ველის თეორიისა და ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

(დამხმარე სახელმძღვანელო)

თბილისი — 19[illegible]

საქართველოს ლენინისა და შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი
ვ.ი.ლენინის სახელობის პოლიტექნიკური ინსტიტუტი

ა. ჩუხაძე

ველის თეორია და ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

(დამხმარე სახელმძღვანელო)

თბილისი - 1977

წიგნი წარმოადგენს დამხმარე სახელმძღვანელოს ველის თეორიასა და ტენზორულ აღრიცხვაში უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლისათვის; მკითხველისაგან მოითხოვება მხოლოდ დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტების ცოდნა.

წიგნში შეტანილია ვექტორული ანალიზის, ველის თეორიისა (თავი I) და ტენზორული ანალიზის ელემენტები (თავი II).

თ ა ვ ი I

ველის თეორიის ელემენტები

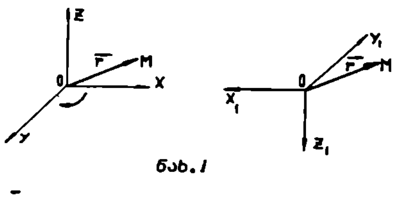
უმაღლესი მათემატიკის კურსში[1] ჩვენ გავეცანით ვექტორული ალგებრის ელემენტებს, ძირითადად, მუდმივ ვექტორებსა და კოორდინატთა წრფივ გარდაქმნებს. ახლა განვიხილოთ ვექტორული ანალიზისა და ველის თეორიის ზოგიერთი საკითხი. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ვექტორული სახით ჩანაწერს აქვს ორი უპირატესობა: პირველი–ფიზიკური კანონების ვექტორული სახით ჩანაწერი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე და მეორე–ვექტორული სახით ჩანაწერი არის კომპაქტური, ე.ი. ვექტორების გამოყენებით ბევრი ფიზიკური კანონი მარტივი სახით ჩაიწერება. ამ თავში უმთავრესად განიხილება ევკლიდეს სამგანზომილებიანი E_3 სივრცე.

სანამ ვექტორული ანალიზის საკითხების განხილვაზე გადავიდოდეთ, წინასწარ გავაკეთოთ რამდენიმე სასარგებლო შენიშვნა.

§ 1. ფსევდოვექტორი და ფსევდოსკალარი

1. იმის მიხედვით, თუ რა ფიზიკური სიდიდეა ვექტორული სახით წარმოდგენილი, ვექტორები შეიძლება დავყოთ შემდეგ ორ ჯგუფად: პოლარული და აქსიალური ანუ ფსევდოვექტორები. ვთქვათ, აღებულია დეკარტის რომელიმე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, მაგალითად, მარცხენა და ჩატარებულია ინვერსია[2], ე.ი. კოორდინატთა ისეთი გარდაქმნა, როცა წერტილის ახალი x_1, y_1, z_1 კოორდინატები ძველი x, y, z კოორდინატების საშუალებით გამოისახება შემდეგნაირად (ნახ.1):

$$x_1 = -x, \quad y_1 = -y, \quad z_1 = -z. \qquad (1)$$



ნახ.1

---

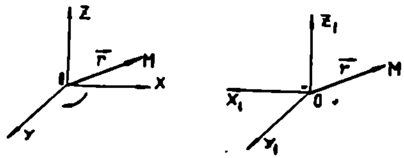
[1] იხ.ა.რუხაძე, უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ.I, თავი II.

[2] კოორდინატთა ისეთი გარდაქმნა, როცა კოორდინატთა ახალი ღერძები ძველი ღერძების პირისპირ საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

ცხადია, ინვერსიის შემთხვევაში კოორდინატთა მარცხენა სისტემა გადადის მარჯვენაში ან, პირიქით; M წერტილის $\vec r(x,y,z)$ რადიუს-ვექტორი გადავა $\vec r(-x,-y,-z)$ ვექტორში. როგორც ვხედავთ, ინვერსიის შემთხვევაში რადიუს-ვექტორის სამივე კოორდინატი იცვლის ნიშანს, ხოლო თვით $\vec r$ ვექტორი სივრცეში როგორც სიდიდე, ისევე მიმართულებით რჩება უცვლელი.

ანალოგიურად, თუ ჩავატარებთ ასახვას[1] რომელიმე საკოორდინატო სიბრტყის მიმართ, მაგალითად, yoz სიბრტყის მიმართ (ნახ.2), ასეთ შემთხვევაში კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები იქნება:

$$x_1=-x,\quad y_1=y,\quad z_1=z. \tag{2}$$



ნახ.2

M წერტილის $\vec r(x,y,z)$ რადიუს-ვექტორი გადავა $\vec r(-x,y,z)$ ვექტორში; ამრიგად, ასახვის შემთხვევაში რადიუს-ვექტორის მხოლოდ ერთი კოორდინატი იცვლის ნიშანს; თვით $\vec r$ ვექტორი-რჩება უცვლელი სივრცეში.

ისეთ ვექტორებს, რომლებიც სივრცეში უცვლელი რჩებიან კოორდინატთა სისტემის ინვერსიის ან ასახვის შემთხვევაში, პოლარული ვექტორები ეწოდება; ასეთებია, მაგალითად: ძალა, სიჩქარე, აჩქარება და სხვ.

ავიღოთ კოორდინატთა $xoyz$ სისტემაში ორი პოლარული $\vec P_1(X_1,Y_1,Z_1)$ და $\vec P_2(X_2,Y_2,Z_2)$ ვექტორი; განვიხილოთ მათი ვექტორული $\vec P_1\times\vec P_2$ ნამრავლი; ცხადია, $\vec P_1\times\vec P_2$ ვექტორის კოორდინატები იქნება:

$$(\vec P_1\times\vec P_2)_x=Y_1Z_2-Z_1Y_2,\ (\vec P_1\times\vec P_2)_y=Z_1X_2-X_1Z_2,\ (\vec P_1\times\vec P_2)_z=X_1Y_2-Y_1X_2.$$

ჩავატაროთ კოორდინატთა ინვერსია; რადგან $\vec P_1$ და $\vec P_2$ პოლარული ვექტორებია, ამიტომ მათი კოორდინატები ახალ სისტემაში იქნება:

$$\vec P_1(-X_1,-Y_1,-Z_1),\quad \vec P_2(-X_2,-Y_2,-Z_2),$$

ხოლო $\vec P_1\times\vec P_2$ ნამრავლის კოორდინატები ახალ სისტემაში ;

$$(\vec P_1\times\vec P_2)_{x_1}=(-Y_1)(-Z_2)-(-Z_1)(-Y_2)=Y_1Z_2-Z_1Y_2=(\vec P_1\times\vec P_2)_x,$$

ასევე

$$(\vec P_1\times\vec P_2)_{y_1}=(\vec P_1\times\vec P_2)_y,\quad (\vec P_1\times\vec P_2)_{z_1}=(\vec P_1\times\vec P_2)_z.$$

[1] კოორდინატთა ისეთ გარდაქმნას, როცა კოორდინატთა მხოლოდ ერთი ღერძი იცვლის მიმართულებას პირისპირ საწინააღმდეგოთი.

ამრიგად, კოორდინატთა ინვერსიის შემთხვევაში $\overline{P_1}\times\overline{P_2}$ ვექტორული ნამრავლი არ გარდაიქმნა ისე, როგორც პოლარული ვექტორი, ე.ი. ვექტორულ ნამრავლს შეეცვალა მიმართულება პირისპირ საწინააღმდეგოთი; იგივე გარემოებას ექნება ადგილი აგრეთვე კოორდინატთა ასახვის შემთხვევაშიც.

ამ თვალსაზრისით ვექტორული ნამრავლის ვექტორული სახით წარმოდგენას აქვს პირობითი მნიშვნელობა; უფრო ბუნებრივი იქნებოდა ვექტორული ნამრავლით წარმოგვედგინა ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, როცა პარალელოგრამის კონტურზე ავლა ხდება გარკვეული მიმართულებით, დამოკიდებული თუ რა მიმდევრობით არის აღებული თანამამრავლი ვექტორები. ზოგჯერ გამოყენებით დარგებში ვექტორულ ნამრავლს ამ თვალსაზრისით განიხილავენ.

ისეთ ვექტორებს, რომლებიც იცვლიან მიმართულებას პირისპირ საწინააღმდეგოთი კოორდინატთა ინვერსიის ან კოორდინატთა ასახვის დროს, ფსევდოვექტორები ან კიდევ აქსიალური ვექტორები[1] ეწოდება.

საზოგადოდ, როდესაც დეკარტის კოორდინატთა მარცხენა სისტემიდან გადავდივართ მარჯვენაზე. ან, პირიქით, თუ ვექტორი რჩება უცვლელი, მაშინ იგი პოლარული ვექტორია, თუ ვექტორი იცვლის მიმართულებას პირისპირ საწინააღმდეგოთი, მაშინ იგი ფსევდოვექტორია; რომ დავადგინოთ აღებული ვექტორი არის პოლარული თუ ფსევდოვექტორი, ამისათვის საკმარისია ერთ ღერძს, მაგალითად OX ღერძს, შევუცვალოთ მიმართულება პირისპირ საწინააღმდეგოთი, თუ ასეთი ასახვისას ვექტორის კოორდინატები ისე გარდაიქმნება, როგორც წერტილის კოორდინატები, მაშინ იგი პოლარული ვექტორია; თუ, გარდა ამისა, ვექტორის კოორდინატები იცვლის ნიშანს, მაშინ იგი ფსევდოვექტორია.

ამრიგად, პოლარული ვექტორის კოორდინატები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის შემთხვევაში გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= l_{11}X + l_{12}Y + l_{13}Z,\\
Y_1 &= l_{21}X + l_{22}Y + l_{23}Z, \qquad (3)\\
Z_1 &= l_{31}X + l_{32}Y + l_{33}Z.
\end{aligned}
$$

---

[1] სახელწოდება აქსიალური წარმოშობილია შემდეგი მოსაზრებით: როგორც ცნობილია, როცა მყარი სხეული ბრუნავს მკვიდრი ღერძის გარშემო, მაშინ სხეულის მოძრაობას ახასიათებს მობრუნების φ კუთხე; მექანიკაში შემოჰყავთ ბრუნვის ვექტორული $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე; იგი სიდიდით მობრუნების კუთხის წარმოებულია დროით, მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე და თუ კოორდინატთა სისტემა მარცხენაა, $\vec{\omega}$ ვექტორი ისეა მიმართული, რომ სხეული მის ირგვლივ ასრულებს საათის ისრის მიმართულებით ბრუნვას; როცა კოორდინატთა სისტემა მარჯვენაა, მაშინ $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართულება იცვლება პირისპირ საწინააღმდეგოთი, ე.ი. $\vec{\omega}$ არის ფსევდოვექტორი.

ხოლო ფსევდოვექტორის კოორდინატები—შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$X_1 = \det L\,(l_{11}X + l_{12}Y + l_{13}Z),$$
$$Y_1 = \det L\,(l_{21}X + l_{22}Y + l_{23}Z), \qquad (4)$$
$$Z_1 = \det L\,(l_{31}X + l_{32}Y + l_{33}Z),$$

სადაც $L = \begin{pmatrix} l_{11}, & l_{12}, & l_{13} \\ l_{21}, & l_{22}, & l_{23} \\ l_{31}, & l_{32}, & l_{33} \end{pmatrix}$ კოორდინატთა გარდაქმნის მატრიცაა.

შევნიშნოთ, რომ, როგორც სხვადასხვა განზომილების სიდიდეების შეკრება ან შედარება არ შეიძლება, ასევე არ შეიძლება სხვადასხვა ბუნების ვექტორების შეკრება ან შედარება; მაგალითად, არ შეიძლება პოლარული და ფსევდოვექტორების შეკრება, წინააღმდეგ შემთხვევაში მარცხენა სისტემიდან მარჯვენაზე გადასვლისას ან, პირიქით, ერთი შესაკრები უცვლელი დარჩება, მაშინ როცა მეორე შესაკრები შეიცვლის ნიშანს.

როგორც ვექტორები, სკალარული სიდიდეებიც შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად: აბსოლუტური ან, უბრალოდ, სკალარები და ფსევდოსკალარები. სკალარული ბუნების ყველა სიდიდე, რომლებიც მიღებულია რომელიმე ფიზიკური სიდიდის გაზომვის შედეგად, აბსოლუტური სკალარებია; მაგალითად: ტემპერატურა, მასა და სხვ. პირიქით, რომელიმე სკალარული ბუნების სიდიდე, მიღებული ვექტორებზე მათემატიკური ოპერაციების ჩატარების შედეგად და რომელიც იცვლის თავის ნიშანს, როცა მარცხენა სისტემიდან გადავდივართ მარჯვენაზე ან, პირიქით, მაშინ იგი წარმოადგენს ფსევდოსკალარს; მაგალითად, პოლარული და ფსევდოვექტორის სკალარული ნამრავლი; ასევე სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი (პარალელეპიპედის მოცულობა) ფსევდოსკალარია და სხვ.

ორი $\vec{P_1}$ და $\vec{P_2}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი განმარტებულია ტოლობით.

$$\vec{P_1}\cdot\vec{P_2} = |\vec{P_1}|\cdot|\vec{P_2}|\cos\varphi, \qquad (5)$$

სადაც φ უმცირესი კუთხეა $\vec{P_1}$ და $\vec{P_2}$ ვექტორებს შორის; ასეთი სახის ნამრავლი ხშირად გვხვდება ტექნიკაში, მაგალითად, ძალის მუშაობის განმარტების დროს და სხვ. ცხადია, $|\vec{P_1}||\vec{P_2}|\cos\varphi$ ნამრავლი ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ; როგორც ვნახეთ, როდესაც არჩეულია დეკარტის კოორდინატთა სისტემა და $\vec{P_1}(X_1,Y_1,Z_1)$, $\vec{P_2}(X_2,Y_2,Z_2)$ მოცემული ვექტორების კოორდინატებია, მაშინ სკალარული ნამრავლი კოორდინატებში გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\vec{P_1}\cdot\vec{P_2} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2\,. \qquad (6)$$

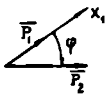
ზოგჯერ უპირატესობა ეძლევა სკალარული ნამრავლის განმარტებას (6) ფორმულის საშუალებით. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ სახელწოდება "სკალარული" გამართლებულია[1], ამისათვის საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$

[1] რომ იგი არ არის ფსევდოსკალარი.

გამოსახულება ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობას:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 = X_1'X_2'+Y_1'Y_2'+Z_1'Z_2',$$

სადაც (X_1',Y_1',Z_1') და (X_2',Y_2',Z_2') $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების კოორდინატებია ახალ სისტემის მიმართ. მართლაც, $L=\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}$ იყოს კოორდინატთა მატ-რიცა, მაშინ, როგორც ვიცით:



ნახ.3

$$X_1' = l_{11}X_1 + l_{12}Y_1 + l_{13}Z_1,$$
$$Y_1' = l_{21}X_1 + l_{22}Y_1 + l_{23}Z_1,$$
$$Z_1' = l_{31}X_1 + l_{32}Y_1 + l_{33}Z_1.$$

ანალოგიურად გამოისახება X_2', Y_2' და Z_2' კოორდინატები;

ახლა, $X_1'X_2'+Y_1'Y_2'+Z_1'Z_2' = (l_{11}X_1+l_{12}Y_1+l_{13}Z_1)(l_{11}X_2+l_{12}Y_2+l_{13}Z_2)+$

$$+(l_{21}X_1+l_{22}Y_1+l_{23}Z_1)(l_{21}X_2+l_{22}Y_2+l_{23}Z_2)+(l_{31}X_1+l_{32}Y_1+l_{33}Z_1)(l_{31}X_2+l_{32}Y_2+l_{33}Z_2)=$$
$$=(l_{11}^2+l_{12}^2+l_{13}^2)X_1X_2+(l_{11}l_{21}+l_{12}l_{22}+l_{13}l_{23})X_1Y_1+\dots+(l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2)Z_1Z_2.$$

აქ თუ მხედველობაში მივიღებთ მიმართულების ცხრა კოსინუსს შორის დამოკიდე-ბულებებს, დაგვრჩება:

$$X_1'X_2'+Y_1'Y_2'+Z_1'Z_2' = X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

რაც ამტკიცებს სკალარული ნამრავლის ინვარიანტობას.

ბოლოს, ვაჩვენოთ, რომ სკალარული ნამრავლის მეორე განმარტება, ტოლფა-სია წინასი; მართლაც, მოვაბრუნოთ კოორდინატთა xoyz სისტემა ისე, რომ ახალი ox_1 ღერძი გაჰყვეს $\vec{P}_1$ ვექტორის მიმართულებას (ნახ.3), მაშინ, ცხა-დია: $X_1=|\vec{P}_1|$, $Y_1=Z_1=0$, $X_2=|\vec{P}_2|\cos\varphi$, ამიტომ

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 = |\vec{P}_1|\cdot|\vec{P}_2|\cos\varphi,$$

ე.ი. სკალარული ნამრავლის (6) განმარტება დადის (5)-ზე.

§ 2. ცვლადი ვექტორი და მისი წარმოებული

$\vec{P}$ ვექტორს ეწოდება მუდმივი, თუ უცვლელი რჩება ამ ვექტორის როგორც სიგრძე, ასევე მიმართულება; წინააღმდეგ შემთხვევაში ვექტორს ც ვ ლ ა დ ი ეწოდება. ამ განმარტებისას ყურადღებას ვაქცევთ ვექტორის სიგრძესა და მი-მართულებას, ხოლო მოდების წერტილის მნიშვნელობას არ ვაძლევთ, ე.ი. არსე-ბითად საქმე გვაქვს თავისუფალ ვექტორებთან. შემდეგში, თუ ეს განსაკუთრე-ბით აღნიშნული არ იქნება, ვიგულისხმებთ, რომ ვექტორი მოდებულია კოორდინატ-თა სათავეში.

თუ $\vec{P}$ ვექტორი ცვლადია, მაშინ, ცხადია, მისი X, Y და Z გეგმილები აგრეთვე ცვლადი სიდიდეები იქნება.

განვიხილოთ ის უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც $\vec{P}$ ვექტორი წარმოადგენს ერთი t პარამეტრის (სკალარული არგუმენტი) ვექტორულ ფუნქციას[1]; მას ასე აღნიშნავენ:

$$\vec{P} = \vec{P}(t).$$

ვთქვათ, ცვლადი $\vec{P}(t)$ ვექტორი განსაზღვრულია t_0 სკალარის რომელიმე მიდამოში, გარდა, შესაძლოა, თვით t_0 მნიშვნელობისა; მუდმივ $\vec{A}$ ვექტორს ეწოდება ცვლადი $\vec{P}(t)$ ვექტორის ზ ღ ვ ა რ ი, როცა $t \to t_0$, და ჩაწერენ:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{P}(t) = \vec{A}, \qquad (1)$$

თუ ნებისმიერ დადებით ε რიცხვს შეესაბამება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ, როცა $0<|t-t_0|<\eta$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\vec{P}(t) - \vec{A}| < \varepsilon.$$

ვთქვათ, A_1, A_2, A_3 არის $\vec{A}$ ვექტორის გეგმილები, $X(t), Y(t), Z(t)$ კი ცვლადი $\vec{P}(t)$ ვექტორის გეგმილები; მაშინ, თუ $\Delta\vec{P}$-თი აღვნიშნავთ $\vec{P}-\vec{A}$ სხვაობას, გვექნება:

$$\Delta X = X(t) - A_1,\quad \Delta Y = Y(t) - A_2,\quad \Delta Z = Z(t) - A_3.$$

მეორე მხრივ, რადგან ზღვრის განმარტებით, როცა t უახლოვდება t_0-ს, $\Delta\vec{P}$ სხვაობის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ, ცხადია, $\Delta X, \Delta Y$ და ΔZ სიდიდეებიც მიისწრაფვიან ნულისაკენ და, მაშასადამე, გვექნება:

$$\lim_{t \to t_0} X(t) = A_1,\quad \lim_{t \to t_0} Y(t) = A_2,\quad \lim_{t \to t_0} Z(t) = A_3, \qquad (2)$$

ე.ი. ზ ღ ვ რ უ ლ ი $\vec{A}$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს გ ე გ მ ი ლ ე ბ ი ც ვ ლ ა დ ი $\vec{P}$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს გ ე გ მ ი ლ ე ბ ი ს ზ ღ ვ რ ე ბ ი ა.

ვთქვათ, $\vec{P}(t)$ ვექტორი განსაზღვრულია t_0 წერტილის რომელიმე მიდამოში და თვით t_0 წერტილში; $\vec{P}(t)$ ვექტორი არის უწყვეტი ფუნქცია არგუმენტის t_0 მნიშვნელობისათვის, თუ ნებისმიერ დადებით ε რიცხვს შეესაბამება დადებითი η რიცხვი, ისე რომ, როდესაც $|t-t_0|<\eta$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\vec{P}(t) - \vec{P}(t_0)| < \varepsilon, \qquad (3)$$

ან, სხვანაირად, თუ

$$\lim_{t \to t_0} \vec{P}(t) = \vec{P}(t_0).$$

განვიხილოთ ცვლადი $\vec{P}(t)$ ვექტორი, რომელიც t არგუმენტის უწყვეტი ფუნქციაა რომელიმე არეში; მოვდოთ იგი 0 წერტილზე; M იყოს მისი ბოლო წერტილი (ნახ.4). როდესაც t პარამეტრი იცვლება, მაშინ იცვლება აგრეთვე M წერტილიც და იგი აღწერს წირს, რომელსაც $\vec{P}(t)$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ჰ ო დ ო გ რ ა ფ ი ეწოდება. თუ $X(t), Y(t)$ და $Z(t)$ არის $\vec{P}(t)$ ვექტორის გეგმილები, მაშინ

$$\vec{P} = X(t)\cdot\vec{i} + Y(t)\cdot\vec{j} + Z(t)\cdot\vec{k},$$

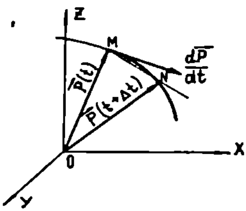
---

[1] განვიხილავთ სკალარული არგუმენტის ვექტორულ ფუნქციას. ასევე შეიძლება განვიხილოთ ვექტორული არგუმენტის სკალარული ფუნქცია ან ვექტორული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია, რაზეც აქ არ შევჩერდებით.

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ კოორდინატთა ღერძების ტკებავეებია.

ეს განტოლება წარმოადგენს ვექტორის ჰოდოგრაფის განტოლებას, ჩაწერილს ვექტორული სახით.

განვსაზღვროთ ახლა სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის წარმოებული. $\overline{OM}$ და $\overline{ON}$ იყოს $\vec{P}$ ვექტორის მდებარეობა, რომლებიც შეესაბამებიან არგუმენტის t და $t+\Delta t$ მნიშვნელობებს (ნახ.4). $\overline{MN} = \Delta\vec{P}(t)$ არის $\vec{P}(t)$ ვექტორის ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის Δt ნაზრდს; ცხადია,



ნახ.4

$$\Delta\vec{P}\,(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z).$$

განვიხილოთ ვექტორის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობა:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}.$$

გამოვთვალოთ ამ ფარდობის ზღვარი, როცა Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამ ზღვარს, როცა იგი არსებობს, ეწოდება $\vec{P}(t)$ ვექტორის წარმოებული და მას შემდეგნაირად აღნიშნავენ:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \qquad (4)$$

რადგან

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\left(\frac{\Delta X}{\Delta t}, \frac{\Delta Y}{\Delta t}, \frac{\Delta Z}{\Delta t}\right),$$

ამიტომ წარმოებულის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი არსებობდეს ზღვრები:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt}, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta t} = \frac{dY}{dt}, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Z}{\Delta t} = \frac{dZ}{dt}.$$

თუ ეს პირობები დაცულია, მაშინ გვექნება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}\right),$$

ან, რაც იგივეა:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dX}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dY}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dZ}{dt}\cdot\vec{k}, \qquad (5)$$

ე.ი. წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი ს გ ე გ მ ი ლ ე ბ ი წ ა რ - მ ო ა დ გ ე ნ ე ნ გ ე გ მ ი ლ ე ბ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ს.

ახლა, ვაჩვენოთ, რომ ცვლადი ვექტორის წარმოებული $\frac{d\vec{P}}{dt}$ ვექტორი მიყვება ჰოდოგრაფის მხებს შესაბამის წერტილზე. მართლაც, რადგან $\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ ვექტორი მდებარეობს ჰოდოგრაფის MN მკვეთზე, ხოლო მკვეთის ზღვრული მდებარეობა, როცა იგი არსებობს, არის ჰოდოგრაფის მხები, ამიტომ $\frac{d\vec{P}}{dt}$ ვექტორს ეწყება ჰოდოგრაფის მხების მიმართულება.

ასევე განიმარტება ვექტორული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის წარმოებული, რაზეც აქ არ შევჩერდებით.

ახლა დავამტკიცოთ ვექტორის წარმოებულის შესახებ რამდენიმე დებულება:

1. წარმოებადი ვექტორების ჯამის წარმოებული არის შესაკრები ვექტორების წარმოებულების ჯამი. მართლაც, ვთქვათ, $\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$ წარმოებადი ვექტორების ჯამია, მაშინ:

$$\Delta\vec{P}=\Delta\vec{P}_1+\Delta\vec{P}_2 .$$

ამ ტოლობას თუ გავყოფთ Δt-ზე და გადავალთ ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d\vec{P}_1}{dt}+\frac{d\vec{P}_2}{dt} . \qquad (6)$$

2. სკალარული ნამრავლის წარმოებული. ვთქვათ, $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ წარმოებადი ვექტორებია. განვიხილოთ მათი სკალარული ნამრავლი

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2 .$$

დავამტკიცოთ, რომ მართებულია გაწარმოების შემდეგი ფორმულა:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)=\frac{d\vec{P}_1}{dt}\cdot\vec{P}_2+\vec{P}_1\cdot\frac{d\vec{P}_2}{dt} . \qquad (7)$$

მართლაც, გვაქვს:

$$\Delta(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)=(\vec{P}_1+\Delta\vec{P}_1)\cdot(\vec{P}_2+\Delta\vec{P}_2)-\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=$$
$$=\Delta\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2+\vec{P}_1\cdot\Delta\vec{P}_2+\Delta\vec{P}_1\cdot\Delta\vec{P}_2 ,$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t}\cdot\vec{P}_2+\vec{P}_1\cdot\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}+\Delta\vec{P}_1\cdot\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t} .$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ, რადგან

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{P}_1\cdot\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{P}_1\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}=0,$$

ამიტომ გვექნება:

$$\frac{d(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)}{dt}=\frac{d\vec{P}_1}{dt}\cdot\vec{P}_2+\vec{P}_1\cdot\frac{d\vec{P}_2}{dt} .$$

თუ ერთ-ერთი მამრავლთაგანი სკალარული სიდიდეა, (7) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\cdot\vec{P})=\frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{P}+\varphi\cdot\frac{d\vec{P}}{dt} . \qquad (8)$$

დავუშვათ, რომ $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძე მუდმივია, ე.ი.

$$|\vec{P}|=\text{const},$$

მაშინ

$$\vec{P}\cdot\vec{P}=|\vec{P}|^2=\text{const}.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს:

$$\vec{P}\cdot\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{d\vec{P}}{dt}\cdot\vec{P}=0,$$

საიდანაც

$$\vec{P}\cdot\frac{d\vec{P}}{dt}=0. \qquad (9)$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\frac{d\vec{P}}{dt}$ ვექტორი $\vec{P}$ ვექტორის მართობია, მაშასადამე, მ უ დ მ ი ვ ი ს ი გ რ ძ ი ს ვ ე ქ ტ ო რ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი თ ვ ი თ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს მ ა რ თ ო ბ ი ა.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს ვექტორული ნამრავლის გაწარმოების შემდეგი წესი:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1\times\vec{P}_2)=\frac{d\vec{P}_1}{dt}\times\vec{P}_2+\vec{P}_1\times\frac{d\vec{P}_2}{dt}. \qquad (10)$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ, თუ $\vec{P}(u)$ არის u ცვლადის წარმოებადი ფუნქცია, სადაც u, თავის მხრივ, t ცვლადის წარმოებადი ფუნქციაა, ე.ი.

$$u=u(t),$$

მაშინ $\vec{P}$ ვექტორი იქნება t ცვლადის რთული ვექტორული ფუნქცია და მართებული იქნება რთული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულა:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d\vec{P}}{du}\cdot\frac{du}{dt}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. სივრცის წირის ელემენტები. ვთქვათ, სივრცეში აღებულია რომელიმე წირი, მისი განტოლებები ავიღოთ პარამეტრული სახით:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t), \qquad (11)$$

ვიგულისხმოთ, რომ $f(t),\varphi(t)$ და $\psi(t)$ არიან რომელიმე არეში t პარამეტრის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები.

თუ $\vec{r}$ არის სივრცის წირის ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორი, მაშინ სივრცის წირის პარამეტრული სახის (11) განტოლებები ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r}=f(t)\cdot\vec{i}+\varphi(t)\cdot\vec{j}+\psi(t)\cdot\vec{k} \qquad (12)$$

(12) განტოლებას სივრცის წირის ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ ი ს ა ხ ი ს განტოლება ეწოდება. ცხადია, თვით წირი წარმოადგენს $\vec{r}(t)$ ვექტორის ჰოდოგრაფს.

1. რკალის დიფერენციალი. ვთქვათ, მოცემულია სივრცის წირის (11) სახის განტოლებები; ვიგულისხმოთ, რომ $f'(t),\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ ფუნქციები არეში ერთდროულად ნული არ არის.

სივრცის წირის $M_0M=S$ რკალის სიგრძე განიმარტება ისე, როგორც ბრტყელი წირის შემთხვევაში და, მაშასადამე, მსგავსი მსჯელობით სივრცის წირის რკალის ds დიფერენციალისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

საიდანაც რკალის წარმოებული პარამეტრით იქნება:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}; \qquad (13)$$

ან მოკლედ

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

სადაც x', y' და z'-ით აღნიშნულია წარმოებულები t-თი.

თუ $M(x,y,z)$ წერტილი მოძრაობს წირზე, მაშინ შესაბამისად შეიცვლება წირის S რკალი და პირიქით; მაშასადამე, წირის მიმდინარე x, y და z

კოორდინატები შეიძლება განვიხილოთ როგორც წირის s რკალის ფუნქციები, ე.ი.:

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s), \qquad (14)$$

ან მოკლედ

$$\vec r(s) = x(s)\cdot\vec i + y(s)\cdot\vec j + z(s)\cdot\vec k .$$

ვუწოდოთ (14) განტოლებებს სივრცის წირის ბ უ ნ ე ბ რ ი ვ ი განტოლებები. რადგან

$$\frac{d\vec r}{ds} = \frac{dx}{ds}\cdot\vec i + \frac{dy}{ds}\cdot\vec j + \frac{dz}{ds}\cdot\vec k ;$$

ამასთანავე $\frac{d\vec r}{ds}$ ვექტორს აქვს წირის M წერტილზე გავლებული მხების მიმართულება (ნახ.4), სიგრძით კი

$$\left|\frac{d\vec r}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec r}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\overline{MM_1}|}{\Delta s} = 1,$$

როგორც წირის ქორდის სიგრძის სათანადო რკალთან ფარდობის ზღვარი.

ამრიგად, $\frac{d\vec r}{ds}$ ვექტორი წარმოადგენს წირის M წერტილზე მხების $\vec T$ მგეზავს, ე.ი.

$$\frac{d\vec r}{ds} = \vec T . \qquad (15)$$

ეს ფორმულა მხების $\vec T$ მგეზავს ანიჭებს გარკვეულ მიმართულებას; სახელდობრ, მხებზე დადებითი მიმართულება აიღება იმ მხარეს, საითაც იზრდება s რკალი.

2. <u>მხები წრფე და ნორმალური სიბრტყე</u>. ავიღოთ წირზე $M(x,y,z)$ წერტილი, რომელსაც შეესაბამება პარამეტრის t მნიშვნელობა. განვიხილოთ $\frac{d\vec r}{dt}$ ვექტორი.

რადგან $\frac{d\vec r}{dt}$ ვექტორს აქვს წირის M წერტილზე გავლებული მხების მიმართულება, ამიტომ წირის M წერტილზე გავლებული მხების განტოლებები იქნება:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}},$$

ან მოკლედ

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

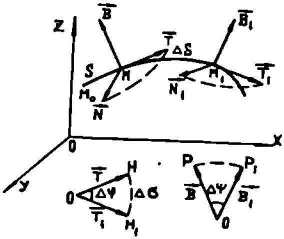
სადაც X, Y და Z მხების მიმდინარე კოორდინატებია.

სიბრტყეს, რომელიც გადის წირის აღებულ წერტილზე და მხების მართობულია, წირის ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი სიბრტყე ეწოდება. ცხადია, წირის ნორმალური სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0 .$$

3. <u>წირის მთავარი ნორმალი და განმზრდევი სიბრტყე</u>. ავიღოთ წირზე ორი $M(x,y,z)$ და $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ წერტილი, რომლებიც ეთანადებიან პარამეტრის t და $t+\Delta t$ მნიშვნელობებს (ნახ.5). $\vec T$ და $\vec T_1$ იყოს აღნიშნულ წერტილებზე მხებთა მგეზავები. აღვნიშნოთ მხებებს შორის კუთხე $\Delta\varphi$-თი, ხოლო MM_1

რკალის სიგრძე – Δs-ით: გამოვთვალოთ $\frac{d\vec{T}}{ds}$ – წარმოებული. იგი, როგორც ერთეულოვანი ვექტორის წარმოებული, ცხადია, მართობია თვით $\vec{T}$ ვექტორის. მაშასადამე, $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ვექტორი მდებარეობს წირის ნორმალურ სიბრტყეზე; $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ვექტორის მიმართულებას წირის მ თ ა ვ ა რ ი ნ ო რ მ ა ლ ი ვუწოდოთ. რადგან:



ნახ.5

$$\vec{T} = \frac{d\alpha}{ds}\vec{i} + \frac{d\beta}{ds}\vec{j} + \frac{d\gamma}{ds}\vec{k},$$

სადაც α, β და γ მხების მიმართულების კოსინუსებია ($\vec{T}$ ვექტორის კომპონენტები), ამიტომ მთავარი ნორმალის განტოლებები იქნება:

$$\frac{X-x}{\frac{d\alpha}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{d\beta}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{d\gamma}{ds}},$$

სიბრტყე, რომელიც გადის წირის აღებულ წერტილზე და მთავარი ნორმალის მართობია, არის სივრცის წირის გ ა ნ მ წ რ ფ ე ვ ი სიბრტყე.
განმწრფევი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$(X-x)\frac{d\alpha}{ds} + (Y-y)\frac{d\beta}{ds} + (Z-z)\frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

ისე როგორც ბრტყელი წირის შემთხვევაში, სივრცის წირის ს ი მ რ უ დ ე ვუწოდოთ მის ორ ნებისმიერ მხებს შორის კუთხის შესაბამის რკალთან ფარდობის ზღვარს. ამრიგად, სივრცის წირის K სიმრუდე არის

$$K = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

სადაც ρ ს ი მ რ უ დ ი ს რ ა დ ი უ ს ი ა.

გამოვთვალოთ $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ვექტორის სიდიდე; რადგან $|\Delta\vec{T}|$ მონაკვეთი $\Delta\varphi$ კუთხის ტოლფასია[1], ამიტომ:

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\cdot\vec{N}. \qquad (16)$$

ეს ფორმულა მთავარი ნორმალის $\vec{N}$ ბგეზავს ანიჭებს გარკვეულ მიმართულებას; სახელდობრ, მთავარი ნორმალი მიმართულია წირის ჩაზნექილობის მხარეს.

თუ ვისარგებლებთ (16) ტოლობით, სივრცის წირის სიმრუდის გამოსათვლელად გვექნება:

$$K = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}.$$

- - - - - -

[1] მართლაც, $|\Delta\vec{T}| = 2|\vec{T}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \sim \Delta\varphi$.

4. სივრცის წირის მიმხები სიბრტყე და ბინორმალი. სიბრტყე, რომელიც გადის მხებზე და მთავარ ნორმალზე, არის სივრცის წირის მიმხები სიბრტყე. მიმხები სიბრტყე შეიძლება განიმარტოს აგრეთვე როგორც ზღვრული მდებარეობა იმ სიბრტყისა, რომელიც გადის M წერტილში წირის მხებზე, მეორე M_1 წერტილზე გავლებული მხების პარალელურად, როცა M_1 წერტილი M წერტილს უახლოვდება (ნახ.5); მართლაც, აღნიშნულ სიბრტყეზე მდებარეობს ორი მეზობელი მხების $\vec{T}(s)$ და $\vec{T}_1(s+\Delta s)$ მქემავები და, მაშასადამე, მათი $\Delta\vec{T}$ სხვაობა და $\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s}$ ფარდობაც. რადგან $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s}=\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\vec{N}$, ამიტომ ზღვარში, როცა $\Delta s\to 0$, აღნიშნული სიბრტყე გაივლის წირის მთავარ ნორმალზეც.

ცხადია, რომ ბრტყელი წირის მიმხები სიბრტყე თვით ამ წირის სიბრტყეა, მაგრამ, თუ წირი სივრცითია, მაშინ მიმხები სიბრტყე იცვლის მდებარეობას წერტილიდან წერტილზე გადასვლის დროს.

ავიღოთ სივრცითი წირის პარამეტრული სახის განტოლებები; გამოვთვალოთ $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ვექტორი. ამ ვექტორს ვუწოდოთ სიმრუდის ვექტორი. რადგან:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\vec{T}\cdot\frac{ds}{dt},$$

ამიტომ გვექნება:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cdot\vec{T}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\vec{T}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\vec{T}}{dt};$$

ახლა, რადგან

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt},$$

ხოლო

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\vec{N},$$

ამიტომ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\vec{T}+\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}\cdot\vec{N}.$$

როგორც ვხედავთ, სიმრუდის $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ვექტორი მდებარეობს წირის მიმხებ სიბრტყეზე; მაშასადამე, ვექტორი

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k}\\ x', & y', & z'\\ x'', & y'', & z''\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(y'z''-z'y'')+\vec{j}\cdot(z'x''-x'z'')+\vec{k}\cdot(x'y''-y'x'')$$

არის მიმხები სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.

ამრიგად, სივრცის წირის მიმხები სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$(X-x)(y'z''-z'y'')+(Y-y)(z'x''-x'z'')+(Z-z)(x'y''-y'x'')=0.$$

ეს განტოლება მოკლედ ასე ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

წრფეს, რომელიც გადის წირის აღებულ წერტილზე და მიმხებ სიბრტყის მართობია, წ ი რ ი ს ბ ი ნ ო რ მ ა ლ ი ეწოდება.

ცხადია, ბინორმალის განტოლებანი იქნება:

$$\frac{X-x}{y'z''-z'y''}=\frac{Y-y}{z'x''-x'z''}=\frac{Z-z}{x'y''-y'x''}.$$

$\vec{B}(\lambda,\mu,\nu)$ იყოს ბინორმალის მგეზავი, რომლის მიმართულება ისეა არჩეული, რომ სამი $\vec{T},\vec{N}$ და $\vec{B}$ ვექტორი ადგენდეს მარცხენა სისტემას, მაშინ, ცხადია,

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}.$$

ახლა განვიხილოთ $\frac{d\vec{B}}{ds}$ ვექტორი. ერთი მხრივ, ეს ვექტორი, როგორც ერთეულოვანი ვექტორის წარმოებული, იგი $\vec{B}$ ვექტორის მართობია; მეორე მხრივ,

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=\frac{d\vec{T}}{ds}\times\vec{N}+\vec{T}\times\frac{d\vec{N}}{ds}=\frac{1}{\rho}\vec{N}\times\vec{N}+\vec{T}\times\frac{d\vec{N}}{ds}=\vec{T}\times\frac{d\vec{N}}{ds}.$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{d\vec{B}}{ds}$ ვექტორი $\vec{T}$ ვექტორის მართობია. ამრიგად, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ ვექტორი ერთდროულად $\vec{B}$ და $\vec{T}$ ვექტორების მართობია, მაშასადამე, იგი $\vec{N}$ ვექტორის კოლინეარულია.

ვუწოდოთ, სივრცის წირის მ ე ო რ ე ს ი მ რ უ დ ე ანუ გ რ ე ხ ა მის ორ მეზობელ მიმხებ სიბრტყეს შორის კუთხის[1] შესაბამის . რკალთან ფარდობის ზღვარს. ამრიგად, სივრცის წირის T გრეხა არის:

$$T=\frac{1}{\tau}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta s}=\frac{d\psi}{ds},$$

სადაც τ გრეხის რადიუსია, $\Delta\psi$ კი – კუთხე ორ მეზობელ ბინორმალს შორის.

კერძოდ, თუ წირი ბრტყელია, მაშინ $\Delta\psi=0$ და, მაშასადამე, გრეხაც ნულის ტოლია.

ისე როგორც სიმრუდის შემთხვევაში, აქაც:

$$\left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{B}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta s}=\frac{d\psi}{ds}=\frac{1}{\tau},$$

ამიტომ გვექნება[2]:

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=-\frac{1}{\tau}\cdot\vec{N}. \qquad (17)$$

---

[1] ანუ ორ მეზობელ ბინორმალს შორის კუთხის.

[2] ჩვენ პროპორციულობის კოეფიციენტი ავიღეთ $-\frac{1}{\tau}$.

ახლა, თუ λ, μ და ν არის ბინორმალის მიმართულების კოსინუსები, მაშინ:

$$T = \frac{1}{\tau} = \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2}.$$

ბოლოს, გამოვთვალოთ $\frac{d\vec{N}}{ds}$ ვექტორი; რადგან

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T},$$

ამიტომ

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{ds} \times \vec{T} + \vec{B} \times \frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\vec{N} \times \vec{T} + \frac{1}{\rho}\vec{B} \times \vec{N} = \frac{1}{\tau}\vec{B} - \frac{1}{\rho}\vec{T},$$

ე.ი.

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{T} + \frac{1}{\tau}\vec{B}. \tag{18}$$

(15), (16), (17) და (18) ფორმულებს ფ რ ე ნ ე ს[1] ფორმულები ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მატერიალური წერტილის მოძრაობის სიჩქარე და აჩქარება. ვთქვათ, მოცემულია წერტილის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

სადაც t არის დრო; იყოს $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი; ცხადია, M წერტილის ტრაექტორია იქნება $\vec{r}$ ვექტორის ჰოდოგრაფი; ზღვარს

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ეწოდება წერტილის ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ ი ს ი ჩ ქ ა რ ე და აღინიშნება $\vec{V}$-თი, ე.ი.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k};$$

ამრიგად, მოძრავი წერტილის სიჩქარე არის რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროით. რადგან $|\Delta\vec{r}| = \Delta S$, სადაც S გავლილი მანძილია t დროის განმავლობაში (ტრაექტორიის ბუნებრივი პარამეტრი), ამიტომ

$$|\vec{V}| \equiv v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

ე.ი. წერტილის სიჩქარის სიდიდე (სკალარული სიჩქარე) არის მანძილის წარმოებული დროით. ახლა, შეგვიძლია დავწეროთ $\vec{V} = v\cdot\vec{T}$, სადაც $\vec{T}$ ტრაექტორიის მხების ორტია M წერტილში.

ვექტორული სიჩქარის წარმოებულს დროით ვუწოდოთ წერტილის ვექტორული აჩქარება და აღვნიშნოთ იგი $\vec{W}$-თი, მაშინ

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k},$$

ე.ი. წერტილის ვექტორული აჩქარება არის რადიუს-ვექტორის მეორე რიგის წარმოებული დროით.

რადგან $\vec{V} = v\vec{T}$, ამიტომ

- - - - - - - -

[1] J. Frenet (1816-1900) - ფრანგი მათემატიკოსი.

$$\vec w = \frac{dv}{dt}\vec T + v\frac{d\vec T}{dt},$$

მაგრამ

$$\frac{d\vec T}{dt} = \frac{d\vec T}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{1}{\rho}\vec N,$$

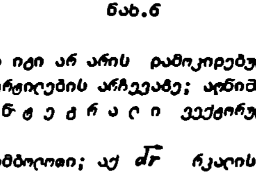
სადაც $\frac{1}{\rho}$ ტრაექტორიის სიმრუდეა M წერტილში, ხოლო $\vec N$ — მთავარი ნორმალის მგეზავი; ამრიგად,

$$\vec w = \frac{dv}{dt}\cdot\vec T + \frac{v^2}{\rho}\vec N.$$

ეს ფორმულა იძლევა ვექტორული აჩქარების დაშლას მხებ და ნორმალურ მდგენელებად. როგორც ვხედავთ, მოძრავი წერტილის ვექტორული $\vec w$ აჩქარება მდებარეობს ტრაექტორიის მიმხებ სიბრტყეში.

§ 3. ინტეგრალი ვექტორული ფუნქციისაგან

განვიხილოთ სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ რომელიმე გაწრფევადი AB წირი; $\vec F(M)$ იყოს წირის წერტილების მიმართ უწყვეტი ვექტორული ფუნქცია; ისე როგორც ინტეგრალურ აღრიცხვაში, აქაც AB რკალი დავყოთ რაიმე წესით n ნაწილად შემდეგი წერტილებით: $A = M_0, M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n = B$; აღვნიშნოთ δ-თი $|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}|$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ სიდიდეებს შორის უდიდესი; AB რკალის დაყოფა ისე ჩავატაროთ, რომ, როდესაც დანაყოფთა n რიცხვი უსასრულოდ გაიზრდება, უდიდესი დანაყოფის δ სიგრძე მიისწრაფოდეს ნულისაკენ. $N_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ იყოს M_kM_{k+1} დანაყოფის ნებისმიერი წერტილი (ნახ.6). გავამრავლოთ $\vec F(N_k)$ ვექტორი სკალარულად $\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$-ზე და შევადგინოთ შემდეგი სახის ჯამი:



ნახ.6

$$\sum_{k=0}^{n-1}\vec F(N_k)\cdot\overrightarrow{M_kM_{k+1}}.$$

ზემოაღნიშნულ პირობებში არსებობს ზღვარი:

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\vec F(N_k)\cdot\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$$

და იგი არ არის დამოკიდებული არც AB რკალის დაყოფის წესზე და არც N_k წერტილების არჩევაზე; აღნიშნულ ზღვარს ეწოდება მ რ უ დ წ ი რ უ ლ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ვექტორული $\vec F(M)$ ფუნქციისაგან და აღინიშნება $\int_{AB}\vec F(M)d\vec r$ სიმბოლოთი; აქ $d\vec r$ რკალის ვექტორული ელემენტია.

ამრიგად,

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\vec F(N_k)\cdot\overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \int_{AB}\vec F(M)\cdot d\vec r.$$

ახლა, თუ $\vec r_k$ არის $M_k(x_k,y_k,z_k)$ წერტილის რადიუს-ვექტორი, ხოლო F_x, F_y, F_z კი $\vec F(M)$ ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე, მაშინ

$$\sum_{k=0}^{n-1}\vec F(N_k)\cdot\overrightarrow{M_kM_{k+1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\vec F(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\vec r_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left[F_x(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k+F_y(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta y_k+F_z(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta z_k\right]$$

და, მაშასადამე, ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\delta\to 0$, მივიღებთ:

$$\int_{AB}\vec F(M)\,d\vec r=\int_{AB}F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz. \qquad (1)$$

ამრიგად, წირული ინტეგრალი ვექტორული ფუნქციისაგან მიიყვანება ჩვეულებრივ წირულ ინტეგრალზე; ასევე განიმარტება შემდეგი სახის წირული ინტეგრალი:

$$\int_{AB}\vec F(M)\times d\vec r$$

და სხვა, რაზედაც აქ არ შევჩერდებით.

§ 4. ზოგიერთი განმარტება

1. სკალარული და ვექტორული ველი. სივრცის რაიმე არეს (ან მთელ სივრცეს), რომლის ყოველ წერტილზე განსაზღვრულია რომელიმე ფიზიკური სიდიდე, ველი ეწოდება. თუ ფიზიკური სიდიდე სკალარია, მაშინ ველს სკალარული ველი[1] ეწოდება. ამრიგად, მოცემულია სკალარული ველი, ნიშნავს ველის ყოველ $M(x,y,z)$ წერტილზე დასახელებულია სკალარული $\varphi(M)=\varphi(x,y,z)$ ფუნქცია. ასევე, სივრცის რაიმე არეს (ან მთელ სივრცეს), რომლის ყოველ წერტილზე განსაზღვრულია რომელიმე ვექტორი, ვექტორული ველი[2] ეწოდება. ამრიგად, მოცემულია ვექტორული ველი – ნიშნავს ველის ყოველ $M(x,y,z)$ წერტილზე დასახელებულია $\vec F(M)=\vec F(X,Y,Z)$ ვექტორი, რომლის X, Y, და Z კოორდინატები (გეგმილები) წერტილის x,y,z კოორდინატების ფუნქციებია. ზოგჯერ გვიხდება განვიხილოთ სკალარული და ვექტორული ფუნქციები, რომლებიც იცვლებიან აგრეთვე დროშიც, ე.ი. წარმოადგენენ არა მარტო მდებარეობის (ე.ი. x,y,z კოორდინატების), არამედ t დროის ფუნქციებსაც. იმ შემთხვევაში, როცა სკალარული (ან ვექტორული) ფუნქცია მხოლოდ მდებარეობის ფუნქციაა, სათანადო ველს სტაციონარული ველი ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ველი არასტაციონარულია. მაგალითად, თუ ავიღებთ არაერთგვაროვან სხეულს, მას ყოველ წერტილზე აქვს გარკვეული $\rho(x,y,z)$ სიმკვრივე; მაშასადამე, სხეულის მიერ დაკავებული არე წარმოადგენს სკალარულ ველს – სიმკვრივის ველს. ასევე, შეიძლება ვილაპარაკოთ სიმძიმის ძალთა ველზე, რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს ვექტორულ ველს.

2. გრადიენტი. ავიღოთ რომელიმე $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის სკალარული ველი; სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ იგი სტაციონარული. ვთქვათ, $\varphi(x,y,z)$ თავისი არგუმენტების ცალსახა და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა.

$$\varphi(x,y,z)=C \qquad (1)$$

ზედაპირს, სადაც C რაიმე მუდმივია, ეწოდება ველის ეკვიპოტენციალური ანდ დონის ზედაპირი. ამ ზედაპირის ნორმალის განტოლება $M(x,y,z)$ წერტილზე იქნება

---

[1] უფრო ზუსტად, წერტილის სკალარულ $\varphi(M)=\varphi(x,y,z)$ ფუნქციას თავის განსაზღვრის არესთან ერთად, სკალარული ველი ეწოდება.

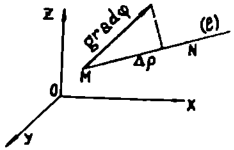
[2] უფრო ზუსტად, წერტილის ვექტორულ $\vec F(M)=\vec F(x,y,z)$ ფუნქციას თავის განსაზღვრის არესთან ერთად, ვექტორული ველი ეწოდება.

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}. \qquad (2)$$

ახლა გავავლოთ ველის $M(x,y,z)$ წერტილზე რომელიმე l წრფე, რომლის მიმართულების კოსინუსები იყოს: $\cos(l,x), \cos(l,y), \cos(l,z)$. ავიღოთ ამ წრფეზე M წერტილის მეზობელი $N(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ წერტილი (ნახ.7). $\varphi(x,y,z)$ ფუნქცია, ცხადია, იქნება დიფერენცირებადი, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Delta\varphi = \varphi(N)-\varphi(M) = \varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\varphi(x,y,z) =$$
$$=\varphi'_x\Delta x+\varphi'_y\Delta y+\varphi'_z\Delta z+\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z,$$

სადაც α,β,γ უსასრულოდ მცირეებია $\Delta x, \Delta y$ და Δz სიდიდეებთან ერთად. $\frac{\varphi(N)-\varphi(M)}{MN}$ ფარდობის ზღვარს, როდესაც MN მონაკვეთის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ, ეწოდება φ ფუნქციის წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი l მიმართულებით და აღინიშნება $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ -ით. ამრიგად,



ნახ.7

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{MN\to 0}\frac{\varphi(N)-\varphi(M)}{MN}.$$

თუ MN მონაკვეთის სიგრძე არის $\Delta\rho$, ე.ი. $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, მაშინ, ცხადია:

$$\Delta x=\Delta\rho\cos(l,x),\quad \Delta y=\Delta\rho\cos(l,y),\quad \Delta z=\Delta\rho\cos(l,z)$$

და, მაშასადამე, ფარდობა

$$\frac{\varphi(N)-\varphi(M)}{MN}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho}=\varphi'_x\cos(l,x)+\varphi'_y\cos(l,y)+\varphi'_z\cos(l,z)+$$
$$+\alpha\cos(l,x)+\beta\cos(l,y)+\gamma\cos(l,z).$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta\rho$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\varphi'_x\cos(l,x)+\varphi'_y\cos(l,y)+\varphi'_z\cos(l,z). \qquad (3)$$

ეს ფორმულა გვაძლევს φ ფუნქციის წარმოებულს l მიმართულებით. კერძოდ, როდესაც l მიმართულება ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძის პარალელურია, მაგალითად, Ox ღერძის პარალელურია, მაშინ $\cos(l,x)=1$, $\cos(l,y)$ და $\cos(l,z)=0$ და (3) ფორმულა მოგვცემს:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\varphi'_x,$$

ე.ი. ფუნქციის φ'_x, φ'_y და φ'_z კერძო წარმოებულები წარმოადგენენ მიმართულებით წარმოებულის კერძო შემთხვევებს. რადგან $\varphi(x,y,z)$ სკალარული ფუნქციაა, ამიტომ იგი ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ, ე.ი.

$$\varphi_1(x_1,y_1,z_1)=\varphi(x,y,z) \qquad (4)$$

სადაც x_1,y_1,z_1 წერტილის ახალი კოორდინატებია, ე.ი.

$$x = l_{11}x_1 + l_{12}y_1 + l_{13}z_1,$$
$$y = l_{21}x_1 + l_{22}y_1 + l_{23}z_1,$$
$$z = l_{31}x_1 + l_{32}y_1 + l_{33}z_1.$$

გავაწარმოვოთ (4) ტოლობა x_1-ით როგორც რთული ფუნქცია, გვექნება:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = l_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + l_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + l_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

ასევე გვექნება:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} = l_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + l_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + l_{32}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} = l_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + l_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + l_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

ეს ფორმულები გვარწმუნებს, რომ $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის კერძო $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ და $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ წარმოებულები გარდაიქმნებიან ისე, როგორც ვექტორის კოორდინატები; ამრიგად, ველის ყოველ წერტილში $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის კერძო $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ და $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ წარმოებულები ადგენენ ვექტორს. ამ ვექტორს ეწოდება φ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს გ რ ა დ ი ე ნ ტ ი და აღინიშნება იგი $\operatorname{grad}\varphi$-ით; ამრიგად,

$$\operatorname{grad}\varphi = \varphi'_x\cdot\vec{i} + \varphi'_y\cdot\vec{j} + \varphi'_z\cdot\vec{k}, \qquad (5)$$

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ კოორდინატთა ღერძების მგეზავებია.

შემოვიღოთ სიმბოლური ოპერატორი: $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (6). (ნაბლა ოპერატორი); ამ ოპერატორს ახასიათებს ვექტორის თვისებები; იგი წრფივი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ა.

შევთანხმდეთ, ყოველი ოპერატორი გავავრცელოთ მასზე, რაც მის შემდეგ დგას, ხოლო გავამრავლოთ მასზე, რაც მის წინ დგას: ასე, მაგალითად, $\frac{\partial}{\partial x}\varphi$ არის $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ წარმოებული, ხოლო $\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial x}$ არის φ ფუნქციისა და $\frac{\partial}{\partial x}$ ოპერატორის ნამრავლი. ახლა

$$\vec{\nabla}\cdot\varphi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \operatorname{grad}\varphi,$$

ე.ი.

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \vec{\nabla}\cdot\varphi. \qquad (7)$$

ცხადია, გრადიენტი ახასიათებს სკალარულ ველს, თვითონ კი წარმოადგენს ვექტორს. განმარტებიდან ჩანს, რომ $\operatorname{grad}\varphi$ ვექტორი მიჰყვება ეკვიპოტენციალური ზედაპირის ნორმალს $M(x,y,z)$ წერტილზე, სიგრძით კი არის

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

ახლა, თუ $\vec{l}(\cos\widehat{l,x}, \cos\widehat{l,y}, \cos\widehat{l,z})$ l მიმართულების მგეზავია, მაშინ $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი თ ი წარმოებული არის

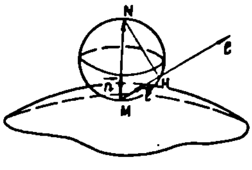
$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\widehat{l,x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\widehat{l,y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\widehat{l,z}=\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{l} \quad (8)$$

თუ უკანასკნელს მივიღებთ მხედველობაში, ადვილად შევნიშნავთ, რომ

$$\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}, \qquad (9)$$

სადაც $\vec{n}$ ეკვიპოტენციალური ზედაპირის ნორმალის მგეზავია, ხოლო $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ კი φ ფუნქციის წარმოებული ნორმალის მიმართულებით (ნორმალური წარმოებული).

$\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის გრადიენტსა და მიმართულებით წარმოებულს შორის დამოკიდებულებას მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვს. ველის რომელიმე $M(x,y,z)$ წერტილზე გავავლოთ დონეს $\varphi(x,y,z)=C$ ზედაპირი. ამ ზედაპირის აღებულ წერტილში ნორმალზე გადავზომოთ $\overrightarrow{MN}$ ვექტორი (ნახ. 8), რომელიც $\operatorname{grad}\varphi$-ს ტოლია. ავაგოთ MN მონაკვეთზე, როგორც დიამეტრზე, სფერო და განვიხილოთ l მიმართულება, რომელიც გადის M წერტილზე. ვთქვათ, H არის ამ მიმართულების გადაკვეთა სფეროსთან. ვინაიდან MHN არის მართი კუთხე, ამიტომ, ცხადია, MH მონაკვეთი წარმოადგენს $\operatorname{grad}\varphi$-ის გეგმილს l მიმართულებაზე ან, რაც იგივეა $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის წარმოებულს l მიმართულებით.



ნახ. 8

ახლა, ავიღოთ ველში რომელიმე V მოცულობა შემოსაზღვრული შეკრული გლუვი Σ ზედაპირით, მაშინ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\iiint_V\frac{\partial\varphi}{\partial x}dv=\oiint_\Sigma\varphi\cos\widehat{nx}\,ds,\quad \iiint_V\frac{\partial\varphi}{\partial y}dv=\oiint_\Sigma\varphi\cos\widehat{ny}\,ds,\quad \iiint_V\frac{\partial\varphi}{\partial z}dv=\oiint_\Sigma\varphi\cos\widehat{nz}\,ds,$$

სადაც $\vec{n}$ ზედაპირის გარე ნორმალის მგეზავია; გავამრავლოთ ეს ტოლობები შესაბამისად $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\iiint_V\operatorname{grad}\varphi\,dv=\oiint_\Sigma\varphi\cdot\vec{n}\,ds;$$

აქედან საშუალო მნიშვნელობის ფორმულით, გვექნება:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{\dot M}V=\oiint_\Sigma\varphi\cdot\vec{n}\,ds,$$

სადაც M არის V მოცულობის გარკვეული წერტილი; ახლა, თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც V მოცულობა იკუმშება M წერტილისაკენ, მივიღებთ:

$$\operatorname{grad}\varphi=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_\Sigma\varphi\cdot\vec{n}\,ds}{V}.$$

ეს ფორმულა ამტკიცებს $\operatorname{grad}\varphi$ ოპერატორის ინვარიანტობას.

თუ ვისარგებლებთ $\operatorname{grad}\varphi$-ს განმარტებით, ადვილად დავრწმუნდებით, შემდეგი ტოლობების მართებულობაში:

1. $\operatorname{grad}(\varphi\pm\psi)=\operatorname{grad}\varphi\pm\operatorname{grad}\psi,$
2. $\operatorname{grad}(A\varphi)=A\operatorname{grad}\varphi,$ (A მუდმივი მამრავლია)
3. $\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi,$
4. $\operatorname{grad}F(\varphi)=F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, $\varphi(r)$ არის წერტილის რადიუს-ვექტორის სიგრძის წარმოებადი ფუნქცია; გამოვთვალოთ $\varphi(r)$ ფუნქციის გრადიენტი, თუ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; გვაქვს $\operatorname{grad}\varphi(r)=\varphi'(r)\operatorname{grad} r$; მაგრამ

$$\operatorname{grad} r=\vec{i}\,\frac{\partial r}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial r}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{1}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=\frac{\vec{r}}{r};$$

ამიტომ, $\operatorname{grad}\varphi(r)=\varphi'(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}$.

კერძოდ, თუ $\varphi(r)=\dfrac{1}{r}$, მაშინ $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, $\varphi(u,v)$ არის რომელიმე არეში u და v-ს მიმართ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია; გამოვთვალოთ $\varphi(u,v)$ ფუნქციის გრადიენტი, თუ u და v x,y,z კოორდინატების წარმოებადი ფუნქციებია. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით გვაქვს

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$$

თუ ამ წარმოებულებს გავამრავლებთ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$-ზე შესაბამისად შევკრებთ, გვექნება

$$\operatorname{grad}\varphi(u,v)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\vec{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial v}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

ე.ი.

$$\operatorname{grad}\varphi(u,v)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad}u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad}v.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ $\varphi=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ ფუნქციის წარმოებული $M(x,y,z)$ წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის მიმართულებით. $\vec{r}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსებია $\dfrac{x}{r},\ \dfrac{y}{r},\ \dfrac{z}{r}$, ამიტომ საძიებელი $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ წარმოებული იქნება

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\widehat{r,x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\widehat{r,y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\widehat{r,z}=\frac{2x}{a^2}\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\frac{z}{r}=$$
$$=\frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\frac{2}{r}\varphi.$$

3. ვ ე ქ ტ ო რ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი მ ო ც ე მ უ ლ ი მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი თ. შევისწავლოთ ვექტორულ ველში მიღებული საჭირო დიფერენციალური ოპერაციები. ვთქვათ, გვაქვს $\vec{F}(r)=\vec{F}(x,y,z)$ ვექტორის ვექტორული ველი, ვიგულისხმოთ, რომ ველის ყოველ წერტილში $\vec{F}$ ვექტორის F_x,F_y და F_z კოორდინატები უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია.

$\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის სკალარული ველის შესწავლისას ვნახეთ, რომ ველის ყოველი წერტილის მიდამოში $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის ცვალებადობას ახასიათებდა $\operatorname{grad}\varphi$ ვექტორი. ეს ვექტორი $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის მიმართ ასრულებდა იმავე როლს, რასაც ასრულებს ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციის მიმართ მისი $f'(x)$ წარმოებული; მაგრამ $\varphi(x,y,z)$ სკალარია, ხოლო $\operatorname{grad}\varphi$ კი ვექტორი, ე.ი. უფრო მაღალი რანგის ობიექტი, ვიდრე სკალარი.

$\overline{F}(x,y,z)$ ვექტორის ველის შესწავლისას საჭიროა შემოღებულ იქნეს ისეთი სიდიდე, რომელიც შეასრულებს წარმოებულის როლს; ცხადია, ასეთი სიდიდე იქნება უფრო მაღალი რანგის ობიექტი, ვიდრე თვით ვექტორია[1].

არ გამოვიდეთ ვექტორული ანალიზის ფარგლებიდან და შევჩერდეთ აქ მხოლოდ $\overline{F}$ ვექტორის წარმოებულზე მოცემული მიმართულებით და მასთან დაკავშირებულ საკითხებზე, რომლებსაც აქვს გამოყენება ტექნიკაში.

ავაგოთ ველის $M(x,y,z)$ წერტილზე რომელიმე l წრფე, რომლის მიმართულების კოსინუსები იყოს $\cos \widehat{l,x}$, $\cos \widehat{l,y}$ და $\cos \widehat{l,z}$. ავიღოთ ამ წრფეზე M წერტილის მეზობელი $N(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ წერტილი. შევადგინოთ ფარდობა

$$\frac{\vec{F}(N)-\vec{F}(M)}{MN}=\frac{\vec{F}(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-\vec{F}(x,y,z)}{MN}=\frac{\Delta\vec{F}}{MN}.$$

ამ ფარდობის ზღვარს, როდესაც MN მონაკვეთის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ, ეწოდება $\vec{F}$ ვექტორის წარმოებული l მიმართულებით და აღინიშნება $\frac{\partial\vec{F}}{\partial l}$-ით, ე.ი.

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial l}=\lim_{MN\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{MN}.$$

რადგან $\vec{F}=\vec{i}F_x+\vec{j}F_y+\vec{k}F_z$, სადაც $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ კოორდინატთა ღერძების მგეზავებია, ამიტომ

$$\Delta\vec{F}=\vec{i}\Delta F_x+\vec{j}F_y+\vec{k}F_z.$$

ჩვენს შემთხვევაში F_x, F_y და F_z დიფერენცირებადი ფუნქციებია და, მაშასადამე,

$$\Delta\vec{F}=\vec{i}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F_x}{\partial z}\Delta z+\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y+\gamma_1\Delta z\right)+$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F_y}{\partial z}\Delta z+\alpha_2\Delta x+\beta_2\Delta y+\gamma_2\Delta z\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F_z}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta z+\alpha_3\Delta x+\beta_3\Delta y+\gamma_3\Delta z\right).$$

უკანასკნელი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\Delta\vec{F}=\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}\Delta z+\vec{i}\cdot\alpha\Delta x+\vec{j}\cdot\beta\Delta y+\vec{k}\cdot\gamma\Delta z,$$

სადაც α, β და γ უსასრულოდ მცირეებია Δx, Δy და Δz სიდიდეებთან ერთად;

თუ MN მონაკვეთის სიგრძე არის Δl, მაშინ

$$\Delta x=\Delta l\cdot\cos\widehat{l,x},\quad \Delta y=\Delta l\cdot\cos\widehat{l,y},\quad \Delta z=\Delta l\cdot\cos\widehat{l,x},$$

ამიტომ

$$\frac{\Delta\vec{F}}{MN}=\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\cos\widehat{l,x}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}\cos\widehat{l,y}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}\cos\widehat{l,z}+\vec{i}\,\alpha\cos\widehat{l,x}+\vec{j}\,\beta\cos\widehat{l,y}+\vec{k}\,\gamma\cos\widehat{l,z}.$$

ახლა, თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც Δl მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial l}=\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\cos\widehat{l,x}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}\cos\widehat{l,y}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}\cos\widehat{l,z} \qquad (10)$$

---

1 შემდეგში ვნახავთ, რომ იგი არის ტ ე ნ ზ ო რ ი.

(10) ფორმულა გვაძლევს $\vec{F}(x,y,z)$ ვექტორის წარმოებულს l მიმართულებით. $\vec{l}$ იყოს l მიმართულების ნგეზავი, ე.ი.

$$\vec{l} = \vec{i}\cos\widehat{l,x} + \vec{j}\cos\widehat{l,y} + \vec{k}\cos\widehat{l,z}.$$

შევადგინოთ $\vec{l}$-ისა და სიმბოლური $\vec{\nabla}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი, გვექნება

$$\vec{l}\cdot\vec{\nabla} = \cos\widehat{l,x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \cos\widehat{l,y}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \cos\widehat{l,z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}.$$

ახლა, თუ $\vec{l}\cdot\vec{\nabla}$ ოპერატორს გავავრცელებთ $\vec{F}$ ვექტორზე, მივიღებთ $\cos\widehat{l,x}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + \cos\widehat{l,y}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + \cos\widehat{l,z}\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}$ გამოსახულებას;

ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial l} = (\vec{l}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}. \qquad (11)$$

ბოლოს, თუ $\vec{\varphi}(x,y,z)$ რომელიმე ვექტორია, მაშინ დიფერენციალური $\vec{\varphi}\cdot\vec{\nabla}$ ოპერატორი იქნება

$$\vec{\varphi}\cdot\vec{\nabla} = \varphi_x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \varphi_y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \varphi_z\cdot\frac{\partial}{\partial z},$$

ამიტომ $(\vec{\varphi}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}$ გამოსახულების ქვეშ უნდა გვესმოდეს შემდეგი ვექტორი:

$$(\vec{\varphi}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} = \varphi_x\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + \varphi_y\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + \varphi_z\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}. \qquad (12)$$

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $(\vec{\varphi}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}$ წარმოადგენს $\vec{F}$ ვექტორის წარმოებულს $\vec{\varphi}$ ვექტორის მიმართულებით, გამრავლებულს $\vec{\varphi}$ ვექტორის სიდიდეზე.

4. ვ ე ქ ტ ო რ ი ს დ ი ვ ე რ გ ე ნ ც ი. ავიღოთ რომელიმე $\vec{F}(M) \equiv \vec{F}(x,y,z)$ ვექტორის ვექტორული ველი; სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ იგი სტაციონარული.

ვთქვათ, X, Y, Z გეგმილები არის ველის წერტილის $M(x,y,z)$ კოორდინატების უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები.

განვიხილოთ ველში ისეთი წირი, რომლის ყოველ წერტილზე ველის ვექტორს აქვს მხები მიმართულება (ნახ.9); ასეთ წირებს ველის ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ ი წ ი რ ე ბ ი ეწოდება. თუ $\vec{dr}(dx,dy,dz)$ არის ვექტორულ წირზე წერტილის მცირე ვექტორული გადაადგილება, მაშინ, განმარტების თანახმად, გვექნება

$$\vec{dr} \parallel \vec{F},$$

ე.ი.

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \qquad (13)$$

(13) სისტემა წარმოადგენს ვექტორული წირების დიფერენციალურ განტოლებებს.

თუ L არის ვექტორულ ველში რომელიმე შეკრული წირი[1], მაშინ ამ წირის

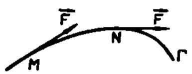
- - - - - - -

[1] რომელიც არ არის ვექტორული წირი.

წერტილებზე გატარებული ვექტორული წირები ადგენენ ზედაპირს, რომელსაც ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ ი მ ი ლ ი ეწოდება.

ავიღოთ ვექტორულ ველში რომელიმე ორპირა გლუვი Σ ზედაპირი. dS იყოს ზედაპირის ფართის ელემენტი. აღვნიშნოთ $\vec n$-ით dS ელემენტის რომელიმე M წერტილზე ნორმალის (გარე) მგეზავი. dS ელემენტის ფართობის სიმცირის გამო ამ ელემენტზე $\vec F$ ვექტორი შეიძლება მივიღოთ უცვლელად როგორც სიდიდით, ასევე მიმართულებით. ახლა გარკვეულობისათვის ჩავთვალოთ $\vec F$ ვექტორი რომელიმე უკუმშვადი სითხის დინების სიჩქარედ; ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, სითხის რაოდენობა[1], რომელიც გაივლის ერთეულ დროში dS ელემენტზე, იქნება:

$$\text{გეგ}_n \vec F\cdot dS = \vec F\cdot\vec n\,dS = (X\cos\widehat{n,x} + Y\cos\widehat{n,y} + Z\cos\widehat{n,z})\,dS.$$



ნახ.9

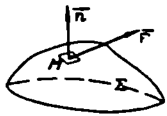
ვუწოდოთ ამ გამოსახულებას $\vec F$ ვექტორის ნ ა კ ა დ ი ზ ე დ ა პ ი რ ი ს dS ელემენტზე. ხოლო ზედაპირული ინტეგრალი

$$\iint_\Sigma \vec F\cdot\vec n\,dS = \iint_\Sigma (X\cos\widehat{n,x} + Y\cos\widehat{n,y} + Z\cos\widehat{n,z})\,dS$$

იქნება $\vec F$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ნ ა კ ა დ ი Σ ზედაპირზე.

ვუწოდოთ

$$\vec\nabla\cdot\vec F = \left(\vec i\frac{\partial}{\partial x} + \vec j\frac{\partial}{\partial y} + \vec k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\vec F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$



ნახ.10

გამოსახულებას $\vec F$ ვექტორის დ ი ვ ე რ გ ე ნ ც ი ა და იგი $\operatorname{div}\vec F$-ით აღვნიშნოთ, ე.ი.

$$\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \qquad (14)$$

აშკარად, $\operatorname{div}\vec F$ ახასიათებს ვექტორულ ველს, მაგრამ თვითონ არის სკალარი. თუ ვისარგებლებთ (14) ფორმულით, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ფორმულების სამართლიანობაში[2]:

$$1.\ \operatorname{div}(\vec F \pm \vec\Phi) = \operatorname{div}\vec F \pm \operatorname{div}\vec\Phi,$$

$$2.\ \operatorname{div}(A\vec F) = A\operatorname{div}\vec F, \qquad (A \text{ მუდმივი მამრავლია}) \qquad (15)$$

$$3.\ \operatorname{div}(\varphi\cdot\vec F) = \varphi\operatorname{div}\vec F + \operatorname{grad}\varphi\cdot\vec F.$$

---

[1] ე.ი. სითხის მოცულობა.

[2] პირველი ორი ფორმულის სამართლიანობა თავისთავად ცხადია; ვაჩვენოთ აქ მესამე ფორმულის სამართლიანობა. გვაქვს

$$\varphi\vec F(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z), \text{ მაშინ } \operatorname{div}(\varphi\vec F) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi X) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi Y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi Z) =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}X + \frac{\partial\varphi}{\partial y}Y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}Z = \varphi\operatorname{div}\vec F + \operatorname{grad}\varphi\cdot\vec F.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ წერტილის $\vec r$ რადიუს-ვექტორის დივერგენცია, რადგან

$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k,$$

ამიტომ, ცხადია,

$$\operatorname{div}\vec r = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. $\vec r$ იყოს $M(x,y,z)$ წერტილის რადიუს-ვექტორი, ხოლო r მისი სიგრძე. განვსაზღვროთ უწყვეტად წარმოებადი $\varphi(r)$ ფუნქცია იმ პირობით, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\operatorname{div}[\varphi(r)\vec r] = 0.$$

ამ შემთხვევაში (15) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$\operatorname{div}[\varphi(r)\cdot\vec r] = \varphi(r)\operatorname{div}\vec r + \operatorname{grad}\varphi\cdot\vec r = 3\varphi(r) + \operatorname{grad} r\cdot\varphi'(r) = 3\varphi(r) + \varphi'(r)r.$$

ახლა საჭიროა ამოვხსნათ განტოლება

$$3\varphi(r) + r\varphi'(r) = 0.$$

თუ $\varphi(r) \neq 0$, გვექნება $\dfrac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\dfrac{3}{r}$,

საიდანაც

$$\ln|\varphi(r)| = \ln c - 3\ln r \quad (c>0),$$

ანუ

$$|\varphi(r)| = \frac{c}{r^3}$$

და, მაშასადამე,

$$\varphi(r) = \frac{c}{r^3},$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

ავიღოთ ველში რომელიმე V მოცულობა, შემოსაზღვრული გლუვი Σ ზედაპირით; დავწეროთ გ ა უ ს ი ს ფორმულა:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \oiint\limits_\Sigma (P\cos\widehat{n,x} + Q\cos\widehat{n,y} + R\cos\widehat{n,z})\,d\sigma, \qquad (16)$$

სადაც $\vec n$ ზედაპირის გარე ნორმალია.

$\vec F(P,Q,R)$ იყოს ველის ვექტორი, რადგან

$$\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

ხოლო

$$\vec F\cdot\vec n = P\cos\widehat{n,x} + Q\cos\widehat{n,y} + R\cos\widehat{n,z},$$

ამიტომ გ ა უ ს ი ს ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec F\,dv = \oiint\limits_\Sigma \vec F\cdot\vec n\,d\sigma, \qquad (17)$$

აქ, ცხადია, ინტეგრალი $\oiint\limits_\Sigma \vec F\cdot\vec n\,d\sigma$ არის $\vec F$ ვექტორის ნაკადი შეკრულ Σ ზედაპირზე. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულით გვექნება

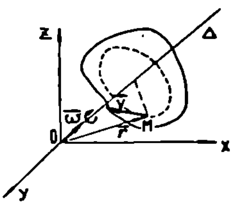
$$(\operatorname{div}\vec F)_M\cdot V = \oiint\limits_\Sigma \vec F\cdot\vec n\,d\sigma,$$

სადაც M არის V მოცულობის გარკვეული წერტილი; თუ გადავალთ ზღვარზე, რომელსაც V მოცულობა იკუმშება M წერტილისაკენ, მაშინ გვექნება

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma}{V}. \qquad (18)$$

ამრიგად, $\vec{F}$ ვექტორის დ ი ვ ე რ გ ე ნ ც ი ა რ ო მ ე ლ ი მ ე წ ე რ ტ ი ლ შ ე ა რ ი ს ა მ წ ე რ ტ ი ლ ი ს ი რ გ ვ ლ ი ვ შ ე კ რ უ ლ ზ ე დ ა პ ი რ ზ ე $\vec{F}$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ნ ა კ ა დ ი ს ს ა თ ა ნ ა დ ო მ ო ც უ ლ ო ბ ა ს თ ა ნ ფ ა რ დ ო ბ ი ს ზ ღ ვ ა რ ი, როცა მოცულობა მიისწრაფვის ნულისაკენ. (18) ფორმულა ამტკიცებს $\operatorname{div} F$ ოპერატორის ინვარიანტობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს მკვიდრი ღერძის გარშემო მუდმივი $\vec{\omega}(p,q,r)$ კუთხური სიჩქარით; გამოვთვალოთ სიჩქარეთა ველის დივერგენცია. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ბრუნვის Δ ღერძი გადის კოორდინატთა სათავეზე, ასეთ შემთხვევაში სხეული $M(x,y,z)$ წერტილის $\vec{v}$ სიჩქარის გეგმილები არის:



$$v_x = qz - ry,$$
$$v_y = rx - pz,$$
$$v_z = py - qx.$$

სიჩქარეთა ველის დივერგენცია იქნება

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(qz - ry) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - pz) + \frac{\partial}{\partial z}(py - qx) = 0.$$

ნახ. 11

5. ვ ე ქ ტ ო რ ი ს რ ო ტ ო რ ი. ავიღოთ რომელიმე $\vec{F}(M) = \vec{F}(X,Y,Z)$ ვექტორის ვექტორული ველი; სიმარტივისათვის მივიღოთ იგი სტაციონარული.

ვთქვათ, X, Y, Z გეგმილები არის $M(x,y,z)$ წერტილის კოორდინატების უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები; ვუწოდოთ ვექტორს

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$\vec{F}$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს რ ო ტ ო რ ი და აღვნიშნოთ $\operatorname{rot} \vec{F}$-ით, ე.ი.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right). \qquad (19)$$

ცხადია, $\operatorname{rot} \vec{F}$ ვექტორი ახასიათებს ვექტორულ ველს და თვითონაც არის ვექტორი.

თუ ვისარგებლებთ (19) ფორმულით, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობების მართებულობაში:

1. $\operatorname{rot}(\vec{F} \pm \vec{\Phi}) = \operatorname{rot}\vec{F} \pm \operatorname{rot}\vec{\Phi}$,

2. $\operatorname{rot}(A\vec{F}) = A\operatorname{rot}\vec{F}$, ($A$ მუდმივი მამრავლია) (20)

3. $\operatorname{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{F}$.

მართლაც, პირველი ორი ტოლობის მართებულობა თავისთავად ცხადია; ვაჩვენოთ მესამე ტოლობის მართებულობა: გვაქვს $\varphi\vec{F}(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z)$, ამიტომ

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{F}) = \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi Z) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi Y)\right] + \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi X) - \frac{\partial}{\partial x}(\varphi Z)\right] +$$

$$+\vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi Y) - \frac{\partial}{\partial y}(\varphi X)\right] = \vec{i}\varphi\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \vec{j}\varphi\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) +$$

$$+\vec{k}\varphi\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) + \vec{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}Z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}Y\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}X - \frac{\partial\varphi}{\partial x}Z\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}Y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}X\right) =$$

$$= \varphi\operatorname{rot}\vec{F} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \varphi\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{F}.$$

შეიძლება შემოწმდეს აგრეთვე შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{\Phi}) = \vec{\Phi}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{\Phi},$$

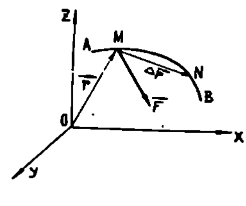
$$\operatorname{grad}(\vec{F}\cdot\vec{\Phi}) = (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Phi} + (\vec{\Phi}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F}\times\operatorname{rot}\vec{\Phi} + \vec{\Phi}\times\operatorname{rot}\vec{F}, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}\times\vec{\Phi}) = (\vec{\Phi}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Phi} + \vec{F}\operatorname{div}\vec{\Phi} - \vec{\Phi}\operatorname{div}\vec{F},$$

რომლებსაც გამოყენება აქვთ ტექნიკაში.

ავიღოთ ვექტორულ ველში გლუვი AB წირი; $\vec{r}$ იყოს წირის წერტილის რადიუს-ვექტორი; ხოლო $\vec{dr}(dx, dy, dz)$ რადიუს-ვექტორის დიფერენციალია.

ცხადია, $\vec{F}\cdot\vec{dr} = Xdx + Ydy + Zdz$ არის ველის $\vec{F}$ ვექტორის მუშაობა (ელემენტარული) $\vec{dr}$ გადაადგილებაზე, ხოლო წირითი ინტეგრალი



ნახ. 12

$$\int_{AB}\vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_{AB} Xdx + Ydy + Zdz$$

არის $\vec{F}$ ვექტორის მუშაობა AB გზაზე.

ვუწოდოთ წირით $\oint_L \vec{F}\cdot\vec{dr}$ ინტეგრალს, შეკრულ გლუვ L წირზე, ვექტორის ც ი რ კ უ ლ ა ც ი ა L წირზე.

გავავლოთ L წირზე რომელიმე გლუვი Σ ზედაპირი; დავწეროთ ს ტ ო ქ ს ი ს ფორმულა:

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\widehat{n,x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\widehat{n,y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\widehat{n,z}\right]d\sigma =$$
$$= \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \quad (22)$$

სადაც $\vec{n}$ ზედაპირის გარე ნორმალია.

$\vec{F}(P, Q, R)$ იყოს ველის ვექტორი; ცხადია, $\vec{F}$ ადგენს ვექტორულ ველს, რადგან

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\widehat{n,x}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\widehat{n,y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\widehat{n,z}=\operatorname{rot}\vec F\cdot\vec n\,,$$

ხოლო $Pdx+Qdy+Rdz=\vec F\cdot d\vec r$, ამიტომ ს ტ ო კ ს ი ს ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot}\vec F\cdot\vec n\,d\sigma=\oint_L \vec F\cdot d\vec r\,. \qquad (23)$$

აქ, ცხადია, $\oint_L \vec F\cdot dr$ არის ვექტორის ცირკულაცია L წირზე, ხოლო $\iint_\Sigma \operatorname{rot}\vec F\cdot\vec n\,d\sigma$ არის ველის $\operatorname{rot}\vec F$ როტორის ნაკადი Σ ზედაპირზე.

ახლა, ავიღოთ ველში რომელიმე V მოცულობა, შემოსაზღვრული შეკრული გლუვი Σ ზედაპირით; ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\iiint_V\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dv=\oiint_\Sigma\left(R\cos\widehat{n,y}-Q\cos\widehat{n,z}\right)ds,\quad \iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dv=$$

$$=\oiint_\Sigma\left(P\cos\widehat{n,z}-R\cos\widehat{n,x}\right)ds,\quad \iiint_V\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dv=\oiint_\Sigma\left(Q\cos\widehat{n,x}-P\cos\widehat{n,y}\right)ds\,.$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობები შესაბამისად $\vec i,\vec j,\vec k$ – ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\iiint_V \operatorname{rot}\vec F\,dv=\oiint_\Sigma \vec n\times\vec F\,ds.$$

ისე, როგორც ზემოთ, საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით, გვექნება

$$\operatorname{rot}\vec F=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_\Sigma \vec n\times\vec F\,ds}{V}\,. \qquad (24)$$

ეს ფორმულა აგრეთვე ამტკიცებს $\operatorname{rot}\vec F$ ოპერატორის ინვარიანტობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს მკვიდრი ღერძის გარშემო მუდმივი $\vec\omega(p,q,r)$ კუთხური სიჩქარით. გამოვთვალოთ სიჩქარეთა ველის $\operatorname{rot}\vec v$ როტორი. რადგან

$$v_x=qz-ry,\quad v_y=rx-pz,\quad v_z=py-qx,$$

ამიტომ

$$\operatorname{rot}\vec v=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ qz-ry & rx-pz & py-qx\end{vmatrix}=\vec i\left[\frac{\partial}{\partial y}(py-qx)-\frac{\partial}{\partial z}(rx-pz)\right]+$$

$$+\vec j\left[\frac{\partial}{\partial z}(qz-ry)-\frac{\partial}{\partial x}(py-qx)\right]+\vec k\left[\frac{\partial}{\partial x}(rx-pz)-\frac{\partial}{\partial y}(qz-ry)\right]=$$

$$=2\left(\vec i p+\vec j q+\vec k r\right)=2\vec\omega.$$

§ 5. მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორები

ზემოთ გავეცანით სკალარული ფუნქციის გრადიენტს და ვექტორული ფუნქციის დივერგენციასა და როტორს; მათ ეწოდება პ ი რ ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს ნ რ ფ ი ვ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ე ბ ი. ახლა, შევისწავლოთ მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორები. განვიხილოთ $\varphi(x,y,z)$

სკალარული და $\vec{F}(X,Y,Z)$ ვექტორული ფუნქციები; ვიგულისხმოთ, რომ განსახილველ არეში როგორც $\varphi(x,y,z)$, ასევე X, Y და Z ფუნქციები x, y, z კოორდინატების მიმართ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია მეორე რიგამდე ჩათვლით.

1. განვიხილოთ ტოლობა

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\cdot\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (1)$$

გავამრავლოთ იგი სკალარულად სიმბოლურ $\vec{\nabla}$ ვექტორზე, ე.ი. გამოვთვალოთ $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$ გამოსახულება; გვაქვს

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\cdot\varphi = \Delta\varphi =$$
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

აქ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ოპერატორს ეწოდება ლ ა პ ლ ა ს ი ს[1] ოპერატორი, ხოლო $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. განტოლებას–ლ ა პ ლ ა ს ი ს განტოლება. ამრიგად,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \Delta\varphi. \qquad (2)$$

2. ახლა გავამრავლოთ (1) ტოლობა ვექტორულად სიმბოლურ $\vec{\nabla}$ ვექტორზე, ე.ი. გამოვთვალოთ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)$ გამოსახულება; გვაქვს

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}\right)+$$
$$+\vec{j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right) = 0.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0. \qquad (3)$$

3. განვიხილოთ $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ ტოლობა; გავამრავლოთ იგი სიმბოლურ $\vec{\nabla}$ ვექტორზე, ე.ი. გამოვთვალოთ $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F})$ გამოსახულება; გვაქვს

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{F}. \qquad (4)$$

4. ახლა განვიხილოთ ტოლობა:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

გავამრავლოთ იგი სკალარულად $\vec{\nabla}$ ვექტორზე, ე.ი. გამოვთვალოთ $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})$ გამოსახულება, გვაქვს

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

---

[1] P. S. Laplace (1749-1827)-გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და ასტრონომი; იყო პარიზის აკადემიის წევრი.

ამრიგად, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0. \qquad (6)$$

5. ვიპოვოთ, (5) ტოლობა გავამრავლოთ ვექტორულად $\vec{\nabla}$ სიმბოლურ ვექტორზე, ე.ი. გამოვთვალოთ $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})$ გამოსახულება; $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})$ ვექტორის გეგმილი კოორდინატთა ღერძებზე არის

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z};$$

მარჯვენა მხარეში დავუმატოთ და გამოვაკლოთ $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ გამოსახულება, გვექნება:

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right),$$

ამრიგად,

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta X,$$

ანალოგიურად გვექნება:

$$\operatorname{rot}_y(\operatorname{rot}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta Y, \quad \operatorname{rot}_z(\operatorname{rot}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta Z.$$

ახლა, თუ მიღებულ ტოლობებს გავამრავლებთ შესაბამისად $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}, \qquad (7)$$

სადაც $\Delta\vec{F}$ – ით აღნიშნულია ვექტორი, რომლის გეგმილებია ΔX, ΔY და ΔZ.

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ხუთი მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი:

$$\begin{aligned}
&1.\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \Delta\varphi,\\
&2.\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}),\\
&3.\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0, \qquad (8)\\
&4.\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0,\\
&5.\ \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}.
\end{aligned}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, $\vec{r}$ არის $M(x,y,z)$ წერტილის რადიუს–ვექტორი, ხოლო r — მისი სიგრძე. გამოვთვალოთ $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\frac{1}{r})$; ერთი მხრივ, $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\frac{1}{r}) = \Delta\frac{1}{r}$; მეორე მხრივ, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$; ხოლო $\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$. ანალოგიურად, $\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$, ამიტომ $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) = 0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. φ და ψ იყოს x, y, z ცვლადების უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები მეორე რიგამდე ჩათვლით; გამოვთვალოთ $\Delta(\varphi\psi)$. გვაქვს:

$$\Delta(\varphi\psi)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi\psi)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varphi\psi)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi\psi)=\psi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)+$$
$$+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\varphi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)=$$
$$=\psi\cdot\Delta\varphi+\varphi\cdot\Delta\psi+2\,\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi.$$

მოვიყვანოთ აქ ზოგიერთი ფორმულა, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ.

1. $\varphi(x,y,z)$ და $\psi(x,y,z)$ იყოს x,y,z კოორდინატების ორი სკალარული ფუნქცია. ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფუნქციები სივრცის არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ცალკე ზედაპირით, უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია მეორე რიგამდე ჩათვლით. შევადგინოთ ვექტორი

$$\vec F=\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi.$$

გვაქვს

$$\mathrm{div}(\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi)=\varphi\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\psi)+\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi=$$
$$=\varphi\cdot\Delta\psi+\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi.$$

გამოვიყენოთ აქ გ ა უ ს ი ს ფორმულა

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\,\vec F\,dv=\oiint\limits_\Sigma \vec F\cdot\vec n\,d\sigma,$$

ჩვენს შემთხვევაში $\vec F\cdot\vec n=\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi\cdot\vec n=\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}$, ამიტომ გვექნება

$$\iiint\limits_V[\varphi\Delta\psi+\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi]\,dv=\oiint\limits_\Sigma\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (9)$$

კერძოდ, როცა $\varphi=1$, მივიღებთ ტოლობას:

$$\iiint\limits_V\Delta\psi\,dv=\oiint\limits_\Sigma\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (10)$$

(9) ფორმულიდან, თუ ψ ფუნქციას შევცვლით φ-თი, მივიღებთ ტოლობას:

$$\iiint\limits_V[\varphi\Delta\varphi+(\mathrm{grad}\,\varphi)^2]\,dv=\oiint\limits_\Sigma\varphi\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma. \qquad (11)$$

თუ (9) ფორმულაში გადავსვამთ φ და ψ ფუნქციებს და მიღებულ ტოლობებს გამოვაკლებთ ერთმანეთს, მივიღებთ გ რ ი ნ ი ს მეორე ფორმულას:

$$\iiint\limits_V(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)\,dv=\oiint\limits_\Sigma\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (12)$$

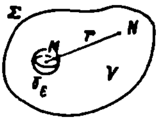
2. განვიხილოთ სივრცის V არე, შემოსაზღვრული ცალკე Σ ზედაპირით; $N(\xi,\eta,\zeta)$ იყოს V არეში ცვლადი წერტილი, ხოლო $M(x,y,z)$–სივრცის რომელიმე წერტილი; მივიღოთ x,y,z სიდიდეები პარამეტრებად; $\psi(\xi,\eta,\zeta)$ იყოს V არეში უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი (მეორე რიგამდე ჩათვლით) ფუნქცია, ხოლო $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$–მანძილი M და N წერტილებს შორის. როდესაც N წერტილი არ ემთხვევა M წერტილს, $\frac{1}{r}$ იქნება უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია როგორც ξ,η,ζ, ასევე x,y,z ცვლადების მიმართ; მხოლოდ იგი M წერტილზე კარგავს აზრს.

რადგან
$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial\xi}=\frac{\xi-x}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial\xi^2}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2}{r^5};$$

ასევე
$$\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial\eta^2}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\eta-y)^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\zeta-z)^2}{r^5},$$

ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას
$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\equiv\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial\zeta^2}=0. \qquad (13)$$

ასევე მართებულია ტოლობა
$$\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial z^2}=0.$$



ნახ. 13

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც M წერტილი მდებარეობს V არეში (ნახ. 13); რადგან $\psi=\frac{1}{r}$ ფუნქცია M წერტილზე განიცდის წყვეტას, ამიტომ ამ გარემოების თავიდან აცილების მიზნით, გამოვყოთ M წერტილი ε-რადიუსიანი სფეროთი, ცენტრით M წერტილში; რომლის ზედაპირი იყოს γ_ε. V_ε-ით აღვნიშნოთ დარჩენილი არე. ცხადია, V_ε-ის საზღვარია Σ და γ_ε ზედაპირები; დავწეროთ გ რ ი ნ ი ს ფორმულა φ და ψ ფუნქციებისათვის, გვექნება:

$$-\iiint\limits_V\frac{\Delta\varphi}{r}dv=\oiint\limits_\Sigma\left(\varphi\frac{d(\frac{1}{r})}{dn}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\right)d\sigma+\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\left(\varphi\frac{d(\frac{1}{r})}{dn}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\right)d\sigma; \qquad (14)$$

აქ γ_ε ზედაპირზე გარე ნორმალს ექნება $\vec{r}$ ვექტორის საწინააღმდეგო მიმართულება, ამიტომ
$$\frac{d(\frac{1}{r})}{dn}=-\frac{d(\frac{1}{r})}{dr}=\frac{1}{r^2}$$

და, მაშასადამე,
$$\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi\frac{d(\frac{1}{r})}{dn}d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi d\sigma;$$

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულით $\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi d\sigma=\varphi(N_1)4\pi\varepsilon^2$, სადაც N_1 სფეროს რომელიმე შიგა წერტილია; ამრიგად,
$$\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi\frac{d(\frac{1}{r})}{dn}d\sigma=4\pi\varphi(N_1).$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც ε მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ
$$\lim\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi\frac{d(\frac{1}{r})}{dn}d\sigma=4\pi\varphi(M); \qquad (15)$$

მეორეს მხრივ,
$$\left|\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}d\sigma\right|<\frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\cdot\max\left|\frac{d\varphi}{dn}\right|=4\pi\varepsilon\max\left|\frac{d\varphi}{dn}\right|.$$

ამიტომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint\!\!\!\oint_{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 0. \tag{16}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (15) და (16) ტოლობებს და გადავალთ ზღვარზე (14) ტოლობაში, როდესაც ε მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ, რადგან $\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon = V$, გვექნება

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\Delta\varphi}{r}\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right) d\sigma \cdot \tag{17}$$

ახლა, (10) ფორმულიდან საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ ლ ა პ ლ ა ს ი ს ოპერატორისათვის შემდეგ წარმოდგენას:

$$\Delta\varphi = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma}{V}. \tag{18}$$

§ 6. ზოგიერთი ვექტორული ველი

სხვადასხვა სახის ვექტორულ ველებიდან ხშირად გვხვდება სამი სახის ველი: პოტენციალური, სოლენოიდალური და ჰარმონიული ველები. განვიხილოთ თითოეული მათგანი.

1. პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ვ ე ლ ი. $\vec F(M)=\vec F(x,y,z)$ ვექტორის ვექტორულ ველს, განსაზღვრულს სივრცის რომელიმე Ω არეში, ეწოდება პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი, თუ იგი რომელიმე სკალარული ფუნქციის გრადიენტის ველია; ე.ი. არსებობს ისეთი სკალარული $\varphi(M)$ ფუნქცია, რომ ველის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec F(M) = \operatorname{grad}\varphi(M)\,. \tag{1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ Ω არეში $\vec F(M)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა. ქვემოთ ნაჩვენები იქნება რომ, თუ Ω მარტივად ბმული[1] არეა, მაშინ $\varphi(x,y,z)$ ფუნქცია იქნება ცალსახა. ჩვენ უმთავრესად ასეთ ველებთან გვექნება საქმე.

$\varphi(M)=\varphi(x,y,z)$ ფუნქციას ეწოდება ვექტორული ველის ან $\vec F$ ვექტორის პოტენციალი[2].

(1) ტოლობიდან გვაქვს

$$F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad F_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,. \tag{1'}$$

---

[1] ე.ი. Ω არეში მდებარე ყოველი შეკრული წირი დეფორმაციით დაიყვანება წერტილზე ისე, რომ არ გამოვიდეს არედან.

[2] ზოგჯერ $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციას უწოდებენ ძალთა ფუნქციას, ხოლო $V=-\varphi(x,y,z)$ ფუნქციას – $\vec F$ ვექტორის პოტენციალს.

ვაჩვენოთ, რომ, როცა Ω მარტივად ბმული არეა, პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ვ ე ლ ი ს ყ ო ვ ე ლ წ ე რ ტ ი ლ ზ ე ვ ე ლ ი ს ვ ე ქ ტ ო რ ი ს რ ო ტ ო რ ი ნ უ ლ ი ს ტოლია, ე.ი.

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0 \qquad (2)$$

და აგრეთვე ველის ვექტორის ცირკულაცია ველში მდებარე ყოველი შეკრული წირის მიმართ ნულის ტოლია, ე.ი.

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = 0. \qquad (3)$$

(1),(2) და (3) ტოლობები ერთმანეთის ტოლფასია, ე.ი. ერთ-ერთი მათგანიდან გამომდინარეობს ორი დანარჩენი.

დავიწყოთ (1) ტოლობიდან; რადგან $\vec{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$, ხოლო $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)$ კი იგივეურად ნულია, ამიტომ

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0;$$

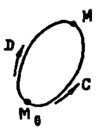
ახლა ავიღოთ Ω არეში ნებისმიერი შეკრული L წირი და გავავლოთ მასზე რომელიმე გლუვი Σ ზედაპირი, რომელიც მთლიანად მდებარეობს Ω არეში[1], მაშინ ს ტ ო ქ ს ი ს ფორმულით:

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\vec{F}\,d\sigma = \iint_\Sigma \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)\,d\sigma = 0.$$

ამრიგად, როდესაც Ω მარტივად ბმული არეა, (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს (2) და (3) ტოლობები.

ახლა დავიწყოთ (3) ტოლობიდან; ვთქვათ, ველის ვექტორის ცირკულაცია ველში მდებარე ყოველი შეკრული წირის მიმართ არის ნული, ე.ი.

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = 0.$$



ნახ.14

ავიღოთ ველში ორი M_0 და M წერტილი (ნახ.14); გავავლოთ მაზე შეკრული M_0CMDM_0 წირი; პირობის ძალით $\oint_{M_0CMDM_0} \vec{F}\,d\vec{r} = 0$, ე.ი.

$$\int_{M_0CM} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{MDM_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0,$$

საიდანაც

$$\int_{M_0CM} \vec{F}\,d\vec{r} = -\int_{MDM_0} \vec{F}\,d\vec{r}$$

და, მაშასადამე,

$$\int_{M_0CM} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{M_0DM} \vec{F}\,d\vec{r}, \qquad (4)$$

ე.ი. $\int_{M_0M} \vec{F}\,d\vec{r}$ ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული გზაზე და, მაშასადამე, დამოკიდებულია მხოლოდ საწყის და ბოლო წერტილებზე.

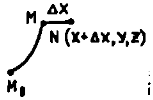
---

[1] როდესაც Ω არ არის მარტივად ბმული არე, მაშინ ასეთი ზედაპირის გავლება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ იყოს ველის რომელიმე ფიქსირებული წერტილი, ხოლო $M(x,y,z)$ — ნებისმიერი ცვლადი წერტილი; ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, $\int\limits_{M_0M}\vec{F}d\vec{r}$ ინტეგრა-ლი იქნება M წერტილის კოორდინატების ფუნქცია; აღვნიშნოთ იგი $\varphi(x,y,z)$-ით ე.ი.

$$\int\limits_{M_0M}\vec{F}d\vec{r}=\varphi(x,y,z). \qquad (5)$$

გამოვთვალოთ $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ წარმოებული; ამისათვის მივცეთ x ცვლადს Δx ნაზრდი, N იყოს წერ-ტილი $(x+\Delta x,y,z)$ კოორდინატებით (ნახ. 15), მაშინ



ნახ. 15

$$\varphi(x+\Delta x,y,z)=\int\limits_{M_0N}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{M_0M}\vec{F}d\vec{r}+\int\limits_{MN}\vec{F}d\vec{r}.$$

რადგან ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული გზაზე, ხოლო MN გზაზე $dy=dz=0$, ამიტომ გვექნება

$$\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)=\int\limits_{M_0N}\vec{F}d\vec{r}-\int\limits_{M_0M}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{MN}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{x}^{x+\Delta x}F_x\,dx,$$

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულით

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x}F_x\,dx=F_x(\xi,y,z)\Delta x \qquad (x<\xi<x+\Delta x)$$

და, მაშასადამე,

$$\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)=F_x(\xi,y,z)\Delta x,$$

საიდანაც

$$\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x}=F_x(\xi,y,z) \qquad (x<\xi<x+\Delta x).$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც Δx მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=F_x(x,y,z).$$

ასევე დამტკიცდება, რომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=F_y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=F_z;$$

მაშასადამე,

$$\vec{F}=\operatorname{grad}\varphi,$$

აქედან კი უშუალოდ მიიღება $\operatorname{rot}\vec{F}=0$ ტოლობაც.

ამრიგად, როდესაც Ω მარტივად ბმული არეა, (3) ტოლობიდან გამომდინარეობს (1) და (2) ტოლობები.

ბოლოს, თუ ველს აქვს (2) ტოლობას, ე.ი. ველის ყოველ წერტილზე ველის ვექტორის როტორი არის ნული, მაშინ ჯერ ს ტ ო კ ს ი ს ფორმულის გამოყენე-ბით მიიღება (3) ტოლობა, შემდეგ კი, ისე როგორც ზემოთ, (1) ტოლობა.

ამრიგად, როდესაც Ω არე მარტივად ბმული არეა (1), (2) და (3) ტოლო-ბების ტოლფასობა დამტკიცებულია.

პოტენციალურ ველში $\vec F$ ვექტორის ელემენტარული მუშაობა

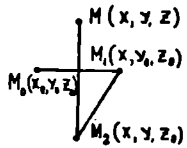
$$\vec F\, d\vec r = \operatorname{grad}\varphi\cdot d\vec r = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi$$

წარმოადგენს $\varphi(x,y,z)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს და, მაშასადამე, $\vec F$ ვექტორის სრული მუშაობა არ არის დამოკიდებული გზაზე და იგი უდრის პოტენციალების სხვაობას, ე.ი.

$$\text{მუშ.}_{AB}\,\vec F = \int_{AB}\vec F\, d\vec r = \int_{AB} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A). \qquad (6)$$

როდესაც Ω მარტივად ბმული არეა, $\varphi(x,y,z)$ პოტენციალის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\varphi(x,y,z) = \int_{M_0M}\vec F\, d\vec r = \int_{M_0M} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$



ნახ.16

რადგან აქ ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული გზაზე, ამიტომ უმჯობესია ჯერ ავიღოთ Ox ღერძის პარალელური გზა $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილიდან $M_1(x,y_0,z_0)$ წერტილამდე (ნახ.16), ამ გზაზე $dy=dz=0$, ამიტომ

$$\int_{M_0M_1}\vec F\cdot d\vec r = \int_{x_0}^{x} F_x(x,y_0,z_0)\,dx.$$

შემდეგ Oy ღერძის პარალელური გზა $M_1(x,y_0,z_0)$ წერტილიდან $M_2(x,y,z_0)$ წერტილამდე, ამ გზაზე $dx=dz=0$, ამიტომ

$$\int_{M_1M_2}\vec F\, d\vec r = \int_{y_0}^{y} F_y(x,y,z_0)\,dy.$$

ბოლოს კი Oz ღერძის პარალელური გზა $M_2(x,y,z_0)$ წერტილიდან $M(x,y,z)$ წერტილამდე, ამ გზაზე $dx=dy=0$, ამიტომ

$$\int_{M_2M}\vec F\, d\vec r = \int_{z_0}^{z} F_z(x,y,z)\,dz.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ პოტენციალის გამოსათვლელ ფორმულას

$$\varphi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_x(x,y_0,z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} F_y(x,y,z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} F(x,y,z)\,dz. \qquad (7)$$

ამ ფორმულით პოტენციალი აიგება ცალსახად ნებისმიერი შესაკრების სიზუსტით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გრავიტაციული ველი[1]. ასეთ ველში ველის ვექტორს აქვს სახე

$$\vec F = -k\,\frac{m_1 m_2}{r^3}\,\vec r,$$

სადაც $\vec r$ წერტილის რადიუს-ვექტორია, m_1, m_2 — მასები, ხოლო k — მუდმივა, დამოკიდებული ერთეულების არჩევაზე.

---

[1] ასე ეწოდება მიზიდულობის ძალთა ველს.

მარტივად შეიძლება შემოწმება, რომ $\vec F$ ვექტორი პოტენციალურია და პოტენციალს აქვს სახე

$$V = -\varphi(r) = \int_{r_0}^{r} k\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = -k\,\frac{m_1 m_2}{r} + C\,;$$

იგივე შეიძლება ითქვას ელექტროსტატიკურ ძალთა ველის შესახებ, სადაც ველის ვექტორს აქვს სახე

$$\vec F = k\,\frac{q_1 q_2}{r^3}\,\vec r,$$

q_1, q_2 — მუხტებია, k — მუდმივა, დამოკიდებული ერთეულების არჩევაზე.

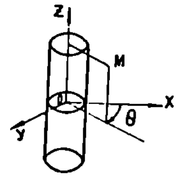
მრავლად ბმული არის შემთხვევა. ვთქვათ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ Ω არე, რომელშიც განსაზღვრულია $\vec F$ ვექტორი, მარტივად ბმულია, ხოლო $\vec F$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა აღნიშნულ არეში. ამ პირობებში, როგორც ვნახეთ, $\varphi(x,y,z)$ პოტენციალი ცალსახა ფუნქციაა და $\vec F$ ვექტორის ცირკულაცია ველში მდებარე ყოველი შეკრული წირის მიმართ ნულია.

როდესაც Ω არე არ არის მარტივად ბმული, მაშინ, საზოგადოდ, φ ფუნქცია არ იქნება ცალსახა და, მაშასადამე, $\vec F$ ვექტორის ცირკულაცია არეში მდებარე ყოველი შეკრული წირის მიმართ არ იქნება ნული. მაგალითად, თუ $\vec F$ შემდეგი სახის ვექტორია:

$$\vec F\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right),$$

ამ შემთხვევაში $\mathrm{rot}\,\vec F = 0$, ხოლო $\varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$;

ეს კი θ კუთხეა, რომელსაც $M(x,y,z)$ წერტილზე და Oz ღერძზე გამავალი სიბრტყე ადგენს XOZ სიბრტყესთან (ნახ.17); ამიტომ $\oint \vec F\, d\vec r$ ინტეგრალი, ყოველი შეკრული წირის მიმართ, რომელიც Oz ღერძს ერთხელ უვლის დადებითი მიმართულებით, იქნება 2π-ის ტოლი და არა ნული; Oz ღერძი φ ფუნქციის განსაკუთრებული წირია; რომ φ ფუნქცია არეში იყოს ცალსახა, საჭიროა არედან გამოვყოთ Oz ღერძი უსასრულოდ მცირე რადიუსიანი ცილინდრით; ასეთი გამოყოფის შემდეგ დარჩენილი არე არ იქნება მარტივად ბმული; ეს არე რომ გავხადოთ მარტივად ბმული, ამისათვის საკმარისია Oz ღერძზე გავავლოთ რომელიმე ნახევარი სიბრტყე და მისი ორივე მხარე ჩავთვალოთ სივრცის საზღვრებად; ასეთ შემთხვევაში გამოირიცხება ყველა შეკრული წირი, რომელიც Oz ღერძს გარს უვლის; სხვა შეკრული წირების შეკუმშვა, უწყვეტი დეფორმაციით, წერტილამდე ისე, რომ არ გამოვიდეთ არედან, შესაძლებელია, ამიტომ ასეთი "ჭრილით" არე ხდება მარტივად ბმული.



ნახ.17

ბოლოს შევნიშნოთ რომ, როცა Ω არე მარტივად ბმულია, მაშინ $\vec F$ ვექტორის ვექტორული წირები არ შეიძლება იყოს შეკრული, რადგან ასეთი წირების მიმართ $\vec F$ ვექტორის ცირკულაცია არ იქნებოდა ნული; მართლაც, ზემოთ მოყვანილ მაგალითში, ვექტორული წირების განტოლება არის $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$, რომლის ამონახსნებია:

$$x^2+y^2 = C_1,\quad z = C_2,$$

ე.ი. xoy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე წრეწირთა ოჯახი, რაც იყო მოსალოდნელი, რადგან Ω არე მრავლადბმულია.

2. სოლენოიდალური ველი. ვექტორულ ველს ეწოდება სოლენოიდალური, თუ ველის ყოველ წერტილში ველის ვექტორის დივერგენცია ნულის ტოლია, ე.ი.

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

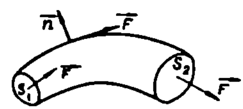
თუ ვისარგებლებთ გაუსის ფორმულით, ადვილად შევნიშნავთ, რომ სოლენოიდალურ ველში ველის ვექტორის ნაკადი ყოველ შეკრულ ზედაპირზე არის ნული, ე.ი.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 . \qquad (8)$$

ახლა, თუ სოლენოიდურ ველში ავიღებთ რაიმე ვექტორულ მილს და გავატარებთ მის ორ კვეთს, მაშინ, რადგან ვექტორული მილის გვერდით ზედაპირზე $\vec{F}$ ვექტორის ნაკადი ნულის ტოლია, ამიტომ (8) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma , \qquad (9)$$

ე.ი. ვექტორის ნაკადი ასეთ კვეთებზე ერთმანეთის ტოლია (ნახ.18).



ნახ.18

(9) ტოლობიდან, როგორც შედეგი, გამომდინარეობს სოლენოიდალური ველის შემდეგი თვისება: სოლენოიდალურ ველში ვექტორული მილები და, მაშასადამე, ვექტორული წირები ველში არსად არც იწყება და არც თავდება, ე.ი. ვექტორული წირები ან შეკრულია, ან ბოლოები აქვს არის საზღვარზე, ანდა-უსასრულო შორს ,როცა არე უსასრულოა.

ბოლოს, ვაჩვენოთ, რომ ყოველი სოლენოიდალური ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც სხვა ვექტორის როტორი, ე.ი. თუ $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, მაშინ არსებობს ისეთი $\vec{\Phi}$ ვექტორი (ვექტორული პოტენციალი), რომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{\Phi} .$$

$\vec{\Phi}$ ვექტორს, ზოგჯერ, სოლენოიდალური ველის ვექტორულ პოტენციალს უწოდებენ.

მართლაც, F_x, F_y, F_z იყოს $\vec{F}$ ვექტორის კოორდინატები, ხოლო Φ_x, Φ_y, Φ_z საძიებელი $\vec{\Phi}$ ვექტორის კოორდინატები; ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სისტემა ისეა არჩეული, რომ $\vec{\Phi}$ ვექტორი xoy სიბრტყის პარალელურია, ე.ი. $\Phi_z = 0$, მაშინ გვექნება:

$$-\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} = F_x , \quad \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} = F_y , \quad \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} = F_z ,$$

საიდანაც

$$\Phi_x = \int_{z_0}^{z} F_y \, dz + g(x,y) , \quad \Phi_y = -\int_{z_0}^{z} F_x \, dz + f(x,y) ,$$

აქ $g(x,y)$ და $f(x,y)$ ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციებია. მაგრამ $\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = F_z$ პირობა იძლევა

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_x}{\partial x} dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_y}{\partial y} dz - \frac{\partial g}{\partial y} = F_z ,$$

აქედან, თუ ვისარგებლებთ პირობით $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$, გვექნება:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = F_z(x,y,z_0) .$$

რადგან $g(x,y)$ და $f(x,y)$ ნებისმიერი ფუნქციებია, შეგვიძლია მივიღოთ

$$g(x,y) = 0, \quad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_z(x,y,z_0)\,dx,$$

მაშინ საბოლოოდ გვექნება:

$$\varphi_x = \int_{z_0}^{z} F_y(x,y,z)\,dz, \quad \varphi_y = -\int_{z_0}^{z} F_x(x,y,z)\,dz + \int_{x_0}^{x} F_z(x,y,z_0)\,dx, \quad \varphi_z = 0,$$

ამრიგად,

$$\vec{\varphi} = \vec{i}\int_{z_0}^{z} F_y(x,y,z)\,dz + \vec{j}\left[\int_{x_0}^{x} F_z(x,y,z_0)\,dx - \int_{z_0}^{z} F_x(x,y,z)\,dz\right]. \quad (10)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეს შეიძლება დაემატოს ნებისმიერი გრადიენტი[1].

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ც ე ნ ტ რ ა ლ უ რ ი ვ ე ლ ი. ველს ეწოდება ც ე ნ ტ რ ა ლ უ რ ი, თუ ველის $\vec{F}$ ვექტორის ფუძე მუდამ 0 წერტილზე გადის; სიდიდით კი არის $|\vec{OM}| = r$ რადიუს-ვექტორის სიდიდის უწყვეტი ფუნქცია, ე.ი.

$$|\vec{F}| = f(r).$$

შევთანხმდეთ, $f(r)$ ფუნქცია ჩავთვალოთ დადებითად, როცა $\vec{F}$-სა და $\vec{r}$ ვექტორებს აქვს ერთნაირი გეზი, უარყოფითად — წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამრიგად, გვაქვს

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

ცხადია, რომ ასეთი ველი პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი ა; მართლაც, $\vec{F}$ ვექტორის გეგმილები არის

$$X = f(r)\cos(\hat{r,x}) = f(r)\frac{x}{r}, \quad Y = f(r)\frac{y}{r}, \quad Z = f(r)\frac{z}{r};$$

ამიტომ

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = f(r)\,\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r},$$

მაგრამ, რადგან $x^2+y^2+z^2=r^2$, ამიტომ $x\,dx+y\,dy+z\,dz = r\,dr$ და, მაშასადამე,

---

[1] ან უფრო მეტი, ნებისმიერი სკალარული ფუნქციის გრადიენტი.

$$\vec F\cdot\vec{dr}=f(r)dr=d\left[\int f(r)dr+C\right],$$

ე.ი. $\vec F$ ვექტორის ელემენტარული მუშაობა სრულ დიფერენციალს წარმოადგენს. ახლა შევისწავლოთ საკითხი: რა პირობებში იქნება ცენტრალური ველი სოლენოიდალური? ამისათვის გამოვთვალოთ $\operatorname{div}\vec F$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{f(r)}{r}=\varphi(r)$,

მაშინ, რადგან

$$\operatorname{div}\vec F=\frac{\partial}{\partial x}\left[x\varphi(r)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y\varphi(r)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[z\varphi(r)\right]=$$

$$=\varphi'(r)\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r}+3\varphi(r)=r\varphi'(r)+3\varphi(r),$$

ამიტომ ველი რომ იყოს სოლენოიდალური, საჭიროა $r\varphi'(r)+3\varphi(r)=0$. ამ განტოლების ამონახსნი არის $\varphi(r)=\frac{C}{r^3}$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა, მაშასადამე, $f(r)=\frac{C}{r^2}$. ამრიგად, ცენტრალური ველი რომ სოლენოიდალური იყოს, საჭიროა ველის ვექტორის სიდიდე იყოს r რადიუს-ვექტორის კვადრატის უკუპროპორციული.

3. ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი   ვ ე ლ ი. $\vec F(M)$ ვექტორის ვექტორულ ველს, განსაზღვრულს სივრცის რომელიმე Ω არეზე[1], ეწოდება ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი, თუ ველის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\operatorname{rot}\vec F=0,\quad \operatorname{div}\vec F=0. \qquad (11)$$

ამ შემთხვევაში (11) სისტემის პირველი ტოლობიდან გვექნება

$$\vec F=\operatorname{grad}\varphi,$$

ე.ი. ჰარმონიული ველი პოტენციალურია; (11) სისტემის მეორე ტოლობიდან, რადგან

$$\operatorname{div}\vec F=\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\Delta\varphi,$$

გვექნება

$$\Delta\varphi=0,$$

ე.ი. $\varphi(x,y,z)$ პოტენციალი Ω არეში აკმაყოფილებს ლ ა პ ლ ა ს ი ს განტოლებას.

ფუნქციას, რომელიც არეში უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი მეორე რიგამდე ჩათვლით, ეწოდება ჰარმონიული, თუ იგი აღნიშნულ არეში აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას. ამრიგად, ჰარმონიული ველის $\varphi(x,y,z)$ პოტენციალი ჰარმონიულ ფუნქციას წარმოადგენს;

როგორც ვხედავთ, ჰარმონიული ველი, განსაზღვრული მარტივად ბმულ Ω არეზე ხასიათდება თავისი პოტენციალით, რომელიც ჰარმონიული ფუნქციაა, ამიტომ ასეთი ველის თვისებები მჭიდროდაა დაკავშირებული ჰარმონიულ ფუნქციათა თვისებებთან.

მოვიყვანოთ აქ ჰარმონიულ ფუნქციათა ზოგიერთი თვისება.

1. თუ $\varphi(x,y,z)$ ფუნქცია ჰარმონიულია V არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული Σ ზედაპირით, მაშინ ინტეგრალი, აღებული Σ ზედაპირზე, მისი ნორმალური წარმოებულისაგან უდრის ნულს, ე.ი.

[1] ვიგულისხმოთ, რომ Ω მარტივად ბმული არეა, ხოლო $\vec F(M)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია.

$$\oiint_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 0, \qquad (12)$$

მართლაც, რადგან $\iiint_V \Delta\varphi\, dv = \oiint_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dn} d\sigma$, ხოლო ჩვენს შემთხვევაში V არეში $\Delta\varphi = 0$,

ამიტომ გვექნება
$$\oiint_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 0.$$

2. თუ $\varphi(x,y,z)$ ჰარმონიული ფუნქციაა V არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია Σ ზედაპირით, მაშინ მისი მნიშვნელობა არეს რომელიმე M წერტილში განისაზღვრება ფორმულით:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right) d\sigma . \qquad (13)$$

მართლაც, რადგან
$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\Delta\varphi}{r}\, dv + \frac{1}{4\pi} \oiint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right) d\sigma,$$
ხოლო ჩვენს შემთხვევაში V არეში $\Delta\varphi = 0$, ამიტომ ადგილი ექნება (13) ფორმულას.

(13) ფორმულით, სავსებით, განისაზღვრება ჰარმონიული φ ფუნქციის მნიშვნელობა არეს შიგნით, როცა ცნობილია არეს საზღვარზე φ ფუნქციისა და მისი ნორმალური $\frac{d\varphi}{dn}$ წარმოებულის მნიშვნელობები.

ხშირად Σ საზღვარზე მოცემულია ან მხოლოდ φ ფუნქციის მნიშვნელობა (დ ი რ ი ხ ლ ე ს ამოცანა), ანდა მხოლოდ მისი ნორმალური $\frac{d\varphi}{dn}$ წარმოებულის მნიშვნელობა (ნ ე ი მ ა ნ ი ს ამოცანა).

3. ჰარმონიული ფუნქციის მნიშვნელობა არეში მდებარე ნებისმიერი სფეროს ცენტრში უდრის სფეროს ზედაპირზე მისი მნიშვნელობების საშუალოს, ე.ი. თუ $\varphi(x,y,z)$ ჰარმონიული ფუნქციაა V არეში და γ_ρ ნებისმიერი სფეროა (ρ რადიუსით, ცენტრით M წერტილში), რომელიც მთლიანად მდებარეობს V-ს შიგნით, მაშინ

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \oiint_{\gamma_\rho} \varphi\, d\sigma, \qquad (14)$$

მართლაც, (13) ფორმულით გვექნება
$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\gamma_\rho} \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right) d\sigma ;$$
მაგრამ, ერთის მხრივ,
$$\oiint_{\gamma_\rho} \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = \frac{1}{\rho} \oiint_{\gamma_\rho} \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 0,$$
მეორე მხრივ, γ_ρ-ს ზედაპირზე
$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{\rho^2},$$
ამიტომ გვექნება
$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \oiint_{\gamma_\rho} \varphi\, d\sigma.$$

4. ჰარმონიული ფუნქციის (რომელიც განსხვავდება მუდმივისაგან) არ შეიძლება ჰქონდეს არეს შიგნით უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. მართლაც,

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ჰარმონიულ φ ფუნქციას V არეს რომელიმე შიგა M_0 წერტილზე აქვს მაქსიმუმი; ასეთ შემთხვევაში შეიძლება ავაგოთ ისეთი მცირე γ_ρ სფერო (ρ რადიუსით, ცენტრით M_0 წერტილში), რომელიც მთლიანად მდებარეობს V არეში, მაშინ (14) ფორმულით გვექნება

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{\gamma_\rho} \varphi\, d\sigma .$$

ცხადია, აქ φ ფუნქციის მნიშვნელობები γ_ρ ზედაპირზე $\varphi(M_0)$-ზე ნაკლებია, ამიტომ

$$\frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{\gamma_\rho}\varphi\, d\sigma < \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{\gamma_\rho}\varphi(M_0)\, d\sigma = \varphi(M_0).$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა $\varphi(M_0)<\varphi(M_0)$, მაშასადამე, ჰარმონიულ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს მაქსიმუმი არეს შიგა წერტილებზე; ასევე დამტკიცდება, რომ მას არა აქვს მინიმუმი არეს შიგა წერტილებზე.

ამრიგად, ჰარმონიული ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმუმსა და მინიმუმს მხოლოდ არეს საზღვარზე.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს ასეთი შედეგი: თუ ჰარმონიული ფუნქციის მნიშვნელობები არეს საზღვარზე ნულია, მაშინ იგი იგივურად ნული არის არეში.

პოტენციალთა თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები. როგორც აღვნიშნეთ, ხშირად იმ არის საზღვარზე, რომელშიაც ეძებენ ჰარმონიულ ფუნქციას, მოცემულია ან თვით საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა – დ ი რ ი ხ ლ ე ს[1] ამოცანა, ანდა საძიებელი ფუნქციის ნორმალური წარმოებულის მნიშვნელობა – ნ ე ი მ ა ნ ი ს[2] ამოცანა. შევჩერდეთ მოკლედ ამ ამოცანებზე.

ა. დ ი რ ი ხ ლ ე ს ამოცანა. ვთქვათ, V არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული გლუვი Σ ზედაპირით, საძიებელია უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი (მეორე რიგამდე ჩათვლით) $\varphi(x,y,z)$ ფუნქცია, რომელიც V არეში აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

და Σ ზედაპირზე სასაზღვრო პირობას

$$\varphi_\Sigma = f(N),$$

სადაც N საზღვრის წერტილია, ხოლო $f(N)$ მოცემული ფუნქცია. ჩვენ აქ არ შევჩერდებით ამ ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხზე, ვიგულისხმებთ, რომ იგი არსებობს და დავამტკიცებთ ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ი ს ე რ თ ა დ ე რ თ ო ბ ა ს.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, დასმულ ამოცანას აქვს ორი φ_1 და φ_2 ამონახსნი; განვიხილოთ მათი სხვაობა $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

[1] L. Dirichlet (1805–1852)–გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი.

[2] F. Neumann (1798–1895)–გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი და ფიზიკოსი.

ცხადია, V არეში φ ფუნქცია დააკმაყოფილებს იგივე განტოლებას, ე.ი.

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad V\text{-ში},$$

ხოლო V არეს საზღვარზე, პირობას:

$$\varphi(N) = 0 \qquad \Sigma\text{-ზე},$$

აქედან ჰარმონიული ფუნქციის ერთ-ერთი თვისების ძალით,

$$\varphi = 0 \qquad V \text{ არეში},$$

ე.ი. $\varphi_1 = \varphi_2$, რაც ამტკიცებს დ ი რ ი ხ ლ ე ს ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას.

ბ. ნ ე ი მ ა ნ ი ს ამოცანა. ვთქვათ, V არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული გლუვი Σ ზედაპირით, საძიებელია უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი (მეორე რიგამდე ჩათვლით) $\varphi(x,y,z)$ ფუნქცია, რომელიც V არეში აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

და Σ ზედაპირზე სასაზღვრო პირობას

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_\Sigma = f(N),$$

სადაც N საზღვრის წერტილია, ხოლო $f(N)$ — მოცემული ფუნქცია.

ცხადია, თუ φ არის ნ ე ი მ ა ნ ი ს ამოცანის ამონახსნი, მაშინ $\varphi + C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა, აგრეთვე იქნება ამონახსნი; აქაც ვიგულისხმოთ, რომ დასმულ ამოცანას აქვს ამონახსნი და ვაჩვენოთ, რომ ნ ე ი მ ა ნ ი ს ამოცანის ყველა ამონახსნი ერთმანეთისაგან მუდმივი შესაკრებით განსხვავდება.

მართლაც, ვთქვათ, φ_1 და φ_2 ნეიმანის ამოცანის ორი ამონახსნია; განვიხილოთ მათი სხვაობა

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 ;$$

ცხადია, V არეში φ ფუნქცია აკმაყოფილებს იგივე განტოლებას, ე.ი.

$$\Delta\varphi = 0 \qquad V\text{-ში},$$

ხოლო V არეს საზღვარზე, პირობას

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_N = 0 .$$

ახლა ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\iiint_V \left[\varphi\Delta\varphi + (\mathrm{grad}\,\varphi)^2\right] dv = \oiint_\Sigma \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma .$$

ჩვენს შემთხვევაში, რადგან V არეში $\Delta\varphi = 0$, ხოლო Σ საზღვარზე $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, ამიტომ დაგვრჩება:

$$\iiint_V (\mathrm{grad}\,\varphi)^2 dv = 0,$$

საიდანაც $\mathrm{grad}\,\varphi = 0$, ე.ი. V არეში $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$

და, მაშასადამე, $\varphi = \mathrm{Const}$, ე.ი. $\varphi_1 - \varphi_2 = C$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შევნიშნოთ, რომ ნ ე ი მ ა ნ ი ს ამოცანის ამონახსნი არსებობს არა ყოველი $f(N)$ ფუნქციისათვის; მართლაც, რადგან

$$\iiint_V \Delta\varphi \, dv = \oiint_\Sigma \frac{d\varphi}{dn} d\sigma,$$

ამიტომ საჭიროა ადგილი ჰქონდეს პირობას.

$$\oiint_\Sigma f(N) d\sigma = 0 \quad . \tag{15}$$

§ 7. ძირითადი ოპერატორების გამოსახულება მრუდწირულ კოორდინატებში

როგორც ცნობილია, წერტილის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება მისი $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორით. დეკარტის მართკუთხა სისტემის შემთხვევაში გვაქვს

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

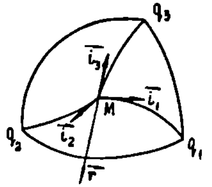
მაგრამ წერტილის მდებარეობა სივრცეში შეიძლება დახასიათდეს რაიმე სამი სხვა დამოუკიდებელი q_1, q_2, q_3 კოორდინატით. ვუწოდოთ ასეთ სიდიდეებს წერტილის მ რ უ დ წ ი რ უ ლ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი სივრცეში.

რადგან q_1, q_2, q_3 კოორდინატების ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $M(x,y,z)$ წერტილის გარკვეული მდებარეობა სივრცეში, ამიტომ x, y, z კოორდინატები, სივრცის გარკვეულ არეში, იქნება q_1, q_2, q_3 პარამეტრების ცალსახა ფუნქციები.

ამრიგად,

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \tag{1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $x(q_1,q_2,q_3)$, $y(q_1,q_2,q_3)$, $z(q_1,q_2,q_3)$ ფუნქციები რაიმე არეში q_1, q_2, q_3 კოორდინატების უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია და აღნიშნულ არეში ფუნქციონალური დეტერმინანტი



$$J = \frac{D[x,y,z]}{D[q_1,q_2,q_3]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ნახ.19

რაც იმას ნიშნავს რომ (1) სისტემიდან q_1, q_2, q_3 პარამეტრები განისაზღვრება როგორც x, y, z კოორდინატების ცალსახა ფუნქციები:

$$q_1 = q_1(x,y,z), \quad q_2 = q_2(x,y,z), \quad q_3 = q_3(x,y,z). \tag{2}$$

ამრიგად, (1) და (2) ტოლობები ამყარებენ ურთიერთ ცალსახა დამოკიდებულებებს სივრცის რომელიმე არის წერტილის დეკარტის კოორდინატებსა და მრუდწირულ კოორდინატებს შორის.

ცხადია, $q_1(x,y,z)=C$ განსაზღვრავს გარკვეულ ზედაპირს (დ ო ნ ი ს ზედაპირი), რომელსაც ს ა კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ო ზ ე დ ა პ ი რ ი ეწოდება. ამრიგად, სივრცის ყოველ წერტილზე გადის სამი საკოორდინატო ზედაპირი, რომელთა გადაკვეთა მოგვცემს სამ ს ა კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ო წ ი რ ს. საკოორდინატო წირები მიიღება, თუ (1) განტოლებებში დაფიქსირებულია ორი პარამეტრი და იცვლება მხოლოდ მესამე პარამეტრი. ზოგიერთ შემთხვევაში საკოორდინატო წირები შეიძლება აღმოჩნდეს ურთიერთმართობული[1]; ასეთ შემთხვევაში სათანადო მრუდწირულ კოორდინატებს ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ეწოდება. ჩვენ შემდეგში უმთავრესად ასეთ მრუდწირულ კოორდინატებთან გვექნება საქმე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ცილინდრული კოორდინატები. გვაქვს

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

მივიღოთ $q_1=r,\ q_2=\varphi,\ q_3=z$. ამ შემთხვევაში საკოორდინატო ზედაპირებია: ცილინდრული ზედაპირები, რომელთა ღერძი Oz ღერძია ($r=\mathrm{const}$), ნახევარსიბრტყეები, რომლებსაც Oz ღერძი საზღვრავს ($\varphi=\mathrm{const}$) და Oz ღერძის მართობი სიბრტყეები ($z=\mathrm{const}$); საკოორდინატო წირები კი იქნება: Oz ღერძის მართობი სხივები; წრეწირები, რომელთა ცენტრი Oz ღერძზე მდებარეობს და რომელთა სიბრტყე Oz ღერძის მართობია და Oz ღერძის პარალელური წრფეები. ცილინდრული კოორდინატები, ცხადია, წერტილის ორთოგონალური მრუდწირული კოორდინატებია სივრცეში.

1. ვექტორის ფიზიკური კოორდინატები. როგორც ვნახეთ, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ ყოველი $\vec{P}$ ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება ბაზისის $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ვექტორების მიხედვით, ე.ი.

$$\vec{P}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}.$$

ბაზისის ეს $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ვექტორები ხასიათდება იმით რომ, მათი სიდიდე და მიმართულება ერთი და იგივეა სივრცის ყოველ წერტილზე[2]. მრუდწირულ q_1,q_2,q_3 კოორდინატებში უმჯობესია ვისარგებლოთ სხვადასხვა ლ ო კ ა ლ უ რ ი ბ ა ზ ი ს ი თ, რომლის ვექტორები სივრცის ყოველ წერტილზე ან ეხებიან საკოორდინატო წირებს, ანდა საკოორდინატო ზედაპირების მართობებია. ცხადია, ასეთი ბაზისის ვექტორები წარმოადგენს წერტილის კოორდინატების ფუნქციებს.

ყოველ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში შეიძლება სამი სახის ლოკალური ბაზისის არჩევა:

ა. ვექტორის ფიზიკური კოორდინატები. სივრცის $\vec{r}(x,y,z)$ წერტილზე ლოკალური ბაზისის ვექტორებად მივიღოთ საკოორდინატო წირების მხებების $\vec{i}_1,\vec{i}_2,\vec{i}_3$ მგეზავები, ე.ი. შემდეგი ვექტორები:

$$\vec{i}_k=\frac{1}{H_k}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\qquad (k=1,2,3),\qquad (3)$$

---

[1] ე.ი. მათი მხებები აღმოჩნდეს ურთიერთმართობული.

[2] ზოგჯერ ასეთ ბაზისს ძირითად ბაზისს უწოდებენ.

სადაც $H_k = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial q_k}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2} \quad (k = 1,2,3).$

H_1, H_2, H_3 სიდიდეებს ლამეს კოეფიციენტები ეწოდება.

ახლა, სივრცის ყოველ $\vec r(\bar x, \bar y, \bar z)$ წერტილზე ნებისმიერი $\vec P$ ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება ლოკალური ბაზისის $\vec i_1, \vec i_2, \vec i_3$ ვექტორების საშუალებით, ე.ი.

$$\vec P = P_1^* \vec i_1 + P_2^* \vec i_2 + P_3^* \vec i_3 .$$

P_1^*, P_2^*, P_3^* სიდიდეებს ვუწოდოთ $\vec P$ ვექტორის ფიზიკური კომპონენტები.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (3) ფორმულებს, მაშინ დამოკიდებულებები $\vec P$ ვექტორის დეკარტის X, Y, Z კომპონენტებსა და ფიზიკური P_1^*, P_2^*, P_3^* კომპონენტებს შორის გამოისახება ფორმულებით:

$$X = \frac{P_1^*}{H_1}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{P_2^*}{H_2}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{P_3^*}{H_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}, \quad Y = \frac{P_1^*}{H_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{P_2^*}{H_2}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{P_3^*}{H_3}\frac{\partial y}{\partial q_3},$$

$$Z = \frac{P_1^*}{H_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} + \frac{P_2^*}{H_2}\frac{\partial z}{\partial q_2} + \frac{P_3^*}{H_3}\frac{\partial z}{\partial q_3} . \tag{4}$$

ბ. ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები. სივრცის ყოველ $r(x,y,z)$ წერტილზე ლოკალური ბაზისის ვექტორებად მივიღოთ $\vec e_k = \frac{\partial \vec r}{\partial q_k} = \vec r_k \ (k = 1, 2, 3)$ ვექტორები; ასეთ შემთხვევაში $\vec P$ ვექტორი შემდეგნაირად წარმოიდგინება:

$$\vec P = P^1 \vec e_1 + P^2 \vec e_2 + P^3 \vec e_3 .$$

P^1, P^2, P^3 სიდიდეებს[1] ვუწოდოთ $\vec P$ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები.

მხედველობაში თუ მივიღებთ $\vec e_k = \frac{\partial \vec r}{\partial q_k} \ (k = 1,2,3)$ ფორმულებს, ცხადია, დამოკიდებულებები $\vec P$ ვექტორის დეკარტის X, Y, Z კომპონენტებსა და კონტრავარიანტულ კომპონენტებს შორის გამოისახება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} X &= P^1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + P^2 \frac{\partial x}{\partial q_2} + P^3 \frac{\partial x}{\partial q_3}, \\ Y &= P^1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + P^2 \frac{\partial y}{\partial q_2} + P^3 \frac{\partial y}{\partial q_3}, \\ Z &= P^1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + P^2 \frac{\partial z}{\partial q_2} + P^3 \frac{\partial z}{\partial q_3}. \end{aligned} \tag{5}$$

გ. ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტები. ბოლოს, სივრცის ყოველ $\vec r(x,y,z)$ წერტილში ლოკალური ბაზისის ვექტორებად მივიღოთ საკოორდინატო ზედაპირების მართობი ვექტორები:

$$\vec e^k = \operatorname{grad} q_k \quad (k = 1, 2, 3) \cdot \tag{6}$$

ასეთ შემთხვევაში $\vec P$ ვექტორი შემდეგნაირად წარმოიდგინება:

$$\vec P = P_1 \vec e^1 + P_2 \vec e^2 + P_3 \vec e^3 .$$

---

[1] აქ $P^k (k=1,2,3)$ ვექტორის კომპონენტებია და არა P-ს ხარისხები.

P_1, P_2, P_3 სიდიდეებს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები.

ამ მხედველობაში მივიღებთ (6) ტოლობებს, მაშინ დამოკიდებულებები $\vec{P}$ ვექტორის დეკარტის X, Y, Z კოორდინატებსა და კოვარიანტულ კოორდინატებს შორის გამოისახება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} X &= P_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial x}, \\ Y &= P_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial y}, \\ Z &= P_1 \frac{\partial q_1}{\partial z} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial z} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial z}. \end{aligned} \tag{7}$$

ადგილი აქვს აგრეთვე ტოლობებს :

$$\vec{e}^{\,1} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)\vec{e}_3}, \ldots, \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^{\,2} \times \vec{e}^{\,3}}{(\vec{e}^{\,1} \times \vec{e}^{\,2})\cdot\vec{e}^{\,3}}, \ldots,$$

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)\cdot\vec{e}_3 = \left[(\vec{e}^{\,1} \times \vec{e}^{\,2})\vec{e}^{\,3}\right]^{-1} = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot (\vec{i}_1 \times \vec{i}_2)\cdot\vec{i}_3 .$$

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}^{\,s} = \begin{cases} 1, & \text{როცა } k = s, \\ 0, & \text{როცა } k \neq s \end{cases} \quad (k, s = 1, 2, 3).$$

კერძოდ, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = q_3$$

და, მაშასადამე,

$$\vec{e}_1 = \vec{e}^{\,1} = \vec{i}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}^{\,2} = \vec{i}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}^{\,3} = \vec{i}_3 = \vec{k},$$

$$X = P_1^* = P^1 = P_1, \quad Y = P_2^* = P^2 = P_2, \quad Z = P_3^* = P^3 = P_3,$$

ე.ი. დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ვექტორის ფიზიკური, კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კოორდინატები ერთმანეთის ტოლია.

გამოყენებით დარგებში საინტერესოა შემთხვევა, როცა ლოკალური ბაზისის $\vec{i}_1, \vec{i}_2$ და $\vec{i}_3$ ვექტორები ორთოგონალურია; ასეთ შემთხვევაში

$$\vec{e}_k = H_k \vec{i}_k, \quad \vec{e}^{\,k} = h_k \vec{i}_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

2. ზოგიერთი გეომეტრიული ელემენტი. ვიგულისხმოთ მრუდწირული კოორდინატები ორთოგონალურია, ე.ი. სივრცის ყოველ $\vec{r}(x, y, z)$ წერტილში $\vec{i}_1, \vec{i}_2$ და $\vec{i}_3$ ვექტორები ადგენენ ორთონორმირებულ (ლოკალურ) ბაზისს; ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$H_k h_k = 1 \quad (k = 1, 2, 3). \tag{8}$$

მართლაც, ტოლობა

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = \vec{r}_1 dq_1 + \vec{r}_2 dq_2 + \vec{r}_3 dq_3$$

გავამრავლოთ სკალარულად $\operatorname{grad} q_1$ – ზე, გვექნება

$$dq_1 = \operatorname{grad} q_1 \cdot d\vec{r} = (\vec{r}_1 \cdot \operatorname{grad} q_1) dq_1 + (\vec{r}_2 \cdot \operatorname{grad} q_1) dq_2 + (\vec{r}_3 \cdot \operatorname{grad} q_1) dq_3 .$$

რადგან dq_1, dq_2 და dq_3 დამოუკიდებელი პარამეტრებია, ამიტომ გვექნება

$$\vec{r}_1 \cdot \operatorname{grad} q_1 = 1, \quad \vec{r}_2 \cdot \operatorname{grad} q_1 = 0, \quad \vec{r}_3 \cdot \operatorname{grad} q_1 = 0.$$

ანალოგიურად მივიღებთ ტოლობებს:

$$\vec{r}_2 \cdot \operatorname{grad} q_2 = 1, \quad \vec{r}_3 \operatorname{grad} q_3 = 1,$$

ე.ი.

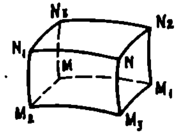
$$\vec{r}_k \cdot \operatorname{grad} q_k = 1 \quad (k = 1, 2, 3)$$

ან

$$H_k \vec{i}_k \cdot h_k \vec{i}_k = 1.$$

მამასადამე,

$$H_k h_k = 1 \quad (k = 1, 2, 3).$$



ნახ.20

გავავლოთ M და მის მეზობელ N წერტილებზე ($\overrightarrow{MN} = d\vec{r}$) საკოორდინატო ზედაპირები; ცხადია, ეს ზედაპირები აგებენ ელემენტარულ მრუდწირულ პარალელეპიპედს (ნახ.20). ამ პარალელეპიპედის წიბოები მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირის სიზუსტით იქნება:

$$ds_1 = H_1\, dq_1, \quad ds_2 = H_2\, dq_2, \quad ds_3 = H_3\, dq_3;$$

მისი წახნაგების ფართობები კი:

$$d\sigma_1 = H_2 H_3\, dq_2\, dq_3, \quad d\sigma_2 = H_1 H_3\, dq_1\, dq_3, \quad d\sigma_3 = H_1 H_2\, dq_1\, dq_2,$$

ხოლო მოცულობა

$$dV = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ცილინდრულ კოორდინატებში ლამეს კოეფიციენტები, გვაქვს:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

მივიღოთ:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z;$$

რადგან

$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \quad \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0), \quad \vec{r}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}(0, 0, 1),$$

ამიტომ

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_2 = 1.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ სფერულ კოორდინატებში ლამეს კოეფიციენტები, გვაქვს:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

მივიღოთ:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \vartheta.$$

გვექნება: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}(-r\sin\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\cos\varphi, 0)$,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}(r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, -r\sin\vartheta),$$

მამასადამე, $H_1 = 1, \quad H_2 = r\sin\vartheta, \quad H_3 = r.$

მაგალითი 4. ელიფსური კოორდინატები. სიბრტყეზე ელიფსური კოორდინატები განსაზღვრულია ტოლობებით:

$$x = a\,\mathrm{ch}\rho\cos\varphi, \quad y = a\,\mathrm{sh}\rho\sin\varphi$$

$$(a > 0, \ \rho \geq 0, \ 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

გამოვთვალოთ ლამეს კოეფიციენტები და ვაჩვენოთ, რომ ელიფსური კოორდინატები ორთოგონალურია. გვაქვს

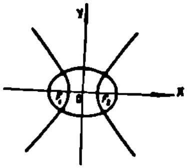
$$\vec{r}_\rho'\,(a\,\mathrm{sh}\rho\cos\varphi,\ a\,\mathrm{ch}\rho\sin\varphi),\quad \vec{r}_\varphi'\,(-a\,\mathrm{ch}\rho\sin\varphi,\ a\,\mathrm{sh}\rho\cos\varphi),$$

ამიტომ, ცხადია, $\vec{r}_\rho'\cdot\vec{r}_\varphi'=0$, რაც ელიფსური კოორდინატების ორთოგონალურობას ამტკიცებს; ახლა

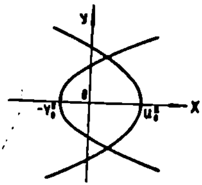
$$H_\rho=|\vec{r}_\rho'|=a\sqrt{\mathrm{sh}^2\rho\cos^2\varphi+\mathrm{ch}^2\rho\sin^2\varphi}=a\sqrt{(\mathrm{ch}^2\rho-1)\cos^2\varphi+\mathrm{ch}^2\rho\sin^2\varphi}=$$

$$=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\rho-\cos^2\varphi},\quad H_\varphi=|\vec{r}_\varphi'|=a\sqrt{\mathrm{sh}^2\rho\cos^2\varphi+\mathrm{ch}^2\rho\sin^2\varphi}=H_\rho.$$

აქ საკოორდინატო წირები ელიფსები და ჰიპერბოლებია (ნახ.21).



ნახ.21



ნახ.22

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. პარაბოლური კოორდინატები. სიბრტყეზე პარაბოლური კოორდინატები განმარტებულია ტოლობებით:

$$x=u^2-v^2;\quad y=2uv\quad(-\infty<u<+\infty,\ 0\le v<+\infty);$$

ვაჩვენოთ, რომ პარაბოლური კოორდინატებიც ორთოგონალურია და ვიპოვოთ ლამეს კოეფიციენტები. გვაქვს $\vec{r}_u'(2u,2v)$, $\vec{r}_v'(-2v,2u)$, ამიტომ აქაც $\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'=0$.

ე.ი. პარაბოლური კოორდინატებიც ორთოგონალურია. ახლა, $H_u=|\vec{r}_u'|=2\sqrt{u^2+v^2}$, $H_v=H_u$;

აქ საკოორდინატო წირები პარაბოლებია (ნახ.22).

ე. გრადიენტი ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში. განვიხილოთ $\varphi(q_1,q_2,q_3)$ ფუნქციის სკალარული ველი. q_1,q_2,q_3 იყოს ორთოგონალური მრუდწირული კოორდინატები. ისე როგორც ზემოთ, გვაქვს

$$\mathrm{grad}\,\varphi(q_1,q_2,q_3)=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\mathrm{grad}\,q_1+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\mathrm{grad}\,q_2+\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\mathrm{grad}\,q_3$$

და, მაშასადამე,

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\vec{i}_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\frac{\vec{i}_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}+\frac{\vec{i}_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}.\qquad(9)$$

კერძოდ, ψ ფუნქციის გრადიენტი ცილინდრულ კოორდინატებში იქნება

$$\mathrm{grad}\,\psi=\vec{i}_1\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\vec{i}_2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\vec{i}_3\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

სფერულ კოორდინატებში:

$$\mathrm{grad}\,\psi=\vec{i}_1\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\vec{i}_2}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\frac{\vec{i}_3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}.$$

4. დივერგენცია ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში. განვიხილოთ $\vec F$ ვექტორის ვექტორული ველი; აღვნიშნოთ F_1, F_2 და F_3-ით $\vec F$ ვექტორის კოორდინატები $\vec i_1$, $\vec i_2$ და $\vec i_3$ ბაზისში. $\operatorname{div}\vec F$-ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\operatorname{div}\vec F=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint_{\Sigma}\vec F\cdot\vec n\,d\sigma}{V}.$$

ვიგულოთ V ნებისმიერი ელემენტარული პარალელეპიპედი, რომლის ერთ-ერთი წვერო არის $M(q_1,q_2,q_3)$ წერტილი, სადაც გამოსათვლელია $\operatorname{div}\vec F$-ის მნიშვნელობა. $\vec F$ ვექტორის ნაკადი $MM_3N_1M_2$ წახნაგზე, მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირის სიზუსტით, იქნება

$$-F_1H_2H_3\,dq_2\,dq_3.$$

ახლა, გამოვთვალოთ $\vec F$ ვექტორის ნაკადი მოპირდაპირე $NN_2M_1N_3$ წახნაგზე; ეს წახნაგი $MM_3N_1M_2$ წახნაგისაგან იმით განსხვავდება, რომ მას შეესაბამება q_1-ის q_1+dq_1 მნიშვნელობა, ამიტომ $\vec F$ ვექტორის ნაკადი $NN_2M_1N_3$ წახნაგზე იქნება

$$\left[F_1\cdot H_2H_3+\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1H_2H_3)\,dq_1\right]dq_2\,dq_3.$$

შესაბამისად, $\vec F$ ვექტორის ნაკადი აღნიშნულ ორ მოპირდაპირე წახნაგზე არის

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1H_2H_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3.$$

ანალოგიურად, $\vec F$ ვექტორის ნაკადი დანარჩენ ერთმანეთის მოპირდაპირე წახნაგებზე, იქნება

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1H_3F_2)\,dq_1\,dq_2\,dq_3,\quad \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3H_1H_2)\,dq_1\,dq_2\,dq_3.$$

რადგან $V=H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$, ამიტომ შევკრებით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\operatorname{div}\vec F=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(F_2H_1H_3)+\frac{\partial}{\partial q_3}(F_3H_1H_2)\right]\qquad(10)$$

კერძოდ, ცილინდრულ კოორდინატებში გვექნება

$$\operatorname{div}\vec F=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_r\cdot r)+\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial F_z}{\partial z}\right]=\frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{F_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z};\qquad(10')$$

ხოლო სფერულ კოორდინატებში

$$\operatorname{div}\vec F=\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_r\,r^2\sin\vartheta)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_\vartheta\,r\sin\vartheta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi\,r)\right]=$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(F_r\cdot r^2)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_\vartheta\sin\vartheta).\qquad(10'')$$

5. როტორის გამოთვლა ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში. ისე, როგორც ზემოთ, F_1, F_2 და F_3 იყოს $\vec F$ ვექტორის კოორდინატები $\vec i_1$, $\vec i_2$ და $\vec i_3$ ბაზისში. $\operatorname{rot}\vec F$-ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}}{S}.$$

ვიგულოთ S არეე $MM_3N_1M_2$ პარალელოგრამი, რომლის ერთ-ერთი წვერო არის $M(q_1,q_2,q_3)$ წერტილი, სადაც გამოსათვლელია $\operatorname{rot}\vec{F}$ -ის მნიშვნელობა. გამოვთვალოთ $\vec{F}$ ვექტორის ცირკულაცია აღნიშნული პარალელოგრამის მიმართ; ცხადია, $\vec{F}$ ვექტორის მუშაობა MM_2 რკალზე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირის სიზუსტით იქნება[1]

$$F_2 H_2 dq_2,$$

ხოლო $\vec{F}$ ვექტორის მუშაობა მოპირდაპირე N_1M_3 გვერდზე[2]

$$-\left[F_2H_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2H_2)dq_3\right]dq_2,$$

ამიტომ მათი ჯამი იქნება

$$-\frac{\partial}{\partial q_3}(F_2H_2)dq_2\,dq_3\,.$$

ასევე, $\vec{F}$ ვექტორის მუშაობა პარალელოგრამის ორ დანარჩენ გვერდზე, იქნება

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3H_3)dq_2\,dq_3.$$

ახლა, რადგან აღნიშნული პარალელოგრამის ფართობი $S = H_2H_3dq_2dq_3$, ამიტომ გვექნება

$$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{i}_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2H_2)\right]. \qquad (11)$$

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი ორი ტოლობა

$$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{i}_2 = \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(F_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(F_3H_3)\right],$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{i}_3 = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1H_1)\right]$$

და, მაშასადამე, გვექნება

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\vec{i}_1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2H_2)\right] + \frac{\vec{i}_2}{H_1H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(F_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(F_3H_3)\right] + \frac{\vec{i}_3}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1H_1)\right]. \qquad (12)$$

კერძოდ, ცილინდრულ კოორდინატებში გვექნება

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{i}_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial r} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{i}_2\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \vec{i}_3\left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} + \frac{F_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right). \qquad (12')$$

- - - - - -

[1] რადგან აღებული გვაქვს მარცხენა კოორდინატთა სისტემა, ამიტომ კონტურზე ავლის დადებითი გზა იქნება ისეთი, რომელიც არეს მარჯვნივ დატოვებს.

[2] M_3N_1 გვერდს ეთანადება q_3 -ის q_3+dq_3 მნიშვნელობა.

ხოლო სფერულ კოორდინატებში

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{i}_1\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(F_\varphi\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}\right] + \qquad (12^{II})$$

$$+\vec{i}_2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial(F_\vartheta r)}{\partial r}\right] + \vec{i}_3\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(F_\varphi r)}{\partial r} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right].$$

6. ლაპლასის ოპერატორი ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში.

განვიხილოთ $\psi(q_1,q_2,q_3)$ ფუნქციის სკალარული ველი. გამოვთვალოთ $\Delta\psi$ გამოსახულება; ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\Delta\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi).$$

რადგან

$$\operatorname{grad}\psi = \frac{\vec{e}_1}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}.$$

ამიტომ, თუ ვისარგებლებთ (10) ფორმულით, გვექნება

$$\Delta\psi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[H_2H_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + H_1H_3\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) + H_1H_2\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right]. \qquad (13)$$

კერძოდ, ცილინდრულ კოორდინატებში, გვექნება

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] = \qquad (13^{I})$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

ხოლო სფერულ კოორდინატებში

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right). \qquad (13^{II})$$

სავარჯიშო

1. აჩვენეთ, რომ $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$.

2. თუ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორი მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე; აჩვენეთ, რომ $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=0$.

3. აჩვენეთ, რომ, თუ $\vec{F}(M,t)=\vec{F}(x,y,z,t)$ არის სივრცითი x, y, z კოორდინატებისა და t დროის წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ $d\vec{F}=(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}dt$.

4. აჩვენეთ, რომ, თუ $u(x,y,z)$ და $v(x,y,z)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ პირობა

$$\operatorname{grad}u\times\operatorname{grad}v = 0$$

არის აუცილებელი და საკმარისი იმისა, რომ u და v ფუნქციები შებმული იყოს $f(u,v)=0$ სახის პირობით;

5. აჩვენეთ, რომ, თუ u და v წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ $\operatorname{grad}u\times\operatorname{grad}v$ არის სოლენოიდური ვექტორი;

6. აჩვენეთ, რომ, თუ $\vec F(x,y,z,t)$ სივრცითი კოორდინატებისა და t დროის წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერ შეკრული Σ ზედაპირის მიმართ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\oiint_{\Sigma} \vec B\cdot\vec n\,d\sigma = 0,$$ სადაც $\vec B=\vec\nabla\times\vec F$, $\vec n$ — ზედაპირის ნორმალის მგეზავია;

7. აჩვენეთ, რომ $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec r}{r^3}$ $\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.

8. აჩვენეთ, რომ $\operatorname{div}\frac{k}{r^3}\vec r=0$ (k მუდმივია);

9. აჩვენეთ, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}+\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$ ($\operatorname{div}\vec F$ წარმოადგენს სკალარს);

10. ისარგებლეთ კოორდინატთა გარდაქმნით და აჩვენეთ, რომ $\operatorname{rot}\vec F$ პოლარული ვექტორია;

11. მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო მუდმივი $\vec\omega(p,q,r)$ კუთხური სიჩქარით; გამოთვალეთ $\vec v$ სიჩქარეთა და $\vec w$ აჩქარებათა ველის დივერგენცია. პას.: $\operatorname{div}\vec v=0$, $\operatorname{div}\vec w=2\omega^2$.

12. იპოვეთ $\vec F=r^n\vec r$ ვექტორის პოტენციალი.

პას.: $\frac{1}{n+2}r^{n+2}$, როცა $n\neq-2$; $\ln r$, როცა $n=-2$.

13. აჩვენეთ, რომ $\operatorname{div}(\vec a\times\vec b)=\vec b\cdot\operatorname{rot}\vec a-\vec a\operatorname{rot}\vec b$.

14. თუ $\vec F\cdot\vec\nabla$ არის შემდეგი ოპერატორი $X\frac{\partial}{\partial x}+Y\frac{\partial}{\partial y}+Z\frac{\partial}{\partial z}$, სადაც X, Y და Z — $\vec F$ ვექტორის კომპონენტებია, მაშინ აჩვენეთ, რომ

$$(\vec F\cdot\vec\nabla)\cdot\varphi=\vec F\cdot\operatorname{grad}\varphi.$$

15. თუ $\vec l$ რაიმე მიმართულების მგეზავია, ხოლო $\vec F$ — ვექტორი, აჩვენეთ, რომ

$$(\vec l\cdot\vec\nabla)\vec F=\frac{\partial\vec F}{\partial l},$$

სადაც $\frac{\partial\vec F}{\partial l}$ წარმოადგენს $\vec F$ ვექტორის წარმოებულს l მიმართულებით.

16. აჩვენეთ, რომ, თუ $\varphi(x,y,z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას, მაშინ $\vec\nabla\varphi$ ვექტორი სოლენოიდური და პოტენციალურია.

17. თუ $\vec F=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec i+\frac{x}{x^2+y^2}\vec j$, იპოვეთ $\vec F$ ვექტორის ცირკულაცია ერთეული რადიუსიან წრეზე საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. პას.: 2π.

თ ა ვ ი II

ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

მექანიკის, გეომეტრიისა და ფიზიკის ბევრ ამოცანას მივყავართ ტენზორის ცნებამდე. ტენზორი გაცილებით რთული ცნებაა, ვიდრე ვექტორი და წარმოადგენს უკანასკნელის განზოგადებას. ვექტორის განმარტებას, როგორც მიმართული მონაკვეთი, აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ტენზორისათვის კი არ არსებობს ასეთი თვალსაჩინო წარმოდგენა.

მოვიყვანოთ აქ ვექტორის სხვა განმარტება, რომელიც წინა განმარტების ტოლფასია, მაგრამ, რომლის განზოგადება მიგვიყვანს ტენზორის ცნებამდე.

§ 1. ორთოგონალური აფინური ტენზორი

ვთქვათ, გვაქვს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა ორი $Ox_1x_2x_3$ და $Ox_1'x_2'x_3'$ სისტემა[1]. ამ სისტემების ღერძებს შორის კუთხეების კოსინუსები ამოვწეროთ შემდეგი ცხრილის სახით:

	x_1'	x_2'	x_3'
x_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x_3	l_{31}	l_{32}	l_{33}

ასეთ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, წერტილის ან ვექტორის[2] კოორდინატებისათვის გვექნება გარდაქმნის შემდეგი ფორმულები:

$$x_k = \sum_{j=1}^{3} l_{kj}\, x_j' \quad (k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$x_k' = \sum_{j=1}^{3} l_{jk}\, x_j \quad (k = 1, 2, 3). \tag{1'}$$

შევნიშნოთ, რომ მიმართულების 9 კოსინუს-შორის არსებობს შემდეგი სახის დამოკიდებულებები:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} l_{ki}\, l_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{როცა } i=j \\ 0, & \text{როცა } i\neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,3) \tag{2}$$

ამასთან $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

[1] ე.ი. კოორდინატთა ორთოგონალური წრფივი სისტემა. ჩვენ აქ ფორმულების მოკლედ ჩაწერის და შედეგების n-განზომილებიან კოორდინატულ სივრცეში გადატანის მიზნით კოორდინატებისათვის მივიღოთ განსხვავებული აღნიშვნები, ე.ი. წერტილის (ან ვექტორის) კოორდინატებს აღვნიშნავთ არა x, y, z-ით, არამედ x_1, x_2, x_3-ით.

[2] რადგან გვაინტერესებს მხოლოდ კოორდინატთა გარდაქმნა, ამიტომ ვექტორს ვიგულისხმებთ მოდებულს O წერტილზე.

ვუწოდოთ კოორდინატთა (1) და ($1'$) გარდაქმნას ორთოგონალური აფინური გარდაქმნა.

L იყოს მატრიცა:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

ვუწოდოთ მას (1) გარდაქმნის მატრიცა.

ცხადია, $\det L = \pm 1$.

კერძოდ, თუ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ და $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ ორი ვექტორ-სვეტია, მაშინ (1) და ($1'$) ფორმულები მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება:

$$x = Lx', \quad x' = L^{-1}x,$$

სადაც L^{-1} არის L-ის შებრუნებული მატრიცა[1].

ვთქვათ, კოორდინატთა $Ox_1x_2x_3$ სისტემის მიმართ განსაზღვრულია რომელიმე $f(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქცია. თუ ამ ფუნქციის მნიშვნელობა უცვლელი რჩება $Ox_1x_2x_3$ სისტემიდან $Ox_1'x_2'x_3'$ სისტემაზე გადასვლის დროს, ე.ი.:

$$f(x_1,x_2,x_3) = f(x_1',x_2',x_3').$$

მაშინ ამბობენ, რომ წერტილის $f(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქცია არის ინვარიანტი ანუ სკალარი.

ვთქვათ, $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ და $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ — ორი ვექტორია, მაშინ ცხადია, მათი სკალარული ნამრავლი

$$\vec{a}\cdot\vec{x} = |\vec{a}|\cdot|\vec{x}|\cos\widehat{\vec{a},\vec{x}} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{j=1}^{3} a_j x_j = \sum_{k=1}^{3} a_k' x_k'. \tag{3}$$

პირიქით, ვაჩვენოთ, რომ თუ გვაქვს წრფივი ფორმა

$$F(x_1,x_2,x_3) = \sum_{j=1}^{3} a_j x_j = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3. \tag{4}$$

სადაც x_1,x_2,x_3 რაიმე ვექტორის კოორდინატებია, და ეს ფორმა ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ, მაშინ a_1,a_2,a_3 რიცხვები ადგენს ვექტორს[2].

[1] ამ შემთხვევაში $L^{-1} = L'$, სადაც L' არის L-ის ტრანსპონირებული მატრიცა.

[2] ე.ი. გარდაიქმნებიან ისე, როგორც ვექტორის კოორდინატები.

მართლაც, გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{3} a_k x_k = \sum_{j=1}^{3} a'_j x'_j = \sum_{j=1}^{3} a'_j \sum_{k=1}^{3} l_{kj} x_k = \sum_{k=1}^{3} x_k \sum_{j=1}^{3} l_{kj} a'_j .$$

რადგან ეს ტოლობა მართებულია ყოველი x'_1, x'_2, x'_3 – სათვის, ამიტომ კოეფიციენტთა შედარება გვაძლევს:

$$a_k = \sum_{j=1}^{3} l_{kj} a'_j \qquad (k=1,2,3);$$

ეს კი იგივე (1) ფორმულებია, რომლითაც გარდაიქმნება ვექტორის კოორდინატები.

ეს გარემოება დავუდოთ საფუძვლად ვექტორის განმარტებას, ე.ი. თუ წრფივი ფორმა

$$\sum_{j=1}^{3} a_j x_j$$

ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ, მასთან x_1, x_2, x_3 ვექტორის კოორდინატებია, მაშინ a_1, a_2, a_3 რიცხვები ადგენს ვექტორს[1].

ზოგჯერ ასე განმარტებულ ვექტორს, რომელიც დაკავშირებულია ორთოგონა-ლური აფინურ (1) გარდაქმნასთან, უწოდებენ ორთოგონალურ აფინურ ვექტორს.

1. ვისარგებლოთ ვექტორის აქ მიღებული განსაზღვრებით და განვმარტოთ ორთოგონალური აფინური ტენზორი.

ვთქვათ, $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ და $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$ ორი ვექტორია; განვიხილოთ შემდეგი სახის ორადწრფივი ფორმა:

$$2F = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{13} x_1 y_3 + \dots + a_{31} x_3 y_1 + a_{32} x_3 y_2 + a_{33} x_3 y_3, \quad (5)$$

სადაც a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ ნებისმიერი რიცხვებია.

თუ (5) ფორმა ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ, მაშინ ამბობენ, რომ ცხრა a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ სიდიდე ადგენს მეორე რანგის ტენზორს; a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ რიცხვებს ეწოდება ტენზორის კომპონენტები. ზოგჯერ ასე განმარ-ტებულ ტენზორსაც, რომელიც აგრეთვე დაკავშირებულია აფინურ ორთოგონალურ (1) გარდაქმნასთან, უწოდებენ მეორე რანგის ორთოგონალურ აფინურ ტენზორს.

ვისარგებლოთ ტენზორის ამ განმარტებით და გამოვიყვანოთ ორთოგონალური აფინური ტენზორის კომპონენტებისათვის გარდაქმნის ფორმულები. განმარტებით გვაქვს:

$$\sum_{k,s=1}^{3} a_{ks} x_k y_s = \sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij} x'_i y'_j = \sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij} \sum_{k=1}^{3} l_{ki} x_k \sum_{s=1}^{3} l_{sj} y_s = \sum_{k,s=1}^{3} x_k y_s \sum_{i,j=1}^{3} l_{ki} l_{sj} a'_{ij} ,$$

საიდანაც, ისე, როგორც ზემოთ, გვექნება

$$a_{ks} = \sum_{i,j=1}^{3} l_{ki} l_{sj} a'_{ij} \qquad (k,s=1,2,3). \quad (6)$$

------

[1] ე.ი. წარმოადგენენ ვექტორის კოორდინატებს.

ანალოგიურად მიიღება ფორმულა

$$a'_{ks} = \sum_{i,j=1}^{3} l_{ik} l_{js} a_{ij} \qquad (k, s = 1, 2, 3). \qquad (6')$$

ამ ფორმულებით გარდაიქმნება აფინური ორთოგონალური ტენზორის კომპონენტები.

ფსევდოტენზორი. ზემოთ (თავი I, § 1) ჩვენ განვმარტეთ პოლარული და ფსევდოვექტორი; იქვე მივიყვანეთ მათი კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულები. ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ ახალ აღნიშვნებს, შევნიშნავთ, რომ ფსევდოვექტორის კოორდინატები გარდაიქმნება არა $a'_k = \sum_{j=1}^{3} l_{jk} a_j \; (k = 1, 2, 3)$ ფორმულების მიხედვით, არამედ შემდეგი ფორმულებით:

$$a'_k = \det L \sum_{j=1}^{3} l_{jk} a_j \quad (k = 1, 2, 3),$$

სადაც L კოორდინატთა გარდაქმნის მატრიცაა.

ახლა, მეორე რანგის რაიმე ობიექტს ვუწოდოთ ფსევდოტენზორი, თუ მისი კომპონენტები გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულებით:

$$a'_{ks} = \det L \sum_{i,j=1}^{3} l_{ik} l_{js} a_{ij} \quad (k, s = 1, 2, 3).$$

ტენზორული აღრიცხვის ტერმინებში ვექტორი–პირველი რანგის ტენზორია, ხოლო სკალარი–ნულოვანი რანგის ტენზორი.

ასევე შეიძლება განიმარტოს ორზე უფრო მაღალი რანგის ტენზორები.

მეორე რანგის აფინურ ორთოგონალურ ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (7)$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ სიმეტრიულობის ეს თვისება მართებული რჩება კოორდინატთა ერთ სისტემიდან მეორეზე გადასვლის შემდეგაც.

მეორე რანგის აფინურ ორთოგონალურ ტენზორს ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (8)$$

სიმეტრიული ტენზორის შემთხვევაში ტენზორის განმარტებისას, ნაცვლად ორადწრფივი (5) ფორმისა, შეიძლება ვისარგებლოთ კვადრატული ფორმით:

$$2F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3,$$

რომელიც მიიღება $2F$–საგან, თუ დავუშვებთ $y_j = x_j \quad (j = 1, 2, 3)$.

ტენზორი უმჯობესია ჩავწეროთ კვადრატული ცხრილის სახით; მაგალითად, მეორე რანგის A ტენზორი, რომლის კომპონენტებია $a_{ij} \; (i, j = 1, 2, 3)$ ასე ჩაიწერება:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ აქ მოყვანილი ყველა შედეგი უცვლელად გადადის n განზომილებიან კოორდინატულ სივრცეში, მხოლოდ სამგანზომილებიან სივრცის მსგავსად, აქაც საჭიროა აფინური გარდაქმნის მატრიცა იყოს ორთოგონალური, რადგან მხოლოდ ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\frac{\partial x_k'}{\partial x_j}=\frac{\partial x_j}{\partial x_k'}=l_{jk}.$$

ამ ტოლობებს ადგილი არა აქვს კოორდინატთა ნებისმიერი გარდაქმნის დროს, ამიტომ (როგორც ეს ქვემოთ იქნება ნაჩვენები) საჭირო შეიქმნა შემოღებული ყოფილიყო კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორები და ტენზორები.

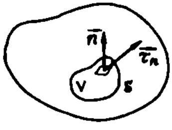
მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვაჩვენოთ, რომ ზემოთ განმარტებული δ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ რიცხვები ადგენენ მეორე რანგის აფინურ სიმეტრიულ ტენზორს. მართლაც, განმარტებით

$$\sum_{i,j=1}^{3}\delta_{ij}x_iy_j=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\vec{x}\cdot\vec{y}.$$

უკანასკნელი, როგორც $\vec{x}$ და $\vec{y}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ; მაშასადამე, δ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ რიცხვები ადგენენ მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს.

ვუწოდოთ ტენზორს, რომლის კომპონენტებია δ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ რიცხვები, ერთეულოვანი ტენზორი და აღვნიშნოთ I-თი; ამრიგად,

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ნახ.23

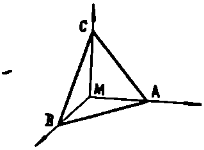
მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ძაბვის ტენზორი. განვიხილოთ დეფორმირებადი სხეული, რომელიც, ვთქვათ, იმყოფება წონასწორობაში; ვიგულისხმოთ მისგან ამოჭრილი რომელიმე V მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული გლუვი S ზედაპირით (ნახ.23). განვიხილოთ მოცულობის dv ელემენტი; ვთქვათ, მასზე მოქმედებს მოცულობითი (გარე) $\vec{F}dv$ ძალა; აქ $\vec{F}$ არის მოცულობითი ძალა, ნაანგარიშები ერთეულ მოცულობაზე. ასევე, განვიხილოთ S ზედაპირის $d\sigma$ ელემენტი, რომლის გარე ნორმალის მგეზავი იყოს $\vec{n}$. ცხადია, ზედაპირის $d\sigma$ ელემენტზე იმოქმედებს სხეულის V მოცულობის გარეთ მდებარე ნაწილისაგან გამოწვეული $\vec{T}_n d\sigma$ ზედაპირული ძალა, რომელიც, ცხადია, დამოკიდებულია $d\sigma$ ელემენტის $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულებაზე. $\vec{T}_n$ არის ზედაპირული ძალა, ნაანგარიშები ზედაპირის ერთეულ ფართობზე. $M(x,y,z)$ იყოს dv ელემენტის რომელიმე

წერტილი; ასეთ შემთხვევაში, სხეულის V მოცულობაზე მოქმედი გარე ძალების მთავარი ვექტორი იქნება $\iiint\limits_V \vec{F}\,dv$; ხოლო ზედაპირული ძალების მთავარი ვექტორი

$$\oiint\limits_S \vec{\tau}_n\,d\sigma .$$

დავწეროთ სხეულის გამოყოფილი V ნაწილის წონასწორობის პირობა[1], გვექნება

$$\iiint\limits_V \vec{F}\,dv + \oiint\limits_S \vec{\tau}_n\,d\sigma = 0. \qquad (9)$$



ნახ.24

სხეულის M წერტილზე გამოვყოთ უსასრულოდ მცირე $MABC$ ტეტრაედრი, რომლის სამი წახნაგი კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელურია, ხოლო მეოთხე წახნაგი $\vec{n}$ ვექტორის მართობია. დავწეროთ ზემო ვექტორული (9) ტოლობა გამოყოფილი ტეტრაედრისათვის, გვექნება[2]

$$\vec{F}\cdot V - \vec{\tau}_x\cdot S\cos\widehat{n,x} - \vec{\tau}_y\cdot S\cos\widehat{n,y} - \vec{\tau}_z\cdot S\cos\widehat{n,z} + \vec{\tau}_n\cdot S = 0$$

სადაც $V=\frac{1}{3}Sh$, S—ABC წახნაგის ფართობია, h — კი ტეტრაედრის სიმაღლე. უკანასკნელი ტოლობიდან ზღვარზე გადასვლით, როცა $h\to 0$, გვექნება

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_x\cos\widehat{n,x} + \vec{\tau}_y\cos\widehat{n,y} + \vec{\tau}_z\cos\widehat{n,z} \qquad (10)$$

ახლა თუ $\vec{\tau}_x(X_x,Y_x,Z_x),\ \vec{\tau}_y(X_y,Y_y,Z_y),\ \vec{\tau}_z(X_z,Y_z,Z_z)$, მაშინ

$$\begin{aligned} N = \text{გეგ}_n\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_n\cdot\vec{n} &= (X_x\cos\widehat{n,x} + X_y\cos\widehat{n,y} + X_z\cos\widehat{n,z})\cos\widehat{n,x} + \\ &+ (Y_x\cos\widehat{n,x} + Y_y\cos\widehat{n,y} + Y_z\cos\widehat{n,z})\cos\widehat{n,y} + (Z_x\cos\widehat{n,x} + Z_y\cos\widehat{n,y} + Z_z\cos\widehat{n,z})\cos\widehat{n,z} = \\ &= X_x\cos^2\widehat{n,x} + Y_y\cos^2\widehat{n,y} + Z_z\cos^2\widehat{n,z} + (X_y+Y_x)\cos\widehat{n,x}\cos\widehat{n,y} + \\ &+ (X_z+Z_x)\cos\widehat{n,x}\cos\widehat{n,z} + (Y_z+Z_y)\cos\widehat{n,y}\cos\widehat{n,z} \end{aligned}$$

წარმოადგენს ინვარიანტულ კვადრატულ ფორმას $\vec{n}(\cos\widehat{n,x},\cos\widehat{n,y},\cos\widehat{n,z})$ ვექტორის კოორდინატების მიმართ და, მაშასადამე, ცხრა $X_x, Y_y, \dots, Z_z$ სიდიდე დეფორმირებადი სხეულის ყოველ წერტილზე ადგენს მეორე რანგის აფინურ ორთოგონალურ ტენზორს.

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix}$$

ვუწოდოთ ამ ტენზორს ძაბვის ტენზორი[3].

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დეფორმაციის ტენზორი. განვიხილოთ დეფორმირებადი

---

[1] მოქმედი ძალების მთავარი ვექტორის ნულთან ტოლობა.

[2] აქ, მაგალითად, MBC წახნაგის ნორმალს ექნება Ox ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულება; ამიტომ ამ წახნაგზე მოქმედი გარე ძალა იქნება $-\vec{\tau}_x S_1$, სადაც S_1 არის MBC წახნაგის ფართობი და იგი $S\cos\widehat{n,x}$-ის ტოლია (S კი ABC წახნაგის ფართობია).

[3] შეიძლება ჩვენება, რომ ეს ტენზორი სიმეტრიულია.

სხეული. ავიღოთ სხეულში დეფორმაციამდე რომელიმე $M(x,y,z)$ წერტილი და $\overrightarrow{MN}=$ $=d\vec{r}(dx,dy,dz)$ ელემენტი. დეფორმაციის შემდეგ M წერტილი დაიკავებს გარკვეულ $M^*(\xi,\eta,\zeta)$ მდებარეობას, სადაც $\overrightarrow{MM^*}(u,v,w)$ არის წერტილის გადაადგილების ვექტორი; საზოგადოდ, წინასწორობის შემთხვევაში ეს ვექტორი არის წერტილის მდებარეობის ფუნქცია, ე.ი. x,y,z კოორდინატების ფუნქცია. ამრიგად,

$$\xi = x+u(x,y,z),\quad \eta = y+v(x,y,z),\quad \zeta = z+w(x,y,z).$$

გამოვთვალოთ დეფორმაციის დროს $|d\vec{r}|^2=ds^2$ ელემენტის ცვლილება; გვაქვს

$$d\xi = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\quad d\eta=\frac{\partial v}{\partial x}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz,\quad d\zeta=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz,$$

საიდანაც

$$ds^{*2}=d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=dx^2+dy^2+dz^2+2\left[e_{xx}dx^2+e_{yy}dy^2+e_{zz}dz^2+2e_{xy}dxdy+2e_{xz}dxdz+2e_{yz}dydz\right],$$

სადაც

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\cdots,\ e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right],\cdots$$

და, მაშასადამე,

$$ds^{*2}-ds^2=2\left[e_{xx}dx^2+e_{yy}dy^2+e_{zz}dz^2+2e_{xy}dxdy+2e_{xz}dxdz+2e_{yz}dydz\right].$$

რადგან $ds^{*2}-ds^2$ ინვარიანტული სიდიდეა კოორდინატთა წრფივი გარდაქმნის მიმართ, ამიტომ, ცხადია, ექვსი $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}$ სიდიდე დეფორმირებად სხეულის ყოველ წერტილზე ადგენს მეორე რანგის სიმეტრიულ აფინურ ორთოგონალურ ტენზორს; ეწოდოთ ამ ტენზორს დეფორმაციის ტენზორი. მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში, როცა u,v,w იმდენად მცირეა, რომ მათი და მათი წარმოებულების კვადრატები და ნამრავლები შეგვიძლია უგულვებელვყოთ, გვექნება:

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad e_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right).\qquad (11)$$

§ 2. არითმეტიკული ოპერაციები ტენზორებზე ისე განიმარტება როგორც კვადრატულ მატრიცებზე; ასე, მაგალითად:

1. ტენზორს ეწოდება ნულოვანი, თუ მისი ყველა კომპონენტი ნულია.

2. ორი A და B ტენზორი ტოლია, თუ ტოლია შესაბამისი კომპონენტები.

3. ორი A და B ტენზორის ჯამი ისეთი მესამე ტენზორია, რომლის კომპონენტები შესაკრებთა შესაბამისი კომპონენტების ჯამია.

ტენზორის სკალარზე ნამრავლი, განსაზღვრულია ტოლობით:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33}\end{pmatrix}.$$

ბოლოს, ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ტენზორი ცალსახად დაიშლება სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ჯამად.

მართლაც, ვთქვათ, $A=(a_{ij})$ ნებისმიერი ტენზორია, მივიღოთ:

$$a_{ij} = p_{ij} + q_{ij} \qquad (i,j=1,2,3)$$

და მოვითხოვოთ, რომ

$$p_{ij} = p_{ji} \qquad \text{და} \quad q_{ij} = -q_{ji} \quad (i,j=1,2,3),$$

მაშინ გვექნება:

$$a_{ij} = p_{ij} + q_{ij}, \qquad a_{ji} = p_{ji} + q_{ji} = p_{ij} - q_{ij},$$

საიდანაც

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \qquad q_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \qquad (i,j=1,2,3).$$

ახლა, ვთქვათ, $A(a_{ij})$ მეორე რანგის ტენზორია, $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ — რომელიმე ვექტორი; შევადგინოთ გამოსახულებები:

$$x_k^* = \sum_{j=1}^{3} a_{kj} x_j = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3 \quad (k=1,2,3). \qquad (12)$$

ვაჩვენოთ, რომ x_1^*, x_2^*, x_3^* სიდიდეები ადგენს ვექტორს. მართლაც $\vec{y}(y_1,y_2,y_3)$ იყოს ნებისმიერი ვექტორი, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{3} x_k^* y_k = \sum_{k=1}^{3} y_k \sum_{j=1}^{3} a_{kj} x_j = \sum_{k,j=1}^{3} a_{kj} x_j y_k.$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, ინვარიანტული სიდიდეა კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ; მაშასადამე, x_1^*, x_2^*, x_3^* სიდიდეები ადგენს ვექტორს. ვიტყვით $\vec{x}^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ ვექტორს $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ ვექტორის წრფივი ვექტორული ფუნქცია, განსაზღვრული A ტენზორით.

§ 3. გამოყენების თვალსაზრისით სიმეტრიულ ტენზორს განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება, ამიტომ დაწვრილებით შევჩერდეთ მათზე.

$A(a_{ij})$ იყოს სიმეტრიული ტენზორი; განვიხილოთ კვადრატული ფორმა

$$2F(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \quad (13)$$

ამ შემთხვევაში

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,3).$$

დავსვათ ასეთი საკითხი: ვიპოვოთ კოორდინატთა ისეთი ახალი $Ox_1'x_2'x_3'$ სისტემა, რომ ამ სისტემაში (13) ფორმამ მიიღოს კანონიკური სახე[1]:

$$2F = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2, \qquad (14)$$

[1] ეს საკითხი A მატრიცის დიაგონალურ სახემდე მიყვანის საკითხის ტოლფასია.

რაც ნიშნავს, რომ ახალ სისტემაში

$$x_1^{*\prime} = \lambda x_1', \quad x_2^{*\prime} = \lambda x_2', \quad x_3^{*\prime} = \lambda x_3'. \tag{15}$$

ე.ი. რა მიმართულების უნდა იყოს $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ ვექტორი, რომ მისი შესაბამისი $\vec{x}^*(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ ვექტორი იყოს $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ ვექტორის პარალელური? ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3, \end{aligned}$$

სადაც λ რომელიმე რიცხვია.

ამრიგად, გვაქვს

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

ერთგვაროვან განტოლებათა (16) სისტემას რომ ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნი, ამისათვის საჭიროა სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნული, ე.ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

(17) ტოლობას ეწოდება მახასიათებელი განტოლება; როგორც ცნობილია (ა.რუხაძე, უმ.მათ.ნ.I.გვ.II), როცა A სიმეტრიული ტენზორია, მახასიათებელი განტოლების ფესვები[1] ნამდვილი რიცხვებია.

(17) განტოლება გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2)\lambda - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

λ_1 იყოს (17) განტოლების ერთ-ერთი ფესვი (A ტენზორის საკუთრივი რიცხვი), მაშინ განტოლებათა შემდეგი სისტემიდან:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_1)x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda_1)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ვიპოვოთ ისეთი $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ ამონახსნი[2], რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

---

[1] ე.ი. A ტენზორის საკუთრივი რიცხვები.

[2] A ტენზორის საკუთრივი ვექტორი.

ვუწოდოთ ამ ვექტორის მიმართულებას A ტენზორის მთავარი მიმართულება.

ანალოგიურად მოიძებნება ორი დანარჩენი მთავარი მიმართულება. ცნობილია, (ა.რუხაძე, უმ.მათ.ტ.I, დამ.II), თუ λ_1 და λ_2 მახასიათებელი განტოლების განსხვავებული ფესვებია, მაშინ მათი შესაბამისი მთავარი მიმართულებები ერთმანეთის პერპენდიკულარულია. როდესაც კოორდინატთა სისტემის ღერძები ემთხვევა ტენზორის მთავარ ღერძებს, მაშინ ასეთ სისტემაში ტენზორის მხები კომპონენტები ნულია.

4. განვიხილოთ რომელიმე აფინური ორთოგონალური $A(a_{ij})$ ტენზორი. ვაჩვენოთ, რომ $\det A$ ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ.
მართლაც, გვაქვს

$$a_{ks}=\sum_{i,j=1}^{3} l_{ki}\, l_{sj}\, a'_{ij}\,.$$

მივიღოთ $b_{is}=\sum_{j=1}^{3} l_{sj}\, a'_{ij}$, მაშინ გვექნება

$$a_{ks}=\sum_{i=1}^{3} l_{ki}\, b_{is} \qquad (k,s=1,2,3);$$

მაგრამ დეტერმინანტების გამრავლების ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\det L\cdot\det L^{-1}\cdot\det A'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

ე.ი. $\det A$ ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ;

რადგან (17) განტოლებას აქვს სახე

$$|A-\lambda J|=0,$$

სადაც J ერთეულოვანი ტენზორია, ამიტომ მისი მარცხენა მხარე[1] და კოეფიციენტებიც იქნება ინვარიანტები; ვუწოდოთ მათ A ტენზორის ინვარიანტები.

ამრიგად, $a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$, $\det A$ ტენზორის ინვარიანტებია.

5. ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

მეორე რანგის სიმეტრიული აფინური ორთოგონალური ტენზორია; ხოლო (x_1,x_2,x_3) წერტილის კოორდინატები, განვიხილოთ განტოლება

$$2F=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3-C\,. \qquad (18)$$

---

[1] ე.ი. A ტენზორის მახასიათებელი პოლინომი.

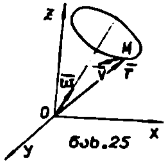
(16) განტოლება C მუდმივის ყველა მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს მეორე რიგის ცენტრალური ზედაპირის განტოლებას. ვუწოდოთ ამ ზედაპირს ტენზორული ზედაპირი.

ცხადია, როცა კოორდინატთა ღერძები მიჰყვება A ტენზორის მთავარ ღერძებს, მაშინ ასეთი სისტემის მიმართ ტენზორული ზედაპირის განტოლებას ექნება კანონიკური სახე:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს მკვიდრი წერტილის გარშემო. ცხადია, სხეულის M წერტილის მდებარეობა ყოველ მომენტში განისაზღვრება მისი $\vec{r}(x,y,z)$ რადიუს-ვექტორით. როგორც მექანიკიდან ცნობილია, M წერტილის სიჩქარე არის

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$



ნახ.25

სადაც $\vec{\omega}(p,q,r)$ ბრუნვის მყისა ვექტორული კუთხური სიჩქარეა. ავიღოთ სხეულის მოცულობის dv ელემენტი, რომლის მასა იყოს ρdv (ρ სიმკვრივეა); dv ელემენტის მოძრაობის რაოდენობა იქნება

$$\vec{v}\, dm = \rho(\vec{\omega} \times \vec{r})\, dv,$$

ხოლო იგივე ელემენტის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი 0 წერტილის მიმართ

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, \rho dv.$$

მთელი სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი გამოისახება ფორმულით.

$$\vec{\gamma} = \iiint_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, \rho dv.$$

რადგან

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{r})\cdot \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = (x^2+y^2+z^2)\vec{\omega} - (px+qy+rz)\vec{r} =$$
$$= \left[p(y^2+z^2) - qxy - rxz\right]\vec{i} + \left[q(x^2+z^2) - ryz - pxy\right]\vec{j} + \left[r(x^2+y^2) - pxz - qyz\right]\vec{k},$$

ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\gamma_x = \iiint_V \rho(y^2+z^2)dv, \quad \gamma_y = \iiint_V \rho(x^2+z^2)dv, \quad \gamma_z = \iiint_V \rho(x^2+y^2)dv,$$
$$\gamma_{yz} = -\iiint_V \rho yz\, dv, \quad \gamma_{zx} = -\iiint_V \rho zx\, dv, \quad \gamma_{xy} = -\iiint_V \rho xy\, dv,$$

მაშინ $\vec{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ კოორდინატები, ე.ი. სხეულის მოძრაობის რაოდენობის მომენტები კოორდინატთა ღერძების მიმართ ასე წარმოიდგინება:

$$\gamma_1 = p\gamma_x + q\gamma_{xy} + r\gamma_{xz},$$
$$\gamma_2 = p\gamma_{yx} + q\gamma_y + r\gamma_{yz},$$
$$\gamma_3 = p\gamma_{zx} + q\gamma_{zy} + r\gamma_z.$$

მაშასადამე, სხეულის მოძრაობის რაოდენობის $\vec{\gamma}$ მომენტი არის $\vec{\omega}(p,q,r)$ ვექტორის წრფივი ვექტორული ფუნქცია განსაზღვრული მეორე სიმეტრიული ტენზორით:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{pmatrix}$$

ეწოდება ამ ტენზორს <u>ინერციის მომენტების ტენზორი</u>.

<u>§ 2. ვექტორისა და ტენზორის ზოგადი განმარტება</u>

სანამ გადავიდოდეთ ტენზორის ზოგად განმარტებაზე, მოვიყვანოთ ერთი სასარგებლო ცნება.

<u>რიმანის სივრცე</u>. ზემოთ (თავი I, § 6) ვნახეთ, რომ წერტილის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება არა მარტო დეკარტის x, y, z კოორდინატებით, არამედ მრუდწირული q_1, q_2, q_3 კოორდინატებით; მასთან დავუშვათ, რომ სივრცის რომელიმე არეში წერტილის x, y, z კოორდინატები წარმოადგენენ q_1, q_2, q_3 პარამეტრების ცალსახა, უწყვეტად წარმოებად ფუნქციებს, ე.ი. $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ და აღნიშნულ არეში ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} \neq 0.$$

რკალის ds ელემენტი, რომელიც წარმოადგენს სივრცის ორ უსასრულოდ მახლობელ წერტილს შორის მანძილს, მრუდწირულ კოორდინატებში გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j=1}^{3} q_{ij}\, dq_i\, dq_j \quad (q_{ij} = q_{ji},\ i, j = 1, 2, 3),$$

სადაც

$$q_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

თუ სივრცეში აღებულია რომელიმე ზედაპირი (წერტილთა ორგანზომილებიანი მრავალსახეობა), მაშინ წერტილის მდებარეობა ზედაპირზე განისაზღვრება ორი მრუდწირული u, v კოორდინატით:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

ამ შემთხვევაში ზედაპირის რკალის ds ელემენტი გამოიხატება ფორმულით

$$ds^2 = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2,$$

სადაც

$$g_{11} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$g_{22} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

ანალოგიურად, ევკლიდეს m-განზომილებიან სივრცეში, სადაც წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება დეკარტის $x_1, x_2, \dots, x_m$ კოორდინატებით, რკალის ds ელემენტი კი — ფორმულით

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_m^2.$$

ახლა, თუ E_m სივრცეში შემოვიღებთ რომელიმე მრუდწირულ $q_1, q_2, \dots, q_m$ კოორდინატებს, ე.ი. ვიგულისხმებთ, რომ წერტილის დეკარტის $x_1, x_2, \dots, x_m$ კოორდინატები, გარკვეულ არეში, წარმოადგენენ $q_1, q_2, \dots, q_m$ პარამეტრების ცალსახა, უწყვეტად წარმოებად ფუნქციებს:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_m),\ x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_m),\ \dots,\ x_m = x_m(q_1, q_2, \dots, q_m)$$

და აღნიშნულ არეში სათანადო ფუნქციონალური დეტერმინანტი განსხვავებული იქნება ნულისაგან, ასეთ შემთხვევაში რკალის ds ელემენტი მრუდწირულ კოორდინატებში გამოისახება ფორმულით:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_m^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dq_i\, dq_j \quad (g_{ij} = g_{ji}), \qquad (1)$$

სადაც

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

როგორც სამგანზომილებიან სივრცეში, ევკლიდეს E_m სივრცეში შეგვიძლია ავიღოთ რომელიმე m-ზე ნაკლებგანზომილებიანი მრავალსახეობა (ქვესივრცე); მაგალითად, n-განზომილებიანი $(n < m)$ R_n სივრცე. ასეთ ქვესივრცეში წერტილის მდებარეობა შეიძლება განვსაზღვროთ რომელიმე მრუდწირული $q_1, q_2, \dots, q_n$ კოორდინატებით; ცხადია, R_n ქვესივრცის წერტილების დეკარტის კოორდინატები იქნება $q_1, q_2, \dots, q_n$ პარამეტრების ფუნქციები, ე.ი.

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n),\ x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n),\ \dots,\ x_m = x_m(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad (2)$$

ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფუნქციები ცალსახა და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. R_n სივრცეში რკალის ds ელემენტი განისაზღვრება ფორმულით

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dq_i\, dq_j \quad (g_{ij} = g_{ji}), \qquad (3)$$

სადაც

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

კერძოდ, როცა $n = m$, ამ შემთხვევაში R_n სივრცე ემთხვევა E_m სივრცეს, მხოლოდ წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება მრუდწირული $q_1, q_2, \dots, q_m$ კოორდინატებით.

ამრიგად, როდესაც ევკლიდეს m-განზომილებიან სივრცეში აღებულია n-განზომილებიანი $(n<m)$ R_n ქვესივრცე, ისე, რომ წერტილის დეკარტის $x_1, x_2, \dots, x_m$ კოორდინატები წარმოადგენენ R_n სივრცის მრუდწირული $q_1, q_2, \dots q_n$ კოორდინატების ცალსახა, უწყვეტად წარმოებად ფუნქციებს, ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (3) გამოსახულება განსაზღვრავს მეტრიკას R_n სივრცეში.

საზოგადოდ, n-განზომილებიან მრავალსახეობას, რომელშიაც განსაზღვრულია მეტრიკა

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dq_i\, dq_j \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

სახის ფორმით რიმანის სივრცე ეწოდება და იგი R_n-ით აღინიშნება.

საინტერესოა საკითხი: შეიძლება თუ არა რიმანის n-განზომილებიანი ნებისმიერი R_n სივრცე განვიხილოთ როგორც ევკლიდის m-განზომილებიანი ($m>n$) E_m სივრცის ქვესივრცე? ე.ი. თუ მოცემულია $g_{ij}(q_1,q_2,\dots,q_n)$ ფუნქციები, სადაც $g_{ij}=g_{ji}$ ($i,j=1,2,\dots,n$), შეიძლება თუ არა ვიპოვოთ $x_1(q_1,q_2,\dots,q_n)$, $x_2(q_1,q_2,\dots,q_n)$, $\dots$, $x_m(q_1,q_2,\dots,q_n)$ ფუნქციები ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს:

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\quad (i,j=1,2,\dots,n). \tag{4}$$

რადგან (4) ტოლობებში ერთმანეთისაგან განსხვავებული g_{ij} ფუნქციათა რიცხვი არის $\frac{n(n+1)}{2}$, ხოლო საძიებელ ფუნქციათა რიცხვი კი — m, ამიტომ (4) სისტემას ექნება ამონახსნი, თუ $m\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ რიმანის R_n სივრცე ჩადებულია ევკლიდეს E_m სივრცეში. კერძოდ, რიმანის ნებისმიერი ორგანზომილებიანი სივრცე შეიძლება ჩადებულ იქნეს ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში.

ვექტორისა და ტენზორის ზოგადი განსაზღვრება. ზემოთ ჩვენ განვმარტეთ აფინური ორთოგონალური ვექტორი და აფინური ორთოგონალური ტენზორი; მათი განმარტება დაკავშირებული იყო გარკვეული სახის ფორმულებთან, რომელთა მნიშვნელობები უცვლელი რჩებოდა კოორდინატთა გარდაქმნის დროს, თვით კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები[1] წარმოადგენდა აფინურ ორთოგონალურ გარდაქმნებს. საინტერესოა განვთავისუფლდეთ კოორდინატთა წრფივი გარდაქმნებისაგან და გავეცნოთ კოორდინატთა ზოგად გარდაქმნებს. ამისათვის განვიხილოთ $x^1, x^2, \dots, x^n$ ცვლადების მიმართ n-განზომილებიანი კოორდინატული სივრცე; ვუწოდოთ $x^1, x^2,\dots,x^n$ რიცხვებს წერტილის კოორდინატები; $x^1, x^2,\dots,x^n$ კოორდინატებიდან ერთად შემოვიტანოთ ახალი $\bar x^1, \bar x^2,\dots,\bar x^n$ კოორდინატები, რომლებიც ძველ ($x^1, x^2,\dots,x^n$) კოორდინატებთან დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობებით:

$$x^k=x^k(\bar x^1,\bar x^2,\dots,\bar x^n)\quad (k=1,2,\dots,n), \tag{5}$$

რომელსაც ვუწოდოთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები.

ვიგულისხმოთ, რომ $\bar x^1, \bar x^2,\dots,\bar x^n$ კოორდინატების ცვლილების რომელიმე არეში $x^k(\bar x^1,\bar x^2,\dots,\bar x^n)$ ($k=1,2,\dots,n$) ფუნქციები ცალსახა და უწყვეტად წარმოებადია, ხოლო სათანადო ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$\frac{D(x^1,x^2,\dots,x^n)}{D(\bar x^1,\bar x^2,\dots,\bar x^n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial\bar x^1} & \frac{\partial x^1}{\partial\bar x^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial\bar x^n}\\ \frac{\partial x^2}{\partial\bar x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial\bar x^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial\bar x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial\bar x^1} & \frac{\partial x^n}{\partial\bar x^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial\bar x^n}\end{vmatrix}\neq 0,$$

---

[1] ნახე §-ის (1) და (1^I) ფორმულები.

ასეთ შემთხვევაში (5) სისტემა ამოიხსნება $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n$ ცვლადების მიმართ და გვექნება:

$$\tilde{x}^k = \tilde{x}^k(x^1, x^2, \cdots, x^n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \qquad (5')$$

რომელსაც ეწოდება (5) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა.

ვთქვათ L-ით აღვნიშნოთ მატრიცა.

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix}$$

და ეწოდოთ ის (5) გარდაქმნის მატრიცა; მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ,[1] რომ (5') გარდაქმნის მატრიცა იქნება L^{-1}.

დავუბრუნდეთ წინა §-ის (1) და (1') ფორმულებს; ეს ფორმულები ახალ აღნიშვნებში ასე ჩაიწერება:

$$x^k = \sum_{j=1}^{3} l_{kj} \tilde{x}^j, \quad \tilde{x}^k = \sum_{j=1}^{3} l_{jk} x^j \quad (k = 1, 2, 3),$$

სადაც x^1, x^2, x^3 წერტილის კოორდინატებია ძველ $\vec{i}^1, \vec{i}^2, \vec{i}^3$ ბაზისში, ხოლო $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$ კი იმავე წერტილის კოორდინატები ახალ $\vec{\tilde{i}}^1, \vec{\tilde{i}}^2, \vec{\tilde{i}}^3$ ბაზისში; შევნიშნოთ, რომ:

$$\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} = l_{kj}, \quad \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} = l_{jk} \quad (k, j = 1, 2, 3),$$

---

[1] მართლაც, გავამრავლოთ ერთმანეთზე

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

მატრიცები და მივიღოთ მხედველობაში ფორმულები:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^1}\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^2}\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^j} + \cdots + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^n}\frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j} = \delta^k_j = \begin{cases} 1, & \text{როცა } k = j, \\ 0, & \text{როცა } k \neq j, \end{cases}$$

ამიტომ:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

ე.ი.

$$L \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} = E, \text{ საიდანაც ჩანს, რომ } \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} = L^{-1}.$$

ამიტომ, ვექტორის კოორდინატებისათვის გარდაქმნის აღნიშნული ფორმულები ასე გადავწეროთ:

$$x^k = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^j \quad (k = 1, 2, 3) \tag{6}$$

$$\bar{x}^k = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} x^j \quad (k = 1, 2, 3) \tag{6'}$$

ახლა, განვაზოგადოთ (6) და (6') ფორმულები კოორდინატთა ზოგადი გარდაქმნის მიმართ[1], მაშინ ვექტორი შეიძლება შემდეგნაირად განვმარტოთ: თუ კოორდინატთა $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ სისტემის მიმართ განსაზღვრული $A^1, A^2, \cdots A^n$ სიდიდეები კოორდინატთა $(5')$ გარდაქმნის დროს გარდაიქმნებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\tilde{A}^k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} A^j \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

მაშინ ამბობენ, რომ $A^1, A^2, \cdots, A^n$ ადგენენ n-განზომილებიან კონტრავარიანტულ ვექტორს, ხოლო $A^1, A^2, \cdots, A^n$ სიდიდეებს ეწოდება ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები.

ხოლო, თუ კოორდინატთა $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ სისტემის მიმართ განსაზღვრულია $A_1, A_2, \cdots, A_n$ სიდიდეები, რომლებიც კოორდინატთა (1) გარდაქმნის დროს გარდაიქმნებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\tilde{A}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}_k} A_j \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \tag{8}$$

მაშინ ამბობენ, რომ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ადგენენ n-განზომილებიან კოვარიანტულ ვექტორს; $A_1, A_2, \cdots, A_n$ სიდიდეებს ეწოდება ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები.

როგორც ზემოთ დავრწმუნდით, საჭიროა ზედა და ქვედა ინდექსების შემოღება; ახლა შევნიშნოთ, რომ აქამდე ფორმულების შემოკლებულ ჩანაწერებში Σ სიმბოლოს საშუალებით აჯამვა ხდებოდა განმეორებული ინდექსების მიხედვით, ამიტომ შემდეგში აჯამვის შემოკლებული ჩანაწერები შეგვიძლია კიდევ უფრო გავამარტივოთ, როგორც ეს მიღებულია ლიტერატურაში და თავისთავად ნაგულისხმევ Σ სიმბოლო მოვხსნათ; მაშასადამე, ფორმულებში ყველგან ნიშნაკების განმეორება იმაზე მიუთითებს, რომ ხდება აჯამვა[2] ამ ნიშნაკის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის მიხედვით; ვუწოდოთ ასეთ განმეორებულ ინდექსს ყრუ ინდექსი, ყოველ სხვა ინდექსს კი- თავისუფალი ინდექსი. სახელწოდება ყრუ აიხსნება იმით, რომ შედეგი ამ ინდექსზე არ არის დამოკიდებული, ე.ი. ყრუ ინდექსი შეიძლება

[1] ე.ი. (6) ფორმულებს ვავრცელებთ კოორდინატთა (5) და (5') გარდაქმნების მიმართ.

[2] აჯამვა ყოველთვის ხდება იმ ინდექსით, რომელიც ფორმულებში ორჯერ მეორდება, ერთ ადგილას, როგორც ქვედა ინდექსი, მეორე ადგილას კი, როგორც ზედა ინდექსი.

შევცვალოთ ნებისმიერი სხვა ინდექსით; მაგალითად, $A^{ks}B_s$ გამოსახულება უნდა გვესმოდეს როგორც ჯამი , თუ სპეციალურად არ იქნება აღნიშნული "არ იკრიბება".

ამ შეთანხმების მიხედვით (7) და (8) ფორმულები ასე ჩაიწერება:

$$\breve{A}^k = \frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^j} A^j \qquad (k = 1, 2, \cdots, n), \tag{7'}$$

$$\breve{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \breve{x}^k} A_j \qquad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{8'}$$

მხედველობაში თუ მივიღებთ (3) და (4) ფორმულებს, შევნიშნავთ, რომ ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები გარდაიქმნება (1) გარდაქმნის L მატრიცით, ხოლო კოვარიანტული კოორდინატები — L^{-1} მატრიცით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ვექტორი, რომლის კოორდინატებია $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ დიფერენციალები; (1') ფორმულიდან რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით გვექნება:

$$d\breve{x}^k = \frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^j} dx^j \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

რადგან აქ dx^j $(j=1,2,\cdot,n)$ გარდაიქმნება (3') ფორმულის მიხედვით, ამიტომ $dx^1, dx^2, \cdots, dx^n$ სიდიდეები წარმოადგენს კონტრავარიანტული ვექტორის კოორდინატებს. პირიქით, კონტრავარიანტული ვექტორის კომპონენტები ისე გარდაიქმნება, როგორც წერტილის კოორდინატების დიფერენციალები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. კოორდინატთა $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ სისტემის მიმართ განვიხილოთ $\varphi(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ ფუნქციის $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}$ წარმოებულები [1]; ვაჩვენოთ, რომ ეს წარმოებულები ადგენენ კოვარიანტულ ვექტორს. მართლაც, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \breve{x}^k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \breve{x}^k} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \breve{x}^k} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial \breve{x}^k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \breve{x}^k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

ახლა, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \breve{x}^k} = \breve{A}_k, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} = A_j \qquad (k, j = 1, 2, \cdots, n),$$

მაშინ გვექნება

$$\breve{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \breve{x}^k} A_j \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

ეს კი იგივე (4') გარდაქმნაა; მაშასადამე, $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}$ სიდიდეები წარმოადგენენ კოვარიანტული ვექტორის კოორდინატებს.

პირიქით, კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტები ისე გარდაიქმნებიან, როგორც სკალარის კერძო წარმოებულები.

1 ე.ი. grad φ ვექტორის კოორდინატები.

შევამჩნევთ, როგორც ეს ზევით მიღებული გვაქვს, კონტრავარიანტული ვექტორის კოორდინატებს ვაწყობთ ინდექსები ზემოთ, ხოლო კოვარიანტული ვექტორის კოორდინატებს-ქვემოთ.

ორთოგონალური აფინური გარდაქმნის შემთხვევაში; ე.ი. როცა გარდაქმნის (1) ფორმულებს აქვს სახე

$$x^k = \ell_{kj}\,\tilde{x}^j, \quad \tilde{x}^j = \ell_{kj}\,x^k \qquad (k, j = 1, 2, \cdots, n),$$

ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} = \ell_{kj} \qquad (k, j = 1, 2, \cdots, n)$$

და, მაშასადამე, კონტრავარიანტული და კოვარიანტული ვექტორები ერთმანეთს ემთხვევა.

ახლა ვისარგებლოთ ვექტორის აქ მოყვანილი ზოგადი განმარტებით და გადავიდეთ ტენზორის ზოგად განმარტებაზე.

თუ კოორდინატთა $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ სისტემის მიმართ განსაზღვრულია A^{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეები, რომლებიც კოორდინატთა (5) გარდაქმნის დროს გარდაიქმნებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\tilde{A}^{ks} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^j} A^{ij} \qquad (k, s = 1, 2, \cdots, n), \qquad (9)$$

მაშინ A^{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ ადგენს n-განზომილებიან მეორე რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორს; A^{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეებს ეწოდება კონტრავარიანტული ტენზორის კომპონენტები.

ასევე, თუ კოორდინატთა $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ სისტემის მიმართ განსაზღვრულია A_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ ფუნქციები, რომლებიც კოორდინატთა (5) გარდაქმნის დროს გარდაიქმნებიან შემდეგი ფორმულებით,

$$\tilde{A}_{ks} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^s} A_{ij} \qquad (i,j = 1, 2, \cdots, n), \qquad (10)$$

მაშინ A_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეები ადგენს n-განზომილებიან მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს; A_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეებს ეწოდება კოვარიანტული ტენზორის კომპონენტები.

აქაც, ტენზორის კოვარიანტულ კომპონენტებს აღვნიშნავთ ზედა ინდექსებით, ხოლო კოვარიანტულ ტენზორის კომპონენტებს-ქვედა ინდექსებით.

ბოლოს, თუ $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ სისტემის მიმართ განსაზღვრულია A_i^j $(i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეები, რომლებიც კოორდინატთა (5′) გარდაქმნის დროს გარდაიქმნებიან შემდეგი ფორმულებით

$$\tilde{A}_k^s = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \cdot A_i^j \qquad (k, s = 1, 2, \cdots, n) \qquad (11)$$

მაშინ A_i^j $(i,j=1,2,\dots,n)$ ადგენს n-განზომილებიან მეორე რანგის შერეულ ტენზორს; A_i^j $(i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეებს ეწოდება შერეული ტენზორის კომპონენტები.

ცხადია, აფინური ორთოგონალური გარდაქმნის შემთხვევაში კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეული ტენზორები ერთმანეთს ემთხვევიან.

ანალოგიურად განიმარტება ორზე უფრო მაღალი რანგის კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეული ტენზორები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. შევადგინოთ წერტილის კოორდინატებისაგან შემდეგი სახის სიდიდეები:

$$dx^i dx^j \qquad (i,j=1,2,\dots,n).$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით

$$d\bar{x}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}dx^i \quad (k=1,2,\dots,n),$$

ამიტომ

$$d\bar{x}^k d\bar{x}^s = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j}dx^i dx^j \quad (k,s=1,2,\dots,n)$$

ამრიგად, $dx^i dx^j$ სიდიდეები გარდაიქმნება (9) ფორმულის მიხედვით; მაშასადამე, ეს სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორს.

პირიქით, მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორის კომპონენტები ისე გარდაიქმნება, როგორც წერტილის დიფერენციალებისაგან შედგენილი $dx^i dx^j$ სიდიდეები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. შევადგინოთ $\varphi(x^1,x^2,\dots,x^n)$ სკალარის კერძო წარმოებულებისაგან შემდეგი სახის სიდიდეები:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \quad (i,j=1,2,\dots,n)$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^k}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k} \quad (k=1,2,\dots,n),$$

ამიტომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^s} \quad (k,s=1,2,\dots,n),$$

ამრიგად, $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}$ სიდიდეები გარდაიქმნება (10) ფორმულების მიხედვით; მაშასადამე, ეს სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს.

პირიქით, მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორის კომპონენტები ისე გარდაიქმნება , როგორც სკალარის კერძო წარმოებულებისაგან შედგენილი $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}$ სიდიდეები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. მოვიყვანოთ აქ მეორე რანგის შერეული ტენზორის ერთი საინტერესო მაგალითი. ვთქვათ,

$$\delta_j^i=\delta_i^j=\begin{cases}1, & \text{როცა } i=j\\ 0, & \text{როცა } i\neq j\end{cases} \qquad (i,j=1,2,\dots,n),$$

ვუწოდოთ δ_i^j სიმბოლოს კრონეკერის[1] სიმბოლო.

[1] L. Kroneker (1823–1891)-გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი.

ვაჩვენოთ, რომ $\delta_i^j \ (i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეები ადგენს შერეულ ტენზორს; ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\overset{\sim}{\delta}{}_k^s = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j}\delta_i^j .$$

მართლაც, რადგან განმარტებით ყველა წევრი, რომელიც შეესაბამება $i \neq j$, ნულია, ამიტომ

$$\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\delta_i^j .$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j}\delta_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} .$$

მეორე მხრივ, რადგან

$$\bar{x}^s\left[x^1(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^n),\ x^2(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^n),\dots,x^n(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^n)\right] \equiv \bar{x}^s \quad (s=1,2,\dots,n),$$

ამიტომ ამ ტოლობის გაწარმოება $\bar{x}^k$-ით მოგვცემს[1]:

$$\overset{\sim}{\delta}{}_k^s \equiv \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \quad (k,s=1,2,\dots,n),$$

ე.ი.

$$\overset{\sim}{\delta}{}_k^s = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j}\delta_i^j \quad (k,s=1,2,\dots,n),$$

რაც ამტკიცებს, რომ $\delta_i^j \ (i,j=1,2,\dots,n)$ ადგენს მეორე რანგის შერეულ ტენზორს.

შევნიშნოთ, რომ კრონეკერის სიმბოლოს გამოყენებით შესაძლებელია გარკვეული ჩასმების ჩატარება, ე.ი. ერთი ინდექსის შეცვლა მეორეთი; მართლაც, თუ ვისარგებლებთ განმარტებით, ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$A^k\delta_k^s = A^s,\quad A_k\delta_s^k = A_s \quad \text{და სხვ.}$$

§ 3. ძირითადი ოპერაციები ტენზორებზე

როგორც მეორე რანგის აფინური ორთოგონალური ტენზორის შემთხვევაში აქაც:

1. ორი ერთნაირი ბუნების[2] ტენზორის ჯამი ეწოდება ისეთ ტენზორს, რომლის კომპონენტებია მოცემული ტენზორების შესაბამისი კომპონენტების ჯამი.

2. ტენზორის სკალარზე ნამრავლი ისეთი ტენზორია, რომლის კომპონენტებია მოცემული ტენზორის კომპონენტების სკალარზე ნამრავლი;

3. ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული რომელიმე ორი ინდექსის მიმართ, თუ მისი კომპონენტები არ იცვლება აღნიშნული ინდექსების გადასმით; ცხადია, მეორე რანგის n – განზომილებიან სიმეტრიულ ტენზორს აქვს $\frac{n(n+1)}{2}$ რაოდენობის განსხვავებული კომპონენტი.

[1] რადგან $\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^n$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი სიდიდეებია, ამიტომ $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i$.

[2] ე.ი. რომლებსაც აქვთ ერთნაირი რაოდენობის ქვედა და ზედა ინდექსები.

4. ტენზორს ეწოდება ანტისიმეტრიული რომელიმე ორი ინდექსის მიმართ, თუ მისი კომპონენტები იცვლიან მხოლოდ ნიშანს აღნიშნული ინდექსების გადასმისას; ცხადია, მეორე რანგის n-განზომილებიან ანტისიმეტრიულ ტენზორს აქვს $\frac{n(n-1)}{2}$ რაოდენობის განსხვავებული კომპონენტი.

5. ორი ტენზორის ნამრავლი. სიმარტივისათვის ავიღოთ ორი $A_\alpha^\beta(a_\alpha^\beta)$ და $B_{\gamma\delta}^s(b_{\gamma\delta}^s)$ ტენზორი, რომელთაგან პირველი მეორე რანგის შერეული ტენზორია, ხოლო მეორე მესამე რანგის ტენზორი–ორჯერ კოვარიანტული და ერთხელ კონტრავარიანტული; გავამრავლოთ პირველი ტენზორის ყოველი კომპონენტი მეორე ტენზორის ყველა კომპონენტზე, ამით მივიღებთ n^5 რაოდენობის $a_\alpha^\beta b_{\gamma\delta}^s$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,s=1,2,\dots,n)$ რიცხვებს. ვაჩვენოთ, რომ ეს რიცხვები ადგენს მეხუთე რანგის $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta s}=(a_\beta^\alpha b_{\gamma\delta}^s)$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,s=1,2,\dots,n)$ ტენზორს–სამჯერ კოვარიანტულს და ორჯერ კონტრავარიანტულს.

მართლაც, გვაქვს:

$$\tilde{a}_i^k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\beta} a_\alpha^\beta \quad (i,k=1,2,\dots,n),$$

$$\tilde{b}_{lm}^r = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^l}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^m}\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^s} b_{\gamma\delta}^s \quad (l,m,r=1,2,\dots,n),$$

ამიტომ მათი გამრავლება მოგვცემს:

$$\tilde{a}_i^k \tilde{b}_{lm}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^l}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^m}\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^s} a_\alpha^\beta b_{\gamma\delta}^s \quad (i,k,l,m,r=1,2,\dots,n),$$

ანუ

$$\tilde{c}_{ilm}^{ks} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^l}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^m}\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^s} c_{\alpha\gamma\delta}^{\beta s} \quad (i,l,m,k,r=1,2,\dots,n)$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta s}=(c_{\alpha\gamma\delta}^{\beta s})$ არის ტენზორი სამჯერ კოვარიანტული და ორჯერ კონტრავარიანტული.

ასეთნაირად აგებულ ტენზორს ეწოდება ორი ტენზორის ნამრავლი.

6. ტენზორის შეკუმშვა; ინდექსების აწევა და დაწევა. განვიხილოთ ეგრეთ წოდებული ინდექსების შეკუმშვის ოპერაცია. ავიღოთ რომელიმე შერეული ტენზორი, რომელიც ერთხელ მაინც არის კოვარიანტული და ერთხელ მაინც კონტრავარიანტული. გარკვეულობისათვის ავიღოთ $A_{\alpha\beta}^\gamma(a_{\alpha\beta}^\gamma)$ ტენზორი. ამ ტენზორს აქვს n^3 კომპონენტი; მივიღოთ აქ $\gamma=\beta$ და აჯამვა მოვახდინოთ β ინდექსით 1-დან n-მდე; ამ ოპერაციის შედეგად ჩვენ მივიღებთ შემდეგი სახის რიცხვს:

$$b_\alpha = a_{\alpha\beta}^\beta \qquad (\alpha=1,2,\dots,n)$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს n რიცხვი ადგენს კოვარიანტულ $B_\alpha(a_{\alpha\beta}^\beta)$ ტენზორს[1].

[1] ე.ი. პირველი რანგის ტენზორს.

მართლაც, რადგან $A^{\beta}_{\alpha\gamma}$ არის ტენზორი, ამიტომ

$$\tilde a^{l}_{ik} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}} \frac{\partial \tilde x^{l}}{\partial x^{\gamma}} a^{\gamma}_{\alpha\beta} \qquad (i, k, l = 1, 2, \cdots, n).$$

მივიღოთ ამ ფორმულაში $l = k$ და აჯამვა ჩავატაროთ k ინდექსით, მაშინ გვექნება:

$$\tilde a^{k}_{ik} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}} \frac{\partial \tilde x^{k}}{\partial x^{\gamma}} a^{\gamma}_{\alpha\beta},$$

მაგრამ, რადგან

$$\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}} \frac{\partial \tilde x^{k}}{\partial x^{\gamma}} = \delta^{\beta}_{\gamma},$$

ამიტომ

$$\tilde a^{k}_{ik} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} \delta^{\beta}_{\gamma} a^{\gamma}_{\alpha\beta},$$

თუ გარკვეულობისათვის ვისარგებლებთ ჯამის სიმბოლოთი, გვექნება:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} \delta^{\beta}_{\gamma} a^{\gamma}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} \delta^{\beta}_{\gamma} a^{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

ახლა, თუ ჯერ აჯამვას ჩავატარებთ γ-თი, რადგან $\delta^{\beta}_{\gamma} = 0$, როცა $\gamma \neq \beta$, ამიტომ აჯამვის შედეგად დარჩება:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} \delta^{\beta}_{\gamma} a^{\gamma}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} a^{\beta}_{\alpha\beta},$$

მაგრამ $\sum\limits_{\beta=1}^{n} a^{\beta}_{\alpha\beta} = b_{\alpha}$ და, მაშასადამე,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} \cdot b_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}} b_{\alpha},$$

რომელიც არის კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტების გარდაქმნის ფორმულა (ე.ი. არის $\tilde b_{i}$); მაშასადამე, $B_{\alpha} = A^{\beta}_{\alpha\beta}$ კოვარიანტული ვექტორია.

ამ ოპერაციას ეწოდება ტენზორის შეკუმშვა β და γ ინდექსების მიმართ[1].

ბოლოს, განვიხილოთ $A_{ij}(a_{ij})$ და $B^{k}_{s}(b^{k}_{s})$ ტენზორები; მოვახდინოთ მა-თი ჯერ გადამრავლება და შემდეგ შეკუმშვა რომელიმე წყვილი ინდექსის მიმართ, მაგალითად, j და k ინდექსების მიმართ, ცხადია, მივიღებთ მეორე რანგის $C_{is}(c_{is})$ ტენზორს, სადაც

$$c_{is} = a_{ik} b^{k}_{s} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

ამ ოპერაციას ეწოდება B^{k}_{s} ტენზორის ზედა ინდექსის დაწევა A_{ij} ტენზორის საშუალებით.

სრულიად ასევე, თუ მოცემულია $A^{ij}(a^{ij})$ და $B^{s}_{k}(b^{s}_{k})$ ტენზორები, მაშინ

მათი ჯერ გადამრავლება და შემდეგ შეკუმშვა, მაგალითად, j და k ინდექსე-ბის მიმართ, მოგვცემს მეორე რანგის $C^{is}(c^{is})$ ტენზორს; სადაც

$$c^{is} = a^{ik} b^{s}_{k} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

---

[1] ამ ოპერაციას ზოგჯერ შინაგან აჯამვას უწოდებენ.

ამ ოპერაციას ეწოდება B_s^k ტენზორის ქვედა ინდექსის აწევა A^{ij} ტენზორის საშუალებით.

მოვიყვანოთ აქ სიდიდეთა ტენზორული ბუნების დადგენის ერთი მარტივი ხერხი. ვთქვათ, კოორდინატთა $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ სისტემის მიმართ აღებულია ორი კონტრავარიანტული ვექტორის u^k $(k=1,2,\cdots,n)$ და v^s $(s=1,2,\cdots,n)$ კომპონენტები და n^2 სიდიდეთა A_{ks} $(k,s=1,2,\cdots,n)$ სიმრავლე.

თუ $A_{ks}u^kv^s$ ნამრავლი ინვარიანტია, მაშინ A_{ks} $(k,s=1,2,\cdots,n)$ სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს;

ასევე, თუ u_k $(k=1,2,\cdots,n)$ და V_s $(s=1,2,\cdots,n)$ ორი კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტებია, ხოლო A^{ks} $(k,s=1,2,\cdots,n)$ n^2 სიდიდეთა სიმრავლე და $A^{ks}u_kV_s$ ნამრავლი ინვარიანტია, მაშინ A^{ks} $(k,s=1,2,\cdots,n)$ სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს;

ბოლოს, თუ u^k $(k=1,2,\cdots,n)$ და V_s $(s=1,2,\cdots,n)$ ორი კონტრავარიანტული და კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტებია, ხოლო A_k^s $(k,s=1,2,\cdots,n)$ n^2 სიდიდეთა სიმრავლე და $A_k^s u^k V_s$ ნამრავლი ინვარიანტია, მაშინ A_k^s $(k,s=1,2,\cdots,n)$ სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის შერეულ ტენზორს.

მართლაც, პირობის ძალით

$$\breve{A}_{ij}\,\breve{u}^i\breve{v}^j = A_{ks}u^kv^s,$$

მაგრამ

$$\breve{u}^i = \frac{\partial \breve{x}^i}{\partial x^k}u^k, \quad \breve{v}^j = \frac{\partial \breve{x}^j}{\partial x^s}v^s \quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

ამიტომ

$$\left(\breve{A}_{ij}\,\frac{\partial \breve{x}^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial \breve{x}^j}{\partial x^s} - A_{ks}\right)u^kv^s = 0$$

რადგან u^k და v^s $(k,s=1,2,\cdots,n)$ ორი ნებისმიერი ვექტორის კომპონენტებია, ამიტომ

$$A_{ks} = \frac{\partial \breve{x}^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial \breve{x}^j}{\partial x^s}\,\breve{A}_{ij} \qquad (k,s=1,2,\cdots,n),$$

რაც ამტკიცებს, რომ A_{ks} $(k,s=1,2,\cdots,n)$ სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს; ასევე დამტკიცდება მოყვანილი ხერხის მართებულება სხვა შემთხვევებშიაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $\vec{F}$ ძალის ტენზორული ბუნება; რადგან წერტილის კოორდინატების dx^i დიფერენციალები ადგენს კონტრავარიანტულ ვექტორს; ხოლო $\vec{F}(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ ძალის ელემენტარული მუშაობა არის სკალარული $F_k dx^k$ ნამრავლი, ამიტომ $\vec{F}$ ძალა კოვარიანტული ვექტორია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ავიღოთ კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორები, რომელთა კომპონენტებია:

$$A_k \quad (k=1,2,\cdots,n) \quad \text{და} \quad B^s \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

გადავამრავლოთ ერთმანეთზე ეს ვექტორები და შევკრიბოთ მიმართ[illegible] K და S ინდექსებით, მივიღებთ $A_k B^k$ ინვარიანტს, რომელსაც ეწოდება აღებული ვექტორების სკალარული ნამრავლი[1].

§ 4. ფუნდამენტური ტენზორი

ევკლიდეს n-განზომილებიან E_n სივრცეში რკალის ds ელემენტი (სივრცის მეტრიკა) დეკარტის მართკუთხა $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ სისტემის მიმართ გამოსახულია ფორმულით $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$.

როგორც აღვნიშნეთ, რიმანმა წრფივი ელემენტის ეს ცნება განაზოგადა ნებისმიერ n-განზომილებიანი R_n მრავალსახეობის მიმართ და რკალის ელემენტი განმარტა სიმეტრიული დიფერენციალური კვადრატული ფორმით:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j \qquad (g_{ij} = g_{ji}), \tag{1}$$

სადაც g_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ წერტილის $x^1, x^2, \dots, x^n$ კოორდინატების უწყვეტი წარმოებადი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$g = |g_{ij}| \neq 0. \tag{2}$$

იგულისხმება, რომ კვადრატული (1) ფორმა დადებითად განსაზღვრულია.

რადგან წერტილის კოორდინატების dx^i $(i=1,2,\dots,n)$ დიფერენციალები ადგენენ კონტრავარიანტულ ვექტორს, ხოლო ds^2 არის ინვარიანტი, ამიტომ, ცხადია, g_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ სიდიდეები ადგენენ მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს; ვუწოდოთ ამ ტენზორს სივრცის კოვარიანტული ფუნდამენტური ტენზორი.

შევნიშნოთ, რომ, თუ მიცემულია სივრცის ფუნდამენტური ტენზორი, მისი საშუალებით მარტივად განისაზღვრება სივრცის ყველა ელემენტი.

განვიხილოთ რიმანის n-განზომილებიანი კოორდინატული $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ სივრცე; ვთქვათ, ამ სივრცეში მეტრიკა განსაზღვრულია (1) ფორმულით; ავიღოთ სივრცეში ორი მეზობელი $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ და $N(x^1+dx^1, x^2+dx^2, \dots, x^n+dx^n)$ წერტილი; რადგან M წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი არის მრუდწირული $x^1, x^2, \dots, x^n$ კოორდინატების ფუნქცია, ამიტომ, მაღალი რიგის სიზუსტით, გვექნება:

$$\overrightarrow{MN} = d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\,dx^i.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{e}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

ცხადია, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია; მივიღოთ ეს ვექტორები ლოკალური კოორდინატთა სისტემის ბაზისის ვექტორებად (ლოკალური ბაზისი); ცხადია, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ვექტორები მდებარეობს სათანადო საკოორდინატო

[1] აფინური ორთოგონალური ვექტორების შემთხვევაში ეს ოპერაცია იძლევა ჩვეულებრივ სკალარულ ნამრავლს.

[illegible] მახლობელ M წერტილში; ასეთ შემთხვევაში dx^i $(i=1,2,\dots,n)$ სიდიდეები იქნება $\overrightarrow{MN}=d\vec{r}$ ვექტორის კომპონენტები $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ ბაზისში.

აღვნიშნოთ, სივრცის ყოველ $M(x^1,x^2,\dots,x^n)$ წერტილზე შეიძლება ლოკალური კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავე M წერტილშია, ხოლო ბაზისის ვექტორებია: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}=\vec{e}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$, განვიხილოთ მეტრიკული საკოორდინატო წირების მხებებზე: ds იყოს მანძილი ორ მეზობელ წერტილს შორის, ე.ი.

$$ds^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}dx^i\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}dx^j=\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}dx^i dx^j,$$

სადაც (3)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=g_{ij}\quad (i,j=1,2,\dots,n).$$

ახლა, სივრცის ყოველ $M(x^1,x^2,\dots,x^n)$ წერტილს შევუსაბამოთ ახალი $(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n)$ წერტილი, რომლის $\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n$ კოორდინატები ძველ $x^1,x^2,\dots,x^n$ კოორდინატებთან დაკავშირებულია ტოლობებით:

$$\tilde{x}^k=\tilde{x}^k(x^1,x^2,\dots,x^n)\qquad (k=1,2,\dots,n).\tag{4}$$

ისე, როგორც ვიცით (§ 2), მივიღოთ, რომ $\tilde{x}^k$ ფუნქციები, მათი განსაზღვრის არეში, ცალსახა უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია და სათანადო ფუნქციონალური დეტერმინანტი:

$$\gamma=\frac{D(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n)}{D(x^1,x^2,\dots,x^n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^n}\\ \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\tilde{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial\tilde{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\tilde{x}^n}{\partial x^n}\end{vmatrix}\neq 0\ ;$$

ასეთ შემთხვევაში (4) სისტემა ამოიხსნება $x^1,x^2,\dots,x^n$ კოორდინატების მიმართ და გვექნება:

$$x^s=x^s(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n)\qquad (s=1,2,\dots,n).\tag{5}$$

(5) ფორმულები გვაძლევს კოორდინატთა (4) გარდაქმნის შებრუნებულ გარდაქმნას, მასთან

$$\tilde{\gamma}=\frac{D(x^1,x^2,\dots,x^n)}{D(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n)}=\frac{1}{\gamma}.$$

თუ აღვნიშნავთ $\tilde{g}$ -ით დეტერმინანტს

$$\begin{vmatrix}\tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \cdots & \tilde{g}_{1n}\\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \cdots & \tilde{g}_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{g}_{n1} & \tilde{g}_{n2} & \cdots & \tilde{g}_{nn}\end{vmatrix},$$

მაშინ, რადგან

$$\tilde{g}_{ks}=\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^s}g_{ij}\qquad (k,s=1,2,\dots,n),$$

[illegible] დეტერმინანტების გამრავლების წესით დავრწმუნდებით, რომ

$$\tilde{g}=\tilde{\gamma}^2\cdot g.\tag{6}$$

ახლა, g_{ij} ტენზორისა და ნებისმიერი კონტრავარიანტული A^k ვექტორის[1] საშუალებით შეიძლება შევადგინოთ კოვარიანტული A_i ვექტორი შემდეგი ტოლობით:

$$A_i = g_{ik} A^k \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{7}$$

მართლაც, რადგან

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} \bar{A}^p, \quad g_{ik} = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \bar{g}_{qr}.$$

ამიტომ

$$A_i = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \bar{g}_{qr} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} \bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \delta^r_p \bar{g}_{qr} \bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \bar{g}_{qp} \bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \bar{A}_q.$$

რაც ამტკიცებს, რომ A_i კოვარიანტული ვექტორია.

A_i და A^k შეიძლება განვიხილოთ, მეტრიკული g_{ik} ტენზორის მიმართ, როგორც ერთი და იგივე ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტები;

ამრიგად, (7) ფორმულა იძლევა სივრცეში ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტებიდან კოვარიანტული კომპონენტებზე გადასვლას, რასაც, ზოგჯერ, ინდექსების დაწევას უწოდებენ. ინდექსების დაწევა შეიძლება ჩავატაროთ აგრეთვე მეორე და უფრო მაღალი რანგის ტენზორებზედაც; ასე, მაგალითად, ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$A_{ij} = g_{ip} A^p_j, \quad A^k_i = g_{ip} A^{pk} \text{ და სხვ.}$$

აქაც A_{ij}, A^{pk} და A^k_i შეიძლება განვიხილოთ, მეტრიკული g_{ij} ტენზორის მიმართ, როგორც ერთი და იგივე ტენზორის კოვარიანტული, კონტრავარიანტული და შერეული კომპონენტები.

ახლა, სივრცის კოვარიანტული მეტრიკული g_{ij} ტენზორისაგან ავაგოთ სივრცის <u>კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორი</u> შემდეგი ფორმულით:

$$g^{ks} = \frac{G_{ks}}{g} \quad (k, s = 1, 2, \cdots, n), \tag{8}$$

სადაც

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix},$$

ხოლო G_{ks} არის g დეტერმინანტის g_{ks} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება.

მართლაც, რადგან $g_{ij} = g_{ji}$, ამიტომ, ცხადია, G_{ij} ალგებრული დამატება იქნება სიმეტრიული, ე.ი. $G_{ij} = C_{ji}$.

მეორე მხრივ, დეტერმინანტების გამრავლების წესით

$$g_{ik} G_{ks} = g_{ik} G_{sk} = g \delta^s_i \quad (i, s = 1, 2, \cdots, n)$$

---

[1] შემდეგში ჩვენ ნაცვლად „A_k ($k = 1, 2, \cdots, n$) სიდიდეები ადგენენ ვექტორს" მოკლედ ვიტყვით „A_k ვექტორი". ასევე ტენზორის შემთხვევაშიაც.

მაშასადამე, $g_{ik} g^{ks} = \delta_i^s \quad (i, s = 1, 2, \dots, n).$ (9)

რადგან δ_i^s და g_{ik} მეორე რანგის ტენზორებია, ამიტომ g^{ks} სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს (კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორი).

ახლა, თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$g^* = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & \dots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \dots & g^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g^{n1} & g^{n2} & \dots & g^{nn} \end{vmatrix},$$

მაშინ (9) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$g \cdot g^* = 1. \qquad (10)$$

g^{ij} ტენზორის გამოყენებით შეიძლება ჩატარდეს ინდექსების აწევა შემდეგი ტოლობებით:

$$A^i = g^{ip}A_p, \quad A^{ik} = g^{ip}A_p^k, \quad A_i^k = g^{kp}A_{ip} \text{ და სხვ.}$$

აქაც, A^i და A_p (ასევე A^{ik}, A_{ip} და A_p^k) შეიძლება განვიხილოთ, g^{ik} ტენზორის მიმართ, როგორც ერთი და იგივე ვექტორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები (ერთი და იგივე ტენზორის კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეული კომპონენტები).

ახლა აღვნიშნოთ

$$g_i^s = g_{ik} g^{ks} \quad (i, s = 1, 2, \dots, n) \qquad (11)$$

და ვუწოდოთ მას შერეული ფუნდამენტური ტენზორი.

რადგან (9) ტოლობით

$$g_{ik} g^{ks} = \delta_i^s,$$

ამიტომ

$$g_i^s = \delta_i^s. \qquad (12)$$

g_i^s (ან რაც იგივე δ_i^s) ტენზორის გამოყენებით შეიძლება ჩატარდეს ერთი ინდექსის მეორე ინდექსით შეცვლა შემდეგი ტოლობებით:

$$A_i = g_i^k A_k, \qquad A_{ki} = g_i^s A_{ks} \quad \text{და სხვ.}$$

ზოგჯერ g_i^s ტენზორს ჩასმის ტენზორს უწოდებენ.

ბოლოს, დავუშვათ, R_n სივრცეში, სადაც რკალის ds ელემენტი განსაზღვრულია ფორმულით

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (g_{ij} = g_{ji}),$$

6.

აღებულია რომელიმე ℓ წირი;

$$x^i = x^i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

იყოს ℓ წირის პარამეტრული სახის განტოლებები; ვიგულისხმოთ, რომ განსახილველ არეში $x^i(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია; ვთქვათ, ℓ წირის M_0 წერტილს ეთანადება t პარამეტრის t_0 მნიშვნელობა, ხოლო M_1 წერტილს — t_1 მნიშვნელობა; ასეთ შემთხვევაში წირის $\breve{M_0M_1}$ რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$\breve{M_0M_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt. \tag{13}$$

მკითხველს ვთხოვთ აჩვენოს შემდეგ დებულებების მართებულება:

1. თუ A^i და B^j ორი კონტრავარიანტული ვექტორია, მაშინ A^iB^j $(i,j=1,2,\ldots,n)$ მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია;

2. თუ A_i და B_j ორი კოვარიანტული ვექტორია, მაშინ A_iB_j $(i,j=1,2,\ldots,n)$ მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორია;

3. თუ A^i და B_j კონტრავარიანტული და კოვარიანტული ვექტორებია, მაშინ A^iB_j $(i,j=1,2,\ldots,n)$ მეორე რანგის შერეული ტენზორია.

4. თუ $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ორი ვექტორია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება ფორმულით $\vec{A}\cdot\vec{B} = g_{ij}A^iB^j = A^iB_i = A_iB^i = g^{ij}A_iB_j$.

5. $\vec{A}$ ვექტორის სიგრძე განისაზღვრება ფორმულით

$$|\vec{A}| = \sqrt{g_{ij}A^iA^j} = \sqrt{g^{ij}A_iA_j} = \sqrt{A^iA_i}\,. \tag{14}$$

ხოლო კუთხე $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებს შორის — ფორმულით.

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\cdot\sqrt{g_{ij}B^iB^j}} = \frac{g^{ij}A_iB_j}{\sqrt{g^{ij}A_iA_j}\cdot\sqrt{g^{ij}B_iB_j}} = \frac{A_iB^i}{\sqrt{A_iA^i}\cdot\sqrt{B_iB^i}}\,. \tag{15}$$

გეოდეზიური წირი. როგორც აღვნიშნეთ, თუ R_n სივრცეში აღებულია რომელიმე ℓ წირი, რომლის პარამეტრული სახის განტოლებებია

$$x^i = x^i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

სადაც $x^i(t)$ განსახილველ არეში უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია და წირის M_0 და M_1 წერტილებს ეთანადება t პარამეტრის t_0 და t_1 მნიშვნელობები, მაშინ წირის $\breve{M_0M_1}$ რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$\breve{M_0M_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt\,. \tag{16}$$

წირს, რომელიც R_n სივრცეში აღებულ ორ M_0 და M_1 წერტილზე გადის და აქვს ამ წერტილებზე გამავალი ყველა სხვა წირთან შედარებით უმცირესი სიგრძე — R_n სივრცის გეოდეზიური წირი ეწოდება.

რადგან (16) გამოსახულებაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია პირველი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა $\frac{dx^i}{dt}$ წარმოებულების მიმართ, ამიტომ, როგორც ცნობილია (იხ. ა.რუხაძე, უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტომი II, თავი XIII), (16) ინტეგრალი წარმოადგენს ფუნქციონალს, ე.ი. დამოკიდებულია წირის არჩევაზე და არა ერთი და იგივე წირზე t პარამეტრის არჩევაზე; ვთქვათ, l_0 არის საძიებელი გეოდეზიური წირი, რომლის ბუნებრივი პარამეტრი იქნის s. მასთან, ვთქვათ, M_0 წერტილის შეესაბამება s პარამეტრის s_0 მნიშვნელობა, ხოლო M_1 წერტილს– s_1 მნიშვნელობა. ვიპოვოთ განტოლებები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს გეოდეზიური წირი.

გეოდეზიური წირი, ცხადია, აკმაყოფილებს (16) ფუნქციონალის მინიმუმის აუცილებელ პირობას, ე.ი. ეილერის განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dx^i}{dt}\right)}-\frac{\partial F}{\partial x^i}=0 \qquad (i=1,2,\dots,n), \qquad (17)$$

სადაც
$$F=\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}=\frac{ds}{dt}.$$

რადგან
$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dx^i}{dt}\right)}=\frac{1}{2\frac{ds}{dt}}\frac{\partial\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dx^i}{dt}\right)}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}g_{ij}\frac{dx^j}{dt}\,^{1)}, \quad \frac{\partial F}{\partial x^i}=\frac{1}{2\frac{ds}{dt}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dx^i}{dt}\right)}=\frac{g_{ij}}{\frac{ds}{dt}}\frac{d^2x^j}{dt^2}+\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt}-\frac{g_{ij}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^j}{dt},$$

ამიტომ (17) სისტემა მიიღებს სახეს:
$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}-\frac{g_{ij}}{\frac{ds}{dt}}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^j}{dt}=0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (a)$$

ახლა, თუ $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$ შესაკრებში გადავსვამთ j და k ინდექსებს, გვექნება:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt},$$

ამიტომ (a) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}-\frac{g_{ij}}{\frac{ds}{dt}}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^j}{dt}=0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (18)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\equiv\Gamma_{jk,i}=\Gamma_{i,jk} \qquad (19)$$

და ვუწოდოთ $\Gamma_{jk,i}$ სიმბოლოს კრისტოფელის[2] პირველი გვარის სიმბოლო[3].

---

[1] აქ მნიშვნელში 2-ანი შეიკვეცა, რადგან $g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$ სიმეტრიული კვადრატული ფორმაა, რომლის წარმოებული $\frac{dx^i}{dt}$-თი არის $2g_{ij}\frac{dx^j}{dt}$.

[2] E. Christoffel (1829–1890)-გერმანელი მათემატიკოსი.

[3] ზოგჯერ მას $\left[{}_{j}{}^{i}{}_{k}\right]$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ და უწოდებენ კრისტოფელის ფრჩხილს.

ცხადია, ქრისტოფელის $\Gamma_{jk,i}$ სიმბოლო სიმეტრიულია j და k ინდექსების მიმართ.

ამრიგად, გვაქვს

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2}+\Gamma_{jk,i}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}-\frac{g_{ij}}{\frac{ds}{dt}}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^j}{dt}=0 \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (18')$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობა g^{il}-ზე და მოვახდინოთ აჯამვა i ინდექსით, რადგან $g_{ij}g^{il}=\delta_j^l$, ამიტომ მივიღებთ:

$$\frac{d^2x^l}{dt^2}+g^{il}\Gamma_{jk,i}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}-\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^l}{dt}=0 \quad (l=1,2,\dots,n). \quad (19)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$g^{il}\Gamma_{jk,i}=\Gamma_{jk}^l \quad (20)$$

და ვუწოდოთ Γ_{jk}^l სიმბოლოს ქრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლო[1].

ცხადია, Γ_{jk}^i სიმბოლოც სიმეტრიულია j და k ინდექსების მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ დეკარტის სისტემის შემთხვევაში g_{ij} მუდმივი სიდიდეებია და, მაშასადამე, ქრისტოფელის სიმბოლოები იქნება ნული.

ახალ აღნიშვნებში განტოლებათა (19) სისტემა ასე გადაიწერება:

$$\frac{d^2x^l}{dt^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}-\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^l}{dt}=0 \quad (l=1,2,\dots,n). \quad (21)$$

ამრიგად, R_n სივრცეში გეოდეზიური წირი აკმაყოფილებს განტოლებათა (21) სისტემას.

§ 5. ვექტორისა და ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული

როგორც ვნახეთ, ალგებრულ ოპერაციებს ტენზორებზე ისევ ტენზორებამდე მივყავართ, მაგრამ ეს არ შეიძლება ითქვას გაწარმოების ოპერაციის მიმართ; მართლაც, როგორც ვიცით, $\varphi(x^1,x^2,\dots,x^n)$ სკალარის კერძო $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ $(i=1,2,\dots,n)$ წარმოებულები ადგენენ კოვარიანტულ ვექტორს[2].

$A_i(x^1,x^2,\dots,x^n)$ $(i=1,2,\dots,n)$ იყოს კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტები, მაშინ

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^i}\bar A_j\right)=\frac{\partial\bar x^l}{\partial x^k}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^i}\frac{\partial\bar A_j}{\partial\bar x^l}+\bar A_j\frac{\partial^2\bar x^j}{\partial x^i\partial x^k}.$$

---

[1] ზოგჯერ მას $\left\{ {i \atop j\ k} \right\}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

[2] ვუწოდოთ ამ ვექტორს $\varphi(x^1,x^2,\dots,x^n)$ სკალარის გრადიენტი და აღვნიშნოთ grad φ.

აქ $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ არ არის ტენზორი; იგი იქნება ტენზორი, თუ $\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \partial x^k} = 0$.

უკანასკნელს კი ადგილი აქვს მხოლოდ აფინური გარდაქმნის შემთხვევაში. ამ მიზეზით, ზოგად შემთხვევაში, საჭირო შეიქმნა ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულის შემოყვანა, რომელიც უკვე იქნება ტენზორი.

$d\vec{r}$ იყოს სივრცის მცირე ლოკალური $\overline{MN}$ ვექტორი, მაშინ, როგორც ვიცით, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{e}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ ლოკალური ბაზისის ვექტორებია; ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} \qquad (i,j = 1,2,\dots,n). \tag{1}$$

დავშალოთ $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$ ვექტორი $\vec{e}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ ბაზისის მიხედვით; ამისათვის, ერთის მხრივ, გავაწარმოოთ $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = g_{ij}$ ტოლობა x^k-ით, გვექნება:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}\vec{e}_j + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}\vec{e}_i = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}; \tag{2_1}$$

აქ, თუ გადავსვამთ i, j და k ინდექსებს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i}\vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i}\vec{e}_j = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}, \tag{2_2}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}\vec{e}_k = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}. \tag{2_3}$$

შევკრიბოთ (2_1) და (2_3) ტოლობები, მას ჯამს გამოვაკლოთ (2_2) და მხედველობაში მივიღოთ (2) ტოლობა, გვექნება:

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}\vec{e}_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) = \Gamma_{jk,i} \tag{3}$$

მეორე მხრივ, თუ $\Gamma^i_{jk} = g^{\beta\alpha}\Gamma_{jk,\alpha}$ ტოლობას გავამრავლებთ $g_{\alpha i}$-ზე, მივიღებთ:

$$g_{\alpha i}\cdot\Gamma^\alpha_{jk} = g_{\alpha i}\, g^{\beta\alpha}\Gamma_{jk,\alpha} = \delta_i^\beta\Gamma_{jk,\beta} = \Gamma_{jk,i},$$

ე.ი.

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha\,\Gamma^\alpha_{jk} = \Gamma_{jk,i} \tag{4}$$

ახლა (3) და (4) ტოლობების შედარება გვაძლევს:

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} = \Gamma^\alpha_{jk}\vec{e}_\alpha. \tag{5}$$

უკანასკნელი ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma^\alpha_{jk}\frac{\partial \vec{r}}{\partial_\alpha}. \tag{6}$$

ეს ფორმულა საშუალებას იძლევა $\vec F$ ვექტორის მეორე რიგის წარმოებულები გამოვსახოთ პირველი რიგის წარმოებულების საშუალებით[1].

თუ ვისარგებლებთ (3) ტოლობით, გვექნება:

$$\Gamma_{ik,\beta}+\Gamma_{i\beta,k}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\beta i}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{\beta}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta k}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^{k}}\right]=\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x^{i}},$$

ე.ი.

$$\Gamma_{ik,\beta}+\Gamma_{i\beta,k}=\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x^{i}}. \qquad (7)$$

შევისწავლოთ თუ როგორ გარდაიქმნება ქრისტოფელის სიმბოლოები კოორდი-ნატთა გარდაქმნის დროს. წინასწარ გავაწარმოოთ $\tilde g_{ij}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}}\cdot g_{\alpha\beta}$ ტოლობა $\tilde x^{k}$-თი, გვექნება:

$$\frac{\partial \tilde g_{ij}}{\partial \tilde x^{k}}=\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}}+\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\right)g_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \tilde x^{k}},$$

ანუ

$$\frac{\partial \tilde g_{ij}}{\partial \tilde x^{k}}=\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}}+\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\right)g_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}. \qquad (8)$$

ეს ფორმულა გვარწმუნებს, რომ $\frac{\partial \tilde g_{\alpha\beta}}{\partial \tilde x^{k}}$ არ წარმოადგენს ტენზორს. კერძოდ, აფინური გარდაქმნის შემთხვევაში $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}$ სიდიდეები ადგენს ტენზორს.

ახლა, ვისარგებლოთ (8) ტოლობით და გამოვიყვანოთ ქრისტოფელის სიმბოლოების გარდაქმნის ფორმულები; ამისათვის მოვახდინოთ (8) ტოლობაში i,j და k ინდექსების გადასმა, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \tilde g_{jk}}{\partial \tilde x^{i}}=\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{j}\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}}+\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{j}}\right)g_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}},$$

$$\frac{\partial \tilde g_{ki}}{\partial \tilde x^{j}}=\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{k}\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{i}}+\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \tilde x^{i}\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{k}}\right)g_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}, \qquad (9)$$

რადგან ყრუ ინდექსების შეცვლას არა აქვს მნიშვნელობა, ამიტომ (8) და (9) ტოლობები ასე გადავწეროთ:

$$\frac{\partial \tilde g_{ij}}{\partial \tilde x^{k}}=\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}}+\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\right)g_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}},$$

$$\frac{\partial \tilde g_{jk}}{\partial \tilde x^{i}}=\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{j}\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{k}\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{j}}\right)g_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}},$$

$$\frac{\partial \tilde g_{ki}}{\partial \tilde x^{j}}=\left(\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}}\right)g_{\beta\alpha}+\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde x^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde x^{k}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde x^{j}}\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\gamma}}.$$

- - - - - - - -

[1] შეიძლება ჩვენება, რომ $\vec F$ ვექტორის ყოველი რიგის წარმოებული გამოისახება პირველი რიგის წარმოებულის საშუალებით, რამდენჯერაც არ შევარჩევით.

ამ გამოსახულებიდან, თუ შევადგენთ ქრისტოფელის პირველი გვარის სიმბოლოს, მივიღებთ:

$$\bar\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar g_{ij}}{\partial \bar x^k} + \frac{\partial \bar g_{kj}}{\partial \bar x^i} - \frac{\partial \bar g_{ik}}{\partial \bar x^j}\right] = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar x^i \partial \bar x^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar x^j} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar x^k}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar x^j}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \quad (10)$$

ეს ფორმულა გვარწმუნებს, რომ ქრისტოფელის პირველი გვარის სიმბოლო არ წარმოადგენს ტენზორს.

ახლა, ვისარგებლოთ $\Gamma^j_{ik} = g^{j\beta}\Gamma_{ik,\beta}$ ტოლობით და ქრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლო ასე გადავწეროთ:

$$\bar\Gamma^j_{ik} = \bar g^{j\alpha}\bar\Gamma_{ik,\alpha} = \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar x^\alpha}{\partial x^\gamma} g^{\beta\gamma}\left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar x^i \partial \bar x^k} g_{\lambda\nu} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar x^k}\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar x^\alpha}\Gamma_{\lambda\nu,\mu}\right] =$$

$$= \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar x^i \partial \bar x^k}\delta^\lambda_\gamma g^{\beta\gamma} g_{\lambda\nu} + \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar x^k}\delta^\mu_\gamma g^{\beta\gamma}\Gamma_{\lambda\nu,\mu} = \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar x^i \partial \bar x^k}\delta^\beta_\nu +$$

$$+ \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar x^k} g^{\beta\mu}\Gamma_{\lambda\nu,\mu} = \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar x^i \partial \bar x^k} + \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar x^k}\Gamma^\beta_{\lambda\nu}.$$

ამრიგად, მივიღეთ ფორმულა:

$$\bar\Gamma^j_{ik} = \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar x^i \partial \bar x^k} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^j}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}. \quad (11)$$

ეს ფორმულა აგრეთვე გვარწმუნებს, რომ ქრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლო არ წარმოადგენს ტენზორს.

კერძოდ, აფინური გარდაქმნის შემთხვევაში ქრისტოფელის სიმბოლოები ატარებს ტენზორის ბუნებას.

ახლა, გავაწარმოოთ x^k-ით, ტოლობა

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix},$$

გვექნება:

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} & \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial g_{1n}}{\partial x^k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial x^k} & \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial g_{2n}}{\partial x^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_{n1}}{\partial x^k} & \frac{\partial g_{n2}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^k} \end{vmatrix}$$

ან, გაშლილად:

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}G_{11} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k}G_{12} + \ldots + \frac{\partial g_{1n}}{\partial x^k}G_{1n} + \ldots + \frac{\partial g_{n1}}{\partial x^k}G_{n1} + \frac{\partial g_{n2}}{\partial x^k}G_{n2} + \ldots + \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^k}G_{nn},$$

სადაც G_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ არის g დეტერმინანტის g_{ij} ელემენტების შესაბამისი ალგებრული დამატებები; რადგან $G_{ij} = g\cdot g^{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, ამიტომ

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = g\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,g^{ji}.$$

თუ ვისარგებლებთ (7) ტოლობით, გვექნება:

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = g \cdot g^{ji}\left(\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik}\right) = g\Gamma^j_{jk} + g\Gamma^i_{ik} = 2g\,\Gamma^i_{ik}$$

და, მაშასადამე

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\right). \tag{12}$$

ბოლოს, (11) ტოლობა გავამრავლოთ $\dfrac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^j}$ – ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^j}\tilde{\Gamma}^j_{ik} = \frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k} + \frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k}\delta^\ell_\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^k}\delta^\ell_\gamma\Gamma^\gamma_{\alpha\beta},$$

ანუ

$$\frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^j}\tilde{\Gamma}^j_{ik} = \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^k}\Gamma^\ell_{\alpha\beta}. \tag{13}$$

ახლა, ავიღოთ ტოლობა

$$\tilde{A}_k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^k}A_\alpha,$$

გავაწარმოოთ იგი $\tilde{x}^i$ – ით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k}A_\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^i},$$

ე.ი.

$$\frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k}A_\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{14}$$

ეს ფორმულა გვარწმუნებს, რომ კოვარიანტული ვექტორის წარმოებული არ წარმოადგენს ტენზორს.

ვისარგებლოთ (13) ტოლობით და (14) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \left(\frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^j}\tilde{\Gamma}^j_{ik} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^k}\Gamma^\ell_{\alpha\beta}\right)A_\ell,$$

ე.ი.

$$\frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^\alpha}\tilde{\Gamma}^\alpha_{ik}A_\ell + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^i}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\ell_{\alpha\beta}A_\ell\right),$$

საიდანაც

$$\frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{x}^i} - \tilde{\Gamma}^\alpha_{ik}\tilde{A}_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^i}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\ell_{\alpha\beta}A_\ell\right). \tag{15}$$

ამრიგად, $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\ell_{\alpha\beta}A_\ell$ $(\alpha,\beta = 1,2,\dots,n)$ სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს; ვუწოდოთ მას A_α $(\alpha = 1,2,\dots,n)$ ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული და აღვნიშნოთ $\nabla_\beta A_\alpha$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \Gamma^\alpha_{ik}A_\alpha = \nabla_i A_k \quad (k, i = 1, 2, \dots, n). \tag{16}$$

მარტივად შეიძლება ჩვენება, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

1. $\nabla_i\left(A_k + B_k\right) = \nabla_i A_k + \nabla_i B_k.$

$$2.\quad \nabla_j (c A_k) = c \nabla_j A_k .$$

$$3.\quad \nabla_i \varphi(x^1, x^2, \dots, x^n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \text{ (სკალარის კოვარიანტული წარმოებული)},$$

$$4.\quad \nabla_j (\varphi A_k) = \varphi \nabla_j A_k + A_k \nabla_j \varphi .$$

ახლა განვმარტოთ კონტრავარიანტული A^k $(k=1,2,\dots,n)$ ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული.

B_k $(k=1,2,\dots,n)$ იყოს ნებისმიერი კოვარიანტული ვექტორი; ცხადია,

$$A^k B_k = \varphi$$

არის სკალარი; გავაწარმოოთ იგი x^j-ით, გვექნება:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} B_k + A^k \frac{\partial B_k}{\partial x^j}.$$

ვისარგებლოთ (16) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} B_k + A^k \left(\nabla_j B_k + \Gamma^{\alpha}_{jk} B_\alpha \right).$$

უკანასკნელი ასე გადავწეროთ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{j\beta} A^\beta \right) B_k + A^k \nabla_j B_k .$$

რადგან აქ $\nabla_j B_k$ კოვარიანტული ტენზორია, ამიტომ $A^k \nabla_j B_k$ იქნება კოვარიანტული ვექტორი; მაშასადამე,

$$\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{j\beta} A^\beta \right) B_k$$

არის კოვარიანტული ვექტორი, საიდანაც ჩანს, რომ $\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{j\beta} A^\beta$ არის მეორე რანგის შერეული ტენზორი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\nabla_j A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{j\beta} A^\beta \quad (k, j = 1, 2, \dots, n) \tag{17}$$

და ვუწოდოთ მას კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული.

ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ $A^{ik} A_i B_k = \varphi$ (ან $A_{ik} A^i B^k = \varphi$) ფორმებს და გავაწარმოებთ x^j-ით, ჩვენ მივიღებთ ფორმულებს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^{\alpha}_{ij} A_{\alpha k} - \Gamma^{\alpha}_{jk} A_{i\alpha} &= \nabla_j A_{ik}, \\ \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^{i}_{j\alpha} A^{\alpha k} + \Gamma^{k}_{j\alpha} A^{i\alpha} &= \nabla_j A^{ik}, \\ \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} + \Gamma^{i}_{j\alpha} A^{\alpha}_k - \Gamma^{\alpha}_{jk} A^i_\alpha &= \nabla_j A^i_k . \end{aligned} \tag{18}$$

აქაც შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი ფორმულების მართებულობა:

$$1.\quad \nabla_j (A^{ik} + B^{ik}) = \nabla_j A^{ik} + \nabla_j B^{ik},$$

$$2.\quad \nabla_j (A^{ik} \cdot B_{sr}) = A^{ik} \nabla_j B_{sr} + B_{sr} \nabla_j A^{ik}.$$

გამოვთვალოთ $\nabla_j g_{ik}$; გვაქვს:

$$\nabla_j g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^\alpha_{ji} g_{\alpha k} - \Gamma^\alpha_{jk} g_{i\alpha} = -g_{\alpha k}\cdot g^{\alpha\beta}\Gamma_{ji,\beta} - g_{i\alpha} g^{\alpha\beta}\Gamma_{jk,\beta} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} =$$
$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \delta^\beta_k \Gamma_{ji,\beta} - \delta^\beta_i \Gamma_{jk,\beta} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma_{ji,k} - \Gamma_{jk,i} = 0.$$

ე.ი.
$$\nabla_j g_{ik} = 0. \qquad (19)$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ
$$\nabla_j g^{ik} = 0, \quad \nabla_j g_i^k = 0.$$
ე.ი. მეტრიკული ფუნდამენტური ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულები ნულის ტოლია (რიჩის[1] თეორემა).

ბოლოს, მოვიყვანოთ ვექტორისა და ტენზორის კონტრავარიანტული წარმოებულის ცნება; ავიღოთ კოვარიანტული $A_k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ვექტორი; მივიღოთ აღნიშვნა:

$$g^{ij}\nabla_j A_k = \nabla^i A_k \quad (k,i = 1, 2, \dots, n). \qquad (20)$$

ვუწოდოთ $\nabla^i A_k$ სიმბოლოს კოვარიანტული ვექტორის კონტრავარიანტული წარმოებული;

ასევე, აღვნიშნოთ:

$$\nabla^i A^k = g^{ij}\nabla_j A^k \quad (k, i = 1, 2, \dots, n) \qquad (21)$$

და ვუწოდოთ მას კონტრავარიანტული ვექტორის კონტრავარიანტული წარმოებული.

ცხადია, კონტრავარიანტული გაწარმოება ინდექსების მხოლოდ აწევით ხდება. ანალოგიურად განიმარტება ტენზორის კონტრავარიანტული წარმოებულები.

§ 6. ვექტორის პარალელური გადატანა რიმანის სივრცეში და კოვარიანტული წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა

დავუბრუნდეთ რიმანის R_n სივრცეს; იგი განვიხილოთ როგორც n-ის ტოლი ან n-ზე მეტი m-განზომილებიანი ევკლიდეს E_m სივრცის ქვესივრცე; $y_1, y_2, \dots, y_m$ იყოს E_m სივრცეში წერტილის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები, ხოლო $x^1, x^2, \dots, x^n$ იმავე წერტილის მრუდწირული კოორდინატები; ცხადია,

$$y_i = y_i(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \qquad (1)$$

განვიხილოთ R_n სივრცეში რომელიმე L წირი, რომლის ბუნებრივი პარამეტრი იყოს s. L წირის რკალის ds ელემენტი E_m სივრცეში არის
$$ds^2 = \sum_{j=1}^{m} dy_j^2, \qquad (2)$$

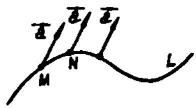
1 G. Ricci (1853–1925) — იტალიელი მათემატიკოსი, ტენზორული აღრიცხვის ერთ-ერთი ფუძემდებელი.

ხოლო იგივე ds ელემენტი R_n სივრცეში იქნება

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j,$$

სადაც

$$g_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{m} \frac{\partial y_\kappa}{\partial x^i} \frac{\partial y_\kappa}{\partial x^j} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n).$$



ნახ.26

ავიღოთ R_n სივრცეში რომელიმე კონტრავარიანტული A^κ $(\kappa = 1,2,\cdots,n)$ ვექტორი, რომლის სიგრძე იყოს $|\overrightarrow{a}|$ და იგი გადავიტანოთ წირის სხვა წერტილებზე თავის თავის პარალელურად (ნახ.26); $\overrightarrow{a}$ ვექტორის კომპონენტები დეკარტის მართკუთხა სისტემაში აღვნიშნოთ a_j-თი $(j=1,2,\cdots,m)$; მაშინ

$$a_j = A^\kappa \frac{\partial y_j}{\partial x^\kappa} \quad (j = 1,2,\cdots,m).$$

რადგან დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში პარალელური ვექტორების კომპონენტები უცვლელი რჩება, ამიტომ

$$\frac{da_j}{ds} = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,m),$$

ე.ი.

$$\frac{dA^\kappa}{ds} \frac{\partial y_j}{\partial x^\kappa} + A^\kappa \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\kappa \partial x^i} \frac{dx^i}{ds} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m).$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობა $g^{\alpha\beta} \frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha}$ - ზე და მოვახდინოთ აჯამვა: j ინდექსით 1 – დან m – მდე; მაშინ, რადგან

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x^\kappa} \frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha} = g_{\kappa\alpha},$$

ხოლო $g_{\kappa\alpha} g^{\alpha\beta} = \delta_\kappa^\beta$, ამიტომ გვექნება:

$$\delta_\kappa^\beta \frac{dA^\kappa}{ds} + g^{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\kappa \partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha} A^\kappa \frac{dx^i}{ds} = 0,$$

ე.ი.

$$\frac{dA^\beta}{ds} + g^{\alpha\beta} A^\kappa \frac{dx^i}{ds} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\kappa \partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,m) \qquad (3)$$

მეორეს მხრივ,

$$\frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^\alpha} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^i \partial x^\alpha} \frac{\partial y_j}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha} \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \right), \qquad (4)$$

ასევე

$$\frac{\partial^2 g_{i\alpha}}{\partial x^\kappa} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^i \partial x^\kappa} \frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha} \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \right), \quad \frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\alpha \partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\kappa \partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha} \right).$$

უკანასკნელი ორი ტოლობის ჯამს გამოვაკლოთ (4) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^\alpha} = 2 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^\kappa \partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha}. \qquad (5)$$

ახლა, თუ $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial y_j}{\partial x^\alpha}$ მნიშვნელობას (5) ტოლობიდან შევიტანთ (3) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\frac{dA^\beta}{ds}+\Gamma^\beta_{ik}A^k\frac{dx^i}{ds}=0 \qquad (\beta=1,2,\dots,n) \qquad (6)$$

რადგან $\frac{dA^\beta}{ds}=\frac{dx^i}{ds}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^i}$, ამიტომ

$$\left(\frac{\partial A^\beta}{\partial x^i}+\Gamma^\beta_{ik}A^k\right)\frac{dx^i}{ds}=0 \qquad (\beta=1,2,\dots,n). \qquad (7)$$

(7) ტოლობას ადგილი უნდა ჰქონდეს M წერტილზე გამავალი ყოველი წირის მიმართ, ამიტომ

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^i}+\Gamma^\beta_{ik}A^k=0 \qquad (\beta, i=1,2,\dots,n), \qquad (8)$$

ე.ი. პარალელური კონტრავარიანტული ვექტორია ველი უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებათა (8) სისტემას, რომელიც წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, ამიტომ თუ სივრცის რომელიმე წერტილზე დასახელებულია საძიებელი ფუნქციათა მნიშვნელობები (საწყისი პირობები), მაშინ (8) სისტემას ექნება ერთადერთი [1] ამონახსნი.

ახლა, თუ (7) სისტემაში A^β-ს შევცვლით $\frac{dx^\beta}{ds}$-ით, მივიღებთ გეოდეზიური წირის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d^2x^\beta}{ds^2}+\Gamma^\beta_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \qquad (\beta=1,2,\dots,n).$$

ამრიგად, გეოდეზიურ წირს ახასიათებს ის თვისება, რომ მისი მხებების მგეზავები პარალელური ვექტორებია.

ვთქვათ, კონტრავარიანტული A^k ($k=1,2,\dots,n$) ვექტორი $M(x^1,x^2,\dots,x^n)$ წერტილიდან პარალელურად გადავიტანეთ $N(x^1+dx^1,x^2+dx^2,\dots,x^n+dx^n)$ წერტილში და (6) სისტემა ასე გადავწეროთ[2]:

$$\delta A^\beta=-\Gamma^\beta_{ik}A^k dx^i \qquad (\beta=1,2,\dots,n). \qquad (9)$$

აღვნიშნოთ A^k ($k=1,2,\dots,n$) ვექტორის მნიშვნელობა N წერტილზე A^k+dA^k ($k=1,2,\dots,n$), სადაც

$$dA^k=\frac{\partial A^k}{\partial x^i}dx^i \qquad (k=1,2,\dots,n).$$

---

[1] იგულისხმება, რომ სივრცის ფუნდამენტური g_{ij} ტენზორი, გარკვეულ არეში $x^1,x^2,\dots,x^n$ კოორდინატების უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია.

[2] აქ δA^k-თი აღნიშნული გვაქვს ვექტორის A^k კომპონენტის ნაზრდი M წერტილიდან N წერტილში ვექტორის პარალელური გადატანის დროს.

შემდეგ შევადგინოთ სხვაობა:

$$\left(A^k+dA^k\right)-\left(A^k+\delta A^k\right)=dA^k-\delta A^k=\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^i}+\Gamma_{i\beta}^{k}A^\beta\right)dx^i,$$

რომელსაც ვუწოდოთ A^k ვექტორის ნაზრდი; მაგრამ $\frac{\partial A^k}{\partial x^i}+\Gamma_{i\beta}^{k}A^\beta$ არის მეორე რანგის შერეული ტენზორი, რომელიც წარმოადგენს A^k ვექტორის კოვარიანტულ წარმოებულს.

ამრიგად, კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულის საშუალებით გამოისახება A^k ვექტორის ნაზრდი მისი M წერტილიდან მეზობელ N წერტილში პარალელური გადატანის დროს, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობას:

$$dA^k-\delta A^k=\nabla_i A^k dx^i. \qquad (10)$$

ასევე მტკიცდება ჩვენება, რომ პარალელური კოვარიანტული ვექტორთა ველი აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x^i}-\Gamma_{i\beta}^{k}A_k=0 \quad (\beta, i=1,2,\dots,n) \qquad (11)$$

და ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\delta A_\beta=\Gamma_{i\beta}^{k}A_k dx^i \quad (\beta=1,2,\dots,n),$$

$$dA_k-\delta A_k=\nabla_i A_k dx^i,$$

რაც იძლევა კოვარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულის გეომეტრიულ მნიშვნელობას.

მკითხველს ვანდობთ აჩვენოს, რომ:

1. ორი A^i და B^i ვექტორის სკალარული ნამრავლი უცვლელი რჩება მათი პარალელური გადატანის დროს;

2. კუთხე ორ ვექტორს შორის უცვლელი რჩება მათი პარალელური გადატანის დროს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ განმეორებითი კოვარიანტული წარმოებულები დამოკიდებულია გაწარმოების მიმდევრობაზე, ე.ი. საზოგადოდ

$$\nabla_i\nabla_j A^k \neq \nabla_j\nabla_i A^k.$$

მართლაც, გამოვთვალოთ $\nabla_i A^k=\frac{\partial A^k}{\partial x^i}+\Gamma_{\lambda i}^{k}A^\lambda$ გამოსახულების კოვარიანტული წარმოებული;

გვაქვს:

$$\nabla_j\nabla_i A^k=\frac{\partial \nabla_i A^k}{\partial x^j}+\Gamma_{\beta j}^{k}\nabla_i A^\beta-\Gamma_{ij}^{\gamma}\nabla_\gamma A^k=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^i}+\Gamma_{\lambda i}^{k}A^\lambda\right)+$$

$$+\Gamma_{\beta j}^{k}\left(\frac{\partial A^\beta}{\partial x^i}+\Gamma_{\lambda i}^{\beta}A^\lambda\right)-\Gamma_{ij}^{\beta}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^\beta}+\Gamma_{\lambda\beta}^{k}A^\lambda\right)=\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^i\partial x^j}+\Gamma_{\lambda i}^{k}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^j}+\Gamma_{\beta j}^{k}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^i}-\Gamma_{ij}^{\beta}\frac{\partial A^k}{\partial x^\beta}-$$

$$-\Gamma_{ij}^{\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^{k}A^\lambda+\left(\frac{\partial \Gamma_{\lambda i}^{k}}{\partial x^j}+\Gamma_{\beta j}^{k}\Gamma_{\lambda i}^{\beta}\right)A^\lambda.$$

აქ i და j ინდექსების გადასმით პირველი ხუთი შესაკრები უცვლელი დარჩება, ხოლო ბოლო შესაკრები $\left(\frac{\partial\Gamma^k_{\lambda j}}{\partial x^i}+\Gamma^k_{\beta i}\Gamma^\beta_{\lambda j}\right)A^\lambda$-ის ტოლი გახდება, ამიტომ

$$\nabla_j\nabla_i A^k - \nabla_i\nabla_j A^k = \left[\frac{\partial\Gamma^k_{\lambda i}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^k_{\lambda j}}{\partial x^i} + \Gamma^k_{\beta j}\Gamma^\beta_{\lambda i} - \Gamma^k_{\beta i}\Gamma^\beta_{\lambda j}\right]A^\lambda . \qquad (12)$$

აქ მარცხენა მხარე მესამე რანგის ტენზორია–ორჯერ კოვარიანტული და ერთხელ კონტრავარიანტული, ამიტომ, ცხადია, გამოსახულება

$$R^k_{ij\lambda} = \frac{\partial\Gamma^k_{\lambda i}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^k_{\lambda j}}{\partial x^i} + \Gamma^k_{\beta j}\Gamma^\beta_{\lambda i} - \Gamma^k_{\beta i}\Gamma^\beta_{\lambda j} \qquad (13)$$

წარმოადგენს მეოთხე რანგის ტენზორს–სამჯერ კოვარიანტულს და ერთხელ კონტრავარიანტულს. ვუწოდოთ ამ ტენზორს რიმან-ქრისტოფელის ტენზორი[1].

შევნიშნოთ, რომ ევკლიდეს სივრცეში ყოველთვის შეიძლება შევირჩიოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა; ასეთ სისტემაში კი მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები იქნება მუდმივები და, მაშასადამე, ევკლიდეს სივრცეში რიმან-ქრისტოფელის ტენზორი არის ნული; პირიქით, თუ R_n სივრცის ყოველ წერტილში $R^k_{ij\lambda}=0$, მაშინ ასეთ სივრცეში შეიძლება შეირჩეს ისეთი $x^1, x^2, \dots, x^n$ კოორდინატები, რომ სივრცის მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები იყოს მუდმივები; ამრიგად, რიმან-ქრისტოფელის ტენზორის ნულთან ტოლობა–ევკლიდის სივრცის დამახასიათებელი თვისებაა.

ზოგიერთი გამოყენება. ტენზორული წარმოებულის ზემოთმოყვანილი განმარტება საშუალებას იძლევა ვექტორული ან ტენზორული სახის გამოსახულებები გარდავქმნათ კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაში.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი თანადობა, ჩაწერილი ტენზორული[2] სახით ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ, ამიტომ თუ თანადობას, დაწერილს ტენზორული სახით, ადგილი აქვს კოორდინატთა რომელიმე სისტემაში, მაშინ მას ადგილი ექნება აგრეთვე კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაშიც; ჩვენ ვისარგებლებთ ამ გარემოებით ზოგიერთი საჭირო ფორმულის მისაღებად.

1. სკალარული ფუნქციის წარმოებული. დეკარტის კოორდინატთა $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ სისტემაში $f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ სკალარის გრადიენტის კომპონენტებია:

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (j=1,2,\dots,m).$$

ახლა, თუ ვისარგებლებთ ზემო შენიშვნით და მხედველობაში მივიღებთ, რომ სკალარის კერძო წარმოებულები ადგენენ კოვარიანტულ ვექტორს, მაშინ კოორდინატთა ნებისმიერ R_n სივრცეში, სადაც $x^1, x^2, \dots, x^n$ წერტილის მრუდწირული კოორდინატებია, grad f ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტები იქნება:

$$\nabla_j f = \frac{\partial f}{\partial x^j} \qquad (j=1,2,\dots,n),$$

[1] ზოგჯერ წას სიმრუდის ტენზორსაც უწოდებენ; შეიძლება ჩვენება, რომ მას აქვს $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ რაოდენობის განსხვავებული კომპონენტი.

[2] ცხადია, ვექტორი და სკალარი ტენზორის კერძო შემთხვევებია.

ხოლო კონტრავარიანტული წარმოებული

$$\nabla^j f \equiv g^{j\beta}\nabla_\beta f = g^{j\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta} \qquad (j=1,2,\dots,n).$$

კერძოდ, თუ განვიხილავთ ევკლიდის E_3 სივრცეში მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატთა (q_1,q_2,q_3) სისტემას (თავი I, § 5), მაშინ, როგორც ვნახეთ:

$$g_{ii}=H_i^2,\quad g^{ii}=\frac{1}{H_i^2}=h_i^2\ (i=1,2,3),\quad g=H_1^2H_2^2H_3^2,\quad g_{ij}=g^{ij}=0,\ \text{როცა}\ i\neq j,$$

სადაც H_i $(i=1,2,3)$ ლამეს კოეფიციენტებია, ხოლო h_i $(i=1,2,3)$ პირველი რიგის დიფერენციალური პარამეტრები; ცხადია, ასეთ სივრცეში რომელიმე $\vec{A}$ ვექტორის გეგმილები მრუდწირულ ღერძებზე (ე.წ. ფიზიკური კომპონენტები) იქნება: $H_iA^i=\frac{1}{H_i}A_i$ $(i=1,2,3)$ და, მაშასადამე, $\operatorname{grad} f$ ვექტორის კომპონენტები კი:

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,3).$$

2. ვექტორის დივერგენცია. დეკარტის კოორდინატთა $(y_1,y_2,\dots,y_m)$ სისტემაში ცვლადი $\vec{A}(y_1,y_2,\dots,y_m)$ ვექტორის დივერგენცია არის:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial A_{y_i}}{\partial y_i},$$

სადაც A_{y_i} $(i=1,2,\dots,m)$ — $\vec{A}$ ვექტორის კომპონენტებია.

თუ ჩვეულებრივ წარმოებულებს შევცვლით ტენზორული წარმოებულებით, მაშინ კოორდინატთა ნებისმიერ R_n სივრცეში, სადაც $x^1,x^2,\dots,x^n$ წერტილის მრუდწირული კოორდინატებია, გვექნება: $\operatorname{div}\vec{A}=\nabla_jA^j=\nabla^jA_j=g^{jk}\nabla_kA_j=\nabla_j(g^{jk}A_k)$.

მაგრამ, რადგან $\nabla_jA^k=\frac{\partial A^k}{\partial x^j}+\Gamma^k_{j\lambda}A^\lambda$, ამიტომ თუ ამ ფორმულაში დავუშვებთ $k=j$, შევასრულებთ შეკრებას j-თი და ვისარგებლებთ $\Gamma^j_{j\lambda}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial x^\lambda}$ ფორმულით, მივიღებთ:

$$\nabla_jA^j=\frac{\partial A^j}{\partial x^j}+\frac{1}{\sqrt{g}}A^\lambda\frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial x^\lambda}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(A^j\sqrt{g})}{\partial x^j}$$

და, მაშასადამე,

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,g^{jk}A_k)}{\partial x^j}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(A^j\sqrt{g})}{\partial x^j}. \qquad (14)$$

კერძოდ, თუ განვიხილავთ E_3 სივრცეში მრუდწირულ ორთოგონალურ (q_1,q_2,q_3) კოორდინატთა სისტემას, მაშინ გვექნება:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3A_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(H_1H_3A_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right],$$

რაც ზემოთ სხვა გზით იყო მიღებული.

3. ლაპლასის ოპერატორი. რადგან დეკარტის კოორდინატთა $(y_1,y_2,\dots,y_m)$ სისტემაში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta f=\operatorname{div}(\operatorname{grad} f),$$

სადაც $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial y_m^2}$ ლაპლასის ოპერატორია, ამიტომ თუ ვისარგებლებთ

(4) ფორმულით, კოორდინატთა ნებისმიერ R_n სივრცეში, სადაც $x^1, x^2, \dots, x^n$ ნებისმიერი მრუდწირული კოორდინატებია, მივიღებთ:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k}\right)}{\partial x^j}. \tag{15}$$

კერძოდ, თუ განვიხილავთ E_3 სივრცეში მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატთა (q_1, q_2, q_3) სისტემას, მაშინ

$$\Delta f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right],$$

რაც ჩვენი სხვა გზით იყო მიღებული.

4. ვექტორული ნამრავლი. განვმარტოთ რამდენის სივრცეში ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. სიმარტივისათვის განვიხილოთ სამგანზომილებიანი R_3 სივრცე. ავიღოთ ამ სივრცეში ნებისმიერი სამი $\vec{A}, \vec{B}$ და $\vec{C}$ ვექტორი; A^i, B^i, C^i და A_i, B_i, C_i იყოს მათი კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კოორდინატები. V და V' აღვნიშნოთ შემდეგი დეტერმინანტები:

$$V = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix}, \qquad V' \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

რადგან $A_k = g_{ki} A^i$, ამიტომ დეტერმინანტების გამრავლების წესით:

$$V' = \begin{vmatrix} g_{1k}A^k & g_{2k}A^k & g_{3k}A^k \\ g_{1k}B^k & g_{2k}B^k & g_{3k}B^k \\ g_{1k}C^k & g_{2k}C^k & g_{3k}C^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = gV.$$

ახლა, მოვახდინოთ კოორდინატთა გარდაქმნა, ე.ი. $x^1, x^2, \dots, x^n$ კოორდინატებიდან გადავიდეთ $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n$ კოორდინატებზე; γ იყოს კოორდინატთა გარდაქმნის მატრიცა; მაშინ, რადგან

$$\tilde{A}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} A_i \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

ამიტომ

$$\tilde{V}' = \begin{vmatrix} A_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^1} & A_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^2} & A_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^3} \\ B_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^1} & B_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^2} & B_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^3} \\ C_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^1} & C_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^2} & C_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^3} \end{vmatrix} = \gamma \cdot V'.$$

მეორე მხრივ,

$$V \cdot V' = \begin{vmatrix} A^i A_i & B^i B_i & C^i C_i \\ B^i A_i & B^i B_i & B^i C_i \\ C^i A_i & C^i B_i & C^i C_i \end{vmatrix}$$ ინვარიანტია

და, მაშასადამე:

$$\tilde{V} \cdot \tilde{V}' = V \cdot V'. \tag{16}$$

უკანასკნელს თუ შევადარებთ წინა ტოლობას, შევნიშნავთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$V = \gamma \cdot \breve{V}.$$

რადგან $\breve{V}' = \breve{g}\,\breve{V}$, ამიტომ

$$\frac{\breve{V}'}{V'} = \frac{\breve{g}}{g}\,\frac{\breve{V}}{V}$$

და, მაშასადამე,

$$\gamma = \frac{\breve{V}'}{V'} = \frac{\breve{g}}{g}\cdot\frac{1}{\gamma},$$

საიდანაც

$$\breve{g} = g\,\gamma^2 \qquad (17)$$

რაც შემდეგ სხვა გზით იყო მიღებული.

ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობებს:[1]

$$\frac{\breve{V}'}{\sqrt{\breve{g}}} = \frac{V'}{\sqrt{g}}, \qquad \breve{V}\sqrt{\breve{g}} = V\sqrt{g}. \qquad (18)$$

შეიძლება ჩვენება, რომ ეს ორი ინვარიანტი ერთმანეთის ტოლია.

ბოლოს, შემოვიღოთ სამ ინდექსზე დამოკიდებული რიცხვთა შემდეგი სისტემა:

$$\delta_{ijk} \qquad (i,j,k = 1,2,3).$$

მასთან ისეთი, რომ

$$\delta_{123} = \delta_{231} = \delta_{312} = 1, \quad \delta_{132} = \delta_{213} = \delta_{321} = -1$$ (დანარჩენები ნულის ტოლი);

რადგან

$$V = A^1B^2C^3 + A^2B^3C^1 + A^3B^1C^2 - A^2B^1C^3 - A^3B^2C^1 - A^1B^3C^2 = \delta_{ijk}A^iB^jC^k.$$

ამიტომ, ცხადია, შემდეგი გამოსახულებები:

$$\sqrt{g}\,\delta_{ijk}A^iB^jC^k, \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta_{ijk}A_iB_jC_k$$

არის ინვარიანტები და, მაშასადამე, $\sqrt{g}\,\delta_{ijk}$ მესამე რანგის კოვარიანტული ტენზორია, ხოლო $\frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta_{ijk}$ კი — მესამე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი; აღვნიშნოთ ეს ტენზორები შესაბამისად ε_{ijk} და ε^{ijk} — ით[2], ე.ი.

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\,\delta_{ijk}, \qquad \varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta_{ijk}.$$

ახლა, თუ მოცემულია ორი ნებისმიერი A^i და B^i ვექტორი, მაშინ

$$P_k = \varepsilon_{ijk}A^iB^j \quad \text{და} \quad P^k = \varepsilon^{ijk}A_iB_j \qquad (19)$$

წარმოადგენენ ერთი და იგივე ვექტორის კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კომპონენტებს, რადგან ევკლიდეს E_3 სივრცის შემთხვევაში ეს ვექტორი იძლევა

$$P_1 = A_2B_3 - B_2A_3, \cdots$$

---

[1] ვიგულისხმოთ, რომ $\breve{g}$ დადებითია და $\sqrt{g}$-ს იგივე ნიშანი აქვს, რაც γ დეტერმინანტს.

7. [2] ზოგჯერ ε_{ijk} ტენზორს–ლევი–ჩივიტას ტენზორს უწოდებენ.

ჩვეულებრივ ვექტორულ ნამრავლს, ამიტომ ბუნებრივია (19) ვექტორს ვუწოდოთ რიმანის სივრცეში ორი $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი.

5. ვექტორის როტორი. დეკარტის სისტემაში $\vec{A}(y_1, y_2, y_3)$ ვექტორის როტორის მდგენელებია:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_{y_1} = \frac{\partial A_{y_3}}{\partial y_2} - \frac{\partial A_{y_2}}{\partial y_3}, \dots$$

შევცვალოთ ჩვეულებრივი ნაწარმოებები ტენზორულით და შევადგინოთ $\nabla_i A_k - \nabla_k A_i$ სხვაობა, გვაქვს:

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + A_\lambda \Gamma^\lambda_{ki} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

ახლა, მივიღოთ:

$$R^k = \epsilon^{ijk} \nabla_i A_j .$$

R^k კონტრავარიანტული ვექტორია, რომლის კომპონენტებია:

$$R^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right), \dots \tag{20}$$

რადგან (20) ფორმულა დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში იძლევა $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ ვექტორის კომპონენტებს, ამიტომ იგი შეიძლება მივიღოთ $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ ვექტორის კონტრავარიანტულ კომპონენტებად ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში; რაც შეეხება $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ ვექტორის კოვარიანტულ კომპონენტებს, იქნება:

$$R_k = g_{kj} R^j \qquad (k = 1, 2, 3),$$

ე.ი.

$$R_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[g_{k1}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right) + g_{k2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right) + g_{k3}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)\right] \tag{21}$$

კერძოდ, თუ განვიხილავთ E_3 სივრცეში მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატთა (q_1, q_2, q_3) სისტემას, მაშინ, თუ ვისარგებლებთ $A_{t_i} = H_i A^i = \frac{1}{H_i} A_i$ ფორმულებით, გვექნება:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_{q_1} = \frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 A_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3}(H_2 A_{q_2})\right], \dots$$

რაც წინათ სხვა გზით იყო მიღებული.

6. დრეკადობის თეორიის ძირითადი განტოლებები. როგორც ცნობილია, დრეკადობის თეორიის ძირითად განტოლებას (ლამეს განტოლებები) გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებში აქვს სახე

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{22}$$

სადაც λ, μ — დრეკადი მუდმივებია, ρ — სიმკვრივე, $\vec{F}$ — მოცულობითი ძალა, ხოლო $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ გადაადგილების ვექტორი. რადგან $\theta = \operatorname{div}\vec{u}$ ინვარიანტია, ხოლო $\Delta u^i = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u^i) = \nabla^k\nabla_k u^i$, ამიტომ ნებისმიერ კოორდინატთა (x^1, x^2, x^3) სისტემაში ლამეს განტოლებებს ექნება სახე:

$$(\lambda+\mu)\nabla_i\theta + \mu\nabla^k\nabla_k u_i + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=1,2,3). \qquad (23)$$

სავარჯიშო

1. აჩვენეთ, რომ $\begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$ არის მეორე რანგის ტენზორები.

2. აჩვენეთ, რომ შემდეგი სიდიდეები: $\begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$ არ ადგენენ ტენზორს:

3. დაშალეთ $A = \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$ ტენზორი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ჯამად.

4. აჩვენეთ, რომ, თუ A ანტისიმეტრიული ტენზორია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$(\vec{a}\cdot A\vec{a}) = 0,$$

სადაც $\vec{a}$ ნებისმიერი ვექტორია.

5. აჩვენეთ, რომ, თუ სხეული ბრუნავს მყარი წერტილის გარშემო, მაშინ მისი კინეტიკური T ენერგია გამოისახება ფორმულით

$$T = \frac{1}{2}(\vec{\omega}\cdot I\vec{\omega}),$$

სადაც $\vec{\omega}$ ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\vec{I}$ — ინერციის მომენტების ტენზორი.

6. აჩვენეთ, რომ, თუ I_1, I_2 და I_3 არის A ტენზორის ინვარიანტები, მაშინ A ტენზორი აკმაყოფილებს განტოლებას $A^3 - I_1A^2 + I_2A - I_3 = 0$.

7. ვიცით, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ და $\vec{e}_3$ ბაზისში ძაბვის ტენზორის კომპონენტებია:

$$T = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ძაბვის მთავარი მიმართულებები და მთავარი ძაბვები.

პას.: $\vec{e}_1{}'(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{e}_2{}'(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\vec{e}_3{}'(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 11$, $\sigma_3 = -1$.

8. აჩვენეთ, რომ, თუ S_{ij} სიმეტრიული ტენზორია, ხოლო K_{ij} — ანტისიმეტრიული, მაშინ $S_{ij}K_{ij} = 0$.

9. აჩვენეთ, რომ, თუ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ სიმეტრიული T_{ij} ტენზორის საკუთრივი რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = g^{kl}T_{kl}, \quad \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2 = T^{kl}T_{kl}.$$

10. აჩვენეთ, რომ ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემაში ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\Gamma_{ik}^{j}=0, \quad \text{როცა} \quad i,k,j \quad \text{ერთმანეთისაგან განსხვავებულებია;}$$

11. აჩვენეთ, რომ

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}}=\Gamma_{i,jk}-\Gamma_{k,ij}$$ (g_{ij} სივრცის მეტრიკული ტენზორია);

12. ვუწოდოთ a_{ij} ტენზორის რანგი (a_{ij}) მატრიცის რანგს; აჩვენეთ, რომ a_{ij} ტენზორის რანგი ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ;

13. a_{ij} იყოს ტენზორი, ხოლო $a=|a_{ij}|$. აჩვენეთ, რომ a დეტერმინანტის ელემენტების შესაბამისი A_{ij} ალგებრული დამატებები ადგენს ტენზორს და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$A_{ik}a_{kj}=a\delta_{ij}.$$

14. ისარგებლეთ ტენზორული ზედაპირის განტოლებით და იპოვეთ სიმეტრიული A_{ij} ტენზორის ინვარიანტების გეომეტრიული მნიშვნელობები: პას. $\gamma_1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, $\gamma_2=\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}$, $\gamma_3=\frac{1}{a^2b^2c^2}$, სადაც a, b, c ტენზორის ელიფსოიდის ნახევარღერძებია;

15. ევკლიდეს E_n სივრცეში აჩვენეთ კოში-ბუნიაკოვსკის $(\vec{x}\cdot\vec{y})^2\leq(\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y})$ უტოლობის მართებულობა და ჩაწერეთ იგი კოორდინატული სახით;

16. ევკლიდეს E_n სივრცეში აჩვენეთ სამკუთხედის $|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$, $|\vec{x}-\vec{y}|\geq|\vec{x}|-|\vec{y}|$ უტოლობის მართებულობა;

17. აჩვენეთ რომ, თუ $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n$ ევკლიდეს E_n სივრცეში ორთონორმირებული ვექტორებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$|\vec{x}_1+\vec{x}_2+\dots+\vec{x}_n|^2=|\vec{x}_1|^2+|\vec{x}_2|^2+\dots+|\vec{x}_n|^2.$$

ლიტერატურა

1. Н.Е.КОЧИН. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Гонти, 1938.
2. В.К.ФРЕДЕРИКС, А.А.ФРИДМАН. Основы теории относительности, В. "Тензорное исчисление", Ленинград, 1924.
3. А.И.БОРИСЕНКО, И.Е.ТАРАПОВ. Векторный анализ и начала тензорного исчисления, "Высшая школа", Москва, 1966.
4. И.Н.ВЕКУА. Основы тензорного анализа, Новосибирск, 1964.
5. Г.АРФКЕН. Математические методы в физике, Атомиздат, Москва, 1970.
6. P.APPELL. Traite de mecanique rationnelle, T. IV, Paris, 1926.