

ჯონლო უარიქაქე

**გლანტი არაკუქუქადი
სითხის დინამიქა**

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის დინამიკა” - წარმოადგენს ლექციების კურსს, რომელსაც ავტორი კითხულობს უკანასკნელი 20 წლის განმავლობაში თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. იგი გამოადგება აგრეთვე ფიზიკისა და გეოგრაფია-გეოლოგიის ფაკულტეტის იმ სტუდენტებს, რომლებიც პიდროაერო-მექანიკას სწავლობენ.

რედაქტორი	პროფ. ა. ციციშვილი
რეცენზენტები:	დოც. თ. ჯანგველაძე
	დოც. ნ. ჯორბენაძე

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1997

შესავალი

სითხე უწყვეტი დეფორმადი სხეულის ერთ-ერთი მოდელია განიხილავენ ორი სახის სითხეს, იდეალურსა და ბლანტს. ბლანტი სითხე შეიძლება იყოს ნიუტონისეული ან არანიუტონისეული. ნიუტონისეული სითხეებისათვის, რომლებსაც განეკუთვნებიან უმრავლესი სითხეები და აირები, არსებობს წრფივი დამოკიდებულება ძაბვის ტენზორის კომპონენტებსა და დეფორმაციის სინქარის კომპონენტებს შორის. იდეალურ სითხეში ძაბვის მხოლოდ ნორმალური კომპონენტებია ნული-საგან განსხვავებული და ისინი უარყოფითი ნიშნის წნევით გამოისახებიან, ხოლო ბლანტ სითხეში, გარდა ნორმალური კომპონენტებისა მხები კომპონენტებიც არსებობს. არანიუტონისეულ სითხეში დამოკიდებულება ძაბვის ტენზორის კომპონენტებსა და დეფორმაციის სინქარის კომპონენტებს შორის უკუარაუული სახისაა. ასეთი სითხეების თვისებებს რეოლოგია სწავლობს.

ჩვენ შემდგომში მხოლოდ ნიუტონისეულ სითხეებს განვიხილავთ, რომელთათვისაც დამოკიდებულება ძაბვის ტენზორის კომპონენტებსა და დეფორმაციის სინქარის კომპონენტებს შორის ნიუტონის განზოგადებული კანონით გამოისახება

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

აქ σ_{ik} - ძაბვის ტენზორის კომპონენტებია, p - წნევა, δ_{ik} - კრონეკერის სიმბოლო, რომელიც უდრის ერთს, როცა $i = k$ და უდრის ნულს, როცა $i \neq k$, v_i - სინქარის კომპონენტებია, μ - სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი,

ζ - სიბლანტის მეორე კოეფიციენტი. სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი სითხის ფენებს შორის ხახუნის ასაკითავეს მათ უარდობითი მოძრაობის დროს, ხოლო ζ - კოეფიციენტი - მოცულობით სიბლანტეს, რომელიც მხოლოდ კომპონენტ სითხეში

მუდარება. μ და ζ კოეფიციენტები ყოველთვის დადებითია და მოცემული სითხისათვის ისინი ან მუდმივი არიან, ან ტემპერატურაზე არიან დამოკიდებულნი.

გარდა დინამიური კოეფიციენტისა, სითხეების მექანიკაში, რომელსაც ჰიდრომექანიკას უწოდებენ, სარგებლობენ სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტითაც

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

μ და v კოეფიციენტების განზომილებებია:

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}, [v] = L^2T^{-1}$$

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იზოტროპულ სითხეებს, ე. ი. ისეთ სითხეებს, რომელთა სიბლანტე და სხვა მოლეკულური თვისებები (მაგ. ხვედრითი სითბოტევადობები) ნებისმიერ წერტილში, არ არიან დამოკიდებულნი მიმართულებაზე, მაგრამ შეიძლება იყვნენ წერტილის კოორდინატების ფუნქციები, მაგალითად. ტემპერატურის სხვადასხვაობის გამო. ხშირად გულისხმობენ, რომ ეს სითხეები ერთგვაროვანი არიან, რაც შემდგომში ყოველთვის იქნება გათვალისწინებული. სხვანაირად, რომ ეთქვას, ჩვენ უგულებელვყოფთ სიბლანტისა და სიმკვრივის სივრცეში ცვლილებებს. ასეთი დაშვება გამართლებული იქნება, თუ დამოკიდებულება ჩამოთვლილ თვისებებსა, ტემპერატურასა და წნევაზე საკმარისად სუსტია, ან თუ განსახილველ არეში ტემპერატურისა და წნევის ცვლილება მცირეა. გარდა ამისა, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ სითხეების სიჩქარეები ისეთია, რომ ისინი გაცილებით ნაკლებნი არიან სინათლის გავრცელების სიჩქარეზე.

თითქმის ყველა სითხე ბლანტია. წინამდებარე წიგნში განხილული იქნება ასეთი სითხის დინების რამოდენიმე ძირითადი ამოცანა. ჩვენ ვიგულისხმებთ აგრეთვე, რომ სითხე ერთგვაროვანი და არაკუმშვადია.

სითხის მოძრაობის შესასწავლად მექანიკის ზოგად კანონებს იყენებენ. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მასის, მოძრაობის რაოდენობის, მოძრაობის რაოდენობის მომენტისა და ენერჯის შენახვის კანონები. გარდა ამისა, ვიგულისხმებთ, რომ მოძრაობის დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეები წერტილის კოორდინატებისა და დროის უწყვეტი ფუნქციებია.

ჩვენ შემდგომში ვისარგებლებთ ეილერის მეთოდით, რომლის საფუძვლები გადმოცემულია [1-7].

თუ გამოვიყენებთ შენახვის ჩამოთვლილ კანონებს მოძრაობის სითხისათვის, მივიღებთ სითხის მექანიკის ძირითად განტოლებათა სისტემას.

შენახვის კანონების გამოყენება ნებისმიერი სასრული მოცულობისათვის გვაძლევს შესაბამისი კანონების ინტეგრალურ ფორმას, ხოლო თუ განიხილება უსასრულოდ მცირე მოცულობები, ჩვენ მივიღებთ სითხის მექანიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

თავი პირველი

გლანტი სითხის მოძრაობის ძირითადი განტოლებები

1.1. ინდივიდუალური წარმოებული, დროზე დამოკიდებული მოცულობითი ინტეგრალის დროით წარმოებული

ვთქვათ, სითხე უწყვეტად ავსებს მიუღ სივრცეს ან მის რაიმე τ მოცულობას. შემოვიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ერთეულუნიანი $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ვექტორებით. სივრცის ნებისმიერი წერტილი ცალსახად განისაზღვრება x, y, z კოორდინატებით, ან $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ რადიუს-ვექტორით.

დროის ნებისმიერ t მომენტში სითხის მოძრაობა შეიძლება დაეახასიათოთ $\vec{v} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$ სიჩქარის ვექტორული ველით. აქ $\vec{v}(x, y, z, t)$ - აღნიშნავს x, y, z წერტილში t დროის მომენტში მყოფი თხევარი ნაწილაკის სიჩქარეს. გარდა სიჩქარისა შეიძლება შემოიყვანოთ სხვა, როგორც სკალარული, ასევე ვექტორული პიდრდიანამიკური სიდიდეები. სითხის მოძრაობის ძირითადი განტოლებების მისაღებად ვისარგებლოთ მექანიკის შენახვის კანონებით, რომლებმაც მოძრაი თხევარი მოცულობისათვის გამოვიყენებთ.

ვთქვათ $\Lambda(x, y, z, t)$ - რაიმე პიდრომექანიკური სიდიდეა. გამოვიყოთ მცირე თხევადი ნაწილაკი, რომლისთვისაც Λ მხოლოდ t -ზე იქნება დამოკიდებული, რადგანაც დინების ველში გადაადგილებული ნაწილაკის კოორდინატები დროის ფუნქციებია:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

თუ ამ ფუნქციებს გაავწარმოებთ, მივიღებთ მცირე თხევადი ნაწილაკის სიჩქარის კომპონენტებს:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

გამოვიყენოთ A სიდიდის დროით წარმოებული დაფიქსირებული თხევადი ნაწილაკისათვის. ვისარგებლოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} \quad (1.2)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ ოპერატორი [1]

$$\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

მაშინ, ძირითადი ვექტორული ოპერაციები ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\text{grad}A = \nabla A, \quad \text{div} \bar{A} = \nabla \cdot \bar{A}, \quad \text{rot} \bar{A} = [\nabla \bar{A}].$$

ხოლო (1.2) ტოლობა ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) A. \quad (1.3)$$

ასეთ წარმოებულს სრულ ან ინდივიდუალურ წარმოებულს უწოდებენ. იგი შედგება A სიდიდის დროითა ლოკალური წარმოებულისაგან და კონვექციური წარმოებულისაგან.

განვიხილოთ ახლა რაიმე τ მოცულობა, რომელიც შეიცავს სივრცის ერთიანი ძავე ნაწილაკებს და გადაადგილდება სივრცეში. ეთქვას, მოცულობის ყოველ წერტილში (თხევად ნაწილაკში) განსაზღვრულია Λ - პიდროდინამიკური სიდიდე. ისე, რომ დროის ყოველ მომენტში შეიძლება გამოთვლილი იქნეს ინტეგრალი

$$I = \int_{\tau} \Lambda d\tau.$$

ამ ინტეგრალის მნიშვნელობა დროის მიხედვით იცვლება იმის გამო, რომ იცვლება τ მოცულობა და ინტეგრალქვეშა Λ ფუნქცია. დროის ორ უახლოეს მომენტს შორის ინტეგრალის მნიშვნელობათა ΔI სხვაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით

$$\Delta l = \int_{\tau} A dt - \int_{\tau'} A' dt = \int_{\tau} (A - A') dt + \int_{\tau - \tau'} A' d\bar{\tau}. \quad (1.4)$$

Δt -ის შიშართ მალალი რიგის მცირეთა სიზუსტით გვექნება

$$A' - A = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t, \quad d\bar{\tau} = v_n dS \cdot \Delta t.$$

აქ $d\bar{\tau}$ არის $\tau - \tau'$ - მოცულობის ელემენტი, S - ზედაპირი, რომლითაც შემოსაზღვრულია τ მოცულობა, v_n - სითხის ნორმალური მდგენელი S ზედაპირზე. თუ ამ თანაფარდობებს შევიტანთ (1.4)-ში, ფრთხვ მხარეს გავეყოთ Δt -ზე და მივასწრავებთ Δt -ს ნულისაკენ, მივიღებთ

$$\frac{dl}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial A}{\partial t} dt + \int_S A v_n dS. \quad (1.5)$$

ზედაპირული ინტეგრალი გაუსის ფორმულით გარდაექმნათ მოცულობით ინტეგრალად

$$\int_S A v_n dS = \int_{\tau} \operatorname{div} A \bar{v} dt. \quad (1.6)$$

მაშინ, (1.3) ტოლობა მოგვეცემს

$$\frac{dl}{dt} = \int_{\tau} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div} A \bar{v} \right) dt. \quad (1.7)$$

თუ კისარგებლებთ სრული წარმოებულის ცნებით, მივიღებთ

$$\frac{dl}{dt} = \int_{\tau} \left(\frac{d\Lambda}{dt} + \Lambda \operatorname{div} \bar{v} \right) dt. \quad (1.8)$$

1.2. მასის შენახვის კანონი. უწყვეტობის განტოლება

"

dt მოცულობაში ρ სიმკვრივის მქონე სითხის მასა იქნება

$$dm = \rho dt,$$

ხოლო მთელ τ მოცულობაში

$$m = \int_{\tau} \rho dt.$$

მასის შენახვის კანონი, თუ τ მოცულობაში არა გვაქვს მასის წყაროები და ჩასადენები, გამოისახება ფორმულით

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = 0. \quad (1.9)$$

თუ გამოვიყენებთ (1.8) ტოლობას, მივიღებთ

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) d\tau = 0.$$

იმის გამო, რომ τ მოცულობა ნებისმიერია, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (1.10)$$

ეს განტოლება ასევე შეიძლება გადაიწეროს

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.11)$$

აქ ვისარგებლეთ ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულით

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \vec{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v},$$

შემდეგ კი სრული წარმოებულის ფორმულით

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho.$$

თუ სითხე არაკუმშვადია, მაშინ $\frac{d\rho}{dt} = 0$ და (1.11) მოგვცემს

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.12)$$

(1.10), (1.11) განტოლებები უწყვეტობის განტოლების ჩაწერის სხვადასხვა სახეს წარმოადგენს. ხოლო (1.12) არაკუმშვადი სითხის უწყვეტობის განტოლებაა.

(1.10) განტოლების გამოყენებისას და შემდეგშიც, დინების კვლევის განხილვისას, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ დინების დამახასიათებელი ფუნქციები უწყვეტნი და წარმოებდნენ არიან.

სითხის დინების ინტეგრალური მახასიათებელია სითხის სიჩქარის ნაკადი ნებისმიერ ჩაკეტილ ზედაპირში, რომელიც ასე გამოისახება

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS.$$

აქ სითხე არაკუმშვადია, მაშინ ეს ნაკალი ნულის ტოლია.

მართლაც გაუსის ფორმულის ძალით

$$\int_S \dot{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \dot{v} d\tau = 0.$$

1.3. მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი

dt მოცულობაში არსებული სითხის ρdt მასის მოძრაობის რაოდენობა ტოლია $\rho \vec{v} dt$. ხოლო τ მოცულობაში არსებული \bar{v} სიჩქარით მოძრავი სითხის მოძრაობის რაოდენობა იქნება

$$\vec{K} = \int_V \rho \vec{v} dt.$$

თხევრ τ მოცულობაზე მოქმედებენ მასობრივი და ზედაპირული ძალები. აღენიშნოთ გარე მასობრივი ძალების მთავარი ვექტორი \vec{F}^m ხოლო გარე ზედაპირული ძალების მთავარი ვექტორი \vec{F}^S . მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონის თანახმად გვექნება

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}^m + \vec{F}^S. \quad (1.13)$$

მასობრივი ძალები მოქმედებენ τ მოცულობის ყოველ თხევად ელემენტზე.

$$\vec{F} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\vec{F}^m}{m}$$

ამიტომ წარმოადგენს ძალას, რომელიც მოლის მასის ერთეულზე. იგი დროისა და სივრცითი ცვლადების ცნობილი ფუნქციაა - $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ dt მოცულობაზე, რომელშიც სითხის მასა ტოლია $dm = \rho dt$, მოქმედებს ძალა $\vec{F} dm$. ამიტომ მასობრივი ძალების მთავარი ვექტორი, რომელიც მოქმედებს მოცულობაზე იქნება

$$\vec{F}^m = \int_V \rho \vec{F} dt.$$

ზედაპირული ძალები მოქმედებენ S ზედაპირის ყოველ ელემენტზე. გამოვიყიოთ \vec{n} ნორმალური ზედაპირის ΔS ელემენტი. ეთქვას, $\Delta \vec{F}_n^s$ - არის ზედაპირის ΔS ელემენტზე მოქმედი ზედაპირული ძალების მთავარი ვექტორი. სიდიდეს

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n^s}{\Delta S}$$

ეწოდება ზედაპირული ძალების ძაბვა. ეს ძაბვა მოქმედებს \vec{n} ნორმალური ფართის განსახილველ წერტილში. $\vec{\sigma}_n$ ვექტორი დამოკიდებულია წერტილის კოორდინატებზე, დროზე და S ზედაპირის \vec{n} ნორმალზე. ზედაპირული ძალების მთავარ ვექტორს მივიღებთ ინტეგრებით

$$\vec{F}^s = \int_S \vec{\sigma}_n dS.$$

ახლა მოძრაობის რაოდენობის (1.13) განტოლება სამართლიანი იქნება უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი მოძრაობისათვის. იგი ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} d\tau = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_S \vec{\sigma}_n dS \quad (1.14)$$

გამოვიყენოთ (1.8) ფორმულა. (1.14) მოგვცემს

$$\int_V \left(\frac{d\rho \vec{v}}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} - \rho \vec{F} \right) d\tau = \int_S \vec{\sigma}_n dS. \quad (1.15)$$

1.4. კოშის ფორმულა

დავუშვათ, რომ Σ სიბრტყე, რომლის ნორმალია \vec{n} , ყოველ რაიმე τ მოცულობას ორ τ_1 და τ_2 მოცულობად. მაშინ მოძრაობის რაოდენობის (1.15) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს ყოველი τ_1 და τ_2 მოცულობისათვის და აგრეთვე τ მოცულობისათვის. თუ შევკრიბავთ პირველ ორ ტოლობას და გამოვაკლებთ მესამეს, მივიღებთ

$$\int_{\tau_1} + \int_{\tau_2} - \int_{\tau} = \int_{\Sigma} (\bar{\sigma}_{nn} + \bar{\sigma}_{-nn}) dS = 0.$$

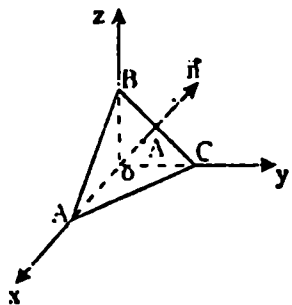
სივსეულობის ნებისმიერობის გამო, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{\sigma}_{nn} = \bar{\sigma}_{-nn} \quad (1.16)$$

აუირჩიათ τ მოცულობა მცირე ტეტრაედრის სახით, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეში ავიღოთ (იხ. ნახ. 1).

დავწერათ ამ მოცულობისათვის (1.15) ტოლობა, მივიღებთ

$$\int_{S_x} \bar{\sigma}_{-x} dS + \int_{S_y} \bar{\sigma}_{-y} dS + \int_{S_z} \bar{\sigma}_{-z} dS + \int_{S_n} \bar{\sigma}_{nn} dS = \int_{\tau} \bar{L} d\tau, \quad (1.17)$$



ნახ. 1

სადაც \bar{L} -ით აღნიშნულია (1.15) განტოლების მარცხენა მხარის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება. აღვნიშნოთ მისახვედრია, რომ

$$S_x = S_n \cos(n, x),$$

$$S_y = S_n \cos(n, y),$$

$$S_z = S_n \cos(n, z),$$

$$\tau = \frac{1}{3} h S_n,$$

სადაც S_n არის ABC წახნაგის ფართი, ხოლო $OA = h$ - ტეტრაედრის სიმაღლეა, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათავედან. გამოვიყენოთ (1.17) ტოლობაში საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა, მივიღებთ

$$\bar{L}_{სა} \cdot \frac{1}{3} S_n \cdot h = S_n \bar{\sigma}_{-x} \cos(n, x) + S_n \bar{\sigma}_{-y} \cos(n, y) + S_n \bar{\sigma}_{-z} \cos(n, z) + S_n \bar{\sigma}_{nn}. \quad (1.18)$$

თუ (1.18) განტოლების ორივე მხარეს გაყოფთ S_n და გადავალთ ზღვარზე, როცა $h \rightarrow 0$, მაშინ ტოლობის მარცხენა ნაწილი ნულად გადაიქცევა, მარჯვენა ნაწილში კი $\bar{\sigma}_{-x} \cos(n, x) + \bar{\sigma}_{-y} \cos(n, y) + \bar{\sigma}_{-z} \cos(n, z) + \bar{\sigma}_{nn} = 0$.

$$\bar{\sigma}_{-x} \cos(n, x) + \bar{\sigma}_{-y} \cos(n, y) + \bar{\sigma}_{-z} \cos(n, z) + \bar{\sigma}_{nn} = 0. \quad (1.19)$$

თუ გაეითვალისწინებთ მიღებულ ტოლობაში (1.16)-ს, მივიღებთ

$$\bar{\sigma}_{ii} = \bar{\sigma}_x \cos(n^*, x) + \bar{\sigma}_y \cos(n^*, y) + \bar{\sigma}_z \cos(n^*, z). \quad (1.20)$$

მიღებულ ფორმულას კოშის ფორმულას უწოდებენ. ის საშუალებას გვაძლევს ეიპოეოთ ძაბვა $\bar{\sigma}_{ii}$ ნორმალის მქონე ფართის წერტილში, თუ ცნობილია $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ ძაბვები. $\bar{\sigma}_i$ - წარმოადგენს ძაბვას იმ ფართზე, რომელიც i ღერძის მართობულია. თითოეულ $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ ვექტორის სამი კომპონენტი გააჩნია

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x & (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}), \\ \bar{\sigma}_y & (\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}), \\ \bar{\sigma}_z & (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

კოშის ფორმულიდან გამოძინარეობს, რომ ძაბვა ნებისმიერად ორიენტირებული ფართის წერტილში შეიძლება გამოითვლოს, თუ ცნობილია ცხრა სიდიდისაგან შემდგარი მატრიცა

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

შეიძლება დამტკიცება, რომ ძაბვა მეორე რანგის ტენზორია. მას ძაბვის ტენზორს უწოდებენ. მის კომპონენტებს σ_{ik} -თა აღნიშნავენ ($i, k=1, 2, 3$).

1.5. ხოთხის მოძრაობის განტოლება ძაბვებში

თუ (1.15) ტოლობაში შემავალ $\int_V \bar{\sigma}_i dS$ ხელახალი ინტეგრალში გამოიყენებთ გაუსის ფორმულას მივიღებთ

$$\int_S \bar{\sigma}_{11} dS = \int_V \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) d\tau.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას გაეითვალისწინებთ (1.15) ტოლობაში, გვექნება

$$\int_V \left[\frac{d\rho \bar{v}}{dt} + \rho \bar{v} \operatorname{div} \bar{v} - \rho \bar{F} - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) \right] d\tau = 0. \quad (1.22)$$

რადგანაც ეს ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი მოცულობისათვის, ამიტომ

$$\frac{d\rho \bar{v}}{dt} + \rho \bar{v} \operatorname{div} \bar{v} = \rho \bar{F} + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right). \quad (1.23)$$

თუ მარცხენა მხარის პირველ შესაკრებში მოვახდენთ ლივერენცირებას და გაეითვალისწინებთ უწყვეტობის (1.11) განტოლებას, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}. \quad (1.24)$$

ეს ტოლობა სითხის მოძრაობის რაოდენობის კანონს გამოსახავს ლივერენციალური სახით. მას სითხის მოძრაობის განტოლება ეწოდება ძაბვებში.

1.6. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენაზვის კანონი

თხიერი მოცულობის მოძრაობის რაოდენობის \bar{L}_0 მომენტის ცვლილება რაიმე O ცენტრის მიმართ შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^{\text{არ}}. \quad (1.25)$$

აქ $\bar{M}_0^{\text{არ}}$ - გარე ძალების მთავარი მომენტია O ცენტრის მიმართ. აღენიშნოთ ელემენტარული $d\tau$ მოცულობისა და dS უართვის ცენტრის რადიუსვექტორი \bar{r} -ით. ამ ელემენტზე

მოდებულია მოძრაობის რაოდენობის, მასობრივი და ზედაპირული ძალის ვექტორები. მაშინ

$$\bar{L}_0 = \int_V [\bar{r} \rho \bar{v}] d\tau, \quad \bar{M}_0^{არ} = \int_V [\bar{r} \rho \bar{r}] d\tau + \int_S [\bar{r} \bar{\sigma}_{ii}] dS.$$

ამ სიდიდეების გათვალისწინებით (1.25) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\frac{d}{dt} \int_V [\bar{r} \rho \bar{v}] d\tau = \int_V [\bar{r} \rho \bar{F}] d\tau + \int_S [\bar{r} \bar{\sigma}_{ii}] dS. \quad (1.26)$$

ზედაპირული ინტეგრალი გარდაექმნათ მოცულობით ინტეგრალად:

$$\int_S [\bar{r} \bar{\sigma}_{ii}] dS = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} [\bar{r} \bar{\sigma}_x] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{r} \bar{\sigma}_y] + \frac{\partial}{\partial z} [\bar{r} \bar{\sigma}_z] \right) d\tau.$$

ახლა (1.26) ტოლობა (1.8)-ის გამოყენებით ასე შეიძლება ჩაეწეროს:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\bar{r} \left(\rho \frac{d\bar{v}}{dt} - \rho \bar{F} - \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) \right] d\tau = \\ = \int_V \left\{ \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \bar{\sigma}_x \right] + \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \bar{\sigma}_y \right] + \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \bar{\sigma}_z \right] \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.27)$$

(1.24) განტოლების ძალით (1.27) ტოლობის მარცხენა მხარე ნულის ტოლია და τ მოცულობის ნებისმიერობის გამო დაგვრჩება

$$\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \bar{\sigma}_x \right] + \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \bar{\sigma}_y \right] + \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \bar{\sigma}_z \right] = 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$, აქედან მივიღებთ

$$[\bar{i} \bar{\sigma}_x] + [\bar{j} \bar{\sigma}_y] + [\bar{k} \bar{\sigma}_z] = 0. \quad (1.28)$$

იუ ყოველ შესაკრებს დეტერმინანტის სახით წარმოვიდგინო. მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

აქედან კი გვიქნება

$$\bar{i}(\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) + \bar{j}(\sigma_{zx} - \sigma_{xz}) + \bar{k}(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) = 0. \quad (1.29)$$

მოღებულ ტოლობა სამართლიანია თუ მხედი ძაბვები წყვილ-წყვილად ტოლია:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (1.30)$$

ეს კი იზოტროპული სხეულებისთვის არის ღამახასიათებელი.

ამრიგად, მოძრაობის რაიქენობის მომენტის შენახვის კანონი არ გვაძლევს განტოლებას. იგი ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობას გამოსახავს:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}.$$

1.7. ენერჯიის შენახვის კანონი

მოძრაი სითხის სრული ენერჯია კინეტიკური ენერჯიისა და შინაგანი ენერჯიის ჯამის ტოლია

$$E_{\text{სრ}} = T_k + E_{\text{ან}}.$$

\bar{V} სიმქართი მოძრაი $dm = \rho d\tau$ მასის კინეტიკური ენერჯია ტოლია $\rho \frac{v^2}{2}$, ხოლო τ მოცულობაში არსებული სითხის კინეტიკური ენერჯია კი უდრის

$$T_k = \int_{\tau} \frac{\rho v^2}{2} d\tau.$$

სასრული მოცულობის შინაგანი ენერჯია არის სითხის მოლეკულების მოძრაობის სითბური ენერჯია და ტოლია

$$E_{\text{ან}} = \int_{\tau} \rho e d\tau,$$

სადაც $\rho \, d\tau$ - წარმოადგენს $dm = \rho \, d\tau$ მასის ელემენტის შინაგანი ენერჯიის მარაგს. e - გამოსახულება ყოველივე მოცემულად ითვლება. ამრიგად, სრული ენერჯიისაოვის შეიძლება დავწეროთ

$$E_{\text{სრ}} = \int_{\tau} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) d\tau .$$

სითხის სრული ენერჯიის ცვლილება დროის t_1 მომენტთან t_2 მომენტამდე ტოლია მასობრივი ძალებისა და ზედაპირული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობისა დამატებული S ზედაპირში შემოსული სითბური Q_S ნაკადი და τ მოცულობაში განაწილებული სითბური წყაროების Q_{τ} ნაკადი:

$$E_{\text{სრ}}(t_2) - E_{\text{სრ}}(t_1) = A_{\tau} + A_S + Q_S + Q_{\tau} , \quad (1.31)$$

სადაც A_{τ} - მასობრივი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობაა. იგი ტოლია

$$A_{\tau} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\tau} \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) d\tau .$$

A_S - ზედაპირული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობაა

$$A_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{v}) dS .$$

\vec{n} ნორმალთან dS ზედაპირში შემოსული სითხის ნაკადის q_n სიმკვრივე dt დროში ტოლია $q_n dS dt$, ხოლო მთელ S ზედაპირში იგი იქნება

$$Q_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S q_n dS .$$

dt მოცულობაში dt დროში შემოსული სითხის რაოდენობა მოცულობითი წყაროებისაგან იქნება $\epsilon dt d\tau$, ხოლო მთელ τ მოცულობაში კი

$$Q_r = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \epsilon dt$$

თუ მოცემულ მნიშვნელობებს შევიტანო (1.31) გამოსახულებაში, გაეყოთ dt -ზე და მივასწრაფებთ $t_2 - t_1$ ნულისაკენ, მივიღებთ ენერჯიის განტოლებას ინტეგრალური ფორმით

$$\frac{dE_{\text{ენ}}}{dt} = \int_V \rho(\vec{F} \cdot \vec{v}) dt + \int_S (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{v}) dS + \int_S q_n dS + \int_V \epsilon dt \quad (1.32)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ ენერჯიის განტოლება დიფერენციალური სახით, გარდავიქმნათ (1.32) გამოსახულება ისე, რომ ყოველ შესაკრებში გვექონდეს ინტეგრირება გაერკველებული მოცულ τ მოცულობაზე. (1.8) ტოლობისა და უწყვეტობის (1.11) განტოლების გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) dt = \int_V \left(\rho \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \frac{de}{dt} \right) dt.$$

ვისარგებლოთ ახლა კოშის (1.20) ფორმულითა და გაუსის ფორმულით, გვექნება

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{v}) dS &= \int_S [(\vec{\sigma}_x \cdot \vec{v}) \cos(n^x x) + (\vec{\sigma}_y \cdot \vec{v}) \cos(n^y y) + (\vec{\sigma}_z \cdot \vec{v}) \cos(n^z z)] dS = \\ &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\sigma}_y \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\sigma}_z \cdot \vec{v}) \right] dt. \end{aligned}$$

საბოლოოდ (1.32) მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \rho \frac{de}{dt} \vec{\sigma}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - \vec{\sigma}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} - \vec{\sigma}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \epsilon + \left[\rho \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho(\vec{F} \cdot \vec{v}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \vec{v} \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) \right] \right\} dt = \int_S q_n dS. \quad (1.33) \end{aligned}$$

სიხის მოძრაობის (1.24) განტოლების გამო კვადრატული ფრჩხილები ნულად გადაიქცევა.

ახლა გარდავიქმნათ (1.33) გამოსახულების მარჯვენა მხარე. თუ მოვიქცევით ისევე, როგორც კოშის ფორმულის გამოყენებისას

- გამოვიყენებთ (1.33) მცირე ტეტრაედრისათვის, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და ეისარგებლებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემით, მივიღებთ

$$q_n + q_x \cos(n^{\wedge}x) + q_y \cos(n^{\wedge}y) + q_z \cos(n^{\wedge}z) = \frac{1}{3} \left[\rho \frac{de}{dt} - \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] \text{საშ.}$$

თუ მივასწრავებთ h ნულისაკენ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$q_x = -q_x, \quad q_y = -q_y, \quad q_z = -q_z$$

გვექნება

$$q_n = q_x \cos(n^{\wedge}x) + q_y \cos(n^{\wedge}y) + q_z \cos(n^{\wedge}z). \quad (1.34)$$

ეს ფორმულა ამყარებს კავშირს \bar{n} ნორმალთან ზედაპირში გასულ სიბოძის ნაკალსა და $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ნორმალთან ფართობი გასულ სიბოძურ ნაკალებს შორის. ეს თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ გაუსის ფორმულა, რომელსაც ზედაპირზე გაურცელებული ინტეგრალით მოცულობით ინტეგრალში გადაყავს:

$$\int_S q_n dS = \int_V \operatorname{div} \bar{q} dt.$$

აქ \bar{q} აღნიშნავს სიბოძის ნაკალის ვექტორს, რომლის გეგმილებია q_x, q_y, q_z . ამრიგად, (1.33) გამოხატულებაში ყველა შესაკრები წარმოდგენილია მოცულობითი ინტეგრალის სახით. რადგანაც τ მოცულობა ნებისმიერად არის აღებული, ამიტომ (1.33)-დან მივიღებთ მოძრავი უწყვეტი გარემოს ენერჯის განტოლებას დიფერენციალური ფორმით:

$$\rho \frac{de}{dt} = \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \operatorname{div} \bar{q} + \varepsilon. \quad (1.35)$$

ბევრი იზოტროპული გარემოსათვის სამართლიანია სიბოძამტარებლობის ფურცის კანონი

$$dq = k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt.$$

აქ dq - არის \bar{n} ნორმალთან ზედაპირში dS ღრობში გასული სითბოს რაოდენობა. აქედან

$$q_n = k \frac{\partial T}{\partial n},$$

და სითბოს ნაკადის ვექტორისათვის მივიღებთ

$$\vec{q} = k \text{grad} T, \quad (1.36)$$

სადაც T აბსოლუტური ტემპერატურაა.

სითბოტექნოლოგიის k კოეფიციენტი ძირითადად ტემპერატურაზეა დამოკიდებული. გარემოს იზოტროპობა ნიშნავს, რომ მისი ყველა თვისება ყოველი მიმართულებით ერთნაირია. ანიზოტროპულ გარემოში სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია აგრეთვე ფართის ორიენტაციაზე.

1.8. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორი

მასის, მოძრაობის რაოდენობისა და ენერჯიის შენახვის კანონები სამართლიანია სხვადასხვა სითხისა და აირისათვის, მაგრამ ისინი არ არიან საკმარისნი კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისათვის. საქმე ის არის, რომ ამ განტოლებებში შემაჯალუცნობთა რაოდენობა მეტია განტოლებათა რაოდენობაზე. გარდა ρ , \vec{v} , ϵ პიდრადინამიკური სიდიდეებისა, რომლებიც ღინების კვლს ახასიათებს, მათში შედის სხვა სიდიდეებიც, როგორცაა მაგალითად, ზედაპირული ძალების \vec{T}_n ძაბვები, სითბოს q_n ნაკადი ზედაპირში. ამიტომ აუცილებელია შემოტანილ იქნას დამატებითი თანაფარდობანი, რომლებიც გარემოს ფიზიკურ თვისებებს აღწერენ. სხვანაირად რომ ეთქვას, აუცილებელია აქაგით შესასწავლი გარემოს თეორიული მოდელი, რომელიც აღწერილი იქნება ჩაკეტილ განტოლებათა სისტემით.

ღინების ველის ნებისმიერ წერტილში დაბადული მდგრადობა განისაზღვრება $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ ვექტორითა სამეულთა. ისინი წარმოადგენენ დაბადულობებს, რომლებიც მოქმედებენ Ox, Oy, Oz კოორდინატთა ღერძების მართობულ ფარიებზე. ყოველ ასეთ ვექტორს გააჩნია სამი კომპონენტი:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \sigma_{xx} \bar{i} + \sigma_{xy} \bar{j} + \sigma_{xz} \bar{k}, \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_{yx} \bar{i} + \sigma_{yy} \bar{j} + \sigma_{yz} \bar{k}, \\ \bar{\sigma}_z &= \sigma_{zx} \bar{i} + \sigma_{zy} \bar{j} + \sigma_{zz} \bar{k}.\end{aligned}\tag{1.37}$$

$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ ვექტორთა სამეული, რომელიც განსაზღვრულია დეკარტეს ნებისმიერ ორიოგონალურ კოორდინატთა სისტემაში ისე, რომ ერთი სისტემიდან მეორე სისტემაში გადასვლისას $\bar{\sigma}$ ვექტორები გარდაიქმნება ფორმულით

$$\bar{\sigma}'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \bar{\sigma}_k, \quad i, k=1, 2, 3\tag{1.38}$$

სადაც $\alpha_{ik} = \cos(\bar{y}_i, \bar{x}_k)$ მიმართულების კოსინუსებია, მეორე რანგის ტენზორად იწოდება. ამრიგად, $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ ვექტორები ქმნიან დაბადულობის ანუ ძაბვის ტენზორს. რაღგანაც ყოველი $\bar{\sigma}$, ვექტორი განისაზღვრება (1.37) ფორმულით, ამიტომ ეს ტენზორი შეიძლება მატრიცულად ჩაიწეროს:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

ან, თუ კოორდინატთა ღერძებს 1, 2, 3 ინდექსით აღვნიშნავთ, ეს მატრიცა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.\tag{1.39}$$

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია - $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ იგი ექვსი კომპონენტით იქნება განსაზღვრული. $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ - კომპონენტებს ძაბვის ნორმალური კომპონენტები ეწოდება, $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_{13} = \sigma_{31}$ კი მხები კომპონენტები.

1.9. დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი

ავარჩიოთ მცირე თხიერი ნაწილაკი და წერტილი $M(x_M, y_M, z_M)$, რომელიც ამ ნაწილაკს ეკუთვნის. M წერტილის უახლოესი N წერტილის სიჩქარე წრფივ მიახლოებაში ტეილორის ფორმულით ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\bar{v} = \bar{v}_M + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)_M \xi + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)_M \eta + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_M \zeta. \quad (1.40)$$

აქ ξ, η, ζ არის N წერტილის კოორდინატები M წერტილის მიმართ

$$\bar{r} - \bar{r}_M = \xi \bar{i} + \eta \bar{j} + \zeta \bar{k} = \bar{\rho}.$$

განვიხილოთ მატრიცა

$$\left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

მაშინ (1.40) ასე შეიძლება გადაიწეროს

$$\bar{v} - \bar{v}_M = \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right) \bar{\rho}.$$

მიღებული ტოლობა არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემაზე და ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში $\bar{\rho}$ ვექტორს უთანადებს $\bar{v} - \bar{v}_M$ ვექტორს. ტოლობის ეს თვისება

წარმოადგენს. აუცილებელ და ხაკმარის პირობას, რომ $\frac{d\vec{v}}{dt}$ მატრიცი ტენზორს წარმოადგენდეს. (1.40) ტოლობა ისე გარდაეკმნათ, რომ მას პქონდეს სახე

$$\vec{v} = \vec{v}_M + [\vec{\omega}\vec{r}] + \text{grad}F, \quad (1.41)$$

ღ, η, ζ ცვლადების მიმართ (1.40) ტოლობის წრფიეიობის გამო F ფუნქცია კვადრატული ფორმა უნდა იყოს. იგი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$2F = \varepsilon_{xx}\xi^2 + \varepsilon_{yy}\eta^2 + \varepsilon_{zz}\zeta^2 + 2\varepsilon_{xy}\xi\eta + 2\varepsilon_{yz}\eta\zeta + 2\varepsilon_{zx}\zeta\xi.$$

თუ (1.41) დაეაგეგმილებო ღერძებზე:

$$\begin{aligned} u - u_M &= \varepsilon_{xx}\xi + \varepsilon_{xy}\eta + \varepsilon_{xz}\zeta + (\omega_y\zeta - \omega_z\eta), \\ v - v_M &= \varepsilon_{yx}\xi + \varepsilon_{yy}\eta + \varepsilon_{yz}\zeta + (\omega_z\xi - \omega_x\zeta), \\ w - w_M &= \varepsilon_{zx}\xi + \varepsilon_{zy}\eta + \varepsilon_{zz}\zeta + (\omega_x\eta - \omega_y\xi). \end{aligned} \quad (1.42)$$

თუ შეკადარებო (1.42) და (1.40) ტოლობებს, კიბოეოთ F კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს და $\vec{\omega}$ ვექტორის გეგმილებს:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

ეს სიდიდეები ცალსახად განისაზღვრებიან.

მექანიკიდან ცნობილია, რომ აბსოლუტურად მყარი სხეულისათვის გეაქვს

$$\vec{v} = \vec{v}_M + [\vec{\omega} \vec{r}_M],$$

სადაც \vec{v}_M - პოლუსის სიჩქარეა, $\vec{\omega}$ - მყისი კუთხური სიჩქარის ვექტორია, რომლითაც მყარი სხეული ბრუნავს M წერტილში გამავალი მყისი ღერძის გარშემო. (1.41)-დან გამომდინარეობს, რომ უწყვეტი გარემოს რაიმე წერტილის სიჩქარე არის ჯამი M პოლუსის სიჩქარისა, ამ პოლუსში გამავალი მყისი ღერძის გარშემო ამ წერტილის ბრუნვის $\vec{\omega}$ - კუთხური სიჩქარისა, როცა ეს წერტილი გამყარებულად ითვლება და დეფორმაციის $\vec{v}_{დფ}$ სიჩქარისა. ნაწილაკის კუთხური სიჩქარე ტოლია

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v},$$

დეფორმაციის სიჩქარე კი

$$\vec{v}_{დფ} = \text{grad} \dot{f}.$$

(1.43) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\left(\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}\right)$ ტენზორი

შეიძლება წარმოვიდგინოთ სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ჯამის სახით:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}\right) = S + T,$$

სადაც

$$\dot{S} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \{\epsilon_{ik}\}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

სიმეტრიული \dot{S} ტენზორი განსაზღვრავს ნაწილაკის დეფორმაციის სიჩქარეს და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორად იწოდება. ამ ტენზორთან არის დაკავშირებული $F(\xi, \eta, \zeta)$ - ფუნქციის სიმეტრიული კვადრატული ფორმა.

1.10. კავშირი ძაბვისა და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორებს შორის

$\{\sigma_{ik}\}$ და $\{\epsilon_{ik}\}$ ტენზორები ახასიათებენ მოცემულ წერტილში უწყვეტი გარემოს დაძაბულ და დეფორმირებულ მდგომარეობას. კონკრეტული გარემოსათვის უნდა განისაზღვროს კავშირი ამ ტენზორებს შორის. ბლანტი სითხის შემთხვევაში ეს კავშირი ნავიე-სტოქსის კანონით არის მოცემული.

ბლანტი სითხის მოდელს საფუძვლად უდევს შემდეგი მოთხოვნა:

1. თუ სითხე უძრავია ან მოძრაობს როგორც მყარი სხეული, სითხეში მხოლოდ ნორმალური ძაბვებია ნულისაგან განსხვავებული;
2. სითხე იზოტროპულია - მისი თვისებები ყველა მიმართულებით ერთნაირია.
3. ძაბვის ტენზორის კომპონენტები დეფორმაციის სიჩქარის კომპონენტების წრფივი ფუნქციებია.

ყველაზე ზოგადი კავშირი ამ ტენზორებს შორის, როგორც შესაეალში იყო აღნიშნული, მოიცემა ტოლობით

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \quad (1.1)$$

თუ აღნიშნავთ $\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu$, მაშინ (1)-დან მივიღებთ ბლანტი სითხის მოდელის შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}, \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}, \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\
\sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\
\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).
\end{aligned}
\tag{1.45}$$

1.11. გარემოს მდგომარეობის კანონები

(1.1) ტოლობაში, რომელიც აკავშირებს ძაბვისა და დეფორმაციის სინქარის ტენზორთა კომპონენტებს, შემოყვანილია ახალი სიდიდე - p წნევა და μ, λ კოეფიციენტები, რომლებიც ზოგად შემთხვევაში არ არიან მუდმივები. სითხის მოძრაობის განტოლებათა სისტემის ჩაკეტვისათვის გამოიყენება თანაფარდობანი, რომლებიც შესასწავლი გარემოს თერმოდინამიკურ ბუნებას ახასიათებენ. მათ მდგომარეობის განტოლებები ეწოდებათ.

ზოგად შემთხვევაში, როცა გარემო კუმშვადია, სიმკვრივე დაკავშირებულია წნევასთან და ტემპერატურასთან, მდგომარეობის განტოლება იქნება

$$f(p, \rho, T) = 0. \tag{1.46}$$

შინაგანი ენერგია განისაზღვრება მდგომარეობის p, T პარამეტრებით:

$$e = e(p, T).$$

კუმშვადი გარემოს კერძო შემთხვევას სრულყოფილი აირი წარმოადგენს. აირს ეწოდება სრულყოფილი, თუ მისი შინაგანი ენერგია მხოლოდ ტემპერატურაზეა დამოკიდებული, ხოლო მდგომარეობის განტოლება კლაპეირონის განტოლებაა

$$p = R \rho T, \quad (1.47)$$

სრულყოფილი აირისათვის სრულდება ტოლობა

$$e = \int c_r dT.$$

c_r სიდიდეს ხვედრითი სითბოტევადობა ეწოდება მუდმივი მოცულობის დროს. ხშირ შემთხვევაში $C_r = \text{const}$ და ეს პირობა რეალური აირებისათვის დიდი სიზუსტით სრულდება მაღალი ტემპერატურებისთვისაც კი, და ამიტომ

$$e = C_r T + e_0.$$

გარდა C_r სიდიდისა შემოყავთ ხვედრითი სითბოტევადობის კოეფიციენტი მუდმივი წნევის დროს

$$c_p = C_r + R,$$

სადაც R გაზობრივი მუდმივია.

აირებისათვის სიბლანტის μ კოეფიციენტის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე სატერლენდის ფორმულით განისაზღვრება

$$\mu = \frac{\text{const}}{T - T_0} T^{\frac{3}{2}}, \quad T_0 \approx 114^{\circ} \text{K}$$

ან მიახლოებითი ფორმულით

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n.$$

თუ სითხე არაკუმშვადია და არასითბოგამტარი, მაშინ

$$\rho = \text{const}, \quad \mu = \text{const},$$

ხოლო შინაგანი ენერგია ტემპერატურის წრფივი ფუნქციაა

$$e = cT + \text{const}.$$

1.12. თხევადი გარემოს მოძვლები

უწყვეტი გარემოს მოძვლის აგება ნიშნავს მივიღოთ ჩაკეტილ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს ამ გარემოს მოძრაობას. ბლანტი სითბოგამტარი სითხის მოძვლი ზოგად შემთხვევაში შეიცავს შემდეგ ელემენტებს:

- უწყვეტობის განტოლებას,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (1.48)$$

- უწყვეტი გარემოს მოძრაობის განტოლებას ძაბვებში,

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}, \quad (1.49)$$

ენერჯიის განტოლებას

$$\rho \frac{de}{dt} = \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \operatorname{div} \bar{q} + \varepsilon, \quad (1.50)$$

ნაუიე-სტოქსის სიბლანტის კანონს, რომელიც გვიჩვენებს კავშირს ძაბვის ტენზორისა და დეფორმაციის სინქარის ტენზორის კომპონენტებს შორის

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \cdot \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (1.51)$$

- სითბოგამტარებლობის ფურიეს კანონს

$$\bar{q} = k \operatorname{grad} T, \quad (1.52)$$

რომელიც გამოხატავს \bar{q} სითბური ნაკადის კავშირს ტემპერატურასთან;

- მდგომარეობის განტოლებას

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad (1.53)$$

- e - შინაგანი ენერჯიის გამოსახვას მდგომარეობის p და T პარამეტრით.

- μ , k , λ სიდიდეების გამოსახულებებს.

მასობრივი $\rho \vec{F}$ ძალები და სითბოს შინაგანი წყაროების ინტენსივობა ϵ გარე ფაქტორებად ითვლება და წინასწარ მოცემული უნდა იყოს. დაეუშვათ, რომ $\epsilon = 0$. (1.48)-(1.52) განტოლებები ვექტორული სახითაა ჩაწერილი. მათი ჩაწერა სკალარული ფორმითაც შეიძლება ნებისმიერ ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემაში, თუ ვისარგებლებთ ვექტორული ოპერაციების შესაბამისი ჩაწერით.

1.13. ნავიე-სტოქსის განტოლებები

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის განტოლებები ძაბვებში ინდექსურადასე ჩაიწერება

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad i, k=1, 2, 3. \quad (1.54)$$

თუ მასში შევიტანთ ძაბვის ტენზორის მნიშვნელობებს (1.51)-დან, მივიღებთ

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial v_c}{\partial x_c} \right) \quad (1.55)$$

აქ გათვალისწინებულია δ_{ik} სიმბოლოს ფილტრაციის თვისება $\delta_{ik} A_k = A_i$. (1.55) წარმოადგენს ბლანტი სითბის მოძრაობის განტოლებას. თუ μ და λ მუდმივია, იგი ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \quad (1.56)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ $\lambda = \zeta - \frac{2}{3} \mu$.

(1.56) განტოლება ვექტორული ფორმით მიიღებს სახეს

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad} \text{div} \vec{v}. \quad (1.57)$$

ამ განტოლებას ნავეი-სტოქსის განტოლება ეწოდება. იგი აღწერს ბლანტი სითხის მოძრაობას.

თუ ენერჯიის (1.50) განტოლებაში გავითვალისწინებთ ძაბვის ტენზორის (1.51) მნიშვნელობებს და (1.52) კანონს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} &= -\rho \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \lambda \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} + \frac{\partial}{\partial x_e} k \frac{\partial T}{\partial x_e} = \\ &= -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_e} k \frac{\partial T}{\partial x_e}, \end{aligned}$$

ანუ

$$\rho \frac{de}{dt} = -\rho \operatorname{div} \bar{v} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \lambda (\operatorname{div} \bar{v})^2 + \operatorname{div} k \operatorname{grad} T, \quad (1.58)$$

თუ სითხე ერთგვაროვანია და არაკუმშვადი, მაშინ $\rho = \text{const}$, $e = cT$, $k = \text{const}$ და ნავეი-სტოქსის განტოლებები, უწყვეტობის განტოლება, ენერჯიის განტოლება გამარტივდება და გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} &= \bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \bar{v}, \\ \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$c \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) T \right) = \phi + k \Delta T,$$

სადაც $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტია, ϕ - კი ენერჯიის დისიპაციის ფუნქცია

$$\phi = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (1.60)$$

(1.59) განტოლებათა სისტემა შეიცავს ხუთ განტოლებას ხუთი v_x, v_y, v_z, p, T უცნობით. \bar{F} ძალა მოცემულად ითვლება. (1.59) სისტემის პირველი და მესამე განტოლებები

მეორე რიგის კერძო წარმოებულნი არაწრფივი განტოლებებია. ისინი აღწერენ ბლანტი არაკუმშვადი ერთგვაროვანი სითხის მოძრაობას მასში სითბოგადაცემის გათვალისწინებით.

1.14. საწყისი და სასაზღვრო პირობები

(1.59) სისტემის ამოხსნა უნდა აკმაყოფილებდეს საწყის და სასაზღვრო პირობებს. საწყისი პირობები აუცილებელია არასტაციონარული დინების შემთხვევაში. ამ შემთხვევაში განტოლებებში არსებობენ აჩქარების ლოკალური მდგენელები და ტემპერატურის წარმოებული დროით $\frac{\partial T}{\partial t}$.

საწყისი პირობები გვაძლევს სიჩქარისა და ტემპერატურის განაწილებას მთელ განსახილველ არეში დროის საწყის მომენტში

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z, t)|_{t=0} &= v_{x0}(x, y, z), & v_y(x, y, z, t)|_{t=0} &= v_{y0}(x, y, z), \\ v_z(x, y, z, t)|_{t=0} &= v_{z0}(x, y, z), & T(x, y, z, t)|_{t=0} &= T_0(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.61)$$

სასაზღვრო პირობებს, როგორც მათემატიკური, ასევე ფიზიკური თვალსაზრისით, ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვთ.

სასაზღვრო პირობები მოიცემა გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე და უსასრულობაში.

როგორც წესი, თვლიან, რომ უსასრულობაში ცნობილია სიჩქარე, წნევა და ტემპერატურა, ხოლო შიგა ამოცანის შემთხვევაში სითხის ხარჯი.

სასაზღვრო პირობების სახე სხეულის ზედაპირზე დამოკიდებულია იმაზე, სხეული მოძრავია თუ უძრავი და, რომ სიღრმის ნაკადი მას გარსედინება.

ა. სასაზღვრო პირობები გარსმოდენად სხეულზე-სტაციონარული დინებისას სხეულები უძრავნი არიან და

გარსმოღუნადი სხეულის ზედაპირის წერტილთა სინქარები ნულის ტოლია, ამიტომ თუ სხეულის ზედაპირში სითხე არ გაედინება, სხეულის ზედაპირზე სითხის ნაწილაკთა სინქარე უნდა იყოს ნულის ტოლი

$$v_n|_S = 0, \quad (1.62)$$

სადაც v_n სინქარის ნორმალური მდგენელია. თუ სხეულის ზედაპირი სითხეს ატარებს, მაშინ

$$v_n|_S = f(M), \quad (1.63)$$

სადაც $f(M)$ - მოცემული ფუნქციაა, M - კი ზედაპირის წერტილი.

ტემპერატურისათვის შეიძლება გვექონდეს ორი სასაზღვრო პირობა: მოცემულია ან სითხის ტემპერატურა სხეულის ზედაპირზე

$$T|_S = T_w(M), \quad (1.64)$$

ანდა სითბოს ის ნაკადი, რომელიც სხეულიდან სითხეს გადაეცემა

$$k \frac{\partial T}{\partial n}|_S = q(M). \quad (1.65)$$

თუ $k_{\Sigma\Sigma}$ - სხეულის სითბოგამტარებლობაა, ხოლო $T_{\Sigma\Sigma}$ - სხეულის ტემპერატურა, მაშინ ეს პირობა ასე ჩაიწერება

$$k \frac{\partial T}{\partial n}|_S = k_{\Sigma\Sigma} \frac{\partial T_{\Sigma\Sigma}}{\partial n}|_S. \quad (1.66)$$

ეს ტოლობა სითბოს ნაკადის უწყვეტობას გამოსახავს.

ბ. პირობები გამყოფ ზედაპირზე. თუ ორი სითხის გამყოფი ზედაპირი უძრავია, მაშინ

$$\bar{v}^I|_{\Sigma} = \bar{v}^{II}|_{\Sigma}. \quad (1.67)$$

ეს არის სინქარის უწყვეტობის პირობა გამყოფ Σ ზედაპირზე გადასვლისას, ე. ი. ბლანტ სითხეში უნდა იყოს ტოლი სინქარის არა მარტო ნორმალური, არამედ მხები მდგენელიც.

თუ \bar{n} წარმოადგენს Σ ზედაპირზე მდებარე ფართის ნორმალს, პირობას ძაბვისათვის ასეთი სახე ექნება

$$\bar{\sigma}_n^I|_{\Sigma} = \bar{\sigma}_n^{II}|_{\Sigma}. \quad (1.68)$$

ასევე უნდა გვექონდეს პირობა ტემპერატურისათვის

$$k_I \frac{\partial T^I}{\partial n}|_{\Sigma} = k_{II} \frac{\partial T^{II}}{\partial n}|_{\Sigma}. \quad (1.69)$$

გ. პირობები უსასრულობაში. ისინი ასეთია

$$\bar{v}_{\infty} = \bar{v}_{\infty}, \quad p_{\infty} = p_{\infty}, \quad T_{\infty} = T_{\infty}. \quad (1.70)$$

ამრიგად, ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ვიპოვოთ (1.59) სისტემის ამონახსნები, რომლებიც სტაციონარული დინების შემთხვევაში ზემოთ ჩამოთვლილ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ.

არასტაციონარული დინების შემთხვევაში ამოცანები შემდეგნაირად იხმება.

ე. სასაზღვრო პირობები მოძრავი სხეულის ზედაპირზე. არასტაციონარული მოძრაობის დროს სხეულებს შეუძლიათ როგორც მოძრაობა სითხეში, ასევე თავიანთი ფორმის შეცვლა. ვთქვათ, $\bar{u}(M, t)$ - სხეულის ზედაპირის M წერტილის მოძრაობის სიჩქარეა, დროის t - მომენტში. მაშინ, თუ სხეულის ზედაპირში სითხე არ გაედინება, გვექნება

$$v_n|_{\Sigma} = \bar{u}_n(M, t). \quad (1.71)$$

ხოლო თუ ზედაპირი სითხეს ატარებს ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ, ნაცვლად (1.71), უნდა დაკმაყოფილდეს პირობა

$$v_n|_{\Sigma} = f(M, t), \quad (1.72)$$

სადაც $f(M, t)$, მოცემული ფუნქციაა.

ტემპერატურისათვის, ანალოგიურად ზემოთ თქმულისა, მივიღებთ

$$T|_{\Sigma} = T_w(M, t), \quad k \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Sigma} = q(M, t). \quad (1.73)$$

ვ. სასაზღვრო პირობები გამყოფ ზედაპირზე. სასაზღვრო პირობები ორი სიოხის გამყოფ ზედაპირზე ინარჩუნებენ იგივე სახეს, რაც (1.67)-(1.69) ფორმულებშია, ოღონდ, ახლა t ღროზე იქნება დამოკიდებული არა მარტო $\bar{v}, \bar{\sigma}_{ij}, T$, არამედ თვით Σ ზედაპირიც.

ზ. პირობები უსასრულობაში. უსასრულობაში უნდა იყოს ცნობილი $\bar{v}_{\infty}(t), p_{\infty}(t)$ და $T_{\infty}(t)$.

დ. საწყისი პირობება. საწყის $t=0$ მომენტში უნდა შესრულდეს პირობები:

$$\bar{v}|_{t=0} = \bar{v}_0(x, y, z), \quad p|_{t=0} = p_0(x, y, z), \quad T|_{t=0} = T_0(x, y, z).$$

1.15. იდეალური სითხე. საწყისი და სასაზღვრო პირობები

სითხეს ეწოდება იდეალური, თუ მისი ძაბვის ტენზორი $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ და სიბლანტის კოეფიციენტი $\nu = 0$. მაშინ (1.59) სისტემიდან გვექნება

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} &= \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p, \\ \text{div} \bar{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

ამ სისტემას იდეალური არაკუმშვადი სიოხის მოძრაობის განტოლებებს ან ეილერის განტოლებებს უწოდებენ. ისინი პირველი რიგის კერძო წარმოებულისანი არაწრფივი განტოლებებია.

თუ სხეულის ზედაპირში სითხე არ გაედინება, მაშინ იდეალური სითხის მოძრაობის სიჩქარის ნორმალური მდგენელი საზღვარზე ნულის ტოლი უნდა იყოს

$$v_n|_S = 0. \quad (1.75)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ იდეალური სითხე გარს ედინება სხეულს.

თუ სხეული უძრავია, მაგრამ მის ზედაპირში სითხე გაელინება გვექნება პირობა

$$v_n|_S = f(M, t), \quad (1.76)$$

სადაც $f(M, t)$ - მოცემული ფუნქციაა.

იდეალური სითხისათვის გამყოფ ზედაპირზე გვექნება პირობები:

$$\bar{v}_n^I|_\Sigma = \bar{v}_n^{II}|_\Sigma = u_n \Sigma, \quad p^I|_\Sigma = p^{II}|_\Sigma. \quad (1.77)$$

ამ შემთხვევაში შეიძლება გამყოფი ზედაპირი ფორმას იცვლიდეს და გადაადგილდებოდეს ღრრის მიხედვით. აქ $u_n \Sigma$ არის Σ ზედაპირის წერტილითა სიჩქარე.

პირობები უსასრულობაში იდეალური სითხისათვის მოითხოვს

$$\bar{v}|_\infty = \bar{v}_\infty(t), \quad p|_\infty = p_\infty(t), \quad (1.78)$$

ხოლო საწყისი პირობები ასეთია

$$\bar{v}|_{t=0} = \bar{v}_0(x, y, z), \quad p|_{t=0} = p_0(x, y, z). \quad (1.79)$$

თუ ღინება სტაციონარულია მოცემული ფუნქციები \bar{v} ღრრზე არ იქნება დამოკიდებული და საწყისი პირობებიც ზედმეტი იქნება.

1.16. მოძრაობის განტოლებები მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში

ვილერის მეთოდით უწყვეტი გარემოს მოძრაობა შეიძლება განისაზღვროს არა მარტო დეკარტეს x, y, z კოორდინატებში, არამედ q_1, q_2, q_3 მრუდწირულ კოორდინატებში. მათ შორის კავშირი გამოისახება ტოლობებით

$$q_k = q_k(x, y, z), \quad k=1, 2, 3 \quad (1.80)$$

განტოლებები

$$q_k(x, y, z) = \text{const} \quad (k=1, 2, 3)$$

განსაზღვრავენ ზელაპირთა ოჯახებს, რომლებსაც საკოორდინატო ზელაპირები ეწოდებათ. მრუდთა სამი ოჯახი, რომლებიც ემორჩილებიან განტოლებებს

$$\left. \begin{aligned} q_k(x, y, z) &= \text{const}_k \\ q_n(x, y, z) &= \text{const} \end{aligned} \right\} k, n = 1, 2, 3 \quad k \neq n \quad (1.81)$$

საკოორდინატო წირებად იწოდება.

სივრცის ყოველ წერტილში გადაიკვეთება სამი საკოორდინატო ღერძი, რომელთა მხებები შეეგვიძლია მივიღოთ საკოორდინატო ღერძებად. ეს ღერძები, რომლებიც დამაგრებულნი არიან სივრცის ყოველ წერტილთან, იქნებიან უძრავნი და ექნებათ სხვადასხვა მიმართულება. ერთეულოვანი ვექტორები ამ ღერძების გასწვრივ აღენიშნოთ $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$. თუ ეს უკანასკნელნი ორთოგონალურნი არიან სივრცის ყველა წერტილში, მაშინ მრულწირულ კოორდინატებს ორთოგონალურს უწოდებენ.

დავუშვათ, რომ იაკობიანი $\frac{d(q_1, q_2, q_3)}{d(x, y, z)} \neq 0$, მაშინ (1.80)

განტოლებები შეიძლება ცალსახად ამოიხსნას x, y, z ცვლადების მიმართ, რომლებსაც ვექტორული სახით ასე წერენ

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (1.82)$$

საკოორდინატო წირების გასწვრივ უსასრულო მცირე გადაადგილება განისაზღვრება შესაბამისად შემდეგი ნაზრდებით

$$d\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} dq_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.83)$$

თუ გამოვიყენებთ ამ თანაფარდობას და დავუშვებთ, რომ მრულწირულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურია, მაშინ ხაზოვანი ელემენტის კვადრატი ჩაიწერება ასე

$$dS^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)^2 dq_k^2 = \sum_{k=1}^3 H_k^2 dq_k^2, \quad (1.84)$$

სადაც

$$H_k(q_1, q_2, q_3) = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2} \quad (1.85)$$

ლაშქს კოფიციენტებად იწოლებიან.

q_1 ($q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$), q_2 ($q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$), q_3 ($q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$), საკორდინატო ღერძების გასწერივ ელემენტარული გადაადგილება განისაზღვრება თანაფარდობით

$$dS_k = H_k dq_k. \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.86)$$

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის განტოლებები გეგმილებში შესაბამის ღერძებზე, რომელთა ერთეულიანი ვექტორებია $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$, შეიძლება მივიღოთ, თუ გვეცოდინება მოძრაობის განტოლებების შესაკრებთა გეგმილები ამ ღერძებზე. რადგანაც ეს ღერძები ორთოგონალურია ამიტომ, თუ აღენიშნავთ სიჩქარის გეგმილებს v_k -თი შესაბამისად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^3 \bar{i}_k v_k, \quad (1.87)$$

აქედან კი, რადგან \bar{i}_k არ იცვლება დროში ყოველ წერტილში გვექნება

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \bar{i}_k \frac{\partial v_k}{\partial t}. \quad (1.88)$$

ანალოგიურად \bar{F} ვექტორისათვის

$$\bar{F} = \sum_{k=1}^3 \bar{i}_k F_k. \quad (1.89)$$

რადგანაც grad φ ვექტორის გეგმილი რომელიმე მიმართულებაზე ტოლია φ ფუნქციის წარმოებულისა ამ მიმართულებით, ამიტომ

$$\text{grad } \varphi = \sum_{k=1}^3 \bar{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial S_k} = \sum_{k=1}^3 \bar{i}_k \frac{\partial \varphi}{H_k \partial q_k}. \quad (1.90)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{a} = \sum_{k=1}^3 \vec{i}_k a_k$, შეიძლება $\text{rot } \vec{a}$ და $\text{div } \vec{a}$ ოპერაციები ასე ჩავწეროთ:

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial H_3 a_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial H_2 a_2}{\partial \alpha_3} \right) \vec{i}_1 + \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial H_1 a_1}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial H_3 a_3}{\partial \alpha_1} \right) \vec{i}_2 + \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2 a_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial H_1 a_1}{\partial \alpha_2} \right) \vec{i}_3. \quad (1.91)$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial \alpha_3} \right] \quad (1.92)$$

თუ უკანასკნელ ტილობაში დავუშვებთ, რომ $\vec{a} = \text{grad } \varphi$, ვიპოვით ლაპლასის ოპერატორის გამოსახულებას მრუდწირულ კოორდინატებში:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3} \right). \quad (1.93)$$

უწყვეტობის განტოლებას მრუდწირულ კოორდინატებში ექნება სახე:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (H_2 H_3 \rho v_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (H_1 H_3 \rho v_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 \rho v_3)}{\partial \alpha_3} \right]. \quad (1.94)$$

ხშირად საჭიროა ვიცოდეთ ვექტორიდან ლაპლასის ოპერატორის მნიშვნელობა მრუდწირულ კოორდინატებში. ამისათვის გავიხსენოთ ვექტორული ანალიზის ფორმულა

$$\Delta \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}.$$

თუ აღვნიშნავთ $(\Delta \vec{a})_i$ -თი $\Delta \vec{a}$ ვექტორის გეგმილს q_i საკოორდინატო წირის მხების მიმართულებაზე გვექნება

$$(\Delta \vec{a})_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial \alpha_3} \right] \right\} -$$

$$-\frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{d(H_2 a_2)}{dq_1} \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{d(H_1 a_1)}{dq_2} \right] - \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{d(H_1 a_1)}{dq_3} \right] + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{d(H_3 a_3)}{dq_1} \right] \right\}. \quad (1.95)$$

$(\Delta \bar{a})_2$ და $(\Delta \bar{a})_3$ -თვის ფორმულები მიიღება, თუ (1.95) გამოსახულებაში მოვახდენთ ინდექსების ციკლურ გადაადგილებებს.

დაეწეროთ ახლა ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებები ცილინდრულ და სფერულ კოორდინატებში.

1.17. ცილინდრული კოორდინატები

ჯერ განვიხილოთ ცილინდრული კოორდინატები r , φ , z , რომლებიც დეკარტეს კოორდინატებთან დაკავშირებულია ფორმულებით

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= r \sin \varphi, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$z = z, \quad z = z.$$

ამ სისტემაში ლამეს კოეფიციენტებს აქვთ შემდეგი მნიშვნელობები

$$H_r = H_\varphi = 1, \quad H_\varphi = H_2 = r, \quad H_z = H_3 = 1. \quad (1.97)$$

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებებს ცილინდრულ კოორდინატებში ექნებათ სახე:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= F_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + (1.98) \\ + \left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta v_z, \end{aligned}$$

სადაც $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

უნყვეტობის განტოლებისათვის გვექნება

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (1.99)$$

მაბვის ტენზორის კომპონენტებისათვის ცილინდრულ კოორდინატებში გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, & p_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & p_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & p_{zz} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.100)$$

1.18. სფერული კოორდინატები

სფერული კოორდინატები r, φ, θ დაკავშირებულია არიან დეკარტეს კოორდინატებთან ფორმულებით:

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$y = r \sin \Theta \sin \varphi \quad \Theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad (1.101)$$

$$z = r \cos \Theta, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

ხოლო ლამეს კოეფიციენტების მნიშვნელობებია.

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\Theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r \sin \Theta. \quad (1.102)$$

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის განტოლებებს სფერულ კოორდინატებში აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\Theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \Theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \Theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\Theta^2 + v_\varphi^2}{r} = \\ & = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\Delta v_r - \frac{2}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial (v_\Theta \sin \Theta)}{\partial \Theta} - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ & \frac{\partial v_\Theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\Theta}{\partial r} + \frac{v_\Theta}{r} \frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \Theta} \frac{\partial v_\Theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\Theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \Theta}{r} = \\ & = F_\Theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \Theta} + \nu \left[\Delta v_\Theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \Theta} - \frac{v_\Theta}{r^2 \sin^2 \Theta} - \frac{2 \cos \Theta}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\Theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \Theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \Theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\Theta v_\varphi \cot \Theta}{r} = \\ & = F_\varphi - \frac{1}{\rho r \sin \Theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left[\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \Theta}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial v_\Theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \Theta} \right], \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$\text{სადაც } \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

ხოლო უწყვეტობის განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\Theta \cot \Theta}{r} = 0 \quad (1.104)$$

ძაბვის ტენზორის კომპონენტებისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned}
 p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
 p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \\
 p_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right), \\
 p_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\
 p_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\
 p_{\theta\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right).
 \end{aligned} \tag{1.105}$$

თავი მეორე

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის ძირითადი თვისებები

2.1. ბლანტი სითხის ჰიდროდინამიკის ზოგადი ამოცანა

ჩვენს მიერ გამოყვანილი იყო ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებები, რომლებსაც ნაუიე-სტოქსის განტოლებები ეწოდებათ. მათ აქვთ შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (2.1)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0.$$

მათემატიკური თვალსაზრისით ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ჰიდროდინამიკის ზოგადი ამოცანა დაიყვანება მეორე რიგის კერძო წარმოებულ იან არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემაზე:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

სადაც (u, v, w) - მოძრაობის სიჩქარის \vec{v} ვექტორის მდგენელებია. ამასთანავე საძებნი წნევა უნდა იყოს უწყვეტი, სასრული და დადებითი, ხოლო სიჩქარის კომპონენტებს მოეთხოვება უწყვეტობა და შემოსაზღვრულობა. ამავე დროს უძრავ კედლებზე სიჩქარე უნდა გახდეს ნული:

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0. \quad (2.3)$$

ხოლო მოძრავ კედლებზე ისინი უნდა ემთხვეოდნენ თავად კედლების სიჩქარეებს:

$$u = u_{\text{კედ}}, \quad v = v_{\text{კედ}}, \quad w = w_{\text{კედ}}. \quad (2.4)$$

თავისუფალ ზედაპირებზე ძაბვის ნორმალური მდგენელები მუდმივ წნევას უნდა უდრიდნენ, მხები მდგენელები კი ნულები უნდა გახდნენ, ე.ი.

$$\sigma_{nn} = -P_0, \quad \sigma_{nt} = 0 \quad (2.5)$$

თუ მოძრაობა არასტაციონარულია, მაშინ საძებნი სიჩქარეები უნდა აკმაყოფილებდეს საწყის პირობებსაც:

$$u = u_0(x, y, z); \quad v = v_0(x, y, z); \quad w = w_0(x, y, z), \quad \text{როცა } t = 0. \quad (2.6)$$

(2.2) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის არსებობის საკითხი (2.4) (2.6) სასაზღვრო და საწყის პირობებში თავისი ზოგადი ფორმით დღეისათვის არ არის გადაწყვეტილი, ასეთივე მდგომარეობაშია ამ სისტემის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი. ძირითადი სიძნელე ამ განტოლებათა სისტემის სასაზღვრო ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის დებულების დამტკიცებისა იმაში მდგომარეობს, რომ ეს განტოლებები მარცხენა მხარეში შეიცავენ არაწრფივ წევრებს, რომელთაც ინერციის კვადრატული წევრები ეწოდებათ. ეს არაწრფივი წევრები იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებებშიც შედიან. მაგრამ იდეალური სითხის შემთხვევაში ამოხსნის შესაძლებლობები გაცილებით დიდია, ვიდრე ბლანტი სითხის შემთხვევაში. ეს ხდება იმიტომ, რომ ინერციის კვადრატული წევრებით გამოწვეული სიძნელეები მაშინვე იხსნება, როგორც კი დაეუშვებთ, რომ სიჩქარეს გააჩნია პოტენციალი. ამ დაშვების გამო იდეალური არაკუმშვადი სითხის ბევრი ამოცანა წრფივი ხდება, რის გამოც შესაძლებელია რთული ამოცანები გავამარტივოთ წრფივი კომბინაციის საშუალებით. ეს წრფივი ამოცანები კი ლაპლასის განტოლების კერძო ამონახსნებს შეესაბამებიან. ბლანტი სითხის შემთხვევაში კი სიჩქარის პოტენციალის არსებობა შეუძლებელია. ამის შედეგია ის, რომ ბლანტი სითხეებისათვის ყოველი კონკრეტული ამოცანა თითქმის

ყოველთვის არაწრფივია და რომ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ყოველი ახალი დინება მიღებულ იქნეს ცნობილ დინებათა მარტივი ზედღების საშუალებით.

(2.2) არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის აგების ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. ამის გამო ბლანტი სითხის ყოველი მოძრაობის შესწავლა შეიძლება ორი გზით: ა) ან წინასწარ დავასახელოთ სითხის ყოველი ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია და ვიპოვოთ ამ ტრაექტორიის შესაბამისი კერძო ამონახსნები, ან ბ) ვისარგებლოთ მიახლოებითი მეთოდებით, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ გავამარტივოთ (2.2) განტოლებები და მივუსადაგოთ ისინი ყოველ კონკრეტულ ამოცანას. იმის გამო, რომ შესაძლო ტრაექტორიების წინასწარ დასახელება შეზღუდულია, ამიტომ პირველი გზა ძალზე მცირე რაოდენობის ამოცანათა ამონახსნს გვაძლევს. მეორე გზის გამოყენების ასპარეზი კი ძალზე ფართოა.

2.2. ბლანტი სითხეში პოტენციალური მოძრაობის შეუძლებლობა

თუ დავეუშვებთ, რომ მოცულობით ძალას გააჩნია პოტენციალი U , ე.ი. $\vec{F} = -\text{grad}U$ და გარდაეკმნით (2.1) ტოლობის მარცხენა მხარეს ვექტორული ტოლობის

$$(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} + [\text{rot}\vec{v} \cdot \vec{v}]$$

გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\text{rot}\vec{v} \cdot \vec{v}] + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = \nu \Delta \vec{v}, \quad (2.7)$$

$$\text{div}\vec{v} = 0$$

დავეუშვათ, რომ სითხის მოძრაობის სირქარეს გააჩნია პოტენციალი $\vec{v} = \text{grad}\varphi$, მაშინ $\text{rot}\vec{v} = \text{rotgrad}\varphi = 0$ და

$$(2.7)\text{-ის მეორე განტოლებიდან } \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0, \text{ ხოლო} \\ v \Delta \bar{v} = v \Delta \operatorname{grad} \varphi = v \operatorname{grad} \Delta \varphi = 0. \quad (2.10)$$

მიღებული ტოლობების გათვალისწინებით (2.7) სისტემის პირველი განტოლება მოგვეცემს კოშის ინტეგრალს:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = f(t). \quad (2.11)$$

ამრიგად, თუ დაუშვებთ რომ მოძრაობა რაიმე არეში არ არის გრიგალური, მაშინ ადგილი აქვს (2.9), (2.10) და (2.11) თანაფარდობებს, რომლებსაც ადგილი აქვს იდეალური არაკუმშვადი სითხის შემთხვევაშიც, ე.ი. ბლანტი სითხის არაგრიგალური მოძრაობისას რაიმე არეში სიჩქარე და წნევა არ არიან დამოკიდებულნი სიბლანტის კოეფიციენტზე. თუ ამ შემთხვევაში შევძლებთ სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებას, როგორცაა სითხის კედელზე მიკერის პირობა, მაშინ ბლანტი სითხის არაგრიგალური მოძრაობის არსებობა დადებითად გადაწყდება. მაგრამ მარტივად შეიძლება დარწმუნება იმაში, რომ ბლანტი სითხის პოტენციალური მოძრაობისას ამ სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება შეუძლებელია, თუ გამოვირიცხავთ ზოგიერთ განსაკუთრებულ შემთხვევას. ასეთ შემთხვევებს მიეკუთვნება იდეალური სითხის წმინდა ცირკულაციური დინება წრიული ცილინდრის გარშემო, რომლის დროსაც დენის წირები წრეწირებია, რომლებიც გარს უკლიან მოცემული წრის კონტურს. იდეალურ სითხეში კონტურის ყველა წერტილი უძრავია და ადგილი აქვს სითხის ნაწილაკების სრიალს კონტურის გასწვრივ ერთნაირი სიჩქარით. ბლანტი სითხის შემთხვევაში უნდა დაუშვათ, რომ ცილინდრი ბრუნავს.

თუ ხსენებულ განსაკუთრებულ შემთხვევას გამოვირიცხავთ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის პოტენციალურობა არ შეესაბამება სიბლანტის მოვლენას. სხვანაირად რომ ეთქვათ, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ყოველი მოძრაობა გრიგალურია.

2.3. შექანიკური ენერჯიის დისიპაცია ბლანტ სითხეში

იდეალურ სითხეში მოძრაობის პროცესი შექცევადია. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ რაიმე t_0 მომენტში მოძრაობის სიჩქარეს მიმართულებას შეუვცვლით საწინააღმდეგოთი და საწყის მომენტად t_0 მივიღებთ, მაშინ თუ მოცულობითი ძალები დროზე არ იქნებიან დამოკიდებულნი იდეალური სითხის ნაწილაკები შექცეული მოძრაობისას იმოდრავებენ იმავე ტრაექტორიაზე, რომელზედაც ისინი მოძრაობდნენ t_0 მომენტამდე; ამავე დროს სიჩქარეებიც იგივე ექნებათ, მხოლოდ შებრუნებული ნიშნით. მართლაც პირდაპირი მოძრაობის სიჩქარე და წნევა აღენიშნოთ \bar{v} და p სიმბოლოებით, ხოლო შექცეული მოძრაობის სიჩქარე და წნევა კი \bar{v}_1 და p_1 -ით. ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\bar{v}_1(\bar{r}, t) = -\bar{v}(\bar{r}, -t); \quad p_1(\bar{r}, t) = p(\bar{r}, -t).$$

ადგილი შესამოწმებელია, რომ

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt}, \quad \text{grad} p_1 = \text{grad} p$$

და \bar{v}_1 და p_1 აკმაყოფილებენ იდეალური სითხის იმავე მოძრაობის განტოლებებს, უწყვეტობისა და მდგომარეობის განტოლებებთან ერთად, რასაც \bar{v} და p .

ბლანტ სითხეში მოძრაობის პროცესი არ არის შექცევადი. ეს ნათლად ჩანს იქიდან, რომ ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლებებში შედის $\Delta \bar{v}$ და $\text{grad} \text{div} \bar{v}$ წევრები, რომლებიც მოძრაობის შექცევისას შეიცვლებიან და ამიტომ \bar{v}_1 , p_1 სიდიდეებისათვის მიღებული განტოლებები არ დაემთხვევიან იმ განტოლებებს, რომლებიც კმაყოფილდებიან \bar{v} და p სიდიდეებით. ეს გარემოება გამოწვეულია შექანიკური ენერჯიის დისიპაციით. ეს ნიშნავს, რომ ბლანტი სითხის მოძრაობის შემთხვევაში სითხეზე მოქმედი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა მხოლოდ ნაწილობრივ იხარჯება კინეტიკური ენერჯიის

ცვლილებაზე. მუშაობის ნაწილი გადადის სითბურ ენერგიაში, ე.ი. სიბლანტე იწვევს ენერგიის დისიპაციას, გაფანტვას.

განვიხილოთ S ზედაპირით შემოსაზღვრული სითხის რაიმე τ -მოცულობა. A_τ -თი აღენიშნოთ dt დროის მომენტში მოცულობითი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა, ხოლო A_S -ით ზედაპირული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა. $d\tau$ მოცულობაში მოთავსებულ სითხეზე მოქმედებს მოცულობითი ძალა $\bar{F}p d\tau$. dt დროის მონაკვეთში $d\tau$ მოცულობაში მოთავსებული სითხე გადაადგილდება $d\bar{r} = \bar{v} dt$ მანძილზე. მაშასადამე, dt დროის მონაკვეთში მოცულობითი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლი იქნება:

$$dA_\tau = p \bar{F} d\tau. \quad d\bar{r} = dA_\tau = p(\bar{F} \cdot \bar{v}) d\tau dt$$

τ მოცულობაში მოთავსებულ სითხეზე მოქმედებული მოცულობითი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობისათვის გვექნება:

$$A_\tau = dt \int_\tau p(\bar{F} \cdot \bar{v}) d\tau \quad (2.12)$$

ანალოგიურად τ მოცულობაში მოთავსებულ სითხეზე მოდებული ზედაპირულ ძალთა მიერ შესრულებული მუშაობა dt დროში იქნება

$$A_S = dt \int_S (\bar{\sigma}_n \cdot \bar{v}) ds. \quad (2.13)$$

თუ ამ უკანასკნელში ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავექმნით კოშისა და გაუსის ფორმულებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} A_S &= dt \int_S (\bar{\sigma}_n \cdot \bar{v}) ds = dt \int_V \left[\bar{\sigma}_x \cos(n^{\wedge}x) + \bar{\sigma}_y \cos(n^{\wedge}y) + \bar{\sigma}_z \cos(n^{\wedge}z) \right] \bar{v} ds = \\ &= dt \int_V \left(\frac{\partial(\bar{\sigma}_x \bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\sigma}_y \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\sigma}_z \bar{v})}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned}$$

თუ შევკრებთ (2.12) და (2.13) ფორმულებს მივიღებთ.

$$A_{\tau} + A_S = dt \int_{\tau} \left[\rho \bar{F} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) \right] d\tau + \\ + dt \int_{\tau} \left(\bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) d\tau. \quad (2.14')$$

ახლა გავიხსენოთ მოძრაობის განტოლება ძაბვებში

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right)$$

მაშინ (2.14') ასე გადაიწერება:

$$A_{\tau} + A_S = \int_{\tau} \rho \bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau + dt \int_{\tau} \phi d\tau; \quad (2.14)$$

სადაც $\phi = \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$.

თუ სითხე არაკუმშვადია და ეროგეაროვანი, ე.ი. $\rho = \text{const}$, მაშინ (2.14)-ის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები ასე შეიძლება გარდაექმნათ:

$$dt \int_{\tau} \rho \bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau = dt \int_{\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) d\tau = d \int_{\tau} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) d\tau = dT, \quad (2.15)$$

სადაც $T = \int_{\tau} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) d\tau$. არის τ მოცულობაში მოთავსებული

სითხის კინეტიკური ენერჯია. ამრიგად, საბოლოოდ (2.14) და (2.15)-დან გვექნება:

$$A_{\tau} + A_S = dT + dt \int_{\tau} \phi d\tau. \quad (2.16)$$

(2.16) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ გამოყოფილი სითხის მასაზე მოდებულ ძალია მიერ შესრულებული მუშაობა მხოლოდ ნაწილობრივ იხარჯება სითხის ამ მასის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილებაზე.

დაეუშვათ, რომ სითხის მოძრაობისას, საზღვარზე $\bar{v} = 0$. მყარ ზედაპირზე ეს ტოლობა სრულდება სითხის მიკერის პირობის თანახმად. თუ მოძრაობის არე უსასრულოა, მაშინ უნდა დაეუშვათ, რომ სითხე უსასრულობაში უძრავია. გარდა ამისა, უნდა დაეუშვათ, რომ გარე მოცულობითი ძალები პოტენციალურია. მაშინ (2.16) ფორმულა, რომელშიც τ მოცულობად აღებულია მოძრაობის მთელი არე, მარტივდება:

$$\frac{dT}{dt} = - \int_V \phi d\tau. \quad (2.17)$$

როგორც ვიცით ნიუტონისეული არაკუმშვადი ერთგვაროვანი პლანტი სითხისათვის ძაბვის ტენზორის კომპონენტებს აქვთ სახე

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.18)$$

თუ (2.18) შევიტანთ ϕ -ს გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \phi &= \sigma_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \left(-p\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \\ &= -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \end{aligned}$$

რადგან სითხე არაკუმშვადია, უწყვეტობის განტოლების

აუტომატურად $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ და მივიღებთ:

$$\phi = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

$$\phi = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (2.19)$$

ძ სილიდეს ხახუნის შედეგად გამ. წვეულ ენერჯიის დისიპაციას უწოდებენ. იდეალური სითხის შემთხვევაში $\mu = 0$ და $\phi = 0$. აღსანიშნავია, რომ (2.17) და (2.19) გამომდინარეობს. რაინ სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი ყოველთვის დადებითია.

სილიდვა. მართლაც $\frac{dT}{dt} < 0$, რადგან დისიპაცია მექანიკური ენერჯიის შემცირებას იწვევს, ხოლო ინტეგრალი

$$\int \sum_{i,k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \geq 0,$$

ამიტომ μ კოეფიციენტი დადებითია.

გაკიხსენოთ, რომ ბლანტი არაკუმშვადი ნიუტონისეული სითხისათვის, რომელიც ფურიეს სითხოს გამტარებლობის კანონს ემორჩილება, შინაგანი ენერჯიის გადატანის განტოლებას აქვს სახე:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \phi + \nabla(\lambda \nabla T). \quad (2.20)$$

ამრიგად, ამ განტოლების მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები წარმოადგენს სითხოს იმ რაოდენობას, რომელიც ღრის ერთეულში გამოიყოფა მოცულობის ერთეულში დისიპაციის შედეგად.

(2.20) გამოსახულება გვიჩვენებს, რომ ბლანტი სითხეში ენერჯიის დისიპაცია არსებობს ყოველთვის, გარდა იმ შემთხვევებისა, როცა სითხე უძრავია ან გადაადგილება როგორც აბსოლუტურად მყარი სხეული.

2.4. ბლანტი სითხის დინებების მსგავსება

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის (2.1) დიფერენციალური განტოლებები გარდაეკმნათ უგანზომილებო განტოლებად. ამისათვის მათში შემავალი სიდიდეები გამოესახოთ მათვე ძახასიათებლების საშუალებით.

$$\bar{r} = L_0 \bar{r}_1, \quad t = T_0 t_1, \quad \bar{v} = u_0 \bar{v}_1, \quad p = p_0 p_1, \quad \bar{F} = g \bar{F}_1. \quad (2.21)$$

აქ L_0 , T_0 , u_0 , p_0 - დინების ძახასიათებელი სიგრძე, დრო, სიჩქარე და წნევაა. სიდიდეები ინდექსით ერთი უგანზომილებო ხდილაკება. თუ (2.21) შევიტანთ (2.1) სისტემაში, მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_0}{T_0 u_0} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t_1} + (\bar{v}_1 \nabla_1) \bar{v}_1 &= \frac{g L_0}{u_0^2} \bar{F}_1 - \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \nabla_1 p_1 + \frac{\nu}{L_0 u_0} \Delta_1 \bar{v}_1, \\ \nabla_1 \bar{v}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} (2.22)$$

აქ ∇_1 და Δ_1 ოპერატორები აღებულია უგანზომილებო სიდიდეებში. (2.22) სისტემა შეიცავს ოთხ უგანზომილებო პარამეტრს

$$Re = \frac{u_0 L_0}{\nu}, \quad Fr = \frac{u_0^2}{g L_0}, \quad St = \frac{L_0}{T_0 u_0}, \quad Eu = \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}, \quad (2.23)$$

რომელთაც შესაბამისად რეინოლდსის, ფრუდის, სტრუხალასა და ეილერის რიცხვები ეწოდებათ. რეინოლდსის რიცხვი გვიჩვენებს ინერციის ძალების შეფარდებას ხახუნის ძალებთან, ფრუდის რიცხვი - ინერციის ძალების შეფარდებას გრავიტაციულ ძალებთან, სტრუხალას რიცხვი - ორი მასშტაბის T_0 დროისა და $L_0 u_0^{-1}$ შეფარდებას, ხოლო ეილერის რიცხვი მახასიათებელი წნევის შეფარდებას გაორკვეებულ კინეტიკურ ენერჯიასთან. (2.22) განტოლება (2.23) გათვალისწინებით ასე იაწერება

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t_1} + (\bar{v}_1 \nabla_1) \bar{v}_1 = \frac{\bar{F}_1}{Fr} - Eu \nabla_1 p_1 + \frac{1}{Re} \Delta_1 \bar{v}_1. \quad (2.24)$$

ამ ძახასიათებელ რიცხვებს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვებათ. როცა განიხილავენ ორი დინების მსგავსებას. ამიტომ მსგავსების დადგენას კი განსაკუთრებული ყურად

ღება ექცევა ექსპერიმენტების ჩატარებისას შემცირებულ იოდულელებზე.

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ორი ღინების მექანიკური მსგავსებისათვის აუცილებელია შესრულდეს შემდეგი პირობები: ა. გეომეტრიული მსგავსება, ბ. კინემატიკური მსგავსება და გ. დინამიკური მსგავსება. ორი ღინების გეომეტრიული მსგავსებისათვის აუცილებელია არა მარტო საზღვრების მსგავსება, არამედ მათი ურთიერთმდებარეობის მსგავსებაც. ამ პირობის შესრულებისას ამ ორი ღინების გეომეტრიული ზომების შეფარდება მუდმივი უნდა იყოს:

$$\frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1} = k_L = \text{const},$$

სადაც k_L - განსახილველი ღინების გეომეტრიული მსგავსების კოეფიციენტი.

კინემატიკური მსგავსება მოითხოვს, რომ შეირჩეს დროის გადანგარიშების კოეფიციენტი

$$\frac{t_2}{t_1} = k_t$$

და ღინება კინემატიკურად მსგავსი იქნება, თუ სიჩქარეთა შეფარდება ნებისმიერ შესაბამის წერტილში მუდმივი იქნება

$$\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = k_v = \text{const},$$

სადაც k_v კინემატიკური მსგავსების კოეფიციენტი.

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ორი ღინების დინამიკური მსგავსება მოითხოვს, რომ მოცულობითი ძალების, წნევათა სიდიდეებისა და ძაბვების კომპონენტთა შეფარდებები ნებისმიერ შესაბამის წერტილებში მუდმივი იყოს:

$$\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} = k_F, \quad \frac{p_2}{p_1} = k_p, \quad \frac{(\sigma_{ik})_2}{(\sigma_{ik})_1} = k_\sigma.$$

ყველა ჩამოთვლილი პირობების შესრულებისას მუდმივი სიბლანტის მქონე ბლანტი არაკუმშვადი სითხისა ორი დინება იქნება მექანიკურად მსგავსი. უგანზომილებო სიდიდეებში ჩაწერილ განტოლებებში ოთხი კრიტერიუმია მსგავსებისათვის. მათ მსგავსების კრიტერიუმებს უწოდებენ.

რისათვის, რომ ორი დინება იყოს მსგავსი აუცილებელია, რომ დინებების ეს კრიტერიუმები ერთმანეთს ემთხვეოდეს:

$$Re_2 = Re_1, \quad Fr_2 = Fr_1, \quad Eu_2 = Eu_1, \quad St_2 = St_1.$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $St=1$, $Eu=1$ მსგავსების კრიტერიუმებია რეინოლდსისა და ფრუდის რიცხვები. შეიძლება ჩვენება, რომ მსგავსებისათვის ამ ორი რიცხვის ერთდროულად შეთავსება შეუძლებელია, თუ განიხილება ერთიდაიგივე სიბლანტის მქონე სითხის მსგავსება. მართლაც, რეინოლდსის რიცხვების ტოლობა გვაძლევს

$$(u_0 L_0)_2 = (u_0 L_0)_1,$$

ხოლო ფრუდის რიცხვების ტოლობა კი

$$(u_0^2 L_0)_2 = (u_0^2 L_0)_1.$$

მაშასადამე, თუ ნატურალური მოდელიდან გადავალთ შემცირებულ მოდელზე

$$\frac{(L_0)_2}{(L_0)_1} < 1,$$

მაშინ გაიზრდება შესაბამისი სიჩქარე

$$\frac{(u_0)_2}{(u_0)_1} > 1.$$

ფრუდის რიცხვების ტოლობიდან კი გამოდის, რომ გადასვლა დიდი ზომებიდან შემცირებულ ზომებზე იწვევს მახასიათებელ სიჩქარეთა შემცირებას.

ამრიგად, ერთიდაიგივე სიბლანტის კოეფიციენტის მქონე ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ორი დინების სრული მსგავსებისათვის ფრუდისა და რეინოლდსის რიცხვების ტოლობის

ერთდროული მოთხოვნა შეუძლებელია. პრაქტიკულად ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში უნდა აირჩეს ამ შემთხვევის ყველაზე უფრო მახასიათებელი ერთ-ერთი კრიტერიუმი, ხოლო მეორე უნდა უკუეაგდოს. ფრუდის რიცხვი არსებითია იმ ამოცანების, სადაც აუცილებელია სიმძიმის ძალის გათვალისწინება. თუ მხედველობაში არ მიიღება თავისუფალი ზედაპირები, მსგავსების კრიტერიუმად რეინოლდსის რიცხვს იყენებენ. რადგანაც რეინოლდსის რიცხვი ინერციისა და ხახუნის ძალების შეფარდებაა, ამიტომ იგი ახასიათებს ინერციის ძალის ხახუნის ძალასთან შეფარდების რიგს. რეინოლდსის რიცხვის გაზრდა იწვევს ინერციის ძალის ხახუნის ძალასთან შეფარდების გაზრდას.

2.5. სითხეში მოძრავ სხეულზე სითხის ძალური მოქმედების გამომხატველი ფორმულები

ეთქვან, ბლანტ სითხეში სხეული ასრულებს წინსვლით მოძრაობას. განსახილველი სხეულის ზედაპირის S ფართის ელემენტზე მოქმედი ძალა გამოისახება ფორმულით

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos(n^{\wedge} x) + \vec{\sigma}_y \cos(n^{\wedge} y) + \vec{\sigma}_z \cos(n^{\wedge} z), \quad (2.25)$$

ამიტომ სხეულზე სითხის ძალური მოქმედების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ტოლი იქნება

$$\vec{R} = \int_S \vec{\sigma}_n dS = \int_S [\vec{\sigma}_x \cos(n^{\wedge} x) + \vec{\sigma}_y \cos(n^{\wedge} y) + \vec{\sigma}_z \cos(n^{\wedge} z)] dS, \quad (2.26)$$

$$\vec{L} = \int_S [r \vec{\sigma}_n] dS = \int_S [r (\vec{\sigma}_x \cos(n^{\wedge} x) + \vec{\sigma}_y \cos(n^{\wedge} y) + \vec{\sigma}_z \cos(n^{\wedge} z))] dS. \quad (2.27)$$

$\vec{\sigma}_n$ ძაბვის ვექტორის გეგმილი x ღერძზე (2.25) ძალით იქნება

$$\sigma_{nx} = \vec{\sigma}_{xx} \cos(n^{\wedge} x) + \vec{\sigma}_{xy} \cos(n^{\wedge} y) + \vec{\sigma}_{xz} \cos(n^{\wedge} z). \quad (2.28)$$

თუ უკანასკნელში შევიტანთ $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ მნიშვნელობებს (1.45)-დან, მივიღებთ

$$\sigma_{nx} = -p \cos(n^{\wedge} x) + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n^{\wedge} x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n^{\wedge} y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n^{\wedge} z) \right] + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(n^{\wedge} x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n^{\wedge} y) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n^{\wedge} z) \right] \quad (2.29)$$

(2.29) მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები წარმოადგენს u სიჩქარის წარმოებულს \bar{n} ნორმალის გასწვრივ

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n^{\wedge} x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n^{\wedge} y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n^{\wedge} z) = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (2.30)$$

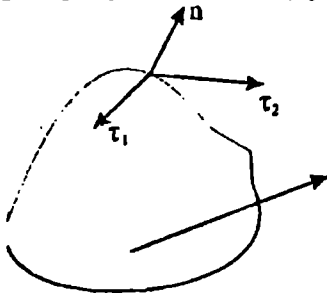
ხოლო უწყვეტობის განტოლებიდან

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}$$

გამოყენებით (2.29) მარჯვენა მხარის ბოლო შესაკრები მოგვცემს

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n^{\wedge} x) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n^{\wedge} y) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(n^{\wedge} z) = \\ & = \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n^{\wedge} y) - \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n^{\wedge} x) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(n^{\wedge} z) - \frac{\partial w}{\partial z} \cos(n^{\wedge} x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

გადავიდეთ ახლა ახალ კოორდინატთა ღერძებზე (ნახ. 2).



ნახ. 2

იგი შედგება სხეულის ზედაპირის განსახილველ წერტილში გაღებულ \bar{n} ნორმალისა და ორი τ_1 და τ_2 მხებისაგან i. v სიჩქარის წარმოებული x კოორდინატი იქნება

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \tau_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial x} \quad (2.32)$$

ანალოგიურად ჩაიწერება (2.31)-ში შემავალი წარმოებულებიც.

რადგანაც განიხილება სხეულის წინსვლითი მოძრაობა და ადგილი აქვს სითხის მიკერას სხეულის ზედაპირზე, ამიტომ სხეულის ზედაპირის გასწვრივ სითხის ნაწილაკთა სიჩქარის

კომპონენტები მუდმივი სიდიდეები იქნება, ხოლო სიჩქარის წარმოებულები მხებების გასწვრივ ნულის ტოლი იქნება, ე.ი.

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t_2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t_2} = 0. \quad (2.33)$$

გამოსახულებანი

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \cos(n^{\wedge} x), \quad \frac{\partial n}{\partial y} = \cos(n^{\wedge} y), \quad \frac{\partial n}{\partial z} = \cos(n^{\wedge} z) \quad (2.34)$$

მიმართულების კოსინუსებია.

თუ ვისარგებლებთ (2.32)-(2.34) ფორმულებით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n^{\wedge} y) - \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n^{\wedge} x) &= \left[\frac{\partial v}{\partial n} \cos(n^{\wedge} x) \right] \cos(n^{\wedge} y) - \\ & - \left[\frac{\partial v}{\partial n} \cos(n^{\wedge} y) \right] \cos(n^{\wedge} x) = 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \cos(n^{\wedge} z) - \frac{\partial w}{\partial z} \cos(n^{\wedge} x) &= \left[\frac{\partial w}{\partial n} \cos(n^{\wedge} x) \right] \cos(n^{\wedge} z) - \\ & - \left[\frac{\partial w}{\partial n} \cos(n^{\wedge} z) \right] \cos(n^{\wedge} x) = 0. \end{aligned}$$

ამრიგად, P_{nx} დაბვა სითხეში წინსვლით მოძრავ სხეულზე წარმოიღვინება სახით

$$P_{nx} = -p \cos(n^{\wedge} x) + \mu \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (2.36)$$

ანალოგიურად P_{ny} და P_{nz} დაბვებისათვის

$$\begin{aligned} P_{ny} &= -p \cos(n^{\wedge} y) + \mu \frac{\partial v}{\partial n}, \\ P_{nz} &= -p \cos(n^{\wedge} z) + \mu \frac{\partial w}{\partial n}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

თუ გავამრავლებთ (2.36) და (2.37) ტოლობების მარცხენა მხარეებს $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ერთეულოვან ვექტორებზე შესაბამისად და შევეკრებთ, მივიღებთ $\vec{\sigma}_n$ დაბვის ვექტორს, რომლითაც სათხე მოქმედებს მასში წინსვლით მოძრავ სხეულზე

$$\bar{\sigma}_n = -p[\bar{i} \cos(n^{\wedge} x) + \bar{j} \cos(n^{\wedge} y) + \bar{k} \cos(n^{\wedge} z)] + \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n}. \quad (2.38)$$

თუ (2.38) გამოსახულებას შევიტანთ (2.26) და (2.27) ფორმულებში მივიღებთ სითხეში წინსვლით მოძრავ სხეულზე მოქმედ ძალთა ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის გამოსახულებებს:

$$\bar{R} = \int_S \left\{ -p[\bar{i} \cos(n^{\wedge} x) + \bar{j} \cos(n^{\wedge} y) + \bar{k} \cos(n^{\wedge} z)] \right\} dS + \mu \int_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dS, \quad (2.39)$$

$$\bar{L} = \int_S \left\{ \left[\bar{r}[\bar{i} \cos(n^{\wedge} x) + \bar{j} \cos(n^{\wedge} y) + \bar{k} \cos(n^{\wedge} z)] \right] p \right\} dS + \mu \int_S \left[\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \right] dS. \quad (2.40)$$

თავი მესამე

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებების ზუსტი ამონახსნები

3.1. ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული დინება

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებათა სისტემას, რომელიც ზევით იყო მიღებული, შემდეგი სახე აქვს

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \bar{v}. \quad (3.1)$$

განტოლებათა ამ სისტემის ზუსტი ამონახსნების მოძებნა გაცილებით რთულია, ვიდრე იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებათა სისტემისა.

ბლანტი სითხის მოძრაობის ყოველი კონკრეტული ამოცანის ამოხსნა მდგომარეობს შემდეგში: 1) ჩამოყალიბდეს ამოცანა ფიზიკურად; 2) დაიწეროს ამ ამოცანის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება საწყისი და სასაზღვრო პირობებით; 3) ნაპოვნი იქნეს ამ მოძრაობის სიჩქარე, წნევა, ხახუნის ძალა; 4) განსაზღვრულ იქნას სითხის მოცულობითი ხარჯი, საშუალო და მაქსიმალური სიჩქარეები, მაქსიმალური ხახუნი და წინააღმდეგობის კოეფიციენტი; 5) მიღებული შედეგების მიხედვით ამონახსნს მიეცეს ფიზიკური ინტერპრეტაცია (დასკვნები, გრაფიკის აგება).

წინა პარაგრაფში მითითებული იყო, რომ ბლანტი სითხის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების უმარტივესი ამონახსნების მიღება შესაძლებელია, თუ ვიცით სითხის ნაწილაკების ტრავექტორიათა ფორმა. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული მოძრაობის რამდენიმე ამოცანას.

თუ მასობრივ ძალებს გააჩნიათ პოტენციალი, ე.ი. $\vec{F} = \text{grad}\phi$, მაშინ (3.1) სისტემიდან შეიძლება წნევა გამოირიცხოს. ამისათვის შემოყავთ მოდიფიცირებული P წნევა ფორმულით

$$p = p_0 - \rho\phi + P, \quad (3.2)$$

სადაც p_0 მუდმივია. ჩვეულებრივ, მასობრივი ძალა, რომელიც მოქმედებს სითხეზე, სიმძიმის ძალაა, ე.ი. $\vec{F} = \vec{g}$, სადაც \vec{g} - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა. მაშინ

$$p = p_0 + \rho\vec{g}\vec{r} + P. \quad (3.3)$$

თუ (3.3) შევიტანთ (3.1) მეორე განტოლებაში, ნავიე-სტოქსის განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P + \nu\Delta\vec{v}. \quad (3.4)$$

მოდიფიცირებულ P წნევას ხშირად დინამიკურ წნევასაც უწოდებენ, ხოლო $p_0 - \rho\phi$ - სტატიკურ წნევას. მოდიფიცირებული წნევის შემოყვანა სასარგებლოა იმ შემთხვევაში, როდესაც მასობრივი ძალები სასაზღვრო პირობებში არ შედიან, ან ამიტომ, რომ ისინი არც მოძრაობის განტოლებებში არ შედიან. ვაგვიყენებს არ ახდენენ სითხეში სიჩქარის განაწილებაზე. თუ სასაზღვრო პირობებში შედის აბსოლუტური წნევა (მოძრაობის ანუ შეიცავს თავისუფალ ზედაპირს), მაშინ მასობრივ ძალებს შეიძლიათ გავლენა მოახდინონ სითხის მოძრაობაზე.

ჩვეულებრივ მოდიფიცირებულ P წნევას იგივე p ასოთი აღნიშნავენ. რასაც აბსოლუტურ წნევას და (3.4) ასე გადაწერენ

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p + \nu\Delta\vec{v}. \quad (3.5)$$

შემდეგ კარავრაფერში ვაგვიჩვენებთ, რომ მასობრივი ძალები ან უგულვებელყოფილია, ან გამოირიცხება მოდიფიცირებული წნევის შემოტანით. ამიტომ ამოცანების ამოხსნისას უგულვებელყოფით (3.5) დიფერენციალური განტოლებით.

უმარტივეს მოძრაობათა კლასს განეკუთვნებიან სითხის ერთგანზომილებიანი დინებები, როდესაც სითხის სიჩქარე v_x ერთიანი გრადიენტით მდებარეობს მოძრაობის მთელ არეში. თუ შემოვიღებთ დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა (x, y, z) სისტემას ისე, რომ Ox ღერძი დაემთხვეს სითხის მოძრაობის სიჩქარის მიმართულებას, მაშინ

$$v_y = v_z = 0, \quad v_x = w = 0, \quad (3.6)$$

და უწყვეტობის განტოლება მოგვცემს

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

აქედან ჩანს, რომ სიჩქარის $v_x = u$ კომპონენტი x ცვლადზე არ არის დამოკიდებული, ე. ი.

$$u = u(y, z, t). \quad (3.8)$$

(3.6) და (3.8) ტოლობების გამო (3.5) განტოლება კოორდინატებში ასე ჩაიწერება

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3.10)$$

შევნიშნოთ, რომ (3.9) განტოლებებში კლარატული წევრები არ შედიან. ამიტომ იგი (3.5) განტოლებისაგან განსხვავებით წრფივი განტოლებაა. (3.10)-დან გამომდინარეობს, რომ $p = p(x, t)$. რადგანაც (3.9) განტოლების მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული x ცვლადზე, ამიტომ x -ზე არ იქნება დამოკიდებული არც მისი მარჯვენა მხარე, ე. ი. $\frac{\partial p}{\partial x}$ შეიძლება იყოს მხოლოდ დროის ფუნქცია

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f(t); \quad p(x, t) = f(t)x + f_1(t). \quad (3.11)$$

ამრიგად, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ერთგანზომილებიანი მოძრაობის წნევა x კოორდინატის წრფივი ფუნქციაა.

$f_1(t)$ ფუნქციები. კი სასაზღვრო პირობებიდან განისაზღვრებაან. უბრალოდ, როცა $x=x_1$ და $x=x_2$ წნევა მოცემულია: $p(x_1, t)=F_1(t)$; $p(x_2, t)=F_2(t)$. მაშინ

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f(t) = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta p}{\Delta x} \quad (3.12)$$

ც უ წნევის ღაცემა მოცემულია, მაშინ სითხის მოძრაობის u სიჩქარე უნდა განისაზღვროს განტოლებიდან

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\Delta p}{\Delta x} \quad (3.13)$$

ეს განტოლება სითხოგამტარებლობის განტოლებას ემთხვევა. თუ შემოვიტანთ ახალ უცნობს

$$u(y, z, t) = \bar{u}(y, z, t) - \frac{1}{\rho} \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (3.14)$$

ხადაც $\bar{u}(y, z, t)$ ახალი უცნობი ფუნქციაა, (3.13) არაერთ-გვაროვანი განტოლება ერთგვაროვანზე დაიყვანება.

განვიხილოთ (3.13) განტოლების საწყისი და სასაზღვრო პირობები. რადგანაც სითხის მოძრაობა ერთგანზომილებიანია, ამიტომ სითხის მოძრაობის არე ცილინდრული ზედაპირებით უნდა იყოს შემოსაზღვრული. ამ ზედაპირების მსახველები სითხის მოძრაობის სიჩქარის მიმართულების პარალელური არიან. სითხის u სიჩქარე არ არის დამოკიდებული x კოორდინატზე, ამიტომ სასაზღვრო პირობა შეიძლება მოცემულ იქნას l_k კონტურზე, რომელიც ცილინდრული ზედაპირების $x = \text{const}$ სიბრტყის კვეთით მიიღება. იმის გამო, რომ სითხის მოძრაობა ერთგანზომილებიანია, ამიტომ სასაზღვრო ზედაპირები ან უძრავი უნდა იყვნენ, ან მოძრაობდნენ მსახველთა პარალელურად. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობა

$$u|_{l_k} = u_k(t), \quad (3.15)$$

სადაც $u_k(t)$ არის L_k კონტურის წერტილთა სიჩქარეები. საწყის პირობებს აქვთ სახე

$$u|_{t=t_0} = F(y, z), \quad (3.16)$$

სადაც $F(y, z)$ - ცნობილი ფუნქციაა.

თუ ღინება სტაციონარულია, მაშინ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ და (3.13) მართივლება

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (3.17)$$

წნევის ღაცემა სტაციონარული ღინებისას მუღბივია. (3.17) განტოლება პუასონის განტოლებას წარმოადგენს. ამ განტოლებაში სითხის სიმკვრივე არ შეღის. სასაზღვრო პირობები სტაციონარული მოძრაობის ღროს t ღროზე არ იქნება დამოკიდებული

$$u|_{L_k} = u_k. \quad (3.18)$$

თუ სითხის ღინება წნევის ღაცემის გარეშე მიმღინარეობს, ე.ი. $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, მაშინ არასტაციონარული მოძრაობის სიჩქარე u განისაზღვრება განტოლებით

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial_2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial_2 u}{\partial z^2} \right)} \quad (3.19)$$

რომელიც (3.17) -გან განსხვავებით ერთგვაროვანი იქნება. სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში იგი ღაპლასის განტოლებად გადაიქცევა

$$\frac{\partial_2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial_2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.20)$$

(3.18), (3.20), ამოცანა, სადაც u_k მუღბივია L_k კონტურზე ეკვივალენტურია ორგანზომილებიანი უგრივალო მოძრაობის ღენის ფუნქციის განსაზღვრის ამოცანისა

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad \psi|_{\ell_k} = u_k, \quad (3.21)$$

სადაც $u_k = \text{const}$ - რაიმე კონტურია, ხოლო ℓ_k დენის წირია.

განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი სტაციონარული მოძრაობის რამზღენიშე მარტივი ამოცანა.

3.2. ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული დინება ორ პარალელურ კედელს შორის

ეოქცათ, ბლანტი სითხე მოძრაობს ორ პარალელურ კედელს შორის, $y = \pm h$. იგულისხმება, რომ მოძრაობა ერთგანზომილებიანია ($v=w=0$) და სტაციონარული $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$. დაეუშვათ, რომ u სიჩქარე არ არის დამოკიდებული z ცვლადზე, ე.ი. $u=u(y)$. მაშინ (3.17) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (3.22)$$

აქ $\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}$ - მოცემული მუდმივი სიდიდეა.

დაეუშვათ, რომ ზედა კედელი მოძრაობს x ღერძის გასწვრივ v_1 სიჩქარით, ხოლო ქვედა - v_2 სიჩქარით. მაშინ სითხის კედელზე მიკერის პირობა ასე ჩაიწერება

$$u|_{y=h} = v_1, \quad u|_{y=-h} = v_2. \quad (3.23)$$

(3.22) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება სიძნელეს არ წარმოადგენს. მას აქვს ზოგადი ამონახსნი

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2, \quad (3.24)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც სასაზღვრო პირობებიდან უნდა განისაზღვროს. თუ (3.23) საშუალებით განვსაზღვრავთ C_1 და C_2 სიდიდეებს, საბოლოოდ გვექნება

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (y^2 - h^2) + \frac{v_1 - v_2}{2h} y + \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (3.25)$$

თუ მოძრაობა წნეების დაცემის კარგეში ხდება, მაშინ $\frac{\Delta p}{\Delta x} = 0$ და სიჩქარის განაწილება კვეთში წრფივი იქნება

$$u = \frac{v_1 - v_2}{2h} y + \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (3.26)$$

კერძო შემთხვევაში, თუ $v_2 = 0$ (ქვედა კედელი უძრავია), მაშინ მივიღებთ

$$u = \frac{v_1}{2h} (y + h).$$

ასეთ დინებას ზოგჯერ კუეტას დინებას უწოდებენ. თუ ზედა და ქვედა კედელი უძრავია, მაშინ $v_1 = v_2 = 0$ და (3.25) მოგვცემს

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (h^2 - y^2). \quad (3.27)$$

ამ დინებას ჩვეულებრივ პუაზეილის დინებას უწოდებენ. ამ შემთხვევაში სიჩქარის განაწილებას კვეთში პარაბოლური ხასიათი აქვს.

ვიპოვოთ ახლა მოძრაობის ფიზიკური მახასიათებლები:

1. ხახუნის ძალა ნიუტონის კანონის საფუძველზე გამოითვლება

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta p}{\Delta x} y + \frac{\mu}{2h} (v_1 - v_2). \quad (3.28)$$

მაშასადამე, კვეთში სიჩქარის პარაბოლურ განაწილებას ეთანადება ხახუნის ძალის წრფივი განაწილება, ხოლო სიჩქარის წრფივ განაწილებას შეესაბამება ხახუნის ძალის მუდმივი მნიშვნელობა.

2. სითხის მოცულობითი ხარჯი Q -თი აღვნიშნოთ. ეს არის სითხის ის მოცულობა, რომელიც ერთ წამში გადის ყოველ კვეთში. სითხის ხარჯი კედლებს შორის კვეთის ფართობში Z ღერძის ერთეულოვანი მიმართულებით იქნება

$$Q = \int_0^1 dz \int_{-h}^h u dy. \quad (3.29)$$

თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ (3.27) და ვაინტეგრებთ, მივიღებთ

$$Q = -\frac{2}{3\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} h^3. \quad (3.30)$$

ამრიგად, მხოლოდ წნევის დაცემით გამოწვეული ღინებისას, სითხის ხარჯი პირდაპირ პროპორციულია წნევის დაცემისა და კედლებს შორის მანძილის ნახევრის კუბისა, უკუპროპორციულია სიბლანტის კოეფიციენტისა.

თუ ღინება გამოწვეულია მხოლოდ კედლების გადაადგილებით, მაშინ სითხის ხარჯი პროპორციულია კედლების მოძრაობის სიჩქარეთა ალგებრული ჯამისა და კედლებს შორის მანძილის ნახევრისა

$$Q = (v_1 + v_2)h.$$

3. თუ სითხის ხარჯს გავყოფთ კვეთის ფართობზე $S=2h \cdot l$ მივიღებთ საშუალო სიჩქარეს

$$v_{\text{საშ}} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2h} = -\frac{1}{3\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} h^2. \quad (3.31)$$

4. მაქსიმალური სიჩქარე მიიღწევა, როცა $y=0$, ე.ი. შუა ხაზზე.

$$u_{\text{მაქ}} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} h^2 = \frac{3}{2} v_{\text{საშ}}. \quad (3.32)$$

ამრიგად, მაქსიმალური სიჩქარე საშუალო სიჩქარეზე ერთნახევარჯერ მეტია.

5. მაქსიმალური ხახუნის ძალა გვექნება კედლებზე

$$\tau_{\text{მაქ}} = \frac{\Delta p}{\Delta x} h. \quad (3.33)$$

6. მილის წინააღმდეგობის კოეფიციენტი

$$\lambda = \frac{|\tau_{\text{მკ}}|}{\frac{1}{2} \rho u_{\text{სშ}}^2} = \frac{2h}{\rho u_{\text{სშ}}^2} \left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right|. \quad (3.34)$$

თუ წნევის ღაცემას განვსაზღვრავთ (3.31)-დან, გვექნება

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{3\mu}{h^2} u_{\text{სშ}}.$$

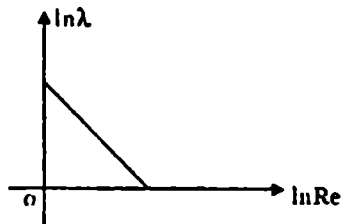
და (3.34) მოგვცემს

$$\lambda = \frac{6}{Re}, \quad (3.35)$$

სადაც $Re = \frac{u_{\text{სშ}} \cdot h \rho}{\mu}$ - რეინოლდსის

რიცხვია.

ამრიგად, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის წრფივი პარალელური სტაციონარული მოძრაობისას ორ პარალელურ კედელს შორის, წინააღმდეგობის კოეფიციენტი უკუპროპორციულია რეინოლდსის რიცხვისა. თუ აბსცისთა ღერძზე



ნახ. 3

გადავზომავთ რეინოლდსის რიცხვის ლოგარითმებს, ხოლო ორდინატთა ღერძზე წინააღმდეგობის კოეფიციენტის ლოგარითმებს, მაშინ წინააღმდეგობის კოეფიციენტის გრაფიკი ლოგარითმულ დიაგრამაზე წრფე იქნება, რომელიც კოორდინატთა ღერძებზე თანაბარ მონაკვეთებს მოკვეთს (ნახ. 3).

უნდა აღინიშნოს, რომ ორ პარალელურ კედელს შორის სითხის დინება გრიგალურ ხასიათს ატარებს. თუ გამოვითვლით გრიგალის ვექტორის კომპონენტებს ($\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}$), მივიღებთ

$$\Omega_x = \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -\frac{du}{dy} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot y$$

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული დინება ორ პარალელურ კედელს შორის ლამინარულად იწოდება. იგი

ხასიათდება შემდეგი თვისებებით: 1. სითხის ნაწილაკების ტრაექტორიები წრფეებია, 2. უძრავ კედლებს შორის სიჩქარის განაწილება პარაბოლურია, 3. წინააღმდეგობის კოეფიციენტის გრაფიკი ლოგარითმულ დიაგრამაზე წარმოადგენს წრფის მონაკვეთს, რომელიც ღერძებთან 45° ადგენს.

3.3. სითხის დინება წრიული კვეთის მილში

ა. განვიხილოთ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული ერთგანზომილებიანი მოძრაობა R რადიუსის მქონე წრიული კვეთის მილში. ამ შემთხვევაში უმჯობესია ვისარგებლოთ ცილინდრული კოორდინატებით. OZ ღერძი დავამთხვიოთ მილის ღერძს. რადგანაც დინება ერთგანზომილებიანია, ამიტომ

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_z = v_z(r, \theta), \quad p = p(z).$$

ვიგულისხმობთ, რომ დინება ღერძსიმეტრიულია, ე.ი. $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

მაშინ $v_z = v_z(r)$ და ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლება ჩაწერილი ცილინდრულ კოორდინატებში ასე ჩაიწერება

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z}. \quad (3.36)$$

რადგანაც მილი გაჩერებულია, ამიტომ მის კედლებზე სითხის მიკერის პირობა მოგვცემს სასაღერო პირობას

$$v_z|_{r=R} = 0. \quad (3.37)$$

(3.36) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება მარტივად შეიძლება ვაინტეგრროთ. გადავწეროთ იგი სახით

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z}. \quad (3.38)$$

თუ მას ორჯერ ვაინტეგრებთ, მივიღებთ

$$v_z = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2, \quad (3.39)$$

სადაც C_1 და C_2 - ნებისმიერი მუდმივებია. იმის გამო, რომ სითხის სიჩქარე ღერძზე ($r=0$) სასრული უნდა იყოს, ამიტომ $C_1=0$. C_2 მუდმივის პოვნა შეიძლება, თუ დავაკმაყოფილებთ (3.37) პირობას

$$C_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \frac{R^2}{4}.$$

საბოლოოდ (3.39) ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} (R^2 - r^2). \quad (3.40)$$

(3.40) ფორმულას პუაზეილის (ან პაგენ-პუაზეილის) ფორმულას უწოდებენ, დინებას კი პუაზეილის დინებას. (3.40) გვიჩვენებს, რომ სითხის სიჩქარის პროფილი მილში პარაბოლურ ხასიათს ატარებს. სითხის მოძრაობას ფიზიკური მახასიათებლებისათვის გვაქვს:

1. მაქსიმალური სიჩქარე ვიღწევა მილის ღერძზე ($r=0$) და ტოლია

$$v = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} R^2. \quad (3.41)$$

2. სითხის ხარჯი

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R v_z r dr = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} R^4, \quad (3.42)$$

ე.ი. სითხის ხარჯი პირდაპირ პროპორციულია მილის სიგრძის ერთეულზე წნევის დაცემისა და მილის რადიუსის მეოთხე ხარისხისა; უკუპროპორციულია სიბლანტის კოეფიციენტისა.

3. საშუალო სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v_{\text{საშ}} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} R^2. \quad (3.43)$$

4. ფართის ერთეულზე მოსული ხაზუნის ძალა ტოლია

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta z}, \quad (3.44)$$

ე.ი. ხახუნის ძალა, როცა $r=R$ იქნება

$$\tau_{rz} = \frac{R}{2} \frac{\Delta p}{\Delta z}$$

და ხახუნის ძალა, რომლითაც სითხე მოქმედებს მილის ზედაპირის ფართობის ერთეულზე ტოლია

$$\tau_{\text{მაქ}} = -\frac{\Delta p}{\Delta z} \frac{R}{2}. \quad (3.45)$$

5. კავშირი მაქსიმალურ სიჩქარესა და საშუალო სიჩქარეს შორის მოიცემა ფორმულით

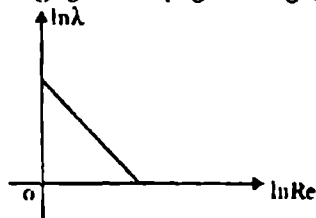
$$v_{\text{მაქ}} = 2v_{\text{საშ}}. \quad (3.46)$$

6. მილის წინააღმდეგობის კოეფიციენტისათვის მივიღებთ

$$\lambda = \frac{|\tau_{\text{მაქ}}|}{\rho \frac{v_{\text{საშ}}^2}{2}} = \frac{\left| \frac{\Delta p}{\Delta z} \right|}{\rho v_{\text{საშ}}^2} = \frac{8}{\text{Re}}$$

სადაც $\text{Re} = \frac{Rv_{\text{საშ}}}{\nu}$, ხოლო $\left| \frac{\Delta p}{\Delta z} \right| = \frac{8\mu v_{\text{საშ}}}{R^2}$.

მაშასადამე, წრიული მილის წინააღმდეგობის კოეფიციენტი, როდესაც მასში სწორხაზოვნად და სტაციონარულად მოძრაობს ბლანტი არაკუმშვადი სითხე, უკუპროპორციულია რეინოლდსის რიცხვისა. ლოგარითმულ დიაგრამაზე იგი გამოისახება წრფის მონაკვეთით (ნახ. 4).



ნახ. 4

ამრიგად, წრიული კვეთის ცილინდრულ მილში ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობა ლამინარულია, თუ: 1. სითხის ნაწილაკთა ტრანექტორიები წრფეებია; 2. კვეთაში სიჩქარის განაწილება პარაბოლურია; 3. მაქსიმალური სიჩქარე ორჯერ მეტია

საშუალო სიჩქარეზე; 4. წინააღმდეგობის კოეფიციენტის გრაფიკი ლოგარითმულ დიაგრამაზე კოორდინატთა ღერძებთან 45° -

კუთხეს აღგენს. ექსპერიმენტები გვიჩვენებენ, რომ აღნიშნული პირობები სრულდება, თუ რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობა არ აღემატება 1100-1400. თუ რეინოლდსის რიცხვი ამ მნიშვნელობებს გადააჭარბებს ღინება ტურბულენტური გახდება.

3.4. ბლანტი სითხის სწორხაზოვანი მოძრაობა წრიულ რგოლში

განვიხილოთ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული სწორხაზოვანი მოძრაობა წრიულ რგოლში. აღვნიშნოთ შიგა ცილინდრის რადიუსი b -თი, ხოლო გარე ცილინდრისა a -თი. დაეუშვათ, რომ სითხის ღინება ღერძსიმეტრიულია. მაშინ სიჩქარის ერთადერთი v_z კომპონენტისათვის გვექნება განტოლება:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \quad (3.47)$$

სითხის მილის კედლებზე სიკვრის პირობა მოიცემა ფორმულით:

$$\begin{cases} r = b, \text{ მაშინ } v_z = 0 \\ r = a, \text{ მაშინ } v_z = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$v_z = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta p}{\Delta z} r^2 + C_1 \ln z + C_2.$$

C_1 და C_2 მუდმივებს თუ ხასაზღვრო პირობებიდან განვსაზღვრავთ, მივიღებთ

$$v_z = -\frac{1}{4\pi} \frac{\Delta p}{\Delta z} \left[(a^2 - b^2) \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} - (r^2 - b^2) \right] \quad (3.49)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ შიგა ცილინდრის რადიუსს b -1 მივასწრაფებთ ნულისკენ, მაშინ (3.49)-ის მარჯვენა მხარე გადავა (3.50) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში, -ე.ი

მივიღებთ სითხის მოძრაობას წრიულ მილში. წრიული რგოლის კვეთში სითხის ხარჯისათვის გვექნება:

$$Q = 2\pi \int_b^a v_z r dr = \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{\Delta p}{\Delta z} \right) (a^2 - b^2) \left[a^2 + b^2 - \frac{a^2 - b^2}{\ln \frac{a}{b}} \right] \quad (3.51)$$

ვთქვათ $b=ka$. მაშინ სიჩქარე ტოლია

$$v_z = \frac{a^2}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{1-k^2}{\ln k} \ln \left(\frac{r}{a} \right) - 1 \right] \quad (3.52)$$

ხოლო ხარჯი კი

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \left[(1-k^4) + \frac{(1-k^2)^2}{\ln k} \right] \quad (3.53)$$

(3.52)-დან ჩანს, რომ v_{\max} მიიღწევა, როცა $r=\lambda a$, სადაც

$$2\lambda^2 = \frac{k^2 - 1}{\ln k} \quad (3.54)$$

და ტოლია

$$v_{z\max} = v_z|_{r=2\lambda} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \left\{ 1 + \left(\frac{1-k^2}{2\ln k} \right) \left[1 - \ln \left(\frac{k^2-1}{2\ln k} \right) \right] \right\} \quad (3.55)$$

წრიული რგოლის განივი კვეთის ფართობი ტოლია

$$S = \int_0^{2\pi} \int_{ka}^a r dr d\theta = \pi a^2 (1-k^2) \quad (3.56)$$

ამიტომ, სითხის საშუალო სიჩქარისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$v_{\text{საშ}} = \frac{Q}{S} = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \left[(1+k^2) + \frac{1-k^2}{\ln k} \right] \quad (3.57)$$

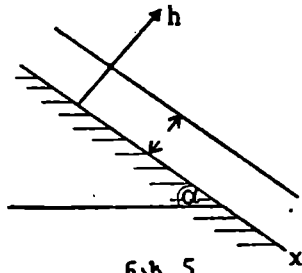
როდესაც $k=0$ ზემოთ ჩამოთვლილი ფორმულები გადაღობა წრიულ მილში სითხის მოძრაობის ფიზიკური მახასიათებლების გამომსახველ ფორმულებში.

3.5. თავისუფალი საზღვრის მქონე ბლანტი არაკუმშვადი სითხის წრფივი პარალელური მოძრაობა

განვიხილოთ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის წრფივი პარალელური დინება დახრილ სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში გვაქვს ერთი მხრივ, მყარი კედელი და მეორეს მხრივ, თავისუფალი ზედაპირი. თავისუფალ ზედაპირზე წნევა მუდმივია და ამ ზედაპირის გასწვრივ იგი x ცვლადზე არ იქნება დამოკიდებული, ე.ი.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (3.58)$$

იმის გამო, რომ წნევის დაცემა არა გვაქვს, იგი ვერ გამოიწვევს სითხის დინებას. სითხის მოძრაობას იწვევს მხოლოდ კედლის დახრილობა პორიზონტისადმი.



ნახ. 5

აღვნიშნოთ მყარი კედლის დახრა პორიზონტისადმი α კუთხით და ავირჩიოთ OX ღერძი ამ კედლის პარალელურად (ნახ. 5). რადგანაც ერთეულოვანი მასის სიმძიმის ძალის გეგმილი OX ღერძზე ტოლია $F_x = g \sin \alpha$.

ამიტომ, (3.1) სისტემის მეორე განტოლების გეგმილი OX ღერძზე, როდესაც მოძრაობა სტაციონარულია და დინების სიჩქარე მხოლოდ y ცვლადის ფუნქციაა, იქნება

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g}{v} \sin \alpha \quad (3.59)$$

სითხის კედელზე მიკერის პირობის თანახმად

$$u=0, \text{ როცა } y=0. \quad (3.60)$$

იმის გამო, რომ თავისუფალი ზედაპირის ფართის ერთეულზე მოქმედი ხახუნის ძალა ნულის ტოლი უნდა იყოს, ამიტომ თავისუფალ ზედაპირზე გვექნება პირობა

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ როცა } y = \delta. \quad (3.61)$$

(3.59) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$u = -\frac{gy^2}{2\nu} \sin \alpha + C_1 y + C^2.$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით სინქარისათვის საბოლოოდ გვექნება

$$u = \frac{g}{2\nu} (2y\delta - y^2) \sin \alpha \quad (3.62)$$

ვიპოვოთ ასეთი დინების ფიზიკური მახასიათებლები.

1. სითხის მაქსიმალური სინქარე მიიღწევა თავისუფალ ზედაპირზე და ტოლია

$$u_{\max} = \frac{1}{2\nu} g\delta^2 \sin \alpha. \quad (3.63)$$

2. სითხის ხარჯი ტოლია

$$Q = \int_0^\delta u dy = \frac{1}{3} \frac{g\delta^3}{\nu} \sin \alpha. \quad (3.64)$$

3. საშუალო სინქარისათვის გვექნება გამოსახულება

$$u_{\text{საშ}} = \frac{g\delta^2}{3\nu} \sin \alpha. \quad (3.65)$$

4. დამოკიდებულება მაქსიმალურ სინქარესა და საშუალო სინქარეს შორის ტოლია

$$u_{\max} = \frac{3}{2} u_{\text{საშ}}. \quad (3.66)$$

თუ შევადარებთ ხარჯის მნიშვნელობას ორ უძრავ კედელს შორისა და თავისუფალი ზედაპირის მქონე დინებებს შორის, დაეასკვნით, რომ (3.64) გამოსახულების მიღება შეიძლება

(3.30) ფორმულიდან, თუ დინამიკურ წნეკად ავიღებთ მნიშვნელობას

$$-\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{1}{2} \rho v^2 \sin \alpha$$

და h -ს შევცვლით δ -თი.

3.6. ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული წრთული მოძრაობა ორ მბრუნავ ცილინდრს შორის

ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში სითხის ნაწილაკების ტრაექტორიები წრფეები იყო. ახლა განვიხილოთ მაგალითი, როცა ტრაექტორიები კონცენტრული წრეწირებია.

განვიხილოთ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული მოძრაობა ორ უსასრულო წრთულ ცილინდრს შორის, რომელთაგან R_1 რადიუსის მქონე შიგა ცილინდრი ბრუნავს მუდმივი ω_1 კუთხური სიჩქარით, ხოლო R_2 რადიუსის მქონე გარე ცილინდრი მუდმივი ω_2 კუთხური სიჩქარით. მასობრივი ძალები, როგორც ყოველთვის უგულებელვყოთ. ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, როდესაც OZ ღერძი ემთხვევა ცილინდრების ღერძს, OZ ღერძის მართობულ სიბრტყეებში იგივეური იქნება. ჩავთვალოთ, რომ სითხე მოძრაობს კონცენტრულ წრეწირებზე, რომელთა ცენტრები OZ ღერძზე ძვეს და რომ სიმეტრიის გამო სითხის დინების მახასიათებლები არ არიან დამოკიდებული φ -კოორდინატზე. მაშინ გვექნება

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r)$$

და მოძრაობის (1.98) განტოლება ცილინდრულ კოორდინატებში მოგვცემს

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r}, \quad (3.67)$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \quad (3.68)$$

ადვილად დაერწმუნდებით, რომ (3.68) ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$v = \frac{C_1}{r} + C_2 r.$$

სასაზღვრო პირობები ასეთი ღინებისათვის შემდეგია:

$$v = \omega_1 R_1, \quad \text{როცა } r = R_1, \quad v = \omega_2 R_2, \quad \text{როცა } r = R_2.$$

თუ C_1 და C_2 მუდმივებს განესაზღვრავთ სასაზღვრო პირობებიდან, სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v = \frac{(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) r^2 + (\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) r}. \quad (3.69)$$

თუ (3.69) შევიტანთ (3.67) გამოსახულებაში შეგვიძლია განესაზღვროთ წნევის ცვლილების კანონი რადიალური მიმართულებით.

მოძრავ სითხეში ხახუნის ძალისათვის გვექნება

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = - \frac{2\mu(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2) r^2}. \quad (3.70)$$

აქედან ჩანს, რომ ხახუნის ძალა მცირდება გარე ცილინდრის ზედაპირთან მიახლოებისას.

გამოვითვალოთ r რადიუსის მქონე წრეწირზე განაწილებულ ხახუნის ძალთა მომენტი სიმეტრიის ღერძის მიმართ.

$$L = \int_0^{2\pi} \sigma_{r\varphi} r^2 d\varphi = -4\pi\mu \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (3.71)$$

ამრიგად, r რადიუსის მქონე წრეწირზე განაწილებული ხახუნის ძალთა მომენტი სიმეტრიის ღერძის მიმართ არ არის დამოკიდებული ამ წრეწირის რადიუსზე.

ცილინდრებს შორის სითხის მოძრაობას კუეტას ღინება ეწოდება. ასეთ ღინებას აქვს ადგილი, როცა რეინოლდსის

$$\text{Re} = \frac{a^2 b^2 (\omega_2 - \omega_1)}{a^2 - b^2} \quad (3.72)$$

რიცხვი მცირეა. თუ Re დიდია კუეტას ღინება არამდგრადია. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია სხვა სტაციონარული ღინებაც.

(3.69) გამოსახულებიდან შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა კერძო სტაციონარული ღინებაც. ვთქვათ, ორივე ცილინდრი მოძრაობს ერთნაირი კუთხური სიჩქარით $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, მაშინ (3.69)-დან მივიღებთ

$$v = \omega r,$$

ე.ი. ბლანტი სითხე ბრუნავს, როგორც აბსოლუტურად მყარი სხეული ცილინდრების კუთხური სიჩქარით. იგივე შედეგი მიიღება, თუ შიგა ცილინდრი არა გვაქვს. მართლაც, თუ $R_1 = 0$, $\omega_2 = \omega$, გვექნება $v = \omega r$.

თუ $R_2 \rightarrow \infty$, $\omega_2 = 0$, $R_1 = a$, $\omega_1 = \omega$, მაშინ მივიღებთ ზღვრულ შემთხვევას

$$v = \frac{\omega}{r} a^2,$$

რომელიც შეესაბამება ერთი ცილინდრის ბრუნვას უსასრულო სითხეში.

3.7. ბლანტი არაკუმშვადი ხითხის არასტაციონარული მოძრაობა

განვიხილოთ სითხის ერთგანზომილებიანი არასტაციონარული მოძრაობა წნევის დაცემის გარეშე. ვთქვათ, მოძრაობის სიჩქარის კომპონენტებია $v_x = u(z, t)$, $v_y = 0$, $v_z = 0$. მაშინ (3.1) განტოლებები, როდესაც მოცულობითი ძალები არ მოქმედებენ, მიიღებენ სახეს

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.73)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (3.73)-ის კერძო ამონახსნია

$$u(z, t) = \frac{\left(\exp \left[\frac{-(z - z')^2}{4vt} \right] \right)}{(2\sqrt{\pi vt})}. \quad (3.74)$$

იგი სითბოგამტარობის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნია. ფუნქცია:

$$u(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_R F(z') \exp \left[\frac{-(z - z')^2}{4vt} \right] dz' \quad (3.75)$$

აგრეთვე აკმაყოფილებს (3.73) განტოლებას, იმ პირობით, რომ მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალი და ინტეგრალები, რომლებიც $u(z, t)$ ფუნქციის დიფერენცირებით მიიღებთან, არიან თანაბრად კრებადნი. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $\eta = \frac{(z - z')}{2\sqrt{vt}}$

მაშინ (3.75) ასე გადაიწერება:

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R F(z + 2\eta\sqrt{vt}) e^{-\eta^2} d\eta. \quad (3.76)$$

როცა $t=0$ (იგულისხმება, რომ F უწყვეტი და შემოსაზღვრულია)

$$u(z, 0) = \frac{F(z)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = F(z).$$

ამრიგად, თუ სიჩქარის განაწილება ცნობილია საწყის მომენტში

$$u(z, t)|_{t=0} = u(z, 0) = F(z), \quad (3.77)$$

შესაძლებელია გამოვიტვალოთ სიჩქარის განაწილება დროის ნებისმიერ მომენტში (3.75) ან (3.76)-ის საშუალებით.

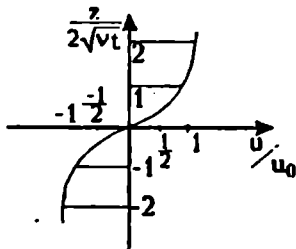
განვიხილოთ მიღებული ამონახსნის გამოყენების მაგალითები.

ა) ვთქვათ, საწყის მომენტში სითხეში გვაქვს სიჩქარის ტანგენციალური წყვეტა, ე.ი. როცა $t=0$

$$u(z, 0) = F(z) = \begin{cases} u_0, & z > 0 \\ -u_0, & z < 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

შეიტანოთ (3.78) გამოსახულება (3.76) გამოსახულებაში. მივიღებთ ამონახსნს, რომელიც გამოხატავს ტანგენციალური წყვეტის გაგლუვებას:

$$u(z,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z/\sqrt{4vt}} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z/\sqrt{4vt}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/\sqrt{4vt}} e^{-\eta^2} d\eta = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right) \quad (3.79)$$



ნახ. 6

სადაც $\operatorname{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta$ - გაუსის ფუნქციაა. (3.79)-დან ჩანს, რომ სიჩქარის განაწილება დამოკიდებულია მხოლოდ $\frac{z}{2\sqrt{vt}}$ უარდობაზე და არა z და t ცვლადებზე ცალ-ცალკე.

იგი გამოსახულია ნახ. 6-ზე. იგივე ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $t > 0$ სიჩქარის განაწილება უწყვეტია. სიჩქარის წყვეტა, რომელსაც ადგილი ქონდა საწყის $t=0$ მომენტში თანდათანობით გლუვდება.

გადასვლის სისქის სიგანე (იგი შეიძლება განისაზღვროს როგორც სიგანე, სადაც სიჩქარე იცვლება $-u_0 + \varepsilon$ -დან $(u_0 - \varepsilon)$ -მდე, ε -მცირე სიდიდეა) პროპორციულია \sqrt{vt} , ე.ი. დროის მიხედვით იზრდება.

ყოველ ფიქსირებულ $z \neq 0$ სიჩქარე $u(z,t) \rightarrow 0$, როცა $t \rightarrow \infty$. დიდი t -სათვის სიჩქარე $u \approx \frac{2zu_0}{2\sqrt{vt} \cdot \sqrt{\pi}}$. მაშასადავე, წყვეტის მიღების სიჩქარე

პროპორციულია $t^{-\frac{1}{2}}$, ე.ი. დროის მიხედვით მცირდება. ეს აიხსნება იმით, რომ დროის მიხედვით სიჩქარის გრადიენტი

მცირდება. (3.79) ფორმულა სამართლიანია, როცა საწყის მომენტში სიჩქარის განაწილებას ქონდა მარტივი სახე (3.78). მაგრამ შეიძლება ჩვენება, რომ სიჩქარის განაწილება ასიმპტოტურად მიისწრფვის (3.79) სახისაკენ დროის საწყის მომენტში გადასვლის ფენის ნებისმიერი ფორმის შემთხვევაში.

ბ) არასტაციონარული დინების მეორე შემთხვევა უეხება სითხის დინებას, რომელიც გამოწვეულია ბრტყელი კედლის მყისი მოძრაობის შედეგად უძრავ სითხეში. ვთქვათ, $z \geq 0$ ნახევარსიბრტყეში მოთავსებულია უძრავი სითხე. საწყის $t=0$ მომენტში კედელი მყისიერად მოდის მოძრაობაში მუდმივი u_0 სიჩქარით Ox ღერძის დადებითი მიმართულებისაკენ და შემდგომშიც იგივე სიჩქარით აგრძელებს მოძრაობას. როგორც წინა ამოცანაში სიჩქარის განაწილება აღიწერება (3.73) განტოლებით, ხოლო ზღვრული პირობები შემდეგია:

როცა $t=0$, $u(z,t)=0$; როცა $z=0$, $u(z,t)=u_0$; როცა $z \rightarrow \infty$, $u(z,t)=0$ (3.80)

ვეძებთ (3.73) და (3.80) ამოცანის ამოხსნა

$$u(z,t)=u_0 f(\eta) \quad (3.81)$$

სახით, სადაც $\eta = \frac{z}{2\sqrt{vt}}$. მაშინ $f(\eta)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (3.82)$$

და შემდეგ ზღვრულ პირობებს:

$$\text{როცა } \eta = 0, f = 1; \quad \text{როცა } \eta \rightarrow \infty, f = 0. \quad (3.83)$$

(3.82) და (3.83) ამოხსნა ასე ჩაიწერება:

$f(\eta) = 1 - \operatorname{erfc}\eta = \operatorname{erfc}\eta$, ხოლო სითხის სიჩქარისათვის გვექნება:

$$u(z,t)=u_0 \operatorname{erfc}\eta = u_0 \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{vt}}. \quad (3.84)$$

(3.84)-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული $z > 0$ -თვის სითხის სიჩქარე $u(z,t)$ მიისწრაფვის u_0 , როცა $t \rightarrow \infty$ კედელს მთელი სითხე მოჰყავს მოძრაობაში. ხოლო

სითხის ფენის δ სისქე, რომელშიც განსხვავება $u(z,t)$ და u_0 შორის არ აღემატება $\frac{u_0}{100}$, შეადგენს $\delta = 4\sqrt{vt}$.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა. ვთქვათ $z=0$ კედელი ასრულებს რხევას თავისსაკე სიბრტყეში $u_0 \cos nt$ სიჩქარით. ვეძებთ ამოხსნა კომპლექსური სახით:

$$u(z,t) = e^{int} F(z) + (e^{int} F(z))^* \quad (3.85)$$

აქ $*$ -ით აღნიშნულია კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია. (3.73)-დან $F(z)$ ფუნქციისათვის გვექნება:

$$vF'' = inF \quad (3.86)$$

ამ განტოლების უსასრულობაში შემოსაზღვრული ამონახსნი არის:

$$F(z) = A \exp\left[-(1+i)\sqrt{\frac{n}{2v}}z\right] \quad (3.87)$$

პირობიდან, რომ სითხისა და კედლის სიჩქარე, როცა $z=0$, ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს, მივიღებთ, რომ $A = \frac{u_0}{2}$; ამიტომ:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{u_0}{2} \left\{ \exp\left[-(1+i)\sqrt{\frac{n}{2v}}z\right] e^{int} + \exp\left[-(1-i)\sqrt{\frac{n}{2v}}z\right] e^{-int} \right\} = \\ &= \frac{u_0}{2} e^{-\sqrt{\frac{n}{2v}}z} \left\{ e^{\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2v}}z\right)} + e^{-\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2v}}z\right)} \right\} = u_0 e^{-\sqrt{\frac{n}{2v}}z} \cos\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2v}}z\right). \end{aligned} \quad (3.88)$$

ეს ამონახსნი წარმოადგენს განივ ტალღას, რომელიც ვრცელდება კედლიდან z -ის მიმართულებით. ტალღის სიგრძე

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2v}{n}}, \text{ ფაზური სიჩქარე კი ტოლია } c = \sqrt{2\nu}. \text{ ტალღის ამპ-}$$

ლიტუდა მიიღევა ექსპონენციალური კანონით $u = \exp\left(-\sqrt{\frac{n}{2v}}z\right)$.

ორ უახლოეს წერტილში, რომლებშიაც რხევა ერთიდაიგივე

ფაზით წარმოებს ამპლიტუდათა შეფარდება ტოლია $\exp(-2\pi) \approx 0,002$, რაც მიგვანიშნებს, რომ მოძრაობა კელლიდან დაშორებისას სწრაფად მიილევა.

3.8. არასტაციონარული მოძრაობა მილებში

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა წნევის გრადიენტი დროის ფუნქციაა. მაშინ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის არასტაციონარული დინების ამოცანა წრიული კვეთის მილში შემდეგში მდგომარეობს. უნდა ვიპოვოთ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.89)$$

განტოლების ამონახსნი შემდეგი საწყისი და სასაზღვრო პირობებით:

$$u(r,0) = u_0(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad \text{და} \quad u(a,t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.90)$$

აქ წნევის გრადიენტი დროის მოცემული ფუნქციაა:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = f(t) \quad (3.91)$$

იგი გამოძღინარეობს ნაეიე-სტოქსის განტოლებიდან, რომელიც ჩაწერილია ცილინდრულ კოორდინატებში. ამ ამოცანის ამონახსნი საწყის მომენტში სიჩქარის ნებისმიერი განაწილებისას ცკლადი წნევის გრადიენტის დროს შესწავლილი იქნა ი. გრაიმეკოს მიერ 1882 წელს, ხოლო იგივე ამოცანის კერძო შემთხვევები განხილული იყო სხვადასხვა ავტორის მიერ.

დავუშვათ, რომ საწყის $t=0$ მომენტში სითხე იყო უძრავი და ამ დროს მას მყისიერად მიენიჭა წნევის გრადიენტი, რომელიც ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობებს დროის შემდგომ მომენტებშიც. ეს ამოცანა 1930 წელს შეისწავლა შიმანსკიმ. შემოვიღოთ ახალი ფუნქცია:

$$w = \frac{f}{4\nu} (a^2 - r^2) - u, \quad (3.92)$$

სადაც $f = \text{const.}$ მაშინ w ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sqrt{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}} \quad (3.93)$$

განტოლებას და ზღვრულ პირობებს:

$$w(a, t) = 0, \quad w(r, 0) = \frac{f(a^2 - r^2)}{4\mu}. \quad (3.94)$$

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ ცვლადთა განცალკების მეთოდით:

$$w = \frac{f}{4\mu} \sum_1^{\infty} A_n w_n(r, t), \quad w_n(r, t) = \mathfrak{J}_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{vt}{a^2}\right). \quad (3.95)$$

აქ $w_n(r, t)$ კერძო ამონახსნებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს, თუ $\mathfrak{J}_0(\lambda) = 0$ განტოლების ფესვებია λ_n . ვისარგებლოთ ბესელის ფუნქციის შემდეგი თვისებით: ვთქვათ, λ_n არის $\mathfrak{J}_0(\lambda) = 0$ განტოლების დადებითი ფესვები, მაშინ,

როცა $\nu > -1$, ფუნქციები $\mathfrak{J}_n\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$ ქმნიან $0 \leq r \leq a$ შუალედში სრულ სისტემას და აკმაყოფილებენ ორთოგონალობის პირობას:

$$\int_0^a r \mathfrak{J}_\nu\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \mathfrak{J}_\nu\left(\lambda_m \frac{r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} \mathfrak{J}_{\nu+1}^2(\lambda_n) \delta_{mn}. \quad (3.96)$$

$\mathfrak{J}_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$ ფუნქციათა სისტემის სისრულე ნიშნავს, რომ (3.95) გაშლა წარმოადგენს ამონახსნის უზოგადეს ფორმას და საჭიროა მხოლოდ A_n მუდმივების შერჩევა, რომ დაკმაყოფილდეს საწყისი პირობები:

$$a^2 - r^2 = \sum_1^{\infty} A_n \mathfrak{J}_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$$

თუ გამოვიყენებთ ორთოგონალობის პირობას ვიპოვიოთ, რომ

$$A_n = \frac{2a^2}{\mathfrak{J}_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 x(1-x^2) \mathfrak{J}_0(\lambda_n x) dx = \frac{8a^2}{\lambda_n^3 \mathfrak{J}_1(\lambda_n)} .$$

ახლა (3.92)-ით ვიპოვით $u(r, t)$ ფუნქციას:

$$u(r, t) = \frac{f}{4\mu} (a^2 - r^2) - \frac{2fa^2}{\mu} \sum_1^{\infty} \left[\frac{\mathfrak{J}_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{\lambda_n^3 \mathfrak{J}_1(\lambda_n)} \right] \exp\left(\frac{-\lambda_n^2 vt}{a^2}\right). \quad (3.97)$$

დროის გაზრდისას ეს ამონახსნი უახლოვდება პუანსეილის ღინებას. დანარჩენ წვერთა მიღევა დროის მიხედვით ექსპონენციალურად მიმდინარეობს. პუანსეილის ღინება განისაზღვრება (3.97) გაშლის პირველი წვერით, სადაც $\lambda_1 = 2,41$.

თქვათ, ახლა წნევის დაცემა ჰარმონიულ კანონს ემორჩილება

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k \cos t, \quad k = \text{const},$$

ვიპოვოთ (3.89) განტოლების ამონახსნი პირობით, რომ სითხე ეკერის მილის კელლებს. რომ გაეამარტივოთ გამოთვლები, ვეძებოთ ამონახსნი კომპლექსური სახით:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k e^{int}; \quad u(r, t) = f(r) e^{int}.$$

აშკარაა, რომ ფიზიკური აზრი აქვს ამონახსნის მხოლოდ ნამდვილ ნაწილს. (3.89)-დან მივიღებთ $f(r)$ ფუნქციისათვის განტოლებას

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{in}{v} f = -\frac{k}{v},$$

რომლის ამონახსნი, რომელიც მიკერის პირობას აკმაყოფილებს, მოიცემა ფორმით:

$$u(r, t) = -i \frac{k}{n} e^{int} \left[1 - \frac{\mathfrak{J}_0(r\eta)}{\mathfrak{J}_0(a, \eta)} \right], \quad \eta = \sqrt{\frac{-in}{v}}. \quad (3.98)$$

η -ს მცირე მნიშვნელობებისათვის ბესელის ფუნქცია იშლება მწკრივად

$$J_0(r\eta) = 1 - \frac{1}{4}(r\eta)^2 + \dots$$

თუ შემოვიყარგლებით გაშლის პირველი ორი შესაკრებით და მცირე η -სთვის გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ:

$$u(r, t) = \frac{k}{4\nu} (a^2 - r^2) \cos nt, \quad (3.99)$$

η -ს დიდი მნიშვნელობებისას ბესელის ფუნქციისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ მისი ასიმპტოტური წარმოდგენით:

$$J_0(r\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi r\eta}} e^{i\pi/4}$$

და (3.98)-დან ნამდვილი ნაწილის გამოყოფის შემდეგ მივიღებთ:

$$u(r, t) = \frac{k}{n} \left\{ \sin nt - \sqrt{\frac{a}{r}} \exp\left[-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(a-r)\right] \sin\left[nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}}(a-r)\right] \right\}. \quad (3.100)$$

დაბალ და მაღალ სიხშირიანი (3.99), (3.100) გაშლები ერთმანეთისაგან ძლიერ განსხვავდებიან. სიჩქარის დაბალ სიხშირიანი რხევები და წნევის რხევები ერთნაირ ფაზაში ირხევიან. დროის ყოველ მომენტში სიჩქარის პროფილი პარაბოლურია. მაღალ სიხშირიან ამონახსნებში მეორე შესაკრები სწრაფად მიიღვევ კელლიდან დაშორებულ წერტილებში. ამიტომ მაღალ სიხშირიანი რხევები კელლიდან მოშორებით წარმოებს ხახუნის გარეშე და ნახევარ პერიოდით წანაცვლებულ ფაზაში. \bar{u}^2 - საშუალო მნიშვნელობა ახასიათებს რხევების ინტენსიუობას. (3.100)-დან შეიძლება მივიღოთ

$$\bar{u}^2 = \frac{k^2}{2n^2} [1 - 2 \cos \eta \exp(-\eta) + \exp(-2\eta)].$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ \bar{u}^2 მაქსიმუმი მიიღწევა კელლიდან Z_{in} მანძილზე, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$\eta_m = z_m \sqrt{\frac{n}{2\nu}} = 2,98 .$$

ეს თეორიული შედეგი კარგად ემთხვევა მიღებში პულსაციურ დინებათა ექსპერიმენტულ მონაცემებს (ე. რიჩარდსონი, ე. ტელორი, 1929).

განვიხილოთ კუეტას ბრტყელ-პარალელური ღინების არასტაციონარული განვითარება. დაუშვათ, რომ სითხე შემოსაზღვრულია ორი პარალელური მყარი კედლით $z=0$ და $z=h$. ვთქვათ, რომ საწყის მომენტში სითხე უძრავია. $t=0$ მომენტში ქვედა კედელი იწყებს მოძრაობას მუდმივი u_0 სიჩქარით. ვიპოვოთ (3.73) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$u(z,0) = 0, \quad 0 \leq z \leq h \quad \text{და} \quad u(0,t) = u_0, \quad u(h,t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.101)$$

დაუშვათ, რომ $w(z,t) = u_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) - u$. მაშინ $w(z,t)$

ფუნქციისათვის მივიღებთ (3.73) განტოლებას და ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, როცა $z=0$ და $z=h$. საწყისი პირობისათვის კი გვექნება

$$w(z,0) = u_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (3.102)$$

ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ ცვლადთა განცალკების მეთოდით:

$$w(z,t) = \sum_1^{\infty} A_n w_n(z,x) = \sum_1^{\infty} A_n \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2 \nu t}{h^2}\right) \sin \frac{\pi n z}{h} .$$

აქ w_n კერძო ამონახსნები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს. $\sin \frac{\pi n z}{h}$ აღვენს სრულ სისტემას. A_n მუდმივები უნდა განისაზღვრონ საწყისი პირობებიდან:

$$u_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{h} z ,$$

$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h u_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \sin \frac{\pi n z}{h} dz = \frac{2u_0}{\pi n}.$$

$u(z, t)$ ამონახსნს ექნება სახე

$$u(z, t) = u_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{2u_0}{\pi} \sum_1^n \frac{1}{n} \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2 vt}{h^2}\right) \sin \frac{\pi n z}{h}. \quad (3.103)$$

მიღებული მწკრივი ნელა იკრებება, როცა $vt \ll h^2$ - დინების განვითარების საწყის პერიოდში, როდესაც დინებაში გვაქვს ნახტომი, როცა $y=0$. შემდგომში ამონახსნი სიჩქარის წრფივ განაწილებაში გადადის. წრფივი განაწილებიდან გადასახს მიღება განისაზღვრება პირველი შესაკრებით $n=1$, რომელაც

$$\text{მიიღევა როგორც } \exp\left(\frac{-\pi^2 vt}{h^2}\right).$$

3.9. ცილინდრის არასტაციონარული ბრუნვა

შევისწავლოთ წრიული კვეთის ცილინდრულ მილში მოთავსებული ბლანტი არაკუმშვადი სითხის დინება, რომელაც გამოწვეულია ცილინდრის ბრუნვით მუდმივი სიჩქარით. ვიგულისხმობთ, რომ სითხე საწყის მომენტში უძრავი იყო. ასეთი დინება ღერძისმეტრიული იქნება და ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში შესრულდება პირობები:

$$v_z = v(r, t), \quad v_r = 0, \quad v_\phi = u(r, t), \quad p = p(r, t).$$

კერძო შემთხვევაში, როცა სითხის ნაწილაკები წრეწირზე მოძრაობენ სიჩქარის z კომპონენტი ნულის ტოლი იქნება და ნავიე-სტოქსის განტოლებები არსებითად მარტივდება

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u^2}{r}. \quad (3.105)$$

უნდა ვიპოვოთ მოცემული (3.104) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის და სასაზღვრო პირობებს.

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$u(0, t) = \omega_0 a, \quad t > 0.$$

სადაც ω_0 ბრუნვის კუთხური სინქარეა. დავუშვათ, რომ $u = \omega_0 r - w(r, t)$. მაშინ w -თვის მივიღებთ ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას საწყისი პირობით

$$w(r, 0) = \omega_0 r, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (3.106)$$

ცელადაა განცალკეების მეთოდით ამონახსნს ვებებთ სახით

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n(r, t),$$

$$w_n(r, t) = J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{vt}{a^2}\right).$$

აქ $w_n(r, t)$ - არის (3.104) განტოლების კერძო ამონახსნი; λ_n - მნიშვნელობები აირჩევა ისე, რომ შესრულდეს პირობა $w_n(0, t) = 0$. ეს ნიშნავს, რომ λ_n წარმოადგენს $J_1(\lambda) = 0$ განტოლების ფესვებს. A_n კოეფიციენტები ისე უნდა შეირჩეს, რომ დაკმაყოფილდეს (3.106) საწყისი პირობა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) = -\omega_0 r, \quad 0 \leq r \leq a$$

ბესელის პირველი გვარის პირველი რიგის $J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$ ფუნქცია სრულ სისტემას ქმნის და აკმაყოფილებს (3.96) ორთოგონალობის პირობას. თუ ვისარგებლებთ ამ პირობით, ვიპოვით

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n) a^2} \int_0^a \omega_0 r^2 J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) dr = \frac{2\omega_0 a}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}.$$

სიჩქარის განაწილებისათვის კი გვექნება

$$u(r, t) = \omega_0 r - 2\omega_0 a \sum_1^{\infty} \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(\frac{-\lambda_n^2 v t}{a^2}\right).$$

როცა $t \rightarrow \infty$ არასტაციონარული წვევები მიიღვეიან და სითხე იწყებს ბრუნვას, როგორც მყარი სხეული. ყველაზე დიდხანს შენარჩუნდება არასტაციონარული მწკრივის პირველი შესაკრები, რომელსაც შეესაბამება $\lambda_1 = 3,83$.

3.10. არაწრფივი ავტომოდელური ამოხსნები. სითხის ღინება კრიტიკული წერტილის მახლობლობაში

ავტომოდელური ანუ მსგავსი ამონახსნები ეწოდება ისეთ ამოცანათა ამონახსნებს, რომელთა ამოსავალი კერძოწარმოებულისანი დიფერენციალური განტოლებები შეიძლება მიყვანილ იქნას ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებამდე. ასეთი შემთხვევები განეკუთვნება სითხის ღინამიკის განტოლებების ზუსტ ამონახსნებს იმ გაგებით, რომ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნები შეიძლება მიღებულ იქნას საკმაო სიზუსტით კარგად შესწავლილი მეთოდების გამოყენებით. ეს ამონახსნები არ არის სავალდებულო ჩაწერილი იყოს ანალიზურად ცხადი სახით. ისინი შეიძლება მიღებულ იქნას რიცხვითი მეთოდების გამოყენებითაც.

ვთქვათ, ბლანტი სითხის ორგანზომილებიანი ნაკადი ეცემა მყარ ბრტყელ ზედაპირს. შევისწავლოთ სითხის ღინება კრიტიკული წერტილის სიახლოვეს (კ. ჰიმენც 1911 წ., ლ. პოუარტ. 1935 წ.). შემოვიღოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ $y=0$ სიბრტყე შეუთავსდეს მყარ ზედაპირს, ხოლო $x=0$, $y=0$ კრიტიკული წერტილი იყოს. დავეშვათ, რომ ზედაპირიდან მოშორებით

$$u(x, y) = ax, \quad y \rightarrow \infty \quad (3.107)$$

სიჩქარის ეს განაწილება შეესაბამება იდეალური სითხის დინებას კრიტიკული წერტილის მახლობლობაში. აქ

$$u=ax, \quad v=-ay, \quad p=p_a - \frac{1}{2}\rho a^2(x^2 + y^2)$$

არის ეილერის განტოლების ამონახსნები. ხოლო

$$u=0, \quad v=0, \quad \text{როცა } y=0 \quad (3.108)$$

არის მყარ ზედაპირზე სითხის მიკერის პირობები. უნდა ვიპოოთ ნავეი-სტოკსის

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

განტოლებების ამონახსნები, რომლებიც (3.107) და (3.108) პირობებს აკმაყოფილებენ. დასმული ამოცანა არ შეიცავს მახასიათებელ სიგრძეს. ამონახსნი კი უნდა იყოს დამოკიდებული ν და a პარამეტრებზე, რომელთა განზომილებებია $[\nu] = L^2 T^{-1}$ და $[a] = T^{-1}$. მათგან შეიძლება შედგენილი იქნას სიგრძის

მასშტაბი $\sqrt{\frac{\nu}{a}}$ და სიჩქარის მასშტაბი $\sqrt{a\nu}$. გადავიღეთ უგან-

ზომილებო სიდიდეებზე $\eta = y\sqrt{\frac{a}{\nu}}$ და $\zeta = x\sqrt{\frac{a}{\nu}}$ და ვეძებთ

დასმული ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$u = \sqrt{a\nu} \zeta f(\eta), \quad v = -\sqrt{a\nu} g(\eta), \quad p = p_a - \frac{1}{2}\rho a \nu [\zeta^2 + F(\eta)]. \quad (3.110)$$

(3.110)-ის ჩასმით (3.109)-ში მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებებს:

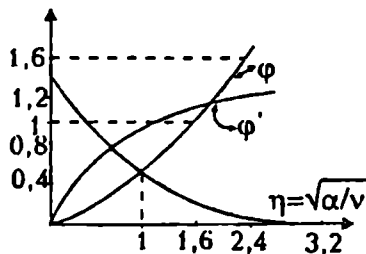
$$\varphi'' + \varphi\varphi' - \varphi'^2 + 1 = 0, \quad F' = 2(\varphi'' + \varphi\varphi'). \quad (3.111)$$

უწვევტობის განტოლება იგივეურად კმაყოფილდება, ხოლო სასაზღვრო პირობებისათვის გვექნება

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \text{როცა } \eta = 0; \quad \varphi' \rightarrow 1, \quad \text{როცა } \eta \rightarrow \infty. \quad (3.112)$$

სასაზღვრო პირობა $F(\eta)$ ფუნქციისათვის არაა არსებითი, რადგან წნევა განისაზღვრება შუღმივის სიზუსტით. ამიტომ შეიძლება მივიღოთ, რომ $F(0)=0$.

$F(\eta)$ განისაზღვრება მას შემდეგ, რაც ნაპოვნი იქნება სითხის მოძრაობის სინქარე.



ნახ.7

(3.111) - (3.112) ამოცანის ამოხსნა რიცხვითი მეთოდებით ხერხდება. ეს ამოცანა კარგად არის შესწავლილი და რიცხვითი ამოხსნის შედეგები ან ცხრილებით მოიცემა, ან გრაფიკით. (იხ. ნახაზი 7), აქ აგებულია ამოცანის ამოხსნათა გრაფიკები.

უკვე, როცა $\eta = 2,4$ ფუნქცია $\varphi'(\eta)$ განსხვავდება 1-გან 0,01-ზე ნაკლები მნიშვნელობით, ამიტომ ბლანტი სითხის სისქელ ზედაპირის მახლობლობაში შეიძლება მივიღოთ

$$\delta \cong 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{a}}.$$

(3.110) ამონახსნები შეიძლება განზოგადდეს კრიტიკული წერტილის მახლობლობაში ღერძსიმეტრიული დინების შემთხვევაში.

3.11. დინება მბრუნავი დისკის მახლობლობაში

განვიხილოთ ბლანტი სითხის ღერძსიმეტრიული დინება, რომელიც გამოწვეულია უსასრულო მყარი დისკის ბრუნვით

თავისივე სიბრტყეში უძრავი წერტილის გარშემო. (თ. კარმან 1921). ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, რომლის Oz ღერძი გადის ბრუნვის ცენტრში, ღინების კელი დამოკიდებული იქნება ორ r და z ცვლადზე და მოძრაობის განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right); \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= v \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right); \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta w; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.113)$$

აქ შემოყვანილია აღნიშვნები:

$$u = v_r, \quad v = v_\varphi, \quad w = v_z, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad \text{სასაზღვრო პირო-$$

ბებმა უნდა აღწერონ მყარ ზედაპირზე სითხის მიკერა და ზედაპირიდან შორ მანძილზე მოძრაობის მიღევა:

$$u=0, \quad w=r\omega, \quad w=0, \quad \text{როცა } z=0; \quad u=0, \quad v=0, \quad \text{როცა } z \rightarrow \infty \quad (3.114)$$

სადაც ω მყარი ზედაპირის (ღისკის) ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა. ω სიჩქარისათვის მიღევა უსასრულობაში არ მოითხოვება, რადგანაც როგორც ეს ამონახსნიდან გამოჩნდება, სითხე მიიზიდება ღისკისაკენ z ღერძის გასწვრივ. ამიტომ $w \neq 0$.

აღნიშნულ ამოცანაში არა გვაქვს მახასიათებელი სიგრძე. არსებობს მხოლოდ ორი პარამეტრი v და ω , რომელთა განზომილებებია $[v] = L^2 T^{-1}$, $[\omega] = T^{-1}$. მაოგან შეიძლება მივიღოთ სიგრძისა და სიჩქარის $\sqrt{v\omega^{-1}}$ და $\sqrt{v\omega}$ მასშტაბები.

გადავიღეთ ახლა უგანზომილებო ცვლადებზე:

$\eta = z\sqrt{\frac{\omega}{v}}, R = r\sqrt{\frac{\omega}{v}}$ და ვეებოთ ამოცანის ამონახსნი სახით:

$$\left. \begin{aligned} u &= R\sqrt{v\omega}F(\eta), & v &= R\sqrt{v\omega}G(\eta), \\ w &= \sqrt{v\omega}H(\eta), & p &= \rho v\omega p_1(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (3.115)$$

ამ გამოსახულებების ჩასმით (3.113)-ში მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$\left. \begin{aligned} H' + 2F &= 0; & F'' + F'H + G^2 - F^2 &= 0; \\ G'' - G'H - 2FG &= 0, & H'' - H'H - p_1' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.116)$$

ზოლო (3.114) სასაზღვრო პირობები მიიღებენ სახეს:

$$F=0, G=1, H=0, \text{ როცა } \eta=0; \quad F \rightarrow 0, G \rightarrow 0 \text{ როცა } \eta \rightarrow \infty. \quad (3.117)$$

წნევის უგანზომილებო ფუნქცია $p_1(\eta)$ შეიძლება განისაზღვროს მას შემდეგ, რაც ნაპოვნი იქნება სიჩქარეთა ველი. ამოცანის რიცხვითი ამოხსნების შედეგებიდან (ე. კოზრენ 1934 წ.) ჩანს, რომ $H \rightarrow 0,886$, როცა $\eta \rightarrow \infty$. ეს ნიშნავს, რომ დისკიდან მოშორებით ზდება სითხის დინება დისკის ზედაპირისაკენ. სითხის მოსული მასა ცენტრალური ძალების მოქმედებით გაიღვენება დისკის ცენტრიდან. ყოველი r -სათვის სიჩქარის წრიული კომპონენტი დისკზე თავისი მნიშვნელობის

ნახევრით მცირდება დისკიდან $\delta \equiv \sqrt{\frac{v}{\omega}}$ მანძილზე z ღერძის

მიმართულებით. თუ δ მცირეა, მაშინ დინება არსებობს მხოლოდ მცირე ფენაში დისკის მახლობლობაში. სითხის ნაწილაკები მოძრაობენ სპირალურ ტრაექტორიებზე. მ კუთხე, რომელსაც ადგენს ნაწილაკის ტრაექტორია $r=\text{const}$ წრეწირისადმი დისკის ზედაპირზე კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც დისკთან ერთად ბრუნავს, განისაზღვრება ტოლობით:

$$\operatorname{tg} \theta = - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial v}{\partial z}} = - \frac{F'(0)}{G'(0)}.$$

გამოთვლები გეიჩვენებენ, რომ $F'(0) = 0,510$ და $G'(0) = -0,616$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\theta = 39,6^\circ$. იგი არაა დამოკიდებული არც ბრუნვის სიჩქარეზე და არც სიბლანტის კოეფიციენტზე.

წინააღმდეგობის ძალის მომენტი, რომელიც მოქმედებს ა რადიუსის მქონე წრის ზედაპირზე, ტოლია $M = -2\pi \int_0^R r^2 \sigma_{z\varphi} dr$.

როცა $z=0$, მაშინ $\sigma_{z\varphi} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \rho r v^2 \omega^2 G'(0)$. ამიტომ M

მომენტისათვის გვექნება $M = 0,616 \pi R^4 v^2 \omega^2$.

თუ დისკი ორივე მხრიდან სველდება სითხით, მაშინ ეს მნიშვნელობა უნდა გაეორაკეცოს. შემოვიტანოთ წინააღმდეგობის C_M კოეფიციენტი

$$C_M = \frac{4M}{\rho a^2 v^5}.$$

მაშინ მისთვის გვექნება: $C_M = 3,87 R^{-\frac{1}{2}}$; $Re = R^2 \frac{\omega}{v}$.

ეს თეორიული ფორმულა კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტულ მონაცემებს. სანამ $Re_{კრ} \equiv 3 \cdot 10^5$. როდესაც $Re > Re_{კრ}$ დინება არამდგრადი ხდება და ლამინარული დინება ტურბულენტურში გადადის.

3.12. სითხის დინება კედლის ფორონების გათვალისწინებით

ნაკადზე ზემოქმედების ერთ-ერთი საშუალებაა სასაზღვრო ზედაპირში სითხის შეწოვა ან გამოწოვა. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კედელი ფორონანია. განვიხილოთ ასეთი ფირფიტის გარსდენა სითხის ნაკადით, რომელიც თანაბარია კედლიდან მოშორებით და აქვს მუდმივი U_{∞} სიჩქარე. კედლის ზედაპირში ხდება სითხის თანაბარი გამოწოვა მუდმივი v_0 სიჩქარით. კედელთან დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემაში ასეთმა დინებამ უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\left. \begin{aligned} u = 0, v = -v_0, \text{ როცა } y = 0 \quad (v_0 > 0); \\ u \rightarrow U_{\infty}, \text{ როცა } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.118)$$

ასეთ პირობებში (3.109) განტოლების ამონახსნები არ იქნება x ცვლადზე დამოკიდებული და წარმოიდგინება სახით:

$$u = u(y), v = -v_0, p = \text{const.}$$

$u(y)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$v u'' = -v_0 u',$$

რომლის ამონახსნი (3.118) სასაზღვრო პირობებში იქნება

$$u = U_{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0 y}{v}\right) \right] \quad (3.119)$$

(3.119) ფორმულით განსაზღვრული სიჩქარის პროფილი გამოწონვის ასიმპტოტურ პროფილად იწოდება.

ახლა დაუშვათ, რომ სითხე მოთავსებულია ორ პარალელურ ფორონან კედელს შორის. მაშინ $y = \pm h$ სასაზღვრო ზედაპირების განტოლებები იქნება, რომლებზედაც უნდა შესრულდეს სითხის მიკერისა და გაწონვის პირობები. $u=0$, $v = \mp v_0$, როცა $y = \pm h$. შეაოვილოთ უგანზომილებო ცვლადები

$\eta = \frac{y}{h}$, $\xi = \frac{x}{h}$ და განვიხილოთ ამონახსნები:

$$u = v_0 \xi f'(\eta), \quad v = -v_0 f(\eta). \quad (3.120)$$

თუ შევიტანთ (3.120)-ს (3.109) განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ განტოლებას, რომელიც სასაზღვრო, პირობებთან ერთად მოგვცემს შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას (ა. ბერმანი, 1953 წ):

$$f'f'' - ff''' = (Re)^{-1} f^{IV}; f = \pm 1, f' = 0, \text{ თუ } \eta = \pm 1. Re = \frac{hv_0}{v} \quad (3.121)$$

ეს სასაზღვრო ამოცანა შეიძლება ამოხსნილი იქნას რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით Re პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ზღვრულ შემთხვევებში, როცა გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვი ან მცირეა, ან დიდი, მივიღებთ შესაბამისად შემდეგ ანალიზურ ამონახსნებს: $2f = (3\eta - \eta^3)$, როცა

$$Re \rightarrow 0; f = \sin \frac{1}{2} \pi h, \text{ როცა } Re \rightarrow \infty.$$

მცირე Re -ებისათვის სიჩქარის პროფილი ყოველ კვეთში პარაბოლურია, ხოლო დიდი მნიშვნელობებისათვის $u(y)$ იცვლება სინუსის კანონით.

თავი მეოთხე

ბლანტი სითხის მოძრაობა რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობების შეთხვევაში

როგორც აღნიშნული გვექნდა, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებები არაწრფივია, რადგან მარცხენა მხარეში შეიცავენ ინერციის კვადრატულ წევრებს. ეს კი არსებითად ამნელებს მათი ამონახსნების პოვნას. ზუსტი ამონახსნები, რომლებიც ადრე იყო მიღებული, იმ შემთხვევებში არსებობენ, როდესაც ინერციის კვადრატული წევრები ნულის ტოლია. ეს კი მაშინ არის შესაძლებელი, როდესაც სითხე არაკუმშვადია და სითხის ნაწილაკების ტრაექტორიები ან პარალელური წრფეებია, ან კონცენტრული წრეწირები. აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებებში, როდესაც ნაწილაკთა ტრაექტორიები მცირედ იქნებიან განსხვავებულნი ან პარალელური წრფეებისაგან ან კონცენტრული წრეწირებისაგან, ინერციის კვადრატული წევრები იქნებიან მცირენი და გარკვეულ მიახლოებაში მათი უკუგდება შესაძლებელი იქნება. ამ დაშვებამდე სხვა გზითაც შეიძლება მივიდეთ. ზემოთ მიღებული იქნა მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები უგანზომილებო სიდიდეებში. განტოლებებში ინერციის კვადრატული წევრების წინ ზის მსოლოდ ერთი მამრავლი - რეინოლდსის რიცხვი. მაშასადამე, თუ რეინოლდსის რიცხვს ჩავთვლით საკმარისად მცირე სიდიდედ ერთთან შედარებით, მაშინ ინერციის კვადრატული წევრები შეიძლება უგულებელვყოთ. მაგრამ ასეთი მოთხოვნა მსოლოდ საკმარისია და არა აუცილებელი, რომ ჩავთვალით ინერციის კვადრატული წევრები მცირე სიდიდეებად. ისინი მაშინაც იქნებიან მცირე სიდიდეები, როცა რეინოლდსის რიცხვი არ არის მცირე, მაგრამ ნაწილაკთა ტრაექტორიები ახლოს არიან პარალელურ წრფეებთან ან კონცენტრულ წრეწირებთან.

იმისათვის, რომ შენარჩუნებული იქნას განტოლებებში ის შესაკრებები, რომლებიც შეიცავენ შამრავლად რეინოლდსის რიცხვს, უნდა დაუშვათ, რომ სიდიდეთა რიგის მიხედვით ადგილი უნდა ქონდეს უტოლობებს:

$$\text{StRe} > 1, \text{Re} > \text{Fr}, \text{EuRe} > 1. \quad (4.1)$$

ყურადღება უნდა მიექცეს $\text{EuRe} > 1$ უტოლობას. რადგან Eu წარმოადგენს წნევის შეფარდებას სიმკვრივისა და მახასიათებელი სიჩქარის კვადრატის ნამრაველთან, ხოლო რეინოლდსის რიცხვი $\text{Re} = \frac{L_0 u_0}{\nu}$, ამ უტოლობიდან წნევისათვის მივიღებთ

$P_0 > \frac{\mu u_0}{L_0}$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ ინერციის კვადრატული წევრების უკუღებისას, წნევა პირდაპირ პროპორციულია სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტისა და სიჩქარის პირველ ხარისხისა.

4.1. სტოქსის მახლობლობა

განტოლებები, რომლებშიც უკუღებულია ინერციის კვადრატული წევრები, პირველად ფართოდ გამოიყენა სტოქსმა. ამიტომ ისინი სტოქსის სახელს ატარებენ. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მათ აქვთ სახე:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \bar{v}, \quad \text{div} \bar{v} = 0 \quad (4.2)$$

ან კომპონენტებში

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u; & \frac{\partial v}{\partial t} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v; \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w; & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

თუ (4.2)-ის ორივე მხარეში ვიმოქმედებთ div ოპერატორით და გავითვალისწინებთ უწყვეტობის განტოლებას, მაშინ წნევისათვის მივიღებთ განტოლებას:

$$\Delta p = \rho \text{div} \vec{F} \quad (4.3)$$

და თუ მოცულობითი ძალები არა გვაქვს, მაშინ $\Delta p = 0$ და წნევა პარმონიული ფუნქცია იქნება. თუ მოცულობითი ძალები უგულებელყოფილია და (4.2) ორივე მხარეში ავიღებთ ოპერაცია როტორს, მაშინ გრიგალის ვექტორისათვის მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\Omega} \quad (4.4)$$

ე.ი., როდესაც ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლებებში უგულებელვყოფთ ინერციის კვადრატული წევრები და მოცულობითი ძალები, გრიგალის ვექტორი $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}$ ემორჩილება თავისუფალი დიფუზიის კანონებს.

4.2. ბლანტი სითხის ბრტყელ-პარალელური სტაციონარული მოძრაობა

ეთქვათ, სითხე არაკუმშვადია და ერთგვაროვანი, მოძრაობა სტაციონარულია და ბრტყელ-პარალელური, მაშინ $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$. თუ უკუვამოვიხილოთ მოცულობით ძალებს $\vec{F} = 0$ და სტოქსის მიხედვით ინერციის კვადრატულ წევრებს, (4.2) სისტემიდან მივიღებთ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.5)$$

შემოვიტანოთ $\psi(x, y)$ დენის ფუნქცია შემდეგი ტოლობებით:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

მაშინ გრიგალის ვექტორს ექნება ერთი

მდგენელი $\Omega_z = \Omega$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\Delta \psi$$

და (4.5) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\mu \Delta \psi) = \frac{\partial}{\partial y}(-\mu \Omega); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu \Delta \psi) = -\frac{\partial}{\partial x}(-\mu \Omega). \quad (4.6)$$

(4.6) განტოლებები წარმოადგენენ კოში-რიმანის ცნობილ პირობებს. მაშასადამე, წნევა და სიბლანტის კოეფიციენტის ნამრავლი გრიგალის ვექტორზე შებრუნებული ნიშნით წარმოადგენენ $z = x + iy$ კომპლექსური ცვლადის f ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს

$$p - i\mu\Omega = f(z). \quad (4.7)$$

თუ (4.5) გამოვირიცხავთ წნევას, დენის ფუნქციისათვის მივიღებთ ბიპარმონიულ განტოლებას:

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (4.8)$$

ამრიგად, ბლანტი არაკუბტადი სითხის ბრტყელ-პარალელური სტაციონარული მოძრაობის ამოცანა, როდესაც უკუგდებულია ინერციის კვადრატული წევრები და მოცულობითი ძალები, დაიყვანება დენის ფუნქციისათვის ბიპარმონიული განტოლების ამოხსნაზე. ცნობილია (ნ. მუსხელიშვილი), რომ x და y ორი ცვლადის ბიპარმონიული ფუნქცია შეიძლება წარმოადგენილი იქნას z კომპლექსური ცვლადის ორი ფუნქციის საშუალებით:

$$2\psi(x, y) = \bar{z}\phi(z) + z\bar{\phi}(\bar{z}) + \psi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}). \quad (4.9)$$

სადაც $\bar{z} = x - iy$, ხოლო ϕ და $\bar{\chi}$ არიან ϕ და $\bar{\chi}$ ფუნქციების შუალედული ფუნქციები. თუ (4.9)-ს გაეწარმოებთ x და y -ით, მივიღებთ

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} = \phi(z) + \bar{z}\phi'(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \chi'(z) + \bar{\chi}'(\bar{z}) = -v,$$

$$2\frac{\partial \psi}{\partial y} = i[-\phi(z) + \bar{z}\phi'(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \chi'(z) - \bar{\chi}'(\bar{z})] = u.$$

თუ გავამრავლებთ პირველ ტოლობას $-i$ -ზე და შევკრიბავთ მეორესთან, სიჩქარისათვის კომპლექსური ფორმით გვექნება

$$u+iv=-i[\phi(z) + z\bar{\phi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})]. \quad (4.10)$$

ღენის ფუნქციის მეორე წარმომავლისათვის მივიღებთ:

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + 2\bar{\phi}'(\bar{z}) + z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \chi''(z) + \bar{\chi}''(\bar{z});$$

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -[-2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) - 2\bar{\phi}'(\bar{z}) + z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \chi''(z) + \bar{\chi}''(\bar{z})]$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევკრებთ, გრიგალის ვექტორისათვის ისინი მოგვცემენ: $\Omega = -\Delta\psi = -2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})]$ (4.7) საფუძველზე წნევა p წარმოადგენს პარმონიულ ფუნქციას, რომელიც $-\mu\Omega$ პარმონიული ფუნქციის შეუღლებულია, ამიტომ

$$p=2\mu[\phi'(z) - \bar{\phi}'(\bar{z})] + p_0, \text{ სადაც } p_0=\text{const.}$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$p-i\mu\Omega = f(z) = 2\mu[\phi'(z) - \bar{\phi}'(\bar{z})] + p_0 + 2\mu[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})] = 4\mu\phi'(z) + p_0. \quad (4.11)$$

ზემოთ მიღებული იყო სითხეში წინსვლითი მოძრავ მყარ სხეულზე ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ძალური ზემოქმედების ფორმულები. სითხეში წინსვლით მოძრავ ბრტყელ კონტურზე სითხის მოქმედ ძალთა ნაკრები ვექტორის გვეგმილი იქნება:

$$R_x = \int_c \left(-p\ell + \mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad R_y = \int_c \left(-p m + \mu \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (4.12)$$

სადაც $\ell = \frac{dy}{ds}$, $m = -\frac{dx}{ds}$ c კონტურის გარე ნორმალის მიმართულების კოსინუსებია. თუ (4.12) მეორე ტოლობას გავამრავლებთ i -ზე და შევკრიბავთ პირველთან, მივიღებთ:

$$R_x + iR_y = \int_c \left[i p(dx + idy) + \mu \frac{\partial}{\partial n}(u + iv) ds \right], \quad (4.13)$$

სადაც

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos(n \wedge x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(n \wedge y) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = i[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) + z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})],$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u + iv) = \phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) - z\bar{\phi}''(\bar{z}) - \bar{\chi}''(\bar{z}).$$

ამიტომ (4.13) გამოსახულებებში შემავალი შესაკრებები მიიღებენ სახეს:

$$\frac{\partial}{\partial n} (u + iv) ds = dy \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) - dx \frac{\partial}{\partial y} (u + iv) =$$

$$= -\phi'(z) dz - \bar{\phi}'(\bar{z}) d\bar{z} + z\bar{\phi}''(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\chi}''(\bar{z}) d\bar{z},$$

$$ip dz = -2\mu\phi'(z) dz + 2\mu\bar{\phi}'(\bar{z}) d\bar{z} + ip_0 dz,$$

$$ip dz + \mu \frac{\partial}{\partial n} (u + iv) dS = ip_0 dz + \mu d[-4\phi(z) + i(u + iv)].$$

ამრიგად, ბრტყელ კონტურზე სითხის ძალური ზემოქმედების ვექტორი კომპლექსური ფორმით ასე გამოისახება:

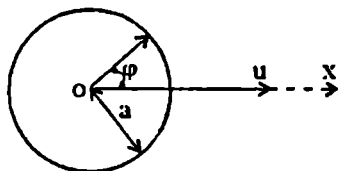
$$R_x + iR_y = ip_0 \int_C dz - 4\mu \int_C d[\phi(z)] + \mu i \int_C d(u + iv).$$

თუ C კონტური შეკრულია, მაშინ პირველი შესაკრები, რომელიც შეიცავს ინტეგრალს dz , ნულის ტოლი გახდება. რადგანაც სიჩქარის გეგმილები ცალსახა ფუნქციებია, ამიტომ ბოლო შესაკრებიც ნულად იქცევა. ამრიგად, ბლანტ არაკუმშვად სითხეში ბრტყელი შეკრული კონტურის წინსვლითი მოძრაობისას სითხის ნაწილაკების კონტურზე მიკერის პირობისა და ინერციის კვადრატული წევრების უკუგდების მხედველობაში მიღებით, სითხის კონტურზე ძალური მოქმედება კომპლექსური სახით მოიცემა ფორმულით:

$$R_x + iR_y = -4\mu \int_C d[\phi(z)]. \quad (4.14)$$

აქედან ჩანს, რომ ძალური ზემოქმედება მაშინ განსხვავდება ნულისაგან, თუ $\phi(z)$ ფუნქცია არაა ცალსახა.

4.3. წრიული ცილინდრის მოძრაობა



ნახ. 8

წინა პარაგრაფში ჩამოყალიბებული ზოგადი მოსაზრებები გამოვიყენოთ სითხეში მოძრავი წრიული ცილინდრისათვის. უთქვათ, a რადიუსის მქონე წრიული ცილინდრი წინსვლითად მოძრაობს უძრავ ბლანტ არააქმშვად სითხეში Ox ღერძის პარალელურად მუდმივი U სიჩქარით

(ნახ.8). თუ სითხის მოძრაობა სტაციონარულია, მოცულობითი ძალები და ინერციის კვადრატული წევრები უგულებელყოფილი, მაშინ დენის ფუნქციისათვის მივიღებთ ბიჰარმონიულ განტოლებას

$$\Delta\Delta\psi = 0. \quad (4.8)$$

სითხის სიჩქარის კომპონენტებისათვის პოლარ კოორდინატებში გვექნება:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}; \quad v_\phi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (4.15)$$

სითხის ნაწილაკების ცილინდრის ზედაპირზე მიკვრის პირობა მოგვცემს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} = u \cos\phi; \quad -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -u \sin\phi, \quad \text{როცა } r=a. \quad (4.16)$$

ახლა დავუშვათ, რომ ცილინდრის მოძრაობით გამოწვეული სითხის მოძრაობა ნული ჰდება არა უსასრულოებაში, არამედ ცილინდრისაგან რაღაც b მანძილზე. მაშინ გვექნება პირობები:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0; \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad \text{როცა } r=b. \quad (4.17)$$

(4.16) სასაზღვრო პირობები მიჯვანიშნებს, რომ (4.8) განტოლების ამონახსნი უნდა ექმნებოდეს შემდეგი სახით:

$$\psi = f(r) \sin \varphi. \quad (4.18)$$

მაშინ

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \left[f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f \right] \sin \varphi = F(r) \sin \varphi,$$

$$\Delta \Delta \psi = \left[F'' + \frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F \right] \sin \varphi = 0,$$

სადაც შემოტანილია აღნიშვნა $F(r) = f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f$. ლიფე-

რენციალური განტოლების $F'' + \frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F = 0$, ამონახსნი მოი-

ცემა შემდეგი სახით: $F = Ar + \frac{B}{r}$. მაშინ გრიგალისათვის გვექნება:

$$\Omega = -\Delta \psi = -\left(\Lambda^2 + \frac{B}{r} \right) \sin \varphi = -\operatorname{Im} \left(Az - \frac{B}{z} \right), \quad (4.19)$$

ხოლო წნევისათვის (4.11)-დან მივიღებთ

$$p = p_0 + \operatorname{Re} \left[\mu \left(Az - \frac{B}{z} \right) \right] = p_0 + \mu \left(Ar - \frac{B}{r} \right) \cos \varphi. \quad (4.20)$$

ამრიგად, გვექნება

$$p - i\mu\Omega = \mu \left(Az - \frac{B}{z} \right) + p_0. \quad (4.21)$$

სინქარის კომპონენტების საბუნებრივად აუცილებელია ამოიხსნას შემდეგი ლიფერენციალური განტოლება:

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f = \frac{d}{dr} \left(f' + \frac{f}{r} \right) = Ar + \frac{B}{r}.$$

მისი ინტეგრება მოგვცემს:

$$f(r) = \frac{1}{8} Ar^3 + \frac{1}{2} Br \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + Cr + \frac{D}{r}.$$

ამრიგად, დენის ფუნქციისა და სინჯარის კომპონენტებისათვის მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} \psi &= f(r) \sin \varphi = \left[\frac{1}{8} Ar^3 + \frac{1}{2} B r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + Cr + \frac{D}{r} \right] \sin \varphi; \\ v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \left[\frac{1}{8} Ar^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + C + \frac{D}{r^2} \right] \cos \varphi; \\ v_\varphi &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left[\frac{3}{8} Ar^2 + \frac{1}{2} B \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) + C - \frac{D}{r^2} \right] \sin \varphi. \end{aligned} \right\} (4.22)$$

თუ შევადარებთ (4.21) და (4.11) ფორმულებს დავასკენით, რომ

$$4\mu i \phi'(z) = \mu \left(Az - \frac{B}{z} \right),$$

ანუ

$$4\phi(z) = - \left[\frac{1}{2} Az^2 - B \ln z + k \right], \quad (4.23)$$

სადაც k ნებისმიერი მუდმივია. თუ $\phi(z)$ -ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (4.14)-ში და გავითვალისწინებთ, რომ ინტეგრალები $\frac{1}{z^2}$ -დან და k -დან ნულის ტოლი ხდებიან, ხოლო ინტეგრალი $\frac{1}{z}$ -დან ტოლია $2\pi i$ -ს, მივიღებთ ცილინდრზე სითხის ძალური მოქმედებისათვის შემდეგ გამოსახულებას:

$$R_x + iR_y = 2\mu B. \quad (4.23)$$

ამრიგად, ბლანტ არაკუმშვად სითხეში წინსვლით მოძრავ წრიულ ცილინდრზე სითხის ძალური ზემოქმედება დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ მუდმივეზე, რომელიც წარმოადგენს დენის ფუნქციის გამოსახულებაში იმ შესაკრების მამრავლს, რომელიც პოლარული რადიუსის ლოგარიტმის შეიცავს. გამოვიყენოთ ახლა (4.16) და (4.17) სასაზღვრო პირობები ინტეგრების მუდმივების განსაზღვრისათვის:

$$\left. \begin{aligned} Aa^2 + 2B(2 \ln a - 1) + 8C + \frac{8D}{a^2} &= 8U; \\ 3Aa^2 + 2B(2 \ln a + 1) + 8C - \frac{8D}{a^2} &= 8U; \\ Ab^2 + 2B(2 \ln b - 1) + 3C + \frac{8D}{b^2} &= 0; \\ 3Ab^2 + 2B(2 \ln b + 1) + 8C - \frac{8D}{b^2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

თუ ამ სისტემიდან განვსაზღვრავთ A-სა და B მუდმივებს, C-სა და D-ს გამორიცხვის ხარჯზე, მივიღებთ:

$$A(b^2 - a^2) + 2B \ln \frac{b}{a} = -4U \quad A(b^4 - a^4) + 2B(b^2 - a^2) = 0$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{b}{a} = k, \quad (4.25)$$

მაშინ B მუდმივისათვის მივიღებთ:

$$B = 2U \left[\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} - \ln k \right]^{-1}. \quad (4.26)$$

თუ B ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (4.24)-ში და გამოვყოფთ ნამდვილ ნაწილს, მივიღებთ ბლანტ სიიხეში წინსვლით მოძრავი წრიული ცილინდრის წინააღმდეგობის ფორმულას:

$$R_x = 4\pi\mu \left[\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} - \ln k \right]^{-1}. \quad (4.27)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ წინააღმდეგობა პროპორციულია სიბლანტის კოეფიციენტისა და წინსვლითი მოძრაობის სიჩქარის პირველი ხარისხისა. უგანზომილებო კოეფიციენტი, რომელიც უკედის (4.27) ფორმულაში დამოკიდებულია ცილინდრის მიერ სითხის შესუთების ზონის რადიუსის შეფარდებისა ცილინდრის რადიუსთან. თუ შესუთების ზონის რადიუსს მივასწრავებთ უსასრულობისაკენ, მაშინ ეს კოეფიციენტი

ნულისაკენ მიისწრაფვის, ხოლო როცა $b \rightarrow a$ წინააღმდეგობის კოეფიციენტი გაიზრდება უსასრულობამდე. შეშფოთების ზონის რადიუსის მნიშვნელობა მხოლოდ გაზომვებით ან სხვა დამატებითი მოსაზრებებით უნდა განისაზღვროს.

4.4. სტოქსის პარადოქსა

წინა პარაგრაფში აგებული იყო ბლანტ არაკუმშვად სითხეში წრიული ცილინდრის მოძრაობის ამოცანის ამოხსნა იმ დაშვებით, რომ ცილინდრის მოძრაობით გამოწვეული სითხის შეშფოთების ზონა შემოსაზღვრულია. თუ დავუშვებთ, რომ ეს შეშფოთება ქრება მხოლოდ უსასრულობაში, მაშინ (4.17) სასაზღვრო პირობები უნდა შეიცვალოს:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \rightarrow 0, \quad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow 0 \quad \text{როცა } r \rightarrow \infty \quad (4.28)$$

პირობებით. ეს პირობები დაკმაყოფილდება მაშინ, როცა

$$A=B=C=0. \quad (4.29)$$

მაშასადამე, (4.28) პირობების დასაკმაყოფილებლად რჩება ერთი D მუდმივი. ამრიგად, ცილინდრზე სითხის მიკერის პირობების შესრულება შეუძლებელი ხდება. მართლაც, (4.29) გამოყენებით (4.22)-დან

$$v_r = \frac{D \cos \varphi}{r^2}; \quad v_\varphi = \frac{D \sin \varphi}{r^2}. \quad (4.30)$$

თუ ცალ-ცალკე დავაკმაყოფილებთ (4.16) პირობებს მივიღებთ:

$$D = \pm U a^2. \quad (4.31)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ უსასრულო ბლანტ არაკუმშვად სითხეში წრიული ცილინდრის მოძრაობის ამოცანის ამონახსნს არ შეუძლია ერთდროულად დააკმაყოფილოს უსასრულობაში სიჩქარის ნულთან ტოლობისა და ცილინდრის ზედაპირზე

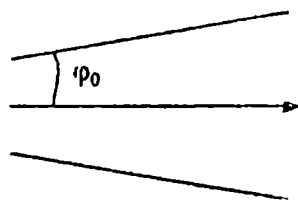
სითხის ნაწილაკების მიკერის პირობები. ეს ნიშნავს, რომ უსასრულო სითხეში წრიული ცილინდრის მოძრაობის ამოცანის ამოხსნა, რომელიც ბიპარაონიული განტოლებით აღიწერება, შეუძლებელია. ამ დებულებას სტოქსის პარადოქსი ეწოდება. ეს პარადოქსი ცილინდრისათვის, რომელსაც ელიფსური კვეთი აქვს უილტონმა დაამტკიცა, ხოლო ნებისმიერი კვეთის ცილინდრისათვის ოდგეისტმა. ნ. მუსხელიშვილისა და ს. მიხლინის გამოკვლევებით სტოქსის პარადოქსი მტკიცდება უსასრულო სითხეში სხვადასხვა სიჩქარით წინსვლითად მოძრავი რამდენიმე ჩაკეტილი კონტურისთვისაც.

იდეალური სითხის პილროდინამიკაში ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა საკმარისად ფართოდ არის შესწავლილი. ბრტყელი კონტურის იდეალური სითხით გარსდენის გარე ამოცანის ამოხსნისათვის ფართოდ არის გამოყენებული კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდები. ბლანტი სითხის პილროდინამიკაში კი ინერციის კვადრატული წევრების უკუგდების შემთხვევაში, ბრტყელი კონტურის სტაციონარული გარსდენის გარე ამოცანას საერთოდ არა აქვს ამონახსნი. ამით აიხსნება ის ფაქტი, რომ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდები, შემუშავებული ბიპარაონიული განტოლების ამოხსნისათვის, რომელიც გამოიყენება დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანებისათვის, ვერ პოულობს ფართო გამოყენებას ბლანტი სითხის იმ ამოცანებში, რომლებიც ბიპარაონიული განტოლებებით აღიწერებიან.

შეენიშნათ, რომ სტოქსის პარადოქსს ადგილი აქვს სამ შემთხვევაში: როცა 1) სითხის მოძრაობა სტაციონარულია; 2) ინერციის ყველა კვადრატული წევრი უკუგდებულყოფილია და 3) ამოხსნის მოძრაობის გარე სიბრტყეზე უსასრულობამდე ვრცელდება. თორემ იმე მათგანის უკუგდება იწვევს სტოქსის პარადოქსის უარყოფას.

4.5. სითხის მოძრაობა ბრტყელ დიფუზორში

განვიხილოთ ბლანტი სითხის ბრტყელ-პარალელური რადიალური დინება, როდესაც ინერციის კვადრატული წევრები უგულებელყოფილია. ვთქვათ გვაქვს ბრტყელი დიფუზორი (ნახ.9) სითხის მოძრაობა დიფუზორში იყოს სტაციონარული და მკაცრად რადიალური, ე.ი.



ნახ. 9

$$v_{\varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (4.32)$$

აღნიშნოთ დიფუზორის გაშლის კუთხის ნახევარი φ_0 -ია. მაშინ განსახილველი ამოცანა დაიყვანება ბიპარმონიული განტოლების ამოხსნაზე შემდეგ სასაზღვრო პირობებში:

$$\left. \begin{aligned} \psi = 0, \text{ როცა } \varphi = 0; \\ \psi = \frac{1}{2} Q, \text{ როცა } \varphi = \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \text{ როცა } \varphi = \pm \varphi_0; \quad \psi = \frac{1}{2} Q, \text{ როცა } \varphi = \varphi_0$$

სადაც Q არის სითხის ხარჯის სიდიდე დიფუზორის ყოველ კვეთში. (4.32) დაშვების გამო დენის ψ ფუნქცია არ იქნება დამოკიდებული რადიუსზე, ამიტომ

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2}; \quad \Delta^2 \psi = \frac{6}{r^4} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^4} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} + \frac{1}{r^4} \frac{d^4 \psi}{d\varphi^4}.$$

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში ბიპარმონიული განტოლება დაიყვანება შემდეგ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებამდე:

$$\frac{d^4 \psi}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = 0, \text{ რომლის ზოგადი ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ}$$

სახით:

$$\psi = A + B\varphi + C \cos 2\varphi + D \sin 2\varphi.$$

(4.33) სასაზღვრო პირობები ინტეგრების მუდმივების განსაზღვრისათვის მოცემულ შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\left. \begin{aligned} A + C &= 0; & B - 2C \sin 2\varphi_0 + 2D \cos 2\varphi_0 &= 0; \\ B + 2C \sin 2\varphi_0 + 2D \cos 2\varphi_0 &= 0; & A + B\varphi_0 + C \cos 2\varphi_0 + D \sin 2\varphi_0 &= \frac{Q}{2}, \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} A = C &= 0; & D &= \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0}; \\ B &= \frac{1}{2} Q \frac{2 \cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0}. \end{aligned} \right\}$$

ამრიგად, ღენის ფუნქციისა და რადიალური სიჩქარისათვის გვექნება:

$$\left\{ \psi = \frac{Q \sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi}{2 \sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0}; \quad v_r = \frac{Q \cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0}{r \sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0} \right\}. \quad (4.34)$$

რადგანაც $\Delta\psi = -\frac{4Q}{r^2} \sin 2\varphi = \text{Im} \left[\frac{4Q}{z^2} \right];$

ამიტომ (4.11) საფუძველზე წნევისათვის მივიღებთ:

$$p = p_0 + 4\mu D \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}. \quad (4.35)$$

გადასვლა დიფუზორში განშლადი ღინებიდან კონფუზორში შემკრებ ღინებაზე აღვილადა შესაძლებელი, თუ Q ხარჯის სიდიდეს ნიშანს შევუცვლით. თუ შევინარჩუნებთ ინერციის კვადრატულ წევრებს (იხილე [5]), მაშინ განსხვავება განშლად ღინებასა და კრებადს შორის პრინციპული იქნება. თუ გაშლის კუთხე φ_0 მცირეა და $\cos 2\varphi$, $\cos^2 \varphi_0$ გავშლით მწკრივად შესამე რიგის წევრებამდე სიზუსტით, სიჩქარისა და წნევისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$v_r = \frac{3Q}{4r} \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\varphi_0^3}; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{3\mu Q}{2r^3} \frac{1 - 2\varphi^2}{\varphi_0^3}.$$

თუ ამ ფორმულებში დავუშვებთ, რომ $h=r\varphi_0$ და $y=r\varphi$, მივიღებთ:

$$v_r = \frac{3Q}{4h^3} (h^2 - y^2); \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{3\mu Q}{2h^3} \left(1 - \frac{2y^2}{r^2}\right) \quad (4.36)$$

(4.36) -ს პირველი ფორმულა წარმოადგენს ორ უძრავ პარალელურ კედელს შორის ბლანტი სითხის ლამინარული მოძრაობის სიჩქარის ფორმულას. ამრიგად, ბრტყელ დიფუზორს გაშლის კუთხის მცირე მნიშვნელობისთვის და იმ პირობით, რომ ინერციის კვადრატული წევრები უგულვებელყოფილია წრიულ კვეთაში რადიალური დინების სიჩქარე ძალზე ახლოსაა პარაბოლურ განაწილებასთან. რაც შეეხება წნევას, მიუხედავად სიჩქარის თითქმის პარაბოლური განაწილებისა, იგი იცვლება არა მარტო კვეთიდან კვეთამდე, როგორც ეს ხდება ორ პარალელურ კედელს შორის სითხის მოძრაობის დროს, არამედ კვეთის გასწვრივაც.

4.6. სფეროს მოძრაობა უსასრულო სითხეში

ეთქვათ უძრავ სითხეში Ox ღერძის გასწვრივ მუდმივი U სიჩქარით მოძრაობს a რადიუსის მქონე სფერო (სტოქს 1851 წ.)

დავუშვათ სითხე არაკუმშვადია და ერთგვაროვანი, მოძრაობა სტაციონარული და ღერძსიმეტრიული. თუ შემოვიღებთ r, φ, θ სფერულ კოორდინატთა სისტემას, მაშინ გვექნება:

$$\rho = \text{const}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad v_\varphi = 0; \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

უკუვადლოთ ინერციის კვადრატული წევრები და მოცულობითი ძალები. მაშინ დენის ფუნქციისათვის მივიღებთ განტოლებას:

$$DD\psi = 0, \quad (4.37)$$

სადაც D სტოქსის ოპერატორია, რომელსაც სფერულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე:

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (4.38)$$

ამ დაშვებებში წნევა განისაზღვრება განტოლებებიდან:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial r}. \quad (4.39)$$

ხოლო სიჩქარის კომპონენტებისათვის გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; & v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\}$$

სფეროს წინსვლითი მოძრაობის შემთხვევაში სფეროს ზელაპირზე სითხის მიკერის პირობები მოგვცემს:

$$\text{როცა } r=a, \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta. \quad (4.40)$$

გარდა ამისა, სიჩქარის ორივე კომპონენტი უსასრულობაში უნდა გახდეს ნულის ტოლი:

$$\text{როცა } r \rightarrow \infty, \quad v_r \rightarrow 0; \quad v_\theta \rightarrow 0. \quad (4.41)$$

სასაზღვრო პირობების სახე მივივითებებს, რომ (4.37) დიფერენციალური განტოლების ამონაწილი უნდა ვეძებოთ სახით:

$$\psi = E(r) \sin^2 \theta.$$

მაშინ, სტოქსის ოპერატორისათვის გვექნება

$$D\psi = \left(F'' - \frac{2}{r^2} F \right) \sin^2 \theta = f(r) \sin^2 \theta. \quad (4.42)$$

თუ ერთხელ კიდევ გამოვიყენებთ სტოქსის ოპერატორს და გავეითავალისწინებთ (4.38), $f(r)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$f'' - \frac{2}{r^2} f = 0,$$

რომლის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ასე: $f = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2}$.
 ხოლო (4.42) გათვალისწინებით, $F(r)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$F'' - \frac{2}{r^2} F = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2}. \quad (4.43)$$

(4.43) განტოლების ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$F(r) = \frac{C_1}{10} r^4 - \frac{1}{2} C_2 r + C_3 r^2 + \frac{C_4}{r}.$$

ამრიგად, დენის ფუნქციისა და სიჩქარის კომპონენტებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \left(\frac{C_1}{10} r^4 - \frac{1}{2} C_2 r + C_3 r^2 + \frac{C_4}{r} \right) \sin^2 \theta; \\ v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2 \left(\frac{C_1}{10} r^2 - \frac{C_2}{2r} + 2C_3 + \frac{C_4}{r^3} \right) \cos \theta; \\ v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\left(\frac{2}{5} C_1 r^2 - \frac{C_2}{2r} + 2C_3 - \frac{C_4}{r^3} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\}$$

(4.40) და (4.41) სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება მოგვცემს:

$$C_1 = C_3 = 0; \quad \frac{C_2}{a} - \frac{2C_4}{a^3} = -U; \quad \frac{C_2}{2a} + \frac{C_4}{a^3} = -U;$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $C_2 = -\frac{3}{2} aU$ და $C_4 = -\frac{1}{4} a^3 U$.

$C_1 - C_4$ მუდმივების მნიშვნელობათა შეტანა წინა ფორმულებში, მოგვცემს

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{U}{4} \left(3ar - \frac{a^3}{r} \right) \sin^2 \theta; \quad v_r = \frac{U}{2} \left(\frac{3a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta; \\ v_\theta &= -\frac{U}{4} \left(\frac{3a}{r} + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} (4.44)$$

რადგანაც სტოქსის ოპერატორი დენის ფუნქციიდან ტოლია $D\psi = \frac{C_2 \sin^2 \theta}{r}$, ამიტომ (4.39) განტოლებებიდან წნევისათვის მივიღებთ:

$$dp = \mu C_2 \left(2 \frac{dr}{r^2} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} d\theta \right) = -\mu C_2 d \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right).$$

მაშასადამე, წნევისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$p = p_0 + \frac{3}{2} a \mu U \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (4.45)$$

სითხეში მოძრავი სფეროსათვის სითხის მიერ გაწეული წინააღმდეგობისათვის გვექნება:

$$P_z = \iint_S \left(-p \cos \theta + \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) dS, \quad (4.46)$$

სადაც w არის სიჩქარის ვექტორის მდგენელი სიმეტრიის ღერძის პარალელურად:

$$w = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= -\frac{2}{r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \\ &= -\frac{2}{r} v_r \cos \theta + \frac{1}{r} v_\theta \sin \theta - \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.40) სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} &= -\frac{2U}{a} \cos^2 \theta - \frac{U}{a} \sin^2 \theta + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{a} (2U \sin 2\theta) + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_a = \\ &= -\frac{U}{a} \sin^2 \theta + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_a. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{3U}{2a} \sin^2 \theta. \quad (4.47)$$

თუ (4.46)-ში გავითვალისწინებთ (4.45) და (4.47), მივიღებთ

$$P_z = -6\pi\mu a U. \quad (4.48)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ ჩაკეტილ ზედაპირზე ინტეგრალი მუდმივი P_0 -დან უდრის ნულს. ე.ი.

$$\iint_S \cos\theta dS = 0, \quad \text{ხოლო} \quad \iint_S dS = 4\pi a^2.$$

(4.48) წარმოადგენს სტოქსის ფორმულას. იგი გვიჩვენებს, რომ უსასრულო უძრავ ბლანტ სითხეში წინსვლით მოძრავი სფერო სითხის მხრიდან განიცდის წინააღმდეგობას, რომელიც პირდაპირ პროპორციულია სიბლანტის კოეფიციენტის, სფეროს რადიუსის და სფეროს მოძრაობის სიჩქარის პირველი ხარისხისა. ეს ფორმულა სამართლიანია რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის, რადგანაც მაშინ არის შესაძლებელი ინერციის კვადრატული წევრების უგულებელყოფა. თუ განხილულ ამოცანას შევაქცევთ, ე.ი. სითხესა და სფეროს მივანიჭებთ წინსვლით მოძრაობას, რომლის სიჩქარე სფეროს მოძრაობის სიჩქარის ტოლი იქნება, მაგრამ საწინააღმდეგო ნიშნით, მივიღებთ სითხის სფეროს გარსდენის ამოცანას, როცა სითხის სიჩქარე უსასრულობაში ტოლია $-U$ -სი:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -U \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{3}{4} ar + \frac{a^3}{4r} \right) \sin^2 \theta; \\ v_r &= -2U \left(\frac{1}{2} - \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) \cos\theta; \quad v_\theta = U \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin\theta. \end{aligned} \right\} (4.49)$$

ამ ფორმულების საფუძველზე შეიძლება შევაფასოთ უგულებელყოფილი ინერციის კვადრატული წევრების რიგი, იმ წევრებთან შედარებით, რომლებიც შენარჩუნებულ იქნა მოძრაობის განტოლებებში. ასე მაგალითად, სფერულ კოორდინატებში უკუგდ-

ბული იყო წვერი $\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$, რომელსაც (4.49) გათვალისწინებით ექნება სახე:

$$\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{3}{2} a U^2 \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad (4.50)$$

ამავე განტოლებაში შენარჩუნებული იყო შესაკრები:

$\frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta}$, განპირობებული სითხის სიბლანტით, და რომელიც (4.39) და (4.45) გათვალისწინებით ტოლი იქნება

$$\frac{\mu}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial r} = -3a\mu U \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (4.51)$$

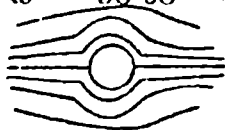
თუ შევადგენთ (4.50) და (4.51) მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების მიოდულთა შეფარდებას, მივიღებთ:

$$\frac{\left| v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|}{\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|} = \frac{1}{2} \frac{a \rho U}{\mu} \frac{r}{a} |\cos \theta| \left(1 - \frac{3a}{2r} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a^3}{r^3} - \frac{a^5}{2r^5} \right) \quad (4.52)$$

მიღებული ტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ იმ შემთხვევაშიც კი, როცა $Re = \frac{U a \rho}{\mu} < 1$ უკუგდებული ინერციის კვადრატული წვერების რიგი მცირეა შენარჩუნებულ წვერების რიგთან შედარებით სფეროს ზედაპირის მახლობლობაში (4.52)-ში ფრჩხილებში მოთავსებული გამოხატულება ნულად იქცევა. ამიტომ უკუგდება ინერციის კვადრატული წვერებისა გარკვეული მიახლოებით გამართლებულად შეიძლება ჩაითვალოს. მაგრამ სფეროდან გარკვეულ მანძილზე, (4.52) შეფარდების გამო მათი უკუგდება მთლად კანონიერი არ არის. მაგრამ ასეთი დასკვნა არ შეიძლება განხილულ იქნას, სტოქსის მიახლოებითი განტოლებების გამოყენების აბსოლუტურ კრიტერიუმად. ასეთი კრიტერიუმი მხოლოდ ექსპერიმენტი შეიძლება აყოს. ისინი ვეჩენებენ, რომ სტოქსის (4.48) ფორმულა კანონ

ნიერია რეინოლდსის რიცხვის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელიც ნახევარზე ნაკლებნი არიან.

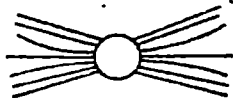
დენის წირთა მიახლოებითი სახე, რომელიც ეთანადება ფორმულიდან (4.49) განსაზღვრულ დენის ფუნქციას, სითხის



ფარდობითი მოძრაობისას ასეთია.

ხოლო

დენის წირები, რომლებიც ასახვენ სითხის აბსოლუტურ მოძრაობას (4.44) ფორმულის დენის ფუნქციით იქნება



იმის გამო, რომ დენის ფუნქციის გამოსახულებაში მამრავლად შედის $\sin^2 \theta$, ამიტომ ადგილი აქვს დენის წირთა სიმეტრიას მოძრაობის ძირითადი სიჩქარის მართობულ დიამეტრალური სიბრტყის მიმართ.

4.7. სფეროს ბრუნვა ბლანტ სითხეში

სტოქსის დიფერენციალური განტოლებები სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში ცილინდრულ კოორდინატებში იქნება:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right); & \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} &= \mu \left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right); \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \Delta v_z; & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} (4.54)$$

დავუშვათ, რომ ნაწილაკთა ტრეკტორიები წრეწირებია, რომელთა ცენტრები მდებარეობენ OZ ღერძზე. ე.ი.

$$v_r=0; v_z=0. \quad (4.55)$$

აქედან და უწყვეტობის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial r} = 0. \quad (4.56.)$$

თუ დავეშვებით, რომ წნევა p არ არის დამოკიდებული φ -ზე, მაშინ სინქარის v_{φ} კომპონენტებისათვის (4.54) სისტემიდან გვექნება განტოლება:

$$\Delta v_{\varphi} - \frac{v_{\varphi}}{r^2} = 0. \quad (4.57)$$

თუ გავითვალისწინებთ ლაპლასის ოპერატორის ჩაწერას სფერულ კოორდინატებში და (4.56), მაშინ (4.57) ასე შეიძლება წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} - \frac{v_{\varphi}}{r^2 \sin \theta} = 0. \quad (4.58)$$

განვიხილოთ ახლა სფეროს ბრუნვა უსასრულო ბლანტ სითხეში მუდმივი ω კუთხური სინქარით OZ ღერძის გარშემო. სფეროს ზედაპირზე სითხის მიკერის პირობები მოგვცემს:

$$v_{\varphi} = \omega r = \omega a \sin \theta, \text{ როცა } r = a. \quad (4.59)$$

ვიგულისხმობთ, რომ უსასრულობაში სითხე უძრავია:

$$v_{\varphi} = 0, \text{ როცა } r = \infty. \quad (4.60)$$

(4.58) განტოლების ამონახსნი (4.59) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვეძებთ სახით:

$$v_{\varphi} = f(r) \sin \theta. \quad (4.61)$$

მაშინ მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{2}{r^2} f = 0. \quad (4.62)$$

მიღებული განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$f = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}. \quad (4.63)$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინება მოგვცემს: $C_1 = 0$; $C_2 = \omega a^3$:

ამრიგად, უსასრულო სითხეში სფეროს ბრუნვის ამოცანის ამონახსნს ექნება სახე:

$$v_{\varphi} = \frac{\omega a^3 \sin \theta}{r^2} \dots \quad (4.64)$$

ძაბვის მზები მდგენელებისათვის გვექნება:

$$\sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{\varphi r} = \mu \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right); \quad \sigma_{\varphi\theta} = \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} - v_{\varphi} \operatorname{ctg} \theta \right).$$

თუ ამ გამოსახულებებში გავითვალისწინებთ (4.64), მივიღებთ:

$$\sigma_{r\theta} = 0, \quad (\sigma_{r\varphi})_a = -3\mu\omega \sin \theta, \quad \sigma_{\varphi\theta} = 0. \quad (4.65)$$

ხოლო სითხეში სფეროს ბრუნვის წინააღმდეგობის ძალის მომენტისათვის გვექნება:

$$L_z = \iiint (\sigma_{\varphi r})_a a^3 \sin^2 \theta d\theta d\varphi = -6\pi\mu a^3 \omega \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = -8\pi\mu\omega a^3. \quad (4.66)$$

მაშასადამე, უსასრულო სითხეში სფეროს ბრუნვის წინააღმდეგობის ძალის მომენტი სტოქსის მიახლოებაში პირდაპირ პროპორციულია სფეროს ბრუნვის კუთხური სიჩქარის პირველი ბარისხისა.

4.8. ოზენის მახლობა

სტოქსის განტოლებები (4.2), რომლებიც გამოყენებული იყი წინა პარაგრაფებში ჩამოყალიბებული ამოცანების ამოსახსნელად რეინოლდსის მცირე მნიშვნელობების დროს, ზოგიერთ შემთხვევაში წინააღმდეგობრივ შედეგებს გვაძლევს. მაგალითად, თუ განვიხილავთ სტაციონარულ ორგანზომილებიან დინებას, რომელიც ცილინდრის ღერძის მართობულია, მაშინ არ არსებობს სტოქსის განტოლებების ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს ერთდროულად სასაზღვრო პირობებს, როგორც ცილინდრის ზედაპირზე, ასევე უსასრულობაში. როგორც იყო აღნიშნული, სწორედ ამაში მდგომარეობს სტოქსის პარადოქსი.

ასევე, სფეროს გარსდენის ამოცანის განხილვისას, როდესაც ამონახსნს ეძებენ რეინოლდსის რიცხვის ხარისხების მიხედვით, პირველ მიახლოებაში დინების ველი აღიწერება სტოქსის განტოლებებით. მაღალი რიგის მიახლოების დროს, მოძრაობის განტოლებების ინერციის წევრების გაძოსათვლელად გამოიყენება უფრო დაბალი რიგის მიახლოება. ამავე დროს სითხის სიჩქარის მეორე მიახლოება უსასრულობაში სასრულ მნიშვნელობას გვაძლევს, ხოლო მაღალი რიგის მიახლოება უსასრულობაში განშლადია. ამრიგად, სტოქსის განტოლებების ამონახსნები ნაკვი-სტოქსის განტოლებების ინერციის წევრების გამოთვლისათვის უვარგისნი არიან.

ამ წინააღმდეგობის მიზეზი მდგომარეობს იმაში, რომ ის დაშვებები, რომელიც ნაკვი-სტოქსის განტოლებებიდან სტოქსის განტოლებებზე გადასვლისას კეთდება, არ არის სამართლიანი გარსმოდენადი სხეულიდან შორ მანძილზე. მართლაც, როგორც ეს ნაჩვენებია იყო სფეროს გარსდენის ამოცანის განხილვისას, ნაკვი-სტოქსის განტოლებების ინერციის წევრები თავისი რიგით

უტოლდება სიბლანტის შემცველ წევრებს სფეროდან $\frac{a}{R}$ რიგის მანძილზე. ამიტომ სტოქსის განტოლებები სამართლიანი არიან მხოლოდ სფეროდან მცირე მანძილზე.

იმისათვის, რომ მივიღოთ მიახლოებითი განტოლებები, რომლებიც სამართლიანი იქნებიან დინების მთელ არეში რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობების დროს, აუცილებელია ინერციის წევრების გათვალისწინება იმ არეში, სადაც ისინი თავისი რიგით სიბლანტის შემცველ წევრებს უტოლდებიან და უკუვაგდოთ ისინი იმ არეში, სადაც ინერციის წევრები მცირენი არიან სიბლანტის წევრებთან შედარებით. ასეთ მიახლოებას ოზენის მიახლოებას უწოდებენ, ხოლო განტოლებებს ოზენის განტოლებებს.

ვისარგებდოთ ნაკვი-სტოქსის

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{v}' \nabla) \bar{v}' &= \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \bar{v}', \\ \text{div} \bar{v}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

განტოლებათა სისტემითა და უსასრულობაში სასაზღვრო პირობით

$$\bar{v}'|_{\infty} = \bar{i} U_0.$$

წარმოვიდგინოთ სიჩქარის v_x , v_y , v_z მდგენელები სახით

$$v'_x = U_0 + v_x, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z \quad (4.68)$$

და დაეუშვათ, რომ სფეროს ზედაპირიდან მოშორებით v_x , v_y და v_z - მცირეა თავის წარმოებულებთან ერთად U_0 სიჩქარესთან შედარებით. მაშინ რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის, თუ უკუვაგდებთ მოძრაობის (4.67) განტოლებაში წევრებს, რომლებიც მეორე რიგის მცირენი არიან, მივიღებთ ოზენის განტოლებებს:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \bar{v}, \\ \text{div} \bar{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

ეს განტოლებები, ისევე როგორც სტოქსის განტოლებები, წრფივი განტოლებებია. სფეროს ზედაპირიდან დაშორებულ წერტილებში, უკუგდებული წევრები არ სჭარბობენ შენარჩუნებულ წევრებს. სფეროს ზედაპირის მახლობლობაში კი სტოქსისა და ოზენის განტოლებებს ერთნაირი სიზუსტე გააჩნიათ. ამ განტოლებების საშუალებით ამოხსნილია სფეროს, ელიფსოიდისა და წრიული ცილინდრის გარსდენის ამოცანები. ზოგიერთ მათგანს ქვემოთ გავეცნობით.

4.9. ოზენის განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა აგება

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში, როდესაც მოცულობის ძალები უგულვებელყოფილია, ოზენის განტოლებებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\left. \begin{aligned} U_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \bar{v}, \\ \text{div} \bar{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

ამ სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარეში შევასრულოთ ოპერაცია დიფერენცია და გავითვალისწინოთ უწყვეტობის განტოლება. მაშინ წნევა პარმონიული ფუნქცია იქნება

$$\Delta p = 0. \quad (4.71)$$

წარმოვადგინოთ სიჩქარის ვექტორი პოტენციალური grad ვექტორისა და დამატებითი \bar{v}_1 ვექტორის ჯამის სახით:

$$\bar{v} = \text{grad} \varphi + \bar{v}_1 \quad (4.72)$$

ისე, რომ φ პოტენციალი პარმონიული ფუნქცია იყოს:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (4.73)$$

თუ შევიტანთ (4.72) ოზენის განტოლებებში, მივიღებთ:

$$\text{grad} \left(U_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \right) + U_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} = \nu \Delta \bar{v}_1.$$

იმის გამო, რომ სიჩქარის პოტენციალი და წნევა პარმონიული ფუნქციებია და $U_0 = \text{const}$, ჩვენ შეგვიძლია ისინი ერთმანეთთან დავაკავშიროთ:

$$p = -\rho U_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.74)$$

(4.72)-(4.73) კათვალისწინებით (4.70) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მოგვცემს:

$$\left. \begin{aligned} U_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} &= v \Delta \bar{v}_1, \\ \operatorname{div} \bar{v}_1 &= 0, \\ \Delta \phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\frac{v}{U_0} = \frac{1}{2k} \quad (4.76)$$

და ვეძებოთ \bar{v}_1 ვექტორი სახით:

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2k} \operatorname{grad} \phi - \bar{i} \phi. \quad (4.77)$$

მაშინ ϕ ფუნქციისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{1}{2k} \Delta \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (4.78)$$

ამრიგად, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში, ოზენის განტოლებების ამონახსნები, როდესაც უგულვებელყოფილია მოცულობითი ძალები, შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \operatorname{grad} \left(\phi + \frac{1}{2k} \phi \right) - \bar{i} \phi, \\ p &= -\rho U_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

სადაც ϕ და ψ ფუნქციები აკმაყოფილებენ განტოლებებს

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi &= 2k \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \Delta \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

(4.80) პირველი განტოლება x, y, z ცვლადების მიმართ არასიმეტრიული განტოლებაა. იგი ჩასმით

$$\phi = e^{kx} \phi_1(x, y, z) \quad (4.81)$$

დაიყვანება სიმეტრიულ განტოლებაზე

$$\Delta\phi_1 = k^2\phi_1, \quad (4.82)$$

რომელსაც ჰელმჰოლციის განტოლებას უწოდებენ.

(4.77) გრიგალის ვექტორისათვის მოგვეცემს

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v} = \text{rot} \vec{v}_1 = -\text{rot}(\vec{i}\phi), \quad (4.83)$$

რომელიც კომპონენტებში მიიღებს სახეს

$$\Omega_x = 0, \Omega_y = \left[\frac{\partial(\vec{i}\phi)_x}{\partial z} - \frac{\partial(\vec{i}\phi)_z}{\partial x} \right] = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \Omega_z = \left[\frac{\partial(\vec{i}\phi)_y}{\partial x} - \frac{\partial(\vec{i}\phi)_x}{\partial y} \right] = \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (4.84)$$

(4.83) გამოსახულებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ (4.77)-ით წარმოდგენილ ამონახსნს ადგილა აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც გრიგალური წირები განლაგებული არიან უსასრულობაში სიჩქარის ნაკადის მართობულ სიბრტყეში. სწორედ გრიგალური წირების ასეთ განლაგებას აქვს ადგილი ბრტყელ-პარალელური და ღერძსიმეტრიული მოძრაობის დროს. ასეთი მოძრაობების შემთხვევაში შესაძლებელია ოზენის განტოლებების ამონახსნთა აგება. უძრავი სხეულის S ზედაპირზე სითხის ნაწილაკების მიკერის პირობა

$$\vec{v}|_S = (\text{grad}\phi + \vec{v}_1)|_S = \left(\text{grad}\phi + \frac{1}{2k} \text{grad}\phi - \vec{i}\phi \right)|_S = 0$$

კომპონენტებში ასე ჩაიწერება:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi \right)|_S = 0, \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)|_S = 0, \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)|_S = 0. \quad (4.85)$$

ზოლო გრიგალის კომპონენტებისათვის იგივე S ზედაპირზე (4.84) გათვალისწინებით გვექნება

$$\Omega_x|_S = 0, \Omega_y|_S = \frac{U_0}{v} \frac{\partial\phi}{\partial z}, \Omega_z|_S = -\frac{U_0}{v} \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (4.86)$$

ჩვენ აღრე ვაჩვენეთ, რომ უძრავ სხეულზე სითხის მოქმედების ძალთა ნაკრები ვექტორი ბრტყელ-პარალელურ და ღერძსიმეტრიული მოძრაობების დროს ტოლია

$$\bar{R} = \int_S (-\rho \bar{i}_1 + \mu \Omega_z \bar{i}_2) dS, \quad (4.87)$$

სადაც \bar{i}_1 არის S ზედაპირის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი, ხოლო \bar{i}_2 - თხევადი ნაწილაკების მოძრაობის სიბრტყეში S ზედაპირის მხები ერთეულოვანი ვექტორი, Ω_z - კი გრივალის ვექტორის კომპონენტია მოძრაობის სიბრტყის მართობულად.

ბრტყელი-პარალელური მოძრაობის დროს (4.85)-დან გვაქვს:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_\gamma = 0, \quad \Omega = \Omega_z = -\frac{U_0 \rho}{2\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (4.88)$$

სადაც γ - S ზედაპირის გარე კონტურია. თუ ვისარგებლებთ ახლა (4.74) გამოსახულებით (4.87) და (4.88) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\bar{R} = \rho U_0 \int_S \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{i}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{i}_2 \right) dS. \quad (4.89)$$

ასევე მივიღებთ ღერძსიმეტრიული ღინებისათვის:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \rho U_0 \int_S \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{i}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{i}_2 \right) dS, \\ v_x &= -\phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_r = \frac{1}{2k} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

4.10. ცილინდრის გარსდენის ამოცანა

წრიული ცილინდრის გარსდენის ამოცანა ოზენის მიახლოებებში განხილული იყო ლემბის მიერ 1911 წელს. იგი ასე ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ (4.70) სისტემის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad \text{რთა } r = a; \quad v_r = u_0 \cos \theta; \quad v_\theta = -u_0 \sin \theta. \quad \text{რთა } r \rightarrow \infty \quad (4.91)$$

რადგან ერთეულოვანი \vec{i} ვექტორი \vec{r} მიმართულებასთან ადგენს θ კუთხეს, ამიტომ სითხის ნაწილაკთა სიჩქარის ვექტორი, (4.79) ძალით, პოლარულ r, θ კოორდინატებში მოგვცემს

$$v_r = -\dot{\phi} \cos \theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial t}; v_\theta = \dot{\phi} \sin \theta + \frac{1}{2kr} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta}, \quad (4.92)$$

სადაც $\dot{\phi}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial y^2} = 0, \quad (4.93)$$

ხოლო $\dot{\phi}$ ფუნქცია წარმოიღგინება სახით:

$$\dot{\phi} = -u_0 + e^{kx} \phi_1. \quad (4.94)$$

ϕ_1 ფუნქცია აკმაყოფილებს პელმპოლცის განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - k^2 \phi_1 = 0. \quad (4.95)$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.89) და ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას დაეაგეგმილებთ $0x$ ღერძზე, გვექნება:

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r}.$$

მაშასადამე, (4.89) ფორმულა, რომელიც გამოსახავს ცილინდრის წინააღმდეგობას, მოგვცემს:

$$R_x = \rho U_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} d\theta. \quad (4.96)$$

ლაპლასის (4.93) განტოლების ბირითადი ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება, კოორდინატთა სათავეში წყაროს სიჩქარის პოტენციალს, იქნება:

$$\dot{\phi} = \ln r. \quad (4.97)$$

თუ $\dot{\phi}$ -ს ამ გამოსახულებას გავაწარმოებთ x -ით და მიღებულ კერძო ამონახსნებს ავჯამავთ, $\dot{\phi}$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ მწკრივს:

$$\varphi = \sum_0^{\infty} A_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \ln r, \quad (4.98)$$

რადიანად

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} = \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{r^2} = \frac{-\cos 2\theta}{r^2},$$

.....

$$\frac{\partial^n \ln r}{\partial x^n} = (-1)(n-1)! \frac{\cos n\theta}{r^n}, \quad n \geq 1.$$

ამიტომ (4.98) მწკრივი ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\varphi = A_0 \ln r + \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! A_n \frac{\cos n\theta}{r^n}, \quad (4.99)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ (4.96) ფორმულაში, მივიღებთ

$$R_x = 2\pi r U_0 A_0 + \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n! A_n}{a^{n+1}} \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta.$$

ამრიგად, წრიული ცილინდრის წინააღმდეგობა დამოკიდებული იქნება მხოლოდ ერთ A_0 კოეფიციენტზე, რომელიც წარმოადგენს (4.97) წყაროს სიმძლავრეს:

$$R_x = 2\pi r U_0 A_0, \quad (4.100)$$

ϕ_1 ფუნქციისათვის, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ პოლარულ რადიუსზე, გვექნება განტოლება

$$\phi_1'' + \frac{1}{r} \phi_1' - k^2 \phi_1 = 0. \quad (4.101)$$

(4.101) ფუნქციის ზოგადი ამონაზნნი მოიცემა წარმოსახვითი არგუმენტის ნულოვანი რიგის ბესელის ფუნქციების საშუალებით:

$$\phi_1(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr).$$

არგუმენტის ზრდისას $I_0(kr)$ ფუნქცია უსასრულოდ იზრდება, ამიტომ აუცილებელია დაეუშვათ, რომ $c_1=0$. ამრიგად, სიბრტყეში კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული წყარო მოიცემა ნულოვანი რიგის მაკლონალდის ფუნქციის საშუალებით $K_0(kr)$. (4.102)

თუ ამ ფუნქციას გავაწარმოებთ x -ით და გავამრავლებთ მუდმივ მამრავლსა და e^{kx} -ზე, ავჯამავთ, ϕ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ მწკრივს:

$$\phi = -u_0 + e^{kx} \sum_0^{\infty} B_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_0(kr). \quad (4.103)$$

(4.91) სასაზღვრო პირობები დაეკმაყოფილოთ მიახლოებით. ამისათვის დაეუშვათ, რომ (4.103) გამოსახულებაში B_0 და B_1 კოეფიციენტები შემდეგი რიგის არიან $B_0 \sim 1$, $B_1 \sim k$. ამიტომ ϕ გამომსახველ ფორმულაში შევინარჩუნოთ შესაკრებები, რომელთა რიგი k -ს პირველ ხარისხს შეიცავენ. რადგანაც არგუმენტის მცირე მნიშვნელობებისათვის მაკლონალდის ფუნქცია და მისი პირველი რიგის წარმოებულები წარმოიდგინება სახით:

$$K_0(kr) \approx -\ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right); \quad \frac{\partial}{\partial x} K_0(kr) \approx -\frac{x}{r^2} - \frac{\cos \theta}{r}, \quad (4.104)$$

სადაც γ მუდმივია და ტოლია 1,7811-ის. ამიტომ ϕ მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება:

$$\phi \approx -U_0 - B_0 \left[\ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) + kr \cos \theta \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) \right] - \frac{B_1 \cos \theta}{r}. \quad (4.105)$$

გამოეთვალთ (4.92) ფორმულების საშუალებით სიჩქარის კომპონენტები ერთნაირი რიგის სიზუსტით უკუვავლოთ სიდიდეები, რომელთა რიგია $kr \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right)$, მივიღებთ:

$$v_r = \frac{A_0}{r} - \frac{A_1 \cos \theta}{r^2} + U_0 \sin \theta - \frac{1}{2} B_0 \left[\frac{1}{kr} + \cos \theta - \cos \theta \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) \right] + \frac{B_1 \cos \theta}{2kr^2}$$

$$v_\theta = -\frac{A_1 \sin \theta}{r^2} - U_0 \sin \theta - B_0 \frac{\sin \theta}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) + \frac{B_1 \sin \theta}{2kr^2}. \quad (4.106)$$

A_0, B_0, A_1, B_1 კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ სხეულის ზედაპირზე სითხის მიკერის სასაზღვრო პირობით. ამისათვის (4.106)-ის მარჯვენა მხარეში დაუშვათ, რა $r=a$ და მარცხენა ნაწილებში $\cos\theta$ და $\sin\theta$ შემცველი კოეფიციენტები (ვალკ-ვალკ გავუტოლოთ ნულს. მივიღებ შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{A_0}{a} = \frac{B_0}{2ka}; -\frac{A_1}{a^2} + U_0 - \frac{1}{2} B_0 \left[1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right) \right] + \frac{B_1}{2ka^2} = 0$$

$$\frac{A_1}{a^2} + U_0 + \frac{1}{2} B_0 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right) = \frac{B_1}{2ka^2};$$

საიდანაც:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{2U_0}{k \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right) \right]} = \frac{4\nu}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)}; \\ B_0 &= \frac{4U_0}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)}; \quad A_1 - \frac{B_1}{2k} = -\frac{U_0 a^2}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)}; \end{aligned} \right\} (4.107)$$

ამრიგად, განხილულ მიახლოებაში განისაზღვრება მხოლოდ A_0 და B_0 კოეფიციენტი. ხოლო A_1 და B_1 ერთმანეთთან წრფივი კომბინაციით არიან დაკავშირებულნი.

თუ A_0 კოეფიციენტის მნიშვნელობას შევიტანთ (4.100) კ მოსახლეობაში, უძრავ წრფულ ცილინდრზე ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ძალური მოქმედებისათვის მივიღებო ფორმულას:

$$R_x = \frac{8\pi U_0}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{4} \gamma R_0 \right)}, \quad (4.108)$$

სადაც რეინოლდსის რიცხვი ტოლია $Re = 2ka = \frac{U_0 a}{\nu}$. (4.108)

ფორმულა პირველად მიღებული იქნა ლემბის მიერ. წინააღმდეგობის ძალის დაზუსტებული ფორმულები შემდგომში მოცემულ-

ლი იყო ფაქტებისა და ტომოტიკას გამოკვლევებში. ეს ფორმულები სამართლიანია რეინოლდსის რიცხვის იმ მნიშვნელობებისათვის, როცა $Re \leq 10$.

თუ (4.107) ფორმულებს შევიტანთ (4.106) სიჩქარის კომპონენტთა გამოსახულებებში, სითხის სიჩქარისათვის ცილინდრის ზედაპირის მახლობლობაში გვექნება:

$$v_r = \frac{U_0 \cos \theta}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)} \left[-1 + \frac{a^2}{r^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right],$$

$$v_\theta = \frac{-U_0 \sin \theta}{1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma ka \right)} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right]$$
(4.109)

თუ ახლა სითხესა და ცილინდრს მივანიჭებთ წინსვლით მოძრაობას, ცილინდრის მოძრაობის მიმართულების საწინააღმდეგოდ და (4.98), (4.103) გამოსახულებებში შევინარჩუნებთ შესაკრებებს, რომლებიც შეიცავენ A_0 და B_0 , ე.ი.

$$\varphi = A_0 \ln r, \quad \phi = e^{kr \cos \theta} B_0 K_0(kr), \quad (4.110)$$

მაშინ სიჩქარის კომპონენტებისათვის მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} v_\theta &= \frac{1}{2} B_0 e^{kr \cos \theta} K_0(kr) \sin \theta, \\ v_r &= \frac{A_0}{r} + \frac{1}{2} B_0 e^{kr \cos \theta} [K_0'(kr) - K_0(kr) \cos \theta]; \end{aligned} \right\} (4.111)$$

არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის მაკრონალდის ფუნქციისათვის გვაქვს შემდეგი ასიმპტოტური ფორმულები:

$$K_0(kr) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr}, \quad K_0'(kr) = -\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr}.$$

მაშასადამე, ცილინდრიდან შორ მანძილზე სითხის ნაწილაკების სიჩქარე განსაზღვრული იქნება შემდეგი მიახლოებითი ფორმულების საშუალებით:

$$\left. \begin{aligned} v_{\theta} &= A_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2r}} e^{-kr(1-\cos\theta)} \sin\theta; \\ v_r &= A_0 \left[\frac{1}{r} - \sqrt{\frac{\pi k}{2r}} e^{-kr(1-\cos\theta)} (1 + \cos\theta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.112)$$

ცილინდრის წინ, სადაც θ კუთხე მცირედ განსხვავდება π -გან, სითხის ნაწილაკთა მოძრაობა შორ მანძილებზე რადიალური იქნება, რომელიც შეესაბამება ცილინდრის ცენტრში მოთავსებულ წყაროს, რომლის სიმძლავრეა

$$Q = 2\pi A_0 = \frac{4\pi U_0}{k \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \gamma k a \right) \right]}. \quad (4.113)$$

რაც შეეხება რადიალური სიჩქარის სიდიდეს, იგი ქრობადი იქნება მანძილის უკუპროპორციულად:

$$v_r \approx \frac{A_0}{r}. \quad (4.114)$$

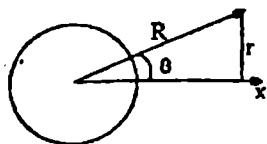
ცილინდრის უკან, სადაც $\theta \approx (0)$ შორ მანძილებზე სითხის მოძრაობა კვლავ იქნება რადიალური, მაგრამ მიმართული ცილინდრისაკენ. რადიალური სიჩქარის სიდიდე ტოლი იქნება

$$v_r \approx -2A_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2r}}. \quad (4.115)$$

ასეთივე სურათს ადგილი აქვს გრიგალის ვექტორისათვის.

ამრიგად, წრიული ცილინდრის ამოცანის ამოხსნისას, ოზენის მიახლოებაში, ცილინდრის წინ და უკან ღინებები ერთმანეთისაგან მკვეთრად განსხვავებულია.

4.11. სფეროს გარსდენის ამოცანა



შევისწავლოთ სფეროს გარსდენის ამოცანა ოზენის განტოლებების საშუალებით. განვიხილოთ a რადიუსის

სფეროს გარსდენა ბლანტი არაკუმშვადი სითხით, რომელიც უკავია მთელი სიერცე. სითხის მოძრაობა ჩავთვალოთ სფეროსიმეტრიულად. ვისაც ვთვლით სფერული R და θ კოორდინატებით: $x=R\cos\theta$, $r=R\sin\theta$,

$$v_x = v_x \cos\theta + v_r \sin\theta = v_x \frac{\partial x}{\partial R} + v_r \frac{\partial r}{\partial R}; \quad (4.116)$$

$$v_\theta = -v_x \sin\theta + v_r \cos\theta = v_x \frac{\partial x}{R\partial\theta} + v_r \frac{\partial r}{R\partial\theta}.$$

შევიტანოთ v_x და v_r მნიშვნელობები (4.90) ფორმულებიდან (4.116) გამოსახულებებში, მივიღებთ

$$v_R = -a\cos\theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial a}{\partial R} + \frac{\partial\varphi}{\partial R}; \quad v_\theta = a\sin\theta + \frac{1}{2kR} \frac{\partial a}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{R\partial\theta}. \quad (4.117)$$

დავანაც ნორმალის ერთეულიანი \vec{i}_1 ვექტორი მიმართულია სფეროს რადიუსის გასწვრივ, ხოლო მხების ერთეულიანი \vec{i}_2 ვექტორი მართობულია ამ რადიუსის, ამიტომ (4.90) ფორმულის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების დაგეგმილებით OX ღერძზე, გვექნება:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial r} \vec{i}_2 \right) \vec{i}_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \sin\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial R} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{\partial\varphi}{\partial R}.$$

ასეა, უძრავ სფეროზე ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ბალური მოქმედების ნაკრები ვექტორის გვეგმილი OX ღერძზე შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$R_x = \rho u_0 \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial R} dS.$$

უძრავი სფეროს ზედაპირზე და უსასრულობაში სითხის ბიძკარემ უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -a\cos\theta + \frac{1}{2k} \frac{\partial a}{\partial R} + \frac{\partial\varphi}{\partial R} = 0, \\ v_\theta &= a\sin\theta + \frac{1}{2kR} \frac{\partial a}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{R\partial\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.118)$$

როცა $R=a$,

$$\text{როცა } R = x, \quad v_R = u_0 \cos \theta \quad \text{და} \quad v_\theta = -u_0 \sin \theta.$$

დაეუშუთ, რომ

$$\phi = -u_0 + \phi_1, \quad (4.119)$$

მაშინ (4.118) სასაზღვრო პირობა უსასრულობაში დაკმაყოფილებული იქნება, თუ მოვითხოვთ, რომ:

$$\text{როცა } R = \infty, \quad \phi_1 = 0, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = 0. \quad (4.120)$$

ახლა ავაგოთ (4.80) განტოლებების ამონახსნები. (4.80) ლაპლასის განტოლების ამონახსნი კოორდინატთა სათავეში წყაროს სინქარის პოტენციალის ტიპისა იქნება

$$\phi = \frac{1}{R}. \quad (4.121)$$

თუ ამ გამოსახულებას x -ით გავეწარმოებთ, მივიღებთ ახალ კერძო ამონახსნებს:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right), \dots \quad (4.122)$$

რომლებიც წარმოადგენენ სხვადასხვა რიგის დიპოლის სინქარითა პოტენციალებს, რომელთა ღერძები ორიენტირებულია წყაროს სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ. თუ მიღებულ კერძო ამონახსნებს გავემრავლებთ ნებისმიერ მულტიპლზე, მივიღებთ პოტენციალისათვის შეშლევ გამოსახულებას:

$$\phi = \sum_0^{\infty} A_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (4.123)$$

იანაც

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) &= -\frac{x}{R^3} = -\frac{\cos \theta}{R^2}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) &= -\frac{1}{R^3} + \frac{3x^2}{R^5} = \frac{1}{R^3} (3 \cos^2 \theta - 1); \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{9x}{R^5} - \frac{15x^3}{R^7} = -\frac{3}{R^5} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4.124)$$

ახლა გაეჩვენოთ, რომ ლეჟანდრის პოლინომები განისაზღვრებიან ტოლობით:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (4.125)$$

თუ ამ უკანასკნელში დაეუშვებთ, რომ $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, მივიღებთ, რომ

$$P_0=1; P_1=z; P_2=\frac{1}{2}(3z^2 - 1); P_3 = \frac{1}{2}(5z^2 - 3z). \quad (4.126)$$

თუ შევადარებთ (4.124) და (4.126) მარჯვენა ნაწილებს დავასკვნით, რომ

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{R} \right) = (-1)^n n! \frac{P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}}. \quad (4.127)$$

ამრიგად, φ ფუნქციისათვის საბოლოოდ გვექნება

$$\varphi = \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n n! \frac{P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}}. \quad (4.128)$$

ლეჟანდრეს პოლინომები ქმნიან სრულ სისტემას $[-1, +1]$ ინტერვალზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (4.128) წარმოადგენს ყველაზე ზოგად დამოკიდებულებას φ ფუნქციასა და θ კუთხეს შორის. ლეჟანდრეს პოლინომები ორთოგონალური არიან იმავე ინტერვალში $z=-1$ ($\theta = \pi$) და $z=1$ ($\theta = 0$), ე.ი.

$$\int_{-1}^1 P_n(z) P_m(z) dz = - \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (m \neq n) \quad (4.129)$$

რადგანაც $P_0=1$, ამიტომ ორთოგონალობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $n \neq 0$ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (4.130)$$

ახლა ვიპოვოთ

$$R_x = \rho u_{,j} \iint_S \frac{\partial \rho}{\partial R} dS = \rho u_0 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\partial \rho}{\partial R} a^2 \sin \theta d\theta = 2\pi \rho u_0 a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho}{\partial R} \sin \theta d\theta =$$

$$= -2\pi \rho u_0 a^2 \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)n! A_n}{a^{n+2}} \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (4.131)$$

(4.130) ტოლობის ძალით, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ძალური მოქმედება უძრავ სფეროზე გამოიხატება ფორმულით:

$$R_x = -4\pi \rho u_0 A_0 \quad (4.132)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ ყველა შესაკრები (4.131) მარჯვენა მხარეში გადაიქცევა ნულად, გარდა შესაკრებისა, რომელშიაც $n=0$. მაშასადამე, წინააღმდეგობის ძალის გამოსათვლელად უნდა ვიციოდეთ მხოლოდ ერთი A_0 კოეფიციენტი.

ახლა ვიპოვოთ (4.8) პირველი განტოლების ამონახსნი. ადვილად შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ჩასმა $\phi_1 = e^{kx} \phi_2$, გადაიყვანს ამ განტოლებას შემდეგ განტოლებაში:

$$\Delta \phi_2 - k^2 \phi_2 = 0. \quad (4.133)$$

ვიპოვოთ (4.133) განტოლების ამონახსნი დამოკიდებული მხოლოდ სფეროს R რადიუსზე. დაეუშვათ, რომ $\phi_2 = \phi_2(R)$. მაშინ

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \phi_2' \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = \phi_2'' \frac{x^2}{R^2} + \phi_2' \left(\frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} \right) \quad \Delta \phi_2 = \phi_2'' + \frac{2}{3} \phi_2'$$

და მაშასადამე (4.133) მოგვცემს $\phi_2'' + \frac{2}{R} \phi_2' - k^2 \phi_2 = 0$. ანუ

$$\frac{d^2}{dR^2} (\phi_2 R) - k^2 \phi_2 R = 0.$$

(4.133) განტოლების ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\phi_2(R) = \frac{1}{R} (C_1 e^{kR} + C_2 e^{-kR}).$$

რომ დაეაკმაყოფილოთ პირობა უსასრულობაში, აუცილებელია დაეუშვათ, რომ $C_1 = 0$. ამრიგად, ძირითადი ამონახსნი,

რომელიც წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეში მათავსებულ წყაროს, იქნება:

$$e^{-kR} R^{-1} \quad (4.134)$$

თუ მას გაეწვარმოებოთ x (ველადით მივიღებთ ახალ ამონახსნებს, რომელიც სხეილასხეა რაგის რადიუსის ტიპის ამონახსნები იქნება:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{-kR} R^{-1}), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-kR} R^{-1}), \dots \quad (4.135)$$

თუ (4.134) და (4.135) ამონახსნებს გაეამრავლებოთ e^{kx} მამრავლებუ და B_n მუდმივებზე და აეჯამაეთ, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს, რომელიც შეესაბამება სითხის სიმეტრიულ დინებას:

$$\phi = -U_0 + e^{kx} \sum_0^{\infty} B_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-kR} R^{-1}) \quad (4.136)$$

რადგანაც $\frac{\partial}{\partial x} (e^{-kR} R^{-1}) = -e^{-kR} R^{-1} \left(k + \frac{1}{R} \right) \frac{x}{R} = -e^{-kR} R^{-1} \left(k + \frac{1}{R} \right) \cos \theta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-kR} R^{-1}) &= \frac{e^{-kR}}{R} \left(k + \frac{1}{R} \right)^2 \frac{x^2}{R^2} - \frac{e^{-kR}}{R^2} \left(k + \frac{1}{R} \right) + \frac{e^{-kR}}{R^2} \left(k + \frac{1}{R} \right) \frac{x^2}{R^2} = \\ &= \frac{e^{-kR}}{R} \left[\left(k^2 - \frac{3k}{R} + \frac{3}{R^2} \right) \cos^2 \theta - \frac{1}{R} \left(k + \frac{1}{R} \right) \right] \end{aligned}$$

ამიტომ ϕ ფუნქციის პირველი შესაყრებები ტოლი იქნება

$$\begin{aligned} \phi = -U_0 + \frac{e^{-kR(1-\cos \theta)}}{R} \left\{ B_0 - B_1 \left(k + \frac{1}{R} \right) \cos \theta + B_2 \left[-\frac{k}{R} - \frac{1}{R^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(k^2 + \frac{3k}{R} + \frac{3}{R^2} \right) \cos^2 \theta \right] + \dots \right\}. \quad (4.137) \end{aligned}$$

თუ ვისარგებლებოთ (4.128) და (4.137) გამოსახულებებით, შეგვიძლია ეთიოეთ სითხის ნაწილაკთა სიჩქარის კომპონენტები (4.111) დარმულების საშუალებით. მაგრამ ეს გამოსახულებები რთულია და სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება მოითხოვს საკმაოდ გრძელ გამოთვლებს. ჩვენ შეეცდებითა სვეროს ზედა-პირზე სითხის მიკერის პირობები მიახლოებით დაეკმაყოფი-

ღლით. რადგანაც $\frac{Re}{2} = \frac{U_0 a}{2v} = ka$, ამიტომ რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებს შეესაბამება k პარამეტრის მცირე მნიშვნელობები. (4.136) მწკრივის ყოველ წევრს ექნება შესაკრები: $e^{-kR(1-\cos\theta)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{R} \right)$, რომელსაც მცირე k -თვის

ექნება ერთი ტოლი რაგი. რადგანაც (4.136) ჯამი უნდა იყოს შემოსახლერული, ამიტომ ბუნებრივია მოეითხოვოთ, რომ B_n კოეფიციენტები იყოს ისეთი, რომ ინდექსების გაზრდით ისინი მცირდებოდეს k მცირე პარამეტრის ხარისხის პოლინომივალად. დავეშვათ, რომ პირველ სამ კოეფიციენტს აქვს რაგი

$$B_0 \sim 1, B_1 \sim k, B_2 \sim k^2. \quad (4.138)$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ რაგს და გამლას $e^{-kR(1-\cos\theta)} = 1 - kR(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k^2R^2(1 - \cos\theta)^2 - \dots$ და შევი-
ნარჩუნებთ შესაკრებებს, რომელთა რაგი არ აღემატება k^2 რაგს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \varphi \approx -U_0 + B_0 \left[\frac{1}{R} - k(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k^2R(1 - \cos\theta)^2 \right] - \\ - \frac{B_1}{R} \left(\frac{\cos\theta}{R} + k \cos^2\theta \right) - \frac{B_2(1 - 3\cos^2\theta)}{R^3} \end{aligned} \quad (4.139)$$

რადგანაც სიჩქარის (4.114) გამოსახულებაში k პარამეტრი შედის მნიშვნელში, ამიტომ φ -ს შემცველ გამოსახულებაში

იქნება წევრები, რომელთა რაგი იქნება $\frac{1}{k}$. სვეროს ზედაპირზე სიჩქარის კომპონენტები უნდა გახდეს ნული. მაშასადამე, φ ფუნქციისაგან წარმოქმნილ შესაკრებებს უნდა პქონდეთ $\frac{1}{k}$ რაგი. ამის საფუძველზე A_n კომპონენტებს ექნებათ რაგი:

$$A_0 \sim \frac{1}{k}, A_1 \sim 1, A_2 \sim k. \quad (4.140)$$

(4.114) ფორმულით გამოთვლილ სიჩქარის კომპონენტებს ამ მიახლოებაში ექნებათ სახე:

$$v_R = U_0 \cos \theta - \frac{A_0}{R^2} + \frac{2A_1 P_1}{R^3} - \frac{6A_2 P_2}{R^4} - B_0 \left(\frac{1}{R} - k + k \cos \theta \right) \cos \theta + \frac{B_1 \cos^2 \theta}{R^2} + B_0 \left[-\frac{1}{2kR^2} + \frac{k}{4}(1 - \cos \theta)^2 \right] + \frac{B_1 \cos \theta}{kR^3} + \frac{B_1 \cos^2 \theta}{2R^2} + \frac{3B_2}{2kR^4} (1 - 3 \cos^2 \theta); \quad (4.141)$$

$$v_\theta = U_0 \sin \theta + \frac{A_1 \sin \theta}{R^3} - \frac{6A_2 \sin \theta \cos \theta}{R^4} + B_0 \left(\frac{1}{R} - k + k \cos \theta \right) \sin \theta - \frac{B_1 \sin \theta \cos \theta}{R^2} + B_0 \left[-\frac{\sin \theta}{2R} + \frac{k}{2}(1 - \cos \theta) \sin \theta \right] + \frac{B_1 \sin \theta}{2kR^3} - \frac{3B_2 \sin \theta \cos \theta}{kR^4}. \quad (4.142)$$

მიკროის სასაზღვრო პირობა, მოგვცემს კოეფიციენტებისათვის შემდეგ სისტემას:

$$A_0 + \frac{B_0}{2k} - \frac{B_1}{2} = 0, 2A_1 + B_0 \left(1 - \frac{ka}{2} \right) a^2 + \frac{B_1}{k} = -U_0 a^3; 3A_2 + B_0 \frac{ka^4}{4} + \frac{3B_2}{2k} = \frac{B_1 a^2}{2}; A_1 + B_0 \frac{a^2}{2} (1 - ka) + \frac{B_1}{2k} = U_0 a^3; 6A_2 - \frac{1}{2} B_0 ka^4 + \frac{3B_2}{k} = 0.$$

პირველი და მეორე განტოლებიდან ვიპოვიით, რომ $B_0 = \frac{3U_0 a}{2 - \frac{3ka}{2}}$.

მესამე და მეხუთე განტოლებიდან A_2 და B_2 კოეფიციენტების გამორიცხვით მივიღებთ, რომ:

$$B_0 ka^4 - B_1 a^2 = 0, \text{ საიდანაც } B_1 = \frac{3U_0 ka^3}{2 - \frac{3ka}{2}}.$$

შაბლოლოდ მივიღებთ:

$$\begin{cases} A_0 = \frac{-3U_0 a(1 - k^2 a^2)}{k(4 - 3ka)}; & A_1 = \frac{2U_0 a^3}{3ka - 4}; \\ A_2 + \frac{B_2}{2k} = \frac{U_0 k a^3}{2(4 - 3ka)}. \end{cases} \quad (4.143)$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ შემოღებულ მიახლოებაში შეიძლება განისაზღვროს, მხოლოდ რიგი A_0 , A_1 , B_0 და B_1 კოეფიციენტები. A_2 და B_2 კოეფიციენტები წრფივი კომბინაციითაა ერთმანეთთან დაკავშირებული. თუ A_0 მიღებულ მნიშვნელობას შევიტანო (4.132) ფორმულაში, სფეროზე სიბრტყის ძალური მოქმედებისათვის მივიღებთ:

$$R_x = 6\pi a^2 U_0^2 \frac{1 - \frac{Re^2}{4}}{Re \left(1 - \frac{3Re}{8}\right)}. \quad (4.144)$$

რადგანაც რეინოლდსის რიცხვი მცირე უნდა იყოს, შემოვიფარგლოთ Re -ის მხოლოდ პირველი ხარისხის შემცველი შესაკრებებით, გვექნება:

$$R_x = \frac{6\pi a^2 U_0^2 \left(1 + \frac{3}{8} Re\right)}{Re} = 6\pi a U_0 \left(1 + \frac{3}{8} Re\right). \quad (4.145)$$

ამრიგად, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებებში კვადრატული წევრების ნაწილობრივი გათვალისწინება, წინააღმდეგობის ფორმულაში გვაძლევს ახალ შესაკრებს, რომელიც შეიცავს რეინოლდსის რიცხვის პირველ ხარისხს. თუ რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობას შევიტანო (4.145) ფორმულაში შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სფეროს წინააღმდეგობის ფორმულა ორი შესაკრებისაგან შედგება: პირველი შეიცავს სიჩქარეს პირველ ხარისხში, მეორე კი მეორე ხარისხში.

თუ სიჩქარის კომპონენტთა გამომსახველ ფორმულებში უკუვაგდებთ შესაკრებებს, რომლებიც შეიცავენ k პარამეტრის

პირველ და მაღალ ხარისხებს, მივიღებთ:

$$v_R = -\frac{A_0}{R} + \frac{2A_1 \cos \theta}{R^3} + U_0 \cos \theta + e^{-kR(1-\cos \theta)} \left[-\frac{B_0}{2kR^2} - \frac{B_0}{2R}(1 + \cos \theta) + \frac{B_1 \cos \theta}{kR^3} \right]$$

$$v_\theta = \frac{A_1 \sin \theta}{R^3} - U_0 \sin \theta + e^{-kR(1-\cos \theta)} \left[\frac{B_0 \sin \theta}{2R} + \frac{B_1 \sin \theta}{2kR^3} \right]$$

თუ შევადარებთ სტოქსისა და ოზენის მიახლოებებში გამოიყენებული სიჩქარის კომპონენტების მნიშვნელობებს სფეროს ზედაპირის მახლობელ ადგილებში დავინახავთ, რომ ისინი არ განსხვავდებიან. სულ სხვა სურათს ექნება ადგილი სფეროდან საკმარისად დაშორებულ მანძილზე. თუ ჩვენ მოძრაობას შევაკვეთთ, ე.ი. სითხესა და სფეროს მიეანიჭებთ წინსვლით მოძრაობას სფეროს მოძრაობის სიჩქარით და B_0 , A_0 გამოსახულებებში შევინარჩუნებთ პირველ შესაკრებებს, ხოლო (4.143) გამოსახულებებში კი A_0 და B_0 შემცველ წევრებს,

$$\text{გვექნება: } A_0 = -\frac{3aU_0}{4k}; \quad B_0 = \frac{3aU_0}{2};$$

$$v_R = \frac{3U_0 a}{4kR^2} \left\{ 1 - e^{-kR(1-\cos \theta)} [1 + kR(1 + \cos \theta)] \right\};$$

$$v_\theta = \frac{3U_0 a}{4R} e^{-kR(1-\cos \theta)} \sin \theta. \quad (4.146)$$

სფეროს წინ, შორ მანძილზე, სადაც კუთხე $\theta \approx \pi$, ხოლო kR ნამრავლი ძალზე დიდია, შეიძლება მაჩვენებლიანი მამრავლის

$$\text{შემცველი შესაკრების უკუგდება; მაშინ, } v_R \approx \frac{3U_0 a}{4kR^2}; \quad v_\theta \approx 0.$$

ამრიგად, სფეროს წინ შორ მანძილებზე ღინება იქნება რადიალური, რომელიც წარმოქმნილი იქნება სფეროს ცენტრში

$$\text{არსებული წყაროთი, რომლის სიმძლავრეა } Q = \frac{3aU_0 \pi}{k} = 6\pi a v.$$

სფეროს უკან ვიწრო ზოლში, სადაც $\theta \approx 0$, kR კი საკმარისად დიდია, შეიძლება დაეუშვათ, რომ

$$e^{-kR(1-\cos\theta)} \approx 1, \quad 1 + kR(1 + \cos\theta) \approx 1 + 2kR, \quad \sin\theta \approx 0.$$

მაშინ, $v_R = -\frac{3aU_0}{2R}$; $v_\theta \approx 0$ აქედან შეიძლება დაეასკვნათ, რომ სფეროს უკან ვიწრო ზოლში დიდ მანძილებზე სივრცე მოძრაობს რადიალურად, მაგრამ სფეროსაკენ. სითხის სინქარე კლებულობს სფეროს ცენტრიდან მანძილის პირველი ხარისხის უკუპროპორციულად, მაშინ, როცა სფეროს წინ ის კლებულობს უფრო სწრაფად, მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად, ე.ი. სითხის ნაწილაკების სინქარე სფეროს უკან მანძილის გაზრდით უფრო ნელა მისწრაფვის ნულისაკენ, ვიდრე სფეროს წინ. ასეთი დასკვნა შეიძლება გაკეთდეს გრიგალის მიმართაც. გრიგალის ვექტორის კომპონენტებისათვის გვექნება:

$$\Omega_y = -\frac{\partial\phi}{\partial z}; \quad \Omega_z = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

თუ მასში შევიტანთ ϕ მნიშვნელობებს, რომლებიც შეიცავს მხოლოდ B_0 -იან შესაკრებებს მივიღებთ

$$\phi = \frac{3}{2} aU_0 \frac{e^{-k(R-x)}}{R}; \quad \Omega_y = \frac{3aU_0}{4} \frac{e^{-k(R-x)}}{R^2} \left(\frac{1}{R} + k \right) z;$$

$$\Omega_z = -\frac{3aU_0}{4} \frac{e^{-k(R-x)}}{R^2} \left(\frac{1}{R} + k \right) y;$$

$$\Omega_\alpha = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} = \frac{3}{4} aU_0 \frac{e^{-k(R-x)}}{R^2} (1 + kR) \sin\theta.$$

სფეროს წინ, როდესაც $kR(1 - \cos\theta)$ დიდი სიდიდეა, გვექნება:

$$\Omega_\alpha = \frac{3}{4} aU_0 \frac{e^{-2kR}}{R^2} (1 + 2kR) \sin\theta \approx 0. \quad (4.147)$$

მაშასადამე, სფეროს წინ გრიგალთა ინტენსივობა სფეროს ცენტრიდან მანძილის გაზრდით კლებულობს. ამიტომ სითხას

მოდრაობა სფეროს წინ შორ მანძილებზე შეიძლება პოტენ-
ციალურად ჩაითვალოს. რადგანაც (4.147) გამოსახულება
ნული ხდება, როცა $\theta = 0$ და π , ამ მნიშვნელობებს შორის
გრიგალს უნდა აქონდეს მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \frac{3aU_0}{4R^2} (1 + kR) e^{-kR(1 - \cos\theta)} (\cos\theta - kR \sin^2\theta).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მაქსიმალურად დაგრიგლური
ზედაპირის განტოლება იქნება $\sin\theta \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{kR}$ თუ გრიგალის
კომპონენტების გამოსახულებაში ავიღებთ $\cos\theta \approx 1$
 $\sin\theta \approx \frac{1}{\sqrt{kR}}$ მაქსიმალური დაგრიგვისათვის სფეროდან შორ

$$\text{მანძილზე: } \Omega = \frac{3au_0}{4} \left(\sqrt{\frac{k}{R^3}} + \frac{1}{\sqrt{kR^5}} \right),$$

ამრიგად, სფეროს უკან გრიგალის ინტენსივობა ნაკადის
უკანა ზედაპირში სფეროს ცენტრიდან მანძილის გაზრდით
იკლებს, მანძილიდან $\frac{3}{2}$ ხარისხით, როცა სფეროს წინ იგი
მაჩვენებლიანი ფუნქციის კანონით მცირდება.

ამრიგად, თუ ნაკიე-სტოქსის განტოლებებში მოლიანად
უჩუვავდებთ ინერციის კვადრატულ წევრებს, (სტოქსის
მიახლოება), მაშინ უძრავი სხეულის გარსდენის სურათი
მცირედ ეთანადება რეალურ სურათს, განსაკუთრებით სხეულის
უკანა ნაკადში. ნაწილობრივ უჩუვლებული ინერციის კვადრა-
ტული წევრების შემთხვევაში (ოზენის მიახლოება), მიუხე-
დავად სხეულის წინ და უკან ღინების თვისებრივი სხვა-
დასხვაობისა, ღინების სურათი დამაკმაყოფილებლად ემთხვევა
რეალურ სურათს.

თავი მეხუთე

სასაზღვრო ფენის თეორია

წინა პარაგრაფებში განხილული იყო ბლანტი არაკუმშადი სითხის მოძრაობის შესწავლის ორი მიახლოებითი მეთოდი: სტოქსისა და ოზენის მიახლოებები რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის. ნაეი-სტოქსის განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის შემდგომ საფეხურს წარმოადგენს სასაზღვრო ფენის თეორია. ეს თეორია აღწერს მექანიკური პროცესების მიმდინარეობას მყარი სხეულის ზედაპირის მახლობლობაში რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში. თუ სტოქსისა და ოზენის მიახლოებების შემთხვევაში, ინერციის კვადრატული წევრები მთლიანად ან ნაწილობრივ არიან უკუგდებულნი, სასაზღვრო ფენის თეორიაში ინერციის კვადრატული წევრები მთლიანად არის შენარჩუნებული. გარდა ამისა, თუ სტოქსისა და ოზენის მიახლოებებში სიბლანტის წევრები მთლიანად იყო შენარჩუნებული, სასაზღვრო ფენის თეორიაში კი ეს წევრები მხოლოდ ნაწილობრივ არიან გათვალისწინებულნი.

სასაზღვრო ფენის თეორიის ძირითადი განტოლებები მიღებული იყო ლუდვიგ პრანდტლის მიერ 1904 წელს და მათ ზოგჯერ პრანდტლის განტოლებებს უწოდებენ. ეს დიფერენციალური განტოლებები გაცილებით მარტივია ნაეი-სტოქსის განტოლებებთან შედარებით და ამიტომ საშუალებას იძლევა ვიპოუროთ ბევრი კონკრეტული ამოცანის ამონახსნი.

5.1. სასაზღვრო ფენი და გარე ნაკადი. სასაზღვრო ფენის განტოლებები

შინაგანი ხახუნის (სიბლანტის) ძალთა მოქმედების ინტენსიუობა რეალურ სითხეებში დამოკიდებულია ნაკადში

სითხის სინქარის ველის არაერთგვაროვნებაზე. ეს არაერთგვაროვნება იწვევს კონსექციურ ანქარებებს და მაშასადამე, ინერციულ ეფექტებს. იმისდამიხედვით რომელი ზემოქმედებაა ძლიერი, ბლანტი თუ ინერციული, შეიძლება განხილულ იქნას მოძრაობის ორი ზღვრული შემთხვევა: ნელი დინება, როსელშიც შეიძლება უგულვებელყოფილი იქნას კონსექციური ინერციის ძალები და მხედველობაში მივიღოთ მხოლოდ ხახუნის ძალები, წნევის დაცემა და მოცულობითი ძალები (სტოქსის მიახლოება). მეორე შემთხვევაში სრულიად უგულვებელყოფით ხახუნის ძალები და სითხე იდეალურად ჩავთვალოთ. ასეთი მიდგომა გამოყენებული იყო წინა პარაგრაფებში. რა თქმა უნდა, ორივე შემთხვევაში მოძრაობის ამოცანა გამარტივებულია. მაგრამ უკანასკნელ ხანებში, როდესაც გაჩნდა ინტერესი მოძრაობის უფრო ფაქიზი მახასიათებლების შესწავლისა, როგორცაა ხახუნი, სითბოგადაცემა და ა.შ. პიდროლინამიკა ველარ დაკმაყოფილდება ზემოთ ჩამოთვლილი მიახლოებებით მიღებული შედეგებით.

პრაქტიკაში განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს სითხის ისეთი მოძრაობები, რომლებშიც ინერციული ეფექტები სჭარბობენ ხახუნის ძალების გავლენას. როგორც ცნობილია, ამ ორი ძირითადი ძალის კლასთა ფარდობის ზომას რეინოლდსის რიცხვი წარმოადგენს. ამიტომ განსახილველი შემთხვევა არის მოძრაობა რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობების დროს.

როგორც ქვემოთ დაკინახავთ, რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის, სხეულების გარსდენისას სითხის მთელი ნაკადი ორ არედ შეიძლება დაიყოს: 1. მცირე სისქის მქონე არე სხეულის ზედაპირის მახლობლობაში, რომელსაც სასაზღვრო ფენას უწოდებენ და რომელშიც სიბლანტის ძალების ზემოქმედება ისეთივე არსებითია, როგორც სხვა ძალებისა და 2. არე, რომელშიაც უგულვებელყოფილია სიბლანტე - გარე არე. სასაზღვრო ფენაში მისი სისქის სიმცირის გამო სითხის მოძრაობის განტოლებები, შეიძლება გამარტივებულ იქნას და შედარებით ადვილად ამოიხსნას, ვიდრე ნაიე-სტოქსის

განტოლებები. გარე არეში სითხე შეიძლება იდეალურად ჩაითვალოს და მისი გაანგარიშებებისათვის გამოყენებულ იქნას კლასიკური მეთოდები. ასე, რომ საკითხი ეხება თითოეულ არეში სითხის მოძრაობების ცალ-ცალკე შესწავლას მოძრაობის გამარტივებული განტოლებების საშუალებით და შემდეგ მათ "შეკერას" როგორც ერთი მთლიანისას. იმის და მიხედვით, თუ როგორია სითხის ნაკადის რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობა, იცვლება სასაზღვრო ფენისა და გარე ნაკადის სიგრძე. რაც უფრო დიდია რეინოლდსის რიცხვი მით თხელია სასაზღვრო ფენის არე და შესაბამისად დიდია გარე ნაკადის განუწეილობა და პირობით, სიბლანტის როლის გაზრდა იწვევს სასაზღვრო ფენის გასქელებას და გარე არის შემცირებას. ამაში მდგომარეობს რეინოლდსის რიცხვის სიდიდის განმსაზღვრელი როლი ამ რრი არის, სასაზღვრო ფენისა და გარე არის ურთიერთდამოკიდებულებაში.

სითხის მოძრაობა სასაზღვრო ფენაში და გარე არეში ერთმანეთთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული. სასაზღვრო ფენაში სითხის დამუხრუჭების გამო დენის მიღები ფართოვდება, დენის წირები წანაცვლდებიან და გარე ნაკადს ავიწროებენ.

როდესაც სითხე გარს ედინება მასში ჩაძირულ უძრავ სხეულს ხდება სითხის ნულოვანი სიჩქარიდან, რომელიც სითხის მიკვრით არის განპირობებული, გადასვლა გარე ნაკადის სიჩქარეში. ეს გადასვლა წარმოებს სხეულის ზედაპირის მახლობელ არეში. ამ არეში სიბლანტის ძალები თაკიანთი რიგით უტოლდებიან ინერციის ძალებს, ზოლო სხეულიდან მოშორებულ არეში სიჩქარე უთანაბრდება დაცემული ნაკადის სიჩქარეს. პირველ არეს სასაზღვრო ფენას უწოდებენ, მეორეს კი გარე არეს. გარე არეში სითხე იდეალურად შეიძლება ჩაითვალოს.

რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის სასაზღვრო ფენის სისქე ძალზე მცირეა ნაკადის გასწვრივ ზომებთან შედარებით. ვისარგებლოთ ამ სისქის სიმცირით

გასწვრივ ზომებთან შედარებით და ჩაეთვალათ, რომ ღენის წირთა სიმრუდეს იგივე რიგი აქვს, რაც გასწვრივ ზომებს. ასეთი დაშვება ამარტივებს კოორდინატთა სისტემის არჩევას. ამ სისტემაში აუარჩიოთ ძირითადი ღენის წირი, რომელიც მთლიანად იქნება მოთგესებული სასაზღვრო ფენაში. შემდეგ აეაგოთ წირთა ბადე, რომლის წირები ძირითადი წირის პარალელური და მართობულნი იქნებიან.

ნახაზზე მაგალითისათვის განხილულია ფრთის პროფილის გარსღენის შემთხვევა, როდესაც ძირითადი ღენის წირი ნულეკანი ღენის წირია, რომელიც ემთხვევა სხეულის კონტურს. ამ შემთხვევაში დაშვებულია, რომ კონტურის წერტილებში სიმრუდის რადიუსები გაცილებით დიდია, ვიდრე ამ წერტილებში ფენის სისქე.



ვისარგებლოთ სასაზღვრო ფენის ზომების სიმცირით ნაკადის განივი მიმართულებით და ნახაზზე გამოსახული მრუდწირული ბადე შეიძლება ჩაეთვალათ მართკუთხა სწორხაზოვან დეკარტეს კოორდინატების ბადედ. ასეთი მოთხოვნა არაა აუცილებელი და გაკეთებულია, მხოლოდ გადმოცემის გასამარტივებლად. მიღებულ დაშვებებში, თუ უკუაგდებთ მიცულობით ძალებს, ნაუიე-სტოქსის განტოლებები ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ბრტყელი არასტაციონარული მოძრაობების დროს მიიღებენ სახეს:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

სადაც u და v სიჩქარის განივი და გასწვრივი კომპონენტებია, p -წნევაა, ρ -სიმკვრივე, $v = \frac{\mu}{\rho}$ სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი.

იმისათვის, რომ შეეაფასოთ ამ განტოლებათა სისტემაში შემავალი თითოეული შესაქრების რიგი, გადავიღეთ უგანზომილებო სიდიდეებზე და მხედველობაში მივიღოთ სასაზღვრო ფენის სისქის ადრე აღნიშნული სიმცირე გასწვრივი ზომებთან შედარებით.

აღნიშნოთ X -ით გასწვრივი x კოორდინატის მასშტაბი, Y -ით განივი y კოორდინატის მასშტაბი, U_0 და V_0 - სიჩქარის გასწვრივი და განივი კომპონენტების მასშტაბები, ღროისა და წნევის მასშტაბებად შესაბამისად ავიღოთ T და P სიდიდეები, რომლებიც ჯერჯერობით განუსაზღვრელნი არიან. უგანზომილებო სიდიდეები აღნიშნოთ ნიშნაკით "შტრიხი":

$$t = Tt'; \quad x = Xx'; \quad y = Yy'; \quad u = U_0u'; \quad v = V_0v'; \quad p = Pp'. \quad (5.2)$$

თუ ამ სიდიდეებს შეეიტანთ (5.1) განტოლებათა სისტემაში და გაეყოფთ პირველ განტოლებაში ყველა შესაქრებს $\frac{V_0^2}{X}$,

ხოლო მეორეში $\frac{U_0 V_0}{X}$, მესამეში კი $\frac{U_0}{X}$ მივიღებთ:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{X}{U_0 T} \frac{\partial u'}{\partial x'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{X V_0}{Y U_0} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \\ & = - \frac{P}{\rho U_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{v}{XY} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{vX}{Y^2 U_0} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}; \\ & \frac{X}{U_0 T} \frac{\partial v'}{\partial x'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{X V_0}{Y U_0} v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = \\ & = - \frac{PX}{\rho Y U_0 V_0} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{v}{XY} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{vX}{Y^2 U_0} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}; \\ & \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{X V_0}{Y U_0} \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \end{aligned} \right. \quad (5.3)$$

გამოვიყენოთ ახლა განტოლებაში შემავალი მუდმივი მასშტაბების ნებისმიერობა: პირველ რიგში ჩაეთვალოთ, რომ ძირითადი მასშტაბებია X და U_0 და მათგან შევადგინოთ

$$Re = \frac{X U_0}{\nu} \quad (5.4)$$

რეინოლდსის რიცხვი. გამოვსახოთ T და P მასშტაბები X და U_0 საშუალებით

$$T = \frac{X}{U_0} \quad \text{და} \quad P = \rho U_0^2. \quad (5.5)$$

ახლა განვიხილოთ სივრცისა და სიჩქარის Y და V_0 მასშტაბები ისე შევარჩიოთ, რომ (5.3) სისტემაში მხოლოდ ერთი პარამეტრი - რეინოლდსის რიცხვი დარჩეს. ეს კი მოითხოვს, რომ

$$X V_0 = Y U_0; \quad \nu X = Y^2 U_0. \quad (5.6)$$

(5.6) ტოლობებიდან გამოვძინარეობს, რომ

$$Y = \frac{X}{\sqrt{Re}}, \quad V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{Re}}. \quad (5.7)$$

თუ ზემოთ მიღებულ შედეგებს გაითვალისწინებთ (5.2) განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \\ \frac{1}{Rt} \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0. \end{aligned} \right\} (5.8)$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს ამოხვეულ სისტემას, რომელიც მიღებულია (5.1) განტოლებათა სისტემაშიდან, თუ მას ჩაეწერთ. უგანზომილებო ხიდილებში და რომლებიც მხოლოდ ერთ პარამეტრს, რეინოლდსის რიცხვს შეიცავენ. ეს განტოლებები შეიცავენ მცირე პარამეტრს

$Re^{-\frac{1}{2}} = z$. თუ განვიხილავთ ფორმალურად ამონახსნის გაშლას ამ მცირე პარამეტრის ხარისხებად

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_0 + \frac{1}{\sqrt{Re}} u_1 + \dots, & v' &= v_0 + \frac{1}{\sqrt{Re}} v_1 + \dots, \\ p' &= p_0 + \frac{1}{\sqrt{Re}} p_1 + \dots, \end{aligned} \right\} (5.9)$$

ხდაც $u_0, v_0, p_0, u_1, v_1, p_1$ წარმოადგენენ უგანზომილებო კოორდინატების და დროის ფუნქციებს. თუ (5.9) გაშლას შევიტანთ (5.8) და გაუტოლებთ მცირე პარამეტრის კოეფიციენტებს ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x'} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y'} = -\frac{\partial p_0}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y'^2}; \frac{\partial p_0}{\partial y'} = 0; \frac{\partial u_0}{\partial x'} + \frac{\partial v_0}{\partial y'} = 0, (5.10)$$

როგორც ეს (5.10) ტოლობებიდან ჩანს, y' უგანზომილებო განივ კოორდინატებს რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის შეესაბამება y განზომილებიანი კოორდინატების მცირე მნიშვნელობები. ამრიგად, (5.10) განტოლებებით აღიწერება სითხის მოძრაობა თხელ არეში, რომელიც მოთავსებულია ძირითადი (ნულოვანი) დენის წარის გასწვრივ. იმავე (5.10) ტოლობების თანახმად ამ არის ზომები Re

რიცხვის ზრდასთან ერთად მცირდება, როგორც $Re^{-\frac{1}{2}}$. ამ არეს სასაზღვრო ფენს უწოდებენ, ხოლო (5.10) განტოლებებს სასაზღვრო ფენის განტოლებებს უგანზომილებო სიდიდეებში. თუ დავუბრუნდებით განზომილებიან სიდიდეებს, ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} (5.11)$$

ეს განტოლებები, როგორც ითქვა, მიღებული იყო ლ. პრანდტლის მიერ. (5.10) სისტემის მეორე განტოლება აქ გამოტოვებულია, მაგრამ შემდგომში ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ p წნევა არის x და z ცვლადების ფუნქცია. (5.11) ორი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემაა u , v და p სამი უცნობით. ჩაკეტილი სისტემის მისაღებად აუცილებელია დამატებითი მოსაზრებების მოშეკვლიება.

პრანდტლის მიხედვით, როდესაც რეინოლდსის რიცხვი ძალზე დიდია, სასაზღვრო ფენა თხელია, და შესაძლებელია მისი გაელენის უგულებელყოფა გარე ნაკადზე. აქ გარე ნაკადად ითვლება იდეალური სითხის ის ღინება, რომელიც შეიძლება არსებობდეს, თუ სრულად უგულებელყოფთ სიბლანტის გაელენას. როდესაც ასეთი უკუგაელენის უგულებელყოფა დაუშვებელია, ხაჭირთა ან დამატებითი თვირთული შესწორებების შემოტანა, ან წნევის განაწილების ცვლიდან განსაზღვრა.

თუ ძალაში დაეტოვებთ პრანდტლის დაშვებას, რომ წნევის განაწილება სასაზღვრო ფენაში ისეთია, როგორც იქნებოდა სხეულის ზედაპირზე სასაზღვრო ფენის არ არსებობის შემთხვევაში, მაშინ, თუ აღენიშნავთ გარე ნაკადის გასწვრივ სიჩქარეს $u = u_g(x, t)$ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ ნულოვან ღენის წირზე ზოგად შემთხვევაში $v = 0$, (5.11) მეორე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.12)$$

ასე განსაზღვრული სიჩქარე “სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე სიჩქარედ” იწოდება. თუ წნევას გამოვრიცხავთ (5.11) და (5.12) განტოლებებიდან, მივიღებთ სასაზღვრო ფენის განტოლებებს შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u_{\delta}}{\partial t} + u_{\delta} \frac{\partial u_{\delta}}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} (5.13)$$

სასაზღვრო პირობები სხეულის გარე გარსდენის ღროს იქნება:

$$u=v=0, \text{ როცა } y=0; u \rightarrow u_{\delta}, \text{ როცა } y \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

სასაზღვრო პირობა უსასრულობაში შეესაბამება გასწვრივი სიჩქარის ასიმპტოტურ მისწრაფებას "სასაზღვრო ფენის გარე საზღვრის სიჩქარისაკენ". ეს $u_{\delta}(x, t)$ სიჩქარე უნდა განისაზღვროს იდეალური სითხის მოძრაობის ამოცანის ამოხსნიდან.

თუ სასაზღვრო ფენა არასტაციონარულია, ამ პირობებს უნდა დაემატოს საწყისი პირობები, რომლებიც მოყოლობენ ვიციადეთ ღრვის რომელიღაც მომენტში სიჩქარის განაწილება სასაზღვრო ფენის შიგნით.

ზოგიერთ შემთხვევაში (5.14) სასაზღვრო პირობებს ემატება სიჩქარის განაწილების სასაზღვრო პირობა, რომელიღაც $x=x_0$ კვეთში:

$$u=u_0(y), \text{ როცა } x=x_0. \quad (5.15)$$

კერძო შემთხვევაში, თუ განიხილება სტაციონარული

სასაზღვრო ფენა, მაშინ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_{\delta}}{\partial t} = 0$ და (5.13) მოგვცემს:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= u_{\delta} \frac{\partial u_{\delta}}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} (5.16)$$

სასაზღვრო ფენის თეორიაში, გარდა ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენისა. განიხილავენ სასრული სისქის მქონე

სასაზღვრო ფუნქსია. ამ დროს სასაზღვრო ფუნქსიის სისქე δ უნდა იყოს (x, t) (კვლადების ფუნქცია. ეს სისქე პროპორციულია $\frac{1}{\sqrt{|k|}}$ და უცნობია. მისი განსაზღვრისათვის მოითხოვენ, რომ სიჩქარის u კომპონენტი შიგა არიდან გარე არეში უწყვეტად გადავიდეს:

$$u = u_g(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \text{როცა } y = \delta(x, t) \quad (5.17)$$

ნაკვლად პირობისა $u \rightarrow u_g(x, t)$, როცა $y \rightarrow \infty$. ეს უკანასკნელი კი, როგორც აღრე ითქვა, ასიმპტოტური სასაზღვრო ფუნქსიის პირობაა.

5.2. გამოდევნისა და იმპულსის დაკარგვის სისქე

სასაზღვრო ფუნქსიის მოქმედება გარე ნაკადზე იმაში გამოიხატება, რომ მყარი სხეულის ზედაპირიდან ხდება დენის წირების წანაცვლება. ამ წანაცვლების გამოსათვლელად შეკადრეთ ერთმანეთს დენის წირების მდებარეობა იდეალური და ბლანტი სითხეებით სხეულის ბრტყელი გარსდენის დროს. უთქვამთ, სასაზღვრო ფუნქსიის რაიმე კვეთში, რომლის აბსცისაა x , ნამდვილი დენის წირი წანაცვლებულია რაღაც $M'M = \Delta(x, y)$ მანძილით (ნახ.) ნამდვილი წირი უწყვეტი ხაზითაა აღნიშნული, იდეალური სითხის დენის წირი კი პუნქტირით.

სასაზღვრო ფუნქსიის გარეთ ნამდვილი და იდეალური სითხის დენის წირები ერთმანეთს ემთხვევიან. ამიტომ არჩეულ კვეთში სასაზღვრო ფუნქსიის შიგნით სითხის ხარჯი M_0M და M_0M' ერთიდაიგივეა. რადგანაც გარე საზღვარზე სიჩქარე ტოლია $u_g(x)$ და იგი იდეალური სითხის სიჩქარეა, ამიტომ ხარჯების ტოლობა მოგვცემს:

$$\int_0^y u dy = u_g(y - \Delta). \quad (5.17)$$

რადგანაც u_g არაა დამოკიდებული y -ზე, დენის წირის წანაცვლება იქნება:

$$\Delta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) dy. \quad (5.18)$$

როცა $y=0$, ეს წანაცვლება ნულის ტოლია. ეს ბუნებრივია, რადგან სასაზღვრო ფენის შიგნით ნულოვანი ღენის წირი თვით მყარი სხეულის ზედაპირია. ზედაპირიდან მოშორებით Δ წანაცვლება იზრდება და გარე საზღვარზე, როცა $y=\delta$ მიაღწევს δ^* მნიშვნელობას, რომელიც ტოლი იქნება

$$\delta^* = \Delta_{y=\delta} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) dy. \quad (5.19)$$

δ^* -ს ქვეშ აქ იგულისხმება სასაზღვრო ფენის სასრული სისქე, რომელიც აღრე იყო განმარტებული. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $u \rightarrow u_a$, როცა $y \rightarrow \infty$, და რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება მისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $y \rightarrow \infty$ და ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ არსებობს ინტეგრალი უსასრულო საზღვრით და დავწერათ:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) dy. \quad (5.20)$$

δ^* სიდიდეს, რომელიც გამოხატავს ნამდვილი ღენის წირის წანაცვლებას იდეალურისაგან, გამოთვლილს ფენის გარე საზღვარზე. ეწოდება გამოღვენის სისქე.

გამოღვენის სისქე წარმოადგენს სასაზღვრო ფენის სისქის რაღაც ზომას და შეიძლება ჩავთვალოთ ფენის პირობით სისქედ. თუ სიჩქარის განაწილება ფენის კვეთებში მოცემულია, მაშინ δ^* განსაზღვრა დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

სასაზღვრო ფენის თეორიაში შემოყავთ კიდევ ერთი პირობითი სისქე δ^{**} , რომელიც გამოისახება ინტეგრალით

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) dy. \quad (5.21)$$

ეს ტოლობა ასეც შეიძლება ჩაწეროთ

$$\rho u_0^2 \delta^{**} = \int_0^{\infty} \rho u (u_0 - u) dy. \quad (5.22)$$

აქედან ჩანს, რომ δ^{**} სისქის მონაკვეთში, როდესაც არა გვაქვს სასაზღვრო ფენა, გავიღოდა იდეალური სითხის წამური მოძრაობის რაოდენობა, რომელიც ტოლი იქნებოდა სასაზღვრო ფენის კვეთში ნამდვილი სითხის მოძრაობის რაოდენობის დანახარჯისა სითხის დამუხრუჭების გამო. δ^{**} სიღიღეს იმპულსის დაკარგვის სისქეს უწოდებენ. ეს სისქე მჭიდროდ არის დაკავშირებული სხეულის წინააღმდეგობასთან. ბრტყელ ნაკადში ნებისმიერი ფორმის ცილინდრული სხეულის წინააღმდეგობა w შეიძლება გამოისახოს იმპულსის დაკარგვის სისქის საშუალებით

$$w = \rho u_0^2 \delta^{**},$$

სადაც u_0 და δ^{**} - გარე არის სიჩქარე და იმპულსის დაკარგვის სისქეა სხეულიდან უსასრულოდ დაშორებულ მანძილზე.

ექსპერიმენტებიდან ცნობილია, რომ ამოზნექილი სხეულების გარსდენის დროს ადგილი აქვს გარე ნაკადის მოწყვეტას სხეულის ზედაპირიდან და სხეულის უკან დაგრიგლური ზონის წარმოშობას. დაგრიგლური ზონის წარმოქმნა ცვლის სიჩქარის განაწილებას გარე არეში. მაშასადამე, (5.16) სასაზღვრო ფენის განტოლებები შეიძლება გამოყენებული იქნას გარს-მოდენადი საეულის არა მთელი კონტურისათვის, არამედ იმ ნაწილისათვის, რომლის გარსდენა ხდება სითხის მოწყვეტის გარეშე. სასაზღვრო ფენი მთავრდება კონტურის იმ წერტილში, სადაც იწყება სითხის ნაკადის მოწყვეტა.

გარე ნაკადის მოწყვეტის მოვლენა ამოზნექილი ზედაპირის კონტურიდან თვისებრივად შემდეგნაირად შეიძლება აიხსნას. ამოზნექილი კონტურის გარსდენისას სითხის ნაწილაკთა სიჩქარე წინა კრიტიკულ წერტილში ნულის ტოლია. შემდეგ იგი იზრდება, ხოლო წნევა კლებულობს. როდესაც სიჩქარე მიაღწევს თავის მაქსიმუმს იგი იწყებს კლებას, ხოლო წნევა ზრდას. სიჩქარის მაქსიმუმის წერტილის შემდეგ სითხის ნაწილაკები სასაზღვრო ფენში მუხრუჭდებიან არა მარტო სითხის სიბლანტის გამო, არამედ უკუწნევის მოქმედებითაც. ამის გამო სხეულის ზედაპირის მახლობლობაში მდებარე სითხის ნაწილაკების სიჩქარე ნულის ტოლი ხდება მანამ, სანამ ისინი უკანა კრიტიკულ წერტილს მიაღწევენ. ეს ნაწილაკები უკუწნევის მოქმედების შედეგად იწყებენ მოძრაობას საწინააღმდეგო მიმართულებით. ამიტომ სიჩქარის განაწილების პროფილის ნაწილზე მოძრაობა კვლავ პირვანდელია, ნაწილზე კი უკუსიჩქარის ასეთი განაწილებისას სხეულის კონტურის რომელიღაც წერტილში მოხდება ფენის მოწყვეტა. მოწყვეტილი ფენის ნაწილი ზედა ნაწილში იწყებს ბრუნვას, საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით, ქვედა ნაწილში კი ბრუნავს საწინააღმდეგოდ. ეს დაგრიგლური ნაწილები გარე ნაკადის გამო მოძრაობენ დინების მიმართულებით. სასაზღვრო ფენის მოწყვეტის ასეთი სურათი პერიოდულად მეორდება. დაკვირვებები გვიჩვენებენ, რომ სასაზღვრო ფენის მოწყვეტა საზღვრის ზედა და ქვედა ნაწილებიდან ერთდროულად ხდება. ეს დაგრიგვლა ჭადრაკულად არის განლაგებული.

სასაზღვრო ფენის მოწყვეტა იწყება მხოლოდ იმ წერტილის შემდეგ, რომელშიც ძირითადი სიჩქარის y ცკლადით პირველი რიგის წარმოებული ხდება ნულის ტოლი:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (5.23)$$

5.3. ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენა ფირფიტაზე

განვიხილოთ ნახევრად უსასრულო ბრტყელი ფირფიტის გარსდენა სტაციონარული ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ბრტყელი ნაკადით. ვთქვათ, ფირფიტის სიბრტყე ემთხვევა xOz სიბრტყეს. იმის გამო, რომ გარე არეში სითხის სიჩქარე $u_a = U_0$ მუდმივია, ამიტომ (5.12)-დან გვექნება

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = 0$$

და სასაზღვრო ფენის განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.24)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.25)$$

სასაზღვრო პირობებად ავიღოთ (5.14) პირობები, რომლებიც ჩვენს შემთხვევაში ასე გადაიწერებიან:

$$\text{როცა } y=0, u=v=0; \text{ როცა } y=\infty, u=U_0. \quad (5.26)$$

(5.25) განტოლების ამოსახსნელად შემოვიღოთ უგანზომილებო ცვლადი

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}. \quad (5.27)$$

უწყვეტობის განტოლება იგივერად დაკმაყოფილდება, თუ შემოვიტანთ დენის ფუნქციას

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.28)$$

ვეძებოთ იგი სახით

$$\psi = \sqrt{\nu U_0 x} f(\eta), \quad (5.29)$$

სადაც f ფუნქცია მხოლოდ η ცვლადის ფუნქციაა. დენის ფუნქციის საშუალებით ვიპოვით:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{vU_0} x f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_0 f(\eta); \\ v &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{vU_0}{x}} f(\eta) - \sqrt{vU_0} x f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{vU_0}{x}} [\eta f' - f]; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{U_0}{2x} \eta f'(\eta); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \sqrt{\frac{U_0}{vx}} f'(\eta); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_0^2}{vx} f''(\eta). \end{aligned} \right\} (5.30)$$

თუ (5.25) განტოლებაში შევიტანთ u , v , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ და $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ მნიშვნელობებს მივიღებთ

$$f'' + \frac{1}{2} f f' = 0. \quad (5.31)$$

ნიშნაკი შტრიხი აღნიშნავს წარმოებულს η ცვლადით: $f' = \frac{df}{d\eta}$.

$f(\eta)$ ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი სასაზღერო პირობები:

$$\text{როცა } \eta=0, \text{ მაშინ } f=0, f'=0; \text{ როცა } \eta=\infty, f'=1. \quad (5.32)$$

(5.31), (5.32) ამოცანას ბლაზიუსის ამოცანას უწოდებენ.

ერთი რიცხვითი კოეფიციენტის შემკველი (5.31) არაწრფივი განტოლების ამონახსნი $\eta=0$ მახლობლობაში შეიძლება ვეძებოთ მწკრივის სახით:

$$f(\eta) = \sum_0^{\infty} A_n \eta^n. \quad (5.33)$$

რომ დაეაკმაყოფილოთ (5.32) პირველი ორი პირობა, აუცილებელია, რომ $A_0=A_1=0$.

თუ (5.33) მწკრივს შევიტანთ (5.31) განტოლებაში და η -ს სხვადასხვა ხარისხების წინ მდგომ კოეფიციენტთა ჯამს გავეტოლებთ ნულს, მივიღებთ შემდეგ მწკრივს:

$$f(\eta) = \sum_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{C_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \quad (5.34)$$

ამ მწკრივში C_n კოეფიციენტებს აქვთ შემდეგი მნიშვნელობები: $C_0=1, C_1=1, C_2=11, C_3=375, C_4=27897$, და ა.შ., ხოლო α მამრავლი ჯერ-ჯერობით განუსაზღვრელია.

იმისათვის, რომ დაეაღინოთ $f(\eta)$ ფუნქციის სახე η ცვლადის დიდი მნიშვნელობებისათვის დაეწეროს (5.31) ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება იდეალური სითხის წრფივ-პარაბოლურ დინებას. მას ექნება სახე:

$$f_1 = \eta - \beta, \quad (5.35)$$

სადაც β უცნობი მუდმივია. ამ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული ყველგან ერთის ტოლია, ამიტომ (5.32) მესამე პირობა შესრულებულია. მეორე მიახლოების ასაგებად (5.31) განტოლებაში შევცვალოთ f_1^* სიდიდით $f_1 f_2^*$. მაშინ მეორე მიახლოებისათვის გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{f_2^*}{f_2} = \frac{1}{2}(\beta - \eta). \quad (5.36)$$

ამ განტოლების ინტეგრება მოგვცემს: $\ln f_2^* = -\frac{1}{4}(\beta - \eta)^2 + \ln \gamma$,

სადაც $\gamma = \text{const}$. მეორე მიახლოების პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებისთვის გვექნება:

$$f_2^* = \gamma e^{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2}; \quad f_2 = \gamma \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2} d\eta. \quad (5.37)$$

ინტეგრების ქვედა საზღვარი ბოლო გამოსახულებაში აღებულია იმ მიზნით, რომ უსასრულობაში f_2^* იქცეს ნულად.

თუ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ორი მიახლოებით, არგუმენტის დიდი მნიშვნელობისათვის გვექნება ასიმპტოტური ფორმულა:

$$f = \eta - \beta + \gamma \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2} d\eta. \quad (5.38)$$

იმისათვის, რომ (5.38) მარჯვენა მხარე წარმოადგენდეს $f(\eta)$ ფუნქციის ანალიზურ გაგრძელებას, არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის, როდესაც η -ს მცირე მნიშვნელობებისათვის გვაქვს (5.34) წარმოდგენა, აუცილებელია (5.34) და (5.38) დაემთხვას ერთმანეთს არგუმენტის იმ მნიშვნელობებისათვის, როდესაც ორივე წარმოდგენა მართებულია. მოვითხოვთ ასეთი დამთხვევა არგუმენტის სამი მნიშვნელობისათვის. მაშინ მივიღებთ სამ განტოლებას α , β და γ სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის. ისინი ტოლია:

$$\alpha = 0,332; \quad \beta = 1,73; \quad \gamma = 0,231.$$

(5.31), (5.32) ამოცანის ამოხსნისათვის გამოყენებული იქნა რამდენიმე რიცხვითი მეთოდი. ამ მეთოდებით მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილში:

η	0	0,2	0,4	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
u_1	0	0,066	0,132	0,329	0,629	0,816	0,955	0,991	0,999

ხახუნის ძალისათვის ფირფიტაზე გვექნება:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \mu U_0 \frac{du_1}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right)_0.$$

თუ ვისარგებლებთ ცხრილით: $\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right)_0 = \frac{u_1(0,2) - u_1(0)}{0,2} = 0,332$

ამრიგად, ხახუნის ძალა ფირფიტაზე იქნება

$$\tau = 0,332 U_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}. \quad (5.39)$$

თუ (5.39) ორივე მხარეს გავამრავლებთ $2dx$ და ვაინტეგრებთ 0-დან x -მდე. მაშინ ხახუნის ძალისათვის l სიგრძის და b სიგანის მქონე ფირფიტისათვის მივიღებთ

$$F = 2b \int_0^l \tau dx = 1,328 U_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mu \rho} l b. \quad (5.40)$$

ახლა შემოვიტანოთ ხახუნის კოეფიციენტი

$$C_f = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 S} = \frac{1,328}{Re} \quad (5.41)$$

სადაც $S=2l$ -დასველებული ზედაპირია Re კი რეინოლდსის რიცხვი $Re = \frac{U_0 l}{\nu}$.

ამრიგად, ფირფიტის წინააღმდეგობის კოეფიციენტი, სასაზღვრო ფენის თეორიის მიხედვით, უკუპროპორციულია რეინოლდსის რიცხვიდან კვადრატული ფესვისა.

ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენის ღრავს ფენის სისქე δ პირობითი სიღრმეა. სასაზღვრო ფენის ზედა საზღვრად შეიძლება მივიღოთ იმ წერტილთა გეომეტრიული აღვილი, რომლებშიც ძირითადი სიჩქარე u შესაბამისი გარე არის ნაკადის სიჩქარისაგან განსხვავდება მხოლოდ ერთი პროცენტით, ე.ი. $(u_1)_\delta = 0,99$

ამ მნიშვნელობას ცხრილის მიხედვით შეესაბამება η -ს მიახლოებითი მნიშვნელობა, რომელიც N -ის ტოლია. თუ გავიხსენებთ, რომ $\eta = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$, გვექნება:

$$y = \delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{Re}} \quad (5.42)$$

ამრიგად, სასაზღვრო ფენის სისქე ფირფიტაზე იზრდება პარაბოლური კანონით.

ბლაზიუსის თეორია დადასტურებული იქნა ივ. ნიკურაძის მიერ ჩატარებული ცდებით. ნიკურაძის ცდების მონაცემებსა და ბლაზიუსის თეორიული მრუდის შედარება გეარწმუნებს, რომ ამ მრუდთან დამთხვევა საკმაოდ კარგია. ნიკურაძის გაზომვებმა

მოგვცეს $C_f = 1,315 R^{-1/2}$ (სიჩქარის ექსპერიმენტული პროფილის

დიფერენცირების ხერხით) და $C_f = 1,319R^{-\frac{1}{2}}$ (იმპულსური მეთოდით). გადახრა (5.41)-დან არ აღემატება 1%-ს.

გამოვიოთვალეთ ახლა გამოღვევის δ^* სისქე. (5.19)-დან და ცხრილიდან მივიღებთ, რომ

$$\delta^* = 1,73 \sqrt{\frac{vx}{U_0}}. \quad (5.43)$$

თუ მას შევადარებთ სასაზღვრო ფენის სისქეს განსაზღვრულს (5.42) ფორმულით დავასკენით, რომ

$$\delta = 3\delta^* = 5,2 \sqrt{\frac{vx}{U_0}}. \quad (5.44)$$

ხოლო იმპულსის დაკარგვის სისქისათვის გვქვია

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy = 0,664 \sqrt{\frac{vx}{U_0}}.$$

5.4. სასაზღვრო ფენის განტოლებების ავტომოდელური ამონახსნები

ავტომოდელური ამონახსნები სასაზღვრო ფენის განტოლებების კერძო ამონახსნებია. თუ მოძრაობის ამოცანაში შესაძლებელია უცნობი ფუნქციების არგუმენტების რიცხვის შეშუპვა და შესაბამისი კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების დაყვანა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებამდე, ამბობენ, რომ ამოცანა ავტომოდელურია. საწყისი პირობები ამ დროს არ მოიცემა. სასაზღვრო ფენის თეორიაში ავტომოდელური ამონახსნები მიიღება მაშინ, როცა სითხის გარე სიჩქარე გასწვრივი ცვლადის ხარისხოვანი ფუნქციაა. ასეთი ამონახსნების მოსაძებნად ხელსაყრელია გადავიღოთ უგანზობილებო ცვლადებზე:

$$\psi = \sqrt{v u_3} x f(x, \eta) \text{ და } \eta = y \sqrt{\frac{u_3}{v x}} \text{ სადაც } u_3 = u_{\text{გარე}}. \quad (5.45)$$

აქედან ჩანს, რომ ღენის უწყვეტიის ნაცვლად უნდა მოიძებნოს $f(x, \eta)$ ფუნქცია და შემდეგ მისი საშუალებით განისაზღვროს სიჩქარის კომპონენტები:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_3 \frac{\partial f}{\partial \eta}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{v u_3} x \left[\frac{1}{2} \frac{(u_3 x)'}{u_3 x} f + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right]. \quad (5.46)$$

თუ ამ სიდიდეებს გაეთვალისწინებთ (5.24) და (5.25) სასაზღვრო ფენის განტოლებებში მივიღებთ ერთ განტოლებას:

$$x \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{u_3} \frac{d u_3}{d x} \right) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{x}{u_3} \frac{d u_3}{d x} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right]. \quad (5.47)$$

და შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad \text{როცა } \eta = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \text{როცა } \eta \rightarrow \infty \quad (5.48)$$

თუ (5.47)-(5.48) ამოცანის ამონახსნი ნაკონია, მაშინ (5.46) ფორმულების საშუალებით ვიპოვით სიჩქარის კომპონენტებს და სასაზღვრო ფენის სხვა ფიზიკურ მახასიათებლებს.

ბახუნის კოეფიციენტისათვის კელეზე გვექნება:

$$C_f = \frac{2\mu}{\rho u_3} \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ როცა } y = 0, \text{ ანუ } C_f = 2f'(0, x) \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}}, \text{Re}_x = u_3 \frac{x}{\nu}. \quad (5.49)$$

როგორც ეს (5.47) განტოლებიდან ჩანს იგი მხოლოდ ერთ უგანზომილებო

$$m = \frac{x}{u_3} \frac{d u_3}{d x}$$

პარამეტრს შეიცავს, რომელიც გარე არის სიჩქარესთან არის დაკავშირებული. თუ ეს პარამეტრი არ არის დამოკიდებული x ცვლადზე, შეგვიძლია განვიხილოთ (5.47) განტოლების ის

კერძო ამონახსნები, რომლებიც აგრეთვე არ იქნებიან x ცვლადზე დამოკიდებულნი. ასეთი ამონახსნები ავტომოდელური იქნება. მაშინ f ფუნქცია მხოლოდ η ცვლადის ფუნქცია იქნება და (5.47) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$f'' + \frac{m+1}{2} f f' + m(1-f^2) = 0. \quad (5.50)$$

ავტომოდელური ამონახსნების ამ კლასს მიეკუთვნებიან ის ღინებები, რომელთათვისაც სასაზღვრო ფენის გარე არეში სიჩქარე წარმოიდგინება x ცვლადის ხარისხოვანი ფუნქციის საშუალებით:

$$u_g(x) = u_1 x^m, \quad u_1 = \text{const.} \quad (5.51)$$

ავტომოდელური მოძრაობის ასეთი კლასი განხილულ იქნა ფოლკენერისა და სკენის მიერ 1930 წელს და ამიტომ (5.50) განტოლებებს. ზოგჯერ ფოლკენერ-სკენის განტოლებებსაც უწოდებენ. ამ შემთხვევაში f ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$f = 0, f' = 0, \text{ როცა } \eta = 0; \quad f' \rightarrow 1, \text{ როცა } \eta \rightarrow \infty. \quad (5.52)$$

(5.50)-(5.52) ამოცანა ამოხსნილი იქნა რიცხვითი მეთოდების საშუალებით პარტრის მიერ m მაჩვენებლის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

ადვილად შეიმჩნევა, რომ, როცა $m=0$ და $u_1=C$, მაშინ (5.50) განტოლება და (5.51) სასაზღვრო პირობები ბლანჟიუსის ამოცანაში გადადის, რომელიც აღრე იყო გადმოცემული. თუ

$m=-1$, მაშინ $u_{გარე} = \frac{u_1}{x}$ ასეთი ღინება ხორციელდება

კონფუზორში (შევიწროებული უსასრულო ბრტყელი არხი), როცა $u_1 < 0$ და ღიფუზორში (გაგანიერებული არხი), როცა $u_1 > 0$. თუ $m=1$, $u_{გარე} = u_1 x$ და $u_1 > 0$, მაშინ სიჩქარის ასეთი

განაწილება გვექნება პოტენციალურ ნაკადში ბლაგვი ცილინდრული სხეულის წინა კრიტიკულ წერტილში ბრტყელი გარსდენის შემთხვევაში. მაშინ (5.50) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$f'' + ff'' - f'^2 + 1 = 0, \quad (5.53)$$

ხოლო სასაზღვრო პირობები იგივე დარჩება.

ამ განტოლების რიცხვითი ინტეგრება 1911 წელს მოახდინა პიმენცმა, შემდეგ კი 1935 წ. პოუარტმა მოგვცა f და f' ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი.

თუ m ნებისმიერია და $u_1 > 0$, მაშინ ახალი

$$f = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \phi, \quad \eta = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \xi \quad \text{ჩასმით (5.50) განტოლება}$$

მიიღებს რიცხვითი ინტეგრირებისათვის ხელსაყრელ სახეს:

$$\phi'' + \phi\phi'' = \beta[\phi'^2 - 1], \quad \beta = \frac{2m}{m+1}.$$

ამ შემთხვევაშიც (5.52) სასაზღვრო პირობები იგივე რჩება.

$$\phi = 0, \quad \phi' = 0, \quad \text{რაცა } \xi = 0; \quad \phi' \rightarrow 1, \quad \text{რაცა } \xi \rightarrow \infty \quad (5.54)$$

თუ ϕ ფუნქცია ნაპოვნია ადვილად შეგვიძლია გამოვითვალოთ ψ ღენის ფუნქცია, სიჩქარის u და v კომპონენტები და ხახუნის კელელებე:

$$\psi = \sqrt{\frac{2\nu u_1}{m+1}} x^{\frac{m+1}{2}} \phi(\xi, \beta); \quad u = u_1 x^m \phi'(\xi, \beta);$$

$$v = -\sqrt{\frac{2\nu u_1}{m+1}} x^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{m-1}{2} \xi \phi'(\xi, \beta) + \frac{m+1}{2} \phi(\xi, \beta) \right];$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \mu \rho u_1^3 x^{3m-1} \phi''(0, \beta).$$

აღმოჩნდა, რომ არსებობს $\phi''(0, \beta)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა მთელი ინტერვალი, რომელთათვისაც (5.54) სასაზღვრო პირობები სრულდება. პარტრამ აირჩია ყველაზე მეტად შესაძლებელი მნიშვნელობა $\phi''(0, \beta)$, რომლის დროსაც მიხვდა იქნება $\phi'(\xi, \beta)$, რაცა $\xi \rightarrow \infty$ უახლოვდება ერთს ნაკლებ მნიშვნელობათა მხრიდან. ეს კი სასაზღვრო ფენის კვეთაში სიჩქარის მონოტონურ ზრდას შეესაბამება.

5.5. კარმანის ინტეგრალური თანაფარდობა

სითხის მოძრაობის დეტალური შესწავლისას უნდა ვისარგებლოთ სითხის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებებით. მაგრამ თუ ჩვენ მოძრაობის განხილვა მხოლოდ ზოგადად გეჭვირდება, მაშინ დიდი ღაზმარების გაწევა შეუძლიათ პიდრომექანიკის ზოგად კანონებს: მოძრაობის რაოდენობის, მოძრაობის რაოდენობის მოქმედებისა და ენერჯიის კანონებს.

ერთ-ერთი ასეთი კანონი, კერძოდ მოძრაობის რაოდენობის კანონი, გამოიყენა კარმანმა სასაზღვრო ფენის თეორიაში.

ვისარგებლოთ სასაზღვრო ფენის მოძრაობის

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

განტოლებებით. შემოვიღოთ სასაზღვრო ფენის $\delta(x, t)$ სისქე. როგორც აღრე ითქვა, სასაზღვრო ფენის სისქე გარკვეული აზრით განუსაზღვრელი სიდიდეა, რადგანაც სასაზღვრო ფენაში v_x სიჩქარე იცვლება ნულიდან, რომელიც მას უძრავ კონტურზე აქვს, $u_{გრე}$ სიჩქარემდე, რომელსაც ის აღწევს პოტენციალურ ნაკადში. $u_{გრე}$ სიჩქარის მიღწევა ასიმპტოტურად ხდება. მეორეს მხრივ δ სისქე შეიძლება განისაზღვროს, როგორც მანძილი უძრავი კონტურიდან, სადაც განსხვავება v_x და $u_{გრე}$ სიჩქარეებს შორის 1%-ია. ჩვენთვის არ არის არსებითი δ ესა თუ ის განსაზღვრა, მთავარია შესრულდეს ორი პირობა. ჯერ ერთი v_x სიჩქარე, როცა $y = \delta$ მცირედ უნდა განსხვავებოდეს $u_{გრე}$ სიჩქარისაგან, ე.ი. $|v_x(x, \delta) - u_{გრე}| < \epsilon$, სადაც ϵ მცირე სიდიდეა, მეორეს მხრივ, $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ წარმოებულის სიდიდე უნდა იყოს

მცირე. მათემატიკური თეალსაზრისით საკმარისად ზუსტია ვგრეთწოდებული გამოდევნის სისქე δ , რომელიც განისაზღვრება პირობით:

$$\int_0^{\delta} (u_x - v_x) dy = \delta^2 u_x. \quad (5.56)$$

ვინტეგრით ახლა (5.55) პირველი განტოლების ორივე მხარე y ცვლადით 0-დან δ -მდე. ცვალებადი საზღვრის მქონე ინტეგრალების გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} v_x dy = \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial t} dy + v_x(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial t} dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} v_x dy - v_x(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

შემდეგ გვაქვს:

$$\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = v_y v_x \Big|_{y=0}^{y=\delta} - \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = v_y(x, \delta, t) v_x(x, \delta, t) - \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} dy,$$

რადგანაც $v_x = v_y = 0$, როცა $y=0$. მაგრამ (5.55) მეორე განტოლებიდან

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad v_y(x, \delta, t) = -\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$$

შეენიშნოთ, რომ

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x dy = \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + v_x(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial x}.$$

ამიტომ

$$v_y(x, \delta, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x dy + v_x(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

ღა

$$\int_0^\delta v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = -v_x(x, \delta, t) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x dy + v_x^2(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial x} + \int_0^\delta v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy.$$

გამოვითვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^\delta v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x^2 dy - \frac{1}{2} v_x^2(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial x}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta v_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x^2 dy -$$

$$- v_x(x, \delta, t) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x dy - v_x(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

გამოვითვალოთ ახლა (5.55) განტოლების მარჯვენა მხარეში მიღებული ინტეგრალები:

$$\int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x} dy = \delta \frac{\partial p}{\partial x}.$$

რადგანაც p არ არის დამოკიდებული y (ეკვალზე. შეზღუდვ

$$\int_0^\delta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

ამიტომ:

$$\int_0^\delta \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta + v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} - v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

საბოლოოდ (5.55) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება გეაძლევის:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}}{\dot{\alpha}} \int_0^{\delta} v_x dy + \frac{\dot{r}}{\dot{\alpha} x} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - v_x(x, \delta, t) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x dy - v_x(x, \delta, t) \frac{\partial \delta}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta + v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} - v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

ეს ტოლობა სამართლიანია $\delta(x, t)$ სიღღის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ახლა დაუშვათ, რომ δ არის სასაზღვრო ფენის სისქე, $v_x(x, \delta, t) = u_{\text{გრე}}$ და $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0$. მაშინ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \text{კარმანის ინტეგრალურ თანაფარდობას} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} v_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - u_{\delta}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} v_x dy - u_{\delta}(x, t) \frac{\partial \delta}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta - v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

თუ მოძრაობა სტაციონარულია აქედან გვექნება:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - u_{\delta}(x) \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta - v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (5.59)$$

მიღებული თანაფარდობანი მიახლოებითია, რადგან მათი გამოყენება ემყარებოდა ზოგიერთი მცირე სიღღის უგულებელყოფას.

კარმანმა (5.58) თანაფარდობა მიიღო მოძრაობის რაოდენობის კანონის გამოყენებით, რომელზედაც ჩვენ არ შეეჩერდებით.

(5.58) ინტეგრალურ თანაფარდობას მივცეთ ისეთი ფორმა, რომ მასში შედიოდეს ინტეგრალები საზღვრებით $(0, \infty)$. ამ

შემთხვევაში ინტეგრალთა კრებადობისათვის უნდა განვიხილოთ v_x -ის ნაცვლად მისი გაღაზრა u_x სიჩქარიდან, ანუ

$$u_x - v_x = q. \quad (5.60)$$

მაშინ გვექნება:

$$\int_0^{\delta} v_x^2 dy = \int_0^{\delta} (u_x^2 - 2qu_x + q^2) dy = u_x^2 \delta - 2u_x \int_0^{\delta} q dy + \int_0^{\delta} q^2 dy,$$

$$\int_0^{\delta} v_x dy = \int_0^{\delta} (u_x - q) dy = u_x \delta - \int_0^{\delta} q dy$$

და ამიტომ (5.58) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\delta \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} q dy + \delta u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} q dy - 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \int_0^{\delta} q dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} q^2 dy =$$

$$= -\frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

პოტენციალური ნაკადისათვის ჩვენ გვაქვს თანაფარდობა

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.61)$$

რომელიც იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებაა ერთგანზომილებიანი ღინების შემთხვევაში.

ამიტომ წინა განტოლებაში δ მამრავლის შემცველი წევრები ერთმანეთს აბათილებს და დარჩენილ წევრებში კი ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\delta = x$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x q dy + u_x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x q dy + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \int_0^x q dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x q^2 dy = v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (5.62)$$

სტაციონარულ შემთხვევაში გვექნება:

$$u_x \frac{d}{dx} \int_0^x q dy + 2 \frac{du_x}{dx} \int_0^x q dy - \frac{d}{dx} \int_0^x q^2 dy = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (5.63)$$

შემოვიღოთ ახლა გამოდენის სისქე δ^* განმარტებული (5.56) ფორმულით, და იმპულსის დაკარგვის სისქე δ^{**} , განმარტებული (5.22)-ით. ამ ფორმულებში უნდა ავიღოთ $u=v_x$. მაშინ, რადგანაც

$$\int_0^{\delta^*} q dy = \int_0^{\delta^*} (u_a - v_x) dy = u_a \int_0^{\delta^*} \left(1 - \frac{v_x}{u_a}\right) dy = u_a \delta^*$$

და

$$\int_0^{\delta^*} q^2 dy = \int_0^{\delta^*} (u_a - v_x) q dy = u_a \int_0^{\delta^*} q dy - u_a^2 \int_0^{\delta^*} \frac{v_x}{u_a} \left(1 - \frac{v_x}{u_a}\right) dy = u_a^2 \delta^* - u_a^2 \delta^{**},$$

(5.63) ინტეგრალური თანაფარდობიდან ჩვენ მივიღებთ:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{u_a} \frac{du_a}{dx} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_0}{\rho u_a^2}. \quad (5.64)$$

ეს არის კარმანის ინტეგრალური თანაფარდობის ფორმა, რომელიც მიღებულ იქნა პრანდტლის მიერ.

გამოვიყენოთ ახლა კარმანის ინტეგრალური თანაფარდობა ბრტყელ ფირფიტაზე სასაზღვრო ფენის ანგარიშისათვის. რადგანაც ღინება სტაციონარულია, რომელშიც $u_a = \text{const.}$, ამიტომ

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

(5.59)-დან შეიძლება დაწეროთ:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - u_a \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x dy = -v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (5.65)$$

ვთქვათ ჩვენ ვიცით სიჩქარის განაწილება სასაზღვრო ფენის შიგნით, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$v_x(x) = u_a f\left(\frac{y}{\delta}\right) = u_a f(\eta),$$

სადაც

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}.$$

მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$\int_0^{\delta} v_x^2 dy - u_{\delta} \int_0^{\delta} v_x dy = u_{\delta}^2 \int_0^1 [f^2(\eta) - f(\eta)] d\eta,$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{u_{\delta}}{\delta} f'(0).$$

საბოლოოდ (5.65) მიიღებს სახეს:

$$u_{\delta}^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 [f^2(\eta) - f(\eta)] d\eta = -\frac{v u_{\delta}}{\delta} f'(0)..$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{v f'(0)}{u_{\delta} \int_0^1 [f - f^2] d\eta}.$$

თუ მიღებულ განტოლებას ვაინტეგრებთ და ჩავთვლით, რომ $\delta = 0$, როცა $x=0$, მივიღებთ:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2v f'(0)}{u_{\delta} \int_0^1 [f - f^2] dy}} x. \quad (5.66)$$

რადგანაც

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{u_{\delta}}{\delta} f'(0) = \sqrt{\frac{\mu \rho f'(0) u_{\delta}^3}{2x} \int_0^1 (f - f^2) d\eta}.$$

ამიტომ x სივანისა და ℓ სიგრძის ფირფიტის წინააღმდეგობა ქვედა და ზედა მხრიდან გამოისახება ფორმულით

$$w = 2b \int_0^1 \sqrt{\frac{\mu p f'(0) u_s^3}{2x} \int_0^1 (f - f^2) d\eta} dx = 2b \sqrt{2\mu p f'(0) u_s^3 \int_0^1 (f - f^2) d\eta} \cdot \ell. \quad (5.67)$$

ამ თანაფარდობიდან წინააღმდეგობის კოეფიციენტისათვის გვექნება

$$C_w = \sqrt{\frac{8f'(0)}{Re} \int_0^1 (f - f^2) d\eta}, \quad (5.68)$$

ზოლო გამოღევის სისქისათვის მივიღებთ

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1 - f) d\eta. \quad (5.69)$$

კარმანის მეთოდის ძირითადი იდეა მდგომარეობს შემდეგში: იმის ნაცვლად, რომ ვეძებოთ $f(\eta)$ ფუნქციის ზუსტი სახე, შეიძლება წინასწარ დაეასახელოთ იგი. თუ ჩვენ სწორად შევარჩევთ სიჩქარის განაწილებას სასაზღვრო ფენში, მაშინ მივიღებთ კარგ მიახლოებას, როგორც δ სისქისათვის, ასევე წინააღმდეგობის კოეფიციენტის რიცხვით მნიშვნელობისთვისაც.

ეს მეთოდი კარგია, რადგანაც არ თხოულობს ბევრ გამოთვლებს სასაზღვრო ფენის განტოლებების ზუსტ ამოხსნებთან შედარებით. მისი ნაკლია ის, რომ იგი ძირითადად გამოიყენება მხოლოდ მაშინ, როცა გვაქვს სიჩქარის მდორე განაწილება სასაზღვრო ფენში.

ჩვენ ამოცანაში სიჩქარის სწორედ ასეთ მდორე განაწილებასთან გვაქვს საქმე. მართლაც, მაგალითისათვის ავიღოთ

$$f(\eta) = \eta. \quad (5.70)$$

მაშინ $v_x = 0$, როცა $y = 0$ და $v_x = u_s$, როცა $y = \delta$. შემდეგ გვექნება

$$\int_0^1 (f - f^2) d\eta = \int_0^1 (\eta - \eta^2) d\eta = \frac{1}{6}, \quad f'(0) = 1,$$

ამიტომ (5.66) ფორმულა მოგვცემს

$$\delta(x) = 2\sqrt{\frac{3\nu x}{u_b}} = 3,464\sqrt{\frac{\nu x}{u_b}} \quad (5.71)$$

ხოლო (5.67) და (5.68)-დან მივიღებთ:

$$w = 1,155b\sqrt{\mu\rho l u_b^3}, \quad C_w = \frac{1,155}{\sqrt{Re}} \quad (5.72)$$

გამოდენის სისქისათვის (5.69)-დან კი გვექნება

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1-\eta) d\eta = \frac{1}{2}\delta = 1,732\sqrt{\frac{\nu x}{u_b}} \quad (5.73)$$

რომელიც თითქმის ემთხვევა (5.43) ფორმულას.

ახლა სიჩქარის განაწილება სასაზღვრო ფენში ავიღოთ მესამე რიგის პოლინომის სახით

$$f(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3.$$

სასაზღვრო პირობებად ავიღოთ:

$$\left. \begin{aligned} v_x = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \text{ როცა } y = 0; \\ v_x = u_b, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \text{ როცა } y = \delta. \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებენ, რომ

$$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3, \quad (5.75)$$

$$\int_0^1 (f - f^2) d\eta = \frac{39}{280}, \quad f(0) = \frac{3}{2}, \quad \int_0^1 (1 - f) d\eta = \frac{3}{8}.$$

მაშასადამე:

$$\delta = \sqrt{\frac{280\nu x}{13u_\infty}} = 4,641 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}},$$

$$C_w = \sqrt{\frac{117}{70 \operatorname{Re}}} = \frac{1,293}{\sqrt{\operatorname{Re}}},$$

$$\delta^* = \frac{3}{8} \delta = 1,74 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}.$$

ახლა სიჩქარის განაწილებად ავიღოთ ფუნქცია

$$v_x = u_\infty \operatorname{th} \frac{y}{\delta}$$

და გამოვიყენოთ იგი (5.63) განტოლებაში. მაშინ

$$q = u_\infty - v_x = u_\infty \left(1 - \operatorname{th} \frac{y}{\delta}\right),$$

$$u_\infty \int_0^\delta q dy - \int_0^\delta q^2 dy = u_\infty^2 \delta \int_0^1 (1 - \operatorname{th} \eta) \operatorname{th} \eta d\eta.$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$\operatorname{th} \eta = z$$

და შევნიშნოთ, რომ

$$dz = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta} d\eta = \frac{\operatorname{ch}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \eta}{\operatorname{ch}^2 \eta} d\eta = (1 - z^2) d\eta$$

ამიტომ

$$\int_0^1 (1 - \ln \eta) \ln \eta d\eta = \int_0^1 (1 - z) z \frac{dz}{1 - z^2} = \int_0^1 \frac{z dz}{1 + z} =$$

$$[z - \ln(1+z)]_{z=0}^{z=1} = 1 - \ln 2$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{u_\delta}{ch^2 \frac{y}{\delta}} \cdot \frac{1}{\delta}$$

და (5.63) განტოლება მოგვცემს

$$u_\delta^2 (1 - \ln 2) \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu u_\delta}{\delta},$$

საიდანაც

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu x}{u_\delta (1 - \ln 2)}} \approx 2,553 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\delta}}.$$

ხოლო სასაზღვრო ფენის სხვა ფიზიკური მახასიათებლები-სათვის გვექნება მნიშვნელობები:

$$\tau_0 = \frac{\mu u_\delta}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu \rho u_\delta^3 (1 - \ln 2)}{2x}},$$

$$w = 2b \sqrt{2(1 - \ln 2) \mu \rho u_\delta^3 \ell} \approx 1,5676 \sqrt{\mu \rho u_\delta^3},$$

$$C_w \approx \frac{1,567}{\sqrt{Re}},$$

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1 - \ln \eta) d\eta = \delta \int_0^1 (1 - z) \frac{dz}{1 - z^2} = \delta \ln 2 = 1,77 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\delta}}$$

მიღებული ფორმულებიდან ჩანს, რომ δ^* მნიშვნელობა ძალიან ახლოს არის ბლაზიუსის მიერ მიღებულ ზუსტ მნიშვნელობასთან. ხოლო C_w განსაზღვრის ცდომილება 20% აღწევს, თუმცა მესამე რიგის პოლინომის შემთხვევაში, ეს ცდომილება 4% არ აღემატება.

ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის თეორია

6.1. სითბოგადაცემის ძირითადი განტოლებები

გამთბარი სხეულის სითხით გარსდენისას ადგილი აქვს ჰიდროდინამიკური და სითბური ნაკადების ურთიერთქმედებას. ტემპერატურის განაწილების საკონვენლად აუცილებელია მოძრაობის ჰიდროდინამიკური განტოლებები დაეუკავშიროთ სითბოგამტარებლობის განტოლებებს. დაკვირვებები გვიჩვენებენ, რომ ტემპერატურის განაწილებას სხეულზე ისეთივე თავისებურებები გააჩნია, როგორც ეს სასაზღვრო ფენაში გვაქვს. ვთქვათ გარსმოღენილი სხეულის ტემპერატურა მაღალია, ვიდრე სითხისა. თუ ღინების სიჩქარე ზომიერია, მაშინ გამთბარი სხეულისაგან გამოწვეული სითხის ტემპერატურის ზრდა გაერცელებს სხეულის ზედაპირის მხოლოდ მახლობელ თხელ ფენაში და სხეულის უკან ეწრო კვალში. ტემპერატურის გათანაბრების პროცესი გამთბარ სხეულსა და ცივ სითხეს შორის მიმდინარეობს სხეულის ზედაპირის მახლობელ თხელ ფენაში. ამ ფენას, ღინების სასაზღვრო ფენის მსგავსად, ტემპერატურულ ან სითბურ სასაზღვრო ფენას უწოდებენ. ტემპერატურის ასეთი გათანაბრების პროცესის დროს ჰიდროდინამიკური და სითბოგამტარებლობის მოვლენები ერთმანეთზე დიდ გავლენას ახდენენ.

ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის თვისებების შესასწავლად უნდა შევადგინოთ მოძრავი თხიერი ნაწილაკის სითბური ბალანსის განტოლება და ის მიუყვაროთ სითხის მოძრაობის ჰიდროდინამიკურ განტოლებებს. რაგორც ვიცით, არაკუმშვად სითხეში მოძრავი ნაწილაკის სითბური ბალანსი განისაზღვრება მისი შინაგანი ენერგიით, სითბოგამტარებლობით, ღინებით გამოწვეული სითხის კონვექციით და შინაგანი

ხაზუნით გამოწვეული სითბოთი. კუმშვად სითხეში ჩამოთვლილს უნდა დაემატოს მოცულობის ცვლილებაზე დახარჯული მუშაობა. გარდა ამისა, ყოველთვის ადგილი აქვს სითბურ გამოსხივებას, თუმცა ტემპერატურის ზომიერი ცვლილებისას იგი არსებით როლს არ თამაშობს და ამიტომ შემდგომში მას მხედველობაში არ მივიღებთ.

სითბური ბალანსის განტოლებას არაკუმშვადი სითხისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) e \right) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \mu \phi. \quad (6.1)$$

რადგანაც სითხე არაკუმშვადია, ამიტომ მისი შინაგანი ენერჯია

$$de = cdT, \quad (6.2)$$

ხდაც c - სითბოტევადობის კოეფიციენტი. თუ სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი $\lambda = \text{const}$ და (6.2) გაითვალისწინებთ (6.1) განტოლებაში, მივიღებთ ენერჯიის განტოლებას

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T \right) = \lambda \Delta T + \mu \phi \quad (6.3)$$

ხდაც ϕ დისიპაციის ფუნქციაა

$$\phi = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (6.4)$$

6.2. შვავსების თეორია სითბოგადაცემაში

თუ სითხის მოძრაობის დროს ტემპერატურის ცვლილებას თან ხდევს სიმკვრივის ცვლილება, მაშინ აქტიურ მასობრივ ძალებთან ერთად ითვალისწინებენ არქიმედის ამწევ ძალას, რომელიც წარმოიშობა გათბობისაგან მოცულობის ცვლილების გამო.

ეთქვათ, β არის კუბური გაფართოების კოეფიციენტი -
 $\beta = \frac{1}{T}$, ხოლო $\theta = T - T_\infty$ - ტემპერატურის ნამატია, რომელიც
 აქეთ გამთბარ თხიერ ნაწილაკებს გაუმთბარ ნაწილაკებთან
 შედარებით. გამთბარი ნაწილაკის მოცულობის ფარდობითი
 ცვლილება ტოლი იქნება $\beta\theta$, ხოლო ერთეულ მოცულობაზე
 მოსული არქიმედის ძალა $\rho\beta\theta\bar{g}$, სადაც ρ - გათბობამდე სითხის
 სიმკვრივეა, $\bar{g}(\bar{g}_x, \bar{g}_y, \bar{g}_z)$ - თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. თუ
 მხოლოდ ამ ძალას გაეითვალისწინებთ ნავეე-სტოქსის
 განტოლებებში, მაშინ ისინი მიიღებენ სახეს

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \beta\theta\bar{g} + \nu\Delta\bar{v}, \\ \text{div}\bar{v} &= 0. \end{aligned} \right\} (6.5)$$

ამ განტოლებას უნდა დაემატოს არაკუმშვადი სითხის ენერჯიის
 (6.3) განტოლება.

(6.3), (6.5) განტოლებებში ხუთი უცნობი შედის $v_x, v_y, v_z,$
 p, T . აქ იგულისხმება, რომ ტემპერატურის ცვლილება
 ზომიერია და ამიტომ სიბლანტის კოეფიციენტი ν მუდმივად
 ითვლება.

რა უგანზომილებო პარამეტრებზე იქნება დამოკიდებული
 (6.3), (6.5) განტოლებათა სისტემა? ამისათვის უნდა
 გადავიდეთ ამ განტოლებებში უგანზომილებო სიდიდეებზე

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= L_0 \bar{r}_1, \quad \bar{v} = u_\infty \bar{v}_1, \quad p = \rho u_\infty^2 p_1, \quad \bar{g} = g_0 \bar{g}_1, \\ T - T_\infty = \theta &= (\Delta T)_0 \theta_1, \quad (\Delta T)_0 = T_w - T_\infty, \quad \phi = \frac{u_\infty^2}{L_0^2} \phi_1 = \phi_\infty \phi_1. \end{aligned} \right\} (6.6)$$

ფ-ნიშნაკიანი სიდიდეები განეკუთვნებიან მნიშვნელობებს
 უსასრულობაში. (6.6) შეტანით მოძრაობისა და ენერჯიის
 განტოლებებში, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, სტაციონარული
 პროცესის შემთხვევაში, მივიღებთ შესაბამისად:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{v}_1 \nabla_1) \bar{v}_1 &= -\nabla_1 p_1 + \frac{Gr}{Re^2} \bar{g}_1 + \frac{1}{Re} \Delta \bar{v}_1 \\ (\bar{v}_1 \nabla_1) \theta_1 &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \Delta_1 \theta_1 + \frac{Ec}{Re} \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

სადაც

$$\frac{\lambda}{L_0 \rho c u_\infty} = \frac{a}{u_\infty L_0} = \frac{a}{v} \frac{v}{u_\infty L_0} = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{1}{Re}$$

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ - ტემპერატურაგამტარებლობის კოეფიციენტი.

უგანზომილებო სიდიდე

$$Pr = \frac{v}{a} \quad (6.8)$$

პრანდტლის რიცხვად იწოდება და დამოკიდებულია გარემოს მხოლოდ უიზიკურ მახასიათებლებზე. სიდიდე

$$\frac{\mu u_\infty^2}{\rho c L_0 (\Delta T)_0} = \frac{u_\infty^2}{c (\Delta T)_0} \cdot \frac{\mu}{\rho u_\infty L_0} = Ec \cdot \frac{1}{Re}$$

სადაც $Re = \frac{\mu}{\rho u_\infty L_0} = \frac{v}{u_0 L_0}$ რეინოლდსის რიცხვია, ხოლო

სიდიდეს

$$\frac{u_\infty^2}{c (\Delta T)_0} = Ec \quad (6.9)$$

ეკერტის რიცხვს უწოდებენ. სიდიდე

$$\frac{\beta g_0 L_0 (\Delta T)_0}{u_\infty^2} = \frac{\beta g_0 L_0^3 (\Delta T)_0}{v^2} \frac{v^2}{u_\infty^2 L_0^2} = Gr \cdot \frac{1}{Re^2}$$

სადაც

$$\frac{\beta g_0 L_0^3 (\Delta T)_0}{v^2} = Gr \quad (6.10)$$

გრასპოფის რიცხვად იწოდება.

(6.7) განტოლებები გვიჩვენებენ, რომ დინამიკური და ტემპერატურული პროცესის მიმდინარეობა არაკუმშვად სითხეში

დამოკიდებულია ოთხ პარამეტრზე. ესენია: რეინოლდსის რიცხვი Re , პრანდტლის რიცხვი Pr , ეკერტის რიცხვი Ec და გრასპოფის რიცხვი Gr . ამიტომ სითხის სიჩქარული და ტემპერატურული ველები არიან არა მარტო წერტილის კოორდინატების ფუნქციები, არამედ ამ ოთხი უგანზომილებო პარამეტრის ფუნქციებიც იქნება:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{v}}{u_{\infty}} &= f_1(\bar{r}, Re, Pr, Gr, Ec), \\ \frac{T - T_{\infty}}{(\Delta T)_0} &= f_2(\bar{r}, Re, Pr, Gr, Ec). \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას არ არის საჭირო ტემპერატურული და სიჩქარული ველების ყველა განსაკუთრებულობის ცოდნა. ტემპერატურული ველისაგან მოითხოვენ, რომ ვიცოდეთ სითხის ის რაოდენობა, რომელიც გადაეცემა გარსმოღენადი სხეულიდან სითხეს ან პირიქით. სითხოს ამ რაოდენობას სითბოგადაცემის კოეფიციენტით გამოსახავენ. სითბოგადაცემის კოეფიციენტის ნამრავლი სხეულისა და სითხის ტემპერატურათა სხვაობაზე გაძღვეს სითხოს იმ რაოდენობას, რომელიც გადადის სხეულის განსახილველი წერტილიდან სითხეში დროის ერთეულში ფართობის ერთეულში. ამრიგად,

$$q(x) = \alpha(x)(T_w - T_{\infty}) = \alpha(x)(\Delta T)_0. \quad (6.12)$$

სითხოს ნაკადი, ფურიეს კანონის თანახმად, პროპორციულია ტემპერატურის გრადიენტისა კვლის მართობული მიმართულებით:

$$q(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (6.13)$$

(6.12) და (6.13) შედარება გვიჩვენებს, რომ ადგილობრივი უგანზომილებიანი სითბოგადაცემის $\alpha(x)$ კოეფიციენტის ნაცვლად შეიძლება შემოვიტანოთ სითბოგადაცემის უგანზომილებო კოეფიციენტი $N_n(x)$ შემდეგნაირად:

$$Nu(x) = \frac{\alpha(x)L_0}{\lambda} = -\frac{L_0}{(\Delta T)_0} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}$$

ამ რიცხვს ნუსელტის რიცხვი ეწოდება. მისი საშუალებით სითბის $q(x)$ ნაკადი ასე წარმოიადგინება

$$q(x) = \frac{\lambda}{L_0} Nu(T_w - T_\infty) = \frac{\lambda}{L_0} Nu(\Delta T)_0.$$

6.3 ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის განტოლებები

თუ (6.7) განტოლებებში შევიტანთ ღინამიკური და სითბური პროცესების დამახასიათებელ პარამეტრებს, ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Gr}{Re^2} \theta \cos \alpha + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \frac{Ec}{Re} \phi \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

სადაც $g_{1x} = \cos \alpha$ და ჩაწერის სიმარტივისათვის ნიშნაკები "ერთი" უკუგდებულია. თუ გავითვალისწინებთ ამ განტოლებებში შემავალ შესაკრებთა რიგს, გვექნება

$$u \sim 1, \frac{\partial u}{\partial x} \sim 1, v \sim \delta_r, \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta_r}, \frac{\partial p}{\partial x} \sim 1, \frac{1}{Re} \sim \delta_r^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim 1, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta_r^2},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \sim 1, \frac{\partial \theta}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta_T}, \frac{1}{Re Pr} \sim \delta_T^2, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \sim 1, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta_T^2}, \frac{\partial p}{\partial y} \sim \delta_r, \phi \sim \frac{1}{\delta_r^2},$$

სადაც δ_r - ღინამიკური სასაზღვრო ფენის სისქეა, δ_T - ტემპერატურული ანუ სითბური სასაზღვრო ფენის სისქე. სასაზღვრო ფენის თეორიაში ნაჩვენები იყო, რომ

$$\delta_r^2 \sim \frac{1}{Re} \quad (6.15)$$

ამიტომ შესაკრებები $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ უკუვადლოთ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ შესაკრებთან შედარებით, ხოლო მოძრაობის განტოლების მეორე განტოლებიდან დაგვრჩება $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

(6.7) განტოლებებში შეუფასებელია არქიმედის ძალის გამოხმატეული შესაკრები. მას ხახუნისა და ინერციის ძალების რიგი ექნება, თუ

$$Gr \sim Re^2. \quad (6.16)$$

ასეთი თანაფარდობა გრასპოვისა და რეინოლდსის რიცხვებს შორის შესაძლებელია მხოლოდ დინების მცირე სინქარების დროს, თუ ტემპერატურათა სხვაობა დილა. ენერჯიის

განტოლებაში $\frac{1}{Pr Re}$ მამრავლი მცირეა, როცა Re დილა,

ხოლო პრანდტლის რიცხვი სასრული. იმ შესაკრების რიგი, რომელიც ამ მამრავლს შეიცავს იქნება მარცხენა ნაწილის რიგის ტოლი, როცა $\frac{\partial T}{\partial y}$ გრადიენტი დილა. ეს კი გვექნება

გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირის მართობული მიმართულებით თხელ ფენაში. ამიტომ ამბობენ, რომ გვაქვს ტემპერატურული სასაზღვრო ფენი სისქით δ_T . ამ

განტოლებაშიც შესაძლებელია $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ შესაკრების უკუვადება $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

შესაკრებთან შედარებით.

ამრიგად, სითბოს გადაცემის რიგი სითბოგამტარებლობის გამო იქნება კონვექციით სითბოგადაცემის რიგისა, თუ ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის სისქე დააკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\delta_T^2 \sim \frac{1}{Re Pr}. \quad (6.17)$$

თუ შევადარებთ (6.17) და (6.15) თანაფარდობებს მივიღებთ

$$\frac{\delta_T}{\delta_R} = \frac{1}{\sqrt{Pr}} \quad (6.18)$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გავარკვიოთ პრანდტლის რიცხვის არსი. იგი გვიჩვენებს, რომ აირებში $\delta_T \sim \delta_R$, სითხეებში კი $\delta_T < \delta_R$ ე.ი. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენა თხელია ღინამიკურ ფენასთან შედარებით.

ღისიპაციის ფუნქციაში შენარჩუნებული უნდა იქნას შესაკრები $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, ე.ი.

$$\phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{1}{\delta_R^2} \quad (6.19)$$

მაშასადამე, სითბოს რაოდენობა, რომელიც ხახუნისაგან წარმოიშობა, საკმარისად მნიშვნელოვანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება პირობა

$$Ec = \frac{u_\infty^2}{c(\Delta T)_0} \sim 1.$$

საბოლოოდ, ბლანტი არაკუმშვადი ერთგვაროვანი სითხის ღინამიკური და ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის განტოლებები სტაციონარული დინების შემთხვევაში ასე ჩაიწერება:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g_x \beta (T - T_\infty) - \frac{dp}{dx}, \\ \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

რადგანაც სასაზღვრო ფენის თეორიაში წნევა მოცემულად ითვლება (იგი გარე ნაკალით განისაზღვრება), ამიტომ აქ უცნობებია u , v , T .

6.4. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის ზოგადი თვისებები

ზოგად შემთხვევაში სიჩქარისა და ტემპერატურულ კვლებს შორის არსებობს ორმხრივი კავშირი, ე.ი. ტემპერატურის განაწილება დამოკიდებულია სიჩქარის განაწილებაზე და პირიქით. იმ შემთხვევაში, როცა არქიმედის ამწევი ძალა შეიძლება უგულვებელყოთ, მაშინ ორმხრივი კავშირი ცალმხრივში გადადის და განტოლებები დამოუკიდებელნი ხდებიან.

არქიმედის ძალის უკუგდება შეიძლება, როცა დიდი სიჩქარეები გვაქვს და ტემპერატურათა სხვაობა დიდი არაა. ასეთ დინებებს იბულებითი კონვექცია ეწოდებათ. მათი საპირისპიროა თავისუფალი კონვექცია. აქ არქიმედის ძალა არსებითია. ამ დროს სიჩქარეები მცირეა, ტემპერატურათა სხვაობა კი დიდი. თავისუფალი კონვექცია წარმოიშობა დედამიწის სიმძიმის კვლში სიმკვრივის სხვაობის გამო. თუ ვერტიკალურად დაეაყენებთ გაცხელებულ ფირფიტას - წარმოიქმნება აღმავალი დინებები, რომლებიც თავისუფალ კონვექციას წარმოადგენენ.

ტემპერატურული კვლი ყოველთვისაა დამოკიდებული სიჩქარეზე. ზომიერი სიჩქარეების დროს, როცა ხახუნის სითბოსა და კუმშვის სითბოს უკუგდება შეიძლება, მაშინ ტემპერატურა პრანდტლის რიცხვზეა დამოკიდებული და ტემპერატურის ერთპარამეტრიანი განაწილება გვექნება. ეს პარამეტრი პრანდტლის რიცხვია. თუ დინების სიჩქარე მაღალია და $Ec < 1$, მაშინ უნდა გავითვალისწინოთ ხახუნის სითბო

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \text{ და კუმშვის სითბო } u \frac{\partial p}{\partial x}.$$

ამ შემთხვევაში სითხის დიფერენციალური განტოლება წრფი-
ვია, ხოლო მოძრაობის განტოლება არაწრფივი.

ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის ანგარიშისათვის უნდა
დავადგინოთ სასაზღვრო პირობები. ტემპერატურისათვის იგი
უფრო მრავალმხრივია, ვიდრე სინქარისათვის.

თუ სხეულს გარსედინება სითხე, მაშინ შეიძლება
დავასახელოთ სხეულის ტემპერატურა (მუდმივი ან ცვლადი)
და სითბოს ნაკადიც, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$q(x) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0} \quad (6.21)$$

პირობა

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0} = 0 \quad (6.22)$$

შეესაბამება სითბოიზოლირებული ფირფიტის გარსდენას. ამ
დროს ადგილი არა აქვს სითბოს ნაკადის გადაცემას
ფირფიტიდან სითხეში.

იძულებითი კონვექციის დროს არსებობს კავშირი
სითბოგადაცემასა და ხაზუნის წინააღმდეგობას შორის. მას
რეინოლდსის ანალოგიას უწოდებენ. არაკუმშვადი სითხის
ბრტყელი სასაზღვრო ფენის განტოლებების ამონახსნები
შეიძლება არაცხადად ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{u}{u_\infty} = f_1\left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{L_0} \sqrt{Re}\right), \quad \frac{v}{u_\infty} \sqrt{Re} = f_2\left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{L_0} \sqrt{Re}\right) \quad (6.23)$$

სადაც $Re = \frac{u_\infty L_0}{\nu}$ - რეინოლდსის რიცხვია. თუ ამ
გამოსახულებებს გავითვალისწინებთ, უკუვადებთ ხაზუნის
სითბოს, მაშინ შეიძლება მივუთითოთ ტემპერატურული
სასაზღვრო ფენის განტოლებების ყველა ამონახსნის ფორმა:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_{\text{კვ}} - T_\infty} = f_3\left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{L_0} \sqrt{Re, Pr}\right) \quad (6.24)$$

ზოლო სითბოს ნაკადისათვის შეიძლება დაეწეროს

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\lambda}{L_0} (T_{\text{კარ}} - T_{\infty}) \sqrt{\text{Re}_f \left(\frac{x}{L_0}, \text{Pr} \right)}. \quad (6.25)$$

მაშასადამე, ნუსელტის ადგილობრივი რიცხვისათვის გვექნება

$$\text{Nu} = \frac{q L_0}{\lambda (T_{\text{კარ}} - T_{\infty})} = \sqrt{\text{Re}_f \left(\frac{x}{L_0}, \text{Pr} \right)}. \quad (6.26)$$

ამრიგად, თუ უკუგდებულია ხახუნის სითბო, მაშინ ყველა ლამინარულ სასაზღვრო ფენისათვის ნუსელტის რიცხვი პროპორციულია რეინოლდსის რიცხვიდან კვადრატული ფესვისა, ე.ი. ნაცვლად იმისა, რომ გვექონდეს კაეშირი Nu და Re , Gr , Pr , Ec შორის გვაქვს მარტივი (6.26) დამოკიდებულება. ადგილობრივი ძაბვა კედელზე და ადგილობრივი უგანზომილებო ხახუნის კოეფიციენტი მოიცემა ფორმულებით:

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\mu u_{\infty} \sqrt{\text{Re}}}{L_0} f_5 \left(\frac{x}{L_0} \right) \\ c_f &= \frac{2\tau_0}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{2}{\sqrt{\text{Re}}} f_5 \left(\frac{x}{L_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

თუ გავითვალისწინებთ (6.27) ფორმულა (6.26)-ში მივიღებთ

$$\text{Nu} = \frac{1}{2} c_f \text{Re} f \left(\frac{x}{L_0}, \text{Pr} \right)$$

ეს არის რეინოლდსის ანალოგიის ზოგადი სახე, რომელსაც ადგილი აქვს ყველა ლამინარული სასაზღვრო ფენისათვის.

ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის თეორიასა და საერთოდ სითბოგადაცემაში მნიშვნელოვან პარამეტრს პრანდტლის რიცხვი წარმოადგენს. იგი გვიჩვენებს თუ რა ფარდობაშია იმპულსის (ხახუნის) გადატანა სითბოს (სითბოგამტარებლობა) გადატანასთან. თუ იმპულსის გადატანის უნარი, ე.ი. სიბლანტე, დიდია, მაშინ სხეულის გაეღენაც, რომელიც ამცირებს

იმპულსის გადატანას, სითხის ზედაპირზე მიკერის გამო, ასევე ღიდი იქნება. ეს გავლენა სითხის შიგნითაც ვრცელდება. მაშასადამე, დინამიკური სასაზღვრო ფენის δ_L სისქეც ღიდი იქნება. ასევეა ტემპერატურულ სასაზღვრო ფენაშიც. იძულებითი კონვექციის დროს პრანდტლის რიცხვი წარმოადგენს დინამიკური და ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის სისქეთა შეფარდების ზომას

$$\frac{\delta_T}{\delta_L} = \frac{1}{\frac{\sqrt{Re}}{\sqrt{Re Pr}}} = \sqrt{Pr}$$

როცა $Pr=1$, მაშინ ორივე სისქე ერთნაირია. როცა $Pr \rightarrow 0$, მაშინ შესაძლებელია დინამიკური სასაზღვრო ფენის უკუგდება ტემპერატურულ სასაზღვრო ფენასთან შედარებით და სიჩქარის პროფილი $u(x,y)$ შეიძლება შეიცვალოს $u_y(x)$. მაშინ (6.20)-ში ენერჯიის განტოლება გამარტივდება:

$$u_y(x) \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (Pr \rightarrow 0). \quad (6.28)$$

ე.ი. ამ ზღვრულ შემთხვევაში ტემპერატურული სასაზღვრო ფენა არ არის დამოკიდებული დინამიკურ სასაზღვრო ფენაზე.

ბრტყელი ფირფიტის გასწვრივი გარსდენის შემთხვევაში $u_y(x) = u_\infty = \text{const}$ და, თუ კედლის ტემპერატურა მუდმივია, $T_{კედ} = \text{const}$ (6.28) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{u_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

რომლის ამონახსნია

$$T = T_\infty + (T_{კედ} - T_\infty) \operatorname{erfc} \eta = T_\infty + (T_{კედ} - T_\infty) \operatorname{erfc} \frac{y}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{ax}}$$

თუ ახლა ვისარგებლებთ (6.23) ტოლობით, ვიპოვით ნუსელების რიცხვის მნიშვნელობას, როცა $Pr \rightarrow 0$

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \sqrt{\frac{u_\infty x}{\pi a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Re_x \cdot Pr}. \quad (6.29)$$

მეორე ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $Pr \rightarrow \infty$ და დაეუშვებთ, რომ მთელი ტემპერატურული ხასაზღვრო ფენი ძვეს იმ არის შიგნით, რომელშიც დინამიკური ხასაზღვრო ფენის სიჩქარე დამოკიდებულია y ცვლადზე წრფივად, ნუსელტის რიცხვისათვის მივიღებთ

$$Nu_x = \frac{x}{0,8930} \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}} \left[9a \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} dx \right]^{\frac{1}{3}} \quad (6.30)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა განიხილება ფირფიტის გარსდენა ($x_0=0$), გვაქვს

$$\tau_0 = 0,332 \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$$

და ნუსელტის რიცხვისათვის, როცა $Pr \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$Nu_x = 0,339 \sqrt{Re_x} Pr^{\frac{1}{3}}..$$

6.5. ბლანტი სითხის დინების შემთხვევაში ტემპერატურული განაწილების ზუსტი ამონახსნები

გავიანგარიშოთ ტემპერატურული კელი ბლანტი სითხის დინების სხუადასხუა შემთხვევაში. ჩვენ აეარჩევთ იმ ამოცანებს, რომლებსაც მარტივი თეორიული ამონახსნები აქვთ. ჯერ შეეჩერდეთ იმ ზუსტ ამონახსნებზე, რომლებიც მითითებული იყო შლიხტინგის მიერ. განვიხილოთ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული ბრტყელი დინებები პორიზონტალურ სიბრტყეში, რომელსაც შეუესაბამებთ xOy სიბრტყეს. სითხის ფიზიკური მახასიათებლები მუდმივად ჩავთვალოთ. მაშინ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობისა და ენერჯიის განტოლებათა სისტემას ექნება სახე:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (6.31)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (6.32)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \phi; \quad (6.33)$$

სადაც

$$\phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (6.34)$$

1. კუეტას ღინება. ეს არის ღინება ორ პარალელურ ბრტყელ კედელს შორის, როდესაც ერთი კედელი უძრავია, მეორე კი მოძრაობს თავის საკუთარ სიბრტყეში მუდმივი u_1 სიჩქარით და წნევის გრადიენტი X ღერძის გასწვრივ ნულის ტოლია. მაშინ მოძრაობის განტოლებების ამონახსნებია

$$u(y) = u_1 \frac{y}{h}, \quad v = 0, \quad p = \text{const.}$$

ტემპერატურისათვის მივიღებთ მარტივ ამონახსნებს, თუ სასაზღვრო პირობები იქნება შემდეგი სახის:

$$T = T_0, \text{ როცა } y=0; \text{ და } T = T_1, \text{ როცა } y=h, \quad (6.35)$$

ე.ი. იმ შემთხვევაში, როდესაც კედლების ტემპერატურა მუდმივია. რადგანაც კუეტას ღინებისას დისიპაციის ფუნქცია

ტოლია $\phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$, ამიტომ ტემპერატურის განაწილების

განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (6.36)$$

ეს განტოლება (6.35) სასაზღვრო პირობებში გვაძლევს ამონახსნებს, რომლებიც არ არიან დამოკიდებულნი X ცვლადზე.

რადგან $v \equiv 0$, ამიტომ ტემპერატურაც არ იქნება დამოკიდებული x -ზე, და (6.36) განტოლების მარცხენა მხარე, რომელიც გამოხატავს სითბოს გადატანას კონვექციით ნულის ტოლი იქნება. მაშასადამე, ღინების ტემპერატურის ველი განპირობებული იქნება მხოლოდ სითბოგამტარებლობით განივი მიმართულებით და ხაზუნის სითბოთი. ამ შემთხვევაში (6.36) მიიღებს სახეს:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0$$

და რადგანაც $u = u_1 \frac{y}{h}$, იგი მოგვცემს ამონახსნს

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\mu u_1^2}{2\lambda(T_1 - T_0)} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $T_1 - T_0 = (\Delta T)_0$ და უგანზომილებო

$\frac{\mu u_1^2}{2\lambda(T_1 - T_0)}$ პარამეტრი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{\mu u_1^2}{\lambda(T_1 - T_0)} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{u_1^2}{c(\Delta T)_0} = Pr \cdot Ec.$$

მაშასადამე, განხილულ შემთხვევაში, როდესაც სითბოს კონვექციას არა აქვს ადგილი, ტემპერატურის ველი დამოკიდებულია მხოლოდ $Pr \cdot Ec$ რიცხვების ნამრავლზე და თუ

აღვნიშნავთ $\frac{y}{R} = \eta$ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \eta + \frac{1}{2} Ec Pr \eta(1 - \eta). \quad (6.37)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ ტემპერატურის განაწილება ორი შესაკრების სახით წარმოიღება. პირველი შესაკრები წრფივია, მეორე კი პარაბოლური. წრფივი შესაკრები ტემპერატურის ჩვეულებრივი განაწილებაა, როდესაც ხაზუნისაგან არაეითარი სითბო არ წარმოიქმნება. ამ წრფივ განა-

წილებას ედება პარაბოლური განაწილება, რომელიც ხახუნის სითბოს ითვალისწინებს. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ თუ $T_1 - T_0 > 0$, მაშინ სითბო გადაცემა ზედა კედლიდან სითხეში წარმოებს მხოლოდ მაშინ, როცა ზედა კედლის მოძრაობის u_1 სიჩქარე ნაკლებია განსაზღვრულ მნიშვნელობაზე. მოძრაობის სიჩქარე, რომლის დროსაც ზედა კედელზე სითბო გადაცემა იცვლის მიმართულებას, განისაზღვრება პირობიდან, რომ ტემპერატურის გრადიენტი ზედა კედელზე ნულის ტოლი უნდა იყოს:

$$\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=h} = (T_1 - T_0) \frac{1}{h} + \frac{1}{2h} Ec Pr = 0, \quad \text{ე.ი. } Ec Pr < 2.$$

ამრიგად, თუ $Ec Pr < 2$, მაშინ სითბო გადადის ზედა კედლიდან სითხეში, ე.ი. ზედა კედელი ცივდება. თუ $Ec Pr > 2$, მაშინ სითბო გადადის სითხიდან კედელში, ე.ი. ზედა კედელი თბება.

განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ხახუნის შედეგად წარმოშობილი სითბო არსებით გავლენას ახდენს სითხის გამაცივებელ მოქმედებაზე, რომელიც კედელს გარსედინება. ღინების დიდი სიჩქარეების დროს შეიძლება შეიქმნას ისეთი მდგომარეობა, რომ მეტად გამთბარი კედელი, ვიდრე სითხე, კი არ გაცივდეს, არამედ გათბეს ხახუნის შედეგად წარმოქმნილი სითბოს გამო. ამ მოვლენას ფუნდამენტური მნიშვნელობა ენიჭება გარსმოღენადი კედლის გაცივების პრობლემაში დიდი სიჩქარეებით ღინების დროს.

თუ კუეტის ღინებისას ორივე კედლის ტემპერატურა ტოლია $T_1 = T_0$, მაშინ

$$T(y) - T_0 = \frac{\mu}{\lambda} \frac{u_1^2}{2} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right).$$

ხახუნის შედეგად ტემპერატურის მაქსიმალური მატება კედლების შუაშია და ტოლია

$$T_{\text{max}} - T_0 = \frac{\mu u_1^2}{8\lambda}.$$

აღსანიშნავია, რომ ტემპერატურის მაქსიმუმი არ არის დამოკიდებული კედლებს შორის მანძილზე. ეს იმით აიხსნება, რომ ზახუნის შედეგად წარმოქმნილი სითბო თანაბრად უნაწილდება ქვედა, უძრავ და ზედა, მოძრავ კედლებს.

(6.33) განტოლებიდან შეიძლება მივიღოთ საინტერესო ამონახსნი, თუ მოვითხოვთ, რომ ზახუნის შედეგად წარმოქმნილი სითბო მთლიანად გადაეცემა მხოლოდ ერთ კედელს, მეორეზე კი სითბოგადაცემა არ ხდება (კედელი სითბოიზოლირებულია).

ესევე, სითბოს არ ატარებს ქვედა კედელი, ე.ი. უძრავი კედელი, მაშინ ტემპერატურისათვის გვექნება სასაზღვრო პირობები:

$$T=T_0, \text{ როცა } y=h; \quad \frac{dT}{dy} = 0, \text{ როცა } y=0. \quad (6.39)$$

ამ სასაზღვრო პირობებში (6.33) განტოლება გვაძლევს ტემპერატურის შემდეგ განაწილებას

$$T(y) - T_0 = \mu \frac{u_1^2}{2\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad (6.40)$$

ე.ი. ადგილი აქვს კედლის ტემპერატურის გაზრდას სიდიდით:

$$T(0) - T_0 = \mu \frac{u_1^2}{2\lambda}. \quad (6.41)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევადარებთ (6.38) მნიშვნელობებს, მივიღებთ, რომ

$$T(0) - T_0 = 4(T_{\text{ავ}} - T_0), \quad (6.42)$$

ე.ი. კედლის წონასწორული ტემპერატურა 4-ჯერ მეტია იმ მაქსიმალურ ტემპერატურაზე, რომელიც სითბეს აქვს კედლების შუაში, როცა კედლების ტემპერატურები ტოლია.

ამრიგად, ზედა კედლის გაცივების კრიტერიუმი ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს

$$\begin{cases} T_1 - T_0 > T(0) - T_0 & \text{ზღ ა კელლის გაცივება,} \\ T_1 - T_0 < T(0) - T_0 & \text{ზღ ა კელლის გათბობა.} \end{cases} \quad (6.43)$$

2. მოძრაობა არხში. ტემპერატურის განაწილების ზუსტი ამონახსნი მიიღება, თუ გვაქვს სითხის მოძრაობა ორ პარალელურ კედელს შორის, როდესაც სიჩქარის განაწილება პუაზელის კანონით $u(y) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$ გამოისახება. მაშინ ტემპერატურისათვის გვექნება განტოლება:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{4\mu u_{\max}^2}{h^4} y^2.$$

თუ მოვითხოვთ, რომ ორივე კედელს ჰქონდეს ერთნაირი ტემპერატურა, ე.ი. $T = T_0$, როცა $y = \pm h$, მაშინ ტემპერატურისათვის მივიღებთ ამონახსნს:

$$T(y) - T_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu u_{\max}^2}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^4\right]. \quad (6.44)$$

ამრიგად, ტემპერატურის განაწილება მეოთხე ხარისხის პარაბოლით გამოისახება. ტემპერატურის მაქსიმალური ნამატი კედლებს შუაშია და ტოლია

$$T_{\max} - T_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu u_{\max}^2}{\lambda}. \quad (6.45)$$

6.6. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენი იძულებითი კონვექციის დროს

გავარკვიოთ ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის თვისებები იძულებითი კონვექციის დროს.

1. ბრტყელი ფირფიტა, რომელსაც გასწერივი მიმართულებით გარს ეღინება სითხე.

განვიხილოთ მუდმივი ფიზიკური მახასიათებლების მქონე არაკუმშვადი სითხის ღინება. კოორდინატთა სისტემის სათავე ავარჩიოთ ფირფიტის წინა ქიშხე, Ox ღერძი მოვათავსოთ ფირფიტის სიბრტყეში, Oy ღერძი კი ფირფიტის მართობულად. თუ არქიმედის ძალას ნულის ტოლად ჩავთვლით და გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{dp}{dx} = 0$, მაშინ სასაზღვრო ფენის განტოლებებს და სასაზღვრო პირობებს ექნებათ სახე:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.46)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.47)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (6.48)$$

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0, T = T_{\text{კვ}} \text{ ან } \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \text{ როცა } y = 0, \\ u = u_{\infty}, T = T_{\infty}, \text{ როცა } y = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

უწყვეტობისა და მოძრაობის განტოლებები არ არიან დამოკიდებული ტემპერატურაზე. ამიტომ შეიძლება პირველად ჰიდროდინამიკური ამოცანა ამოიხსნას, ხოლო შემდეგ ენერჯიის განტოლება. (6.47) და (6.48) განტოლებებიდან ჩანს, რომ არსებობს კავშირი სიჩქარისა და ტემპერატურის განტოლებებს შორის. მართლაც, თუ (6.48) განტოლებაში უკუვაგლებთ

ზახუნის სითბოს $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ და ვიგულისხმებთ, რომ არსებობს თანაფარდობა სითხის ფიზიკურ მახასიათებლებს შორის

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\lambda}{c \rho}, \quad (6.50)$$

რაც იგივეა, რომ $v = a$, ე.ი. პრანდტლის რიცხვი ტოლია 1-ის, მაშინ (6.48) განტოლება დაემთხვევა (6.47) განტოლებას, თუ ჩავსვათ T ნაცვლად u -ს. მაგრამ, მაშინ ტემპერატურული ველი იარსებებს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა შესრულდება პირობა: $T_{კვ} - T_{\infty} > 0$. (გაცივება).

ამრიგად, ბრტყელი ფირფიტის მცირე სიჩქარეებით გარსდენისას, სიჩქარის განაწილება და ტემპერატურის განაწილება სასაზღვრო ფენაში ერთმანეთს ემთხვევა, თუ პრანდტლის რიცხვი ტოლია ერთის. ამ დროს გვექნება

$$\frac{T - T_{კვ}}{T_{\infty} - T_{კვ}} = \frac{u}{u_{\infty}}, \quad Pr = 1. \quad (6.51)$$

ფირფიტის გარსდენის ამოცანის განხილვისას ბლაზიუსმა შემოიტანა უგანზობილებო ცვლადები:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_{\infty}}{vx}}, \quad u = u_{\infty} f'(\eta), \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v u_{\infty}}{x}} (\eta f' - f)$$

და მიიღო f ფუნქციისათვის განტოლება: $ff'' + 2f''' = 0$ შემდეგი სასაზღვრო პირობებით $f = f' = 0$, როცა $\eta = 0$; $f' = 1$, როცა $\eta = \infty$.

თუ u და v ფუნქციების მნიშვნელობებს შევიტანთ (6.48) განტოლებაში, მაშინ ტემპერატურის განაწილებისათვის მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{dT}{d\eta} = -Pr \frac{u_{\infty}^2}{c} f'^2. \quad (6.52)$$

ამ განტოლების ამონახსნი მიზანშეწონილია ვეძებოთ სახით:

$$T(\eta) - T_{\infty} = c\theta_1(\eta) + \frac{u_{\infty}^2 \theta_2(\eta)}{2c}. \quad (6.53)$$

აქ θ_1 არის ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო $\theta_2(\eta)$ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი. სასაზღვრო პირობები ისე უნდა შეირჩეს, რომ $\theta_1(\eta)$ გვაძლევდეს ფირფიტის გაცივების ამონახსნს, ხოლო $\theta_2(\eta)$ კი სითბოიზოლირებული კედლის ამოცანის ამონახსნს.

ამრიგად, $\theta_1(\eta)$ ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს განტოლება:

$$\theta_1' + \frac{1}{2} Pr f \theta_1 = 0 \quad (6.54)$$

და სასაზღვრო პირობები: $\theta_1=1$, როცა $\eta=0$; $\theta_1=0$, როცა $\eta = \infty$. ხოლო $\theta_2(\eta)$ ფუნქცია განისაზღვრება განტოლებიდან:

$$\theta_2' + \frac{1}{2} Pr f \theta_2 = -2 Pr f'^2; \quad (6.55)$$

და პირობიდან: $\theta_2'=0$, როცა $\eta=0$; $\theta_2=0$, როცა $\eta = \infty$.

მას შემდეგ, რაც ნაპოვნი იქნება $\theta_2(\eta)$ მნიშვნელობა, $\eta=0$ წერტილში, განვსაზღვრავთ C მუდმივს, რომელიც (6.53) ამონახსნში შედის პირობიდან: $T = T_{\infty}$ როცა $\eta=0$. იგი ტოლი იქნება:

$$C = T_{\infty} - T_{\infty} - \frac{u_{\infty}^2}{2c} \theta_2(0). \quad (6.56)$$

ა. გაცივების ამოცანა. (6.54) განტოლების ამოხსნა პირველად პოლკაუზენმა მოგვცა და იგი ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\theta_1(\eta, Pr) = \frac{\int_{\xi=\eta}^{\infty} [f'(\xi)]^{Pr} d\xi}{\int_{\xi=0}^{\infty} [f'(\xi)]^{Pr} d\xi} \quad (6.57)$$

და ამიტომ, როცა $Pr=1$, გვექნება

$$\theta_1(\eta) = 1 - f'(\eta) = 1 - \frac{u}{u_{\infty}}, \quad (6.58)$$

ე.ი. როცა პრანდტლის რიცხვი ერთის ტოლია სიჩქარისა და ტემპერატურის განაწილებები ერთმანეთს ემთხვევა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f'(0)=0,332$, შეგვიძლია განვსაზღვროთ ტემპერატურის გრადიენტი კედელზე:

$$\left(\frac{d\theta_1}{d\eta}\right)_0 = a_1(Pr) = \frac{(0,332)^{Pr}}{\int_0^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} d\xi}. \quad (6.59)$$

ამრიგად, a_1 სიდიდე მხოლოდ პრანდტლის რიცხვის ფუნქციაა. a_1 სიდიდის ზოგიერთი მიახლოებითი მნიშვნელობები ასეთია: როცა $0,6 < Pr < 10$, $a_1 = 0,332\sqrt[3]{Pr}$; როცა $Pr \rightarrow 0$, $a_1 = 0,564\sqrt{Pr}$ და როცა $Pr \rightarrow \infty$ $a_1 = 0,339\sqrt[3]{Pr}$.

(6.58) ფორმულით გამოთვლილი ტემპერატურის განაწილება გვიჩვენებს, რომ, როდესაც $Pr > 1$ ტემპერატურული სასაზღვრო ფენა თხელია პიდროდინამიკურ სასაზღვრო ფენთან შედარებით.

მაგალითად, ზეთისათვის, რომლის $Pr = 1000$, $\delta_T = \frac{1}{10} \delta_{\text{ლინ}}$

ბ. სითბოიზოლირებული კედლის ამოცანა. თუ გამოვიყენებთ მუდმივების ვარირების მეთოდს (6.55) განტოლებისათვის შეიძლება დავწეროთ ინტეგრალი:

$$\theta_2(\eta, Pr) = 2Pr \int_{\xi=\eta}^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \left(\int_0^{\xi} [f''(r)]^{2-Pr} dr \right) d\xi. \quad (6.60)$$

როცა $Pr = 1$, მაშინ (6.60) ასე ჩაიწერება

$$\theta_2(\eta) = 1 - f'^2(\eta). \quad (6.61)$$

ამრიგად, ხახუნის შედეგად წარმოქმნილი სითბო იწვევს კედლის ტემპერატურის აწევას $T_{2კედ}$ სიდიდემდე, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$T_{2კედ} - T_{\infty} = \frac{u_{\infty}^2}{2c} b(Pr), \quad (6.62)$$

სადაც

$$b(Pr) = \theta_2(0, Pr). \quad (6.63)$$

არც თუ დიდი Pr -თვის იღებენ $b \approx \sqrt{Pr}$.

თუ $Pr \rightarrow \infty$ მაშინ $b \approx 1,9 Pr^{\frac{1}{3}}$ აღსანიშნავია, რომ როცა $Pr=1$, $b=1$.

ტემპერატურის განაწილება სითბოიზოლირებულ კედელზე შეიძლება უგანზომილებო სიდიდეებში ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{T_2(\eta) - T_{\infty}}{T_{2კვლ} - T_{\infty}} = \frac{\theta_2(\eta, Pr)}{b(Pr)}.$$

C მუდმივისათვის კი გვექნება: $C = T_{კვლ} - T_{2კვლ}$. ამრიგად, (6.53)

ამონახსნი საბოლოოდ ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$T(\eta) - T_{\infty} = \left[(T_{კვლ} - T_{\infty}) - (T_{2კვლ} - T_{\infty}) \right] \theta_1(\eta, Pr) + \frac{u_{\infty}^2}{2c} \theta_2(\eta, Pr), \quad (6.64)$$

სადაც $(T_{კვლ} - T_{\infty})$ - წინასწარ მოცემულია, ხოლო $(T_{2კვლ} - T_{\infty})$

(6.62) ფორმულით განისაზღვრება. აქედან უგანზომილებო ტემპერატურის განაწილებისათვის გვექნება:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_{კვლ} - T_{\infty}} = \left[1 - \frac{Ec}{2} b(Pr) \right] \theta_1(\eta, Pr) + \frac{Ec}{2} \theta_2(\eta, Pr). \quad (6.65)$$

მიღებული გამოსახულებიდან ჩანს, რომ როცა $Ec b(r) > 2$, მაშინ ხახუნის შედეგად სასაზღვრო ფენს აქვს უფრო მაღალი ტემპერატურა, ვიდრე კედელს და ამიტომ აირი გარსმოდენადი სხეულის გაცივებას ვერ გამოიწვევს.

გ. სითბოგადაცემა. ფირფიტიდან სითხეში სითბოს ნაკადი წინა ქიმიდან x მანძილზე ტოლია:

$$q(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}} \left(\frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0}$$

თუ აქ ახალ ცვლადებზე გადავალთ, გვექნება: $q(x) = -\lambda \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}} \left(\frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0}$ მთელი ფირფიტის სითბოგადაცემა (სიგანე b ,

სიგრძე l) დროის ერთეულში ფირფიტის ორივე მხრიდან ტოლია

$$Q = 2b \int_0^{\delta} q(x) dx = 4b\lambda \sqrt{\frac{u_{\infty} \ell}{\nu}} \left(-\frac{dT}{d\eta} \right)_0.$$

გ.ა. ხახუნის სითბო არ გაითვალისწინება. ამ შემთხვევაში

$$T(\eta) - T_{\infty} = (T_{კვლ} - T_{\infty}) \theta_1(\eta).$$

ტემპერატურის გრადიენტისათვის კელელზე გვექნება:

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -a_1 (T_{კვლ} - T_{\infty}).$$

თუ გაითვალისწინებთ a_1 მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -0,332 \sqrt{Pr} (T_{კვლ} - T_{\infty}).$$

მაშასადამე,

$$q(x) = 0,332 \lambda \sqrt{Pr} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}} (T_{კვლ} - T_{\infty}) \text{ და}$$

$$Q = 1,328 b \lambda \sqrt{Pr} \sqrt{Re} (T_{კვლ} - T_{\infty}).$$

თუ $q(x)$ და Q სიდიდეებს გამოვსახავთ უგანზომილებო კოეფიციენტებით ნუსელტის რიცხვის საშუალებით გვექნება:

$$q(x) = \frac{\lambda}{x} Nu_x (T_{კვლ} - T_{\infty}), \quad Q = 2b \ell \frac{\lambda}{\ell} Nu_{\omega} (T_{კვლ} - T_{\infty}),$$

$$Nu_x = 0,564 \sqrt{Pr} \sqrt{Re_x}, \text{ როცა } Pr \rightarrow 0, \quad Nu_x = 0,332 \sqrt{Pr} \sqrt{Re_x}$$

$$\text{როცა } 0,6 < Pr < 10; \quad Nu_x = 0,339 \sqrt{Pr} \sqrt{Re_x}, \text{ როცა } Pr \rightarrow \infty.$$

გ.ბ. ხახუნის სითბო გათვალისწინებულია, მაშინ ტემპერატურის გრადიენტი კელელზე ტოლია:

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -a_1 (T_{კვლ} - T_{2კვლ}) = -0,332 \sqrt{Pr} (T_{კვლ} - T_{2კვლ}),$$

სადაც სითბოზოლირებული კელლისათვის

$$T_{2კელ} - T_{\infty} = b(Pr) \frac{u_{\infty}^2}{2c} = \sqrt{Pr} \frac{u_{\infty}^2}{2c}. \quad (6.66)$$

თუ $Pr=1$, მაშინ მანის რიცხვის შემოტანით, გვექნება:

$$T_{2კელ} = T_{\infty} \left(1 + \frac{\alpha - 1}{2} Ma^2 \right), \text{ როცა } Pr=1. \text{ სახუნისაგან წარმო-}$$

ქმნილი სითბო მკვეთრად ამცირებს სითხის გამაცივებელ მოქმედებას კედელზე. მართლაც, ხახუნი რომ არ იწვევებს სითბოს წარმოქმნას, მაშინ მთელი კედელი გადასცემდა სითხეს სითბოს ($q>0$) მანამ, სანამ $T_{კელ} > T_{\infty}$. რადგანაც ხახუნის გამო წარმოიქმნება სითბო, ამიტომ სითბოგადაცემა კედლიდან სითხეში წარმოებს მანამ, სანამ $T_{კელ} > T_{2კელ}$ ფორმულით

$q(x)=0,332\lambda\sqrt[3]{Pr} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{v_x}} (T_{კელ} - T_{\infty})$. თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ (6.66) მივიღებთ კედლიდან სითხეში ან პირიქით სითბოგადაცემის პირობას

$$T_{კელ} - T_{\infty} > \sqrt{Pr} \frac{u_{\infty}^2}{2c}, \quad T_{კელ} - T_{\infty} < \sqrt{Pr} \frac{u_{\infty}^2}{2c}.$$

გავარკვეოთ ეს პირობა რიცხვით მაგალითზე. ეთქვათ, ფირფიტას გარსედინება ჰაერი სიჩქარით $u_{\infty} = 200 \frac{მ}{წმ}$. ჰაერისათვის

$$Pr=0,7, \quad c_f = 1,006 \frac{\text{ჯ}}{\text{კგ}\cdot\text{გრად}}. \text{ ამიტომ } \sqrt{Pr} \frac{u_{\infty}^2}{2c} = 16^{\circ}. \text{ მაშა-}$$

სადამე, ჰაერის ნაკადი გააცივებს კედელს, მანამ სანამ $T_{კელ} - T_{\infty} > 16^{\circ}$. თუ ეს სხვაობა ნაკლებია 16° -ზე, მაშინ ფირფიტას გადაეცემა ჰაერის სითბო, რომელიც ხახუნის შედეგად წარმოიშობა. კერძოდ, ფირფიტის გათბობა წარმოებს მაშინაც, როცა კედელსა და გარე ღინებას ერთნაირი ტემპერატურა აქვს.

6.7. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის სხვა ავტომოდელური ამონახსნები

განვიხილოთ ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის ის ავტომოდელური ამონახსნები, რომლებიც შეესაბამებიან გარე ნაკადის სიჩქარეს $u_{გრე} = u_1 x^m$

დაუშვათ, რომ ტემპერატურის განაწილება კედელზე მოიცემა შემდეგი ხარისხოვანი ფუნქციით:

$$T_{კელ}(x) - T_{\infty} = (\Delta T)_0 = T_1 x^n$$

$n=0$ შემთხვევა შეესაბამება მულმივი ტემპერატურის მქონე კედლის სასაზღვრო ფენას. თუ $n = \frac{1-m}{2}$ - მაშინ სითბოს ნაკადი

q არის მულმივი. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $\eta = y \sqrt{\frac{u_g(x)}{\nu x}}$.

მაშინ სიჩქარისათვის გვექნება $u = u_g(x) f'(\eta)$ და f ფუნქცია დააკმაყოფილებს ფოლკნერ-სკენის მიერ მიღებულ განტოლებას:

$$f'' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1-f'^2) = 0. \quad (6.67)$$

ხოლო უგანზომილებო ტემპერატურისათვის $\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_{კელ} - T_{\infty}}$,

გვექნება განტოლება:

$$\theta'' + \frac{m+1}{2} Pr f \theta' - n Pr f' \theta = -Pr Ec x^{2m-n} f'^2 \quad (6.68)$$

სასაზღვრო პირობებით:

$\theta = 1$ როცა $\eta = 0$ და $\theta = 0$ როცა $\eta = \infty$. აქ $Ec = \frac{u_1^2}{cT}$.

(6.68) განტოლებიდან ჩანს, რომ თუ უკუვაგდებთ ხახუნის სითბოს, მაშინ ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი ნულის ტოლი გახდება და ამოცანა ყოველთვის ავტომოდელური იქნება. თუ ხახუნის სითბოს შევინარჩუნებთ, მაშინ ამოცანა ავტო-

მოდელური იქნება, თუ $2m-n=0$, რადგან მარჯვენა მხარე არ უნდა იყოს x ცვლადზე დამოკიდებული.

ამრიგად, თუ კელის ტემპერატურა მუდმივია, მაშინ ამოცანა იქნება ავტომოდელური მხოლოდ ბრტყელი კელის შემთხვევაში ($m=n=0$). თუ $2m-n=0$ პირობა შესრულებულია, მაშინ m და Pr რიცხვის ყოველი წყვილი მნიშვნელობისათვის არსებობს განსაზღვრული რიცხვი Ec , რომლის დროსაც არ ხდება არავითარი სითბოგადაცემა. ამ შემთხვევაში ტემპერატურის განაწილება კედელზე მოიცემა ფორმულით:

$$\frac{T_{2კელ} - T_{\infty}}{\frac{u^2}{2c}} = 2c \frac{T_1 x^{2m}}{u_1^2 x^{2m}} = \frac{2}{Ec_{კელ}} = b(m, Pr),$$

სადაც $b(m, Pr)$ მნიშვნელობები ცნობილია.

თუ ხახუნის სითბო უკუგდებულია, მაშინ (6.68) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\theta'' + \frac{m+1}{2} Pr f\theta' - n Pr f\theta = 0.$$

ამ განტოლების ამოხსნა m , n და Pr პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის კარგად არის ცნობილი.

გაანგარიშებულია ტემპერატურის განაწილება ლამინარულ სასაზღვრო ფენაში ნებისმიერი ფორმის სხეულზე და ზედაპირზე ტემპერატურის ნებისმიერი განაწილების დროს. ყველა ეს საკითხები გადმოცემულია შლიხტინგის მონოგრაფიაში.

6.8. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენი თავისუფალი კონვექციის დროს

დინება, რომლის გამომწვევი მიზეზია ტემპერატურის სხვაობით გამოწვეული სიმკვრივის არაერთგვაროვნება, თავისუფალ კონვექციად იწოდება. თავისუფალ კონვექციას იწვევს მაგალითად, ვერტიკალურად დაყენებული გაცხელებული

ფირფიტა ან პორიზონტალურად დაყენებული გაცხელებული ცილინდრი.

T ტემპერატურის ნაცვლად შემოვიღოთ უგანზომილებო ტემპერატურა $\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_{კვლ} - T_{\infty}}$. მაშინ სასაზღვრო ფენის (6.20)

განტოლებები ვერტიკალურად დაყენებული გამობარი ფირფიტის შემთხვევაში $\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} = 0, \quad \rho = \text{const} \end{aligned} \right\}$ იქნება:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (6.69)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{T_{კვლ} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \theta; \quad (6.70)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (6.71)$$

აქ $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, $b = \frac{1}{T_{\infty}}$ და ხახუნის სითბო მხედველობაში არაა მიღებული. თუ შემოვიტანთ დენის ფუნქციას და უგანზომილებო სიდიდეებს:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{cy}{\sqrt{x}}, \quad \psi = 4\nu cx^{\frac{3}{4}} \zeta(\eta), \quad c = \sqrt{\frac{g(T_{კვლ} - T_{\infty})}{4\nu^2 T_{\infty}}}.$$

მივიღებთ, რომ $u = 4\nu x^{\frac{1}{2}} c^2 \zeta'$, $v = \nu c x^{-\frac{1}{4}} (\eta \zeta' - 3\zeta)$,

$$\zeta'' + 3\zeta \zeta' - \zeta \zeta'^2 + \theta = 0, \quad \theta' + 3Pr \zeta \theta' = 0;$$

$$\zeta = \zeta' = 0, \quad \theta = 1, \quad \text{როცა } \eta = 0; \quad \zeta' = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{როცა } \eta = \infty.$$

ამ განტოლებების ამონახსნები პრანდტლის რიცხვის ხხადასხვა მნიშვნელობისათვის მოცემულია გრაფიკულად შლიხტინგის ზემოთ დასახელებულ მონოგრაფიაში.

1. სითბოგადაცემა. სითბოს რაოდენობა, რომელიც ფირფიტიდან გადაეცემა სითხეს x წერტილში დროის ერთეულში ფართის ერთეულში ტოლია:

$$q(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = -\lambda c x^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_0 (T_{კელ} - T_{\infty}).$$

გრაფიკულად ნაპოვნია, რომ როცა $Pr=0,733$, მაშინ

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_0 = -0,508.$$

ფირფიტისაგან სითხეში გადაცემული სითბო ტოლია

$$Q = b \int_0^L q(x) dx = 0,508 \cdot \frac{4}{3} b l^{\frac{3}{4}} c \lambda (T_{კელ} - T_{\infty}),$$

სადაც b ფირფიტის სიგანეა. თუ შემოვიღებთ ნუსელების რიცხვის საშუალო მნიშვნელობას ტოლობიდან

$$Q = b \lambda Nu_{\omega} (T - T_{\infty}),$$

მაშინ გვექნება: $Nu_{\omega} = 0,478 c l^{\frac{3}{4}} = 0,478 (Gr)^{\frac{1}{4}}$,

სადაც $Gr = \frac{g e^3 (T_{კელ} - T_{\infty})}{\nu^2 T_{\infty}}$ გრასპოფის რიცხვია, რომელიც

სითხისათვის ასე შეიძლება წარმოვიღგინოთ:

$$Gr = \frac{g l^3 \beta (T_{კელ} - T_{\infty})}{\nu^2}.$$

თავისუფალი კონვექციის სხვა ამოცანები, თეორიული და ექსპერიმენტული გამოკვლევების ანალიზი მოცემულია შლიხტინგის მონოგრაფიაში.

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ტურბულენტური
დინება

7.1. ტურბულენტური დინების თავისებურებანი. რეინოლდსის
განტოლებები

ცდები გვიჩვენებენ, რომ ბლანტი სითხეში შესაძლებელია ორი სახის დინება: ლამინარული და ტურბულენტური. ლამინარული დინების დროს სითხე შრეებად მოძრაობს, ტურბულენტური მოძრაობის დროს კი ნაკადში წარმოიშობა სიჩქარისა და წნევის მცირე ქაოსური პულსაციები ამ სიდიდეთა საშუალო მნიშვნელობების მახლობლობაში.

ტურბულენტური დინების შესწავლისას მას ორ მოძრაობად წარმოიდგენენ. ერთი მოძრაობა დროით გასაშუალებული მოძრაობაა, მეორე კი პულსაციური.

აღვნიშნოთ დროით გასაშუალებული სიჩქარე \bar{u}_i , ხოლო პულსაციური სიჩქარე u'_i . მაშინ ტურბულენტური ნაკადის სიჩქარე ტოლი იქნება:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i. \quad (7.1)$$

დროით გასაშუალებული სიჩქარე წარმოიდგინება როგორც ინტეგრალი დროის საკმარისად დიდი ინტერვალისათვის ნამდვილი სიჩქარიდან

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u dt. \quad (7.2)$$

მაშინ დროით გასაშუალებული პულსაციური სიდიდეებისათვის გვექნება:

$$\bar{u}'_i = 0, \quad \bar{p}' = 0.$$

გასაშუალები ოპერაცია ემორჩილება გარკვეული სახის წესებს. ვთქვათ, f და g ცვლადი სიდიდეებია, რომლებიც ექვემდებარებიან გასაშუალებას. გასაშუალების წესი შემდეგ თვისებებს ემყარება:

$$\overline{f} = \bar{f}, \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{f \cdot g} = \bar{f}\bar{g}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \quad \overline{\int f dx} = \int \bar{f} dx$$

ამასთან, აღსანიშნავია, რომ როცა აღებულ წერტილში სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობა დროზე არ არის დამოკიდებული, მაშინ გასაშუალებულ დინებას სტაციონარული ეწოდება, ტურბულენტურს კი - თითქმის სტაციონარული ან კვაზისტაციონარული.

ნავიე-სტოქსის განტოლებები დავწეროთ ტენზორული სახით

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (7.3)$$

სადაც σ_{ik} -ის ტენზორი არაკუმშვადი სითხისათვის განისაზღვრება ფორმულით:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (7.4)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.3) გამოსახულების მეორე განტოლებას, პირველი ასე შეიძლება ვადავწეროთ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (7.5)$$

მოვახდინოთ ამ განტოლების გასაშუალება. რადგან $\rho = \text{const}$, ამიტომ გასაშუალების შემდეგ მივიღებთ:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k}} = \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}}. \quad (7.6)$$

უწყვეტობის $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$ განტოლება¹ კი ასე გასაშუალებდა

$$\overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}} = 0. \quad (7.7)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.1) ფორმულას გვექნება

$$\overline{u_i u_k} = (\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_k} + u'_k) = \overline{u_i u_k} + \overline{u_i u'_k} + \overline{u'_i u_k} + \overline{u'_i u'_k}. \quad (7.8)$$

რადგანაც კვაზისტაციონარული ტურბულენტური მოძრაობისას პულსაციის საშუალო სიჩქარე ნულის ტოლია, ამიტომ მივიღებთ

$$\overline{u_i u_k} = \overline{u_i u'_k} + \overline{u'_i u'_k}. \quad (7.9)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.7) და (7.9) ტოლობებს, (7.6) განტოლება მოგვეცემს:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k}. \quad (7.10)$$

როგორც ვხედავთ, გასაშუალებული მოძრაობის განტოლებაში შემოვიდა დამატებითი შესაკრების

$$\sigma_{ik}^{\text{ტურბ}} = -\rho \overline{u'_i u'_k}$$

დივერგენცია. იგი სიმეტრიული ტენზორია. მას ტურბულენტური ძაბვის ტენზორი ეწოდება, რომელიც შეიძლება მატრიცის სახით ასე ჩაიწეროს

$$\sigma_{ik}^{\text{ტურბ}} = \begin{pmatrix} \overline{\rho u'_1 u'_1} & \overline{\rho u'_1 u'_2} & \overline{\rho u'_1 u'_3} \\ \overline{\rho u'_2 u'_1} & \overline{\rho u'_2 u'_2} & \overline{\rho u'_2 u'_3} \\ \overline{\rho u'_3 u'_1} & \overline{\rho u'_3 u'_2} & \overline{\rho u'_3 u'_3} \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, სითხის ტურბულენტური მოძრაობა აღიწერება (7.7) და (7.10) განტოლებებით. მათ რეინოლდსის განტოლებებს უწოდებენ. სულ გვაქვს ოთხი განტოლება. ეს ოთხი განტოლება საკმარისი იყო ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის სრული სურათის დახასიათებისათვის, რადგან შეიცავდა ოთხ უცნობს $u_i(\bar{r}, t)$ და $p(\bar{r}, t)$. ტურბულენტური მოძრაობის შემთხვევაში ეს ოთხი განტოლება საკმარისი აღარ არის, რადგანაც (7.10) განტოლება შეიცავს $\sigma_{ik}^{\text{ტურბ}}$ - ტურბულენტური ძაბვის ტენზორს, რომელსაც, როგორც სიმეტრიულ ტენზორს, ექვსი კომპონენტი გააჩნია. ამიტომ

ტურბულენტური მოძრაობის დასახასიათებლად საჭიროა ვიცოდეთ დამატებითი პირობები.

თუ გასაშუალების ანალოგიურ ოპერაციებს ჩავატარებთ სითბოგადაცემის განტოლებაში მივიღებთ სითბოს ტურბულენტური გადატანის განტოლებას.

დამატებითი პირობების ცოდნა, რომელიც შესაძლებლობას მოგვცემს რეინოლდსის განტოლებათა სისტემა ჩაიკეტოს, მხოლოდ ექსპერიმენტიდან შეიძლება განისაზღვროს. ამის გამოა, რომ ტურბულენტობის დასრულებული მათემატიკური თეორია დღესაც არ არსებობს.

ნაეიე-სტიუარტის განტოლებების ამონახსნები ფორმალურად შესაძლებელია მაშინაც, როცა რეინოლდსის რიცხვი დიდია. სინამდვილეში ლამინარული ღინება რეინოლდსის რიცხვის გარკვეული მნიშვნელობების დროს, რომელსაც კრიტიკულ მნიშვნელობას უწოდებენ, მყისიერად იცვლება. იგი მოუწესრიგებელ მკაცრად არასტაციონარულ აღრეულ მოძრაობაში გადადის. ასეთი მოძრაობა ტურბულენტურ მოძრაობად იწოდება.

მიღებაში სითხის მოძრაობისათვის რეინოლდსმა აჩვენა, რომ, როცა რეინოლდსის რიცხვი ნაკლებია გარკვეულ კრიტიკულ მნიშვნელობაზე, ე.ი. $Re < Re_{კრი}$, მაშინ მოძრაობა ლამინარულია, ხოლო, როცა $Re > Re_{კრი}$ მოძრაობას ტურბულენტური ხასიათი აქვს. რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა მხოლოდ ექსპერიმენტით შეიძლება დადგინდეს. თეორიულად მისი განსაზღვრა დღესაც არ არის ცნობილი.

ლამინარული მოძრაობის გადასვლა ტურბულენტურში გამოწვეულია შეშუოთების მიმართ ლამინარული ღინების არამდგრადობის გამო. შეშუოთების როლი შეიძლება შეასრულოს გარეგანმა რხევებმა, მილის ხორკლიანობამ, მილის შესასვლელი ნაპირების უსწორმასწორო ფორმამ და ა.შ. ამავე დროს შეშუოთების მიმართ ლამინარული ღინების მდგრადობა შეიძლება გაეზარდოს სხვადასხვა ხერხით. ლამინარული...

დინების ხასიათის შენარჩუნებას რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის გადამწყვეტი როლი ენიჭება.

ლამინარული დინების მდგრადობისა და არამდგრადობის საკითხებსა და ტურბულენტური დინების წარმოშობის მიზეზებს ჩვენ აქ არ გადმოვცემთ. დაინტერესებულ პირებს მათი გაცნობა შეუძლიათ გამოყენებულ ლიტერატურაში მითითებული მონოგრაფიებიდან.

7.2. ტურბულენტური მოძრაობა უსასრულო ფირფიტის გასწვრივ

განვიხილოთ ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული მოძრაობა უსასრულო ფირფიტის გასწვრივ. კოორდინატთა ხისტემა ისე ავარჩიოთ, რომ Ox ღერძი ფირფიტის გასწვრივ იყოს მიმართული, ხოლო Oy ღერძი კი მის მართობულად. დაეუშვათ $u_2 = u_3 = 0$ და რომ სიჩქარის $u_1 = u$ კომპონენტი დამოკიდებული იყოს მხოლოდ y ცვლადზე. ვერ განვიხილოთ ლამინარული დინება. რადგანაც წნევა მოძრაობის მთელ არეში მუდმივია, ამიტომ ნაეიე-სტოქსის განტოლება მოგვცემს

$$\frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

მისი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=u} = C = \tau_{კედ}.$$

აქედან სიჩქარისათვის გვექნება

$$u = \frac{\tau_{კედ}}{\mu} y + C_1.$$

რადგანაც $u=0$, როცა $y=0$, ამიტომ $C_1=0$, ე.ი. კედელზე სიჩქარე ნულის ტოლი ხდება და ამრიგად, ლამინარული ნაკადისათვის უსასრულო ფირფიტაზე სიჩქარის წრფივი განაწილება გვაქვს

$$u = \frac{\tau_{\text{აღ}}}{\mu} y. \quad (7.11)$$

ტურბულენტური ღინების შესასწავლად ვისარგებლოთ რეინოლდსის განტოლებებით. დასმული ამოცანის შემთხვევაში (7.10) მოგვცემს:

$$\frac{d}{dy} \left[\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - (\overline{\rho u'v'}) \right] = 0,$$

სადაც $u'_1 = u'$, $u'_2 = v'$. ამ განტოლების ინტეგრირება გვაძლევს

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \tau' = C_2.$$

აქ შემოტანია ალნიშვნა $(-\overline{\rho u'v'}) = \tau'$. C მუდმივის განსაზღვრისათვის გამოიყენოთ სასაზღვრო პირობა. კედელზე სიჩქარის პულსაციები და შესაბამისად ტურბულენტური ხახუნის τ' ნულის ტოლი ხდება. ამიტომ

$$C_2 = \mu \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=0} = \tau_{\text{აღ}}.$$

ამრიგად გვექნება

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \tau' = \tau_{\text{აღ}}. \quad (7.12)$$

განვიხილოთ თითოეული შესაკრები ცალ-ცალკე. ბლანტი ხახუნის დაბევა საკმარისად მნიშვნელოვანია კედლის მახლობლობაში და კედლიდან მანძილის გაზრდით თანდათან მცირდება. ტურბულენტური ხახუნის დაბევა პირიქით, კედლის მახლობლობაში მცირეა და კედლიდან მანძილის გაზრდით იზრდება. კედლის მახლობელ არეს, სადაც ხახუნის დაბევა მნიშვნელოვანია, ხოლო ტურბულენტური დაბევა მცირე, ლამინარულ ქვეშევსე უწოდებენ.

იმისათვის, რომ შევისწავლოთ სიჩქარის პროფილი იმ არეში, რომელშიც ჭარბობს ტურბულენტური დაბევა, უკუვაგლოთ (7.12)

გამოსახულებაში $\mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ შესაკრები. მივიღებთ

$$\tau' = \tau_{კელ} = -\overline{\rho u'v'} \quad (7.13)$$

ბლანტი ხახუნის მსგავსად ტურბულენტური ძაბვა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$\tau = A \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho \frac{A}{\rho} \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy},$$

სადაც A და ε ტურბულენტური სიბლანტის აბსოლუტური და კინემატიკური კოეფიციენტებია.

თავისი ფიზიკური არსით A და ε სიდიდეები μ და ν კოეფიციენტების ანალოგებია, მაგრამ მათგან მკვეთრად განსხვავდებიან.

თუ მოლექულური გადატანის μ და ν კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრებიან სითხეების ფიზიკურ თვისებათა და მათი მდგომარეობით (ტემპერატურით და წნევით) და არ არიან დამოკიდებული ნაკადების დინამიკურ თვისებებზე, ტურბულენტური გადატანის კოეფიციენტები განისაზღვრებიან მოძრაობის სტატისტიკური თვისებებით. თავიანთი სიდიდით ისინი დიდად აღემატებიან მოლექულური გადატანის კოეფიციენტებს და, რომლებიც ყოველთვის დადებითნი არიან. ხოლო ტურბულენტური გადატანის კოეფიციენტები ზოგჯერ შეიძლება უარყოფითიც გახდნენ.

უარყოფით სიბლანტიანი ტურბულენტური მოძრაობები, რომლებსაც ადგილი აქვს ატმოსფეროსა და ოკეანეში, ჯერ კიდევ საკმარისად არ არის შესწავლილი.

(7.13) ფორმულას არ შეიძლება პრაქტიკული მნიშვნელობა აქონდეს, რადგანაც დღემდე არ არის ცნობილი მკაცრი კავშირი ნაკადის პულსაციურ სიჩქარეებსა და გასაშუალებულ სიჩქარეებს შორის. ამიტომ ასეთი კავშირის დასამყარებლად იყენებენ განზომილებათა თეორიას.

დაეუშვათ, რომ ხახუნის ტურბულენტური ძაბვის ზოგადი წარმოდგენა შეიძლება სახით

$$\tau' = \rho^a \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^b \ell^c,$$

სადაც ℓ მახასიათებელ სიგრძეს - ალრევის სიგრძეს უწოდებენ. თუ ამ გამოსახულებებში შევიტანთ განზომილებებს, მივიღებთ

$$\frac{MLT^{-2}}{L^2} = \left(\frac{M}{L^3} \right)^a \left(\frac{LT^{-1}}{L} \right)^b L^c.$$

აქედან $a=1$, $b=2$, $c=2$. ამრიგად, ხახუნის ტურბულენტური ძაბვისათვის საბოლოოდ გვექნება

$$\tau' = \tau_{\text{კლ}} = \rho \ell^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (7.14)$$

ეს ფორმულა პირველად პრანდტლის მიერ იყო მიღებული და მას პრანდტლის ფორმულას უწოდებენ.

ალრევის ℓ სიგრძე ახასიათებს ტურბულენტობის მასშტაბს, ანუ ტურბულენტურ გადატანაში მინაწილე სითხის მოცულობის საშუალო ზომას. ℓ -სიდიდისათვის იღებენ სხვადასხვა გამოსახულებებს. მათ შორის უმარტივესია $\ell = ky$. მისი (7.14) შეტანით გვექნება

$$\tau' = \tau_{\text{კლ}} = k^2 \rho y^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2.$$

თუ ამ განტოლებას ვაინტეგრებთ მივიღებთ სიჩქარის პროფილს ტურბულენტური მოძრაობის შემთხვევაში

$$\bar{u} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_{\text{კლ}}}{\rho}} \ln y + C_3. \quad (7.15)$$

ამრიგად, ტურბულენტური მოძრაობის დროს სიჩქარის პროფილი ლოგარითმულია და არსებითად განსხვავდება ლამინარული მოძრაობის სიჩქარის პროფილისაგან, რომელიც y ცვლადის წრფივი ფუნქციაა.

ფირფიტის გარსდენისას მის მართობულად მდებარე მთელ ნაკადს სამ არედ ყოფენ: 1. არე, რომელიც ფირფიტის ზედაპირის უახლოესი არეა და სადაც სჭარბობს ბლანტი ხახუნი, 2. არე, რომელიც ფირფიტის ზედაპირიდან მოშორებულია და სადაც ჭარბობს ტურბულენტური ხახუნი და 3. არე, რომელშიც ბლანტი (მოლეკულური) და ტურბულენტური ხახუნი თანაზომადნი არიან. ექსპერიმენტები ამ სამი არის არსებობას ადასტურებენ. თუ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ლამინარული ქვეშრით და ვისარგებლებთ განზომილებათა თეორიით, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ამ ქვეშრის სისქე ასე შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$\delta_{ლა} = \alpha \eta^a \rho^b \tau^c. \quad (7.16)$$

განზომილებათა თეორიის გამოყენებით განისაზღვრება ხარისხის მაჩვენებლები:

$$a=1, \quad b=c=-\frac{1}{2}.$$

აქედან ლამინარული ქვეშრის სისქისათვის გვექნება

$$\delta_{ლა} = \alpha \frac{\eta}{\sqrt{\rho \tau_{კლ}}} = \alpha \frac{v}{\sqrt{\frac{\tau_{კლ}}{\rho}}}. \quad (7.17)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_{კლ}}{\rho}} \quad \text{და} \quad \frac{v}{v^*} = \ell^*.$$

v^* - სიდიდეს, რომელსაც სიჩქარის განზომილება აქვს და განისაზღვრება კელზე ხახუნი ძალითა და სიმკვრივით, ჩვეულებრივ დინამიკურ სიჩქარეს უწოდებენ, ხოლო ℓ^* , რომელსაც სიგრძის განზომილება აქვს - დინამიკურ სიგრძეს. უკანასკნელიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{v^* \ell^*}{v} = \text{Re}^* = 1,$$

ხოლო ლამინარული ქვეშრის სისქისათვის გვექნება

$$\delta_{ლაჰ} = \alpha \frac{v}{v^*} = \alpha l^* .$$

რადგანაც ლამინარულ ქვეშრეში სიჩქარე y (ველადის წრფივი ფუნქციაა, ამიტომ (7.11) გამოყენებით, სიჩქარისათვის ქვეშრის საზღვარზე, მივიღებთ

$$\bar{u}_{ლაჰ} = \frac{\tau_{კედ}}{\eta} \delta_{ლაჰ} = \alpha \frac{\tau_{კედ}}{\eta} \cdot \frac{v}{\sqrt{\frac{\tau_{კედ}}{\rho}}} = \alpha \sqrt{\frac{\tau_{კედ}}{\rho}} = \alpha v^* . \quad (7.18)$$

ამრიგად, მიღებულია სასაზღვრო პირობები

$$\bar{u} = \bar{u}_{ლაჰ} = \alpha v^* , \quad \text{როცა } y = \delta_{ლაჰ} = \alpha l^* .$$

მათი გამოყენება საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ (7.15) გამოსახულებაში შესული C_3 მუდმივი:

$$\bar{u}_{ლაჰ} = \frac{v^*}{k} \ln \delta_{ლაჰ} + C_3 ,$$

საიდანაც

$$C_3 = \bar{u}_{ლაჰ} - \frac{v^*}{k} \ln \delta_{ლაჰ} = v^* \left(\alpha - \frac{1}{k} \ln \alpha \frac{v}{v^*} \right) = v^* \left(1 - \frac{1}{k} \ln \alpha \right) - \frac{v^*}{k} \ln \frac{v}{v^*} .$$

საბოლოოდ სიჩქარისათვის გვექნება:

$$\frac{\bar{u}}{v^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{yv^*}{v} + \left(\alpha - \frac{1}{k} \ln \alpha \right) . \quad (7.19)$$

თუ ამ გამოსახულებაში ნატურალური ლოგარითმებიდან ათობით ლოგარითმებზე გადავალთ, მივიღებთ

$$\frac{\bar{u}}{v^*} = \frac{2,303}{k} \lg \frac{yv^*}{v} + \left(\alpha - \frac{2,303}{k} \lg \alpha \right) .$$

ამრიგად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ α და k - მუდმივებია, მივიღებთ სიჩქარის განაწილების კანონს ტურბულენტურ ნაკადში

$$\frac{\bar{u}}{v^*} = A \lg \frac{yv^*}{v} + B ,$$

სადაც A და B მუდმივები ტურბულენტური მოძრაობის ღამახასიათებელი α და k მუდმივებით შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$A = \frac{2,303}{k}, \quad B = \alpha - \frac{2,303}{k} \lg \alpha .$$

7.3. ტურბულენტური მოძრაობა წრიულ მილში

ღამინარული მოძრაობის დროს თეორიული ამონახსნები კარგად ემთხვევა ექსპერიმენტულ მონაცემებს. ტურბულენტური მოძრაობის დროს თეორიული ამონახსნები არ არსებობს, ამიტომ ყველა ფორმულა და კანონზომიერება დადგენილია ან ცდების საფუძველზე ან აქეთ ემპირიული ხასიათი.

სიჩქარის განაწილების კანონის დასადგენად წრიული კვეთის მილში ი. ნიკურაძემ, ფაქიზად ჩატარებული ცდების ანალიზის საფუძველზე იპოვა k და α უნივერსალური მუდმივების მნიშვნელობები:

$$k=0,45, \quad \alpha=11,5.$$

ცდები ტარდებოდა რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობისათვის, რომელიც ტოლი იყო $Re = \frac{u_{max} d}{\nu} = 3,24 \cdot 10^6$. მის მიერ მიღებული იქნა სიჩქარის ლოგარიტმული პროფილი

$$\frac{\bar{u}}{v^*} = 5,75 \lg \frac{v^* y}{\nu} + 5,5. \quad (7.20)$$

ამ ფორმულით გამოთვლილ იქნა სიჩქარის მაქსიმალური და საშუალო მნიშვნელობები და სითხის ხარჯი. მაქსიმალური u_{max} სიჩქარე მიიღწევა მილის ღერძზე, ე.ი. როცა $y=r_0$. მაშინ (7.20)-დან მივიღებთ

$$\frac{u_{max}}{v^*} = 5,75 \lg \frac{v^* r_0}{\nu} + 5,5. \quad (7.21)$$

თუ (7.20)-ში გავითვალისწინებთ (7.21) იგი ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{\bar{u}}{v^*} = \frac{u_{\max}}{v^*} + 5,75 \lg \frac{y}{r_0} = \frac{u_{\max}}{v^*} + \frac{1}{k} \ln \frac{y}{r_0}. \quad (7.22)$$

სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობისათვის კი გვექნება:

$$u_{\text{საშ}} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{2\pi}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \bar{u}(r_0 - y) dy = 2 \int_0^1 \bar{u} \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) d\left(\frac{y}{r_0}\right),$$

$$\frac{u_{\text{საშ}}}{v^*} = \frac{u_{\max}}{v^*} + \frac{2}{k} \int_0^1 \ln \frac{y}{r_0} \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) d\left(\frac{y}{r_0}\right) = \frac{u_{\max}}{v^*} - 3,75. \quad (7.23)$$

სიჩქარის შედარებით მარტივი და არა უნივერსალური პროფილი ტურბულენტური მოძრაობის დროს მიღში ხარისხოვანი პროფილია. ამ პროფილს, როცა $Re \approx 5 \cdot 10^4$ აქვს სახე

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad (7.24)$$

ან უფრო ზოგადად

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n.$$

ექსპერიმენტებმა გეჩვენეს, რომ ხარისხის n მაჩვენებელი დამოკიდებულია Re და მისი გაზრდით იგი კლებულობს. რეინოლდსის რიცხვის ყოველი მნიშვნელობისათვის შეიძლება შეირჩეს ხარისხის n მაჩვენებელი ისე, რომ სიჩქარის პროფილი მაქსიმალურად დაემთხვეს ექსპერიმენტულ მონაცემებს.

სიჩქარის პროფილსა და წინააღმდეგობის კანონს შორის არსებობს ცალსახა დამოკიდებულება, ე.ი. სიჩქარის ყოველ პროფილს შეესაბამება თავისი წინააღმდეგობის კანონი და პირიქით, ყველაზე უნივერსალური კანონი, რაილეიცი,

გამოსადეგია რეინოლდსის რიცხვის მთელი დიაპაზონისათვის წინააღმდეგობის ლოგარითული კანონია, რომელსაც აქვს სახე

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \cdot \lg(\text{Re} \sqrt{\lambda}) + B_1 ,$$

სადაც λ - წინააღმდეგობის კოეფიციენტი.

ი. ნიკურაძემ ცდების საფუძველზე დაამტკიცა, რომ ყველაზე ახლოს ექსპერიმენტთან არის წინააღმდეგობის ის კანონი, რომელსაც აქვს სახე

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{\text{Re}^{0,237}} . \quad (7.25)$$

7.4. ტურბულენტური სასაზღვრო ფენი ფირფიტაზე

სასაზღვრო ფენში და მილში ტურბულენტურ მოძრაობას შორის არსებობს გარკვეული მსგავსება და გარკვეული განსხვავება. მსგავსება მდგომარეობს იმაში, რომ მილის შიგა კედლის ახლობელ არეში და სასაზღვრო ფენში ღინებებს შორის განსხვავება არ არსებობს. არსებითი განსხვავება მხოლოდ გარე არეში გვაქვს.

მოძრაობისა და იმპულსის განტოლებების სახე ტურბულენტური მოძრაობის დროს სასაზღვრო ფენში ისეთივეა, როგორც ლამინარული მოძრაობის შემთხვევაში, მაგრამ δ , δ^* , δ^{**} და τ_w მნიშვნელობები სხვაა.

ტურბულენტური სასაზღვრო ფენის ნახევრადემპირიულ თეორიაში მიღებულია ანალოგია მილში და სასაზღვრო ფენში ტურბულენტურ მოძრაობათა შორის: 1. წნევა დამოკიდებულია მხოლოდ გასწვრივ კოორდინატზე და არ არის დამოკიდებული მილის რადიუსზე და სასაზღვრო ფენში კედლიდან მანძილზე ნორმალის გასწვრივ; 2. ორივე შემთხვევაში კედელზე სიჩქარე ნულის ტოლია; 3. მილში სიჩქარის უდიდესი მნიშვნელობა მიიღწევა ღერძზე, ხოლო სასაზღვრო ფენში მის საზღვარზე.

ვიპოვოთ წინააღმდეგობა გასწვრივად გარსმოღუნად ფირფიტაზე, როდესაც სიჩქარეს ხარისხოვანი პროფილი გააჩნია

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n$$

თუ აღვნიშნავთ $\eta = \frac{y}{\delta}$ მაშინ δ^{**} სიღიღისათვის მივიღებთ მნიშვნელობას

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 (\eta^n - \eta^{2n}) d\eta = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \delta.$$

როცა $n = \frac{1}{7}$

$$\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta. \quad (7.26)$$

$\tau_{\text{კლ}}$ და δ სიღიღეებს შორის კავშირისათვის გვექნება

$$\tau_{\text{კლ}} = 0,0225 \rho u_0^2 \left(\frac{u_0 \delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left(\frac{u_0 \delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

ეს უკანასკნელი ინტეგრების შემდეგ მოგვცემს

$$\delta = 0,37x \left(\frac{u_0 x}{\nu}\right)^{-\frac{1}{5}},$$

ხოლო (7.26) კი

$$\delta^{**} = 0,036x \left(\frac{u_0 x}{\nu}\right)^{-\frac{1}{5}}.$$

აქედან ჩანს, რომ ტურბულენტური სასაზღვრო ფენა ხასიათდება სისქეებით, რომლებიც პროპორციულნი არიან $x^{\frac{4}{5}}$.

როცა ლამინარულ სასაზღვრო ფენში ისინი პროპორციულნი არიან $x^{\frac{1}{2}}$. მაშასადამე, ტურბულენტური სასაზღვრო ფენის სისქე იზრდება x კოორდინატით უფრო ინტენსიურად, ვიდრე ლამინარული სასაზღვრო ფენის სისქე.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. დ. დოლიძე. ჰიდროაერომექანიკა. თსუ გამომცემლობა, 1960.
2. გ. ჭილაშვილი. თეორიული ფიზიკა, II ნაწ., ჰიდრომექანიკა. თსუ გამომცემლობა, 1979.
3. ჯ. შარიქაძე, ლ. აზმაიფარაშვილი, ვ. შარიქაძე. იდეალური სითხის მექანიკა, "ვერიკა", 1993.
4. С. В. Валландер. Лекции по гидроаэромеханике. ЛГУ, Л., 1978.
5. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика Т. 1;2 М-Л., физматгиз, 1963.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика, VI, Гидродинамика, М., Наука, 1986.
7. Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М. Наука, 1973.
8. И. Л. Повх. Техническая гидромеханика, Л. Машиностроение, 1976.
9. Л. И. Седов. Механика сплошной среды. т. I, II. М., Наука, 1976.
10. Н. А. Слезкин. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.; ГИТТЛ, 1955.
11. С. М. Тарг. Основные задачи теории ламинарных течений. М., ГИТТЛ, 1951.
12. Д. Н. Хант. Динамика несжимаемой жидкости. М., Мир, 1984.
13. В. Я. Шкадов, З. Д. Запryanov. Течения вязкой жидкости. М., МГУ, 1984.

შინაარსი

შესავალი

თავი პირველი

ბლანტი სითხის მოძრაობის ძირითადი განტოლებები.....	6
1.1. ინდივიდუალური წარმოებული. დროზე დამოკიდებული მოცულობითი ინტეგრალის დროით წარმოებული	6
1.2. მასის შენახვის კანონი. უწყვეტობის განტოლება	8
1.3. მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი	10
1.4. კოშის ფორმულა	11
1.5. სითხის მოძრაობის განტოლება ძაბვებში	13
1.6. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონი.....	14
1.7. ენერჯიის შენახვის კანონი	16
1.8. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორი	20
1.9. დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი	22
1.10. კავშირი ძაბვისა და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორებს შორის.....	25
1.11. გარემოს მდგომარეობის კანონები	26
1.12. თხევადი გარემოს მოდელები	28
1.13. ნაეიე-სტოქსის განტოლებები	29
1.14. საწყისი და ხასაზღვრო პირობები	31
1.15. იდეალური სითხე. საწყისი და ხასაზღვრო პირობები ...	34
1.16. მოძრაობის განტოლებები მრულწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში.....	35
1.17. ცილინდრული კოორდინატები.....	39
1.18. სფერული კოორდინატები.....	40

თავი მეორე

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის ძირითადი თვისებები.....	43
2.1. ბლანტი სითხის პიდროდინამიკის ზოგადი ამოცანა.....	43
2.2. ბლანტი სითხეში პოტენციალური მოძრაობის შეუძლებლობა	45
2.3. მექანიკური ენერჯიის დისიპაცია ბლანტი სითხეში	47

2.4. ბლანტი სითხის ღინებების მსგავსება	52
2.5. სითხეში მოძრავ სხეულზე სითხის ძალური მოქმედების გამოხატველი ფორმულები.....	55

თავი მეხამე

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლებების ზუსტი ამოხსნები	59
3.1. ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული ღინება....	59
3.2. ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული ღინება ორ პარალელურ კედელს შორის.....	64
3.3. სითხის ღინება წრეული კვეთის მილში.....	68
3.4. ბლანტი სითხის სწორხაზოვანი მოძრაობა წრეულ რგოლში	71
3.5. თავისუფალი საზღვრის მქონე ბლანტი არაკუმშვადი სითხის წრფივი პარალელური მოძრაობა	73
3.6. ბლანტი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული წრეული მოძრაობა ორ მბრუნავ ცილინდრს შორის	75
3.7. ბლანტი არაკუმშვადი სითხის არასტაციონარული მოძრაობა	77
3.8. არასტაციონარული მოძრაობა მილებში.....	82
3.9. ცილინდრის არასტაციონარული ბრუნვა.....	87
3.10. არაწრფივი ავტომოდელური ამოხსნები. სითხის ღინება კრიტიკული წერტილის მახლობლობაში.....	89
3.11. ღინება მბრუნავი დისკის მახლობლობაში	91
3.12. სითხის ღინება კედლის ფორონების გათვალისწინებით.....	95

თავი მეოთხე

ბლანტი სითხის მოძრაობა რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში.....	97
4.1. სტოქსის მიახლოება.....	98
4.2. ბლანტი სითხის ბრტყელ-პარალელური სტაციონარული მოძრაობა.....	99
4.3. წრეული ცილინდრის მოძრაობა	103

4.4. სტოქსის პარადოქსი.....	107
4.5. სითხის მოძრაობა ბრტყელ დიფუზორში	109
4.6 სფეროს მოძრაობა უსასრულო სითხეში.....	111
4.7. სფეროს ბრუნვა ბლანტ სითხეში.....	117
4.8. ოზენის მიახლოება	119
4.9. ოზენის განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა აგება	122
4.10. ცილინდრის გარსდენის ამოცანა.....	125
4.11. სფეროს გარსდენის ამოცანა	131
თავი მეხუთე	
სასაზღვრო ფენის თეორია	143
5.1. სასაზღვრო ფენი და გარე ნაკადი. სასაზღვრო ფენის განტოლებები	143
5.2. გამოდენისა და იმპულსის დაკარგვის სისქე	152
5.3. ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენა ფირფიტაზე	156
5.4. სასაზღვრო ფენის განტოლებების ავტომოდელური ამონახსნები	161
5.5. კარმანის ინტეგრალური თანაფარდობა	165
თავი მეექვსე	
ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის თეორია.....	177
6.1. სითბოგადაცემის ძირითადი განტოლებები.....	177
6.2. მსგავსების თეორია სითბოგადაცემაში	178
6.3. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის განტოლებები	182
6.4. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის ზოგადი თვისებები	185
6.5. ბლანტი სითხის დინების შემთხვევაში ტემპერატურული განაწილების ზუსტი ამონახსნები	189
6.6. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენი იბულებითი კონვექციის დროს	194
6.7. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის სხვა ავტომოდელური ამონახსნები	202
6.8. ტემპერატურული სასაზღვრო ფენი თავისუფალი კონვექციის დროს	203

თავი მეშვიდე

ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ტურბულენტური ღინება.....	206
7.1. ტურბულენტური ღინების თავისებურებანი.	
რეინოლდსის განტოლებები	206
7.2. ტურბულენტური მოძრაობა უსასრულო ფირფიტის გასწორივ	210
7.3. ტურბულენტური მოძრაობა წრიულ მილში	216
7.4. ტურბულენტური სასაზღვრო ფენი ფირფიტაზე.....	218
გამოყენებული ლიტერატურა	221

გამომცემლობის რედაქტორი ნ. ცაგარეიშვილი
კორექტორი მ. ქუშინიანი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.12.97. საბეჭდი ქაღალდი
60x84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 14,25. სააღრიცხვო-
საგამომცემლო თაბახი 8,05.

შეკვეთა N 49

ტირაჟი 300

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 380028, თბილისი,
ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14.

გამომცემლობა „მერიდიანი“, „კაბა-ონი“
თბილისი, გურამიშვილის გამზ. 74