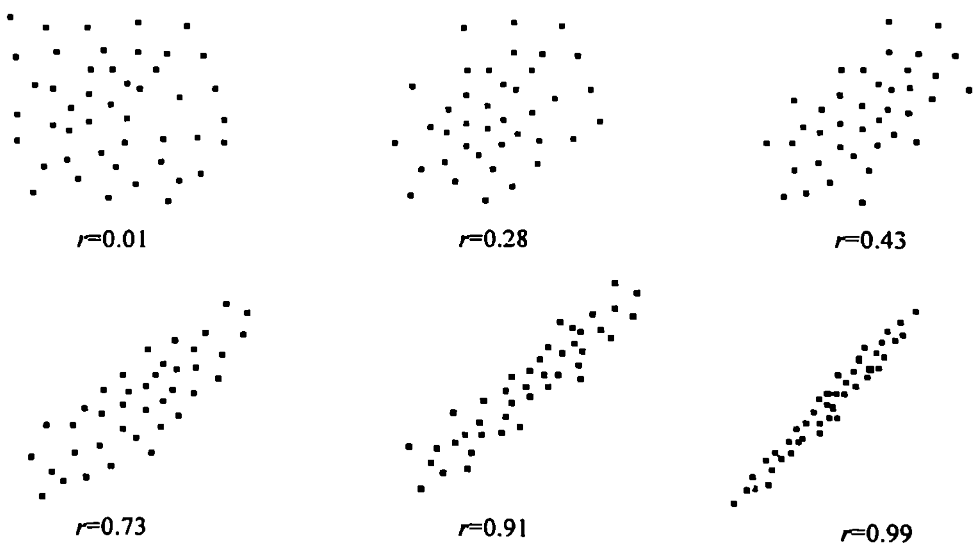
$$|r| = \frac{|\operatorname{cov}(x,y)|}{s_x s_y} \le \frac{s_x s_y}{s_x s_y} = 1,$$

თანაც ბოლო უტოლობაში ტოლობას ადგილი ექნება, ე.ი. $|r|=1$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y_i=ax_i+b$, რაიმე a და b რიცხვებისათვის, ამასთან თუ $a>0$, $r=1$, და $r=-1$, თუ $a<0$.

ამრიგად, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ კორელაციის კოეფიციენტის მე-2 თვისება და ჩამოვთვალოთ ორი სხვაც.

2. $|r|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ცვლადებს შორის არსებობს ზუსტი წრფივი კავშირი, ანუ წერტილები გაბნევის დიაგრამაზე ზუსტად განლაგდება რაიმე წრფეზე.
3. კორელაციის კოეფიციენტი უგანზომილებო სიდიდეა. ამასთან, მისი სიდიდე უცვლელი დარჩება, რიდესაც x ან y-ის ან ორივეს საზომი ერთეულები იცვლება,იგი უცვლელი რჩება მაშინაც, როცა იცვლება ათვლის წერტილიც, ანუ მოკლედ რომ ვთქვათ, უცვლელი რჩება ცვლადების წრფივი გარდაქმნისას.
4. კორელაცია ზომავს ცვლადებს შორის წრფივი დამოკიდებულების სიძლიერეს. სხვა, არაწრფივი, თუნდაც დეტერმინისტული კავშირი კორელაციაში არ აისახება. შეიძლება ისეთი მაგალითის მოფიქრება, როდესაც ცვლადებს შორის არსებობს მკაცრი არაწრფივი დამოკიდებულება, მაგრამ კორელაციის კოეფიციენტი მცირეა და შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს. ამიტომ კორელაცია არ წარმოადგენს გაბნევის დიაგრამის მეშვეობით აღმოჩენილი ყველა ტიპის კავშირების ზოგად საზომს.

ქვევით მოყვანილია გაბნევის დიაგრამებისა და შესაბამისი კორელაციის კოეფიციენტების მნიშვნელობათა რამდენიმე ვარიანტი. ამ საილუსტრაციო მასალიდან ჩანს, რომ რაც უფრო კონცენტრირებულია მონაცემები რაიმე წრფის მიდამოში, მით უფრო დიდია კორელაციის კოეფიციენტი, ამასთან თუ შესაბამისი წრფის დახრილობა დადებითია, კორელაციის კოეფიციენტიც დადებითია.



ნახ. 3.12

მაგალითი 3.19. (გაგრძელება) გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი 3.12 მაგალითში მოყვანილი მონაცემებისათვის. ჩვენ ადრე უკვე გამოთვლილი გვქონდა $\overline{x}=16$, $s_x=17.65$, $\overline{y}=12$, $s_y=10.51$. გვაქვს

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\overline{x}\overline{y}=\frac{1}{10}(8.3\cdot12.1+(-6.2)\cdot(-2.8)+\cdots+3.1\cdot(-1.3)+30.5\cdot11.4)-16\cdot12=71.48.$$

აქედან

$$r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x s_y}=\frac{71.48}{17.65\cdot10.51}\approx0.39.$$

ეს სიდიდე გვარწმუნებს, რომ არსებობს სუსტად გამოხატული პოზიტიური წრფივი კავშირი A და B ტრესტების ამონაგებებს შორის, რასაც გაბნევის დიაგრამაც ადასტურებს.

მაგალითი 3.20. იმისათვის, რომ განსაზღვროს ახალი პროდუქციის ფასი, რომლის გატანაც სურს კომპანიას ბაზარზე, კომპანიის კვლევის დეპარტამენტმა შეარჩია 10 ქალაქი, რომლებსაც არსებითად ერთი და იგივე ყიდვის პოტენციალი გააჩნია და გამოიტანა პროდუქცია ბაზარზე ყოველ მათგანში სხვადასხვა ფასად. ქვემომოყვანილ 3.9 ცხრილში მოცემულია ფასები (დოლარებში) და შესაბამისი გაყიდვების მოცულობა (ათასობით დოლარებში).

ცხრილი 3.9.

ქალაქის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ფასი x	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5
გაყიდვის მოცულობა y	15	14	16	9	12	10	8	9	6	5

პირველ რიგში ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა (იხ. ნახ. 3.13), შემდეგ კორელაციის კოეფიციენტი და დავრწმუნდეთ, რომ მათზე დაყრდნობით მიღებული დასკვნები ერთმანეთთან შეთანხმებულია.

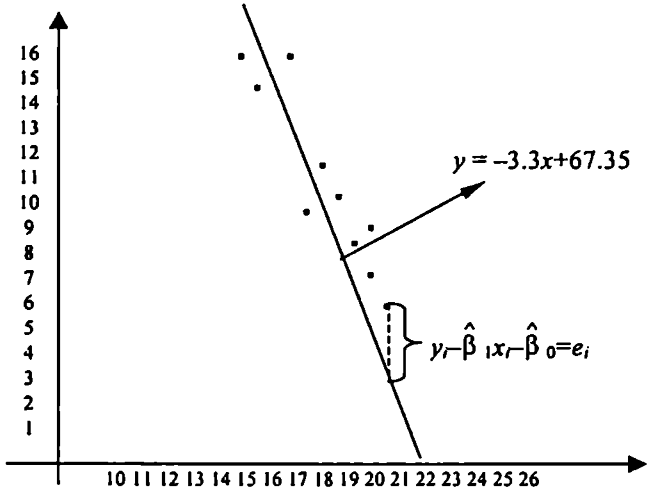
როგორც ამ დიაგრამიდან ჩანს, ჩვენს წინაშეა უარყოფითი წრფივი კავშირის ტენდენციაა: მონაცემები თავმოყრილნი არიან უარყოფითი დახრილობის წრფის მიდამოში. ამ წრფის მოძებნის ამოცანას ჩვენ მოგვიანებით შევეხებით. ახლა კი შევნიშნოთ, რომ რადგანაც კორელაციის კოეფიციენტი ზომავს ორ ცვლადს შორის არსებული წრფივი კავშირის სიძლიერეს, უნდა მოველოდეთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტს ექნება -1-თან საკმაოდ ახლოს მყოფი მნიშვნელობა. გამოვთვალოთ იგი.

$$\overline{x}=17.25,\ s_x=1.44,\ \overline{y}=10.4,\ s_y=3.56,\ \operatorname{cov}(x,y)=-4.75.$$

საბოლოოდ

$$r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x s_y}=-\frac{4.75}{5.04}\approx-0.94,$$

რაც ადასტურებს გაბნევის დიაგრამის დახმარებით მიღებულ დასკვნას.



ნახ. 3.13. გაბნევის დიაგრამა 3.20 მაგალითის მონაცემებისათვის

მიუხედავად იმისა, რომ კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლილი მნიშვნელობა $r = -0.94$ მეტყველებს უარყოფით წრფივი კავშირის არსებობაზე გაყიდვათა მოცულობასა და გაყიდვის ფასს შორის, ეს სიდიდე არაფერს გვეუბნება იმ წრფის შესახებ, რომლის მიდამოშიცაა თავმოყრილი დაკვირვებული წყვილები. ამ საკითხებს ჩვენ შევეხებით რეგრესიული ანალიზისადმი მიძღვნილ თავებში. აქ მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ ამ წრფის მოსაძებნად იყენებენ ე.წ. უმცირეს კვადრატთა მეთოდს, რომლის თანახმადაც იძებნება ისეთი წრფე $y=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$, რომლის კოეფიციენტებისთვისაც სრულდება პირობა

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2 \overset{\min}{\Rightarrow} \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1,$$

ანუ, წრფე რომლიდანაც y_i-ების ვერტიკალური გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალურია. ამ წრფის კოეფიციენტებია:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x^2}, \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{y}-\hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

მოვძებნოთ ეს წრფე 3.17 მაგალითში მოყვანილი მონაცემებისათვის და დავხაზოთ მისი გრაფიკი გაბნევის დიაგრამაზე.

$$\hat{\beta}_1 = -\frac{4.75}{1.44} \approx -3.3, \qquad \hat{\beta}_0 = 10.4-3.3\cdot 17.25 \approx 67.35.$$

ამრიგად საძებნი წრფის განტოლებაა

$$y = -3.3x+67.35.$$

ბოლოს, ამ პუნქტში მოვიყვანოთ კოვარიაციის კოეფიციენტის გამოყენების ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი. კვლავ დავუბრუნდეთ მონაცემთა ორ სიმრავლეს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ და $y_1, y_2, \ldots, y_n$, რომლებისგანაც შევქმნათ ახალი სიმრავლე $z_i = x_i \pm y_i$, $i=1,2,\ldots,n$. ადრე ნაჩვენები იყო, რომ ახალი მონაცემების საშუალო გამოითვლება ძველების მეშვეობით, სახელდობრ

$$\bar{z} = \bar{x} \pm \bar{y}$$

სადაც $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$.

ახლა დავინტერესდეთ საკითხით: შესაძლოა თუ არა $s_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$ შერჩევითი დისპერსიის გამოთვლა s_x^2-ისა და s_y^2-ის მეშვეობით? განსხვავებით არითმეტიკული საშუალოსაგან, ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ დამატებით ცნობილია შერჩევითი კოვარიაციის კოეფიციენტი $\mathrm{cov}(x, y)$, სახელდობრ,

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 \pm 2\,\mathrm{cov}(x,y) \tag{3.42}$$

($s_z^2 = s_x^2 + s_y^2$, თუ $\mathrm{cov}(x,y)=0$).

ანალოგიურად

$$s_z'^2 = s_x'^2 + s_y'^2 \pm 2\,\mathrm{cov}'(x, y), \tag{3.43}$$

სადაც $\mathrm{cov}'(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{n}{n-1}\mathrm{cov}(x, y)$.

როდესაც ჩვენ 3.12 მაგალითის მონაცემებით (იხ. ცხრილი 3.2) მოვინდომეთ სტანდარტული გადახრის გამოთვლა C პორტფელისათვის, ჩვენ შევადგინეთ $z_i = \frac{1}{2}(x_i + y_i)$, $i=1,2,\ldots,10$, მწკრივი, სადაც x_i აღნიშნავს A პორტფელის ამონაგებს, ხოლო y_i არის B პორტფელის ამონაგები და გამოვთვალეთ $s_z'^2$ უშუალოდ დისპერსიის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით.

სავარჯიშო. გამოიყენეთ შერჩევითი დისპერსიის ა) თვისება და (3.43) ფორმულა C პორტფელის ამონაგებთა დისპერსიის გამოსათვლელად A და B პორტფელების ამონაგებთა დისპერსიებისა და მათი 3.2 ცხრილით გამოთვლილი კოვარიაციის მეშვეობით.

მითითება. ჯერ გამოთვალეთ $\mathrm{cov}'(x,y)$ 3.2 ცხრილით, შემდეგ $s_z'^2$, სადაც $z_i = x_i + y_i$, $i=1,2,\ldots,10$, რისთვისაც გამოიყენეთ (3.43), ხოლო შემდეგ შერჩევითი დისპერსიის ა) თვისების ძალით გამოთვალეთ $u_i = \frac{1}{2} z_i$, $i=1,2,\ldots,10$, მწკრივის დისპერსია $s_u'^2$.

* * *

ქვემოთ მოყვანილი ლიტერატურა დაინტერესებულ მკითხველს საშუალებას მისცემს უფრო ღრმად, დეტალებში გაეცნოს ამ თავში განხილულ თემას: [24], [30], [31], [35], [54], [62], [66], [72], [73], [79], [82], [83], [84].

დასკვნები

ამ თავში განხილულია შერჩევის რიცხვითი მახასიათებლები, რომლებიც საშუალებას იძლევა შეკუმშული ფორმით დავახასიათოთ რიცხვით მონაცემებთა განლაგება და გაფანტულობა.

ეს მახასიათებლები პირობითად დაყოფილია ორ ჯგუფად. პირველ ჯგუფს მიეკუთვნება მონაცემთა განლაგების ცენტრის ანუ ცენტრალური ტენდენციის საზომები. ესენია არითმეტიკული საშუალო (ან უბრალოდ საშუალო), მედიანა და მოდა.

მახასიათებელთა მეორე ჯგუფს მიეკუთვნება მონაცემთა გაფანტულობის (ვარიაბელობის) საზომები: გაბნევის დიაპაზონი, პროცენტილები, შერჩევის დისპერსია, სტანდარტული გადახრა, ვარიაციის კოეფიციენტი.

განხილულია კიდევ ორი მახასიათებელი, ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები. პირველი მათგანი ახასიათებს მონაცემთა განაწილების (გაგლუვებული ჰისტოგრამის) სიმეტრიულობას, მეორე კი – განაწილების წვეტიანობას საშუალოს მიდამოში.

დაწყვილებული მონაცემებისათვის შემოღებულია კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტების ცნება. ეს სიდიდეები ახასიათებს წრფივი კავშირის სიძლიერეს ორ ცვლადს შორის.

სავარჯიშოები

3.1. ცენტრალური ტენდენციის მახასიათებელია:
ა) მხოლოდ არითმეტიკული საშუალო;
ბ) მხოლოდ მედიანა და მოდა;
გ) მოდა, მედიანა და არითმეტიკული საშუალო.
რომელი პასუხია სწორი?

3.2. ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი მახასიათებელია:
ა) საშუალო;
ბ) საშუალო და მედიანა;
გ) მედიანა.
რომელი პასუხია სწორი?

3.3. ვთქვათ, მონაცემთა რაიმე სიმრავლისათვის მოცემულია

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1050, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 315\,00, \qquad n=10.$$

ა) გამოთვალეთ $\bar{x}$, s^2, s;
ბ) შესაძლებელია თუ არა ამ მონაცემებით მედიანის გამოთვლა?

3.4. ა) ვთქვათ, n=9 და მონაცემთა სიმრავლის შესახებ გაგვაჩნია შემდეგი ინფორმაცია: სიდიდით მეხუთე ელემენტი ე.ი. $x_{(5)}=17$. შესაძლებელია თუ არა მედიანის გამოთვლა?
ბ) ვთქვათ, n=20 და $x_{(10)}=14$, $x_{(11)}=17$. რას უდრის მედიანა და რა პოზიცია უკავია მას?

3.5. განვიხილოთ მონაცემთა ორი A და B სიმრავლე

A	1	1	2	2	2	2	2	3	10
B	1	1	2	2	2	2	2	3	100

ა) გამოთვალეთ თითოეული მათგანისათვის საშუალო, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი, Q_1, Q_3, სტანდარტული გადახრა;
ბ) რა შეიძლება დავასკვნათ ექსტრემალური დაკვირვებების შესახებ წინა სიდიდეების მეშვეობით?

3.6. მედიანა უფრო ხშირად გამოიყენება ტიპიური შემოსავლების დასახასიათებლად, ვიდრე საშუალო. შემოსავლების მონაცემები, როგორც წესი, მარჯვენივ ასიმეტრიულ ჰისტოგრამებს იძლევა. შეგიძლიათ თუ არა ახსნათ მედიანისათვის უპირატესობის მინიჭების მიზეზები ასიმეტრიული განაწილებებისათვის?

3.7. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია აშშ-ს 13 შტატის შემოსავლები ერთ სულ მოსახლეზე 1983 წელს (მონაცემები გამოსახულია დოლარებში)

9999, 9342, 11769, 12580, 9560, 10719, 9031, 12516, 12051,10920,13239,16820, 12101.

ა) მოძებნეთ საშუალო, მედიანა, Q_1, Q_3, x_{min}, x_{max};
ბ) ფიქრობთ თუ არა, რომ ამ შემთხვევაში საშუალო უკეთ ახასიათებს ტიპობრივ შემოსავლებს, ვიდრე მედიანა?
გ) გამოთვალეთ Q_1-x_{min}, Q_2-Q_1, Q_3-Q_2, $x_{max}-Q_3$ (გავიხსენოთ, რომ Q_2 არის შერჩევითი მედიანა);
დ) როგორი იქნებოდა ეს სხვაობები, მონაცემები რომ ($\bar{x}$-ის მიმართ) ზუსტად სიმეტრიულად ყოფილიყო განაწილებული?
ე) გ) პუნქტში გამოთვლილი სიდიდეების მიხედვით შეგიძლიათ თუ არა დაასკვნათ, რომ მონაცემები სიმეტრიულადაა განაწილებული?

3.8. ვთქვათ, მონაცემთა რაიმე სიმრავლისათვის გამოთვლილია შემდეგი სიდიდეები:

$$x_{min}=20,\quad Q_1=40,\quad Q_2=45,\quad Q_3=50,\quad x_{max}=60.$$

გააკეთეთ სქემატური დასკვნა ჰისტოგრამის ფორმის შესახებ.

3.9. აშშ-ს ერთ-ერთი ბანკის პრეზიდენტს აინტერესებს კლიენტების საჩეკო ანგარიშების მახასიათებლები. ამ მიზნით შემთხვევით შეარჩიეს ბანკის 60 კლიენტი. მათი საჩეკო ანგარიშების მონაცემები შემდეგია:

1–10	1756	748	1501	1831	1622	1886	740	1593	1169	2125
	2	1	1	3	4	1	3	1	4	2
11–20	1554	1474	1913	1218	1006	2215	137	167	343	2557
	3	1	1	1	1	4	3	4	1	3
21–30	2276	1494	2144	1995	1053	1526	1120	1838	1746	1616
	3	1	3	2	3	2	3	3	2	2
31–40	1958	634	580	1320	1675	789	1735	1784	1326	2051
	2	4	1	1	2	4	3	1	3	4
41–50	1044	1885	1790	765	1645	32	1266	890	2204	2409
	1	2	3	4	4	3	4	1	2	2
51–60	1138	2076	1708	2138	2375	1455	1487	1125	1989	2156
	2	2	1	4	2	3	4	2	2	2

ბანკს გააჩნია ფილიალები 4 ქალაქში, რომლებიც პირობითად აღნიშნულია ნომრებით 1, 2, 3, 4 და ყოველი აღწერის მონაცემებს ქვემოთ მიწერილი აქვს, თუ რომელ ფილიალში აქვს მას ანგარიში.

ა) გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი, Q_1, Q_3, x_{min}, x_{max}, შერჩევითი დისპერსია, სტანდარტული გადახრა, ასიმეტრიის კოეფიციენტი;

ბ) გამოთვალეთ $[\bar{x}-ks, \bar{x}+ks]$ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა პროცენტული რაოდენობა k=1,2,3,4-თვის. რამდენად ეთანხმება ეს სიდიდეები ჩებიშევის უტოლობით განსაზღვრულ რაოდენობებს და იგივე პროცენტულ რაოდენობებს იმ დაშვებით, რომ განაწილებას აქვს ზარისებური ფორმა?

გ) გამოთვალეთ იგივე მახასიათებლები ყოველი ფილიალისათვის. მოახდინეთ მათი შედარება.

3.10. NED-ელექტრონიკსის მუშების მცირე რაოდენობა გამოკითხული იქნა იმ მიზნით, რომ დაედგინათ თუ როგორია ტიპიური საათობრივი ანაზღაურება ($-ში), შედეგად მიიღეს:

9.50, 9.00, 11.70, 14.80, 13.00.

ა) ეს შერჩევაა თუ პოპულაცია?

ბ) გაზომვის რომელი დონეა?

გ) რას უდრის არითმეტიკული საშუალო, მედიანა, დისპერსია, ასიმეტრიის კოეფიციენტი?

3.11. აშშ-ში შტატების მიხედვით წლიური შემოსავალი ერთ სულ მოსახლეზე (ათასობით $-ში) არის

11.1, 17.7, 13.2, 10.7, 16.8, 15.1, 19.2, 15.1, 18.9, 14.3, 13.2, 14.7, 11.4, 15.4, 12.9, 13.2, 14.4,
11.1, 11.2, 12.7, 16.6, 17.5, 14.1, 14.7, 9.5, 13.6, 11.9, 13.8, 15.1, 15.9, 18.3, 11.1, 17.1, 12.2,
12.3, 18.7, 12.4, 12.2, 13.9, 14.7, 11.1, 11.9, 11.8, 13.5, 10.7, 12.8, 15.4, 14.5, 10.5, 13.8, 13.2.

ა) ააგეთ სიხშირეთა განაწილება;
ბ) გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, Q_1, Q_3, x_{min}, x_{max}; 20-პროცენტილი, პირველი და ბოლო დეცილები;
გ) გამოთვალეთ გაბნევის დიაპაზონი, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა;
დ) გამოთვალეთ ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები;
ე) არის თუ არა განაწილება სიმეტრიული?
შეაჯამეთ მიღებული შედეგები.

3.12. ტურისტულმა ფირმამ გამოკითხა სამშობლოში დაბრუნებული ტურისტები, თუ რამდენი ფოტო-ფირი დახარჯეს მოგზაურობის დროს, პასუხები შემდეგია:

8 6 3 11 14 8 9 16 9 10 5 11 7 8 10 9 12 13 9

ა) გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, Q_1, Q_3;
ბ) გამოთვალეთ გაბნევის დიაპაზონი, IQR, შერჩევითი დისპერსია, სტანდარტული გადახრა;
გ) დავუშვათ, რომ განაწილება სიმეტრიულია და ზარისებური ფორმა აქვს. მაშინ ტურისტების 95%-ის მიერ დახარჯული ფოტო-ფირების რაოდენობა მოთავსებულია ინტერვალში $[\bar{x}-a, \bar{x}+a]$, რას უდრის a?

3.13. შემთხვევით შერჩეული 100 მანქანისათვის დადგენილია მანძილი (მილებში), რომელსაც მანქანა გაივლის 1 გალონი ბენზინის მოხმარებისას. მონაცემები დაჯგუფებულია შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

ბენზინის მოხმარება	[14,16)	[16,18)	[18,20)	[20,22)	[22,24)
მანქანათა რაოდენობა	9	18	24	38	16

ა) გამოთვალეთ მედიანა, პირველი და მესამე კვარტილები, პირველი და მეცხრე დეცილები;
ბ) გამოთვალეთ საშუალო, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა;
გ) ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა.

3.14. გარკვეულ რეგიონში ოჯახური შემოსავლების შესწავლის მიზნით შემთხვევით შეარჩიეს 12 ოჯახი, რომელთა წლიური შემოსავლების მონაცემები (ათასობით $-ში) შემდეგია:

19.9 23.5 33.5 17.45 19 21 37.7 41.4 17.25 18 19.24 22.21

ა) გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, 10%-იანი მოჭრილი საშუალო. რომელი მათგანი უფრო გამოდგება ტიპიური შემოსავლების დასახასიათებლად?
ბ) გამოთვალეთ Q_1, Q_3, x_{min}, x_{max}; 30 პროცენტილი, პირველი და მეცხრე დეცილები;
გ) გამოთვალეთ გაბნევის დიაპაზონი, IQR, MAD, დისპერსია, სტანდარტული გადახრა;
დ) მოძებნეთ a-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ $[\bar{x}-a, \bar{x}+a]$ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა პროცენტული რაოდენობა არანაკლები იყოს 95%-ზე.

3.15. NYSE-ს აქციების შერჩევისათვის მიღებული იქნა ფასი/ამონაგები ფარდობის შემდეგი მონაცემები:

15.3 9.7 12.4 21.0 62.3 9.5 5.3 8.6 29.7 43.4

გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი, Q_1, Q_3, $\bar{x}$, $\tilde{x}$, დისპერსია, სტანდარტული გადახრა, ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები;

3.16. ვთქვათ, მონაცემთა რაიმე სიმრავლისათვის (n=6) გამოთვლილია $\bar{x}$=8, s=2.5.
ა) იმ პირობაში, რომ სხვა არავითარი ინფორმაცია არ გაგვაჩნია, მოძებნეთ ის $[\bar{x}-a, \bar{x}+a]$ ინტერვალები (ე.ი. a რიცხვი), რომელშიც მოხვედრილია მონაცემთა არანაკლებ 75%-სა, 84%-სა, 93.7%-სა;
ბ) ანალოგიური ამოცანა ამოხსენით იმ შესთხვევაში, როცა $\bar{x}$=27.3, s=2.56, n=25;
გ) თუ მოგვცეს დამატებითი ინფორმაცია, რომ მონაცემთა განაწილებას აქვს ზარისებური ფორმა, მოძებნეთ a-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ $[\bar{x}-a, \bar{x}+a]$ ინტერვალში მოხვდეს მონაცემთა 90%.

3.17. დიდ საინვესტიციო ფირმას სურს შეისწავლოს მისი აქციების ბროკერთა ასაკების განაწილება. ფირმა ფიქრობს, რომ ეს ინფორმაცია სასარგებლო იქნება ახალი კადრებით შევსებისა და ძველი კადრების გათავისუფლების პოლიტიკის შესამუშავებლად. 25 ბროკერისაგან შედგენილ შერჩევაში ასაკების მონაცემები შემდეგია:

50 64 32 55 41 44 24 46 58 47 36 52 55 54 44 66 47 59 51 57 49 28 42 38 45

ა) გამოთვალეთ მედიანა, Q_1, Q_3, 80-პროცენტილი, მოდა, 57 წლის ასაკის მქონე ბროკერების პროცენტული რანგი, x_{min}, x_{max}, 44-ის ტოლი დაკვირვების რანგი;
ბ) გამოთვალეთ საშუალო, 20%-იანი მოჭრილი საშუალო, MAD, დისპერსია, სტანდარტული გადახრა;
გ) ააგეთ სიხშირეთა განაწილება (მონაცემები დაყავით 5 ინტერვალად a_0=20) და გამოთვალეთ საშუალოსა და დისპერსიის, Q_1-ისა და Q_3-ის მიახლოებითი მნიშვნელობანი დაჯგუფებული მონაცემების მიხედვით და შეადარეთ ა) პუნქტში გამოთვლილ მნიშვნელობებს.

3.18. შემდეგი მონაცემები წარმოადგენს შემთხვევით შერჩეული 25 მუშის კვირეულ ხელფასებს ($-ში). მონაცემები დაჯგუფებულია შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

ინტერვალი $[a_{i-1}, a_i)$	[25,30)	[30,35)	[35,40)	[40,45)	[45,50)	[50,55)	[55,60)
სიხშირე n_i	2	3	3	7	6	2	2

ა) განსაზღვრეთ მედიანა, 45-პროცენტილი, Q_1, Q_3, პირველი დეცილი;
ბ) რომელია მოდალური ინტერვალი?
გ) გამოთვალეთ საშუალოსა და დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობანი.

3.19. ფასი/ამონაგები ფარდობა (P/E) დიდ როლს თამაშობს საინვესტიციო ანალიზში, რადგან ის ერთდროულად შეიცავს ინფორმაციას აქციის რისკიანობისა და მისი გაძლიერების შესაძლებლობების შესახებ. ქვემოთ მოყვანილია ავსტრალიის 30 ინდუსტრიული აქციის P/E ფარდობა (1992წ., 31 მაისი):

15.1	15.3	20.4	14.1	11.7	17.2	30.3	17.2	11.2	8.6
25.1	17.8	10.6	22.1	18.1	18.7	21.2	18.8	17.6	19.2
14.4	11.3	21.1	20.4	20.5	19.4	17.2	9.7	15.7	21.9

ა) გამოთვალეთ საშუალო და სტანდარტული გადახრა;
ბ) ააგეთ ჰისტოგრამა;
გ) აღნიშნეთ საშუალო და მედიანა თქვენს ჰისტოგრამაზე;
დ) გამოთვალეთ Q_1, Q_3, x_{min}, x_{max} და ააგეთ ბოქსპლოტი.
ე) რა შეგიძლიათ თქვათ განაწილების სიმეტრიულობაზე? არის თუ არა ამოვარდნილი დაკვირვებები?

3.20. ოჯახის შემოსავლების განაწილება აშშ-ში 1983 წელს მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

შემოსავლების ინტერვალი	ოჯახების პროც. რაოდ.
5000-მდე	5.7
[5 000, 10 000)	10.2
[10 000, 15 000)	11.6
[15 000, 20 000)	11.8
[20 000, 25 000)	11.5
[25 000, 35 000)	19.5
[35 000, 50 000)	17.1
50 000-ის ზევით	12.6

გამოთვალეთ მედიანის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

3.21. შემდეგ ცხრილში მოყვანილია აშშ-ს ერთობლივი ნაციონალური პროდუქტის მონაცემები 1970–1984 წლებში (მილიარდ $-ში). საბაზისო წელია 1972.

1970	1085.6	1975	1231.6	1980	1475.0
1971	1122.4	1976	1298.2	1981	1512.8
1972	11.85.9	1977	1369.7	1982	1480.0
1973	1254.3	1978	1438.6	1983	1534.7
1974	12.46.3	1979	1479.4	1984	1639.0

ა) გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა;
ბ) გამოთვალეთ ასიმეტრიის კოეფიციენტი, არის თუ არა მონაცემები მარცხნივ ასიმეტრიული?

3.22. ავიაკომპანია ბოლო რამოდენიმე წლის განმავლობაში პერიოდულად ცვლიდა ბილეთების ფასს. ქვემოთ მოყვანილია გარკვეულ ავიარეისზე ბილეთების ფასები $-ში ($X$) და შესაბამისად მგზავრთა რაოდენობა (Y).

X	Y
99	1200
150	1000
130	1050
105	1150
219	700
167	850
180	900

ა) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა;
ბ) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და გააკეთეთ შესაბამისი დასკვნები X და Y ცვლადებს შორის კავშირის შესახებ.

3.23. გარკვეულ რეგიონში ოჯახური შემოსავლების მონაცემები (ათასობით $-ში) დაჯგუფებული სახით თავმოყრილია ცხრილში:

შემოსავლების ინტერვალი	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)
ოჯახების პროც. რაოდ.	11	19	30	15	10	15

გამოთვალეთ საშუალო და მედიანა.

3.24. ქვემოთ მოყვანილია მსოფლიოს რამდენიმე რეგიონისათვის ქალაქში მცხოვრებთა პროცენტული რაოდენობის მონაცემები 1975 წლისათვის:

აფრიკა	25.67	სამხრეთ აზია	22.02
ლათინური ამერიკა	61.21	ევროპა	66.45
ჩრდილო ამერიკა	71.99	ოკეანია	73.35
აღმოსავლეთ აზია	30.70	სსრკ	60.90

გამოთვალეთ საშუალო და მედიანა.

3.25. მოცემულია აშშ-ს ერთ-ერთი უნივერსიტეტის 8 თანამშრომლის ასაკები (X) და შესაბამისი წლიური შემოსავლები (Y).

X	40	31	50	53	36	55	37	45
Y	32	24	47	50	30	55	33	41

ა) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა და გააკეთეთ დასკვნა X და Y ცვლადებს შორის კავშირის შესახებ;
ბ) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და გაარკვიეთ თანხმობაშია თუ არა მისი მეშვეობით გაკეთებული დასკვნა ა) პუნქტის დასკვნებთან;
გ) დადებითია თუ უარყოფითი კავშირი X და Y ცვლადებს შორის?

3.26. სადაზღვევო კომპანია სწავლობს კავშირს პოლისის ტიპსა და პოლისის მფლობელის მახასიათებლებს შორის. კერძოდ, ერთ-ერთი კვლევის საგანი იყო კავშირი სიცოცხლის დაზღვევაზე გამოყოფილ სახსრებსა (Y) და ოჯახის შემოსავლებს (X) შორის. ამ მოზნით შესწავლილი იყო 6 კლიენტის შესაბამისი მაჩვენებლები. შედეგები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში (ათასობით $-ში):

X	Y
45	70
20	50
40	60
40	50
30	55
55	105

ააგეთ გაბნევის დიაგრამა და გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი. რა ზედაპირულ დასკვნებს გააკეთებდით ამ მონაცემებისათვის?

3.27. რეკლამა წარმოადგენს წარმატების უმნიშვნელოვანეს ფაქტორს. იმის განსაზღვრისათვის, თუ რა გავლენას ახდენს რეკლამაზე გაწეული ხარჯები (X, $1000-ში) გაყიდვათა მოცულობაზე (Y, $1000-ში) შეგროვდა შემდეგი მონაცემები:

X	Y	X	Y
3.0	50	4.5	200
5.0	250	6.5	550
7.0	700	7.0	750
6.0	450	7.5	800
6.5	600	7.5	900
8.0	1000	8.5	1100
3,5	75	7.0	600
4.0	150		

მოცემულია $\Sigma x=91.5$, $\Sigma y=8175$, $\Sigma xy=57787.5$, $\Sigma x^2=598.75$, $\Sigma y^2=6070625$.
ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი;
ბ) ააგეთ საუკეთესო წრფე (მოძებნეთ მისი განტოლება);
გ) ახსენით რა კავშირია სარეკლამო ხარჯებსა და გაყიდვათა მოცულობებს შორის.

3.28. რას მიუთითებს კორელაციის კოეფიციენტის დადებითობა? უარყოფითობა? როდის უდრის კორელაციის კოეფიციენტი 1-ს? –1-ს?

3.29. უძრავი ქონების აგენტს სურს განჭვრიტოს ერთი ოჯახისათვის განკუთვნილი სახლის ღირებულება. საკითხის ყურადღებით განხილვის შემდეგ მან დაასკვნა, რომ ცვლადი რომელი ყველაზე ძლიერ კავშირშია გაყიდვის ფასთან (Y, \$1000-ში), არის სახლის ზომა (X, 10მ^2). ამ დასკვნის სისწორეში დარწმუნების მიზნით მან შეარჩია უახლოეს პერიოდში გაყიდული 15 სახლი და მიიღო შემდეგი მონაცემები

X	Y	X	Y
20.0	89.5	24.3	119.9
14.8	79.9	20.2	87.6
20.5	83.1	22.0	112.6
12.5	56.9	19.0	120.5
18.0	66.6	12.3	78.5
14.3	82.5	14.0	74.3
27.5	126.3	16.7	74.8
16.5	79.3		

ა) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა;
ბ) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი;
გ) უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მოძებნეთ საუკეთესო წრფე.

3.30. მოცემულია 13 ოჯახის შემდეგი მაჩვენებლები: ოჯახის წევრთა რაოდენობა (X) და თვიური სამედიცინო ხარჯები (Y, \$-ში)

X	Y	X	Y
2	20	10	88
2	28	5	51
4	52	2	22
5	50	3	29
7	78	5	49
3	35	2	25
8	102		

შეისწავლეთ კავშირი ამ ორ სიდიდეს შორის.

3.31. ახალი პროდუქციის რეალური ფასის განსაზღვრის მიზნით, რომლის გატანაც სურს კომპანიას ბაზარზე, მისმა კვლევის დეპარტამენტმა აარჩია 10 ქალაქი, რომლებსაც არსებითად ერთნაირი გაყიდვათა პროცენტი აქვს და ამ ქალაქების ბაზარზე

გაიტანა პროდუქცია სხვადასხვა ფასად (X, \$-ში). შედეგები თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში (გაყიდვებია (Y, \$1000-ში)):

X	Y	X	Y
15.0	15	17.5	10
15.5	14	18.0	8
16.0	16	18.5	9
16.5	9	19.0	6
17.0	12	19.5	5

რა დასკვნას გააკეთებდით?

4

ალბათობა

როგორც აღვნიშნეთ, დასკვნითი სტატისტიკა შერჩევის მიხედვით პოპულაციაზე დასკვნების გამოტანის მეთოდებს შეისწავლის. მისი საფუძველია ალბათობის თეორია, ვინაიდან ალბათობა განუზღვრელობისა და მასთან დაკავშირებული რისკის საზომია. წინამდებარე თავში ჩვენ გავეცნობით ალბათობის ცნების ინტუიციურ საფუძვლებს, ალბათობის აქსიომებსა და ალბათობათა აღრიცხვის ძირითად წესებს.

§ 1. ექსპერიმენტი, ხდომილობა და მისი ალბათობა

ᲨᲔᲛᲗᲮᲕᲔᲕᲘᲗᲘ ᲔᲥᲡᲞᲔᲠᲘᲛᲔᲜᲢᲘ ᲓᲐ ᲔᲚᲔᲛᲔᲜᲢᲐᲠᲣᲚ ᲮᲓᲝᲛᲘᲚᲝᲑᲐᲗᲐ ᲡᲘᲕᲠᲪᲔ. შემთხვევითი ექსპერიმენტი[1] (ცდა) ეწოდება პირობათა რაიმე გარკვეული S კომპლექსის განხორციელებას. იგულისხმება, რომ:

1. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე შესაძლებელია ყველა შესაძლო ურთიერთგამომრიცხავი შედეგის მითითება;
2. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე შეუძლებელია მისი შედეგის ცალსახად განსაზღვრა;
3. შესაძლებელია ექსპერიმენტის მრავალჯერადი განმეორება.

მაგალითი **4.1.** ვთქვათ, ექსპერიმენტი ნიშნავს სიმეტრიული მონეტის აგდებას. ვაკვირდებით, რა „მოდის" დავარდნილ მონეტაზე. ამ ექსპერიმენტის შედეგებია; „გერბის მოსვლა" (გ) და „საფასურის მოსვლა" (ს). ცხადია, სახეზეა ზემოთ ჩამოთვლილი სამივე პირობა.

ექსპერიმენტი აღიწერება[2] მისი ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების სრული ჩამონათვალით. ამ შედეგებს ელემენტარული ხდომილობები ეწოდება, ხოლო მათ სრულ ერთობლიობას – ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე.[3] უკანასკნელი Ω ასოთი აღინიშნება, თვით ელემენტარული ხდომილობა კი – ω ასოთი უინდექსოდ ან ინდექსით.

4.1 მაგალითისათვის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება

$$\Omega = \{\text{გ},\text{ს}\}.$$

მაგალითი **4.2.** აგორებენ ერთ კამათელს. ცდას ექვსი შედეგი შეიძლება ჰქონდეს (ზედა წახნაგზე წერტილების რაოდენობის მიხედვით)

$$\Omega =\{1,2,3,4,5,6\}.$$

მაგალითი **4.3.** აგდებენ ორ სხვადასხვა მონეტას. აქ ოთხი შესაძლო შედეგია და

---

[1] ზედსართავი „შემთხვევითი" ქვემოთ ხშირად გამოტოვებული იქნება.

[2] აღწერის დეტალიზაციის დონეს ექსპერიმენტის მიზანი განაპირობებს.

[3] სიტყვა „სივრცე" ამ კონტექსტში ტრადიციული და სავსებით ბუნებრივია, ვინაიდან ექსპერიმენტის ყოველ შედეგს შეესაბამება სივრცის გარკვეული ელემენტი და პირიქით. სივრცის ელემენტს წერტილს უწოდებენ.

$$\Omega = \{\text{გგ}, \text{გს}, \text{სგ}, \text{სს}\}.$$

მაგალითი **4.4.** აგორებენ ორ გარჩევად კამათელს, ან ორჯერ აგორებენ ერთ კამათელს. ყოველ მოსალოდნელ შედეგს შევუსაბამოთ რიცხვთა წყვილი (i, j), სადაც i პირველ კამათელზე მოსასვლელი რიცხვია, ხოლო j – მეორეზე. ამ ცდისათვის

$$\Omega = \{(i,j) \mid i=1, \ldots, 6;\ j=1,\ldots,6\} =$$

$$\begin{aligned}\{ &(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}.\end{aligned}$$

მაგალითი **4.5.** მონეტას აგდებენ გერბის პირველ გამოჩენამდე. აქ

$$\Omega = \{\text{გ}, \text{სგ}, \text{ssგ}, \ldots\}.$$

განსხვავებით პირველი 4 მაგალითისაგან, რომლებშიც Ω შეიცავდა ელემენტების სასრულ რაოდენობას (შესაბამისად 2, 6, 4 და 36 ელემენტარულ ხდომილობას), ამ მაგალითში Ω უსასრულოა, მაგრამ თვლადი, ანუ ისეთი, რომ შესაძლებელია ელემენტების გადანომრვა.

მაგალითი **4.6.** მსროლელი ესვრის წრიული ფორმის სამიზნეს, რომელსაც ყოველი გასროლისას ახვედრებს. თუ წრის რადიუსია R და სამიზნის სიბრტყეში შემოღებულია კოორდინატთა xOy სისტემა, რომლის სათავე წრის ცენტრშია და ცდის თითოეულ შედეგს (სამიზნის განსაზღვრულ წერტილში მოხვედრას) შევუსაბამებთ ამ წერტილის კოორდინატებს, მაშინ Ω წარმოადგენს ყველა ისეთი რიცხვითი წყვილის ერთობლიობას, რომლებიც შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე არაა თვლადი.

ხდომილობა. ოპერაციები ხდომილობებზე. ელემენტარული ხდომილობების რაიმე ერთობლიობას შედგენილ ხდომილობას, ან უბრალოდ ხდომილობას უწოდებენ. ამრიგად, ხდომილობა ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეა.[1]

ვიტყვით, რომ ცდის შედეგად ხდება A ხდომილობა, თუ ცდას მოჰყვა ისეთი ω ელემენტარული ხდომილობა, რომელიც A-ს ეკუთვნის. შემთხვევითი ექსპერიმენტის განსაზღვრიდან და ჩვენი ბოლო შეთანხმებიდან ცხადია, რომ Ω-ს ყოველი ქვესიმრავლე A, გარდა თვით Ω-სი და $\varnothing$ ცარიელი სიმრავლისა (რომელიც არცერთ ელემენტარულ ხდომილობას არ შეიცავს), შემთხვევითი ხასიათისაა ანუ შემთხვევითი ხდომილობაა: ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ვერ ვიტყვით, მოხდება თუ არა A. რაც შეეხება Ω-ს, იგი

---

[1] სიზუსტისათვის შევნიშნოთ, რომ, საზოგადოდ, Ω სივრცის ყოველი ქვესიმრავლე არაა ხდომილობა (იხ. ქვემოთ პუნქტი „ალბათობა ელემენტარულ ხდომილობათა ზოგად სივრცეზე").

ცდის ყოველი ჩატარებისას ხდება, ანუ აუცილებელი ხდომილობაა, ხოლო $\varnothing$ წარმოადგენს შეუძლებელ ხდომილობას, რომელიც ცდის არცერთი ჩატარებისას არ მოხდება.

როგორც ვხედავთ, ხდომილობა სხვა არაფერია, თუ არა სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ობიექტი – სიმრავლე; ამიტომ ოპერაციები შემთხვევით ხდომილობებზე ზუსტად იმდაგვარად განიმარტება, როგორც ჩვეულებრივ სიმრავლეებზე. უბრალოდ ამ ოპერაციებს სიმრავლეთა თეორიისაგან განსხვავებული სახელები ჰქვია (თუმცა, ჩვენ ხშირად მივმართავთ სიმრავლეთა თეორიის ენასაც). ქვემოთ მოყვანილია ცხრილი, საიდანაც ზემოთქმული ნათელი გახდება.

A და B ხდომილობათა $A \cup B$ ჯამი (ანუ გაერთიანება) ეწოდება ისეთი ω ელემენტარული ხდომილობების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნის ერთს მაინც A და B ხდომილობათაგან (ან მხოლოდ A-ს ან მხოლოდ B-ს, ან A-სა და B-ს ერთად).

A და B ხდომილობათა $A \cap B$ ნამრავლი (ანუ თანაკვეთა) ეწოდება ისეთი ω-ების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნიან A-ს და B-ს ერთად. თუ $A \cap B = \varnothing$, მაშინ ვიტყვით, რომ A და B ხდომილობები უთავსებადია (ისინი ვერ თავსდება ერთად, არ ხდება ერთად).

სიმოკლისათვის A და B ხდომილობათა ნამრავლს (თანაკვეთას) ჩვენ აღვნიშნავთ AB-თი. ხოლო უთავსებად A და B ხდომილობათა ჯამისათვის ვამჯობინებთ $A+B$ აღნიშვნას.

A და B ხდომილობათა $A \setminus B$ სხვაობა ეწოდება ისეთი ω-ების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნის A-ს და არ ეკუთვნის B-ს.

A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობაა $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

ცხადია, რომ $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A\overline{B}$, ხოლო $\overline{(\overline{A})} = A$.

ამბობენ, რომ A ხდომილობა იწვევს B-ს (თუ მოხდა A, მომხდარა B ხდომილობაც) და წერენ $A \subset B$, თუ A-ში შემავალი ყოველი ელემენტარული ხდომილობა შედის B-შიც.

ორ ხდომილობას ეწოდება ტოლი, თუ $A \subset B$ და $A \supset B$ ჩართვები ერთდროულად სრულდება.

ცხრილი 4.1

	სიმრავლეთა თეორიის ენა	ალბათობის თეორიის ენა
Ω	სივრცე	აუცილებელი ხდომილობა
$\varnothing$	ცარიელი სიმრავლე	შეუძლებელი ხდომილობა
$\omega \in A$	ω ეკუთვნის A სიმრავლეს	ხდება A ხდომილობა
$\overline{A}$	A სიმრავლის დამატება	A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობა (A ხდომილობა არ ხდება)
$A \cap B$	A და B სიმრავლეების თანაკვეთა	A და B ხდომ. ნამრავლი (თანაკვეთა) (A და B ხდომილობები ერთად ხდება)
$A \cup B$	A და B სიმრავლეების გაერთიანება	A და B ხდომ. ჯამი (გაერთიანება) (ხდება ერთი მაინც A და B ხდომ.)
$A \setminus B$	A და B სიმრავლეების სხვაობა	A და B ხდომილობათა სხვაობა (ხდება A და არ ხდება B ხდომ.)
$A \subset B$	A სიმრავლე შედის B-ში	A ხდომილობა იწვევს B-ს

მაგალითი 4.7. (4.2. მაგალითის გაგრძელება) ამ შემთხვევაში ელემენტარული ხდომილობებია $\omega_1=\{1\}$, $\omega_2=\{2\}$, $\omega_3=\{3\}$, $\omega_4=\{4\}$, $\omega_5=\{5\}$, $\omega_6=\{6\}$. განვსაზღვროთ ხდომილობები: A – „კამათელზე ლუწი რიცხვის მოსვლა“, B – „კამათელზე სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლა“. ზემოთ თქმულის თანახმად, აღნიშნული ხდომილობები ასე ჩაიწერება $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$.

ჩამოთვლილი ოპერაციებისათვის მივიღებთ:

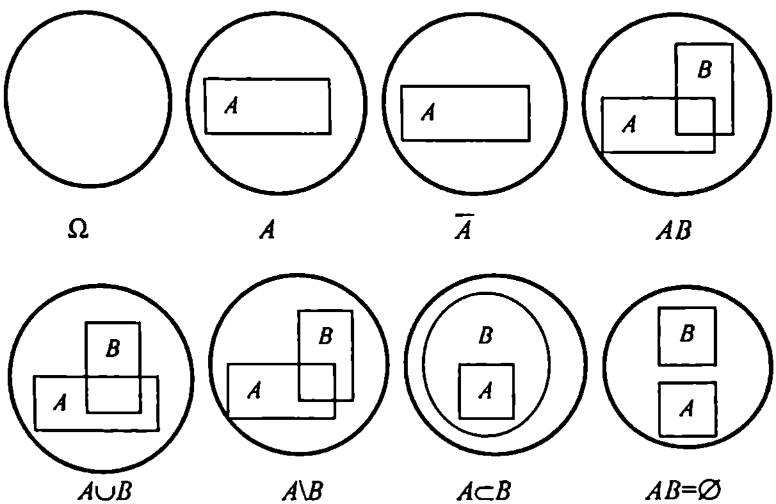
$A\cup B$ ნიშნავს კამათელზე ლუწი ან სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლას, $A\cup B=\{2,3,4,6\}$.

$A\cap B$ კამათელზე ერთდროულად ლუწი და სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლაა, ე.ი. $A\cap B=\{6\}$.

ლუწის საწინააღმდეგო კენტია და ამიტომ $\overline{A}=\{1,3,5\}$.

$A\backslash B$ ნიშნავს ლუწი, მაგრამ არა სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლას, ე.ი. A-დან უნდა ამოვაგდოთ 6 და მაშასადამე, $A\backslash B=\{2,4\}$.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ წრიდან (შეადარეთ 4.6 მაგალითს) შემთხვევით ვირჩევთ წერტილს. მაშინ ელემენტარული ხდომილობები ამ წრის წერტილებია, აუცილებელი ხდომილობაა მთელი წრე, ხოლო სხვა ხდომილობები ამ წრის ქვესიმრავლეებია. ზემოთ ჩამოთვლილი ოპერაციები შეიძლება თვალსაჩინოდ გამოვსახოთ ე.წ. ვენის (Venn) დიაგრამების საშუალებით:



ნახ. 4.1. ვენის დიაგრამები

ფარდობითი სიხშირე: უმარტივესი თვისებები, მდგრადობა. ვთქვათ, შემთხვევით ექსპერიმენტს ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შეესაბამება და $A\subset\Omega$. ამ ექსპერიმენტის n-ჯერ ჩატარებისას A ხდომილობის სიხშირე $\nu_n(A)$ იმ ცდათა რაოდენობაა, რომელთაც მოჰყვა A ხდომილობა. ცხადია, რომ ყოველი n-ისათვის

$$0\le\nu_n(A)\le n,\quad \nu_n(\Omega)=n,\quad \nu_n(\varnothing)=0$$

და თუ A და B ხდომილობები უთავსებადია (ანუ $AB=\varnothing$, ე.ი., არ არსებობს ცდის ისეთი გამეორება, რომლის შედეგად დამდგარი ელემენტარული ხდომილობა A-საც ეკუთვნის და B-საც), მაშინ

$$\nu_n(A+B) = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

თუ ახლა შემოვიღებთ

$$f_n(A) = \frac{\nu_n(A)}{n}$$

ფარდობით სიხშირეს, მაშინ სიხშირეთა ჩამოთვლილი თვისებები მოგვცემს შემდეგ თვისებებს, რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი n-ისათვის:

f1. ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $0 \le f_n(A) \le 1$;

f2. $f_n(\Omega) \equiv 1$, $f_n(\varnothing) \equiv 0$;

f3. თუ $AB=\varnothing$, მაშინ $f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B)$.

ფარდობით სიხშირეთა შესანიშნავი და უმთავრესი თვისებაა მათი მდგრადობა, რაც შემდეგში მდგომარეობს. თუ დავაკვირდებით ფარდობითი სიხშირის ყოფაქცევას ექსპერიმენტის განმეორებათა ზრდის კვალობაზე, უამრავი მაგალითია იმისა, რომ $f_n(A)$ მცირედ იცვლება ცდათა საკმაოდ დიდი რაოდენობის მიღწევის შემდეგ და მრავალი ცდისაგან შემდგარი ერთი სერიიდან სხვა ასეთივე სერიაზე გადასვლისას.

ფარდობითი სიხშირის მდგრადობა გვაფიქრებინებს დავუშვათ, რომ $f_n(A)$ ზომავს ობიექტურად არსებულ $P(A)$ რიცხვს – A ხდომილობის ალბათობას, რომელიც მოცემულ ცდაში ხდომილობის შესაძლებლობის ხარისხის მახასიათებელია:

$$f_n(A) \approx P(A). \tag{4.1}$$

ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ გაზომვის სიზუსტე და საიმედოობა იზრდება ცდათა რაოდენობის ზრდისას, რაზეც მეტყველებს შემდეგი მაგალითები:

მაგალითი 4.8. (4.1. მაგალითის გაგრძელება). ვთქვათ A ხდომილობა ნიშნავს, რომ დავარდნილ მონეტაზე „მოვიდა" გერბი $A=\{გ\}$. ჩამოვთვალოთ $f_n(A)$-ს გაზომვის ზოგიერთი შედეგი:

ა) $n=4040$, $\nu_n(A)=2048$, $f_n(A)=0.507$ (ჟ. ბიუფონი);

ბ) $n=24000$, $\nu_n(A)=12012$, $f_n(A)=0.505$ (კ. პირსონი);

გ) $n=1000$ ცდიან 10 სერიაში, $f_n(A)$ აღმოჩნდა შესაბამისად 0.502, 0.497, 0.529, 0.504, 0.476, 0.507, 0.527, 0.528, 0.504, 0.529 (ჯ. კერიხი).

მაგალითი 4.9. თუ A ნიშნავს ხდომილობას „ახალშობილი ვაჟია", მაშინ ვაჟის დაბადების ფარდობითი სიხშირის მდგრადობაზე მეტყველებს ის გარემოება, რომ ავსტრიაში 1866–1905 წლის მონაცემებით $f_n(A)$ აღმოჩნდა 0.515, ამასთან, ცალკეულ წლებში მნიშვნელობა 0.515 განმეორდა 11-ჯერ, 0.514 – 17-ჯერ, 0.516 – 9-ჯერ, 0.513 – 2-ჯერ, 0.517 – მხოლოდ ერთხელ (ე. ჩუბერი). საინტერესოა, რომ სხვადასხვა ქვეყნისა და დროის სტატისტიკური მონაცემები აღნიშნულისაგან მკვეთრად განსხვავებულ შედეგებს არ იძლევა, მოკლე პერიოდისათვის კი ასეთი მდგრადობა არ აღინიშნება.

4.8 მაგალითის მონაცემები ახლოსაა მონეტის სიმეტრიულობის გამო ბუნებრივად წარმოქმნილ ჰიპოთეზასთან იმის თაობაზე, რომ $P(A)=0.5$, მაშინ როცა 4.9 მაგალითი ასიმეტრიულობაზე მიუთითებს იმ აზრით, რომ აშკარად ჩნდება ჰიპოთეზა $P(A)>0.5$.

ახლა შევუდგეთ ალბათობის ცნების ფორმალიზაციას. ბუნებრივია ვეცადოთ, რომ ხდომილობის ფორმალურად შემოღებულ ალბათობას აღმოაჩნდეს ფარდობითი სიხშირის **f1–f3** თვისებათა ანალოგიური თვისებები.

ალბათობა ელემენტარულ ხდომილობათა სასრულ სივრცეზე. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა. თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე სასრულია და, ვთქვათ, N წერტილისაგან შედგება,

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\},$$

მაშინ Ω-ს ყოველ ქვესიმრავლეს ხდომილობად მივიჩნევთ და მისი ალბათობა შემდეგნაირად განისაზღვრება.

ელემენტარულ ხდომილობებს შევუსაბამოთ $p_1, \dots, p_N$ რიცხვები, რომლებიც ისეთია, რომ

(a) $\quad 0 \le p_i \le 1, \quad i = 1, \dots, N;$

(b) $\quad p_1 + \dots + p_N = 1.$

თუ A ხდომილობა შეიცავს M წერტილს

$$A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\},$$

მაშინ

$$P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_M}. \tag{4.2}$$

ეს ნიშნავს, რომ p_i არის ω_i ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა $P(\{\omega_i\})=p_i$.

ცხადია, რომ

$$P(\Omega) = p_1 + \dots + p_N = 1. \tag{4.3}$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ $B=\{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_K}\}$ და $AB=\varnothing$, ანუ A-სა და B-ს საერთო ელემენტი არ გააჩნიათ, მაშინ

$$A+B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_K}\}$$

და (4.2)-ის ძალით

$$P(A+B) = p_{i_1} + \dots + p_{i_M} + p_{j_1} + \dots + p_{j_K} = P(A)+P(B),$$

რაც (4.3)-ის გათვალისწინებით გვაძლევს, რომ

$$P(A)+P(\overline{A}) = 1 \tag{4.4}$$

ანუ

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

აქედან $P(\varnothing)=0$ ტოლობა იქნებოდა $P(\Omega)=1$ და $\overline{\Omega}=\varnothing$ თანაფარდობათა ავტომატური შედეგი, იგივე ტოლობას რომ არ ვღებულობდეთ ალბათობის (4.2) განსაზღვრიდან, რამეთუ ცარიელი ჯამი ნულის ტოლია.

ამრიგად, ელემენტარულ ხდომილობათა სასრული Ω სივრცის ყოველ A ქვესიმრავლეს ჩვენ ხდომილობა ვუწოდეთ. ხდომილობის (4.2) თანაფარდობით შემოღებულ ალბათობას ფარდობით სიხშირეთა f1–f3 თვისებების ანალოგიური თვისებები გააჩნია.

P1. ყოველი A ხდომილობისათვის $0 \le P(A) \le 1$;

P2. $P(\Omega)=1$;

P3. თუ A და B ხდომილობები უთავსებადია, მაშინ $P(A+B) = P(A)+ P(B)$.

უკანასკნელ თვისებას ალბათობათა შეკრების თვისება ანუ ალბათობის ადიციურობა ეწოდება.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ელემენტარულ ხდომილობათა ალბათობები ტოლია, ანუ შემთხვევითი ექსპერიმენტის ყველა შედეგი ერთნაირადაა მოსალოდნელი, ე.ი., $p_1=\dots=p_N$ (ამ შემთხვევას კლასიკურ სქემას უწოდებენ), (b) თვისების ძალით გვექნება ტოლობა

$$p_1 = \dots = p_N = \frac{1}{N}. \tag{4.5}$$

თუ A ისევ M ელემენტარულ ხდომილობას შეიცავს, (4.4) განსაზღვრა მოგვცემს, რომ

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

თუ ახლა $|A|$ ნიშნავს A ხდომილობის დამთვლელ ზომას, ე.ი. მასში შემავალი (ანუ, როგორც ამბობენ ხოლმე, მისი ხელშემწყობი) ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობას, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა – ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

თუ შემთხვევით ექსპერიმენტს აქვს ერთნაირად მოსალოდნელ (ტოლშესაძლო) შედეგთა სასრული რაოდენობა, მაშინ ხდომილობის ალბათობა ტოლია მისი ხელშემწყობი შედეგების რაოდენობის შეფარდებისა ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობასთან:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{4.6}$$

(4.5) იმ დაშვების ეკვივალენტურია, რომ $P(\Omega)=1$ და ნებისმიერი $A\subset\Omega$ ხდომილობის ალბათობა მასში შემავალი ელემენტარული ხდომილობების $|A|$ რაოდენობის პროპორციულია. (4.5) კონკრეტული მოდელის არჩევას ნიშნავს შემთხვევითი ექსპერიმენტისათვის. არსებობს ბევრი ამოცანა, რომლისათვისაც (4.6) განსაზღვრა სავსებით საკმარისია. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა ისტორიულად პირველია. იგი ცხადი სახით იაკობ ბერნულის (J.Bernoulli) მიერ იქნა შემოღებული და მან დიდი როლი ითამაშა ალბათობის თეორიის განვითარებაში.

მაგალითი **4.10.** (4.2. მაგალითის გაგრძელება) სიმეტრიის მოსაზრებიდან გამომდინარე კამათლის ყოველ წახნაგს ერთი და იგივე ალბათობა შეგვიძლია მივანიჭოთ. აქედან, თუ A ლუწი რიცხვის მოსვლას ნიშნავს, გამოვა, რომ $P(A)=3/6=1/2$.

მაგალითი **4.11.** (4.3. მაგალითის გაგრძელება) სიმეტრიული მონეტისათვის გერბის და საფასურის ალბათობები ტოლი გამოვა. რაც შეეხება ორი სხვადასხვა სიმეტრიული მონეტის აგდებას, ბუნებრივია, რომ გგ, გს, სგ, სს ელემენტარულ ხდომილობათაგან ყოველს 1/4 ალბათობა მიენიჭოს. თუ A ნიშნავს, რომ მონეტებზე

სხვადასხვა გვერდები მოვიდა, გვექნება $P(A)=1/2$. თუ ახლა მონეტები განურჩეველია, ერთი შეხედვით გვაქვს სამი ელემენტარული ხდომილობა გგ, სს და [გს], სადაც [გს] ნიშნავს, რომ ერთ-ერთ მონეტაზე გერბი მოვიდა, მეორეზე კი საფასური, მაგრამ ამ სამ ელემენტარულ ხდომილობას ერთსა და იმავე ალბათობებს ვერ მივანიჭებთ. განურჩეველი მონეტებისათვის უშუალოდ (4.4) განსაზღვრა უნდა ვიხმაროთ $p_1=p_2=1/4$ და $p_3=P([გს])=1/2$ წონებით. მართლაც, თუ წარმოვიდგენთ, რომ განურჩეველი მონეტები დანომრილია და ამგვარად Ω უკვე არა 3, არამედ 4 ელემენტარულ ხდომილობას შეიცავს, გამოვა, რომ გერბის ერთხელ მოსვლა არის შედგენილი ხდომილობა {გს, სგ}, რომლის ალბათობაა 1/2.

მაგალითი **4.12.** (4.4. მაგალითის გაგრძელება) სავსებით ანალოგიურად, ორი გარჩევადი კამათლის გაგორებისას თითოეულ (i, j) ელემენტარულ ხდომილობას 1/36 ალბათობა მიენიჭება ისევ სიმეტრიის მოსაზრებით. მაგრამ თუ კი კამათლები განურჩეველია, გვექნება ექვსი ე.წ. „წყვილი" (1,1), ... , (6,6) და 15 განურჩეველი კომბინაცია $[i, j]$, $1 \le i < j \le 6$, რომელთაგან „წყვილებს" თითოეულს 1/36 ალბათობა გამოუვა, ხოლო დანარჩენი 15 კომბინაციიდან თითოეულს 1/18, ვინაიდან $[i, j]=(i, j) + (j, i)$.

კლასიკური განსაზღვრის მეშვეობით ალბათობის გამოთვლის სხვა მაგალითები განიხილება 4.3 პარაგრაფში.

ᲐᲚᲑᲐᲗᲝᲑᲐ ᲔᲚᲔᲛᲔᲜᲢᲐᲠᲣᲚ ᲮᲓᲝᲛᲘᲚᲝᲑᲐᲗᲐ ᲗᲕᲚᲐᲓ ᲡᲘᲕᲠᲪᲔᲖᲔ. თუ Ω თვლადია ანუ

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\},$$

მაშინ ხდომილობად მის ყოველ A ქვესიმრავლეს მივიჩნევთ და მას ალბათობა (4.4)-ის ანალოგიურად მიეწერება:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i\,, \tag{4.7}$$

სადაც ჯამი ვრცელდება A ხდომილობაში შემავალ ყველა ელემენტარულ ხდომილობაზე. (4.7) ან სასრული ჯამია, ან მწკრივის ჯამი იმის მიხედვით, სასრულია თუ თვლადი A, ხოლო $p_1, p_2, \ldots$ რიცხვები ეთანადებიან $\omega_1, \omega_2, \ldots$ ელემენტარულ ხდომილობებს და მათთვის სრულდება

(a') $\quad 0 \le p_i \le 1, \ i = 1, 2, \ldots;$

(b') $\quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

პირობები.

(4.7)-ით განსაზღვრულ ალბათობას გააჩნია **P1–P3** თვისებები, რომელთაც ემატება შემდეგი თვისება (რომელიც **P3**-ზე ზოგადია)

P3'. თუ A_1, A_2, ... წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობების მიმდევრობაა, მაშინ:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,.$$

ამ თვისებას ალბათობათა შეკრების გაფართოებული თვისება ანუ თვლადი ადიციურობა ეწოდება.

მაგალითი **4.13** (4.5 მაგალითის გაგრძელება). გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი პირველად მოვა ლუწნომრიან ცდაში.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_k = \underbrace{ს \cdots ს}_{k-1} გ,$$

მაშინ

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

და ჩვენი ხდომილობაა

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \ldots\}.$$

მონეტის ერთხელ აგდებას ელემენტარულ ხდომილობათა ორელემენტიანი სივრცე შევუსაბამეთ, ორჯერ აგდებას – ოთხელემენტიანი (იხ. მაგ. 4.4); თუ ასე გავაგრძელებთ, გამოვა, რომ თითო აგდების დამატება ორჯერ ზრდის სივრცეში ელემენტთა რაოდენობას, ე.ი. მონეტის k-ჯერ აგდებას „გ" და „ს" სიმბოლოების k სიგრძის 2^k მიმდევრობა შეესაბამება. სიმეტრიიდან გამომდინარე, თითოეული მიმდევრობისათვის მოგვიწევდა $\dfrac{1}{2^k}$ ალბათობის მიწერა (იხ. (4.5) დაშვება). ამდენად ω_k ელემენტარულ ხდომილობას შეგვიძლია $p_k = P(\{\omega_k\}) = 1/2^k$ ალბათობა მივანიჭოთ. (**b'**) პირობა ადვილად მოწმდება. მართლაც,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის შეკრების შემდეგი წესი: თუ $|q|<1$, a_0 კი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}.$$

იგივე წესი მოგვცემს, რომ

$$P(A) = \sum_{k:\ \omega_k \in A} p_k = p_2 + p_4 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^{2k} = \frac{1/4}{1-1/4} = 1/3.$$

ცხადია, რომ სასრულ და თვლად Ω-ზე ალბათობის განსაზღვრა სავსებით ერთნაირია: ხდება ω-ელემენტების ალბათობების მიწერა (**a'**) და (**b'**) თანაფარდობათა დაკმაყოფილებით და შემდეგ (4.4) და (4.7) წესით ხდომილობის ალბათობის განსაზღვრა, რომელთა შორის განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ (4.7) შესაძლოა მწკრივის ჯამი აღმოჩნდეს (როგორც 4.13 მაგალითში).

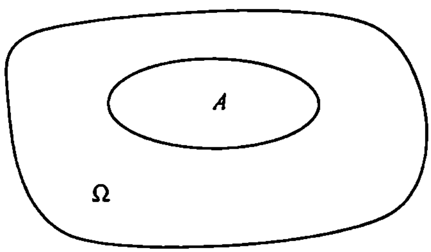
ელემენტარულ ხდომილობათა სასრული და თვლადი სივრცეების ჩვენს მიერ განხილულ შემთხვევებს ერთად მოიხსენიებენ, როგორც ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტულ სივრცეს და (Ω, P) წყვილს უწოდებენ დისკრეტულ ალბათურ სივრცეს, სადაც P-ს როლში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ როგორც Ω-ზე განსაზღვრული $P(\omega_i) = P(\{\omega_i\}) = p_i$ ფუნქცია, ისე მისი მეშვეობით (4.7) ფორმულით განსაზღვრული $P(A)$ ალბათობა Ω-ს ყოველი A ქვესიმრავლისათვის.

გეომეტრიული ალბათობა. თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Ω არათვლადია, მაშინ ალბათობები მიეწერება არა Ω-ს ცალკეულ ω წერტილებს, არამედ მის ქვესიმრავლეებს გარკვეული $\mathcal{A}$ კლასიდან. საილუსტრაციოდ ჩვენ შემოვიფარგლებით ე.წ. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრით, სადაც Ω-ს როლში იღებენ რაიმე გეომეტრიულ ობიექტს: წრფის სასრულ მონაკვეთს, წრეხაზს ან მის რკალს, სიბრტყის სასრული ფართობის მქონე ნაწილს, სასრული მოცულობის სივრცულ სხეულს და ა.შ.

თუ Ω, ვთქვათ, ბრტყელი არეა და შემთხვევით ვირჩევთ ω წერტილს Ω-დან, მაშინ იმის ალბათობის როლში, რომ ω მოხვდა Ω-ს რაიმე A ქვესიმრავლეში (შეადარე 4.7 მაგალითს), ალბათობის (4.6) კლასიკური განსაზღვრის მსგავსად შეგვიძლია მივიჩნიოთ

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{4.8}$$

სადაც $|A|$ აქ უკვე, (4.6) ფორმულისაგან განსხვავებით, ფართობს ნიშნავს. (4.8) ფორმულით გამოთვლილ ალბათობას გეომეტრიულ ალბათობას უწოდებენ.



ნახ. 4.2

ამ შემთხვევაში ხდომილობათა $\mathcal{A}$ კლასი Ω-ის იმ A ქვესიმრავლეებისაგან შედგება, რომლებისთვისაც შეიძლება ფართობი განისაზღვროს, ხოლო $P(A)$ მოიცემა (4.8) ფორმულით.

ცხადია, რომ ასე განსაზღვრული ალბათობისათვის $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$, ხოლო ვინაიდან $0 \le |A| \le |\Omega|$, სრულდება $0 \le P(A) \le 1$ უტოლობებიც, ხოლო ფართობის ადიციურობა მიგვიყვანს როგორც **P3** ისე **P3'** თვისებებამდე. აღსანიშნავია, რომ (4.8)-ის ძალით ცალკეული წერტილის ალბათობა ნულის ტოლია, რადგან წერტილის ფართობი ნულის ტოლია (შეადარე დისკრეტულ შემთხვევას).

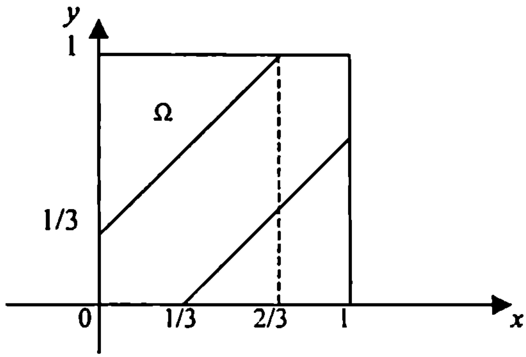
მაგალითი **4.14.** (შეხვედრის ამოცანა). ორი პირი შეთანხმდა გარკვეულ ადგილზე შეხვდეს ერთმანეთს 18-იდან 19 საათამდე. თითოეული შემთხვევით მომენტში მიდის და მეორეს ელოდება 20 წუთის მანძილზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს პირები ერთმანეთს შეხვდებიან.

თუ $18+x$ პირველი პირის მოსვლის მომენტია, ხოლო $18+y$ – მეორე პირისა (სადაც x და y საათებში იზომება), ელემენტარული ხდომილობის როლში შეგვიძლია ავირჩიოთ (x, y) წერტილი, რომელიც Ω ერთეულოვან კვადრატს ავსებს. ცხადია, რომ ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობა არის სიმრავლე:

$$A = \{(x,y) : |x-y| \le 1/3\} \cap \Omega.$$

ამრიგად, ყოველი ფიქსირებული x-ისათვის, $0 \le x \le 1$,

$$x - 1/3 \le y \le x + 1/3.$$



ნახ. 4.3.

როცა $0 \le x \le 1/3$, $y = x - 1/3$ წრფის მაგიერ ქვედა საზღვრის როლში იქნება x ღერძი: $0 \le y \le x + 1/3$, ხოლო როცა $2/3 \le x \le 1$, ზედა საზღვარი $y = x + 1/3$ წრფის მაგიერ იქნება $y = 1$.

დაშტრიხული არე, ცხადია, ტოლდიდია ორი კვადრატის სხვაობისა, რომელთაგან ერთი ერთეულოვანია, მეორეს გვერდი კი არის 2/3. საბოლოოდ:

$$P(A) = 5/9.$$

ალბათობა ელემენტარულ ხდომილობათა ზოგად სივრცეზე*. დისკრეტული ალბათური სივრცე და ახლახანს განხილული გეომეტრიული ალბათობა შემდეგი ზოგადი მოდელის კერძო შემთხვევებია.

განიხილება ელემენტარულ ხდომილობათა აბსტრაქტული Ω სივრცე, რომელიც რაიმე იდეალური ექსპერიმენტის შედეგების სრული ჩამონათვალის სახით მოიაზრება. გამოიყოფა მისი ქვესიმრავლეების $\mathcal{A}$ კლასი, რომელსაც შემდეგი თვისებები გააჩნია:

A1. $\Omega \in \mathcal{A}$;

A2. თუ $A \in \mathcal{A}$, მაშინ $\overline{A} \in \mathcal{A}$;

A3. თუ $A_1, A_2, \ldots$ მიმდევრობა ეკუთვნის $\mathcal{A}$-ს, მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;

ეს თვისებები ნიშნავს, რომ $\mathcal{A}$ ჩაკეტილია სიმრავლეთა თეორიის ოპერაციათა თვლადი რაოდენობის მიმართ. ასეთ კლასს σ-ალგებრას უწოდებენ.

$\mathcal{A}$ კლასის ელემენტებს ხდომილობები ეწოდება და ამ კლასზე განისაზღვრება $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, ალბათობა, რომელსაც **P1, P2, P3'** თვისებები გააჩნია.

ამრიგად, ხდომილობათა $\mathcal{A}$ კლასი A1–A3 აქსიომებით განისაზღვრება, ხოლო მასზე განსაზღვრული $P(A)$ ალბათობა – P1, P2, P3' აქსიომებით. აქსიომათა ეს სისტემა კოლმოგოროვის (А.Н. Колмогоров) აქსიომების სახელით არის ცნობილი.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ სამეულს ალბათური სივრცე ეწოდება.

დისკრეტული Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი და სიბრტყის სასრული ფართობის მქონე სიმრავლის იმ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომელთაც ფართობი მიეწერება, σ-ალგებრის მაგალითებია, ხოლო ამ კლასებზე, შესაბამისად, (4.4) და (4.8) თანაფარდობებით შემოღებული ალბათობები P1, P2, P3' აქსიომებს აკმაყოფილებენ, ამიტომ ორივე განხილული სამეული ალბათური სივრცის მაგალითებია.

ᲐᲚᲑᲐᲗᲝᲑᲘᲡ ᲗᲔᲝᲠᲘᲘᲡ ᲡᲐᲒᲐᲜᲘ*. როგორც აღვნიშნეთ, ისტორიულად პირველად სწორედ (4.6) იყო ალბათობის განსაზღვრად არჩეული. სიხშირეთა მდგრადობას, ცხადია, ექცეოდა ყურადღება და ყოველთვის იყო მიჩნეული გამოთვლილ მნიშვნელობათა სისწორის კრიტერიუმად. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა ჩაკეტილ წრეში ექცევა, ვინაიდან იგი სარგებლობს ტოლშესაძლო ანუ ტოლალბათური შედეგების ცნებით ანუ თვით ალბათობის ცნებით.

რაც შეეხება ალბათობის მიჩნევას ფარდობით სიხშირეთა ზღვრად (შეადარე (4.1) თანაფარდობას), აქაც წინააღმდეგობაა, რადგან ლოგიკურად არაა გამორიცხული ცდათა ისეთი მიმდევრობებიც, რომელთათვის $f_n(A)$ იგივურად ერთია. ამრიგად, $f_n(A)$ ფუნქცია უნდა უახლოვდებოდეს $P(A)$-ს ცდათა არა ყოველი მიმდევრობისათვის, არამედ თითქმის ყოველი მიმდევრობისათვის, რაც ისევ ალბათობის ცნებით გამოითქმის და ისევ ჩაკეტილი წრე მიიღება.

ამ სიძნელეების გამო მეოცე საუკუნემდე ვერ მოხერხდა ალბათობის თეორიის, როგორც მათემატიკის სრულუფლებიანი დარგის განვითარება. სიტუაცია მკვეთრად გაუმჯობესდა მას შემდეგ, რაც კოლმოგოროვმა 1933 წელს მოგვცა ალბათობის თეორიის ახალი დაფუძნება, რომელიც, კერძოდ, არ ინტერესდება იმით, თუ როგორ არის შემოღებული ხდომილობათა $\mathcal{A}$ σ-ალგებრაზე $P(A)$ ალბათობა, მთავარია იგი კოლმოგოროვის P1, P2, P3' აქსიომებს აკმაყოფილებდეს. ალბათობის თეორიის საგანი კი არის ერთმანეთთან ამა თუ იმ წესით დაკავშირებულ ხდომილობათა ალბათობებს შორის თანაფარდობათა შესწავლა. აგებული თეორია თეორემის სახით შეიცავს დებულებას იმის შესახებ, რომ ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე გარკვეული აზრით მიისწრაფის აღნიშნული ხდომილობის ალბათობისაკენ (ესაა ე.წ. დიდ რიცხვთა კანონის ბერნულისეული ვარიანტი).

კოლმოგოროვი დეტალურად არ იხილავს, რა პირობებში შეიძლება ალბათობის თეორიის გამოყენება რეალური სინამდვილის მიმართ, თუმცა აცხადებს, რომ რეალურ შემთხვევით ექსპერიმენტთან (რომელიც პირობათა რაიმე S კომპლექსის შესრულებაში მდგომარეობს) დაკავშირებულ ზოგიერთ A ხდომილობას შეიძლება მიეწეროს გარკვეული ნამდვილი $P(A)$ რიცხვი. ამ რიცხვებს შემდეგი თვისებები გააჩნია:

a. შეიძლება პრაქტიკულად დარწმუნებული ვიყოთ იმაში, რომ პირობათა S კომპლექსის n-ჯერ გამეორებისას, სადაც n დიდი რიცხვია, A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე $f_n(A)$ მცირედ განსხვავდება $P(A)$ რიცხვისაგან.

b. თუ $P(A)$ რიცხვი ძალიან მცირეა, შეიძლება პრაქტიკულად დარწმუნებული ვიყოთ, რომ S-ის ერთხელ რეალიზაციისას A ხდომილობას ადგილი არ ექნება.

§ 2. რთული ხდომილობების ალბათობები

ხდომილობათა ჯამის ალბათობა. ალბათობის **P3** თვისება, შემდეგნაირად ზოგადდება: ნებისმიერი A და B ხდომილობებისათვის

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{4.9}$$

მართლაც, $A \cup B = A + \overline{A}\,B$ და $B = AB + \overline{A}\,B$ წარმოდგენები **P3**-ის ძალით გვაძლევს $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}\,B)$ და $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}\,B)$ ფორმულებს (შესაკრებთა უთავსებადობის გამო), საიდანაც მიიღება (4.9).

ორზე მეტი ხდომილობისათვის ოპერაციები რეკურენტულად განისაზღვრება და შესაბამისი ფორმულებიც ასევე მიიღება. მაგალითად,

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B)C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

აქედან უკვე ცხადია, როგორ მიიღება ანალოგიური ფორმულა n ხდომილობისათვის, რომელიც აქ არ მოგვყავს.

თუ $A_1, \ldots, A_n$ არის ხდომილობათა სრული სისტემა, ანუ $A_1 + \cdots + A_n = \Omega$ და $A_i A_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$, მაშინ

$$P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1. \tag{4.10}$$

კერძოდ, როცა $n=2$ ($A_1 + A_2 = \Omega$ იგივეა, რაც $A_2 = \overline{A}_1$), (4.10)-იდან გვაქვს (4.4), ე.ი., ურთიერთსაწინააღმდეგო ხდომილობათა ალბათობების ჯამი ერთია.

პირობითი ალბათობა, ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა. შევეცადოთ შევისწავლოთ B ხდომილობის ზეგავლენა A ხდომილობაზე, ამისათვის დავაკვირდეთ A ხდომილობის პირობით ფარდობით სიხშირეს B პირობით, ანუ იმ ცდებში, რომელშიც B ხდომილობას ჰქონდა ადგილი. თუ გავიხსენებთ, რომ $\nu_n(C)$ აღნიშნავს n ცდაში C ხდომილობის სიხშირეს, გვექნება

$$f_n(A|B) = \frac{\nu_n(AB)}{\nu_n(B)} = \frac{\nu_n(AB)/n}{\nu_n(B)/n} = \frac{f_n(AB)}{f_n(B)}.$$

ვინაიდან ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში $P(AB)$ და $P(B)$ ალბათობების გამზომი $f_n(AB)$ და $f_n(B)$ ფარდობითი სიხშირეები მონაწილეობენ, ბუნებრივია, რომ ამ უკანასკნელთა ფარდობა $P(AB)/P(B)$ შეფარდების გამზომ სიდიდედ ჩავთვალოთ, ხოლო ალბათობათა ამ შეფარდებას კი პირობითი ალბათობა ვუწოდოთ:

A ხდომილობის პირობითი ალბათობა B ხდომილობის პირობით (B პირობით, $P(B)>0$) ეწოდება

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{4.11}$$

წილადს.

პირობით ალბათობას $P(A|B)$ უპირობო $P(A)$ ალბათობის **P1**, **P2**, **P3** თვისებები გააჩნია:

$0 \le P(A|B) \le 1$, სახელდობრ $P(\varnothing|B)=0$, $P(B|B)=1$;

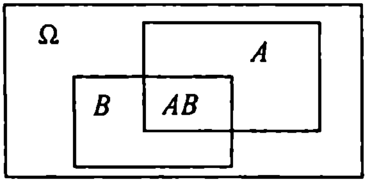
თუ $A_1\cap A_2=\varnothing$, მაშინ $P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$.

ამას გარდა ცხადია, რომ

თუ $B\subseteq A$, მაშინ $P(A|B)=1$;

თუ $A\subseteq B$, მაშინ $P(A|B)\geq P(A)$;

$\overline{B}$ -ში შემავალი ხდომილობების პირობითი ალბათობები ნულია.



ნახ. 4.4.

კლასიკურ სქემაში

$$P(A|B)=\frac{|AB|}{N},\ P(B)=\frac{|B|}{N},\ P(A)=\frac{|A|}{N},\ P(A|B)=\frac{|AB|}{|B|};$$

ამდენად ამ სქემაში A-ს პირობითი ალბათობა ფაქტობრივად AB ხდომილობაში შემავალ ყოველ ელემენტარულ ხდომილობებს $1/|\Omega|$ ალბათობის ნაცვლად მიანიჭებს $1/|B|$ ალბათობას: ე.ი. Ω სივრცე ვიწროვდება B-მდე და თითოეული ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა იზრდება, რაც არ ნიშნავს იმას, რომ $P(A|B)>P(A)$. იგი შეიძლება შემცირდეს კიდეც და იგივეც დარჩეს.

მაგალითი 4.15. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი კამათლის გაგორებისას 4-ზე ნაკლები რიცხვი მოვა (A ხდომილობა), თუ ცნობილია, რომ ლუწი რიცხვი მოვიდა (B ხდომილობა).

ამოხსნა. $B=\{2,4,6\}$. $P(AB)=P(\{2\})=1/6$, $P(B)=1/2$, საიდანაც $P(A|B)=1/3$. თუ გავითვალისწინებთ ჩვენს ბოლო შენიშვნას შევიწროებული სივრცის შესახებ, ეს პასუხი უშუალოდაც მიიღება.

ცხადია, რომ თუ $P(B)>0$, (4.11) თანაფარდობა გვაძლევს

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B) \tag{4.12}$$

ტოლობას, რომელსაც ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის ფორმულას ვუწოდებთ. ამავე დროს თუ $P(A)\neq 0$, მაშინ

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B). \tag{4.13}$$

ორი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა ტოლია ერთ-ერთი მადგანის ალბათობის ნამრავლისა მეორის პირობით ალბათობაზე პირველის პირობით.

(4.12)-იდან ინდუქციით მარტივად მიიღება, რომ თუ $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$, მაშინ

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}). \tag{4.14}$$

უკანასკნელ ფორმულას ჯაჭვური წესი ეწოდება.

(4.14) ფორმულა გამოიყენება ხდომილობათა ალბათობების განსაზღვრისათვის, როდესაც ამოცანის პირობიდან ნათელია პირობით ალბათობათა მნიშვნელობები.

მაგალითი 4.16. ყუთში s ბირთვია. მათ შორის t თეთრია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ორი ბირთვის მიმდევრობით დაბრუნების გარეშე ამოღებისას:

(a) პირველი ბირთვი თეთრია;

(b) მეორე ბირთვი თეთრია;

(c) ორივე ბირთვი თეთრია.

ამოხსნა. თუ A_i ნიშნავს, რომ i-ური ბირთვი თეთრია, მაშინ ცდა შეიძლება აღიწეროს ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 ელემენტარული ხდომილობებით, სადაც

$$\{\omega_1\}=A_1A_2,\ \{\omega_2\}=A_1\overline{A}_2,\ \{\omega_3\}=\overline{A}_1A_2,\ \{\omega_4\}=\overline{A}_1\overline{A}_2,$$

ცხადია, რომ

$$P(\{\omega_1\}) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) \tag{4.15}$$

და ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების თანახმად $P(A_1)=t/s$, ხოლო $P(A_2|A_1)=(t-1)/(s-1)$. ამიტომ

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{t}{s}\cdot\frac{t-1}{s-1},$$

ანალოგიურად

$$P(\{\omega_2\}) = \frac{t}{s}\cdot\frac{s-t}{s-1},\ P(\{\omega_3\}) = \frac{s-t}{s}\cdot\frac{t}{s-1},\ P(\{\omega_4\}) = \frac{s-t}{s}\cdot\frac{s-t-1}{s-1}.$$

ვინაიდან $A_1=\{\omega_1,\omega_2\}$, $A_2=\{\omega_1,\omega_3\}$, $A_1A_2=\{\omega_1\}$ საბოლოოდ გვაქვს

$$P(A_1) = P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\}) = \frac{t}{s}\cdot\frac{t-1}{s-1}+\frac{t}{s}\cdot\frac{s-t}{s-1}=\frac{t}{s},$$

$$P(A_2) = P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_3\}) = \frac{t}{s}\cdot\frac{t-1}{s-1}+\frac{s-t}{s}\cdot\frac{t}{s-1}=\frac{t}{s},$$

$$P(A_1A_2) = \frac{t}{s}\cdot\frac{t-1}{s-1} = P(\{\omega_1\}).$$

ხდომილობათა დამოუკიდებლობა. A და B ხდომილობებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{4.16}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $P(A)>0$, $P(B)>0$, (4.16) ეკვივალენტურია ორი თანაფარდობისა:

$$P(A|B) = P(A), \qquad P(B|A) = P(B), \tag{4.17}$$

ანუ ერთი ხდომილობის მოხდენა არ ცვლის მეორის ალბათობას. მართლაც, რადგან

$$P(AB) = P(B)\cdot P(A|B) = P(A)\cdot P(B),$$

მივიღებთ, რომ

$$P(A|B) = P(A).$$

ანალოგიურად მიიღება $P(B|A)=P(B)$ ტოლობაც.

პირიქით, თუ მაგალითად, $P(A|B)=P(A)$, მაშინ

$$P(AB) = P(B)\cdot P(A|B) = P(B)\cdot P(A).$$

ამრიგად, დადებითი ალბათობის მქონე A და B ხდომილობებისათვის დამოუკიდებლობის განსაზღვრებად შეიძლება მივიღოთ ერთ-ერთი (4.17) თანაფარდობებიდან (რომელიც ავტომატურად იწვევს მეორე თანაფარდობას).

ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ A და B დამოუკიდებელია, მაშინ დამოუკიდებელია $A, \overline{B}$; $\overline{A}, B$; $\overline{A}, \overline{B}$ წყვილებიც. ვინაიდან $\overline{(\overline{A})}=A$, აქედან გამომდინარეობს, რომ ოთხიდან რომელიმე წყვილის დამოუკიდებლობა ყველა დანარჩენი წყვილების დამოუკიდებლობასაც განაპირობებს.

მართლაც, ვთქვათ, სრულდება (4.16). მაშინ, ვინაიდან $B=AB+\overline{A}B$, გვაქვს $P(B)=P(AB)+ +P(\overline{A}B)$ და $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = [1-P(A)]P(B) = P(\overline{A})P(B)$, რაც ნიშნავს $\overline{A}$ და B ხდომილობების დამოუკიდებლობას.

თუ (4.16) არ სრულდება, A და B ხდომილობებს დამოკიდებული ხდომილობები ეწოდება.

მაგალითი 4.17. თუ N ბირთვიან ყუთში l თეთრია, დანარჩენი კი შავი და A_1 ნიშნავს, რომ პირველი ბირთვი თეთრია, A_2 კი ნიშნავს, რომ მეორე ბირთვია თეთრი, მაშინ ყუთიდან დაბრუნების გარეშე ამოღებისას, როგორც 4.16 მაგალითიდან ჩანს, ეს ხდომილობები დამოკიდებულია, ვინაიდან

$$P(A_2|A_1) \neq P(A_2).$$

თუ ამოღება დაბრუნებით ხდება, მაშინ ცხადია, რომ

$$P(A_2|A_1) = P(A_2).$$

მაგალითი 4.18. კარტის კომპლექტიდან შემთხვევით ვიღებთ 1 კარტს. A ნიშნავდეს ხდომილობას „გული", ხოლო B იყოს „ათიანი". $P(AB)=P(A)P(B)$

$P(AB)=1/52$, $P(A)=1/4$, $P(B)=1/13$, ე.ი., A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

საკმარისია კომპლექტს მოვაკლოთ 1 კარტი, ვთქვათ „ჯვრის 6", რომ დამოუკიდებლობა დაირღვეს:

$$\frac{1}{51} \neq \frac{13}{51} \cdot \frac{4}{51},$$

რაც პროპორციების დარღვევამ გამოიწვია და არა კარტებს შორის არსებულმა რაღაც „ფიზიკურმა" დამოკიდებულებამ. აქ უნდა აღინიშნოს, რომ ხდომილობათა შორის აღწერილ დამოუკიდებლობას სტატისტიკურ ან სტოქასტურ დამოუკიდებლობას უწოდებენ „ფიზიკური" დამოუკიდებულობისაგან გამოსარჩევად.

სამი A_1, A_2 და A_3 ხდომილობის დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ ისინი წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია, ანუ

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \text{ სადაც } i \neq j,\ i, j = 1,2,3, \tag{4.18}$$

და გარდა ამისა

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \tag{4.19}$$

აღსანიშნავია, რომ (4.18)-ის ან (4.19)-ის დარღვევა დამოუკიდებლობას გამორიცხავს. არსებობს მარტივი მაგალითები იმისა, რომ ერთი' პირობიდან მეორე არ გამომდინარეობს.

მაგალითი 4.19. ყუთში 4 ბირთვია წარწერებით 1,2,3 და 123. A_i ნიშნავდეს, რომ შემთხვევით ამოღებულ ბირთვს აწერია ციფრი i, i=1,2,3.

ცხადია, რომ $P(A_i)=1/2$, $P(A_iA_j)=1/4$, $i \neq j$, $i, j=1,2,3$, მაგრამ

$$P(A_1A_2A_3)=1/4 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=1/8,$$

მაშინ, როცა ყოველი $i, j=1,2,3$, წყვილისათვის ($i \neq j$) $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$.

3-ზე მეტი ხდომილობისათვის დამოუკიდებლობა ანალოგიურად განისაზღვრება: $A_1,\ldots A_n$ დამოუკიდებელი ხდომილობებია, თუ

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}), \tag{4.20}$$

სადაც $2 \leq k \leq n$ და $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

თუ შემოვიღებთ $B_1,\ldots,B_n$ ხდომილობებს, სადაც B_i ან A_i-ს ნიშნავს, ან $\overline{A}_i$-ს, შეიძლება ვთქვათ, რომ (4.20) ეკვივალენტურია

$$P(B_1 \cdots B_n)= P(B_1) \cdots P(B_n)$$

ტოლობისა თითოეული B_i ხდომილობის ყოველი შესაძლო მნიშვნელობისათვის. $n=2$ შემთხვევაში ეს ეკვივალენტობა ჩვენს მიერ დამტკიცებული იყო.

სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები. თუ $H_1,H_2,\ldots,H_n$ ხდომილობათა სრული სისტემაა, ანუ $H_1+H_2+\cdots+H_n = \Omega$ და $H_iH_j=\varnothing$, $i \neq j$, $i, j=1,\ldots,n$, მაშინ ნებისმიერი A ხდომილობისათვის

$$A = AH_1+AH_2+\cdots+AH_n,$$

საიდანაც $P(AH_i)=P(H_i)P(A|H_i)$ ტოლობა (იხ. (4.13)) და ალბათობის ადიციურობა გვაძლევს სრული ალბათობის ფორმულას

$$P(A)= P(H_1)P(A|H_1)+\cdots+P(H_n)P(A|H_n)= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i). \tag{4.21}$$

$H_1,H_2,\ldots,H_n$ ხდომილობებს ზოგჯერ ჰიპოთეზებს უწოდებენ.

ისევე, როგორც (4.13) ფორმულა, (4.21)-იც მათემატიკურად მარტივი თანაფარდობაა, მაგრამ ის საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ ალბათობები ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეზე.

მაგალითი **4.20.** ქანჩებს სამი მანქანა ამზადებს. პირველი იძლევა პროდუქციის 20%, მეორე – 30%, მესამე კი – 50%. დეფექტის წილი პირველი მანქანის პროდუქციაში არის 5%, მეორისაში – 2%, ხოლო მესამეს პროდუქციაში კი – 1%. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ საერთო პროდუქციის საწყობიდან შემთხვევით აღებული ქანჩი დეფექტურია.

ამოხსნა. ცდა მდგომარეობს შემთხვევით აღებული ქანჩის შემოწმებაში. ქანჩი დეფექტურია (D) ან სტანდარტული ($\overline{D}$). ქანჩი დამზადებულია პირველი (H_1), მეორე (H_2), ან მესამე (H_3) მანქანის მიერ. H_1, H_2, H_3 ხდომილობათა სრული სისტემაა.

$$P(D)=P(H_1)P(D|H_1)+P(H_2)P(D|H_2)+P(H_3)P(D|H_3)=0.2\cdot 0.05+0.3\cdot 0.02+0.5\cdot 0.01=0.021.$$

მოვიყვანოთ მეორე ამოხსნა. Ω-ს როლში ავიღოთ სამივე მანქანის მიერ დამზადებული ქანჩების სიმრავლე. $\Omega=H_1+H_2+H_3$, სადაც, H_i ნიშნავს i-ური მანქანის მიერ დამზადებული ქანჩების სიმრავლეს. D ნიშნავდეს დეფექტური ქანჩების სიმრავლეს.

ქანჩის შემთხვევით არჩევა ნიშნავდეს, რომ Ω-ს ყველა N ელემენტი ტოლალბათურია, ამიტომ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრით ($|\Omega|=N$)

$$P(D) = \frac{|D|}{N}.$$

პირობის თანახმად

$$|H_1|=0.2N, \quad |H_2|=0.3N, \quad |H_3|=0.5N;$$

$$|DH_1|=0.05|H_1|, \ |DH_2|=0.02|H_2|, |DH_3|=0.01|H_3|.$$

საიდანაც

$$P(D) = \frac{|D|}{N} = \frac{|DH_1|+|DH_2|+|DH_3|}{N},$$

რაც ძველ პასუხს ემთხვევა.

ამრიგად, სრული ალბათობის ფორმულა საშუალებას იძლევა ალბათობა გამოითვალოს ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის აუგებლად.

თუ ახლა გავიხსენებთ (4.13) ფორმულას და B-ს მაგივრად ჩავსვამთ H_i-ს , გამოვა, რომ

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

საიდანაც სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ ბაიესის ფორმულებს

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

ხშირად ბაიესის ფორმულები მოიხსენიება, როგორც ჰიპოთეზათა ალბათობების, ან მიზეზთა ალბათობების ფორმულები. მათ შემდეგი შინაარსი ეძლევა:

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ ის მიზეზებია (ჰიპოთეზებია), რომელთაც შეეძლოთ გამოეწვიათ A ხდომილობის მოხდენა. ცნობილია $P(H_1)$, $P(H_2)$,..., $P(H_n)$ ალბათობები ცდის ჩატარებამდე (a priori), რომელთაც ჰიპოთეზათა აპრიორულ ალბათობებს უწოდებენ. ბაიესის ფორმულებით მოიცემა ის შესაძლო ცვლილებები, რასაც ცდის ჩატარების შემდეგ (a posteriori) განიცდიან აპრიორული ალბათობები და მიღებულ მნიშვნელობებს აპოსტერიორულ ალბათობებს უწოდებენ.

მაგალითი 4.21. წინა მაგალითში გამოვთვალოთ აპოსტერიორული ალბათობები.

ამოხსნა. წინა მაგალითის აღნიშვნებით და ბაიესის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$P(H_1|D) = 10/21, P(H_2|D) = 6/21, P(H_3|D) = 5/21.$$

მაგალითი 4.22. ვთქვათ, ორი ყუთი გვაქვს. თითოეულში N ბირთვია. პირველ ყუთში M_1 თეთრი ბირთვია, მეორეში კი – M_2. ცდა მდგომარეობს ტოლი ალბათობებით ყუთის შემთხვევით არჩევასა და შემდეგ არჩეული ყუთიდან n ბირთვის ამოღებაში, ამოღება ხდება დაბრუნებით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ თუ ყველა ბირთვი თეთრია, ისინი i-ური ყუთიდანაა ამოღებული.

ამოხსნა. თუ A n-ჯერ თეთრი ბირთვის ამოღებას, ხოლო H_1 და H_2 შესაბამისად პირველი და მეორე ყუთების ამორჩევას ნიშნავს, მაშინ, ვინაიდან $P(H_1)=P(H_2)=1/2$,

ბაიესის ფორმულით გვაქვს (იხ. §3 $P(A|H_i) = (M_i/N)^n$, i = 1,2, ტოლობათა ასახსნელად), რომ

$$P(H_1|A) = 1 - P(H_2|A) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{N}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{N}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{N}\right)^n} = \frac{M_1^n}{M_1^n + M_2^n}.$$

ცხადია, რომ თუ $M_2 < M_1$, მაშინ

$$P(H_1|A) = \left(1 + \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^n\right)^{-1} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

ამრიგად, ექსპერიმენტის შედეგის ცოდნამ ამ შემთხვევაში არსებითად შეცვალა ჩვენი აპრიორული ინფორმაცია H_1 და H_2 ხდომილობების შესახებ.

ბაიესის ფორმულებთან დაკავშირებულია ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მნიშვნელოვანი მოდელები. ბაიესის ფორმულებს ხშირად იყენებენ სამედიცინო თუ ტექნიკური დიაგნოსტიკის ამოცანებში, როდესაც იძიებენ ავადმყოფობის თუ დაზიანების ყველაზე უფრო მოსალოდნელ მიზეზს.

§ 3. კომბინატორული ანალიზის გამოყენება ალბათობათა გამოსათვლელად

ხშირად ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცისა და ხდომილობის ალბათობის განსაზღვრა პირდაპირი გადათვლით შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევაში უნდა მივმართოთ კომბინატორული ანალიზის მიერ შემუშავებულ მეთოდებს.

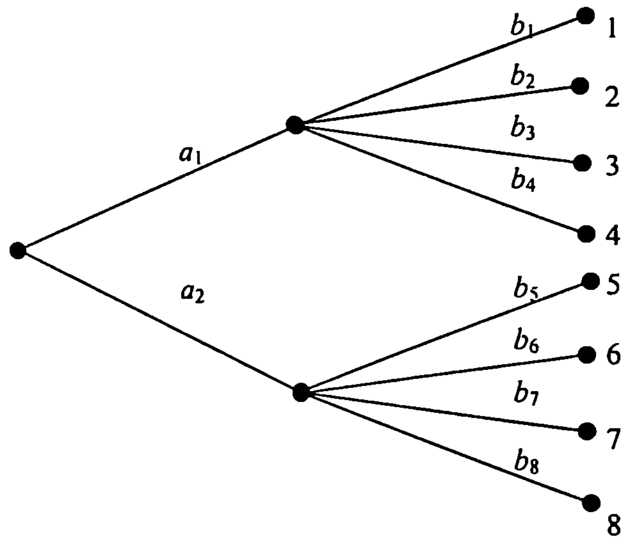
ახლა ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ კომბინატორული ანალიზის ძირითად პრინციპს, რომელსაც გამრავლების პრინციპი ეწოდება.

თუ ასარჩევია k საგანი და არსებობს პირველი საგნის არჩევის n_1 ვარიანტი, ხოლო პირველი საგნის არჩევის შემდეგ არსებობს მეორე საგნის არჩევის n_2 ვარიანტი, ... , და ბოლოს, k–1 საგნის არჩევის შემდეგ არსებობს k-ური საგნის არჩევის n_k ვარიანტი, მაშინ არსებობს ამ k საგნის ამ მიმდევრობით არჩევის $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ ვარიანტი.

მაგალითი 4.23. თუ მამაკაცს აქვს 2 პერანგი და 4 ჰალსტუხი, მაშინ მას ჰქონია პერანგის და ჰალსტუხის შერჩევის $2 \cdot 4 = 8$ ვარიანტი.

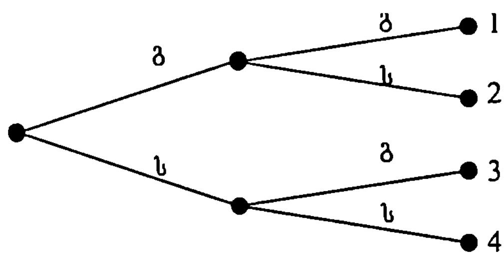
დენდროგრამები. მოყვანილ პრინციპთან დაკავშირებით ხშირად სასარგებლოა ხის მსგავსი (ხისებრი) დიაგრამის ანუ დენდროგრამის გამოყენება.

მაგალითი 4.24. თუ a_1, a_2 აღნიშნავს პერანგებს, ხოლო b_1, b_2 b_3, b_4 – ჰალსტუხებს, მაშინ პერანგისა და ჰალსტუხის არჩევის სხვადასხვა გზა შეიძლება შემდეგი დენდროგრამით ავსახოთ



ნახ. 4.5.

მაგალითი 4.25. გამოვსახოთ დენდროგრამით მონეტის ორჯერ აგდების შესაბამისი შედეგების სიმრავლე. „გ“ ნიშნავდეს გერბს, ხოლო „ს“ – საფასურს.



ნახ.4.6

წყობა. ვთქვათ, მოცემულია n განსხვავებული ობიექტი და ჩვენ გვსურს r მათგანი ერთ ხაზზე გავამწკრივოთ. ვინაიდან პირველს ავირჩევთ n-ნაირად, შემდეგ ავირჩევთ მეორეს $n-1$-ნაირად, . . . , მე-r-ეს $[n-(r-1)]$-ნაირად, მათ ერთობლიობას, ანუ r ობიექტის დალაგებულ კომპლექტს, რომელსაც წყობას უწოდებენ, ავირჩევთ

$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) \equiv (n)_r \tag{4.22}$$

რაოდენობით. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ გამრავლების პრინციპი ($n_1=n$, $n_2=n-1$, … , $n_r=n-r+1$).

როდესაც $r = n$, (4.23)-იდან მიიღება

$$A_n^n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

(n! იკითხება როგორც n ფაქტორიალი) და ამგვარ წყობას გადანაცვლება ეწოდება. წყობები განსხვავდებიან რიგით ან შემადგენლობით, მაშინ როცა გადანაცვლებებს ერთი და იგივე შემადგენლობა აქვთ და მხოლოდ რიგით განსხვავდებიან. (4.23)-ის ჩაწერა ფაქტორიალებით შეიძლება შემდეგნაირად:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{4.23}$$

სადაც იგულისხმება, რომ $0! = 1$.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა n საგნიდან r საგანს ვირჩევთ განმეორებით, ანუ ყოველი არჩეული საგანი უკან ბრუნდება მისი ფიქსაციის შემდეგ. მაშინ გამრავლების პრინციპში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ

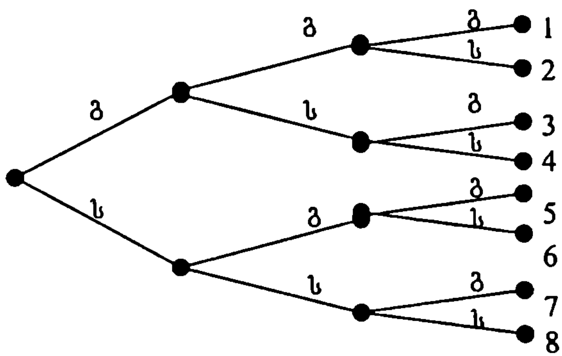
$$n_1 = n_2 = \cdots = n_r = n$$

და ე.წ. განმეორებითი წყობა n საგნიდან ამოირჩევა

$$G_n^r = n^r \tag{4.24}$$

რაოდენობით.

მაგალითი 4.26. ავაგოთ მონეტის 3-ჯერ აგდების შესაბამისი დენდროგრამა (n=2, r=3). ამრიგად, გვაქვს 2^3=8 განმეორებითი წყობა.



ნახ.4.7

ᲯᲣᲤᲗᲔᲑᲐ. ჯუფთება ეწოდება წყობათა მთელ კლასს, რომელთაც ერთი და იგივე შემადგენლობა გააჩნია. ამგვარად r-ელემენტიანი ჯუფთება n ელემენტიდან წარმოადგენს n ელემენტის r-ელემენტიან ქვესიმრავლეს (მაგალითად ab და ba ერთი და იგივე 2-ელემენტიანი ჯუფთებებია). თუ ჯუფთებათა რაოდენობისათვის შემოვიღებთ C_n^r აღნიშვნას, იქედან, რომ $C_n^r r! = A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, მივიღებთ ჯუფთებათა რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულას

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{4.25}$$

(4.25) ფორმულიდან ჩანს და თვით განმარტებიდან ცხადია (n-ელემენტიანი სიმრავლის არჩევით ავტომატურად ვირჩევთ ($n-r$)-ელემენტიან სიმრავლეს), რომ

$$C_n^r = C_n^{n-r}.$$

(4.25) რიცხვებს ბინომური კოეფიციენტები ეწოდება, ვინაიდან, როგორც ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს (ინდუქციით ან უშუალო მსჯელობით)

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r} y^r, \tag{4.26}$$

მაგალითად

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

მაგალითი 4.27. ვთქვათ, n ერთმანეთის ახლოს მდებარე მაღაზიაში r კაცი შევიდა, $r \leq n$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ყველა სხვადასხვა მაღაზიაში აღმოჩნდება?

ამოხსნა. თუ თითოეულ პირს შევუსაბამებთ მაღაზიის ნომერს, აღმოჩნდება, რომ ცდის შედეგია

$$\omega = (i_1, \ldots, i_r)$$

r-ეული, თანაც თითოეული i_k შეიძლება იყოს 1-დან n-მდე. ამრიგად,

$$|\Omega| = n^r.$$

ω-ში რიგს მნიშვნელობა აქვს. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენს A ხდომილობას ხელს უწყობს n ელემენტიდან r ელემენტიანი წყობა

$$A = \{(i_1, \ldots, i_r),\ i_k\text{-ები განსხვავებულია}\}.$$

ამიტომ $|A| = (n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ და ალბათობის კლასიკური განსაზღვრის თანახმად

$$P(A) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

მაგალითი 4.28. ვთქვათ ყუთში s ბირთვია და მათ შორის l თეთრია. შემთხვევით ვიღებთ n ბირთვს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ზუსტად k ცალი იქნება თეთრი, თუ

(a) ამორჩევა ხდება დაბრუნებით;

(b) ამორჩევა ხდება დაბრუნების გარეშე.

ამოხსნა. (a) ელემენტარული ხდომილობებია

$$\omega = (i_1, \ldots, i_r),$$

სადაც თითოეული $i_k = 1, \ldots, s$. ამრიგად $|\Omega| = s^n$, იხ. ფორმულა (4.25). n ამორჩეული ბირთვიდან k (ვთქვათ, პირველი k) უნდა იყოს არჩეული l-დან, რისთვისაც არსებობს l^k ვარიანტი, ხოლო დანარჩენი $n-k$ კი $s-l$ შავ ბირთვს შორის უნდა იყოს, რისთვისაც გვაქვს

$(s-t)^{n-k}$ ვარიანტი. მაგრამ k ბირთვი შეიძლება მოხვდეს ნებისმიერ k ადგილას n-ს შორის. ადგილების k-ელემენტიანი სიმრავლეების რაოდენობაა C_n^k. ამრიგად, სულ გვაქვს $t^k(s-t)^{n-k}$ n-ეული, თუ A_k ნიშნავს ხდომილობას, რომ n ამორჩეულ ბირთვს შორის k თეთრია, გვაქვს

$$|A_k| = C_n^k t^k (s-t)^{n-k}$$

და

$$P_n(k) \equiv P(A_k) = \frac{C_n^k t^k (s-t)^{n-k}}{s^n} = C_n^k \left(\frac{t}{s}\right)^k \left(1-\frac{t}{s}\right)^{n-k},\ k=0,1,\dots,n. \quad (4.27)$$

რიცხვთა (4.27) მიმდევრობას ეწოდება ბინომური განაწილება. ამ რიცხვების ჯამი (4.26) ფორმულის ძალით უნდა იყოს 1, რაც იქიდანაც გამომდინარეობს, რომ $A_0, A_1, \dots, A_n$ ხდომილობები სრულ სისტემას ქმნიან.

(b) დაბრუნების გარეშე შერჩევისას ელემენტარულ ხდომილობად შეგვიძლია ჩავთვალოთ s ელემენტის n-ელემენტიანი ქვესიმრავლე და ამიტომ

$$|\Omega| = C_s^n.$$

რაც შეეხება A_k-ს, მას ხელს უწყობს თეთრი ბურთების C_t^k და იმავდროულად შავი ბურთების C_{s-t}^{n-k} კომბინაცია, რაც გამრავლების პრინციპის ძალით გვაძლევს, რომ

$$|A_k| = C_t^k\, C_{s-t}^{n-k}.$$

საბოლოოდ

$$P_n(k) \equiv P(A_k) = \frac{C_t^k C_{s-t}^{n-k}}{C_s^n},\ k=0,\dots,n. \quad (4.28)$$

რიცხვთა ამ მიმდევრობას ჰიპერგეომეტრიული განაწილება ეწოდება. ამ რიცხვების ჯამიც 1-ია, რაც ცხადია ისევ ალბათური მოსაზრებებით და იმ გარემოებითაც, რომ იოლი კომბინატორული მსჯელობის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ შემდეგი ფორმულა

$$C_s^n = \sum_{k=0}^{n} C_t^k C_{s-t}^{n-k}. \quad (4.29)$$

როგორც (4.28) ისე (4.29) ფორმულებში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $C_a^b=0$, როცა $b>a$. თუ მოვისურვებთ დადებითი რიცხვების გამოყოფას (4.29) მიმდევრობაში, სწორედ ბოლო პირობა მოგვცემს, რომ $0 \le k \le \min(t,n)$ და $0 \le n-k \le \min(s-t,n)$, საიდანაც $P_n(k)>0$, როცა

$$\max(0, n-(s-t)) \le k \le \min(t,n).$$

კერძოდ, თუ $s=12$, $t=8$ და $n=9$, მაშინ თეთრი ბურთების რაოდენობა შეიძლება იცვლებოდეს 5-იდან 8-მდე. დანარჩენი ალბათობები ნულის ტოლი გამოვა.

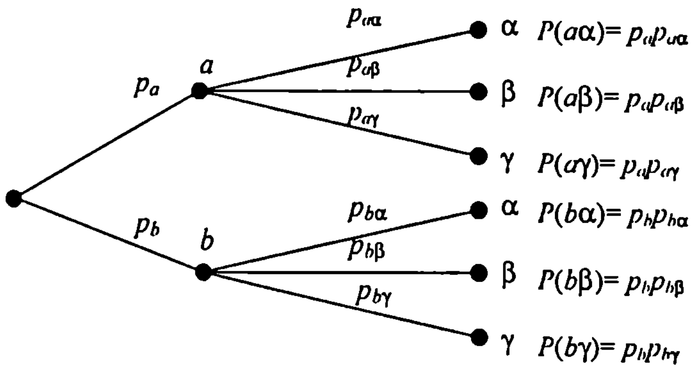
ალბათობათა გამოთვლა დენდროგრამების მეშვეობით. დენდროგრამები ჩვენ რთული ექსპერიმენტების შედეგების აღსაწერად შემოვიღეთ. თუ „შტოების" ანუ „უბნების" ერთობლიობას დენდროგრამის „ფესვიდან" ბოლომდე „ბილიკს" დავარ-

ქვევთ, მაშინ, თუ ყველა „ბილიკი" ტოლალბათურია, თითოეული მათგანის ალბათობა იქნება ერთი შეფარდებული „ბილიკების" საერთო რაოდენობასთან. ხშირად თვით „ბილიკის" ალბათობის გამოთვლას სჭირდება ალბათობათა გამრავლების ჯაჭვური წესის გამოყენება, რასაც მივყევართ სხვადასხვა ალბათობის მქონე „ბილიკებამდე" და რთული ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელად გვჭირდება თითოეული „ბილიკის" ალბათობის გამოთვლა თვით „ბილიკის" აგებულებისა და მოცემული ალბათობისა და პირობითი ალბათობის საშუალებით.

თუ, ვთქვათ, ერთმანეთის მიყოლებით ტარდება ორი ექსპერიმენტი: A, რომლის შედეგებია a და b და B, რომლის შედეგებია α, β, γ, მაშინ როცა ექსპერიმენტი Ω, რომელიც ნიშნავს ჯერ A-სა და შემდეგ B-ს ჩატარებას არის წყვილების შემდეგი სიმრავლე

$$\Omega = AB=\{a\alpha, a\beta, a\gamma, b\alpha, b\beta, b\gamma\}.$$

თუ ახლა მოცემულია A-ს შედეგების p_a და p_b ალბათობები $p_a+p_b=1$ და გარდა ამისა, პირობითი ალბათობები $p_{a\alpha}$, $p_{a\beta}$, $p_{a\gamma}$ ($p_{a\alpha}+p_{a\beta}+p_{a\gamma}=1$), $p_{b\alpha}$, $p_{b\beta}$, $p_{b\gamma}$ ($p_{b\alpha}+p_{b\beta}+p_{b\gamma}=1$), მაშინ ყოველი „ბილიკის" ალბათობა მოიცემა როგორც ალბათობისა და პირობითი ალბათობის ნამრავლი



ნახ. 4.8

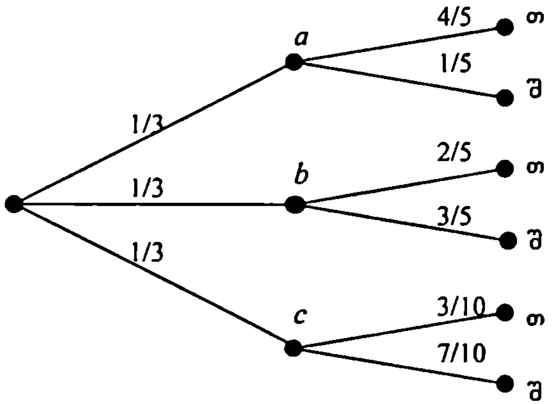
ადვილი წარმოსადგენია, თუ როგორ შეიცვლება ეს დენდროგრამა მესამე, მეოთხე და ა.შ. ექსპერიმენტის არსებობისას. ნათელია, რომ დენდროგრამის თითოეული „ბილიკის" ალბათობა მისი „შტოების " (ანუ უბნების") ალბათობათა ნამრავლის ტოლია.

მაგალითი 4.29. სამი ერთნაირი ურნა a, b და c შეიცავს სხვადასხვა რაოდენობის თეთრ და შავ ბირთვებს. პირველში 4 თეთრი და 1 შავი ბირთვია, მეორეში – 2 თეთრი და 3 შავი, ხოლო მესამეში – 3 თეთრი და 7 შავი ბირთვი. შემთხვევით ვირჩევთ ურნას და ამ ურნიდან შემთხვევით ვირჩევთ ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბირთვი თეთრია?

ამოხსნა. გამოვიყენოთ სრული ალბათობის ფორმულა. H_1 ნიშნავს პირველი ურნის არჩევას, H_2 – მეორესი, H_3 – მესამე ურნისა. $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$. თეთრი ბირთვის არჩევა იყოს A ხდომილობა. ცხადია, რომ $P(A|H_1)=4/5$, $P(A|H_2)=2/5$, $P(A|H_3)=3/10$. სრული ალბათობის ფორმულით

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{10}.$$

ახლა მივმართოთ დენდროგრამას. თეთრ ბირთვს შევუსაბამოთ „თ" ასო, ხოლო შავს „შ". გვექნება



$P(a\text{თ})=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}$

$P(a\text{შ})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$

$P(b\text{თ})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$

$P(b\text{შ})=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}$

$P(c\text{თ})=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}$

$P(c\text{შ})=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}$

ნახ. 4.9

ცხადია, რომ შემოღებული A ხდომილობაა არის aთ, bთ და cთ „ბილიკების" ერთობლიობა და ამიტომ

$$P(A)=P(a\text{თ})+P(b\text{თ})+P(c\text{თ})=3/10.$$

სრული ალბათობის ფორმულისა და დენდროგრამების მეთოდები ამ მაგალითში სირთულის მიხედვით დიდად არ განსხვავდება (ორკომპონენტიან შედგენილ ცდებში ეს ყოველთვის ასეა), თუმცა დენდროგრამების მეთოდი უფრო თვალსაჩინოა, რაც უფრო მეტად ვლინდება, როდესაც ცდათა რაოდენობა ორზე მეტია.

***

ეს თავი ეყრდნობა [56], [64], [39], [27], [21], [11], [17] წიგნებს, რომლებიც გადმოცემული საკითხების გარდა მრავალ სხვა მასალასაც შეიცავს (დამატებითი ინფორმაციის მისაღებად სასარგებლო იქნება [1] და [3] წიგნების გაცნობაც). ეკონომისტებისათვის განკუთვნილი სახელმძღვანელოებიდან მკითხველს ვურჩევდით [60], [66], [72], [79] წიგნებს და აგრეთვე ქართულ ენაზე არსებულ შესაბამის ლიტერატურას: [8], [9], [13], [14], [15].

დასკვნები

შემთხვევითი ექსპერიმენტი პირობათა რაიმე კომპლექსის განხორციელებისას მისი ყველა გარკვეული აზრით მარტივი შედეგის ერთობლიობით, ანუ ω ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცით აღიწერება. A ხდომილობა არის Ω სივრცის ქვესიმრავლე. ამბობენ, რომ ხდება A ხდომილობა, თუკი ექსპერიმენტს ω ელემენტარული ხდომილობა

მოჰყვა შედეგად. ალბათობის ანუ ხდომილობის შესაძლებლობის ხარისხის იდეა ფარდობით სიხშირეთა მდგრადობიდან ჩნდება.

თუ ცდას აქვს ტოლშესაძლო შედეგთა სასრული რაოდენობა, მაშინ ხდომილობის ალბათობა ხელშემწყობ შედეგთა რაოდენობის შეფარდებაა ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობასთან. ესაა ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა. თუკი ცდის შედეგები რაიმე გეომეტრიულ ობიექტს (ვთქვათ ბრტყელ ფიგურას) შეადგენენ, მაშინ ხდომილობის, ანუ ამ ობიექტის ნაწილის ალბათობა შესაბამის ზომათა (ვთქვათ, ფართობთა) შეფარდებაა. ამგვარი ალბათობა გეომეტრიული ალბათობის სახელითაა ცნობილი. კლასიკურ და გეომეტრიულ ალბათობებს აერთიანებს პროპორციულობის მოსაზრებები. ორივე განსაზღვრება $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$ სახით ჩაიწერება, სადაც $|\cdot|$ პირველ შემთხვევაში სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას ნიშნავს, ხოლო მეორეში გეომეტრიულ ზომას (ვთქვათ, ფართობს).

გამოსავალ ალბათობათა ანუ არჩეული მოდელის სიავკარგე ფარდობით სიხშირეთა საშუალებით შეიძლება შემოწმდეს ცდათა გრძელ სერიებში.

საზოგადოდ, ხდომილობის ალბათობა აქსიომურად განიმარტება როგორც ხდომილობის ფუნქცია, რომელიც აუცილებელი ხდომილობისათვის 1-ის, ხოლო შეუძლებელი ხდომილობისათვის 0-ის ტოლია და რომელიც წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობების ჯამს შეუსაბამებს ამ ხდომილობათა ალბათობების ჯამს.

ნებისმიერი ორი A და B ხდომილობის ჯამის ალბათობა მოიცემა ფორმულით:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB).$$

პირობითი ალბათობა განისაზღვრება ტოლობით:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობისათვის გვაქვს შემდეგი ჯაჭვური წესი:

$$P(A_1\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}),$$

სადაც იგულისხმება, რომ $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$.

ხდომილობებს დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

პირობითი ალბათობებით გამოითქმის ორი მნიშვნელოვანი ფორმულა

სრული ალბათობის ფორმულა

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1)+\cdots+P(H_n)\cdot P(A|H_n)$$

სადაც $H_1,\ldots,H_n$ წყვილ-წყვილად უთავსებადია და ჯამში აუცილებელ ხდომილობას შეადგენენ და

ბაიესის ფორმულა

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A\,|\,H_k)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1)+\cdots+P(H_n)P(A\,|\,H_n)}, \qquad k=1,\ldots,n.$$

ალბათობათა გამოთვლისას კლასიკური განსაზღვრის მეშვეობით გამოიყენება კომბინატორული ანალიზის შემდეგი ფორმულები

წყობათა რაოდენობა $(n)_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$;

განმეორებით წყობათა რაოდენობა $G_n^r=n^r$;

გადანაცვლებათა რაოდენობა $(n)_n=n!$;

ჯუფთებათა რაოდენობა $C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

კერძოდ s-ბირთვიანი ყუთიდან, სადაც t ბირთვი თეთრია, n ბირთვის ამორჩევისას k თეთრი ბირთვის ამოღების ალბათობაა

$$P_n(k)=\begin{cases} C_n^k\left(\dfrac{t}{s}\right)^k\left(1-\dfrac{t}{s}\right)^{n-k}, & \text{როცა შერჩევა დაბრუნებითაა, } k=0,\dots,n. \\ \dfrac{C_t^k C_{s-t}^{n-k}}{C_s^n}, & \text{როცა შერჩევა დაუბრუნებლადაა, } k=0,\dots,n, \\ & \max(0,n-(s-t))\le k\le \min(t,n). \end{cases}$$

ამ ფორმულის პირველი სტრიქონით მოცემულ მიმდევრობას ალბათობის ბინომური განაწილება ეწოდება, ხოლო მეორე სტრიქონით მოცემულს – ჰიპერგეომეტრიული განაწილება.

შედგენილი ექსპერიმენტებისათვის ხდომილობათა ალბათობის გამოსათვლელად ჯაჭვური წესისა და სრული ალბათობის ფორმულის პარალელურად იყენებენ დენდროგრამების თვალსაჩინო მეთოდსაც.

სავარჯიშოები

4.1. ყოველი აღწერილი ექსპერიმენტისათვის ჩამოთვალეთ ყველა ელემენტარული ხდომილობა და გამოყავით ისინი, რომლებიც დასახელებულ ხდომილობას შეადგენენ:

(a) ექსპერიმენტი: კარტის სტანდარტული დასტიდან ვირჩევთ ერთ კარტს;
ხდომილობა: მოდის „ვალეტი".

(b) ექსპერიმენტი: ბავშვს ჯიბეში აქვს 5-თეთრიანი, 10-თეთრიანი, 20-თეთრიანი და 50-თეთრიანი თითო მონეტა და იგი შემთხვევით იღებს ჯიბიდან ერთ მონეტას;
ხდომილობა: მონეტის ღირებულება 20 თეთრს არ აღემატება.

(c) ექსპერიმენტი: ორი მონეტის ამოღება შემთხვევით (b)-ს პირობებში;
ხდომილობა: მონეტების ჯამური ღირებულება არ აღემატება 30 თეთრს.

(d) ექსპერიმენტი: სამშვილიან ოჯახში ვიწერთ ბავშვების სქესს და ვალაგებთ ასაკის მიხედვით;
ხდომილობა: ოჯახში არაუმეტეს ორი ვაჟია.

4.2. აგდებენ 5-თეთრიან, 10-თეთრიან და 20-თეთრიან თითო მონეტას და ასეთივე მიმდევრობით იწერენ გერბისა და საფასურის მიმდევრობას.

(a) ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები;

(b) მიანიჭეთ ელემენტარულ ხდომილობებს ალბათობები;

(c) იპოვეთ შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები:

A={ერთი გერბი მაინც მოდის},
B={მოდის ზუსტად ერთი გერბი},
C={პირველად გერბი მოდის}.

4.3. აგორებენ წესიერ კამათელს და აგდებენ წესიერ მონეტას.
(a) ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები;
(b) მიანიჭეთ ელემენტარულ ხდომილობებს ალბათობები;
(c) იპოვეთ შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები:
A={კამათელზეა 6, მონეტაზე – გერბი},
B={კამათელზეა ლუწი რიცხვი, მონეტაზე – საფასური},
C={მონეტაზეა საფასური}.

4.4. ურნაში ორი თეთრი და სამი შავი ბირთვია. იღებენ ორ ბირთვს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:
A={ორივე ბირთვი თეთრია},
B={ბირთვები სხვადასხვა ფერისაა},
C={ორივე ბირთვი შავია}.

4.5. ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ პირველი ბირთვი ურნაში უკან ბრუნდება.

4.6. კარტის დასტიდან, რომელშიც 36 კარტია, შემთხვევით იღებენ ორ კარტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს კარტი:
(a) ტუზია;
(b) ჯვრის ვალეტია;
(c) გულის შვიდიანი ან გულის ათიანია;
(d) არც ექვსიანია, არც ჯვარი.

4.7. ხისაგან დამზადებული კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, ათას ტოლ ნაწილად დახერხეს. მიღებული პატარა კუბები კარგად აურიეს და შემთხვევით აირჩიეს ერთი მათგანი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ არჩეულ კუბს ორი წახნაგი შეღებილი აქვს.

4.8. შემთხვევით აირჩევა სამი ციფრი (მაგალითად 0, 1, ... , 9 ციფრებით დანომრილი 10 ბირთვიდან დაბრუნებით იღებენ სამ ბირთვს და ნომრებს იწერენ). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:
(a) ყველა ციფრი სხვადასხვაა;
(b) სამივე ციფრი ერთნაირია;
(c) რომელიმე ორი ერთნაირია.

4.9. აგორებენ ორ კამათელს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ჯამში არ მიიღება რიცხვი 7.

4.10. რვასართულიანი სახლის ლიფტში პირველ სართულზე ხუთი კაცი შევიდა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ:

(a) ხუთივე სხვადასხვა სართულზე გამოვა;
(b) ორი მაინც გამოვა ერთსა და იმავე სართულზე.

4.11. r სტუდენტიდან ყოველმა შემთხვევით აირჩია n-ვაგონიანი ელექტრომატარებლის ვაგონი ($r \le n$). რა არის ალბათობა იმისა, რომ ყველა სხვადასხვა ვაგონში მოხვდება?

4.12. n ბირთვი, რომელთა შორის ორი თეთრია, შემთხვევითი მიმდევრობით გაამწკრივეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თეთრი ბირთვები ერთმანეთის გვერდით აღმოჩნდება?

იგივე ამოცანა ამოხსენით მაშინ, როცა ბირთვები წრეხაზზე ლაგდება.

4.13. A კორპორაციამ, რომელიც უსაფრთხო სამართებელს აწარმოებს და ყიდის როგორც თავის, ისე B და C კორპორაციების ნაწარმსაც, გამსაღებელი დააფინანსა იმისათვის, რომ მოაწყოს შესაბამისი რეკლამა. თუკი გამსაღებელს არ ჰქონდა საფუძველი უპირატესი რეკლამისა არცერთი კორპორაციის ნაკეთობისათვის და რეკლამაში მათ შემთხვევითი მიმდევრობით ალაგებდა, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სარეკლამო მასალაში:
(a) C პირველ ადგილზეა;
(b) C ბოლო ადგილზეა;
(c) C ბოლო ადგილზეა და B მეორეზე;
(d) A პირველ ადგილზეა და B მეორეზე.

4.14. 10 კაციდან, რომელთა შორისაა პეტრე, პავლე, ივანე და მიხეილი, ირჩევენ თავმჯდომარეს, მის პირველ მოადგილეს, მეორე მოადგილეს და მდივანს. როგორია ალბათობა იმისა, რომ:
(a) თითოეულ მათგანს რაიმე თანამდებობა შეხვდება;
(b) პეტრე თავმჯდომარე იქნება, ხოლო დანარჩენებს რაიმე თანამდებობა შეხვდება.

4.15. რიცხვთა 1,2,..., n მიმდევრობიდან შემთხვევით ირჩევენ ორ რიცხვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი მათგანი k-ზე ნაკლებია, მეორე კი k-ზე მეტი, სადაც $1<k<n$.

4.16. პარტიაში s დეტალია, რომელთა შორის l არასტანდარტულია. შემთხვევით ვირჩევთ n დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის k არასტანდარტულია.

4.17. ლატარიაში s ბილეთია, რომელთა შორის l მომგებინია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს ის პირი, რომელსაც n ბილეთი აქვს?

4.18. ნაკრძალში 20 ირემია, მათგან 7 დაიჭირეს, დაღი დაადეს და ისევ ტყეში გაუშვეს. გარკვეული დროის შემდეგ იმ 20-იდან 4 კვლავ დაიჭირეს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 დაღდასმული იქნება?

4.19. ხარისხის სახელმწიფო ინსპექტორი ამოწმებს სასურსათო მაღაზიაში რძის პროდუქტებს. ცნობილია, რომ რძის 20 პაკეტიდან ორი ამჟავებულია. ინსპექტორი შემთხვევით ირჩევს გასასინჯად 2 პაკეტს 20-დან. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის:

(a) არცერთი არ იქნება ამჟავებული;

(b) მხოლოდ ერთი იქნება ამჟავებული;

(c) ორივე ამჟავებული იქნება.

4.20. წინა ამოცანის პირობებში დამატებით დავუშვათ, რომ რძის 90% წინა დღისაა და ამჟავებული რძის შემცველი ის 2 პაკეტიც წინა დღისაა. ინსპექტორი ირჩევს ახალ სტრატეგიას. მას სურს ჯერ თარიღი შეამოწმოს, მერე კი თითო პაკეტი შეარჩიოს როგორც ძველი, ისე ახალი პაკეტებიდან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთ პაკეტში მაინც იქნება ამჟავებული რძე?

4.21. კონტროლიორი ამოწმებს 100-დეტალიან პარტიას, რაც იმაში გამოიხატება, რომ შემთხვევით ირჩევს 10 დეტალს და მათ ხარისხს ადგენს. თუ ყველა დეტალი კარგია, პარტია მიღებულად ითვლება. თუ არა, მაშინ პარტია იგზავნება დამატებით შემოწმებაზე. რა არის ალბათობა იმისა, რომ თუ პარტია შეიცავს 10 არასტანდარტულ დეტალს, იგი მიღებული იქნება?

4.22. ქარიშხალმა გაწყვიტა ხუთი კმ სიგრძის ტელეფონის საჰაერო ხაზი. როგორი იქნება უმარტივესი მოდელი იმ ხდომილობის ალბათობის დასადგენად, რომ გაწყვეტა მოხდა მესამე კილომეტრიან მონაკვეთზე. გამოთვალეთ ხდომილობის ალბათობა ამ მოდელის ფარგლებში.

4.23. მონაკვეთზე შემთხვევით აირჩევა ორი წერტილი. ეს წერტილები მონაკვეთს სამ მონაკვეთად ყოფს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათგან შეიძლება სამკუთხედის შედგენა.

4.24. ორი სიგნალი მიმღებ მოწყობილებაზე Δ დროის მანძილზე შემთხვევით მომენტებში მიიღება. მოწყობილობა მათ განარჩევს, თუ ისინი δ დროით მაინც არიან დაცილებული ერთმანეთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე სიგნალი მიღებული იქნება?

4.25. სამშობიარო სახლში უკანასკნელ 24 საათში ოთხი ბავშვი დაიბადა. ვთქვათ, ჩვენ სხვა ინფორმაცია არ გაგვაჩნია და მხოლოდ ახალშობილთა სქესი გვაინტერესებს.

(a) ჩამოთვალეთ ყველა შესაძლო ელემენტარული ხდომილობა და მიაწერეთ მათ შესაბამისი ალბათობები;

(b) გამოსახეთ შემდეგი ხდომილობები ელემენტარულ ხდომილობათა საშუალებით:

$A=\{$გაჩნდა ორი ვაჟი და ორი ქალი$\}$,

$B=\{$ვაჟები არ გაჩნდა$\}$,

$C=\{$ერთი მაინც ვაჟია$\}$.

(c) ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები, რომლებიც ხელს უწყობენ შემდეგ ხდომილობებს:

$AB, AC, BC, \overline{C}$, $\overline{AC}$;

(d) გამოთვალეთ $P\{A|C\}$. უთავსებადია თუ არა A და C ხდომილობები? დამოუკიდებელია თუ არა A და C ხდომილობები?

(e) გამოთვალეთ $P\{B|C\}$. უთავსებადია თუ არა B და C ხდომილობები? დამოუკიდებელია თუ არა B და C ხდომილობები?

4.26. ვთქვათ ექსპერიმენტი ოთხი ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 ელემენტარული ხდომილობით აღიწერება, რომელთა ალბათობებია 1/3, 1/3, 1/6 და x; თუ $A=\{\omega_1,\omega_3\}$, $B=\{\omega_1,\omega_4\}$ და $C=\{\omega_2,\omega_3\}$,

(a) იპოვეთ $P(A)$ და $P(B)$;

(b) იპოვეთ $P(A|B)$ და $P(B|C)$;

(c) იპოვეთ $P(A\cup B)$ და $P(A\cup C)$;

(d) უთავსებადია თუ არა A და B? დამოუკიდებელია თუ არა A და B?

4.27. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი კამათლის გაგორებისას ერთ-ერთ მათგანზე მაინც მოვა ექვსიანი, თუ ცნობილია, რომ სამივეზე სხვადასხვა რიცხვი მოვიდა.

4.28. სტუდენტმა 25 საგამოცდო ბილეთიდან 20 იცის. გამომცდელი მისთვის 3 საკითხს არჩევს. პირობითი ალბათობის ცნების გამოყენებით იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტმა სამივე საკითხი იცის. იგივე ალბათობა გამოთვალეთ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრის გამოყენებით.

4.29. ალბათობა იმისა, რომ წერილი მოთავსებულია რვაუჯრიან ყუთში, p-ს ტოლია. ამასთან, თუ წერილი ყუთშია, იგი თანაბარი ალბათობით ნებისმიერ უჯრაში შეიძლება აღმოჩნდეს. შვიდი უჯრის შემოწმების შედეგად გამოირკვა, რომ წერილი ამ უჯრებში არ არის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წერილი მერვე უჯრაშია.

4.30. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი A და B ხდომილობისათვის, თუ $P(B)>0$, მაშინ $P(A)$ მოთავსებულია $P(A|B)$ და $P(A|\overline{B})$ პირობით ალბათობებს შორის, ამასთან ან საზღვრები ერთმანეთს ემთხვევა, ან უტოლობები მკაცრია.

4.31. ვთქვათ, 10 კაციანი ჯგუფიდან შემთხვევით ასარჩევია 2 კაცი. თუ იმ ჯგუფში თქვენც ბრძანდებით, რა იქნება ალბათობა იმისა, რომ ამ ორი არჩეულიდან ერთი თქვენ იქნებით? (მითითებები: პირველი გზა – თქვენ აგირჩევენ, თუ ჯერ თქვენ აგირჩიეს, მერე კი სხვა ან ჯერ სხვა აარჩიეს, მერე კი თქვენ; მეორე გზა – გამოიყენეთ ჰიპერგეომეტრიული განაწილება).

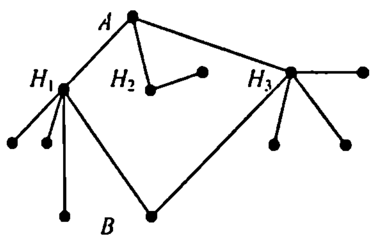
4.32. იმ ყუთიდან, რომელშიც 3 თეთრი და 2 შავი ბირთვია, შემთხვევით ამოიღეს 2 ბირთვი და ჩადეს მეორე ყუთში, რომელშიც 4 თეთრი და 4 შავი ბირთვი იყო. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი თეთრია.

4.33. ვთქვათ, სტუდენტმა 25 საგამოცდო ბილეთიდან მხოლოდ 5 ბილეთი იცის. როდის უფრო მოსალოდნელი, რომ მას მომზადებული ბილეთი შეხვდება, პირველ ნომრად თუ მეორე ნომრად გასვლისას?

4.34. ჩათვლა ტარდება შემდეგი წესით: დასმული ერთი საკითხის არცოდნის შემთხვევაში სტუდენტს დამატებით აძლევენ კიდევ ერთ საკითხს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ჩათვლას ვერ მიიღებს, თუ ჩათვლისათვის განკუთვნილი 10 საკითხიდან მან იცის 7 საკითხი?

4.35. ნაკეთობა აკმაყოფილებს სტანდარტს 0.96 ალბათობით. გამარტივებული კონტროლის პროცედურა დადებით შედეგს იძლევა 0.98 ალბათობით სტანდარტული ნაკეთობისათვის, ხოლო 0.05 ალბათობით ისეთივე შედეგს არასტანდარტული ნაკეთობისათვის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა, რომელიც ამ პროცედურას წარმატებით გაივლის, სტანდარტულია?

4.36. ტურისტი გზათა ყოველ გასაყარზე თანაბარი ალბათობით ირჩევს გზის გაგრძელებას (ოღონდ უკან არ ბრუნდება). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იგი A წერტილიდან მივა B წერტილში, თუ გზათა სქემა შემდეგია



4.37. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A_1,\dots,A_n$ ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ მათი ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=1-(1-P(A_1))\cdots(1-P(A_n))$.

4.38. კავშირგაბმულობის ხაზით გადაიცემა ციფრული ტექსტი. გადასაცემი ინფორმაციის ხასიათისა და იმ ენის თვისებების გამო, რომლის კოდირებითაც მიიღება გადასაცემი ტექსტი, ციფრების გამოჩენის ალბათობები განსხვავდება. ისინი მოცემულია შემდეგ ცხრილში, რომელიც შეიცავს გადაცემისას ციფრების დამახინჯების ალბათობასაც.

ციფრი	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
გამოჩენის ალბათობა	0.10	0.08	0.12	0.06	0.14	0.10	0.09	0.10	0.11	0.10
დამახინჯების ალბათობა	0.01	0.03	0.03	0.02	0.02	0.06	0.03	0.04	0.03	0.01

იპოვეთ ხუთი გადაცემული ციფრის დაუმახინჯებლად მიღების ალბათობა, თუ ციფრები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გადაიცემა.

4.39. სამმა ზეინკალმა დაამზადა ახალი პროდუქციის ერთი და იგივე რაოდენობა. ამ პროდუქციის მაღალი ხარისხის მიღწევისათვის გამოიყო პრემია 560 ლარი. გაანაწილეთ ეს პრემია ზეინკლებს შორის, თუ ალბათობა იმისა, რომ ზეინკლები მაღალი ხარისხის პროდუქციას დაამზადებენ, შესაბამისად არის 0.9, 0.94 და 0.96.

4.40. სამი ხარატი ამზადებდა ერთი და იგივე დასახელების ერთი და იგივე რაოდენობის დეტალებს. დამზადებული დეტალებიდან ზოგიერთი დეფექტიანი აღმოჩნდა, რის გამოც ხარატებმა უნდა გადაიხადონ 105 ლარი ჯარიმა. გაანაწილეთ ჯარიმა ხარატებს შორის, თუ ცნობილია, რომ ამ ხარატების მიერ დეფექტიანი დეტალების დამზადების ალბათობებია შესაბამისად 0.01, 0.02 და 0.03.

4.41. ვთქვათ ორი პირი A და B თამაშობს უყაიმო თამაშს და ისინი თანაბარი ძალისა არიან. რა უფრო მოსალოდნელია, რომ A მოუგებს B-ს 4-იდან 3 პარტიას, თუ 8-იდან 5 პარტიას?

4.42. საპრიზო ფონდის მოსაგებად ორი A და B პირი თამაშობს თამაშს, რომელიც გრძელდება 3 მოგებამდე. ერთ პარტიაში A-ს მოგების ალბათობაა p, ხოლო B-ს მოგებისა კი – $q = 1-p$. ვთქვათ თამაში შეწყ-და, როდესაც A-ს მოგებული ჰქონდა 2, ხოლო B-ს კი – 1 პარტია. როგორ უნდა განაწილდეს საპრიზო ფონდი? (მითითება: გამოიყენეთ A-სა და B-ს მოგების ალბათობები თამაშის გაგრძელების შემთხვევაში ორი დამატებითი პარტიით; ასეთი ტიპის ამოცანა პირველად გადაწყვიტეს პასკალმა და ფერმამ XVII საუკუნეში).

4.43. ორი მოთამაშიდან ერთი სამ მონეტას აგდებს, მეორე ორს. მოგებული ისაა, ვისაც მეტჯერ მოუვა გერბი. როგორია თითოეული მათგანის მოგების ალბათობა?

4.44. რამდენჯერ უნდა გავიმეოროთ დამოუკიდებელი ცდები იმისათვის რომ არანაკლებ r ალბათობით შეგვეძლოს ვამტკიცოთ, რომ ერთხელ მაინც მოხდება წარმატება, რომლის ალბათობა ყოველ ცალკეულ ცდაში არის p?

შენიშვნა: ერთი კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას 6-ის ერთხელ მაინც მოსვლის ალბათობა $1-(5/6)^4>1/2$. შევალიე დე მერე, რომელიც პასკალისა და ფერმას თანამედროვე იყო (XVII ს.), ფიქრობდა, რომ ორ კამათელზე წყვილი ექვსიანის ერთხელ მაინც გამოჩენის ალბათობისათვის იგივე უტოლობა 24 გაგორებას უნდა უზრუნველყო, ვინაიდან მისი აზრით ალბათობის 6-ჯერ შემცირებას 6-ჯერ მეტი ცდა უნდა დასჭირვებოდა. მაგრამ $1-(35/36)^{24}>1/2$ უტოლობა სწორი არაა. საჭიროა 25 გაგორება. ამაში მდგომარეობს ე.წ. შევალიე დე მერეს პარადოქსი, რომელიც პასკალმა და ფერმამ გადაწყვიტეს.

4.45. ვაშლის პარტიების ხარისხის ინსპექტორი მისაღებად თვლის „ცუდი" პარტიების მხოლოდ 10%-ს და იწუნებს „კარგი" პარტიების 5%-ს. საზოგადოდ, გამოგზავნილი პარტიების 90% „კარგია".

(a) განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ:
   1. მიიღება „ცუდი" პარტია;
   2. დაწუნებულია „კარგი" პარტია.

(b) ააგეთ ალბათობათა ცხრილი, ერთი მხრივ „კარგი" და „ცუდი" პარტიების, ხოლო მეორე მხრივ ინსპექტორის მიერ მიღების ან დაწუნების მიხედვით.

(c) განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ ინსპექტორი მცდარ გადაწყვეტილებას მიიღებს შემთხვევით შერჩეული პარტიის შემოწმებისას.

4.46. წინა ამოცანაში ააგეთ დენდროგრამა. პირველ ნაბიჯზე იყოს პარტიის ხარისხი, მეორეზე – ინსპექტორის ქმედება. განსაზღვრეთ ყოველი ცალკეული ბილიკის ალბათობა.

4.47. ყუთში 6 თეთრი, 4 შავი და 5 წითელი ბირთვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან 3 ბირთვის რიგ-რიგობით ამოღებისას გვექნება ბირთვების მიმდევრობა „წითელი, შავი, თეთრი", თუ ბირთვების ამოღება ხდება:

(a) დაბრუნებით;

(b) დაბრუნების გარეშე.

გამოიყენეთ დენდროგრამების მეთოდი.

4.48. ურნაში 4 თეთრი და 3 შავი ბირთვია. ურნიდან რიგ-რიგობით იღებენ ბირთვებს მანამ, სანამ არ ამოვა თეთრი ბირთვი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

(a) თეთრი ბირთვი ამოვა პირველ ნაბიჯზე;

(b) თეთრი ბირთვი ამოვა მეორე ნაბიჯზე;

(c) თეთრი ბირთვი ამოვა მესამე ნაბიჯზე;

(d) თეთრი ბირთვი ამოვა მეოთხე ნაბიჯზე;

დახაზეთ შესაბამისი დენდროგრამა. რას უდრის მიღებულ ალბათობათა ჯამი?

4.49. როგორ გამოითვლიდით ანალოგიურ ალბათობებს, რომ წინა ამოცანაში ბირთვები ყოველ ამოღებაზე უკან ბრუნდებოდეს?

დახაზეთ შესაბამისი დენდროგრამა და შეადარეთ წინა ამოცანის დენდროგრამას.

5

შემთხვევითი სიდიდეები და მათი განაწილება

ცვლად სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობები დამოკიდებულია შემთხვევითი ექსპერიმენტის ან მოვლენის შედეგზე, ეწოდება შემთხვევითი სიდიდე. შემთხვევით სიდიდეთა მაგალითებს წარმოადგენენ: რაიმე ფიზიკური სიდიდის გაზომვის შედეგები, მონეტის რომელიმე მხრის, ვთქვათ, გერბის გამოჩენათა რაოდენობა მონეტის განმეორებითი აგდებისას, სხვადასხვა დღეს გარკვეულ საქონელზე მოთხოვნათა რაოდენობა მაღაზიაში, ბროუნის ნაწილაკის მდგომარეობა, რომელსაც ვაკვირდებით მიკროსკოპში დროის სხვადასხვა მომენტში და სხვა.

§ 1. შემთხვევითი სიდიდის ფორმალური განსაზღვრა. განაწილების ფუნქცია

` თუ გვაქვს ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტული Ω სივრცე, მაშინ X შემთხვევითი სიდიდის ქვეშ იგულისხმება Ω-ზე განსაზღვრული

$$X=X(\omega),\ \omega\in\Omega,$$

რიცხვითი ფუნქცია. ვინაიდან X-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ისევე როგორც თვით Ω, სასრული ან თვლადია, ამიტომ X-ის რაიმე B სიმრავლეში მოხვედრის ალბათობა განისაზღვრება ელემენტარულ ხდომილობათა ალბათობების სასრული ჯამის ან მწკრივის ჯამის სახით:

$$P_X(B) = P\{\omega\colon X(\omega)\in B\} = \sum_{i:X(\omega_i)\in B} p_i\ ,$$

სადაც $p_i=P(\{\omega_i\})$, $i=1,2,\ldots$, ანუ X შემთხვევითი სიდიდის B სიმრავლეში (კერძოდ, [a,b] ინტერვალში) მოხვედრის ალბათობა იმ ელემენტარულ ხდომილობათა ალბათობების ჯამის ტოლია, რომლებიც $X(\omega)$ ფუნქციის საშუალებით B სიმრავლეში გადაისახებიან.

ვთქვათ, X შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ x_1-ის, x_2-ის, ... , ან x_n-ის ტოლი მნიშვნელობები. მაშინ $P_X(B)$ ალბათობა სავსებით განისაზღვრება

$$P_X(x_j) = P\{\omega\colon X(\omega)=x_j\} = \sum_{i:X(\omega_i)=x_j} p_i\,,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

ალბათობების საშუალებით:

$$P_X(B) = \sum_{x_j\in B} P_X(x_j)\,. \tag{5.1}$$

$P_X(x_1)$, $P_X(x_2)$, … ,$P_X(x_n)$ რიცხვთა ერთობლიობას X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს უწოდებენ. სავსებით ანალოგიური იქნება ის შემთხვევაც, როცა X-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე თვლადია.

მაგალითი **5.1.** ვთქვათ, ექსპერიმენტი მდგომარეობს ორი მონეტის აგდებაში. მაშინ ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგებია

$$\omega_1=(\text{გ გ}),\quad \omega_2=(\text{გ ს}),\quad \omega_3=(\text{ს გ}),\quad \omega_4=(\text{ს ს}),$$

სადაც „გ" ნიშნავს გერბის მოსვლას, ხოლო „ს" საფასურის გამოჩენას შესაბამის ადგილებზე. თუ ახლა X არის გერბების რაოდენობა ორი მონეტის აგდებისას, მაშინ

$$X(\omega_1)=2,\quad X(\omega_2)=X(\omega_3)=1,\quad X(\omega_4)=0.$$

თუ ყველა ელემენტარული ხდომილობა ტოლი ალბათობისაა, მაშინ

$$P\{X=2\}=P(\{\omega_1\})=1/4,$$

$$P\{X=1\}=P(\{\omega_2,\omega_3\})=P(\{\omega_2\})+P(\{\omega_3\})=1/2,$$

$$P\{X=0\}=P(\{\omega_4\})=1/4.$$

X შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ ბინომურს, თუ ის იღებს $0,1,\ldots,n$ მნიშვნელობებს შესაბამისად

$$P_X(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n,$$

ალბათობებით.

5.1 მაგალითში განხილული შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს ბინომურ შემთხვევით სიდიდეს ($n=2, p=1/2$).

როგორც ვხედავთ, 5.1 მაგალითისაგან განსხვავებით ბინომური შემთხვევით სიდიდის განსაზღვრისას ჩვენ არ დაგვიზუსტებია არც Ω სივრცის სტრუქტურა, არც $X(\omega)$ ფუნქცია და მხოლოდ ისაა მოცემული, თუ რა ალბათობით იღებს შემთხვევითი სიდიდე ამა თუ იმ მნიშვნელობას. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მრავალი ამოცანისათვის მნიშვნელოვანია არა ალბათობათა განაწილება საბაზისო ალბათურ სივრცეზე, არამედ განაწილება შემთხვევით სიდიდეთა მნიშვნელობათა სივრცეზე, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში განისაზღვრება განაწილების კანონით.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის ქვემოთ მოყვანილი ცნება გვაძლევს დისკრეტულ Ω-ზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა ალბათური სტრუქტურის მხოლოდ ეკვივალენტურ აღწერას, მაგრამ მოხერხებულია უფრო რთული ბუნების ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეების ალბათური ყოფაქცევის შესასწავლად, რისთვისაც $P_X(x)=P\{X(\omega)=x\}$ ალბათობების მოცემა აღარ არის საკმარისი.

ვთქვათ, x ნამდვილი რიცხვია და X არის შემთხვევითი სიდიდე, განსაზღვრული ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტულ სივრცეზე. ნამდვილი ცვლადის

$$F_X(x)=P\{\omega\colon X(\omega)\le x\} \tag{5.2}$$

ფუნქციას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

როგორც (5.1)-იდან ჩანს, განაწილების ფუნქცია სავსებით განისაზღვრება X-ის განაწილების კანონით:

$$F_X(x)=\sum_{i:x_i\le x} P_X(x_i) \tag{5.3}$$

და პირიქით, განაწილების ფუნქცია ცალსახად განსაზღვრავს X-ის განაწილების კანონს (იხ. ქვემოთ (5.10) თანაფარდობა).

საზოგადოდ (ნებისმიერი Ω-ს შემთხვევაში) შემთხვევითი სიდიდე ვუწოდოთ ელემენტარულ ხდომილობათა მოცემულ რიცხვით ფუნქციას, რომლისთვისაც განსაზღვრულია $\{\omega\colon\ X(\omega)\le x\}$ ხდომილობის ალბათობა ყოველი x ნამდვილი რიცხვისათვის.[1] $F_X(x)=P\{\omega\colon\ X(\omega)\le x\}$ ფუნქციას (5.2)-ის ანალოგიურად ვუწოდებთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას. მას ზოგჯერ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონსაც უწოდებენ და სიმოკლისათვის აღნიშნავენ $\mathcal{L}(X)$-ით. სინამდვილეში X-ის განაწილების კანონი ანუ განაწილება უფრო ფართო ცნებაა, ვიდრე განაწილების ფუნქცია, და იგი ცალსახად განისაზღვრება განაწილების ფუნქციით. ამ მიზეზის გამო ჩვენ თავისუფლად ვიხმართ $\mathcal{L}(X)$ აღნიშვნას X-ის განაწილებისათვის ვიგულისხმებთ რა, მაგალითად, რომ ჩანაწერი $\mathcal{L}(X)=F$, სადაც $F=F(x)$ ნამდვილ ღერძზე განსაზღვრული ფუნქციაა, ნიშნავს, რომ $F_X(x)=F(x)$.

ნებისმიერი X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები

1) მონოტონურობის თვისება: თუ $x_1<x_2$, მაშინ $F_X(x_1)\le F_X(x_2)$;

2) $F_X(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ და $F_X(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x)=1$;

3) მარჯვნიდან უწყვეტობის თვისება: $\lim\limits_{y\downarrow x} F_X(y)=F_X(x)$ ყოველი x-ისათვის, ანუ ნებისმიერი $(y_n,\ n\ge1)$ მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც $y_n\ge x$, $n\ge1$, და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=x$, სრულდება $\lim\limits_{n\to\infty} F_X(y_n)=F_X(x)$ ტოლობა.

იმის გამო, რომ $\{\omega : X(\omega)\le x_2\}=\{\omega : X(\omega)\le x_1\}+\{\omega : x_1<X(\omega)\le x\}$, გვაქვს X შემთხვევითი სიდიდის $(x_1,\ x_2]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობის შემდეგი წარმოდგენა:

$$F_X(x_2)-F_X(x_1)=P\{x_1<X\le x_2\}, \tag{5.4}$$

საიდანაც, რადგან ალბათობა არაუარყოფითია, ვღებულობთ 1) თვისებას. თვისება 2) ინტუიციურად გასაგებია, რადგან იგულისხმება, რომ შემთხვევითი სიდიდე ყოველთვის იღებს სასრულ მნიშვნელობებს, თუმცა მისი დამტკიცება, ისევე როგორც 3) თვისების

---

[1] ამრიგად, ზოგადი $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$ ალბათური სივრცის შემთხვევაში იგულისხმება, რომ როგორიც არ უნდა იყოს x ნამდვილი რიცხვი, Ω-ზე მოცემული $X(\omega)$ ნამდვილი ფუნქციისათვის $\{\omega\colon X(\omega)<x\}$ ხდომილობა შედის $\mathcal{A}$ სიგმა-ალგებრაში (ალბათობა ხომ მხოლოდ $\mathcal{A}$-ზეა განსაზღვრული); ასეთ ფუნქციებს ზომად ფუნქციებს უწოდებენ.

დამტკიცება, ეყრდნობა ალბათური ზომის უწყვეტობის თვისებას (რომელიც σ-ადიციურობის ეკვივალენტურია) და ჩვენ მას აქ არ მოვიყვანთ.[2]

ზემოთ განსაზღვრული ბინომური შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მაგალითს. საზოგადოდ, დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება შემთხვევით სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრული ან თვლადია (ანუ უსასრულოა, მაგრამ შესაძლებელია მნიშვნელობათა გადანომრვა). ცხადია, რომ ასეთი შემთხვევითი სიდიდე შესაძლოა ელემენტარულ ხდომილობა არათვლად სივრცეზეც იყოს განსაზღვრული.

დისკრეტულის გარდა ჩვენ განვიხილავთ ისეთ შემთხვევით სიდიდეებსაც, რომელთა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე ავსებს მთელ წრფეს, ნახევარწრფეს ან რაიმე სასრულ ინტერვალს.

§ 2. დისკრეტული და უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები. ვთქვათ, X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა (მნიშვნელობათა სასრული სიმრავლით) და მოცემულია შემდეგი სახის ცხრილი

X

x_1	x_2	. . .	x_r
f_1	f_2	. . .	f_r

(5.5)

სადაც პირველ სტრიქონში ჩამოთვლილია X სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა $x_1,x_2,\dots,x_n$, ხოლო მეორეში – ამ სიდიდის მიერ ყოველი შესაძლო x_k მნიშვნელობის მიღების ალბათობები

$$f_k=P\{X=x_k\},\ f_k>0,\ k=1,2,\dots,r,\ \text{და}\ f_1+f_2+\dots+f_r=1.$$

(5.5) სახის ცხრილს დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ან უბრალოდ განაწილებას უწოდებენ. (5.5)-ში იგულისხმება, რომ $x_1<x_2<\dots<x_r$.

ანალოგიურად განისაზღვრება ისეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონიც, რომლის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე თვლადია:

X

x_1	x_2	. . .	x_r	. . .
f_1	f_2	. . .	f_r	. . .

(5.6)

სადაც $f_k=P\{X=x_k\}>0$, $k=1,2,\dots,r,\dots$ და $f_1+f_2+\dots+f_r+\dots=1$; $x_i \neq x_k$, თუ $i\neq k$. უფრო მეტიც, ჩვენი განხილვის ფარგლებში სავსებით საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ (5.6) ში $x_1<x_2<\dots<x_r<\dots$.

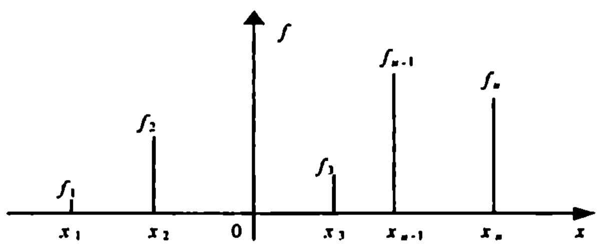
[2] თუ ნამდვილი ცვლადის რაიმე $F(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 1) – 3) თვისებებს, მაშინ არსებობს ისეთი X შემთხვევითი სიდიდე, რომ $F_X(x)=F(x)$.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის ცოდნა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ შემთხვევით სიდიდესთან დაკავშირებული ნებისმიერი ხდომილობის ალბათობა. მაგალითად, რადგან ხდომილობა $\{a<X\le b\}=\bigcup_{a<x_k\le b}\{X=x_k\}$ და $\{X=x_k\}$, $k=1,2,\ldots$, ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადია, გვექნება

$$P\{a<X\le b\}=\sum_{a<x_k\le b}P(X=x_k)=\sum_{k:a<x_k\le b}f_k, \tag{5.7}$$

სადაც $-\infty\le a\le b\le+\infty$.

ხშირად მოხერხებულია განაწილების კანონის გრაფიკული წარმოდგენა; ამისათვის შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს გადაზომავენ აბსცისათა ღერძზე და ამ წერტილებში აღმართავენ შესაბამისი ალბათობების ტოლი სიგრძის მართობებს:



ნახ. 5.1

მაგალითი **5.2.** X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	−1	0	1	2	3
	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

(5.8)

ვიპოვოთ ალბათობა, იმისა რომ: 1) $X\le 0$; 2) $X\le 3$; 3) $0<X\le 3$.

ამოხსნა. (5.7)-ისა და (5.8)-ის თანახმად

$P\{X\le 0\}=P\{X=-1\}+P\{X=0\}=0.1+0.15=0.25;$

$P\{X\le 2\}=P\{X=-1\}+P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1-P\{X=3\}=0.8;$

$P\{0<X\le 2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=P\{X\le 2\}-P\{X\le 0\}=0.55.$

ამრიგად, სამივე შემთხვევაში, საძიებელ ხდომილობათა ალბათობების გამოთვლა ხდება $\{X\le x\}$ სახის ხდომილობათა ალბათობების მეშვეობით. შევნიშნოთ, რომ (5.4) თანაფარდობის ძალით ეს ფაქტი სამართლიანია არა მხოლოდ ამ კონკრეტული მაგალითისათვის, არამედ ზოგადადაც.

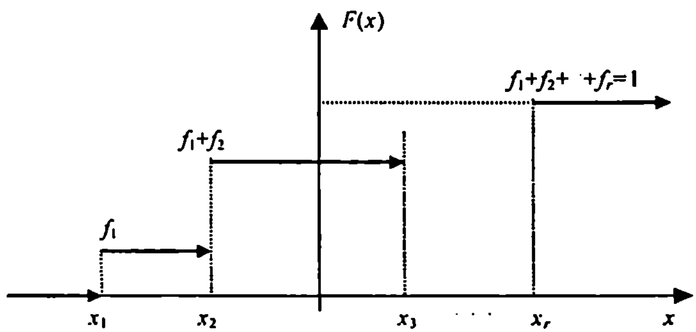
ვნახოთ, როგორი სახე ექნება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას, როდესაც X შემთხვევითი სიდიდე იღებს $x_1<x_2<\cdots<x_r$ მნიშვნელობებს, შესაბამისად $p_1,p_2,\ldots,p_r$ ალბათობებით. განაწილების ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად (5.3) ტოლობიდან

$$F_X(x_k) = P\{X \le x_k\} = f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i \tag{5.9}$$

და $F_X(x) = P\{X \le x\} = F(x_k)$ ყოველი x-ისათვის $[x_k, x_{k+1})$ ინტერვალიდან. ამრიგად, $F_X(x)$ წარმოადგენს არაკლებად ფუნქციას და ის ასე ჩაიწერება:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x < x_1, \\ f_1, & \text{როცა} \quad x_1 \le x < x_2, \\ f_1 + f_2, & \text{როცა} \quad x_2 \le x < x_3, \\ \ldots & \ldots \qquad \ldots \\ \sum_{i=1}^{k} f_i, & \text{როცა} \quad x_k \le x < x_{k+1}, \\ \ldots & \ldots \qquad \ldots. \\ 1, & \text{როცა} \quad x_r \le x \end{cases}$$

ხოლო ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 5.2.

თუ ანალოგიურად განვიხილავთ მნიშვნელობათა თვლადი რაოდენობის მქონე შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას, დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია არაკლებადი, უბან-უბან მუდმივი, მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა. ამასთან $F(x)$-ის წყვეტის წერტილებია x_k, k=1,2,..., და ნახტომის სიდიდე x_k წერტილში $f_k = P\{X = x_k\}$ ალბათობის ტოლია.

(5.9)-იდან ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

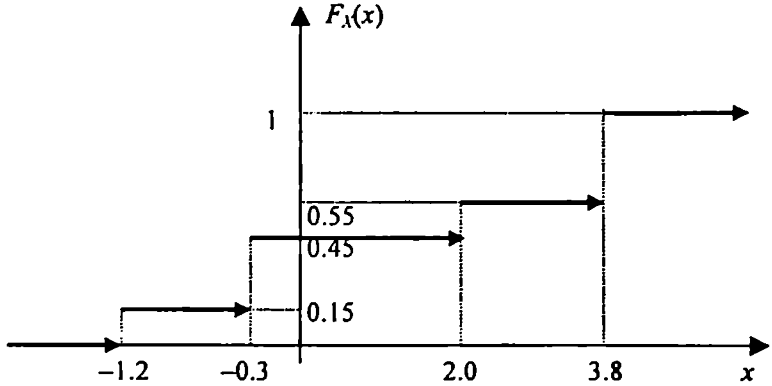
$$f_k = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}), \tag{5.10}$$

იგულისხმება, რომ $F_X(x_0)=0$.

თუ მოცემულია X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F_X(x)$, მაშინ ადვილია მისი განაწილების კანონის აღდგენა: $F_X(x)$ განაწილების ფუნქციის წყვეტის წერტილები წარმოადგენენ X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს, ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება (5.10) ფორმულით.

მაგალითი 5.3. აღვადგინოთ X-ის განაწილების კანონი, თუ

ა) X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 5.3-ზე



ნახ. 5.3.

ბ) დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x<-3, \\ 0.15, & \text{როცა} \quad -3\le x<0.5, \\ 0.45, & \text{როცა} \quad 0.5\le x<2\ , \\ 0.65, & \text{როცა} \quad 2\le x<5\ , \\ 0.8, & \text{როცა} \quad 5\le x<7\ , \\ 1, & \text{როცა} \quad 7\le x\ . \end{cases}$$

ამოხსნა. ზემოთ აღნიშნული თვისებების გამო ადვილი საჩვენებელია, რომ განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე:

ა)

X	−1.2	−0.3	2	3.8
	0.15	0.3	0.1	0.45

ბ)

X	−3	0.5	2	5	7
	0.15	0.3	0.2	0.15	0.2

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები. თუ X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლე ავსებს რაიმე სასრულ ან უსასრულო ინტერვალს, მისი განაწილების კანონის მოცემა ცხრილის მეშვეობით შეუძლებელი ხდება. ასეთი შემთხვევითი სიდიდე მაშინ ჩნდება, როცა ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე (ანუ შემთხვევითი

ექსპერიმენტის შედეგთა სიმრავლე) უფრო რთული ბუნებისაა, ვიდრე სასრული ან თვლადი სიმრავლე. საზოგადოდ, ასეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F_X(x) = P\ \{X \le x\} \tag{5.11}$$

(5.9) სახით აღარ ჩაიწერება.

შემოვიფარგლოთ ე.წ. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეების განხილვით.

ვიტყვით, რომ X არის უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე, თუ არსებობს მთელ ღერძზე განსაზღვრული ისეთი არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია, რომ

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy\,. \tag{5.12}$$

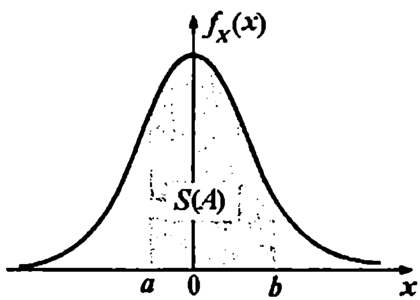
$f_X(x)$ ფუნქციას X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე ანუ ალბათობის სიმკვრივე ეწოდება (ქვემოთ ჩვენ დავინახავთ, რომ ასეთი სახელი ბუნებრივია).

ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწვეტია მთელ ღერძზე გარდა, შესაძლებელია, წერტილების სასრული რაოდენობისა. ალბათობის თეორიაში იმ განაწილების ფუნქციას, რომელსაც სიმკვრივე გააჩნია, აბსოლუტურად უწვეტს უწოდებენ. ამრიგად ტერმინს „უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე", რომელსაც სიმოკლისათვის ვიხმართ, შეესაბამება ალბათობის თეორიის ზუსტი ტერმინი „აბსოლუტურად უწყვეტი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდე".

კერძოდ, თუ a და b სასრული რიცხვებია, (5.12)-იდან გვექნება

$$P\{a{\le}X{\le}b\}{=}P\{a{\le}X{<}b\}{=}P\{a{<}X{\le}b\}{=}P\{a{<}X{<}b\}{=}\int_a^b f_X(x)dx \equiv F(b) - F(a). \tag{5.13}$$

უკანასკნელი ტოლობა ხაზს უსვამს იმ გარემოებას, რომ ნებისმიერი x-ისათვის $P\{X{=}x\}{=}0$. ამრიგად, ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მოთავსდება რაიმე ინტერვალში სიმკვრივის ფუნქციის გრაფიკსა და Ox ღერძს შორის მოთავსებული იმ ფიგურის $S(a,b)$ ფართობის ტოლია, რომელიც $x{=}a$ და $x{=}b$ წერტილებში აღმართულ მართობებს შორისაა მოქცეული (იხ.ნახ. 5.4).



$P\{a{\le}X{\le}b\}{=}S(a,b)$

ნახ. 5.4

შევადაროთ (5.6) და (5.9) ფორმულები, რომელთაც ადგილი აქვს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის, შესაბამისად (5.13) და (5.12) ფორმულებს. ადვილი შესამ-

ჩნევია ამ ფორმულების მსგავსება, განსხვავება კი იმაში მდგომარეობს, რომ შეკრების ოპერაცია შეიცვალა სიმკვრივიდან ინტეგრალის აღების ოპერაციით, რაც, როგორც ვიცით, შეკრების ოპერაციის უწვეტი ანალოგია.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისაგან განსხვავებით, როგორც ეს ინტეგრალის თვისებებიდან გამომდინარეობს, (5.12)-ით განსაზღვრული $F_X(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მთელ ღერძზე, ხოლო იმ წერტილებში, სადაც $f_X(x)$ სიმკვრივე უწყვეტია, განაწილების ფუნქციის წარმოებული სიმკვრივის ტოლია:

$$F_X'(x) = f_X(x). \tag{5.14}$$

წარმოებულის განსაზღვრისა და (5.4) ტოლობის თანახმად, (5.13)-ის გათვალისწინებით, ამ წერტილებში

$$f_X(x) = F_X'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x}, \tag{5.15}$$

რაც გვიჩვენებს, რომ $f_X(x)$ ყოფილა $[x,x+\Delta x]$ ინტერვალის სიგრძის ერთეულზე მოსული ალბათობის, ანუ ამ ინტერვალზე ალბათობის საშუალო სიმკვრივის ზღვარი, როცა ინტერვალის Δx სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფის. სწორედ ეს მსჯელობა ასაბუთებს, რომ $f_X(x)$ ფუნქციის სახელწოდება „ალბათობის სიმკვრივე" ბუნებრივია. გარდა ამისა (5.15) უსასრულოდ მცირე Δx-ისათვის გვაძლევს მიახლოებით ტოლობას

$$P\{x \le X \le x+\Delta x\} \approx f_X(x)\Delta x \tag{5.16}$$

(რომელიც სამართლიანია Δx -ზე მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდის სიზუსტით).

მაგალითი 5.4. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x < 0, \\ ax^2, & \text{როცა} \quad 0 \ge x < 3, \\ 0, & \text{როცა} \quad x \ge 3. \end{cases}$$

ა) განსაზღვრეთ a პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)$ განაწილების სიმკვრივეა; ბ) იპოვეთ შესაბამისი $F_X(x)$ განაწილების ფუნქცია;

გ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $F_X(x)$ განაწილების ფუნქციის მქონე შემთხვევითი სიდიდე მოხვდება (0, 4] შუალედში.

ამოხსნა. ვინაიდან $f(x) \ge 0$, როცა $a \ge 0$, a პარამეტრის მნიშვნელობა გამოითვლება სიმკვრივის იმ თვისებიდან, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1.$$

ჩავატაროთ გამოთვლები. გვაქვს

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_{0}^{3} f(u)du + \int_{3}^{\infty} f(u)du = \int_{0}^{3} ax^2 dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{3} = 9a\,.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ a=1/9.

განაწილების ფუნქციის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$, საიდანაც

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x<0, \\ \dfrac{x^3}{27}, & \text{როცა} \quad 0\le x<3, \\ 1, & \text{როცა} \quad x\ge 3. \end{cases}$$

მესამე შეკითხვაზე პასუხის მისაღებად ვისარგებლოთ (5.13) ფორმულით. მივიღებთ

$$F_X(4)-F_X(2)=19/27.$$

მაგალითი 5.5. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x<0, \\ x^2/4, & \text{როცა} \quad 0\le x\le 4, \\ 1, & \text{როცა} \quad x>4. \end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე.

§ 3. მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ მრავალგანზომილებიან შემთხვევით სიდიდეებს – შემთხვევით ვექტორებს. ჯერ შევისწავლოთ შემთხვევა, როცა ვექტორის კომპონენტების რაოდენობა k=2.

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეები. X და Y დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისაგან შედგენილ (X,Y) ვექტორს დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორი ეწოდება. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონი განისაზღვრება მისი შესაძლო მნიშვნელობებისა და შესაბამისი ალბათობების მოცემით. განაწილების კანონი ადვილად ჩაიწერება შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

ცხრილი 5.1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1m}
x_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2m}
...	...	...	...	...
x_n	f_{n1}	f_{n2}	...	f_{nm}

სადაც $x_1,x_2,...,x_n$ არის X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო $y_1,y_2,...,y_m$ – Y შემთხვევითი სიდიდისა, f_{ij} არის X-ის მიერ x_i მნიშვნელობის და ერთდროულად Y-ის მიერ y_j მნიშვნელობის მიღების ალბათობა, i=1,2,...,n, j=1,2,...,m, სადაც $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}=1$. ასეთ ცხრილს ეწოდება X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების კანონი ან მოკლედ, ერთობლივი განაწილება.

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონიდან ადვილად მიიღება მისი ნებისმიერი კომპონენტის განაწილების კანონი. მართლაც, ვინაიდან

$$\{X=x_i\}=\bigcup_{j=1}^{m}\{X=x_i,Y=y_j\},$$

გვექნება

$$f_{i\bullet}\equiv P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{m}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{m}f_{ij} \qquad (5.17)$$

და ანალოგიურად,

$$f_{\bullet j}\equiv P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{n}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{n}f_{ij}\,. \qquad (5.18)$$

ასეთი ხერხით მიღებულ განაწილების კანონებს, შესაბამისად X და Y შემთხვევითი სიდიდეების მარგინალური განაწილების კანონებს უწოდებენ. მაშასადამე, იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\{X=x_i\}$ ($\{Y=y_j\}$) ხდომილობის $f_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$ ($f_{\bullet j}=P\{Y=x_j\}$) ალბათობა, საჭიროა შევკრიბოთ ცხრილის i-ურ სტრიქონში (j-ურ სვეტში) მოთავსებული ალბათობები.

ცხრილი 5.2

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_m	
x_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1m}	$f_{1\bullet}$
x_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2m}	$f_{2\bullet}$
...	...	...	...	...	...
x_n	f_{n1}	f_{n2}	...	f_{nm}	$f_{n\bullet}$
	$f_{\bullet 1}$	$f_{\bullet 2}$	...	$f_{\bullet m}$	1

თუ ერთ-ერთი ან ორივე კომპონენტი მნიშვნელობათა თვლად რაოდენობას იღებს, სასრული ჯამები შესაბამისი უსასრულო ჯამებით შეიცვლება.

X და Y დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ყოველი (i,j) წყვილისათვის

$$f_{ij}=P\{X=x_i\,,\,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}. \qquad (5.19)$$

ამრიგად დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

$$f_{ij}=f_{i\bullet}f_{\bullet j}$$

მაგალითი 5.6. ვთქვათ ვაგორებთ ორ წესიერ კამათელს. X-ით აღვნიშნოთ პირველ კამათელზე, ხოლო Y-ით – მეორეზე მოსული ქულები. მაშინ (X,Y) წარმოადგენს ორგანზომილებიან დისკრეტულ შემთხვევით ვექტორს. ვნახოთ, როგორია ამ ვექტორის განაწილება და დავადგინოთ, არის თუ არა მისი კომპონენტები დამოუკიდებელი.

ამოხსნა. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების თანახმად, რადგან ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე 36-ელემენტიანია, ამიტომ თითოეული (i,j) წყვილის მოსვლის ალბათობა 1/36-ის ტოლია: $f_{ij}=\{X=i,Y=j\}=1/36$, $i,j=1,2,\ldots,6$. ამავე დროს:

$$f_{i\bullet}=P\{X=i\}=\frac{1}{6},\quad f_{\bullet j}=P\{Y=j\}=\frac{1}{6}$$

და მაშასადამე,

$$f_{ij}=f_{i\bullet}f_{\bullet j}$$

მაგალითი 5.7. 5.6 მაგალითის პირობებში შევამოწმოთ, არის თუ არა დამოუკიდებელი X და $|X-Y|$ შემთხვევითი სიდიდეები.

ამოხსნა. ადვილი დასანახია,რომ

$$P\{X=3,\ |X-Y|=4\}=0,$$

ხოლო

$$P\{X=3\}=1/6,\ \ P\{|X-Y|=4\}=4/36.$$

ამრიგად, რადგან

$$P\{X=3,|X-Y|=4\}\neq P\{X=3\}\ P\{|X-Y|=4\},$$

X და $|X-Y|$ შემთხვევითი სიდიდეები არ არის დამოუკიდებელი.

საზოგადოდ, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეზე განსაზღვრულ X და Y ფუნქციათა (X,Y) წყვილს ვუწოდოთ შემთხვევითი ვექტორი, თუ ყოველი x და y ნამდვილი რიცხვებისათვის განსაზღვრულია ალბათობა

$$F_{X,Y}(x,y)=P\,(X\le x,\ Y\le y\,). \tag{5.20}$$

$F_{X,Y}(X,Y)$ ფუნქციას (X,Y) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქცია ეწოდება. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, შემთხვევითი ვექტორის X და Y კომპონენტების განაწილების ფუნქციები განისაზღვრება F_{XY} ფუნქციის საშუალებით და ამდენად თითოეული მათგანი შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს. ამიტომ $F_{X,Y}(X,Y)$ ფუნქციას X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების ფუნქციასაც უწოდებენ.

ქვემოთ ვისარგებლებთ $F_{X,Y}(x,y)=F(x,y)$ შემოკლებული ჩანაწერით.

ჩამოვთვალოთ ერთობლივი განაწილების ფუნქციის თვისებები:

1) ნებისმიერი $(x,\ y)$ წყვილისათვის $0\le F(x,y)\le 1$ და $F(x,y)$არაკლებადი ფუნქციაა თითოეული არგუმენტით;

2) ნებისმიერი x-ისა და y-ისათვის $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$, სადაც

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y),\ F(x,-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)\ \text{და}\ F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y);$$

3) განაწილების ფუნქცია მარჯვნიდან უწყვეტია თითოეული არგუმენტით.

ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის (5.8) თვისების ანალოგს ორგანზომილებიან შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

4) $P\{x_1<X\leq x_2,\ y_1<Y\leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2)+F(x_1, y_1) \geq 0$,

ნებისმიერი $x_1 \leq x_2$ და $y_1 \leq y_2$ რიცხვებისათვის.

თუ ცნობილია ერთობლივი განაწილების ფუნქცია, შეგვიძლია აღვადგინოთ ცალკეული შემთხვევითი სიდიდის (მარგინალური) განაწილების ფუნქცია:

$$F(x, +\infty) = F_X(x),\ \ F(+\infty, y) = F_Y(y),$$

სადაც $F(x, +\infty) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)$, $F(+\infty, y)= \lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)$.

ამიტომ თუ (X,Y) წყვილი შემთხვევითი ვექტორია, მაშინ ამ ვექტორის თითოეული კომპონენტიც (ანუ X და Y) შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს. შევნიშნოთ, რომ ჩვენი განსაზღვრის მიხედვით, შებრუნებული დებულება არ არის მართებული, ანუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეებისაგან შედგენილი (X,Y) წყვილი შეიძლება არ იყოს შემთხვევითი ვექტორი, რადგან X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების $F_X(x)$ და $F_Y(y)$ ფუნქციების ცოდნა არ არის (საზოგადოდ) საკმარისი X-ისა და Y-ის ერთობლივი განაწილების ფუნქციის განსაზღვრისათვის.

(X,Y) შემთხვევით ვექტორს უწოდებენ უწყვეტს, თუ არსებობს ისეთი არაუარყოფითი $f(x,y)$ ფუნქცია, რომელსაც განაწილების სიმკვრივე ჰქვია, რომ სიბრტყის ნებისმიერი (x, y) წერტილისათვის, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,u)ds du\,. \tag{5.21}$$

განაწილების ფუნქციის 2) თვისებიდან ცხადია, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,u)dsdu = F(+\infty,+\infty) = 1\,.$$

(5.21)-იდან გამომდინარეობს (5.13) ტოლობათა ანალოგები მართკუთხედში (X,Y) ვექტორის მოხვედრის ალბათობებისათვის, რომლებიც ამ მართკუთხედზე $f(x,y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალის ტოლია იმის მიუხედავად ჩართულია თუ არა მართკუთხედში გვერდები, რაც $P\{X=x,\ Y=y\} = P\{X=x\} = P\{Y=y\} = 0$ ტოლობებსაც იძლევა ნებისმიერი x-ისა და y-ისათვის.

განაწილების სიმკვრივის უწყვეტობის წერტილებში არსებობს შემდეგი ორმაგი ზღვარი და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{P\{x < X \leq x+\Delta x, y < Y \leq y+\Delta y\}}{\Delta x\cdot\Delta y} = f(x,y). \tag{5.22}$$

იმ ფაქტიდან, რომ $f(s,u)$ ფუნქციის უწყვეტობის (x,y) წერტილში

$$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y)}{\Delta x\Delta y}$$

და განაწილების ფუნქციის 4) თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს შემდეგი ორმაგი ზღვარი

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}=f(x,y).$$

ეს უკანასკნელი თანაფარდობა (5.15) თანაფარდობის მსგავსად ამართლებს $f(x,y)$ ფუნქციის სახელწოდებას.

საზოგადოდ, X და Y შემთხვევით სიდიდეებს დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ ნებისმიერი $(a,b]$ და $(c,d]$ ინტერვალებისათვის $\{X\in(a,b]\}$ და $\{Y\in(c,d]\}$ ხდომილობები დამოუკიდებელია, ანუ

$$P\{X\in(a,b], Y\in(c,d]\}=P\{X\in(a,b]\}\,P\{Y\in(c,d]\}. \tag{5.23}$$

აქედან ავტომატურად გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობა

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y), \tag{5.24}$$

სადაც $F(x,y)$ არის X-ისა და Y-ის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია, ხოლო $F_X(x)$ და $F_Y(y)$ შესაბამისად X და Y განაწილების ფუნქციებია. პირიქით, მტკიცდება, რომ (5.24) იწვევს (5.23)-ს ნებისმიერი $(a,b]$ და $(c,d]$ ინტერვალებისათვის. ამდენად (5.24) შეიძლება გამოყენებულ იქნას, როგორც დამოუკიდებლობის განსაზღვრება.

მარგინალური განაწილების სიმკვრივეები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u)du \text{ და } f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s,y)ds. \tag{5.25}$$

ეს თანაფარდობები (5.17) და (5.18) ფორმულების უწყვეტი ანალოგებია. აქაც, ალბათობათა სათანადო ინდექსებით აჯამვის ოპერაცია შეცვლილია სიმკვრივიდან სათანადო ცვლადებით ინტეგრალის აღების ოპერაციით.

X და Y უწყვეტი შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ მათი ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე ტოლია შესაბამისი მარგინალური განაწილების სიმკვრივეების ნამრავლისა:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y). \tag{5.26}$$

ცხადია, ამ შემთხვევაში

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y).$$

ᲝᲠᲖᲔ ᲛᲔᲢᲘ ᲒᲐᲜᲖᲝᲛᲘᲚᲔᲑᲘᲡ ᲨᲔᲛᲗᲮᲕᲔᲕᲐ. სავსებით ანალოგიურად განიხილება

$$X=(X_1,\dots,X_k)$$

შემთხვევითი ვექტორი, რომელსაც k კომპონენტა აქვს. შემთხვევითი ვექტორი განსაზღვრულად ითვლება, თუ ყოველი ნამდვილი $x_1,\dots,x_k$ რიცხვებისათვის ცნობილია

$$F_X(x_1,\dots,x_k)=P\{X_1\le x_1,\dots,X_k\le x_k\}$$

ალბათობა. ამ ფუნქციას X შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქცია ანუ X_1, ... , X_k შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების ფუნქცია ეწოდება. ის, რომ X-ის კომპონენტები შემთხვევითი სიდიდეებია, ცხადი გახდება მას შემდეგ, რაც ქვემოთ ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ $F_X(x_1,...,x_k)$ ფუნქციიდან კომპონენტების $F_{X_i}(x_i)$ განაწილების ფუნქციის მიღების წესს.

X დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორია და მის განაწილებას დისკრეტული ჰქვია, თუ $F_X(x_1,...,x_k)$ ფუნქცია წარმოადგენს X-ის იმ $x^{(j)}$ მნიშვნელობათა $P\{X=x^{(j)}\}$ ალბათობების ჯამს, რომელთა კომპონენტები შესაბამისად x_1, ... , x_k რიცხვებს არ აღემატება.

$$P\{X=x^{(j)}\} = P_X\{x^{(j)}\}, j=1,2,...$$

მიმდევრობა იძლევა დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონს, $\sum_{i=1}^{n} P_X\{x^{(j)}\}=1$.

X-ს ეწოდება (აბსოლუტურად) უწყვეტი შემთხვევითი ვექტორი და მის განაწილებას (აბსოლუტურად) უწყვეტი ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი $f_X(u_1,...,u_k)$ არაუარყოფითი ფუნქცია, რომლის ინტეგრალი ყველა ცვლადის მიმართ $-\infty$-დან $+\infty$-მდე 1-ის ტოლია და რომელსაც X-ის განაწილების სიმკვრივე ეწოდება, ისეთი, რომ ყოველი ნამდვილი x_1, ... , x_k რიცხვებისათვის

$$F_X(x_1,...,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f_X(u_1,...,u_k)du_1...du_k \, .$$

თითოეული X_i ან X-ის ნებისმიერი ქვევექტორი ((X_i,X_j), (X_i,X_j,X_k)და ა.შ.) კვლავ შემთხვევითი სიდიდე ან შემთხვევითი ვექტორია და მარგინალური განაწილების ფუნქცია თითოეული კომპონენტის ან სხვა ქვევექტორისათვის მიიღება $F_X(x_1,...,x_k)$ ფუნქციის შესაბამისი არგუმენტების გარდა სხვა არგუმენტების მაგიერ $+\infty$-ის ჩასმით, ხოლო უწყვეტი განაწილების შემთხვევაში კომპონენტის ან სხვა ქვევექტორის სიმკვრივე მიიღება შესაბამისი არგუმენტის (არგუმენტების) გარდა დანარჩენების მიმართ ინტეგრალის აღებით $-\infty$-დან $+\infty$-მდე.

მაგალითად, თუ $X=(X_1,X_2,X_3)$, მაშინ

$$F_{X_1}(x_1) = F_X(x_1,+\infty,+\infty), \; f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1,u_2,u_3)du_2du_3 \, ,$$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_X(x_1,x_2,+\infty), \; f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1,x_2,u_3)du_3 \, ,$$

ანალოგიურად მიიღება $F_{X_2}(x_2)$, $F_{X_3}(x_3)$, $F_{X_1,X_3}(x_1,x_3)$, $F_{X_2,X_3}(x_2,x_3)$ განაწილების ფუნქციები და შესაბამისი სიმკვრივეები.

X_1, ... , X_k შემთხვევით სიდიდეებს დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ მათი ერთობლივი განაწილების ფუნქცია ანუ $X = (X_1, ... , X_k)$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქცია ცალკეული შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების ფუნქციათა ნამრავლია,

$$F_X(x_1,...,x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_k}(x_k) \, ,$$

რაც დისკრეტული განაწილების დროს

$$P\{(X_1,\dots,X_k)=(x_1,\dots,x_k)\} = P\{X_1=x_1\}\cdots P\{X_k=x_k\}$$

თანაფარდობის ეკვივალენტურია, ხოლო უწყვეტი განაწილების დროს კი

$$f_X(x_1,\dots,x_k) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_k}(x_k)$$

თანაფარდობისა ერთობლივი და ინდივიდუალური სიმკვრივეებისათვის.

თუ $I_1, \dots, I_k$ სასრული ან უსასრულო ინტერვალებია, მაშინ $X_1, \dots, X_k$ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა ნიშნავს

$$\{X_1\in I_1\}, \dots, \{X_k\in I_k\}$$

ხდომილობათა დამოუკიდებლობას:

$$P\{X_1\in I_1,\dots,X_k\in I_k\} = P\{X_1\in I_1\}\cdots P\{X_k\in I_k\}.$$

თუ ახლა $X^{(1)}=(X_1^{(1)},\dots,X_k^{(1)}), \dots, X^{(m)}=(X_1^{(m)},\dots,X_k^{(m)})$ შესაბამისად $k_1, \dots, k_m$ კომპონენტის მქონე შემთხვევითი ვექტორებია, მაშინ მათი დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ შედგენილი $k_1+\dots+k_m$ განზომილებიანი ვექტორის განაწილების ფუნქცია უდრის $X^{(1)},\dots X^{(m)}$ ვექტორთა განაწილების ფუნქციების ნამრავლს. დისკრეტული და უწყვეტი განაწილებების შემთხვევაში ეს ეკვივალენტურია ერთობლივი განაწილების კანონის და განაწილების სიმკვრივის წარმოდგენისა შესაბამისად ცალკეული ვექტორების განაწილების კანონებისა და განაწილების სიმკვრივეების ნამრავლის სახით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები $k_1, \dots, k_m$ განზომილების მქონე პარალელეპიპედებისათვის, რომელთა წიბოები სასრული ან უსასრულო ინტერვალებია

$$I^{(1)} = \{x^{(1)}:\ x_1^{(1)} \in I_1^{(1)},\dots,x_{k_1}^{(1)} \in I_{k_1}^{(1)}\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$I^{(m)} = \{x^{(m)}:\ x_1^{(m)} \in I_1^{(m)},\dots,x_{k_m}^{(m)} \in I_{k_m}^{(m)}\}.$$

ამ აღნიშვნებში $X^{(1)},\dots,X^{(m)}$ შემთხვევითი ვექტორების დამოუკიდებლობა ნიშნავს $\{X^{(1)}\in I^{(1)}\}, \dots, \{X^{(m)}\in I^{(m)}\}$ ხდომილობათა დამოუკიდებლობას:

$$P\{X^{(1)}\in I^{(1)}, \dots, X^{(m)}\in I^{(m)}\} = P\{X^{(1)}\in I^{(1)}\}\cdots P\{X^{(m)}\in I^{(m)}\}.$$

***

ეს თავი ეყრდნობა [11], [17], [21], [27], [39], [56], [64] წიგნებს, რომლებიც გადმოცემული საკითხების გარდა მრავალ სხვა მასალასაც შეიცავს (დამატებითი ინფორმაციის მისაღებად სასარგებლო იქნება [1] და [3] წიგნების გაცნობაც). ეკონომისტებისათვის განკუთვნილი სახელმძღვანელოებიდან მკითხველს ვურჩევდით [60], [66], [72], [79] წიგნებს და აგრეთვე ქართულ ენაზე არსებულ შესაბამის ლიტერატურას: [8], [9], [13], [14], [15].

დასკვნები

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობას ექსპერიმენტის შედეგი განსაზღვრავს. ფორმალურად ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტული (სასრული ან თვლადი) სივრცისათვის შემთხვევითი სიდიდე არის ამ სივრცეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქცია. შემთხვევითი სიდიდე ზოგადი ბუნების სივრცეზეც განისაზღვრება, როგორც ელემენტარული ხდომილობის ფუნქცია იმ მოთხოვნით, რომ ყოველი x ნამდვილი რიცხვისათვის განსაზღვრული იყოს

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) \le x\}$$

ალბათობა. ნამდვილი ცვლადის $F_X(x)$ ფუნქციას X-ის განაწილების ფუნქცია ეწოდება. განაწილების ფუნქცია მონოტონურია, მარჯვნიდან უწყვეტია და პლუს და მინუს უსასრულობაში გააჩნია ზღვრები, რომლებიც შესაბამისად 1 და 0-ია

დისკრეტული ეწოდება შემთხვევით სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრული ან თვლადია. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებს (დალაგებულს ზრდის მიხედვით) უთანადებს შესაბამის ალბათობებს. არაკლებადი საფეხურა ფუნქცია ასეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა.

უწყვეტი ეწოდება შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების ფუნქცია x წერტილში წარმოადგენს $-\infty$-იდან x-ამდე გავრცელებულ ინტეგრალს არაუარყოფითი ფუნქციიდან, რომლის ინტეგრალიც მთელ წრფეზე 1-ს უდრის და რომელსაც განაწილების სიმკვრივე ეწოდება.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე ყოველ ცალკეულ მნიშვნელობას 0-ის ტოლი ალბათობით იღებს და მისი განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მთელ ღერძზე, ხოლო განაწილების ფუნქციის წარმოებული განაწილების სიმკვრივის ტოლია ყოველ წერტილში, სადაც სიმკვრივე უწყვეტია.

შემთხვევითი ვექტორის კომპონენტები შემთხვევითი სიდიდეებია. ორგანზომილებიანი დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონი მოიცემა ალბათობათა მატრიცით, რომლის ელემენტების ჯამი 1-ია. ამ მატრიცის სტრიქონების ჯამები და სვეტების ჯამები შესაბამისად განსაზღვრავენ შემთხვევითი ვექტორის პირველი და მეორე კომპონენტების მარგინალურ (კერძო) განაწილებებს. ორგანზომილებიანი უწყვეტი შემთხვევითი ვექტორი მოიცემა ორი ცვლადის არაუარყოფითი ფუნქციით, რომლის ინტეგრალიც მთელ სიბრტყეზე 1-ია და რომელსაც ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე ეწოდება. მისი მეორე ცვლადით ინტეგრება მთელ წრფეზე იძლევა პირველი კომპონენტის მარგინალურ სიმკვრივეს, ხოლო პირველი ცვლადით ინტეგრება — მეორე კომპონენტის მარგინალურ სიმკვრივეს. ბუნებრივად განისაზღვრება ერთობლივი განაწილებისა და მარგინალური განაწილების ფუნქციები.

ანალოგიურად შემოდის მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორის განაწილება დისკრეტულ და უწყვეტ შემთხვევებში, განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე, მარგინალური განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე.

შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა ერთობლივი განაწილების ფუნქციის წარმოდგენას ნიშნავს მარგინალური განაწილების ფუნქციათა ნამრავლის სახით, რაც დისკრეტულ შემთხვევაში ნიშნავს, რომ ერთობლივი განაწილების კანონის მნიშვნელობა ყოველ წყვილში მარგინალურ ალბათობათა ნამრავლის ტოლია, ხოლო უწყვეტში — ერთობლივი სიმკვრივის წარმოდგენას მარგინალურ სიმკვრივეთა ნამრავლად. ამგვარადვე განისაზღვრება შემთხვევითი ვექტორების დამოუკიდებლობა.

სავარჯიშოები

5.1. შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს: $x_1=3$, $x_2=6$, $x_3=8$. ცნობილია პირველი ორი მნიშვნელობის ალბათობები: $p_1=0.3$, $p_2=0.5$. დაწერეთ ამ სიდიდის განაწილების კანონი.

5.2. X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X						
	–2	–1	1	2	4	6
	0.1	0.15	0.13	0.17	0.25	0.2

გამოთვალეთ ალბათობა, იმისა რომ: ა) $X\le 0$; ბ) $X\le 3$; გ) $X<2$; დ) $-1<X\le 4$; ე) $X>1$.

5.3. აგდებენ სამ სიმეტრიულ მონეტას. დაწერეთ გერბის მოსვლათა განაწილების კანონი და ააგეთ განაწილების ფუნქციის გრაფიკი.

5.4. აგდებენ ორ კამათელს. დაწერეთ მოსულ რიცხვთა ჯამის განაწილების კანონი და ააგეთ განაწილების ფუნქციის გრაფიკი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების ჯამი იქნება 8.

5.5. აგდებენ ორ კამათელს. დაწერეთ მოსულ რიცხვთა სხვაობის მოდულის განაწილების კანონი და ააგეთ განაწილების ფუნქციის გრაფიკი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების სხვაობა იქნება 2.

5.6. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X					
	–7	–3	0	1	4
	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

იპოვეთ $Y=X+10$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილეის კანონი.

5.7. დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X			
	–2	2	3
	0.2	0.3	0.5

იპოვეთ $Y=X^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

5.8. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია

X		
	0	1
	q_x	p_x

Y		
	0	1
	q_Y	p_Y

იპოვეთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები

ა) $Z=X+Y$, ბ) $U=X-Y$, გ) $V=X\cdot Y$

5.9. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X			
	1	2	4
	0.5	0.2	0.3

იპოვეთ $Y=1/(3-X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

5.10. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	1	3	5	7	9
	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

იპოვეთ $Z = \min(X,4)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

5.11. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

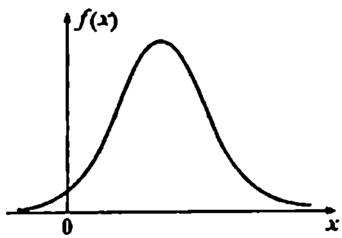
X	−1	0	2	3	5
	0.15	0.2	0.3	0.3	0.15

იპოვეთ $Z = \max(X,2)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

5.12. შეიძლება თუ არა, რომ არგუმენტის რაიმე მნიშვნელობისათვის ა) განაწილების ფუნქცია მეტი იყოს ერთზე? ბ) განაწილების სიმკვრივე მეტი იყოს ერთზე? გ) განაწილების ფუნქცია იყოს უარყოფითი? დ) განაწილების სიმკვრივე იყოს უარყოფითი?

5.13. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა $F_X(x)$. როგორია $Y=aX+b$ შემთხვევითი სიდიდის $F_Y(x)$ განაწილების ფუნქცია, სადაც a და b მუდმივებია.

5.14. მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი:



იგივე გრაფიკზე ააგეთ $Y = X+b$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივის გრფიკი, სადაც b მუდმივია.

5.15. მოცემულია (X,Y) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

X \ Y	−2	0	1
0	1/21	1/21	5/21
1	2/21	4/21	1/21
2	1/21	5/21	1/21

ვიპოვოთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

5.16. ცდა მდგომარეობს ორი ტეტრაედრის აგდებაში, რომლის წახნაგებს აწერია რიცხვები 1,2,3,4. X_1-ით აღვნიშნოთ, ტეტრაედრზე მოსული ქულა ანუ რიცხვი, რომელიც დავარდნილი ტეტრაედრის ფუძეზე წერია, ხოლო X_2-ით მეორე ტეტრაედრზე მოსული რიცხვი. ააგეთ Y_1 და Y_2 შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი და მარგინალური განაწილების კანონები, თუ

ა) $Y_1 = X_1 + X_2$ და $Y_2 = |X_1 - X_2|$, ბ) $Y_1 = X_1$ და $Y_2 = \min(X_1, X_2)$,
გ) $Y_1 = X_1$ და $Y_2 = |X_1 - X_2|$, დ) $Y_1 = X_1$ და $Y_2 = |2X_1 - X_2|$,

დაადგინეთ, დამოუკიდებელია თუ არა Y_1 და Y_2 შემთხვევითი სიდიდეები.

5.17. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია:

X

0	1	2	3
0.2	0.3	0.4	0.1

და

Y

1	3	4
0.7	0.2	0.1

ააგეთ $Z = \min(X,Y)$ და $U = \max(X,Y)$ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონი.

5.18. გვაქვს X_1, X_2, X_3 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, რომელთა საერთო განაწილებაა

X

1	2	3
1/3	1/3	1/3

იპოვეთ $X = \max(X_1, X_2, X_3)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

5.19. X_1, X_2, X_3, X_4 შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია და აქვთ თანაბარი განაწილება (0,1) ინტერვალში. იპოვეთ $X=\max(X_1, X_2, X_3, X_4)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, სიმკვრივე და მათემატიკური ლოდინი. ამოხსენით იგივე ამოცანა n დამოუკიდებელი თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში.

5.20. X_1, X_2, X_3 შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია და აქვთ მაჩვენებლიანი განაწილება შესაბამისად λ_1, λ_2, λ_3 პარამეტრებით, ე.ი.

$$f_{X_i} = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

იპოვეთ $X = \max(X_1, X_2, X_3)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე. როგორი იქნება პასუხი n დამოუკიდებელი მაჩვენებლიანი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდისათვის?

6

შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლები

§ 1. მათემატიკური ლოდინი და მდებარეობის სხვა მახასიათებლები

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (საშუალო მნიშვნელობა). შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს შორის, უპირველეს ყოვლისა, უნდა განვსაზღვროთ ისეთები, რომელთა "გარშემოც" ჯგუფდება შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი. ერთ-ერთ ასეთ რიცხვით მახასიათებელს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, რომელსაც მისი არსიდან გამომდინარე საშუალო მნიშვნელობასაც უწოდებენ. განვმარტოთ ეს ცნება ჯერ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის. ამისათვის განვიხილოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების კანონია

X	x_1	x_2	...	x_r
	f_1	f_2	...	f_r

. (6.1)

სადაც $f_i=P\{X=x_i\}$, $\sum_{i=1}^{r} f_i = 1$.

დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ანუ მისი საშუალო მნიშვნელობა (აღინიშნება EX-ით, E არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა Expectation – ლოდინი, მოსალოდნელობა) ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების შესაბამის ალბათობებზე ნამრავლთა ჯამს, ანუ რიცხვს

$$EX = \sum_{i=1}^{r} x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_r f_r \tag{6.2}$$

იმისათვის, რომ გასაგები გახდეს მათემატიკური ლოდინის შინაარსი, დავუშვათ, რომ ჩავატარეთ n დაკვირვება (ცდა) X შემთხვევით სიდიდეზე. ვთქვათ, მან n_1-ჯერ მიიღო მნიშვნელობა x_1, n_2-ჯერ – მნიშვნელობა x_2, ... , n_r-ჯერ – მნიშვნელობა x_r. ამრიგად, $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$. მაშინ შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული მნიშვნელობების არითმეტიკული საშუალო $\bar{x}$ გამოითვლება ფორმულით $\bar{x} = \dfrac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_r n_r}{n}$,

ე.ი.,

$$\bar{x} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \cdots + x_r \frac{n_r}{n}. \tag{6.3}$$

შევნიშნოთ, რომ $\frac{n_1}{n}$ არის x_1-ის განხორციელების ფარდობითი სიხშირე, $\frac{n_2}{n}$ არის x_2-ის განხორციელების ფარდობითი სიხშირე და ა.შ. დავუშვათ, რომ დაკვირვებათა რაოდენობა საკმარისად დიდია. მაშინ ფარდობითი სიხშირე ახლოსაა ხდომილობის ალბათობასთან

$$\frac{n_1}{n} \approx f_1,\ \frac{n_2}{n} \approx f_2,\ \dots,\ \frac{n_r}{n} \approx f_r.$$

(6.3) გამოსახულებაში ფარდობით სიხშირეებს თუ შევცვლით შესაბამისი ალბათობებით და გავითვალისწინებთ მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრებას, მივიღებთ, რომ

$$\bar{x} \approx x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k = EX.$$

მიღებული შედეგის ალბათური შინაარსი შემდეგში მგომარეობს: შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი დაახლოებით ტოლია ამ შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებულ მნიშვნელობების არითმეტიკული საშუალოსი.

ცხადია, რომ აუცილებელი არ არის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლი იყოს მისი რომელიმე შესაძლო მნიშვნელობისა.

მაგალითი 6.1. გამოვთვალოთ 5.2 მაგალითში მოცემული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. მონაცემები და ჩასატარებელი გამოთვლები წარმოვიდგინოთ 6.1. ცხრილის სახით

ცხრილი 6.1.

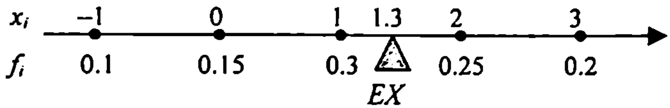
i	x_i	f_i	$x_i f_i$
1	–1	0.10	– 0,1
2	0	0.15	0
3	1	0.30	0,3
4	2	0.25	0,5
5	3	0.20	0,6
			$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 1.3$

თუ გავიხსენებთ არითმეტიკული საშუალოს ფიზიკურ ინტერპრეტაციას მესამე თავის § 1-დან და წარმოვიდგენთ, რომ f_i (f_1=0.1, f_2=0.15, f_3=0.3, f_4=0.25, f_5=0.2) მასები მოთავსებულია OX ღერძის x_i (x_1= –1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, x_5=3) წერტილებში და თავად OX ღერძს მასა არა აქვს, მაშინ ამ ღერძის არცერთ წერტილს არა აქვს დადებითი მასა გარდა $x_1, x_2, \dots, x_5$ წერტილებისა და EX არის იმ საყრდენი წერტილის აბსცისა, რომლის მიმართ ღერძი წერტილოვანი მასებით წონასწორობაში იქნებოდა (იხ. ნახ. 6.1).

წერტილოვანი მასების (6.1) სახის განაწილების კანონისათვის (ერთეულოვანი ჯამური მასით) ეს ფაქტი ასე გამოითქმის:

$$\sum_{i=1}^{r} (x_i - EX) f_i = 0$$

(შეადარე (3.3) თანაფარდობას).



ნახ. 6.1

იმ შემთხვევაში, როდესაც განაწილების კანონს აქვს (5.6) სახე

$$EX = \sum_{i=0}^{\infty} x_i f_i ,$$

თუ ცნობილია, რომ $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| f_i < \infty$.

უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (6.4)$$

რიცხვს, სადაც $f_X(x)$ არის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $\int_{-\infty}^{+\infty} | u | f(u)\, du < \infty$.

რადგან (5.16) თანაფარდობის თანახმად X შემთხვევითი სიდიდის $(x, x+\Delta x)$ მცირე ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა დაახლოებით $f_X(x)\Delta x$-ის ტოლია და ამ ინტერვალში X სიდიდე დაახლოებით x-ის ტოლ მნიშვნელობას იღებს, მაშინ X-ის საშუალო მნიშვნელობა მიახლოებით ტოლი უნდა იყოს

$$\Sigma\, x f_X(x)\, \Delta x$$

ჯამისა, სადაც ჯამი ვრცელდება ყველა Δx ინტერვალზე შემთხვევითი სიდიდის უმცირესი მნიშვნელობიდან მის უდიდეს მნიშვნელობამდე. ზღვარზე გადასვლისას, როდესაც $\Delta x \to 0$, ვიღებთ (6.4) ფორმულას შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობისათვის.

დამტკიცების გარეშე მოგვყავს მათემატიკური ლოდინის ძირითადი თვისებები, რომლებიც უშუალოდ მოწმდება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის და უწყვეტ შემთხვევაში კი ინტეგრალის თვისებებიდან გამომდინარეობს.

1) $Ec=c$, ანუ მუდმივის მათემატიკური ლოდინი ამ მუდმივის ტოლია.
2) $EcX=cEX$, ანუ მუდმივი გადის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ;
3) $E(c_1X_1+c_2X_2)=c_1EX_1+c_2EX_2$, ანუ წრფივი კომბინაციის მათემატიკური ლოდინი ლოდინების წრფივი კომბინაციის ტოლია;
4) თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $EXY=EX \cdot EY$.

შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი. ხშირად მოცემულია რაიმე X შემთხვევითი სიდიდე ცნობილი განაწილების კანონით და გვაინტერესებს $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის გამოთვლა, სადაც $h(x)$

ნამდვილი x ცვლადის რაიმე ფუნქციაა. ამისათვის ჯერ შეიძლება დავადგინოთ Y შემთხვევითი სიდიდის განაწილება და შემდეგ გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი. უფრო მარტივია $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი გამოითვალოს X-ის განაწილების ტერმინებში.

ვთქვათ $Y=h(X)$ შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს y_j, $j=1,2,\ldots$ განსხვავებული მნიშვნელობა შესაბამისად $P_Y(y_j)=P(h(X)=y_j)$ ალბათობით. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განსაზღვრის თანახმად

$$Eh(X)=\sum_j y_j P_Y(y_j)$$

ცხადია, $Y=h(X)$ შემთხვევითმა სიდიდემ შეიძლება მიიღოს y_j მნიშვნელობა X სიდიდის მიერ რამდენიმე სხვადასხვა მნიშვნელობის მიღების შედეგად, რის გამოც $h(X)$ სიდიდის განაწილება X-ის განაწილების საშუალებით შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება

$$P_Y(y_j)=P(h(X)=y_j)=\sum_{i:h(x_i)=y_j} P_X(x_i),$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ

$$Eh(X)=\sum_j y_j \sum_{i:h(x_i)=y_j} P_X(x_i)=\sum_i h(x_i)P_X(x_i). \tag{6.5}$$

უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში, თუმცა $h(X)$ შემთხვევითი სიდიდე საზოგადოდ შეიძლება უწყვეტი არ აღმოჩნდეს, მისი მათემატიკური ლოდინის ანგარიში ხერხდება მსგავსი

$$EY=\int_{-\infty}^{\infty} h(u)f_X(u)du \tag{6.6}$$

ფორმულით. ეს ფაქტი გამომდინარეობს ინტეგრალის ზოგადი თეორიიდან (ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულის გამოყენებით) და ჩვენ დამტკიცებას არ მოვიყვანთ.

გავარჩიოთ შესაბამისი მაგალითები.

მაგალითი **6.2.** ვთქვათ, $h(x)=x^3-4x$ და X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	-2	-1	0	2
	0.1	0.3	0.4	0.2

ა) დავადგინოთ $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი;

ბ) გამოვთვალოთ $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა.

ა) ცხადია, რომ $h(-2)=h(0)=h(2)=0$ და $h(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)=3$. ამიტომ Y შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0 და 3. დავადგინოთ განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{Y=0\}$ და $P\{Y=3\}$. რადგან $\{X=-2\}$, $\{X=0\}$ და $\{X=2\}$ ხდომილობები უთავსებადია, ალბათობათა შეკრების წესის თანახმად გვექნება:

$$P\{Y=0\}=P\{\{X=-2\}\cup\{X=0\}\cup\{X=2\}\}=P\{X=-2\}+P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.1+0.4+0.2=0.7$$

და $P\{Y=3\}=P\{X=-1\}=0.3$. ამიტომ საბოლოოდ, $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე:

Y		
	0	3
	0.7	0.3

რომლისთვისაც $EY=0,9$.

ბ)ახლა გამოვთვალოთ EY (6.5) ფორმულით: გვაქვს

$$EY=h(-2)\cdot 0,1+h(-1)\cdot 0,3+h(0)\cdot 0,4+h(2)\cdot 0,2=0\cdot 0,1+3\cdot 0,3+0\cdot 0,4+0\cdot 0,2=0,9.$$

მედიანა, მოდა. შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის მეორე მნიშვნელოვან მახასიათებელს წარმოადგენს მედიანა, რომელსაც ხშირად შემთხვევითი სიდიდის ცენტრალურ მნიშვნელობასაც უწოდებენ. შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა დაჯგუფება მისი მათემატიკური ლოდინის მიმართ ყოველთვის არ არის მოხერხებული. მაგალითად, შემთხვევითმა სიდიდემ მცირე ალბათობით შეიძლება მიიღოს ძალიან დიდი მნიშვნელობა და ამან არსებითი გავლენა მოახდინოს მისი მათემატიკური ლოდინის სიდიდეზე. გარდა ამისა შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი შეიძლება არც არსებობდეს. ასეთ დროს შემთხვევითი სიდიდის ცენტრირების მიზნით ხშირად მედიანას იყენებენ. შემთხვევითი სიდიდის მედიანა მისი მათემატიკური ლოდინისაგან განსხვავებით, ყოველთვის არსებობს და მდგრადია შემთხვევითი სიდიდის ექსტრემალური მნიშვნელობის მიმართ, თუმცა ის ყოველთვის არ არის ერთადერთი.

X შემთხვევითი სიდიდის (ან მისი შესაბამისი განაწილების ფუნქციის) მედიანა ეწოდება ისეთ M რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება

$$P(X\le M)\ge 1/2,\ P(X\ge M)\ge 1/2 \qquad (6.7)$$

უტოლობები.

შევნიშნოთ, რომ (6.7) უტოლობათა წყვილი შემდეგი ორმხრივი უტოლობის ეკვივალენტურია

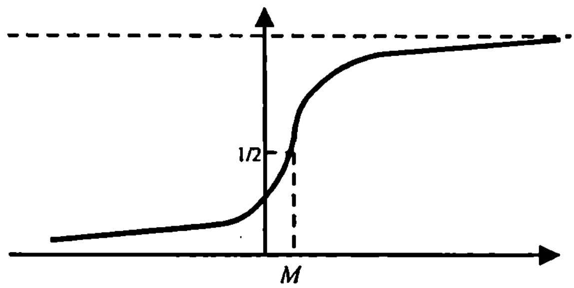
$$1/2\le F_X(M)\le P(X=M)+1/2.$$

თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ $P(X=M)=0$ და მედიანა გ•ნისაზღვრება

$$F_X(M)=1/2 \qquad (6.8)$$

ტოლობით, ანუ უწყვეტი განაწილების მქონე X შემთხვევითი სიდიდისათვის, M მედიანა ისეთი წერტილია, რომლის „მარცხნივ" და „მარჯვნივ" X შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობები ტოლია.

უწყვეტი მონოტონური განაწილებისათვის მედიანა (6.8) ტოლობით ცალსახად განისაზღვრება. საზოგადოდ შესაძლებელია, რომ (6.8) თანაფარდობა M-ის ბევრმა მნიშვნელობამ დააკმაყოფილოს.



ნახ. 6. 2

მოვიყვანოთ მაგალითი დისკრეტული ტიპის განაწილების მედიანის პოვნაზე.

მაგალითი 6.3. მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

X				
	−1.2	−0.3	2	3.8
	0.2	0.25	0.1	0.45

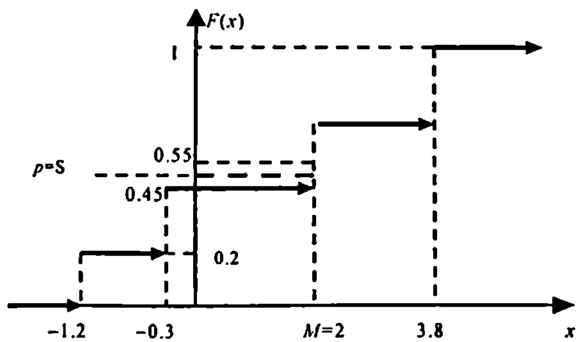
ა) თანახმად (6.7) თანაფარდობისა გამოთვალეთ მედიანის რიცხვითი მნიშვნელობა;
ბ) გამოსახეთ მედიანა გრაფიკულად.

ამოხსნა. ა) ამოცანის პირობის თანახმად, p_1=0.2, p_2=0.25, p_3=0.1, p_4=045. ამიტომ F განაწილების ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1.2,\\ 0.2, & -1.2\le x<-0.3,\\ 0.45, & -0.3\le x<2.0,\\ 0.55, & 2.0\le x<\ 3.8,\\ 1, & 3.8\le x.\end{cases}$$

განმარტების თანახმად, როგორც ვხედავთ, $F(x)<1/2$, როცა $x<2$ და $F(x)\ge 1/2$, როცა $x\ge 2$. ამიტომ მედიანის მნიშვნელობა იქნება M=2.

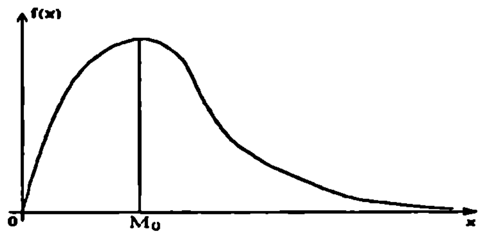
ბ)



განვსაზღვროთ განაწილების მოდა უწყვეტი ტიპის განაწილებებისათვის;

უწყვეტი ტიპის განაწილების მოდა ეწოდება რიცხვითი ღერძის იმ წერტილის აბსცისას, რომელშიც განაწილების სიმკვრივე აღწევს ლოკალურ მაქსიმუმს; მოდა M_0 სიმბოლოთი აღინიშნება (შეგახსენებთ, რომ ეს ნიშნავს $f(M_0)>f(x)$ უტოლობის შესრულებას ყოველი x-ისათვის, სადაც $|x-M_0|<\varepsilon$ რაიმე საკმარისად მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის). ცხადია, შესაძლებელია არსებობდეს რამდენიმე მოდა (იხ. მაგალითად ნახ. 1.14 (III ტიპი)).

მაშასადამე, განაწილების მოდის მოსაძებნად საჭიროა მისი სიმკვრივის მაქსიმალური მნიშვნელობის შესაბამისი აბსცისის მოძებნა. განაწილებებს, რომელთა სიმკვრივესაც გააჩნია ერთი ასეთი წერტილი, უნიმოდალური ეწოდება. ცალკეული გამონაკლისების გარდა (როგორიცაა მაგალითად, $[a,b]$ ინტერვალში თანაბარი განაწილება), მომავალში როგორც წესი, ჩვენ საქმე გვექნება უნიმოდალურ განაწილებებთან.



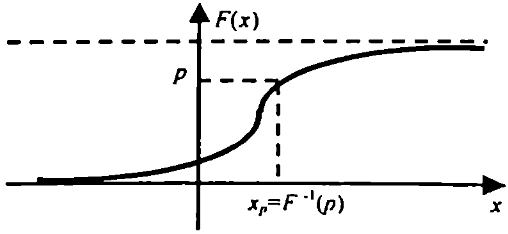
ნახ. 6.3

განაწილების კვანტილი. ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა $F(x)$.

X შემთხვევითი სიდიდის (ან რაც იგივეა, F განაწილების) p რიგის კვანტილი (p-კვანტილი) ეწოდება ისეთ x_p რიცხვს, რომელიც უმცირესია იმ რიცხვებს შორის, რომლებისთვისაც სრულდება უტოლობა $F(x)\geq p$, ე.ი.

$$x_p = \min\{x : F(x)\geq p\}. \tag{6.9}$$

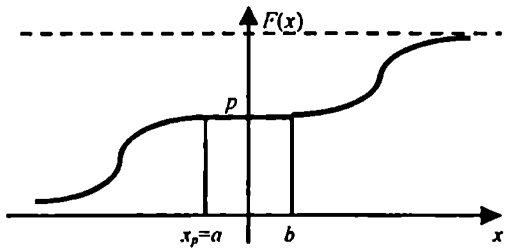
განაწილების p-კვანტილი წარმოვადგინოთ გრაფიკულად. ვთქვათ, განაწილების ფუნქცია უწყვეტი და მკაცრად ზრდადია: $F(x_1)<F(x_2)$, როცა $x_1<x_2$. მაშინ მათემატიკური ანალიზის ტერმინოლოგიით p-კვანტილი სხვა არაფერია, თუ არა F-ის შექცეული ფუნქციის მნიშვნელობა p წერტილში, $F(x_p) = p$ (იხ. ნახ. 6.4):



ნახ. 6. 4

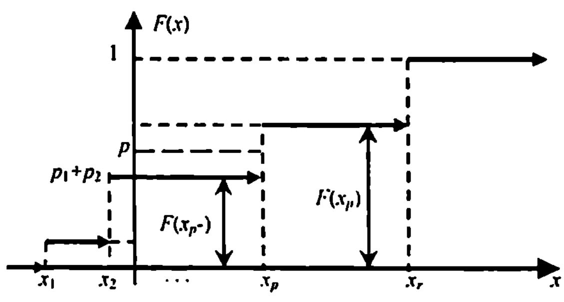
შევნიშნოთ, რომ მედიანა შეიძლება განისაზღვროს, როგორც 1/2 რიგის კვანტილი ანუ $M=x_{1/2}$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც უწყვეტი განაწილების ფუნქციას აქვს მუდმივობის ინტერვალი $[a,b]$, რომლისათვისაც $F(a)=F(b)=p$, და თუ $x<a, F(x)<p$, ხოლო თუ $x>b$, $F(x)>p$, კვანტილის განსაზღვრების ძალით გვაქვს, რომ $x_p=a$.



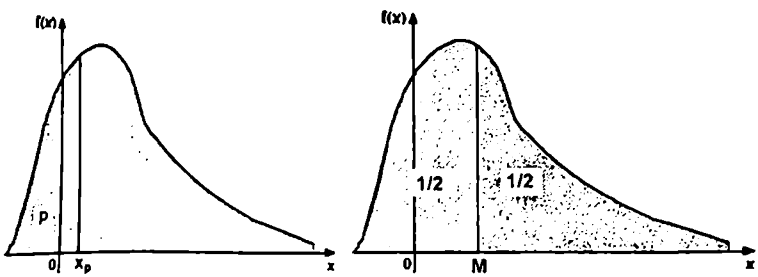
ნახ. 6. 5

დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის p რიგის კვანტილის საპოვნელად საჭიროა მოიძებნოს x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $F(x_-)<p$ და $F(x)\geq p$, სადაც $F(x_-)=P(X<x)$ (იხ.ნახ.6.6).



ნახ. 6. 6

აბსოლუტურად უწვეტი განაწილების სიმკვრივის ტერმინებში p-კვანტილისა და მედიანის გრაფიკული წარმოდგენა შემდეგია (იხ. ნახ. 6.7)



ნახ.6. 7

დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა. დავიწყოთ მაგალითის განხილვით. განვიხილოთ ორი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე განაწილების შემდეგი კანონებით:

X_1

−3	1
1/4	3/4

X_2

−90	45
1/3	2/3

განხილულ მაგალითში ორივე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი 0-ის ტოლია. მართლაც, $EX_1=(-3)\cdot 1/4+1\cdot 3/4=0$, $EX_2=(-90)\cdot 1/3+45\cdot 2/3=0$, მაგრამ ამ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებანი განსხვავდება იმით, რომ X_1-ის შესაძლო მნიშვნელობები გაცილებით ახლოსაა მათემატიკურ ლოდინთან (ნულთან), ვიდრე X_2 შემთხვევითი სიდიდისა.

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების მათემატიკური ლოდინის მიმართ გაფანტულობის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საზომს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია (აღინიშნება DX-ით, D არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა – Dispersion) ეწოდება $(X-EX)^2$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს

$$DX=E(X-EX)^2. \tag{6.10}$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$DX=E(X-EX)^2=E(X^2-2X\,EX+(EX)^2)=EX^2-2\,EXEX+(EX)^2=EX^2-(EX)^2, \tag{6.11}$$

სადაც, EX^2-ს ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის მეორე რიგის მომენტი.

მაგალითი **6.4.** გამოვთვალოთ 5.2 მაგალითში მოცემული შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

ამოხსნა. დისპერსია შეიძლება გამოვთვალოთ ორი ხერხით, (6.10) ან (6.11)-ის გამოყენებით. მონაცემები და შესაბამისი გამოთვლები წარმოვადგინოთ შემდეგი ორი ხერხით:

ცხრილი 6.2. პირველი ხერხი

i	x_i	f_i	x_if_i	$(x_i-EX)^2$	$(x_i-EX)^2f_i$
1	−1	0.10	−0.1	5.29	0,5290
2	0	0.15	0	1.69	0,25350
3	1	0.30	0.3	0.09	0,0270
4	2	0.25	0.5	0.49	0.1225
5	3	0.20	0.6	2.89	0,5780
			$EX=\sum_{i=1}^{5}x_if_i=1.3$		$DX=\sum_{i=1}^{5}(x_i-EX)^2f_i=1.51$

ცხრილი 6.3. მეორე ხერხი

i	x_i	f_i	x_if_i	x_i^2	$x_i^2f_i$
1	–1	0.10	–0.1	1	0.1
2	0	0.15	0	0	0
3	1	0.30	0.3	1	0.3
4	2	0.25	0.5	4	1
5	3	0.20	0.6	9	1.8
			$EX=\sum_{i=1}^{5}x_if_i=1.3$		$EX^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2f_i=3.2$
$DX=EX^2-(EX)^2=1{,}51$					

მოვიყვანოთ დისპერსიის თვისებები:

1) თუ c მუდმივია, მაშინ $Dc=0$.
2) $D(aX+b)=a^2DX$, ე.ი. შემთხვევით სიდიდეზე მუდმივის დამატება მის დისპერსიას არ ცვლის, ხოლო მუდმივი მამრავლი კვადრატული ხარისხით გადის დისპერსიის ნიშნის გარეთ.
3) თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $D(X+Y)=DX+DY$.

X შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა (აღინიშნება σ_X-ით) ეწოდება ამ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიიდან არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს:

$$\sigma_X=+\sqrt{DX}\,. \tag{6.12}$$

σ_X-ს ხშირად სტანდარტულ გადახრასაც უწოდებენ. გადახრის ამ მახასიათებლის შემოღება იმითაა მოტივირებული, რომ იგივე ზომის ერთეულებში გამოისახება, რაც X შემთხვევითი სიდიდე.

ვთქვათ, X შემთხვევით სიდიდის მათემატიკური ლოდინია EX, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა σ_X. განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდე

$$Y=\frac{X-EX}{\sigma_X} \tag{6.13}$$

და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებებიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ $EY=0$, $DY=1$. მართლაც

$$EY=E\left(\frac{X-EX}{\sigma_X}\right)=\frac{1}{\sigma_X}(EX-EX)=0$$

და

$$DY=D\left(\frac{X-EX}{\sigma_X}\right)=(1/DX)D(X-EX)=1.$$

(6.12) გარდაქმნას ჰქვია X შემთხვევითი სიდიდის ცენტრირება (მათემატიკური ლოდინის გამოკლება) და ნორმირება (σ_X-ზე გაყოფა) ან უფრო მოკლედ შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია.

მომენტები, ასიმეტრია და ექსცესი. ვიტყვით, რომ X შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია მთელი დადებითი k რიგის სასრული საწყისი მომენტი

$$\mu_k = EX^k,$$

თუ $E|X|^k<\infty$. ამავე შემთხვევაში, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\mu=\mu_1=EX$, განიმარტება X შემთხვევითი სიდიდის k რიგის ცენტრალური მომენტი

$$\mu_k=E(X-\mu)^k.$$

ამ აღნიშვნებში $\sigma^2=DX=\mu_2$, სადაც $\sigma=\sigma_X$.

ცენტრალურ და საწყის მომენტებს შორის არსებობს მარტივი კავშირი. მაგალითად,

$$\mu_2=\mu_2-\mu^2,$$

$$\mu_3=\mu_1-3\mu_2\cdot\mu+2\mu^3,$$

$$\mu_4=\mu_4-4\mu_3\cdot\mu+6\mu_2\cdot\mu^2-3\mu^4.$$

ცენტრალური მომენტების მეშვეობით განისაზღვრება ისეთი მნიშვნელოვანი მახასიათებლები როგორიცაა ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები.

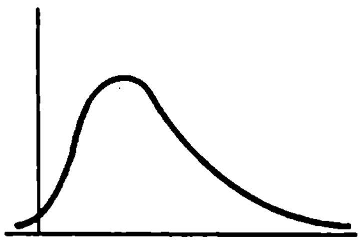
ასიმეტრიის ზომას საფუძვლად ედება საშუალო კუბური გადახრა და ასიმეტრიის კოეფიციენტს ანგარიშობენ

$$\alpha=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

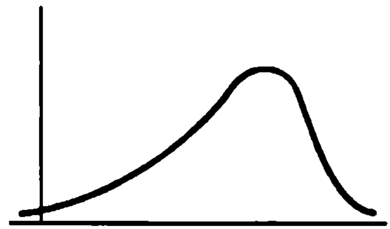
ფორმულით. საშუალო კუბური გადახრა საშუალებას გვაძლევს უფრო სრულად გავითვალისწინოთ შემთხვევითი სიდიდის დიდი გადახრები. განაწილების ასიმეტრიის შემთხვევაში განაწილების მრუდის ერთი მხარე იძლევა უფრო დიდ კუბურ გადახრას მეორე მხარესთან შედარებით და რადგან კუბური გადახრის დროს გადახრის ნიშანი ნარჩუნდება, კუბურ გადახრებს შორის განსხვავება აჩვენებს დადებით ან უარყოფით ასიმეტრიას.

თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილება სიმეტრიულია თავისი $\mu=EX$ საშუალო მნიშვნელობის მიმართ, მაშინ X შემთხვევითი სიდიდის ყველა კენტი რიგის ცენტრალური მომენტი ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე ასიმეტრიის კოეფიციენტიც ნულის ტოლია.

თუ $\alpha>0$, მაშინ განაწილება მარჯვნივ ასიმეტრიულია (ნახ. 6.8), ხოლო $\alpha<0$ ნიშნავს, რომ განაწილება მარცხნივ ასიმეტრიულია (ნახ. 6.9).



ნახ. 6.8

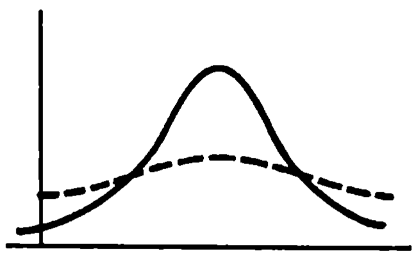


ნახ. 6.9

ექსცესის კოეფიციენტი e ახასიათებს განაწილების კონცენტრაციის ხარისხს საშუალო მნიშვნელობის ირგვლივ. იგი გამოითვლება

$$e = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

ფორმულით. რაც უფრო დიდია e, მით მეტადაა კონცენტრირებული განაწილება μ-ს ირგვლივ, ანუ სიმკვრივეს μ-წერტილში აქვს მაღალი პიკი, და პირიქით



ნახ. 6.10

ამ საკითხს ჩვენ კიდევ ერთხელ შევეხებით ე.წ. ნორმალური განაწილების განხილვისას.

საინტერესოა X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმეტრიულობის აღწერა მედიანის, მოდისა და მათემატიკური ლოდინის საშუალებით უწყვეტი განაწილების შემთხვევაში. უწყვეტი (ანუ აბსოლუტურად უწყვეტი) განაწილების დროს განაწილების სიმეტრიულობა სიმკვრივის ტერმინებში შემდეგნაირად გამოითქმის:

განაწილება სიმეტრიულია c წერტილის მიმართ, თუ

$$f(c+x) = f(c-x)$$

ყოველი x-ისათვის.

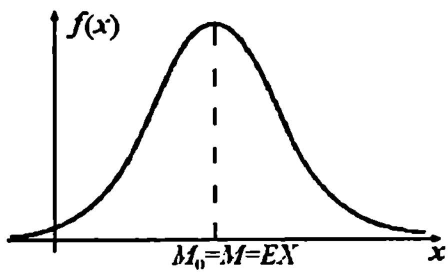
თუ ეს ტოლობა სრულდება რაიმე c-სათვის, მაშინ მათემატიკური ლოდინის და მედიანის განსაზღვრის თანახმად $\mu = M = c$. ამიტომ განაწილება სიმეტრიული შეიძლება იყოს მხოლოდ მის ლოდინსა და მედიანაზე გამავალი ღერძის მიმართ. გარდა ამისა, თუ განაწილება უნიმოდალურია, მაშინ განაწილების მოდაც c წერტილს დაემთხვევა და სიმეტრიული უნიმოდალური განაწილების დროს ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu=M=M_0.$$

მეორეს მხრივ, განაწილების მედიანა, უმრავლეს შემთხვევაში, თავსდება განაწილების მოდასა და მათემატიკურ ლოდინს შორის, რის გამოც განაწილების ასიმეტრიულობის საზომად მათემატიკურ ლოდინსა და მოდას შორის სხვაობა გამოიყენება.

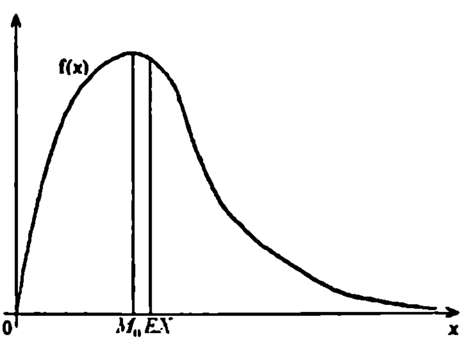
ამრიგად განაწილების მათემატიკური ლოდინისა და მოდის დამთხვევა (ამ დროს, როგორც წესი, განაწილების მედიანაც იგივე მნიშვნელობას მიიღებს) განაწილების სიმეტრიულობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას წარმოადგენს და $\mu=M=M_0$ ტოლობის შესრულება, საზოგადოდ, განაწილების სიმეტრიულობას ვერ უზრუნველყოფს (შეიძლება მარტივი მაგალითის აგება), მაგრამ $\mu=M_0$ ტოლობის დარღვევის შემთხვევაში შესაძლებელია განაწილების ასიმეტრიულობაზე საუბარი. როდესაც $M_0<\mu$, ამბობენ, რომ განაწილება ასიმეტრიულია მარჯვნივ და თუ $M_0>\mu$, მაშინ განაწილება ასიმეტრიულია მარცხნივ. მოგვყავს შესაბამისი სქემატური ნახაზები.

ა) უნიმოდალური სიმეტრიული განაწილება.



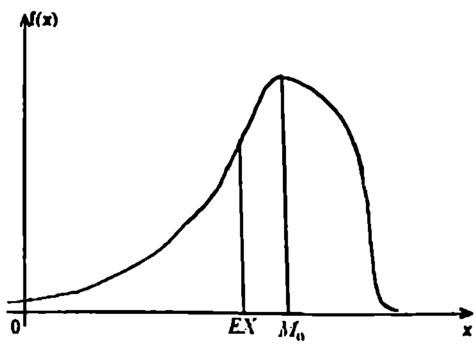
ნახ. 6. 11

ბ) უნიმოდალური მარჯვნივ ასიმეტრული განაწილება.



ნახ. 6.12

გ) უნიმოდალური, მარცხნივ ასიმეტრული განაწილება.



ნახ. 6. 13

ცხადია, ყოველთვის არ არის გამართლებული განაწილების ასიმეტრიულობაზე მსჯელობა მხოლოდ გრაფიკზე მოდისა და საშუალოს მდებარეობის მიხედვით, მით უმეტეს, რომ ხშირად განაწილების სიმეტრიულობის განსაზღვრა გვიხდება შერჩევითი

მახასიათებლების საშუალებით. მაგალითად, ერთი მასშტაბის არჩევისას გრაფიკმა შეიძლება გარკვეული ასიმეტრია აჩვენოს და სხვა მასშტაბის დროს კი თითქმის სიმეტრიული აღმოჩნდეს, ან სიმეტრიული განაწილების შესაბამისი ჰისტოგრამა შეიძლება იყოს საკმაოდ ასიმეტრიული გარკვეული ინტერვალური დაყოფის დროს.

ამიტომ აუცილებელი შეიქნა განაწილების ასიმეტრიულობის ზემოთ განმარტებული ზომის შემოღება.

ზოგ შემთხვევაში ასიმეტრიის საზომად იხმარება პირსონის მიერ შემოთავაზებული ასიმეტრიის შემდეგი კოეფიციენტი.

$$\alpha = \frac{\text{საშუალო} - \text{მოდა}}{\text{სტანდარტული გადახრა}} = \frac{\mu - M_0}{\sigma}.$$

ასიმეტრიის ამ კოეფიციენტის გამოთვლა მოუხერხებელია იმის გამო, რომ ხშირ შემთხვევაში არ არის ადვილი განაწილების მოდის გამოთვლა. ამ სირთულის გვერდის ავლა შეიძლება მოხერხდეს რამდენიმე გზით. მაგალითად ხშირად ხმარობენ ემპირიულ თანაფარდობას $\mu - M_0 = 3(\mu - M)$, რომელიც დიდი სიზუსტით სრულდება ზომიერად ასიმეტრიული განაწილებისათვის. არსებობს ამ უკანასკნელი გამოსახულებისათვის უფრო ზუსტი მიახლოებითი ფორმულებიც.

მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქცია. X შემთხვევითი სიდიდის მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქცია ან უბრალოდ მაწარმოებელი ფუნქცია შემდეგნაირად განიმარტება

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

იგულისხმება, რომ $Ee^{tX} < \infty$. ე.ი.

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} f_i, & \text{დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx, & \text{უწყვეტი განაწილებისათვის } f_X(x) \text{ სიმკვრივით.} \end{cases}$$

$M_X(t)$ ფუნქციას მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქცია ეწოდება იმ თვისების გამო, რომ მისი მეშვეობით შესაძლებელია X შემთხვევითი სიდიდის ნებისმიერი r რიგის საწყისი მომენტის გამოთვლა. მაგალითად

$$\mu = \mu_1 = \frac{d}{dt} M_X(t)\bigg|_{t=0},$$

$$\mu_2 = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\bigg|_{t=0}$$

და ა.შ. (იგულისხმება $M_X(t)$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობა).

მოვიყვანოთ მაწარმოებელი ფუნქციის რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისება.

a. თუ $M_X(t)$ X შემთხვევითი სიდიდის მაწარმოებელი ფუნქციაა, ხოლო a და b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ $Y=aX+b$ შემთხვევითი სიდიდის მაწარმოებელი ფუნქცია იქნება

$$M_Y(t)=e^{tb}\, M_X(at).$$

b. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$M_{X+Y}(t)= M_X(t)\, M_Y(t) \qquad (6.14)$$

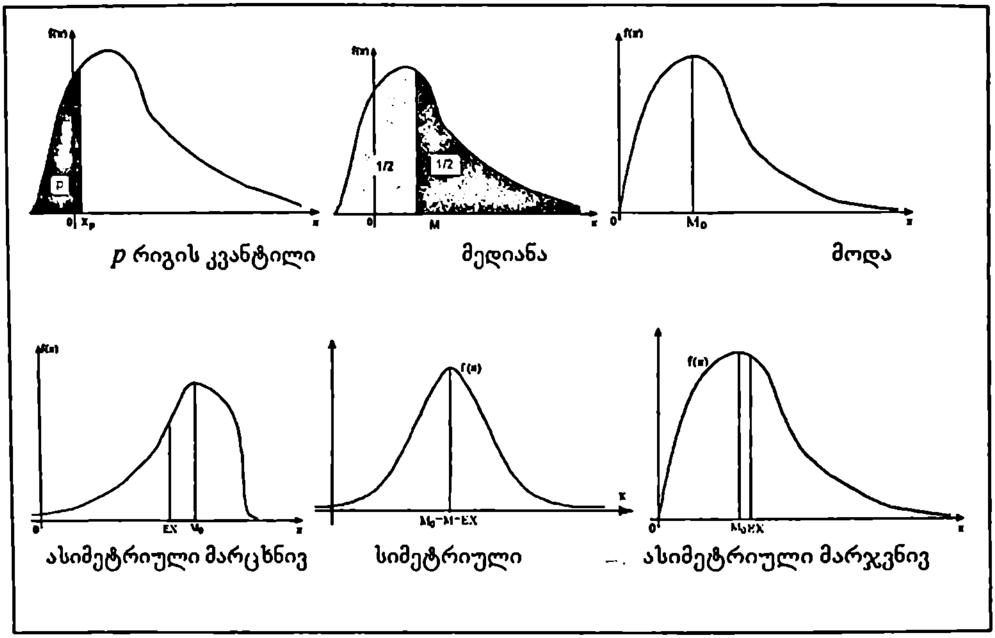
c. თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეებია $M_X(t)$ და $M_Y(t)$ მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქციებით, მაშინ X და Y სიდიდეებს აქვთ ერთი და იგივე განაწილება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $M_X(t)=M_Y(t)$, ყველა t-თვის;

შემთხვევითი სიდიდის მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქციის შემოღება მოხერხებულია დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის ყოფაქცევის შესასწავლად, რადგან მისი საშუალებით ცალსახად განისაზღვრება შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის მაწარმოებელი ფუნქცია ადვილად იანგარიშება ცალკეულ შესაკრებთა მაწარმოებელ ფუნქციათა საშუალებით (6.14) ფორმულით, მაშინ როცა შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების ფუნქციის გამოთვლა საკმაოდ რთულია.

ქვემოთ, 6.4 ცხრილში მითითებულია შემთხვევითი სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლის ფორმულები დისკრეტული და უწყვეტი განაწილებებისათვის

ცხრილი 6.4.

რიცხვითი მახასიათებლები	დისკრეტული ტიპი	უწყვეტი ტიპი
მათემატიკური ლოდინი	$EX=\sum_{i=1}^{r} x_i f_i$	$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du$
k-ური რიგის მომენტი	$EX^k=\sum_{i=1}^{r} x_i^k f_i$	$EX^k=\int_{-\infty}^{+\infty} u^k f(u)du$
დისპერსია	$DX=E(X-EX)^2= \quad EX^2-(EX)^2$	
საშუალო კვადრატული გადახრა	$\sigma_X=+\sqrt{DX}$	
p-კვანტილი	$x_p=\min\{x : F(x)\ge p\}$	
მედიანა	$M=x_{1/2}=\min\{x : F(x)\ge 1/2\}$	



ნახ. 6.14.

თუ შერჩევით მახასიათებლებს (და საზოგადოდ ყოველგვარი სასრული სტატისტიკური ერთობლიობის მახასიათებლებს) შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლების კუთხით შევხედავთ, ადვილად შევამჩნევთ შემდეგ ანალოგიას.

ვთქვათ, მოცემულია x რაოდენობრივ ნიშანზე დაკვირვებათა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{6.15}$$

შემოვიღოთ ფიქტიური შემთხვევითი სიდიდე ξ დისკრეტული განაწილებით, რომელიც ყოველი x_i მნიშვნელობას მიანიჭებს $1/n$ ალბათობას:

$$\xi\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

მეტი სიცხადისათვის (6.15)-დან შეგვიძლია შევქმნათ ზრდადი ვარიაციული მწკრივი: $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ $n_1, \ldots, n_r$ სიხშირეებით, $n_1+\cdots+n_r = n$, და გამოვიყენოთ ჩანაწერი

$$\xi\begin{pmatrix} x^{(1)}, \ldots, x^{(r)} \\ \frac{n_1}{n}, \ldots, \frac{n_r}{n} \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

მაშინ არითმეტიკული საშუალოა

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x^{(j)} = E\xi,$$

ხოლო შერჩევითი დისპერსია არის

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j (x^{(j)} - \bar{x})^2 = D\xi$$

და საზოგადოდ (6.15) ერთობლიობის ნებისმიერი k რიგის საწყისი ან ცენტრალური შერჩევითი მომენტი შესაბამისად $E\xi^k$ და $E(\xi-E\xi)^k$ სახით ჩაიწერება.

ყოველგვარი კავშირი შერჩევით მომენტებს შორის ξ შემთხვევითი სიდიდის ტერმინებში უფრო მკაფიოდ გამოითქმის. მაგალითად, თანადობა

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

შეესაბამება

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

თანადობას, რომელიც ერთი შეხედვით არც თუ ისე მარტივია.

შერჩევითი მედიანა და საერთოდ p-კვანტილი ასევე ξ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მედიანა და p-კვანტილი გამოვა, შესაბამისად. განსხვავება ისაა, რომ როცა n ლუწია (6.15) ერთობლიობის მედიანის როლში

$$x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)}$$

ვარიაციული მწკრივის შუა წევრების $\left(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}\right)/2$ ნახევარჯამს ვიღებთ, მაშინ როცა ξ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის ასეთ შემთხვევაში გვექნება მედიანური ინტერვალი (როცა $x_{(n/2)}$ და $x_{(n/2+1)}$ განსხვავებული რიცხვებია) და გარკვეულობისათვის ამ ინტერვალის მარცხენა ბოლოს ანუ $x_{(n/2)}$-ს ირჩევენ.

ამ ფორმალური ანალოგიის მიღმა დიდი მნიშვნელობის შინაარსობრივი ფაქტები ძევს. მაგალითად, ალბათობის თეორიის თეორემა ე.წ. დიდ რიცხვთა კანონი (იხ. თავი 8) შემთხვევით სიდიდეთა არითმეტიკული საშუალოს მდგრადობის სტატისტიკურ კანონზომიერებას აღწერს, ე.წ. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა აღწერს ფლუქტუაციებს მდგრადი მდგომარეობის გარშემო და ა.შ., რაც საბოლოო ჯამში დასკვნითი სტატისტიკის ქვაკუთხედად გვევლინება.

§ 2. მრავალგანზომილებიან შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლები

ჯერ განვიხილოთ ორი შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების ანუ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორის მახასიათებლები.

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები. ვთქვათ, (X,Y) ვექტორის კომპონენტების მათემატიკური ლოდინია შესაბამისად

EX-ის და EY-ის ტოლია. მაშინ (EX,EY) რიცხვით ვექტორს უწოდებენ (X,Y) შემთხვევითი ვექტორის მათემატიკურ ლოდინს (ან ლოდინების ვექტორს). (EX,EY) ვექტორის კომპონენტებს აქვს ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ყველა თვისება და ამიტომ ჩვენ მათ აღარ გავიმეორებთ.

განვსაზღვროთ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის სხვა რიცხვითი მახასიათებლები.

X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაცია ეწოდება ამ სიდიდეთა მათივე მათემატიკური ლოდინებიდან გადახრების ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]. \tag{6.17}$$

მათემატიკურ ლოდინის თვისებების გამოყენებით, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY-EXEY, \tag{6.18}$$

სადაც

$$EXY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\cdot y_j\cdot p_{ij} \tag{6.19}$$

დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში, ხოლო უწყვეტი განაწილების შემთხვევაში

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s\,u\; f(s,u)\,ds\,du\,, \tag{6.20}$$

იგულისხმება, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |s\,u|\; f(s,u)\,ds\,du<\infty\,.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $EXY=EX\cdot EY$ და

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0. \tag{6.21}$$

(6.17) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ამ შემთხვევითი სიდიდის თავის თავთან კოვარიაცია. მართლაც, კოვარიაციის განსაზღვრების თანახმად,

$$\operatorname{cov}(X,X)=E(X-EX)(X-EX)=E(X-EX)^2=DX\,.$$

კოვარიაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$ – კოვარიაცია სიმეტრიულია;

2) $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$ – კოვარიაცია ადიციურია;

3) $\operatorname{cov}(aX+b,Y)=a\operatorname{cov}(X,Y)$ – შემთხვევით სიდიდეზე მუდმივი სიდიდის დამატება მის კოვარიაციას მეორე შემთხვევით სიდიდესთან არ ცვლის, ხოლო მუდმივი მამრავლი გადის კოვარიაციის ნიშნის გარეთ;

4) თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

კოვარიაცია ახასიათებს კავშირს ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის. სახელდობრ, როგორც კოვარიაციის (6.17) განსაზღვრებიდან ჩანს, ის წარმოადგენს ორი შემთხვევითი სიდიდის მათი საშუალოების მიმართ ყოფაქცევის "მსგავსების" საზომს: კოვარიაცია დადებითია, თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები საშუალოდ ერთსა და იმავე მხარეს იხრებიან შესაბამისად EX და EY მნიშვნელობებიდან და ის უარყოფითია, თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები EX და EY მნიშვნელობებიდან საშუალოდ სხვადასხვა მხარეს არიან გადახრილი. საზოგადოდ კოვარიაციის კოეფიციენტმა შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობა $(-\infty, \infty)$ ინტერვალიდან.

ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის დამოკიდებულების დასახასიათებლად უფრო მოხერხებულია ე.წ. კორელაციის კოეფიციენტის შემოღება.

X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება რიცხვს

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{6.22}$$

როგორც ვხედავთ, მოხდა კოვარიაციის კოეფიციენტის მხოლოდ ნორმირება, მასშტაბის შეცვლა, მაგრამ ამ ნორმირებას აქვს გარკვეული ალბათური შინაარსი, რომელიც კარგად ჩანს კორელაციის კოეფიციენტის ქვემოთ ჩამოთვლილი თვისებებიდან:

1^0 $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$,

2^0 $\rho(aX,Y) = \operatorname{sign} a\, \rho(X,Y)$, სადაც $\operatorname{sign} a = \begin{cases} -1, & \text{თუ } a<0, \\ 0, & \text{თუ } a=0, \\ +1, & \text{თუ } a>0, \end{cases}$

3^0 $|\rho(X,Y)| \le 1$,

4^0 თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\rho(X,Y) = 0$.

5^0 $|\rho(X,Y)|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y=aX+b$ რაიმე ნამდვილი a და b რიცხვებისათვის ანუ, როცა X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი კავშირი, ამასთან $a>0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho=1$ და $a<0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho=-1$.

საზოგადოდ 4^0 თვისების შებრუნებული დებულება, რომ "თუ $\rho(X,Y)=0$, მაშინ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია", არ არის სწორი. როცა $\rho(X,Y)=0$ ამბობენ, რომ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები არაკორელირებულია არსებობს ერთადერთი კლასი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისა, რომელთათვისაც არაკორელირებისა და დამოუკიდებლობის ცნებები ემთხვევა; კერძოდ, ეს არის კლასი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებისა. მოვიყვანოთ მაგალითი იმისა, რომ არაკორელირებულობიდან არ გამომდინარეობს შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა.

მაგალითი **6.5.** გამოვთვალოთ X და $|X-Y|$ შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაციის კოეფიციენტი, სადაც X და Y მაგალით 5.6-შია განსაზღვრული.

ამოხსნა. X და $|X-Y|$ შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი და მარგინალური განაწილების კანონები მოიცემა ცხრილით

X \ $\|X-Y\|$	0	1	2	3	4	5	$f_{i.}$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36	0	1/6
3	1/36	2/36	2/36	1/36	0	0	1/6
4	1/36	2/36	2/36	1/36	0	0	1/6
5	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36	0	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$f_{.j}$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36	1

საიდანაც ვპოულობთ, რომ

$$EX=\sum_{j=1}^{6} j\cdot P\{X=j\}=\sum_{j=1}^{6} j\cdot(1/6)=(1+2+3+4+5+6)/6=21/6=7/2,$$

$$EY=\sum_{i=1}^{6} i\cdot P\{Y|=i\}=0(6/36)+\cdots+5(2/36)=35/18$$

და ასევე,

$$EXY=\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{6} i\cdot jP\{X=i,Y=j\}=1\cdot 0\cdot(1/36)+\cdots+1\cdot 5\cdot(1/36)+2\cdot 0\cdot(1/36)+\cdots+6\cdot 5\cdot(1/36)=245/36.$$

მაშასადამე, $\mathrm{cov}(X,Y)=245/36-(7/2)(35/18)=0$ ანუ $\rho(X,Y)=0$, მიუხედავად იმისა, რომ როგორც ვაჩვენეთ 6.9 მაგალითში X და Y შემთხვევითი სიდიდეები არ არიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\rho(X,Y)=0$ ტოლობიდან არ გამომდინარეობს X და Y შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობა.

ნებისმიერი X და Y შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$D(X+Y)=E((X+Y)-E(X+Y))^2=E((X-EX)+(Y-EY))^2=$$

$$=E((X-EX)^2+2(X-EX)(Y-EY)+(E-EY)^2).$$

ამრიგად,

$$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y).$$

ეს ფაქტი სამართლიანია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} DX_i+2\sum_{i<j}\mathrm{cov}(X_i,X_j).$$

თვალსაჩინოებისათვის მიღებული ფორმულები მოვიყვანოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

დისკრეტული ტიპი	უწყვეტი ტიპი
$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$	
$\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$	
$D(X+Y) = DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$	
$EXY=\sum_i\sum_j x_i y_j P\{X=x_i, Y=y_j\}$	$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)dxdy$

k-განზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორის რიცხვითი მახასიათებლები. ახლა ჩვენ მოკლედ შევეხებით k-განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების ანუ შემთხვევითი ვექტორების მახასიათებლებს, ამასთან ზოგი რამ k=2 შემთხვევისათვისაც ახლა იქნება შემოღებული.

თუ $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ არის k-განზიმილებიანი შემთხვევითი ვექტორი და $h(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_k)$, არის k ნამდვილი ცვლადის, ვთქვათ, უწყვეტი ნამდვილი ფუნქცია, მაშინ იმის მსგავსად, როგორც მივიღეთ შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინის (6.5) და (6.6) ფორმულები, ვღებულობთ შემდეგ ფორმულებს $Eh(X)$ მათემატიკური ლოდინისათვის.

როცა $\boldsymbol{X}$ დისკრეტულია, ანუ X-ის $x^{(j)}=(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$, j=1,2, ... მნიშვნელობები $P_X(x^{(j)})$ ალბათობებით მიიღება, $\sum_{j=1}^{\infty} P_X(x^{(j)})=1$, მაშინ

$$Eh(X) = \sum_{j=1}^{\infty} h(x^{(j)})P_X(x^{(j)}), \tag{6.23}$$

როცა $\boldsymbol{X}$ უწყვეტია, ანუ არსებობს $f_X(x_1,\ldots,x_k)$ სიმკვრივე, მაშინ

$$Eh(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1,\ldots,x_k)f_X(x_1,\ldots,x_k)dx_1\cdots dx_k), \tag{6.24}$$

ამ ფორმულების შესაბამისად ჩვენ შეიძლება აზრი მივცეთ

$$EX_i \text{ და } \operatorname{cov}(X_i,X_j) = E(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)$$

მათემატიკურ ლოდინებს, სადაც პირველ შემთხვევაში $h(x)=x_j$, ხოლო მეორეში – $h(x)=E(x_i-EX_i)(x_j-EX_j)$, თუმცა მათ გამოსათვლელად საკმარისია X_i კომპონენტის (როგორც შემთხვევითი სიდიდისა) და (X_i,X_j) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის მარგინალური განაწილებების მახასიათებლების გამოთვლაც. თავის მხრივ ეს უკანასკნელი მეხუთე თავის ბოლოს აღწერილი მეთოდით მოიცემა.

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ შემთხვევითი ვექტორის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება ვექტორს, რომლის კომპონენტებია $\boldsymbol{X}$ ვექტორის კომპონენტთა მათემატიკური ლოდინები.

$$EX = (EX_1, \ldots, EX_k).$$

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ გამოთვლილია ყველა კოვარიაცია

$$c_{ij} = \operatorname{cov}(X_i,X_j), \quad i,j=1,2,\ldots,k.$$

კერძოდ, $i=j$ შემთხვევაში $\text{cov}(X_i,X_j)=D(X_i)$ და შევადგინოთ $k\times k$ მატრიცა

$$\text{cov}(X) = \| c_{ij} \|,\ i, j=1,2,...,k,$$

რომელსაც კორელაციის მატრიცა ეწოდება. ეს მატრიცა სასრული ელემენტებისაგან შედგება, თუ სასრულია $D(X_i)$, $i=1,2,...,k$, დისპერსიები (კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის თანახმად).

ცხადია, რომ $\text{cov}(X_i,X_j)=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, სადაც

$$\rho_{ij} = \rho(X_i,X_j),\quad i, j=1,2,...,k,$$

არის X_i და X_j შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი, $\rho_{ii}=1$, $i=1,2,...,k$.

თუ X-ის კომპონენტები დამოუკიდებელია, მაშინ

$$\rho_{ij} = 0,\quad i \neq j,$$

და $\text{cov}(X)$ მატრიცა დიაგონალური გამოვა, ორი განზომილების შემთხვევაში, თუ $EX_1=\mu_1$, $EX_2=\mu_2$

$$EX = (EX_1\ , EX_2) = (\mu_1\ , \mu_2)$$

და

$$\text{cov}(X) = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{Vmatrix},$$

სადაც $\rho=\rho(X_1,X_2)$ და ადგილი აქვს შემდეგ მატრიცულ ტოლობას, სადაც

$$\text{cov}(X) = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{Vmatrix},$$

შუა მატრიცას $\rho(X)$ კორელაციური მატრიცა ეწოდება.

*EX-ისა და $\text{cov}(X)$-ის თვისებები.** EX და $\text{cov}(X)$ მახასიათებლებს ბუნებრივი თვისებები გააჩნიათ. მაგალითად თუ ვიგულისხმებთ, რომ ვექტორები სვეტის სახითაა ჩაწერილი, X შემთხვევითი ვექტორის A $k\times k$-მატრიცისა და b მუდმივი ვექტორის მეშვეობით წრფივი გარდაიქმნისას აღმოჩნდება, რომ EX მათემატიკური ლოდინი წრფივად გარდაიქმნება:

$$E(AX+b) = AEX+b.$$

X და Y შემთხვევით ვექტორთა ჯამისათვის,

$$E(X+Y) = EX+EY,$$

ხოლო თუ X და Y შემთხვევით ვექტორები დამოუკიდებელია,

$$\text{cov}(X+Y) = \text{cov}(X)+\text{cov}(Y).$$

ბოლოს კი შევნიშნოთ, რომ

$$\mathrm{cov}(AX+b) = A\mathrm{cov}(X)A^T,$$

სადაც A^T არის A-ს ტრანსპონირებული მატრიცა.

§ 3. პირობითი განაწილება და პირობითი მათემატიკური ლოდინი

გავიხსენოთ პირობითი ალბათობის განმარტება. როგორც გვახსოვს, თუ $P(B)>0$, მაშინ

$$P\{A\mid B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}, \tag{6.25}$$

დავუშვათ, რომ მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდე და A ხდომილობა შემდეგი სახისაა: $A=\{X\le x\}$. მაშინ (6.25)-იდან მივიღებთ:

$$P\{X\le x|B\}=\frac{P\{X\le x,B\}}{P\{B\}},$$

ადვილი სანახავია, რომ ყოველი ფიქსირებული B-სათვის $P\{X\le x|B\}$ არის განაწილების ფუნქცია. ბუნებრივია, განაწილების ამ ფუნქციას ვუწოდოთ X შემთხვევითი სიდიდის პირობითი განაწილების ფუნქცია პირობით, რომ განხორციელდა B ხდომილობა და შემოვიღოთ მისთვის აღნიშვნა:

$$F(x|B)\equiv P\{X\le x|B\}.$$

თუ X შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია და $x_1,x_2,\dots,x_r$ მნიშვნელობებს იღებს, მაშინ X-ის პირობითი განაწილება, B პირობით, ეწოდება $p_i(B)$ რიცხვთა ერთობლიობას, სადაც $p_i(B)=P\{X=x_i|B\}$, $i=1,2,\dots,r$. $P_i(B)$, $i\le r$, განაწილების კანონის საშუალებით განიმარტება X შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი (უპირობო მათემატიკური ლოდინის მსგავსად)

$$E(X|B) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_i(B)$$

ტოლობით. თუ გამოვიყენებთ (6.25) პირობითი ალბათობის ფორმულას და

$$I_B x = \begin{cases} 1, & x\in B \\ 0, & x\notin B \end{cases}$$

აღნიშვნას, ამ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$E(X|B) = \sum_{i=1}^{r} x_i \frac{P(X=x_i,B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)}\sum_{i=1}^{r} x_i E(I_{X=x_i} I_B) = \frac{1}{P(B)} E\left(\sum_{i=1}^{r} x_i I_{X=x_i}\right) I_B = \frac{1}{P(B)} EI_B X .$$

მაშასადამე, თუ $P(B)>0$, ყოველი დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდისათვის

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} EI_B X \ . \tag{6.26}$$

შევნიშნოთ, რომ (6.26) ტოლობით შეიძლება განისაზღვროს პირობითი მათემატიკური ლოდინი ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდისათვის და ნებისმიერი B ხდომილობისათვის, რომლისთვისაც $P(B)>0$, თუ განსაზღვრულია X-ის უპირობო მათემატიკური ლოდინი.

ჩვეულებრივი უპირობო დისპერსიის ანალოგიურად განიმარტება პირობითი დისპერსია როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში:

$$D(X|B) = E((X-E(X|B))^2|B)) = E(X^2|B)-(E(X|B))^2. \tag{6.27}$$

ვთქვათ, (X,Y) დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონია $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$, $i=1,2,...,r$, $j=1,2,....,s$. განვიხილოთ ხდომილობა $B=\{Y=y_j\}$. X-ის პირობითი განაწილება იმ პირობით, რომ Y-მა მიიღო მნიშვნელობა y_j, შემდეგნაირად მოიცემა:

$$p_{i|j} = P\{X=x_i|Y=y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \qquad i=1,2,...,r, \tag{6.28}$$

სადაც $p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{r} p_{ij} >0, j=1,2,...,s.$

(6.26)-ის ძალით, X-ის პირობითი მათემატიკური ლოდინი იმ პირობით, რომ $Y=y_j$, ასე გამოითვლება

$$E(X|Y=y_j) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_{i|j} \ ,$$

პირობითი განაწილებისა და მათემატიკური ლოდინის ცნებების გასააზრებლად განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

მაგალითი 6.6. ვთქვათ Z_1 და Z_2 აღნიშნავს პირველ და მეორე კამათელზე მოსულ ქულებს, ხოლო $X=Z_1$, $Y=|Z_1-Z_2|$. დავადგინოთ Y-ის პირობითი განაწილება $\{X=3\}$ პირობით.

ამოხსნა.

$$P\{Y=k \mid X=3\} = \frac{P_{k3}}{P_{\cdot 3}}$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

k	0	1	2	3	4	5
$P\{Y=k\|X=3\}$	1/6	2/6	2/6	1/6	0	0

როგორც ვხედავთ, $P\{Y=4|X=3\}=P\{Y=5|X=3\}=0$, ანუ $\{X=3\}$ პირობაში Y შემთხვევით სიდიდეს არ შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები 4 და 5 და ამიტომ Y-ის პირობითი განაწილება $\{X=3\}$ პირობაში, მიიღებს შემდეგ სახეს:

k	0	1	2	3
$P\{Y=k\mid X=3\}$	1/6	2/6	2/6	1/6

ცხადია, ჩვენ შეგვიძლია ამ განაწილებისათვის რიცხვითი მახასიათებლების, მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის გამოთვლა.

$$E(Y|X=3)=0\cdot(1/6)+1\cdot(2/6)+2\cdot(2/6)+3\cdot(1/6)=3/2,$$
$$D(Y|X=3)=0\cdot(1/6)+1\cdot(2/6)+4\cdot(2/6)+9\cdot(1/6)-(3/2)^2=1/4.$$

თუ გამოვთვლით დანარჩენ პირობით მათემატიკურ ლოდინებსაც, საბოლოოდ გვექნება:

$$E(Y|X=1)=E(Y|X=6)=15/6,\quad E(Y|X=2)=E(Y|X=5)=11/6,\quad E(Y|X=3)=E(Y|X=4)=9/6.$$

როგორც ვხედავთ, X-ის მნიშვნელობათა ცვლილებასთან ერთად Y-ის პირობითი ლოდინის მნიშვნელობებიც იცვლება. ამ გარემოებას მივყავართ შემდეგ ცნებამდე:

თუ X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა $x_1,\ldots,x_r$ მნიშვნელობებით, მაშინ Y-ის პირობითი მათემატიკური ლოდინი X პირობით, რომელიც აღინიშნება $E(Y|X)$ სიმბოლოთი, ეწოდება ისეთ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს $E(Y|X=x_i)$ მნიშვნელობას, როცა $X=x_i$ (ე.ი. ამ მნიშვნელობების მიღების ალბათობაა $P\{X=x_i\}$, $i=1,\ldots,r$).

$E(Y|X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას ჩვენი მაგალითისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$E(Y\|X)$	9/6	11/6	15/6
	1/3	1/3	1/3

გამოვთვალოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი

$$E(E(Y|X))=(9/6)(1/3)+(11/6)(1/3)+(15/6)(1/3)=35/18.$$

გავიხსენოთ $Y=|Z_2-Z_1|$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოვთვალოთ შესაბამისი მათემატიკური ლოდინი:

$\|Z_2-Z_1\|$	0	1	2	3	4	5
	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$EY=E|Z_2-Z_1|=(1/36)(10+16+18+16+10)=35/18$. ამრიგად,

$$E(E(Y|X))=EY.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ $E(E[Y|X])=EY$. არც ეს არის შემთხვევითი. ამ ფაქტის სამართლიანობა ზოგადი შემთხვევისათვის მტკიცდება. მართლაც, პირობითი ლოდინის განსაზღვრის თანახმად $E(Y|X)$ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც იღებს $E(Y|X=x_i)$, $i\leq r$ მნიშვნელობებს $P(X=x_i)$ ალბათობით. ამიტომ ამ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლი იქნება

$$E\,E(Y|X)=\sum_{i=1}^{r}E(Y\mid X=x_i)P\{X=x_i\}$$

ჯამისა და (2.26) ტოლობის თანახმად

$$E\,E(Y|X)=\sum_{i=1}^{r}E(Y\mid X=x_i)P\{X=x_i\}=\sum_{i=1}^{r}\frac{E(YI_{(X=x_i)})}{P\{X=x_i\}}P\{X=x_i\}=\sum_{i=1}^{r}EYI_{(X=x_i)}=EY,$$

რადგან $\sum_{i=1}^{r}I_{(X=x_i)}=1$.

ამ ფაქტს მათემატიკური ლოდინებისათვის იტერაციულ წესს უწოდებენ და იყენებენ Y შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელად, თუ ცნობილია X და $E[Y|X]$ შემთხვევითი სიდიდეები:

$$EY=E\{E[Y|X]\}.$$

აქვე გვინდა მოვიყვანოთ მსგავსი წესი დისპერსიისათვის:

$$DY=E\{D[Y|X]\}+D\{E[Y|X]\},$$

სადაც გასაგებია, რომ

$$D[Y|X]=E[Y^2|X]-(E[Y|X])^2.$$

ახლა გადავიდეთ იმ შემთხვევის განხილვაზე, როცა (X,Y) შემთხვევითი ვექტორი უწყვეტადაა განაწილებული, $f(x,y)$ სიმკვრივით. ვინაიდან $\{Y=y\}$ ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია, ამიტომ X-ის პირობითი განაწილების განსაზღვრა $\{Y=y\}$ პირობით აქამდე აღწერილი გზით შეუძლებელია. ამ შემთხვევაში, X-ის პირობითი განაწილება $\{Y=y\}$ პირობით განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$F(x|y)=P(X\le x|Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(t\mid y)dt\,, \tag{6.29}$$

სადაც:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{6.30}$$

$f_{X|Y}(x|y)$ ფუნქციას ეწოდება X-ის პირობითი განაწილების სიმკვრივე $\{Y=y\}$ პირობით. აქ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dt$ არის Y-ის მარგინალური განაწილების სიმკვრივე. (6.30) წარმოადგენს (6.28) თანაფარდობის უწყვეტ ანალოგს.

რაც შეეხება X-ის პირობით მათემატიკურ ლოდინს $\{Y=y\}$ პირობით, ბუნებრივია, რომ იგი შემდეგნაირად განიმარტოს:

$$E\{X|Y=y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}tf_{X|Y}(t\mid y)dt\,. \tag{6.31}$$

ხოლო პირობითი დისპერსია კი განიმარტება ფორმულით:

$$D\{X|Y=y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X\mid Y=y))^2f_{X|Y}(t\mid y)dt\,. \tag{6.32}$$

(6.31) ტოლობით განსაზღვრულ $R(y)=E\{X|Y=y\}$ ფუნქციას ეწოდება X-ის Y-ზე რეგრესიის მრუდი (ფუნქცია). ამ ფუნქციის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ Y შემთხვ

ვითი სიდიდის მნიშვნელობების პირობით განისაზღვრება X შემთხვევითი სიდიდის პირობითი საშუალო მნიშვნელობა.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე $R(Y)$ (რეგრესიის ფუნქციაში ჩასმულია Y შემთხვევითი სიდიდე). ამ შემთხვევით სიდიდეს X შემთხვევითი სიდიდის პირობით მათემატიკურ ლოდინს უწოდებენ Y პირობით და მას $E[X|Y]$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ:

$$R(Y) = E[X|Y]. \tag{6.33}$$

ჩამოვთვალოთ პირობითი მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1) $E[c|Y]=Ec=c$, ანუ მუდმივის პირობითი ლოდინი ამავე მუდმივის ტოლია;
2) $E[c\cdot X|Y]=c\cdot E[X|Y]$, ანუ მუდმივი გადის პირობითი ლოდინის ნიშნის გარეთ;
3) $E[c_1X_1+c_2X_2|Y]=c_1E[X_1|Y]+c_2E[X_2|Y]$, ე.ი. წრფივი კომბინაციის პირობითი მათემატიკური ლოდინი პირობითი მათემატიკური ლოდინების წრფივი კომბინაციის ტოლია;
4) თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $E[X|Y]=EX$;
5) $E[X\cdot h(Y)|Y] = h(Y)\cdot E[X|Y]$;
6) $E\{E[X|Y]\}=EX$.

უკანასკნელი თვისება ცნობილია აგრეთვე ორმაგი გასაშუალოების წესის სახელით.

* * *

ეს თავი ეყრდნობა [11], [17], [21], [27], [39], [56], [64] წიგნებს, რომლებიც გადმოცემული საკითხების გარდა მრავალ სხვა მასალასაც შეიცავს (დამატებითი ინფორმაციის მისაღებად სასარგებლო იქნება [1] და [3] წიგნების გაცნობაც). ეკონომისტებისათვის განკუთვნილი სახელმძღვანელოებიდან მკითხველს ვურჩევდით [60], [66], [72], [79] წიგნებს და აგრეთვე ქართულ ენაზე არსებულ შესაბამის ლიტერატურას: [8], [9], [13], [14], [15].

დასკვნები

თუ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე x_1, x_2, ... მნიშვნელობებს იღებს p_1, p_2, ... ალბათობებით, $p_1+p_2+\dots=1$, მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი განისაზღვრება

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

ტოლობით, თუ კი უკანასკნელი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდისათვის, რომლის განაწილების სიმკვრივეა $f(x)$, გვაქვს

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

(აქაც იგულისხმება, რომ $|x|f(x)$ ინტეგრებადია). $h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის (სადაც $h(X)$ ნამდვილი ცვლადის რაიმე ნამდვილი ფუნქციაა) მათემატიკური ლოდინი შესაბამისად

$$E\,h(X) = \Sigma\, h(x_i)p_i$$

და

$$E\,h(X) = \int h(x)f(x)dx$$

ტოლობით განისაზღვრება.

მათემატიკური ლოდინი წრფივად იცვლება შემთხვევითი სიდიდის წრფივად გარდაქმნისას. დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია.

X შემთხვევითი სიდიდის p რიგის კვანტილი ეწოდება ისეთ x_p რიცხვს, რომელიც უმცირესია იმ რიცხვებს შორის, რომლისთვის სრულდება $F_X(x_p)\geq p$ უტოლობა, 1/2 რიგის კვანტილს მედიანა ეწოდება.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მოდა, ანუ მისი განაწილების მოდა არის X-ის ის მნიშვნელობა, რომელსაც მაქსიმალური ალბათობა გააჩნია. თუკი შემთხვევითი სიდიდე უწყვეტია, მაშინ მოდა ეწოდება იმ მნიშვნელობას, სადაც სიმკვრივე მაქსიმუმს აღწევს. როცა მოდა ერთადერთია, განაწილებას უნიმოდალური ეწოდება.

მათემატიკური ლოდინი, მოდა და მედიანა, ასევე სხვა კვანტილები შემთხვევითი სიდიდის მდებარეობას ახასიათებენ. შემთხვევითი სიდიდის გაბნევას მისი საშუალო მნიშვნელობის მიმართ ახასიათებს მისი დისპერსია $DX=E(X-EX)^2$ და საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma_X=\sqrt{DX}$. მუდმივის დამატება დისპერსიას არ ცვლის, ხოლო მუდმივი მამრავლი კვადრატში გადის დისპერსიის ნიშნის გარეთ. დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების შეკრებისას დისპერსიები იკრიბება.

მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შემთხვევითი სიდიდის $\mu_k'=EX^k$ საწყისი და $\mu_k=E(X-EX)^k$ ცენტრალური მომენტებია, შესაბამისად, k=1 და k=2 შემთხვევაში. მომენტების საშუალებით შემოდის აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ე.წ. ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები, რომლებიც ამ სიდიდის განაწილებას ე.წ. ნორმალურ განაწილებას ადარებენ.

ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის კავშირს ახასიათებენ კოვარიაცია $\mathrm{cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$ და კორელაციის კოეფიციენტი $\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$. $|\rho(X,Y)|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X-სა და Y-ს შორის წრფივი კავშირია.

ორზე მეტი განზომილების შემთხვევით ვექტორთა რიცხვითი მახასიათებლები ანალოგიურად განისაზღვრება. აქ აღსანიშნავია კოვარიაციის მატრიცა, რომელიც ვექტორის კომპონენტების კოვარიაციებისაგან შედგება და ამდენად მის დიაგონალზე დისპერსიებია მოთავსებული

შემოღებულია პირობითი განაწილებისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნებები და შესწავლილია ამ უკანასკნელის თვისებები. კერძოდ, განისაზღვრება X შემთხვევითი სიდიდის $E(X|Y)$ პირობითი მათემატიკური ლოდინი Y შემთხვევითი სიდიდის მიმართ (როცა Y დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა, $E(X|Y)$ არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც $E(X|Y=y)$ მნიშვნელობებს $P(Y=y)$ ალბათობებით იღებს). უკანასკნელის მათემატიკური ლოდინი უპირობო მათემატიკური ლოდინის ტოლია:

$$E(E(X|Y)) = EX.$$

ამ ტოლობას ორმაგი გასაშუალოების წესი ეწოდება.

სავარჯიშოები

6.1. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–2	–1	0	3	5
	0.1	0.15	0.3	0.3	0.15

ვიპოვოთ: ა) მათემატიკური ლოდინი, ბ) მოდა.

6.2. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–1,5	0,2	0,6	2	2,6	3,5
	0,1	0,15	0,2	0.35	0,15	0,05

ვიპოვოთ: ა) მათემატიკური ლოდინი, ბ) მოდა გ) დისპერსია დ) საშუალო კვადრატული გადახრა.

6.3. გამოთვალეთ X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის $[EX–DX, EX+DX]$ შუალედში მოხვედრის ალბათობა, თუ მისი განაწილების კანონია

X	–1	0	1	2
	0.3	0,1	0.4	0,2

6.4. გამოთვალეთ X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის $[EX–DX,EX+DX]$ შუალედში მოხვედრის ალბათობა, თუ მისი განაწილების კანონია

X	–2	–1	0	3
	0.1	0.2	0.4	0.3

6.5. X სიდიდის დისპერსია 5-ის ტოლია. რისი ტოლია შემდეგი შემთხვევითი სიდიდეების დისპერსიები? ა) $X+1$, ბ) $-2X$, გ) $4X+7$.

6.6. შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელიბებია $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. ასევე ცნობილია, რომ $EX=2.3$, $DX=0.41$. იპოვეთ რა ალბათობით იღებს შემთხვევითი სიდიდე ამ მნიშვნელობებს.

6.7. დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს ორ x_1 და x_2 მნიშვნელობას, $(x_1<x_2)$ და $P\{X=x_1\}=0.6$. იპოვეთ X-ის განაწილების კანონი, თუ $EX=1.4$ და $DX=0.24$-ს.

6.8. მოცემულია $p_1=0.5$, $p_2=0.5$, $EX=3$, $DX=1$. როგორია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი?

6.9. მოცემულია $p_1=0.3$, $p_2=0.7$, $EX=0.4$, $DX=0.84$. იპოვეთ x_1 და x_2 $(x_1<x_2)$

6.10. მოცემულია (X,Y) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$1/4$	$3/10$
1	$1/5$	$3/20$
2	$1/20$	$1/20$

ვიპოვოთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ა) კოვარიაცია, ბ) კორელაციის კოეფიციენტი.

6.11. მოცემულია (X,Y) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$X \backslash Y$	-2	0
-1	0	$1/15$
0	$1/5$	$4/15$
2	$1/3$	$2/15$

ვიპოვოთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ა) კოვარიაცია, ბ) კორელაციის კოეფიციენტი. გამოვთვალოთ $Z=2X-Y+1$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

6.12. ვთქვათ $T = 2X-Y-2Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=2$, $EY=3$, $EZ=1$, $DX=9$, $DY=16$, $DZ=16$, $\mathrm{cov}[X,Y]=8$, $\mathrm{cov}[X,Z]=4$, $\mathrm{cov}[Z,Y]=4$.

6.13. ვთქვათ $T=2X-2Y+Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=2$, $EY=1$, $EZ=2$, $DX=9$, $\mathrm{cov}[X,Y]=5$, $DY=25$, $\mathrm{cov}[X,Z]=7$, $DZ=16$, $\mathrm{cov}[Z,Y]=8$.

6.14. ვთქვათ, $T=-2X+Y-Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=-2$, $EY=1$, $EZ=-3$, $DX=9$, $\mathrm{cov}[X,Y]=9$, $DY=16$, $\mathrm{cov}[X,Z]=5$, $DZ=36$, $\mathrm{cov}[Z,Y]=8$.

ძირითადი განაწილებანი

§ 1. დისკრეტული განაწილებანი

ბერნულის განაწილება. ხშირად ცდის (ექსპერიმენტის) შედეგად ფიქსირდება მხოლოდ, რაიმე ხდომილობის („წარმატების“) ან მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის („მარცხის“) მოხდენა. მაგალითად, რაიმე ოპერაციის შედეგად ფირმა მიიღებს მოგებას ან არა; ახალშობილი იქნება ბიჭი ან იქნება გოგო და ა.შ. ყველა ასეთი ექსპერიმენტს ალბათობის თეორიაში აღწერენ შემთხვევითი სიდიდით, რომელიც „წარმატების“ შემთხვევაში 1-ია, ხოლო „მარცხის“ შემთხვევაში 0. ამავე დროს წარმატებას მიაწერენ p ალბათობას, ხოლო მარცხს – $(1-p)$ ალბათობას, ასეთ X შემთხვევით სიდიდეს ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ. მისი განაწილების კანონია:

X	0	1
	$1-p$	p

(7.1)

(7.1)-ით განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეს ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება, ხოლო (7.1) განაწილებას – ბერნულის განაწილება p პარამეტრით.

ბერნულის X შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლებია $EX=p$, $DX=p(1-p)$, $\sigma_X=\sqrt{p(1-p)}$, $M_X(t)=(1-p)+e^tp$.

> ბერნულის განაწილება
>
> X ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეა წარმატების p ალბათობით, თუ
>
> $$P\{X=1\}=p,\ P\{X=0\}=1-p.$$
>
> $$EX=p, \quad DX=p(1-p).$$
>
> $$M_X(t)=(1-p)+e^tp.$$

ბერნულის ცდათა სქემა. ბინომური განაწილება. ვთქვათ, ვატარებთ განმეორებით დამოუკიდებელ ცდებს და თითოეული ცდის შედეგია 1 ("წარმატება"), ან 0 ("მარცხი"). ჩვენ განვიხილავთ ცდათა ისეთ მიმდევრობას, როდესაც წარმატებათა ალბათობა ცდიდან ცდამდე უცვლელია და p-ს ტოლია, ანუ ყოველი ცდის შედეგი აღიწერება ბერნულის შემთხვევითი სიდიდით. დამოუკიდებელ ცდათა ასეთ მიმდევრობას ბერნულის ცდათა სქემას უწოდებენ.

ვთქვათ ვატარებთ n ცდას. მაშინ ცხადია, რომ ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგი აღიწერება 1-ებისა და 0-ების ყველანაირი მიმდევრობით.

განვიხილოთ ახლა ასეთი შემთხვევითი სიდიდე:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \,, \tag{7.2}$$

რადგან $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, ნულსა და ერთს, მათი ჯამი ტოლი იქნება ერთიანების რაოდენობისა $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევით შესაკრებებს შორის, ანუ S_n ტოლი იქნება წარმატებათა რაოდენობისა n ცდაში. ამიტომ S_n-ის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{0,1,2,\ldots,n\}$. იმის დასადგენად, თუ რისი ტოლია $\{S_n=k\}$, $k=0,1,2,\ldots,n$ ხდომილობის ალბათობა, ზოგადი შემთხვევის განხილვამდე განვიხილოთ $n=4$ შემთხვევა. რადგან $n=4$, ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე შედგება $2^4=16$ ელემენტარული ხდომილობისაგან, რომლებიც ჩამოთვლილია 7.1. ცხრილის მეორე სვეტში, სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები: $\{X_1=k_1 \cap X_2=k_2 \cap X_3=k_3 \cap X_4=k_4\}$ ხდომილობა აღნიშნულია $k_1k_2k_3k_4$-ით, ხოლო ამ ხდომილობის ალბათობა $P_{k_1k_2k_3k_4}$-ით. მაგალითად, 0000 შემოკლებული ჩანაწერი აღნიშნავს შემდეგ ელემენტარულ ხდომილობას $\{X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0\}$, ხოლო [illegible] – მის ალბათობას. მესამე სვეტში მითითებულია ელემენტარულ ხდომილობათა ალბათობები, რომელთა გამოთვლისას ვითვალისწინებთ X_1, X_2, X_3, X_4 შემთხვევითი სიდიდეების შემდეგ ორ ძირითად თვისებას:

I) X_1, X_2, X_3, X_4 შემთხვევითი სიდიდეები ერთობლივად დამოუკიდებელია;

II) X_1, X_2, X_3, X_4 შემთხვევითი სიდიდეები ერთნაირადაა განაწილებული.

ცხრილი 7.1.

N	$k_1k_2k_3k_4$	$P_{k_1k_2k_3k_4}$	k	$\#\{S_4=k\}$	$P\{S_4=k\}$
1	0 0 0 0	$P\{0000\}=(1-p)^4$	0	$C_4^0=1$	$P\{S_4=0\}=C_4^0\,p^0(1-p)^4= =(1-p)^4$
2	0 0 0 1	$P\{0001\}=p(1-p)^3$	1	$C_4^1=4$	$P\{S_4=1\}=C_4^1\,p(1-p)^3=4p(1-p)^3$
3	0 0 1 0	$P\{0010\}=p(1-p)^3$			
4	0 1 0 0	$P\{0100\}=p(1-p)^3$			
5	1 0 0 0	$P\{1000\}=p(1-p)^3$			
6	0 0 1 1	$P\{0011\}=p^2(1-p)^2$	2	$C_4^2=6$	$P\{S_4=2\}=C_4^2\,p^2(1-p)^2=6p^2(1-p)^2$
7	0 1 0 1	$P\{0101\}=p^2(1-p)^2$			
8	1 0 0 1	$P\{1001\}=p^2(1-p)^2$			
9	0 1 1 0	$P\{0110\}=p^2(1-p)^2$			
10	1 0 1 0	$P\{1010\}=p^2(1-p)^2$			
11	1 1 0 0	$P\{1100\}=p^2(1-p)^2$			
12	0 1 1 1	$P\{0111\}=p^3(1-p)$	3	$C_4^3=4$	$P\{S_4=3\}=C_4^3\,p^3(1-p)^1=4p^3(1-p)$
13	1 0 1 1	$P\{1011\}=p^3(1-p)$			
14	1 1 0 1	$P\{1101\}=p^3(1-p)$			
15	1 1 1 0	$P\{1110\}=p^3(1-p)$			
16	1 1 1 1	$P\{1111\}=p^4$	4	$C_4^4=1$	$P\{S_4=4\}=C_4^4\,p^4=p^4$

მეოთხე სვეტში მითითებულია $S_4=X_1+X_2+X_3+X_4$-ის შესაძლო მნიშვნელობები $k=0,1,2,3,4$; მეხუთე სვეტი განსაზღვრავს იმ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდე-

ნობებს, რომლებსაც „წარმატებათა" და „მარცხთა" ერთი და იგივე რაოდენობა გააჩნიათ. ჯუფთების განსაზღვრების თანახმად, მათი რაოდენობა C_n^k-ის ტოლია. ბოლო მეექვსე სვეტში მოცემულია $\{S_4=k\}$ ხდომილობათა $P\{S_4=k\}$ ალბათობები.

საზოგადოდ, S_n, როგორც ვთქვით, წარმოადგენს დისკრეტული ტიპის შემთხვევით სიდიდეს, რომლის შესაძლო მნიშვნელობებია 0, 1, 2, ... , n და $\{S_n=k\}$ ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k,p) \equiv P_n\{S_n=k\} = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\dots,n, \tag{7.3}$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{7.4}$$

(7.4)-ით განმარტებულ რიცხვებს ბინომურ კოეფიციენტებს უწოდებენ. ამდენად, ბუნებრივია, S_n შემთხვევით სიდიდეს ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო ალბათობათა (7,3) განაწილებას კი – ბინომური განაწილება ვუწოდოთ. ამრიგად, ბინომურად განაწილებული S_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

S_n	0	1	2	...	k	...	n
	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$\frac{1}{2}n(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$	...	$C_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k}$	...	p^n

მაგალითი 7.1. ყუთში 3 თეთრი და 5 შავი ბურთია. ყუთიდან შემთხვევით, დაბრუნებით იღებენ 4 ბურთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთებიდან თეთრი ბურთების რაოდენობა მეტი იქნება შავი ბურთების რაოდენობაზე.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, ერთ ცდაში წარმატების ალბათობაა $p=3/8$. საძიებელი ხდომილობის ხელშემწყობ უთავსებად შემთხვევებს წარმოადგენს ოთხ ცდაში სამი ან ოთხი თეთრი ბურთის ამოღება, რომელთა ალბათობები (7.3) ფორმულის მიხედვით შესაბამისად ტოლია:

$$P\{S_4=3\}=C_4^3\cdot(3/8)^3\cdot(1-3/8)^{4-3}=135/1024 \text{ და } P\{S_4=4\}=(3/8)^4=81/4096.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობაა

$$P\{S_4=3\}+P\{S_4=4\}=135/1024+81/4096=621/4096.$$

ბინომური შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას, რომელსაც ჩვენ $F_n(x,p)$-თი აღვნიშნავთ, როცა $k \le x < k+1$, ექნება შემდეგი სახე:

$$F_n(x,p) = F_n(k,p) \equiv P\{S_n \le k\} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i\, p^i(1-p)^{n-i}. \tag{7.5}$$

ბინომური განაწილების n და p პარამეტრების ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის, კერძოდ, როცა n არ არის „დიდი", $P_n(k,p)$ და $F_n(k,p)$ ალბათობები გამოითვლება უშუალოდ (7.3) და (7.5) ფორმულების საშუალებით; მაგრამ პრაქტიკული ამოცანების უმრავლესობაში საჭიროა ამ ალბათობების მნიშვნელობების ცოდნა საკმარისად დიდი n-ებისათვის

p პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობის დროს. ამ შემთხვევაში სარგებლობენ ბინომური განაწილების სპეციალური ცხრილებით.

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ რადგან ბინომური კოეფიციენტებისათვის სამართლიანია ტოლობა $C_n^k = C_n^{n-k}$, ბინომური ალბათობებისათვის გვექნება :

$$P_n(k, p) = P_n(n-k, 1-p) \text{ და } F_n(k, p) = 1-F_n(n-k-1, 1-p).$$

ეს ტოლობა იძლევა ბინომური ცხრილების შემდგომი რედუქციის შესაძლებლობას: საკმარისია ვიცოდეთ ცხრილები p-ებისათვის, რომელთათვისაც $0 \le p \le 1/2$.

დავსვათ ასეთი შეკითხვა: ვთქვათ, n და p ცნობილი რიცხვებია; k რიცხვის რომელი მთელი k_0 მნიშვნელობისათვის მიიღებს P_n (k, p) ალბათობა უდიდეს მნიშვნელობას, ანუ წარმატებათა რა რაოდენობაა ყველაზე მოსალოდნელი n დამოუკიდებელ ცდაში? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განვიხილოთ ფარდობა

$$a_k = P_n(k+1, p)/P_n(k, p) = (n-k)p/((k+1)q)$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $a_k>1$, როცა $k<np-q$; $a_k=1$, როცა $k=np-q$ და $a_k<1$, როცა $k>np-q$. აქედან კი, ცხადია, რომ $P_n(k,p)$ მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს k-ის იმ k_0 მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$np-q \le k_0 \le np+p. \tag{7.6}$$

ბუნებრივია, ასეთ k_0 რიცხვს, რომელიც 1 სიგრძის ინტერვალშია მოთავსებული, მოცემული n და p-სათვის ბინომური განაწილების უალბათესი რიცხვი ანუ ამ განაწილების მოდა ვუწოდოთ. თუ $np-q$ არ არის მთელი, მაშინ უალბათესი რიცხვი ერთადერთია და მისი რიცხვითი მნიშვნელობაა $[(n+1)p]$ (აქ $[x]$ აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს) და მაშასადამე, განაწილება უნიმოდალურია, ხოლო თუ $np-q$ მთელია, მაშინ $P_n(np-q,p)=P_n(np+p, p))$, ანუ არსებობს ორი უალბათესი რიცხვი $k_0^{(1)} = np-q$ და $k_0^{(2)} = np+p$, და მაშასადამე, განაწილება ბიმოდალურია. მაგალითად, როცა $n=19$ და $p=0.15$, $(n+1)p=(19+1)\cdot 0.15=3$ მთელი რიცხვია, $P_{19}(k,0.15)$ განაწილება ბიმოდალურია და შესაბამისი უალბათესი რიცხვებია 2 და 3, ხოლო როცა $n=19$ და $p=0.36$, $P_{19}(k,0.36)$ განაწილება უნიმოდალურია და უალბათესი რიცხვია $[(19+1)\cdot 0.36]=[7.2]=7$. გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ როცა $p<1/(n+1)$, (7.6) ფორმულა უალბათესი რიცხვისათვის გვაძლევს $k_0=0$ და მაშასადამე, $P_n(k,p)$ ალბათობა, როგორც k-ს ფუნქცია სულ კლებადია.

მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებების თანახმად ადვილად მივიღებთ, რომ $ES_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p = np$ და $DS_n=np(1-p)$. მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქციის (7.14) თვისების ძალით მიიღება, რომ ბინომური განაწილების მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქციაა

$$M_{S_n}(t) = (q+e^t p)^n.$$

ბინომური განაწილება

n – დამოუკიდებელი ცდების რაოდენობა ბერნულის ცდათა სქემაში
p – წარმატების ალბათობა თითოეულ ცდაში, $q=1-p$

S_n – წარმატებათა რაოდენობა, $S_n = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$P_n(k,p)\equiv P\{S_n=k\}=C_n^k\, p^k q^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n$$

$$C_n^k = n!\,/\,(k!(n-k)!),\ m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots m,\ 0!=1$$

$$ES_n = np,\ DS_n = npq,\ \sigma_{S_n} = (npq)^{1/2}$$

$$\alpha = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \qquad e = \frac{1-6pq}{npq},$$

$$M_{S_n}(t) = (q+e^t p)^n.$$

k_0 – უალბათესი რიცხვი, აკმაყოფილებს პირობას:
$$(n+1)p-1 \le k_0 \le (n+1)p$$

ᲒᲔᲝᲛᲔᲢᲠᲘᲣᲚᲘ ᲒᲐᲜᲐᲬᲘᲚᲔᲑᲐ. წარმოვიდგინოთ, რომ ტარდება ბერნულის ცდათა მიმდევრობა პირველ წარმატებამდე. ცხადია, რომ იმ ცდის N ნომერი, როდესაც ადგილი ჰქონდა პირველ წარმატებას, შემთხვევითი სიდიდეა. ვიპოვოთ მისი განაწილების კანონი.

ცხადია, რომ N დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა, რომელის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{1,2,3,\ldots\}$. დავადგინოთ შესაბამისი ალბათობები $P\{N=n\}$ $(n\geq 1)$. თუ X_i არის წარმატების ინდიკატორი i-ურ ცდაში (ე.ი. $X_i=1$ თუ i-ურ ცდაში ადგილი ჰქონდა წარმატებას, $X_i=0$ მარცხის შემთხვევაში), მაშინ

$$\{N=n\} = \{X_1=0, X_2=0, \ldots, X_{n-1}=0, X_n=1\}.$$

ამიტომ $X_1,\ldots,X_n$ შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობის გამო

$$P\{N=n\}= P(X_1=0)\cdots P(X_{n-1}=0)\cdot P(X_n=1) = (1-p)^{n-1}p. \tag{7.7}$$

მიღებულ განაწილებას უწოდებენ გეომეტრიულ განაწილებას. ვაჩვენოთ, რომ ეს მართლაც განაწილებაა. განვიხილოთ $\sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}$. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

სწორედ ამიტომაც ჰქვია ამ განაწილებას გეომეტრიული განაწილება.

მტკიცდება, რომ გეომეტრიული განაწილების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსიაა:

$$EN = 1/p, \qquad DN = (1-p)/p^2.$$

ვაჩვენოთ, რომ $EN=1/p$. გავაწარმოოთ p-ს მიმართ წევრ-წევრად გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულა

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n=\frac{1}{p}.$$

მივიღებთ, რომ

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\,(1-p)^{n-1}=\frac{1}{p^2}.$$

აქედან, მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრების თანახმად

$$EN=\sum_{n=0}^{\infty}n\,p\,(1-p)^{n-1}=\frac{1}{p}.$$

ხშირად გეომეტრიულად განაწილებულს უწოდებენ არა N, არამედ $G=N-1$ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ცხადია, გვიჩვენებს მარცხების რაოდენობას პირველ წარმატებამდე. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$P\{G=n\}=p(1-p)^n,\qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

და

$$EG=(1-p)/p\qquad \text{და}\qquad DG=(1-p)/p^2.$$

ბოლოს შევჩერდეთ ამ განაწილების ერთ მნიშვნელოვან თვისებაზე, რომელიც სხვა დისკრეტულ განაწილებას არ გააჩნია. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობა:

$$P\{G\geq m+n|G\geq m\}=\frac{P\{G\geq m+n\}}{P\{G\geq m\}}=\frac{p\sum\limits_{k=m+n}^{\infty}(1-p)^k}{p\sum\limits_{k=m}^{\infty}(1-p)^k}=\frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m}=(1-p)^n=P\{G\geq n\}.$$

როგორც ვხედავთ, მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული m-ზე. ამ თვისებას ეწოდება „მეხსიერების უქონლობა" გეომეტრიული განაწილებისათვის.

გეომეტრიული განაწილება
p–ცალკეულ ცდაში წარმატების ალბათობა ბერნულის ცდათა სქემაში, $q=1-p$
N_1 – ცდების რაოდენობა პირველ წარმატებამდე, $N_1=1,2,3,\ldots$
G – მარცხების რაოდენობა პირველ წარმატებამდე, $G=0,1,2,\ldots$
$P\{N_1=n\}=P\{G=n-1\}=pq^{n-1}$, $n=1,2,3,\ldots$
$EN_1=1/p$, $EG=q/p$; $DN_1=DG=q/p^2$
$P\{G\geq m+n\|G\geq m\}=P\{G\geq n\}$ – „მეხსიერების უქონლობის" თვისება

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება. ვთქვათ ყუთში s ბირთვია და მათ შორის l თეთრია. შემთხვევით, დაბრუნების გარეშე ვიღებთ n ბირთვს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ზუსტად k ცალი იქნება თეთრი.

მეოთხე თავის §5-ში ჩვენ გამოვითვალეთ, რომ თუ n ბირთვს შორის თეთრების რაოდენობას S_n-ით აღვნიშნავთ,

$$P_n\{k;\, s,t\} = P_n\{S_n=k\} = \frac{C_t^k C_{s-t}^{n-k}}{C_s^n} = \frac{C_n^k C_{s-n}^{t-k}}{C_s^t}, \quad k=0,\ldots,n. \tag{7.8}$$

რიცხვთა ამ მიმდევრობას ჰიპერგეომეტრიული განაწილება ეწოდება. $P_n\{k;s,t\}>0$, თუ

$$\max(0,\, n-(s-t)) \le k \le \min(t,n).$$

მაგალითი 7.2. აუდიტორიაში იმყოფება 5 ვაჟი და 10 ქალი, შემთხვევით ირჩევენ 6 სტუდენტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 3 ვაჟია.

ამოხსნა. თუ წარმატებად მივიჩნევთ ვაჟის ამორჩევას, მაშინ პირობის თანახმად, $s=15$, $t=10$, $n=6$ და $k=3$. ცხადია, რომ $0\le S_n\le 5$ და (7.8)-ის მიხედვით,

$$P_6(3,15,10) = \frac{C_{10}^3 C_{15-10}^{6-3}}{C_{15}^6} = \frac{C_{10}^3 C_5^3}{C_{15}^6} = \frac{240}{1001} \approx 0.239\,.$$

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება
s – ობიექტების საერთო რაოდენობა;
t – I სახის ობიექტების რაოდენობა;
$(s-t)$ – II სახის ობიექტების რაოდენობა;
n – შემთხვევით (დაბრუნების გარეშე) ამორჩეული ობიექტების რაოდენობა;
S_n – I სახის ობიექტების რაოდენობა ამორჩეულ n ობიექტში,
$S_n = \max(0,n-(s-t)), \ldots, \min(n,t)$.
$$P_n\{k;\, s,t\} = \frac{C_t^k C_{s-t}^{n-k}}{C_s^n} = \frac{C_n^k C_{s-n}^{t-k}}{C_s^t}$$
$ES_n = n\cdot(t/s)$, $DS_n = n\cdot(t/s)(1-t/s)(1-(n-1)/(s-1))$.

პუასონის განაწილება. პუასონის კანონით განაწილებული ეწოდება ისეთ X შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს 0,1,2,... მთელ მნიშვნელობებს

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{7.9}$$

ალბათობებით, სადაც λ რაიმე დადებითი რიცხვია, რომელსაც პუასონის განაწილების პარამეტრს უწოდებენ.

(7.7) რომ მართლაც განაწილებაა ემყარება მათემატიკურ ანალიზში ცნობილ ფაქტს, რომ e^{λ} ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლას აქვს შემდეგი სახე: $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.

გამოვთვალოთ X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი:

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$$

როგორც ვხედავთ, $EX=\lambda$, ე.ი., λ პარამეტრი წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს (საშუალო მნიშვნელობას). ასევე ადვილი სანახავია, რომ $DX=\lambda$.

პუასონის განაწილებისათვის λ პარამეტრით მაწარმოებელი ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$M_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}.$$

ამ ფუნქციის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება შემდეგი ფაქტი: თუ X და Y დამოუკიდებელი პუასონის განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, შესაბამისად, λ_1 და λ_2 პარამეტრებით, მაშინ $(X+Y)$ შემთხვევითი სიდიდე კვლავ პუასონის განაწილების მქონეა $\lambda_1+\lambda_2$ პარამეტრით.

მართლაც,

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)\,M_Y(t)=e^{\lambda_1(e^t-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^t-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

და ასეთი ტიპის მაწარმოებელი ფუნქცია გააჩნია მხოლოდ პუასონის განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეს.

პუასონის განაწილება, როგორც წესი, წარმოადგენს კარგ მათემატიკურ მოდელს იშვიათ ხდომილობათა აღსაწერად: დროის ფიქსირებულ შუალედში მომხდარ ხდომილობათა რაოდენობა ხშირად ემორჩილება პუასონის განაწილებას. მაგალითად შეიძლება გამოდგეს გეიგერის მთვლელის მიერ t დროში რეგისტრირებული რადიაქტიური დაშლის შედეგად α ნაწილაკების რაოდენობა, სატელეფონო სადგურში t დროის განმავლობაში რეგისტრირებულ გამოძახებათა რაოდენობა. გარკვეულ პირობებში პუასონის განაწილება ჩნდება როგორც ბინომური განაწილების მიახლოება წარმატების მცირე ალბათობისა და ცდათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში.

ქვემოთ მოგვყავს პუასონის განაწილებისა და განაწილების ფუნქციის ცხრილების ფრაგმენტები.

ცხრილი 7.2 პუასონის განაწილება

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

	λ		
k	8.9	9.0	9.1
0	.0001	.0001	.0001
1	.0012	.0011	.0010
2	0054	.0050	.0047
3	.0161	.0150	.0140
4	0356	0338	.0319
5	0635	.0610	.0581
6	.0941	.0908	.0880
7	.1197	.1171	.1145
8	.1332	.1318	.1303
9	1317	.1317	.1316

ცხრილი 7.3 პუასონის განაწილების ფუნქცია

$$P\{X\le k\}=\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$$

	λ		
k	8.9	9.0	9.1
0	.0001	.0001	.0001
1	.0013	0012	.0011
2	.0067	.0062	.0058
3	.0228	.0212	.0198
4	.0584	.0550	.0517
5	.1219	.1160	.1098
6	.2160	.2068	.1978
7	.3357	.3239	.3123
8	4689	.4557	.4426
9	.6006	.5874	.5742

ამ განაწილების გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 7.3. ცნობილია, რომ სატელეფონო სადგურში t დროის განმავლობაში შემოსულ გამოძახებათა რაოდენობა წარმოადგენს პუასონის განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეს λ პარამეტრით. ჩავთვალოთ, რომ დრო იზომება წუთებში. ვთქვათ, $\lambda=9$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა ა) იქნება 3; ბ) არ აღემატება 4-ს.

ამოხსნა. ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობას აქვს პუასონის განაწილება პარამეტრით $\lambda=9$, ამიტომ გვექნება:

$$ა)\ P\{X=3\}=\frac{9^3}{3!}e^{-9}, \qquad ბ)\ P\{X\le 4\}=\sum_{k=0}^{4}\frac{9^k}{k!}e^{-9}.$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ გამოთვლების თვალსაზრისით საკმარისად რთული გამოსახულებები, მაგრამ თუ ვისარგებლებთ პუასონის განაწილების ცხრილების ზევით მოყვანილი ფრაგმენტებით, მივიღებთ.

$$P\{X=3\}=\frac{9^3}{3!}e^{-9}\approx 0.0150 \text{ და } P\{X\le 4\}=\sum_{k=0}^{4}\frac{9^k}{k!}e^{-9}\approx 0.0550.$$

პუასონის განაწილება

პუასონის ეწოდება ისეთ X შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს არაუარყოფით მთელ მნიშვნელობებს ალბათობებით:

$$P\{X=k\}=(\lambda^k/k!)\cdot\exp(-\lambda),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

λ განაწილების პარამეტრია, $\lambda>0$,

$$EX=DX=\lambda,$$

$$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}.$$

პოლინომური განაწილება. როგორც გვახსოვს, ბინომური განაწილება ეხებოდა n დამოუკიდებელ ცდას, რომელთაგან თითოეულში ორი ტიპის შედეგი ფიქსირდება – ე.წ. „წარმატება“ p ალბათობით და „მარცხი“ q ალბათობით. ყოველი $m = 0,1,..,n$ რიცხვისათვის ზუსტად m „წარმატების“ ანუ m „წარმატებისა“ და $n-m$ „მარცხის“ ალბათობა მოიცემა ფორმულით:

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}.$$

ხშირად ერთეულ ცდას აქვს ორზე მეტი შედეგი და ასეთი ცდების მიმდევრობას უკვე ვეღარ აღვწერთ ბერნულის სქემით.

ვთქვათ n დამოუკიდებელი ცდიდან თითოეულს შეიძლება მოჰყვეს k ურთიერთგამომრიცხავი შედეგი, რომლებიც $1,2,\ldots,k$ რიცხვებით აღვნიშნოთ და რომელთა ალბათობებია p_1, p_2, ... , p_k, ამ ალბათობების ჯამი კი ერთია: $p_1+p_2+\cdots+p_k=1$. ν_i იყოს n ცდაში i-ური შედეგის განხორციელებათა რაოდენობა, $i=1,2,\ldots,k$.

ძნელი არაა იმის ჩვენება, რომ $(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k)$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება, ანუ $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k$ შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილება მოიცემა ფორმულით:

$$P\{\nu_1=n_1,\nu_2=n_2,\ldots,\nu_k=n_k\} = P\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}, \qquad (7.10)$$

სადაც $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ და $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. ამ განაწილებას პოლინომური განაწილება ეწოდება.

ცხადია, რომ თუ $k=2$, მაშინ $n_2=n-n_1$, $p_2=1-p_1$ და (7.10) ფორმულა მოგვცემს ბინომურ განაწილებას. თითოეული ν_i-ს განაწილება ბინომურია p_1 ალბათობით $i=1,2,\ldots,k$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$E\nu_i = np_i,\ \ D\nu_i = np_i(1-p_i), \quad i=1,2,\ldots,k,$$

$$E(\nu_i-np_i)(\nu_j-np_j) = -np_ip_j, \quad i,j=1,2,\ldots,k,\ i\neq j.$$

უარყოფითი ბინომური განაწილება. ვთქვათ ტარდება ბერნულის ცდათა მიმდევრობა k წარმატებამდე. N_k იყოს იმ ცდის ნომერი, როდესაც მოხდა k-ური წარმატება. ცხადია, რომ N_k შემთხვევითი სიდიდეა და $N_k > k$, რადგან k წარმატების მოსახდენად სულ ცოტა k ცდა მაინც უნდა ჩატარდეს. ამრიგად N_k-ს შესაძლო მნიშვნელობებია k, $k+1,\ldots$. ვიპოვოთ N_k-ს განაწილების კანონი.

თუ X_i i-ურ ცდაში წარმატების ინდიკატორია და $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, მაშინ

$$\{N_k=n\} = \{S_{n-1} = k-1,\ X_n=1\}.$$

ამიტომ ცდათა დამოუკიდებლობის და აქედან გამომდინარე S_{n-1} და X_n შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობის გამო

$$P\{N_k=n\}=P\{S_{n-1}=k-1\}P\{X_n=1\}=C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}p.$$

აქ ჩვენ მხედველობაში მივიღეთ, რომ S_{n-1} შემთხვევით სიდიდეს აქვს ბინომური განაწილება პარამეტრებით $n-1$ და p.

საბოლოოდ,

$$P\{N_k=n\}=C_{n-1}^{k-1}\ p^k(1-p)^{n-k}, n\geq k. \qquad (7.11)$$

მიღებულ განაწილებას უარყოფით ბინომურ განაწილებას უწოდებენ.

განაწილების სახელი იქიდან მომდინარეობს, რომ თუ $G_k=N_k-k$ აღნიშნავს მარცხების რაოდენობას k-ურ წარმატებამდე, მაშინ ნებისმიერი $r=0,1,2,\ldots$ რიცხვისათვის

$$P\{G_k=r\} = P\{N_k=r+k\} = C_{r+k-1}^{r}p^kq^r = \frac{(k+r-1)\cdots(k+1)k}{r!}p^kq^r =$$

$$= \frac{-k(-k-1)\cdots(-k-(r-1))}{r!}p^k(-q)^r,$$

რაც წარმოადგენს p^k-ს ნამრავლს $(1-q)^{-k}$ უარყოფითი ბინომის ტეილორის მწკრივის ზოგად წევრზე.

ადვილი დასანახია კავშირი ბინომურ და უარყოფით ბინომურ განაწილებას შორის. კერძოდ,

$$P\{N_k=n\}=C_{n-1}^{k-1}\ p^k(1-p)^{n-k}=\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}\ C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}=\frac{k}{n}\cdot C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (7.12)$$

აქედან გამომდინარე, უარყოფითი ბინომური განაწილების ალბათობათა გამოთვლა შესაძლებელია ბინომური განაწილების ცხრილების საშუალებით.

უარყოფითი ბინომური განაწილების რიცხვითი მახასიათებლებია

$$EN_k=k/p, \qquad DN_k=\frac{k(1-p)}{p^2}.$$

მეორეს მხრივ, ეს თანაფარდობანი იმ გარემოების შედეგიცაა, რომ N_k წარმოადგენს გეომეტრიული განაწილების მქონე k დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ჯამს ($EN_k=kEN_1=k/p$, $DN_k=kDN_1=kq/p^2$). ასეთივე კავშირია G_k და $G_1=G$ შემთხვევით სიდიდეებს შორის (იხ. გეომეტრიული განაწილება), $EG_k=k-EN_k=kq/p=kEG_1$, $DG_k=DN_k=kDG_1$.

მაგალითი 7.4. სადაზღვევო კომპანია მოსახლეობას თავაზობს დაზღვევის გარკვეულ პირობებს. ალბათობა იმისა, რომ თითოეული მოქალაქე დათანხმდება დაზღვევაზე, p=0.15. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ხუთი სადაზღვევო ხელშეკრულების გასაფორმებლად კომპანიის აგენტს დასჭირდება სადაზღვევო პირობების შეთავაზება პირველი შემხვედრი 15 მოქალაქისათვის?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, p=0.15, n=15, k=5. ამიტომ (7.11) და (7.12) მივიღებთ

$$P\{N_5=15\} = C_{14}^4\cdot 0.15^5\cdot 0.85^{10}=(5/15)\cdot C_{15}^5\cdot 0.15^5\cdot 0.85^{10}\approx(1/3)\cdot 0.045=0.015.$$

უარყოფითი ბინომური განაწილება

p–ცალკეულ ცდაში წარმატების ალბათობა ბერნულის სქემაში;

N_k – ცდების რაოდენობა k-ურ წარმატებამდე, $N_k= k, k+1, k+2, \ldots$

$G_k=N_k-k$ – მარცხების რაოდენობა k-ურ წარმატებამდე, N_k=0,1,2,..

$$P\{N_k=n\} = P\{ G_k =n-k\} = C_{n-1}^{k-1}\ p^k(1-p)^{n-k},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

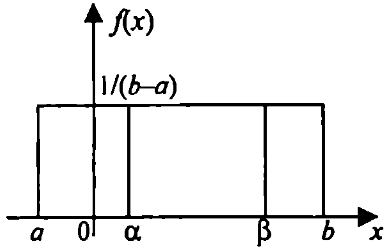
$$EN_k =k/p,\ \ EG_k = k(1-p)/p;\ DN_k=D\, G_k = k(1-p)/p^2$$

§ 2. უწყვეტი განაწილებანი

თანაბარი განაწილება [a,b] შუალედში. ვიტყვით, რომ X შემთხვევით სიდიდეს აქვს თანაბარი განაწილება [a,b] შუალედში ($-\infty<a<b<+\infty$), ანუ X თანაბრად განაწილებულია [a,b] შუალედში, თუ მისი განაწილების სიმკვრივეა

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{თუ} \quad a < x \le b, \\ 0, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში}. \end{cases} \tag{7.13}$$

მის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:

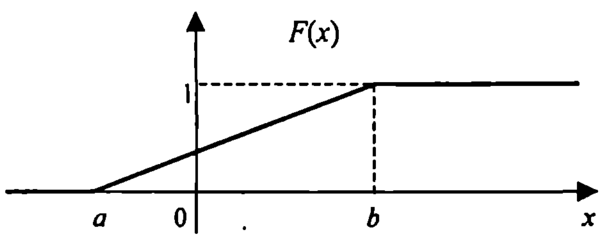


ნახ. 7.1

X შემთხვევითი სიდიდის $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x < a, \\ (x-a)/(b-a), & \text{როცა} \quad a \le x \le b, \\ 1, & \text{როცა} \quad x > b. \end{cases} \tag{7.14}$$

ნახ. 7.2-ზე ამ ფუნქციის გრაფიკია მოცემული



ნახ. 7.2

თუ $a \le \alpha < \beta \le b$, მაშინ (7.14)-დან მივიღებთ, რომ

$$P\{\alpha < X \le \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = (\beta - \alpha)/(b-a). \tag{7.15}$$

ანუ ამ შუალედში მოხვედრის ალბათობა ტოლია 7.1 ნახაზზე გამოსახული დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობისა.

X შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლებია:

$$EX = (a+b)/2,$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = (b-a)^2/12,$$

$$\sigma_X = (b-a)/(2\sqrt{3}).$$

(7.15)-ის ძალით გვექნება, რომ

$$F((a+b)/2) = ((a+b)/2-a)/(b-a) = 1/2$$

და მაშასადამე, $M=(a+b)/2$ წარმოადგენს განაწილების მედიანას. რაც შეეხება თანაბარი განაწილების მოდას, ცხადია, რომ $[a, b]$ შუალედის ნებისმიერი წერტილი შეიძლება ჩავთვალოთ განაწილების მოდად.

(a,b) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდე

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{როცა} \quad a<x\le b,\\ 0, & \text{როცა } x<a \text{ ან } x>b.\end{cases}$$

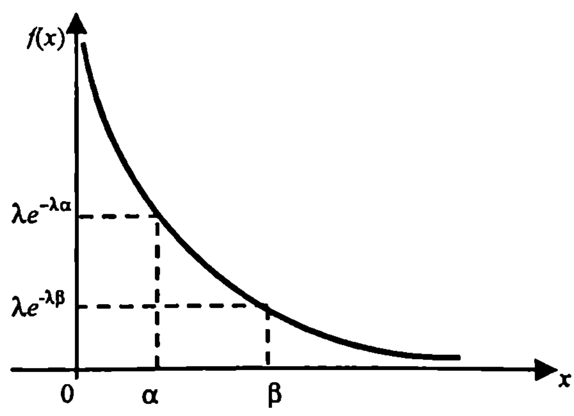
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x<a,\\ (x-a)/(b-a), & \text{როცა} \quad a\le x\le b,\\ 1, & \text{როცა} \quad x>b.\end{cases}$$

$EX=(a+b)/2,\qquad DX=(b-a)^2/12,\qquad M=(a+b)/2$

ექსპონენციალური განაწილება. λ პარამეტრით ($\lambda>0$) ექსპონენციალურად განაწილებული ეწოდება ისეთ X შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f(x)=Exp(x;\lambda)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \tag{7.16}$$

სიმკვრივის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 7.3

დაშტრიხული არის ფართობი წარმოადგენს ექსპონენციალური განაწილების მქონე X შემთხვევითი სიდიდის $[\alpha,\beta]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობას. შესაბამის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{როცა} \quad x\geq 0. \end{cases} \tag{7.17}$$

ექსპონენციალურად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინია $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du=\int_{0}^{+\infty}\lambda u e^{-\lambda u}du=\frac{1}{\lambda}$, ხოლო დისპერსია $DX=1/\lambda^2$ და მაშასადამე, $\sigma_X=1/\lambda$. ამრიგად, ექსპონენციალური განაწილების პარამეტრი წარმოადგენს მისი მათემატიკური ლოდინის შებრუნებულ სიდიდეს.[1] რადგან განაწილების სიმკვრივე კლებადია, ის თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს $x=0$ წერტილში და ამიტომ განაწილების მოდა $M_0=0$; რაც შეეხება მედიანას, ადვილი საჩვენებელია, რომ $M=(1/\lambda)\cdot\ln 2$.

ექსპონენციალურად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდე

$$f(x)=Exp(x;\lambda)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{როცა} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

$$EX=\frac{1}{\lambda}, \quad DX=1/\lambda^2, \quad M=\frac{1}{\lambda}\ln 2,$$

რისკის ფუნქცია და მეხსიერების უქონლობის თვისება.* საინტერესოა λ პარამეტრის შემდეგი ინტერპრეტაცია: განაწილების სიმკვრივისა და განაწილების ფუნქციის (7.16) და (7.17) გამოსახულებებიდან ადვილად დავასკვნით, რომ $f(x)=\lambda\cdot(1-F(x))$, საიდანაც ცხადია, რომ

$$\lambda(x)=f(x)/(1-F(x))=\lambda. \tag{7.18}$$

პირიქით, თუ არაუარყოფითი X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა $f(x)$ და შესაბამისი $\lambda(x)$ ფუნქცია იგივურად λ-ს ტოლია, მაშინ მტკიცდება, რომ X ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა λ პარამეტრით.

დავადგინოთ, თუ რას წარმოადგენს $\lambda(x)$ ფუნქცია საზოგადოდ (ვიგულისხმოთ, რომ განაწილება თავმოყრილია $[0,+\infty)$ შუალედზე). ჯერ ერთი, შევნიშნოთ, რომ $\lambda(x)$ ფუნქციის საშუალებით ცალსახად აღვადგენთ როგორც $F(x)$, ასევე $f(x)$ ფუნქციას. კერძოდ,

---

[1] ექსპონენციალური განაწილება კარგი მოდელია მასობრივი მომსახურების სისტემაში მოთხოვნათა შემოსვლებს შორის დროის განაწილებისათვის (ასევე მომსახურების დროის განაწილებისათვის). λ-ს ზრდა ამცირებს $EX=1/\lambda$ საშუალო დროს ანუ ზრდის ნაკადის (ან მომსახურების) ინტენსივობას. ამიტომ λ პარამეტრს ინტენსივობას უწოდებენ.

$$F(x) = 1-\exp\left(-\int_0^x \lambda(u)du\right) \text{ და } f(x)=\lambda(x)\cdot \exp\left(-\int_0^x \lambda(u)du\right).$$

ამგვარად, $\lambda(x)$ ფუნქცია, $F(x)$ და $f(x)$ ფუნქციების მსგავსად, სრულად ახასიათებს უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს. $\lambda(x)$ ფუნქციას ალბათობის თეორიაში უბრალოდ, რისკის ფუნქციას უწოდებენ. შევეცადოთ გავარკვიოთ მისი არსი. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ $f(x)\Delta x \approx P\{x \le X \le x+\Delta x\}$. ცხადია, რომ $\{x \le X \le x+\Delta x\} \subset \{X \ge x\}$ და $P\{x \le X \le x+\Delta x\}=P\{x \le X \le x+\Delta x,\ X \ge x\}$ და გარდა ამისა, $P\{X \ge x\}=1-F(x-)=1-F(x)$. ამიტომ პირობითი ალბათობის განსაზღვრების ძალით გვექნება:

$$\lambda(x)\Delta x = f(x)\Delta x/(1-F(x)) \approx \frac{P\{x \le X \le x+\Delta x\}}{P\{X \ge x\}} = \frac{P\{x \le X \le x+\Delta x,\ X \ge x\}}{P\{X \ge x\}} =$$
$$= P\{x \le X \le x+\Delta x \mid X \ge x\}. \tag{7.19}$$

მაშასადამე, $\lambda(x)$ ფუნქციის შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ $\lambda(x)\Delta x$ ყოველ x წერტილში წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის მცირე $[x;x+\Delta x]$ ინტერვალში მოხვედრის პირობით ალბათობას, იმ პირობით, რომ X შემთხვევითი სიდიდემ მიიღო x-ზე მეტი ან ტოლი მნიშვნელობა. ასეთი შემთხვევის უამრავ მაგალითს ჩვენ ვხვდებით ყოველდღიურ ცხოვრებაში. თუ დავუშვებთ, რომ X შემთხვევითი სიდიდით იზომება რაიმე სისტემის ფუნქციონირების დრო (ეს შეიძლება იყოს ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობა ან რაიმე ტექნიკური დანადგარის (თუნდაც ელექტრონათურის) მუშაობის ან რაიმე ეკონომიკური სისტემის მოქმედების ხანგრძლივობა და ა.შ.), მაშინ (7.19)-ის მიხედვით, $\lambda(x)\Delta x$ წარმოადგენს ალბათობას იმისა, რომ სისტემა ფუნქციონირებას შეწყვეტს $[x;x+\Delta x]$ დროით ინტერვალში, თუ ცნობილია, რომ სისტემამ უკვე დროის x ერთეული იმუშავა.

მოვიყვანოთ ექსპონენციალური განაწილების კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი თვისება, რომლითაც ის განსხვავდება სხვა უწყვეტი განაწილებებისაგან (გაიხსენეთ გეომეტრიული განაწილება). ამისათვის ნებისმიერი $x \ge 0$ და $y \ge 0$-სათვის გამოვთვალოთ პირობითი ალბათობა:

$$P\{X>x+y|X>y\} = \frac{P\{\{X>x+y\}\bigcap\{X>y\}\}}{P\{X>y\}} = \frac{P\{X>x+y\}}{P\{X>y\}} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P\{X>x\}.$$

როგორც ვხედავთ, ტოლობის მარცხენა მხარისაგან განსხვავებით, მარჯვენა მხარე აღარაა დამოკიდებული y-ზე. სწორედ ეს არის ზემოხსენებული მნიშვნელოვანი თვისება, რომელსაც „მეხსიერების უქონლობას" უწოდებენ ექსპონენციალური განაწილებისათვის. მართლაც, (7.17) ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$P\{y<X \le y+x \mid X>y\} = P\{X \le x\}.$$

ასე, რომ x სიგრძის ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა არ იცვლება, რა y დროც არ უნდა იყოს გასული.

ნორმალური განაწილება. X შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f_{\mu,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{7.20}$$

სადაც μ და σ^2 რაიმე ნამდვილი რიცხვებია ($-\infty<\mu<+\infty$, $\sigma^2>0$), ეწოდება ნორმალურად განაწილებული შემთხვევით სიდიდე.

ის ფაქტი, რომ X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით m და σ^2, მოკლედ ასე ჩაიწერება $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. ეს ჩანაწერი $\mathcal{L}(X)=N(\mu,\sigma^2)$ ჩანაწერის შემოკლებაა (როგორც გვახსოვს, $\mathcal{L}(X)=F$ ნიშნავს, რომ X-ის განაწილებაა F, ჩაწერილი რაიმე ფორმით).

(7.20)-ით განსაზღვრული სიმკვრივის ფუნქცია x არგუმენტის სიმეტრიული ფუნქციაა, $x=\mu$ წრფე წარმოადგენს მისი სიმეტრიის ღერძს ანუ $f_{\mu,\sigma^2}(\mu-x)=f_{\mu,\sigma^2}(\mu+x)$; $f_{\mu,\sigma^2}(x)$ უნიმოდალური სიმკვრივეა, ის მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს, როცა $x=\mu$ და $f_{\mu,\sigma^2}(x)=1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$; ამ განაწილების მოდა, მედიანა და საშუალო ტოლია; $M_0=M=m$.

განაწილების μ და σ^2 პარამეტრების შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი შესაბამისად განაწილების მათემატიკურ ლოდინსა და დისპერსიას წარმოადგენენ:

$$\mu=EX=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,$$

$$\sigma^2=DX=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ნორმალური განაწილებისათვის ნებისმიერი კენტი რიგის ცენტრალური მომენტი ნულის ტოლია, ე.ი. $\mu_{2k+1}=0$, ხოლო

$$\mu_{2k}=1\cdot3\cdots(2k-1)\cdot(\sigma^2)^k,\ k=1,2,\ldots$$

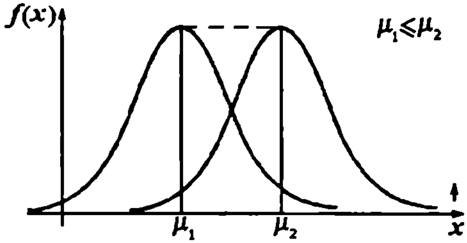
მაგალითად, როცა $k=1$, $\mu_2=\sigma^2$, თუ $k=2$, $\mu_4=3\sigma^4$.

რა გავლენას ახდენს ნორმალური განაწილების სიმკვრივის გრაფიკის ფორმასა და მდებარეობაზე μ-სა და σ^2-ის მნიშვნელობები? μ პარამეტრით განისაზღვრება განაწილების სიმკვრივის მდებარეობა რიცხვთა ღერძზე, კერძოდ კი – მისი მაქსიმუმის წერტილი, ანუ მოდა: რაც უფრო დიდია მათემატიკური ლოდინი, მით უფრო მარჯვნივაა წანაცვლებული განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი. ამასთანავე, μ პარამეტრის ცვალებადობა არავითარ გავლენას არ ახდენს განაწილების სიმკვრივის გრაფიკის ფორმაზე. σ გვიჩვენებს განაწილების სიმკვრივის გაშლილობას: რაც უფრო დიდია σ, მით უფრო გაშლილია განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი (იხ. ნახ. 7.4 და 7.5).

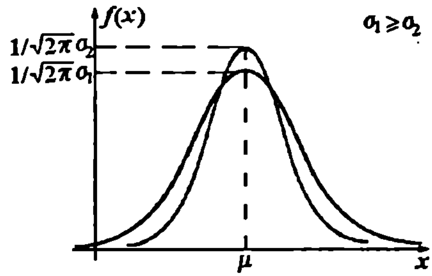
X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა

$$F_{\mu,\sigma^2}(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

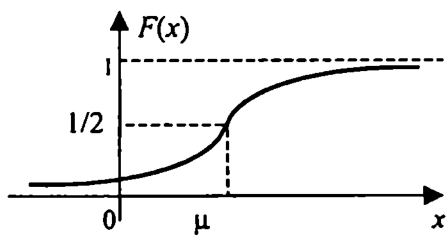
რომლის გრაფიკი ნახ. 7.6-ზეა წარმოდგენილი.



ნახ. 7.4



ნახ. 7.5



ნახ. 7.6

აღვნიშნოთ ნორმალური განაწილების შემდეგი თვისება: თუ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, მაშინ ამ შემთხვევითი სიდიდის ნებისმიერი $Y=aX+b$ წრფივი გარდაქმნა , სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, კვლავ ნორმალურადაა განაწილებული $Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$. თუ $a=1/\sigma$ და $b=(-\mu/\sigma)$, მაშინ $Y=(X-\mu)/\sigma$ კვლავ ნორმალურადაა განაწილებული (0,1) პარამეტრებით .

ამრიგად,

$$\text{თუ} \quad X \sim N(\mu,\sigma^2), \qquad \text{მაშინ} \quad Y=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1),$$

ანუ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$X=\sigma Y+\mu, \text{ სადაც } Y \sim N(0,1).$$

$N(0,1)$ განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება სტანდარტული ნორმალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო $N(0,1)$ განაწილებას –

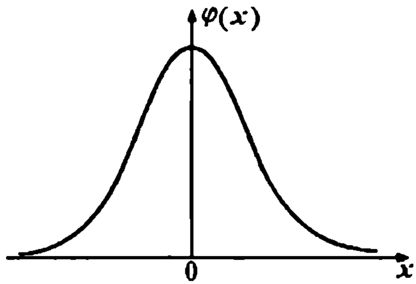
სტანდარტული ნორმალური განაწილება. სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივეს აღნიშნავენ $\varphi(x)$-ით, ხოლო განაწილების ფუნქციას – $\Phi(x)$-სიმბოლოთი.

$$\varphi\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

და

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 7.7

ადვილად გამოითვლება სტანდარტული ნორმალური განაწილების მომენტთა მაწარმოებელი ფუნქცია. სახელდობრ, თუ $X \sim N(0,1)$, მაშინ

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

აქედან კი ადვილად მიიღება შემდეგი ფაქტი: თუ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, მაშინ

$$M_Y(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

მართლაც, თუ $X = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$, მაშინ $Y = \mu + X\sigma$ და მაწარმოებელი ფუნქციის a თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$M_Y(t) = e^{t\mu} \cdot M_X(\sigma t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

მოვიყვანოთ ნორმალური განაწილების კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი თვისება.

თუ $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ და X_1 და X_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $X_1 + X_2$ შემთხვევითი სიდიდე კვლავ ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით $\mu_1 + \mu_2$ და $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, ე.ი.

$$(X_1 + X_2) \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

მართლაც მაწარმოებელი ფუნქციის b თვისების გამო

$$M_{X_1+X_2}(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)=e^{\mu_1 t+\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}e^{\mu_2 t+\frac{\sigma_2^2 t}{2}}=e^{(\mu_1+\mu_2)t+\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

და მაწარმოებელი ფუნქციის c თვისებიდან ვასკვნით, რომ

$$X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ნორმალური და კერძოდ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები ნულის ტოლია.

თუ რაიმე უწყვეტი განაწილების მქონე X შემთხვევითი სიდიდის ექსცესის კოეფიციენტი დადებითია, ეს მიუთითებს იმაზე, რომ სტანდარტული შემთხვევითი სიდიდის $\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ განაწილების სიმკვრივე ნულის მიდამოში უფრო გაწელილია ზევით, ვიდრე სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივე.

არსებობს ცხრილები, რომლებშიც ტაბულირებულია $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები. $\Phi(x)$ ფუნქციის ტაბულირება საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ნორმალურ შემთხვევით სიდიდესთან დაკავშირებული ამა თუ იმ ხდომილობის ალბათობა.

$\varphi(x)$ ფუნქციის ლუწობიდან ($\varphi(x)=\varphi(-x)$) გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x),\ \Phi(0)=0{,}5. \tag{7.21}$$

ამ თვისებების გამო სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციისა და განაწილების სიმკვრივის ცხრილები, როგორც წესი, მოცემულია მხოლოდ x არგუმენტის დადებითი მნიშვნელობებისათვის. სტატისტიკურ ლიტერატურაში ხშირად $\Phi(x)$ ფუნქციის ნაცვლად, ტაბულირებულია $\Phi_0(x)=\int_0^x\varphi(u)du$ ფუნქცია, x არგუმენტის არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, რომელთანაც $\Phi(x)$ ფუნქციასთან დაკავშირებულია თანაფარდობით:

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0(x).$$

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტი: თუ $X\sim N(0,1)$, მაშინ

$$P\{|X|\le x\}=2\Phi(x)-1, \tag{7.22}$$

რაც გამომდინარეობს $P\{|X|\le x\}=\Phi(x)-\Phi(-x)$ და (7.21) თანაფარდობებიდან.

მაგალითი 7.5. გამოვთვალოთ $X\sim N(0,1)$-სათვის შემდეგი ალბათობები:

ა) $P\{X<1.2\}$, ბ) $P\{X>0.5\}$, გ) $P\{X<-0.3\}$, დ) $P\{-0.3<X\le 0.7\}$, ე) $P\{|X|\le 2.3\}$.

ამოხსნა. ა) განსაზღვრების თანახმად, $P\{X<1.2\}=\Phi(1.2)$ და უშუალოდ ცხრილის x სვეტში ვეძებთ მნიშვნელობას 1.2 და იგივე სტრიქონის $\Phi(x)$ სვეტიდან ამოვწერთ $\Phi(1.2)$-ის მნიშვნელობას, რომელიც 0.88-ის ტოლია. ამრიგად $P\{X<1.2\}=0.88$.

ბ) $\{X>0.5\}$ და $\{X\le 0.5\}$ ურთიერთსაწინააღმდეგო ხდომილობებია, ამიტომ

$$P\{X>0.5\}=1-P\{X\le 0.5\}$$

და კვლავ ცხრილის საშუალებით ვპოულობთ ამ ხდომილობის ალბათობას:

$$P\{X>0.5\}=1-P\{X\le 0.5\}=1-0.69=0.31.$$

გ) $P\{X<-0.3\}$-ის გამოთვლისას ვისარგებლოთ (7.21) ფორმულით

$$P\{X<-0.3\}=\Phi(-0.3)=1-\Phi(0.3)=1-0.62=0.38.$$

დ) შემთხვევაში ალბათობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (5.4) ფორმულით განაწილების ფუნქციისათვის. გვექნება

$$P\ \{-0.3<X\le 0.7\} = \Phi(0.7)-\Phi(-0.5) = 0.75-0.31 = 0.44.$$

ე) (7.22)-ის ძალით $P\{|X|\le 1.3\}= 2\Phi(1.3)-1 = 2\cdot 0.9-1 = 0.8$.

მაგალითი 7.6. ვთქვათ, $X\sim N(0,1)$. ვიპოვოთ k-ს ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც ა) $P\{X\le k\}=0.8$; ბ) $P\{X\le k\}=0.3$; გ) $P\{X>k\}=0.1$; დ) $P\{-k<X<k\}=0.9$; ე) $P\{|X|>k\}=0.15$.

ამოხსნა. ა) რადგან განმარტების თანახმად, $\Phi(k)=0.8$, Φ -ების სვეტში ვეძებთ რიცხვით მნიშვნელობას 0.8-ს და მის გასწვრივ x-ების სვეტში შესაბამის მნიშვნელობას, რომელიც მიახლოებით 0.85-ის ტოლია, ე.ი. $k\approx 0.85$.

ბ) ისევ განმარტების თანახმად, $\Phi(k)=0.3$, მაგრამ Φ-ის სვეტში არსად არ გვხვდება მნიშვნელობა 0.3. რას ნიშნავს ეს? რადგან $0.3<0.5$ და $0.5=\Phi(0)$, ამიტომ $\Phi(k)<\Phi(0)$ და ე.ი., $k<0$. ამიტომ (7.19)-ის ძალით გვექნება: $\Phi(k)=1-\Phi(-k)=0.3$, ანუ $\Phi(-k)=0.7$. ახლა უკვე ა)-ს მსგავსად, Φ-ის სვეტში ვეძებთ რიცხვით მნიშვნელობას 0.7-ს და მის გასწვრივ – x-ების სვეტში შესაბამის მნიშვნელობას, რომელიც მიახლოებით 0.55-ის ტოლია, ე.ი. $-k\approx 0.55$ და $k\approx -0.55$.

გ) $P\{X>k\}=0.1$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $P\{X\le k\}=0.9$ და წინა შემთხვევების ანალოგიურად ვპოულობთ, რომ $k\approx 1.3$.

დ) ცხადია, რომ რადგან $P\{-k<X\le k\}=2\Phi(k)-1=0.9$, გვექნება, რომ $\Phi(k)=0.95$, საიდანაც $k\approx 1.65$.

ე) ცხადია, რომ $P\{|X|>k\}=0.15$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $P\{|X|\le k\}=0.85$ ტოლობა, საიდანაც თავის მხრივ მივიღებთ, რომ $2\Phi(k)-1=0.85$ ანუ $\Phi(k)=0.925$ და $k\approx 1.45$.

გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე. ვთქვათ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, სადაც μ და σ^2 პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობები ცნობილია. ამ შემთხვევაში $\{X\le x\}$ ხდომილობის ალბათობა მარტივად გამოითვლება. თუ გავიხსენებთ $X=\sigma Y+\mu$ წარმოდგენას, სადაც $Y\sim N(0,1)$, მაშინ

$$P\{X\le x\} = P\{\ \sigma Y+\mu\le x\}= P\left(Y\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \qquad (7.23)$$

ანალოგიურად

$$P\{a<X\le b\} = P\{X\le b\}-P\{\ X\le a\}= \Phi((b-\mu)/\sigma) - \Phi((a-\mu)/\sigma).$$

მაგალითი 7.7. X შემთხვევითი სიდიდე $N(3,4)$ კანონითაა განაწილებული. გამოთვალეთ შემდეგი ხდომილობის ალბათობები: ა) $P(X\le 1)$, ბ) $P(X>6)$.

ამოხსნა. ა) (7.21)-ის ძალით

$$P\{X\le 1\}=\Phi\left(\frac{1-3}{2}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.84=0.16.$$

ბ) (7.23)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$P\{X>6\}=1-P\{X\le 6\}=1-\Phi\{(6-3)/2\}=1-\Phi(1.5)=1-0.93=0.07.$$

გამოვთვალოთ შემდეგი ალბათობები:

$$P\{|X-\mu| \le k\sigma\} = P\{\mu-k\sigma < X \le \mu+k\sigma\},\quad k=1,2,3,4.$$

(7.21) და (7.22) ფორმულებიდან ცხადია, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$P\{|X-\mu| \le k\sigma\} = P\{|Y| \le k\} = 2\Phi(k)-1,$$

სადაც $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, საიდანაც ცხრილის დახმარებით გვექნება:

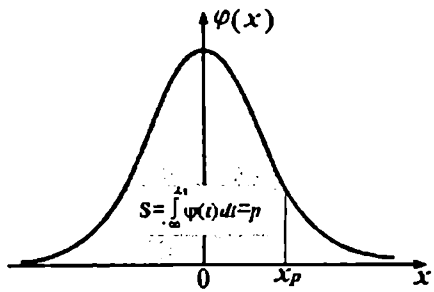
k	1	2	3	4
$P\{\mu-k\sigma<X\le\mu+k\sigma\}$	0.6827	0.9545	0.9973	0.9999

ის ფაქტი, რომ $P\{|X-\mu|\le 3\sigma\}=0,9973$, ცნობილია სამი სიგმას წესის სახელწოდებით.

ნორმალური განაწილების კვანტილი. როგორც ვიცით, $N(0,1)$ განაწილების p $(0<p<1)$ რიგის x_p კვანტილი აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$\Phi(x_p) = p.$$

თვალსაჩინოებისათვის იხ. ნახ. 7.8.



ნახ. 7.8

ვინაიდან $\Phi(0)=1/2$, საიდანაც $x_{1/2}=0$, ამიტომ $x_p<0$, როცა $p<1/2$ და $x_p>0$, როცა $p>1/2$. რადგან $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, ამიტომ

$$x_p = -x_{1-p} \tag{7.24}$$

და ნორმალური განაწილების კვანტილების ცხრილი მოცემულია p-ს მხოლოდ იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც 1/2-ზე მეტია.

მაგალითი 7.8. $N(0,1)$ განაწილებისათვის ვიპოვოთ 0.4 რიგის კვანტილის რიცხვითი მნიშვნელობა.

ამოხსნა. რადგან 0.4<1/2, (7.22)-ის ძალით $x_{0.4} = -x_{1-0.4} = -x_{0,6}$. სტანდარტული ნორმალური განაწილების კვანტილების ცხრილების გამოყენებით ვპოულობთ, რომ $x_{0,6}$=0,26, ე.ი. $x_{0.4}$= –0,26.

ახლა ვიპოვოთ $N(\mu,\sigma^2)$ განაწილების p-კვანტილი:

$$P\{X \le y_p\} = p.$$

სადაც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $X = \mu + \sigma \cdot Y$, სადაც $Y \sim N(0,1)$. ამიტომ

$$P\{X \le y_p\} = P\{(X-\mu)/\sigma) \le (y_p-\mu)/\sigma\} = P\{X \le (y_p-\mu)/\sigma\} = \Phi\,((y_p-\mu)/\sigma) = p,$$

საიდანაც $(y_p-\mu)/\sigma = x_p$, ანუ

$$y_p = \mu + \sigma \cdot x_p. \tag{7.25}$$

მაგალითი 7.9. X შემთხვევითი სიდიდე $N(5,16)$ კანონითაა განაწილებული. ვიპოვოთ ისეთი a, b და c რიცხვები, რომელთათვისაც:

ა) $P\{X \le a\}$=0.7, ბ) $P\{X>b\}$=0.4, გ) $P\{|X-5| \le c\}$=0.8.

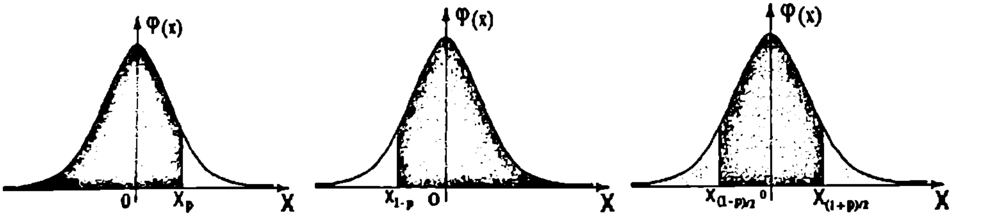
ამოხსნა. ა) განაწილების ფუნქციისა და კვანტილის განსაზღვრების თანახმად, (7.25)-იდან მივიღებთ, რომ $a=y_{0.7}=5+4 \cdot x_{0.7}$. ცხრილი 1-ის მიხედვით (იხ. დანართი) $x_{0.7}$=0.55, ე.ი. a=5+4·0.55 =7.2.

ბ) რადგან $P\{X>b\}=1-P\{X \le b\}$, $P\{X \le b\}$=0.6 და $N(0,1)$ განაწილების კვანტილების ცხრილიდან $x_{0,6}$=0.25, ამიტომ (7.23)-ის ძალით b=4·0.25+5=6.

გ) $P\{|X-5| \le c\} = P\{|X-5|/4 \le c/4\} = \Phi(c/4) - \Phi(-c/4) = 2\Phi(c/4) - 1 = 0.8$, საიდანაც $\Phi(c/4) = 0.9$ ანუ $c = 4 \cdot X_{0.9} = 4 \cdot 1.3 = 5.2$.

განვიხილოთ ახლა ასეთი ამოცანა. ვთქვათ, $X \sim N(0,1)$ და მოცემული p-სათვის (p>1/2) გვაინტერესებს იმ a და b რიცხვების პოვნა ($a<b$), რომელთათვისაც $P\{a<X \le b\}=p$. ჩვენთვის საინტერესოა შემდეგი სამი შემთხვევა: 1) $a = -\infty$; 2) $b=+\infty$; 3) რომლისათვისაც $(a,b]$ წარმოადგენს 0-ის მიმართ სიმეტრიულ ინტერვალს ანუ $b=-a$, $a<0$.

ცხადია, რომ 1) შემთხვევაში $b=x_p$, 2)-ში $a=x_{1-p}$, ხოლო 3) შემთხვევაში $a=x_{(1+p)/2}$, მართლაც, რადგან $P(-a < X \le a) = \Phi(a)-\Phi(-a) = 2\Phi(a)-1 = p$, ამიტომ $\Phi(a) = (1+p)/2$ და $a= x_{(1+p)/2}$. საილუსტრაციოდ გამოვიყენოთ ნახაზი:



ნახ. 7.9

7.9 ნახაზზე მოცემულია სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი. პირველი ორი სახის ინტერვალს შესაბამისად, მარცხენა და მარჯვენა ცალმხრივ ინტერვალებს უწოდებენ, ხოლო მესამეს – ორმხრივ ანუ სიმეტრიულ ინტერვალს.

ნორმალურად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდე

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$X \sim N(0,1)$
$f_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
$F_{\mu,\sigma}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$	$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$
$EX=\mu$, $DX=\sigma^2$	$EX=0$, $DX=1$
$\mu_{2k}=1\cdot 3\cdots(2k-1)\cdot(\sigma^2)^k$, $k=1,2,\ldots$	$\mu_{2k}=1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)$, $k=1,2,\ldots$
$\mu_{2k+1}=0$, $k=0,1,\ldots$	$\mu_{2k+1}=0$, $k=0,1,\ldots$
$\alpha=0$,	
$e=0$,	
$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$	$M_X(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$

§ 3. ნორმალურთან დაკავშირებული განაწილებები

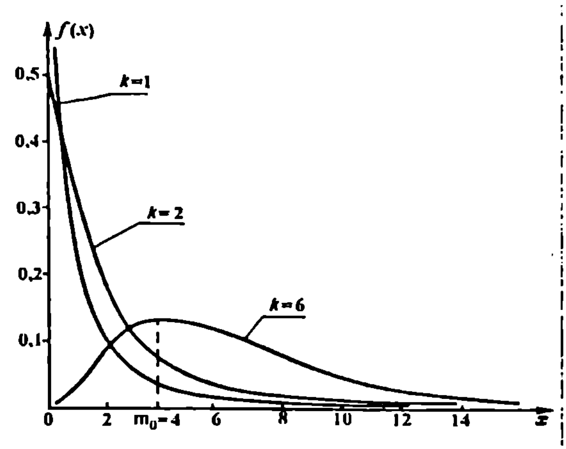
χ^2-განაწილება. ვთქვათ, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, სტანდარტული ნორმალური განაწილებით ($X_i \sim N(0,1)$, $i=1,2,\ldots,k$). მაშინ ამ შემთხვევითი სიდიდეების

$$X^2(k)=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_k^2 \tag{7.26}$$

კვადრატების ჯამის განაწილებას უწოდებენ $\chi^2(k)$ განაწილებას (ანუ χ^2 ("ხი კვადრატ")-განაწილებას k თავისუფლების ხარისხით). შესაკრებთა რაოდენობა k (7.26)-ში ამ განაწილების პარამეტრს წარმოადგენს. ვინაიდან $X^2(k)$ არაუარყოფითია, $\chi^2(k)$ განაწილების სიმკვრივე ნულია უარყოფით ნახევარღერძზე. როცა $k \le 2$, $\chi^2(k)$-განაწილების სიმკვრივე კლებადი ფუნქციაა, ხოლო როცა $k>2$ მას გააჩნია მაქსიმუმი $x=k-2$ წერტილში. რადგან $EX_i^2=1$, (7.26)-დან მივიღებთ, რომ

$$EX^2(k)=EX_1^2+EX_2^2+\cdots+EX_k^2=\sum_{i=1}^{k}EX_i^2=k\,.$$

ასევე მიიღება, რომ $DX^2(k)=2k$. ნახ.7.10-ზე მოყვანილია $\chi^2(k)$ განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი k-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.



ნახ. 7.10

მოგვყავს $\chi^2(k)$-განაწილების ზოგიერთი თვისება:

თუ $X\sim\chi^2(k)$, $Y\sim\chi^2(m)$ და X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $X+Y\sim\chi^2(k+m)$, ანუ χ^2-განაწილების მქონე დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების შეკრებით მიიღება კვლავ χ^2-განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდე, რომლის თავისუფლების ხარისხი შესაკრებთა თავისუფლების ხარისხების ჯამის ტოლია.

დანართში (ცხრილი № 3) მოცემულია χ^2-განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილების (ანუ ზედა α-კრიტიკული წერტილები, იხ. თავი 11) რიცხვითი მნიშვნელობები სხვადასხვა k-სა (k=1,2,..,30) და α-სათვის (α=0.01; 0.025; 0.05; 0.95; 0.975; 0.99); იმ შემთხვევაში კი, როცა k>30, სტატისტიკურ პრაქტიკაში სარგებლობენ ნორმალური განაწილების კვანტილების ცხრილით, ვინაიდან დიდი k-სათვის სამართლიანია შემდეგი მიახლოება

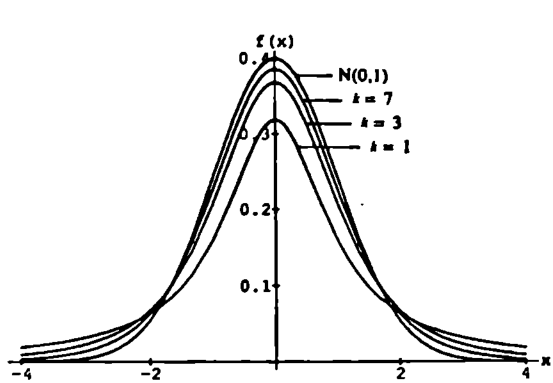
$$P\{X^2(k)\leq x\} \approx \Phi\left(\frac{x-k}{\sqrt{2k}}\right), \tag{7.27}$$

რომელიც მერვე თავში მოყვანილი ცენტრალური ზღვარითი თეორემის შედეგია.

სტიუდენტის $t(k)$-განაწილება. სტიუდენტის $t(k)$-განაწილება ან როგორც ამბობენ, სტიუდენტის t-განაწილება k თავისუფლების ხარისხით აქვს შემთხვევით სიდიდეს

$$T(k)=\frac{X}{\sqrt{X^2(k)/k}}, \tag{7.28}$$

სადაც $X\sim N(0,1)$, $X^2(k)$-ს აქვს χ^2-განაწილება k თავისუფლების ხარისხით და X და $X^2(k)$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია. მოვიყვანოთ ამ განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი:



ნახ. 7.11

$t(k)$-განაწილების რიცხვითი მახასიათებლებია:

$$ET(k)=0,\ DT(k)=\begin{cases}\dfrac{k}{k-2}, & \text{როცა}\quad k>2,\\ \infty, & \text{როცა}\quad 0<k\le 2.\end{cases}$$

ნორმალურის მსგავსად, t-განაწილების სიმკვრივეც სიმეტრიული და უნიმოდალურია. $x=0$ წერტილი წარმოადგენს ამ განაწილების მედიანასაც, მოდასაც და საშუალოსაც. t-განაწილებისათვის α ასიმეტრიის კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ხოლო e ექსცესის კოეფიციენტი უარყოფითია.

დანართში (ცხრილი № 4) მოცემულია t-განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილების (ანუ ე.წ. ზედა α-კრიტიკული წერტილები, იხ. თავი 11) რიცხვითი მნიშვნელობები სხვადასხვა k-სა (k=1,2,..,30,40,60) და α-სათვის (α=0.01; 0.025; 0.05; 0.95; 0.975; 0.99). კვანტილისათვის გვაქვს აღნიშვნა $t_p(k)$, ე.ი. $P\{T(k)\le t_p(k)\}=p$, ხოლო ზედა კრიტიკული წერტილებისათვის გვაქვს აღნიშვნა $t_{k,\alpha}$, ე.ი. $P\{T(k)>t_{k,\alpha}\}=\alpha$; $t_{k,\alpha}=t_{1-\alpha}(k)$.

შევნიშნოთ, რომ $t(k)$-განაწილებას (როგორც 0-ის მიმართ სიმეტრიულ განაწილებას), აქვს ისეთივე თვისებები, როგორიც აქვს სტანდარტული ნორმალურ განაწილებას. კერძოდ, $t_p(k)=-t_{1-p}(k)$. როცა თავისუფლების ხარისხი $k\to\infty$ (პრაქტიკულად, როცა $k>30$), t-განაწილება სწრაფად უახლოვდება სტანდარტულ ნორმალურ განაწილებას:

$$P\{T(k)\le x\}\approx\Phi(x).$$

ამის მიზეზია ის გარემოება, რომ ქვემოთ მოყვანილი დიდ რიცხვთა კანონის ძალით (7.28) წილადის მნიშვნელი გარკვეული აზრით 1-ს უახლოვდება.

ფიშერის $F(k_1,k_2)$-**განაწილება**, ანუ F-განაწილება k_1 და k_2 თავისუფლების ხარისხებით, გააჩნია

$$Z(k_1,k_2) = \frac{X_1^2(k_1)/k_1}{X_2^2(k_2)/k_2} \quad (7.29)$$

შემთხვევით სიდიდეს, სადაც $X_1^2(k_1)$ და $X_2^2(k_2)$ არის დამოუკიდებელი χ^2-განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეები შესაბამისად თავისუფლების k_1 და k_2 ხარისხებით. ადვილი დასანახია, რომ $Z(k_1,k_2)$ შემთხვევითი სიდიდე თავმოყრილია $(0,+\infty)$ შუალედზე და ნებისმიერი k_1-ისა და k_2-ისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$Z(k_1,k_2) = \frac{X^2(k_1)/k_1}{X^2(k_2)/k_2} = \left(\frac{X^2(k_2)/k_2}{X^2(k_1)/k_1}\right)^{-1} = 1\,/\,Z(k_2,k_1).$$

საიდანაც მიიღება, რომ თუ $F(x;\, k_1,k_2) = P\{\, Z(k_1,k_2) \le x\}$, $x>0$, მაშინ

$$F(x;\, k_1,k_2) = 1 - F(1/x;\, k_2,k_1).$$

თავის მხრივ, აქედან გამომდინარეობს მეტად საჭირო ფაქტი, რომ თუ $F_p(k_1,k_2)$ არის $F(k_1,k_2)$-განაწილების p-კვანტილი, რომელსაც $F_{p;k_1,k_2}$ სიმბოლოთიც აღნიშნავენ ხოლმე, მაშინ

$$F_p(k_1,k_2) = 1/F_{1-p}(k_2,\, k_1). \quad (7.30)$$

დანართში (იხ. ცხრილი № 5) მოცემულია $F(k_1,k_2)$-განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილების (ანუ ზედა α-კრიტიკული წერტილების, იხ. თავი 11) რიცხვითი მნიშვნელობები სხვადასხვა k_1-ისა და k_2-ისათვის (α=0.05). (7.30)-ის გამოყენებით შესაძლებელია მარტივად მოიძებნოს α-კვანტილების რიცხვითი მნიშვნელობები.

ორგანზომილებიანი ნორმალური განაწილება. (X,Y) ორგანზომილებიან შემთხვევით სიდიდეს აქვს ნორმალური განაწილება $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ პარამეტრებით, თუ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\cdot(1-\rho^2)}\cdot\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\cdot\rho\cdot\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right). \quad (7.31)$$

ნორმალურად განაწილებული ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე ხასიათდება შემდეგი ხუთი პარამეტრით: μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, ρ, სადაც $|\mu_1|<\infty$, $|\mu_2|<\infty$, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $|\rho|<1$. მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ ამ პარამეტრებს აქვთ შემდეგი შინაარსი:

$$\mu_1=EX,\ \mu_2=EY,\ \sigma_1^2=DX,\ \sigma_2^2=DY \text{ და } \rho=\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

ვთქვათ (X,Y) შემთხვევითი ვექტორი ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ \rho)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ X-ის პირობითი განაწილების სიმკვრივე $\{Y=y\}$ პირობით, მოიცემა ფორმით:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_1^2}} e^{\frac{(x-\mu(y))^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}, \tag{7.32}$$

სადაც

$$\mu(y) = \mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2). \tag{7.33}$$

§ 4. სხვა უწყვეტი განაწილებები

ამ პარაგრაფში ცხრილის სახით ჩვენ მოგვყავს (აბსოლუტურად) უწყვეტ განაწილებათა პარამეტრული ოჯახების სხვა მაგალითები. განაწილებათა ეს ოჯახები ფართოდ გამოიყენება ყველგან, სადაც კი საჭიროა მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების გამოყენება.

თითოეული განაწილებისათვის მოცემულია დასახელება და სიმკვრივის მოკლე სიმბოლური აღნიშვნა, სადაც x სიმკვრივის არგუმენტია. ჩამოთვლილია ამ განაწილების რიცხვითი მახასიათებლები, F აღნიშნავს განაწილების ფუნქციას, φ და Φ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივესა და ფუნქციას აღნიშნავენ, M არის მედიანა, ხოლო M_0 – მოდა. როგორც წესი, მოცემულია სიმკვრივის სქემატური გრაფიკული გამოსახულება.

B (ბეტა) განაწილება $X \sim B(x, \alpha, \beta)$

სიმკვრივე: $\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, 0 \le x \le 1,$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

პარამეტრები: $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

რიცხვითი მახასიათებლები: $M_0 = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$, $\alpha+\beta \ne 2$,

$$EX = \alpha/(\alpha+\beta),\ DX = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

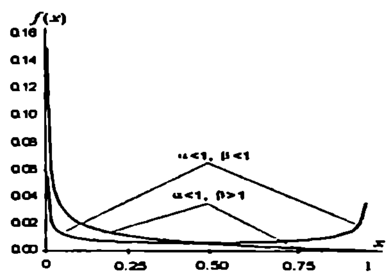
ძირითადი თვისებები:

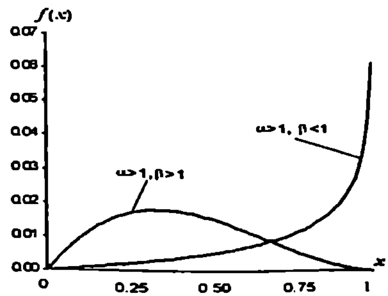
თუ $\alpha = k$, $\beta = n-k+1$, k,n ნატურალურია, მაშინ

$$B(p,k,n-k+1) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}.$$

$$F(p,k,n-k+1) = P\{b(n,p) \ge k\} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

$h(n,p)$ ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა n და p პარამეტრებით.





Γ (გამა) განაწილება $X \sim \Gamma(x, \alpha, \theta)$

სიმკვრივე: $\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$, $x \ge 0$, სადაც $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

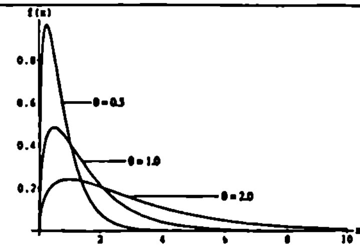
პარამეტრები: $\alpha>0$, $\theta>0$.

რიცხვითი მახასიათებლები: $M_0=\theta(\alpha-1)$,
$EX=\alpha\theta$; $DX=\alpha\theta^2$, $\sigma_X=\sqrt{\alpha}\theta$.

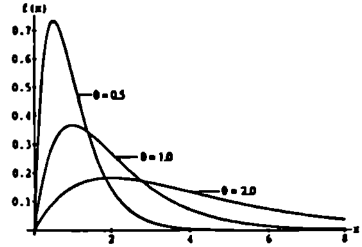
ძირითადი თვისებები: უნიმოდალურია; როცა $\theta=1$, მას სტანდრტულს უწოდებენ; ნატურალური $\alpha=k$-სათვის

$$\Gamma(x,k,\theta)=\frac{x^{k-1}e^{-x/\theta}}{\theta^k\cdot(k-1)!},\ x\ge0;\ \Gamma(x,1,\theta)=Exp(x,1/\theta).$$

როცა $\alpha=n/2$ და $\theta=2$, მაშინ გამა განაწილება χ^2-განაწილებას ემთხვევა.



$\alpha = 1.5$, $\theta = 0.5, 2, 4.$



$\alpha = 2$, $\theta = 0.5, 2, 4.$

ერლანგის განაწილება $X \sim Erl(x, k,\lambda)$

სიმკვრივე: $\dfrac{\lambda(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$, $x\ge0$.

პარამეტრები: $\lambda>0$, $k \ge 1$.

რიცხვითი მახასიათებლები: $M_0 = (k-1)/\lambda$,
$EX = k/\lambda$, $DX = k/\lambda^2$, $\sigma_X = \sqrt{k}/\lambda$.

ძირითადი თვისებები:

$Erl(x, k, \lambda)=\Gamma(x,k,1/\lambda)$, $F(x,k,\lambda)=P\{\Pi(\lambda x)\ge k\}$, სადაც $\Pi(\lambda x)$ შემთხვევით სიდიდეს აქვს პუასონის განაწილება λx პარამეტრით.

თუ $X_1,\dots,X_k$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია λ პარამეტრიანი ექსპონენციალური განაწილებით, მაშინ მათი ჯამის სიმკვრივეა $Erl(x, k,\lambda)$.

ლოგნორმალური განაწილება $X \sim LogN(x,\mu,\sigma)$

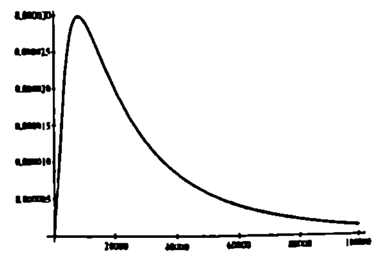
სიმკვრივე: $(1/x\sigma)\varphi((\ln x-\mu)/\sigma)$, $x\ge0$.

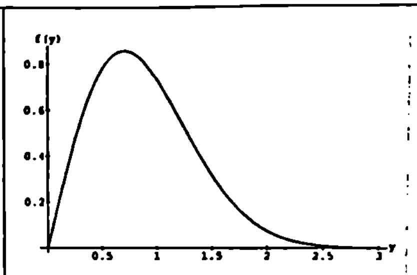
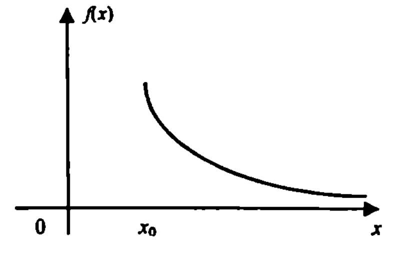
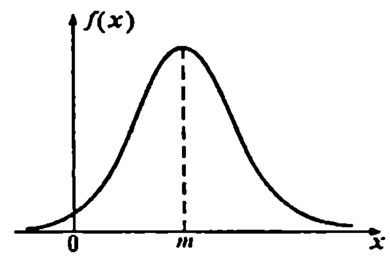
პარამეტრები: $\mu\in(-\infty;+\infty)$, $\sigma>0$.

რიცხვითი მახასიათებლები: $M_0=\exp(\mu-\sigma^2)$, $M=e^{\mu}$,
$EX=\exp\{\mu+\sigma^2/2\}$, $DX=\exp(2\mu+2\sigma^2)-\exp(2\mu+\sigma^2)$.

ძირითადი თვისებები: $F(x,\mu,\sigma)=\Phi((\ln x-\mu)/\sigma)$.

ასეთი განაწილება აქვს e^X შემთხვევით სიდიდეს, სადაც $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.



ვეიბულის განაწილება $X\sim Weib(x,\alpha,\beta)$ სიმკვრივე: $\alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}\cdot\exp\{-(x/\beta)^{\alpha}\}$, $x\geq0$. პარამეტრები: $\alpha>0$, $\beta>0$. რიცხვითი მახასიათებლები: $M_0=\beta(1-1/\alpha)^{1/\alpha}$, $EX=\beta\cdot\Gamma(1+1/\alpha)$, $DX=\beta^2\cdot\{\Gamma(1+2/\alpha)-\Gamma^2(1+1/\alpha)\}$. ძირითადი თვისებები: $F(x,\alpha,\beta)=1-\exp\{-(x/\beta)^{\alpha}\}$. $Weib(x,\alpha,\beta)=Exp(x,1/\beta)$.	
პარეტოს განაწილება $X\sim Par(x,k,\theta)$ სიმკვრივე: $k\cdot\theta^k x^{-(k+1)}$, $x\geq\theta$. პარამეტრები: $k>0$, $\theta>0$. რიცხვითი მახასიათებლები: $M=\theta\cdot2^{1/k}$, $M_0=\theta$, $EX=k\cdot\theta/(k-1)$, $k>1$; $DX=\dfrac{k\cdot\theta^2}{(k-2)(k-1)^2}$, $k>2$. ძირითადი თვისებები: $F(x,k,\theta)=1-(\theta/x)^k$, $x\geq\theta$.	
ლოგისტიკური განაწილება $X\sim L(x,m,\sigma^2)$ სიმკვრივე: $f(x)=\dfrac{\pi e^{-t}xp}{\sigma\sqrt{3}(1+e^{-t})^2}$, სადაც $x\in(-\infty;+\infty)$ და $t=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$. პარამეტრები: m, σ^2. რიცხვითი მახასიათებლები: $M=M_0=EX=m$; $DX=\sigma^2$. $F(x)$ ახლოსაა ნორმალური განაწილების ფუნქციასთან.	

***

ეს თავი ეყრდნობა [11], [17], [21], [27], [39], [56], [64] წიგნებს, რომლებიც გადმოცემული საკითხების გარდა მრავალ სხვა მასალასაც შეიცავს (დამატებითი ინფორმაციის მისაღებად სასარგებლო იქნება [1] და [3] წიგნების გაცნობაც). ეკონომისტებისათვის განკუთვნილი სახელმძღვანელოებიდან მკითხველს ვურჩევდით [60], [66], [72], [79] წიგნებს და აგრეთვე ქართულ ენაზე არსებულ შესაბამის ლიტერატურას: [8], [9], [13], [14], [15].

დასკვნები

ეს თავი საცნობარო ხასიათისაა და შეიცავს ძირითადი განაწილებების ჩამონათვალს მათი მახასიათებლების მითითებით და განაწილებათა შორის ზოგიერთი კავშირის ხაზგასმით. ცალკეულ განაწილებას, გარდა მოკლე სიტყვიერი აღწერისა, ეძლევნება ფორმულათა შემაჯამებელი სია, რომელიც ჩარჩოშია ჩასმული. ვინაიდან სარჩევში ცალ-

ცალკეა მითითებული ყველა ეს განაწილება, აქ მათ აღარ ვიმეორებთ. შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ დანართის სახით მოცემულია იმ მნიშვნელოვანი განაწილებების მოკლე ნუსხა, რომლებიც ამ სახელმძღვანელოში არ გამოიყენება.

სავარჯიშოები

7.1. ვთქვათ, X ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა. გამოთვალეთ $P\{X=k\}$ ალბათობები, თუ

ა) $n=4, p=0{,}5, k=2$, ბ) $n=5, q=0{,}3, k=3$, გ) $n=6, q=0{,}4, k=2$, დ) $n=3, p=0{,}7, k=1$.

7.2. იპოვეთ ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და უალბათესი რიცხვი, თუ

ა) $n=20, p=0{,}5$, ბ) $n=50, q=0{,}3$, გ) $n=100, q=0{,}4$, დ) $n=200, p=0{,}7$.

7.3. ვთქვათ X ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა პარამეტრებით $n=6, p=0{,}1$. როგორი იქნება X-ის განაწილების კანონი?

7.4. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის ოთხჯერ აგდებისას ჯამში ერთხელ მაინც დაჯდება შვიდიანი.

7.5. რა უფრო მოსალოდნელია: ტოლი ძალის მოთამაშესთან ოთხიდან ორი პარტიის მოგება, თუ ექვსიდან – სამის? (ყაიმი გამორიცხულია).

7.6. რა უფრო მოსალოდნელია: კამათლის ექვსჯერ გაგორებისას სამის ჯერადი რიცხვის ორჯერ მოსვლა, თუ „შაშის" ერთხელ მოსვლა?

7.7. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 36 კარტიანი ბანქოს დასტიდან 5-ჯერ ერთი კარტის (დაბრუნებით) ამოღებისას ორჯერ ამოვა "ტუზი"?

7.8. სისტემა შედგება ხუთი ერთგვაროვანი ელემენტისაგან, რომლებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად 1/7-ის ტოლი ალბათობით შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სისტემა გამოვა მწყობრიდან თუ ცნობილია, რომ ამისათვის საჭიროა მწყობრიდან გამოვიდეს სისტემის ორი ელემენტი მაინც.

7.9. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ათი ერთნაირი მსროლელიდან შვიდი დააზიანებს სამიზნეს, თუ თითოეულის მიერ სამიზნეს დაზიანების ალბათობაა 7/8?

7.10. ყუთში 3 წითელი, 2 შავი და 6 თეთრი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ერთი ბურთის ხუთჯერ დაბრუნებით ამოღებისას სამჯერ ამოვა თეთრი ბურთი.

7.11. ყუთში 7 წითელი, 3 შავი და 10 თეთრი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ერთი ბურთის სამჯერ დაბრუნებით ამოღებისას ერთხელ მაინც ამოვა შავი ბურთი?

7.12. ვთქვათ X ჰიპერგეომეტრიული განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა პარამეტრებით s, t, n. გამოთვალეთ $P\{X=k\}$ ალბათობები, თუ

ა) $s=5, t=3, n=3, k=2$, ბ) $s=10, t=6, n=4, k=3$, გ) $s=4, t=2, n=3, k=1$, დ) $s=7, t=4, n=3, k=2$.

7.13. აუდიტორიაში იმყოფება 25 ბიჭი და 10 გოგო, შემთხვევით ირჩევენ 10 სტუდენტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 7 ბიჭია.

7.14. სატელეფონო სადგურში შემოსულ გამოძახებათა ინტენსივობაა 9 გამოძახება წუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა იქნება 3-ზე მეტი.

7.15. რას უდრის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$$

7.16. რას უდრის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{5\pi}}e^{-\frac{x^2}{5}}$$

7.17. ამოწერეთ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივისა და ფუნქციის გამოსახულებები, თუ მათემატიკური ლოდინი ნულის, ხოლო დისპერსია ხუთის ტოლია.

7.18. ამოწერეთ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივისა და ფუნქციის გამოსახულებები, თუ მათემატიკური ლოდინი – 3-ის, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა რვის ტოლია.

7.19. ვთქვათ, $X{\sim}N(0,1)$; ცხრილების გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ალბათობები: $P\{X<1\}$, $P\{X<-0.7\}$, $P\{X<1.96\}$, $P\{X<-1.6\}$, $P\{X<2.33\}$, $P\{0.3<X<2.9\}$.

7.20. ვთქვათ, $X{\sim}N(0,1)$,

ა) $P\{X<\beta\}=0.8$, $P\{X>\alpha\}=0.7$. შეადარეთ ერთმანეთს შემდეგი რიცხვები: $|a|$ და $|\beta|$.

ბ) $P\{X<\alpha\}=0.4$, $P\{X>\beta\}=0.6$. შეადარეთ ერთმანეთს α და β რიცხვები.

გ) $P\{X>\alpha\}=0.8$, $P\{X>\beta\}=0.4$. რას უდრის $P\{\alpha<X<\beta\}$?

7.21. X შემთხვევითი სიდიდე $N(3,4)$ კანონითაა განაწილებული. გამოთვალეთ შემდეგი ხდომილობის ალბათობები ა) $P(X\leq 1)$, ბ) $P(X>6)$.

7.22. X შემთხვევითი სიდიდე $N(5,16)$ კანონითაა განაწილებული. ვიპოვოთ ისეთი α და β რიცხვები, რომლებისათვისაც

ა) $P\{X\leq\beta\}=0.7$, ბ) $P\{X>\alpha\}=0.4$, გ) $P\{\alpha<X\leq\beta\}=0.8$.

7.23. $X{\sim}N(0,1)$, $P\{X>\alpha\}=0.76$, $P\{X<\beta\}=0.64$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას α და β რიცხვებს შორის?

7.24. $X{\sim}N(7,16)$. $P\{9<X<11\}=\alpha$. რას უდრის $P\{3<X<5\}$?

7.25. $X \sim N(5,25)$. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინის მიმართ ისეთი სიმეტრიული (α,β) ინტერვალი, რომლისთვისაც $P\{\alpha<X<\beta\}=0.8$.

7.26. $X \sim N(8,36)$. იპოვეთ ისეთი ცალხმრივი მარჯვენა $(a,+\infty)$ ინტერვალი, რომელშიც X შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა 0.2-ის ტოლია.

7.27. $X \sim N(13,49)$. იპოვეთ ისეთი ცალხმრივი მარცხენა $(-\infty,a)$ ინტერვალი, რომელშიც X შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა 0.1-ის ტოლია.

7.28. $X \sim N(0,1)$, იპოვეთ $p=0.95$ დონის კვანტილის რიცხვითი მნიშვნელობა.

7.29. $X \sim N(4,64)$, $Y \sim N(13,36)$. როგორია $X-Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი?

7.30. $X \sim N(34,49)$. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას (20, 50) ინტერვალიდან.

7.31. $X \sim N(20,36)$. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ X შემთხვევითი სიდიდის გადახრა მათემატიკური ლოდინისაგან იქნება 3-ზე ნაკლები.

7.32. დადებითია თუ უარყოფითი $N(0,1)$ განაწილების $P=0.7$ დონის $U_{0.7}$ კვანტილის რიცხვითი მნიშვნელობა?

7.33. $N(0,1)$ განაწილებისათვის ვიპოვოთ $p=0.4$ დონის კვანტილის რიცხვითი მნიშვნელობა.

7.34. ვთქვათ, $X \sim \chi^2(21)$.

ა) იპოვეთ მარჯვენა ცალმხრივი $(a,+\infty)$ ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0.05-ის ტოლია.

ბ) იპოვეთ მარცხენა ცალმხრივი $(-\infty,a)$ ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0.05-ის ტოლია.

7.35. $X_1 \sim \chi^2(13)$, $X_2 \sim \chi^2(13)$. იპოვეთ ისეთი სიმეტრიული ინტერვალი, რომელშიც $Y=X_1+X_2$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა 0.9-ის ტოლია.

7.36. ვთქვათ, $X \sim t(25)$. იპოვეთ მარჯვენა ცალმხრივი $(a,+\infty)$ ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0.025-ის ტოლია.

7.37. ვთქვათ, $X \sim t(19)$. იპოვეთ მარცხენა ცალხმრივი ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0.005-ის ტოლია.

7.38. ვთქვათ $X \sim N(0,1)$, $Y \sim t(7)$, $Z \sim t(30)$. ამ შემთხვევითი სიდიდეთაგან თითოეულისათვის ვიპოვოთ ისეთი ნულის მიმართ სიმეტრიული ინტერვალი, რომ მასში მოხვედრის ალბათობა იყოს 0.95. რას გვეუბნება მიღებული შედეგი?

8

ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები

შემთხვევით სიდიდეთა დიდი რაოდენობის ჯამების ყოფაქცევა სპეციალურ შესწავლას საჭიროებს. მაგალითად, განვიხილოთ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეების არითმეტიკული საშუალო

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

დავუშვათ, რომ $EX_i=\mu$, $DX_i=\sigma^2$, $i=1,2,..,n$. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებების გამო

$$E\overline{X}_n = \mu, \quad D\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{8.1}$$

ანუ $\overline{X}_n$ შემთხვევით სიდიდეს იგივე საშუალო აქვს, რაც ყოველ შესაკრებს, მაგრამ ხასიათდება n-ჯერ უფრო მცირე გაფანტულობით თავისი საშუალოს მიმართ, ვიდრე თითოეული შესაკრები. ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ დებულებებს არითმეტიკული საშუალოს ყოფაქცევის შესახებ შესაკრებთა რაოდენობის ზრდისას, რომლებიც ეყრდნობა ჯამის დისპერსიის შემცირების აღწერილ ეფექტს და შეეხებით შემთხვევით შესაკრებთა ჯამების განაწილების სხვა თვისებებს.

ჩებიშევის უტოლობა. X შემთხვევითი სიდიდის საკუთარი მათემატიკური ლოდინისაგან გადახრის შესაფასებლად იყენებენ ე.წ. ჩებიშევის უტოლობას, რომელიც მიიღება შემდეგი ელემენტარული უტოლობიდან.

ვთქვათ, X რაიმე დადებით მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის მათემატიკური ლოდინი სასრულია: $EX < \infty$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq EX/\varepsilon. \tag{8.2}$$

მართლაც, თუ შემოვიფარგლებით X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდით, რომელიც ღებულობს x_1, x_2,..., x_r დადებით მნიშვნელობებს p_1, p_2, ..., p_r ალბათობებით, გვექნება

$$EX = \sum_{i=1}^{r} x_i p_i = \sum_{i:x_i \geq \varepsilon} x_i p_i + \sum_{i:x_i < \varepsilon} x_i p_i \geq \sum_{i:x_i \geq \varepsilon} x_i p_i \geq \varepsilon \sum_{i:x_i \geq \varepsilon} p_i = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}.$$

ამით უტოლობა (8.2) ნაჩვენებია. იგი ასევე მარტივად მტკიცდება ზოგად შემთხვევაში.

ჩებიშევის უტოლობა. ვთქვათ, X რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა სასრული DX დისპერსიით, მაშინ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} \leq DX/\varepsilon^2. \tag{8.3}$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} = P\{(X-EX)^2 \geq \varepsilon^2\}$. (8.2) უტოლობის ძალით

$$P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} = P\{(X-EX)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq E(X-EX)^2 / \varepsilon^2 = DX / \varepsilon^2.$$

ჩებიშევის უტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს ეკვივალენტური ფორმით:

$$P\{|X-EX| \geq c\sqrt{DX}\} \leq 1/c^2. \tag{8.4}$$

ეს უტოლობა ნათლად წარმოაჩენს დისპერსიას, როგორც გაბნევის მახასიათებელს: (8.4)-ის ძალით X შემთხვევითი სიდიდის საკუთარი EX მათემატიკური ლოდინისაგან $c\sqrt{DX}$ -ზე არანაკლები გადახრის ალბათობა არ აღემატება $1/c^2$ სიდიდეს.

მაგალითი **8.1.** შეაფასეთ ზემოდან $P\{|X-EX|\geq 2\}$, თუ ცნობილია, რომ $DX=2$.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (8.3) ფორმულით გვექნება

$$P(|X-EX| \geq 2) \leq DX / 2^2 = 2/2^2 = 1/2.$$

საზოგადოდ ჩებიშევის უტოლობა იძლევა მათემატიკური ლოდინისაგან შემთხვევითი სიდიდის გადახრის მხოლოდ უხეშ შეფასებას, რასაც ადასტურებს შემდეგი

მაგალითი **8.2.** ვთქვათ, $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$ და $\varepsilon=3\sigma$. მაშინ ჩებიშევის უტოლობით გვექნება:

$$P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\} < \sigma^2/(9\sigma^2) = 1/9 \approx 0.1111.$$

თუ დავუშვებთ, რომ X განაწილებულია ნორმალურად μ და σ^2 პარამეტრებით, მაშინ, როგორც შესაბამისი ცხრილებიდან ჩანს, იმავე ხდომილობის ალბათობა დიდი სიზუსტით ტოლია 0.0027 რიცხვისა, რაც გაცილებით ნაკლებია ვიდრე 1/9.

დიდ რიცხვთა კანონი. ვთქვათ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა μ მათემატიკური ლოდინითა და σ^2 დისპერსიით.

განვიხილოთ

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა. (8.1) ფორმულისა და ჩებიშევის უტოლობის ძალით, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის გვექნება:

$$P\{|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| > \varepsilon\} = P\{|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\} \leq \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \tag{8.5}$$

საიდანაც იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ, რომ

$$P\{|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\} \to 0, \quad \text{როცა } n \to \infty. \tag{8.6}$$

უკანასკნელი თანაფარდობა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც შემთხვევით სიდიდეებს არ გააჩნიათ სასრული დისპერსია. საბოლოოდ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც დიდ რიცხვთა კანონის სახელითაა ცნობილი

თეორემა (დიდ რიცხვთა კანონი). თუ $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია საერთო μ მათემატიკური ლოდინით, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε-ისათვის

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{8.7}$$

შემთხვევით სიდიდეთა $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება ალბათობით კრებადი Y შემთხვევითი სიდიდისაკენ, რაც $Y_n \xrightarrow{P} Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება, თუ ნებისმიერი დადებითი ε-ისათვის

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\} = 0. \tag{8.8}$$

აქედან გამომდინარე დიდ რიცხვთა კანონი მოკლედ ასე ჩაიწერება:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

ახლა განვიხილოთ ერთი მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როდესაც X_i შემთხვევითი სიდიდეები ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებია წარმატების p ალბათობით

X_i		
	1	0
	p	$1-p$

ამ შემთხვევაში $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{S_n}{n}$ წარმოადგენს წარმატების ფარდობით სიხშირეს n დამოუკიდებელ ცდაში. ვინაიდან $EX_i = p$, ამიტომ დიდ რიცხვთა კანონს ბერნულის სქემისათვის ექნება შემდეგი სახე:

ბერნულის თეორემა.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

სტატისტიკურ ლიტერატურაში $\frac{S_n}{n}$ ფარდობით სიხშირეს უწოდებენ შერჩევით პროპორციას და მას $\hat{P}_n$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ, $\hat{P}_n = \frac{S_n}{n}$.

შესაბამისად p ითვლება იმ უსასრულო პოპულაციის პროპორციად, რომელიც ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს შეესაბამება. ამ ტერმინებში ბერნულის თეორემა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\hat{P}_n \xrightarrow{P} p.$$

დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი.* შემთხვევით სიდიდეთა ალბათობით კრებადი მიმდევრობების გარდა შეისწავლიან $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთ მიმდევრობებსაც, რომლებიც ერთის ტოლი ალბათობით არის კრებადი, ანუ იმ ხდომილობის ალბათობა, რომ X_n კრებადია გარკვეული X შემთხვევითი სიდიდისაკენ, ერთის ტოლია

$$P\{X_n \to X\} = 1.$$

კერძოდ, იგივე პირობებში, როდესაც ადგილი აქვს დიდ რიცხვთა კანონს (8.7) ფორმით, სამართლიანია

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu\right\} = 1 \tag{8.7'}$$

თანაფარდობა, რომელსაც დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი ეწოდება. ე.ი. (8.7') სამართლიანია დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, რომელთაც სასრული მათემატიკური ლოდინი გააჩნიათ.

(8.7')-იდან ვიღებთ ბერნულის თეორემის გაძლიერებულ ვარიანტსაც:

$$P\{\hat{P}_n \to p\} = 1.$$

ცენტრალური ზღვარითი თეორემა (კლასიკური). ვთქვათ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა μ საშუალოთი და σ^2 დისპერსიით. როგორც ცნობილია $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ შემთხვევითი სიდიდე კვლავ ნორმალურადაა განაწილებული $n\mu$ საშუალოთი და $n\sigma^2$ დისპერსიით, ხოლო ნორმირებული ჯამების განაწილება ნორმალურია ნულოვანი საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით, ე.ი.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1). \tag{8.9}$$

პირიქით, თუ დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით შესაკრებთა ჯამისათვის ძალაშია (8.9), მაშინ ამ შემთხვევით სიდიდეთა საერთო განაწილება აუცილებლად ნორმალური აღმოჩნდება. ამრიგად, როდესაც X_i შემთხვევით სიდიდეთა განაწილება ნორმალური არაა, S_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილება არ შეიძლება იყოს ნორმალური. მიუხედავად ამისა ნორმირებული ჯამებისათვის გარანტირებულია მიახლოებითი ნორმალურობა, როდესაც შესაკრებთა რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება. ამ ფაქტის ზუსტი ფორმულირება ცნობილია ცენტრალური ზღვარითი თეორემის სახელწოდებით.

ცენტრალური ზღვარითი თეორემა. თუ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია საერთო μ მათემატიკური ლოდინითა და სასრული σ^2 დისპერსიით, ხოლო $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, მაშინ

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) - \Phi(x) \to 0, \quad \text{როცა } n\to\infty, \tag{8.10}$$

სადაც $\Phi(x)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია.

მაგრამ ცენტრალური ზღვარითი თეორემის (8.10) ფორმულირება არაა საკმარისი იმ ფართო გავრცელების ასახსნელად, რომელიც ნორმალურ განაწილებას გააჩნია სულ სხვადასხვა მოვლენის მოდელის როლში. არსებობს ბევრად უფრო ზოგადი პირობები, როცა ადგილი აქვს დამოუკიდებელ (ან თუნდაც დამოკიდებულ) შემთხვევით სიდიდეთა ჯამების განაწილების სიახლოვეს ნორმალურ განაწილებასთან პირობის ყველაზე ზოგადი ფორმულირება სიტყვიერად შეიძლება ასე გამოითქვას: შესაკრებთა რაოდენობის ზრდისას თითოეულ მათგანს გარკვეული აზრით თანაბრად მცირე წვლილი უნდა შეჰქონდეს მთელს ჯამში.ამიტომ ნორმალურ მოდელს მისაღებად მიიჩნევენ რაიმე სიდიდის განაწილებისათვის, თუ ეს სიდიდე ბევრი სხვა მცირე სიდიდის ჯამურ ეფექტად წარმოგვიდგება.

(8.10) თანაფარდობიდან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტი

$$P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \le x\right) \to \Phi(x), \quad \text{როცა } n\to\infty.$$

ამრიგად, დავასკვნით, რომ:

შესაკრებთა საკმაოდ დიდი რაოდენობისათვის მათი არითმეტიკული საშუალო $\overline{X}_n$ მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული μ საშუალოთი და σ^2/n დისპერსიით.

ლიტერატურაში, რომელიც ეხება სტატისტიკის გამოყენებით ასპექტებს, ცენტრალური ზღვარითი თეორემა სწორედ ამ ტერმინებშია ჩამოყალიბებული.

ბერნულის სქემისათვის წარმატების მუდმივი p ალბათობით, $0<p<1$, $q=1-p$ ცენტრალური ზღვარითი თეორემა იძენს შემდეგ ფორმას: ყოველი ნამდვილი x-ისათვის

$$P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\right\} \to \Phi(x), \quad \text{როცა } n\to\infty. \tag{8.11}$$

ამ თეორემის მეშვეობით შესაძლებელია გამოითვალოს S_n შემთხვევითი სიდიდის ზღვარითი განაწილებაც, სახელდობრ,

$$P\{S_n \le x\} - \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) \to 0, \quad \text{როცა } n\to\infty. \tag{8.12}$$

აქედან უკვე მარტივად გამომდინარეობს

მუავრ-ლაპლასის თეორემა. როგორიც არ უნდა იყოს a და b ნამდვილი რიცხვები, $a<b$, გვაქვს

$$\left|P\{a \le S_n \le b\} - \left[\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)\right]\right| \to 0, \qquad \text{როცა } n \to \infty.$$

ამ თეორემიდან ვღებულობთ შემდეგ მიახლოებით ფორმულას საკმაოდ დიდი n-ისათვის:

$$P\{a \le S_n \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{8.13}$$

რომლის კერძო შემთხვევაა

$$P\{S_n \le x\} \approx \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{8.14}$$

(8.11)-იდან ადვილად მიიღება შემდეგი თანაფარდობა შერჩევითი პროპორციისათვის

$$P\left\{\frac{\hat{P}_n - p}{\sqrt{pq/n}} \le x\right\} \to \Phi(x), \qquad \text{როცა } n \to \infty, \tag{8.15}$$

რაც სიტყვიერად ასე გამოითქმის:

თუ ბერნულის სქემაში წარმატების ალბათობაა p, ცდათა დიდი რაოდენობისათვის შერჩევითი პროპორცია $\hat{P}_n$ მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული p საშუალოთი და pq/n დისპერსიით.

თუ n საკმაოდ დიდია და წარმატების p ალბათობა არ არის ახლოს ან 1-თან ან 0-თან, ბინომური განაწილების მიახლოება ნორმალურით საკმაოდ ზუსტ შედეგებს იძლევა. ზომიერად დიდი n-ისათვის უფრო ზუსტ მიახლოებას იძლევა ფორმულა

$$P\{a \le S_n \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b-np+0.5}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np+0.5}{\sqrt{npq}}\right), \tag{8.16}$$

რომლის კერძო შემთხვევაა

$$P\{S_n \le x\} \approx \Phi\left(\frac{x-np+0.5}{\sqrt{npq}}\right). \tag{8.17}$$

მაგალითი 8.3. განვიხილოთ ბერნულის სქემა, რომელშიც p=0.1 და n=100. მაშინ

$$P\{S_{100} \le 9\} \approx \sum_{k=0}^{9} C_{100}^{k} (0.1)^k (0.9)^{100-k} = 0.45.$$

(8.12) -ის ძალით

$$P\{S_{100} \leq 9\} \approx \Phi\left(\frac{9-10}{3}\right) = \Phi(-0.33) = 0.3707.$$

როგორც ვხედავთ, (8.12)-ის გამოყენება არ იძლევა დამაკმაყოფილებელ შედეგს, მაშინ როდესაც (8.16)-ის გამოყენებით

$$P\{S_{100} \leq 9\} \approx \Phi\left(\frac{9-10+0,5}{3}\right) = \Phi(-0.17) = 0.4325.$$

ამრიგად, (8.16) მიახლოებითი ფორმულის გამოყენებამ გააუმჯობესა აპროქსიმაციის სიზუსტე.

მაგალითი 8.4. 100 დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობის განხორციელების ალბათობა მუდმივია და 0.8-ის ტოლია.ნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენებით იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა 100 ცდაში განხორციელდება: ა) არა უმცირეს 75-ჯერ და არა უმეტეს 90-ჯერ ; ბ) არა უმცირეს 75-ჯერ ; გ)არა უმეტეს 90-ჯერ .

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, n=100, p=0.8, a=75, b=90 და საძიებელია შემდეგი ალბათობები: ა) $P\{75 \leq X \leq 90\}$, ბ)$P\{X \geq 75\}$, გ) $P\{X \leq 90\}$.

ა) (8.13)-ის ძალით გვაქვს

$$P\{75 \leq X \leq 90\} = \sum_{k=75}^{90} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \Phi\left(\frac{90-100\cdot 0.8}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right) - \Phi\left(\frac{75-100\cdot 0.8}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right) = 0.888.$$

ბ) A ხდომილობის განხორციელება არა უმცირეს 75-ჯერ ნიშნავს, რომ ის განხორციელდება ან 75-ჯერ ან 76-ჯერ და ა.შ. 100-ჯერ. ამიტომ $P\{X \geq 75\} = P\{75 \leq X \leq 100\}$ და ამ შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ a=75, ხოლო b=100. საბოლოოდ, ანალოგიურად წინა ამოცანისა, მივიღებთ $P\{X \geq 75\} = P\{75 < X \leq 100\} = \Phi(5) - \Phi(-1.25) = 0.89$.

გ) A ხდომილობა განხორციელდება არა უმეტეს 90-ჯერ ნიშნავს, რომ A ხდომილობა ან არ განხორციელდება ან განხორციელდება 1-ჯერ ან 2-ჯერ და ა.შ. 90-ჯერ. ამიტომ ანალოგიურად ბ) შემთხვევისა მივიღებთ, რომ $P(X \leq 90) = \Phi(2.5) - \Phi(-20) = 0.99$.

ბერნულის ცდათა სქემაში, როდესაც წარმატების ალბათობა p ახლოსაა ნულთან და np დიდი არაა, ნორმალურ მიახლოებას ამჯობინებენ პუასონის მიახლოებას

$$P\{S_n \leq x\} \approx \sum_{k=0}^{x} \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}. \tag{8.18}$$

ამ თანადობის მარჯვენა მხარეს მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს $\lambda = np$ პარამეტრის მქონე პუასონის განაწილების ფუნქციას. ეს აპროქსიმაცია ეყრდნობა შემდეგ თეორემას.

პუასონის თეორემა. თუ n-ის ზრდისას $p \to 0$ ისე, რომ $np = \lambda > 0$, მაშინ

$$P\{S_n \le x\} = \sum_{k=0}^{x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} . \tag{8.19}$$

პუასონის (8.19) მიახლოება 8.3 მაგალითში მოგვცემს, რომ

$$P\{S_{100} \le 9\} \approx 0.4558,$$

რაც ამ მაგალითში მოცემულ ორივე ნორმალურ მიახლოებაზე უკეთესია.

მაგალითი 8.5. ვთქვათ, 5000 მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს და მიზანში მოხვედრის ალბათობა თითოეულისათვის არის 0.001. გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს ორი მსროლელი მაინც დააზიანებს.

ამოხსნა. უნდა ვიპოვოთ $P\{S_n \ge 2\} = 1 - P\{S_n = 1\} - P\{S_n = 2\}$. ზუსტი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ $P\{S_n \ge 2\} = 0{,}9597$.

ნორმალური აპროქსიმაცია მოგვცემს: $P\{S_n \ge 2\} = 0{,}9633$, თუ გამოვიყენებთ (8.14)-ს, ხოლო (8.17)-დან გვექნება $P\{S_n \ge 2\} = 0{,}9415$. თუ ახლა გამოვიყენებთ პუასონის (8.19) მიახლოებას, მივიღებთ, რომ: $P\{S_n \ge 2\} = 0{,}9596$. როგორც ვხედავთ, პუასონის მიახლოება ამ შემთხვევაში უკეთეს შედეგს იძლევა ნორმალურთან შედარებით.

შენიშვნა.* ცნობილია როგორც ნორმალური, ისე პუასონის მიახლოების ბევრი დაზუსტებული ვარიანტი, მათ შორის ცდომილებათა შემდეგი შეფასებები:

$$\left| P\left(\frac{S_{n-np}}{\sqrt{npq}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le 0{,}8 \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}$$

და

$$\left| P(S_n \le x) - \sum_{k=0}^{x} \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \right| < np^2 .$$

ერთ-ერთი გარემოება, რომელიც აძნელებს ამ მიახლოებათა გარჩევას იმაში მდგომარეობს, რომ

$$\sup_x \left| \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \Phi(x) \right| \to 0 .$$

როცა λ იზრდება, ანუ დიდი λ-სათვის პუასონის განაწილების ფუნქცია (ისევ ცენტრალური ზღვარითი თეორემის ძალით) ნორმალურს უახლოვდება.

მარტივი რეცეპტები, თუ როდის გამოვიყენოთ ნორმალური და როდის პუასონის მიახლოება არ გაგვაჩნია, თუმცა ზოგიერთი სტატისტიკოსი გვთავაზობს უხეშ, ემპირიულ წესებს. მაგალითად ერთ-ერთი ასეთი წესია: თუ $np > 10$ და $nq > 10$ რეკომენდებულია ნორმალური მიახლოების გამოყენება. მეორე ასეთი წესი გვთავაზობს გამოვიყენოთ პუასონის მიახლოება, თუ $n > 50$ და $np < 5$.

***

ეს თავი ეყრდნობა [11], [17], [21], [27], [39], [56], [64] წიგნებს, რომლებიც გადმოცემული საკითხების გარდა მრავალ სხვა მასალასაც შეიცავს (დამატებითი ინფორმაციის მისაღებად სასარგებლო იქნება [1] და [3] წიგნების გაცნობაც). ეკონომისტებისათვის განკუთვნილი სახელმძღვანელოებიდან მკითხველს ვურჩევდით [60], [66], [72], [79] წიგნებს და აგრეთვე ქართულ ენაზე არსებულ შესაბამის ლიტერატურას: [8], [9], [13], [14], [15].

ᲓᲐᲡᲙᲕᲜᲔᲑᲘ

ეს თავი საცნობარო ხასიათისაა და მასში თავმოყრილია ალბათობის თეორიის დებულებები შემთხვევით სიდიდეთა ჯამების ყოფაქცევის შესახებ, შესაკრებთა რაოდენობის ზრდისას. ეს დებულებები ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემების სახელითაა ცნობილი.

ძირითადი თეორემებია დიდ რიცხვთა კანონი და ცენტრალური ზღვარითი თეორემა. თუ მათ მათემატიკურ სტატისტიკაში მიღებული ტრადიციული ფორმით ჩამოვაყალიბებთ, პირველი ასაბუთებს განმეორებით დაკვირვებათა არითმეტიკული საშუალოს და საერთო განაწილების მათემატიკური ლოდინის სიახლოვეს ამ დაკვირვებათა რაოდენობის ზრდისას, ხოლო მეორე – მათი სხვაობის ასიმპტოტურად ნორმალურ განაწილებას. კერძოდ, თუ ბერნულის სქემაში წარმატების ალბათობაა p, მაშინ ცდათა დიდი რაოდენობისათვის შერჩევითი პროპორცია $\hat{P}_n$ ახლოსაა p-სთან და $\hat{P}_n$ მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული p საშუალოთი და $p(1-p)/n$ დისპერსიით. მოცემულია აგრეთვე ბინომური განაწილების პუასონისეული მიახლოება მცირე p-ს შემთხვევაში.

თუ შემოვიღებთ შემდეგ აღნიშვნებს ამ და წინა თავებში განხილული განაწილების ფუნქციებისათვის:

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების ფუნქცია –

$$H(x;t,s,n) = \sum_{k\le x} \frac{C_t^k C_{n-t}^{s-k}}{C_n^s}$$

ბინომური განაწილების ფუნქცია –

$$Bi(x;p,n) = \sum_{k\le x} C_n^k p^k q^{n-k}$$

პუასონის განაწილების ფუნქცია –

$$\Pi(x;\lambda) = \sum_{0\le k\le x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია –

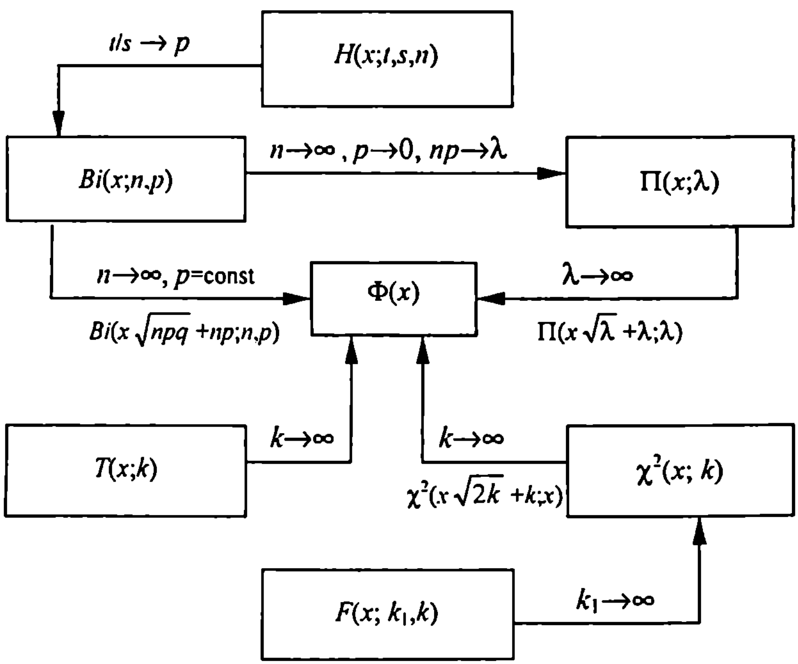
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

χ^2-განაწილების ფუნქცია	$\chi^2(x\,;\,k)$
სტიუდენტის განაწილების ფუნქცია	$t(x\,;\,k)$
ფიშერის განაწილების ფუნქცია	$F(x\,;\,k_1,\,k_2)$

და თუ გავითვალისწინებთ იმ გარემოებას, რომ X და $Y = \dfrac{X-a}{b}$, $b>0$, შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების ფუნქციები

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X \le bx+a) = F_X(bx+a)$$

ტოლობით უკავშირდება ერთმანეთს, მივიღებთ განაწილების ფუნქციათა შორის ზღვრული თანაფარდობების შემდეგ ცხრილს (იხ. ნახ. 8.1).



ნახ. 8.1.

9

სტატისტიკური დასკვნების თეორიის ალბათური საფუძვლები

შემთხვევითი სიდიდის ცნების შემოღების შემდეგ შესაძლებელი ხდება პოპულაციის აღწერა რაიმე X შემთხვევითი სიდიდის მეშვეობით. მაგალითად, თუ გვაქვს სასრული პოპულაცია, რომელიც შედგება რაოდენობრივი მახასიათებლის N მნიშვნელობისაგან, რომელთა შორის განსხვავებულებია $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $1 \le k \le N$, ამასთან x_i-ის სიხშირეა n_i (ე.ი. n_i არის პოპულაციის იმ ელემენტების რაოდენობა, რომელთა მნიშვნელობებიც x_i-ის ტოლია), $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$, მაშინ პოპულაცია აღიწერება დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდით, რომლის განაწილების კანონია

$$P\{X=x_i\}=\frac{n_i}{N},\ i=1,2,\ldots,k.$$

ეს დაშვება ბუნებრივია იმ თვალსაზრისით, რომ პოპულაციიდან შემთხვევით არჩეული ელემენტის მიერ x_i მნიშვნელობის მიღების ალბათობა n_i/N შეფარდების ტოლია.

ასევეა წარმოსახვითი პოპულაციის შემთხვევაშიც, მაგალითად, როდესაც პოპულაცია შედგება კონკრეტული ობიექტის რაიმე რაოდენობრივი მახასიათებლის ყველა შესაძლო გაზომვებისაგან, რომელთა შორის განსხვავებები გამოწვეულია გაზომვის შეცდომებით. შეცდომები ნორმალურადაა განაწილებული, ბუნებრივია პოპულაციაც აღიწეროს ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდით.

შემდგომში პოპულაციას გავაიგივებთ მის აღმწერ X შემთხვევით სიდიდესთან და პოპულაციის განაწილების ქვეშ ვიგულისხმებთ X-ის განაწილების კანონს, რომელსაც აღვნიშნავთ $\mathcal{L}(X)$-ით. ამასთან, განაწილების კანონი შეიძლება მოცემული იყოს ნებისმიერი ფორმით: დისკრეტული განაწილების კანონით, განაწილების ფუნქციით, განაწილების სიმკვრივით და სხვა.

ზოგჯერ იხმარება შემდეგი ტერმინოლოგიაც: X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს $\mathcal{L}(X)$ განაწილების კანონთან ერთად უწოდებენ $\mathcal{L}(X)$ კანონით განაწილებულ გენერალურ ერთობლიობას. თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა $F(x)$, მაშინ ვიხმართ ტერმინს: $F(x)$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობა (პოპულაცია). X შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს (საშუალოს, დისპერსიას, სტანდარტულ გადახრას და სხვა) პოპულაციის პარამეტრებს ვუწოდებთ.

თუ პოპულაციის განაწილება (X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, $\mathcal{L}(X)$) ცნობილია, მაშინ ჩავთვლით, რომ პოპულაციის შესახებ გაგვაჩნია სრული ინფორმაცია. პრაქტიკაში, როგორც წესი, პოპულაციის განაწილების კანონი ან მთლიანად უცნობია ან ცნობილია განაწილების ფორმა, მაგრამ უცნობია მისი პარამეტრები (მაგალითად, რაიმე მოსაზრების გამო ჩათვლილია, რომ პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული, მაგრამ უცნობია მისი პარამეტრები).

მათემატიკური სტატისტიკის მიზანს შეადგენს დაკვირვებების (შერჩევითი მნიშვნელობების) საფუძველზე დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გამოტანა პოპულაციის განაწილების შესახებ.

წინა თავებში შერჩევითი მნიშვნელობები (დაკვირვებები) აღნიშნული იყო $x_1,x_2,\ldots,x_n$ სიმბოლოებით, სადაც x_1 იყო პირველი დაკვირვებული მნიშვნელობა, x_2 – მეორე და ა.შ. დაკვირვებების მოპოვებამდე ყოველი კერძო დაკვირვება განუსაზღვრელია (შედეგის წინასწარ განჭვრეტა შეუძლებელია), რის გამოც, მონაცემების მოპოვებამდე დაკვირვებებს განვიხილავთ, როგორც შემთხვევით სიდიდეებს და აღვნიშნავთ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ სიმბოლოებით, რეალურად დაკვირვებულ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ მნიშვნელობებს კი მივიჩნევთ $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის კონკრეტულ რეალიზაციად, ანუ შერჩევით მნიშვნელობად (შერჩევის მონაცემებად).

ვიტყვით, რომ $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შემთხვევითი ვექტორი წარმოადგენს n მოცულობის შემთხვევით შერჩევას (ან, უბრალოდ, შერჩევას) $\mathcal{L}(X)$ კანონით განაწილებული პოპულაციიდან (გენერალურ ერთობლიობიდან), თუ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ დამოუკიდებელი ერთნაირად, $\mathcal{L}(X)$ კანონით, განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია.

ხშირად გამოიყენება შემდეგი ტერმინოლოგიაც: $X_1,X_2,\ldots,X_n$ მიმდევრობა წარმოადგენს დამოუკიდებელ დაკვირვებებს X შემთხვევით სიდიდეზე, რომლის განაწილების კანონია $\mathcal{L}(X)$.

პირველ და მესამე თავებში ჩვენ გავეცანით რიცხვითი მონაცემების (შერჩევითი მნიშვნელობების) წარმოდგენისა და დამუშავების ხერხებს. შერჩევითი მნიშვნელობების (მონაცემების) საფუძველზე ვითვლიდით სხვადასხვა მახასიათებლებს; ყოველი მახასიათებელი იყო $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ შერჩევით მნიშვნელობათა გარკვეული წესით აგებული $T(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ რიცხვითი ფუნქცია. მაგრამ, როგორც აღვნიშნეთ, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ვექტორი არის $X=(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის ერთ-ერთი შესაძლო მნიშვნელობა, ამიტომ $T_n(x)=T(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ სიდიდე წარმოადგენს $T_n(X)=T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შემთხვევითი სიდიდის ერთ-ერთ დაკვირვებულ მნიშვნელობას $T_n(X)$-ის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან.

შერჩევითი მნიშვნელობების ნებისმიერ T_n ფუნქციას, რომლის აგების ალგორითმი ცნობილია, სტატისტიკას უწოდებენ. სტატისტიკას ჩვენ შევხედავთ ორნაირად:

- როგორც რიცხვს; თუ T_n ფუნქციის არგუმენტად ავიღებთ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ შერჩევით მნიშვნელობებს, მაშინ $t_n=T(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ ფუნქცია გვაძლევს სტატისტიკის დაკვირვებულ (რეალიზებულ) მნიშვნელობას.
- როგორც შემთხვევით სიდიდეს; თუ T_n ფუნქციის არგუმენტად ავიღებთ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ შერჩევას, მაშინ იგივე $T_n=T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ ფუნქცია წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სტატისტიკა წარმოადგენს სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა შეიძლება გამოითვალოს შერჩევითი მონაცემების საშუალებით. მონაცემების მიღებამდე სტატისტიკები განიხილება როგორც შემთხვევითი სიდიდეები, დაკვირვებების ჩატარების შემდეგ კი როგორც რიცხვები.

ზოგიერთი სტატისტიკა ჩვენთვის უკვე ცნობილია, მაგალითად: შერჩევითი საშუალო, $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; შერჩევითი დისპერსია, $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$; შერჩევითი მომენტები და სხვა.

სტატისტიკას, განხილულს როგორც შემთხვევით სიდიდეს, გააჩნია თავისი განაწილების კანონი, რომელსაც ეწოდება სტატისტიკის შერჩევითი განაწილება. ყოველი კერძო სტატისტიკის განაწილება დამოკიდებულია არა მხოლოდ შერჩევის n მოცულობასა და პოპულაციის განაწილებაზე, არამედ იმ მეთოდზეც, რომლითაც წარმოებს შერჩევა.

მაგალითად, განვიხილოთ სამი ელემენტისაგან შედგენილი პოპულაცია: 1, 3, 7. ვთქვათ, ვიღებთ n=2 მოცულობის შერჩევას დაბრუნებით. სტატისტიკას წარმოადგენს შერჩევითი დისპერსია. მაშინ ხდომილობას $\{S^2=0\}=\{X_1=X_2\}$ აქვს დადებითი ალბათობა, ხოლო, როცა შერჩევა წარმოებს დაბრუნების გარეშე ამავე $\{S^2=0\}$ ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია.

შემდგომში დავუშვებთ, რომ პოპულაციიდან ამოკრეფა ხდება ისეთი წესით, რომ დაკვირვებები $X_1,X_2,\dots,X_n$ წარმოადგენს n მოცულობის შემთხვევით შერჩევას, ე.ი. დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა საერთო განაწილება ემთხვევა პოპულაციის განაწილებას. მაგალითად, ეს პირობები სრულდება, როდესაც შერჩევა წარმოებს ან უსასრულო (წარმოსახვითი) პოპულაციიდან (მონეტის ან კამათლის n-ჯერ აგდება, რაიმე შემთხვევითი ექსპერიმენტის n-ჯერ გამეორება და სხვა) ანდა სასრული პოპულაციიდინ დაბრუნებით. ეს პირობები მიახლოებით სრულდება მაშინაც, როდესაც შერჩევის n მოცულობა გაცილებით მცირეა პოპულაციის N მოცულობასთან შედარებით (მაგ. $n/N<0.05$). ამ დაშვებაში, თუ $X_1,X_2,\dots,X_n$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი დაკვირვებებია, საერთო განაწილების $F(x)$ ფუნქცით და $f(x)$ განაწილების სიმკვრივით, მაშინ $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ ვექტორის განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე მოიცემა ფორმულებით:

$$F_X(x_1,x_2,\dots,x_n) = F(x_1)\cdots F(x_n),$$

$$f_X(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n).$$

დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში კი, თუ $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, გვაქვს

$$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) = P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n).$$

X ვექტორის განაწილების მეშვეობით უკვე შესაძლებელია სტატისტიკის განაწილებისა და მისი რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლა. ზოგიერთ შემთხვევაში ხერხდება სტატისტიკის ზუსტი განაწილების დადგენა, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში კი მხოლოდ ზღვარითი განაწილებისა.

$T_n=T_n(X_1,X_2,\dots,X_n)$ სტატისტიკის ზუსტი ან ზღვარითი განაწილების კანონის ცოდნა საშუალებას მოგვცემს ვისაუბროთ T_n-ის ალბათურ თვისებებზე, რასაც გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს სტატისტიკური დასკვნების მიღებისათვის.

მოვიყვანოთ საილუსტრაციო მაგალითი.

ვთქვათ, $X_1,X_2,\dots,X_n$ წარმოადგენს შერჩევას $\mathcal{L}(X)$ კანონით განაწილებული გენერალურ ერთობლიობიდან, სადაც X ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეა წარმატების p ალბათობით, $0<p<1$.

დავუშვათ, რომ p, $0<p<1$ უცნობია, ე.ი. ცნობილია გენერალური ერთობლიობის განაწილების კანონის სახე, მაგრამ უცნობია მისი p პარამეტრი. საჭიროა დაკვირვებების საფუძველზე გავაკეთოთ სტატისტიკური დასკვნები p პარამეტრის შესახებ.

განვიხილოთ სტატისტიკა (ერთიანების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე n დამოუკიდებელ ცდაში)

$$\hat{P}_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

და დავადგინოთ მისი განაწილების კანონი. რადგან $S_n=X_1+X_2+..+X_n$ ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, ე.ი.

$$P\{S_n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ \ k = 0,1,\dots, n ,$$

ამიტომ $\hat{P}_n$-ის შესაძლო მნიშვნელობებია 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$,... , 1, ამასთან

$$P\left\{\hat{P}_n = \frac{k}{n}\right\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ \ k=0,1,\dots,n.$$

ამავე დროს, მუავრ-ლაპლასის თეორემის ძალით (იხ. თავი 8) როცა $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\hat{P}_n - p}{\sqrt{pq/n}} \le x\right\} \to \Phi(x),$$

ე.ი. საკმარისად დიდი n-ისათვის $\hat{P}_n$ შემთხვევითი სიდიდე მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული p საშუალოთი და pq/n დისპერსიით.

ამრიგად ამ $\hat{P}_n$ სტატისტიკისათვის დავადგინეთ, როგორც ზუსტი, ასევე მიახლოებითი განაწილების კანონი.

ცხადია, რომ $\hat{P}_n$ სტატისტიკის ზოგიერთი თვისების დადგენა შესაძლებელია მისი განაწილების კანონის ცოდნის გარეშეც. მაგალითად:

$$E\ \hat{P}_n = p, \qquad D\ \hat{P}_n = pq/n,$$

$$\hat{P}_n \xrightarrow{P} p,$$

ამასთან პირველი ორი თანაფარდობა გამომდინარეობს მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის სტანდარტული თვისებებიდან, ხოლო მესამე თანაფარდობა კი სამართლიანია დიდ რიცხვთა კანონის ძალით.

ჩამოთვლილი თვისებები გვაძლევს იმის საფუძველს, რომ $\hat{P}_n$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა $\hat{P}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ჩავთვალოთ უცნობი p ალბათობის მიახლოებით მნიშვნელობად. ამიტომ, $\hat{P}_n$-ს უცნობი ალბათობის წერტილოვანი შეფასება ეწოდება.

არ უნდა მოველოდეთ, რომ ფარდობითი სიხშირის დაკვირვებული $\hat{P}_n$ მნიშვნელობა ზუსტად უცნობი p ალბათობის ტოლი აღმოჩნდება. ამიტომ იბადება ბუნებრივი კითხვა, თუ რამდენად დიდია მათ შორის სხვაობა. ამ კითხვაზე უხეში პასუხის მიღება შესაძლებელია უშუალოდ ჩებიშევის უტოლობიდან, რომლის ძალითაც

$$P\{|\hat{P}_n - p| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

ბოლო უტოლობა მიღებულია იმ ფაქტის გათვალიწინებით, რომ თუ $0<p<1$, მაშინ $p(1-p)\le 1/4$. თუ ამ უტოლობაში ε-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $\frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$ -ს,სადაც $\lambda>0$, მივიღებთ:

$$P\{|\hat{P}_n-p|<\frac{\lambda}{2\sqrt{n}}\}\ge 1-\frac{1}{\lambda^2}.$$

მაგალითად, თუ $\lambda=3$, მაშინ:

$$P\{|\hat{P}_n-p|<\frac{3}{2\sqrt{n}}\}\ge 8/9\approx 0.8888$$

ანუ

$$P\{\hat{P}_n-\frac{3}{2\sqrt{n}}\le p\le \hat{P}_n+\frac{3}{2\sqrt{n}}\}\ge 0.8888.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ 0.8888-ზე მეტი ალბათობით p პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა ეკუთვნის $[\hat{P}_n-3/2\sqrt{n}, \hat{P}_n+3/2\sqrt{n}]$ ინტერვალს. (შევნიშნოთ, რომ ინტერვალის ბოლოები შემთხვევითი სიდიდეებია). ამ ფაქტს სიმბოლურად ასე აღნიშნავენ

$$p\approx \hat{P}_n\pm\frac{3}{2\sqrt{n}}\quad (\ge 88\%).$$

შერჩევის დიდი მოცულობისათვის ნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენებით შესაძლებელია უფრო ზუსტი შედეგის მიღება იმ შემთხვევაში, თუ წინასწარ ცნობილია, რომ უცნობი p არ არის ახლოს 0-თან ან 1-თან. მართლაც, დიდი n-ებისათვის

$$P\left\{|\hat{P}_n-p|\le\frac{\lambda}{2\sqrt{n}}\right\}=P\left\{\frac{|\hat{P}_n-p|}{\sqrt{p(1-p)/n}}\le\frac{\lambda}{2\sqrt{p(1-p)}}\right\}\ge P\left\{\frac{|\hat{P}_n-p|}{\sqrt{p(1-p)/n}}\le\lambda\right\}\approx 2\Phi(\lambda)-1.$$

და თუ $\lambda=3$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$P\left\{|\hat{P}_n-p|\le\frac{3}{2\sqrt{n}}\right\}\ge 2\Phi(3)-1\approx 0.9973>0.8888.$$

შევნიშნოთ, რომ ზუსტი შედეგის მიღება შესაძლებელია უშუალოდ $\hat{P}_n$ სტატისტიკის ზუსტი განაწილების გამოყენებით.

ამ საკითხებს ჩვენ დაწვრილებით შევეხებით შეფასების თეორიაში.

მაგალითი. ვთქვათ, n=10000, $\hat{P}_n$=0.65. მაშინ $3/2\sqrt{n}\approx 0.007$ და დიდი საიმედობით (≥0.9973) შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$0.65-0.007\le p\le 0.65+0.007$$

ე.ი.

$$0.643\le p\le 0.657$$

0.9973-ზე მეტი საიმედოობა ნიშნავს შემდეგს:

თუ ჩავატარებთ, ვთქვათ 10000 ცდისაგან შედგენილ 1000 სერიას, მაშინ ჩვენი დასკვნა იმის შესახებ, რომ ჭეშმარიტი ალბათობა მოთავსებულია $[\hat{P}-0.007, \hat{P}+0.007]$ ინტერვალში სწორი იქნება საშუალოდ 997-ზე მეტ შემთხვევაში.

$\hat{P}_n$ სტატისტიკის ზუსტი ან ზღვარითი განაწილების ცოდნა მნიშვნელოვანია უცნობი p ალბათობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანებშიც, რომლებსაც ჩვენ შემდგომში შევისწავლით.

სანამ შევუდგებოდეთ იმ სტატისტიკების განხილვას, რომლებიც ცენტრალურ როლს ასრულებენ პოპულაციის პარამეტრების შესახებ სტატისტიკური დასკვნების სხვადასხვა ამოცანაში, განვიხილოთ მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ობიექტი – ემპირიული განაწილების ფუნქცია, რომელსაც არსებითად ეფუძნება არაპარამეტრული სტატისტიკის მეთოდები (იხ. თავი 17).

ემპირიული განაწილების ფუნქცია. ვთქვათ $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ არის n მოცულობის შერჩევა $F=F(x)$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$F_n(x) \equiv \frac{1}{n}\{\text{იმ } X_i\text{-ების რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატება } x\text{-ს}\} =$$

$$=\frac{1}{n}\cdot \#\{X_i : X_i \le x\} = \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} I\{X_i \le x\}, \tag{9.1}$$

სტატისტიკურ ლიტერატურაში $F_n(x)$ ფუნქციას (როგორც სტატისტიკას) ემპირიულ ანუ შერჩევით განაწილების ფუნქციას უწოდებენ.

კიდევ ერთხელ აღვნიშნოთ, თუ რაში მდგომარეობს ძირითადი განსხვავება $F_n(x)$ ემპირიულ განაწილების ფუნქციასა და კუმულატას შორის: ყოველ x წერტილში $F_n(x)$ წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდეს, რომელსაც თავისი ალბათური განაწილების კანონი აქვს მაშინ, როცა კუმულატა, ყოველი x-ისათვის უბრალოდ რაიმე ნამდვილი რიცხვია.

ყოველი $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ რეალიზაციისათვის ემპირიული განაწილების ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობას $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i \le x\}}$ ანუ $(x_1,x_2,...,x_n)$ მონაცემებით აგებულ კუმულატას გააჩნია განაწილების ფუნქციის ყველა თვისება:

1. $F_n(x)$ არაკლებადი მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა,

2. $F_n(x)=0$, როცა $x < \min(x_1,x_2,...,x_n)$,

3. $F_n(x)=1$, როცა $x \ge \max(x_1,x_2,...,x_n)$.

ამასთან ერთად იგი წარმოადგენს საფეხურა ფუნქციას და იზრდება მხოლოდ $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$ წერტილებში. როცა ეს წერტილები განსხვავებულია, ყოველ მათგანში კუმულატას აქვს $1/n$ სიდიდის ნახტომი, ხოლო თუ რომელიმე მათგანი ემთხვევა ერთმანეთს, მაშინ ნახტომი იმდენჯერვე იზრდება (იხ. პირველი თავის (1.2) ფორმულა).

მოვიყვანოთ ემპირიული განაწილების ფუნქციის ზოგიერთი თვისება.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$EF_n(x) = F(x), \qquad DF_n(x) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}.$$

განსხვავება $F(x)$-სა და $F_n(x)$-ს შორის მდგომარეობს იმაში, რომ $F(x)$ წარმოადგენს $\{X \le x\}$ ხდომილობის ალბათობას, ხოლო $F_n(x)$ – იგივე ხდომილობის მოხდენათა ფარდობით სიხშირეს n მოცულობის შერჩევაში, ამიტომ დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად, ემპირიული განაწილების ფუნქცია ყოველ x წერტილში ალბათობით მიისწრაფის განაწილების ფუნქციისაკენ, $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$, როცა $n \to \infty$, ანუ

$$\lim_{n\to\infty} P\{|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\} = 1. \tag{9.2}$$

სამართლიანია უფრო ძლიერი შედეგიც, რომელიც გლივენკო-კანტელის თეორემის სახელითაა ცნობილი

$$P\left\{\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0\right\} = 1.$$

შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. ვთქვათ $X_1, X_2, \dots, X_n$ შერჩევაა პოპულაციიდან, რომლის საშუალოა μ და დისპერსია σ^2. გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალოს, $\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ -ს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ:

$$E\,\overline{X}_n = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu,$$

ხოლო

$$D\,\overline{X}_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

ამრიგად, შერჩევითი საშუალოს მათემატიკური ლოდინი ტოლია გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინისა, ხოლო შერჩევითი საშუალოს დისპერსია n-ჯერ ნაკლებია გენერალური ერთობლიობის დისპერსიაზე. შევნიშნოთ, რომ მიღებული შედეგი სამართლიანია ნებისმიერად განაწილებული პოპულაციისათვის. ამასთან, დიდ რიცხვთა კანონის ძალით, $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$, როცა $n \to \infty$.

> თუ $X_1, X_2, \dots, X_n$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$ და $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, მაშინ
>
> $$E\,\overline{X}_n = \mu, \qquad D\,\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n},$$
>
> $$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი. ვინაიდან Y შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, მეორე საწყისი მომენტი და დისპერსია $DY=EY^2-(EY)^2$ ტოლობით უკავშირდება ერთმანეთს (ქვემოთ დაგვჭირდება $EY^2=DY+(EY)^2$ ტოლობაც) გვაქვს:

$$ES_n^2=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X}_n)^2\right)=EX^2-(E\overline{X}_n)^2,$$

$$EX^2=DX+(EX)^2=\sigma^2+\mu^2,$$

$$E(\overline{X}_n^2)=D\overline{X}_n+(E\overline{X}_n)^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2,$$

საიდანაც

$$ES_n^2=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\sigma^2\,\frac{n-1}{n}.$$

ამრიგად $E\overline{X}_n=\mu$ ტოლობისაგან განსხვავებით, $ES_n^2<\sigma^2$. ამ მიზეზის გამო განიხილავენ შესწორებულ შერჩევით დისპერსიას, რომელიც შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება

$$S_n'^2=\frac{n}{n-1}S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2\,. \tag{9.3}$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$ES_n'^2=E\left(\frac{n}{n-1}S_n^2\right)=\sigma^2\,.$$

ამასთანავე, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$DS_n'^2=\frac{1}{n}\left(\mu_4-\frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right),$$

სადაც μ_4 გენერალური ერთობლიობის მეოთხე რიგის ცენტრალური მომენტია, $\mu_4=E(X-EX)^4$.

იმის გამო, რომ $DS_n'^2\to 0$, როცა $n\to\infty$, ჩებიშევის უტოლობის ძალით მივიღებთ, რომ

$$S_n'^2\xrightarrow{P}\sigma^2,\ \text{როცა}\ n\to\infty$$

თუ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და $EX_i=\mu$, $DX_i=\sigma^2$, $EX_i^4=\mu_4$ და S'^2 განსაზღვრულია (9.3) თანაფარდობით, მაშინ

$$ES_n'^2=\sigma^2,\qquad DS_n'^2=\frac{1}{n}\left(\mu_4-\frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right).$$

$$S_n'^2\xrightarrow{P}\sigma^2,\quad n\to\infty.$$

შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის განაწილების კანონი ნორმალური პოპულაციისათვის. ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ნებისმიერი T_n სტატისტიკის ყოფაქცევას აღწერს მისი განაწილების $F_T(x)$ ფუნქცია. ჩვენ მოვიყვანთ მხოლოდ შერჩევითი საშუალოსა და შერჩევითი დისპერსიის განაწილების კანონებს მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც პოპულაცია (გენერალური ერთობლიობა) ნორმალურადაა განაწილებული.

ვთქვათ, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ წარმოადგენს შერჩევას ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან პარამეტრებით μ, σ^2, ანუ $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, $i=1,2,\ldots,n$. როგორც აღვნიშნეთ, შერჩევითი საშუალო და შერჩევითი დისპერსია განიმარტება $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ და $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ ტოლობებით. რამდენადაც $\overline{X}_n$ წარმოადგენს დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების წრფივ კომბინაციას, ისიც ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით $E\,\overline{X}_n = \mu$ და $D\,\overline{X}_n = \sigma^2/n$:

$$\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n). \tag{9.4}$$

გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა: თუ შერჩევა არ არის მიღებული ნორმალური კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან, მაგრამ n საკმარისად დიდია ($n>30$) ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

შემთხვევითი სიდიდე მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული μ საშუალოთი და σ^2/n დისპერსიით. ამ ფაქტს არსებითი მნიშვნელობა ექნება სტატისტიკური დასკვნების მისაღებად.

გადავიდეთ S_n^2 შერჩევითი დისპერსიის განაწილების კანონის დადგენაზე. ამისათვის უპირველეს ყოვლისა დავადგინოთ, თუ როგორი განაწილება აქვს შემთხვევით სიდიდეს (შერჩევით დისპერსიას იმ შემთხვევაში, როდესაც პოპულაციის საშუალო ცნობილია),

$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 . \tag{9.5}$$

რადგან $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ მივიღებთ, რომ $(X_i-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$, ე.ი. $\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ წარმოადგენს $N(0,1)$ კანონით განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების კვადრატების ჯამს და მაშასადამე, მას აქვს χ^2-განაწილება თავისუფლების ხარისხით n:

$$\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n). \tag{9.6}$$

შევნიშნოთ, რომ $\overline{S}_n^{\,2}$ სტატისტიკის (9.5) გამოსახულებაში $(X_i-\mu)$, $i=1,\ldots,n$, არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. სულ სხვანაირადაა საქმე S^2-ისათვის: $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$ არ წარმოადგენს დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების კვადრატების ჯამს, $(X_i-\overline{X}_n)$ შემთხვევით სიდიდეებს გააჩნიათ ერთი „ბმა"; კერძოდ, $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)=0$. ამ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი ფაქტი $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$. ამასთან, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\overline{X}_n$ და S_n^2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. საბოლოოდ, ყველა ჩამოთვლილი ფაქტი შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემის სახით, რომელიც ეკუთვნის ფიშერს (R. A. Fisher):

თეორემა: თუ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ შემთხვევითი შერჩევაა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან μ, σ^2 პარამეტრებით, მაშინ

ა) $\overline{X}_n$ და S_n^2 $(S_n'^2)$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია;

ბ) $\overline{X}_n\sim N(\mu,\sigma^2/n)$;

გ) $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$; $\quad \frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

შემოვიღოთ ორი მნიშვნელოვანი სტატისტიკა: ე.წ. Z სტატისტიკა და T სტატისტიკა

$$Z_n=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \tag{9.7}$$

$$T_n=\frac{\overline{X}_n-\mu}{S_n/\sqrt{n-1}}\ \left(=\frac{\overline{X}_n-\mu}{S_n'/\sqrt{n}}\right), \tag{9.8}$$

ფიშერის თეორემის ძალით ადვილად მივიღებთ, რომ Z_n სტატისტიკას აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება, ხოლო T_n სტატისტიკას აქვს სტიუდენტის t განაწილება $n-1$ თავისუფლების ხარისხით. მართლაც წარმოვიდგინოთ T_n სტატისტიკა შემდეგი სახით

$$T_n=\frac{\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}},$$

მაშინ ფიშერის თეორემის ძალით

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1), \qquad \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

ამასთან $\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ და $\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია. თუ ახლა გავიხსენებთ სტიუდენტის t განაწილების განმარტებას, მივიღებთ სასურველ შედეგს.

თუ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და $EX_i=\mu$, $DX_i=\sigma^2$, მაშინ $$Z_n=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\quad T_n=\frac{\overline{X}_n-\mu}{S'_n/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

შენიშვნა: იმ შემთხვევაში, როდესაც პოპულაცია არ არის ნორმალურად განაწილებული, ცენტრალური ზღვარითი თეორემის ძალით შერჩევის საკმარისად დიდი n მოცულობისათვის

$$P\{Z_n\le x\}\approx\Phi(x)$$

სადაც $\Phi(x)$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა, ე.ი. Z სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით 0 და 1, ამასთან n-ის ზრდასთან ერთად იზრდება მიახლოების სიზუსტეც. ამავე დროს, რადგან $S_n\xrightarrow{P}\sigma>0$ (დიდ რიცხვთა კანონის ძალით $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_n^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\xrightarrow{P}\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$), ხოლო T სტატისტიკა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით,

$$T_n=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\,\frac{\sigma}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n-1}}=Z_n\frac{\sigma}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

ზოგადი მოსაზრებებიდან, რომლებზეც ჩვენ აქ არ შევჩერდებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ საკმარისად დიდი n-ებისათვის T სტატისტიკაც მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით 0 და 1, ე.ი.

$$P\{T_n\le x\}\approx\Phi(x)$$

ზოგიერთი სტატისტიკის განაწილების კანონი ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციისათვის. ვთქვათ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ და $Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$ არის n და შესაბამისად m მოცულობის შერჩევები, შესაბამისად μ_1, σ_1^2 და μ_2, σ_2^2 პარამეტრებიანი, დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციებიდან. პოპულაციების დამოუკიდებლობის გამო $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_m$, S_{Xn}^2, S_{Ym}^2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. $\overline{X}_n-\overline{Y}_m$ ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით

$$E(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)=E\,\overline{X}_n-E\,\overline{Y}_m=\mu_1-\mu_2,$$

$$D(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)=D\,\overline{X}_n-D\,\overline{Y}_m=\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m,$$

რაც გვაძლევს

$$Z_{n,m}=\frac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}\sim N(0,1). \tag{9.9}$$

აღვნიშნოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი ფაქტი: როცა დამოუკიდებელ პოპულაციებს არა აქვთ ნორმალური განაწილება, მაგრამ შერჩევის მოცულობები დიდია, მაგალითად $n>30$ და $m>30$, ცენტრალური ზღვარითი თეორემის საფუძველზე $Z_{n,m}$ სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურად არის განაწილებული.

იგივე პირობებში χ^2 განაწილების თვისების თანახმად

$$\frac{(n-1)S_1'^2}{\sigma_2^2}+\frac{(m-1)S_2'^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n+m-2).$$

სადაც $S_1'^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, $S_2'^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2$.

დავუშვათ, რომ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, მაშინ ადვილად მივიღებთ, რომ

$$T_{n,m}=\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}\cdot\frac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n-1)S_1'^2+(m-1)S_2'^2}} \tag{9.10}$$

სტატისტიკას აქვს t განაწილება $(n+m-2)$ თავისუფლების ხარისხით, რაც $T_{n,m}$ სტატისტიკის შემდეგი სახით წარმოდგენის შედეგია

$$T_{n,m}=\frac{\dfrac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n+1/m}}}{\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}}\sqrt{n+m-2}\,.$$

პოპულაციების დამოუკიდებლობისა და F განაწილების განმარტების თანახმად, ასევე ადვილად მივიღებთ, რომ

$$F_{n,m}=\frac{S_1'^2}{\sigma_1^2}\bigg/\frac{S_2'^2}{\sigma_2^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{(n-1)S_1'^2}{\sigma_1^2}\bigg/n-1}{\dfrac{(m-1)S_2'^2}{\sigma_2^2}\bigg/m-1}. \tag{9.11}$$

სტატისტიკას აქვს F განაწილება $(n-1)$ და $(m-1)$ თავისუფლების ხარისხებით.

თუ $X_1,X_2,\dots,X_n$ და $Y_1,Y_2,\dots,Y_m$ ორი დამოუკიდებელი შერჩევაა ნორმალურად განაწილებული პოპულაციებიდან შესაბამისად μ_1, σ_1^2 და μ_2, σ_2^2 პარამეტრებით, მაშინ

$$Z_{n,m}=\frac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}\sim N(0,1)$$

$$F_{n,m}=\frac{S_1^{'2}}{\sigma_1^2}\bigg/\frac{S_2^{'2}}{\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$$

თუ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, მაშინ

$$T_{n,m}=\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}\cdot\frac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n-1)S_1^{'2}+(m-1)S_2^{'2}}}\sim t(n+m\text{-}2)$$

შევნიშნოთ, რომ $F_{n,m}$ სტატისტიკა შეიძლება ჩავწეროთ ეკვივალენტური ფორმითაც,

$$F_{n,m}=\frac{n(m-1)}{m(n-1)}\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\,. \tag{9.11'}$$

თუ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$, მაშინ

$$F_{n,m}=S_1^{'2}/S_2^{'2}\,.$$

ზოგიერთი სტატისტიკის განაწილების კანონი დაწყვილებული მონაცემებისათვის. ვთქვათ, (X_1,Y_1), ... , (X_n,Y_n) დამოუკიდებელი დაკვირვებებია (X,Y) შემთხვევით ვექტორზე, რომელიც განაწილებულია ნორმალურად $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ პარამეტრებით (ე.ი. $EX_i=\mu_1$, $EY_i=\mu_2$, $DX_i=\sigma_1^2$, $DY_i=\sigma_2^2$, $\mathrm{cov}(X_i,Y_i)=\rho$). მაშინ, თუ $D_i=X_i-Y_i$, მიმდევრობა $D_1,D_2,\dots,D_n$ წარმოადგენს შერჩევას $\mathcal{L}(D)$ განაწილების კანონის მქონე პოპულაციიდან, სადაც $D=X-Y$. ნათელია, რომ

$$D\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_D^2),$$

სადაც $\sigma_D^2=D(X-Y)=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho$. ამიტომ,

$$\overline{D}_n=\overline{X}_n-\overline{Y}_n\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_D^2/n)\,.$$

აქედან გამომდინარე, თუ შემოვიღებთ

$$T_n=\frac{\overline{X}_n-\overline{Y}_n-(\mu_1-\mu_2)}{S_D^{'}/\sqrt{n}} \tag{9.12}$$

სტატისტიკას, სადაც $S_D'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$, მაშინ

$$T_n \sim t(n-1).$$

შევნიშნოთ, რომ გარდა იმ შემთხვევისა, როცა ρ=0, X და Y შემთხვევითი სიდიდეები აღარ არიან დამოუკიდებელნი, ამიტომ (X_1,Y_1), ... , (X_n,Y_n) შერჩევის (x_1,y_1), ... , (x_n,y_n) რეალიზებულ მნიშვნელობებს დაწყვილებულ მონაცემებსაც უწოდებენ.

* * *

მოვიყვანოთ ის ძირითადი ლიტერატურა, რომელსაც ვეყრდნობოდით ამ თავში მოყვანილი მასალის გადმოცემისას: [21], [25], [34], [39], [55], [72].

დასკვნები

გადმოცემულია სტატისტიკური მოდელირების ალბათური საფუძვლების უმნიშვნელოვანესი ცნებები და დებულებები: პოპულაციის განაწილების, სტატისტიკის, ემპირიული განაწილების ფუნქციის ცნებები, შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის თვისებები, ფიშერის თეორემა და მისი შედეგები, Z_n და T_n სტატისტიკების ასიმპტოტიკა.

აქვე მოყვანილია ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციისათვის $Z_{n,m}$, $T_{n,m}$ და $F_{n,m}$ სტატისტიკების განაწილებები. დაწყვილებული მონაცემებისათვის შემოღებულია T_n სტატისტიკა და ნაჩვენებია, რომ მას აქვს სტიუდენტის $t(n-1)$ განაწილება.

შეფასების თეორია

მათემატიკური სტატისტიკის ძირითად მიზანს წარმოადგენს დაკვირვებების საფუძველზე დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გამოტანა შესასწავლი ექსპერიმენტის ალბათური მოდელის შესახებ. თუ ალბათობის თეორიის ძირითადი ამოცანაა მოცემული ალბათური მოდელიდან გამომდინარე სხვადასხვა რთული ხდომილობის ალბათობების გამოთვლა და ალბათური კანონზომიერებების დადგენა, მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები შებრუნებული ხასიათისაა. პრაქტიკაში რაიმე ექსპერიმენტის შესწავლისას, როგორც წესი, მისი აღმწერი ალბათური მოდელი შეიცავს ამა თუ იმ განუზღვრელობას ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგების ალბათური განაწილების შესახებ. მათემატიკური სტატისტიკის მიზანია შეამციროს ეს განუზღვრელობა ექსპერიმენტის დაკვირვებული შედეგით მიღებული ინფორმაციის გამოყენებით.

მაგალითად, თუ ექსპერიმენტი მდგომარეობს n დამოუკიდებელი ცდის ჩატარებაში, ამასთან ცალკეული ცდის შედეგია ან 1 („წარმატება“) ან 0 („მარცხი“) შესაბამისად p და $q=1-p$ ალბათობებით (ბერნულის ცდათა სქემა), მაშინ, ცხადია რომ ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგი აღიწერება 1-ისა და 0-ის ყველანაირი მიმდევრობით: $\omega=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, სადაც $\varepsilon_i=0$ ან 1 და კონკრეტული რეალიზაციის ალბათობაა

$$P\{\omega\}=p^{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i} \tag{10.1}$$

(მაგალითად, თუ $\omega=(1,1,$ დანარჩენი ნულები$)$ $P\{\omega\}=p^2(1-p)^{n-2}$). თუ „წარმატების“ ალბათობა p ცნობილია, მაშინ (10.1) ფორმულის მეშვეობით შეიძლება გამოითვალოს აღწერილ ექსპერიმენტთან დაკავშირებული ნებისმიერი რთული ხდომილობის ალბათობა და დადგინდეს მთელი რიგი ალბათურ-სტატისტიკური კანონზომიერებანი (დიდ რიცხვთა კანონი, მუავრლაპლასის თეორემა და სხვა), რაც შეადგენს ალბათობის თეორიის მიზანს. მაგრამ, თუ ჩვენ ვაკვირდებით ექსპერიმენტის შედეგს, ე.ი. ერთებისა და ნულების ერთ კონკრეტულ სასრულ n სიგრძის მიმდევრობას და მასზე დაყრდნობით ვცდილობთ დასკვნების გაკეთებას უცნობი p ალბათობის მნიშვნელობის შესახებ, ჩვენ ვწყვეტთ მათემატიკური სტატისტიკის და უფრო ზუსტად, სტატისტიკური დასკვნების თეორიის ამოცანას.

შეფასების თეორია სტატისტიკური დასკვნების თეორიის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მიმართულებაა. მის ელემენტებს ჩვენ შევხვდით წინა თავებშიც. სახელდობრ, მე-9 თავის შესავალ ნაწილში საკმაოდ დეტალურადაა განხილული „წარმატების“ უცნობი p, $0<p<1$, ალბათობის შეფასების საკითხი ბერნულის ცდათა სქემაში. აქვე მოყვანილია ემპირიული განაწილების ფუნქციის ცნება და მისი თვისებები.

კერძოდ, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ემპირიული განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობა რაიმე წერტილში წარმოადგენს თეორიული („უცნობი“) განაწილების ფუნქციის ამავე x წერტილში მნიშვნელობის შეფასებას. რა საფუძველი გაგვაჩნდა იმისათვის, რომ გამოგვეყენებინა ტერმინი „შეფასება“?

გავიხსენოთ, მაგალითად x წერტილში ემპირიული განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობის განმარტება:

$$F_n(x) = \frac{\#(X_i : X_i \le x)}{n},$$

სადაც $X=(X_1,\dots,X_n)$ წარმოადგენს X შემთხვევით სიდიდეზე დამოუკიდებელ დაკვირვებებს ანუ n მოცულობის შერჩევას $\mathcal{L}\{X\}$ გენერალური ერთობლიობიდან, (X-ის განაწილების ფუნქცია იყოს $F(x)$), $\nu_n:=\#\{x_i; X_i \le x\}$ არის იმ დაკვირვებების სიხშირე, რომლებიც არ აღემატება x-ს; ხოლო $F_n(x)$ არის ამავე დაკვირვებების ფარდობითი სიხშირე, რომელიც დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად, შერჩევის n მოცულობის უსასრულოდ ზრდისას მიისწრაფის შესაბამისი ალბათობისაკენ $p=P\{X \le x\}=F(x)$:

$$F_n(x) = \frac{\nu_n}{n} \to p=F(x),\ n\to\infty. \tag{10.2}$$

უფრო მეტიც, გლივენკო-კანტელის ცნობილი თეორემის ძალით ნებისმიერი დადებითი ε-ისათვის

$$P\{X:\ \sup_x |F_n(x)-F(x)|>\varepsilon\} \to 0, \quad \text{როცა } n\to\infty,$$

და აქედან გამომდინარე, შერჩევის დიდი მოცულობისათვის, ემპირიული $F_n(x)$, და თეორიული $F(x)$ განაწილების ფუნქციებს შორის მნიშვნელოვანი (ε-ზე უფრო დიდი) განსხვავება მცირე ალბათობის მქონეა და $F_n(x)$ შეიძლება ჩაითვალოს თეორიული $F(x)$-ის მიახლოებით მნიშვნელობად. ამრიგად, ტერმინში „შეფასება" ჩადებულია გარკვეული ასიმპტოტური (ზღვარითი) აზრი.

ამავე დროს, პრაქტიკაში სხვადასხვა უცნობი თეორიული მახასიათებლების შეფასება გვიხდება მაშინაც, როცა n არაა დიდი და საჭირო ხდება შემუშავებული რეკომენდაციების დასაბუთება, შეფასებათა თვისებების დადგენა, მათი შედარება და სხვა.

იმისათვის, რომ შევიქმნათ წარმოდგენა იმის შესახებ, თუ რა თვალსაზრისით უნდა შევხედოთ შეფასების თეორიის პრობლემებს, როგორ ავაგოთ შეფასებები, როგორ განვსაზღვროთ ამა თუ იმ შეფასების ვარგისიანობა, განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

ვთქვათ, ნორმალურად განაწილებულ X შემთხვევით სიდიდეზე $(X_1,\dots,X_n)$ განმეორებითი დამოუკიდებელი დაკვირვებების საფუძველზე გვინდა შევაფასოთ უცნობი საშუალო (დისპერსია ჩავთვალოთ ცნობილად და σ^2-ის ტოლად).

როგორც ვიცით, უცნობი საშუალოს ერთ-ერთ შეფასებას წარმოადგენს $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, შერჩევითი საშუალო. შევამოწმოთ, რომ $\overline{X}_n$-ს (ხშირად ინდექსი „n" გამოტოვებული იქნება) გააჩნია შემდეგი თვისებები: თუ $EX=\mu$, $-\infty<\mu<\infty$, მაშინ

1. $\overline{X}_n$ არის უცნობი საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასება რაც, განსაზღვრების თანახმად ნიშნავს, რომ $E\overline{X}_n = \mu$, ამასთან $D\overline{X}_n = \sigma^2/n$,
2. $\overline{X}_n$ არის უცნობი საშუალოს ძალმოსილი შეფასება, რაც, განსაზღვრების თანახმად ნიშნავს, რომ $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$, როცა $n\to\infty$.
3. ყოველი n-ისათვის $\overline{X}_n$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად $(\mu,\sigma^2/n)$ პარამეტრებით, ე.ი.,

$$\mathcal{L}\{\overline{X}_n\} = N(\mu,\sigma^2/n).$$

4. ნებისმიერი $T_n=T_n(X_1,...,X_n)$ შეფასებისათვის, რომელსაც აქვს ჩაუნაცვლებლობის თვისება, $ET_n=\mu$, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$E(\overline{X}_n-\mu)^2 \le E(T_n-\mu)^2.$$

მართლაც შევნიშნოთ, რომ პირველი ორი თვისება არითმეტიკული საშუალოს თვისებაა და სამართლიანია ნებისმიერად (და არა მხოლოდ ნორმალურად) განაწილებული პოპულაციისათვის, მესამე თვისება კი შედეგია იმ ფაქტისა, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების წრფივი კომბინაცია კვლავ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა.

$\overline{X}_n$-ის მეოთხე თვისება მოწმდება რაო-კრამერის უტოლობის გამოყენებით. ეს უტოლობა, რომელსაც ჩვენ ქვემოთ მოვიყვანთ (იხ. (10.12) ფორმულა და ნორმალური მოდელის მაგალითი), ადგენს უცნობი პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ შეფასებათა დისპერსიების ქვედა საზღვარს. მომავალში ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ ნორმალური პოპულაციის უცნობი საშუალოს ჩაუნაცვლებელ შეფასებათა დისპერსიების ქვედა საზღვარია σ^2/n, რომელიც სწორედ $\overline{X}_n$-ის დისპერსიის ტოლია.

ზემოაღნიშნული თვისებებიდან გამომდინარე შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ უცნობი საშუალო, შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში, მიახლოებით $\overline{X}_n$-ის ტოლია და $\overline{X}_n$ შეგვიძლია გამოვიყენოთ უცნობი საშუალოს ნაცვლად. ნათელია, რომ ამ დროს ჩვენ ვუშვებთ გარკვეულ შეცდომას და ამიტომ მიზანშეწონილი იქნებოდა მიგვეთითებინა ცდომილების სიდიდეც. დავაზუსტოთ უკანასკნელი გამოთქმა.

მესამე თვისებაზე დაყრდნობით, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0.1)$, ამიტომ

$$P\left\{\frac{|\overline{X}_n-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}\le x\right\}=P\{\overline{X}_n-x\sigma/\sqrt{n}\le\mu\le\overline{X}_n+x\sigma/\sqrt{n}\}=2\Phi(x)-1,$$

სადაც $\Phi(x)$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა. დავაფიქსიროთ 1-თან ახლომყოფი რაიმე γ რიცხვი (მაგ. γ=0.99) და ნორმალური განაწილების ცხრილებში მოვძებნოთ ისეთი x_γ, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$2\Phi(x_{(1+\gamma)/2})-1=\gamma$$

ანუ ნორმალური განაწილების $\frac{1+\gamma}{2}$-კვანტილი, მაშინ

$$P\{\overline{X}_n-x_{(1+\gamma)/2}\sigma/\sqrt{n}\le\mu\le\overline{X}_n+x_{(1+\gamma)/2}\sigma/\sqrt{n}\}=\gamma.$$

ამრიგად, ალბათობა იმისა, რომ უცნობი საშუალო დაიფარება შემთხვევითი ინტერვალით $[\overline{X}_n-x_{(1+\gamma)/2}\sigma/\sqrt{n}, \overline{X}_n+x_{(1+\gamma)/2}\sigma/\sqrt{n}]$ უდრის γ-ს. ამ შემთხვევით ინტერვალს უცნობი საშუალოსათვის γ ნდობის დონის მქონე ნდობის ინტერვალს უწოდებენ და ამ შემთხვევაში საუბარია ინტერვალურ შეფასებაზე, მაშინ როცა $\overline{X}_n$-ს უწოდებენ უცნობი საშუალოს წერტილოვან შეფასებას.

ამ თავის მიზანს წარმოადგენს წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასების თეორიის გადმოცემა. ჩვენ დავინახავთ, რომ წერტილოვანი შეფასებების კლასიფიკაცია

ფაქტობრივად ზემოთ ჩამოთვლილი 1 – 4 თვისებების მიხედვით ხდება, ხოლო ინტერვალური შეფასების იდეა ემთხვევა ზემოთ აღწერილ მოსაზრებებს.

§ 1. წერტილოვანი შეფასება

შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მოცემულია n მოცულობის შერჩევა $X=(X_1,\dots,X_n)$ გენერალური ერთობლიობიდან, $\mathcal{L}\{X\}\in F$, სადაც $F=\{F(x;\theta);\theta\in\Theta\}$ წარმოადგენს განაწილების ფუნქციათა რაიმე პარამეტრულ ოჯახს, Θ პარამეტრული სიმრავლეა, $\Theta\subseteq R^k$, k რაიმე სასრული რიცხვია. ამრიგად, იგულისხმება, რომ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის ფორმა ცნობილია, მაგრამ ის შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს. ჩვენი მიზანია $X=(X_1,\dots,X_n)$ შერჩევის საფუძველზე უცნობი θ პარამეტრის შეფასების აგება. ჩვენ ხშირ შემთხვევაში ვიხმართ ცნებას „სტატისტიკური მოდელი" პარამეტრული F ოჯახისათვის. მოდელს ეწოდება (აბსოლუტურად) უწყვეტი ან დისკრეტული, თუ F სიმრავლეში შემავალი განაწილება შესაბამისად (აბსოლუტურად) უწყვეტია ან დისკრეტული.

გავიხსენოთ განაწილების ფუნქციათა ძირითადი პარამეტრული ოჯახები (მოდელები).

1) ნორმალური მოდელი: X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული. რადგან განაწილებას გააჩნია 2 პარამეტრი, შეიძლება გამოვყოთ შემდეგი სამი შემთხვევა.

a) უცნობია საშუალო, ხოლო დისპერსია ცნობილია და უდრის σ^2-ს. ამ შემთხვევაში $\mathcal{L}\{X\}\in F$, სადაც

$$F=\{F(x;\theta)=\Phi_{\theta,\sigma^2}(x),\ -\infty<\theta<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty,\ \sigma^2 \text{ ფიქსირებულია}\}.$$

აღნიშვნა: $\mathcal{L}\{X\}\in N(\theta,\sigma^2)$.

b) დისპერსია უცნობია, ხოლო საშუალო ცნობილია და უდრის μ-ს.

აღნიშვნა: $\mathcal{L}\{X\}\in N(\mu,\theta^2)$.

c) უცნობია როგორც საშუალო, ისევე დისპერსია. ამ შემთხვევაში $\mathcal{L}\{X\}\in F$, სადაც

$$F=\{F(x;\theta)=\Phi_{\theta_1,\theta_2^2}(x),\ \text{სადაც } \theta=(\theta_1,\theta_2),\ -\infty<\theta_1<\infty,\ 0<\theta_2<\infty\}.$$

აღნიშვნა: $\mathcal{L}\{X\}\in N(\theta_1,\theta_2^2)$.

აქ ყველგან $\Phi_{\mu,\sigma^2}(x)$ წარმოადგენს μ საშუალოსა და σ^2 დისპერსიის მქონე ნორმალური განაწილების ფუნქციას.

2) პუასონის მოდელი: X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით, რომლის θ პარამეტრი უცნობია.

აღნიშვნა: $\mathcal{L}\{X\}\in \Pi(\theta)$.

3) ბინომური მოდელი: X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ბინომურად ცდათა n რიცხვითა და წარმატების უცნობი θ ალბათობით, $0<\theta<1$.

აღნიშვნა: $\mathcal{L}\{X\}\in Bi(n,\theta)$

ამ მოდელის კერძო შემთხვევაა ბერნულის სქემა $\mathcal{L}\{X\}\in Bi(1,\theta)$.

4) ექსპონენციალური მოდელი: X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ექსპონენციალური კანონით: $\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}$, სადაც

$$\mathrm{F}=\{F(x;\theta)=\int_{-\infty}^{x} f(u;\theta)du\,,\ 0<\theta<\infty\},$$

$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$, როცა $x\geq 0$ და $f(x;\theta)=0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში.

აღნიშვნა: $\mathcal{L}\{X\}\in \exp(\theta)$.

5) თანაბარი მოდელი: X შემთხვევითი სიდიდე თანაბრადაა განაწილებული $[\theta_1,\theta_2]$ ინტერვალზე, სადაც θ_1 და θ_2 უცნობი პარამეტრებია, $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ ამ შემთხვევაში $\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}$, სადაც

$$\mathrm{F}=\{F(x;\theta)=\int_{-\infty}^{x} f(u;\theta)du\,;\ -\infty<\theta_1<\theta_2<\infty\},$$

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1\leq x\leq\theta_2\\ 0\quad, & \text{სხვა შემთ ხვევაში}\end{cases}$$

აღნიშვნა: $\mathcal{L}\{X\}\in U(\theta_1,\theta_2)$. როცა $\theta_1=0$, $\theta_2=\theta>0$ ვღებულობთ კერძო შემთხვევას $\mathcal{L}\{X\}\in U(0,\theta)$.

ჩამოვთვალოთ რა სიტუაციაში იყენებენ ზემოთ მოყვანილ მოდელებს:

1) ნორმალურ მოდელს ვიყენებთ მაშინ, როდესაც ექსპერიმენტის შედეგზე გავლენას ახდენს დამოუკიდებელი შემთხვევითი ფაქტორების დიდი რაოდენობა და ამასთან, თითოეულის გავლენა საბოლოო შედეგზე უმნიშვნელოა. ამ შემთხვევაში ცენტრალური ზღვარითი თეორემა გვკარნახობს, რომ ნორმალური მოდელი ადეკვატურად ასახავს ექსპერიმენტს. ნორმალურ მოდელებს, როგორც წესი, ვხვდებით გაზომვათა თეორიაში.

2) პუასონის მოდელი აღწერს იშვიათ ხდომილობათა სქემას. როგორც გვახსოვს, პუასონის განაწილება წარმოადგენს ზღვარით შემთხვევას ბინომური განაწილებისათვის, როდესაც წარმატების ალბათობა, p მიისწრაფის ნულისაკენ, ისე რომ $np=\theta$, სადაც θ პუასონის განაწილების პარამეტრია.

3) ბინომური მოდელის წარმოშობა კარგადაა ცნობილი წინა თავებიდან.

4) ექსპონენციალური მოდელი გვხვდება საიმედოობის თეორიასა და მასობრივი მომსახურების ამოცანებში. აღსანიშნავია, რომ ექსპონენციალურ განაწილებას ემორჩილება პუასონის ნაკადებში ხდომილობათა გამოჩენებს შორის შემთხვევითი ინტერვალის სიგრძე.

5) თანაბარი განაწილება კარგად აღწერს (θ_1,θ_2) ინტერვალში „წერტილის შემთხვევითი არჩევის" პროცესს. მაგალითად, თუ (θ_1,θ_2) არის ავტობუსის მოცემულ სადგურზე მოსვლის მომენტებს შორის ინტერვალი, მაშინ სადგურზე მოსული მგზავრისათვის, რომელმაც არ იცის ავტობუსის მოძრაობის განრიგი, ავტობუსის ლოდინის დრო წარმოადგენს (θ_1,θ_2) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს.

შეფასების ამოცანა: n მოცულობის $X=(X_1,\ldots,X_n)$ შერჩევით მიღებული ინფორმაციის საფუძველზე გავაკეთოთ სტატისტიკური დასკვნები $\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}=\{F(x,\theta),\ \theta\in\Theta\}$ გენერალური ერთობლიობის უცნობი θ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის შესახებ.

თავდაპირველად შევჩერდეთ ერთგანზომილებიანი θ პარამეტრის შეფასების პრობლემაზე. შერჩევის ნებისმიერ $T(X)=T_n(X_1,\ldots,X_n)$ ფუნქციას, რომელიც მნიშვნელობებს Θ სიმრავლეში იღებს, ვუწოდოთ სტატისტიკა.

წერტილოვანი შეფასების ამოცანაა მოიძებნოს ისეთი სტატისტიკა, $T(X)$, რომლის შერჩევითი მნიშვნელობა, გარკვეული აზრით, შეიძლება ჩაითვალოს უცნობი θ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის მიახლოებად და გამოყენებული იქნას მის ნაცვლად. ასეთ სტატისტიკას ჩვენ ვუწოდებთ წერტილოვან შეფასებას.

როგორც ვხედავთ, ამოცანა ჯერ კიდევ არაა მკაფიოდ გამოკვეთილი. ინტუიციურად ცხადია, რომ არსებობს მრავალი სტატისტიკა, რომელსაც ჩავთვლიდით უცნობი θ პარამეტრის შეფასებად. ისმის კითხვა: როგორ გამოვიყენოთ შერჩევითი მონაცემები პარამეტრის „საუკეთესო" შეფასების მისაღებად და ამასთან, რომელი შეფასება ჩავთვალოთ „საუკეთესოდ"?

შევნიშნოთ, რომ θ პარამეტრის ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის მოცემული $T(X)=T_n(X_1,\ldots,X_n)$ შეფასების ალბათური განაწილება შესაძლებელია გამოითვალოს X შემთხვევითი სიდიდის $F(x,\theta)$ განაწილების ფუნქციის მეშვეობით. თუ გავიხსენებთ, რომ $X=(X_1,\ldots,X_n)$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული კომპონენტების მქონე ვექტორია და თითოეული კომპონენტის განაწილების ფუნქციაა $F(x,\theta)$, მაშინ X ვექტორის განაწილების $F_X(x;\theta)=F(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ ფუნქცია და შესაბამისი $f_X(x;\theta)=f(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულებით

$$F_X(x,\theta) = F(x_1;\theta)\cdots F(x_n;\theta), \tag{10.3}$$

$$f_X(x,\theta) = f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta). \tag{10.4}$$

რადგანაც $T(X)$ არის X შემთხვევითი ვექტორის ფუნქცია, რომლის განაწილებაც მოცემულია (10.3) და (10.4) ფორმულებით, შესაძლებელია $T(X)$ შემთხვევითი სიდიდის ალბათური განაწილებისა და მისი რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლაც. მაგალითად, $T(X)$-ის მათემატიკური ლოდინი (θ პარამეტრის ფიქსირებული მნიშვნელობის დროს გასაშუალოების ოპერაციას აღვნიშნავთ E_θ-თი) მოიცემა ფორმულით:

$$E_\theta T(X) = \int\cdots\int T(x_1,\ldots,x_n)\, f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\,dx_1\cdots dx_n \tag{10.5}$$

(აბსოლუტურად) უწყვეტი განაწილებების შემთხვევაში და ფორმულით:

$$E_\theta T(X) = \sum_{x_1,\ldots,x_n} T(x_1,\ldots,x_n)\, f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta), \tag{10.6}$$

დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში, სადაც აჯამვა ხდება X შემთხვევითი ვექტორის ყველა შესაძლო მნიშვნელობებით, $f(x;\theta)=P_\theta(X=x)$, სადაც x არის X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობა.

ჩამოვაყალიბოთ წერტილოვან შეფასებათა სასურველი თვისებები, შემოვიღოთ მათი შედარების კრიტერიუმები და ზუსტად განვსაზღვროთ ტერმინი „საუკეთესო" შეფასება.

ჩაუნაცვლებელი შეფასებანი.[1] $T_n(X)=T_n(X_1,\dots,X_n)$ შეფასებას ეწოდება ჩაუნაცვლებელი, თუ ყოველი θ-თვის, რომელიც ეკუთვნის მოცემულ პარამეტრულ სიმრავლეს ($\theta\in\Theta$)

$$E_\theta T(X)=\theta. \qquad (10.7)$$

თუ შეფასება არ აკმაყოფილებს (10.7) ტოლობას, მისთვის განიმარტება სიდიდე

$$b(\theta)=E_\theta T(X)-\theta,$$

რომელსაც ეწოდება შეფასების ჩანაცვლება. ცხადია, რომ თუ $b(\theta)=0$, ყოველი θ-სათვის, შეფასება ჩაუნაცვლებელია.

მოვიყვანოთ ჩაუნაცვლებელი და ჩანაცვლების მქონე შეფასებების მაგალითები:

a) შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს მათემატიკური ლოდინის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას; მართლაც, თუ $X=(X_1,\dots,X_n)$ არის შერჩევა $\mathcal{L}\{X\}$ გენერალური ერთობლიობიდან, სადაც $EX=\theta$, θ უცნობია, მაშინ ლოდინის ადიციურობის თვისებიდან გვექნება

$$E_\theta \overline{X}=\theta,$$

ნებისმიერი θ-სათვის, $-\infty<\theta<\infty$.

b) შერჩევითი დისპერსია, რომელიც მოიცემა

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

ფორმულით, არ წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას, რადგანაც, თუ $X=(X_1,\dots,X_n)$ არის შერჩევა $\mathcal{L}\{X\}$ გენერალური ერთობლიობიდან, სადაც $DX=\theta^2$, $0<\theta<\infty$, მაშინ

$$E_\theta S^2=\frac{n-1}{n}\theta^2.$$

მისი ჩანაცვლება

$$b(\theta)=E_\theta S^2-\theta^2=-\frac{\theta^2}{n}\to 0, \qquad \text{როცა } n\to\infty.$$

დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება მოიცემა ფორმულით

[1] ამ პუნქტში იგულისხმება, რომ შერჩევის მოცულობა ფიქსირებულია. ამიტომ შემდგომში ქვედა ინდექსი „n" გამოტოვებული იქნება.

$$S'^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 . \qquad (10.8)$$

მართლაც,

$$E_\theta S'^2 = \frac{n}{n-1} E_\theta S^2 = \theta^2.$$

შენიშვნა. S'^2 სტატისტიკა გამოიყენება უცნობი დისპერსიის შეფასებად მაშინ, როცა უცნობია X შემთხვევითი სიდიდის საშუალოც. იმ შემთხვევაში, როცა საშუალო ცნობილია ე.ი. $EX=\mu$, უცნობი დისპერსიის შეფასებად გამოიყენება სტატისტიკა

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 .$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$E_0 \bar{S}^2 = \theta^2,$$

ე.ი., $\bar{S}^2$ წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას (როცა პოპულაციის საშუალო ცნობილია).

ხშირ შემთხვევაში იზღუდებიან ჩაუნაცვლებელ შეფასებათა კლასის განხილვით. ეს, პირველ რიგში აიხსნება იმით, რომ ჩაუნაცვლებლობის თვისება ნიშნავს, რომ თუ ჩავატარებთ მრავალ განმეორებით ექსპერიმენტს (ე.ი. მივიღებთ n მოცულობის შერჩევათა სერიებს), მაშინ აგებულ შეფასებათა საშუალო მნიშვნელობა (დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად) ახლოს იქნება პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობასთან. ჩაუნაცვლებლობის თვისება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მაშინ, როცა შერჩევის n მოცულობა დიდი არაა. ამ შემთხვევაში საჭირო ხდება მცირე მოცულობის შერჩევათა სერიების განხილვა და ცალკეულ სერიებში აგებულ შეფასებათა გასაშუალოება. შეფასებათა ჩაუნაცვლებლობის თვისება საშუალებას გვაძლევს დარწმუნებული ვიყოთ, რომ სისტემურ შეცდომებს ადგილი არა აქვს. მეორეს მხრივ, ჩაუნაცვლებელ შეფასებათა კლასისათვის შეიძლება აგებული იქნას მარტივი და პრაქტიკული თვალსაზრისით სასარგებლო თეორია, რომელშიც $T(X)$ შეფასების უცნობი პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის მიმართ გაფანტულობის საზომს წარმოადგენს მისი დისპერსია

$$\sigma_T^2(\theta) = E_0(T(X) - \theta)^2. \qquad (10.9)$$

ჩანაცვლებული შეფასებებისათვის (10.9) ფორმულის მარჯვენა მხარით მოცემულ სიდიდეს ეწოდება საშუალო კვადრატული შეცდომა.

აღსანიშნავია, რომ ზოგიერთ პარამეტრულ სტატისტიკურ მოდელში ჩაუნაცვლებელი შეფასება საერთოდ არ არსებობს. მაგალითად, განვიხილოთ ბერნულის სქემა: $\mathcal{L}\{X\} \in Bi(1,\theta)$, $0<\theta<1$, და დავუშვათ, რომ $n=1$. ამ შემთხვევაში შეიძლება ადვილად დავრწმუნდეთ, რომ ერთადერთ ჩაუნაცვლებელ შეფასებას წარმოადგენს სტატისტიკა

$$T(X_1) = \begin{cases} 0, & X_1 = 0 \\ 1, & X_1 = 1 \end{cases},$$

მაგრამ ეს სტატისტიკა არ იღებს მნიშვნელობებს $\Theta=(0,1)$ პარამეტრული სიმრავლიდან და ამიტომ უვარგისია.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ შეფასებას შეიძლება გააჩნდეს ჩანაცვლება მაგრამ, მიუხედავად ამისა, რაიმე თვალსაზრისით ის უკეთესი აღმოჩნდეს ჩაუნაცვლებელზე (ქვემოთ მოყვანილი იქნება დისპერსიის S^2 და S'^2 შეფასებათა შედარების ორი მაგალითი).

ძალმოსილი შეფასებანი. თუ შეფასების ჩაუნაცვლებლობის თვისება დაკავშირებულია შერჩევის ფიქსირებულ n მოცულობასთან, ძალმოსილება შეფასების ასიმპტოტური (ზღვარითი) თვისებაა. ის ახასიათებს შეფასების ქცევას, როდესაც შერჩევის n მოცულობა უსასრულოდ იზრდება, ე.ი., $n\to\infty$. ეს ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა შეფასების თეორიაში.

$T_n=T_n(X)$ შეფასებას (უფრო ზუსტად, შეფასებათა $(T_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას) ეწოდება ძალმოსილი (ანუ, როგორც ზოგჯერ ამბობენ, ძალდებული), თუ ყოველი θ-სათვის პარამეტრული Θ სიმრავლიდან, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$T_n \xrightarrow{P_\theta} \theta, \qquad \text{როცა } n\to\infty. \tag{10.10}$$

რას გვეუბნება ეს თანაფარდობა? ფორმალურად ეს თვისება ასე გამოითქმის, ნებისმიერი θ-სათვის და დადებითი ε-სათვის

$$P_\theta\{X: |T_n(X)-\theta|<\varepsilon\} \to 1, \qquad \text{როცა } n\to\infty,$$

ე.ი. ალბათობა იმისა, რომ T_n შეფასებასა და შესაფასებელი პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას შორის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები იქნება ფიქსირებულ, რაგინდ მცირე ε-ზე, ε>0, რაგინდ ახლოს შეიძლება აღმოჩნდეს ერთთან, როდესაც შერჩევის მოცულობა, n უსასრულოდ იზრდება.

დავუბრუნდეთ კვლავ არითმეტიკულ საშუალოს (შერჩევით საშუალოს): $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. როგორც ვიცით $\overline{X}_n$ არის θ=EX უცნობი პარამეტრის ჩაუნაცვლებელი შეფასება. დიდ რიცხვთა კანონის ძალით გვექნება

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P_\theta} \theta, \quad \text{როცა } n\to\infty$$

ამრიგად, $\overline{X}_n$ ძალმოსილი შეფასებაა. ასევე თუ გავიხსენებთ, რომ

$$D_\theta S_n^2 \to 0, \qquad \text{როცა } n\to\infty,$$

ადვილად აღმოვაჩენთ (ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით), რომ S_n^2 წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის, მართალია ჩანაცვლებულ, მაგრამ ძალმოსილ შეფასებას.

შენიშვნა 1. შეიძლება დაგვებადოს კითხვა: რატომ ვუკეთებთ θ ნიშნაკს P ალბათობას (იხ. (10.10)), ანუ რატომ ვიყენებთ აღნიშვნას „P_θ"? პასუხი ამ კითხვაზე შემდეგია: თუ პარამეტრის „ჭეშმარიტი" მნიშვნელობა ფიქსირებული θ_0-ის ტოლია, რაც ნიშნავს, რომ $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ ვექტორის განაწილება გამოთვლილია $F(x;\theta_0)$ განაწილების ფუნქციით, მაშინ X ვექტორის მეშვეობით გამოთქმული ნებისმიერი ხდომილობის ალბათობას მიეწერება ნიშნაკი θ_0. მაგალითად,

$$P_{\theta_0}\{|T_n(X)-\theta_0|>\varepsilon\},$$

აღნიშნავს $\{|T_n(X)-\theta_0| > \varepsilon\}$ ხდომილობის ალბათობას, როდესაც X ვექტორის განაწილება გამოთვლილია $F(x;\theta_0)$ განაწილების ფუნქციის მეშვეობით. რადგან θ_0 მნიშვნელობა უცნობია, ამიტომ ვიყენებთ უბრალოდ θ ნიშნაკს. E_θ სიმბოლო აღნიშნავს გასაშუალოებას P_θ ალბათობით, $\mathcal{L}_\theta(X)$ აღნიშნავს X-ის განაწილებას გამოთვლილს P_θ ალბათობით. უნიშნაკო P ალბათობას განხილულ კონტექსტში აზრი არ აქვს.

შენიშვნა 2. ხშირად, როცა საქმე გვექნება უცნობი საშუალოსა და დისპერსიის შეფასებასთან, ჩვენ გამოვიყენებთ (μ,σ^2) წყვილს ნაცვლად აღნიშვნისა $\theta=(\theta_1, \theta_2^2)$.

შეფასებათა შედარება. ოპტიმალობის კრიტერიუმი. აქ ჩვენ შემოვიფარგლებით ერთგანზომილებიანი θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ შეფასებათა კლასის განხილვით. ამ შემთხვევაში, ბუნებრივია შეფასებათა ხარისხის შედარების მიზნით გამოვიყენოთ მათი დისპერსიები. დავაზუსტოთ, რას ვგულისხმობთ: როგორც უკვე ვიცით, პარამეტრული სტატისტიკური მოდელისათვის შესაძლებელია აიგოს პარამეტრის მრავალი ჩაუნაცვლებელი შეფასება. მაგალითად, განვიხილოთ ბერნულის მოდელი $\mathcal{L}\{X\}\in Bi(1,\theta)$, სადაც θ, $0<\theta<1$, არის „წარმატების" უცნობი ალბათობა (შესაფასებელი პარამეტრი). როგორც ვიცით არითმეტიკული საშუალო (ამ შემთხვევაში ფარდობითი სიხშირე ან შერჩევითი პროპორცია), რომელსაც აღვნიშნავთ $\hat{P}_n$-ით, წარმოადგენს უცნობი θ ალბათობის ჩაუნაცვლებელსა და ძალმოსილ შეფასებას.

$$E_\theta \hat{P}_n = \theta, \qquad \hat{P}_n \to \theta, \qquad \text{როცა} \quad n \to \infty.$$

ვთქვათ, ყოველი n-ისათვის $b_1,\dots,b_n$ ისეთი ნამდვილ რიცხვებია, რომ $b_1+\dots+b_n=n$. შემოვიღოთ შეფასება $T_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i X_i$. გამოვთვალოთ $E_\theta T_n$. მათემატიკური ლოდინის თვისებების თანახმად გვექნება:

$$E_\theta T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\theta = \theta,$$

რადგან $E_\theta X_i=\theta$. ამრიგად, T_n ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა. თუ $|b_i|\le b$ ნებისმიერი i-სათვის, $i\le n$, მაშინ

$$D_\theta T_n = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\theta(1-\theta) \le \frac{b^2}{n}\theta(1-\theta) \to 0, \quad \text{როცა} \quad n\to\infty,$$

და ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ T_n შეფასება ძალმოსილიცაა. ამრიგად, T_n ისეთივე „კარგი" შეფასებაა, როგორც $\overline{X}_n$. მაშინ რომელს მივანიჭოთ უპირატესობა? ბუნებრივია, ამ შეფასებებს შორის საუკეთესოდ ჩავთვალოთ ის, რომელიც ყველაზე მეტადაა კონცენტრირებული უცნობი პარამეტრის ირგვლივ, ანუ რომლის გაფანტულობა θ-ს მიმართ ყველაზე მცირეა. როგორც ვიცით, გაფანტულობის საზომად, ჩვეულებრივ, დისპერსია მიიღება.

ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ T_1 და T_2 ჩაუნაცვლებელ შეფასებებს შორის უკეთესია T_1, თუ

$$D_\theta T_1 \le D_\theta T_2 \qquad (10.11)$$

ყოველი θ-სათვის, $\theta \in \Theta$ და θ-ს ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობას.

დავუბრუნდეთ ბერნულის სქემას და შევადაროთ $\hat{P}_n$ და T_n. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $D_\theta \hat{P}_n = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$. ამავე დროს $D_\theta T_n = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\theta(1-\theta) \ge \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ (რადგან $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge n$).

ამრიგად, $\hat{P}_n$ უკეთესია, ვიდრე T_n. შემდგომში ჩვენ მოვიყვანთ შეფასებათა შედარების კიდევ ერთ (ასიმპტოტურ) კრიტერიუმს.

შეფასებათა შედარების (10.11) კრიტერიუმიდან გამომდინარე შეგვიძლია შემოვიღოთ ოპტიმალური შეფასების შემდეგი ცნება:

ჩაუნაცვლებელ $T^* = T^*(X)$ შეფასებას ეწოდება ოპტიმალური (ჩაუნაცვლებელი შეფასება თანაბრად მინიმალური დისპერსიით), თუ ნებისმიერი სხვა ჩაუნაცვლებელი $T = T(X)$ შეფასებისათვის,

$$D_\theta T^* \le D_\theta T \qquad \text{ნებისმიერი } \theta\text{-სათვის } \Theta\text{-დან.}$$

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი. როგორც უკვე ვიცით, თუ X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული და $EX = \mu$, მაშინ მისი მედიანაც μ-ს ტოლია. ამიტომ ნორმალურ მოდელში უცნობი საშუალოს შეფასებად შეიძლება შერჩევითი მედიანაც ჩაითვალოს.

კარგადაა ცნობილი, რომ როდესაც შერჩევის n მოცულობა საკმაოდ დიდია, შერჩევითი მედიანა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული μ მათემატიკური ლოდინითა და $\frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{n}$ დისპერსიით, რაც შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\mathcal{L}_\mu(\tilde{\mu}_n) \approx N(\mu, \pi\sigma^2/2n),$$

ან კიდევ

$$\tilde{\mu}_n \overset{as}{\sim} N(\mu, \pi\sigma^2/2n).$$

(აქ და ქვემოთაც ნიშანი $\approx$ ნიშნავს განაწილებათა ასიმპტოტურ სიახლოვეს n-ის ზრდისას, ხოლო $Y_n \overset{as}{\sim} Q_n$ ნიშნავს n-ის ზრდისას Y_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილებისა და Q_n განაწილების ასიმპტოტურ სიახლოვეს.)

გავიხსენოთ, რომ $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, ე.ი. $D_\mu \tilde{\mu}_n \cong \frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\pi}{2} D_\mu \overline{X}_n \approx 1.57 D_\mu \overline{X}_n$.

ამრიგად ცხადია, რომ $\overline{X}_n$ უკეთესი შეფასებაა, ვიდრე შერჩევითი მედიანა.

რაო-კრამერის უტოლობა ერთგანზომილებიანი პარამეტრის შემთხვევაში. ჩვენ კვლავ ჩავთვლით, რომ გვაქვს $X = (X_1, \ldots, X_n)$ შერჩევა $\mathcal{L}\{X\}$ გენერალური

ერთობლიობიდან, $\mathcal{L}\{X\}\in$ F= $\{F(x;\theta),\theta\in\Theta\}$. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე აღვნიშნოთ $f(x;\theta)$-თი (დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში $f(x;\theta)=P_\theta(X=x)$). მაშინ, როგორც ვიცით, $X=(X_1,\dots,X_n)$ ვექტორის განაწილების სიმკვრივე $x=(x_1,\dots,x_n)$ წერტილში იქნება

$$L(x;\theta)=f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$$

ყოველი ფიქსირებული $x=(x_1,\dots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობისათვის (რეალიზაციისათვის) $L(x;\theta)$-ს, როგორც θ-ს ფუნქციას დასაჯერობის ფუნქცია ეწოდება.

დავუშვათ, რომ $L(x;\theta)>0$ ყველა (x,θ)-სათვის და ყოველი $x=(x_1,\dots,x_n)$-ისათვის $L(x;\theta)$ დიფერენცირებადია θ პარამეტრით.

$$U(X;\theta)=\frac{\partial\ln L(X,\theta)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln f(X_i,\theta)}{\partial\theta}$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება X შერჩევის წვლილი, ამ ჯამის i-ურ წევრს $\frac{\partial\ln f(X_i,\theta)}{\partial\theta}$-ს კი i-ური დაკვირვების წვლილი.

შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ნებისმიერი θ-სათვის $\theta\in\Theta$, შესრულებულია პირობა

$$0<E_\theta U^2(X;\theta)<\infty.$$

ჩვენ განვიხილავთ ე.წ. რეგულარულ მოდელებს: F=$\{F(x;\theta);\ \theta\in\Theta\}$. ეს ის მოდელებია, რომელთათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1. ფუნქცია $f(x;\theta)$ წარმოებადია θ პარამეტრით ყოველ x-ში;
2. შესაძლებელია შერჩევითი მნიშვნელობების ფუნქციებიდან აღებული ინტეგრალების დიფერენცირება და დიფერენცირების და ინტეგრების რიგის შეცვლა, კერძოდ:

   ა) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x,\theta)dx=\int\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)dx=0;$

   (რადგანაც განსაზღვრების თანახმად $\int f(x,\theta)dx=1$ ყველა θ-სათვის);

   ბ) $\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta T(X)=E_\theta T(X)U(X,\theta)$, თუ $E_\theta T(x)$ θ ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციაა;
3. ფიშერის ინფორმაცია $i(\theta)$, რომელსაც შეიცავს ერთი დაკვირვება, დადებითი, სასრული და უწყვეტია θ პარამეტრით ყოველი θ-სათვის, $\theta\in\Theta$, სადაც $i(\theta)$ განისაზღვრება შემდეგი თანაფარდობით:

$$i(\theta)=E_\theta\left(\frac{\partial\ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2.$$

$I_n(\theta)=ni(\theta)$ გამოსახულებას ეწოდება ფიშერის ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს შერჩევა. როგორც ვხედავთ, შერჩევის მოცულობის ზრდასთან ერთად ფიშერის ინფორმაციაც იზრდება: $I_n(\theta)\to\infty$, როცა $n\to\infty$.

მოვიყვანოთ ფიშერის ინფორმაციის, $i(\theta)$-ს გამოსახულება სხვადასხვა მოდელისათვის.

1. ნორმალური მოდელი $N(\theta,\sigma^2)$: $i(\theta)=\dfrac{1}{\sigma^2}$;

2. ნორმალური მოდელი $N(\mu,\theta^2)$: $i(\theta)=\dfrac{1}{2\theta^4}$;

3. პუასონის მოდელი $\Pi(\theta)$: $i(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$;

4. ექსპონენციალური მოდელი $\exp(\theta)$: $i(\theta)=\dfrac{1}{\theta^2}$;

5. ბინომური მოდელი $Bi(k;\theta)$: $i(\theta)=\dfrac{k}{\theta(1-\theta)}$.

ვთქვათ, მოცემულია n მოცულობის შერჩევა, $X=(X_1,\dots,X_n)$, $\mathcal{L}\{X\}$ კანონით განაწილებული პოპულაციიდან $\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}=\{F(x;\theta),\,\theta\in\Theta\}$; F რეგულარული მოდელია.

განვიხილოთ θ პარამეტრის ნებისმიერი ჩაუნაცვლებელი შეფასება

$$T_n(X)=T_n(X_1,\dots,X_n).$$

რაო-კრამერის უტოლობა ადგენს ქვედა საზღვარს ჩაუნაცვლებელ შეფასებათა დისპერსიებისათვის (რომელსაც ეწოდება რაო-კრამერის ქვედა საზღვარი):

$$D_\theta T_n \geq \frac{1}{ni(\theta)}. \tag{10.12}$$

თუ არსებობს ჩაუნაცვლებელი შეფასება T^* ისეთი, რომ მისი დისპერსიისათვის მიიღწევა რაო-კრამერის ქვედა საზღვარი, ე.ი. $D_\theta T^*_n=(ni(\theta))^{-1}$, მაშინ მას ეწოდება ეფექტური შეფასება. ნათელია, რომ ეფექტური შეფასება ოპტიმალურია (10.11) კრიტერიუმის აზრითაც.

შენიშვნა. თუ T_n არაა ჩაუნაცვლებელი შეფასება, ე.ი. $E_\theta T_n-\theta=b(\theta)\neq 0$, ხოლო ფუნქცია $b(\theta)$ დიფერენცირებადია θ-ს მიმართ, მაშინ რაო-კრამერის უტოლობა ადგენს ქვედა საზღვარს მისი საშუალო კვადრატული შეცდომისათვის

$$E_0(T_n-\theta)^2 \geq \frac{[1+b'(\theta)]^2}{ni(\theta)}+b^2(\theta). \tag{10.13}$$

დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ მოდელებს.

1) ნორმალური მოდელი $N(\theta,\sigma^2)$. შესაფასებელია უცნობი საშუალო, დისპერსია ცნობილია და σ^2-ის ტოლია. აქ $i(\theta)=\dfrac{1}{\sigma^2}$, ამიტომ ნებისმიერი ჩაუნაცვლებელი შეფასებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$D_\theta T_n \geq \frac{\sigma^2}{n},$$

ე.ი., რაო-კრამერის ქვედა საზღვარია σ^2/n, რომელიც მიიღწევა $\overline{X}_n$-ისათვის.

ამრიგად, საშუალო არითმეტიკული ყოფილა ნორმალური პოპულიციის უცნობი საშუალოს ეფექტური შეფასება.

2) ნორმალური მოდელი $N(\mu,\theta^2)$. შესაფასებელია უცნობი დისპერსია (μ ცნობილია). როგორც ვიცით დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

და $D_\theta S^2=\frac{2}{n}\theta^4$.

ამ მოდელში $i(\theta)=1/2\theta^4$, ამიტომ რაო-კრამერის ქვედა საზღვარი იქნება: $\frac{1}{ni(\theta)}=2\theta^4/n$. ამრიგად, S^2 წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ეფექტურ შეფასებას (როდესაც μ საშუალო ცნობილი სიდიდეა)

როგორც ადრე ვნახეთ, სტატისტიკა S'^2 (შესწორებული შერჩევითი დისპერსია)

$$S'^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

აგრეთვე წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას, რადგანაც $E_\theta S'^2=\theta^2$. უშუალო გამოთვლებით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ

$$DS'^2=\frac{2\theta^4}{n-1}>\frac{2\theta^4}{n}.$$

ამიტომ S'^2 არ წარმოადგენს θ^2-ის ეფექტურ შეფასებას.

ზოგად ნორმალურ მოდელს, როდესაც $\theta=(\mu,\sigma^2)$ ანუ ორივე პარამეტრი უცნობია, ჩვენ შევეხებით მაშინ, როდესაც განვიხილავთ ორგანზომილებიანი პარამეტრის შეფასების საკითხს.

3) ბერნულის მოდელი $Bi(1,\theta)$. როგორც ვიცით, უცნობი θ ალბათობის შეფასებაა ფარდობითი სიხშირე

$$\hat{P}_n=\frac{\nu_n}{n},$$

სადაც ν_n არის იმ X_i-ების რაოდენობა, რომლებიც 1-ის ტოლია. ამასთან

$$E_\theta\hat{P}_n=\theta,\qquad D_\theta\hat{P}_n=\frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

ამავე დროს ამ მოდელისათვის $i(\theta)=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$ ამრიგად, რაო-კრამერის ქვედა საზღვარია

$\frac{1}{ni(\theta)}=\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ და ეს საზღვარი მიიღწევა ფარდობითი სიხშირის დისპერსიისათვის.

ფარდობითი სიხშირე წარმოადგენს უცნობი ალბათობის ეფექტურ შეფასებას ბინომურ მოდელში.

4) პუასონის მოდელი $\Pi(\theta)$. $X=(X_1,...,X_n)$ არის n მოცულობის შერჩევა გენერალური ერთობლიობიდან $\mathcal{L}\{X\}\in\Pi(\theta)$, სადაც θ პუასონის განაწილების უცნობი პარამეტრია, $EX=\theta$. შევამოწმოთ, რომ არითმეტიკული საშუალო (შერჩევითი საშუალო) აქაც წარმოადგენს θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ და ეფექტურ შეფასებას.

რადგან $E_\theta X_i=\theta$ და $D_\theta X_i=\theta$, ამიტომ

$$E_\theta \overline{X}_n=\theta, \qquad D_\theta \overline{X}_n=\frac{\theta}{n}.$$

ამასთან, $i(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$ და რაო-კრამერის ქვედა საზღვარია $\dfrac{1}{ni(\theta)}=\dfrac{\theta}{n}$, რომელიც მიიღწევა $\overline{X}_n$-ის დისპერსიისათვის.

ორგანზომილებიანი პარამეტრის შეფასება.* მოკლედ შევეხოთ ორგანზომილებიანი $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ პარამეტრის შეფასების ამოცანას.

ვთქვათ, $X=(X_1,...,X_n)$ შერჩევაა გენერალური ერთობლიობიდან

$$\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}=\{F(x;\theta),\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta\subseteq R^2\},$$

რომლის საფუძველზეც უნდა აიგოს უცნობი ორგანზომილებიანი $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ პარამეტრის შეფასება.

ბუნებრივია, რომ ამ შემთხვევაში წერტილოვანი შეფასების როლში განვიხილოთ ორგანზომილებიანი სტატისტიკა, $T_n=T_n(X)=(T_n^1(X),T_n^2(X))$.

ისევე როგორც, ერთგანზომილებიანი პარამეტრის შემთხვევაში, შეიძლება განიმარტოს შეფასებათა ჩაუნაცვლებლობა და ძალმოსილება.

$T_n(X)$ შეფასებას ეწოდება ჩაუნაცვლებელი, თუ θ-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, $\theta\in\Theta$

$$E_\theta T_n(X)=\theta,$$

ე.ი.,

$$E_\theta T_n^1(X)=\theta_1, \quad E_\theta T_n^2(X)=\theta_2.$$

$T_n=T_n(X)$ შეფასებას ეწოდება ძალმოსილი, თუ ნებისმიერი θ-თვის, Θ-დან

$$T_n\xrightarrow{P_\theta}\theta, \qquad \text{როცა } n\to\infty,$$

ე.ი.,

$$T_n^1\xrightarrow{P_\theta}\theta_1,\ T_n^2\xrightarrow{P_\theta}\theta_2, \qquad \text{როცა } n\to\infty.$$

მაგალითად, ზოგად ნორმალურ მოდელში, როცა $\mathcal{L}\{x\}\in\{\Phi_{\mu,\sigma^2}(x),\ -\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty\}$ ე.ი., შესაფასებელია როგორც საშუალო, ასევე დისპერსია, ორგანზომილებიანი სტატისტიკა

$$T(X)=\{\overline{X},S'^2\}$$

წარმოადგენს $\theta=(\mu,\sigma^2)$ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელსა და ძალმოსილ შეფასებას: ყოველი $\theta\in\Theta$ მნიშვნელობისათვის

$$E_\theta\overline{X}=\mu, \qquad E_\theta S'^2=\sigma^2,$$

$$\overline{X} \xrightarrow{P_\theta} \mu, \qquad S'^2 \xrightarrow{P_\theta} \sigma^2.$$

ჩვენ არ მოვიყვანთ რაო-კრამერის უტოლობის ორგანზომილებიან ვარიანტს ზოგად შემთხვევაში, აღვნიშნავთ მხოლოდ იმ ფაქტს, რომ ზოგად ნორმალურ მოდელში ამ უტოლობის გარკვეული მოდიფიკაცია გვაძლევს შემდეგ ქვედა საზღვრებს უცნობი საშუალოს ნებისმიერი ჩაუნაცვლებელი $T_1(X)$ ($E_\theta T_1(X)=\mu$) შეფასების დისპერსიისათვის

$$D_\theta T_1(X) \geq \frac{\sigma^2}{n} \tag{10.14}$$

და უცნობი დისპერსიის ნებისმიერი ჩაუნაცვლებელი $T_2(X)$ ($E_\theta T_2(X)=\sigma^2$) შეფასების დისპერსიისათვის

$$D_\theta T_2(X) \geq \frac{2\sigma^4}{n} \tag{10.15}$$

ნებისმიერი $\theta=(\mu,\sigma^2)$ წყვილისათვის.

გავიხსენოთ შემდეგი ფაქტი: ფიშერის თეორემის ძალით (იხ. მე-9 თავი) $\overline{X}$ და S'^2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ამასთან ნებისმიერი $\theta=(\mu,\sigma^2)$ წყვილისათვის

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n), \qquad \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

საიდანაც შეიძლება დავასკვნათ, რომ

$$D_\theta \overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad D_\theta S'^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1} > \frac{2\sigma^4}{n}.$$

ამრიგად, ნორმალურ მოდელში $\overline{X}$ წარმოადგენს უცნობი μ საშუალოს ეფექტურ შეფასებას, იმისაგან დამოუკიდებლად, ცნობილია თუ არა σ^2 დისპერსია, რადგან $D_\theta \overline{X}$ აღწევს რაო-კრამერის ქვედა საზღვარს (იხ (10.14)). ამავე დროს S'^2 აღარ წარმოადგენს რაო-კრამერის აზრით ეფექტურ შეფასებას, რადგან მისი დისპერსია $D_\theta S'^2$ მეტია რაო-კრამერის (10.15) უტოლობით მიღებულ ქვედა საზღვარზე.

აუცილებლად უნდა აღინიშნოს შემდეგი გარემოება: თუმცა S'^2 არ წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის რაო-კრამერის აზრით ეფექტურ შეფასებას, ეს სტატისტიკა მაინც იძლევა უცნობი დისპერსიის ოპტიმალურ (ყველაზე ზუსტ) შეფასებას იმ აზრით, რომ მისი დისპერსია ნაკლებია ნებისმიერი სხვა $T_2(X)$ ჩაუნაცვლებელი შეფასების ($E_\theta T_2=\sigma^2$) დისპერსიაზე:

$$D_\theta S'^2 \leq D_\theta T_2, \quad \text{ნებისმიერი } \theta\text{-სათვის.}$$

შეფასებათა ასიმპტოტური თვისებები. ამ პუნქტში ჩვენ შევეხებით შეფასებათა ასიმპტოტურ ყოფაქცევას, როდესაც შერჩევის მოცულობა უსასრულოდ იზრდება, ე.ი. $n\to\infty$.

1. შეფასებათა ძალდებულება. შეფასებების ძალმოსილებაზე ჩვენ წინა პუნქტებში ვისაუბრეთ. აქ მოვიყვანთ ერთ დამატებით ფაქტს.

არსებობს ძალმოსილების მეტად მარტივი და მნიშვნელოვანი კრიტერიუმი. ვთქვათ, θ ერთგანზომილებიანი პარამეტრია, $T_n=T_n(X)$ რაიმე შეფასებაა ისეთი, რომ

$$E_\theta T_n = \theta+\varepsilon_n, \qquad D_\theta T_n = \delta_n(\theta)$$

და $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\theta)\to 0$, $\delta_n=\delta_n(\theta)\to 0$, როცა $n\to\infty$, $\forall\theta\in\Theta$, მაშინ $T_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$, ყველა θ-სათვის Θ–დან.

(შეეცადეთ დაამტკიცოთ ეს ფაქტი ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით!)

2. შეფასებათა ასიმპტოტური ნორმალურობა. ერთგანზომილებიანი პარამეტრის შემთხვევაში შეფასებას $T(X)=(T_n(X))_{n\geq 1}$ ეწოდება ასიმპტოტურად ნორმალური, $\sigma_T^2(\theta)$ დისპერსიით, თუ ყოველი ნამდვილი x-თვის, $-\infty<x<\infty$ და ყოველი θ-თვის, $\theta\in\Theta$, ადგილი აქვს კრებადობას

$$P_\theta\{\sqrt{n}\ (T_n-\theta)\leq x\} \to \Phi_{0,\sigma_T^2(\theta)}(x), \qquad \text{როცა } n\to\infty.$$

ამ ფაქტს ხშირად ასეც მოიხსენიებენ: შეფასება $T=(T_n)_{n\geq 1}$ ასიმპტოტურად ნორმალურია, $(\theta, \sigma_T^2(\theta)/n)$ პარამეტრებით. ამ ფაქტს კი, როგორც უკვე ვნახეთ, ასე აღნიშნავენ

$$\mathcal{L}_\theta(T_n) \approx N(\theta, \sigma_T^2(\theta)/n);$$

$\sigma_T^2(\theta)/n$ სიდიდეს უწოდებენ T შეფასების ასიმპტოტურ დისპერსიას.

2′. ორგანზომილებიანი პარამეტრის შეფასების ასიმპტოტური ნორმალურობა.* ორგანზომილებიანი $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ პარამეტრის შემთხვევაში $T_n(X)=(T_{1,n}(X),\ T_{2,n}(X))$ შეფასებას ეწოდება ასიმპტოტურად ნორმალური პარამეტრებით $(0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ თუ ყოველი ორგანზომილებიანი ვექტორისათვის $x=(x_1,x_2)$, $-\infty<x_1,x_2<\infty$, როცა $n\to\infty$, ადგილი აქვს კრებადობას:

$$P_\theta\left\{\sqrt{n}(T_{1,n}(X)-\theta_1)\leq x_1, \sqrt{n}(T_{2,n}(X)-\theta_2)\leq x_2\right\}\to \Phi_{0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho}(x_1,x_2),$$

სადაც $\Phi_{0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho}$ არის ორგანზომილებიანი ნორმალური განაწილების ფუნქცია შესაბამისი პარამეტრებით.

ეს ფაქტი ასეც შეიძლება აღინიშნოს:

$$\mathcal{L}_\theta\{T_n\} \approx N(\theta, \tfrac{1}{n}\Sigma_\theta),$$

სადაც $\Sigma_\theta=\begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}$ ზღვარითი განაწილების კოვარიაციული მატრიცაა.

3. ასიმპტოტური ეფექტურობა. ერთგანზომილებიანი θ პარამეტრის შეფასებისას შერჩევის ფიქსირებული n მოცულობის შემთხვევაში, შეფასებას ვუწოდებდით ეფექტურს, თუ მისი დისპერსიისათვის მიიღწეოდა რაო-კრამერის ქვედა საზღვარი.

ამის ანალოგიურად, ნებისმიერი $T=(T_n)_{n\geq 1}$ შეფასებისათვის, რომლისთვისაც

$$\mathcal{L}_\theta\{T_n\} \approx N(\theta, \sigma_T^2(\theta)/n),$$

მისი ასიმპტოტური ეფექტურობა $\mathrm{eff}(T_n;\theta)$ ეწოდება რაო-კრამერის ქვედა საზღვრის $\dfrac{1}{ni(\theta)}$-სა და მისი ასიმპტოტური დისპერსიის, $\sigma_T^2(\theta)/n$-ის ფარდობას

$$\mathrm{eff}(T_n;\theta) = [i(\theta)\,\sigma_T^2(\theta)]^{-1}$$

და T_n შეფასებას ეწოდება ასიმპტოტურად ეფექტური, თუ $\mathrm{eff}(T_n;\theta)=1$.

§ 2. შეფასებათა აგების მეთოდები

დასაჯერობის მაქსიმუმის მეთოდი. „კარგი" შეფასების აგების ერთ-ერთი ყველაზე მძლავრი მეთოდია დასაჯერობის მაქსიმუმის მეთოდი. კერძო შემთხვევებისათვის ეს მეთოდი გამოყენებული იყო ჯერ კიდევ გაუსის მიერ (1880 წელი), მაგრამ, როგორც შეფასებათა აგების ზოგადი მეთოდი შემოთავაზებული იყო ინგლისელი სტატისტიკოსის რ.ფიშერის მიერ (1912 წელი). ამ შეფასებათა თვისებების კვლევაში მნიშვნელოვანი წვლილი აქვთ შეტანილი კრამერსა და დიუგეს.

ვთქვათ, მოცემულია n მოცულობის შერჩევა, $X=(X_1,\dots,X_n)$ გენერალური ერთობლიობიდან, $\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}=\{F(x;\theta),\ \theta\in\Theta\}$. ვთქვათ $x=(x_1,\dots,x_n)$ ვექტორი $X=(X_1,\dots,X_n)$-ის კონკრეტული რეალიზაციაა. აღვნიშნოთ $L(x;\theta)$-თი დასაჯერობის ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში:

$$L(x;\theta) = L(x_1,\dots,x_n;\theta) = f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta),$$

სადაც $f(x;\theta)$ არის X_1 შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.

θ პარამეტრის დასაჯერობის მაქსიმუმის მეთოდით აგებული შეფასება არის X შერჩევის ისეთი $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X)$ ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა X-ის კონკრეტული $x=(x_1,\dots,x_n)$ რეალიზაციისათვის ემთხვევა პარამეტრული სიმრავლის ისეთ წერტილს, რომელშიც დასაჯერობის $L(x;\theta)$ ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმუმს. ასეთ $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X)$ შეფასებას მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება ეწოდება (ზოგჯერ იხმარება ტერმინიც: დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება). ამრიგად $\hat{\theta}_n(x)=\hat{\theta}_n(x_1,\dots,x_n)$ არის Θ პარამეტრული სიმრავლის ისეთი წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობას

$$L(x;\hat{\theta}) \ge L(x;\theta), \qquad \text{ნებისმიერი } \theta\text{-სათვის } \Theta\text{-დან},$$

შევნიშნოთ, რომ ბოლო თანაფარდობა ეკვივალენტურია შემდეგისა:

$$\ln L(x;\hat{\theta}) \ge \ln L(x;\theta), \qquad \text{ნებისმიერი } \theta\text{-სათვის } \Theta\text{-დან}.$$

შენიშვნა.* რა მოსაზრება უდევს საფუძვლად მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასების შემოღებას?

ცნობილია, რომ თუ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა θ_0-ის ტოლია, მაშინ გარკვეულ ფართო პირობებში

$$P_{\theta_0}\{L(x_1,\ldots,x_n;\theta_0)\geq L(x_1,\ldots,x_n;\theta)\}\to 1,\quad \text{როცა } n\to\infty$$

ყოველი θ-სათვის, $\theta\neq\theta_0$. ამიტომ, მოსალოდნელია, რომ მაქსიმალური დასაჯერობის $\hat{\theta}_n(X)$ შეფასება შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში ახლოს აღმოჩნდება θ_0-თან.

თუ განვიხილავთ ისეთ შემთხვევას, როდესაც $L(x;\theta)$ დიფერენცირებადია θ პარამეტრით ყოველ x-ში და მაქსიმუმი მიიღწევა Θ სიმრავლის შიდა წერტილში, მაშინ დასაჯერობის მაქსიმუმის $\hat{\theta}$ შეფასება მოიძებნება, როგორც დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლების ამოხსნა (ვიგულისხმოთ, რომ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი). თუ θ სკალარული პარამეტრია, ამ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_i;\theta)=0.$$

თუ $f(x;\theta)>0$ ყოველ $(x;\theta)$ წერტილში, მაშინ დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f'(x_i;\theta)}{f(x_i;\theta)}=0,$$

სადაც $f'(x;\theta)=\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$.

ორგანზომილებიანი პარამეტრის შემთხვევაში კი, როცა $\theta=(\theta_1,\theta_2)$, მიიღება ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ln f(x_i;\theta_1,\theta_2)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\ln f(x_i;\theta_1,\theta_2)=0.$$

აღვნიშნოთ დასაჯერობის მაქსიმუმის $\hat{\theta}_n$ შეფასების ერთი თვისება: ერთგანზომილებიანი θ პარამეტრის შემთხვევაში, თუ მოდელი ისეთია, რომ არსებობს ეფექტური შეფასება $T(X)$, მაშინ $\hat{\theta}=T(X)$.

გარკვეულ პირობებში, რომლებშიც იგულისხმება $f(x,\theta)$ სიმკვრივის საკმარისი სიგლუვე θ პარამეტრით (მაგალითად, ეს პირობები შესრულებულია, როცა $f(x,\theta)$ ფუნქცია θ ცვლადით სამჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია და წარმოებულები შემოსაზღვრულია), მტკიცდება, რომ დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლებას აქვს ერთადერთი ამოხსნა, $\hat{\theta}_n$, რომელსაც გააჩნია შემდეგი ასიმპტოტური თვისებები:

1) ძალმოსილება

$$\hat{\theta}_n\xrightarrow{P_\theta}\theta,\qquad \text{როცა } n\to\infty,$$

ყოველი θ-სათვის, $\theta\in\Theta$;

2) ასიმპტოტური ნორმალურობა

$$\mathcal{L}\{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)\} \to N(0, i^{-1}(\theta)), \quad \text{როცა } n \to \infty,$$

ანუ $\hat{\theta}_n$ ასიმპტოტურად ნორმალურია $(\theta, 1/ni(\theta))$ პარამეტრებით.

$$\mathcal{L}\{\hat{\theta}_n\} \approx N(\theta, 1/ni(\theta))$$

3) ასიმპტოტური ეფექტურობა

$$\mathrm{eff}(\hat{\theta}_n, \theta) = 1.$$

ხშირ შემთხვევებში (ერთგანზომილებიანი θ პარამეტრისათვისაც კი) დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლება რთული ფორმისაა და მისი ამოხსნა დიდ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. იბადება კითხვა: ხომ არ შეიძლება რაიმე რეკურსიული პროცედურის განხილვა, რომლის მეშვეობითაც აგებულ შეფასებას (ალვნიშნოთ იგი θ_n-ით) ექნება იგივე ასიმპტოტური თვისებები, რაც დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებას? ასეთი პროცედურები არსებობს და ერთ-ერთი მათგანია შემდეგი: θ_0-იდან დაწყებული ყოველი მომდევნო θ_n განისაზღვრება პროცედურით:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{\dot{f}(x_n, \theta_{n-1})}{f(x_n, \theta_{n-1})} \frac{1}{ni(\theta)}.$$

შესწავლილია პირობები (მათ ჩვენ არ მოვიყვანთ), როდესაც ნებისმიერი θ_0-ისათვის $(\theta_n)_{n\ge1}$ შეფასებათა მიმდევრობას გააჩნია იგივე ასიმპტოტური თვისებები, რაც დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებათა მიმდევრობას $(\hat{\theta}_n)_{n\ge1}$.

მოვიყვანოთ დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასების აგების რამდენიმე მაგალითი.

1. ნორმალური მოდელი. $\mathcal{L}\{X\} \in N(\mu, \sigma^2)$, რადგან

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};$$

დასაჯერობის ფუნქციის სახეა:

$$L(x,\theta) = L(x_1,\dots,x_n,\theta) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \frac{1}{\sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}};$$

ამიტომ $\ln L(x,\theta) = \ln \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ და

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \ln L(x,\theta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)}{2\sigma^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} \ln L(x,\theta) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4}.$$

დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლებათა სისტემაა

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,$$

$$-n\sigma^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \;=0.$$

ამ სისტემის ამოხსნას წარმოადგენს $\hat{\theta}_n=(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n^2)$ წყვილი:

$$\hat{\mu}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X},$$

$$\hat{\sigma}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=S^2.$$

უშუალოდ შეიძლება შემოწმდეს, რომ $(\overline{X},S^2)$ წყვილი ანიჭებს მაქსიმუმს $L(X,\theta)$-ს. ამრიგად, შერჩევითი საშუალო და დისპერსია $(\overline{X},S^2)$ ყოფილა ნორმალური განაწილების ორგანზომილებიანი $\theta=(\mu,\sigma^2)$ პარამეტრის დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება. თუ გავიხსენებთ იმ ფაქტს, რომ $E_\theta S^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$, დავასკვნით, რომ ამ შემთხვევაში დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება არ წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას.

2. ბინომური მოდელი $\mathcal{L}\{X\}\in Bi(1,\theta)$, $0<\theta<1$. ამ შემთხვევაში ყოველი კონკრეტული რეალიზაცია $x=(x_1,\ldots,x_n)$, წარმოადგენს ერთებისა და ნულების რაიმე მიმდევრობას ($x_i=0$ ან 1) და დასაჯერობის ფუნქციას ექნება სახე

$$L(x;\theta)=L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}.$$

მაგალითად, თუ $n=3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, სადაც $x_1=x_2=x_3=1$, მაშინ, რადგან $x_1+x_2+x_3=3$,

$$L(x;\theta)=\theta^{(x_1+x_2+x_3)}(1-\theta)^{n-(x_1+x_2+x_3)}=\theta^3(1-\theta)^0=\theta^3.$$

ამიტომ $\ln L(x;\theta)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\theta+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-\theta)$ და დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლებაა

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\frac{1}{1-\theta}=0,$$

რომლის ამოხსნაა ფარდობითი სიხშირე

$$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{\nu_n}{n}.$$

ცხადია, რომ $E_\theta\hat{\theta}_n=\theta$, $\hat{\theta}_n\xrightarrow{P_\theta}\theta$, როცა $n\to\infty$.

3. პუასონის მოდელი. ვთქვათ $\mathcal{L}\{X\}\in\Pi(\theta)$, სადაც $0<\theta<\infty$, პუასონის განაწილების უცნობი პარამეტრია. $X=(X_1,\ldots,X_n)$ შერჩევის საფუძველზე ავაგოთ θ პარამეტრის დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ რადგან პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების შესაძლო მნიშვნელობებია $\{0,1,2,...\}$, ამიტომ ყოველი $x=(x_1,...,x_n)$ კონკრეტული რეალიზაციისათვის x_i ან რაიმე ნატურალური რიცხვის, ან ნულის ტოლია. ამიტომ

$$L(x;\theta)=L(x_1,...,x_n;\theta)=\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}e^{-\theta}\times\frac{\theta^{x_2}}{x_2!}e^{-\theta}\times\cdots\times\frac{\theta^{x_n}}{x_n!}e^{-\theta}=\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\theta}}{x_1!\cdots x_n!},$$

საიდანაც გვაქვს

$$\ln L(x;\theta)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\theta-n\theta-\ln(x_1!\cdots x_n!)$$

თუ ამ გამოსახულებას გავაწარმოებთ θ პარამეტრით, მივიღებთ დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლებას

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0,$$

რომლის ამოხსნაა

$$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}_n;$$

ნათელია, რომ

$$E_\theta\hat{\theta}_n=E_\theta\overline{X}_n=\theta.$$

4. თანაბარი მოდელი. $\mathcal{L}\{X\}\in U(\theta)$, სადაც $U(\theta)$ თანაბარი განაწილებაა $[0,\theta]$ ინტერვალზე. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში

$$f(x;\theta)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{\theta}, & 0<x\le\theta\\ 0, & \theta\le x\end{cases}.$$

ამიტომ

$$L(x;\theta)=L(x_1,...,x_n;\theta)=f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & x_{(n)}=\max\limits_{i\le n}x_i\le\theta\\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში}\end{cases}.$$

აქედან გამომდინარეობს (იხ. ნახ. 10.1), რომ ყოველ ფიქსირებულ $x=(x_1,...,x_n)$ წერტილში $L(x;\theta)$ ფუნქციას მაქსიმუმს ანიჭებს $\hat{\theta}_n=x_{(n)}$ მნიშვნელობა. ანუ $\hat{\theta}_n(X)=X_{(n)}$, სადაც $X_{(n)}$ არის n-ური რიგობრივი სტატისტიკა.

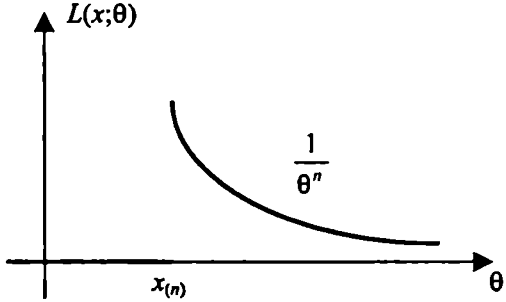
სავარჯიშო. ააგეთ დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება შემდეგი მოდელებისათვის:

1. ექსპონენციალური მოდელი

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases},\qquad 0<\theta<\infty.$$

2. ორგანზომილებიანი ნორმალური მოდელი $\theta=(0,0,\sigma^2,\sigma^2,\rho)$ პარამეტრებით, ანუ

$$f(x,y,\theta)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}+\frac{\rho xy}{\sigma^2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}\ln[\sigma^4(1-\rho^2)]\right\}.$$



ნახ. 10.1

მომენტთა მეთოდი. მომენტთა მეთოდი არის უცნობი პარამეტრის შეფასების აგების პირველი ზოგადი მეთოდი, რომელიც შემოთავაზებული იყო კ.პირსონის მიერ. ამ მეთოდის არსი შემდეგია: ვთქვათ, $X=(X_1,\ldots,X_n)$ შერჩევის საფუძველზე შესაფასებელია $\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}=\{F(x,\theta),\ \theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k),\ \theta\in\Theta\subset R^K\}$ გენერალური ერთობლიობის ვექტორული $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ პარამეტრი. ცხადია, რომ თეორიული მომენტები წარმოადგენს უცნობი θ პარამეტრის ფუნქციებს. განვიხილოთ გენერალური ერთობლიობის პირველი k საწყისი მომენტი: $\alpha_1(\theta)=\alpha_1(\theta_1,\ldots,\theta_k)$, ... , $\alpha_k(\theta)=\alpha_k(\theta_1,\ldots,\theta_k)$, სადაც

$$\alpha_j(\theta)=E_\theta X^j, \qquad j=1,\ldots,k$$

და გავუტოლოთ ისინი შესაბამის შერჩევით მომენტებს $A_{n1},\ldots,A_{nk}$, სადაც

$$A_{nj}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^j\ .$$

მაშინ მივიღებთ $\theta_1,\ldots,\theta_k$ ცვლადების მიმართ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned}\alpha_1(\theta_1,\ldots,\theta_k)&=A_{n1}\ ,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_k(\theta_1,\ldots,\theta_k)&=A_{nk}\ .\end{aligned}\qquad(10.16)$$

ამ სისტემის ამოხსნა ($\theta_1,\ldots,\theta_k$ ცვლადების მიმართ) გვაძლევს მომენტთა მეთოდის შეფასებას $\overline{\theta}_{n1},\ldots,\ \overline{\theta}_{nk}$. თუ დავუშვებთ, რომ სისტემის ამოხსნა არსებობს და ერთადერთია, მიღებული შეფასებები აღმოჩნდება შერჩევითი მომენტების ფუნქციები. საკმაოდ ფართო პირობებში შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მომენტთა მეთოდით აგებული შეფასებები ძალმოსილია. ეს მტკიცება ეფუძნება შემდეგ ფაქტებს:

a) დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად შერჩევითი მომენტები წარმოადგენს შესაბამისი თეორიული მომენტების ძალმოსილ შეფასებებს:

b) $$A_{nj} \xrightarrow{P_\theta} \alpha_j(\theta), \qquad \text{როცა } n\to\infty, j=1,2,\dots,k.$$

c) თუ შესაბამისობა $\theta_1,\dots,\theta_k$ ცვლადებსა და თეორიულ $\alpha_1(\theta),\dots,\alpha_k(\theta)$ მომენტებს შორის ურთიერთცალსახა და ურთიერთუწყვეტი, მაშინ არსებობს ისეთი უწყვეტი $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ ფუნქციები, რომ

$$\theta_1 = \varphi_1(\alpha_1,\dots,\alpha_k), \qquad \overline{\theta}_{n1}= \varphi_1(A_{n1},\dots, A_{nk})$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$\theta_k = \varphi_k(\alpha_1,\dots,\alpha_k), \qquad \overline{\theta}_{nk}= \varphi_k(A_{n1},\dots, A_{nk})$$

და a) პუნქტისა და φ_i ფუნქციების უწყვეტობის ძალით

$$\overline{\theta}_{ni}= \varphi_i(A_{n1},\dots, A_{nk}) \xrightarrow{P_\theta} \varphi_k(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\theta_i, \; i=1,\dots,k.$$

როგორც წესი, მომენტთა მეთოდით აგებული შეფასებები არ არის ეფექტური, მაგრამ პრაქტიკული თვალსაზრისით მათი აგება შედარებით მარტივი მეთოდებით ხერხდება და მათ იყენებენ როგორც პირველ მიახლოებებს უფრო ზუსტი შეფასებების ასაგებად.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ზოგადი ნორმალური მოდელი $\mathcal{L}\{X\}\in N_{\mu,\sigma^2}$, $\theta=(\mu,\sigma^2)$, როგორც ვიცით, პირველი საწყისი მომენტი $\alpha_1=\mu$, ხოლო მეორე საწყისი მომენტი $\alpha_2=\sigma^2+\mu^2$.

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\mu = \overline{X},$$

$$\sigma^2+\mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\overline{\mu}_n = \overline{X},$$

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = S^2.$$

ამრიგად, ნორმალური მოდელისათვის უცნობი μ საშუალოსა და σ^2 დისპერსიის, მომენტთა მეთოდით აგებული შეფასებები $\overline{\mu}_n$ და $\overline{\sigma}_n^2$ ემთხვევა დასაჯერობის მაქსიმუმის მეთოდით აგებულ შეფასებებს და ტოლია შერჩევითი $\overline{X}$ საშუალოსი და S^2 დისპერსიისა, შესაბამისად.

დაწვრილებით შევჩერდეთ ერთგანზომილებიანი პარამეტრის შემთხვევაზე:

როგორც დასაჯერობის მაქსიმუმის, ასევე მომენტთა მეთოდით აგებული შეფასებები წარმოადგენს კერძო შემთხვევას ე.წ. M-შეფასებებისა, რომლებიც შემოღებული იყო პ.ჰიუბერის მიერ და მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ რობასტული შეფასებების თეორიაში. ეს შეფასებები შემდეგნაირად აიგება: ვთქვათ $\psi(x;\theta)$ რაიმე ფუნქციაა ისეთი, რომ ყოველი θ-თვის, $\theta\in\Theta$,

$$E_\theta\psi(x;\theta) = 0.$$

M-შეფასება, აგებული ψ ფუნქციის მეშვეობით (აღვნიშნოთ ეს შეფასება $T_n^\psi = T_n^\psi(X)$-ით) ეწოდება შეფასებას, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამოხსნას:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i;\theta) = 0. \qquad (10.17)$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $\psi(x;\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)$, მივიღებთ დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასებას, ხოლო იმ შემთხვევაში, როდესაც $\psi(x;\theta)=x^k-\alpha_k(\theta)$, სადაც $k\geq 1$ რაიმე მთელი რიცხვია, ხოლო $\alpha_k(\theta)$ არის k-ური რიგის მომენტი, მივიღებთ მომენტთა მეთოდის შეფასებას.

რეგულარობის გარკვეულ პირობებში (რომელიც უხეშად რომ ვთქვათ გულისხმობს $\psi(x;\theta)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობას θ პარამეტრით და წარმოებულების შემოსაზღვრულობას) შეფასება T_n^ψ ასიმპტოტურად ნორმალურია:

$$P_\theta\{\sqrt{n}\,(T_n^\psi-\theta)\leq x\} \to \Phi_{0,\sigma_\psi^2(\theta)},$$

სადაც $\sigma_\psi^2(\theta) = \dfrac{E_\theta\psi^2(x,\theta)}{\left(E_\theta\psi(x,\theta)l(x,\theta)\right)^2}$, $l(x;\theta)=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$

ანუ

$$\mathcal{L}_\theta\{T_n^\psi\} \approx N(\theta, \sigma_\psi^2(\theta)/n).$$

შევადაროთ ერთმანეთს დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასების, $\hat{\theta}_n$-ისა და M-შეფასების T_n^ψ-ის ასიმპტოტური დისპერსიები, ანუ გამოვთვალოთ $\mathrm{eff}(T_n^\psi;\theta)$ (იგულისხმება, რომ სრულდება რეგულარობის პირობები):

$$\mathrm{eff}(T_n^\psi;\theta) = [i(\theta)\,\sigma_\psi^2(\theta)]^{-1},$$

მაგრამ $i(\theta)=E_\theta l^2(x;\theta)$ და ამიტომ

$$\mathrm{eff}(T_n^\psi;\theta) = \frac{\left(E_\theta\psi(x,\theta)l(x,\theta)\right)^2}{E_\theta l^2(x,\theta)E_\theta\psi^2(x,\theta)} \leq 1.$$

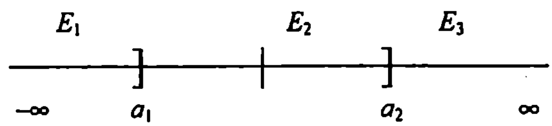
ბოლო უტოლობა სამართლიანია კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის ძალით.

ამრიგად, M-შეფასების ეფექტურობა 1-ზე ნაკლებია, ე.ი. M-შეფასება საზოგადოდ არ წარმოადგენს ეფექტურ შეფასებას. მიუხედავად ამისა M-შეფასებები დიდ როლს ასრულებს ე.წ. რობასტული (მდგრადი) შეფასების თეორიაში. მაგალითად, M-შეფასებების კლასში შედის შერჩევითი მედიანა (საკმარისია ავიღოთ $\psi(x;\theta)=\mathrm{sign}(x-\theta)$). ჩვენ კი ვიცით, რომ მედიანას „ამოვარდნილი" დაკვირვებების მიმართ მდგრადობის (რობასტულობის) ძალზე სასურველი თვისება გააჩნია.

χ^2-ის მინიმუმის მეთოდი. ეს მეთოდი შემოთავაზებული იყო კ.პირსონის მიერ. ვთქვათ, $\mathcal{L}\{X\}\in \mathrm{F}=\{F(x,\theta);\ \theta\in\Theta\subset R^k\}$ გენერალური ერთობლიობიდან შერჩევა არის

$X=(X_1,...,X_n)$ და მის საფუძველზეც შესაფასებელია უცნობი ვექტორული პარამეტრი, $\theta=(\theta_1,...,\theta_k)$

X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლე დავყოთ N რაოდენობის $E_1,...,E_N$ ურთიერთარათანამკვეთ სიმრავლედ. მაგალითად, ვთქვათ $N=3$. ხოლო X-ის შესაძლო მნიშვნელობებია მთელი ღერძი. მაშინ გვექნება სამი ინტერვალი, რომლებიც შემდეგნაირადაა განლაგებული რიცხვთა ღერძზე



ნახ. 10.2

ე.ი. $E_1=(-\infty,a_1]$, $E_1=(a_1,a_2]$, ... , $E_N=(a_1,+\infty)$ სადაც $-\infty<a_1<a_2<a_3<\infty$ რაიმე რიცხვებია.

ν_j-ით აღვნიშნოთ იმ დაკვირვებათა რაოდენობა, რომლებიც მოხვდა E_j სიმრავლეში: $\nu_j=\#\{x_i: x_i\in E_j\}$. ცხადია, რომ $\nu_1+\dots+\nu_N=n$.

როგორც ვიცით $\dfrac{\nu_i}{n}$ ფარდობითი სიხშირე წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის j-ურ ინტერვალში მოხვედრის $P_j(\theta)=P_\theta(X\in E_j)=F(a_{j+1};\theta)-F(a_j;\theta)$ ალბათობის ძალმოსილ შეფასებას.

შევადგინოთ შემდეგი გამოსახულება

$$\chi^2(\theta)=\sum_{j=1}^{N}\frac{n}{P_j(\theta)}\left(\frac{\nu_j}{n}-P_j(\theta)\right)^2=\sum_{j=1}^{N}\frac{\nu_j^2}{nP_j(\theta)}-n\,.$$

θ პარამეტრის იმ შეფასებას, $T_n=T_n(x_1,...,x_n)$ რომელიც ანიჭებს მინიმუმს $\chi^2(\theta)$ სიდიდეს, ეწოდება χ^2-ის მინიმუმის მეთოდით აგებული შეფასება.

მის მოსაძებნად უნდა ამოიხსნას შემდეგ განტოლებათა სისტემა ($\theta_1,...,\theta_k$ ცვლადების მიმართ)

$$-\frac{\partial}{\partial\theta_i}\chi^2(\theta)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\nu_j^2}{P_j^2(\theta)}\frac{\partial P_j(\theta)}{\partial\theta_i}=0,\qquad i=1,...,k. \tag{10.18}$$

გარკვეულ პირობებში მიღებული შეფასება ძალმოსილი და ასიმპტოტურად ნორმალურია. ხშირად (10.18) სისტემის ამოხსნა დიდ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. ამიტომ მის ნაცვლად განიხილავენ გამარტივებულ განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\nu_j}{P_j(\theta)}\frac{\partial P_j(\theta)}{\partial\theta_i}=0,\quad i=1,...,k. \tag{10.18'}$$

საკმაოდ ფართო პირობებში (10.18')-ის ამოხსნათა ზღვარითი განაწილება ემთხვევა χ^2-ის მინიმუმის შეფასების ზღვარით განაწილებებს. (10.18') სისტემა ემთხვევა მულტინომური დასაჯერობის მაქსიმუმის განტოლებათა სისტემას მულტინომური განაწილებისათვის და ამიტომ მისი ამოხსნით მიღებულ შეფასებას მულტინომური დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება ეწოდება.

§ 3. ინტერვალური შეფასება

წინა პარაგრაფებში ჩვენ განვიხილეთ წერტილოვანი შეფასებები და მათთან დაკავშირებული ჩაუნაცვლებლობის, ძალმოსილებისა და ოპტიმალობის ცნებები. აგრეთვე შევისწავლეთ რამოდენიმე მეთოდი, რომლებიც საშუალებას იძლევა, აიგოს სასურველი თვისებების მქონე შეფასებები.

როგორც უკვე ითქვა, წერტილოვანი შეფასების როლში განიხილება რაიმე კრიტერიუმით შერჩეული სტატისტიკა $T_n(X)$, რომელიც მხოლოდ $X=(X_1,...,X_n)$ შერჩევის ფუნქციას წარმოადგენს და რომლის დაკვირვებული სიდიდე, $t_n=T_n(x)$, შეიძლება ჩაითვალოს პოპულაციის უცნობი პარამეტრის შეფასებულ მნიშვნელობად და, აქედან გამომდინარე, გამოყენებული იქნეს მის ნაცვლად. ამ დროს ჩვენ, რა თქმა უნდა, ვუშვებთ გარკვეულ შეცდომას.

წერტილოვანი შეფასების ნაკლი ისაა, რომ მხოლოდ მისი დაკვირვებული მნიშვნელობის ცოდნა არ იძლევა ამ შეცდომის სიდიდის დადგენის საშუალებას.

T_n შეფასება ჩაუნაცვლებელი და ძალმოსილიც რომ იყოს, T_n-ის სიდიდე, გამოთვლილი კონკრეტული რეალიზაციისათვის, როგორც წესი, განსხვავდება უცნობი პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაგან და ჩვენთვის არ არის ცნობილი, თუ რამდენად დიდია ეს განსხვავება.

მაგალითისათვის განვიხილოთ „წარმატების" უცნობი θ ალბათობის შეფასების ამოცანა ბერნულის სქემაში: $\mathcal{L}(X)\in Bi(1,\theta)$, $0<\theta<1$.

როგორც წინა მასალიდან დავრწმუნდით, უცნობი ალბათობის საუკეთესო შეფასებას წარმოადგენს ფარდობითი სიხშირე

$$\hat{P}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\#\{X_i=1,\ i=1,2,...,n\},$$

სადაც $\#\{x_i=1,\ i=1,2,...,n\}$ წარმატებათა რაოდენობაა n დამოუკიდებელ ცდაში.

ყოველი ფიქსირებული θ_0-ისათვის, $0<\theta_0<1$, გამოვთვალოთ შემდეგი ალბათობები

$$P_{\theta_0}\{\hat{P}_n=1\} = P_{\theta_0}\{X_i=1,\ i=1,2,...,n\} = \theta_0^n > 0,$$

$$P_{\theta_0}\{\hat{P}_n=0\} = P_{\theta_0}\{X_i=0,\ i=1,2,...,n\} = (1-\theta_0)^n > 0,$$

ამრიგად, ფარდობითი სიხშირე იღებს მნიშვნელობებს 1-სა და 0-ს დადებითი θ_0^n და $(1-\theta_0)^n$ ალბათობებით, შესაბამისად. ეს მნიშვნელობები არა თუ ემთხვევა θ_0-ს, არამედ არ ეკუთვნის უცნობი პარამეტრის განსაზღვრის არესაც კი: $0<\theta<1$. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს ორივე ალბათობა, θ_0^n და $(1-\theta_0)^n$ მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $n\to\infty$. უფრო მეტიც, დიდ რიცხვთა კანონის ძალით, ყოველი დადებითი ε-ისათვის

$$P_{\theta_0}\{|\hat{P}_n-\theta_0|>\varepsilon\} \to 0,$$

როცა $n\to\infty$. მიუხედავად ამისა, როგორც განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, ვერ დავასახელებთ ისეთ ε-ს (ε>0), რომ უტოლობა:

$$|\hat{P}_n-\theta_0| \le \varepsilon$$

სრულდებოდეს ყოველი რეალიზაციისათვის, რამდენად დიდიც არ უნდა იყოს შერჩევის მოცულობა. ამ თვალსაზრისით, წერტილოვანი შეფასება ვერ ასახავს შერჩევის დიდი

მოცულობის ეფექტს, თუმცა ინტუიციურად გასაგებია, რომ n-ის ზრდა იწვევს სიზუსტის ზრდასაც.

ხშირად, (ჩაუნაცვლებელ) წერტილოვან შეფასებასთან ერთად ცნობილია მისი სტანდარტული გადახრაც. ამავე დროს, თუ ეს შეფასება მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, სარწმუნოობის მაღალი დონით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობასა და შეფასებას შორის სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება გასამკეცებულ სტანდარტულ გადახრას, ანუ, რაც იგივეა, პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა მოთავსებულია ინტერვალში: (შეფასება $\pm$ გასამკეცებული გადახრა). ეს მოსაზრება გვიბიძგებს, რომ წერტილოვანი შეფასება – ერთი რიცხვი, შევცვალოთ ინტერვალური შეფასებით – მთელი ინტერვალით. ამასთან, ინტერვალი ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ ჩვენი მტკიცება, რომ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა ეკუთვნის ამ ინტერვალს, მცდარი აღმოჩნდეს მხოლოდ იშვიათ შემთხვევაში.

ამრიგად, საბოლოო დასკვნა შემდეგია: თუ შეფასებას ვიყენებთ უცნობი პარამეტრის მნიშვნელობის როლში, ადგილი ექნება გარკვეულ ცდომილებას და საჭირო ხდება მისი საზღვრების დადგენა. სახელდობრ, სასურველია მითითებული იქნეს ისეთი ინტერვალი (მრავალგანზომილებიანი პარამეტრის შემთხვევაში – არე), რომ ჩვენი დასკვნა იმის შესახებ, რომ შესაფასებელი პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა მოთავსებულია ამ ინტერვალში (არეში), მცდარი აღმოჩნდება მხოლოდ იშვიათ შემთხვევაში. ამ დროს ლაპარაკია ინტერვალურ შეფასებაზე.

ᲜᲓᲝᲑᲘᲡ ᲘᲜᲢᲔᲠᲕᲐᲚᲘᲡ ᲪᲜᲔᲑᲐ ᲓᲐ ᲛᲘᲡᲘ ᲘᲜᲢᲔᲠᲞᲠᲔᲢᲐᲪᲘᲐ. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ სკალარული პარამეტრის ინტერვალური შეფასების საკითხს.

ინტერვალური შეფასებისას იძებნება ისეთი ორი $T_1(X)$ და $T_2(X)$ სტატისტიკა, $T_1<T_2$, რომლებისთვისაც მოცემული $\gamma\in(0,1)$ რიცხვისათვის, შესრულებულია პირობა

$$P_\theta\{T_1(X)<\theta<T_2(X)\}\geq\gamma,\ \text{ნებისმიერი } \theta\text{-სათვის } \Theta\text{-დან.} \tag{10.19}$$

ამ შემთხვევაში $(T_1(X),T_2(X))$ ინტერვალს ეწოდება γ-ნდობის ინტერვალი, γ-ს ეწოდება ნდობის დონე ანდა ნდობის ალბათობა, $T_1(X)$-სა და $T_2(X)$-ს შესაბამისად ქვედა და ზედა ნდობის საზღვრები. აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ ნდობის ინტერვალი შემთხვევითია, რადგანაც მისი საზღვრები $T_1(X)$ და $T_2(X)$ შემთხვევითი სიდიდეებია (რომლებიც არაა დამოკიდებული θ-ზე). აღნიშნული ინტერვალი ფარავს პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას γ-ზე არანაკლები ალბათობით.

რას ნიშნავს პრაქტიკული თვალსაზრისით პირობა (10.19), ან გამოთქმა: $(T_1(X),T_2(X))$ ინტერვალი ფარავს პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას γ-ზე არანაკლები ალბათობით? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად, პირველ რიგში მივიღოთ ასეთი სტატისტიკური წესი:

ვთქვათ აგებული გვაქვს γ-ნდობის ინტერვალი $(T_1(X),T_2(X))$. მაშინ ყოველი კონკრეტული $x=(x_1,\ldots,x_n)$ რეალიზაციისათვის ჩავთვალოთ, რომ პარამეტრის უცნობი მნიშვნელობა მოთავსებულია $(T_1(x),T_2(x))$ ინტერვალში.

წარმოვიდგინოთ, რომ ჩატარებულია ურთიერთდამოუკიდებელ ექსპერიმენტთა დიდი (N) რაოდენობა, რომელთა საფუძველზე აგებულია უცნობი θ პარამეტრის γ-ნდობის ინტერვალები. მაშასადამე ჩვენ გაგვაჩნია დამოუკიდებელ რეალიზაციათა N რაოდენობის სერია: $x^i=(x^i_1,\ldots,x^i_n)$ და ამავე რაოდენობის რიცხვითი ინტერვალები, $(T_1(x^i),T_2(x^i))$,

$i=1,\ldots,N$. მაშინ, იმ შემთხვევათა რაოდენობა, როდესაც ზემოაღწერილი სტატისტიკური წესი მოგვცემს მცდარ დასკვნას, საშუალოდ $(1-\gamma)N$-ის ტოლი იქნება.

ნდობის γ დონის შერჩევა ხდება პრაქტიკული მოსაზრებებიდან. როგორც წესი, იღებენ γ=0,9; 0,95; 0,99. მაგალითად γ=0.99 ნიშნავს, რომ ასიდან საშუალოდ ერთ შემთხვევაში შესაძლოა, რომ სტატისტიკურმა წესმა მოგვცეს მცდარი დასკვნა.

ნდობის ინტერვალის აგება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც პოპულაციის დისპერსია ცნობილია. ვთქვათ, $X=(X_1,\ldots,X_n)$ არის n მოცულობის შერჩევა ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის საშუალო უცნობია, ხოლო დისპერსია კი ცნობილია და σ^2-ის ტოლია. ე.ი. საქმე გვაქვს $\mathcal{L}\{X\}\in N(\mu,\sigma^2)$ ნორმალურ მოდელთან. დაშვება იმის შესახებ, რომ პოპულაციის საშუალო უცნობია, ხოლო დისპერსია კი ცნობილი არ არის მთლად ბუნებრივი, რადგან როგორც წესი, დისპერსიის შესახებ ინფორმაციის მოპოვებას წინ უსწრებს საშუალოს შესახებ ინფორმაციის არსებობა. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ უფრო ზოგად შემთხვევას, როდესაც უცნობია ნორმალური პოპულაციის ორივე პარამეტრი.

ეს მარტივი შემთხვევა კი საინტერესოა თეორიული თვალსაზრისით, რათა გასაგები გახდეს ის ლოგიკა, რომლითაც წარმოებს ნდობის ინტერვალების აგება და მათი ინტერპრეტაცია.

როგორც ვიცით:

$$Z=\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

ანუ $P_\theta\left\{\dfrac{\overline{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$, სადაც $\Phi(x)=\Phi_{0,1}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა. მაშინ ყოველი ფიქსირებული θ-სათვის, $\theta\in\Theta$, გვაქვს

$$P_\theta\{g_1\le Z\le g_2\}=\Phi(g_2)-\Phi(g_1)$$

დავაფიქსიროთ ერთთან ახლომყოფი რაიმე γ რიცხვი, $0<\gamma<1$ და ვთქვათ, g_1 და g_2 რიცხვები ისეა შერჩეული, რომ $g_1<g_2$ და $\Phi(g_2)-\Phi(g_1)=\gamma$.

მაშინ ნებისმიერი ასეთი (g_1,g_2) წყვილისათვის გვექნება:

$$P_\theta\left\{g_1\le\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\le g_2\right\}=\gamma. \tag{10.20}$$

შემოვიღოთ ორი სტატისტიკა $T_1(X)$ და $T_2(X)$:

$$T_1(X)=\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_2,$$

$$T_2(X)=\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_1$$

და შევნიშნოთ, რომ (10.20) თანაფარდობა ეკვივალენტურია შემდეგისა:

$$P_\theta\{\,T_1(X)\le\theta\le T_2(X)\}=\gamma. \tag{10.20'}$$

ამრიგად, ნებისმიერი (g_1,g_2) წყვილი, რომლებისთვისაც $\Phi(g_2) - \Phi(g_1)=\gamma$, გვაძლევს γ-ნდობის ინტერვალს:

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_2, \overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_1\right),$$

შევნიშნოთ, რომ მიუხედავად იმისა, რომ ეს ინტერვალი შემთხვევითია (მისი ბოლოები $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_2$ და $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_1$ შემთხვევითი სიდიდეებია), მისი სიგრძე აღარაა შემთხვევითი და $(g_2-g_1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ სიდიდის ტოლია.

სავსებით გასაგებია, რომ ფიქსირებული γ დონისათვის და შერჩევის n მოცულობისათვის რაც უფრო ვიწროა ნდობის ინტერვალი, მით უფრო მაღალია შეფასების სიზუსტე და ამდენად g_1 და g_2 რიცხვები ისე უნდა შეირჩეს, რომ შესაბამის ინტერვალს აღმოაჩნდეს უმცირესი სიგრძე. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ g_1 და g_2 რიცხვები მოიცემა ფორმულებით:

$$-g_1 = g_2 = x_{(1+\gamma)/2} = z_{\alpha/2},$$

სადაც $x_{(1+\gamma)/2}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების $(1+\gamma)/2$ კვანტილია (ე.ი. $x_{(1+\gamma)/2}$ წარმოადგენს $\Phi(x)= (1+\gamma)/2$ განტოლების ამოხსნას), $\alpha=1-\gamma$, ხოლო $z_{\alpha/2}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია (იხ. თავი 11).

მაშასადამე, საბოლოოდ

> γ-ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის უცნობი საშუალოსათვის, როდესაც დისპერსია ცნობილია და σ^2-ის ტოლია, შემდეგია:
>
> $$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_{(1+\gamma)/2}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_{(1+\gamma)/2}\right), \qquad x_{\frac{1+\gamma}{2}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \tag{10.21}$$
>
> ანუ
>
> $$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right), \qquad \alpha=1-\gamma,\ z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$
>
> $\overline{X}$ შერჩევითი საშუალოა

ხშირად γ-ნდობის ინტერვალს $\gamma\cdot 100\%$-იან (ანდა $(1-\alpha)\cdot 100\%$-იან) ნდობის ინტერვალსაც უწოდებენ.

მოვიყვანოთ, ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილები, $\gamma = 1-\alpha$-დონის ყველაზე ხშირად გამოყენებადი მნიშვნელობებისათვის.

თუ $\gamma=0.09$, მაშინ $\alpha=0.1$, $z_{\alpha/2}=1.645$,
თუ $\gamma=0.095$, მაშინ $\alpha=0.05$, $z_{\alpha/2}=1.96$,
თუ $\gamma=0.099$, მაშინ $\alpha=0.01$, $z_{\alpha/2}=2.325$.

მაგალითი **10.1.** შემნახველი და სესხის გამცემი ასოციაციები, რომლებიც აფინანსებენ საცხოვრებელი სახლების შესყიდვათა დიდ რაოდენობას გარკვეულ რეგიონში, საჭიროებენ შემდეგ ინფორმაციას: როგორ ამცირებს საკრედიტო გადასახადები მყიდველის წმინდა შემოსავალს სახლის შესყიდვის პირველი წლის განმავლობაში (გაითვალისწინება მხოლოდ ის მყიდველები, რომლებმაც პირველად შეიძინეს საცხოვრებელი სახლი). შერჩეული იქნა ბოლო წლების 35 კრედიტის ამღები და ყოველი მათგანისათვის გამოთვლილი იქნა თვიური საკრედიტო გადასახადის პროცენტული წილი წმინდა შემოსავალში (100 · გადასახადი/შემოსავალი).

მიღებული მონაცემების საფუძველზე გამოთვლილი იქნა შერჩევითი საშუალო, $\overline{X}=24.7$. დავუშვათ, რომ პროცენტული წილი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, უცნობი საშუალოთი და სტანდარტული გადახრით $\sigma=3$ და ავაგოთ $\gamma=0.9$ დონის მქონე ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის.

ამოხსნა: ვისარგებლოთ (10.21) ფორმულით. აქ ყველა საჭირო სიდიდე ცნობილია: $\overline{X}=24.7$, $n=35$, $\sigma=3$, $z_{\alpha/2}=z_{0.05}=1.645$, ამიტომ საძიებელი ინტერვალია

$$\left(24.7-\frac{3}{\sqrt{35}}\cdot 1.645\ ;\ 24.7+\frac{3}{\sqrt{35}}\cdot 1.645\right)=(24.7-0.8\ ;\ 24.7+0.8),$$

რაც საბოლოოდ გვაძლევს (23.9 ; 25.5) ინტერვალს.

შენიშვნა.[1] ამ მაგალითის გამოყენებით კიდევ ერთხელ შევეხოთ ნდობის ინტერვალის ინტერპრეტაციის საკითხს. როგორც ვხედავთ, ჩვენს მიერ მიღებული γ-ნდობის ($\gamma=0.9$) ინტერვალია (23.9 ; 25.5), რომელიც არაა შემთხვევითი და პოპულაციის საშუალოც სავსებით განსაზღვრული (სამწუხაროდ, ჩვენთვის უცნობი) რიცხვია. ამდენად

მცდარია დებულება : $P\{\mu$ მოთავსებულია (23.9 ; 25.5) ინტერვალში$\}=0.9$.

γ-ნდობის ინტერვალის სწორი ინტერპრეტაცია ეფუძნება ალბათობის სიხშირულ ინტერპრეტაციას: თუ რაიმე ექსპერიმენტთან დაკავშირებული A ხდომილობის ალბათობა, $P(A)=\gamma$, მაშინ ამ ექსპერიმენტის მრავალჯერ განმეორებისას A ხდომილობა განხორციელდება დაახლოებით $\gamma\cdot 100\%$ შემთხვევაში (ანუ A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე მიახლოებით γ-ს ტოლი იქნება). დავუშვათ, რომ ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში, ხელმეორედ ავიღეთ 35 კრედიტის მფლობელისაგან შედგენილი შერჩევა და მიღებული მონაცემების საფუძველზე ავაგეთ ახალი ნდობის ინტერვალი, ეს პროცედურა გავიმეორეთ მესამეჯერაც და ა.შ. მივიღეთ 0.9-ნდობის ინტერვალთა მთელი სიმრავლე. ახლა თუ $A_\theta=\{\overline{X}-0.8;\overline{X}+0.8\}$, მაშინ $P_\theta(A_\theta)=\gamma=0.9$. ამიტომ, აგებულ ნდობის ინტერვალთა $\approx 90\%$ დაფარავს პოპულაციის უცნობი საშუალოს ჭეშმარიტ მნიშვნელობას.

მაგალითი **10.2.** ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის საშუალოა $\mu=18$, ხოლო სტანდარტული გადახრაა $\sigma=3$, აღებულია $n=25$ მოცულობის 30 განმეორებითი ურთიერთდამოუკიდებელი შერჩევა, რომელთა საფუძველზე აგებულია 30 ცალი 95%-იანი ნდობის ინტერვალი:

---

[1] პირველი წაკითხვისას ეს შენიშვნა შეიძლება გამოვტოვოთ.

(16.21 ; 18.56) (18.06 ; 20.40) (16.11 ; 18.47) (16.38 ; 18.73) (16.96 ; 19.31)
(15.82 ; 18.18) (16.66 ; 19.01) (17.64 ; 19.99) (16.95 ; 19.30) (16.46 ; 18.81)
(16.89 ; 19.24) (17.09 ; 19.44) (16.14 ; 18.50) (17.25 ; 19.61) (15.93 ; 18.28)
(17.38 ; 19.74) (16.47 ; 18.81) (18.15 ; 20.50) (17.30 ; 19.65) (17.68 ; 20.04)
(17.11 ; 19.46) (16.25 ; 18.60) (17.13 ; 19.48) (17.87 ; 20.22) (16.72 ; 19.07)

მონაცემები დამრგვალებულია და ამითაა გამოწვეული, რომ ინტერვალების სიგრძეები მცირედ განსხვავდება ერთმანეთისაგან (გავიხსენოთ, რომ γ-ნდობის ინტერვალის სიგრძე არაა დამოკიდებული კონკრეტულ რეალიზაციაზე, ჩვენს შემთხვევაში ინტერვალის სიგრძე ტოლია $-2\cdot\frac{3}{\sqrt{25}}\cdot 1.96\approx 2.35$). როგორც ვხედავთ, მხოლოდ ერთმა (ხაზგასმულმა) ინტერვალმა არ დაფარა პოპულაციის საშუალო, $\mu=18$. რადგან $\gamma=0.95$, ამიტომ 30 შერჩევით აგებული 0.95-ნდობის ინტერვალებიდან დაახლოებით 5%-ს (≈ 1.5) არ უნდა დაეფარა პოპულაციის საშუალო. ჩვენ დავაკვირდით მხოლოდ ერთ ასეთ შემთხვევას.

პრაქტიკაში ჩვენ ხელთ გვაქვს მხოლოდ ერთი შერჩევა, ითვლება მხოლოდ ერთი შერჩევითი საშუალო და აიგება მხოლოდ ერთი γ-ნდობის ინტერვალი. ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში ჩვენ არ ვიცით შეიცავს თუ არა ინტერვალური შეფასება (ნდობის ინტერვალი) პოპულაციის საშუალოს. უფრო მეტიც, არ არსებობს გზა, რომელიც დაგვარწმუნებდა ჩვენი დასკვნის სისწორეში. γ-ნდობის ინტერვალის ზემომოყვანილი ინტერპრეტაციაის თანახმადაც შანსი იმისა, რომ კონკრეტული შერჩევა არ ეკუთვნის იმ შერჩევათა რიცხვს, რომლებისთვისაც აგებული ნდობის ინტერვალი არ ფარავს პოპულაციის საშუალოს, მეტად მცირეა: 100-დან ~ $(1-\gamma)\cdot 100$. მაგალითად, 100 ვარიანტიდან – 10, თუ $\gamma=0.9$, 100-დან 1, თუ $\gamma=0.99$). აქედან უკვე აშკარა ხდება რამდენად მნიშვნელოვანია ნდობის γ-დონის სწორად შერჩევის პრობლემა.

შემდგომში ჩვენ ნდობის γ-დონეს დავაფიქსირებთ $(1-\alpha)$ რიცხვის მეშვეობით, სადაც $0<\alpha<1$, α ნულთან ახლომყოფი რაიმე რიცხვია.

ნდობის დონე, სიზუსტე და შერჩევის მოცულობის მოძებნა. რაც უფრო ახლოსაა $(1-\alpha)$ ერთთან, მით უფრო მაღალია ჩვენი დასკვნების საიმედოობა, მაგრამ მით უფრო განიერია ნდობის ინტერვალი (ვთვლით, რომ შერჩევის n მოცულობა ფიქსირებულია).

მართლაც, $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალის სიგრძეა $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$ და ნათელია, რომ რაც უფრო დიდია $(1-\alpha)$, მით უფრო დიდია $z_{\frac{\alpha}{2}}$ და მაშასადამე, განიერია ნდობის ინტერვალი და პირიქით. აქედან ნათელია, რომ თუ შერჩევის n მოცულობა ფიქსირებულია, ნდობის ინტერვალის სიგრძის (ანუ შეფასების სიზუსტის) შემცირება შესაძლებელია მხოლოდ ნდობის დონის, $(1-\alpha)$-ს შემცირების ხარჯზე. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ფიქსირებული $(1-\alpha)$ ნდობის დონის დროს ინტერვალის სიგანე მით უფრო მცირეა, რა უფრო დიდია შერჩევის მოცულობა, n (ე.ი. იზრდება ინტერვალური შეფასების სიზუსტე).

ბუნებრივია ისმის ამოცანა: ნდობის ფიქსირებული $(1-\alpha)$-დონისათვის მოიძებნოს შერჩევის ის მინიმალური n^* მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს შეფასების წინასწარ ფიქსირებულ სიზუსტეს, ანუ რაც იგივეა, $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალის ფიქსირებულ L სიგრძეს.

რადგან, $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალის სიგრძეა $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$, ამიტომ სასურველი მოცულობა, n^* მოსაძებნია შემდეგი განტოლებიდან:

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=L,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$n^*=\left(\frac{2\sigma}{L}z_{\alpha/2}\right)^2.$$

იმის გამო, რომ $\left(\frac{2\sigma}{L}z_{\alpha/2}\right)^2$ შეიძლება მთელი რიცხვი არ იყოს, უფრო ზუსტი იქნებოდა გვეთქვა, რომ n^* არის ის უმცირესი მთელი რიცხვი, რომელიც მეტია $\left(\frac{2\sigma}{L}z_{\alpha/2}\right)^2$-ზე, ე.ი.

$$n^*=\left[\left(\frac{2\sigma}{L}z_{\alpha/2}\right)^2\right]+1. \tag{10.22}$$

რაც უფრო მცირეა ინტერვალის სიგრძე, მით უფრო დიდია n^*, რაც სავსებით ეთანხმება ჩვენს ინტუიციას, ამავე დროს $n^*=n^*(\alpha,\sigma,L)$ წარმოადგენს σ^2 დისპერსიისა და $1-\alpha$ ნდობის დონის ზრდად ფუნქციას.

თუ გავიხსენებთ ნდობის ინტერვალის (10.21) სახეს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ როცა $n=n^*$, მაშინ

$$P\{|\overline{X}_n-\mu|\leq\varepsilon_L\}=1-\alpha,$$

სადაც $\varepsilon_L=L/2$. უმეტეს შემთხვევაში წინასწარ აფიქსირებენ სასურველ ε სიზუსტეს და (10.22) ფორმულაში L-ის ნაცვლად იღებენ $L=2\varepsilon$, საიდანაც

$$n^*=[(\sigma/\varepsilon)z_{\alpha/2}]^2+1 \tag{10.22'}$$

მაგალითად, ვთქვათ, $\sigma=3.5$, $(1-\alpha)=0.95$, $L=1$ გვაქვს

$$n^*=[7\cdot1.96]^2+1=189.$$

ნდობის ინტერვალის აგება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც პოპულაციის დისპერსია უცნობია. როგორც წინა პუნქტში ითქვა დაშვება, რომ პოპულაციის საშუალო უცნობია, ხოლო დისპერსია კი ცნობილია არარეალურია. პრაქტიკულ ამოცანებში როგორც წესი, ეს ორივე პარამეტრი უცნობია. ამ შემთხვევაში ნდობის ინტერვალის ასაგებად უნდა შევაფასოთ უცნობი დისპერსიაც და გამოვიყენოთ სტატისტიკა

$$T=\frac{\overline{X}-\theta}{S'/\sqrt{n}},$$

რომელიც განაწილებულია სტიუდენტის კანონით, $n-1$ თავისუფლების ხარისხით, ე.ი.,

$$P_\theta\left\{\frac{\overline{X}-\theta}{S'/\sqrt{n}}\leq x\right\}=t_{n-1}(x).$$

ამ ფაქტზე დაყრდნობით (1–α)-ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის აიგება ზუსტად იგივე გზით, როგორც ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში. ჩვენ არ გავიმეორებთ ამ პროცედურას (თუმცა, მკითხველს თვითონვე შეუძლია ჩაატაროს იგი) და მოვიყვანთ (1–α)-ნდობის ინტერვალის სახეს

> (1–α)-ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც დისპერსია უცნობია, შემდეგია:
>
> $$\left(\overline{X}-\frac{S'}{\sqrt{n}}t_{n-1,\alpha/2};\overline{X}+\frac{S'}{\sqrt{n}}t_{n-1,\alpha/2}\right), \qquad (10.23)$$
>
> სადაც $\overline{X}$ და S' შერჩევითი საშუალო და სტანდარტული გადახრაა, ხოლო $t_{\alpha/2,n-1}$ სტიუდენტის განაწილების α/2-კრიტიკული წერტილია.

რადგან $S'=\sqrt{\frac{n}{n-1}}S$, (1–α)-ნდობის ინტერვალი შეიძლება შემდეგი სახითაც გადაიწეროს:

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{n-1,\alpha/2};\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{n-1,\alpha/2}\right). \qquad (10.23')$$

მაგალითი **10.3.** განვიხილოთ მეოთხე თავის 4.12 მაგალითის მონაცემები. ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს: $\overline{X}$=10.26, S=4.29. ამ მონაცემების საფუძველზე ავაგოთ (1–α)-ნდობის ინტერვალი ფირმის მოსამსახურეთა სატელეფონო საუბრების საშუალო ხანგრძლივობისათვის.

ამოხსნა. სიხშირეთა ჰისტოგრამის ნორმალური განაწილების სიმკვრივესთან მიახლოებული ფორმა იძლევა საფუძველს ჩავთვალოთ, რომ პოპულაციის განაწილება ნორმალურია (იხ. ნახ. 4.7). პოპულაციის ორივე პარამეტრი, საშუალო და დისპერსია უცნობია, n=30.

ვისარგებლოთ (10.23') ფორმულით, რომლის თანახმადაც (1–α)·100%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის იქნება:

$$(10.26-\frac{4.29}{\sqrt{29}}t_{29,\,\alpha/2};\ 10.26+\frac{4.29}{\sqrt{29}}t_{29,\,\alpha/2}).$$

ვთქვათ, (1–α)=0.99, მაშინ α=0.01, $t_{0.005,29}$=2.756, $\sqrt{29}\sim5.4$. ამიტომ, 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის იქნება

$$(10.26-\frac{4.29}{5.4}2.756;\ 10.26+\frac{4.29}{5.4}2.756).$$

საბოლოოდ საძიებელი ინტერვალია (8.06 ; 12.46).

მაგალითი **10.4.** სოციალური სფეროს სამსახურები დაინტერესებულნი არიან საკითხით: საშუალოდ რამდენი საათი აქვს თავისუფალი ამერიკელ მამაკაცს კვირაში. გამოკითხული იქნა 60 შემთხვევით არჩეული მამაკაცი. გამოკითხვის შედეგად მიღებული მონაცემებით გამოთვლილი იქნა საშუალო, $\overline{X}$=37.8 სთ და სტანდარტული გადახრა S'=12.2.

ავაგოთ 95%-იანი და 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის.

ამოხსნა. თუ ჩავთვლით, რომ ამერიკელ მამაკაცთა თავისუფალი დრო (კვირის განმავლობაში) წარმოადგენს ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს, შეგვიძლია ვისარგებლოთ (10.23) ფორმულით, რომლის თანახმადაც (1–α)-ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის იქნება

$$37.8 \pm \frac{12.2}{\sqrt{60}} \cdot t_{59,\,\alpha/2}\,.$$

აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $t_{0.025,59} \approx 2$, $t_{0.005,59} \approx 2.6$, მივიღებთ შემდეგ ნდობის ინტერვალებს:

$$34.65 \le \mu \le 40.93 \qquad (95\%)$$
$$33.8 \le \mu \le 41.8 \qquad (99\%)$$

საპროგნოზო ინტერვალი ცალკეული მომავალი დაკვირვებისათვის ნორმალური პოპულაციიდან. ზოგადად ამოცანა ასე ყალიბდება: ნორმალური პოპულაციიდან აღებულია შერჩევა, $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$, რომლის საფუძველზე გვინდა განვჭვრიტოთ მომავალი დამოუკიდებელი X_{n+1} დაკვირვების სიდიდე. წერტილოვან პროგნოზს ამ სიდიდისათვის წარმოადგენს შერჩევითი საშუალო, $\overline{X}$. ამასთან $e=\overline{X}-X_{n+1}$ შეცდომის ლოდინი ნულის ტოლია ($E\overline{X}=EX_{n+1}$), ხოლო დისპერსია მოიცემა ფორმულით

$$De=\sigma^2(1+1/n),$$

სადაც σ^2-პოპულაციის დისპერსიაა. მაშასადამე,

$$e=(\overline{X}-X_{n+1})\sim N(0,\sigma^2(1+1/n));\; T=\frac{\overline{X}-X_{n+1}}{S/\sqrt{1+1/n}}\sim t(n-1),$$

საიდანაც სტანდარტული მსჯელობით ადვილი დასადგენია შემდეგი:

(1–α)-საპროგნოზო ინტერვალი ნორმალური პოპულაციიდან შესარჩევი მომავალი X_{n+1} დაკვირვებისათვის შემდეგია:

$$\left(\overline{X}-S^{*}\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\cdot t_{n-1,\,\alpha/2}\,;\; \overline{X}+S^{*}\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\cdot t_{n-1,\,\alpha/2}\right) \qquad (10.24)$$

მაგალითი **10.5.** მოცემულია 16 ჩვეულებრივი აქციის წლიური ამონაგების დაკვირვებული მნიშვნელობანი. დავუშვათ, რომ ეს მონაცემები წარმოადგენს რეპრეზენტატულ შერჩევას აქციათა ამონაგებების დიდი პოპულაციიდან, რომელიც ნორმალურადაა განაწილებული. ეს მონაცემებია (მონაცემები დამრგვალებულია):

5	–4	10	15	11	25	–5	17
–5	0	8	12	14	8	1	5

ამ მონაცემების საფუძველზე: ა) გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და სტანდარტული გადახრა; ბ) 0.95-ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის; გ) 95%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი ამ პოპულაციიდან შესარჩევი მომავალი დაკვირვებისათვის (ე.ი. პოპულაციიდან შემთხვევით არჩეული აქციის ამონაგებისათვის)

ამოხსნა.

ა) $\overline{X}=7.3$, $S^2=68.21$, $S'^2=72.9$, $S'\approx 8.5$.

ბ) 0.95-ნდობის ინტერვალი მოიცემა (10.23) ფორმულით: ($t_{15,0.025}=2.131\approx 2.13$)

$$\left(7.3-\frac{8.5}{4}\cdot 2.13\le \mu \le 7.3+\frac{8.5}{4}\cdot 2.13\right).$$

საბოლოოდ, გვექნება, რომ საშუალოსათვის 95%-იანი ნდობის ინტერვალია (2.8 ; 11.8).

გ) 95%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი მომავალი დაკვირვებისათვის აიგება (10.24) ფორმულით:

$$\left(7.3-8.5\sqrt{1+\tfrac{1}{16}}\cdot 2.13\ ;\ 7.3+8.5\sqrt{1+\tfrac{1}{16}}\cdot 2.13\right),$$

საიდანაც, უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ, რომ საძიებელი ინტერვალია (–11.36 ; 25.36).

მაგალითი 10.6. განვიხილოთ 10 შემთხვევით შერჩეულ ჰოთ დოგში ცხიმის შემცველობის მონაცემები:

25.2	21.3	22.8	17.0	29.8	21.0	16.0	25.5	20.9	19.5

ვთქვათ, ჩვენ ვაპირებთ ერთი ასეთი ტიპის ჰოთ დოგის ყიდვას და გვაინტერესებს როგორი იქნება მასში ცხიმის შემცველობა.

ამოხსნა. რათა ვისარგებლოთ (10.24) ფორმულით, გამოვთვალოთ $\overline{X}=21.9$, $S'=4.134$. თუ დავაფიქსირებთ $1-\alpha=0.95$ დონეს, მარტივი გამოთვლებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ საძიებელი საპროგნოზო ინტერვალია (12.09 ; 31.71).

ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის. ვთქვათ, ნორმალური პოპულაციიდან $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ შერჩევის საფუძველზე გვსურს ავაგოთ $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი პოპულაციის დისპერსიისათვის.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. პოპულაციის საშუალო ცნობილია და μ-ს ტოლია: ნორმალური მოდელი $N(\mu,\sigma^2)$;
2. უცნობია პოპულაციის ორივე პარამეტრი: ნორმალური მოდელი $N(\theta_1,\theta_2^2)$.

პირველ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ

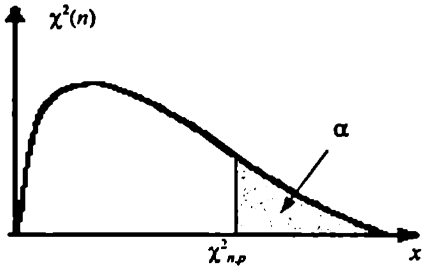
$$\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

სტატისტიკით, რომელსაც ყოველი ფიქსირებული θ-ს დროს აქვს χ^2-განაწილება, n თავისუფლების ხარისხით.

$(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის, როდესაც პოპულაციის საშუალო ცნობილია, აქვს შემდეგი სახე:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\right), \tag{10.25}$$

სადაც $\chi^2_{n,p}$ არის $\chi^2(n)$ განაწილების ზედა p-კრიტიკული წერტილი.



ნახ 10.3

იმ შემთხვევაში, როდესაც საშუალოც უცნობია, ვსარგებლობთ

$$\frac{nS^2}{\theta_2^2}$$

სტატისტიკით, რომლის განაწილება ყოველი ფიქსირებული $\theta=(\theta_1,\theta_2^2)$-ისათვის სტანდარტულია და ემთხვევა χ^2-განაწილებას $n-1$ თავისუფლების ხარისხით. მაშასადამე, თუ g_1 და g_2 მუდმივებს შევარჩევთ შემდეგი თანაფარდობებიდან: $g_1=\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ და $g_2=\chi^2_{\alpha/2,n-1}$, მაშინ

$$P_\theta\left\{g_1<\frac{nS^2}{\theta_2^2}<g_2\right\}=1-\alpha/2-\alpha/2=1-\alpha.$$

საბოლოოდ,

(1–α)-ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის უცნობი დისპერსიისათვის, როდესაც პოპულაციის საშუალოც უცნობია, აქვს შემდეგი სახე:

$$\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}},\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right), \tag{10.26}$$

სადაც S^2-შერჩევითი დისპერსიაა, ხოლო $\chi^2_{n-1,\,p}$ არის $\chi^2(n-1)$ განაწილების ზედა p-კრიტიკული წერტილი.

(1–α)-ნდობის ინტერვალი სტანდარტული გადახრისათვის მიიღება (10.26) ინტერვალის ბოლოებიდან კვადრატული ფესვის ამოღებით.

მაგალითი **10.7.** (10.6 მაგალითის გაგრძელება) ავაგოთ 95%-იან ნდობის ინტერვალი პოპულაციის უცნობი დისპერსიისათვის.

ამოხსნა. ამ მაგალითში $n=16$, $\alpha=0.05$, $\chi^2_{15,0.025}\approx 27.5$, $\chi^2_{15,0.975}\approx 6.3$, ამავე დროს გამოთვლილი გვაქვს $S^2=68.21$. ჩვენ ახლა შეგვიძლია გამოვიყენოთ (10.26) ფორმულა უცნობი დისპერსიისავთის 95%-იანი ნდობის ინტერვალის ასაგებად:

$$\left(\frac{16\cdot 68.21}{27.5}\le\sigma^2\le\frac{16\cdot 68.21}{6.3}\right).$$

საბოლოოდ, საძიებელი ინტერვალია (39.7 ; 173.2).

ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში. წინა პუნქტებში უცნობი საშუალოსათვის ნდობის ინტერვალის აგებისას ვგულისხმობდით, რომ პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული. ამასთან, შერჩევის მოცულობა ნებისმიერი იყო. ეს განპირობებული იყო იმით, რომ ნორმალური პოპულაციის შემთხვევაში შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის განაწილება ზუსტადა არის ცნობილი, რასაც საზოგადოდ, ვერ ვიტყვით იმ პოპულაციებისათვის, რომლებიც არ არის ნორმალურად განაწილებული. მიუხედავად ამისა, ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები საშუალებას იძლევა ავაგოთ ნდობის ინტერვალი პოპულაციის უცნობი საშუალოსათვის ზოგად შემთხვევაშიც, როცა შერჩევის მოცულობა, n, საკმაოდ დიდია.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც პოპულაციის დისპერსია, σ^2, ცნობილია. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის ძალით, როცა შერჩევის n მოცულობა საკმარისად დიდია

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

სტატისტიკას მიახლოებით სტანდარტული ნორმალური განაწილება აქვს. ამ ფაქტის გამოყენებით, წინა პუნქტებში ჩატარებული სტანდარტული მსჯელობით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$(\overline{X}_n - \sigma/\sqrt{n}\, z_{\alpha/2}\, ;\ \overline{X}_n + \sigma/\sqrt{n}\, z_{\alpha/2}) \qquad (10.21')$$

ინტერვალს აქვს მიახლოებით $1-\alpha$ ნდობის დონე. ასეთ ინტერვალს, ხშირად, ასიმპტოტურ ნდობის ინტერვალსაც უწოდებენ.

იმ შემთხვევაში, როდესაც პოპულაციის დისპერსიაც უცნობია, განიხილება

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S'_n / \sqrt{n}}$$

სტატისტიკა, რომელიც შერჩევის საკმარისად დიდი მოცულობისას (იმ დამატებითი ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $S'_n \xrightarrow{P} \sigma^2$, როცა $n \to \infty$), მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, ნულოვანი საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით. აქედან, სტანდარტული მსჯელობის გამოყენებით, შეიძლება გაკეთდეს დასკვნა: ინტერვალი

$$(\overline{X}_n - S'/\sqrt{n}\, z_{\alpha/2}\, ;\ \overline{X}_n + S'/\sqrt{n}\, z_{\alpha/2}) \qquad (10.23'')$$

წარმოადგენს $1-\alpha$ ნდობის დონის ასიმპტოტურ ინტერვალს (მისი ნდობის დონე მიახლოებით $(1-\alpha)$-ს ტოლია).

საზოგადოდ, როდესაც $n \geq 30$, (10.23'') ინტერვალი შეიძლება გამოყენებული იქნეს უცნობი საშუალოს ინტერვალური შეფასებისათვის $\approx(1-\alpha)\cdot 100\%$-იანი ნდობის დონით, ზოგად შემთხვევაშიც.

10.4 მაგალითის განხილვისას დავუშვით, რომ პოპულაციის განაწილება ნორმალურია და ავაგეთ შესაბამისი 95%-იანი და 99%-იანი ნდობის ინტერვალები. ამ მაგალითში შერჩევის მოცულობა (n=60) საკმარისად დიდია და აგებული ინტერვალები გამოსადეგი იქნებოდა იმ შემთხვევაშიც, ჩვენი დაშვება პოპულაციის ნორმალურად განაწილებულობის შესახებ მცდარი რომ ყოფილიყო.

ბერნულის სქემაში წარმატების უცნობი ალბათობის (პოპულაციის პროპორციის) ინტერვალური შეფასება. ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი, რომ ბერნულის სქემით აღიწერება რაიმე ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგებს შორის ჩვენთვის საინტერესო შედეგის გამოჩენა, რომელსაც „წარმატებას" ვუწოდებთ (მაგალითად, გერბის გამოჩენა მონეტის აგდებისას, ლუწი ქულის მოსვლა კამათლის აგდებისას, ისრის მონიშნულ სექტორზე გაჩერება კაზინოში რულეტის დატრიალებისას და სხვა). სახელდობრ, ყოველ ექსპერიმენტს უკავშირდება ბერნულის X შემთხვევითი სიდიდე

X		
	1	0
	p	$1-p$

სადაც, X=1, როდესაც ადგილი აქვს „წარმატებას" და X=0, წინააღმდეგ შემთხვევში, ხოლო p „წარმატების" ალბათობაა. ზოგჯერ „წარმატების" p ალბათობას პოპულაციის პროპორციასაც უწოდებენ, რაც მოტივირებულია შემდეგი მოსაზრებით: ვთქვათ, გვაქვს N ცალი ობიექტის ან ინდივიდისაგან შედგენილი პოპულაცია, რომელშიც M ინდივიდს გააჩნია რაიმე გარკვეული თვისება (მაგალითად, ადამიანთა პოპულაციაში ეს თვისებები შეიძლება იყოს: დაოჯახებულია, უმუშევარია, 200 ლარზე მეტი თვიური შემოსავალი აქვს, დადებითად აფასებს მთავრობის მიერ განხორციელებულ ეკონომიკურ რეფორმებს და სხვა). ამ შემთხვევაში, თუ წარმატებად მივიჩნევთ, რომ პოპულაციიდან შემთხვევით შერჩეულ ინდივიდს ან ობიექტს აღმოაჩნდება გამოყოფილი თვისება, ხოლო პოპულაციიდან შერჩევა ხდება დაბრუნებით. მაშინ ამ ექსპერიმენტს უკავშირდება ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე, სადაც „წარმატების" ალბათობა იქნება პოპულაციის პროპორცია, $p=M/N$.

ჩვენს ამოცანას წარმოადგენს, წარმატების უცნობი p, $0<p<1$, ალბათობის ინტერვალური შეფასების აგება n განმეორებითი დამოუკიდებელი ექსპერიმენტის შედეგების ანუ

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

შერჩევის საფუძველზე, სადაც X_i არის i-ური დამოუკიდებელი ექსპერიმენტის შედეგი.

უცნობი p ალბათობის საუკეთესო წერტილოვანი შეფასებაა ფარდობითი სიხშირე,

$$\hat{P}_n = \frac{\nu_n}{n}, \tag{10.27}$$

სადაც, $\nu_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ წარმატებათა რაოდენობაა n დამოუკიდებელ ცდაში, ამასთან

$$E\hat{P}_n = p, \qquad D\hat{P}_n = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

უცნობი p ალბათობისათვის ნდობის ინტერვალის ასაგებად იყენებენ

$$\frac{\hat{P}_n - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

სტატისტიკას, რომელიც, თუ შერჩევის მოცულობა n საკმარისად დიდია, მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, ნულოვანი საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით,

მაგრამ ამ სტატისტიკის გამოსახულებაში მნიშვნელი შეიცავს შესაფასებელ p პარამეტრს, რაც აძნელებს სტანდარტული გზით ნდობის ინტერვალის აგებას. ქვემოთ სიმარტივისთვის ჩვენ გამოვტოვებთ ქვედა ინდექს n-ს შეფასების სათანადო ფორმულებში და დავწერთ $\hat{P}$ და $\hat{Q}=1-\hat{P}$.

შეიძლება გამოვიყენოთ გამარტივებული მიდგომა, რომლის თანახმადაც მნიშვნელში უცნობი p უნდა შეიცვალოს მისი $\hat{P}$ შეფასებით და აქედან მოყოლებული ნდობის ინტერვალი აიგოს სტანდარტული მსჯელობით. ზოგიერთი ავტორის რეკომენდაციით ეს მიდგომა შეიძლება გამოყენებული იქნეს, როდესაც $n\hat{P}\geq 5$ და $n\hat{Q}\geq 5$, ზოგიერთი კი გვთავაზობს სხვა ვარიანტს: $n\hat{P}\geq 10$ და $n\hat{Q}\geq 10$.

შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალს უცნობის ალბათობისათვის აქვს სახე

$$\left(\hat{P}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n}};\hat{P}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n}}\right) \tag{10.28}$$

სადაც, $\hat{P}=\frac{\nu_n}{n}$, ν_n წარმატებათა რაოდენობაა n ცდაში.

ეს ინტერვალი შეიძლება გამოყენებული იქნეს, როცა $n\hat{P}\geq 5$, $n\hat{Q}\geq 5$. $z_{\alpha/2}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია.

აღწერილისაგან განსხვავებული მიდგომა ეყრდნობა ისევ ნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენებას:

$$P\left\{-z_{\alpha/2}\leq\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\leq z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha, \tag{10.29}$$

და შემდეგი განტოლების ამოხსნას (p ცვლადის მიმართ):

$$\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}=z_{\alpha/2}, \tag{10.30}$$

რაც შესაბამისი უტოლობების ამოხსნასაც იძლევა.

საბოლოოდ, ამ გზით მიიღება უფრო დაზუსტებული $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი

$$\frac{\hat{P}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{2n}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1+(z_{\alpha/2}^2)/n} \tag{10.31}$$

როდესაც n იმდენად დიდია, რომ შესაძლებელია $z^2_{\alpha/2}$-ის შემცველი წევრების უგულებელყოფა (ნულთან გატოლება) ამ ინტერვალიდან მიიღება (10.28) ინტერვალი

მაგალითი 10.8. საწარმო უშვებს გარკვეული ტიპის პროდუქციას. მენეჯერს აინტერესებს შეაფასოს დეფექტური პროდუქციის პროპორცია. ამ მიზნით შერჩეული იყო 400 ერთეული, რომელთა შორის დეფექტური აღმოჩნდა 60. 99%-იანი ნდობის დონით ააგეთ ინტერვალური შეფასება საწარმოს მიერ გამოშვებული დეფექტური პროდუქციის უცნობი პროპორციისათვის.

ამოხსნა. $\hat{P}=60/400=0.15$, $\hat{Q}=1-\hat{P}=0.85$, $\alpha=0.01$, $z_{\alpha/2}=2.58$. რადგან $n=400$, $n\hat{P}=60$, $n\hat{Q}=340$, ამიტომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ (10.28) ფორმულით, რომლის თანახმად საძიებელი ინტერვალია

$$0.15 \pm 2.58\sqrt{\frac{0.15\cdot 0.85}{400}} = 0.15\pm 0.046.$$

ე.ი., უცნობი პროპორციისათვის 99%-იანი ნდობის ინტერვალია (0.104;0.196), შეფასების სიზუსტეა $\varepsilon=0.046$.

ახლა შევეხოთ საკითხს, თუ როგორ მოვძებნოთ შერჩევის მინიმალური n მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს სიზუსტის მოცემულ დონეს (ანუ წინასწარ ფიქსირებული L სიგრძის ნდობის ინტერვალს) ნდობის ფიქსირებული $(1-\alpha)$-დონის შემთხვევაში.

(10.28) ფორმულით მოცემული ინტერვალის სიგრძეა

$$L = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{Q}}{n}}, \tag{10.32}$$

საიდანაც ყოველი ფიქსირებული L-ის დროს, შესაძლებელია შერჩევის n მოცულობის პოვნა:

$$n^* = \frac{4z^2_{\alpha/2}\hat{P}\hat{Q}}{L^2}. \tag{10.33}$$

თუ სასურველი სიზუსტე ε დაფიქსირებულია $(P\{|\hat{P}-p|\le\varepsilon\}\approx(1-\alpha))$, მაშინ $L=2\varepsilon$ და მივიღებთ, რომ

$$n^* = \frac{z^2_{\alpha/2}\hat{P}\hat{Q}}{\varepsilon^2}. \tag{10.33'}$$

მაგრამ აქ პრობლემა ისაა, რომ ჩვენ ჯერ არ გვაქვს ხელთ შერჩევა და შესაბამისად, $\hat{P}$-იც უცნობია. არსებობს რამდენიმე შესაძლო გამოსავალი ამ მდგომარეობიდან. ჩვენ შეიძლება წინასწარ გაგვაჩნდეს რაიმე მოსაზრება უცნობი ალბათობის მიახლოებითი მნიშვნელობის შესახებ და (10.33) გამოსახულებაში უცნობი $\hat{P}$ შევცვალოთ ამ მნიშვნელობით. შესაძლებელია სხვა გზაც, წინასწარ ავიღოთ მცირე n_0 მოცულობის შერჩევა, იქიდან ავაგოთ $\hat{P}_{n_0}$ და $\hat{P}$ შევცვალოთ ამ სიდიდით (10.33) ფორმულაში.

ერთ-ერთი ალტერნატიული მიდგომა ეყრდნობა იმ ფაქტს, რომ $p(1-p)$ ნამრავლი მაქსიმუმს აღწევს p=1/2 წერტილში და მცირდება ამ წერტილიდან ნებისმიერი მიმართულებით მოძრაობისას. ამიტომ, ყველაზე მარტივია (10.33) ფორმულაში $\hat{P}$ ავიღოთ 1/2-ის ტოლად, ე.ი.,

$$\widetilde{n} = \frac{z^2_{\alpha/2}}{L^2}\left(\frac{z^2_{\alpha/2}}{4\varepsilon^2}, \text{ თუ } \varepsilon = \frac{L}{2}\right). \tag{10.34}$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $\widetilde{n} > n^*$, იმისგან დამოუკიდებლად, თუ რა სიდიდისაა $\hat{P}$ და ამიტომ $\widetilde{n}$-ის ტოლი მოცულობის შერჩევით მიღებული ინტერვალის სიგრძე სინამდვილეში მეტი აღმოჩნდება ვიდრე L.

მაგალითი 10.9. მარკეტინგის მენეჯერს სურს შეაფასოს იმ მყიდველთა პროპორცია, რომლებიც მზად არიან შეიძინონ ახალი ტიპის სარეცხი საშუალება.

როგორი უნდა იყოს შერჩევის ის მინიმალური n^* მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს სიზუსტის ფიქსირებულ ε=0.01 დონეს 99%-იანი ნდობის დონით?

ამოხსნა. რადგან α=0.1, ამიტომ $z_{\alpha/2}=z_{0.05}$=1.645. ვისარგებლოთ (10.34) ფორმულით, მივიღებთ:

$$n^* = \frac{(1.645)^2}{4\cdot(0.04)^2} = 423.$$

(1–α)-ნდობის ზუსტი ინტერვალი პოპულაციის პროპორციისათვის. წინა პუნქტში ჩვენ ავაგეთ ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი პოპულაციის უცნობი პროპორციისათვის იმ დაშვებაში, რომ n საკმარისად დიდია (მაგალითად, $n\hat{P}>10$, $n\hat{Q}>10$).

იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ ცნობილია $\hat{P}$ სტატისტიკის ზუსტი განაწილება შესაძლებელია აგებული იქნეს ზუსტი ნდობის ინტერვალი.

ჩვენ გვერდს ავუვლით ნდობის ინტერვალის აგების მეთოდს და მოვიყვანთ მხოლოდ (1–α)-ნდობის ინტერვალის სახეს. კერძოდ, როდესაც შერჩევითი პროპორციის დაკვირვებული მნიშვნელობა (k/n)-ის ტოლია (ე.ი. ადგილი ჰქონდა k წარმატებას), $\hat{P}=k/n$, მაშინ (1–α)-ნდობის ინტერვალი იქნება (θ_1,θ_2), სადაც θ_1 და θ_2 რიცხვები მოიძებნება განტოლებებიდან:

$$\begin{aligned}\sum_{r=k}^{n} C_n^r \theta_1^r (1-\theta_1)^{n-r} &= \frac{\alpha}{2},\\ \sum_{r=0}^{k} C_n^r \theta_2^r (1-\theta_2)^{n-r} &= \frac{\alpha}{2}.\end{aligned} \tag{10.35}$$

(1–α)-ნდობის ინტერვალი პუასონის მოდელის პარამეტრისათვის. შევეხოთ ნდობის ინტერვალის აგების საკითხს პუასონის $\Pi(\theta)$ მოდელის უცნობი θ პარამეტრისათვის.

ვთქვათ, $(X_1, \ldots, X_n)$ არის n-მოცულობის შერჩევა $\mathcal{L}\{X\}\in\Pi(\theta)$ პოპულაციიდან, ე.ი. $P_\theta\{X_i=k\}=\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$, k=0, 1, 2, ... , $EX_i=\theta$, $DX_i=\theta$. ამიტომ სტატისტიკა, რომელსაც

გამოვიყენებთ θ პარამეტრისათვის ნდობის ინტერვალის ასაგებად, იქნება $\overline{X}_n$. ამასთან თუ n საკმარისად დიდია

$$\frac{\overline{X}_n-\theta}{\sqrt{\theta/n}}$$

სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული (0,1) პარამეტრებით. ამიტომ თუ $z_{\alpha/2}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α/2-კრიტიკული წერტილია,

$$P_\theta\left\{\frac{|\overline{X}_n-\theta|}{\sqrt{\theta/n}}\le z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha.$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება, რომ (1–α)-ნდობის ასიმპტოტურ ინტერვალს პუასონის განაწილების უცნობი θ პარამეტრისათვის ექნება სახე:

$$\left(\overline{X}_n-z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{X}_n/n};\overline{X}_n+z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{X}_n/n}\right). \tag{10.36}$$

შენიშვნა. შესაძლებელია, ზუსტი (1–α)-ნდობის ინტერვალის აგებაც. სახელდობრ, თუ $\overline{X}_n$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობაა k/n, მაშინ (1–α)-ნდობის ინტერვალი იქნება (θ_1,θ_2), სადაც θ_1 და θ_2 შესაბამისად, შემდეგი განტოლებების ამოხსნებია:

$$\begin{aligned}\sum_{r=k}^{\infty}e^{-n\theta_1}\frac{(n\theta_1)^r}{r!}&=\frac{\alpha}{2},\\ \sum_{r=0}^{k}e^{-n\theta_2}\frac{(n\theta_2)^r}{r!}&=\frac{\alpha}{2}.\end{aligned} \tag{10.37}$$

ნდობის ინტერვალების აგება სასრული პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც შერჩევა წარმოებს დაბრუნების გარეშე. ჩვენს მიერ აგებული ნდობის ინტერვალები პოპულაციის საშუალოსათვის გამოსადეგია მხოლოდ მაშინ, როდესაც შერჩევა წარმოებს უსასრულო, ანუ წარმოსახვითი პოპულაციიდან, ან სასრული პოპულაციიდან დაბრუნებით.

თუ შერჩევა სასრული პოპულაციიდან წარმოებს დაბრუნების გარეშე, მაშინ შერჩევის

$$X_1, \dots, X_n$$

ელემენტები აღარ წარმოადგენენ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს. ეს გამოწვეულია იმით, რომ როგორც კი ამოვარჩევთ ერთ ელემენტს პოპულაციიდან, მაშინვე იცვლება პოპულაციის სტრუქტურა და ეს ცვლილება დამოკიდებულია იმაზე, თუ კონკრეტულად რომელი ელემენტი იყო შერჩეული.

მიუხედავად ამისა, ძალაში რჩება შემდეგი ფაქტები: თუ პოპულაციის საშუალო μ-ს ტოლია, ხოლო დისპერსია კი σ^2-ისა, მაშინ

$$E\overline{X}_n=\mu,\qquad D\overline{X}_n=\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}, \tag{10.38}$$

სადაც N პოპულაციის მოცულობაა.

ამრიგად

1. $D\overline{X}_n \le \sigma^2/n$;

2. $D\overline{X}_n \to \sigma^2/n$, როცა $N\to\infty$, n კი ფიქსირებულია;

3. $D\overline{X}_n \to 0$, როცა $n\to N$; როდესაც $n=N$, მაშინ $\overline{X}_n=\mu$.

აქედან გამომდინარე შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ როდესაც პოპულაციის N მოცულობა საკმარისად დიდია, დიდია შერჩევის მოცულობა n-იც, მაგრამ არ შეიძლება $\frac{N-n}{N-1}$ თანამამრავლის უგულებელყოფა (10.21) გამოსახულებაში, $(1-\alpha)$-ნდობის ასიმპტოტურ ინტერვალს სასრული პოპულაციის უცნობი საშუალოსათვის, როდესაც პოპულაციის დისპერსია ცნობილია აქვს სახე:

$$\left(\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}z_{\alpha/2}; \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}z_{\alpha/2}\right). \qquad (10.39)$$

$\frac{N-n}{N-1}$ თანამამრავლს უწოდებენ შესწორებას პოპულაციის სასრულობაზე.

იმ შემთხვევაში, როდესაც პოპულაციის დისპერსიაც უცნობია (10.39) გამოსახულებაში σ უნდა შეიცვალოს მისი S' შეფასებით.

* * *

ამ თავში გამოყენებულია შემდეგი წიგნები: [12], [21], [22], [25], [30], [31], [33], [34], [39], [41], [55], [58], [64], [66], [69], [73], [79], [82], [83], [84], [86].

დასკვნები

მოცემულია პოპულაციის უცნობი პარამეტრის წერტილოვანი შეფასებისა და შეფასებების ჩაუნაცვლებლობის, ძალმოსილებისა და ეფექტურობის თვისებათა განსაზღვრება.

მოყვანილია რაო-კრამერის უტოლობა, რომელიც ადგენს ქვედა საზღვარს ჩაუნაცვლებელ შეფასებათა დისპერსიებისათვის ე.წ. რეგულარულ მოდელებში, რომლებსაც მიეკუთვნება ნორმალური, ბინომური, ექსპონენციალური და სხვა გავრცელებული მოდელები.

გადმოცემულია წერტილოვან შეფასებათა აგების რამდენიმე მეთოდი, ესენია: დასაჯერობის მაქსიმუმის, მომენტთა და χ^2-ის მინიმუმის მეთოდები.

მოყვანილია აგრეთვე ინტერვალური შეფასების ანუ ნდობის ინტერვალებით შეფასების განსაზღვრება და ინტერპრეტაცია.

აგებულია $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალები ნორმალური პოპულაციის საშუალოსა და დისპერსიისათვის, გარდა ამისა აგებულია ასიმპტოტური $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალები პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც პოპულაციის განაწილება არ არის ნორმალური, მაგრამ შერჩევის მოცულობა საკმარისად დიდია.

აგებულია როგორც ასიმპტოტური, ასევე ზუსტი $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალები პოპულაციის პროპორციისათვის.

სავარჯიშოები

10.1. აღწერეთ, როგორ იმოქმედებს უცნობი საშუალოსათვის აგებულ ფიქსირებული $1-\alpha$ დონის ნდობის ინტერვალის სიგრძეზე: a) შერჩევის მოცულობის ზრდა, b) სტანდარტული გადახრის ზრდა.

10.2. აღწერეთ როგორ არის დამოკიდებული ნდობის ინტერვალის სიგრძე ნდობის დონეზე. კერძოდ, რა მოუვა ნდობის ინტერვალის სიგრძეს, თუ: a) ნდობის დონე გაიზრდება 95%-დან 99%-მდე, b) ნდობის დონე შემცირდება 95%-დან 90%-მდე.

10.3. ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის დისპერსია 100-ის ტოლია, აღებულია შერჩევა, რომლის მონაცემებია

12	8	22	15	30	6	39	48

ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის.

10.4. n=75 მოცულობის შერჩევის მონაცემებმა მოგვცა: $\overline{X}_n=27.3$, $S'=7.8$. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალები უცნობი საშუალოსა და დისპერსიისათვის.

10.5. ერთ-ერთი დიდი უნივერსიტეტის სტუდენტებისაგან აღებული იქნა n=70 მოცულობის შერჩევა. მათი გამოკითხვის საფუძველზე დაადგინეს, რომ მათ მიერ ერთი კვირის მანძილზე საშინაო დავალებებზე დახარჯული საშუალო დრო შეადგენს 14.3 საათს. ჩათვალეთ, რომ $\sigma=4$ და ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის.

10.6. მარკეტინგის მენეჯერი გადაწყვეტილების პროცესშია: გაიტანოს თუ არა ახალი პროდუქცია ბაზარზე. ამის გასარკვევად საჭიროა შეფასდეს იმ პირთა პროპორცია პოპულაციაში, რომლებიც მზად არიან შეიძინონ ეს პროდუქცია. რამდენად დიდი უნდა იყოს შერჩევის მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს პოპულაციის პროპორციის 3%-იანი სიზუსტით შეფასებას, 99%-იანი ნდობის დონით?

10.7. სამედიცინო სტატისტიკოსს სურს შეაფასოს იმ ადამიანების საშუალო კლება წონაში, რომლებიც ჩაბმულნი არიან ახალ დიეტაში. წინასწარი გამოკვლევით მან დაადგინა, რომ მინიმალური კლება წონაში იყო 3 კგ, მაქსიმალური კი – 39. მოძებნეთ შერჩევის ის მოცულობა, რომელიც აუცილებელია საშუალო კლების 90%-იანი ნდობის დონით 2 კგ-ის სიზუსტით შესაფასებლად.
მითითება: გაიხსენეთ სამი სიგმას წესი ნორმალური პოპულაციისათვის.

10.8. მოცემულია 10 პასუხისმგებელი მდივნის წლიური ხელფასი ($ 1 000-ში)

35.0	67.5	51.5	53.0	38.0	42.0	29.5	31.5	46.0	37.5

ჩათვალეთ, რომ პასუხისმგებელ მდივანთა ხელფასების პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და მოძებნეთ: a) საშუალო ხელფასის ჩაუნაცვლებელი, ძალმოსილი და ეფექტური შეფასება, b) დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი და ძალმოსილი შეფასება, c) $ 40 000-ზე მეტი ხელფასის მქონე პირთა პროპორცია პოპულაციაში.

10.9. ბანკის მენეჯერს აინტერესებს შეაფასოს დეპოზიტების საშუალო მოცულობა კლიენტების გარკვეული კლასისათვის. 400 ასეთი დეპოზიტისაგან აღებული შემთხვევითი შერჩევის საშუალომ შეადგინა $\overline{X}_n$=61.23 ($), ხოლო სტანდარტული გადახრაა – S'=18.20 ($). ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი დეპოზიტების საშუალო მოცულობისათვის.

მითითება: n=400, ამიტომ შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს (11.23") ფორმულა ასიმპტოტური (1–α)-ნდობის ინტერვალის ასაგებად პოპულაციის უცნობი საშუალოსათვის.

10.10. თქვენ დაგავალეს გამოთვალოთ შერჩევის ის მინიმალური მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს ბუღალტრების საშუალო ხელფასის შეფასებას ფიქსირეული სიზუსტითა და ფიქსირებული ნდობის დონით. პოპულაციის დისპერსია უცნობია და თქვენ შეგიძლიათ რაიმე ვარაუდი გამოთქვათ მის სიდიდეზე.

ჩვენ შეგვიძლია შემოგთავაზოთ ერთ-ერთი მეთოდი: თქვენი გამოცდილებიდან და რაიმე დამატებითი ინფორმაციიდან გამომდინარე მიახლოებით დაასახელეთ ბუღალტრის მინიმალური და მაქსიმალური ხელფასები, ვთქვათ $x_{\min}$ და $x_{\max}$. შემდეგ კი შეაფასეთ პოპულაციის სტანდარტული გადახრა

$$\sigma \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{6}$$

მაგალითად, ერთ-ერთმა სტუდენტმა (I) შემდეგი წყვილი დაასახელა $x_{\min}$=$15 000, $x_{\max}$=$ 150 000 (მისი მოსაზრება ის იყო, რომ $ 15 000-ზე მცირე ხელფასის მქონე მას არავინ უნახავს, $ 150 000 კი დაასახელა იმ მოსაზრებით, რომ ბუღალტრები, საზოგადოდ, არ ეკუთვნიან მდიდართა ფენას). II სტუდენტმა კი დაასახელა წყვილი $x_{\min}$=$22 000, $x_{\max}$=$ 200 000, (მოსაზრება: მამამისის ფირმაში ყველაზე ახალგაზრდა ანალიტიკოსიც კი არ იღებს $ 22 000-ზე ნაკლებს, $ 200 000 ხელფასის მქონე ბუღალტერი მან ნახა მამამისის სააღრიცხვო ჟურნალში).

ამრიგად, I სტუდენტის შეფასებით $\sigma_1 \approx \dfrac{150000 - 15000}{6} = 22\,500,$

ხოლო, II სტუდენტის შეფასებით კი $\sigma_2 \approx \dfrac{200000 - 22000}{6} = 29\,667,$

ამ ინფორმაციაზე დაყრდნობით ორივე ვარიანტისათვის გამოთვალეთ შერჩევის მინიმალური მოცულობა, როდესაც ε=$ 5 000, α=0.05. გაუკეთეთ კომენტარი, რატომაა სასურველი სტანდარტული გადახრის შესაძლოდ ზუსტად შეფასება: რა მოყვება იმას თუ შეფასებული σ სინამდვილეში ნაკლებია, ვიდრე რეალურად არსებული და პირიქით.

10.11. ფარმაცევტული წარმოების პროდუქციის, ხარისხის კონტროლის მენეჯერმა, წინა ისტორიიდან გამომდინარე იცის, რომ ყოველი ცალკეული კაფსულა შეიცავს მინარევთა გარკვეულ დოზას, ამასთან დოზები მერყეობს. კონტროლის მექანიზმი არეგულირებს მინარევთა დოზის საშუალო დონეს. პერიოდულად კონტროლის მექანიზმი მწყობრიდან გამოდის და შესაძლოა, მინარევთა დოზის საშუალო დონე აღარ აღმოჩნდეს დასაშვებ ფარგლებში. კონტროლის მექანიზმის შემოწმების მიზნით მზა პროდუქციიდან აიღება სხვადასხვა მოცულობის შემთხვევითი შერჩევა და აიგება ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის. ითვლება, რომ მინარევთა დონის ვარიაბელობა დაახლოებით მუდმივია და მოიცემა სტანდარტული გადახრით, $\sigma=2.5$ (დოზის ერთეული).

შერჩევების მიხედვით მიღებული შედეგები არითმეტიკული საშუალოსათვის შემდეგია:

1. $n=25$, $\overline{X}_n=153.4$; 2. $n=100$, $\overline{X}_n=125.6$; 3. $n=200$, $\overline{X}_n=148.9$; 4. $n=500$, $\overline{X}_n=206.4$.

ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის და აღწერეთ, თუ როგორ იცვლება ნდობის ინტერვალების სიგანე დაკვირვებათა რიცხვის ზრდასთან ერთად.

10.12. სადაზღვევო კომპანია ატარებს ფასების (პრემიების) კატალოგის რევიზიას. რიგით აქტუარს სურს შეაფასოს იმ მოთხოვნათა საშუალო სიდიდე, რომლებიც გამოწვეულია სახანძრო შემთხვევებით გარკვეული ტიპის საცხოვრებელ სახლში. შერჩევის როლში აღებული იქნა ბოლო წლის ანგარიშსწორების მონაცემები. სულ წარმოდგენილი იყო 19 სახანძრო შემთხვევა, რომელთა მოთხოვნების საშუალო სიდიდე აღმოჩნდა $ 73 249, სტანდარტული გადახრა კი – $ 37 246.

ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის.

10.13. ერთ-ერთი დიდი ბანკის კლიენტთაგან შემთხვევით შეირჩა 60 კლიენტი და შეგროვებული იქნა შემდეგი მონაცემები: 1. თითოეული მათგანის საბალანსო ანგარიშზე მყოფი თანხების სიდიდე; 2. იმ კლიენტთა პროპორცია შერჩევაში, რომლებსაც გააჩნიათ სადებიტორო ბარათები ($\hat{p}=0.433$). ამ მონაცემების საფუძველზე შესაფასებელია ბანკის კლიენტთა საბალანსო ანგარიშის საშუალო სიდიდე (ბანკის ყველა კლიენტის საბალანსო ანგარიშისაგან შედგენილი პოპულაციის საშუალო) და სადებიტორო ბარათის მქონე კლიენტთა პროპორცია.

საბალანსო ანგარიშისათვის გამოთვლილი იქნა შერჩევითი საშუალო $\overline{X}_n=\$1499.9$ და სტანდარტული გადახრა $S'=596.9$.

a) ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსა და დისპერსიისათვის.

b) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სადებიტორო ბარათის მქონე კლიენტთა პროპორციისათვის.

10.14. შესაფასებელ პარამეტრს წარმოადგენს იმ მყიდველთა პროპორცია პოპულაციაში, რომლებიც ამჯობინებს X მარკის კონსერვირებულ პროდუქციას Y

მარკისას. ამ მიზნით შემთხვევითად შერჩეულ 100 ადამიანს დაურიგდა X და Y მარკის კონსერვები ეტიკეტების გარეშე და იმ ფაქტორთა ჩამონათვალი, რომელთა მიხედვითა უნდა შეფასებულიყო კონსერვირებული პროდუქციის ხარისხი. ის მარკა, რომელიც მიიღებდა ყველაზე მაღალ აგრეგირებულ შეფასებას ფაქტორების მიხედვით, ჩაითვლებოდა უკეთესად. მიღებული იქნა შედეგები:

იმ პირთა რაოდენობა, რომლებიც ამჯობინებენ X მარკის კონსერვს – 59,

იმ პირთა რაოდენობა, რომლებიც ამჯობინებენ Y მარკის კონსერვს – 37,

დანარჩენები – 4.

a) შეაფასეთ პოპულაციის უცნობი პროპორცია.

b) ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი.

(პირველ რიგში გადაწყვიტეთ, გამოდგება თუ არა ნორმალური აპროქსიმაცია?)

10.15. ამომრჩეველთა სიიდან აღებული იქნა n=1000 მოცულობის შემთხვევითი შერჩევა. თითოეულ ამომრჩეველს უნდა შეეფასებინა პრეზიდენტის პოპულარობა მიმდინარე მომენტში. ამ მიზნით ამომრჩეველს დადებითი პასუხი უნდა გაეცა მხოლოდ ერთზე შემდეგი სამი წინადადებიდან:

1. პრეზიდენტი კარგად ასრულებს მოვალეობას;
2. პრეზიდენტი ვერ ასრულებს მოვალეობას;
3. აზრი არ გამაჩნია.

პირველ წინადადებაზე დადებითი პასუხი გასცა 59%-მა. ამ მონაცემების საფუძველზე:

a) შეაფასეთ იმ პირთა პროპორცია პოპულაციაში, რომლებიც დადებითად აფასებენ პრეზიდენტის მოღვაწეობას;.

b) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ამ პროპორციისათვის.

10.16. საწარმოში ხარისხის კონტროლის მენეჯერის ერთ-ერთი ფუნქციაა განსაზღვროს დეფექტური ხელსაწყოების წილი წარმოებულ პროდუქციაში. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ხარისხის შემოწმებისას საჭირო ხდება ხელსაწყოს დაშლა, ამავე დროს იმასაც, რომ არანაკლებ მნიშვნელოვანია პოპულაციის უცნობი პროპორციის შეფასების სიზუსტეც, გასაგები ხდება რამდენად აქტუალურია შერჩევის იმ მინიმალური n^* მოცულობის მოძებნა, რომელიც იძლევა შეფასების წინასწარ დასახელებულ ε სიზუსტეს მოცემული $1-\alpha$ ნდობის დონით, α=0.05, ε=0.005.

11

პარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმება

§1. სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმება. ამოცანის ზოგადი დასმა

მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი მიზანი, როგორც ეს წინა თავშიც აღვნიშნეთ, არის ჩატარებული დაკვირვებების საფუძველზე სტატისტიკური დასკვნების მიღება შესასწავლი ექსპერიმენტის ალბათური მოდელის შესახებ. ამ თავში შევისწავლით სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების მეთოდებს. რაიმე მოსაზრებას გენერალური ერთობლიობის განაწილების კანონის ან მისი რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ სტატისტიკური ჰიპოთეზა ეწოდება. ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანა მდგომარეობს ისეთი წესის – სტატისტიკური კრიტერიუმის (ან მოკლედ კრიტერიუმის) ჩამოყალიბებაში, რომელიც საშუალებას მოგვცემს რეალურად ჩატარებული დაკვირვებების შედეგად მიღებული შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე შევამოწმოთ გამოთქმული მოსაზრების (ჰიპოთეზის) სამართლიანობა. ასეთი წესის შემუშავება და დასაბუთება, ოპტიმალობის მოთხოვნის თვალსაზრისით, წარმოადგენს სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების თეორიის საგანს. სტატისტიკურ ჰიპოთეზებს H სიმბოლოთი აღნიშნავენ (პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა Hypothesis – ჰიპოთეზა). ჰიპოთეზები თავისი ბუნებით შეიძლება ეხებოდეს გენერალური ერთობლიობის განაწილების სახეს ან მის რაიმე თვისებებს. ჰიპოთეზას ეწოდება მარტივი, თუ ის ცალსახად განსაზღვრავს გენერალური ერთობლიობის განაწილების კანონს; წინააღმდეგ შემთხვევაში მას რთული ეწოდება. მოვიყვანოთ პრაქტიკაში უფრო მეტად გავრცელებულ სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა ჩამონათვალი:

1. ჰიპოთეზა განაწილების სახის შესახებ – ჩატარებული დაკვირვებების საფუძველზე შესამოწმებელია ჰიპოთეზა გენერალური ერთობლიობის $\mathcal{L}(X)=F$ განაწილების კანონის შესახებ:

ა) H_0: $F(x)=F_0(x)$,

სადაც $F_0(x)$ ცალსახად განსაზღვრული (ცნობილი) განაწილების ფუნქციაა ან

ბ) H_0: $F\in \mathcal{F}$,

სადაც ჩანაწერი $\mathcal{L}(X)=F\in \mathcal{F}$ ნიშნავს, რომ გენერალური ერთობლიობის განაწილების F ფუნქცია განაწილებათა $\mathcal{F}$ ოჯახის წარმომადგენელია. ხშირად განაწილების ფუნქციათა ოჯახი განისაზღვრება პარამეტრული სახით: $\mathcal{F}=\{F(x,\theta),\theta\in\Theta\}$. ა) შემთხვევაში ჰიპოთეზა მარტივია, ხოლო ბ) შემთხვევაში – რთული.

2. ერთგვაროვნების ჰიპოთეზა – დავუშვათ $(X_{i1},X_{i2},\dots,X_{in_i})$, $i=1,2,\dots,k$ დამოუკიდებელ დაკვირვებათა k სერიაში მიღებული შერჩევებია. ასეთ შემთხვევაში პასუხი უნდა გაეცეს შემდეგ შეკითხვას: გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ შერჩევები მიღებულია ერთი და იგივე შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად, ანუ დაკვირვებათა განაწილების კანონი ერთი და იგივეა ყველა სერიისათვის? არის თუ არა მონაცემები ერთგვაროვანი? ამ შემთხვევაში ამოცანა მდგომარეობს შემდეგი სახის ჰიპოთეზის შემოწმებაში:

H_0:$F_1(x)= F_2(x)=\cdots=F_k(x)$,

სადაც $F_i(x)$ i-ური სერიის განაწილების (საზოგადოდ უცნობი) ფუნქციაა.

3. დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა – ვთქვათ, გვაქვს უცნობი $F(x, y)$ განაწილების მქონე ორგანზომილებიან (X, Y) შემთხვევით სიდიდეზე $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ დამოუკიდებელი დაკვირვებები. შესამოწმებელია მოსაზრება იმის შესახებ, რომ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ შესამოწმებელია დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა

H_0 : $F(x, y)=F_X(x)\ F_Y(y)$,

სადაც $F_X(x)$ და $F_Y(y)$ შესაბამისად X-ისა და Y-ის განაწილების ფუნქციებია.

4. შემთხვევითობის ჰიპოთეზა – ვთქვათ, ექსპერიმენტის შედეგი აღიწერება n-განზომილებიანი $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის $x=(x_1,\ldots,x_n)$ რეალიზაციით. X განაწილების ფუნქციაა $F_X(x)$. შეიძლება თუ არა ვამტკიცოთ, რომ $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის კომპონენტები X_i, i=1,2,...,n, დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია? ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ შესამოწმებელია შემთხვევითობის ჰიპოთეზა:

H_0 : $F_X(x)=F(x_1)\ F(x_2)\ \ldots F(x_n)$,

სადაც $F(x)$ რაიმე ერთგანზომილებიანი განაწილების ფუნქციაა.

5. პარამეტრული ჰიპოთეზები – დავუშვათ, რომ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ შერჩევაა გენერალური ერთობლიობიდან, რომლის განაწილების კანონია $\mathcal{L}(X)$, ამასთან ცნობილია, რომ $\mathcal{L}(X)\in F$, სადაც $F=\{F(x;\theta):\theta\in\Theta\}$ წარმოადგენს განაწილების ფუნქციათა რაიმე პარამეტრულ ოჯახს, Θ – პარამეტრული სიმრავლეა. ამრიგად, ჩვენ ვუშვებთ, რომ გენერალური ერთობლიობის განაწილების ფუნქციის ფორმა ცნობილია, მაგრამ განაწილება შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს. ამ შემთხვევაში ჰიპოთეზები ფაქტიურად ეხება განაწილების უცნობ პარამეტრს. ამიტომ მათ პარამეტრულ ჰიპოთეზებს უწოდებენ. პარამეტრულ ჰიპოთეზათა მაგალითებია: $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta \le \theta_0$, $H_2 : \theta > \theta_0$ და ყველგან ასეთ ჩანაწერებში θ_0 წარმოადგენს რაიმე ცნობილ რიცხვს. პარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმებისას ძირითად (ნულოვან) H_0 ჰიპოთეზასთან ერთად განიხილება ალტერნატიული (საწინააღმდეგო) H_1 ჰიპოთეზა და გენერალური ერთობლიობიდან ამოღებული $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ შერჩევის საფუძველზე მოწმდება, თუ რომელი ჰიპოთეზაა სამართლიანი, H_0 თუ H_1.

პარამეტრული ჰიპოთეზებისაგან განსხვავებით პირველ ოთხ ამოცანაში ყალიბდება (რა თქმა უნდა, შესაბამისი მათემატიკური ფორმით) ერთადერთი H_0 ჰიპოთეზა და საჭიროა სტატისტიკური მონაცემების (შერჩევის) საფუძველზე შემოწმდეს ეთანხმება ეს მონაცემები H_0 ჰიპოთეზას, თუ უარყოფს მას. გადაწყვეტილების მიღების შესაბამის წესს თანხმობის კრიტერიუმები ეწოდება. უმეტეს შემთხვევაში თანხმობის კრიტერიუმის აგების ზოგადი მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს:

1. დავუშვათ, რომ H_0 ჰიპოთეზა სამართლიანია.

2. ავაგოთ ისეთი $T_n=T_n(X)=T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს ემპირიული მონაცემების შესაბამისი ჰიპოთეტური მნიშვნელობებიდან გადახრის საზომს და რომლის ზუსტი ან ზღვარითი (როცა $n\to\infty$) განაწილების კანონის მოძებნა H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას შესაძლებელია. ასეთ T_n სტატისტიკას კრიტერიუმის სტატისტიკა ეწოდება. ხშირ შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკა ღებულობს მხოლოდ დადებით

მნიშვნელობებს. ამასთან, თუ H_0 ჰიპოთეზა რთულია, $T_n=T_n(X)$ სტატისტიკის განაწილების კანონი ერთი და იგივე უნდა იყოს H_0-ის შემადგენელი ყველა მარტივი ჰიპოთეზისათვის.

3. ვიგულისხმოთ, რომ კრიტერიუმის სტატისტიკა აგებულია (ცნობილია T_n სტატისტიკის სახე და მისი განაწილების ზუსტი ან მიახლოებითი კანონი H_0-ის სამართლიანობის პირობებში). ვთქვათ U არის T_n სტატისტიკის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე. U სიმრავლიდან გამოვყოთ ისეთი $U_{1\alpha}$ არე, რომ წინასწარ დასახელებული მცირე $\alpha>0$ რიცხვისათვის $\{T_n\in U_{1,\alpha}\}$ ხდომილობის ალბათობა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$P\{T_n\in U_{1,\alpha}|H_0\}\leq\alpha,$$

სადაც ჩანაწერი $P\{T_n\in U_{1,\alpha}|H_0\}$ აღნიშნავს $\{T_n\in U_{1,\alpha}\}$ ხდომილობის ალბათობას H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში.

H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $\{T_n(X)\in U_{1\alpha}\}$ ხდომილობის ალბათობა არ აღემატება α-ს, α კი იმდენად მცირეა, რომ α-ს ტოლი ალბათობის მქონე ხდომილობის განხორციელება ერთეულოვან ცდაში პრაქტიკულად შეუძლებელად შეგვიძლია ჩავთვალოთ (იხ. მეხუთე თავი), ამიტომ ის ფაქტი, რომ T_n სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა აღმოჩნდა $U_{1\alpha}$ არეში $\{t_n=T_n(x)\in U_{1\alpha}\}$ ანუ $\{T_n(X)\in U_{1\alpha}\}$ ხდომილობა მაინც განხორციელდა, მეტყველებს იმის სასარგებლოდ, რომ H_0 ჰიპოთეზა მცდარია.

ამრიგად, H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების წესი შემდეგნაირად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ: წინასწარ დასახელებული α-სათვის, თუ მოცემული $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ რეალიზაცია ისეთია, რომ $t_n=T_n(x)\in U_{1,\alpha}$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ($t_n\notin U_{1,\alpha}$) H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ არსებობს. შევნიშნოთ, რომ ფაქტი $t_n\notin U_{1,\alpha}$ არ ამტკიცებს, რომ ჰიპოთეზა სამართლიანია; ის მხოლოდ მიუთითებს იმაზე, რომ მონაცემებსა და თეორიულ დაშვებებს შორის თანხმობა საკმარისად კარგია (α დონეზე)

გადაწყვეტილების მიღების ასეთი წესის გამო $U_{1,\alpha}$-ს კრიტიკულ არეს უწოდებენ. α-ს კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის დონე ეწოდება. თანხმობის კრიტერიუმის ზემოთ განაზღვრული წესის თანახმად, α არის H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის ალბათობა პირობებში, როცა ეს უკანასკნელი სამართლიანია. ყველაზე ხშირად მნიშვნელოვნობის დონედ იღებენ 0.05-ს (ან 0.01-ს), რაც იმას ნიშნავს, რომ ასიდან საშუალოდ ხუთ (ერთ) შემთხვევაში შესაძლოა უარვყოთ სამართლიანი H_0 ჰიპოთეზა.

ერთი და იგივე ჰიპოთეზის შესამოწმებლად სხვადასხვა კრიტერიუმის სტატისტიკის საფუძველზე შეიძლება აგებულ იქნას სხვადასხვა თანხმობის კრიტერიუმი. მათ შორის საუკეთესოს ასარჩევად უნდა გაგვაჩნდეს კრიტერიუმების შედარების მეთოდი. შემოვიყვანოთ ალტერნატიული ჰიპოთეზის და კრიტერიუმის სიმძლავრის ცნება:

X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ნებისმიერ $F_X(x)=F(x)$ კანონს, რომელიც მოცემულ სიტუაციაში შეიძლება აღმოჩნდეს ჭეშმარიტი და რომელიც განსხვავდება H_0 ჰიპოთეზით განსაზღვრული განაწილების კანონისაგან, ეწოდება ალტერნატიული განაწილების კანონი, ხოლო ალტერნატიულ განაწილებათა კანონების ერთობლიობას — ალტერნატიული ჰიპოთეზა. იგი H_1 სიმბოლოთი აღინიშნება. ვთქვათ, შესამოწმებელი H_0 ჰიპოთეზისათვის $T_n(X)$ სტატისტიკის საფუძველზე აგებულია α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტერიუმი, რომლის შესაბამისი კრიტიკული არეა $U_{1,\alpha}$. სიდიდეს

$$W(F)=P\{T_n\in U_{1,\alpha}|F\},\ \text{ნებისმიერი } F\text{-ისათვის},\ F\in H_1,$$

რომელიც წარმოადგენს $\{T_n \in U_{1,\alpha}\}$ ხდომილობის ალბათობას H_1 ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში, კრიტერიუმის სიმძლავრე ეწოდება .

$W(F)$ ახასიათებს სწორი გადაწყვეტილების მიღების ალბათობას, როცა ნულოვანი ჰიპოთეზა მცდარია. $W(F)$ ფუნქციის ტერმინებში კრიტერიუმი მით უკეთესია (უფრო „მძლავრია"), რაც მეტია მისი სიმძლავრე. კრიტერიუმის სიმძლავრის გამოთვლა მეტად რთული ამოცანაა, ვინაიდან ამისათვის საჭიროა კრიტერიუმის სტატისტიკის განაწილების კანონის ცოდნა არა მხოლოდ ნულოვანი, არამედ ალტერნატიული ჰიპოთეზების შემთხვევაშიც. $W(F)$ ფუნქციის გამოთვლა ყველა შემთხვევაში არ ხერხდება.

კრიტერიუმის აგების მნიშვნელოვანი მახასიათებელია შესაბამისი ალგორითმის პრაქტიკული რეალიზაციის სიმარტივე. ხშირად უპირატესობა ენიჭება მარტივ კრიტერიუმს იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც ეს უკანასკნელი არაა ოპტიმალური თეორიული თვალსაზრისით.

მომავალში სხვადასხვა ამოცანების გადაწყვეტისას (ისევე, როგორც ეს სტატისტიკურ ლიტერატურაშია მიღებული) ჩვენ მივუთითებთ მხოლოდ კრიტერიუმის სტატისტიკების (ზუსტ ან ზღვრულ) განაწილებებს და შესაბამის კრიტიკულ არეებს.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ პარამეტრული ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანას.

§2. პარამეტრული ჰიპოთეზები. ძირითადი ცნებები

დავუშვათ, რომ გენერალური ერთობლიობის განაწილების კანონი $\mathcal{L}(X) \in F$, სადაც $F=\{F(x;\theta);\theta\in\Theta\}$ წარმოადგენს განაწილების ფუნქციათა რაიმე პარამეტრულ ოჯახს, Θ – პარამეტრული სიმრავლეა, $\Theta\subseteq R^k$, k რაიმე სასრული რიცხვია. როდესაც $k=1$, საქმე გვაქვს სკალარულ (ერთგანზომილებიან) პარამეტრთან, ხოლო $k=2$ შემთხვევაში კი – ორგანზომილებიან პარამეტრთან. ხშირად, ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ამ ორი შემთხვევის განხილვით.

ამრიგად ჩვენ ვუშვებთ, რომ გენერალური ერთობლიობის განაწილების ფუნქციის ფორმა ცნობილია, მაგრამ განაწილება შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს და მაშასადამე, ჰიპოთეზა ფაქტიურად ეხება განაწილების უცნობ θ პარამეტრს. სწორედ ამიტომ ასეთ ჰიპოთეზებს პარამეტრული ჰიპოთეზები ეწოდება. საზოგადოდ, პარამეტრული H_0 ჰიპოთეზა მოიცემა Θ-ს გარკვეული Θ_0 ქვესიმრავლის დაფიქსირებით, $H_0 : \theta \in \Theta_0$.

პარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმებისას ძირითად (ნულოვან) H_0 ჰიპოთეზასთან ერთად განიხილება ალტერნატიული (საწინააღმდეგო) H_1 ჰიპოთეზა H_1: $\theta \notin \Theta_0$.. H_0 პარამეტრულ ჰიპოთეზას (ალტერნატივას) ეწოდება მარტივი, თუ Θ_0 ($\Theta_1=\Theta\backslash\Theta_0$) ერთელემენტიანი სიმრავლეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჰიპოთეზას ეწოდება რთული.

ვთქვათ, ალბათური მოდელის შესახებ გამოთქმულია ორი მოსაზრება, რომლებიც ჩამოყალიბებულია ნულოვანი, H_0 და ალტერნატიული, H_1 ჰიპოთეზების სახით. გენერალური ერთობლიობიდან ამოღებული n მოცულობის შერჩევითი მნიშვნელობებია $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. ამ მონაცემების საფუძველზე უნდა მივიღოთ გადაწყვეტილება: უარვყოთ, თუ არა H_0 ჰიპოთეზა.

ამოცანის გადასაჭრელად უნდა აიგოს კრიტერიუმი (გადაწყვეტილების მიღების წესი), რომელიც პასუხს გასცემს შეკითხვას: დაკვირვებულ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ მნიშვნელობათა როგორი ერთობლიობისათვის უარვყოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა და როგორისათვის

– არა. ფაქტობრივად კრიტერიუმმა x-ის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე უნდა გაყოს ორ თანაუკვეთ $\mathbf{X}_0$ და $\mathbf{X}_1$ არედ, რომელთაგან $\mathbf{X}_0$ იმ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ წერტილთა სიმრავლეა, რომელთათვისაც H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს, ხოლო $\mathbf{X}_1$ იმ წერტილთა სიმრავლეა, რომელთათვისაც H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ. გადაწყვეტილების მიღების ასეთი წესის გამო, $\mathbf{X}_0$ სიმრავლეს H_0 ჰიპოთეზის მიღების არეს, ხოლო $\mathbf{X}_1$ სიმრავლეს H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის ანუ კრიტიკულ არეს უწოდებენ. ამრიგად, გადაწყვეტილება H_0 ჰიპოთეზის მიღების ან უარყოფის შესახებ მიიღება x შერჩევითი ვექტორის რიცხვითი მნიშვნელობის საფუძველზე: თუ $x\in\mathbf{X}_1$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს. $\mathbf{X}_1$ კრიტიკული არით განსაზღვრულ კრიტერიუმს სიმოკლისათვის $\mathbf{X}_1$ კრიტერიუმს უწოდებენ.

ჰიპოთეზათა გარჩევის ზემოთ ჩამოყალიბებული წესის გამოყენებისას ჩვენ შეიძლება დავუშვათ შემდეგი ორი სახის შეცდომა:

1) უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა მაშინ, როდესაც ის სამართლიანია. ასეთ შეცდომას პირველი გვარის შეცდომა ეწოდება.

2) არ უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა მაშინ, როდესაც ის სამართლიანი არ არის. ასეთ შეცდომას მეორე გვარის შეცდომა ეწოდება.

11.1 ცხრილში ნაჩვენებია გადაწყვეტილების მიღების შესაძლო ვარიანტები და შესაბამისი შეცდომები.

ცხრილი 11.1

	გადაწყვეტილება	
	არ უარვყოფთ H_0-ს	უარვყოფთ H_0-ს
სამართლიანია H_0	მიღებულია სწორი გადაწყვეტილება	მიღებულია არასწორი გადაწყვეტილება, პირველი გვარის შეცდომა
სამართლიანია H_1	მიღებულია არა სწორი გადაწყვეტილება, მეორე გვარის შეცდომა	მიღებულია სწორი გადაწყვეტილება

კრიტიკული არის აგების ერთ-ერთი შესაძლო გზა შემდეგია: განიხილავენ სპეციალურად შერჩეულ $T_n=T(X_1,X_2,...,X_n)$ სტატისტიკას მნიშვნელობებით R^1-ში და მისი მეშვეობით განსაზღვრავენ კრიტიკულ არეს U_1-ს, $U_1\subset R^1$. მოცემული $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ რეალიზაციისათვის, თუ $t_n=T_n(x)\in U_1$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, ანუ ვიღებთ H_1 ჰიპოთეზას. ხოლო თუ $t_n=T_n(x)\in R^1\backslash U_1$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ არსებობს. $T_n=T(X_1,X_2,...,X_n)$ სტატისტიკას კრიტერიუმის სტატისტიკა (ანუ ტესტის სტატისტიკა) ეწოდება. თუ U_1 კრიტიკული არისა და $T_n(X)$ სტატისტიკის მეშვეობით განვსაზღვრავთ $\mathbf{X}_1=\{x : T_n(x)\in U_1\}$ სიმრავლეს, მაშინ ცხადია, რომ $\{X\in\mathbf{X}_1\}$ და $\{T_n\in U_1\}$ ხდომილობები ეკვივალენტურია. ამის გამო ჩვენ ხშირ შემთხვევაში შემოვიფარგლებით კრიტერიუმის T_n სტატისტიკისა და შესაბამისი კრიტიკული არის მითითებით.

სასურველია, რომ კრიტერიუმის სტატისტიკა იყოს მარტივად გამოსათვლელი და რაც უფრო მნიშვნელოვანია, უნდა ვიცოდეთ მისი ზუსტი ან ზღვარითი განაწილება. T_n სტატისტიკის საშუალებით აგებულ კრიტიკულ არეებს, როგორც წესი, შემდეგი სახე აქვთ:

ა) $\mathrm{X}_1=\{x: T_n(x)\geq c\}$, ბ) $\mathrm{X}_1=\{x: T_n(x)\leq c\}$, გ) $\mathrm{X}_1=\{x: |T_n(x)|\geq c\}$.

მოხერხებულია პირველი და მეორე გვარის შეცდომების ალბათობების შემდეგი სიმბოლური სახით ჩაწერა:

- $P(H_1|H_0)$–პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა,
- $P(H_0|H_1)$– მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა. (ამ ალბათობას β ასოთი აღნიშნავენ)

ე.ი.

$$P(H_1|H_0)\equiv P\{X\in \mathrm{X}_1|\text{სამართლიანია } H_0\}\equiv P\{X\in \mathrm{X}_1|H_0\}\equiv P\{T_n\in U_1|H_0\}, \tag{11.1}$$

$$P(H_0|H_1)\equiv P\{X\notin \mathrm{X}_1|\text{სამართლიანია } H_1\}\equiv P\{X\notin \mathrm{X}_1|\, H_1\}\equiv P\{T_n\notin U_1|H_1\}. \tag{11.2}$$

H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის ალბათობას, როცა სამართლიანია H_1 ალტერნატივა, ანუ

$$1-P(H_0|H_1)\equiv P\{X\notin \mathrm{X}_1|H_1\}\}\equiv P\{T_n\notin U_1|H_1\} \tag{11.3}$$

სიდიდეს X_1 (T_n) კრიტერიუმის სიმძლავრეს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ (11.1) და (11.2) გამოსახულებებში ლაპარაკია ერთი და იმავე ხდომილობის, X_n შემთხვევითი ვექტორის (T_n შემთხვევითი სიდიდის) კრიტიკულ არეში მოხვედრის ალბათობაზე, მხოლოდ პირველ შემთხვევაში ნულოვანი, ხოლო მეორეში – ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს; პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა განსაზღვრავს არასწორი გადაწყვეტილების მიღების ალბათობას იმ შემთხვევაში, როცა სამართლიანია ნულოვანი ჰიპოთეზა, ხოლო კრიტერიუმის სიმძლავრე განსაზღვრავს სწორი გადაწყვეტილების მიღების ალბათობას იმ შემთხვევაში, როცა სამართლიანია H_1 ჰიპოთეზა .

სასურველია კრიტიკული არე ისე შეირჩეს, რომ როგორც პირველი, ისე მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა იყოს მცირე. მაგრამ ერთდროულად ამ ორივე ალბათობის შემცირება შეუძლებელია და, მაშასადამე, მოსაძებნია გარკვეული კომპრომისი. სახელდობრ, აფიქსირებენ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობის რაიმე α დონეს, ანუ განიხილავენ ისეთ X_1 (U_1) კრიტიკულ არეებს, რომელთათვის

$$P\{\, X_n\in \mathrm{X}_1|H_0\}\equiv P\{\, T_n\in U_1|H_0\}\leq \alpha, \tag{11.4}$$

და მათ შორის აირჩევენ ისეთ კრიტიკულ არეს, რომლის სიმძლავრე მაქსიმალურია.

α რიცხვს კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის დონე ეწოდება.

α დონე ამოცანის შინაარსიდან აირჩევა; ხშირად α=0.05 (ან 0.01-ს), რაც იმას ნიშნავს, რომ ასიდან საშუალოდ ხუთ (ერთ) შემთხვევაში შესაძლოა უარვყოთ სამართლიანი H_0 ჰიპოთეზა.

მეორეს მხრივ, თუ მარტივი H_0 და H_1 ჰიპოთეზების გარჩევისას მნიშვნელოვნობის α=0.05 დონისათვის აიგო კრიტიკული არე და გამოთვლილ იქნა კრიტერიუმის სიმძლავრე, რომელიც, ვთქვათ, 0.65-ის ტოლია, ეს იმას ნიშნავს, რომ H_1 ალტერნატივის სამართლიანობის დროს ასიდან საშუალოდ 65 შემთხვევაში მივიღებთ სწორ გადაწყვეტილებას (უარვყოფთ H_0-ს), ხოლო 100-დან საშუალოდ 35 შემთხვევაში ვიღებთ არასწორ გადაწყვეტილებას (არ უარვყოფთ H_0-ს)

როგორც ვხედავთ, კრიტერიუმის აგებისას თავდაპირველად ფიქსირდება პირველი გვარის შეცდომის ალბათობის დასაშვები დონე, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ პირველი გვარის შეცდომა მიჩნეულია უფრო სერიოზულად, ვიდრე მეორე გვარისა.

საბოლოოდ პოთეზათა შემოწმების ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება დაიყოს შემდეგ ეტაპებად:

I. H_0 და H_1 ჰიპოთეზების ჩამოყალიბება,
II. კრიტერიუმის T_n სტატისტიკის შერჩევა,
III. მნიშვნელოვნობის α დონის მითითება და U_1 კრიტიკული არის დადგენა ,
IV. $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ შერჩევის საფუძველზე კრიტერიუმის სტატისტიკის $t_n=T_n(x)$ რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა,
V. გადაწყვეტილების მიღება: თუ $t_n \in U_1$, მაშინ უარვყოფთ H_0 ჰიპოთეზას, ანუ სამართლიანად ჩავთვლით H_1-ს, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

საბოლოო შედეგი მნიშვნელოვნად ითვლება მაშინ, როცა H_0 ჰიპოთეზა უარყოფილია. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ α-მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა შემდეგი დასკვნა: სამართლიანია H_1 ჰიპოთეზა.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანებს ნორმალურად განაწილებული პოპულაციის პარამეტრებისათვის და ჰიპოთეზათა გარჩევის ამოცანას უცნობი ალბათობის შესახებ ბერნულის სქემაში.

§3. მარტივი ჰიპოთეზების შემოწმება ნორმალური გენერალური ერთობლიობის საშუალოსათვის

მაგალითი **11.1.** სამკერვალო საამქრო სხვადასხვა სიმტკიცის ქსოვილებისაგან კერავს სხვადასხვა დანიშნულების ტანსაცმელს. ქსოვილების სიმტკიცე იზომება პირობით ერთეულებში. 69-ის ტოლი სიმტკიცის მქონე ქსოვილისაგან იკერება სპეციალური ტანსაცმელი, ხოლო 66-ის ტოლი სიმტკიცის მქონე ქსოვილისაგან იკერება ფართო ასორტიმენტის ტანსაცმელი. ცნობილია, რომ ორივე შემთხვევაში სტანდარტული გადახრა 3.5-ის ტოლია. დაკარგულ იქნა ქსოვილების ხარისხის დამადასტურებელი სერტიფიკატი. გადაწყვეტილების მისაღებად, თუ რომელი სახის ტანსაცმელი შეიკეროს ქსოვილების ამ პარტიით, გაზომილ იქნა შემთხვევით არჩეული 9 ქსოვილის სიმტკიცე, რომელთა მნიშვნელობებია 67.8; 69.3; 67.2; 68.8; 66.7; 68.9; 67.8; 68.1; 67.4. უნდა აღვნიშნოთ, რომ სამკერვალო საამქროსათვის უფრო მომგებიანია ფართო ასორტიმენტის ტანსაცმლის შეკერვა. ამ ინფორმაციის საფუძველზე როგორი გადაწყვეტილება უნდა მიიღოს საამქროს მენეჯერმა?

პირობის თანახმად ქსოვილების შესაძლო სიმტკიცე შეიძლება იყოს 66 ან 69. ქსოვილის სიმტკიცე დამოკიდებულია ნართის ხარისხზე, ქსოვის ტექნოლოგიაზე, საქსოვი დაზგის გამართვის ხარისხზე და მრავალ სხვა ფაქტორზე, რომელთა ჩამოთვლა შორს წაგვიყვანს. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ თითოეული ფაქტორის ზეგავლენა ქსოვილის სიმტკიცეზე არაა დამოკიდებული სხვა ფაქტორებზე და ყოველი მათგანის ზეგავლენა მცირეა ჯამურთან შედარებით. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად უნდა ველოდოთ, რომ ქსოვილის სიმტკიცე ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა უცნობი მათემატიკური ლოდინით და 3.5-ის ტოლი დისპერსიით.

ამრიგად,შესამოწმებელია ჰიპოთეზა ნორმალური პოპულაციის უცნობი μ საშუალოს შესახებ. რადგან საამქროსათვის უფრო მომგებიანია ფართო ასორტიმენტის ტანსაცმლის შეკერვა, ამიტომ მისთვის მნიშვნელოვანია შეცდომა: მიიღოს დასკვნა, რომ ქსოვილის სიმტკიცე 69-ის ტოლია, როდესაც სინამდვილეში სიმტკიცე 66-ის ტოლია. აქედან გამომდინარე ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები ასე ყალიბდება:

$H_0: \mu=66$,

$H_1: \mu=69$.

მოვიყვანოთ ჩამოყალიბებული ამოცანის ამოხსნის ზოგადი მეთოდი.

1^0. ვთქვათ, ნორმალურად განაწილებულია გენერალური ერთობლიობიდან, რომლის დისპერსია σ^2ცნობილია, ამოღებულია n მოცულობის შერჩევა. შერჩევის ელემენტები იყოს $X_1, X_2, ..., X_n$. წინასწარ განსაზღვრული α-მნიშვნელოვნობის დონისათვის შევამოწმოთ შემდეგი H_0 ჰიპოთეზა გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინის შესახებ H_1 მარჯვენა ცალმხრივი ალტერნატივის წინააღმდეგ:

$H_0: \mu=\mu_0$,

$H_1: \mu=\mu_1>\mu_0$,

სადაც μ_0 და μ_1 რაიმე ცნობილი რიცხვებია ანუ პარამეტრული სიმრავლე $\Theta=\{\mu_1, \mu_1\}$ ორელემენტიანი სიმრავლეა.

ბუნებრივია კრიტერიუმის სტატისტიკად ავირჩიოთ სტანდარტიზებული შერჩევითი საშუალო

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}. \tag{11.5}$$

მართლაც, $\overline{X}_n$ შერჩევითი საშუალო გენერალური საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა. ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში Z_n შემთხვევით სიდიდეს აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება, ე.ი.

$$Z_n \sim N(0,1). \tag{11.6}$$

ამავე დროს, რადგან ალტერნატიულ H_1ჰიპოთეზაში დაფიქსირებულია $\mu=\mu_1>\mu_0$, Z_n-ის დიდი მნიშვნელობა მეტყველებს H_1 ჰიპოთეზის სასარგებლოდ. ამიტომ კრიტიკულ არეს ვეძებთ $\{x : z_n \geq c\}$ სახის სიმრავლეებს შორის (აქ z_n წარმოადგენს Z_n სტატისტიკის დაკვირვებულ მნიშვნელობას: თუ $x=(x_1,...,x_n)$, მაშინ $z_n=z_n(x)= \frac{\bar{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$). ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ საქმე გვაქვს მარჯვენა ცალმხრივ კრიტერიუმთან. თუ დავაფიქსირებთ პირველი გვარის შეცდომის α ალბათობას, მაშინ მოსაძებნია ისეთი c_α, რომლისთვისაც

$$P\{Z_n \geq c_\alpha \mid H_0\} = P\left\{\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq c_\alpha \middle| H_0\right\} = \alpha. \tag{11.7}$$

ამიტომ

$$c_\alpha = x_{1-\alpha}, \tag{11.8}$$

სადაც $x_{1-\alpha}$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილი. $x_{1-\alpha}$ კვანტილს უწოდებენ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკულ წერტილს და z_α სიმბოლოთი აღნიშნავენ: $c_\alpha=z_\alpha$.

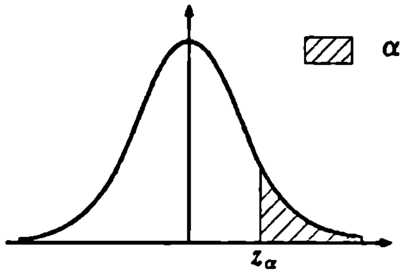
ამრიგად, Z_n სტატისტიკისათვის კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა (მარჯვენა) α ზომის არე

$$U_1 = \{z_n > z_\alpha\} \tag{11.9}$$

ანუ

$$X_1 = \{x : z_n > z_\alpha\}$$

როგორც ვხედავთ კრიტიკული არე დამოკიდებულია არაა μ_1-ის კონკრეტულ მნიშვნელობაზე, არამედ მხოლოდ იმ ფაქტზე, რომ $\mu_1 > \mu_0$. ნახ. 11.1 მოცემულია H_0-ის სამართლიანობისას Z_n სტატისტიკის განაწილების, ანუ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი და მითითებულია კრიტიკული არე Z_n სტატისტიკისთვის.



ნახ. 11.1

ცხადია, რომ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის კრიტიკული არე შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმულითაც

$$X_1 = \{x : \bar{x}_n > x_{კრ}\},$$

სადაც

$$x_{კრ} = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ხოლო კრიტერიუმის სიმძლავრე

$$P\{\bar{X}_n > x_{კრ} \mid H_1\} = P\left\{\bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha \mid H_1\right\}. \qquad (11.10)$$

როგორც აღვნიშნეთ, α დონის კრიტიკულ არეებს შორის ოპტიმალურია ის კრიტიკული არე, რომლის სიმძლავრე მაქსიმალურია. განსახილველი შემთხვევისათვის კრიტერიუმის სტატისტიკისთვის ასეთი კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α ზომის $U_1=[z_\alpha,+\infty)$ არე და შესაბამისად $X_1=\{x : \bar{x}_n > x_{კრ}\}$ კრიტიკული არე $\bar{X}_n$ სტატისტიკისათვის რომლისთვისაც კრიტერიუმის სიმძლავრე (11.10)-ით მოცემული სიდიდის ტოლია.

მართლაც, განვიხილოთ სხვა, ვთქვათ, $X_1^*=(x_c,x_d)$ კრიტიკული არე, რომლისთვისაც ასევე

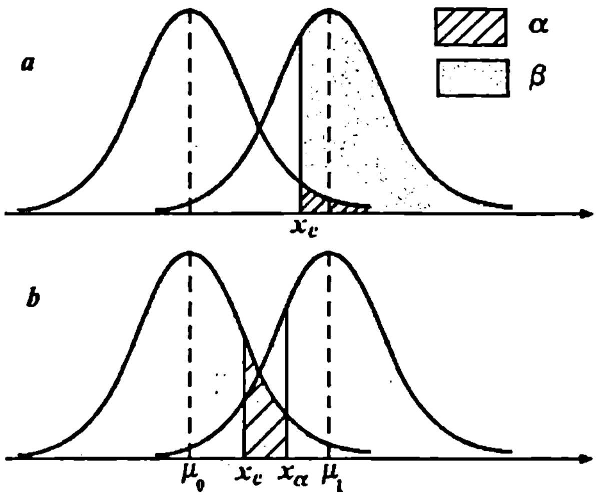
$$P\{\bar{X}_n \in X_1^* \mid H_0\} = \alpha.$$

ნახ. 11.2-ზე მოცემულია შერჩევითი საშუალოს (კრიტერიუმის სტატისტიკის) განაწილების სიმკვრივეების გრაფიკები ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზების სამართლიანობისას, მოყვანილია

$$P\{\bar{X}_n \in X_1 \mid H_1\},$$

$$P\{\bar{X}_n \in X_1^* \mid H_1\},$$

სიმძლავრეების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (იხ. შესაბამისად ნახ. 11.2 *a* და *b*).



ნახ. 11.2

როგორც ნახაზიდან ჩანს, კრიტერიუმის სიმძლავრე $X_1=\{\bar{x}_n > x_{კრ}\}$ კრიტიკული არისათვის მნიშვნელოვნად დიდია კრიტერიუმის სიმძლავრეზე X_1^* კრიტიკული არისათვის, ამიტომ უპირატესობა პირველს უნდა მივანიჭოთ.

საბოლოოდ ჩამოვაყალიბოთ ჰიპოთეზათა გარჩევის შემდეგი კრიტერიუმი:

თუ მოცემული $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის და α მნიშვნელოვნობის დონისათვის

$$z_n=\frac{\bar{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_\alpha \qquad (11.11)$$

მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების შედეგები მნიშვნელოვნად ითვლება, თუ $x_1,x_2,\dots,x_n$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზა უარყოფილია. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $x_1,x_2,\dots,x_n$ შერჩევითი მნიშვნელობები იძლევა საკმარის საფუძველს α მნიშვნელოვნობის დონით შემდეგი დასკვნის გასაკეთებლად: სამართლიანია H_1 ჰიპოთეზა. აქედან გამომდინარე, მოსაზრება, რომელიც უფრო არსებითია მკვლევარისათვის, უნდა მივიჩნიოთ ალტერნატიულ ჰიპოთეზად.

ჰიპოთეზათა შემოწმების მეორე ეკვივალენტური გზა მდგომარეობს შემდეგში:

$x_1,x_2,\dots,x_n$ შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე გამოვთვალოთ კრიტერიუმის $Z=\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ სტატისტიკის $z=\frac{\bar{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ მნიშვნელობა, სადაც $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ და შემდეგი ალბათობა, რომელსაც P-მნიშვნელობას უწოდებენ

$$P=P\{Z\geq z\mid H_0\}=P\left\{\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\middle| H_0\right\}=1-\Phi\left(\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right). \qquad (11.12)$$

ცხადია, რომ თუ $P\leq\alpha$, მაშინ $z\geq z_\alpha$, რაც ჰიპოთეზათა გარჩევის (11.11) კრიტერიუმის შესაბამისად იწვევს H_0 ჰიპოთეზის უარყოფას. ეს გვაძლევს შემდეგი დასკვნის გაკეთების შესაძლებლობას: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე ნებისმიერი α, $\alpha\geq P$ მნიშვნელოვნობის დონით ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა. მაშასადამე P-მნიშვნელობა არის ის მინიმალური მნიშვნელოვნობის დონე, რომლითაც $x_1,x_2,\ldots,x_n$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ. საბოლოოდ, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ჰიპოთეზათა გარჩევის შემდეგი ეკვივალენტური კრიტერიუმი:

მოცემული α მნიშვნელოვნობის დონისათვის, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, თუ P-მნიშვნელობა$\leq\alpha$.

მაგალითი **11.2.** ამოღებულია შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან. შერჩევის მოცულობაა 9. შერჩევის ელემენტებია 8, 13, 16, 7, 17, 10, 13, 15, 18. გენერალური დისპერსია ცნობილია, $\sigma^2=16$. $\alpha=0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ შემდეგი ჰიპოთეზები:

$H_0:\mu=\mu_0=10,$

$H_1:\mu=\mu_1=15.$

ამოხსნა.

1. კრიტერიუმის სტატისტიკის არჩევა.

შესამოწმებელია ჰიპოთეზა ნორმალური განაწილების საშუალოზე, ამასთან დისპერსია ცნობილია. ამიტომ კრიტერიუმის სტატისტიკად ავირჩიოთ სტანდარტიზებული შერჩევითი საშუალო

$$Z=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

2. კრიტიკული არის განსაზღვრა.

ალტერნატივიდან გამომდინარე ($\mu_1>\mu_0$) საქმე გვაქვს მარჯვენა ცალმხრივ კრიტერიუმთან. ამიტომ კრიტიკული არეა $\{z\geq z_{0.05}\}=\{z\geq 1.65\}$.

3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

$$\overline{x}_n=(8+13+16+7+17+10+13+15+18)/9=13$$

და

$$z=\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{13-10}{4/3}=2{,}25$$

4. ვიპოვოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა 0.05-კრიტიკული წერტილი:

$$z_{0.05}=1.65.$$

5. შევადაროთ კრიტერიუმის სტატისტიკის რიცხვითი მნიშვნელობა და $z_{0..05}=1.65\%$

$$z=2.25>1.65=z_{0.05}.$$

ამიტომ 0.05 მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ.

6. გამოვთვალოთ P მნიშვნელობა. (11.12)-ის ძალით

$$P = P\{Z \geq 2.25\} = 1 - \Phi(2.25) = 0.02.$$

ვინაიდან $P=0.02<0.05=\alpha$, ამიტომ 0.05 მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ.

2^0. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ჰიპოთეზებს გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინის შესახებ აქვთ შემდეგი სახე:

$H_0 : \mu=\mu_0,$

$H_1 : \mu=\mu_1<\mu_0.$

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ საქმე გვაქვს მარცხენა ცალმხრივ კრიტერიუმთან (ალტერნატივის თანახმად $\mu_1<\mu_0$), რომლისთვისაც ანალოგიურად ზემოთ განხილული შემთხვევისა მივიღებთ ჰიპოთეზათა გარჩევის შემდეგ კრიტერიუმს:

ყველა ისეთი $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობებით, რომლებისთვისაც

$$z=\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha, \qquad (11.13)$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ (α მნიშვნელოვნობის დონით), ხოლო იმ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ მონაცემებით, რომლებისთვისაც $z_n>-z_\alpha$, H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

ამრიგად კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების ქვედა (მარცხენა) α ზომის არე; $U_1=\{z<-z_\alpha\}$.

მაგალითი 11.3. ამოღებულია n=16 მოცულობის შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან და შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილია შერჩევითი საშუალო $\overline{x}=17.8$. დისპერსია ცნობილია, σ^2=49. α=0,05 მნიშვნელოვნობის დონით უნდა შემოწმდეს ჰიპოთეზები

$H_0 : \mu=19,$

$H_1 : \mu=16.$

ამოხსნა.

1. კრიტერიუმის სტატისტიკის არჩევა.

ამოცანის პირობებში კრიტერიუმის სტატისტიკად ავირჩიოთ ნორმირებული შერჩევითი საშუალო

$$Z=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

2. კრიტიკული არის განსაზღვრა.

გამომდინარე ალტერნატივიდან საქმე გვაქვს მარცხენა ცალმხრივ კრიტერიუმთან.

3. კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობის გამოთვლა.

$$z=\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{17.8-19}{7/4}=-0.68.$$

4. ვიპოვოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების α=0.05-კვანტილი (ქვედა α-კრიტიკული წერტილი: $-z_\alpha$):

$$-z_{0.05}=-1.65.$$

5. შევადაროთ კრიტერიუმის სტატისტიკის რიცხვითი მნიშვნელობა და 0.05-კვანტილი.

$$z = -0.68 > -1.65 = x_{0.05} = -z_{0.05}.$$

0.05 მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

6. გამოვთვალოთ P-მნიშვნელობა:

$$P = P\{Z \le -0.68\} = \Phi(-0.68) = 0.25.$$

ვინაიდან $P=0.25>0.05=\alpha$, ამიტომ 0.05 მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

რეალურ სიტუაციებში მეტად მნიშვნელოვანია ჰიპოთეზისა და ალტერნატივის ჩამოყალიბება ამოცანის მოთხოვნების შესაბამისად. კიდევ ერთხელ დავუბრუნდეთ 11.1 მაგალითს. ქსოვილების სიმტკიცის შესახებ სამქროს მენეჯერს, ბუნებრივია, აქვს ორი მოსაზრება:

ქსოვილების სიმტკიცე 66-ის ტოლია (μ=66),

ქსოვილების სიმტკიცე 69-ის ტოლია (μ=69).

როგორც აღვნიშნეთ, სამკერვალო საამქროსათვის უფრო მომგებიანია ფართო ასორტიმენტის ტანსაცმლის შეკერვა. ასეთი ნაწარმის შესაკერად ქსოვილის სიმტკიცე უნდა იყოს 66-ის ტოლი. ამიტომ ჰიპოთეზა და ალტერნატივა იმ სახით უნდა ჩამოვაყალიბოთ, რომ შემოწმების ტესტმა მხოლოდ იშვიათ შემთხვევაში და დიდი საიმედოობით დაგვარწმუნოს საამქროსათვის ნაკლებად მომგებიანი გადაწყვეტილების მიღებაში. აქედან გამომდინარე, საამქროს მენეჯერმა ნულოვან ჰიპოთეზად უნდა აირჩიოს პირველი მოსაზრება (μ_0=66) ქსოვილების სიმტკიცის შესახებ, ანუ ჰიპოთეზა და ალტერნატივა იყოს:

H_0 : μ=66,

H_1 : μ=69 ($\mu_1>\mu_0$).

როგორც გამოთვლებმა გვიჩვენა, არსებული მონაცემებით მნიშვნელოვნობის α=0.05 დონით მოხდა H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა H_1 ალტერნატივის, μ=69 სასარგებლოდ. დასკვნა: ქსოვილების ამ პარტიიდან უნდა შეიკეროს სპეციალური ტანსაცმელი.

კრიტერიუმის სიმძლავრის (11.10) გამოსახულება მარჯვენა ცალმხრივი კრიტერიუმისათვის (როდესაც H_1: $\mu_1>\mu_0$) ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$P(U_1|H_1)=P\{\,\overline{X}_n>x_{კრ}|H_1\}=1-\Phi(x_{კრ})=1-\Phi(x_{1-\alpha}-\sqrt{n}\,(\mu_1-\mu_0)/\sigma)\equiv W(\mu_1). \qquad (11.14)$$

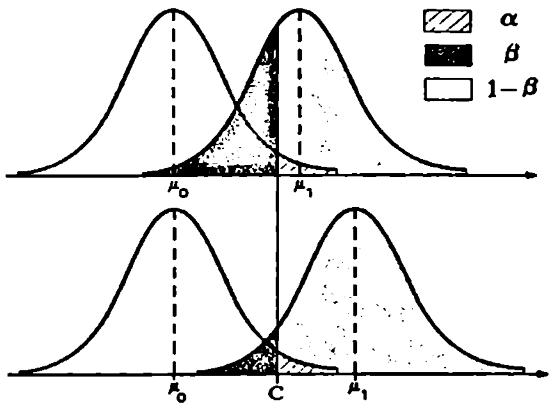
მარცხენა ცალმხრივი კრიტერიუმისათვის (H_1: $\mu_1< \mu_0$) ანალოგიურად გვაქვს:

$$P(U_1|H_1) = P\{\,\overline{X}_n< x_{კრ}|\,H_1\}= \Phi(x_\alpha-\sqrt{n}\,(\mu_1-\mu_0)/\sigma). \qquad (11.15)$$

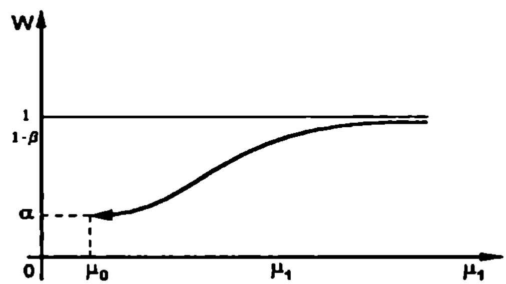
როგორც მიღებული გამოსახულებებიდან ჩანს, კრიტერიუმის სიმძლავრე არსებითადაა დამოკიდებული ალტერნატიულ ჰიპოთეზაზე, რის გამოც სიმძლავრის ფუნქციას განიხილავენ როგორც μ_1-ის ფუნქციას და მას $W(\mu_1)$-თი აღნიშნავენ. თუ გავიხსენებთ, რომ $\Phi(x)$ ზრდადია, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მარჯვენა ცალმხრივი კრიტერიუმის სიმძლავრე μ_1 არგუმენტის ზრდადი ფუნქციაა (იხ.ნახ 11.3 და 11.4).

როგორც სიმძლავრის ფუნქციის გრაფიკიდან (ან (11.14) ფორმულიდან) ჩანს, რაც უფრო დიდია სხვაობა μ_1-სა და μ_0-ს შორის $W(\mu_1)$-ის მნიშვნელობა მით უფრო დიდია, ანუ H_1-ის მიღების ალბათობა H_1-ის სამართლიანობის პირობებში იზრდება μ_1-ის

ზრდასთან ერთად, რაც იმას ნიშნავს, რომ H_1-ის სამართლიანობის დროს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მონაცემების საფუძველზე არასწორი გადაწყვეტილების მიღების შანსი მცირდება.



ნახ.11.3.



ნახ.11.4

მარტივ ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის (მარტივი ჰიპოთეზების გარჩევის ამოცანა), როდესაც σ^2 დისპერსია ცნობილია

ჰიპოთეზა: $H_0: \mu=\mu_0$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა: $z = \dfrac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1: \mu=\mu_1 > \mu_0$	$z > z_\alpha$,
$H_1: \mu=\mu_1 < \mu_0$	$z < -z_\alpha$

სადაც z_α არის $N(0,1)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი.

გადაწყვეტილება: თუ $z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს

მაგალითი **11.4.** გამოვთვალოთ კრიტერიუმის სიმძლავრე 11.1 მაგალითისათვის.

ამოხსნა. გამომდინარე ალტერნატივიდან საქმე გვაქვს მარჯვენა ცალმხრივ კრიტერიუმთან და (11.13)-ის ძალით

$$P(H_1|H_0)=1-\Phi(z_\alpha-\sqrt{n}\,(\mu_1-\mu_0)/\sigma)=1-\Phi(1.65-\sqrt{9}\,(69-66))=1-\Phi(-0.92)=0.7613.$$

როგორც ვნახეთ, მარტივი ჰიპოთეზების გარჩევისას, კრიტიკული არე არსებითადაა დამოკიდებული α მნიშვნელოვნობის დონეზე და ამ ფაქტის აღსანიშნავად ხშირად კრიტიკულ არეს და შესაბამის α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტერიუმს $\mathrm{X}_{1,\alpha}$-ით აღნიშნავენ,

დავუშვათ $\mathrm{X}_{1,\alpha}$ და $\mathrm{X}_{2,\alpha}$ ერთი და იგივე α მნიშვნელოვნობის დონის ორი კრიტერიუმია. თუ

$$P\{X\in \mathrm{X}_{1,\alpha}|H_0\}=P\{X\in \mathrm{X}_{2,\alpha}|H_0\}$$

ხოლო

$$P\{X\in \mathrm{X}_{1,\alpha}|H_1\}\geq P\{X\in \mathrm{X}_{2,\alpha}|H_1\},$$

მაშინ ამბობენ, რომ $\mathrm{X}_{1,\alpha}$ კრიტერიუმი უფრო მძლავრია $\mathrm{X}_{2,\alpha}$ კრიტერიუმთან შედარებით; ასეთ შემთხვევაში უპირატესობა, ცხადია, უნდა მივანიჭოთ $\mathrm{X}_{1,\alpha}$ კრიტერიუმს. აქედან გამომდინარე შემოდის უმძლავრესი კრიტერიუმის ცნება. $\mathrm{X}^*_{1,\alpha}$-ს ეწოდება უმძლავრესი კრიტერიუმი (უ.კ.), თუ ნებისმიერი $\mathrm{X}_{1,\alpha}$ კრიტერიუმისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$P\{X\in \mathrm{X}^*_{1,\alpha}|H_0\}\leq P\{X\in \mathrm{X}_{1,\alpha}|H_0\}$$

და

$$P\{X\in \mathrm{X}^*_{1,\alpha}|H_1\}>P\{X\in \mathrm{X}_{1,\alpha}|H_1\},$$

თანაც ბოლო უტოლობა მკაცრია ერთი მაინც F-ისათვის, $F\in H_1$.

საზოგადოდ, როდესაც როგორც ნულოვანი H_0, ისე ალტერნატიული H_1 ჰიპოთეზა მარტივია უმძლავრესი კრიტერიუმი აიგება ნეიმან-პირსონის ლემის საშუალებით. დამტკიცების გარეშე მოგვყავს უ.კ.-ის აგების მეთოდი უწყვეტად განაწილებული გენერალური ერთობლიობისათვის.

ნეიმან-პირსონის ლემა*. ვთქვათ, H_0 ჰიპოთეზისა და H_1 ალტერნატივის მიხედვით, ჰიპოთეტური განაწილების სიმკვრივეებია შესაბამისად $f_0(x)$ და $f_1(x)$, ამასთან ყოველი x-ისათვის $f_0(x)>0$, $f_1(x)>0$. ყოველი ფიქსირებული $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ რეალიზაციისათვის განვიხილოთ დასაჯერობის ფარდობა:

$$\ell_n(x)\equiv\ell_n(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}$$

შემოვიღოთ სტატისტიკა $\ell_n=\ell_n(X)=\ell_n(X_1,\ldots,X_n)$ და განვსაზღვროთ $\psi(c)=P_0\{\ell_n\geq c\}$ ფუნქცია, სადაც $\psi(c)$ არის $\{\ell_n\geq c\}$ ხდომილობის ალბათობა ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს. დავუშვათ, რომ ყოველი α-თვის, $0<\alpha<1$ არსებობს ისეთი c_α, რომ $\psi(c_\alpha)=\alpha$.

ნეიმან-პირსონის ლემა. მიღებულ დაშვებებში არსებობს H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების (H_1 ალტერნატივის წინააღმდეგ) α მნიშვნელოვნობის დონის მქონე უმძლავრესი კრიტერიუმი. ეს კრიტერიუმი განისაზღვრება შემდეგი კრიტიკული არით:

$$\mathbf{X}^*_{1,\alpha} = \{x: \ell_n(x) \geq c_\alpha\}.$$

აგებულ კრიტერიუმს ეწოდება ნეიმან-პირსონის კრიტერიუმი.

დავუბრუნდეთ მარტივი ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანას ნორმალური გენერალური ერთობლიობის საშუალოსათვის. შევამოწმოთ შემდეგი მარტივი ჰიპოთეზები

$H_0: \mu=\mu_0,$

$H_1: \mu=\mu_1>\mu_0.$

დასაჯერობის ფარდობის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე:

$$\ell_n(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\{-(x_i-\mu_1)^2/2\sigma^2\}\}}{\{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\{-(x_i-\mu_0)^2/2\sigma^2\}\}}=\frac{\exp\{(-2\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2\}}{\exp\{(-2\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\}}=$$

$$=\exp\{\bar{x}_n(\mu_1-\mu_0)/(\sigma^2/n)\}\cdot\exp\{-(\mu_1^2-\mu_0^2)/(2\sigma^2/n)\},$$

სადაც

$$\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

ნეიმან-პირსონის ლემის თანახმად კრიტიკულ არეს აქვს სახე

$$\{x: \ell_n(x) \geq c_\alpha\},$$

სადაც c_α შეირჩევა პირობიდან:

$$\psi(c_\alpha) = P_0\{\ell_n \geq c_\alpha\} = \alpha.$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ, რომ ხდომილობებს შორის გვაქვს თანაფარდობა

$$\{\ell_n \geq c_\alpha\} = \left\{\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq t(c_\alpha)\right\},$$

სადაც

$$t(c) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}\ln c + \frac{\sqrt{n}}{2\sigma}(\mu_1-\mu_0).$$

ამრიგად,

$$\psi(c_\alpha) = P_0\{\ell_n \geq c_\alpha\} = P_0\left\{\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq t(c_\alpha)\right\}=\alpha,$$

საიდანაც, იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$, მივიღებთ, რომ $t(c_\alpha)=z_\alpha$

სადაც z_α სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია და საბოლოოდ ვასკვნით, რომ კრიტიკული არე შემდეგი ფორმისაა:

$$\left\{\overline{X}_n \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right\}.$$

როგორც ვხედავთ ნეიმან-პირსონის ლემის გამოყენებით აგებული კრიტიკულ არე დაემთხვა ადრე ინტუიციური მოსაზრებით აგებულ კრიტიკულ არეს. ნეიმან-პირსონის ლემა იძლევა დამატებით ინფორმაციას იმის თაობაზე, რომ აგებული კრიტერიუმი უმძლავრესია.

ექსპერიმენტის დაგეგმვისას ექსპერიმენტატორისათვის მნიშვნელოვანია ერთის მხრივ, პირველი და მეორე გვარის შეცდომების ალბათობათა სიმცირის მიღწევა და მეორეს მხრივ, დანახარჯების გამო, ცდების მინიმალური რაოდენობის ჩატარება. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: განვსაზღვროთ, რისი ტოლი უნდა იყოს ცდების ის მინიმალური რაოდენობა, n^*, რომლისთვისაც პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა α-ს ტოლია, ხოლო მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა ნაკლებია β-ზე, სადაც α და β წინასწარ მოცემული სიდიდეებია.

ამოცანა ამოვხსნათ მარჯვენა ცალმხრივი კრიტერიუმისათვის. დავაფიქსიროთ α, $0<\alpha<1$. შერჩევის ფიქსირებული მოცულობისათვის მოვძებნოთ $x_{კრ}=x_{კრ}(\alpha, n)$ ისე, რომ პირველი გვარის შეცდომა α-ს ტოლი გამოვიდეს. გვექნება:

$$x_{კრ} = x_{კრ}(\alpha, n) = \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}. \tag{11.16}$$

მართლაც

$$P\{\overline{X}_n \geq x_{კრ}(\alpha, n)\} = P\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha\right\} = \alpha$$

ახლა n ისე შევარჩიოთ, რომ მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა არ აღემატებოდეს β ს ანუ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ უტოლობას

$$\beta \geq P\{\overline{X}_n < x_{კრ}(\alpha, n) | H_1\} = \Phi\left(\frac{x_{კრ}(\alpha. n) - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

$\Phi(x)$ ფუნქციის ზრდადობის გამო

$$\frac{x_{კრ}(\alpha, n) - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x_\beta.$$

სადაც x_β სტანდარტული ნორმალური განაწილების β-კვანტილია, ე.ი. $x_\beta = -z_\beta$. უკანასკნელ უტოლობაში შევიტანოთ $x_{კრ}(\alpha, n)$-ს მნიშვნელობა (11.16)-იდან და ამოვხსნათ ეს უტოლობა n-ის მიმართ. გვექნება

$$n^* \geq \sigma^2 (z_\beta + z_\alpha)^2 / (\mu_1 - \mu_0)^2 \tag{11.17}$$

და ამგვარად,

შერჩევის მინიმალური რაოდენობა n^*, რომლისთვისაც პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა α-ს ტოლია, ხოლო მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა ნაკლებია β-ზე მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$n^* = [\sigma^2 (z_\beta + z_\alpha)^2 / (\mu_1 - \mu_0)^2] + 1 \tag{11.18}$$

სადაც $[a]$ აღნიშნავს a რიცხვის მთელ ნაწილს. მაშასადამე, შერჩევის მინიმალური მოცულობა არის ის მინიმალური ნატურალური რიცხვი, რომლისათვისაც სრულდება (11.17). ვინაიდან $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$, (11.18) განსაზღვრავს შერჩევის მინიმალურ მოცულობას როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა ცალმხრივი კრიტერიუმისათვის.

მაგალითი 11.5. შევაფასოთ ცდების რა მინიმალური რაოდენობაა საჭირო იმისათვის, რომ მიღწეული იქნას $\alpha=0.05$, $\beta=0.1$ მნიშვნელობები ნორმალური განაწილების საშუალოს შესახებ შემდეგი ჰიპოთეზების შემოწმებისას: $H_0 : \mu_0=8$, $H_1 : \mu_1=11$, σ^2 ცნობილია, $\sigma=7$.

ამოხსნა. ნორმალური განაწილების ცხრილებიდან ვიპოვოთ $z_{0.1}$ და $z_{0.05}$. გვექნება $z_\beta=1.29$, $z_\alpha=1.64$. (11.18)-ის ძალით, მივიღებთ $n>47$, მაშასადამე, $n^*=48$.

ამით ჩვენ დავასრულეთ ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის მარტივი ჰიპოთეზების გარჩევის ამოცანის მიმოხილვა.

§4. მარტივი და რთული ჰიპოთეზების ან ორი რთული ჰიპოთეზის გარჩევის ამოცანა ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის

განვიხილოთ გენერალური ერთობლიობა (პოპულაცია), რომელიც განაწილებულია ნორმალურად. ვთქვათ ამ გენერალური ერთობლიობიდან ამოღებულია n მოცულობის შერჩევა. შერჩევის ელემენტები იყოს $X_1, X_2, \ldots, X_n$. წინასწარ განსაზღვრული α–მნიშვნელოვნობის დონისათვის შევამოწმოთ შემდეგი სახის ჰიპოთეზები გენერალური ერთობლიობის განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ:

ა) $H_0 : \mu=\mu_0$,	ბ) $H_0 : \mu=\mu_0$,	გ) $H_0 : \mu=\mu_0$,
$H_1 : \mu>\mu_0$,	$H_1 : \mu<\mu_0$,	$H_1 : \mu\neq\mu_0$,

რთულ H_1 არტერნატივებს შესაბამისად ეწოდება მაჯვენა ცალმხრივი ალტერნატივა, მარცხენა ცალმხრივი ალტერნატივა და ორმხრივი ალტერნატივა.

ყველგან μ_0 წარმოადგენს რაიმე ცნობილ რიცხვს. უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: 1) დისპერსია σ^2 ცნობილია და ის σ_0^2-ის ტოლია, 2) დისპერისია σ^2 უცნობია. როცა σ^2 ცნობილია, H_0 ჰიპოთეზა მარტივია, ხოლო ალტერნატივა რთულია. როცა σ^2 უცნობია, როგორც ნულოვანი, ისე ალტერნატიული ჰიპოთეზები რთულია.

ჰიპოთეზათა შემოწმება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში. იმ შემთხვევაში, როდესაც ნორმალური პოპულაციის დისპერსია σ^2 ცნობილია, $\sigma^2=\sigma_0^2$, და მოწმდება საშუალოს შესახებ: $H_0 : \mu=\mu_0$ ჰიპოთეზა ასევე მარტივი $H_1 : \mu=\mu_1$, $\mu_1>\mu_0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ, კრიტიკული არე არ არის დამოკიდებული μ_1-ის კონკრეტულ მნიშვნელობაზე (კრიტიკული არის აგებისას მნიშვნელოვანია მხოლოდ ის ფაქტი, რომ $\mu_1>\mu_0$). ამიტომ ბუნებრივია, გამოვიყენოთ იგივე კრიტერიუმი რთული $H_1 : \mu>\mu_0$ ალტერნატივის შემთხვევაშიც.

ა) კრიტერიუმის სტატისტიკას წარმოადგენს სტანდარტიზებული შერჩევითი საშუალო

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}},$$

და კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α ზომის არე: $U_1=\{z\geq z_\alpha\}=[z_\alpha, \infty)$.

მოცემული $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ რეალიზაციისათვის და α მნიშვნელოვნობის დონისათვის, თუ

$$z = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq z_\alpha, \tag{11.19}$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

ბ) ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე მარცხენა ცალმხრივი ალტერნატივებისათვის მივიღებთ, რომ კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების ქვედა α ზომის არე: $U_1=\{z\leq z_\alpha\}=(-\infty,-z_\alpha]$.

თუ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის,

$$z = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha \tag{11.20}$$

მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, იმ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ მონაცემებით, რომლებისთვისაც $z>z_\alpha$, H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

ა) და ბ) შემთხვევებისთვის განხილულ ჰიპოთეზათა შემოწმების წესი გამოიყენება მაშინაც, როდესაც ჰიპოთეზებს შემდეგი სახე აქვთ:

ა) $H_0: \mu\leq\mu_0,$ ბ) $H_0: \mu\geq\mu_0,$
$H_1: \mu>\mu_0,$ $H_1: \mu<\mu_0,$

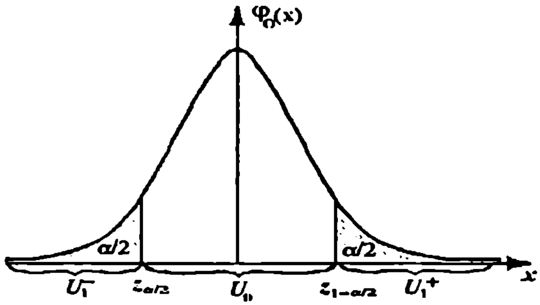
ანუ როგორც H_0, ასევე H_1 რთული ჰიპოთეზებია.

გ) ალტერნატივა ამ შემთხვევაში ორმხრივია და $z=\left|\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$-ის დიდი მნიშვნელობები მეტყველებს H_1 ალტერნატივის სასარგებლოდ. ამიტომ კრიტერიუმის სტატისტიკა ისევ Z-ია და α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული არე შედგება ორი ნაწილისაგან: სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა კრიტიკული არე და იმავე განაწილების $\alpha/2$ ზომის ქვედა კრიტიკული არეებისაგან: $U_1=(-\infty,-z_\alpha]\cup[z_\alpha,\infty)$.

თუ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის,

$$z = \left|\frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2} \tag{11.21}$$

მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს (ნახ. 11.5).



ნახ. 11.5

გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა. როგორც ვიცით, თუ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შერჩევაა ნორმალური პოპულაციიდან μ საშუალოთი და σ^2 დისპერსიით, მაშინ $\overline{X}_n$ შერჩევითი საშუალოც ნორმალურადაა განაწილებული μ საშუალოთი და σ^2/n დისპერსიით. ზოგად შემთხვევაში, როდესაც პოპულაცია, რომლიდანაც მიღებულია შერჩევა, არ არის ნორმალურად განაწილებული, მაგრამ შერჩევის მოცულობა n საკმაოდ დიდია, ცენტრალური ზღვარითი თეორემის ძალით, $\overline{X}_n$ შემთხვევითი სიდიდე მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული μ საშუალოთი და σ^2/n დისპერსიით, სადაც μ და σ^2 შესაბამისად, პოპულაციის საშუალო და დისპერსიაა.

ამიტომ,სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების ზემოთ მოყვანილი კრიტერიუმები გამოიყენება მაშინაც, როცა გენერალური ერთობლიობა არ არის ნორმალურად განაწილებული, მაგრამ შერჩევის მოცულობა დიდია ($n>30$). ამ შემთხვევაში ნორმალური პოპულაციისაგან განსხვავებით ზემოთ მოყვანილი პროცედურა მიახლოებითია და n-ის ზრდასთან ერთად მისი სიზუსტე იზრდება.

ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც პოპულაციის დისპერსია ცნობილია

ჰიპოთეზა: $H_0 : \mu=\mu_0$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა: $z = \dfrac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : \mu=\mu_1>\mu_0$	$z \geq z_\alpha$,
$H_1 : \mu=\mu_1<\mu_0$	$z \leq -z_\alpha$,
$H_1 : \mu\neq\mu_1$	$z \leq -z_{\alpha/2}$ ან $z \geq z_{\alpha/2}$.

სადაც z_α არის $N(0,1)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი.

გადაწყვეტილება: თუ $z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

აღნიშნული კრიტერიუმი გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როცა პოპულაცია არ არის ნორმალურად განაწილებული, მაგრამ შერჩევის მოცულობა დიდია ($n>30$)

ჰიპოთეზათა შემოწმება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში. ამ შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკად გამოიყენება.

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \tag{11.22}$$

სტატისტიკა რომელსაც, როგორც ვიცით, აქვს $t(n-1)$ განაწილება (სტიუდენტის t განაწილება $(n-1)$ თავისუფლების ხარისხით). ანალოგიურად წინა შემთხვევებისა მნიშვნელოვნობის ფიქსირებული α დონისათვის კრიტიკული არე შემდეგნაირად აიგება (ქვემოთ $t_{n-1,\alpha}$ აღნიშნავს $t(n-1)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკულ წერტილს ანუ $(1-\alpha)$-კვანტილს: $t_{n-1,\alpha}= t_{1-\alpha}(n)$):

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. კრიტიკული არეა $t(n-1)$ განაწილების α ზომის ზედა არე, ე.ი. $U_1=[t_{n-1,\alpha}, \infty)$.
ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. კრიტიკული არეა $t(n-1)$ განაწილების α ზომის ქვედა არე, ე.ი. $U_1=(-\infty,-t_{n-1,\alpha}]$.
გ) ორმხრივი ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არე შედგენილია ორი ნაწილისაგან: $t(n-1)$ განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა და $\alpha/2$ ზომის ქვედა არეებისაგან, ე.ი. $U_1=(-\infty,-t_{n-1,\alpha/2}]\cup[t_{n-1,\alpha/2}, \infty)$.

ამრიგად, გადაწყვეტილების მიღების წესი ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:
თუ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობით,

$$t_n = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \in U_1, \tag{11.23}$$

მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

აქ $t_n=T_n(x)$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობაა.

როდესაც n იზრდება სტიუდენტის $t(n-1)$ განაწილება სწრაფად უახლოვდება ნორმალურ განაწილებას, რის გამოც, როცა $n>30$, $t(n-1)$ განაწილების p-კვანტილების მოსაძებნად სარგებლობენ სტანდარტული ნორმალური განაწილებით.

როდესაც პოპულაცია აღარ არის ნორმალურად განაწილებული, მაგრამ n დიდია, T_n სტატისტიკის განაწილება კვლავ ახლოსაა ნორმალურთან, რის გამოც (11.23)-ით განსაზღვრული პროცედურა ამ შემთხვევაშიც გამოდგება.

მაგალითი **11.6.** ახალი ელექტრონული ხელსაწყოს შემოწმების მიზნით, კომპანიამ გადაწყვიტა გამოუშვას მხოლოდ ექვსი ასეთი ხელსაწყო. ყოველი მათგანისათვის გაიზომა დრო ხელსაწყოს მწყობრიდან გამოსვლამდე, რის შედეგადაც მიღებული იქნა შემდეგი ამონარჩევი: 59.2, 68.3, 57.8, 56.5, 63.7 და 57.3 საათი. გვაძლევს თუ არა ეს შერჩევა საკმარის საფუძველს $\alpha=0.05$ ნდობის დონით შემდეგი დასკვნის გასაკეთებლად: ახალი ხელსაწყოს სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობა აღემატება 55 საათს.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა.

$$\bar{x}_n = \frac{\sum x}{n} = 60.4667, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right\} = 21.2587.$$

1. $H_0 : \mu=55$;
   $H_1 : \mu>55$.

2. კრიტერიუმის სტატისტიკაა $t = \dfrac{\bar{X}_n - 55}{S/\sqrt{n}}$

3. უკუგდების არე. უკუვაგდებთ H_0-ს თუ $t>2.015$ (თავისუფლების ხარისხი =5)

   ვიანგარიშოთ t სტატისტიკის მნიშვნელობა $t = \dfrac{\bar{x}_n - 55}{s/\sqrt{n}} = 2.9$

რადგან t სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა მეტია 2.015-ზე ჩვენ უკუვაგდებთ H_0 ჰიპოთეზას, ანუ არის საკმარისი საფუძველი მტკიცების, რომ ახალი ხელსაწყოს საშუალო სიცოცხლის ხანგრძლივობა აღემატება 55 საათს.

მაგალითი 11.7. „Cheese Company" ყიდულობს რძეს ფერმერებისაგან. კომპანიის მენეჯერს აქვს ეჭვი, რომ ზოგიერთი ფერმერი მოგების გაზრდის მიზნით ყიდის წყალნარევ რძეს. ცნობილია, რომ რძის გაყინვის ტემპერატურა დამოკიდებულია რძის ცხიმიანობაზე, რასაც თავის მხრივ განსაზღვრავს საქონლის ჯიში, მის მიერ მიღებული საკვების სახე და ბევრი სხვა ფაქტორი, რომელთა სრულად განსაზღვრა შეუძლებელია. ამის გამო ჩავთვალოთ, რომ ნატურალური რძის გაყინვის ტემპერატურა წარმოადგენს ნორმალურ შემთხვევით სიდიდეს საშუალო მნიშვნელობით, $\mu=-0.545^0C$ და სტანდარტული გადახრით, $\sigma=0.008^0C$, ხოლო წყალნარევი რძის გაყინვის ტემპერატურა მეტია ნატურალური რძის გაყინვის ტემპერატურაზე. ამ ცნობილი ფაქტების გათვალისწინებით კომპანიის მენეჯერს შეუძლია გამოთქვას, ვთქვათ, შემდეგი ორი სახის ჰიპოთეზა კომპანიის მიერ შეძენილი რძის ხარისხის შესახებ:

$H_0 : \mu=\mu_0$ (მიღებული რძე ნატურალურია),

$H_1 : \mu>\mu_0$ (მიღებული რძე წყალნარევია)

ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც პოპულაციის დისპერსია უცნობია
(პატარა მოცულობის შერჩევის შემთხვევაში)

ჰიპოთეზა: $H_0 : \mu=\mu_0$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა: $t = \dfrac{\bar{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : \mu=\mu_1>\mu_0$	$t > t_{n-1,\alpha}$,
$H_1 : \mu=\mu_1<\mu_0$	$t < -t_{n-1,\alpha}$,
$H_1 : \mu\neq\mu_1$	$t < -t_{n-1,\alpha/2}$ ან $t > t_{n-1,\alpha/2}$.

გადაწყვეტილება: თუ $t = \frac{\bar{x}_n-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

---

§ 5. ჰიპოთეზათა შემოწმება ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობის დისპერსიისათვის

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ნორმალურად განაწილებული პოპულაციიდან მიღებული შერჩევის საფუძველზე შესამოწმებელია შემდეგი სახის ჰიპოთეზები

ა) $H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2$,	ბ) $H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2$,	გ) $H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2$,
$H_1 : \sigma^2>\sigma_0^2$,	$H_1 : \sigma^2<\sigma_0^2$,	$H_1 : \sigma^2\neq\sigma_0^2$.
(მარჯვენა ცალმხრივი ალტერნატივა)	(მარცხენა ცალმხრივი ალტერნატივა)	(ორხრივი ალტერნატივა)

ყველგან σ_0^2 წარმოადგენს რაიმე ცნობილ რიცხვს. უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: 1) მათემატიკური ლოდინი, μ ცნობილია, 2) მათემატიკური ლოდინი, μ უცნობია. როცა μ ცნობილია, H_0 ჰიპოთეზა მარტივია, ხოლო ალტერნატივა რთულია. როცა μ უცნობია, როგორც ნულოვანი, ისე ალტერნატიული ჰიპოთეზები რთულია.

რადგან უცნობი დისპერსიის ოპტიმალურ ჩაუნაცვლებელ შეფასებას წარმოადგენს შერჩევითი დისპერსია, ამიტომ კრიტერიუმის სტატისტიკად ბუნებრივია განვიხილოთ ეს უკანასკნელი.

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\ , \qquad (11.24)$$

როცა μ ცნობილია და

$$S_n'^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\ , \qquad (11.25)$$

როცა μ უცნობია.

როგორც ცნობილია (იხ. მეშვიდე თავი) H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას

$$\chi_n^2=\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n), \qquad (11.26)$$

და

$$\chi_{n-1}^2=\frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1). \qquad (11.27)$$

ვინაიდან, როგორც აღვნიშნეთ, (11.24) და (11.25) ჩაუნაცვლებელი შეფასებებია, შერჩევითი დისპერსიის მნიშვნელოვანი გადახრა σ_0^2-ისაგან მეტყველებს H_1 ჰიპოთეზის სასარგებლოდ. ამიტომ, ანალოგიურად წინა შემთხვევებისა, ფიქსირებული α მნიშვნელოვნობის დონისათვის კრიტიკული არეები შემდეგნაირად აიგება (ქვემოთ $\chi^2_{n,\alpha}$ არის $\chi^2(n)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი $\chi^2_{n,\alpha}=\chi^2_{1-\alpha}(n)$ იხ. ნახ. 11.6):

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. კრიტიკული არეა χ^2 განაწილების α ზომის ზედა არე, ე.ი.

$U_1=[\chi^2_{n,\alpha},+\infty)$, როდესაც μ ცნობილია,

$U_1=[\chi^2_{n-1,\alpha},+\infty)$, როდესაც μ უცნობია.

ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. კრიტიკული არეა χ^2 განაწილების α ზომის ქვედა არე, ე.ი.

$U_1=(0,\ \chi^2_{n,1-\alpha}]$, როდესაც μ ცნობილია,

$U_1=(0,\ \chi^2_{n-1,1-\alpha}]$, როდესაც μ უცნობია.

გ) ორმხრივი ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არე შედგენილია ორი ნაწილისაგან: χ^2 განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა და χ^2 განაწილების $\alpha/2$ ზომის ქვედა არეებისაგან

$U_1=(0,\ \chi^2_{n,1-\alpha/2}]\cup[\chi^2_{n,\alpha/2},+\infty)$, როდესაც μ ცნობილია,

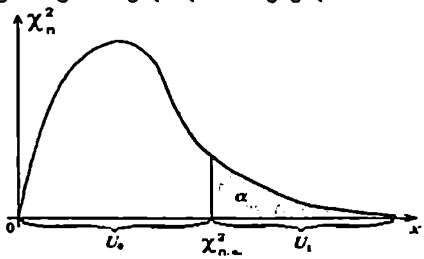
$U_1=(0,\ \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}]\cup[\chi^2_{n-1,\alpha/2},+\infty)$, როდესაც μ უცნობია,

მოცემული $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობებით, რომლებისთვისაც

$$\begin{aligned} &\frac{ns^2}{\sigma_0^2}\in U_1, \quad \text{თუ საშუალო ცნობილია,} \\ &\frac{(n-1)s'^2}{\sigma_0^2}\in U_1, \quad \text{თუ საშუალო უცნობია.} \end{aligned} \qquad (11.28)$$

H_0 ჰიპოთეზას α მნიშვნელოვნობის დონით უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

აქ s^2 და s'^2 არის S^2 და შესაბამისად S'^2 სტატისტიკის დაკვირვებული ($x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$) რეალიზაციით გამოთვლილი მნიშვნელობა.



ნახ. 11.6

მაგალითი **11.8.** ვთქვათ, $n=24$, $s=17.3$, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონისათვის შევამოწმოთ ჰიპოთეზები

$H_0: \sigma=15,$

$H_1: \sigma>15.$

ამოხსნა. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე საქმე გვაქვს ცალმხრივ მარჯვენა კრიტერიუმთან. $\chi^2(24)$ განაწილების ცხრილებიდან $\alpha=0.05$-თვის ვპოულობთ ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობას $\chi^2_{24,0.05}\approx 36.4$, ვითვლით კრიტერიუმის სტატისტიკის რიცხვით მნიშვნელობას და რადგან $\chi^2_{24}=24(17.3)^2/(15)^2=31.92<36.4=\chi^2_{24,0.05}$, ვასკვნით: $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის

ჰიპოთეზა $H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2$

მნიშვნელოვნობის დონე α

კრიტერიუმის სტატისტიკაის მნიშვნელობა $\frac{ns^2}{\sigma_0^2}$, როდესაც μ ცნობილია

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$, როდესაც μ უცნობია

ალტერნატივა კრიტიკული არე

$H_1 : \sigma^2>\sigma_0^2$, $U_1=[\chi^2_{n,\alpha},+\infty)$, როდესაც μ ცნობილია,

$U_1=[\chi^2_{n-1,\alpha},+\infty)$, როდესაც μ უცნობია.

$H_1 : \sigma^2<\sigma_0^2$, $U_1=(0,\ \chi^2_{n,1-\alpha}]$, როდესაც μ ცნობილია,

$U_1=(0,\ \chi^2_{n-1,1-\alpha}]$, როდესაც μ უცნობია.

$H_1 : \sigma^2\neq\sigma_0^2$, $U_1=(0,\ \chi^2_{n,1-\alpha/2}]\cup[\chi^2_{n,\alpha/2},+\infty)$, როდესაც μ ცნობილია,

$U_1=(0,\ \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}]\cup[\chi^2_{n-1,\alpha/2},+\infty)$, როდესაც μ უცნობია,

სადაც $\chi^2_{n,p}$ არის $\chi^2(n)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი.

ამით ჩვენ დავასრულეთ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანების მიმოხილვა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობის პარამეტრებისათვის.

განვიხილოთ ახლა ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანა ბერნულის განაწილების უცნობი ალბათობის შესახებ.

§ 6. უცნობი ალბათობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანა ბერნულის სქემაში

ვთქვათ, $X=(X_1,\dots,X_n)$ n მოცულობის შერჩევაა ბერნულის კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან წარმატების უცნობი p ალბათობით, ანუ $X_1,\dots,X_n$ დამოუკიდებელი, ბერნულის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. ამ შერჩევის საფუძველზე, α მნიშვნელოვნობის დონით, შესამოწმებელია ჰიპოთეზები

ა) $H_0 : p = p_0$, ბ) $H_0 : p = p_0$, გ) $H_0 : p = p_0$,
$H_1 : p > p_0$, $H_1 : p < p_0$, $H_1 : p \neq p_0$.

როგორც ვიცით, $\hat{P}_n = S_n/n$ წარმატების ფარდობითი სიხშირე წარმოადგენს უცნობი p ალბათობის ჩაუნაცვლებელ და ძალმოსილ შეფასებას. ჩვენ შევისწავლით მხოლოდ იმ შემთხვევას, როდესაც შერჩევის n მოცულობა იმდენად დიდია, რომ n და p პარამეტრების მქონე ბინომური განაწილებისათვის შესაძლებელია ნორმალური აპროქ-სიმაციის გამოყენება ანუ ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $\hat{P}_n$ სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული p_0 საშუალოთი და $\frac{p_0(1-p_0)}{n}$ დისპერსიით

$$P\left\{ \frac{\hat{P}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < x \,\middle|\, H_0 \right\} \approx \Phi(x). \tag{11.29}$$

ამ მიზეზით განსახილველ შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკად გამოიყენება

$$Z_n = \frac{\hat{P}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \tag{11.30}$$

სტატისტიკა.

ანალოგიურად წინა შემთხვევებისა კრიტიკული არეები შემდეგნაირად აიგება:

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ზედა არე; $U_1=[x_{1-\alpha}, \infty)$ (ან $U_1=[z_\alpha, \infty)$);

ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ქვედა არე; $U_1=(-\infty, x_\alpha]$ (ან $U_1=(-\infty, -z_\alpha]$);

გ) ორმხრივი ალტერნატივა. კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა არე და სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$ ზომის ქვედა არე; $U_1=(-\infty, x_{\alpha/2}]\cup[x_{1-\alpha/2},\infty)$ (ან $U_1=(-\infty, -z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2}, \infty)$).

ყველა ისეთი $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებისთვისაც

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in U_1,$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, სხვა შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

აქ $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ არის $\hat{P}$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

მაგალითი **11.9.** ვთქვათ, ხარისხის კონტროლის მენეჯერს სურს გაიგოს, აღემატება თუ არა ახალი დანადგარით დამზადებული დეფექტური პაკეტების წილი 10%-ს. ამოცანის გადასაწყვეტად შერჩეული 200 პაკეტიდან 26 დეფექტური აღმოჩნდა. აქვს თუ არა საფუძველი მენეჯერს ამტკიცოს, რომ ახალი დანადგარი არ აკმაყოფილებს

მის მოთხოვნებს, თუ ის თანახმაა, რომ მის მიერ მიღებული გადაწყვეტილების რისკი არ აღემატებოდეს 0.05-ს.

ამოხსნა. რადგან დანადგარი მენეჯერის პირობებს აკმაყოფილებს მხოლოდ მაშინ, როცა დეფექტური პაკეტების წილი პოპულაციაში არ აღემატება 10%-ს ($p \le 0.1$) და მენეჯერის ინტერესებში არ შედის გამართული დანადგარის დაწუნება, ამიტომ ის ასე აყალიბებს ჰიპოთეზებს:

$$H_0 : p \le 0.1,$$
$$H_1 : p > 0.1,$$

$n=200$, $p_0=0.1$, $\alpha=0.05$. ნორმალური განაწილების ცხრილებიდან ვპოულობთ, რომ $z_{0.05}=1.645$ და მაშასადამე, კრიტიკული არე იქნება $U_1=[1.645;+\infty)$. კრიტერიუმის სტატისტიკის შერჩევითი მნიშვნელობა

$$z = \frac{26-200\cdot 0,1}{\sqrt{200\cdot 0,1\cdot 0.9}} \approx 1.415,$$

რადგან $1.415<1.645$ ანუ $z \notin U_1$, H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი უცნობი p ალბათობის შესახებ ბერნულის სქემაში (დიდი მოცულობის შემთხვევაში)

ჰიპოთეზა $H_0 : p = p_0$

მნიშვნელოვნობის დონე α

კრიტერიუმის სტატისტიკა $$z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : p>p_0$,	$z > z_\alpha$,
$H_1 : p<p_0$,	$z < -z_\alpha$,
$H_1 : p\ne p_0$,	$z < -z_{\alpha/2}$ ან $z > z_{\alpha/2}$.

სადაც z_α არის $N(0,1)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი.

გადაწყვეტილება: თუ $z \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს

შენიშვნა. მცირე მოცულობის შერჩევისათვის p ალბათობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმების პროცედურა ეყრდნობა უშუალოდ კრიტერიუმის სტატისტიკის ზუსტ განაწილებას. ამ შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკად გამოიყენება S_n სტატისტიკა, ანუ წარმატებათა რაოდენობა n დამოუკიდებელ ცდაში, რომელსაც ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას აქვს ბინომური განაწილება n და p_0 პარამეტრებით.

მაგალითად, ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივის დროს α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკულ არეს აქვს სახე

$$S_n \geq c_\alpha,$$

სადაც c_α მთელი დადებითი რიცხვი უნდა შეირჩეს პირობიდან, რომ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა α-ს ტოლია, ე.ი.

$$P\{S_n \geq c_\alpha \mid H_0\} = \sum_{k=c_\alpha}^{n} P_n(k, p_0) = \alpha .$$

მაგრამ ბინომური განაწილების დისკრეტულობის გამო წინასწარ დასახელებული α-თვის ასეთი c_α რიცხვი შეიძლება არ არსებობდეს. ამ შემთხვევაში მიმართავენ შემდეგ ხერხს: $c = c_\alpha$-ს არჩევენ შემდეგი პირობიდან:

$$P\{S_n \geq c \mid H_0\} \leq \alpha < P\{S_n \geq c-1 \mid H_0\}.$$

ანუ

$$\sum_{k=c}^{n} P_n(k, p_0) \leq \alpha < \sum_{k=c-1}^{n} P_n(k, p_0).$$

§ 7. კავშირი ჰიპოთეზათა შემოწმებისა და ინტერვალური შეფასების ამოცანებს შორის

უცნობი θ პარამეტრის შესახებ მარტივი ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანასა და ამავე პარამეტრისათვის ნდობის ინტერვალის აგების ამოცანებს შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

დავადგინოთ ურთიერთკავშირი ნორმალური პოპულაციის უცნობი μ საშუალოსათვის მარტივი ჰიპოთეზის შემოწმებისა და ნდობის ინტერვალის აგების ამოცანებს შორის, როდესაც σ^2 დისპერსია ცნობილია.

როგორც უკვე ვიცით $H_0 : \mu=\mu_0$ მარტივი ჰიპოთეზის შემოწმებისათვის $H_1 : \mu\neq\mu_0$ რთული ალტერნატივის წინააღმდეგ α-მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის მიღების არეა

$$X_{0,\alpha}(\mu_0) = \left\{x : \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \leq z_{\alpha/2}\right\}.$$

განვიხილოთ სიმრავლეები: $X_{0,\alpha}(\mu)$, $-\infty<\mu<\infty$ და ყოველი ფიქსირებული $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$-ისათვის შემოვიღოთ ინტერვალი

$$I(x) = \{\mu : x\in X_{0,\alpha}(\mu)\} = \{\mu : \bar{x} - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $I(X)$ შემთხვევითი ინტერვალი წარმოადგენს $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალს μ-სათვის. მართლაც,

$$P_\mu\{\mu\in I(X)\}=P_\mu\{\,\overline{X}-\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\,\}=P_\mu\left\{\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}\le z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha.$$

ამრიგად, $X_{0,\alpha}(\mu)$ კრიტიკული არეების მეშვეობით ავაგეთ $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი μ-სათვის.

ახლა განვიხილოთ შებრუნებული ამოცანა: უცნობი μ-სათვის $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალის მეშვეობით ავაგოთ α დონის კრიტიკული არე $H_0:\mu=\mu_0$ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად $(H_1:\mu\neq\mu_0)$.

როგორც ვიცით, $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალის სახეა:

$$\overline{X}-\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$$

მაშინ, ნდობის ინტერვალის განსაზღვრის თანახმად:

$$1-\alpha=P_{\mu_0}\{\,\overline{X}-\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu_0<\overline{X}+\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\,\}=P_{\mu_0}\left\{\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}\le z_{\alpha/2}\right\};$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$X_{1,\alpha}(\mu_0)=\left\{x:\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}\ge z_{\alpha/2}\right\}$$

წარმოადგენს α დონის მქონე კრიტიკულ არეს $H_0:\mu=\mu_0$ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად $H_0:\mu=\mu_0$ ალტერნატივის საწინააღმდეგოდ.

ამრიგად, თუ აგებული გვაქვს $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი და შესამოწმებელია $H_0:\mu=\mu_0$ მარტივი ჰიპოთეზა $(H_1:\mu\neq\mu_0)$, H_0 ჰიპოთეზა უნდა უარვყოთ α მნიშვნელოვნობის დონით, თუ μ_0 არ ეკუთვნის ამ ინტერვალს.

ზოგადად, თუ α მნიშვნელოვნობის დონით $H_0:\theta=\theta_0$ მარტივი ჰიპოთეზის შემოწმებისათვის აგებული გვაქვს H_0 ჰიპოთეზის მიღების რაიმე არე

$$X_{0,\alpha}(\theta_0)$$

და განვიხილავთ სიმრავლეებს $X_{0,\alpha}(\theta)$, $\theta\in\Theta$, მაშინ $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შერჩევით აგებული

$$\{\theta:X\in X_{0,\alpha}(\theta)\}$$

შემთხვევითი სიმრავლე წარმოადგენს $(1-\alpha)$-ნდობის არეს θ პარამეტრისათვის და პირიქით, თუ $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შერჩევის საფუძველზე θ პარამეტრისათვის აგებულია რაიმე $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი, მაშინ $H_0:\mu=\mu_0$ მარტივი ჰიპოთეზის შემოწმებისას, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, თუ θ_0 არ ეკუთვნის აგებულ ნდობის ინტერვალს.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ნდობის ინტერვალს შეესაბამება უმძლავრესი კრიტერიუმი და პირიქით, უმძლავრეს კრიტერიუმს – უმოკლესი ნდობის ინტერვალი.

***

ამ თავის გადმოცემისას გამოყენებულია და დამატებითი ცნობების მისაღებად განკუთვნილია შემდეგი წიგნები: [12], [22], [30], [31], [34], [49], [40], [55], [66], [69], [72], [79], [82], [84], [86].

დასკვნები

თავის პირველ პარაგრაფში მოყვანილია პრაქტიკაში გავრცელებულ სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა ჩამონათვალი: ჰიპოთეზა განაწილების სახის შესახებ, ერთგვაროვნების ჰიპოთეზა, დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა, შემთხვევითობის ჰიპოთეზა, პარამეტრული ჰიპოთეზები. ჩამოყალიბებულია არაპარამეტრულ სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების (თანხმობის კრიტერიუმის) ზოგადი მეთოდი.

შემდეგ პარაგრაფებში განხილულია პარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანები: მოყვანილია ნორმალური პოპულაციის პარამეტრებისათვის ჰიპოთეზათა შემოწმების პროცედურები სხვადასხვა დაშვებებში, განხილულია უცნობი ალბათობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანა ბერნულის სქემაში, შერჩევის როგორც მცირე, ისე დიდი მოცულობისათვის.

სავარჯიშოები

11.1. $N(\mu,36)$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობის საშუალოს შესახებ გამოთქმულია ორი ჰიპოთეზა

$H_0: \mu=10$,

$H_1: \mu=5$.

ჰიპოთეზის შესამოწმებლად აღებულია $n=49$ მოცულობის შერჩევა, რომლის საფუძველზე გამოთვლილი შერჩევითი საშუალოა $\bar{x}=8.1$. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნობის დონისათვის განსაზღვრეთ, სამართლიანია თუ არა ნულოვანი ჰიპოთეზა.

ა) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.

ბ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა.

გ)როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

11.2. ნორმალურად განაწილებული პოპულაციისათვის, რომელიც ხასიათდება 5-ის ტოლი სტანდარტული გადახრით, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონისათვის შესამოწმებელია ჰიპოთეზები:

$H_0: \mu=50$,

$H_1: \mu=60$.

$n=64$ მოცულობის შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილი შერჩევითი საშუალოა, $\bar{x}=56$. განსაზღვრეთ სამართლიანია თუ არა ნულოვანი ჰიპოთეზა.

ა) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.

ბ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა.

გ)როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?
დ) განსაზღვრეთ P-მნიშვნელობა.

11.3. შერჩევის რა მინიმალური მოცულობაა საჭირო იმისათვის, რომ პირველი და მეორე გვარის შეცდომები არ აღემატებოდეს შესაბამისად 0.05-სა და 0.1-ს შემდეგი ჰიპოთეზის: ფაკულტეტის სტუდენტების საშუალო რეიტინგი 50-ია, შემოწმების დროს ალტერნატივის წინააღმდეგ, რომ საშუალო რეიტინგი 47-ის ტოლია. ცნობილია რომ სტანდარტული გადახრა 20-ის ტოლია.

11.4. სამრეცხაოს მფლობელს სურს გაყიდოს თავისი საწარმო. იგი პოტენციურ მყიდველს არწმუნებს, რომ საწარმოს დღიური შემოსავალი უკანასკნელი ხუთი წლის მანძილზე შეადგენდა $675-ს, სტანდარტული გადახრით $75. შემთხვევით არჩეული 30 დღის შემოსავალთა საშუალო სიდიდემ შეადგინა $625. α=0.01 მნიშვნელოვნობის დონით აქვს თუ არა საფუძველი მყიდველს ამტკიცოს, რომ საწარმოს მფლობელი არ არის სწორი?
ა) შეადგინეთ მოდელი, რომელიც შეესაბამება ამოცანის პირობას.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა.
დ)როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?
ე) განსაზღვრეთ P-მნიშვნელობა.

11.5. მზა პროდუქციის მახასიათებელი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული. მენეჯერს სურს n=9 მოცულობის შერჩევის საფუძველზე 0,05 მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმოს შემდეგი ჰიპოთეზები:

H_0:EX=10,
H_1:EX=6.

წარსული გამოცდილების თანახმად, მენეჯერი თვლის, რომ საშუალო კვადრატული გადახრა 8-ის ტოლია. გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა და მის საფუძველზე გააკეთეთ დასკვნა H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შესახებ. გამოთვალეთ მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა.

11.6. საბურავების ქარხნის მონაცემებით საბურავმა უნდა გაიაროს საშუალოდ 60 000 მილი, სტანდარტული გადახრით 5 000 მილი. სატრანსპორტო კომპანიამ გამოსცადა 48 საბურავი. აღმოჩნდა, რომ საბურავებმა გაიარეს საშუალოდ 59 500 მილი. გამოიყენეთ მნიშვნელოვნობის დონე 0.02 და შეასრულეთ შემდეგი დავალება:
ა) შეადგინეთ მოდელი, რომელიც შეესაბამება ამოცანის პირობას.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა.
დ) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?
ე) განსაზღვრეთ P-მნიშვნელობა.
ვ) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საბურავის საშუალო გარბენისათვის.

11.7. რესტორანის მმართველი აცხადებს, რომ კლიენტთა მომსახურების საშუალო დროა 3 წუთი, სტანდარტული გადახრით 1 წუთი. შეამოწმეს 50 კლიენტის მომსახურების დრო. იგი აღმოჩნდა, საშუალოდ 2.75 წუთის ტოლი. მნიშვნელოვნობის დონით 0.05 შეგიძლიათ თუ არა დაასკვნათ, რომ მომსახურების დრო 3 წუთზე ნაკლებია?
ა) დაახასიათეთ ამოცანის პირობით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.
დ)როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?
ე) განსაზღვრეთ P-მნიშვნელობა.

11.8. არის ცნობა, რომ ავტომანქანის ძრავის ნაპერწკლიანი სანთლის მუშაობის ხანგრძლივობა არის 22100 მილი. მწარმოებელი აცხადებს, რომ სანთლის მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა მეტია 22100 მილზე. 18 ეგზემპლარის შესწავლამ აჩვენა, რომ მუშაობის ხანგრძლივობა არის საშუალოდ 23400 მილი, შერჩევითი სტანდარტული გადახრით 1500 მილი. მნიშვნელოვნობის დონით $\alpha=0.05$ შეამოწმეთ მწარმოებელის აზრის სისწორე.
ა) დაახასიათეთ ამოცანის პირობით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.
დ)როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?
ე) განსაზღვრეთ P-მნიშვნელობა.
ვ) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ნაპერწკლიანი სანთლის მუშაობის ხანგრძლივობისათვის.

11.9. ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობისათვის ამოკრეფილია n=16-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა და მის საფუძველზე გამოთვლილი შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპერსია, შესაბამისად, 15.7-ისა და 3.6-ის ტოლია. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონისათვის შეამოწმეთ $H_0 : \mu=13$ ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_1 : \mu\neq13$ ალტერნატივის მიმართ: შეიცვლება თუ არა პასუხი, თუ ალტერნატიული ჰიპოთეზა იქნება $H_1 : \mu>13$.

11.10. ახალი ელექტრონული ხელსაწყოს შემოწმების მიზნით, კომპანიამ გადაწყვიტა გამოუშვას მხოლოდ ექვსი ასეთი ხელსაწყო. ყოველი მათგანისათვის გაიზომა დრო ხელსაწყოს მწყობრიდან გამოსვლამდე, რის შედეგადაც მიღებული იქნა შემდეგი შერჩევა: 59.2, 68.3, 57.8, 56.5, 63.7 და 57.3 საათი. გვაძლევს თუ არა ეს შერჩევა საკმარის საფუძველს $\alpha=0.05$ ნდობის დონით შემდეგი დასკვნის გასაკეთებლად: ახალი ხელსაწყოს სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობა აღემატება 55 საათს?
ა) დაახასიათეთ ამოცანის პირობით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ)გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა.
დ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.
ე)როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ.
ვ) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ახალი ხელსაწყოს სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობისათვის.

11.11. „სწრაფი მომსახურება" ამტკიცებს, რომ მისი პერსონალი ავტომობილის ზეთის გამოცვლას, ზეთის ფილტრის გამოცვლას და დაზეთვას ასწრებს 15 წუთში. შეამოწმეს 21 მანქანის მომსახურების დრო. მომსახურების დრო საშუალოდ აღმოჩნდა 18 წუთი, შერჩევის სტანდარტული გადახრა 1 წუთის ტოლია. მნიშვნელოვნობის დონით $\alpha=0.05$, შეამოწმეთ „სწრაფი მომსახურების" მტკიცების სამართლიანობა.
ა) დაახასიათეთ ამოცანის პირობით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.
დ) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

11.12. ჟურნალში გამოქვეყნებული ცნობის მიხედვით ამერიკელ მამაკაცს კვირაში აქვს 40 თავისუფალი საათი. განხორციელდა ამ ცნობის დამოუკიდებელი შემოწმება. აღმოჩნდა, რომ შემთხვევით აღებულ 60 მამაკაცს საშუალოდ კვირაში 37.8 თავისუფალი საათი ჰქონდა. შერჩევის სტანდარტული გადახრა იყო 12.2 საათი. შეგიძლიათ თუ არა დაასკვნათ, რომ ჟურნალის ცნობა არ არის სწორი? გამოიყენეთ მნიშვნელოვნობის დონე $\alpha=0.05$. განსაზღვრეთ P-მნიშვნელობა და ახსენით მისი აზრი.

11.13. მოტოციკლების მწარმოებელი აცხადებს, რომ გრძელ გზაზე მოტოციკლი დახარჯავს ერთ გალონ საწვავს 87 მილზე. ჩაატარეს ექსპერიმენტი. მოტოციკლმა ერთი გალონი დახარჯა 88, 82, 81, 87, 80, 78, 79, 89 მილზე. გამოიყენეთ მნიშვნელოვნობის დონე 0.05 და გააკეთეთ დასკვნა, არის, თუ არა ერთ გალონზე გავლილი საშუალო მანძილი უფრო მცირე ვიდრე გამოცხადებული 87 მილი.
ა) დაახასიათეთ ამოცანის პირობით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ) გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა.
დ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.
ე) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

11.14. გაზეთის ცნობით წლიური საპროცენტო განაკვეთი დიდ ბანკებში აღემატება 9%-ს. 8 მცირე მანკიდან აღებულმა შერჩევამ აჩვენა შემდეგი საპროცენტო განაკვეთები 10.1, 9.3, 9.2, 10.2, 9.3, 9.6, 9.4, 8.8. შეგიძლიათ თუ არა, 0.01 მნიშვნელოვნობის დონით, დაასკვნათ, რომ მცირე ბანკების საპროცენტო განაკვეთი აღემატება 9%-ს? გამოთვალეთ P - მნიშვნელობა.
ა) დაახასიათეთ ამოცანის პირობით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე.
ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ)გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა.
დ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.
ე)როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

11.15. გაზეთის ცნობით კოლეჯის დამთავრებულთაგან 1/3-ს ელის სამუშაო. ერთი სკოლის 200 დამთავრებულისაგან 80-მა მიიღო სამუშაო. მნიშვნელოვნობის დონით 0.02, შეიძლება თუ არა დაასკვნათ, რომ ამ სკოლის დამთავრებულები ღებულობენ სამუშაოს უფრო მეტი პროპორციით ვიდრე 1/3-ია?
ა) დაახასიათეთ ამოცანის პირობით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე.

ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.
გ) გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა.
დ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.
ე) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

12

სტატისტიკური დასკვნები ორამოკრეფიან ამოცანებში

სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა თეორიის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას წარმოადგენს ორი პოპულაციის შედარება, იმისათვის, რომ დადგინდეს, იძლევა თუ არა ქცევის (მოქმედების) ალტერნატიული გზა უკეთეს შედეგს.

ამ თავში აღწერილი პროცედურები ეფუძნება ორ შერჩევას. ერთი შერჩევა აღებულია A პოპულაციიდან, მეორე კი B პოპულაციიდან. ორივე პოპულაციას გააჩნია თეორიული პარამეტრები (რიცხვითი მახასიათებლები). მისაღებია დასაბუთებული დასკვნა იმის თაობაზე, არის თუ არა განსხვავება მათ შორის. შემდგომში A პოპულაციიდან აღებული n მოცულობის შერჩევა აღნიშნული იქნება $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ხოლო B პოპულაციიდან აღებული m მოცულობის შერჩევა კი $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ ვექტორებით.

ორი პოპულაციის მახასიათებლების შედარების ამოცანა ჩნდება ე.წ. კონტროლირებად ექსპერიმენტებში, როდესაც შეისწავლება რაიმე ახალი ტექნოლოგიის, მედიკამენტისა, თუ სხვა ფაქტორების ზემოქმედების ეფექტურობის საკითხი. ამ ექსპერიმენტს უკავშირდება ორი შერჩევა, რომლებიდანაც ერთ-ერთი მიღებულია დამკვიდრებული (კონსერვატული) ქმედების, მეორე კი არსებითად შეცვლილი ქმედების (ახალი ტექნოლოგიური პროცესის, ახალი მედიკამენტისა, თუ სხვა ფაქტორების ზემოქმედების) შედეგად. მაგალითად, ბანკმა მოლარეები შეცვალა სპეცილური აპარატებით და აინტერესებს, თუ რა გავლენას მოახდენს ეს კლიენტების მომსახურების დროზე. აქ ბუნებრივად წარმოიქმნება ორი შერჩევა: პირველი შედგება იმ კლიენტების მომსახურების დროებისაგან, რომლებიც სარგებლობდნენ აპარატით, მეორე კი (საკონტროლო ჯგუფი), შედგება იმ კლიენტების დროებისაგან, რომლებსაც ემსახურებოდნენ მოლარეები. ამრიგად, კონტროლირებად ექსპერიმენტში ერთი შერჩევა არის საკონტროლო (მიღებულია status quo პირობებში), მეორე შერჩევა ექსპერიმენტულია. ასეთ ამოცანებს ორამოკრეფიან ამოცანებს უწოდებენ.

ამით არ ამოიწურება ორამოკრეფიანი ამოცანების ჩამონათვალი. ხშირად შესადარებელია განსხვავებული სოციალური სტატუსის, სქესის, რეგიონის ან სხვა ფაქტორების მიხედვით რანჟირებული ორი პოპულაცია.

განსასხვავებელია ორი შემთხვევა: 1. გვაქვს ორი დამოუკიდებელი $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ და $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ შერჩევა ორი პოპულაციიდან; 2. გვაქვს წყვილების n მოცულობის $(X_1,Y_1), \ldots, (X_n,Y_n)$ შერჩევა, სადაც არსებითია ის ფაქტი, რომ თუმცა ნებისმიერი $i \neq j$-სათვის (X_i,Y_i) წყვილი დამოუკიდებელია (X_j,Y_j) წყვილისაგან, წყვილის კომპონენტები X_i და Y_i შეიძლება არ იყვნენ დამოუკიდებლები. ასეთ მონაცემებს დაწყვილებული დაკვირვებები ეწოდება. ამ ტიპის მონაცემებზე ქვევით დაწერილებით გვექნება საუბარი.

ფორმალურად ორამოკრეფიანი ამოცანები ასე ყალიბდება.

დავუშვათ, $X=(X_1,\dots,X_n)$ და $Y=(Y_1,\dots,Y_m)$ n და შესაბამისად, m მოცულობის შერჩევებია ორი დამოუკიდებელი $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(Y)\in F$, $F=\{F(x,\theta),\ \theta\in\Theta\}$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობებიდან. θ_1-ით და θ_2-ით აღვნიშნოთ პოპულაციათა დამახასიათებელი θ პარამეტრის ჭეშმარიტი უცნობი რიცხვითი მნიშვნელობები. ვთქვათ, ამ პოპულაციებიდან ამოღებული შერჩევითი მნიშვნელობებია x_1, x_2, ..., x_n და y_1, y_2, ..., y_m. იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც $\theta_1=\theta_2$, ამ ორი შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილი უცნობი θ პარამეტრის შეფასება მოგვცემს განსხვავებულ რიცხვით მნიშვნელობებს. ამიტომ, ბუნებრივია, შემდეგი კითხვის დასმა: შერჩევითი $x_1,x_2,\dots,x_n$ და $y_1,y_2,\dots,y_m$ მნიშვნელობები იძლევა თუ არა საკმარის საფუძველს დასკვნისათვის, რომ არსებობს მნიშვნელოვანი განსხვავება დამოუკიდებელ პოპულაციათა აღნიშნულ პარამეტრებს შორის.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოთა სხვაობის და დისპერსიათა ფარდობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმებისა და ნდობის ინტერვალების აგების პროცედურებს სხვადასხვა დაშვებებში.

განხილული იქნება ორამოკრეფიანი ამოცანები წარმატებათა ალბათობების სხვაობებისათვისაც.

ამ თავში აგრეთვე შევეხებით ამოცანებს დაწყვილებულ მონაცემთა საშუალოების სხვაობებისათვისაც.

§ 1. ორამოკრეფიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციების საშუალოებისათვის

ვთქვათ $X=(X_1,\dots,X_n)$ და $Y=(Y_1,\dots,Y_m)$ ორი დამოუკიდებელი შერჩევაა $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ და შესაბამისად, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობებიდან. როგორც აღვნიშნეთ, ჩვენი ამოცანაა აღნიშნული პოპულაციებიდან ამოღებული $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)$ შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე გადავწყვიტოთ ორი პრობლემა:

1) შევამოწმოთ შემდეგი სახის ჰიპოთეზები

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } H_0:\mu_1-\mu_2=0 & \text{ბ) } H_0:\mu_1-\mu_2=0 & \text{გ) } H_0:\mu_1-\mu_2=0 \\ \quad H_1:\mu_1-\mu_2>0, & \quad H_1:\mu_1-\mu_2<0, & \quad H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0. \end{array} \qquad (12.1)$$

2) ავაგოთ ნდობის ინტერვალი საშუალოთა $(\mu_1-\mu_2)$ სხვაობისათვის.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. ორივე პოპულაციის დისპერსიები, σ_1^2 და σ_2^2 ცნობილია,

2. ორივე პოპულაციის დისპერსიები უცნობია, მაგრამ ტოლია: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$.

ორამოკრეფიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციების საშუალოსათვის ცნობილი დისპერსიების შემთხვევაში. პოპულაციების დამოუკიდებლობის გამო მარტივად მიიღება, რომ

$$Z_{n,m} \equiv \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - E(\overline{X}_n - \overline{Y}_m)}{\sqrt{D(\overline{X}_n - \overline{Y}_m)}} = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} \tag{12.2}$$

სტატისტიკას აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება.

კერძოდ, ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში, ე. ი. როცა $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$Z \equiv Z_{n,m} = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} \sim N(0.1) \tag{12.3}$$

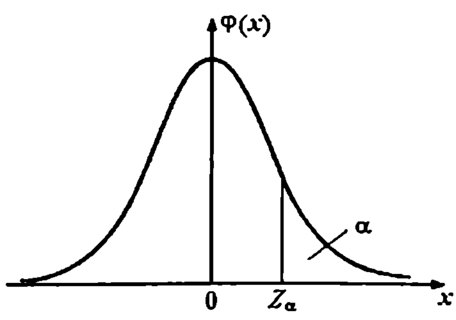
თავდაპირველად განვიხილოთ (12.1) ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანა. სამივე ალტერნატივის შემთხვევაში ტესტის სტატისტიკას წარმოადგენს (12.3) ფორმულით მოცემული $Z_{n,m}$ სტატისტიკა. განსხვავებულია მხოლოდ კრიტიკული არეები. ალტერნატივების მიხედვით, α მნიშვნელოვნობის დონით კრიტიკული არეები შემდეგი ფორმისაა:

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ზედა არე, $U_1=[z_\alpha, +\infty)$,

ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ქვედა არე, $U_1=(-\infty, -z_\alpha]$,

გ) ორმხრივი ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არე შედგენილია ორი ნაწილისაგან: სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა და $\alpha/2$ ზომის ქვედა არეებისაგან, $U_1= (-\infty, -z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2},+\infty)$.

შეგახსენებთ, რომ z_α სტანდარეული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია (ნახ. 12.1).



ნახ. 12.1

ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოთა სხვაობისათვის, როდესაც პოპულაციის დისპერსიები ცნობილია

ჰიპოთეზა $H_0 : \mu_1-\mu_2 = 0$

მნიშვნელოვნობის დონე α

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა $z = \dfrac{\bar{x}_n - \bar{y}_m}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}}$

ალტერნატიული ჰიპოთეზები — კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)

$H_1 : \mu_1-\mu_2 > 0$ — $z \geq z_\alpha$

$H_1 : \mu_1-\mu_2 < 0$ — $z \leq -z_\alpha$

$H_1 : \mu_1-\mu_2 \neq 0$ — $z \geq z_{\alpha/2}$ ან $z \leq -z_{\alpha/2}$

P-მნიშვნელობა განიმარტება, როგორც მნიშვნელოვნობის ის მინიმალური დონე, როდესაც ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა. თუ z არის $Z_{n,m}$ სტატისტიკის დაკვირვებული სიდიდე, მაშინ

P-მნიშვნელობა $= 1-\Phi(z)$ ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივისათვის,

P-მნიშვნელობა $= \Phi(z)$ ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივისათვის,

P-მნიშვნელობა $= 2[1-\Phi(|z|)]$ ორმხრივი ალტერნატივისათვის.

თუ P-მნიშვნელობა $\leq \alpha \Rightarrow H_0$-ს უარვყოფთ α დონით.

თუ P-მნიშვნელობა $> \alpha \Rightarrow H_0$-ის უარვყოფის საფუძველი არა გვაქვს (α დონით).

მაგალითი **12.1.** ერთი ნორმალური ერთობლიობიდან ამოღებულია შერჩევა. შერჩევის მოცულობაა 40, შერჩევის საშუალოა 102, სტანდარტული გადახრაა 5. მეორე, პირველისაგან დამოუკიდებელი ნორმალური ერთობლიობიდან ამოღებული შერჩევის მოცულობაა 50, შერჩევის საშუალო 99, სტანდარტული გადახრა – 6. α=0.04 მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზები:.

$H_0 : \mu_1-\mu_2 =0$,

$H_1 : \mu_1-\mu_2 \neq 0$.

ა) ცალმხრივია თუ ორმხრივი ჰიპოთეზა?

ბ) აირჩიეთ კრიტერიუმი.

გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა.

დ) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

ე) განსაზღვრეთ P - მნიშვნელობა.

ამოხსნა.

ა) ალტერნატივა ორმხრივია.

ბ) უნდა ავირჩიოთ ორმხრივი კრიტერიუმი: უარვყოთ H_0, თუ $|z| \geq z_{0,02} = 2,055$

გ)კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა გამოითვლება (12.3) ფორმულაში შესაბამისი შერჩევითი მნიშვნელობების ჩასმით

$$z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1}\sigma_1^2+\frac{1}{n_2}\sigma_2^2}}=\frac{102-99}{\sqrt{\frac{1}{40}25+\frac{1}{50}36}}=2.59.$$

დ) რადგან z=2.59>2,055=$z_{0.02}$, ამიტომ H_0-ს უარვყოფთ, H_1-ის სასარგებლოდ.

ე) ორმხრივი ალტერნატივისათვის P-მნიშვნელობა =2[1−Φ(2,59)]=0.0016.

მაგალითი **12.2.** ახალი მაღაზიისათვის ადგილის შერჩევა დამოკიდებულია მრავალ ფაქტორზე. მათ შორის ერთ-ერთია იმ ოჯახების წლიური შემოსავლები, რომლებიც ცხოვრობენ შესარჩევ უბანში. ვთქვათ, მენეჯერმა უკვე შეარჩია ორი უბანი და გადასაწყვეტი აქვს, რომელ მათგანს მიანიჭოს უპირატესობა. პირველ 100 შემთხვევით შერჩეული ოჯახის საშუალო შემოსავალი აღმოჩნდა $\bar{x}$=$29 980, მეორეში გამოკვლეულ იქნა ოჯახთა იგივე რაოდენობა, რის შედეგადაც დადგინდა, რომ $\bar{x}$=$28 650. სხვა წყაროების მეშვეობით მენეჯერმა დაადგინა, რომ σ_1=$4 740, σ_2=$5 365. შეიძლება თუ არა ამ მონაცემების საშუალებით მნიშვნელოვნობის α=0.05 დონით დავასკვნათ, რომ საშუალო შემოსავლები პირველ უბანში უფრო მაღალია ვიდრე მეორეში?

ამოხსნა. შესამოწმებელია $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ჰიპოთეზა $H_1:\mu_1-\mu_2>0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ. მნიშვნელოვნობის დონეა α=0,05, $n_1=n_2$=100, $z_{0,05}$= 1,645.

გამოვთვალოთ ტესტის სტატისტიკის მნიშვნელობა

$$z=\frac{\{29980-28650)}{\sqrt{\frac{4740}{100}+\frac{5365}{100}}}=1,86\,.$$

რადგან z=1,86>1,645=$z_{0.05}$, H_0-ს უარვყოფთ H_1-ის სასარგებლოდ, ე.ი. მნიშვნელოვნობის 0,05 დონით სარწმუნოა დასკვნა, რომ $\mu_1-\mu_2>0$ ე.ი. ასარჩევია I უბანი.

ახლა გადავიდეთ საშუალოების $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის (1−α)-ნდობის ინტერვალის აგების ამოცანაზე.

(12.2) სტატისტიკის გამოყენებით მარტივად, სტანდარტული გზით, აიგება ნდობის ინტერვალი გენერალურ საშუალოთა $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის. (1−α)-ნდობის ინტერვალს $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის შემდეგი სახე აქვს:

$$\bar{x}_n-\bar{y}_m-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}<\mu_1-\mu_2<\bar{x}_n-\bar{y}_m+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}, \qquad (12.4)$$

სადაც $\bar{x}_n$ და $\bar{y}_m$ შესაბამის შერჩევით საშუალოების რეალიზაციებია.

(1–α)-ნდობის ინტერვალი ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოთა ($\mu_1-\mu_2$) სხვაობისათვის, როდესაც პოპულაციათა დისპერსიები ცნობილია

$$\left(\bar{x}_n-\bar{y}_m-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\ \bar{x}_n-\bar{y}_m+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

მაგალითი **12.3.** ორი დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან ამოღებულია $n = 12$ და $m = 8$ მოცულობის შერჩევები. შერჩევის ელემენტებია

58, 60, 69, 86, 65, 73, 68, 80, 74, 86, 85, 82

56, 55, 68, 65, 45, 38, 49, 59.

ორივე პოპულაციის დისპერსია ცნობილია და 100-ის ტოლია. ავაგოთ 0.95%-ანი ნდობის ინტერვალი ($\mu_1-\mu_2$)–სათვის.

ამოხსნა. ნორმალური განაწილების კრიტიკული წერტილების ცხრილი გვაძლევს $z_{0,025}$=1.96. გამოვთვალოთ პირველი და მეორე პოპულაციის შერჩევითი საშუალოები: $\bar{x}$=73,83; $\bar{y}$=54,63. (12.4)-ის თანახმად, 0,95% ნდობის ინტერვალია:

$$\left(73{,}83-54{,}63-1.96\sqrt{100\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)};\quad 73{,}83-54{,}63+1.96\sqrt{100\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)}\right)=(10{,}26;\ 28{,}16).$$

მაგალითი **12.4.** გამოიკვლიეს ერთ ოთახიანი ბინების საარენდო ფასები ორ ქალაქში. ერთ ქალაქში შეისწავლეს 35 ბინა. საშუალო საორიენტაციო ფასი აღმოჩნდა \$370. მეორე ქალაქში 40 ბინის საშუალო საარენდო ფასი იყო \$380. სტანდარტული გადახრები ჩავთვალოთ ცნობილად: σ_1=30, σ_2=26.

a) შეაფასეთ სხვაობა საარენდო ფასებს შორის 95%-იანი ნდობის ინტერვალის გამოყენებით.

b) 0.05 მნიშვნელოვნობის დონით, არის თუ არა განსხვავება ამ ქალაქებში ბინების საარენდო ფასებში?

ამოხსნა.

a) საარენდო ფასებს შორის სხვაობისათვის 95%-იანი ნდობის ინტერვალია

$$((370-380)-1.96\sqrt{\frac{30^2}{35^2}+\frac{26^2}{40^2}}\ ;\ ((370-380)+1.96\sqrt{\frac{30^2}{35^2}+\frac{26^2}{40^2}}\ ) = (-16.52;\ 3{,}48)$$

b) ავირჩიოთ ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები.

ჰიპოთეზებია.

$H_0 : \mu_1-\mu_2 = 0,$

$H_1 : \mu_1-\mu_2 \neq 0,$

ავირჩიოთ კრიტერიუმი.

კრიტერიუმის სტატისტიკაა $Z_{n,m} = \dfrac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}$.

გადაწყვეტილების მიღების წესია: დავიწუნოთ H_0, თუ $|z| > 1,96$.
გამოთვალოთ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა.

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{370 - 380}{\sqrt{\dfrac{30^2}{35} + \dfrac{26^2}{40}}} = 1,53.$$

როგორია გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

ვინაიდან z=1,53<1,96=$z_{0,025}$, H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს, ანუ არსებული მონაცემებით ბინების ფასებში განსხვავება არაა მნიშვნელოვანი (α=0.05 დონით).

ჰიპოთეზათა შემოწმების ზემოთ წარმოდგენილი პროცედურა და აგებული ნდობის ინტერვალი გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როცა ორ დამოუკიდებელ პოპულაციას არ აქვს ნორმალური განაწილება და ამ პოპულაციებიდან ამოკრეფილია დიდი, მაგალითად, n>30 და m>30 მოცულობის შერჩევები, ვინაიდან ასეთ შემთხვევაში, ცენტრალური ზღვარითი თეორემის საფუძველზე, $Z_{n,m}$ სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, პარამეტრებით (0,1).

ჰიპოთეზების შემოწმება და ნდობის ინტერვალის აგება ორი პოპულაციის საშუალოთა სხვაობისათვის, როდესაც ორივე შერჩევის მოცულობა დიდია. წინა პუნქტში ჩვენი ძირითადი დაშვებები იყო, რომ ორივე პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და ამავე დროს, ორივე პოპულაციის დისპერსიები ცნობილია. ეს დაშვებები არაა აუცილებელი, როდესაც ორივე შერჩევის მოცულობა დიდია ($n \geq 30$, $m \geq 30$). შერჩევების დიდი მოცულობის დროს ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალის აგება და ჰიპოთეზების შემოწმება შესაძლებელია მაშინაც, როდესაც პოპულაციების განაწილება არ არის ნორმალური და დისპერსიებიც უცნობია. ამ შემთხვევაში თითოეული შერჩევისათვის უნდა შეფასდეს უცნობი დისპერსია

$$S_1'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_2'^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

და ჩაისვას ეს შეფასებები (12.2) გამოსახულებაში, შესაბამისად σ_1^2-ისა და σ_2^2-ის ნაცვლად. მიღებული სტატისტიკა,

$$\widetilde{Z}_{n,m} = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{n} + \dfrac{S_2'^2}{m}}} \overset{as}{\sim} N(0,1) \qquad (12.5)$$

მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, (0,1) პარამეტრებით.

ამ ფაქტის სამართლიანობა გამომდინარეობს ცენტრალური ზღვარითი თეორემიდან, რომლის თანახმადაც $\overline{X}_n - \overline{Y}_m$ სხვაობა მიახლოებით ნორმალურადაა

განაწილებული და დიდ რიცხვთა კანონიდან, რომლის თანახმადაც $S_1'^2 \xrightarrow{P} \sigma_1^2$, როცა $n \to \infty$ და $S_2'^2 \xrightarrow{P} \sigma_2^2$, როცა $m \to \infty$.

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში

$$\widetilde{Z}_{n,m} = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{n} + \dfrac{S_2'^2}{m}}} \overset{as}{\sim} N(0,1) \tag{12.6}$$

სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, (0,1) პარამეტრებით.

ამიტომ ჰიპოთეზების შემოწმება და ნდობის ინტერვალების აგება წარმოებს ზუსტად იგივე წესებით, რომლებიც აღწერილ იყო წინა პუნქტებში. ოღონდ, ყველგან $Z_{n,m}$ სტატისტიკის დაკვირვებული სიდიდის ნაცვლად უნდა ჩაისვას $\widetilde{Z}_{n,m}$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა. აღსანიშნავია ისიც, რომ ჩატარებულ პროცედურები ასიმპტოტურ ხასიათს ატარებს იმ თვალსაზრისით, რომ α-მნიშვნელოვნობის დონის შესაბამისი ჰიპოთეზათა შემოწმების კრიტერიუმის გამოყენებისას პირველი გვარის შეცდომა დაახლოებით α-ს ტოლი იქნება (და არა ზუსტად α-ს ტოლი), ისევე, როგორც $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალს სინამდვილეში აღმოაჩნდება მიახლოებით $(1-\alpha)$-ს ტოლი ნდობის დონე.

მაგალითი **12.5.** უნივერსიტეტში სწავლის ბოლო წელს სტუდენტს გადასაწყვეტი აქვს: გახდეს სკოლის უფროსი კლასების მასწავლებელი, თუ გააგრძელოს საუნივერსიტეტო განათლება, მიიღოს სამეცნიერო ხარისხი და გახდეს ლექტორი. დიდი ფიქრის შემდეგ მან დაასკვნა, რომ მისი გადაწყვეტილება უნდა ეყრდნობოდეს სკოლის მასწავლებლისა და უნივერსიტეტის ლექტორის წლიური შემოსავლების თანაფარდობას. კერძოდ, ის აპირებს გახდეს ლექტორი იმ შემთხვევაში, თუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი იმის მტკიცებისათვის, რომ მასწავლებლის საშუალო წლიური შემოსავალი აღემატება ლექტორის შემოსავალს. მან შეაგროვა მონაცემები 50 სკოლის მასწავლებლისა და 50 ლექტორის წლიური შემოსავლების შესახებ (შერჩევაში შედიოდნენ მხოლოდ ის პირები, რომლებსაც ბაკალავრის ხარისხი მიენიჭათ 10 წლის წინ).

მასწავლებლების მონაცემებით გამოთვლილი შერჩევითი საშუალოა $\overline{x}$=43.7, შერჩევითი დისპერსია $s_1'^2$=11.8, ლექტორებისთვის $\overline{y}$=41.5, $s_2'^2$=46.3.

ამრიგად, ამ მონაცემების საფუძველზე შესამოწმებელია შემდეგი ჰიპოთეზები მასწავლებლის საშუალო შემოსავლებისა (μ_1) და ლექტორების საშუალო შემოსავლების (μ_2) სხვაობათა შესახებ:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$,

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

რადგან $n=m=50>30$, ამიტომ უნდა გამოვთვალოთ (12.6) სტატისტიკის შერჩევითი მნიშვნელობა

$$\tilde{z}_{n,m}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1'^2}{n}+\frac{s_2'^2}{m}}}=\frac{(43{,}7-41{,}5)}{\sqrt{\frac{11{,}8}{50}+\frac{46{,}3}{50}}}=2{,}04$$

დავფიქსიროთ მნიშვნელოვნობის დონე α=0,05, მაშინ $z_\alpha=z_{0,05}$=1,645. რადგან ალტერნატივა მარჯვენა ცალმხრივია, უნდა გამოვიყენოთ ცალმხრივი მარჯვენა კრიტიკული არე:

თუ $\tilde{z}_{n,m}>z_\alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ (α მნიშვნელოვნობის დონით). ჩვენი მონაცემების მიხედვით

$$\tilde{z}_{n,m}=2{,}04>1{,}645=z_{0{,}05},$$

ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ H_1-ის სასარგებლოდ და α=0,05 მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა დასკვნა, რომ მასწავლებლების საშუალო წლიური ხელფასი აღემატება ლექტორებისას.

სტუდენტი იღებს გადაწყვეტილებას: გახდეს სკოლის მასწავლებელი.

ორამორჩევიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციების საშუალოსათვის უცნობი, მაგრამ ტოლი დისპერსიების შემთხვევაში. გადავიდეთ იმ შემთხვევის განხილვაზე, როდესაც დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციების დისპერსიები უცნობია, მაგრამ ტოლია, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$. საერთო დისპერსიის უცნობი მნიშვნელობა შევაფასოთ ორივე შერჩევის საფუძველზე ფორმულით:

$$S_{n,m}^2=\frac{1}{n+m-2}\left((n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2\right)=\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y}_m)^2\right).\quad(12.7)$$

მაშინ, როგორც ვიცით, $(n+m-2)\dfrac{S_{n,m}^2}{\sigma^2}$ სტატისტიკას აქვს $\chi^2(n+m-2)$ განაწილება, ხოლო

$$T_{n,m}=\frac{(\bar{X}_n-\bar{Y}_m)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{n,m}\sqrt{(1/n+1/m)}}\qquad(12.8)$$

სტატისტიკას – სტიუდენტის განაწილება $(n+m-2)$ თავისუფლების ხარისხით.

ვიცით რა $T_{n,m}$ სტატისტიკის განაწილება, მარტივად, სტანდარტული გზით, მოწმდება (12.1) სახის ჰიპოთეზები უცნობი გენერალური საშუალოებისათვის.

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას (12.8)-დან ვღებულობთ, რომ

$$T_{n,m}=\frac{(\bar{X}_n-\bar{Y}_m)}{S_{n,m}\sqrt{(1/n+1/m)}}\sim t(n+m-2)\qquad(12.9)$$

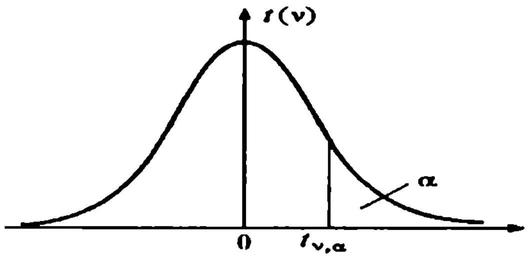
და, α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული არეები, ალტერნატივების მიხედვით შემდეგნაირად აიგება:

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა $n+m-2$ თავისუფლების ხარისხის მქონე t განაწილების α ზომის ზედა არე. $U_1=[t_{n+m-2,\alpha},+\infty)$,

ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა $n+m-2$ თავისუფლების ხარისხის მქონე t განაწილების α ზომის ქვედა არე, $U_1=(-\infty, -t_{n+m-2,\alpha}]$,

გ) ორმხრივი ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არე შედგენილია ორი ნაწილისაგან: $n+m-2$ თავისუფლების ხარისხის მქონე t განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა და $\alpha/2$ ზომის ქვედა არეებისაგან, $U_1=(-\infty, -t_{n+m-2,\alpha/2}]\cup[t_{n+m-2,\alpha/2}, +\infty)$.

აქ, ყველგან $t_{\nu,\alpha}$ წარმოადგენს ν თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკულ წერტილს (ზედა α-კრიტიკულ წერტილს).



ნახ. 12.2

ამრიგად გადაწყვეტილების წესი შემდეგია :

ყველა ისეთი $x=(x_1,x_2,..,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებისთვისაც

$$t_{n,m}=\frac{\overline{x}_n-\overline{y}_m}{s_{n,m}\sqrt{(1/n+1/m)}}\in U_1\quad,$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $x = (x_1,x_2,..,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

შენიშვნა 1. როდესაც ორივე შერჩევის მოცულობა საკმარისად დიდია ($n>30$, $m>30$) შესაძლებელია $\tilde{z}_{nm}$ სტატისტიკის გამოყენებაც. შერჩევის მცირე მოცულობის შემთხვევაში კი უნდა გამოვიყენოთ $T_{n,m}$ სტატისტიკა (მხოლოდ ორივე შერჩევის ნორმალურობის ან ნორმალურობიდან მცირე გადახრის დროს).

უნდა აღინიშნოს, რომ როდესაც ორივე შერჩევას ტოლი დისპერსიები აქვს, შერჩევის დიდი მოცულობის დროს $\tilde{z}_{nm}$ და $T_{n,m}$ სტატისტიკები მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, (0,1) პარამეტრებით. ამიტომ $\tilde{z}_{nm}$ სტატისტიკაზე დაფუძნებულ კრიტერიუმებსა და ნდობის ინტერვალებს ხშირად უმატებენ მითითებას ($n>30$, $m>30$), ხოლო $T_{n,m}$ სტატისტიკაზე დაფუძნებულ კრიტერიუმებსა და ნდობის ინტერვალებს კი ემატება მითითება ($n<30$, $m<30$).

2. აღწერილი ცალმხრივი კრიტერიუმები გამოიყენება შემდეგი ჰიპოთეზათა შესამოწმებლადაც

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu_1 - \mu_2 \le 0 \\ H1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{array}\right\} \text{კრიტიკული არეა } t_{n,m} > t_{n+m-2,\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu_1 - \mu_2 \ge 0 \\ H1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{array}\right\} \text{კრიტიკული არეა } t_{n,m} < -t_{n+m-2,\alpha}.$$

ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი α მნიშვნელოვნობის დონით ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციების საშუალოსათვის უცნობი ტოლი დისპერსიების შემთხვევაში. (მცირე მოცულობის ამონარჩევებისათვის)

ნულოვანი ჰიპოთეზა	H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა	$t_{n,m} = \dfrac{\bar{x}_n - \bar{y}_m}{s_{n,m}\sqrt{(1/n + 1/m)}}$
მნიშვნელოვნობის დონე α	
ალტერნატიული ჰიპოთეზა	კრიტიკული არე (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$	$t_{n,m} > t_{n+m-2,\alpha}$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$	$t_{n,m} < -t_{n+m-2,\alpha}$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 \ne 0$	$t_{n,m} < -t_{n+m-2,\alpha}$ ან $t_{n,m} > t_{n+m-2,\alpha}$

მაგალითი **12.6.** ვთქვათ, ორი დამოუკიდებელი ნორმალური გენერალური ერთობლიობიდან, რომელთა დისპერსიები ტოლია, აღებული შერჩევის საფუძველზე უნდა შემოწმდეს: არის თუ არა განსხვავება გენერალურ საშუალოებს შორის, ე.ი. უნდა შემოწმდეს ჰიპოთეზები:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0,$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \ne 0.$

ერთი ერთობლიობიდან ამოღებულია შერჩევა, რომლის მოცულობაა 10, შერჩევის საშუალო – 23, შერჩევის სტანდარტული გადახრა – 4. მეორე ერთობლიობიდან ამოღებული შერჩევის მოცულობაა 8, შერჩევის საშუალო – 26, შერჩევის სტანდარტული გადახრა – 5. გამოიყენეთ მნიშვნელოვნობის დონე 0.05.

ა) განსაზღვრეთ დასკვნის წესი.

ბ) გამოითვალეთ ერთობლიობათა დისპერსიის გაერთიანებული შეფასება.

გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა.

დ) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

ამოხსნა.

ა) რადგან ალტერნატივა ორმხრივია, საქმე გვაქვს ორმხრივ კრიტერიუმთან. დასკვნის წესია: დავიწუნოთ H_0 ჰიპოთეზა, თუ $|t| > t_{16;\,0{,}975} = 1{,}75$.

ბ) $s^2_{n,m} = \dfrac{1}{n+m-2}\left[(n-1)s_1'^2 + (m-1)s_2'^2\right] = \dfrac{1}{16}[9 \cdot 16 + 7 \cdot 25] = 19{,}9375$.

გ) კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა გამოვითვალოთ (12.9) ფორმულით:

$$t = \frac{23-26}{\sqrt{19.9375(1/10+1/8)}} = -1.416.$$

დ) რადგან $|t|$=1,416<1,75, ამიტომ H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

მაგალითი 12.7. უძრავი ქონების კომპანიის მენეჯერს სურს შეადაროს ორი განსხვავებული სალიზინგო შეთანხმებიდან შემოსული წმინდა თვიური შემოსავლები. ერთი შეთანხმება (A გეგმა) ითვალისწინებს დაბალ რენტას (საარენდო გადასახადებს), სამაგიეროდ ავალდებულებს არენდატორს საარენდო ქონების დაზიანების შემთხვევაში გადაიხადოს ყველანაირი აღდგენითი სამუშაო ხარჯები. მეორე შეთანხმება (B გეგმა) აწესებს უფრო მაღალ რენტას, სამაგიეროდ ყველა სარემონტო ხარჯს აკისრებს კომპანიას. ნულოვანი ჰიპოთეზის როლში მენეჯერი განიხილავს ჰიპოთეზას, რომ B გეგმის შესაბამისი საშუალო შემოსავალი არ აღემატება A გეგმის შესაბამის საშუალო შემოსავალს. ამ ჰიპოთეზის შემოწმების მიზნით მან აიღო ორი დამოუკიდებელი 15-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა თითოეული (A და B) ჯგუფიდან და შეაგროვა მათი წმინდა თვიური შემოსავლების მონაცემები. ამ მონაცემების საფუძველზე გამოთვლილი საშუალოები და სტანდარტული გადახრები ასე გამოიყურება (მონაცემები გამოსახულია $-ში):

A გეგმა	B გეგმა
$\bar{x} = 132{,}45$	$\bar{y} = 128{,}06$
$s_1'^2 = 123$	$s_2'^2 = 95$

α=0,05 მნიშვნელოვნობის დონით უარყოფს თუ არა მენეჯერი H_0 ჰიპოთეზას?

ამოხსნა: ვიგულისხმოთ, რომ ორივე პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. რადგან n=m=15<30 უნდა გამოვიყენოთ შერჩევის მცირე მოცულობისათვის გამოსადეგი პროცედურა. პირველ რიგში, გამოვთვალოთ საერთო დისპერსიის შეფასება: რისთვისაც გამოვიყენოთ (12.7) ფორმულა.

$$s'^2 = s'^2_{15,15} = \frac{1}{15+15-2}((15-1)\cdot 123+(15-1)\cdot 95) = \frac{14 \cdot 218}{28} = 109.$$

ახლა (12.8) ფორმულით გამოვთვალოთ $T_{n,m}$ სტატისტიკის შერჩევითი მნიშვნელობა:

$$t = t_{15,15} = \frac{4.39}{\sqrt{218/15}} = 1.152$$

რადგან ნულოვანი ჰიპოთეზაა, $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა ასე გამოიყურება: $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ და კრიტიკულ არეს ექნება შემდეგი სახე:.

$$t_{n,m} < -t_{n+m-2,\alpha}\,.$$

მოვძებნოთ სტიუდენტის განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში $t_{28,0.05}$=2.763. რადგანაც

$$t = 1.152 > -2.763 = t_{28,0.05}\,,$$

H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

ახლა გადავიდეთ საშუალოების $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალის აგების ამოცანაზე.

(12.8) ფორმულით განსაზღვრული სტატისტიკის მეშვეობით სტანდარტული გზით აიგება $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის.

ნდობის ინტერვალი ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოთა $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის უცნობი ტოლი დისპერსიების შემთხვევაში. (მცირე მოცულობის შერჩევებისათვის)

$$\left((\bar{x}_n-\bar{y}_m)-t_{n+m-2,\frac{\alpha}{2}}\cdot \dot{s}_{n,m}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\;;\quad (\bar{x}_n-\bar{y}_m)+t_{n+m-2,\frac{\alpha}{2}}\cdot \dot{s}_{n,m}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right),\quad (12.10)$$

სადაც $t_{\nu,\alpha}$ არის $t(\nu)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი

მაგალითი 12.8. (12.7 მაგალითის გაგრძელება) 12.7 მაგალითის მონაცემებით ავაგოთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობ საშუალო შემოსავალთა $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის.

ვისარგებლოთ (12.10) ფორმულით, რომლის თანახმადაც საძიებელი ინტერვალის სახეა:

$$\bar{x}_n-\bar{y}_m \pm t_{n+m-2,0.05}\cdot \dot{s}_{n,m}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$(132.45-128.06)\pm 2.763\sqrt{109\frac{2}{15}} = 4.39\pm 2.763\cdot 3.8,$$

საბოლოოდ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი $\mu_1-\mu_2$ სხვაობისათვის იქნება:

$$(-6.11\,;\,14.89).$$

§ 2. ორამოკრეფიანი ამოცანები ნორმალური პოპულაციების დისპერსიებისათვის

ვთქვათ $X = (X_1,\ldots,X_n)$ და $Y = (Y_1,\ldots,Y_m)$ ორი შერჩევაა დამოუკიდებელი $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ და შესაბამისად, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობებიდან. ორივე პოპულაციის პარამეტრები უცნობია. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს დისპერსიათა ტოლობის ჰიპოთეზის შემოწმება და ნდობის ინტერვალის აგება დისპერსიათა ფარდობისათვის.

როგორც ვიცით უცნობ σ_1^2 და σ_2^2 დისპერსიათა ჩაუნაცვლებელი შეფასებებია S_X^2 და S_Y^2 შესაბამისად, და

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1).$$

პოპულაციათა დამოუკიდებლობის გამო S_X^2 და S_Y^2 სტატისტიკებიც დამოუკიდებლებია და

$$F_{n,m} = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \tag{12.11}$$

სტატისტიკას აქვს F-განაწილება $n-1$ და $m-1$ თავისუფლების ხარისხებით.

$F_{n,m}$ სტატისტიკა ცენტრალურ როლს ასრულებს დისპერსიათა ფარდობის შესახებ სტატისტიკური დასკვნების ამოცანებში.

თავდაპირველად განვიხილოთ დისპერსიების ტოლობის ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა. როგორც წინა პუნქტში აღვნიშნეთ, პოპულაციების დისპერსიების ტოლობა ერთ-ერთ ძირითად დაშვებას წარმოადგენს პოპულაციათა საშუალოების სხვაობისათვის ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანებში, როდესაც შერჩევის მოცულობები მცირეა.

ამრიგად, შევამოწმოთ ჰიპოთეზები ნორმალური პოპულაციების დისპერსიების შესახებ:

$$H_0:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \qquad H_0:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \qquad H_0:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$$

$$H_0:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1 \qquad H_0:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 1 \qquad H_0:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$$

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას (12.11)-დან მივიღებთ, რომ

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n-1,m-1),$$

ამიტომ, თუ $F_{k,l,\alpha}$-თი აღვნიშნავთ k და l თავისუფლების ხარისხების მქონე F-განაწილების ზედა α–კრიტიკულ არეს, მაშინ

$$P\{F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \le \frac{S_X^2}{S_Y^2} \le F_{n-1,m-1,\alpha/2}\} = 1-\alpha, \quad (12.12)$$

$$P\{0 \le \frac{S_X^2}{S_Y^2} \le F_{n-1,m-1,\alpha}\} = 1-\alpha, \quad (12.13)$$

$$P\{F_{n-1,m-1,1-\alpha} \le \frac{S_X^2}{S_Y^2} \le \infty\} = 1-\alpha, \quad (12.14)$$

რაც გვაძლევს გადაწყვეტილების შემდეგი წესის ჩამოყალიბების საფუძველს:

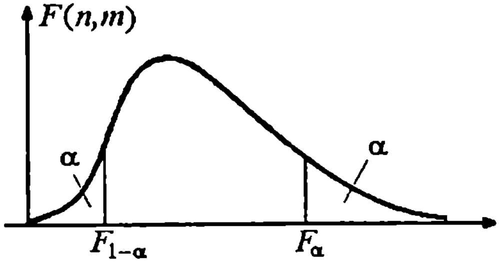
$(x_1,\ldots,x_n)$ და $(y_1,\ldots,y_m)$ დაკვირვებების საფუძველზე, α მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, თუ $F_{n,m}$ სტატისტიკის გამოთვლილი მნიშვნელობა: $f_{n,m}=s_x'^2 / s_y'^2$ აკმაყოფილებს უტოლობას:

a) $f_{n,m} > F_{n-1,m-1,\alpha}$ ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივის დროს;

b) $f_{n,m} > F_{n-1,m-1,1-\alpha}$ ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივის დროს;

c) $f_{n,m} > F_{n-1,m-1,\alpha/2}$ ან $f_{n,m} < F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$ ორმხრივი ალტერნატივის დროს;

შევნიშნოთ, რომ $F_{n-1,m-1,\alpha}$ წარმოადგენს F-განაწილების ზედა α-კრიტიკულ წერტილს, რომელსაც ზოგჯერ აღნიშნავენ F_α-თი (თავისუფლების ხარისხების მითითების გარეშე, როდესაც ეს არ იწვევს გაუგებრობას), ხოლო $F_{n-1,m-1,1-\alpha}$ წარმოადგენს F-განაწილების ქვედა α-კრიტიკულ წერტილს, რომელსაც ზოგჯერ აღნიშნავენ $F_{1-\alpha}$-თი (იხ. ნახ. 12.3).



ნახ. 12.3

გავიხსენოთ, რომ ფიშერის განაწილების მქონე $F_{k,l}$ შემთხვევითი სიდიდეს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$F_{k,l} = 1/F_{l,k} \text{ და } F_{k,l,p} = 1/F_{l,k,1-p}. \quad (12.15)$$

ფიშერის განაწილების აღნიშნული თვისებები მიგვანიშნებს ჰიპოთეზის შემოწმების პროცედურის გამარტივების შემდეგ შესაძლებლობაზე: ვთქვათ, s_x^2 და s_y^2 პირველი და მეორე ამოკრეფის საფუძველზე გამოთვლილი შერჩევითი დისპერსიების რიცხვითი მნიშვნელობებია. კრიტერიუმის სტატისტიკის $\tilde{f}$ დაკვირვებულ მნიშვნელობად ავიღოთ s_x^2 და s_y^2 სიდიდეებს შორის უდიდესის შეფარდება უმცირესთან $\tilde{f}=\dfrac{\max(s_x^2,s_y^2)}{\min(s_x^2,s_y^2)}$. მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობა შევადაროთ ფიშერის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილის რიცხვით მნიშვნელობას ორმხრივი ალტერნატივის შემთხვევაში და ზედა α კრიტიკული წერტილის რიცხვით მნიშვნელობას ცალმხრივი, როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა ალტერნატივის შემთხვევაში, სადაც k და l არის $\tilde{f}$ სტატისტიკის მრიცხველსა და მნიშვნელში მდგომ χ^2 განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეთა შესაბამისი თავისუფლების ხარისხები ($k=n-1$ და $l=m-1$, თუ $s_x^2>s_y^2$, და პირიქით, $k=m-1$ და $l=n-1$, თუ $s_x^2<s_y^2$). თუ აღმოჩნდა, რომ $\tilde{f}$ მეტია შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობაზე, H_0 ჰიპოთეზა უნდა უარვყოთ.

ამრიგად, კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებულ მნიშვნელობად ვიღებთ s_x^2 და s_y^2 სიდიდეებს შორის უდიდესის უმცირესთან შეფარდებას. ალტერნატივების მიხედვით, კრიტიკული არეები შემდეგნაირად აიგება:

a) ორმხრივი ალტერნატივა: U_1 კრიტიკული არეა ფიშერის $F(k,l)$ განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა არე, $U_1=[F_{k,l,\alpha/2},+\infty)$,

b)–c) ცალმხრივი მარჯვენა ან მარცხენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა ფიშერის განაწილების α ზომის ზედა არე, $U_1=[F_{k,l,\alpha},+\infty)$, სადაც k და l $\tilde{f}$ სტატისტიკის მრიცხველსა და მნიშვნელში მდგომ χ^2 განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეთა შესაბამისი თავისუფლების ხარისხებია.

ყველა ისეთი $x=(x_1,x_2,..,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებისთვისაც

$$\tilde{f}=\frac{\max(s_x^2,s_y^2)}{\min(s_x^2,s_y^2)}\in U_1,$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $x=(x_1,x_2,..x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის,

ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$

მნიშვნელოვნობის დონე α

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა $\tilde{f} = \dfrac{\max(s_x^2, s_y^2)}{\min(s_x^2, s_y^2)}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1: (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$	$\tilde{f} > F_{k,l,\alpha}$
$H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 1$	$\tilde{f} > F_{k,l,\alpha/2}$
$H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$	$\tilde{f} > F_{k,l,\alpha/2}$

($k=n-1$ და $l=m-1$, თუ $s_x^2 > s_y^2$, და პირიქით, $k=m-1$ და $l=n-1$, თუ $s_x^2 < s_y^2$).

ახლა ავაგოთ $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის. ამ მიზნით გამოვიყენოთ (12.11) ფორმულით განსაზღვრული $F_{m,n}$ სტატისტიკა, რომელსაც აქვს ფიშერის $F(n-1,m-1)$-განაწილება, საიდანაც მივიღებთ

$$P\left\{ F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \leq \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq F_{n-1,m-1,\alpha/2} \right\} = 1-\alpha,$$

სადაც $F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$ და $F_{n-1,m-1,\alpha/2}$ წარმოადგენს $F(n-1,m-1)$-განაწილების, შესაბამისად, $\alpha/2$ და $1-\alpha/2$ კვანტილებს. ამ შემთხვევაშიც ნდობის ინტერვალის ასაგებად გამოვიყენოთ $\tilde{f}$. s_x^2 და s_y^2 სიდიდეებს შორის უდიდესის უმცირესთან შეფარდება. მაშინ, (12.15)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალს დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\left(\tilde{f} \cdot \frac{1}{F_{n-1,m-1,\alpha/2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \tilde{f} \cdot F_{n-1,m-1,\alpha/2} \right),$$

სადაც $\tilde{f} = \dfrac{\max(s_x^2, s_y^2)}{\min(s_x^2, s_y^2)}$.

(1–α)-ნდობის ინტერვალი დამოუკიდებელ პოპულაციათა

დისპერსიების $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ფარდობისათვის

$$\left(\tilde{f}\cdot\frac{1}{F_{k,l,\alpha/2}},\tilde{f}\cdot F_{k,l,\alpha/2}\right),$$

სადაც $\tilde{f}=\dfrac{\max(s_x^2,s_y^2)}{\min(s_x^2,s_y^2)}$,

(k=n–1 და l=m–1, თუ $s_x^2>s_y^2$, და k=m–1 და l=n–1, თუ $s_x^2<s_y^2$)

მაგალითი 12.9. (12.7 მაგალითის გაგრძელება). როდესაც ვწყვეტდით 12.7 მაგალითში დასმულ ამოცანას, ჩვენი დაშვება იყო, რომ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

ა) მნიშვნელოვნობის α=0.05 დონით შევამოწმოთ თანხმობაშია თუ არა მონაცემები H_0 : $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ჰიპოთეზასთან?

ბ) ავაგოთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის.

ამოხსნა. ა) შესამოწმებელია ჰიპოთეზები:

$H_0:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2=1,$

$H_1:\ \sigma_1^2/\sigma_2^2>1.$

ამ შემთხვევაში $s_x^2>s_y^2$, ამიტომ k=n–1, l=m–1 და $f_{m,n}=\tilde{f}$. გამოვთვალოთ ეს სიდიდე

$$f_{m,n}=123/95\sim1.3.$$

საქმე გვაქვს ცალმხრივ მარჯვენა ალტერნატივასთან, ამიტომ კრიტიკული არეა:

$$\tilde{f}>F_{15,15,0.05}.$$

ფიშერის განაწილების ცხრილების მეშვეობით მოვძებნოთ $F_{15,15,0.05}$=2.4. რადგან

$$\tilde{f}=1.3<2.4=F_{15,15,0.05},$$

არსებული მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

ბ) საძიებელი 95%-იანი ნდობის ინტერვალია:

$$\left(\tilde{f}\cdot\frac{1}{F_{15,15,0.025}},\tilde{f}\cdot F_{15,15,0.025}\right).$$

იგივე ცხრილების მეშვეობით გვექნება $F_{15,15,0.025}$=2.86. საბოლოოდ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$(0.46\ ;\ 3.72).$$

მაგალითი **12.10.** შესადარებელია ორი მანქანის მუშაობის სიზუსტე. პირველ მანქანაზე ჩატარებული 25, ხოლო მეორეზე – 20 დაკვირვების შედეგად მიღებული შერჩევითი დისპერსიები შესაბამისად 3.1 და 1.4-ის ტოლი აღმოჩნდა. გვაძლევს თუ არა ეს მონაცემები საკმარის საფუძველს α=0.05 ნდობის დონით დავასკვნათ, რომ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$? ავაგოთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი σ_1^2/σ_2^2 -თვის.

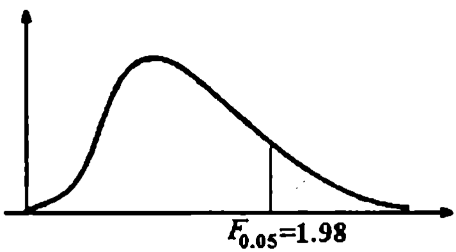
ამოხსნა.

1. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$;

$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

2. კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობაა $\tilde{f} = s_1^2/s_2^2$.

3. უარყოფის არე: H_0-ს უარვყოფთ, თუ $\tilde{f} > F_{24,19,0.05}$.



$F_{24,19,0.05}$=2.04, ხოლო სტატისტიკის მნიშვნელობა ტოლია $\tilde{f}$ = 3.1/1.4=2.21

გადაწყვეტილება: ჩვენ უკუვაგდებთ H_0-ჰიპოთეზას და ვასკვნით, რომ პირველი მანქანის პროდუქციის ცვალებადობა უფრო დიდია მეორე მანქანასთან შედარებით (ანუ მეორე მანქანა უფრო ზუსტია)

90%-იანი ნდობის ინტერვალი σ_1^2/σ_2^2 -თვის იქნება

$$\tilde{f} \cdot \frac{1}{F_{24,19,0.05}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \tilde{f} \cdot F_{24,19,0.05},$$

$$\frac{2.21}{2.04} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2.21 \cdot 2,04,$$

$$1.08 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 4.51.$$

§ 3. სტატისტიკური დასკვნები დაწყვილებულ მონაცემთა საშუალოების სხვაობებისათვის

წინა პარაგრაფებში ჩვენ ვამოწმებდით ჰიპოთეზებს და ვაგებდით ნდობის ინტერვალებს ორი პოპულაციის საშუალოების სხვაობისათვის ორი დამოუკიდებელი შერჩევის საფუძველზე: n ინდივიდი (ან ობიექტი) აღებული იყო ერთი პოპულაციიდან, ხოლო m ინდივიდი – სრულიად დამოუკიდებლად მეორე პოპულაციიდან. ამის საპირისპირო სიტუაციაა, როდესაც საქმე გვაქვს ე.წ. დაწყვილებულ მონაცემებთან, რომლებიც შეიძლება გენერირებულნი იყვნენ შემდეგი ორი გზით:

1. შერჩეულია n ინდივიდი (ან ობიექტი) და თითოეულზე ჩატარებულია ორი დაკვირვება. მაგალითად, წარმოვიდგინოთ, რომ ფარმაცევტულ კომპანიაში შეიმუშავეს ახალი საძილე საშუალება და უნდა შეისწავლონ მისი ეფექტურობა. ირჩევენ n ინდივიდს ექსპერიმენტისათვის, რომელიც მიმდინარეობს ორი ღამის განმავლობაში. ერთ ღამეს სუბიექტს აძლევენ ძილის წამალს, მეორე ღამეს კი პლაცებოს (აბს, რომელიც გარეგნულად ძილის წამლის აბების იდენტურია, ოღონდ არ შეიცავს წამალს). ამ შემთხვევაში დაწყვილებულ მონაცემებს წარმოადგენს თითოეული სუბიექტის ძილის ხანგრძლივობათა წყვილები, წამლით და წამლის გარეშე.
2. გვაქვს ორი პოპულაცია, ვთქვათ A და B; A პოპულაციიდან შერჩეული ყოველი ობიექტისათვის (ან ინდივიდისათვის) შეირჩევა მისი წყვილი („ტყუპისცალი") მეორე პოპულაციიდან. მაგალითად, ახალი წამლის ეფექტურობის შესწავლის ალტერნატიული გზაა ყოველ პაციენტს საკონტროლო ჯგუფიდან, რომლებსაც უტარდება კონსერვატული მკურნალობა, გააჩნდეს პარტნიორი ექსპერიმენტული ჯგუფიდან (რომელსაც მკურნალობა უტარდება ახალი მედიკამენტით), იგივე სქესის, მოღვაწეობის მსგავსი სფეროდან, იდენტური ოჯახური გარემოთი, ავადმყოფობის ისტორიით, წონით, ასაკით, სიმაღლით და სხვა ფიზიოლოგიური მახასიათებლებით. „ტყუპისცალის" შერჩევა ხდება იმ მოსაზრების გამო, რომ მკურნალობის ეფექტის განსხვავება წყვილებს შორის მიეწეროს მკურნალობის მეთოდებს და არა სხვა რაიმე ფაქტორს.

ძირითადი დაშვებები, როდესაც საქმე გვაქვს დაწყვილებულ მონაცემებთან შემდეგია:

1. მონაცემები შედგება n დამოუკიდებლად შერჩეული წყვილისაგან (X_1,Y_1), ... , (X_n,Y_n), ამავე დროს არ იგულისხმება, რომ (X_i,Y_i) ვექტორის კომპონენტები დამოუკიდებლებია. აღვნიშნოთ $D_1=X_1-Y_1$, ... , $D_n=X_n-Y_n$, ე.ი. D_i-ები წარმოადგენს სხვაობებს წყვილებს შორის.
2. D_1, ... , D_n წარმოადგენს დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას $(\mu_1-\mu_2, \sigma_D^2)$ პარამეტრებით. მაგალითად, ეს დაშვება ყოველთვის შესრულებულია, როდესაც (X_i,Y_i) წყვილი ნორმალურად განაწილებული ვექტორია.

ამ დაშვებებში ჩვენს შერჩევას წარმოადგენს D_i, $i=1,2,...,n$ ურთიერთდამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ ნორმალურ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა,

$\mu_D=\mu_1-\mu_2$, $V(D_i)=\sigma_D^2$, ორივე პარამეტრი μ_D და σ_D^2 უცნობია. მის საფუძველზე უნდა გაკეთდეს სტატისტიკური დასკვნები საშუალოთა ($\mu_1-\mu_2$) სხვაობის შესახებ.

დასმული ამოცანა იდენტურია ერთამოკრეფიანი ამოცანისა, ამიტომ ჰიპოთეზათა შემოწმებისა და ნდობის ინტერვალების აგების პროცედურები ჩვენთვის უკვე ცნობილია. ეს პროცედურები იყენებს

$$T_n=\frac{\overline{D}_n-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \tag{12.16}$$

სტატისტიკას, სადაც $\overline{D}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_i$, $S_D^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D}_n)^2$. ცხადია, რომ T_n სტატისტიკა განაწილებულია ($n-1$) თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის კანონით. ნულოვანი $H_0:\mu_D=0$ ჰიპოთეზის დროს

$$T_n=\frac{\overline{D}_n}{S'_D/\sqrt{n}}$$

t ტესტი დაწყვილებული მონაცემებისათვის
ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0:\mu_D=0$
მნიშვნელოვნობის დონე α
კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა $t=\dfrac{\overline{d}_n}{s_D/\sqrt{n}}$
სადაც $\overline{d}_n$-ით აღნიშნულია $\overline{D}_n$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე):
$H_1:\mu_D>0$	$t>t_{n-1,\alpha}$
$H_1:\mu_D<0$	$t<-t_{n-1,\alpha}$
$H_1:\mu_D\neq 0$	$t>t_{n-1,\alpha/2}$ ან $t<-t_{n-1,\alpha/2}$

მაგალითი **12.11.** შესასწავლია საკითხი, თუ რა გავლენას ახდენს სქესი ბაკალავრის ხარისხის მქონე სტუდენტებისათვის შეთავაზებული ხელფასების სიდიდეზე. შერჩეული იქნა სტუდენტთა 10 წყვილი. ყოველი წყვილი შედგებოდა მამრობითი სქესის სტუდენტისა და მდედრობითი სქესის სტუდენტისაგან, რომლებსაც გააჩნდათ იდენტური საშუალო შეფასებები, გავლილი კურსები, ასაკი და მუშაობის გამოცდილება. ქვემოთ მოყვანილია მათთვის შეთავაზებული უმაღლესი ხელფასების მონაცემები:

წყვილის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
მდ. სქესი	22	17	21	19	26	23	21	31	25	18
მამრ. სქესი	25	18	27	17	29	25	19	27	36	23
სხვაობები	−3	−1	−6	2	−3	−2	2	4	−11	−5

$$\bar{d} = \frac{1}{10}(-3-1-6+2-3-2+2+4-11-5) = -2.3; \qquad S'_D = 19.78.$$

T_n სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა იქნება:

$$t = \frac{-2.3}{\sqrt{19.78/10}} \approx -1.646$$

ჩამოვაყალიბოთ ჰიპოთეზები:

$H_0 : \mu_D = 0.$
$H_1 : \mu_D < 0.$

დავაფიქსიროთ α=0,05, მაშინ $t_{9,0.05}$=1.833. რადგან ჰიპოთეზა მარცხენა ცალმხრივია, ამიტომ თუ

$$t < -t_{9,0.05}$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ. გვაქვს $t = -1.646 > -1.833 = -t_{9,0.05}$. ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არ არსებობს საკმარისი საფუძველი დასკვნისათვის, რომ μ_D<0.

(12.16) ფორმულით განსაზღვრული სტატისტიკის მეშვეობით სტანდარტული გზით აიგება (1–α)-ნდობის ინტერვალი (μ_1–μ_2) სხვაობისათვის.

(1–α)-ნდობის ინტერვალი დაწყვილებული მონაცემების საშუალოთა μ_D=μ_1–μ_2 სხვაობისათვის

$$\left(\bar{d} - \frac{s_D}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}; \bar{d} + \frac{s_D}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}\right) \qquad (12.17)$$

მაგალითი **12.12.** (12.11 მაგალითის გაგრძელება) 12.11 მაგალითის მონაცემებით ავაგოთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა μ_D=μ_1–μ_2 სხვაობისათვის.

ყველა საჭირო სიდიდე გამოთვლილია, ამიტომ საძიებელი ინტერვალი იქნება:

$$(-2.3-1.4\cdot 1.833 \; ; -2.3+1.4\cdot 1.833)$$

ამრიგად, უცნობი (μ_1–μ_2) სხვაობისათვის წერტილოვანი შეფასებაა $\bar{d}$ = –2.3, ხოლო 90%-იანი ნდობის დონით ინტერვალური შეფასება იქნება (–2.3±2.56), ანუ ინტერვალი (–4.86 ; 0.26).

შენიშვნა 1. ზოგჯერ ძნელი გადასაწყვეტია, კონკრეტულ ექსპერიმენტთან დაკავშირებულ მონაცემთა წყვილებში (X_i, Y_i), i=1,2,...,n, X და Y ცვლადები დამოუკიდებლებია (ე.ი. საქმე გვაქვს ორ დამოუკიდებელ შერჩევასთან), თუ არა, ე.ი. მონაცემები დაწყვილებულებია. დაისვით კითხვა: არის თუ არა რაიმე ლოგიკური მიზეზი იმის დასასაბუთებლად, რომ ორი (X_1,...,X_n) და (Y_1,...,Y_n) შერჩევიდან პირველი შერჩევის ელემენტი უნდა შევადაროთ მეორე შერჩევის პირველ ელემენტს, მეორე ელემენტი მეორეს და ა.შ. თუ ასეთი მიზეზი არ არსებობს, მაშინ შერჩევები დამოუკიდებლებია.

მოვიყვანოთ საილუსტრაციო მაგალითი.

იმის გასარკვევად, ზრდის თუ არა ახალი ტიპის სასუქის გამოყენება რაიმე სასოფლო-სამეურნეო კულტურის მოსავლიანობას (ძველთან შედარებით), ე.ი. ახალი სასუქი უფრო ეფექტურია ძველთან შედარებით თუ არა, ერთი ფერმის 20 ჰექტარ ფართის მიწის ნაკვეთს ყოფენ 20 ტოლ 1 ჰა ფართობის ნაკვეთებად. შემთხვევით არჩეულ 10 ნაკვეთზე გამოიყენეს ახალი, ხოლო დანარჩენ 10-ზე კი – ძველი.

	მოსავლიანობა									
ძველი ტიპის სასუქი	1.5	1.0	0.7	1.8	1.4	1.1	0.9	1.6	1.5	1.3
ახალი ტიპის სასუქი	1.7	1.3	1.8	1.6	0.8	1.7	1.4	0.7	1.3	1.9

არის ეს დაწყვილებულ მონაცემებიანი ექსპერიმენტი? თქვენ შეიძლება გეეფიქრა, რომ პასუხი დადებითია, რადგან ნაკვეთები ერთი ფერმიდანაა აღებული. მაგრამ სინამდვილეში ვერ დავამყარებთ ვერავითარ აზრიან კავშირს წყვილებს შორის. ამიტომ დაკვირვებები დამოუკიდებელია.

ახლა იგივე საკითხის გასარკვევად შევცვალოთ ექსპერიმენტი. შემთხვევითად ავირჩიოთ ათი 2 ჰექტარის ფართის მქონე 10 ნაკვეთი რაიმე რეგიონში. ყოველი ნაკვეთი დავყოთ ორ ნაწილად, ერთზე გამოვიყენოთ ძველი ტიპის, ხოლო მეორეზე ახალი ტიპის სასუქი. შედეგებია

	მოსავლიანობა									
ნაკვეთის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ძველი ტიპის სასუქი	1.2	1.4	1.6	1.1	1.4	1.1	0.7	1.5	1.3	1.0
ახალი ტიპის სასუქი	1.4	1.2	1.5	1.1	1.6	1.2	1.0	1.4	1.3	1.5

ეს დაწყვილებული მონაცემებია, რადგან მონაცემთა ყოველი წყვილი ეკუთვნის ერთსა და იმავე ნაკვეთს და არის მხოლოდ ერთი დაკვირვება ყოველი ნაკვეთისათვის.

შენიშვნა 2. შევნიშნოთ, რომ ორი დამოუკიდებელი შერჩევის შემთხვევაში, როცა $m=n$, t-განაწილების თავისუფლების ხარისხი $2(n-1)$-ის ტოლია, მაშინ, როცა იგივე მოცულობის დაწყვილებული მონაცემებისათვის თავისუფლების ხარისხი $(n-1)$-ის ტოლია.

§ 4. ორამოკრეფიანი ამოცანები წარმატებათა ალბათობებისათვის ბერნულის ცდათა ორი დამოუკიდებელი მიმდევრობისათვის

ვთქვათ $X=(X_1,\ldots,X_n)$ და $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$ ორი დამოუკიდებელი შერჩევაა ბერნულის კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობებიდან წარმატების უცნობი p_1 და შესაბამისად, p_2 ალბათობებით. როგორც ვიცით, $S_1=\sum_{i=1}^{n} X_i$ და $S_2=\sum_{i=1}^{m} Y_i$ შემთხვევითი სიდიდეები განაწილებულია ბინომურად და წარმატებათა ფარდობითი სიხშირეები

$\hat{P}_{1n}=\dfrac{S_1}{n}$ და $\hat{P}_{2m}=\dfrac{S_2}{m}$ წარმოადგენენ შესაბამის პოპულაციათა უცნობი წარმატების ალბათობების ჩაუნაცვლებელ და ძალმოსილ შეფასებებს. კერძოდ

$$E\hat{P}_{1n}=p_1,\quad E\hat{P}_{2m}=p_2,\quad D\hat{P}_{1n}=\frac{p_1q_1}{n},\quad D\hat{P}_{2m}=\frac{p_2q_2}{m},\qquad (12.18)$$

სადაც $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$. ცხადია, რომ $E(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m})=p_1-p_2$ და პოპულაციების დამოუკიდებლობის გამო

$$D(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m})=D\hat{P}_{1n}+D\hat{P}_{2m}=\frac{p_1q_1}{n}+\frac{p_2q_2}{m}.$$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე

$$\frac{\left(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m}\right)-E\left(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m}\right)}{\sqrt{D\left(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m}\right)}}=\frac{\left(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m}\right)-(p_1-p_2)}{\sqrt{D\hat{P}_{1n}+D\hat{P}_{2m}}}.$$

ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად, საკმაოდ დიდი n-ისა და m-ისათვის, როდესაც ბინომური განაწილებებისათვის შესაძლებელია ნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენება, უკანასკნელ გამოსახულებას მიახლოებით სტანდარტული ნორმალური განაწილება აქვს

$$Z_{n,m}=\frac{\left(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m}\right)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n}+\dfrac{p_2q_2}{n}}}\overset{as}{\sim}N(0,1)\qquad (12.19)$$

$Z_{n,m}$ სტატისტიკა ცენტრალურ როლს ასრულებს ქვემომყვანილ სტატისტიკურ პროცედურებში.

ჯერ განვიხილოთ ჰიპოთეზათა შემოწმების შემდეგი ამოცანები.

ა) $H_0: p_1=p_2$ ბ) $H_0: p_1=p_2$ გ) $H_0: p_1=p_2$
$H_1: p_1\neq p_2$ $H_1: p_1>p_2$ $H_1: p_1<p_2$.

ნულოვანი ჰიპოთეზა არ აფიქსირებს პარამეტრების კონკრეტულ რიცხვით მნიშვნელობას. ის მიუთითებს მხოლოდ ორ დამოუკიდებელ პოპულაციაში წარმატებათა ალბათობების ტოლობაზე. დავუშვათ, რომ $p_1=p_2=p$. ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში $Z_{n,m}$ სტატისტიკა იღებს შემდეგ სახეს:

$$Z_{n,m} = \frac{\hat{P}_{1n} - \hat{P}_{2m}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}, \tag{12.20}$$

ამასთან ჩვეულებრივია, უცნობი p პარამეტრი შევაფასოთ ორივე შერჩევის საფუძველზე ფორმულით:

$$\hat{P} = \hat{P}_{n,m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i}{n+m} = \frac{n}{n+m}\hat{P}_1 + \frac{m}{n+m}\hat{P}_2$$

მაშინ საკმაოდ დიდი n-ისა და m-სათვის, როდესაც ბინომური განაწილებებისათვის შესაძლებელია ნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენება, (12.20)-დან ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას მივიღებთ, რომ

$$\hat{Z}_{n,m} = \frac{\left(\hat{P}_{1n} - \hat{P}_{2m}\right)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \overset{as}{\sim} N(0,1) \tag{12.21}$$

ჩამოთვლილ ჰიპოთეზათა შემოწმებისთვის კრიტერიუმის სტატისტიკად ავირჩიოთ (12.21) ფორმულით განსაზღვრული $\hat{Z}_{n,m}$ სტატისტიკა. მაშინ ალტერნატივების მიხედვით, კრიტიკული არეები შემდეგნაირად აიგება:

ა) ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ზედა არე, $U_1=[z_\alpha,+\infty)$.

ბ) ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არეა სტანდარტული ნორმალური განაწილების α ზომის ქვედა არე, $U_1=(-\infty, -z_\alpha]$.

გ) ორმხრივი ალტერნატივა. U_1 კრიტიკული არე შედგენილია ორი ნაწილისაგან: სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$ ზომის ზედა და ქვედა არეებისაგან, $U_1=(-\infty,-z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2},+\infty)$.

ამრიგად, ყველა ისეთი $x=(x_1,x_2,..,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებისთვისაც

$$t_{n,m} = \frac{\hat{p}_{1n} - \hat{p}_{2m}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n + 1/m)}} \in U_1$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $x=(x_1,x_2,..,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

ჰიპოთეზათა შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ბინომური პოპულაციის წარმატებათა ალბათობებისათვის (დიდი მოცულობის შერჩევებისათვის)

ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0: \mu_1-\mu_2=0$
მნიშვნელოვნობის დონე α

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა $\hat{z}_{n,m}\, z_{n,m}=\dfrac{\hat{p}_{1n}-\hat{p}_{2m}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n+1/m)}}$

სადაც $\hat{p}=\dfrac{n}{n+m}\hat{p}_1+\dfrac{m}{n+m}\hat{p}_2$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1
$H_1: \mu_1-\mu_2>0$	$z_{n,m}>z_\alpha$
$H_1: \mu_1-\mu_2<0$	$z_{n,m}<-z_\alpha$
$H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$	$z_{n,m}>z_{\alpha/2}$ ან $z_{n,m}<-z_{\alpha/2}$

z_α ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია.

ახლა ავაგოთ $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი დამოუკიდებელ პოპულაციათა უცნობი ალბათობების p_1-p_2 სხვაობისათვის. ამ შემთხვევაში უშუალოდ (12.19)-ით განსაზღვრულ $Z_{n,m}$ სტატისტიკას ვერ გამოვიყენებთ, ვინაიდან მნიშვნელი $\sqrt{D\hat{P}_{1n}+D\hat{P}_{2m}}=\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n}+\dfrac{p_2q_2}{n}}$ შეიცავს უცნობ p_1 და p_2 სიდიდეებს. (12.19) გამოსახულებაში p_1, q_1 და p_2, q_2 შევცვალოთ შესაბამისი შეფასებებით:

$$\sqrt{D\hat{P}_{1n}+D\hat{P}_{2m}}=\sqrt{\frac{\hat{P}_{1n}(1-\hat{P}_{1n})}{n}+\frac{\hat{P}_{2m}(1-\hat{P}_{2m})}{m}}$$

განვიხილოთ სტატისტიკა

$$\tilde{Z}_{n,m}=\frac{\left(\hat{P}_{1n}-\hat{P}_{2m}\right)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{P}_{1n}(1-\hat{P}_{1n})}{n}+\dfrac{\hat{P}_{2m}(1-\hat{P}_{2m})}{m}}},$$

რომელსაც მიახლოებით სტანდარტული ნორმალური განაწილება აქვს, როცა n და m დიდია. $\widetilde{Z}_{n,m}$ სტატისტიკა საშუალებას გვაძლევს სტანდარტული გზით, ავაგოთ ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი პოპულაციათა პროპორციების p_1-p_2 სხვაობისათვის.

(1–α) ნდობის ინტერვალს (p_1-p_2) სხვაობისათვის

$$\left(\hat{p}_{1n}-\hat{p}_{2m}\right)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_{1n}\hat{q}_{1n}}{n}+\frac{\hat{p}_{2m}\hat{q}_{2m}}{m}}<p_1-p_2<\left(\hat{p}_{1n}-\hat{p}_{2m}\right)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_{1n}\hat{q}_{1n}}{n}+\frac{\hat{p}_{2m}\hat{q}_{2m}}{m}},\qquad(12.22)$$

სადაც $\widetilde{p}_{1n}$ და $\widetilde{p}_{2m}$ ცდების ჩატარების შედეგად განხორციელებული წარმატებათა $\hat{p}_{1n}$ და $\hat{p}_{2m}$ ფარდობითი სიხშირეების რიცხვითი მნიშვნელობებია, $\hat{q}_{1n}=1-\hat{p}_{1n}$, $\hat{q}_{2m}=1-\hat{p}_{2m}$

ამ თავის გადმოცემისას გამოყენებულია შემდეგი წიგნები: [12], [22], [30], [31], [34], [49], [40], [55], [66], [69], [72], [79], [82], [84], [86], რომლებიც დამატებით ცნობებსაც მრავლად შეიცავენ.

დასკვნები

ორი პოპულაციის შედარების ამოცანა სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა თეორიის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას წარმოადგენს.

ამ თავში განხილულია ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოთა სხვაობის და დისპერსიათა ფარდობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმებისა და ნდობის ინტერვალების აგების პროცედურები სხვადასხვა დაშვებებში. განხილულია ორამოკრეფიანი ამოცანები წარმატებათა ალბათობების და დაწყვილებულ მონაცემთა საშუალოების სხვაობებისათვისაც.

სავარჯიშოები

12.1. რამდენად მოსალოდნელია, რომ საპროცენტო განაკვეთი დაიკლებს რამდენიმე თვის შემდეგ? Wall Street Journal-ის მიმომხილველმა ჩაატარა 17 ეკონომისტ-ექსპერტის გამოკითხვა და მიიღო მათგან საპროცენტო განაკვეთის პროგნოზი დროის ორი პერიოდისათვის – 30 სექტემბრისა და 31 დეკემბრისათვის. გამოკითხვის შედეგები მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში

	პროგნოზი			პროგნოზი	
	30 სექტემბერი	31 დეკემბერი		30 სექტემბერი	31 დეკემბერი
1	8.70	8.90	10	8.50	8.50
2	8.75	8.50	11	9.50	8.50
3	9.35	9.75	12	8.50	8.15
4	7.80	6.00	13	8.50	9.00
5	9.25	8.75	14	9.00	8.50
6	8.25	8.00	15	9.15	9.30
7	9.25	10.00	16	9.25	9.25
8	7.70	7.90	17	10.00	9.00
9	8.50	8.15			

არის თუ არა სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი განსხვავება საპროცენტო განაკვეთის პროგნოზების საშუალო მნიშვნელობებისათვის აღნიშნულ ორ პერიოდში. $\alpha=0.05$.

12.2. კომპანიამ გაზარდა ელექტროენერგიის მოხმარების ფასი ხარჯვის პიკის საათებში და შეამცირა ელექტროენერგიის გადასახადი ენერგიის შედარებით დაბალი მოხმარების პერიოდებში. კომპანიას იმედი ჰქონდა, რომ ამით შეამცირებდა ელექტროენერგიის საერთო დანახარჯებს. ამ გეგმის ეფექტურობის შემოწმების მიზნით შემთხვევით შეირჩა 40 კლიენტი, რომლებიც იხდიდნენ გადასახადს ახალი წესით და 60 კლიენტი, რომლებიც ელექტროენერგიის საფასურს ჩვეულებრივი წესით იხდიდნენ. საშუალო ელექტროდანახარჯები და სტანდარტული გადახრები (კილოვატ/საათებში) ერთი თვის განმავლობაში, თავმოყრილია ქვემოთ მოცემულ ცხრილში

	გადახდის სისტემა	
	ჩვეულებრივი	ახალი
n	60	40
$\overline{X}_n$	2015	2003
S^2	450	388

შემცირდა თუ არა ელექტროენერგიის საერთო დანახარჯები, თუ ცნობილია, რომ ეს სიდიდეები განაწილებული არიან ნორმალურად და დისპერსიები ერთმანეთის ტოლია. $\alpha=0.01$

12.3. შემფუთავი ორგანიზაცია დარწმუნებულია, რომ შეფუთული გზავნილების წონა თვის ბოლოს უფრო მეტია, ვიდრე თვის დასაწყისში. იგი თვლის, რომ წონები განაწილებულია ნორმალურად. თვის დასაწყისში აწონეს 20 გზავნილი. საშუალო წონა აღმოჩნდა 20.25 ფუნტი, სტანდარტული გადახრით 5.84 ფუნტი. თვის ბოლოს 10 გზავნილის საშუალო წონა იყო 24.80 ფუნტი, სტანდარტული გადახრით 5.67 ფუნტი. მნიშვნელოვნობის 0.05 დონით, შეგიძლიათ თუ არა დაასკვნათ, რომ გზავნილები თვის ბოლოს უფრო მძიმეა? (დისპერსიები ტოლია).

12.4. მოცემულია ორი შერჩევა ორი დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული პოპულაციიდან. უნდა შემოწმდეს ჰიპოთეზები:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0,$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$

პირველი ერთობლიობიდან ამოღებულია 15 დაკვირვებისაგან შედგენილი შერჩევა, შერჩევის საშუალოა 350, შერჩევის სტანდარტული გადახრა – 12. მეორე ერთობლიობიდან ამოღებული შერჩევა მოცულობით 17, შერჩევის საშუალოა 342, შერჩევის სტანდარტული გადახრაა15. 0.01 მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმეთ, არის თუ არა განსხვავება გენერალურ საშუალოებს შორის? განსაზღვრეთ P-მნიშვნელობა.

12.5. ორი დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან მიღებულია n=60 და m=50-ის ტოლი მოცულობის ამონარჩევები და მათ საფუძველზე გამოთვლილია შერჩევითი საშუალოები $\bar{x}$=5,4 და $\bar{y}$=4,5. შერჩევითი დისპერსიებია 1,2 და 1. α=0.1 მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმეთ ნულოვანი ჰიპოთეზა H_0:μ_1=μ_2, H_1:$\mu_1 \neq \mu_2$ ალტერნატივის მიმართ, თუ ჩავთვლით, რომ დისპერსიები ტოლია.

12.6. სასურსათო მაღაზიის მმართველი დაინტერესდა, არის თუ არა განსხვავება კლიენტების მიერ გაწეული დანახარჯებს შორის ჩვეულებრივ დღეებში და შაბათობით. მან აიღო კვირის 10 ჩვეულებრივ დღისა და 15 შაბათის მონაცემები. მიიღო შემდეგი შერჩევები ($-ში). იგი თვლის, რომ დანახარჯები განაწილებულია ნორმალურად.

ჩვეულებრივი დღე		შაბათი		
18.88	53.77	34.76	63.45	21.54
24.33	62.94	45.78	70.98	85.61
27.26	73.59	46.87	72.67	91.87
35.79	76.51	56.78	76.89	94.70
42.31	88.09	66.04	81.65	95.80

მისი ვარაუდია, რომ შაბათს ნავაჭრი მეტია, ვიდრე სხვა დღეებში. ეთანხმება თუ არა მოყვანილი მონაცემები ამ აზრს, თუ დისპერსიები ტოლია? აიღეთ მნიშვნელოვნობის დონე α=0.05.

12.7. ერთ-ერთ სააგენტოს სურს განსაზღვროს იყიდება თუ არა უცნობი ფირმის კალკულატორები უფრო დაბალ ფასებში, ვიდრე ცნობილი ფირმისა. შემთხვევით შეირჩა ამ კალკულატორების გამყიდველი 8 მაღაზია და ჩაწერილ იქნა გაყიდვათა შემდეგი ფასები:

უცნობი ფირმა	10	8	7	9	11	10	9	8
ცნობილი ფირმა	11	11	10	12	11	13	12	10

გვაქვს თუ არა საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონით: ცნობილი ფირმის კალკულატორები უფრო მაღალ ფასებში იყიდება, თუკი სააგენტო თვლის, რომ დისპერსიები ტოლია და მონაცემები განაწილებულია ნორმალურად.

12.8. მენეჯერს სურს განსაზღვროს, თუ როგორ მოქმედებს ახალი ფორმის პაკეტები გაყიდვათა რაოდენობაზე. ამისათვის შეირჩა 40 მსგავსი მაღაზია და ამათგან 20-ში დაიწყეს ახალი პაკეტებით ვაჭრობა, ხოლო დანარჩენში ვაჭრობა გააგრძელეს ძველით. ერთი კვირის გაყიდვების შესწავლამ მოგვცა შემდეგი მონაცემები:

	ახალი	ძველი
$\bar{x}$	130	117
s	10	12

გვაქვს თუ არა საფუძველი ვამტკიცოთ α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონით, რომ ახალი ტიპის პაკეტებმა გაზარდა გაყიდვათა რაოდენობა? (გაყიდვები განაწილებულია ნორმალურად და მათი დისპერსიები ტოლია).

12.9. ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან მიღებულია n=9 და m=16 მოცულობის შერჩევები და მათ საფუძველზე გამოთვლილია შესწორებული შერჩევითი დისპერსიები: s_x^2=34,02 და s_y^2=12,15. α=0.01 მნიშვნელოვნობის დონისათვის შეამოწმეთ ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0 : \sigma^2_x=\sigma^2_y$, $H_1 : \sigma^2_x>\sigma^2_y$ ალტერნატივის წინააღმდეგ.

12.10. დანადგარის დაძველების გამო მენეჯერს სურს შეამოწმოს, არის თუ არა განსხვავება ძველ დანადგარზე დეტალის დამზადებისათვის დახარჯული დროის დისპერსიასა და ახალ დანადგარზე იგივე დეტალის დამზადებისას დახარჯული დროის დისპერსიას შორის. ამისათვის მან გამოიკვლია ძველ და ახალ დანადგარზე დამზადებული 12-12 დეტალი და მიიღო შემდეგი მონაცემები $s_{\text{ძვ}}$=8,6 და $s_{\text{ახ}}$=5,3. რა რჩევას მიცემდით მენეჯერს? (მნიშვნელოვნობის დონედ აირჩიეთ α=0.05.)

12.11. შესწავლილ იქნა სტუდენტთა დასაქმების საკითხი ზაფხულის არდადეგების დროს. ქვევით მოყვანილია ამ გამოკვლევის შედეგები:

	მამაკაცები	ქალები
მუშაობდნენ	718	593
არ მუშაობდნენ	79	139
ჯამი	797	732

α=0,05 დონით შეგვიძლია თუ არა იმის მტკიცება, რომ სტუდენტ ვაჟთა პოპულაციაში დასაქმებულთა პროპორცია განსხვავდება დასაქმებულთა პროპორციისაგან სტუდენტ გოგონათა პოპულაციაში?

12.12. ჩაატარეს გამოკითხვა. ქალებს მისცეს ერთი კითხვა: არის თუ არა მამაკაცთა უმრავლესობა კეთილი, მშვიდი და ყურადღებიანი? 1970 წელს გამოკითხული 3000 ქალიდან დადებითი პასუხი გასცა 2010 ქალმა. 1990 წელს გამოკითხული 3000 ქალიდან დადებითი პასუხი გასცა 1530 ქალმა. 0.05 მნიშვნელოვნობის დონით, შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ დადებითი პასუხების პროპორცია 1990 წელს შეიცვალა 1970 წელთან შედარებით?

12.13. დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან მიღებულია n=14 და m=10 მოცულობის შერჩევები და მათ საფუძველზე გამოთვლილია შესწორებული შერჩევითი დისპერსიები $s_x'^2$=10,84 და $s_y'^2$=2,52. α=0.1 მნიშვნელოვნობის დონისათვის შეამოწმეთ ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0 : \sigma_1=\sigma_2$, $H_1 : \sigma_1\neq\sigma_2$ ალტერნატივის წინააღმდეგ.

12.14. გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 400 უცოლო მამაკაციდან 3 წლის განმავლობაში 120-ს ჰქონდა ერთი მაინც ავტოშემთხვევა. 600 ცოლიანი მამაკაციდან, იმავე პერიოდში, 150-ს ჰქონდა ერთი მაინც ავტოშემთხვევა. გამოიყენეთ მნიშვნელოვნობის დონე 0.05 და განსაზღვრეთ არის თუ არა განსხვავება მამაკაცთა ამ ორ ჯგუფს შორის ავტოშემთხვევათა სიხშირის მიხედვით?

12.15. სარეკლამო კომპანიის მენეჯერმა რეკლამა უნდა განათავსოს ან რადიოში ან გაზეთში. გამოკითხული 215 რადიომსმენელიდან 143 უსმენს რეკლამას, ხოლო 257 მკითხველიდან რეკლამას კითხულობს 159. α=0.01 მნიშვნელოვნობის დონით რა რჩევას მისცემდით მენეჯერს?

12.16. ბენზინგასამართი სადგურის დასაყენებლად გამოიკვლიეს მანქანის მფლობელთა პროპორციები ორ რაიონში. I-ში 300 გამოკითხულიდან 124-ს ჰყავს მანქანა, ხოლო II-ში 253 გამოკითხულიდან 102-ს. α=0.05. რა გადაწყვეტილებას მიიღებდით?

12.17. ბანკს აქვს ფილიალები 4 ქალაქში. მის მმართველს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება კლიენტების საჩეკო ანგარიშებს შორის ფილიალების მიხედვით. მან მოაგროვა მონაცემები 60 კლიენტის საჩეკო ანგარიშების შესახებ. ქვემოთ მოყვანილია ამ მონაცემების მიხედვით გამოთვლილი საშუალო საჩეკო ანგარიშები და მათი დისპერსიები თითოეული ფილიალისათვის.

ქალაქები	შერჩევის მოცულობა	საშუალო	სტანდარტული გადახრა
I	16	1281.4	474.3
II	17	1879.6	350.9
III	14	1359.4	683.5
IV	13	1423.5	709.2

ა) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალები I და II ფილიალების საშუალო საჩეკო ანგარიშების სხვაობისათვის.

ბ) შეამოწმეთ ჰიპოთეზა III და IV ფილიალებში საშუალო საჩეკო ანგარიშების ტოლობის შესახებ: $H_0 : \mu_3 - \mu_4 = 0$ ($\alpha = 0.05$).

გ) ააგეთ თითოეული ფილიალის საშუალო ანგარიშისათვის ინდივიდუალური 99%-იანი ნდობის ინტერვალები.

12.18. დიდი ბანკის კლიენტებისაგან შემთხვევით შეირჩა 60 კლიენტი და შეგროვდა მონაცემები მათ მიერ საკასო ავტომატებით ჩატარებულ ოპერაციათა რაოდენობის შესახებ. მიღებული შერჩევა გაიყო ორ ნაწილად: პირველ შერჩევაში შევიდა იმ კლიენტთა მონაცემები, რომლებსაც არ აქვთ სადებიტორო ბარათები, მეორეში კი – სადებიტორო ბარათების მფლობელთა მონაცემები. თითოეული შერჩევისათვის გამოითვალა საშუალოები და სტანდარტული გადახრები.

შერჩევა	შერჩევის მოცულობა	საშუალო	სტანდარტუ ლი გადახრა
I	24	10.35	4.32
II	36	10.23	4.35

ა) ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

ბ) არის თუ არა განსხვავება სადებიტორო ბარათის მფლობელ კლიენტებსა და დანარჩენი კლიენტების მიერ საკასო აპარატებით ჩატარებულ ოპერაციათა საშუალო რაოდენობებს შორის? ($\alpha = 0.05$).

12.19. ბოლო წლების მონაცემების მიხედვით აშშ-ში გამოშვებული და გაყიდული მსუბუქი მანქანების 55% General Motors-ის მიერ იყო წარმოებული. ბოლო კვირის მონაცემებით გაყიდული მანქანების რაოდენობა ასე განაწილდა:

General Motors	330
დანარჩენი ფირმები	470

$\alpha = 0.05$ დონით სარწმუნოა თუ არა დასკვნა, რომ ბოლო კვირაში General Motors-ის გაყიდვათა რაოდენობა შემცირდა. (მითითება: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$).

13

თანხმობის კრიტერიუმები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს შერჩევა მიღებული $F(x)$ განაწილების ფუნქციის მქონე X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებების შედეგად. ხშირად $F(x)$ განაწილების ფუნქცია უცნობია და საჭიროა მისი განსაზღვრა შერჩევის მონაცემების საშუალებით. უმრავლეს შემთხვევაში ასეთი ზოგადი ამოცანის გადაწყვეტა არ არის აუცილებელი. ხშირად, დამატებით მოსაზრებებზე დაყრდნობით შესაძლებელია უცნობი განაწილების ფუნქციის სახეზე გარკვეული დაშვებების გაკეთება და მათ საფუძველზე კონკრეტული ჰიპოთეზის გამოთქმა. ყველაზე მარტივ ასეთ დაშვებას წარმოადგენს დაშვება, რომ $F(x)$ უცნობი განაწილების ფუნქცია სავსებით განსაზღვრული $F_0(x)$ ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციის ტოლია. იმ შემთხვევაში, როდესაც ასეთი ძლიერი შეზღუდვა საფუძველს მოკლებულია, ხშირად შესაძლებელია დავუშვათ, რომ უცნობი განაწილების ფუნქცია ეკუთვნის განაწილების ფუნქციათა გარკვეულ კლასს, დამოკიდებულს ერთი ან რამდენიმე უცნობი პარამეტრის მნიშვნელობაზე. შესაძლებელია $F(x)$ განაწილების ფუნქციაზე სხვა ტიპის დაშვებების გაკეთებაც. მაგალითად, ამოცანიდან გამომდინარე, შეიძლება მხოლოდ გვაინტერესებდეს არის თუ არა უცნობი განაწილების ფუნქცია სიმეტრიული და შევამოწმოთ ჰიპოთეზა $F(x)$ განაწილების ფუნქციის სიმეტრიულობის შესახებ, მედიანით მოცემულ განსაზღვრულ წერტილში.

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით H_0 ჰიპოთეზის

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \tag{13.1}$$

შემოწმების ამოცანას, შერჩევითი მონაცემების $F_0(x)$ ჰიპოთეტურ განაწილების ფუნქციასთან თანხმობის შესახებ. $F_0(x)$ განაწილების ფუნქცია შეიძლება იყოს როგორც სავსებით განსაზღვრული, ასევე ეკუთვნოდეს განაწილების ფუნქციათა გარკვეულ კლასს. ყოველ კრიტერიუმს, რომლის საშუალებითაც (13.1) ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა წყდება, თანხმობის კრიტერიუმს უწოდებენ.

არაპარამეტრული კრიტერიუმების განხილვა, პარამეტრული კრიტერიუმებისაგან განსხვავებით (რომლებიც მე-11 და მე-12 თავებში შევისწავლეთ), გამართლებულია შემდეგი მოსაზრებებით:

1. ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციის სახე შეიძლება არ განისაზღვრებოდეს ერთი ან რამოდენიმე პარამეტრის მნიშვნელობით.
2. $F_0(x)$ ფუნქცია შეიძლება ეკუთვნოდეს განაწილების ფუნქციათა რომელიმე პარამეტრულ ოჯახს, მაგრამ მისი განმსაზღვრელი პარამეტრები უცნობი იყოს.
3. $F_0(x)$ ფუნქცია შეიძლება ეკუთვნოდეს რომელიმე პარამეტრულ ოჯახს სავსებით განსაზღვრული პარამეტრების მნიშვნელობით, მაგრამ მიზანშეწონილი იყოს ალტერნატიული ჰიპოთეზების ისეთი კლასების განხილვა, რომლებიც ნულოვანი ჰიპოთეზისაგან მხოლოდ პარამეტრთა მნიშვნელობით არ განსხვავდება, როგორც ეს ხდება პარამეტრული ჰიპოთეზების შემოწმების დროს.

ასეთი ამოცანების გადასაწყვეტად საჭიროა ახალი (არაპარამეტრული) კრიტერიუმების გამოყენება. უნდა ვიფიქროთ, რომ შერჩევითი მნიშვნელობების განაწილების ფუნქცია „ახლოს" იქნება დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციასთან და ბუნებრივია, გამოვიყენოთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია (13.1) ჰიპოთეზის შემოწმების მიზნით. ყველაზე მნიშვნელოვანი თანხმობის კრიტერიუმები სწორედ ემპირიული და თეორიული განაწილების ფუნქციების შედარებას ეფუძნება. არაპარამეტრული კრიტერიუმების ძირითადი უპირატესობა პარამეტრულ კრიტერიუმებთან შედარებით არის მათი გამოყენების შესაძლებლობა დაკვირვებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაზე უმნიშვნელო შეზღუდვების პირობებში, რაც განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს მცირე შერჩევის შემთხვევაში. არაპარამეტრული კრიტერიუმები, როგორც წესი, ჩამოუვარდებიან ნეიმან-პირსონის ტიპის კრიტერიუმებს სიმძლავრის თვალსაზრისით, თუმცა მათ გააჩნიათ სიმძლავრის დამაკმაყოფილებელი თვისებები ალტერნატივების უფრო ფართო კლასის მიმართ. ამ კრიტერიუმებიდან ამ თავში ჩვენ შევისწავლით მხოლოდ პირსონის χ^2-კრიტერიუმს და კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმებს.

§ 1. χ^2-კრიტერიუმი

ვთქვათ, ჩვენი შესწავლის ინტერესს წარმოადგენს პოპულაცია, რომლის ელემენტები იყოფა $A_1,A_2,\ldots,A_k$ ურთიერთგამომრიცხავ კლასებად (ან კატეგორიებად) რომელიმე ერთი ნიშნის მიხედვით. აღვნიშნოთ P_i-თი ალბათობა იმისა, რომ პოპულაციიდან შემთხვევით აღებული ელემენტი აღმოჩნდება A_i კლასში. დავუშვათ, P_i, $1\le i\le k$, ალბათობები ჩვენთვის უცნობია და გამოთქმულია ჰიპოთეზა, რომ ეს ალბათობები, განსაზღვრული P_{0i} სიდიდეების ტოლია, სადაც $P_{0i}>0$ ყოველი i-თვის და $\sum\limits_{i=1}^{k} P_{0i}=1$.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს პოპულაციიდან აღებული n მოცულობის შერჩევა და ამ შერჩევის საფუძველზე გვინდა შევამოწმოთ

$H_0: P_1=P_{01},\ P_2=P_{02},\ \ldots,\ P_k=P_{0k}$

ჰიპოთეზა

$H_a: P_i\neq P_{0i}$ ერთი მაინც i-სთვის

ალტერნატივის წინააღმდეგ. (ვგულისხმობთ, რომ სასრული პოპულაციის შემთხვევაში შერჩევა პოპულაციიდან აიღება დაბრუნებით).

შევნიშნოთ, რომ ექსპერიმენტის ჩატარებამდე (ანუ პოპულაციიდან შერჩევის აღებამდე) შერჩევის იმ ელემენტთა რაოდენობა (N_i), რომლებიც აღმოჩნდებიან A_i კლასში, შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს და შემთხვევით სიდიდეთა ($N_1,N_2,\ldots,N_k$) ვექტორს ექნება მულტინომური განაწილება. ანუ ალბათობა იმისა, რომ პოპულაციიდან აღებული n მოცულობის შერჩევის n_1 ელემენტი მოხვდება A_1 კლასში, n_2 ელემენტი – A_2 კლასში და ... n_k ელემენტი – A_k კლასში ტოლია

$$P(N_1=n_1,\ N_2=n_2,\ \ldots,\ N_k=n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}P_1^{n_1}P_2^{n_2}\cdots P_k^{n_k}\,, \tag{13.2}$$

სადაც $0 \le n_i \le n$ ყოველი i-თვის და $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

ამიტომ n მოცულობის შერჩევიდან A_i კლასში მოხვედრილი ელემენტების მოსალოდნელი რაოდენობაა $EN_i = nP_i$, რომელიც ჰიპოთეზის დროს nP_{0i} სიდიდის ტოლია.

H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების მიზნით ბუნებრივია ერთმანეთს შევადაროთ დაკვირვებული და მოსალოდნელი სიხშირეები. თუ H_0 ჰიპოთეზა მართებულია, მაშინ nP_{0i} მოსალოდნელი და n_i დაკვირვებული სიხშირეები ახლოს უნდა იყოს ერთმანეთთან და პირიქით, როდესაც P_i-ს ჭეშმარიტი მნიშვნელობები საგრძნობლად განსხვავდება ნულოვანი ჰიპოთეზით განსაზღვრული ალბათობებისაგან, მოსალოდნელი და დაკვირვებული სიხშირეებიც მკვეთრად უნდა განსხვავდებოდნენ.

ცხრილი 13.1. დაკვირვებული და მოსალოდნელი სიხშირეები

	$i=1$	$i=2$	...	$i=k$	ჯამი
დაკვირვებული	n_1	n_2	...	n_k	n
მოსალოდნელი	nP_{01}	nP_{02}	...	nP_{0k}	n

გადაწყვეტილების მიღების წესი მოითხოვს n_i და nP_{0i} სიდიდეებს შორის გადახრის ისეთი ზომის შემოღებას, რომლის მიხედვით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა უნდა მოხდეს მაშინ, როდესაც გადახრა საკმარისად დიდია.

ბუნებრივია, მოსალოდნელ და დაკვირვებულ სიხშირეებს შორის განსხვავების საზომად $(n_1-nP_{01})^2$, ... , $(n_k-nP_{0k})^2$ კვადრატული გადახრების, ხოლო საერთო ზომის როლში ამ გადახრათა შეწონილი ჯამის

$$\sum_{i=1}^{k} c_i (N_i - nP_{0i})^2 \qquad (13.3)$$

გამოყენება, სადაც მანორმირებელი c_i კოეფიციენტები სხვადასხვა გზით შეიძლება შეირჩეს. მათი არჩევა სასურველია ისე, რომ მიღებულ სტატისტიკას აღმოაჩნდეს მარტივი ასიმპტოტური თვისებები.

ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად ნორმირებული სიდიდე

$$\frac{N_i - nP_{0i}}{\sqrt{nP_{0i}(1-P_{0i})}}$$

$nP_{0i}(1-P_{0i})$-ის დიდი მნიშვნელობებისათვის დაახლოებით ნორმალურად არის განაწილებული (0,1) პარამეტრებით, ისე, რომ (13.3) სიდიდეს, როდესაც $c_i = 1/(nP_{0i}(1-P_{0i}))$, მიახლოებით ექნებოდა χ^2 განაწილება k თავისუფლების ხარისხით, N_i სიდიდეები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი რომ ყოფილიყვნენ. N_i შემთხვევითი სიდიდეების კორელირებულობის გამო (რადგან $\sum_{i=1}^{k} N_i = n$) c_i კოეფიციენტების როლში მიზანშეწონილია მოსალოდნელ სიხშირეთა შებრუნებული $1/(nP_{0i})$ სიდიდეების აღება, რის შედეგადაც მიიღება

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - nP_{0i})^2}{nP_{0i}} \tag{13.4}$$

სტატისტიკა, რომელიც ჰიპოთეზის დროს მიახლოებით განაწილებული იქნება χ^2 განაწილების კანონით (k–1)-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით.

შევნიშნოთ, რომ k=2 შემთხვევაში ამ ფაქტის სისწორეში შეიძლება უშუალოდ დავრწმუნდეთ, რადგან ამ დროს

$$\hat{\chi}^2 = \frac{(N_1 - nP_{01})^2}{nP_{01}} + \frac{(N_2 - nP_{02})^2}{nP_{02}}$$

და ამ გამოსახულებაში N_2-სა და P_{02}-ის ნაცვლად, შესაბამისად n–N_1 და 1–P_{01} მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ, მარტივი გარდაქმნების გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\hat{\chi}^2 = \left(\frac{N_1 - nP_{01}}{\sqrt{nP_{01}(1 - P_{01})}} \right)^2. \tag{13.5}$$

ამიტომ ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას ამ შემთხვევაში მიახლოებით ექნება χ^2 განაწილება 1-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით.

მაშასადამე, (13.4) ფორმულით განსაზღვრული სტატისტიკის ზღვრული განაწილება არ არის დამოკიდებული ჰიპოთეტური ალბათობების კონკრეტულ მნიშვნელობებზე (ასიმპტოტურად თავისუფალია განაწილებისაგან) და ჰიპოთეზის დროს ყოველთვის (k–1)-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხის მქონე χ^2 განაწილებას ემთხვევა.

ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ კრიტიკული არე χ^2 განაწილების ცხრილის მიხედვით. ამრიგად, განხილული H_0 ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება შემდეგნაირად: დავაფიქსიროთ რაიმე მნიშვნელოვნობის დონე α (მაგალითად ავიღოთ α=0.1; 0.05 ან 0.01) და მოვნახოთ (k–1) თავისუფლების ხარისხის χ^2 განაწილების შესაბამისი ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა (ცხრილის მიხედვით), რომელსაც აღვნიშნავთ $\chi^2_{k-1,\alpha}$-თი. თუ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\hat{\chi}^2 > \chi^2_{k-1,\alpha}$$

მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ და როდესაც სრულდება

$$\hat{\chi}^2 \le \chi^2_{k-1,\alpha}$$

საწინააღმდეგო უტოლობა, ვასკვნით, რომ დაკვირვებული მონაცემები არ ეწინააღმდეგება H_0 ჰიპოთეზას, ანუ არსებული მონაცემები არ იძლევა ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველს.

შევნიშნოთ, რომ k=2 შემთხვევაში χ^2-კრიტერიუმის გამოყენებით ხდება ბერნულის სქემაში წარმატების p ალბათობის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმება ორმხრივი ალტერნატივის წინააღმდეგ, რაც ადრე განხილული (11.30) კრიტერიუმის ეკვივალენტურია.

მაგალითი **13.1**. XVIII საუკუნეში ბიუფონმა ჩაატარა n=4040 დამოუკიდებელი ცდა მონეტის აგდებაზე, რის შედეგადაც გერბი გამოჩნდა N_1=2048 ცდაში, ხოლო დანარჩენ $N_2=n-N_1$ შემთხვევაში გამოჩნდა საფასური. ეთანხმება თუ არა ექსპერიმენტის შედეგი ჰიპოთეზას, რომ არსებობს გერბის გამოჩენის მუდმივი P ალბათობა, რომელიც 1/2-ის ტოლია (ანუ, მართებულია თუ არა ჰიპოთეზა მონეტის სიმეტრიულობის შესახებ და გერბისა და საფასურის გამოჩენის ალბათობა ყოველ ცდაში ერთი და იგივეა).

თუ ვიანგარიშებთ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას (13.5) ფორმულის მიხედვით, (13.5) გამოსახულებაში P_{01}=1/2, n=4040, N_1=2048 მნიშვნელობების ჩასმით, მივიღებთ რომ

$$\hat{\chi}^2 = 0.776.$$

რადგან ერთის ტოლი თავისუფლების ხარისხის χ^2 განაწილების α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული მნიშვნელობა $\chi^2_{1,0.05}$=3.841 აღემატება $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის რეალიზებულ მნიშვნელობას, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ექსპერიმენტის შედეგი არ ეწინააღმდეგება ჰიპოთეზას. შევნიშნოთ, რომ ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნული ექსპერიმენტის ჩატარებისას $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა მიიღებს 0.776-ზე მეტ მნიშვნელობას (იმ დაშვებით, რომ P=1/2) დაახლოებით 0.38-ის ტოლია და ასეთი ხდომილობის განხორციელება (ანუ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის ასეთი გადახრა) სავსებით ბუნებრივად შეიძლება ჩაითვალოს.

ვნახოთ, თუ რამდენად მგრძნობიარეა განხილული χ^2 კრიტერიუმი ალტერნატიული ჰიპოთეზების მიმართ. ადვილი საჩვენებელია, რომ H_0 ჰიპოთეზის მართებულობის დროს $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის მათემატიკური ლოდინი (k–1)-ის ტოლია:

$$E(\hat{\chi}^2 \mid H_0 \text{ მართებულია}) = k-1.$$

ახლა დავუშვათ, რომ მართებულია H_0 ჰიპოთეზის რომელიმე H_a ალტერნატიული ჰიპოთეზა და პოპულაციიდან არჩეული ელემენტის A_i კლასში მოხვედრის ფაქტიური P_i ალბათობა განსხვავებულია ჰიპოთეტური P_{0i} ალბათობისაგან ერთი მაინც i-თვის. ასეთ დროს $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის მათემატიკურ ლოდინს უჩნდება წანაცვლება და არ არის ძნელი იმის ჩვენება, რომ

$$E(\hat{\chi}^2 \mid H_a) > n\sum_{i=1}^{k}\frac{(P_i - P_{i0})^2}{P_{i0}}$$

რადგან $P_i \neq P_{0i}$ ერთი მაინც i-სათვის, $\sum_{i=1}^{k}\frac{(P_i - P_{i0})^2}{P_{i0}}$ ჯამი მკაცრად დადებითია და ცდათა რიცხვის ზრდისას $\hat{\chi}^2$ სიდიდის საშუალო მნიშვნელობაც უსასრულოდ გაიზრდება.

ამიტომ, თუ H_0 ჰიპოთეზა არ არის მართებული, $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის შერჩევითი მნიშვნელობა საკმარისად დიდი n-ისათვის აღმოჩნდება იმდენად დიდი, რომ მოხვდება კრიტიკულ არეში და გამოიწვევს ჰიპოთეზის უარყოფას. ამრიგად, განხილული χ^2 კრიტერიუმი აღმოჩნდა ძალმოსილი ანუ ის თითქმის ყოველთვის უარყოფს არასწორ ჰიპოთეზას საკმარისად დიდი რაოდენობის დაკვირვებების შემთხვევაში.

§ 2. χ^2-კრიტერიუმის გამოყენება, როდესაც განაწილების ფუნქცია უწყვეტია

თავდაპირველად χ^2-კრიტერიუმი გათვალისწინებული იყო დაკვირვებული მონაცემების მულტინომურ განაწილებასთან თანხმობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად, თუმცა მას ხშირად იყენებენ უფრო ზოგადი ამოცანების გადასაწყვეტად.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს n მოცულობის შერჩევა, რომელიც მიღებულია უცნობი $F(x)$ განაწილების ფუნქციის მქონე X შემთხვევით სიდიდეზე დამოუკიდებელი დაკვირვებების შედეგად. დავუშვათ, გვინდა შევამოწმოთ ჰიპოთეზა

$$H_0 : F(x) = F_0(x),$$

სადაც $F_0(x)$ არის რაიმე მოცემული განაწილების ფუნქცია, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც უწყვეტი, ასევე დისკრეტული.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც H_0 ჰიპოთეზა მარტივია, ანუ როდესაც $F_0(x)$ ფუნქცია სავსებით განსაზღვრულია და არ შეიცავს უცნობ პარამეტრებს.

თუ შერჩევა მიღებულია შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებით, რომელიც იღებს სასრული რაოდენობის (ვთქვათ x_1-ის, x_2-ის, . . . , ან x_k-ს ტოლ) მნიშვნელობებს, მაშინ $F_0(x)$ ფუნქციის დაკვირვებულ მონაცემებთან თანხმობის ამოცანა წყდება წინა პუნქტში განხილული სქემის მიხედვით. ამ დროს (A_i, $i \le k$) კლასებად დაყოფა ბუნებრივად ხდება დაკვირვებული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების მიხედვით $A_i=\{X=x_i\}$ ხდომილობებად (თუმცა ხშირად, მონაცემების სიმცირის გამო, საჭირო ხდება მეზობელი მნიშვნელობების გაერთიანება), ხოლო ჰიპოთეტური ალბათობების როლში უნდა ავიღოთ $\{X=x_i\}$ ხდომილობათა ალბათობები გამოთვლილი $F_0(x)$ განაწილების ფუნქციის მიხედვით, ანუ $P_{0i}=F_0(x_i)- F_0(x_i-)=F_0(x_i)- F_0(x_{i-1})$, $F_0(x_0)=0$.

თუმცა χ^2 თანხმობის კრიტერიუმის გამოყენება შესაძლებელია ნებისმიერი, მათ შორის მრავალგანზომილებიანი, განაწილების ფუნქციის შემთხვევაში, ჩვენ აქ განვიხილავთ ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანას მხოლოდ უწყვეტი ერთგანზომილებიანი ჰიპოთეტური $F_0(x)$ განაწილების ფუნქციისათვის.

ასეთი ჰიპოთეზის შემოწმების მიზნით X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა არე დავყოთ ერთმანეთის გამომრიცხავ $\Delta_1, \Delta_2,..., \Delta_k$ სიმრავლეებად. Δ_i სიმრავლეებს, როგორც წესი, ირჩევენ მიმდევრობით ინტერვალებად დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა სივრციდან (თუმცა ეს არ არის აუცილებელი) და ჩვენც, სიმარტივისათვის, ავიღოთ რიცხვთა ღერძის

$$\Delta_1 = (-\infty, a_1], \Delta_2 = (a_1, a_2], \dots, \Delta_{k-1} = (a_{k-2}, a_{k-1}], \Delta_k = (a_{k-1}, \infty)$$

დანაწილება.

რადგან $F_0(x)$ განაწილების ფუნქცია ცნობილია, ჩვენ შეგვიძლია დაკვირვებადი X შემთხვევითი სიდიდის ყოველ Δ_i ინტერვალში მოხვედრის ალბათობის გამოთვლა (ცხადია, იმ დაშვებით, რომ H_0 ჰიპოთეზა მართებულია). თუ P_{0i}-თი აღვნიშნავთ X შემთხვევითი სიდიდის Δ_i ინტერვალში მოხვედრის ალბათობას H_0 ჰიპოთეზის დროს, მივიღებთ, რომ

$$P_{01}=F_0(a_1), P_{02}=F_0(a_2) - F_0(a_1), \dots, P_{0k}=1-F_0(a_{k-1}). \tag{13.6}$$

ცხადია, $(N_i, i \le k)$ სიხშირეებს (სადაც N_i აღნიშნავს Δ_i ინტერვალში მოხვედრილ შერჩევის ელემენტთა რაოდენობას), ისევე როგორც წინა პუნქტში განხილულ შემთხვევაში, ექნება მულტინომური განაწილება და მათი მოსალოდნელი მნიშვნელობები ჰიპოთეზის დროს nP_{0i} სიდიდეების ტოლია.

ამრიგად, H_0 ჰიპოთეზა დაიყვანება ჰიპოთეზაზე იმის შესახებ, რომ $(N_i, i \le k)$ სიხშირეთა ვექტორის მულტინომურ ალბათობებს აქვთ (13.6) ტოლობით განსაზღვრული P_{0i} მნიშვნელობები.

ამ უკანასკნელი ჰიპოთეზის შესამოწმებლად ვაგებთ ისევ (13.4) ფორმულით განსაზღვრულ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას, რომელიც ასიმპტოტურად ასევე განაწილებული იქნება χ^2 კანონით $(k-1)$-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით. ამიტომ ამ ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება ჩვენთვის უკვე ცნობილი გზით, წინა პუნქტში განხილული შემთხვევის მსგავსად.

მაშასადამე, ჩვენ H_0 ჰიპოთეზის ნაცვლად ვამოწმებთ $\widetilde{H}_0$ ჰიპოთეზას

$$\widetilde{H}_0 : F(a_i) = F_0(a_i), \qquad 1 \le i \le k.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ ჰიპოთეზების შემოწმება ეკვივალენტური არ არის, თუმცა საკმაოდ მდიდარი Δ დანაწილებისთვის $\widetilde{H}_0$ ჰიპოთეზა შეიძლება H_0 ჰიპოთეზასთან ახლოს იყოს. ფაქტიურად, ჩვენ ჰიპოთეტური $F_0(x)$ განაწილების ფუნქცია შევცვალეთ უბან-უბან მუდმივი $F_0^k(x)$ განაწილების ფუნქციით ისე, რომ $F_0(a_i)= F_0^k(a_i)$ ყოველი $i \le k$-თვის. ცხადია, $F_0(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $F_0^k(x)$ ფუნქცია დაუახლოვდება ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციას რიცხვთა ღერძის Δ კლასებად უფრო წვრილი დაყოფის დროს.

$\widetilde{H}_0$ ჰიპოთეზის შემოწმებისას ხდება მონაცემების არასრული გამოყენება, რადგან $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა არ ანსხვავებს ორი სხვადასხვა დაკვირვების შედეგს, თუ ისინი ერთი და იგივე Δ_i ინტერვალში მოხვდნენ და მათ ნაცვლად შეიძლება ამ ინტერვალიდან ნებისმიერი მნიშვნელობის აღება. ამრიგად ზემოთ გამოყენებული მონაცემთა დაჯგუფების ხერხი დაკავშირებულია შერჩევის გარკვეულ გაღარიბებასა და

ინფორმაციის დაკარგვასთან. ამიტომ χ^2 კრიტერიუმი არ არის ძალმოსილი ისეთი H_a ალტერნატივების მიმართ, რომელთათვისაც

$$F_a(a_i) = F_0(a_i) \text{ ყოველი } i\text{-თვის, } i \le k$$

და χ^2 კრიტერიუმს ასიმპტოტურად ოპტიმალობის თვისებები გააჩნია მხოლოდ ისეთი ალტერნატივების მიმართ, როდესაც, ერთი მაინც i-სათვის $F_a(a_i) \ne F(a_i)$.

ისმის კითხვა, როგორ შევარჩიოთ k-ს მნიშვნელობა და კლასების a_i საზღვრები? ამ კითხვაზე მკაცრი, ცალსახა პასუხი არ არსებობს. არსებობს თეორიულ გამოკვლევებზე და პრაქტიკაზე დაყრდნობილი რეკომენდაციები.

ჯერ მოვიყვანთ რეკომენდაციებს k-ს შესარჩევად. როცა შერჩევის მოცულობა მცირეა, რამდენიმე ათეულზე ნაკლები, ეს კრიტერიუმი არ გამოიყენება, რადგან ის არ მოგვცემს სანდო გადაწყვეტილებას. თუ შერჩევის მოცულობა $n>50$, k ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ სიხშირის მოსალოდნელი რაოდენობა np_i არ იყოს ნაკლები 5-ზე (უმჯობესია, თუ $np_i \ge 10$) ყოველი კლასისათვის. თუ შერჩევის მოცულობა 100-დან 200-მდეა პრაქტიკაში ხშირად სარგებლობენ k-ს მნიშვნელობებით 12-დან 16-მდე. როდესაც $200 \le n \le 400$, k-ს ირჩევენ [16;20] ინტერვალიდან. თუ $n>1000$, k-ს იღებენ 25-ის ტოლად.

როგორც ვხედავთ k-ს განსაზღვრაში საკმაოდ დიდია ამოცანის შემსრულებელი სტატისტიკოსის სუბიექტური შეხედულების და პრაქტიკული გამოცდილების მნიშვნელობა. ხშირად საჭირო ხდება k-ს რამდენიმე მნიშვნელობის მოსინჯვა.

მას შემდეგ რაც k განსაზღვრულია, a_i რიცხვების დასადგენად გამოიყენება, უპირატესად, ორი ხერხი.

ტოლ ალბათობათა ხერხის თანახმად a_i განისაზღვრება ისე, რომ ყოველ კლასში შერჩევითი მნიშვნელობის მოხვედრის ალბათობა $1/k$-ს ტოლი იყოს. ამ შემთხვევაში a_i განისაზღვრება ფორმულებით

$$\begin{aligned} &F_0(a_1) = \frac{1}{k}, \\ &F_0(a_2) - F_0(a_1) = \frac{1}{k}, \text{ ე.ი. } F_0(a_2) = \frac{2}{k}, \\ &\ldots\ldots \\ &F_0(a_{k-1}) = \frac{k-1}{k}. \end{aligned} \tag{13.7}$$

a_i რიცხვები მოიძებნება $F_0(x)$ განაწილების ფუნქციის ცხრილების საშუალებით.

ინტერვალებად დამყოფი a_i რიცხვების მოძებნა შეიძლება ტოლი ინტერვალების ხერხითაც. ამ შემთხვევაში, თუ შესაძლო მნიშვნელობათა არე სასრულია და წარმოადგენს (a,b) ინტერვალს – ეს ინტერვალი დაიყოფა k ტოლ ნაწილად. ვიქცევით ასე:

გამოვთვალოთ

$$\frac{b-a}{k} = h$$

და a_i განვსაზღვროთ ფორმულით

$$a_i = a+ih, \qquad i=1,2,\ldots,k-1.$$

მივიღებთ ასეთ კლასებს

$$(a,a+h], (a+h,a+2h], \ldots, (a+(k-2)h,a+(k-1)h], (a+(k-1)h,b).$$

ამის შემდეგ განვსაზღვრავთ ყოველი კლასისათვის სიხშირის მოსალოდნელ რაოდენობას, როგორც ეს ნაჩვენებია (13.6) ფორმულაში.

თუ შესაძლო მნიშვნელობათა არე არის $(-\infty,+\infty)$, მაშინ პირველი და უკანასკნელი კლასი განისაზღვრება პირობით

$$nF_0(a) = n(1-F_0(b)) \in [1,5].$$

ეს სიდიდეები უნდა ავიღოთ ერთის ტოლი ნორმალურის მსგავსი განაწილებისათვის (რომლის „კუდები" საკმაოდ მსუბუქია – განაწილების სიმკვრივე სწრაფად მიისწრაფის 0-საკენ, როცა $x\to-\infty$ და $x\to+\infty$) და 5-ის ტოლი სხვა შემთხვევაში.

ეს პირობა განსაზღვრავს a_1-ს და a_{k-1}-ს. ამის შემდეგ გამოვთვალოთ

$$\frac{a_{k-1}-a_1}{k-2} = h$$

და განვსაზღვროთ a_i ფორმულით

$$a_i = a_1+(i-1)h, \quad 2\le i \le k-2.$$

როგორც აღვნიშნეთ, a_1 და a_{k-1} რიცხვები ასე გამოითვლება:

$$F_0(a_1) = \frac{1}{n} \quad \text{ან} \quad \frac{5}{n},$$

და

$$1-F_0(a_{k-1}) = \frac{1}{n} \quad \text{ან} \quad \frac{5}{n}.$$

ცხადია a_1 და a_{k-1} აიღება $F_0(x)$ ფუნქციის ცხრილებიდან. კლასების საზღვრების დადგენის შემდეგ განისაზღვრება კლასებში შერჩევითი მნიშვნელობების მოხვედრის ალბათობები, ფორმულებით

$$P_{2,0} = F_0(a_2) - F_0(a_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_{k-1,0} = F_0(a_{k-1}) - F_0(a_{k-2}).$$

თუ აღმოჩნდა, რომ რომელიმე კლასში სიხშირის მოსალოდნელი რაოდენობა ნაკლებია 5-ზე, მაშინ ერთი ან რამდენიმე მეზობელი კლასი უნდა გაერთიანდეს ერთ კლასად.

ახლა განვიხილოთ მაგალითი, რომელშიც ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია უწყვეტია. ეს მაგალითი აღებულია ჰ.კრამერის წიგნიდან, რომელმაც, თავის მხრივ, ისარგებლა ა.ეიტკენის მიერ შეგროვებული მონაცემებით.

მაგალითი **13.2**. ა.ეიტკენმა შეისწავლა საათების შემკეთებელ სახელოსნოებში გამოფენილი საათების ჩვენებები. მოგვყავს მიღებულ დაკვირვებათა ცხრილი, დაყოფილი 12 ჯგუფად, საათის ისრის ციფერბლატზე მდგომარეობის მიხედვით

შუალედები ციფერბლატზე	დაკვირვებული სიხშირეები	შუალედები ციფერბლატზე	დაკვირვებული სიხშირეები
0–1	41	6–7	41
1–2	34	7–8	33
2–3	54	8–9	37
3–4	39	9–10	41
4–5	49	10–11	47
5–6	45	11–12	39

შევამოწმოთ მარტივი H_0 ჰიპოთეზა, რომ საათის ისრის მდგომარეობა თანაბრად არის განაწილებული (0,12) ინტერვალში, რთული დამატებითი H_a ალტერნატივის წინააღმდეგ (H_a: H_0 არ არის მართებული). ამ მაგალითში n=500, P_{0i}=1/12, i=1,2,...,12 და ყოველ ინტერვალში საათის ისრის მოხვედრის მოსალოდნელი რაოდენობა $nP_{0i}\approx 41.67$. ამიტომ (13.4) ტოლობით განსაზღვრული $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა დაახლოებით მიიღებს 10-ის ტოლ მნიშვნელობას. რადგან ეს სტატისტიკა დაახლოებით 11-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხის მქონე χ^2 კანონით არის განაწილებული, ალბათობა იმისა, რომ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკამ მიიღოს 10-ზე დიდი მნიშვნელობა, დაახლოებით 0.47-ის ტოლია (იხ. χ^2 განაწილების ცხრილი). ამის გამო, ვასკვნით, რომ ექსპერიმენტის მონაცემები ეთანხმება H_0 ჰიპოთეზას ნებისმიერი მნიშვნელოვნობის დონისათვის, რომელიც მოთავსებულია 0-სა და 0.47-ს შორის. ანუ მიღებული მონაცემები არ გვაძლევენ H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის არანაირ საფუძველს, თუ $\alpha<0.47$.

გავაკეთოთ რამდენიმე ზოგადი სახის შენიშვნა თანხმობის χ^2-კრიტერიუმის შესახებ. χ^2-კრიტერიუმის გამოყენება განსაკუთრებით მოხერხებულია იმ შემთხვევაში, როდესაც ყოველი ცდის შედეგად შეიძლება განხორციელდეს მხოლოდ სასრული რაოდენობის, ერთმანეთის გამომრიცხავი, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ხდომილობა (ანუ როდესაც შერჩევა მიღებულია დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებით). როდესაც ვაკვირდებით უწყვეტად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს, ვიყენებთ მონაცემთა წინასწარი დაჯგუფების ხერხს, რომლის დროსაც A_i კლასების როლში ვიღებთ $(X\in\Delta_i)$ ხდომილობებს, რასაც მივყავართ ისევ დისკრეტულ სქემასთან. მონაცემთა წინასწარი დაჯგუფებისას ადგილი აქვს შერჩევიდან მიღებული ინფორმაციის ნაწილობრივ დაკარგვას, რის გამოც ეს კრიტერიუმი კარგავს მგრძნობიარობას ზოგიერთი ალტერნატივის მიმართ. თუმცა მეორეს მხრივ ეს კრიტერიუმი არ საჭიროებს მონაცემთა ზუსტ მნიშვნელობებს და ხშირად მონაცემთა დაჯგუფება ხდება არა ამოცანის გამარტივების (ან პარამეტრიზების) მიზნით, არამედ, თავისთავად, ინფორმაციის ეკონომიურად ჩასაწერად. ამიტომ χ^2-კრიტერიუმის ზემოთ აღნიშნული ნაკლი შეიძლება ზოგ შემთხვევაში მის ღირსებად გადაიქცეს. მაგალითად, რაიმე შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებული გვაქვს 10^4 დაკვირვება. ვთქვათ, ცნობილია, რომ ეს სიდიდე იღებს მნიშვნელობებს [0,1] ინტერვალში და ჩვენი მიზნებისათვის საკმარისია ამ

სიდიდის მეათედამდე სიზუსტით გაზომვა. ცხადია, ამ დროს, არ არის საჭირო ყველა 10^4 დაკვირვების შედეგის ცოდნა და საკმარისია მხოლოდ დაკვირვებული სიდიდის $\Delta_i=(i-1/10, i/10]$, $1\leq i\leq 10$, ინტერვალებში მოხვედრის სიხშირეთა მითითება.

χ^2-კრიტერიუმის გამოყენების სფერო არ ამოიწურება მხოლოდ მარტივი ჰიპოთეზების შემოწმებით. შემდეგ პუნქტში ჩვენ ვნახავთ, რომ ამ კრიტერიუმის გამოყენება შესაძლებელია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია უცნობ პარამეტრებს შეიცავს.

§ 3. χ^2-კრიტერიუმის გამოყენება, როდესაც განაწილების ფუნქცია შეიცავს უცნობ პარამეტრებს

უმრავლეს შემთხვევაში $F_0(x)$ ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია ზუსტად არ არის განსაზღვრული და შეიცავს გარკვეული რაოდენობის უცნობ პარამეტრს. მაგალითად, ხშირად საჭიროა შემოწმდეს ჰიპოთეზა, რომ შერჩევა მიღებულია ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებით და ამ განაწილების რომელიმე (ან ორივე) μ და σ^2 პარამეტრი უცნობია, ან მოწმდება ჰიპოთეზა, რომ შერჩევა აღებულია პუასონის განაწილებიდან, ხოლო მისი ინტენსივობა λ არ არის განსაზღვრული და ამ პარამეტრმა ნებისმიერი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს. საზოგადოდ, ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს განსაზღვრული მათემატიკური ფორმით, მაგრამ შეიცავდეს $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r$ უცნობ პარამეტრს, ანუ

$$F_0(x)=F_0(x,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)=F_0(x,\theta),$$

სადაც $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)$ ვექტორი იღებს მნიშვნელობას გარკვეული Θ პარამეტრული სიმრავლიდან. ამასთან, როგორც წესი, ინფორმაციის მოპოვება ამ პარამეტრთა შესახებ მხოლოდ არსებული შერჩევიდან არის შესაძლებელი. ამ შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზა

$$H_0 : F(x)=F_0(x,\theta),\ \theta\in\Theta,$$

რომელიც უნდა შემოწმდეს, იმაში მდგომარეობს, რომ შერჩევა მიღებულია ისეთ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებით, რომლის განაწილების $F(x)$ ფუნქცია ემთხვევა $F_0(x,\theta)$ ჰიპოთეტურ განაწილების ფუნქციას θ პარამეტრის რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობისათვის Θ პარამეტრული სიმრავლიდან.

ვთქვათ მონაცემები დაჯგუფებულია შერჩევის ელემენტების Δ_i, $1\leq i\leq k$, კლასებში მოხვედრის მიხედვით და $(N_1,N_2,\ldots,N_k)$ წარმოადგენს მონაცემთა ამ ინტერვალში მოხვედრის სიხშირეთა ვექტორს. შევადგინოთ (13.4) ფორმულით განსაზღვრული $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა. მოცემულ შემთხვევაში შერჩევის ელემენტის Δ_i ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა (ჰიპოთეზის დროს) აღარ არის ცალსახად განსაზღვრული და წარმოადგენს $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)$ პარამეტრის გარკვეულ ფუნქციას

$$P_{i0}(\theta) = P(X\in \Delta_i \,|H_0) = F_0(a_i,\theta_1,\theta_2,...,\theta_r) - F_0(a_{i-1},\theta_1,\theta_2,...,\theta_r).$$

ამიტომ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას აქვს სახე

$$\hat{\chi}^2 = \hat{\chi}^2(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - nP_{i0}(\theta))^2}{nP_{i0}(\theta)}. \tag{13.8}$$

ეს სტატისტიკა დამოკიდებულია უცნობ პარამეტრზე და ჩვენ ვერ გამოვიყენებთ წინა პუნქტში აგებულ χ^2 კრიტერიუმს, სანამ არ გამოვრიცხავთ უცნობი θ პარამეტრით გამოწვეულ განუსაზღვრელობას. ვთქვათ $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X)$ არის θ პარამეტრის რამე შეფასება X შერჩევის მიხედვით. (13.8) გამოსახულებაში θ პარამეტრის ნაცვლად ამ შეფასების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$$\tilde{\chi}^2 = \tilde{\chi}^2(\hat{\theta}_n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - nP_{i0}(\hat{\theta}_n))^2}{nP_{i0}(\hat{\theta}_n)} \tag{13.9}$$

გამოსახულებას, დამოკიდებულს მხოლოდ შერჩევის მონაცემებზე და მისი მნიშვნელობა ცალსახად შეიძლება გამოითვალოს შერჩევის ყოველი მოცემული რეალიზაციისათვის.

ჩვენ რომ შეგვეძლოს $\tilde{\chi}^2$ სტატისტიკის ზუსტი (ან თუნდაც ასიმპტოტური) განაწილების პოვნა, რომელიც არ იქნება დამოკიდებული ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციათა კონკრეტულ $F_0(x,\Theta)$ ოჯახზე, მაშინ $\tilde{\chi}^2$ სტატისტიკაზე დაყრდნობით ადვილად შევძლებდით თანხმობის კრიტერიუმის აგებას.

შევნიშნოთ, რომ წინა პუნქტში განხილული შემთხვევისაგან განსხვავებით, P_{i0} ჰიპოთეტური ალბათობები დამოკიდებულია შერჩევაზე და $\tilde{\chi}^2$ სტატისტიკის ზღვრული განაწილება იგივე წესით ვერ განისაზღვრება. ამასთან მოსალოდნელია, რომ ამ სტატისტიკის ზღვრული განაწილება დამოკიდებული იყოს θ პარამეტრის შეფასების მეთოდზე. ამ შემთხვევაში $\tilde{\chi}^2$ სტატისტიკის ზღვრული განაწილების პოვნის პრობლემა პირველად განიხილა რ. ფიშერმა, რომელმაც აჩვენა, რომ უცნობ პარამეტრთა შეფასებების გარკვეული კლასისათვის $\tilde{\chi}^2$ სტატისტიკის ზღვრული განაწილება არ არის დამოკიდებული კონკრეტულ ჰიპოთეტურ $F_0(x,\Theta)$ ფუნქციებზე და მას აქვს ასევე მარტივი სახე. კერძოდ, ეს სტატისტიკა ასიმპტოტურად χ^2 კანონით არის განაწილებული, ოღონდ მისი თავისუფლების ხარისხი $(n-1-r)$-ის ტოლია, სადაც r შეფასებულ პარამეტრთა რაოდენობაა. პარამეტრთა შეფასების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც ასეთ ზღვრულ განაწილებას იძლევა, არის მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი დაყრდნობილი $N_1,N_2,...,N_k$ სიხშირეებზე, ანუ მულტინომური მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $N_1,N_2,...,N_k$ სიხშირეებს აქვთ მულტინომური განაწილება და ჰიპოთეზის დროს

$$P(N_1=n_1,N_2=n_2,\ldots,N_k=n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}p_{10}^{n_1}(\theta)p_{20}^{n_2}(\theta)\cdots p_{k0}^{n_k}(\theta). \tag{13.10}$$

θ პარამეტრის შეფასების როლში ვიღებთ ისეთ მნიშვნელობას, რომლის დროსაც (13.10) აღწევს უდიდეს შესაძლო მნიშვნელობას. ეს შეფასება სრულად არ იყენებს პირველადი $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ შერჩევის მონაცემებს და წარმოადგენს $N_1,N_2,\ldots,N_k$ სიდიდეების ფუნქციას (ან $n_1,n_2,\ldots,n_k$ არგუმენტების ფუნქციას რეალიზებული შერჩევის დროს), რის გამოც მას მულტინომურ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებას უწოდებენ.

მულტინომური მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება მიიღება

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{N_i}{P_{i0}(\theta)}\frac{\partial P_{i0}(\theta)}{\partial\theta_j}=0,\ j=0,1,\ldots,r, \tag{13.11}$$

განტოლებათა სისტემის $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)$ პარამეტრების მიმართ ამოხსნით (შევნიშნოთ, რომ $P_{i0}(\theta)$ ფუნქციებზე გარკვეულ „რეგულარობის" პირობებში მტკიცდება ამ განტოლებათა სისტემის ერთადერთი $\hat{\theta}^n=(\hat{\theta}_n^1,\hat{\theta}_n^2,\ldots,\hat{\theta}_n^r)$ ამონახსნის არსებობა, რომელიც θ პარამეტრის ძალმოსილ შეფასებას წარმოადგენს).

სამართლიანია შემდეგი დებულება, რომლის დამტკიცება და პირობების ზუსტი ფორმულირება მკითხველს შეუძლია ნახოს [39] ან [52]-ში.

თეორემა. (ფიშერი) ვთქვათ $P_{i0}(\theta)$, $1\le i\le k$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ გარკვეულ „რეგულარობის" პირობებს θ პარამეტრის მიმართ. დავუშვათ, რომ $\hat{\theta}_n$ წარმოადგენს θ პარამეტრის მულტინომურ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებას. მაშინ (13.9) ფორმულით განსაზღვრული $\tilde{\chi}^2$ სტატისტიკა ასიმპტოტურად განაწილებული იქნება χ^2 განაწილების კანონით, თავისუფლების ხარისხით $k-1-r$, სადაც r შესაფასებელ პარამეტრთა რაოდენობაა.

ამ თეორემის დამტკიცება საკმაოდ რთულია, მაგრამ თვით ფაქტი, რომ $\hat{\chi}^2(\hat{\theta}_n)$ სტატისტიკის ზღვრული განაწილების თავისუფლების ხარისხი შესაფასებელ პარამეტრთა რაოდენობით მცირდება, არ არის მოულოდნელი, რადგან $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r$ პარამეტრების შეფასების შემდეგ $\dfrac{N_i-nP_i(\hat{\theta}^n)}{nP_i(\hat{\theta}^n)}$ სიდიდეებს შორის დამატებით ჩნდება r კავშირი და არ არის გასაკვირი, რომ ამან ამდენივე ერთეულით შეამციროს ზღვრული განაწილების თავისუფლების ხარისხი.

H_0 ჰიპოთეზა : $P_1=\pi_1(\theta), \ldots, P_k=\pi_k(\theta)$, სადაც $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)\in\Theta$
H_a ალტერნატიული ჰიპოთეზა : H_0 არ არის მართებული, ანუ ერთი მაინც i-სათვის $P_i\neq\pi_i(\theta)$ არცერთი θ-თვის
$\hat{\theta}_n=(\hat{\theta}_n^1,\ldots\hat{\theta}_n^r)$ – მულტინომური მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება

კრიტერიუმის სტატისტიკა $\tilde{\chi}^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-n\pi_i(\hat{\theta}))^2}{n\pi_i(\hat{\theta})}$

მნიშვნელოვნობის დონე α
H_0-ის უარყოფის არე $\tilde{\chi}^2\geq\chi^2_{k-1-r,\alpha}$ $(\chi^2_{k-1-r,\alpha},+\infty)$

კრიტერიუმი გამოიყენება, როდესაც $n\geq50$ და $n\pi_i(\hat{\theta})\geq5$ ყველა i-თვის

შენიშვნა. ცხადია, θ პარამეტრის შესაფასებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება თავდაპირველი შერჩევის მიხედვით და არა მხოლოდ მონაცემთა დაჯგუფების შემდეგ მიღებული ახალი $(N_1,N_2,\ldots,N_k)$ შერჩევის საშუალებით. შეიძლება ველოდოთ, რომ ეს მეთოდი მოგვცემს უფრო ზუსტი დასკვნების გაკეთების საშუალებას. გარდა ამისა, ასეთი შეფასების ანგარიში გაცილებით იოლია მულტინომურ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებასთან შედარებით. მაგრამ, როგორც ეს ჩერნოვმა და ლემანმა აჩვენეს, ფიშერის თეორემით განსაზღვრულ ზღვარით თანაფარდობას საზოგადოდ არა აქვს ადგილი და $\tilde{\chi}^2$ სტატისტიკის ასიმპტოტურ განაწილებას უკვე აღარ ექნება ასეთი მარტივი სახე.

მიუხედავად ამისა, არ არის ძნელი იმის ჩვენება, რომ ასეთი სტატისტიკის ზღვრული განაწილების α მნიშვნელოვნობის დონის შესაბამისი c_α კრიტიკული მნიშვნელობა აკმაყოფილებს

$$\chi^2_{k-1-r,\alpha}\leq c_\alpha\leq\chi^2_{k-1,\alpha}$$

უტოლობას. გადაწყვეტილების წესი, რომელიც ამ ფაქტს ეყრდნობა, შემდეგია:

თუ $\tilde{\chi}^2\geq\chi^2_{k-1,\alpha}$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ;

თუ $\tilde{\chi}^2\leq\chi^2_{k-1-r,\alpha}$, H_0 ჰიპოთეზას არ უარვყოფთ;

თუ $\chi^2_{k-1-r,\alpha}<c_\alpha<\chi^2_{k-1,\alpha}$, არ ვიღებთ არანაირ გადაწყვეტილებას

როგორც ვხედავთ „ჩვეულებრივი" მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებაზე დაყრდნობილი χ^2-კრიტერიუმის გამოყენება H_0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად ცალსახა გადაწყვეტილების საშუალებას იძლევა მხოლოდ უკიდურეს შემთხვევებში, მაგრამ მისი გამოყენება გამართლებულია გამოთვლითი მოსაზრებებით. გარდა ამისა, k-ს ზრდისას

განსხვავება $\chi^2_{k-1-r,\alpha}$-სა და $\chi^2_{k-1,\alpha}$-ს შორის მცირდება და შეიძლება უგულებელვყოთ. ცხადია, როდესაც χ^2 სტატისტიკის მნიშვნელობა აღმოჩნდება $\chi^2_{k-1-r,\alpha}$ და $\chi^2_{k-1,\alpha}$ სიდიდეებს შორის იძულებული ვიქნებით მივმართოთ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას, გამოთვლილს მულტინომური მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასების მიხედვით.

მიუხედავად ამისა, რადგან მულტინომური მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებები რთული გამოსათვლელია, პრაქტიკაში უმეტესად ჩვეულებრივ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებებს იყენებენ. ჩვენც, ქვემოთ მოყვანილ მაგალითში, მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასების განხილვით შემოვიფარგლებით.

მაგალითი **13.3.** ვთქვათ მოცემული გვაქვს n=200 მოცულობის შერჩევა, რომელიც მიღებულია გარკვეული საწარმოს მიერ დამზადებული დეტალების დიამეტრების გაზომვების შედეგად. საჭიროა შემოწმდეს ჰიპოთეზა დეტალის დიამეტრის ნორმალურობის შესახებ. ემპირიული საშუალო $\bar{x}$ და საშუალო კვადრატული გადახრა s, დათვლილი ამ შერჩევის მიხედვით შესაბამისად ტოლია $\bar{x}$=4.3 და s=9.7 მიკრონის. დავყოთ დაკვირვებული სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე k=10 ინტერვალად. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია, როგორც ინტერვალთა საზღვრები, ასევე შესაბამის ინტერვალებში შერჩევითი მნიშვნელობების მოხვედრის სიხშირეები. განიხილება არა თვით დაკვირვებული სიდიდეები, არამედ მათი ნომინალისაგან გადახრები. სრული, ანუ მთელი შერჩევის, მონაცემები მკითხველს შეუძლია ნახოს სმირნოვისა და დუნინ-ბარკოვსკის წიგნში, საიდანაც ეს მაგალითი გვაქვს აღებული.

ინტერ. ნომერი	ინტერვალის საზღვრები	დაკვირვებული სიხშირეები	ინტერვალში მოხვედრის ალბათობათა შეფასება
1	$-\infty$; -15	7	0.0233
2	-15 ; -10	11	0.0475
3	-10 ; -5	15	0.0977
4	-5 ; 0	24	0.1615
5	0 ; 5	49	0.1979
6	5 ; 10	41	0.1945
7	10 ; 15	26	0.1419
8	15 ; 20	17	0.0831
9	20 ; 25	7 } 10	0.0526
10	25 ; ∞	3 }	

რადგან ვიცით დაყოფის ინტერვალთა საზღვრები, ნორმალური განაწილების კანონის μ და σ პარამეტრთა $\bar{x}$ და s შეფასებების საშუალებითა და ნორმალური განაწილების ცხრილის გამოყენებით, შეგვიძლია შევაფასოთ დაკვირვებულ სიდიდეთა თითოეულ ინტერვალში მოხვედრის ჰიპოთეტური P_{0i} ალბათობები. აღნიშნულ ალბათობათა ამ გზით მიღებული შეფასებები მოყვანილია ცხრილის უკანასკნელ სვეტში.

თუ ვიანგარიშებთ (13.9) ფორმულით განსაზღვრულ $\widetilde{\chi}^2$ სტატისტიკის მნიშვნელობას ცხრილის მონაცემებისა და ინტერვალში მოხვედრის ალბათობების შეფასებულ მნიშვნელობათა მიხედვით მივიღებთ, რომ $\widetilde{\chi}^2=7.19$. რადგან შეფასებულ პარამეტრთა რაოდენობა 2-ის ტოლია, ეს სტატისტიკა ასიმპტოტურად განაწილებული იქნება χ^2 კანონით 9–1–2=6-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით (დაყოფის ინტერვალთა რაოდენობა ორი უკანასკნელი ინტერვალის გაერთიანების შემდეგ 9-ის ტოლი გახდა). χ^2-განაწილების ცხრილის მიხედვით 7.19 შეესაბამება $\alpha=0.3$ მნიშვნელოვნობის დონეს, ანუ $\chi^2_{6;0.3}=7.19$. ეს ნიშნავს, რომ შემთხვევათა დაახლოებით 30%-ში $\widetilde{\chi}^2$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება აღემატებოდეს 7.19 სიდიდეს, რაც არ იძლევა ნორმალურობის ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველს

§ 4. კოლმოგოროვ–სმირნოვის კრიტერიუმი

მცირე შერჩევის დროს χ^2-კრიტერიუმის გამოყენებისას იძულებული ვართ მონაცემები დავაჯგუფოთ შერჩევის ელემენტების დაყოფის ინტერვალებში მოხვედრის მიხედვით. ამის გამო იკარგება შერჩევიდან მისაღები ინფორმაციის დიდი ნაწილი, რაც განსაკუთრებით თვალსაჩინოა უწყვეტი ჰიპოთეტური განაწილების შემთხვევაში. ასეთ დროს მიზანშეწონილია ისეთი კრიტერიუმის გამოყენება, რომელიც დაეყრდნობა ინდივიდუალურ და არა დაჯგუფებულ მონაცემებს. ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ასეთ კრიტერიუმს წარმოადგენს კოლმოგოროვის კრიტერიუმი, რომელიც ეფუძნება ემპირიულ და თეორიულ განაწილების ფუნქციებს შორის მაქსიმალურ გადახრას და როგორც წესი, გამოიყენება ერთგანზომილებიანი უწყვეტი ჰიპოთეტური განაწილებებისათვის.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n მოცულობის შერჩევა, მიღებული X შემთხვევით სიდიდეზე დამოუკიდებელი დაკვირვებებით, რომლის თეორიული განაწილების ფუნქცია $F(x)$ ჩვენთვის უცნობია. შერჩევა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობის სახით, სადაც ყოველი X_i სიდიდე განაწილებულია $F(x)$ კანონით. $F_n(x)$ იყოს ამ შერჩევის ემპირიული განაწილების ფუნქცია. როგორც ვიცით $F_n(x)$ ფუნქცია ყოველი x-ისათვის წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც X_i სიდიდეების $(-\infty, x]$ ინტერვალში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირის ტოლია

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(X_i \le x)} .$$

რადგან $I_{(X_i \le x)}$, $i \le n$, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და თითოეულ მათგანს აქვს ბერნულის განაწილება $P=F(x)$ წარმატების ალბათობით, გვექნება რომ

$$EF_n(x) = F(x), \qquad DF_n(x) = \frac{1}{n}F(x)(1-F(x)),$$

და დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად

$$F_n(x) \xrightarrow{P} F(x) \qquad (13.12)$$

ყოველი x-ისათვის. ამიტომ ყოველი x-ისათვის $F_n(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის თეორიული განაწილების ფუნქციის ჩაუნაცვლებელ და ძალმოსილ შეფასებას. ამის გამო სხვაობა ამ ფუნქციებს შორის შეიძლება საფუძვლად დაედოს სტატისტიკური კრიტერიუმის აგებას, დაკვირვებების განსაზღვრულ $F(x)$ განაწილების ფუნქციასთან თანხმობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად. მაგრამ $F_n(x)$ და $F(x)$ ფუნქციებს შორის სიახლოვე სხვადასხვა x წერტილში შეიძლება სხვადასხვანაირი იყოს და ამ ფუნქციებს შორის მანძილის საზომად ბუნებრივია მათ შორის მაქსიმალური გადახრის

$$D_n = \max_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x)|$$

შემოღება. ემპირიულ და თეორიულ განაწილების ფუნქციებს შორის გადახრის საზომად D_n სტატისტიკის მიღება გამართლებულია შემდეგი მოსაზრებებით. ჯერ ერთი, სამართლიანია (13.12)-ზე უფრო ძლიერი დებულება, რომელიც გლივენკო-კანტელის თეორემის სახელით არის ცნობილი. ამ თეორემის თანახმად ალბათობა იმისა, რომ ემპირიულ განაწილების ფუნქციათა ($F_n(x)$, $n \geq 1$) მიმდევრობა თანაბრად x-ის მიმართ იკრიბება $F(x)$ თეორიული განაწილების ფუნქციისაკენ 1-ის ტოლია

$$P(\max_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x)| \to 0\ ) = 1. \qquad (13.13)$$

გარდა ამისა D_n სტატისტიკას აქვს შემდეგი შესანიშნავი თვისება: არც D_n სტატისტიკის განაწილების ფუნქცია და არც $\sqrt{n}\, D_n$ ნორმირებული სიდიდის ზღვრული განაწილება არ არის დამოკიდებული $F(x)$ განაწილების ფუნქციაზე (ცხადია, იმ პირობით, რომ X სიდიდე განაწილებულია $F(x)$ კანონით).

ასეთ სტატისტიკებს შესაბამისად განაწილებისაგან თავისუფალ და ასიმპტოტურად თავისუფალ სტატისტიკებს უწოდებენ. მათ დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ჰიპოთეზების შემოწმების დროს, რადგან ასეთი სტატისტიკების განაწილების გამოთვლა და შესაბამისი ცხრილების შედგენა საკმარისია რომელიმე ერთი (მაგალითად თანაბარი) ჰიპოთეტური განაწილებისათვის, რის შემდეგაც ამ ცხრილების გამოყენება შეიძლება ნებისმიერი ჰიპოთეტური განაწილების შემთხვევაში.

ამიტომ, შერჩევის მონაცემებისა და მოცემული $F(x)$ განაწილების კანონის თანხმობის საკითხის გადაწყვეტა ბუნებრივია $F_n(x)$ და $F(x)$ განაწილების ფუნქციებს შორის მაქსიმალური გადახრის სიდიდის მიხედვით, ოღონდ უნდა განისაზღვროს ამ სიდიდის ზუსტი (ან ასიმპტოტური) განაწილება და კრიტიკული მნიშვნელობები, რომელთა საშუალებით უნდა მოხდეს გადაწყვეტილების მიღება.

ვთქვათ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია უცნობია და გამოთქმულია ჰიპოთეზა, რომლის თანახმად ეს ფუნქცია განსაზღვრული $F(x)$ განაწილების ფუნქციის ტოლია. აღვნიშნოთ ეს ჰიპოთეზა H_0-ით

$$H_0\colon F_n(x) = F_0(x),$$

ხოლო H_1-ით აღვნიშნოთ ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზა

$$H_1:\ \max_{|x|<\infty} |F(x)- F_0(x)|>0.$$

განვიხილოთ აგრეთვე H_1^+ და H_1^- ცალმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზები

$$H_1^+:\ \max_{|x|<\infty} (F(x)- F_0(x))>0.$$

$$H_1^-:\ \min_{|x|<\infty} (F(x)- F_0(x))<0.$$

H_0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად H_1, H_1^+ და H_1^- ალტერნატივების წინააღმდეგ გამოიყენება კოლმოგოროვისა და სმირნოვის კრიტერიუმები, რომელთა შესაბამისი სტატისტიკები შემდეგი ფორმულებით მოიცემა

$$\begin{aligned} D_n &= \max_{|x|<\infty} |F_n(x)- F(x)|,\\ D_n^+ &= \max_{|x|<\infty} (F_n(x)- F(x)), \qquad (13.14)\\ D_n^- &= -\min_{|x|<\infty} (F_n(x)- F(x)). \end{aligned}$$

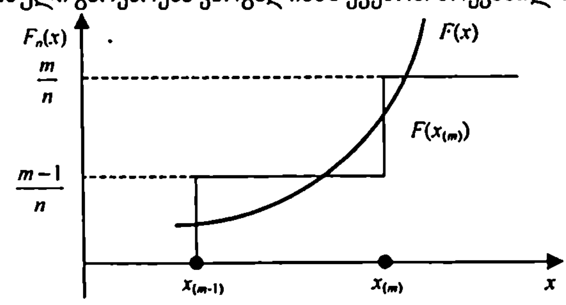
პრაქტიკული გამოთვლებისათვის გამოიყენება შემდეგი, (13.14)-ის ეკვივალენტური ფორმულები

$$\begin{aligned} D_n^+ &= \max_{1\le m\le n} \left(\frac{m}{n}- F(x_{(m)})\right),\\ D_n^- &= \max_{1\le m\le n} \left(F(x_{(m)})- \frac{m-1}{n}\right), \qquad (13.15)\\ D_n &= \max(D_n^+, D_n^-). \end{aligned}$$

(13.15) ფორმულების სისწორეში დასარწმუნებლად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $F_n(x)$ საფეხურა ფუნქციაა და

$$F_n(x) - F(x)$$

სხვაობის მაქსიმუმი და მინიმუმი უნდა ვეძიოთ $F_n(x)$ ფუნქციის სწორედ ნახტომის წერტილებში. აღნიშნული გარემოება კარგად ჩანს ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე (ნახ. 13.1)



ნახ 13.1.

მოვიყვანოთ ახლა კოლმოგოროვის თეორემა, რომელიც აფასებს D_n სტატისტიკის ნულისაგან გადახრებს და გვაძლევს $\sqrt{n}\,D_n$ სიდიდის ზღვრულ განაწილებას.

თეორემა (კოლმოგოროვი). თუ $F(x)$ განაწილების ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ ყოველი x-ისათვის, $x>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}\,D_n\le x) = K(x), \tag{13.16}$$

სადაც

$$K(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j e^{-2j^2x^2} \tag{13.16'}$$

ფუნქციას კოლმოგოროვის განაწილების ფუნქციას უწოდებენ.

$K(x)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული $F(x)$ განაწილების სახეზე (ანუ თავისუფალია განაწილებისაგან) და მისი მნიშვნელობები ტაბულირებულია.

შევნიშნოთ, რომ ზღვარითი $K(x)$ ფუნქცია $\sqrt{n}\,D_n$ სტატისტიკის ზუსტი განაწილების კარგ მიახლოებას წარმოადგენს უკვე n-ის 20-ზე მეტი მნიშვნელობებისათვის.

ჰიპოთეზების შემოწმების წესი ასე შეგვიძლია აღვწეროთ: თუ ვამოწმებთ H_0 ჰიპოთეზას H_1 ალტერნატივის წინააღმდეგ და მნიშვნელოვნობის დონეა α მაშინ გამოიყენება კოლმოგოროვის ორმხრივი კრიტერიუმი შემდეგი სახით: ვიწუნებთ H_0 ჰიპოთეზას თუ

$$D_n > k_{n;\alpha},$$

სადაც $k_{n;\alpha}$ არის α დონის კრიტიკული მნიშვნელობა D_n-ისათვის. იგი განისაზღვრება ფორმულით:

$$k_{n;\alpha} = \frac{k_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \tag{13.17}$$

$k_{1-\alpha}$ თავის მხრივ არის კოლმოგოროვის განაწილების $1-\alpha$ დონის კვანტილი. $k_{1-\alpha}$ და $k_{n;\alpha}$ ცხრილების ფრაგმენტები მოყვანილია ქვემოთ.

ცალმხრივი H_1^+ და H_1^- ჰიპოთეზებისათვის უნდა გამოვიყენოთ სმირნოვის ცალმხრივი კრიტერიუმები, აგებული D_n^+ და D_n^- სტატისტიკებით შესაბამისად.

თუ H_0 ჰიპოთეზა სამართლიანია, D_n^+ და D_n^- ერთნაირად არიან განაწილებული. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ კრიტერიუმებს, რომლებიც D_n^+ სტატისტიკას ეყრდნობა.

ცნობილია, რომ თუ მნიშვნელოვნობის დონე $\alpha < 0.2$ (პრაქტიკაში, როგორც წესი, სწორედ ასეთი დონეები გვხვდება), მაშინ დიდი სიზუსტით

$$k^+_{n;\alpha} \approx k_{n;2\alpha}$$

სადაც $k^+_{n;\alpha}$ D^+_n კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობაა.

ამგვარად, თუ

$$D^+_n > k^+_{n;\alpha}$$

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, H^+_1 ალტერნატივის სასარგებლოდ. $k^+_{n;\alpha}$-ის მოსაძებნად $k_{n;\alpha}$-ს 13.3 ცხრილში უნდა ავიღოთ 2α-ს შესაბამისი სვეტი.

ცხრილი 13.2. კოლმოგოროვის განაწილების კვანტილები

α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
$k_{1-\alpha}$	1.073	1.224	1.358	1.517	1.628

ცხრილი 13.3. D_n სტატისტიკის კრიტიკული $k_{n;\alpha}$ მნიშვნელობები

n	α=0.05	α=0.02	α=0.01
1	0.975	0.990	0.995
5	0.563	0.627	0.668
10	0.409	0.456	0.489
15	0.338	0.377	0.404
20	0.294	0.329	0.352
25	0.264	0.295	0.326
30	0.243	0.270	0.290
35	0.224	0.250	0.268
40	0.210	0.234	0.252
45	0.198	0.221	0.232
50	0.188	0.210	0.226
55	0.180	0.201	0.216
60	0.172	0.193	0.207
70	0.160	0.179	0.192
80	0.150	0.167	0.179
90	0.141	0.158	0.169
100	0.134	0.150	0.161

მაგალითად, თუ გვინდა მოვძებნოთ $k^+_{40;0.01}$ უნდა ავიღოთ $k_{n;\alpha}$-ს ცხრილში α=0.02 სვეტის მე-9 სტრიქონზე (n=40-ის გასწვრივ) მოყვანილი რიცხვი. ესაა 0.234.

ამრიგად,

$$k^+_{40;0.01} = 0.234.$$

თუ n საკმაოდ დიდია (n>100), მაშინ კარგ მოახლოებას იძლევა ფორმულა

$$k^+_{n;\alpha} \sim \sqrt{\frac{-\ln\alpha}{2n}},$$

სადაც ln აღნიშნავს ნატურალურ ლოგარითმს.

მაგალითი **13.4.** *A* ავიაკომპანიას, თვითმფრინავების ფრენის განრიგის შედგენამდე, სურს განსაზღვროს არის თუ არა ნორმალურად განაწილებული თვითმფრინავთა გაფრენის დაგვიანების დრო.

დაგვიანება საათებში x	ემპ. განაწ. ფუნქცია $F_n(x)$	ნორმირ. სიდიდეები $z=(x-\mu)/\sigma$	ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია $F(x)$	გადახრები $F_n(x)-F(x)$
0.9	0.0909	–2.1	0.0179	0.0730
1.0	0.1818	–2.0	0.0228	0.1590
1.9	0.2727	–1.1	0.1357	0.1370
2.1	0.3636	–0.9	0.1841	0.1795
2.7	0.4545	–0.3	0.3821	0.0724
2.8	0.5454	–0.2	0.4207	0.1247
3.2	0.6363	0.2	0.5793	0.0570
3.6	0.7272	0.6	0.7257	0.0015
3.9	0.8181	0.9	0.8159	0.0022
4.2	0.9090	1.2	0.8849	0.0241
5.1	0.9999	2.1	0.9841	0.0178

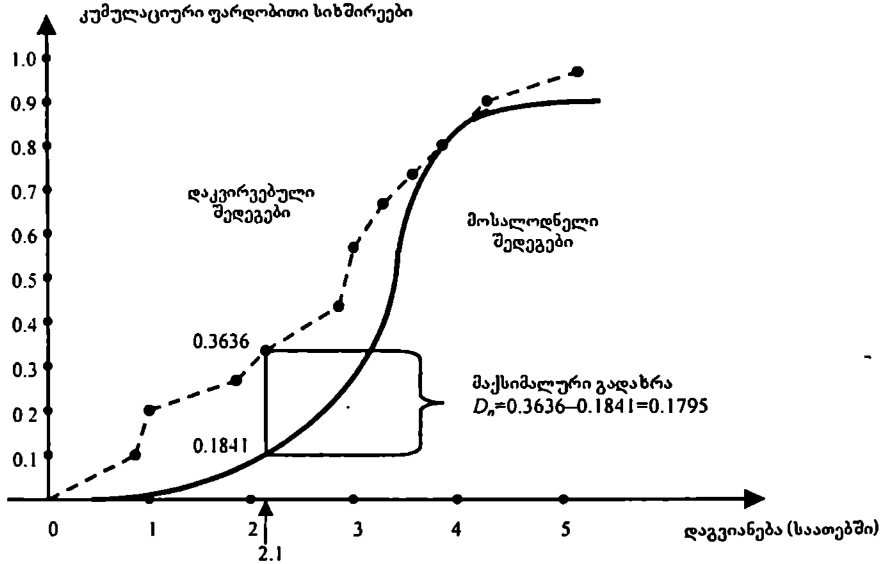
10 წლის განმავლობაში მხოლოდ 11 გაუთვალისწინებელ დაგვიანებას ჰქონდა ადგილი და ამ დაგვიანებათა ხანგრძლივობა, დალაგებული ზრდის მიხედვით, მოყვანილია ცხრილის პირველ სვეტში. სხვა შემთხვევების შესწავლის საფუძველზე *A* კომპანიას გაუჩნდა ჰიპოთეზა, რომ ამ დაგვიანებებს უნდა ჰქონდეს 3 საათის ტოლი საშუალო და 1 საათის ტოლი სტანდარტული გადახრა. ანუ ნულოვანი ჰიპოთეზა ნიშნავს, რომ დაგვიანებები განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით 3 და 1. ცხრილის მეორე სვეტში მოცემულია ემპირიული განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები (მაგალითად 0.2727 არის დაგვიანებათა რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატება 1.9 საათს გაყოფილი 11-ზე (ანუ 0.2707≈3/11). ცხრილის მეოთხე სვეტში მოცემულია ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები, გამოთვლილი სტანდარტული ნორმალური განაწილების ცხრილის მიხედვით მესამე სვეტში მოყვანილი ნორმირებული სიდიდეების შესაბამისად. ბოლო სვეტში მოცემულია ემპირიულ და ჰიპოთეტურ განაწილების ფუნქციებს შორის გადახრები.

რადგან, როგორც ვნახეთ, ემპირიულ და თეორიულ განაწილების ფუნქციებს შორის მაქსიმალური გადახრა ყოველთვის მიიღწევა ემპირიული განაწილების ფუნქციის ნახტომის წერტილებში (ანუ შერჩევით განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის), მაქსიმალური გადახრა ცხრილის ბოლო სვეტის მაქსიმალური ელემენტის ტოლი იქნება, ანუ

$$D_n = \max_x |F_n(x) - F_0(x)| = 0.1795.$$

დავაფიქსიროთ $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონე და ვიპოვოთ D_n სტატისტიკის შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობა. $n=11$ და $\alpha=0.05$ მნიშვნელობებს D_n განაწილების

ცხრილის მიხედვით შეესაბამება $k_{0.05;11}$=0.35242 სიდიდე, რომელიც აღემატება D_n სტატისტიკის 0.1795 დაკვირვებულ მნიშვნელობას. ამიტომ შერჩევის მონაცემები არ გვაძლევს ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველს. იგივე დასკვნას გააკეთებდით მნიშვნელოვნობის დონე რომ აგველო 0.1-ის ტოლი. ამრიგად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ შერჩევის მონაცემები საკმაოდ კარგად ეთანხმება ნულოვან ჰიპოთეზას, თუმცა მხოლოდ შერჩევის გაზრდამ შეიძლება უზრუნველყოს მეორე გვარის შეცდომის თავიდან აცილება.



შენიშვნა.* $F_n(x)$ ემპირიული განაწილების ფუნქციის $F(x)$-თან თანხმობის ხარისხი ზოგჯერ სხვადასხვაა წრფის სხვადასხვა ნაწილში. სახელდობრ, იგი უარესდება ხოლმე წრფის ბოლოებში. ამიტომ ბუნებრივია

$$D_n(\alpha)=\max_{F^{-1}(\alpha)\le x\le F^{-1}(1-\alpha)}|F_n(x)-F(x)|$$

სტატისტიკის განხილვა, სადაც $F^{-1}(p)$ ნიშნავს F განაწილების p-კვანტილს. $D_n(\alpha)$ და ამ ტიპის სხვა სტატისტიკები განიხილა გ. მანიამ 1949–1951 წლებში (იხ., მაგ. [43]) მიიღო მათი ზღვარითი განაწილება და გამოთვალა საჭირო კრიტიკული მნიშვნელობები, რაც ამ კრიტერიუმების გამოყენების საშუალებას გვაძლევს ჰიპოთეზათა შემოწმებისას (იხ. აგრეთვე [44]).

50-იანი წლების შემდეგ ინტენსიურად ვითარდებოდა განაწილების სიმკვრივის არაპარამეტრული შეფასების პრობლემატიკა, რომელსაც მიეძღვნა როზენბლატის, ჩენცოვის, პარზენის, ნადარაიას და სხვათა ნაშრომები. კერძოდ, შეისწავლებოდა სიმკვრივის ე.წ. გულოვანი შეფასებების ასიმპტოტური თვისებები. სიმკვრივის გულოვანი შეფასება მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} G\left(\frac{x - X_i}{h}\right),$$

სადაც $(X_1,...,X_n)$ შერჩევაა გენერალური ერთობლიობიდან განაწილების უწყვეტი $f(x)$ სიმკვრივით, $G(x)$ – სპეციალურად შერჩეული ფუნქციაა (გული), $h=h(n)$ კი დადებითი რიცხვების მიმდევრობაა, $h(n)\to 0$, როცა $n\to\infty$.

ამ მიმართულებით ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი ეკუთვნის ე. ნადარაიას [48], რომელმაც დაამტკიცა, რომ გარკვეულ პირობებში ადგილი აქვს კრებადობას

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} |\hat{f}_n(x) - f(x)| = 0\right\} = 1.$$

მანვე დაადგინა შეფასების სიზუსტეც, რაც საშუალებას იძლევა აიგოს ნდობის ზოლები უცნობი $f(x)$ სიმკვრივისათვის. ე. ნადარაიას მიერ აგრეთვე შემოთავაზებული იყო უცნობი რეგრესიის ფუნქციისათვის გულოვანი შეფასებების ფართო კლასი, რომელიც ლიტერატურაში ნადარაია-ვატსონის შეფასების სახელითაა ცნობილი [47], [49].

§ 5. კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმი ორი შერჩევისათვის

ორი შერჩევის ერთგვაროვნობის საკითხი საკმაოდ კარგად შეიძლება გადაწყდეს კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმის გამოყენებით.

ვთქვათ გვაქვს ორი შერჩევა

$$X_1, X_2, \ldots, X_n; \qquad Y_1, Y_2, \ldots, Y_m. \tag{13.18}$$

შევადგინოთ ამ შერჩევების შესაბამისი ვარიაციული მწკრივები:

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)};$$

$$Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(m)}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ ორივე შერჩევა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. პირველი შერჩევის შესაბამისი თეორიული განაწილების ფუნქცია აღვნიშნოთ $F(x)$-ით, მეორესი – $G(x)$-ით.

ამგვარად H_0 ჰიპოთეზა ასეთია

$$H_0 : = F(x) = G(x). \tag{13.19}$$

აღვნიშნოთ შერჩევათა ემპირიული განაწილების ფუნქციები $F_n(x)$ და $G_m(x)$-ით. ერთი შერჩევის თავის თეორიულ განაწილების ფუნქციასთან თანხმობის ჰიპოთეზის ანალოგიურად, ორი შერჩევის ერთგვაროვნობის შემოწმების ამოცანაშიც, განვიხილავთ შემდეგ სამ ალტერნატივას:

$$H_1^+ : \max_{|x|<\infty} (G(x) - F(x)) > 0,$$

$$H_1^- : \min_{|x|<\infty} (G(x) - F(x)) < 0, \tag{13.20}$$

$$H_1 \ : \max_{|x|<\infty} |G(x) - F(x)| \neq 0.$$

როდესაც განიხილება ალტერნატივები H_1^+ და H_1^-, შესაბამისად, გამოიყენება სტატისტიკები

$$D_{m,n}^+ = \max_{|x|<\infty} (G_m(x) - F_n(x)),$$

$$D_{m,n}^- = -\min_{|x|<\infty} (G_m(x) - F_n(x)). \tag{13.21}$$

H_0-ის სამართლიანობისას $D_{m,n}^+$ და $D_{m,n}^-$ სტატისტიკები განაწილებულია ერთნაირად. ამიტომ, შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ $D_{m,n}^+$-ს. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $m \leq n$.

თუ ალტერნატივაა H_1, მაშინ გამოიყენება სტატისტიკა

$$D_{m,n} = \max_{|x|<\infty} |G_m(x) - F_n(x)|.$$

მოყვანილი სტატისტიკების რიცხვითი მნიშვნელობები მოხერხებულია გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$D_{m,n}^+ = \max_{1 \leq r \leq m} \left(\frac{r}{m} - F_n(Y_{(r)}) \right),$$

$$D_{m,n}^- = \max_{1 \leq r \leq m} \left(F_n(Y_{(r)}) - \frac{r-1}{m} \right) < 0, \tag{13.22}$$

და

$$D_{m,n} = \max(D_{m,n}^+, D_{m,n}^-).$$

ცნობილია $D_{m,n}^+$ და $D_{m,n}^-$ სტატისტიკების ზუსტი განაწილებები. ეს განაწილებები გამოიყენება, როცა $n \leq 20$. პრაქტიკაში, უფრო ხშირად, n გაცილებით მეტია 20-ზე და გამოიყენება ზღვრული განაწილებები. ამიტომ ზუსტ განაწილებებს და შესაბამის ცხრილებს ჩვენ არ გამოვიყენებთ და აქ არ მოვიყვანთ.

როდესაც $\frac{mn}{m+n}$ საკმაოდ დიდია, $\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}$ სიდიდის განაწილების ფუნქცია ახლოს არის კოლმოგოროვის $K(x)$ განაწილებასთან, რომელიც მოვიყვანეთ ზემოთ (იხ. ფორმულა (13.16')).

ცხადია, რომ ჩვენთვის საჭიროა

$$k_{\frac{mn}{m+n};\alpha} \approx k_{1-\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}},$$

სადაც $k_{\frac{mn}{m+n};\alpha}$ არის $D_{m,n}$ კრიტერიუმის α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული მნიშვნელობა. $k_{\frac{mn}{m+n};\alpha}$-ს რიცხვითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად $k_{1-\alpha}$-ს მნიშვნელობას ავიღებთ 13.2 ცხრილიდან, მოცემული α-ს მიხედვით.

ახლა თუ გვინდა შევამოწმოთ H_0 ჰიპოთეზა და ალტერნატივაა H_1, ხოლო მნიშვნელოვნობის დონეა α, ვიწუნებთ H_0 ჰიპოთეზას, თუ შესრულებულია უტოლობა

$$D_{m,n} > k_{\frac{mn}{m+n};\alpha}.$$

საწინააღმდეგო უტოლობის შემთხვევაში ვასკვნით, რომ შერჩევები განაწილებულია ერთნაირად.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ალტერნატივაა H_1^+, მაშინ ვისარგებლებთ იმ გარემოებით, რომ თუ α<0.1 (რაც უპირატესად გვხვდება პრაქტიკაში)

$$k^+_{\frac{mn}{m+n};\alpha} = k_{\frac{mn}{m+n};2\alpha}, \tag{13.23}$$

სადაც $k^+_{\frac{mn}{m+n};\alpha}$ არის $D^+_{m,n}$ სტატისტიკის α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული მნიშვნელობა.

თუ (13.23) ფორმულით ვისარგებლებთ, H_0 ჰიპოთეზას დავიწუნებთ მნიშვნელოვნობის α დონით, თუ შესრულებულია უტოლობა

$$D^+_{m,n} > k^+_{\frac{mn}{m+n};\alpha} = k_{\frac{mn}{m+n};2\alpha}.$$

საწინააღმდეგო შემთხვევაში ვღებულობთ H_0-ს.

საჭიროდ მიგვაჩნია შევნიშნოთ, რომ D_n კრიტერიუმი, როცა ალტერნატივაა H_1, შემოღებული და შესწავლილი იყო ა.კოლმოგოროვის მიერ. D_n^+, D_n^-, $D_{m,n}$, $D^+_{m,n}$, $D^-_{m,n}$ კრიტერიუმები შესწავლილი იყო ნ.სმირნოვის მიერ. ეს კრიტერიუმები უმრავლეს შემთხვევაში გვხვდება ერთად და გამოიყენება საერთო სახელწოდება – კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმი.

§ 6. χ^2-ისა და კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმების შედარება

ზემოაღწერილიდან ჩანს, რომ χ^2 და კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმები გამოიყენება ერთი და იგივე ამოცანის გადასაწყვეტად. განვიხილოთ ამ კრიტერიუმების ზოგიერთი თავისებურებანი.

χ^2-კრიტერიუმის ძირითადი უპირატესობა კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმებთან შედარებით არის მისი უნივერსალობა. χ^2-კრიტერიუმის გამოყენება შეიძლება ნებისმიერი, მათ შორის მრავალგანზომილებიანი ჰიპოთეტური განაწილებისათვის, როგორც მარტივი, ასევე რთული ჰიპოთეზების შესამოწმებლად. კოლმოგოროვისა და სმირნოვის კრიტერიუმს იყენებენ, როგორც წესი, ერთგანზომილებიანი უწყვეტი ჰიპოთეტური განაწილებისათვის და ძირითადად მარტივი ჰიპოთეზების შესამოწმებლად. ამის გამო, ბუნებრივია ეს კრიტერიუმები შევადაროთ, როდესაც ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია უწყვეტია და სავსებით განსაზღვრული.

$\hat{\chi}_n^2$ სტატისტიკის ზუსტი განაწილება რთულია, საზოგადოდ, დამოკიდებულია ჰიპოთეტურ განაწილებაზე და გადაწყვეტილების მიღებისას ჩვენ ვიყენებთ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის ასიმპტოტურ განაწილებას, რომელიც χ^2 განაწილების კანონს ემთხვევა. განსხვავება $\hat{\chi}_n^2$ სტატისტიკის ზუსტ და ასიმპტოტურ განაწილებას შორის დამაკმაყოფილებელი რომ იყოს, შერჩევის n მოცულობა უნდა საკმაოდ დიდი იყოს. შერჩევის მოცულობის ზუსტი დასაშვები სიდიდის დადგენა თუმცა არ არის შესაძლებელი, ემპირიულ გამოკვლევებზე დაყრდნობით, გარკვეული პირობითობით უშვებენ, რომ n არ უნდა იყოს 50-ზე ნაკლები დაჯგუფებული კლასების ნებისმიერი რაოდენობის დროს. გარდა ამისა არცერთ კლასში შერჩევის ელემენტთა რაოდენობა არ უნდა იყოს მცირე. ამ შემთხვევაშიც ძნელია დასაშვები ქვედა საზღვრის მითითება, თუმცა თვლიან, რომ ეს საზღვარი არ უნდა იყოს 5-ზე ნაკლები და უმჯობესია 10-ის ტოლი იყოს.

კოლმოგოროვ-სმირნოვის D_n, D_n^+ და D_n^- სტატისტიკების როგორც ზუსტი, ასევე ასიმპტოტური (შესაბამისი ნორმირების შემდეგ) განაწილებები თავისუფალია ჰიპოთეტური განაწილებისაგან. გარდა ამისა ეს სტატისტიკები საკმაოდ ახლოს არიან შესაბამის ზღვრულ განაწილებებთან უკვე მაშინ, როდესაც შერჩევის მოცულობა 20-ზე მეტია. უფრო მცირე შერჩევის დროს შესაძლებელია ზუსტი განაწილებების გამოყენება.

როგორც ვნახეთ χ^2-კრიტერიუმის გამოყენებისას საჭიროა შერჩევის მონაცემების წინასწარი დაჯგუფება, რის შედეგადაც ადგილი აქვს შერჩევიდან მიღებული ინფორმაციის დაკარგვას და χ^2-კრიტერიუმი კარგავს მგრძნობიარობას ზოგიერთი ალტერნატივის მიმართ. χ^2-კრიტერიუმის ნაკლად შეიძლება ჩაითვალოს ისიც, რომ ეს კრიტერიუმი არ ითვალისწინებს გადახრის ნიშანს, რის გამოც ის საჭიროებს შევსებას ნიშნების სერიის რაიმე კრიტერიუმით. ამისაგან განსხვავებით D_n კრიტერიუმი ძალმოსილია ყველანაირი ალტერნატივის დროს და D_n^+, D_n^- სტატისტიკებში გათვალისწინებულია გადახრის მიმართულება.

D_n, და D_n^+ სტატისტიკების გამოთვლა საკმაოდ რთულია დიდი n-ების შემთხვევაში, რადგან $F(x)$ ჰიპოთეტური განაწილების რიცხვითი მნიშვნელობები უნდა გამოითვალოს შერჩევის ყოველ წერტილში. ეს საკმაოდ ძნელია ტაბულირებული ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციის შემთხვევაშიც. პრაქტიკული გამოყენებისას, როდესაც პასუხის მიღება სწრაფად არის საჭირო, ხშირად უპირატესობას ადვილად რეალიზებად კრიტერიუმებს ანიჭებენ, მაშინაც კი როცა მათ არა აქვთ ოპტიმალური თეორიული თვისებები. ამ მოსაზრებით, ასეთ შემთხვევებში შეიძლება ზოგჯერ მიზანშეწონილი იყოს χ^2 კრიტერიუმის გამოყენება.

აღვნიშნოთ კოლმოგოროვის კრიტერიუმის (უფრო ზუსტად D_n სტატისტიკის) ერთი მნიშვნელოვანი თვისება, რომელიც არცერთ სხვა თანხმობის კრიტერიუმს არ გააჩნია. რადგან D_n სტატისტიკა თავისუფალია განაწილებისაგან და წარმოადგენს ემპირიულ და თეორიულ განაწილების ფუნქციებს შორის გადახრის პირდაპირ და უბრალო საზომს, ჩვენ შეგვიძლია D_n სტატისტიკა თანხმობის ჰიპოთეზის შემოწმების ნაცვლად გამოვიყენოთ უცნობი $F(x)$ განაწილების ფუნქციის შესაფასებლად და მისთვის ნდობის ინტერვალის ასაგებად.

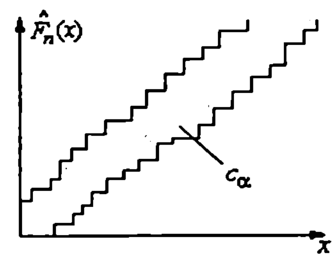
მართლაც, როგორიც არ უნდა იყოს $F(x)$ განაწილების ფუნქცია (იგულისხმება მხოლოდ მისი უწყვეტობა)

$$P(\sqrt{n}\,D_n > \lambda_\alpha) = \alpha,$$

სადაც λ_α არის α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული მნიშვნელობა. ამიტომ $(1-\alpha)$-ს ტოლი ალბათობით (ცხადია იმ პირობით, რომ მართებულია H_0 ჰიპოთეზა) შესრულდება ორმხრივი უტოლობა

$$\hat{F}_n(x)-\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} \le F(x) \le \hat{F}_n(x)+\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} \qquad (13.24)$$

ყოველი x-ისათვის.



ნახ. 13.2. საიმედოობის საზღვრები $F(x)$ განაწილების ფუნქციისათვის აგებული შერჩევის მონაცემების მიხედვით

განვიხილოთ $c_1(x)=\hat{F}_n(x)-\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$ და $c_2(x)=\hat{F}_n(x)+\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$ მრუდებით შემოსაზღვრული c_α ზოლი. ეს მრუდები მიიღება $\hat{F}_n(x)$ ემპირიული განაწილების ფუნქციის $\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$ სიდიდით Y ღერძის გასწვრივ შესაბამისად ზემოთ და ქვემოთ წანაცვლებით (იხ. ნახ. 13.2).

(13.24) ორმხრივი უტოლობა გვეუბნება, რომ $F(x)$ ფუნქცია გაივლის ამ ზოლში, ისე რომ არსად არ გადაკვეთს მის საზღვარს. მაშასადამე ალბათობა იმისა, რომ c_α ზოლი დაფარავს $F(x)$ ფაქტიურ განაწილების ფუნქციას, არის დაახლოებით $(1-\alpha)=K(\lambda_\alpha)$ (იხ. (13.16')).

შევნიშნოთ, რომ ამ მეთოდის გამოყენება გულისხმობს ემპირიული განაწილების ფუნქციის აგებას სრული შერჩევის და არა დაჯგუფებული მონაცემების მიხედვით. საიმედოობის ეს შეფასება იმოქმედებს მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით, როდესაც დაჯგუფების ინტერვალი საკმაოდ მცირეა.

შენიშვნა.* ე. ხმალაძე და მისი მოწაფეების ბოლოდროინდელმა გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ კოლმოგოროვ-სმირნოვის ტიპის კრიტერიუმების გამოყენება შესაძლებელია მრავალგანზომილებიანი დაკვირვებების შემთხვევაშიც, როგორც მარტივი, ისე რთული ჰიპოთეზების შემოწმებისას. [50], [76], [77], [78] ნაშრომებში, მარტინგალური მეთოდების გამოყენებით, აგებულია განაწილებისაგან ასიმპტოტურად თავისუფალი თანხმობის კრიტერიუმები.

* * *

მოვიყვანოთ ის ძირითადი ლიტერატურის სია, რომელსაც ვეყრდნობოდით ამ თავში მოყვანილი მასალის გადმოცემისას: [20], [39], [52], [57], [79].

დასკვნები

ამ თავში ჩვენ შევისწავლეთ არაპარამეტრული თანხმობის კრიტერიუმები, რომელთა საშუალებითაც წყდება ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანა: ეთანხმება თუ არა X შემთხვევით სიდიდეზე დამოუკიდებელი დაკვირვებების შედეგად მიღებული მონაცემები ჰიპოთეზას, რომ X სიდიდე განაწილებულია მოცემული $F_0(x)$ განაწილების კანონით. განხილულია როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი ჰიპოთეტური განაწილების $F_0(x)$ ფუნქციის შემთხვევები. $F_0(x)$ შეიძლება იყოს სავსებით განსაზღვრული (მარტივი ჰიპოთეზა), ან შეიცავდეს უცნობ პარამეტრებს (რთული ჰიპოთეზა). არაპარამეტრული კრიტერიუმების ძირითადი უპირატესობა, პარამეტრულ კრიტერიუმებთან შედარებით, არის მათი გამოყენების შესაძლებლობა დაკვირვებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაზე უმნიშვნელო შეზღუდვის პირობებში, ალტერნატიული ჰიპოთეზების ფართო კლასისათვის. ასეთი კრიტერიუმებიდან ამ თავში ჩვენ შევისწავლეთ მხოლოდ პირსონის χ^2 კრიტერიუმი და კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმები. აღვნიშნოთ ამ კრიტერიუმთა ერთი მნიშვნელოვანი თვისება: ამ კრიტერიუმების მიხედვით გადაწყვეტილების მიღების წესი ეყრდნობა სტატისტიკებს, რომელთა განაწილება არ არის დამოკიდებული ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციის სახეზე (ანუ თავისუფალია განაწილებისაგან), რის გამოც ამ სტატისტიკათა გამოთვლა საკმარისია რომელიმე ერთი ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქციის შემთხვევაში. მოყვანილია χ^2 და კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმების შედარება (თუ რა შემთხვევაში აქვს ერთ კრიტერიუმს უპირატესობა მეორესთან შედარებით), მოცემულია ძირითად სტატის-

ტიკათა გამოსათვლელი ფორმულები და ნაჩვენებია მათი გამოყენების გზები. განხილულია, აგრეთვე, კონკრეტული ამოცანები.

სავარჯიშოები

13.1. 164 სტუდენტის სიმაღლეთა გაზომვით მიღებული შედეგები დაჯგუფებულია მონაცემების ხუთ სხვადასხვა ინტერვალში მოხვედრის მიხედვით

ინტერვალის სიგრძე დიუიმებში	სიხშირეები
61–64	10
65–68	21
69–72	83
73–76	49
77–80	1

ეთანხმება თუ არა ეს მონაცემები ჰიპოთეზას, რომ სიმაღლეთა განაწილება ნორმალურია საშუალო მნიშვნელობით 70 დიუიმი და საშუალო კვადრატული გადახრით 3 დიუიმი (1 დიუიმი=2.5სმ)

13.2. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში აღნიშნულია ერთ მაღაზიაში კონკრეტული საქონლის რეალიზაციათა რაოდენობები კვირის დღეების მიხედვით

დღე	ორშაბათი	სამშაბათი	ოთხშაბათი	ხუთშაბათი	პარასკევი
გაყიდული საქონლის რაოდენობა	49	35	32	39	45

შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ გაყიდული საქონელი თანაბრად არის განაწილებული კვირის დღეების მიხედვით (ანუ ეთანხმება თუ არა ეს მონაცემები თანაბარ დისკრეტულ განაწილებას)?

13.3. შემდეგი 40 მონაცემი მიღებულია $\alpha=2$ და $\theta=10$ პარამეტრების მქონე გამა განაწილებიდან.

49.0662	15.2768	23.3803	2.2905	13.7978
37.7604	33.9633	22.8145	16.0873	43.4627
40.6222	10.2427	36.0867	26.9065	20.2895
16.0575	5.6385	14.9561	36.7405	13.6624
17.3373	13.9306	30.7167	34.9067	27.5957
20.0064	40.2106	64.0425	6.9909	50.5328
20.7794	3.8205	7.1160	2.7182	31.7776
7.6585	9.3867	6.0724	5.3690	22.0052

შეამოწმეთ ამ მონაცემების თანხმობა $\Gamma(2,10)$ განაწილებასთან 10%-იანი მნიშვნელოვნობის დონის გამოყენებით.

13.4. ვთქვათ, მე-3-ე ამოცანაში შესამოწმებელი გვაქვს რთული ჰიპოთეზა, რომ მონაცემები მიღებულია გამა განაწილებიდან (ანუ გამა განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებების შედეგად). რა უნდა გაკეთდეს, წინა ამოცანისგან განსხვავებით, ამ ჰიპოთეზის შემოწმების მიზნით?

13.5. ვთქვათ, გვინდა შევადაროთ ერთმანეთს გაზომვათა ორი სერია. არაფერი არ არის ცნობილი მათ შორის რაიმე განსხვავების შესახებ. ჩვენ ვამოწმებთ ნულოვან ჰიპოთეზას: მონაცემები აღებულია ერთი და იგივე გენერალური ერთობლიობიდან, ალტერნატივის წინააღმდეგ: მონაცემები მიღებულია განსხვავებული განაწილების ფუნქციის მქონე სიდიდეთა გაზომვის შედეგად (α=0.05, ორმხრივი კრიტერიუმით)

მონაცემების I სერია 1.0, 2.1, 3.0, 1.2, 2.9, 0.6, 2.8, 1.6, 1.7, 3.2, 1.7;
მონაცემების II სერია 2.0, 3.2, 3.8, 2.1, 7.2, 2.3, 3.5, 3.0, 3.1, 4.6, 3.2.

არაპარამეტრული სტატისტიკა. რანგობრივი კრიტერიუმები

მე-13 თავში ჩვენ განვიხილეთ თანხმობისა და ერთგვაროვნების არაპარამეტრული (კოლმოგოროვისა და კოლმოგოროვ-სმირნოვის) კრიტერიუმები. ეს კრიტერიუმები საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ განაწილების ფუნქციებს შორის არსებული ნებისმიერი განსხვავება. ხშირ შემთხვევაში საჭიროა განაწილების ფუნქციებს შორის რაიმე კონკრეტული (და არა ნებისმიერი) განსხვავების აღმოჩენა. მაგალითად, შეიძლება მხოლოდ გვაინტერესებდეს არის თუ არა განსხვავება განაწილებათა საშუალო მნიშვნელობებს ან მათ მედიანებს შორის. ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ცნობილიც კი იყოს, რომ ორი შერჩევა აღებულია განაწილების ფუნქციათა ერთი და იგივე კლასიდან და ისინი ერთმანეთისაგან მხოლოდ წანაცვლებით განსხვავდებიან. ასეთ დროს უკეთესია უფრო მარტივი კრიტერიუმების გამოყენება. ასეთი კრიტერიუმებიდან ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ნიშნებისა და რანგობრივ კრიტერიუმებს, რომელთა საშუალებითაც მოწმდება ჰიპოთეზები გენერალური ერთობლიობის რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ, ჰიპოთეტურ განაწილების ფუნქციათა ფართო კლასისთვის. როდესაც შერჩევა აღებულია ნორმალური განაწილებიდან, მაშინ საშუალოების შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმების მიზნით ოპტიმალურია ადრე შესწავლილი t კრიტერიუმის (თავი 12) გამოყენება, რადგან ეს კრიტერიუმი ყოველი ფიქსირებული α მნიშვნელოვნობის დონისათვის მინიმალურ მეორე გვარის შეცდომას გვაძლევს. მაგრამ ნორმალურობის დაშვება მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში არ არის მართებული და ამ თავში მოყვანილ რანგობრივ კრიტერიუმებს უპირატესობა აქვთ t კრიტერიუმთან შედარებით იმ შემთხვევებში, როდესაც ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია ნორმალურისაგან არსებითად განსხვავდება.

§ 1. ამოცანები მედიანის შესახებ

სტატისტიკური ანალიზის მეთოდები, რომლებსაც ამ პარაგრაფში განვიხილავთ, ეხება სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანებს გენერალური ერთობლიობის მდებარეობის პარამეტრის (მედიანის) შესახებ. ეს მეთოდები მნიშვნელოვანია ორი განსხვავებული ტიპის მონაცემებისათვის. პირველ შემთხვევაში ესაა შერჩევითი მნიშვნელობები მიღებული უწყვეტი განაწილების მქონე გენერალური ერთობლიობიდან, რომლის მედიანის შესახებ გვსურს დასკვნების მიღება. მეორე შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვექნება დამოუკიდებელ დაკვირვებულ (x_i, y_i), $i=1,2,.., n$, წყვილებთან, სადაც დაკვირვებული წყვილების პირველ მნიშვნელობას შეიძლება შევხედოთ როგორც დაკვირვებებს "ზემოქმედებამდე" (დაკვირვებები დამუშავებამდე), ხოლო მეორე მნიშვნელობებს როგორც დაკვირვებებს "ზემოქმედების" შემდეგ (დაკვირვებები დამუშავების შემდეგ).

ნიშანთა კრიტერიუმი ერთი შერჩევისათვის. ვთქვათ, გვაქვს n მოცულობის შერჩევა $X_1, X_2, .., X_n$. განვიხილოთ შემდეგი მოდელი

$$X_j = e_j + \theta, j=1,2,...,n, \tag{14.1}$$

სადაც θ უცნობი პარამეტრია, ყველა e_j, $j=1,2,...,n$, ურთიერთდამოუკიდებელი, უწყვეტად (არა აუცილებლად ერთნაირად) განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია ერთი და იგივე M მედიანით. შესამოწმებელია ნულოვანი ჰიპოთეზა

$H_0 : \theta = 0.$

ალტერნატივები შემდეგია:

ა) $H_1 : \theta>0$, ბ) $H_1 : \theta < 0$, გ) $H_1 : \theta \neq 0$.

განვიხილოთ სხვაობები

$$D_1 = X_1-M, D_2 = X_2-M, \ldots , D_n = X_n-M. \tag{14.2}$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას, $P\{X_i-M\leq 0\}=P\{X_i-M>0\}=1/2$, ანუ დადებით ნიშნიანი წევრების რაოდენობა (14.2) მიმდევრობაში უნდა ემორჩილებოდეს ბინომურ განაწილებას (n, p) პარამეტრით, სადაც $p=P\{X_i-M\geq 0\}=1/2$. თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ e_i სიდიდეებს ჰქონდეთ ერთი და იგივე განაწილების ფუნქცია, მაშინ θ პარამეტრის ნაბისმიერი ფიქსირებული ალტერნატიული მნიშვნელობისათვის გამოთვლილი ალბათობა $P=P\{X_i-M\geq 0\}$ არ იქნება დამოკიდებული i-ზე და (14.2) მიმდევრობის დადებით ნიშნიანი წევრების რაოდენობას კვლავ ექნება ბერნულის განაწილება (n,p) პარამეტრით, ოღონდ p განსხვავებული იქნება 1/2-ისაგან. ამიტომ, ამ შემთხვევაში განსახილველი ჰიპოთეზები შემდეგნაირადაც შეიძლება ჩავწეროთ:

$H_0 : p = 1/2.$

ა) $H_1: p>1/2$, ბ) $H_1: p<1/2$, გ) $H_1 : p\neq 1/2$.

H_0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოიყენება B_n სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს დადებითი ნიშნების მქონე D_i-ების, $i=1,2,...,n$ რაოდენობას.

ფორმალურად B_n სტატისტიკა ასე განისაზღვრება

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \psi_i , \tag{14.3}$$

სადაც

$$\psi_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ } D_i > 0, \\ 0, & \text{თუ } D_i < 0. \end{cases}$$

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას B_n სტატისტიკას, როგორც ეს ზემოთ ავღნიშნეთ, აქვს ბინომური განაწილება (n,p) პარამეტრებით. აქედან გამომდინარე H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმი შემდეგში მდგომარეობს:

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ (α მნიშვნელოვნობის დონით) B_n სტატისტიკის ყველა ისეთი შერჩევითი b_n მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს:

ა) $b_n \geq b(\alpha,n,1/2)$ ცალმხრივი H_1: $\theta>0$ ალტერნატივის შემთხვევაში,

ბ) $b_n \leq [n-b(\alpha,n,1/2)]$ ცალმხრივი H_1: $\theta<0$ ალტერნატივის შემთხვევაში,

გ) $b_n \leq [n-b(\alpha_1,n,1/2)]$ ან $b_n \geq b(\alpha_2,n,1/2)$, სადაც $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, ორმხრივი ალტერნატივის დროს.

$b(\alpha,n,1/2)$ არის ის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{B_n \geq b(\alpha,n,1/2)\} \leq \alpha$, ხოლო $P\{B_n \geq b(\alpha,n,1/2)-1\} > \alpha$. $b_n=B_n(x)=\#\{x_i : x_i-M>0, i=1,2,...,n\}$.

$b(\alpha,n,1/2)$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა განისაზღვრება ნიშანთა კრიტერიუმის A6 ცხრილების საშუალებით. (იხ. მაგ. [59]).

მოვიყვანოთ ფრაგმენტი ამ ცხრილიდან.

ცხრილი 14.1. A6 ცხრილის ფრაგმენტი

b	n = 9	n = 10	n = 11
5	0.500	0.623	
6	0.253	0.377	0.500
7	0.089	0.171	0.274
8	0.019	0.054	0.113
9	0.002	0.010	0.032
10		0.001	0.005
11			0.0005

ამ ცხრილის პირველ სვეტში მოყვანილია B_n სტატისტიკის შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო b-ს ფიქსირებული მნიშვნელობის შესაბამის სტრიქონსა და n-ის ფიქსირებული მნიშვნელობის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე, ანუ (b,n) უჯრაში მოთავსებულია $P\{B_n \geq b\}$ ალბათობის მნიშვნელობები ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს.

თუ დაკვირვებული $d_i=x_i-M$, $i=1,2,...,n$ სხვაობებიდან k რაოდენობა ნულის ტოლია, მაშინ ჰიპოთეზის შემოწმებისას შერჩევის მოცულობა ჩაითვლება $(n-k)$-ს ტოლად.

H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების აღწერილი პროცედურა გამოიყენება შერჩევის მცირე მოცულობის შემთხვევაში, კერძოდ, როცა $n \leq 25$.

აღწერილ კრიტერიუმს ნიშანთა კრიტერიუმი ეწოდება, ვინაიდან ეს კრიტერიუმი ეფუძნება B_n სტატისტიკას, რომელიც წარმოადგენს დადებით ნიშნიანი $D_i=X_i-M$ სხვაობების რაოდენობას. პრაქტიკულად d_i სხვაობების გამოთვლა არც არის საჭირო, საკმარისია მხოლოდ მათ ნიშანთა მიმდევრობის დადგენა.

მაგალითი **14.1.** ვთქვათ, ნიშნების მიმდევრობა შეიცავს 11 ელემენტს (ე.ი. n=11), და +-ების რაოდენობაა 9, ე.ი. b_{11} =9, α=0.05. ნულოვანი ჰიპოთეზაა H_0 : θ=0 (p=1/2).

რადგან საძიებელია ისეთი $b=b(\alpha,n,1/2)$ რიცხვი, რომ $P\{B_{11}\geq b\}\leq 0,05$ ხოლო $P\{B_{11}\geq b-1\}>0,05$ მოყვანილი ფრაგმენტიდან ვრწმუნდებით, რომ $b(0.05,11,1/2)=9$, ვინაიდან $P\{B_{11}\geq 9\}=0.032$, ხოლო $P\{B_{11}\geq 8\}=0.113$. ამრიგად ცხრილიდან გვაქვს $b(\alpha,n,1/2)=9$ (ეს რიცხვი ფრაგმენტში ხაზგასმულია), $n-b(\alpha,n,1/2)=2$. მაშინ

ა) ვინაიდან $b_{11}=9=b(0.05,11,1/2)$ ცალმხრივი H_1: $\theta>0$ ალტერნატივის შემთხვევაში ნულოვან H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, ანუ H_0-ს ვიწუნებთ.

ბ) ვინაიდან $b_{11}=9>2=n-b(\alpha,n,1/2)$ ცალმხრივი H_1: $\theta<0$ ალტერნატივის შემთხვევაში ნულოვანი H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს, ე.ი. H_0-ს არ ვიწუნებთ.

გ) ორმხრივი ალტერნატივის შემთხვევაში, თუ დავუშვებთ, რომ $\alpha_1=0.01$, $\alpha_2=0.01$, მაშინ $\alpha=0.02$ მნიშვნელოვნობის დონით ნულოვანი H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

დიდი შერჩევებისათვის გამოიყენება შემდეგი სტატისტიკა

$$B_n^* = \frac{B_n - (n/2)}{(n/4)^{1/2}}. \tag{14.4}$$

რადგან $EB_n=np=0,5n$ და $DB_n=np(1-p)=0,25n$, ნულოვანი ჰიპოთეზის დროს B_n^* სტატისტიკის განაწილება ასიმპტოტურად ნორმალურია პარამეტრებით (0,1).

B_n^* სტატისტიკაზე დაყრდნობით H_0 ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება სტანდარტული გზით. სახელდობრ, α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული არეები შემდეგია:

1) $b_n^*>z_\alpha$, ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივის დროს,

2) $b_n^*<-z_\alpha$, ცალმხრივი მარცხენა ალტერნატივის დროს,

3) $b_n^*<-z_{\alpha/2}$ ან $b_n^*>z_{\alpha/2}$, ორმხრივი ალტერნატივის დროს.

შევახსენებთ, რომ z_α სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია.

შენიშვნა. ნიშნების კრიტერიუმის ძალმოსილებისათვის საჭიროა e_i სიდიდეთა ერთნაირად განაწილებულობის მოთხოვნა. ამ დროს ეს კრიტერიუმი ძალმოსილი იქნება ყოველი ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ნიშნების კრიტერიუმის t-კრიტერიუმთან შედარება. როდესაც საბაზისო განაწილება ნორმალურია საშუალოების შესახებ ჰიპოთეზების შემოწმების მიზნით შესაძლებელია როგორც სტიუდენტის, ასევე ნიშნების კრიტერიუმის გამოყენება. ამ შემთხვევაში t-კრიტერიუმს აქვს მინიმალური მეორე გვარის შეცდომა β ყველა α მნიშვნელოვნობის დონის ტესტებს შორის და ცხადია ნიშნების კრიტერიუმზე უკეთესია. როდესაც ჰიპოთეტური განაწილება სიმეტრიულია, მაგრამ არ არის ნორმალური და მისი

საშუალო მნიშვნელობა სასრულია (ამ დროს $M=\mu$), მაშინ მეორე გვარის შეცდომა ნიშნების კრიტერიუმისათვის უფრო დიდი იქნება t-კრიტერიუმთან შედარებით, გარდა შემთხვევებას, როცა განაწილებას გაცილებით მძიმე კუდი აქვს ნორმალურთან შედარებით. შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმს, რომელიც სხვაობების ნიშნების გარდა მათ სიდიდეებსაც ითვალისწინებს და გაცილებით უკეთესია ნიშნების კრიტერიუმზე სიმეტრიული განაწილებების შემთხვევაში. ამიტომ ნიშნების კრიტერიუმი ძირითადად გამოიყენება არასიმეტრიული ჰიპოთეტური განაწილების დროს განაწილების მედიანის შესახებ დასკვნების გაკეთების მიზნით.

ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი ერთი შერჩევისათვის. განვიხილოთ ისევ ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა პოპულაციის მედიანის შესახებ. თუ ათი დაკვირვების საფუძველზე გვსურს შევამოწმოთ $H_0 : M=0$ ჰიპოთეზა ($H_1 : M>0$ ცალმხრივი ალტერნატივის წინააღმდეგ) ნიშნების ტესტის გამოყენებით, მაშინ $\alpha=0,055$ მნიშვნელოვნობის დონის შესაბამისი ჰიპოთეზის უარყოფის არე $\{8,9,10\}$ სიმრავლეს დაემთხვევა (ანუ ცხრილის მიხედვით $P\{B_n\geq 8\}=0.054\leq 0.055$ და $P\{B_n\geq 7\}=0.171\geq 0.055$. დავუშვათ, რომ ჩვენი შერჩევა შედგება (ზრდის მიხედვით დალაგებული) შემდეგი დაკვირვებებისაგან

$$-0.05,\ -0.19,\ -0.57,\ 0.76,\ 1.30,\ 2.02,\ 2.17,\ 2.46,\ 2.68,\ 3.02.$$

ამ შემთხვევაში სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა (ანუ დადებითი ნიშნის დაკვირვებათა რაოდენობა) 7-ის ტოლია და $\alpha=0,055$ მნიშვნელოვნობის დონით ჩვენ არ უარვყოფთ H_0 ჰიპოთეზას $H_1 : M>0$ ალტერნატივის სასარგებლოდ.

თუ დავუკვირდებით ამ მონაცემებს შევამჩნევთ, რომ თუმცა გვაქვს სამი უარყოფითი ნიშნის დაკვირვება, ამ დაკვირვებათა სიდიდე გაცილებით მცირეა შვიდ დადებით დაკვირვებათა სიდიდეებთან შედარებით. ნიშნების კრიტერიუმმა არ უარყო ჰიპოთეზა იმის გამო, რომ ეს ტესტი შერჩევიდან მხოლოდ დაკვირვებათა ნიშნების შესახებ მიღებულ ინფორმაციას იყენებს და დაკვირვებათა აბსოლუტური მნიშვნელობების სიდიდეებს არ ითვალისწინებს.

თუ ვიცით, რომ ამ მაგალითში შერჩევა მიღებულია უწყვეტი სიმეტრიული განაწილებიდან, მაშინ ნიშნიან კრიტერიუმზე დაყრდნობით მიღებული დასკვნა (რომ M=0) განსაკუთრებით საეჭვო ხდება, რადგან აღნიშნული მონაცემების მიხედვით პოპულაციის სიმეტრიის ცენტრი 0-ის მარჯვნივ მდებარეობს და შერჩევითი საშუალო მნიშვნელობა $\bar{x}=1,66$ გაცილებით დიდია უარყოფითი ნიშნის დაკვირვებათა აბსოლუტურ სიდიდეზე.

ჩვენ დავუშვებთ, რომ შერჩევა აღებულია უწყვეტი სიმეტრიული განაწილებიდან და შევადგენთ ნიშნიანი ტესტისაგან განსხვავებულ კრიტერიუმს, რომელიც უარყოფს H_0 ჰიპოთეზას ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში, რადგან ახალი ტესტი დაკვირვებათა ნიშნებს გარდა მათ აბსოლუტურ სიდიდეებსაც მიიღებს მხედველობაში.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n მოცულობის შერჩევა $X_1,X_2,\ldots,X_n$. ისევ განვიხილოთ

$$X_j = e_j + \theta,\ j=1,2,\ldots,n, \tag{14.5}$$

მოდელი, სადაც θ უცნობი პარამეტრია და e_j, $j=1,2,\ldots,n$ დამოუკიდებელი, უწყვეტი სიმეტრიული განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა ერთი და იგივე (M-ის ტოლი) მედიანით.

წინა შემთხვევისაგან განსხვავებით, ჩვენ დამატებით მოვითხოვთ e_j შემთხვევითი სიდიდეების სიმეტრიულობას. ამ შემთხვევაში e_j შემთხვევითი სიდიდის მედიანა მის საშუალო მნიშვნელობას ემთხვევა (თუ ეს უკანასკნელი სასრულია) და შეგვიძლია განვიხილოთ ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა განაწილების საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.

შესამოწმებელია ჰიპოთეზა, რომ X_i სიდიდეების საერთო საშუალო მნიშვნელობა (ან საერთო მედიანა) M-ის ტოლია.

$$H_0: \theta = 0.$$

ალტერნატივები შემდეგია:

ა) $H_1: \theta > 0$, ბ) $H_1: \theta < 0$, გ) $H_1: \theta \neq 0$.

ჰიპოთეზის შესამოწმებლად კვლავ განვიხილოთ დაკვირვებულ მნიშვნელობათა შემდეგი სხვაობები

$$D_1 = X_1 - M,\ D_2 = X_2 - M,\ \ldots,\ D_n = X_n - M, \tag{14.6}$$

დავალაგოთ ამ სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობები ზრდის მიხედვით და თითოეულ $|D_i|$-ს მივაწეროთ სათანადო რანგი. რანგი არ მიეწერება იმ დაკვირვებულ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $D_j=0$. რამდენიმე $|D_j|$-ის ტოლობის შემთხვევაში თითოეულს მიეწერება შესაბამისი რანგების არითმეტიკული საშუალო.

დავუშვათ, რომ R_i არის $|D_i|$-ის რანგი. განვსაზღვროთ

$$\psi_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ } D_i > 0, \\ 0, & \text{თუ } D_i < 0. \end{cases}$$

და

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} R_i\, \psi_i$$

ამგვარად T_n არის დადებით ნიშნიანი D_i-ების რანგების ჯამი. ხოლო $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ რელიზაციისათვის $t_n=T_n(x)$ წარმოადგენს T_n სტატისტიკის დაკვირვებულ მნიშვნელობას.

განხილული მაგალითისათვის შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი

ცხრილი 14.2

დაკვირვებათა აბსოლუტური მნიშვნელობები	0.05	0.19	0.57	0.76	1.30	2.02	2.17	2.46	268	3.02
რანგები	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ნიშნიანი რანგები	–1	–2	–3	4	5	6	7	8	9	10

T სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა არის t=4+5+6+7+8+9+10=49. H_0 ჰიპოთეზა უნდა უარვყოთ $H_1 : \theta > 0$ ალტერნატივის სასარგებლოდ, როდესაც t-ს მნიშვნელობა საკმაოდ დიდია, რადგან t-ს დიდი მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ დიდი აბსოლუტური სიდიდის მქონე დაკვირვებათა უმეტესი ნაწილი დადებითი ნიშნისაა, რაც უნდა ნიშნავდეს საშუალო მნიშვნელობის (ან მედიანის) ნულს ზევით გადახრას. საბოლოო გადაწყვეტილების მისაღებად უნდა ვიცოდეთ, არის თუ არა T სტატისტიკის მიერ მიღებული 49-ის ტოლი მნიშვნელობა „მოულოდნელად" დიდი, თუკი ჰიპოთეზა ჭეშმარიტია.

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს T სტატისტიკას გააჩნია ჰიპოთეტური განაწილებისაგან დამოუკიდებელი, სავსებით განსაზღვრული სიმეტრიული განაწილება და ამ განაწილების კრიტიკული მნიშვნელობები შეგვიძლია მოვნახოთ ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმის დანართში მოცემული A7 ცხრილიდან, რომლის ფრაგმენტიც ქვემოთ არის მოყვანილი.

ცხრილი 14.3. A7 ცხრილის ფრაგმენტი

	n			
t	8	9	10	11
33	0.020	0.125	0.312	0.517
34	0.012	0.102	0.278	0.483
35	0.008	0.082	0.246	0.449
36	0.004	0.064	0.216	0.416
37		0.049	0.188	0.382
38		0.037	0.161	0.350
39		0.027	0.138	0.319
40		0.020	0.116	0.289
41		0.014	0.097	0.260
42		0.010	0.080	0.232
43		0.006	0.065	0.207
44		0.004	0.053	0.183
45		0.002	0.042	0.160

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ α=0,053 მნიშვნელოვნობის დონის კრიტიკული მნიშვნელობა 44-ის ტოლია, ანუ $P\{T \geq 44) < 0,053$ და ეს კრიტერიუმი უარყოფს H_0 ჰიპოთეზას α=0,053 მნიშვნელოვნობის დონით $H_1: \theta > 0$ ალტერნატივის სასარგებლოდ.

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას T_n სიმეტრიული განაწილების მქონე სტატისტიკაა, მისი საშუალო მნიშვნელობა $\frac{n(n+1)}{2}$-ის ტოლია.

ამიტომ H_0 ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმი შემდეგში მდგომარეობს:

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, ყველა ისეთი შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვის

ა) $t_n \geq t(\alpha,n)$ ცალმხრივი H_1: $\theta>0$ ალტერნატივის შემთხვევაში,

ბ) $t_n \leq \dfrac{n(n+1)}{2} - t_n(\alpha,n)$ ცალმხრივი H_1: $\theta<0$ ალტერნატივის შემთხვევაში,

გ) $t_n \geq t(\alpha_1,n)$ ან $t_n \leq \dfrac{n(n+1)}{2} - t(\alpha_2,n)$, სადაც $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ – ორმხრივი ალტერნატივის დროს,

სხვა შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს. ხშირ შემთხვევაში აიღება $\alpha_1=\alpha_2=\alpha/2$.

აქ $t(\alpha,n)$ არის ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{T\geq t(\alpha,n)\}\leq\alpha$, ხოლო $P\{T>t(\alpha,n)-1\}>\alpha$. $t(\alpha,n)$-ის რიცხვითი მნიშვნელობა განისაზღვრება A7 ცხრილების საშუალებით. (იხ. მაგ. [59]), რომლის ფრაგმენტსაც 14.3 ცხრილი წარმოადგენს.

ალნიშნულ კრიტერიუმს ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი ეწოდება, ვინაიდან კრიტერიუმი ეყრდნობა $d_i = x_i - M$ სხვაობების ნიშნებს და რანგებს.

მაგალითი 14.2. ვთქვათ, $n=9$ და T სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა 38-ის ტოლია. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა: $H_0: \theta=0$.

14.3 ცხრილიდან გვაქვს

$$P\{T\geq 38)\}= 0{,}049<0.05, \text{ ხოლო } P\{T\geq 37\}=0{,}064>0{,}05, \text{ ე.ი. } t(0{,}05;9)=38$$

(ეს რიცხვი 14.3 ცხრილში ხაზგასმულია), $\frac{n(n+1)}{2} - t(0{,}05;9)=7$, ამიტომ

ა) ვინაიდან $t=38=t(0{,}05;9)$, ცალმხრივი H_1 : $\theta>0$ ალტერნატივის შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ.

ბ) ვინაიდან $t=38>7=\frac{n(n+1)}{2} - t(0{,}05;9)$, ცალმხრივი H_1: $\theta<0$ ალტერნატივის შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

გ) ორმხრივი ალტერნატივის შემთხვევაში, თუ დავუშვებთ, რომ $\alpha_1=0.025$, $\alpha_2=0.025$, მაშინ $t(0.025;9)=40$, $\frac{n(n+1)}{2} - t(0.025;n)=5$ და $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით ნულოვანი H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს, ე.ი. H_0-ს არ ვიწუნებთ.

როცა შერჩევის მოცულობა დიდია ($n>20$), ვსარგებლობთ შემდეგი სტატისტიკით:

$$T_n^* = \frac{T - \frac{1}{4}n(n+1)}{\sqrt{\frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)}}. \tag{14.7}$$

ეს სტატისტიკა ასიმპტოტურად ნორმალურად არის განაწილებული (0,1) პარამეტრებით და H_0 ჰიპოთეზის შემოწმება სტანდარტული გზით უნდა ჩატარდეს.

ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმისა და სტიუდენტის t-კრიტერიუმის შედარება. როდესაც შერჩევა მიღებულია ნორმალური განაწილებიდან, საშუალოების შესახებ ჰიპოთეზა შეგვიძლია შევამოწმოთ, როგორც ნიშნიანი რანგების, ასევე t-კრიტე-

რიუმის გამოყენებით. ამ შემთხვევაში t-კრიტერიუმს ენიჭება უპირატესობა, რადგან მას მინიმალური მეორე გვარის შეცდომა გააჩნია ყველა α მნიშვნელოვნობის დონის კრიტერიუმებს შორის. როგორც აღვნიშნეთ, ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი გამოიყენება უწყვეტი, სიმეტრიული საბაზისო განაწილების დროს. ასეთი განაწილების მედიანა საშუალო მნიშვნელობას ემთხვევა. ამიტომ სიმეტრიული განაწილებისათვის H_0: $M=M_0$ ჰიპოთეზის შემოწმება შესაძლებელია შერჩევითი საშუალოს დახმარებით. თუ საბაზისო F განაწილების σ^2 დისპერსია სასრულია, მაშინ $\overline{X}$ ასიმპტოტურად ნორმალურად არის განაწილებული (M საშუალოთი და σ^2/n დისპერსიით) და დიდი შერჩევებისათვის სტიუდენტის

$$T=\frac{\overline{X}-M}{S/\sqrt{n-1}}$$

სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, (0,1) პარამეტრებით.

ამის გამო სტიუდენტის სტატისტიკის გამოყენებას აზრი აქვს ნორმალურისაგან განსხვავებული სიმეტრიული განაწილების შემთხვევაშიც.

„მძიმე კუდის" მქონე ჰიპოთეტური განაწილებისათვის (ე.ი. როდესაც საშუალო მნიშვნელობიდან დიდი გადახრები უფრო მოსალოდნელია ნორმალურ განაწილებასთან შედარებით) $\overline{X}$ შერჩევითი საშუალო არამდგრადია და T სტატისტიკის კრებადობა ნორმალური განაწილებისაკენ საკმაოდ ნელია. ამიტომ ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმს უპირატესობა აქვს t კრიტერიუმთან იმ შემთხვევაში, როდესაც საბაზისო განაწილება არსებითად განსხვავდება ნორმალურისაგან და შერჩევის მოცულობა არ არის ძალიან დიდი.

ნიშანთა კრიტერიუმი დაკვირვებათა წყვილებისათვის. ვთქვათ, გვაქვს n მოცულობის შერჩევა

$$(X_1,Y_1),\ (X_2,Y_2),\ \dots,\ (X_n,Y_n).$$

აღვნიშნოთ $D_i=Y_i-X_i$ და განვიხილოთ მოდელი

$$D_j=e_j+\theta,\quad j=1,2,\dots,n, \tag{14.8}$$

სადაც θ უცნობი პარამეტრია, e_j, $j=1,2,\dots,n$, ურთიერთდამოუკიდებელი, უწყვეტი (და, საზოგადოდ, სხვადასხვა განაწილების მქონე) შემთხვევითი სიდიდეებია ერთი და იგივე ნულის ტოლი მედიანით. α მნიშვნელოვნობის დონით შესამოწმებელია ნულოვანი

$$H_0:\ \theta=0$$

ჰიპოთეზა. ალტერნატივები შემდეგია:

ა) $H_1:\ \theta<0$, ბ) $H_1:\ \theta>0$, გ) $H_1:\ \theta\neq 0$.

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას D_i ხასიათდება ნულის ტოლი მედიანით. ამიტომ განვიხილოთ დაკვირვებულ მნიშვნელობათა შემდეგი სხვაობები:

$$d_1=x_1-y_1,\ d_2=x_2-y_1,\ \dots,\ d_n=x_n-y_n \tag{14.9}$$

და ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ ნიშანთა კრიტერიუმი.

ნიშანთა კრიტერიუმი დაკვირვებათა წყვილებისათვის

(x_i, y_i), $i=1,2,..,n$ არის (X_i, Y_i), $i=1,2,..,n$ დამოუკიდებელი წყვილების დაკვირვებული მნიშვნელობები. ამასთან $D_i=Y_i-X_i$, $d_i=y_i-x_i$.

მოდელი $D_j= e_j + \theta$, $j=1,2,...,n$,

სადაც, e_j, $j=1,2,...,n$ ურთიერთდამოუკიდებელი, უწყვეტი და საზოგადოდ სხვადასხვა განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია ერთი და იგივე ნულის ტოლი მედიანით.

მნიშვნელოვნობის დონეა α

ნულოვანი ჰიპოთეზა H_0: $\theta = 0$

კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა $b_n = \sum_{i=1}^{n} \psi_i$, სადაც

$$\psi_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ } d_i > 0, \\ 0, & \text{თუ } d_i < 0. \end{cases}$$

ალტერნატივა	გადაწყვეტილების მიღების წესი
ა) H_1: $\theta > 0$	H_0-ს უარვყოფთ, თუ $b_n \geq b(\alpha,n,1/2)$
ბ) H_1: $\theta < 0$	H_0-ს უარვყოფთ, თუ $b_n \leq [n-b(\alpha,n,1/2)]$
გ) H_1: $\theta \neq 0$	H_0-ს უარვყოფთ, თუ $b_n \leq [n-b(\alpha_1,n,1/2)]$ ან $b \geq b(\alpha_2,n,1/2)$, სადაც $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$,

$b(\alpha,n,1/2)$ არის ის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{B_n \geq b(\alpha,n,1/2) \leq \alpha$, ხოლო $P\{B_n \geq b(\alpha,n,1/2)-1\} > \alpha$. $b(\alpha,n,1/2)$-ის რიცხვითი მნიშვნელობა განისაზღვრება ნიშანთა კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობების A6 ცხრილების საშუალებით

მაგალითი **14.3.** 14.4 ცხრილში მოცემულია 11 პიროვნების მიერ გასახდომი დიეტის გამოყენების შედეგები.

ცხრილი 14.4

პიროვნება	წონის ცვლილება	პიროვნება	წონის ცვლილება
1	დაკარგა	7	დაკარგა
2	დაკარგა	8	დაკარგა
3	მოიმატა	9	დაკარგა
4	დაკარგა	10	დაკარგა
5	არ შეიცვალა	11	დაკარგა
6	დაკარგა		

კითხვა შემდეგში მდგომარეობს: ეფექტურია თუ არა დიეტა?

ა) ჩამოაყალიბეთ H_0 და H_1 ჰიპოთეზები, 0.05 მნიშვნელოვნობის დონით აღწერეთ გადაწყვეტილების მიღების წესი.

ბ) რას იტყვით დიეტაზე.

ამოხსნა. ა) $H_0 : \theta=0$; $H_1 : \theta>0$, $n=11$. H_0-ს უარვყოფთ, თუ $b_n \geq b(0{,}05,10,1/2)=9$. b_n არის იმ პიროვნებების რაოდენობა, რომლებმაც დიეტის შედეგად დაკარგეს წონა.
ბ) H_0-ს უარვყოფთ. რადგან 9 კაცმა დაკარგა წონა. დასკვნა: ეს დიეტა ეფექტურია.

ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი დაკვირვებათა წყვილებისათვის. ვთქვათ (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), ... , (X_n,Y_n) არის შემთხვევით სიდიდეთა n დამოუკიდებელი წყვილი. აღვნიშნოთ $D_i=Y_i-X_i$ და განვიხილოთ მოდელი

$$D_j= e_j + \theta, j=1,2,...,n, \tag{14.10}$$

სადაც θ უცნობი პარამეტრია, e_j, $j=1,2,...,n$, ურთიერთდამოუკიდებელი, ნულის მიმართ სიმეტრიული, უწყვეტად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. α მნიშვნელოვნობის დონით შესამოწმებელია ნულოვანი ჰიპოთეზა

$H_0 : \theta=0$.

ალტერნატივები შემდეგია:

ა) $H_1 : \theta<0$, ბ) $H_1 : \theta>0$, გ) $H_1 : \theta\neq 0$.

ამრიგად, ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას D_j ხასიათდება ნულის მიმართ სიმეტრიული განაწილებით. განვიხილოთ დაკვირვებულ მნიშვნელობათა

$$d_1= x_1-y_1,\ d_2= x_2-y_1,\ ...\ ,\ d_n= x_n-y_n, \tag{14.11}$$

სხვაობები და ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი.

შენიშვნა: **1.** ნულის მიმართ სიმეტრიულობის მოთხოვნა ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმისათვის უფრო მკაცრი მოთხოვნაა, ვიდრე ერთი და იგივე მედიანის მოთხოვნა ნიშანთა კრიტერიუმისათვის.

D_i სხვაობების განაწილების ნოლის მიმართ სიმეტრიულობის მოთხოვნა სრულდება, მაგალითად, შემდეგ ორ შემთხვევაში:

1. როცა X და Y ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია;
2. (X,Y) და (Y,X) ვექტორები ერთნაირადაა განაწილებული: $F(x,y)=F(y,x)$, სადაც $F(x,y)=P\{X\leq x,\ Y\leq y\}$. ამიტომ ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმს ხშირად ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლადაც იყენებენ.

$H'_0 : F(x,y)=F(y,x)$ ჰიპოთეზა, თავის მხრივ ნიშნავს, რომ „ზემოქმედების“ ეფექტი არ გამოვლენილა: X და Y სიდიდეები ურთიერთგადასმადია. უნდა აღინიშნოს, რომ თუ არსებული მონაცემებით $H_0 : \Delta=0$ ჰიპოთეზა უარყოფილია, მაშინ უარყოფილია H'_0-იც. თუმცა H_0 ჰიპოთეზის თანხმობა მონაცემებთან სულაც არ ნიშნავს H'_0-ის თანხმობასაც, ვინაიდან D_i-ების განაწილების სიმეტრიულობიდან, საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ $F(x,y)=F(y,x)$.

2. გამოთვლების თვალსაზრისით ნიშანთა კრიტერიუმი უფრო მარტივია ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმზე. ნიშანთა კრიტერიუმის გამოსაყენებლად დაწყვილებული მონაცემებისათვის ჩვენ გვჭირდება მხოლოდ D_i სხვაობების ნიშნები, ხოლო ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმის გამოყენებისას D_i სხვაობების ნიშნებთან ერთად საჭიროა $|D_i|$-ს

რანგების გამოთვლაც. როგორც წესი (მაგრამ ეს ყოველთვის ასე არაა), ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი უფრო ეფექტურია ნიშანთა კრიტერიუმზე.

დაწყვილებული მონაცემებისათვის B და T სტატისტიკების განაწილების კანონები ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას არ არის დამოკიდებული e_j, $j=1,2,...,n$, სიდიდეების განაწილებაზე. სწორედ ამიტომ ამ სტატისტიკებზე დაყრნობილ მეთოდებს განაწილებისაგან თავისუფალ, ანუ არაპარამეტრულ მეთოდებს უწოდებენ.

ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი დაკვირვებათა წყვილებისათვის

(x_i, y_i), $i=1,2,..,n$ არის (X_i, Y_i),), $i=1,2,..,n$ დამოუკიდებელი წყვილების დაკვირვებული მნიშვნელობები. ამასთან

$$D_i=Y_i-X_i = e_j + \theta,\ j=1,2,...,n,$$

სადაც e_j, $j=1,2,...,n$, დამოუკიდებელი, ნულის მიმართ სიმეტრიული უწყვეტად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. θ უცნობი პარამეტრია.

მნიშვნელოვნობის დონე: α

ნულოვანი ჰიპოთეზა: H_0: $\theta = 0$

კრიტერიუმის სტატისტიკის $t_n = \sum_{i=1}^{n} R_i\ \psi_i$

დაკვირვებული მნიშვნელობა, სადაც R_i არის $|d_i|=|x_i-y_i|$-ის რანგი, ხოლო

$$\psi_i=\begin{cases}1, & \text{თუ } d_i = x_i - y_i > 0,\\ 0, & \text{თუ } d_i = x_i - y_i < 0.\end{cases}$$

ალტერნატივა	გადაწყვეტილების მიღების წესი
ა) H_1: $\theta>0$	H_0-ს უარვყოფთ, თუ $t_n \geq t(\alpha,n,)$
ბ) H_1: $\theta<0$	H_0-ს უარვყოფთ, თუ $t_n \leq \frac{n(n+1)}{2} - t(\alpha,n)$
გ) H_1: $\theta \neq 0$	H_0-ს უარვყოფთ, თუ $t_n \geq t(\alpha_1,n)$ ან $T \leq \frac{n(n+1)}{2} - t(\alpha_2,n)$, სადაც $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

$t(\alpha,n)$ არის ის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{T \geq t(\alpha,n)\} \leq \alpha$, ხოლო $P\{T > t(\alpha,n)-1\} > \alpha$. $t(\alpha,n)$-ის რიცხვითი მნიშვნელობა განისაზღვრება ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობების A7 ცხრილების საშუალებით.

მაგალითი **14.4.** შემთხვევით აირჩიეს ახალგაზრდა ბიზნესმენები, რომელთაც გააჩნიათ საკუთარი სახლები. შემდეგ შეადარეს მათი სახლის ფართობი მათივე მშობლების სახლის ფართობს. შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ ახალგაზრდა ბიზნესმენები უფრო დიდ სახლებში ცხოვრობენ, ვიდრე მათი მშობლები? $\alpha=0.05$.

შედეგები მოყვანილია ცხრილში:

ცხრილი 14.5

ბიზნესმენი	შვილების სახლის ფართობი (Y)	მშობლების სახლის ფართობი (X)
1	1725	1175
2	1310	1120
3	1670	1420
4	1520	1640
5	1290	1360
6	1880	1750
7	1530	1440

ამოხსნა. შესამოწმებელია ჰიპოთეზა, რომლის თანახმადაც არ არსებობს განსხვავება შვილების და მშობლების სახლების ფართობებს შორის. ალტერნატივა მარჯვენა ცალმხრივია. ადვილი მისაღებია შემდეგი ცხრილი

ცხრილი 14.6

$\|d\|=\|y-x\|$	რანგი	ψ	$R\psi$
70	1	0	–1
90	2	1	2
120	3	0	–3
130	4	1	4
150	5	1	5
250	6	1	6
550	7	1	7

ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ ნიშანთა კრიტერიუმი, რომლისთვისაც მივიღებთ: $b_n=5<6=b(0{,}05;7;1/2)$, ანუ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს. იგივე მონაცემებისათვის ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი გვაძლევს $T_n=24<25=t(0{,}05;7)$, H_0 არ უარიყოფა (ცალმხრივი ტესტი).

ამრიგად, არ არსებობს განსხვავება სახლების ფართობებს შორის. ახალგაზრდა ბიზნესმენები არ ცხოვრობენ უფრო დიდ სახლებში, ვიდრე მათი მშობლები.

§ 2. ორამოკრეფიანი ამოცანები წანაცვლების შესახებ
(უილკოკსონის რანგთა ჯამების და მან-უიტნის კრიტერიუმები)

ჩვენს მიერ განხილული იყო ორი შერჩევის ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შემოწმების კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმი. ვგულისხმობდით, რომ გვაქვს ორი დამოუკიდებელი $X_1,X_2,\dots,X_n$ და $Y_1,Y_2,\dots,Y_m$ შერჩევა. პირველი შერჩევის თეორიული განაწილების ფუნქცია აღვნიშნოთ $F(x)$-ით, მეორესი $G(x)$-ით. მოწმდება $H_0 : F(x)=G(x)$ ჰიპოთეზა. კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმი წარმოადგენს ორი შერჩევისთვის

ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შემოწმების საკმარისად მკაცრ კრიტერიუმს. ის საშუალებას იძლევა დავადგინოთ განაწილების ფუნქციებს შორის არსებული ნებისმიერი განსხვავება. ხშირად, როდესაც საჭიროა განაწილებებს შორის რაიმე კონკრეტული სხვაობის (მაგალითად განსხვავება საშუალოებს შორის) აღმოჩენა, მიზანშეწონილია უფრო მარტივი კრიტერიუმების გამოყენება. აქ ჩვენ განვიხილავთ ორი დამოუკიდებელი შერჩევის ერთგვაროვნების ჰიპოთეზების შემოწმების უილკოკსონის და მან-უიტნის კრიტერიუმებს, რომლებიც გარკვეული აზრით ცვლიან t-კრიტერიუმს იმ შემთხვევისათვის, როდესაც პოპულაცია არ არის ნორმალურად განაწილებული.

განვიხილოთ ერთგვაროვნების ამოცანის ასეთი მოდელი: მოცემულია m და n მოცულობის ორი დამოუკიდებელი შერჩევა $X_1,X_2,\ldots,X_m$ და $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$, ამასთან

$$X_i = e_i,\ i=1,2,\ldots,m.$$

$$Y_j = e_{n+j} + \Delta,\ j=1,2,\ldots,n.$$

სადაც ყველა $e_1,e_2,\ldots,e_{n+m}$ ურთიერთდამოუკიდებელი და ერთი და იგივე უწყვეტი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია. ვთქვათ, $x_1,x_2,\ldots,x_m$ და $y_1,y_2,\ldots,y_n$ შერჩევითი მნიშვნელობებია. პირველს ვუწოდოთ საკონტროლო ერთობლიობა, ხოლო მეორეს სამუშაო ერთობლიობა. ამ ორი, საკონტროლო და სამუშაო ერთობლიობის შედარების საფუძველზე გვინდა გავარკვიოთ, აქვს თუ არა ადგილი დაკვირვებადი სიდიდეების სისტემატურ წანაცვლებას.

აღწერილი მოდელის ფარგლებში, X და Y უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებია, მათ განაწილების კანონებს აქვს ერთი და იგივე ფორმა და გაბნევა (განფენილობა), განსხვავებულია მხოლოდ მათი საშუალოები, μ_1 და μ_2, ამასთან $\mu_2-\mu_1=\Delta$, ე.ი. $F_X(x)=F(x)$, $F_Y(x)=F(x-\Delta)$. ამრიგად შესამოწმებელია ჰიპოთეზა საშუალოების ტოლობის ($\Delta=0$) შესახებ. ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა ასე ჩაიწერება:

$H_0: \Delta=0.$

ალტერნატივები შემდეგია:

ა) $H_1: \Delta>0$, ბ) $H_1: \Delta<0$, გ) $H_1: \Delta\neq 0$.

ვიგულისხმოთ, რომ $m\geq n$. გავაერთიანოთ $X_1, X_2, \ldots, X_m$ და $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ შერჩევები და გაერთიანებული შერჩვითი მნიშვნელობები დავალაგოთ ზრდის მიხედვით. ამგვარად მიღებული ვარიაციული მწკრივის ყოველ ელემენტს მივაწეროთ რანგი (მისი რიგობრივი ნომერი) $1,2,\ldots,m+n$. Y შერჩევის ელემენტთა რანგი მიღებულ ვარიაციულ მწკრივში აღვნიშნოთ R_i -ით $i=1,2,\ldots,n$.

უილკოკსონის სტატისტიკაა

$$W = R_1+R_2+\cdots+R_n. \tag{14.12}$$

H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში W სტატისტიკას აქვს სიმეტრიული განაწილება, მისი საშუალო კი $n(n+m+1)/2$-ის ტოლია. ამიტომ ამ სტატისტიკისათვის ქვედა კრიტიკული წერტილები გამოისახება ზედა კრიტიკული წერტილების მეშვეობით.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე ჰიპოთეზათა შემოწმების წესი ასე ყალიბდება:

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, ყველა ისეთი $x_1, x_2, \dots, x_m$ და $y_1, y_2, \dots, y_n$ შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვის W სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა w აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

ა) $w \geq w(\alpha, m, n)$, ცალმხრივი $H_1 : \Delta > 0$ ალტერნატივის დროს,

ბ) $w \leq w(\alpha, m, n)$, ცალმხრივი $H_1 : \Delta < 0$ ალტერნატივის დროს,

გ) $w \geq w(\alpha/2, m, n)$, ან $w \leq W(\alpha/2, m, n)$, ორმხრივი $H_1 : \Delta \neq 0$ ალტერნატივის დროს, სხვა შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

აქ $w(\alpha, m, n)$ არის ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობაში $P\{W \geq w(\alpha, m, n)\} \leq \alpha$, ხოლო $P\{W \geq w(\alpha, m, n) - 1\} > \alpha$, ხოლო $W(\alpha, m, n) = n(m+n+1) - w(\alpha, m, n)$, $w(\alpha, m, n)$-ის მნიშვნელობები განისაზღვრება უილკოქსონის რანგთა ჯამების კრიტერიუმის A8 ცხრილების საშუალებით [59].

ცხრილი 14.7. A8 ცხრილის ფრაგმენტი. n=8

w	m=8	m=9	m=10
80	0.117	0.240	0.381
81	0.097	0.212	0.348
82	0.080	0.185	0.317
83	0.065	0.161	0.286
84	0.052	0.138	0.257
85	0.041	0.118	0.230
86	0.032	0.100	0.204
87	0.025	0.084	0.180
88	0.019	0.069	0.158
89	0.014	0.057	0.137
<u>90</u>	0.010	0.046	0.118
91	0.007	0.037	0.102
92	0.005	0.030	0.086
93	0.003	0.023	0.073
94	0.002	0.018	0.061

n-ის ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის ცხრილის პირველ სვეტში მოყვანილია W სტატისტიკის შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობები. w-ს ფიქსირებული მნიშვნელობის შესაბამის სტრიქონსა და m-ის ფიქსირებული მნიშვნელობის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე, ანუ (w, m) უჯრაში მოთავსებულია $P\{W \geq w\}$ ალბათობის რიცხვითი მნიშვნელობები ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს.

მაგალითი **14.5.** გვაქვს ორი შერჩევა:

$$X: 2,\ 4,\ 5,\ 9, 15, 17, 19, 38, 42 \qquad (m=9)$$
$$Y: 6, 12, 20, 31, 39, 42, 45, 51 \qquad (n=8)$$

გავაერთიანოთ ეს ორი შერჩევა. გაერთიანებული შერჩევა დავალაგოთ ზრდის მიხედვით. ყოველ რიცხვს ზემოდან მივუწეროთ რანგი, ქვემოდან კი – X ან Y, იმის მიხედვით, თუ რომელ შერჩევას ეკუთვნის ეს ელემენტი. ეს შედეგები განვალაგოთ 14.8 ცხრილში

ცხრილი 14.8

რანგი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14,5	14,5	16	17
მნიშვნელ.	2	4	5	6	9	12	15	17	19	20	31	38	39	42	42	45	51
შერჩევა	X	X	X	Y	X	Y	X	X	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y

შევადგინოთ X-იანი და Y-იანი რანგების ჯამი ცალ-ცალკე. მაგრამ ერთი დაკვირვება 42 ეკუთვნის როგორც X, ისე Y შერჩევას. ამიტომ თითოეულ მათგანს მივაწერთ საშუალო რანგს

$$\frac{14+15}{2}=\frac{29}{2}=14.5\,.$$

Y-ებიანი რანგების ჯამი ანუ უილკოკსონის სტატისტიკის მნიშვნელობაა

$$w = 4+6+10+11+13+14.5+16+17 = 91.5.$$

დავუშვათ, რომ α=0.05. ნულოვანი ჰიპოთეზაა H_0 : Δ= 0.

m-ის შესაბამის სვეტში (მოცემული n-თვის) ვიპოვოთ $w(\alpha,m,n)$ ის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{w\geq w(\alpha,m,n)\}\leq\alpha$, ხოლო $P\{w\geq w(\alpha,m,n)-1\}>\alpha$. 14.7 ცხრილიდან (ეს რიცხვი ცხრილში ხაზგასმულია) გვაქვს $w(0,05;9;8)=90$, $W(0,05;9;8)=54$. მაშინ:

ა) ვინაიდან w =91,5>90, ცალმხრივი H_1: $\Delta>0$ ალტერნატივის შემთხვევაში ნულოვან H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, ანუ H_0-ს ვიწუნებთ.

ბ) ვინაიდან w=91,5>54, ცალმხრივი H_1: $\Delta<0$ ალტერნატივის შემთხვევაში ნულოვანი H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს, ე.ი. H_0-ს არ ვიწუნებთ.

გ) ორმხრივი ალტერნატივის შემთხვევაში, თუ დავუშვებთ, რომ $\alpha_1=\alpha_2=0,025$, მაშინ $w(0,025;9;8)=93$, $W(0,025;9;8)=51$ და α-მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

დიდი შერჩევებისათვის (n>25) გამოიყენება შემდეგი სტატისტიკა

$$W_n^* = \frac{W-\frac{1}{2}n(m+n+1)}{\sqrt{\frac{1}{12}mn(m+n+1)}}\,. \tag{14.13}$$

W_n^* განაწილებულია მიახლოებით ნორმალურად (0,1) პარამეტრებით. ამიტომ ამ შემთხვევაში (m>25) ჰიპოთეზების შემოწმებისათვის უნდა გამოვიყენოთა ნორმალური განაწილების სტანდარტული ცხრილები. ამ ცხრილით სარგებლობა ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი და მასზე აქ არ შევჩერდებით.

ზემოთ ჩამოყალიბებული ჰიპოთეზების შესამოწმებლად ასევე გამოიყენება მანუიტნის შემდეგი სტატისტიკაც:

$$U=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}h_{ij},$$

სადაც

$$h_{ij}=\begin{cases}1, & \text{თუ} \quad x_i<y_j,\\ 0, & \text{თუ} \quad x_i>y_j\end{cases}$$

ანუ U არის იმ (x_i, y_j) წყვილების რაოდენობა, რომლებისთვისაც $x_i<y_j$, $i=1,2,..,n$, $j=1,2,..,m$.

არსებობს მჭიდრო კავშირი მან-უიტნის და უილკოქსონის სტატისტიკებს შორის. კერძოდ

$$W=mn+\frac{m(m+1)}{2}-U,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ უილკოქსონის რანგთა ჯამების და მან-უიტნის კრიტერიუმები ეკვივალენტურია

შენიშვნა. როგორც დავრწმუნდით, ზემოაღწერილი კრიტერიუმი ცვლის სტიუდენტის კრიტერიუმს იმ შემთხვევაში, როდესაც არ სრულდება ნორმალურობის ჰიპოთეზა და უფრო მეტიც, არაა დაკონკრეტებული განაწილების ფორმაც კი. ეს წარმოადგენს ამ კრიტერიუმის უპირატესობას, თუმცა ნორმალური განაწილების შემთხვევაში t-კრიტერიუმი ყველაზე მძლავრია, ის აგებს სიმძლავრეში უილკოქსონის რანგების ჯამის კრიტერიუმთან შედარებით, როდესაც განაწილებები ძლიერადაა გადახრილი ნორმალურისაგან.

§ 3. განაწილებისაგან თავისუფალი ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი. კრასკელ-უოლისის კრიტერიუმი

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვაზოგადებთ ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანას შემთხვევისათვის, როდესაც მონაცემები მიღებულია k დამოუკიდებელი პოპულაციიდან. კერძოდ, განვიხილავთ ასეთ მოდელს:

$$X_{ij}=e_{ij}+\Delta_i,\ \ j=1,2,\dots,n_i,\ i=1,2,\dots,k,$$

სადაც e_{ij} (შემთხვევითი ცდომილობანი) ურთიერთდამოუკიდებელი და ერთი და იგივე უწყვეტი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო Δ_i, $i=1,2,\dots,k$, i-ური პოპულაციის წანაცვლებაა.

ამრიგად, დაკვირვებულ მონაცემებს აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 14.9

1	2	…	k
x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}
x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}
…	…	…	…
$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	…	$x_{n_k k}$

ე.ი. გვაქვს k შერჩევა, შერჩევათა მოცულობებია შესაბამისად n_1, n_2, ... , n_k, $N=\sum_{j=1}^{k} n_j$.

ნულოვანი ჰიპოთეზაა:

$$H_0 : \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_k ,$$

შერჩევები არ განსხვავდება ერთიმეორისაგან (k შერჩევა ამოღებულია ერთი და იგივე გენერალური ერთობლიობიდან). ალტერნატივაა

$$H_1 : \Delta_i\text{-ებს შორის ორი მაინც არის განსხვავებული} .$$

მე-18 თავში განხილული იქნება ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი, რომელშიც ძირითადი დაშვებაა e_{ij} შემთხვევითი სიდიდეების ნორმალურობა და ტესტის სტატისტიკად გამოყენებულია F სტატისტიკა, რომლის განაწილების სახე არსებითად არის განპირობებული ნორმალურობის ჰიპოთეზით. იმის გამო, რომ ამ პარაგრაფში განხილულ მოდელში არ არის დაკონკრეტებული e_{ij} შემთხვევითი ცდომილობების განაწილების სახე, აქ შემოთავაზებულ ანალიზს უწოდებენ განაწილებისაგან თავისუფალ ერთფაქტორიან დისპერსიულ ანალიზს.

კრიტერიუმის სტატისტიკის შემოღების მიზნით გავაერთიანოთ ყველა k შერჩევა. მიღებული N მოცულობის შერჩევა დავალაგოთ ზრდის მიხედვით და ყოველ ელემენტს მივაწეროთ რანგი 1, 2, ... , N. შემდეგ მონაცემთა ცხრილში ყოველ x_{ij}-ის მაგივრად ჩავწეროთ სათანადო რანგი r_{ij}. მივიღებთ ასეთ 14.10 ცხრილს:

ცხრილი 14.10

1	2	...	k
r_{11}	r_{12}	...	r_{1k}
r_{21}	r_{22}	...	r_{2k}
...	...	...	...
		...	
$r_{n_1 1}$	$r_{n_2 2}$	...	$r_{n_k k}$

ყოველი i-სათვის, i=1, 2, ... , k, შევადგინოთ რანგთა ჯამები

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$$

და შემოვიღოთ კრასკელ-უოლისის სტატისტიკა

$$H = \left(\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} \right) - 3(N+1). \qquad (14.14)$$

ჰიპოთეზათა შემოწმების წესი, როცა $n_i \leq 5$, i=1,2,...,k, ასე ყალიბდება:

თუ არსებული მონაცემებით გამოთვლილი H სტატისტიკის h მნიშვნელობა ისეთია, რომ $h \geq h(\alpha,k,(n_1,\dots,n_k))$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს. $h(\alpha,k,(n_1,\dots,n_k))$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, მცირე მოცულობებისათვის ($n_i \leq 5$).

მოიძებნება კრასკელ-უოლისის კრიტერიუმის A9 ცხრილში. (იხ. მაგ.[59]). ფრაგმენტი ამ უკანასკნელიდან მოყვანილია 14.11 ცხრილში. ცხრილის პირველ სვეტში მოყვანილია H სტატისტიკის შესაძლო მნიშვნელობები ფიქსირებული n_1, n_2, n_3-ისათვის, ხოლო H-ის ფიქსირებული h მნიშვნელობისათვის ბოლო სვეტში მითითებულია $P\{H \geq h\}$ ალბათობის მნიშვნელობა ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს.

ცხრილი 14.11. A9 ცხრილის ფრაგმენტი

$n_1=5,\ n_2=5,\ n_3=5$	
h	$P_0\{H \geq h\}$
6.620	0.028
6.660	0.027
6.720	0.026
6.740	0.025
6.860	0.024
6.980	0.021
7.020	0.020
7.220	0.019
7.260	0.018

ამ ცხრილით შეიძლება ასე ვისარგებლოთ: $n_1, n_2, \ldots, n_k$-ს ფიქსირებული მნიშვნელობების შესაბამისი ცხრილის ბოლო სვეტში მოვძებნოთ $P\{H \geq h\}$-ს ისეთი რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{H \geq h\} \leq \alpha$, ხოლო $P\{H \geq h'\} \geq \alpha$ ნებისმიერი h'-ისათვის, $h' < h$. მაშინ ამ სტრიქონის h სვეტში იქნება H-ის განაწილების ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა, $h(\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k)$.

შერჩევის დიდი მოცულობისათვის, თუ H_0 ჭეშმარიტია, H სტატისტიკას აქვს მიახლოებით $\chi^2(k-1)$ განაწილება. თუ მნიშვნელოვნობის დონეა α, მაშინ

$$H_0\text{-ს უარვყოფთ, თუ } H \geq \chi^2_{k-1,\alpha},$$

სადაც $\chi^2_{k-1,\alpha}$ არის χ^2_{k-1} განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი.

მაგალითი 14.6. იკვლევდნენ ანტიკოროზიულ დაფარვას მანქანებში. მენეჯერს აინტერესებდა ანტიკოროზიული საღებავის გამძლეობის შესწავლა სხვადასხვა პირობებში: როცა ზემოქმედება ხდება მარილიანი წყლით, სუფთა წყლით და ძლიერად გაჭუჭყიანებული წყლით. ითვლიან საათების რაოდენობას, რომელსაც უძლებს ანტიკოროზიული საღებავი. მონაცემები მოცემულია 14.12 ცხრილით:

ცხრილით 14.12

მარილიანი	167.3	189.8	177.2	169.4	180.3
სუფთა	160.6	177.6	185.3	168.6	176.6
ძლიერად გაჭუჭყიანებული	182.7	165.4	172.9	169.2	174.7

გამოიყენოთ კრუსკალ-უოლისის $\alpha=0.02$ დონის ტესტი, რათა დავადგინოთ, არის თუ არა დაფარვა ერთნაირად ეფექტური სამივე პირობაში.

ამოხსნა. $n_1=n_2=n_3=5$, $k=3$, $\alpha=0.02$. ჰიპოთეზები ასე ყალიბდება:

H_0 : საღებავების ხანგამძლეობის განაწილება ერთი და იგივეა,

H_1 : საღებავების ხანგამძლეობის განაწილება არ არის ერთი და იგივე.

მოსაძებნია $h(0.02;3;5,5,5)$ კრიტიკული მნიშვნელობა. მივმართოთ 14.11 ცხრილს, რომლის მიხედვითაც ადვილი სანახავია, რომ საძიებელი მნიშვნელობა 7.02-ის ტოლია. მართლაც $P\{H>7.02\}=0.20$ და $P\{H>6.98\}=0.021>0.02$. ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ თუ $h>7.02$ (კრიტიკული დონე მოიძებნება კრასკელ-უოლისის სტატისტიკის განაწილების ცხრილიდან).

ცხრილი 14.13

მარილიანი	167.3	189.8	177.2	169.4	180.3	
	3	15	10	6	12	46
სუფთა	160.6	177.6	185.3	168.6	176.6	
	1	11	14	4	9	39
ძლიერად გაჭუჭყიანებული	182.7	165.4	172.9	169.2	174.7	
	13	2	7	5	8	35

$$h = 0.65.$$

ამრიგად, არსებული მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს. არ არის განსხვავება სამ განაწილებას შორის.

კრასკელ-უოლისის კრიტერიუმი

მოდელი

$$X_{ij}=e_{ij}+\Delta_i\ ,\ i=1,2,\dots,k;\ j=1,2,\dots,n_k\,,$$

e_{ij} ურთიერთდამოუკიდებელი და ერთი და იგივე უწყვეტი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო Δ_i, $i=1,2,\dots,k$, i-ური პოპულაციის წანაცვლებაა

ჰიპოთეზა $H_0:\ \Delta_1=\Delta_2=\dots=\Delta_k$,

მნიშვნელოვნობის დონე α

ალტერნატივა H_1 : ერთი მაინც Δ_i განსხვავებულია დანარჩენებისაგან.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

$$h=\left(\frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{n_j}\right)-3(N+1)\,R_i=\sum_{i=1}^{m}r_{ij}$$

სადაც r_{ij} ყოველი დაკვირვებული x_{ij} მნიშვნელობის სათანადო რანგია გაერთიანებულ შერჩევაში, ხოლო R_i არის i-ური პოპულაციის დაკვირვებული მნიშვნელობების რანგთა ჯამი.

გადაწყვეტილება. H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, თუ $H\geq h(\alpha,k,(n_1,\dots,n_k))$, წინააღმდეგ შემთხვევაში არსებული მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს; $h(\alpha,k,(n_1,\dots,n_k))$ კრასკელ-უოლისის სტატისტიკის ზედა კრიტიკული მნიშვნელობაა

§ 4. რანგობრივი კორელაცია

ვთქვათ,

$$(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_i,y_i), \dots, (x_n,y_n) \tag{14.15}$$

ორგანზომილებიანი (X,Y) შემთხვევითი სიდიდის დამოუკიდებელ ცდებში დაკვირვებული მნიშვნელობათა წყვილებია, ანუ ის მნიშვნელობებია, რომლებსაც ერთობლივ ღებულობენ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები. როგორც ვიცით, მიღებული დაკვირვებების საფუძველზე, შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებულ სტოქასტურ დამოკიდებულებას „კარგად" აღწერს ე.წ. შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \tag{14.16}$$

სადაც $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც (X,Y) შემთხვევითი სიდიდე ერთობლივად ნორმალურადაა განაწილებული, r-ის რიცხვითი მნიშვნელობის საფუძველზე მოწმდება X, Y კომპონენტების დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა

$$H_0 : \rho = 0,$$
$$H_1 : \rho \neq 0.$$

ახლა გადავიდეთ შემდეგი შემთხვევის განხილვაზე. განვიხილოთ ინდივიდთა ან ობიექტთა ერთობლიობა, რომლის ყოველი წევრი ხასიათდება რაიმე ორი ნიშნით. ვიგულისხმოთ, რომ ინდივიდთა ან ობიექტთა ორი ნიშნით დახასიათების შედეგები ჩაწერილია შემდეგი სახით

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{14.17}$$

სადაც x_i და y_i არის i-ური ინდივიდის დამახასიათებელი ნიშნები. ამ ნიშნებს შეიძლება არც ჰქონდეთ ზუსტი რიცხობრივი მნიშვნელობები, მაგრამ შესაძლებელი იყოს მათი დალაგება ისე, რომ თითოეული ნიშნის მიხედვით ყოველ ინდივიდს მიეცეს რიგითი ნომერი – რანგი. იგულისხმება, რომ თითოეული ნიშნის მიხედვით ცალ-ცალკე მიეწერება ინდივიდს რანგები. ხელმეორედ გადავნომროთ შერჩევა ისე, რომ ყოველ i-ურ ინდივიდს მიეწეროს ორი რანგი (i,r_i), სადაც იგულისხმება, რომ ინდივიდები დალაგებულნი არიან პირველი ნიშნის ზრდის, თუ ნიშანი რიცხობრივია და გაძლიერების ან შესუსტების მიხედვით, თუ ნიშანი თვისებრივია. მივიღებთ რანგების ორ სტრიქონს

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, n \\ r_1, r_2, \ldots, r_n \end{pmatrix}.$$

ახლა, თუ გვინდა ამ ორ ნიშანს შორის ურთიერთდამოკიდებულების შესწავლა (14.17) მონაცემებისათვის, შეიძლება გამოვიყენოთ რანგებს შორის შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი. აღვნიშნოთ იგი ρ-თი. ვისარგებლოთ კორელაციის კოეფიციენტის ჩვენთვის ცნობილი (14.16) გამოსახულებით, მაგრამ წინასწარ განვსაზღვროთ საჭირო საშუალოები.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2} .$$

(გავიხსენოთ $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = n(n+1)$).

ცხადია, რომ

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{n+1}{2} .$$

რადგან r_i , $i \le n$ რიცხვები 1, 2, ... , n მიმდევრობისაგან მხოლოდ დალაგებით განსხვავდება. ამგვარად

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(r_i-\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(r_i-\frac{n+1}{2}\right)^2}} . \tag{14.18}$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მიიღება ρ-ს გამოთვლის მოხერხებული გამოსახულება

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} S_\rho , \tag{14.19}$$

სადაც $S_\rho = \sum_{i=1}^{n}(r_i - i)^2$. ρ-ს უწოდებენ სპირმენის რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტს.

სპირმენის რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტი გამოიყენება, მაგალითად, შემდეგი ჰიპოთეზების შესამოწმებლად

H_0 : ნიშნები დამოუკიდებელია, ე.ი. ρ=0,

H_1 : ნიშნებს შორის დადებითი კავშირია, ე.ი. ρ>0.

ალტერნატივა ცალმხრივია და ჰიპოთეზათა გარჩევის წესი შემდეგია:

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, თუ $S_\rho < S(\alpha,n)$ (ან $\rho > \rho(\alpha,n)$), სადაც $S(\alpha,n)$ არის ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{S_\rho \le S(\alpha,n)\} \le \alpha$, ხოლო $P\{S_\rho \le S(\alpha,n)+2\} > \alpha$. $S(\alpha,n)$-ის მნიშვნელობა განისაზღვრება სპეციალურ ცხრილების (იხ. A10 ცხრილი დანართში) საშუალებით შერჩევის მცირე მოცულობისათვის n=4(1)16. (იხ. მაგ. [42]). მოვიყვანოთ ფრაგმენტი სპირმენის სტატისტიკის აღნიშნული ცხრილიდან.

ცხრილი 14.14. A10 ცხრილის ფრაგმენტი

n	$\alpha=0.05$		$2E(\rho)$
	$S(\alpha,n)$ $S(\alpha,n)+2$	$P\{S_\rho\le S(\alpha,n)\}$ $P\{S_\rho\le S(\alpha,n)+2\}$	
7	16 18	0.044048 0.054762	112
8	30 32	0.048090 0.057490	168
9	48 50	0.048399 0.053999	240
10	72 74	0.048139 0.052441	330
11	102 104	0.046958 0.050155	440

თუ H_0-ის ალტერნატივაა H_1 : $\rho<0$, ჰიპოთეზათა გარჩევის წესი შემდეგია: H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, თუ $S_\rho>S(1-\alpha,n)$, სადაც $S(1-\alpha,n)$ არის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $P\{S_\rho>S(1-\alpha,n)\}\le\alpha$, ხოლო $P\{S_\rho>S(1-\alpha,n)-2\}>\alpha$. ამასთან $S(1-\alpha,n)$ გამოითვლება ფორმულით:

$$S(1-\alpha,n)=2ES_\rho-S(\alpha,n)$$

მაგალითი 14.7. დღის და საღამოს დასწრებული განყოფილებების ეკონომისტ-სტუდენტებს გამოჰკითხეს, თუ როგორ აფასებენ ისინი სხვადასხვა პროფესიის პრესტიჟს. შეფასება უნდა მიეცეს 1-დან 8-მდე რიცხვების მიწერით, ამასთან ყველაზე პრესტიჟულ სპეციალობას აქვს რანგი 1, შემდეგს 2 და ა.შ., მიიღეს შემდეგი ცხრილი

ცხრილი 14.15

პროფესია	დღის	საღამოს
ბუღალტერი	6	3
პროგრამისტი	7	2
ბანკის მენეჯერი	2	6
ადმინისტრატორი	5	4
სტატისტიკოსი	1	7
მარკეტინგის მენეჯერი	4	8
ფინანსისტ-ანალიტიკოსი	3	5
წარმოების მენეჯერი	8	1

ა) იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი;

ბ) 0.05 დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ არსებობს უარყოფითი კავშირი ამ რანგებს შორის?

ამოხსნა. ამ მაგალითში გვაქვს პროფესიებისაგან შედგენილი ერთობლიობა, ნიშნების როლში განიხილება დღისა და საღამოს დასწრებული განყოფილებების სტუდენტთა მიერ ამ პროფესიების შეფასებები, რომელთა მიხედვით, მიღებულია რანგთა

წყვილების შემდეგი მიმდევრობები: (1,7); (2,6); (3,5); (4,8); (5,4); (6,3); (7,2); (8,1) (იხ. ცხრილი 14.15).

ცხრილი 14.16

პროფესია	დღის	საღამოს	$i-r_i$	$(i-r_i)^2$
ბუღალტერი	6	3	3	9
პროგრამისტი	7	2	5	25
ბანკის მენეჯერი	2	6	–4	16
ადმინისტრატორი	5	4	1	1
სტატისტიკოსი	1	7	–6	36
მარკეტინგის მენეჯერი	4	8	–4	16
ფინანსისტ-ანალიტიკოსი	3	5	–2	4
წარმოების მენეჯერი	8	1	7	49
Σ				156

ა) $\rho = 1 - \frac{6S_\rho}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 156}{8(8^2-1)} = -0.857$.

ბ) სპირმენის სტატისტიკური ცხრილი გვაძლევს $S(0{,}95;8) = 168 - S(0.05;8) = 168 - 30 = 138$. $S_\rho = 156 > 138$, ამიტომ H_0 ჰიპოთეზის უარვყოფთ H_1-ის სასარგებლოდ, ე.ი. არსებული მონაცემებით ნიშნები დამოკიდებულია.

მაგალითი 14.8. რეგიონალური ფირმის გახსნის წინ კომპანიამ ჩაატარა ტრეინინგი თავის თანამშრომლებს შორის, რის შედეგაც, თითოეული მათგანი რანჟირებული იყო მომავალი გაყიდვების პოტენციალის მიხედვით. ერთი წლის შემდეგ კომპანიამ ეს რანგები შეადარა წლიურ გაყიდვების რანგებს (რანგი 1 მიწერილი აქვს ყველაზე მაღალი გაყიდვების მოცულობას, რანგი 2 მომდევნოს და ა.შ.).

ა) გამოთვალეთ და მიეცით ინტერპრეტაცია სპირმენის რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტს.

ბ) 0.05 დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ არსებობს დადებითი კავშირი ამ რანგებს შორის?

ცხრილი 14.17

გამყიდველი	წლიური გაყიდვები	ტრეინინგის რანგები
1	319	3
2	150	9
3	175	6
4	460	1
5	348	4
6	300	10
7	288	5
8	200	2
9	190	7
10	300	8

ამოხსნა.

ცხრილი 14.18

გამყიდველი	წლიური გაყიდვები	რანგები	ტრეინინგის რანგები	$(i-r_i)$	$(i-r_i)^2$
1	319	3	3	0	0
2	150	10	9	1	1
3	175	9	6	3	9
4	460	1	1	0	0
5	348	2	4	–2	4
6	300	4.5	10	–5.5	30.25
7	288	6	5	1	1
8	200	7	2	5	25
9	190	8	7	1	1
10	300	4.5	8	3.5	12.25
					83.5

ა) $\rho = 1 - \dfrac{6 \cdot 84.5}{10(10^2 - 1)} = 0.488$. საშუალო სიდიდის დადებითი კორელაცია

ბ) H_0 : არ არსებობს კორელაცია რანგებს შორის: $\rho=0$,

H_1 : დადებითი კორელაციაა რანგებს შორის: $\rho>0$.

თუ $S_\rho<S(0.05;10)$ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ H_1 ჰიპოთეზის სასარგებლოდ (α მნიშვნელოვნობის დონით).

$S(0.05;10)$ მნიშვნელობა ვიპოვოთ 14.14 ცხრილიდან $S(0.05;10)=72$. ვინაიდან $S_\rho=83.5>72$, ამიტომ H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია. ჩვენ, რომ მნიშვნელოვნობის დონედ აგვერჩია $\alpha=0.1$, მაშინ დანართის A10 ცხრილიდან გვექნებოდა $S(0.1;10)=90$, $S_\rho=83.5<90$, ამიტომ ამ მნიშვნელოვნობის დონით H_0-ს უარვყოფდით.

დიდი მოცულობის შერჩევისათვის გამოვიყენებთ

$$t = \sqrt{n-2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\rho,$$

სტატისტიკას, რომელიც განაწილებულია სტიუდენტის კანონით, თავისუფლების ხარისხით $n-2$. ზოგჯერ გვირჩევენ ნორმალური მიახლოების გამოყენებას.

სავარჯიშო. 14.17 მაგალითის მონაცემებით შეამოწმეთ, რომ t-სტატისტიკის გამოყენება იძლევა იგივე დასკვნებს, რაც მიღებული იყო ზუსტი განაწილებების მეშვეობით.

იგივე ამოცანისათვის კენდალმა შემოიღო რანგობრივი კორელაციის ასეთი კოეფიციენტი:

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} \cdot S_\tau, \qquad (14.20)$$

სადაც

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{sign}(i - r_j)$$

და

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{თუ} \quad x > 0, \\ -1, & \text{თუ} \quad x < 0. \end{cases}$$

S_r-ის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$S_\tau = 2N - n(n-1)/2$$

და

$$\tau = \frac{4N}{n(n-1)} - 1, \tag{14.21}$$

სადაც N არის რაოდენობა იმ წყვილებისა, რომელთათვისაც $j>i$ და $r_j>r_i$ ერთდროულად. პრაქტიკულად N უნდა გამოვთვალოთ ასე. პირველი სტრიქონის რანგები დავალაგოთ ზრდის მიხედვით 1, 2, ... , n, მეორე სტრიქონში მივუწეროთ შესაბამისი ელემენტის რანგი მეორე ნიშნის მიხედვით. საბოლოოდ მივიღებთ ასეთ ცხრილს

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ r_1, & r_2, & \dots, & r_n \end{pmatrix}, \tag{14.22}$$

სადაც r_i რიგითი ნომერია (მეორე ნიშნის მიხედვით) იმ ინდივიდუმებისა, რომლებსაც პირველი ნიშნის მიხედვით აქვთ რანგი i. მონაცემთა (14.22) სახის ჩანაწერში დავთვალოთ იმ r_i-ების რიცხვი, რომლებიც განლაგებულია r_1-ის მარჯვენივ და მეტია r_1-ზე, იმ r_i-ების რიცხვი, რომდებიც მდებარეობენ r_2-ის მარჯვენივ და მეტია r_2-ზე და ა.შ. N იქნება ყველა ამ რიცხვების ჯამი.

H_0 : ნიშნები დამოუკიდებელია, ე.ი. $\tau=0$,

H_1 : $\tau<0$.

ჰიპოთეზების გარჩევის წესი შემდეგია:

H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით ყველა ისეთი შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებისთვისაც $N<N(\alpha,n)$. აქ $N(\alpha,n)$ არის ის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $P\{N\le N(\alpha,n)\}\le\alpha$, ხოლო $P\{N\le N(\alpha,n)+1\}>\alpha$. $N(\alpha,n)$-ის რიცხვითი მნიშვნელობა, შერჩევის მცირე მოცულობისათვის n=4(1)100, განისაზღვრება სპეციალური ცხრილების საშუალებით (მოვიყვანოთ ფრაგმენტი კენდალის სტატისტიკის აღნიშნული ცხრილიდან (იხ. A11 ცხრილი დანართიდან).

თუ H_0 : $\tau=0$ ჰიპოთეზის ალტერნატივაა H_1 : $\tau>0$, მაშინ ჰიპოთეზათა გარჩევის წესი შემდეგია: H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ H_1-ის სასარგებლოდ α მნიშვნელოვნობის

დონით, თუ $N>N(1-\alpha,n)$, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს. აქ $N(1-\alpha,n)=2E(N)-N(\alpha,n)$.

ცხრილი 14.19. A11 ცხრილის ფრაგმენტი

n	$\alpha=0.05$		$2E(N)$
	$N(\alpha,n)$ $N(\alpha,n)+1$	$P\{N\le N(\alpha,n)\}$ $P\{N\le N(\alpha,n)+1\}$	
7	4 5	0.0345 0.0680	21
8	6 7	0.0305 0.0543	28
9	9 10	0.0337 0.0597	36
10	12 13	0.0362 0.0541	45
11	16 17	0.0432 0.0604	55

მაგალითი 14.9. 14.7 მაგალითის მონაცემების საფუძველზე ($\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით) შევამოწმოთ ნიშნების დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა. ცხრილის მონაცემები ჩავწეროთ შემდეგი სახით

ცხრილი 14.20

პირველი ნიშნის რანგები	1	2	3	4	5	6	7	8
მეორე ნიშნის რანგები	7	6	5	8	4	3	2	1

მივიღებთ, რომ N=3, $\tau=\dfrac{4N}{n(n-1)}-1=\dfrac{4\cdot 3}{8\cdot 7}-1$ =–0,785.

ამრიგად, უნდა გავარჩიოთ შემდეგი ჰიპოთეზები (α=0.05):

$H_0:\tau=0$,

$H_1:\tau<0$.

α=0.05-ის შემთხვევაში გვექნება $N(0,05;8)=6$, ვინაიდან კრიტიკული არე $N<N(\alpha,n)$ და $N=3<6$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ H_1-ის სასარგებლოდ.

§ 5. შემთხვევითობის ჰიპოთეზა. კრიტიკული მნიშვნელობები სერიათა რაოდენობისათვის

განვიხილოთ მიმდევრობა

$$a\,a\,a\,b\,b\,a\,b\,b\,b\,a\cdots b\,a\,a\,, \qquad (14.23)$$

რომელიც შედგება m რაოდენობის a და n რაოდენობის b ელემენტისაგან. მაშასადამე ელემენტთა სრული რიცხვია $m+n$. მიმდევრობის იმ ნაწილს, რომელიც შესდგება ერთი სახის ელემენტებისაგან, რომლებიც ერთი მეორეს გვერდით არიან განლაგებული სერია ეწოდება. ამ ნაწილს მარცხნიდან და მარჯვნიდან ეკვრის მეორე სახის ელემენტი (მიმდევრობის თავში მხოლოდ მარჯვნიდან, ბოლოში მხოლოდ მარცხნიდან). მაგალითად ჩვენს მიმდევრობაში ჯერ გვაქვს 3 ელემენტიანი სერია aaa, შემდეგ ორელემენტიანი სერია bb და ა.შ. სერიის ელემენტთა რაოდენობას ეწოდება სერიის სიგრძე. m რაოდენობის a ელემენტისაგან და n რაოდენობის b ელემენტისაგან შემდგარი მიმდევრობა შეიძლება ჩაწერილ იქნას C_{n+m}^{m} სხვადასხვა ვარიანტად. თუ მოცემული მიმდევრობა მიღებულია ისეთი ექსპერიმენტის შედეგად, რომელშიც ყველა C_{n+m}^{m} ვარიანტის განხორციელება ტოლალბათურია, მაშინ ვიტყვით, რომ (14.23) მიმდევრობა შემთხვევითია (ანუ ელემენტები შემთხვევითადაა განლაგებული).

სერიების რაოდენობა, ელემენტთა $m+n$ რაოდენობასთან ერთად, წარმოადგენს მიმდევრობაში a და b ელემენტების განლაგების შემთხვევითობის კარგ მაჩვენებელს. მიმდევრობაში სერიათა საერთო რაოდენობა აღვნიშნოთ γ-თი და დავსვათ შემდეგი კითხვა; ხომ არ ეწინააღმდეგება სერიათა საერთო რაოდენობა დაკვირვებულ მიმდევრობაში a და b ელემენტების შემთხვევითი განლაგების ჰიპოთეზას? ჩავთვალოთ, რომ $m \le n$. შეიძლება იმის ჩვენება, რომ

$$\gamma=\begin{cases}2,3,..,2m+1, & \text{როცა } m\le n,\\ 2,3,..,2m, & \text{როცა } n=m.\end{cases}$$

დავუშვათ, რომ n=3, m=2. მაშინ ორი a ელემენტისაგან და სამი b ელემენტისაგან შედგენილი განსხვავებული მიმდევრობების საერთო რაოდენობა $C_5^2=10$-ის ტოლია. ამასთან ორი სერიის შემცველ მიმდევრობათა რაოდენობა 2-ის ტოლია (ასეთი მიმდევრობებია $aabbb$ და $bbaaa$), სამ სერიათა 3-ის, ოთხ სერიათა რაოდენობა 4-ის და ხუთი სერიის შემცველ მიმდევრობათა რაოდენობა 1-ის ტოლია (მიმდევრობა $ababa$). γ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს შემდეგი განაწილების კანონით

γ	2	3	4	5
	2/10	3/10	4/10	1/10

ინტუიციურად გასაგებია, რომ სერიათა რაოდენობა ამოკრეფის შემთხვევითობის დროს არ უნდა იყოს არც მცირე და არც დიდი, ამოკრეფის მოცულობასთან შედარებით. სწორედ ამ მოსაზრებას ეყრდნობა მიმდევრობის შემთხვევითობის შემდეგი ჰიპოთეზის შემოწმების იდეა.

განვიხილოთ შემდეგი ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანა:

H_0 : მიმდევრობა შემთხვევითია,

H_1 : მიმდევრობა არ არის შემთხვევითი.

ალტერნატივა H_1 ორმხრივია (ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორმხრივ ალტერნატივებს). მაშინ

α მნიშვნელოვნობის დონით ჰიპოთეზას უარვყოფთ ყველა ისეთი შერჩევითი მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვის $\gamma<g(\alpha;m,n)$ ან $\gamma>G(\alpha;m,n)$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

$g(\alpha;m,n)$ ქვედა და $G(\alpha;m,n)$ ზედა კრიტიკული მნიშვნელობები მოყვანილია . სერიათა რაოდენობისათვის კრიტიკული მნიშვნელობების ცხრილში (იხ. A12 ცხრილი დანართში, რომელიც [20]-ში მოცემული ვრცელი ცხრილის ნაწილია), სადაც m არის a ელემენტების, ხოლო n კი b ელემენტების რაოდენობა მოცემულ (18.23) სახის მიმდევრობაში. ამ ცხრილში, მოცემული m-ის, n-ისა და 2α-ს საშუალებით მოიძებნება ქვედა და ზედა კრიტიკული მნიშვნელობები $g(\alpha;m,n)$ და $G(\alpha;m,n)$ როდესაც 2α=0.05, 0.10, ისეთი m, n წყვილისათვის, რომელთათვის ყველა $2\le m\le n\le 20$.

მოვიყვანოთ აღნიშნული ცხრილის ფრაგმენტი.

ცხრილი 14.21. A12 ცხრილის ფრაგმენტი

m	n	მნიშვნელოვნობის დონე		
		0.05	0.02	0.01
8	8	4 14	4 14	3 15
	9	5 14	4 15	3 15
	10	5 15	4 15	4 16
	11	5 15	5 16	4 17
	12	6 16	5 16	5 17
	13	6 16	5 17	5 17
	...	...	...	...
	20	7 17	6 18	6 18

მაგალითი **14.10.** ვთქვათ m=8, n=9, 2α=0.05. α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ H_0 და H_1 ჰიპოთეზები შემდეგი 2 მიმდევრობისათვის

1) *a a a a a a a a b b b b b b b b b*

2) *b a b a b a b a b a b a b a b a b*.

ამოხსნა. ამ მიმდევრობების არაშემთხვევითობა ანალიზის გარეშეც ცხადია. გამოვიყენოთ ჩვენი წესი. 14.21 ცხრილიდან ვღებულობთ

$$g(\alpha;m,n) = 5, \quad G(\alpha;m,n) = 14.$$

(ეს მნიშვნელობები 14.21 ცხრილში ხაზგასმულია).

ზემოთ მოყვანილ 1) მიმდევრობაში γ=2, 2) მიმდევრობაში γ=17.

1) მიმდევრობისათვის $\gamma=2<5=g(\alpha;m,n)$, ე.ი. H_0- ს უარვყოფთ,

2) მიმდევრობისათვის $\gamma=17>14=G(\alpha;m,n)$, ე.ი. H_0- ს უარვყოფთ .

ამგვარად ეს ორი მიმდევრობა, როგორც ჩვენ მოველოდით, შემთხვევით მიმდევრობად არ უნდა ჩავთვალოთ.

* * *

ძირითადი ლიტერატურა, რომელსაც ვეყრდნობოდით ამ თავში მოყვანილი მასალის გადმოცემისას: [20], [26], [34], [42], [46], [59], [72], [79], [82], [83], [84]. ამავე წყაროების მეშვეობით მკითხველს შეუძლია დამატებითი ინფორმაციის მიღება

დასკვნები

ჩვენ განვიხილეთ ნიშნებისა და სხვადასხვა სახის რანგობრივი კრიტერიუმები, რომელთა საშუალებითაც მოწმდება ჰიპოთეზები გენერალური ერთობლიობის რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ, ჰიპოთეტურ განაწილების ფუნქციათა ფართო კლასისთვის. აღნიშნული კრიტერიუმები ძირითადად გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც ჰიპოთეტური განაწილების ფუნქცია ნორმალურისაგან არსებითად განსხვავდება.

სავარჯიშოები

14.1. 60 კაციანი სტუდენტების ჯგუფს, რომლებიც სპეციალური პროგრამით სწავლობენ, ჩაუტარდა გამოკითხვა სასწავლო პროგრამის ეფექტურობის დადგენის მიზნით. 42-მა თქვა, რომ მოემატა ცოდნა. იყო თუ არა პროგრამა ეფექტური?

ა) ჩამოაყალიბეთ H_0 და H_1.

ბ) როგორია გადაწყვეტილების მიღების წესი?

გ) რა გადაწყვეტილება მივიღოთ?

14.2. რესტორანმა გადაწყვიტა, რომ თავის მენიუში, რომელიც ჩვეულებრივ კერძებს შეიცავდა, გურმანის მენიუ შეეტანა. გამოკითხეს რესტორნის 81 სტუმარი. 43-მა აირჩია გურმანის მენიუ. 0.02 დასაჯერობის დონით გადაწყვიტეთ, თუ რომელი მენიუ მოსწონს მომხმარებელს.

14.3. თავისი მენეჯერების თვითდაჯერებულობის გაზრდის მიზნით ბანკმა მოაწყო 3 კვირიანი სემინარი და მისი ეფექტურობის შემოწმება გადაწყვიტა. შეამოწმეს 14 მენეჯერის თვითდაჯერებულობის დონე სემინარამდე და სემინარის შემდეგ. შედეგი მოცემულია ცხრილში:

მენეჯერი	„მანამდე“	„შემდეგ“
1	უარყოფითი	დაბალი
2	უარყოფითი	უარყოფითი
3	დაბალი	მაღალი
4	ძალიან მაღალი	დაბალი
5	დაბალი	მაღალი
6	დაბალი	მაღალი
7	უარყოფითი	ძალიან მაღალი
8	დაბალი	მაღალი
9	დაბალი	მაღალი
10	უარყოფითი	დაბალი
11	დაბალი	მაღალი
12	უარყოფითი	დაბალი
13	დაბალი	მაღალი
14	დაბალი	ძალიან მაღალი

მოიმატა თუ არა მენეჯერების სემინარის შემდეგ თვითდაჯერებულობამ. ნდობის დონეა 0.05.

ა) ჩამოაყალიბეთ H_0 და H_1.

ბ) ჩამოაყალიბეთ გადაწყვეტილების მიღების წესი.

გ) დაასკვენით სასარგებლო იყო სემინარი თუ არა?

14.4. მაღაზიის მენეჯერმა შემთხვევით აირჩია 102 შეკვეთა. მან ნახა, რომ 60 მათგანის ფასი იყო \$23-ზე მეტი, 40-ისა \$23-ზე ნაკლები, ხოლო 2-ისა ზუსტად \$23. შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ შეკვეთების ფასის მედიანა უდრის \$23-ს? $\alpha=0.1$.

14.5. ავიაკომპანიამ სამეთაურო სააგენტოდან მიიღო ცნობა, რომ ბილეთის ფასი A ქალაქამდე (იქეთ-აქეთ) \$503-ის ტოლია. ავიაკომპანიამ შეარჩია 400 ბილეთი. აქედან 160 ბილეთის ფასი იყო ნაკლები ვიდრე \$503, ხოლო დანარჩენი კი მეტი. არც ერთის ფასი ზუსტად \$503-ს არ უდრიდა. ვთქვათ $\alpha=0.05$.

ა) ჩამოაყალიბეთ H_0 და H_1. განსაზღვრეთ ყველა საჭირო ცვლადი.

ბ) გადაწყვიტეთ სწორი ცნობა შემოგვთავაზა სააგენტომ თუ არა?

14.6. ფაბრიკას შესთავაზეს პროდუქციის დამზადების ახალი მეთოდი, რომელიც ზრდის დროის ერთეულში წარმოებული სტანდარტული პროდუქციის რაოდენობას.

ამიტომ საჭირო გახდა ორი მეთოდის, ძველისა და ახლის შედარება. ამოირჩიეს შემთხვევით მუშების ჯგუფი, რომლებმაც დაამზადეს პროდუქცია ძველი მეთოდით და შემდეგ ახლით. თითოეული მუშის მიერ დამზადებული პროდუქციის მოცულობა მოყვანილია შემდეგ ცხრილში.

მუშა	მეთოდი	
	ახალი მეთოდი	ძველი მეთოდი
1	60	64
2	40	52
3	59	58
4	30	37
5	70	71
6	78	83
7	43	46
8	40	52
9	87	84
10	80	80
11	56	57
12	21	21
13	99	108
14	50	56
15	56	62

0.05 მნიშვნელოვნობის დონით შეგვიძლია დავასკვნათ თუ არა, რომ წარმოების დონე მატულობს ახალი მეთოდის გამოყენებით?

ა) ჩამოაყალიბეთ H_0 და H_1.

ბ) ჩამოაყალიბეთ გადაწყვეტილების მიღების წესი?

გ) ჩამოაყალიბეთ საბოლოო გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

15

ორი ან რამდენიმე შერჩევის დამოუკიდებლობისა და ერთგვაროვნების ჰიპოთეზათა შემოწმება

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ორი ან რამდენიმე შერჩევის ერთგვაროვნებისა და დამოუკიდებლობის კრიტერიუმებს, დაყრდნობილს χ^2 განაწილების თვისებებზე. აღნიშნული ამოცანების შესასწავლად ხშირად მოხერხებულია დაკვირვებათა შესაძლო შედეგების გარკვეულ კატეგორიებად ან კლასებად დაყოფა და მონაცემების წარმოდგენა დაკვირვებული სიხშირეების ორგანზომილებიანი ცხრილების სახით, რომლებსაც ნიშანთა შეუღლების ცხრილებს უწოდებენ. მონაცემების კლასებად დაყოფა შეიძლება მოხდეს როგორც რაოდენობრივი, ისე თვისებრივი ნიშნით. მაგალითად, ადამიანები შეიძლება დაიყოს რაოდენობრივი ნიშნით – სიმაღლის ან შემოსავლის მიხედვით, ან თვისებრივი ნიშნით – სქესის, პროფესიისა და სხვა ფაქტორის მიხედვით. ჩვეულებრივ, ასეთი ცხრილების გამოყენების აუცილებლობა ჩნდება შემდეგ ორ შემთხვევაში:

1. ვთქვათ, ჩვენი შესწავლის ინტერესს წარმოადგენს პოპულაცია, რომელიც დაყოფილია კატეგორიებად (ან კლასებად) ორი სხვადასხვა ნიშნის (ან ფაქტორის) მიხედვით. ამასთან პირველ ნიშანს შეესაბამება I კატეგორია, ხოლო მეორე J სხვადასხვა კატეგორიას შეიცავს. პოპულაციიდან აღებულია შერჩევა და შერჩევის იმ ელემენტთა რაოდენობა, რომლებსაც ერთდროულად აღმოაჩნდათ პირველი ნიშნის i-ური და მეორე ნიშნის j-ური კატეგორია, იწერება ცხრილში i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე.

2. განვიხილოთ I სხვადასხვა პოპულაცია და თითოეული დავყოთ ერთი და იგივე J რაოდენობის კატეგორიად. ყოველი პოპულაციიდან ავიღოთ შერჩევა და ცხრილში i-ური სვეტისა და j-ური სტრიქონის გადაკვეთაზე შევიტანოთ i-ური შერჩევის იმ ელემენტთა სიხშირე, რომლებიც j-ური კატეგორიისა აღმოჩნდნენ .

პირველ შემთხვევაში გვინდა განვსაზღვროთ, თუ როდის ჩნდება პოპულაციაში აღნიშნული ორი ნიშნის კატეგორიები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. მეორე შემთხვევაში გასარკვევია, არის თუ არა სხვადასხვა კატეგორიის მონაცემთა პროპორციები ერთი და იგივე ყველა პოპულაციისათვის, ანუ უნდა შევამოწმოთ ჰიპოთეზა პოპულაციათა ერთგვაროვნების შესახებ.

§ 1. ორი შერჩევის დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შემოწმება

განვიხილოთ ერთი პოპულაციის ორი სხვადასხვა ნიშნის (ან ფაქტორის) ერთმანეთთან დამოკიდებულების საკითხი.

წარმოვიდგინოთ, რომ პოპულაციიდან აღებულია n მოცულობის შერჩევა და ამ შერჩევის ელემენტები კლასიფიცირებულია ორი A და B ნიშნის მიხედვით. დავუშვათ,

რომ დაკვირვებათა ყველა შესაძლო შედეგი (ან პოპულაციის ყველა ელემენტი) დაყოფილია A ნიშნით $A_1,\ldots,A_k$, ხოლო B ნიშნით $B_1,\ldots,B_r$ კატეგორიებად (ან კლასებად). პოპულაციის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის ზუსტად ერთ კატეგორიას A ნიშნის შესაბამისი რომელიმე კლასიდან და ასევე ზუსტად ერთ რომელიმე კატეგორიას B ნიშნის მიხედვით. ამიტომ დაკვირვებული მონაცემები იყოფა $r\times k$ რაოდენობის A_iB_j არათავსებად ჯგუფად. თუ n_{ij} -ით აღვნიშნავთ იმ მონაცემთა რაოდენობას, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან A ნიშნის i-ურ და B ნიშნის j-ურ კატეგორიას და ჩავწერთ ამ სიდიდეს ცხრილის i-ური სვეტისა და j-ური სტრიქონის გადაკვეთაზე, მივიღებთ ორგანზომილებიან ($k\times r$-ზე) ნიშანთა შეუღლების ქვემოთ მოყვანილ ცხრილს, რომელსაც იყენებენ A და B ნიშნების დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად.

ცხრილი 15.1. ნიშანთა შეუღლების ცხრილი.

$A \backslash B$	B_1	B_2	…	B_j	…	B_r	Σ
A_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1r}	$n_{1\bullet}$
A_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2r}	$n_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_i	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	n_{ir}	$n_{i\bullet}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{kj}	…	n_{kr}	$n_{k\bullet}$
Σ	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	…	$n_{\bullet j}$	…	$n_{\bullet r}$	n

ამ ცხრილში ($n_{i\bullet}$, $1\le i\le k$) და ($n_{\bullet j}$, $1\le j\le r$) სიდიდეები აღნიშნავს A და B ნიშნების შესაბამის მარგინალურ სიხშირეებს.

$n_{i\bullet}$ წარმოადგენს შერჩევის იმ ელემენტთა სიხშირეს, რომლებიც მოხვდნენ i-ურ კლასში A ნიშნის მიხედვით, ხოლო $n_{\bullet j}$ არის შერჩევის ელემენტთა რაოდენობა, რომლებიც მოხვდნენ j-ურ კლასში B ნიშნით.

შევნიშნოთ, რომ $n_{i\bullet}$ (შესაბამისად $n_{\bullet j}$) i-ურ სტრიქონში (შესაბამისად j-ურ სვეტში) მოცემულ სიხშირეთა ჯამის ტოლია

$$n_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{r}n_{ij}\ ,\ n_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{k}n_{ij}\ . \tag{15.1}$$

გარდა ამისა, ცხრილის ყველა n_{ij} სიხშირეთა ჯამი დაკვირვებათა საერთო რიცხვის, ანუ შერჩევის მოცულობის ტოლია და

$$\sum_{i=1}^{k}n_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{r}n_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}n_{ij}=n. \tag{15.2}$$

დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის გამოთქმის მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

P_{ij}-ით აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ პოპულაციიდან შემთხვევით არჩეულ ელემენტი აღმოჩნდება ერთდროულად A ნიშნის i-ური და B ნიშნის j-ური კატეგორიაში. მაშინ

$P_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}$ იქნება ალბათობა იმისა, რომ პოპულაციის ელემენტი აღმოჩნდება i-ური კატეგორიაში A ნიშნის მიხედვით, ხოლო

$P_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} P_{ij}$ – ალბათობა იმისა, რომ პოპულაციის ელემენტი მოხვდება j-ურ კატეგორიაში B ნიშნით.

როდესაც P_{ij} ალბათობები მოცემულია, ამ ალბათობათა დაკვირვებულ მონაცემებთან თანხმობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად შეიძლება გამოვიყენოთ

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - nP_{ij}\right)^2}{nP_{ij}}. \tag{15.3}$$

სტატისტიკა, რომელიც მიახლოებით χ^2 კანონით არის განაწილებული, რომლის თავისუფლების ხარისხი $f=(rk-1)$-ის ტოლია, ერთადერთი, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} n_{ij} = n$ შეზღუდვის გამო.

როდესაც A და B ნიშნები დამოუკიდებელია, მაშინ ყოველი i-სა და j-სათვის უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$P_{ij} = P_{i\bullet} P_{\bullet j}, \quad 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le r, \tag{15.4}$$

სადაც

$$\sum_{i=1}^{k} P_{i\bullet} = 1, \qquad \sum_{j=1}^{r} P_{\bullet j} = 1. \tag{15.5}$$

როგორ უნდა შევამოწმოთ A და B ნიშნების დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა არსებული დაკვირვებების საფუძველზე?

განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როდესაც $P_{i\bullet}$ და $P_{\bullet j}$ მარგინალური განაწილებები ცნობილია.

ამ შემთხვევაში (15.3) ფორმულით მოცემული $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა, P_{ij} ალბათობების მარგინალური განაწილებებით გამოსახვის შემდეგ იღებს შემდეგ სახეს:

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - nP_{i\bullet}P_{\bullet j}\right)^2}{nP_{i\bullet}P_{\bullet j}} \tag{15.6}$$

(15.6) გვაძლევს ჯამურ გადახრას მოსალოდნელ და დაკვირვებულ სიხშირეებს შორის. ამ სტატისტიკამ შეიძლება კრიტიკულ მნიშვნელობაზე დიდი მნიშვნელობა მიიღოს ჰიპოთეტურ მარგინალურ განაწილებებსა და მარგინალურ სიხშირეებს შორის განსხვავების და არა A და B ნიშნებს შორის დამოკიდებულების არსებობის გამო. ამიტომ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკიდან გამოყოფენ ორ კომპონენტს

$$\hat{\chi}_1^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(n_{i\bullet}-nP_{i\bullet}\right)^2}{nP_{i\bullet}},\qquad \hat{\chi}_2^2=\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(n_{\bullet j}-nP_{\bullet j}\right)^2}{nP_{\bullet j}}, \tag{15.7}$$

(რომლებიც გამოსახავენ ჰიპოთეტურ მარგინალურ განაწილებებსა და მარგინალურ სიხშირეებს შორის გადახრის სიდიდეს) და დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად იყენებენ $\hat{\chi}_3^2=\hat{\chi}^2-\hat{\chi}_1^2-\hat{\chi}_2^2$ სხვაობას. (15.6) და (15.7) ფორმულებიდან, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ ვიღებთ, რომ

$$\hat{\chi}_3^2=\hat{\chi}^2-\hat{\chi}_1^2-\hat{\chi}_2^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(n_{ij}-n_{i\bullet}P_{\bullet j}-n_{\bullet j}P_{i\bullet}+nP_{i\bullet}P_{\bullet j}\right)^2}{nP_{i\bullet}P_{\bullet j}}. \tag{15.8}$$

რადგან $\hat{\chi}^2$, $\hat{\chi}_1^2$ და $\hat{\chi}_2^2$ სტატისტიკებს დაახლოებით აქვთ χ^2 განაწილება და მათი თავისუფლების ხარისხები შესაბამისად $(rk-1)$-ის, $(k-1)$-ისა და $(r-1)$-ის ტოლია (შევნიშნოთ, რომ $\hat{\chi}_3^2$ სტატისტიკა დადებითია), $\hat{\chi}_3^2$ სტატისტიკაც მიახლოებით განაწილებული იქნება χ^2 კანონით და მისი თავისუფლების ხარისხი ტოლი იქნება კომპონენტების თავისუფლების ხარისხთა სხვაობის, ანუ $f=(rk-1)-(r-1)-(k-1)=(r-1)(k-1)$. ამრიგად, როცა $\hat{\chi}_3^2$ სტატისტიკა შეიძლება გამოყენებული იქნეს ნიშანთა დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად, ცნობილია მარგინალური განაწილებების შემთხვევაში.

მაგალითი 15.1. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ბეიტსონის ცნობილი მაგალითი ტკბილი მუხუდოს ორი ნიშნის გენის დამოკიდებულობის შესახებ. ერთი ნიშანი წარმოადგენს ყვავილის შეფერილობას (იისფერი ან წითელი), ხოლო მეორე შეესაბამება ყვავილის მტვრის ფორმას (მოგრძო ან მრგვალი). დაშვებულია, რომ მარგინალური განაწილებები იყოფიან 1:3 პროპორციით, ანუ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებულ მუხუდოს ყვავილს აღმოაჩნდება წითელი ფერი (შესაბამისად იისფერი) ტოლია 1/4-ის (შესაბამისად 3/4-ის), ხოლო ალბათობა იმისა, რომ მისი ყვავილის მტვრის ფორმა მგვრალი ან მოგრძოა ასევე შესაბამისად 1/4-ისა და 3/4-ის ტოლია. თუ ეს ორი მახასიათებელი მემკვიდრეობით ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გადაეცემა, მაშინ სიხშირეები, ქვემოთ მოყვანილ ნიშანთა შეუღლების 15.2 ცხრილში, დაახლოებით უნდა აკმაყოფილებდნენ 9:3:3:1 ფარდობას.

ცხრილი 15.2. ტკბილი მუხუდოს განაწილება მისი ყვავილის ფერისა და მტვრის ფორმის მიხედვით

	ყვავილის შეფერილობა		
მტვრის ფორმა	იისფერი	წითელი	სულ
მოგრძო	296	27	323
მრგვალი	19	85	104
სულ	315	112	427

მართლაც, ნულოვანი ჰიპოთეზის დროს

$$P_{11}=P_{1\bullet}P_{\bullet 1}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16},\qquad P_{12}=P_{1\bullet}P_{\bullet 2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16},$$

$$P_{21}=P_{2\bullet}P_{\bullet 1}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16},\qquad P_{22}=P_{2\bullet}P_{\bullet 2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}.$$

ამიტომ $P_{11}{:}P_{12}{:}P_{21}{:}P_{22}=9{:}3{:}3{:}1$ თუ ვიანგარიშებთ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის მნიშვნელობას (15.6) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ, რომ

$$\hat{\chi}^2=222.1221$$

და ალბათობა იმისა, რომ 3-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხის χ^2 განაწილების მქონე შემთხვევითმა სიდიდემ მიიღოს ამ რიცხვზე დიდი მნიშვნელობა, ძალიან მცირეა (მაგალითად, ამ განაწილების 0.01 ალბათობის შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობა 11.345-ის ტოლია) ეს მიუთითებს იმაზე, რომ საერთო გადახრა ექსპერიმენტის რეალურ და მოსალოდნელ შედეგებს შორის დიდია. ვნახოთ, ხომ არ არის ეს გადახრა გამოწვეული იმით, რომ ცხრილში მოცემული მარგინალური სიხშირეები არ ეთანხმებიან ჩვენს დაშვებას ცალკეულ ნიშანთა 1:3 პროპორციით განაწილების შესახებ. (15.7) ფორმულით მოცემული $\hat{\chi}_1^2$ და $\hat{\chi}_2^2$ სტატისტიკები, შესაბამისად 0.0945-ის და 0.3443-ის ტოლ მნიშვნელობებს იღებენ, რაც ძალიან მცირეა 1-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხის მქონე χ^2 განაწილებისათვის. ეს ნიშნავს, რომ ცალკე აღებული ვექტორი (ყვავილის ფერი ან მისი მტვრის ფორმა) ისეთი სიხშირით ჩნდება, როგორც მოსალოდნელი იყო.

მესამე კომპონენტისათვის გვაქვს:

$$\hat{\chi}_3^2=221.6833,$$

რაც ძალიან დიდია 1-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხის χ^2 განაწილებისათვის. ამ სტატისტიკების საერთო მნიშვნელობა

$$\hat{\chi}^2=0.0945+0.3443+221.6833=222.1221$$

აჩვენებს, რომ სრული გადახრა ჰიპოთეზისაგან კონცენტრირებულია ჯამის მესამე კომპონენტში. ამიტომ, გადახრა ჰიპოთეტურ და რეალურ სიხშირეებს შორის გამოწვეულია განხილულ ნიშნებს შორის დამოკიდებულებით და ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ყვავილის ფერი და მისი მტვრის ფორმა მემკვიდრეობით ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გადაეცემა უნდა უკუვაგდოთ.

უმრავლეს შემთხვევაში ნიშანთა $P_{i\bullet}$ და $P_{\bullet j}$ მარგინალური განაწილებები უცნობია. ასეთ დროს ნიშანთა დამოუკიდებლობის H_0 ჰიპოთეზა, რომელიც (15.4) ტოლობის შესრულებას ნიშნავს, არ აზუსტებს უცნობ პარამეტრთა (ანუ მარგინალურ განაწილებათა) მნიშვნელობას და საჭირო ხდება მათი შეფასება მოცემული შერჩევის საშუალებით. ჰიპოთეტური დაშვების დროს მარგინალურ განაწილებათა მულტინომური მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებები ფარდობითი მარგინალური სიხშირეების ტოლია

$$\hat{P}_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}, \qquad \hat{P}_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}. \tag{15.9}$$

თუ ამ შეფასებებს ჩავსვამთ (15.6) ფორმულით მოცემულ გამოსახულებაში, მარგინალური განაწილებების ნაცვლად, მივიღებთ

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}} \tag{15.10}$$

სტატისტიკას.

(15.5) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ შესაფასებელ პარამეტრთა რაოდენობაა $r+k-2$, რის გამოც (15.10) ტოლობით განსაზღვრულ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას (ჰიპოთეზის დროს) მიახლოებით ექნება χ^2 განაწილება თავისუფლების ხარისხით $f=rk-1-(r+k-2)=(r-1)(k-1)$. შევნიშნოთ, რომ $P_{i\bullet}$ და $P_{\bullet j}$ პარამეტრების მათი შეფასებებით შეცვლის შემდეგ $\hat{\chi}_1^2$ და $\hat{\chi}_2^2$ სტატისტიკები ნულოვან მნიშვნელობას იღებენ და $\hat{\chi}_3^2=\hat{\chi}^2$. ამიტომ (15.10) გამოსახულებით განსაზღვრული $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა შეიძლება გამოვიყენოთ ნიშანთა დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად უცნობი მარგინალური განაწილებების შემთხვევაში.

მარტივი გარდაქმნებით $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა შეიძლება წარმოვადგინოთ, გამოსათვლელად უფრო მოხერხებული, შემდეგი ფორმით

$$\hat{\chi}^2 = n\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}} - 1\right). \tag{15.11}$$

როდესაც $k=r=2$ (15.11)-იდან ვიღებთ, რომ

$$\hat{\chi}^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})}{n_{1\bullet}n_{2\bullet}n_{\bullet 1}n_{\bullet 2}}, \qquad f=1.$$

მაგალითი **15.2.** სოციოლოგს სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ოჯახში ბავშვების რაოდენობა არ არის დამოკიდებული ოჯახის შემოსავალზე. შემთხვევითი შერჩევის შედეგები, რომელიც მიღებულია 385 ოჯახზე დაკვირვებით, მოცემულია 15.3 ცხრილში:

ცხრილი 15.3.

ბავშვების რაოდენობა	შემოსავალი (ათასობით $-ში)				
	0–6	6–12	12–18	18-ზე მეტი	სულ
0	10 (14,26)	9 (15,05)	18 (16,48)	24 (15,21)	61
1	8 (17,77)	12 (18,75)	25 (20,53)	31 (18,95)	76
2	24 (21,74)	28 (22,95)	23 (25,12)	28 (23,19)	93
3	26 (17.77)	24 (18,75)	20 (20,53)	6 (18.95)	76
4 ან მეტი	32 (18,47)	22 (19,49)	18 (21,34)	7 (19,70)	79
სულ	90	95	104	96	385

სადაც მრგვალ ფრჩხილში მოთავსებული რიცხვი წარმოადგენს უჯრაში ოჯახების მოსალოდნელი რაოდენობის შეფასებას. არის თუ არა ეს მონაცემები საკმარისად თვალსაჩინო იმისათვის, რომ $\alpha=0.01$ ნდობის დონით მივიღოთ ჰიპოთეზა ოჯახში ბავშვების რაოდენობის ოჯახის შემოსავლისაგან დამოუკიდებლობის შესახებ?

ამოხსნა: ყოველ $(i;j)$ უჯრაში ოჯახების მოსალოდნელი რაოდენობა იანგარიშება ფორმულით:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{(i\text{-ურ მწკრივში ოჯახების რაოდენობა})\times(j\text{-ურ სვეტში ოჯახების რაოდენობა})}{\text{ოჯახების საერთო რაოდენობა}}$$

ანუ

$$\hat{E}_{ij} = \frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n}.$$

მაგალითად, $14.26=\frac{61\times 90}{385}$. თავისუფლების ხარისხი ტოლია $(r-1)(k-1)=12$.

1. H_0 : ეს ორი კლასიფიკაცია დამოუკიდებელია;
H_1 : ეს ორი კლასიფიკაცია არ არის დამოუკიდებელი.
2. სტატისტიკის მნიშვნელობაა

$$\chi^2 = \frac{(10-14.26)^2}{14.26} + \cdots + \frac{(7-19.70)^2}{19.70} = 63.4783$$

3. კრიტიკული მნიშვნელობაა $\chi^2_{12,\,0.01}$=26.2170.

4. გადაწყვეტილება: რადგან $\hat{\chi}^2 > \chi^2_{12,\,0.01}$, ჩვენ უარვყოფთ H_0-ჰიპოთეზას, ანუ ვასკვნით, რომ ოჯახში ბავშვების რაოდენობა და ოჯახის შემოსავალი არ წარმოადგენს დამოუკიდებელ კლასიფიკაციებს.

ნულოვანი ჰიპოთეზა: $H_0 : P_{ij} = P_{i\bullet} P_{\bullet j}$, i=1,2,...,k; j=1,2,...,r
ალტერნატიული ჰიპოთეზა: H_a : H_0 არ არის მართებული
სტატისტიკის მნიშვნელობა $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{\bullet i}\, n_{\bullet j}}{n}}$
მნიშვნელოვნობის დონე α
უარყოფის არე $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,(k-1)(r-1)}$
ტესტი გამოიყენება როდესაც $\frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n} \geq 5$ ყველა i-სა და j-სათვის

ორი შემთხვევითი სიდიდის დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შემოწმება. ამ მეთოდის გამოყენება შეიძლება ორი (X და Y) შემთხვევითი სიდიდის დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად (X,Y) შემთხვევით ვექტორზე დამოუკიდებელი დაკვირვებებისაგან მიღებული შერჩევის საფუძველზე.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n შერჩევითი მნიშვნელობა: (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), ... , (X_n,Y_n). აღვნიშნოთ F^X-ითა და F^Y-ით შესაბამისად X და Y შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების ფუნქციები და F^{XY} იყოს X და Y სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების ფუნქცია. დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს უნდა შესრულდეს

$$H_0 : F^{XY}(x,y) = F^X(x)F^Y(y)$$

ტოლობა, (x,y) ცვლადთა ყოველი მნიშვნელობისათვის.

დავყოთ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა შესაძლო მნიშვნელობების არე, შესაბამისად I და J რაოდენობის ქვეინტერვალად:

$$\Delta_1^X = (-\infty, a_1],\ \Delta_2^X = (a_1, a_2],\ \dots,\ \Delta_I^X = (a_{I-1}, \infty);$$

$$\Delta_1^Y = (-\infty, b_1],\ \Delta_2^Y = (b_1, b_2],\ \dots,\ \Delta_J^Y = (b_{J-1}, \infty).$$

თუ N_{ij}-თი აღვნიშნავთ შერჩევის იმ წყვილთა რაოდენობას, რომელთა პირველი კომპონენტის მნიშვნელობა აღმოჩნდა Δ_i^X, ხოლო მეორესი Δ_j^Y ინტერვალში, მივიღებთ (15.1)-ის მსგავს ნიშანთა შეუღლების ცხრილს. მაგალითად, X სიდიდე შეიძლება აღნიშნავდეს რაიმე პოპულაციის ელემენტთა ერთ ნიშანს, Y – მეორე ნიშანს, ხოლო Δ_i^X, Δ_j^Y ინტერვალები შეიძლება წარმოვიდგინოთ ამ ნიშანთა შესაბამის კატეგორიებად.

როდესაც F^X და F^Y განაწილების ფუნქცები ცნობილია, შეიძლება ვიანგარიშოთ (X,Y) ვექტორის ნებისმიერ $\Delta_i^X \times \Delta_j^Y$ მართკუთხედში მოხვედრის P_{ij} ალბათობა დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს:

$$P_{ij} = P(X\in \Delta_i^X,\ Y\in \Delta_j^Y) = (F^X(a_i) - F^X(a_{i-1}))(F^Y(b_j) - F^Y(b_{j-1})),$$

(სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ F^X და F^Y განაწილების ფუნქციები უწყვეტია), ამიტომ H_0 ჰიპოთეზის ნაცვლად შეგვიძლია შევამოწმოთ ჰიპოთეზა

$$\widetilde{H}_0 : P_{ij} = P_{i\bullet}^X\ P_{\bullet j}^Y, \qquad P_{i\bullet}^X = F^X(a_i) - F^X(a_{i-1}),\ P_{\bullet j}^Y = F^Y(b_j) - F^Y(b_{j-1}),$$

(15.6) (ან (15.8)) სტატისტიკის გამოყენებით, უკვე განხილული შემთხვევის მსგავსად. შევნიშნოთ, რომ $\widetilde{H}_0$ ჰიპოთეზა H_0 ჰიპოთეზის ეკვივალენტური არ არის, მაგრამ საკმაოდ მდიდარი Δ^X და Δ^Y დანაწილებების შემთხვევაში ეს ჰიპოთეზები ერთმანეთთან „ახლოს" იქნება (ამასთან დაკავშირებით იხილეთ მე-13 თავის მე-2 პარაგრაფში გაკეთებული შენიშვნები).

როდესაც F^X და F^Y მარგინალური განაწილების ფუნქცები უცნობია, საჭირო ხდება მათი შეფასება მოცემული შერჩევის საფუძველზე. რადგან H_0 ჰიპოთეზის ნაცვლად ვამოწმებთ $\widetilde{H}_0$ ჰიპოთეზას, საკმარისია მხოლოდ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა შესაბამისად Δ_i^X და Δ_j^Y ინტერვალებში მოხვედრის ალბათობათა შეფასება. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ მულტინომური დასაჯერობის შეფასებები, რომლებიც ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს (15.9) შეფასებებს ემთხვევა. ამის შემდეგ დამოუკიდებლობის შემოწმება ხდება ამ პარაგრაფში განხილული შესაბამისი შემთხვევის მსგავსად (15.10) სტატისტიკაზე დაყრდნობით.

§ 2. რამდენიმე შერჩევის (ან პოპულაციის) ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შემოწმება.

წინა პუნქტში განხილული ნიშანთა შეუღლების 15.1 ცხრილი შედგენილი იყო ერთი პოპულაციიდან აღებული n მოცულობის შერჩევის მიხედვით, დაკვირვებული სიდიდეები (ანუ შერჩევის ელემენტები) კლასიფიცირებული იყო ორი ცვლადი ნიშნით და ვამოწმებდით ჰიპოთეზას ამ ნიშანთა დამოუკიდებლობის შესახებ. ფორმალურად იგივე სახის, მაგრამ სულ სხვა ბუნების ცხრილები გვხვდება ბევრ სხვა შემთხვევაშიც.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს k რაოდენობის სხვადასხვა პოპულაცია და ყოველი პოპულაციიდან, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, აღებულია შესაბამისად $n_1,\dots,n_k$ მოცულობის შერჩევები. ამასთან ყოველი j-სათვის შერჩევის n_j მოცულობა არ არის შემთხვევითი და წინასწარ არის განსაზღვრული. დავუშვათ, რომ ყველა პოპულაცია კლასიფიცირებულია ერთი და იგივე A ნიშნის $A_1,\dots,A_r$ კატეგორიის მიხედვით. აღვნიშნოთ n_{ij}-ით i-ური შერჩევის იმ ელემენტთა სიხშირე, რომლებსაც აღმოაჩნდათ j-ური კატეგორია. მაშინ ჩვენი მონაცემები განლაგდება პირველი ცხრილის მსგავს ცხრილში, ოღონდ ამ უკანასკნელი ცხრილის მონაცემები შედგენილია არა მხოლოდ ერთი პოპულაციიდან აღებული შერჩევის მიხედვით (როგორც წინა ცხრილი იყო მიღებული), არამედ k სხვადასხვა პოპულაციიდან მიღებული შერჩევების საშუალებით და ყოველ შერჩევას ცხრილში ერთი სტრიქონი შეესაბამება (იხ. ცხრილი 15.4.).

ასეთ შემთხვევაში ხშირად ჩნდება პოპულაციათა ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შემოწმების აუცილებლობა, ანუ იმ ჰიპოთეზისა, რომ მოცემული k შერჩევა აღებულია ერთი და იგივე გენერალური ერთობლიობიდან. ასეთი ჰიპოთეზა ეკვივალენტურია ჰიპოთეზისა, რომ პოპულაციიდან შემთხვევით არჩეული ელემენტის ყოველ A_j კლასში მოხვედრის P_j ალბათობა ერთი და იგივეა ყველა პოპულაციისათვის. n_i არის i-ური პოპულაციიდან აღებული შერჩევის მოცულობა

$$n_i = \sum_{j=1}^{r} n_{ij}\,, \qquad \text{ყოველი } i\text{-სათვის},\ 1 \le i \le k. \tag{15.12}$$

ცხრილი 15.4. ნიშანთა შეუღლების ცხრილი

	კატეგორიები						
	A_1	A_2	…	A_j	…	A_r	
შერჩევა I პოპულაციიდან	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1r}	n_1
შერჩევა II პოპულაციიდან	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2r}	n_2
	…	…	…	…	…	…	…
შერჩევა j-ური პოპულაციიდან	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	n_{ir}	n_i
	…	…	…	…	…	…	…
შერჩევა k-ური პოპულაციიდან	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{kj}	…	n_{kr}	n_k
	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	…	$n_{\bullet j}$	…	$n_{\bullet r}$	n

$n_{\bullet j}$-თი აღნიშნულია ყველა შერჩევის იმ ელემენტთა რაოდენობა, რომლებსაც აღმოაჩნდათ A ნიშნის j-ური კატეგორია. ცხადია, n_i სიდიდეებისაგან განსხვავებით, $n_{\bullet j}$ სიდიდეები (პოპულაციიდან შერჩევის აღებამდე) შემთხვევით სიდიდეებს წარმოადგენს და

$$n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}\,, \qquad j=1,2,\ldots,r. \tag{15.13}$$

P_{ij}-თი აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ i-ური პოპულაციიდან შემთხვევით არჩეულ ელემენტს აღმოაჩნდება j-ური კატეგორია (ან i-ური პოპულაციიდან j-ური კატეგორიის ელემენტთა პროპორცია). ამრიგად, i-ური პოპულაციისათვის A ნიშნის მიხედვით კატეგორიათა პროპორციები შესაბამისად არის P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{ir}, სადაც $\sum_{j=1}^{r} P_{ij} = 1$.

ნულოვანი ჰიპოთეზა ნიშნავს, რომ

$$P_{1j} = P_{2j} = \cdots = P_{kj} \qquad \text{ყოველი } j\text{-სათვის } j=1,2,\ldots,r.$$

როდესაც ერთგვაროვნების H_0 ჰიპოთეზა მართებულია, შეგვიძლია P_1, P_2, ..., P_r-ით აღვნიშნოთ პოპულაციათა პროპორციების საერთო მნიშვნელობა ყოველი j-ური კატეგორიისათვის, ანუ

$$H_0 : P_j \equiv P_{1j} = P_{2j} = \cdots = P_{kj}, \qquad j=1,2,\ldots,r\,. \tag{15.14}$$

H_0 ჰიპოთეზის დროს მოსალოდნელი რაოდენობა i-ური შერჩევის ელემენტებისა, რომლებიც j-ური კატეგორიის აღმოჩნდნენ $E\,n_{ij} = n_i P_j$ სიდიდის ტოლი. რადგან P_j ალბათობები უცნობია, საჭიროა მათი შეფასება არსებული მონაცემების საფუძველზე.

P_{ij} ალბათობის შეფასება i-ური შერჩევის მიხედვით იქნება

$$\hat{P}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_j}, \qquad i=1,2,\ldots,k.$$

მაგრამ ჰიპოთეზის დროს $P_{1j} = P_{2j} = \cdots = P_{kj}$ და ამ სიდიდეების საერთო P_j მნიშვნელობის შესაფასებლად შეიძლება ყველა k შერჩევის გაერთიანებით მიღებული მონაცემების გამოყენება. გაერთიანებული შერჩევის მიხედვით P_j პარამეტრის შეფასების როლში შეიძლება ავიღოთ j კატეგორიის ელემენტთა ფარდობითი სიხშირე

$$P_j = \frac{n_{\bullet j}}{n}, \qquad j=1,2,\ldots,r\,. \tag{15.15}$$

რომელიც ჰიპოთეზის დროს მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებას წარმოადგენს.

თუ დაკვირვებულ n_{ij} სიდიდეებსა და მათ მოსალოდნელ მნიშვნელობებს შორის გადახრის საზომად ავიღებთ (15.3) გამოსახულებით განსაზღვრულ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას, და მივიღებთ რა მხედველობაში ერთგვაროვნების H_0 ჰიპოთეზას, აღნიშნულ ფორმულაში

ყოველი i-სათვის P_{ij} ალბათობათა ნაცვლად ჩავსვამთ მათი საერთო P_j მნიშვნელობის შეფასებას, მივიღებთ

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_i n_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{n_i n_{\bullet j}}{n}} \tag{15.16}$$

სტატისტიკას, რომელიც გამოიყენება განხილული ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შესამოწმებლად.

ფორმალურად ამ სტატისტიკას აქვს იგივე ფორმა, რომელიც ჰქონდა (15.10) ტოლობით მოცემულ სტატისტიკას, განხილულს ნიშანთა დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შემოწმების დროს, თუმცა n_{ij} სიდიდეების შინაარსი ამ ორ შემთხვევაში განსხვავებულია.

(15.10) გამოსახულებისაგან განსხვავებით (15.16) ტოლობით განსაზღვრული $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკა $n_{i\bullet}$ მარგინალურ სიხშირეთა ნაცვლად (რომლებიც შემთხვევით სიდიდეებს წარმოადგენენ), შეიცავს n_i სიდიდეებს, რომელთა მნიშვნელობები წინასწარ არის განსაზღვრული. ამიტომ, (15.12) ტოლობების გამო, 15.4 ცხრილში განლაგებულ n_{ij} სიხშირეთა მხოლოდ $rk-k$ რაოდენობაა თავისუფლად განსაზღვრული (მაშინ როცა 15.1 ცხრილში თავისუფლად განსაზღვრულ სიხშირეთა რაოდენობა $rk-1$-ის ტოლი იყო, ერთადერთი $\Sigma n_{ij}=n$ შეზღუდვის გამო). სამაგიეროდ, ამ შემთხვევაში მხოლოდ $r-1$ რაოდენობის პარამეტრია შესაფასებელი (დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის დროს შესაფასებელ პარამეტრთა რაოდენობა $(r+k-2)$-ის ტოლი იყო). ამიტომ ამ სტატისტიკას, რომელიც მიახლოებით ასევე χ^2 კანონით არის განაწილებული, ექნება იგივე თავისუფლების ხარისხი, რაც ჰქონდა პირველ პუნქტში განხილულ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას, ანუ

$$f = rk-k-(r-1) = (r-1)(k-1).$$

შევნიშნოთ ერთი არაფორმალური მსგავსება ნიშანთა შეუღლების 15.1 ცხრილსა და 15.4 ცხრილს შორის, რომელიც გარკვეული აზრით ხსნის, თუ რატომ უტარდება ამ ცხრილების ელემენტებს ერთი და იგივე გარდაქმნები, რის შედეგადაც ორივე შემთხვევაში ვიღებთ ერთი და იგივე განაწილების მქონე $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკებს, მიუხედავად შესამოწმებელ ჰიპოთეზათა და ცხრილების ელემენტთა განსხვავებული შინაარსისა.

როდესაც შერჩევათა ერთგვაროვნების ჰიპოთეზა სწორია, მაშინ მეორე ცხრილის ყოველი n_{ij} ელემენტის შეფარდება i-ური სტრიქონის ელემენტთა ჯამთან (ანუ n_i-თან) დაახლოებით ერთი და იგივე უნდა იყოს ყველა i-სათვის:

$$\frac{n_{1j}}{n_1} \approx \frac{n_{2j}}{n_2} \approx \dots \approx \frac{n_{kj}}{n_k} \approx \frac{n_{\bullet j}}{n} \approx P_j, \tag{15.17}$$

ანუ A_j კატეგორიის ელემენტთა პროპორცია ერთი და იგივე უნდა იყოს ყველა პოპულაციისათვის.

მეორეს მხრივ, როდესაც ნიშანთა დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა მართებულია, პირველი ცხრილის n_{ij} ელემენტის შეფარდება i-ური სტრიქონის ელემენტთა ჯამთან (ანუ $n_{i\bullet}$-სთან) ასევე დაახლოებით ტოლი უნდა იყოს ყოველი i-თვის

$$\frac{n_{1j}}{n_{1.}} \approx \frac{n_{2j}}{n_{2.}} \approx \cdots \approx \frac{n_{kj}}{n_{k.}} \approx \frac{n_{\bullet j}}{n}, \tag{15.18}$$

რადგან $n_{ij}/n_{i\bullet}$ არის ფარდობითი სიხშირე j კატეგორიის ელემენტებისა i კატეგორიის ელემენტთა შორის და დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის დროს ეს პირობითი სიხშირეები არ უნდა იყოს დამოკიდებული იმაზე, თუ A ნიშნის რომელი კატეგორიის მიხედვით ვიანგარიშებთ ამ პირობით სიხშირეებს. ამრიგად A და B ნიშნების დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის დროს 15.1 ცხრილის ელემენტები იგივე თანაფარდობებს აკმაყოფილებენ, რასაც 15.4 ცხრილის ელემენტები ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის სისწორის შემთხვევაში და სწორედ (15.17), (15.18) თანაფარდობები ედება საფუძვლად შესაბამისი $\hat{\chi}^2$ კრიტერიუმების აგებას.

ნულოვანი ჰიპოთეზა: $H_0 : P_{1j} = P_{2j} = \cdots = P_{kj}, \quad j=1,2,\ldots,r$	
ალტერნატიული ჰიპოთეზა: H_a : H_0 არ არის მართებული	
სტატისტიკის მნიშვნელობა	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_i n_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{n_i n_{\bullet j}}{n}}$
უარყოფის არე	$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,(k-1)(r-1)}$
ტესტი გამოიყენება როდესაც $\frac{n_i n_{\bullet j}}{n} \geq 5$ ყველა i-სა და j-სათვის	

მაგალითი 15.3. ვთქვათ სამი სხვადასხვა საწარმო უშვებს ერთი და იგივე ტიპის პროდუქციას. გვაინტერესებს განვსაზღვროთ, არის თუ არა განსხვავება ამ საწარმოთა მიერ გამოშვებული ნაწარმის ხარისხში. ინსპექციის მიზნით თითოეული საწარმოდან აღებულია შესაბამისად 250, 200 და 150 ნაწარმი. ყოველი საწარმოს პროდუქცია კატეგორიზირებულია ერთი და იგივე ნიშნით, ყურადღება ექცევა მხოლოდ იმას, უვარგისია მოცემული ნაწარმი თუ გამოსადეგი. ქვემოთ მოყვანილ ნიშანთა შეუღლების 15.5 ცხრილში თავმოყრილია აღნიშნული ნიშნით კლასიფიცირებული მონაცემები. გვაძლევს თუ არა ეს მონაცემები საფუძველს უარვყოთ ჰიპოთეზა აღნიშნულ შერჩევათა ერთგვაროვნების შესახებ?

ცხრილი 15.5.

	გამოსადეგი	უვარგისი	სულ
I საწარმო	240 (297.5)	10 (12.5)	250
II საწარმო	191 (190.0)	9 (10.0)	200
III საწარმო	139 (142.5)	11 (7.5)	150
სულ	570	30	600

აქაც ფრჩხილებში მოთავსებული რიცხვები წარმოადგენენ შესაბამისი პროდუქციის მოსალოდნელი რაოდენობის შეფასებას.

ამოხსნა.

H_0 : შერჩევები ერთგვაროვანია,

H_A : რომელიმე ორი შერჩევა მაინც ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

სტატისტიკის მნიშვნელობა:

$$\hat{\chi}^2 = \frac{(10-12.5)^2}{12.5} + \frac{(240-237.5)^2}{237.5} + \cdots + \frac{(139-142.5)^2}{142.5} = 2.36.$$

მნიშვნელოვნობის დონე: α=0.1.

კრიტიკული მნიშვნელობა: ამ მაგალითში k=3, r=2 და $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის თავისუფლების ხარისხი f=(3–1)(2–1)=2. ამიტომ კრიტიკული მნიშვნელობაა $\chi^2_{2,0.1}$=4.60517.

დასკვნა: $\hat{\chi}^2$=2.36<4.60517 და აღნიშნული მონაცემები არ გვაძლევს H_0 ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველს.

* * *

მოვიყვანოთ იმ ძირითადი ლიტერატურის სია, რომლებიდანაც ვსარგებლობდით ამ თავის მასალის გადმოცემისას: [39], [52], [64], [72], [79].

დასკვნები

ამ თავში შესწავლილია ერთი პოპულაციის ორი სხვადასხვა ნიშნის დამოკიდებულების და რამდენიმე პოპულაციის ერთგვაროვნების საკითხები.

ამ თავის პირველ პარაგრაფში აღწერილია გადაწყვეტილების მიღების წესი, რომლის მიხედვით ხდება ერთი პოპულაციის ორი ნიშნის დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის

შემოწმება. გადაწყვეტილების მიღების წესი ეყრდნობა $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას, რომლის ზღვარითი განაწილება თავისუფალია განაწილებისაგან ნულოვანი ჰიპოთეზის დროს არის χ^2-განაწილება $(k-1)(r-1)$ თავისუფლების ხარისხით, სადაც k და r ამ ნიშანთა შესაბამისი კლასების რაოდენობაა. განხილული მეთოდის გამოყენება შეიძლება ორი X და Y შემთხვევითი სიდიდის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად (X,Y) ვექტორზე დამოუკიდებელი დაკვირვებების საშუალებით, როგორც უწყვეტი, ისევე დისკრეტული, როგორც ცნობილი, ისევე უცნობი ჰიპოთეტური ერთობლივი განაწილების ფუნქციის შემთხვევაში.

მეორე პარაგრაფში მოწმდება ჰიპოთეზა რამდენიმე შერჩევის ერთგვაროვნების შესახებ. აქაც, როგორც დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის დროს, შესამოწმებელ ჰიპოთეზათა და მონაცემთა განსხვავებული შინაარსის მიუხედავად, გადაწყვეტილების მიღების წესი ეყრდნობა $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკას, რომელიც ასიმპტოტურად χ^2 კანონით არის განაწილებული ისევ $(k-1)(r-1)$-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით, ოღონდ ამ შემთხვევაში k წარმოადგენს შერჩევათა რაოდენობას, ხოლო r არის კლასების რაოდენობა, რომლებადაც იყოფა ყოველი შერჩევა ერთი და იგივე ნიშნით. ჰიპოთეზათა შემოწმების წესი აღწერილია კონკრეტულ მაგალითებზე.

სავარჯიშოები

15.1. მოცემულია 1725 მოსწავლის კლასიფიკაცია (1) ტანსაცმლის ხარისხისა და (2) გონებრივი უნარის მიხედვით. მეორე ნიშნის შემთხვევაში მიღებული იყო ასეთი გრადაცია A – გონებრივად ჩამორჩენილი, B – ნელი და ჩლუნგი, C – ჩლუნგი, D – ნელი მაგრამ ჭკვიანი, E – საკმაოდ ჭკვიანი, F – აშკარად უნარიანი, G – ფრიად უნარიანი. განსაზღვროთ, არის თუ არა ჩაცმულობის ხარისხი დამოკიდებული გონებრივ უნარზე.

როგორ იცვამს	უნარი						
	AდაB	C	D	E	F	G	ჯამი
ძალიან კარგად	33	48	113	209	194	39	636
კარგად	41	100	202	255	138	15	751
არა უშავს	39	58	70	61	33	4	265
ცუდად	17	13	22	10	10	1	73
ჯამი	130	219	407	535	375	59	1725

15.2. ცხრილში მოყვანილია 818 შემთხვევა, რომლებიც კლასიფიცირებულია ორი ნიშნის მიხედვით (1) აცრილია თუ არა ქოლერის წინააღმდეგ (2) დაავადდა თუ არა.

	არადაავადებულნი	დაავადებულნი	ჯამი
აცრილები	276	3	279
არააცრილები	473	66	539
ჯამი	749	69	818

განსაზღვრეთ ამ მონაცემების მიხედვით, ეფექტურია თუ არა აცრა ავადმყოფობის გავრცელების წინააღმდეგ.

15.3. შევადაროთ მკურნალობის ორი მეთოდი. 80 ავადმყოფიდან 40 მკურნალობს სპეციფიკური საშუალებით, 40 კი კონსერვატორულად. მკურნალობის შედეგები გაყოფილია 3 კლასად: სწრაფი განკურნება, ნელი განკურნება, უშედეგო მკურნალობა. შედეგები თავმოყრილია ცხრილში.

მკურნალობის შედეგი	მ კ უ რ ნ ა ლ ო ბ ა		ჯამი
	კონსერვატორული	სპეციფიკური	
სწრაფი განკურნება	14	22	36
ნელი განკურნება	18	16	34
უშედეგო მკურნალობა	8	2	10
ჯამი	40	40	80

განსაზღვრეთ, მოქმედებს თუ არა ახალი მეთოდით მკურნალობა მკურნალობის შედეგზე.

15.4. ვთქვათ გვაინტერესებს განვსაზღვროთ არის თუ არა არსებითი განსხვავება რეგულარული სატელევიზიო პროგრამების მაყურებელთა შორის მათი სქესის მიხედვით. აღებულია შემთხვევითი შერჩევა და ყოველ პიროვნებას ეკითხებიან თუ რომელ პროგრამას ანიჭებს ის უპირატესობას. გამოკითხვის შედეგები მოყვანილია ცხრილში

სასურველი სატელევიზიო პროგრამა	მაყურებელთა სქესი		ჯამი
	კაცები	ქალები	
(1) ვესტერნი	32	18	50
(2) ტრილერი	17	13	30
(3) დრამა	27	33	60
(4) კომედია	13	7	20
(5) ვარიეტე	24	16	40
ჯამი	113	87	200

განსაზღვრეთ, ეწინააღმდეგება თუ არა მოყვანილი მონაცემები ნულოვან ჰიპოთეზას სატელევიზიო პროგრამების მაყურებელთა სქესისაგან დამოუკიდებლობის შესახებ.

15.5. არსებობს მრავალი „ინდიკატორი", რომლებსაც ინვესტორები იყენებენ საფონდო ბაზრის ქცევის განჭვრეტის მიზნით. ერთ-ერთ ასეთ ინდიკატორს წარმოადგენს ე.წ. „იანვრის ინდიკატორი". ზოგიერთ ინვესტორს სჯერა, რომ თუ საბაზრო ფასები აიწევს იანვარში, მაშინ ფასების ზრდის ტენდენცია გაგრძელდება მთელი წლის განმავლობაში და პირიქით. თუ იანვარში ფასები დაეცა, მაშინ ასეთი ტენდენცია გაგრძელდება წელიწადის დარჩენილ დროშიც. ქვემოთ მოგვყავს მონაცემები მიღებული ამერიკის საფონდო ბაზრის ქცევაზე 72 წლის განმავლობაში (1916 და 1987 წლის ჩათვლით) დაკვირვებების შედეგად:

	იანვარი	
თებერვალი-დეკემბერი	აწევა	დაწევა
აწევა	33	13
დაწევა	13	13

a) აღწერეთ ამ ამოცანის შესაბამისი ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები.

b) იპოვეთ სიხშირეთა მოსალოდნელი მნიშვნელობები H_0 ჰიპოთეზის დროს. ცხრილის რომელ უჯრაში აღემატება მოსალოდნელი სიხშირე რეალურს და პირიქით, როდის არის მოსალოდნელი სიხშირე უფრო მცირე.

c) შეამოწმეთ H_0 ჰიპოთეზა. იანგარიშეთ $\hat{\chi}^2$ სტატისტიკის მნიშვნელობა. განსაზღვრეთ მისი თავისუფლების ხარისხი და კრიტიკული მნიშვნელობა. რა დასკვნის გაკეთება შეიძლება?

d) დაწერეთ მოკლე ახსნა, თქვენი დაკვირვებების ანალიზის საფუძველზე, თუ რას აჩვენებს „იანვრის ინდიკატორი".

15.6. მარკეტინგის მენეჯერს სურს განსაზღვროს არის თუ არა არსებითი განსხვავება რეგიონებს შორის, გარკვეული ახალი პროდუქტის მოხმარების თვალსაზრისით. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემები მიღებულია ამ პროდუქტის მომხმარებელთა შერჩევითი მეთოდით გამოკითხვის შედეგად.

მოხმარების ხარისხი	ქალაქი				ჯამი
	ბათუმი	ქუთაისი	თბილისი	თელავი	
(1) დაბალი	22	35	0	5	62
(2) ზომიერი	84	55	8	24	171
(3) მაღალი	25	17	22	12	76
ჯამი	131	107	30	41	309

ნულოვანი ჰიპოთეზა ნიშნავს ქალაქისაგან პროდუქტის მოხმარების ხარისხის დამოუკიდებლობას.

a) განსაზღვრეთ შერჩევის მოსალოდნელი შედეგები.

b) იანგარიშეთ χ^2 სტატისტიკა. განსაზღვრეთ ძირითადი სტატისტიკის თავისუფლების ხარისხი.

c) ვთქვათ, მენეჯერი დასაშვებად მიიჩნევს, რომ 0.01 ალბათობით შეიძლება შეცდეს და ჩათვალოს, რომ ახალი პროდუქტის მოხმარების ხარისხი იცვლება ქალაქიდან ქალაქამდე, როდესაც ეს სინამდვილეში ასე არაა. განსაზღვრეთ ძირითადი სტატისტიკის კრიტიკული მნიშვნელობა. განსაზღვრეთ, უნდა მივიღოთ, თუ უკუვაგდოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა.

16

რეგრესია და კორელაცია

ეკონომიკაში, როგორც მრავალ სხვა დარგში ხშირად აუცილებელი ხდება ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულების შესწავლა. ორ ცვლადს შორის კავშირის ყველაზე მკაფიო მაგალითია ფუნქციონალური კავშირი, როდესაც ერთი ცვლადის (არგუმენტის) რაიმე მნიშვნელობას შეესაბამება მეორე ცვლადის (ფუნქციის) ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა. ფუნქციების ცნობილი და მნიშვნელოვანი მაგალითებია:

- $y=a+bx$, წრფივი ფუნქცია;
- $y=a+bx+cx^2$, კვადრატული ფუნქცია;
- $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, პოლინომური ფუნქცია.

მათემატიკურ სტატისტიკაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ე.წ. სტოქასტურ დამოკიდებულებას ორ ცვლადს შორის, ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის. ეკონომიკაში ტიპობრივია სწორედ ასეთი დამოკიდებულება. მაგალითად, შრომის ნაყოფიერებასა და წარმოების ტექნიკურ დონეს შორის, შემოსავალსა და საქონლის მოხმარებას შორის, არსებობს სწორედ სტოქასტური კავშირი. როგორც, ჩვენ უკვე მეექვსე თავში გავეცანით, ასეთი დამოკიდებულება აღიწერება ორი შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების ფუნქციის, განაწილების კანონის ან განაწილების სიმკვრივის საშუალებით. ეს ფუნქციები გვაძლევენ ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის კავშირის, დამოკიდებულების ამომწურავ დახასიათებას. მაგრამ, ხშირად მოხერხებულია გამოვიყენოთ უფრო მარტივი ფუნქციები ან რიცხვითი კოეფიციენტები. ამ ამოცანას ემსახურება, სწორედ, რეგრესია და კორელაცია.

კორელაციის კოეფიციენტი. განვიხილოთ ორი შემთხვევითი სიდიდე, X და Y. სიდიდეს, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) \tag{16.1}$$

ეწოდება კოვარიაცია (X და Y სიდიდეებს შორის). კორელაციის კოეფიციენტი განისაზღვრება ფორმულით

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{E[(X-EX)(Y-EY)]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{16.2}$$

(ეს სიდიდეები ჩვენ შემოვიყვანეთ მე-6 თავში).

(16.1) და (16.2) ფორმულებით განსაზღვრული კოვარიაცია და კორელაციის კოეფიციენტი წარმოადგენენ თეორიულ მახასიათებლებს. კოვარიაციასა და კორელაციის კოეფიციენტს და მათ სტატისტიკურ შეფასებებს განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება რეგრესიულ ანალიზში.

ვთქვათ, (X,Y) შემთხვევითი სიდიდეების შესაძლო მნიშვნელობათა ერთობლიობიდან ამოღებულია n მოცულობის შერჩევა

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \ldots,\ (x_n,y_n). \tag{16.3}$$

შერჩევის ელემენტებია რიცხვთა წყვილები. თუ X და Y ცვლადებს შორის კავშირის შესწავლას ვაპირებთ, აუცილებლად უნდა იქნეს დაკვირვებული წყვილები – ის მნიშვნელობები, რომელსაც ერთობლივ (ერთდროულად) ღებულობენ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები. შერჩევის მიხედვით ჩვენ მივიღებთ კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტის შეფასებებს (ემპირიულ მნიშვნელობას, შერჩევით მნიშვნელობას). (16.1) და (16.2) ფორმულების ანალოგიურად გვექნება გამოსახულებები:

$$\tilde{\operatorname{cov}}(X,Y)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}), \qquad (16.4)$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}, \qquad (16.5)$$

სადაც $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$.

შემდგომში, უპირატესად, გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს

$$SS_{XY}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}),\ SS_X=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\ SS_Y=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2. \qquad (16.6)$$

(SS პირველი ასოებია ინგლისური სიტყვებისა sum of squares – კვადრატების ჯამები).

ასე, რომ გვექნება

$$\tilde{\operatorname{cov}}(X,Y)=\frac{SS_{XY}}{n-1}, \qquad (16.7)$$

$$r=\frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}}, \qquad (16.8)$$

(16.8) ფორმულით განსაზღვრულ შერჩევით კორელაციის კოეფიციენტს თეორიული ρ კოეფიციენტის ანალოგიური თვისებები აქვს.

მაგალითი **16.1.** განვიხილოთ 10 კომივოიაჟერი (გამყიდველი), რომელთა მუშაობის შედეგები ასახულია 16.1 ცხრილში, რომელშიც მოყვანილია გაყიდული საქონელის (Y) დამოკიდებულება საქონლის შეთავაზებათა რაოდენობაზე (X).

დავხაზოთ გაბნევის დიაგრამა, ანუ აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ საქონლის შეთავაზებათა რაოდენობა, ხოლო ორდინატთა ღერძზე კი გაყიდული საქონლის რაოდენობა და კოორდინატთა სიბრტყეზე დავსვათ დაკვირვებული (x_i,y_i), $i=1,2,...,10$, წყვილების შესაბამისი წერტილები (იხ. ნახ. 16.1).

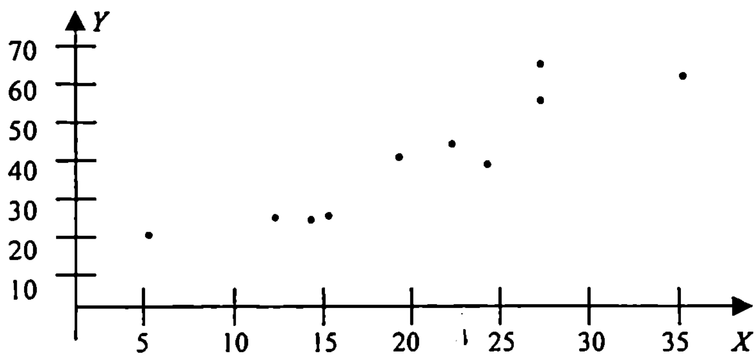
გამოვთვალოთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი

$$r=\frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}}=\frac{n(\Sigma xy)-(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n(\Sigma x^2)-(\Sigma x)^2][n(\Sigma y^2)-(\Sigma y)^2]}}=$$

$$= \frac{10\times 9.661 - 199\times 408}{\sqrt{[10\times 4681 - (199)^2][10\times 20510 - (408)^2]}} = 0.924.$$

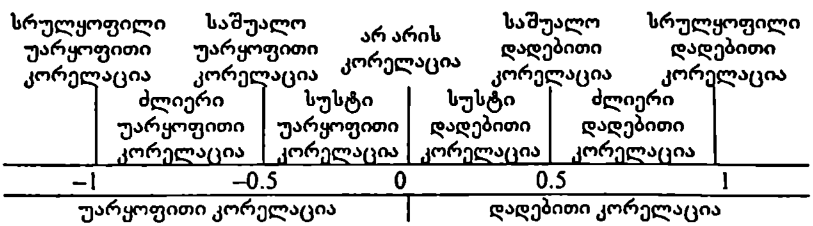
ცხრილი 16.1

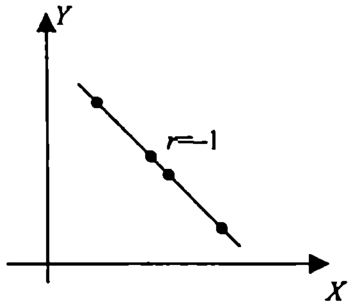
გამყიდველი	X	Y
1	14	28
2	35	66
3	22	38
4	29	70
5	6	22
6	15	27
7	17	26
8	20	47
9	12	16
10	29	68
ჯამი	199	408



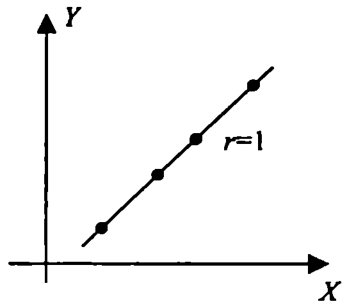
ნახ. 16.1.

ქვემოთ მოცემულია კორელაციის ხარისხის სიტყვიერი დახასიათებისათვის მიღებული ტერმინოლოგია (და შესაბამისი დიაგრამები):

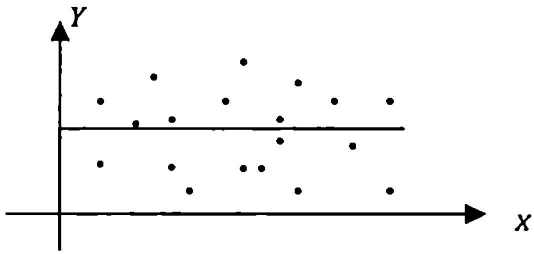




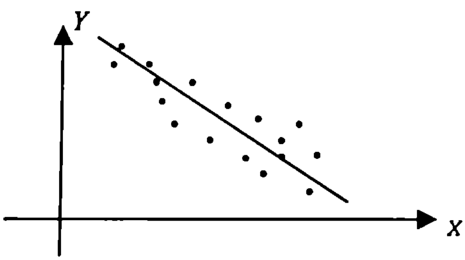
სრულყოფილი უარყოფითი
კორელაცია



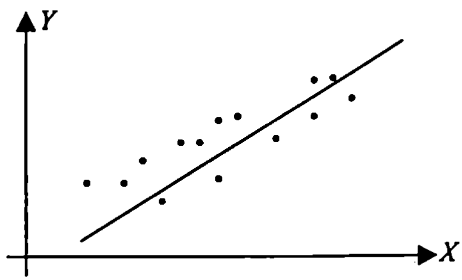
სრულყოფილი დადებითი
კორელაცია



არ არის კორელაცია



ძლიერი უარყოფითი კორელაცია



ძლიერი დადებითი კორელაცია

ნახ. 16.2.

განხილულ მაგალითში ამ ტერმინოლოგიის მიხედვით საქმე გვაქვს ძლიერ დადებით კორელაციასთან, რაც მიუთითებს ძლიერ კავშირზე საქონლის შეთავაზების რაოდენობასა და გაყიდული საქონლის რაოდენობას შორის.

დასკვნები კორელაციის კოეფიციენტის შესახებ. როცა კორელაციის კოეფიციენტი უცნობია, შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტის r-ის საშუალებით შეიძლება გაკეთდეს სტატისტიკური დასკვნები მისი მნიშვნელობის შესახებ – აიგოს ნდობის ინტერვალი ან შემოწმდეს ჰიპოთეზა კორელაციის კოეფიციენტის რაიმე

რიცხვთან ტოლობის შესახებ. ზოგადად ეს ამოცანა საკმაოდ რთულია და ჩვენ აქ განვიხილავთ მხოლოდ შემდეგი ჰიპოთეზის შემოწმების საკითხს:

$H_0 : \rho = 0,$
$H_1 : \rho \neq 0.$

თუ (X,Y) შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილება ნორმალურია, მაშინ H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას სტატისტიკა

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

განაწილებულია სტიუდენტის კანონით n–2 თავისუფლების ხარისხით. ამგვარად სტიუდენტის განაწილების ცხრილის საშუალებით შეიძლება შემოწმდეს ზემოთ მოყვანილი ჰიპოთეზა.

სახელდობრ, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონით, თუ

$$|t| > t_{n-2,1-\alpha/2} .$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში, H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია. ამავე განაწილების საშუალებით აიგება ნდობის ინტერვალიც კორელაციის კოეფიციენტისათვის.

მაგალითი 16.2. (მაგალითი 16.1.-ის გაგრძელება). დავსვათ შემდეგი კითხვა: სამართლიანია თუ არა გამყიდველთა მთელი პოპულაციისათვის ის დასკვნა, რომ საქონლის შეთავაზებათა და გაყიდვათა რაოდენობებს შორის არსებობს კავშირი? ასეთ ვარაუდს ჩვენ გამოვთქვამთ იმაზე დაყრდნობით, რომ r=0.924 და r^2=0.854)

ამის დასადგენად შევამოწმოთ ჰიპოთეზა

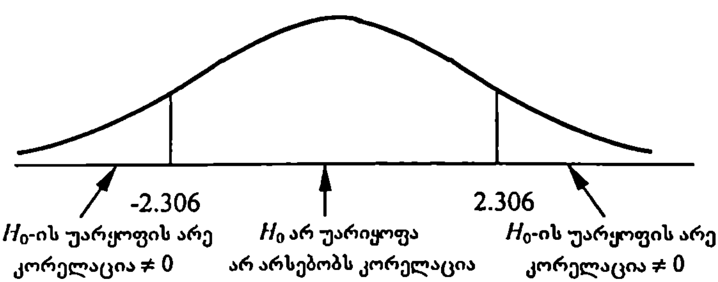
$H_0 : \rho=0$

ალტერნატივის წინააღმდეგ

$H_1 : \rho\neq0$

მნიშვნელოვნობის დონედ დავაფიქსიროთ α=0.05, თავისუფლების ხარისხია n–2=10–2=8. სტიუდენტის განაწილების ცხრილის მეშვეობით მოვძებნოთ $t_{8,0.975}$=2.306. გამოვთვალოთ t სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.924\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0.924^2}} = 6.835.$$



ნახ.16.3

რადგან $|t|=6.835>2.306$, ამიტომ $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით H_0-ს უარვყოფთ, ანუ, სხვა სიტყვებით, პოპულაციის კორელაცია არ არის 0. აქედან გაყიდვების მენეჯერმა მიიღო შემდეგი ინფორმაცია: საქონლის შეთავაზების რაოდენობას და გაყიდვათა რაოდენობას შორის არსებობს კავშირი (კორელაცია).

გავიხსენოთ, რომ ვარაუდი იმის შესახებ, რომ ასეთი კავშირი არსებობდა მთელ პოპულაციაში, ეყრდნობოდა ამოკრეფას, რომელიც მხოლოდ 10 გამყიდველს მოიცავდა. ამ შემთხვევაში კორელაციის კოეფიციენტი $r=0.924$ საკმაოდ დიდი იყო. მაგრამ ამოკრეფის მოცულობის ($n=10$) სიმცირის გამო ამ დასკვნის მთელ პოპულაციაზე გადატანა მოითხოვს დამატებით დასაბუთებას. სწორედ ამ დასაბუთებას იძლევა t კრიტერიუმის გამოყენება შესაბამისი ჰიპოთეზის შემოწმებისათვის.

მარტივი წრფივი რეგრესია. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. როგორც უკვე აღვნიშნეთ Y შემთხვევითი სიდიდის დამოკიდებულება X შემთხვევითი სიდიდისაგან შეიძლება აღიწეროს დეტერმინისტული ფუნქციით

$$Y=\varphi(X).$$

ამ კავშირის უმარტივესი ფორმაა

$$Y= B_0+B_1X. \tag{16.9}$$

შესაძლოა კავშირის სხვა ფორმებიც. მაგალითად

$$Y=B_0+B_1X+B_2X^2,\ Y=A\,e^{BX},\ Y=AX^B,\ Y=A+BX^{-1}$$

და ა.შ.

ტრადიციულ ეკონომიკურ თეორიათა დიდ ნაწილში იგულისხმებოდა საზოგადოდ ზუსტი ფუნქციონალური კავშირების შესწავლა ცვლადებს შორის. მაგრამ ეკონომიკური მონაცემების ელემენტარული გაცნობაც კი გვიჩვენებს, რომ ცვლადებს შორის კავშირი უმეტეს შემთხვევაში არ არის დეტერმინისტული. მაგალითად, არ უნდა მოველოდეთ, რომ ერთი და იგივე შემოსავლის (X) მქონე ოჯახების სამომხმარებლო ხარჯებიც (Y) ერთნაირი იქნება. ცალკეული ოჯახები მოიხმარენ უფრო მეტს ვიდრე სხვები და პირიქით. ოღონდ მოსალოდნელია, რომ X სიდიდის შემოსავლის მქონე ოჯახების სამომხმარებლო ხარჯები დაჯგუფდება X-ზე დამოკიდებულ რაიმე მნიშვნელობის სიახლოვეში. ეს მოსაზრება გვთავაზობს დეტერმინისტული დამოკიდებულობის განზოგადოებას შემდეგი ფორმით

$$Y = \varphi(X)+\varepsilon,$$

სადაც ε არის რაიმე შემთხვევითი სიდიდე, $E\varepsilon=0$, $D\varepsilon=\sigma^2>0$. ამ კავშირის ყველაზე მარტივი ფორმაა ე.წ. წრფივი რეგრესიული კავშირი, როდესაც

$$Y = B_0+B_1X+\varepsilon \tag{16.10}$$

და დამატებით იგულისხმება, რომ ε და X დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

კერძოდ, (16.10) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ X-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის

$$Y(x) = B_0+B_1x+\varepsilon \tag{16.11}$$

წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის ლოდინი და დისპერსია გამოითვლება ფორმულებით:

$$E(Y|X=x)= B_0+B_1x\ , \qquad D(Y|X=x)= \sigma^2.$$

ამრიგად, წრფივი რეგრესიული მოდელის ფარგლებში იგულისხმება, რომ Y-ის რეგრესია X-ზე წრფივია

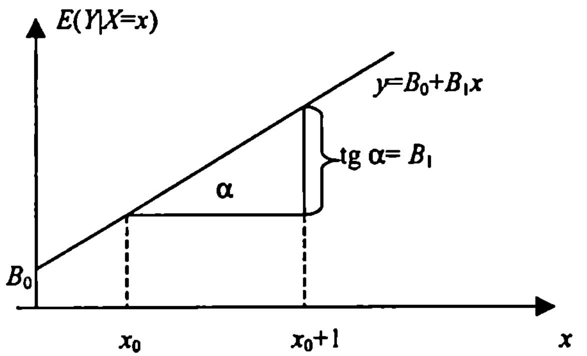
$$E(Y|X) = B_0+B_1X \tag{16.12}$$

და, შესაბამისად $y = B_0+B_1x$ წრფეს რეგრესიის წრფე, B_0 და B_1 კოეფიციენტებს – რეგრესიის კოეფიციენტები, ხოლო ε-ს – შემთხვევითი გადახრა ეწოდება.

შემდგომში ჩვენს მიერ პოსტულირებული იქნება მარტივი წრფივი რეგრესიის (16.10) მოდელი. X ცვლადს უწოდებენ დამოუკიდებელ (ამხსნელ) ცვლადს ანდა პრედიქტორს, ხოლო Y-ს კი – დამოკიდებულ (მოპასუხე) ცვლადს.

B_1 კოეფიციენტს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: ამხსნელი X ცვლადის ერთი ერთეულით ცვლილება იწვევს დამოკიდებული Y ცვლადის ცვლილებას საშუალოდ B_1 სიდიდით. B_0 კოეფიციენტს თანაკვეთას უწოდებენ, რადგან ის წარმოადგენს რეგრესიის წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილს.

ვთქვათ, (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n) დამოუკიდებელი დაკვირვებებია (X,Y) შემთხვევით სიდიდეთა წყვილზე. იმ შემთხვევაში, როდესაც Y და X შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს (16.9) სახის წრფივი დეტერმინისტული კავშირი, მაშინ დაკვირვებული წყვილები განლაგდება $y=B_0+B_1x$ წრფეზე,



ნახ.16.4

$$y_i=B_0+B_1x_i, \qquad i=1,2, .., n \tag{16.13}$$

და B_0 და B_1 კოეფიციენტების მოძებნას იოლად მოვახერხებდით. ავიღებდით ორ ნებისმიერ წერტილს და მოვძებნიდით ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას. იმ შემთხვევაში, როდესაც Y და X შემთხვევით სიდიდეებს შორის კავშირი აღიწერება (16.10) მოდელით, მაშინ ნათელია, რომ დაკვირვებული წყვილები აღარ განლაგდება B_0+B_1x წრფეზე, არამედ გაბნეული იქნება ამ, საზოგადოდ ჩვენთვის უცნობი, B_0+B_1x წრფის მიმართ.

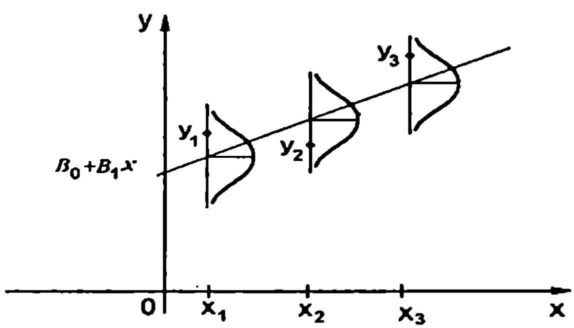
ჩვენი შემდგომი ამოცანა იქნება დაკვირვებული წყვილების მეშვეობით ავაგოთ უცნობი B_0, B_1 კოეფიციენტებისა და σ^2 დისპერსიის შეფასებები. პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად X ცვლადი არ არის შემთხვევითი. მაგრამ მაშინაც კი როცა ის შემთხვევითია, იგულისხმება, რომ X-ების მნიშვნელობები ზუსტადაა ცნობილი მანამდე, სანამ დავაკვირდებით Y-ების შესაბამის მნიშვნელობებს, ამიტომ X-ის მნიშვნელობები განიხილება როგორც ზუსტი რიცხვები და გადახრები მიეწერება მხოლოდ Y ცვლადს. ამიტომ შემდგომში Y ცვლადის დაკვირვებულ მნიშვნელობებს აღვნიშნავთ ასოთმთავრული ასოებით, ხოლო X-ისას პატარა ასოებით; ამავე დროს, როგორც ადრე შევთანხმდით, როდესაც საუბარი იქნება რაიმე სტატისტიკების განაწილებაზე, Y_i, $i=1,2,...,n$ ცვლადების ჩათვლით შემთხვევით სიდიდეებად, ხოლო სტატისტიკების დაკვირვებული მნიშვნელობების გამოსათვლელად, Y_i-ს ქვეშ იგულისხმება Y ცვლადის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

გაკეთებული შენიშვნების შედეგად, ბუნებრივია, ამოცანა აღვწეროთ ასე: მოცემულია (x_i,Y_i), $i=1,2,...,n$. წყვილები, რომელთა შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა

$$Y_i=B_0+B_1x_i+\varepsilon_i, \quad i=1,2,...,n, \tag{16.14}$$

სადაც ε_i სწორედ ის შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განაპირობებს წრფიდან გაბნევას. ვუშვებთ, რომ ε_i განაწილებულია ნორმალურად ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით და დისპერსიით, $\sigma^2>0$, რომელიც უცნობია; ვუშვებთ, აგრეთვე, რომ ε_i და ε_j, $i\neq j$ ურთიერთდამოუკიდებელია. B_0, B_1 საძიებელი წრფის ჭეშმარიტი (თეორიული) კოეფიციენტებია.

ჩვენი მიზანია შევაფასოთ B_0, B_1 კოეფიციენტები. შეფასებები აღვნიშნოთ ასოებით b_0 და b_1, შესაბამისად.



ნახ.16.5

b_0 და b_1 შეფასებების მოძებნა ხდება ე.წ. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. იგი დამუშავებული იყო ლაგრანჟისა და გაუსის მიერ XIX საუკუნის დასაწყისში. ამ მეთოდის თანახმად b_0 და b_1 შეფასებების აგება წარმოებს შემდეგი გამოსახულების მინიმიზაციით:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-b_0-b_1x_i)^2 \to \min . \tag{16.15}$$

ე.ი. ვეძებთ ისეთ $y=b_0+b_1x$ წრფეს, რომლიდანაც Y-ის ვერტიკალური გადახრების კვადრატების ჯამი $\sum e_i^2$, სადაც $e_i=Y_i-b_0-b_1x_i$, უმცირესია (ყველა სხვა წრფესთან შედარებით).

მინიმუმის მოსაძებნად გავაწარმოოთ (16.15) b_0 და b_1 ცვლადებით და წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს (მინიმუმის აუცილებელი პირობა). მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 x_i = 0.\end{aligned} \tag{16.16}$$

შევკვეცოთ ორზე და ავჯამოთ წევრ-წევრად, შემდეგ ცნობილი და უცნობი წევრები დავალაგოთ ტოლობის სხვადასხვა მხარეს. მივიღებთ:

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{16.17}$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i. \tag{16.18}$$

მივიღეთ ორი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა, ორი უცნობით (b_0 და b_1 უცნობებია). ამ სისტემას ეწოდება ნორმალურ განტოლებათა სისტემა. ამოვხსნათ ეს სისტემა შეკრება-გამოკლების ხერხით.

$$b_1\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = n\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

ამგვარად,

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{16.19}$$

და

$$b_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - b_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{16.20}$$

იგულისხმება, რომ (16.20)-ში ჩასმულია b_1-ის გამოსახულება (16.19)-დან. ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ b_1-ის გამოსახულება (16.19) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}. \tag{16.21}$$

ადრე შემოღებულ აღნიშვნებში (იხ. (16.6)) (16.21) ფორმულა გადაიწერება შემდეგი ფორმით

$$b_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X}. \qquad (16.22)$$

$\hat{Y} = b_0+b_1x$ წრფეს ეწოდება რეგრესიის წრფის შეფასება, ან უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული წრფე. თუ ამ წრფის განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ დაკვირვებულ $x_1,x_2,...,x_n$ მნიშვნელობებს, შესაბამის $\hat{Y}_1=b_0+b_1x_1$, ... , $\hat{Y}_n=b_0+b_1x_n$ მნიშვნელობებს ეწოდება Y ცვლადის პროგნოზირებული მნიშვნელობები, ხოლო $e_1=Y_1-\hat{Y}_1$, ... , $e_n=Y_n-\hat{Y}_n$ სიდიდეებს კი – ნაშთები.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - (b_0 + b_1 x_i)\right]^2 \qquad (16.23)$$

სიდიდეს ეწოდება კვადრატების ნარჩენი ჯამი (ნაშთთა კვადრატების ჯამი). ის ხშირად აღინიშნება ასოებით SSE ინგლისური ფრაზის "sum of square for eror" სიტყვების პირველი ასოების მიხედვით ($SSE=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$). მარტივი გარდაქმნის შემდეგ (16.23) შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$SSE=SS_Y - \frac{SS_{XY}^2}{SS_X}. \qquad (16.24)$$

ცხადია, რომ $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ წარმოადგენს $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ -ის გარკვეულ შეფასებას. ამ სიდიდეს დიდი მნიშვნელობა აქვს რეგრესიის წრფის დასახასიათებლად.

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ შეფასებული რეგრესიის წრფის განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ასე

$$y= \overline{Y} +b_1(x-\overline{x}). \qquad (16.25)$$

ვგულისხმობთ, რომ ამ განტოლებაში შეიძლება ჩაისვას x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობა დაკვირვებული x_i, $i=1,2,..,n$ სიდიდეების ცვალებადობის ინტერვალიდან, ე.ი. $(x_{(1)},x_{(n)})$ ინტერვალიდან, სადაც $x_{(1)}=\min(x_1,x_2,..,x_n)$, $x_{(n)}=\max(x_1,x_2,..,x_n)$. x ცვლადს ხშირად უწოდებენ ამხსნელ (განმმარტავ) ცვლადს. მისი ჩასმა რეგრესიის განტოლებაში ახსნის Y ცვლადის რაღაც ნაწილს, რაღაც ნაწილი Y-ის ცვლილებისა კი აუხსნელი დარჩება.

შევნიშნოთ რეგრესიის წრფის შეფასების შემდეგი ორი თვისება:

1. ეს წრფე გადის $(\overline{x},\overline{Y})$ წერტილზე.
2. $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)=0$.

თუ ამავე შერჩევის მონაცემების საშუალებით განვსაზღვრავთ X-ის y-ზე რეგრესიის წრფეს, მივიღებთ ასეთ განტოლებას

$$\hat{X} = \overline{X} + b_1^{'}(y-\overline{y}), \qquad (16.26)$$

სადაც $b_1^{'} = \frac{SS_{XY}}{SS_Y}$. (აქ X ითვლება შემთხვევით სიდიდედ, y კი – ამხსნელ ცვლადად).

უნდა გავითვალისწინოთ, რომ მოდელი, რომელიც (16.14) ფორმულითაა მოცემული გულისხმობს, რომ გაბნევის დიაგრამაზე წერტილების გაბნევა განპირობებულია Y ცვლადის მნიშვნელობათა გაბნევით რეგრესიის მრუდიდან. x ცვლადის მნიშვნლობები განიხილება ზუსტ (დეტერმინისტულ) მნიშვნელობებად. დაშვება, რომ ჭეშმარიტი გადახრა ε_i ნორმალურად არის განაწილებული, თავისთავად, აუცილებელი არაა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებისათვის, მაგრამ ეს დაშვება უაღრესად მნიშვნელოვანია სტატისტიკური დასკვნების მისაღებად.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ b_0 და b_1 კოეფიციენტები განაწილებული არიან ნორმალურად

$$Eb_0=B_0, \qquad Eb_1=B_1, \tag{16.27}$$

მათემატიკური ლოდინებით

$$\sigma_{b_0}^2 = Db_0 = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{16.28}$$

და შესაბამისად

$$\sigma_{b_1}^2 = Db_1 = \sigma^2 \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{16.29}$$

დისპერსიებით.

b_0 და b_1 შეფასებათა საშუალოები და დისპერსიები გამოითვლება ამ შეფასებათა (16.19) და (16.20) გამოსახულებებიდან, იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ დაკვირვებული Y_i მნიშვნელობები დამოუკიდებელია, ნორმალურადაა განაწილებული, $EY_i = B_0+B_1x_i$ და $DY_i=\sigma^2$. ნათელია, რომ

$$\frac{b_0 - B_0}{\sigma_{b_0}} \sim N(0,1), \qquad \frac{b_1 - B_1}{\sigma_{b_1}} \sim N(0,1).$$

მაგრამ ეს ორი სტატისტიკა შეიცავს უცნობ, σ^2 სიდიდეს.

უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება მოიცემა ფორმულით

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{SSE}{n-2}. \tag{16.30}$$

უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასეც ჩავწეროთ

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - b_0\sum_{i=1}^{n} Y_i - b_1\sum_{i=1}^{n} x_iY_i}{n-2}. \tag{16.31}$$

ამ უკანასკნელის მრიცხველში $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ და $\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i$ შესაკრებები უკვე გამოთვლილია b_0 და b_1-ის განსაზღვრის დროს. საჭიროა მხოლოდ $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ -ის გამოთვლა. S^2-ის გამოსახულებაში მნიშვნელში ფიგურირებს $n-2$ სიდიდე. ეს გამოწვეულია იმით, რომ შერჩევის მიხედვით შეფასებულია ორი მუდმივი (b_0 და b_1) და ამიტომ თავისუფლების ხარისხია $n-2$ (იხ. (16.16), რომელიც გვაძლევს ორ ბმას $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i) = 0$, $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)x_i = 0$, სადაც $\hat{Y}_i = b_0 + b_1 x_i$).

მას შემდეგ, რაც გამოთვლილია S^2, შეიძლება დავწეროთ $\sigma_{b_0}^2$-ისა და $\sigma_{b_1}^2$-ის შეფასებები, შესაბამისად $S_{b_0}^2$ და $S_{b_1}^2$. გვექნება

$$S_{b_0}^2 = S^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = S^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{n \cdot SS_X} \tag{16.32}$$

და

$$S_{b_1}^2 = S^2 \cdot \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = S^2 \cdot \frac{1}{SS_X}. \tag{16.33}$$

ამ შეფასებათა მეშვეობით უკვე შესაძლებელია

$$T_i = \frac{b_i - B_i}{S_{b_i}}, \quad i=0,1. \tag{16.34}$$

სტატისტიკების განხილვა. თითოეული მათგანი განაწილებულია სტიუდენტის, $n-2$ თავისუფლების ხარისხის მქონე კანონით:

$$T_i \sim t(n-2), \qquad i=0,1.$$

სწორედ T_0 და T_1 სტატისტიკების მეშვეობით ხდება დასკვნების გამოტანა B_0 და B_1 პარამეტრების შესახებ (ჰიპოთეზების შემოწმება, ნდობის ინტერვალის აგება). მაგალითად

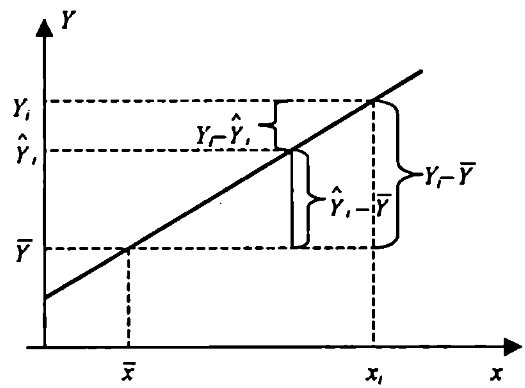
> $1-\alpha$ დონის ნდობის ინტერვალი B_i კოეფიციენტისათვის შემდეგია
> $b_i \pm S_{b_i} \cdot t_{n-2,\alpha/2}$ ანუ $(b_i - S_{b_i} \cdot t_{n-2,\alpha/2};\ b_i + S_{b_i} \cdot t_{n-2,\alpha/2})$

შემდგომი ანალიზისათვის ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი მარტივად შესამოწმებელი თანაფარდობა

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2. \qquad (16.35)$$

აღვნიშნოთ, რომ (16.35) ფორმულაში $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$ არის Y-ის დაკვირვებული Y_i, $i=1,2,...,n$, მნიშვნელობების მათი საშუალო მნიშვნელობებიდან გადახრების კვადრატების სრული ჯამური სიდიდე (total sum of squares – SST, $SST=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$), რომელსაც სრულ ვარიაციას ვუწოდებთ, $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$ – რეგრესიის მრუდის მიმართ Y-ის მნიშვნელობების გადახრების კვადრატების გაბნევის ჯამური სიდიდე (error sum of squares – SSE, $SSE=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$). SSE არის სრული გაბნევის ის ნაწილი, რომელიც არ აიხსნება რეგრესიის საშუალებით. $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2$ სრული გაბნევის ის ნაწილია, რომელიც ახსნილია რეგრესიის წრფით (regression sum of squares – SSR, $SSR=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2$). ამრიგად,

$$SST=SSE+SSR.$$



ნახ.16.6.

რეგრესიის ხარისხის დასახასიათებლად შემოჰყავთ ე.წ. შერჩევითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი. იგი განისაზღვრება ფორმულით

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}=\frac{SSR}{SST}, \quad \left(\frac{SSR}{SST}=1-\frac{SSE}{SST}\right) \qquad (16.36)$$

ანუ R^2 წარმოადგენს რეგრესიით ახსნილ გაბნევის წილს სრულ გაბნევაში. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ R^2 ახალს არაფერს გვაძლევს, ვინაიდან

$$R^2 = r^2, \tag{16.37}$$

სადაც r შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტია.

თუ r^2 მცირეა, ე.ი. რეგრესიით ახსნილია სრული გაბნევის მცირე წილი, მაშინ მოსაძებნია სხვა ალტერნატიული მოდელი (ვთქვათ, არაწრფივი ან მრავლობითი წრფივი რეგრესიის მოდელი და სხვა), რომელიც უფრო ეფექტურად ახსნიდა Y ცვლადის დაკვირვებული მნიშვნელობების სრულ გაბნევას თავისი საშუალო მნიშვნელობის მიმართ.

კორელაციის კოეფიციენტის საშუალებით შეიძლება ასეთი ფორმულები დავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = r^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 , \tag{16.38}$$

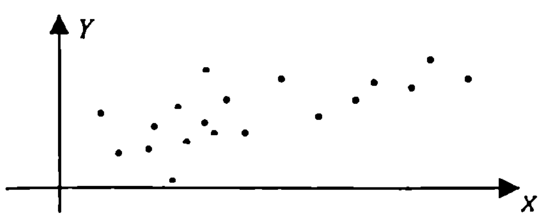
$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (1 - r^2)\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 . \tag{16.39}$$

მაგალითი **16.3.** უძრავი ქონების კომპანიის აგენტს სურს განჭვრიტოს ერთი ოჯახისათვის განკუთვნილი საცხოვრებელი სახლის გასაყიდი ფასი. გულმოდგინე განსჯის შემდეგ მან დაასკვნა, რომ სახლის გასაყიდი ფასი ყველაზე მჭიდროდ დაკავშირებულია მის ფართობთან. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად მან შემთხვევით შეარჩია ადრე გაყიდული 15 სახლის მონაცემები, რომლებიც თავმოყრილია ქვემოთმოყვანილ 16.2 ცხრილში, სადაც გამოყენებულია აღნიშვნები: X – სახლის ფართობი (×10მ^2), Y – სახლის გასაყიდი ფასი ($1000), რადგანაც ჩვენს მიზანს შეადგენს სახლის ფასის (დამოკიდებული ცვლადი) პროგნოზირება მისი ფართობის (პრედიქტორის) მეშვეობით.

ცხრილი 16.2.

x	Y	x	Y	x	Y
20.0	89.5	14.3	82.5	22.0	112.6
14.8	79.9	27.5	126.3	19.0	120.8
20.5	83.1	16.5	79.3	12.3	78.5
12.5	56.9	24.3	119.9	14.0	74.3
18.0	66.6	20.2	87.6	16.7	74.8

1. შევადგინოთ გაბნევის დიაგრამა



ნახ.16.7.

განნევის დიაგრამიდან ჩანს, Y ცვლადის X-ისაგან დამოკიდებულებაში თავს იჩენს წრფივობის ტენდენცია და შესაძლებელია, რომ მარტივმა რეგრესიამ კარგად აღწეროს იგი. მაშასადამე, ამოცანის მათემატიკურ მოდელად შეიძლება ავირჩიოთ

$$Y_i = B_0 + B_1 x_i + \varepsilon_i ,$$

2.გამოვთვალოთ სიდიდეები:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i , \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 , \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i ,$$

ამისათვის შევადგინოთ შემდეგი სახის ცხრილი:

ცხრილი 16.3.

n	x_i	Y_i	x_i^2	Y_i^2	$x_i Y_i$
1	20.0	89.5	400.00	8010.25	1790.00
2	14.8	79.9	219.04	6384.01	1182.52
3	20.5	83.1	420.25	6905.61	1703.55
4	12.5	56.9	156.25	3237.61	711.25
5	18.0	66.6	324.00	4435.56	1198.80
6	14.3	82.5	204.49	6806.25	1179.75
7	27.5	126.3	756.25	15951.69	3473.25
8	16.5	79.3	272.25	6288.49	1308.45
9	24.3	119.9	590.49	14376.01	2913.57
10	20.2	87.6	408.04	7673.76	1769.52
11	22.0	112.6	484.00	12678.76	2477.20
12	19.0	120.8	361.00	14592.64	2295.20
13	12.3	78.5	151.29	6162.25	965.55
14	14.0	74.3	196.00	5520.49	1040.20
15	16.7	74.8	278.89	5595.04	1249.16
Σ	272.6	1332.6	5222.24	124618.42	25257.97

გვექნება:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{272.6}{15} = 18.17, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1332.6}{15} = 88.84.$$

ცხრილში ჩატარებული გამოთვლების მეშვეობით ადვილად გამოითვლება SS_X, SS_{XY} და SS_Y სიდიდეებიც, თუ ვისარგებლებთ გამარტივებული ფორმულებით:

$$SS_X = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}, \quad SS_Y = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}, \quad SS_{XY} = \sum x_i Y_i - \frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n}$$

მივიღებთ:

$$SS_X = 268.19, \quad SS_Y = 6230.24, \quad SS_{XY} = 1040.18.$$

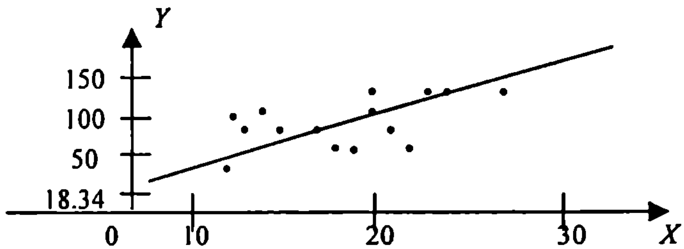
3. გამოვთვალოთ b_0 და b_1 შეფასებები (16.20) და (16.22) ფორმულებით. მივიღებთ:

$$b_1=\frac{SS_{XY}}{SS_X}=\frac{1040.18}{268.19}=3.88\text{ , } b_0=\overline{Y}-b_1\overline{x}=88.84-3.88\cdot 18.17=18.34.$$

ამრიგად რეგრესიის წრფის შეფასებაა:

$$\hat{Y} = 18.34+3.88x$$

მონაცემები გვაძლევს შემდეგ გრაფიკულ სურათს



ნახ. 16.8

კოეფიციენტების ინტერპრეტაცია. b_1-ის გამოთვლილი მნიშვნელობაა 3.88 (\$1000-ში), რაც ნიშნავს, რომ სახლის ფართობის ყოველი ერთი ერთეულით გაზრდა იწვევს სახლის ფასის საშუალოდ \$3880-ით გაზრდას. ამასთან $b_0=18.34$. როგორც ადრე ვთქვით, b_0 არის ის წერტილი, რომელშიც რეგრესიის შეფასებული წრფე კვეთს Y ღერძს, ე.ი., როცა x=0, $\hat{Y}=18.34$ (\$1000-ში), ანუ ნულოვანი ფართობის სახლის საშუალო ფასია \$1834, რაც აზრს მოკლებულია. როგორც წესი, ჩვენ არ შეგვიძლია მივცეთ $\hat{Y}$-ს ინტეპრეტაცია, როდესაც X ცვლადის მნიშვნელობა არ ეკუთვნის X-ის დაკვირვებულ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ მნიშვნელობათა გაბნევის დიაპაზონს, ანუ როცა $x<x_{min}=\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ან $x>x_{max}=\max(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. განხილულ მაგალითში $x_{min}=12.3$, $x_{max}=27.5$. რადგან $x=0$ არ ეკუთვნის [12.3;27.5] ინტერვალს, ამიტომ ჩვენ არ შეგვიძლია $\hat{Y}$ მნიშვნელობის საიმედო ინტერპრეტირება, როცა x=0.

4. გამოვთვალოთ SSE (16.24) ფორმულის მიხედვით.

$$SSE=SS_Y-\frac{(SS_{XY})^2}{SS_X}=6230{,}24-\frac{(1040.18)^2}{268.19}=21995.88,$$

საიდანაც მიიღება უცნობი დისპერსიის σ^2-ის შეფასება

$$S^2=\frac{SSE}{n-2}=\frac{21995.88}{13}=168.91.$$

5. გამოვთვალოთ S_{b_0} და S_{b_1} (16.31) და (16.32) ფორმულების მიხედვით:

$$S_{b_0}^2 = 168,91 \cdot \frac{5222,24}{15 \cdot 268,19} = 219.26,$$

$$S_{b_1}^2 = 168,91 \cdot \frac{1}{268,19} = 0.794, \quad S_{b_1} = 0.794.$$

6. გამოვთვალოთ დეტერმინაციის კოეფიციენტი:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 0.648.$$

დეტერმინაციის კოეფიციენტის გამოთვლილი მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ მარტივი რეგრესიით აიხსნება სახლის გასაყიდი ფასის ვარიაციის მხოლოდ 64.8%, დანარჩენი 35.2% აუხსნელი რჩება. საჭიროა შეირჩეს სხვა მოდელი.

სტატისტიკური დასკვნები რეგრესიის კოეფიციენტების შესახებ. მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება. ზემოთ მოყვანილია ყველა ძირითადი ფორმულა, რომელთა მიხედვით სრულდება მარტივ წრფივ რეგრესიასთან დაკავშირებული გამოთვლები.

ბოლო ეტაპზე მოწმდება ჰიპოთეზები B_0 და B_1 კოეფიციენტების შესახებ. პირველ რიგში მოწმდება B_1 კოეფიციენტის ნულთან ტოლობის ჰიპოთეზა H_0 : B_1=0. B_1 კოეფიციენტს ვიხილავთ იმიტომ, რომ ეკონომიკური შინაარსი გააჩნია მხოლოდ ამ კოეფიციენტს, მის ნულთან ტოლობას იმიტომ, რომ თუ B_1=0 მაშინ რეგრესიის წრფე X ღერძის პარალელურია, ე.ი. X-ის ცვლილებით Y არ იცვლება.

თუ გვსურს α მნიშვნელოვნობის დონით დავრწმუნდეთ, რომ არ არსებობს რაიმე (დადებითი ან უარყოფითი) წრფივი კავშირი, ნულოვანი ჰიპოთეზა H_0 უნდა შემოწმდეს ორმხრივი

$H_1 : B_1 \neq 0$

ალტერნატივის წინააღმდეგ, თუ გვსურს დავრწმუნდეთ დადებითი (უარყოფითი) წრფივი კავშირის არსებობაში, მაშინ ვიხილავთ ცალმხრივ

$H_1 : B_1 > 0$ (B_1<0)

ალტერნატივას და ყველა შემთხვევაში ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება

$$T_1 = \frac{b_1}{S_{b_1}} \tag{16.40}$$

სტატისტიკაზე დაყრდნობით, სტანდარტული წესით (იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ ეს უკანასკნელი განაწილებულია სტიუდენტის კანონით, (n–2) თავისუფლების ხარისხით).

მაგალითად, შევამოწმოთ ჰიპოთეზა

H_0: B_1=0,
H_1: B_1≠0.

გადაწყვეტილების მიღების წესი შემდეგია:

$$H_0\text{-ს ვიწუნებთ,} \qquad \text{თუ } |t_1| > t_{n-2,\alpha/2},$$

სადაც t_1 არის T_1 სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა, ხოლო $t_{n-2,\alpha/2}$ სტიუდენტის $t(n-2)$ განაწილების α-კრიტიკული წერტილი.

თუ ალტერნატიული ჰიპოთეზა ცალმხრივია:

H_1: $B_1>0$ ($B_1<0$)

მაშინ α მნიშვნელოვნობის დონისათვის ვიღებთ სტიუდენტის განაწილების α-კრიტიკულ წერტილს $t_{n-2,\alpha}$ და

$$H_0\text{-ს ვიწუნებთ, თუ } t > t_{n-2,\alpha} \; (t<t_{n-2,\alpha})$$

ზოგიერთი სხვა მნიშვნელოვანი სტატისტიკური დასკვნა განხილული იქნება შემდგომში.

მაგალითი 16.4. (16.3 მაგალითის გაგრძელება).

ა) ავაგოთ ნდობის ინტერვალი B_1-ისათვის.

ვისარგებლოთ იმ ფაქტით, რომ $T_1=\dfrac{b_1-B_1}{S_{b_1}}$ სტატისტიკა განაწილებულია $n-2$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის კანონით. ნდობის დონედ ავიღოთ $0.95=1-\alpha$, $\alpha/2=0.025$, $n-2=13$, ამიტომ სტიუდენტის განაწილების ცხრილში მოსაძებნია $t_{13,0.025}=3.012$. ამრიგად, $1-\alpha=0.95$ ნდობის ალბათობით აგებული ნდობის ინტერვალია

$$3.88 \pm 3.012 \cdot 0.794 = 3.88 \pm 2.39,$$

ანუ ინტერვალი

$$[1.49, 6.27].$$

ბ) შევამოწმოთ ჰიპოთეზები:

H_0: $B_1=0$,
H_1: $B_1\neq 0$.

H_0-ს ვიწუნებთ, თუ $|t_1|> t_{13,\,0.0025}=3{,}012$. T_1 სტატისტიკის გამოთვლილი მნიშვნელობაა

$$t_1=\frac{b_1-B_1}{S_{b_1}}=\frac{3.88-0}{\sqrt{268.19}}=4.89 > t_{13,0.0025}=3.012.$$

ამრიგად, არსებული მონაცემებით ნულოვანი ჰიპოთეზას უარვყოფთ და $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა მტკიცება, რომ სახლის ფასსა და მის ფართობს შორის არსებობს წრფივი კავშირი.

პროგნოზირება და სტატისტიკური დასკვნები წრფივი რეგრესიის საშუალებით. ვთქვათ x^* აღნიშნავს დამოუკიდებელი X ცვლადის რაიმე წინასწარ ფიქსირებულ მნიშვნელობას. მას შემდეგ რაც გამოთვლილია B_0-ისა და B_1-ის შეფასებები, b_0 და b_1, შეფასებული რეგრესიის წრფის $\hat{Y}(x^*)=b_0+b_1x^*$ მნიშვნელობა შეიძლება ჩაითვალოს ჭეშმარიტი რეგრესიის წრფის $\mu^*=E(Y|X=x^*)=B_0+B_1x^*$ მნიშვნელობის

წერტილოვან შეფასებად და ამავე დროს $Y(x^*)=B_0+B_1x^*+\varepsilon$ შემთხვევითი სიდიდის პროგნოზირებულ მნიშვნელობად. თავისთავად $\hat{Y}(x^*)=b_0+b_1x^*$ არ იძლევა არანაირ ინფორმაციას იმის შესახებ, თუ რა სიზუსტით იყო შეფასებული ჭეშმარიტი რეგრესიის წრფე და რა სიზუსტით იყო პროგნოზირებული x^*-ის შესაბამისი $Y(x^*)$ სიდიდე. ამ ინფორმაციის მოპოვება შესაძლებელია μ^*–თვის ნდობის ინტერვალებისა და $Y(x^*)$-ისათვის საპროგნოზო ინტერვალების აგების მეშვეობით.

ცხადია, რომ $\hat{Y}(x^*)=b_0+b_1x^*$ შემთხვევითი სიდიდეა, ამასთან

1. $E(b_0+b_1x^*) = B_0+B_1x^*$;
2. $D(b_0+b_1x^*) = \sigma^2_{b_0+b_1x^*} = \sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{n(x^*-\bar{x})^2}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\right]$;
3. $b_0+b_1x^*$ შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული, საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$T=\frac{b_0+b_1x^*-(B_0+B_1x^*)}{S_{b_0+b_1x^*}}\quad\left(=\frac{\hat{Y}(x^*)-\mu^*}{S_{b_0+b_1x^*}}\right)$$

სტატისტიკას აქვს სტიუდენტის განაწილება $n–2$ თავისუფლების ხარისხით, სადაც $S^2_{b_0+b_1x^*}$ წარმოადგენს $\sigma^2_{b_0+b_1x^*}$-ის შეფასებას

$$S^2_{b_0+b_1x^*}=S^2\left[\frac{1}{n}+\frac{n(x^*-\bar{x})^2}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\right].$$

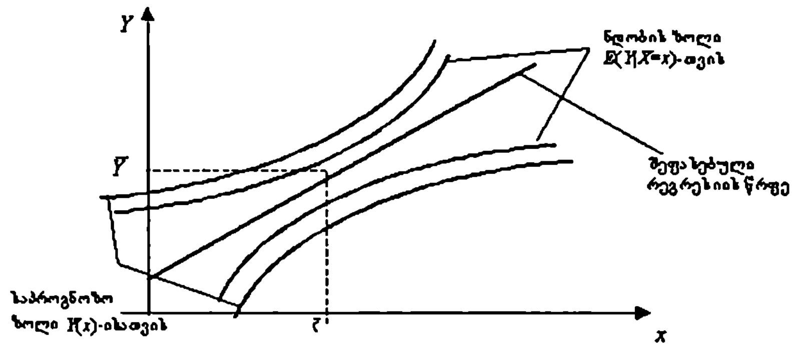
ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე $1–\alpha$ ნდობის დონის მქონე ნდობის ინტერვალს პირობითი მათემატიკური ლოდინისათვის აქვს სახე:

$$\hat{Y}(x^*)-t_{n-2,\alpha/2}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x^*-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\bar{x}^2}}<E(\mu^*)<\hat{Y}(x^*)+t_{n-2,\alpha/2}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x^*-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-\bar{x}^2}}. \qquad (16.41)$$

ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დავასკვნათ, რომ $1–\alpha$ დონის მქონე საპროგნოზო ინტერვალს $Y(x^*)$-ისათვის აქვს შემდეგი სახე

$$\hat{Y}(x^*)-t_{n-2,\alpha/2}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x^*-\bar{x})^2}{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}+1}<Y(x^*)<\hat{Y}(x^*)+t_{n-2,\alpha/2}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x^*-\bar{x})^2}{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}+1}. \qquad (16.42)$$

ეს ფორმულა განსხვავდება (16.41)-საგან 1-ის ტოლი დამატებითი შესაკრებით რადიკალების ქვეშ. ეს აიხსნება გაბნევის დამატებითი წყაროთი $Y(x^*)$-ისათვის. ესაა $Y(x^*)$-ის გაბნევა $E(Y|x^*)$-ის მიმართ.



ნახ. 16.9 ნდობისა და საროგნოზო ზოლები $E(Y|X=x)$-ისა და $Y(x)$-ისათვის.

შევნიშნოთ, რომ $S^2_{b_0+b_1x}$ უმცირესია მაშინ, როცა $x=\bar{x}$ და იზრდება, როდესაც x შორდება $\bar{x}$-ს ნებისმიერი მიმართულებით. ეს იწვევს იმას, რომ ნდობისა და საპროგნოზო ინტერვალები ყველაზე ვიწროა, როდესაც $x=\bar{x}$.

მაგალითი **16.5.** (მაგალითი 16.3.-ის გაგრძელება)

1. ავაგოთ ნდობის ინტერვალი $E(Y|X=x^*)$-ისათვის, $x^*=20$. ნდობის დონედ ავიღოთ $1-\alpha=0.95$, $\alpha/2=0.025$. ვისარგებლოთ (16.41) ფორმულით და ადრე ჩატარებული გამოთვლებით. რადგან $b_0=18.34$, $b_1=3.88$, ამიტომ რეგრესიის წრფის შეფასებაა $\hat{Y}(x)=18.34+3.88x$ და

$$\hat{Y}(x^*)=\hat{Y}(20)=18.34+3.88\cdot 20=95.94.$$

ამრიგად

$$\hat{Y}(20)=95.94.$$

$\bar{x}=18.17$, $SS_X=268.19$, $t_{0,025,\,13}=2.16$

ახლა გამოვთვალოთ

$$t_{13,0.025}\cdot S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x^*-\bar{x})^2}{\sum x_i^2-(\bar{x})^2}}=2.160\cdot 13\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{(20-18.17)^2}{268.19}}=7.9$$

მაშასადამე 0.95 დონის ნდობის ინტერვალი იქნება

$$95.94\pm 7.9,$$

ანუ

$$88.04<E(Y|X=20)<103.84$$

2. ავაგოთ იგივე დონის საპროგნოზო ინტერვალი $Y(20)$-ის თეორიული მნიშვნელობისათვის. ვისარგებლოთ (16.42) ფორმულით. ჩატარებული გამოთვლებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ საპროგნოზო ინტერვალი იქნება

$$95.94 \pm 29.17,$$

ანუ

$$66.77 < Y(20) < 125.11$$

მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ ეს უკანასკნელი უფრო ფართოა, ვიდრე იგივე დონის ნდობის ინტერვალი $E(Y|X=20)$-ისათვის.

ნაშთთა ანალიზი. რეგრესიული ანალიზის ბოლო სტადიაზე უნდა ჩატარდეს ნაშთთა ანალიზი. ნაშთი (ანუ ნარჩენი სხვაობა) ჩვენ განვმარტეთ შემდეგი ფორმულის დახმარებით:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i,$$

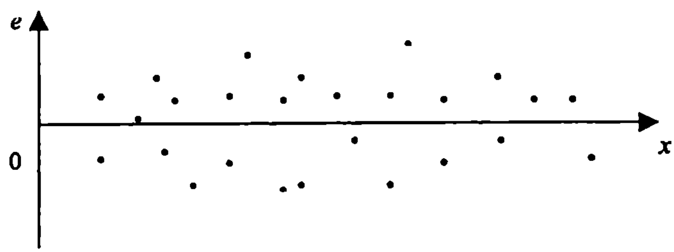
ეს არის სხვაობა Y_i შერჩევით მნიშვნელობასა და რეგრესიის ჩვენს მიერ აგებული წრფის მიხედვით გამოთვლილ $\hat{Y}_i$ მნიშვნელობას შორის. ასეთი ნაშთი უნდა გამოვთვალოთ i-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, მივიღებთ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ნაშთთა მიმდევრობას ყველა შერჩევითი წერტილისათვის.

ნაშთთა ანალიზის ამოცანაა შემოწმდეს ის ძირითადი დაშვებები, რომელთა საფუძველზედაც იყო განხორციელებული გამოთვლები.

ჩამოვთვალოთ ძირითადი დაშვებები:

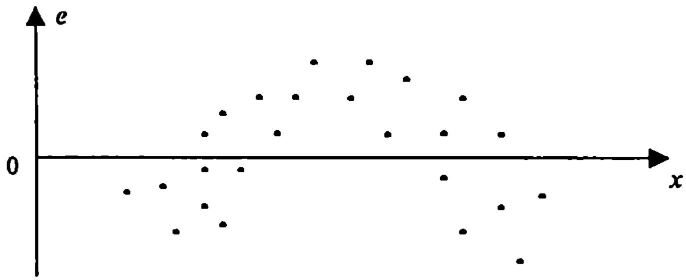
- რეგრესიის მრუდი წრფეა;
- გადახრათა (ε_i) დისპერსიები მუდმივია ყველა შერჩევითი წერტილისათვის;
- გადახრები დამოუკიდებელია შერჩევის ელემენტის ნომერზე;
- გადახრები განაწილებულია ნორმალურად.

ნაშთთა ანალიზი არსებითად ხორციელდება გრაფიკულად. x_i-ს მნიშვნელობათა მიხედვით გრაფიკზე დავსვამთ e_i წერტილებს. თუ მიღებული წერტილთა ერთობლიობა დაახლოებით ერთნაირადაა განაწილებული $0x$ ღერძის გასწვრივ (თანაბრად წრფის ზემოთ და ქვემოთ), უნდა ჩავთვალოთ, რომ ყველა დაშვება, ასე თუ ისე, შესრულებულია (იხ. ნახ. 16.10).



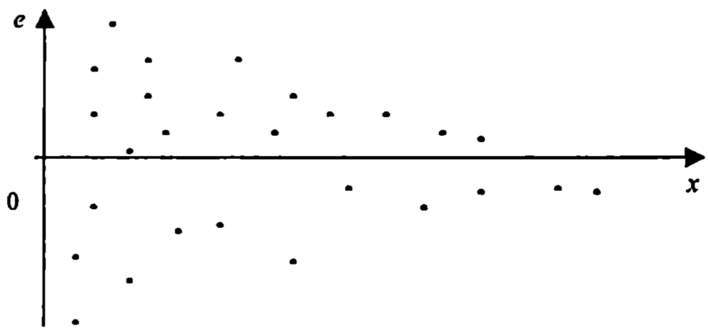
ნახ. 16.10

თუ დარღვეულია რეგრესიის მრუდის წრფივობის დაშვება, მაშინ ნაშთთა გრაფიკს დაახლოებით ისეთი სახე ექნება, როგორც ეს მოცემულია ნახ. 16.11-ზე.



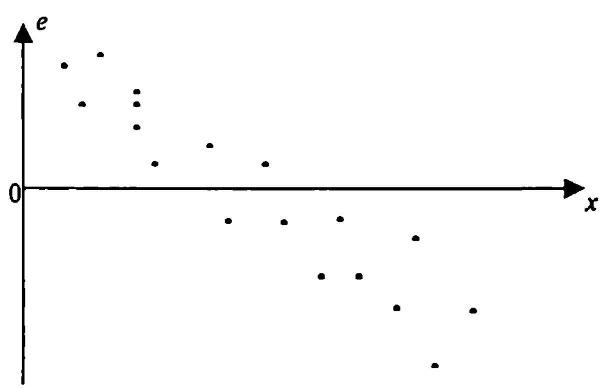
ნახ. 16.11. წრფივობა დარღვეულია

თუ დარღვეულია დაშვება σ^2-ის მუდმივობის შესახებ, მაშინ გვექნება დაახლოებით ისეთი სურათი, როგორც მოცემულია ნახ. 16.11-ზე



ნახ. 16.12. დისპერსია არაა მუდმივი

თუ გადახრები დამოკიდებულია x_i-ზე მაშინ გვექნება დაახლოებით შემდეგი სურათი (იხ. ნახ. 16.13)



ნახ. 16.13. გადახრები დამოკიდებულია x-ზე

გადახრათა ნორმალურობა მოწმდება ნორმალური განაწილების მიხედვით დახაზული სპეციალური ქაღალდის საშუალებით. ამ საკითხზე აქ არ შევჩერდებით.

პოლინომური რეგრესია. ეკონომიკურ ამოცანებში ხშირად დამოკიდებულება ორ X და Y ცვლადს შორის არაა წრფივი, არამედ უფრო რთული ხასიათისაა. მაგალითად, თეორიულ რეგრესიის მრუდს Y-ისა X-ზე შეიძლება ჰქონდეს სახე

$$E(Y|X=x)=B_0+B_1x+B_2x^2, \tag{16.43}$$

(მეორე ხარისხის პარაბოლა) ან

$$E(Y|X=x)=B_0+B_1x+\cdots+B_mx^m, \tag{16.44}$$

(m-ური რიგის პოლინომი), სადაც m არც თუ ისე დიდი ნატურალური რიცხვია. პრაქტიკულად $m\leq4$.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ (16.43) შემთხვევა. აქ ჩვენ გვაქვს სამი უცნობი B_0,B_1,B_2.

თუ მიღებულია შერჩევა $(x_1,Y_1),(x_2,Y_2),\ldots,(x_n,Y_n)$, მაშინ შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი მათემატიკური მოდელი:

$$Y_i=B_0+B_1x_i+B_2x_i^2+\varepsilon_i; \tag{16.45}$$

ε_i-ის მიმართ დაშვებები ანალოგიურია იმისა, რაც გვქონდა წრფივი რეგრესიის შემთხვევაში.

რა თქმა უნდა, B_0,B_1,B_2-ის განსასაზღვრავად შეიძლება გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. არსებითად აქ ერთი ამხსნელი ცვლადია, მაგრამ უცნობთა რაოდენობაა 3, x^2 თამაშობს ახალი ამხსნელი ცვლადის როლს. ასე, რომ არსებითად საქმე გვაქვს 2 ამხსნელ ცვლადთან, ე.ი. პოლინომური რეგრესია არაა მარტივი. B_0, B_1, B_2 კოეფიციენტების შესაფასებლად გამოდგება ის მიდგომა, რაც ჩვენ მრავლობითი რეგრესიის ამოცანაში გვაქვს. ამ საკითხს ჩვენ შევისწავლით შემდეგ თავში და იმ თავის ბოლოს მივუბრუნდებით პოლინომურ რეგრესიას.

* * *

მოვიყვანოთ იმ ძირითადი ლიტერატურის სია, რომლებიდანაც ვსარგებლობდით ამ თავის მასალის გადმოცემისას: [29], [30], [31], [34], [39], [55], [60], [66], [79], [82], [83], [84].

დასკვნები

რეგრესია და კორელაცია შეისწავლის ორ ცვლადს შორის სტოქასტურ კავშირის მნიშვნელოვან ასპექტებს. კორელაციის კოეფიციენტი რიცხვია, რომელიც ახასიათებს წრფივი კავშირის სიმჭიდროვეს. მარტივი, წრფივი რეგრესია იძლევა ორ ცვლადს შორის სტოქასტური კავშირის წრფივ აპროქსიმაციას. შერჩევითი მონაცემებით რეგრესიის საუკეთესო წრფის განსასაზღვრავად გამოიყენება უმცირეს კვადრატთა პრინციპი. იგი მდგომარეობს კოეფიციენტების ისეთ მნიშვნელობათა განსაზღვრაში,

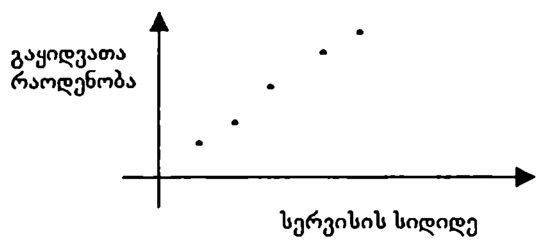
რომლებიც უზრუნველყოფენ გადახრათა კვადრატების ჯამის მინიმალურობას. ამ პრინციპის გამოყენებით მიიღება ნორმალურ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნები წარმოადგენენ კოეფიციენტთა საძიებელ მნიშვნელობებს. გამოითვლება რეგრესიის წრფის კოეფიციენტთა დისპერსიების შეფასებები. მნიშვნელოვანია რეგრესიის კოეფიციენტი, რომელიც წარმოადგენს რეგრესიის წრფის საკუთხო კოეფიციენტს.

მოწმდება რეგრესიის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობის ჰიპოთეზა.

ტექსტში მოცემული ფორმულებით აიგება ნდობის ინტერვალები პირობითი მათემატიკური ლოდინის თეორიული მნიშვნელობისათვის და Y ცვლადის კონკრეტული თეორიული მნიშვნელობისათვის.

სავარჯიშოები

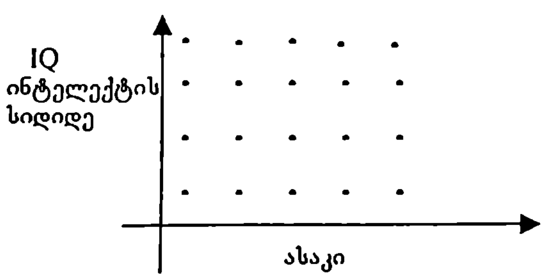
16.1. მოცემულია გაბნევის დიაგრამა



ჩასვით სწორი პასუხი.

1. კორელაციური კავშირი სერვისსა და გაყიდვებს შორის ——— (დადებითია თუ უარყოფითი).
2. რომ გამოგვეთვალა კორელაციის კოეფიციენტი იგი იქნებოდა დაახლოებით —— .

16.2. შემდგომი შეკითხვები შეეხება ნახაზს.



1. კორელაციის კოეფიციენტი რომ გამოგვეთვალა იგი იქნებოდა დაახლოებით —— .
2. დამოკიდებული ცვლადია ———
3. რომ გამოგვეთვალა დეტერმინაციის კოეფიციენტი იგი იქნებოდა დაახლოებით —.

16.3. ვთქვათ, გაგვაჩნია მონაცემთა სამი სიმრავლე.

x	Y
15	42
16	35
17	45
18	43
19	49
20	46

x	Y
5	16
10	32
15	44
20	45
25	63
50	115

x	Y
5	8
10	16
15	22
20	23
25	31
50	60

ააგეთ გაბნევის დიაგრამა. გამოიკვლიეთ S-ისა და r^2-ის მნიშვნელობანი თითოეული შერჩევისათვის და მათ საფუძველზე გაეცით პასუხი კითხვას: რომელი შერჩევისათვისაა მარტივი წრფივი რეგრესია ყველაზე მეტად (ნაკლებად) ეფექტური და რატომ?

16.4. შეგროვებულ იქნა n=500 მოცულობის დაკვირვებები (X,Y) შემთხვევით სიდიდეთა წყვილებზე და შემოწმდა H_0: $\rho=0$ ჰიპოთეზა, H_a: $\rho\neq 0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ. გამოთვლილი P-მნიშვნელობა ტოლი აღმოჩნდა 0,00032 -ისა.

ა) რა დასკვნა აღმოჩნდება სარწმუნო მნიშვნელოვნობის α=0,001 დონისათვის?

ბ) მიუთითებს თუ არა ეს მცირე P-მნიშვნელობა, რომ არსებობს ძალიან ძლიერი წრფივი კავშირი X და Y ცვლადებს შორის (ρ-ს სიდიდე მნიშვნელოვნადაა განსხვავებული ნულისაგან)? ახსენით თქვენი პასუხი.

16.5. (X,Y) წყვილებზე 10000 დაკვირვების შედეგად გამოთვლილი შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტია, r = 0.022. შემოწმეთ ჰიპოთეზები:

H_0: $\rho = 0$,

H_1: $\rho \neq 0$.

არის თუ არა შედეგი სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი?

16.6. რა დაემართება ნდობისა და საპროგნოზო ინტერვალებს, თუ SSE = 0?

16.7. რომელი ინტერვალი უფრო ვიწროა: ნდობის ინტერვალი Y-ის საშუალო მნიშვნელობისათვის, თუ საპროგნოზო ინტერვალი Y-ისათვის (ცხადია, იგულისხმება ერთი და იგივე ნდობის დონის მქონე ინტერვალები, რომლებიც შეესაბამება X ცვლადის ერთსა და იმავე ფიქსირებულ მნიშვნელობას).

16.8. გამოსარკვევია როგორაა დამოკიდებული შრომის ნაყოფიერება (Y) სამუშაოთა მექანიზაციის დონისაგან (X) 14 სამრეწველო საწარმოს მონაცემებით. სამუშაოთა მექანიზაციის დონე წარმოადგენს ამხსნელ ცვლადს. მონაცემები მოყვანილია ცხრილში

საწარმო	Y	X
1	20	32
2	24	30
3	28	36
4	30	40
5	31	41
6	33	47
7	34	56
8	37	54
9	38	60
10	40	55
11	41	61
12	43	67
13	45	69
14	48	76

ა) შეადგინეთ გაბნევის დიაგრამა.
ბ) უმცირეს კვადრატთა მეთოდით იპოვეთ რეგრესიის წირის შეფასება.
გ) რას უდრის დეტერმინაციის კოეფიციენტი?
დ) ააგეთ ნდობის ინტერვალი $E(Y \mid x^*)$-თვის, როცა $x^* = 40$.
ე) ააგეთ ნდობის ინტერვალი $Y(x^*)$-ისათვის, როცა $x^* = 40$.
ვ) საბოლოოდ რისი თქმა შეიძლება.

16.9. ფირმებმა, რომელთა ბიზნესია სწრაფი ბეჭდვა-გამრავლება, რეკლამისათვის გამოყოფილი თანხა (X) დახარჯეს ქალაქის ავტობუსების გაჩერებებზე განცხადებების გამოკვრაში. ამოცანა მდგომარეობს გავარკვიოთ რამდენად ეფექტური იყო ასეთი რეკლამა, როგორ იმოქმედა მან პროდუქციის გასაღების დონეზე (Y). მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

ფირმები	X (ათასი \$)	Y (ათასი \$)
A	2	10
B	4	40
C	5	30
D	7	50
E	3	20

ა)შეადგინეთ გაბნევის დიაგრამა.
ბ) განსაზღვრეთ კორელაციის კოეფიციენტი.
გ) რას უდრის დეტერმინაციის კოეფიციენტი?
დ) იპოვეთ რეგრესიის განტოლება.
ე) შეაფასეთ თვიური გაყიდვა, რომელიც \$4500 სარეკლამო ხარჯებით არის გამოწვეული.
ვ) საბოლოოდ რისი თქმა შეიძლება.

16.10. აგრონომი, რომელიც მუშაობს „აგრიკო"-ში აწარმოებს ექსპერიმენტებს თხევადი სასუქით, ტოლი სიდიდის მიწის ნაკვეთებზე. (X) სასუქის რაოდენობა (ტონა), (Y) შემოსავალი (ასი ბუშელი). მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

ნაკვეთი	X	Y
A	2	7
B	1	3
C	3	8
D	4	10

ა)შეადგინეთ გაბნევის დიაგრამა.
ბ) განსაზღვრეთ კორელაციის კოეფიციენტი.
გ) რას უდრის დეტერმინაციის კოეფიციენტი?
დ) მიეცით ინტერპრეტაცია r-ს.
ე) იპოვეთ რეგრესიის განტოლება. შეაფასეთ, რამდენი მოსავალი მოვა 3 ტონა სასუქის გამოყენებით.
ვ) განსაზღვრეთ შეფასების სტანდარტული გადახრა.
ზ) ვთქვათ 4 ნაკვეთის მაგივრად ექსპერიმენტი ტარდება ბევრ ნაკვეთზე. განსაზღვრეთ საზღვრები, რომელშიც მოთავსდება 95% პროგნოზისა.
თ) გაითვალისწინეთ ის ფაქტი, რომ ამოკრეფა არის მცირე და განსაზღვრეთ 90% დონის ნდობის ინტერვალი ნაკვეთთა იმ ჯგუფისათვის, რომლებზეც შეტანილი იყო ზუსტად 3 ტონა სასუქი თითოეულზე.
ი) მიეცით ამ ფაქტს ინტერპრეტაცია.

16.11. კბილის პასტის გაყიდვები, როგორც ჩანს, ძლიერადაა დამოკიდებული რეკლამის დონეზე. რეკლამის წლიურ ხარჯებსა და გაყიდვებს შორის დამოკიდებულება სხვადასხვა პასტის მწარმოებლისათვის მოცემულია ცხრილში:

	წლიური ხარჯი რეკლამაზე (მილიონი \$)	წლიური გაყიდვები (მილიონი \$)
A	2	50
B	4	70
C	3	60
D	1	20

ა)შეადგინეთ გაბნევის დიაგრამა.
ბ) უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გამოთვალეთ რეგრესიის წრფე.
გ) საშუალოდ რა მოცულობის გაყიდვებია მოსალოდნელი, თუ რეკლამაზე გაწეულია \$1.9 მილიონის ხარჯები?
დ) გამოთვალეთ ოთხი წერტილი და ააგეთ სწორი ხაზი დიაგრამაზე.
ე) განსაზღვრეთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა.
ვ) რას უდრის 95% ნდობის ინტერვალი პასტების საშუალო გაყიდვებისათვის, იმ ჯგუფისათვის, რომელთა რეკლამაზე დაიხარჯა \$1.9 მილიონი?
ზ) მიეცით ამ რიცხვებს ინტერპრეტაცია.
თ) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი.
ი) გამოთვალეთ დეტერმინაციის კოეფიციენტი .

16.12. კომპანიამ გადაწყვიტა გამოიკვლიოს, წარმოადგენს თუ არა გადამწყვეტ ფაქტორს პირადი შემოსავლები (X) კომპანიის საერთო გაყიდვების (Y) პროგნოზირებაში. შეგროვებული იქნა 15 წლის მონაცემები. ინფორმაცია თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში:

წმინდა შემოსავალი (მილიარდობით $ში)	კომპანიის გაყიდვები (მილიონობით $-ში)
137	202
154	212
175	221
196	233
209	245
224	259
245	273
270	285
291	294
310	303
341	313
375	323
402	335
441	350
487	368

ა) გამოთვალეთ $\bar{x}$ და $\bar{Y}$ და მოახდინეთ მონაცემთა ცენტრირება (გადადით ცვლადებზე $x_i^{'} = x_i - \bar{x}$, $Y_i^{'} = Y_i - \bar{Y}$).

ბ) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა $(x_i^{'}, Y_i^{'})$, i = 1, 2, ...,15 წყვილებისათვის და იპოვეთ რეგრესიის წრფის განტოლება.

გ) დაუბრუნდით ძველ ცვლადებს, ააგეთ $\alpha = 0.9$ დონის მქონე ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი რეგრესიის წრფის x^{*}=500 წერტილში მნიშვნელობისათვის.

დ) რა შეგიძლიათ თქვათ კომპანიის გაყიდვების პროგნოზის შესახებ, როცა წმინდა შემოსავალი $ 500 მილიარდის ტოლია?

16.13. შემდეგ ცხრილში წარმოდგენილია ამერიკის შეერთებულ შტატების (X) პირადი წმინდა შემოსავლებისა და (Y) სამომხმარებლო ხარჯების (მილიარდ $-ში) მონაცემები 1964-1968 წლებში

Y	X
438	401
473	433
512	466
547	492
520	537

ა) იპოვეთ რეგრესიის წრფის შეფასება.

ბ) მოიყვანეთ b_0 და b_1 კოეფიციენტების ინტერპრეტაცია.

გ) გამოთვალეთ დეტერმინაციის კოეფიციენტი.

დ) მოძებნეთ ნაშთები.

16.14. მის ხელთ არსებული მონაცემების საფუძველზე ეკონომისტმა დაადგინა, რომ მარტივი რეგრესიის მოდელი შეიძლება გამოყენებულ იქნას პირადი შემოსავლებით (X) პირადი დანაზოგების (Y) პროგნოზირებისათვის. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული წრფის განტოლება შემდეგია:

$$\hat{Y}(x) = 24 + 0{,}06x$$

პირადი შემოსავლების ყოველი მოცემული დონისათვის გამოთვალეთ პირადი დანაზოგების პროგნოზირებული მნიშვნელობანი

ა) 300 მილიარდი, ბ) 500 მილიარდი, გ) 700 მილიარდი.

16.15. სხვადასხვა ფინანსური ინსტიტუტის მიერ დადგენილი საპროცენტო განაკვეთები შესაძლოა ასახავდეს იმას, თუ რამდენად მკაცრადაა დაცული მათ მიერ გაცემული სესხების შეფასების სტანდარტები: რაც უფრო დაბალია საპროცენტო განაკვეთი (X), მით უფრო მაღალია სტანდარტები (და, მაშასადამე, უფრო დაბალია სესხების დაუბრუნებლობის (დეფოლტების) (Y) განაკვეთი. ამ თვალსაზრისის შემოწმების მიზნით შეგროვებულია შემთხვევით 9 ფინანსური კომპანიის მონაცემები, რომლებიც წარმოდგენილია ცხრილით:

X	Y
7,0	38
6,6	40
6,0	35
8,5	46
8,0	48
7.5	39
6,5	36
7,0	37
8.0	44

ა) გამოთვალეთ შემდეგი სიდიდეები

$$\sum x_i\ ,\ \sum Y_i\ ,\ \sum x_i Y_i\ ,\ \sum x_i^2\ ,\ \sum Y_i^2\ .$$

ბ) მოძებნეთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული წრფე;

გ) α=0.1 მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა თუ არა დასკვნა იმის თაობაზე, რომ არსებობს დადებითი წრფივი კავშირი საპროცენტო განაკვეთსა და დევოლტების განაკვეთს შორის? (შეამოწმეთ H_0: $B_1 = 0$ ალტერნატივის, H_1: $B_1 > 0$ წინააღმდეგ

დ) გამოთვალეთ კორელაციისა და დეტერმინაციის კოეფიციენტები.

ე) მოძებნეთ 95%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი დეფოლტების განაკვეთისათვის, როდესაც საპროცენტო განაკვეთი 8%-ის ტოლია.

16.16. ქვემომოყვანილი მონაცემები წარმოადგენს დაკვირვებებს კვების პროდუქტებზე საცალო ფასების ინდექსისა (Y) და სამრეწველო წარმოების ინდექსის (X) მნიშვნელობებზე 10 წლის მანძილზე.

წელი	Y	X
1	100	64
2	101	75
3	113	81
4	115	84
5	113	91
6	113	85
7	111	96
8	112	99
9	115	100
10	120	93

ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი.
ბ) უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შეაფასეთ Y-ის რეგრესია X-ზე (ჩათვალეთ, რომ რეგრესია წრფივია).
გ) გამოთვალეთ შეცდომების შერჩევითი დისპერსია და დეტერმინაციის კოეფიციენტი.
დ) შეამოწმეთ მოდელის ვარგისიანობის ჰიპოთეზები.
ე) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ფასების ინდექსის საშუალო მნიშვნელობისათვის და 99%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი ფასების ინდექსისათვის, როდესაც სამრეწველო ინდექსის მნიშვნელობაა x^*=98.

16.17. ქვემოთმოყვანილი მონაცემები წარმოადგენს ჯამური სამომხმარებლო კრედიტისა ($ მილიონობით) (X) და ფინანსურ და სამრეწველო გაკოტრებათა რაოდენობის (ათასობით) (Y) დაკვირვებულ მნიშვნელობებს გარკვეული 10 წლის განმავლობაში

წელი	X	Y
1	21	92
2	23	80
3	28	76
4	31	89
5	32	111
6	39	110
7	43	127
8	45	137
9	46	150
10	52	141

ა) გამოთვალეთ შერჩევითი კორელაციისა და დეტერმინაციის კოეფიციენტები.
ბ) დაასკვენით, ღირს თუ არა მარტივი წრფივი რეგრესიული ანალიზის ჩატარება და იმ შემთხვევაში, თუ მიიღებთ დადებით პასუხს, ჩაატარეთ რეგრესიული ანალიზი.

17

მრავლობითი რეგრესია და კორელაცია

წინა თავში ჩვენ განვიხილეთ მარტივი რეგრესიის მოდელი რათა გაგვერკვია, თუ რა გავლენას ახდენს ერთი ცვლადი (დამოუკიდებელი ცვლადი) მეორე ცვლადზე (დამოკიდებულ ცვლადზე). მიუხედავად იმისა, რომ მარტივი რეგრესიის მოდელი გამოყენებადია მრავალ პრაქტიკულ სიტუაციაში, ერთი დამოუკიდებელი ცვლადით შემოფარგვლა ზღუდავს მისი გამოყენების არეალს.

საილუსტრაციოდ დავუბრუნდეთ 16.3 მაგალითს, სადაც აღწერილი იყო უძრავი ქონების კომპანიის აგენტის პრობლემა, რომელიც ცდილობდა განეჭვრიტა ერთი ოჯახისათვის განკუთვნილი საცხოვრებელი სახლის გასაყიდი ფასი (დამოკიდებული Y ცვლადი). მიიჩნია რა ფასის განმსაზღვრელ ძირითად ფაქტორად სახლის ფართობი (დამოუკიდებელი X ცვლადი), მან განიხილა მარტივი რეგრესიის მოდელი

$$Y = B_0 + B_1X + \varepsilon.$$

ჩატარებული ანალიზის შედეგად მან მიიღო, რომ დეტერმინაციის კოეფიციენტი

$$R^2 = 0.648,$$

რაც მიუთითებს იმაზე, რომ სახლის ფასის ცვალებადობის მხოლოდ 64.8% აიხსნება სახლის ფართობის ცვალებადობის ხარჯზე, დანარჩენი 35.2% აუხსნელი რჩება. აუხსნელი ვარიაციის პროპორციის შემცირების მიზნით აგენტმა გადაწყვიტა მოდელში ჩაერთო დამატებითი ორი დამოუკიდებელი ცვლადი, კერძოდ სახლის ექსპლუატაციის ხანგრძლივობა (X_2) და მიწის ნაკვეთის ფართობი (X_3). მან განიხილა შემდეგი წრფივი მოდელი სამი დამოუკიდებელი ცვლადით

$$Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + \varepsilon.$$

შემდგომში ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ ასეთი მოდელის გამოყენება ამცირებს აუხსნელი ვარიაციის პროპორციას, რაც ნათლად მეტყველებს იმაზე, რომ მარტივი რეგრესიის მოდელით შემოფარგვლა ხშირ შემთხვევაში არ არის გამართლებული.

ამ არგუმენტებს ბუნებრივად მივყავართ მრავლობითი რეგრესიის მოდელამდე

$$Y = B_0 + B_1X_1 + \cdots + B_kX_k + \varepsilon, \tag{17.1}$$

სადაც Y დამოკიდებული ცვლადია, $X_1,\ldots,X_k$ დამოუკიდებელი ცვლადებია, რომლებსაც ხშირად ამხსნელ ცვლადებს ან პრედიქტორებს, ანდა რეგრესორებს უწოდებენ, ε კი შეშფოთებაა, რომელსაც ხშირად მოიხსენიებენ, როგორც ჭეშმარიტ გადახრას, შეცდომას.

უმრავლეს შემთხვევაში $X_1,\ldots, X_k$ ცვლადები შემთხვევითი სიდიდეებია და მოყვანილი მოდელის ფარგლებში იგულისხმება, რომ ε შემთხვევითი სიდიდე და $(X_1,\ldots,X_k)$ შემთხვევითი ვექტორი დამოუკიდებლებია, ამასთან $E\varepsilon=0$, $D\varepsilon=\sigma^2>0$. პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად დამოუკიდებელი ცვლადები არ არის შემთხვევითი სიდიდეები და

ზოგჯერ მმართველ ცვლადებსაც კი წარმოადგენს (ანუ ისეთ ცვლადებს, რომელთა მნიშვნელობა დამოკიდებულია ექსპერიმენტატორის არჩევანზე). შემდგომში ყველგან იგულისხმება, რომ დამოუკიდებელი $X_1,\dots,X_k$ ცვლადების მნიშვნელობები ზუსტადაა ცნობილი და გადახრები მიეწერება მხოლოდ Y ცვლადს.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ Y შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, იმ პირობით რომ $X_1=x_1$, … , $X_k=x_k$, მოიცემა ფორმულით

$$E(Y\,|\,X_1=x_1,\ \dots\ ,X_k=x_k) = B_0+B_1x_1+\cdots+B_kx_k\,, \tag{17.2}$$

ხოლო Y-ის დისპერსია იგივე პირობებში σ^2-ის ტოლია, ე.ი.

$$D(Y\,|\,X_1=x_1,\ \dots\ ,X_k=x_k) = \sigma^2.$$

k ცვლადის $y=B_0+B_1x_1+\cdots+B_kx_k$ ფუნქციას ჭეშმარიტი რეგრესიის ფუნქცია ეწოდება, ხოლო $B_0,B_1,\dots,B_k$ სიდიდეებს კი – რეგრესიის კოეფიციენტები. თუ $k=1$, მაშინ (17.2) განსაზღვრავს რეგრესიის წრფეს, $k=2$ შემთხვევაში – რეგრესიის სიბრტყეს და თუ $k>2$ – რეგრესიის ჰიპერსიბრტყეს.

საბოლოოდ, მრავლობითი რეგრესიის ამოცანა შემდეგნაირად ალიწერება. გვაქვს n მოცულობის შერჩევა.

$$(Y_i,\ x_{1i},\dots,x_{ki}),\quad i=1,2,\dots,n,\quad n>k,$$

სადაც

$$Y_i = B_0 + B_1x_{1i} + \cdots + B_kx_{ki} + \varepsilon_i,\ i=1,2,\dots,n, \tag{17.3}$$

ხოლო ε_i შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განაპირობებს Y_i ცვლადის გადახრას ჭეშმარიტი რეგრესიის ფუნქციის $B_0+B_1x_{1i}+\cdots+B_kx_{ki}$ მნიშვნელობიდან.

შემდგომში ჩვენ დავუშვებთ, რომ $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ ნორმალურად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, $E\varepsilon_i=0$, $D\varepsilon_i=\sigma^2$, $E\varepsilon_i\varepsilon_j=0$, $i\neq j$.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. ისევე, როგორც მარტივი რეგრესიის შემთხვევაში რეგრესიული ანალიზის მიზანს პირველ ეტაპზე წარმოადგენს რეგრესიის თეორიული $B_0,B_1,\dots,B_k$ კოეფიციენტებისა და უცნობი σ^2 დისპერსიის შეფასება.

რეგრესიული ანალიზის უმნიშვნელოვანესი ნაწილია მისი მეორე ეტაპი – დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გაკეთება იმის შესახებ, თუ რამდენად კარგ თანხმობაშია შემოთავაზებული მოდელი მონაცემებთან. ზემოთ შემოღებული დაშვება ε_i-ის ნორმალურად განაწილების შესახებ, სწორედ ამ მიზანს ემსახურება.

რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასება წარმოებს უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, რომლის თანახმადაც უცნობი $B_0,B_1,\dots,B_k$ კოეფიციენტების შეფასებად ჩაითვლება ის $b_0,b_1,\dots,b_k$ სიდიდეები, რომლებიც ანიჭებენ მინიმუმს შემდეგ გამოსახულებას

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_0 - b_1x_{1k} - \cdots - b_kx_{ki})^2\ .$$

მინიმუმის აუცილებელი პირობიდან, $b_0,b_1,...,b_k$ ცვლადებით კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლებით მიიღება წრფივ განტოლებათა სისტემა ($b_0,b_1,...,b_k$ ცვლადების მიმართ):

$$\begin{aligned}
&b_0 n + b_1\Sigma x_{1i} + \cdots + b_k\Sigma x_{ki} = \Sigma Y_i,\\
&b_0\Sigma x_{1i} + b_1\Sigma x_{1i}^2 + b_2\Sigma x_{1i}x_{2i} + \cdots + b_k\Sigma x_{1i}x_{ki} = \Sigma x_{1i}Y_i,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_0\Sigma x_{ki} + b_1\Sigma x_{1i}x_{ki} + b_2\Sigma x_{2i}x_{ki} + \cdots + b_k\Sigma x_{ki}^2 = \Sigma x_{ki}Y_i.
\end{aligned} \tag{17.4}$$

განტოლებათა (17.4) სისტემას ნორმალურ განტოლებათა სისტემა ეწოდება, შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ამ სისტემას ერთადერთი ამოხსნა გააჩნია.

რა თქმა უნდა, შეიძლებოდა (17.4) სისტემის ამოხსნა რაიმე ცნობილი (ვთქვათ, გაუსის) მეთოდით, მაგრამ ეს ფრიად შრომატევადია. ნებისმიერი სტატისტიკური პროგრამების პაკეტი, რეგრესიულ ანალიზში შეიცავს ამ სისტემის ამოხსნის პროცედურას და გვაძლევს $b_0,b_1,...,b_k$ შეფასებებს.

ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში, ე.ი. როცა k=2, (17.4) სისტემას შემდეგი სახე აქვს

$$\begin{aligned}
&nb_0 + b_1\sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2\sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n Y_i\,,\\
&b_0\sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2\sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} = \sum_{i=1}^n x_{1i}Y_i\,,\\
&b_0\sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1\sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + b_2\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i}Y_i\,.
\end{aligned} \tag{17.5}$$

(17.5) წარმოადგენს სამი წრფივი განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას, სამი უცნობით – b_0,b_1,b_2.

უცნობ კოეფიციენტთა გამოსათვლელად მოხერხებულია გამოვსახოთ b_0 პირველი განტოლებიდან და მიღებული გამოსახულება ჩავსვათ დანარჩენ ორ განტოლებაში. ადვილი დასანახია, რომ მიიღება ორი ორუცნობიანი განტოლებისაგან შედგენილი შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned}
&b_1\left(\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 - \bar{x}_1\sum_{i=1}^n x_{1i}\right) + b_2\left(\sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} - \bar{x}_2\sum_{i=1}^n x_{1i}\right) = \sum_{i=1}^n x_{1i}Y_i - \bar{Y}\sum_{i=1}^n x_{1i}\,,\\
&b_1\left(\sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} - \bar{x}_2\sum_{i=1}^n x_{1i}\right) + b_2\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - \bar{x}_2\sum_{i=1}^n x_{2i}\right) = \sum_{i=1}^n x_{2i}Y_i - \bar{Y}\sum_{i=1}^n x_{2i}\,.
\end{aligned} \tag{17.6}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 - \bar{x}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{1i} - \bar{x}_1\right)^2 = SS_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 - \bar{x}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{2i} - \bar{x}_2\right)^2 = SS_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} - \bar{x}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{1i} - \bar{x}_1\right)\left(x_{2i} - \bar{x}_2\right) = SS_{12}, \tag{17.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{1i} - \bar{x}_1\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) = SS_{y1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{2i} - \bar{x}_2\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) = SS_{y2}.$$

(SS პირველი ასოებია ინგლისური სიტყვებისა sum of squares – კვადრატების ჯამი). ზემოთ ნამრავლების ჯამებიც SS -ითაა აღნიშნული, მაგრამ ნამრავლიც ხომ მეორე რიგისაა. SS-ს ინდექსებად მიწერილია Y, 1, 2, რომლებიც მიუთითებენ იმ ცვლადებზე, რომლებიც მონაწილეობენ მოცემულ აღნიშვნებში. თუ გამოვიყენებთ ამ აღნიშვნებს, (17.6) სისტემა ჩაიწერება ასე:

$$b_1SS_1 + b_2SS_{12} = SS_{y1},$$

$$b_1SS_{12} + b_2SS_2 = SS_{y2}.$$

ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს

$$b_1 = \frac{SS_{y1}SS_2 - SS_{y2}SS_{12}}{SS_1SS_2 - SS_{12}^2},$$
$$b_2 = \frac{SS_{y2}SS_1 - SS_{y1}SS_{12}}{SS_1SS_2 - SS_{12}^2} \tag{17.8}$$

და

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2,$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$r_{y1} = \frac{SS_{y1}}{\sqrt{SS_y}\sqrt{SS_1}},$$

$$r_{y2} = \frac{SS_{y2}}{\sqrt{SS_y}\sqrt{SS_2}}, \tag{17.9}$$

$$r_{12} = \frac{SS_{12}}{\sqrt{SS_1}\sqrt{SS_2}}.$$

r_{y1}, r_{y2}, r_{12} აღნიშნავს შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტებს, თუ X_1 და X_2 ცვლადები შემთხვევითი სიდიდეები არიან. საწინააღმდეგო შემთხვევაში ეს აღნიშვნები მაინც შეიძლება გამოვიყენოთ. ისინი გარკვეული აზრით ახასიათებენ სათანადო რიცხვით მნიშვნელობათა შორის კავშირის ხასიათს.

შემოღებულ აღნიშვნებში (17.8) გამოსახულებები მიიღებს სახეს:

$$b_1 = -\frac{\sqrt{SS_y}}{\sqrt{SS_1}}\frac{r_{y1} - r_{y2}r_{12}}{1-r_{12}^2},$$
$$b_2 = -\frac{\sqrt{SS_y}}{\sqrt{SS_2}}\frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{1-r_{12}^2}. \qquad (17.10)$$

ახლა რეგრესიის სიბრტყის შეფასება ასე ჩაიწერება :

$$\hat{Y} = b_0+b_1x_1+b_2x_2 \qquad (17.11)$$

ზოგად შემთხვევაში, მას შემდეგ, რაც მიღებულია თეორიული რეგრესიის კოეფიციენტების $b_0, b_1, \ldots, b_k$ შეფასებები,

$$\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_kx_k$$

ფუნქცია განსაზღვრავს რეგრესიის ფუნქციის (ჰიპერზედაპირის) შეფასებას. e_i სიდიდეს, სადაც

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - b_0 - b_1x_{1i} - \cdots - b_kx_{ki}$$

ნაშთი ეწოდება.

ისევე როგორც მარტივი რეგრესიის მოდელში, უცნობი $\sigma^2 = D\varepsilon_i$ დისპერსიის შეფასება ეყრდნობა ნაშთების (შესწორებების) კვადრატების ჯამს (sum of square errors (residuals) – SSE)

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \qquad (17.12)$$

რადგან ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში შედის (k+1) შეფასებული პარამეტრი, მისი თავისუფლების ხარისხია – (n–(k+1)) და ამიტომ დისპერსიის შეფასებად მიღებულია სიდიდე

$$S^2 = \frac{SSE}{n-(k+1)} = MSE.$$

ამით (17.3) მოდელის თეორიული პარამეტრების შეფასების ამოცანა გადაწყვეტილია, ანუ რეგრესიული ანალიზის პირველი ეტაპი დასრულებულია. ამ ეტაპს არ ესაჭიროებოდა ε_i, i=1,2,...,n. შემთხვევითი სიდიდეების ნორმალურობის ჰიპოთეზა, რომელიც მნიშვნელოვანია შემდგომი ეტაპისათვის.

მოვიყვანოთ მიღებულ შეფასებათა შემდეგი თვისებები:

ვინაიდან ε_i-ების ნორმალურობის დაშვების დროს Y_i, $i=\overline{1,n}$, ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო b_j, $j=\overline{1,k}$, შეფასებები მათ წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს, b_j სტატისტიკაც ნორმალურად იქნება განაწილებული, კერძოდ

$$b_j \sim N(B_j,\ \sigma^2_{B_j}),\ j=\overline{0,k}, \tag{17.13}$$

სადაც

$$\sigma^2_{B_j} = \sigma^2 \Psi_j \tag{17.14}$$

და Ψ_j, $j=1,2,..,k$, წარმოადგენს დამოუკიდებელი $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ცვლადების (X_{ei}, $e=\overline{1,k}$, $i=\overline{1,n}$) დაკვირვებული მნიშვნელობების განსაზღვრული წესით აგებულ ფუნქციას.

რადგან σ^2 უცნობია, ბუნებრივია (17.14) გამოსახულებაში ის თავისი S^2 შეფასებით შევცვალოთ, რაც b_j სტატისტიკის დისპერსიის $S^2_{b_j}$ შეფასებას მოგვცემს.

მაგალითად, როცა k=2, თუ (17.5) ნორმალურ განტოლებათა სისტემის მატრიცის დეტერმინანტს აღვნიშნავთ Δ-თი, ადვილად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$s^2_{b_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x^2_{1i} \sum_{i=1}^{n} x^2_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i}\right)^2}{\Delta} s^2,$$

$$s^2_{b_1} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x^2_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right)^2}{\Delta} s^2, \tag{17.15}$$

$$s^2_{b_2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x^2_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right)^2}{\Delta} s^2.$$

სადაც

$$s^2 = \frac{SSE}{n-3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-3}. \tag{17.16}$$

ზოგად შემთხვევაში, როდესაც k>2, Ψj ფუნქციები (x_{ei}, $e=\overline{1,k}$, $i=\overline{1,n}$) ცვლადების საკმაოდ რთული ფუნქციებია, მათი ცხადი სახით მოყვანა არ ღირს, რადგან $S^2_{b_j}$-ის მნიშვნელობები გამოითვლება რეგრესიული ანალიზის ნებისმიერი კომპიუტერული პროგრამის დახმარებით .

სტატისტიკური დასკვნები B_j პარამეტრის შესახებ შემდეგ სტატისტიკას ეყრდნობა:

$$T_j = \frac{b_j - B_j}{S_{b_j}},$$

რომელსაც აქვს სტიუდენტის t-განაწილება $n-(k+1)$ თავისუფლების ხარისხით.

დეტერმინაციის კოეფიციენტი. ახლა მოვიყვანოთ შემდგომი ანალიზისათვის მნიშვნელოვანი ე.წ. დისპერსიული თანაფარდობა

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \qquad (17.17)$$

რომლის შემოწმება, ისევე როგორც მარტივი რეგრესიის შემთხვევაში, არ წარმოადგენს სირთულეს. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$SST = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 \ ,$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \ ,$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2 \ .$$

ამ აღნიშვნებში (17.17) თანაფარდობა მიიღებს სახეს

$$\underset{n-1}{SST} = \underset{n-k-1}{SSE} + \underset{k}{SSR} \ , \qquad (17.18)$$

სადაც SSR არის სრული გაბნევის რეგრესიით ახსნილი ნაწილი, SSE – სრული გაბნევის ის ნაწილი, რომელიც არ აიხსნა რეგრესიით, თითოეულ წევრს ქვევით მიწერილი აქვს თავისუფლების ხარისხი.

(17.18) თანაფარდობაზე დაყრდნობით განიხილება ე.წ. მრავლობითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = \left(\frac{SSR}{SST}\right), \qquad (17.19)$$

რომელიც წარმოადგენს სრული ვარიაციის იმ წილს, რომელიც ახსნილია მრავლობითი რეგრესიის მოდელით.

გარდა ამ კოეფიციენტისა განიხილავენ ე.წ. თავისუფლების ხარისხებთან შეთანხმებულ (adjusted) დეტერმინაციის კოეფიციენტს

$$\text{adjusted } R^2 = 1 - \frac{SSE/(n-k-1)}{SST/(n-1)}$$

მოსაზრება, რომლის თანახმადაც განიხილება ეს სტატისტიკა, მდგომარეობს იმაში, რომ თუ დამოუკიდებელ ცვლადთა რაოდენობა, k შედარებადია n-თან, R^2-ის მნიშვნელობა შეიძლება არარეალურად დიდი გამოვიდეს და მიგვიყვანოს მცდარ დასკვნებამდე. სწორედ ამ მოვლენის თავიდან აცილების მიზნით არის შემოღებული ახალი adjusted R^2 კოეფიციენტი. თუ n მნიშვნელოვნად დიდია, k-თან შედარებით, მაშინ ეს ორივე კოეფიციენტი დაახლოებით ტოლია, საზოგადოდ კი adjusted $R^2 < R^2$.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ R^2 სტატისტიკა ე.წ. შერჩევითი მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია,

$$R^2=r^2.$$

შერჩევითი მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტი, r წარმოადგენს შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტს Y და $\hat{Y}$ შემთხვევით სიდიდეებს შორის, ე.ი.

$$r=\frac{\sum(Y_i-\overline{Y})(\hat{Y}-\overline{Y})}{\sqrt{\sum(Y_i-\overline{Y})^2}\cdot\sqrt{\sum(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2}},$$

სადაც გათვალისწინებულია ტოლობა $\overline{\hat{Y}}=\overline{Y}$, რომელიც მიიღება ნორმალურ განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლებიდან

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)=\sum_{i=1}^{n}e_i=0$$

მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება. მარტივი რეგრესიის შემთხვევაში, როდესაც საქმე გვქონდა მხოლოდ ერთ დამოუკიდებელ ცვლადთან, მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება დაიყვანებოდა B_1 კოეფიციენტის შესახებ

H_0: $B_1=0$

ჰიპოთეზის შემოწმებაზე,

H_1: $B_1\neq 0$

ალტერნატივის წინააღმდეგ, რომელიც ეყრდნობოდა t სტატისტიკას B_1-სათვის. მრავლობითი რეგრესიის შემთხვევაში მოდელის ვარგისიანობის შესამოწმებლად ჩვენ გვესაჭიროება დისპერსიული ანალიზის ჩატარება.

დეტერმინაციის კოეფიციენტის განსაზღვრისას ჩვენ ვსარგებლობდით დისპერსიული თანაფარდობით

$$SST=SSR+SSE,$$

რომელიც იძლევა სრული ვარიაციის დაშლას ორ ნაწილად: რეგრესიით ახსნილი ვარიაცია (SSR) და აუხსნელი ვარიაცია (SSE). ამავე თანაფარდობას ეფუძნება მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება, რომელიც მრავლობითი რეგრესიის შემთხვევაში მდგომარეობს

H_0:$B_1=B_2=...=B_k=0$

ჰიპოთეზების შემოწმებაში

H_1: ერთი მაინც $B_i\neq 0$, $i=1, 2, .., k$

ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ნათელია, რომ თუ H_0 ჰიპოთეზა დაწუნებული არ იქნება, არც ერთი დამოუკიდებელი ცვლადი (რეგრესორი) არ არის წრფივად დაკავშირებული Y-თან და

ამიტომ მოდელი უვარგისია პროგნოზირების მიზნებისათვის. მაშინ, როცა თუ ერთი მაინც $B_j \neq 0$, მოდელი რაიმე თვალაზრისით მაინც გამოსადეგია.

H_0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოიყენება F-სტატისტიკა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$F=\frac{MSR}{MSE},$$

სადაც $MSR=\frac{SSR}{k}$, $MSE=\frac{SSE}{n-(k+1)}$.

ნულოვანი H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას F სტატისტიკას აქვს ფიშერის განაწილება k და $n-(k+1)$ თავისუფლების ხარისხებით: $F\sim F(k,n-(k+1))$.

F -სტატისტიკის გამოსათვლელად საჭირო ყველა სიდიდეს, როგორც წესი, თავს უყრიან დისპერსიული ანალიზის შემდეგ ცხრილში

წყარო	თავისუფლების ხარისხი	კვადრატ. ჯამი	საშუალო კვად. მნიშვნელობა	
რეგრესია	k	SSR	$MSR=SSR/k$	$F=\frac{MSR}{MSE}$
შეცდომა	$n-k-1$	SSE	$MSE=SSE/(n-k-1)$	
სულ	$n-1$	SS_Y		

F-სტატისტიკის ჩაწერა მრავლობითი დეტერმინაციის R^2 კოეფიციენტის მეშვეობითაც შეიძლება. სახელდობრ

$$F=\frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-(k+1))}.$$

მუდმივი, $c=\frac{n-(k+1)}{k}$ თანამამრავლის სიზუსტით ტესტის სტატისტიკაა $\frac{R^2}{1-R^2}$, რომელიც წარმოადგენს ახსნილი ვარიაციის ფარდობას აუხსნელთან და თუ ეს ფარდობა საკმარისად დიდია, ბუნებრივია, უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა H_1 ალტერნატივის სასარგებლოდ. აქედან გამომდინარე კრიტიკულ არეს უნდა ჰქონდეს ფორმა $F>F_{კრ.}$. საბოლოოდ, მოდელის ვარგისიანობის შესამოწმებელი პროცედურა ასე გამოიყურება

ნულოვანი ჰიპოთეზა H_0: $B_1=B_2=\cdots=B_k=0$

ალტერნატიული ჰიპოთეზა H_1: ერთი მაინც $B_i\neq 0$, $i=1,2,..,k$

ტესტის სტატისტიკის მნიშვნელობა: $f=\frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-(k+1))}$

α დონის კრიტიკული არე: $f>F_{k,n-k+1,\alpha}$

სადაც $F_{k,n-k+1,\alpha}$ არის F განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი.

სტატისტიკური დასკვნები მოდელის პარამეტრების შესახებ, პროგნოზირება. თუ H_0 ჰიპოთეზა დაწუნებულია, მაშინ ვამოწმებთ ჰიპოთეზას ცალკეული რეგრესიის კოეფციენტის ნულთან ტოლობის შესახებ (რა თქმა უნდა, თუ ყველა რეგრესიის კოეფიციენტი ერთდროულად ნულის ტოლი არაა, რომელიმე მათგანი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს).

ამრიგად ყოველი j-თვის, $j=1, 2, .., k$, შესამოწმებელია

$$H_0: B_j=0$$

ჰიპოთეზა

$$H_1: B_j \neq 0$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ. ამ შემთხვევაში ტესტის სტატისტიკაა

$$T_{b_j} = \frac{b_j}{S_{b_j}},$$

რომელიც ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას განაწილებულია სტიუდენტის t კანონით $n-(k+1)$ თავისუფლების ხარისხით.

ამიტომ α მნიშვნელოვნობის დონით გადაწყვეტილების მიღების წესი შემდეგია:

$$\text{უარვყოფთ } H_0\text{-ს, თუ } |t_{b_j}| > t_{n-k-1,\alpha/2},$$

სადაც $t_{n-k-1,\alpha/2}$ სტიუდენტის $t(n-k-1)$ განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული მნიშვნელობაა.

რა თქმა უნდა, შესაძლებელია შემოწმდეს შემდეგი

$$H_0: B_j = B_j^0$$

ჰიპოთეზაც

$$H_1: B_j \neq B_j^0$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ, სადაც B_j^0 რაიმე ფიქსირებული სიდიდეა. ამ შემთხვევაში ტესტის სტატისტიკაა

$$T_{b_j} = \frac{b_j - B_j^0}{S_{b_j}},$$

რომელიც განაწილებულია სტიუდენტის $t(n-k-1)$ კანონით. ჰიპოთეზის შემოწმება წარმოებს სტანდარტული გზით.

$(1-\alpha)$ დონის ნდობის ინტერვალი რეგრესიის b_j კოეფიციენტისათვის შემდეგია

$$(b_j - s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\alpha/2};\ b_j + s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\alpha/2}),\ j=1,2,\ldots,k, \tag{17.20}$$

სადაც $t_{n-k-1,\alpha/2}$ არის t განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილი.

სტატისტიკური დასკვნები B_j, j=1,2,...,k კოეფიციენტის შესახებ

$H_0 : B_j = B_j^0$

$H_1 : B_j \neq B_j^0$

ტესტის სტატისტიკა: $T_{b_j} = \dfrac{b_j - B_j^0}{S_{b_j}}$

გადაწყვეტილების მიღების წესი: α მნიშვნელოვნობის დონით უარყავი H_0, თუ $\left|t_{b_j}\right| > t_{n-k-1,\alpha/2}$. წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს/გაგვაჩნია. $(1-\alpha)$ დონის ნდობის ინტერვალი B_j-სათვის შემდეგია:

$$b_j \pm s_{b_j} t_{n-k-1,\alpha/2}$$

მარტივი რეგრესიის ანალოგიურად, რეგრესიის ფუნქციის მნიშვნელობა $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ წერტილში, $\hat{Y}^* = b_0 + b_1 x_1^* + \ldots + b_k x_k^*$ წარმოადგენს წერტილოვან შეფასებას Y შემთხვევითი სიდიდის $\mu^* = \mu_{Y, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*} = B_0 + B_1 x_1^* + B_2 x_2^* + \ldots + B_k x_k^*$ მათემატიკური ლოდინისათვის. იგივე სიდიდე შეიძლება გამოყენებულ იქნას $Y^* = B_0 + B_1 x_1^* + B_2 x_2^* + \ldots + B_k x_k^* + \varepsilon^*$ შემთხვევითი სიდიდის შეფასებისა და პროგნოზირების მიზნით. აქ ε^* ჭეშმარიტი გადახრაა, რომელიც დამოუკიდებელია $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_v)$ შემთხვევითი ვექტორისაგან. μ^*-სათვის ნდობის ინტერველისა და $\hat{Y}^*$-თვის საპროგნოზო ინტერვალის ასაგებად თავდაპირველად მოვიყვანოთ რამდენიმე ფაქტი:

1. შემთხვევითი ვექტორი $b=(b_0, b_1, \ldots, b_k)'$ განაწილებულია ნორმალურად, $B=(B_0, B_1, \ldots, B_k)'$ საშუალოთი და $\sigma^2\Sigma$ კოვარიაციის მატრიცით, სადაც Σ მატრიცის ყოველი ელემენტი σ_{ij}, i=0,1,...,k, j=0,1,...,k, წარმოადგენს $\{x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki}, i=1,2,\ldots,n\}$ დაკვირვებული მნიშვნელობების საკმარისად რთულ ფუნქციებს, რომელთა გამოსახულებებს ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ. ამრიგად

$$b \sim N(B, \sigma^2\Sigma). \tag{17.21}$$

2. მოყვანილი თანაფარდობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\hat{Y}^*$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად, μ^* საშუალოთი და $D^* = D\hat{Y}^*$ დისპერსიით, რომლის გამოსახულებას ჩვენ აქ კვლავ არ მოვიყვანთ. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ D^*-ის გამოსახულება შეიცავს σ^2-ს თანამამრავლის სახით, და $\hat{D}^*$-ით ჩვენ აღვნიშნავთ D^*-ის შეფასებულ მნიშვნელობას, რომელიც მიიღება D^*-ის გამოსახულებაში σ^2-ის მისი S^2 შეფასებით შეცვლით. ამრიგად

$$\hat{Y}^{\bullet} \sim N(\mu^{\bullet}, D^{\bullet}),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $T^{\bullet} = \dfrac{\hat{Y}^{\bullet} - \mu^{\bullet}}{\sqrt{\hat{D}^{\bullet}}}$ სტატისტიკა განაწილებულია სტუდენტის კანონით $(n-k-1)$ თავისუფლების ხარისხით:

$$\frac{\hat{Y}^{\bullet} - \mu^{\bullet}}{\sqrt{\hat{D}^{\bullet}}} \sim t(n-k-1).$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ კომპიუტერული პროგრამების ზოგიერთი პაკეტი რეგრესიულ ანალიზში შეიცავს $\hat{D}^{\bullet}$-ის გამოსათვლელ პროცედურას.

3. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$Y^{\bullet} - \hat{Y}^{\bullet} \sim N(0, \sigma^2 + D^{\bullet})$$

და

$$\frac{Y^{\bullet} - \hat{Y}^{\bullet}}{\sqrt{s^2 + \hat{D}^{\bullet}}} \sim t(n-k-1). \tag{17.22}$$

(17.21) და (17.22) თანაფარდობებიდან სტანდარტული გზით მიიღება შემდეგი დასკვნა

(1−α) დონის ნდობის ინტერვალს $\mu^{\bullet}$-სათვის აქვს სახე

$$\left[\hat{Y}^{\bullet} - t_{n-k-1,\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{D}^{\bullet}}, \quad \hat{Y}^{\bullet} + t_{n-k-1,\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{D}^{\bullet}}\right]$$

(1−α)დონის საპრგნოზო ინტერვალს $Y^{\bullet}$-სათვის აქვს სახე

$$\left[Y^{\bullet} - t_{n-k-1,\alpha/2} \cdot \sqrt{s^2 + \hat{D}^{\bullet}}, \quad Y^{\bullet} + t_{n-k-1,\alpha/2} \cdot \sqrt{s^2 + \hat{D}^{\bullet}}\right]$$

მაგალითი 17.1. განვიხილოთ უძრავი ქონების აგენტის პრობლემა, რომელსაც ჩვენ ვიხილავდით 15.3 მაგალითში. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სახლის ფასის ცვალებადობის ახსნა მხოლოდ ფართობის ცვალებადობის ხარჯზე არ იძლევა დამაკმაყოფილებელ შედეგს (R^2=0.648, ე.ი. ახსნილია ვარიაბელობის მხოლოდ 64.8%). აგენტმა გადაწყვიტა მოდელში ჩაერთო კიდევ ორი დამატებითი ცვლადი და განიხილა მრავლობითი წრფივი რეგრესიის შემდეგი მოდელი:

$$Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + \varepsilon,$$

სადაც Y სახლის გასაყიდი ფასია (ათასობით დოლარებში), X_1 სახლის ფართობია (10მ^2-ში), X_2-სახლის ექსპლუატაციის ხანგრძლივობაა (წლებში), X_3 სახლის კუთვნილი მიწის ნაკვეთის ფართობია (100მ^2). მან ადრე არჩეული 15 სახლისათვის შეაგროვა დამატებითი მონაცემები, რომლებიც თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში:

სახლის ნომერი	Y	x_1	x_2	x_3
1	89.5	20	5	4.1
2	79.9	14.8	10	6.8
3	83.1	20.5	8	6.3
4	56.9	12.5	7	5.1
5	66.6	18	8	4.2
6	82.5	14.3	12	8.6
7	126.3	27.5	1	4.9
8	79.3	16.5	10	6.2
9	119.9	24.3	2	7.5
10	87.6	20.2	8	5.1
11	112.6	22	7	6.3
12	120.8	19	11	12.9
13	78.5	12.3	16	9.6
14	74.3	14	12	5.7
15	74.8	16.7	13	4.8

შეიყვანა რა ეს მონაცემები კომპიუტერში, მან მიიღო შემდეგი ამონაბეჭდი.

Dependent Variable: *Y*
Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	*F*-Value	Prob>*F*
Model	3	5707.44	1902.48	40.029	0.0000
Error	11	522.80	47.53		
Total	14	6230.24			

Root MSE	6.894	*R*-square	0.916
Dep Mean	88.840	Adj R-sq	0.893
C.V.	7.760		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H_0: Parameter=0	Prob >|T|
INTERCEPT	1	–16.058	19.071	–0.842	0.418
$x1$	1	4.146	0.751	5.520	0.000
$x2$	1	–0.236	0.881	–0.268	0.794
$x3$	1	4.831	0.901	5.361	0.000

ა) ამ ამონაბეჭდიდან, რა თქმა უნდა, პირველ რიგში ვიღებთ ინფორმაციას უცნობი რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასების შესახებ (იხ. პუნქტი Parameter Estimates – პარამეტრების შეფასება): პირველ სვეტში მოცემულია b_0, b_1, b_2, b_3 შეფასებები, მეორეში – მათი სტანდარტული გადახრები, s_{b_j}, მომდევნო სვეტში $T_{b_j}=\dfrac{b_j}{s_{b_j}}$ სტატისტიკის მნიშვნელობა, ბოლო სვეტში კი – შესაბამისი p მნიშვნელობები, H_0 : B_j=0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად.

1. b_0= –16.058 მნიშვნელობა მიუთითებს საშუალო გასაყიდ ფასს, როცა X_1=X_2=X_3=0 და მისი ინტერპრეტაცია აზრს მოკლებულია. b_1=4.146 მნიშვნელობა მიუთითებს იმაზე, რომ ფართობის ყოველი დამატებითი ერთეულისათვის სახლის გასაყიდი ფასი იზრდება საშუალოდ 4146 დოლარით, b_2= –0.236 მიუთითებს, რომ რომ სახლის ექსპლუატაციის ყოველი დამატებითი წლისათვის სახლის ფასი იკლებს 236 დოლარით, b_3 = 4.831 კი მიუთითებს იმაზე, რომ მიწის ნაკვეთის ყოველი დამატებითი 100 მ^2-თვის სახლის ფასი იზრდება 4331 დოლარით (იგულისხმება, რომ გამოყოფილის გარდა, ყველა დანარჩენი ფაქტორის მნიშვნელობა ფიქსირებულია).

2. ავაგოთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რომელიმე, ვთქვათ B_3 კოეფიციენტისათვის. ვისარგებლოთ (17.20) ფორმულით, რომლის თანახმადაც 1–α=0.95 დონის ნდობის ინტერვალი B_3-სათვის იქნება

$$b_3 \pm s_{b_3} \cdot t_{11,0.025},$$

სადაც $t_{11,0.025}$=2.201. ამრიგად, საძიებელი ინტერვალია

$$4.831 \pm 0.901 \cdot 2.201.$$

საბოლოოდ, 95%-იან ნდობის ინტერვალი B_3-თვის შემდეგია:

$$[2.858;6.814].$$

α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ სარწმუნოა თუ არა დასკვნა, რომ არსებობს წრფივი (უარყოფითი) კავშირი ფასსა (Y) და ექსპლუატაციის ხანგრძლივობას (X_2) შორის. ე. ი. შესამოწმებელია

$$H_0: B_2 = 0$$

ჰიპოთეზა

$$H_1: B_2 \neq 0 \ (B_2 < 0)$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ცხადია, რომ ტესტის სტატისტიკაა $T_2 = \frac{b_2}{S_{b_2}}$, რომლის დაკვირვებული მნიშვნელობაა $t_2 = -0.268$.

$\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის არეა

$$|t_2| \geq t_{11,0.025} \ (t_2 < t_{11,0.05}),$$

სადაც $t_{11,0.025} = 2.201$ ($t_{11,0.05} = 1.1796$). რადგანაც $|t_2| = 0.268 < 2.201$ ($t_2 = -0.268 > -1.796$) H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია და მაშასადამე, დასკვნა იმის თაობაზე, რომ Y და X_2 ცვლადებს შორის წრფივი (უარყოფითი) კავშირია, არ არის სარწმუნო.

იგივე შედეგამდე მიგვიყვანდა P-მნიშვნელობაც, რომელიც 0.794-ის ტოლია. ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა ხდება მნიშვნელოვნობის მხოლოდ ისეთი α დონით, რომელიც არანაკლებია 0.794-ზე. $\alpha=0.05<0.794$, ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას არ უარვყოფთ.

მაგალითად, B_3-ის შემთხვევაში P-მნიშვნელობა უდრის ნულს, ე.ი. ნებისმიერი $\alpha>0$ დონით, (კერძოდ, როცა $\alpha=0.05$) $H_0 : B_3=0$ ჰიპოთეზა უარიყოფა, $H_1 : B_3\neq 0$ ალტერნატივის სასარგებლოდ. მართლაც, $t_3=5.361>2.201$, ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ.

დავალება: ააგეთ $\alpha=0.01$ დონის ნდობის ინტერვალი B_j, $j=0,1,2,3$ კოეფიციენტებისათვის, მნიშვნელოვნობის იგივე დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზები $H_0 : B_j=0$ $(H_1 : B_j\neq 0)$ $j=1,2,3$.

b) ახლა მივმართოთ კომპიუტერული ამონაბეჭდის პუნქტს – Analysis of variance (დისპერსიული ანალიზი). ამ პუნქტში მოცემულია შეცდომის, ε-ის სტანდარტული გადახრის შეფასება, დეტერმინაციის კოეფიციენტები, F-სტატისტიკის მნიშვნელობა და P-მნიშვნელობა. უცნობი დისპერსიის, მრავლობითი დეტერმინაციის R^2 და adjusted R^2 კოეფიციენტების შესახებ ინფორმაციის მისაღებად და მოდელის ვარგისიანობის შესამოწმებლად.

1. როგორც ვიცით უცნობი დისპერსიის შეფასებაა $S^2=MSE$, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი $s=\sqrt{MSE}$ (Root MSE). ამრიგად, შერჩევითი სტანდარტული გადახრაა:

$$s=6.894.$$

შერჩევითი დეტერმინაციის კოეფიციენტია (R-square)

$$R^2=0.916 \text{ ანდა } 91.6\%$$

$$\text{adjusted } R^2= 0.893 \text{ ანდა } 89.3\%$$

გავიხსენოთ, რომ მარტივი რეგრესიის მოდელში, სახლის გასაყიდ ფასს ვაკავშირებდით მხოლოდ მის ფართობთან R^2=0.648. ამრიგად, ორი დამატებითი ცვლადის შემოყვანამ საგრძნობლად გაზარდა დეტერმინაციის კოეფიციენტი, სახლის ფასის ვარიაციის 91.6% აიხსნა სამი დამოუკიდებელი ცვლადით და აუხსნელი დარჩა მხოლოდ 8.4%.

2. მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება ე.ი.

$$H_0: B_1=B_2=B_3=0$$

ჰიპოთეზის შემოწმება

$$H_1: \text{ერთი მაინც } B_j\neq 0,\ j=1,2,3$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ ტარდება F სტატისტიკის მეშვეობით, რომლის მნიშვნელობაც მოცემულია დისპერსიული ანალიზის ცხრილში f=40.029 (ამ ცხრილში ეს სიდიდე აღნიშნულია დიდი F ასოთი, ჩვენ კი F-ს ვიყენებთ F სტატისტიკის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის აღსანიშნავად).

დავაფიქსიროთ α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონე და F-განაწილების ცხრილიდან ვიპოვოთ $F_{3,11,0.05}$=3,59.

α=0.05 დონის კრიტიკული არეა $f>F_{3,11,0.05}$=3,59. ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ და ვასკვნით, რომ ერთი მაინც B_j, j=1,2,3 არ არის ნულის ტოლი. მაშასადამე α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა დასკვნა, რომ მოდელი ვარგისია გამოსაყენებლად.

კითხვა: როგორც დისპერსიული ანალიზის ცხრილიდან ჩანს,

$$P\{F>f\,|\,H_0\}=P\{F>40.029\,|\,H_0\}=0.$$

რა დასკვნის გაკეთება შეიძლება ამ ფაქტიდან?

გ) მას შემდეგ რაც დავასკვენით, რომ მრავლობითი რეგრესიის მოდელი ვარგისია გამოსაყენებლად, კიდევ ერთხელ შევეხოთ საკითხს, თუ როგორ უნდა იქნეს გამოყენებული მიღებული მოდელი.

როგორც ადრე გვქონდა აღნიშნული, მიღებული მოდელი საშუალებას იძლევა ავაგოთ ნდობის ინტერვალი დამოუკიდებელი ცვლადის პირობითი საშუალოსათვის და საპროგნოზო ინტერვალი Y-ის კერძო მნიშვნელობისათვის, პირობაში, რომ დამოუკიდებელი ცვლადები ფიქსირებულია და $X_1=x_1^*$, $X_2=x_2^*$, $X_3=x_3^*$. იქვე აღნიშნული იყო, რომ ამ ინტერვალების გამოსათვლელი ფორმულები მეტისმეტად რთულია და კვლავ უნდა მივმართოთ კომპიუტერს. ზოგიერთი კომპიუტერული პროგრამების პაკეტი (მაგ. Minitab) იძლევა რეგრესიის ფუნქციის წერტილოვან შეფასებას, მის სტანდარტულ გადახრას, $\sqrt{D^*}$ -ს, და ნდობისა და საპროგნოზო ინტერვალებსაც. თვალსაჩინოებისათვის მაინც ჩავატაროთ ზოგიერთი გამოთვლა. როდესაც x_1^*=20, x_2^*=10, x_3^*=10, მაშინ რეგრესიის ფუნქციის შესაბამისი $\mu^*=B_0+B_1\cdot 20+B_2\cdot 10+B_3\cdot 10$ მნიშვნელობის წერტილოვანი შეფასებაა

$$\hat{Y}^*=-16.058+4.146\cdot 20-0.236\cdot 10+4.831\cdot 10=112.812,$$

ვთქვათ, ამავე დროს აღმოჩნდა, რომ $\sqrt{D^*}$ =3,58. ამ ორ სიდიდეზე დაყრდნობით შესაძლებელია α დონის ნდობისა და საპროგნოზო ინტერვალების აგება. მაგალითად, თუ α=0.01, უნდა მოიძებნოს $t_{11,\alpha/2}=t_{11,0.005}$=3.106 და ნდობის ინტერვალი μ^* -თვის იქნება

$$112.812 \pm 3.106 \cdot 3.58 = 112.812 \pm 11.119$$

დ) წინა პუნქტებში ჩატარებული ანალიზის საფუძველზე აღმოჩნდა, რომ არსებული მონაცემების საფუძველზე სახლის ექსპლუატაციის ხანგძლივობა არ ახდენს გავლენას სახლის გასაყიდ ფასზე (B_2=0). შესაძლებელია თუ არა ამ ცვლადის გამორიცხვა მოდელიდან ისე, რომ დეტერმინაციის კოეფიციენტი საგრძნობლად არ შემცირდეს?

დავალება: განიხილეთ მრავლობითი რეგრესიის მოდელი

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \varepsilon,$$

სადაც ახლა X_2-ით აღნიშნულია სახლის მიმდებარე მიწის ნაკვეთის ფართობი. შეამოწმეთ, რომ b_0= –20.3721, b_1= 4.3117, b_3= 4.7177, s= 6.622, R^2= 0.9155.

გაეცით პასუხი დ) პუნქტში დასმულ კითხვას.

მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი მატრიცული ფორმით*. წინა პუნქტში ჩვენ მოვიყვანეთ რეგრესიული ანალიზისათვის საჭირო ზოგიერთი ფორმულა, როცა რეგრესორთა რიცხვი იყო ორი. იმ შემთხვევაში, როდესაც რეგრესორთა რაოდენობა მეტია ორზე (k>2), მოსახერხებელია ყველა ფორმულის მატრიცული ფორმით ჩაწერა. შემოვიღოთ $\boldsymbol{X}$ მატრიცა, რომელსაც რეგრესიის მატრიცას უწოდებენ.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{21} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

ვგულისხმობთ, რომ $x_{01}=x_{02}=\dots=x_{0n}=1$.

რეგრესიის კოეფიციენტების უცნობი ვექტორია:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \dots \\ B_k \end{bmatrix}.$$

მისი განზომილებაა (k+1).

გადახრათა ვექტორია:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

დამოუკიდებელი ცვლადი მოიცემა ვექტორით:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

მივიღებთ ასეთ სისტემას:

$$Y=XB+\varepsilon \qquad (17.23)$$

ეს თანაფარდობა იგივეა, რაც (17.3) თანაფარდობანი.

ნორმალურ განტოლებათა (17.4) სისტემა უცნობი B ვექტორის $b=(b_0,b_1,..,b_k)'$ შეფასების ასაგებად ჩაიწერება ასე:

$$X'Xb = X'Y, \qquad (17.24)$$

თუ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან ე.ი. $X'X$ მატრიცა გადაუგვარებელია, ნორმალური სისტემის ამოხსნაა

$$b=(X'X)^{-1}X'Y \qquad (17.25)$$

b ვექტორის დისპერსიული მატრიცაა

$$D(b)= \sigma^2 (X'X)^{-1}.$$

ამრიგად, (17.21) გამოსახულებაში $\Sigma = (X'X)^{-1}$, ხოლო (17.14) გამოსახულებაში Ψ_j წარმოადგენს $(X'X)^{-1}$ მატრიცის მთავარი დიაგონალის j -იურ ელემენტს.

SSE-ს გამოსათვლელად გვაქვს ფორმულა:

$$SSE = e'e, \qquad (17.26)$$

სადაც $e= (Y_1-\hat{Y}_1, Y_2-\hat{Y}_2,\dots,Y_n-\hat{Y}_n)'$ ნაშთების ვექტორია, ანუ $e=Y-\hat{Y}$, სადაც $\hat{Y}=Xb$. მეორეს მხრივ ნაშთების e ვექტორი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი ფორმით

$$e = M\varepsilon, \qquad (17.27)$$

სადაც $M = I_n - X(X'X)^{-1}X'$; $M'M=M$, ხოლო I_n ერთეულოვანი (nxn) მატრიცაა.

(17.27) ფორმულიდან ადვილად მიიღება, რომ

$$E(e'e) = [n-(k-1)]\sigma^2.$$

ამიტომ უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება მოიცემა ფორმულით

$$S^2 = \frac{SSE}{n-(k+1)}. \tag{17.28}$$

თუ Σ მატრიცის დიაგონალურ ელემენტებს გავამრავლებთ S^2-ზე, მიიღება $b_0, b_1, .., b_k$ სიდიდეების დისპერსიების შეფასებები:

$$S^2_{b_0}, S^2_{b_1}, ..., S^2_{b_k},$$

შესაბამისად.

დეტერმინაციის კოეფიციენტის ფორმულა შემდეგია

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}_i)^2} = \frac{(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})}.$$

დისპერსიული თანაფარდობა მატრიცულ ფორმაში ასე გამოიყურება:

$$\begin{matrix} (Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y}) & = & (Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y}) & + & (\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y}), \\ SST & = & SSE & + & SSR \end{matrix} \tag{17.29}$$

ხოლო F სტატისტიკას ექნება სახე:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{Y}}-\overline{\mathbf{Y}})'(\hat{\mathbf{Y}}-\overline{\mathbf{Y}})}{k} \Big/ \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k-1}.$$

T სტატისტიკა b_j კოეფიციენტისათვის მოიცემა ასე:

$$T_{b_j} = \frac{b_j - B_j}{S_{b_j}}, \quad j = 1,2,..,k.$$

საბოლოოდ, მოვიყვანოთ $\hat{Y}^*$-ის დისპერსიის, $D^* = D\hat{Y}^*$-ის გამოსახულება. რადგანაც, $\hat{Y}^* = b'x^*$, ამიტომ

$$D\hat{Y}^* = Ex^{*\prime}(b-B)(b-B)'x^*$$

და ე.ი.

$$D^* = \sigma^2 x^{*\prime}(X'X)^{-1}x^*, \tag{17.30}$$

$$\hat{D}^* = S^2 b^* (X X)^{-1} b^*. \tag{17.31}$$

გამოსათვლელი ფორმულების მოყვანას გაშლილი სახით აზრი არა აქვს (არც არის იოლი განსახორციელებელი). როცა რეგრესორთა რიცხვი ორზე მეტია გამოთვლებს

აწარმოებენ მხოლოდ კომპიუტერით. აქ მოყვანილი ფორმულების ცოდნა საჭიროა, ვინაიდან კომპიუტერი მოგვცემს ამ ფორმულების შესაბამის რიცხვით პასუხებს.

კორელაციური ანალიზი. მრავლობითი და კერძო კორელაციის კოეფიციენტები*. მარტივი რეგრესიის შემთხვევაში ადვილად მყარდება კავშირი რეგრესიის კოეფიციენტის შეფასებასა და შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტს შორის. სახელდობრ

$$b_1 = r\,\frac{SS_Y}{SS_X}, \tag{17.32}$$

სადაც r შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტია, SS_Y და SS_X წარმოადგენს Y და X ცვლადების შერჩევით სტანდარტულ გადახრებს, შესაბამისად. ჩვენთვის ცნობილია ის ფაქტიც, რომ დეტერმინაციის კოეფიციენტი R^2 ტოლია შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატისა:

$$R^2 = r^2. \tag{17.33}$$

ამრიგად, მარტივი რეგრესიის შემთხვევაში, ყველა საჭირო სიდიდე გამოითვლება X და Y ცვლადების დისპერსიული მატრიცის ელემენტების მეშვეობით.

იბადება კითხვა: ხომ არ შეიძლება აღმოჩენილი იქნეს მსგავსი კავშირები მრავლობითი რეგრესიის შემთხვევაშიც?

ადრე ჩვენ შევნიშნეთ, რომ მრავლობითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი უდრის შერჩევითი მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატს (რაც (17.33) თანაფარდობის ანალოგს წარმოადგენს). (17.32)-ის ანალოგიური თანაფარდობების დასადგენად ჩვენ დაგვჭირდება კერძო კორელაციის კოეფიციენტის ცნება.

ვთქვათ, X_1, X_2, ..., X_k ამხსნელი ცვლადებია, Y წარმოადგენს დამოუკიდებელ ცვლადს, ხოლო შესაბამისი დაკვირვებებია

$$\{Y_1, x_{1i}, x_{2i}, .., x_{ki}\},\ \mathrm{i} = 1, 2, ..., n.$$

Y და X_j ცვლადებს შორის შერჩევითი კერძო კორელაციის $r_{Yj.1,...,j-1,j+1,...k}$ კოეფიციენტი განიმარტება როგორც შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი $\left(Y - \hat{Y}(x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_{j+1}, .., x_k)\right)$ და $\left(X_j - \hat{X}_j(x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_{j+1}, .., x_k)\right)$ ცვლადებს შორის, სადაც $\hat{Y}(x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_{j+1}, .., x_k)$ და $\hat{X}_j(x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_{j+1}, .., x_k)$ არის Y და შესაბამისად X_j ცვლადების X_1, ... , X_{j-1}, X_{j+1}, ... , X_k ცვლადებზე რეგრესიების შეფასებები, რომლებიც აგებულია უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, არსებული დაკვირვებების საფუძველზე, ე.ი. Y და შესაბამისად X_j ცვლადები განიხილება, როგორც დამოკიდებული ცვლადები, ხოლო დანარჩენები ითვლება დამოუკიდებელ ცვლადებად და ხდება X_l-თან მდგომი რეგრესიის კოეფიციენტის შეფასება (l=1,2,...,k, $l \neq j$), როგორც Y, ასევე X_j ცვლადისათვის. შემდგომ მათ საფუძველზე აიგება რეგრესიის ზედაპირების შეფასებები.

ამრიგად,

$$r_{Yj.1,2,...,j-1,j+1,...,k}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)(x_{ji}-\hat{x}_{ji})}{\left(\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\hat{x}_{ii})^2\right)^{1/2}},$$

სადაც $\hat{Y}_i=\hat{Y}(x_{1i},...,x_{j-1,i},x_{j+1,i},...,x_{ki})$, $\hat{x}_{ji}=\hat{x}_j(x_{1i},...,x_{j-1,i},x_{j+1,i},...,x_{ki})$.

კერძო კორელაციის კოეფიციენტების შემოღება დაკავშირებულია იმ გარემოებასთან, რომ Y და X ცვლადებს შორის კორელაციის კოეფიციენტი შეიძლება მნიშვნელოვნად დიდი (მოდულით) აღმოჩნდეს დანარჩენი X_1, ... , X_{j-1}, X_{j+1}, ... , X_k ცვლადების გავლენით. სახელდობრ, Y და შესაბამისად X_j ცვლადები წრფივად იყვნენ დაკავშირებულნი იმის გამო, რომ თითოეული მათგანი წრფივ კავშირშია X_1, ... , X_{j-1}, X_{j+1}, ... , X_k ცვლადებთან. ამიტომ თითოეული მათგანიდან გამოირიცხება მათი საუკეთესო წრფივი $\hat{Y}(x_1,x_2,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_k)$ და $\hat{X}_j(x_1,x_2,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_k)$ წარმოდგენა და გამოითვლება კორელაციის კოიფიციენტი ნაშთებს შორის.

თუ შემოვიღებთ შერჩევითი კორელაციის მატრიცას (Y, X_1, ... , X_k) ვექტორისათვის

$$R=\begin{bmatrix} r_{YY} & r_{Y1} & \cdots & r_{Yk}\\ r_{1Y} & r_{11} & \cdots & r_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{kY} & r_{k1} & \cdots & r_{kk}\end{bmatrix},$$

სადაც $r_{Yi}=r_{iY}=\overline{\text{cov}}(Y,X_i)$, $r_{ij}=r_{ji}=\overline{\text{cov}}(X_j,X_i)$, მაშინ კერძო კორელაციის კოეფიციენტი ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$r_{Yj\cdot 1,2,...,j-1,j+1,...k}=\frac{R_{Yj}}{\sqrt{R_{YY}R_{jj}}},$$

სადაც $R^{+}_{Y_j}$ აღნიშნავს R მატრიცის $r^{+}_{Y_j}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას, R_{YY} - r_{YY} ელემენტისა და R_{jj} კი r_{jj} ელემენტის ალგებრულ დამატებას, შესაბამისად.

შემოვიღოთ $S_{Y.1,2,...,j-1,j+1,...k}$ და $S_{j.1,2,...,j-1,j+1,...k}$ აღნიშვნები $\left(Y-\hat{Y}(x_1,x_2,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_k)\right)$ და $\left(X_j-\hat{X}_j(x_1,x_2,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_k)\right)$ სიდიდეების შერჩევითი სტანდარტული გადახრებისათვის, შესაბამისად.

ამ აღნიშვნებში X_j ცვლადთან მდგომი B_j კოეფიციენტის შეფასება მოიცემა ფორმულით

$$b_j=r_{Yj\cdot 1,2,...,j-1,j+1,...k}\cdot\frac{S_{Y\cdot 1,2,...,j-1,j+1,...k}}{S_{j\cdot 1,2,...,j-1,j+1,...k}},\ j=1,2,..,k, \qquad (17.34)$$

რაც (17.32) თანაფარდობის ანალოგიური გამოსახულებაა. ეს თანაფარდობა შეიძლება ჩაიწეროს უფრო კომპაქტური ფორმითაც

$$b_j=\frac{\sqrt{SS_Y}}{\sqrt{SS_j}}\cdot\frac{R_{Yj}}{R_{YY}},j=1,2,..,k, \tag{17.35}$$

სადაც $SS_j=\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)^2$, $\bar{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ji}$.

მაგალითად, როცა k=2, გვექნება

$$b_1=-\frac{\sqrt{SS_Y}}{\sqrt{SS_1}}\cdot\frac{r_{Y1}-r_{Y2}r_{12}}{1-r_{12}^2},$$

$$b_2=-\frac{\sqrt{SS_Y}}{\sqrt{SS_2}}\cdot\frac{r_{Y2}-r_{Y1}r_{12}}{1-r_{12}^2},$$

რაც ემთხვევა (17.34) და (17.35) გამოსახულებებს.

მულტიკოლინეარულობა. მრავალი რეგრესორის შემთხვევაში, ხშირად, რამოდენიმე მათგანს შორის ადგილი აქვს ზუსტ ან მიახლოებით წრფივ დამოკიდებულებას. ამ მოვლენას ეწოდება მულტიკოლინეარულობა. პირველ შემთხვევაში (როცა დამოკიდებულება ზუსტად წრფივია) ნორმალური სისტემის დეტერმინანტი ნულია და ამ სისტემას ცალსახა ამონახსნი არა აქვს. მეორე შემთხვევაში (დამოკიდებულება მიახლოებით წრფივია) ნორმალური სისტემის დეტერმინანტის რიცხვითი მნიშვნელობა ახლოს არის ნულთან. მართალია სისტემას აქვს ერთადერთი ამოხსნა, მაგრამ ზოგიერთი კოეფიციენტის ცდომილება ძალზედ დიდია. გარდა ამისა, კოეფიციენტების შეფასებები ძალიან არამდგრადია: მონაცემთა სულ მცირე რაოდენობის დამატებაც კი იწვევს დიდ ჩანაცვლებებს ზოგიერთი კოეფიციენტის შეფასებაში.

მაგალითად, თუ $\hat{X}_j$ აღვნიშნავთ X_j-ის რეგრესიას დანარჩენ $X_1, \dots , X_{j-1}, X_{j+1}, \dots ,$ X_k ცვლადებზე, მაშინ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\sigma_{b_j}^2=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\hat{x}_{ji})^2},$$

და თუ X_j -ს შერჩევითი მნიშვნელობები კარგად პროგნოზირდება დანარჩენი პრედიქტორების მნიშვნელობებით, ამ უკანასკნელი გამოსახულების მნიშვნელი მცირე იდიდე იქნება და ამის გამო, დიდი იქნება σ_{bj}^2 -ს მნიშვნელობა.

რეგრესიულ ანალიზში მულტიკოლინეარულობა იწვევს ტექნიკურ სირთულეებს. ეკონომეტრიკაში შეისწავლება ამ სირთულეთა დაძლევის რამოდენიმე მეთოდი. ამ საკითხს ჩვენ აქ არ შევეხებით. შემოვიფარგლებით მხოლოდ ერთი შენიშვნით: აღვნიშნოთ R_j^2 -ით მრავლობითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი, გამოთვლილი იმ შემთხვევაში,

როდესაც იგება X_j-ის როგორც დამოუკიდებელი ცვლადის რეგრესია $X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots,$ X_k პრედიქტორებზე. ითვლება, რომ ადგილი აქვს გარკვეულ მულტიკოლინეარულობას, როდესაც $R_j^2 > 0{,}9$ რომელიმე j-სათვის. ზოგიერთი პროგრამა რეგრესიულ ანალიზში გამორიცხავს X_j ცვლადს მოდელიდან, თუ R_j^2-ის მნიშვნელობა ახლოსაა ერთთან.

მრავლობითი წრფივი რეგრესიის მოდელის ინტერპრეტაცია. ჩვენს მიერ განხილულ (17.1) (ანდა (17.3)) მოდელს უწოდებენ ზოგად ადიტიურ მრავლობითი რეგრესიის მოდელს. ეს მოდელი ზოგადია იმ თვალსაზრისით, რომ მის ფარგლებში თავსდება მრავალი არაწრფივი მოდელი. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ორი პრედიქტორის შემთხვევა და 4 შესაძლო, პრაქტიკული თვალსაზრისით გამოსადეგი მოდელი:

1. პირველი რიგის მოდელი

$$Y = B_0+B_1X_1+B_2X_2+\varepsilon;$$

2. მეორე რიგის მოდელი ურთიერთქმედების გარეშე:

$$Y = B_0+B_1X_1+B_2X_2+B_3X_1^2+B_4X_2^2+\varepsilon;$$

ცხადია, რომ ახალ $X_1' = X_1$, $X_2' = X_2$, $X_3' = X_1^2$, $X_4' = X_2^2$, ცვლადებზე გადასვლა მიგვიყვანს (17.1) მოდელამდე 4 პრედიქტორით.

თუ პირველი რიგის მოდელის შემთხვევაში X_2-ის ფიქსირებული მნიშვნელობების დროს რეგრესიის ფუნქცია, როგორც ერთი, X_1 ცვლადის ფუნქცია წარმოადგენს წრფეს, ამ მოდელში X_2-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისას რეგრესიის ფუნქცია წარმოადგენს არა წრფეს, არამედ მეორე რიგის მრუდს, ამასთან $X_2=x_2$ ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის $X_1=x_1$ ცვლადის ერთეულოვანი ცვლილება იწვევს Y ცვლადის ცვლილებას საშუალოდ $B_1+B_3+2B_3x_1$ სიდიდით. მართლაც

$$B_0+B_1(x_1+1)+B_2x_2+B_3(x_1+1)^2+B_4x_2^2+B_0+B_1x_1+B_2x_2+B_3x_1^2+B_4x_2^2=B_1+B_3+2B_3x_1,$$

ამასთან ეს სიდიდე არ არის დამოკიდებული x_2-ზე. ამიტომ X_2-ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის რეგრესიის ფუნქციები პარალელური მრუდებია.

მსგავსი მსჯელობა შეიძლება ჩატარდეს ყველა ქვემოთ მოყვანილი მოდელისათვის

3. პირველი რიგის მოდელი ურთიერთქმედებით

$$Y = B_0+B_1X_1+B_2X_2+B_3X_1X_2+\varepsilon;$$

4. სრული მეორე რიგის, ანუ სრული კვადრატული მოდელი

$$Y = B_0+B_1X_1+B_2X_2+B_3X_1^2+B_4X_2^2+B_5X_1X_2+\varepsilon;$$

ანალოგიური ტიპის მოდელები შეიძლება განხილულ იქნეს უფრო მეტი პრედიქტორის შემთხვევაშიც.

ჩვენ აქამდე ვგულისხმობდით, რომ ყველა პრედიქტორი წარმოადგენს რაოდენობრივ ცვლადს. შესაძლებელია აიგოს ისეთი მოდელიც, რომელიც შეიცავს ერთ ან რამოდენიმე თვისებრივ (კატეგორიზებულ) ცვლადს. განვიხილოთ ორი ცვლადის შემთხვევა, რომელთაგან ერთი, რაოდენობრივია, ხოლო მეორე კი კატეგორიზებულია და გააჩნია სამი დონე (ვთქვათ a, b და c) შემოვიღოთ შემდეგი ცვლადები

X_1-რაოდენობრივი ცვლადი,

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{თუ მეორე ცვლადის დონეა} - b \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases},$$

$$X_3 = \begin{cases} 1, & \text{თუ მეორე ცვლადის დონეა} - c \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases},$$

ნათელია, რომ, თუ X_2=X_3=0, მაშინ მეორე ცვლადი იმყოფება a დონეზე (X_2=X_3=1 ტოლობა დასაშვები არ არის). X_2 და X_3 პრედიქტორებს ხშირად უწოდებენ ინდიკატორებს ანდა მუნჯ ცვლადებს. მოვიყვანოთ ორი შესაძლო მოდელი

$$Y = B_0+B_1X_1+B_2X_2+B_3X_3+\varepsilon$$

და

$$Y = B_0+B_1X_1+B_2X_2+B_3X_3+B_4 X_1X_2+B_5X_1X_3+\varepsilon.$$

პირველ მათგანში, იმისდა მიხედვით თუ რომელ დონეზე იმყოფება კატეგორიზებული ცვლადი, იცვლება რეგრესიის ფუნქციის კოორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი, დახრილობა უცვლელი რჩება. მართლაც, ვთქვათ კატეგორიზებული ცვლადი იმყოფება a დონეზე, მაშინ X_2=X_3=0 და რეგრესიის ფუნქციის მნიშვნელობა $X_1 = x_1$ წერტილში იქნება

$$y=B_0+B_1x_1,$$

თუ თვისებრივი ცვლადის დონეა b (c). მაშინ $X_2 = 1$, $X_3 = 0$ ($X_2 = 0$, X_3=1) და X_1=x_1 წერტილში რეგრესიის ფუნქცია იქნება

$$y=(B_0+B_2)+B_1x_1 \quad (y=B_0+B_3)+B_1x_1).$$

მეორე მოდელში კი თვისებრივი ცვლადის დონეების ცვლილება იწვევს რეგრესიის წრფის როგორც დახრილობის, ასევე ორდინატთა ღერძთან თანაკვეთის ცვლილებას. მართლაც, თუ თვისებრივი ცვლადი იმყოფება a დონეზე, ე.ი. $X_2 = X_3 = 0$, მაშინ რეგრესიის ფუნქციის მნიშვნელობა X_1=x_1 წერტილში იქნება

$$y=B_0+B_1x_1,$$

თუ თვისებრივი ცვლადის დონეა b, მაშინ X_2=1, X_3 = 0 და

$$y = (B_0+B_2)+(B_1+B_4)x_1.$$

რა თქმა უნდა, შეიძლება განხილულ იქნას მრავალპრედიქტორიანი მოდელებიც, რომლებშიც ნაწილი პრედიქტორებისა იქნება რაოდენობრივი, ნაწილი თვისებრივი.

ახლა განვიხილოთ ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი, ე.წ. პოლინომური რეგრესიის შემთხვევა. ხშირად, გაბნევის დიაგრამა მიგვითითებს იმ ფაქტზე, რომ Y და X ცვლადებს შორის კავშირი წრფივი არ არის, არამედ შესაძლოა, რომ ამ ცვლადებს შორის კავშირი აღიწერებოდეს პოლინომური ფუნქციით $y=B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_kx^k$, ანუ Y-ის რეგრესია X ცვლადზე წარმოადგენს არა წრფივ, არამედ პოლინომურ ფუნქციას.

k-რიგის პოლინომური რეგრესიის მოდელი მოიცემა თანაფარდობით

$$Y = B_0+B_1X+B_2X^2+\cdots+B_kX^k+\varepsilon,$$

სადაც $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$ და ε დამოუკიდებელია X ცვლადისაგან.

თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადებს $X_i' = X^i$, $i=1,2,\ldots,k$, მივიღებთ მრავლობითი რეგრესიის წრფივ მოდელს

$$Y = B_0+B_1X_1'+\cdots+B_kX_k'+\varepsilon,$$

რომელიც ჩვენ უკვე შესწავლილი გვაქვს.

ზოგადი ადიციური მრავლობითი რეგრესიის მოდელით აღიწერება ე.წ. არსებითად წრფივი მოდელებიც, რომლებიც დამოკიდებული Y ცვლადის, ან X პრედიქტორის, ანდა ორივეს გარდაქმნით დაიყვანება წრფივ მოდელამდე.

მოვიყვანოთ ასეთი მოდელების მაგალითები ერთი პრედიქტორის შემთხვევაში. თავდაპირველად აღვწეროთ შესაძლო ფუნქციები:

	ფუნქცია	გარდაქმნა	წრფივი ფორმა
1.	ექსპონენციალური $y = \alpha e^{\beta x}$	$y' = \ln y$,	$y' = \ln\alpha+\beta x$,
2.	$y = \alpha e^{\beta}$	$y' = \log y$, $x' = \log x$	$y' = \log\alpha+\beta x'$,
3.	$y = \alpha+\beta\log x$	$x' = \log x$	$y = \alpha+\beta x'$,
4.	შექცეული $y = \alpha+\beta\dfrac{1}{x}$	$x' = \dfrac{1}{x}$	$y = \alpha+\beta x'$.

ახლა კი შეგვიძლია მოვიყვანოთ არსებითად წრფივი მოდელების ფორმები, რომლებიც შეესაბამება ზემომოყვანილ გარდაქმნებს.

1. $Y = \alpha e^{\beta X}\varepsilon$ – მულტიპლიკატური ექსპონენციალური მოდელი: $\ln Y = Y' = B_0+B_1X'+\varepsilon'$, სადაც $X' = X$, $B_0 = \ln\alpha$, $B_1 = \beta$, $\varepsilon' = \ln\varepsilon$,
2. $Y = \alpha X^{\beta}\varepsilon$ – მულტიპლიკატური მოდელი: $Y' = B_0+B_1X'+\varepsilon'$, სადაც $Y' = \log Y$, $X' = \log X$, $B_0 = \log\alpha$, $B_1 = \beta$, $\varepsilon' = \log\varepsilon$,
3. $y = \alpha+\beta\log x+\varepsilon$, $x' = \log x$ გარდაქმნა აწრფივებს მოდელს,
4. $y = \alpha+\beta\dfrac{1}{x}+\varepsilon$, $x' = \dfrac{1}{x}$ გარდაქმნა პირდაპირ იძლევა წრფივ მოდელს.

რა თქმა უნდა, შესაძლებელია ორი ან მეტი პრედიქტორის შემცველი არსებითად წრფივი მოდელების აღწერაც.

ნაშთთა ანალიზი. ნაშთები განსაზღვრული იყო, როგორც n ცალი სხვაობა $e_i=Y_i-\hat{Y}_i$, $i=1,2,\ldots,n$, სადაც Y_i დაკვირვებული მნიშვნელობაა, ხოლო $\hat{Y}_i$ – შესაბამისი პროგნოზირებული მნიშვნელობა, გამოთვლილი რეგრესიის ფუნქციის მეშვეობით. ამრიგად, ნაშთები წარმოადგენს სხვაობებს ფაქტობრივად დაკვირვებულ და პროგნოზირებულ მნიშვნელობებს შორის, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს ის სიდიდეებია, რომლებიც ვერ აიხსნება რეგრესიით და შეიძლება ჩაითვალოს ε_i შეცდომების დაკვირვებულ მნიშვნელობად, თუ კი მოდელი სწორად არის არჩეული. ε_i, $i=1,2,\ldots,n$ შეცდომების შესახებ ჩვენ მიღებული გვქონდა დაშვებები მათი დამოუკიდებლობისა და ნორმალურად განაწილებულობის შესახებ, ნულოვანი საშუალოებითა და ერთნაირი, მუდმივი $\sigma^2>0$ დისპერსიებით. ბოლო დაშვება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია უცნობი რეგრესიის კოეფიციენტებისა და მოდელის ვარგისიანობის შესახებ სტატისტიკური დასკვნების გამოსატანად. თუ მოდელი სწორადაა შერჩეული, ნაშთები უნდა ავლენდეს თვისებებს, რომლებიც დაადასტურებდა მიღებულ დაშვებებს ანდა, ყოველ შემთხვევაში, წინააღმდეგობაში არ აღმოჩნდებოდა მათთან. სწორედ ეს იდეა უდევს საფუძვლად ნაშთთა ანალიზს, რომელმაც უნდა მიგვიყვანოს ერთ-ერთ დასკვნამდე: ჩვენი მონაცემები გვაძლევს საფუძველს დავასკვნათ, რომ:

1) დაშვებები რაიმე თვალსაზრისით დარღვეულია;
2) დაშვებები, როგორც ჩანს, არ არის დარღვეული.

ნაშთთა კვლევის თითქმის ყველა პროცედურა გრაფიკულ ხასიათს ატარებს, ადვილი ჩასატარებელია და საშუალებას იძლევა, დიდი სირთულეების გარეშე დავადგინოთ, დარღვეულია თუ არა ესა თუ ის დაშვება. როგორც წესი, აიგება ნაშთების სხვადასხვა ცვლადებზე დამოკიდებულობის გრაფიკები, რომლებსაც დიაგნოსტიკურ გრაფიკებსაც უწოდებენ. თუ დაკვირვებათა n მოცულობა საკმაოდ დიდია, მაშინ განიხილავენ სტანდარტიზირებულ ნაშთებს: $e_i^* = \dfrac{e_i}{S}$.

დიაგნოსტიკური გრაფიკების ძირითადი სახეებია:

(1) ზოგადი;
(2) დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი, თუ ცნობილია მონაცემთა გამოჩენის მიმდევრობა: e_i ან e_i^* ვერტიკალურ ღერძზე, დრო – ჰორიზონტალურზე;
(3) ნაშთების პროგნოზირებულ $\hat{Y}_i$, $i=1,2,\ldots,n$, მნიშვნელობებზე დამოკიდებულების გრაფიკი, e_i ან e_i^* ვერტიკალურ ღერძზე, $\hat{Y}_i$ – ჰორიზონტალურზე;
(4) ნაშთების დამოუკიდებელ x_{ij}, $i = 1,2,\ldots,n$ ($j=1,2,\ldots,k$) ცვლადებზე დამოკიდებულების გრაფიკი, e_i ან e_i^* ვერტიკალურ ღერძზე, x_{ij} – ჰორიზონტალურზე (ყოველი ფიქსირებული $j=1,2,\ldots,k$-თვის);

(5) ნორმალური ალბათობის გრაფიკები $e_i^{\bullet}$ $i = 1,2,...,n$ ნაშთებისათვის (A normal probability plot of standartized residuals $e_i^{\bullet}$);
ხშირად აიგება შემდეგი გრაფიკებიც

(6) პროგნოზირებული მნიშვნელობების ($\hat{Y}_i$) დაკვირვებულ მნიშვნელობებზე (Y_i) დამოკიდებულების გრაფიკი: $\hat{Y}_i$ ვერტიკალურ ღერძზე, Y_i – ჰორიზონტალურზე.

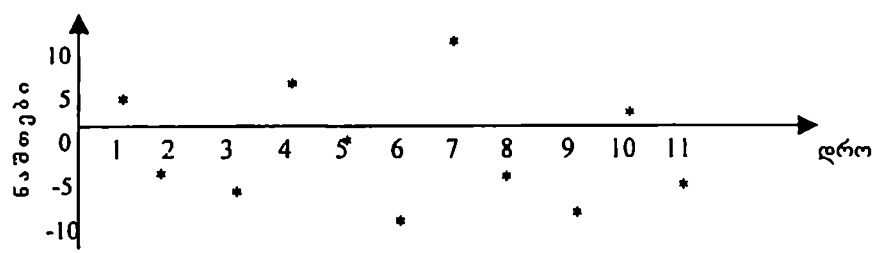
(1) ზოგადი გრაფიკი გულისხმობს ჰისტოგრამის აგებას e_i, $i = 1,2,...,n$, (ან $e_i^{\bullet} = \frac{e_i}{S}$) დაკვირვებული მნიშვნელობებისათვის, რომლის მეშვეობითაც უნდა დადგინდეს მიახლოვებულია თუ არა ეს ჰისტოგრამა ნორმალური განაწილების სიმკვრივის გრაფიკთან.

(2) e_i-ების დროზე, i-ზე დამოკიდებულების გრაფიკები.

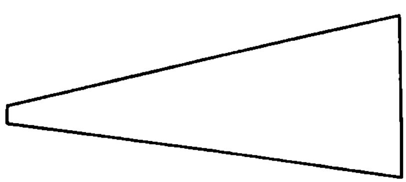
ა) თუ ε_i-ს დისპერსიები, $\sigma_i^2 = D(\varepsilon_i)$, $i = 1,2,...,n$, არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ ნაშთთა განლაგების ტიპიური სურათი იქნებოდა (თანაბრად არიან განლაგებულნი ზოლში, თუ შევხედავთ „მოშორებიდან“):

ნახ. 17.1

მაგალითად, ვთქვათ e_i-ს მნიშვნელობები ასეთია: $e_1 = 5$, $e_2 = -2$, $e_3 = -4$, $e_4 = 4$, $e_5 = 0$, $e_6 = -6$, $e_7 = 9$, $e_8 = -2$, $e_9 = -5$, $e_{10} = 3$, $e_{11} = -2$, მივიღებთ მოყვანილის მსგავს სურათს:

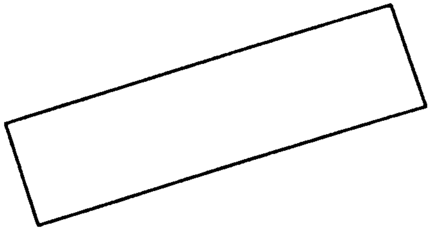


ბ) თუ σ_i^2 არ არის მუდმივი და იზრდება დროის მიხედვით, გვექნებოდა სურათი:



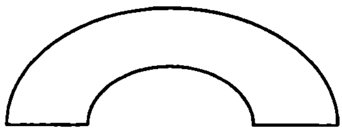
ნახ. 17.2

გ) მოდელში ჩასართავია დროითი პარამეტრის წრფივი წევრი, თუ სურათს აქვს სახე:



ნახ. 17.3

დ) მოდელში ჩასართავია დროითი პარამეტრის წრფივი და კვადრატული წევრები, თუ სურათს აქვს სახე:



ნახ. 17.4

ამ სურათების მიხედვით მსგავსი დასკვნების გაკეთება ხდება (3) და (4) სახის დიაგნოსტიკური გრაფიკების შემთხვევაშიც. მაგალითად, თუ e_i-ს ან $e_i^{\bullet}$ დამოუკიდებლობას $\hat{Y}_i$-ზე აქვს იგივე სახე, რაც ნახ. 17.1-ზე, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ შეცდომათა დისპერსიები მუდმივია (არ არის დამოკიდებული $\hat{Y}_i$-ზე) და ა.შ.

შევჩერდეთ (5) სახის დიაგნოსტიკურ გრაფიკზე. ეს გრაფიკი საშუალებას იძლევა შემოწმდეს შეცდომების ნორმალურობის ჰიპოთეზა.

მისი აგების წესი შემდეგია: უნდა მოიძებნოს სტანდარტული ნორმალური განაწილების $[100(i–0.5)/n]$-პროცენტული წერტილი, z_i, $i=1,2,\ldots,n$, ამავე დროს $e_i^{\bullet}$-ის დაკვირვებული მნიშვნელობებისაგან უნდა შევადგინოთ ვარიაციული მწკრივი: $e_{(1)}^{\bullet},\ldots,e_{(n)}^{\bullet}$. ამის შემდეგ კოორდინატთა სიბრტყეზე აიგება წერტილები $[z_i, e_{(i)}^{\bullet}]$. რადგან e_i-ები ε_i-ის დაკვირვებული მნიშვნელობებია, ამიტომ თუ $\varepsilon_i \sim N(0,1)$, მაშინ ეს წერტილები უნდა განლაგდეს კოორდინატთა სათავეზე გამავალი 45°-იანი დახრილობის მქონე წრფის მახლობლად (იმ უბრალო მიზეზის გამო, რომ $e_{(i)}^{\bullet}$ წარმოადგენს შერჩევით $[100(i–0.5)/n]$-პროცენტილს, რომელიც ახლოსაა თეორიულთან, თუკი n საკმაოდ დიდია).

რაც შეეხება (6) სახის დიაგნოსტიკურ გრაფიკს, თუკი რეგრესიის ფუნქციის $\hat{Y}_i$ შეფასება იძლევა რეალურად დაკვირვებული Y_i მნიშვნელობების საკმაოდ ზუსტ

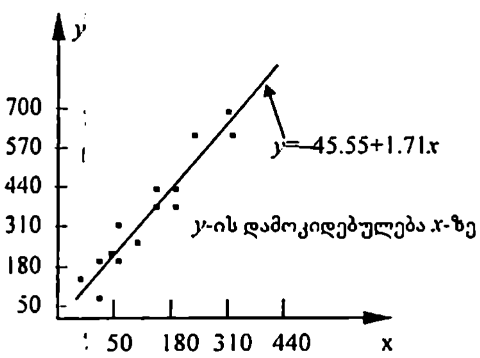
პროგნოზს, მაშინ $(Y_i, \hat{Y}_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ წერტილები უნდა განლაგდეს კოორდინატთა სათავეზე გამავალი 45°-იანი დახრილობის მქონე წრფის მიდამოში.

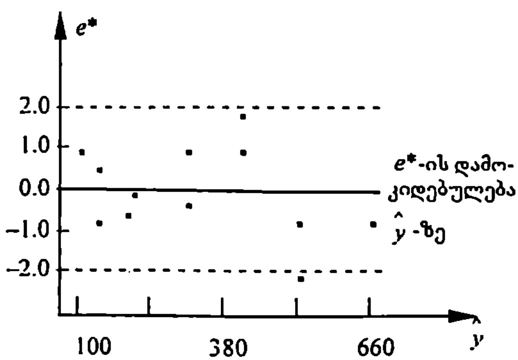
უნდა შევნიშნოთ, რომ დიაგნოსტიკური გრაფიკები მოყვანილი გვქონდა მე-12-ე თავშიც, როდესაც განვიხილავდით მარტივი წრფივი რეგრესიის მოდელს.

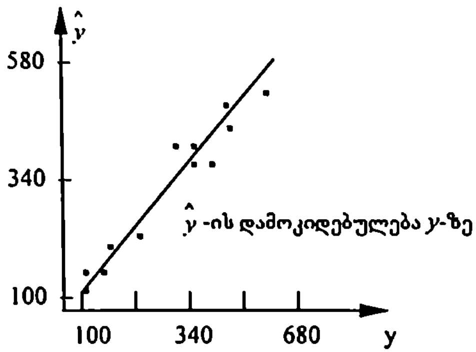
ვთქვათ, ჩვენი მონაცემები, x_i, Y_i, პროგნოზირებული მნიშვნელობები, $\hat{Y}_i$, ნაშთები, e_i და სტანდარტიზებული ნაშთები, e_i^*, $i=1,2,\ldots,14$ თავმოყრილია ცხრილში:

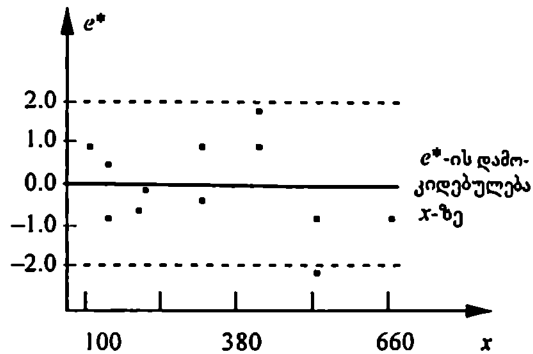
x_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	e_i	e_i^*
100	150	125.6	24.4	0.75
125	140	168.4	–28.4	–0.84
125	180	168.4	11.6	0.35
150	210	211.1	–1.1	–0.03
150	190	211.1	–21.1	–0.62
200	320	296.7	23.3	0.66
200	280	296.7	–16.7	–0.47
250	400	382.3	17.7	0.50
250	430	382.3	47.7	1.35
300	440	467.9	–27.9	–0.80
300	390	467.9	–77.9	–2.24
350	600	553.4	46.6	1.39
400	610	639.0	–29.0	–0.92
400	670	639.0	31.0	0.99

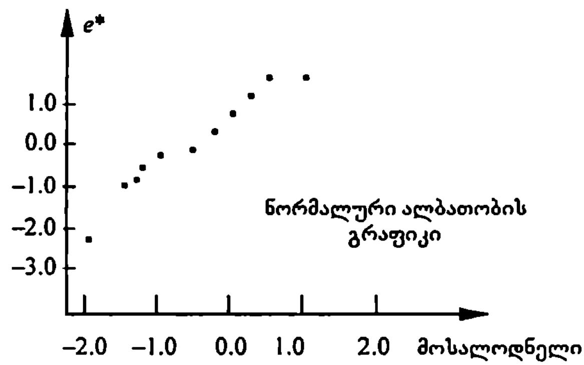
ამავე მონაცემებისათვის მოვიყვანოთ დიაგნოსტიკური გრაფიკები:











ყოველი გრაფიკი მიგვითითებს იმაზე, რომ რაიმე სერიოზულ გადახრებს მიღებული დაშვებებიდან ადგილი არა აქვს და მოყვანილი მონაცემები ადეკვატურად აღიწერება წრფივი რეგრესიული მოდელით.

მაგალითი 17.2. საფონდო ბირჟის ანალიტიკოსს სურს განსაზღვროს, თუ რა ფაქტორები ახდენს გავლენას აქციის ფასზე. გარკვეული ანალიზის ჩატარების შემდეგ სტატისტიკოსმა წამოაყენა ჰიპოთეზა, რომ ძირითადი ფაქტორები, რომლებიც მოქმედებს აქციის ფასზე (Y) შემდეგია: კვარტალური დივიდენდები (X_1), (ფასი/ამონაგები)-ფარდობა (X_2) და სახაზინო ვალდებულებების საპროცენტო განაკვეთი (X_3). მოიპოვა რა 20 კვარტლის მონაცემები ყველა განსახილავი ცვლადის მნიშვნელობებისათვის და შეიყვანა რა ისინი კომპიუტერულ სისტემაში, მან მიიღო ყველა საჭირო სტატისტიკის გამოთვლილი მნიშვნელობები.

მოდელი: $Y_i = B_0+B_1X_1+B_2X_2+B_3X_3+\varepsilon_i$;

კომპიუტერული ამონაბეჭდი შემდეგია.

Analysis of variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Value	Prob>F
Model	3	516.9036	172.3012	34.4341	0.000
Error	26	180.1368	5.0038		
C Total	39	697.0404			

Root MSE	2.2369	R-square	0.7416
Dep Mean	25.0962	Adj R-sq	0.7200
C.V.	8.9133		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H_0: Parameter =	rob>|T|
INTERCEPT	1	17.3925	5.5254	3.1477	0.0032
X_1	1	41.2991	7.5016	5.5054	0.0000
X_2	1	–0.4156	0.5228	–0.7953	0.4316
X_3	1	0.5709	0.4083	1.3982	0.1706

ჩატარებული გამოთვლების საფუძველზე:

a) დარწმუნდით მოდელის ვარგისიანობაში ანუ შეამოწმეთ ჰიპოთეზა H_0: $B_1=B_2=B_3=0$, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნობის დონით;

b) აიხსნება თუ არა აქციის ფასი კვარტალური დივიდენდებით? (შეამოწმეთ ჰიპოთეზა H_0:B_1=0);

c) არის თუ არა აქციის ფასი უარყოფით კავშირში (ფასი/ამონაგები) – ფაქტორთან. (შეამოწმეთ H_0:B_2=0 ჰიპოთეზა H_1:B_2<0 ალტერნატივის წინააღმდეგ).

ცვლადთა შერჩევა. ვთქვათ $X_1,\ldots,X_m$ პრედიქტორთა ის სრული ჩამონათვალია, რომელთა მიხედვითაც გვინდა შევარჩიოთ წრფივი რეგრესიის მოდელი, რომელიც ვარგისიანი აღმოჩნდებოდა დამოკიდებული Y ცვლადის ხარისხიანი პროგნოზირებისათვის. ამ ამოცანის გადაწყვეტისას, ჩვეულებრივ იყენებენ ორ ურთიერთსაწინააღმდეგო ხასიათის კრიტერიუმს:

1. იმ მიზნით, რომ რეგრესიის განტოლება იძლეოდეს საიმედო პროგნოზს, მოდელში უნდა ჩავრთოთ პრედიქტორთა შესაძლოდ დიდი რაოდენობა;
2. მეორეს მხრივ, პრედიქტორთა დიდი რაოდენობის შესახებ ინფორმაციის მიღებასთან, გადამუშავებასთან და მოდელის შემოწმებასთან დაკავშირებული ხარჯების გამო

ჩვენ უნდა ვისწრაფოდეთ, რომ მოდელში ჩავრთოთ პრედიქტორთა შესაძლოდ მცირე რაოდენობა.

აქედან გამომდინარე, სტატისტიკოსის ამოცანაა პრედიქტორთა შესახებ მის ხელთ არსებული მონაცემების მიხედვით შეარჩიოს რეგრესიული მოდელი, რომელიც შეიცავს არა ყველა პრედიქტორს, არამედ მათ რაიმე ქვესიმრავლეს და ამავე დროს, კარგ თანხმობაშია მონაცემებთან. ასეთ მოდელთან მუშაობა უფრო მოსახერხებელია, განსაკუთრებით მონაცემთა შემდგომი მოპოვების თვალსაზრისით, და მისი ინტერპრეტაცია უფრო იოლია, ვიდრე მოდელისა, რომელიც შეიცავს ყველა პრედიქტორს.

ყველა შესაძლო რეგრესიათა მეთოდი. თუ იმ პრედიქტორთა რიცხვი, m, რომელთა მონაცემებიც ჩვენ ხელთ გვაქვს, არც თუ ისე დიდია, მაშინ რეკომენდებულია მოისინჯოს ყველანაირი მოდელი, რომელიც შეიცავს პრედიქტორთა შესაძლო ქვესიმრავლეებს და რაიმე კრიტერიუმით არჩეული იქნას მათ შორის საუკეთესო. მაგალითად, როცა m=4, უნდა გადაისინჯოს 2^4=16 მოდელი: 4-ერთპრედიქტორიანი, 6-ორპრედიქტორიანი, 4-სამპრედიქტორიანი, 1-ოთხპრედიქტორიანი და ერთიც, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ პრედიქტორს.

ამ მეთოდს ყველა შესაძლო რეგრესიათა მეთოდს უწოდებენ. მრავალი კომპიუტერული პროგრამების პაკეტი ყოველი ფიქსირებული $m \le 10$-თვის იძლევა საუკეთესო 1-პრედიქტორიან მოდელს, საუკეთესო 2-პრედიქტორიან და ა.შ. მოდელებს („საუკეთესო" მოდელში აქ იგულისხმება ის მოდელი, რომელსაც აქვს უმცირესი SSE ან რაც იგივეა, უდიდესი R^2). მათ შორის საუკეთესო მოდელის შესარჩევად კი გამოიყენება რამოდენიმე კრიტერიუმი, რომელსაც ქვემოთ მოვიყვანთ.

შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ ქვედა k ინდექსს ყველა სიდიდისათვის, რომელიც გამოთვლილია k პრედიქტორის შემცველი მოდელისათვის (მაგ SSE_k). ყოველი ფიქსირებული k-თვის საუკეთესოდ მივიჩნევთ იმ მოდელს, რომელსაც აქვს მინიმალური SSE_k. უფრო რთულია SSE_k-ების შედარება k-ს განსხვავებული მნიშვნელობებისათვის. მოვიყვანოთ სამი განსხვავებული კრიტერიუმი, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება.

1^0. R_k^2-ით აღვნიშნოთ მრავლობითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი საუკეთესო k-პრედიქტორიანი მოდელისათვის. რადგანაც k-ს ზრდასთან ერთად R_k^2-იც იზრდება, ცხადია რომ არ არსებობს $k<m$, რომელიც მაქსიმუმს ანიჭებს R_k^2-ს. ამიტომ ჩვენ ვირჩევთ k-ს შესაძლოდ მცირე მნიშვნელობას, რომლის R_k^2-იც დიდად არ განსხვავდება $R^2=R_m^2$-ისაგან (მაგალითად R_k^2 ემთხვევა R^2-ს მეორე ათწილადი ნიშნის სიზუსტით).

2^0. თუ $MSE_k = SSE_k/(n-k-1)$, ავირჩიოთ ის k, რომლისთვისაც MSE_k მინიმალურია, ანდა (adjusted R_k^2) მაქსიმალურია. ამ ორივე სიდიდეს ის თვისება აქვს, რომ R_k^2-გან განსხვავებით არ წარმოადგენენ k-ს მონოტონურ ფუნქციებს.

3^0. განიხილავენ სიდიდეს

$$C_k = \frac{SSE_k}{S^2} + 2(k+1) - n,$$

სადაც S^2 წარმოადგენს σ^2-ის შეფასებას მოდელისათვის, რომელიც შეიცავს ყველა პრედიქტორს.

სასურველ მოდელად ირჩევენ ისეთს, რომელსაც აქვს მინიმალური C_k.

ვთქვათ, გვქონდა მონაცემები 10 პრედიქტორის, ($X_1,..,X_{10}$) შესახებ, რომელთა საფუძველზე შერჩეული იქნა საუკეთესო 1-პრედიქტორიანი, 2-პრედიქტორიანი და ა.შ. მოდელები და გამოთვლილი იქნა SSE_k, R_k^2, adjusted R_k^2, C_k, რომლებიც მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

k		SSE_k	R_k^2	adjusted R_k^2	C_k
1	9	247.2	0.756	0.748	11.6
2	2	169.7	0.833	0.821	1.2
3	3,10,–2	150.4	0.852	0.836	0.1
4	6	142.3	0.860	0.839	0.8
5	5	136.2	0.866	0.840	1.8
6	8	133,3	0.869	0.837	3,4
7	4	132.0	0.870	0.832	5.2
8	7	131.3	0.871	0.826	7.1
9	1	131.1	0.871	0.818	9.0
10	2	131.0	0.871	0.809	11.0

ერთი პრედიქტორის შემცველ მოდელებში საუკეთესოა ის, რომელიც შეიცავს X_9-ს, ორ პრედიქტორიანებში – ის, რომელიც შეიცავს X_2, X_9 ცვლადებს (ცხრილში, როდესაც გადავდივართ k-დან (k+1)-ში, (k+1)-ს გასწვრივ მეორე სვეტში მითითებულია ის ცვლადი, რომელიც ემატება წინას), 3-პრედიქტორიან მოდელებს შორის საუკეთესოა ის, რომელიც შეიცავს X_3, X_9 და X_{10} ცვლადებს, (მოემატა X_3 და X_9, გამოაკლდა X_2 იმის გამო, რომ k=3 მნიშვნელობის გასწვრივ მეორე სვეტში მითითებულია 3, 10, –2) და ა.შ. მარტივი მოდელი, რომელიც საუკეთესოა 3^0. კრიტერიუმის თვალსაზრისით (აქვს უმცირესი C_k) და ამავე დროს, საკმაოდ კარგ თანხმობაშია დანარჩენ ორ კრიტერიუმთან არის მოდელი, რომელიც შეიცავს X_3, X_9 და X_{10} პრედიქტორებს. უნდა ითქვას, რომ ეს მოდელი ყველაზე მეტადაა შეთანხმებული სამივე კრიტერიუმთან.

ცვლადთა შერჩევის მიმდევრობითი პროცედურები. თუ ცვლადთა რიცხვი იმდენად დიდია, რომ შეუძლებელია ყველა შესაძლო რეგრესიათა მეთოდის გამოყენება, არსებობს რამდენიმე ალტერნატიული პროცედურა, რომლებიც იძლევა „კარგი" მოდელის დადგენის შესაძლებლობას.

ამ პროცედურებში უმარტივესია ცვლადების გამორიცხვის ე.წ. BE პროცედურა (backward elimination procedure). ეს პროცედურა იწყება იმ მოდელის განხილვით, რომელიც შეიცავს ყველა განსახილავ პრედიქტორს $X_1,X_2,...,X_m$. ყოველი X_i

ცვლადისათვის გამოითვლება $T_j = \frac{b_j}{S_{b_j}}$ სტატისტიკა (რომელიც, როგორც ვიცით გამოიყენება H_0 : $B_j=0$ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად). თუ გამოთვლილ სტატისტიკებს შორის მინიმალური t ფარდობის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია წინასწარ დასახელებულ t_{out} მუდმივზე, ე.ი.,

$$\min_{j=1,\dots,m} |t_j| < t_{out},$$

მაშინ მოდელიდან გამოირიცხება ის პრედიქტორი, რომელიც შეესაბამება t ფარდობის მინიმალურ აბსოლუტურ მნიშვნელობას. შემდეგ ნაბიჯზე განიხილება მოდელი დარჩენილი (m–1) პრედიქტორით და პროცედურა მეორდება, და ა.შ. ალგორითმი გაგრძელდება მანამდე, სანამ ყველა გამოთვლილი t ფარდობის აბსოლუტური სიდიდე არ აღმოჩნდება $\geq t_{out}$. საბოლოოდ გამოიყენება მოდელი, რომელიც შეიცავს იმ ცვლადებს, რომლებიც არ გამოირიცხა პროცედურის ჩატარებისას. ხშირად რეკომენდირებულია t_{out}=2 სიდიდის განხილვა, რადგან $t_{\cdot,0.05}$-ის მნიშვნელობათა უმეტესობა ახლოსაა 2-თან. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც m=5 და გვაქვს $X_1,\dots,X_5$ პრედიქტორები. დავუშვათ, რომ მიმდევრობითმა გამოთვლებმა მოგვცა t ფარდობათა ის მნიშვნელობები, რომლებიც თავმოყრილია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში:

ნაბიჯი	შემფასებელი	|t ფარდობა|				
		1	2	3	4	5
1	1,2,3,4,5	16.0	10.8	2.9	2.8	1.8*
2	1,2,3,4	15.4	10.2	3.7	2.0*	—
3	1,2,3	14.5	12.2	4.3*	—	—
4	1,2	10.9	9.1*	—	—	—
5	1	4.4*	—	—	—	—

თუ გამოვიყენებთ t_{out}=2 მნიშვნელობას, პირველ ნაბიჯზე გამოირიცხება X_5, მეორე ნაბიჯზე განიხილება მოდელი მხოლოდ 4 პრედიქტორით X_1, X_2, X_3, X_4, წარმოებს კოეფიციენტების შეფასებები, მათთვის ახალი t ფარდობების გამოთვლა და შედარდება t_{out}-თან (იხ. ცხრილის მეორე სტრიქონი). ამ პროცედურის შედეგად გამოირიცხება X_4 ცვლადი, მესამე ნაბიჯზე განიხილება მოდელი X_1, X_2, X_3 პრედიქტორებით, რომლისთვისაც გამოთვლილი t ფარდობების მნიშვნელობები მოყვანილია ცხრილის მესამე სტრიქონში; რადგან მათ შორის არცერთი მათგანის მნიშვნელობა არ არის ნაკლები t_{out}=2-ზე, ცვლადების გამორიცხვა აღარ ხდება და შეირჩევა მოდელი სამი X_1, X_2, X_3 პრედიქტორით.

BE პროცედურის ალტერნატივაა ე.წ. ცვლადების მიმდევრობითი ჩართვის *FS* პროცედურა (forward selection). ეს პროცედურა პირველ ნაბიჯზე გულისხმობს ყველა 1-პრედიქტორიანი მოდელის განხილვას: ე.ი. განიხილება მოდელი, რომელიც შეიცავს

მხოლოდ X_1 ცვლადს, მოდელი მხოლოდ X_2 ცვლადით და ა.შ. თითოეულ მოდელში ხდება B_0, B_1 პარამეტრების შეფასება და $T_1=\dfrac{b_1}{S_{b_1}}$ სტატისტიკის t_1 მნიშვნელობათა გამოთვლა. ის ცვლადი, რომელსაც შეესაბამება t ფარდობის აბსოლუტური სიდიდის მაქსიმალური მნიშვნელობა ჩაირთვება მოდელში, მხოლოდ იმ პირობით რომ ეს მაქსიმალური მნიშვნელობა აღემატება წინასწარ დასახელებულ t_{in} სიდიდეს (რომელსაც, როგორც წესი იღებენ 2-ის ტოლად, იგივე მოსაზრებების გამო, რაც t_{out}-ის დროს). პირობითად ჩავთვალოთ, რომ ასეთი ცვლადია X_1. ამის შემდეგ განიხილება ყველა 2-ფაქტორიანი მოდელი, რომელშიც X_1 და სხვა რომელიმე დარჩენილ ცვლათდაგანია შესული: ე.ი. (X_1,X_2), (X_1,X_3), ..., (X_1,X_m) – პრედიქტორებიანი $(m-1)$ მოდელები. ხდება თითოეული მოდელის შეფასება და დარჩენილ $X_2,...,X_m$ ცვლათდაგან პროცედურა მოდელში ჩართავს იმ ცვლადს, რომლისთვისაც t ფარდობის მოდული მაქსიმალურია და აღემატება t_{in}-ს. პირობითად ჩავთვალოთ, რომ მეორე ნაბიჯზე ეს ცვლადია X_2. შემდეგ განიხილება მოდელები: (X_1, X_2, X_3), (X_1, X_2, X_4), ..., (X_1, X_2, X_m) პრედიქტორებით, ტარდება იგივე გამოთვლები და ა.შ. პროცედურა გრძელდება მანამ, სანამ რომელიმე ნაბიჯზე არ აღმოჩნდება, რომ ყველა t ფარდობის აბსოლუტური სიდიდე $\leq t_{in}$.

მიმდევრობითი პროცედურა, რომელიც ყველაზე ხშირად გამოიყენება არის FS და BE პროცედურების კომბინაცია, რომელიც აღინიშნება FB სიმბოლოთი. ეს პროცედურა იწყება ისევე, როგორც FS, ცვლადების მიმდევრობითი ჩართვით მოდელში, ოღონდ ყოველი ახალი ცვლადის დამატების შემდეგ მოწმდება ყველა ადრეჩართული ცვლადი: ხომ არ მოიძებნება მათ შორის გამოსარიცხი (BE პროცედურა). მაგალითად, ვთქვათ მიმდინარე ნაბიჯზე მოდელში ჩართულია X_2, X_3, X_5 და X_6 ცვლადები და X_5 წარმოადგენს ამ ნაბიჯზე დამატებულ ცვლადს, მაშინ მოწმდება X_2, X_3 და X_6 ცვლადები: გამოითვლება მათთვის t ფართობები: $\dfrac{b_2}{S_{b_2}}$, $\dfrac{b_3}{S_{b_3}}$, $\dfrac{b_6}{S_{b_6}}$ და თუ ამ სიდიდეებს შორის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია t_{out}-ზე, ეს ცვლადი მოდელიდან გამოირიცხება.

BE და FS პროცედურებს და მათ კომბინაციას, FB პროცედურას მოიცავს რამდენიმე კომპიუტერული პროგრამების პაკეტი (მაგალითად BMDP, სადაც აღებულია $t_{in}=2$, $t_{out}=\sqrt{3.9}$).

თუმცა უმეტეს შემთხვევებში ცვლადთა შერჩევის ზემოაღწერილი ავტომატური პროცედურები შედეგად იძლევა ისეთ მოდელს, რომელიც კარგ თანხმობაშია მონაცემებთან, მაინც არ არსებობს იმის გარანტია, რომ ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში მიიღება „კარგი" ან თუნდაც „კარგთან" ახლომყოფი მოდელი. სტატისტიკოსმა უნდა გამოიყენოს თავისი გამოცდილება და ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე თავიდანვე გამოხშიროს ის დამოუკიდებელი ცვლადები, რომელთა ჩართვა მოდელში აზრს მოკლებულია (მისი თვალსაზრისით) და არ დაეყრდნოს ზემოაღწერილ ავტომატურ პროცედურებს

მაგალითი **17.3.** (მაგალითი 17.2-ის გაგრძელება) მოყვანილი მონაცემებისა და ჩატარებული გამოთვლების საფუძველზე გამოვთვალეთ ნაშთები – $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$, $i=1,2,...,15$, ჩაატარეთ მათი ანალიზი და გაეცით პასუხი კითხვაზე: სამართლიანია თუ არა ჩვენს მიერ მიღებული დაშვებები ε_i, $i=1,2,...,15$ შეცდომების შესახებ.

დავალება: 17.1 მაგალითის მონაცემების საფუძველზე ჩავატაროთ ცვლადთა შერჩევის *FS*, *BE* და *FB* პროცედურები. შეადარეთ ერთმანეთს მიღებული პასუხები, გამოიტანეთ შესაბამისი დასკვნები და შეადარეთ ადრე მიღებულ დასკვნებს.

ცვლადთა რაოდენობა განსახილავ მაგალითში სულ სამია, ამიტომ შეიძლება გამოიყენოთ ყველა შესაძლო რეგრესიათა მოდელი (ისარგებლეთ ა) პუნქტში მოყვანილი მონაცემებით).

* * *

მოვიყვანოთ იმ ძირითადი ლიტერატურის სია, რომლებიდანაც ვსარგებლობდით ამ თავის მასალის გადმოცემისას: [29], [30], [31], [34], [39], [55], [60], [66], [79], [82], [83], [84].

დასკვნები

ხშირ შემთხვევაში რაიმე ცვლადის ვარიაბელობის ახსნა მხოლოდ ერთი ფაქტორის გავლენით ვერ ხერხდება და ამიტომ, მარტივი წრფივი რეგრესიული ანალიზის გამოყენების სფერო შეზღუდულია. საჭიროა უფრო რთული მრავლობითი წრფივი რეგრესიული მოდელის განხილვა.

მრავლობითი წრფივი რეგრესიული ანალიზი გულისხმობს ერთი, დამოკიდებული ცვლადის პროგნოზირებას რამოდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადის (პრედიქტორის) საშუალებით და წარმოადგენს მარტივი რეგრესიული ანალიზის მეთოდების უშუალო განზოგადოებას.

განიხილება წრფივი მოდელი

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + ... + B_k X_k + \varepsilon.$$

აღწერილია შემდეგი პროცედურები:

1. უცნობი B_i, $i = 0, 1, .., n$ კოეფიციენტების შეფასება, მათ შესახებ ჰიპოთეზების შემოწმებისა და ნდობის ინტერვალების აგება;
2. უცნობი დისპერსიის, $\sigma^2 = D\varepsilon$ შეფასება, შერჩევითი კორელაციისა და დეტერმინაციის კოეფიციენტის გამოთვლა და მათ შესახებ ჰიპოთეზების შემოწმება;
3. მოდელის გამოსაყენებლადვარგისიანობის ჰიპოთეზის შემოწმება;
4. დამოკიდებული Y ცვლადისათვის საპროგნოზო ინტერვალებისა და მისი საშუალო მნიშვნელობისათვის ნდობის ინტერვალების კონსტრუირება;
5. ნაშთთა ანალიზი.

აქვე განიხილება მთელი რიგი მოდელებისა, რომლებიც ცვლადთა გარდაქმნის შემდეგ ექცევა მრავლობითი რეგრესიის მოდელის ჩარჩოებში.

საკმაოდ ფართოდაა განხილული ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხი, თუ პრედიქტორთა დიდი რაოდენობიდან როგორ უნდა შეირჩეს ის პრედიქტორები, რომლებიც მოგვცემდა დამოკიდებული ცვლადის თითქმის ისეთივე საიმედო პროგნოზს, როგორსაც ვიღებთ მოდელში ყველა პრედიქტორის ჩართვის დროს.

სავარჯიშოები

17.1. გარკვეული ტიპის საქონელზე მოთხოვნის წლიურ მონაცემთა ანალიზმა მოგვცა შედეგები, რომლებიც თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში:

საშუალოები	სტანდარტული გადახრები	კორელაციის კოეფიციენტი
$\bar{x}$ =51.843	s_X=9.205	r_{XY}=–0.9158
$\bar{Y}$ =8313	s_Y=1.780	r_{YT}=–0.8696
$\bar{T}$ =0	s_T=6.057	r_{XT}=0.9304

სადაც X – მოხმარებაა ერთ სულ მოსახლეზე (ფუნტებში)

Y – ფასი დეფლატორის გათვალისწინებით (1 ფუნტის ფასი ცენტებში)

T– დრო (წლებში).

ა) ააგეთ Y ცვლადის რეგრესია X და T ცვლადებზე;

ბ) მნიშვნელოვნობის α=0.05 დონით შეამოწმეთ განსხვავდება თუ არა დროის T ცვლადთან მდგომი რეგრესიის კოეფიციენტი ნულისაგან;

გ) მოკლედ ახსენით რეგრესიაში დროითი ცვლადის, როგორც ამხსნელი ცვლადის ჩართვის ეკონომიკური შინაარსი.

17.2. ვთქვათ, ქვემოთ მოყვანილი მონაცემებით გვინდა შევისწავლოთ, თუ როგორ არის დამოკიდებული გარკვეული ტიპის მოხმარების საგანზე გაწეული ხარჯები (Y) ყოველკვირეულ შემოსავალზე (X) (ერთ ადამიანზე გაანგარიშებით)

x_i (£-ში)	1.7	2.7	3,6	4.6	5.7	6.7	8.1	12
Y_i(£ში)	0.8	1.2	1.5	1.8	2.2	2.3	2.6	3,1

დავუშვათ, რომ ეს დამოკიდებულება აღიწერება ე.წ. ენგელის მრუდით. აქედან გამომდინარე განიხილეთ მოდელი

$$Y = \alpha+\beta \ln x + \varepsilon$$

და არსებული მონაცემებით შეაფასეთ α და β კოეფიციენტები, შეამოწმეთ მოდელის ვარგისიანობა, ააგეთ $(1-\alpha)$-დონის ნდობის ინტერვალები, როგორც უცნობი რეგრესიის ფუნქციისათვის, ასევე Y-ის ინდივიდუალური მნიშვნელობისათვის, როცა x^*=£5; α=0.05.

17.3. მოცემულია ($\ln Y$, $\ln x_1$, $\ln x_2$) შემთხვევითი ვექტორის შერჩევითი კოვარიაციის მატრიცა ($n = 20$)

$$\begin{bmatrix} 7{,}59 & 3{,}12 & 26{,}99 \\ & 29{,}16 & 30{,}80 \\ & & 133{,}0 \end{bmatrix},$$

სადაც Y – ე რთ სულ მოსახლეზე სურსათის მოხმარებაა,

X_1 – სურსათის ფასი,

X_2 – შემოსავალი ერთ სულ მოსახლეზე.

თუ თქვენ თვლით, რომ მოთხოვნის რეგრესია აღნიშნულ ცვლადებზე ადეკვატურად აღიწერება $y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ ფუნქციით.

ა) შეაფასეთ უცნობი α და β კოეფიციენტები,

ბ) გამოთვალეთ მოთხოვნის ელასტიურობა შემოსავლის მიმართ და ააგეთ 95 %-იანი ნდობის ინტერვალი ამ კოეფიციენტებისათვის.

მითითება:

1. თუ ჩავთვლით, რომ მისაღებია არაწრფივი რეგრესიის მოდელი

$$y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \cdot \varepsilon ,$$

სადაც $\ln\varepsilon$ აკმაყოფილებს ჩვენს მიერ შეცდომებზე შემოღებულ ყველა დაშვებას, მაშინ მოდელი არსებითად წრფივია და დაიყვანება წრფივი რეგრესიის მოდელამდე

$$Y' = \ln A + \alpha\, x_1' + \beta\, x_2' + \varepsilon' ,$$

სადაც $Y' = \ln Y$, $x_i' = \ln x_i$, i=1,2.

2. Y ცვლადის ელასტიურობა ცვლადის მიმართ განიმარტება შემდეგი თანაფარდობით

$$\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

ამ განმარტებიდან გამომდინარე მოთხოვნის ელასტიურობა შემოსავლის მიმართ იქნება

$$\left(\frac{x_2}{y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{x_2}{A x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}}\beta \cdot A x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1} = \beta$$

და ამრიგად, შესაფასებელია β კოეფიციენტი.

დისპერსიული ანალიზი

დისპერსიული ანალიზის მეთოდი თავდაპირველად დამუშავებული იყო სპეციალური სახის ბიოლოგიური ექსპერიმენტებისა და სასოფლო-სამეურნეო სტატისტიკის ზოგიერთი ამოცანის შესასწავლად. ჩვენს დროში ეს მეთოდი უნივერსალურ გამოყენებას პოულობს. იგი ეფექტურად გამოიყენება ეკონომიკურ გამოკვლევებშიც.

დისპერსიული ანალიზი, ძირითადად გვხვდება ანალიზურ დაჯგუფებათა სტატისტიკური კვლევის დროს. ანალიზური დაჯგუფება ახასიათებს ურთიერთკავშირს ორ ან რამდენიმე მაჩვენებელს შორის, რომელთაგან ერთი განიხილება როგორც შედეგი (დამოკიდებული ცვლადი), დანარჩენები კი წარმოადგენენ ფაქტორებს (რეგრესორებს, პრედიქტორებს, დამოუკიდებელ ცვლადებს). ამ თავში ჩვენ, ძირითადად, ვიხმართ ტერმინს – ფაქტორს.

ფაქტორები ახდენენ ზემოქმედებას ექსპერიმენტის შედეგის რიცხვით მნიშვნელობებზე, იწვევენ ამ მნიშვნელობათა ცვლილებას, ვარიაციას. ხშირად ექსპერიმენტატორი თვითონ ცვლის ფაქტორების დონეებს (რიცხვით მნიშვნელობებს) იმისთვის, რომ გამოიკვლიოს მათი ცდის შედეგებზე გავლენის ხასიათი.

დისპერსიული ანალიზი, არსებითად, ეყრდნობა იმ მოსაზრებას, რომ უმრავლეს შემთხვევაში ექსპერიმენტის შედეგების ვარიაცია შეიძლება დაიშალოს კომპონენტებად, რომლებიც განპირობებულია ცალკეული ფაქტორებით.

მეთორმეტე თავში ჩვენ განვიხილეთ ორი $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1n_1}$ და $Y_{21}, Y_{22}, \ldots, Y_{2n_2}$ დამოუკიდებელი ნორმალური შერჩევისათვის საშუალოების შედარების ამოცანა: შევამოწმეთ ჰიპოთეზა საშუალოების ტოლობის შესახებ და ავაგეთ ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.. ამისთვის ვიყენებდით t-კრიტერიუმს. ახლა დავუშვათ, რომ გვაქვს k შერჩევა

$$Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1n_1},$$
$$Y_{21}, Y_{22}, \ldots, Y_{2n_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_{k1}, Y_{k2}, \ldots, Y_{kn_k}$$

და გვაინტერესებს შევამოწმოთ ჰიპოთეზა საშუალოთა ტოლობის შესახებ. განვიხილოთ შემდეგი მოდელი

$$Y_{ij} = Z_i + \varepsilon_{ij},$$

სადაც Z_i და $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \ldots, i = 1, 2, \ldots, k$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, $E\varepsilon_{ij} = 0$, $D\varepsilon_{ij} = \sigma^2$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. თუ ვიგულისხმებთ, რომ Z_i მუდმივებია, მაშინ ვიტყვით, რომ გააქვს I ტიპის მოდელი (ამ შემთხვევაში i-ური შერჩევის საერთო საშუალო Z_i-ის მნიშვნელობის ტოლია), ხოლო თუ ვიგულისხმებთ, რომ Z_i არის ε_{ij}-საგან დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს II ტიპის მოდელს. მოდელებს შორის განსხვავების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 18.1. ვთქვათ, მყიდველი ყიდულობს k ჩარხს, ირჩევს რა მათ შემთხვევით, დამზადებული ჩარხების პარტიიდან. დავუშვათ, რომ როგორც მწარმოე-

ბელს, ისე მყიდველს სურს შეამოწმოს ჩარხების ხარისხის ერთგვაროვნება მყიდველის მიერ შეძენილ ჩარხებზე გამოჩარხული ერთი და იგივე ტიპიური დეტალების ზომების ვარიაციის საფუძველზე. ამასთან მყიდველი, ბუნებრივია, დაინტერესებულია მხოლოდ მის მიერ შეძენილი ჩარხების ერთგვაროვნებით და ანალიზისთვის მან უნდა გამოიყენოს I მოდელი: მან უნდა ჩათვალოს, რომ Z_i-ები უცნობი მუდმივებია, რომლებიც ჩარხების ცდომილებათა სისტემატურ ნაწილებს შეესაბამება. მწარმოებელი კი, თავის მხრივ, დაინტერესებულია მის მიერ წარმოებული ყველა ჩარხის ერთგვაროვნებით, მისთვის Z_i შემთხვევითი სიდიდეა და მას საშუალოთა ტოლობის გარდა, ცხადია აინტერესებს როგორია მათი დისპერსია. ამიტომ ანალიზისთვის მან უნდა გამოიყენოს II მოდელი.

§ 1. ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი

ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის შემთხვევაში ექსპერიმენტის შედეგები მოიცემა შემდეგი 18.1 ცხრილის საშუალებით

ცხრილი 18.1

	ფაქტორების დონეები			
	1	2	...	k
გაზომვის შედეგები	y_{11} y_{12} $\vdots$ y_{1n_1}	y_{21} y_{22} $\vdots$ y_{2n_2}	... ... $\vdots$ ...	y_{k1} y'_{k2} $\vdots$ y_{kn_k}
	$y_{1\bullet}$	$y_{2\bullet}$	...	$y_{k\bullet}$

(18.1)

ფაქტორის i-ური დონისათვის y_{ij} წარმოადგენს j-ური გაზომვის რიცხვით მნიშვნელობას, $j = 1, 2, \dots, n_i$. $i = 1, 2, \dots k$, i-ური დონის შესაბამისი n_i, გაზომვის შედეგებს ვუწოდოთ ჯგუფი. $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

ანალიზის საფუძვლად ვღებულობთ შემდეგ მოდელს (შეადარე ზემოხსენებულ I მოდელს):

$$Y_{ij}=\beta_i+\varepsilon_{ij}, \qquad i=1,2,\dots,k, \quad j=1,2,\dots,n_i, \tag{18.2}$$

სადაც β_i, $i=1, 2,\dots, k$, უცნობი მუდმივებია, ხოლო ε_{ij} დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია ნულოვანი საშუალოთი და ერთნაირი, ოღონდ უცნობი σ^2 დისპერსიით. მონაცემების მიხედვით უნდა შემოწმდეს რთული ჰიპოთეზა

$$H_0: \beta_1-\beta_k = \beta_2-\beta_k = \dots = \beta_{k-1}-\beta_k = 0$$

(ე.ი. ყველა β_i ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ მათი საერთო მნიშვნელობა არ არის ფიქსირებული; თუ ეს ჰიპოთეზა სამართლიანია, მაშინ ყველა n დაკვირვებას აქვს ერთი და იგივე მათემატიკური ლოდინი). ალტერნატივაა

$H_1 : \beta_i-\beta_j$ სხვაობა განსხვავებულია ნულისაგან რომელიმე i,j წყვილისთვის მაინც.

საშუალოთა შორის განსხვავების აღმოსაჩენად შეგვეძლო გამოგვეყენებინა სტიუდენტის კრიტერიუმი ყოველი წყვილისათვის, მაგრამ ჩვენ შეიძლება არ გაგვაჩნდეს იმდენი დაკვირვება ყოველ ცალკე აღებულ სერიაში, რომ მნიშვნელოვნობის საჭირო დონით აღმოვაჩინოთ ეს განსხვავება. ამიტომ კვლევის საწყის ეტაპზე უფრო უპრიანია დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ფაქტორის დონეთა სხვაობა განსხვავებებს იძლევა, რისთვისაც ჩვენ განვიხილავთ ექსპერიმენტებს ფაქტორის დონეთა მთელი დიაპაზონისათვის და ამდენად გვჭირდება სტატისტიკური კრიტერიუმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს აღმოვაჩინოთ ეფექტი გლობალურად, ერთბაშად ექსპერიმენტის მთელი კომპლექსისათვის.

ქვემოთ მიღებული იქნება ე.წ. დისპერსიული თანაფარდობა, რომლის საფუძველზე შესაძლებელია მონაცემთა (18.1) სახის ერთობლიობისათვის აღნიშნული ნულოვანი ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანის ალტერნატიული გადაწყვეტა.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: $\overline{Y}_{i\bullet}$-ით აღვნიშნოთ i-ური ჯგუფის არითმეტიკული საშუალო,

$$\overline{Y}_{i\bullet}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}\,,$$

ხოლო $\overline{Y}_{\bullet\bullet}$-ით ყველა დაკვირვებულ მნიშვნელობათა საერთო საშუალო,

$$\overline{Y}_{\bullet\bullet}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i\,\overline{Y}_{i\bullet}\,.$$

ადგილი აქვს შემდეგ დისპერსიულ თანაფარდობას

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2+\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2\,. \qquad (18.3)$$

მართლაც,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}+\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2+\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2\,,$$

ვინაიდან

$$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})=(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})(n_i\overline{Y}_{i\bullet}-n_{i\bullet}\overline{Y}_{i\bullet})=0\,.$$

(18.3) გამოსახულებას დიდი მნიშვნელობა აქვს შემდგომისათვის. შევჩერდეთ მის შინაარსობრივ მხარეზე.

შევნიშნოთ, რომ (18.3) ფორმულის მარცხენა მხარე და მარჯვენა მხარის შესაკრებები შემდეგნაირად შეგვიძლია დავახასიათოთ:

$SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$ არის Y_{ij}, $j=1, 2, ..., n_i$, $i=1, 2, .., k$, მნიშვნელობების მათი საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრების კვადრატების სრული ჯამური სიდიდე (total sum of squares; მოკლედ, SST), რომელსაც სრული ვარიაცია ეწოდება. H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $\frac{SST}{n-1}$ არის უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება და $\frac{SST}{\sigma^2}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია $\chi^2(n-1)$.

$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2$ არის i-ური ჯგუფის მნიშვნელობების ამავე ჯგუფის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრების კვადრატების ჯამი – i-ური ჯგუფის ვარიაცია. $SSW=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2$ არის ყოველი ჯგუფის ვარიაციათა ჯამი ანუ, მოკლედ, ჯგუფებში ვარიაცია (sum of square within groups; მოკლედ, SSW) H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $\frac{SSW}{n-k}$, არის უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება. ამასთან $\frac{SSW}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-k)$.

$SSB=\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$ არის ჯგუფის საშუალო მნიშვნელობის საერთო საშუალოდან გადახრის კვადრატების ჯამი. მას შეიძლება შევხედოთ, როგორც ჯგუფთაშორისი ცვალებადობის მახასიათებელს (sum of squares between groups; მოკლედ, SSB). H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $\frac{SSB}{k-1}$ არის იგივე უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება და $\frac{SSB}{\sigma^2}\sim\chi^2(k-1)$.

შემოღებულ აღნიშვნებში (18.3) თანაფარდობა შემდეგი სახით ჩაიწერება

$$SST=SSW+SSB\,. \tag{18.3'}$$

თვალსაჩინოებისათვის ხსენებულ ჯამებს, მათ სახელწოდებებსა და თავისუფლების ხარისხებს თავს უყრიან დისპერსიული ანალიზის ცხრილში (ცხრილი 18.2).

დავუშვათ, რომ უცნობი σ^2 დისპერსიის აღნიშნული სამი შეფასება გვაძლევს დაახლოებით ერთნაირ რიცხვით მნიშვნელობებს. მაშინ ეს ფაქტი მიუთითებს იმაზე, რომ ჩვენ არ გვაქვს საფუძველი უარვყოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა, ანუ ყველა მონაცემი ერთგვაროვანია, სხვადასხვა დონეების შესაბამის საშუალოებს შორის არ არის მნიშვნელოვანი სხვაობა. პირიქით, თუ დისპერსიის შეფასებები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან და ამასთან $\frac{SSB}{k-1}$ მნიშვნელოვნად ჭარბობს $\frac{SSW}{n-k}$-ს, მაშინ ჩვენ უნდა უარვყოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა, ანუ ჩავთვალოთ, რომ ზოგიერთი დონის საშუალოებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაა. ამ მოსაზრებების დასასაბუთებლად აუცილებელია

რაიმე კრიტერიუმის შემოღება, რომლის საფუძველზეც დავასკვნიდით, რა შემთხვევაშია მნიშვნელოვანი განსხვავება დონეების საშუალოებს შორის.

ცხრილი 18.2. დისპერსიული ანალიზი ერთი ფაქტორის მიხედვით

ვარიაციის წყარო	კვადრატების ჯამი	თავის. ხარ.	საშ. კვად.
ჯგუფთა შორის (დონეთა შორის)	$SSB=\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$
ჯგუფებში	$SSW=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet})^2$	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$
სრული	$SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$	$n-1$	

Y_{ij} შემთხვევითი სიდიდეების ნორმალურად განაწილებულობის გამო, უცნობი σ^2 დისპერსიის ორი განხილული შეფასება, რომლებიც ეფუძნება ჯგუფთაშორის (SSB) და ჯგუფებში ვარიაციებს (SSW). დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. მათ ფარდობას ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში აქვს F განაწილება k–1 და n–k თავისუფლების ხარისხებით. ეს საშუალებას გვაძლევს ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ

$$F=\frac{SSB}{k-1}\Big/\frac{SSW}{n-k} \tag{18.4}$$

სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

დავაფიქსიროთ მნიშვნელოვნობის დონე α, ფიშერის განაწილების ცხრილიდან ვიპოვოთ შესაბამის $F_{k-1,n-k,\alpha}$ კრიტიკული წერტილი. გადაწყვეტილების მიღების წესი ასეთია: თუ F სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა

$$f>F_{k-1,n-k,\alpha},$$

მაშინ H_0-ს დავიწუნებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

მაგალითი 18.2. (18.1 მაგალითის გაგრძელება) განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი დაკავშირებული ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის I მოდელთან. 18.3 ცხრილში მოცემულია სამ ჩარხზე გამოჩარხული სტანდარტული დეტალების ზომების ბოლო ორი ათობითი ნიშანი. მაგალითად, ცხრილის მნიშვნელობა 83 შეესაბამება გამოჩარხული დეტალის რეალურ ზომას 6.783, მნიშვნელობა 81 შეესაბამება დეტალის რეალურ ზომას 6.781.

ცხრილი 18.3.

	I	II	III
1	83	75	78
2	81	70	76
3	76	72	69
4	88	71	72
5	85	79	80
6	89	73	77

ჩავატაროთ აღნიშნული მონაცემების ანალიზი მყიდველის პოზიციიდან. მნიშვნელოვნობის დონედ ავიღოთ 0.05. სათანადო გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ დისპერსიული თანაფარდობის შემდეგ ცხრილს

ვარიაციის წყარო	კვადრატების ჯამი	თავისუფ. ხარისხი	საშუალო კვადრატი
ჯგუფთა შორის (დონეთა შორის)	SSB=180.333	2	$\frac{SSB}{k-1}$=90.166
ჯგუფებში	SSW=115.666	15	$\frac{SSW}{n-k}$=7.711
სრული	SST=268.777	17	

$F_{2,15,0.05}$=3.01 , ხოლო f=10.72-ს, ამიტომ α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონით ჰიპოთეზას უარვყოფთ; α=0,05 მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა დასკვნა: ჩარხები არაა ერთგვაროვანი.

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება ავაგოთ ნდობის ინტერვალი i-ური და j-ური დონეების მათემატიკური ლოდინების სხვაობისათვის, $i \neq j$. ვინაიდან

$$E(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}) = \beta_i - \beta_j ,$$

$$D(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right).$$

უცნობი σ^2 დისპერსია შევაფასოთ ჯგუფთაშორისი ვარიაციის (SSW-ის) საფუძველზე, რომლისთვისაც

$$S^2 = \frac{SSW}{n-k}.$$

გვექნება $\frac{S^2(n-k)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$, ხოლო

$$\frac{(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}) - (\beta_i - \beta_j)}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \sim t(n-k) .$$

ამრიგად, $\beta_i - \beta_j$, $i \neq j$, სხვაობისათვის $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალია

$$\left((\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}) - t_{n-k,\alpha/2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}\, ; (\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}) + t_{n-k,\alpha/2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}\right). \qquad (18.5)$$

თუ ჩვენ ეჭვი გვეპარება იმაში, რომ ყველა ჯგუფის დისპერსიები ტოლია, მაგრამ დარწმუნებულები ვართ, რომ ტოლია σ_i^2 და σ_j^2, მაშინ მათემატიკური ლოდინების $\beta_i - \beta_j$ სხვაობისათვის, $i \neq j$, ნდობის ინტერვალის ასაგებად, გამოიყენება (12.10) ფორმულა.

მაგალითი **18.3.** (18.2 მაგალითის გაგრძელება) ავაგოთ ნდობის ინტერვალი i-ურ და j-ურ ჩარხებზე გამოჩარხული დეტალების ზომების მათემატიკური ლოდინების სხვაობისათვის. (18.5)-ის თანახმად α=0.05 ნდობის ალბათობით აგებული ნდობის ინტერვალებია:

$$i=1, j=2, \quad (3{,}352,\ 17{,}314),$$
$$i=1, j=3, \quad (1{,}352,\ 15{,}314),$$
$$i=2, j=3, \quad (-8{,}980,\ 4{,}980).$$

მრავლობითი შედარება. ნდობის ინტერვალები. დასკვნა, რომელიც ჩვენ მივიღეთ დისპერსიული ანალიზის შედეგად, ეხებოდა ჯგუფების შესაბამის გენერალურ საშუალოებს – მათემატიკურ ლოდინებს. თუ H_0 ჰიპოთეზა დაწუნებული აღმოჩნდა, ეს ნიშნავს იმას, რომ ყველა გენერალური საშუალო ერთმანეთის ტოლი არ არის – ერთი მაინც მნიშვნელოვნად განსხვავდება დანარჩენებისაგან. ეს ინფორმაცია, რა თქმა უნდა, არ არის საკმარისი. ჩვენ არ ვიცით, რომელი გენერალური საშუალოებია ერთმანეთის ტოლი და რომელი განსხვავებული. აუცილებელია ყველა წყვილის ერთიმეორესთან შედარება. ამგვარად, თუ გვაქვს ფაქტორის k დონე შესამოწმებელია $\frac{k(k-1)}{2}$ წყვილი. ე.ი. თუ k=3 შესამოწმებელია 3 წყვილი, თუ k=4 – 6 წყვილი და ა.შ.

რადგან შესამოწმებელია მრავალი წყვილი, ჩვეულებრივი მეთოდი, რომელსაც ჩვენ ვიყენებთ ორი საშუალოს შედარებისათვის – მეთოდი, რომელიც t-სტატისტიკის გამოყენებაზეა დაფუძნებული, არ გამოდგება. ასეთ პირობებში სასურველია ერთდროულად ავაგოთ $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი ყველა ჯგუფთა საშუალოების სხვაობისათვის.

ცნობილია რამდენიმე ასეთი მეთოდი. ჩვენ მოკლედ ჩამოვაყალიბებთ ორ, ყველაზე უფრო გავრცელებულ, ე.წ. T და S მეთოდებს, რომლებსაც მრავლობითი შედარების მეთოდები ეწოდება.

T **-** მეთოდი (ტიუკის პროცედურა). ამ მეთოდის გამოყენებისათვის აუცილებელია, რომ ყველა ჯგუფის შერჩევითი მოცულობები იყოს ტოლი. ე.ი. უნდა სრულდებოდეს პირობა

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = m = \frac{n}{k}.$$

T-მეთოდის საშუალებით შეიძლება ერთობლივად ავაგოთ ნდობის ინტერვალები ყველა $\beta_i - \beta_j$ სხვაობისათვის, $i \neq j$, $i,j = 1, 2, \dots, k$.

ნდობის ინტერვალი $1-\alpha$ ნდობის დონით, მოიცემა ფორმულით:

$$(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}) - q_{k,n-k,\alpha}\sqrt{\frac{SSW}{m(n-k)}} \le \beta_i - \beta_j \le (\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{j\bullet}) + q_{k,n-k,\alpha}\sqrt{\frac{SSW}{m(n-k)}} \qquad (18.6)$$

სადაც $q_{k,n\ k;\alpha}$ არის ე.წ. სტიუდენტიზირებული გაბნევის დიაპაზონის k და $n-k$ თავისუფლების ხარისხის მქონე განაწილების კანონის ზედა α-კრიტიკული მნიშვნელობა. $q_{k,n\ k;\alpha}$-ს მოძებნა შესაძლებელია სტიუდენტიზირებული გაბნევის დიაპაზონის კრიტიკული მნიშვნელობების A13 ცხრილით (იხ. დანართი). ამ ცხრილის ფრაგმენტი მოცემულია ქვემოთ (იხ. ცხრილი 18.4).

ალბათობა იმისა, რომ ყველა ეს ინტერვალი ერთდროულად (ერთობლივ) დაფარავს β_i–β_j სხვაობათა ჭეშმარიტ მნიშვნელობებს ანუ, რომ (18.6) უტოლობა ერთდროულად შესრულდება ყველა i-სა და j-სათვის, $i \neq j$, $(1-\alpha)$-ს ტოლია.

ცხრილი 18.4. სტიუდენტიზირებული გაბნევის დიაპაზონის კრიტიკული მნიშვნელობები (α=0.05) ფრაგმენტი

$n-k$	k						
	2	3	4	6	8	10	15
1	17.97	26.98	32.81	40.41	45.40	49.07	35.36
3	4.501	5.91	6.82	8.04	8.85	9.46	10.52
5	3.64	4.60	5.22	6.03	6.58	6.99	7.72
10	3.15	3.88	4.33	4.91	5.30	5.60	6.11
15	3.01	3.67	4.08	4.59	4.94	5.20	5.65
20	2.95	3.58	3.96	4.45	4.77	5.01	5.43
30	2.89	2.49	3.85	4.30	4.60	4.82	5.21
120	2.80	3.36	3.68	4.10	4.36	4.56	4.90
∞	2.77	3.31	3.63	4.03	4.09	4.47	4.80

მაგალითი **18.4.** (18.1 მაგალითის გაგრძელება) ზემომოყვანილი მაგალითისათვის β_i–β_j სხვაობისათვის T პროცედურის გამოყენებით 0,05 ნდობის დონით აგებული ნდობის ინტერვალებია

$$i=1, j=2, \quad (3.913,\ 16.753),$$
$$i=1, j=3, \quad (1.913,\ 14.753),$$
$$i=2, j=3, \quad (-4.419,\ 8.419).$$

როგორც ვხედავთ, მხოლოდ მესამე ინტერვალი მოიცავს ნულს, რაც იმას ნიშნავს, რომ შერჩევით საშუალოთა შესაბამისი სხვაობა არაა მნიშვნელოვანი (β_1=β_2): α=0,05 დონით H_0 : $\beta_2-\beta_3=0$ ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ არსებობს. ის ფაქტი, რომ პირველი ორი ინტერვალი არ შეიცავს ნულს მიუთითებს იმას, რომ შესაბამისი $\beta_1-\beta_2$ და $\beta_1-\beta_3$ სხვაობების განსხვავება ნულისაგან მნიშვნელოვანია (α დონით).

S – მეთოდი (შეფეს პროცედურა). ამ მეთოდის გამოყენების დროს არაა სავალდებულო დაშვება $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$. საშუალოების წყვილთა სხვაობის ნაცვლად განვიხილავთ უფრო ზოგად გამოსახულებას, ე.წ. კონტრასტს.

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ საშუალოების კონტრასტი ეწოდება გამოსახულებას

$$\psi = c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_k\beta_k\ , \tag{18.7}$$

სადაც $c_1+c_2+\cdots+c_k$=0.

მაგალითად, $\psi=\beta_1+\beta_2-2\beta_3$ – კონტრასტია სამი საშუალოსათვის β_1, β_2, და β_3. ამ შემთხვევაში $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -2$, $c_4 = 0, \ldots, c_k = 0$.

$\psi=\beta_4-\beta_7$ –კონტრასტია. აქ c_4=1, c_7=–1, დანარჩენები ნულებია.

ნათელია, რომ კონტრასტი უფრო ზოგადი გამოსახულებაა, ვიდრე საშუალოთა სხვაობა. კერძოდ, როცა $c_i = -c_j = 1$, ხოლო დანარჩენი c_k=0, $k \neq i$, $k \neq j$, ნულის ტოლია, კონტრასტი ემთხვევა β_i–β_j სხვაობას.

S-მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ნდობის ინტერვალი ნებისმიერი კონტრასტისთვის.

შეფემ აჩვენა, რომ ალბათობა იმისა, რომ ყველა კონტრასტისათვის ერთდროულად შესრულდება (18.8) უტოლობა (1–α)-ს ტოლია.

$$\hat{\psi}-\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}\sqrt{(k-1)F_{k-1,n-k;\alpha}} \le \psi \le \hat{\psi}+\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}\sqrt{(k-1)F_{k-1,n-k;\alpha}}, \qquad (18.8)$$

სადაც

$$\hat{\psi} = c_1\overline{Y}_{1\bullet}+c_2\overline{Y}_{2\bullet}+\dots+c_k\overline{Y}_{k\bullet},$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\psi}} = \frac{SSW}{n-k}\left(\frac{c_1^2}{n_1}+\frac{c_2^2}{n_2}+\dots+\frac{c_k^2}{n_k}\right)$$

ხოლო $F_{k-1,n-k;\alpha}$ არის F განაწილების α ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა.

მაგალითი 18.5. (18.2-ის გაგრძელება) $\beta_i-\beta_j$ სხვაობისათვის S პროცედურის გამოყენებით 0.05 ნდობის დონით აგებული ნდობის ინტერვალებია

i=1, j=2, (3,606, 17,060),
i=1, j=3, (1,606, 15,060),
i=2, j=3, (–4,727, 8,727).

შენიშვნა. როცა $n_1 = n_2 = \dots = n_k$, T-მეთოდი უფრო ზუსტ შედეგებს იძლევა.

§ 2. სრული ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი

განვიხილოთ დისპერსიული ანალიზის ისეთი ამოცანები, რომლებშიც შედეგებზე მოქმედებს ორი ფაქტორი A და B. ვთქვათ, A ფაქტორს გააჩნია p დონე, B ფაქტორს კი – q დონე. შედეგებს ჩვეულებრივ განალაგებენ სწორკუთხა ცხრილში (იხ. ცხრილი 18.5). p სტრიქონი შეესაბამება A ფაქტორის დონეებს, რომლებიც გადანომრილია i ინდექსით, i=1,2,...,p, q სვეტი კი B ფაქტორის დონეებს, რომლებიც გადანომრილია j ინდექსით, j=1,2,...,q. i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე წარმოიქმნება მცირე სწორკუთხედი, რომელსაც ვუწოდოთ (i×j)-უჯრა. ამგვარად, იქნება სულ p×q-უჯრა. ყოველ უჯრაში ჩაიწერება ექსპერიმენტის ან დაკვირვების შედეგები, რომლებიც შესაბამის დონეებზეა მიღებული. ყოველ უჯრაში შეიძლება იყოს ერთი ან რამდენიმე მონაცემი, შეიძლება ნულიც. თუ მონაცემთა რიცხვი ყველა უჯრაში განსხვავდება ნულისაგან (არცერთი უჯრა არაა ცარიელი) მაშინ ანალიზს ეწოდება სრული. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორ შემთხვევას, როდესაც ყოველ უჯრაში ერთი დაკვირვებაა და როდესაც ყველა უჯრაში მონაცემთა ტოლი რაოდენობაა.

ორფაქტორიანი ანალიზი უჯრაში ერთი დაკვირვებით. ამ შემთხვევაში დაკვირვებათა ერთობლიობა მოიცემა 18.5 ცხრილით.

ანალიზი ხორციელდება შემდეგი მოდელის საფუძველზე

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},$$

სადაც

$$\alpha_\bullet = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 0, \quad \beta_\bullet = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\beta_j = 0 \qquad (18.9)$$

და, ε_{ij} დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომლებიც განაწილებულია $N(0,\sigma^2)$. კანონით. შემთხვევითი სიდიდეები $Y_{i1},Y_{i2},...,Y_{iq}$, $i=1,2,...,p$ განსაზღვრავენ A ფაქტორის i-ური დონის შესაბამის დაკვირვებათა ჯგუფს B ფაქტორის ყოველი B_j დონისათვის, $j=1,2,...,q$, ხოლო $Y_{1j},Y_{2j},...,Y_{pj}$ – B ფაქტორის j-ური დონის ჯგუფს.

ცხრილი 18.5 მონაცემები ორფაქტორიანი ანალიზისათვის, როცა უჯრაში ერთი დაკვირვებაა

	B ფაქტორის დონეები						
A ფაქტორის დონეები	B_1	B_2	...	B_j	...	B_q	საშუალო
A_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1q}	$y_{1\bullet}$
A_2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2q}	$y_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_i	y_{i1}	y_{i2}	...	$\boxed{y_{ij}}$	...	y_{iq}	$y_{i\bullet}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_p	y_{p1}	y_{p2}	...	y_{pj}	...	y_{pq}	$y_{p\bullet}$
საშუალო	$y_{\bullet 1}$	$y_{\bullet 2}$	...	$y_{\bullet j}$	...	$y_{\bullet q}$	$y_{\bullet\bullet}$

ცხადია,

$$EY_{ij} = \mu+\alpha_i+\beta_j \ .$$

ავჯამოთ $E(Y_{ij})$ ორივე ინდექსით. (18.9)-ის ძალით გვექნება

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} EY_{ij} = pq\mu$$

გამოვთვალოთ საშუალო (გავყოთ ორივე მხარე pq-ზე). მივიღებთ

$$\frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} EY_{ij} = \mu \ ,$$

ამიტომ μ-ს უწოდებენ გენერალურ საშუალოს.

ანალოგიურად, A ფაქტორის i-ური დონის (ჯგუფის) ელემენტების მათემატიკურ ლოდინთა საშუალო იქნება

$$\mu_{i\bullet}=\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} EY_{ij} = \mu + \alpha_i \ ,$$

ხოლო B ფაქტორის j-ური ჯგუფის ელემენტების მათემატიკურ ლოდინთა საშუალოა

$$\mu_{\bullet j}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} EY_{ij} = \mu + \beta_j \ .$$

α_i და β_j-ს უწოდებენ სათანადო დონეების მთავარ ეფექტებს. α_i უჩვენებს რამდენით აღემატება A ფაქტორის i-ური დონის ჯგუფის საშუალო გენერალურ საშუალოს

$$\alpha_i = \mu_{i\bullet} - \mu.$$

ასევე β_j უჩვენებს, რამდენად აღემატება B ფაქტორის j-ური დონის ჯგუფის საშუალო გენერალურ საშუალოს.

$$\beta_j = \mu_{\bullet j} - \mu.$$

ამ ამოცანისათვის საინტერესოა ჰიპოთეზათა ორი წყვილის განხილვა

$$\begin{aligned} &H_0^1 \;:\; \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0, \\ &H_1^1 \;:\; \text{ერთი მაინც } \alpha_i \text{ განსხვავდება ნულისაგან.} \end{aligned}$$

და (18.10)

$$\begin{aligned} &H_0^2 \;:\; \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0, \\ &H_1^2 \;:\; \text{ერთი მაინც } \beta_j \text{ განსხვავდება ნულისაგან.} \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$ ეკვივალენტურია ზემოთ მოყვანილის, ვინაიდან ტოლი სიდიდეების საშუალო ნულს უდრის მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა სიდიდე ნულია (ჩვენ კი გვაქვს პირობა $\alpha_\bullet = \beta_\bullet = 0$).

საერთო საშუალოს შეფასება იქნება $\overline{Y}_{\bullet\bullet}$.

A ფაქტორის i-ური დონის და B ფაქტორის j-ური დონის საშუალოების შეფასებაა შესაბამისად $\overline{Y}_{i\bullet}$ და $\overline{Y}_{\bullet j}$.

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი იგივეობა

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(Y_{ij} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 = q\sum_{i=1}^{p}(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 + p\sum_{j=1}^{q}(\overline{Y}_{\bullet j} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet j} + \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 \,. \quad (18.11)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$SS_A = q\sum_{i=1}^{p}(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 \text{ (თავისუფლების ხარისხი } p-1\text{)},$$

$$SS_B = p\sum_{j=1}^{q}(\overline{Y}_{\bullet j} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 \text{ (თავისუფლების ხარისხი } q-1\text{)},$$

$$SSW = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet j} + \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 \text{ (თავისუფლების ხარისხი } (p-1)(q-1)\text{)},$$

$$SST = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(Y_{ij} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 \text{ (თავისუფლების ხარისხი } p\,q-1;$$

$$p\,q-1 = (p-1)(q-1) + (p-1) + (q-1)\text{)}.$$

შემოღებულ აღნიშვნებში (18.11) დისპერსიული თანაფარდობა ასე ჩაიწერება:

$$SST = SS_A + SS_B + SSW. \quad (18.11')$$

შევადგინოთ დისპერსიული ანალიზის შემდეგი 18.6 ცხრილი.

ცხრილი 18.6 ორფაქტორიანი ანალიზი ერთი დაკვირვებით უჯრაში

ვარიაციის წყარო	კვადრატების ჯამი	თავისუფლების ხარისხი	საშუალო
სტრიქონი	$SS_A = q\sum_{i=1}^{p}(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$	$p-1$	$\frac{SSA}{p-1}$
სვეტი	$SS_B = p\sum_{j=1}^{q}(\overline{Y}_{\bullet j} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$	$q-1$	$\frac{SSB}{q-1}$
ნარჩენი	$SSW = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet j} + \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$	$(p-1)(q-1)$	$\frac{SSE}{(p-1)(q-1)}$
სრული	$SST = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(Y_{ij} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2$	$pq-1$	

H_0^1 : $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$ ჰიპოთეზის შემოწმებისათვის $\hat{F}$ სტატისტიკა გამოითვლება ფორმულით:

$$F_A = \frac{\frac{SS_A}{p-1}}{\frac{SSW}{(p-1)(q-1)}} = (q-1)\frac{SS_A}{SSW} \sim F(q-1,(p-1)(q-1)).$$

H_0^1 ჰიპოთეზის შემოწმების წესი შემდეგია: თუ

$$f_A > F_{p-1,(p-1)(q-1),\alpha},$$

H_0^1 ჰიპოთეზას უარვყოფთ მნიშვნელოვნობის α დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0^1 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს. აქ f_A არის F_A სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

ანალოგიურად მოწმდება H_0^2 ჰიპოთეზაც, ოღონდ ახლა ტესტის სტატისტიკა იქნება:

$$F_B = \frac{\frac{SS_B}{q-1}}{\frac{SSW}{(p-1)(q-1)}} = (p-1)\frac{SS_B}{SSW} \sim F(q-1,(p-1)(q-1)).$$

ცხადია, რომ გენერალური ერთობლიობის დისპერსიის შეფასება იქნება

$$S^2 = \frac{SSW}{(p-1)(q-1)}.$$

შეიძლება ავაგოთ ნდობის ინტერვალები α_i -სა და β_j-სათვის. ეს შეიძლება გაკეთდეს უკვე განხილული T-მეთოდით და ამაზე აქ არ შევჩერდებით.

მაგალითი 18.6. ოთხმა ექსპერტმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეაფასა თითი-თითო ნიმუში საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ექვსი პარტიიდან. ქვემოთ მოცემულია ექსპერტების შეფასებები (პირობით ერთეულებში). დისპერსიული ანალიზის საფუძველზე დაადგინეთ, არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება მზა პროდუქციის პარტიებს ან ექსპერტების შეფასებებს შორის.

	მზა პროდუქციის პარტიები					
ექსპერტები	1	2	3	4	5	6
1	9	10	9	10	11	11
2	12	11	9	11	10	10
3	11	10	10	12	11	10
4	12	13	11	14	12	10

გამოთვლები გვაძლევს დისპერსიული ანალიზის 18.7 ცხრილს:

ცხრილი 18.7

ვარიაციის წყარო	კვადრატების ჯამი	თავისუფ. ხარისხი	საშუალო
მზა პროდუქციის პარტიები	$SSA = 13.12$	5	2.62
ექსპერტები	$SSB = 9.70$	3	3.23
ნარჩენი	$SSW = 13.13$	15	0.87
სრული	$SST = 35.95$	23	

ამ ამოცანისათვის საინტერესო ჰიპოთეზებია

$H_0^1 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, მზა პროდუქციის საშუალო ხარისხი პარტიების მიხედვით არ განსხვავდება

H_1^1 : ერთი მაინც α_i განსხვავებულია ნულისაგან (საშუალო ხარისხი პარტიების მიხედვით მუდმივი არაა)

და

$H_0^2 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$, ექსპერტთა შეფასებები ერთნაირია,

H_0^2 :ერთი მაინც β_i განსხვავდება ნულისაგან (მზა პროდუქციას ექსპერტები სხვადასხვანაირად აფასებენ).

მნიშვნელოვნობის დონედ ავიღოთ α=0,05. H_0^1 ჰიპოთეზისათვის მივიღებთ f_A=3.01>2,90=$F_{5,15,0.05}$, ხოლო H_0^2 ჰიპოთეზისათვის გვექნება f_B=3.71>3,29=$F_{3,15,0.05}$. ამრიგად, როგორც მზა პროდუქციის პარტიებს შორის, ასევე ექსპერტების შეფასებებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია.

ორფაქტორიანი ანალიზი უჯრაში დაკვირვებათა ერთნაირი რიცხვით. ამ შემთხვევაში მონაცემები უნდა გადავნომროთ სამი ინდექსით i, j, k. ვთქვათ ყოველ უჯრაში m დაკვირვებაა, მაშინ k=1,2,...,m. k ინდექსი ნომრავს დაკვირვებებს მოცემულ უჯრაში. ამგვარად (ixj)-ურ უჯრაში გვექნება მონაცემები $y_{ij1}, y_{ij2}, \dots, y_{ijm}$.

მონაცემთა ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

ცხრილი 18.8. ორფაქტორიანი ანალიზი m დაკვირვებით უჯრაში (მონაცემები)

	სვეტები				
სტრიქონები	B_1	…	B_j	…	B_q
A_1	$y_{111},y_{112},\ldots,y_{11m}$	…	$y_{1j1},y_{1j2},\ldots,y_{1jm}$	…	$y_{1q1},y_{1q2},\ldots,y_{1qm}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_i	$y_{i11},y_{i12},\ldots,y_{i1m}$	…	$\boxed{y_{ij1},y_{ij2},\ldots,y_{ijm}}$	…	$y_{iq1},y_{iq2},\ldots,y_{iqm}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_p	$y_{p11},y_{p12},\ldots,y_{p1m}$	…	$y_{pj1},y_{pj2},\ldots,y_{pjm}$	…	$y_{pq1},y_{pq2},\ldots,y_{pqm}$

განიხილება მოდელი

$$Y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+\varepsilon_{ijk}\,, \qquad (18.12)$$

სადაც ვუშვებთ, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=0\,,\ \sum_{j=1}^{q}\beta_j=0\,,\ \sum_{i=1}^{p}\gamma_{ij}=0 \text{ ყველა } j\text{-სათვის},\ \sum_{j=1}^{q}\gamma_{ij}=0 \text{ ყველა } i\text{-სათვის}.$$

ε_{ijk} ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და მათი საერთო განაწილების კანონია $N(0,\sigma^2)$.

ამ მოდელის ფარგლებში გვაქვს შემდეგი თანაფარდობები: თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\mu_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij},$$

მაშინ

$$EY_{ijk}=\mu_{ij},$$

$$\mu=\frac{1}{pqm}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}EY_{ijk}=\frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\mu_{ij}$$ ე.ი. μ არის ერთობლივი გენერალური საშუალო,

$$\mu_{i\bullet}=\frac{1}{qm}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}EY_{ijk}=\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\mu_{ij}=\mu+\alpha_i$$ – A ფაქტორის i-ური დონის შესაბამისი საშუალო,

$$\mu_{\bullet j}=\frac{1}{pm}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}EY_{ijk}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mu_{ij}=\mu+\beta_j$$ – B ფაქტორის j-ური დონის შესაბამისი საშუალო.

ამრიგად, $\alpha_i=\mu_{i\bullet}-\mu$ სიდიდე წარმოადგენს A ფაქტორის i-ური დონის ეფექტს, ხოლო $\beta_j=\mu_{\bullet j}-\mu$ სიდიდე არის B ფაქტორის j-ური დონის ეფექტი. γ_{ij}-ს ეწოდება (სტრიქონებისა და სვეტების) ურთიერთქმედება. როცა ყველა უჯრაში თითო გაზომვაა, მაშინ ურთიერთქმედების შემოტანა არ ხდება, რადგან ამ დროს ვერ ხერხდება დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასების აგება.

ადვილი მისახვედრია, რომ μ-ს შეფასება იქნება

$$\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}=\frac{1}{pqm}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}Y_{ijk}\ .$$

შეიძლება დაიწეროს შემდეგი იგივეობა

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}(Y_{ijk}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 = qm\sum_{i=1}^{p}(\overline{Y}_{i\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 + pm\sum_{j=1}^{q}(\overline{Y}_{\bullet j\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 + m\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\overline{Y}_{ij\bullet}-\overline{Y}_{i\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet j\bullet}+\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij\bullet})^2\,, \tag{18.13}$$

სადაც

$$\overline{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{qm}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}Y_{ijk}\,,\quad \overline{Y}_{\bullet j\bullet} = \frac{1}{pm}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}Y_{ijk}\,,\quad \overline{Y}_{ij\bullet} = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}Y_{ijk}\,.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$SS_A = qm\sum_{i=1}^{p}(\overline{Y}_{i\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$ (თავისუფლების ხარისხია $p-1$),

$SS_B = pm\sum_{j=1}^{q}(\overline{Y}_{\bullet j\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$ (თავისუფლების ხარისხია $q-1$),

$SS_{AB} = m\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\overline{Y}_{ij\bullet}-\overline{Y}_{i\bullet\bullet}-\overline{Y}_{\bullet j\bullet}+\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$ (თავისუფლების ხარისხია $(p-1)(q-1)$),

$SSW = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij\bullet})^2$ (თავისუფლების ხარისხია $pq(m-1)$),

$SST = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}(Y_{ijk}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$ (თავისუფლების ხარისხია $pqm-1$; მართლაც,

$$pqm-1=(p-1)+(q-1)+(p-1)(q-1)+pq(m-1)).$$

გამოთვლებს თავს უყრიან დისპერსიული ანალიზის 18.9 ცხრილში.

საინტერესო ჰიპოთეზებია

$$\begin{cases} H_0^1 & : \quad \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0, \\ H_1^1 & : \quad \text{ერთი მაინც } \alpha_i \text{ განსხვავდება ნულისაგან}. \end{cases} \tag{18.14}$$

$$\begin{cases} H_0^2 & : \quad \beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_q=0, \\ H_1^2 & : \quad \text{ერთი მაინც } \beta_j \text{ განსხვავდება ნულისაგან}. \end{cases} \tag{18.15}$$

$$\begin{cases} H_0^3 & : \quad \text{ყველა } \gamma_{ij} \text{ უდრის ნულს}, \\ H_1^3 & : \quad \text{ერთი მაინც } \gamma_{ij} \text{ განსხვავდება ნულისაგან}. \end{cases} \tag{18.16}$$

ზოგჯერ ამ ჰიპოთეზებს ჩაწერენ შემდეგი ეკვივალენტური ფორმით

$$H_0^1 \ : \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 0,$$
$$H_1^1 \ : \ \text{ნულოვანი ჰიპოთეზა მცდარია}. \qquad (18.17)$$

$$H_0^2 \ : \ \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2 = 0,$$
$$H_1^2 \ : \ \text{ნულოვანი ჰიპოთეზა მცდარია}. \qquad (18.18)$$

$$H_0^3 \ : \ \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij}^2 = 0,$$
$$H_1^3 \ : \ \text{ნულოვანი ჰიპოთეზა მცდარია}. \qquad (18.19)$$

ცხრილი 18.9 ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი

ვარიაციის წყარო	კვადრატების ჯამი	თავისუფ. ხარისხი	საშუალო
სტრიქონი	$SS_A = qm\sum_{i=1}^{p}(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$p-1$	$\frac{SS_A}{p-1}$
სვეტი	$SS_B = pm\sum_{j=1}^{q}(\bar{Y}_{\bullet j\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$q-1$	$\frac{SS_B}{q-1}$
ურთიერთ-ქმედება	$SS_{AB} = m\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\bar{Y}_{ij\bullet} - \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j\bullet} + \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$(p-1)(q-1)$	$\frac{SS_{AB}}{(p-1)(q-1)}$
ნარჩენი	$SSW = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}(\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet})^2$	$pq(m-1)$	$\frac{SSW}{pq(m-1)}$
სრული	$SST = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}(\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$pqm-1$	

(18.14) (ანუ (18.17)) სახის ჰიპოთეზების შესამოწმებლად F სტატისტიკა გამოითვლება ასე:

$$F_A = \frac{pq(m-1)}{p-1}\frac{SS_A}{SSW}.$$

f_A აღნიშნავდეს F_A სტატისტიკის დაკვირვებულ მნიშვნელობას. მაშინ (18.4)-ით მოცემული H_0^1 ჰიპოთეზის შემოწმების წესი შემდეგია: თუ $f_A > F_{p-1, pq(m-1), \alpha}$ მაშინ H_0^1 ჰიპოთეზას უარვყოფთ (α მნიშვნელოვნობის დონით), წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0^1 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

(18.15) (ანუ (18.18)) სახის ჰიპოთეზების შესამოწმებლად F_B სტატისტიკა გამოითვლება ასე:

$$F_B = \frac{pq(m-1)}{q-1}\frac{SS_B}{SSW},$$

α მნიშვნელოვნობის დონით H_0^2 ჰიპოთეზას ვიწუნებთ, თუ $f_B > F_{q-1,\, pq(m-1),\, \alpha}$ და ბოლოს (18.16) (ანუ (18.19)) სახის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად F_{AB} სტატისტიკა გამოითვლება ასე:

$$F_{AB} = \frac{pq(m-1)}{(p-1)(q-1)} \frac{SS_{AB}}{SSW}.$$

H_0^3 ჰიპოთეზას უარვყოფთ α მნიშვნელოვნობის დონისათ, თუ $f_{AB} > F_{(p-1)(q-1),pq(m-1),\alpha}$.

§ 3. დისპერსიული ანალიზის მოდელები ფაქტორების შემთხვევითი ეფექტებით

ამ პუნქტში განვიხილავთ დისპერსიული ანალიზის არსებითად განსხვავებულ მოდელებს, ვიდრე აქამდე გვქონდა, თუმცა ამ მოდელებში მსგავსებაც საკმაოდ დიდია. ახალ მოდელში, რომელსაც II ტიპის მოდელებს უწოდებენ, ფაქტორების დონეების ეფექტები წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს, განსხვავებით ადრე განხილული მოდელისაგან (I ტიპის მოდელისაგან), სადაც ფაქტორის დონეების ეფექტები დეტერმინისტული სიდიდეები იყო. ამიტომ ადრე განხილულ I ტიპის მოდელებს უწოდებენ მოდელებს ფაქტორების ფიქსირებული ეფექტებით.

II ტიპის მოდელში ყოველ, ცალკეულ ექსპერიმენტში ფაქტორის დონეების ეფექტები წარმოადგენს სავსებით გარკვეულ რიცხვებს, ოღონდ ექსპერიმენტის განმეორებისას ეს რიცხვები უკვე იცვლება, ღებულობს რა ახალ შერჩევით მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ დისპერსიული ანალიზის ერთფაქტორიანი ამოცანა შემთხვევითი ეფექტებით. მონაცემთა ცხრილი ანალოგიური იქნება 18.1 ცხრილისა, ოღონდ ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ სვეტში დაკვირვებათა რიცხვი ერთნაირია

$$n_1=n_2=\dots=n_k=m.$$

ფაქტორის დონეებია $A_1, A_2, \dots, A_k$.

ამ ამოცანის შესაბამის მოდელს აქვს შემდეგი სახე

$$Y_{ij} = \mu + Z_i + \varepsilon_{ij}; \qquad i=1,2,\dots,k;\ j=1,2,\dots,m.$$

სადაც Z_i შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს ფაქტორის i-ური დონის ეფექტს. დავუშვათ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. Z_i და ε_{ij} ერთობლივად დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია.
2. $E(Z_i)=0$, $D(Z_i) = \sigma_Z^2$, ყველა i-სათვის,
3. $E(\varepsilon_{ij})=0$, $D(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$, ყველა i და j-სათვის,

ცხადია, რომ $E(Y_{ij})=\mu$, $D(Y_{ij})=\sigma_Z^2+\sigma^2$. ამრიგად Y_{ij} -ის დისპერსია ორი კომპონენტისაგან შედგება. ამიტომ, ხშირად, ამ მოდელს უწოდებენ მოდელს დისპერსიის კომპონენტებით.

აღნიშნულ შემთხვევაშიც ადგილი აქვს (18.3) დისპერსიულ თანაფარდობას და დისპერსიული ანალიზის ცხრილს 18.2 სახე აქვს. არ არის ძნელი მისაღები, რომ

$$E\left(\frac{SSB}{k-1}\right)=\sigma^2+m\,\sigma_Z^2, \tag{18.20}$$

$$E\left(\frac{SSW}{k(m-1)}\right)=\sigma^2, \tag{18.21}$$

(18.20) და (18.21)-დან ვღებულობთ, რომ

$$\sigma_Z^2=\frac{1}{m}\left(E\left(\frac{SSB}{k-1}\right)-E\left(\frac{SSW}{k(m-1)}\right)\right). \tag{18.22}$$

ამრიგად σ_Z^2-ს ჩაუნაცვლებელი შეფასება S_Z^2 მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$S_Z^2=\frac{1}{m}\left(E\left(\frac{SSB}{k-1}\right)-E\left(\frac{SSW}{k(m-1)}\right)\right). \tag{18.23}$$

განსახილავ მოდელში H_0 ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ფაქტორების დონეებს შორის განსხვავების ეფექტი არ არსებობს ასე ჩაიწერება:

$$H_0:\ \sigma_Z^2=0,$$

ცხადია, რომ ალტერნატიულ ჰიპოთეზას ექნება სახე:

$$H_1:\ \sigma_Z^2>0.$$

აღნიშნული ჰიპოთეზების შესამოწმებელ F სტატისტიკას აქვს სახე

$$F=\frac{k(m-1)}{(k-1)}\frac{SSB}{SSW}.$$

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას, ამ სტატისტიკას ექნება $F(k-1,k(m-1))$ განაწილება. α მნიშვნელოვნობის დონისათვის, ცხრილიდან ვპოულობთ $F_{k-1,\,k(n-1),\,\alpha}$-ს და თუ f-დაკვირვებული მნიშვნელობისათვის სრულდება

$$f>F_{k-1,\,k(n-1),\,\alpha}$$

უტოლობა, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ.

მოვიყვანოთ დისპერსიული ანალიზის კიდევ ერთი შერეული მოდელი. ამ მოდელში გვაქვს ერთი ფაქტორი დონეების შემთხვევითი ეფექტით (აღინიშნება b-თი) და ერთი ფაქტორი დონეების ფიქსირებული ეფექტით (აღინიშნება α-თი). გვექნება ასეთი მოდელი

$$Y_{ijk}=\mu+\alpha_i+b_j+\gamma_{ij}+\varepsilon_{ijk},\qquad i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q;\ k=1,2,\ldots,m. \tag{18.24}$$

(მონაცემები მოიყვანება 18.8 ცხრილის ანალოგიური ცხრილით).

მოითხოვება შემდეგი პირობების შესრულება:

1. $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 0,$
2. $\gamma_{1j}+\gamma_{2j}+\cdots+\gamma_{pj} = 0$, ყოველი j-სათვის,
3. $E\gamma_{ij} = 0$, ერთი მაინც i-სათვის,
4. $b_j \sim N(0, \sigma_b^2)$,
5. $\gamma_{ij} \sim N(0, \sigma_{ab}^2)$,
6. ε_{ijk} დამოუკიდებელია b-სა და γ-საგან, $\varepsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma^2)$.

განიხილება ჰიპოთეზათა შემდეგი წყვილები:

1. $H_0^1 : \sum_{i=1}^{p}\alpha_i^2 = 0,$ $H_1^1 : \sum_{i=1}^{p}\alpha_i^2 > 0.$

2. $H_0^2 : \sigma_b^2 = 0,$ $H_1^2 : \sigma_b^2 > 0.$

3. $H_0^3 : \sigma_{ab}^2 = 0,$ $H_1^3 : \sigma_{ab}^2 > 0.$

დისპერსიული ანალიზის ცხრილს აქვს 18.9 ცხრილის ანალოგიური სახე, ამიტომ აქ არ გავიმეორებთ.

კვადრატების ჯამების მათემატიკური ლოდინები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\begin{cases} E\left(\dfrac{SS_A}{p-1}\right) = \sigma^2 + n\sigma_{ab}^2 + \dfrac{nq\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^2}{p-1}, \\ E\left(\dfrac{SS_B}{q-1}\right) = \sigma^2 + np\sigma_b^2, \\ E\left(\dfrac{SS_{AB}}{(p-1)(q-1)}\right) = \sigma^2 + n\sigma_{ab}^2, \\ E\left(\dfrac{SST}{pq(n-1)}\right) = \sigma^2. \end{cases} \tag{18.25}$$

კვადრატების ჯამების გამოსათვლელი ფორმულები მოცემულია 18.9 ცხრილში.

H_0^1, H_1^1 ჰიპოთეზების შემოწმება ხდება შემდეგნაირად:

F_A სტატისტიკა გამოითვლება ფორმულით:

$$F_A = \frac{(p-1)(q-1)}{p-1}\frac{SS_A}{SS_{AB}}. \tag{18.26}$$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ამ ფორმულაში SS_A იყოფა არა SST-ზე, არამედ SS_{AB}-ზე. თუ H_0 ჭეშმარიტია მაშინ, როგორც ვხედავთ (18.25) ფორმულებიდან

$$E\left(\frac{SS_A}{p-1}\right)=E\left(\frac{SS_{AB}}{(p-1)(q-1)}\right)$$

და (18.26) სტატისტიკა განაწილებული იქნება F განაწილების კანონით თავისუფლების ხარისხებით $p-1$, $(p-1)(q-1)$.

α მნიშვნელოვნობის დონისათვის, ცხრილიდან ვპოულობთ $F_{p-1,\,(p-1)(q-1),\,\alpha}$ და თუ

$$f_A > F_{p-1,\,(p-1)(q-1),\,\alpha}$$

დავიწუნებთ H_0 ჰიპოთეზას.

H_0^2, H_1^2 ჰიპოთეზები ისევ მოწმდება, როგორც მუდმივი ფაქტორის პირობებში:

F_B სტატისტიკა გამოითვლება ფორმულით:

$$F_B=\frac{pq(n-1)}{q-1}\frac{SS_B}{SST}.$$

α მნიშვნელოვნობის დონისათვის აიღება $F_{q-1,\,pq(n-1),\,\alpha}$. H_0-ს ვიწუნებთ, თუ

$$f_B > F_{q-1,\,pq(n-1),\,\alpha}$$

H_0^3, H_1^3 ჰიპოთეზებისათვის F_{AB} სტატისტიკა გამოითვლება ფორმულით:

$$F_{AB}=\frac{pq(n-1)}{(p-1)(q-1)}\frac{SS_{AB}}{SST}.$$

აქაც ვაფიქსირებთ α მნიშვნელოვნობის დონეს, ვიპოვით $F_{(p-1)(q-1),pq(n-1),\alpha}$ კვანტილს. H_0-ს უარვყოფთ, თუ

$$f_{AB} > F_{(p-1)(q-1),\,pq(n-1),\,\alpha}.$$

* * *

მოვიყვანოთ ის წყაროები, რომლებსაც ძირითადად მიჰყვება ამ თავში გადმოცემული მასალა და რომელთა მეშვეობით დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია უფრო ღრმად გაეცნოს ამ თავში გაშუქებულ პრობლემატიკას: [22], [63], [66], [72], [79], [82], [83], [84].

დასკვნები

ამ თავში განხილულია დისპერსიული ანალიზის მეთოდები, რომლებიც ეფექტურად გამოიყენება ანალიზურ დაჯგუფებათა სტატისტიკური კვლევის დროს; ექსპერიმენტის შედეგის რიცხვით მნიშვნელობებზე ზემოქმედებას ახდენენ ფაქტორები, რომლებიც იწვევენ ამ მნიშვნელობათა ცვლილებას, ვარიაციას. დისპერსიული ანალიზი ეყრდნობა იმ მოსაზრებას, რომ უმრავლეს შემთხვევაში ექსპერიმენტის შედეგების ვარიაცია შეიძლება დაიშალოს კომპონენტებად, რომლებიც განპირობებულია ცალკეული ფაქტორებით.

განხილულია ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის მოდელები, მუდმივი და შემთხვევითი ეფექტებით და მოდელები, რომლის შედეგებზე მოქმედებს ორი ფაქტორი.

სავარჯიშოები

18.1. ხორბლის ერგვაროვანი და ერთი და იგივე ფართობის ყანებში შეიტანეს სამგვარი სასუქი, ამასთან S_1 ტიპისა – 5 ყანაში, S_2 ტიპისა – 7 ყანაში, ხოლო S_3 ტიპისა – 6 ყანაში. მოსავლიანობა კილოგრამებში მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

	1	2	3
	781	545	696
	655	786	660
	611	976	639
	789	663	467
	596	789	650
		569	380
		720	
n_i	5	7	6

თუ დავუშვებთ, რომ ეს რიცხვები Y_{ij} ნორმალურად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების რეალიზაციაა, $j=1,2,...,n_i$, $i=1,2,3$, $n_1=5$, $n_2=7$, $n_3=6$, ამასთან $Ey_{ij}=\beta_i$, $Dy_{ij}=\sigma^2$ ყველა i-სა და j-სათვის, შეამოწმეთ ნულოვანი ჰიპოთეზა

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

იმის შესახებ, რომ სასუქები საშუალოდ ერთნაირად მოქმედებენ მოსავლიანობაზე

$$H_1 : \beta_2 \neq \beta_1,\ \beta_3 \neq \beta_1$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნობის დონისათვის.

18.2. დისპერსიული ანალიზის მეშვეობით შეამოწმეთ სამი დამოუკიდებელი A, B, C შერჩევის შესაბამის პოპულაციათა საშუალოების ტოლობის ჰიპოთეზა $\alpha=0.05$ დონეზე.

A : 40 34 84 46 47 60
B : 59 92 117 86 60 67 95 40 98 108
C : 92 93 40 100 92

18.3. მოცემულია

		B						
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	Σ
A	A_1	9.5	11.5	11.0	12.0	9.3	11.5	**64.8**
	A_2	9.6	12.0	11.1	10.8	9.7	11.4	**64.6**
	A_3	12.4	12.5	11.4	13.2	10.4	13.1	**73.0**
	A_4	11.5	14.0	12.3	14.0	9.5	14.0	**75.3**
	A_5	13.7	14.2	14.3	14.6	12.0	13.2	**82.0**
	Σ	**56.7**	**64.2**	**60.1**	**64.6**	**50.9**	**63.2**	**359.7**

შეამოწმეთ შესაძლო ეფექტები სტრიქონებისა და სვეტების მიხედვით $\alpha=0.01$ დონეზე.

18.4. ვთქვათ, ექსპერიმენტულად მოწმდება დეტალის ცვეთამედეგობაზე ისეთი ფაქტორების ზემოქმედება, როგორიცაა მასალა (ორი სახეობა) და დამზადების ტექნოლოგია (სამი მეთოდი). ექსპერიმენტის მონაცემები (დეტალის მუშაობის ხანგრძლივობა თვეებში) მოცემულია ცხრილში

მასალა (B ფაქტორი)	ტექნოლოგია (A ფაქტორი)			ჯამი სტრიქონში	საშუალო
	1	2	3		
1	10, 8 ,7, 10	8, 12, 14, 12	15, 8, 10, 10	124	10.33
2	12, 8, 8, 7	12, 13, 11, 14	13, 15, 12, 10	135	11.25
ჯამი სვეტში	70	96	93	259	–
საშუალო	8.75	12.00	11.63	–	–

19

დროითი მწკრივები

§ 1. დროითი მწკრივის მაგალითები და ძირითადი კომპონენტები

დაკვირვებანი რაიმე მოვლენაზე, რომლის ხასიათიც დროში ცვალებადია, წარმოქმნის დალაგებულ მიმდევრობას, რომელსაც დროით მწკრივს უწოდებენ.

ესა თუ ის მოვლენა ხასიათდება გარკვეული მაჩვენებლით, რომელიც როგორც წესი ჩვენს მიერ ინტერპრეტირებული იქნება როგორც შემთხვევითი სიდიდე.

ამრიგად, დროის დისკრეტულ t_1, t_2, ... , t_n, ... , მომენტებში დაკვირვებებით წარმოქმნილი დროითი მწკრივი, ანუ დისკრეტული დროითი მწკრივი, ჩვენ გვესმის როგორც დამოკიდებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა

$$Y(t_1), Y(t_2), \dots , Y(t_n), \dots$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ დროითი მწკრივის მთავარი დამახასიათებელი ნიშანი ისაა, რომ მნიშვნელოვანია დაკვირვებათა მიმდევრობა, ე.ი. დროში დალაგება, განსხვავებით შემთხვევითი ამოკრეფისაგან X_1, X_2, ... , X_n, ..., სადაც ინდექსაცია მხოლოდ პირობითია და გადანომვრა მოვლენის არსს არ ცვლის.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როდესაც დაკვირვებები ხდება ერთმანეთისაგან თანაბრად დაშორებულ დროის მომენტებში და თუ ჩვენ დროის ერთეულად ავირჩევთ ინტერვალს ორ მეზობელ მომენტს შორის, მაშინ მწკრივის წევრები შეიძლება აღინიშნოს სიმბოლოებით

$$Y_1, Y_2, \dots , Y_n, \dots$$

ეჭვგარეშეა, რომ მკითხველი იცნობს დროითი მწკრივის მრავალ მაგალითს და თვითონვე მოახერხებდა ამ მაგალითების ჩამოთვლას. მიუხედავად ამისა, მაინც მოვიყვანოთ დროითი მწკრივის რამდენიმე მაგალითი ადამიანის მოღვაწეობის სხვადასხვა სფეროდან. ესენია: საქონლის მოხმარების მონაცემები წლების მანძილზე, ერთობლივი ეროვნული პროდუქტის ცვლილება წლების მიხედვით, მრავალწლიანი დაკვირვებები ტემპერატურაზე, სხვადასხვა სამეურნეო კულტურის მოსავლიანობა წლების მიხედვით, გარკვეული ქვეყნის მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილება წლების მიხედვით, სხვადასხვა კომპანიების პროდუქციაზე მოთხოვნის ცვლილება, ინდივიდუალური მოხმარება წლების მიხედვით, გადაზიდული ტვირთის რაოდენობა და სხვა.

შევეხოთ ერთ საკითხს დროითი მწკრივის დისკრეტულობის ტიპის შესახებ.

1. დროითი მწკრივის დისკრეტულობა, დაკავშირებულია თავად მოვლენის დისკრეტულობასთან. ასეთი მწკრივის მაგალითია რაიმე სასოფლო-სამეურნეო კულტურის მოსავლიანობა ფართობის ერთეულზე წლების მიხედვით. მართლაც, მოცემულ ფართობის ერთეულზე მოსავლის აღება ხდება წელიწადში ერთხელ, დაახლოებით ერთსა და იმავე დროს. ასეთივე ბუნებრივი დისკრეტულობის მაგალითია წლიური მთლიანი შიდა პროდუქტი და ა.შ.

2. მოსახლეობის რაოდენობის დროითი მწკრივის დისკრეტულობა დაკავშირებულია იმ ფაქტთან, რომ მოსახლეობის აღწერა ხდება გარკვეული პერიოდულობით (და არა ყოველწლიურად ან უწყვეტად).
3. დისკრეტული დროითი მწკრივი შეიძლება მიღებული იქნას დროში უწყვეტად მიმდინარე პროცესებზე დისკრეტულ მომენტებში დაკვირვებებით. ასეთი დისკრეტული დროითი მწკრივის მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ მცურავ საპროცენტო განაკვეთზე დისკრეტულ დროის მომენტებში დაკვირვებები. მეორე მაგალითია აქციის ფასზე გარკვეული დროის მომენტებში (ყოველდღიური, ყოველკვირეული და ა.შ.) დაკვირვებები, და ა.შ.
4. დისკრეტული დროითი მწკრივის გენერირების (წარმოქმნის) ერთ-ერთი წყაროა ცვლადი სიდიდის დაგროვება დროის გარკვეული პერიოდის განმავლობაში. ასეთი დროითი მწკრივების მაგალითებია: ა) ნალექების რაოდენობა, რომლებიც გროვდება ისეთი პერიოდების განმავლობაში, როგორებიცაა დღე ან თვე; ბ) გარკვეული პერიოდის განმავლობაში წარმოებული ესა თუ ის პროდუქცია; გ) გარკვეულ პროდუქციაზე თვიური, წლიური ან სხვა პერიოდის მოთხოვნა და ა.შ.

პრაქტიკაში, განსაკუთრებით ეკონომიკაში დროის ის მომენტები, როდესაც უნდა ჩატარდეს დაკვირვებები, ხშირად წინასწარ არის მოცემული (ფიქსირებული). ისეთ სიტუაციებში კი, რომლებსაც ექსპერიმენტული ხასიათი გააჩნია გადაწყვეტილება დაკვირვების მომენტების შერჩევის შესახებ ჩვენ თვითონვე შეგვიძლია მივიღოთ. ეს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ეკონომიკური მაჩვენებლების შესწავლისას.

დროითი მწკრივების წარმოდგენა მოხერხებულია როგორც ცხრილების, ისევე გრაფიკების მეშვეობით.

ცხრილი 19.1. ავსტრალიის ექსპორტი (წლიური) 1973–1989 წლებში

წელი	t	ექსპორტი ($ მილიონებში)	წელი	t	ექსპორტი ($ მილიონებში)
1973	1	22 040	1982	10	28 135
1974	2	20 686	1983	11	28 216
1975	3	22 600	1984	12	30 609
1976	4	23 468	1985	13	35 275
1977	5	25 070	1986	14	36 735
1978	6	25 659	1987	15	40 469
1979	7	27 225	1988	16	43 670
1980	8	29 256	1989	17	43 966
1981	9	27 804			

ცხრილი 19.2. აშშ-ში დასაქმებულ პირთა საერთო რაოდენობა 1978–1987 წლებში

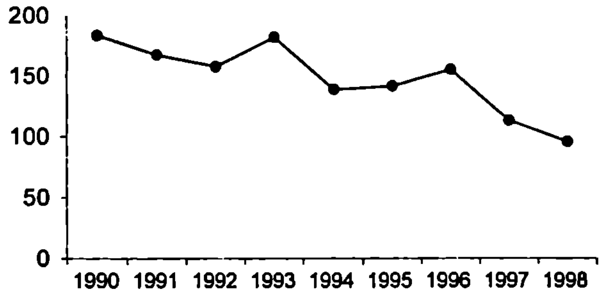
წელი	t	დასაქმებულთა საერთო რაოდენობა (მილიონებში)	წელი	t	დასაქმებულთა საერთო რაოდენობა (მილიონებში)
1978	1	96.1	1983	6	100.8
1979	2	98.8	1984	7	105.0
1980	3	99.3	1985	8	107.2
1981	4	100.4	1986	9	109.6
1982	5	99.5	1987	10	112.4

ცხრილი 19.3. დასაქმებულ პირთა რაოდენობა საქართველოში 1990–1998 წლებში (ათასობით კაცი)

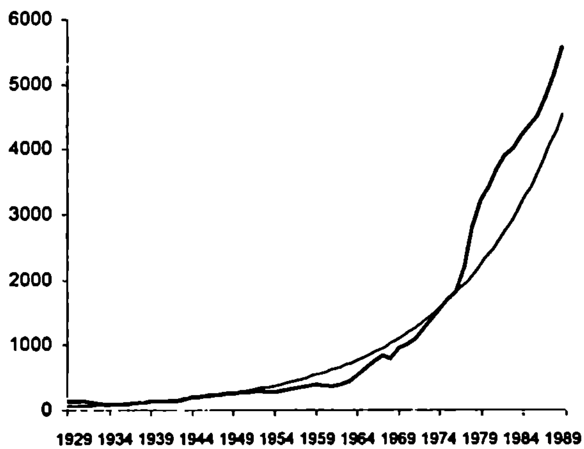
1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
2763.3	2523.5	2031.7	1919.1	1814.3	1780.9	2085.2	2351.2	2366.7

ცხრილი 19.4. თბილისის მეტროპოლიტენით მგზავრთა გადაყვანა 1990–1998 წლებში (მლნ. კაცი)

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
183.4	167.3	157.8	182.2	138.8	142.2	155.2	114.0	96.4



ნახ. 19.1. ცხრილი 19.4-ის შესაბამისი გრაფიკი



ნახ. 19.2. აშშ-ს მთლიანი შიდა პროდუქტი 1929–1989 წლებში

დროითი მწკრივების ანალიზის მიზანია იმ მექანიზმების დადგენა, რომლებიც განაპირობებს ამ მწკრივების წარმოქმნას. ამის მიღწევა შეუძლებელია ცალკეული (ერთეული) დროითი მწკრივის ანალიზის საფუძველზე, რადგანაც ეს უკანასკნელი შეიძლება ასახავდეს რაიმე რთული მოვლენის მხოლოდ ერთ მხარეს. თავად მოვლენა კი შეიძლებოდა დახასიათდეს რამდენიმე დროითი მწკრივით, რომლებიც ურთიერთკავშირში იმყოფება. სრული ანალიზის ჩატარებისას და იქიდან გამომდინარე დასკვნების

მისაღებად საჭიროა მრავალგანზომილებიანი სისტემების შესწავლა. აქ ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ცალკეული (ერთგანზომილებიანი) დროითი მწკრივების ქცევის სხვადასხვა ტიპების შესწავლით. მრავალგანზომილებიანი დროითი მწკრივების შესწავლას ეძღვნება ტ. ანდერსონის წიგნი [18].

დროითი მწკრივების ანალიზის მრავალი მოდელიდან ჩვენ თავდაპირველად შევჩერდებით ეკონომიკაში ფართოდ გამოყენებად კლასიკურ მოდელზე, რომელიც გულისხმობს დროითი მწკრივის ოთხი ძირითადი ურთიერთდაკავშირებული კომპონენტის სახით წარმოდგენას.

ეს კომპონენტებია:

1. გრძელვადიანი ტრენდი, ანუ სისტემატური ძრაობა – T_t ;
2. ციკლური ეფექტი – მეტნაკლებად რეგულარული ხასიათის რხევითი მოძრაობა ტრენდის მიმართ – C_t ;
3. სეზონურობის ეფექტი – S_t ;
4. შემთხვევითი ანუ არარეგულარული, არასისტემატური კომპონენტა – I_t .

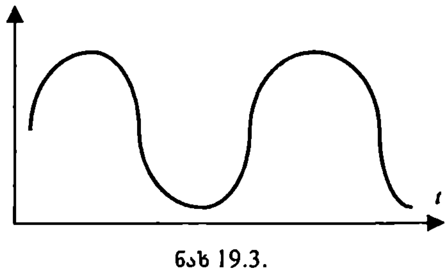
დავახასიათოთ თითოეული კომპონენტა ცალ-ცალკე.

ტრენდი. ტრენდის განსაზღვრა საკმაოდ რთული პრობლემაა. საზოგადოდ, ტრენდის ქვეშ იგულისხმება რაიმე მდგრადი სისტემატური ძრაობა საკმაოდ ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ტრენდი წარმოადგენს გრძელვადიან (ხანგრძლივ) შედარებით გლუვი ხასიათის ძრაობას, რომელსაც ავლენს დროითი მწკრივი. აღვნიშნოთ რომ ცნება „ხანგრძლივი“ პირობითია და დამოკიდებულია შესასწავლი მოვლენის არსზე. ის, რაც „ხანგრძლივია“ ერთი თვალსაზრისით, შეიძლება ხანმოკლე აღმოჩნდეს სხვა თვალსაზრისით. მაგალითად, თუ ჩვენ შევისწავლით ვალუტის კურსის ცვლილებას რამდენიმე (ორი-სამი) წლის განმავლობაში, ის მდგრადი ძრაობა, რომელიც შეიძლება აღქმული იყოს როგორც ტრენდი, სინამდვილეში შეიძლება აღმოჩნდეს მხოლოდ ნაწილი ნელად რხევადი პროცესისა, რომელიც აღწერს ვალუტის კურსის ცვლილებას ათეული წლების განმავლობაში.

ციკლური ეფექტი. ციკლური ძრაობა დროით მწკრივში შეიძლება დახასიათდეს როგორც ფართო რხევა ანუ ტალღისებური ძრაობა ტრენდის წირის (ხაზის) მიმართ ზევით და ქვემოთ. ამასთან თითოეული ციკლის ხანგრძლივობა, როგორც წესი, წელიწადზე მეტია, შეიძლება იყოს რამოდენიმე წელიც.

ციკლურობის მაგალითებია კარგად ცნობილი საქმიანი ციკლები, რომლებიც შეესაბამება (ანდა იმეორებს) ეკონომიკური რეცესიებისა და ინფლაციების ციკლებს, საქონელზე გრძელვადიანი მოთხოვნის ციკლებს და ციკლებს ფინანსურ და ფულად სექტორებში. ამ ბოლო ციკლის მაგალითად შეიძლება დავასახელოთ საპროცენტო განაკვეთის ცვლილების კარგად ცნობილი ციკლები.

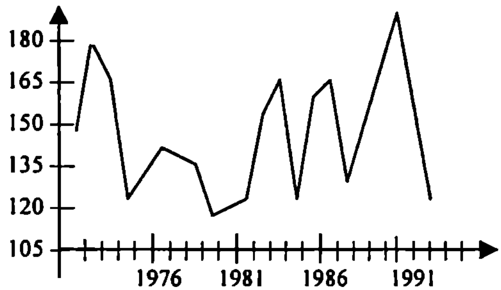
ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე ნაჩვენებია დროით მწკრივში ციკლური ძრაობის ერთ-ერთი მაგალითი.



ნახ 19.3.

სამწუხაროდ, პრაქტიკაში ციკლები არ ატარებს ისეთ რეგულარულ ხასიათს, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. ისინი ძალიან იშვიათად არიან რეგულარული და ჩნდებიან სხვა კომპონენტებთან ერთობლიობაში.

მოვიყვანოთ არარეგულარული ციკლური მოძრაობის კიდევ ერთი მაგალითი.

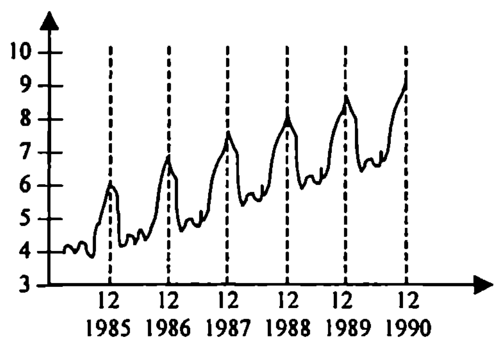


ნახ. 19.4. არარეგულარული ციკლური მოძრაობა

ციკლური კომპონენტის გამოყოფა დროითი მწკრივების ანალიზის ერთ-ერთი ურთულესი ამოცანაა.

სეზონური ეფექტი (სეზონური ვარიაციები). შეიძლება ითქვას, რომ ყველაზე ადვილი აღმოსაჩენად, გამოსაყოფად და შესასწავლად არის სეზონურობის ეფექტი. ეს გამოწვეულია იმით, რომ სეზონური ცვლილებები განპირობებულია შესასწავლ სისტემაზე გარე მექანიზმების და არა ძირითადი მექანიზმის ზემოქმედებით.

სეზონური ვარიაციები ციკლურის მსგავსია. განსხვავება მათ შორის ის არის, რომ სეზონურობის პერიოდები უფრო ხანმოკლეა. მათი ხანგრძლივობა ერთი წელია ან ერთ წელზე ნაკლებია (კვარტალი, თვე, კვირა, დღე და სხვა). სეზონური ვარიაცია შეიძლება დაკავშირებული იყოს წელიწადის 4 ტრადიციულ სეზონთან ან ტრენდის მიმართ სისტემატური ხასიათის ძრაობასთან, რომელიც წარმოიქმნება ერთი კვირის პერიოდით ან უფრო მეტიც ერთი დღის პერიოდით. მაგალითად, აქციათა ბაზარზე აქციების ფასები დღის განმავლობაში დროის გარკვეულ მომენტებში აღწევს უმაღლეს და უდაბლეს მნიშვნელობებს. სეზონური ვარიაციის კლასიკური მაგალითია ბინათმფლობელთა მიერ საწვავის (ნავთობი, ნახშირი ან ბუნებრივი გაზი) მოხმარება.



ნახ. 19.5. საცალო ვაჭრობის თვიური მოცულობის ტიპიური დინამიკა თვეებისა და წლების მიხედვით (12 აღნიშნავს ყოველი წლის დეკემბერს).

შემთხვევითი ვარიაციები, ანუ შემთხვევითი კომპონენტა მოიცავს ყველა იმ არარეგულარულ ცვლილებას დროით მწკრივში, რომლებიც არაა განპირობებული სხვა

კომპონენტებით. ისინი აძნელებენ სხვა უფრო განჭვრეტადი კომპონენტების გამოვლენას. თითქმის ყველა დროითი მწკრივი შეიცავს შემთხვევით ვარიაციებს. საჭიროა ისეთი მეთოდების ფლობა, რომლებიც საშუალებას მოგვცემდა მოგვეშორებინა ისინი დანარჩენი კომპონენტების აღწერისა და აღრიცხვის მიზნით.

§ 2. დროითი მწკრივის კლასიკური მოდელი

მას შემდეგ, რაც დავახასიათეთ დროითი მწკრივის კლასიკური მოდელის ძირითადი შემადგენელი კომპონენტები: ტრენდი – T_t ; ციკლური ეფექტი – C_t; სეზონურობის ეფექტი – S_t; არარეგულარული შემთხვევითი კომპონენტა – I_t , შევეხოთ საკითხს, თუ ამ ოთხი კომპონენტის როგორ კომბინაციად შეიძლება იქნეს წარმოდგენილი ეს მოდელი.

ეკონომიკაში ფართოდ გავრცელებული მოდელებია ან ადიციური მოდელი, რომლის ფარგლებშიც დროითი მწკრივის მნიშვნელობა t-ურ მომენტში (აღნიშვნა – Y_t) განსაზღვრულია როგორც ამ კომპონენტების ჯამი

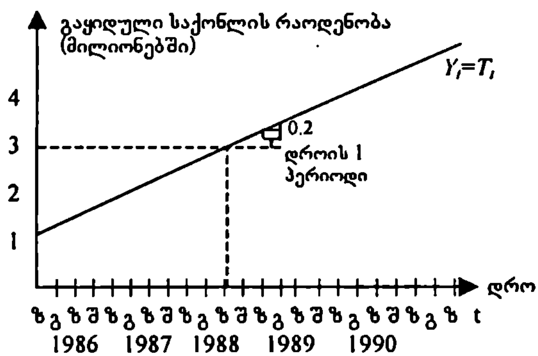
$$Y_t = T_t+C_t+S_t+R_t ,$$

ანდა მულტიპლიკაციური მოდელი, რომლის ფარგლებშიც Y_t-ს გენერირება ხდება კომპონენტების გადამრავლებით

$$Y_t = T_t\times C_t\times S_t\times R_t .$$

მულტიპლიკაციური მოდელი განსაკუთრებით მოსახერხებელია დროითი მწკრივის ანალიზისათვის, მისი კომპონენტებად დაშლისათვის და შემდგომში ჩვენი განხილვა შეეხება მხოლოდ ამ მოდელს.

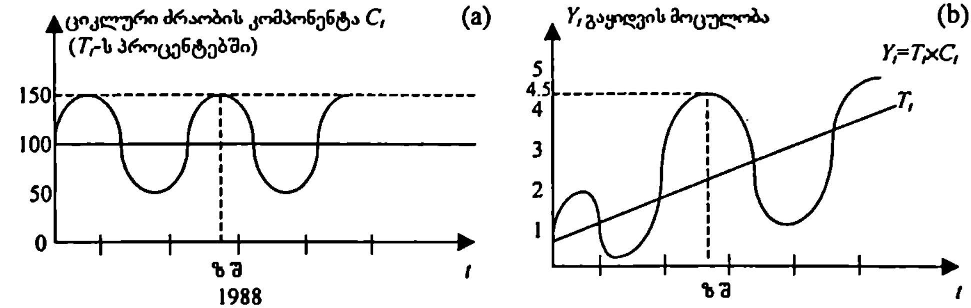
ავხსნათ ეს მოდელი ხელოვნური დროითი მწკრივის აგებით იმ პირობით, რომ მისი კომპონენტები მოცემულია. მილიონებში გამოხატული პირობითი საცალო საქონლის გაყიდვის მოცულობისათვის.



ნახ. 19.6. ტრენდის ხაზი (გზშზ – გაზაფხული, ზაფხული, შემოდგომა, ზამთარი)

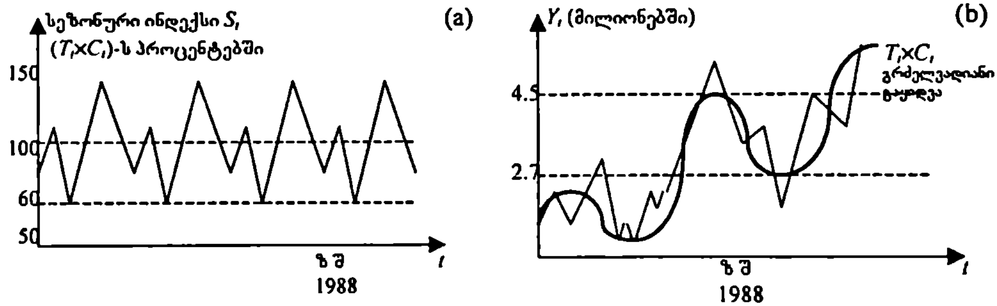
პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ტრენდის ხაზი წრფეა (წრფივი ტრენდი). ეს წრფე მიგვითითებს, რომ 1986 წლის I კვარტლის დასაწყისში გაყიდული საქონლის რაოდენობა იყო 1 მილიონი და ყოველ მომდევნო კვარტალში გაყიდული საქონლის რაოდენობა იზრდებოდა 0.2 მილიონით და 1988 წლის ზაფხულისათვის გაიზარდა 3 მილიონამდე.

ახლა განვიხილოთ ციკლური ძრაობის C_t-ს ზემოქმედება (გავლენა) დროით მწკრივზე. ეს კომპონენტა აღწერს პროდუქციის გაყიდვის მოცულობის რხევას ტრენდის ხაზის მიმართ აწევას კარგ წლებში და დაწევას უარეს წლებში. ციკლურ ეფექტს გამოვხატავთ ტრენდის პროცენტებში. მაგალითად C_t=150% ნიშნავს, რომ $Y_t=T_t\times1.5$, C_t=50% იმას, რომ $Y_t=T_t\times0.5$, ხოლო C_t=100% ნიშნავს, რომ დროითი მწკრივის მნიშვნელობა ემთხვევა ტრენდის მნიშვნელობას $Y_t=T_t$ (შევნიშნოთ, რომ ამ ნაბიჯზე იგულისხმება, რომ დროითი მწკრივი მხოლოდ ამ ორი კომპონენტისაგან შედგება).



ნახ. 19.7. (a) ციკლური კომპონენტა და (b) ტრენდისა და ციკლური კომპონენტის კომბინაცია 1988 წლის ზაფხულისათვის C_t=150%, T_t=3 (მილიონი), Y_t=3×1.5=4.5

ახლა გავითვალისწინოთ სეზონური ეფექტი. სეზონური ეფექტი არის ტალღისებური ძრაობა ტრენდისა და ციკლური კომპონენტის კომბინირებით მიღებული დონის მიმართ. გაყიდვის მოცულობა ამ დონის ზევითაა აქტიური სეზონის განმავლობაში და ეშვება ამ დონეზე დაბლა პასიური სეზონის პერიოდში. თუ ფორმალურად ტრენდისა და ციკლური კომპონენტის კომბინირებით მიღებულ დონეს ვუწოდებთ „ნორმალურს“, მაშინ სეზონური ეფექტი გამოისახება „ნორმალური“ დონის პროცენტებში და მას ეწოდება სეზონური ინდექსი S_t. მაგალითად, S_t=60% ნიშნავს $Y_t=T_t\times C_t\times0.6$ და ა.შ.



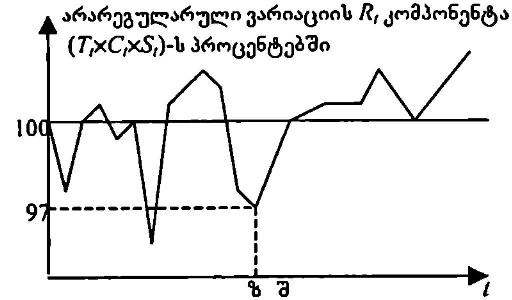
$T_t\times C_t$=3×1.5=4.5, $T_t\times C_t\times S_t$=3×1.5×0.6=2.7

ნახ. 19.8. (a) სეზონური ინდექსი ხელოვნური დროითი მწკრივისათვის
(b) კომბინირებული ტრენდი, ციკლური და სეზონური კომპონენტები

ჩვენ დაგვრჩა მეოთხე – შემთხვევითი ანუ არარეგულარული კომპონენტის ჩართვა ხელოვნური დროითი მწკრივის კომბინირების პროცესში. თუ კვლავ „ნორმალურ“ დონედ ჩავთვლით წინა ეტაპზე აგებულ დროით მწკრივს, მაშინ არარეგულარული

კომპონენტა R_t გამოისახება ამ დონის პროცენტებში. ერთ-ერთი შესაძლო რეალიზაცია ასეთი კომპონენტისა მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე. მაგალითად, თუ R_t=97%, გვექნება $Y_t=T_t \times C_t \times S_t \times 0.97$, R_t=50% ნიშნავს, რომ $Y_t=T_t \times C_t \times S_t \times 0.5$. მაგალითად, 1988 წლის ზაფხულისათვის T_t=3, C_t=150%, S_t=60%, R_t=97%. ამიტომ:

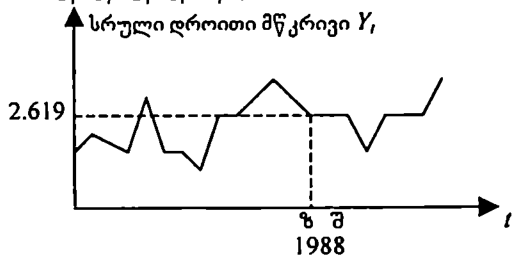
$$Y_t = 3 \times 1.5 \times 0.6 \times 0.97 = 2.619.$$



ნახ. 19.9. არარეგულარული (შემთხვევითი) ფლუქტუაციის კომპონენტა

საბოლოოდ, სრულ დროით მწკრივს ექნება შემდეგი სახე:

$$Y_t=T_t \times C_t \times S_t \times R_t=3 \times 1.5 \times 0.6 \times 0.97=2.619$$



ნახ. 19.10. პირობითი საქონლის გაყიდვის მოცულობის სრული ხელოვნურად კომბინირებული დროითი მწკრივი

პრაქტიკაში საქმე გვაქვს შებრუნებულ ამოცანასთან. ჩვენი მიზანია არა დროითი მწკრივის აგება მისი შემადგენელი ნაწილების მიხედვით, არამედ დროითი მწკრივიდან მისი კომპონენტების გამოყოფა და ამის საფუძველზე პროგნოზირების ტექნიკის დამუშავება.

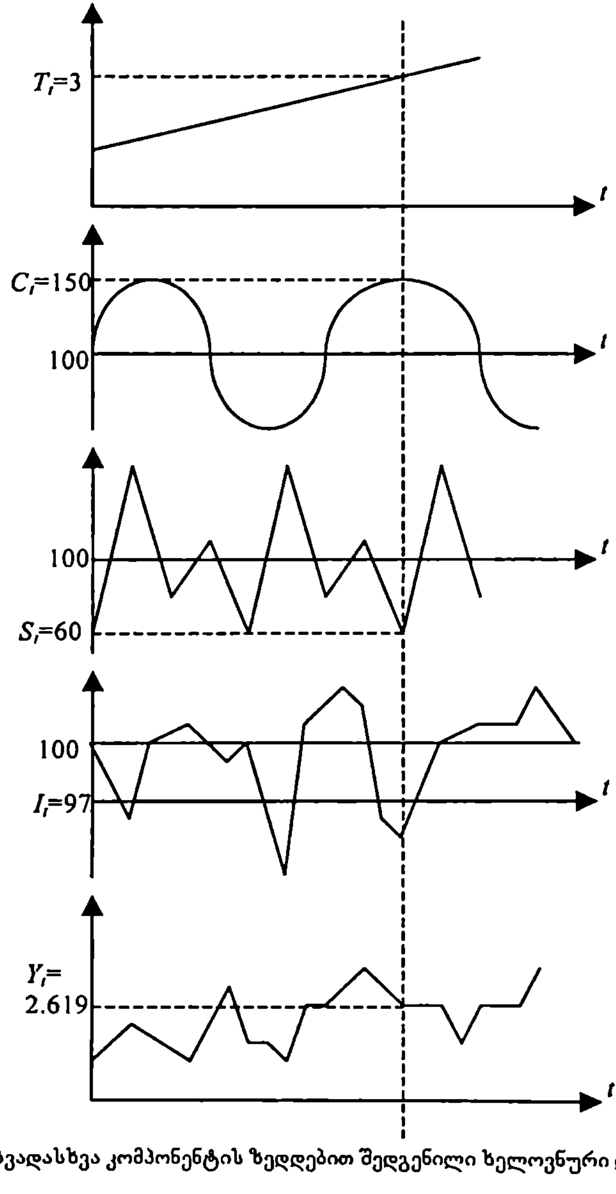
უნდა აღვნიშნოთ, რომ მულტიპლიკაციური ურთიერთკავშირი (მულტიპლიკაციური მოდელი) შეიძლება ზედმეტად გამარტივებული აღმოჩნდეს. დროითი მწკრივის ზოგიერთი მოდელი, გარდა ზევით აღწერილი ოთხი კომპონენტისა, შეიცავს დამატებით ფაქტორებს. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ Y_t დამოკიდებულია მის წარსულ მნიშვნელობებზეც, სახელდობრ Y_{t-1}-ზე.

ზოგიერთი მოდელი, რომელიც გამოიყენება დროითი მწკრივების ანალიზისათვის, დროითი მწკრივის ყოფაქცევას ხსნის მხოლოდ მის წარსულ მნიშვნელობებზე დაყრდნობით, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მისი წარსული ყოფაქცევით,

ციკლური და სეზონური კომპონენტების გამოყოფის გარეშე. ამ ტიპის მოდელებს ჩვენ აღვწერთ მოგვიანებით.

ამ ნაწილში კი ყურადღებას შევაჩერებთ მულტიპლიკაციურ მოდელზე და მის საფუძველზე ჩავატარებთ დროითი მწკრივის ანალიზს.

შევაჯამოთ, გრაფიკულად, დროითი მწკრივის მულტიპლიკაციური მოდელის ანალიზის შედეგები.



ნახ. 19.11. სხვადასხვა კომპონენტის ზედდებით შედგენილი ხელოვნური დროითი მწკრივი

§ 3. დროითი მწკრივის ანალიზი კლასიკურ მოდელზე დაყრდნობით

ტრენდის ანალიზის მიზანია ისეთი წირის (ტრენდის მრუდის) შერჩევა, რომელიც ადეკვატურად ასახავს დროითი მწკრივის ძრაობის ძირითად ტენდენციას დროის ხანგრძლივ პერიოდში (დროის საკმაოდ გრძელ ინტერვალში). ტრენდის კომპონენტა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია პროგნოზირებისათვის.

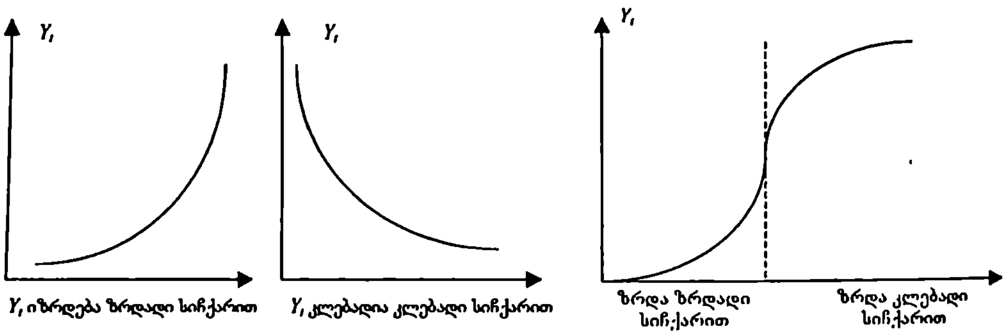
ტრენდი შეიძლება იყოს წრფივი ან არაწრფივი, მაგალითად პოლინომური, ლოგარითმული, ექსპონენციალური და სხვა. ტრენდის გამოყოფა ძირითადად რეგრესიული ანალიზის მეთოდებით ხდება. დროითი მწკრივის შემთხვევაში გაბნევის დიაგრამის როლს ასრულებს დროითი მწკრივის გრაფიკული გამოსახულება, რომელიც გვიქმნის საწყის წარმოდგენას, იმის თაობაზე თუ რა ტიპის მოდელი უნდა გამოვიყენოთ.

გრძელვადიანი ტრენდის წრფივი მოდელი. თუ ჩვენ ვვარაუდობთ რომ გრძელვადიანი ტრენდი წრფივია, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, იგი დროში მუდმივი სიჩქარით იცვლება, უნდა გამოვიყენოთ მოდელი

$$Y_t = \beta_0+\beta_1 t+\varepsilon_t,$$

სადაც ε_t შემთხვევითი ხმაურია. ცხადია, რომ დროის ერთეულში ტრენდის ცვლილების სიდიდე β_1-ის ტოლია.

ხშირ შემთხვევაში დაშვება, რომ ტრენდის ცვლილების სიჩქარე მუდმივია, არარეალურია. თუ დავაკვირდებით, დროითი მწკრივის რეალიზაციებს, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ არაწრფივი მოდელები უფრო მოსახერხებელია. ეს ნიშნავს, რომ დროითი მწკრივის ცვლილების სიჩქარე დროში ცვალებადია. კერძოდ, თავად სიჩქარე შეიძლება აღმოჩნდეს ზრდადი ან კლებადი, ანდა დროის რაღაც მომენტში ზრდადი სიჩქარე შეიცვალოს კლებადი სიჩქარით. ქვემოთ მოყვანილი ნახაზები აღწერს ამ სიტუაციებს.

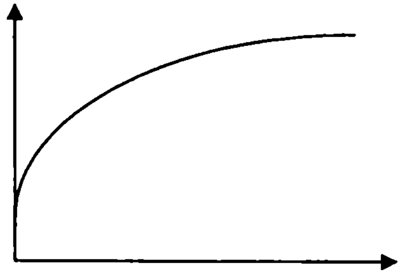


ნახ. 19.12.

არაწრფივი ტრენდები შეიძლება აღიწეროს პოლინომური, ლოგარითმული და სხვა არაწრფივი მოდელებით.

პოლინომური მოდელი. პოლინომური მოდელები აღიწერება რაიმე რიგის პოლინომების მეშვეობით: Y_t გამოისახება t ცვლადის რაიმე $p>1$ რიგის პოლინომით. მოვიყვანოთ $p=2$ შემთხვევის მაგალითი:

$$Y_t = \beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\varepsilon_t;$$



ნახ. 19.13. პოლინომური მოდელი

ᲒᲠᲫᲔᲚᲕᲐᲓᲘᲐᲜᲘ ᲢᲠᲔᲜᲓᲘᲡ ᲚᲝᲒᲐᲠᲘᲗᲛᲣᲚᲘ ᲛᲝᲓᲔᲚᲘ. ლოგარითმული ანუ ექსპონენციალური მოდელი გამოიყენება ისეთი დროითი მწკრივის აღსაწერად, რომელიც ავლენს ექსპონენციალურ ზრდას (ან კლებას).

$$Y_t = \beta_0(\beta_1)^t\,\varepsilon_t, \qquad \text{ან} \qquad Y_t = \beta_0(\beta_1)^{-t}\,\varepsilon_t,$$

სადაც β_1 ყოველთვის დადებითია, ამასთან პირველი მოდელი შეესაბამება ექსპონენციალურ ზრდას, მეორე კი – კლებას.

ᲢᲠᲔᲜᲓᲘᲡ ᲒᲐᲛᲝᲧᲝᲤᲐ ᲣᲛᲪᲘᲠᲔᲡ ᲙᲕᲐᲓᲠᲐᲢᲗᲐ ᲛᲔᲗᲝᲓᲘᲗ. ტრენდის ანალიზი ანუ ტრენდის გამოყოფა შესაძლებელია რეგრესიული ანალიზის მეთოდების გამოყენებით. ამ შემთხვევაში, დამოუკიდებელ ცვლადად ჩაითვლება დროითი ცვლადი, ხოლო დამოკიდებულ ცვლადად კი – t-ურ მომენტში დროითი მწკრივის მნიშვნელობა.

რეგრესიული ანალიზისადმი მიძღვნილ თავებში განხილული შემთხვევებისაგან განსხვავებით, დროითი მწკრივების ანალიზი რეგრესიული ანალიზის მეთოდების გამოყენებით გარკვეულად შემოფარგლულია. ეს განპირობებულია იმით, რომ დაშვებები, რომლებიც გამოიყენება რეგრესიულ ანალიზში სტატისტიკური დასკვნების მისაღებად, დროითი მწკრივების შემთხვევაში ხშირად არ სრულდება. შეგახსენებთ რომ ეს დაშვებებია: შეცდომების, ε_t-ების, დამოუკიდებლობა, ნორმალურობა და ჰომოსკედატურობა. ამრიგად, დასკვნების სტატისტიკური საიმედოობის შეფასება ხშირად არ ხერხდება.

როგორც წრფივი, ასევე პოლინომური ტრენდის განსაზღვრა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით (ანუ რაც იგივეა, რეგრესიის განტოლების კოეფიციენტების განსაზღვრა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით) სავსებით იდენტურია აღნიშნულ თავში მოყვანილი მეთოდებისა, ისევე, როგორც შესაბამისი სტატისტიკური დასკვნების გაკეთება, იმ შემთხვევაში, როდესაც რეგრესიული ანალიზის დაშვებები სრულდება.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ლოგარითმული ანუ ექსპონენციალური მოდელის შემთხვევა:

$$Y_t = \beta_0(\beta_1)^t\,\varepsilon_t,$$

რომელიც ადვილად დაიყვანება ისეთ ფორმამდე, რომელიც მოგვცემს რეგრესიული ანალიზის გამოყენების შესაძლებლობას. ეს დაყვანა ხდება გალოგარითმებით.

$$\log Y_t = \log\beta_0+(\log\beta_1)t+\log\varepsilon_t,$$

ბოლო განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს რეგრესიული ანალიზისათვის უფრო მოსახერხებელი ფორმით

$$Y_t' = \beta_0' + \beta_1' t + \varepsilon_t', \qquad t=0,1,2,...,n.$$

ამ განტოლებიდან უკვე ადვილად განისაზღვრება რეგრესიის კოეფიციენტები

$$\hat{\beta}_1' = \frac{\sum_{t=1}^{n} tY_t' - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} Y_t'}{\sum_{t=1}^{n} t^2 - n\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}, \qquad \hat{\beta}_0' = \overline{Y'} - \left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} t\right)\hat{\beta}_1'.$$

ტრენდის განსაზღვრის მაგალითები სხვადასხვა ტიპის მონაცემები-სათვის.

წრფივი ტრენდი. წრფივი ტრენდის განსაზღვრა 19.3 ცხრილში მოყვანილი აშშ-ში დასაქმებულ პირთა რაოდენობის მაგალითზე გვაქვს

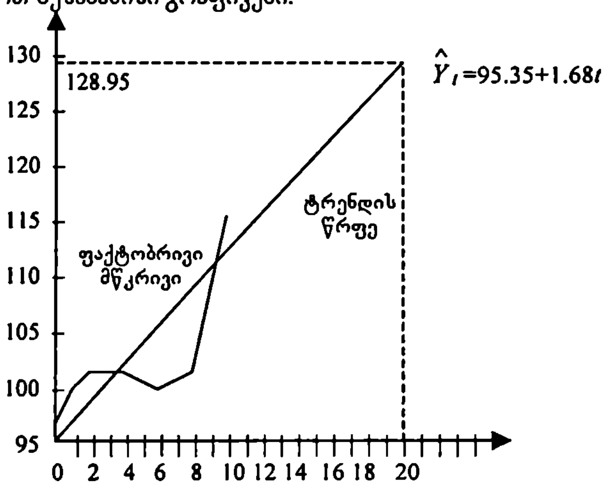
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t;$$

$$\hat{\beta}_1 = 1.68, \qquad \hat{\beta}_0 = 95.35.$$

ამრიგად, წრფივი რეგრესიის განტოლება, მიღებული უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ასე გამოიყურება

$$\hat{Y}_t = 95.35 + 1.68t.$$

მოვიყვანოთ შესაბამისი გრაფიკები.



ნახ. 19.14. ცხრილი 19.2-ის მონაცემების შესაბამისი გრაფიკი და წრფივი ტრენდი

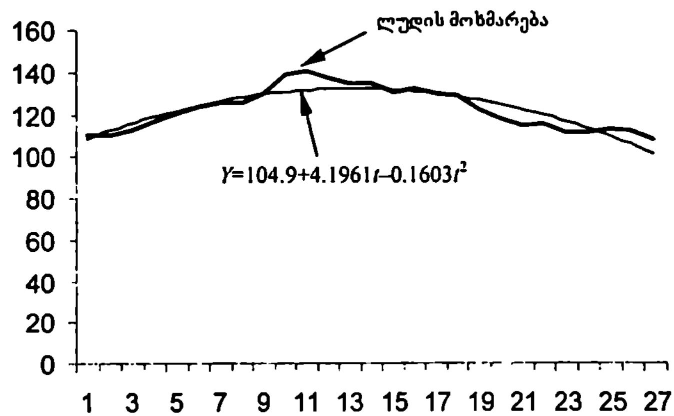
პოლინომური ტრენდი. ვთქვათ ერთ სულ მოსახლეზე ლუდის წლიური მოხმარება (გამოსახული ლიტრებში) მოიცემა შემდეგი ცხრილით:

ცხრილი 19.5

წელი	t	ლუდის წლიური მოხმარება (ლიტრობით) 1 სულ მოსახლეზე (Y_t)	წელი	t	ლუდის წლიური მოხმარება (ლიტრობით) 1 სულ მოსახლეზე (Y_t)
1965	1	110.3	1979	15	130.8
1966	2	110.4	1980	16	132.3
1967	3	113.1	1981	17	129.3
1968	4	116.9	1982	18	128.6
1969	5	120.5	1983	19	121.7
1970	6	123.7	1984	20	117.8
1971	7	125.8	1985	21	114.5
1972	8	125.7	1986	22	115.5
1973	9	129.5	1987	23	111.3
1974	10	138.9	1988	24	110.8
1975	11	140.4	1989	25	113.1
1976	12	137.4	1990	26	111.6
1977	13	135.0	1991	27	108.2
1978	14	134.5			

ამ ცხრილის შესაბამისი გრაფიკი მიგვეითითებს (იხ. ნახ. 19.15), რომ გრძელვადიან ტრენდს კარგად აღწერს მეორე რიგის ანუ კვადრატული მოდელი

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t \,;$$



ნახ. 19.15. ცხრილი 19.5-ის მონაცემების შესაბამისი გრაფიკი და პოლინომური ტრენდის მრუდი

წინა თავებში მოცემული ფორმულების საფუძველზე (ანდა კომპიუტერული პროგრამების რომელიმე პაკეტის გამოყენებით) ადვილი გამოსათვლელია, რომ

$$\hat{\beta}_0 = 104.90, \quad \hat{\beta}_1 = 4.1961, \quad \hat{\beta}_2 = -0.1603$$

და (R^2,F,t) სტატისტიკას საფუძველზე შეიძლება იმის დასკვნა, რომ პოლინომური მოდელი კარგ თანხმობაშია მონაცემებთან და ამრიგად, რეგრესიის განტოლებაა

$$\hat{Y}_t = 104.90 + 4.1961t - 0.1603t^2.$$

რეგრესიის მიღებული განტოლება შეიძლება გამოვიყენოთ პროგნოზირების მიზნით (ისევე, როგორც რეგრესიულ ანალიზში). მაგალითად, თუ გვინდა განვსაზღვროთ, როგორი იქნება ლუდის მოხმარება 1992 წლისათვის (t=28) უნდა გამოვთვალოთ

$$\hat{Y}_t = 104.90 + 4.1961 \cdot 28 - 0.16 \cdot (28)^2 = 96.75.$$

რეალური მოხმარება 1992 წელს კი იყო 101.9 ლიტრი.

ლოგარითმული ანუ ექსპონენციალური ტრენდი. განვიხილოთ ცხრილი, რომელიც ასახავს აშშ-ში ავია-ხაზებით მოგზაურთა რიცხვს 1964—1987 წლებში.

ცხრილი 19.6. ავიამგზავრთა წლიური რაოდენობა 1964—1987 წლებში.

წელი	t	ავიამგზავრთა რაოდენობა (მილიონებში)	წელი	t	ავიამგზავრთა რაოდენობა (მილიონებში)
1964	0	60.5	1976	12	160.5
1965	1	69.9	1977	13	172.2
1966	2	79.4	1978	14	196.1
1967	3	97.2	1979	15	211.6
1968	4	118.8	1980	16	222.0
1969	5	126.3	1981	17	205.4
1970	6	122.9	1982	18	208.4
1971	7	124.3	1983	19	223.7
1972	8	136.6	1984	20	242.4
1973	9	144.8	1985	21	268.4
1974	10	148.0	1986	22	300.9
1975	11	147.4	1987	23	394.2

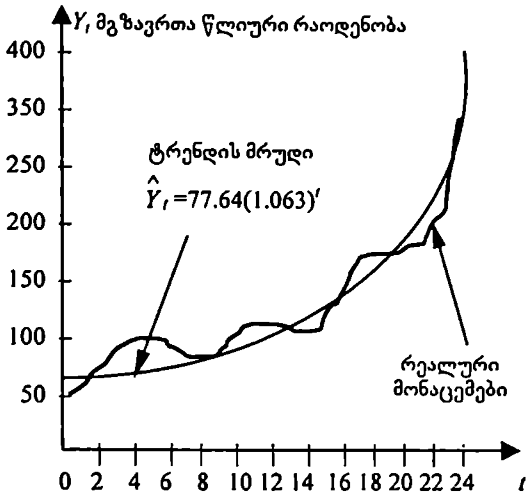
უშუალო გამოთვლებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ

$$\hat{\beta}_0 = 77.64, \qquad \hat{\beta}_1 = 1.063.$$

და ამრიგად

$$\hat{Y}_t = 77.64(1.063)^t.$$

მიღებული ტრენდის მრუდი და რეალური მონაცემების ამსახველი გრაფიკი მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე.



ნახ. 19.16. ექსპონენციალური ტრენდი და რეალური მრუდი ავიამგზავრთა რაოდენობისათვის

ციკლური ეფექტის შეფასება. ფუნდამენტური განსხვავება ციკლურ ეფექტსა და სეზონურ ვარიაციებს შორის მდგომარეობს განსახილავი დროითი პერიოდის სიგრძეში. როგორც უკვე ვახსენეთ, ციკლური ვარიაციების პერიოდი 1 წელიწადზე მეტია, მაშინ როცა სეზონური ვარიაციების პერიოდები 1 წელზე ნაკლებია. გარდა ამისა, სეზონური ეფექტები ადვილად პროგნოზირდება, ხოლო ციკლური ვარიაციები (კარგად ცნობილი საქმიანი და ეკონომიკური ციკლების გამოკლებით) არ ექვემდებარება პროგნოზირებას. მიუხედავად ამისა, ციკლების იზოლირება შესაძლებელია.

ჩვენ აღვწერთ პროცედურას, რომელიც გამოიყენება ციკლური ეფექტების საიდენტიფიკაციოდ და ეს პროცედურა შედგება სამი ეტაპისაგან და აღიწერება შემდეგნაირად:

1. რეგრესიული ანალიზის მეშვეობით განისაზღვრება ტრენდის მრუდი;
2. დროის ყოველი t პერიოდისათვის გამოითვლება ტრენდის მნიშვნელობა $\hat{Y}_t$;
3. ტრენდის პროცენტული ფარდობა არის სიდიდე $(Y_t / \hat{Y}_t) \cdot 100$.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი. ექსპორტის სიდიდე ყოველი ქვეყნისათვის ერთ-ერთი ძირითადი ეკონომიკური მაჩვენებელია. შემდეგი ცხრილით მოცემულია ავსტრალიის ექსპორტის მოცულობა (მილიონ დოლარებში) 20 ფინანსური წლის მანძილზე 1973–1992 წლებში.

ვიგულისხმოთ, რომ ტრენდი წრფივია და გამოვთვალოთ ტრენდის პროცენტული ფარდობა ყოველი წლისათვის.

ტრენდისა და ტრენდის პროცენტული ფარდობის გამოსათვლელად შეიძლება გამოყენებული იქნას ნებისმიერი სტანდარტული სტატისტიკური პაკეტი.

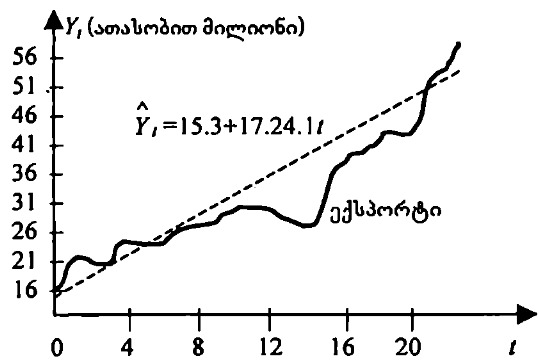
ცხრილი 19.7. ავსტრალიის ექსპორტი 1973–1992 წლებში. ტრენდი და ტრენდის პროცენტული ფარდობა.

წელი	t	ექსპორტი ($ მილიონებში)	ტრენდი $\hat{Y}_t$	პროცენტული ფარდობა $(Y_t/\hat{Y}_t)\cdot 100$
1973	1	20 040	17 024.10	129.4635
1974	2	20 686	18 748.22	110.3358
1975	3	22 600	20 272.33	110.3929
1976	4	23 468		
1977	5	25 070		და ა.შ.
1978	6	27 225		
1979	7	28 135		
1980	8	28 216		
1981	9	30 606		
1982	10	35 275		
1983	11	36 735		
1984	12	40 460		
1985	13	43 670		
1986	14	43 966		
1987	15	40 469		
1988	16	43 670		
1989	17	43 966		
1990	18	47 063		
1991	19	52 608		
1992	20	57 510		

ვთქვათ, საჭირო გამოთვლები უკვე ჩატარებულია და მივიღეთ, რომ

$$\hat{Y}_t = 15300 + 1724.1\ t.$$

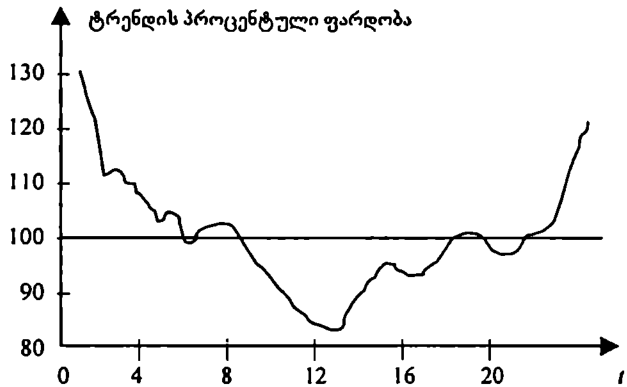
ნახაზი, რომელიც ქვემოთაა მოცემული, ასახავს რეალური მონაცემებისა და ტრენდის წრფის გრაფიკებს.



ნახ. 19.17. რეალური დროითი მწკრივი და ტრენდის წრფე

პრობლემა, მდგომარეობს იმაში, რომ შევძლოთ შემთხვევითი ვარიაციებისა და ციკლური მოძრაობის ერთმანეთისაგან გარჩევა. თუ აღმოჩნდა, რომ პროცენტული ფარდობის 100%-ის ზემოთ და ქვემოთ მოქცევა ატარებს შემთხვევით ხასიათს, მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მისი გამომწვევი მიზეზი შემთხვევითობაა და არა ციკლურობა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როდესაც ეს დაჯგუფება რეგულარულია, ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ადგილი აქვს ციკლიურობას.

ჩავატაროთ ასეთი ხასიათის კვლევა მოყვანილი მაგალითისათვის. ამ მიზნით ავაგოთ ტრენდის პროცენტული ფარდობის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი



ნახ. 19.18. ტრენდის პროცენტული ფარდობა

ამ ნახაზზე დაიკვირვება საკმაოდ არარეგულარული ხასიათის ციკლური ვარიაციები თუმცა ხშირად ციკლური ვარიაციების არსებობა ეჭვს არ იწვევს, მაგრამ ციკლური ვარიაციები მეტისმეტად არარეგულარული ხასიათისაა და წარმოქმნის სიძნელეებს პროგნოზირების ამოცანებში. ეს სიძნელეები დაკავშირებულია პროგნოზის სიზუსტესთან. არსებობს ასეთი ტიპის პროცესების პროგნოზირების მეთოდები, რომლებიც კარგადაა განვითარებული, მაგრამ რომელთა შესწავლა არ წარმოადგენს ჩვენს ამოცანას, რადგანაც მოითხოვს საკმაოდ რთული ტექნიკის ფლობას. ჩვენ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ ციკლური ეფექტების აღმოჩენითა და შეფასებით.

გაგლუვების ტექნიკა. მცოცავი საშუალო. შემთხვევითი ანუ არარეგულარული კომპონენტის არსებობა დროით მწკრივში ხშირად ფარავს სხვა კომპონენტებს, რაც აძნელებს მათ ანალიზს. შემთხვევითი კომპონენტის გამორიცხვის ერთ-ერთი ყველაზე მარტივი გზა არის დროითი მწკრივის გაგლუვება.

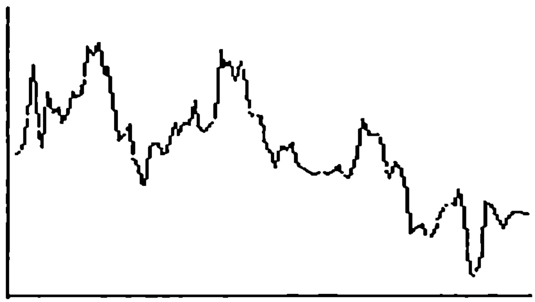
ჩვენ მოვიყვანთ დროითი მწკრივის გაგლუვების ერთ მეთოდს: მცოცავი საშუალოს მეთოდს.

გაგლუვების ტექნიკა. ტრენდის ცნებაში ჩადებულია ის არსებითი გარემოება, რომ საკმაოდ გრძელი დროის ინტერვალში განხილული ძრაობა წარმოგვიდგება გაგლუვებულად. ეს იმას ნიშნავს, რომ ტრენდის შესაბამისი კომპონენტა შეიძლება წარმოდგენილი იქნას რაიმე პოლინომის სახით:

$$y_t = a_0 + a_1 t + \cdots + a_p t^p.$$

თუ პოლინომის რიგს p-ს საკმაოდ დიდს ავიღებთ, მივიღებთ დროითი მწკრივის წარმოდგენას ისეთი სიზუსტით, როგორც ჩვენ გვსურს.

საკმაოდ არარეგულარული დროითი მწკრივების გაგლუვებას (მაგალითად, როგორიცაა ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილი დროითი მწკრივი) ესაჭიროება ძალიან მაღალი რიგის პოლინომი ან პოლინომზე უფრო რთული ფუნქცია.



ნახ. 19.19. ტრენდის პროცენტული ფარდობა

მარტივი მცოცავი საშუალო. მარტივი მცოცავი საშუალოს აგება ნიშნავს შემდეგს: აიღება დროითი მწკრივის პირველი m წევრი ($Y_1,\ldots,Y_m$) (ვთქვათ, m კენტია), გამოითვლება მათი არითმეტიკული საშუალო და ეს მნიშვნელობა მიეწერება განხილული დროის მონაკვეთის შუა წერტილს, $\frac{m+1}{2}$-ს. შემდეგ აიღება ($Y_2,\ldots,Y_{m+1}$) წევრები, გამოითვლება მათი არითმეტიკული საშუალო, რომლის მნიშვნელობა მიეწერება დროის ამ მონაკვეთის შუა წერტილს $\frac{m+3}{2}$-ს. ეს პროცედურა გაგრძელდება დროითი მწკრივის სრულ ამოწურვამდე. მაგალითად, თუ m=3 (3 პერიოდიანი მცოცავი საშუალო), გამოითვლება

$$\frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3} Y_i = \frac{1}{3}(Y_1+Y_2+Y_3),$$

გამოთვლილი მნიშვნელობა მიეწერება t=2 წერტილს. შემდეგ აიღება Y_2, Y_3, Y_4, გამოითვლება

$$\frac{1}{3}(Y_2+Y_3+Y_4)$$

და შესაბამისი მნიშვნელობა მიეწერება t=3 წერტილს და ა.შ. სანამ დროითი მწკრივი არ ამოიწურება.

ცხადია, რომ რაც უფრო მოკლე პერიოდიან მცოცავ საშუალოს ავაგებთ, მით უფრო მცირეა გაგლუვების ხარისხი და პირიქით. ე.ი. რაც უფრო დიდია m, მით უფრო მაღალია დროითი მწკრივის გაგლუვების ხარისხი. ეს აიხსნება იმით, რომ შესაკრებთა დიდი რაოდენობის არითმეტიკულ საშუალოს აღება აქრობს დროითი მწკრივის ცალკეული წევრის გავლენას.

მოვიყვანოთ რიცხვითი მაგალითი. ქვემოთ მოყვანილი ცხრილი ასახავს გაყიდული ბენზინის რაოდენობას, გამოსახულს ლიტრებში, კვარტალების მიხედვით 1989–1992 წლებში.

ცხრილი 19.8. ბენზინის კვარტალური გაყიდვა 1989–1992 წლებში

t	წელი	კვარტალი	გაყიდ. ბენზ. რაოდენობა (10000 ლ)	3-კვარტ მცოც. საშ	5-კვარტ მცოც. საშ
1	1989	1	30	–	–
2		2	37	45.7	–
3		3	61	52.0	42.6
4		4	58	45.7	46.0
5	1990	1	18	44.0	55.0
6		2	56	52.0	48.2
7		3	82	55.0	44.8
8		4	27	50.0	55.0
9	1991	1	41	45.7	53.6
10		2	69	53.0	50.4
11		3	49	61.3	55.8
12		4	66	56.3	56.0
13	1992	1	54	54.0	60.2
14		2	42	62.0	63.6
15		3	90	66.0	–
16		4	66	–	–

3-კვარტლიანი (3-პერიოდიანი) მცოცავი საშუალოს გამოთვლა. აიღება პირველი სამი წევრის არითმეტიკული საშუალო,

$$\frac{30+37+61}{3}=45.7$$

ეს მნიშვნელობა მიეწერება t=2 წერტილს; ითვლება მე-2, მე-3 და მე-4 წევრების საშუალო

$$\frac{37+61+58}{3}=52.0$$

და მიეწერება t=3 წერტილს და ა.შ.

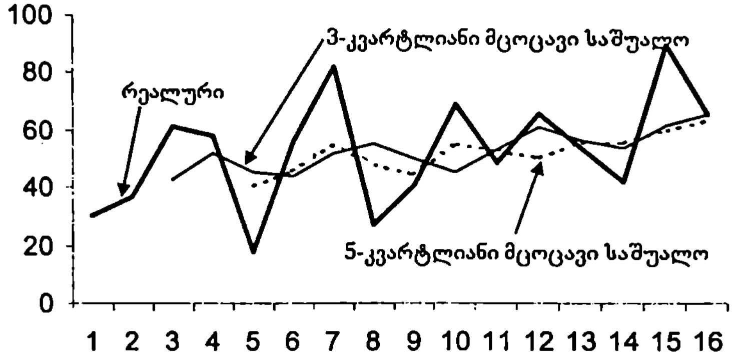
5-კვარტლიანი მცოცავი საშუალოს გამოთვლა:

$$\frac{30+37+61+58+18}{5}=42.6,$$

რაც მიეწერება t=3 წერტილს, ხოლო

$$\frac{37+61+58+18+56}{5}=46.2$$

მიეწერება t=4 წერტილს და ა.შ.



ნახ. 19.20. რეალური დროითი მწკრივი, 3 და 5-კვარტლიანი მცოცავი საშუალოები

ცენტრირებული მცოცავი საშუალოები. თუ m ლუწია, მაგალითად, m=4, მაშინ ჯერ გამოითვლება პირველი 4 წევრის არითმეტიკული საშუალო, შემდეგ დაწყებული მეორე წევრიდან, მომდევნო 4 წევრის არითმეტიკული საშუალო და ა.შ. პირველი მათგანი მიეწერება t=2 და t=3-ს შორის წერტილს, მეორე t=3 და t=4-ს შორის და ა.შ. ეს წარმოქმნის მრავალ პრობლემას, რომელიც შეიცავს გრაფიკული გამოსახვის სირთულესაც. ცენტრირებული მცოცავი საშუალო იძლევა ამ პრობლემის კორექტირების საშუალებას. t=3-ს მიეწერება პირველი ორი საშუალოს არითმეტიკული საშუალო, t=4 შემდგომი ორის არითმეტიკული საშუალო და ა.შ.

თუ, მაგალითად n=4, მაშინ მნიშვნელობა

$$\frac{1}{4}(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)$$

მიეწერება t=2 და t=3-ს შორის მდებარე წერტილს, მნიშვნელობა

$$\frac{1}{4}(Y_2+Y_3+Y_4+Y_5)$$

მიეწერება t=3 და t=4-ს შორის მდებარე წერილს, მნიშვნელობა

$$\frac{1}{4}(Y_3+Y_4+Y_5+Y_6)$$

t=4 და t=5-ს წერტილებს შორის და ა.შ. ცენტრირებული საშუალო კი t=3-სათვის იქნება

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)+\frac{1}{4}(Y_2+Y_3+Y_4+Y_5)\right)$$

t=4-თვის

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(Y_2+Y_3+Y_4+Y_5)+\frac{1}{4}(Y_3+Y_4+Y_5+Y_6)\right)$$

და ა.შ.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი 20.4 ცხრილში მოყვანილი მონაცემებისათვის

ცხრილი 19.9. ცენტრირებული მცოცავი საშუალო.

t	დროითი მწკრივი Y_t	4-პერიოდიანი მცოცავი საშუალო	4-პერიოდიანი ცენტრირებული მცოცავი საშუალო
1	15	–	–
2	27	–	–
3	20	19	–
4	14	21	20
5	25	17	19
6	11	–	–

გამოვთვალოთ 4-პერიოდიანი ცენტრირებული საშუალო ზემომოყვანილი წესის მიხედვით t=3 წერტილში. მნიშვნელობის მოსაძებნად უნდა გამოითვალოს შემდეგი სიდიდეები:

$$\tfrac{1}{4}\,(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4) = \tfrac{1}{4}\,(183+167+158+182) = 172.5;$$

$$\tfrac{1}{4}\,(Y_2+Y_3+Y_4+Y_5) = \tfrac{1}{4}\,(167+158+182+138) = 161.25;$$

$$\frac{172.5+161.25}{2} = 166.87.$$

მცოცავი საშუალოს მნიშვნელობა t=3 წერტილში (t=3 შეესაბამება 92 წელს) 166.87-ის ტოლია.

t=4 მიეწერება მნიშვნელობა:

$$\tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{4}\,(\,Y_2+Y_3+Y_4+Y_5)+\tfrac{1}{4}\,(Y_3+Y_4+Y_5+Y_6)) = \frac{161.25+166.87}{2} = 164.06$$

და პროცედურა გრძელდება დროითი მწკრივის სრულ ამოწურვამდე.

ცენტრირებული საშუალოს გამოთვლა მოითხოვს დამატებით გამოკვლევებს. ამიტომ ირჩევენ პერიოდთა კენტ რაოდენობას. მაგრამ, ზოგიერთ შემთხვევაში საჭიროა მცოცავი საშუალოების გამოთვლა მაშინაც, როდესაც პერიოდების რაოდენობა, m ლუწია.

ექსპონენციალური გაგლუვება. დროითი მწკრივების გაგლუვების მცოცავი საშუალოების მეთოდს ორი სერიოზული ნაკლი გააჩნია. პირველი მათგანი ისაა, რომ დროის პერიოდებს მწკრივის თავსა და ბოლოში არ მიეწერება მნიშვნელობები. მაგალითად, 7-პერიოდიანი მცოცავი საშუალოს შემთხვევაში ვერ მივაწერთ მნიშვნელობებს t=1, 2, 3 და 4, t=(n–2), (n–1), n დროის მომენტებს, თუ დროითი მწკრივი შედგება n წევრისაგან. როდესაც n მცირეა, ეს ინფორმაციის მნიშვნელოვან დანაკარგს იძლევა. მეორე ნაკლი კი ისაა, რომ მცოცავი საშუალო „ივიწყებს“ დროითი მწკრივის წინა წევრების უმეტესობას. მაგალითად, 5-პერიოდიანი მცოცავი საშუალოს მნიშვნელობაზე t=4 მომენტში გავლენას ახდენს მწკრივის მე-2,3,4,5 და 6-ე წევრები, მაგრამ არ ახდენს გავლენას დროითი მწკრივის მნიშვნელობა t=1 მომენტში, t=5 მომენტისათვის მცოცავი საშუალო „ივიწყებს“ პირველ და მეორე დაკვირვებას.

ეს უარყოფითი მხარეები არ გააჩნია ე.წ. ექსპონენციალურ გაგლუვების მეთოდს. ამ მეთოდით გაგლუვებული დროითი მწკრივი, S_t განისაზღვრება რეკურენტული განტოლებით

$$S_t = \beta Y_t+(1-\beta)S_{t-1}, \qquad t=2, 3, \dots ,$$

სადაც β-ს ეწოდება გაგლუვების მუდმივი, $0\le\beta\le1$, $S_1=Y_1$. აღნიშნული განტოლების ამოხსნა მოგვცემს:

$$S_t = \beta Y_t+\beta(1-\beta)Y_{t-1}+\beta(1-\beta)^2Y_{t-2}+\dots+\beta(1-\beta)^{t-1}Y_1,$$

ე.ი. S_t-ს გამოთვლისას გაითვალისწინება დროითი მწკრივის ყველა წევრი.

ექსპონენციალური გაგლუვების მეთოდზე ჩვენ ქვემოთაც გვექნება საუბარი. აქ მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ β პარამეტრის სიდიდე განსაზღვრავს გაგლუვების ხარისხს და შესარჩევია იმისდა მიხედვით, თუ რამდენად ძლიერი გაგლუვება გვსურს. რაც უფრო მცირეა β, მით უფრო მაღალია გაგლუვების ხარისხი.

მაგალითი 19.1. გამოვიყენოთ ექსპონენციალური გაგლუვების მეთოდი β=0, 1-ისათვის შემდეგი დროითი მწკრივისათვის

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Yt	12	18	16	24	17	16	25	21	23	14

(19.1)-ის თანახმად გვექნება: S_1=12, S_2=0.01·18+0.99·12=12.06, S_3=0.01·16+0.99·12.06=12.1, S_4=0.01·24+0.99·12.1=12.22, და ა.შ.

სეზონური კომპონენტის აღრიცხვა. ადრე უკვე აღვნიშნეთ, რომ სეზონური ეფექტი წარმოადგენს პერიოდულ რხევას ტრენდის მიმართ, რომლის პერიოდის სიგრძე ერთ წელზე ნაკლებია: შეიძლება იყოს კვარტალი, თვე, კვირა და დღეც კი. სეზონური ეფექტის აღმოსაჩენად აუცილებელია, რომ დროითი მწკრივი საკმაოდ „გრძელი" იყოს, რათა გვქონდეს საშუალება დავაკვირდეთ ყოველი სეზონის რამოდენიმეჯერ გამოჩენას. მაგალითად, თუ პერიოდის სიგრძეა კვარტალი, უნდა გაგვაჩნდეს დაკვირვებები რამდენიმე წლის მანძილზე.

სეზონური კომპონენტის აღსარიცხავად გამოიყენება ე.წ. სეზონური ინდექსები, რომლებიც გამოიანგარიშება მიმდევრობით 4 ეტაპად.

1. გამოითვლება m-პერიოდიანი მცოცავი საშუალო; ამავე დროს პერიოდების რიცხვი უნდა ემთხვეოდეს სეზონების რაოდენობას წელიწადში. მაგალითად, თუ სეზონურობა თვეების მიხედვითაა, უნდა გამოითვალოს 12-პერიოდიანი მცოცავი საშუალო (ამ დროს, რადგან პერიოდების რაოდენობაა 12, უნდა გამოითვალოს ცენტრირებული მცოცავი საშუალო).

მცოცავი საშუალოს მეთოდით გაგლუვებულ დროით მწკრივში (აღნიშვნა: MA_t) აღარ აისახება სეზონური და შემთხვევითი კომპონენტები, რჩება მხოლოდ ტრენდი და ციკლური კომპონენტა:

$$MA_t = T_t \cdot C_t \, .$$

2. გამოითვლება ფარდობა

$$\frac{T_t}{MA_t} = \frac{T_t \cdot C_t \cdot S_t \cdot R_t}{T_t \cdot C_t} = S_t R_t ,$$

რომელიც წარმოადგენს სეზონური და შემთხვევითი ვარიაციების საზომს.
3. ყოველი სეზონისათვის გამოითვლება წინა ნაბიჯზე გამოთვლილი ფარდობების საშუალო. ეს გამორიცხავს შემთხვევითი კომპონენტის დიდ ნაწილს (მაგრამ არა მთლიანად). მიღებული საშუალო სეზონური განსხვავების საზომია.
4. სეზონური ინდექსები წარმოადგენს წინა ნაბიჯზე ყოველი სეზონისათვის მიღებულ საშუალოებს, მხოლოდ იმ შესწორებით, რომ საშუალო ინდექსი 1-ის ტოლი გამოვიდეს. ამისათვი თითოეული ინდექსი იყოფა ყველა ინდექსის ჯამზე და მრავლდება 4-ზე. სეზონურ ინდექს SI_t სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

მაგალითი **19.2.** მოცემული დროითი მწკრივისათვის (იხ. ცხრილი 19.11) გამოთვლილია 4-პერიოდიანი მცოცავი საშუალო და სეზონური ინდექსები

ცხრილი 19.11

კვარტ. წლები	ტურისტ. რაოდ. Y				MA				Y/MA			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1987	5591	5414	6103	5777	–	–	5748	5825	–	–	1.0618	0.9917
1988	5805	5821	6834	6340	5967	6129	6257	6325	0.9727	0.9497	1.0921	1.0024
1989	6266	5899	6551	6297	6299	6258	6259	6301	0.9947	0.9425	1.0465	0.9993
1990	6319	6178	6653	6322	6349	6364	6354	6314	0.9953	0.9706	1.0471	1.0012
1991	6207	5974	6712	6603	6296	6338	–	–	0.9858	0.9424	–	–
								საშუალოები	0.9871	0.9513	1.0619	0.9987
								ინდექსები	0.9873	0.9515	1.0622	0.9989

1. რადგან პერიოდების რაოდენობა ლუწია, გამოთვლილია 4-პერიოდიანი ცენტრირებული მცოცავი საშუალოები MA_t;
2. გამოთვლილია ფარდობები Y_t/MA_t;
3. თითოეული სეზონისათვის გამოთვლილია Y_t/MA_t ფარდობის არითმეტიკული საშუალოები, რომლებიც მიწერილია შესაბამისი სვეტების ქვემოთ;
4. ბოლო ეტაპზე კი მიწერილია ინდექსები.

უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ დროითი მწკრივი არ შეიცავს მკვეთრად გამოხატულ ციკლურ კომპონენტას, მაშინ ზემოაღწერილი პროცედურის პირველ ეტაპზე მცოცავი საშუალოს ნაცვლად შეიძლება გამოყენებული იქნეს რეგრესიული ანალიზით მოძებნილი ტრენდის ხაზი. ეს საგრძნობლად ამცირებს ჩასატარებელ გამოთვლებს.

პროგნოზირება სეზონური ინდექსების გამოყენებით. სეზონური ინდექსები გამოიყენება პროგნოზირების მიზნებისათვის. იმ შემთხვევაში, როდესაც

დროითი მწკრივის მოდელი შედგება მხოლოდ ტრენდისა და სეზონური კომპონენტისაგან, პროგნოზირება შემდეგი პროცედურით წარმოებს.

ვთქვათ, $\hat{Y}_t$ წარმოადგენს უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებულ ტრენდის წირს (მაგალითად, $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$, როდესაც ტრენდი წრფივია). დროის რაიმე $t_0<n$ მომენტში დროითი მწკრივის პროგნოზირება ხდება ფორმულით:

$$F_{t_0} = \hat{Y}_{t_0} SI_{t_0},$$

სადაც SI_{t_0} იმ სეზონის ინდექსია, რომელსაც ეკუთვნის t_0 მომენტი, ხოლო F_{t_0} კი პროგნოზირებული მნიშვნელობა.

მაგალითი **19.3.** 19.2 მაგალითის მონაცემების მიხედვით უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მოძებნილი ტრნდის წრფეა

$$\hat{Y}_t = 5755.6+40.731t.$$

მოვძებნოთ პროგნოზები t=21, (22, 23, 24) მომენტებში. t=21 ეკუთვნის პირველ კვარტალს, ამიტომ

$$F_{21} = \hat{Y}_{21} \cdot SI_1 = 6611.0\times0.9860 = 6518,$$

$$F_{22} = \hat{Y}_{22} \cdot SI_2 = 6651.7\times0.9504 = 6322,$$

$$F_{23} = \hat{Y}_{23} \cdot SI_3 = 6692.4\times1.0598 = 7093,$$

$$F_{24} = \hat{Y}_{24} \cdot SI_4 = 6733.1\times1.0038 = 6759.$$

სეზონური დროითი მწკრივების პროგნოზირებისათვის გამოიყენება მუნჯი ცვლადების ტექნიკაც. დავუშვათ, რომ შერჩეული გვაქვს რეგრესიის სავარაუდო წირი, რომელიც აღიწერება $f(t)$ ფუნქციით. სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $f(t)=\beta_0+\beta_1 t$ და სეზონურობა კვარტალურია.

შემოვიღოთ მუნჯი ცვლადები, Q_1, Q_2 და Q_3, სადაც

$$Q_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ დროის მომენტი ეკუთვნის } i\text{-ურ კვარტალს,} \\ 0, & \text{თუ არ ეკუთვნის.} \end{cases}$$

განვიხილოთ რეგრესიის მოდელი მუნჯი ცვლადებით

$$y_t = \beta_0+\beta_1 t+\beta_2 Q_1+\beta_3 Q_2+\beta_4 Q_3+\varepsilon_t,$$

$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

კოეფიციენტები შევაფასოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით და საპროგნოზოდ გამოვიყენოთ ფუნქცია

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 Q_1 + \hat{\beta}_3 Q_2 + \hat{\beta}_4 Q_3$$

მაგალითი **19.4.** 19.11 ცხრილის მონაცემებით მუნჯი ცვლადების გამოყენებით მოვძებნოთ პროგნოზები t=21, 22, 23 და 24 მომენტებისათვის.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მოძებნილი შეფასებებია

$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$
5825.8	36.84	–119.69	–336.92	339.64

გამოვთვალოთ F-სტატისტიკა. მივიღებთ F=15.958 ცხრილურ მნიშვნელობასთან, $F_{4,15,0.05}$=3.066, შედარება მიგვითითებს, რომ α=0.05 მნიშვნელოვნობის დონით რომ $H_0 : \beta_i$=0 ჰიპოთეზა უნდა უარვყოთ, ე.ი. მოდელი ვარგისია გამოსაყენებლად. ამასთან დეტერმინაციის კოეფიციენტი, R^2=0.8097, ე.ი. მოდელი ძალიან კარგ თანხმობაშია მონაცემებთან. საპროგნოზო წირს ექნება შემდეგი სახე.

$$F_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 Q_1 + \hat{\beta}_3 Q_2 + \hat{\beta}_4 Q_3 .$$

ხოლო კონკრეტული გამოთვლილი პროგნოზები შემდეგია:

როცა t=21, მაშინ Q_2=Q_3=0, Q_1=1, ამიტომ

$$F_{21} = 5825.8+36.84\cdot 21-119.69 = 6480.$$

როცა t=22, მაშინ Q_1=Q_3=0, Q_2=1 და

$$F_{22} = 5825.8+36.84\cdot 21-336.92 = 6299,\ F_{23} = 7013,\ F_{24} = 6710.$$

ანალოგიურად, F_{23} =7013 და F_{24} =6710.

§ 4. დროითი მწკრივების პროგნოზირება ARIMA მოდელებზე დაყრდნობით

დროითი მწკრივების ზოგად თეორიას გააჩნია სტანდარტული წრფივი მოდელების მთელი არსენალი, რომელთა შორის უპირველესად უნდა დასახელდეს ავტორეგრესიის AR(p), მცოცავი საშუალოს MA(q), შერეული ტიპის ავტორეგრესია-მცოცავი საშუალოს ARMA(p,q) და გაინტეგრებული ARMA ე.წ. ARIMA მოდელები, რომლებისთვისაც არსებობს სტატისტიკური ანალიზისა და პროგნოზირების კარგად განვითარებული ტექნიკა.

ჩამოთვლილი მოდელების პოპულარობა აიხსნება, ერთის მხრივ, მათი სიმარტივით და, მეორეს მხრივ, იმით, რომ პარამეტრების მცირე რაოდენობის შერჩევით ამ მოდელებით კარგად აპროქსიმირდება როგორც სტაციონარული, ასევე არასტაციონარული (სტოქასტური და პოლინომიალური ტრენდის მქონე) მიმდევრობების ფართო კლასი.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, დროითი მწკრივების ანალიზის უმთავრესი მიზანია პროგნოზირება.

პროგნოზის ქვეშ იგულისხმება მომავალზე წარსულის ექსტრაპოლაციის შედეგი. იგი მდგომარეობს დროითი მწკრივის მომავალი მნიშვნელობების განსაზღვრასა და მათი ალბათური საზღვრების დადგენაში დროითი მწკრივის მიმდინარე და წარსულ მნიშვნელობათა საფუძველზე. პროგნოზი აიგება გარკვეული ობიექტური წესების მიხედვით, რომლებიც განსაზღვრავს იმ გამოთვლებისა და მოქმედებების ერთობლიობას, რომლებიც აუცილებელია პროგნოზის (ე.წ. „ობიექტური" პროგნოზის) მისაღებად.

მეორეს მხრივ, განჭვრეტა, წინასწარმეტყველება, რომელიც დაფუძნებულია შესასწავლი პროცესის ბუნების ღრმა ცოდნაზე, ან ისეთ ინფორმაციაზე, რომელიც მომავალ ხდომილობებს ეხება, გვაძლევს „სუბიექტური" შეფასების გაკეთებისა და, ამის საფუძველზე, „ობიექტური" პროგნოზის კორექტირების საშუალებას.

ქვემოთ მოცემულია როგორც პროგნოზირების მარტივი მეთოდები – მცოცავი საშუალოს, ექსპონენციალური გაგლუვების, ჰოლტის, ბრაუნის ორმაგი გაგლუვების, ასევე პროგნოზირების უფრო რთული მეთოდები, რომლებიც ეყრდნობა ARMA და ARIMA მოდელებს და მთელი სისრულით იყენებს მათ თვისებებს და მათთვის განვითარებული ანალიზის ტექნიკას.

მოყვანილი მოდელები, პრინციპები და მეთოდები წარმატებით შეიძლება იქნას გამოყენებული მრავალი ეკონომიკური ამოცანის გადასაჭრელად და ამდენად, ზოგად ხასიათს ატარებს. პროგნოზირების აღწერილი მეთოდები განეკუთვნება ე.წ. ავტოპროექციულ მეთოდებს, როდესაც პროგნოზირება წარმოებს მხოლოდ ერთი დროითი მწკრივის დაკვირვებული მნიშვნელობებით, სხვა დროითი მწკრივები კი, რომლებიც წარმოადგენენ თანმხლებ პროცესებს, ყურადღების მიღმაა დარჩენილი. აღწერილი მეთოდები გამოსადეგია მოკლევადიანი პროგნოზირების მიზნებისათვის. საშუალო და გრძელვადიანი პროგნოზირებისათვის მოხერხებულია რეგრესიული ანალიზის ტექნიკით სარგებლობა. რეგრესიული ანალიზი იძლევა საშუალებას გათვალისწინებულ იქნას თანმხლები ფაქტორებიც.

წრფივი გაუსური პროცესები. ჩვენი განხილვის საგანს წარმოადგენს წრფივი გაუსური მოდელები, როგორც სტაციონარული, ისევე არასტაციონარული.

წრფივი სტაციონარული პროცესები. ასეთი პროცესების ტიპიური წარმომადგენლებია p რიგის ავტორეგრესიული AR(p), q რიგის მცოცავი საშუალოს MA(q) და შერეული ავტორეგრესია-მცოცავი საშუალოს ARMA(p,q) მოდელები.

სანამ შევუდგებოდეთ მათ აღწერას, მოვიყვანთ ზოგიერთ ცნებასა და ფაქტს, რომლებიც შემდგომში დაგვჭირდება.

დროითი მწკრივი ეწოდება შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერ უსასრულო მიმდევრობას:

$$z_t, \qquad t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

შევნიშნოთ, რომ წინა თავებში განხილული კლასიკური ალბათურ-სტატისტიკური მოდელებში საქმე გვქონდა დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების სასრულ მიმდევრობასთან. განსხვავებით ამისაგან დროითი მწკრივის (შემთხვევით სიდიდეთა უსასრულო მიმდევრობის) შემადგენელი შემთხვევითი სიდიდეები აღარ არიან, საზოგადოდ, დამოუკიდებლები და ერთნაირად განაწილებული.

დროითი მწკრივების უმნიშვნელოვანეს კლასს წარმოადგენს ე.წ. სტაციონარული დროითი მწკრივები.

ჩვენ არ შევუდგებით სტაციონარული დროითი მწკრივის ცნების დაზუსტებას. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ მწკრივის წარმომქმნელი მექანიზმი, თუმცა შემთხვევითია, დროში უცვლელი რჩება. ამ დაშვებებში, თუ z_t, $t=0,\pm1,\pm2$, ... სტაციონარული დროითი მწკრივია, მაშინ

$$Ez_t = \mu,\ Dz_t = E(z_t-\mu)^2 = \sigma_z^2 > 0,$$

$$\gamma_k = \mathrm{cov}(z_t,z_{t+k}) = E(z_t-\mu)E(z_{t+k}-\mu),\ \gamma_0=\sigma_z^2, \tag{19.1}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sqrt{Dz_t}\sqrt{Dz_{t+k}}} = \frac{\gamma_k}{\sigma_z^2},\ \rho_0=1,$$

სადაც k-ს ეწოდება დაგვიანების სიგრძე. ე.ი. სტაციონარული დროითი მწკრივებისათვის საშუალო Ez_t და დისპერსია Dz_t მუდმივია დროში, ხოლო ავტოკოვარიაცია $\gamma_k=\mathrm{cov}(z_t,z_{t+k})$ და ავტოკორელაცია $\rho_k=\mathrm{corr}(z_t,z_{t+k})$ მხოლოდ დაგვიანების k სიგრძეზეა დამოკიდებული, ამასთან $\rho_k=\rho_{-k}$. შემდგომში ყველგან ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვლით, რომ $\mu=0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში საკმარისია გადავიდეთ $z_k-\mu$ დროით მწკრივზე (γ_k-სა და ρ_k-ს შეუცვლელად).

შევნიშნოთ, რომ დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობებისათვის საშუალო და დისპერსია მუდმივი სიდიდეებია, ხოლო γ_k და ρ_k უდრის ნულს ნებისმიერი k დაგვიანების სიგრძისათვის:

$$\gamma_k=0,\ \rho_k=0, \qquad k=1,\ 2,\ ...$$

ამრიგად, დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა არის სტაციონარუუი დროითი მწკრივის მარტივი კერძო შემთხვევა.

დროითი მწკრივების ანალიზში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს (გარდა ავტოკორელაციური ფუნქციისა γ_k, $k=1,\ 2,\ ...$) ე.წ. კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია, რომელიც ასე განიმარტება: ყოველი ფიქსირებული k-სათვის, $k\geq1$, განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა (Φ_k ვექტორის მიმართ)

$$P_k\Phi_k = \rho_k,$$

სადაც P_k წარმოადგენს $(z_1,...,z_k)$ ვექტორის კორელაციურ მატრიცას, $\rho_k=(\rho_1,...,\rho_k)'$, $\Phi_k=(\Phi_{k1},...,\Phi_{kk})$ ვექტორ-სვეტებია, ე.ი.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi_{k2} \\ \Phi_{k3} \\ \cdots \\ \Phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \cdots \\ \rho_k \end{pmatrix}. \tag{19.2}$$

კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია ეწოდება მიმდევრობას Φ_{kk}, $k=1,2,...$. მაგალითად, თუ $k=1$, მაშინ (19.2) იღებს სახეს

$$\Phi_{11} = \rho_1. \tag{19.3}$$

k=2-სათვის

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \tag{19.4}$$

საიდანაც

$$\Phi_{22}=\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2},$$

და ა.შ.

$$\Phi_{kk}=\frac{|P_k|}{|\overline{P}_k|},$$

სადაც $\overline{P}_k$ მიიღება P_k მატრიციდან ბოლო სვეტის $(\rho_1,...,\rho_k)'$ სვეტით შეცვლით. $|\cdot|$ – მატრიცის დეტერმინანტია.

ავტოკორელაციური ფუნქცია ρ_k, k=1,2,... და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია Φ_{kk}, k=1,2,..., (z_k) დროითი მწკრივის თეორიული მახასიათებლებია. პრაქტიკაში ჩვენ საქმე გვაქვს დროითი მწკრივის დაკვირვებულ სასრული რაოდენობის $z_1,...,z_N$ მნიშვნელობასთან და მათი საშუალებით ვაგებთ ρ_k და Φ_{kk}-ს ემპირიულ ანალოგებს (შეფასებებს): კერძოდ, შერჩევითი კორელაციაა

$$r_k=\frac{c_k}{c_0},$$

სადაც

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(z_t-\overline{z})(z_{t+k}-\overline{z}),\ k=0,1,...,K,\ \ \overline{z}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}z_t .$$

Φ_{kk} კერძო ავტოკორელაციების $\hat{\Phi}_{kk}$ შეფასებები მიიღება (19.2) განტოლებიდან, სადაც ρ_k შეცვლილია r_k-თი. არსებობს $\hat{\Phi}_{kk}$-ს გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულები

$$\hat{\Phi}_{kk}=\begin{cases} r_1 & k=1 \\ \dfrac{r_k-\sum_{j=1}^{k-1}\Phi_{(k-1)j}r_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}\Phi_{(k-1)j}r_k} & k=2,3,...,K \end{cases}, \tag{19.5}$$

სადაც $\hat{\Phi}_{lj}=\hat{\Phi}_{(l-1)j}-\hat{\Phi}_{ll}\,\hat{\Phi}_{(l-1)(l-j)}$.

პრაქტიკაში, სასარგებლო ინფორმაციის მისაღებად საჭიროა სულ ცოტა 50 დაკვირვება ($N\geq 50$), ამასთან დაგვიანებათა რაოდენობა $K\sim N/4$.

შემდგომში, დროითი მწკრივის მოდელის იდენტიფიკაციისათვის (ამ საკითხს ჩვენ ქვემოთ შევეხებით) საჭიროა ხელთ გვქონდეს მეთოდი, რომლითაც შევამოწმებდით ჰიპოთეზას: ρ_k=0 ყველა $k>q$-სთვის. ეს მეთოდი ეყრდნობა შემდეგ ფაქტებს: a) ანდერსონის მიერ ნაჩვენები იყო, რომ შერჩევითი ავტოკორელაციის კოეფიციენტი r_k დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, თანაც $Er_k=\rho_k$, b) ბარტლეტის მიერ

ნაჩვენები იყო, რომ გაუსის სტაციონარული დროითი მწკრივებისათვის თუ $\rho_i=0$, ყველა $i>q$-სთვის, მაშინ ნებისმიერი დაგვიანებისათვის $k>q$ ემპირიული ავტოკორელაციის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$\mathrm{Var}[r_k] \approx \frac{1}{N}\left(1+2\sum_{i=1}^{q}\rho_i^2\right). \tag{19.6}$$

ამგვარად,

$$\frac{r_k-\rho_k}{\sqrt{\mathrm{Var}[r_k]}} \sim N(0,1)$$

ამასთან $\mathrm{Var}[r_k]$-ს გამოსათვლელ (19.6) ფორმულაში თეორიული ავტოკორელაციები ρ_i შეიძლება შეიცვალოს მათი ემპირიული ანალოგებით r_i. რადგან, თუ $\xi \sim N(0,1)$, მაშინ $P(|\xi|>2)\approx 0.005$, ხოლო $P(|\xi|>3)\approx 0.003$, საბოლოოდ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ნულოვანი ჰიპოთეზის H_0 : $\rho_k=0$, $k>q$ შემოწმების უხეში წესი:

$$\text{უკუაგდე } H_0, \text{ თუ } \frac{|r_k|}{\sqrt{\mathrm{Var}[r_k]}}>2 \text{ (ან} >3).$$

იგივე მიზნისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ჰიპოთეზის შემოწმება: $\Phi_{kk}=0$, რაიმე $k>p+1$. ამ საკითხს ჩვენ შევეხებით ავტორეგრესიული მოდელების განხილვისას.

ავტორეგრესიული მოდელი **AR(p)**. ამბობენ, რომ პროცესი z_t, $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ემორჩილება p რიგის ავტორეგრესიულ მოდელს (ან არის AR(p) პროცესი), თუ

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1}+\cdots+\Phi_p z_{t-p}+a_t. \tag{19.7}$$

სადაც $\Phi_1,\ldots,\Phi_p$ მოდელის პარამეტრებია, $(a_t)_{t=0,\pm1,\ldots}$ წარმოადგენს დამოუკიდებელ ნორმალურ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, $Ea_t=0$, $Ea_t^2=\sigma_a^2$. (a_t) მიმდევრობას ეწოდება თეთრი ხმაური. ასეთ შემთხვევაში ყველა ქვემოთ აღწერილი პროცესი წრფივი გაუსის პროცესია.

ჩვე განვიხილავთ მხოლოდ AR(1) და AR(2) მოდელებს.

AR(1). დაწვრილებით განვიხილოთ შემთხვევა $p=1$.

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1}+a_t.\ \ t\geq 1. \tag{19.8}$$

თუ ჩავთვლით, რომ $|\Phi_1|<1$ და $z_0\sim N\left(0,\frac{\sigma_a^2}{1-\Phi_1^2}\right)$, მაშინ (z_t) პროცესი სტაციონარულია, კერძოდ, z_t ისევეა განაწილებული, როგორც z_0.

z_t პროცესის ავტოკორელაციური ფუნქცია ρ_k, $k\geq1$, აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\rho_t = \Phi_1\rho_{k-1} \Rightarrow \rho_t = \Phi_1^k\,. \tag{19.9}$$

მართლაც, $\rho_{k-1}=\Phi_1\rho_{k-2}$. ამრიგად, $\rho_k=\Phi_1^2\rho_{k-2}$, ... , $\rho_k=\Phi_1^k$, კერძოდ, $\rho_1=\Phi_1$. ამრიგად, ავტოკორელაციურ ფუნქციას ახასიათებს ექსპონენციალური ქრობა მონოტონურად, თუ $\Phi_1>0$ და ნიშანცვლადად, თუ $\Phi_1<0$. შემდგომში ეს თვისება გამოიყენება მოდელის იდენტიფიკაციისათვის. ტოლობა $\rho_1=\Phi_1$ გამოიყენება Φ_1-ის პირველადი შეფასების ასაგებად მომენტთა მეთოდით. კერძოდ, $\hat{\Phi}_1=r_1$.

AR(1) მოდელისათვის $\Phi_{11}=\rho_1$, $\Phi_{kk}=0$, თუ $k>1$. მაგალითად, $\Phi_{22}=\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}=0$, რადგან $\rho_2=\rho_1^2$ (იხ. (19.9)).

AR(2). განვიხილოთ შემთხვევა $p=2$. მაშინ

$$z_t=\Phi_1 z_{t-1}+\Phi_2 z_{t-2}+a_t. \qquad (19.10)$$

სტაციონარულობის პირობაა

$$\Phi_1+\Phi_2<1,\ \Phi_2-\Phi_1<1,\ -1<\Phi_2<1.$$

პარამეტრები Φ_1 და Φ_2 დაკავშირებულია ავტოკორელაციებთან ე.წ. იულ-უოკერის განტოლებებით

$$\rho_1=\Phi_1+\Phi_2\rho_1,$$

$$\rho_2=\Phi_1\rho_1+\Phi_2,$$

საიდანაც

$$\Phi_1=\frac{\rho_1-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}, \qquad \Phi_2=\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}.$$

ეს თანაფარდობები გამოიყენება პარამეტრების პირველადი შეფასებების მისაღებად, თეორიული ρ_1, ρ_2-ის r_1, r_2-ით შეცვლით.

AR(2) მოდელისათვის $\Phi_{11}=\rho_1$, $\Phi_{22}=\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$, $\Phi_{kk}=0$, $k>2$.

მცოცავი საშუალოს მოდელი **MA(q).** ამ მოდელში z_t პროცესი აღიწერება შემდეგი თანაფარდობით

$$z_t=a_t-\theta_1 a_{t-1}-\cdots-\theta_q a_{t-q},$$

MA(q) პროცესი სტაციონარულია პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ავტოკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\rho_k=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{q-k}\theta_j\theta_{j+k}, & k=1,2,\dots,q;\\ 0, & k>q.\end{cases}$$

ამრიგად, $\rho_k=0$, თუ $k>q$. ეს თვისება გამოიყენება MA(q) მოდელების იდენტიფიკაციისათვის. კერძოდ, ამოწმებენ ჰიპოთეზას $H_0:\rho_k=0,\ k>q$.

MA(1) პროცესი. პირველი რიგის მცოცავი საშუალოს პროცესი ასე განიმარტება

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} .$$

ეს პროცესი სტაციონარულია ნებისმიერი θ_1-სთვის და მას გააჩნია „კარგი" თვისებები თუ $|\theta_1|<1$.

ავტოკორელაციური ფუნქცია

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k=1, \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

ამიტომ, თუ $|\theta_1|<1$, მაშინ $-1/2<\rho_1<1/2$ და პირიქით. ამავე დროს,

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = -\frac{\frac{1}{\theta_1}}{1+\frac{1}{\theta_1^2}}$$

და განსხვავებული მნიშვნელობები θ_1 და $\frac{1}{\theta_1}$ იძლევა ერთი და იგივე ρ_1-ს. ამ ტოლობიდან ისევე, როგორც AR(1) შემთხვევაში, მომენტთა მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ θ_1 პარამეტრის პირველად შეფასებას

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+\hat{\theta}_1^2}.$$

აქედან ცხადია, რომ $\hat{\theta}_1$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\theta_1^2 + \frac{\theta_1}{r_1} + 1 = 0,$$

რომელსაც გააჩნია ნამდვილი ფესვი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $-1/2<r_1<1/2$. და თუ $\hat{\theta}_1$ მისი ფესვია, მაშინ $\frac{1}{\hat{\theta}_1}$-ც არის მისი ფესვი და ამიტომ, თუ ერთი ფესვი მოდულით ნაკლებია 1-ზე, მაშინ მეორე ფესვი მოდულით მეტია 1-ზე. „კარგი" თვისებების პროცესის მისაღებად ვირჩევთ იმ ფესვს, რომლის მოდულიც ნაკლებია 1-ზე.

კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\Phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}$$

და, ამრიგად, $|\Phi_{kk}|<\theta_1^k$.

თუ შევადარებთ AR(1) და MA(1) პროცესებს, შევნიშნავთ, რომ მათ შორის არსებობს ურთიერთშესაბამისობა: თუ MA(1) პროცესის ავტოკორელაციური ფუნქცია ნულდება პირველი დაგვიანების შემდეგ, AR(1)-ისა ექსპონენციალურად ქრება.

პირიქით, AR(1) პროცესის კერძო ავტოკორელაციური ფუნქცია ქრება პირველი დაგვიანების შემდეგ, ხოლო MA(1)-ისა ექსპონენციალურად ქრება.

ცხრილი 19.12

რიგი	AR(1)	MA(1)
ρ_k – ყოფაქცევა Φ_{kk} – ყოფაქცევა წინასწარი შეფასება	ექსპონენციალური ჩაქრობა მხოლოდ $\Phi_1 \neq 0$ $\Phi_1 = \rho_1$	მხოლოდ $\rho_1 \neq 0$ ექსპონენციალური ჩაქრობა $\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$
დასაშვები დიაპაზონი	$-1<\Phi_1<1$	$-1<\theta_1<1$

ARMA(p,q). პრაქტიკაში, ეკონომიური პარამეტრიზების მიზნით განიხილავენ შერეული ტიპის ავტორეგრესია-მცოცავი საშუალოს მოდელებს ARMA(p,q), რომლებიც ერთდროულად შეიცავს როგორც ავტორეგრესიულ, ასევე მცოცავი საშუალოს წევრებს. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ARMA(1,1) პროცესს.

ARMA(1,1) პროცესი

$$z_t - \Phi_1 z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\rho_k = \frac{(1-\Phi_1\theta_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1-2\Phi_1\theta_1+\theta_1^2}\Phi_1^{k-1},\ k\geq 1,\ \rho_0=1 \tag{19.11}$$

და, ე.ი., ავტოკორელაცია ექსპონენციალურად ჩაქრობადია. ეს ფაქტი გამოიყენება ARMA(1,1)-ის საიდენტიფიკაციოდ.

იმისათვის, რომ პროცესი იყოს სტაციონალური და გააჩნდეს „კარგი" თვისებები საჭიროა მოვითხოვით, რომ $|\Phi_1|<1$, $|\Phi_2|<1$, აქედან გამომდინარეობს, რომ ρ_1 და ρ_2 უნდა მოქცეული იყოს არეში

$$|\rho_2|<|\rho_1|,$$

$$\rho_2<\rho_1(2\rho_1+1),\quad \rho_1<0,$$

$$\rho_2<\rho_1(2\rho_1-1),\quad \rho_1>0.$$

ARMA(1,1) პროცესის კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციის ქცევა მსგავსია MA(1,1) პროცესის კერძო ავტოკორელაციის ფუნქციის ქცევისა. მისი საწყისი მნიშვნელობაა $\Phi_{11}=\rho_1$ და მასში დომინირებს ჩაქრობადი ექსპონენციალური წევრი.

ARIMA მოდელები. აქამდე ჩვენს მიერ განხილული წრფივი სტოქასტური მოდელები, უმეტეს შემთხვევაში სტაციონარული დროითი მწკრივების აღსაწერად გამოიყენება. ამ დროს პროცესი იმყოფება წონასწორობაში მუდმივი საშუალო დონის მიმართ.

მაგრამ პრაქტიკაში, განსაკუთრებით ეკონომიკისა და ფინანსების სფეროში, სადაც ადეკვატური მოდელების შერჩევას და დროითი მწკრივების პროგნოზირებას, შეიძლება ითქვას, გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს, ხშირია ისეთი დროითი მწკრივების გამოჩენა, რომლებსაც აქვთ არასტაციონარული ხასიათი. სახელდობრ, ისინი არ მერყეობენ ფიქსირებულ საშუალო მნიშვნელობის მიმართ. მიუხედავად ამისა, მათი თვისებები, გარკვეული აზრით ერთგვაროვანია: თუ არ გავითვალისწინებთ ლოკალურ დონეს ან ლოკალურ დონესა და ტრენდს, დროითი მწკრივის ნებისმიერი ნაწილი თავისი ქცევით მსგავსია ნებისმიერი სხვა ნაწილისა.

ფართო კლასს იმ მოდელებისა, რომლებითაც აღიწერება ასეთი არასტაციონარული (მაგრამ გარკვეული აზრით ერთგვაროვანი) ქცევა, წარმოადგენს ARIMA(p,d,q) მოდელები (გაინტეგრებული ავტორეგრესია მცოცავი საშუალო), რომლებიც ეფუძნება იმ დაშვებას, რომ, თუმცა დროითი მწკრივი არასტაციონარულია, მისი რომელიმე d რიგის სხვაობა სტაციონარულ დროით მწკრივს, კერძოდ, სტაციონარულ ARMA(p,q) პროცესს წარმოადგენს.

შემოვიღოთ სხვაობის გარდაქმნა

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}.$$

პროცესს $z_t=(z_t)$, $t=0,\pm1,\pm2,\dots$ ეწოდება ARIMA(p,d,q) პროცესი, თუ მისი d რიგის სხვაობა $\nabla^d z$ წარმოადგენს ARMA(p,q) პროცესს. პრაქტიკული პროგნოზირების მიზნებისათვის ხშირად საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა p, q და d იღებენ მნიშვნლობებს 0 ან 1.

განვიხილოთ სათანადო მოდელები:

1. ARIMA(1,0,0) მოდელი – სტაციონარული ავტორეგრესია AR(1),

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad |\phi_1|<1.$$

ეს პროცესი ჩვენ უკვე შევისწავლეთ.

2. ARIMA(0,0,1) მოდელი – სტაციონარული მცოცავი საშუალო MA(1),

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad |\theta_1|<1.$$

ეს პროცესიც აღწერილი გვაქვს.

3. ARIMA(1,0,1) მოდელი – სტაციონარული შერეული ავტორეგრესია - მცოცავი საშუალო ARMA(1,1),

$$z_t - \Phi_1 z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad |\Phi_1|<1, |\theta_1|<1.$$

ეს პროცესიც აღწერილი გვაქვს.

4. ARIMA(1,1,0) მოდელი – გაინტეგრებული ავტორეგრესიაა, ის წარმოალგენს არასტაციონარული მოდელს.

აღვნიშნოთ $W_t=\nabla z_t$. მაშინ W_t აკმაყოფილებს განტოლებას

$$W_t = \Phi_1 W_{t-1} + a_t, \qquad |\Phi_1| < 1.$$

ე.ი. W_t სტაციონარული AR(1) პროცესია. საწყისი პროცესისათვის გვაქვს

$$z_t - z_{t-1} = \Phi_1(z_{t-1} - z_{t-2}) + a_t.$$

5. ARIMA(0,1,1) მოდელი, გაინტეგრებული მცოცავი საშუალოა, ის აგრეთვე არასტაციონარული მოდელია. აქაც აღვნიშნოთ $W_t = \nabla z_t$. მაშინ

$$W_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad |\theta_1| < 1.$$

ამ შემთხვევაშიც W_t წარმოადგენს სტაციონარულ შექცევად MA(1) პროცესს. თავად z_t-სთვის გვექნება

$$z_t - z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

შენიშვნა. ჩვენ არ ვიხილავთ ARIMA(1,1,1) მოდელს ორი მიზეზის გამო. პირველი – იგი იშვიათად გამოიყენება ეკონომიკური დროითი მწკრივების ანალიზში, მეორე – მისი ანალიზი საკმაოდ რთულ მათემატიკურ აპარატს მოითხოვს.

საპროგნოზო ფუნქციები ARIMA მოდელებში. ამ პუნქტში ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ საპროგნოზო მოდელი და მისი პარამეტრები სრულად განსაზღვრულია და ვინტერესდებით საკითხით, თუ რა გვესმის პროგნოზის ქვეშ, როგორ გამოვთვალოთ საპროგნოზო მნიშვნელობა და მისი ალბათური საზღვრები. შემდგომ, მიღებულ თეორიას გამოვიყენებთ რეალური მონაცემების ანალიზისათვის.

წრფივი გაუსის პროცესებისათვის, განსაკუთრებით ARIMA(p,d,q) მოდელებისათვის, არსებობს პროგნოზირების კარგად განვითარებული ტექნიკა.

პირველ რიგში, გავარკვიოთ, თუ რას ვგულისხმობთ პროგნოზის ქვეშ. ვთქვათ, დროის რაიმე $t>0$ მომენტისათვის ცნობილია z პროცესის წარსული დაკვირვებული მნიშვნელობები z_t, z_{t-1}, … , z_0, z_{-1}, … და მათ საფუძველზე გვსურს განვჭვრიტოთ მომავალი მნიშვნელობები z_{t+l}, $l=1,2,\ldots$, ე.ი. ვიპოვოთ პროგნოზი $\hat{z}_t(l)$. ბუნებრივია, z_{t+l}-ის საპროგნოზო მნიშვნელობად მივიჩნიოთ წარსული დაკვირვებების ნებისმიერი ფუნქცია $\varphi_l(z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0, z_{-1}, \ldots)$. თუ პროგნოზის ავკარგიანობის შეფასების კრიტერიუმად მივიჩნევთ საშუალო კვადრატულ შეცდომას,

$$E[z_{t+l} - \varphi_l(z_t, z_{t-1}, \ldots)]^2,$$

მაშინ, როგორც კარგადაა ცნობილი, ამ კრიტერიუმის აზრით საუკეთესო (ე.ი. მინიმალური საშუალო კვადრატული შეცდომის მქონე) შეფასებას წარმოადგენს z_{t+l}-ის პირობითი მათემატიკური ლოდინი პირობაში, რომ t მომენტამდე z-ის მნიშვნელობები დაფიქსირებულია:

$$\hat{z}_t(l) = E(z_{t+l} \mid z_t, z_{t-1}, \ldots, z_0, z_{-1}, \ldots).$$

ყოველი ფიქსირებული t-სათვის $\hat{z}_t(l)$-ს, განხილულს როგორც წინსწრების, l-ის ფუნქციას, ეწოდება საპროგნოზო ფუნქცია.

ცხადი სახით მოვიყვანთ საპროგნოზო ფუნქციას მხოლოდ ARIMA(0,1,1) და ARIMA(1,1,0) პროცესებისათვის. ეს პროცესები ყველაზე ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში

მოვიყვანოთ საპროგნოზო ფუნქციის გამოსახულება ARIMA(0,1,1) პროცესისათვის. ARIMA(0,1,1) პროცესი მოიცემა ფორმულით

$$z_{t+l} = z_{t+l-1}+a_{t+l}-\theta_1 a_{t+l-1}.$$

ამ შემთხვევაში საპროგნოზო ფუნქციას აქვს სახე

$$\hat{z}_t(1) = z_t-\theta_1 a_t,$$

$$\hat{z}_t(l) = \hat{z}_t(l-1), \qquad l\geq 2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a_t=z_t-\hat{z}_{t-1}(l)$, ეს გამოსახულებები შეიძლება მოკლედ ასე ჩაიწეროს

$$\hat{z}_t(l) = \lambda z_t+(1-\lambda)\hat{z}_{t-1}(l),$$

სადაც $\lambda=1-\theta_1$. ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ახალი პროგნოზი წარმოადგენს ძველი პროგნოზისა და ახალი დაკვირვების შეწონილ ჯამს.

ალბათური საზღვრები, ანუ $(1-\varepsilon)$ დონის ნდობის ინტერვალი z_{t+l}-სთვის, მოიცემა ფორმულით

$$z_{t+l}(\pm) = \begin{cases} \hat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}\sigma_a & l=1, \\ \hat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}(1+\theta_1^2)^{1/2}\sigma_a & l\geq 2, \end{cases}$$

სადაც $u_{\varepsilon/2}$ არის ნორმალური განაწილების $(1-\varepsilon/2)$-კვანტილი. σ_a წარმოადგენს თეთრი ხმაურის, a_t-ს დისპერსიას. თუ θ_1 და σ_a პარამეტრები უცნობია, ისინი უნდა შეიცვალოს მათი შეფასებებით, $\hat{\theta}_1$ და s_a, რომლებიც აგებულია t მომენტამდე დაკვირვებული $(z_t, z_{t-1},\dots,z_0)$ სიდიდეების მეშვეობით.

განვიხილოთ ARIMA(1,1,0) პროცესის შემთხვევა. ის მოიცემა ფორმულით

$$z_{t+l} = (1+\Phi_1)z_{t+l-1}-\Phi_1 z_{t+l-2}+a_{t+l}.$$

აქედან მიიღება ასეთი საპროგნოზო ფუნქცია

$$\hat{z}_t(l) = z_t+(z_t-z_{t-1})\frac{\Phi_1(1-\Phi_1^2)}{1-\Phi_1}, l\geq 1.$$

ალბათური საზღვრებისთვის გვექნება

$$z_{t+l}(\pm) = \begin{cases} \hat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}\sigma_a, & l=1, \\ \hat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2}(1+\Phi_1^2)^{1/2}\sigma_a, & l\geq 2, \end{cases}$$

სადაც $u_{\varepsilon/2}$-ს იგივე შინაარსი აქვს, რაც ზემო შემთხვევაში.

პარამეტრების შეფასება. ამ პუნქტში განვიხილავთ საკითხს, თუ როგორ შევაფასოთ ARIMA მოდელის უცნობი პარამეტრები.

ვთქვათ, $N=n+d$ დაკვირვება ქმნის დროით მწკრივს

$$z_{-d+1}, \ldots, z_{-1}, z_0, z_1, \ldots, z_n,$$

რომელიც გენერირებულია ARIMA(p,d,q) მოდელით. შევქმნათ $n=N-d$ სხვაობისგან შედგენილი მწკრივი $W_1,W_2,\ldots,W_n$, სადაც $W_t=\nabla^d z_t$, $d=0$ ან $d=1$.

$\Phi=(\Phi_1,\ldots,\Phi_l)$ და $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_q)$ მოდელის პარამეტრებია, რომელთა შეფასებების აგება არსებული დაკვირვებების საფუძველზე შეადგენს ჩვენს ამოცანას. საზოგადოდ, შესაფასებელია σ_a-ც.

z მწკრივიდან W მწკრივზე გადასვლა საშუალებას გვაძლევს, რომ ARIMA(p,d,q) მოდელი შევცვალოთ ARMA(p,q) მოდელით. შევნიშნოთ, რომ წინასწარ ვამოწმებთ $EW_t=\mu=0$ ჰიპოთეზას და თუ ეს ჰიპოთეზა მცდარი აღმოჩნდა, მაშინ გადავდივართ ახალ $\widetilde{W}_t=W_t-\mu$ დაკვირვებებზე, ხოლო μ-ს ვაფასებთ $(\Sigma W_t)/n$ სიდიდით.

პარამეტრების შეფასება. პარამეტრების პირველადი უხეში შეფასებების აგების უმარტივეს მეთოდს წარმოადგენს მომენტთა მეთოდი, რომლის თანახმადაც თეორიული მომენტები, რომელთა გამოსახულებებიც შეიცავს უცნობ პარამეტრებს, უტოლდება მათ ემპირიულ ანალოგებს და მიიღება განტოლებათა სისტემა პირველადი შეფასებების ასაგებად.

a) AR(1) პროცესი.

$$z_t = \Phi_{1t-1}+a_t.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\rho_1=\Phi_1$, მომენტთა მეთოდი გვაძლევს წინასწარ შეფასებას

$$\hat{\Phi}_1 = r_1,$$

სადაც r_1 შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტია.

ამ მოდელში σ_a^2-ის დასაჯერობის მაქსიმუმის შეფასება მოიცემა ფორმულით

$$S_a^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(W_t - \hat{\Phi}_1 W_{t-1})^2$$

b) MA(1) პროცესი.

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

წინასწარი შეფასება მომენტთა მეთოდით მოიცემა, როგორც შემდეგი განტოლების მოდულით 1-ზე ნაკლები ფესვი

$$\hat{\theta}_1^2+\frac{\hat{\theta}_1}{r_1}+1 = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვი, თუ $|r_1|<1/2$.

არსებობს პარამეტრების შეფასების უფრო ფაქიზი მეთოდებიც, რომელთა ზუსტი აღწერა მოითხოვს საკმაოდ რთულ მათემატიკურ აპარატს. პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას, თუ საჭირო შეიქნა ფაქიზი შეფასებების აგება, უმჯობესია მივმართოთ ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სპეციალისტს.

§ 5. პროგნოზირება

აქ ჩვენ შევეხებით უმთავრესად მოკლევადიანი პროგნოზირების (კვირა, თვე ან წელიწადი) მეთოდებს, საშუალო და გრძელვადიანი პროგნოზისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ რეგრესიული ანალიზის მეთოდები (იხ. თავი 17).

პროგნოზირების მარტივი ალგორითმები.

ექსპონენციალური გაგლუვება. დავუშვათ, რომ დაკვირვების შედეგად მიღებული პროცესი ან სტაციონარულია (გავიხსენოთ, რომ თუ პროცესი $z_1, z_2, \ldots$ სტაციონარულია, მაშინ Ez_t=const, Dz_t=const, $\mathrm{cov}(z_t, z_s)=f(t-s)$, ანუ პროცესი „საშუალოდ არ იცვლება"), ან მას გააჩნია დეტერმინისტული ან სტოქასტური ტრენდი.

დაკვირვებები წარმოებს t=1,2,... მომენტებში და პროგნოზის ბაზაზე დაყრდნობით. პროგნოზის ბაზა დროითი მწკრივის დაკვირვებულ მნიშვნელობებს ეწოდება, პროგნოზის ჰორიზონტი კი მომავლის ის მომენტია, რომლებისთვისაც გვინდა უცნობი z_t-ის მნიშვნელობების „გამოცნობა".

პროგნოზირების უმარტივეს და ტრადიციულ მეთოდს ე.წ. მცოცავი საშუალოს მეთოდი წარმოადგენს.

განვიხილოთ სიდიდე

$$m_t = \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{t-n+1} z_i\,, \tag{19.12}$$

ანუ

$$m_t = m_{t-1} + \frac{1}{n}(z_t - z_{t-n}), \tag{19.13}$$

როგორც ვხედავთ, ხდება n წარსული დაკვირვების გასაშუალოება. პროგნოზად (t მომენტიდან l სიგრძის ჰორიზონტით) მიღებულია

$$f_t(l) = m_t, \qquad l = 1, 2, \ldots\,. \tag{19.14}$$

ამ მეთოდის განვითარებაა ე.წ. ექსპონენციალური გაგლუვება – მარტივი ექსპონენციალურად შეწონილი საშუალო

$$m_t = \alpha z_t + (1-\alpha) m_{t-1}, \tag{19.15}$$

სადაც $0<\alpha<1$, $m_1=z_1$ (m_1-ის როლში შეიძლება გამოვიდეს რაიმე სხვა სიდიდეც, რომელიც ჩვენს მიერ არის შესარჩევი). α–ს გაგლუვების პარამეტრი ჰქვია. თუ α დიდია (ე.ი. ახლოსაა 1-თან), მაშინ (19.15)-ით განსაზღვრული m_t სიდიდე მგრძნობიარეა ახალი დაკვირვების გამოჩენის მიმართ. თუ α მცირეა (ახლოსაა 0-თან), მაშინ m_t გაცილებით უფრო მდგრადია. ასე რომ, გაგლუვების პარამეტრის შერჩევაზე დიდადაა დამოკიდებული მთელი პროცედურა (19.15).

(19.13) ფორმულის მსგავსად (19.15) შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$m_t = m_{t-1}+\alpha(z_t-m_{t-1}). \tag{19.16}$$

პროგნოზისთვის გვაქვს

$$f_t(l) = m_t,\ \ l=1, 2, \dots . \tag{19.17}$$

შემოვიღოთ ერთნაბიჯიანი პროგნოზის მიმდინარე შეცდომის ცნება, e_t,

$$e_t = z_t-f_{t-1}(1) = z_t-m_{t-1}. \tag{19.18}$$

მაშინ (19.16) ასე გადაიწერება

$$m_t = m_{t-1}+\alpha e_t. \tag{19.19}$$

ზემოთ მოყვანილი უმარტივესი მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნას სტაციონარული მიმდევრობების პროგნოზირების დროს. იმ შემთხვევაში, როდესაც z_t, $t=1,2,\dots$ დაკვირვებად პროცესს გააჩნია წრფივი ტრენდი, მაშინ ექსპონენციალური გაგლუვების შესაბამისი მოდიფიკაციით მიიღება პროგნოზირების მარტივი, მაგრამ საკმაოდ ეფექტური პროცედურები.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მოდელი.

ჰოლტის მეთოდი. ჰოლტის მეთოდი გამოიყენება იმ შემთხვევაში, თუ დაკვირვებების (z_t-ების) გენერირება ჰიპოთეტურად ხდება შემდეგი მოდელის მიხედვით:

$$z_t = \mu+\lambda_t t+a_t. \tag{19.20}$$

სადაც λ_t წრფის საკუთხო კოეფიციენტია. შევნიშნოთ, რომ საკუთხო კოეფიციენტი იცვლება $(t,t+1)$ ინტერვალში, რაც განასხვავებს ამ მოდელს ჩვეულებრივი წრფივი რეგრესიის მოდელისაგან. a_t შემთხვევითი შეცდომებია ნულოვანი საშუალოთი.

მეთოდი ეფუძნება λ_t პარამეტრის შეფასებას b_t კოეფიციენტის საშუალებით, რომელიც თავის მხრივ (m_t-m_{t-1})-სა და b_{t-1}-ის შეწონილი საშუალოა, რაც აძლევს პროცედურას წრფივი ტრენდის წინა მნიშვნელობასთან ადაპტაციის საშუალებას.

პროცედურა ორპარამეტრიანია და მოიცემა შემდეგი სისტემით

$$m_t = Az_t+(1-A)(m_{t-1}+b_{t-1}), \tag{19.21}$$

$$b_t = B(m_t-m_{t-1})+(1-B)\, b_{t-1},$$

სადაც $0<A,\ B<1$, m_1 და b_1 შესარჩევია. მაგალითად, $m_1=z_1$, $b_1=0$.

პარამეტრები A და B აირჩევიან გარკვეული კრიტერიუმის მიხედვით, რაზეც ქვემოთ გვექნება საუბარი.

პროგნოზს აქვს სახე

$$f_t(l) = m_t+b_t l. \quad\quad l=1, 2, \dots \tag{19.22}$$

ბრაუნის ორმაგი გაგლუვების მეთოდი. ეს მეთოდი საკმაოდ ცნობილი მეთოდია და რიგ შემთხვევებში კარგ პროგნოზს იძლევა. პროცედურა, რომელიც შემოგვთავაზა ბრაუნმა, ეფუძნება მის ორიგინალურ გამოკვლევას. ამ მეთოდის დასაბუთება სცილდება ჩვენს მიზნებს. შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ მეთოდს საფუძვლად უდევს ორმაგი ექსპონენციალური გასაშუალოება:

პირველი გასაშუალოება

$$m_t = \alpha z_t + (1-\alpha) m_{t-1},$$

და მეორე გასაშუალოება

$$\overline{m}_t = \alpha m_t + (1-\alpha)\overline{m}_{t-1},$$

პროგნოზი მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$f_t(l) = 2m_t - \overline{m}_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}(m_t - \overline{m}_t)l, \quad l=1, 2, \dots .$$

როცა $l=1$, პროგნოზს აქვს მარტივი სახე

$$f_t(1) = \frac{(2-\alpha)m_t - \overline{m}_t}{1-\alpha}.$$

როგორც ვხედავთ, მეთოდი ერთპარამეტრიანია. პარამეტრის მნიშვნელობის შერჩევა ხდება პროგნოზის სიზუსტის სხადასხვა საზომის მინიმიზაციის პირობიდან.

§ 6. პროგნოზის სიზუსტის საზომები

განვიხილოთ პროგნოზის სიზუსტის გაზომვის სხვადასხვა ფართოდ გავრცელებული მახასიათებლები.

გავიხსენოთ, რომ t-ურ მომენტში ერთნაბიჯიანი პროგნოზის შეცდომა ჰქვია სიდიდეს:

$$e_t = z_t - f_{t-1}(1), \quad t=1,2,\dots .$$

აღვნიშნოთ $\overline{e}$ -ით და σ^2-ით შეცდომების საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა:

$$\overline{e} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t ,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(e_t - \overline{e}_t)^2 .$$

მაშინ სიდიდეს

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

ჰქვია შეცდომის სტანდარტული გადახრა.

გამოსახულებას

$$\mathrm{MAD} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|e_t|,$$

ეწოდება საშუალო აბსოლუტური შეცდომა.

მოხერხებულია შემდეგი მახასიათებლის შემოღება

$$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|e_t|}{z_t}\cdot 100 .$$

MAPE-ს ტიპიური მნიშვნელობების ინტერპრეტაცია მოიცემა ცხრილით

ცხრილი 19.13.

MAPE, %	ინტერპრეტაცია
10	მაღალი სიზუსტე
10–20	კარგი სიზუსტე
20–50	დამაკმაყოფილებელი სიზუსტე
50	არადამაკმაყოფილებელი სიზუსტე

შემდეგი მახასიათებელი მეტყველებს პროგნოზის ჩანაცვლებაზე

$$\mathrm{MPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{e_t}{z_t}\cdot 100\,.$$

მისი სიდიდე არ უნდა აღემატებოდეს 5%-ს.

ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ საზომს წარმოადგენს შეცდომის საშუალო კვადრატი

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2\ ,$$

და კვადრატების ჯამი

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} e_t^2\ ,$$

ისინი ხშირად გამოიყენებიან ოპტიმალური მოდელის არჩევისათვის.

დამსწავლელი შერჩევის მეთოდი. პროგნოზის მახასიათებლების (პარამეტრების) შერჩევის ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული მეთოდია დამსწავლელი შერჩევის მეთოდი. აღვწეროთ იგი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ამოკრეფა (დაკვირვებები) $z_1, z_2, \ldots, z_n$. გავყოთ ეს ამოკრეფა ორ ნაწილად: $z_1, z_2, \ldots, z_k$ და $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n$, სადაც $k<n$ რაიმე მთელი რიცხვია.

ამოკრეფის პირველ ნაწილს ვუწოდოთ დამსწავლელი, ხოლო მეორეს გამომცდელი.

დაკვირვებათა პირველ ჯგუფზე დაყრდნობით ვაფასებთ ყველა საჭირო პარამეტრს, ხოლო მეორეზე ვამოწმებთ პროგნოზის სიზუსტეს.

მაგალითად, ბრაუნის მოდელში შესაფასებელი პარამეტრია α. საწყის m_0 მნიშვნელობად ავიღოთ, მაგალითად, პირველი წევრი z_1, ან $m_0 = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ და ა.შ. ავირჩიოთ გაგლუვების ბაზა k და დავაფიქსიროთ α პარამეტრის მნიშვნელობების ბადე

$$\alpha = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ \ldots\ ;\ 0.9.$$

კომპიუტერის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს კიდევ უფრო ხშირი ბადეც განვიხილოთ.

გავაკეთოთ ერთნაბიჯიანი პროგნოზი k-ურ მომენტში $z_1, \ldots, z_k$ დაკვირვებებზე დაყრდნობით, ანუ გამოვთვალოთ $f_k(1)$. გამოვთვალოთ პროგნოზის შეცდომა

$$e_1 = z_{k+1} - f_k(1).$$

ამის შემდეგ გადავწიოთ ბაზა მარჯვენივ ერთ ნაბიჯზე, ანუ განვიხილოთ დაკვირვებები $z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}$ და გამოვთვალოთ პროგნოზი $f_{k+1}(1)$ და პროგნოზის შეცდომა

$$e_2 = z_{k+2} - f_{k+1}(1)$$

და ა.შ.

მივიღებთ $n-k$ პროგნოზის შეცდომას e_t, $t=1,2,\ldots,n-k$.

გამოვთვალოთ, მაგალითად

$$MSE = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k} e_t^2 ,$$

ან

$$MAD = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k} | e_t |,$$

ან

$$MPE = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k} \frac{e_t}{z_t} \cdot 100 .$$

ამ მაჩვენებლების შედარებით ოპტიმალურად შევარჩიოთ α პარამეტრის სიდიდე. ოპტიმალურია ის α, რომლის შესაბამისი მაჩვენებელი მინიმალურია.

ანალოგიურად შეიძლება ოპტიმალური m_0-ისა და გაგლუვების ბაზის შერჩევა.

§ 7. პროგნოზირების მეთოდოლოგია ARIMA პროცესებზე დაყრდნობით

პროგნოზირება ARIMA მოდელებზე დაყრდნობით, პირველ რიგში, გულისხმობს ARIMA ტიპის მოდელების პოსტულირებას, როგორც იმ მოდელების ზოგადი კლასისა, რომლებიც აღწერს შესასწავლ დროით მწკრივს.

ზოგადი ARIMA(p,d,q)-მოდელი მოიცავს ე.წ. სტოქასტური ტრენდის შემთხვევას, ანუ ისეთი ტრენდისას, რომლის ცვლილება სხვადასხვა შემთხვევით მომენტებში ხდება. ხშირად სწორედ ასეთი ტრენდი ახასიათებს ეკონომიკურ დროით მწკრივებს.

მიუხედავად ამისა, შეიძლება არსებობდეს მიზეზები, რომლებიც მიუთითებენ, რომ პროცესს აქვს დეტერმინისტული მდგენელი. ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილია დეტერმინისტული ფუნქცია f_t, რომელიც იღებს მონაწილეობას მონაცემების ფორმირებაში $z'_t=f_t+z_t$. მაშინ ჯერ გადავდივართ $z_t=z'_t-f_t$ პროცესზე და შემდეგ განვაგრძობთ ამ მონაცემების კვლევას. ასეთ ქმედებას ჩვენ რეგულარიზაციას ვუწოდებთ. არსებობს დეტერმინისტული ტრენდის გამოყოფის სტანდარტული მეთოდები, რომლებზეც ჩვენ არ შევჩერდებით.

ადვილია დეტერმინისტული პოლინომური ტრენდის გათვალისწინება ზოგად მოდელში.

ამისათვის იხილავენ ARIMA(p,d,q) მოდელის განზოგადოებას

$$\Phi_p(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + Q_q(B)a_t, \qquad (19.23)$$

სადაც $\theta_0 \neq 0$.

მართლაც ვთქვათ, $d=1$. მაშინ $\theta_0\neq 0$ ითვალისწინებს წრფივ დეტერმინისტულ ტრენდს. ამის დასანახად, გამოვთვალოთ საშუალო

$$EW_t = E\nabla z_t = \mu_w = \frac{\theta_0}{1-\Phi_1-\cdots-\Phi_p} \neq 0.$$

მაშინ $z_t=\tilde{z}_t+\mu_w t$, სადაც $\tilde{z}_t$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Phi_p(B)\tilde{z}_t = Q_q(B)a_t.$$

მართლაც, თუ აღვნიშნავთ $\tilde{W}_t=\tilde{z}_t-\tilde{z}_{t-1}$, მაშინ $\tilde{W}_t=W_t-\mu_w$ და კვლავ ძველ შემთხვევას დავუბრუნდებით, ე.ი.

$$\Phi_p(B)\tilde{W}_t = Q_q(B)a_t.$$

გავუსწროთ მოვლენებს ცოტათი წინ და შევნიშნოთ, რომ თუ $\overline{W}$ არის $W_t=\nabla^d z_t$-ს შერჩევითი საშუალო

$$\overline{W} = \frac{\sum W}{n},$$

მაშინ მისი სტანდარტული გადახრა $\sigma(\overline{W})$ ტოლია $\left(\frac{c_0(1+r_1)}{n(1-r_1)}\right)^{1/2}$ $(1,d,0)$-პროცესებისთვის და $\left(\frac{c_0(1+2r_1)}{n}\right)^{1/2}$ $(0,d,1)$-პროცესებისთვის, სადაც c_0 z_t პროცესის შერჩევითი დისპერსია, ხოლო r_1 ერთნაბიჯიანი ავტოკორელაციაა.

მაშინ, $\theta_0=0$ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად შეიძლება შემოვიღოთ შემდეგი მარტივი კრიტერიუმი.

ვიცით, რომ

$$\frac{\theta_0-\overline{W}}{\sigma(\overline{W})} \sim N(0,1).$$

ამიტომ, თუ $\theta_0=0$, $P\{|\overline{W}|>2\sigma(\overline{W})\}<\frac{1}{20}$ (2σ-ს კანონი). ამრიგად, თუ გამოვთვლით $\overline{W}$-ს და $2\sigma(\overline{W})$-ს ზემოთ მოყვანილი ფორმულებით და აღმოჩნდება, რომ $|\overline{W}|<2\sigma(\overline{W})$, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\theta_0=0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\theta_0\neq 0$ და მაშინ ამ წერტილის შეფასებად მივიღებთ სიდიდეს

$$\hat{\theta}_0 = \overline{W}(1-\Phi_1).$$

დავუბრუნდეთ ზოგად ARIMA(p,d,q) პროცესს. ჩავთვალოთ, რომ $\theta_0=0$. მაშინ ასეთ პროცესებზე დაყრდნობილი პროგნოზირების მთელი მეთოდოლოგია შეიძლება გავყოთ შემდეგ ეტაპებად:

1. ARIMA(p,d,q) ტიპის პროცესების ზოგადი თვისებების აღწერა.
2. 1.-ზე დაყრდნობით იდენტიფიკაციის ჩატარება. აქ მთავარ იარაღს ე.წ. ავტოკორელაციური და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციების კვლევა წარმოადგენს.
3. უცნობი პარამეტრების პირველადი შეფასება და საპროგნოზო ფუნქციების და მათი ალბათური საზღვრების დადგენა.
4. პარამეტრების შეფასება.

5. მიღებული მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმება.

გადავიდეთ ზემომოყვანილი სქემის რეალიზაციაზე.

რადგან ARIMA ტიპის პროცესების ზოგადი აღწერა, მათი ავტოკორელაციური და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციების დახასიათება, პარამეტრების შეფასების პრობლემები და საპროგნოზო ფუნქციის გამოსახულებები ჩვენ უკვე აღწერილი გვაქვს წინა პუნქტებში, დარჩენილ ნაწილში ჩვენ შევეხებით მხოლოდ იდენტიფიკაციისა და მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმების საკითხებს.

§ 8. იდენტიფიკაცია

როგორ დავადგინოთ, რას უდრის d? თეორიულ ავტოკორელაციურ ფუნქციას, ρ_k-ს სტაციონარული პროცესებისათვის ახასიათებს ჩაქრობადობის თვისება.

ემპირიული ავტოკორელაციური ფუნქცია r_k ჰგავს თეორიულს. ამიტომ, თუ ემპირიული ავტოკორელაციური ფუნქცია არ ქრება, ეს მიგვითითებს, რომ z_t პროცესი არასტაციონარულია, თუმცა შესაძლოა, რომ ∇z_t ან რომელიმე უფრო მაღალი რიგის სხვაობა სტაციონარული პროცესი იყოს. ამასთან, არ არის აუცილებელი, რომ მცირე დაგვიანებებისთვის შერჩევითი კორელაციები დიდი იყოს.

ამრიგად, $W_t=\nabla^d z_t$ პროცესის ემპირიული ავტოკორელაციური ფუნქციის სწრაფი ჩაქრობა მიუთითებს, რომ სხვაობების საჭირო რიგი d მიღწეულია. პრაქტიკაში d=0,1 ან 2 და საკმარისია განვიხილოთ ავტოკორელაციების 20 პირველი მნიშვნელობა.

საბოლოო სტაციონარული პროცესის სახის იდენტიფიკაცია (როგორ ავირჩიოთ p და q?). იმის შემდეგ, რაც დადგინდება d-ს სიდიდე, ვსწავლობთ სათანადო სხვაობების $W_t=\nabla^d z_t$-ის ემპირიული ავტოკორელაციური და კერძო ავტოკორელაციური ფუნქციების ყოფაქცევას. აქ ვიყენებთ პუნქტ 19.1-ში მოყვანილ შესაბამის თეორიულ ფუნქციების თვისებებს (იხ. ცხრილი 19.1).

აქაც, ეკონომიკურ-ფინანსური დროითი მწკრივების ანალიზისათვის ყველაზე მნიშვნელოვანია პირველი და მეორე რიგის ARIMA პროცესები, ე.ი., როცა p და q იღებს მნიშვნელობებს 0,1 ან 2.

მივაქციოთ ყურადღება შემდეგ ფაქტს: შერჩევით ავტოკორელაციებს შეიძლება ჰქონდეთ საკმაოდ დიდი დისპერსიები და იყვნენ ერთმანეთთან ძლიერად კორელირებულნი. ამიტომ, როგორც აღნიშნავდა კენდალი, არ არის მოსალოდნელი დეტალური მსგავსება თეორიული და ემპირიული ფუნქციებისა. კერძოდ, ემპირიული ავტოკორელაციის ზომიერად დიდი მნიშვნელობები შეიძლება გამოჩნდნენ მაშინაც კი, როცა თეორიული ფუნქციები ჩაქრნენ; შეიძლება გამოჩნდნენ შეშფოთებები, ტრენდები და ა.შ.

თეორიული და ემპირიული ფუნქციები გვანან ერთმანეთს ძირითადში. ამიტომ ზუსტი იდენტიფიკაცია ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. შესაძლოა, შესასწავლი პროცესისთვის მოგვიხდეს სხვადასხვა მოდელის არჩევა. ეს მოდელები ზუსტდება შესწავლის შემდგომ ეტაპზე.

მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმება. ვთქვათ, საჭიროა შემდეგი მოდელის დიაგნოსტიკური შემოწმება:

$$\Phi_p(B)W_t = Q_q(B)a_t.$$

გამოვთვალოთ სიდიდეები

$$\hat{a}_t = \hat{Q}_q^{-1}(B)\hat{\Phi}_p(B)W_t,$$

სადაც $\hat{\Phi}_p(B)$ და $\hat{Q}_q(B)$ მცოცავი საშუალოსა და ავტორეგრესიის გარდაქმნებია, რომლებშიც (Φ,θ) პარამეტრები შეცვლილია ($\hat{\Phi}$, $\hat{\theta}$)-ით, მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებებით, $\hat{a}_t$ სიდიდეებს ნარჩენი შეცდომა ჰქვია. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ მოდელი ადეკვატურია, მაშინ

$$\hat{a}_t = a_t + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

და ე.ი. დაკვირვებათა მწკრივის ზრდის პირობებში $\hat{a}_t$ უახლოვდება თეთრ ხმაურს. ამიტომ ამ პროცესის ანალიზს მივყავართ მოდელის ადეკვატურობა-არაადეკვატურობის შემოწმებამდე.

ცნობილია ანდერსონის შედეგი, რომ თუ მოდელი ჭეშმარიტია, Φ-სა და θ-ს ზუსტი მნიშვნელობები ცნობილია, მაშინ შერჩევითი $r_k(a)$ ავტოკორელაციები, სადაც დაკვირვებების როლში უკვე a მწკრივი გამოდის, უნდა იყვნენ არაკორელირებულნი და დაახლოებით ნორმალურად განაწილებულნი 0 საშუალოთი და $\frac{1}{n}$ დისპერსიით, ანუ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ სტანდარტული გადახრით. აქედან, როგორც ყოველთვის, სტანდარტულ კრიტერიუმს მივყავართ $H_0 : r_k(a)=0$ ჰიპოთეზის შემოწმებამდე.

რადგან ჩვენ შემთხვევაში პარამეტრების (Φ,θ) ზუსტი მნიშვნელობები შეცვლილი გვაქვს მათი შეფასებებით, ეს კრიტერიუმი მცირე დაგვიანებების შემთხვევაში უნდა შეიცვალოს და სტანდარტული გადახრა უნდა ავიღოთ არა $\frac{1}{\sqrt{n}}$-ის, არამედ $\frac{\Phi^2}{\sqrt{n}}$-ის ან $\frac{\theta^2}{\sqrt{n}}$-ის ტოლი, შესაბამისად, AR(1)-ის ან MA(1)-ის შემთხვევაში. დიდი დაგვიანებისთვის საზღვარი $\frac{1}{\sqrt{n}}$ საკმაოდ კარგია. ამრიგად, ვღებულობთ შემდეგ ზოლებს ჰიპოთეზის შესამოწმებლად (იხ. ნახ. 19.21).

მეორე, უფრო სრულყოფილი მეთოდი მოდელის ადეკვატურობის შესამოწმებლად, ეფუძნება χ^2 კრიტერიუმის გამოყენებას.

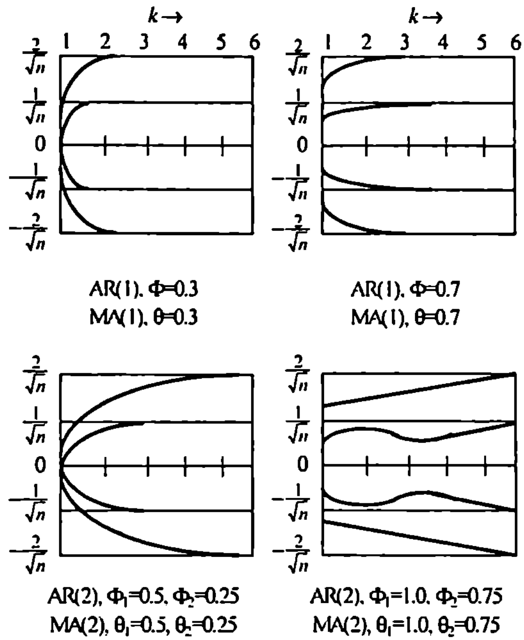
ვაფიქსირებთ რაღაც K რიცხვს. იგი, როგორც წესი, აიღება 20–25-ის ფარგლებში. შემდეგ ვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ თუ მოდელი ადეკვატურია, მაშინ გამოსახულება

$$Q = n\sum_{k=1}^{K} r_k^2(\hat{a})$$

განაწილებულია მიახლოებით როგორც $\chi^2(K-p-q)$, სადაც $n=N-d$ – იმ მონაცემთა რაოდენობაა (ეს ეხება, რასაკვირველია, W-ს), რომელიც გამოვიყენეთ მოდელის მოსარგებად.

ამ სტატისტიკის გამოთვლის შემდეგ, მისი მნიშვნელობა უნდა შედარდეს χ^2 განაწილების 90% ან 95% (ან სხვა მისაღებ) კვანტილს.

χ^2-სთვის 23-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით 90% და 95% კვანტილები ტოლია 32.0 და 35.2-ის. თუ მიღებული რიცხვები ცხრილიდან ნაპოვნ რიცხვებზე პატარაა, მოდელის ადეკვატურობაში ეჭვი არ შეგვაქვს.



ნახ. 19.21.

მესამე მეთოდი დამყარებულია კუმულატიური პერიოდოგრამის გამოყენებაზე. ეს მეთოდი გვაძლევს საშუალებას, გავარკვიოთ სწორად არის თუ არა გათვალისწინებული დაკვირვებულ მწკრივში მონაცემების პერიოდული ხასიათი. ამ კუთხით, ავტოკორელაციური ფუნქცია ცუდი ინდიკატორია.

განვმარტოთ საჭირო სტატისტიკა. ამისთვის გამოვთვალოთ სიდიდე

$$I(f_i) = \frac{2}{n}\left[\left(\sum_{t=1}^{n} a_t \cos 2\pi f_i t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} a_t \sin 2\pi f_i t\right)^2\right],$$

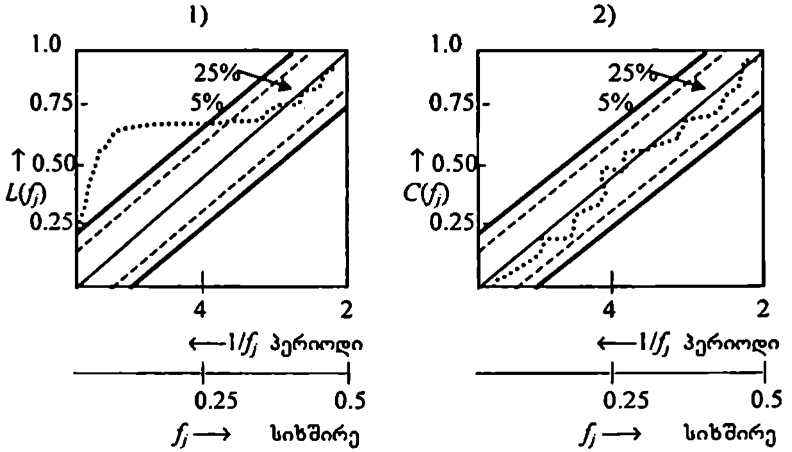
სადაც $f_i=\frac{i}{n}$ არის სიხშირე. $I(f_i)$ წარმოადგენს (a_t) მწკრივის პერიოდოგრამას.

განვიხილოთ ბარტლეტის ნორმირებული კუმულატიური პერიოდოგრამა

$$C(f_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} I(f_i)}{ns^2},$$

სადაც s^2 σ_a^2-ის შეფასებაა.

თუ მოდელი ადეკვატურია და მისი პარამეტრები ზუსტადაა ცნობილი, მაშინ a პროცესს, გამოთვლილს დაკვირვებებიდან, ექნებოდა თეთრი ხმაურის თვისებები, ანუ $C(f_j)$ მცირედ გაიფანტებოდა წრფის მიმართ, რომელიც გადის (0,0) და $(\frac{1}{2},1)$ წერტილებზე და წარმოადგენს თეთრი ხმაურის ნორმირებულ კუმულატიურ სპექტრს (თეთრი ხმაურისთვის ეს თვისება ცნობილია). მართალია, ჩვენ a-ს მაგივრად შეგვიძლია გამოვთვალოთ მხოლოდ $\hat{a}$, მაგრამ ზემოაღნიშნული თვისება საკმაოდ დიდი n-სთვის და ადეკვატური მოდელისთვის $\hat{a}$-ის საშუალებით აგებულ პერიოდულ კუმულატიურ პერიოდოგრამასაც უნდა ჰქონდეს.



ნახ. 19.22.

ალბათური ურთიერთდამოკიდებულება კუმულატიურ პერიოდოგრამასა და კუმულატიურ სპექტრს შორის იგივეა, რაც ემპირიულ და თეორიულ განაწილების ფუნქციებს შორის. ამიტომ სათანადო ადეკვატურობის ჰიპოთეზის შესამოწმებლად იყენებენ კოლმოგოროვის კრიტერიუმს. სარგებლობენ რა ამ კრიტერიუმით, თეორიული წრფის მახლობლად ატარებენ სასაზღვრო ზოლებს შემდეგი წესით: პრაქტიკულად ილებენ $q=\frac{n-2}{2}$ ან $\frac{n-1}{2}$ იმისდა მიხედვით, n ლუწია თუ კენტი. შემდეგ, დააფიქსირებენ რა ε-ს, პოულობენ K_ε-ს შემდეგი ცხრილიდან

ცხრილი 19.14.

ε	0.01	0.05	0.10	0.25
K_ε	1.63	1.36	1.22	1.02

ამის შემდეგ აგებენ ზოლს, რომლის შუაში მდებარეობს (0,0) და $(\frac{1}{2},1)$ წერტილებზე გამავალი წრფე, ხოლო ზოლის ზედა და ქვედა საზღვრები არის ამ წრფის პარალელური წრფეები, რომლებიც დაშორებულია მისგან $\frac{K_\varepsilon}{\sqrt{q}}$ მანძილით (მანძილი იზომება ორდინატთა ღერძზე). მიღებულ საზღვრებს ის თვისება გააჩნია, რომ ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კუმულატიური პერიოდოგრამა ამ საზღვრებიდან გავიდოდა მხოლოდ შემთხვევათა 100ε%-ში. ამიტომ ამ საზღვრებს უწოდებენ 100ε%-ულ წრფეებს. მოვიყვანოთ საილუსტრაციო ნახატები.

თუ სურათი ისეთია, როგორც ნახ. 19.22-ის 1) შემთხვევაში, ადეკვატურობის ჰიპოთეზა უკუიგდება, ხოლო 2) შემთხვევაში – მიიღება.

თავი დავასრულოთ ორი პრობლემის განხილვით, რომელთა გადაწყვეტა, არსებითად, დროითი მწკრივების თეორიას ეყრდნობა.

1. მყიდველობითი უნარიანობის პარიტეტის დადგენის პრობლემა. ერთიანი ფასდადების კანონი ამტკიცებს, რომ თუ ერთი და იგივე საქონლის ერთნაირი რაოდენობა ორ სხვადასხვა ქვეყანაში იყიდება, შესაბამისად, P_1 და P_2 ფასად, მაშინ

$$P_1 = P_2 E_{12}, \tag{19.24}$$

სადაც E_{12} წარმოადგენს ორი შესაბამისი ვალუტის გაცვლის კურსს. ან, თუ გაზომვები წარმოებს ლოგარითმულ სკალაზე, მაშინ

$$p_1 - p_2 - e_{12} = 0, \tag{19.25}$$

სადაც $p_1=\ln P_1$, $p_2=\ln P_2$ და $e_{12}=\ln E_{12}$. თუ p_1 და p_2 წარმოადგენს ფასების ინდექსებს, შესაბამისად, ამ ორ ქვეყანაში, მაშინ სულაც არ არის ცხადი, რომ ადგილი ექნება იგივე (19.25) კანონზომიერებას. ამის მიზეზი ისაა, რომ სხვადასხვა ქვეყანაში ფასების ინდექსი სხვადასხვანაირად გამოითვლება და სამომხმარებლო კალათებიც სხვადასხვაა. მაგრამ, თუ (19.25) თანაფარდობა მიახლოებით მაინც არ სრულდება, ეკონომიკა განიცდის ზეწოლას, რომელიც მიმართულია ფასების დონის ან გაცვლითი კურსის ცვლილებაზე. ამიტომ აქ უნდა მოველოდეთ სისტემის ისეთ ყოფაქცევას, რომელიც მას საშუალებას აძლევს შეეგუოს ეკონომიკურ გარემოს.

ამ თვალსაზრისით, საინტერესოა გამოვარკვიოთ, რა ფორმით სრულდება (19.25) კანონზომიერება, ე.ი. გამოვიყვანოთ ე.წ. მყიდველობითი უნარიანობის პარიტეტი.

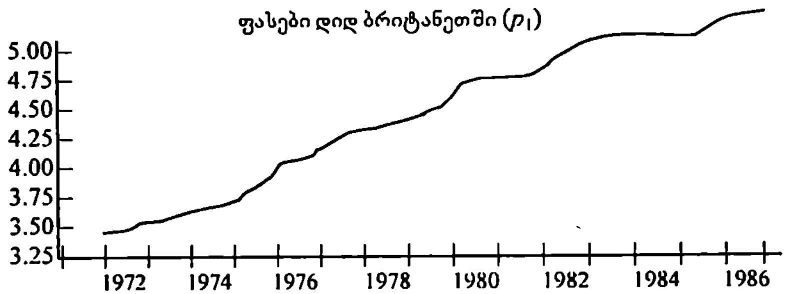
ჩვენ მოგვყავს ს. იოჰანსენისა და კ. ჟუზელიუსის მიერ კომპლექსური მეთოდებით შესწავლილი რეალური მონაცემები, რომლით სარგებლობის საშუალება მათ მისცა კ. უოლისმა. ისინი წარმოადგენენ დიდი ბრიტანეთის საბითუმო ფასების p_1 ინდექსის; გარე ბაზრის სავაჭრო-შეწონილი p_2 ინდექსისა და მოქმედი გაცვლითი კურსის e_{12}-ის (ფუნტი სტერლინგი/ეფროდოლარი) კვარტალურ (I კვარტალი, 1963 წ. – III კვარტალი, 1972 წ.) მონაცემებს. გარდა ამისა, ანალიზში ჩართულია დიდი ბრიტანეთის მთავრობის სამთვიანი სახაზინო ვალდებულებების განაკვეთი i_1 და სამთვიანი ევროდოლარის საპროცენტო განაკვეთი i_2 (i_1-სა და i_2-ის გაზომვები ისევ ლოგარითმულ სკალაზე წარმოებს). მათი გათვალისწინება აიხსნება იმით, რომ ბაზრის

მოლოდინი გაცვლითი კურსის ცვლილებებზე განსაზღვრავს საპროცენტო განაკვეთის მიმდინარე ცვლილებებს

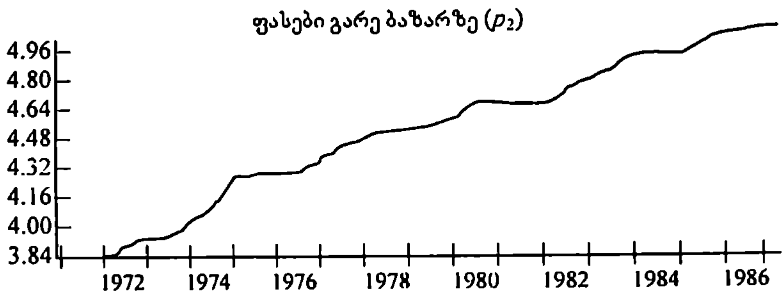
$$i_{1t}-i_{2t} = E_t(e_{12,t+1}),$$

თუ ორ ქვეყანას შორის კაპიტალი შეზღუდვების გარეშე მოძრაობს. აქ $E_t(\cdot)$ პირობითი მათემატიკური ლოდინია პირობაში, რომ ცნობილია t მომენტამდე წინა მონაცემები.

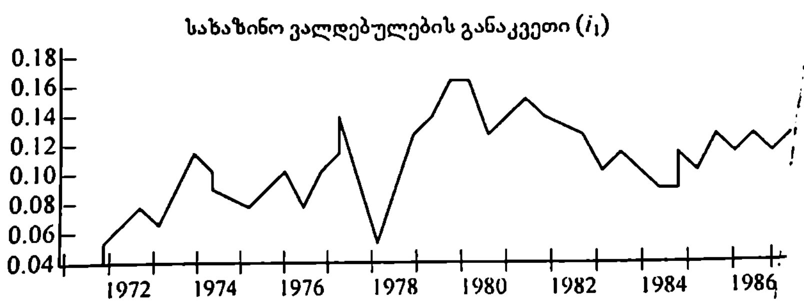
მოგვყავს ხუთივე ფაქტორის მონაცემების წარმოდგენები აბსოლუტური დონეებისათვის.



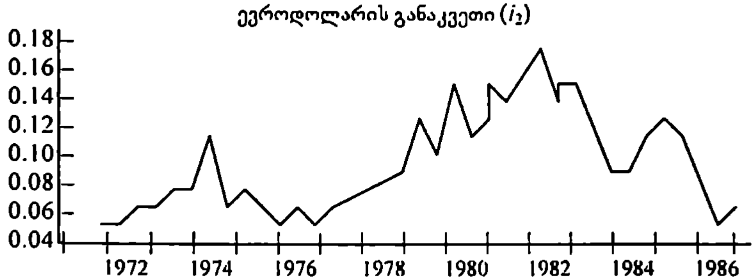
ნახ. 19.23



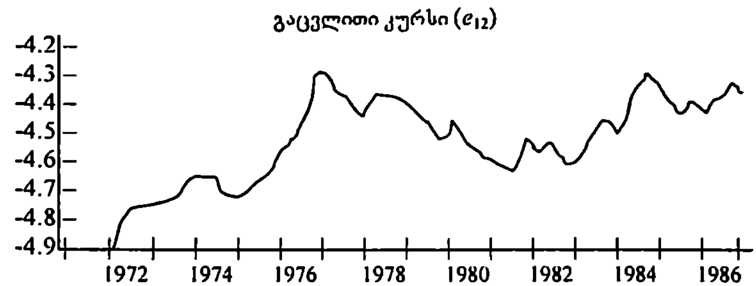
ნახ. 19.24



ნახ. 19.25



ნახ. 19.26.



ნახ. 19.27.

ამ მონაცემების „გასწორება" შესაძლებელი აღმოჩნდა მეორე რიგის ავტორეგრესიის მოდელით. ამისათვის გამოყენებული იყო ყველა შესაბამისი რეკომენდაცია, რომელსაც დროითი მწკრივების ანალიზის ზემოთ მოყვანილი მეთოდები იძლევა. გათვალისწინებული იყო როგორც სეზონური კომპონენტა, ასევე მუდმივი შემადგენელი წევრი.

ჩანს, რომ მოყვანილი მონაცემები არ აკმაყოფილებენ (19.25) თანაფარდობას. ამიტომ გასარკვევია, თუ რა ფორმით არსებობს (ან არსებობს კი?) „მდგრადი" გრძელვადიანი წრფივი კავშირები p_1, p_2 და e_{12} სიდიდეებს შორის. უნდა შემოწმდეს, მაგალითად, არის თუ არა წრფივი კომბინაცია $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t}$ სტაციონარული. თუ აღმოჩნდა, რომ ის მართლაც სტაციონარულია, მაშინ მყიდველობითი უნარიანობის პარიტეტი ნიშნავს სწორედ $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t}$ შემთხვევითი მიმდევრობის სტაციონარულობას.

სტატისტიკურმა ანალიზმა აჩვენა, რომ განხილული ხუთგანზომილებიანი პროცესი $x_t=(p_{1t}, p_{2t}, e_{12,t}, i_{1t}, i_{2t})$ არასტაციონარულია, ხოლო მისი პირველი სხვაობა Δx_t უკვე სტაციონარულია. დადასტურდა სტატისტიკური ჰიპოთეზა, რომ ერთი და იგივე მომენტში ამ პროცესის კომპონენტთა შორის ორი წრფივი კომბინაცია სტაციონარულია და ორივეს სახე აღიწერება

$$ap_{1t} - ap_{2t} - ae_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t},$$

გამოსახულებით, სადაც a, c და d მუდმივებია, რომლებიც საჭიროებენ იდენტიფიცირებას. დამატებითმა სტატისტიკურმა ანალიზმა ცხადყო, რომ $i_{1t} - i_{2t}$ (ე.ი. $a=0$, $c=1$, $d=-1$) სტაციონარულია, ხოლო

$$p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t}$$

(ე.ი. a=1 და c=d=0) არაა სტაციონარული და პარიტეტს ამ წრფივი კომბინაციის სტაციონარულობის ფორმით ადგილი არა აქვს. გაირკვა, რომ

სტაციონარულია წრფივი კომბინაცია $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t}$, (19.26)

რომელშიც c და d არ არის იდენტიფიცირებული. გამოვლენილია მხოლოდ, რომ ან c, ან d უნდა იყოს ნული. სწორედ (19.26) გამოსახულებით მოიცემა მყიდველუნარიანობის პარიტეტის მოდიფიცირებული სახე. ცხადია, რომ ეკონომიკური ანალიზი აქ არაა დასრულებული და ავტორები გვთავაზობენ სტატისტიკურ მეთოდებს c და d კოეფიციენტების იდენტიფიკაციისათვის.

მოვიყვანოთ დასკვნები:

1) მყიდველობითი უნარიანობის პარიტეტი (19.25) ფორმით, ე.ი. $p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t}$=0, არ სრულდება.

2) მყიდველობითი უნარიანობის პარიტეტის მოდიფიცირებული სახეა: შემთხვევითი პროცესი $p_{1t}-p_{2t}-e_{12,t}+ci_{1t}+di_{2t}$ სტაციონარულია. ეს კი იმაზე მიუთითებს, რომ მდგრად გრძელვადიან კავშირს აღწერს დიდი ბრიტანეთის ფასების p_{1t}, მის გარე ბაზარზე ფასების p_{2t}, გაცვლითი კურსის $e_{12,t}$, დიდი ბრიტანეთის მთავრობის სამთვიანი სახაზინო ვალდებულებების განაკვეთის i_{1t} და სამთვიანი ევროდოლარების საპროცენტო განაკვეთის i_{2t} მოყვანილი წრფივი კომბინაცია.

იმის გამო, რომ სტაციონარულობის დროს პროცესის საშუალო არ არის დამოკიდებული დროზე და მუდმივია, მყიდველობითი უნარიანობის მოდიფიცირებულ პარიტეტს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია:

$$\text{საშუალოდ } p_{1t} - p_{2t} - e_{12,t} + ci_{1t} + di_{2t} = \text{const}$$

(ე.ი. ამ წრფივი კომბინაციის მათემატიკური ლოდინი მუდმივია), ან (19.25)-თან შედარებისათვის უფრო მოხერხებული სახით წარმოვადგინოთ:

$$\text{საშუალოდ } \bar{p}_{1t} - \bar{p}_{2t} - \bar{e}_{12,t} + c\bar{i}_{1t} + d\bar{i}_{2t} = 0,$$

სადაც ხაზიანი სიდიდეები წარმოადგენენ შესაბამის სიდიდეთა ცენტრირებულ მნიშვნელობებს, ე.ი. მათ აკლდებათ მათი საშუალოები. აქედან ჩანს, რომ დამატებით (19.25)-თან პარიტეტის გამოსახულებაში შემოვიდა i_{1t} და i_{2t} განაკვეთები და ნულთან ტოლობა შეიცვალა საშუალოდ ნულთან ტოლობით, სიდიდეები კი ცენტრირებული სიდიდეებით.

3) განხილულ მოდელურ 5-განზომილებიან მეორე რიგის ავტორეგრესიის არასტაციონარულ პროცესს $x_t=(p_{1t}, p_{2t}, e_{12,t}, i_{1t}, i_{2t})$ აქვს სტაციონარული პირველი სხვაობები Δx_t და ერთი და იგივე მომენტში მისი კომპონენტების ორი წრფივი კომბინაცია $i_{1t}-i_{2t}$ და $p_{1t}-p_{2t}-e_{12,t}+ci_{1t}+di_{2t}$ სტაციონარულია.

ასეთი ტიპის ავტორეგრესიის პროცესებს უწოდებენ კოინტეგრირებულს. საზოგადოდ, ავტორეგრესიის l-განზომილებიანი პროცესი $x_t=(x_{1t},x_{2t},\dots,x_{lt})$ კოინტეგრირებულია, თუ მისი პირველი ნაზრდები Δx_t სტაციონარულია და მოიძებნება მისი კომპონენტების ერთი ან რამდენიმე წრფივი კომბინაცია, რომელიც სტაციონარულია.

კოინტეგრაციის ცნება ემყარება მოსაზრებას, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში მრავალგანზომილებიანი პროცესის არასტაციონარულობა გამოწვეულია იმით, რომ ზოგიერთ მის კომპონენტს საერთო სტოქასტური ტრენდი გააჩნია, რომლის გამორიცხვა შესაძლებელია კომპონენტთა გარკვეული წრფივი კომბინაციის აღებით, რის შედეგად ეს წრფივი კომბინაცია სტაციონარული ხდება. კოინტეგრირებული პროცესები დიდ ყურადღებას იმსახურებენ დროითი მწკრივების ეკონომეტრიკაში და მათ წარმატებით იყენებენ ხანგრძლივი ეკონომიკური კანონზომიერებების დასადგენად.

2. ბანკის ლიკვიდურობის პრობლემა. რეალურ სამყაროში ეკონომიკური სუბიექტები მრავალმხრივ ურთიერთობაში არიან ერთმანეთთან. ამ ურთიერთობის შედეგად მათ დროდადრო წარმოექმნებათ ფულადი სახსრების უკმარისობა და უჩნდებათ ამ სახსრების მოპოვების (სესხების) პრობლემა, ზოგჯერ კი პირიქით, აღმოაჩნდებათ (დროებით) ზედმეტი სახსრები, რომელთა დაბანდება (გასესხება) ეკონომიკურად მომგებიანია. იქმნება ფულადი სახსრების ბაზარი, რომელშიც მსესხებელი მყიდველის, ხოლო გამსესხებელი (კრედიტორი) გამყიდველის როლში წარმოგვიდგება. ძირითად შუამავალს ამ ბაზარზე ბანკი წარმოადგენს. იგი ერთდროულად როგორც მყიდველის, ისე გამყიდველის როლში გამოდის: მოიზიდავს თავისუფალ სახსრებს კრედიტორებისაგან და სთავაზობს სახსრებს სესხის სახით თავის კლიენტებს. როგორც წესი, კომერციული ბანკები იზიდავენ დიდ თანხებს მოკლევადიანი დეპოზიტების სახით მოსახლეობისაგან და სხვა საკრედიტო დაწესებულებებისაგან და გასცემენ გრძელვადიან კრედიტებს საწარმოებზე და სხვა ორგანიზაციებზე.

ბანკი მოგებას ღებულობს იმის ხარჯზე, რომ გაცემული კრედიტის პროცენტული განაკვეთი (ღირებულება) უფრო მაღალია, ვიდრე მოზიდული დეპოზიტებისა, ამიტომ ბანკი დაინტერესებულია შემოსული სახსრების რაც შეიძლება დიდი ნაწილი იქნას დაბანდებული კრედიტის სახით. მეორეს მხრივ, ბანკს მუდმივად უნდა გააჩნდეს სახსრების გარკვეული მარაგი, რათა მეანაბრეების მოთხოვნისთანავე შეძლოს საჭირო თანხის გაცემა. სახსრებს, რომლებიც ადვილად შეიძლება გადაცვლილ იქნას ნაღდ ფულზე, ლიკვიდური (სწრაფადრეალიზებადი) სახსრები ეწოდება. ბანკი ლიკვიდურად ითვლება, თუ მას ყოველ მომენტში მოეპოვება ლიკვიდური სახსრების საკმარისი რაოდენობა. ადვილი მისახვედრია, რომ ჭარბი რაოდენობით ლიკვიდური სახსრების დაგროვება ამცირებს ბანკის შემოსავალს და უარყოფითად მოქმედებს მისი საქმიანობის ეფექტურობაზე.

ლიკვიდურობის მართვა გულისხმობს ლიკვიდური სახსრების იმ მინიმალური დონის განსაზღვრას, რომელიც უზრუნველყოფს ბანკის ლიკვიდურობას. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა ლიკვიდური სახსრების მოძრაობის ძირითად მექანიზმებში გარკვევა, კერძოდ, რა სახის საქმიანობა წარმოშობს ლიკვიდური საშუალებების დეფიციტს ან, პირიქით, სიჭარბეს.

ჩატარებულმა გამოკვლევებმა ცხადყვეს, რომ ლიკვიდურობის არასაკმარისი დონე ხშირად პირველი ნიშანია იმისა, რომ ბანკი აწყდება სერიოზულ ფინანსურ სიძნელეებს. ამ დროს იგი კარგავს დეპოზიტებს, რაც ამცირებს მის ნაღდ ფულად საშუალებებს და აიძულებს განთავისუფლდეს ყველაზე უფრო ლიკვიდური ფასიანი ქაღალდებისაგან. სხვა ბანკები არც თუ დიდი ხალისით აძლევენ გაკოტრების საზღვარზე მყოფ ბანკს სესხს დამატებითი საწინდარის გარეშე ან სთავაზობენ სესხს უფრო მაღალი საპროცენტო განაკვეთით, რაც კიდევ უფრო ამცირებს ბანკის შემოსავალს.

ლიკვიდურობის მართვა გადაიქცა ბანკის მნიშვნელოვან ძირითად ამოცანად, რადგანაც ბანკი შეიძლება დახურული იქნას ლიკვიდური სახსრების უკმარისობის გამო, მიუხედავად იმისა, რომ ფორმალურად იგი ჯერ კიდევ გადახდისუნარიანია. გარდა ამისა, ბანკის მიერ ლიკვიდურობის მართვის კომპეტენტურობა წარმოადგენს მართვის პროცესის ძირითად მაჩვენებელს ბანკის გრძელვადიანი მიზნების მისაღწევად.

ბანკების უმრავლესობისათვის ლიკვიდურ სახსრებზე მოთხოვნა წარმოიშვება შემდეგი მიზეზებით: კლიენტის მიერ ფულის მოხსნა ანგარიშებიდან; კლიენტების მიერ კრედიტების მიღების შესახებ განაცხადის შემოტანა (ცხადია ლაპარაკია იმ განაცხადებზე, რომელთა დაკმაყოფილებაც ბანკმა გადაწყვიტა). აქ შეიძლება გამოვყოთ: განაცხადები ახალი კრედიტის მიღების შესახებ; ძველი კრედიტების მოქმედების ვადის გაგრძელება; სახსრების გამოყოფა არსებული საკრედიტო ხაზებით. კიდევ ერთ მიზეზს წარმოადგენს ბანკების მიერ სხვა ბანკებიდან მიღებული სესხების დაფარვა. სხვა მიზეზთა შორის შეიძლება გამოვყოთ ბანკის დანახარჯები სხვა არასადეპოზიტო სახსრების მოზიდვაზე; სახელმწიფო ბეგარის გადახდა და საოპერაციო ხარჯები; აქციონერებისათვის დივიდენდების გადახდა.

ლიკვიდური სახსრების მოთხოვნის დასაკმაყოფილებლად ბანკს შეუძლია მოიზიდოს ზოგიერთი პოტენციური მიწოდების წყარო. როგორც წესი, ძირითად წყაროს წარმოადგენს კლიენტებისაგან მიღებული დანაზოგები ახალ ანგარიშებზე და უკვე არსებულ ანგარიშებზე შენატანები. ამგვარი შენატანების მოდინება უფრო ინტენსიურია ყოველი თვის დასაწყისში, როდესაც ხდება ხელფასების გადახდა და თვის შუა რიცხვებში, როდესაც ხდება ანგარიშების გადახდა და ხორციელდება სხვა გადახდები. ლიკვიდური სახსრების მოწოდების კიდევ ერთი ძირითადი წყაროა ბანკის მიერ ადრე გაცემული კრედიტების დაფარვა, რაც იძლევა დამატებით სახსრებს ლიკვიდურ საშუალებებზე ახალი მოთხოვნების დასაკმაყოფილებლად. ლიკვიდური სახსრები აგრეთვე შემოდის არასადეპოზიტო საბანკო მომსახურების გაყიდვისა და ფულის ბაზარზე ფულის სესხების გზით.

ბანკის ლიკვიდური სახსრების მოთხოვნისა და მიწოდების წყაროები	
ლიკვიდური სახსრების მიწოდების წყაროები	ლიკვიდური სახსრების მოთხოვნის წყაროები
a) კლიენტებისაგან მიღებული დეპოზიტები	a') კლიენტების მიერ ფულის მოხსნა ანგარიშებიდან
b) შემოსავლები არასადეპოზიტო საბანკო მომსახურების გაყიდვიდან	b') გადახდისუნარიანი კლიენტებისაგან მიღებული განცხადები კრედიტების მიღების შესახებ
c) ადრე გაცემული კრედიტების დაფარვა	c') არასადეპოზიტო სახსრების მოზიდვაზე გადასახდელი დანახარჯები
d) ბანკის აქტივების გაყიდვა	d') ოპერაციული დანახარჯები და ბეგარის გადახდა საბანკო მომსახურების გაყიდვის პროცესში
e) სახსრების მოზიდვა ფულად ბაზარზე	c') აქციონერთათვის დივიდენდების გადახდა

ლიკვიდური სახსრების მოთხოვნისა და მიწოდების სხვადასხვა წყაროები ჯამში განსაზღვრავენ დროის ნებისმიერ მომენტში ბანკის ნეტო-ლიკვიდურ პოზიციას. ნეტო-ლიკვიდურ პოზიციას განსაზღვრულ მომენტში აქვს შემდეგი სახე:

$$N_t = \overbrace{(a+b+c+d+e)_t}^{\text{მიწოდება}} - \overbrace{(a'+b'+c'+d'+e')_t}^{\text{მოთხოვნა}} \qquad (19.27)$$

როდესაც ლიკვიდურ სახსრებზე მოთხოვნა აღემატება მიწოდებას (ე.ი. $N_t < 0$), ბანკის მმართველობა მზად უნდა იყოს ლიკვიდური სახსრების დეფიციტისათვის და

გადაწყვიტოს, როგორ და რა ვადებში მიიღოს ლიკვიდური სახსრების დამატებითი რაოდენობა. ამავე დროს, თუ დროის რაღაც მომენტში ლიკვიდური სახსრების მიწოდება მეტი იქნება მოთხოვნაზე (ე.ი.$N_t>0$), მაშინ ხელმძღვანელობა მზად უნდა იყოს ლიკვიდური სახსრების ნამატისათვის და ამავე დროს გადაწყვიტოს, როგორ და რა ვადით იქნას ინვესტირებული ეს ნამატი მომავალი დროის მომენტამდე, როდესაც შეიქმნება მათზე მოთხოვნა. რადგან დრო წარმოადგენს გადამწყვეტ ფაქტორს ლიკვიდურობის მართვაში, ბანკმა ზუსტად უნდა იცოდეს როდის და საიდან შეუძლია მიიღოს საჭირო ლიკვიდური სახსრები. როგორიც არ უნდა იყოს ლიკვიდურობის მართვის მეთოდი, ბანკში შემავალი და ბანკიდან გამავალი ფულადი ნაკადების პროგნოზირება არის ის საფუძველი, რომელზეც უნდა დამყარდეს ოპტიმალური მართვის პოლიტიკა.

ფულადი ნაკადების კონსტრუირება. დავუბრუნდეთ (19.27) ფორმულას. ნეტო ლიკვიდური პოზიციის აღმწერი პროცესი შეიძლება მოკლედ ასე გადავწეროთ:

$$L_t = \text{Liability}_t - \text{Asset}_t, \qquad (19.28)$$

სადაც Liability_t აღნიშნავს ბანკში ფულის შემავალ ნაკადს, ხოლო Asset_t – ბანკიდან გამავალ ნაკადს. ინდექსი t აღნიშნავს დროის განსახილველ მომენტს.

ის ინფორმაცია, რომელიც გააჩნია მენეჯერს ამ ნაკადების შესახებ, მატერიალიზებულია ყოველდღიურ ბალანსებში, კერძოდ, აქვს საბალანსო ანგარიშებზე დარიცხული თანხების ფორმა.

ამიტომ უპირველესი ამოცანაა გამოვყოთ საბალანსო ანგარიშების ის ნომრები, რომლებიც აღრიცხავენ სწორედ იმ თანხებს, რომელთაგანაც ფორმირდება, ერთის მხრივ, a'), b'), c'), d'), e') პუნქტებში მოცემული თანხები (ჩვენ აღნიშვნებში Liability_t პროცესი) და, მეორეს მხრივ a), b), c), d), e) პუნქტებში მოცემული თანხები (ჩვენ აღნიშვნებში Asset_t პროცესი). ამასთან, დაზუსტებულია დროის ის მომენტები, რომლებშიც ხდება ამ პროცესებზე დაკვირვება.

პროცესები Liability_t და Asset_t ფორმირდება შემდეგი პირობითი ანგარიშებიდან:

$$\text{Liability}_t = \sum_{i=1}^{L} p_i$$

(სულ L ანგარიში), სადაც p_i არის i-ურ ანგარიშზე მყოფი თანხა.

$$\text{Asset}_t = \sum_{i=1}^{A} a_i$$

(სულ A ანგარიში), სადაც a_i არის i-ურ ანგარიშზე მყოფი თანხა.

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული პროცესების ფორმირება კონკრეტული ბანკისათვის ინდივიდუალურად უნდა გადაწყდეს.

ჩვენ ხელთ გვქონდა რეალური მონაცემები, რომელთა ანალიზი და პროგნოზირება ჩატარდა ყველა ზემოაღნიშნული მეთოდის გამოყენებით: სახელდობრ, მონაცემთა გასწორება და ადეკვატური მოდელების შემუშავება, მათი პარამეტრების შეფასება, იდენტიფიკაცია, დიაგნოსტიკა და ბოლოს, ყოველივე ამის საფუძველზე, პროგნოზირება. პროგნოზირების მარტივი ალგორითმების გამოყენების გარდა ჩატარებული იყო პროგნოზირება ARIMA მოდელების გამოყენებით.

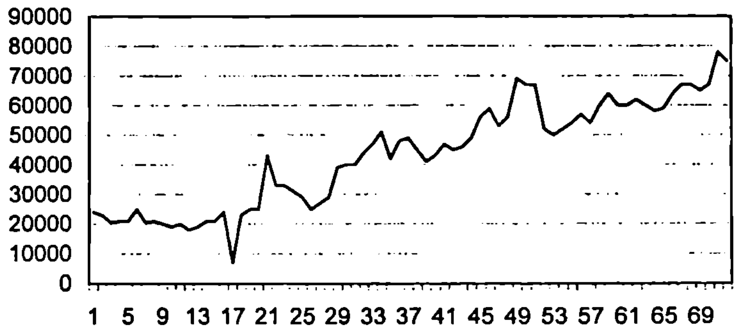
აგებულ იქნა წერტილოვანი მოკლევადიანი პროგნოზები (ერთკვირიანი, ორკვირიანი და ა.შ.) და პროგნოზების ალბათური საზღვრები. შექმნილია კომპიუტერული პროგრამები, რომლებიც საშუალებას იძლევა, რათა შემუშავებული მეთოდიკა დაინერგოს

ბანკების საქმიანობაში. ამ პროგრამების საფუძველზე შეიძლება გამოითვალოს პროგნოზებისა და მათი ალბათური საზღვრების რიცხვითი მნიშვნელობები.

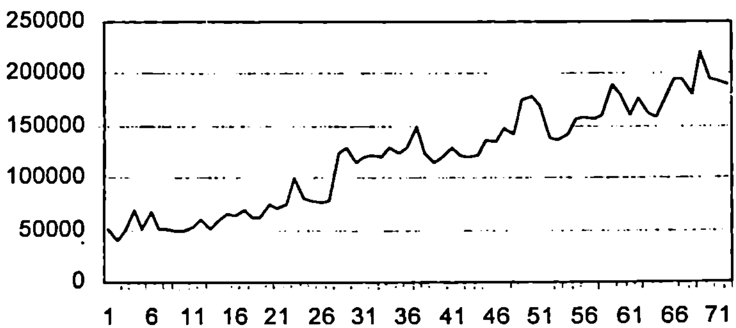
პროგნოზის შეცდომები სხვადასხვა მეთოდების გამოყენებისას იცვლებოდა 5–15%-ის ფარგლებში.

შემდეგ გრაფიკებზე მოყვანილია ხელოვნურად მოდელირებული ტიპიური პროცესები.

ნახ. 19.28-ზე მოყვანილია Asset, პროცესის რეალიზაცია, სადაც ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია დრო კვირებში, ხოლო ვერტიკალურზე – Asset, ფუნქციის მნიშვნელობები. ნახ. 19.29-ზე მოყვანილია Liability, პროცესის რეალიზაცია.

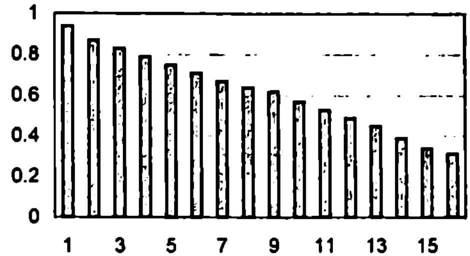


ნახ. 19.28. ბანკიდან გამავალი ნაკადი (Asset,)

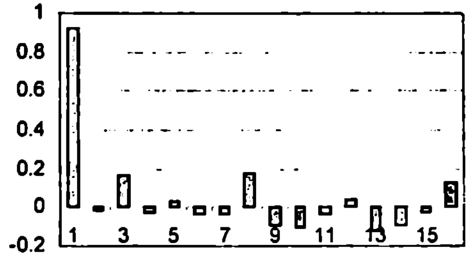


ნახ. 19.29. ბანკში შემავალი ნაკადი (Liability,)

ბანკში შემავალი ნაკადის (Liability,) ავტოკორელაციები და კერძო ავტოკორელაციები მოყვანილია ნახ. 19.30-19.31-ზე,

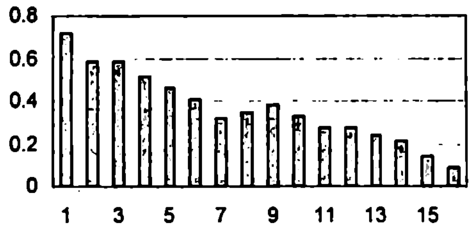


ნახ. 19.30. ბანკში შემავალი ნაკადის ($Liability_t$) ავტოკორელაციები

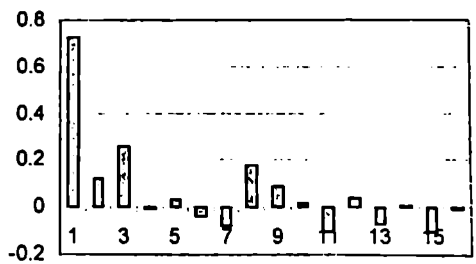


ნახ. 19.31. ბანკში შემავალი ნაკადის ($Liability_t$) კერძო ავტოკორელაციები

ანალოგიური მონაცემები ბანკის ნეტო ლიკვიდური პოზიციისათვის (N_t) მოყვანილია ნახ.19.32-19.33-ზე.

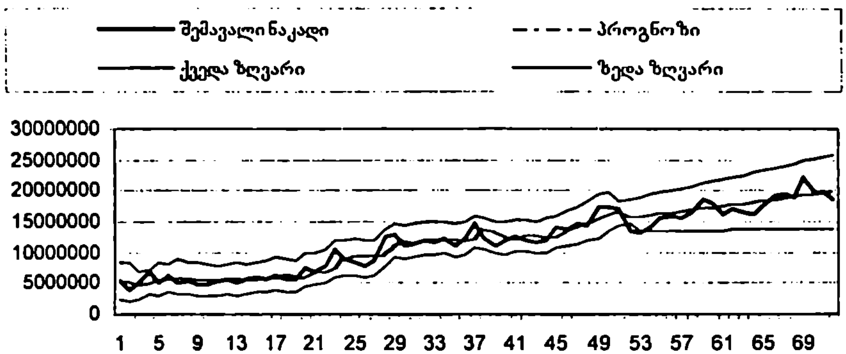


ნახ. 19.32. ბანკის ნეტო ლიკვიდური პოზიციის (N_t) ავტოკორელაციები



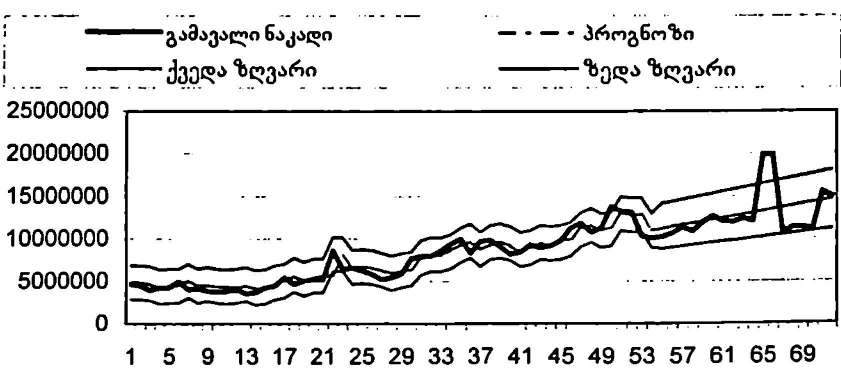
ნახ. 19.33. ბანკის ნეტო ლიკვიდური პოზიციის (N_t) კერძო ავტოკორელაციები

შემავალი ნაკადების შემთხვევაში კორელაციებზე დაკვირვება მიგვანიშნებს, რომ (0,1,1) მოდელი საკმაოდ კარგად აღწერს მოცემულ მწკრივს. შესაბამისი პროგნოზები მოყვანილია ნახ.19.34-ზე.

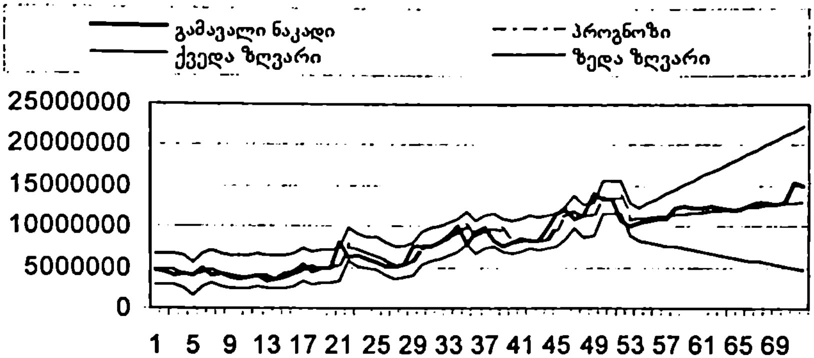


ნახ. 19.34. ბანკში შემავალი ნაკადის (Liability$_t$) საპროგნოზო ფუნქციის გამოსახულება (0,1,1) პროცესისათვის

გამომავალი ნაკადისთვის შემთხვევითობის ფაქტორი უფრო დაქვემდებარებულია რესურსების შეგნებულ მართვას, ამ ნაკადისთვის (1,1,1) მოდელი უფრო ადექვატური აღმოჩნდა, ვიდრე (1,1,0). შესაბამისი პროგნოზები მოყვანილია ნახ.19.35-19.36-ზე.

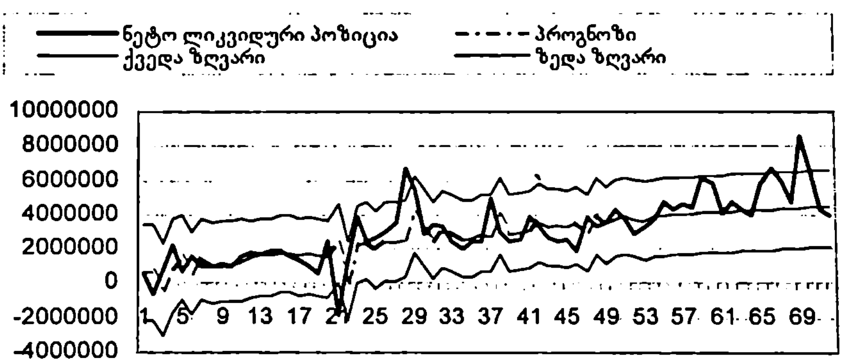


ნახ. 19.35. ბანკიდან გამავალი ნაკადის (Asset$_t$) პროგნოზი (1,1,1) პროცესისათვის



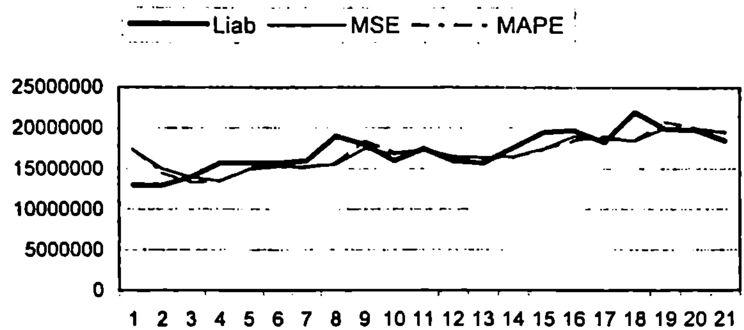
ნახ. 19.36. ბანკიდან გამავალი ნაკადის პროგნოზი (1,1,0) პროცესისათვის

როგორც მოსალოდნელი იყო, ნეტო-ლიკვიდური პოზიციის აღმწერი მწკრივი გაცილებით უფრო ძნელად დაიყვანება წრფივ მოდელზე. ჩვენი შეფასებით, ყველაზე მოხერხებული (0,1,1) სახის მოდელი აღმოჩნდა, რაც ნიშნავს, რომ მართვის ეფექტები, რომელიც (1,1,1) პროცესით აღიწერებოდა, (0,1,1) პროცესის ფონზე ნაკლებად გამოიკვეთება. პროგნოზის ხარისხიც არსებითად ჩამოუვარდება ცალკე ნაკადების ($Liability_t$) და ($Asset_t$) მიხედვით შედგენილ პროგნოზს (ნახ.19.37). აღნიშნული ფაქტი გვაფიქრებინებს, რომ სხვადასხვა ბუნების ნაკადების ერთ საერთო ჯამში გაერთიანება უარყოფით გავლენას ახდენს მოდელის სიზუსტეზე.

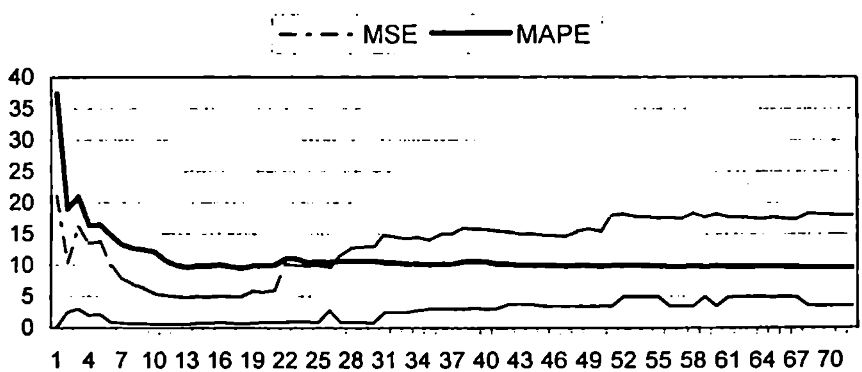


ნახ. 19.37. ბანკის ნეტო ლიკვიდური პოზიციის პროგნოზი (0,1,1) პროცესისათვის

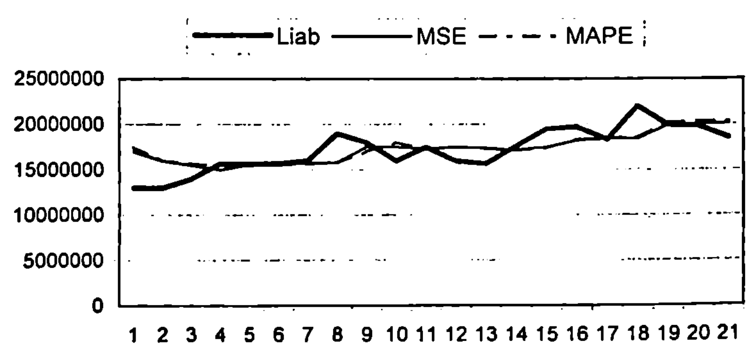
ბოლოს მოვიყვანოთ პროგნოზირების მარტივი ალგორითმებით (ექსპონენციალური გაგლუვება, ჰოლტის მეთოდი, ბრაუნის ორმაგი გასაშუალოება) მიღებული შედეგების გრაფიკები. აქვე მოცემულია პროგნოზის სიზუსტის საზომები MSE და MAPE.



ნახ. 19.38. ექსპონენციალურად გაგლუვების მეთოდი. ბანკში შემავალი ნაკადი ($Liability_t$)



ნახ. 19.39. ჰოლტის მეთოდი. ბანკში შემავალი ნაკადი ($Liability_t$)



ნახ. 19.40. ბრაუნის ორმაგი გაგლუვების მეთოდი. ბანკში შემავალი ნაკადი ($Liability_t$)

შენიშვნა.* კლასიკური სტატისტიკისაგან განსხვავებით, რომლის ძირითადი ობიექტია დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული დაკვირვებები, დროითი მწკრივების თეორია სწავლობს *დამოკიდებულ* დაკვირვებათა მიმდევრობებს, რაც ხშირ შემთხვევაში პრინციპულად განსხვავებული მეთოდების განვითარებას მოითხოვს. ჩვენ შევეხეთ ამ თეორიის იმ ნაწილს, რომელიც ეფუძნება კლასიკურ და წრფივ გაუსურ მოდელებს, რაც ფართოდ და საკმაოდ რთული მათემატიკური აპარატის გამოყენებით გადმოცემულია ანდერსონის მონოგრაფიაში [18]. ბოლო 10 წლის განმავლობაში, უპირველეს ყოვლისა, ფინანსური მოდელირების ამოცანებმა მოითხოვეს დროითი მწკრივების არაწრფივი მოდელების განხილვა. უფრო მეტიც, აუცილებელი გახდა ზოგადი სტატისტიკური მოდელების შესწავლა. მაგალითად, წრფივი მოდელები ვერ ასახავენ ფინანსური დროითი მწკრივების კლასტერულობის ეფექტს, ფრაქტალურობის მოვლენას და ა.შ. არაწრფივი მოდელები იძლევა ამ მოვლენების ადეკვატური ახსნის საშუალებას. მნიშვნელოვანია აგრეთვე, რომ რთული უწყვეტი მოდელების შესწავლა შესაძლებელია მათი დისკრეტული ანალოგების – დროითი მწკრივების არაწრფივი მოდელების შესწავლის საფუძველზე. ამასთან დაკავშირებით აქტუალური გახდა ე.წ. ზოგადი სტატისტიკური ექსპერიმენტების კრებადობის შესწავლა და საზოგადოდ შემთხვევით პროცესთა სტატისტიკის განვითარება.

ე.წ. მარტინგალური მეთოდების გამოყენებით რ. ჩიტაშვილმა და მისმა კოლეგებმა შეისწავლეს ზოგადი სტატისტიკური ექსპერიმენტის პირობებში უცნობი პარამეტრების შეფასების ამოცანები, რამაც მათ საშუალება მისცა ერთნაირი მიდგომით გაეშუქებინათ ისეთი მნიშვნელოვანი კერძო მოდელები, როგორიცაა არაერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი დაკვირვებები, წერტილოვანი პროცესები, დიფუზური პროცესები და ა.შ. [61], [68].

* * *

დროითი მწკრივების თეორია შემთხვევით პროცესთა თეორიის ღრმად და ფართოდ დამუშავებული დარგია. შედარებით მარტივი ფორმით ამ თეორიის შემდგომი გაცნობა შესაძლებელია შემდეგი წიგნების მიხედვით: [10], [36], [37], [45], [66], [74], [75], [79], [80], [84], [85], [87]. დაინტერესებულ მკითხველს თეორიის ღრმა შედეგების შესწავლაში დაეხმარება მონოგრაფიები: [18], [19], [65], [88].

დასკვნები

დაკვირვებანი რაიმე მოვლენაზე, რომლის ხასიათიც დროში ცვალებადია, წარმოქმნის დალაგებულ მიმდევრობას, რომელსაც დროითი მწკრივი ეწოდება.

დროითი მწკრივის კლასიკური მოდელის მიხედვით, იგი შედგება ოთხი ძირითადი კომპონენტისაგან: ტრენდი, ციკლური კომპონენტა, სეზონური ვარიაციები და შემთხვევი-

თი ვარიაციები. § 3-ში აღწერილია ზოგადი დროითი მწკრივიდან თითოეული კომპონენტის გამოყოფის მეთოდი. აქვე მოცემულია პროგნოზირების მარტივი ალგორითმები. §4-ში გადმოცემულია დროითი მწკრივის პროგნოზირების უფრო რთული (მაგრამ გაცილებით ზუსტი) მეთოდები, რომლებიც ეფუძნებიან წრფივ გაუსურ მოდელებს.

ბოლოს მოყვანილია ორი პრობლემის: მყიდველობითი უნარიანობის პარიტეტისა და ბანკის ლიკვიდურობის პრობლემის ანალიზი.

ინდექსები

რა არის ინდექსი. ინდექსები წარმოადგენს დროითი მწკრივების ცვალებადობის დესკრიფციულ (აღწერილობით) საზომს, რომელიც მონაცემთა დიდი მასის ერთი რიცხვით დახასიათების საშუალებას გვაძლევს. თუ დროითი მწკრივი რაიმე მოვლენის დამახასიათებელი სიდიდის დროის მიხედვით ცვლილებას გამოსახავს, შესაბამისი ინდექსი ამ ცვლილების საზომს წარმოადგენს. თუ ვიხილავთ ისეთ დროით მწკრივებს, რომლებიც გარკვეული სიდიდის რეგიონების მიხედვით ცვლილებას აღწერს, ეს ცვლილებაც შესაბამისი ინდექსით დახასიათდება.

ინდექსებს შორის უმნიშვნელოვანესია ფასების ინდექსი. ყველამ კარგად ვიცით, რომ სხვადასხვა პროდუქციასა და მომსახურებაზე ფასები ცვალებადია როგორც დროის, ისე რეგიონების მიხედვით. ფასების ინდექსი წარმოადგენს ფასთა ცვალებადობის საზომს. ფასების ინდექსების გარდა არსებობს მრავალი სხვა ინდექსი: ინდუსტრიული პროდუქციის, სასოფლო-სამეურნეო პროდუქციის, უმუშევრობის, დასაქმების, საგზაო შემთხვევებისა და სხვა. ჩვენ ყურადღებას მხოლოდ ფასების ინდექსებზე შევაჩერებთ.

ინდექსები გამოყენებას პოვებს მრავალ სიტუაციაში. მაგალითად, ფირმა, რომელიც ეძებს ახალ ადგილს თავისი საწარმოსათვის, უნდა დაინტერესდეს ამ რეგიონში სამომხმარებლო ფასების ინდექსით, რომელიც მნიშვნელოვან ფაქტორს წარმოადგენს ხელფასების ისეთი დონის დასადგენად, რომელიც აუცილებელია მოცემული რეგიონისათვის; ორგანიზაციები, რომლებიც დაინტერესებული არიან საგზაო უსაფრთხოების დონის ამაღლებით, უნდა დაინტერესდნენ საგზაო შემთხვევების ინდექსებით. მრავალი შრომითი კონტრაქტი შეიცავს ე.წ. „ესკალატორულ“ წინასწარ შეთანხმებას იმის შესახებ, რომ მოხდება ხელფასების კორექტირება სამომხმარებლო ფასების ინდექსის მიხედვით.

ფასების ინდექსები. როდესაც ვინტერესდებით ფასების ცვლილებით, ჩვენთვის მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ ისეთი საქონლის ფასებს, რომელთა ცვლილება მნიშვნელოვან ზეგავლენას ახდენს მოსახლეობის ფართო ფენებზე და არა რაღაც გარკვეულ ჯგუფზე. მაგალითად, ფიროსმანის ნახატების ფასი ბოლო 80 წლის მანძილზე მნიშვნელოვნად გაიზარდა, რამაც, რა თქმა უნდა ზემოქმედება მოახდინა მისი სურათების კოლექციონერთა და არა მოსახლეობის ფართო ფენების ბიუჯეტზე. ფასების დონეების ცვლილების შესწავლისას არ ინტერესდებიან სეზონური ცვლილებებით. ფასების მხოლოდ წლების მიხედვით ცვლილება შეადგენს ჩვენი განხილვის საგანს.

ფასების დონის გაზომვა მნიშვნელოვანია ორი გარემოების გამო. უპირველეს ყოვლისა უნდა ვიცოდეთ, თუ როგორ შეიცვალა ფასების დონე გარკვეული დროის პერიოდში, რათა ვიცოდეთ: ადგილი აქვს ინფლაციას (ფასების დონის ზრდას) თუ დეფლაციას (ფასების დონის კლებას) და როგორია ინფლაციისა და დეფლაციის მასშტაბები. მეორეს მხრივ, რამდენადაც მთლიანი შიდა პროდუქტი წლის განმავლობაში ეროვნული ეკონომიკის წარმოებული საბოლოო პროდუქტებისა და მომსახურების ერთობლიობის საბაზრო, ანუ ფულადი ღირებულებაა (გამოთვლილი პროდუქციისა და მომსახურების ფასების მეშვეობით), ამდენად ფულადი მაჩვენებლები წარმოადგენს ყველაზე გავრცელებულ მაჩვენებლებს, რომელთა საშუალებითაც ხდება წარმოების მთლიანი მოცულობის განსხვავებული კომპონენტების ერთიან საფუძველზე დაყვანა. სხვადასხვა წლებში წარმოებული პროდუქციის მოცულობათა ღირებულება შეიძლება შედარებადი იყოს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუკი ფულადი ერთეულის ღირებულება უცვლელია.

ფასების დონეების ცვალებადობის საზომს წარმოადგენს ფასების ინდექსი: მიმდინარე პერიოდისათვის საქონლისა და მომსახურების სახეების გარკვეული ერთობლიობის (ე.წ. „საბაზრო კალათის") საერთო ფასისა და საწყის პერიოდში იდენტური ანდა მსგავსი „კალათის" ფასის თანაფარდობას. საწყის პერიოდს ეწოდება „საბაზისო წელიწადი". ამრიგად

$$\text{ფასების ინდექსი მოცემულ წელს} = \frac{\text{საბაზრო კალათის ფასი მოცემულ წელს}}{\text{იგივე კალათის ფასი საბაზისო წელს}} \times 100.$$

ფასების ინდექსები მრავალნაირია. ქვევით ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ სხვადასხვა ინდექსებს და საკითხს, თუ რა შემთხვევაში რომელი ინდექსი უნდა იქნეს გამოყენებული და რა განსხვავებაა მათ შორის.

მრავალ ქვეყანაში სხვადასხვა ტიპის ფასების ინდექსების გამოთვლა ტარდება ყოველწლიურად მთავრობის დავალებით. მაგალითად, ამერიკის შეერთებულ შტატებში ეს დასაქმების დეპარტამენტის (Department of Labor) ამოცანას წარმოადგენს. ამ დეპარტამენტის სტატისტიკური ბიურო პერიოდულად აქვეყნებს მონაცემებს ფასების ინდექსების შესახებ.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ფასების ინდექსი წარმოადგენს ინფლაციისა და დეფლაციის ბარომეტრს, მაგრამ ის მრავალ სხვა გამოყენებასაც ჰპოვებს. როგორც წესი, ეკონომიკურ მოდელებს საქმე აქვს რეალურ ხელფასებთან და რეალურ შემოსავლებთან, რომლებიც გამოითვლება ფასების დონეების ცვლილების გათვალისწინებით, ფასების ინდექსების მეშვეობით. გარდა ამისა, როგორც კარგად ცნობილია, ფაქტიური ეკონომიკური ზრდა აისახება რეალური ეროვნული პროდუქტის ტერმინებში, რომელიც გამოითვლება ნომინალური მთლიანი შიდა პროდუქტიდან ფასების ინდექსის, კერძოდ ე.წ. დეფლაციის მეშვეობით. ამაზე ჩვენ ქვევით გვექნება საუბარი.

ფასების ინდექსების შემოღების პირველი მცდელობა (დაახლოებით 200 წლის წინ) ეკუთვნის იტალიელ გ.კარლის (G.R.Carli), რომელმაც შეადარა ხორბლის, ღვინისა და ზეთის ფასები 1500-დან 1750 წლამდე. კარლის მიერ შემოღებული ინდექსი მეტად მარტივია დღევანდელ ინდექსებთან შედარებით. კარლის ინდექსის ანალოგიური დღევანდელი სამომხმარებლო ფასების ინდექსი (Consumer Price Index) მეტად ფაქიზი და რთული ინსტრუმენტია.

მარტივი ფასების ინდექსი (ფასების ფარდობითი პროცენტული ინდექსი). უმარტივესი ფასის ინდექსი ზომავს ცალკეული ერთეულის (პროდუქციის ან მომსახურების რაიმე სახის) ფასების ცვლილებას დროში. მარტივი ინდექსის ინტერპრეტაცია შემდეგია: ის მიგვითითებს იმაზე, თუ რამდენჯერ გაიზარდა მოცემული ერთეულის ფასი მოცემულ წელს საბაზისო წლის ფასთან შედარებით. ამრიგად, მარტივი ინდექსის მნიშვნელობის I_n-ის გამოსათვლელად მოცემული (n-ური) წლის ფასი, P_n, უნდა შევაფარდოთ საბაზისო (ნულოვანი) წლის P_0 ფასთან და გავამრავლოთ ასზე:

$$I_n = \frac{P_n}{P_0} \times 100$$

მოვიყვანოთ მარტივი ინდექსის გამოთვლის მაგალითი. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში ასახულია რამოდენიმე ძირითადი საკვები პროდუქტის სტანდარტული წონის ერთეულის ფასის ცვლილება წლების მიხედვით 1995 წლიდან 1998 წლამდე, ფარდობითი

ფასი და ფასების მარტივი ინდექსი 1998 წლისათვის. საბაზისო წლის როლში არჩეულია 1995 წელი.

ცხრილი 20.1. სურსათის ცალკეული სახეობების ფასები (წლის ბოლოსათვის; ლარი/კგ-ში)

	1995	1996	1997	1998	ფარდობითი ფასი	ინდექსი
საქონლის ხორცი	3.72	3.30	3.80	4.10	1.10	110
ღორის ხორცი	3.88	3.70	4.00	4.20	1.08	108
ქათამი	4.62	4.50	4.00	3.62	0.78	78
კარაქი	5.20	5.00	5.00	6.20	1.19	119
ყველი	4.90	3.80	3.80	3.80	0.76	76
შაქრის ფხვნილი	0.80	0.91	0.84	0.97	1.21	121
ხორბლის ფქვილი	0.85	1.00	0.94	1.00	1.18	118
ღვინო (ყურძნის 0.7ლ.)	1.13	1.37	1.37	1.37	1.21	121

ის ფაქტი, რომ საბაზისო წლის როლში აღებულია 1995 გამოიხატება იმით, რომ $I_{1995}=100$. მას შემდეგ რაც არჩეულია საბაზისო წელი, ის შეიძლება ჩაითვალოს ნულოვან წლად, შემდეგი წლები კი დაინომროს მიმდევრობით. მაგალითად, 1997 წელს შეიძლება მივაწეროთ ნომერი $n=2$ და ა.შ. გამოვთვალოთ, მაგალითად,

$$I_{1996}(\text{კარაქი})=\frac{5.00}{5.20}\times 100=96\,.$$

ხშირად, მოსახერხებელია თავად წლების მიწერა ქვედა ინდექსების ადგილზე.

$$I_1=I_{96}=\frac{P_{96}}{P_{95}}\times 100=96\,.$$

ცალკეული ერთეულის (საქონელი იქნება ეს თუ მომსახურება) ფასის ინდექსის გამოყენების სფერო შეზღუდულია, რადგანაც ცალკეული ერთეულის (პროდუქციის) ფასების ცვლილება არ ასახავს ფასების ზოგად ძრაობას. მართლაც, ქათმის ხორცზე ფასების ზრდა არ მოახდენს არსებით გავლენას მოსახლეობის უდიდესი ნაწილის ცხოვრების სტილსა და დონეზე. ამავე დროს რამდენიმე ძირითად საკვებ პროდუქტზე ფასების ცვლილება უკვე აისახება ფიქსირებული შემოსავლის მქონე ოჯახების ბიუჯეტში და აქედან გამომდინარე, ამ პროდუქტებზე ფასების ზრდამ შესაძლოა მნიშვნელოვანი გავლენა მოახდინოს მოსახლეობის ფართო ფენების ცხოვრების დონეზე. ამიტომ ეკონომიკური დაგეგმვისა და ეკონომიკური პირობების ცვლილების ასახვის მიზნებს უკეთ მოემსახურება ფასების უფრო რთული კონსტრუქციის ინდექსები, რომელთა გამოთვლა ემყარება რამდენიმე საქონლისა თუ მომსახურებისაგან შედგენილ „საბაზრო კალათებს". დავიწყოთ მათი ჩამოთვლა მარტივიდან რთულისაკენ მოძრაობით.

მარტივი აგრეგირებული ფასების ინდექსი. ვთქვათ, „საბაზრო კალათი" შედგება n სახეობის საქონლისა და მომსახურებისაგან. P_n^i-ით აღვნიშნოთ i-ური სახეობის 1 ერთეულის მიმდინარე (ან განსახილავი) წლის ფასი, P_0^i-ით კი იგივე

ერთეულის ფასი საბაზისო წელს. მაშინ მარტივი (შეუწონავი) ერთობლივი ფასების ინდექსი მოიცემა ფორმულით

$$I_n = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_n^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i} \times 100.$$

განვიხილოთ ამ ინდექსის გამოთვლის მაგალითი საბაზრო კალათისათვის, რომელიც შედგება შემდეგი პროდუქტებისაგან: ძროხის ხორცი, ღორის ხორცი, ქათამი და ყველი. ვისარგებლოთ 20.1 ცხრილით და გამოვთვალოთ ამ კალათის მარტივი აგრეგირებული ფასების ინდექსი 1997 წლისათვის (საბაზისო წლად ისევ 1995 წელია არჩეული).

$$I_{1997} = \frac{3.80+4.00+4.00+3.80}{3.72+3.88+4.62+4.90} \times 100 = \frac{15.60}{17.12} \times 100 \approx 91.$$

ეს ინდექსი მიგვითითებს, რომ აღნიშნული კალათის ფასი 1997 წელს შემცირდა 9%-ით 1995 წელთან შედარებით.

ამ გზით გამოთვლილი ინდექსის უარყოფითი მხარე ის არის, რომ იგი მგრძნობიარეა წონის ერთეულის შერჩევის მიმართ. მაგალითისათვის მოვიყვანოთ შემდეგი ცხრილი:

ცხრილი 20.2. ფასები გამოსახულია დოლარებში, წონა ფუნტებში

წელი	შემწვარი ნეკნები	ღორის დაბეგვილი ხორცი	კონსერვირებული თინუსი	ქათამი
1987	2.40	1.80	2.24	1.02
1988	2.70	1.84	1.98	1.14
1989	2.94	2.16	2.16	1.26

$$I_2 = \frac{2\cdot 70+1\cdot 84+1\cdot 98+1\cdot 14}{2\cdot 40+1\cdot 80+2\cdot 24+1\cdot 02} = 103 \text{ (დამრგვალებული).}$$

ამ ცხრილში ყოველი ერთეულის წონაა 1 ფუნტი და მოყვანილი ფასებიც შეესაბამება 1 ფუნტს[1]. გარდა დაკონსერვირებული თინუსისა (თევზის სახეობა) ყოველი პროდუქტი იყიდება ფუნტობით, ამ უკანასკნელის ინვარიანტული წონა დაახლოებით 0.4 ფუნტის ტოლია. თუ კონსერვის ფასებს გამოვსახავთ წონის ამ ერთეულებში, მაშინ 1989 წლის შესაბამისი ფასი იქნება \$0.91, 1988 წლისა ~ \$0.80, ხოლო 1989 წლისა კი \$0.88 და თუ გამოვთვლით შესაბამის ინდექსს, მივიღებთ 106-ს ნაცვლად 103-ისა.

ამ უარყოფითი მხარის თავიდან ასაცილებლად ხელსაყრელია შეწონილ აგრეგირებულ ინდექსებზე გადასვლა. აქ ძირითადი განმასხვავებელი მომენტი ისაა, რომ აიღება ცალკეული ერთეულის არა თანაბარი რაოდენობა, არამედ ყოველი ერთეული „საბაზრო კალათში" შევა საკუთარი წონით. ამავე დროს წონების მინიჭება მოხდება პროდუქტის მნიშვნელოვნობის მიხედვით.

---

[1] 1 ფუნტი≈454 გრ. გავრცელებული წონის ერთეულია ინგლისურენოვან ქვეყნებში.

ᲨᲔᲬᲝᲜᲘᲚᲘ ᲐᲒᲠᲔᲒᲘᲠᲔᲑᲣᲚᲘ ᲤᲐᲡᲔᲑᲘᲡ ᲘᲜᲓᲔᲥᲡᲘ. ეს ინდექსი გამოითვლება შემდეგი გზით

$$I_n = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_n^i W_{ni}}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i W_{0i}} \times 100,$$

სადაც N არის განსახილავ ერთობლიობაში (კალათში) შემავალ პროდუქტთა ან მომსახურებათა რაოდენობა, P_n^i არის i-ური საგნის ერთეულის ფასი მიმდინარე n-ურ წელს, P_0^i – საბაზისო წლის ფასი, ამასთან

$$W_{ni} = \frac{Q_{ni}}{\sum_{i=1}^{N} Q_{ni}},$$

Q_{ni} – i-ური საგნის მოხმარებული რაოდენობა, გამოსახული შესაბამის ერთეულებში n-ურ წელს,

$$W_{0i} = \frac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{N} Q_{0i}},$$

Q_{0i} – i-ური საგნის მოხმარებული რაოდენობა საბაზისო წელს.

ცხადია, რომ

$$\sum_{i=1}^{N} W_{ni} = \sum_{i=1}^{N} W_{0i} = 1.$$

განვიხილოთ მაგალითი. ქვემოთ მოცემულ 20.3 ცხრილში მოყვანილია ხორცის პროდუქტების ის ჩამონათვალი, რომელსაც მოიხმარს ტიპიური ოჯახი.[1] დავუშვათ, რომ 1988 წლის ივლისში ოჯახის კვირის რაციონი შედგებოდა 6 კგ თევზის, 2-2 კგ ძროხისა და ხბოს ხორცისაგან, 1989 წლის ივლისში თევზის, ძროხისა და ხბოს ხორცზე ფასების ზრდამ განაპირობა ოჯახის კვირის რაციონის ახალი შედგენილობა: თითო-თითო კგ ძროხის, ხბოსა და ღორის ხორცი, 1 კგ თევზი და 4კგ ქათმის ხორცი. საბოლოო ჯამში ამან გამოიწვია W_{0i} და W_{1i} წონების განსხვავება, რაც ასახულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში:

ცხრილი 20.3

	ივლისი 1988 წელი			ივლისი 1989 წელი		
დასახელება	ფასი P_0^i	რაოდ. კგ·Q_{0i}	წონა W_{0i}	ფასი P_{ni}	რაოდ. კგ·Q_{ni}	წონა W_{ni}
ძროხის ხორცი	5.50	2	0.2	5.92	1	0.125
ხბოს ხორცი	7.48	2	0.2	8.06	1	0.125
ღორის ხორცი	4.80	0	0	5.05	1	0.125
ქათამი	3.62	0	0	3.45	4	0.500
თევზი	5.13	6	0.6	6.25	1	0.125

[1] არ იგულისხმება ტიპიური ქართული ოჯახი, არამედ, ევროპის რომელიმე ქვეყნის ვთქვათ, ინგლისის ტიპიური ოჯახი.

$$I_1=\left[\frac{5.50(0.2)+7.48(0.2)+5.13(0.6)}{(5.92+8.06+5.05+6.25)\times(0.125)+3.45(0.500)}\right]\times 100=86.1\,.$$

ამრიგად, ოჯახის კვების ბიუჯეტის ეს ნაწილი შემცირდა 13.9%-ით. უნდა შევნიშნოთ, რომ ეს ინდექსი, თუმცა ასახავს ცვლილებებს ოჯახის ბიუჯეტში, ის არ ასახავს ფასების რეალურ ცვლილებას. ამ ინდექსის კორექტირების ერთ-ერთი გზაა ლასპეირესის ინდექსი.

ლასპეირესის ინდექსი. ამ ინდექსის გამოთვლისას n-ური წლისათვის აიღება საბაზისო წლის წონები, W_{0i}, რაც ნიშნავს შემდეგს: მიუხედავად ფასების ცვლილებისა, „საბაზრო" კალათში შემავალი საგნების წონა უცვლელი რომ დაგვეტოვებინა, როგორ შეიცვლებოდა კალათის ფასი მიმდინარე (n-ურ) წელს, ე.ი. როგორ შეიცვლებოდა საბაზისო წლის „კალათის" ფასი. ზემოთ განხილულ მაგალითში წონების უცვლელად დატოვება ნიშნავს ოჯახის კვების რაციონის უცვლელობას. ლასპეირესის ინდექსი კი მიუთითებს, როგორ შეიცვალა ოჯახის კვების რაციონის ეს ნაწილი 1989 წელს 1988 წელთან შედარებით.

ლასპეირესის ინდექსი ასე გამოითვლება:

$$L_n=\frac{\sum_{i=1}^{N}P_n^iW_{0i}}{\sum_{i=1}^{N}P_0^iW_{0i}}\times 100\,,\text{ ან }L_n=\frac{\sum_{i=1}^{N}P_n^iQ_{0i}}{\sum_{i=1}^{N}P_0^iQ_{0i}}\times 100\,,$$

სადაც ფორმულაში შემავალ ყველა სიდიდეს იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც წინა შემთხვევაში.

ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში

$$L_1=\frac{(5.92+8.06)(0.2)+6.25(0.6)}{(5.50+7.48)(0.2)+5.13(0.6)}\times 100=115.4\,.$$

ეს რიცხვი მიგვითითებს იმაზე, რომ ოჯახის ბიუჯეტის ეს ნაწილი 1989 წლის ივლისში გაიზრდებოდა 15.4%-ით, თუ კი ოჯახის კვირის რაციონი უცვლელი დარჩებოდა, მიუხედავად ფასების ზრდისა.

პააშეს ინდექსი. ფასების ცვლილების (ზრდისა თუ კლების) გაზომვის სხვა გზაა მიმდინარე (n-ური) წლის წონების გამოყენება საბაზისო წელსაც.

პააშეს ინდექსი ასე გამოითვლება:

$$P_n=\frac{\sum_{i=1}^{N}P_n^iW_{ni}}{\sum_{i=1}^{N}P_0^iW_{ni}}\times 100\,,\text{ ან }P_n=\frac{\sum_{i=1}^{N}P_n^iQ_{ni}}{\sum_{i=1}^{N}P_0^iQ_{ni}}\times 100\,.$$

განსახილავი მაგალითისათვის

$$P_1=\frac{(5.92+8.06+5.05+6.25)(0.125)+3.45(0.500)}{(5.50+7.48+4.80+5.13)(0.125)+3.62(0.500)}\times 100=104.5$$

ამრიგად, მივიღეთ სამი განსხვავებული ინდექსი I_1=86.1, L_1=115.1, P_1=104.5.

რომელი ინდექსი უნდა გამოვიყენოთ ფასების ცვლილების აღსაწერად? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემამდე ჩვენ პირველ რიგში უნდა ვუპასუხოთ მეორე კითხვას: რის გაზომვას აპირებთ? თუ აპირებთ გამოიკვლიოთ, რა დაემართა ოჯახის კვების ბიუჯეტს რეალურად 1988 წლიდან 1989 წლამდე, გამოიყენეთ I_1=86.1. დასკვნა: ბიუჯეტის ეს ნაწილი რეალურად შემცირდა 13.9%-ით.

თუ გვაინტერესებს, რა მოუვიდოდა ბიუჯეტის ამ ნაწილს ოჯახის სამომხმარებლო კალათის შესაბამისი ნაწილი უცვლელი რომ დარჩენილიყო? გამოიყენეთ ლასპეირესის ინდექსი. L_1=115.4. დასკვნა: სამომხმარებლო კალათის ამ ნაწილის ფასი გაიზარდა 11.54%-ით.

თუ გსურთ იცოდეთ, როგორ შეიცვალა 1989 წლის სამომხმარებლო კალათის ამ ნაწილის ფასი 1988 წელთან შედარებით (იგულისხმება 1989 წლის ივლისის კვირის რაციონის ფასი, გამოხატული 1988 წლის ივლისის დოლარებში), გამოიყენეთ პააშეს ინდექსი P_1=104.5%. დასკვნა: ფასი გაიზარდა 4.5%-ით. ამრიგად, არჩევანი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რის გაზომვას აპირებთ.

ᲚᲐᲡᲞᲔᲘᲠᲔᲡᲘᲡᲐ ᲓᲐ ᲞᲐᲐᲨᲔᲡ ᲘᲜᲓᲔᲥᲡᲔᲑᲘᲡ ᲨᲔᲓᲐᲠᲔᲑᲐ. ამ ორ ინდექსს შორის განსხვავება ეჭვს არ იწვევს. ეს განსხვავება მით უფრო დიდია, რაც უფრო დიდია სხვაობა მიმდინარე პერიოდსა და საბაზისო პერიოდს შორის. ამ ფაქტის ახსნა შეიძლება ორი მოსაზრებით. პირველი მოსაზრება ისაა, რომ ინდექსებს შორის განსხვავება განპირობებულია მომხმარებლის გემოვნებისა და წარმოდგენების ცვლილებით, ანუ ცხოვრების ყაიდის შეცვლით. დროთა განმავლობაში მოხმარებაში შემოდის ახალი ერთეულები (საგნები, პროდუქტები, მომსახურების სახეები და სხვა), რომლებიც ან განდევნის მოხმარებიდან ზოგიერთ ადრე პოპულარულ ერთეულს ანდა ამცირებს მის მნიშვნელოვნობას. მაგალითად, თუ საქართველოში, კერძოდ თბილისში, დაახლოებით 20-30 წლის წინ ოჯახის კვების რაციონში ძირითადი ადგილი ეჭირა ხორცის ნატურალურ პროდუქტებს და მეტად მცირე კონსერვირებულ პროდუქტებს, დღეს შეიძლება ითქვას, რომ სურათი შებრუნებულია. ლასპეირესის ინდექსის გამოთვლა უგულებელყოფს ამ ფაქტს, იმ დროს, როდესაც პააშეს ინდექსი ითვალისწინებს მას. სწორედ ეს არის ლასპეირესის ინდექსის კრიტიკის ერთი მხარე.

მეორე მოსაზრება რომელიც ხსნის განსხვავების ზრდას ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსებს შორის დროის განსახილავ და საბაზისო პერიოდებს შორის სხვაობის ზრდასთან ერთად შემდეგია: ინფლაციის პირობებში, მცირდება იმ პროდუქტის წილი საერთო მოხმარებაში, რომელთა ფასი გაიზარდება და იზრდება წილი იმ პროდუქტისა, რომლის ფასი ან უცვლელი დარჩა ან მცირედ გაიზარდა. ეს ნიშნავს, რომ შეიცვალა მოთხოვნის მრუდები, თუკი მოსახლეობის შემოსავლები ფიქსირებული დარჩა. იმ შემთხვევაში კი, როდესაც ხელფასები (ანდა მოსახლეობის შემოსავლები) უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე ფასები, შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შებრუნებულ სურათს. ამ თვალსაზრისით პააშეს ინდექსი შეიძლება უფრო საილუსტრაციო იყოს, ვიდრე ლასპეირესისა. ის ითვალისწინებს ყველა ზევით ჩამოთვლილ ფაქტორს.

მაგრამ პააშეს ინდექსის გამოთვლა საკმაოდ დიდ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. ეს განპირობებულია იმით, რომ ყოველ მიმდინარე წელს საჭირო ხდება წონების ხელახლა გადათვლა, რაც ახალი მონაცემების შეგროვებას, დიდ დროსა და ხარჯებს მოითხოვს. ამიტომ ხშირად ამჯობინებენ ლასპეირესის ინდექსის გამოყენებას, ოღონდ იმ პირობით, რომ ხდება საბაზისო წლის გადასინჯვა. მაგალითად ფასების სამომხმარებლო ინდექსის გამოთვლისას, საბაზისო წლის გადასინჯვა და ცვლა ხდება ყოველ 10 წელიწადში ერთხელ.

ხშირად იყენებენ ფიქსირებულ წონებიან აგრეგირებულ ფასების ინდექსებს:

$$I_n = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_n^i Q_{ai}}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i Q_{ai}} \times 100 .$$

ეს გამოსახულება ემთხვევა ლასპეირესის ინდექსს, როდესაც $Q_{ai}=Q_{oi}$. ამ ინდექსის არსებითი უპირატესობა იმაშია, რომ ლასპეირესის ინდექსის ანალოგიურად ის არ საჭიროებს წონების გადასინჯვას, მაგრამ მისგან განსხვავებით არ იყენებს მაინცდამაინც საბაზისო წლის წონებს.

ფიშერის იდეალური ინდექსი. ფასების ზრდის პერიოდში, როდესაც საპასუხოდ მოთხოვნის მრუდები იცვლება ლასპეირესის ინდექსს აქვს გადაფასების ანუ ერთობლივი ფასების ზრდის, ზედმეტად შეფასების თვისება, მაშინ როდესაც პააშეს ინდექსს გააჩნია საპირისპირო თვისება – ეს ინდექსი უჩვენებს ერთობლივი ფასების ზრდის უფრო დაბალ ტემპს. ამ ორი უარყოფითი თვისების თავიდან აცილების მიზნით ი.ფიშერის მიერ შემოთავაზებული იყო ინდექსი, რომელიც წარმოადგენს პააშესა და ლასპეირესის ინდექსების საშუალო გეომეტრიულს და რომელსაც ფიშერის იდეალური ინდექსი ეწოდება

$$F_n = \sqrt{L_n \times P_n} .$$

იმ მაგალითში, რომელიც ზემოთ იყო განხილული,

$$F_1 = \sqrt{L_1 \times P_1} = \sqrt{115.4 \times 104.5} = 109.8 .$$

რამდენადაც ფიშერის ინდექსის გამოთვლისას საჭიროა პააშეს ინდექსის გამოთვლა, იმდენად ამ უკანასკნელის გამოთვლასთან დაკავშირებული სიძნელეები მეორდება, რაც განაპირობებს ფიშერის ინდექსის არაპოპულარობას.

სამომხმარებლო ფასების ინდექსი. სამომხმარებლო ფასების ინდექსი (სფი – Consumer Price Index, CPI) წარმოადგენს იმ ფასების ცვლილების საზომს, რომლებიც გავლენას ახდენს მოსახლეობის ფართო ფენების ცხოვრების დონეზე, ანუ ცვლის საარსებო მინიმუმის დონეს. სამომხმარებლო ფასების ინდექსის გამოთვლა ხდება ე.წ. საბაზრო კალათის, სხვა სიტყვებით, სამომხმარებლო კალათის ფასების ცვალებადობის საფუძველზე.

რა არის სამომხმარებლო კალათი? უპირველეს ყოვლისა, უნდა შევნიშნოთ, რომ სფი-ს გამოთვლა ხდება თითქმის ყველა ქვეყანაში და ყოველ ქვეყანას გააჩნია მისთვის დამახასიათებელი საბაზრო კალათი, რომლის შემადგენლობა პერიოდულად გადაისინჯება მოსახლეობის გემოვნებისა და ცხოვრების ყაიდის ცვალებადობის შესაბამისად. საბაზრო კალათის შედგენის პრინციპი კი ყოველი ქვეყნისათვის საერთოა. ეს პრინციპი შემდეგია: საბაზრო კალათი უნდა მოიცავდეს ყველა პროდუქტსა და მომსახურების სახეს, რომლებიც მოიხმარება დედაქალაქის ტიპის ქალაქებში მცხოვრებ მოსამსახურეთა ოჯახების დიდი ნაწილის მიერ. ხშირად ამ ჯგუფს უწოდებენ სამომხმარებლო ინდექსის პოპულაციურ ჯგუფს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ამერიკის შეერთებული შტატების სამომხმარებლო კალათი. იგი შედგება 400 ერთეულისაგან და მოიცავს იმ ძირითადი ხარჯების უმეტესობას, რომელსაც ეწევა დიდი ქალაქების მოსამსახურეთა ოჯახების (ანუ ხელფ-

ზე მცხოვრები ოჯახების) უმეტესობა. ესენია დანახარჯები კვებაზე, ჩაცმულობაზე, განათლებაზე. დასაქმების დეპარტამენტის სტატისტიკური ბიუროს მიერ პერიოდულად ქვეყნდება სამომხმარებლო კალათის მსხვილი კომპონენტების ჩამონათვალი, ამავე დროს თითოეული დასახელების გასწვრივ მითითებულია მისი მნიშვნელოვნობის საზომი, რომელიც გამოხატულია სრული კალათის პროცენტებში. თავად კალათს, რა თქმა უნდა, მიწერილი აქვს 100%.

შეერთებულ შტატებში სფი-ს მნიშვნელობა უწყვეტად ქვეყნდებოდა 1913 წლიდან მოყოლებული. თუმცა მიმდინარეობდა ის მნიშვნელოვანი მოდიფიცირება როგორც გამოთვლის მეთოდისა, ასევე მონაცემთა მოგროვების მეთოდიკაში; პერიოდულად გადაისინჯებოდა სამომხმარებლო კალათის შედგენილობა და საბაზისო წელიწადიც. მეორე მსოფლიო ომის შემდეგ გამოიყენებოდა 4 საბაზისო პერიოდი: 1947–1949 წლები, 1957–1959, ცალკე აღებული 1967 წელი და 1982–1984 წლები.

ფასების სამომხმარებლო ინდექსი ახლოსაა ლასპეირესის ინდექსთან, რომელიც, როგორც უკვე შევნიშნეთ, იყენებს იმ წონებს, რომლებითაც იყო შედგენილი სამომხმარებლო კალათი საბაზისო წელს. იმის გამო, რომ დროის მსვლელობისას იცვლება მოსახლეობის გემოვნება, შეხედულებანი და ცხოვრების სტილი, სამომხმარებლო კალათის ცალკეული კომპონენტების მნიშვნელოვნობა უნდა გადაფასდეს, რაც გამოიხატება სამომხმარებლო კალათის შემადგენელი კომპონენტების წონების ცვლილებაში. ამრიგად, პერიოდულად ტარდება წონების გადასინჯვა. მაგრამ უნდა აღინიშნოს, რომ წონების გადასინჯვის (გადაფასების) მომენტი არ ემთხვევა საბაზისო წლის შეცვლას. სწორედ ამითაა განპირობებული ის ფაქტი, რომ სფი არ წარმოადგენს ლასპეირესის ინდექსს.

რადგანაც სამომხმარებლო ინდექსის გამოთვლა შერჩევით მონაცემებს ეყრდნობა, წარმოიქმნება შერჩევითი ცდომილება. უფრო მეტიც, სამომხმარებლო კალათში ჩართულია მხოლოდ მცირე რაოდენობის პროდუქცია და მომსახურების სახეები, რადგანაც ინფორმაციის შეგროვება ყველა იმ საქონლისა და მომსახურების შესახებ, რომლებიც შეთავაზებულია აშშ-ში (და ალბათ, ნებისმიერ განვითარებულ ქვეყანაში) მეტისმეტად შრომატევადი და ძვირია. გარდა ამისა, სამომხმარებლო კალათში ჩართული ერთეულების ფასებზე უწყვეტი მონიტორინგის განხორციელება შეუძლებელია და ამდენად ზუსტი ფასების ნაცვლად შემოთავაზებულია მათი გასაშუალოებული მნიშვნელობანი.

აქ ჩვენ არ განვიხილავთ მონაცემთა შეგროვების პროცედურებს. მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ მონაცემთა შეგროვება უნდა ხდებოდეს რეპრეზენტაციულობის პრინციპის დაცვითა და უცვლელი ფასების პირობებში პროდუქციის ხარისხის ცვალებადობის გათვალისწინებით.

სამომხმარებლო ფასების ინდექსი წარმოადგენს ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსების ჰიბრიდს, რაც ზევით იყო აღნიშნული. ადრეულ პერიოდში სფი ემთხვეოდა ლასპეირესის ინდექსს, რადგანაც იყენებდა საბაზისო წლის სამომხმარებლო კალათის შედგენილობას.

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია აშშ-ს სამომხმარებლო ფასების ინდექსის მნიშვნელობები 1982–1987 წლებში. საბაზისო წლის როლში არჩეულია 1982 წელი.

ცხრილი 20.4. აშშ-ს სამომხმარებლო ფასების ინდექსების მნიშვნელობები 1982–1987 წლებში (1982–1984=100)

წლები	1982	1983	1984	1985	1986	1987
CPI	97.2	99.3	103.7	106.4	102.3	105.4

1982 წლისათვის საბაზისო წელია 1967, 1983 და 1984 წლებისათვის – 1982 წელი, შემდგომი წლებისათვის – 1984 წელი.

საქართველოში საბაზრო ეკონომიკაზე გადასვლის პირობებში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ფასების სხვადასხვა ტიპის ინდექსების გამოთვლას. მათ შორის, რა თქმა უნდა, აღსანიშნავია სამომხმარებლო ფასების ინდექსი.

თავდაპირველად მოვიყვანთ ციტირებას „საქართველოს სტატისტიკური წელიწადეულიდან", 1999, რომელიც გამოცემულია საქართველოს სტატისტიკური დეპარტამენტის მიერ, და რომელშიც ასახულია 1990-იან წლებში საქართველოს ეკონომიკურ და სოციალურ ცხოვრებაში მიმდინარე პროცესები.

„საქონლისა და მომსახურების ფასები, რომელიც გამოიყენება სამომხმარებლო ფასების ინდექსის გამოსათვლელად, გროვდება ხუთი ქალაქის 2 ათასამდე საცალო და მომსახურების ობიექტებში – მაღაზიებში, ბაზრებში, ბენზინგასამართ სადგურებში, აფთიაქებში და სხვა.

წონები სამომხმარებლო კალათში შემავალი 296 დასახელების საქონელსა და მომსახურებაზე ჩამოყალიბებულია შინამეურნეობათა ბიუჯეტის გამოკვლევის საფუძველზე.

სამომხმარებლო ფასების ინდექსი ითვლება მნიშვნელოვან ეკონომიკურ მაჩვენებლად, რომელიც ახასიათებს ინფლაციის დონეს და გამოიყენება ეკონომიკაში ფასების ცვლილების დონესთან დაკავშირებული პროცესების ანალიზისა და პროგნოზისათვის და ა.შ."

ახლა მოვიყვანოთ ამ კრებულში გამოქვეყნებული მონაცემები საქართველოს სფი-ს დინამიკის შესახებ. საბაზისო პერიოდად ყოველი წლის მოცემული თვისათვის ითვლება წინა წლის შესაბამისი თვე. თუმცა ეს მონაცემები მოყვანილია ყოველი თვისათვის, ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოდ რამდენიმე თვის მონაცემებით.

ცხრილი 20.5. სამომხმარებლო ფასების ინდექსი.

	1995	1996	1997	1998
	წინა წლის შესაბამისი თვე = 100			
იანვარი	2768.1	142.9	111.8	106.7
ივლისი	521.0	151.8	104.7	102.8
დეკემბერი	157.4	113.8	107.8	110.7

ამავე კრებულში მოყვანილია სამომხმარებლო ფასების ინდექსები სასაქონლო ჯგუფების მიხედვით, და ამავე დროს, სხვადასხვა ტიპის ინდექსები: მწარმოებელთა ფასების ინდექსი და სხვა.

სამომხმარებლო ფასების ინდექსები წარმოადგენს უმნიშვნელოვანეს ეკონომიკურ ინდიკატორს. ის გამოიყენება ხელფასების სიდიდის განსაზღვრისა და რეგულირებისათვის, პენსიებისა და ბავშვთა დახმარების ინდექსაციისათვის და სხვა.

მოვიყვანოთ სფი-ს გამოყენების რამდენიმე მაგალითი.

სამომხმარებლო ფასების ინდექსის გამოყენება ხელფასების შესწორებისას (დეფლაციისას). სფი-ს ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი გამოყენება მდგომარეობს ხელფასების რეგულირებაში ინფლაციის ეფექტის ჩაქრობის მიზნით.

ქვევით მოყვანილია ავსტრალიის სამომხმარებლო ფასების ინდექსების მნიშვნელობათა ცხრილი.

ცხრილი 20.6. სამომხმარებლო ფასების ინდექსი. ავსტრალია, 1971–1990 წლებში (1980=100)

წელი	სფი	წელი	სფი	წელი	სფი	წელი	სფი
1971	39.0	1976	70.1	1981	110.4	1986	162.6
1972	41.3	1977	76.7	1982	123.1	1987	174.5
1973	46.7	1978	83.0	1983	131.6	1988	187.3
1974	54.5	1979	91.4	1984	137.2	1989	202.3
1975	61.5	1980	100	1985	148.7	1990	213.0

ჩვენ ამ ცხრილს გამოვიყენებთ რეალური ხელფასების დონის დასადგენად ნომინალური ხელფასიდან ინფლაციის ეფექტის გამორიცხვით.

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია კვირის ხელფასის მნიშვნელობები 1985 და 1990 წლებში და ინდექსების მნიშვნელობანი

ცხრილი 20.7. რეულორი ხელფასების შედარება სფი-ს გამოყენებით

წელი	ხელფასი $ (მიმდინარე დოლარებში)	სფი	რეალური ხელფასი (1980 წლის $-ში)
1985	416.30	148.7	$\frac{416.30}{148.7}=279.96$
1990	574.45	213.0	$\frac{574.45}{213.0}\times100=269.69$

ერთი შეხედვით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ხელფასები გაიზარდა. მაგრამ სფი გვიჩვენებს, რომ 1985 წელს სამომხმარებლო კალათის ფასი 1980 წელთან შედარებით გაიზარდა 1.487-ჯერ, ხოლო 1990 წელს კი 2.13-ჯერ. ამიტომ 1985 წლის კვირის საშუალო ხელფასი გამოხატული 1980 წლის დოლარებში იქნება 279.96, ხოლო 1990-სა კი 269.69 ანუ რეალურად მოხდა ხელფასების კლება. კიდევ ერთხელ გავუსვათ ხაზი იმ ფაქტს, რომ როგორც ფასების ინდექსი მიგვითითებს, დოლარის მყიდველობითი უნარი 1990 წელს (1980 წელთან შედარებით) უფრო მეტად დაქვეითდა, ვიდრე 1985 წელს.

წინა ცხრილში, ხელფასების შედარება მოვახდინეთ 1980 წლის ბაზაზე ანუ გამოვხატეთ ისინი 1980 წლის დოლარებში.

ჩვენ შეგვიძლია მსგავსი შედარება ჩავატაროთ 1990 წლის ხელფასების 1985 წლის დოლარებში გამოხატვის მეშვეობით. ეს კი შესაძლებელია ახალი სამომხმარებლო ინდექსის (როცა 1985=100) გამოყენებით. შედეგი თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 20.8.

წელი	ხელფასი მიმდ. $-ში	სფი (1980=100)	სფი (1985=100)	რეალური ხელფასი (1985 წლის $-ში)
1985	416.30	148.7	$\frac{148.7}{148.7}\times100=100$	$\frac{416.30}{100}\times100=416.30$
1990	574.45	213.0	$\frac{213.0}{148.7}\times100=143.24$	$\frac{574.45}{143.24}\times100=401.04$

ამრიგად, ჩვენი წინა დასკვნა სამართლიანი რჩება ამ შემთხვევაშიც.

დროითი მწკრივების დეფლაცია ფასების ინდექსების გამოყენებით.

სანამ ამ საკითხს შევეხებოდით, გავიხსენოთ პააშეს ინდექსი

$$P_n = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_n^i W_{ni}}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i W_{ni}} \times 100,$$

გამოთვლილი საბაზრო კალათისათვის. ამ ინდექსს უწოდებენ მთლიანი შიდა პროდუქტის (ერთობლივი ნაციონალური) დეფლატორს. ამ სახელწოდების შინაარსს ჩვენ ქვევით ავხსნით. მანამდე კი ალვნიშნოთ, რომ დეფლატორი განსხვავდება სამომხმარებლო ფასების ინდექსისაგან: პირველ რიგში იმით, რომ ფიქსირებული წონების ნაცვლად იყენებს მიმდინარე წონებს და მეორეც იმით, რომ მისი საბაზრო კალათი მეტისმეტად მდიდარია სამომხმარებლო კალათთან შედარებით (ის შეიცავს არა მარტო მოხმარების საგნებსა და მომსახურების სხვადასხვა ტიპებს, არამედ საინვესტიციო საქონელს, სახელმწიფოს მიერ როგორც ქვეყნის შიგნით, ისევე მსოფლიო ბაზარზე შესყიდულ საქონელს და მომსახურების სახეებს).

გარდა სამომხმარებლო ფასების ინდექსისა და ენპ-ის დეფლატორისა, მნიშვნელოვან ეკონომიკურ ინდიკატორებს წარმოადგენს ფასების ინდექსების სხვადასხვა ტიპები. მაგალითად საექსპორტო პროდუქციის ფასების ინდექსი, რომელიც ქვეყნის კომპანიების მიერ საზღვარგარეთ გაყიდული პროდუქციის ფასების ცვლილების საზომს წარმოადგენს. მნიშვნელოვანია აგრეთვე ფასების ინდექსი იმპორტირებულ საქონელზე და სხვა.

ახლა შევეხოთ ფასების ინდექსების გამოყენებით ეკონომიკური დროითი მწკრივების ერთიან საფუძველზე დაყვანის საკითხს. როგორც წესი, ეკონომიკური მაჩვენებლების დიდი ნაწილი გამოსახულია მიმდინარე ფულად ერთეულებში. მაგალითად აშშ-ს ერთობლივი ნაციონალური შემოსავალი გამოსახულია მიმდინარე დოლარებში (ე.ი. იმ წლის ფასებში, რომლისთვისაც გამოთვლილია ერთობლივი ნაციონალური პროდუქტი). ამ ერთეულებში გამოხატულ ენპ-ს ეწოდება ნომინალური ანუ ფულადი ენპ.

ინფლაცია და დეფლაცია ართულებს ენპ-ს გაანგარიშებას, რამდენადაც ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ფულად, დროით და რაოდენობრივ მაჩვენებლებს. მიმდინარე ფულად ერთეულებში გამოხატულ ნომინალური ერთობლივი ნაციონალური პროდუქტის სიდიდეზე გავლენას ახდენს, როგორც წარმოებული პროდუქციის ფიზიკური მოცულობის, ასევე ფასების ცვლილება. იმ პერიოდში, როდესაც წარმოებული პროდუქციის მოცულობა დაქვეითებულია, შესაძლოა ინფლაციამ განაპირობოს ნომინალური ენპ-ის ზრდა მხოლოდ და მხოლოდ ფასების ზრდის ხარჯზე. მოსახლეობის კეთილდღეობა კი დამოკიდებულია არა საქონლის ფასებზე, არამედ წარმოების მოცულობის ზრდაზე.

ნომინალური ენპ-ის ზრდისა თუ კლების ფაქტიდან ჩვენ გაგვიჭირდება იმის დასკვნა, თუ რის ხარჯზე მოხდა ენპ-ის ცვლილება. მაგალითად, ჩვენ არ შეგვიძლია ვუპასუხოთ კითხვას ნომინალური ენპ-ის 4%-იანი ზრდა გამოწვეულია წარმოების მოცულობის 4%-იანი ზრდით ნულოვანი ინფლაციის პირობებში, 4%-იანი ინფლაციით წარმოების უცვლელი მოცულობის პირობებში, თუ სხვა რაიმე თანაფარდობით ინფლაციისა და წარმოების ზრდის ტემპებს შორის.

რეალური ეკონომიკური ზრდა (ანუ წარმოების მოცულობის ზრდა) შეიძლება განისაზღვროს ენპ-ის დეფლატორის გამოყენებით.

პრობლემა შემდეგშია: მიმდინარე ფულად ერთეულებში გამოხატული ენპ-ს კორექტირებით, გამოირიცხოს ფასების ცვლილების გავლენა ენპ-ის სიდიდეზე. ეს ნიშნავს ფულადი ენპ-ს ისეთი გზით კორექტირებას, რომ ის ზუსტად ასახავდეს

წარმოებული პროდუქტის ფიზიკური მოცულობის (ანუ წარმოებული პროდუქ რაოდენობის) ცვლილებას და არა ფასების მერყეობას.

ამ მიზნის მისაღწევად გამოიყენება ენპ-ს დეფლატორი. ხშირად იყენებენ სამომხმარებლო ფასების ინდექსებსაც. მაგრამ უნდა ითქვას, რომ დეფლატორის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია, რადგან ეს ინდექსი ზუსტად ასახავს დღევანდელი (მიმდინარე წლის) საბაზრო კალათის ფასის ცვლილებას ამავე კალათის საბაზისო წლის ფასთან შედარებით.

დეფლატორის გამოყენების იდეა ასეთია: რამდენჯერაც გაიზარდა n-ურ წელს წარმოებული პროდუქციის ფასი საბაზისო წელთან შედარებით იმდენჯერ შევამციროთ ნომინალური ენპ და პირიქით იმდენჯერ გავზარდოთ ნომინალური ენპ, რამდენჯერაც შემცირდა საბაზრო კალათის ფასი. ასეთი გზით მიღებულ ენპ-ს ეწოდება რეალური ენპ. ამრიგად, ადვილია იმის დასკვნა, რომ რეალური ენპ წარმოადგენს მოცემულ წელიწადში წარმოებული ენპ-ის ფასს, გამოხატულს საბაზისო წლის ფულად ერთეულებში (იმ ფულად ერთეულებში, რომლებსაც აქვს იგივე მყიდველობითი უნარიანობა აქვთ, რაც საბაზისო წელს).

ამრიგად, გვექნება:

$$n-\text{ური რეალური ენპ} = \frac{n-\text{ური წლის ნომინალური ენპ}}{n-\text{ური წლის დეფლატორი}} \times 100.$$

დავაზუსტოთ ზემოთ ნათქვამი, ანუ უფრო დეტალურად ავხსნათ მოყვანილი ფორმულის მიზანშეწონილობა ენპ-ის დეფლაციის ჩასატარებლად. წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ გვინდა ჩავატაროთ 1990 წლის ნომინალური ენპ-ს კორექტირება 1982 საბაზისო წლის ფასების გათვალისწინებით, ე.ი. მივიღოთ რეალური ენპ, იმისათვის რომ განვსაზღვროთ რეალური წარმოებული პროდუქტის ზრდა 1982-1990 წლებში. ჩვენ ვიცით, რომ ნომინალური ენპ (ენპ_{1990}) უდრის 1990 წელს წარმოებული პროდუქციის ფიზიკურ მოცულობას (Q_{1990}), გამოხატულს ამავე წლის ფასებში (P_{1990}).

ამრიგად

$$\text{ენპ}_{1990} = Q_{1990} \times P_{1990}.$$

ამავე დროს ენპ-ს დეფლატორი D_{1990} გამოისახება ასე:

$$D_{1990} = \frac{P_{1990}}{P_{1982}} \quad \text{(ათწილადებში გამოხატული).}$$

სადაც P_{1990} არის ენპ-ის კალათის ფასი 1990 წელს, ხოლო P_{1982}-ამავე კალათის ფასი 1982 წელს. ამიტომ

$$\text{რეალური ენპ}_{1990} = \frac{\text{ენპ}_{1990}}{D_{1990}} = \frac{Q_{1990} \times P_{1990}}{P_{1990} / P_{1982}} = Q_{1990} \times P_{1982}.$$

ამრიგად, კიდევ ერთხელ დავადასტურეთ, რომ რეალური ენპ_{1990} წარმოადგენს 1990 წლის წარმოების მოცულობას, გამოხატულს 1982 წლის ფასებში.

ქვემომოყვანილ ცხრილში მოყვანილია აშშ-ს ნომინალური ენპ-ის მნიშვნელობები 1946-1988 წლებში, ამასთან ერთად მოგვყავს ფასების ინდექსის (დეფლატორის) მნიშვნელობები (საბაზისო წელია 1982). ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ რეალური ენ შესაბამის წლებში.

ცხრილი 20.9. ნომინალური ენპ-ს კორექტირება ფასების გათვალისწინებით (ე.ი. რეალური ენპ-ის გაანგარიშება) მილიარდ დოლარებში

წელი	ნომინ. ენპ	დეფლატორი (1982=100)	რეალური ანუ კორექტირებული ენპ (1982 წლის კურსით)
1946	212.4	19.4	
1951	333.4	25.1	
1958	456.8	23.7	
1964	649.8	32.9	
1968	892.7	37.7	
1972	1212.8	46.5	
1974	1472.8	54.0	
1980	2732.0	85.7	
1982	3166.0	100.0	
1984	3772.2	107.7	
1986	4240.3	113.9	3722.8
1988	4861.1	121.7	

გამოვთვალოთ, მაგალითად, რეალური ენპ 1986 წელს. გვაქვს

$$\text{რეალური ენპ}_{1986} = \frac{\text{ნომინალური ენპ}_{1986}}{D_{1986}} \times 100 = \frac{4240.3}{1.139} = 3722.8\,.$$

ცხრილის დარჩენილი ნაწილის შევსებას სავარჯიშოს სახით მკითხველს ვთავაზობთ.

როგორც უკვე ვთქვით, ენპ-ს დეფლირებისათვის იყენებენ სამომხმარებლო ფასების ინდექსებსაც. კერძოდ,

$$\text{რეალური ენპ} = \frac{\text{ნომინალური ენპ}}{\text{სფი}} \times 100\,.$$

გამოვთვალოთ რეალური ენპ$_{1986}$ ბოლო ფორმულის მიხედვით და შევადაროთ წინა პასუხს.

$$\text{რეალური ენპ}_{1986} = \frac{4240.3}{1.023} = 4145.0.$$

როგორც ვხედავთ, მიღებული მნიშვნელობები ერთმანეთს არ ემთხვევა, რაც გამოწვეულია დეფლაციისათვის სხვადასხვა ინდექსის გამოყენებით. ითვლება, რომ დეფლატორის გამოყენებით მიღებული რეალური ენპ უფრო ზუსტად ასახავს რეალობას.

საბირჟო ინდექსები. საბირჟო ინდექსი არის დროის ნებისმიერი მომენტისათვის მათემატიკურად გამოანგარიშებული აქციების ბაზრის საერთო მახასიათებელი.

ცნობილია დოუ-ჯონსის (Dow-Jones Industrial Average, DJIA), NIKKEI, S&P500, FTSE100 და ა.შ. საბირჟო ინდექსები.

ყველა იმ კომპანიებიდან, რომელთა აქციები კოტირდება მოცემულ ბირჟაზე, არჩევენ კომპანიათა ჯგუფს ისე, რომ მან ასახოს მთელი ბაზრის მდგომარეობა. ჩვეულებრივ, ეს არის მსხვილი კომპა[illegible] და ის [illegible]კომპანიები, რომლებიც ყველაზე უფრო რეპრეზენტატულია (წარმომადგენლ[illegible]ების მოცემული დარგისათვის.

უმარტივეს შემთხვევაში ინდექსი შეიძლება გამოვთვალოთ როგორც ამორჩეული კომპანიების აქციათა ღირებულების საშუალო არითმეტიკული.

ასე მაგალითად, დოუ-ჯონსის ინდექსი გამოითვლება როგორც შეწონილი ფასების ინდექსი. ასეთი ინდექსის გამოთვლა მარტივია, მაგრამ იგი დიდ წონას ანიჭებს იმ კომპანიებს, რომელთაც გააჩნია ძვირი აქციების მცირე რაოდენობა და ამცირებს იმ კომპანიების წონას, რომელთაც გააჩნია იაფი აქციების დიდი რაოდენობა.

მაგალითად, მცირე კომპანია Micro Focus-ის (MF), რომლის აქციის ფასია £22.55 და რომლის კაპიტალიზაცია (ე.ი. კომპანიის აქციების საბაზრო ღირებულება) £313 მლნ-ს შეადგენს, აქციის კურსის 10 პუნქტით გაზრდა იგივე ეფექტს გამოიწვევს, როგორსაც British Telecom-ის (BT) აქციის კურსის ზრდა ამდენივე პუნქტით. BT-ს თითოეული აქცია კოტირდება £4.11-ად, ხოლო კაპიტალიზაცია უდრის £25416 მლნ-ს, ანუ სხვა სიტყვებით, ეს კომპანია 80-ჯერ უფრო მსხვილია, ვიდრე MF-ი.

ეს მიდგომა არალოგიკურია, აგრეთვე, სხვა მოსაზრების გამოც. ფასის 10 პუნქტით ზრდა იწვევს MF-ის ღირებულების 0.4%-ით ზრდას, მაშინ როცა BT-ს ღირებულება იზრდება 2.4%-ით.

ინდექსის ფორმირების სხვანაირი მეთოდიკა მდგომარეობს იმაში, რომ შეიკრიბოს არა აქციების ფასები, არამედ კომპანიათა კაპიტალიზაციები. ასე შედგენილი ინდექსი რეაგირებს არა მარტო აქციის ფასის ზრდაზე, არამედ კომპანიების სიდიდეზეც. მას ბაზრის შეწონილი ინდექსი ჰქვია.

მართალია DJIA ყველაზე ცნობილი ინდექსია აშშ-ში, მაგრამ ფიუჩერსები ინდექსებზე ეყრდნობა S&P500-ს. მას აქვს ორი უპირატესობა: ერთი, რომ ის ბაზრის შეწონილი ინდექსია, მეორე – ეყრდნობა კომპანიების ფართო წრეს, რომელიც აერთიანებს 500 წარმომადგენელს საერთო კაპიტალიზაციით, რომელიც ტოლია მთელი NYSE-ს კაპიტალიზაციის 80%-სა. DJIA ეყრდნობა 30 კომპანიას; FTSE100 – 100 კომპანიას, რომელთა კაპიტალიზაცია ლონდონის საფონდო ბირჟის კაპიტალიზაციის 70%-ს შეადგენს. ამ ინდექსმა შეცვალა FT, რომელიც მხოლოდ 30 კომპანიას ეყრდნობოდა.

ძირითადი მოთხოვნა ინდექსზე (გარდა ფართო წარმომადგენლობისა) მდგომარეობს იმაში, რომ ის უწყვეტად გამოითვლებოდეს და ხელმისაწვდომი იყოს რეალურ დროში. ქვევით მოყვანილია ინდექსის გამოთვლის სხვადასხვა სქემის აღწერა.

საბირჟო ინდექსების გამოთვლის ხერხები. საბირჟო ინდექსების გამოთვლის სამი პრინციპული სქემა არსებობს:

1) ფასების შეწონვა;
2) საბაზრო კაპიტალიზაციების შეწონვა;
3) თანაბარი შეწონვა.

განვიხილოთ ცალ-ცალკე სამივე სქემა

1) ფასების შეწონვა. ამ სქემით გამოთვლილი უძველესი და ყველაზე პოპულარული ინდექსია დოუ-ჯონსის ინდექსი (Dow-Jones Industrial Average, DJIA).

ეს ინდექსი გამოითვლება შემდეგნაირად. აირჩევა ნიუ-იორკის ბირჟის ლისტინგში შემავალი 30 უდიდესი კომპანია, საზოგადოდ, თავიანთი ინდუსტრიის ლიდერები. ამის შემდეგ DJIA გამოითვლება ფორმულით:

$$\mathrm{DJIA}_t = \sum_{i=1}^{30} \frac{p_{it}}{D_{adj}},$$

სადაც DJIA, ინდექსის სიდიდეა t-ურ დღეს, p_{it} – i-ური კომპანიის აქციის დახურვის ფასია t-ურ დღეს, D_{adj} – შემათანხმებელი გამყოფია.

იმისათვის, რომ გავიგოთ, თუ როგორ გამოითვლება D_{adj} გამყოფი, განვიხილოთ მაგალითი. ცნობილია, რომ მზარდი კომპანიები რომელთა რიცხვს ეკუთვნის DJIA-ში შემავალი კომპანიებიც, დროდადრო ახდენენ ე.წ. აქციების გახლეჩას გარკვეული პროპორციით. მაგალითად, გახლეჩა პროპორციით 1:3 ნიშნავს, რომ 1 ძველ აქციაში იძლევიან 3 ახალ აქციას. გასაგებია, რომ ასეთმა ადმინისტრაციულმა გადაწყვეტილებამ არ უნდა მოახდინოს გავლენა ინდექსის სიდიდეზე. სწორედ ამას უზრუნველყოფს D_{adj} გამყოფი.

მართლაც, ვთქვათ, ინდექსი ეფუძნება 3 კომპანიის აქციას. აქციის გახლეჩამდე, ინდექსი ასე გამოითვლებოდა: თუ A კომპანიის აქციის ფასი რომელიმე t მომენტში \$30-ია, B კომპანიის – \$20, ხოლო C კომპანიის – \$10, მაშინ

$$\mathrm{DJIA}_t = \frac{30+20+10}{3} = 20.$$

ვთქვათ, ამავე t მომენტში მოხდა A კომპანიის აქციის გახლეჩა 1:3 პროპორციით. მაშინ A კომპანიის ახალი აქციის ფასი გახდება \$10, ხოლო B და C კომპანიების აქციების ფასი უცვლელი დარჩება. რადგან DJIA_t-ს სიდიდე არ უნდა შეიცვალოს, ამიტომ D_{adj} გამოითვლება იმ მოთხოვნიდან, რომ

$$20 = \frac{10+20+10}{D_{adj}},$$

საიდანაც D_{adj}=2. ამრიგად, მოხდა გამყოფის შემცირება სამიდან ორამდე.

თავდაპირველად, ინდექსის ჩამოყალიბების მომენტში, D_{adj} 30-ის ტოლი იყო. მაგრამ უკვე 1996 წლის ივნისში D_{adj} 0.33-ის ტოლი გახდა. ამიტომ თავდაპირველად დოუ-ჯონსის ინდექსი იყო

$$\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} p_{it},$$

ხოლო 1996 წელს კი

$$3\sum_{i=1}^{30} p_{it}.$$

2) საბაზრო კაპიტალიზაციების შეწონვა. ამ სქემის მიხედვით ინდექსი გამოითვლება შემდეგნაირად. აფიქსირებენ ე.წ. საბაზისო დღეს და ინდექსის საწყის მნიშვნელობას, $Index_0$-ს, ხელოვნურად მიაწერენ გარკვეულ სიდიდეს, მაგალითად, 100-ს

ან 1000-ს და ა.შ. ამის შემდეგ, ინდექსის მიმდინარე სიდიდე რიმელიმე t-ურ დღეს გამოითვლება ფორმულით

$$Index_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{N} p_{ib} Q_{ib}} Index_b,$$

სადაც $Index_t$ – ინდექსის სიდიდეა t-ურ დღეს, p_{it} – i-ური კომპანიის აქციის დახურვის ფასია t-ურ დღეს, Q_{it} – i-ური კომპანიის აქციების რაოდენობაა t-ურ დღეს, p_{ib} – i-ური კომპანიის აქციის ფასია საბაზისო დღეს, Q_{ib} – i-ური კომპანიის აქციების რაოდენობაა საბაზისო დღეს, N – ინდექსის ფორმირებაში მონაწილე კომპანიების რაოდენობაა.

3) თანაბარი შეწონვა. არსებობს თანაბარი შეწონვის ორი ფორმა: ფორმა, რომელიც დაფუძნებულია საშუალო არითმეტიკულის და ფორმა, რომელიც დაფუძნებულია საშუალო გეომეტრიულის ცნებაზე.

ა) საშუალო არითმეტიკულზე დაფუძნებული ინდექსი. თავდაპირველად გამოითვლება i-ური აქციის ამონაგები $[t, t+1]$ პერიოდის განმავლობაში

$$HPY_{i,[t,t+1]} = \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} - 1,$$

სადაც $p_{i,t}$ არის i-ური აქციის ფასი t-ური დღის ბოლოს, ხოლო $p_{i,t+1}$ – i-ური აქციის ფასი $(t+1)$-ე დღის ბოლოს. შემდეგ გამოითვლება ამ სიდიდეების საშულო არითმეტიკული

$$AM_{[t,t+1]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} HPY_{i,[t,t+1]},$$

სადაც N კომპანიების რაოდენობაა.

თვით ინდექსი გამოითვლება რეკურენტულად შემდეგი განტოლებიდან

$$AIndex_{t+1} = AIndex_t(1+AM_{[t,t+1]}),$$

$$AIndex_1 = AIndex_b,$$

სადაც $AIndex_b$ არის ინდექსის სიდიდე საბაზისო დღეს. მას პირობითად გარკვეული რიცხვი აქვს მიწერილი, მაგალითად, 100, 1000 ან 50 და ა.შ.

ბ) საშუალო გეომეტრიულზე დაფუძნებული ინდექსი. თავდაპირველად გამოითვლება i-ური აქციის ამონაგები $[t, t+1]$ პერიოდში შემდეგი ფორმულით

$$HPR_{i,[t,t+1]} = \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}}.$$

შემდეგ გამოითვლება ამ სიდიდეების საშუალო გეომეტრიული

$$GM_{[t,t+1]} = \left(\prod_{i=1}^{N} HPR_{i,[t,t+1]} \right)^{1/N}.$$

ბოლოს, ინდექსი განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული განტოლებიდან

$$GIndex_{t+1} = GIndex_t \cdot GM_{[t,\,t+1]},$$

$$GIndex_1 = GIndex_b,$$

(აღნიშვნების შინაარსი ისეთივეა, როგორც ა) პუნქტში).

შენიშვნები.

1) ინდექსის შინაარსიდან გამომდინარე, t პარამეტრი ყველგან ღებულობს დისკრეტულ მნიშვნელობებს, კერძოდ, t=1, 2, ... დღეს.

2) გავარკვიოთ ინდექსის ბოლო ორი ფორმის შინაარსი.

ა)გადავწეროთ შესაბამისი რეკურენტული განტოლება შემდეგნაირად

$$\frac{AIndex_{t+1}}{AIndex_t} = 1+AM_{[t,\,t+1]}.$$

მაშინ, თუ $r_{AIndex_{[t,t+1]}}$-ით აღვნიშნავთ ინდექსის ამონაგებს $[t,t+1]$ პერიოდის განმავლობაში, გვექნება

$$r_{AIndex_{[t,t+1]}} = \frac{AIndex_{t+1}}{AIndex_t} - 1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} HPY_{i,[t,t+1]} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} - 1\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_{i,[t,t+1]},$$

სადაც $r_{i,[t,\,t+1]}$ – i-ური აქციის ამონაგებია $[t,\ t+1]$ პერიოდში.

ამრიგად, საშუალო არითმეტიკულზე დაფუძნებული ინდექსის ამონაგები არის მასში შემავალი აქციების ამონაგების საშუალო არითმეტიკული.

ბ) გამოვთვალოთ $GIndex_t$-ს ამონაგების უწყვეტი ანალოგი. გვექნება

$$r^c_{GIndex_{[t,t+1]}} = \ln\frac{GIndex_{t+1}}{GIndex_t} = \ln\left(\prod_{i=1}^{N} HPR_{i,[t,t+1]}\right)^{1/N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln HPR_{i,[t,t+1]} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r^c_{i,[t,t+1]}.$$

ამრიგად, საშუალო გეომეტრიულზე დაფუძნებული ინდექსის ამონაგებთა უწყვეტი ანალოგი არის მასში შემავალი აქციების ამონაგების უწყვეტი ანალოგების საშუალო არითმეტიკული.

ორივე შემთხვევაში, შინაარსობრივად, ინდექსი არის სიდიდე, რომლის ამონაგები (ჩვეულებრივი თუ უწყვეტი ანალოგი) არის მასში შემავალი აქციების საშუალო ამონაგების ტოლი.

* * *

დავასრულოთ თავი ამ თემისადმი მიძღვნილი და გამოყენებული ლიტერატურის ჩამონათვალით: [45], [66], [79], [83], [84].

21

მოდელირება

ხშირად შემთხვევითი პროცესის ყოფაქცევის შესწავლა შეუძლებელია თეორიული მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით და ამ პროცესის მახასიათებლების გათვლა რიცხვითი მეთოდების საშუალებით გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული. ასეთ დროს მიმართავენ სიმულაციის (ანუ შემთხვევითი პროცესის იმიტირების) მეთოდს, რომელიც რთული და სპეციფიკური პროცესების შესწავლის მძლავრ საშუალებას წარმოადგენს.

სიმულაციის მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს: იგება რეალური პროცესის შესაბამისი სტოქასტური მოდელი და შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით ხდება ამ მოდელის კონკრეტული რეალიზაციისათვის საჭირო ყოველი სიდიდის გენერირება. შემდეგ მთელი პროცესი მრავალგზის მეორდება და აღნიშნული პროცესის იმიტირებული რეალიზაციების გამოყენებით იგება რეალური პროცესის მახასიათებლების სტატისტიკური შეფასებები. აღსანიშნავია, რომ ამ შეფასებებისათვის საკმარისად ზუსტი შედეგის მისაღწევად (როგორც წესი) აუცილებელია დიდი რაოდენობის ექსპერიმენტების ჩატარება, რაც ამ მეთოდის მნიშვნელოვან ნაკლად ითვლება. ამიტომ, მიუხედავად იმისა, რომ სიმულაციის მეთოდი სხვა გამოთვლითი მეთოდებისაგან გამოირჩევა სიმარტივით (როგორც პროგრამული ისე ალგორითმული და გამოთვლითი თვალსაზრისით), ამ მეთოდს, როგორც წესი, იყენებენ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც პრობლემის ზუსტი მათემატიკური გადაწყვეტა ვერ ხერხდება და მიახლოებითი გამოთვლითი მეთოდების გამოყენება რთულია, თუმცა კომპიუტერული ტექნიკის განვითარებასთან ერთად ამ მეთოდის გამოყენების არე მნიშვნელოვნად იზრდება. შევნიშნოთ, რომ სიმულაციის მეთოდით მიღებული მოდელის პარამეტრთა შეფასებების სიზუსტე ყოველთვის შეიძლება გაიზარდოს შერჩევის მოცულობის ზრდის ხარჯზე, რადგან შერჩევის მოცულობა, ზოგიერთი სტატისტიკური ამოცანისაგან განსხვავებით, არ არის ფიქსირებული და ანალიტიკოსის მიერ იმართება. აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ სიმულაციის მეთოდი სასარგებლოა არა მხოლოდ მოდელის აღსაწერად, არამედ იმის შესასწავლადაც, თუ როგორ იცვლება კონკრეტული მოდელის ქცევა მისი პარამეტრების ცვლილებით (ე. წ. სცენარული ანალიზი).

თუმცა სიმულაციის მეთოდის იდეა საკმაოდ ძველია, მისი რეალური გამოყენება დაიწყო კომპიუტერის გამოჩენასთან ერთად, როდესაც ე.ნეიმანმა, ს.ულამმა და ე.ფერმიმ გამოიყენეს ის ბირთვული ფიზიკის რთული გამოთვლითი პრობლემების გადასაწყვეტად. სიმულაციის მეთოდის იდეა კი პირველად გამოჩნდა 1777 წელს ბიუფონის ნაშრომში, რომელშიც ფასდება რიცხვი π პარალელური ხაზებით დასერილ იატაკზე ნემსის შემთხვევითი დაგდების საშუალებით. საქმე იმაშია, რომ იატაკზე შემთხვევით დაგდებული ნემსის მიერ რომელიმე პარალელური ხაზის გადაკვეთის ალბათობა ადვილად იანგარიშება (ეს ამოცანა კარგად ცნობილია და მკითხველს შეუძლია ნახოს ალბათობის თეორიის ნებისმიერ სახელმძღვანელოში) და მისი გამოსახულება შეიცავს π რიცხვს, რაც იძლევა ექსპერიმენტების შედეგების მიხედვით ამ ალბათობის შეფასები საშუალებას. π რიცხვის ამ მეთოდით გამოთვლას მხოლოდ თეორიული მნიშვნელ აქვს, რადგან მისი ორი ან სამი ნიშნის სიზუსტით გამოსათვლელად საჭიროა ათას მილიონი ექსპერიმენტის ჩატარება. ქვემოთ ვნახავთ, რომ დამოუკიდებელი შემთხ სიდიდეთა მიმდევრობის სიმულაციით შესაძლებელია განსაზღვრული ინტეგრალ მიახლოებითი გამოთვლა დიდ რიცხვთა კანონის გამოყენებით. აქაც ინტეგრალის გამოთვლის სიზუსტის მისაღწევად დიდი მოცულობის შერჩევაა საჭირო. ამიტომ ეს

მეთოდი გამოყენებადია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ექსპერიმენტი მოდელირდება კომპიუტერზე. შემთხვევითი რიცხვების კომპიუტერზე გენერირების თეორია მათემატიკის მნიშვნელოვან მიმართულებად გადაიქცა. ნამდვილი შემთხვევითი რიცხვების ნაცვლად (რომლებიც ჩნდებიან ფიზიკური პროცესების რეალიზაციის დროს) ხმარობენ ე.წ. ფსევდოშემთხვევით რიცხვებს, რომელთა კონსტრუირება ხდება დეტერმინისტული გამოთვლითი ალგორითმების საშუალებით. ფსევდოშემთხვევით რიცხვებთან დაკავშირებით ჩნდება შემდეგი კითხვა: რა აზრით შეიძლება ეს რიცხვები ჩაითვალოს შემთხვევითად, თუ მათი კონსტრუირება ხდება დეტერმინისტული გამოთვლითი ალგორითმების საშუალებით? 1965-1966 წლებში კოლმოგოროვმა და მარტინლიოფმა განმარტეს თუ როდის შეიძლება ნულების და ერთებისაგან შემდგარი მიმდევრობა ჩაითვალოს შემთხვევითად. მათი აზრით რაც უფრო რთულია ალგორითმი რომლითაც აღიწერება აღნიშნული მიმდევრობა (ანუ რაც უფრო გრძელია „ყველაზე მოკლე" პროგრამა რომლის საშუალებითაც ხდება ამ მიმდევრობის კონსტრუირება) მით უფრო შემთხვევითად შეიძლება ჩაითვალოს ის. მარტინლიოფმა აჩვენა, რომ რთული ალგორითმებით შედგენილი მიმდევრობები შემთხვევითობის ყველა არსებულ სტატისტიკურ ტესტს აკმაყოფილებენ.

შევნიშნოთ, რომ სიმულაციის მეთოდი სამეცნიერო ლიტერატურაში ხშირად მონტე-კარლოს მეთოდის სახელით მოიხსენიება. ეს სახელი იმით აიხსნება, რომ ეს მეთოდი იყენებს შემთხვევითი რიცხვების მიმდევრობებს, რომელთა როლში შეიძლება ავიღოთ (მაგალითად) მონტე-კარლოს კაზინოში რეგულარულად გამოცხადებული თამაშების შედეგები, მაგრამ როგორც აღვნიშნეთ (დღეს) პრაქტიკაში შემთხვევითი რიცხვების გენერირება ხორციელდება კომპიუტერის საშუალებით (ქვემოთ სიტყვებს გენერირება, მოდელირება, სიმულირება სინონიმებად ჩავთვლით).

თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვები. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების გენერირება სიმულაციური მოდელების საბაზისო ელემენტია და სიმულაციის პროცესის საწყის წერტილს წარმოადგენს. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვები, როგორც წესი, წარმოადგენენ (0,1) ინტერვალში თანაბრად განაწილებულ n-ური რიგის ათწილადებს. მაშასადამე, ყოველ მათგანს აქვს $1/(10^n-1)$-ის ტოლი განხორციელების ალბათობა (თუ გამოვრიცხავთ ბოლო 0 და 1 წერტილს) და თუ n საკმარისად დიდია (მაგალითად $n \geq 10$), მაშინ ეს დისკრეტული განაწილება პრაქტიკულად შეგვიძლია შესაბამისი უწყვეტი თანაბარი განაწილების

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \text{ თუ } \quad x \leq 0 \\ x & , \text{ თუ } \quad 0<x<1 \\ 1 & , \text{ თუ } \quad x \geq 1\end{cases}$$

იდენტურად ჩავთვალოთ.

შემთხვევითი რიცხვების გენერატორებს აქვთ დეტერმინისტული ალგორითმული კონსტრუქცია და ისინი გარკვეული პერიოდულობით ხასიათდებიან. პირველი ან რამდენიმე გენერირებული რიცხვი განსაზღვრავს მთელ მიმდევრობას და გარკვეული ...კრის შემდეგ ეს მიმდევრობა მეორდება. ამიტომ ამ მიმდევრობის ციკლი საკმაოდ დიდი უნდა იყოს, რომ კონკრეტული გამოყენებისას გენერირებულმა მიმდევრობამ გამეორება ვერ მოასწროს, წინააღმდეგ შემთხვევაში მოსალოდნელია სერიოზული შეცდომები. ასეთი ტიპის მიმდევრობები თუმცა ნამდვილ შემთხვევით რიცხვთა მიმდევრობებს არ წარმოადგენენ (ამიტომ მათ ფსევდოშემთხვევით რიცხვებს უწოდებენ) ისინი საკმარისნი არიან პრაქტიკული მიზნებისათვის, რადგან როგორც აღვნიშნეთ ასეთი მიმდევრობები

საკმაოდ რთული ალგორითმებით იგება, რის გამოც მათი ყოფაქცევა კარგად უახლოვდება შემთხვევითი ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული რიცხვითი მიმდევრობის თვისებებს.

ყველა თანამედროვე კომპიუტერი და პროგრამული კალკულატორი შეიცავს შემთხვევით რიცხვთა პაკეტებს. მაგრამ ამ პროგრამების ხმარებამდე სასურველია სტატისტიკური ტესტების საშუალებით შემოწმდეს გენერირებული მიმდევრობის თანხმობა თანაბარ განაწილებასთან, რათა დავრწმუნდეთ, რომ (მაგალითად) ის არ იძლევა შემთხვევით რიცხვთა ციკლურ მიმდევრობას.

მაგალითისათვის მოგვყავს თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების გენერირების ერთი მარტივი მეთოდი, რომელიც წრფივი კონგრუენტული მეთოდის სახელით არის ცნობილი. ამ მეთოდის მიხედვით შემთხვევითი რიცხვების (x_n, $n \geq 0$) მიმდევრობა მიიღება შემდეგი წესით: საწყისი სიდიდე x_0 იღებს რომელიმე მთელ მნიშვნელობას 0-დან m-1-მდე და ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი მიიღება მისი წინა წევრისაგან შემდეგი წრფივი რეკურენტული ფორმულით

$$x_n = ax_{n-1}+b \qquad (mod\ m),$$

სადაც a, b და m მუდმივები ფრთხილად არის ასარჩევი. ამ რიცხვებს არჩევენ ისე, რომ პროცედურა დიდხანს არ გამეორდეს. მაგალითად [71] ნაშრომში ამ რიცხვების შემდეგი არჩევანია რეკომენდირებული

$$a = 31415821, \quad b=1, \quad m=10^8.$$

ეს მეთოდი იძლევა ფსევდოშემთხვევით რიცხვებს 0-დან m-1-მდე და (0,1) ინტერვალში თანაბრად განაწილებული ფსევდოშემთხვევითი რიცხვების მისაღებად საჭიროა გენერირებული სიდიდეების m-ზე გაყოფა. შევნიშნოთ, რომ აღწერილი ალგორითმი არ არის რთული და სინამდვილეში მიღებული მიმდევრობა აკმაყოფილებს შემთხვევითობის მხოლოდ ზოგიერთ (და არა ყველა) ტესტს, მისი გამოყენება შეიძლება მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში.

ინტეგრალის გამოთვლა მონტე-კარლოს მეთოდით. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ ეს ფუნქცია განსაზღვრულია [0,1] ინტერვალში და მისი მნიშვნელობების სიმრავლეც ამავე ინტერვალს ეკუთვნის. ვნახოთ, თუ როგორ შეიძლება

$$\int_0^1 f(x)dx, \tag{21.1}$$

ინტეგრალის მიახლებითი გამოთვლა, შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის სიმულირების საშუალებით.

განვიხილოთ X_1, X_2, ... [0,1] ინტერვალში თანაბრად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. განვსაზღვროთ შემთხვევით სიდიდეთა ახალი (Z_i, $i \geq 1$) მიმდევრობა შემდეგი წესით:

$$Z_i = f(x_i),\ i \geq 1. \tag{21.2}$$

ადვილი სანახავია, რომ (Z_i, $i \geq 1$) დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას წარმოადგენს და ყოველი i-სთვის

$$EZ_i = \int_0^1 f(x)dx\,. \tag{21.3}$$

ამიტომ დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის თანახმად (იხ. თავი 8). ადგილი აქვს

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \to \int_0^1 f(x)dx\,. \tag{21.4}$$

კრებადობას ალბათობით 1.

ამის გამო (21.1) ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლისთვის უნდა დამოდელირდეს შემთხვევით რიცხვთა (X_i, Y_i), $i \geq 1$ მიმდევრობა და გამოითვალოს (21.2) წესით შედგენილ სიდიდეთა არითმეტიკული საშუალო.

მოცემული განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეთა სიმულირება. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით შესაძლებელია ნებისმიერი წინასწარ მოცემული F განაწილების ფუნქციის მქონე შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობის გენერირება.

ჩავთვალოთ, რომ მოცემული გვაქვს $[0,1]$ ინტერვალში თანაბრად განაწილებული α შემთხვევითი სიდიდის დამოუკიდებელი რეალიზაციები. მაშინ F_X განაწილების ფუნქციის მქონე X შემთხვევითი სიდიდის რეალიზაციების იმიტირება ხორციელდება α თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის რეალიზაციების F_X ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციის გარდაქმნების საშუალებით

$$X = F_X^{-1}(\alpha)\,.$$

შევნიშნოთ, რომ F_X ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით:

$$F_X^{-1}(x) = inf\{y : F_X(y) \geq x\}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ α შემთხვევითი სიდიდე თანაბრად არის განაწილებული $[0,1]$ ინტერვალში, მაშინ $X = F_X^{-1}(\alpha)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია F_X ფუნქციას დაემთხვევა. მართლაც, რადგან F_X მონოტონური ფუნქციაა

$$P(X \leq x) = P(F_X^{-1}(\alpha) \leq x) = \mathrm{P}(F_X(F_X^{-1}(\alpha)) \leq F_X(x)) = P(\alpha \leq F_X(x)) = F_X(x)$$

ბოლო ტოლობა სამართლიანია, ვინაიდან α თანაბრად არის განაწილებული $[0,1]$ ინტერვალში და $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

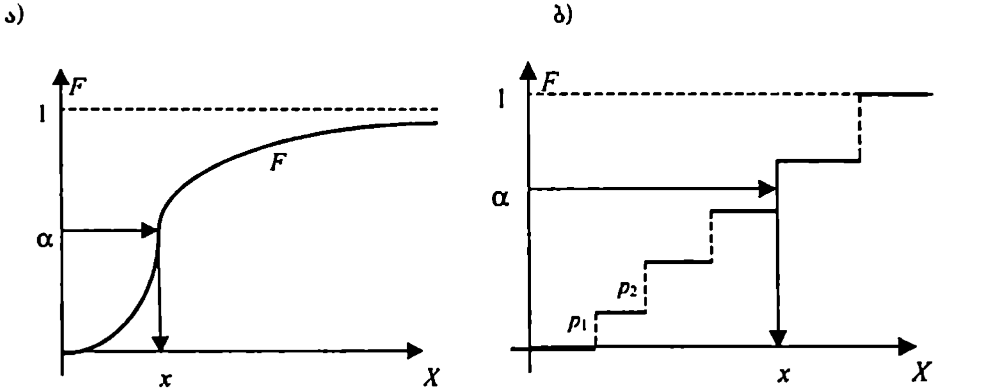
ნახ. 21.1-ზე F განაწილების ფუნქციის შესაბამისი უწყვეტი და დისკრეტული შემთხვევით სიდიდეთა სიმულაციის პროცესი გრაფიკულად არის წარმოდგენილი.

ვთქვათ, X არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც იღებს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებს შესაბამისად $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ალბათობებით. ზემოთ აღწერილი პროცედურის თანახმად ამ შემთხვევითი სიდიდის სიმულირება შემდეგნაირად ხორციელდება: $[0,1]$ ინტერვალს ვყოფთ $J_1, J_2, \ldots, J_n$ ქვეინტერვალებად, სადაც $J_1=[0, p_1[$, $J_2=[p_1, p_1+p_2[, \ldots, J_k=[p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}, p_1+p_2+\cdots+p_k[$. ამის შემდეგ ვიღებთ თანაბრად განაწილებული α შემთხვევითი სიდიდის

რეალიზაციას და თუ ეს სიდიდე ჩავარდა J_k ინტერვალში, მაშინ X შემთხვევითი სიდიდის რეალიზაციის როლში ვიღებთ x_k სიდიდეს. ცხადია, რომ მიღებული

$$\sum_{k=1}^{n} I_{(\alpha\in J_k)} \cdot x_k$$

შემთხვევითი სიდიდე განაწილებული იქნება $F(x) = \sum_{x_i \le x} p_i$ კანონით.



ნახ 21.1. F განაწილების ფუნქციის შესაბამისი შემთხვევითი რიცხვების გენერირება; ა) უწყვეტი შემთხვევა ბ) დისკრეტული შემთხვევა.

როდესაც არსებობს X შემთხვევითი სიდიდიდის განაწილების სიმკვრივე $p_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$, მაშინ $X = F_X^{-1}(\alpha)$ გამოსახულების ანგარიში შესაძლებელია შემდეგი ტოლობიდან

$$\int_{-\infty}^{x} p_X(x)dx = \alpha. \tag{21.5}$$

თუ შესაძლებელია ამ ინტეგრალის ანალიზური გამოთვლა, მაშინ ვიღებთ X-ის მიმართ (საზოგადოდ) ტრანსცედენტურ განტოლებას. საერთოდ $P_X(x)$ ფუნქციის კონკრეტული თვისებების განხილვის გარეშე ძნელია ამოხსნის ეფექტური საშუალების მითითება. ამოცანა უფრო რთულდება, როდესაც საჭირო ხდება ინტეგრალის რიცხვითი მეთოდებით გამოთვლა, ამიტომ ეს მეთოდი ეფექტურ შედეგს იძლევა მხოლოდ საკმაოდ მარტივ შემთხვევებში. ასეთ მაგალითს წარმოადგენს ექსპონენციალური განაწილება.

ვთქვათ X შემთხვევით სიდიდიდეს აქვს სიმკვრივე

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \ge 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

ამ შემთხვევაში (21.5) ინტეგრალი ადვილად იანგარიშება და (21.5) განტოლება ცხადად იხსნება, საიდანაც ვიღებთ, რომ $e^{-\lambda x} = 1 - \alpha$. რადგანაც $1-\alpha$ სიდიდე ისევ თანაბრად იქნება განაწილებული $[0,1]$ ინტერვალში $1-\alpha$-ს α-თი შეცვლით გვექნება

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln\alpha. \tag{21.6}$$

ამრიგად ექსპონენციალურად ($\lambda>0$ ინტენსივობით) განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმულირებისათვის საკმარისია თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების $\alpha_1,\alpha_2,...$ მიმდევრობის გენერირება და ამ მიმდევრობის (21.6) ფორმულით გარდაქმნა.

პუასონის შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება. ვთქვათ X შემთხვევითი სიდიდიდე განაწილებულია პუასონის განაწილებით

$$P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \qquad n \geq 0.$$

არ არის ძნელი იმის ჩვენება, რომ თუ (τ_i, $i\geq1$) არის λ პარამეტრით ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა, მაშინ

$$N_t = \sum_{n\geq1} nI_{\{\tau_1+\cdots+\tau_n < t \leq \tau_1+\cdots+\tau_{n+1}\}} \tag{21.7}$$

შემთხვევით სიდიდეს ექნება პუასონის განაწილება პარამეტრებით λt. ამიტომ $X=N_1$ შემთხვევითი სიდიდის სიმულირებისათვის საკმარისია τ_i სიდიდეების გენერირება. მაშასადამე უნდა ავიღოთ [0,1] ინტერვალში თანაბრად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების (α_i, $i\geq1$) მიმდევრობა. გარდავქმნათ ეს მიმდევრობა (21.6) ფორმულის მიხედვით და მიღებული $\tau_i= -\frac{1}{\lambda}\ln\alpha_i$ სიდიდეები ჩავსვათ (21.7) ფორმულაში, რაც მოგვცემს N_1 შემთხვევითი სიდიდის გენერირების შემდეგ ალგორითმს

$$N_1 = \sum_{n\geq1} nI_{\{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n+1} < e^{-\lambda} \leq \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}}.$$

ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების სიმულირება. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების გენერირება შესაძლებელია შემდეგი ლოგარითმულ-ტრიგონომეტრიული ფორმულის გამოყენებით

$$X_1 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\,\cos2\pi\alpha_2\,, \tag{21.8}$$

$$X_2 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\,\sin2\pi\alpha_2\,, \tag{21.9}$$

სადაც α_1, α_2 არის [0,1] ინტერვალში თანაბრად განაწილებული დამოუკიდებელ შემთხვევითი სიდიდეთა წყვილი. მტკიცდება, რომ X_1 და X_2 ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და თითოეულს აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება. (ამ ფაქტის დამტკიცება იხ.მაგ. [28] ან [70]-ში).

μ_x საშუალოსა და σ_x^2 დისპერსიის მქონე ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის გენერირება შეიძლება სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მოდელირებით

$$X=\mu_X+\sigma_X N(0,1)$$

წრფივი გარდაქმნის გამოყენებით.

ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების სიმულაციის რიგი მეთოდი დაკავშირებულია ცენტრალური ზღვარითი თეორემის გამოყენებასთან. თუ განვიხილავთ [0,1] ინტერვალში თანაბრად განაწილებულ დამოუკიდებელ (α_i, $i\geq 1$) მიმდევრობას, მაშინ ამ სიდიდეების

$$X(n)=\sqrt{\frac{12}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i-\frac{1}{2}\right) \tag{21.10}$$

ნორმირებული ჯამის განაწილების ფუნქცია მიისწრაფის ნორმალური განაწილების ფუნქციისაკენ როდესაც $n\to\infty$. პრაქტიკულად თვლიან, რომ როდესაც n=12, მიიღება საკმაოდ კარგი მიახლოება ნორმალურ კანონთან. ამ შემთხვევაში (21.10) ფორმულა იღებს განსაკუთრებით მარტივ სახეს

$$X^{(12)}=\sum_{i=1}^{12}\alpha_i-6.$$

ამ მეთოდის უპირატესობა მდგომარეობს მის სიმარტივეში, რადგან ის ადვილად გასაგებია და ადვილად პროგრამირდება. მაგრამ შევნიშნოთ, რომ $X^{(12)}$ შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივე ნულის ტოლია, როდესაც $x>6$ და ამიტომ ამოცანებში, სადაც შემთხვევით სიდიდეთა დიდ გადახრებს არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება, ეს აპროქსიმაცია კარგ შედეგს არ იძლევა. ამ მეთოდის გამოყენება ამ მიზეზის გამო არ არის მიზანშეწონილი რისკის თეორიისა და ფინანსური მათემატიკის მოდელებში.

ნორმალურ განაწილებასთან დაკავშირებულ განაწილებათა სიმულირება. თუ $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია ერთი და იგივე ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივით, მაშინ $G_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ სიდიდეს ექნება $\Gamma(n,\lambda)$ განაწილება, სადაც λ ექსპონენციალური განაწილების ინტენსივობის პარამეტრს ემთხვევა. მაშასადამე, $\Gamma(n,\lambda)$ განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის სიმულირების მიზნით შეგვიძლია დავამოდელიროთ [0,1] ინტერვალში თანაბრად განაწილებული $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები და (21.6) ფორმულის მიხედვით შევადგინოთ

$$G=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\ln\alpha_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) \tag{21.11}$$

ჯამი, რომელსაც ექნება $\Gamma(n,\lambda)$ განაწილება.

რადგან χ_m^2 განაწილება $\Gamma\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)$ განაწილების ტოლია, ლუწი m-ის შემთხვევაში m თავისუფლების ხარისხის მქონე χ^2 განაწილების მოდელირება შეიძლება ზემოთ

მოყვანილი წესით (21.11) ფორმულის გამოყენებით. როდესაც m კენტია ვამოდელირებთ χ^2_{m-1} განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეს (ანუ სიდიდეს $\Gamma\left(\frac{m-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$განაწილებით) და ვუმატებთ ამ სიდიდეს მათგან დამოუკიდებელ სტანდარტულ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის კვადრატს. ამრიგად ლუწი m-ისათვის

$$\chi^2_m = -\ln(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m/2})$$

და კენტი m -ისათვის

$$\chi^2_m = -\ln(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{(m-1)/2}) - \ln\alpha_{(m+1)/2}\cos^2 2\pi\alpha_{(m+3)/2}$$

ლოგ-ნორმალური განაწილება. X შემთხვევითი სიდიდე ლოგ-ნორმალურად არის განაწილებული თუ lnX სიდიდეს ნორმალური განაწილება აქვს. ამიტომ, ცხადია X შემთხვევითი სიდიდის გენერირებისათვის საკმარისია ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმულირება და შემდეგ e ნეპერის რიცხვის სიმულირებული სიდიდის ტოლ ხარისხში აყვანა.

მონტე-კარლოს მეთოდი. შევეხოთ კიდევ ერთხელ ინტეგრალების, ანუ შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლების, მიახლოვებითი გამოთვლის საკითხს, სიმულაციის (მონტე-კარლოს) მეთოდის გამოყენებით. გარკვეული X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის შეფასებისას ჩვენ ვაფასებთ $I=\int xF(dx)$ ინტეგრალს, რომელიც $\int xp(x)dx$ ინტეგრალის ტოლია, როდესაც X შემთხვევითი სიდიდის $F(x)$ განაწილების ფუნქციას $p(x)$ სიმკვრივე გააჩნია, $\dfrac{dF(x)}{dx}=p(x)$. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X შემთხვევითი სიდიდე, რომლის $F(x)$ განაწილების ფუნქცია რაიმე ცნობილი განაწილების კანონით (მაგალითად, ნორმალური, ექსპონენციალური ან პუასონის) არის მოცემული. როგორც ვნახეთ, ასეთი შემთხვევითი სიდიდის დამოუკიდებელი რეალიზაციების მოდელირება ადვილია და სიმულირებული $X_1,X_2,...$ მიმდევრობის საშუალებით შეიძლება X სიდიდის მათემატიკური ლოდინის მიახლოებითი გამოთვლა, რადგან გაძლიერებული დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად (იხ. თავი 8) თითქმის ყოველთვის (ანუ ალბათობით 1)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to EX = \int x\, p(x)dx.$$

მაგრამ ასეთ შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინი უშუალოდ იანგარიშება და ცხადია, მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებას აქ აზრი არა აქვს.

ხშირად საჭიროა X შემთხვევითი სიდიდის რაიმე $f(x)$ ფუნქციით გარდაქმნის შედეგად მიღებული ახალი $f(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის (ან სხვა რიცხვითი მახასიათებლების) გათვლა. როდესაც $f(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია „კარგი" ანალიზური თვისებები $f(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის, ანუ

$$Ef(X) = \int f(x)\, p(x)dx$$

ინტეგრალის ანგარიში რთულდება და ხშირ შემთხვევაში მისი ზუსტი ანგარიში შეუძლებელი ხდება. ასეთ დროს მიზანშეწონილია მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება.

ამისათვის საჭიროა X სიდიდის დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ რეალიზაციის სიმულირება ახალი $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ მიმდევრობის არითმეტიკული საშუალოს დათვლა, რადგან ისევ გაძლიერებული დიდ რიცხვთა კანონის ძალით

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \to Ef(X) = \int f(x)\,p(x)dx. \tag{21.12}$$

როგორც ვხედავთ, სიმულაციის მეთოდი ინტეგრალების გათვლის რიცხვითი მეთოდებისაგან განსხვავდება იმით, რომ ეს მეთოდი ეფუძნება ალბათურ მიდგომას და მისი კრებადობის ხასიათიც ალბათურია. ამის გამო მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებისას

$$\int f(x)\,F(dx) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \tag{21.13}$$

ნაშთის შემცირების რიგი არ არის დამოკიდებული X შემთხვევითი სიდიდის განზომილებაზე (ანუ ინტეგრალის ჯერადობაზე). ამიტომ ამ მეთოდს ხშირად უპირატესობა აქვს რიცხვით მეთოდებთან შედარებით მრავალჯერადი ინტეგრალების გამოთვლისას, თუმცა ერთჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის დროს რიცხვითი მეთოდების კრებადობის სიჩქარე უფრო დიდია. შევნიშნოთ, რომ (22.13) ცდომილების შეფასება რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია რთული ბუნებისაა, ხშირად ძალიან რთულია. ამიტომ $f(x)$ ფუნქციას ედება სიგლუვის პირობები, მაშინ როცა იგივე ცდომილების შეფასებისას მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენების დროს საკმარისია მხოლოდ მინიმალური შეზღუდვები.

* * *

ამ თავისადმი მიძღვნილი და გამოყენებული ლიტერატურის ჩამონათვალი: [29], [32], [64], [70], [71].

დასკვნები

ამ თავში განხილულია სხვადასხვა ტიპის შემთხვევით სიდიდეთა მოდელირების (ანუ სიმულირების) მეთოდები, რომლებიც გამოიყენება ამ სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლების (საშუალო მნიშვნელობის, ვარიაციის, ასიმეტრიის კოეფიციენტის და სხვა) გასათვლელად. სიმულაციის მეთოდს, როგორც წესი, მიმართავენ მხოლოდ შემდეგ შემთხვევებში:

1. როცა პრობლემის ზუსტი მათემატიკური გადაწყვეტა შეუძლებელია;
2. როდესაც ამოცანის ზუსტი ანალიზური ამოხსნა ცნობილია, მაგრამ ის ძნელად რეალიზებადია და რთულ გამოთვლებთან არის დაკავშირებული.

მოდელირების მეთოდის გამოყენებისას შეფასებათა სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა შემთხვევით სიდიდეთა დიდი რაოდენობით გენერირება, რის გამოც ამ მეთოდის

გამოყენებას აზრი აქვს მხოლოდ ექსპერიმენტის კომპიუტერის გამოყენებით ჩატარების შემთხვევაში. ყოველი კომპიუტერი აღჭურვილია პროგრამით, რომლის საშუალებით შესაძლებელია ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი, თანაბრად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის გამომახვა. თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით რიცხვთა გამოყენებით კი ხერხდება ნებისმიერი განაწილების ფუნქციის მქონე შემთხვევითი სიდიდის დამოუკიდებელი რეალიზაციების სიმულირება, რის შედეგადაც შესაძლებელია რეალური მოვლენის შესაბამისი ალბათური მოდელის იმიტირება და მისი ძირითადი პარამეტრების შეფასება ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებით.

დანართი: სტატისტიკური ცხრილები

A1. სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები

A2. სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები (z_α)

A3. χ^2 განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($\chi^2_{n,\alpha}$)

A4. t განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($t_{n,\alpha}$)

A5. $F(n,m)$ განაწილების ზედა α=0.05 კრიტიკული წერტილები ($F_{n,m,\alpha}$)

A6. ნიშანთა კრიტერიუმი: $P\{B_n > b\}$, $P\{B_n > b-1\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის B_n სტატისტიკისათვის (p=0.05)

A7. ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი: $P\{T \geq t\}$, $P\{T \geq t-1\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის T_n სტატისტიკისათვის

A8. უილკოკსონის რანგთა ჯამების კრიტერიუმი: $P\{W > w\}$, $P\{W_n > w-1\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის W სტატისტიკისათვის

A9. კრასკელ-უოლისის სტატისტიკის კრიტერიუმი: $P\{H \geq x\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის H სტატისტიკისათვის

A10. სპირმენის სტატისტიკის ზედა α-კრიტიკული მნიშვნელობები

A11. კენდალის სტატისტიკის ზედა α-კრიტიკული მნიშვნელობები

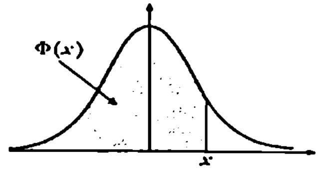
A12. სერიების რაოდენობის კრიტიკული მნიშვნელობები

A13. სტიუდენტიზირებული გაბნევის დიაპაზონის ზედა α-კრიტიკული მნიშვნელობები (α=0.05)

A14. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვები

A1. სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

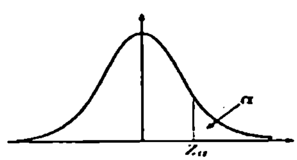


x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.500	0.33	0.629	0.66	0.745	0.99	0.838	1.32	0.906	1.65	0.950
0.01	0.503	0.34	0.633	0.67	0.748	1.00	0.841	1.33	0.908	1.66	0.951
0.02	0.507	0.35	0.636	0.68	0.751	1.01	0.843	1.34	0.909	1.67	0.952
0.03	0.511	0.36	0.640	0.69	0.754	1.02	0.846	1.35	0.911	1.68	0.953
0.04	0.515	0.37	0.644	0.70	0.758	1.03	0.848	1.36	0.913	1.69	0.954
0.05	0.519	0.38	0.648	0.71	0.761	1.04	0.850	1.37	0.914	1.70	0.955
0.06	0.523	0.39	0.651	0.72	0.764	1.05	0.853	1.38	0.916	1.71	0.956
0.07	0.527	0.40	0.655	0.73	0.767	1.06	0.855	1.39	0.917	1.72	0.957
0.08	0.531	0.41	0.659	0.74	0.770	1.07	0.857	1.40	0.919	1.73	0.958
0.09	0.535	0.42	0.662	0.75	0.773	1.08	0.859	1.41	0.920	1.74	0.959
0.10	0.539	0.43	0.666	0.76	0.776	1.09	0.862	1.42	0.922	1.75	0.959
0.11	0.543	0.44	0.670	0.77	0.779	1.10	0.864	1.43	0.923	1.76	0.960
0.12	0.547	0.45	0.673	0.78	0.782	1.11	0.866	1.44	0.925	1.77	0.961
0.13	0.551	0.46	0.677	0.79	0.785	1.12	0.868	1.45	0.926	1.78	0.962
0.14	0.555	0.47	0.680	0.80	0.788	1.13	0.870	1.46	0.927	1.79	0.963
0.15	0.559	0.48	0.684	0.81	0.791	1.14	0.872	1.47	0.929	1.80	0.964
0.16	0.563	0.49	0.687	0.82	0.793	1.15	0.874	1.48	0.930	1.81	0.964
0.17	0.567	0.50	0.691	0.83	0.796	1.16	0.876	1.49	0.931	1.82	0.965
0.18	0.571	0.51	0.694	0.84	0.799	1.17	0.879	1.50	0.933	1.83	0.966
0.19	0.575	0.52	0.698	0.85	0.802	1.18	0.881	1.51	0.934	1.84	0.967
0.20	0.579	0.53	0.701	0.86	0.805	1.19	0.882	1.52	0.935	1.85	0.967
0.21	0.583	0.54	0.705	0.87	0.807	1.20	0.884	1.53	0.936	1.86	0.968
0.22	0.587	0.55	0.708	0.88	0.810	1.21	0.886	1.54	0.938	1.87	0.969
0.23	0.590	0.56	0.712	0.89	0.813	1.22	0.888	1.55	0.939	1.88	0.969
0.24	0.594	0.57	0.715	0.90	0.815	1.23	0.890	1.56	0.940	1.89	0.970
0.25	0.598	0.58	0.719	0.91	0.818	1.24	0.892	1.57	0.941	1.90	0.971
0.26	0.602	0.59	0.722	0.92	0.821	1.25	0.894	1.58	0.942	1.91	0.971
0.27	0.606	0.60	0.725	0.93	0.823	1.26	0.896	1.59	0.944	1.92	0.972
0.28	0.610	0.61	0.729	0.94	0.826	1.27	0.897	1.60	0.945	1.93	0.973
0.29	0.614	0.62	0.732	0.95	0.828	1.28	0.899	1.61	0.946	1.94	0.973
0.30	0.617	0.63	0.735	0.96	0.831	1.29	0.901	1.62	0.947	1.95	0.974
0.31	0.621	0.64	0.738	0.97	0.833	1.30	0.903	1.63	0.948	1.96	0.975
0.32	0.625	0.65	0.742	0.98	0.836	1.31	0.904	1.64	0.949	1.97	0.975

A1. (გაგრძელება)

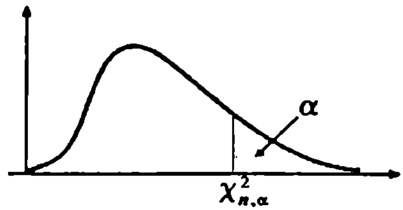
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.98	0.976	2.26	0.988	2.54	0.994	2.82	0.997	3.10	0.999
1.99	0.976	2.27	0.988	2.55	0.994	2.83	0.997	3.11	0.999
2.00	0.977	2.28	0.988	2.56	0.994	2.84	0.997	3.12	0.999
2.01	0.977	2.29	0.988	2.57	0.994	2.85	0.997	3.13	0.999
2.02	0.978	2.30	0.989	2.58	0.995	2.86	0.997	3.14	0.999
2.03	0.978	2.31	0.989	2.59	0.995	2.87	0.997	3.15	0.999
2.04	0.979	2.32	0.989	2.60	0.995	2.88	0.998	3.16	0.999
2.05	0.979	2.33	0.990	2.61	0.995	2.89	0.998	3.17	0.999
2.06	0.980	2.34	0.990	2.62	0.995	2.90	0.998	3.18	0.999
2.07	0.980	2.35	0.990	2.63	0.995	2.91	0.998	3.19	0.999
2.08	0.981	2.36	0.990	2.64	0.995	2.92	0.998	3.20	0.999
2.09	0.981	2.37	0.991	2.65	0.995	2.93	0.998	3.21	0.999
2.10	0.982	2.38	0.991	2.66	0.996	2.94	0.998	3.22	0.999
2.11	0.982	2.39	0.991	2.67	0.996	2.95	0.998	3.23	0.999
2.12	0.983	2.40	0.991	2.68	0.996	2.96	0.998	3.24	0.999
2.13	0.983	2.41	0.992	2.69	0.996	2.97	0.998	3.25	0.999
2.14	0.983	2.42	0.992	2.70	0.996	2.98	0.998	3.26	0.999
2.15	0.984	2.43	0.992	2.71	0.996	2.99	0.998	3.27	0.999
2.16	0.984	2.44	0.992	2.72	0.996	3.00	0.998	3.28	0.999
2.17	0.985	2.45	0.992	2.73	0.996	3.01	0.998	3.29	0.999
2.18	0.985	2.46	0.993	2.74	0.996	3.02	0.998	3.30	0.999
2.19	0.985	2.47	0.993	2.75	0.997	3.03	0.998	3.31	0.999
2.20	0.986	2.48	0.993	2.76	0.997	3.04	0.998	3.32	0.999
2.21	0.986	2.49	0.993	2.77	0.997	3.05	0.998	3.33	0.999
2.22	0.986	2.50	0.993	2.78	0.997	3.06	0.998	3.34	0.999
2.23	0.987	2.51	0.993	2.79	0.997	3.07	0.998	3.35	0.999
2.24	0.987	2.52	0.994	2.80	0.997	3.08	0.998	3.36	0.999
2.25	0.987	2.53	0.994	2.81	0.997	3.09	0.999	3.37	0.999

A2. სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილების, z_α-ს მნიშვნელობები



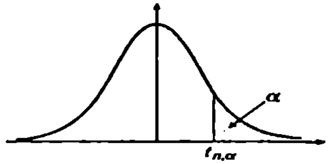
α	0.1	0.05	0.025	0.125	0.01	0.005	0.0025	0.001
z_α	1.28	1.64	1.96	2.24	2.33	2.57	2.81	3.08

A3. χ^2 განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები, $\chi^2_{n,\alpha}$.



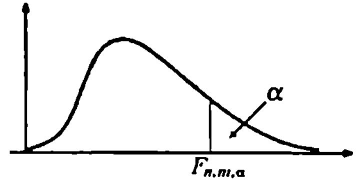
	α							
n	**0.99**	**0.975**	**0.95**	**0.9**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2294	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999
17	6.4077	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3904	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6885	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383
24	10.8563	12.4011	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140
26	12.1982	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782
29	14.2564	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922

A4. t განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები, $t_{n,\alpha}$.



	α						
n	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	127.321	318.289
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.328
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.894
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385

A5. $F(n,m)$ განაწილების ზედა $\alpha=0.05$ კრიტიკული წერტილები, $F_{n,m,\alpha}$.



n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	50	100
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.0	243.9	244.7	245.4	245.9	246.5	246.9	247.3	247.7	248.0	251.8	253.0
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43	19.44	19.44	19.44	19.45	19.48	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.58	8.55
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.70	5.66
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.44	4.41
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.75	3.71
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.32	3.27
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.02	2.97
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.80	2.76
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.64	2.59
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.51	2.46
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.40	2.35
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.31	2.26
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.24	2.19
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.18	2.12
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.12	2.07
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.08	2.02
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.04	1.98
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.00	1.94
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	1.97	1.91
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.60	1.52
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.48	1.39

A6. ნიშანთა კრიტერიუმი: $P\{B_n > b\}$, $P\{B_n > b-1\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის B_n სტატისტიკისათვის (p=0.05)

b	n							
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.7500							
2	0.2500	0.5000	0.6875					
3		0.1250	0.3125	0.5000	0.6563			
4			0.0625	0.1875	0.3438	0.5000	0.6367	
5				0.0313	0.1094	0.2266	0.3633	0.5000
6					0.0156	0.0625	0.1445	0.2539
7						0.0078	0.0352	0.0898
8							0.0039	0.0195
9								0.0020

b	n							
	10	11	12	13	14	15	16	17
5	0.6230							
6	0. 3770	0.5000	0.6128					
7	0.1719	0.2744	0.3872	0.5000	0.6047			
8	0.0547	0.1133	0.1938	0.2905	0.3953	0.5000	0.5982	
9	0.0107	0.0327	0.0730	0.1334	0.2120	0.3036	0.4018	0.5000
10	0.0010	0.0059	0.0193	0.0461	0.0898	0.1509	0.2272	0.3145
11		0.0005	0.0032	0.0112	0.0287	0.0592	0.1051	0.1662
12			0.0002	0.0017	0.0065	0.0176	0.0384	0.0717
13				0.0001	0.0009	0.0037	0.0106	0.0245
14					0.0001	0.0005	0.0021	0.0064
15						0.0000	0.0003	0.0012
16							0.0000	0.0001
17								0.0000

b	n							
	18	19	20	21	22	23	24	25
9	0.5927							
10	0.4073	0.5000	0.5881					
11	0. 2403	0.3238	0.4119	0.5000	0.5841			
12	0.1189	0.1796	0.2517	0.3318	0.4159	0.5000	0.5806	
13	0.0481	0.0835	0.1316	0.1917	0.2617	0.3388	0.4194	0.5000
14	0.0154	0.0318	0.0577	0.0946	0.1431	0.2024	0.2706	0.3450
15	0.0038	0.0096	0.0207	0.0392	0.0669	0.1050	0.1537	0.2122
16	0.0007	0.0022	0.0059	0.0133	0.0262	0.0466	0.0758	0.1148
17	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0085	0.0173	0.0320	0.0539
18	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0022	0.0053	0.0113	0.0216
19			0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0033	0.0073
20				0.0000	0.0001	0.0002	0.0008	0.0020
21					0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
22							0.0000	0.0001
23								0.0000

A7. ნიშნიანი რანგების კრიტერიუმი: $P\{T > t\}$, $P\{T > t-1\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის T_n სტატისტიკისათვის

t	n = 3	4	5	6	7	8	9
3	0.625						
4	0.375						
5	0.250	0.562					
6	0.125	0.438					
7		0.312					
8		0.188	0.500				
9		0.125	0.406				
10		0.062	0.312				
11			0.219	0.500			
12			0.156	0.422			
13			0.094	0.344			
14			0.062	0.281	0.531		
15			0.031	0.219	0.469		
16				0.156	0.406		
17				0.109	0.344		
18				0.078	0.289	0.527	
19				0.047	0.234	0.473	
20				0.031	0.188	0.422	
21				0.016	0.148	0.371	
22					0.109	0.320	
23					0.078	0.273	0.500
24					0.055	0.230	0.455
25					0.039	0.191	0.410
26					0.023	0.156	0.367
27					0.016	0.125	0.326
28					0.008	0.098	0.285
29						0.074	0.248
30						0.055	0.213
31						0.039	0.180
32						0.027	0.150
33						0.020	0.125
34						0.012	0.102
35						0.008	0.082
36						0.004	0.064
37							0.049
38							0.037
39							0.027
40							0.020
41							0.014
42							0.010
43							0.006
44							0.004
45							0.002

A7. (გაგრძელება)

x	n: 10	11	12	13	14	15
28	0.500					
29	0.461					
30	0.423					
31	0.385					
32	0.348					
33	0.312	0.517				
34	0.278	0.483				
35	0.246	0.449				
36	0.216	0.416				
37	0.188	0.382				
38	0.161	0.350				
39	0.138	0.319	0.515			
40	0.116	0.289	0.485			
41	0.097	0.260	0.455			
42	0.080	0.232	0.425			
43	0.065	0.207	0.396			
44	0.053	0.183	0.367			
45	0.042	0.160	0.339			
46	0.032	0.139	0.311	0.500		
47	0.024	0.120	0.285	0.473		
48	0.019	0.103	0.259	0.446		
49	0.014	0.087	0.235	0.420		
50	0.010	0.074	0.212	0.393		
51	0.007	0.062	0.190	0.368		
52	0.005	0.051	0.170	0.342		
53	0.003	0.042	0.151	0.318	0.500	
54	0.002	0.034	0.133	0.294	0.476	
55	0.001	0.027	0.117	0.271	0.452	
56		0.021	0.102	0.249	0.428	
57		0.016	0.088	0.227	0.404	
58		0.012	0.076	0.207	0.380	
59		0.009	0.065	0.188	0.357	
60		0.007	0.055	0.170	0.335	0.511
61		0.005	0.046	0.153	0.313	0.489
62		0.003	0.039	0.137	0.292	0.467
63		0.002	0.032	0.122	0.271	0.445
64		0.001	0.026	0.108	0.251	0.423
65		0.001	0.021	0.095	0.232	0.402
66		0.000	0.017	0.084	0.213	0.381
67			0.013	0.073	0.196	0.360
68			0.010	0.064	0.179	0.339
69			0.008	0.055	0.163	0.319
70			0.006	0.047	0.148	0.300

A8. უილკოქსონის რანგთა ჯამების კრიტერიუმი: $P\{W > w\}$, $P\{W_n > w-1\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის W სტატისტიკისათვის

w	$n=5$					
	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$
28	0.500					
29	0.421					
30	0.345	0.535				
31	0.274	0.465				
32	0.210	0.396				
33	0.155	0.331	0.500			
34	0.111	0.268	0.438			
35	0.075	0.214	0.378	0.528		
36	0.048	0.165	0.319	0.472		
37	0.028	0.123	0.265	0.416		
38	0.016	0.089	0.216	0.362	0.500	
39	0.008	0.063	0.172	0.311	0.449	
40	0.004	0.041	0.134	0.262	0.399	0.523
41		0.026	0.101	0.218	0.350	0.477
42		0.015	0.074	0.177	0.303	0.430
43		0.009	0.053	0.142	0.259	0.384
44		0.004	0.037	0.111	0.219	0.339
45		0.002	0.024	0.085	0.182	0.297
46			0.015	0.064	0.149	0.257
47			0.009	0.047	0.120	0.220
48			0.005	0.033	0.095	0.185
49			0.003	0.023	0.073	0.155
50			0.001	0.015	0.056	0.127
51				0.009	0.041	0.103
52				0.005	0.030	0.082
53				0.003	0.021	0.065
54				0.002	0.014	0.050
55				0.001	0.009	0.038
56					0.006	0.028

w	$n=6$				
	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$
39	0.531				
40	0.469				
41	0.409				
42	0.350	0.527			
43	0.294	0.473			
44	0.242	0.418			
45	0.197	0.365	0.525		
46	0.155	0.314	0.475		
47	0.120	0.267	0.426		
48	0.090	0.223	0.377	0.523	
49	0.066	0.183	0.331	0.477	
50	0.047	0.147	0.286	0.432	
51	0.032	0.117	0.245	0.388	0.521
52	0.021	0.090	0.207	0.344	0.479
53	0.013	0.069	0.172	0.303	0.437
54	0.008	0.051	0.141	0.264	0.396
55	0.004	0.037	0.114	0.228	0.356
56	0.002	0.026	0.091	0.194	0.318
57	0.001	0.017	0.071	0.164	0.281
58		0.011	0.054	0.136	0.246
59		0.007	0.041	0.112	0.214
60		0.004	0.030	0.091	0.184
61		0.002	0.021	0.072	0.157
62		0.001	0.015	0.057	0.132
63		0.001	0.010	0.044	0.110
64			0.006	0.033	0.090
65			0.004	0.025	0.074
66			0.002	0.018	0.059
67			0.001	0.013	0.047

A8. (გაგრძელება)

w	n=7			
	m=7	m=8	m=9	m=10
53	0.500			
54	0.451			
55	0.402			
56	0.355	0.522		
57	0.310	0.478		
58	0.267	0.433		
59	0.228	0.389		
60	0.191	0.347	0.500	
61	0.159	0.306	0.459	
62	0.130	0.268	0.419	
63	0.104	0.232	0.379	0.519
64	0.082	0.198	0.340	0.481
65	0.064	0.168	0.303	0.443
66	0.049	0.140	0.268	0.406
67	0.036	0.116	0.235	0.370
68	0.027	0.095	0.204	0.335
69	0.019	0.076	0.176	0.300
70	0.013	0.060	0.150	0.268
71	0.009	0.047	0.126	0.237
72	0.006	0.036	0.105	0.209
73	0.003	0.027	0.087	0.182
74	0.002	0.020	0.071	0.157
75	0.001	0.014	0.057	0.135
76	0.001	0.010	0.045	0.115
77	0.000	0.007	0.036	0.097
78		0.005	0.027	0.081
79		0.003	0.021	0.067
80		0.002	0.016	0.054
81		0.001	0.011	0.044
82		0.001	0.008	0.035
83		0.000	0.006	0.028
84			0.004	0.022
85			0.003	0.017
86			0.002	0.012
87			0.001	0.009
88			0.001	0.007
89			0.000	0.005
90				0.003
91				0.002
92				0.002
93				0.001
94				0.001

w	n=8		
	m=8	m=9	m=10
68	0.520		
69	0.480		
70	0.439		
71	0.379		
72	0.360	0.519	
73	0.323	0.481	
74	0.287	0.444	
75	0.253	0.407	
76	0.221	0.371	0.517
77	0.191	0.336	0.483
78	0.164	0.303	0.448
79	0.139	0.271	0.414
80	0.117	0.240	0.381
81	0.097	0.212	0.348
82	0.080	0.185	0.317
83	0.065	0.161	0.286
84	0.052	0.138	0.257
85	0.041	0.118	0.230
86	0.032	0.100	0.204
87	0.025	0.084	0.180
88	0.019	0.069	0.158
89	0.014	0.057	0.137
90	0.010	0.046	0.118
91	0.005	0.037	0.102
92	0.003	0.030	0.086
93	0.002	0.023	0.073
94	0.001	0.018	0.061
95	0.001	0.014	0.051
96	0.001	0.010	0.042
97	0.000	0.008	0.034
98		0.006	0.027
99		0.004	0.022
100		0.003	0.017
101		0.002	0.013
102		0.001	0.010
103		0.001	0.008
104		0.000	0.006
105			0.004
106			0.003
107			0.002
108			0.002
109			0.001

w	n=9	
	m=9	m=10
86	0.500	
87	0.466	
88	0.432	
89	0.398	
90	0.365	0.516
91	0.333	0.484
92	0.302	0.452
93	0.273	0.421
94	0.245	0.390
95	0.218	0.360
96	0.193	0.330
97	0.170	0.302
98	0.149	0.274
99	0.129	0.248
100	0.111	0.223
101	0.095	0.200
102	0.081	0.178
103	0.068	0.158
104	0.057	0.139
105	0.047	0.121
106	0.039	0.106
107	0.031	0.091
108	0.025	0.078
109	0.020	0.067
110	0.016	0.056
111	0.012	0.047
112	0.009	0.039
113	0.007	0.033
114	0.005	0.027
115	0.004	0.022
116	0.003	0.017
117	0.002	0.014
118	0.001	0.011
119	0.001	0.009
120	0.001	0.007
121	0.000	0.005
122		0.004
123		0.003
124		0.002
125		0.001
126		0.001
127		0.001

w	n=10
	m=10
105	0.515
106	0.485
107	0.456
108	0.427
109	0.398
110	0.370
111	0.342
112	0.315
113	0.289
114	0.264
115	0.241
116	0.218
117	0.197
118	0.176
119	0.157
120	0.140
121	0.124
122	0.109
123	0.095
124	0.083
125	0.072
126	0.062
127	0.053
128	0.045
129	0.038
130	0.032
131	0.026
132	0.022
133	0.018
134	0.014
135	0.012
136	0.009
137	0.007
138	0.006
139	0.004
140	0.003
141	0.003
142	0.002
143	0.001
144	0.001
145	0.001
146	0.001

A9. კრასკელ-უოლისის სტატისტიკის კრიტერიუმი: $P\{H \geq x\}$ ალბათობათა მნიშვნელობები კრიტერიუმის H სტატისტიკისათვის

$n_1=3,\ n_2=3,\ n_3=3$

x	$P_0\{H\geq x\}$
2.756	0.296
3.200	0.254
3.289	0.232
3.467	0.196
3.822	0.168
4.267	0.139
4.356	0.132
4.622	0.100
5.067	0.086
5.422	0.071
5.600	0.050

$n_1=3,\ n_2=3,\ n_3=4$

x	$P_0\{H\geq x\}$
3.364	0.203
3.391	0.196
3.609	0.188
3.682	0.180
3.754	0.178
3.800	0.165
3.836	0.150
3.973	0.143
4.046	0.132
4.091	0.126
4.273	0.123
4.336	0.117
4.818	0.111
4.846	0.106
5.000	0.101
5.064	0.092
5.109	0.085
5.254	0.081
5.436	0.074
5.500	0.070
5.573	0.068
5.727	0.064
5.791	0.062
5.936	0.056
4.382	0.053
4.564	0.050
4.700	0.046
4.709	0.036

$n_1=3,\ n_2=3,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
2.376	0.334
2.594	0.315
2.667	0.306
2.679	0.298
2.715	0.291
2.836	0.267
2.861	0.258
2.970	0.242
3.079	0.239
3.103	0.232
3.333	0.218
3.382	0.215
3.394	0.209
3.442	0.196
3.467	0.184
3.503	0.179
3.576	0.173
3.648	0.167
3.709	0.162
3.879	0.156
3.927	0.149
4.012	0.144
4.048	0.139
4.170	0.135
4.194	0.126
4.242	0.122
4.303	0.117
4.315	0.113
4.412	0.109
4.533	0.097
4.679	0.094
4.776	0.090
4.800	0.087
4.848	0.085
4.861	0.082
4.909	0.079
5.042	0.077
5.079	0.069
5.103	0.067
5.212	0.065
5.261	0.062
5.346	0.058

$n_1=3,\ n_2=3,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
5.442	0.055
5.503	0.053
5.515	0.051
5.648	0.049
5.770	0.047
5.867	0.042
6.012	0.040

$n_1=3,\ n_2=4,\ n_3=4$

x	$P_0\{H\geq x\}$
3.848	0.150
3.932	0.145
3.962	0.140
4.144	0.135
4.167	0.131
4.212	0.129
4.296	0.125
4.303	0.121
4.326	0.116
4.348	0.113
4.409	0.106
4.477	0.102
4.546	0.099
4.576	0.097
4.598	0.093
4.712	0.090
4.750	0.087
4.894	0.084
5.053	0.078
5.144	0.073
5.182	0.068
5.212	0.066
5.296	0.063
5.303	0.061
5.326	0.058
5.386	0.054
5.500	0.052
5.576	0.051
5.598	0.049
5.667	0.047
5.803	0.045
5.932	0.043

A9. (გაგრძელება)

$n_1=3,\ n_2=4,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
3.260	0.206
3.312	0.204
3.318	0.199
3.353	0.197
3.414	0.194
3.445	0.192
3.462	0.190
3.496	0.188
3.503	0.183
3.506	0.181
3.568	0.179
3.580	0.177
3.599	0.173
3.626	0.169
3.703	0.165
3.722	0.163
3.753	0.161
3.773	0.159
3.785	0.156
3.810	0.152
3.831	0.150
3.865	0.148
3.876	0.146
3.958	0.144
4.015	0.140
4.030	0.137
4.060	0.134
4.122	0.132
4.154	0.131
4.180	0.125
4.195	0.124
4.235	0.121
4.241	0.119
4.276	0.117
4.318	0.115
4.327	0.112
4.368	0.110
4.419	0.109
4.426	0.107
4.487	0.106
4.522	0.105
4.523	0.103
4.549	0.099

$n_1=3,\ n_2=4,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
4.564	0.097
4.645	0.095
4.676	0.093
4.754	0.091
4.789	0.089
4.810	0.088
4.830	0.083
4.856	0.082
4.881	0.081
4.891	0.078
4.939	0.075
4.953	0.074
4.983	0.073
5.041	0.072
5.045	0.071
5.106	0.070
5.137	0.068
5.158	0.067
5.180	0.065
5.291	0.063
5.308	0.062
5.342	0.061
5.349	0.061
5.353	0.059
5.414	0.058
5.426	0.057
5.549	0.054

$n_1=3,\ n_2=5,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
3.666	0.164
3.745	0.161
3.780	0.158
3.798	0.152
3.807	0.147
3.912	0.144
3.965	0.142
3.991	0.139
4.114	0.136
4.141	0.135
4.150	0.132
4.202	0.127
4.220	0.125

$n_1=3,\ n_2=5,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
4.255	0.117
4.308	0.112
4.352	0.110
4.378	0.107
4.457	0.105
4.466	0.104
4.536	0.102
4.545	0.100
4.571	0.098
4.694	0.094
4.774	0.092
4.826	0.089
4.835	0.088
4.888	0.082
4.914	0.079
4.941	0.077
4.993	0.075
5.020	0.072
5.064	0.070
5.152	0.067
5.169	0.065
5.222	0.065
5.284	0.063
5.363	0.062
5.407	0.059
5.486	0.057
5.494	0.056
5.521	0.055
5.574	0.053
5.600	0.051
5.626	0.051
5.706	0.046
5.802	0.045
5.837	0.042
5.934	0.040

$n_1=4,\ n_2=4,\ n_3=4$

x	$P_0\{H\geq x\}$
2.808	0.277
2.885	0.260
2.923	0.252
3.038	0.234
3.115	0.219

A9. (გაგრძელება)

$n_1=4,\ n_2=4,\ n_3=4$

x	$P_0\{H\geq x\}$
3.231	0.212
3.500	0.197
3.577	0.173
3.731	0.162
3.846	0.151
3.962	0.145
4.154	0.136
4.192	0.131
4.269	0.122
4.308	0.114
4.500	0.104
4.654	0.097
4.769	0.094
4.885	0.086
4.962	0.080
5.115	0.074
5.346	0.063
5.538	0.057
5.654	0.055
5.692	0.049
5.808	0.044
6.000	0.040

$n_1=4,\ n_2=4,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
1.596	0.477
1.615	0.469
1.668	0.465
1.701	0.458
1.718	0.450
1.744	0.443
1.810	0.436
1.876	0.429
1.899	0.422
1.929	0.414
1.942	0.408
1.958	0.401
2.047	0.388
2.110	0.375
2.140	0.371
2.143	0.365
2.176	0.362

$n_1=4,\ n_2=4,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
2.196	0.356
2.275	0.344
2.387	0.338
2.390	0.332
2.403	0.327
2.440	0.316
2.443	0.310
2.453	0.305
2.558	0.299
2.575	0.293
2.601	0.288
2.667	0.283
2.670	0.279
2.733	0.271
2.756	0.267
2.799	0.262
2.881	0.257
2.904	0.253
2.918	0.249
2.967	0.245
2.987	0.240
2.997	0.236
3.013	0.228
3.086	0.224
3.119	0.221
3.129	0.217
3.168	0.214
3.218	0.210
3.260	0.206
3.297	0.202
3.330	0.200
3.382	0.197
3.432	0.190
3.442	0.187
3.481	0.183
3.511	0.180
3.590	0.176
3.613	0.170
3.630	0.167
3.640	0.164
3.656	0.160
3.696	0.157

$n_1=4,\ n_2=4,\ n_3=5$

x	$P_0\{H\geq x\}$
3.758	0.154
3.828	0.151
3.910	0.146
3.986	0.143
3.989	0.141
4.025	0.139
4.042	0.134
4.068	0.132
4.075	0.130
4.118	0.127
4.170	0.125
4.200	0.122
4.233	0.121
4.253	0.119
4.272	0.117
4.289	0.114
4.332	0.112
4.381	0.108
4.447	0.106
4.497	0.104
4.553	0.102
4.619	0.100
4.668	0.098
4.685	0.096
4.701	0.094
4.711	0.092
4.728	0.091
4.747	0.089
4.760	0.088
4.813	0.086
4.830	0.084
4.833	0.082
4.896	0.081
4.975	0.077
5.014	0.076
5.024	0.074
5.028	0.073
5.090	0.071
5.172	0.069
5.196	0.068
5.225	0.066
5.344	0.065

A10. სპირმენის სტატისტიკის ზედა α-კრიტიკული მნიშვნელობები.

$$P\{S_p \geq s(\alpha,n)\} \leq \alpha, \text{ ხოლო } P\{S_p \geq s(\alpha,n)-2\} > \alpha$$

n	p								$2E(S)$
	0.01		0.025		0.05		0.1		
4					0	0.041667	0	0.041667	20
					2	0.166667	2	0.166667	
5	0	0.008333	0	0.008333	2	0.041667	4	0.066667	40
	2	0.041667	2	0.041667	4	0.066667	6	0.116667	
6	2	0.008333	4	0.016667	6	0.029167	12	0.087500	70
	4	0.016667	6	0.029167	8	0.051389	14	0.120833	
7	6	0.006151	12	0.024008	16	0.044048	24	0.100000	112
	8	0.011905	14	0.033135	18	0.054762	26	0.117857	
8	14	0.007688	22	0.022917	30	0.048090	40	0.098313	168
	16	0.010888	24	0.028795	32	0.057490	42	0.108085	
9	26	0.008612	36	0.021627	48	0.048399	62	0.096900	240
	28	0.010695	38	0.025160	50	0.053999	64	0.106261	
10	42	0.008703	58	0.024489	72	0.048139	90	0.095620	330
	44	0.010117	60	0.027215	74	0.052441	92	0.102219	
11	64	0.009097	84	0.023879	102	0.046958	126	0.096388	440
	66	0.010177	86	0.025957	104	0.050155	128	0.101521	
12	92	0.009261	118	0.024441	142	0.049454	170	0.096384	572
	94	0.010097	120	0.026038	144	0.052069	172	0.100477	
13	128	0.009705	160	0.024932	188	0.048527	224	0.097763	728
	130	0.010379	162	0.026272	190	0.050689	226	0.101246	
14	170	0.009533	210	0.024982	244	0.048627	288	0.098697	910
	172	0.010061	212	0.026068	246	0.050393	290	0.101570	
15	222	0.009730	268	0.024403	310	0.048623	362	0.098191	1120
	224	0.010173	270	0.025286	312	0.050105	364	0.100605	
16	284	0.009990	338	0.024659	388	0.049278	448	0.098003	1360
	286	0.010364	340	0.025416	390	0.050532	450	0.100031	

A11. კენდალის სტატისტიკის ზედა α-კრიტიკული მნიშვნელობები.

$$P\{N \ge N(\alpha,n)\} \le \alpha, \text{ ხოლო } P\{N \ge N(\alpha,n)-1\} > \alpha$$

n	α 0.05		α 0.1		$2E(N)$	n	α 0.05		α 0.1		$2E(N)$
4	0	0.041667	0	0.041667	6	17	47	0.045693	51	0.088329	136
	1	0.166667	1	0.166667			48	0.054432	52	0.102450	
5	1	0.041667	1	0.041667	10	18	54	0.047937	58	0. 087571	153
	2	0.116667	2	0.116667			55	0.056209	59	0.100412	
6	2	0.027778	3	0.068056	15	19	61	0.046648	66	0.093134	171
	3	0.068056	4	0.136111			62	0.054084	67	0.105461	
7	4	0.034524	5	0.068056	21	20	69	0.049165	74	0.092942	190
	5	0.068056	6	0.119444			70	0.056302	75	0.104314	
8	6	0.030506	8	0.089435	28	21	77	0.048520	83	0.098326	210
	7	0.054340	9	0.137550			78	0.055064	84	0.109299	
9	9	0.037588	11	0.090090	36	22	85	0.045400	92	0.098508	231
	10	0.059719	12	0.129759			86	0.051181	93	0.108737	
10	12	0.036275	14	0.077871	45	23	94	0.045556	101	0.094419	253
	13	0.054157	15	0.108187			95	0.050963	102	0.103695	
11	16	0.043281	18	0.082287	55	24	104	0.048397	111	0.095377	276
	17	0.060485	19	0.109173			105	0.053699	112	0.104130	
12	20	0.043159	23	0.098475	66	25	114	0.048773	121	0.092529	300
	21	0.057975	24	0.124790			115	0.053778	122	0.100578	
13	25	0.049990	27	0.081744	78	26	124	0.047046	132	0.093960	325
	26	0.064426	28	0.102183			125	0.051627	133	0.101625	
14	29	0.039728	33	0.096254	91	27	135	0.047790	144	0.099088	351
	30	0.050510	34	0.116556			136	0.052163	145	0.106601	
15	35	0.046321	38	0.084289	105	28	146	0.046628	155	0.093691	378
	36	0.057124	39	0.100921			147	0.050684	156	0.100523	
16	41	0.048025	45	0.097458	120	29	158	0.047610	168	0.098705	406
	42	0.058024	46	0.114067			159	0.051515	169	0.105425	

A12. სერიების რაოდენობის კრიტიკული მნიშვნელობები

m	*n*	α			
		0.10		0.05	
2	2	1	5	1	5
	3	1	6	1	6
	4	1	6	1	6
	5	1	6	1	6
	6	1	6	1	6
	7	1	6	1	6
	8	2	6	1	6
	9	2	6	1	6
	10	2	6	1	6
	11	2	6	1	6
	12	2	6	2	6
	13	2	6	2	6
	14	2	6	2	6
	15	2	6	2	6
	16	2	6	2	6
	17	2	6	2	6
	18	2	6	2	6
	19	2	6	2	6
	20	2	6	2	6
3	3	1	7	1	7
	4	1	7	1	8
	5	2	8	1	8
	6	2	8	2	8
	7	2	8	2	8
	8	2	8	2	8
	9	2	8	2	8
	10	3	8	2	8
	11	3	8	2	8
	12	3	8	2	8
	13	3	8	2	8
	14	3	8	2	8
	15	3	8	3	8
	16	3	8	3	8
	17	3	8	3	8
	18	3	8	3	8
	19	3	8	3	8
	20	3	8	3	8
4	4	2	8	1	9
	5	2	9	2	9
	6	3	9	2	9
	7	3	10	2	10
	8	3	10	3	10
	9	3	10	3	10
	10	3	10	3	10
	11	3	10	3	10
	12	4	10	3	10
	13	4	10	3	10
	14	4	10	3	10
	15	4	10	3	10
	16	4	10	4	10
	17	4	10	4	10
	18	4	10	4	10
	19	4	10	4	10
	20	4	10	4	10
5	5	3	9	2	10
	6	3	10	3	10
	7	3	10	3	11
	8	3	11	3	11
	9	4	11	3	12
	10	4	11	3	12
	11	4	12	4	12
	12	4	12	4	12
	13	4	12	4	12
	14	5	12	4	12
	15	5	12	4	12
	16	5	12	4	12
	17	5	12	4	12
	18	5	12	5	12
	19	5	12	5	12
	20	5	12	5	12
6	6	3	11	3	11
	7	4	11	3	12
	8	4	12	3	12

A12. (გაგრძელება)

m	n	α			
		0.10		0.05	
6	9	4	12	4	13
	10	5	12	4	13
	11	5	13	4	13
	12	5	13	4	13
	13	5	13	5	14
	14	5	13	5	14
	15	6	14	5	14
	16	6	14	5	14
	17	6	14	5	14
	18	6	14	5	14
	19	6	14	6	14
	20	6	14	6	14
7	7	4	12	3	13
	8	4	13	4	13
	9	5	13	4	14
	10	5	13	5	14
	11	5	14	5	14
	12	6	14	5	14
	13	6	14	5	15
	14	6	14	5	15
	15	6	15	6	15
	16	6	15	6	16
	17	7	15	6	16
	18	7	15	6	16
	19	7	15	6	16
	20	7	15	6	16
8	8	5	13	4	14
	9	5	14	5	14
	10	6	14	5	15
	11	6	15	5	15
	12	6	15	6	16
	13	6	15	6	16
	14	7	16	6	16
	15	7	16	6	16
	16	7	16	6	17
	17	7	16	7	17
	18	8	16	7	17
	19	8	16	7	17
	20	8	17	7	17

m	n	α			
		0.10		0.05	
9	9	6	14	5	15
	10	6	15	5	16
	11	6	15	6	16
	12	7	16	6	16
	13	7	16	6	17
	14	7	17	7	17
	15	8	17	7	18
	16	8	17	7	18
	17	8	17	7	18
	18	8	18	8	18
	19	8	18	8	18
	20	9	18	8	18
10	10	6	16	6	16
	11	7	16	6	17
	12	7	17	7	17
	13	8	17	7	18
	14	8	17	7	18
	15	8	18	7	18
	16	8	1	8	19
	17	9	18	8	19
	18	9	19	8	19
	19	9	19	8	20
	20	9	19	9	20
11	11	7	17	7	17
	12	8	17	7	18
	13	8	18	7	19
	14	8	18	8	19
	15	9	19	8	19
	16	9	19	8	20
	17	9	19	9	20
	18	10	20	9	20
	19	10	20	9	21
	20	10	20	9	21
12	12	8	18	7	19
	13	9	18	8	19
	14	9	19	8	20
	15	9	19	8	20
	16	10	20	9	21

A12. (გაგრძელება)

m	n	α 0.10		α 0.05	
12	17	10	20	9	21
	18	10	21	9	21
	19	10	21	10	22
	20	11	21	10	22
13	13	9	19	8	20
	14	9	20	9	20
	15	10	20	9	21
	16	10	21	9	21
	17	10	21	10	22
	18	11	21	10	22
	19	11	22	10	23
	20	11	22	10	23
14	14	10	20	9	21
	15	10	21	9	22
	16	11	21	10	22
	17	11	22	10	23
	18	11	22	10	23
	19	12	23	11	23
	20	12	23	11	24
15	15	11	21	10	22
	16	11	22	10	23

m	n	α 0.10		α 0.05	
15	17	11	22	11	23
	18	12	23	11	24
	19	12	23	11	24
	20	12	24	12	25
16	16	11	23	11	23
	17	12	23	11	24
	18	12	24	11	25
	19	13	24	12	25
	20	13	25	12	25
17	17	12	24	11	25
	18	13	24	12	25
	19	13	25	12	26
	20	13	25	13	26
18	18	13	25	12	26
	19	14	25	13	26
	20	14	26	13	27
19	19	14	26	13	27
	20	14	27	13	27
20	20	15	27	14	28

A13. სტიუდენტიზირებული გაბნევის დიაპაზონის ზედა α-კრიტიკული მნიშვნელობები ($\alpha=0.05$)

$n-k$	k = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	18.00	27.00	32.80	37.10	40.40	43.10	45.40	47.40	49.10	50.60	52.00	53.20	54.30	55.40	56.30	57.20	58.00	58.80	59.60
2	6.08	8.33	9.80	10.9	11.60	12.40	13.00	13.50	14.00	14.40	14.70	15.10	15.40	15.70	15.90	16.10	16.40	16.60	16.80
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.20	10.30	10.50	10.70	10.80	11.00	11.10	11.20
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

A14. თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვები

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70
31 06 01 98 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18
64 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	41 23 66 02 16
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16

ლიტერატურა

1. ანდრია რაზმაძის ლექციები ალბათობის თეორიაში. მეცნიერება, თბილისი, 1991.
2. ბერაძე შ., სტატისტიკის ზოგადი თეორიის საფუძვლები. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1969.
3. ბერნშტეინი ს. ნ., ალბათობის თეორია (რუსულიდან თარგმნა კ. სულაქველიძემ). სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1938.
4. გაბიძაშვილი ბ., ზოგადი სტატისტიკა, დამხმარე სახელმძღვანელო, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1989.
5. გამყრელიძე გ., თეორიული სტატისტიკა. ნაწ. I. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1947.
6. გამყრელიძე გ., დემოგრაფიული სტატისტიკა. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1955.
7. გელაშვილი ს., სტატისტიკური მოდელირება და პროგნოზირება, ლექსიკონი. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1998.
8. დოჭვირი ბ., ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, ლექციების კურსი ეკონომიკური ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის, ნაწილი I და II. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1984.
9. კრინსკი ჰ.ე., მათემატიკა ეკონომისტებისათვის (თარგმანი პოლონური ორიგინალის რუსული თარგმანიდან). თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1974.
10. ლაზრიევა ნ., მანია მ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ღლონტი ო., ჯამბურია ლ., ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები. ფონდი „ევრაზია", თბილისი 1999.
11. მანია გ., ალბათობის თეორიის კურსი. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1962.
12. მანია გ., მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი მეთოდი. თბილისი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის გამომცემლობა, თბილისი, 1963.
13. მანია გ., ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. სახელმძღვანელო ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1976.
14. მანია გ., ანთელავა ნ., ედიბერიძე ა., ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა კრებული. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1980.
15. მარი გ., მოსიძე ა., ციგროშვილი ზ., სტატისტიკა. დამხმარე სახელმძღვანელო ESM-თბილისის სტუდენტებისათვის, ESM-თბილისი, 1996.
16. ფანცხავა ს., სტატისტიკის თეორიის მოკლე კურსი. განათლება, თბილისი, 1967.
17. შერვაშიძე თ., ალბათობის თეორია. (ლექციათა კურსი). თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1980.

18. Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов. Пер. с англ. Мир, Москва,1976.
19. Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Пер. с англ. Мир, Москва, 1976.
20. Большев Л.Н., Смирнов Н.В., Таблицы математической статистики. 3-е изд, Наука, Москва, 1983.
21. Боровков А.А., Математическая статистика. Наука, Москва, 1984.
22. Браунли К.А., Статистическая теория и методология в науке и технике. Пер. с англ. Наука, Москва, 1977
23. Броуди М.Б., О статистическом рассуждении. Пер. с англ. Статистика, Москва, 1968
24. Вайнберг Дж., Шумекер Дж., Статистика. Пер. с англ. Статистика, Москва, 1979.
25. Ван дер Варден Б.Л., Математическая статистика. Пер. с нем. ИЛ, Москва, 1960
26. Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев. Пер. с англ. Статистика, Москва, 1976
27. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей. Наука, Москва, 1988
28. Девис М.Х.А., Линейное оценивание и стохастическое управление. Пер. с англ. Наука, Москва, 1984
29. Джонстон Дж., Эконометрические методы. Пер. с англ. Статистика, Москва, 1980.
30. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.А., Математическая статистика. ГИТТЛ, 1955
31. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.А., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. Наука, Москва, 1980
32. Ермаков С.М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Наука, Москва, 1971.
33. Закс Л., Статистическое оценивание. Пер. с нем. Статистика, Москва, 1976.
34. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Математическая статистика. Высшая школа, Москва, 1984.
35. Кэйн Э., Экономическая статистика и эконометрия. Пер. с англ. Выпуски 1 и 2. Статистика, Москва,1977.
36. Кендалл М., Временные ряды. Пер. с англ. Финансы и статистика, Москва, 1981.
37. Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи. Пер. с англ. Наука, Москва, 1973.
38. Кокрен У., Методы выборочного обследования. Пер. с англ. Статистика, Москва, 1976
39. Крамер Г., Математические методы статистики. Пер. с англ. Мир, Москва, 1975.

40. Леман Э., Проверка статистических гипотез. Пер. с англ. Наука, Москва, 1979.
41. Леман Э., Теория точечного оценивания. Пер. с англ. Наука, Москва, 1991.
42. Ликеш И., Ляга И., Основные таблицы математической статистики. Пер. с чешского. Финансы и статистика, Москва, 1985.
43. Мания Г.М. Обобщение критерия А.Н.Колмогорова для оценки закона распределения по эмпирическим данным. Докл.Акад.Наук СССР 69,4 (1949),495-497
44. Мания Г.М.Статистическое оценивание распределения вероятностей. Издательство Тбилисского университета, Тбилиси,1974.
45. Миллс Ф., Статистические методы. Пер. с англ. Государственное статистическое издательство, Москва,1958.
46. Мюллер П., Нойман П.Ю., Шторм Р., Таблицы по математической статистике. Пер. с англ. Финансы и статстика., Москва,1982.
47. Надарая Э.А., Об оценке функции регрессии. Теория вероятн. и ее примен. 9 (1964), N1, 157-159
48. Надарая Э.А., О непараметрических оценках плотности вероятности и регрессии. Теория вероятн. и ее примен. 10 (1965), N1, 199-203
49. Надарая Э.А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 1983.
50. Никабадзе А.М., Хмаладзе Э.В., Критерий согласия для параметрических гипотез в R^n. Докл.Акад.Наук СССР, 1987,т.35, 627-629,
51. Поллард Дж., Справочник по вычислительным методам статистики. Пер. с англ. Финансы и статистика, Москва, 1982.
52. Рао С.Р., Линейные статистические методы и их применения. Пер. с англ. Наука, Москва, 1968.
53. Романовский В., Математическая статистика. ГОНТИ, Москва, 1938.
54. Тьюки Дж., Анализ результатов наблюдений. Пер. с англ. Мир, Москва, 1981.
55. Уилкс С., Математическая статистика. Пер. с англ. Наука, Москва, 1967.
56. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Пер. с англ. т. I, II, Мир, Москва, 1984.
57. Фишер Р.А., Статистические методы для исследователей. Пер. с англ. Госстатиздат, Москва, 1956.
58. Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями. Пер. с англ. ИЛ, Москва, 1956.
59. Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статстики. Пер. с англ. Финансы и статистика, Москва, 1983.
60. Четыркин Е.М., Калихман И.Л., Вероятность и статистика, Фынансы и статистика, Москва, 1982.

61. Читашвили Р. Я., Хмаладзе Э.В., Статистический анализ большого числа редких событий и смежные вопросы. Труды Тбилисс. матем. инст. им. Размадзе, т.92,1989,196-245.
62. Шварц Г., Выборочный метод. Пер. с нем. Статистика, Москва, 1978
63. Шеффе Г., Дисперсионный анализ. Пер. с англ. Наука, Москва, 1980
64. Ширяев А.Н., Вероятность. Наука, Москва, 1989.
65. Юл Дж., Кендал М.Дж., Теория статистики. Пер. с англ. Госстатиздат, Москва, 1960.
66. Australian business statistics. ITP Nelson, 1994.
67. Brillinger D.R., Time series: data analysis and theory. Holden day, San Francisco, 1981.
68. Chitashvili R., Lazrieva N., Toronjadze T., Asymptotic theory of M-estimators in general statistical models. Reports BS-R9019, BS-R9020, Center for Mathematics and Computer Sciences, Amsterdam, Netherlands, 1990.
69. Christensen Howard B., Introduction to statistics.Harcourt Brace Jovanovich, Inc. 1992.
70. Dana R.A., Jeanblanc-Pisque M., Marches financiers en temps continu (Valorisation et equilibre). Paris, Economica, 1994.
71. Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M., Practical risk theory for actuaries, London, Chapman & Hall 1994.
72. Devore, Jay L., Probability and statistics for engineering and the sciences, Duxbury Press, 1995.
73. Hossak I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B., Introductory statistics with applications in general insurance. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
74. Kendall M., Time-series. 2nd edition, Hafner Press, New York, 1976.
75. Kendall M., Stuart A., Design and analysis and time-series. Vol.3, 2nd edition, Charles Criffin, London, 1968.
76. Khmaladze E.V., Martingale approach to goodness of fit tests. Theory Probab. Appl., 1981, v.XXVI,N1.
77. Khmaladze E. V., Innovation approach to goodness of fit tests in R^m. Ann.Statist.,1988, v.6, N4.
78. Khmaladze E. V., Goodness of fit theory and scanning innovation martingales. Ann.Statist.,1993, v.11, N2.
79. Lapin Lawrence L., Statistics for modern business decisions, fifth edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1990.
80. Lewis Colin D., Industrial and business forecasting methods. Butterwoth & Co Publishers Ltd., 1982.
81. McClave James T., Dietrich, Frank H., Statistics, second edition, Dellen Publishing Company, 1982.

82. Moore David S., McCabe George P., Introduction to the practice of statistics, W.H.Freeman and company, 1989.
83. Olson Charles L., Picconi Mario J., Statistics for Business Decision Making, Scott, Foresman and Company, 1983.
84. Plane Donald R., Oppermann Edward B., Business and economic statistics, Business Publications, Inc., 1981.
85. Priestley M. Non-linear and nonstationary time series. New York: Academic Press, 1988.
86. Spiegel Murray R., Probability and statistics, McGraw-hill book company, 1975.
87. Tailor S., Modeling financial time series. New York: Wiley, 1986.
88. Tong H., Nonlinear time series. Oxford: Oxford Univ. Press,1990.

ᲡᲐᲒᲜᲝᲑᲠᲘᲕᲘ ᲡᲐᲫᲘᲔᲑᲔᲚᲘ

დ

ე

ნ

ო

ჩ

ც

ძ

წ

ხ

ჯ

ჰ