

თემურ ჩილაჩავა

ცნობილი პიკიზური

# მათემატიკური მოდელირება

თბილისი  
2008

UDC (უაკ) 519.87+53:51+330.4

ჩ-601

წიგნში გადმოცემულია მათემატიკური მოდელირების მნიშვნელოვანი საკითხები. განხილულია ფართოდ და ნაკლებად ცნობილი, ძირითადად უწყვეტი, ასევე დისკრეტული, სტოქასტური და ლოგიკური მოდელები, აგრეთვე ორიგინალური მოდელები ეკოლოგიიდან ასტროფიზიკამდე.

ნაშრომი განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ზუსტი, საბუნებისმეტყველო, საინჟინრო და ეკონომიკური პროფილის ფაკულტეტების ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება აგრეთვე შესაბამისი დარგის დოქტორანტებისათვის და მეცნიერ-თანამშრომლებისათვის, რომლებიც თავიანთ სამეცნიერო, თუ პრაქტიკულ საქმიანობაში იყენებენ მათემატიკურ და კომპიუტერულ მოდელირებას.

**რედაქტორი** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
პროფესორი **ჰამლეთ მელაძე**

**რეცენზენტები** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
პროფესორი **დავით გორდუჯიანი**

ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
პროფესორი **თამაზ ოზბაძე**

© თქვენი ჩილაჩავა, ცალა ძიძიგური. მათემატიკური მოდელირება.

440 გვ. თბილისი. 2008.

ISBN 978-9941-0-0746-0

# ს ა რ ჩ ე ვ ი

მპ.

ფინანსიტყვარება . . . . .	7
შესავალი . . . . .	9
<b>თავი I. მათემატიკური მოდელირება</b>	
<b>ეპოლოგიაში . . . . .</b>	<b>17</b>
§1.1. ბალანსის მეთოდი. მალთუსის მოდელი . . . . .	19
§1.2. პოპულაციის ევოლუციის ფერხიულსტ-პერლის მოდელი კონკურენციის გათვალისწინებით . . . . .	28
§1.3. პოპულაციის ევოლუციის დისკრეტული მოდელები . . . . .	36
§1.4. მატრიცული თეორია დისკრეტულ მოდელებში . . . . .	49
§1.5. ხის ზრდის მათემატიკური მოდელი . . . . .	60
§1.6. მცენარეთა ფოთლის ზრდის მათემატიკური მოდელი . . . . .	64
§1.7. ტერმინატორის (ჭიანჭველათა ბუდის) გარეთ ჭიანჭველათა სიმკვრივის განშაზღვრული მათემატიკური მოდელი . . . . .	67
§1.8. კასპიის ზღვის მოდელი . . . . .	74
§1.9. ბიოცენოზის დინამიკა . . . . .	77
1.9.1. ორი პოპულაციის (ანტაგონისტების) განვითარების მათემატიკური მოდელი . . . . .	79
1.9.2. ორი პოპულაციის - "მტაცებელი-მსხვერპლი"-ს განვითარების მათემატიკური მოდელი. . . . .	84
1.9.3. მტაცებელი-მსხვერპლი"-ს მოდელი შიგასახეობათა კონკურენციის გათვალისწინებით . . . . .	92
1.9.4. ამოცანა ინსექტიციდებით შწერების მოწამულის შესახებ . . . . .	95
§1.10. არასასურველ სახეობასთან ბრძოლის კურასაოს მოდელი . . . . .	99
<b>თავი II. მათემატიკური მოდელირება</b>	
<b>მედიცინაში . . . . .</b>	<b>102</b>
§ 2.1. ბეილის არაწრფივი ეპიდემიოლოგიური მოდელები . . . . .	103
2.1.1. ეპიდემიის უმარტივესი მათემატიკური მოდელი . . . . .	103
2.1.2. ეპიდემიის მოდელი მკურნალობის გათვალისწინებით . . . . .	105

2.1.3. ეპიდემიის მოდელები ბუნებრივი გამრავლებისა და ინფიცირებულთა ლეტალურობის გათვალისწინებით . . . . .	107
2.1.4. ეპიდემიის მოდელები ინფექციის გადამტანების გათვალისწინებით . . . . .	108
§ 2.2. წრფივი ეპიდემიოლოგიური მოდელი . . . . .	114
§ 2.3. იმუნური პროცესების მათემატიკური მოდელირება . . . . .	119
2.3.1. ინფექციური დაავადების მათემატიკური მოდელი . . . . .	120
2.3.2. ინფექციური დაავადების უმარტივესი მათემატიკური მოდელი . . . . .	123
2.3.3. იმუნოლოგიის ერთი დისკრეტული მოდელი ხანგრძლივი ავადყოფობის შემთხვევაში . . . . .	125
2.3.4. გლუკოზით შიგაენური კვების მოდელი . . . . .	128
§2.4. ინფექციური დაავადების მათემატიკური მოდელი . . . . .	130
§2.5. შაქრის დიაბეტის მათემატიკური მოდელი . . . . .	145
§2.6. გულის ენერგეტიკული მოდელი . . . . .	149
§2.7. ოპტიმალური მკურნალობის მათემატიკური მოდელი . . . . .	156
§2.8. სისხლის ჯგუფის კლასიფიკაცია. ლოგიკური მოდელები . . . . .	159

### თავი III. მათემატიკური მოდელირება

#### ბუნებისმეტყველებაში . . . . . 163

§3.1. ყავის გაცივების პროცესის მათემატიკური მოდელი . . . . .	164
§3.2. კრიმინალისტიკის ამოცანა . . . . .	168
§3.3. ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მოდელი . . . . .	174
§3.4. პარამუტით ვარდნის მათემატიკური მოდელი . . . . .	180
§3.5. ჰარმონიული ოსცილატორის მოდელი . . . . .	185
§3.6. მათემატიკური მოდელირება ქიმიურ რეაქციებში . . . . .	190
§3.7. შაქრის ინვერსიის მათემატიკური მოდელი . . . . .	195
§3.8. ბიოქიმიური პროცესების მათემატიკური მოდელი . . . . .	199
§3.9. ბუნებისმეტყველების ზოგიერთი მათემატიკური მოდელები . . . . .	204

### თავი IV. საომაკო მოქმედებების

#### მათემატიკური მოდელირება . . . . . 215

§4.1. ლანჩესტერის განზოგადებული მოდელი. რეგულარული ჯარების ბრძოლის მოდელი . . . . .	215
---	-----

§4.2. პარტიზანული შენაერთების ურთიერთდაპირისპირების მოდელი . . . . .	225
§4.3. რეგულარული ჯარის და პარტიზანული შენაერთის ბრძოლის მოდელი . . . . .	230
§4.4. საზღვაო საბრძოლო მოქმედებების დროს ნაღმების გამოყენების მოდელი . . . . .	235

**თავი V. მათემატიკური მოდელები  
ეკონომიკაში . . . . . 241**

§5.1. წრფივი დაპროგრამება. სატრანსპორტო ამოცანა მინიმალური დანახარჯების შესახებ . . . . .	245
§5.2. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების გრაფიკული ამოხსნა. მაქსიმალური მოგების და ოპტიმალური რაციონის მოდელები . . . . .	252
§5.3. ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი . . . . .	263
§5.4. საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი . . . . .	269
§5.5. სტოუნის მომხმარებლის არჩევანის მოდელი . . . . .	273
§5.6. ქვეყნის მოსახლეობის შემოსავლის განსაზღვრის მოდელი	278
§5.7. კობ-დუგლასის და ლეონტიევის საწარმოო ფუნქციები . .	281
§5.8. დინამიკური წონასწორობის მათემატიკური მოდელი . . .	289
§5.9. ეკონომიკური დინამიკის მოდელები. ბაზრის მუშაობის ობობასქსელებური მოდელი . . . . .	293
§5.10. მაკროეკონომიკური დინამიკის ჰაროდი-დომარის მოდელი	300
§5.11. მაკროეკონომიკური დინამიკის სოლოუს არაწრფივი მოდელი . . . . .	309
§5.12. წარმოების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი . . . . .	316

**თავი VI. მათემატიკური ფიზიკის მოდელები . . . . 318**

§6.1. ზღვის ცენოზის მოდელი . . . . .	318
§6.2. წვრილი წყლის მოდელი. ზღვის ტალღების გადაბრუნება	322
§6.3. ცუნამის მოდელი . . . . .	329
§6.4. არაერთგვაროვანი ტალღსატარის მათემატიკური მოდელი	335

§6.5. პარმონიული წერტილოვანი წყაროების ბგერითი ველის მოდელირება ოკეანეში (ზღვაში) . . . . .	348
თავი VII. მძანის არაწრფივი მოდელები . . . . .	356
§7.1. უწყვეტი გარემოს მათემატიკური მოდელების შესახებ. შენახვის კანონების ინტეგრალური და დიფერენციალური ფორმები . . . . .	356
§7.2. უწყვეტი გარემოს აღწერა ელერის და ლაგრანჟის კოორდინატებში . . . . .	362
§7.3. ბლანტი სითხის მოდელი. იდეალური სითხის მოდელი .	371
§7.4. სრულყოფილი გაზის მათემატიკური მოდელი. ინტეგროდიფერენციალურ უტოლობათა მეთოდი . . . . .	376
§7.5. გრავიტირებადი გაზის მათემატიკური მოდელი . . . . .	398
§7.6. ასტროფიზიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირება . . . . .	416
ლიტერატურა . . . . .	432

## წინასიტყვაობა

მათემატიკური მოდელირება – ადამიანის ზანგრძლივი ინტელექტუალური მოღვაწეობისა და გარემო პირობების აღქმის შედეგად წარმოიშვა. ადამიანი თავიდანვე ცდილობდა აღეწერა სამყარო, მოცემული დროისთვის მისთვის ცნობილი კატეგორიებისა და ცოდნის საფუძველზე. ცოდნის დაგროვებასთან ერთად იცვლებოდა შესაბამისი მოდელიც და სამყაროს სურათიც. მათემატიკის განვითარებამ განაპირობა შესაბამისი ცოდნისა და გამოცდილების მოქცევა და აღწერა მათემატიკური სიმბოლოებისა და მეთოდების ფარგლებში.

დიდძვესიერებიანი და სწრაფმოქმედი კომპიუტერების გამოჩენამ და განუწყვეტელმა სრულყოფამ გამოიწვია მეცნიერების სხვადასხვა დარგის ჭეშმარიტად რევოლუციური გარდაქმნა. კოლოსალურად გაიზარდა მნიშვნელოვანი სამეცნიერო-ტექნიკური პრობლემების გადაწყვეტის შესაძლებლობები. ამ შესაძლებლობების რეალიზება შეიძლება მხოლოდ შესასწავლი რთული პროცესისა თუ მოვლენის მათემატიკური მოდელის დამუშავებისა და შემდგომ გამოთვლითი ალგორითმების საშუალებით სათანადო მათემატიკური ამოცანის კომპიუტერზე ამოხსნის საფუძველზე. ასე, თანდათან, წარმოიშვა მეცნიერების ის მძლავრი მიმართულება, რომელსაც მათემატიკურ მოდელირებას უწოდებენ.

მათემატიკური მოდელირების ჭერქვეშ ზშირად აერთიანებენ, როგორც თვით მათემატიკური მოდელის შედგენის ტექნოლოგიასა და ტექნიკას, ასევე, შესაბამისი მოდელის ანალიზისა და პარამეტრების გამოთვლების მეთოდებს.

წინამდებარე წიგნის მთავარი მიზანია, შეძლებისდაგვარად, ერთად შეეკრიბოთ მათემატიკური მოდელირების სხვადასხვა ასპექტი, რომელიც წარმოიქმნება მრავალსახოვანი პრაქტიკული საქმიანობის საკმაოდ განსხვავებულ დარგებში გამოკვლევების დროს. წიგნში განხილულია ფართოდ და ნაკლებად ცნობილი მათემატიკური მოდელები, აგრეთვე ორიგინალური მოდელები ეკოლოგიიდან ასტროფიზიკამდე.

წიგნს საფუძველად დაედო, სალექციო კურსები, რომლებიც წლების განმავლობაში იკითხებოდა და იკითხება ავტორების მიერ სოხუმის, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის, ილია

ჭავჭავაძის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტების ბაკალავრიატსა და მაგისტრატურაში, აგრეთვე მათი სამეცნიერო კვლევათა შედეგების ნაწილი.

ჩვენ მიზნად დავისახეთ წიგნი ისე დაგვეწერა, რომ მისი გამოყენება შეეძლოთ როგორც მასწავლებლებს, ისე სტუდენტებსა (ბაკალავრიატის, მაგისტრატურის) და დოქტორანტებს. ამ წიგნში ბევრ სასარგებლო მასალას შეხვდებიან ის პირებიც, ვინც მეცნიერულ თუ პრაქტიკულ საქმიანობაში იყენებს მათემატიკურ მოდელირებას.

ჩვენ შევეცადეთ, რომ წიგნის სხვადასხვა თავი ერთმანეთისაგან საკმაოდ დამოუკიდებელი ყოფილიყო და ორიგინალური, თუმცა, აშკარაა, რომ სრული დამოუკიდებლობის მიღწევა პრინციპულად შეუძლებელია. ზოგიერთი პარაგრაფის ბოლოს მოთავსებულია სავარჯიშოები, რომელთა შესრულებაც დაენმარება მკითხველს წიგნში გადმოცემული მასალის ღრმად და საფუძვლიანად დაუფლებაში.

მადლობა გვინდა გადავუხადოთ რედაქტორს პროფ. ჰ.მელაძეს, რეცენზენტებს პროფ. დ.გორდეზიანსა და პროფ. თ.ობგაძეს სასარგებლო დისკუსიებისა და რჩევებისათვის.

და ბოლოს, ჩვენი მოკრძალებული წიგნი ეძღვნება იმ ადამიანთა ნათელ ხსოვნას, რომლებსაც ყველაზე მეტად გაუხარდებოდათ მისი გამოცემა და რომელთა სულიერ მზარდაჭერას ჩვენ მუდმივად ვგრძნობდით წიგნზე მუშაობის პერიოდში.



*ეძღვნება მათემატიკოსების  
პროფესორ რევაზ აბსაშას  
და იპოლიტე ჩილაჩავას  
ნათელ ხსოვნას*

## შესავალი

ძვირფასო მკითხველო, გადავწყვიტეთ გავაშუქოთ საკითხთა ფართო სპექტრი, რომელიც ნათელს ჰყენს მათემატიკური განათლების ფასეულობათა პრაქტიკულ შესაძლებლობებს, მის მეთოდებსა და შედეგებს, რეალური სიტუაციების სიღრმისეულ გააზრებასა და გარე სამყაროს კანონზომიერების შემეცნებას. მთავარი სიძნელე ისაა, რომ თქვენს შორის არა მარტო მათემატიკოსები და ინფორმატიკოსები, არამედ ფიზიკოსები, ქიმიკოსები, ბიოლოგები, გეოგრაფები, ეკონომისტები და იმედია სხვა დარგის სპეციალისტები იქნებიან. და მაინც გადავწყვიტეთ თქვენთვის მათემატიკის შესახებ მოგვეთხრო. ჩვენ მოგიყვებით იმის შესახებ, თუ როგორ გვეხმარება მათემატიკა შევიცნოთ ჩვენს გარშემო არსებული სამყარო [35, 82, 98, 111, 112, 115, 116].

ჩვენი სამყარო ძალიან რთული, მრავალსახოვანი, იღუმალი, ფერადოვანი და მშვენიერია. ამასთან, მისი საფუძვლები საკმაოდ მარტივია და მარტივ წესებს ემორჩილება. ამას ჯერ კიდევ ძველი ბერძნები მიხვდნენ და ყველაფრის საფუძვლად ცეცხლი, მიწა, წყალი და ჰაერი მიიჩნიეს, თუმცა ისინი ჭეშმარიტებისაგან საკმაოდ შორს იყვნენ, მაგრამ ინტუიციურად ივარაუდეს მცირე ნაწილაკების — ატომების არსებობაც, რომელთა მოძრაობა და ურთიერთშეთანაბრება ბადებს ყოველივე არსებულს.

ეს ის გენიალური მიხვედრებია, რომლებიც მხოლოდ XVIII-XIX საუკუნეებში დასაბუთდა. ჩვენმა თანამედროვე ბუნებისმეტყველებამ დაადასტურა არა მარტო ეს კონკრეტული მიხვედრა ატომების შესახებ, არამედ უფრო გაფართოებულ და განზოგადებულ შედეგებსაც მიაღწია.

სრულიად მარტივ წესებს შეუძლიათ უაღრესად რთული და მრავალფეროვანი სიტუაციების გამოწვევა. ეს ადვილი შესაძრწნევია ჭადრაკის, შაშის და სხვა თამაშების მაგალითზე. ამ აზრით თამაშო

საკმაოდ კარგად აღწერს სამყაროს. შესაძლებელია სწორედ ამიტომ გვიყვარს ჩვენ და ჩვენს ბავშვებს ეს თამაშები.

ცხადია, რომ ბუნების წესები და კანონები თამაშის წესებზე გაცილებით რთულია, მაგრამ მაინც მარტივად შეიძლება ჩაითვალოს. ამ წესების ჩამოყალიბება პრინციპულად შესაძლებელია (გარკვეულ დონემდე) ერთი-ორი საათის განმავლობაში, მაგრამ მხოლოდ ჩამოყალიბება არ ნიშნავს მათ კარგად ცოდნას. კარგი “თამაშის” შესასწავლად ხშირად მთელი ცხოვრებაა საჭირო.

“ბუნების თამაშის” წესები – ესაა ფიზიკისა და მექანიკის ფუნდამენტური კანონები: ნიუტონის არარელატივისტური მექანიკის კანონები, ფარადეისა და მაქსველის ელექტროდინამიკური კანონები, შრედინგერის კვანტური მექანიკის კანონები, აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის კანონები. ცხადია, რომ მათ მიეკუთვნებიან ქიმიისა და ბიოლოგიის კანონებიც, რომლებიც საკმაოდ ხშირად ფიზიკისა და მექანიკის კანონებიდან გამომდინარეობენ.

ის, რისთვისაც გამოიყენება ეს მარტივი წესები და კანონები, არის ჩვენს გარშემო არსებული ბუნებრივი ობიექტები, რომელთაც ჩვენს ცნობიერებაში ვაიგივებთ იდეალიზირებულ მოდელებთან. ადამიანის აზროვნების ევოლუციამ იქამდე მიგვიყვანა, რომ ასეთი იმიტაციისათვის შეიქმნა სპეციალური მათემატიკური ენა და რეალური ობიექტები აღიწერება მათემატიკური მოდელების საშუალებით [69, 78, 107, 108, 110].

მათემატიკური მოდელები შესაძლოა იყოს ძალიან მარტივი, მარტივი, რთული, ან ძალიან რთული. ძალიან მარტივი მოდელი ესაა, მაგალითად, გეომეტრიული, ან მატერიალური წერტილი, წერტილოვანი მუხტი. მათემატიკური მოდელების იერარქია შეიძლება შევადაროთ შენობას, რომელიც აგებულია მარტივი ნაწილაკებისაგან: აგურისაგან, ხისაგან, ცემენტისაგან, რკინისაგან, მინისაგან და ა.შ. ძალიან მარტივი მოდელები – ეს შენობის შემადგენელი უმარტივესი ნაწილებია, მარტივი მოდელები – ეს შენობის ის ნაწილია, რომელიც უმარტივესი ნაწილაკებისაგან შედგება, რთული მოდელები – ეს უკვე მთელი შენობაა, ხოლო ძალიან რთული მოდელები – შენობით სავსე მთელი ქალაქია.

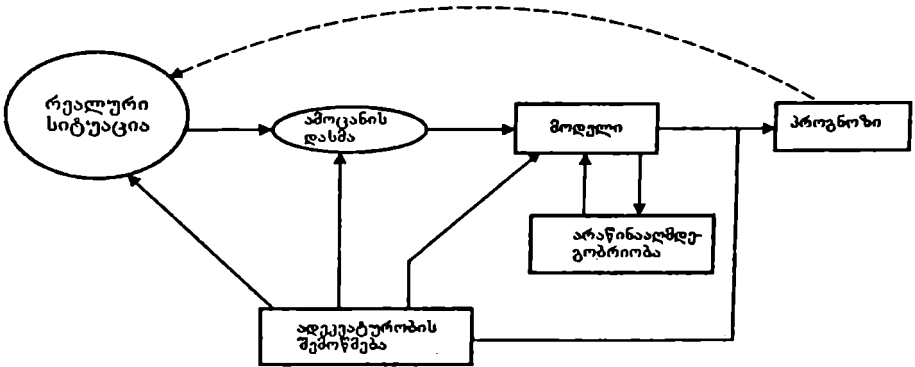
შესაძლოა მოგვეჩვენოს, რომ, რაც უფრო რთულია რეალური ობიექტი, მით უფრო რთული უნდა იყოს მისი შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. მაგრამ, ეს ყოველთვის ასე როდია.

შესაძლოა ძალიან რთულ რეალურ ობიექტს საკმაოდ მარტივი მათემატიკური მოდელი შეესაბამოდეს. საქმე იმაშია, რომ არაა აუცილებელი მათემატიკურმა მოდელმა მთელი ობიექტი დეტალებში აღწეროს. შესაძლოა მოდელში გათვალისწინებული იყოს მხოლოდ ძირითადი და განმსაზღვრელი მომენტები.

ასე მაგალითად, ქალაქის მოდელად გამოდგება რუკა, დედამიწის მოდელად – გლობუსი.

გამოყენებითი მათემატიკის მიზანია სინამდვილის მათემატიკური აღქმა. ამავე დროს, ინჟინერ-პრაქტიკოსისათვის უფრო მნიშვნელოვანია იმის ცოდნა, გაუძლებს თუ არა ხიდი სავარაუდო დატვირთვას, ზოლო საავადმყოფოს ადმინისტრაციისათვის – პაციენტის მიერ მიღების მოლოდინში დახარჯული დროის შემცირება.

ზშირად, ამოცანის დასმის სტადიის პარალელურად, მიმდინარეობს მოვლენის ძირითადი, ან განსაკუთრებული თავისებურებების გამოვლენის პროცესი (ნახ. 1).



ნახ. 1

ფიზიკური მოვლენებისათვის სქემატიზაციის, ან იდეალიზაციის პროცესი თამაშობს გადამწყვეტ როლს, რადგანაც რეალურ მოვლენაში მონაწილეობს მრავალი პროცესი და ის, ამის გამო,

საკმაოდ რთულია. მოვლენის ზოგიერთი ნიშანი მნიშვნელოვანია, ბევრი სხვა – უმნიშვნელო.

ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა დაკავშირებულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. კაცობრიობის განვითარებისა და დაგროვილი ცოდნის მიხედვით, სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენები (სამყაროს მოდელები) იცვლებიან.

მოცემული პროცესის სქემატურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხვითი მახასიათებლები, მ ო დ ე ლ ი რ ე ბ ა ეწოდება.

თანამედროვე მეცნიერება განასხვავებს მოდელირების სამ ძირითად მიმართულებას: ფიზიკური მოდელირება; იმპიტაციური მოდელირება; მათემატიკური მოდელირება.

ფ ი ზ ი კ უ რ ი მ ო დ ე ლ ი – არის ნატურალური, ან მასშტაბებში შეცვლილი მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ პროცესი ექსპერიმენტულად.

ი მ ი ტ ა ც ი უ რ ი მ ო დ ე ლ ი – არის კომპიუტერული მოდელი, რომელიც გაითამაშებს მოცემულ პროცესს განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და ვიზუალურად გვიჩვენებს მოსალოდნელ შედეგებს.

მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი მ ო დ ე ლ ი – არის მათემატიკური მეთოდების ერთობლიობით პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის დამყარებული კავშირი, რომელიც საშუალებას იძლევა მოცემული სიზუსტით განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის სურათი.

მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს რეალური სიტუაციის გამარტივებას. საგრძნობი გამარტივება დადგება მაშინ, როცა სიტუაციის უმნიშვნელო თავისებურებები უკუგდებულა და საწყისი რთული ამოცანა დაიყვანება იდეალიზირებულ ამოცანაზე, რომელიც ექვემდებარება მათემატიკურ ანალიზს. ზუსტად, ასეთი მიდგომისას, კლასიკურ გამოყენებით მათემატიკაში, წარმოიშვა ხახუნის გარეშე ბლოკების, უწონო და უჭიმავი ძაფების, არაბლანტი (იდეალური) სითხეების და სხვა ასეთი სახის მრავალი ცნება. ეს ცნებები არ არსებობენ რეალურ სინამდვილეში, ისინი წარმოადგენენ აბსტრაქციებს, იდეალიზაციის შემადგენელ ნაწილს. მიუხედავად

ამისა, ისინი შეიძლება წარმატებით ჩავთვალოთ რეალური სიტუაციების კარგ მიახლოებად.

მნიშვნელოვანი გადაწყვეტილება, რომელიც ხშირად მიიღება მოდელირების პროცესის დასაწყისში, ეხება განხილული მათემატიკური ცვლადების ბუნებას. ისინი არსებითად იყოფა ორ კლასად.

პირველ კლასში შედიან ცნობილი მახასიათებლები, ე.ი. სიდიდეები, რომლებიც თეორიულად მაინც ექვემდებარება ზუსტ გაზომვას და მართვას. მათ დ ე ტ ე რ მ ი ნ ი რ ე ბ უ ლ ი ც ვ ლ ა დ ე ბ ი ეწოდება.

მეორე კლასში შედიან უცნობი მახასიათებლები, ე.ი. სიდიდეები, რომელთა გაზომვა არასოდეს არ შეიძლება და აქვთ შემთხვევითი ხასიათი. მათ ს ტ ო ქ ა ს ტ უ რ ი ც ვ ლ ა დ ე ბ ი ეწოდება.

მოდელი, რომელიც შეიცავს სტოქასტურ ცვლადებს, აღიწერება ალბათობის თეორიისა და სტატისტიკის მათემატიკური აპარატით (ს ტ ო ქ ა ს ტ უ რ ი მ ო დ ე ლ ი).

დ ე ტ ე რ მ ი ნ ი რ ე ბ უ ლ ი მ ო დ ე ლ ე ბ ი, ხშირად, მაგრამ არა ყოველთვის, ითხოვენ ჩვეულებრივი მათემატიკური ანალიზის (ინტეგრალური და დიფერენციალური აღრიცხვა) გამოყენებას.

მათემატიკური მოდელები, გამოყენებული მათემატიკური აპარატის მიხედვით, იყოფა ორ ძირითად ნაწილად:

ა) უწყვეტი მათემატიკური მოდელები,

ბ) დისკრეტული მათემატიკური მოდელები, თუმცა არსებობენ, აგრეთვე მესამე

გ) შერეული ტიპის რთული სისტემების - სინთეზური მათემატიკური მოდელებიც, რომლებშიც გამოიყენება როგორც უწყვეტი - კონტინუალური სიმძლავრის ცვლადი პარამეტრები, ასევე, დისკრეტული - თვლადი სიმძლავრის ცვლადი პარამეტრებიც.

გამოყენებითი მათემატიკის მრავალი ამოცანისათვის დამახასიათებელია კომპლექსურობა, რაც მოითხოვს, როგორც წესი, ბუნებაში მიმდინარე მრავალი ფიზიკური პროცესის ყოველმხრივი ზეგაეულენის გათვალისწინებას მიმდინარე მოვლენაზე. ეს კი, თავის მხრივ, დასმული ამოცანის გადასაჭრელად გამოთვლითი ტექნოლოგიების ფართო სპექტრის გამოყენების აუცილებლობას იწვევს. ამ მიზეზით დასმული პრობლემის გადაჭრა რამდენიმე

ეტაჲად მიმდინარეობს: საძიებელი ამოცანის ფიზიკური მოდელის შექმნა, ამოცანის მათემატიკური დასმა, ანალიზური მეთოდებისა და გამოთვლითი ალგორითმების შექმნა, პროგრამირების ეტაპი და ფიზიკური მოდელის შემდგომი სრულყოფა გამოთვლითი შედეგებისა და ფიზიკური ექსპერიმენტების შედარების საფუძველზე.

გამოყენებითი მათემატიკის დარგის სპეციალისტის მუშაობა არ სრულდება იმ მომენტში, როცა პრაგმატიკული მათემატიკური მანიპულაციების შემდეგ მიიღება ფორმულა ან სხვა შედეგი. მას უწევს მიღებული შედეგების გადაყვანა მათემატიკური ენიდან იმ ენაზე, რომელზედაც ხდება საწყისი ამოცანის თავდაპირველი ფორმულირება და რომელიც გასაგებია, მათ შორის, არა მათემატიკოსებისათვისაც. ნათლად უნდა გაეცნობიეროთ მიღებული ამონახსნების როგორც მათემატიკური შინაარსი, ასევე ის, რასაც ისინი ნიშნავენ რეალური სამყაროს ენაზე, რომლის აღწერისათვის მათემატიკა არის მოწოდებული.

შეიძლება ითქვას, რომ მათემატიკური მოდელის შექმნა გვაგონებს ბავშვის განვითარებას, რომელიც ეს ესაა სწავლობს ლაპარაკს. ენა, ყველაზე მარტივი შინაარსით, არის გარშემო არსებული რეალური სამყაროს ანარეკლი და ბავშვის ენის დახელოვნება უწყვეტად დაკავშირებულია მის მიერ ამ სამყაროს აღქმასთან. მოდელი იწყება ყველაზე მარტივიდან და ვითარდება, ღებულობს უფრო რთულ ნიშნებს, იმის მიხედვით, თუ როგორ მიიღწევა მოვლენის უფრო ღრმა გაგება.

მათემატიკური მეთოდების შეღწევა ადამიანის მოღვაწეობის ყველაზე ნაირსახეობრივ და მოულოდნელ სფეროებში ნიშნავს, ახალი, როგორც წესი, კვლევის ფრიად ნაყოფიერი საშუალებების გამოყენების შესაძლებლობას.

შესაბამის დარგებში სპეციალისტების მათემატიკური კულტურის ზრდა იწვევს იმას, რომ ზოგადი თეორიული ღებულებების და გამოთვლათა მეთოდების სწავლება სერიოზულ წინააღმდეგობებს არ ხვდება. ამასთან, პრაქტიკაში აღმოჩნდება, რომ მარტო მათემატიკური ცოდნა არაა საკმარისი ამა თუ იმ გამოყენებითი ამოცანის ამოხსნისათვის. აუცილებელია, აგრეთვე, ამოცანის საწყისი ფორმულირების მათემატიკურ ენაზე გადაყვანის უნარის ჩამოყალიბება. ზუსტად ამაში მდგომარეობს მათემატიკური მოდელირების ხელოვნების ათვისების პრობლემა.

როგორც ცნობილია, უმაღლესი მათემატიკის ტრადიციული სასწავლო კურსები სტუდენტთა უმრავლესობას არევეს საგნებისადმი ფორმალურ მიდგომას. ის ისწავლება კარგად დაბუშაგებული პროგრამით, რომელიც ხაზს უსვამს მათემატიკის ძირითად პრინციპებსა და მკაცრი ანალიზის აუცილებლობას. მაგრამ, ყველაფერი ეს წარმოადგენს საშუალებათა არსენალის მხოლოდ ნაწილს, რომელიც მათემატიკოსისათვის აუცილებელია პრაქტიკულ საქმიანობაში. ახალგაზრდა სპეციალისტ – მათემატიკოსების უმრავლესობისათვის, მიუხედავად მათი ნიჭიერებისა, დამახასიათებელი ნიშანია დაბნეულობა უშუალოდ პრაქტიკიდან წარმოშობილი ამოცანების მიმართ. ამ გარემოებას განაპირობებს უმაღლესი მათემატიკის კურსების უფრო აბსრაქტული ხასიათი, ვიდრე სხვა დისციპლინების.

ამ პრობლემის შესაძლო გადაწყვეტად მიგვაჩნია მათემატიკური სპეციალობის ტრადიციულ პროგრამაში (კურიკულუმი) “მათემატიკური მოდელირების” დისციპლინის გამტკიცება, რომლის მთავარი ამოცანა იქნება რეალური პრაქტიკული სიტუაციებიდან წარმოქმნილი ამოცანების მათემატიკური დასმისა და ამოხსნის მეთოდების შესწავლა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ქართულ ენაზე დაწერილია რამდენიმე სახელმძღვანელო მეცნიერების ცალკეულ დარგებში მათემატიკური მეთოდების (მოდელები) გამოყენების შესახებ [2, 3, 5, 6, 13 - 15].

წინამდებარე წიგნში განხილულია ფართოდ და ნაკლებად ცნობილი, ძირითადად უწყვეტი, ასევე დისკრეტული, სტოქასტური და ლოგიკური მოდელები, აგრეთვე ორიგინალური მოდელები ეკოლოგიიდან ასტროფიზიკამდე.

წიგნი შედგება შვიდი თავისაგან:

პირველი თავი ეძღვნება მათემატიკურ მოდელირებას ეკოლოგიაში და მასში განხილულია: ბალანსის მეთოდი; ერთი, ან ორი პოპულაციის ეკოლუციის წრფივი და არაწრფივი მოდელები; ხის, ან მცენარის ფოთლის ზრდის მოდელები; კასპიის ზღვის მოდელი; არასასურველ სახეობასთან ბრძოლის მოდელი და სხვა.

მეორე თავი – მათემატიკურ მოდელირებას მედიცინაში და მასში განხილულია: წრფივი და არაწრფივი ეპიდემიოლოგიური მოდელები; იმუნური პროცესების მოდელები; ინფექციური დაავადების მოდელი; შაქრის დიაბეტის მოდელი; გულის ენერგეტიკული მოდელი;

ოპტიმალური მკურნალობის მოდელი; სისხლის ჯგუფის დადგენის ლოგიკური მოდელი და სხვა.

მესამე თავი — ბუნებისმეტყველების მათემატიკურ მოდელებს და მასში განხილულია: ყავის გაცივების მოდელი; კრიმინალისტიკის ამოცანა; პარაშუტით ვარდნის მათემატიკური მოდელი; შაქრის ინვერსიის მათემატიკური მოდელი; ბიოქიმიური პროცესების მათემატიკური მოდელი და სხვა.

მეოთხე თავი — საომარი მოქმედებების მათემატიკურ მოდელებს და მასში განხილულია: ლანჩესტერის წრფივი და არაწრფივი მოდელები; ზღვაზე ოშში ნაღმების გამოყენების სტოქასტური მოდელი.

მეხუთე თავი — მათემატიკურ მოდელებს ეკონომიკაში და მასში განხილულია: წრფივი დაპროგრამების ამოცანები; მაქსიმალური მოგებისა და ოპტიმალური რაციონის მოდელები; ლენტიევის მოდელი; საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი; სტოუნის მოშხარებლის არჩევანის მოდელი; ქვეყნის მოსახლეობის შემოსავლის განმსაზღვრელი მოდელი; ბაზრის მუშაობის ობობასქსელებური დისკრეტული მოდელი; მაკროეკონომიკური დინამიკის წრფივი და არაწრფივი მოდელები და სხვა.

მექვსე თავში განხილულია მათემატიკური ფიზიკის წრფივი და კვაზიწრფივი მოდელები: წერილი წყლის მოდელი; ცუნამის მოდელი; არაერთგვაროვანი ტალღსატარის მოდელი; ზღვის ცენოზის მოდელი და სხვა.

მეშვიდე თავში განხილულია მექანიკის ცნობილი წრფივი, კვაზიწრფივი და, აგრეთვე, ორიგინალური არაწრფივი მოდელები: ბლანტი სითხის მოდელი; იდეალური სითხის მოდელი; სრულყოფილი გაზის მოდელი; გრავიტირებადი გაზის მოდელი; ასტროფიზიკური პროცესების მათემატიკური მოდელები და სხვა.



*ბუნებაში არსებობს მისთვის მახასიათებელი შინაგანი ფარული პარძონა, რომელიც ჩვენს გონებაში აისახება მარტივი მათემატიკური კანონების სახით. სწორედ ამით აიხსნება, თუ რატომ არის შესაძლებელი ბუნებრივი მოვლენების წინასწარ განჭვრეტა დაკვირვებებისა და მათემატიკური ანალიზის კომბინაციის მეშვეობით. ყოველგვარი ზემოლოდინის მოუხედავად, ბუნებაში პარძონის არსებობის დამაჯერებლობა, პოულობს ახალ-ახალ მტკიცებულებებს --"*

*პერმან ვილი*

## თ ა ვ ი

### მათემატიკური მოდელირება ეკოლოგიაში

კაცობრიობის ცივილიზაცია თავის არსებობის მრავალათასიანი ისტორიის მანძილზე უმოწყალოდ მოიხმარდა ბუნებრივ სიმდიდრეს და მხოლოდ უკანასკნელ ათწლეულებში ცხადი გახდა, რომ ეს სიმდიდრე უსაზღვრო არ არის და არსებობს მათი ამოწურვის რეალური საშიშროება. ეს რეალობა აიძულებს კაცობრიობას ყურადღების კონცენტრირება მოახდინოს ამ პრობლემის გადაჭრის გზების პოვნის გარშემო.

ბუნების ცოცხალი რესურსების რაციონალური ექსპლოატაციისათვის აუცილებელია პოპულაციების შესახებ ცოდნის დაგროვება. პოპულაცია გარკვეული რაოდენობის ინდივიდების ერთობლიობაა (შესაძლოა განსხვავება ასაკით და სქესით). ბიოლოგების მიერ დამტკიცებულა, რომ ყოველი პოპულაცია ცოცხლობს საკუთარი ბიოლოგიური რითმით, აქვს თავისი მექანიზმი რაოდენობრიობის დასარეგულირებლად.

ბუნებასა და ადამიანს შორის კონფლიქტის სხვა მიზეზი არის სახეობების დაუფიქსირებელი დაყოფა "სასარგებლოებად" და "მავნებლებად", თითოეული მათგანი გარკვეულ პირობებში არის სრული ეკოლოგიური სისტემის აუცილებელი რგოლი.

ადამიანის სამსახურში ბუნების ჩაყენების შემთხვევაში ჩვენ ზშირად ვარღვევთ ცოცხალ ორგანიზმებს შორის დაბალანსებულ ურთიერთობათა მექანიზმებს.

ბუნებაზე ადამიანის ზემოქმედების არასასურველი და დამღუპველი შედეგების თავიდან ასაცილებლად, ბუნებრივი ციკლები დეტალურად უნდა იყოს შესწავლილი, ხოლო გარემო განიხილებოდეს, როგორც რთული ეკოლოგიური სისტემა [7, 72, 80, 114].

ეკოლოგია შეისწავლის ცოცხალი ორგანიზმებისა და მათი დაჯგუფებების დამოკიდებულებას ერთმანეთთან და გარემოსთან.

ეკოსისტემა არის ცოცხალი ორგანიზმებისა (მიკროორგანიზმები, მცენარეები, ცხოველები) და მათი გარემოს ფუნქციური ურთიერთდამოკიდებულების მდგრადი სისტემა.

ეკოსისტემა ორი კომპონენტისაგან შედგება: ცოცხალი ორგანიზმების ერთობლიობისაგან, რომელსაც ბიოცენოზი ეწოდება, და არაცოცხალი ბუნების ელემენტთა ერთობლიობისაგან, რომელსაც ეკოტიპი ეწოდება.

ბიოცენოზი, მცენარეთა, სოკოებისა და ცხოველთა ურთიერთდაკავშირებული მიკროორგანიზმების ერთობლიობაა, რომლითაც დასახლებულია ხმელეთისა და წყლის მეტნაკლებად ერთგვაროვანი უბანი.

სახეობა მსგავსი ინდივიდების ერთობლიობაა, რომელიც წესი, მორფოლოგიურად გამოიწველია სხვა ასეთივე ერთობლიობისაგან; სახეობაში შემაჯავლი ინდივიდები ერთმანეთს ეუკვარებიან და ნაყოფიერ შთამომავლობას იძლევიან.

ეკოლოგიის ერთ-ერთი ძირითადი პრობლემაა პოპულაციის ზრდისა და ცვლილებების გამოკვლევა, როგორც შინაგანი თვისებების, ასევე გარემოზე ზემოქმედების გათვალისწინებით.

ასევე მნიშვნელოვანი პრობლემაა სახეობებს შორის ურთიერთობა, მაგალითად, კონკურენცია საკვების საერთო წყაროზე, ან ურთიერთობა "მტაცებელი-შსხვერპლი".

ამ ამოცანებს ეკუთვნის: პოპულაციის რაოდენობის მართვის შესწავლა, გადაშენებადი სახეობებისათვის რაოდენობის მინიმალური დონის განსაზღვრა, სახეობათა ეკოლუციის სიჩქარისა და მიმართულების დაზუსტება და სხვა.

ეკოლოგიას, როგორც მეცნიერებას, საქმე აქვს ორგანიზმთა უზარმაზარ სიმძლავრეთა შორის ურთიერთობასთან.

ამ დამოკიდებულებების ანალიზი ჩვეულებრივ დამოკიდებულია მათი მათემატიკური მოდელირების აგებაზე და თვისებების გამოკვლევაზე. "მოდელი - ეს ძირითადი ფორმაა, რომლის საშუალებითაც მათემატიკა დაკავშირებულია გარე სამყაროსთან" აღნიშნავს ი.ა.მიტროპოლსკი.

ეკოლოგიური სისტემების ფუნქციონირების პროგნოზირებისა და მართვის პრობლემები შესაძლებელია გადაიჭრას მხოლოდ

მათემატიკური მოდელირების საფუძველზე, რადგან ამ სისტემების მხოლოდ "ერთადერთი ეგზემპლარი" არსებობს და მათზე ყოველმხრივ მეცნიერულად დაუსაბუთებელი ექსპერიმენტების ჩატარებამ, როგორც ამაში არაერთხელ დავრწმუნდით, შეიძლება მიგვიყვანოს კატასტროფულ შედეგებამდე.

## §1.1. ბალანსის მეთოდი. მალთუსის მოდელი

### ბალანსის მეთოდი

სანამ გადავიდოდეთ მეცნიერების სხვადასხვა დარგში მათემატიკურ მოდელირებაზე, განვიხილოთ მათემატიკური მოდელების შექმნის ერთ-ერთი მძლავრი მეთოდი, რომელიც ბალანსის მეთოდის სახელწოდებით არის ცნობილი [2].

დავუშვათ,  $S$  ზედაპირით შემოსაზღვრულ  $V$  მოცულობაში (არეში) მიმდინარე რაიმე პროცესი, ან ფიზიკური მოვლენა დროის  $t$  მომენტში ხასიათდება ადიტიური  $f(t)$  სიდიდის მნიშვნელობით.  $f(t)$  სიდიდის ადიტიურობა  $V$ -ში უნდა გავივით შემდეგნაირად: თუ  $V$  მოცულობას გავყოფთ ორ ნაწილად  $V=V_1 \cup V_2$  და თითოეულ ნაწილში მიმდინარე იგივე პროცესი ან მოვლენა დროის  $t$  მომენტში ხასიათდება შესაბამისად  $f_1(t)$  და  $f_2(t)$  სიდიდეების მნიშვნელობებით, მაშინ

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t). \quad (1.1.1)$$

ამასთან  $f(t)$  სიდიდეს შეიძლება ჰქონდეს მასის, იმპულსის, ენერჯიის, რაიმე რეგიონში ან ქალაქში მოსახლეობის რაოდენობის, საწარმოო ფონდების, ქვეყნების ეროვნული შემოსავლის ჯამის და ა.შ. შინაარსი.

ცხადია, რომ თუ  $f(t)$  აღნიშნავს რაიმე რეგიონში ან ქალაქში მოსახლეობის რაოდენობას, მაშინ  $V$  წარმოადგენს ამ რეგიონის, ან ქალაქის, შესაბამის ზედაპირს, ხოლო  $S$ -ის ქვეშ ამ ზედაპირის შემოსაზღვრელი შეკრული  $I$  წირი იგულისხმება.

ჩვენ უნდა დავადგინოთ, თუ რამ შეიძლება გამოიწვიოს დროთა განმავლობაში  $f(t)$  სიდიდის ცვლილება რაიმე ათვლის სისტემის მიმართ ფიქსირებულ (უცვლელ)  $V$  მოცულობაში და როგორ შეიძლება ამ ცვლილების რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლა.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

ეთქვათ,  $V$  არის საქართველოს ულამაზესი ქალაქი – სოხუმი, ხოლო  $S(I)$  – მისი საზღვარი, რომელიც შედგებოდა მდინარეების კელასურისა და გუმისთისაგან, აგრეთვე შავი ზღვის სანაპიროს ნაწილისაგან.  $V_1$  – იყო სოხუმის ნაწილი, რომელიც ცნობილი იყო ძველი სოხუმის სახელით, ხოლო  $V_2$  – სოხუმის ახალი რაიონი (ახალი სოხუმი). თუ  $f(t)$  აღვნიშნავთ სოხუმის მოსახლეობას დროის  $t$  მომენტში,  $f_1(t)$  – ძველი სოხუმის მოსახლეობას, ხოლო  $f_2(t)$  – ახალი სოხუმის მოსახლეობას დროის  $t$  მომენტში, მაშინ დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში სოხუმის მოსახლეობისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობა (1.1.1)-ს.

სოხუმის მოსახლეობის  $f(t)$  რაოდენობის მშვიდობიან, ნორმალურ ვითარებაში შეცვლის ორი ძირითადი, ერთმანეთისაგან არსებითად განსხვავებული, ტიპის მიზეზი არსებობდა.

პირველი მიზეზია, სოხუმიდან, ძველი თუ ახლანდელი დროის სხვადასხვა ფაქტორის გამო, მოსახლეობის ნაწილის გამგზავრება, ანუ მისი  $S(I)$  საზღვრის გადალახვა შიგნიდან და სოხუმში მოსახლეობის ჩამოსვლა (ძველ დროში (ომამდე), ძირითადად, გულაუთის და ოჩამჩირის რაიონებიდან – აფხაზები, დასავლეთ საქართველოდან – ქართველები; დღევანდელი მოსკოვის მიერ კონტროლირებად ვითარება-ში ძირითადად აფხაზური, რუსული და სომხური მოსახლეობა), ანუ  $S(I)$  საზღვრის გადალახვა გარედან. სხვა სიტყვებით რომ ეთქვას, სოხუმის მოსახლეობის  $f(t)$  რაოდენობის ცვლილების ერთი მიზეზია სოხუმის შემომსახვრელი  $S(I)$  წირის მოსახლეობის გამჭოლი "ნაკადების" არსებობა.

ეთქვას,  $g_1(t)$  არის დროის  $t$  მომენტში სოხუმიდან გამოსული მოსახლეობის რაოდენობა, ხოლო  $g_2(t)$  – შემოსულის. ცხადია, რომ დროის სხვადასხვა პერიოდში  $g_1(t)$  და  $g_2(t)$  მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

1992/93 წლებამდე აფხაზეთში, მათ შორის სოხუმში, რუსეთ-საქართველოს საომარ მოქმედებამდე,  $g_1(t)$  ბევრად ნაკლები იყო  $g_2(t)$ -ზე, ხოლო საომარი მოქმედებების დროს და განსაკუთრებით 1993-95 წლებში, პირიქით,  $g_1(t)$  ბევრად მეტი იყო  $g_2(t)$ -ზე. მაგალითად, 1989 წლის მოსახლეობის, ბოლო, მეტნაკლებად რეალური აღწერის თანახმად სოხუმში ცხოვრობდა 120 ათასამდე ადამიანი, ხოლო დღევანდელი სოხუმის დე-ფაქტო სეპარატისტული

ხელისუფლების მონაცემებით სოხუმში ცხოვრობს დაახლოებით 43 ათასი ადამიანი, სინამდვილეში კი — ბევრად ნაკლები.

სოხუმის მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების მეორე მიზეზია — ბუნებრივი და არაბუნებრივი (ომი) პროცესები, ანუ ადამიანის დაბადება და სიკვდილიანობა სხვადასხვა მიზეზით.

ეთქვათ,  $G_3(t)$  არის დროის  $t$  მომენტში სოხუმში დაბადებულთა რაოდენობა, ხოლო  $G_4(t)$   $t$  მომენტში ბუნებრივი, თუ საომარი მოქმედებების გამო გარდაცვლილთა რაოდენობა. ცხადია, რომ სხვადასხვა პერიოდში  $G_3(t)$  და  $G_4(t)$  მნიშვნელოვნად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მაგალითად, ომამდე  $G_3(t)$  ბევრად მეტი იყო  $G_4(t)$ -ზე, ხოლო ომის დროს და ომის შემდგომ პერიოდში, პირიქით,  $G_4(t)$  გაცილებით მეტია  $G_3(t)$ -ზე.

ამგვარად,  $S(t)$  ზედაპირით (წირით) შემოსაზღვრულ  $V$  მოცულობაში  $f(t)$  სიდიდის ცვლილებას ორი განსხვავებული სახის პროცესი განაპირობებს:  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ( $G_2(t) - G_1(t)$ ) "ნაკადი" და თვით მოცულობაში ( $G_3(t) - G_4(t)$ ) სიდიდის "წყაროების" მოქმედება.

საზოგადოდ, სხვადასხვა მოდელში, შესაძლებელია არსებობდეს როგორც "ნაკადების", აგრეთვე "წყაროების" სხვადასხვა სახეობა. ამ შემთხვევაში, ცხადია, ჩვენ ვგულისხმობთ მათი ერთობლივი მოქმედების შედეგს, რომელიც გათვალისწინებული იქნება მათემატიკური მოდელის შედეგისას.

კერძოდ, ზემოთ განხილულ მაგალითში სოხუმის მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ, როგორც "ნაკადის", ასევე "წყაროების" ორ-ორი სახეობა გვექონდა: "გასვლა" და "შემოსვლა", "დაბადება" და "გარდაცვალება".

ახლა განვიხილოთ  $f(t)$  ფუნქციის რაოდენობრივი თანაფარდობა.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ  $f(t)$  ფუნქცია  $V$ -ში უწყვეტი და წარმოებადია, მაშინ  $\frac{df(t)}{dt}$  წარმოებული წარმოადგენს  $V$

მოცულობაში  $f(t)$  სიდიდის ცვლილების სისწრაფეს (სიჩქარე), ანუ  $V$  მოცულობაში  $f(t)$  სიდიდის ცვლილებას დროის ერთეულში.

$f(t)$  სიდიდის იმ რაოდენობას, რომელიც ნაკადების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგად გამჭოლი მოძრაობით გაივლის  $S(t)$  ზედაპირს (წირს) დროის ერთეულში, ვუწოდოთ " $f(t)$  სიდიდის ნაკადი", ხოლო  $f(t)$  სიდიდის რაოდენობას, რომელიც წყაროების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგად ჩნდება

(ქრება) V მოცულობაში დროის ერთეულში, ეუწოდოთ "f(t) სიდიდის წყაროების სიმძლავრე".

საბოლოოდ შევადგინოთ "ბალანსი" V მოცულობაში. f(t) სიდიდის შემცველობის ცვლილება დროის ერთეულში გავეტოლოთ f(t) სიდიდის ნაკადისა და წყაროების სიმძლავრის ვჯამს:

$$\frac{df(t)}{dt} = g_2(t) - g_1(t) + g_3(t) - g_4(t) \quad (1.1.2)$$

განტოლება (1.1.2)-ს ბალანსის განტოლებას ეუწოდებთ და სწორედ ის წარმოადგენს ბალანსის მეთოდის მათემატიკურ ფორმულირებას.

ამრიგად, სოხუმის მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილება აღიწერება (1.1.2) განტოლებით, სადაც (i=1,4) ფუნქციების სახე დამოკიდებულია არჩეულ მოდელზე.

### ბალთუსის პოდელი

განვიხილოთ მიკროორგანიზმთა კოლონიები, რომლებიც ბინადრობენ იზოლირებულად განუსაზღვრელი საკვები რესურსების პირობებში; დავეუშვათ, რომ ეს კოლონიები არ ითრგუნება არანაირი სხვა სახეობით. გამრავლებისა და სიკვდილიანობის გამო მათი რიცხვი იცვლება დროის მიხედვით. ვიპოვოთ ამ ცვლილების კანონი [2, 14, 18].

ეს დაშვებანი ცოცხალი ორგანიზმების რეალური კოლონიიდან, რაღაც, ხელოვნურ აბსტრაქტულ პოპულაციაზე გადასვლის არსებითი პირველი ნაბიჯებია. სინამდვილეში, ბუნებაში და ლაბორატორიაშიც, შეუძლებელია დაკვირვება ისეთ პოპულაციაზე, რომელიც დიდი ხნის განმავლობაში იცხოვრებდა საკვები რესურსების განუსაზღვრელ პირობებში. მაგრამ, ჩვენ ვიხილავთ არა რეალურ პოპულაციას, არამედ, მის მოდელს. ვთქვათ,  $x = x(t)$  არის ცოცხალი ორგანიზმების რაოდენობა t მომენტში, ხოლო  $x = x(t + \Delta t)$  - კი t + Δt მომენტში, მაშინ სხვაობა

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x$$

იძლევა  $x(t)$  ფუნქციის ნაზრდს t-დან t+Δt-მდე. რისგან შედგება ეს ნაზრდი?

Δt-ში ყველა ზრდასრული სახეობა, ან მისი ნაწილი, წარმოქმნის შთამომავლობას. მათი ნაწილი შეიძლება დაიღუპოს, ამრიგად,

$$\Delta x = G - H, \quad (1.1.3)$$

სადაც  $G$  არის  $\Delta t$ -ში დაბადებულთა რიცხვი, ხოლო  $H$  - ამ დროის მონაკვეთში დაღუპულთა რიცხვი.

$G$ -ს რაოდენობა დამოკიდებულია  $\Delta t$ -ს სიგრძეზე და "შშობელთა" რაოდენობაზე. ამრიგად,

$$G = \Phi(x, \Delta t).$$

ეს ფუნქცია იზრდება  $x$ -ისა და  $\Delta t$ -ს ზრდასთან ერთად, და ტოლია 0-ის, თუ ამ ცვლადებიდან ერთ-ერთი 0-ის ტოლია.

უბრალო ექსპერიმენტი გეიჩვენებს, რომ  $\Delta t$   $\Phi$  ფუნქციაში უნდა შედიოდეს წრფივად, ამიტომ,

$$\Phi(x, \Delta t) = f(x) \cdot \Delta t.$$

$f(x)$  ფუნქციის ხასიათი უფრო რთულია. ჩვენ მხოლოდ ვიცით, რომ ის იზრდება მონოტონურად  $x$ -ის ზრდასთან ერთად, და ეს დამოკიდებულია გამოსაკვლევ ბიოლოგიურ ინდივიდთა თავისებურებებზე: ამის აღსაწერად შეიძლება შემოვიფარგლოთ შემთხვევით, როცა შთამომავლობის რიცხვი "შშობელთა" რიცხვის პროპორციულია, ე.ი.  $f(x) = \alpha x$ , სადაც  $\alpha = \text{const}$ . ასეთი დამოკიდებულება გვაქვს უჯრედების დაყოფის შემთხვევაში.

ამრიგად,  $G = \alpha x \cdot \Delta t$ . ანალოგიურად  $H = \beta x \cdot \Delta t$  და შესაბამისად

$$\Delta x = \alpha x \Delta t - \beta x \Delta t,$$

ანუ

$$\Delta x = \gamma x \Delta t, \quad (1.1.4)$$

სადაც  $\gamma \equiv \alpha - \beta$ .

(1.1.4)-ის ორივე მხარე გავყოთ  $\Delta t$ -ზე და გადავიღოთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ .

მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x, \quad \text{ანუ}$$

$$\frac{dx}{dt} - \gamma x = 0. \quad (1.1.5)$$

(1.1.5) არის პოპულაციის უმარტივესი მოდელი, რომელიც ცნობილია მალთუსის მოდელის სახელწოდებით. მას საფუძვლად უდევს მარტივი დებულება - პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე  $t$  მომენტში პირდაპირპროპორციულია ინდივიდების  $x(t)$  რაოდენობის. ეს მოსაზრება გამოთქმული იყო ჯერ კიდევ მე-18 საუკუნეში რობერტ

მალოუსის (1766-1834) მიერ წიგნში "ხალხთა განსახლების ზრდის შესახებ" (1798).

(1.1.5) არის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$x = C \cdot e^{\gamma t}. \quad (1.1.6)$$

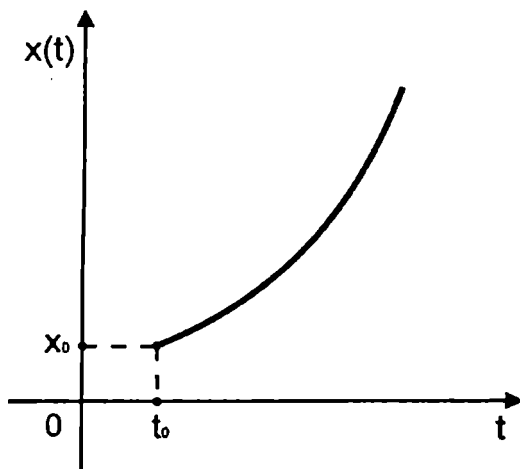
საწყისი პირობები:  $t = t_0$ ,  $x_0 = x(t_0)$ , სადაც  $t_0$  არის დაკვირვების დაწყების მომენტი,  $x(t_0) = x_0$  საწყის მომენტში ცოცხალი ორგანიზმების რაოდენობა. ამ პირობების გათვალისწინებით, (1.1.6)-დან მივიღებთ:

$$C = x_0 \cdot e^{-\gamma t_0}.$$

და, ბოლოს

$$x = x_0 \cdot e^{-\gamma t_0} \cdot e^{\gamma t} = x_0 e^{\gamma(t-t_0)}. \quad (1.1.7)$$

(1.1.7) არის ღრვის შუალედში პოპულაციის რაოდენობის ცვლილების კანონი.



ნახ.1.1.1

მაგრამ, მიღებულ კანონს აქვს სავარაუდო ხასიათი, თუ რამდენად შეესაბამება ეს მოდელი რეალობას, ამაზე პასუხს გაგვცემს ექსპერიმენტული შემოწმება. (1.1.7)-დან გამომდინარეობს, რომ  $t$ -ს ზრდასთან ერთად განუსაზღვრელად იზრდება ცოცხალ არსებათა



რაოდენობა. თუ ამ ფუნქციას გამოვხატავთ გრაფიკულად, მივიღებთ ასეთ მრუდს (ნახ.1.1.1).

განხილული მოდელი სამართლიანია პოპულაციის ძალიან ვიწრო კლასისათვის. მალთუსს კი ეს შედეგი უნივერსალურ კანონად მიაჩნდა არა მარტო მთელი ბუნებისათვის, არამედ ადამიანთა საზოგადოებისთვისაც.

მალთუსმა გამოთქვა ეჭვი იმის შესახებ, რომ დედამიწაზე მოხდება მოსახლეობის მკვეთრი ზრდა, აქედან გამომდინარე ყველა შედეგით.

ამასთან დაკავშირებით მოვიყვანოთ მათემატიკური მოდელის ერთი საინტერესო მაგალითი, რომელიც გარკვეული აზრით შეიძლება იუმორის სფეროსაც მივაკუთვნოთ, თუმცა თავდაპირველად იგი სამეცნიერო ჟურნალში გამოქვეყნდა. მკვლევარების მიზანი იყო შეესწავლათ დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის დინამიკა.

ვთქვათ, მოსახლეობის ზრდის სიჩქარე მამაკაცებისა და ქალების რაოდენობის ნამრავლის პროპორციულია

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x_1 x_2,$$

სადაც  $x(t)$  - დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობაა დროის  $t$  მომენტში,  $x_1$  და  $x_2$  - შესაბამისად მამაკაცებისა და ქალების რაოდენობა,  $\alpha$  - პროპორციულობის გარკვეული კოეფიციენტი.

საკმარისად დიდი სიზუსტით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ  $x_1 \equiv x_2 \equiv \frac{1}{2}x$ , მაშინ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x^2}{4}.$$

ვთქვათ,  $t_0$  მომენტში მოსახლეობის რაოდენობაა  $x(t_0)$ , მაშინ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი იქნება:

$$x(t) = \frac{4}{\alpha(t_f - t)},$$

სადაც

$$t_f = t_0 + \frac{4}{\alpha} x^{-1}(t_0) > t_0.$$

როგორც ჩანს  $x(t)$ -ს მნიშვნელობა გახდება უსასრულო  $t = t_f$  მომენტში.

თუ გავითვალისწინებთ დედამიწის მოსახლეობის ზრდის სტატისტიკურ მონაცემებს, შეიძლება გამოვთვალოთ ა კოეფიციენტის მნიშვნელობა და საკმარისად ზუსტად მივუთითოთ "სამყაროს აღსასრულის" დრო.

ეს სამუშაო ჩატარდა, რის შედეგადაც დაადგინეს, რომ "კატასტროფა" მოხდება პარასკევს, 2026 წლის 13 ნოემბერს.

მოუხედავად ამ დასკვნისა, კაცობრიობამ შეიძლება მშვიდად იძინოს. გენერალური ასამბლეის მონაცემების თანახმად, რომელიც ეყრდნობა გაცილებით უფრო ზუსტ მეთოდებს, აღნიშნული პერიოდისათვის დედამიწაზე იცხოვრებს 10 მილიარდამდე ადამიანი. ეს მაგალითი კიდევ ერთხელ გვიჩვენებს, რომ მათემატიკური მოდელი შეიძლება კარგად აღწერდეს ამა თუ იმ მოვლენის ძირითად თვისებებს გარკვეულ დაშვებებში, მაგრამ სხვა დაშვებებში იგი შეიძლება გახდეს პრინციპულად არასწორი დასკვნის მიზეზი.

რა თქმა უნდა, არცერთი ბუნებრივი პოპულაცია არ იზრდება ასეთი (ნახ.1.1.1) მრუდით. დედამიწაზე სიცოცხლის ჩასახვის მომენტიდან გავიდა მილიარდ წელზე მეტი და არც ერთმა პოპულაციამ არ მიაღწია იმ ასტრონომიულ სიდიდეს, რომელსაც წინასწარმეტყველებს (1.1.7) ფორმულა. ამ ფორმულას აქვს თეორიული მნიშვნელობა, რადგანაც თავიდანვე პოპულაციაზე გავაკეთეთ ისეთი დაშვებანი, რომელიც ბუნებაში პრაქტიკულად არასდროს არ სრულდება. ლაბორატორიაში შესაძლებელია, თუნდაც რამდენიმე ხნით, შეიქმნას ისეთი პირობები, როცა კოლონია არ ნადგურდება სხვა სახეობით და აქვს განუსაზღვრელი საკვები რესურსები.

ამ მხრივ ძლიერ დამახასიათებელია პენიცილინის ისტორია. როცა აღმოჩენილ იქნა ეს ანტიბიოტიკი, მისი გამოყოფი სოკოები, დაიწყეს პენიცილინის სოკოების გამრავლება საუკეთესო პირობებში. მათ განუსაზღვრელად კვებავდნენ, ყურადღებას აქცევდნენ, რომ არ ყოფილიყვნენ ვიწროდ და, რა თქმა უნდა, იცავდნენ მავნე სახეობებისაგან. ამ პირობებში სავსებით შესაძლებელი იყო სოკოების რაოდენობა შეცვლილიყო (1.1.7) ფორმულით, და მართლაც, მრავლდებოდნენ რა ექსპონენციალურად, პენიცილინის სოკოებმა მცირე ხანში მთელი მსოფლიო აღჭურვეს ძვირფასი წამლებით.

და ბოლოს, შევნიშნავთ, რომ ჩვენ მიერ წარმოდგენილი კანონი შემჩნეულია რეალურ ბუნებრივ პოპულაციებშიც. სანამ პოპულაცია

ახალგაზრდაა, სანამ საკმაოდ ყოფნის მას ადგილი და საკვები, სანამ არ არის ბრძოლა მეზობელი სახეობებიდან, პოპულაციის განვითარება ხდება ექსპონენციალური კანონით. კარგად არის ცნობილი ე.წ. "ეკოლოგიური აფეთქებები", როცა ესა თუ ის ზოოლოგიური სახეობა, მოხვდება რა ხელსაყრელ პირობებში, მცირე ხანში აღწევს გიგანტურ რიცხვს. მაგალითისათვის შეიძლება მოვიყვანოთ მწერების ურდოების დამლუპველი შემოსევა (კალიები, აბრეშუმის ჭია და სხვა) ან კურდღლების მოულოდნელი აკლიმატიზაციის შედეგები ავსტრალიაში. ამ კონტინენტზე გადაყვანილი კურდღელები ისე სწრაფად და დიდი რაოდენობით გამრავლდნენ, რომ სასარგებლო სახეობიდან მავნებლები გახდნენ.

### *სამარჯიშოები*

*ამოცანა 1.* (ბაქტერიების გამრავლების სიჩქარის შესახებ). ბაქტერიების გამრავლების სიჩქარე მისი რაოდენობის პროპორციულია.  $t = 0$  საწყის მომენტში 100 ბაქტერია იყო, ხოლო 3 სთ-ის განმავლობაში მათი რაოდენობა გაორმაგდა. იპოვეთ: ბაქტერიათა რაოდენობის დამოკიდებულება დროსთან. რამდენჯერ გადიდება ბაქტერიათა რაოდენობა 9 სთ-ში?

*ამოცანა 2.* (ფერმენტების რაოდენობის გადიდების შესახებ). ლუდის საფუარის კულტურაში მოქმედი ფერმენტის რაოდენობის ზრდის სიჩქარე მისი საწყისი  $x$  რაოდენობის პროპორციულია. ფერმენტების საწყისი  $a$  რაოდენობა 1 სთ-ის განმავლობაში გაორმაგდება. რამდენჯერ გადიდება ის 3 სთ-ის შემდეგ?

§1.2. პოპულაციის ევოლუციის ფერხიულსტ-პერლის მოდელი კონსერვაციის გათვალისწინებით

პოპულაციის რაოდენობრიობის დინამიკა (ე.ი. პოპულაციაში ცოცხალ ინდივიდთა საერთო რაოდენობის ცვლილება დაბადებასა და სიკვდილიანობასთან კავშირში) – არის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხი პოპულაციის ეკოლოგიაში. ჩვენ უკვე განვიხილეთ ამ საკითხის უმარტივესი ამოცანა, მალთუსის მოდელი, §1.1. იქ ნაჩვენებია იყო, რომ, თუ ჩათვლით პოპულაციას იზოლირებულად, კვების რესურსებს – განუსაზღვრელად, ხოლო ახალი თაობის ნაზრდს ზრდასრულ ინდივიდთა რაოდენობის პროპორციულად, მაშინ, პოპულაციის რაოდენობრიობის დინამიკა ხასიათდება დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x,$$

სადაც  $x = x(t)$  არის პოპულაციის რაოდენობა დროის  $t$  მომენტში.

ამ განტოლების ამონახსნი არის

$$x = x_0 e^{\gamma(t-t_0)}$$

ფუნქცია, სადაც  $x_0$  არის პოპულაციის რაოდენობა საწყის  $t_0$  მომენტში. როგორც აღინიშნა, ამ განტოლებას აზრი აქვს ან თეორიულ ასპექტში, ან, აღწერს ხელოვნურად შექმნილი პოპულაციის დინამიკას.

პოპულაციის განვითარების უფრო ზუსტ აღწერას იძლევა ფერხიულსტ-პერლის განტოლება, რომელიც მიღებულია 1845 წ [14, 20, 34]. ის ითვალისწინებს პოპულაციაში შიდასახეობათა კონკურენციას. ეს ფაქტორი, რომელიც პოპულაციის ზრდის სიჩქარეს აფერხებს, აიხსნება მრავალი მიზეზით: ბრძოლა ადგილისა და საკვებისათვის, ინფექციის გავრცელებით და ა.შ.. თუ გვინდა გავითვალისწინოთ ეს ფაქტორი,  $\Delta x$ -ის გამოთვლისას  $\gamma x \Delta t$  სიდიდეს უნდა გამოვაკლოთ რაიმე  $h(x, \Delta t)$  სიდიდე

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - h(x, \Delta t).$$

ფუნქცია  $h(x, \Delta t)$  ბევრი პოპულაციისთვის შეიძლება ავიღოთ შემდეგი სახით

$$h(x, \Delta t) = \delta x^2 \Delta t,$$

სადაც  $\delta$  - თვითმოწამლვის კოეფიციენტი, (ანუ პოპულაციაში შიდა ბრძოლის). სიდიდე  $h(x, \Delta t)$  უჩვენებს პოპულაციის ზრდის სიჩქარის

დაქვეითებას შიგასახეობათა კონკურენციის გამო. მაგრამ, კონკურენცია მით მეტია, რაც მეტია ინდივიდთა შორის შეხვედრები, ხოლო შეხვედრათა რიცხვი პროპორციულია  $x \cdot x$  ნამრავლის, ე.ი.  $x^2$ -ის ამგვარად,

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - \delta x^2 \Delta t. \quad (1.2.1)$$

(1.2.1) გავყოთ წვერ-წვერად  $\Delta t$ -ზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , შედეგად ვღებულობთ განტოლებას:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2, \quad \gamma > 0, \delta > 0. \quad (1.2.2)$$

(1.2.2) არის ფერხიულ სტ - პერლის განტოლება.

ამ განტოლებას ხშირად წერენ შემდეგი სახით:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \left(1 - \frac{\delta}{\gamma} x\right),$$

ანუ

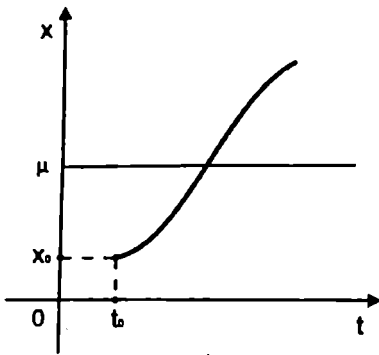
$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \cdot \frac{\frac{\gamma}{\delta} - x}{\frac{\gamma}{\delta}}. \quad (1.2.3)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა  $\frac{\gamma}{\delta} = \mu$ , (1.2.3) გადაიწერება ასე:

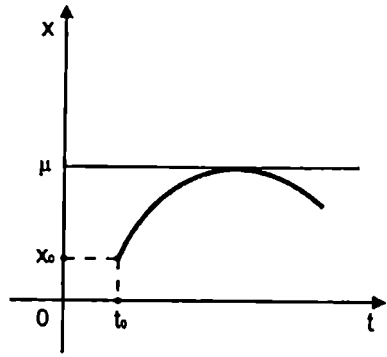
$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \cdot \frac{\mu - x}{\mu}. \quad (1.2.4)$$

$\mu$  სიდიდეს აქვს გარკვეული ბიოლოგიური აზრი. ახლა აღვნიშნოთ, რომ, თუ  $x_0 < \mu$ , მაშინ, დროის ნებისმიერი მომენტისათვის  $t > t_0$ ,  $x(t) < \mu$  (1.2.4)-დან ჩანს, რომ სანამ  $x(t) < \mu$ , წარმოებული  $\frac{dx}{dt} > 0$ , და შესაბამისად  $x(t)$  იზრდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ  $x(t)$ -ს შეუძლია მიიღოს  $\mu$ -ს ტოლი მნიშვნელობა, ან როცა იზრდება და კვეთს  $x(t) = \mu$  წრფეს, (იხ. ნახ.1.2.1), ან როცა ეხება ამ წრფეს (იხ.ნახ.1.2.2).

პირველ შემთხვევაში გადაკვეთის წერტილის მარჯვნივ გვაქვს, რომ  $x(t) > \mu$  და  $x'(t) > 0$ . ეს ეწინააღმდეგება (1.2.4)-ს. მეორე შემთხვევაში წების წერტილის მარჯვნივ  $x(t) < \mu$  და  $x'(t) < 0$ , ესეც ეწინააღმდეგება (1.2.4)-ს. ამგვარად,  $x(t)$ -ს არ შეუძლია  $\mu$ -ს ტოლი მნიშვნელობა მიიღოს, როცა  $x(t) < \mu$



ნახ. 1.2.1



ნახ. 1.2.2

(1.2.4)-ში განვაცალკევოთ ცვლადები:

$$\frac{\mu dx}{x(\mu - x)} = \gamma dt, \text{ ანუ } \frac{(\mu - x) + x}{x(\mu - x)} dx = \gamma dt,$$

საიდანაც

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\mu - x} \right) dx = \gamma dt.$$

თუ ჩავთვლით, რომ  $x_0 < \mu$ , ინტეგრების შემდეგ გვექნება:

$$\ln x - \ln(\mu - x) = \gamma t + \ln C,$$

ხოლო პოტენციურებით მივიღებთ:

$$\frac{x}{\mu - x} = C \cdot e^{\gamma t}. \quad (1.2.5)$$

ვთქვათ, სიმარტივისათვის  $t_0 = 0$  და  $x(0) = x_0 < \mu$ . თუ ჩავსვამთ ამ საწყის პირობებს (1.2.5)-ში, მივიღებთ

$$\frac{x_0}{\mu - x_0} = C.$$

C-ს ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (1.2.5)-ში, მივიღებთ:

$$x(t) = \frac{x_0 \mu e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}. \quad (1.2.6)$$

ეს არის სამეზბნი კანონი (ფერხიულსტ-პერლის მოდელი).

გამოვიკვლიოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი. (1.2.4)-დან ჩანს, რომ რადგანაც  $x < \mu$ , მაშინ  $x'(t)$  ყველგან დადებითია. (1.2.4)-ის დიფერენცირებით ვღებულობთ:

$$x''(t) = \left( \gamma \frac{\mu - x}{\mu} - \frac{\gamma x}{\mu} \right) x'(t) = \gamma \left( 1 - \frac{2x}{\mu} \right) x'(t).$$

ამ უკანასკნელში ჩავსვათ  $x$ -ის გამოსახულება (1.2.6)-დან, მივიღებთ:

$$x''(t) = \gamma \left( \frac{\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}} \right) x'(t),$$

აქედან ჩანს, რომ როცა  $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} > 0$ , მაშინ  $x''(t) > 0$ , და, შესაბამისად  $x(t)$  ფუნქცია ჩაზნექილია; როცა  $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} < 0$ , მაშინ  $x''(t) < 0$  და  $x(t)$  ფუნქცია ამოზნექილია. პირველი უტოლობიდან ვპოულობთ ჩაზნექილობის შუალედს:

$$\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} > 0, \text{ ე.ი. } e^{\gamma t} < \frac{\mu - x_0}{x_0}.$$

ამიტომ ჩაზნექილობის შუალედი განისაზღვრება

$$0 < t < \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ამოზნექილობის შუალედი

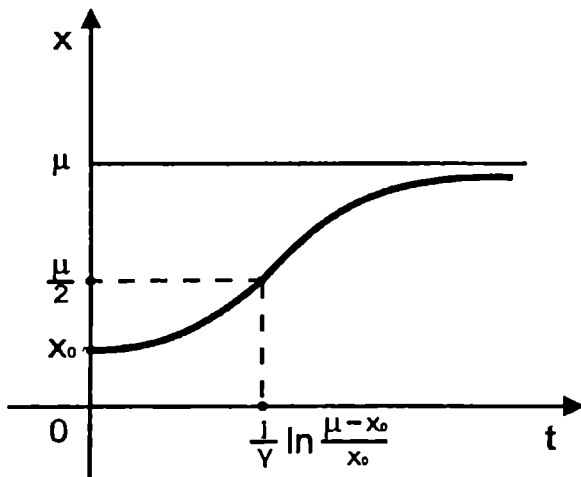
$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0} < t < +\infty.$$

ვინაიდან, როცა,  $t = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}$ ,  $x''(t) = 0$ . (1.2.6)-ში  $t$ -ს

მნიშვნელობის ჩასმით ვღებულობთ, რომ  $x = \frac{\mu}{2}$ .  $M\left(\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}; \frac{\mu}{2}\right)$

წერტილი არის გადაღუნვის წერტილი.

რადგანაც  $x'(t) > 0$  ნებისმიერი  $t$ -თვის, ამიტომ  $x(t)$ -ს არსად არა აქვს ექსტრემუმი. და ბოლოს, (1.2.6)-დან  $x < \mu$ -ს გათვალისწინებით ჩანს, რომ  $x(t) \rightarrow \mu$  ქვევიდან, როცა  $t \rightarrow +\infty$ , ხოლო საწყისი პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ როცა  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0$ . ეს ყველაფერი საკმარისია, რომ წარმოვიდგინოთ მრუდის სახე (ნახ.1.2.3).



ნახ. 1.2.3

დასკენის სახით შეიძლება აღვნიშნოთ, რომ ერთ იზოლირებულ პოპულაციაში, რომელიც ცხოვრობს რამდენადმე შემოსაზღვრული სივრცის უბანში, თავდაპირველად, სანამ ინდივიდები პოპულაციაში არც თუ ისე ბევრია, მისი განვითარება მიმდინარეობს ექსპონენციური კანონის მიხედვით (იგულისხმება, რომ საკვების მარაგი საკმარისია), თუმცა რიცხობრივ ზრდასთან ერთად პოპულაციის ზრდის სიჩქარე მცირდება.

რიცხობრივი ცვლილებების ასეთი S-ის მსგავსი მრუდი (ხშირად მას "ლოგისტიკურ მრუდს" უწოდებენ) დამახასიათებელია პოპულაციის უმრავლესობისათვის.

$x(t)$ -ს მნიშვნელობა არასდროს არ ხდება  $\mu$ -ს ტოლი, ამიტომ  $\mu$  სიდიდეს მოცემულ პირობებში პოპულაციის შესაძლო მაქსიმალურ (თეორიულ) მნიშვნელობას უწოდებენ.

საკვები მარაგის გაზრდა ცვლილებებს არ იწვევს. სანამ პოპულაციას არ ექნება ახალი ადგილები დამკვიდრებისათვის, მისმა რიცხობრიობამ არ შეიძლება გადააჭარბოს გარკვეულ დონეს, რომელიც ნახაზზე აღნიშნულია წრფით  $x = \mu$ . ამის მიზეზია პოპულაციაში გადაჭარბებული სიმჭიდროვე. ბიოლოგებმა დიდი ხნის



წინ ახსნეს ამ მოვლენის თვისობრივი მხარე. სიმჭიდროვე, ამტკიცებდნენ ისინი, წარმოშობს კონკურენციის ზრდას სახეობების შიგნით. თუ საკვები საკმარისია, მაშინ ბრძოლა წარმოებს მზისათვის, ჰაერისათვის, ადგილმდებარეობისათვის. ყოველივე ამას კი მივყავართ პოპულაციის ზრდის სიჩქარის შემცირებისაკენ.

ანალოგიურად შეიძლება გამოვიკვლიოთ შემთხვევა, როცა  $x_0 = x(t_0) > \mu$ . ამ შემთხვევაში  $x(t) \rightarrow \mu$  ისე, რომ მონოტონურად კლებადია, როცა  $t \rightarrow +\infty$ .

ფერხიულსტ-პერლის მოდელის საფუძველზე შეიძლება განვიხილოთ უფრო ზოგადი ამოცანები. მაგალითად, არაიზოლირებული პოპულაციის შემთხვევაში ვლბებულობთ განტოლებას:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2 + N - M, \quad (1.2.7)$$

სადაც  $N$  - ინდივიდთა რაოდენობაა, რომელიც ემატება მოცემულ პოპულაციას გარედან (მაგ., მეზობელი არიდან), ხოლო  $M$  - ინდივიდთა რაოდენობა, რომელიც ტოვებს მოცემულ პოპულაციას. ზოგადად,  $M$  და  $N$   $t$ -სა და  $x$ -ის ფუნქციებია. კერძოდ,  $M$  შეიძლება აღნიშნავდეს ადამიანის ან სხვა სახეობის მიერ ინდივიდთა განადგურებას. ამ შემთხვევაში  $M$ -ის რეგულირება შეიძლება. მაგალითად, შეიძლება განადგურდეს მულმივი რაოდენობა ( $M = \text{const}$ ), ან სიდიდე, რომელიც პროპორციულია საწყისი რაოდენობის ( $M = \alpha x$ ). და ბოლოს, შეიძლება სეზონური ნადირობა. ამ შემთხვევაში  $M = a(t)x$ , სადაც  $a(t)$  - დროის პერიოდული ფუნქციაა.

ასევე შეიძლება განხილულ იქნას პოპულაცია სეზონური ზრდით. ამ შემთხვევაში  $\mu$  და  $\gamma$  მულმივების ნაცვლად გვექნება  $t$ -ს ფუნქცია.

განვიხილოთ ამოცანა. (სეზონური ზრდის მოდელი) [14, 20]. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \cos t,$$

სადაც  $r$  - დადებითი მულმივია, შეიძლება განვიხილოთ როგორც სეზონური ზრდის მარტივი მოდელი.  $x(t)$  პოპულაციის ზრდის

სიჩქარე  $\frac{dx}{dt}$  ხან დადებითია, ხან უარყოფითი, და შესაბამისად

პოპულაცია ხან იზრდება, ხან კლებულობს. ეს შეიძლება გამოწვეული იყოს ისეთი სეზონური ფაქტორებით, როგორცაა, საკვების მოპოვება.

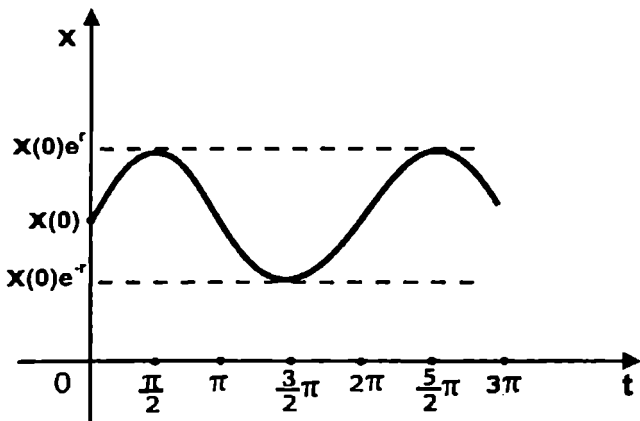
მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dx}{dt} - (r \cos t)x = 0.$$

ეს უკანასკნელი არის პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება, რომლის ამონახსნია

$$x = C e^{\int r \cos t dt} = C e^{r \sin t}.$$

დაეუშვათ  $t = 0$ , მივიღებთ  $C = x(0)$ , ე.ი.  $t$  მომენტში პოპულაციის სიდიდეა  $x = x(0)e^{r \sin t}$ . პოპულაციის უდიდესი მნიშვნელობა,  $e^r x(0)$ -ის ტოლი, მიიღება როცა  $\sin t = 1$ , ანუ როცა  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$ . მინიმალური მნიშვნელობა,  $e^{-r} x(0)$ -ის ტოლი, მიიღება როცა  $\sin t = -1$ , ანუ როცა  $t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots$ .



ნახ.1.2.4

ამ მოდელში პოპულაციის მნიშვნელობა იცვლება  $e^r x(0)$ -დან  $e^{-r} x(0)$ -მდე  $2\pi$  პერიოდით. დროის მომენტები  $t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  შეიძლება ჩავთვალოთ დიდი რაოდენობით საკვების მოპოვების სეზონების შუალედებად (ზაფხულის სეზონები), ხოლო  $t = \pi, 3\pi, \dots$

მომენტები შეესაბამებიან საკვების უკმარისობის სეზონების შუაგულებს (ზამთრის სეზონი). ერთი წელი შეესაბამება  $2\pi$ -ს (ნახ.1.2.4).

### სავარჯიშოები

ამოცანა 1. მატერიალური წერტილი სწორხაზოვნად მოძრაობს კანონით  $S(t) = 18t + 9t^2 - t^3$ , სადაც  $S$  გზაა (მეტრებში),  $t$  - დრო (წამებში).  $t$  დროის რა მომენტში იქნება  $v$  სიჩქარე უდიდესი და როგორია ამ სიჩქარის მნიშვნელობა.

ამოცანა 2.  $x$  პოპულაციის ზრდის სიჩქარე მოცემულია ფორმულით  $y = 0,01x(100 - x)$ , როცა დრო გამოისახება დღეებით. პოპულაციის რა მნიშვნელობისათვის არის ეს სიჩქარე მაქსიმალური?

ამოცანა 3. ორგანიზმის რეაქცია ორ წამალზე, როგორც  $t$  დროის ფუნქცია (დრო - საათებში) წარმოადგენს  $r_1(t) = te^{-t}$  და  $r_2(t) = t^2e^{-t}$  რომელ წამალს აქვს უფრო დიდი მაქსიმალური რეაქცია?

### §13. პოპულაციის ევოლუციის დისკრეტული მოდელები

ეკოლოგიის ერთ-ერთ ძირითად პრობლემას შეადგენს ამა თუ იმ პოპულაციის ევოლუციის შესწავლა.

როდესაც გვინდა შევადგინოთ რთული სისტემის მათემატიკური მოდელი, ჩვენს წინაშე დგება ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემა - ეს არის არსებითი ცვლადების შერჩევა. ეკოლოგიის პრობლემის შესწავლისას ასეთ ძირითად ცვლადად, ჩვეულებრივ, იღებენ ამა თუ იმ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობას.

შიდძლება აიგოს პროცესების როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი მოდელები. დისკრეტულ მოდელში დრო არის დისკრეტული ცვლადი და დაკვირვებები მიმდინარეობს დროის მხოლოდ განსაზღვრულ ინტერვალებში. პოპულაციის აღწერა შეიძლება ხდებოდეს, მაგ., ყოველ საათს, ყოველ წელს, ან ყოველ 10 წელიწადში ერთხელ. უწყვეტ მოდელში დრო არის უწყვეტი ცვლადი და პოპულაციის რაოდენობა ითვლება უწყვეტად, რომელიც იცვლება დროში.

განვიხილოთ დისკრეტული მოდელები [2, 44, 72].

არსებობს ისეთი ბიოლოგიური პოპულაციები, რომლებიც შედგებიან მხოლოდ ერთი თაობისაგან, ისე რომ ამ თაობას არა აქვს შეხება არც წინა და არც მომდევნო თაობასთან. მაგალითისათვის შეიძლება განვიხილოთ რაიმე იზოლირებული ტერიტორია (მაგ., კუნძული), რომლებზედაც ცხოვრობს მწერების გარკვეული პოპულაცია. მწერები წლის გარკვეულ პერიოდში ღებენ კვერცხებს და იზოცებიან ამ კვერცხებიდან ახალი მწერების გამოჩეკვამდე რადგანაც ასეთი პოპულაციის განვითარების პროცესი დისკრეტულია, ამიტომ მიზანშეწონილია ამ პოპულაციის ევოლუციის პროცესი აღვწეროთ რეკურენტული დამოკიდებულებების საშუალებით.

შევნიშნავთ, რომ როგორც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, შეზღუდული ზრდის საბაზო მოდელს წარმოადგენს ფერხიულსტის მოდელი

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \frac{\mu - x}{\mu}. \quad (1.3.1)$$

უკანასკნელი ათწლეულების განმავლობაში ფერხიულსტის განტოლება განიცდის მეორე ახალგაზრდობას.

(1.3.1) განტოლების ანალოგი დისკრეტული განტოლების შესწავლამ გამოავლინა სრულიად ახალი და მნიშვნელოვანი თვისებები.

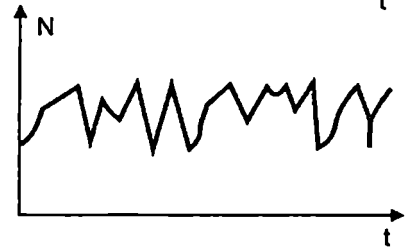
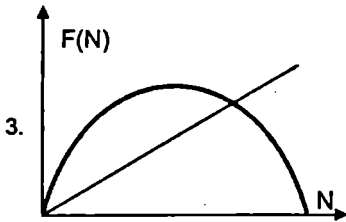
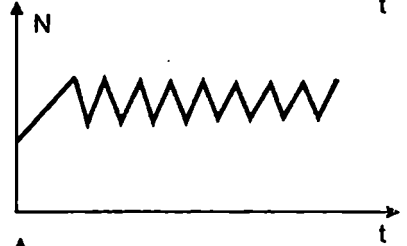
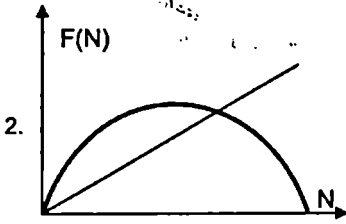
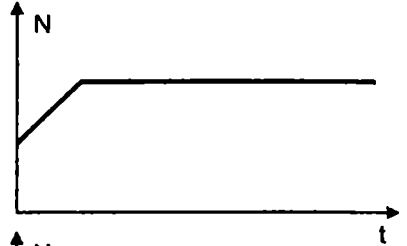
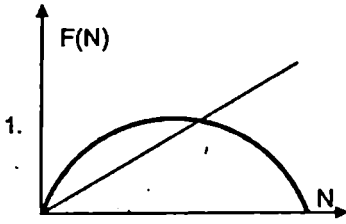
განვიხილოთ პოპულაციის რაოდენობები დროის თანმიმდევრულ მომენტებში. ეს შეესაბამება პოპულაციაში ინდივიდთა (ან უჯრედთა) გადათვლის რეალურ პროცედურას. ყველაზე მარტივ შემთხვევაში დროის რიგით  $(n + 1)$  ნაბიჯზე პოპულაციის რაოდენობის დროის წინა  $n$ -ურ ნაბიჯზე არსებულ რაოდენობაზე დამოკიდებულება შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n). \quad (1.3.2)$$

დროში  $x_n$  ცვლადის ქცევას შეიძლება პქონდეს არა მარტო შეზღუდული ზრდის ხასიათი, როგორც ეს იყო უწყვეტობა (1.1.3) მოდელისთვის, არამედ იყოს რხევითი, ან კვაზისტოქასტური.  $x_n$ -ის ქცევის ტიპი დამოკიდებულია  $r$  მუდმივის სიდიდეზე.  $r$ -ს საკუთარი ზრდის სიჩქარის პარამეტრს უწოდებენ. მრუდები, რომლებიც განსაზღვრავენ დროის  $(t + 1)$  და წინა  $t$  მომენტებში პოპულაციის რაოდენობების დამოკიდებულებების სახეს, მოცემულია ნახ.1.3.1-ის მარცხნივ. ხოლო მარჯვნივ მოცემულია მრუდები, რომლებიც ასახავენ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის დროზე დამოკიდებულების დინამიკას. ზევიდან ქვევით იზრდება  $r$ -ის მნიშვნელობა.

რაოდენობის ზრდის ხასიათი განისაზღვრება  $f(t + 1)$ -სა და  $f(t)$ -ს შორის დამოკიდებულების მრუდის სახით. ეს მრუდი ასახავს რაოდენობის ნაზრდის სიჩქარის ცვლილებას. მარცხნივ მოცემულ ყველა მრუდზე ეს სიჩქარე იზრდება მცირე რაოდენობების პირობებში და შემდგომ დიდი რაოდენობის შემთხვევაში მცირდება და ხდება ნულის ტოლი. პოპულაციის ზრდის მრუდის დინამიური ტიპი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად სწრაფად ხდება სიჩქარის ზრდა მცირე რაოდენობების დროს, ე.ი. განისაზღვრება წარმოებულით (ამ მრუდის დახრის კუთხის ტანგენსი) ნულში, რომელიც განისაზღვრება  $r$  კოეფიციენტით - საკუთარი ზრდის სიჩქარის სიდიდით. არადიდი  $r$ -თვის ( $r < 3$ ) პოპულაციის რაოდენობა მიისწრაფის მდგრადი წონასწორობისაკენ. მაშინ როცა მარცხენა გრაფიკი ხდება უფრო მკვეთრად მრუდი, მყარი წონასწორობა გადადის მყარ ციკლებში. რაოდენობის ზრდასთან ერთად ციკლის სიგრძე იზრდება, და რაოდენობის მნიშვნელობები მეორდებათ 2, 4,

8, ... ,  $2^n$  თაობების შემდეგ. თუ პარამეტრის სიდიდე  $r > 5,370$ , ამონახსნს ქაოსურობა ახასიათებს. საკმაოდ დიდი  $r$ -თვის რაოდენობის დინამიკა არის ქაოსური აფეთქების დემონსტრირება (შწერების რაოდენობის აფეთქება).



ნახ.1.3.1

1. შეზღუდული ზრდა. 2. რხევა.  
3. ქაოსი. ზევიდან ქვევით  $r$  პარამეტრის სიდიდე იზრდება

ამ ტიპის განტოლებები კარგად აღწერენ მწერების სეზონური გამრავლების დინამიკას.

დისკრეტული აღწერა ნაყოფიერი გამოდგა განსხვავებული ბუნების სისტემებისათვის.

სისტემის დინამიური ქცევის აღწერა სიბრტყეზე კოორდინატებით, საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ, არის თუ არა სისტემა, რომელსაც ვაკვირდებით, რხევადი თუ კვაზისტოქასტური. მაგალითად, ელექტროკარდიოგრამის მონაცემები საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ, რომ ადამიანის გულის კუმშვადობას ნორმაში ახასიათებს არარეგულარული ხასიათი, ხოლო სტენოკარდიის შეტევის პერიოდში, ან ინფარქტის წინაპერიოდის მდგომარეობაში გულის შეკუმშვის რითმი არის მკაცრად რეგულირებული. რეჟიმის ასეთი "გამკაცრება" არის ორგანიზმის დამცავი რეაქცია სტრესულ სიტუაციაში და სასიცოცხლო სისტემის საშიშროებაზე მეტყველებს.

შევნიშნავთ, რომ სხვაობიანი განტოლებები საფუძვლად უდევს რეალური ბიოლოგიური პროცესების მოდელირებას. რთული ბუნებრივი მოვლენების აღწერისათვის წარმატებით გამოიყენება სხვაობიანი განტოლებების მოდელური ტრაექტორიები.

ბანსაზღვრა. სხვაობიანი ეწოდება განტოლებას, რომელიც აკავშირებს ერთმანეთთან  $x_n$ -ის მნიშვნელობებს  $n$  ინდექსის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. თუ  $N_1$  და  $N_2$  არის  $n$  ინდექსებიდან უდიდესი და უმცირესი, რომელიც გვხვდება განტოლებების ჩანაწერში, მაშინ სხვაობიანი განტოლების რიგი ტოლია  $N_1 - N_2$ -ის.

განვიხილოთ ამოცანები, რომელთა მოდელები აღიწერება წრფივი სხვაობიანი განტოლებებით.

ასეთ განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n), \quad (1.3.3)$$

სადაც  $f(n)$  და  $g(n)$  -  $n$ -ის მოცემული ფუნქციებია. თუ  $g(n) = 0$ , განტოლება ერთგვაროვანია, წინააღმდეგ შემთხვევაში არაერთგვაროვანი.

ამოცანა 1. პოპულაციის ზრდის სიჩქარე დროის ნებისმიერ პერიოდში ამ პერიოდის დასაწყისში პოპულაციის რაოდენობის პროპორციულია.

პოპულაციის რაოდენობა დროის  $n$ -ური პერიოდის ბოლოს აღვნიშნოთ  $x_n$ -ით. მაშინ  $x_{n+1} - x_n$  სიდიდე განსაზღვრავს დროის შემდგომ პერიოდში პოპულაციის ნაზრდს. ეს სიდიდე

პროპორციულია  $x_n$ -ის. თუ პროპორციულობის კოეფიციენტს აღვნიშნავთ  $\alpha$ -თი, მაშინ ვღებულობთ  $x_{n+1} - x_n = \alpha x_n$ , ანუ გვაქვს პირველი რიგის წრფივი სხვაობიანი განტოლება

$$x_{n+1} = (1 + \alpha) x_n. \quad (1.3.4)$$

ეს განტოლება რომ ამოვხსნათ, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ საწყისი რაოდენობა  $x_0$ , შემდეგ განვსაზღვრავთ  $x_1, x_2$  და ა.შ., ამგვარად,

$$x_1 = (1 + \alpha) x_0,$$

$$x_2 = (1 + \alpha) x_1 = (1 + \alpha)(1 + \alpha) x_0 = (1 + \alpha)^2 x_0,$$

$$x_3 = (1 + \alpha) x_2 = (1 + \alpha)(1 + \alpha)^2 x_0 = (1 + \alpha)^3 x_0.$$

დროის ყოველი შემდგომი მომენტი სათვის პოპულაციის სიდიდე მრავლდება  $(1 + \alpha)$  მამრავლზე. ამიტომ ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$x_n = (1 + \alpha)^n \cdot x_0.$$

$x_0$ -ის ცნობილი მნიშვნელობისათვის ეს ფორმულა განსაზღვრავს  $x_n$ -ის მნიშვნელობას.

თუ  $\alpha > 0$ , მაშინ  $1 + \alpha > 1$  და შედეგად  $(1 + \alpha)^n$  უსასრულოდ იზრდება, როცა  $n \rightarrow \infty$ , თუ  $\alpha = 0$ , მაშინ პოპულაცია რჩება უცვლელი, თუ  $-1 < \alpha < 0$ , მაშინ  $0 < 1 + \alpha < 1$  და  $x_n \rightarrow 0$ , როცა  $n \rightarrow \infty$ . ამ შემთხვევაში პოპულაცია ქრება. თუ  $\alpha = -1$ , მაშინ პოპულაცია ქრება პირველივე პერიოდის შემდეგ. ამ მოდელში ჩვენ არ გვაინტერესებს შემთხვევა, როცა  $\alpha < -1$ , ამ შემთხვევაში მივიღებთ პოპულაციის უარყოფით რაოდენობას.

**ამოცანა 2.** პოპულაციის ზრდის შესახებ, რომელიც არსებობს გარკვეული რესურსებით.

ბაქტერიების პოპულაცია იზრდება მისი საწყისი 1000 რაოდენობიდან ისე, რომ მისი ნაზრდი დროის  $(n; n + 1)$  ინტერვალში არის  $500 \cdot 2^{-n}$ . როგორია პოპულაციის რაოდენობა 10 საათის შემდეგ?

ამოცანის პირობიდან გვაქვს:

$$x_{n+1} = x_n + 500 \cdot 2^{-n} \text{ და } x_0 = 1000,$$

სადაც  $x_n$  არის პოპულაციის რაოდენობა  $n$  სთ-ს ზრდის შემდეგ. აქ  $f(n) = 1$ ,  $g(n) = 500 \cdot 2^{-n}$ . ე.ი. განტოლება არის პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლება. ვიპოვოთ პოპულაციის სიდიდე 1 სთ-ს ზრდის შემდეგ.

$$x_1 = x_0 + 500 \cdot 2^{-0} = 1000 + 500 = 1500;$$



2 სთ-ს შემდეგ:  $x_2 = x_1 + 500 \cdot 2^{-1} = 1500 + \frac{500}{2} = 1750;$

3 სთ-ს შემდეგ:  $x_3 = x_2 + 500 \cdot 2^{-2} = 1875;$

ზოგადი ამონახსნი ასეთია:

$$x_n = 1000 + 500 + \frac{500}{2} + \frac{500}{2^2} + \dots + \frac{500}{2^{n-1}} =$$

$$= 1000 + 500 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2000 - 1000 \cdot 2^{-n}.$$

10 სთ-ს შემდეგ პოპულაციის სიდიდე ტოლია

$$x_{10} = 2000 - 1000 \cdot 2^{-10} \approx 1999.$$

ღრთთა განმავლობაში ბაქტერიათა პოპულაცია უახლოვდება ზღვრულ, ანუ წონასწორულ სიდიდეს, რომელიც 2000-ის ტოლია.

ზშირად, პოპულაციათა ზრდისა და კონკურენციის მოდელების შესწავლისას, ასევე სხვა ბიოლოგიურ ამოცანებში მიიღება შემდეგი სახის განტოლება:

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad (1.3.5)$$

სადაც  $a, b, c$  - მუდმივებია,  $a \neq 0$ .

(1.3.5) არის მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტიანი წრფივი სხვაობიანი განტოლება. ასეთი განტოლებების ამონახსნი ასე შეიძლება ვიპოვოთ. თუ

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (1.3.6)$$

მანსიათებელი განტოლების ამონახსნებია  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$ , მაშინ (1.3.5)-ის ბაზისური ამონახსნები იქნება  $x_1 = \lambda_1^n$  და  $x_2 = \lambda_2^n$ .

ზოგად ამონახსნს კი აქვს შემდეგი სახე:

$$x_n = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n, \quad (1.3.7)$$

სადაც  $k_1, k_2$  - ნებისმიერი მუდმივებია,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  და ისინი ნამდვილი რიცხვებია.

შემთხვევა, როცა  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$ , გვაძლევს ამონახსნს  $x_n = \lambda_1^n$ .

ამ შემთხვევაში (1.3.5) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$x_n = k_1 \lambda_1^n + k_2 n \lambda_1^{n-1}, \quad (1.3.8)$$

$k_1, k_2$  - ნებისმიერი მუდმივებია.

მესამე შემთხვევაში, (1.3.6) განტოლების ფესვები  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვებია:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{და} \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

ეს რიცხვები შეიძლება ჩაიწეროს ექსპონენციალური ფორმით:

$$\lambda_1 = r \cdot e^{i\theta} \quad \text{და} \quad \lambda_2 = r \cdot e^{-i\theta},$$

$$\text{სადაც } r = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{და} \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b}.$$

ამგვარად,

$$\lambda_1^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

$$\text{ანალოგიურად} \quad \lambda_2^n = r^n (\cos n\theta - i \sin n\theta) = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} (\cos n\theta - i \sin n\theta).$$

როგორც წინა ორ შემთხვევაში, ბაზისური ამონახსნების,  $\lambda_1^n$  და  $\lambda_2^n$ -ის ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია ასევე არის ამონახსნი, კერძოდ

$$\frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \cos n\theta$$

$$\text{და} \quad \frac{1}{2i}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \sin n\theta.$$

ამ ორი ამონახსნის გამოყენებით ჩაიწერება (1.3.5) განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$x_n = k_1 \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \cos n\theta + k_2 \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \sin n\theta. \quad (1.3.9)$$

$k_1$  და  $k_2$  მუდმივები შეიძლება გამოვსახოთ  $x_0$  და  $x_1$ -ით.

(1.3.9) ამონახსნს ახასიათებს საკმაოდ საინტერესო თვისებები, რადგანაც  $\cos n\theta$  და  $\sin n\theta$   $n$ -ის ზდასთან ირხვეიან 1-სა და -1-ს

შორის,  $x_n$  ამონახსნი ირხევა უფრო რთულად. პოპულაციის რაოდენობა წლიდან წლამდე განიცდის რხევას საკვების მარაგის ცვლილებისა და სხვა მიზეზების გამო.

ამოცანა 3. ზრდის მოდელი, რომელზეც გავლენას ახდენს წინა თაობები.

განვიხილოთ პოპულაცია, რომელიც იზრდება თაობიდან თაობამდე. ვთქვათ,  $x_n$  არის პოპულაციის სიდიდე  $n$ -ურ თაობაში. ცხადია, რომ  $n$ -ური პოპულაციის რაოდენობა დამოკიდებულია წინა თაობაზე და შეიძლება დამოკიდებული იყოს სხვა წინა პოპულაციაზე. წინა თაობებს, ამოწურავენ რა რესურსების დიდ ნაწილს, შეუძლიათ შეაფერხონ პოპულაციის ზრდა, ან გაზადონ ის შეუძლებელი. თაობიდან თაობამდე პოპულაციის ზრდის მოდელი შეიძლება იყოს

$$x_{n+2} = r x_{n+1} + s x_n,$$

$r$  და  $s$  მუდმივებია.

მახასიათებელი განტოლებაა  $\lambda^2 - r\lambda - s = 0$ , რომლის ფესვებია:

$$\lambda_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \quad \text{და} \quad \lambda_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2}.$$

თუ  $r^2 + 4s > 0$ , მაშინ ეს ფესვები ნამდვილი რიცხვებია და განსხვავებულები ერთმანეთისაგან, ზოგადი ამონახსნია

$$x_n = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n.$$

თუ  $r^2 + 4s < 0$  (ეს მოხდება, როცა  $s$  - საკმაოდ დიდი უარყოფითი რიცხვია), მაშინ ზოგად ამონახსნს აქვს სხვა სახე:

$$x_n = (-s)^{\frac{n}{2}} (k_1 \cos n\theta + k_2 \sin n\theta),$$

სადაც  $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{-(r^2 + 4s)}}{r}$ .

ამ მარტივ მოდელში მივიღეთ საინტერესო შედეგი, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ თუ მოცემულ თაობაში სიკვდილიანობაზე მნიშვნელოვნად მოქმედებენ ინდივიდები, რომლებიც დაიბადნენ ორი თაობით ადრე, მაშინ თაობიდან თაობამდე პოპულაციის რაოდენობა განიცდის რხევას.

თუ განვიხილავთ ორი სახეობის პოპულაციას, მაშინ მოდელში მივიღებთ სხვაობიან განტოლებათა სისტემას, რომელთა ამოხსნა კიდევ უფრო შრომატევადია.

განხილული ამოცანების მოდელებში ცხადი სახით არ იყო გათვალისწინებული მოწინააღმდეგე პოპულაციის არსებობა და გარემოს სხვა ასპექტები. პოპულაციის ზრდის დინამიკის უკეთ გაგებისა და აღწერისათვის განტოლებაში უნდა ჩაირთოს ის ფაქტორები, რომლებიც ასახვენ გარემოს მახასიათებელ თვისებებს.

მაგალითად, ჩვენ შეიძლება გამოვიკვლიოთ ორი ან მეტი სახეობის ურთიერთდამოკიდებულება. თუ რაიმე გარემოში თანაარსებობს ორი სახეობა, მაშინ მათი პოპულაციის სიდიდე დროის  $(n + 1)$  პერიოდში (წელი, თაობა და ა.შ.) შეიძლება დამოკიდებული იყოს მათ სიდიდეზე  $n$ -ურ პერიოდში. თუ ეს ორი სახეობა დაკავშირებულია ერთმანეთთან, როგორც მტაცებელი-მსხვერპლი, მაშინ  $n$ -ურ პერიოდში მსხვერპლთა დიდი პოპულაცია გამოიწვევს მტაცებელთა პოპულაციის გაზრდას  $n$ -ურ პერიოდში. ეს კი გამოიწვევს მსხვერპლთა პოპულაციის შემცირებას დროის შემდგომ პერიოდში. მეორეს მხრივ, თუ ორი სახეობა დაკავშირებულია სიმბიოზურად, მაშინ მათი პოპულაციები გაიზრდება ან შემცირდება ერთდროულად. ცხადია, რეალური ეკოსისტემა არის მრავალ განსხვავებულ სახეობებს შორის ურთიერთობათა რთული ქსელი. ახლა განვიხილოთ ორი სახეობის შემთხვევა.

განვიხილოთ პირველი რიგის სხვაობიანი ორი განტოლების სისტემა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე;

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + f(n), \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n + g(n). \end{cases} \quad (1.3.10)$$

სადაც  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  და  $a_{22}$  - მუდმივებია, ხოლო  $f(n)$  და  $g(n)$  - მოცემული ფუნქციები. ამ სისტემის ამოხსნა ნიშნავს  $x_n$  და  $y_n$  ფუნქციების პოვნას, რომლებიც აკმაყოფილებენ სისტემის განტოლებებს. თუ  $x_n$  და  $y_n$  არის I და II სახეობების პოპულაციათა რაოდენობა დროის  $n$ -ური პერიოდის ბოლოს და ორივე სახეობა ერთმანეთს კონკურენციას უწევს ერთი და იგივე რესურსის გამო, მაშინ ამ პროცესის მოდელირება ხდება უარყოფითი  $a_{12}$  და  $a_{21}$  კოეფიციენტებით. თუ, მაგალითად,  $a_{12}$  უარყოფითია, მაშინ I სახეობის პოპულაცია განიცდის კლებას II სახეობის პოპულაციის ზრდის გამო. განვიხილოთ ეს მაგალითზე.

აშოცანა 4. სახეობათა შორის კონკურენციის მოდელი.

ორი დაპირისპირებული სახეობის პოპულაციათა სიდიდების ურთიერთდამოკიდებულებას აღწერს შემდეგი ერთგვაროვანი წრფივი სისტემა:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

პოპულაციის საწყისი რაოდენობება:  $x_0 = 100$  და  $y_0 = 150$ . ვიპოვოთ ორივე (სახეობის) რაოდენობები დროის ყველა მომდევნო მომენტისთვის.

სისტემა ამოვხსნათ შემდეგნაირად. დავიყვანოთ ის  $x_n$ -ის მიმართ მეორე რიგის მულტიკოეფიციენტებიან წრფივ სხვაობაან განტოლებად.

(1.3.11)-ის პირველი განტოლებიდან გვაქვს

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - y_{n+1} = 2x_{n+1} - (-x_n + 2y_n) = 2x_{n+1} + x_n - 2y_n.$$

იმავე პირველი განტოლებიდან მიღებული

$$y_n = 2x_n - x_{n+1} \quad (1.3.12)$$

ჩავსვათ წინა ტოლობაში, მივიღებთ:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n - 2(2x_n - x_{n+1}) = 4x_{n+1} - 3x_n.$$

ამგვარად,  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$  განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

მისი ფესვებია  $\lambda_1 = 3$  და  $\lambda_2 = 1$ . ზოგადი ამონახსნია:

$$x_n = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 1^n = k_1 \cdot 3^n + k_2.$$

(1.3.12) ტოლობაში ჩავსვათ ზოგადი ამონახსნი, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} y_n &= 2(k_1 \cdot 3^n + k_2) - (k_1 \cdot 3^{n+1} + k_2) = \\ &= 2k_1 \cdot 3^n + 2k_2 - k_1 \cdot 3^{n+1} - k_2 = k_2 - k_1 \cdot 3^n, \end{aligned}$$

ანუ  $y_n = k_2 - k_1 \cdot 3^n$ .

$k_2$  და  $k_1$  მუდმივების საპოვნელად გამოვიყენოთ პირობები:

$x_0 = 100 = k_1 + k_2$  და  $y_0 = 150 = k_2 - k_1$ , მივიღებთ სისტემა:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 100, \\ k_2 - k_1 = 150. \end{cases}$$

აქედან  $k_1 = -25$  და  $k_2 = 125$ .

საძებნ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$x_n = 125 - 25 \cdot 3^n,$$

$$y_n = 125 + 25 \cdot 3^n.$$

პირველი სახეობა მალე გადაშენდება

( $x_0 = 100, x_1 = 50, x_2 = \dots = 0$ ), ხოლო მეორე სახეობა განაგრძობს ზრდას ( $y_0 = 150, y_1 = 200, y_2 = 350, \dots$ ).

### სამარჯიშოები

1. იპოვეთ შემდეგი პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლებების ამონახსნები:

ა)  $x_{n+1} - x_n = 2^{-n}$ ;

ბ)  $x_{n+1} - x_n = 2x_n$ ;

გ)  $x_{n+1} = nx_n$ ;

დ)  $x_{n+1} + 3x_n = 3x_{n+1} - x_n$ .

2. იპოვეთ შემდეგი პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლებების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას  $x_0 = 1$ :

ა)  $2x_{n+1} = x_n$ ;

ბ)  $(n+1)x_{n+1} = (n+2)x_n$ ;

გ)  $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 2$ .

3. შიმშილის პროცესის შესწავლისას 30 დღის განმავლობაში საცდელმა ინდივიდმა 140 ფუნტიდან 110 ფუნტამდე დაიკლო. დადგენილია, რომ წონის ყოველდღიური დანაკარგი ინდივიდის მასის პროპორციული იყო. აღენიშნეთ  $n$  დღის შიმშილობის შემდგომი მასა  $w_n$ -ით. რომელ სხვაობიან განტოლებას აკმაყოფილებს  $w_n$ ? იპოვეთ საცდელი ობიექტის მასა 15 დღის შიმშილობის შემდეგ.

4. განტოლება  $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$  შეიძლება განვიხილოთ როგორც მოდელი, რომელიც აღწერს პოპულაციის ზრდას თაობიდან თაობამდე.  $f(n)x_n$  წვერი შეიძლება შეესაბამებოდეს პოპულაციის საკუთარ ნაზრდს  $n$ -ურ თაობაში, ხოლო  $g(n)$  წვერი აღწერდეს რაოდენობის ზრდას იმიგრაციის შედეგად (ან შემცირებას ემიგრაციის შედეგად). განვიხილოთ პოპულაცია საწყისი ოდენობით  $x_0 = 10$ . დავუშვათ, თუ არ იქნებოდა არაეითარი გარეგანი ჩარევა, მაშინ ყოველ შემდგომ თაობაში პოპულაცია გაორმაგდებოდა. დავუშვათ ასევე, რომ ყოველ თაობაში პოპულაციიდან 9 ინდივიდის ამოღება ხდება. განსაზღვრეთ  $n$ -ური თაობის პოპულაციის რაოდენობა  $x_n$ .

5. ყოველ გაზაფხულზე ზოლოლი ტბაში უშვებს განსაზღვრული სახეობის 100 თევზს. და ასე გრძელდება წლიდან წლამდე მანამ, სანამ ტბაში თევზის ეს სახეობა არ გახდება 2000. განსაზღვრეთ  $x_n$ , როგორც თევზის რაოდენობა  $n$ -ური ეტაპის შემდეგ. თუ ცნობილია, რომ  $x_{n+1} = 1,5x_n + 100$  და თუ  $x_0 = 0$ , რამდენი წელი გაგრძელდება ეს პროგრამა?

6. იპოვეთ შემდეგი მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

ა)  $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ ;

ბ)  $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0$ .

7. იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ  $x_0 = 1, x_1 = 2$  საწყის პირობებს:

ა)  $x_{n+2} + x_{n+1} = 6x_n$ ;

ბ)  $x_{n+4} - 6x_{n+3} + 9x_{n+2} = 0$ .

8. იპოვეთ  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$  მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი. იპოვეთ კერძო ამონახსნები, რომლებიც შეესაბამება პირობებს:  $x_0 = 160$  და  $x_1 = 300$ . თუ ჩავთვლით, რომ მოცემული სხვაობიანი განტოლება ასახავს პოპულაციის დინამიკას ერთწლიანი ინტერვალების რეგისტრაციით, თუ საწყისი რაოდენობაა 160, დაადგინეთ, როდის დადგება პოპულაციის გაჭრობის მომენტი?

9. დაამტკიცეთ, რომ  $4x_{n+2} + 4x_{n+1} + x_n = 0$  განტოლების ყველა ფესვი უახლოვდება ნულს, როცა  $n \rightarrow \infty$ .

10. იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ საწყის პირობებს.

ა)  $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0, x_0 = 1, x_1 = 0$ ;

ბ)  $3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0, x_0 = 1, x_1 = 2$ ;

გ)  $x_{n+2} + \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n = 0, x_0 = 1, x_1 = 1$ .

11. ექსპერიმენტში 30 დღის განმავლობაში ორმა პიროვნებამ შიმშილით დაიკლო 140 და 170 ფუნტიდან შესაბამისად 110 და 125 ფუნტამდე. დადგენილი იყო, რომ ყოველი ინდივიდის მიერ მასის ყოველდღიური კლება მისი მასის პროპორციულია. განსაზღვრეთ  $x_n$ , როგორც ორივე ცდისპირის ჯამური მასა  $n$  დღის შიმშილის შემდეგ. იპოვეთ მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება, რომელსაც

აკმაყოფილებს  $x_n$ . რას უდრის ჯამური მასა 15 დღის შიმშილობის შემდეგ?

12. დროზოფილების ორი თანაარსებადი სახეობა გამოყავთ შესაბამის გარემოში. I სახეობის პოპულაცია ყოველ თაობაში იზრდება 60%-ით, ხოლო II სახეობის პოპულაცია – 40%-ით. როგორია ორივე პოპულაციის ჯამური რაოდენობა, თუ თავდაპირველად ყოველ სახეობაში იყო 1000 ბუზი? ჯამური რაოდენობისათვის იპოვეთ მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლება.

13. იპოვეთ ზოგადი ამონახსნები შემდეგი პირველი რიგის სხვაობიან განტოლებათა სისტემებისთვის:

$$a) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n, \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -x_n + y_n. \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x_{n+1} = -y_n + 2^n, \\ y_{n+1} = -x_n + 2^n. \end{cases}$$

14. ზემოთ მოცემული სისტემისათვის იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ საწყის პირობებს:  $x_0 = 100$ ,  $y_0 = 200$ .

15. რაიმე სახეობის ფრინველების რიცხვი მტაცებლების არ ყოფნის შემთხვევაში, ყოველწლიურად გაორმაგდება. მტაცებლების ზემოქმედება ვლინდება იმაში, რომ ფრინველთა პოპულაცია მცირდება ინდივიდთა იმ რაოდენობით, რაც 10-ჯერ მეტია მტაცებლების რაოდენობაზე. ეთქვას, მტაცებლების რიცხვი მუდმივია და არ არის დამოკიდებული ფრინველთა პოპულაციის სიდიდეზე. ფრინველთა და მტაცებელთა პოპულაციის რაოდენობის დინამიკა წლიდან წლამდე აღწერეთ პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლებების სისტემის საშუალებით. იპოვეთ ამ სისტემის ამონახსნი, თუ ფრინველთა საწყისი რაოდენობაა 1000 და 50 მტაცებელია.



#### §14. მატრიცული თეორია დისკრეტულ მოდელებში

როგორ მოვიქცეთ იმ პოპულაციებში, როდესაც გამრავლებაც სეზონურია და ინდივიდებიც ცოტაა? ასეთი პოპულაციების მიმართ ხშირად უფრო მოსახერხებელი ხდება უმაღლესი ალგებრის გამოყენება. კერძოდ, ძალიან სასარგებლო აღმოჩნდა მატრიცული თეორია. მატრიცული მიდგომა პოპულაციის დინამიკასთან პირველად 1945 წელს იყო გამოყენებული [1].

განვიხილოთ იზოლირებული პოპულაცია. დავეშვათ, რომ კვების რესურსები და ადგილმდებარეობა განსაზღვრულია, ასევე გამრავლება ატარებს მკვეთრად გამოხატულ სეზონურ ხასიათს.

მოდელი, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ, გამოიყენება რიცხობრივად როგორც დიდი, ისე მცირე პოპულაციების შემთხვევაში. გამრავლების სეზონურობის გამო პოპულაციების რაოდენობრივი ცვლილება ხდება არა თანდათანობით, არა ნებისმიერ მომენტში, არამედ ნახტომისებურად, დროის შედარებით მცირე მონაკვეთში (მაგ., გაზაფხულზე). ჩვენ დავეშვათ, რომ დროის ეს მონაკვეთი იმდენად მცირეა, რომ ის შეიძლება წერტილად ჩავთვალოთ. ე.ი. ვუშვებთ, რომ არსებობს დროის ისეთი მომენტები  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , როცა პოპულაციაში ერთდროულად წარმოიქმნება ახალი ინდივიდები. ამ მომენტებს შორის შუალედებში პოპულაციების რიცხვი შეიძლება შემცირდეს ზოგიერთი ინდივიდის სიკვდილის, სიბერისა და სხვა მიზეზის გამო. ამრიგად, ჩვენ საშუალება გვებძევა თვალყური ვადევნოთ პოპულაციების რაოდენობას არა დროის ნებისმიერ მომენტში, არამედ მხოლოდ ძალიან მნიშვნელოვან, საკვანძო მომენტებში, როცა პოპულაციები უეცრად ივსება ინდივიდების ახალ-ახალი ჯგუფებით. პრაქტიკულად ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ ყოველწლიურად ერთსა და იმავე დროს განვსაზღვრავთ მის რიცხვს. ახლა გავითვალისწინოთ ის ფაქტი, რომ შთამომავლობის კვლავწარმოქმნის უნარი შესწევს არა ყველა ინდივიდს, არამედ მხოლოდ იმათ, რომლებმაც მიაღწიეს გარკვეულ ასაკს. გავითვალისწინოთ პოპულაციების ასაკობრივი სტრუქტურა და მთელი პოპულაცია პირობით დავეყოთ ასაკობრივ ჯგუფებად.

ვთქვათ, პოპულაცია შეიცავს  $n$  ასაკობრივ ჯგუფს, მაშინ დროის ყოველ ფიქსირებულ მომენტში (მაგ.,  $t_0$  მომენტში) პოპულაცია შეიძლება დაეახასიათოთ ვექტორ-სვეტი.

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix},$$

სადაც  $x_1(t_0)$  არის პირველი ასაკობრივი ჯგუფის რაოდენობა,  $x_2(t_0)$  – მეორე ასაკობრივი ჯგუფის და ა.შ. დროის შემდეგ მომენტში (მაგ., 1 წლის შემდეგ) ჩვენ გვეჩვენება უკვე სხვა ვექტორი

$$X(t_1) = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{pmatrix}.$$

ცხადია, ვექტორი  $X(t_1)$  დაკავშირებულია  $X(t_0)$ -თან. რადგან ინდივიდები, რომლებიც  $t_0$  მომენტისათვის იყვნენ  $i$  ჯგუფში და არ დაიღუპნენ  $t_1$  მომენტისათვის, ამ მომენტში გადავლენ  $(i + 1)$ -ში, ხოლო მოშვიფებული ასაკის ზოგიერთი ინდივიდი წარმოქმნის შთამომავლობას, ე.ი. ავსებს პირველ ასაკობრივ ჯგუფს. უმრავლეს შემთხვევაში  $X(t_1)$  და  $X(t_0)$  ვექტორებს შორის კავშირი შეიძლება დადგენილ იქნეს გადასასვლელი რომელიღაც მატრიცის მეშვეობით:

$$X(t_1) = A \cdot X(t_0).$$

და მართლაც, უმარტივეს შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ვიმსჯელოთ შემდეგნაირად: ყველა ასაკობრივი ჯგუფიდან ჩვენ გამოვყოფთ იმ ჯგუფებს, რომლებიც წარმოქმნიან შთამომავლობას. ვთქვათ,  $k, k + 1, \dots, k + p$  ჯგუფები წარმოქმნიან შთამომავლობას, ხოლო ინდივიდთა ნაწილი, ზოგადად რომ ვთქვათ (ყველა ჯგუფიდან), იღუპება.  $X(t_1)$  ვექტორის პირველი კომპონენტი  $x_1(t_1)$  არის ინდივიდთა რაოდენობა, რომლებიც დაიბადნენ  $[t_0, t_1]$  შუალედში. ეს რაოდენობა ტოლია ყველა ასაკობრივი ჯგუფიდან შთამომავლობათა წარმოქმნილი ჯგუფების ჯამისა. გასაგებია, რომ ცალკეული ჯგუფების შთამომავლობის რაოდენობა ზოგადად იქნება მით მეტი, რაც მეტია მშობლების რიცხვი ამ ჯგუფებში, მაშინ  $i$  ჯგუფის შთამომავლობა ტოლი იქნება  $\alpha_i x_i(t_0)$ -ის, სადაც  $\alpha_i$  პროპორციულობის კოეფიციენტია და მთელი შთამომავლობა, წარმოშობილი  $[t_0, t_1]$  მონაკვეთში, ტოლი იქნება

$$x_1(t_1) = \sum_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0) = \\ = \alpha_k x_k(t_0) + \alpha_{k+1} x_{k+1}(t_0) + \dots + \alpha_{k+p} x_{k+p}(t_0).$$

ვექტორის მეორე კომპონენტი მიიღება უფრო მარტივად. დროის  $[t_0, t_1]$  მონაკვეთში ყველა ინდივიდი, რომელიც იმყოფება  $t_0$  მომენტში პირველ ასაკობრივ ჯგუფში, გადავა მეორეში. ამასთან, მათი გარკვეული ნაწილი შეიძლება დაიღუპოს, ამიტომ  $X(t_1)$  ვექტორის მეორე კომპონენტი  $x_2(t_1)$  ტოლია არა  $x_1(t_0)$ -ის რაოდენობის, არამედ მისი გარკვეული ნაწილია  $\beta_1 x_1(t_0)$ , სადაც  $0 < \beta_1 < 1$ .

ანალოგიურად მიიღება მესამე კომპონენტი (ის ტოლია  $\beta_2 x_2(t_0)$ ) და ყველა დანარჩენი. სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ ყველა ინდივიდი, რომელიც იმყოფება  $t_0$  მომენტში უკანასკნელ ასაკობრივ ჯგუფში,  $t_1$  მომენტისათვის დაიღუპება. ამიტომ  $X(t_1)$  ვექტორის უკანასკნელი კომპონენტი შედგება მხოლოდ იმ ინდივიდებისაგან, რომლებიც  $t_1$  მომენტისათვის გადმოვიდნენ წინამორბედი ასაკობრივი ჯგუფიდან და ჯერ არ დაღუპულან.  $x_n(t_1) = \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0)$ , სადაც,  $0 < \beta_{n-1} < 1$ .

$\alpha_i$  და  $\beta_i$  კოეფიციენტები გამოხატავენ პოპულაციის შინაგან თავისებურებებს. მათგან პირველს შეიძლება ეწოდოს დაბადების კოეფიციენტები, ხოლო მეორეს — გადარჩენის კოეფიციენტები.

ამრიგად,  $X(t_1)$  მატრიცა ტოლია

$$X(t_1) = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \vdots \\ \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0) \end{pmatrix}.$$

ადვილი შესაძრწევია, რომ  $X(t_1)$  მიიღება  $A$  მატრიცის  $X(t_0)$  ვექტორ-მატრიცაზე გამრავლებით.

$A$  მატრიცა არის კვადრატული, რომლის დიაგონალზე დგას ნულები, დიაგონალის ელემენტების ქვეშ შესაბამისად დგანან  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ . პირველ სტრიქონზე  $k, k+1, \dots, k+p$  ნომრიანი

ელემენტების ადგილას შესაბამისად დგანან  $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+p}$ . ამ მატრიცის სხვა დანარჩენი ელემენტი ტოლია ნულის. თუ ასაკობრივ ჯგუფებად დაყოფა ჩატარებულია ისე, რომ შთამომავლობის წარმოების უნარი აქვს ყველა ჯგუფს, მაშინ  $A$  მატრიცის პირველი სტრიქონის ყველა ელემენტი განსხვავებული იქნება ნულისაგან. მაშასადამე:  $X(t_1) = AX(t_0)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{k+p} & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

შემდეგი  $t_2$  მომენტის განხილვისას ჩვენ გამოვიყენებთ  $X(t_1)$  ვექტორისათვის ასეთსავე მსჯელობას და მივიღებთ:

$$X(t_2) = AX(t_1) = AAX(t_0) = A^2X(t_0).$$

ანალოგიურად,

$$X(t_k) = AX(t_{k-1}) = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k\text{-ჯერ}} X(t_0) = A^k X(t_0). \quad (1.4.1)$$

(1.4.1)-დან ჩანს, რომ, თუ ვიცით მატრიცის სტრუქტურა და პოპულაციის საწყისი მდგომარეობა (ვექტორ-სვეტი  $X(t_0)$ ) შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ პოპულაციის მდგომარეობა წინასწარ მოცემული დროის ნებისმიერ  $t_k$  მომენტში ასაკობრივი სტრუქტურის გათვალისწინებით.

მაგალითისათვის განვიხილოთ პოპულაცია, რომელიც დაყოფილია მხოლოდ სამ ასაკობრივ ჯგუფად: პრერეპროდუქციული (რომელსაც არა აქვს შთამომავლობის გაჩენის უნარი); რეპროდუქციული

(შთამომავლობის წარმოქმნელი) და პოსტრეპროდუქციული (სიბერის გამო შთამომავლობის გაჩენის უნარდაკარგული).

ამ შემთხვევაში  $A$  მატრიცა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ვექტორ-სვეტს, რომელიც გამოხატავს პოპულაციის მდგომარეობას  $t_0$  საწყის მომენტში, აქვს შემდეგი სახე:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{pmatrix}.$$

რომ გავიგოთ პოპულაციის მდგომარეობა შემდეგი  $t_1$  მომენტისათვის,  $A$  მატრიცა გავამრავლოთ  $X(t_0)$  ვექტორზე, მაშინ მატრიცების გამრავლების წესის თანახმად, მივიღებთ:

$$X(t_1) = AX(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_2(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \beta_2 x_2(t_0) \end{pmatrix}.$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned} X(t_2) &= AX(t_1) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha x_2(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \beta_2 x_2(t_0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \beta_1 x_1(t_0) \\ \beta_1 \alpha x_2(t_0) \\ \beta_2 \beta_1 x_1(t_0) \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \alpha x_1(t_0) \\ \alpha x_2(t_0) \\ \beta_2 x_1(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ამ პროცესის გაგრძელებით შეიძლება გავიგოთ შემდეგი  $t_3$ ,  $t_4$  და ა.შ. მომენტების შესაბამისი ვექტორები. შეიძლება გამოვიყვანოთ ზოგადი ფორმულა  $X(t_n)$ -თვის,  $n = 1, 2, 3, \dots$

თუ  $n$  ლუწია, მაშინ

$$X(t_{2k}) = \alpha^{k-1} \beta_1^{k-1} X(t_2). \quad (1.4.2)$$

თუ  $n$  კენტია, მაშინ

$$X(t_{2k+1}) = \alpha^k \beta_1^k X(t_1). \quad (1.4.3)$$

შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა ინფორმაცია განხილული პოპულაციის დინამიკის შესახებ. უპირველეს ყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ პოპულაციის რიცხვი იზრდება, თუ ნამრავლი  $\alpha\beta_1 > 1$ .

თუ  $\alpha\beta_1 < 1$ , მაშინ ვექტორი  $X(t_n)$ -ის ყველა კომპონენტი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა  $n \rightarrow \infty$ , ე.ი. პოპულაცია ქრება და ბოლოს, თუ  $\alpha\beta_1 = 1$ , მაშინ პოპულაციის რიცხვი მუდმივი რჩება.

დროის ლუწი მომენტისათვის ის ისეთია, როგორც  $t_2$  მომენტში, კენტებში კი - როგორც  $t_1$  მომენტში (რიცხობრიობა იცვლება პერიოდული კანონის თანახმად). ეს შემთხვევა ხორციელდება მაშინ, როდესაც პირველი ასაკობრივი ჯგუფის ნახევარი ვერ აღწევს მოწიფულ ასაკს  $\beta_1 = \frac{1}{2}$ , მაგრამ, სამაგიეროდ მეორე ნახევარი

მოშწიფების შემდეგ რიცხობრივად ზუსტად ორმაგდება ( $\alpha = 2$ ).

იმ შემთხვევაში, როცა ნამრავლი განსხვავებულია ერთისაგან, კენტსა და ლუწ  $t_n$  მომენტებს შორის განსხვავება აგრეთვე არსებითია. ამის ნათლად წარმოსადგენად შეიძლება განვიხილოთ პოპულაცია, რომელსაც საწყის მომენტში აქვს ინდივიდთა მხოლოდ პირველი ასაკობრივი ჯგუფი (მაგ., როცა ადრე დაუსახლებელ აუზში უშვებენ კობრის ლიფსიტებს). ამ შემთხვევაში  $x_2(t_0) = x_3(t_0) = 0$ , ამიტომ

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X(t_2) = \beta_1 \begin{pmatrix} \alpha x_1(t_0) \\ 0 \\ \beta_2 x_1(t_0) \end{pmatrix}.$$

(1.4.2) და (1.4.3) ფორმულების თანახმად

$$X(t_{2k}) = \alpha^{k-1} \beta_1^{k-1} \begin{pmatrix} \alpha x_1(t_0) \\ 0 \\ \beta_2 x_1(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad X(t_{2k+1}) = \alpha^k \beta_1^k \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ, რაც უნდა შორს იყოს  $t_n$  მომენტი, ამ მომენტში პოპულაციის რეპროდუქციული ჯგუფი არ მიიღებს მონაწილეობას, თუ  $n$  ღუწია; თუ  $n$  კენტია, მაშინ პოპულაციაში არ მიიღებს მონაწილეობას პრერეპროდუქციული და პოსტრეპროდუქციული ჯგუფები.

ეს დასკვნა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მაგალითად, რეწვის სიდიდისა და ვადების განსაზღვრისას, თუ პოპულაცია სასარგებლოა, და აგრეთვე, მანე პოპულაციების ჩახშობის ან გადაშენების ტაქტიკის შემუშავებისას.

ამ თეორიის გამოყენებით შეიძლება პასუხი გაეცეს ისეთ საკითხს, როგორიცაა სხვადასხვა ასაკობრივი ჯგუფების რაოდენობრივი თანაფარდობა. იცვლება თუ არა ეს თანაფარდობა დროის განმავლობაში? შეიძლება თუ არა მოხდეს ისე, რომ ახალგაზრდა ინდივიდთა პროცენტი პოპულაციაში განვითარების დასაწყისში იყოს დიდი, შემდეგ ამ პროცენტმა იკლოს? რაზეა დამოკიდებული რიცხობრივი თანაფარდობა? ჩვენ მიერ განხილული მოდელის ფარგლებში შეიძლება კვალიფიციური პასუხი გაეცეს ამ კითხვებს. თუ განვიხილავთ თანაფარდობას პირველი ასაკობრივი ჯგუფის რიცხობრიობისა მეორე ჯგუფის რიცხობრიობასთან.

$$X_1(t_{2k}) = \alpha^{k-1} \beta_1^{k-1} X_1(t_2) = \alpha^k \beta_1^k X_1(t_0)$$

და

$$X_2(t_{2k}) = \alpha^{k-1} \beta_1^{k-1} X_2(t_2) = \alpha^k \beta_1^k X_2(t_0)$$

აქედან ადვილია მოენახოთ რაოდენობითი თანაფარდობა:

$$\frac{X_1(t_{2k})}{X_2(t_{2k})} = \frac{\alpha^k \beta_1^k X_1(t_0)}{\alpha^k \beta_1^k X_2(t_0)} = \frac{X_1(t_0)}{X_2(t_0)}$$

აღსანიშნავია, რომ ეს თანაფარდობა არ არის დამოკიდებული  $n$  ნომერზე და განისაზღვრება მხოლოდ საწყისი რაოდენობებით. ამრიგად, ყველა ღუწ  $t_{2k}$  მომენტში I და II ჯგუფებს შორის რაოდენობრივი თანაფარდობა მუდმივია და ტოლია  $t_0$  მომენტში ამ რაოდენობათა საწყისი თანაფარდობის. ანალოგიურად (1.4.3) ფორმულიდან შეიძლება დავწეროთ:

$$\frac{X_1(t_{2k+1})}{X_2(t_{2k+1})} = \frac{\alpha^{k+1} \beta_1^{k+1} X_1(t_0)}{\alpha^{k+1} \beta_1^{k+1} X_2(t_0)} = \frac{X_1(t_0)}{X_2(t_0)}$$

ეს თანაფარდობა არ არის აგრეთვე დამოკიდებული  $\Pi$  ნომერზე და შესაბამისად ყველა კენტი დროის მომენტისათვის რჩება მუდმივი (ტოლი, პირველ მომენტში რაოდენობრივი თანაფარდობისა). ზუსტად ასევე შეიძლება რაოდენობრივი თანაფარდობის მუდმივობის დადგენა I და III ან II და III ჯგუფებისათვის. ამრიგად, მიუხედავად იმისა, მატულობს თუ კლებულობს პოპულაციათა საერთო რაოდენობა, ასაკობრივი ჯგუფების რაოდენობათა თანაფარდობა ინარჩუნებს განსაზღვრულ მუდმივობას, უფრო სწორად რომ ვთქვათ, დროის ყოველ ლუწ მომენტში იგი ისეთივეა, როგორც საწყის მომენტში, ხოლო კენტებში, - როგორც  $t_1$  მომენტში.

ასეთი ფაქტები კარგადაა ცნობილი ბიოლოგებისათვის.

მატრიცული მიდგომა პოპულაციის დინამიკასთან პირველად იყო მოწოდებული ლესლის მიერ 1945 წელს. ჩვენ მიერ განხილულ ამოცანაში შეიძლებოდა ჩატარებულიყო პოპულაციის შედარებითი გამოკვლევა დაბადებისა და გადარჩენის სხვადასხვა კოეფიციენტებისათვის. საინტერესო შედეგები მიიღება, თუ ასაკობრივ ჯგუფებს უფრო დავაქვცმაცებთ.

ასეთი მიდგომა მნიშვნელოვანია, მაგალითად, მწერებისათვის, მათი განვითარების მრავალრიცხოვანი ფაზების გამო.

ახლა განვიხილოთ გამოყენებითი ზასიათის ერთ-ერთი ამოცანა, რომელიც "მოდელზე მუშაობის" ტიპის ამოცანას მიეკუთვნება.

ვიცით რა პოპულაციის განვითარების მექანიზმი, შევამოწმოთ თუ როგორ მოქმედებს იგი სხვადასხვა პირობებში, გავარკვიოთ მისი ფარული შესაძლებლობანი.

განვიხილოთ, მაგალითად, ჩენთვის უკვე ცნობილი პოპულაცია სამი ასაკობრივი ჯგუფით, რომელსაც საწყის მომენტში გააჩნია მხოლოდ პირველი ჯგუფის ინდივიდები

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

კონკრეტულობისათვის დავუშვათ, რომ ეს არის სარკისებური კობრის პოპულაცია ტბორში. ბუნებრივი სურვილია, გაგვჩინა რა ასეთი პოპულაცია, დაეჭიროთ კობრების ნაწილი. მაგრამ, თუ არ გვინდა ასეთი ბარბაროსული მოქმედებით დავლუპოთ მთელი



პოპულაცია, თავიდანვე უნდა გავარკვიოთ რეწვის შესაძლებელი ტაქტიკა.

საწყის  $t_0$  მომენტში გვაქვს მხოლოდ ლიფსიტები. მათ ჩვენი რასაკვირველია, არ დავიჭერთ. შემდეგ  $t_1$  მომენტში კი გვაქვს მხოლოდ რეპროდუქციული ინდივიდები

$$X(t_1) = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ჩვენ შეგვიძლო ყველა დაგვეჭიროს, მაგრამ მაშინ ალბათ პოპულაცია შეწყდებოდა და მოგვიხდებოდა კვლავ ლიფსიტების გაშვება ტბორში. ამიტომ დავიჭერთ მხოლოდ ინდივიდთა ნაწილს. აღვნიშნოთ ეს ნაწილი  $s_1 x_2(t_1)$ -ით. გასაგებია, რომ დაჭერის კოეფიციენტი  $s_1$  იმყოფება ნულსა და ერთს შორის  $0 < s_1 < 1$ . ე.ი. დაჭერის შემდეგ ჩვენ გვაქვს ვექტორ-სვეტი.

$$\tilde{X}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1(t_0) - s_1 \beta_1 x_1(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ამ ვექტორიდან გამომდინარე  $t_2$  მომენტისათვის მივიღეთ

$$X(t_2) = \begin{pmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \\ x_3(t_2) \end{pmatrix} = A \cdot \tilde{X}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1 - s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

ე.ი.

$$X(t_2) = \beta_1 (1 - s_1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha x_1(t_0) \\ 0 \\ \beta_2 x_1(t_0) \end{pmatrix}.$$

$t_2$  მომენტში პოპულაციაში ლიფსიტების გარდა კიდევ არის პოსტრეპროდუქციული ვგუფი. იგი არ მოქმედებს რაოდენობის შემდგომ ცვლილებაზე. ამიტომაც ჩვენ შეგვიძლია მისი მთლიანად დაჭერა. მაგრამ დავკმაყოფილდეთ ნაწილით. ვთქვათ,  $s_2 x_3(t_2)$  არის დაჭერილი ნაწილი,  $0 \leq s_2 \leq 1$ . დაჭერის შემდეგ გვაქვს:

$$\tilde{X}(t_2) = \begin{vmatrix} \tilde{x}_1(t_2) \\ \tilde{x}_2(t_2) \\ \tilde{x}_3(t_2) \end{vmatrix} = \beta_1(1-s_1) \cdot \begin{vmatrix} \alpha x_1(t_0) \\ 0 \\ \beta_2(1-s_2)x_1(t_0) \end{vmatrix}.$$

ამდენად ორი ტაქტის შემდეგ სულ დაჭერილი იქნება

$$S = s_1 x_2(t_1) + s_2 x_3(t_2)$$

ინდივიდი. ამ დროისათვის პოპულაცია მივიღა  $\tilde{X}(t_2)$  მდგომარეობაზე.

აქ უკვე შეიძლება დაისვას სხვადასხვანაირი ამოცანა. მაგალითად, შეიძლება, შევეცადოთ რომ ორჯერ ასეთი დაჭერის შემდეგ პოპულაცია დაბრუნდეს საწყის მდგომარეობაში (და ჩვენ შეგვეძლო ისევ გაგვეზოციელებინა ჩვენი ციკლი). ცხადია, რომ ეს მოხდება მაშინ, როცა  $\tilde{X}(t_2)$  ტოლი იქნება  $X(t_0)$ . ამ კომპონენტების ვექტორების გათანაბრებით მივიღებთ:

$$\tilde{X}(t_2) = X(t_0),$$

ე.ი.

$$\beta_1(1-s_1)\alpha x_1(t_0) = x_1(t_0), \quad (1.4.4)$$

$$\beta_1\beta_2(1-s_1)(1-s_2)x_1(t_0) = 0. \quad (1.4.5)$$

პირველი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$s_1 = 1 - \frac{1}{\beta_1\alpha}. \quad (1.4.6)$$

ვვარაუდობთ, რომ საქმე გვაქვს განვითარებად პოპულაციასთან, რომლის რაოდენობაც ჩვენი ჩარევის გარეშე იზრდება. ამისათვის საჭიროა, რომ  $\beta_1\alpha > 1$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\frac{1}{\beta_1\alpha} < 1$ .

ამიტომაც შეიძლება მოიძებნოს ისეთი  $s_1$ , რომ სრულდებოდეს ტოლობა (1.4.6). გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში  $s_1 \neq 1$ . ამის გათვალისწინებით ვასკენით, რომ ჩვენი პირობიდან ტოლობა (1.4.5) შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ მაშინ, როცა  $s_2 = 1$ . ეს ნიშნავს, რომ მეორე ეტაპზე საჭიროა მთელი პოსტრეპროდუქციული ჯგუფის დაჭერა.

ამრიგად, ავირჩევთ რა დაჭერის კოეფიციენტს პირველ ეტაპზე, რომელიც ტოლია  $1 - \frac{1}{\beta_1 \alpha}$  და დავიჭერთ რა შემდეგ მთელ მესამე ჯგუფს, ჩვენ პოპულაციას მოვიყვანთ საწყის მდგომარეობაში.

ამასთან, შეიძლება გამოვთვალოთ ის დაჭერილი რაოდენობაც, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} S &= s_1 x_2(t_1) + s_2 x_3(t_2) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\beta_1 \alpha}\right) \beta_1 x_1(t_0) + \beta_1 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\beta_1 \alpha}\right)\right] \beta_2 x_1(t_0) = \\ &= \left(\beta_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha}\right) x_1(t_0). \end{aligned}$$

ვიცით რა შეგუების კოეფიციენტები  $\beta_1$  და  $\beta_2$ , აგრეთვე შობადობის კოეფიციენტი, შეიძლება წინასწარ განვსაზღვროთ, იქნება თუ არა რენტაბელური ჩვენი წარმოება.

## §1.5. ხის ზრდის მათემატიკური მოდელი

რატომ არის, რომ ყველაზე ხელსაყრელ პირობებშიც ხის სიმაღლე არ აღემატება გარკვეულ ზღვარს? რატომ არის, რომ ყველა ხე, განურჩევლად სახეობისა, ჯერ იზრდება სწრაფად, შემდეგ კი ზრდის სიჩქარე ნელდება, მანამ, სანამ საბოლოოდ სულ არ შეწყდება?

ინტუიციით ცხადია, რომ მერქნის ზრდასთან ერთად, ერთი მხრივ, ხდება ენერჯის მოზღვაება ფოტოსინთეზის წყალობით, ხოლო, მეორეს მხრივ, იზრდება სიბნელებები, რომლებიც დაკავშირებულია, მაგალითად, საკვები ნივთიერებების ტრანსპორტირებასთან, და შესაბამისად, იზრდება მსგავს საჭიროებებზე ენერჯის ხარჯვა. ბოლოს და ბოლოს, მიღებული ენერჯია ვერ ფარავს დანახარჯს და ხე წყვეტს ზრდას.

ჩვენი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ამ ინტუიციური მოსაზრებებით ჩამოვყალიბოთ მკაფიო ჰიპოთეზა, შევადგინოთ ბალანსური თანაფარდობა (ეს ნიშნავს შევადგინოთ მოდელი), ხოლო შემდეგ გამოვიკვლიოთ მიღებული განტოლება [14, 34].

განვიხილოთ მოდელი, რომელიც ეკუთვნის იაპოლეტაევს. ეს მოდელი ეყრდნობა შემდეგ ჰიპოთეზებს:

1. ზრდის პროცესში მცენარე ინარჩუნებს გეომეტრიულ მსგავსებას. ეს ნიშნავს, რომ მომწიფებული მცენარე სიმაღლეში ზრდასთან ერთად ინარჩუნებს გეომეტრიულ ზომათა თანაფარდობას, მაგ., სიმაღლის შეფარდება დიამეტრთან და სხვა.

2. თავისუფალ ენერჯიას მცენარე იღებს მხოლოდ ფოტოსინთეზით.

3. თავისუფალი ენერჯია იხარჯება ფოტოსინთეზში, ცოცხალი ქსოვილის აგებაში (სიმაღლე) და ნიადაგიდან სითხის ატანაში, ამოტუმბვაში.

4. საშუალოდ, დროის დიდ მონაკვეთში, მცენარე ღებულობს მუდმივი რაოდენობის სინათლეს ზედაპირის ერთეულზე და შეუძლია შთანთქას აუცილებელი ნივთიერებები განუსაზღვრელი მარაგიდან.

შევადგინოთ ენერჯიის ბალანსის განტოლება.

ვთქვათ,  $x$  არის მცენარის წრფივი ზომა. ეს ნიშნავს, რომ სიმაღლეა  $x$ , ფოთლების ზედაპირების ფართობი  $x^2$ -ით იზომება, და ბოლოს, მცენარის მოცულობა გამოისახება  $x^3$  სიდიდით. ცხადია,  $x$

იცვლება დროში, ე.ი.  $x = x(t)$ . ვთქვათ  $x(t_0) = 0$ . შევეცადოთ ყველა სიდიდე, რომელიც შედის ბალანსის განტოლებაში, გამოვსახოთ  $x$ -ით.

ჯერ ვიპოვოთ თავისუფალი ენერგიის  $E$ -ს გამოსახულება. ეს ენერგია წარმოიშობა ფოტოსინთეზის მეშვეობით მცენარის მწვანე ნაწილში, და ის მით მეტია, რაც მეტია მწვანე ზედაპირის ფართობი, ამგვარად, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ  $E$  არის  $x^2$ -ის პროპორციული:  $E = \alpha x^2$ , სადაც  $\alpha$  - პროპორციულობის კოეფიციენტია (ის დამოკიდებულია ფოთლების ფორმაზე, ზომაზე და ფოტოსინთეზის ინტენსივობაზე).

ენერგიის სხვა წყარო, ჩვენი დაშვებით არ არის, და უნდა დაეაკვირდეთ, რაზე იხარჯება ეს ენერგია. ენერგია, პირველ რიგში, იხარჯება თვით ფოტოსინთეზის პროცესში. ეს ხარჯვა ასევე პროპორციულია  $x^2$ -ის, ეს შეიძლება ჩაეწეროს  $\beta x^2$ -ის სახით, სადაც  $\beta$  პროპორციულობის კოეფიციენტია და  $\beta < \alpha$ .

შემდგომ, ენერგია იხარჯება მცენარის ყველა ნაწილში საკვები სითხის ტრანსპორტირებისას. ეს ხარჯი მით მეტი იქნება, რაც დიდია მცენარე. გარდა ამისა, ეს ხარჯი დამოკიდებულია სიმძიმის ძალის დაძლევაზე. ის მით მეტი იქნება, რაც უფრო მაღალია მცენარე. ამგვარად, ეს ხარჯი პროპორციულია როგორც მოცულობის  $x^3$ , ასევე სიმაღლის  $x$ , ე.ი. ის პროპორციულია მათი ნამრავლის  $\gamma x^3 \cdot x$ .

და ბოლოს, ენერგია იხარჯება მცენარის მასის გადიდებაში (ე.ი. ზრდაში). ეს ხარჯი პროპორციულია ზრდის სიჩქარის, ე.ი.  $m = \rho x^3$  მასის წარმოებულისა დროით ( $\rho$  - მცენარის საშუალო სიმკვრივეა,  $x^3$  - მოცულობა). ამგვარად, ეს დანახარჯი იქნება  $\delta \frac{d(\rho x^3)}{dt}$ , ( $\delta$  - პროპორციულობის კოეფიციენტია).

ენერგიის მუდმივობის კანონის ძალით

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d(\rho x^3)}{dt},$$

ანუ

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta \rho x^2 \frac{dx}{dt}. \quad (1.5.1)$$

(1.5.1) არის ბ ა ლ ა ნ ს ი ს ს ა ძ ე ბ ნ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა .

(1.5.1) განტოლების ორივე მხარე გავყოთ  $3\delta\rho x^2$ -ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\frac{\alpha - \beta}{3\delta\rho} \equiv a, \quad \frac{\gamma}{3\delta\rho} \equiv b,$$

მივიღებთ:  $\frac{dx}{dt} = a - bx^2, \quad a > 0, b > 0.$  (1.5.2)

რადგანაც ხე იზრდება,  $\frac{dx}{dt} > 0$ , ეს ნიშნავს, რომ  $a - bx^2 > 0$ , ე.ი.

$x^2 < \frac{a}{b}$ . ამიტომ (1.5.2) გადავწეროთ ასე:

$$-\frac{dx}{b\left(x^2 - \frac{a}{b}\right)} = dt,$$

ინტეგრებით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = t + C.$$

გამოვიყენოთ საწყისი პირობა:  $x(t_0) = 0$ , მივიღებთ  $C = -t_0$ , და ე.ი.

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = t - t_0. \quad (1.5.3)$$

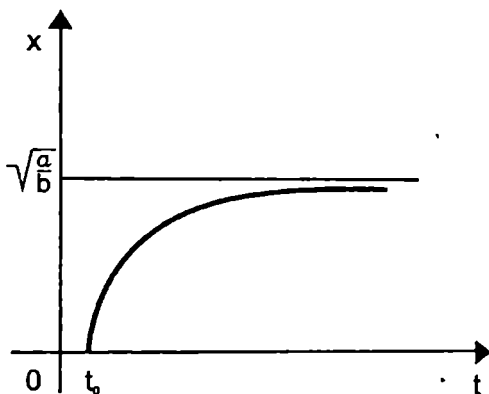
(1.5.3) ტოლობიდან განვსაზღვროთ  $x$ :

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{-1 + e^{2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{2\sqrt{ab}(t-t_0)}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}. \quad (1.5.4)$$

(1.5.4) გვაძლევს ხის ზრდის კანონს. თუ ვიცით  $a$ ,  $b$  და  $t_0$  (ეს სიდიდეები დამოკიდებულია ხის ჯიშზე), მაშინ (1.5.4) ფორმულით შეიძლება ვიანგარიშოთ ხის ზრდის საშუალო სიდიდე, რომელიც დამოკიდებულია ხის ჯიშზე და ასაკზე (ე.ი.  $t$  დროზე).

გამოვიკვლიოთ (1.5.4). ვიცით, რომ  $\frac{dx}{dt} > 0$ . (1.5.2)-ის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2bx \cdot \frac{dx}{dt} \quad (1.5.5)$$



ნახ.1.5.1

რადგანაც, როცა  $t > t_0$ ,  $x(t) > 0$  (ეს ხის სიმაღლეა). ამიტომ (1.5.5)-დან  $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$ . ამგვარად, (1.5.4) მრუდი ზრდადია და ამოზნექილი, ხოლო თვით (1.5.4)-დან ჩანს, რომ  $x(t) \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}$ , როცა  $t \rightarrow +\infty$ . ე.ი. გრაფიკს ექნება სახე (ნახ.1.5.1).

ტოლობა  $x \equiv \sqrt{\frac{a}{b}}$ , რომლის დროსაც  $\frac{dx}{dt} \equiv 0$ , შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა მთელი მიღებული ენერგია იხარჯება ფოტოსინთეზში და საკვების ტრანსპორტირებაში. ამ დროს ხე არ იზრდება. ეს მრუდი რამდენად ზუსტად აჩვენებს ხის ზრდის პროცესს? ამ კითხვაზე პასუხი რომ მიეღოთ, მუხის საშუალო სიმაღლე 40 წლის ასაკში და 200 წლის ასაკში წარმოიდგინეს (1.5.4) ფორმულით, შემდეგ სისტემიდან იპოვეს  $a$  და  $b$  და მიღებული გრაფიკი ძალიან დიდი სიზუსტით დაემსგავსა (1.5.4)-ის გრაფიკს. ეს ფაქტი შეტყვევებს იმაზე, რომ მოდელი კარგადაა აგებული.

§1.6. მცენარის ფოთლის ზრდის  
მათემატიკური მოდელი

მცენარის, მაგალითად, ვიქტორიის, ახალგაზრდა ფოთლის ფართობის ზრდის სინქარე, რომელსაც აქვს წრის ფორმა, ფოთლის წრეწირის სიგრძისა და მასზე დატეხული მზის სხივების რაოდენობის პროპორციულია. ეს უკანასკნელი კი პროპორციულია ფოთლის ფართობისა და იმ კუთხის კოსინუსის, რომელსაც ადგენს სხივის მიმართულება ფოთლის პერპენდიკულართან. ვიპოვოთ დამოკიდებულება ფოთლის  $S$  ფართობსა და  $t$  დროს შორის, თუ დღის 6 სთ-ზე ეს ფართობი უდრიდა  $1600 \text{ სმ}^2$ , ხოლო იმავე დღის 18 სთ-ზე  $2500 \text{ სმ}^2$ -ს [14,20].

მივიღოთ, რომ კუთხე მზის სხივისა და ვერტიკალს შორის 6 სთ-ზე და 18 სთ-ზე (ნიშნის გარეშე) იყო  $90^\circ$ , ხოლო შუადღეზე  $0^\circ$ .

ეთქვათ,  $t$  არის შუადღიდან ათვლილი დრო. თუ  $S$  არის ფოთლის ცვლადი ფართობი, მაშინ ფოთლის ზრდის სინქარე იქნება

$$\frac{dS}{dt} = k_1 2\pi Q,$$

სადაც  $2\pi r$  წრეწირის სიგრძეა,  $Q$  - მზის სხივების რაოდენობა,  $k_1$  - პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ფოთლის ფართობია  $S = \pi r^2$ , საიდანაც

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

მაშინ

$$\frac{dS}{dt} = k_1 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{SQ}. \quad (1.6.1)$$

პირობის თანახმად

$$Q = k_2 S \cos \alpha, \quad (1.6.2)$$

სადაც  $\alpha$  - კუთხეა მზის სხივის მიმართულებასა და ვერტიკალს შორის,  $k_2$  - პროპორციულობის კოეფიციენტი. კუთხე  $\alpha$  არის  $t$  არგუმენტის ზრდადი წრფივი ფუნქცია

$$\alpha = k_3 t + b.$$



$k_3$  და  $b$  პარამეტრებს ეპოულობთ დამატებითი პირობებიდან:  
როცა  $t=6$ ,  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ; როცა  $t=12$ ,  $\alpha = 0$ ; როცა  $t=18$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

ორი უკანასკნელი პირობიდან გვაქვს:

$$\begin{cases} 0 = 12k_3 + b, \\ \frac{\pi}{2} = 18k_3 + b. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ:

$$k_3 = \frac{\pi}{12}, \quad b = -\pi. \quad \text{შესაბამისად, } \alpha = \frac{\pi}{12}(t-12).$$

$\alpha$ -ს მნიშვნელობა ჩავსვით (1.6.2)-ში, საიდანაც

$$Q = k_2 S \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right].$$

ჩავსვით ეს უკანასკნელი (1.6.1) ტოლობაში, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 k_2 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} S \sqrt{S} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right].$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა  $k \equiv k_1 \cdot k_2$ , შემდეგ განვაცალკევოთ ცვლადები

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = k \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right] dt.$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრებით, მივიღებთ:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right] + C. \quad (1.6.3)$$

(1.6.3)-ში ჩავსვით საწყისი პირობები: როცა  $t=6$ ,  $S=1600$ ; როცა  $t=18$ ,  $S=2500$ . მივიღეთ სისტემა

$$\begin{cases} -\frac{1}{20} = -\frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C, \\ -\frac{1}{25} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C. \end{cases}$$

თუ ამოვხსნით ამ სისტემას, მივიღებთ:

$$C = -\frac{9}{200}, \quad k = \frac{\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (1.6.3)-ში, მივიღებთ  $S(t)$  ფუნქციის საბოლოო სახეს:

$$S(t) = \frac{160000}{\left\{9 - \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right]\right\}^2} \text{ სმ}^2. \quad (1.6.4)$$

§1.7. ტერმინატორის (ჭიანჭველათა ბუდის) გარეთ  
ჭიანჭველათა სიმკვრივის განმსაზღვრელი  
მათემატიკური მოდელი

სტაციონარული შემთხვევა

კარგადაა ცნობილი, რომ ჭიანჭველები მოპოვებულ საკვებს, ან საშენ მასალას ადგილზე არ მოიხმარენ, არამედ მიაქვთ ტერმინატორში (ბუდეში). ამიტომ, ტერმინატორის ახლოს ჭიანჭველები ყოველთვის მეტია, ვიდრე მისგან შორის [14, 20, 34].

სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ ტერმინატორის ფუძე არის  $a$  რადიუსიანი წრე, ხოლო მის გარეთ სივრცე ერთგვაროვანია, ამიტომ, ჭიანჭველათა სიმკვრივე  $r$  რადიუსიან წრეში იქნება ერთი და იგივე (ნახ.1.7.1).

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სტაციონარული შემთხვევა, ე.ი. ისეთი, რომ დროთა განმავლობაში სიმკვრივე არ იცვლება. ეს არ ნიშნავს იმას, რომ ჭიანჭველები არ გადაადგილდებიან. საკვების მოსაძებნად ისინი გადადიან ერთი ადგილიდან მეორეში მანამ, სანამ რაიმეს არ იპოვიან. ჩვენ მათ გადაადგილებას ვთვლით შემთხვევითად, ამიტომ, თუ გარკვეულმა რაოდენობამ დროის ერთეულში დატოვა რაიმე მიდამო, მაშინ მიახლოებით ასეთივე რაოდენობის ჭიანჭველები მოვლენ ამ მიდამოში სხვა მეზობელი უბნებიდან.

განვიხილოთ ორი მეზობელი წერტილი, რომელიც ერთ სხივზე მდებარეობს:  $A$  წერტილი, რომელიც ტერმინატორის ცენტრიდან  $r$  მანძილითაა დაშორებული და  $B$  წერტილი, რომელიც მდებარეობს  $r + \Delta r$  მანძილზე (ნახ.1.7.1). ვთქვათ,  $A$  წერტილის მიდამოებში ჭიანჭველათა რიცხვი არის  $Q(r)$ , ხოლო  $B$  წერტილის მიდამოში  $-Q(r + \Delta r)$ . საკვების ძებნაში ჭიანჭველები დარბიან სხვადასხვა მიმართულებით, მაგრამ, არც ერთ მიმართულებას არა აქვს უპირატესობა, რადგანაც გარემო ერთგვაროვანია. თუ  $A$ -ს მიდამოდან  $B$ -ს მიმართულებით გავიდა  $\alpha \cdot Q(r)$ ,  $\alpha < 1$  ჭიანჭველა, მაშინ,  $B$ -დან  $A$ -კენ გავა  $\alpha \cdot Q(r + \Delta r)$  ჭიანჭველა. აქ მნიშვნელოვანია ის, რომ ორივე შემთხვევაში  $\alpha$  არის ერთი და იგივე. ეს განსაზღვრავს ფიქსირებული მიმართულებით გასულ ჭიანჭველათა წილს.

თუმცა, ყველა ჭიანჭველა, რომელიც გავიდა  $A$ -დან, არ მივა  $B$ -მდე. მათგან ნაწილი, რომელიც გზაში იპოვის საკვებს, დაბრუნდება

ტერმინატორში. ცხადია, რომ ეს ნაწილი მით მეტი იქნება, რაც მეტია  $\Delta r$ . ამგვარად, ჭიანჭველათა რაოდენობა, რომელიც გავიდა A-დან B-ს მიმართულებით და მივიდა B-მდე, გამოისახება შემდეგი სხვაობით

$$Q_{AB} = \alpha Q(r) - \beta \alpha Q(r) \Delta r,$$

სადაც  $\beta$  არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც განსაზღვრავს დაბრუნებულთა წილს. რადგანაც სივრცე ერთგვაროვნად გვაქვს მიღებული, ამიტომ,  $\beta$  იქნება მუდმივი.

რაც შეეხება  $\alpha \cdot Q(r + \Delta r)$  სიდიდეს, ამ შემთხვევით რაოდენობას მიმატება ის ჭიანჭველები, რომლებიც გავიდნენ B-ს მიდამოდან არა A-კენ, მაგრამ, გზაში რამე იპოვეს, შეიცვალეს მიმართულება და წავიდნენ ტერმინატორისაკენ. ასეთი ჭიანჭველები, რომლებმაც ვერ მოასწრეს გასვლა OMN სექტორიდან, ასევე მოხვდებიან A-ს მიდამოებში, და ასეთები იქნება მით მეტი, რაც მეტია  $\Delta r$ . ამგვარად, იმ ჭიანჭველათა რიცხვი, რომლებიც გამოვიდნენ B-ს მიდამოდან და მოხვდნენ A-ს მიდამოში, გამოისახება ჯამით:

$$Q_{BA} = \alpha Q(r + \Delta r) + \beta_1 \alpha Q(r + \Delta r) \Delta r,$$

სადაც  $\beta_1$  - არის პროპორციულობის კოეფიციენტი და განსაზღვრავს ჭიანჭველათა იმ ნაწილს, რომლებმაც შეიცვალეს მიმართულება ტერმინატორის მიმართულებით.

რადგანაც ჩვენ განვიხილავთ სტაციონარულ შემთხვევას, ამიტომ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა  $Q_{AB} = Q_{BA}$ , ე.ი.

$$\alpha Q(r) - \beta \alpha Q(r) \Delta r = \alpha Q(r + \Delta r) + \beta_1 \alpha Q(r + \Delta r) \Delta r.$$

ეს არის ძირითადი ს ა ბ ა ლ ა ნ ს ო თანაფარდობა. აქედან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას. რადგანაც ჭიანჭველათა რაოდენობა ტოლია სიმკვრივისა და ფართობის ნამრავლის, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$n(r)S_A - \beta n(r)S_A \Delta r = n(r + \Delta r)S_B + \beta_1 n(r + \Delta r)S_B \Delta r \quad (1.7.1)$$

სადაც  $n(r)$  და  $n(r + \Delta r)$  არის A და B-ს მიდამოებში სიმკვრივე;  $S_A$  და  $S_B$  ამ მიდამოების ფართობებია. პოლარულ კოორდინატებში ეს ფართობები ტოლი იქნება

$$S_A \approx hr \Delta \varphi; \quad S_B \approx h(r + \Delta r) \Delta \varphi.$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (1.7.1) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} n(r)hr\Delta\varphi - \beta n(r)hr\Delta\varphi\Delta r &= \\ = n(r + \Delta r) \cdot h(r + \Delta r)\Delta\varphi + \beta_1 n(r + \Delta r)h(r + \Delta r)\Delta\varphi\Delta r. \end{aligned}$$

თუ ამ უკანასკნელს შევკვეცავთ  $h\Delta\varphi$ -ზე და დავაჯგუფებთ შესაკრებებს, მივიღებთ:

$$(r + \Delta r)n(r + \Delta r) - r \cdot n(r) = -[\beta_1 n(r + \Delta r)(r + \Delta r) + \beta n(r)r]\Delta r.$$

გავყოთ ეს ტოლობა  $\Delta r$ -ზე და გადავიღოთ ზღვარზე, როცა  $\Delta r \rightarrow 0$ , მივიღებთ:

$$\frac{d}{dr}(r \cdot n(r)) = -(\beta_1 + \beta) \cdot r n(r). \quad (1.7.2)$$

აღვნიშნოთ  $\beta_1 + \beta \equiv \gamma$  და გადავწეროთ (1.7.2)

$$\frac{d[r \cdot n(r)]}{r \cdot n(r)} = -\gamma \cdot dr \quad (1.7.3)$$

სახით. ჩვენ მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება  $n(r)$  სიმკვრივისათვის.

ვთქვათ,  $n(a)$  არის ჭიანჭველათა სიმკვრივე ტერმინატორის საზღვარზე ( $r=a$ ). (1.7.3)-ის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln|r \cdot n(r)| = -\gamma r + C. \quad (1.7.4)$$

თუ გამოვიყენებთ საწყის პირობას ( $r=a$ ), მივიღებთ:

$C = \ln|a \cdot n(a)| + \gamma a$ . ჩავსვათ ეს (1.7.4)-ში, მივიღებთ:

$$\ln \frac{r \cdot n(r)}{a \cdot n(a)} = -\gamma(r - a),$$

საიდანაც

$$n(r) = \frac{a}{r} n(a) e^{-\gamma(r-a)}. \quad (1.7.5)$$

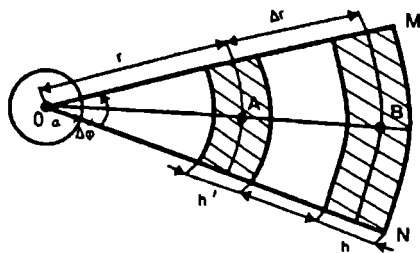
(1.7.5) არის საბეზნი მრუდის განტოლება. მისი გრაფიკის აგება ადვილია, თუ ვიცით  $a$ ,  $n(a)$  და  $\gamma$  (ნახ.1.7.2). ეს მრუდი კლებადია  $r$ -ის ზრდასთან ერთად.  $a$  და  $n(a)$  სიდიდეებს ადვილად განსაზღვრავენ ექსპერიმენტით,  $\gamma$ -ს გამოთვლა კი უფრო ძნელია.

(1.7.5) სამართლიანია ნებისმიერი  $r > a$ -სათვის, და კერძოდ  $r = b$ -თვის. ჩავსვათ (1.7.5)-ში  $r = b$ , მივიღებთ:

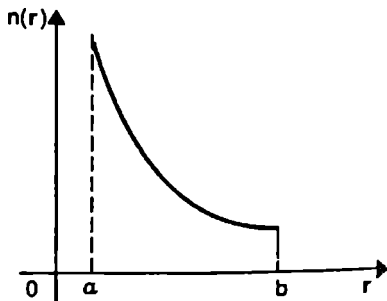
$$n(b) = \frac{a}{b} n(a) e^{-\gamma(b-a)},$$

საიდანაც

$$\gamma = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a \cdot n(a)}{b \cdot n(b)}. \quad (1.7.6)$$



ნახ.1.7.1



ნახ. 1.7.2

$n(b)$ -ს ისევე ვიპოვით ექსპერიმენტით, როგორც  $n(a)$ -ს, შემდეგ  $\gamma$ -ს მნიშვნელობას ჩავსვამთ (1.7.5)-ში და მივიღებთ  $n(r)$  სიმკვრივის კონკრეტულ მრუდს (ნახ.1.7.2). ეს არის თეორიული მრუდი, რომელიც მივიღეთ მოდელის საფუძველზე და კარგად ესადაგება ექსპერიმენტულად მიღებულ მრუდს. ამასთანავე უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი შენიშვნები:

**შენიშვნა 1.** (1.7.5) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ  $n(r) \neq 0$ , ნებისმიერი, რაგინდ დიდი  $r$ -თვის. რეალურ ტერმინატორში რასაკვირველია ეს ასე არ არის. თუმცა დიდი  $r$ -თვის  $n(r)$ , რომელსაც ვითვლით (1.7.5) ფორმულით, არის გაქრობამდე მცირე და ამიტომ დიდი ცდომილების გარეშე ჩვენ მას ვუგულვებელვყოფთ.

**შენიშვნა 2.**  $\gamma$  სიდიდე არის ჭიანჭველის სახეობის მახასიათებელი. უფრო ზუსტად, ის არის მოცემული სახეობის მოცემულ გარემოსთან ურთიერთობის მახასიათებელი. ჩვენს მოდელში გარემო ჩავთვალეთ უცვლელად. ეს ნიშნავს, რომ ან ჭიანჭველათა ქმედება ნაკლებად ცვლის გარემოს (მაგ., დროის მცირე შუალედში), ან გარემოს ხელოვნურად აღადგენენ. ასეა თუ ისე,  $\gamma$  სიდიდე დამოკიდებულია დროზე, რადგანაც, მაგალითად, ღამით და შუადღის სიციხეში ჭიანჭველათა აქტიუობა ნაკლებია, ვიდრე სხვა დროს.

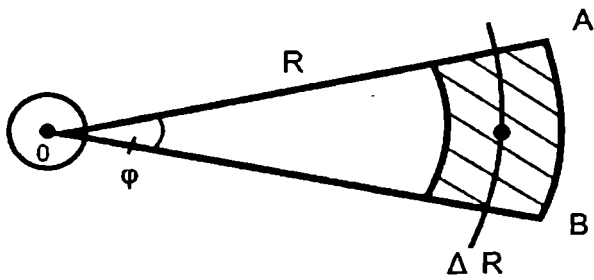
თუ ჩვენ დღე-ღამის სხვადასხვა დროისათვის გავზომავთ  $n(a)$  და  $n(b)$  სიდიდეთა წყვილებს და ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს (1.7.6)-ში,

მივიღებთ მათ შესაბამის  $\gamma$ -ს მნიშვნელობებს. ამ მნიშვნელობების (1.7.5)-ში ჩასმით მივიღებთ სიმკვრივის მრუდებს დროის განხილული მომენტისათვის.

### არასტაციონარული შემთხვევა

განვიხილოთ მარტივი არასტაციონარული ამოცანა. მისი ამოხსნა მნიშვნელოვნად მარტივდება იმით, რომ ჩვენ დავაკვირდებით არა სიმკვრივის ცვლილებას ყოველ წერტილში, არამედ რაიმე სექტორში ჭიანჭველების საერთო რაოდენობის ცვლილებას [34].

ვთქვათ, ტერმინატორის გარეთ სივრცე არის ერთგვაროვანი და ჭიანჭველები განლაგებული არიან (1.7.5) ფორმულის თანახმად. დროის რაღაც საწყის მომენტში, ბუდიდან საკმაოდ დიდ მანძილზე აღმოჩნდება მიშზიდველი საკვები. ამგვარად, ის მიდამო, სადაც აღმოჩნდება საკვები, ხდება უფრო ფასეული, ვიდრე მეზობელი უბნები. ვთქვათ, ამ უბნების ცენტრი დაშორებულია ტერმინატორის ცენტრიდან  $R + \frac{\Delta R}{2}$  მანძილით და მისი განზომილებებია  $R\phi$  და  $\Delta R$  (ნახ.1.7.3) ( $\Delta R$  და  $\phi$  ჩავთვალოთ საკმაოდ მცირეებად).



ნახ.1.7.3

ჩვენი ამოცანაა დავისახოთ AOB სექტორში ჭიანჭველათა რაოდენობის დროზე დამოკიდებულების პოვნა.

ვთქვათ,  $N(t)$  ჭიანჭველათა რაოდენობაა, რომელიც არის AOB სექტორში და იცის ფასეული უბნის არსებობის შესახებ. ბუნებრივია ვუშვებთ, რომ ისინი არ გადიან ამ სექტორიდან (მათ გადააქვთ საკვები ფასეული უბნიდან ბუდეში). ვუშვებთ, ასევე, რომ ისინი

შემხვედრ ჭიანჭველებს გადასცემენ ინფორმაციას უბნის ფასეულობის შესახებ, რომლებმაც ჯერ კიდევ არ იციან ამ უბნის შესახებ. ამ ჭიანჭველებს შორის იქნებიან ისეთებიც, რომლებიც მეზობელი უბნებიდან შემთხვევით მოხვდნენ AOB სექტორში. ამგვარად, თუ ჭიანჭველათა საერთო რაოდენობას, რომელიც იმყოფება ტერმინატორის გარეთ, აღვნიშნავთ  $W$ -თი, მაშინ იმ ჭიანჭველათა რაოდენობა, რომელთაც არა აქვთ ინფორმაცია ფასეული უბნების შესახებ, იქნება  $W - N(t)$ .  $\Delta t$  დროში ინფორმირებულ ჭიანჭველათა რაოდენობის ზრდა  $N(t)[W - N(t)]$  ნამრავლის პროპორციულია. ამგვარად, ვღებულობთ განტოლებას:

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \beta N(t)[W - N(t)]\Delta t. \quad (1.7.7)$$

აქ  $\beta$  პროპორციულობის კოეფიციენტია, რომელიც დამოკიდებულია უბნის ფასეულობაზე, მის ზომებზე, ჭიანჭველების მიერ ინფორმაციის გადაცემისა და მიღების უნარზე. თუ უბნის ფასეულობა არ იცვლება დროში, მაშინ  $\beta = \text{const}$ . თუ საკვების რაოდენობა უბანზე შეზღუდულია, მაშინ დროთა განმავლობაში  $\beta$  შემცირდება, რადგანაც უბნის ფასეულობა მცირდება ჭიანჭველების მიერ საკვების დატაცების გამო.

თუ (1.7.7) ტოლობას გავყოფთ  $\Delta t$ -ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(t)[W - N(t)]. \quad (1.7.8)$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრებით გვაქვს:

$$\frac{N(t)}{W - N(t)} = \frac{N(0)}{W - N(0)} e^{\int_0^t \beta(t) dt},$$

საიდანაც

$$N(t) = \frac{W}{1 + \left( \frac{W}{N(0)} - 1 \right) e^{-\int_0^t \beta(t) dt}}, \quad (1.7.9)$$

სადაც  $N(0)$  – ინფორმირებულ ჭიანჭველათა საწყისი რაოდენობაა AOB სექტორში. (1.7.5)-ის საფუძველზე გვექნება



$$N(0) = \iint_S n dx dy = \int_0^{\Phi} \int_R^{R+\Delta R} n I dr d\varphi = \left( I = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} - \text{გარდაქმნის იაკობიანი} \right) =$$

$$= \int_0^{\Phi} \int_R^{R+\Delta R} n(r) r dr d\varphi = \int_0^{\Phi} \int_R^{R+\Delta R} \frac{a}{r} n(a) e^{-\gamma(r-a)} r dr d\varphi =$$

$$= a \cdot n(a) \cdot \int_R^{R+\Delta R} e^{-\gamma(r-a)} dr = \frac{a \cdot n(a) \Phi}{\gamma} e^{-\gamma(R-a)} (1 - e^{-\gamma \Delta R}).$$

გავანალიზოთ ამონახსნი (1.7.9). უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ თუ  $\beta(t) = \text{const} > 0$  და  $t \rightarrow \infty$ , მაშინ  $N(t) \rightarrow W$ , ე.ი. ყველა ჭიანჭველა, რომელიც ბუდის გარეთაა, თავშეყრილია AOB სექტორში, როგორც მცირეც არ იყოს ეს სექტორი. მსგავსი მოვლენები ხშირად ხდება ბუნებაში, თუ ჭიანჭველები გადაადგილდებიან ვიწრო ზოლად, რომელიც აერთებს ბუდეს მისგან მოშორებულ მცირე უბანთან.

ახლა დაუშვათ, რომ, როგორც ადრე, ჩვენს უბანში საკვები მეტია, ვიდრე მეზობელ უბანში, მაგრამ ეს საკვები შეზღუდულია. დროთა განმავლობაში შეგროვილი ჭიანჭველები წაიღებენ ამ ზედმეტ საკვებს. მით უმეტეს, რადგანაც ჭიანჭველათა სიმკვრივე სექტორში ჯერ კიდევ მაღალია, დარჩენილი საკვები აქ თავდება უფრო სწრაფად, ვიდრე მეზობელ უბნებზე, ე.ი. სექტორი ნაკლებად ფასეული ხდება ვიდრე მეზობელი უბნები. ეს ნიშნავს, რომ (1.7.9)-ში  $\beta(t)$  ხდება უარყოფითი. ამის გამო ექსპონენტას მაჩვენებელი დროთა განმავლობაში ხდება ნულის ტოლი, ხოლო  $N(t)$  ტოლი ხდება  $N(0)$ -ის, ე.ი. სექტორში აღდება ჭიანჭველათა საწყისი რაოდენობა. ამ დაკენას აქვს ბუნებრივი ბიოლოგიური შინაარსი: ჭიანჭველები ტოვებენ საკვებისგან გაღარიბებულ სექტორს და ამ სექტორში ჭიანჭველათა სიმკვრივე მცირდება.

## §1.8. კასპიის ზღვის მოდელი

შავი და კასპიის ზღვები წარმოიქმნენ ერთი უპირველესი ზღვისაგან, რომელიც კავკასიის მთებმა ორ ნაწილად გაყო. კასპიის ზღვა ჩაკეტილია, ხოლო შავი ზღვა ბოსფორისა და დარდანელის სრუტეებით ხმელთაშუა ზღვას უკავშირდება. მიუხედავად ამისა შავი ზღვის წყალი ბევრად უფრო მარილიანია, ვიდრე კასპიის ზღვისა. შევეცადოთ ამის მიზეზის გარკვევას [2, 69].

კასპიის ზღვას აქვს ყარა-ბოლაზ-ლოლის ყურე და წყალი ზღვიდან ყურისაკენ მიედინება, უკან გამოდინება კი არ ხდება. შეიძლება თუ არა ამან გამოიწვიოს კასპიის წყლის შედარებით გამტკნარება?

შევეცადოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელის აგებას. გავითვალისწინოთ, რომ მდინარეებს კასპიის ზღვაში ოდნავ მარილიანი წყალი ჩამოაქვთ, რომელიც ზღვიდან ყურეში გაედინება. ყურეში, ისევე, როგორც ზღვაში, წყალი ორთქლდება.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

Q - იყოს ზღვაში ჩამავალი წყლის საერთო ნაკადი,

q - ზღვიდან ყურეში წყლის გადინების ინტენსივობა,

I - იყოს ზღვაში აორთქლებასა და წვიმების მოცულობათა შორის სხვაობა,

$I_1$  - იგივე სიდიდე ყურესათვის.

თუ V და  $V_1$  არის წყლის საერთო მოცულობა ზღვასა და ყურეში, მაშინ მათი ცვლილებების სიჩქარეები შესაბამისად ტოლი იქნება:

$$\begin{cases} \dot{V} = Q - I - q \\ \dot{V}_1 = q - I_1 \end{cases} \quad (1.8.1)$$

ზღვაში წყლის მოცულობა ტოლია ჩამავალი წყლის საერთო ნაკადს გამოკლებული ყურეში გამავალი წყლის რაოდენობა და აკლდება ზღვაში აორთქლებასა და წვიმების მოცულობას შორის სხვაობაც. ხოლო ყურეში წყლის მოცულობა ტოლია ზღვიდან ყურეში გამავალი წყლის რაოდენობას გამოკლებული ყურეში აორთქლებასა და წვიმების მოცულობას შორის სხვაობა.

კასპიის ზღვამაც და ყურემაც დიდი ხანია მიაღწიეს სტაბილურ მოცულობას და მათში წყლის რაოდენობა წლის განმავლობაში

მცირედ იცვლება. ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ  $\dot{V} = \dot{V}_1 = 0$ , საიდანაც

$$\begin{cases} Q - I - q = 0, \\ q - I_1 = 0. \end{cases} \quad (1.8.2)$$

თუ (1.8.1) ტოლობის მარცხენა მხარე 0-ის ტოლია, მაშინ მარჯვენა ნაწილიც ნულის ტოლია.

ამასთან წყლის მოცულობებმა ზღვასა და ყურეში  $V$  და  $V_1$  მიაღწიეს, რომელიდაც წონასწორობის მდგომარეობას, შესაბამისად  $V^*$  და  $V_1^*$ .

მდინარის წყლებს კასპიის ზღვაში ჩამოაქვთ მარილი. ვთქვათ  $\nu$  - მდინარის წყლების მარილიანობაა, ხოლო  $\mu$  ზღვის წყლის მარილიანობა. მაშინ კასპიის ზღვაში მარილი იმატებს  $Q\nu$  ინტენსივობით, ხოლო ყურეში  $q\mu$  - ინტენსივობით. თუკი  $M$  და  $M_1$  იქნება შესაბამისად ზღვასა და ყურეში მარილის რაოდენობა, მაშინ მათი ცვლილების სიჩქარეები შესაბამისად იქნება:

$$\begin{cases} \dot{M} = Q\nu - q\mu, \\ \dot{M}_1 = q\mu. \end{cases} \quad (1.8.3)$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ ყარა-ბოლაზ-ლოლის ყურეში მარილის რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება, რადგან ზღვიდან ყურეში გაედინება მარილიანი წყალი, უკან გამოდინება კი არ ხდება. როგორც ცნობილია, ამ ყურეში მარილების კონცენტრაციამ გაჯერებულ ზღვარს მიაღწია და ათასეულობით წლების განმავლობაში ილექება ყურის ფსკერზე. რაც შეეხება კასპიის ზღვას, აქ მარილების რაოდენობა მანამდე იზრდება, სანამ  $Q\nu > q\mu$ . რადგან, თუ  $Q\nu$  გაუტოლდება  $q\mu$ , მაშინ  $\dot{M} = 0$  და მარილების რაოდენობის ზრდა ზღვაში შეწყდება და მაღლწევს გაჯერებულ მდგომარეობას. მაშასადამე, კასპიის ზღვის მარილიანობის ზრდა თანდათან მცირდება და საერთოდ შეწყდება, როცა

$$Q\nu - q\mu = 0. \quad (1.8.4)$$

ანუ როცა  $\mu$  მიაღწევს რაღაც წონასწორულ მნიშვნელობას  $\mu^* = \frac{Q\nu}{q}$ , რაც გამომდინარეობს (1.8.4)-დან.

ერთი შეხედვით ამ სიდიდის განსაზღვრა ძალიან ძნელი ჩანს: საჭიროა ზღვაში ჩამავალი მთელი ნაკადის მოცულობის, მისი

მარილიანობის, ზღვიდან ყურეში გამავალი წყლის რაოდენობის ცოდნა. ამ სიდიდეების ექსპერიმენტული გაგება შესაძლებელია, მაგრამ ძალიან რთულია. ირკვევა, რომ ყველაფრის განსაზღვრა უპირობად შეუძლებელია. როგორც (1.8.2)-დან ჩანს  $Q = I + q$  და ამიტომ

$$\mu^* = \frac{Qv}{q} = \frac{(I+q)v}{q} = \left(1 + \frac{I}{q}\right)v.$$

ასევე  $q = I_1$  და შესაბამისად

$$\mu^* = \left(1 + \frac{I}{q}\right)v = \left(1 + \frac{I}{I_1}\right)v.$$

ცხადია, რომ  $\frac{I}{I_1}$  მიახლოებით ტოლია ზღვისა და ყურის

ზედაპირების ფართობთა შეფარდებისა, რადგან აორთქლება ხდება ზედაპირიდან და ამიტომ

$$\mu^* = \left(1 + \frac{I}{I_1}\right)v \approx \left(1 + \frac{S}{S_1}\right)v.$$

კასპიის ზღვის ზომები დაახლოებით 40-ჯერ აღემატება ყარაბოღაზ-ღოლის ყურის ზომებს, მაშასადამე  $\mu^* \approx 41v$ . ეს სიდიდე კასპიის ზღვის მარილიანობაზე ამჟამად უფრო მცირეა.

დასკვნა:

მაშასადამე, დღეისათვის ყურე "ამტკნარებს" კასპიის ზღვას და ამას აკეთებს უკვე დიდი ხანია. ეს გარკვეულწილად ხსნის იმ ფაქტს, რომ კასპიის ზღვის წყალი შავი ზღვის წყალზე უფრო ნაკლებ მარილიანია, და მომავალში კიდევ უფრო მტკნარი გახდება. თუმცა, ცხადია, აქ დროის გეოლოგიური მასშტაბები იგულისხმება.

შექმნილი მათემატიკური მოდელი აღწერს წყლისა და მარილების ბალანსს ზღვასა და ყურეში, ხოლო თვითონ მოდელი (1.8.1) და (1.8.3) დიფერენციალური განტოლებებია.

განტოლება (1.8.1) აღწერს, თუ როგორ იცვლება წყლის მოცულობა ზღვასა და ყურეში, ხოლო განტოლება (1.8.3) გვიჩვენებს მათში მარილების რაოდენობის ცვლას.

## §1.9. ბიოცენოზის დინამიკა

კლასიკური წიგნი, რომელშიც განიხილება სახეობათა ურთიერთქმედების მათემატიკური მოდელები, არის ვიტო ვოლტერას წიგნი "არსებობისათვის ბრძოლის მათემატიკური თეორია" (1931). წიგნი აგებულია როგორც მათემატიკური ტრაქტატი, მასში მათემატიკური ფორმით პოსტულირებულია ბიოლოგიური ობიექტების თვისებები და მათი ურთიერთქმედებები. შემდგომ ამ ურთიერთქმედების გამოკვლევა ხდება, როგორც მათემატიკური ობიექტების გამოკვლევა. სწორედ ვ. ვოლტერას ამ ნაშრომით ჩაეყარა საფუძველი თანამედროვე მათემატიკურ ბიოლოგიასა და მათემატიკურ ეკოლოგიას [21, 33, 34, 72].

ვიტო ვოლტერა (1860-1940) მსოფლიოში ცნობილი გახდა თავისი ნაშრომებით ინტეგრალურ განტოლებებსა და ფუნქციონალურ ანალიზში. გარდა მათემატიკისა მას ყოველთვის აინტერესებდა მათემატიკური მეთოდების გამოყენების საკითხები ბიოლოგიაში, ფიზიკაში, საეციალურ მეცნიერებებში. იტალიის სამხედრო საჰაერო ძალებში მსახურობის წლებში, ის ბევრს მუშაობდა სამხედრო ტექნიკისა და ტექნოლოგიების (ბალისტიკის ამოცანები, ექოლოკაცია) საკითხებში. ამ ადამიანში შეთავსებული იყო მეცნიერის ტალანტი და აქტიური პოლიტიკოსის ტემპერამენტი, ფაშიზმის პრინციპული მოწინააღმდეგე. ის იყო ერთადერთი იტალიელი სენატორი, რომელმაც ხმა არ მისცა მუსოლინისათვის ხელისუფლების გადაცემას. იტალიაში ფაშისტური დიქტატურის მშენებარების დროს ვ. ვოლტერა მუშაობდა საფრანგეთში. მუსოლინის სურდა მსოფლიოში ცნობილი მეცნიერი გადმოეყვანა იტალიაში, ამ მიზნით მას სთავაზობდა სხვადასხვა მაღალ თანამდებობას, მაგრამ მისგან გადამწყვეტი უარი მიიღო. ანტიფაშისტურმა პოზიციამ ვოლტერას უარი ათქმევინა რომის უნივერსიტეტის კათედრაზე და იტალიაში სამეცნიერო საზოგადოების წევრობაზე.

პოპულაციის დინამიკის საკითხებით ვ. ვოლტერა დაინტერესდა 1925 წლიდან ახალგაზრდა ზოოლოგთან უმბერტო დე ანკონასთან საუბრის შემდეგ, რომელიც მისი ქალიშვილის, ლუიზას, მომავალი მეუღლე იყო. დე ანკონა სწავლობდა რა ადრიატიკაზე მონათა ბაზრების სტატისტიკას, დაადგინა საინტერესო ფაქტი: როდესაც პირველი მსოფლიო ომის დროს მეწარმეობის ინტენსივობა მკვეთრად

შემცირდა, მაშინ თევზჭერაში მნიშვნელოვნად გაიზარდა მტაცებელი თევზების წილი. ასეთი ეფექტი ნაწინასწარმეტყველები იყო ვოლტერას მოდელით "მტაცებელი-მსხვერპლი". ეს იყო მათემატიკური ბიოლოგიის პირველი წარმატება.

ვოლტერამ დაუშვა, რომ ურთიერთზემოქმედების ინტენსივობა შეხვედრების ალბათობის პროპორციულია. ამან და სხვა დაშვებებმა შესაძლებელი გახადა პოპულაციათა ურთიერთზემოქმედების მათემატიკური თეორიის აგება, როგორც ერთი ტროფიკული ღონის (კონკურენცია), ისე სხვადასხვა ტროფიკული ღონის (მტაცებელი-მსხვერპლი) პოპულაციებისათვის.

ვოლტერას მიერ შესწავლილი სისტემები შედგებიან რამდენიმე ბიოლოგიური სახეობისაგან და საკვების მარაგისაგან, რომელსაც იყენებენ ზოგიერთი განზილული სახეობები. სისტემის კომპონენტების შესახებ ზღვება შემდეგი დამკვირვებების ფორმულირება:

1. საკვები არის ან განუსაზღვრელი ოდენობით, ან მისი შევსება არის დროში მკაცრად რეგლამენტირებული;

2. ყოველი სახეობის ინდივიდები კვდიბიან ისე, რომ დროის ერთეულში კვდება არსებული ინდივიდების მუდმივი ნაწილი;

3. მტაცებელი სახეობები ჭამენ მსხვერპლებს ისე, რომ დროის ერთეულში შეჭმული მსხვერპლების რაოდენობა ყოველთვის პროპორციულია ამ ორი სახეობის ინდივიდების შეხვედრათა ალბათობის, ე.ი. მტაცებლებისა და მსხვერპლების რაოდენობათა ნამრავლის პროპორციულია;

4. თუ საკვები განუსაზღვრელი რაოდენობით არის და რამდენიმე სახეობა, რომლებიც მას მიირთმევენ. მაშინ საკვების ნაწილი, რომელსაც დებულობს ყოველი სახეობა დროის ერთეულში, პროპორციულია ამ სახეობის ინდივიდთა რაოდენობის, რომელიც აღებულია რაიმე კოეფიციენტით, ეს უკანასკნელი კი დამოკიდებულია სახეობაზე (სახეობათა შორის კონკურენციის მოდელი);

5. თუ სახეობა იკვებება საკვებით, რომელიც არის განუსაზღვრელი ოდენობით, სახეობის რაოდენობის ნაზრდი დროის ერთეულში სახეობის რაოდენობის პროპორციულია;

6. თუ სახეობა იკვებება საკვებით, რომელიც არის განსაზღვრული ოდენობით, მაშინ მისი გამრავლება დამოკიდებულია საკვების მიღების სიჩქარეზე, ე.ი. დროის ერთეულში ნაზრდი პროპორციულია შეჭმული საკვების რაოდენობის.

ჩამოთვლილი ჰიპოთეზები საშუალებას გვაძლევს აღვწეროთ რთული, ცოცხალი, სისტემები ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების მეშვეობით. ასეთი სისტემით ხდება ქიმიური რეაქციების აღწერაც.

განვიხილოთ ვოლტერას მოდელებიდან უმარტივესი მოდელი. ეს მოდელი მუშაობს ნებისმიერი ბუნების კონკურენტული ურთიერთზემოქმედების დროს: სხვადასხვა ტიპის ოპტიკური აქტივობის ბიოქიმიური შენაერთების, კონკურირებადი უჯრედების, ინდივიდების, პოპულაციების დროს. ეს მოდიფიკაცია გამოიყენება ეკონომიკაში კონკურენციის დროსაც.

განვიხილოთ რაიმე შეზღუდული არეალი, სადაც ბინადრობს ორი სახეობა. ვთქვათ  $N_1(t)$  და  $N_2(t)$  მათი რაოდენობებია. ჩავთვალოთ, რომ საკვების განუსაზღვრელი რაოდენობისა და მტაცებლების არყოფნის შემთხვევაში, ყოველი სახეობა გამრავლდებოდა ექსპონენციალურად, ე.ი.

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_2 N_2, \quad (1.9.1)$$

სადაც  $\varepsilon_1$  და  $\varepsilon_2$  - რაოდენობის ზრდის სპეციფიკური სიჩქარეებია.

ბუნებრივ პირობებში ისინი ერთმანეთზე აწარმოებენ ზემოქმედებას, და ეს ურთიერთქმედება ცვლის განტოლების სახეს. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორი სახის ურთიერთზემოქმედებას: 1) სახეობები უწყვენ ერთმანეთს კონკურენციას ერთი და იგივე საკვების გამო, რომლის რაოდენობა შეზღუდულია; 2) ერთი სახეობა არის მტაცებელი მეორე სახეობის მიმართ.

### 1.9.1. ორი პოპულაციის (ანტაგონისტების) განვითარების მათემატიკური მოდელი

ჯერ განვიხილოთ პირველი ამოცანა. ვთქვათ, გვაქვს ორი სრულიად ერთნაირი სახეობა გამრავლების ერთნაირი სიჩქარით, რომლებიც არიან ანტაგონისტები, ე.ი. ერთმანეთთან შეხვედრისას თრგუნავენ ერთმანეთს. რადგანაც საჭმლის მარაგი შეზღუდულია, ამიტომ მისი მარაგის ამოწურვას მივყავართ შიშშილამდე, და, რასაკვირველია, პოპულაციათა ზრდის სიჩქარის შემცირებამდე [2, 23, 34, 79, 80, 85, 109].

ვთქვათ,  $F(N_1, N_2)$  - არის საკვების რაოდენობა, რომელსაც ჭამს ორივე სახეობა დროის ერთეულში. უმარტივეს შემთხვევაში შეიძლება ჩათვალოთ, რომ

$$F(N_1, N_2) = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0.$$

$F$ -ის ზრდასთან მცირდება პოპულაციათა სიჩქარეები. ამიტომ  $\varepsilon_1$  და  $\varepsilon_2$  კოეფიციენტების ნაცვლად დაწვრიოთ  $\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)$  და  $\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)$ . ამგვარად (1.9.1) სისტემის ნაცვლად მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)]N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)]N_2. \end{cases} \quad (1.9.2)$$

$\gamma_1$  და  $\gamma_2$  კოეფიციენტებს საკვების უქმარისობისადმი მგრძობელობის კოეფიციენტები ეწოდება.  $F$  ფუნქცია ჩათვალოთ საკმაოდ გლუვად (ე.ი. აქვს საკმაოდ მაღალი რივის წარმოებულები). ამიტომ (1.9.2) სისტემა აკმაყოფილებს კოშის ამოცანის ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ თეორემის პირობებს:

$$N_1(t_0) = N_{10}, \quad N_2(t_0) = N_{20}. \quad (1.9.3)$$

ცხადია, რომ ჩვენი მიზნებისთვის აზრი არა აქვს საწყის პირობებს მივცეთ ნულოვანი ან უარყოფითი მნიშვნელობები, რადგანაც  $N_{10}$  და  $N_{20}$  - ეს არის ჩვენი სახეობების რაოდენობები დროის საწყის მომენტში. გამოვიკვლიოთ (1.9.2) სისტემის ამონახსნები (1.9.3)-ის დადებითი პირობებით.

შენიშნოთ, რომ უპირველეს ყოვლისა,  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  ამონახსნის კომპონენტები, რომლებიც შეესაბამებიან  $N_1(t_0)$ ,  $N_2(t_0)$  დადებით საწყის პირობებს, რჩებიან დადებითები დროის ნებისმიერი  $t \geq t_0$  მომენტისთვის. საწინააღმდეგოს დაშვებას, ჩვენ მივყავართ ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ თეორემასთან წინააღმდეგობაში. ეს ნიშნავს, რომ (1.9.2) სისტემის არც ერთ ტრაექტორიას, რომელიც იწყება დადებით კვადრანტში, არ შეუძლია გადაკვეთოს საკოორდინატო ღერძები, რომლებიც ასევე არიან ამ სისტემის ამონახსნები.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამონახსნის კომპონენტები ნებისმიერი  $t \geq t_0$ -თვის შემოსაზღვრულია. მართლაც, დავუშვათ, რომ  $N_1(t)$  ფუნქციისათვის არსებობს შუალედი, სადაც იზრდება რა ეს ფუნქცია, ღებულობს წინასწარ აღებულ რაგინდ დიდ რიცხვზე მეტ



მნიშვნელობას. რადგანაც  $F$  - ზრდადი ფუნქციაა, ამ შუალედებს შორის მოიძებნება ისეთი, რომ  $\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2) < 0$ . მაშინ (1.9.2) სისტემის პირველი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ  $\frac{dN_1}{dt} < 0$ ,

ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ  $N_1(t)$  ზრდადია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ  $N_2(t)$ -ს შემოსაზღვრულობასაც.

(1.9.2) სისტემის ამონახსნის შემდეგი თვისებების გამოსავლენად, ვიპოვოთ მისი ინტეგრალი. ამისათვის სისტემა ჩაწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{N_1} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)] dt, \\ \frac{dN_2}{N_2} = [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)] dt. \end{cases}$$

პირველი განტოლება გავამრავლოთ  $\gamma_2$ -ზე, ხოლო მეორე  $\gamma_1$ -ზე და პირველს გამოვკლოთ მეორე მივიღებთ:

$$\gamma_2 \frac{dN_1}{N_1} - \gamma_1 \frac{dN_2}{N_2} = (\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1) dt.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით გვექნება

$$\gamma_2 \ln \frac{N_1}{N_{10}} - \gamma_1 \ln \frac{N_2}{N_{20}} = (\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1) \cdot (t - t_0)$$

ანუ

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = \frac{N_{10}^{\gamma_2}}{N_{20}^{\gamma_1}} \cdot e^{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1) \cdot (t - t_0)}. \quad (1.9.4)$$

შემთხვევა, როცა  $\varepsilon_1 \gamma_2 = \varepsilon_2 \gamma_1$  ნაკლებად ალბათურია, ამიტომ მას ჩვენ არ განვიხილავთ. ვთქვათ, მაგალითად,  $\varepsilon_1 \gamma_2 > \varepsilon_2 \gamma_1$ . ე.ი.

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}. \quad (1.9.5)$$

მაშინ (1.9.4)-ში ექსპონენტის მაჩვენებელი იქნება დადებითი და როცა  $t \rightarrow +\infty$ , გვექნება

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = +\infty.$$

რადგანაც  $N_1^{Y_2}$  შემოსაზღვრულია, ეს უკანასკნელი ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $N_2^{Y_1} \rightarrow 0$ , თუ  $t \rightarrow +\infty$ .

ამგვარად, თუ სამართლიანია (1.9.5) უტოლობა, ე.ი. მეორე სახეობის ზრდის სიჩქარე  $\varepsilon_2$  ნაკლებია და საკვებისადმი უკმარისობის  $\gamma_2$  კოეფიციენტი მეტია, ვიდრე ეს აქვს პირველ სახეობას, მაშინ დროთა განმავლობაში მეორე სახეობა ქრება. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ პირველი სახეობა ამ დროს სტაბილური ხდება, ე.ი.  $N_1(t)$  რაოდენობა მიისწრაფის რაიმე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვისაკენ. ვაჩვენოთ ეს უმარტივესი ფუნქციისათვის:

$$F(N_1, N_2) = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0. \quad (1.9.6)$$

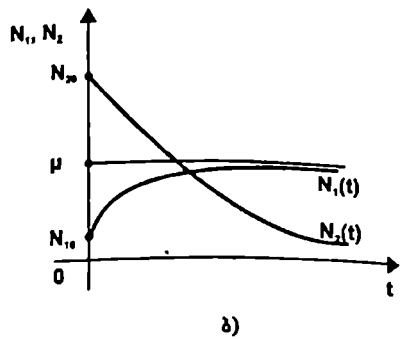
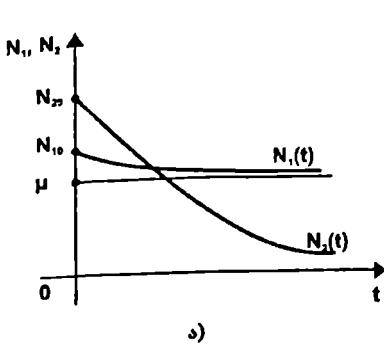
რადგანაც  $N_2(t) \rightarrow 0$ , როცა  $t \rightarrow +\infty$ , მაშინ რაიმე  $t_1$  მომენტიდან დაწყებული  $N_2(t)$  გახდება იმდენად მცირე, რომ მისი უგულვებელყოფა შეიძლება და  $F(N_1, N_2) = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$  ტოლობის ნაცვლად პირველ განტოლებაში დაიწეროს  $F(N_1, 0) = \lambda_1 N_1$ . სხვა სიტყვებით,  $t = t_1$ -დან დაწყებული, სისტემის პირველი განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1) N_1, \quad (1.9.7)$$

ეს განტოლება არაფრით არ განსხვავდება ფერხიულსტ-პერლის განტოლებისაგან (1.2.2)  $\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ . როგორც ცნობილია, მისი ამონახსნი მიისწრაფის მუდმივი  $\mu$ -სკენ, სადაც  $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ . მოცემულ შემთხვევაში  $\mu = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 \lambda_1}$ . ამგვარად, როცა  $t \rightarrow +\infty$ ,

ფუნქცია  $N_1(t)$  მიისწრაფის რა  $\mu = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 \lambda_1}$ -კენ, ხდება სტაბილური.

ამგვარად, ნებისმიერი საწყისი მონაცემისათვის, სახეობა, რომლისთვისაც  $\frac{\varepsilon}{\gamma}$  შეფარდება მეტია, გადარჩება და სტაბილური ხდება; ხოლო ის სახეობა, რომელსაც  $\frac{\varepsilon}{\gamma}$  შეფარდება ნაკლები აქვს გადაშენდება. (იხ. ნახ.1.9.1, ა.)



ნახ.1.9.1

ნახ.1.9.1, ა)-ზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა  $N_1$ -ის საწყისი პირობები მისი ზღვრული  $\frac{\epsilon_1}{\gamma_1 \lambda_1}$  (ასიმპტოტური) მნიშვნელობაზე მეტია. ეს სულაც არ არის აუცილებელი. დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, რომ პირველი სახეობა გადარჩება და გახდება სტაბილური, როგორც მცირეც არ უნდა ყოფილიყო მისი საწყისი მნიშვნელობა  $N_{10}$ , ხოლო მეორე სახეობა დაიღუპება, როგორც დიდიც არ უნდა ყოფილიყო მისი რაოდენობა საწყის  $t_0$  მომენტში (იხ.ნახ.1.9.1, ბ).

ახლა დავუშვათ, რომ ჩვენ გვაქვს მხოლოდ ერთი სახეობა, გარკვეული  $\frac{\epsilon}{\gamma}$  შეფარდებით. დროის რაღაც  $t_0$  მომენტში შემთხვევით

გაჩნდება მუტანტი ახალი  $\frac{\epsilon}{\gamma}$  შეფარდებით, რომელიც წინაზე მეტია.

მაშინ, ჩვენი თეორიის თანახმად, რაგინდ მცირეც არ იყოს საწყის მომენტში მუტანტების რიცხვი, დროთა განმავლობაში ისინი შეავიწროვებენ იმ სახეობას, რომელიც არსებობდა მუტანტების გაჩენამდე და თვითონ გახდებიან სტაბილური.

ბიოლოგებისათვის ცნობილია, რომ მსგავსი შექანიზმი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ევოლუციის პროცესში.

1.9.2. ორი აკოპულაციის - "მტაცებელი-მსხვერპლის"  
ბანკითარების მათემატიკური მოდელი.

განვიხილოთ ახლა მეორე ამოცანა, როცა ერთი სახეობა არის მტაცებელი მეორის მიმართ. უხსოვარი დროიდან "მტაცებლის" ქვეშ იგულისხმებოდა ყველაფერი არასასიამოვნო. შესაბამისი იყო დამოკიდებულება ამ სახელის მატარებლებთან. ჯერ კიდევ რამდენიმე ათეული წლის წინათ თვლიდნენ, რომ რაც მეტ მტაცებელს გავანადგურებთ, მით უფრო მეტ სარგებლობას მოვუტანთ ჩვენს მეურნეობასო [2, 23, 34].

ბიოლოგებმა უფრო ხშირად დაიწყეს გამოსვლა ამ მცდარი თეორიის წინააღმდეგ. შეშინულ იქნა, რომ, იქ, სადაც მგელი მთლიანად განადგურდა, მნიშვნელოვნად გაიზარდა ბალახისმჭამელთა ჯოგი. ასეთ ჯოგში ხშირად გამოვლინდება დაავადებულები. შთამომავლობა კნინდება, მცირდება საერთო სულადობა, ყოველივე ამას მოაქვს გაცილებით მეტი ზიანი, ვიდრე მგლების მტაცებლობას.

მართალია, ზოგჯერ მგლების განადგურების შემდეგ, ბალახისმჭამელთა რაოდენობა მკვეთრად იზრდებოდა, მაგრამ მალევე ეცემოდა იმ დონეზე დაბლა, ვიდრე იყო მგლების განადგურებამდე. ბიოლოგებმა ახსნეს ეს პარადოქსი. საქმე ისაა, რომ მგლები, ბუნებრივ პირობებში, არც ისე ბევრ ბალახისმჭამელს ანადგურებდნენ, ვიდრე მათ ხშირად მიაწერდნენ. ამასთან, პირველ რიგში, მგლები (ისევე როგორც სხვა მტაცებლები), ნადირობენ სუსტებზე, იმაზე, რომელთა დაწვევა და დამარცხება ადვილია. მათი ნადავლი ხდება ავადმყოფი, განუვითარებელი, დაუძლურებული ცხოველები. ანადგურებენ რა ასეთ ცხოველებს, მგლები ტოვებენ ძლიერებს, კარგად განვითარებულებს, ჯანმრთელებს, იმათ, რომელთაც აქვთ კარგი შთამომავლობის მოცემის უნარი. ასეთი სანიტარული მუშაობის გარეშე, რომელსაც მტაცებლები ასრულებენ, ჯოგი კნინდება, ცხოველები ავადდებიან ინფექციური სნეულებებით, რომელსაც უფრო მეტი ზიანი მოაქვს მათთვის, ვიდრე მგლებს.

თუკი გადავარჩინთ ბალახისმჭამელებს ინფექციისაგან, ისინი მართლაც სწრაფად იწყებენ გამრავლებას, მაგრამ უზომოდ განვითარებულ ჯოგს არ შეუძლია გამოკვება და იწყება მასობრივი სიკვდილი შიმშილისაგან.

ამგვარად, მტაცებლის განადგურება ყოველთვის არაა სასარგებლო.

ამ ახალ მოვლენებს მივუდგეთ მათემატიკურად. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორი სახეობის თანაარსებობის მარტივ მოდელს, რომელთაგან ერთი მეორის მიმართ წარმოადგენს მტაცებელს.

თუ ჩვენ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას მსხვერპლისა და მტაცებლის რიცხობრიობისათვის, რომელიც გამოყენებული იყო ფერხიულსტ-პერლის მოდელის მისაღებად, მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\Delta x = \varepsilon_1 x \Delta t - \gamma_1 xy \Delta t, \quad (1.9.8)$$

$$\Delta y = -\varepsilon_2 y \Delta t + \gamma_2 xy \Delta t, \quad (1.9.9)$$

სადაც:  $x=x(t)$  - მსხვერპლის პოპულაციის რაოდენობა;

$y=y(t)$  - მტაცებლის პოპულაციის რაოდენობა;

$\Delta x$  - მსხვერპლის პოპულაციის ნაზრდი დროის  $\Delta t$  შუალედში;

$\Delta y$  - მტაცებლის პოპულაციის ნაზრდი დროის  $\Delta t$  შუალედში;

$\varepsilon_1$  - მსხვერპლის შობადობის კოეფიციენტი;

$\gamma_1$  - მსხვერპლის ბუნებრივი სიკვდილიანობის კოეფიციენტი;

$\varepsilon_2$  - მტაცებლის შობადობის კოეფიციენტი;

ხოლო  $\gamma_2$  - მტაცებლის ბუნებრივი სიკვდილიანობის კოეფიციენტი.

დროთა განმავლობაში  $x(t)$  და  $y(t)$  სიდიდეები იცვლება. მტაცებლები კვდებიან, იბადება ახალი თაობები. ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ პოპულაცია - მსხვერპლი წარმოადგენს მტაცებლების ერთადერთ საკვებს. ნაზრდი  $\Delta y$  დროის  $\Delta t$  განმავლობაში წარმოიქმნება ნამატიდან, რომელიც განპირობებულია შობადობით და ბუნებრივი სიკვდილიანობით გამოწვეული ზარალით. დანაკლისი შეიძლება ჩავთვალოთ მოზრდილი ინდივიდების რაოდენობის პროპორციულად ( $\varepsilon_2 y \Delta t$ ), ხოლო ნამატი ჩაითვლება კვების პროპორციულად, ე.ი.  $\Delta t$  დროში განადგურებული მსხვერპლის რაოდენობის პროპორციულად ( $\gamma_2 xy \Delta t$ ).

(1.9.8) და (1.9.9) განტოლებების  $\Delta t$ -ზე გაყოფით და ზღვარზე გადასვლით, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ორი  $x(t)$  და  $y(t)$  უცნობი ფუნქციით:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy. \end{cases} \quad (1.9.10)$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0.$$

ეს სისტემა კი აღწერს მსხვერპლისა და მტაცებლის თანარსებობას.

(1.9.10) სისტემის განტოლებები პირველად გამოყვანილ იქნა 1925 წელს და ცნობილია ლოტკი-ვოლტერას განტოლებების სახელწოდებით.

საწყისი პირობებია:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.9.11)$$

(1.9.10), (1.9.11) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. როგორც წინათ, ჩვენ გვინტერესებს კოშის მხოლოდ ისეთი პირობები, როდესაც  $x_0$  და  $y_0$  დადებითია. როგორ გამოიყურება  $x(t)$ -სა და  $y(t)$ -ს შორის დამოკიდებულების მრუდი?

(1.9.10) სისტემის ამონახსნის თვისებები მოხერხებულია გამოვიკვლიოთ  $xOy$  ფაზურ სიბრტყეზე. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ (1.9.10) სისტემას აქვს ორი სტაციონარული ამონახსნი. ამ ამონახსნებს ადვილად განვსაზღვრავთ, თუ (1.9.10) სისტემის წარმოებულებს გაეუტოლებთ ნულს, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy = 0, \\ -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy = 0. \end{cases}$$

აქედან  $\{x \equiv 0, y \equiv 0\}$  და  $\left\{x \equiv \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, y \equiv \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right\}$  ორი სტაციონარული ამონახსნია.

პირველი ამონახსნი ჩვენ ნაკლებად გვინტერესებს (ორივე საზოგადოების რაოდენობა ნულის ტოლია). მეორე ამონახსნი განვიხილოთ დაწვრილებით.  $xOy$  ფაზურ სიბრტყეზე ეს ამონახსნი გამოისახება

$N\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$  წერტილით. გამოვიკვლიოთ ტრაექტორიის ქცევა ამ წერტილის ახლოს. ამისათვის ვიპოვოთ (1.9.10) სისტემის ინტეგრალი, რომელიც არ შეიცავს  $t$ -ს.

პირველი განტოლება გაგამრავლოთ  $\gamma_2$ -ზე, მეორე  $\gamma_1$ -ზე და შედეგები შევკრიბოთ. მივიღებთ:

$$\gamma_2 \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 x - \varepsilon_2 \gamma_1 y. \quad (1.9.12)$$

ახლა პირველი განტოლება გავამრავლოთ  $\frac{\epsilon_2}{x}$ -ზე და მეორე კი

$\frac{\epsilon_1}{y}$ -ზე, შედეგები შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\frac{\epsilon_2}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{\epsilon_1}{y} \frac{dy}{dt} = -\epsilon_2 \gamma_1 y + \epsilon_1 \gamma_2 x. \quad (1.9.13)$$

(1.9.12) და (1.9.13)-ის მარჯვენა მხარეები ტოლია, ე.ი. ტოლი იქნება მარცხენა მხარეებიც:

$$\gamma_2 x' + \gamma_1 y' = \epsilon_2 \frac{x'}{x} + \epsilon_1 \frac{y'}{y}, \quad x' \equiv \frac{dx}{dt}, \quad y' \equiv \frac{dy}{dt}.$$

აქედან, ინტეგრებით ვღებულობთ:

$$\gamma_2 x + \gamma_1 y = \epsilon_2 \ln x + \epsilon_1 \ln y + \ln C,$$

ანუ

$$e^{\gamma_2 x} \cdot x^{-\epsilon_2} = C \cdot e^{-\gamma_1 y} \cdot y^{\epsilon_1}. \quad (1.9.14)$$

და, ბოლოს,

$$C = \frac{e^{\gamma_2 x} \cdot e^{\gamma_1 y}}{x^{\epsilon_2} \cdot y^{\epsilon_1}}. \quad (1.9.14)$$

(1.9.14) არის საძებნი ინტეგრალი. ყოველი ფიქსირებული  $C > 0$ -თვის, ამ ინტეგრალს შეესაბამება  $xOy$  სიბრტყეზე ჩვენი სისტემის გარკვეული მრუდი.

სამწუხაროდ, (1.9.14) არაცხადად განსაზღვრავს ცვლადებს შორის დამოკიდებულებას.  $x$ -სა და  $y$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის შეიძლება მივიღოთ (1.9.14) მრუდის მრავალი წერტილი. მათი შეერთებით, ჩვენ მიახლოებით ავაგებთ (1.9.14) მრუდს.

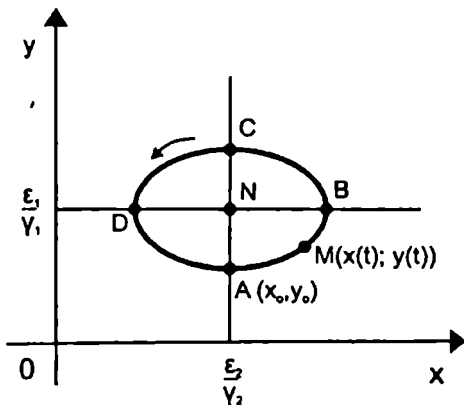
თუ ავიღებთ  $C$ -ს სხვა მნიშვნელობას, ანუ სხვა საწყის პირობებს, ჩვენ მივიღებთ სხვა ჩაკეტილ მრუდს, რომელიც არ კვეთს პირველს და მის შიგნით მდებარეობს  $N\left(\frac{\epsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}\right)$  წერტილი.

ამგვარად, (1.9.14)-ის ტრაექტორიათა ოჯახი არის ჩაკეტილ მრუდთა ოჯახი, რომელთა შიგნით  $N$  წერტილია.

აქ იხსნება ჩვენი ბიოცენოზის შესანიშნავი თავისებურება. აღმოჩნდა, რომ  $x$  და  $y$  სიდიდეების დამოკიდებულების გრაფიკი წარმოადგენს ჩაკეტილ მრუდს, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს

წერტილის  $N\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ . (ნახ.1.9.2). ეს ნიშნავს, რომ როგორც

საწყისი რიცხვითი მნიშვნელობებიდანაც არ უნდა დაგვეწყო, მაგ.:  $x_0$ ,  $y_0$ -დან, დროის ზრდასთან  $x(t)$  და  $y(t)$  ისე იცვლებიან, რომ წერტილი  $M(x(t); y(t))$  იზოძრავებს ჩაკეტილ მრუდზე იქამდე, სანამ არ დაემთხვევა საწყის წერტილს  $A(x_0; y_0)$ .



ნახ.1.9.2

დაეაკვირდეთ ამ ცვლილებებს, როგორია მათი ბიოლოგიური არსი? დავიწყოთ  $A(x_0, y_0)$  წერტილიდან. ამ წერტილში მტაცებლის  $y(t)$  რაოდენობა მინიმალურია და, ამიტომ მსხვერპლის განვითარებისათვის არსებობს ყველაზე უფრო მეტად ხელსაყრელი პირობები. ამიტომაც ბუნებრივია, რომ დროის მიმდინარეობასთან ერთად მსხვერპლის რიცხვითი რაოდენობა დაიწყებს გაზრდას, მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ იზრდება მტაცებლისათვის საკვების მარაგი, ამიტომ იზრდება მტაცებლის რაოდენობაც.

ამრიგად,  $A(x_0; y_0)$ -დან B-მდე ორივე  $x(t)$  და  $y(t)$  რაოდენობა იზრდება იქამდე, სანამ  $y(t)$ -ს მნიშვნელობა არ მიაღწევს  $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$  სიდიდეს. ამ მომენტისათვის მტაცებლების რაოდენობა იმდენად დიდი ხდება, რომ ისინი ანადგურებენ მსხვერპლს შედარებით სწრაფად და რაოდენობა  $x(t)$  იწყებს შემცირებას. C წერტილში რაოდენობა  $y(t)$



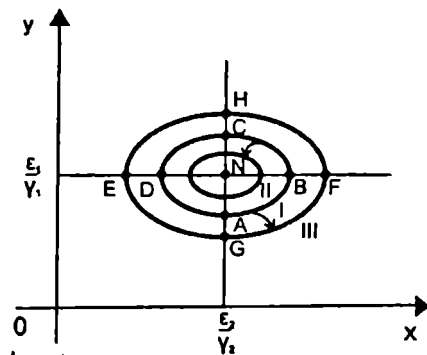
აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. მტაცებლები იმდენად ბევრია, ხოლო მსხვერპლი იმდენად მცირე, რომ მტაცებლის აღდგენის სიჩქარე ეცემა და  $y(t)$  იკლებს. კლებას აგრძელებს აგრეთვე  $x(t)$ . ეს აისახება ტრაექტორიის უბნით C-დან D-მდე. D წერტილში მტაცებლის რაოდენობა უკვე იმდენად მცირეა, რომ ისინი მსხვერპლს ანადგურებენ შედარებით მცირე სიჩქარით, ვიდრე მსხვერპლის აღდგენის სიჩქარეა, ამიტომ რაოდენობა  $x(t)$  იწყებს ზრდას. მტაცებლისათვის საკვების მარაგი კვლავ მცირეა და რაოდენობა  $y(t)$  კვლავ კლებულობს. ეს უბანია D-დან A-მდე. როცა M წერტილი მივა A მდგომარეობაში ყველაფერი თავიდან მეორდება.

ამრიგად, ჩვენს მოდელში მტაცებლის მოქმედებას არ მივყავართ მსხვერპლის სრულ განადგურებამდე და ამის შედეგად შიმშილით თვით მტაცებლის სიკვდილამდე, პირიქით, პერიოდულად იცვლის რა თავის რაოდენობას, ორივე სახეობას შეუძლია იარსებობს უსასრულოდ დიდხანს.

ეს მნიშვნელოვანი დასკვნა არ ამოწურავს ჩვენი მოდელის შინაარსს. განვიხილოთ, მაგალითად, რაზეა დამოკიდებული რაოდენობის მერყეობის ფარგლები. თუ საწყის წერტილად ავიღებთ  $A(x_0, y_0)$ -გან განსხვავებულ წერტილს, კვლავ მივიღებთ M წერტილის მოძრაობას ჩაკეტილი ტრაექტორიით, რომელიც შეიცავს მის შიგნით N წერტილს.

რაც უფრო ახლოს იქნება  $(x_0, y_0)$  წერტილი N წერტილიდან, მით "მცირე" იქნება ჩაკეტილი მრუდი. ასეთ მრუდზე რაოდენობის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები მცირედაა განსხვავებული ერთმანეთისაგან. ამბობენ, რომ  $x(t)$  და  $y(t)$  რაოდენობები განიცდიან მცირე მერყეობას წონასწორული მდგომარეობის მიმართ.

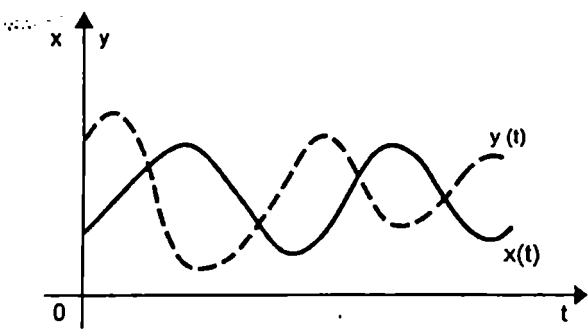
ნახ.1.9.3 ჩვენ საშუალებას გვაძლევს გავერკვეთ კიდევ ერთ საკითხში. დავეუშვათ, გვანტერესებს მსხვერპლის რიცხოზობრიობის მატება. მივიღებთ თუ არა სასურველ ნამატს მტაცებლის განადგურების შემთხვევაში? ყოველთვის არა.



ნახ.1.9.3

თუ ციკლი ძალიან დიდია, მაშინ მას პრაქტიკულად მივყავართ ნულთან რიცხოვნობასთან. მიღწევს რა მინიმალურ მნიშვნელობას, როგორც მცირეც არ უნდა იყოს იგი, რიცხობრიობა მოდელში კვლავ იწყებს გადიდებას. მაგრამ ასე ხდება მხოლოდ მოდელში. რეალური პოპულაცია, როგორც წესი, ილუპება, როცა მისი რაოდენობა ძალიან მცირეა. მტაცებლის განადგურებამ შეიძლება გამოიწვიოს მოკლე ხნით მსხვერპლის სწრაფი ზრდა (F წერტილში), რასაც შემდეგ მოჰყვება მისი თითქმის მთლიანი განადგურება (წერტილი E).

ჩაკეტილ ტრაექტორიას ფაზურ სიბრტყეზე ეწოდება ციკლი. მოცემული ციკლით (თუნდაც მიახლოებით) შეიძლება ავაგოთ მათი შესაბამისი  $x(t)$  და  $y(t)$  პერიოდული ფუნქციების გრაფიკები (ნახ.1.9.4).



ნახ.1.9.4.

ყოველივე ზემოთთქმული არ უნდა გავიგოთ ისე, რომ საჭიროა მგლებისა და ნიანგების ყველგან გამრავლება. ლაპარაკია მხოლოდ იმაზე, რომ ბუნებაში არსებობს გარკვეული მოძრავი წონასწორობა სახეობებს შორის, სადაც გარკვეულ როლს თამაშობენ მტაცებლებიც. თუ გვინდა, რომ ეს წონასწორობა დავარღვიოთ ამა თუ იმ მიზეზის გამო, უნდა მოვიქცეთ ძალიან ფრთხილად. საჭიროა ძირფესვიანად გავერკვეთ სახეობებს შორის კავშირის რთულ სისტემაში, რომ შეძლებისდაგვარად ზუსტად განვსაზღვროთ ჩვენი ჩარევის შედეგი.

ცხადია, რომ ჩვენ მიერ მოყვანილი მათემატიკური მოდელი აღწერს ორი პოპულაციის ურთიერთქმედების მექანიზმს გარკვეულ, საკმარისად მკაცრი შეზღუდვების პირობებში. უფრო ზუსტი მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად გათვალისწინებულ უნდა იქნეს მრავალი სხვა ფაქტორი (მაგ. პოპულაციის ინდივიდთა ასაკი, გამრავლების სეზონურობა, ის რომ მტაცებელი ყოველი შეხვედრისას ვერ ახერხებს მსხვერპლის დაჭერას და ა.შ.) ცხადია, ამ ფაქტორების გათვალისწინება საკმაოდ გაართულებს მათემატიკურ მოდელს, მაგრამ ამის საფასურად იგი უფრო კარგად აღწერს რეალურ სიტუაციას.

[95-97] ნაშრომებში განხილულია მათემატიკური მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს როგორც მსხვერპლის, ასევე მტაცებლის გამრავლების სეზონურობას, აგრეთვე მათი შეხვედრების დამოკიდებულებას დროზე (წლის სეზონურობა).

მონაცემები მიღებულია ლაგოდეხის ნაკრძალის მაგალითზე.

კომის ამოცანა ცვლადკოეფიციენტებიანი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის ამოხსნილია მე-4 რიგის სიზუსტით რუნგე-კუტას რიცხვითი მეთოდით [16].

პროგრამა დაწერილია Matlab გარემოში.

საძებნი ფუნქციებისათვის (მტაცებლისა და მსხვერპლის პოპულაციათა რაოდენობები დროის მიხედვით) მიღებულია შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობები.

დადგენილია მსხვერპლისა და მტაცებლის პოპულაციათა თანაფარდობის ზედა საზღვარი, რომლიდანაც იწყება გასვლა "გაქრობის" რეჟიმზე და შესაბამისად ქვედა საზღვარი პოპულაციათა "არგაქრობის" ბუნებრივი რეჟიმისა. ნაპოვნია ამონახსნთა პერიოდები.

შენიშვნა: განხილული ამოცანა მთლიანად დასმულად ითვლება, თუ ცნობილია ე.წ. საწყისი პირობები (1.9.11), სადაც  $x_0$

და  $y_0$  მოცემული დადებითი რიცხვებია. (1.9.10), (1.9.11) წარმოადგენს კომის ამოცანას პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის. არ არსებობს ამ ამოცანის ამონახსნი ანალიზური წარმოდგენა. ამ ამოცანის ამონახსნი შეიძლება მიღებულ იქნეს მხოლოდ რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით (მაგ., ეილერის მეთოდის საშუალებით).

### 1.9.3. "მტაცებელი-მსხვერპლის" მოდელი შიგასასაქონლათა კონაუმრენციის ბათვალისწინებით

განვიხილოთ მესამე ამოცანის ლოტიკი-ვოლტერას მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს კონკურენციას სახეობათა შიგნით [23, 33, 34, 55, 74]. მაშინ (1.9.10) სისტემის ნაცვლად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy - \delta_1 x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy - \delta_2 y^2. \end{cases} \quad (1.9.15)$$

$$\varepsilon_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_2, \gamma_2, \delta_2 > 0.$$

გამოვიკვლიოთ მდგრადობაზე ამ სისტემის სტაციონარული ამონახსნები  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ .

$$\begin{cases} x(\varepsilon_1 - \gamma_1 y - \delta_1 x) = 0, \\ y(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x - \delta_2 y) = 0. \end{cases}$$

ჩვენ გვინტერესებს ის სტაციონარული ამონახსნი, რომლის ორივე კოორდინატა  $xOy$  ფაზურ სიბრტყეზე განსხვავებულია ნულისაგან (არ გაქრობის რეჟიმი).

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \gamma_1 y - \delta_1 x = 0, \\ -\varepsilon_2 + \gamma_2 x - \delta_2 y = 0. \end{cases} \quad (1.9.16)$$

$$\begin{cases} \delta_1 x + \gamma_1 y = \varepsilon_1, \\ \gamma_2 x - \delta_2 y = \varepsilon_2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\delta_2 \end{vmatrix} = -(\delta_1 \delta_2 + \gamma_1 \gamma_2).$$

კრამერის ფორმულებით მივიღებთ

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_1 \\ \varepsilon_2 & -\delta_2 \end{vmatrix}}{-(\delta_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2)} = \frac{\varepsilon_1\delta_2 + \gamma_1\varepsilon_2}{\delta_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2};$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}}{-(\delta_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2)} = \frac{\varepsilon_2\delta_1 - \gamma_2\varepsilon_1}{-(\delta_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2)} = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \delta_1\varepsilon_2}{\delta_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2}.$$

სტაციონარული ამონახსნი რომ მდებარეობდეს პირველ კვადრანტში, ამისათვის უნდა დავუშვათ, რომ  $\varepsilon_1\gamma_2 - \delta_1\varepsilon_2 > 0$ . სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენ ვიხილავთ მხოლოდ ისეთ პოპულაციებს, რომელთათვის  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > \frac{\delta_1}{\gamma_2}$ . გამოვიკვლიოთ  $(x_0, y_0)$

ამონახსნი მდგრადობაზე. ამისათვის ამ წერტილში ცვლადთა გარდაქმნის მეშვეობით გადავიტანოთ კოორდინატთა ცენტრი.

$$u(t) = x(t) - x_0, \quad v(t) = y(t) - y_0.$$

აქედან

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0.$$

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ (1.9.15) სისტემაში.

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon_1(u + x_0) - \gamma_1(u + x_0)(v + y_0) - \delta_1(u + x_0)^2,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\varepsilon_2(v + y_0) + \gamma_2(u + x_0)(v + y_0) - \delta_2(v + y_0)^2.$$

რადგანაც  $(x_0, y_0)$  არის (1.9.16) სისტემის ამონახსნი, ვაკეთებთ შემდეგ გარდაქმნებს.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \varepsilon_1 u + \varepsilon_1 x_0 - \gamma_1 u v - \gamma_1 v x_0 - \gamma_1 u y_0 - \gamma_1 x_0 y_0 - \delta_1 u^2 - 2\delta_1 u x_0 - \delta_1 x_0^2, \\ \frac{dv}{dt} = -\varepsilon_2 v - \varepsilon_2 y_0 + \gamma_2 u v + \gamma_2 u y_0 + \gamma_2 v x_0 + \gamma_2 x_0 y_0 - \delta_2 v^2 - 2\delta_2 v y_0 - \delta_2 y_0^2. \end{cases}$$

აღნიშნულის გამო ამ სისტემის განტოლებაში შემაჯავალი შემდეგი წევრების ჯამი ნულის ტოლი იქნება:

$$\varepsilon_1 x_0 - \gamma_1 x_0 y_0 - \delta_1 x_0^2 = x_0(\varepsilon_1 - \gamma_1 y_0 - \delta_1 x_0) = 0,$$

$$-\varepsilon_2 y_0 + \gamma_2 x_0 y_0 - \delta_2 y_0^2 = y_0(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x_0 - \delta_2 y_0) = 0.$$

ამიტომ ვღებულობთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \varepsilon_1 u - \gamma_1 uv - \gamma_1 vx_0 - \gamma_1 uy_0 - \delta_1 u^2 - 2\delta_1 ux_0, \\ \frac{dv}{dt} = -\varepsilon_2 v + \gamma_2 uv + \gamma_2 uy_0 + \gamma_2 vx_0 - \delta_2 v^2 - 2\delta_2 vy_0. \end{cases}$$

პირველი განტოლების მარჯვენა მხარე გარდაკეპნათ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1 - \gamma_1 y_0 - 2\delta_1 x_0) - \gamma_1 uv - \gamma_1 vx_0 - \delta_1 u^2 = \\ = u(-\delta_1 x_0) - \gamma_1 uv - \gamma_1 vx_0 - \delta_1 u^2. \end{aligned}$$

ანალოგიური გარდაკეპნა ვაწარმოთ მეორე განტოლებაშიც, შედეგად სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\delta_1 x_0 u - \gamma_1 vx_0 - \gamma_1 uv - \delta_1 u^2, \\ \frac{dv}{dt} = \gamma_2 y_0 u - \delta_2 y_0 v + \gamma_2 uv - \delta_2 v^2. \end{cases}$$

გამოვიკვლიოთ ამ სისტემის ტრივიალური ამონახსნი  $(0,0)$  მდგრადობაზე. ამისათვის აუცილებელია გამოვიკვლიოთ პირველი მიახლოების მატრიცის (წრფივი) ფუნქციის ნიშნები. ამ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$A = \begin{vmatrix} -\delta_1 x_0 & -\gamma_1 x_0 \\ \gamma_2 y_0 & -\delta_2 y_0 \end{vmatrix}.$$

მისი მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= 0, \\ \begin{vmatrix} -\delta_1 x_0 - \lambda & -\gamma_1 x_0 \\ \gamma_2 y_0 & -\delta_2 y_0 - \lambda \end{vmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

ანუ

$$(\delta_1 x_0 + \lambda)(\delta_2 y_0 + \lambda) + \gamma_1 \gamma_2 x_0 y_0 = 0,$$

$$\lambda^2 + \lambda(\delta_1 x_0 + \delta_2 y_0) + x_0 y_0 (\delta_1 \delta_2 + \gamma_1 \gamma_2) = 0.$$

ეს განტოლება კვადრატულია  $\lambda$  უცნობის მიმართ. აქ მეორე კოეფიციენტი და თავისუფალი წევრი დადებითია:

$$\begin{cases} \delta_1 x_0 + y_0 \delta_2 > 0, \\ x_0 y_0 (\delta_1 \delta_2 + \gamma_1 \gamma_2) > 0. \end{cases}$$

რადგანაც, ვიეტის თეორიის თანახმად

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -(\delta_1 x_0 + y_0 \delta_2) < 0, \\ \lambda_1 \lambda_2 = (\delta_1 \delta_2 + \gamma_1 \gamma_2) x_0 y_0 > 0. \end{cases}$$

ამრიგად, თუ ფესვები კომპლექსურია, მაშინ

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{(\delta_1 x_0 + y_0 \delta_2)}{2} + i\lambda^*, \\ \lambda_2 = -\frac{(\delta_1 x_0 + y_0 \delta_2)}{2} - i\lambda^*. \end{cases}$$

ანუ  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ .

ამრიგად, თუ ფესვები კომპლექსურია, მაშინ მათი ნამდვილი ნაწილი უარყოფითია.

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = -\frac{1}{2}(x_0 \delta_1 + y_0 \delta_2).$$

თუ ფესვები ნამდვილია, მაშინ ორივე უარყოფითია.  $\lambda$ -ს არც ერთი არაუარყოფითი მნიშვნელობისათვის განტოლების მარცხენა მხარე ნულის ტოლი არ ხდება. ამგვარად,  $A$  მატრიცის მახასიათებელი განტოლების ფესვების ნამდვილი ნაწილები ნებისმიერ შემთხვევაში უარყოფითია. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენი სისტემის ტრივიალური ამონახსნი ასიმპტოტურად მდგრადია, საიდანაც გამომდინარეობს (1.9.15) სისტემის  $(x_0, y_0)$  სტაციონარული ამონახსნის ასიმპტოტური მდგრადობა.

#### 1.9.4. ავოტანა ინსტაბილურობით მფარვის მოწყობის შესახებ

##### 1. ავოტანა რეალური ცხოვრებიდან.

დელამიწის დიდი ნაწილი იწამლება ინსექტიციდებით. ისინი იხმარება რაიმე ტიპის მწერების მოსასპობად, რომელიც სხვა მწერებისათვის (მტაცებელი) წარმოადგენს საკვებს [14, 15].

ვთქვათ, ინსექტიციდები სპობენ ორივე სახეობის (მტაცებელი – მსხვერპლი) მწერებს გარკვეული რაოდენობით. ავოტანა მდგომარეობს იმაში, რომ გავარკვიოთ როგორ ეკოლოგიურ ცვლილებამდე მიგვიყვანს ეს?

##### 2. მათემატიკური მოდელი.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$H(t)$  - მსხვერპლის პოპულაციის რაოდენობა დროის  $t$  მომენტში;

$P(t)$  - მტაცებლის პოპულაციის რაოდენობა იმავე დროს.

$\Delta t$  დროში ინდივიდთა ნაწილმა შეიძლება წარმოქმნან შთაბოძავლობა, ხოლო ნაწილი დაიღუპოს. ამგვარად,  $\Delta H = C - T$ , სადაც  $C$  დაბადებულთა რიცხვია  $\Delta t$  დროში, ხოლო  $T$  კი იმავე დროში დაღუპულთა რიცხვი. დაბადებულთა რიცხვი დამოკიდებულია  $\Delta t$ -ზე და მშობელთა რაოდენობაზე, ე.ი.

$$C = k H(t) \Delta t, \quad k = \text{const.}$$

დაღუპულთა რაოდენობა დამოკიდებულია  $\Delta t$  შუალედის სიდიდეზე, მსხვერპლის რაოდენობაზე და მტაცებლების რაოდენობაზე.

$$T = l \cdot H(t) P(t) \Delta t, \quad l = \text{const.}$$

შესაბამისად,  $\Delta H = kH(t)\Delta t - l H(t) P(t) \Delta t$ . გავყოთ ორივე მხარე  $\Delta t$ -ზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , მივიღებთ

$$\frac{dH}{dt} = kH(t) - lH(t)P(t), \quad (1.9.17)$$

$\frac{dH}{dt}$  არის მსხვერპლის პოპულაციის ცვლილების სიჩქარე დროის  $t$  მომენტში. ანალოგიური მსჯელობით მტაცებლების პოპულაციისათვის კი გვექნება

$$\frac{dP}{dt} = mP(t)H(t) - nP(t), \quad m = \text{const}; n = \text{const.}$$

რადგანაც ორივე პოპულაცია არსებობს ერთდროულად, ამიტომ გვაქვს სისტემა

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = kH(t) - lH(t)P(t), \\ \frac{dP}{dt} = mP(t)H(t) - nP(t). \end{cases} \quad (1.9.18)$$

ორი პოპულაცია არსებობს ბუნებრივ წონასწორობაში, თუ  $\frac{dH}{dt} = 0$  და  $\frac{dP}{dt} = 0$ . ამ შემთხვევაში (1.9.18)-დან გამომდინარეობს

$$\begin{cases} kH(t) - lH(t)P(t) = 0 \\ mP(t)H(t) - nP(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(t) = \frac{k}{l}; \\ H(t) = \frac{n}{m}. \end{cases} \quad (1.9.19)$$

მიღებულ მნიშვნელობებს ეწოდება პოპულაციის წონასწორობის მნიშვნელობები და აღინიშნება  $P_0$  და  $H_0$ .



ით. ამგვარად,  $P_0 = \frac{k}{l}$ ;  $H_0 = \frac{n}{m}$ . დავუშვათ, რომ ორი პოპულაცია არის წონასწორობაში და მათი რაოდენობები არის  $H_0$  და  $P_0$ . ახლა განვიხილოთ ფაქტორი (ინსექტიციდი), რომელიც კლავს  $h > 0$  ინდივიდს მსხვერპლის პოპულაციიდან და  $p > 0$  ინდივიდს მტაცებლის პოპულაციიდან, ამავე დროს, მთლიანად არ სპობს არც ერთ პოპულაციას. ამ ფაქტორის ზემოქმედების შემდეგ პოპულაციების რაოდენობები იქნება  $H_0 - h > 0$  (მსხვერპლი),  $P_0 - p > 0$  (მტაცებელი).

3. მათემატიკური შედეგები:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = k(H_0 - h) - l(H_0 - h)(P_0 - p), \\ \frac{dP}{dt} = m(H_0 - h)(P_0 - p) - n(P_0 - p). \end{cases} \quad (1.9.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= k(H_0 - h) - l(H_0 - h)(P_0 - p) = (H_0 - h)[k - l(P_0 - p)] = \\ &= (H_0 - h) \left[ k - l \left( \frac{k}{l} - p \right) \right] = (H_0 - h)p l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= m(H_0 - h)(P_0 - p) - n(P_0 - p) = (P_0 - p)[m(H_0 - h) - n] = \\ &= (P_0 - p) \left[ m \left( \frac{n}{m} - h \right) - n \right] = (P_0 - p)(-mh). \end{aligned}$$

რადგანაც  $H_0 - h > 0$ ,  $l, p > 0$ , ამიტომ  $\frac{dH}{dt} > 0$ ,  $P_0 - p > 0$ ,  $m > 0$ ,

$h > 0$ , ამიტომ  $\frac{dP}{dt} < 0$ .

ამგვარად, ჩვენი მათემატიკური შედეგი მდგომარეობს იმაში, რომ

$$\frac{dH}{dt} > 0, \quad \frac{dP}{dt} < 0. \quad (1.9.21)$$

4. რეალური სამყარო.

ჩვენ დავუშვიტ, რომ საწყის პირობებში მტაცებელი და მსხვერპლი იმყოფება ბუნებრივ წონასწორობაში. შემდგომ რაღაც ფაქტორმა ნაწილობრივ გაანადგურა ორივე პოპულაცია. ამ ფაქტორის ზემოქმედების შემდეგ თურმე  $\frac{dH}{dt} > 0$  და  $\frac{dP}{dt} < 0$ , ე.ი.

მსხვერპლის პოპულაცია იზრდება, ხოლო მტაცებლისა კი კლებულობს, მაგრამ, ამ დროს შეიქმნა ეკოლოგიური პრობლემა: მტაცებლის პოპულაცია, რომელიც კლებულობს, შეიძლება გახდეს იმდენად მცირე, რომ მას შეიძლება შეექმნას სრული განადგურების საშიშროება სხვა მიზეზებით: წყალდიდობა, გვალვა და სხვა. ეს გვიჩვენებს, თუ რამდენად საშიშია ჩვენთვის ბუნების კანონებში ჩარევა.

### *საგარეოშოვები*

*ამოცანა 1.* 1884 წელს ფლორიდაში აფრიკიდან შემთხვევით ჩამოტანილი წყლის მცენარე, გიაცინტი, დღეს მრავლდება დიდი სიჩქარით, ფარავს რა მთლიან ხალიჩად მტკნარწყლიან მდინარეებსა და ფლორიდის ტბებს. ამ მცენარის საფარი არის ძირითადი შეფერხება გემებისათვის. წყლის გიაცინტი ძირავეს წყალმცენარეებს, ჩვეულებრივ საკვებს მოკლებული ბალახის მჭამელები და მტაცებელი ცხოველები იღუპებიან გიაცინტით ზედმეტად დაფარულ ტბორში. წერილი და მტაცებელი თევზების რაოდენობა მკვეთრად შემცირებულია. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ დადგინდეს, როგორ ეკოლოგიურ ცვლილებებთან მიგვიყვანს ეს.

*შენიშვნა.* მოცემულ ამოცანაში განვიხილოთ ორი ტიპის თევზების პოპულაცია - წერილი და მტაცებელი, და ცხოველთა ორი პოპულაცია - ბალახისმჭამელები და მტაცებლები.

*ამოცანა 2.* ნავახოს ტომის ექიმბაშები ამტკიცებენ, რომ ხანტავირუსის ეპიდემიები იფეთქებდნენ იმ წლებში, როდესაც დაბალი სიმაღლის ნაძვი ძალიან დიდხანს და ბევრ ნაყოფს იძლეოდა, ამ ხის დიდი გირჩები, რომლის ჭამაც შეიძლება და რომლებსაც ხშირად უწოდებენ ნაძვის თხილს, ამ შემთხვევაში იზრდებოდნენ მთელი წელი და არა რამდენიმე თვე, როგორც ჩვეულებრივ ხდება. თხილის სიუხვესთან დაკავშირებულია თეთრფეხებიანი ზაზუნების პოპულაციის გაზრდა, რომლებიც თხილით იკვებებიან და არიან ვირუსის მთავარი გადამტანები. XX ს.-ის 90-იან წლებში ამ ვირუსის მსხვერპლი გახდა აშშ-ში ალბუკერკის მცხოვრებლები. შეადგინეთ ამ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი, რომ დავერწმუნდეთ ისტორიული ტრადიციის სისწორეში, რასაც ამბობენ ექიმბაშები.

*შენიშვნა.* განვიხილოთ ნაძვის თხილისა და თეთრფეხებიანი ზაზუნების პოპულაციები და სოფლის მოსახლეობის პოპულაცია.

§1.10. არასასურველ სახეობასთან ბრძოლის  
კურასაოს მოდელი

ბიოლოგიაში არასასურველ ბიოლოგიურ სახეობასთან (პარაზიტი) ბრძოლის სხვადასხვა მეთოდი არსებობს. ერთი მათგანი ცნობილია "ბრძოლის კურასაოს მეთოდი"-ს სახელწოდებით [5, 34]. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს:

რაღაც არეალზე მცხოვრებ სახეობათა პოპულაციაში (ველი), რომლის განადგურებაც განიზრახეს, რეგულარულად შეჰყავთ სტერილური ინდივიდი (შთამომავლობის უნარის გარეშე). ეს სტერილური ინდივიდები არ მონაწილეობენ კვლავწარმოების პროცესში, მაგრამ სხვა დანარჩენებთან ერთად მონაწილეობენ შიდასახეობრივ ბრძოლაში, რითაც ამცირებენ პარაზიტი პოპულაციის ბუნებრივი ზრდის სიჩქარეს. იგივე ხდება ეკონომიკასა და პოლიტიკაშიც.

განვიხილოთ შესაბამისი მოდელი:

ვთქვათ,  $N_1(t)$  - ნორმალური (არასტერილური) ინდივიდების რიცხვია,  $M(t)$  - სიჩქარეა, რომლითაც ამ პოპულაციაში შეჰყავთ სტერილური ინდივიდები, რომელთა რაოდენობა  $N_2(t)$ -ს ტოლია. ამოცანა მდგომარეობს შეძლებისდაგვარად  $M(t)$ -ს იმ მინიმალური სიჩქარის განსაზღვრაში, რომლის დროსაც  $N_1(t)$  პოპულაცია ქრება ( $N_1(t) \rightarrow 0$ ).

განვიხილოთ კურასაოს მეთოდის შემდეგი დინამიური მოდელი

$$\begin{cases} \frac{1}{N_1(t)} \cdot \frac{dN_1(t)}{dt} = a - m(gN_1(t) + hN_2(t)), \\ \frac{1}{N_2(t)} \cdot \frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{M(t)}{N_2(t)} - m(gN_1(t) + hN_2(t)). \end{cases} \quad (1.10.1)$$

$m$  - პოპულაციის მგრძობიარობის კოეფიციენტია საკვების უკმარისობაზე,  $a$  - ჭარბი საკვების პირობებში პოპულაციის რაოდენობის ბუნებრივი ზრდის კოეფიციენტია,  $g$  და  $h$  დადებითი კონსტანტებია (პოპულაციის გაუმადლობის კოეფიციენტი).

დაეუშვათ, რომ სტერილური ინდივიდები შეჰყავთ პოპულაციის  $N_2(t)$  მოცულობის პროპორციულად. ე.ი.

$$M(t) = k \cdot N_2(t). \quad (1.10.2)$$

ასევე თუ ავიღებთ, კერძო შემთხვევას

$$g = h = I = \text{const}, \quad (1.10.3)$$

მაშინ (110.1)-დან მივიღებთ

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1 [a - mI(N_1 + N_2)], \\ \dot{N}_2 = N_2 [k - mI(N_1 + N_2)], \end{cases} \quad (1.10.4)$$

$$\frac{\dot{N}_1}{N_1} - \frac{\dot{N}_2}{N_2} = a - k,$$

$$\left( \ln \frac{N_1}{N_2} \cdot e^{(k-a)t} \right)' = 0,$$

$$\frac{N_1}{N_2} e^{(k-a)t} = \text{const},$$

$$N_1(t) = c \cdot N_2(t) \cdot e^{(a-k)t}, \quad (1.10.5)$$

$$N_1(t) = \frac{N_1(0)}{N_2(0)} N_2(t) \cdot e^{(a-k)t}. \quad (1.10.6)$$

(1.10.6) გვიჩვენებს:

ა) თუ  $a > k$ , მაშინ ნორმალური პოპულაცია არ კვდება მაშინაც კი, როცა  $N_2(0)$  ძალიან დიდია. უფრო მეტიც, ამ შემთხვევაში სტერილური ინდივიდები აღრე თუ გვიან კვდებიან

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_1(0)}{N_2(0)} N_2(t) e^{(a-k)t} = \infty,$$

რადგან  $\max_{t \in [0, T]} [N_2(t)] < \infty$ ;

ბ) თუ  $a < k$ , მაშინ პარაზიტი პოპულაცია კვდება, ხოლო სტერილური ინდივიდების პოპულაცია იზრდება და მისი რაოდენობა აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ სტერილურ ინდივიდთა პოპულაციაც იწყებს კვლამს.

$$\max N_2(t) = \frac{k}{mI},$$

$$\dot{N}_2(t) = N_2(t) \left[ k - N_2 mI \left( 1 + \frac{N_1(0)}{N_2(0)} e^{(a-k)t} \right) \right],$$

როცა  $a < k$ .

$$\dot{N}_2(t) = 0, \quad k - N_2 mI \left( 1 + \frac{N_1(0)}{N_2(0)} e^{(a-k)t} \right) = 0,$$

$$t \rightarrow \infty, N_2(t) \rightarrow \frac{k}{mI}.$$

კურასაოს მეთოდის ერთ-ერთი სტრატეგიაა:

(1.10.2)-ის ნაცვლად მისი მაქსიმალური სტაბილური, დროში უცვლელი ამონახსნის გამოყენება

$$M(t) = M_0 = k \cdot N_{2\max} = k \cdot \frac{k}{mI} = \frac{k^2}{mI}.$$

ამ შემთხვევაში მიღებულია, რომ  $a$  და  $m$  პარამეტრები ცნობილია, ხოლო  $k$  კოეფიციენტისათვის სრულდება პირობა  $k > a$ , რის შედეგადაც ნორმალური (პარაზიტი) პოპულაციის რაოდენობა  $N_1(t) \rightarrow 0$ .

მეცნიერებაში ანალოგიურ ამოცანას ვაწყდებით, მაგალითად, რომელიმე შემოქმედებითი კოლექტივის სამეცნიერო პოტენციალის ანალიზის დროს, რომლის შევსება ხდება არაკვალიფიცირებული კადრებით.

ეკონომიკური ანალოგიის სახით გამოდგება უვარგისი დანადგარების შექმნა.

ანალოგიური ამოცანა შეიძლება ავავთ რაიმე საწარმოო ჯგუფების კონკურენციის ანალიზის დროს, საქონლის ახალ სახეობათა წარმოების ათვისებისას, როდესაც, მაგალითად, ერთ-ერთი მოწინააღმდეგე "შეიტყუებს" თავის კონკურენტს კონსტრუქციული დამუშავების ანალიზის ნაკლებად პერსპექტიულ გზაზე, რომელიც მიიყვანს მას არაკონკურენტუნარიანი პროდუქციის შექმნამდე.

*“მათემატიკა არის სამეცნიერო შემოქმედებისა და ბუნების  
საიდუმლოებებში შეღწევის უმძლავრესი იარაღი”  
ილია ვეკუა*

## თ ა ვ ი II

### მათემატიკური მოდელირება მემლიცინაში

მრავალი საუკუნის მანძილზე ეპიდემიების შედეგად დაღუპულ ადამიანთა რიცხვი იზომება ასტრონომიული ციფრებით. ძალიან ხშირად, ცალკეულ ქვეყნებში, იღუპებოდა მოსახლეობის მნიშვნელოვანი ნაწილი. მაგალითად, XIV საუკუნეში “შავმა ჭირმა” მოსო ევროპის მოსახლეობის 25%. მიუხედავად იმისა, რომ თანამედროვე ქვეყნებში არ ხდება ასეთი მასშტაბის უბედურებები, აფრიკისა და აღმოსავლეთის ქვეყნებში ჯერ კიდევ ხშირად იფეთქებს ხოლმე მასობრივი ეპიდემიები. ეპიდემიურ დაავადებებზე საბოლოო გამარჯვება სამედიცინო მეცნიერებებისათვის ყოველთვის ერთ-ერთი უპირველესი ამოცანა იყო. ამჟამად შექმნილია მთელი რიგი პრეპარატები, რომლებიც განკურნავენ ბევრ ავადმყოფობას, თუმცა დიდ ეფექტს იძლევა გამაფრთხილებელი ზომებიც. მაგალითად, დიდი მნიშვნელობა აქვს პროფილაქტიკის მეთოდებს – წყლის სისუფთავის დაცვა, კარანტინის უზრუნველყოფა, აცრების ჩატარება და სხვა. მაგრამ ეპიდემიის წინააღმდეგ ბრძოლისათვის ეს ზომები საკმარისი არ არის. არსებობს სამედიცინო პრობლემები, რომლებიც დაკავშირებულია დიაგნოსტიკასთან და პროგნოზირებასთან. იმისათვის, რომ ჯანდაცვის ორგანოებმა შეძლონ ეპიდემიის წინააღმდეგ საბრძოლველად უფრო ეფექტური ზომების მიღება, აუცილებელია იცოდნენ სხვადასხვა მეთოდის შედარებითი მნიშვნელობის რაოდენობრივი შეფასება – კარანტინის შემოტანა, ვაქცინაცია, კონტაქტების დადგენა და ა.შ. ამ პრობლემის ყველა ასპექტის მკაცრი შესწავლა შეიძლება მხოლოდ სწორად ფორმულირებული მათემატიკური მოდელის საფუძველზე დამოუკიდებლად იმისა, საუბარი მიდის კლინიკურ პროგნოზზე, მკურნალობის სხვადასხვა მეთოდის გამოცდაზე, ღრმა ბიოლოგიურ

კვლევებზე, თუ ჯანდაცვის ორგანოების მიერ გატარებულ ღონისძიებებზე.

მხოლოდ XX საუკუნეში შეიქმნა ინფექციურ დაავადებათა მათემატიკური მოდელები, რომელთა დამუშავების დროს შემოღებული იყო გარკვეული დაშვებები ეპიდემიის გავრცელების მექანიზმებზე. ამჟამად ძალიან მნიშვნელოვანი წარმატებებია მიღწეული ამ პრობლემის გადაჭრის საქმეში. ამ თავში მოცემულია ეპიდემიოლოგიის სხვადასხვა ტიპის მათემატიკური მოდელები, იმუნოლოგიის პროცესების მათემატიკური მოდელირება, ასევე შაქრის დიაბეტისა და გულის ენერგეტიკული მოდელები.

## §2.1. ბეილის არაწრფივი მაკროეპიდემიოლოგიური მოდელი

### 2.1.1. მაკროეპიდემიის უმარტივესი მათემატიკური მოდელი

დავუშვათ, რომ განსახილველ ავადმყოფობას აქვს ხანგრძლივი პერიოდი, ასე რომ, ინფექციის გადაცემის პროცესი ბევრად უფრო სწრაფია, ვიდრე, ავადმყოფობის მიმდინარეობა. ჩვენ გვინტერესებს ინფექციის გადაცემის პროცესი და ვუშვებთ, რომ დაავადებული ინდივიდები არ გადიან კოლონიიდან და ინფექციას გადასცემენ ჯანმრთელ ინდივიდებს [14, 23, 45].

ვთქვათ,  $a$  არის ინფიცირებულთა რაოდენობა, ხოლო  $n$  – არაინფიცირებულთა რაოდენობა საწყისი მომენტისათვის.  $x=x(t)$  არის არაინფიცირებულთა რაოდენობა  $t$  მომენტისათვის, ხოლო  $y=y(t)$  ინფიცირებულთა რაოდენობა  $t$  მომენტისათვის. რადგანაც, აღნიშნულ მოდელში ადგილი არა აქვს სიკვდილიანობას, დროის ნებისმიერი  $t$  მომენტისათვის  $0 \leq x \leq n$  შუალედიდან ადგილი აქვს ტოლობას

$$x(t) + y(t) = n + a, \quad (2.1.1)$$

რადგანაც ინფექცია გადაეცემა ინფიცირებულთა და არაინფიცირებულთა შეხვედრის დროს, ამიტომ არაინფიცირებულთა რაოდენობა კლებულობს შეხვედრათა რაოდენობის პროპორციულად, ე.ი.  $xy$  ნამრავლის პროპორციულად.  $t$ -დან  $t + \Delta t$ -მდე დროის შუალედისათვის გვექნება:

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) = -\beta x(t)y(t)\Delta t,$$

\*  $[0; T]$  შუალედი უნდა იყოს ერთი თაობის სიცოცხლის ხანგრძლივობაზე ნაკლები

თუ ამ ტოლობას გავყოფთ  $\Delta t$ -ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow \infty$ , მივიღებთ არაინფიცირებულთა რაოდენობის შემცირების სიჩქარეს:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \quad (2.1.2)$$

სადაც  $\beta$  - არის პროპორციულობის კოეფიციენტი. განვსაზღვროთ (2.1.1)-დან  $y$ -ის მნიშვნელობა და ჩავსვათ (2.1.2)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta x(n+a-x), \\ x(0) = n. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

განვაცალკევოთ ცვლადები

$$\frac{dx}{x(n+a-x)} = -\beta dt,$$

საიდანაც

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx}{n-x+a} = -\beta(n+a)dt.$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln x - \ln(n-x+a) = -\beta(n+a)t + \ln C,$$

ხოლო პოტენციურებით ვღებულობთ:

$$\frac{x}{n-x+a} = C \cdot e^{-\beta(n+a)t}. \quad (2.1.4)$$

$C$ -ს განსაზღვრავად გამოვიყენოთ საწყისი პირობა (2.1.3).

ვღებულობთ  $C = \frac{n}{a}$ , ე.ი.  $\frac{x}{n-x+a} = \frac{n}{a} \cdot e^{-\beta(n+a)t}$ .

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან განვსაზღვროთ  $x$ , მივიღებთ (2.1.3) კოშის ამოცანის ერთადერთ ამონახსნს:

$$x = \frac{n(n+a)}{n+a \cdot e^{\beta(n+a)t}}. \quad (2.1.5)$$

(2.1.5) გვაძლევს  $x(t)$ -ის კლების კანონს დროის ცვლილებასთან დაკავშირებით.

ანალოგიურად შეგვიძლია (2.1.1)-დან მივიღოთ ინფიცირებულთა რაოდენობის ცვლილების კანონი.

$$y(t) = \frac{n+a}{1 + \frac{n}{a} e^{-\beta(n+a)t}}. \quad (2.1.6)$$



## 2.1.2. მაიღეპიის მონდელი მკურნალობის მათჰალისჟინმბიტი

ღაკუშჰათ, რომ აჰადმყოფობის მიმდინარეობა არ არის ხანგრძლივი და გამოჯანმრთელებული ინდივიდები იძენენ იმუნიტეტს მოცემული აჰადმყოფობის მიმართ [23, 34, 45]. ვთქჰათ,  $n$  და  $a$  შესაბამისად არაინფიცირებულთა და ინფიცირებულთა რაოდენობაა საწყის მომენტში,  $x(t)$  და  $y(t)$  - არაინფიცირებულთა და ინფიცირებულთა რაოდენობა  $t$  მომენტში, ხოლო  $z(t)$  - დროის  $t$  მომენტისათვის გამოჯანმრთელებულთა რაოდენობა. ამ მონდელშიც ადგილი არა აქჰს სიკვდილიანობას. მაშინ ჩვენთვის საინტერესო  $0 \leq t \leq T$  დროის შუალედის ყველა მომენტისათვის ადგილი ექნება ტოლობას

$$x(t) + y(t) + z(t) = n + a. \quad (2.1.7)$$

მეორე მხრივ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  ფუნქციებისათვის შეგვიძლია ღაკწეროთ სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y \end{cases} \quad (2.1.8)$$

სადაც  $\beta$  - ინფექციის გადაცემის კოეფიციენტი, ხოლო  $\gamma$  - გამოჯანმრთელების კოეფიციენტი.

(2.1.8) სისტემის განტოლება მაჩვენებელია იმისა, რომ არაინფიცირებულთა რაოდენობა კლებადია და მისი ცვლილების სინქარე უარყოფითია და პროპორციულია  $xy$  ნამრავლის. მეორე განტოლება  $y(t)$  რაოდენობის ცვლილების მახასიათებელია და ის შედგება ( $\beta xy$ ) ნამატისა და ( $-\gamma y$ ) დანაკარგის ჯამისაგან. შემცირება ( $-\gamma y$ ) ზდება იმის გამო, რომ აჰადმყოფთა ნაწილი გამოჯანმრთელდა და იძენს იმუნიტეტს. ეს ნაწილი არის  $z(t)$  ფუნქციის ნაზრდი, რაც გამოისახება მესამე განტოლებით.

ჩვენი ღაშვებებიდან გამომდინარეობს (2.1.8) სისტემისათვის საწყისი პირობები:

$$x(0)=n, y(0)=a, z(0)=0. \quad (2.1.9)$$

(2.1.8) სისტემას (2.1.9) პირობებით აქჰს ერთადერთი ამონახსნი, რადგანაც სისტემის მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს არსებობისა და

ერთადერთობის თეორემის პირობებს. ვიპოვოთ ამონახსნი, ამისათვის მე-2 განტოლება გავყოთ პირველზე, მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{1}{x}, \quad (2.1.10)$$

რომლის ინტეგრებითა და (2.1.9) საწყისი პირობების გამოყენებით ვპოულობთ სისტემის პირველ ინტეგრალს

$$y + x - \frac{\gamma}{\beta} \ln x = a + n - \frac{\gamma}{\beta} \ln n. \quad (2.1.11)$$

მეორე ინტეგრალს მივიღებთ, თუ (2.1.8) სისტემის სამივე განტოლებას შევკრებთ წევრ-წევრად და გაინტეგრებით, მივიღებთ:  $x + y + z = C$ , ამ უკანასკნელი ტოლობიდან კი საწყისი პირობების გამოყენებით, ვღებულობთ (2.1.7) ტოლობას:

$$x + y + z = n + a.$$

ახლა გვაქვს (2.1.7) და (2.1.11) ორი ინტეგრალი. ჩვენ შეგვიძლია სისტემის რიგი ორით დაწვიოთ: (2.1.7)-ს გამოვაკლოთ (2.1.11), მივიღებთ

$$z + \frac{\gamma}{\beta} \ln x = \frac{\gamma}{\beta} \ln n,$$

აქედან კი

$$\frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{x}{n} = -z.$$

ამ უკანასკნელი განტოლებიდან ვღებულობთ, რომ

$$x(t) = n \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} z(t)}. \quad (2.1.12)$$

$x(t)$ -ს გამოსახულება და (2.1.7)-დან  $y(t)$ -ის გამოსახულება ( $y = n + a - x - z$ ) ჩავსვათ (2.1.8) სისტემის მე-3 განტოლებაში, მაშინ ჩვენ სისტემას დაიყვანთ  $z(t)$  ერთი ცვლადის მიმართ პირველი რიგის ერთუცნობიან განტოლებად, ანუ ვღებულობთ კომის ამოცანას:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma \left[ n + a - z - n \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} z(t)} \right], \quad z(0) = 0. \quad (2.1.13)$$

გავიგებთ რა აქედან  $z(t)$ -ს რიცხვითი მეთოდების მეშვეობით [16], ჩვენ შემდგომ (2.1.7) და (2.1.12)-დან გავიგებთ ამონახსნის დანარჩენ ორ კომპონენტს:  $x(t)$  და  $y(t)$ .

2.1.3. მაქროეკონომიკის მოდელი ბუნებრივი ბაზრებისა და ინფორმაციის ლეიტორების გავლენის ფონზე

წინა პუნქტში განხილული მოდელი შეიძლება გავართულოთ. მაგალითად, გავითვალისწინოთ ბუნებრივი სიკვდილიანობა ან შობადობა, თუ ავადმყოფობის მიმდინარეობის პერიოდი თანაზომადია ერთი თაობის ცხოვრების პერიოდთან [23, 34, 66]. მაშინ (2.1.8) განტოლებების მარჯვნივ გაჩნდება  $\varepsilon_1 x$ ,  $\varepsilon_2 y$ ,  $\varepsilon_3 z$  სახის შესაყრებები, ე.ი. (2.1.8) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy + \varepsilon_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y + \varepsilon_2 y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y + \varepsilon_3 z. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

თუ ავადმყოფ ინდივიდებს არ გააჩნიათ გამრავლების უნარი, მაშინ ( $\varepsilon_2 = 0$ ) მეორე განტოლებაში შესაბამისი შესაყრები ( $\varepsilon_2 y$ ) არ იქნება. შეიძლება აგრეთვე გავითვალისწინოთ სიკვდილიანობა ავადმყოფობის გამო (თუ ავადმყოფობა სასიკვდილოა, ლეტალური შემთხვევა), მაშინ მეორე განტოლებაში გაჩნდება ( $-\gamma_1 y$ ) შესაყრები, სადაც  $\gamma_1$  - ავადმყოფობიდან სიკვდილიანობის კოეფიციენტი.

ამ შემთხვევაში სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy + \varepsilon_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y - \gamma_1 y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y + \varepsilon_3 z. \end{cases} \quad (2.1.15)$$

შესაბამისად მივიღებთ კომის ამოცანას (2.1.14), (2.1.9) ან (2.1.15), (2.1.9) არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის, რომლის რიცხვითი ამოხსნა შეიძლება, მაგალითად ოტხეტაპიანი რუნგე-კუტას მეთოდით [16]. ანალოგიურად შეიძლება გათვალისწინებულ იქნეს ეპიდემიისგან დაზიანებული პოპულაციის სხვა თავისებურებები.

2.1.4. მაიღვივის მოდელიანი ინფიცირების გადაცემის  
 ბათვალისწინებით

ამ პარაგრაფში აგებული ყველა მოდელის დროს განხილული იყო ებიდება, რომლის დროსაც ინფექცია გადაეცემოდა უშუალოდ ინფიცირებულთან არაინფიცირებულს. ახლა შევადგინოთ ისეთი ებიდების მათემატიკური მოდელი, რომლის დროსაც ინფექციის გავრცელება ხდება პარაზიტი-გადამტანების მიერ [23, 34, 45].

ვთქვათ,  $X_1(t)$  - არაინფიცირებულთა რაოდენობაა, ხოლო  $X_2(t)$  - ინფიცირებულ ინდივიდთა რაოდენობა დროის  $t$  მომენტში. ასევე დავუშვათ, რომ  $Y_1(t)$  არაინფიცირებულთა რაოდენობაა, ხოლო  $Y_2(t)$  - ინფიცირებულ პარაზიტ-გადამტანთა რაოდენობა დროის  $t$  მომენტში. მკვებავი ინდივიდები შეიძლება იყოს, მაგალითად, მღრღნელები, ხოლო გადამტანებად - რწყილები. დასაწყისისათვის დავუშვათ, რომ როგორც მკვებავ ინდივიდებს, ასევე გადამტანებს აქვთ გამრავლების უნარი როგორც ინფიცირებულებს, ასევე არაინფიცირებულებს. ასევე ჩავთვალოთ, რომ გადამტანები ინფიცირებიან მხოლოდ კონტაქტით მკვებავ ინდივიდებთან, ხოლო მკვებავი ინდივიდები - მხოლოდ ინფიცირებულ გადამტანებთან კონტაქტით. მაშინ, შევადგენთ რა ბალანსის განტოლებებს  $t$ -დან  $t + \Delta t$ -მდე დროის შუალედისათვის, ხოლო შემდეგ გადავალთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$  (მსგავსი გარდაქმნები ნაჩვენებია იყო წინა პარაგრაფში), მივიღებთ ჩვენი ფუნქციებისათვის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \epsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 y_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \epsilon_2 x_2 + \gamma_1 x_1 y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = \epsilon_3 y_1 - \gamma_2 x_2 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = \epsilon_4 y_2 + \gamma_2 x_2 y_1. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

პირველი შესაკრებები ყველა განტოლებებში შეესაბამება ბუნებრივ მატებას. მეორე შესაკრები პირველ განტოლებაში არაინფიცირებულ ინდივიდთა კლებას შეესაბამება. ამ კლებას განაპირობებს არაინფიცირებულ მღრღნელთა შეხვედრა ინფიცირებულ

გადამტანებთან და ამიტომ  $X_1Y_2$  ნამრავლის პროპორციულია. ეს სიდიდე, ამავე დროს, არის ინფიცირებულების რაოდენობის ნამატი, ამიტომ ის გათვალისწინებულია მეორე განტოლებაში.

ანალოგიურად, არაინფიცირებული გადამტანებისა და ინფიცირებული მღრღნელების შეხვედრა განაპირობებს არაინფიცირებული გადამტანების შემცირებას (და, შესაბამისად, ინფიცირებული გადამტანების მატებას), რომელიც პროპორციულია  $X_2Y_1$  ნამრავლის.

ეს გარემოება გათვალისწინებულია მეორე, შესაბამისად მესამე და მეოთხე განტოლებებში.

თუ ავადმყოფობა ისეთია, რომ მისგან სიკვდილიანობა აღემატება ბუნებრივ ნამატს, მაშინ მეორე და მეოთხე განტოლებებში პირველი შესაკრებები იქნება უარყოფითი

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 y_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_1 x_1 y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = \varepsilon_3 y_1 - \gamma_2 x_2 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -\varepsilon_4 y_2 + \gamma_2 x_2 y_1. \end{cases} \quad (2.117)$$

შიეძლება გათვალისწინებული იყოს აგრეთვე ინდივიდების შიგასახეობრივი კონკურენცია. მაშინ პირველ და მეორე განტოლებებში მარჯვნივ აღმოჩნდება  $-\delta_1 x_1^2, -\delta_1 x_1 x_2, -\delta_2 x_2^2$  სახის შესაკრებები. ასევე შიეძლება გათვალისწინებულ იქნეს შიგასახეობრივი კონკურენცია გადამტანებში. შიეძლება განხილულ იქნეს უფრო რთული მოდელები, რომლებიც ითვალისწინებენ, მაგალითად იმ გარემოებას, რომ მღრღნელებთან კონტაქტში შედიან მხოლოდ მშვიერი გადამტანები და ა.შ. ამ განტოლებების მარჯვენა მხარეები არაწრფივია, რაც ართულებს სისტემის ამონახსნის პოვნას. თუმცა, თუ ცნობილია  $\varepsilon_i, i=1,4, \gamma_1, \gamma_2$ , და ა.შ. კოეფიციენტები, მაშინ ამონახსნი შიეძლება მივიღოთ რიცხვითი მეთოდების მეშვეობით [16].

ამავე დროს შიეძლება მოვახდინოთ ამ სისტემების ზოგადი ზარისხობრივი გამოკვლევა. ამ დროს შიეძლება დადგინდეს

ამონახსნების ისეთი მნიშვნელოვანი თვისებები, როგორცაა პერიოდულობა, მდგრადობა და სხვა. მაგალითად, განვიხილოთ (2.1.17) სისტემა. ადვილი სანახავია, რომ ამ სისტემას აქვს ორი სტაციონარული ამონახსნი. მათ საპოვნელად მარჯვენა მხარეები გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 y_2) = 0, \\ -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_1 x_1 y_2 = 0, \\ y_1(\varepsilon_3 - \gamma_2 x_2) = 0, \\ -\varepsilon_4 y_2 + \gamma_2 x_2 y_1 = 0. \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ ერთი სტაციონარული ამონახსნი იგივეურად ნულის ტოლია:

$$x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0, y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0.$$

ეს ამონახსნი ჩვენ ნაკლებად გვაინტერესებს, რადგანაც მას ბიოლოგიური შინაარსი არა აქვს. მეორე სტაციონარულ ამონახსნს მივიღებთ, თუ ნულს გავუტოლებთ ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებებს, რომლებსაც შეიცავენ პირველი და მესამე განტოლებები. მაშინ გვექნება:

$$x_1^0 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \gamma_2}, x_2^0 = \frac{\varepsilon_3}{\gamma_2}, y_1^0 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4}{\varepsilon_3 \gamma_1}, y_2^0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}. \quad (2.1.18)$$

ეს ამონახსნი შეიძლება გამოვიკვლიოთ მდგრადობაზე. ამისათვის, როგორც ცნობილია, უნდა ვაწარმოოთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$\xi_1 = x_1 - x_1^0, \xi_2 = x_2 - x_2^0, \eta_1 = y_1 - y_1^0, \eta_2 = y_2 - y_2^0.$$

ჩავსვათ ეს ახალი ცვლადები (2.1.17) სისტემაში, მსგავსი წევრები დავიყვანოთ და მოვაშოროთ მეორე რიგის წევრები (პირველი მიახლოებით მდგრადობაზე გამოკვლევისას საჭიროა მხოლოდ ის წევრები, რომლებიც უცნობებს შეიცავენ მხოლოდ პირველ ხარისხში), მივიღებთ პირველი მიახლოების სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = -\gamma_1 x_1^0 \eta_2, \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \varepsilon_1 \xi_1 - \varepsilon_2 \xi_2 + \gamma_1 x_1^0 \eta_2, \\ \frac{d\eta_1}{dt} = -\gamma_2 y_1^0 \xi_2, \\ \frac{d\eta_2}{dt} = \gamma_2 y_1^0 \xi_2 + \varepsilon_3 \eta_1 - \varepsilon_4 \eta_2. \end{cases}$$

ამ სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -\gamma_1 x_1^0 \\ \varepsilon_1 & (-\varepsilon_2 - \lambda) & 0 & \gamma_1 x_1^0 \\ 0 & -\gamma_2 y_1^0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \gamma_2 y_1^0 & \varepsilon_3 & (-\varepsilon_4 - \lambda) \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტის მნიშვნელობაა

$$\lambda^4 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)\lambda^3 + \varepsilon_2 \varepsilon_4 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\lambda - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 0. \quad (2.1.19)$$

შემდეგ საჭიროა გამოვიკვლიოთ ფესვების ნამდვილი ნაწილების ნიშნები. ამისათვის აუცილებელი არ არის თვით ფესვების პოვნა. ამ საკმეში დაგვეზმარება გურვიცის კრიტერიუმი. იმისათვის, რომ  $n$ -ური ხარისხის

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2.1.20)$$

განტოლების ყველა ფესვს ჰქონდეს უარყოფითი ნამდვილი ნაწილი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ დეტერმინანტის ყველა მთავარი მინორი იყოს დადებითი.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i = 0, \text{ როცა } i > n).$$

გურვიცის დეტერმინანტი უნდა შევადგინოთ  $P_n(x)$  პოლინომის კოეფიციენტებით. ამისათვის მთავარ დიაგონალზე უნდა დავწეროთ ყველა კოეფიციენტი,  $a_1$ -დან დაწყებული. შემდგომ ყოველ სტრიქონში დავწეროთ ყველა კოეფიციენტი რიგ-რიგად, დიაგონალური ელემენტიდან მარჯვნივ და მარცხნივ ისე, რომ კოეფიციენტების ნომრები კლებულობდეს მარცხნიდან მარჯვნივ. თუ სტრიქონში კიდევ რჩება ადგილი, ხოლო კოეფიციენტები დაილია, მაშინ სტრიქონის დარჩენილ ადგილებში დავწეროთ ნულები.

გამოვიყენოთ გურვიცის კრიტერიუმი ჩვენი განტოლებისათვის. რადგანაც

$$a_0 = 1, a_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4, a_2 = 0, a_3 = \varepsilon_2\varepsilon_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_3), a_4 = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4,$$

დეტერმინანტს ექნება სახე

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_2 + \varepsilon_4 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2\varepsilon_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) & 0 & \varepsilon_2 + \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 & \varepsilon_2\varepsilon_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტის უკვე მე-2 რიგის მინორი

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_4) \cdot 0 - \varepsilon_2\varepsilon_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) < 0$$

ნაკლებია ნულზე, ამიტომ, გურვიცის კრიტერიუმის თანახმად, მახასიათებელი განტოლების ყველა ფესვის ნამდვილი ნაწილი არ არის უარყოფითი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ შემთხვევა, როცა (2.1.20) განტოლებას აქვს სუფთად წარმოსახვითი ფესვები, ნაკლებად ალბათურია. მართლაც, თუ  $\lambda = ia$  ფესვია, მაშინ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა



$$a^4 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)ia^3 + \varepsilon_2\varepsilon_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)ai - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 0.$$

აქედან, გაუტოლებთ რა ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს ნულს, მივიღებთ

$$a^4 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4, \quad a^2 = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3), \quad (2.1.21)$$

და შესაბამისად

თუ (2.1.21)-ის პირველ ტოლობას  $a^2 = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \cdot \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}$  სახით ჩავწერთ და შევადარებთ მეორე ტოლობას, მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}. \quad (2.1.22)$$

ძნელი წარმოსადგენია, რომ რეალურ პოპულაციებში, რომელთა მათემატიკურ მოდელსაც ჩვენ განვიხილავთ, ისე იდეალურად იყოს შერჩეული, რომ მათი კოეფიციენტებისათვის მკაცრად სრულდებოდეს (2.1.22) ტოლობა. ყველა სხვა შემთხვევაში, ამის გარდა, შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს წმინდა წარმოსახვითი ფესვები. ხოლო გურვიცის კრიტერიუმის თანახმად მისი ფესვების ყველა ნამდვილი ნაწილი არ არის უარყოფითი. შესაბამისად, არსებობს ერთი ფესვი მაინც დადებითი, ნამდვილი ნაწილით. ეს კი საკმარისია, ვამტკიცოთ, რომ (2.1.18) სტაციონარული ამონახსნი არამდგრადია.

## §2.2. ზრახვი მაიღმიოლოგიური მოდელი

დავუშვათ, რომ რაიმე პოპულაცია, რომელიც შედგება  $N$  ინდივიდისაგან, იყოფა სამ ჯგუფად [2]. პირველ ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც აღებულ მომენტში არიან ჯანმრთელები, მაგრამ არა აქვთ იმუნიტეტი გარკვეული დაავადების მიმართ, ე.ი. არსებობს გარკვეული ალბათობა იმისა, რომ ისინი დაავადდებიან ამ დაავადებით. ასეთი ინდივიდების რაოდენობა  $t$  მომენტში აღვნიშნოთ  $S(t)$  სიმბოლოთი. მეორე ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც აღებულ მომენტში არიან ავად, და, მაშასადამე, არიან ინფექციის გამავრცელებლები. მათი რაოდენობა  $t$  მომენტში აღვნიშნოთ  $I(t)$  სიმბოლოთი. და ბოლოს, მესამე ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც არ არიან ავად და ამავე დროს აქვთ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ. მათი რაოდენობა აღვნიშნოთ  $R(t)$  სიმბოლოთი. ე.ი.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (2.2.1)$$

დავუშვათ, რომ, იმ შემთხვევაში როდესაც დაავადებულთა რიცხვი  $I(t)$  გადააჭარბებს გარკვეულ ფიქსირებულ რიცხვს  $I^*$ -ს, ე.ი.  $I(t) > I^*$ , მაშინ იწყება ეპიდემიის პროცესი, ე.ი. ამ დაავადებულებს შეუძლიათ დაავადონ ის ინდივიდები, რომელთაც არა აქვთ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ გარკვეულ მომენტამდე შესაძლებელია დაავადებულ ინდივიდთა იზოლაცია (მაგ., კარანტინის საშუალებით) და რომ, საწყის ეტაპზე დაავადება მიმდინარეობს გარკვეულ, მცირერიცხოვანი ჯგუფის შიგნით. დაავადების ამ ეტაპს ჩვენი მათემატიკური მოდელი არ აღწერს.

შემდეგ, ჩავთვალოთ, რომ თუ  $I(t) > I^*$ , მაშინ იმუნიტეტის არმქონე ინდივიდების ჯგუფში, დაავადებულ ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სინქარე პროპორციულია ამ ჯგუფში მყოფი ინდივიდების რაოდენობისა. ამ დაშვების შემდეგ მივიღებთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & I(t) > I^*, \\ 0, & I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

შემდეგ, დავუშვათ, რომ იმ ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სინქარე, რომლებიც მიეკუთვნებიან დაავადებულთა ჯგუფს, მაგრამ გამოჯანმრთელდნენ, პროპორციულია ამ ჯგუფში ინდივიდების

რაოდენობისა. თუ გავითვალისწინებთ აგრეთვე, რომ იმუნიტეტის არ მქონე ინდივიდი ბოლოსდაბოლოს ავაღდება და თვითონ ზდება ინფექციის გამავრცელებელი (ე.ი. ასეთი ინდივიდი გადადის მეორე ჯგუფში), ამიტომ ინფექციის გამავრცელებელთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე დამოკიდებულია დროის ერთეულში დაავადებულთა და გამოჯანმრთელებულ ინდივიდთა რაოდენობის სხვაობაზე, ამრიგად

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & I(t) > I^*, \\ -\beta I, & I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

(2.2.2) და (2.2.3) განტოლებებში პროპორციულობის  $\alpha > 0$  და  $\beta > 0$  კოეფიციენტებს შესაბამისად ვუწოდოთ დაავადებისა და გამოჯანმრთელების კოეფიციენტები ( $\alpha \neq \beta$ ).

და ბოლოს, ჯანმრთელი ინდივიდების (რომელთაც გააჩნიათ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ) რაოდენობის ცვლილება შეიძლება აღვწეროთ შემდეგი განტოლებით.

$$\frac{dR}{dt} = \beta I. \quad (2.2.4)$$

მივიღოთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (2.2.2)-(2.2.4), განვიხილოთ კომის ამოცანა ამ განტოლებათა სისტემისათვის (საწყის მომენტში თითოეულ ჯგუფში ინდივიდთა რაოდენობა):

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0. \quad (2.2.5)$$

(2.2.2)-(2.2.5) ამოცანა წარმოადგენს ეპიდემიის გავრცელების წრფივ მათემატიკურ მოდელს გარკვეულ შეზღუდვებში, რომელთა შესახებაც ზემოთ გვქონდა ლაპარაკი.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1. ვთქვათ,  $I(0) < I^*$ . ჩვენი დაშვების თანახმად, ამ დროს, პოპულაციაში შემავალ ინდივიდებს არ გადაეცემათ დაავადება, რადგან შესაძლებელია ინფიცირებულთა იზოლირება. ამ შემთხვევაში  $\frac{dS}{dt} = 0$ , რის საფუძველზეც (2.2.1) ტოლობისა და (2.2.5) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$S(t) = S_0 = N - I_0 - R_0. \quad (2.2.6)$$

ეს წრფივი მოდელი აღწერს იმ სიტუაციას, როდესაც ყველა დაავადებული ინდივიდი იზოლირებულია. ამ შემთხვევაში (2.2.3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dI}{dt} = -\beta I,$$

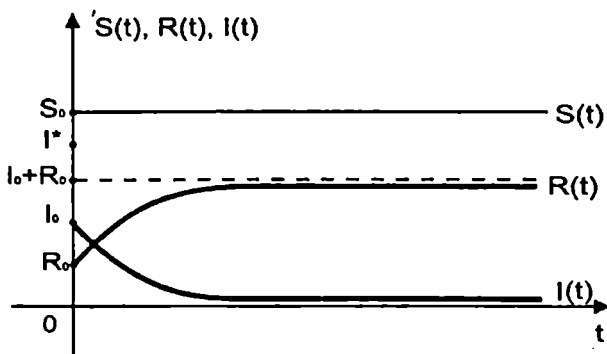
საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$I(t) = I_0 e^{-\beta t},$$

ხოლო (2.2.4)-დან

$$R(t) = N - S(t) - I(t) = I_0(1 - e^{-\beta t}) + R_0.$$

ნახაზზე 2.2.1 გრაფიკულად არის გამოსახული სამივე ჯგუფში ინდივიდების რაოდენობის ცვლილება (გარკვეულობისათვის აღებულია  $S_0 > I_0 > R_0, S_0 > I_0 + R_0$ )



ნახ.2.2.1

II. ვთქვათ  $I(0) > I^*$ . ამ შემთხვევაში იარსებებს ინტერვალი  $0 \leq t < T$ , სადაც შესრულებული იქნება უტოლობა  $I(t) > I^*$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ  $t \in [0, T)$ , მაშინ ავადმყოფობა გავრცელდება იმ ინდივიდებზე, რომელთაც არა აქვთ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ. მაშინ (2.2.2) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \text{ თუ } 0 \leq t < T. \quad (2.2.7)$$

ჩავსვათ  $S(t)$ -ს ეს გამოსახულება (2.2.3)-ში, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{dI}{dt} + \beta I = \alpha S_0 e^{-\alpha t}.$$

უკანასკნელი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ  $e^{\beta t}$ -ზე:

$$\frac{d}{dt} (I e^{\beta t}) = \alpha S_0 e^{(\beta - \alpha)t}.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ (რადგანაც  $\alpha \neq \beta$ )

$$Ie^{\beta t} = \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} e^{(\beta - \alpha)t} + C,$$

სადაც  $C$  - ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$I(t) = Ce^{-\beta t} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t}.$$

თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობებს  $I(0) = I_0$ , საბოლოოდ მივიღებთ:

$$I(t) = \left( I_0 - \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} \right) e^{-\beta t} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t}, \quad \text{თუ } 0 \leq t < T. \quad (2.2.8)$$

(2.2.1)-დან

$$R(t) = N - S_0 e^{-\alpha t} - \left( I_0 - \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} \right) e^{-\beta t} - \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t}.$$

ცხადია, რომ უპირველეს ყოვლისა, ჩვენ უნდა დავადგინოთ  $T$ -ს მნიშვნელობა, აგრეთვე  $t_{\max}$  - დროის ის მომენტი, როდესაც დაავადებულ ინდივიდთა რაოდენობა მაქსიმალურია.

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემა მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც  $T$  მომენტში შეწყდება დაავადების შემდგომი გაერცელება. თუ განვიხილავთ (2.2.8)-ს, მაშინ ჩვენ მიერ ზემოთ გამოთქმული მოსაზრების გამო,  $t = T$  მომენტში სამართლიანია ტოლობა:

$$I^* = \left( I_0 - \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} \right) e^{-\beta T} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha T}. \quad (2.2.9)$$

მივიღეთ არაწრფივი განტოლება (2.2.9)  $T$ -ს მიმართ, რომლის ამონახსენიც შეიძლება ვიპოვოთ, მაგალითად ბისექციის მეთოდით და დავადგინოთ  $T$ -ს მნიშვნელობა [3].

იმისათვის, რომ პასუხი გავცეთ მეორე კითხვაზე, ე.ი. დავადგინოთ  $t_{\max}$ -ის მნიშვნელობა, განვიხილოთ  $I(t)$ -ს გამოსახულება (2.2.8), რადგან  $t_{\max}$  შეესაბამება  $I(t)$ -ს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ამიტომ

უნდა განვიხილოთ განტოლება  $\frac{dI}{dt} = 0$ , საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$t_{\max} = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \left( \frac{\beta(\beta - \alpha)}{\alpha^2 S_0} \left( \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} - I_0 \right) \right), \quad \beta > \alpha.$$

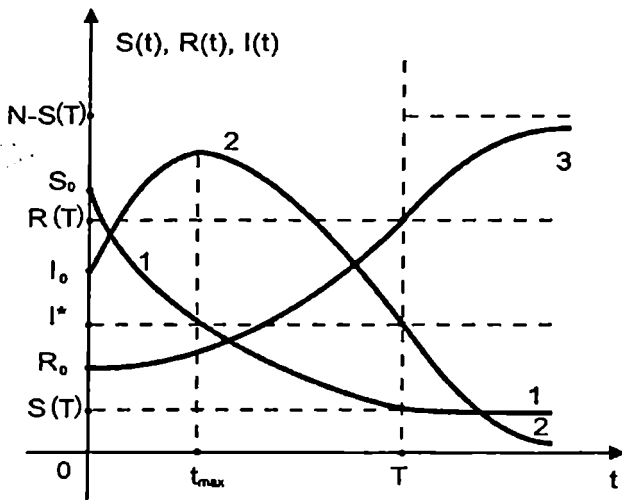
ამასთან, როცა  $\beta > \alpha$  მაქსიმუმის არსებობისათვის აუცილებელია, რომ  $\alpha S_0 > I_0 \beta$ .

$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \left( \frac{\alpha^2 S_0}{\beta(\alpha - \beta) \left( I_0 + \frac{\alpha S_0}{\alpha - \beta} \right)} \right), \quad \beta < \alpha, \quad \alpha S_0 > \beta I_0.$$

როდესაც  $t > T$ , მაშინ ინფექციის გავრცელება შეწყდება. მივიღებთ I შემთხვევას:

$$\begin{aligned} I(t) &= I^* e^{-\beta(t-T)}, \\ S(t) = S(T) &= S_0 e^{-\alpha T}, \\ R(t) &= N - S_0 e^{-\alpha T} - I^* e^{-\beta(t-T)}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

ნახაზზე 2.2.2 გრაფიკულად არის გადმოცემული თითოეულ ჯგუფში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების დინამიკა (ფორმულები (2.2.7)-(2.2.10)).



ნახ.2.2.2 1 - S(t), 2 - I(t), 3 - R(t).

$$R(T) = N - S(T) - I^*, \quad S(T) = S_0 e^{-\alpha T}$$

### §2.3. იმუნური პროცესების მათემატიკური მოდელირება

ცნობილია, რომ შეცვლილი გარემო მოქმედებს ადამიანის დაცვით მექანიზმზე, მაგრამ საკმარისი არ არის ამ კავშირის დადგენა, საჭიროა შემუშავებული და გატარებული იქნეს ღონისძიებები, რომლებიც გაარღვევს იმ მოჯადოებულ წრეს, რომელიც შექმნილია ადამიანის მიერ გარემოსა და ინფექციური დაავადებების გამომწვევთა გამრავლების დარღვევებით.

მოკლედ მიმოვიხილოთ ძირითადი ცნებები და ფაქტები, რომლებიც საფუძვლად უდევს მათემატიკურ მოდელს [7].

იმუნური სისტემა – ეს არის ყველა ლიმფური ორგანოებისა და სხეულის ლიმფური უჯრედების ერთობლიობა, რომელიც შეიცავს ტიმუსს, ელენთას, ლიმფურ კვანძებს და ლიმფურ გაერთიანებებს.

ლიმფური უჯრედების საერთო რაოდენობა  $10^{12}$ -ია. ეს უჯრედები იმუნური რეაგირების უმნიშვნელოვანეს სახეობებს აწარმოებენ.

ძირითადი ფუნქცია – არის ორგანიზმის დაცვა ცოცხალი სხეულებისა და ნივთიერებებისაგან, რომლებიც გენეტიკურად უცხო ინფორმაციის ნიშნების მატარებლები არიან. ასეთებია: ბაქტერიები, ვირუსები, მატლები, ცილები, ქსოვილები, უჯრედები. ასეთ ნივთიერებებს ანტიგენებს უწოდებენ. ყოველი ანტიგენი სპეციფიურია და იწვევს იმუნური სისტემის სპეციფიურ რეაქციას, რომელიც მიმართულია მხოლოდ მის წინააღმდეგ.

იმუნური სისტემის ძირითადი ფუნქციაა ანტიგენის ამოცნობა და მასზე სპეციფიური რეაგირება.

ანტისხეულებს უწოდებენ ცილებს, რომლებსაც გამოიმუშავენ ლიმფური უჯრედები ორგანიზმში ანტიგენების შეღწევის საპასუხოდ.

ანტისხეულებს გააჩნიათ იმ ანტიგენებთან ურთიერთქმედების უნარი, რომლებმაც გამოიწვიეს მისი წარმოქმნა. შედეგად წარმოიქმნება იმუნური კომპლექსი "ანტიგენი-ანტისხეული", რომლებიც შემდგომ გამოდიან ორგანიზმიდან. როგორია ანტისხეულის წარმოქმნის პროცესი?

ორგანიზმში ყოველთვის არსებობს იმუნოციტების მცირე პოპულაცია, რომელიც სპეციფიურია მოცემული ანტიგენის მიმართ. ანტიგენისა და იმუნოციტის შეხვედრისას ხდება იმუნოციტის

სტიმულირება, ე.ი. იძენენ გაყოფისა და თვისებების ცვლილების უნარს. 8-9 გაყოფის შემდეგ წარმოიქმნება ჩიხური უჯრედი, რომელიც შემდგომ არ იყოფა. ასეთი უჯრედების ნაწილი (პლაზმური უჯრედები) წარმოქმნის იგივე სპეციფიურობის ანტისხეულს, რაც აქვთ რამდენიმე დღის განმავლობაში უჯრედულ რეცეპტორებს, შემდგომ კი ილუპებიან. უჯრედების მეორე ნაწილს (მეხსიერების უჯრედები) შეუძლია ნაკლები ინტენსივობით წარმოქმნას ანტისხეულები, მაგრამ მისი ძირითადი ფუნქციაა – შეინახოს ინფორმაცია ანტიგენის შესახებ, ე.ი. ესენი ის უჯრედებია, რომლებსაც შეუძლიათ ანტიგენზე ხელახალი რეაგირება და კასკადური რეაქციის გამოწვევა. მეხსიერების უჯრედები ცხოვრობენ რამდენიმე წლის განმავლობაში. ამ აღწერილ იმუნურ პასუხს უწოდებენ პირველადს. მეორადი რეაქცია წარმოიშობა ორგანიზმში იგივე ანტიგენის განმეორებით მოხვედრის დროს და მას ეძლევა სწრაფი იმუნური პასუხის კვალიფიკაცია.

### 2.31. ინფემციური დაავადებების მათემატიკური მოდელი

ინფექციური დაავადების ქვეშ იგულისხმება ბიოცენოზის ორ წევრს შორის ჩამოყალიბებულ ურთიერთობათა ასახვა, რომელთაგან ერთს აქვს უნარი, დაცვითი მექანიზმების საშუალებით, წინააღმდეგობა გაუწიოს მეორის პათოგენურ მოქმედებას.

ინფექციისაგან ორგანიზმის ერთ-ერთი ძირითადი დამცავია იმუნური სისტემა. იმუნური რეაქციის არსი მდგომარეობს სპეციფიური მატერიალური სუბსტრატების (ანტისხეულები, უჯრედები – ქილერები) წარმოქმნაში, რომლებსაც უნარი აქვთ გაანეიტრალონ ანტიგენები.

ამგვარად, ინფექციური დაავადება – დაავადების გამომწვევ პოპულაციასა და ორგანიზმის იმუნურ სისტემას შორის კონფლიქტია.

ავაგოთ დაავადების ისეთი მათემატიკური მოდელი, რომელიც გ.ამარჩუკის მიერ 1975 წელს აგებული მათემატიკური მოდელის გამარტივებული ვარიანტია [45, 66].

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$V(t)$  – პათოგენური გამრავლებადი ანტიგენების კონცენტრაცია;

$F(t)$  – ანტისხეულების კონცენტრაცია;



$C(t)$  - პლაზმური უჯრედების კონცენტრაცია, ანტისხეულების პროდუქტებისა და მატარებლების პოპულაცია;

ვთქვათ, ორგანიზმში ანტიგენების მოხვედრის მომენტში მათი რაოდენობაა  $V=V(t)$ . მოხვდება რა სისხლში და დაეგახება ანტისხეულებს, ხდება იმუნური სისტემის სტიმულაცია. სტიმულაციიდან რაიმე  $\Delta t$  დროის შემდეგ ორგანიზმში წარმოიქმნებიან პლაზმური უჯრედები, რომლებიც გამოიმუშავენ ანტისხეულებს. ანტისხეულები წინააღმდეგობას უწევენ ვირუსებს და მათ ბრძოლაზე დამოკიდებული ავადმყოფობის შედეგი.  $\Delta t$  დროში ანტიგენების ნაზრდი ტოლი იქნება

$$\Delta V = C - H,$$

სადაც  $C$  - არის გამრავლებული ანტიგენების რაოდენობა,

$H$  - ანტიგენების რაოდენობა, რომელთა ნეიტრალიზება მოხდა ანტისხეულებით.

$$C = F(V, \Delta t), \text{ ე.ი. } C = \beta V \Delta t, \beta = \text{const};$$

$$H = F(F, V, \Delta t), \text{ ანუ } H = \gamma F V \Delta t, \gamma = \text{const};$$

შესაბამისად

$$\Delta V = \beta V \Delta t - \gamma F V \Delta t.$$

გავყოთ ორივე მხარე  $\Delta t$ -ზე და გადავიღოთ ზღვარზე როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma F V, \quad (2.3.1)$$

სადაც  $\beta$  - ანტიგენების გამრავლების კოეფიციენტი,  $\gamma$  - ანტიგენებისა და ანტისხეულების შეხვედრის კოეფიციენტი.

ვთქვათ, დროის  $t$  მომენტში ორგანიზმში ანტისხეულების კონცენტრაცია იყო  $F = F(t)$ . ორგანიზმში ანტიგენების მოხვედრის შედეგად იზრდება ანტისხეულები. ეს ნაზრდი ტოლი იქნება

$$\Delta F = A - B - K,$$

სადაც  $A$  ანტისხეულების რაოდენობაა, რომლებსაც წარმოქმნიან პლაზმური უჯრედები,  $B$  - ანტისხეულების შემცირება ანტიგენებთან კავშირის გამო,  $K$  - ანტისხეულების შემცირება სიბერის გამო.

$$A = F(C, \Delta t), \text{ ე.ი. } A = \rho C \Delta t, \rho = \text{const}.$$

$$B = F(F, V, \Delta t), B = \eta \gamma F V \Delta t, \eta = \text{const}.$$

$$K = F(F, \Delta t), K = \mu F \Delta t, \mu = \text{const}.$$

$$\Delta F = \rho C \Delta t - \eta \gamma F V \Delta t - \mu F \Delta t,$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta \gamma FV - \mu F, \quad (2.3.2)$$

სადაც  $\rho$  - არის ერთი პლაზმური უჯრედის მიერ ანტისხეულების წარმოქმნის სიჩქარე.

ვთქვათ, დროის  $t$  მომენტში პლაზმური უჯრედების რაოდენობა შესაბამისად არის  $C = C(t)$ , ე.ი. ორგანიზმში იმუნური უჯრედების ნორმალური დონე.  $\Delta t$  დროში პლაზმური უჯრედების ცვლილება, როცა ორგანიზმში ხვდებიან ანტიგენები, ტოლი  $\Delta C = L - M$ , სადაც  $L$  - პლაზმური უჯრედების რაოდენობაა, რომელთა სტიმულირება ხდება იმუნური სისტემით,  $M$  - პლაზმური უჯრედების შემცირება სიბერის გამო.

$$L = F(F, V, \Delta t), \text{ ე.ი. } L = \alpha F V \Delta t, \alpha = \text{const.}$$

$$M = F(C, \Delta t), \text{ ე.ი. } M = \mu_c C \Delta t, \mu_c = \text{const.}$$

შესაბამისად

$$\Delta C = \alpha F V \Delta t - \mu_c C \Delta t,$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha FV - \mu_c C, \quad (2.3.3)$$

სადაც  $\alpha$  - იმუნური სისტემის სტიმულირების კოეფიციენტი,  $\mu_c$  - სიცოცხლის ხანგრძლივობის შებრუნების კოეფიციენტი.

(2.3.1), (2.3.2) და (2.3.3) სისტემა არის დაავადების მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV, \\ \frac{dF}{dt} = \rho C - \eta \gamma FV - \mu F, \\ \frac{dC}{dt} = \alpha FV - \mu_c C. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

განასხვავებენ დაავადების სხვადასხვა ფორმებს:

1) თუ  $\frac{dV}{dt} < 0$  დროის საკმაოდ მცირე ( $t_1, t_2$ ) შუალედში, მაშინ

საქმე გვაქვს ავადმყოფობის მწვავე ფორმასთან, რომელიც ხასიათდება ვირუსების რაოდენობის სწრაფი ზრდით, მკაფიოდ გამოხატული იმუნური პასუხით და ავადმყოფობის გამოწვევი პარაზიტების მკვეთრი შემცირებით;

2) თუ  $\frac{dV}{dt} < 0$  დროის საკმაოდ დიდ შუალედში, მაშინ ადგილი

აქვს ავადმყოფობის ქრონიკულ ფორმას, რომელსაც ახასიათებს წონასწორობა გამრავლების უნარის მქონე და ავადმყოფობის გამოწვევითა რაოდენობებს შორის, რომლებიც გამოიყოფიან იმუნური სისტემის მიერ, ასევე არაეფექტური იმუნური პასუხით.

3) თუ  $\frac{dV}{dt} > 0$  დროის საკმაოდ დიდ შუალედში, მაშინ

ლეტალური დასასრულია.

ავადმყოფობის მწვავე ფორმა აღინიშნება ვაქცინაციის დროს. ვაქცინაციის მიზანია – მოხდეს ძლიერი იმუნური პასუხის პროვოცირება მეხსიერების უჯრედების დაგროვების მიზნით. ორგანიზმის ინფიცირება ხდება ვირუსების მცირე დოზებით.

### 2.3.2. ინფექციური დაავადებების უმარტივესი მათემატიკური მოდელი

ავადმყოფობის ზემოთ განხილული მოდელი გავამარტივოთ. ამ მიზნით, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორ პოპულაციას - ინფექციის მატარებელი (ანტიგენების) მიკროორგანიზმების პოპულაციასა და იმუნური უჯრედების პოპულაციას, რომლებიც უვნებელყოფენ მიკროორგანიზმებს (ანტისხეულებს) [14, 45].

#### 1. ამოცანა რეალური ცხოვრებიდან.

ზოგიერთი ვირუსის დასათრგუნად სამედიცინო პრაქტიკაში გამოიყენებენ ანტიბიოტიკებს. ამოცანა მდგომარეობს ორგანიზმზე მოქმედების შესაძლო მექანიზმების დადგენაში.

#### 2. მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, საწყის  $t$  დროში მიკროორგანიზმების რაოდენობა იყო  $V = V(t)$ , ხოლო იმუნური უჯრედების რაოდენობა  $F = F(t)$ .  $\Delta t$  დროის შემდეგ ორგანიზმის სტიმულაციის შემდეგ წარმოიქმნება ახალი იმუნური უჯრედები, რომლებიც ებმებიან მიკროორგანიზმებთან ბრძოლაში, და მათ შორის ურთიერთობაზე დამოკიდებული ავადმყოფობის შედეგი.

წინა პუნქტის ამოცანაში შეგროვილი ინფორმაციების საფუძველზე მიკრობული და იმუნური უჯრედების ცვლილებები შესაბამისად ტოლია:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV, \\ \frac{dF}{dt} = -\alpha FV - \mu F, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

სადაც  $\alpha, \beta, \gamma, \mu$  – რაიმე მუდმივებია.

ღროის რაიმე შუალედში ამ ორი პოპულაციის გაწონასწორება ხდება.

ვიაპოვოთ სტაციონარული წერტილი, რომლის კოორდინატები მიიღება შემდეგი პირობებიდან:

$$\begin{cases} \beta V - \gamma FV = 0 \\ -\alpha FV - \mu F = 0 \end{cases} \Rightarrow F = \frac{\beta}{\gamma}, V = -\frac{\mu}{\alpha}. \quad (2.3.6)$$

პოპულაციის რაოდენობების ამ მნიშვნელობებს უწოდებენ წონასწორულს და აღნიშნავენ  $F_0$  და  $V_0$ . ამგვარად,

$$F_0 = \frac{\beta}{\gamma}, V_0 = -\frac{\mu}{\alpha}.$$

დავუშვათ, რომ ორივე პოპულაცია არის ბუნებრივ წონასწორობაში და მათი რაოდენობები შესაბამისად  $F_0$  და  $V_0$ -ია. ახლა შემოვიტანოთ მოქმედებაში ანტიბიოტიკი. მისი გარკვეული დოზით გამოყენების საშუალებით საგრძნობლად ვამცირებთ მიკრობების პოპულაციას, ისე რომ უშუალოდ არ მოვახდინოთ ზეგავლენა იმუნური უჯრედების პოპულაციაზე. მაგრამ, მიკრობების პოპულაციის ხელოვნური დაქვეითება იმუნური სისტემის "ყურადღებას აღუნებს" და იმუნური უჯრედების რაოდენობა იკლებს. ანტიბიოტიკის გამოყენების შემდეგ პოპულაციათა რაოდენობები ასეთია:  $(V_0 - v) < 0$ ,  $(F_0 - f) > 0$ .

### 3. მათემატიკური შედეგი.

დავადგინოთ, როგორი გადახრა ექნება წონასწორობის მდგომარეობიდან უცნობ  $V(t), F(t)$  ფუნქციებს.

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \beta(V_0 - v) - \gamma(V_0 - v)(F_0 - f), \\ \frac{dF}{dt} = -\alpha(V_0 - v)(F_0 - f) - \mu(F_0 - f). \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dt} = \beta(V_0 - v) - \gamma(V_0 - v)(F_0 - f) = (V_0 - v)(\beta - \gamma(F_0 - f)) =$$

$$= (V_0 - v) \cdot \left( \beta - \gamma \left( \frac{\beta}{\gamma} - f \right) \right) = (V_0 - v) \gamma f.$$

რადგანაც  $(V_0 - v) < 0, f > 0, \gamma > 0,$

ამიტომ 
$$\frac{dV}{dt} < 0. \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= -\alpha(V_0 - v)(F_0 - f) - \mu(F_0 - f) = (F_0 - f)(-\alpha(V_0 - v) - \mu) = \\ &= (F_0 - f) \left( -\alpha \left( -\frac{\mu}{\alpha} - v \right) - \mu \right) = (F_0 - f) \cdot \alpha v. \end{aligned}$$

რადგანაც  $(F_0 - f) > 0, v > 0, \alpha > 0,$

ამიტომ 
$$\frac{dF}{dt} > 0. \quad (2.3.8)$$

#### 4. რეალური სამყარო.

მივცეთ ინტერპრეტაცია მიღებულ შედეგებს. თავდაპირველად ორივე პოპულაცია იმყოფებოდა წონასწორობაში. შემდგომ ანტიბიოტიკმა შეამცირა მიკრობების პოპულაციის რიცხვი, და იმუნური უჯრედების რაოდენობაც ნაწილობრივ შემცირდა. ფაქტორის - ანტიბიოტიკის ზემოქმედების შემდეგ  $\frac{dV}{dt} < 0, \frac{dF}{dt} > 0$  ეს კი ნიშნავს იმას, რომ ანტიბიოტიკის გამოყენების შედეგად შეინიშნება ორგანიზმის ძლიერი იმუნური რეაქცია და ამის გამო ავადმყოფობის გამომწვევი მიკრობების მკვეთრი კლება. ეს მახასიათებელია ავადმყოფობის მწვავე ფორმისათვის. ამგვარად, ჩვენ განვიხილეთ ანტიბიოტიკის მოქმედების ერთ-ერთი შესაძლო ჰიპოტეტიური მექანიზმი.

#### 2.3.3. იმუნოლოგიის ერთი დისკრეტული მოდელი სანგრძლივი ავადმყოფობის შემთხვევაში

განვიხილოთ იმუნოლოგიის პრობლემებთან დაკავშირებული ამოცანა [45]. დაეუშვათ, რომ ავადმყოფობა მიმდინარეობს ხანგრძლივად და მკურნალობის მიზნით, რეგულარულად, ინექციით შეჰყავთ წამალი.

### 1. ამოცანა რეალური ცხოვრებიდან.

რაიმე მომენტში ორგანიზმში არის წამლის გარკვეული რაოდენობა. დაუადგინოთ წამლის რაოდენობა ორგანიზმში შემდგომი ინექციის წინ და ინექციის შემდეგ.

### 2. მათემატიკური მოდელი.

ამოცანის ამოსახსნელად შემოვიტანოთ შემდეგი მახასიათებლები:

$n$  – შეყვანილი წამლის რაოდენობა ორგანიზმში ყოველი ინექციის დროს;

$0 < r < 1$ ,  $\frac{1}{r}$  – ჯერ მცირდება წამლის რაოდენობა ინექციიდან

პირველი საათის შემდეგ;

$B_k$  – ორგანიზმში წამლის რაოდენობა  $k$ -ურ ინექციამდე;

$A_k$  – ორგანიზმში წამლის რაოდენობა  $k$ -ური ინექციის შემდეგ;

ეთქვათ, ყოველ  $t$  საათში ინექციით შეყავთ წამლის  $n$  ერთეული, მაშინ

$$B_{k+1} = r^t \cdot A_k \quad (2.3.9)$$

$$A_k = n + B_k \quad (2.3.10)$$

(2.3.10) ტოლობა ჩავსვათ (2.3.9)-ში, მივიღებთ

$$B_{k+1} = r^t \cdot n + r^t \cdot B_k \quad (2.3.11)$$

(2.3.11) არის მოცემული ამოცანის მათემატიკური მოდელი.

### 3. მათემატიკური შედეგები.

ვისარგებლოთ სხვაობიანი განტოლების ამოხსნის ჩვეულებრივი მეთოდით:

$$B_{k+1} - r^t \cdot B_k = r^t \cdot n \quad (2.3.12)$$

შევადგინოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$B_{k+1} - r^t \cdot B_k = 0, \text{ აქედან } B_{k+1} = r^t \cdot B_k.$$

დავუშვათ, რომ ერთგვაროვანი განტოლებისთვის  $B_0 = a$ ,  $a = \text{const}$ . მივიღებთ

$$B_1 = r^t \cdot a,$$

$$B_2 = r^{2t} \cdot a,$$

$$B_3 = r^{3t} \cdot a,$$

და ზოგადად

$$B_k = r^{kt} \cdot a.$$

ჩავთვალოთ, რომ დიდი  $k$ -თვის  $B_k$  - მუდმივი  $L$ -ის ტოლი რიცხვია:  $B_k = L$ , მაშინ (2.3.12)-დან მივიღებთ

$$L - r^t \cdot L = r^t \cdot n, \text{ აქედან } L = \frac{r^t \cdot n}{1 - r^t}.$$

(2.3.11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაწეროთ ასე:

$$B_k = r^{kt} a + \frac{r^t \cdot n}{1 - r^t}$$

თუ დავუშვებთ, რომ არაერთგვაროვანი (2.3.11) განტოლებისათვის, როცა  $k = 0$ ,  $B_0 = 0$ , მივიღებთ

$$0 = a + \frac{r^t \cdot n}{1 - r^t}, \text{ აქედან } a = -\frac{r^t \cdot n}{1 - r^t}.$$

ამგვარად,  $B_k = r^{kt} \left( -\frac{r^t \cdot n}{1 - r^t} \right) + \frac{r^t \cdot n}{1 - r^t}$ , ანუ

$$B_k = \frac{r^t n (1 - r^{kt})}{1 - r^t}. \quad (2.3.13)$$

შედეგად, თუ (2.3.13) ჩავსვამთ (2.3.10)-ში

$$A_k = n + B_k = n + \frac{r^t n (1 - r^{kt})}{1 - r^t} = \frac{n(1 - r^{(k+1)t})}{1 - r^t}. \quad 2.3.14$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$B_k = \frac{r^t n (1 - r^{kt})}{1 - r^t} \text{ და } A_k = \frac{n(1 - r^{(k+1)t})}{1 - r^t}.$$

$k$ -ს ზრდასთან ერთად  $r^{kt} \rightarrow 0$  და  $r^{(k+1)t} \rightarrow 0$ , რადგანაც  $0 < r < 1$ . შესაბამისად  $B_k \rightarrow B$  და  $A_k \rightarrow A$ , რომლებიც მოიცემათ ტოლობებით:

$$B = \frac{r^t n}{1 - r^t} \text{ და } A = \frac{n}{1 - r^t}.$$

დავუშვათ, ინექციის წინ, დროის რაღაც მომენტში ორგანიზმში წამლის რაოდენობა აღწევს  $B$ -ს მნიშვნელობას. მაშინ, უცბად, ინექციის შემდეგ ორგანიზმში იქნება

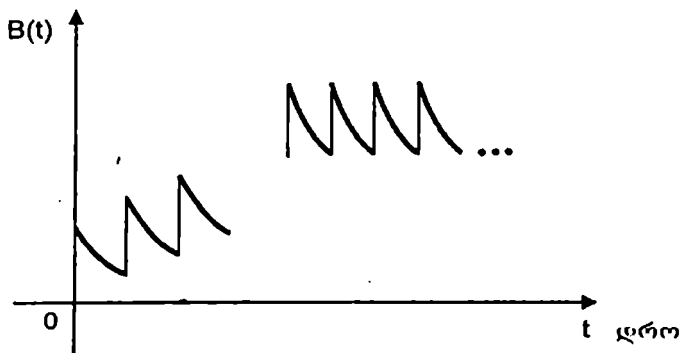
$$n + B = n + \frac{r^t n}{1 - r^t} = \frac{n}{1 - r^t} = A \text{ ერთეული წამალი.}$$

შემდგომში ინექციის წინ ( $t$  საათის შემდეგ) ორგანიზმში იქნება

$$r^t A = \frac{r^t n}{1-r^t} = B \text{ ერთეული წამალი.}$$

#### 4. რეალური სამყარო.

მიღებულ შედეგებს გრაფიკულად აქვს შემდეგი სახე:



ნახ.2.3.1

ეს ნიშნავს, რომ დიდი ალბათობით ამ წამლის მიმართ წარმოიშობა იმუნიტეტი.

#### 2.3.4. გლუკოზით შიგავენური კვების მოდელი

გლუკოზის შეყვანა სისხლის მამოძრავებელ სისტემაში მკურნალობის მნიშვნელოვანი პროცედურაა. ამ პროცესის შესასწავლად  $\tau = \tau(t)$ -თი აღვნიშნოთ დროის  $t$  მომენტში პაციენტის სისხლში გლუკოზის რაოდენობა. ვთქვათ, გლუკოზა შეყავთ სისხლში  $c$  (გრ/წთ) სიჩქარით. ამასთანავე გლუკოზა იხსნება და სისხლის მოძრაობის სისტემას შორდება სიჩქარით, რომელიც გლუკოზის რაოდენობის პროპორციულია [14, 34].

ვთქვათ,  $c_1$  - სიჩქარეა, რითაც გლუკოზა შორდება სისხლის მამოძრავებელ სისტემას და  $\tau(0)$  - პაციენტის სისხლში გლუკოზის საწყისი რაოდენობაა, მაშინ ჭეშმარიტი იქნება ბალანსური განტოლება



$$\tau(t) = \tau(0) + ct - c_1 t, \quad (2.3.15)$$

გაეწარმოებთ რა ამ ტოლობას, გვექნება

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = c - c_1,$$

მაგრამ დაშვების თანახმად  $c_1 = k\tau(t)$ , სადაც  $k$  მუდმივია.  
ამგვარად, გვაქვს:

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = c - k\tau(t),$$

ანუ

$$\frac{d\tau(t)}{dt} + k\tau(t) = c. \quad (2.3.16)$$

(2.3.16) არის დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელის აღმწერი განტოლება.

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. (2.3.16) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\begin{aligned} \tau &= e^{-\int k dt} \left[ C + \int c e^{\int k dt} dt \right] = e^{-\int k dt} \left[ C + c \int e^{kt} dt \right] = \\ &= e^{-kt} \left[ C + \frac{c}{k} e^{kt} \right] = C \cdot e^{-kt} + \frac{c}{k}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

მუდმივი  $C$  შეიძლება გამოვსახოთ სისხლში გლუკოზის საწყისი  $\tau(0)$  რაოდენობით, როცა  $t = 0$ . (2.3.17)-დან ვღებულობთ

$$\tau(0) = C + \frac{c}{k}, \text{ აქედან}$$

$$C = \tau(0) - \frac{c}{k}. \quad (2.3.18)$$

(2.3.16)-ის ერთადერთი ამონახსნი საბოლოოდ ღებულობს სახეს:

$$\tau(t) = \frac{c}{k} + \left[ \tau(0) - \frac{c}{k} \right] e^{-kt}. \quad (2.3.19)$$

$t$ -ს ზრდასთან ერთად სიდიდე  $\tau(t)$  უახლოვდება  $\frac{c}{k}$  ზღვარს. ეს არის სისხლში გლუკოზის წონასწორული რაოდენობა.

## §2.4. ინფექციური დაავადების მათემატიკური მოდელი

თანამედროვე ეპოქაში კლინიციკებისა და იმუნოლოგების მიერ დაგროვილია უზარმაზარი მასალა სხვადასხვა ინფექციური ავადმყოფობების მიმდინარეობაზე დაკვირვებათა შესახებ, რომელიც ეხება სხვადასხვა ღონეზე ანტიგენებისა და ანტისხეულების ურთიერთობათა მექანიზმს. ეს შედეგები იძლევა იმუნური პროცესების მათემატიკური მოდელების აგების საშუალებას [66].

ამ მიმართულებით ერთ-ერთ პირველ მოდელად შეიძლება ჩაითვალოს (Hege, Cole), რომელიც აღწერს პლაზმური უჯრედების რაოდენობაზე დამოკიდებული ცირკულირებადი ანტისხეულების რაოდენობის ცვლილებას.

1975 წელს გ.ი.მარჩუკმა ააგო ინფექციური დაავადების მათემატიკური მოდელი (როგორც აღნიშნული იყო §2.3-ში), რომელიც წარმოადგენს ჩვეულებრივი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემას დაგვიანებული არგუმენტით. ანტიგენ-ანტისხეულის რეაქციის გარდა ეს მოდელი აღწერს ანტიგენით "ორგანიზმის" დაზიანების ზემოქმედებას იმუნური პროცესის დინამიკაზე. მოდელის ხარისხობრივი კვლევა განახორციელებს ასანჩეკოვმა და ბელიხმა.

ინფექციური დაავადებების მიმდინარეობა იმდენად რთული პროცესია, რომ ჩვენს მიერ შემოთავაზებული გ.ი.მარჩუკის მოდელი ითვლება ინფექციური დაავადების მარტივ მოდელად. თუმცა ამ სახითაც, ის საშუალებას გვაძლევს დავაკავშიროთ ერთმანეთს ინფექციური დაავადების დინამიკისათვის მნიშვნელოვანი სხვადასხვა ფაქტორი, რომელიც სასარგებლო იქნება ავადმყოფობის მიმდინარეობის ზოგადი სურათის შესასწავლად და დაკვირვების შედეგად მიღებული ზოგიერთი შედეგის ასახსნელად.

სანამ შევუდგებოდეთ მათემატიკური მოდელის აგებას, უნდა აღნიშნოთ, რომ §2.3-ში განხილული მოდელები წარმოადგენენ წინამდებარე მოდელის გამარტივებულ ვარიანტებს. ჩვენი ხედვა იყო, იმუნოლოგიის აღნიშნული ტიპის მათემატიკური მოდელები მიგვეწოდებინა პრინციპით: მარტივიდან რთულისაკენ.

მათემატიკური მოდელი აგებული იქნება იმუნურ პასუხში მონაწილე ყოველი კომპონენტისათვის ბალანსური თანაფარდობის საფუძველზე. ამ შემთხვევაში პირველ ხაზზე გამოდის ორგანიზმის

დაცვითი რეაქციის მიმდინარეობის ძირითადი კანონზომიერებები. მოდელის აგების დროს ჩვენ ვუშვებთ, რომ ორგანიზმს ასეთი დაცვითი კომპონენტები გააჩნია. მათ ჩვენ ანტისხეულებს ვუწოდებთ. ასევე ვუშვებთ, რომ ორგანიზმს გააჩნია მაკროფაგების საკმაო რესურსი, რომელიც ახდენს იმუნური რეაქციის პროდუქტების უტილიზებას, ასევე სხვა არასპეციური ფაქტორებისა, რომლებიც აუცილებელია იმუნური სისტემის ფუნქციონირებისათვის. ამ მხრივ შემოვიფარგლებით სამი კომპონენტის განხილვით: ანტიგენი, ანტისხეული და პლაზმური უჯრედები, რომლებიც აწარმოებენ ანტისხეულებს. ანტიგენების როლში აქ იგულისხმება ან პათოგენური ბაქტერიები, ან ვირუსები.

უნდა აღინიშნოს, რომ ავადმყოფობის მიმდინარეობის დროს დიდი მნიშვნელობა აქვს იმ ორგანოს დაზიანების ხარისხს, რომელსაც უტყვენ ანტიგენები, რადგანაც მას შედეგად იმუნური სისტემის აქტივობის დაქვეითებად შეიძლება მიყვარათ. ყოველივე ეს, რასაკვირველია, მათემატიკურ მოდელში უნდა იყოს ასახული.

### 1. ინფექციური დაავადების მათემატიკური მოდელის აგება

დავუშვათ, რომ ინფექციური დაავადების ძირითადი მოქმედი ფაქტორებია შემდეგი სიდიდეები [66]:

1) გამრავლებადი პათოგენური ანტიგენების კონცენტრაცია  $V(t)$ .

2) ანტისხეულების კონცენტრაცია  $F(t)$ . ანტისხეულების ქვეშ გვესმის იმუნური სისტემის სუბსტრატები, რომლებიც ანტიგენების უნებელყოფას ახდენენ (იმუნოგლობულინი, უჯრედის რეცეპტორები).

3) პლაზმური უჯრედების კონცენტრაცია  $C(t)$ . ეს ანტისხეულების მატარებელი პოპულაციაა.

4) დაზიანებული ორგანოს ფარდობითი მახასიათებელი  $m(t)$ .

მოდელის პირველი განტოლება ორგანიზმში ანტიგენების ცვლილებას აღწერს:

$$dV = \beta Vdt - \gamma FVdt \quad (2.4.1)$$

$dV$  არის ანტიგენების ნაზრდი დროის  $dt$  შუალედში გამრავლების ხარჯზე. ბუნებრივია, ის პროპორციულია  $V$ -სი,  $\beta$  კი არის ანტიგენების გამრავლების კოეფიციენტი.

$\gamma FVdt$  არის ანტიგენების რაოდენობა, რომელთა ნეიტრალიზება ხდება  $F$  ანტისხეულების მიერ დროის  $dt$  შუალედში.  $\gamma$  - არის

კოეფიციენტი, რომელიც ანტიგენებისა და ანტისხეულების შეხვედრის დროს ანტიგენების ნეიტრალიზების ალბათობის მაჩვენებელია. თუ (2.4.1) თანაფარდობას გაყოფთ  $dt$ -ზე, მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V. \quad (2.4.2)$$

მეორე განტოლებამ უნდა აღწეროს პლაზმური უჯრედების ზრდა. ამ მიზნით გამოვიყენოთ პლაზმური უჯრედების კასკადური პროულაციის ფორმირების უმარტივესი ჰიპოთეზა, რომლის თანახმად გვექნება თანაფარდობა, რომელიც აღწერს პლაზმური უჯრედების ცვლილებას ჯანმრთელ ორგანიზმში პლაზმური უჯრედების მუდმივ  $C^*$  რაოდენობასთან მიმართებაში:

$$d(C - C^*) = dC = Q(t - \tau)dt, \quad (2.4.3)$$

$$Q(t) = \alpha FV. \quad (2.4.4)$$

უფრო სრულ განტოლებას ექნება სახე:

$$dC = \alpha F(t - \tau)V(t - \tau)dt - \mu_c(C - C^*)dt. \quad (2.4.5)$$

(2.4.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი აღწერს პლაზმური უჯრედების გენერაციას,  $\tau$  - დროა, რომლის დროსაც ზდება პლაზმური უჯრედების კასკადის ფორმირება,  $\alpha$  - კოეფიციენტი, რომელიც ითვალისწინებს ანტიგენი - ანტისხეულის შეხვედრის ალბათობას, კასკადური რეაქციის აღგზნებას და ახალი უჯრედების რიცხვს. განტოლების მეორე წევრი კი აღწერს პლაზმური უჯრედების რაოდენობის შემცირებას უჯრედების სიბერის გამო,  $\mu_c$  - კოეფიციენტი, რომელიც მათი სიცოცხლის ხანგრძლივობის შებრუნებული სიდიდეა. (2.4.5) ტოლობის  $dt$ -ზე გაყოფით ვლებულობთ განტოლებას

$$\frac{dC}{dt} = \alpha F(t - \tau)V(t - \tau) - \mu_c(C - C^*). \quad (2.4.6)$$

მესამე განტოლების მისაღებად ვიანგარიშოთ ანტისხეულების რაოდენობის ბალანსი, რომელიც შემდეგი თანაფარდობით გამოისახება:

$$dF = \rho Cdt - \eta \gamma FVdt - \mu_f Fdt. \quad (2.4.7)$$

(2.4.7) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი  $\rho Cdt$  აღწერს ანტისხეულების გენერაციას პლაზმური უჯრედების მიერ დროის  $dt$  შუალედში,  $\rho$  - ერთი პლაზმური უჯრედის მიერ

ანტისხეულის წარმოქმნის სიჩქარეა. მეორე წვერი  $\eta FVdt$  დროის  $dt$  შუალედში ანტისხეულების შემცირების რაოდენობაა მათი ანტიგენებთან ურთიერთობის გამო. მართლაც, (2.4.2) ტოლობის მიღების დროს აღნიშნული იყო, რომ  $dt$  დროში ნეიტრალიზებული ანტიგენების რაოდენობა იყო  $\gamma FVdt$ . თუ ერთი ანტიგენის ნეიტრალიზებისათვის საჭიროა  $\eta$  ანტისხეული, მაშინ სწორად ვღებულობთ აღნიშნულ გამოსახულებას. მესამე წვერი  $\mu_r Fdt$  კი აღწერს ანტისხეულის პოპულაციის შემცირებას სიბერის გამო, სადაც  $\mu_r$  - კოეფიციენტი, რომელიც ანტისხეულების დაშლის დროის უკუპროპორციულია. (2.4.7)-ის  $dt$ -ზე გაყოფით ვღებულობთ განტოლებას:

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - (\eta\gamma V + \mu_r)F. \quad (2.4.8)$$

შედგენილი განტოლებები არ ითვალისწინებენ ავადმყოფობის მიმდინარეობის დროს ორგანიზმის სიცოცხლისუნარიანობის დაქვეითებას, რაც დაკავშირებულია იმ ორგანოების აქტივობის დაქვეითებასთან, რომლებიც უზრუნველყოფენ იმუნური ნივთიერებების (ლეიკოციდები, ლიმფოციტები, ანტისხეულები და სხვა) მიწოდებას, რომლებიც აუცილებელია ანტისხეულების წინააღმდეგ საბრძოლველად. მივიღოთ პიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ასეთი ორგანოების წარმოების უნარიანობა დაკავშირებულია "მიზანი-ორგანოს" დაზიანების დონეზე. ამ მიზნით შემოვიტანოთ განტოლება "მიზანი-ორგანოს" დაზიანების ფარდობითი დახასიათებისათვის. ვთქვათ,  $M$  - ჯანმრთელი ორგანოს მახასიათებელია (მასა ან ფართობი), ხოლო  $M'$  - დაზიანებული ორგანოს ჯანმრთელი ნაწილის შესაბამისი მახასიათებელი. შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$m \equiv 1 - \frac{M'}{M} \quad (2.4.9)$$

მას ვუწოდოთ "მიზანი-ორგანოს" დაზიანების ფარდობითი მახასიათებელი.

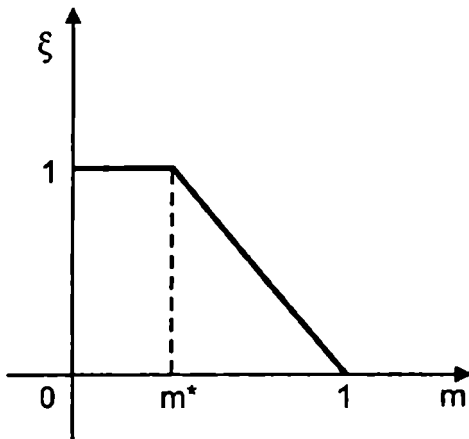
ცხადია დაუზიანებელი ორგანოსათვის ის ნულის ტოლია, ხოლო მთლიანად დაზიანებულისთვის - ერთის. ამ პროცესის მახასიათებლად შემოვიტანოთ მეოთხე განტოლება:

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m, \quad (2.4.10)$$

აქ  $\sigma V$  - ახასიათებს ორგანოს დაზიანების ხარისხს, რადგანაც დროის  $dt$  შუალედში დაზიანებული ორგანოს ფარდობითი სიდიდე ანტიგენების რაოდენობის პროპორციულია,  $\sigma$  - არის რაიმე მუდმივა, რომელიც კონკრეტულ დაავადებას ახასიათებს. ამ მახასიათებლის შემცირება ხდება ორგანიზმის შემოქმედების აღდგენის ხარჯზე. ეს წვერი დამოკიდებულია  $m$ -ზე პროპორციულობის კოეფიციენტით  $\mu_m$ , რომელიც ორგანოს აღდგენის პერიოდის სიდიდის შებრუნებულია  $e$ -ჯერ.

ცხადია, რომ სასიცოცხლო ორგანოების ძლიერი დაზიანება იწვევს ანტისხეულების გამოშვების დაქვეითებას. ეს კი ორგანიზმისათვის საბედისწერაა და მას მიყვართ ლეტალურ დასასრულამდე.

სასიცოცხლო ორგანიზმის დაზიანების ფაქტორი შეიძლება გავითვალისწინოთ ამ მოდელის (2.4.6) განტოლებაში, თუ  $\alpha$  კოეფიციენტს შევცვლით  $\alpha\xi(m)$  ნამრავლით.  $\xi(m)$  ფუნქციის ტიპური სქემა მოცემულია ნახ.2.4.1-ზე.



ნახ.2.4.1

$0 \leq m \leq m^*$  ინტერვალში  $\xi(m) = 1$ . ეს ნიშნავს, რომ იმუნური ორგანოების შრომისუნარიანობა ამ ინტერვალში არ არის დამოკიდებული ავადმყოფობის სიმძიმეზე. შემდგომ, როცა  $m^* \leq m \leq 1$ , მათი შრომისუნარიანობა მკვეთრად ეცემა, რაც შეესაბამება გრაფიკის

წრფივ ნაწილს ამ ინტერვალზე. ბუნებრივია, რომ რეალურ პირობებში  $\xi(m)$  ფუნქციის გრაფიკს შეიძლება ჰქონდეს უფრო რთული ფორმა. სხვადასხვა ავადმყოფობის დროს  $m^*$ -ის მნიშვნელობა სხვადასხვაა და  $(m^*, 1)$  შუალედში გრაფიკი განსხვავებული იქნება.

ამგვარად, მივიღეთ ჩვეულებრივი არაწრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V, \\ \frac{dC}{dt} = \xi(m)\alpha V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_c(C - C^*), \\ \frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F, \\ \frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

(2.4.11) სისტემას დაუმატოთ საწყისი მონაცემები  $t = t_0$ -თვის.

ჩვეულებრივ ამ ტიპის განტოლებებისათვის, დაგვიანებული ცვლადებით, საწყისი პირობები მოიცემა  $[t^0 - \tau, t^0]$  შუალედში. თუმცა აღწერილი პროცესის ბიოლოგიური შინაარსიდან გამომდინარე ინფექციის მიღების  $t_0$  მომენტამდე ორგანიზმში ვირუსები არ იყო:  $V(t) \equiv 0$ , როცა  $t < t_0$ , ამიტომ საწყისი პირობები შეიძლება მოცემული იყოს  $t_0$  წერტილში. ამიტომ

$$\begin{aligned} V(t_0) &= V_0, C(t_0) = C_0, \\ F(t_0) &= F_0, m(t_0) = m_0. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

ამგვარად, (2.4.11) სისტემას (2.4.12) საწყისი პირობებით ვუწოდოთ ინფექციური დაავადების მათემატიკური მოდელი.

აღსანიშნავია, რომ, როცა ორგანიზმში ვირუსები არ არის  $C(t) = C^* > 0$ , ე.ი.  $C^*$  არის ჯანმრთელ ორგანიზმში იმუნური უჯრედების ნორმალური რაოდენობა. თუ ასეთი უჯრედები ორგანიზმში არ არის, ე.ი.  $C^* = 0$ , მაშინ ორგანიზმში არის ტოლერანტული (არააღქმადი) მოცემული ანტიგენის მიმართ. ჩავთვალოთ, რომ ორგანიზმში არის ასეთი უჯრედების არანულოვანი რაოდენობა  $C^*$  თავისი  $F^*$  რეცეპტორებით, რომლებსაც უნარი აქვთ გამოიწვიონ იმუნური რეაქცია.

შენიშვნა 1. განსაზღვრების თანახმად  $0 \leq m(t) \leq 1$ . თუ ორგანიზმი მთლიანად არის დაზიანებული, მაშინ  $\frac{dm}{dt} = 0$ , როცა  $m(t) = 1$  ( $t > t_0$ ).

შენიშვნა 2. (2.4.11)-ში საწყის მომენტად მივიღოთ  $t_0 = 0$  და ყველა საწყისი პირობა არაუარყოფითად, ხოლო მოდელის ყველა პარამეტრი მუდმივებად და დადებით სიდიდეებად.

## 2. დაავადების მოდელის ხარისხობრივი ანალიზი

(2.4.11) განტოლებათა სისტემა (2.4.12) საწყისი პირობებით აღწერს პათოგენური ინფექციის განვითარების დინამიკას იმუნური პასუხის ფონზე [66]. ეუშვებთ, რომ სისტემაში შემაჯავალი ყველა მუდმივა არაუარყოფითია, რაც მათი ბიოლოგიური შინაარსით არის განპირობებული. უწყვეტი და დადებითია ფუნქცია  $\xi(m)$ . შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ  $t = t_0 = 0$ -თვის საწყისი პირობით:

$$V_0 \geq 0, C_0 \geq 0, F_0 \geq 0, m_0 \geq 0, \quad (2.4.13)$$

(2.4.11), (2.4.12) ამოცანის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია ნებისმიერი  $t \geq 0$ -თვის.

ასევე მტკიცდება, რომ ამონახსნი უწყვეტია და არაუარყოფითი:

$$V(t) \geq 0, C(t) \geq 0, F(t) \geq 0, m(t) \geq 0. \quad (2.4.14)$$

### სტაციონარული ამონახსნი

(2.4.11) სისტემის სტაციონარული ამონახსნის საპოვნელად ყველა წარმოებული გავუტოლოთ ნულს, მაშინ გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} (\beta - \gamma F)V = 0, \\ \xi(m)\alpha VF - \mu_c(C - C^*) = 0, \\ \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F = 0, \\ \sigma V - \mu_m m = 0. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

სტაციონარულ შემთხვევაში  $V$  და  $F$  სიდიდეების დროისაგან დამოუკიდებლობის გამო  $V(t - \tau) = V = \text{const}$ ,  $F(t - \tau) = F = \text{const}$ .  $C^*$  და  $F^*$  სიდიდეები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ტოლობით:

$$C^* = \mu_f \frac{F^*}{\rho},$$



სადაც  $C^*$  და  $F^*$  არის  $C$  და  $F$ -ის მნიშვნელობები ჯანმრთელი ადამიანისათვის, როცა  $V=0$ . ერთ-ერთი სტაციონარული ამონახსნია ტრივიალური, რომელიც აღწერს ჯანმრთელი ადამიანის მდგომარეობას:

$$V = 0, C = C^*, F = F^* = \rho \frac{C^*}{\mu_f}, m = 0. \quad (2.4.16)$$

აქ ანტიგენების პოპულაცია და ორგანოს დაზიანებული მას ნულის ტოლია, ხოლო პლაზმური უჯრედების  $C$  რაოდენობა და ანტისხეულების  $F$  რაოდენობა შეესაბამება ჯანმრთელი ადამიანის იმუნურ სტატუსს.

ეს მდგომარეობა არის ასიმპტოტურად მდგრადი, როცა

$$\beta < \gamma F^*. \quad (2.4.17)$$

მდგრადობის საჩვენებლად განვიხილოთ (2.4.16) წონასწორობის მდგომარეობიდან უცნობი ფუნქციების მცირე შეშფოთებები

$$V = V', C = C^* + C', F = F^* + F', m = m'. \quad (2.4.18)$$

ეს მნიშვნელობები უნდა ჩაისვას (2.4.11) სისტემაში და ჩავთვლით რა  $V'$ ,  $C'$ ,  $F'$  და  $m'$  მცირეებად, უგულვებელყოთ მეორე რივის მცირე სიდიდეები. შედეგად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} \frac{dV'}{dt} - (\beta - \gamma F^*)V' = 0, \\ \frac{dC'}{dt} + \mu_c C' = \alpha F^* V'(t - \tau), \\ \frac{dF'}{dt} + \mu_f F' = \rho C' - \eta \gamma F^* V', \\ \frac{dm'}{dt} + \mu_m m' = \sigma V'. \end{cases} \quad (2.4.19)$$

ამ სისტემას ამოვხსნით შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$V' = \varepsilon_1, C' = \varepsilon_2, F' = \varepsilon_3, m' = \varepsilon_4, \text{ როცა } t = 0. \quad (2.4.20)$$

შეიძლება ჩვენება იმისა, რომ  $V'$ ,  $C'$ ,  $F'$  და  $m'$ -თვის (2.4.19)-დან მიღებული მნიშვნელობები ანუ (2.4.16) სტაციონარული ამონახსნის ყველა მცირე შეშფოთება (2.4.17) პირობისათვის დროთა განმავლობაში მიისწრაფის ნულისაკენ, რაც მოცემული ამონახსნის ასიმპტოტურ მდგრადობას ნიშნავს.

შემდგომ გვიანტერესებს ჯანმრთელი ორგანიზმის დაბინძურება ანტიგენის მცირე დოზით  $V_0 = \varepsilon_1$ . დადგენილია, რომ შეიძლება

დაბინძურების დონის "სიძვირის" შეფასება, რომელსაც არ მივყავართ მდგრადობის დარღვევაში.

ასეთი დონა აკმაყოფილებს უტოლობას

$$0 < V_0 < \frac{\mu_f(\gamma F^* - \beta)}{\beta \eta \gamma} \equiv V^*. \quad (2.4.21)$$

$V^*$  სიდიდეს ეუწოდოთ იმუნური ბარიერი. ვიტყვით, რომ იმუნური ბარიერი გადალახულია, თუ დაბინძურების დონა  $V_0$  აკმაყოფილებს პირობას  $V_0 > V^*$ , წინააღმდეგ შემთხვევაში არა. ამას შეიძლება მიეცეს შემდეგი ბიოლოგიური ინტერპრეტაცია: თუ ანტიგენის მცირე დონით ჯანმრთელი ორგანიზმის ინფიცირების იმუნური ბარიერი ვერ გადაილახა, მაშინ დაბინძურების დონის მიუხედავად, ავადმყოფობა არ განვითარდება, ე.ი. დროთა განმავლობაში ანტიგენების რაოდენობა ორგანიზმში იკლებს, მისწრაფის ნულისაკენ, ხოლო დაზიანებული ორგანო აღდგება. გარდა ამისა  $C^*$ -ის გაზრდა, ანუ ჯანმრთელ ორგანიზმში იმუნური უჯრულების დონის გადიდება (მაგ., მეხსიერების უჯრულების რაოდენობის ხარჯზე ვაკცინაციის დროს), ამაღლებს იმუნურ ბარიერს (რადგან  $F^* = \rho \frac{C^*}{\mu_f}$ ), და შესაბამისად, არის

პროფილაქტიკის ეფექტური საშუალება და, შესაძლებელია, ავადმყოფობის მკურნალობა.

ახლა შევისწავლოთ სტაციონარული ამონახსნი, რომელიც ავადმყოფობის ქრონიკული პროცესის იმიტაციაა. ეს პროცესი ასევე აღიწერება (2.4.15) სისტემით, როცა  $V > 0$  და  $\xi(m) \equiv 1$ . (2.4.15) სისტემა უშვებს ასეთ ამონახსნს:

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{\mu_c \mu_f (\beta - \gamma F^*)}{\beta (\alpha \rho - \mu_c \eta \gamma)}, \\ \bar{C} = \frac{\alpha \mu_f - \eta \mu_c \gamma^2 C^*}{\gamma (\alpha \rho - \mu_c \eta \gamma)}, \\ \bar{F} = \frac{\beta}{\gamma}, \\ \bar{m} = \frac{\sigma \bar{V}}{\mu_m}. \end{cases} \quad (2.4.22)$$

ზევიდან ხაზი უჩვენებს, რომ საუბარია არატრივიალურ სტაციონარულ ამონახსნზე. (2.4.22) ამონახსნი მიღებულია დაშვებით  $\alpha \neq \mu \eta \gamma$ . მტკიცდება (2.4.22) სტაციონარული ამონახსნი მდგრადია. ფესვების მდგრადობის დადგენისას მიღებული პირობების ბიოლოგიური ინტერპრეტაცია შეიძლება იყოს შემდეგი: ჯერ ერთი, როგორი ძლიერი მგრძობელობაც არ უნდა ჰქონდეს იმუნურ სისტემას, შეიძლება ორგანიზმში მდგრადად არსებობდეს ანტიგენების არანულოვანი მცირე პოპულაცია. მეორეც, ანტიგენებს, რომლებიც იწვევენ ავადმყოფობის მდგრად, ქრონიკულ ფორმას, საკმაოდ მაღალი იმუნური სისტემის მგრძობელობით, ახასიათებთ მოღუნებული დინამიკა.

### 3. ავადმყოფობის დინამიკის შესაქლო შორებები და გათი კლასიფიკაცია

სანამ შევუდგებოდეთ ამონახსნების კლასიფიკაციას, განვიხილოთ ორი ზღვრული შემთხვევა, რომლებიც  $V(t)$ -ს ამონახსნისათვის წარმოადგენს საზღვრებს.

დავუშვათ, რომ ორგანიზმში არ წარმოქმნის მოცემული სპეციფიკის ანტისხეულებს, ე.ი.  $F(t) = F_0 = 0$  ნებისმიერი  $t \geq 0$  და  $\rho \equiv 0$ -თვის. ამ შემთხვევაში  $V(t)$ -თვის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{dV}{dt} = \beta V.$$

ამ განტოლების ამონახსნია

$$V(t) = V_0 e^{\beta t},$$

სადაც  $V_0$  - ანტიგენების საწყისი კონცენტრაციაა (ინფიცირების დროს) დროის  $t = 0$  მომენტში. რაც შეეხება ორგანოს დაზიანების დინამიკას, ის აღიწერება განტოლებით

$$\frac{dm}{dt} + \mu_m m = \sigma V_0 e^{\beta t},$$

ამასთან, როცა  $t = 0$  და  $m = 0$ , ამ განტოლების ერთადერთი ამონახსნია

$$m = \frac{\sigma V_0}{\beta + \mu_m} (e^{\beta t} - e^{-\mu_m t}).$$

ცხადია, რომ როცა დაზიანებულ ორგანოში აღდგენა არ ხდება, ანუ როცა  $\mu_m = 0$ ,

$$m = \frac{\sigma V_0}{\beta} (e^{\beta t} - 1)$$

და ნებისმიერი  $t \geq 0$ -თვის

$$V(t) = V_0 e^{\beta t}, \quad F = 0, \quad m = \frac{\sigma V_0}{\beta} (e^{\beta t} - 1) \quad (2.4.23)$$

ცხადია, ასეთი ამონახსნი შეესაბამება ავადმყოფობის მიმდინარეობას ლეტალური ფინალით, რადგანაც ანტიგენების ზრდის ფაქტორს არაფერი ეწინააღმდეგება.

განხილული შემთხვევა თავისი შინაარსით არის ზღვრული. პრაქტიკაში ასეთი შემთხვევა იშვიათია. მსგავს სიტუაციაში შეიძლება აღმოჩნდეს ასაკოვანი ადამიანი, რომლის იმუნური სისტემა არ რეაგირებს ანტიგენებზე, ან ისეთი ადამიანები, რომლებსაც აქვთ შეძენილი ან თანდაყოლილი იმუნური დეფექტი.

მეორე ზღვრული შემთხვევაა, როდესაც ხდება ძლიერი იმუნური პასუხი, როდესაც ორგანიზმში ანტისხეულების რაოდენობა ისეთია, რომ ანტიგენებს სპობს. ამ შემთხვევაში  $V(t)$ -თვის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V,$$

სადაც  $\beta \ll \gamma F$ . თუ დავუშვებთ, რომ ინფიცირების დოზა  $V_0$  მცირეა, შეიძლება  $F$  სიდიდე ჩაითვალოს მუდმივად, რომელიც განსაზღვრავს ორგანიზმში ანტისხეულების ნორმალურ დონეს  $F^*$ , მაშინ უკანასკნელი განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F^*)V,$$

მის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

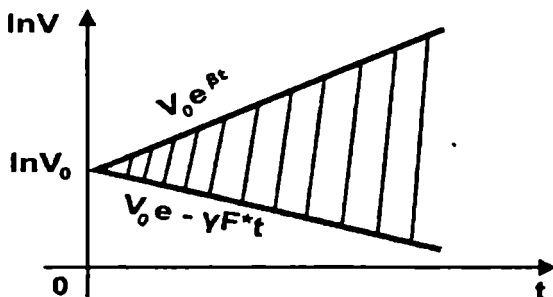
$$V = V_0 e^{-(\gamma F^* - \beta)t}.$$

ეს ნიშნავს, რომ ანტიგენების პოპულაცია ექსპონენციალურად მცირდება. როცა  $\beta=0$ , მაშინ

$$V = V_0 e^{-\gamma F^* t}.$$

ამგვარად, მიღებული ორი ზღვრული ამონახსნი შეესაბამება ლეტალურ დასასრულსა და მაღალ იმუნურ ბარიერს. მოდელის კოეფიციენტების მოცემული მნიშვნელობებისათვის დაავადების

ყველანაირი დინამიკის სიმრავლე მოთავსდება სიბრტყის დაშტრიხულ არეში, რომელიც ნაჩვენებია ნახაზზე 2.4.2.



ნახ.2.4.2

შემდგომ განვიხილოთ დაავადების ნაკლებად ტრივიალური დინამიკა.

დავუშვათ, რომ დროის  $t = 0$  მომენტში ხდება ჯანმრთელი ორგანიზმის დაბინძურება ანტიგენების საწყისი დოზით  $V_0$  და სრულდება პირობა  $\beta > \gamma F^*$ .

ამ შემთხვევაში (2.4.11) მოდელის საწყის პირობებს აქვს სახე:

$$V(0) = V_0, C(0) = C^*, F(0) = F^*, m(0) = 0.$$

როცა  $t > 0$ , ანტიგენების კონცენტრაცია იწყებს ზრდას, რადგანაც  $\beta > \gamma F^*$  ძალით  $t = 0$  წერტილის მიდამოში წარმოებული  $\frac{dV}{dt} > 0$ .

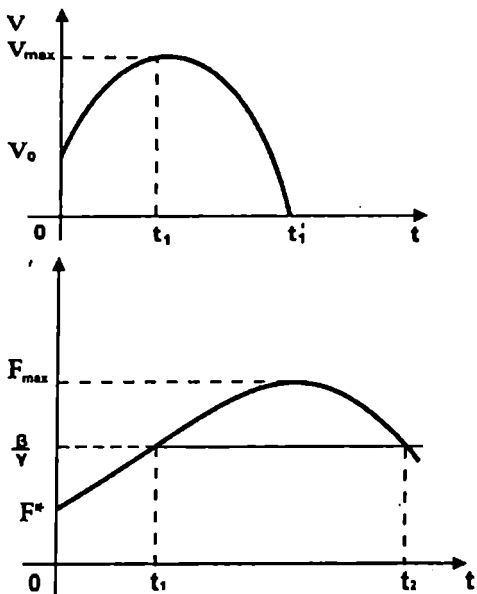
როცა  $t = t_1 > 0$ ,  $V(t)$  აღწევს თავის მაქსიმუმს, ე.ი.  $V(t_1) = V_{\max}$ , ამასთან  $F(t_1) = \frac{\beta}{\gamma}$ . როცა  $t > t_1$  მოდელის შინაარსიდან გამომდინარე

$F(t)$  აღემატება  $\frac{\beta}{\gamma}$  დონეს და  $V(t)$  კლებულობს, სანამ სრულდება

პირობა  $F(t) > \frac{\beta}{\gamma}$ , რადგანაც  $\frac{dV}{dt} < 0$ .

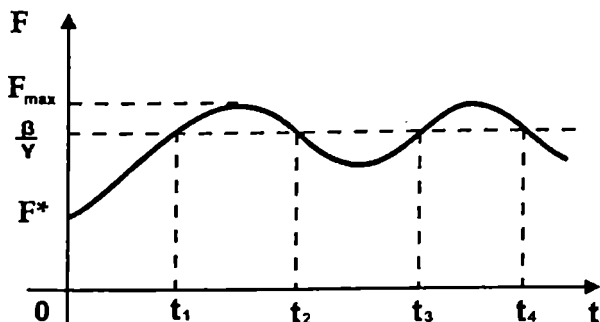
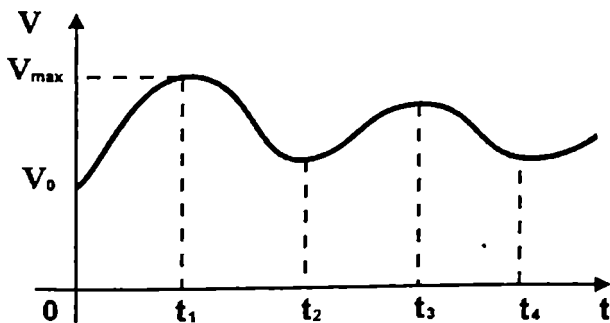
შესაძლებელია ისეთი სიტუაცია, რომ უტოლობა  $F(t) > \frac{\beta}{\gamma}$  სრულდება დროის საკმაოდ დიდ  $(t_1, t_2)$  შუალედში და  $V(t)$  ამ შუალედში კლებულობს (პრაქტიკულად ნულამდე). ეს შემთხვევა

გამოსახულია ნახ.2.4.3-ზე. ამ ტიპის ამონახსნს ვუწოდოთ აკადმყოფობის მწვეავე ფორმა.



ნახ. 2.4.3

თუ  $(t_1, t_2)$  ინტერვალი საკმაოდ ვიწროა, მაშინ  $t = t_2$  წერტილში  $F(t_2) = \frac{\beta}{\gamma}$  და  $V(t)$  აღწევს თავის მინიმუმს  $V_{\min}$ , ისე რომ ვერ ასწრებს მცირე მნიშვნელობების მიღებას, ხოლო როცა  $t > t_2$ ,  $V(t)$  ისევ იწყებს ზრდას, რადგანაც  $\frac{dV}{dt} > 0$ , როცა  $t = t_2 + \varepsilon$ ,  $F(t) < \frac{\beta}{\gamma}$  პირობის გამო, ხოლო  $\varepsilon$  – მცირე სიდიდეა. შემდგომ პროცესი არ იცვლება და მიდის  $V(t)$ -ს ლოკალური მაქსიმუმისა და მინიმუმის ადგილმონაცვლეობა – (ნახ.2.4.4). ამ ტიპის ამონახსნს ვუწოდოთ აკადმყოფობის ქრონიკული ფორმა.



ნახ.2.4.4

ამგვარად,  $\Delta t = t_1' - t$  და  $\Delta T = t_2 - t_1$  ინტერვალებს შორის დამოკიდებულება (ნახ.3) განსაზღვრავს ავადმყოფობის დასასრულს. თუ  $\Delta T > \Delta t$ , მაშინ საქმე გვაქვს ავადმყოფობის მწვავე ფორმასთან. თუ  $\Delta T = \Delta t$ , მაშინ საქმე გვაქვს ავადმყოფობის ქრონიკულ ფორმასთან (ნახ.2.4.4). ცხადია, რაც უფრო დიდი იქნება ანტიისხეულების რაოდენობა  $F_{max}$ , მით მეტი იქნება  $\Delta T = t_2 - t_1$ , და, შესაბამისად, ქრონიკული ფორმის ჩამოყალიბების ალბათობა მცირეა.

### ბიოლოგიური შედეგები

ავადმყოფობის ქრონიკული ფორმა განპირობებულია იმუნური სისტემის არასაკმარისად ეფექტური რეაქციით. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ იმუნური სისტემის სუსტი რეაქციის დროს (მცირე  $\alpha$  კოეფიციენტი,  $\tau$ -ს დიდი ღაგვიანება, ორგანოს მნიშვნელოვანი

დაზიანება), ერთი მხრივ, მაღლდება  $V_{max}$ , მეორეს მხრივ დაბლდება  $F_{max}$ , რის შედეგადაც მცირდება ინტერვალი  $(t_1, t_2)$ .

ამგვარად, (2.4.11) მოდელის ჩარჩოებში ავადმყოფობის შედეგი დამოკიდებულია იმაზე, რომ შეუძლია თუ არა ანტიგენების წარმოებული  $\frac{dV}{dt}$  გახდეს უარყოფითი და რამდენ ხანს არ

შეიცვლის ის ამ ნიშანს. ცხადია, რომ  $\frac{dV}{dt} < 0$ , თუ  $V(t) > 0$  და

$F(t) > \frac{\beta}{\gamma}$ . ჩვენს მოდელში კი  $V(t) \geq 0$  ყოველთვის, ამიტომ ეს

შესაძლებელია.

*შემაჯავებელი 1.*  $\frac{dV}{dt} < 0$  დროის უსასრულოდ დიდ შუალედში. ამ ტიპის ამონახსნს ეწოდება ავადმყოფობის სუბკლინიკური ფორმა.

*შემაჯავებელი 2.*  $\frac{dV}{dt} < 0$  დროის საკმაოდ დიდ  $(t_1, t_2)$  შუალედში. ეს ავადმყოფობის შვევაე ფორმაა (ნახ.2.4.3).

*შემაჯავებელი 3.*  $\frac{dV}{dt} < 0$  დროის საკმაოდ მცირე  $(t_1, t_2)$  შუალედში. ეს ავადმყოფობის ქრონიკული ფორმაა (ნახ.2.4.4).

თუ  $t_1$  წერტილი არ არსებობს, მაშინ ადგილი აქვს

*შემაჯავებელი 4.*  $\frac{dV}{dt} > 0$  დროის უსასრულოდ დიდ შუალედში. ეს შეესაბამება ლეტალურ დასასრულს.



## §2.5. შაქრის დიაბეტის მათემატიკური მოდელი

შაქრის დიაბეტით ცნობილი ავადმყოფობა ფართოდაა გავრცელებული. დიაბეტის დროს ორგანიზმში დარღვეულია გარკვეული პროცესები, რომლებიც დაკავშირებულია შაქრის ამჟავების პროცესებთან, ენერჯის გამომუშავებით.

თუ დარღვეულია შესაბამისი მექანიზმის ფუნქციონირება, რომელიც არეგულირებს შაქრის შემცველობას სისხლში, მაშინ ის იზრდება. ძირითადად გავლენას გომეოსტაზზე ახდენს ინსულინი, რომელიც მონაწილეობს შაქრის მეტაბოლიზმის პროცესებში [47].

### *ძირითადი ცვლადები*

ორი ძირითადი ცვლადი, რომელიც შეიძლება გაიზომოს კლინიკურ პრაქტიკაში არის: შაქრის დონე სისხლში  $x$  და ინსულინის დონე სისხლში  $y$ .

ცოტა ნაკლებ როლს თამაშობს აგრეთვე ორი დამატებითი ცვლადი - საკვების შეყვანა  $z$  და დიაბეტით ავადმყოფებისათვის - ინსულინის შეყვანა  $w$ .

### *მდგომარეობის განტოლება*

1. თუ შაქრის დონე სისხლში მდგრადზე მეტია, მაშინ კუჭქვეშა ჯირკვალი ინსულინს გადატყორცნის სისხლის მამოძრავებელ სისტემაში. ეს მოვლენა შეიძლება აღიწეროს უბან-უბან წრფივი მოდელით

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_1 = \begin{cases} b_1(x - x_0), & \text{როცა } x > x_0, \\ 0, & \text{როცა } x < x_0. \end{cases}$$

2. თვითონ ინსულინის შემცველობა მცირდება რამდენიმე ბიოქიმიური პროცესის გავლენით; ცოცხალ ორგანიზმში ნახევარი თავისუფალი ინსულინისა ინაქტივირდება 10-დან 25 წუთამდე. შესაბამისად, შეიძლება ჩავწეროთ

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_2 = -b_2 y, \quad y \geq 0.$$

3. ინსულინის ნებისმიერი გარეგანი წყარო აღიწერება შესაკრებით, რომელიც შეესაბამება გარეგან ძალას დიფერენციალურ განტოლებაში. ჯანმრთელი ადამიანისათვის ეს შესაკრები იგივეურად ნულის ტოლია. დიაბეტით ავადმყოფებისათვის ეს შესაკრები დროის ფუნქცია იქნება, რომელიც განისაზღვრება ინექციების გრაფიკით.

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_3 = b_3 w(t), \quad b_1, b_2, b_3 > 0.$$

$b_1, b_2, b_3$ -ს შეიძლება დავარქვათ მგრძნობიარობები და ისინი წარმოადგენენ შესაბამისად ინსულინის გრადიენტის მგრძნობიარობებს

$b_1$  - სისხლში შაქრის მაღალ დონეს;

$b_2$  - ინსულინის დონეს;

$b_3$  - ინსულინის შეყვანას.

პირველი ფაქტორის გათვალისწინების ზოგიერთ სირთულეს გამოუსახავთ შემდეგი ფუნქციის მეშვეობით.

$$a) \quad H(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } \xi < 0, \\ 1, & \text{როცა } \xi \geq 0. \end{cases}$$

ამრიგად, ინსულინის დონის ჯამური გრადიენტი განისაზღვრება

$$\frac{dy}{dt} = \left[ \frac{dy}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{dy}{dt} \right]_2 + \left[ \frac{dy}{dt} \right]_3 = b_1(x - x_0)H(x - x_0) - b_2 y + b_3 w(t)$$

შაქრის დონის გრადიენტის განსაზღვრისას გამოყოფენ შემდეგ მდგენელებს:

1. ინსულინის არსებობას მივყავართ შაქრის მეტაბოლიზმისაკენ, რაც ამცირებს მის შემცველობას სისხლში. რაც უფრო მეტია შაქრის შემცველობა სისხლში ან ინსულინის დონე, მით უფრო ჩქარა ხდება დაწვევა.

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right]_1 = -a_1 x(t)y(t).$$

2. შაქრის დონე სისხლში შეიძლება დავარდეს წონასწორულზე უფრო დაბლა (მაგალითად, დიდი ფიზიკური დატვირთვისას, შიმშილობისას). იმისათვის, რომ ავწიოთ ის ნორმალურ დონემდე, უნდა გამოთავისუფლდეს ნახშირწყლების მარაგები ღვიძლიდან. ამრიგად:

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right]_2 = \begin{cases} a_2(x - x_0), & \text{როცა } x < x_0, \\ 0, & \text{როცა } x \geq x_0. \end{cases}$$

3. ადგილი აქვს აგრეთვე შაქრის კონცენტრაციის ბუნებრივ ვარდნას.

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right]_3 = -a_2'(x - x_0)$$

4. სისხლში შაქრის გარეგან წყაროდ შეიძლება ჩაითვალოს მიღებული საკვები, რომელიც აღიწერება დროის ფუნქციით.

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right]_4 = a_3 z(t).$$

$a_1, a_2, a_2', a_3 > 0$  შესაბამისად შაქრის დონის გრადიენტის გრძნობიარობებია:

- ა)  $a_1$  - ინსულინის არსებობაზე;
- ბ)  $a_2$  - სისხლში შაქრის დაბალი დონისაკენ;
- გ)  $a_2'$  - სისხლში შაქრის მაღალი დონისაკენ;
- დ)  $a_3$  - საკვების მიღებისაკენ.

საბოლოოდ სისხლში შაქრის დონის ჯამური გრადიენტი სათვის მივიღებთ:

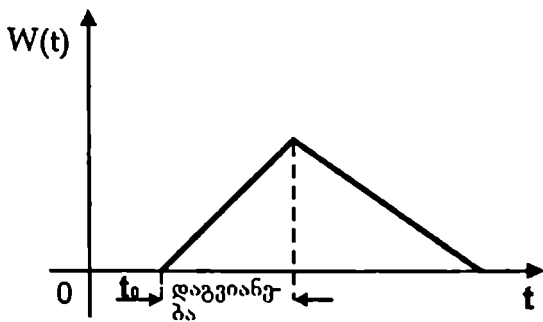
$$\frac{dx}{dt} = -a_1 x(t) y(t) + a_2 (x_0 - x) H(x_0 - x) - a_2' (x - x_0) H(x - x_0) + a_3 z(t)$$

### გარეგანი წყაროები

ნორმალურ მდგომარეობაში სისხლში შაქრის შესვლა დამოკიდებულია საჭმლის მიღებისაგან და არა მისი უშუალო შეყვანისაგან სისხლის მამოძრავებელ სისტემაში. ორგანიზმში საჭმლის მარაგი ივსება პერიოდულად და არა უწყვეტად. გარდა ამისა, შემდგომ ვუშვებთ, რომ გარკვეულ ეტაპზე ეს მარაგი კლებულობს ექსპონენციალურად. მაშინ შესაკრები, რომელიც აღწერს შაქრის მიღებას გარეგანი წყაროებიდან შეიძლება ჩაიწეროს  $a_3 z(t)$  სახით, სადაც

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t < t_0, \\ Q \cdot e^{-k(t-t_0)}, & \text{როცა } t \geq t_0. \end{cases}$$

$Q$  - რაოდენობა,  $k$  (დაგვიანების პარამეტრი),  $t_0$  (საკვების მიღების დრო).



ნახ.2.5.1. ინსულინის მარაგის ფუნქცია  $w(t)$

განსხვავებულ საკვებს შეესაბამება სხვადასხვა  $k$ . გლუკოზის ინექცია შეიძლება აღვწერთ, თუ ერთდროულად მოიცემა დიდი მნიშვნელობები  $Q$  და  $k$ -თვის.

ინსულინის ბუნებრივი შესვლა სისხლში წარმოადგენს პერიოდულ პროცესს, რომელიც რეგულირდება შებრუნებული კავშირის მექანიზმით. ამ მექანიზმის დარღვევისას გამოიყენება ინსულინის შეყვანა, ანალოგიური შაქრის შეყვანისა. პერიოდული ინექციები შეიძლება მოდელირდეს "ინსულინის დეპოს" შევსებით, საიდანაც ეს უკანასკნელი გარკვეული დროის განმავლობაში აღწევს სისხლში.

ცნობილია, რომ ინექციის "მაქსიმალური ეფექტი" მიიღწევა სამი საათის შემდეგ და მერე ინექციის მოქმედება წყდება. თუ ჩავთვლით, რომ მაქსიმალური ეფექტი შეესაბამება ინსულინის სისხლში შესვლის მაქსიმალურ სიჩქარეს და შესაბამისად უდიდეს გაკლენას ინსულინის გრადიენტზე, მაშინ აღწერილ სიტუაციას მოდელირებს  $w(t)$  ფუნქცია, რომელიც მოცემულია ნახაზზე 2.5.1 ( $Q$  – მოცემულია).  $w(t)$  ფუნქციისათვის მარტივად ჩაიწერება გამოსახულება დროის უბან-უბან წრფივი ფუნქციის სახით.

ამისთვის საჭიროა შემდეგი მონაცემები: ინექციის დრო; შეყვანილი ინსულინის რაოდენობა; დრო, რომელიც საჭიროა მაქსიმალური ეფექტის მისაღწევად, აგრეთვე წირის ზრდადობის და კლებადობის უბნების დახრილობები. ამ შემთხვევაში  $t_x$  პარამეტრი - ინსულინის დონის მგრძობიარობაა ინექციისაკენ - შემოაქვთ იმისათვის, რომ გარედან შემოსული ინსულინის რაოდენობა იზომებოდეს რიცხვითი მნიშვნელობებით.

## §2.6. გულის ენერგეტიკული მოდელი

განვიხილოთ ობიექტი, რომელშიც ძალიან რთული პროცესები მიმდინარეობს. ამისათვის ავაგოთ საკმაოდ მარტივი მოდელი და მისი საშუალებით ბევრ საინტერესოს გავიგებთ. რა თქმა უნდა, გულის შესახებ ყველაფერს ვერ შევიტყობთ, მაგრამ ის, რასაც ვაგვიგებთ, ძალზე მნიშვნელოვანი და საინტერესოა. გულის სრული მათემატიკური მოდელი, ბუნებრივია, ძალიან რთულია, თითქმის ისეთივე რთული, როგორც თვითონ გული.

ქვემოთ ჩვენ ავაგებთ მოდელს, რომელიც ენერგეტიკულ ბალანსზე იქნება დამყარებული [69].

იმისათვის, რომ იცოცხლოს და იმუშაოს, გული ხარჯავს ენერგიას და ამ ენერგიას ის თავადვე გამოიმუშავებს. საკმარისია მხოლოდ ამის ცოდნა, და მათემატიკური მოდელის აგების შედეგად ბევრი უცნობი და მოულოდნელი რამის გაგება შეგვიძლია.

ჩვენი გულისა და სისხლძარღვთა სისტემის შესახებ უამრავი წიგნი დაწერილა, მათ წასაკითხად და შესასწავლად მთელი ცხოვრება არ გვეყოფა, მაგრამ ამჟამად ჩვენთვის საჭიროა იმის ცოდნა, რომ გულის მთავარი ფუნქციაა სისხლის გადაქაჩვა სისხლძარღვებში და ადამიანის მთელი ორგანიზმისა და საკუთარი თავის სისხლით მომარაგება.

გულის გაჩერება არ შეიძლება. მან გამუდმებით უნდა იმუშაოს. იმდენი უნდა იმუშაოს, რამდენიც მის მფლობელს ესაჭიროება. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ადამიანის ნერვიული სისტემა კარნახობს გულს, თუ როგორ იმუშაოს.

ეს ცნება აღენიშნოთ მართვის ო სიდიდით: რაც უფრო დიდია ო, მით უფრო დიდი ინტენსივობით უნდა იმუშაოს გულმა. მან უსიტყვოდ უნდა შეასრულოს ნერვიული სისტემის ბრძანება. გულს მხოლოდ "გატყლომა" შეუძლია და ამ შემთხვევაში საქმე ცუდად აქვს მასაც და მის პატრონსაც (ლექტალური შემთხვევა).

გულს შეუძლია თავისი კუნთების შეკუმშვა საკუთარი ენერგიის მარაგის ხარჯზე.

ეს ენერგია - ქიმიური - მას სჭირდება საკუთარი სიცოცხლის შესანარჩუნებლად. თავისი ენერგიის W მარაგს იგი ისევე ავსებს, როგორც ადამიანის ორგანიზმის სხვა ორგანოები მასში არტერიული

სახლის გავლენით, რომელიც მდიდარია ჟანგბადით და სხვა აუცილებელი ნივთიერებებით.

ვთქვათ,  $f$  - გულის ენერგიის დახარჯვის ინტენსივობა,  $g$  - ამ მარაგის შევსების ინტენსივობა, ხოლო  $a$  - ენერგიის იმ ნაწილის დახარჯვის ინტენსივობა, რომელიც საჭიროა თვითონ გულისა და მისი უჯრედების სიცოცხლისუნარიანობის შესანარჩუნებლად.

ცხადია, რომ  $W$  ენერგიის ცვლილების სიჩქარეა

$$\frac{dW}{dt} = -f + g - a, \quad (2.6.1)$$

$f$  და  $g$  ინტენსივობები დამოკიდებულია  $u$  და  $W$ -ზე. კერძოდ, თუ  $W = 0$ , მაშინ

$$f = g = 0, \quad (2.6.2)$$

ანალოგიურად

$$f = g = 0, \quad \text{თუ } u = 0. \quad (2.6.3)$$

ამასთან, ნულისაგან განსხვავებული  $u$  და  $W$ -თვის  $f$  და  $g$  დადებითია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში გული არ იმუშავებდა.

(2.6.1)-ის თანახმად, იმისდა მიხედვით, თუ როგორია  $(-f + g - a)$  ნიშანი, ხდება  $W$  ენერგიის მარაგის ან შევსება, ან შემცირება. გამოვსახოთ ეს ფაქტი გრაფიკულად  $u$  და  $W$  ცვლილების ფაზურ სიბრტყეზე (ნახ.2.6.1).

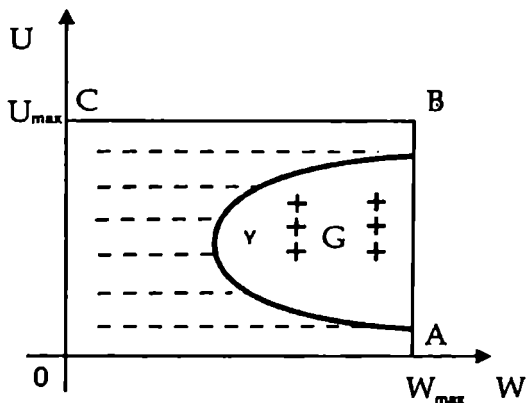
ადვილი დასანახია, რომ  $u$  და  $W$  თავისი შინაარსის მიხედვით არაუარყოფითები არიან ( $u \geq 0, W \geq 0$ ) და არ აღემატებიან რაღაც  $u_{\max}$  და  $W_{\max}$  მნიშვნელობებს და ამიტომ  $u$  და  $W$  კოორდინატების მქონე  $M$  წერტილი მოხვდება  $OABC$  მართკუთხედში. სადაც, ამ მართკუთხედის შიგნით,  $(-f + g - a)$  სიდიდე დადებითია.  $OA$  და  $OC$  გვერდებზე  $f = g = 0$ , და ამიტომ, აქ და ამ გვერდების მახლობლადაც (2.6.2), (2.6.3)-ის თანახმად

$$\dot{W} = -f + g - a \equiv -a < 0, \text{ რადგან } a > 0$$

ბუნებრივია იმის დაშვებაც, რომ  $BC$  გვერდზეც  $\dot{W} < 0$ , რადგან ამ დროს გულს მოეთხოვება შეასრულოს მაქსიმალურად შესაძლო საშუაო ( $BC$ -ზე  $u = u_{\max}$ ).

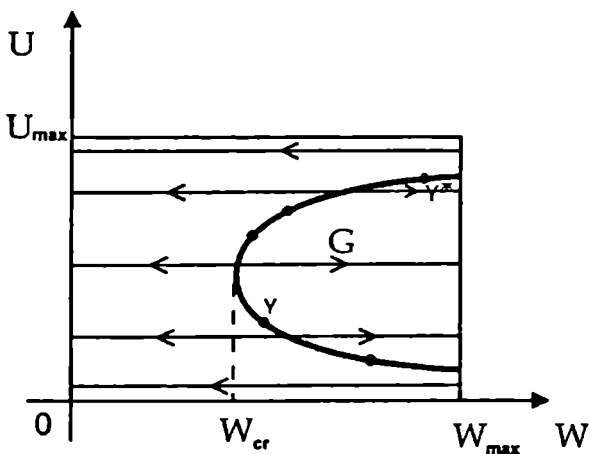
აქ ნათქვამი გადატანილია ნახ.2.6.1-ზე მინუსების სახით, რაც ნიშნავს, რომ ამ ადგილებში ენერგიის  $W$  მარაგი მცირდება. ნიშანი პლუსი ამ ნახაზზე ნიშნავს, რომ ამ ადგილებში  $W$  იზრდება. ცხადია, რომ  $OABC$  მართკუთხედის ის ნაწილი, სადაც  $W$

მცირდება (" - ") და ის ნაწილი, სადაც  $W$  იზრდება (" + "), ერთმანეთისაგან გამოიყოფიან რაღაც  $\gamma$  წირით. მისი ზუსტი სახე ჩვენ არ ვიცით, მაგრამ ამჟამად ამას არც აქვს დიდი მნიშვნელობა.



ნახ.2.6.1

ვნახოთ ახლა, თუ როგორ გადაადგილდება  $M(w,u)$  წერტილი ფიქსირებული  $u$ -თვის ( $u = \text{const}$ ), რაც მოგვცემს ნახ.2.6.2.-ს.



ნახ.2.6.2.

G არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია  $\gamma$  წირით,  $W$  იზრდება, ხოლო ამ არის გარეთ კი მცირდება. გულის მუშაობის დროს  $M(W,u)$  წერტილი გადაადგილდება მართკუთხედის შიგნით. ამასთან, თუ ის  $G$  არეში იმყოფება, მაშინ გადაადგილება მარჯვნივ ( $W_{max}$ -კენ), ხოლო მის გარეთ კი - მარცხნივ ( $0$ -კენ). ზემოთ ან ქვემოთ ეს წერტილი გადაადგილდება ნერვული სისტემის  $u$  ბრძანების მიხედვით. თუ  $u$  ბრძანება საკმაოდ დიდხანს არის მუდმივი, მაშინ  $M(W,u)$  წერტილი, რომელიც  $G$  არის შიგნით იმყოფება, მიდის  $\gamma$  საზღვრის  $\gamma$ . ნაწილზე.  $u$ -ს ცვლილების დროს  $M(W,u)$  წერტილი აღწერს რაღაც ტრაექტორიას: ამასთან  $u$ -ს ცვლილება შეიძლება ნებისმიერი იყოს, ხოლო  $W$ -ს ცვლილება განისაზღვრება (2.6.1) განტოლებით და ნახ.2.6.2-ზე აღნიშნულია ისრებით.  $M(W,u)$  წერტილი შეიძლება მოძრაობდეს როგორც  $G$  არის შიგნით, ისე მის გარეთ. ამასთან ამ არიდან ის გამოდის საკმაოდ მცირე ან საკმაოდ დიდი  $u$ -თვის, ე.ი. როცა გულის მუშაობა ან გაძლიერებულია, ან შენელებულია. აი, აქ კი ადვილი დასანახია, რომ არც ერთი და არც მეორე მდგომარეობა დიდხანს არ შეიძლება გაგრძელდეს. მართლაც, თუ  $u$  დიდხანს არიან  $u_{max}$ -თან ახლოს, ან  $0$ -თან ახლოს, მაშინ  $M(W,u)$  წერტილი გადაადგილდება მარცხნივ და აღმოჩნდება არეში, სადაც  $W < W_{cr}$ . ხოლო ამ არეში აღმოჩენის შემდეგ ის ვეღარ დაბრუნდება  $G$  არეში და აუცილებლად მოხვდება  $OC$  გვერდზე, სადაც  $W = 0$  და მაშინ, მარტივი ენით რომ ვთქვათ, გული კვდება, რადგან მის უჯრედებს სიცოცხლისუნარიანობის შენარჩუნებისათვის საჭირო ენერგია არა აქვთ.

ამრიგად, ჩვენ აღმოვაჩინეთ გულის კრიზისული მდგომარეობის ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო მიზეზი: ერთი გამოწვეულია ხანგრძლივად გულის ზედმეტად გადატვირთული მუშაობით, ხოლო მეორე კი მისი ძალიან შენელებული მუშაობით. ასევე დიდი ხნის განმავლობაში, რაც გამოწვეულია ნერვული სისტემიდან მოსული  $u$  ბრძანების სიმცირით. ამასთან გულის ზედმეტად ინტენსიური მუშაობა შეიძლება გამოწვეული იყოს არა მარტო თვითონ ადამიანის ინტენსიური მუშაობით, არამედ ნერვული სისტემის ალგზნებითაც. რაც შეეხება გულის შენელებულ მუშაობას, ამ მოდელში ის გამოწვეულია არა რაღაც დარღვევებით თვითონ გულში, არამედ  $u$  ბრძანებით.



იმისათვის, რომ არ დაეუშვათ გულის დაღუპვა, არ უნდა დაეუშვათ, რომ  $W$  გახდეს  $W_{cr}$ -ზე ნაკლები, რადგანაც ამ შემთხვევაში  $W$  წავა 0-კენ (იხ. ნახ.2.6.2).

ამასთან, პირველ და მეორე შემთხვევაში მოქმედებები უნდა იყოს ურთიერთსაწინააღმდეგო. გაბლიერებული დატვირთვის შემთხვევაში საჭიროა ამ დატვირთვის შემცირება და ნერვული სისტემის დაწყნარება. მეორე შემთხვევაში კი საჭიროა გულის მუშაობის სტიმულირება. ზოგჯერ ადამიანს შესაბამისი კორექციების შეტანა შეუძლია თვითონ, ზოგჯერ კი ამისათვის საჭირო ხდება გარეშე დახმარება (შესაძლოა – ექიმიც).

ახლა ვცადოთ ამავე მოდელის საშუალებით გავერკვეთ იმაში, თუ რა ხდება გულის დაბერების, ინტოქსიკაციის და სხვა მიზეზების დროს, რომლებიც გულის მარგი ქმედების კოეფიციენტის შემცირებას იწვევენ. ე.ი. როცა იმავე  $W$  და  $u$ -თვის და გულის იმავე სასარგებლო მუშაობისას  $f$  ენერჯის დანახარჯები იზრდება, ხოლო გულის კეება  $g$  მცირდება. ყოველივე ამის შედეგად ხდება  $G$  არის შემცირება. კერძოდ, ხდება  $W_{cr}$ -ის გაზრდა და გულის მინიმალური მუშაობის დონის გაზრდა. რამდენადაც გასაკვირი არ უნდა იყოს, ასაკის მომატებისას ან ავადმყოფობისას, როცა თითქოს გულმა უნდა დაისვენოს, მას არ შეუძლია ამის გაკეთება და ის იძულებულია უფრო ინტენსიურად იმუშაოს, ცხადია, იმავდროულად მცირდება მაქსიმალურად დასაშვები დატვირთვებიც.

$G$  არეს შეიძლება ეწოდოს გულის სასიცოცხლო შესაძლებლობების არე. გულის დაბერება, ავადმყოფობა, ინტოქსიკაცია ამცირებს ამ არეს. ამასთან ეს შემცირება ყოველმხრივია და ამიტომ ეცემა როგორც გულის ინტენსიური მუშაობის შესაძლებლობა, ისე მისი სრულფასოვანი დასვენების შესაძლებლობაც.

$G$  არის სასიცოცხლო შესაძლებლობების შემცირება ადვილებს და ხელს უწყობს გულის კრიზების დადგომას. ეს რომ თავიდან ავიცილოთ, ადამიანი შეგნებულად უნდა გაუფრთხილდეს თავის გულს, გაიცნობიეროს მისი შესაძლებლობის ზღვარი. ამისათვის, საჭიროა შესაბამისი გულის ვარჯიში, რათა გაფართოვდეს გულის სასიცოცხლო შესაძლებლობის  $G$  არე. როგორც ცნობილია, იმ ადამიანებს, რომელთაც გადატანილი აქვთ მოოკარდის ინფარქტი,

ექიმები რეაბილიტაციის მიზნით უნიშნავენ გამაჯანსაღებელ სიარულს, ხშირად 5-10 კმ-ის გაელას დღეში.

ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ ჩვენი მოდელი გამოდგება არა მარტო გულისათვის, მისი გამოყენება შესაძლებელია ნებისმიერი ცოცხალი არსებისათვის, რომელმაც საკუთარი თავის გადასარჩენად უნდა იმუშაოს, რათა მოიპოვოს საკვები. მასაც, გულის მსგავსად, შესაძლოა დაუდგეს კრიზისული მდგომარეობა, რომელიც შეიძლება გამოწვეული იყოს ან "გადატვირთვით", ან "სიზარმაცით". ადამიანი ცხოველისაგან იმით განსხვავდება, რომ მან შეძლო ამ ბუნებრივი კრიზისის შერბილება.

ახლა გაეთვალეთ, თუ რა მუშაობას ასრულებს გული ჩვენი სიცოცხლის შესანარჩუნებლად.

### გულის მუშაობა

გულ-სისხლძარღვთა სისტემის ფიზიკური მოდელი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ჩაკეტილი, მრავალჯერად განშტოებული და სითხით სავსე მილები ელასტიური კედლებით, რომლებშიაც სითხის მოძრაობა ხდება რითმულად მომუშავე ტუმბოს ზემოქმედებით.

მუშაობა, რომელსაც გული აწარმოებს, ძირითადად მდგომარეობს მუშაობაში, რომელსაც პარკუჭების შეკუმშვა განაპირობებს, უმთავრესად მარცხენასი. მარცხენა პარკუჭის ყოველი შეკუმშვის დროს წარმოიქმნება ენერგია, რომელიც აუცილებელია სისხლის გადაადგილებისათვის. ეს ენერგია შედგება წნევის პოტენციური ენერგიისაგან, რომელიც უნდა შეიქმნას დასაწყისში, სისხლის მოძრაობის წინაღობის დასაძლევად, მისი მოძრაობის მთელ გზაზე და კინეტიკური ენერგიისაგან, რომელიც სისხლის მასას მიანიჭებს მოძრაობისათვის აუცილებელ სიჩქარეს. ეს ენერგია შეიძლება გამოისახოს შემდეგი ფორმულით:

$$E_{\text{პარკუჭი}} = PV_{\text{დარტყ.}} + \frac{mv^2_{\text{პარტია}}}{2} = \left( P + \frac{\rho v^2_{\text{პარტია}}}{2} \right) V_{\text{დარტყ.}}$$

სადაც P - საშუალო წნევა, რომლითაც სისხლი გადაისროლება არტიაში,

$P = 100$  ვერცხლისწყლის სვეტის მმ  $= 10^5 \frac{100}{760} \approx 1,3 \cdot 10^4$  პასკალი;

$\rho = 1,05 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup> - სისხლის სიმკვრივე;  $v_{\text{ორტ.}}$  - სისხლის სიჩქარე აორტაში, სიმშვიდის პირობებში  $v_{\text{ორტ.}} \approx 0,5$  მ/წმ; სიმშვიდეში სისხლის დარტყმითი მოცულობა საშუალოდ  $V_{\text{დარტ.}} = 70$  სმ<sup>3</sup> =  $7 \cdot 10^{-5}$  მ<sup>3</sup>. მაშინ

$$E_{\text{პარკუტი}} = \left( 1,3 \cdot 10^4 + \frac{1,05 \cdot 10^3 (0,5)^2}{2} \right) \cdot 7 \cdot 10^{-5} \approx 0,92 \text{ ჯოული.}$$

თუ გავითვალისწინებთ მარჯვენა პარკუტის მუშაობას, მთლიანად გულისათვის მივიღებთ

$$E_{\text{გული}} = 1,2 E_{\text{პარკ.}} = 1,2 \cdot 0,92 = 1,1 \text{ ჯ.}$$

პარკუტების შეკუმშვის დროა  $t_{\text{პარკ.}} = 0,3$  წმ., მაშინ სიმძლავრე, რომელსაც განავითარებს გული შეკუმშვის დროს, ტოლი იქნება

$$N_{\text{გული}} = \frac{E_{\text{გული}}}{t_{\text{პარკ.}}} = \frac{1,1}{0,3} \text{ ვტ} = 3,68 \text{ ვატი.}$$

თუ ჩავთვლით, რომ 1 წთ-ში გული იკუმშება 60-ჯერ, მივიღებთ, რომ 1 წუთში ის ასრულებს  $A_{\text{წთ}} \approx 66$  ჯ მუშაობას და ერთი დღე-ღამის განმავლობაში  $A_{\text{დღე-ღამე}} \approx 9540$  ჯ რაოდენობის მუშაობას.

გულის მუშაობის გათვლებისას  $V_{\text{დარტყ.}}$  დარტყმითი მოცულობის ნაცვლად შეიძლება გავითვალისწინოთ  $V_{\text{წთ}}$  სისხლის მოცულობა წუთში, რომელიც წუთში დარტყმითი მოცულობისა და გულის შეკუმშვის  $n$  რაოდენობის ნამრავლის ტოლია;

$$V_{\text{წთ}} = n V_{\text{დარტყ.}}$$

მშვიდად ყოფნის შემთხვევაში

$$V_{\text{წთ}} = 60 \cdot V_{\text{დარტყ.}} = 60 \cdot 70 = 4200 \text{ მლ/წთ, ანუ } 4,2 \text{ ლ/წთ.}$$

კუნთების მუშაობის საშუალო ინტენსივობის დროს კი სისხლის წუთოვანი მოცულობა  $V_{\text{წთ}}$  - იზრდება დაახლოებით ხუთჯერ, ე.ი.

$$V_{\text{წთ}} = 20 \text{ ლ/წთ.}$$

ამავე დროს, შესაბამისად იზრდება სისხლის დინების სიჩქარე აორტაში  $v_{\text{ორტ.}} = 5 \cdot 0,5$  მ/წმ =  $2,5$  მ/წმ, მუშაობა, რომელსაც გული შეასრულებს 1 წთ-ში, იქნება

$$A_{\text{გული}} = 1,2 \left[ \left( 1,3 \cdot 10^4 + \frac{1,05 \cdot 10^3 \cdot (2,5)^2}{2} \right) \cdot 20 \cdot 10^{-3} \right] \approx 390 \text{ ჯ.}$$

## §2.7. ოპტიმალური მკურნალობის მათემატიკური მოდელი

არსებობს კიბოს მკურნალობის ორი მეთოდი - სხივური თერაპია და ქიმიური თერაპია. ორივე მეთოდის ეფექტურობა გამოისახება რაიმე საერთო ერთეულებში. მაგალითად, მედიკამენტური პრეპარატის ეფექტურობა არის 1000 ერთეული ერთ გრამ პრეპარატზე, ხოლო დასხივების - 1000 ერთეული წუთში. ვთქვათ, ავადმყოფს გამოჯანმრთელებისათვის სჭირდება ეფექტურობის არანაკლებ 3000 ერთეული. აღსანიშნავია, რომ ორივე მეთოდი ტოქსიკურია. ამიტომ, არც ერთი მეთოდი არ შეიძლება გამოვიყენოთ განუსაზღვრელად. ვთქვათ, ტოქსიკურობაც იზომება საერთო ერთეულებში. მაგალითად, წამლის ტოქსიკურობა 1 გრამზე 400 ერთეულის ტოლია, ხოლო წუთში გამოსხივების ტოქსიკურობა 1000 ერთეულის ტოლია [34].

დავუშვათ, რომ ავადმყოფმა არ უნდა მიიღოს 2000 ერთეულზე მეტი ტოქსიკურობა. დავუშვათ ისიც, რომ ერთი გრამი წამლის შეყვანა 3-ჯერ მეტ უარყოფით შედეგს იძლევა, ვიდრე დასხივება ერთ წუთში. ე.ი. თუკი შევიყვანთ  $x$  წონის ერთეულ წამალს და დავასხივებთ  $y$  წუთის განმავლობაში, მაშინ ავადმყოფის ორგანიზმი საერთო ჯამში ღებულობს:

$$f(x,y) = 3x + y \quad (2.7.1)$$

ტოქსიკურობას.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: შევარჩიოთ მკურნალობის ორივე მეთოდის ისეთი თანაფარდობა, რომელიც დააკმაყოფილებს ზემოთ ფორმულირებულ შეზღუდვებს, ამავე დროს ეს უარყოფითი ზეგავლენა იყოს რაც შეიძლება მცირე. ასეთ თანაფარდობას ოპტიმალური ეწოდება.

მათემატიკურ ენაზე ეს ამოცანა შეიძლება ასე ჩამოვყალიბოთ:  $xOy$  სიბრტყეზე ვიპოვოთ ისეთი  $(x;y)$  წერტილი, რომ  $f(x,y) = 3x + y$  სიდიდე იყოს უმცირესი, მაგრამ ამავე დროს სრულდებოდეს პირობები:

$$1000x + 1000y \geq 3000 \quad (2.7.2)$$

და

$$400x + 1000y \leq 2000. \quad (2.7.3)$$

(2.7.2) არის შეზღუდვა ეფექტურობაზე, ხოლო (2.7.3) შეზღუდვა ტოქსიკურობაზე.

ამ პირობებს უნდა დაემატოს კიდევ ორი:

$$x \geq 0 \text{ და } y \geq 0 \quad (2.7.4)$$

რადგან ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე ისინი ვერ მიიღებენ უარყოფით მნიშვნელობებს.

ე.ი. ამ ამოცანის მათემატიკურმა მოდელმა მიიღო უტოლობა სისტემის სახე:

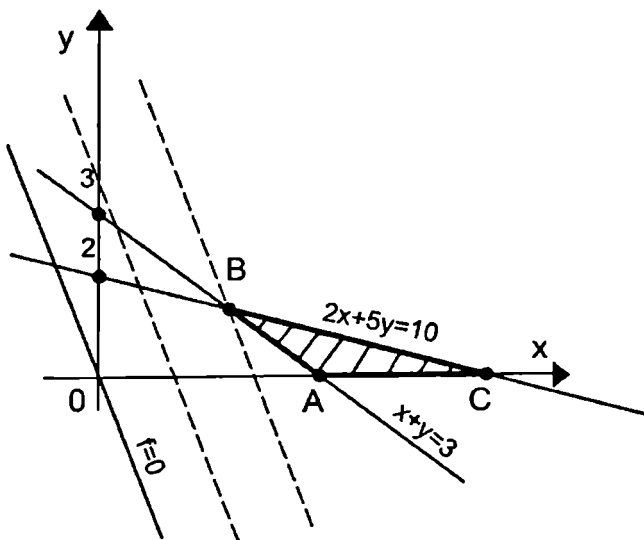
$$\begin{cases} x + y \geq 3, \\ 2x + 5y \leq 10, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \quad (2.7.5)$$

$$f(x,y) = 3x + y \rightarrow \min \quad (2.7.6)$$

(2.7.5) სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს (ნახ.2.7.1) დაშტრიხული სამკუთხედი ABC. სამკუთხედის წვეროს

კოორდინატებია: A(3;0), C(5;0), B $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$  სამკუთხედის (გვერდებთან

ერთად) წერტილებიდან უნდა შევარჩიოთ ისეთი (x;y) წერტილი, რომელიც დააკმაყოფილებს (2.7.6) პირობას.



ნახ.2.7.1.

განვიხილოთ  $3x + y = a$ ,  $a \geq 0$  წრფეთა სიმრავლე ABC სამკუთხედთან მიმართებაში, ადვილად შევაშინვეთ, რომ ამ წრფეთა Ox ღერძთან დახრის კუთხე ნაკლებია  $x + y = 3$  და  $2x + 5y = 10$  წრფეების დახრის კუთხეზე. ამიტომ  $a$ -ს გარკვეული მნიშვნელობისათვის  $3x + y = a$  წრფე  $\Delta ABC$ -ს შეეხება პირველად B წერტილში.

$f_{\min}$ -ის სასურველ მნიშვნელობას მივიღებთ (2.7.1)-ში B წერტილის კოორდინატების ჩასმით:

$$\min_{\Delta ABC} f = f_{\min} = 3 \cdot \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 6 \frac{1}{3}.$$

(2.7.1) ფუნქციას მიზნობრივი ფუნქცია ეწოდება. აქედან გამომდინარე მკურნალობა იქნება ოპტიმალური თუ გამოვიყენებთ  $\frac{5}{3}$  ერთ. წამალს და დასხივებას მოვახდენთ  $\frac{4}{3}$  წთ-ის განმავლობაში.

§2.8. სისხლის ჯგუფის კლასიფიკაცია.  
ლოგიური მოდელები

1. სისხლის ჯგუფი

როგორც ცნობილია ადამიანებს შეიძლება ჰქონდეთ 4 ჯგუფის სისხლი: O, A, B, AB (ეს არის დანგერნისა და ხირშელდის ტერმინოლოგია); ეს კლასიფიკაცია საშუალებას იძლევა გაირკვეს, შეუძლია თუ არა მოცემულ ადამიანს იყოს დონორი მეორე ადამიანისთვის).  $x \rightarrow y$  სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მტკიცება: "x ჯგუფის მქონე ინდივიდს შეუძლია მისცეს თავისი სისხლი ინდივიდს, რომელსაც აქვს y ჯგუფის სისხლი, ამ უკანასკნელისათვის ზიფათის გარეშე". მაშინ კანონები, რომლებიც აღმოაჩინეს დანგერნმა და ხირშელდმა, შეიძლება ჩამოვყალიბოთ ასე:

I.  $x \rightarrow x$ , ნებისმიერი x-თვის;

II.  $O \rightarrow x$ , ნებისმიერი x-თვის;

III.  $x \rightarrow AB$ , ნებისმიერი x-თვის;

IV. ყოველი მიმართება  $x \rightarrow y$ , რომელიც არ დაიყვანება I, II და III-ზე, არის მცდარი.

დავამტკიცოთ, რომ

1<sup>0</sup>. I-IV კანონთა სისტემა არ არის წინააღმდეგობრივი;

2<sup>0</sup>. I-IV კანონებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი x,y,z-თვის  $x \rightarrow y$  და  $y \rightarrow z$ -დან გამომდინარეობს, რომ  $x \rightarrow z$ ;

3<sup>0</sup>. I-IV-დან გამომდინარეობს, რომ  $A \rightarrow B$  მიმართება მცდარია.

განვმარტოთ, რომ გამოსახულება "ნებისმიერი x-თვის" I, II, III-ში ნიშნავს, რომ იმპლიკაცია  $\rightarrow$  სამართლიანია x-თვის, რომელიც ემთხვევა O, A, B, ან AB-ს. ანალოგიური შენიშვნა ეხება 2<sup>0</sup>-საც.

ამ მიზნით სისხლის ჯგუფის აღმნიშვნელი სიმბოლოები განვალაგოთ ერთ სტრიქონში და ერთ სვეტში: დონორები მოვათავსოთ სვეტში, ხოლო რეციპიენტები - ერთ სტრიქონში და მიღებული ცხრილი შევაკვსოთ " + " და " - " ნიშნებით შემდეგნაირად:

რეციპიენტები \ დონორები	O	A	B	AB
O	+	+	+	+
A	-	+	-	+
B	-	-	+	+
AB	-	-	-	+

ეს ცხრილი უნდა გავიგოთ შემდეგნაირად: ვიღებთ ნებისმიერ სტრიქონს (მაგ. მე-2-ს) და ნებისმიერ სვეტს (მაგ. მე-3-ს), თუ მათ გადაკვეთაზე დგას ნიშანი " + ", მაშინ არჩეული სტრიქონის დონორს შეუძლია მისცეს თავისი სისხლი არჩეულ რეციპიენტს, ამის გაკეთება მას არ შეუძლია, თუ სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაზე დგას " - " ნიშანი. მაგალითად, A ჯგუფის სისხლის მქონე დონორს არ შეუძლია მისცეს სისხლი ადამიანს, რომელსაც აქვს B ჯგუფის სისხლი. ამგვარად, ცხრილი უჩვენებს, თუ ვის შეუძლია მისცეს სისხლი დონორმა და ვის არა.

ადვილი შესაძლებელია, რომ ეს განსაზღვრება აკმაყოფილებდეს I კანონს. მართლაც, ამ კანონის თანახმად მთავარ დიაგონალზე უნდა იყოს ნიშანი " + ", რაც სრულდება. II კანონის თანახმად O დონორის სტრიქონის გასწვრივ უნდა იყოს მხოლოდ ნიშანი " + ", რაც ასევე სრულდება. III კანონი ითხოვს, რომ AB რეციპიენტის სვეტში იყოს მხოლოდ ნიშანი " + ", ესეც სრულდება, თუ I, II, III მიმართებებში ჩვენ X-ს შევცვლით O, A, B, AB სიმბოლოებზე, ჩვენ მივიღებთ ზუსტად 9 მიმართებას, სწორედ იმით, რომლებიც ჩვენს ცხრილში აღნიშნულია ნიშანი " + "-ით, რადგანაც ცხრილში ყველა დანარჩენი (მათი რიცხვი 7-ის ტოლია) ადვილი შევსებულია " - " ნიშნით, ცხადია, IV კანონიც სრულდება.

მაშასადამე, ჩვენი ცხრილი ექვივალენტურია I-IV კანონების, რაც ამტკიცებს  $1^0$  დებულებას.  $2^0$  დებულების სამართლიანობა შეიძლება შემოწმდეს ცხრილის მეშვეობით. მაგალითად,  $O \rightarrow A$  და  $A \rightarrow AB$ , ასევე  $O \rightarrow AB$ , რასაც ადასტურებს ჩვენი ცხრილი. ყველა დანარჩენი შემთხვევისათვის დებულება  $2^0$  შეიძლება შემოწმდეს ასევე. დებულება  $3^0$ -ის სამართლიანობა გამომდინარეობს ცხრილის შესაბამის უჯრეტში " - " ნიშნის არსებობით.



აღსანიშნავია, რომ ეს ამოცანა არის სანიმუშო მაგალითი აქსიომატური მეთოდის საილუსტრაციოდ.

## 2. სისხლის ჯგუფების მემკვიდრულობის კანონი

ფელიქს ბერნშტეინმა (ჩვეულებრივ მისი სახელი ასოცირდება სიმრავლეთა თეორიასთან) პირველად ჩამოაყალიბა O, A, B, AB სისხლის ჯგუფების მემკვიდრულობის კანონი. ეტკათ, მაგალითად, მამას აქვს სისხლის A ჯგუფი, ხოლო დედას - AB ჯგუფი. ერთასოიან სიმბოლოს A-ს მიუწეროთ O ასო, ე.ი. მამის სისხლის ჯგუფი აღვნიშნოთ AO-თი. ორივე შობლის ჯგუფები შესაბამისად იქნება AO და AB. მათი შვილის სისხლის ჯგუფის სიმბოლოს შესადგენად ჩვენ უნდა ავიღოთ თითო ასო შობლების ჯგუფისაგან. ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ ბავშვის სისხლის ჯგუფის შემდეგ შესაძლო სიმბოლოებს: AA, AB, OA და OB. შემდგომ ეს სიმბოლოები მარტივდება: AA ორი ასოს ნაცვლად შეიძლება დაიწეროს ერთი A და უნდა მოვიშოროთ O - ასო, სადაც არ უნდა შეგვხვდეს ორასოიან კომბინაციებში. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ სისხლის ჯგუფები A, AB, B, ე.ი. ბავშვს შეიძლება ჰქონდეს ამ სამი ჯგუფიდან ერთ-ერთი და არ შეიძლება ჰქონდეს O ჯგუფი.

აღნიშნული წესი: O-ს მიწერა, შობლების სისხლის ჯგუფების სიმბოლოების ასოების კომბინირება და O-ს მოშორება მთლიანად განსაზღვრავს ე.წ. სისხლის ჯგუფის შთამომავლობის ფენოტიპურ თეორიას.

## 3. სისხლის გადასხმის დასაშვები წესები

ორმა ძმამ იცის სისხლის გადასხმის დასაშვები წესები, მათ ისიც იციან, რომ ერთმანეთს არ შეიძლება მისცენ სისხლი, მაგრამ ყოველ მათგანს შეუძლია მიიღოს სისხლი დედისაგან. შეუძლია თუ არა დამ შეცვალოს დედა?

აღვნიშნოთ X-ით ადამიანი, რომელსაც აქვს X ჯგუფის სისხლი. კერძოდ, ძმები აღვნიშნოთ X და Y-ით. რადგანაც X-ს არ შეუძლია თავისი სისხლი მისცეს Y-ს, მაშინ წინა ამოცანის ცხრილში X სტრიქონისა და Y სვეტის გადაკვეთაზე დგას ნიშანი "-". რადგანაც Y-ს არ შეუძლია მისცეს სისხლი X-ს, ამიტომ Y სტრიქონისა და X

სვეტის გადაკეთაზე ასევე ღვას " - " ნიშანი. ეს ორი მინუსი სიმეტრიულია ცხრილში დიაგონალის მიმართ, რომელიც შედგება მხოლოდ " + "-საგან.

ადვილი საჩვენებელია, რომ მინუსების წყვილი, რომელიც სიმეტრიულია დიაგონალის მიმართ, მდებარეობენ A სტრიქონის B სვეტთან და B სტრიქონის A სვეტთან გადაკეთებზე. ამიტომ ერთ ძმას აქვს A ჯგუფის სისხლი, ხოლო მეორეს B ჯგუფის. ცხრილი გვიჩვენებს, რომ A-ს შეუძლია მიიღოს სისხლი მხოლოდ O-სგან და A-საგან, ხოლო B-ს მხოლოდ O და B-სგან, რადგანაც ორივე ძმას შეუძლია მიიღოს სისხლი საკუთარი დედისაგან, მაშინ მას უნდა ჰქონდეს O' ჯგუფის სისხლი. სისხლის ჯგუფის შთამომავლობითობის კანონის მიხედვით მშობლის ერთასოიან სიმბოლოს მიეწერება O ასო, ამიტომ დედის სიმბოლო იქნება OO.

ასოების კომბინირების კანონი, რომელიც ნასესხებია ორივე მშობლის სისხლის სიმბოლოებიდან, გვიჩვენებს, რომ ძმებმა თავიანთი სიმბოლოები A და B მიიღეს მამისაგან, რადგანაც მათ დედას არა აქვს ამ ჯგუფების სისხლი. შესაბამისად, მათ მამას აქვს AB-ს ჯგუფი. AB და OO სიმბოლოებიან მშობლებს ჰყავდეს მხოლოდ AO და BO სიმბოლოებიანი შვილები, ე.ი. A და B (O-ს გამორიცხვის კანონის თანახმად); შესაბამისად, მათი და ასევე არის ან A ჯგუფის, ან B ჯგუფის.

ამგვარად, როგორც ცხრილი გვიჩვენებს მას შეუძლია სისხლი მისცეს მხოლოდ და მხოლოდ ერთ ძმას. ამ ოჯახში არავის არ შეუძლია აიღოს მამის სისხლი, მაგრამ ყოველ მათგანს შეუძლია აიღოს დედის სისხლი.

*"ბუნებავ, ჩემო მეუფევე, შენს კანონებს  
მე ერთგულად ვემსახურები"  
კარლ ფრიდრიხ გაუსი*

### თ ა ვ ი III

## მათემატიკური მოღველირება ბუნებისმეტყველებაში

მეცნიერებათა მათემატიკა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში კარგად იგრძნობა. გალილეო გალილელის აზრით, ბუნება დაწერილია მათემატიკის ენაზე და ბუნების შესწავლასა და მისი კანონების შემეცნებას უკეთესად შეძლებს ის, ვინც საუკეთესოდ ფლობს მათემატიკურ მეცნიერებებს.

საზოგადოებამ, როგორც არასდროს შეიგნო, რომ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში ცოდნა ხდება ზუსტი მხოლოდ მაშინ, როცა მისი მოვლენების აღსაწერად გამოიყენება მათემატიკური მოდელი [35].

მრავალი მკვლევარი გამოთქვამდა აზრს იმის შესახებ, რომ ცოდნის უბანი ხდება მეცნიერული მხოლოდ მაშინ, როდესაც თავის კანონებს გამოსახავს მათემატიკური თანაფარდობის სახით. ამასთან მიმართებაში ყველაზე "მეცნიერული" მეცნიერებაა – ფიზიკა – მეცნიერება ბუნების ფუნდამენტური კანონების შესახებ, ხოლო მათემატიკა არის ბუნებრივი ენა.

რეალური სამყაროს პროცესებს შორის შეიძლება გამოიყოს პროცესთა კლასი, რომელთა განვითარება დროში მთლიანად და ცალსახად განისაზღვრება საწყისი პირობებით და იმ გარემოებებით, რომლებშიც ისინი ვითარდებიან. ამ პროცესების მკაფიო მაგალითებს, ბუნებრივია, იძლევა ფიზიკა.

შედარებით მარტივ ამოცანებში პროცესის რიცხვითი მახასიათებელი შეიძლება მოცემული იყოს ცხადი სახით. ამ შემთხვევაში, მათემატიკური თვალსაზრისით, რეალური პროცესის მათემატიკური მოღველირება – ეს არის მიღებული ფუნქციის მნიშვნელობის პოვნა დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში ან ანალიზურად, ან გამოთვლითი მეთოდებისა და ტექნიკის მეშვეობით.

ასევე აღსანიშნავია ისიც, რომ მრავალი მნიშვნელოვანი საბუნებისმეტყველო პროცესის მათემატიკური მოდელირება ბევრად იაფი ჯდება, ვიდრე მათი რეალური რეალიზება, ზოლო, ზოგ შემთხვევაში, გამოსაკვლევი პროცესების ფიზიკური რეალიზება პრინციპში შეუძლებელია (მაგ., ბირთვულ ფიზიკაში).

მესამე თავში ბუნებისმეტყველების დარგებიდან განხილულია საკმარ რაოდენობის სხვადასხვა ტიპის ამოცანების მათემატიკური მოდელები.

### §3.1. ყაპის გაცივების პროცესის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ სითბოგამტარებლობის განტოლების შემცველი მათემატიკური მოდელი [2].

სითბურ ურთიერთქმედებას სხეულსა და იმ გარემოს შორის, რომელშიც ეს სხეული იმყოფება, აღწერს ნიუტონის კანონი

$$q = k(T - a), \quad (3.1.1)$$

სადაც  $q$  წარმოადგენს სითბური ნაკადის სიმკვრივეს,  $T$  - სხეულის ზედაპირის ტემპერატურაა, ხოლო  $a$  - გარემოს ტემპერატურა,  $k$  - სითბოცვლის კოეფიციენტი. ისევე, როგორც სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი,  $k$ -ც დამოკიდებულია, სხეულისა და გარემოს ფიზიკურ თვისებებსა და ტემპერატურაზე.

იმ შემთხვევაში, თუ სხეულისა და იმ გარემოს ტემპერატურებს შორის სხვაობა, რომელშიც ეს სხეული იმყოფება, მცირეა, ხშირად სითბური ურთიერთქმედების აღსაწერად იყენებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - a), \quad (3.1.2)$$

აქაც  $T$  სხეულის ტემპერატურაა,  $a$  - გარემოს ტემპერატურა,  $t$  - დრო,  $k$  - სითბოცვლის კოეფიციენტი,  $k > 0$ . მინუს ნიშანი მარჯვენა ნაწილში გამოწვეულია იმ გარემოებით, რომ როცა  $T > a$ , თავიდან ავიცილოთ დაბალი ტემპერატურის მქონე გარემოდან, მაღალი ტემპერატურის მქონე სხეულისადმი სითბოს გადაცემის არაფიზიკური ეფექტი. ზოგჯერ (3.1.2) განტოლება მოიხსენიება ნიუტონის სითბოგამტარებლობის კანონის სახელწოდებით.

საზოგადოდ, სითბური ურთიერთქმედება სხეულსა და იმ გარემოს შორის, რომელშიც ეს სხეული იმყოფება, საკმაოდ რთული პროცესია, იგი მრავალ ფაქტორზეა დამოკიდებული, მაგრამ ჩვენი დაშვების პირობებში, გარკვეული სიზუსტით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ სხეულის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია სხეულისა და გარემოს ტემპერატურათა სხვაობის.

განივიზილეთ ყავის გაცივების პროცესი და აღვწეროთ იგი მათემატიკურად. ჩვეულებრივ, საწყის მომენტში ფინჯანში ჩასხმული ყავა ძალზე ცხელია. თუ ჩვენ გვინდა დავლიოთ ყავა, საჭიროა მასში ჩავასხათ ცივი რძე ან დაველოდოთ, გარკვეული დროის განმავლობაში, ყავის გაცივებას იმ ტემპერატურამდე, რომ შევძლოთ მისი დაღვება.

ყავიდან გარემოში სითბოს გადაცემის ბუნება საკმაოდ რთულია და ზოგადად ის შეიცავს კონვექციას, გამოსხივებას, აორთქლებასა და სითბოს გადაცემის პროცესს ფინჯანის კედლებიდან გარემოში. იმ შემთხვევაში, როდესაც ობიექტისა და გარემოს ტემპერატურათა სხვაობა არცთუ ისე დიდია, მაშინ როგორც ეს ადრე გვქონდა აღნიშნული, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ობიექტის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე ამ ტემპერატურათა სხვაობის პროპორციულია:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - a), \quad (3.1.3)$$

სადაც  $T = T(t)$  - ყავის ტემპერატურაა,  $a$  - გარემოს ტემპერატურა, ხოლო  $k > 0$  - პროპორციულობის გარკვეული კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია სითბოს გადაცემის მექანიზმზე, იმ სხეულის ზედაპირის ფართობზე, რომელიც იმყოფება გარემოსთან კონტაქტში და თვითონ სხეულის სითბურ თვისებებზე. (3.1.3) დიფერენციალური განტოლებისათვის განვიხილოთ კომის ამოცანა

$$T(0) = T_0, \quad (3.1.4)$$

სადაც  $T_0$  წარმოადგენს ყავის ტემპერატურას საწყის მომენტში.

ამოვხსნათ (3.1.3), (3.1.4) ამოცანა:

$$\frac{dT}{T - a} = -k dt, \quad \ln|T - a| = -kt + \ln C,$$

$$T - a = C \cdot e^{-kt}.$$

მაშინ (3.1.4)-ის თანახმად  $C = T_0 - a$ .

საბოლოოდ, დასმული (3.1.3), (3.1.4) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$T(t) = a + (T_0 - a) \cdot e^{-kt}. \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) ფორმულა ასახავს ყავის ტემპერატურის შემცირების პროცესს. ეს ფორმულა შეიცავს ჯერჯერობით უცნობ  $k$  კოეფიციენტს. საზოგადოდ,  $k$  კოეფიციენტის მნიშვნელობის დადგენა საკმაოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს.  $k$  კოეფიციენტის მიახლოებითი მნიშვნელობის დადგენისათვის შეიძლება გამოყენებული იყოს ექსპერიმენტის შედეგები. თუმცა უნდა შევნიშნოთ, რომ ექსპერიმენტის მონაცემებიდან მხოლოდ ორი მონაცემის გამოყენება ვერ მოგვცემს  $k$  კოეფიციენტის დამაკმაყოფილებელ მნიშვნელობას. ამ მიზნით უნდა იქნეს გამოყენებული მრავალჯერადი ექსპერიმენტის ყველა მონაცემი, რაც თავის მხრივ მოითხოვს უფრო დახვეწილი მათემატიკური აპარატის გამოყენებას.

განვიხილოთ ამოცანა სხეულის გაცივების შესახებ [14].

ჰაერში სხეულის გაცივების სიჩქარე სხეულის ტემპერატურისა და ჰაერის ტემპერატურის სხვაობის პროპორციულია. ჰაერის ტემპერატურა არის  $20^{\circ}\text{C}$ . ცნობილია, რომ 20 წთ-ის განმავლობაში სხეული ცივდება  $100^{\circ}$ -დან  $60^{\circ}\text{C}$ -მდე. განვსაზღვროთ სხეულის  $T$  ტემპერატურის ცვლილების კანონი  $t$  დროზე დამოკიდებულებით.

ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20),$$

სადაც  $k$  პროპორციულობის კოეფიციენტია. განვაცალკევოთ ცვლადები და ინტეგრირებთ მივიღებთ

$$\ln |T - 20| = kt + \ln C_1.$$

პოტენცირების შემდეგ განვსაზღვროთ  $T$ :

$$T = 20 + C_1 \cdot e^{kt}.$$

$C_1$ -ს განვსაზღვრავად გამოვიყენოთ საწყისი პირობა, როცა  $t = 0$ , მაშინ  $T = 100^{\circ}\text{C}$ .

$$100 = 20 + C_1 \cdot 1, \quad C_1 = 80^{\circ}\text{C}.$$

ამიტომ  $T = (20 + 80 \cdot e^{kt})^{\circ}\text{C}$ .

პროპორციულობის  $k$  კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ შემდეგი დამატებითი პირობიდან: როცა  $t = 20$ ,  $T = 60^{\circ}$ , აქედან,

$$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

ამგვარად, საძებნი ფუნქციაა

$$T = \left( 20 + 80 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{20}} \right)^0 \text{ C.}$$

### სავარჯიშოები

1. ჰაერში სხეულის გაცივების სიჩქარე სხეულისა და ჰაერის ტემპერატურების სხვაობის პროპორციულია. ჰაერის ტემპერატურა არის  $10^{\circ}\text{C}$ . ცნობილია, რომ 10 წთ-ის განმავლობაში სხეული ცივდება  $90^{\circ}\text{C}$ -დან  $70^{\circ}\text{C}$ -მდე. განსაზღვრეთ სხეულის ტემპერატურის ცვლილებების კანონი  $T(t)$  და რას უდრის ტემპერატურა 20 წთ-ის შემდეგ?

2. ჰაერში სხეულის გაცივების სიჩქარე სხეულისა და ჰაერის ტემპერატურების სხვაობის პროპორციულია. ჰაერის ტემპერატურა არის  $15^{\circ}\text{C}$ . ცნობილია, რომ 30 წთ-ის განმავლობაში სხეული ცივდება  $165^{\circ}\text{C}$ -დან  $115^{\circ}\text{C}$ -მდე. განსაზღვრეთ სხეულის ტემპერატურის ცვლილებების კანონი  $T(t)$  და რას უდრის ტემპერატურა 1 სთ-ის შემდეგ?

3. დროის საწყის მომენტში, როდესაც გარემოს ტემპერატურა  $0^{\circ}$ -ია, სხეულის ტემპერატურა  $200^{\circ}\text{C}$ -ია. ნახევარი საათის განმავლობაში სხეულის ტემპერატურა გახდა  $150^{\circ}\text{C}$ . დროის რა მომენტში გახდება სხეულის ტემპერატურა  $120^{\circ}\text{C}$  - ?  $60^{\circ}\text{C}$  - ?, თუ გაცივების სიჩქარე სხეულისა და გარემოს ტემპერატურათა სხვაობის პროპორციულია.

### §3.2. პრიმიინალისტიკის ამოცანა

ვთქვათ, ნაკრძალში აღმოჩნდა ბრაკონიერების მიერ მოკლული გარეული ღორის (ტახი) გვამი. გამოძიებისათვის აუცილებელია დადგინდეს იქნეს დრო, როდესაც მოხდა ღორის მკვლელობა. ამ მიზნის მიღწევაში ჩვენ დაგვეხმარება შესაბამისი მათემატიკური მოდელი, რომლის შედგენაც ამ შემთხვევაში შესაძლებელია, თუ გავითვალისწინებთ ნიუტონის სითბოგამტარებლობის კანონს [2, 67].

ამ კანონის თანახმად სხეულის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე სხეულისა და ჰაერის ტემპერატურათა სხვაობის პროპორციულია

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - a). \quad (3.2.1)$$

აქ  $T = T(t)$  ღორის ტემპერატურაა  $t$  მომენტში,  $a$  - ჰაერის ტემპერატურა, რომელსაც ჯერჯერობით ვთვლით მუდმივად (ე.ი. ვუშვებთ, რომ მკვლელობის მომენტიდან ღორის გვამის აღმოჩენის მომენტამდე ჰაერის ტემპერატურა მუდმივია), ხოლო  $k$  პროპორციულობის დადებითი კოეფიციენტი. შევნიშნოთ, რომ ღორის ათვლა იწყება გასროლის მომენტიდან, ე.ი.  $t = 0$  მნიშვნელობა შეესაბამება გასროლის მომენტს. (3.2.1) დიფერენციალური განტოლების გარდა მათემატიკური მოდელის შესადგენად აუცილებელია ვიცოდეთ სხეულის ტემპერატურა  $t = 0$  მომენტში:

$$T(0) = T_0, \quad (3.2.2)$$

სადაც  $T_0$  წარმოადგენს გარეული ღორის სხეულის ტემპერატურას გასროლამდე. ამრიგად, ჩვენთვის საინტერესო ფიზიკური პროცესის მათემატიკური მოდელი (3.2.1), (3.2.2) წარმოადგენს კოშის ამოცანას პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის. ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (3.2.1), (3.2.2) ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე:

$$T(t) = a + (T_0 - a)e^{-kt}. \quad (3.2.3)$$

დავუშვათ, რომ აღმოჩენის მომენტში გარეული ღორის გვამის ტემპერატურა იყო  $31^{\circ}\text{C}$ , ხოლო ერთი საათის შემდეგ კი  $29^{\circ}\text{C}$ . ცნობილია, რომ გარეული ღორის სხეულის ნორმალური ტემპერატურაა  $T_0 = 37^{\circ}\text{C}$ . როგორც აღვნიშნეთ, ჩვენ ჰაერის ტემპერატურას ჯერჯერობით ჩავთვლით მუდმივად, ე.ი. ჩვენ



ვთვლით, რომ მკვლელობიდან გამოძიების დაწყების მომენტამდე პაერის ტემპერატურა არ შეცვლილა და ვთქვათ,  $a = 21^{\circ}\text{C}$ .

ვთქვათ, აგრეთვე, რომ მკვლელობიდან გარეული ღორის გვამის აღმოჩენამდე გავიდა  $t^*$  საათი

$$T(t^*) = 31^{\circ}\text{C}, T(t^* + 1) = 29^{\circ}\text{C}.$$

(3.2.3) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$e^{-kt} = \frac{T(t) - a}{T_0 - a}.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარის გალოგარითმების შედეგად მივიღებთ:

$$-kt = \ln \frac{T(t) - a}{T_0 - a}. \quad (3.2.4)$$

(3.2.4) ტოლობაში მიმდევრობით შევიტანოთ მნიშვნელობები  $t = t^*$ ,  $t = t^* + 1$ , მაშინ გვექნება:

$$-kt^* = \ln \frac{T(t^*) - a}{T_0 - a} = \ln \frac{31 - 21}{37 - 21}, \quad (3.2.5)$$

$$-k(t^* + 1) = \ln \frac{T(t^* + 1) - a}{T_0 - a} = \ln \frac{29 - 21}{37 - 21}. \quad (3.2.6)$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ პროპორციულობის  $k$  კოეფიციენტი. (3.2.5) განტოლებას გამოვაკლოთ (3.2.6)

$$k = \ln \frac{31 - 21}{29 - 21} = \ln 1,25 \approx 0,22314.$$

ამრიგად, დავადგინეთ პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც განსაზღვრავს სხეულის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარეს. აქ, სხვა დაშვებებთან ერთად, რომელიც გამოვიყენეთ მათემატიკური მოდელის შესადგენად, ჩვენ გავაკეთეთ კიდევ ერთი დაშვება: პროპორციულობის  $k$  კოეფიციენტი (სითბოს გაცვლის კოეფიციენტი) წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს და არ არის დამოკიდებული სხეულის ტემპერატურაზე.

ახლა (3.2.5) ფორმულაში შევიტანოთ  $k = 0,22314$  მნიშვნელობა, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \frac{37 - 21}{31 - 21} \approx 2,10630 \text{ (სთ).}$$

კრიმინალისტიკის ერთ თუ ვილაპარაკებთ, ეს შედეგი გვიჩვენებს, რომ გასროლის მომენტიდან გვამის აღმოჩენის მომენტამდე გავიდა დაახლოებით 2 საათი და 6 წუთი.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ჰაერის ტემპერატურა არ არის მუდმივი და იგი იცვლება დროის ჩვენთვის საინტერესო მონაკვეთში, ე.ი. ჩავთვალოთ, რომ ჰაერის ტემპერატურა არის დროის ფუნქცია. ამ შემთხვევაში სხეულის ტემპერატურის ცვლილების კანონი შემდეგი სახით დავწეროთ:

$$\frac{dT}{dt} + kT = ka(t), \quad (3.2.7)$$

სადაც  $a(t)$  წარმოადგენს ჰაერის ტემპერატურის მნიშვნელობას  $t$  მომენტში.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ (3.2.7) დიფერენციალური განტოლება, ცნობილი უნდა იყოს ჰაერის ტემპერატურის ცვლილების კანონი დროის ჩვენთვის საინტერესო დიაპაზონში.

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა. კერძოდ, დავუშვათ, რომ დროის ჩვენთვის საინტერესო დიაპაზონში ჰაერის ტემპერატურა იკლებდა საათში  $1^{\circ}\text{C}$ -ით. ვთქვათ, ჰაერის ტემპერატურა სხეულის აღმოჩენის მომენტში შეადგენდა  $0^{\circ}\text{C}$ . თუ სხეული აღმოჩენილია გასროლის მომენტიდან  $t^*$  საათის შემდეგ, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ  $a(t) = t^* - t$ . ამრიგად, სხეულის ტემპერატურის ცვლილების აღწერისათვის მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dT}{dt} + kT = k(t^* - t). \quad (3.2.8)$$

(3.2.8) დიფერენციალური განტოლებისათვის განვიხილოთ კოშის საწყისი პირობა

$$T(0) = T_0, \quad (3.2.9)$$

სადაც  $T_0$  წარმოადგენს სხეულის საწყის ტემპერატურას, ე.ი. სხეულის ტემპერატურას გასროლის მომენტში. ვთქვათ, გარეული ღორის გვამის ტემპერატურა მისი აღმოჩენის პერიოდში იყო  $30^{\circ}\text{C}$ . დავუშვათ, რომ სხეულის აღმოჩენიდან 1 საათის შემდეგ მისი

ტემპერატურა გახდა  $25^{\circ}\text{C}$ . ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, დაეუშვათ, რომ სხეულის საწყისი ტემპერატურა  $T_0 = 37^{\circ}\text{C}$ .

(3.2.8) განტოლება არის პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. თუ მას ჩაწერთ  $y' + py = q$  სახით, მაშინ მის ამონახსნს ზოგად ვეძებთ ფორმულით:

$$y = e^{-\int p dx} \left( \int q e^{\int p dx} dx + C \right). \quad (3.2.10)$$

(3.2.8) განტოლებისათვის  $p = k$ ,  $q = k(t^* - t)$

$$T(t) = e^{-\int k dx} \left[ \int k(t^* - t) e^{\int k dx} dt + C \right] = e^{-kt} \left[ t^* \cdot e^{kt} - k \int t e^{kt} dt + C \right].$$

თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში შემაგალი ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდს, მივიღებთ:

$$\int t e^{kt} dt = \frac{t}{k} e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt}.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$T(t) = \left( t^* - t + \frac{1}{k} \right) + C \cdot e^{-kt}. \quad (3.2.11)$$

(3.2.9) პირობის გამოყენებით (3.2.11)-დან ვღებულობთ  $C$ -ს მნიშვნელობას:

$$C = T_0 - t^* - \frac{1}{k}. \quad (3.2.12)$$

ე.ი. (3.2.8), (3.2.9) ამოცანის ერთადერთ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$T(t) = \left( T_0 - t^* - \frac{1}{k} \right) \cdot e^{-kt} + t^* - t + \frac{1}{k}. \quad (3.2.13)$$

შემდეგ, რადგან  $T(t^*) = 30$  და  $T(t^* + 1) = 25$ , ამიტომ (3.2.13) გამოსახულების საშუალებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left( 37 - t^* - \frac{1}{k} \right) \cdot e^{-kt^*} + \frac{1}{k} = 30, \quad \left( 37 - t^* - \frac{1}{k} \right) \cdot e^{-k(t^*+1)} + \frac{1}{k} = 26.$$

(3.2.14)

მივიღეთ ორუცნობიანი არაწრფივი განტოლებათა სისტემა, სადაც უცნობია  $k$  და  $t^*$ . ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მოგვცემს საშუალებას ვიპოვოთ ჩვენ მიერ დასმული ამოცანის ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ (3.2.14) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შეუძლებელია ანალიზური მეთოდებით. ამ სისტემის ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობის მიღება შესაძლებელია რიცხვითი მეთოდების საშუალებით. ერთადერთი გამარტივება, რაც შეიძლება გავაკეთოთ, არის ის, რომ (3.2.14) განტოლებათა სისტემიდან მივიღოთ ერთი არაწრფივი განტოლება  $k$ -ს მიმართ:

$$\left(30 - \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-k} - 26 + \frac{1}{k} = 0,$$

ანუ

$$30k - 1 + (1 - 26k)e^k = 0, \quad (3.2.15)$$

რომლის ამონახსნის მისაღებად შეიძლება გამოყენებულ იქნას რომელიმე რიცხვითი მეთოდი, რომელსაც დაინტერესებული მკითხველი ადვილად აღმოაჩენს სპეციალურ ლიტერატურაში [3].

მას შემდეგ, რაც ნაპოვნი იქნება  $k$  კოეფიციენტის მიახლოებითი მნიშვნელობა, იგი შეიძლება შევიტანოთ (3.2.14)-ის პირველ განტოლებაში და კვლავ რიცხვითი მეთოდების საშუალებით ვიპოვოთ  $t^*$ -ის მნიშვნელობა, ე.ი. დავადგინოთ დრო, რომელიც გავიდა გასროლის მომენტიდან გარეული ღორის გვამის აღმოჩენის მომენტამდე.

იმ შემთხვევაში თუ  $a(t)$  ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება რთულია, მაშინ ერთუცნობიან განტოლებაზე მიყვანა ხდება შეუძლებელი, ამიტომ უშუალოდ (3.2.7), (3.2.9) ამოცანის ამოხსნენლად უნდა გამოვიყენოთ რომელიმე რიცხვითი მეთოდი, მაგალითად, ეილერის მეთოდი [16].

დასკვნა. როგორც ვნახეთ, კრიმინალისტიკისა და ყავის გაცივებასთან დაკავშირებული ამოცანები, გარკვეული დაშვებების ფარგლებში, ერთი და იმავე დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება. ეს არ არის გამონაკლისი შემთხვევა. ამავე დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება ეკოლოგიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა ამა თუ იმ პოპულაციის ევოლუციის შესახებ

უმარტივეს შემთხვევაში და ა.შ. იქმნება შთაბეჭდილება, რომ თითქოს ბუნებაში კანონზომიერებათა რაოდენობა ლიმიტირებულია.

საქმე გვაქვს არა სხვადასხვა ამოცანებთან, არამედ ერთ ამოცანასთან, ერთ მათემატიკურ მოდელთან, რომელსაც გააჩნია გამოყენების სხვადასხვა სფერო. ხშირად აღმოჩნდება, რომ ორი მოვლენა, რომლებიც, ერთი შეხედვით, არაფრით არ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი და არსებითად სხვადასხვა მოვლენებად ითვლებიან, თურმე მათემატიკურად იდენტურნი, იზომორფულნი არიან, რადგან ისინი ერთსა და იმავე კანონზომიერებას ემორჩილებიან.

ა.პუანკარე წერდა: "მათემატიკა - ეს არის ხელოვნება სხვადასხვა საგანს დავარქვათ ერთი და იგივე სახელი". სხვადასხვა მოვლენის მათემატიკური მოდელირება ხშირად ადასტურებს ამ თეზისს.

### **საპარაქიშო**

1. ნადირის გვამის აღმოჩენის მომენტში გვამის ტემპერატურა იყო  $20^{\circ}\text{C}$ , ერთი საათის შემდეგ მისი ტემპერატურა დაეცა  $2^{\circ}\text{C}$ -ით. ცნობილია, რომ ნადირის ნორმალური ტემპერატურაა  $38^{\circ}\text{C}$ , ხოლო ჰაერის ტემპერატურა უცვლელია და  $10^{\circ}\text{C}$  ტოლია.

მკვლევლობიდან გვამის აღმოჩენამდე რა  $t^*$  დრომ განელო, თუ ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე სხეულისა და გარემოს ტემპერატურათა სხვაობის პროპორციულია.

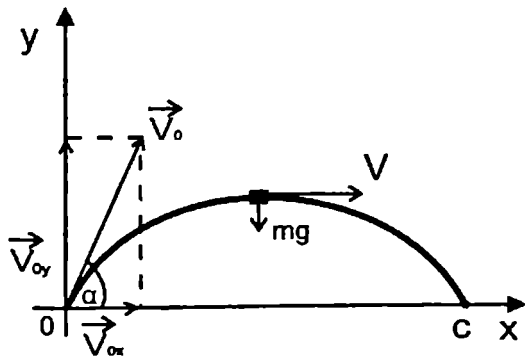
### §3.3. ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მოდელი

განვიხილოთ ბალისტიკის ელემენტარული ამოცანა: წერტილოვანი სხეულის (ჭურვის) ფრენის აღწერა, რომელიც მიმართულია ჰორიზონტისადმი კუთხით [2, 48]. ვთქვათ, სხეული გასროლილია  $v_0$  საწყისი სიჩქარით, რომელიც ჰორიზონტთან ადგენს  $\alpha$  კუთხეს. ჩვენი მიზანია შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი, როდესაც ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა გათვალისწინებული არ იქნება. ჩვენ განვიხილავთ სხეულის ფიზიკურ მოდელს - მატერიალურ, წერტილს. დავუშვათ აგრეთვე, რომ სხეულის ასვლის სიმაღლე და მის მიერ გავლილი მანძილი დედამიწის რადიუსთან შედარებით მცირე სიდიდეებია.

ვიპოვოთ:

- 1) მატერიალური წერტილის მაქსიმალურ სიმაღლეზე ასვლის დრო  $t^*$ , მაქსიმალური სიმაღლე  $y^*$  და ფრენის მაქსიმალური სიშორე  $x_{max}$ ;
- 2) კუთხე, რომლის დროსაც ფრენის სიშორე მაქსიმალურია;
- 3) ფრენის ტრაექტორია;
4. მატერიალური წერტილის მოძრაობის დრო.

მომართოთ კოორდინატთა სისტემის  $Ox$  ღერძი ჰორიზონტის გასწვრივ, მისი პერპენდიკულარული მიმართულებით კი  $Oy$  ღერძი. კოორდინატთა სათავე დავამთხვიოთ მატერიალური წერტილის საწყის მდებარეობას (ნახ.3.3.1).



ნახ.3.3.1.

საწყისი სიჩქარე  $v_0$  დავშალეთ პორიზონტალურ და ვერტიკალურ მდგენელებად, შესაბამისად:

$$v_{0x}=v_0\cos\alpha, \quad v_{0y}=v_0\sin\alpha \quad (3.3.1)$$

ასევე ცნობილია, რომ

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt},$$

სადაც  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ ,  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ .

ნებისმიერი მდებარეობისას მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი ძალა - მისი წონა  $\vec{p} = m\vec{g}$ , რომელსაც, ცხადია, არ გააჩნია პორიზონტალური მდგენელი, ამიტომ  $Ox$  ღერძის მიმართ მოძრაობა იქნება თანაბარი მუდმივი სიჩქარით  $v_{0x}$  (ნიუტონის პირველი კანონი) და  $t$  დროის განმავლობაში სხეული პორიზონტალურად გაივლის მანძილს:

$$x(t) = v_{0x} \cdot t = (v_0 \cos \alpha)t. \quad (3.3.2)$$

ვერტიკალური მიმართულებით სიძიძის ძალის ზემოქმედებით სხეული იმოძრაებს თანაბრადშენელებულად დროის  $t^*$  მომენტამდე, როდესაც ის აღწევს ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილს და ამის შემდეგ თანაბრად აჩქარებულად თავისუფალი ვარდნის  $g = 9,8$  მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით. ამიტომ სხეულის ვერტიკალური სიჩქარე არის

$$v(t) = v_{0y} - gt \quad (3.3.3)$$

რადგანაც  $y'(t) = v(t)$ , ამიტომ (3.3.3) ტოლობიდან ინტეგრებით და (3.3.1)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3.3.4)$$

(3.3.2) და (3.3.4) განტოლებები არის განხილული მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება პარამეტრული სახით.

ეს განტოლება საშუალებას გვაძლევს პასუხი გავცეთ ზემოთ დასმულ ყველა კითხვას.

1. მაქსიმალურ სიმაღლეზე ყოფნის დროს სხეულის სიჩქარე  $v(t) = 0$ , ამიტომ (3.3.3) - განტოლების საფუძველზე  $t^*$  დრო განისაზღვრება  $v_{0y} - gt^* = 0$  პირობიდან, ე.ი.

$$t^* = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.3.5)$$

მატერიალური წერტილის მაქსიმალურ სიმაღლეზე ასვლის  $t^*$  დრო გამოითვლება (3.3.5)-ით. ტრაექტორიის მაქსიმალური სიმაღლე გამოითვლება (3.3.4)-ში  $t^*$ -ის მნიშვნელობის ჩასმით:

$$y(t^*) = v_{Oy} \cdot t^* - \frac{gt^2}{2} = v_{Oy} \cdot \frac{v_{Oy}}{g} - \frac{g}{2} \left( \frac{v_{Oy}}{g} \right)^2 = \frac{v_{Oy}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

ტრაექტორიის მაქსიმალური სიმაღლე ტოლია

$$y(t^*) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3.3.6)$$

ფრენის მაქსიმალური სიშორე განისაზღვრება  $y(t)=0$  პირობიდან. ამ მომენტში სხეული ეცემა დედამიწაზე, ე.ი. (3.3.4)-დან ვღებულობთ

$$v_{Oy}t - \frac{gt^2}{2} = 0, \text{ აქედან } t = \frac{2v_{Oy}}{g}.$$

ეს უკანასკნელი ჩავსვით (3.3.2)-ში, მივიღებთ:

$$x_{\max} = v_{Ox}t = \frac{2v_{Ox} \cdot v_{Oy}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

ე.ი. ფრენის მაქსიმალური სიშორეა

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (3.3.7)$$

2) ფრენის სიშორე იქნება მაქსიმალური, თუ

$$\sin 2\alpha = 1, \text{ ე.ი. } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

ფრენის უდიდესი სიშორე უპირობო სივრცეში მიიღწევა, როდესაც პორიზონტისადმი დახრის კუთხეა  $\alpha^0 = 45^0$ .

3) განვსაზღვროთ ფრენის ტრაექტორია, ნიშნავს ვიპოვოთ  $y = y(x)$  დამოკიდებულება, ამისათვის

$$x(t) = v_{Ox}t \quad \text{და} \quad y(t) = v_{Oy}t - \frac{gt^2}{2}$$

განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ  $t$ .

$$\text{პირველიდან გვაქვს } t = \frac{x}{v_{Ox}}, \text{ მეორიდან კი}$$



$$y = v_{Oy} \cdot \frac{x}{v_{Ox}} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{Ox}^2} = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

ე.ი.

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha$$

არის  $y = Ax^2 + Bx$  პარაბოლა, რომლის ღერძი  $Oy$  ღერძის პარალელურია, სადაც

$$A = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad B = \operatorname{tg} \alpha.$$

ამგვარად, ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეული უჰაერო სივრცეში მოძრაობს პარაბოლის გასწვრივ. ეს დასკვნა ვერ კიდევ გალილემ გააკეთა.

4) (3.3.2) ტოლობიდან გამოზღინარეობს, რომ მოძრაობის  $T$  დრო განისაზღვრება შემდეგი ტოლობიდან:

$$OC = v_0 T \cos \alpha.$$

ე.ი. (3.3.7)-ში  $OC = x_{\max}$ , ამიტომ

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = v_0 T \cos \alpha,$$

საიდანაც

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha. \quad (3.3.8)$$

მატერიალური წერტილის ფრენის უდიდესი სიშორისას ( $\alpha^0 = 45^0$ ), მივიღებთ გამოთვლილი სიდიდეების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$OC = \frac{v_0^2}{g}; \quad y_{\max} = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{1}{4} OC; \quad T = \frac{v_0}{g} \sqrt{2}. \quad (3.3.9)$$

მიღებული შედეგები პრაქტიკულად შეიძლება გამოვიყენოთ ჭურვების (რაკეტების) მოძრაობის ტრაექტორიის მახასიათებლების გამოსაკვლევად, თუ სხეულის სიშორე იცვლება 200–600 კმ ფარგლებში, რადგან ამ შემთხვევაში ( $\alpha^0 = 45^0$ ) ჭურვი ძირითადად მოძრაობს სტრატოსფეროში, სადაც შეიძლება უგულვებელყოფილი იქნას ჰაერის წინააღმდეგობა. სროლის ნაკლები სიშორისას უკვე მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ჰაერის წინააღმდეგობის ფაქტორი,

ხოლო თუ სროლის სიშორე აღემატება 600 კმ-ს, მაშინ უკვე არ შეიძლება სიძიძის  $mg$  ძალა ჩათვალოთ მუდმივად.

ჰერის წინააღმდეგობის გარეშე ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა ამომწურავად შეისწავლა გალილეიმ XVII საუკუნეში. ნიუტონმა კი მიზნად დაისახა ჰერის წინააღმდეგობის გათვალისწინება.

ჰერის წინააღმდეგობის უგულვებელყოფა ფრენის 1 კმ სიშორის განსაზღვრისას, გვაძლევს 15%-იან ცდომილებას, რაც შეადგენს 150 მ-ს. ეს კი, ცხადია, ყოველად მიუღებელია არტილერიისტებისათვის.

ჩვენ დაწვრილებით არ განვიხილავთ ჰერის წინააღმდეგობის გავლენას ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მახასიათებლებზე, მოვიხმობთ მხოლოდ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს.

განვიხილოთ  $m$  მასის მქონე სხეული, რომელსაც დედამიწაზე მიანიჭეს ჰორიზონტისადმი  $\alpha_0$  კუთხით მიმართული  $v_0$  სიდიდის მქონე საწყისი სიჩქარე. მათემატიკურ წერტილზე მოქმედებს სიძიძის ძალა  $\vec{F}_g$  და მამუხრუჭბელი ძალა - ჰერის წინააღმდეგობა  $\vec{F}_\alpha$ , რომელიც  $\vec{v}$  ვექტორის მოპირდაპირეა.  $\vec{F}_\alpha$  ვექტორის სიდიდე განესაზღვროთ შემდეგი გამოსახულების საშუალებით  $F_\alpha = kv^2$ .  $k$  - პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომლის შესახებ §3.4-ში გვექნება საუბარი, ხოლო  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

ამ შემთხვევაში ნიუტონის განტოლებებს სიჩქარის კომპონენტებისთვის ექნება სახე:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_\alpha \cos \alpha, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg - F_\alpha \sin \alpha, \quad F_\alpha = kv^2.$$

რადგან  $v_x = v \cos \alpha$ ,  $v_y = v \sin \alpha$ , ამიტომ ეს განტოლებები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dv_x}{dt} = -Avv_x, \quad A \equiv \frac{k}{m}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - Avv_y \quad (3.3.9)$$

საწყის პირობებს ამ განტოლებათა სისტემისთვის ექნება სახე:

$$v_x(0) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (3.3.10)$$

(3.3.9), (3.3.10) ამოცანა წარმოადგენს დედამიწის ზედაპირიდან ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის

მათემატიკურ მოდელს, როცა მასში გათვალისწინებულია ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა.

### საპარაქიშოვები

ამოცანა 1. ახალგაზრდა შეყვარებულს სურს წერილი გადასცეს თავის სატრფოს, მისი შობლებისაგან ფარულად. ამისათვის იგი ქვაზე გამოაბამს წერილს და აპირებს შეადგოს ის ქალიშვილის ოთახის ფანჯარაში. ახალგაზრდა იმყოფება სახლის კელლიდან

$$S = \frac{a+c}{2}$$
 მანძილზე. ბინის ფანჯარა მისი აწეული ხელიდან არის  $h = a + c$  სიმაღლეზე (სიდიდე იზომება მეტრებში). როგორი უმცირესი საწყისი სიჩქარის შემთხვევაში მიაღწევს ქვა ფანჯარამდე? ჰორიზონტისადმი როგორი კუთხით უნდა იყოს მიმართული სიჩქარე ამ შემთხვევაში?

ამოცანა 2. დეტექტიური ფილმის გმირი, იმისათვის რომ თავი დააღწიოს საშიშროებას, სწრაფად უნდა ამოხტეს იმ ანგარიდან, სადაც ის იმალება, შეახტეს ავტომობილს, რომელიც დაკეტილი ჭიშკრიდან  $S = 20$  მეტრში დგას და დაქოქავს რა მას აღვილიდან, წინა ბამპერებით შეანგრიოს ჭიშკარი. ავტომობილი აიღებს სიჩქარეს მუდმივი  $a$  ( $მ/წმ^2$ ) აჩქარებით. როგორი სიჩქარე ექნება ავტომობილს ჭიშკართან დაჯახების მომენტში? იმისათვის, რომ ავტომობილმა გაანგრიოს ჭიშკარი მისი სიჩქარე უნდა აღემატებოდეს  $16,4$   $მ/წმ$ -ს, ხოლო იმისათვის, რომ დაჯახების შემთხვევაში მიღებულმა დაზიანებამ საშუალება მისცეს გააგრძელოს გზა და გაექცეს შესაძლო დევნას, მისი სიჩქარე დაჯახების შემთხვევაში არ უნდა აღემატებოდეს  $20,5$   $მ/წმ$ -ს.

შეძლებს, თუ არა დეტექტივის გმირი, დააღწიოს თავი მახეს?

ამოცანა 3. ტერიტორიული აქტის გარემოებების გამოძიებისას საძვლერო პროკურატურამ დაადგინა, რომ აფეთქებული მოწყობილობა გასროლილი იყო  $V_0 = 16,8285$   $მ/წმ$  სიჩქარით აფეთქების ადგილიდან ჰორიზონტალურად  $S = 25$  მ დაშორებით.

ვაჩვენოთ, რომ გასროლის კუთხეს ჰორიზონტისადმი შეიძლება ჰქონდეს ორი მნიშვნელობა. შევარჩიოთ მათგან ჭეშმარიტი, თუ ცნობილია, რომ აფეთქების შემთხვევაში სიჩქარის ვერტიკალური მდგენელი ვერ იქნებოდა  $9,5$   $მ/წმ$ -ზე ნაკლები.

### §3.4. პარაბოლით ვარდნის მათემატიკური მოდელი

უპირობო სივრცეში ვარდნილი სხეულის სიჩქარე თანაბრად იზრდება. დადგენილია, რომ თავისუფლად ვარდნილი სხეულის აჩქარებას განაპირობებს დედამიწის მიზიდულობა და თავისუფლად ვარდნილი სხეულისათვის გალილეის მიერ აღმოჩენილი მოძრაობის,

$$v = gt, \quad (3.4.1)$$

კანონში შემაჯავლი პროპორციულობის კოეფიციენტის მნიშვნელობა, რომელიც გამოითვლება ფორმულით,

$$g = a = G \frac{M}{R_0^2}, \quad (3.4.2)$$

სადაც  $M$  - დედამიწის მასაა,  $R_0$  - დედამიწის რადიუსი,  $G$  - ერთი უნივერსალური მუდმივაა და გრავიტაციული მუდმივა ეწოდება.

მაშასადამე, დედამიწის ზედაპირის ახლო სიმაღლიდან ყველა სხეული ვარდება ერთი და იმავე აჩქარებით, რომელსაც უწოდებენ თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას, და ჩვეულებრივ, აღნიშნავენ  $g$  სიმბოლოთი. მისი სიდიდე დადგენილია ექსპერიმენტულად:  $g \approx 9,8$  მწმ<sup>-2</sup>.

გარდა ამისა, თუ სხეულზე მოქმედებს  $F$  სიდიდის ძალა, მაშინ ის ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად ტოლია:

$$F = ma, \quad (3.4.3)$$

სადაც  $m$  - სხეულის მასაა,  $a$  - კი მისი აჩქარების მოდულია. თუ ვარდნილი სხეულის მდებარეობას დროის ყოველ მომენტში დავახასიათებთ  $h(t)$  ფუნქციით, რომელიც გამოსახავს მანძილს

სხეულიდან დედამიწამდე, მაშინ  $v = \frac{dh}{dt}$  და

$$\frac{dh}{dt} = -gt. \quad (3.4.4)$$

ნიშანი "-" აღებულია იმიტომ, რომ  $g$  ვექტორის გეგმილი უარყოფითია. (3.4.4) არის თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მათემატიკური მოდელის აღმწერი განტოლება.  $h(0) = H$ , საწყისი პირობის გათვალისწინებით (3.4.4) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}. \quad (3.4.5)$$

(3.4.4) და (3.4.5) ფორმულების საშუალებით დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება გამოვთვალოთ სხეულის სიჩქარე  $v(t)$  და სიმაღლე  $h(t)$ , სადაც იგი იმყოფება.

სხვა მდგომარეობაა, თუ ვარდნა ხდება ჰაერიან სივრცეში. მაგალითად, თუ დავაკვირდებით ხიდან ფოთლის ვარდნის პროცესს, ის უფრო მოგვაგონებს თანაბარ მოძრაობას, ე.ი. მოძრაობას მუდმივი სიჩქარით. ფოთოლი თითქოს არ ემორჩილება მსოფლიო მიზიდულობის კანონს. ასევე, რა სიმაღლიდანაც არ უნდა გადმოხტეს პატაშუტისტი, ის დელამიწაზე ყოველთვის ეშვება ერთი და იგივე სიჩქარით. ორივე მაგალითი ეწინააღმდეგება (3.4.4) მოდელს, რადგან ეს მოდელი არ ითვალისწინებს ჰაერის წინააღმდეგობას, რაც ასე მნიშვნელოვანია როგორც ფოთლის ვარდნის, ასევე პარაშუტისტის მოძრაობისთვის.

პარაშუტი ვარდნის პროცესის მათემატიკური მოდელის აგებისას განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ჰაერის წინააღმდეგობის ფაქტორის გათვალისწინება [20]. ეს მამუხრუჭებელი ძალა  $F_a$  მიმართულია სხეულის მოძრაობის მიმართულების საწინააღმდეგოდ. თუ სხეულის მასაა  $m$ , მაშინ სხეულზე მოქმედი  $F$  ძალა ტოლია:

$$F = P - F_a \quad (3.4.6)$$

სადაც ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად  $F = ma$ ,  $P$  - სიმძიმის ძალაა და  $P = F_g = mg$ . ამ ფორმულების გათვალისწინებით (3.4.6) მიიღებს სახეს:

$$ma = mg - F_a. \quad (3.4.7)$$

თუ სხეულის ვარდნისას სხეულის ვარდნის სიჩქარე არ აღემატება 300 მ/წმ და ამავე დროს, არ არის მცირეც, მაშინ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის განსასაზღვრავად იყენებენ შემდეგ გამოსახულებას:

$$F_a = kv^2, \quad \text{სადაც } k = \frac{1}{2} C_y \rho S, \quad (3.4.8)$$

სადაც  $\rho$  წარმოადგენს გარემოს სიმკვრივეს. მაგალითად, ჰაერისათვის, თუ მისი ტემპერატურაა  $15^\circ\text{C}$ , ხოლო წნევა ტოლია 760 მმ. მაშინ  $\rho = \frac{1}{8}$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $S$  მ<sup>2</sup> - წარმოადგენს მოძრაობის

პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე სხეულის გვემილის ფართობს,  $C_y$  - წინააღმდეგობის უკანზომილებო კოეფიციენტი. მაგალითად, პარაშუტისათვის  $C_y = 1,4$ -ს, სფეროსთვის  $C_y = 1,5$ -ს და ა.შ.

(3.4.8) არ არის ფიზიკის ზუსტი კანონი, ის მიახლოებით აღწერს  $F_a$ -ს მაშუხრუჭებულ ძალას სხეულის სიჩქარის ცვლილების გარკვეულ დიაპაზონში.

სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ პარაშუტისტის შემთხვევაში შაერის წინააღმდეგობის ძალა ვარდნის სიჩქარის პროპორციულია (მცირე სიჩქარეების მოდელი):

$$F_a = kv. \quad (3.4.9)$$

(3.4.7) და (3.4.9)-დან გვაქვს

$$ma = mg - kv \quad (3.4.10)$$

სადაც  $a = \frac{dv}{dt}$ .

(3.4.10)-დან

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{mg - kv}{m} = -\frac{k}{m} \left( v - \frac{mg}{k} \right) \quad (3.4.11)$$

საწყისი პირობებით:  $v = 0$ , როცა  $t = 0$ .

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$x = v - \frac{mg}{k}. \quad (3.4.12)$$

(3.4.12) და (3.4.11)-დან გამოვძინარეობს  $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} x$ , ხოლო

(3.4.12) აღნიშვნიდან  $\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt}$ . ამ უკანასკნელი ორი ტოლობის

გათვალისწინებით ვღებულობთ  $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{m} x$ , ანუ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{m} x \quad (3.4.13)$$

საწყისი პირობებით:

$$t = 0, v = 0. \quad (3.4.14)$$

(3.4.14) და (3.4.12)-დან ვღებულობთ საწყის პირობებს:

$$t = 0, x = -\frac{mg}{k}. \quad (3.4.15)$$

(3.4.13) ლიფერენციალური განტოლება განცალკეადი ცვლადებით და (3.4.15) საწყისი პირობებით. მისი ერთადერთი ამონახსნია:

$$x = -\frac{mg}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}. \quad (3.4.16)$$

(3.4.12) ჩავსვათ (3.4.16)-ში:

$$v - \frac{mg}{k} = -\frac{mg}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

აქედან

$$v = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right). \quad (3.4.17)$$

(3.4.17) არის პარაშუტისტის სიჩქარის გამოსათვლელი ფორმულა.

გარკვეული დროის შემდეგ  $e^{-\frac{k}{m}t}$  გახდება ძალიან მცირე და სიჩქარე

$v \approx \frac{mg}{k}$ , ე.ი. პარაშუტისტის ვარდნის სიჩქარე თანაბარია. როგორც

ზემოთ აღვნიშნეთ,  $k$  დამოკიდებულია ჰაერის სიმკვრივეზე, ვარდნილი სხეულის ფართობზე და ა.შ. პარაშუტისტის შემთხვევაში  $k$  საკმაოდ დიდია და ამიტომ დაშვების სიჩქარე შედარებით მცირეა  $v \approx 5$  მ/წმ. ცხადია, ბუმბულის ვარდნის სიჩქარე ნაკლებია, ვიდრე იგივე წონის ტყვიის ბურთულასი, რადგანაც ბუმბულის ზედაპირი ბევრად მეტია ბურთულას კვეთის ფართობზე და შესაბამისად ბუმბულისთვის  $k$  დიდი იქნება, შედეგად დაშვების სიჩქარე მცირე.

არისტოტელემ თავის მსჯელობაში არ გაითვალისწინა ჰაერის წინაღობა და თვლიდა, რომ მძიმე სხეულები უფრო დიდი სიჩქარით ვარდებიან დედამიწაზე. გალილეიმ ექსპერიმენტებით უარყო ეს დებულება.

ახლა ვიპოვოთ პარაშუტისტის მოძრაობის კანონი  $S=S(t)$ . რადგან

$v = \frac{dS}{dt}$ , ამიტომ (3.4.17) ტოლობა გადავწეროთ ასე:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right),$$

ანუ

$$dS = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) dt.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით გვაქვს

$$S = \frac{mg}{k} \left( t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right), \quad (3.4.18)$$

სადაც  $C$  - ნებისმიერი მუდმივია.  $C$ -ს საბოუნელად გამოვიყენოთ პირობა, როცა  $t = 0, S = 0$ , ვღებულობთ

$$0 = \frac{m^2 g}{k^2} + C,$$

ე.ი.

$$C = -\frac{m^2 g}{k^2}. \quad (3.4.19)$$

(3.4.18) და (3.4.19)-დან ვღებულობთ პარაშუტისტის მოძრაობის კანონს (3.4.20).

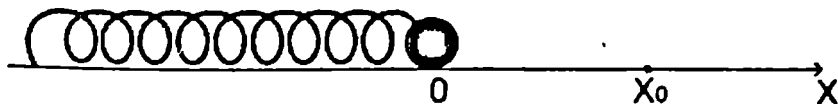
$$S = \frac{mg}{k} \left( t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{m^2 g}{k^2} = \frac{mg}{k} \left( t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k} \right),$$

$$S = \frac{mg}{k} \left( t - \frac{m}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right). \quad (3.4.20)$$



### §3.5. ჰარმონიული ოსცილიატორის მოდელი

ვთქვათ, იდეალურად ბრტყელ, გლუვ მაგიდაზე დევს ბირთვი, რომლის მასაა  $m$  და მიმაგრებულია  $\lambda > 0$  სიმტკიცის კოეფიციენტიან ზამბარასთან [20].



ნახ.3.5.1

$Ox$  ღერძი მიემართოთ ზამბარის გასწვრივ, ხოლო კოორდინატების სათავედ მივიღოთ ის წერტილი, რომელშიც წონასწორობის მდგომარეობაში მდებარეობს ბირთვი (ზამბარა დაჭიმული არ არის). ახლა ბირთვი გავწიოთ წონასწორობის მდგომარეობიდან  $x_0$  მანძილზე და გავუშვათ ის. მაშინ ზამბარის მხრიდან ბირთვზე იმოქმედებს  $F$  ძალა, რომელიც ისწრაფვის ბირთვის დაბრუნებას წონასწორულ მდგომარეობაში. ფიზიკიდან ცნობილია, რომ (მცირე  $x$ -თვის) ეს ძალა ტოლია (ჰუკის კანონი)

$$F(x) = -\lambda x, \quad (3.5.1)$$

მინუსი ნიშანი აქვს იმიტომ, რომ მოქმედი ძალა მიმართულია გადაადგილების მიმართულების საწინააღმდეგოდ.

ბირთვისათვის ნიუტონის მეორე კანონს აქვს სახე:

$$F = ma, \quad (3.5.2)$$

სადაც  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  აჩქარებაა.

(3.5.1) და (3.5.2)-დან ვღებულობთ

$$ma = -\lambda x,$$

ანუ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x.$$

აქედან

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (3.5.3)$$

სადაც

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}.$$

(3.5.3) არის მუდმივკოეფიციენტიანი მეორე რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, მისი მაზასითაბელი განტოლებაა

$$k^2 + \omega^2 = 0,$$

რომლის ფესვებია კომპლექსური რიცხვები

$$k_1 = \omega i, k_2 = -\omega i.$$

ამიტომ (3.5.3)-ის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (3.5.4)$$

სადაც  $C_1$  და  $C_2$  - ნებისმიერი მუდმივებია.

განვსაზღვროთ ახლა, როგორია საწყისი პირობები. დროის  $t = 0$  მომენტში  $x = x_0$ , ხოლო სიჩქარე ტოლია ნულის; ე.ი.

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.5.5)$$

მაგრამ (3.5.4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t,$$

ამიტომ (3.5.5) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{cases} C_1 = x_0, \\ C_2 \omega = 0. \end{cases}$$

აქედან  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = 0$  და

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (3.5.6)$$

(3.5.6) არის კოზის ამოცანის (3.5.3), (3.5.5)-ის ერთადერთი ამონახსნი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ბირთვი აწარმოებს პარმონიულ რხევას  $|x_0|$  ამპლიტუდით და

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

პერიოდით.

$\omega$ -ს ეწოდება რხევის სიხშირე.  $T$  პერიოდი გამოითვლება ფორმულით  $\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$ , სადაც  $2\pi$  კოსინუსის პერიოდია.

როგორც ამბობენ ფიზიკაში, ჩვენ აქ გვაქვს პარმონიული ოსცილატორი. სინამდვილეში ჩვენ ვიცით, რომ ბირთვის არ შეუძლია უსასრულოდ დიდხანს რხევა, და რხევის ამპლიტუდა მიისწრაფის

ნულისკენ. ეს ხდება იმიტომ, რომ ნებისმიერ რეალურ ცდამი მონაწილეობს ხახუნის ძალა, რომელიც ჩვენ უგულებელვყავით (3.5.3) განტოლების მიღებისას.

თუმცა, თუ ხახუნის ძალა ძალიან მცირეა, ხოლო დროის მონაკვეთი არც ისე დიდი, მაშინ (3.5.3) და (3.5.6) პროცესს აღწერენ კარგი მიახლოებით.

ვთქვათ, ახლა ბირთვზე მოქმედებს კიდევ ერთი ძალა  $F_1$ , რომელიც მიმართულია  $Ox$  ღერძის გასწვრივ და რომელიც იცვლება კანონით

$$F_1 = F_0 \sin pt,$$

სადაც  $F_0$  და  $p$  დადებითი მუდმივებია. მაშინ ნიუტონის მეორე კანონი მიიღებს სახეს:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\lambda x + F_0 \sin pt,$$

ანუ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = a_0 \sin pt, \quad (3.5.7)$$

სადაც  $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$ ,  $a_0 = \frac{F_0}{m}$ .

(3.5.7) განტოლებას უწოდებენ იძულებითი რხევების განტოლებას, ხოლო (3.5.3)-ს თავისუფალი რხევების განტოლებას.

ვიპოვოთ (3.5.7) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

1) ვთქვათ,  $p \neq \omega$ , ე.ი. გარეშე ძალის სიხშირე არ ემთხვევა თავისუფალი რხევის სიხშირეს. კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$z = A \cos pt + B \sin pt,$$

აქედან

$$z' = -p A \sin pt + p B \cos pt,$$

$$z'' = -p^2 A \cos pt - p^2 B \sin pt.$$

ეს გამოსახულებები ჩავსვით (3.5.7) განტოლებაში, მივიღებთ

$$-p^2(A \cos pt + B \sin pt) + \omega^2(A \cos pt + B \sin pt) = a_0 \sin pt,$$

$$A(\omega^2 - p^2) \cos pt + B(\omega^2 - p^2) \sin pt = a_0 \sin pt,$$

აქედან

$$A(\omega^2 - p^2) = 0, \quad B(\omega^2 - p^2) = a_0$$

და შესაბამისად,  $A=0$ ,  $B = \frac{a_0}{\omega^2 - p^2}$ .

ამიტომ

$$z(t) = \frac{a_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt$$

და (3.5.7) განტოლების ზოგადი ამონახსნი  $p \neq \omega$  შემთხვევაში იქნება

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{a_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt. \quad (3.5.8)$$

ეს ამონახსნი არის  $\omega$  და  $p$  სინშირეებიანი ორი ჰარმონიული რხევის ღაღება, როცა რხევები შემოსაზღვრულია.

2)  $p = \omega$ , ე.ი. გარეშე ძალისა და თავისუფალი რხევის სინშირეები ტოლია. ამ შემთხვევაში (3.5.7) განტოლების კერძო ამონახსნს ვებძებთ შემდეგი სახით:

$$z(t) = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

აქედან

$$z' = A \cos \omega t + B \sin \omega t + t \omega (-A \sin \omega t + B \cos \omega t),$$

$$z'' = 2(-A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t) - t \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებები (3.5.7)-ში, მივიღებთ

$$2(-A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t) = a_0 \sin \omega t,$$

აქედან

$$-2A\omega = a_0, \quad 2B\omega = 0,$$

ანუ

$$A = -\frac{a_0}{2\omega}, \quad B = 0.$$

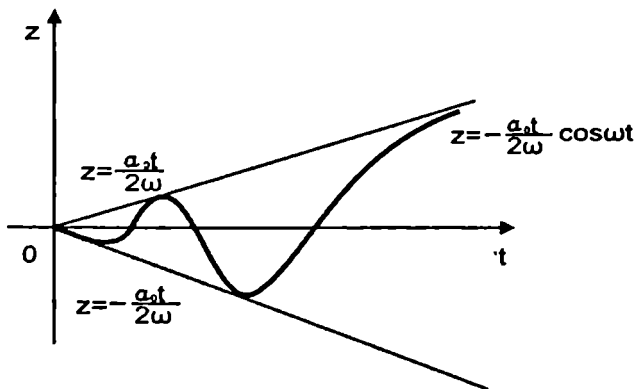
ამიტომ

$$z(t) = -\frac{a_0 t}{2\omega} \cos \omega t$$

და (3.5.7) განტოლების ზოგად ამონახსნს  $p = \omega$  შემთხვევისთვის ექნება შემდეგი სახე:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{a_0 t}{2\omega} \cos \omega t. \quad (3.5.9)$$

(3.5.9) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ რხევის გაქანება  $x$  იზრდება  $t$  დროსთან ერთად. ამ მოვლენას ეწოდება რეზონანსი.



ნახ.3.5.2.

ბევრი მექანიზმის მუშაობის დროს რეზონანსი მეტად არასასურველია, რადგანაც მას მიყვართ სწორი მუშაობის დარღვევასთან და შეიძლება დანგრევამდეც კი. რეზონანსული მოვლენის გამო, ზოგ შემთხვევაში, ინგრევა ხიდები და სხვა დიდი სტრატეგიული მნიშვნელობის კონსტრუქციები.

### §3.6. მათემატიკური მოდელირება ქიმიურ რეაქციებში

ქიმიური რეაქციების რიგი ტოლია მოლეკულების საერთო რიცხვისა, რომელიც შედის ქიმიური განტოლების მარცხენა მხარეში. რეაქცია  $RaB \rightarrow RaC$  პირველი რიგისაა. რეაქციის სიჩქარე არის  $v$ , რომლითაც მარცხენა მხარის კომპონენტები გარდაიქმნებიან რეაქციის განტოლების მარჯვენა მხარის კომპონენტთა სისტემაში. მოქმედი მასა, ან მოქმედი  $A$  ნივთიერების კონცენტრაცია არის ამ ნივთიერების მოლის რაოდენობა მოცულობის ერთეულში. მოქმედ მასათა კანონის თანახმად, რეაქციის სიჩქარე მოცემულ მომენტში მოქმედი მასის პროპორციულია [14, 20].

ნივთიერების მოლი (ანუ, გრამმოლეკულა), არის ამ ნივთიერების გრამების რაოდენობა, რომელიც უდრის მის მოლეკულურ წონას. მაგ., ჟანგბადის 1 მოლი უდრის 16 გრ, წყლის 1 მოლი უდრის 18 გრ.

#### პირველი რიგის ქიმიური რეაქციები

თუ  $a$  არის  $A$  ნივთიერების საწყისი კონცენტრაცია,  $x$  - ლიტრში მოლების რაოდენობა, რომლებიც მოქმედებენ  $t$  დროის განმავლობაში რეაქციის დაწყებიდან, მაშინ რეაქციის სიჩქარეა  $\frac{dx}{dt}$ , ხოლო მოქმედი მასა ამ მომენტისათვის  $a - x$ . მოქმედ მასათა შესახებ კანონის თანახმად

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x), \quad (3.6.1)$$

სადაც  $k$  - პროპორციულობის კოეფიციენტია (სიჩქარის კონსტანტა), რომელაც დამოკიდებულია ქიმიური პროცესის პირობებზე და სახეზე.

(3.6.1)-მა ცვლადთა განცალკევების შემდეგ  $\frac{dx}{a-x} = kdt$ .

$$\int \frac{dx}{a-x} = \int kdt + C,$$

$$-\ln|a-x| + \ln C = kt,$$

ანუ

$$\ln \left| \frac{C}{a-x} \right| = kt.$$

C-ს განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ პირობები  $t = 0, x = 0$ , მაშინ  $\ln \frac{C}{a} = 0, \frac{C}{a} = 1$  აქედან  $C = a$ .

მაშასადამე,

$$\ln \left| \frac{a}{a-x} \right| = kt,$$

საიდანაც

$$\frac{a}{a-x} = e^{kt}$$

და

$$x = a(1 - e^{-kt}). \quad (3.6.2)$$

ამოცანა 1. რადიოაქტიური ელემენტი RaB 26,7 წთ-ში იშლება ნახევრად და წარმოქმნის რადიოაქტიურ ელემენტს RaC. ვიპოვოთ 0,2 საწყისი რაოდენობის RaB-ის დაშლის დრო.

აქ გვაქვს პირველი რიგის რეაქცია:  $\text{RaB} \rightarrow \text{RaC}$ . აბიტომ რეაქციის დიფერენციალური განტოლება არის

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)$$

და, მაშასადამე,

$$\ln \left| \frac{a}{a-x} \right| = kt,$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{a}{a-x} \right|.$$

პროპორციულობის  $k$  კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ დამატებითი პირობებიდან  $t = 26,7$  წთ,  $x = \frac{a}{2}$ ,

$$26,7 = \frac{1}{k} \ln 2, \quad \text{ანუ } k = \frac{\ln 2}{26,7}.$$

ახლა კი საძებნი დრო

$$t = \frac{26,7}{\ln 2} \ln \frac{a}{a-0,2a} = \frac{26,7}{\ln 2} \ln \frac{1}{0,8} = \frac{26,7}{\ln 2} \ln \frac{5}{4} \approx 8,6 \text{ (წთ)}.$$

ამოცანა 2. A ნივთიერება გარდაიქმნება B ნივთიერებად. რეაქციის დაწყებიდან 1 სთ-ის შემდეგ დარჩა A ნივთიერების 44,8

გ, ხოლო 3 სთ-ის შემდეგ 11,2 გ. განვსაზღვროთ A ნივთიერების საწყისი რაოდენობა  $a$  და დრო, როდესაც ამ ნივთიერების ნახევარი დარჩება.

ამჯერადაც გვაქვს პირველი რიგის რეაქცია. ამიტომ (3.6.2)-ის თანახმად

$$x = a(1 - e^{-kt}).$$

გამოვიყენოთ დამატებითი პირობები:  $t = 1$ ,  $x = a - 44,8$  და როცა  $t = 3$ ,  $x = a - 11,2$ .

ვლებულობთ სისტემას:

$$\begin{cases} a - 44,8 = a(1 - e^{-k}), \\ a - 11,2 = a(1 - e^{-3k}) \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} 44,8 = a \cdot e^{-k}, \\ 11,2 = a \cdot e^{-3k}. \end{cases}$$

აქედან  $e^{-k} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$  და  $a = 89,6$ .

ახლა ვპოულობთ საძებნ დროს: (3.6.2)-ში ვსვამთ  $x = \frac{a}{2}$  და  $e^{-k} = 2^{-1}$ -ს.

$$\frac{a}{2} = a(1 - 2^{-t}) \Rightarrow 2^{-t} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-t} = 2^{-1} \Rightarrow t = 1 \text{ სთ.}$$

### *მეორე რიგის ქიმიური რეაქციები*

ვთქვათ,  $a$  და  $b$  არის A და B ნივთიერებების საწყისი კონცენტრაციები,  $x$  - კი  $t$  მომენტისათვის A ნივთიერების მოლელების რაოდენობა, რომლებმაც რეაგირება განიცადეს, და შესაბამისად, B ნივთიერების მოლელების რაოდენობა, რადგანაც A-ს ყოველი მთლიანი უერთდება B-ს მოლს, და ამიტომ რეაგირებაში შესული ორივე ნივთიერების მოლელების რაოდენობაც ტოლია.  $t$  მომენტში რეაქციის სიჩქარე იქნება  $\frac{dx}{dt}$ . A ნივთიერების მოქმედი მასა არის  $(a - x)$ -ის

ტოლი, ანალოგიურად, B ნივთიერების მოქმედი მასა იქნება  $(b - x)$ .

მოქმედ მასათა კანონის თანახმად,



$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \quad (3.6.3)$$

სადაც  $k$  არის პროპორციულობის კოეფიციენტი. განვაცალკევოთ ცვლადები და ინტეგრებით, მივიღებთ:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = k \int dt + C.$$

თუ  $a = b$ , მაშინ,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = k \int dt + C \quad \text{და} \quad \frac{1}{a-x} = kt + C.$$

როცა  $t = 0, x = 0$ , მაშინ,  $\frac{1}{a} = C$ , და ამიტომ

$$\frac{1}{a-x} = kt + \frac{1}{a}, \quad \text{აქედან, } x = \frac{a^2 kt}{akt + 1}.$$

თუ  $a \neq b$ , მაშინ

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a} \right) dx = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| + C.$$

$$\text{ამრიგად, } \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| = kt + C.$$

როცა  $t=0, x=0$ , მაშინ

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a} = C$$

და ამიტომ,

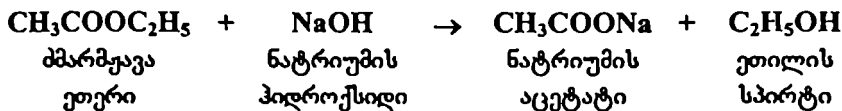
$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{b-x}{a-x} = kt + \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a},$$

ანუ

$$kt = \frac{1}{b-a} \left[ \ln \frac{b-x}{a-x} - \ln \frac{b}{a} \right] = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)}, \quad (3.6.4)$$

$$\text{საიდანაც } \frac{b-x}{a-x} = \frac{b}{a} \cdot e^{kt(b-a)} \quad \text{და} \quad x = \frac{ab(e^{kt(b-a)} - 1)}{be^{kt(b-a)} - a}.$$

ამოცანა 3. ნატრიუმის ჰიდროქსიდით ძმარმუცვა ეთილის ეთერის გასაპნის რეაქციაში



ძმარმჟავა ეთილის ეთერის და ნატრიუმის ჰიდროქსიდის საწყისი კონცენტრაციები შესაბამისად არის  $a = 0,01$  და  $b = 0,002$  (მოლ/ლ). 23 წთ-ის შემდეგ ძმარმჟავა ეთილის ეთერში კონცენტრაცია შემცირდა 10%-ით. რა დროში შემცირდება ის 15%-ით?

სახეზეა მორე რიგის რეაქცია. ამიტომ, რეაქციის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე (3.6.3):

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

და, როგორც ზემოთ ავლნიშნეთ (3.6.4)

$$kt = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)}$$

$k$  პროპორციულობის კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ დამატებითი პირობების გათვალისწინებით: როცა  $t = 23$  წთ,  $x = 0,01 \cdot 0,1 = 0,001$ , გვაქვს

$$23 \cdot k = \frac{1}{0,002 - 0,01} \ln \frac{0,01(0,002 - 0,001)}{0,002(0,01 - 0,001)}$$

ანუ

$$k = \frac{125}{23} \ln 1,8.$$

(3.6.4)-ის გამოყენებით ვპოულობთ საძებნ დროს:

$$\frac{125 \cdot \ln 1,8}{23} \cdot t = \frac{1}{0,002 - 0,01} \ln \frac{0,01(0,002 - 0,0015)}{0,002(0,01 - 0,0015)}$$

ანუ  $t = 23 \frac{\ln 3,4}{\ln 1,8} \approx 47,9$  (წთ).

ამრიგად, დაახლოებით 47,9 წუთში ძმარმჟავა ეთილის ეთერში კონცენტრაცია შემცირდება 15%-ით.

§ 3.7. შაქრის ინჰერსიის  
მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ ნივთიერების ხსნარში გადასვლის პროცესი. ცნობილია, რომ ფიქსირებული ტემპერატურის დროს ნივთიერების რაოდენობა, რომელსაც შეიცავს გარკვეული მოცულობის გამხსნელი, არ შეიძლება აღემატებოდეს გარკვეულ, ყოველი ნივთიერებისათვის განსაზღვრულ  $p$  რაოდენობას, რომელიც შეესაბამება გაჯერებულ ხსნარს. ცნობილია ასევე, რომ ხსნარის გაჯერებულ მდგომარეობასთან მიახლოებისას მცირდება ხსნარში ნივთიერების გადასვლის რაოდენობა დროის ერთეულში. სხვა სიტყვებით, რაც მეტი ნივთიერება გადავა ხსნარში, მით ნაკლებია გადასვლის სიჩქარე [20].

ვთქვათ,  $x = x(t)$  - არის ნივთიერების რაოდენობა, რომელიც გადავიდა ხსნარში დროის  $t$  მომენტში. მაშინ გადასვლის სიჩქარე  $\frac{dx}{dt}$ , ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე შეიძლება დავწეროთ როგორც

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x),$$

სადაც  $\Phi(x)$  მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა  $x \rightarrow p$  - ( $x < p$ ). ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ ბევრი ნივთიერებისათვის  $\Phi(x)$  ფუნქცია პროპორციულია  $p - x$  სხვაობის, ე.ი.  $\Phi(x) = k(p - x)$ , და, შესაბამისად:

$$\frac{dx}{dt} = k(p - x), \quad (3.7.1)$$

სადაც  $k$  ( $k > 0$ ) - პროპორციულობის კოეფიციენტი. (3.7.1)-ის ზოგადი ამონახსნია

$$x = p - C \cdot e^{-kt}. \quad (3.7.2)$$

ვთქვათ, დროის  $t_0$  მომენტში დაიწყო ნივთიერების ხსნარში გადასვლის პროცესი. ცხადია,  $x(t_0) = 0$ , ამიტომ  $p - C \cdot e^{-kt_0} = 0$ , აქედან  $C = p e^{kt_0}$ , და, შესაბამისად:

$$x(t) = p \left( 1 - e^{-k(t-t_0)} \right). \quad (3.7.3)$$

$k$  და  $p$ -ს მნიშვნელობები განისაზღვრება ნივთიერებებისა და გამხსნელის თავისებურებებით. (3.7.3)-დან ჩანს, რომ ნებისმიერი  $k > 0$  და  $p$ -თვის  $x(t)$  მიისწრაფვის  $p$ -კენ, თუ  $t \rightarrow \infty$ .  $x(t)$  ფუნქციის სახე კარგად პასუხობს ექსპერიმენტების მონაცემებს. ამიტომ (3.7.3)

შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნივთიერების ხსნარში გადასვლის კანონი.

სხვადასხვა პროცესის აღწერის დროს დამოკიდებულებათა შესწავლისას პროცესების მიმდინარეობის სიჩქარეების დადგენის საკითხი დგება.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი, კერძოდ შაქრის ინვერსია. თუ ამ პროცესისთვის გამოვიყენებთ მოქმედი მასების კანონს, დავასკვნით, რომ შაქრის რაოდენობა, რომლის ინვერსირება ხდება დროის ერთეულში, ხსნარში შაქრის რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია. ვთქვათ,  $a$  - შაქრის საწყისი რაოდენობაა ხსნარში და  $x$  დროში ხდება  $x$  რაოდენობის შაქრის ინვერსირება. ე.ი. დროის  $\tau$  მომენტისთვის ხსნარში რჩება  $(a - x)$  რაოდენობის შაქარი. ვთქვათ,  $\tau$ -დან  $\tau + \Delta\tau$  მომენტამდე რეაქცია მიმდინარეობს თანაბრად და ამ დროს ინვერსირებული შაქრის რაოდენობა ტოლია  $dx$ . დროის ამ შუალედისათვის, ზემოთ მოყვანილი კანონის თანახმად რეაქციის სიჩქარე შაქრის  $(a - x)$ -ის რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია, და რადგანაც ამ სიჩქარეს ჩვენ ვთვლით მუდმივად, მაშინ ამ შუალედში ინვერსირებული შაქრის რაოდენობა

$k(a - x)d\tau$ -ს ტოლი იქნება,

სადაც  $k$  - პროპორციულობის კოეფიციენტი, შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს

$$dx = k(a - x)d\tau,$$

ანუ

$$\frac{dx}{d\tau} = k(a - x). \quad (3.7.4)$$

ქიმიურმა კანონმა მიიღო მათემატიკური გამოსახულება, ანუ განხილული პროცესის მათემატიკური მოდელი მივიღეთ. ახლა უნდა ვიპოვოთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება  $x$ -სა და  $\tau$ -ს შორის.

(3.7.4) გადავწეროთ ასე:

$$d\tau = \frac{1}{k} \cdot \frac{dx}{a - x}.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ:  $\tau = -\frac{1}{k} \ln(a - x) + \frac{1}{k} \ln C.$

$\tau = 0$  და  $x = 0$  საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ  $C = a$  და შესაბამისად (3.7.4)-ის ამონახსნი იქნება:

$$\tau(x) = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a-x} \quad (3.7.5)$$

ახლა განსაზღვროთ ქიმიური რეაქციის საშუალო სიჩქარე.

( $a, b$ ) შუალედში  $f(x)$  ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობის ქვეშ გვესმის სიდიდე

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით განვსაზღვროთ რეაქციის სიჩქარე.

შაქრის ინვერსიისათვის მიღებული იყო ფორმულა (3.7.5).

სადაც  $a$  - ნივთიერების რაოდენობაა, რომელიც მონაწილეობს რეაქციის დასაწყისში, ხოლო  $k$  - მუდმივი რიცხვია, აქედან

$$x = a(1 - e^{-k\tau}). \quad (3.7.6)$$

განვსაზღვროთ რეაქციის სიჩქარის დამოკიდებულება  $x$  სიდიდეზე.

რეაქციის  $\omega$  სიჩქარეს ვპოულობთ  $x$  ფუნქციის დიფერენცირებით დროით.

$$\omega = \frac{dx}{d\tau} = ake^{-k\tau}. \quad (3.7.7)$$

(3.7.6) და (3.7.7) ტოლობებიდან განვსაზღვროთ  $e^{-k\tau}$  და მათი შედარებით მივიღებთ:

$$\frac{\omega}{ak} = 1 - \frac{x}{a}, \text{ აქედან}$$

$$\omega = k(a - x). \quad (3.7.8)$$

პირველ შემთხვევაში (3.7.7) რეაქციის სიჩქარე გამოსახულია პროცესის ხანგრძლივობით, ხოლო მეორე შემთხვევაში (3.7.8) - ნივთიერების იმ რაოდენობით, რომელიც გარდაისახება.

ახლა განვსაზღვროთ ორივე შემთხვევისათვის რეაქციის საშუალო სიჩქარე.

გამოვიყენოთ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა:

$$\begin{aligned}\omega_\tau &= \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} a k e^{-k\tau} d\tau = \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left( -a e^{-k\tau} \right) \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} = \\ &= \frac{a}{\tau_1 - \tau_0} \left( e^{-k\tau_0} - e^{-k\tau_1} \right) = \frac{\omega_0 - \omega_1}{k(\tau_1 - \tau_0)}.\end{aligned}\quad (3.7.9)$$

(3.7.7)-ის მიხედვით დავწეროთ ტოლობები:

$$\omega_0 = a k e^{-k\tau_0} \quad \text{და} \quad \omega_1 = a k e^{-k\tau_1}.$$

მათი გალოგარითმების შემდეგ განვსაზღვროთ სხვაობა

$$\tau_1 - \tau_0 = \frac{1}{k} (\ln \omega_0 - \ln \omega_1). \quad (3.7.10)$$

(3.7.10) ჩავსვათ (3.7.9)-ში.  $\omega_\tau$  რეაქციის საშუალო სიჩქარე, რომელიც დამოკიდებულია პროცესის ხანგრძლივობაზე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\omega_\tau = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\ln \omega_0 - \ln \omega_1}. \quad (3.7.11)$$

$\omega_x$  - საშუალო სიჩქარისათვის (3.7.8) ვღებულობთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} k(a - x) dx = \frac{k \left( a x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_0}^{x_1}}{x_1 - x_0} = \\ &= \frac{kx(2a - x) \Big|_{x_0}^{x_1}}{2(x_1 - x_0)} = \frac{k(a - x_1 + a - x_0)}{2} = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}.\end{aligned}\quad (3.7.12)$$

აქაც საშუალო მნიშვნელობა დამოკიდებულია არგუმენტის შერჩევაზე.

### §3.8. ბიოქიმიური პროცესების მათემატიკური მოდელი

რთული ბიოქიმიური პროცესი, მაგალითად ფერმენტების ბიოსინთეზი, ჩვენ შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც სისტემა მარტივი, ელემენტარული რეაქცია-პროცესებისა, რომლებიც დაკავშირებულია ერთმანეთთან ისე, რომ პროდუქტები, რომელთა სინთეზირება ხდება ერთ პროცესში, სხვა პროცესში საწყის ნივთიერებად გვევლინებიან [20, 34].

აღვნიშნოთ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ით ნივთიერებათა რაოდენობები (ანუ კონცენტრაციები), რომლებიც მონაწილეობენ ჩვენს სისტემაში. ეს შეიძლება იყოს ფერმენტები, ნუკლეინური მჟავები, ცილები და ა.შ. დროთა განმავლობაში ყველა ეს სიდიდე იცვლება. ერთ პროცესში  $i$ -ური ნივთიერება წარმოიქმნება (ე.ი.  $x_i$  იზრდება), სხვაში - გამოიყენება ან იშლება, შედის რა სხვა ნივთიერების შემადგენლობაში (ამ დროს  $x_i$  მცირდება). ამიტომ  $t$ -დან  $(t + \Delta t)$ -მდე დროის შუალედში  $\Delta x_i$  ნაზრდი შედგება  $P_i \Delta t - Q_i \Delta t$  ჯამისაგან, სადაც  $P_i \Delta t$  - არის მატება ყველა იმ პროცესიდან, სადაც  $i$ -ური ნივთიერება წარმოიქმნება,  $Q_i \Delta t$  - არის დანაკარგი ყველა პროცესიდან, სადაც  $i$ -ური ნივთიერება გამოიყენება ან იშლება.

$$\Delta x_i = P_i \Delta t - Q_i \Delta t = (P_i - Q_i) \Delta t.$$

აქედან, ჩვეულებრივ,

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i - Q_i.$$

$P_i$ -ს უწოდებენ  $i$ -ური ნივთიერების წარმოქმნის სიჩქარეს, ხოლო  $Q_i$ -ს დაშლის ან მოხმარების სიჩქარეს. ზოგჯერ "სიჩქარის" ნაცვლად ხმარობენ "ინტენსიურობა"-ს.

როგორია  $P_i$  და  $Q_i$  სიდიდეები? ცხადია ისინი არის  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადების ფუნქციები:

$$P_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Q_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

ვთქვათ, მაგალითად, წყალი წარმოიქმნება შემდეგი რეაქციის პროცესში



და გამოიყენება რეაქციაში:



მაშინ წყლის მატება დამოკიდებული იქნება HCl და NaOH-ის რაოდენობებზე, ხოლო შემცირება NH<sub>3</sub>-ის რაოდენობაზე.

ამ მარტივი მაგალითიდან უკვე ჩანს, რომ  $f_1$  და  $f_2$  ჩვეულებრივ არ არიან დამოკიდებული ყველა  $x_1, x_2, \dots, x_n$  კომპონენტზე, არამედ მხოლოდ ზოგიერთზე ყოველი  $i$ -თვის. ამ ფუნქციების კონკრეტული სახე მოხმარებისა და წარმოების პროცესების სპეციფიკით განისაზღვრება.

ძალიან მარტივ შემთხვევაში  $P_1$  არის რომელიმე ერთი კომპონენტის წარფივი ფუნქცია. მაგალითად, თუ წყალი არის ზომავზე მეტი რაოდენობით, მაშინ ნიშადურის სპირტი, რომელიც მიიღება (3.8.2) რეაქციით,  $NH_3$ -ის იმ რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია, რომელიც შედის რეაქციაში. წარფივი შეიძლება იყოს  $Q_1$  ფუნქციაც. მაგალითად, თუ მიღებული  $i$ -ური ნივთიერების ნაწილი იშლება, მაშინ  $Q_i = -\alpha_i x_i$ .

ბევრი ბიოქიმიური რეაქცია მიმდინარეობს გაჯერების პრინციპით. დასაწყისში, როცა რომელიმე ნივთიერება მცირე რაოდენობითაა, რეაქცია მიმდინარეობს სწრაფად, ან სიჩქარით, რომელიც ამ  $x_k$  ნივთიერების რაოდენობის პროპორციულია. შემდგომ,  $x_k$ -ს გადიდებასთან ერთად, რეაქციის სიჩქარე ეცემა ამა თუ იმ კანონის თანახმად. ასეთი რეაქციების აღსაწერად  $P_1$  და  $Q_1$ -ს სახით მოსახერხებელია გამოვიყენოთ შემდეგი სახის ფუნქციები:

$$\frac{a}{b + cx_k}, \frac{ax_k}{b + cx_k}, \frac{ax_k}{b + cx_k^2} \text{ და ა.შ.}$$

როდესაც  $x_k$  მცირეა, მაშინ ამ ფუნქციებიდან პირველი ექვივალენტურია  $\frac{a}{b}$  მუდმივის, მეორე და მესამე ახლოს არიან  $\frac{a}{b} x_k$  წრფივ ფუნქციასთან.  $x_k$ -ს ზრდასთან პირველი და მესამე ფუნქციები მიისწრაფიან ნულისაკენ, მეორე კი  $\frac{a}{c}$  მუდმივისაკენ.

თუ  $NH_3$ -სა და  $H_2O$ -ის კონცენტრაციები თითქმის ერთნაირია, ნიშადურის სპირტის წარმოქმნის სიჩქარე, შეიძლება ჩაითვალოს  $NH_3$ -სა და  $H_2O$ -ს მოლეკულათა შეხვედრის რაოდენობის პროპორციულად, ე.ი. ამონიუმისა და წყლის კონცენტრაციათა ნამრავლის პროპორციულად. ამგვარად, თუ  $x_1, x_2$  და  $x_3$ -ით აღნიშნულია შესაბამისად ამონიუმის, წყლისა და ნიშადურის სპირტის კონცენტრაციები, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ



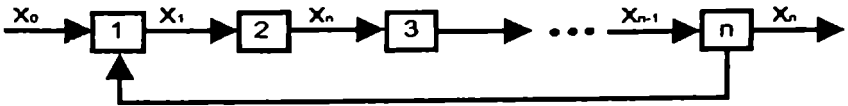
$$\frac{dx_3}{dt} = \varepsilon_1 x_1 x_2 - \gamma_1 x_3,$$

სადაც  $\gamma_1 x_3$  - შესაკრები ახასიათებს ნიშადურის სპირტის დაშლას (ან, მაგალითად, აორთქლებას ატმოსფეროში).

ბევრ ბიოქიმიურ პროცესს ახასიათებს თავისებურება, როცა პროცესის სინქარე  $\min(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n)$ -ის პროპორციულია.

შეგვიხსნათ, რომ  $\min(ax, b)$  ფუნქცია კარგად აღწერს გაჯერების ეფექტს. სანამ  $x$  მცირეა (ისე, რომ  $ax < b$ ), ფუნქცია  $\min(ax, b) = ax$ .  $x$ -ის ზრდასთან (როცა  $ax > b$ ) ეს ფუნქცია მუდმივ  $b$ -ს ტოლი ხდება.

ვაჩვენოთ უკუკავშირის მექანიზმი. უმარტივეს შემთხვევაში ეს მექანიზმი მდგომარეობს შემდეგში. ეთქვათ, გვაქვს ისეთი  $\Pi$  პროცესის ჯაჭვი, რომ  $(k - 1)$  პროცესის პროდუქტი არის საწყისი ნივთიერება  $k$ -ური პროცესისათვის. დავეუშვათ, რომ ყოველი პროცესის ინტენსივობა, დაწყებული მეორიდან, მით მეტია, რაც მეტია მათთვის ამოსავალი ნივთიერება. და, ბოლოს, დავეუშვათ, რომ ბოლო  $\Pi$ -ური პროცესის პროდუქტის ნაწილი ერთვება პირველ პროცესში (ნახ.3.8.1). ამგვარად, პირველი პროცესის ინტენსივობა (ე.ი. მთელი ჯაჭვის) დამოკიდებულია ამ ჯაჭვის საბოლოო პროდუქტის რაოდენობაზე. ამაში მდგომარეობს უკუკავშირის არსი.



ნახ.3.8.1

მაგალითის სახით განვიხილოთ პროცესთა ჯაჭვი, რომელიც ორგანიზებულია შემდეგნაირად. ჯაჭვის ბოლო პროდუქტი ხვდება რაიმე რეზერვუარში. სანამ რეზერვუარი არ არის სავსე, საბოლოო პროდუქტი ვერ მოხვდება პირველ პროცესში და პირველი პროცესის სინქარე მუდმივია. როგორც კი რეზერვუარი აივსება, ჭარბი  $\Pi$ -ური პროდუქტი იწყებს პირველ პროცესში ჩართვას, ამცირებს რა ამ პროცესის სინქარეს, რაც ბოლოს და ბოლოს ამცირებს  $\Pi$ -ური პროდუქტის გამოსვლას.

$x_1$ -თვის განტოლებაში უკუკავშირის ეფექტი შეიძლება იყოს გამოსახული ასე:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{a}{1+f(x_n)} - Q_1,$$

სადაც

$$f(x_n) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x_n < S, \\ b(x_n - S), & \text{თუ } x_n > S. \end{cases}$$

აქ  $f(x_n)$  - "უკუკავშირის სიგნალი", ხოლო  $S$  - რეზერვუარის მოცულობა.

გადალუნვის წერტილებს დიდი მნიშვნელობა აქვს ბიოქიმიაში, რადგანაც ისინი განსაზღვრავენ პირობებს, რომლის დროსაც რომელიმე სიდიდე, მაგალითად, პროცესის სიჩქარე, მეტად (ან ნაკლებად) მგრძობიარეა რაიმე ზემოქმედების მიმართ. ამის საჩვენებლად განვიხილოთ ბუფერის შესაძლებლობა შეაფერხოს pH ცვლილება ( $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$ ), რომელიც შეიძლება განპირობებული იყოს, მაგალითად ტუტის დამატებით [14. 34]. ეს სიტუაცია ჩაიწერება განტოლებით

$$\text{pH} = \text{pK}_\alpha + \lg \frac{[\text{მარილი}]}{[\text{მჟავა}]}$$

( $\text{pK}_\alpha = -\lg K_\alpha$ ,  $K_\alpha$  - მჟავის დისოციაციის კონსტანტა). ბუფერისათვის, რომელიც მიღებულია  $x$  მოლი/ლიტრი  $\text{NaOH}$ -ის დამატებით ძმარმჟავას  $\text{HOAc}$  ხსნარისათვის (სიმარტივისათვის  $A_c$ -თი აღნიშნულია  $\text{CH}_3\text{CO}$ ), რომლის საწყისი კონცენტრაცია  $A$ -ს ტოლია, ჩვენ გვექნება

$$\begin{aligned} \text{pH} &= \text{pK}_\alpha + \lg \frac{[\text{NaOA}_c]}{[\text{HOA}_c]} = \text{pK}_\alpha + 0,4343 \ln \frac{[\text{NaOA}_c]}{[\text{HOA}_c]} = \\ &= \text{pK}_\alpha + 0,4343 \ln \frac{x}{A-x}. \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

ვინაიდან, მანამ, სანამ  $x$  ნაკლებია  $A$ -ზე,  $\text{OH}^-$ -ის ყველა დამატებული იონი სტექიომეტრიულად გადააქცევს  $\text{HOAc}$ -ის მოლეკულებს  $\text{OAc}^-$ -ს იონებად. მოვახდინოთ დიფერენცირება  $x$ -ით, მივიღებთ

$$\frac{d\text{pH}}{dx} = 0,4343 \frac{A-x}{x} \cdot \frac{A-x+x}{(A-x)^2} = \frac{0,4343A}{x(A-x)}$$

ეს პირველი წარმოებული არის  $\text{pH}$ -ის მგრძობელობის საზომი ტუტის მოქმედების მიმართ. ცხადია, რომ ბუფერი უფრო ეფექტურია, როცა წარმოებული მინიმალურია (ან მისი შებრუნებული სიდიდე, რომელიც ცნობილია ბუფერული მოცულობის სახელწოდებით, მაქსიმალურია).  $x$ -ის მნიშვნელობის საპოვნელად, რომლის დროსაც

$\frac{d\text{pH}}{dx}$  მინიმალურია, საჭიროა ავიღოთ მეორე წარმოებული

$$\frac{d^2\text{pH}}{dx^2} = -0,4343A \frac{A-2x}{(Ax-x^2)^2}$$

აქედან ცხადია, რომ მეორე წარმოებული ტოლია ნულის, როცა  $x = \frac{A}{2}$  და მასზე გადასვლისას  $x$ -ის ზრდადობის მიმართულებით

იცვლის ნიშანს "მინუსს", "პლუსზე", შესაბამისად  $\frac{d\text{pH}}{dx}$  მინიმალურია  $\text{pH}$  ფუნქციის გადაღუნვის წერტილში.  $x$ -ის ეს მნიშვნელობა ჩავესვათ (3.8.3)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\text{pH} = \text{pK}_a + 0,4343 \ln \frac{2A}{2A} = \text{pK}_a$$

ამგვარად, ბუფერი უფრო ეფექტურია ნიტრირებაში მონაწილე  $\text{pH}$ -თვის, რომელიც  $\text{pK}_a$ -ს ტოლია.

§3.9. ბუნებისმეტყველების ზოგიერთი  
მათემატიკური მოდელები

მოდელი 1. რადიოაქტიური დაშლის შესახებ [20].

რადიუმის დაშლის სიჩქარე დროის ყოველ მომენტში მისი მასის პროპორციულია. ვიპოვოთ რადიუმის დაშლის კანონი, თუ ცნობილია, რომ დროის  $t = 0$  საწყის მომენტში იყო  $m_0$  გრ რადიუმი და რადიუმის ნახევარდაშლის პერიოდი (დროის პერიოდი, რომლის განმავლობაში იშლება რადიუმის მოცემული მასის ნახევარი) 1590 წელია.

ეთქვას, დროის  $t$  მომენტისთვის რადიუმის მასა არის  $x$  გრ, მაშინ რადიუმის დაშლის სიჩქარე ტოლია

$$\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}. \quad (3.9.1)$$

ამოცანის პირობის თანახმად

$$-\frac{dx}{dt} = kx,$$

ანუ

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad (3.9.2)$$

სადაც  $k > 0$  - პროპორციულობის კოეფიციენტი.

(3.9.2) განტოლებაში ცვლადების განცალკევება და ინტეგრების შემდეგ ვღებულობთ

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

$$\ln x = -kt + \ln C,$$

რომელიც პოტენციურების შემდეგ გვაძლევს  $x = C \cdot e^{-kt}$ .

$C$ -ს განსაზღვრავად ვიყენებთ საწყის პირობებს:  $t = 0, x = m_0$ . ვღებულობთ  $C = m_0$  და, შესაბამისად,

$$x = m_0 e^{-kt}. \quad (3.9.3)$$

პროპორციულობის  $k$  კოეფიციენტი უნდა განვსაზღვროთ დამატებითი პირობების გამოყენებით:

$$t = 1590, x = \frac{m_0}{2}. \text{ გვაქვს}$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k}, \quad \text{ანუ } e^{1590k} = 2.$$

და, შედეგად,

$$e^k = 2^{\frac{1}{1590}}.$$

ამიტომ საძებნი ფუნქციაა

$$x = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1590}}.$$

მოდელი 2. ძრავიანი ნავის მოძრაობის შესახებ [20].

ძრავიანი ნავი მოძრაობს მდგარ წყალში  $v_0 = 20$  კმ/სთ სიჩქარით. სრული მოძრაობის დროს მისი ძრავა ითიშება და გათიშვიდან 40 წმ-ის შემდეგ ნავის სიჩქარე მცირდება  $v_1 = 8$  კმ/სთ-მდე. წყლის წინაღობა ნავის მოძრაობის სიჩქარის პროპორციულია. განვსაზღვროთ ნავის სიჩქარე ძრავის გაჩერებიდან 2 წთ-ის შემდეგ.

მოძრავ ნავზე მოქმედებს წყლის წინაღობის ძალა

$$\vec{F} = -k\vec{v},$$

სადაც  $k > 0$  - პროპორციულობის კოეფიციენტი.

მეორეს მხრივ, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

და, შესაბამისად,

$$m\vec{a} = -k\vec{v}$$

ანუ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{k}{m}\vec{v},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\vec{v} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

$t = 40$  წმ  $= \frac{1}{90}$  სთ და  $v = 8$  კმ/სთ დამატებითი პირობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$8 = 20 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}}, \text{ ანუ } e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

შესაბამისად

$$v = 20 \left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}.$$

აქედან საძებნი სიჩქარეა

$$v = 20 \left( \frac{5}{2} \right)^{-90 \cdot \frac{1}{30}} = 20 \left( \frac{5}{2} \right)^{-3} = 20 \cdot \frac{8}{125} = \frac{32}{25} = 1,28 \text{ (კმ/სთ)}$$

მოდელი 3. მოძრაობის კანონის პოვნის შესახებ [20].

დავუშვათ, რომ  $v$  სიჩქარე,  $s$  გზა და  $t$  დრო დამოკიდებულია ფორმულით  $v \cdot \cos t + s \cdot \sin t = 1$ . ვიპოვოთ მოძრაობის კანონი, თუ  $t = 0, s = 2$ .

რადგანაც  $v = \frac{ds}{dt}$ , მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{ds}{dt} \cos t + s \cdot \sin t = 1$$

ეს არის პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება და (3.2.10) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned} s &= e^{-\int \frac{\sin t}{\cos t} dt} \left[ C + \int \frac{1}{\cos t} e^{\int \frac{\sin t}{\cos t} dt} dt \right] = e^{\int \frac{d \cos t}{\cos t}} \left[ C + \int \frac{1}{\cos t} e^{-\int \frac{d \cos t}{\cos t}} dt \right] = \\ &= e^{\ln |\cos t|} \left[ C + \int \frac{1}{\cos t} e^{-\ln |\cos t|} dt \right] = \cos t \left[ C + \int \frac{dt}{\cos^2 t} \right] = \\ &= \cos t \cdot (C + \operatorname{tg} t) = C \cdot \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

როცა  $t = 0, s = 2$ , მაშინ  $C = 2$ . ამგვარად საძებნი მოძრაობის კანონია

$$s = \sin t + 2 \cos t.$$

მოდელი 4. კონდენსატორის მუხტის განსაზღვრის შესახებ [20].

კონდენსატორი  $C$  მოცულობით უერთდება წრედს, რომლის ძაბვა  $U$  და წინაღობა  $R$ . განესაზღვროთ კონდენსატორის  $q$  მუხტი ჩართვიდან  $t$  მომენტის შემდეგ.

ელექტრონული დენის ძალა  $I$  არის გამტარში გასული ელექტრონების  $q$  რაოდენობის წარმოებული  $t$  დროით.

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.9.4)$$

დროის  $t$  მომენტში კონდენსატორის მუხტია  $q$  და დენის ძალა  $I = \frac{dq}{dt}$ ; წრელში მოქმედებს ელექტრომაგობრავებელი  $E$  ძალა, რომელიც წრელის  $U$  ძაბვასა და კონდენსატორის  $\frac{q}{C}$  ძაბვას შორის სხვაობის ტოლია, ე.ი.

$$E = U - \frac{q}{C}. \quad (3.9.5)$$

ომის კანონის თანახმად

$$I = \frac{E}{R}. \quad (3.9.6)$$

ამიტომ (3.9.4), (3.9.5) და (3.9.6)-ის ძალით

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{C}}{R}.$$

აქედან

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{CR}(CU - q). \quad (3.9.7)$$

ანუ, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$x = CU - q \quad (3.9.8)$$

მაშინ  $\frac{dx}{dt} = -\frac{dq}{dt}$  და (3.9.7) ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{CR}x \quad (3.9.9)$$

ე.ი. მივიღეთ  $\frac{dx}{dt} = -kx$  ტიპის დიფერენციალური განტოლება საწყისი პირობით

$$x = CU, \text{ როცა } t = 0. \quad (3.9.10)$$

(3.9.9), (3.9.10) ამოცანის ამონახსნია

$$x = CUe^{-\frac{t}{CR}}, \quad (3.9.11)$$

ანუ (3.9.8)-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$CU - q = CUe^{-\frac{t}{CR}},$$

საიდანაც

$$q = CU \left( 1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right), \quad (3.9.12)$$

მოდელი 5. გათბობის შესახებ

განვსაზღვროთ სითბოს რაოდენობა, რომელიც აუცილებელია იმისათვის, რომ 10 კგ რკინა გავათბოთ  $20^{\circ}\text{C}$ -დან  $100^{\circ}\text{C}$ -მდე, თუ რკინის სითბოტევადობა  $C_t$   $0^{\circ}$ -დან  $200^{\circ}\text{C}$ -მდე განისაზღვრება წრფივი კანონით

$$C_t = 0,1053 + 0,000142t.$$

სხეულის სითბოტევადობა ეწოდება სითბოს რაოდენობას, რომელიც აუცილებელია მასის ერთეულისთვის  $1^{\circ}\text{C}$ -ით ტემპერატურის ამაღლებისათვის. ცდები გვიჩვენებს, რომ სითბოს ეს რაოდენობა არის სხვადასხვა სხეულის სხვადასხვა საწყისი ტემპერატურის დროს. ამიტომ სითბოტევადობას ჩვენ ვუწოდებთ წარმოებულს

$$C_t = \frac{dQ}{dt},$$

სადაც  $dQ$  - იმ სითბოს რაოდენობის დიფერენციალია, რომელიც საჭიროა ამ სხეულის ერთეული მასის გასათბობად  $t$ -დან  $t + \Delta t$  ტემპერატურამდე (მასის ერთეულად ჩვენ მივიღებთ გრამს, ხოლო სითბოს ერთეულად - კალორიას).

დასმულ ამოცანაში

$$C_t = \frac{dQ}{dt} = 0,1053 + 0,000142t,$$

ამიტომ სითბოს რაოდენობა, რომელიც აუცილებელია 1 კგ რკინის გასათბობად  $20^{\circ}\text{C}$ -დან  $100^{\circ}\text{C}$ -მდე ტოლია

$$Q = \int_{20}^{100} (0,1053 + 0,000142t) dt = (0,1053t + 0,000071t^2) \Big|_{20}^{100} =$$

$$= 9,106 \text{ კკალ,}$$

ე.ი. 10 კგ რკინის გასათბობად საჭიროა  $10 \times 9,106 = 91,06$  კკალ. სითბო.

მოდელი 6. გაზის ჰაერთან შერევის შემთხვევაში ჟანგვის მაქსიმალური სიჩქარის პოვნის შესახებ.

გაზი, რომელიც შეიცავს აზოტის ოქსიდს, შეერევა ჰაერს. განვსაზღვროთ მიღებულ ნაერთში ჟანგბადის როგორი



შემაღვენლობის (%-ში) შემთხვევაში იქნება აზოტის ჟანგვის პროცესი მაქსიმალური და რა რაოდენობის ჰაერი უზრუნველყოფს ჟანგბადის ამ რაოდენობას ნარევეში?

აღენიშნოთ  $x$ -ით ჰაერის მოცულობის რაოდენობა, რომელიც ემატება 1 ერთეული მოცულობის საწყის გაზს;

$a$  - საწყის გაზში აზოტის ოქსიდის მოცულობითი წილი;

$b$  - საწყის გაზში სხვა (ინერტული) კომპონენტების მოცულობითი წილი;

$c$  - ჟანგბადის მოცულობა, რომელიც შეღის ჰაერთან ერთად 1 ერთ. მოცულობის საწყის გაზში;

$n$  - აზოტის მოცულობა, რომელიც უერთდება ნარევეს ჰაერთან ერთად.

მაშინ  $a + b + c + n = 1 + x$ , ამასთან  $a + b = 1$  და  $c + n = x$ . რადგან ჰაერში 20,8%  $O_2$ -ია და 79,2%  $N_2$ , მაშინ

$$n = \frac{79,2}{20,8}c \approx 3,81c.$$

ამიტომ  $x \approx c + 3,81c = 4,81c$

და აქედან  $c = \frac{x}{4,81}$ .

შენაერთში აზოტის ოქსიდისა და ჟანგბადის კონცენტრაცია, გამოსახული მოცულობით წილებში, ტოლი იქნება.

აზოტის ოქსიდის კონცენტრაციაა  $\frac{a}{1+x}$ , ჟანგბადის კონცენტრაცია უნდა ვიპოვოთ განტოლებიდან

$$\frac{c}{1+x} = \frac{x}{4,81(1+x)}.$$

თუ ამ კონცენტრაციებს ჩავსვათ აზოტის ოქსიდის სიჩქარის გამოსახულებაში

$$\omega = k(\text{NO})^2 \cdot (\text{O}_2)$$

მივიღებთ

$$\omega = k \frac{a^2}{(1+x)^2} \cdot \frac{x}{4,81(1+x)},$$

ანუ

$$\omega = k \frac{a^2}{4,81} \cdot \frac{x}{(1+x)^3}.$$

$x$ -ის მნიშვნელობის საპოვნელად, რომლის დროსაც  $\omega$ -ის  
სიჩქარე მაქსიმუმია, ვპოულობთ  $\frac{d\omega}{dx}$ -ს

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{ka^2}{4,81} \cdot \frac{1-2x}{(1+x)^4},$$

$$\frac{d\omega}{dx} = 0, \text{ როცა } x = 0,5.$$

ამგვარად, როცა  $x = 0,5$ , ე.ი. 1 ერთ მოცულობის საწყის გაზზე  
0,5 მოცულობის ჰერის დამატების შემთხვევაში აზოტის ოქსიდის  
ჟანგვის სიჩქარე მაქსიმალურია. ამის შესაბამისი ჟანგბადის  
კონცენტრაცია შენაერთში ტოლი იქნება

$$\frac{x}{4,81(1+x)} = \frac{0,5}{4,81(1+0,5)} = 0,0693;$$

ე.ი. 6,93%.

მასადაამე, NO-ს ჟანგვის სიჩქარე მაქსიმალურია, თუ გაზს  
დაემატება მისი მოცულობის ნახევრის ოდენობის ჰერი (საწყისი  
გაზის ნებისმიერი შემადგენლობისთვის); ამით ხდება შენაერთში  
ჟანგბადის კონცენტრაციის უზრუნველყოფა 6,93%-ით. ჟანგბადის  
ასეთი კონცენტრაციის დროს, საწყის გაზში აზოტის ოქსიდის  
კონცენტრაციის მიუხედავად, ადგილი აქვს ჟანგვის მაქსიმალურ  
სიჩქარეს. ეს სიჩქარე მაქსიმალურია დასაწყისში და დარჩება ასეთად  
მთელი პროცესის მანძილზე, თუ შევინარჩუნებთ ჟანგბადის 6,93%  
კონცენტრაციას.

მოდელი 7. (ხსნარის კონცენტრაციის შესახებ)  
[14]. რეზერვუარში, რომელიც შეიცავს 10 კგ მარილს 100 ლ  
შენაერთზე, ყოველ წუთში ჩადის 30 ლ წყალი და გამოდის 20 ლ  
შენაერთი. განვსაზღვროთ, მარილის რა რაოდენობა დარჩება  
რეზერვუარში  $t$  წუთის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ  
შენაერთი უცბად აირევა.

ვთქვათ,  $x$  არის მარილის რაოდენობა რეზერვუარში  $t$  მომენტში,  
 $-dx$  არის მარილის რაოდენობა, რომელიც გამოდის რეზერვუარიდან  
 $dt$  დროში (ნიშანი "-" განპირობებულია იმით, რომ  $x$  არის დროის  
კლებადი ფუნქცია). ნაერთის მოცულობა რეზერვუარში დროის  $t$   
მომენტში იქნება

$$V = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t. \quad (3.9.13)$$

ამიტომ, მარილის კონცენტრაცია (ე.ი. მარილის რაოდენობა 1 ლ ნარევეში) დროის  $t$  მომენტში იქნება

$$\frac{x}{100 + 10t}$$

შესაბამისად, დროის მოკლე  $dt$  შუალედში მარილის რაოდენობა შემცირდება

$$\frac{x}{100 + 10t} \cdot 20dt - \text{თი.}$$

აქედან გვაქვს დიფერენციალური განტოლება

$$-dx = \frac{20xdt}{100 + 10t} \quad (3.9.14)$$

განვაცალკევოთ ცვლადები, ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln x = -2 \ln(10 + t) + \ln C,$$

აქედან

$$x = \frac{C}{(10 + t)^2} \quad (3.9.15)$$

როცა  $t = 0$ ,  $x = 10$ , მაშინ  $C = 1000$ .

ამგვარად, რეზერვუარში მარილის ცვლილების კანონი,  $x(t)$  დროზე დამოკიდებული, მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$x = \frac{1000}{(10 + t)^2} \quad (3.9.16)$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ ვიცით რეზერვუარში დარჩენილი მარილის რაოდენობა, მაშინ, ამ უკანასკნელი ტოლობიდან შეიძლება განვსაზღვროთ რა დრო გავიდა პროცესის დაწყებიდან. ამ იდეაზეა დამყარებული ზღვებისა და ოკეანეების ასაკის განსაზღვრა.

**მოდელი 8.** სპილენძის კუბის შემცირების შესახებ [14]. კონცენტრირებულ გოგირდის მჟავაში მოათავსეს სპილენძის კუბი, რომლის წიბოა 5 სმ. გარკვეული დროის შემდეგ კუბის მასა 0,96 გ-ით შემცირდა. რამდენით შემცირდა წიბო, თუ სპილენძის  $\rho$  სიმკვრივე 8 გ/სმ<sup>3</sup>-ია (სპილენძი გადადიოდა ხსნარში ყველა მხრიდან).

რადგანაც სპილენძი გადადის ხსნარში ყველა წახნაგიდან თანაბრად, ამიტომ, რეაქციის განსაზღვრულ მომენტში მჟავაში იქნება უფრო მცირე ზომის კუბი.

ვთქვათ,  $x$  კუბის წიბოა, მისი მოცულობა  $V = x^3$ , რადგანაც

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (m - \text{მასა, } \rho - \text{სიმკვრივე), მაშინ, კუბის მოცულობის}$$

ცვლილება  $\Delta V = \frac{0,96}{8} = 0,12 \text{ სმ}^3$ ,  $\Delta x$  არის კუბის წიბოს ნაზრდი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $V' = \frac{dV}{dx} = 3x^2$ ,  $dx \approx \Delta x$  და

$$dV \approx \Delta V = 0,12, \text{ რადგანაც } x = 5, \text{ ამიტომ } \frac{0,12}{\Delta x} = 3 \cdot 5^2. \text{ აქედან}$$

$$\Delta x = \frac{0,12}{3 \cdot 25} = 0,0016 \text{ (სმ).}$$

მოდელი 9. ყანგბადის კონცენტრაციის პოვნის შესახებ. აირი შედგება აზოტ (N) ოქსიდის (NO) და ყანგბადისაგან ( $O_2$ ). უნდა ვიპოვოთ  $O_2$ -ის კონცენტრაცია, რომლის დროსაც შენაერთში მყოფი NO იყანგება უდიდესი სიჩქარით.

$2NO + O_2 = 2NO_2$  რეაქციის სიჩქარე გამოისახება  $v = kx^2y$ -ით, სადაც  $x$  არის NO-ს კონცენტრაცია დროის ნებისმიერ მომენტში,  $y$  კი  $O_2$ -ის კონცენტრაცია,  $k$ - რეაქციის სიჩქარის კონსტანტა, რომელიც არ არის დამოკიდებული კომპონენტთა კონცენტრაციაზე და დამოკიდებულია მხოლოდ ტემპერატურაზე. აირის კონცენტრაციას გამოვსახავთ მოცულობით პროცენტებით.

ამ შემთხვევაში.  $y = 100 - x$ ,  $v = kx^2(100 - x) = v(x)$ . ცხადია,  $0 < x < 100$ . წარმოებულს  $v' = k(200x - 3x^2)$  აქვს ერთადერთი ფესვი 0-სა და 100-ს შორის.  $x = x_1 = 66,67$ .  $v(0) = v(100) = 0$ , შესაბამისად რეაქციის სიჩქარე უდიდესია, როცა  $x = 66,67\%$  და  $y = 33,33\%$ .

მოდელი 10. რეაქციის მაქსიმალური სიჩქარის დროს ნივთიერებათა კონცენტრაციების განსაზღვრის შესახებ [14,20]. ქიმიურ რეაქციაში მონაწილეობს სამი ნივთიერება  $x, y$  და  $z$  კონცენტრაციით. ვთქვათ, რეაქციის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში გამოიხატება კანონით

$$v = kx^2yz.$$

ვიპოვოთ  $x, y$  და  $z$  კონცენტრაციები, რომლის დროსაც რეაქციის სიჩქარე,  $v$ , მაქსიმალურია.

ვთქვათ,  $x + y + z = 100$  (%).

აქედან  $z = 100 - x - y$ , შესაბამისად

$$v = kx^2y(100 - x - y). \quad (3.9.17)$$

ვიპოვოთ (3.9.17)-ის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = k(200xy - 3x^2y - 2xy^2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = k(100x^2 - x^3 - 2x^2y).$$

მიღებულ გამოსახულებებს ვუტოლებთ ნულს:

$$\begin{cases} 200xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 100x^2 - x^3 - 2x^2y = 0. \end{cases}$$

$x=0$ ,  $y=0$  მნიშვნელობები (3.9.17) ფუნქციის მაქსიმუმს არ გვაძლევს. ვამარტივებთ სისტემას:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 200, \\ x + 2y = 100. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ  $x = 50$ ,  $y = 25$ , მაშინ  $z = 25$ .

ორი ცვლადის ფუნქციისათვის ექტრემუმის პირობის შემოწმებით [14, 20] ვაღვნთ, რომ შესაბამისად  $x = 50\%$ ,  $y = 25\%$  და  $z = 25\%$  კონცენტრაციისათვის რეაქციის  $v$  სიჩქარე მაქსიმალურია.

მოდელი 11. იონიზაციის პროცესების ქიმიური დინამიკის შესახებ.

მულმივი გამოსხივების აირის გარემოში მაიონიზებული მოქმედების პირობებში 1 წამში წარმოიქმნება  $q$  დადებითი და იგივე რაოდენობის უარყოფითი იონები ერთი მოცულობის აირზე. იმის გამო, რომ დადებითი და უარყოფითი იონები ისევ უერთდებიან ერთმანეთს, მათი რაოდენობა მცირდება.

დადებითი იონების საერთო  $n$  რაოდენობიდან ყოველ წამს ქრება მისი რაოდენობის ნაწილი, რომელიც პროპორციულია  $n^2$ -ის, რადგანაც იონების დაწვეილება მიმდინარეობს როგორც შეუქცევადი ბიომოლეკულური რეაქცია.

ამ პროცესის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2, \quad (3.9.18)$$

$\alpha$  კოეფიციენტი დამოკიდებულია აირის ბუნებაზე და მდგომარეობაზე. ამ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს დამოკიდებულებას იონების  $n$  რაოდენობასა და  $\tau$  დროს შორის. განვაცალკევოთ ცვლადები და მოვახდინოთ ინტეგრება.

$$\tau = \int \frac{dn}{q - \alpha n^2} + C = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dn}{\frac{q}{\alpha} - n^2} + C = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dn}{k^2 - n^2} + C, \quad (3.9.19)$$

თუ დავუშვებთ, რომ  $\frac{q}{\alpha} \equiv k^2$ .

გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება

$$\frac{1}{k^2 - n^2} = \frac{1}{(k+n)(k-n)} = \frac{1}{2k} \left( \frac{1}{k+n} + \frac{1}{k-n} \right). \quad (3.9.20)$$

(3.9.20) ჩავსვათ (3.9.19)-ში, მივიღებთ:

$$\tau = \frac{1}{2\alpha k} \int \left( \frac{1}{k+n} + \frac{1}{k-n} \right) dn + C = \frac{1}{2\alpha k} \ln \frac{k+n}{k-n} + C.$$

როცა  $\tau = 0$  და  $n = 0$ , მაშინ  $C = 0$  და, შესაბამისად

$$\frac{k+n}{k-n} = e^{2\alpha k \tau}.$$

ამ ტოლობიდან განვსაზღვროთ  $n$ :

$$n(\tau) = k \frac{e^{2\alpha k \tau} - 1}{e^{2\alpha k \tau} + 1},$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ დადებითი იონების საერთო  $n(\tau)$  რაოდენობა  $\tau$  დროს გაზრდასთან ერთად იზრდება და დიდი  $\tau$ -თვის უახლოვდება  $k$  - მნიშვნელობას.

*"მათემატიკის ცოდნის გარეშე შეუძლებელია გავიგოთ როგორც თანამედროვე ტექნიკის საფუძვლები, ასევე ისიც, თუ როგორ სწავლობენ მეცნიერები ბუნებრივ და სოციალურ მოვლენებს"*

*ანდრია კოლმოგოროვი*

## თ ა ზ ი IV

### საომარი მოქმედებების მათემატიკური მოდელები

#### §4.1. ლანჩესტარის ბანზოგადებული მოდელი.

#### რეგულარული ჯარების ბრძოლის მოდელი

პირველ მსოფლიო ომში ავიაცია პირველად ჩაება საომარ მოქმედებებში. გამოითქვა მოსაზრება, რომ საბოლოო გამარჯვებისათვის საკმარისი იქნება საჰაერო ბრძოლების მოგება. მიმდინარეობდა სათანადო სტრატეგიისა და ტაქტიკის შემუშავება. ამისათვის კი, აუცილებელი გახდა საჰაერო ბრძოლების მათემატიკური მოდელების აგება. ამ საქმეში თავი გამოიჩინა ინგლისელმა ინჟინერმა და მათემატიკოსმა ფ.უ.ლანჩესტერმა. მან საჰაერო ბრძოლების რამდენიმე მათემატიკური მოდელი ააგო. შემდგომში ეს მოდელები განზოგადებული და გავრცელებული იქნა იმ შემთხვევებისათვის, როცა საბრძოლო მოქმედებას აწარმოებენ რეგულარული ჯარები ან პარტიზანული შენაერთები, ან ორივე ერთად [2].

ვთქვათ, საბრძოლო მოქმედებებში მონაწილეობს ორი დაპირისპირებული  $X_1$  და  $X_2$  მხარე. მათი ჯარების რიცხობრივი შემადგენლობა დროის  $t$  მომენტში შესაბამისად აღვნიშნოთ  $X_1(t)$ -თი და  $X_2(t)$ -თი. დროის ათელა დავიწყოთ საბრძოლო მოქმედების დაწყების დღიდან. დრო გავზომოთ დღეებით.

მათემატიკური მოდელის აგებისას უგულვებელყოფილია საბრძოლო მოქმედებისა და შეიარაღების დონე, მეთაურთა შემადგენლობის გამოცდილება და ნიჭი, მებრძოლთა სულისკვეთება და სხვა მრავალი ფაქტორი. გავითვალისწინოთ მხოლოდ მხარეთა ჯარების რიცხობრივი შემადგენლობა და გამარჯვებულად ვაღიაროთ ის მხარე, რომელიც საბრძოლო მოქმედების შედეგ მთლიანად გაანადგურებს მოწინააღმდეგე მხარეს.

გადავიდეთ ახლა იმ ფაქტორების ჩამოთვლაზე, რომლებიც განაპირობებენ დაპირისპირებული მხარეების რიცხობრივი შემადგენლობის ცვლილებას. ეს ფაქტორები დავაჯგუფოთ წყაროებისა და ნაკადების მიხედვით და მათემატიკური მოდელი ავაგოთ ბალანსის მეთოდის გამოყენებით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ უნდა დავადგინოთ ის ფაქტორები, რომლებიც განაპირობებენ რიცხობრივი შემადგენლობის ცვლილების სისწრაფეს.

საბრძოლო შეტაკების დროს ორივე მხარე განიცდის დანაკარგს. ეს ფაქტორი შეიძლება "წყაროდ" (უარყოფითი ნიშნით!) იქნეს განხილული: დროის ერთეულში, ანუ, ყოველდღიური დანაკარგი  $X_i$  მხარისათვის ( $i=1,2$ ) აღენიშნოთ  $f_i$ -ით. საზოგადოდ, ცხადია, იგი დამოკიდებული იქნება ორივე დაპირისპირებული მხარის რიცხობრივი შემადგენლობის ოდენობაზე დროის შესაბამის  $t$  მომენტში:

$$f_i = f_i [X_1(t), X_2(t)] \quad i=1,2. \quad (4.1.1)$$

$X_i(t)$  სიდიდის ცვლილებას, გარდა ამისა, იწვევს ორი სახის ნაკადის არსებობა: ერთია, ავადმყოფობის ან რაიმე სხვა მიზეზით ჯარისკაცთა გაყვანა საბრძოლო მოქმედების არიდან და მეორე, მაშველი ჯარის შეყვანა ამ არეში. დროის ერთეულში (ყოველდღიურად) გაყვანილი ჯარისკაცების რაოდენობა აღენიშნოთ  $q_i$ -თი, შემოყვანილისა კი  $p_i$ -ით. ცხადია,  $X_i$  მხარისათვის ეს სიდიდეები არაა დამოკიდებული მეორე მხარის რიცხობრივ შემადგენლობაზე, ამიტომ

$$q_i = q_i [X_i(t)], \quad i=1,2, \quad (4.1.2)$$

$$p_i = p_i [X_i(t)], \quad i=1,2. \quad (4.1.3)$$

სხვა ფაქტორებს ჩვენ არ განვიხილავთ. ამიტომ, ბალანსის განტოლების შესაბამისად ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1 [X_1(t), X_2(t)] + q_1 [X_1(t)] + p_1 [X_1(t)], \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = f_2 [X_1(t), X_2(t)] + q_2 [X_2(t)] + p_2 [X_2(t)]. \quad (4.1.5)$$

მიღებული განტოლებების მარჯვენა მხარეები არაცხადად შეიცავენ საძიებელ  $X_i(t)$  ფუნქციებს. ვიდრე არ დავაკონკრეტებთ (4.1.1)-(4.1.3) ფუნქციების სახეს, მათემატიკური მოდელი არ შეიძლება ჩაითვალოს აგებულად. ამისათვის საჭიროა ცალ-ცალკე იქნეს განხილული



შემთხვევები, როცა საბრძოლო მოქმედებებს აწარმოებენ რეგულარული ჯარები (I შემთხვევა), პარტიზანული შენაერთები (II შემთხვევა), ორივე ერთად (III შემთხვევა).

ლანჩესტერის მოდელები რეგულარული ჯარების, პარტიზანული შენაერთების და ორივეს ერთად მოქმედებისათვის. ლანჩესტერის მოდელში სამივე შემთხვევისათვის (4.1.3) ფუნქცია მხოლოდ დროზე დამოკიდებულადაა მიღებული, ე.ი. შემოყვანილთა რაოდენობა არ არის დამოკიდებული ბრძოლის კელზე დარჩენილ გეომარტა რაოდენობაზე

$$p_i = p_i(t), i=1,2 \quad (4.1.6)$$

და იგულისხმება, რომ იგი ცხადი სახით მოიცემა.

ლანჩესტერის მოდელებში მარტივად აღიწერება ბრძოლის ველიდან გასული ჯარისკაცების ნაკადის (4.1.2) სიდიდეც. ჩათვლილია, რომ იგი პროპორციულია მოცემულ  $t$  მომენტში ჯარის რიცხობრივი შემადგენლობის:

$$q_i = a_i x_i(t), i=1,2, \quad (4.1.7)$$

სადაც  $a_i$  არაუარყოფითი მუდმივებია. ისინი წარმოადგენენ ბრძოლის ველიდან ჯარისკაცების გასვლის ფარდობით სიჩქარეს. მართლაც, თუ საბრძოლო მოქმედებები არ მიმდინარეობს ( $f_i=0$ ) და მაშველი ჯარი არ შემოდის ( $p_i=0$ ), მაშინ (4.1.4) და (4.1.5) განტოლებებიდან (4.1.7)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} = -a_1, \quad \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} = -a_2. \quad (4.1.8)$$

(4.1.7) ფორმულები სამართლანა სამივე შემთხვევისათვის.

რაც შეეხება  $f_i(x_1(t), x_2(t))$  ფუნქციების სახეს, იგი უკვე სხვადასხვაა სამივე შემთხვევისათვის.

რეგულარული ჯარების ბრძოლის მოდელი დაეწყოთ პირველი შემთხვევის განხილვით. გავაკეთოთ ორი დაშვება. პირველი: დაპირისპირებულ მხარეთაგან თითოეული იმყოფება მეორე მხარის სასროლი საშუალებების მოქმედების ზონაში. მეორე: ცეცხლი მიმართულია მხოლოდ საბრძოლო ძალის საწინააღმდეგოდ. ამ დაშვების საფუძველზე ლანჩესტერმა იყარაუდა, რომ თითოეული მხარის დანაკარგი დროის ერთეულში პირდაპირპროპორციულია მოწინააღმდეგე მხარის რიცხობრივი შემადგენლობისა. ასე, რომ

რეგულარული ჯარების შეტაკების შედეგად დაღუპულთა რაოდენობისათვის (4.1.1) ფორმულა ცხადი სახით ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$f_i = -b_j x_j(t), \quad i, j=1,2, \quad i \neq j, \quad (4.1.9)$$

სადაც  $b_j$  არაუარყოფითი მუდმივია. მისი არსის გასარკვევად, დავუშვათ, რომ არ ხდება ბრძოლის ველიდან ჯარისკაცთა გასვლა ( $q_i=0$ ) და მაშველი ჯარების შემოყვანა ( $p_i=0$ ), მაშინ (4.1.9) ფორმულის გათვალისწინებით (4.1.4) და (4.1.5) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$\frac{1}{x_2} \frac{dx_1}{dt} = -b_2, \quad (4.1.10)$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{dx_2}{dt} = -b_1. \quad (4.1.11)$$

მიღებული განტოლებებიდან ჩანს, რომ  $b_i$  კოეფიციენტები ახასიათებს მოწინააღმდეგე მხარის ყოველი საბრძოლო ერთეულის საშუალო ეფექტურობას. მათი გამოთვლის ერთ-ერთი გზა შემდეგია. ვთქვათ,  $r_i$  არის  $x_i$  მხარის საცეცხლე ძალის კოეფიციენტი,  $c_i$  კი - ალბათობა იმისა, რომ  $i$ -ური მხარის ყოველი გასროლა იქნება ზუსტი. მაშინ ეფექტურობის კოეფიციენტისათვის შეიძლება დაეწეროს, რომ

$$b_i = r_i c_i, \quad i=1, 2 \quad (4.1.12)$$

საბოლოოდ, რეგულარული ჯარების საბრძოლო მოქმედების აღმწერ მათემატიკურ მოდელს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_2 x_2 - a_1 x_1 + p_1(t), \quad (4.1.13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -b_1 x_1 - a_2 x_2 + p_2(t), \quad (4.1.14)$$

$$b_1 = r_1 c_1, \quad b_2 = r_2 c_2, \quad (4.1.15)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (4.1.16)$$

სადაც (4.1.16) ტოლობები წარმოადგენს საწყის პირობებს,  $x_{10}$  არის ერთი მხარის რიცხოზომიერი შემადგენლობა საბრძოლო მოქმედებების

დაწყების წინ,  $x_{20}$  კი - მეორე მხარისა. შემდგომში ამ მოდელს მოვიხსენიებთ როგორც (I) ტიპის მოდელს.

I ტიპის მათემატიკური მოდელი. "ჰიპერბოლური კანონი". დაეუშვათ დაპირისპირებული რეგულარული ჯარები საბრძოლო მოქმედებას აწარმოებენ ისეთ სიტუაციაში, როცა არ ხდება ჯარისკაცების გასვლა ბრძოლის ველიდან ( $a_i=0$ ) და მასშველი ძალების შემოსვლა ( $p_i=0$ ), მაშინ (4.1.13)-(4.1.16) მათემატიკური მოდელი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_2 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_1 x_1 \quad (4.1.17)$$

$$b_1 = r_1 c_1, \quad b_2 = r_2 c_2, \quad (4.1.18)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (4.1.19)$$

თუ (4.1.17) სისტემაში შემაველ მეორე განტოლებას გავყოფთ პირველზე მივიღებთ:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b_1 x_1}{b_2 x_2},$$

ანუ

$$b_1 x_1 dx_1 = b_2 x_2 dx_2. \quad (4.1.20)$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრება (4.1.19) პირობების გათვალისწინებით მოგვცემს:

$$b_1 [x_1^2(t) - x_{10}^2] = b_2 [x_2^2(t) - x_{20}^2]. \quad (4.1.21)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\Lambda \equiv b_2 x_{20}^2 - b_1 x_{10}^2 \quad (4.1.22)$$

და (4.1.21) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$b_2 x_2^2 - b_1 x_1^2 = \Lambda, \quad (4.1.23)$$

ეს კი ჰიპერბოლას განტოლებაა. ამიტომ (4.1.17) სისტემას ხშირად უწოდებენ დიფერენციალურ სისტემას "ჰიპერბოლური კანონით".

(4.1.23) განტოლება საშუალებას იძლევა ავაგოთ რეგულარული ჯარების საომარი მოქმედების ფაზური პორტრეტი. ამ მიზნით მართკუთხა საკოორდინატო სისტემის აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ  $x_1(t)$ , ხოლო ორდინატთა ღერძზე  $x_2(t)$ . ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, აზრი არა აქვს ოთხივე კვადრანტის განხილვას.

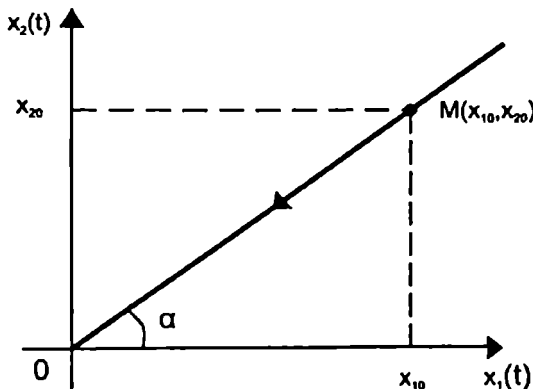
განვიხილოთ მხოლოდ პირველი კვადრანტი, სადაც  $x_1(t) \geq 0$  და  $x_2(t) \geq 0$ .

მუდმივი პარამეტრის (4.1.23) განტოლებიდან აშკარაა, რომ საჭიროა სამი შემთხვევის განხილვა:  $\Lambda = 0$ ,  $\Lambda > 0$  და  $\Lambda < 0$ .

როცა  $\Lambda = 0$ , მაშინ (4.1.23) განტოლება იძლევა სათავეზე გამავალი ორი წრფის განტოლებებს:

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} x_1. \quad (4.1.24)$$

(პირველ კვადრანტში მოხდება, ცხადია, პირველი წრფე, იხ. ნახ.4.1.1), ამ შემთხვევაში ვერც ერთი მხარე ვერ აღწევს უპირატესობას, ადგილი აქვს, ასე ვთქვათ "წონასწორობას". დროთა განმავლობაში ხდება ორივე მხარის რიცხობრივი შემადგენლობის სრულ განადგურებამდე შემცირება,  $M(x_{10}, x_{20}) \rightarrow O(0,0)$ .



ნახ.4.1.1.  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$

როცა  $\Lambda > 0$ , მაშინ (4.1.23) განტოლების თანახმად  $x_2$  ვერასოდეს ვერ გახდება ნულის ტოლი, მაშინ როდესაც  $x_2 = \sqrt{\frac{\Lambda}{b_2}}$

მნიშვნელობისათვის  $x_1(t)$  ხდება ნულის ტოლი. ჩენი შეთანხმების თანახმად ეს ნიშნავს, რომ  $x_1$  მხარე განადგურებულია და იმარჯვებს

$x_2$  მხარე. ნახ.4.1.2-ზე ნაჩვენებია  $\Lambda > 0$  შემთხვევის შესაბამისი ჰიპერბოლის პირველ კვადრანტში მოხვედრილი ნაწილები.

როცა  $\Lambda < 0$ , გვაქვს საპირისპირო სურათი:  $x_2$  ხდება ნულის ტოლი, როცა  $x_1 = \sqrt{-\frac{\Lambda}{b_1}}$ , და მაშასადამე, იმარჯვებს  $x_1$  მხარე (იხ.

ნახ.4.1.3). ამრიგად, იმარჯვებს ის მხარე, რომლისთვისაც  $b_i x_{i0}^2$  ( $i=1,2$ ) შინაარსის მქონე პარამეტრი მეტია.

გავაგრძელოთ მსჯელობა.  $\Lambda > 0$  პირობა (4.1.22)-ის თანახმად ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$b_2 x_{20}^2 > b_1 x_{10}^2. \quad (4.1.25)$$

(4.1.18) ტოლობის გამოყენებით (4.1.25) უტოლობა შემდეგი სახით გადაიწერება:

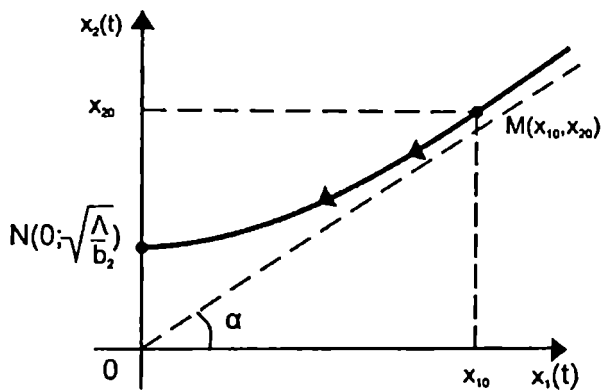
$$\left( \frac{x_{20}}{x_{10}} \right)^2 > \frac{r_1 c_1}{r_2 c_2}. \quad (4.1.26)$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ძალთა  $\frac{x_{20}}{x_{10}}$  თანაფარდობის შეცვლა ერთ-ერთ მხარეს აძლევს უპირატესობას კვადრატული კანონის შესაბამისად! ასე მაგალითად, თუ ძალთა თანაფარდობა  $\frac{x_{20}}{x_{10}}=1$ -დან შეიცვლება  $\frac{x_{20}}{x_{10}}=2$ -მდე, მაშინ  $x_2$  მხარე იღებს ოთხჯერად უპირატესობას.

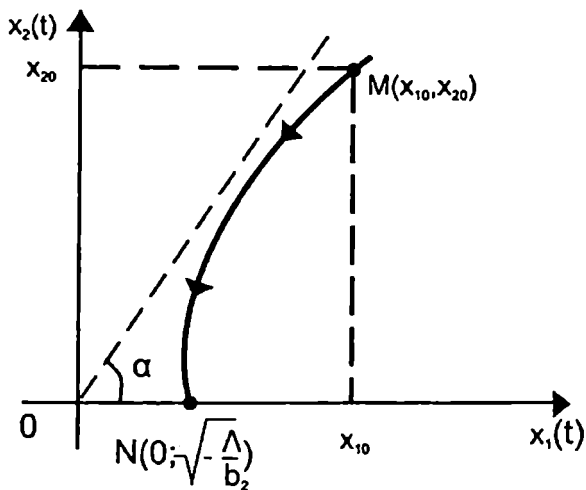
იმავე (4.1.26) უტოლობიდან ცხადია, გამომდინარეობს, რომ  $x_2$  მხარის გამარჯვებისათვის საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\sqrt{\frac{r_2 c_2}{r_1 c_1}} \cdot x_{20} > x_{10}. \quad (4.1.27)$$

ეს უტოლობა კი საშუალებას აძლევს  $x_2$  მხარეს შეარჩიოს გამარჯვებისათვის საჭირო სტრატეგია: რაც შეიძლება ზუსტი უნდა იყოს ყოველი გასროლა (მაქსიმალური იყოს  $c_2$ ) და რაც შეიძლება გაზარდოს ცეცხლის ძალა (მაქსიმალური იყოს  $r_2$ ).



$$\text{6.б.4.1.2. } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$$



$$\text{6.б.4.1.3. } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$$

### სამარჯობები

განსაზღვრეთ ორი მხარის ბრძოლის შედეგი, თუ:

1.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,5x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,4x_1;$   
 $x_1(0) = x_{10} = 100, \quad x_2(0) = x_{20} = 150.$

2.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,3x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,5x_1;$   
 $x_1(0) = 100, \quad x_2(0) = 200.$

3.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,3x_1;$   
 $x_1(0) = 100, \quad x_2(0) = 200.$

4.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,4x_1;$   
 $x_1(0) = 50, \quad x_2(0) = 100.$

5.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1;$   
 $x_1(0) = 30, \quad x_2(0) = 90.$

6.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,8x_1;$   
 $x_1(0) = 1000, \quad x_2(0) = 2000.$

7.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,65x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,6x_1;$   
 $x_1(0) = 500, \quad x_2(0) = 500$

8.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,85x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1;$   
 $x_1(0) = 700, \quad x_2(0) = 700.$

$$9. \frac{dx_1}{dt} = -0,4x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,4x_1;$$
$$x_1(0) = 600, \quad x_2(0) = 500.$$

$$10. \frac{dx_1}{dt} = -0,3x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,2x_1;$$
$$x_1(0) = 300, \quad x_2(0) = 200.$$

$$11. \frac{dx_1}{dt} = -0,19x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,18x_1;$$
$$x_1(0) = 5000, \quad x_2(0) = 5000.$$

$$12. \frac{dx_1}{dt} = -0,16x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,01x_1;$$
$$x_1(0) = 400, \quad x_2(0) = 100.$$

$$13. \frac{dx_1}{dt} = -0,7x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,5x_1;$$
$$x_1(0) = 160, \quad x_2(0) = 180.$$

$$14. \frac{dx_1}{dt} = -0,65x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,7x_1;$$
$$x_1(0) = 180, \quad x_2(0) = 200.$$

$$15. \frac{dx_1}{dt} = -0,225x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,4x_1;$$
$$x_1(0) = 90, \quad x_2(0) = 120.$$



§4.2. პარტიზანული შენაერთების  
ურთიერთდაპირისპირების მოდელი

გადავიდეთ ახლა  $f_i$  ფუნქციების სახის დადგენაზე პარტიზანული შენაერთების საბრძოლო მოქმედებების შემთხვევისათვის [2].

ვთქვათ  $x_i(t)$  რაოდენობის პარტიზანებს უკავიათ  $S_i$  ფართობის ტერიტორია და ისინი უზილავნი არიან მოწინააღმდეგისათვის. თითოეულ მხარეს ცეცხლის ქვეშ აქვს  $S_i$  ტერიტორია, მაგრამ არ იცის თავის მოქმედების ეფექტურობა. ამ ვითარებაში სავარაუდოა, რომ  $i$ -ური პარტიზანული შენაერთის დანაკარგი პროპორციული იქნება ერთის მხრივ  $S_i$  ტერიტორიაზე პარტიზანთა  $x_i(t)$  რაოდენობაზე და, მეორეს მხრივ, მოწინააღმდეგის საბრძოლო ძალების  $x_j(t)$  რაოდენობაზე. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$f_i = -c_j x_1(t) x_2(t), \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \quad (4.2.1)$$

სადაც  $c_j$  - არაუარყოფითი მუდმივებია და ახასიათებს  $j$ -ური მხარის საბრძოლო მოქმედების ეფექტურობას.

$c_j$  კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულების მისაღებად მივიყვებთ ლანჩესტერის მსჯელობას. ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში,  $r_j$ -ით აღვნიშნოთ  $j$ -ური მხარის საცეცხლე ძალის კოეფიციენტი,  $S_{rj}$ -თი აღვნიშნოთ ერთი პარტიზანის მიერ დაკავებული ფართობი. მაშინ  $j$ -ური მხარის ზუსტი გასროლის ალბათობა პროპორციული იქნება  $S_{rj}$  ფართობისა და უკუპროპორციული  $S_i$  ფართობისა. მაშასადამე, ზოგადად, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$c_j = r_j \frac{S_{rj}}{S_i}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \quad (4.2.2)$$

$S_{rj}$  სიდიდეს  $j$ -ური მხარის ერთი გასროლის ტერიტორიულ ეფექტიანობას უწოდებენ.

ამრიგად, პარტიზანული შენაერთების საბრძოლო მოქმედების აღმწერ მათემატიკურ მოდელს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2 x_1 x_2 - a_1 x_1 + p_1(t), \quad (4.2.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -c_1 x_1 x_2 - a_2 x_2 + p_2(t), \quad (4.2.4)$$

$$c_1 = r_1 \frac{S_{r1}}{S_2}, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r2}}{S_1}. \quad (4.2.5)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (4.2.6)$$

ამ მოდელს ეუწოდოთ (II) ტიპის მოდელი.

II ტიპის მათემატიკური მოდელი. "წრფივი კანონი". თუ ამ შემთხვევაშიც ვიგულისხმებთ, რომ არ ხდება პარტიზანთა შენაერთებიდან მებრძოლთა გასვლა ( $a_1=0$ ) და მაშველთა შემოსვლა ( $p_1=0$ ), მაშინ (4.2.3)-(4.2.6) მოდელი მიიღებს სახეს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2 x_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -c_1 x_1 x_2, \quad (4.2.7)$$

$$c_1 = r_1 \frac{S_{r1}}{S_2}, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r2}}{S_1}. \quad (4.2.8)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (4.2.9)$$

გაკვით (4.2.7) სისტემის მეორე განტოლება პირველზე. მივიღებთ მარტივ განტოლებას

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{c_1}{c_2},$$

რომლის ინტეგრებაც მოგვცემს შემდეგს:

$$c_2 [x_2(t) - x_{20}] = c_1 [x_1(t) - x_{10}]. \quad (4.2.10)$$

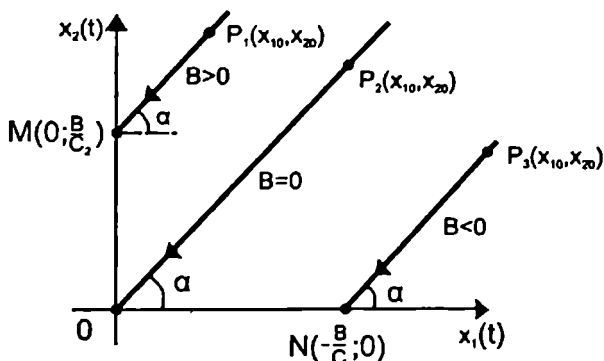
როგორც ვხედავთ, (4.1.21) განტოლებისაგან განსხვავებით, აქ საბოლოო მოქმედების "წრფივი კანონთან" გვაქვს საქმე. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$c_2 x_{20} - c_1 x_{10} \equiv B \quad (4.2.11)$$

და (4.2.10) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$c_2 x_2(t) - c_1 x_1(t) = B. \quad (4.2.12)$$

ამ უკანასკნელი განტოლებიდან გამოდინარეობს, რომ თუ  $B > 0$ , მაშინ იმარჯვებს  $x_2$  მხარე, ხოლო თუ  $B < 0$ , მაშინ გამარჯვებული  $x_1$  მხარე იქნება. ნახ.4.2.1-ზე მოცემულია სათანადო გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.



$$\text{ნახ.4.2.1. } \operatorname{tg} \alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

გამოვიყენოთ ახლა რომელიმე მხარის, მაგალითად,  $x_2$  მხარის, გამარჯვებისათვის საჭირო სტრატეგიის განმსაზღვრელი ფორმულა. ამ მიზნით  $B > 0$  პირობა (4.2.11) ტოლობის გამოყენებით შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} > \frac{c_1}{c_2}. \quad (4.2.13)$$

(4.2.8) ფორმულების გათვალისწინებით (4.2.13) უტოლობა ასეც ჩაიწერება:

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} > \frac{r_1 S_{r1}}{r_2 S_{r2}} \frac{S_1}{S_2}. \quad (4.2.14)$$

ამრიგად,  $x_2$  მხარის სტრატეგია იმაში მდგომარეობს, რომ გახადოს მაქსიმალური  $\frac{x_{20}}{x_{10}}$  შეფარდება (პქონდეს რაც შეიძლება მეტი

რიცხობრივი უპირატესობა) და მინიმალური  $\frac{S_1}{S_2}$  შეფარდება

(განლაგდეს რაც შეიძლება მეტ ფართობზე ან მაქსიმალურად შეავიწროვოს მოწინააღმდეგე).

### სამარჯობები

განსაზღვრეთ ორი პარტიზანული დაჯგუფების ურთიერთდაპირისპირების შედეგი, თუ:

1.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,3x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,25x_1x_2,$   
 $x_1(0)=1800, x_2(0)=1800.$

2.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,4x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,3x_1x_2,$   
 $x_1(0)=1600, x_2(0)=1500.$

3.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,3x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,5x_1x_2,$   
 $x_1(0)=1000, x_2(0)=2000.$

4.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,3x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,6x_1x_2,$   
 $x_1(0)=900, x_2(0)=1800.$

5.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,2x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,1x_1x_2,$   
 $x_1(0)=1500, x_2(0)=750.$

6.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,6x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,7x_1x_2,$   
 $x_1(0)=600, x_2(0)=700.$

7.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,12x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,1x_1x_2,$   
 $x_1(0)=1200, x_2(0)=1000.$

8.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,22x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,11x_1x_2,$   
 $x_1(0)=2000, x_2(0)=1000.$

9.  $\frac{dx_1}{dt} = -0,25x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,3x_1x_2,$   
 $x_1(0)=1500, x_2(0)=1500.$

$$10. \frac{dx_1}{dt} = -0,1x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,2x_1x_2, \\ x_1(0)=750, x_2(0)=1000.$$

$$11. \frac{dx_1}{dt} = -0,3x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,3x_1x_2, \\ x_1(0)=880, x_2(0)=850.$$

$$12. \frac{dx_1}{dt} = -0,3x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,2x_1x_2, \\ x_1(0)=1000, x_2(0)=500.$$

$$13. \frac{dx_1}{dt} = -0,11x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,1x_1x_2, \\ x_1(0)=1024, x_2(0)=951.$$

$$14. \frac{dx_1}{dt} = -0,23x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,2x_1x_2, \\ x_1(0)=857, x_2(0)=701.$$

$$15. \frac{dx_1}{dt} = -0,2x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,25x_1x_2, \\ x_1(0)=69, x_2(0)=83.$$

§4.3. რეგულარული ჯარის და პარტიზანული  
შენაერთის ბრძოლის მოდელი

ახლა განვიხილოთ შერეული ტიპის საბრძოლო მოქმედებების მოდელი [2]. ვთქვათ, პირველ მხარეს წარმოადგენს პარტიზანული შენაერთი, მეორე მხარეს კი - რეგულარული ჯარი. მაშინ ზემოთქმულიდან გამოვდინარე, სათანადო მათემატიკური მოდელი შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2 x_1 x_2 - a_1 x_1 + p_1(t), \quad (4.3.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -b_1 x_1 - a_2 x_2 + p_2(t), \quad (4.3.2)$$

$$b_1 = r_1 \omega_1, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r2}}{S_1}. \quad (4.3.3)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (4.3.4)$$

ეს იყოს III ტიპის მოდელი.

აქ  $b_1$  კოეფიციენტი ახასიათებს პარტიზანული მხარის ყოველი საბრძოლო ერთეულის საშუალო ეფექტურობას,  $r_1$  - პარტიზანული (პირველი) მხარის საცეცხლე ძალის კოეფიციენტი,  $\omega_1$  - ალბათობა იმისა, რომ პარტიზანული მხარის ყოველი გასროლა იქნება ზუსტი.

$c_2$  - ახასიათებს რეგულარული ჯარის მეორე მხარის საბრძოლო მოქმედების ეფექტურობას,  $r_2$  - რეგულარული ჯარის (მეორე) მხარის საცეცხლე ძალის კოეფიციენტი,  $S_{r2}$  - რეგულარული ჯარის ერთი მეომრის მიერ დაკავებული ფართობია,  $S_1$  - პარტიზანული შენაერთის მიერ დაკავებული ტერიტორიაა.

III ტიპის მათემატიკური მოდელი. "პარაბოლური კანონი".

გავაკეთოთ ისეთივე დაშვებები, როგორც წინა შემთხვევებში. (§4.1, §4.2) ე.ი. ვიგულისხმობთ, რომ არც რეგულარული ჯარიდან და არც პარტიზანთა შენაერთიდან არ ხდება მებრძოლთა გასვლა ( $a=0$ ) და რომ არცერთი მხარე არ იღებს შევსებას ( $p_i=0$ ). მაშინ (4.3.1) - (4.3.4) მათემატიკური მოდელი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2 x_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_1 x_1, \quad (4.3.5)$$

$$b_1 = r_1 \omega_1, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r2}}{S_1}, \quad (4.3.6)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (4.3.7)$$

(4.3.5) სისტემის მეორე განტოლების პირველზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b_1}{c_2 x_2}. \quad (4.3.8)$$

(4.3.8) განტოლების ინტეგრება იძლევა:

$$c_2 [x_2^2 - x_{20}^2] = 2b_1 [x_1 - x_{10}]. \quad (4.3.9)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

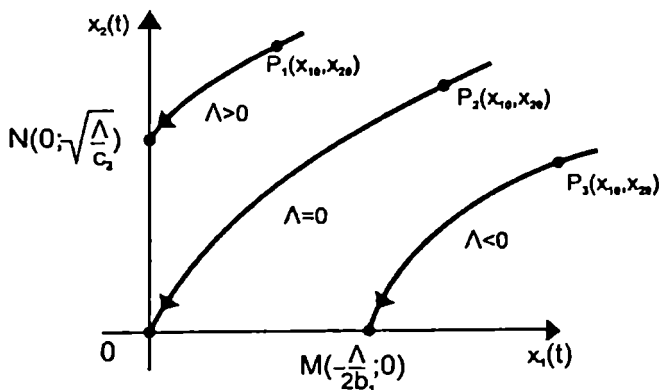
$$\Lambda \equiv c_2 x_{20}^2 - 2b_1 x_{10} \quad (4.3.10)$$

და (4.3.9) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$c_2 x_2^2 = 2b_1 x_1 + \Lambda, \quad (4.3.11)$$

მივიღეთ პარაბოლას განტოლება (4.3.11).

ამრიგად, (4.3.5)-(4.3.7) მათემატიკური მოდელი შეესაბამება საბრძოლო მოქმედებების "პარაბოლურ კანონს". ამასთან, თუ  $\Lambda < 0$  იმარჯვებენ პარტიზანები ( $x_1$  მხარე), ხოლო თუ  $\Lambda > 0$ , პარტიზანები მარცხდებიან. როცა  $\Lambda = 0$  ორივე მხარე განადგურებულია. ნახ.4.3.1-ზე სქემატურადაა გამოხატული (4.3.11) განტოლებით მოცემული პარაბოლები  $\Lambda$ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.



ნახ. 4.3.1

რეგულარული ჯარის ( $x_2$  მხარის) სტრატეგიის განმსაზღვრელი ფორმულის გამოსაყვანად  $\Lambda > 0$  უტოლობა ჩავწერთ (4.3.10) და (4.3.6) ფორმულების გამოყენებით:

$$\frac{x_{20}^2}{x_{10}} > \frac{2r_1 \omega_1 S_1}{r_2 \cdot S_{r2}} \quad (4.3.12)$$

$x_2$  მხარის მასის ერთი გასროლის ტერიტორიულ ეფექტურობას თუ განვსაზღვრავთ, როგორც საბრძოლო მოქმედების დაწყების წინ რეგულარული ჯარის ერთ მემარზე მოსულ ფართობს, მაშინ შეგვიძლია დავწერთ, რომ

$$S_{r2} = \frac{S_2}{x_{20}}. \quad (4.3.13)$$

მაშინ (4.3.10) უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} > 2\omega_1 \frac{r_1 S_1}{r_2 S_2}.$$

მაშასადამე, პარტიზანების დასამარცხებლად რეგულარულ ჯარს უნდა ჰქონდეს რაც შეიძლება მეტი რიცხობრივი უპირატესობა ( $\frac{x_{20}}{x_{10}}$

იყოს მაქსიმალური) თავი მოუყაროს დიდ საცეცხლე ძალას ( $\frac{r_1}{r_2}$

იყოს მინიმალური) და შეუტოს რაც შეიძლება ფართო ფრონტით

( $\frac{S_1}{S_2}$  იყოს მინიმალური).



### საპარჯიშოები

განსაზღვრეთ პარტიზანული დაჯგუფების და რევულარული ჯარის ბრძოლის შედეგი, თუ:

$$1. \frac{dx_1}{dt} = -0,01x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,5x_1, \\ x_1(0)=400, x_2(0)=1000.$$

$$2. \frac{dx_1}{dt} = -0,001x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1, \\ x_1(0)=100, x_2(0)=500.$$

$$3. \frac{dx_1}{dt} = -0,002x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,8x_1, \\ x_1(0)=40, x_2(0)=200.$$

$$4. \frac{dx_1}{dt} = -0,01x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1, \\ x_1(0)=30, x_2(0)=150.$$

$$5. \frac{dx_1}{dt} = -0,001x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,4x_1, \\ x_1(0)=50, x_2(0)=200.$$

$$6. \frac{dx_1}{dt} = -0,0002x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,2x_1, \\ x_1(0)=20, x_2(0)=200.$$

$$7. \frac{dx_1}{dt} = -0,002x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1, \\ x_1(0)=25, x_2(0)=150.$$

$$8. \frac{dx_1}{dt} = -0,002x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,48x_1, \\ x_1(0)=30, x_2(0)=120.$$

$$9. \frac{dx_1}{dt} = -0,01x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,6x_1, \\ x_1(0)=100, x_2(0)=100.$$

$$10. \frac{dx_1}{dt} = -0,004x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1, \\ x_1(0)=100, x_2(0)=200.$$

$$11. \frac{dx_1}{dt} = -0,025x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,8x_1, \\ x_1(0)=200, x_2(0)=100.$$

$$12. \frac{dx_1}{dt} = -0,008x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,85x_1, \\ x_1(0)=50, x_2(0)=100.$$

$$13. \frac{dx_1}{dt} = -0,1x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1, \\ x_1(0)=50, x_2(0)=50.$$

$$14. \frac{dx_1}{dt} = -0,01x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,9x_1, \\ x_1(0)=50, x_2(0)=150.$$

$$15. \frac{dx_1}{dt} = -0,001x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -0,5x_1, \\ x_1(0)=10, x_2(0)=100.$$

#### §4.4. საზღვარო საბრძოლო მოქმედებების დროს ნაღმების გამოყენების მოდელი

ზღვაზე, საომარი მოქმედებისას ნაღმების გამოყენება იძლევა ერთ-ერთ მაგალითს ორი პირის თამაშთა შორის კლასიდან (ამ თამაშებში არის ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო მხარე). კონფლიქტის ამოცანები, რომლებიც შეიცავენ  $n(n > 2)$  მხარეს, შესაძლო კოალიციების გამო წარმოადგენენ მნიშვნელოვნად დიდ სირთულეებს.

ყველა შესაძლო მოქმედებების (სუფთა სტრატეგიები) განსაზღვრისათვის, რომლითაც ხასიათდება თითოეული მხარე, აუცილებელია დავადგინოთ მოგება, რომელსაც ყოველი მხარე მიიღებს ურთიერთსაწინააღმდეგო სუფთა სტრატეგიების გამოყენებისას. ამ მოგებას საზღაურს უწოდებენ და ისინი წარმოადგენენ მოცემული პოლიტიკის წარმართვის ეფექტურობის შეფასებას.

როგორც წესი, მიღებულია, რომ ყოველი მხარე ხელმძღვანელობს ერთნაირი შეფასებით და ერთი მხარის მოგება წარმოადგენს მეორე მხარის წაგებას, ასეთ სამხედრო თამაშებს (მოღელები) ეწოდება თამაშები ნულოვანი ჯამით.

იმისათვის, რომ განვიხილოთ მაგალითი ზღვის ნაღმების გამოყენების არედან, აუცილებელია აღვწეროთ ნაღმების და ნაღმსაწინააღმდეგო ზომების ძირითადი თავისებურებანი [87].

ყველაზე ხშირად გამოიყენება ფსკერზე განლაგებული ნაღმები. ასეთი ნაღმი განთავსდება ზღვის ფსკერზე და შედის მოქმედებაში ფიზიკური ხასიათის მოქმედების გამო, რომელიც გამოწვეულია ახლო მანძილზე გემის გასვლით.

ძირითადი ხერხი გემებისათვის "ზარალის მიყენების უვნებელსაყოფად არის ნაღმის "დამჭერი" ("კამიკაძე") მოწყობილობების გამოყენება, ნაღმების წინასწარი აფეთქებისათვის.

#### *საბაზისო თამაში*

თავდაპირველად ვივარაუდოთ, რომ ფარვატერში მარტო ერთი ნაღმია, რომელიც უნდა განადგურდეს და მარტო ერთი გემი გავა ფარვატერზე. საზღაურის სახით ავიღოთ გემის ჩაძირვის ალბათობა. ეს მარტივი და ბუნებრივი საზღაურია, რომელიც ასახავს ორივე

მხარის ეფექტურობას და სრულიად მისაღებია სამხედროსათვის. ამ ზომის გამოყენება საზღაურის სახით ვარაუდობს, რომ ოპერაციის ეფექტურობა მასზე წრფივად დაამოკიდებული.

$F_{ij}$  განვსაზღვროთ იმის ალბათობა, რომ ნაღმი გემების მთვლელით, რომელიც  $i$ -ზეა დაყენებული, ჩაძირავს გემს, რომელიც გადის ფარვატერით, სადაც  $j$ -ჯერ გაიარა ნაღმების ამაფეთქებელმა პატარა გემმა ("კამიკაძე"). ამრიგად ( $F_{ij}$ ) - ამ თამაშის საზღაურის მატრიცაა.

დავუშვათ, რომ მაქსიმალური რიცხვი, რომელზედაც შეიძლება იყოს დაყენებული ნაღმზე გემების მთვლელი  $n_c$  - ტოლია, ხოლო მაქსიმალური რიცხვი "კამიკაძეების" გასვლისა მოცემული დროის შუალედში  $n_p$  - ტოლია.

მაშინ, თუ ნაღმის დამცავი ირჩევს თავისი აქტიური სტრატეგიების ალბათობების განაწილებას ისე, რომ გემების მთვლელის  $i$  რიცხვზე დაყენების ალბათობა არის  $p_i$ , მაშინ გემის ჩაძირვის ალბათობა "კამიკაძის"  $j$ -ჯერ გასვლისას გამოისახება

$$F_j = \sum_{i=1}^{n_c} p_i F_{ij},$$

სადაც  $p_i \geq 0$ , ყველა  $i$ -თვის, და

$$\sum_{i=1}^{n_c} p_i = 1.$$

ანალოგიურად ამისა, თუ მეთაური, რომელიც პასუხისმგებელია განაღმვაზე, შემთხვევითი სახით განსაზღვრავს გასვლის რაოდენობას, ალბათობის განაწილების შესაბამისად,  $q_j$  ალბათობისა  $j$  გასვლის გაკეთებისას, მაშინ  $i$ -ზე დაყენებული გემების მთვლელის ნაღმზე ჩაძირვის ალბათობა გამოითვლება:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n_p} F_{ij} q_j,$$

სადაც  $q_j \geq 0$  ყველა  $j$ -თვის და

$$\sum_{j=1}^{n_p} q_j = 1.$$

$P = (p_1, p_2, \dots, p_{n_c})$  და  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_{n_p})$  ალბათობების განაწილებებს შერეული სტრატეგიები ეწოდება.

თუ ყოველი მხარე იყენებს შერეულ სტრატეგიებს, მაშინ ჩაძირვის ალბათობაა

$$F = \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^{n_p} p_i q_j F_{ij}.$$

ნაღმების დამცველის მიზანია  $F$  მაქსიმიზირება, ხოლო "კამიკაძეების" მეთაურის -  $F$  - მინიმიზირება.

დავუშვათ, რომ ნაღმების დამცველი ირჩევს შერეულ სტრატეგიას  $P^* = (p_i^*)$ . მაშინ ის დარწმუნებულია ჩაძირვის ალბათობაში, რომელიც არანაკლებია

$$\min_Q \sum_i \sum_j p_i^* F_{ij} q_j.$$

ამასთან, აქ გაკეთებულია დაშვება, რომ "კამიკაძეების" მეთაურმა აიღო  $Q$  განაწილება, რომელიც მინიმალურს ხდის ჯამს. დავუშვათ, ნაღმების მცველმა აირჩია განაწილება  $\hat{P} = (\hat{p}_i)$ , რომელიც ახდენს ამ სიდიდის მაქსიმიზაციას, მაშინ ჩაძირვის ალბათობა შეადგენს არანაკლებ

$$\max_P \min_Q \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j,$$

ე.ი.

$$F_{01} = \sum_i \sum_j \hat{p}_i F_{ij} q_j \geq \max_P \min_Q \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j,$$

აქ ინდექსი (01) უთითებს მაქსიმიზირებული სტრატეგიების  $p_i$  გამოყენებაზე.

ანალოგიურად, "კამიკაძეების" მეთაური ირჩევს რა სტრატეგიას  $\hat{Q} = (\hat{q}_j)$ , დარწმუნებულია, რომ გემის ჩაძირვის ალბათობა არ აღემატება სიდიდეს:

$$\min_Q \max_P \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j,$$

ე.ი., რომ

$$F_{10} = \sum_i \sum_j p_i F_{ij} \hat{q}_j \geq \min_Q \max_P \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j,$$

ადგილი აქვს

$$\max_P \min_Q \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j \leq \min_Q \max_P \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j.$$

მატრიცული თამაშების ძირითადი თეორემა უჩვენებს, რომ ეს გამოსახულებები ყოველთვის ტოლია [46,63].

ამრიგად,

$$F_{10} \leq F \leq F_{01}.$$

$$F = F_{00} = \sum_i \sum_j \hat{p}_i F_{ij} \hat{q}_j$$

ამ რიცხვს თამაშის "ფასი" ეწოდება, ხოლო შერჩეულ სტრატეგიებს  $\hat{P}$  და  $\hat{Q}$  - ოპტიმალური სტრატეგიები.

### პირველი განზომილება. ბევრი ნაღმი

დაეუშვათ, რომ ნაღმები განაწილებულია ფსკერზე შემთხვევითი სახით და შევაფასოთ დანაღმვის სიმკვრივე.

დაეუშვათ, რომ სიმკვრივე ისეთია, რომ  $Y$  სიგრძის ფარვატერში მოსალოდნელი ნაღმების რიცხვი  $N$ -ია. მაშინ სიგრძის ელემენტის  $\Delta y$ -ში ნაღმის ყოფნის ალბათობაა

$$\frac{N\Delta y}{Y}.$$

ალბათობა იმისა, რომ გემი უვნებლად გაივლის ამ ელემენტს, ტოლია

$$1 - \frac{NF_{ij}\Delta y}{Y},$$

სადაც მიღებულია, რომ ნაღმები დაყენებულია  $i$  რაოდენობის გეგზე და შესრულებულია  $j$  გასვლა.

თუ  $P(y)$  - გემის უვნებლად დარჩენის ალბათობაა, როდესაც მან მიაღწია  $y$ -ს, მაშინ მივიღებთ

$$P(y + \Delta y) = P(y) \left( 1 - \frac{NF_{ij}\Delta y}{Y} \right),$$

$$\frac{P(y + \Delta y) - P(y)}{\Delta y} = - \frac{NF_{ij}}{Y} P(y),$$

და ზღვარში, როდესაც  $\Delta y \rightarrow 0$ , გვექნება

$$\frac{dP(y)}{dy} = - \frac{NF_{ij}}{Y} P(y). \quad (4.4.1)$$

რადგანაც  $\frac{NF_{ij}}{Y}$  - მულტიპლი სიდიდეა, მივიღებთ პირველი რიგის მარტივ დიფერენციალურ განტოლებას. მისი ინტეგრებით, მივიღებთ

$$P(y) = P(0) \exp\left(-\frac{NF_{ij}}{Y} y\right)$$

შემდეგ  $P(0)=1$  (თავიდან გეზი უვნებელია) და იმის ალბათობა, რომ ის დარჩება უვნებლად უღრის

$$P_{ij} = P(Y), P_{ij} = \exp(-NF_{ij}),$$

ხოლო მისი ჩაძირვის (რისკი) ალბათობა, ტოლია

$$R_{ij} = 1 - P_{ij} = 1 - \exp(-NF_{ij}). \quad (4.4.2)$$

აღმოჩნდა, რომ თუ არ ვართ დარწმუნებული ნაღმების რიცხვში ფარვატერში, მაშინ ჩაძირვის ალბათობა არ არის ამ ალბათობის წრფივი ფუნქცია ერთი ნაღმის შემთხვევაში, ე.ი.  $R_{ij}$  რისკი ზოგად შემთხვევაში არ არის  $F_{ij}$ -ის წრფივი ფუნქცია.

მაგრამ, თუ გემის ჩაძირვის ალბათობა მცირეა ( $NF_{ij} \ll 1$ , ყველა  $i, j$ -თვის) რისკენ მიისწრაფვის მეთაური, მაშინ მივიღებთ

$$R_{ij} = NF_{ij}, \quad (4.4.3)$$

ანუ  $R_{ij}$  და  $F_{ij}$  დაკავშირებულია წრფივი დამოკიდებულებით და გამოიყენება ამოხსნა მარტივი ამოცანისა ერთი ნაღმის შემთხვევაში.

### *მეორე განხილვა. შერეული სტრატეგიები*

როგორც ჩანს ნაღმების ერთნაირად დაყენება გემების მთვლელისათვის არ არის წარმატებული პოლიტიკა დამხმარელებისათვის. ამიტომ, მისთვის უფრო წარმატებული იქნება, თუ ის შეარჩევს სხვადასხვა დაყენებას გემების მთვლელისათვის.

დავუშვათ, რომ დამხმარეველმა დააყენა ნაღმების ნაწილი  $p_i$  გემების მთვლელზე  $i$  რიცხვზე ( $i = (1, n_c)$ ). მაშინ (4.4.3) განტოლების ნაცკლად ყოველი დაყენებისათვის, მივიღებთ

$$R_j = N \sum_i p_i F_{ij} = \sum_i p_i R_{ij},$$

$$(N F_{ij} = R_{ij}).$$

რადგანაც  $p_i \geq 0$  ყოველი  $i$ -თვის და

$$\sum_i p_i = 1$$

მივიღებთ, რომ შემაჯამებელი რისკი არის ამოზნექილი წრფივი კომპოზიცია რისკების, რომლებიც შეესაბამება გემების ცალკეულ მთვლელებს.

ანალოგიურად "კამიკაძეების" მეთაურმა, ფარვატერის მთელ სიგრძეზე განაღმვის სხვადასხვა მეთოდი უნდა შეარჩიოს.

თუ მეთაური გაანაწილებს ფარვატერს ისეთ უბანზე, რომ  $q_j$  ნაწილში ადგილი ჰქონდა განაღმვას  $j$  გასვლით ( $j = (1, n_p)$ ). მაშინ  $q_j Y$  უბანზე რისკი გემისათვის იმ ნაღმებისაგან, რომლებიც დაყენებულია გემების მთვლელით  $i$  რიცხვზე უღრის

$$1 - \exp(-NF_{ij}q_j).$$

მაშინ, მთელ ფარვატერში ჩაძირვის ალბათობა განისაზღვრება

$$1 - \prod_j \exp(-NF_{ij}q_j) = 1 - \exp(-N \sum_j F_{ij}q_j)$$

ამიტომ ამ შემთხვევაში (4.4.3) მიიღებს სახეს

$$R_i = N \sum_j F_{ij}q_j = \sum_j R_{ij}q_j.$$

ამრიგად, ისევე როგორც ნაღმების მცველისათვის, "კამიკაძეების" მეთაურისათვის სტრატეგიას, რომელიც აერთიანებს რამოდენიმე სუფთა სტრატეგიას, განხორციელებულს ფარვატერის სხვადასხვა უბანზე, მივყავართ რისკისკენ, რომელიც არის რისკების ამოზნექილი წრფივი კომბინაცია.



*"არც ერთი მეცნიერება ვერ იქნება მეცნობილი მათემატიკის გარეშე"*

*როჯერ ბეკონი*

## თ ა ვ ი V

### მათემატიკური მოღვაწეობის ეკონომიკაში

თანამედროვე ეკონომიკური თეორია, როგორც მიკრო ასევე მაკრო დონეზე, შეიცავს მათემატიკურ მოდელებს და მეთოდებს როგორც ბუნებრივად აუცილებელ ელემენტებს [19,24,31,48-50,58,59,64].

მათემატიკური მოდელების გამოყენება ეკონომიკაში იძლევა საშუალებას:

1<sup>0</sup>. გამოვყოთ და ფორმალურად აღვწეროთ ეკონომიკური ცვლადებისა და ობიექტების ყველაზე მნიშვნელოვანი, არსებითი კავშირები; ამასთან, რთული ობიექტის შესწავლა ითვალისწინებს აბსტრაქციის უმაღლეს ხარისხს;

2<sup>0</sup>. მკაფიოდ ფორმულირებულ საწყისი მონაცემებიდან და თანაფარდობებიდან დედუქციის მეთოდებით მიიღება დასკვნები, რომლებიც ადეკვატურია განხილული ობიექტისა;

3<sup>0</sup>. მათემატიკური მეთოდები იძლევა საშუალებას ინდუქტიური გზით მივიღოთ ობიექტზე ახალი ცოდნა: შევაფასოთ ფორმა და მისი ცვლადების დამოკიდებულების პარამეტრები, რომლებიც უმაღლეს ხარისხში შეესაბამება არსებულ დაკვირვებებს.

4<sup>0</sup>. მათემატიკური ენის (აპარატი) გამოყენება ზუსტად და კომპაქტურად იძლევა საშუალებას ახსნათ ეკონომიკური თეორიის დებულებები, მისი ცნებები და დასკვნები.

მათემატიკურ მოდელებს ილუსტრაციული და კვლევითი მიზნებით იხილავდნენ ადრე: ფ.კენე (1758, "ეკონომიკური ცხრილი"), ა.სმიტი (კლასიკური მაკროეკონომიკური მოდელი), დ.რიკარდო (საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი).

XIX საუკუნეში საბაზრო ეკონომიკის მოდელირებაში დიდი წვლილი შეიტანა მათემატიკურმა სკოლამ (ლ.ვალრასი, ო.კურნო, ვ.პარეტო, ფ.ეჯუორტი და სხვა).

XX საუკუნეში მოდელირების მათემატიკური მეთოდები ფართოდ გამოიყენება, მათ გამოყენებასთან დაკავშირებულია ყველა ნაშრომი,

რომელიც აღინიშნა ნობელის პრემიით ეკონომიკის დარგში (დ.პიკის, რ.სოლოუ, ვ.ლენტიევი, პ.სამუელსონი და სხვა).

მათემატიკური მოდელები, რომლებიც გამოიყენება ეკონომიკაში მოდელირებადი ობიექტის თავისებურებების, მოდელირების მიზნებისა და გამოყენებული ინსტრუმენტების ნიშნების მიხედვით, იყოფა შემდეგ კლასებად: მაკრო და მიკროეკონომიკური; თეორიული და გამოყენებითი; ოპტიმიზაციური და წონასწორული; სტატისტიკური და დინამიკური მოდელები.

მაკროეკონომიკური მოდელი აღწერს ეკონომიკას როგორც ერთიან ერთეულს, აკავშირებს ერთმანეთთან გამსხვილებულ მატერიალურ და ფინანსურ მაჩვენებლებს: მოხმარება, ინვესტიციები, საპროცენტო განრიგი, ფულის მასა და სხვა.

მიკროეკონომიკური მოდელი აღწერს ეკონომიკის სტრუქტურული და ფუნქციონალური მდგენელების ურთიერთმოქმედებას ან ცალკეული ასეთი მდგენელის ქცევას საბაზრო გარემოში. თეორიული მოდელები იძლევა საშუალებას შევისწავლით დასკვნებისა და ფორმალური წანამბღერების დედუქციის მეშვეობით ეკონომიკისა და მისი მახასიათებელი ელემენტების თვისებები. გამოყენებითი მოდელები იძლევა საშუალებას შევაფასოთ კონკრეტული ეკონომიკური ობიექტის ფუნქციონირების პარამეტრები და გავაკეთოთ რეკომენდაციები პრაქტიკული გადაწყვეტილებების მისაღებად. გამოყენებითი მოდელებს უპირველეს ყოვლისა მიეკუთვნება ეკონომეტრიკული მოდელები, რომლებიც იყენებენ ეკონომიკური ცვლადების რიცხვით მნიშვნელობებს და სტატისტიკურად აფასებენ მათ არსებული დაკვირვებების საფუძველზე.

საბაზრო ეკონომიკის მოდელირებაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია წონასწორობის მოდელს. ისინი აღწერენ ეკონომიკის ისეთ მდგომარეობას, როცა ყველა ძალის ტოლქმედი, რომლებიც ცდილობენ მის გამოყვანას წონასწორობიდან, მიისწრაფვის ნულისაკენ. არასაბაზრო ეკონომიკაში უწონასწორობა ზოგიერთი პარამეტრით (მაგალითად, დეფიციტი) კომპენსირდება სხვა ფაქტორებით (შავი ბაზარი, რიგები,...). წონასწორული მოდელი დესკრიპტულია, აღმწერილობითია. ოპტიმიზაცია საბაზრო ეკონომიკის თეორიაში გამოიყენება მიკროდონეზე (მომხმარებლის სარგებლიანობის მაქსიმიზაცია ან ფირმის მოგება); მიკროდონეზე

ეკონომიკური სუბიექტების ქცევის რაციონალური არჩევის შედეგაა ზოგიერთი წონასწორული მდგომარეობა.

სტატისტიკურ მოდელებში აღიწერება ეკონომიკური ობიექტის მდგომარეობა კონკრეტულ მომენტში ან დროის გარკვეულ პერიოდში.

დინამიკური მოდელი შეიცავს ეკონომიკური ცვლადების ურთიერთკავშირს დროში.

სტატისტიკურ მოდელებში, როგორც წესი, ფიქსირდება რიგი სიდიდეების მნიშვნელობები, რომლებიც დინამიკაში ცვლადია - მაგალითად, კაპიტალური რესურსები, ფასები და ა.შ. დინამიკური მოდელი არ დაიფუძნება რიგი სტატისტიკური მარტივი ჯამისკენ, არამედ აღწერს ძალებს და ურთიერთქმედებას ეკონომიკაში, რომლებიც განსაზღვრავენ მასში პროცესების მსვლელობას. როგორც წესი, დინამიკური მოდელი იყენებს დიფერენციალური და სხვაობიანი განტოლებების აპარატს, აგრეთვე ვარიაციულ აღრიცხვას.

დეტერმინირებული მოდელი ვარაუდობს მოდელის ცვლადთა შორის ხისტი ფუნქციონალურ კავშირებს. სტრუქტურული მოდელი უშვებს შემთხვევითი მოქმედებების არსებობას გამოკვლევად მარევენებლებზე და იყენებს მათი აღწერისათვის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის აპარატს.

მათემატიკური ეკონომიკა მეცნიერების განყოფილებაა, რომელიც დაკავებულია ეკონომიკური პროცესების მათემატიკური მოდელების თვისებების და ამოხსნების ანალიზით. მათემატიკური ეკონომიკა განცალკევებულია ეკონომეტრიკისაგან, რომელიც დაკავებულია ეკონომიკური დამოკიდებულებებისა და მოდელების სტატისტიკური შეფასებით და ანალიზით ემპირიული მონაცემების შესწავლის საფუძველზე.

მათემატიკური ეკონომიკის მოდელებს შორის შეიძლება გამოვყოთ ორი მსხვილი კლასი - ეკონომიკურ სისტემებში წონასწორობის მოდელი და ეკონომიკური ზრდის მოდელი. წონასწორობის მოდელი (მაგალითად, ეროუ-დებრეს მოდელი; "ზარჯვა-გამოშვების" ლეონტიევის მოდელი) გვეხმარება ისეთი ეკონომიკური სისტემების შესწავლაში, რომელშიც ყველა გარე ძალის ტოლქმედი ნულის ტოლია. ეს, რომ ვთქვათ, სტატიკური მოდელებია, ხოლო ეკონომიკური დინამიკა აღიწერება ზრდის მოდელების მეშვეობით (პაროდი-დომარის მოდელი; სოლოუს მოდელი; მაგისტრალური ტიპის მოდელი,...). ზრდის მოდელების კვლევის არსებითი მომენტია

სტაციონარული ზრდის ტრაექტორიების ანალიზი და პოვნა (ზრდა მუდმივი სტრუქტურული მახასიათებლებით), რომლისკენ მიისწრაფება მოდელით აღწერილი ეკონომიკური სისტემა. სტაციონარული ზრდის ტრაექტორიების გამოკვლევა ერთდროულად წარმოადგენს ბაზას ზრდის უფრო რთული ტიპების ანალიზისათვის და დამაკავშირებელი რგოლია ეკონომიკური წონასწორობის მოდელებთან, რადგანაც ასეთი ტრაექტორიების მოძებნა ტოლფასია გარკვეული სახით ცვალებადი წონასწორული მდგომარეობის განსაზღვრისა. მნიშვნელოვანი წვლილი ზრდის თეორიაში შეიტანეს ფონ ნეიმანმა, სოლოუმ, გეილმა, მორიშიმამ და სხვებმა.

პირველი შრომები ეკონომეტრიკაში გამოჩნდნენ XIX საუკუნის ბოლოს, XX საუკუნის დასაწყისში. 1897 წელს გამოჩნდა ეკონომიკურ თეორიაში მათემატიკური სკოლის ფუძემდებლის ვ.პარეტოს ნაშრომი, რომელიც ეძღვნება სხვადასხვა ქვეყანაში მოსახლეობის შემოსავლების სტატისტიკურ შესწავლას. შემოთავაზებული იყო პარეტოს წირი  $y=A(x-a)^{\alpha}$ , სადაც  $x$  - შემოსავლის სიდიდეა,  $y$  - იმ პირთა რაოდენობაა, რომელთა შემოსავალი აღემატება  $x$ -ს,  $a$  - მინიმალური შემოსავალია,  $A > 0$  და  $\alpha > 0$  - დამოკიდებულების პარამეტრებია, რომლებიც მიიღება სტატისტიკური მეთოდით.

დღევანდელ დღეს ეკონომეტრიკული მოდელები და მეთოდები არა მარტო მძლავრი ინსტრუმენტია ეკონომიკაში ახალი ცოდნის მისაღებად, არამედ ფართოდ გამოყენებადი აპარატი პროგნოზირებაში, საბანკო საქმეში, ბიზნესში პრაქტიკული გადაწყვეტილებების მისაღებად.

§5.1. მათემატიკური მინიმალიზაციის საბაზისური ამოცანა

მათემატიკური ამოცანა არის ეკონომიკურ-მათემატიკური ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს მიზნობრივი ფუნქციის მინიმალიზაციის (მაქსიმალიზაციის ან მინიმალიზაციის) მნიშვნელობის პოვნაში, ამასთან ცვლადთა მნიშვნელობები უნდა ეკუთვნოდეს დასაშვებ მნიშვნელობათა ზოგიერთ არეს [24].

ზოგადი სახით ამოცანის მათემატიკური დასმა შემდეგია:

$$U = f(X) \rightarrow \max \text{ ან } \min \quad (5.1.1)$$

$$X \in W, X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$W = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობათა არეა,

$f(X)$  - მიზნობრივი ფუნქციაა.

იმისათვის, რომ ამოხსნათ მათემატიკური ამოცანა (5.1.1) საკმარისია ვიპოვოთ მისი მათემატიკური ამოხსნა, ე.ი. ისეთი  $X_0 \in W$ , რომ მაქსიმიზაციის ამოცანის შემთხვევაში

$$f(X_0) \geq f(X), \forall X \in W,$$

ხოლო მინიმიზაციის ამოცანის შემთხვევაში

$$f(X_0) \leq f(X), \forall X \in W.$$

მათემატიკური ამოცანა ამოხსნადია, თუ მას არ გააჩნია მათემატიკური ამოხსნა. კერძოდ, მაქსიმიზაციის ამოცანა ამოხსნადია, თუ მიზნობრივი  $f(X)$  ფუნქცია დასაშვებ  $W$  სიმრავლეზე არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან.

მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები დამოკიდებულია როგორც მიზნობრივი  $f(X)$  ფუნქციის სახეზე, ასევე დასაშვებ  $W$  სიმრავლის აგებულებაზე. თუ ამოცანაში მიზნობრივი ფუნქცია  $n$  ცვლადისაა, მაშინ ამოხსნის მეთოდებს მათემატიკური დაპროგრამების მეთოდები ეწოდება.

მათემატიკურ დაპროგრამებაში მიზნობრივი  $f(X)$  ფუნქციის და  $W$  არის სახიდან გამოდინარე გამოყოფენ შემდეგ ძირითად ამოცანებს:

1. წრფივი დაპროგრამების ამოცანები,  $f(X)$  და  $W$  წრფივობის შემთხვევაში.
2. მთელიცხვიანი დაპროგრამების ამოცანები, თუ დასმულია  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ცვლადთა მთელიცხვიანობის პირობა.
3. არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანები, თუ  $f(X)$ -ის ფორმა ატარებს არაწრფივ ხასიათს.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანა ეწოდება ოპერაციათა კვლევის ამოცანას, რომლის მათემატიკური მოდელი მდგომარეობს შემდეგში:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad (5.1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I, \quad I \subseteq M = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5.1.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in M, \quad (5.1.4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J, \quad J \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.1.5)$$

ამასთან, წრფივ განტოლებათა (5.1.3) და უტოლობათა (5.1.4), (5.1.5) სისტემას, რომელიც განსაზღვრავს ამოცანის ამოხსნის დასაშვებ  $W$  სიმრავლეს, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შეზღუდვის სისტემა ეწოდება, ხოლო წრფივ  $f(X)$  ფუნქციას - მიზნობრივი ფუნქცია ან ოპტიმალურობის კრიტერიუმი.

კერძო შემთხვევაში, თუ  $I = \emptyset$ , მაშინ (5.1.3), (5.1.4) სისტემა შედგება მხოლოდ წრფივ (5.1.4) უტოლობებისაგან, ხოლო თუ  $I=M$ , მაშინ - წრფივ განტოლებებისაგან (5.1.3).

თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (5.1.6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.1.7)$$

$$b_i \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.1.8)$$

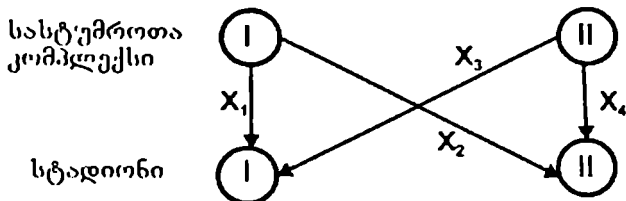
მაშინ ამოცანა წარმოდგენილია კანონიკური ფორმით.

### ამოცანა მინიმალური დანახარჯების შესახებ

ვთქვათ, ქალაქში ტარდება მსოფლიო პირველობა ფეხბურთში. ქალაქში არის ორი სასტუმროთა დიდი კომპლექსი და ორი სტადიონი. პირველ კომპლექსში შეუძლია იცხოვროს  $a$  რაოდენობის, ხოლო მეორეში  $b$  რაოდენობის ფეხბურთის გულშემატკივარს

(მოდელი გულისხმობს, რომ სასტუმროთა კომპლექსებში განთავსებული არიან მხოლოდ ფეხბურთის მსოფლიო პირველობაზე ჩამოსული გულშემატკივრები).

ქალაქის პირველი საფეხბურთო სტადიონის ტევადობაა  $c$ , ხოლო მეორესი  $d$  (მოდელში გათვალისწინებულია, რომ საფეხბურთო სტადიონებზე დასწრების ბილეთები გააჩნიათ მხოლოდ სასტუმროთა მობინადრეებს). ერთი გულშემატკივრის გადაყვანა პირველი კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე  $\alpha_{11}$  დოლარი ჯდება, მეორე სტადიონზე  $\alpha_{12}$  დოლარი, ხოლო მეორე კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე  $\alpha_{21}$  დოლარი ღირს, მეორე სტადიონზე  $\alpha_{22}$ . როგორ უნდა გადავიყვანოთ სასტუმროთა კომპლექსებიდან სტადიონებზე გულშემატკივრები, რომ სატრანსპორტო დანახარჯები იყოს მინიმალური.



შემოვიღოთ აღნიშვნები:

- $x_1$  - გულშემატკივართა რაოდენობაა გადაყვანილი პირველი კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე;
- $x_2$  - პირველი კომპლექსიდან მეორე სტადიონზე;
- $x_3$  - მეორე კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე;
- $x_4$  - მეორე კომპლექსიდან მეორე სტადიონზე.

მაშინ ამოცანის მათემატიკური დასმა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{21}x_3 + \alpha_{22}x_4 \rightarrow \min, \quad (5.1.9)$$

სადაც  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} > 0$ .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_3 + x_4 = b, \\ x_1 + x_3 = c, \\ x_2 + x_4 = d, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (5.1.10)$$

ბუნებრივია, რომ

$$\sum_{i=1}^4 x_i = a + b = c + d.$$

(5.1.10)-დან მარტივად მიიღება

$$\begin{cases} x_2 = a - x_1, \\ x_3 = c - x_1, \\ x_4 = b - c + x_1, \end{cases} \quad (5.1.11)$$

საიდანაც მივიღებთ, როცა

$$b \geq c, x_1 \in [0, \min(a, c)]; b < c, x_1 \in [c - b, \min(a, c)].$$

ამრიგად, მიზნობრივი  $f$  ფუნქცია (მინიმალური სატრანსპორტო დანახარჯი) მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \alpha_{11}x_1 + (a - x_1)\alpha_{12} + (c - x_1)\alpha_{21} + (b - c + x_1)\alpha_{22} = \\ &= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} + (\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22})x_1. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

განვიხილოთ საში შემთხვევა:

$$a) \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22} = 0,$$

ანუ

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = \alpha_{12} + \alpha_{21}. \quad (5.1.13)$$

მაშინ (5.1.12)-დან მივიღებთ

$$f = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22}, \quad (5.1.14)$$

ანუ  $f$  მუდმივია. მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ  $f > 0$ , თუ  $b \geq c$ , მაშინ

$$f = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} > 0,$$

რადგანაც  $a, c, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} > 0$ .

თუ  $b < c$ , მაშინ (5.1.13)-ის ძალით

$$\begin{aligned} f &= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)(\alpha_{12} + \alpha_{21} - \alpha_{11}) = \\ &= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{12} + (b - c)\alpha_{21} + (c - b)\alpha_{11} = \\ &= (a + b - c)\alpha_{12} + b\alpha_{21} + (c - b)\alpha_{11} = d\alpha_{12} + b\alpha_{21} + (c - b)\alpha_{11} > 0, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

რადგანაც  $a + b = c + d, d, b(c - b) > 0$ .

ამრიგად, (5.1.13) შემთხვევაში მიზნობრივი ფუნქცია  $f$  ნებისმიერი  $x_1$ -თვის დასაშვები არედან მუდმივია და დადებითი.

ბ) თუ

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} > \alpha_{12} + \alpha_{21}, \quad (5.1.16)$$

მაშინ  $f$  ფუნქცია ზრდადია,



როცა  $b \geq c$   $[0, \min(a, c)]$  შუალედში,

ხოლო როცა  $b < c$ ,  $[c - b, \min(a, c)]$  შუალედში.

ამრიგად, როცა  $b \geq c$  მიზნობრივი  $f$  ფუნქცია აღწევს თავის მინიმალურ (5.1.14) მნიშვნელობას  $x_1=0$  წერტილში, ხოლო ოპტიმალური ამოხსნა იქნება:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = a, \\ x_3 = c, \\ x_4 = b - c. \end{cases} \quad (5.1.17)$$

როცა  $b < c$  მიზნობრივი  $f$  ფუნქცია აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას  $x_1 = c - b$  წერტილში.

$$f(c - b) = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} + (c - b)(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}).$$

ცხადია, რომ (5.1.15)-ის ძალით  $f(c - b) > 0$ .

ოპტიმალური ამოხსნა, როცა  $b < c$  ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x_1 = c - b, \\ x_2 = a + b - c = d, \\ x_3 = b, \\ x_4 = 0. \end{cases} \quad (5.1.18)$$

$$g) \text{ თუ } \alpha_{11} + \alpha_{22} < \alpha_{12} + \alpha_{21}, \quad (5.1.19)$$

მაშინ (5.1.12)-ის თანახმად  $f(x_1)$  ფუნქცია კლებადია, ე.ი. აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას

$$x_1 = \min(a, c)$$

წერტილში. მაშინ ოპტიმალური ამოხსნა იქნება

$$\begin{aligned} x_1 &= \min(a, c), & x_2 &= a - \min(a, c), \\ x_3 &= c - \min(a, c), & x_4 &= d - a + \min(a, c). \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

ვაჩვენოთ, რომ  $f(\min(a, c))$  დადებითია (5.1.19) შემთხვევაში.

$$\begin{aligned} f(\min(a, c)) &= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} + \\ &+ (\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21})\min(a, c). \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

ვთქვათ,  $c \leq a$ , მაშინ

$$\begin{aligned} f(c) &= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + b\alpha_{22} - c\alpha_{22} + c\alpha_{11} + c\alpha_{22} - c\alpha_{12} - c\alpha_{21} = \\ &= (a - c)\alpha_{12} + b\alpha_{22} + c\alpha_{11} > 0. \end{aligned}$$

თუ  $a < c$ , მაშინ

$$\begin{aligned} f(a) &= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} + a(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}) > \\ &> a\alpha_{12} + a\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} + a(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}) = \end{aligned}$$

$$= (b - c) \alpha_{22} + a\alpha_{11} + a \alpha_{22} = (a + b - c) \alpha_{22} + a\alpha_{11} = d\alpha_{22} + a\alpha_{11} > 0.$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

$$1^0. a = 30000, b = 40000, c = 20000, d = 50000.$$

$$\alpha_{11} = 7,5\$, \alpha_{12} = 7\$, \alpha_{21} = 6\$, \alpha_{22} = 6,5\$,$$

ანუ გვაქვს შემთხვევა (ბ) ( $c < a < b$ ),

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 14 > \alpha_{12} + \alpha_{21} = 13.$$

მიზნობრივი ფუნქცია აღწევს მინიმუმს, როცა  $x_1 = 0$ .

$$f(0) = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c) \alpha_{22} = 460000\$,$$

ხოლო ოპტიმალური ამონახსნი იქნება (5.1.17)

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 30000, \\ x_3 = 20000, \\ x_4 = 20000. \end{cases}$$

$$2^0. a = 20000, b = 30000, c = 25000, d = 25000.$$

$$\alpha_{11} = 6\$, \alpha_{12} = 8\$, \alpha_{21} = 5\$, \alpha_{22} = 6\$.$$

ადგილი აქვს (გ) შემთხვევას ( $a < c < b$ ), რადგანაც

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 12 < \alpha_{12} + \alpha_{21} = 13.$$

კლებადი მიზნობრივი ფუნქცია (5.1.12) აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას  $\min(a, c) = 20000 = a$  წერტილში,  $f(a) = 295000\$,$

ხოლო ოპტიმალური ამონახსნი ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x_1 = 20000, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 5000, \\ x_4 = 25000. \end{cases}$$

$$3^0. a = 25000, b = 20000, c = 15000, d = 30000.$$

$$\alpha_{11} = 7\$, \alpha_{12} = 6\$, \alpha_{21} = 6\$, \alpha_{22} = 5\$.$$

ადგილი აქვს (ა) შემთხვევას, ( $c < b < a$ ), რადგანაც

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 7 + 5 = 12 = \alpha_{12} + \alpha_{21} = 6 + 6.$$

ამრიგად, მიზნობრივი ფუნქცია ნებისმიერი  $x_1 \in [0, 15000]$ ,

$$f = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c) \alpha_{22} = 25000 \cdot 6 + 15000 \cdot 6 + 5000 \cdot 5 = 265000\$.$$

$$4^0. a = 22000, b = 15000, c = 25000, d = 12000.$$

$$\alpha_{11} = 9\$, \alpha_{12} = 7\$, \alpha_{21} = 8\$, \alpha_{22} = 7\$.$$

ადგილი აქვს (ბ) შემთხვევას, ( $b < a < c$ ), რადგანაც

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 9 + 7 = 16 > \alpha_{12} + \alpha_{21} = 7 + 8 = 15.$$

მიზნობრივი ფუნქცია აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას  $x_1 = c - b = 10000$  წერტილში.  $f(10000) = 294000\$,$  ხოლო ოპტიმალურ ამოხსნას აქვს სახე (5.1.18):

$$\begin{cases} x_1 = 10000, \\ x_2 = 12000, \\ x_3 = 15000, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

$5^0.$   $a = 20000, b = 17000, c = 18000, d = 19000.$

$\alpha_{11} = 5,5\$, \alpha_{12} = 5\$, \alpha_{21} = 6\$, \alpha_{22} = 5\$.$

აღილი აქვს (გ) შემთხვევას, ( $b < c < a$ ), რადგანაც

$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 5,5 + 5 = 10,5 < \alpha_{12} + \alpha_{21} = 5 + 6 = 11.$

კლებადი მიზნობრივი  $f$  ფუნქცია (5.1.12) აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას  $\min(a, c) = c = 18000$  წერტილში.

$f(c) = f(18000) = 194000\$,$

ხოლო ოპტიმალურ ამოხსნას აქვს სახე (5.1.20)

$$\begin{cases} x_1 = 18000, \\ x_2 = 2000, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 17000. \end{cases}$$

§5.2. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ბრავიკული ამოხსნა.

მაქსიმალური მოგების და მინიმალური რაბიონის მოძლეუბი

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული ხერხი მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ [24]:

ა) ორუცნობიანი ამოცანების ამოხსნისათვის, როცა შეზღუდვები გამოსახულია უტოლობებით;

ბ) მრავალუცნობიანი ამოცანების ამოხსნისათვის, იმ პირობით, რომ მათი კანონიკური სახე არ შეიცავს ორზე მეტ თავისუფალ ცვლადს.

ჩაწეროთ ორუცნობიანი წრფივი დაპროგრამების ამოცანა.

დავუშვათ, რომ მიზნობრივ ფუნქციას აქვს სახე

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \quad (5.2.1)$$

ხოლო შეზღუდვებს

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (5.2.3)$$

ამოცანის შეზღუდვის (5.2.2), (5.2.3) სისტემის ყოველი უტოლობა გეომეტრიულად განსაზღვრავს ნახევარსიბრტყეს შესაბამისად სასაზღვრო წრფეებით

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i; \quad (i = \overline{1, m}) \quad x_1=0; \quad x_2=0.$$

უტოლობათა სისტემის (5.2.2), (5.2.3) თავსებადობის შემთხვევაში, მისი ამონახსნთა არე არის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც ეკუთვნის ყველა აღნიშნულ ნახევარსიბრტყეს. რადგანაც მოცემული ნახევარსიბრტყეების გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლე ამოზნექილია, ამიტომ დასაშვებ ამონახსნთა არე იქნება ამოზნექილი სიმრავლე და მას ამონახსნთა მრავალკუთხედი ეწოდება. ამ მრავალკუთხედის გვერდები მდებარეობენ წრფეებზე, რომელთა განტოლებები მიიღება საწყისი შეზღუდვების სისტემიდან (5.2.2), (5.2.3), თუ უტოლობათა ნიშნებს შევცვლით ტოლობის ნიშნებით.

უტოლობათა სისტემა (5.2.2), (5.2.3)-ის დასაშვები ამონახსნთა არე შეიძლება იყოს:

- ა) ამოზნექილი მრავალკუთხედი;
- ბ) ამოზნექილი მრავალკუთხა შემოუსაზღვრელი არე;
- გ) ცარიელი სიმრავლე;
- დ) სხივი;
- ე) მონაკვეთი;
- ვ) წერტილი.

მიზნობრივი (5.2.1) ფუნქცია სიბრტყეზე განსაზღვრავს პარალელურ წრფეთა ოჯახს, რომელთაგან ყოველს შეესაბამება  $f$ -ის გარკვეული მნიშვნელობა.

$\vec{C} = (c_1; c_2)$  ვექტორი, რომელიც ამ პარალელური წრფეების პერპენდიკულარულია, უთითებს  $f$ -ის უსწრაფესი ზრდადობის მიმართულებას, ხოლო მოპირდაპირე ვექტორი  $(-\vec{C})$  -  $f$ -ის კლება-დობის მიმართულებას.

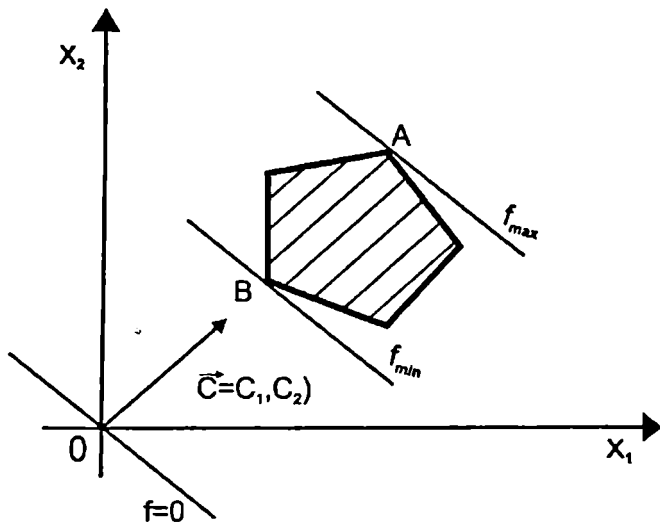
თუ ერთდიგივე კოორდინატთა სისტემაში გამოვსახავთ უტოლობათა სისტემას (5.2.2), (5.2.3) დასაშვებ ამონახსნთა არეს და პარალელურ წრფეთა ოჯახს (5.2.1) მაშინ,  $f$  ფუნქციის მაქსიმუმის განსაზღვრის ამოცანა დადის დასაშვებ არეში იმ წერტილის პოვნაში, რომელზედაც გადის წრფე  $f = \text{const}$  ოჯახიდან და რომელიც შეესაბამება  $f$  პარამეტრის უდიდეს მნიშვნელობას.

ასეთი წერტილი არსებობს მაშინ, როცა ამონახსნთა მრავალკუთხედი არა ცარიელია და მასზე მიზნობრივი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ზემოდან. აღნიშნულ პირობებში ამონახსნთა მრავალკუთხედის ერთ-ერთ წვეროში მიზნობრივი ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

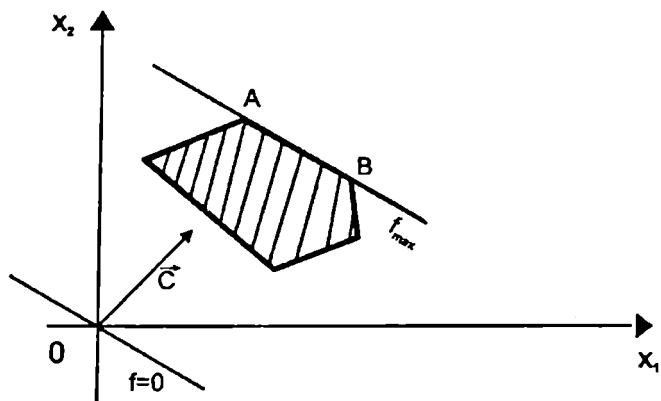
ამ წვეროს განსაზღვრისათვის ავაგოთ დონის წრფე  $f = 0 = c_1x_1 + c_2x_2$ , რომელიც კოორდინატთა სათავეზე გადის და  $\vec{C} = (c_1; c_2)$  ვექტორის პერპენდიკულარულია. შეძღვე ეს წრფე

$(f = 0)$  გადავწიოთ  $\vec{C} = (c_1; c_2)$  ვექტორის მიმართულებით მანამ, სანამ ის არ შეეხება ამონახსნთა მრავალკუთხედის უკანასკნელ კიდურა (კუთხურ) წერტილს. ამ წერტილის კოორდინატები განსაზღვრავენ მოცემული ამოცანის ოპტიმალურ გეგმას.

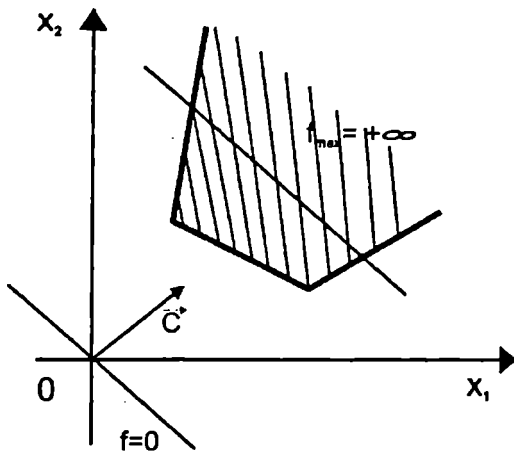
(5.2.1)-(5.2.3) ამოცანის გრაფიკული ამოხსნისას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს სხვადასხვა შემთხვევას (ნახ.5.2.1-5.2.4).



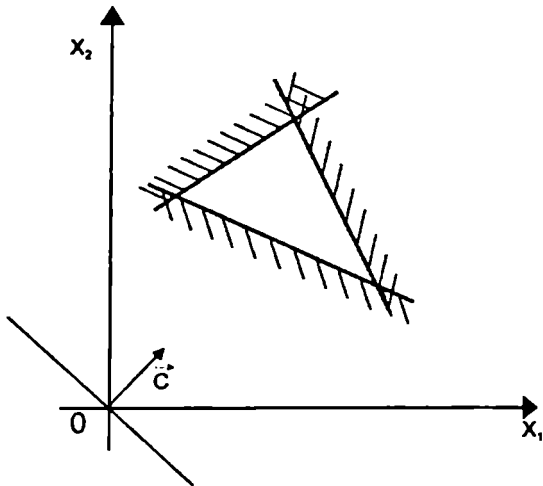
ნახ.5.2.1.  $f$  ფუნქციის ოპტიმუმი (მაქსიმუმი) მიიღწევა A წერტილში



ნახ.5.2.2.  $f$  ფუნქციის მაქსიმუმი მიიღწევა AB მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილში



ნახ.5.2.3.  $f$  ფუნქციის მაქსიმუმი მოუღწევადია



ნახ.5.2.4. დასაშვებ ამონახსნთა არე - ცარიელი არეა

**მაქსიმალური მოგების მიღების პრობლემა**

დავუშვათ, რომ საწარმო უშვებს ორი სახის პროდუქციას (ნაწარმი A, ნაწარმი B), რისთვისაც იყენებს სამი სახის ნედლეულს. ნორმები მოყვანილია ცხრილ 1-ში.

ცხრილი 1

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (კგ) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	30	40	

მოდელში ნავარაუდევია, რომ ორივე სახის ნაწარმის გასაღება უზრუნველყოფილია. ამოცანა მდგომარეობს ნაწარმის გამოშვების გეგმის პოვნაში, რომლისთვისაც საწარმოს მოგება ყველა ნაწარმის ბაზარზე რეალიზაციისაგან მაქსიმალურია.

შევადგინოთ ამოცანის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.

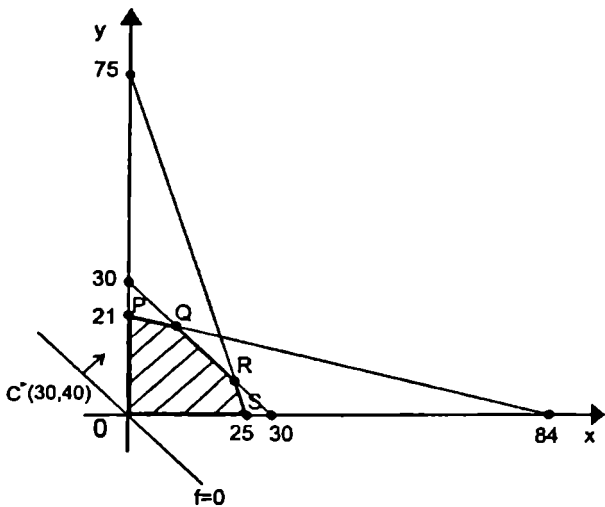
დავუშვათ, რომ საწარმო აწარმოებს A სახის  $x$  რაოდენობის და B სახის  $y$  რაოდენობის ნაწარმს, რადგანაც ყოველი სახის ნედლეულის რაოდენობა შემოსაზღვრულია და ნაწარმთა რაოდენობა არაუარყოფითია, ცხრილი 1-ის თანახმად მივიღებთ შემდეგ უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} 12x + 4y \leq 300, \\ 4x + 4y \leq 120, \\ 3x + 12y \leq 252, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

ამ შემთხვევაში A სახის  $x$  რაოდენობის და B სახის  $y$  რაოდენობის ნაწარმის რეალიზაციისგან მიღებული მოგება (მიზნობრივი ფუნქცია) ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$f = 30x + 40y \rightarrow \max. \quad (5.2.5)$$





ნახ.5.2.5

უტოლობათა სისტემა (5.2.4)-დან მარტივად მიიღება, რომ დასაშვებ ამონახსნთა არე არის ხუთკუთხედი  $OPQRS$ , ამასთან  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  წერტილთა კოორდინატები მიიღება შესაბამისი წრფეების (იხ. ნახ.5.2.5) გადაკვეთით. მივიღებთ, რომ

$$P(0; 21), Q(12; 18), R(22; 5), S(25; 0).$$

თუ  $f = 0 = 30x + 40y$  წრფეს ვამოძრავებთ პერპენდიკულარული  $\rightarrow C = (30; 40)$  მიმართულებით, მაშინ  $f$ -ის მნიშვნელობა იზრდება. ბუნებრივია, რომ დასაშვებ ამონახსნთა არედან  $Q$  იქნება უკანასკნელი კიდურა (კუთხური) წერტილი, რომელსაც ეხება  $f = 0$  წრფე, რის შემდეგ უკვე ეს წრფე არ კვეთს ხუთკუთხედს.

ამრიგად,

$$f_{\max} = f(Q) = f(x_{\max}; y_{\max}) = f(12; 18) = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080\$.$$

### ოპტიმალური რაციონის მოძებნა

როგორც ცნობილია, მეფრინველეობის ფერმების მთავარი დანიშნულებაა წიწილების გასუქება. დავეუშვათ, რომ გვაქვს ორი სახის საკვები - ხორბალი და სიმინდის ფქვილი. ამოცანა

მდგომარეობს წიწილებისათვის მაქსიმალურად იაფი (მინიმალური დანახარჯი), მაგრამ სრულფასოვანი რაციონის შედგენაში.

შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შედგენისათვის, ჩვენ უნდა ვიციოდეთ ცხიმების და ნახშირწყლების კალორიების რაოდენობა 1 გრამ ხორბალში და 1 გრამ სიმინდის ფქვილში, ასევე საკვების შესაბამისი ფასი.

დავუშვათ, რომ 1 გრამ ხორბალში  $a_1$  კალორიაა,  $a_2$  გრამი ცხიმია და  $a_3$  გრამი ნახშირწყალია, ხოლო 1 გრამ სიმინდის ფქვილში  $b_1$  კალორიაა,  $b_2$  გრამი ცხიმია და  $b_3$  გრამი ნახშირწყალია.

წიწილას დღიური რაციონი უნდა შეიცავდეს კალორიების არანაკლებ  $c_1$ , ცხიმების არანაკლებ  $c_2$  გრამის და ნახშირწყლების არანაკლებ  $c_3$  გრამის რაოდენობას.

ვივარაუდოთ, რომ წიწილას დღიურ მენიუში  $x$  გრამი ხორბალია და  $y$  გრამი სიმინდის ფქვილი.

ამრიგად, მივიღებთ უტოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \geq c_1, \\ a_2x + b_2y \geq c_2, \\ a_3x + b_3y \geq c_3, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

დავუშვათ, რომ 1 გრამი ხორბალი ღირს ფულის  $p$  ერთეული (თეთრებში), ხოლო 1 გრამი სიმინდის ფქვილი  $q$  ერთეული. მაშინ, წიწილას დღიური რაციონის ღირებულებაა (მიზნობრივი ფუნქცია)

$$f = px + qy \rightarrow \min. \quad (5.2.7)$$

გარკვეულობისათვის, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$\frac{p}{q} \neq \frac{a_i}{b_i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{a_3}{b_3},$$

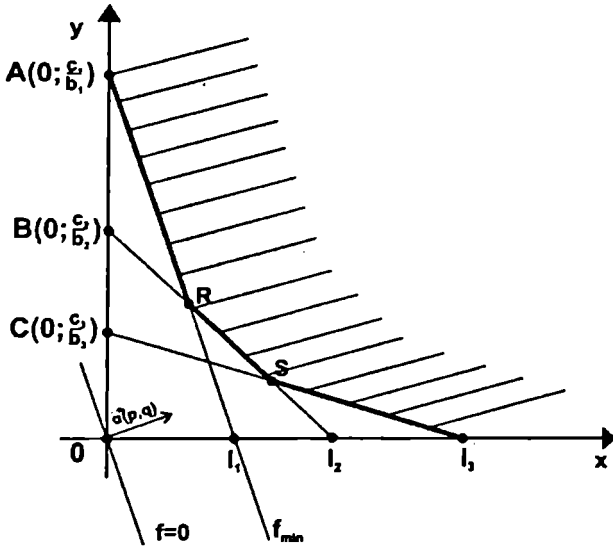
რაც ნიშნავს, რომ წრფეები ( $l_i, i = \overline{1,3}$ )

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \quad (l_1),$$

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \quad (l_2),$$

$$y = -\frac{a_3}{b_3}x + \frac{c_3}{b_3} \quad (l_3),$$

ოკვეთებიან (ნახ.5.2.6)



ნახ.5.2.6.

ვთქვათ,

$$\frac{c_1}{b_1} > \frac{c_2}{b_2} > \frac{c_3}{b_3}; \quad \frac{c_1}{a_1} < \frac{c_2}{a_2} < \frac{c_3}{a_3}; \quad \frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \frac{a_3}{b_3}. \quad (5.2.8)$$

მიზნობრივი ფუნქცია დასაშვებ ამონახსნთა არეში, (ამოზნეკილი მრავალკუთხა შემოღუსაზღვრელი არე) R წერტილში, აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას

$$f_{\min} = f(R) = f(x_{\min}; y_{\min}) = px_{\min} + qy_{\min}$$

სადაც

$$x_{\min} = \frac{\frac{c_1}{b_1} - \frac{c_2}{b_2}}{\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}} > 0,$$

$$y_{\min} = \frac{\frac{a_1 c_2}{b_1 b_2} - \frac{c_1 a_2}{b_1 b_2}}{\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}} = \frac{a_2 a_1 \left( \frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right)}{b_2 b_1 \left( \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1}{a_1} \right)} > 0.$$

უტოლობები სრულდება (5.2.8)-ის ძალით.

### საკარგიშოშობი

იპოვეთ მიზნობრივი ფუნქციის მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა მოცემულ არეში

1.  $W = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.  $W = x_1 - 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.  $F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4.  $W = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5.  $F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6.  $W = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7.  $W = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

8.  $W = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500, \\ x_1 \leq 400, \\ x_2 \leq 300, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9.  $W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11.  $W = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13.  $W = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15.  $W = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17.  $W = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 17, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

19.  $W = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

10.  $W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12.  $W = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 0,6, \\ 0,1x_1 + 0,4x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14.  $W = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 11, \\ x_1 \leq 2,75, \\ 3x_2 \leq 1,1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

16.  $W = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 1, \\ -2x_1 + 24x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18.  $W = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + 6x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

20.  $W = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \leq 32, \\ x_2 \leq 31, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$21. W = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 9, \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$23. W = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$25. W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 5, \\ 3x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$27. W = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 \leq 9, \\ 3x_1 \leq 1, \\ 3x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$29. W = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 5, \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$22. W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7, \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$24. W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7, \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$26. W = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 8, \\ -3x_1 + 8x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$28. W = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$30. W = 3x_1 + 0,5x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 2, \\ x_2 \geq 1,8, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

### §5.3. ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი [3,5,60,62].

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი ქვეყნის ეკონომიკა შედგება მრავალი დარგისაგან. ამ დარგების მუშაობა მჭიდროდაა დაკავშირებული ერთმანეთთან. ცხადია, რომ თითოეული მათგანი ამზადებს განსხვავებულ პროდუქციას და ზღვება მათ შორის გაცვლა-გამოცვლა.

დარგთაშორისი კავშირების ანალიზი მაკროეკონომიკის უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა. ლეონტიევის მოდელი საშუალებას გვაძლევს ზუსტად გამოვთვალოთ თითოეული დარგის მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა დარგთაშორისი და არსებული საბაზრო მოთხოვნების დასაკმაყოფილებლად, რომ ქვეყანაში არ იყოს დეფიციტი რაიმე პროდუქტზე ან არ ჰქონდეს ადგილი რაიმე პროდუქტის ჭარბწარმოებას.

დარგთაშორისი კავშირების ასახსნელად შექმნილია სპეციალური ცხრილი, რომლის მათემატიკური მოდელიც პირველად დამუშავდა ჰარვარდის უნივერსიტეტში პროფესორ ვასილ ლეონტიევის მიერ. მან ამერიკის შეერთებული შტატების ეკონომიკა დაყო 500 დარგად და შეისწავლა მათი ურთიერთთანამშრომლობის მექანიზმები. 1973 წელს აღნიშნული მოდელის შექმნისათვის ვ.ლეონტიევს ნობელის პრემია მიენიჭა ეკონომიკის დარგში.

აღნიშნულ მოდელში იგულისხმება, რომ თითოეული დარგი აწარმოებს მხოლოდ ერთი სახის პროდუქციას, წარმოების დონე უცვლელია იმ ხნის განმავლობაში, რომლისთვისაც ზღვება დაგეგმვა. ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი სამართლიანია მხოლოდ დროის რაღაც  $T$  განსაზღვრული შუალედისათვის.

განვიხილოთ ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი  $\Pi$  - რაოდენობის დარგებისათვის. შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად შემოვიტანოთ აღნიშვნები: ვთქვათ,  $X_i$  -  $i$ -ური დარგის საერთო გამოშვებაა ფულად გამოსახულებაში,  $X_{ij}$  -  $i$ -ური დარგის პროდუქციის მოცულობაა, რომელიც გამოიყენება  $j$ -ური დარგის წარმოების უზრუნველსაყოფად,  $y_i$  -  $i$ -ური დარგის საბოლოო პროდუქციის მოცულობაა არასაწარმოო დანიშნულებისათვის ფულად

გამოსახლებაში. ყოველივე ამის გათვალისწინებით შევადგინოთ დარგთაშორისი კავშირების ცხრილი 1:

ცხრილი 1

დარგების რიგითობა	პროდუქციის საერთო მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები					საბოლოო პროდუქტი
		1	2	3	...	n	
1	$x_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	...	$x_{1n}$	$y_1$
2	$x_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	...	$x_{2n}$	$y_2$
3	$x_3$	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	...	$x_{3n}$	$y_3$
.	.	.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.
n	$x_n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$x_{n3}$	...	$x_{nn}$	$y_n$

სხვადასხვა დარგის პროდუქციის სიდიდე იზომება სხვადასხვა ერთეულით, ამიტომ მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად საჭიროა ყველასათვის ერთნაირი საზომი ერთეულის პოვნა. ასეთ ერთეულად შეიძლება ავიღოთ პროდუქციის ღირებულება. ცხრილში მოცემული დარგთაშორისი ნაკადების და საბოლოო პროდუქციის ჯამი ტოლია შესაბამისი დარგის პროდუქციის ღირებულებისა.

ამრიგად, ვლებულობთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i \in \overline{1, n}. \quad (5.3.1)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j \in \overline{1, n}. \quad (5.3.2)$$

$a_{ij}$  -  $i$ -ური დარგის პროდუქციის მოცულობაა, რომელიც იხარჯება  $j$ -ური დარგის პროდუქციის ერთეულოვანი მოცულობის წარმოებაზე.  $A = (a_{ij})$  მატრიცას ტექნოლოგიური მატრიცა ეწოდება, ხოლო  $a_{ij}$  - რიცხვებს წარმოების ტექნოლოგიური კოეფიციენტები. მოდელში იგულისხმება, რომ ეს კოეფიციენტები მუდმივია დროის გარკვეულ შუალედში.

(5.3.1) და (5.3.2)-დან მივიღებთ ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით



$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i, \quad i \in \overline{1, n}. \quad (5.3.3)$$

დარგთაშორისი ბალანსის (5.3.3) განტოლება უნდა ამოიხსნას  $x_i$  ( $i \in \overline{1, n}$ ) მიმართ. ამისათვის შემოვიტანოთ მატრიცული აღნიშვნები

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (5.3.4)$$

მაშინ, ლეონტიევის (5.3.3) განტოლება მატრიცული ფორმით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$X = A \cdot X + Y. \quad (5.3.5)$$

(5.3.5) განტოლების ამოსახსნელად  $X$ -ის შემცველი შესაკრებები გადავიტანოთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ

$$X - AX = Y \Rightarrow EX - AX = Y \Rightarrow (E - A)X = Y \Rightarrow (E - A)^{-1}(E - A)X = (E - A)^{-1}Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y. \quad (5.3.6)$$

აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ  $(E - A)^{-1}$  არსებობს, ანუ

$$|E - A| \neq 0.$$

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანა, რომლის არსიც მდგომარეობს იმაში, რომ მიმდინარე წლის ბალანსის მონაცემებისა და გარკვეული დარგების უპირატესი განვითარების პირობებში სწორად დავგეგმოთ მომავალი წლის საერთო გამოშეება რეგიონსა თუ სახელმწიფოს ფარგლებში. იმისათვის, რომ ამოცანის დასმა იყოს უფრო გასაგები, განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:

ვთქვათ, 2008 წელს 4 დარგმა (სოფლის მეურნეობა, მრეწველობა, ენერგეტიკა, მანქანათმშენებლობა) მოგვცა დარგთაშორისი ბალანსის შემდეგი ცხრილი 2

დარგების ჩამონათვალი	პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები				საბოლოო პროდუქტი
		1	2	3	4	
სოფლის მეურნეობა (1)	$x_1=125$	$x_{11}=15$	$x_{12}=10$	$x_{13}=30$	$x_{14}=20$	$y_1=50$
მრეწველობა (2)	$x_2=115$	$x_{21}=20$	$x_{22}=15$	$x_{23}=20$	$x_{24}=30$	$y_2=30$
ენერგეტიკა (3)	$x_3=120$	$x_{31}=10$	$x_{32}=20$	$x_{33}=15$	$x_{34}=15$	$y_3=60$
მანქანათმშენებლობა (4)	$x_4=120$	$x_{41}=30$	$x_{42}=30$	$x_{43}=10$	$x_{44}=10$	$y_4=40$

შევადგინოთ მიმდინარე 2008 წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის (სოფლის მეურნეობა) საბოლოო პროდუქტი უნდა გაიზარდოს 10%-ით, მეორე დარგის (მრეწველობა) - 10%-ით, მესამე დარგის (ენერგეტიკა) - 5%-ით, ხოლო მეოთხე დარგის (მანქანათმშენებლობა) - 5%-ით.

ამოხსნა

ოთხივე დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობის რეკომენდებული მნიშვნელობებია

$$Y = \begin{pmatrix} 50 \cdot 1,1 \\ 30 \cdot 1,1 \\ 60 \cdot 1,05 \\ 40 \cdot 1,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 33 \\ 63 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 30 & 20 \\ 125 & 115 & 120 & 120 \\ 20 & 15 & 20 & 30 \\ 125 & 115 & 120 & 120 \\ 10 & 20 & 15 & 15 \\ 125 & 115 & 120 & 120 \\ 30 & 30 & 10 & 10 \\ 125 & 115 & 120 & 120 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{2}{23} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{25}{2} & \frac{23}{4} & \frac{6}{1} & \frac{4}{1} \\ \frac{25}{6} & \frac{23}{6} & \frac{8}{1} & \frac{8}{1} \\ \frac{25}{25} & \frac{23}{23} & \frac{12}{12} & \frac{12}{12} \end{pmatrix}, \quad E - A = \begin{pmatrix} \frac{22}{25} & -\frac{2}{23} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & \frac{20}{20} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ -\frac{25}{2} & \frac{23}{4} & -\frac{6}{6} & -\frac{4}{4} \\ -\frac{2}{25} & \frac{4}{23} & \frac{7}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{25}{6} & \frac{23}{6} & \frac{8}{8} & \frac{8}{11} \\ -\frac{25}{25} & -\frac{23}{23} & -\frac{12}{12} & -\frac{12}{12} \end{pmatrix}.$$

$$|E - A| = \frac{252}{575} = \frac{252}{25 \cdot 23}.$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{575}{252} \begin{pmatrix} \frac{1973}{23 \cdot 144} & \frac{521}{23 \cdot 144} & \frac{5}{23} & \frac{599}{23 \cdot 144} \\ \frac{713}{25 \cdot 144} & \frac{2285}{25 \cdot 144} & \frac{1}{5} & \frac{851}{25 \cdot 144} \\ \frac{217}{25 \cdot 23 \cdot 3} & \frac{301}{25 \cdot 23 \cdot 3} & \frac{336}{25 \cdot 23} & \frac{259}{25 \cdot 23 \cdot 3} \\ \frac{386}{25 \cdot 23 \cdot 3} & \frac{410}{25 \cdot 23 \cdot 3} & \frac{96}{25 \cdot 23} & \frac{2 \cdot 523}{25 \cdot 23 \cdot 3} \end{pmatrix}.$$

სოლო მოცემული ოთხი დარგის საერთო გამოშვების გეგმა (5.3.6)-ის თანახმად იქნება

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3779525}{252 \cdot 144} \\ \frac{2250803}{252 \cdot 72} \\ \frac{48125}{378} \\ \frac{28418}{139} \end{pmatrix}, \quad \text{ან} \quad X \approx \begin{pmatrix} 135,18 \\ 124,05 \\ 127,31 \\ 128,09 \end{pmatrix}.$$

## საპარჯიშობი

წინა წელს მეურნეობის ხუთმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი 3:

ცხრილი 3

№	1	2	3	4	5	საბოლოო პროდუქტი ( $y_i$ )	პროდუქციის საერთო გამოშვება ( $x_i$ )
1	10	20	30	20	20	100	200
2	20	10	25	35	10	150	250
3	20	20	30	30	20	180	300
4	40	30	20	20	40	200	350
5	30	40	20	40	20	250	400

აღოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების ( $x_i$ ) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი ( $y_i$ ) გაიზრდება  $n_1\%$ -ით, მეორე დარგისა –  $n_2\%$ -ით, მესამისა –  $n_3\%$ , მეოთხისა –  $n_4\%$ -ით, მეხუთესი –  $n_5\%$ -ით.

1.  $n_1 = 10\%$ ,  $n_2 = 5\%$ ,  $n_3 = 12\%$ ,  $n_4 = 15\%$ ,  $n_5 = 20\%$ .

2.  $n_1 = 5\%$ ,  $n_2 = 10\%$ ,  $n_3 = 15\%$ ,  $n_4 = 10\%$ ,  $n_5 = 15\%$ .

3.  $n_1 = 15\%$ ,  $n_2 = 12\%$ ,  $n_3 = 10\%$ ,  $n_4 = 5\%$ ,  $n_5 = 10\%$ .

4.  $n_1 = 20\%$ ,  $n_2 = 15\%$ ,  $n_3 = 5\%$ ,  $n_4 = 20\%$ ,  $n_5 = 5\%$ .

5.  $n_1 = 8\%$ ,  $n_2 = 6\%$ ,  $n_3 = 20\%$ ,  $n_4 = 12\%$ ,  $n_5 = 8\%$ .

6.  $n_1 = 12\%$ ,  $n_2 = 8\%$ ,  $n_3 = 16\%$ ,  $n_4 = 8\%$ ,  $n_5 = 12\%$ .

7.  $n_1 = 6\%$ ,  $n_2 = 10\%$ ,  $n_3 = 15\%$ ,  $n_4 = 10\%$ ,  $n_5 = 10\%$ .

8.  $n_1 = 18\%$ ,  $n_2 = 5\%$ ,  $n_3 = 12\%$ ,  $n_4 = 5\%$ ,  $n_5 = 15\%$ .

9.  $n_1 = 16\%$ ,  $n_2 = 8\%$ ,  $n_3 = 10\%$ ,  $n_4 = 8\%$ ,  $n_5 = 10\%$ .

10.  $n_1 = 4\%$ ,  $n_2 = 6\%$ ,  $n_3 = 8\%$ ,  $n_4 = 10\%$ ,  $n_5 = 12\%$ .

#### §5.4. საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი

მოდელში განიხილება  $n$  რაოდენობის ქვეყანა. ამ ქვეყნების ეროვნული შემოსავალი, რომელიც მიმართულია მოხმარებაზე, ანუ საქონლის (პროდუქტის) შექმნაზე და მომსახურებაზე შესაბამისად  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ის ტოლია [48].

ვივარაუდოთ, რომ სისტემა კონსერვატიულია, ე.ი.  $x_j$  შემოსავალი მთლიანად იხარჯება განხილული ქვეყნების სისტემის შიგნით,  $w_{kj}$  - ეროვნული  $x_j$  შემოსავლის ნაწილია, რომელიც იხარჯება  $k$ -ური ქვეყნის საქონლის შექმნაზე და მომსახურებაზე

$$p_{kj} = \frac{w_{kj}}{x_j}, \quad k, j = \overline{1, n} \quad (5.4.1)$$

$p_{kj}$  - ეროვნული შემოსავლის შესაბამისი წილია ( $p_{jj}$  - ( $j = \overline{1, n}$ ) ეროვნული შემოსავლების წილებია, რომლებიც იხარჯება ყოველი ქვეყნის შიგნით საქონლის შექმნაზე და მომსახურებაზე).

შემოვიტანოთ  $P$  მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.4.2)$$

ამ კვადრატულ მატრიცას ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცა ეწოდება.

რადგანაც, ყოველი  $j$ -თვის ( $j = \overline{1, n}$ )

$$x_j = \sum_{k=1}^n w_{kj} \quad (5.4.3)$$

(5.4.1), (5.4.2)-დან მივიღებთ, რომ  $P$  მატრიცის ყოველი სვეტის ელემენტთა ჯამი ერთის ტოლია (სვეტების მიხედვით სტოქასტური მატრიცაა).

ყოველი  $k = \overline{1, n}$ -თვის პირველი ქვეყანა  $k$ -ური ქვეყნის საქონლის შექმნაზე და მომსახურებაზე ხარჯავს  $w_{k1}$  თანხას, მეორე -  $w_{k2}$  თანხას, ...,  $n$ -ური -  $w_{kn}$  თანხას, ამიტომ  $k$ -ური ქვეყნის ამონაგები გარე და შიგა ვაჭრობიდან შეადგენს

$$y_k = \sum_{j=1}^n \omega_{kj} = \sum_{j=1}^n p_{kj} x_j, \quad (5.4.4)$$

ანუ  $y_k = \bar{P}_k \cdot \bar{x}$ ,  $\bar{P}_k = (p_{k1}, \dots, p_{kn})$  – P მატრიცის k-ური სტრიქონია,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

ამ ქვეყნებს შორის ვაჭრობა ითვლება დაბალანსებურად, თუ ყოველი ქვეყნის სავაჭრო ბალანსი არადეფიციტურია, ანუ

$$y_j \geq x_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.4.5)$$

ე.ი. მოხმარება არ აღემატება ამონაგებს.

ამრიგად, დაბალანსებული ვაჭრობისათვის, მივიღებთ უტოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \dots + p_{1n}x_n \geq x_1, \\ \vdots \\ p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n \geq x_n. \end{cases} \quad (5.4.6)$$

თუ (5.4.6) სისტემაში თუნდაც ერთი სტრიქონისათვის აღვიღოთ აქვს მკაცრ უტოლობას, მაშინ სტრიქონების შეკრებით მივიღებთ

$$(p_{11} + \dots + p_{n1})x_1 + (p_{12} + \dots + p_{n2})x_2 + \dots + (p_{1n} + \dots + p_{nn})x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

რადგანაც

$$\sum_{k=1}^n p_{kj} = 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

ჩვენ მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც ნიშნავს იმას, რომ (5.4.6) უტოლობათა სისტემა სინამდვილეში არის წრფივი განტოლებათა სისტემა

$$P\bar{x} = \bar{x} \quad (5.4.7)$$

და წარმოადგენს ქვეყნების კონსერვატიული სისტემის დაბალანსებულ სავაჭრო ბალანსს.

წრფივი სისტემა (5.4.7)-თვის საკუთარი მნიშვნელობების და საკუთარი ვექტორის არსებობა ეკვივალენტურია ეროვნული შემოსავლების არსებობისა, რომლებიც განახორციელებენ არადეფიციტურ სავაჭრო სისტემას სტრუქტურული P მატრიცით (5.4.2), ე.ი. ქვეყნების ჯგუფისათვის ვაჭრობის დაბალანსებული მოდელის არსებობისა სტრუქტურული P მატრიცით.

რადგანაც (5.4.7) სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემის

$$(P - I)\bar{x} = 0 \quad (5.4.8)$$

სადაც  $I$  - ერთეულოვანი მატრიცია, მაშინ არანულოვანი მოხმარების  $\bar{x}$  ვექტორის არსებობა ეკვივალენტურია  $(P - I)$  მატრიცის გადაგვარებულობისა, ანუ

$$\det(P - I) = 0.$$

ბუნებრივია, რომ ამ მოდელს აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა, რადგანაც სავაჭრო გაცვლის ხანგრძლივი დაუბალანსებლობა (ეკონომიკის მდგომარეობის ძირითადი მაჩვენებლების ოთხ-ხუთ რიცხვში) სერიოზული სიგნალია სავალუტო კურსის მოახლოებული ცვლილებისა.

განვიხილოთ სამი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცია

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

და ვიპოვოთ დაბალანსებული (არადეფიციტური) ვაჭრობის მოდელისათვის ამ ქვეყნების მოხმარების  $\bar{x}(x_1, x_2, x_3)$  ვექტორი.

ბუნებრივია, რომ

$$\det(P - I) = 0,$$

ამიტომ ასეთი არანულოვანი  $\bar{x}$  ვექტორი არსებობს.

ამ შემთხვევაში (5.4.7) სისტემის ამონახსნი ჩაიწერება

$$\bar{x} = \left( x_1, \frac{4}{3}x_1, \frac{2}{3}x_1 \right) = \lambda \left( 1; \frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

თუ შევარჩევთ, მაგალითად,  $\lambda = 3\lambda_0$  ( $\lambda_0 > 0$ ), მაშინ მივიღებთ ამ ქვეყნებს შორის დაბალანსებულ ვაჭრობას მოხმარების ნებისმიერი  $\bar{x}(x_1, x_2, x_3)$  ვექტორისათვის, რომლის კომპონენტები ( $3\lambda_0$ ;  $4\lambda_0$ ,  $2\lambda_0$ ) შეეფარდება როგორც 3:4:2, ე.ი. მეორე ქვეყნის ეროვნული შემოსავალი ყველაზე მაღალია, ხოლო მესამე ქვეყნის - ყველაზე დაბალი.

სამარჯიშოები

1. სამი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურულ მატრიცას აქვს სახე

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისთვის მოხმარების  $\bar{x}(x_1, x_2, x_3)$  ვექტორი.

2. ოთხი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისათვის მოხმარების  $\bar{x}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  ვექტორი.



## §5.5. სტოუნის მომხმარებლის არჩევანის მოდელი

გამოვიყვანოთ მოთხოვნის ფუნქცია სტოუნის მომხმარებლის არჩევანის (სარგებლიანობის) კონკრეტული ფუნქციისათვის. ამ ფუნქციას აქვს სახე [5]:

$$u(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max, x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.5.1)$$

აქ  $a_i, i = \overline{1, n}$  -ური დოვლათის აუცილებელი მინიმალური რაოდენობაა, რომელიც შეისყიდება ნებისმიერ შემთხვევაში და არ წარმოადგენს არჩევანის საგანს. იმისათვის, რომ  $a_i, i = \overline{1, n}$  დოვლათთა ერთობლიობა, სრულად იქნეს შეძენილი, აუცილებელია, რომ  $I$  შემოსავალი იყოს ამ დოვლათთა ერთობლიობის შესაძენად საჭირო ფულის რაოდენობაზე

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i$$

მეტი.  $\alpha_i > 0$  ხარისხის მაჩვენებლები (5.5.1)-ში, ახასიათებენ მომხმარებლისათვის დოვლათთა ფარდობით ღირებულებას ანუ ახასიათებენ იმას, თუ რამდენად მეტად სასურველია ესა თუ ის სახის დოვლათი მომხმარებლისათვის.

თუ მიზნობრივ (5.5.1) ფუნქციას დავემატებთ საბიუჯეტო შეზღუდვებს

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \quad (5.5.2)$$

მაშინ მივიღებთ ამოცანას, რომელსაც სტოუნის მოდელი ეწოდება.

ლაგრანჟის ფუნქციას ამ შემთხვევაში აქვს სახე

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = L(x, \lambda) = u(x) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i - I \right). \quad (5.5.3)$$

ვიპოვოთ ლანგრანჟის ფუნქციის კერძო წარმოებულები  $x_i, (i = \overline{1, n})$  ცვლადებით და გავუტოლოთ ნულს, მაშინ

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda p_i = \alpha_i \frac{u(x)}{x_i - a_i} + \lambda p_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

საიდანაც

$$x_i = a_i - \frac{\alpha_i u(x)}{\lambda p_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.5.4)$$

ამ პირობებს დამატება ტოლობა

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i - I = 0, \quad (5.5.5)$$

რომლის შესრულება ეკვივალენტურია ტოლობისა, რომელიც მიიღება თუ ლანგრაჟის ფუნქციის წარმოებულს  $\lambda$ -თი გაგუტოლებით ნულს.

გავამრავლოთ (5.5.4)-ში ყოველი  $i$ -ური პირობა  $\lambda p_i$ -ზე და ავეჯამოთ  $i$ -ის მიმართ, მაშინ მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u(x) + \lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^n p_i a_i = 0. \quad (5.5.6)$$

რადგანაც ოპტიუმის წერტილში საბიუჯეტო შეზღუდვები სრულდება, როგორც ტოლობა, (5.5.6)-ში  $\sum_{i=1}^n p_i x_i$  შევცვალოთ  $I$ -თი, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{u(x)}{\lambda} = - \frac{I - \sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}. \quad (5.5.7)$$

(5.5.4), (5.5.7)-დან მივიღებთ მოთხოვნის ფუნქციას

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i}{p_i} \cdot \frac{I - \sum_{j=1}^n p_j a_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.5.8)$$

ამ ფუნქციის ინტერპრეტირება საკმაოდ იოლია. თავდაპირველად გამოიყენება ყოველი  $a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) დოვლათის მინიმალურად აუცილებელი რაოდენობა, შემდეგ გამოითვლება ფულის დარჩენილი რაოდენობა, რომელიც პროპორციულად გადანაწილდება მოცემული სახის დოვლათის სასურველობის  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) მნიშვნელობის (წონადობის) მიხედვით. ფულის რაოდენობის  $p_i$  ფასზე გაყოფით მივიღებთ მინიმუმის გარდა დამატებით შესაძენ  $i$ -ური დოვლათის რაოდენობას და დაემატებთ მას  $a_i$ -ის.

სტოუნის მოდელს გააჩნია კერძო შემთხვევები:

მაგალითად, როცა ყველა  $a_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , ხოლო  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) ერთმანეთის ტოლია, მაშინ (5.5.8)-დან მივიღებთ

$$x_i = \frac{I}{np_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.5.9)$$

ე.ი. შემოსავალი იყოფა  $n$  ტოლ ნაწილად და მოთხოვნა  $i$ -ურ საქონელზე მიიღება როგორც განაყოფი მიღებული ფულის რაოდენობის გაყოფისაგან მის ფასზე.

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვხედავთ, რომ მოთხოვნა იზრდება შემოსავლის ზრდადობისას ერთის ტოლი ელასტიურობით და კლებულობს ფასის ზრდადობით მინუს ერთის ტოლი ელასტიურობით. ამრიგად, ამ მოდელში ყოველი საქონელი ნორმალურია და ფასიანი. ამის გარდა, მოთხოვნა უსასრულობამდე იზრდება, შემოსავლის უსასრულო გაზრდისას. ამ აზრით, ყოველი საქონელი არის "ფუფუნების საგანი".

იმისათვის, რომ აღვწეროთ მოთხოვნის ქცევის უფრო მრავალსახოვანი ფორმები სხვადასხვა საქონელზე მოდელი უნდა შეიცავდეს, მიზნობრივი უპირატესობის (სარგებლიანობის) ფუნქციის უფრო რთულ სახეებს. მაგალითად, უპირატესობის ფუნქციისათვის

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_1 + b - a)^{-b}, \quad (5.5.10)$$

სადაც  $a, b$  - პარამეტრებია, მოთხოვნის ფუნქციას აქვს სახე

$$x_1 = \frac{aI}{I + bp_1}. \quad (5.5.11)$$

რაც, პირველი მოთხოვნის საგნებისათვის მოთხოვნის ტიპური ფუნქციაა, ხოლო

$$x_2 = \frac{I(I + p_1(b - a))}{p_2(I + bp_1)} \quad (5.5.12)$$

ფუფუნების საგნებისათვის ტიპური მოთხოვნის ფუნქციაა.

(5.5.5), (5.5.11), (5.5.12) მარტივად მიიღება შემდეგი სისტემიდან

$$L(x_1, x_2) \equiv u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{au}{x_1} - \frac{bu}{x_1 + b - a} + \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{(b-a)u}{x_2} + \lambda p_2 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{array} \right.$$

## საპარჯიშოები

1. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \prod_{i=1}^5 (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max.$$

იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია  $x_i$  ( $i = 1, 5$ ) იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი (პროფესორი) აუცილებლად მოიხმარს თვეში  $a_1 = 20$  ცალ პურს  $p_1 = 0,55$  ლარის ღირებულებით,  $a_2 = 4$  კგ კარტოფილს  $p_2 = 1,2$  ლარის ღირებულებით,  $a_3 = 4$  კგ ხორცს  $p_3 = 9,5$  ლარის ღირებულებით,  $a_4 = 3$  კგ თევზს  $p_4 = 9$  ლარის ღირებულებით და  $a_5 = 15$  ცალ კვერცხს  $p_5 = 0,28$  ლარის ღირებულებით, თუ  $\alpha_1 = 6$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\alpha_3 = 4$ ,  $\alpha_4 = 3$ ,  $\alpha_5 = 2$ .

მომხმარებლის თვიური "საკმაოდ დიდი" ბიუჯეტია 500 ლარი.

2. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \prod_{i=1}^8 (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max.$$

იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია  $x_i$  ( $i = 1, 8$ ) იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი (სახელმწიფო მოხელე, საშუალო დონის ჩინოვნიკი) მოიხმარს თვეში  $a_1 = 25$  ცალ პურს  $p_1 = 0,7$  ლარის ღირებულებით,  $a_2 = 5$  კგ კარტოფილს  $p_2 = 1,2$  ლარის ღირებულებით,  $a_3 = 9$  კგ ხორცს (ქათმის, საქონლის, ღორის,...)  $p_3 = 10$  ლარის ღირებულებით,  $a_4 = 5$  კგ თევზს (კალმახი, ორაგული, სათაღე თევზი,...)  $p_4 = 12$  ლარის ღირებულებით,  $a_5 = 20$  ცალ ოჯახის კვერცხს  $p_5 = 0,35$  ლარის ღირებულებით,  $a_6 = 3$  კგ ყველს (იმერული, სულგუნი, გულა-ყველი,...)  $p_6 = 10$  ლარის ღირებულებით,  $a_7 = 2$  კგ სოკოს (ქამა სოკო, შამპინიონები,...)  $p_7 = 11$  ლარის ღირებულებით, სხვა დელიკატესს  $a_8 = 5$  კგ  $p_8 = 25$  ლარის ღირებულებით, თუ  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\alpha_3 = 7$ ,  $\alpha_4 = 6$ ,  $\alpha_5 = 5$ ,  $\alpha_6 = 8$ ,  $\alpha_7 = 4$ ,  $\alpha_8 = 9$ .

საშუალო დონის ჩინოვნიკის "მოკრძალებული" თვიური ბიუჯეტია 1500 ლარი.

3. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i=1}^4 (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max.$$

იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია  $x_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი (პენსიონერი) მოიხმარს თვეში  $a_1 = 30$  ცალ პურს  $p_1 = 0,35$  ლარის ღირებულებით,  $a_2 = 6$  კგ კარტოფილს  $p_2 = 0,6$  ლარის ღირებულებით,  $a_3 = 3$  კგ ხორცს  $p_3 = 6$  ლარის ღირებულებით,  $a_4 = 3$  კგ შაქარს (ჩაისათვის)  $p_4 = 1$  ლარის ღირებულებით, თუ  $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 3$ .

პენსიონერის 2008 წელს "საგრძნობლად გაზრდილი" თვიური ბიუჯეტი შეადგენს 55 ლარს ეროვნულ ვალუტაში.

## §5.6. ძვეყნის მოსახლეობის შემოსავლის განსაზღვრის მოდელი

ლორენცის წირი ეწოდება მოსახლეობის შემოსავლის ნორმის დამოკიდებულების გრაფიკს მოსახლეობის იმ წილისაგან, რომელსაც გააჩნია მოცემული (ცვლადი) ნორმირებული შემოსავალი [48]. ეს წირი იძლევა საშუალებას შევაფასოთ უსამართლობის ხარისხი მოცემული ქვეყნის მოსახლეობის შემოსავლების განაწილებაში, რაც ძალიან აქტუალურია დღევანდელ საქართველოში.

თუ ყოველი მოქალაქის შემოსავალი  $m$ -ის ტოლია, მაშინ  $n$  ადამიანის ერთობლივი შემოსავალი  $I_n = mn$ , ხოლო  $N$  ადამიანისაგან შემდგარი ჯგუფის საერთო შემოსავალია  $I_N = mN$ .

შემოვიტანოთ ნორმირებული ცვლადები  $x = \frac{n}{N}$  და  $y = \frac{I_n}{I_N}$ , მაშინ

$$y = \frac{I_n}{I_N} = \frac{mn}{mN} = \frac{mNx}{mN} = x.$$

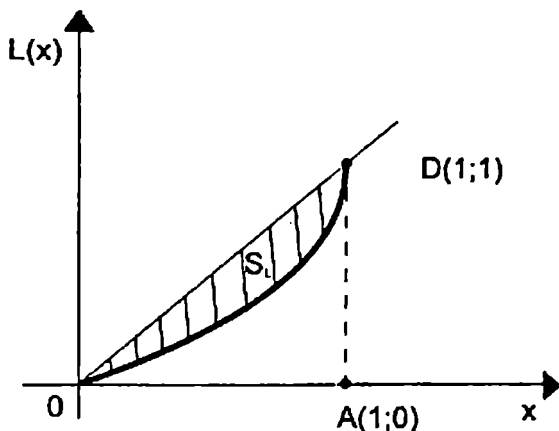
ე.ი. შემოსავლების თანაბარი განაწილებისას ლორენცის წირი არის საკოორდინატო სიბრტყის მთავარი დიაგონალი (ბისექტრისა), თუ  $x$  და  $y$ -ს ჩათვლით უწყვეტად.

თუ ლორენცის წირის აგებისას შევთანხმდებით, რომ ერთობლივი შემოსავლის გაანგარიშება იწყება ღარიბებისაგან და მერე იზრდება სულზე შემოსავლის მიხედვით, მაშინ ლორენცის  $L(x)$  წირი განლაგებულია მთავარი დიაგონალის ქვემოთ.

ბუნებრივია, რომ რეალობაში  $x$  და  $y = L(x)$  ცვლადები ღებულობენ მხოლოდ სასრულო რაოდენობის მნიშვნელობებს, მაგრამ მოდელში ჩათვლილია, რომ  $L(x)$  უწყვეტი წირია. რაც უფრო შორდება ლორენცის წირი დიაგონალს, მით უფრო მეტად არათანაბრად განაწილებულია მოსახლეობის შემოსავლები.

დავუშვათ  $x (x \in [0, 1])$  - მოსახლეობის წილია,  $y = L(x)$  ( $L(0) = 0$ ,  $L(1) = 1$ ) - ლორენცის წირია,  $A = (1; 0)$ ,  $D = (1, 1)$  (იხ. ნახ.5.6.1).

ლორენცის წირის და დიაგონალს შორის მოთავსებული მრუდწირული ფიგურის  $S_L$  ფართობის შეფარდებას  $OAD$  სამკუთხედის  $S$  ფართობთან ჯინის კოეფიციენტი ეწოდება (შემოსავლების არათანაბრად განაწილების რიცხვითი მაჩასიათებელი).



ნახ.5.6.1.

ცხადია, რომ  $S_{OAD} = S = 1/2$ , ხოლო  $l$  - იყოს მრუდწირული სამკუთხედის  $OAD$  (მოთავსებულია  $L(x)$  წირის ქვემოთ) ფართობი, მაშინ ჯინის კოეფიციენტი  $k$  გამოითვლება ფორმულით

$$k = \frac{S-l}{S} = 1 - \frac{l}{S} = 1 - 2l. \quad (5.6.1)$$

დაეუშვათ, რომ შედარებით ნაკლებად განვითარებული ქვეყნის შემოსავლების განაწილების სტატისტიკურმა მონაცემებმა გამოავლინეს ლორენცის წირი შემდეგი სახით

$$L(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [0,1]. \quad (5.6.2)$$

გამოვთვალოთ ჯინის  $k$  კოეფიციენტი.

ცხადია, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$L(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2} < x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

ამიტომ (5.6.2)-დან მივიღებთ

$$l = \int_0^1 L(x) dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

ამრიგად, (5.6.1)-ს თანახმად, მივიღებთ,

$$S_L = S - l = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$k = \frac{S_L}{S} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,5708.$$

შეიძლება გავაკეთოთ დასკვნა იმის შესახებ, რომ (5.6.2)-ის სახის ლორენცის ფუნქციის შემთხვევაში, გადახრა შემოსავლების თანაბრად განაწილების სამკუთხედიდან შეადგენს მისი ფართობის თითქმის 60%-ს.

რა თქმა უნდა, ჯინის კოეფიციენტის მნიშვნელობის განსაზღვრა, რომელიც შეესაბამება მოსახლეობის შემოსავლების განაწილებაში დასაშვებ არათანაბრობას, შეთანხმების საგანია, მაგრამ  $k$ -ს მიღებული მნიშვნელობა ძალიან მაღალია, რაც მეტყველებს ამ ქვეყნებში არსებულ უსამართლობაზე. ამ ქვეყნების ხელისუფლებას, რომელიც ასე ცუდად ზრუნავს თავის მოქალაქეთა ძირითადი მასის ინტერესებზე, არ უნდა გაუკვირდეს მოსალოდნელი აღეღებებში სოციალური საკითხების გამო.

### საკვარჯიშოები

მოცემულია რამოდენიმე ქვეყნის ლორენცის წირი. გამოთვალეთ ჯინის შესაბამისი  $k$  კოეფიციენტი ( $x \in [0,1]$ ). რომელია უფრო განვითარებული ქვეყანა?

$$1. L(x) = 1 - \sqrt{1 - 2x^2} + x.$$

$$2. L(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x^2 + 3x}.$$

$$3. L(x) = 1 - \sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2}} + 1.$$

$$4. L(x) = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 5x + 4}.$$

$$5. L(x) = 1 - \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - 10x + 9}.$$



## §5.7. კოზ-დუბლასის და ლეონტიევის საწარმოო ფუნქციები

ცალკეული რეგიონის ან ქვეყნის მთლიანობაში ეკონომიკური პროცესების მოდელირებისას (მაკროეკონომიკურ, აგრეთვე მიკროეკონომიკურ დონეზე) გამოიყენება საწარმოო ფუნქციები [49,50].

ბანსაზღვრა 1.  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  სახის ფუნქციას, სადაც  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$   $i$ -ური გამოყენებული რესურსების მოცულობებია,  $Y$  გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა, საწარმოო ფუნქცია ეწოდება.

გარკვეული პროდუქციის გამომშვები ცალკეული საწარმოსათვის (ფირმა) საწარმოო ფუნქცია გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას აკავშირებს (ნატურალურ ან ღირებულებით გამოსახულებაში) სხვადასხვა სახის შრომით დანახარჯებთან, ასევე დროის, ნედლეულის სხვადასხვა სახეობის, მაკომპლექტებელი ნაწილების, ენერჯის, ძირითადი კაპიტალის დანახარჯებთან. ასეთი ტიპის საწარმოო ფუნქცია წარმოების მოქმედი ტექნოლოგიის მოდელირებას ახდენს.

როგორც წესი, საწარმოო ფუნქციის აგებისას, ცალკეული რეგიონის ან მთლიანად ქვეყნისათვის, პროდუქტის წლიური გამოშვების  $Y$  მაჩვენებლად ხშირად იღებენ რეგიონის ან შესაბამისად ქვეყნის ერთობლივ პროდუქტს (შემოსავალი) აღრიცხულს უცვლელ ფასებში, რესურსებად განიხილავენ ძირითად კაპიტალს ( $x_1 = K$ -წლის განმავლობაში გამოყენებული მოცულობა) და ცოცხალ შრომას ( $x_2 = L$  - ერთეულთა რაოდენობა). ამრიგად, მაკროეკონომიკაში განიხილავენ ორფაქტორიან ( $i = \overline{1, 2}$ ) საწარმოო ფუნქციას

$$Y = f(K, L) \quad (5.7.1)$$

ბუნებრივია, რომ რაც უფრო მეტია ფაქტორთა რიცხვი, მით უფრო რეალურია (ზუსტია) მოდელი, მაგრამ გაცილებით უფრო რთულიც. ზოგჯერ, ეკონომიკურ მოდელებში გამოყენებული ბუნებრივი რესურსების მოცულობის დამატებით გათვალისწინებით განიხილავენ მაკროეკონომიკის სამფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას.

საწარმოო ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

ა) წარმოებაში გამოყენებული  $i$ -ური ( $i = \overline{1, n}$ ) რესურსის ხარჯის გაზრდით გამოშვება გაიზრდება

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.7.2)$$

ბანსაზღვრა 2.  $\Omega$  სიმრავლეს  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის ეკონომიკური არეალი ეწოდება, თუ ყოველი  $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  წერტილისათვის  $\Omega$  სიმრავლიდან ადგილი აქვს (5.7.2) უტოლობას.

ეკონომიკური არეალის გარეთ, რესურსის ეფექტურობა იწყებს დაცემას. მაგალითად, თუ რესურსად განიხილება მიწა, მაშინ საბუთო ძალის უცვლელობისას, იჯარით აღებული მიწის ფართობის გაზრდამ შეიძლება კი არ გაზარდოს შემოსავალი, არამედ, პირიქით, შეამციროს კიდევ. ის მაქსიმალური ფართობი, რომელზედაც დაქირავებული მიწის ფართობის გაზრდა მომგებიანია, წარმოადგენს ამ შემთხვევაში, ეკონომიკური არეალის ზღვრულ მნიშვნელობას.

ბანსაზღვრა 3.  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს,  $x_i$  რესურსის ცვლილების მიხედვით,  $i$ -ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა ეწოდება. ზღვრული ეფექტურობა აღინიშნება  $M_i$ -თი

$$M_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

ბ) სხვა რესურსების რაოდენობის უცვლელობის პირობებში, ერთი რომელიმე აღებული რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, ამ რესურსის გამოყენების ეფექტურობა მცირდება. საწარმოო ფუნქციის ამ თვისებას კლებად ზღვრულ ეფექტურობას უწოდებენ. ეს პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.7.3)$$

გ) ერთი  $i$ -ური რესურსის გაზრდით სხვა  $j$ -ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა იზრდება, ანუ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \quad (5.7.4)$$

დ) საწარმოო ფუნქცია წარმოადგენს  $p > 0$  ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას. ამასთან, როცა  $p > 1$ , წარმოების მასშტაბის  $t$ -ჯერ გაზრდით ( $t > 1$ ) წარმოების მოცულობა იზრდება  $t^p$ -ჯერ, ე.ი. ადგილი აქვს წარმოების მასშტაბის ზრდით გამოწვეულ წარმოების

ეფექტურობის ზრდას. როცა  $p < 1$ , მაშინ ადგილი აქვს წარმოების ეფექტურობის ვარდნას გამოწვეულს წარმოების მასშტაბის ზრდით, ხოლო, როცა  $p = 1$ , გვაქვს წარმოების მუდმივი ეფექტურობა წარმოების მზარდი მასშტაბების პირობებში, ან გვაქვს ხვედრითი გამოშვების დამოუკიდებლობა წარმოების მასშტაბისაგან.

აღნიშნული თვისება ჩაიწერება შემდეგი ტოლობით

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.7.5)$$

ეკონომიკური პროცესების მოდელირებისას განიხილავენ მულტიპლიკატიურ (ნამრავლის ფორმის გამო)

$$Y = \alpha_0 \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \quad (5.7.6)$$

და ადიტიურ (ჯამის ფორმის გამო)

$$Y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (5.7.7)$$

საწარმოო ფუნქციებს.

მიკრო, ასევე მაკროეკონომიკურ დონეზე საწარმოო საქმიანობის მოდელირებისათვის ხშირად გამოიყენება ორფაქტორიანი მულტიპლიკატიური კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია (კობ და დუგლასი ორი ამერიკელი ეკონომისტი, რომლებმაც 1929 წელს პირველად შემოიღეს ეს ფუნქცია)

$$Y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}, \quad (5.7.8)$$

სადაც  $K$  - გამოყენებული ძირითადი კაპიტალის მოცულობა (ძირითადი ფონდები), ხოლო  $L$  - ცოცხალ სამუშაო ძალაზე დანახარჯები,  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  - საწარმოო ფუნქციის პარამეტრებია.

ხშირად, იხილავენ შემთხვევას, როცა ეს დადებითი მუდმივები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \in (0,1), \alpha_2 \in (0,1), \quad (5.7.8)$$

მაშინ კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია (5.7.8) მიიღებს სახეს

$$\frac{Y}{L} = \alpha_0 \left( \frac{K}{L} \right)^{\alpha_1}. \quad (5.7.9)$$

ბანსაზღვრა 4.  $\frac{Y}{L}$  და  $\frac{K}{L}$  წილადებს შესაბამისად შრომის მწარმოებლურობა და შრომის კაპიტალაღჭურვილობა -

ბა ეწოდება, ხოლო  $\frac{Y}{K}$  წილადს – კაპიტალის მწარმოებლურობა ან  
 კაპიტალ უკუგება,  $\frac{K}{Y}$  წილადს – პროდუქციის გამოშვების  
 კაპიტალ ტევადობა,  $\frac{L}{Y}$  – პროდუქციის გამოშვების  
 შრომა ტევადობა.

საწარმოო  $Y = f(x_1, x_2)$  ფუნქციას სტატიკური ეწოდება, თუ მისი პარამეტრები და  $f$  მახასიათებელი დამოუკიდებელია დროზე, თუმცა რესურსების და გამოშვების მოცულობები შეიძლება იყოს დამოკიდებული  $t$  დროზე, ე.ი. შეიძლება ჰქონდეთ წარმოდგენა დროითი მწკრივების სახით:  $x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(T); x_2(0), x_2(1), \dots, x_2(T); Y(0), Y(1), \dots, Y(T), Y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$ , სადაც  $t$  – წლის ნომერია  $t = 0, T, t = 0$  – დროითი შუალედის საბაზისო წელია, რომელიც მოიცავს  $1, 2, \dots, T$  წლებს.

საწარმოო ფუნქციას დინამიკური ეწოდება, თუ:

1<sup>0</sup>.  $t$  დრო ფიგურირებს საწარმოო ფუნქციის არგუმენტებში, როგორც საწარმოს დამოუკიდებელი ფაქტორი, რომელიც გავლენას ახდენს გამოშვებული პროდუქციის მოცულობაზე, ანუ

$$Y = f(K, L, t).$$

2<sup>0</sup>. საწარმოო ფუნქციის პარამეტრები  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  და  $f$  მახასიათებელი დამოკიდებულია დროზე.

საწარმოო ფუნქციის აგებისას სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესი შეიძლება გათვალისწინებულ იქნეს  $e^{pt}$  ( $p > 0$  – გამოშვების ზრდის ტემპია, სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის გავლენით) მამრავლის შეყვანით, ანუ

$$Y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2(t)) \quad (t = 0, 1, 2, \dots, T).$$

აქვე უნდა გავითვალისწინოთ, რომ თუ საწარმოო ფუნქციის პარამეტრებს განვსაზღვრავთ  $T_0$  დროის პერიოდში მოცემული დროითი მწკრივების საფუძველზე, მაშინ მიღებულმა საწარმოო ფუნქციამ შეიძლება მოგვცეს სარწმუნო შედეგები მომავალი დროის შუალედისათვის, რომელიც ხანგრძლივობით არ აღემატება  $\frac{1}{3} T_0$ -ს.

ბანსაზღვრა 5. წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის ღონის წირებს ( $Y = \text{const}$ , ჰიპერზედაპირი) იზოკვანტა ეწოდება.

იზოკვანტის ცნება საწარმოო ფუნქციისათვის, ანალოგიურია განურჩევლობის მრუდის ცნებისა სარგებლიანობის ფუნქციისათვის.

ბანსაზღვრა 6.  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის  $E_{x_i}(Y)$  ელასტიურობა  $i$ -ური რესურსის მიხედვით ეწოდებენ  $i$ -ური რესურსის  $M_i$  ზღვრული მწარმოებლურობის შეფარდებას მის  $A_i$

საშუალო მწარმოებლურობასთან  $\left( A_i = \frac{f}{x_i}, i = \overline{1, n} \right)$ ,  $i$ -ური

რესურსის მიხედვით

$$E_{x_i}(Y) = \frac{\partial f / \partial x_i}{f / x_i} = \frac{M_i}{A_i}. \quad (5.7.10)$$

ბანსაზღვრა 7. წარმოების ელასტიურობა ეწოდება ყველა რესურსის მიხედვით ელასტიურობათა ჯამს

$$E_x(Y) = \sum_{i=1}^n E_{x_i}(Y).$$

ბანსაზღვრა 8.  $i$ -ური რესურსის  $j$ -ურით ჩანაცვლების ზღვრულ ნორმას ეწოდებენ გამოსახულებას

$$R_{ij} = - \frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad i \neq j \quad (5.7.11)$$

$Y$  გამოშვების მოცულობის მუდმივობის პირობებში.

კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის განზოგადებას წარმოადგენს CES (Constant Elasticity of Substitution; ჩანაცვლების მუდმივი ელასტიურობა) ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$Y = A \left[ uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho} \right]^{-n/\rho}, \quad (5.7.12)$$

სადაც  $\rho \geq -1, n > 0$  - ერთგვაროვნობის ხარისხია,  $A > 0, 0 < u < 1$ .

განიხილავენ, აგრეთვე წრფივ

$$Y = aK + bL + c \quad (5.7.13)$$

და ლენტიევის

$$Y = \min(aK, bL) \quad (5.7.14)$$

საწარმოო ფუნქციებს.

CES ფუნქციის ჩანაცვლების ელასტიურობა (კაპიტალით შრომის ჩანაცვლების ელასტიურობა)

$$\sigma_{LK} = \frac{d \ln \frac{K}{L}}{d \ln \frac{Y_L}{Y_K}}, \quad Y'_L \equiv \frac{\partial Y}{\partial L}, \quad Y'_K \equiv \frac{\partial Y}{\partial K},$$

გამოითვლება (5.7.12)-დან, და ლებულობს მუდმივ მნიშვნელობას.

$$\sigma_{LK} = \frac{1}{1 + \rho}. \quad (5.7.15)$$

ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ  $1/\sigma_{LK}$  - იზოკვანტების (დონის წირები) სიმრუდის ზომაა.

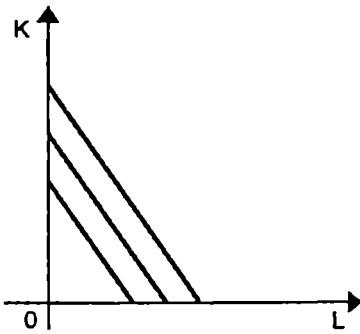
თუ  $\rho = -1$ , მაშინ მივიღებთ საწარმოო ფუნქციას წრფივი იზოკვანტებით (კერძოდ, წრფივ საწარმოო ფუნქციასაც).

როცა  $\rho \rightarrow 0$ , მაშინ ზღვრული გადასვლით (5.7.12)-ში მივიღებთ კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციას  $\sigma = 1$  - ელასტიურობით, ხოლო, როცა  $\rho \rightarrow \infty$  - მივიღებთ ლეონტიევის საწარმოო ფუნქციას.

ამრიგად, წრფივ საწარმოო ფუნქციას აქვს ჩანაცვლების უსასრულო ელასტიურობა (იზოკვანტები წრფეებია, ნულოვანი სიმრუდით), კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის ჩანაცვლების ელასტიურობა ერთის ტოლია, ხოლო ლეონტიევის ფუნქციას აქვს ჩანაცვლების ნულოვანი ელასტიურობა (მასში რესურსები გამოყენებულ უნდა იქნეს მხოლოდ მოცემულ პროპორციებში და ერთმანეთს ვერ ჩაანაცვლებენ).

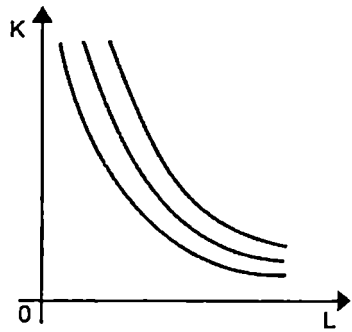
5.7.1-5.7.4 ნახაზებზე მოცემულია ამ საწარმოო ფუნქციების დონის წირები (იზოკვანტები).

ზოგიერთი მეცნიერის მიერ (აგრანბერგი, ეერშოვი, ი.არემენკო, ა.სმიშლიაევი, მ.ვეიტცმანი, ნ.ბარკალოვი) CES ფუნქცია გამოყენებულ იქნა საბჭოთა კავშირის ეკონომიკის მოდელისათვის.



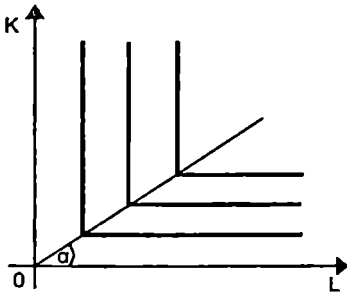
ნახ.5.7.1.

წრფივი საწარმოო ფუნქცია  
 $Y=aK+bL+c$



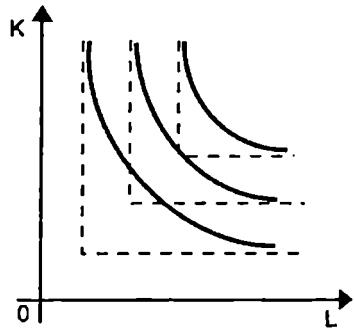
ნახ.5.7.2.

კობ-დუგლასის ფუნქცია  
 $Y=AK^\alpha L^\beta$ ,  $\alpha \in (0,1)$ ,  $\beta \in (0,1)$



ნახ.5.7.3.

ლეონტიევის ფუნქცია  
 $Y=\min(aK,bL)$ ,  $\text{tg}\alpha = \frac{b}{a}$



ნახ.5.7.4.

CES ფუნქცია

მაგალითად, 1960-1985 პერიოდის შეფასებისათვის მიღებულ იქნა ( $n = 1$ )

$$Y = 1,002(0,6412K^{-0,81} + 0,3588L^{-0,81})^{-1/0,81}, \quad (5.7.16)$$

ანუ წრფივი-ერთგვაროვანი CES ფუნქცია მატერიალურ-ტექნიკური პროგრესის გაუთვალისწინებლობით და

$$Y = 0,966(0,4074K^{-3,03} + 0,5926L^{-3,03})^{-1/3,03} e^{0,0252t}, \quad (5.7.17)$$

ანუ წრფივი-ერთგვაროვანი CES ფუნქცია მატერიალურ-ტექნიკური პროგრესის გათვალისწინებით.

(5.7.15)-ის თანახმად, (5.7.16)-ს შემთხვევაში ჩანაცვლების ელასტიურობა  $\sigma_{LK} = 0,55$  ტოლია, ხოლო (5.7.17)-ის შემთხვევაში  $\sigma_{LK} = 0,25$ .

სხვა ავტორების მიერ მიღებული შეფასებები ჩანაცვლების ელასტიურობისათვის შეადგენდა დაახლოებით 0,4, ანუ საბჭოთა კავშირის ეკონომიკისათვის ის ერთზე ნაკლები იყო, რაც მიუთითებს შრომის და კაპიტალის ურთიერთჩანაცვლების დაბალ ხარისხზე.

### სამარჯიშოები

1. ვთქვათ მოცემულია წრფივი საწარმოო ფუნქცია შემდეგი სახის

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}.$$

აჩვენეთ, რომ ამ შემთხვევაში წარმოების ელასტიურობა ერთის ტოლია.

2. მოცემულია კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad a_0 > 0, \quad a_1 \in (0, 1), \quad a_2 \in (0, 1), \quad a_1 + a_2 = 1.$$

ა) გამოთვალეთ წარმოების ელასტიურობა;

ბ) გამოთვალეთ  $K$  კაპიტალის  $L$  შრომის რესურსით ჩანაცვლების  $R_{12}$  ზღვრული ნორმა გამოშვების  $Y$  მოცულობის მუდმივობის პირობებში;

გ) გამოთვალეთ  $L$  შრომის  $K$  კაპიტალით ჩანაცვლების  $R_{21}$  ზღვრული ნორმა გამოშვების  $Y$  მოცულობის უცვლელობის პირობებში.

3. მოცემულია წრფივი ორფაქტორიანი საწარმოო ფუნქცია

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

იპოვეთ, ფაქტორების ურთიერთჩანაცვლების  $R_{12}$ ,  $R_{21}$  ზღვრული ნორმები.

4. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ორფაქტორიანი საწარმოო ფუნქციისათვის ჩანაცვლების ზღვრული ნორმები აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$R_{12} R_{21} = 1.$$



## §5.8. დინამიკური ფონასწორების მათემატიკური მოდელი

ეკონომიკურ მეცნიერებაში და პრაქტიკაში ამოსახსნელი ამოცანები დროის ფაქტორის გათვალისწინებით იყოფა სტატიკურ და დინამიკურ ამოცანებად.

სტატიკა სწავლობს ეკონომიკური ობიექტების მდგომარეობას, რომელიც შეესაბამება დროის განსაზღვრულ მომენტს, ან პერიოდს, მათი პარამეტრების დროში ცვლილებების გათვალისწინების გარეშე. დინამიკურ ამოცანებში აისახება ცვლადთა არა მარტო დამოკიდებულება დროზე, არამედ მათი ურთიერთკავშირი დროში. მაგალითად, ინვესტიციების დინამიკა განსაზღვრავს ძირითადი კაპიტალის სიდიდეების დინამიკას, რაც თავის მხრივ გამოშვების მოცულობის ცვლილების უმნიშვნელოვანესი ფაქტორია.

დრო ეკონომიკურ დინამიკაში განიხილება როგორც უწყვეტი ან დისკრეტული. უწყვეტი დრო მოხერხებულია მოდელირებისათვის, რადგანაც იძლევა დიფერენციალური აღრიცხვისა და დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის აპარატის გამოყენების საშუალებას. დისკრეტული დრო მოხერხებულია გამოყენებისათვის, რადგანაც სტატისტიკური მონაცემები ყოველთვის დისკრეტულია და შეესაბამება დროის კონკრეტულ ერთეულებს. დისკრეტული დროისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ სხვაობიანი განტოლებათა აპარატი.

აღვნიშნოთ, რომ ეკონომიკური დინამიკის ცნობილი მოდელების უმრავლესობა არსებობს როგორც უწყვეტ, ასევე დისკრეტულ ვარიანტებში. ორივე ვარიანტში მათთვის მიიღება ანალოგიური შედეგები, ზოლო თვით მოდელების სირთულის დონე დაახლოებით ერთნაირია.

ეკონომიკურ თეორიაში მნიშვნელოვანია წონასწორობის ცნება. წონასწორობა არის ობიექტის ისეთი მდგომარეობა, რომელსაც ის ინარჩუნებს გარე მოქმედებების არ არსებობის პირობებში [49].

ეკონომიკური დინამიკის ამოცანები შეიცავენ როგორც იმ პროცესების აღწერას, რომლებიც გადიან წონასწორობის მდგომარეობაზე, ასევე გარე ძალების მოქმედებით გამოწვეული ამ მდგომარეობის ტრანსფორმაციის პროცესებს.

დავუშვათ, რომ ეკონომიკური სისტემა აღიწერება ერთი  $x(t)$  მაჩვენებლით.

ვივარაუდოთ, რომ  $x(t)$  მაჩვენებლის ცვლილების სიჩქარე წონასწორობის  $x_e$  მდგომარეობიდან გადახრის პროპორციულია

$$\frac{dx(t)}{dt} = k(x(t) - x_e), \quad (5.8.1)$$

სადაც  $k$  - მუდმივი კოეფიციენტია.

საწყისი პირობის სახით ავიღოთ შემდეგი ტოლობა

$$x(t)|_{t=0} = x(0) = x_0. \quad (5.8.2)$$

კომის ამოცანის (5.8.1), (5.8.2) ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$x(t) = x_e + (x_0 - x_e) e^{kt}. \quad (5.8.3)$$

თუ  $k < 0$ , მაშინ (5.8.3)-დან მივიღებთ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e + (x_0 - x_e) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{kt} = x_e. \quad (5.8.4)$$

(5.8.4) ნიშნავს, რომ წონასწორობა მდგრადია, ე.ი.  $x(t)$  სიდიდის გადახრისა  $x_e$  სიდიდისაგან ის კვლავ მიისწრაფვის მიიღოს ეს მნიშვნელობა.

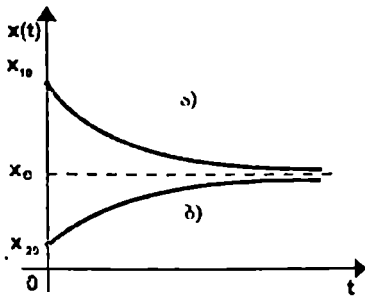
თუ  $k > 0$ , მაშინ (5.8.3) მოგვცემს ( $x_0 \neq x_e$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e + (x_0 - x_e) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{kt} = \text{sign}(x_0 - x_e) \cdot \infty. \quad (5.8.5)$$

(5.8.5) ნიშნავს იმას, რომ თუ  $k > 0$  მაშინ  $x(t)$  მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ (თუ საწყისი მდგომარეობა არ ემთხვევა წონასწორობის მდგომარეობას).

ნახაზებზე 5.8.1 ( $k < 0$ ), 5.8.2 ( $k > 0$ ) ნაჩვენებია  $x(t)$  ფუნქციის ყოფაქცევა.

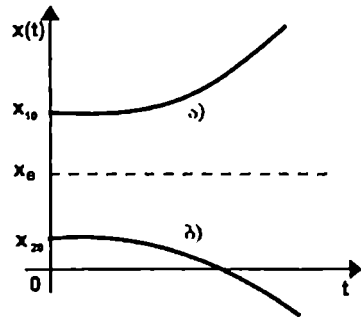
დინამიკური წონასწორობის ამოცანებში დინამიური სისტემები შეიძლება აღიწეროს აგრეთვე ისეთი გრაფიკებით, როგორც ნაჩვენებია ნახ.5.8.3, 5.8.4.



ნახ. 5.8.1 ( $k < 0$ )

ა) -  $x_{10} > x_e$

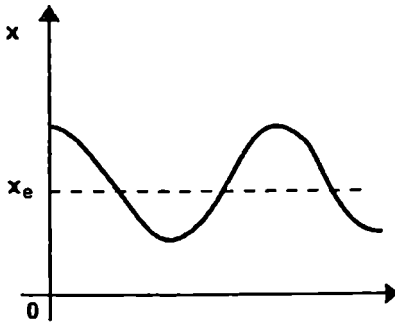
ბ) -  $x_{20} < x_e$



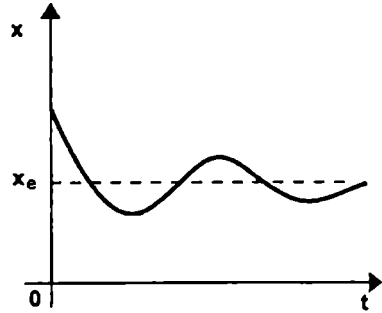
ნახ. 5.8.2. ( $k > 0$ )

ა) -  $x_{10} > x_e$

ბ) -  $x_{20} < x_e$



ნახ. 5.8.3



ნახ. 5.8.4

### დისკრეტული მოდელი

ეკონომიკური სისტემის ქცევა დისკრეტულ დროში შეიძლება აღიწეროს სხვაობიანი განტოლების მეშვეობით, რომელიც აკავშირებს  $x(t)$  სიდიდის მნიშვნელობებს  $x_t, x_{t-1}$  დროის მეზობელ მომენტებში.

დისკრეტული მოდელის შემთხვევაში სხვაობიან განტოლებას აქვს სახე

$$x_t = x_{t-1} + k(x_{t-1} - x_e), \quad (5.8.6)$$

რომლის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$x_t = x_e + (x_0 - x_e)(1 + k)^t. \quad (5.8.7)$$

მართლაც, (5.8.6)-დან მივიღებთ

$$x_1 = x_0 + k(x_0 - x_e) = x_0 + x_e - x_e + k(x_0 - x_e) = x_e + (x_0 - x_e)(k + 1),$$

$$x_2 = x_1 + k(x_1 - x_e) = x_1(1 + k) - kx_e = x_e(1 + k) + (x_0 - x_e)(k + 1)^2 - kx_e = x_e + (x_0 - x_e)(k + 1)^2,$$

ანუ ნებისმიერი  $t$ -თვის ადგილი აქვს (5.8.7).

(5.8.7)-დან გამომდინარეობს, რომ როცა  $k < 0$  სისტემა, რომელიც გადახრილია  $x_e$ -დან დიდი  $t$ -თვის უბრუნდება  $x_e$ , ხოლო, როცა  $k > 0$  - უფრო შორდება.

(5.8.7)-დან გამომდინარეობს, რომ წონასწორობა მდგრადია, როცა  $|1 + k| < 1$ , ანუ  $-2 < k < 0$  და არამდგრადია  $|1 + k| > 1$ , ანუ  $k \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$  შემთხვევისათვის.

### საკვარჯიშოები

$a$  პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ეკონომიკური სისტემისათვის  $x(t)$  მაჩვენებლით წონასწორობის  $x_e$  მდგომარეობა მდგრადია?

1.  $\frac{dx(t)}{dt} = (a-2)(x-x_e), \quad x(0) = 20, \quad x_e = 25.$

2.  $\frac{dx(t)}{dt} = (4-a^2)(x-x_e), \quad x(0) = 15, \quad x_e = 10.$

3.  $\frac{dx(t)}{dt} = (-7+6a+a^2)(x-x_e), \quad x(0) = 30, \quad x_e = 25.$

4.  $\frac{dx(t)}{dt} = (9a-a^2-8)(x-x_e), \quad x(0) = 50, \quad x_e = 55.$

5.  $\frac{dx(t)}{dt} = (-a^2-1)(x-x_e), \quad x(0) = 60, \quad x_e = 58.$

6.  $\frac{dx(t)}{dt} = (a^2-a+1)(x-x_e), \quad x(0) = 32, \quad x_e = 35.$

7.  $\frac{dx(t)}{dt} = (\sin a - 1)(x-x_e), \quad x(0) = 40, \quad x_e = 36.$

8.  $\frac{dx(t)}{dt} = (\cos a - \sqrt{2})(x-x_e), \quad x(0) = 30, \quad x_e = 25.$

9.  $\frac{dx(t)}{dt} = (\sin a + \cos a - \sqrt{2})(x-x_e), \quad x(0) = 45, \quad x_e = 50.$

10.  $\frac{dx(t)}{dt} = (\sin^{2008} a + \cos^{2008} a - 1)(x-x_e), \quad x(0) = 60, \quad x_e = 70.$

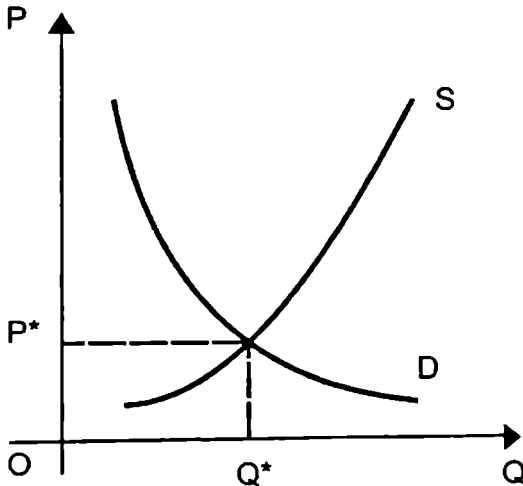
**§5.9. ეკონომიკური დინამიკის მოდელები.  
ბაზრის მუშაობის ობობასქსელვებული მოდელი**

განვიხილოთ მაკროეკონომიკური დინამიკის მოდელების ორი მაგალითი, რომლებიც წარმოადგენენ დისკრეტულ და უწყვეტ მიდგომებს (დისკრეტული და უწყვეტი მოდელები). ორივე შემთხვევაში მოდელებს გააჩნიათ აბსტრაქტული ხასიათი [49].

ამ მოდელებზე შეიძლება მოვახდინოთ დემონსტრირება დისკრეტული და უწყვეტი დინამიური მოდელების უმარტივესი აპარატისა, აგრეთვე ნათლად ვაჩვენოთ მაკროეკონომიკური დინამიკის უმნიშვნელოვანესი კატეგორიები და პრობლემები.

ბაზრის მუშაობის ობობასქსელვებული მოდელი.

ეს დისკრეტული მოდელი იძლევა საშუალებას გამოვიკვლიოთ ბაზარზე საქონლის ფასების და მოცულობის მდგრადობა, რომელიც აღიწერება მოთხოვნა-მიწოდების ტრადიციული წირებით, როცა არის დაგვიანება დროში (ლაგა) (იხ. ნახ.5.9.1)



ნახ.5.9.1. მოთხოვნა-მიწოდების წირი (D-S)

დავუშვათ, რომ შწარმოებლები (მაგალითად, ხორბლის ფერმა) განსაზღვრავენ საქონლის მიწოდების ფასს მოცემულ პერიოდში წინა პერიოდში დადგენილი ფასების მიხედვით

$$Q^S(t) = S_t(P_{t-1}). \quad (5.9.1)$$

ამრიგად, მიწოდების ფუნქციაში (S) შედის დაგვიანება დროში, დროის ერთი ერთეულის ხანგრძლივობით. მართლაც, გადაწყვეტილება წარმოების მოცულობის შესახებ მიიღება მიმდინარე ფასების გათვალისწინებით, მაგრამ წარმოების ციკლს გააჩნია გარკვეული ხანგრძლივობა და ამის შესაბამისი გადაწყვეტილების მიწოდება გამოჩნდება ბაზარზე მოცემული ციკლის დამთავრებისას.

მოცემულ პერიოდში მოთხოვნის (D) წირი ახასიათებს დამოკიდებულებას საქონლის მოთხოვნის მოცულობასა და მის საბაზრო ფასს შორის.

$$Q^D(t) = D_t(P_t). \quad (5.9.2)$$

ამრიგად, ფასების დინამიკა აღიწერება შემდეგი განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} Q_t^S = S_t(P_{t-1}), \\ Q_t^D = D_t(P_t), \\ Q_t^D = Q_t^S. \end{cases} \quad (5.9.3)$$

ან ერთი მოთხოვნა-მიწოდების ფასების დამაკავშირებელი განტოლებით

$$D_t(P_t) = S_t(P_{t-1}). \quad (5.9.4)$$

(5.9.4) განტოლებიდან შეიძლება ვიპოვოთ  $P_t$  ფასის მნიშვნელობა მოცემულ მომენტში, თუ ცნობილია მისი  $P_{t-1}$  მნიშვნელობა წინა მომენტში.

ამოხსნის სქემა შემდეგში მდგომარეობს:

$$Q_0 \rightarrow P_0 = D^{-1}(Q_0) \rightarrow Q_1 = S(P_0) \rightarrow P_1 = D^{-1}(Q_1) \rightarrow Q_2 = S(P_1) \rightarrow \dots$$

სადაც  $D^{-1}$  - მოთხოვნის ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა.

$$Q_0 = D(P_0).$$

კერძო შემთხვევისათვის, განვიხილოთ ობობასქსელებური მოდელი, რომელშიც მოთხოვნის და მიწოდების ფუნქციები წრფივია

$$D(P) = C - EP_t, S(P) = A + BP_{t-1}, S(P) = D(P). \quad (5.9.5)$$

აქ  $B > 0$ , რადგანაც მიწოდების  $S(P)$  ფუნქცია ზრდადია;  $E > 0$ , რადგანაც მოთხოვნის  $D(P)$  ფუნქცია კლებადია

$$S'(P) = B > 0, D'(P) = -E < 0.$$

ამასთან

$$C > A > 0, \text{ ანუ } D(0) > S(0) > 0,$$

რადგანაც ვთვლით, რომ ნულოვანი ფასისათვის მოთხოვნა აღემატება მიწოდებას.

განტოლება, რომელიც აღწერს ასეთი სისტემის დინამიკას, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} D(P_t) &= S(P_{t-1}), \\ C - EP_t &= A + BP_{t-1}. \end{aligned} \quad (5.9.6)$$

ვიპოვოთ წონასწორული  $P^*$  ფასი და წარმოების წონასწორული  $Q^*$  მოცულობა. ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებებს (იხ.ნახ.5.9.1) (მოთხოვნის და მიწოდების ფასები და აგრეთვე, წარმოების მოცულობები ტოლია)

$$\begin{cases} C - EP^* = A + BP^*, \\ Q^* = C - EP^*, \end{cases}$$

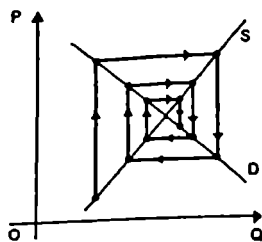
საიდანაც

$$\begin{cases} P^* = \frac{C - A}{B + E}, \\ Q^* = \frac{BC + AE}{B + E}. \end{cases} \quad (5.9.7)$$

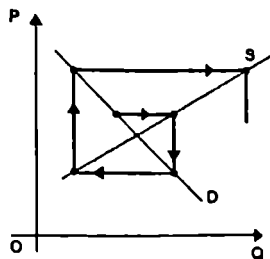
შემდეგში, აუცილებელია გამოვიკვლიოთ ფასების და წარმოების მოცულობის ყოფაქცევა იმ შემთხვევაში, როცა საწყისი წერტილი არ ემთხვევა წონასწორულს.

თავდაპირველად ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას გრაფიკულად, რის შედეგად მივიღებთ "ობობას" ტიპის მსგავს სურათს.

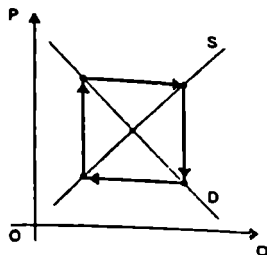
ავიღებთ რა საჭიროების მოცულობას და ფასის საწყის რაოდენობას, რომელიც განსხვავდება წონასწორული წერტილისაგან, თანმიმდევრულად აღვნიშნავთ წერტილებს მოთხოვნა-მიწოდების წირებზე მოდელში განსაზღვრული გამოანგარიშების პროცედურის თანახმად, შევაერთებთ მათ პორიზონტალური და ვერტიკალური სწორი ხაზებით.



ნახ.5.9.2



ნახ.5.9.3



ნახ.5.9.4

გრაფიკული ანალიზიდან მივიღებთ შემდეგ დასკვნებს:

ა) თუ მიწოდების S წირი უფრო დახრილია ვიდრე მოთხოვნის D წირი (ნახ.5.9.2), მაშინ წონასწორობა ასეთი საქონლის ბაზარზე მდგრადია (პროცესი მიწსრაფვის წონასწორული მდგომარეობისაკენ).

ბ) თუ მოთხოვნის D წირი უფრო დახრილია ვიდრე მიწოდების S წირი, მაშინ წონასწორობა ასეთ ბაზარზე არამდგრადია (ნახ.5.9.3).

გ) მიწოდებისა და მოთხოვნის წირების თანაბარ დახრილობის შემთხვევაში ფასები ბაზარზე განიცდის რეგულარულ რხევებს მუდმივი ამპლიტუდით (ნახ.5.9.4).

ახლა, გადავიდეთ მოდელის ფორმალურ ანალიზზე. თუ (5.9.6)-დან გამოვსახავთ  $P_t$ -ს  $P_{t-1}$ -ით მეშვეობით, მივიღებთ რეკურენტულ თანაფარდობას

$$P_t = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_{t-1}. \quad (5.9.8)$$

ამ თანაფარდობის თანმიმდევრულად გამოყენებისას, მივიღებთ

$$P_1 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_0,$$

$$P_2 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_1 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} \left( \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_0 \right),$$

ან ზოგად შემთხვევაში

$$P_t = \frac{C-A}{E} \left[ 1 - \frac{B}{E} + \left( \frac{B}{E} \right)^2 - \left( \frac{B}{E} \right)^3 + \dots + (-1)^{t-1} \left( \frac{B}{E} \right)^{t-1} \right] + (-1)^t \left( \frac{B}{E} \right)^t P_0 \quad (5.9.9)$$



კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება არის გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი

$$S = 1 - \frac{B}{E} + \left(\frac{B}{E}\right)^2 - \left(\frac{B}{E}\right)^3 + \dots + (-1)^{t-1} \left(\frac{B}{E}\right)^{t-1},$$

$$S_n = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

სადაც  $a_1 = 1, q = -\frac{B}{E}$ .

თუ  $|q| < 1$ , მაშინ  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$ .

ამრიგად, (5.9.9)–დან დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტისთვის მივიღებთ  $P_t$  ფასისათვის გამოსახულებას

$$P_t = \frac{C - A}{E} \cdot \frac{1 - (-1)^t \left(\frac{B}{E}\right)^t}{1 + \frac{B}{E}} + (-1)^t \left(\frac{B}{E}\right)^t P_0. \quad (5.9.10)$$

ა) ცხადია, როცა  $\frac{B}{E} < 1$ , მაშინ

$$\left(\frac{B}{E}\right)^t \rightarrow 0 \quad (\text{დიდი } t\text{-თვის}),$$

$$P_t \rightarrow \frac{C - A}{E + B} = P^*,$$

ანუ თუ მიწოდების წირი უფრო დახრილია ვიდრე მოთხოვნის წირი (იხ. 5.9.6), მაშინ წონასწორობა მდგრადია (ნახ.5.9.2)

ბ) თუ  $\frac{B}{E} > 1$ , ესე იგი მოთხოვნის წირი უფრო დახრილია, ვიდრე მიწოდების (იხ. 5.9.6), მაშინ

$$\left(\frac{B}{E}\right)^t \rightarrow \infty, \quad (t \rightarrow \infty)$$

და პროცესი განშლადია (არამდგრადი წონასწორობა).

გ) როცა  $\frac{B}{E} = 1$ , ესე იგი  $B = E$ , ანუ თუ მოთხოვნის და მიწოდების წირები ერთნაირად არიან დახრილი (იხ. ნახ.5.9.5), მაშინ

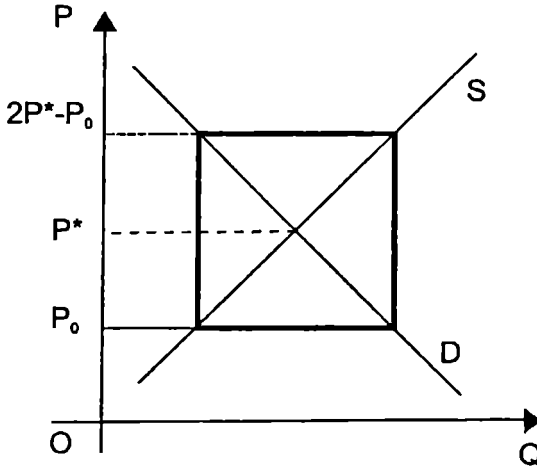
$$P_t = P^*[1 - (-1)^t] + (-1)^t P_0,$$

ანუ, თუ  $t$  - ლუწია, მაშინ

$$P_t = P_0,$$

ხოლო თუ  $t$  - კენტია, მაშინ

$$P_t = 2P^* - P_0, \quad P^* = \frac{P_1 + P_0}{2}.$$



ნახ.5.9.5. ( $P_0 < P^*$ )

ამრიგად, სისტემის მდგრადობისათვის განმსაზღვრელი მომენტი უფრო ნაკლები რეაქციაა ფასების ცვლილებებზე იმ ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია დაგვიანება დროში (მიწოდების ფუნქცია  $S(P) = A + BP_{t-1}$ ).

რეალურად, როცა  $B > E$  უსასრულო ზრდად რხევებს ადგილი არ ექნება, რადგანაც დიდი გადახრის შემთხვევაში წონასწორობის მდგომარეობიდან, წრფივი მიახლოება (წრფივი მოდელი) არა - რეალისტურია.

უფრო რეალისტურ არაწრფივ მოდელებში დამყარდება არაწრფივი დიდი რხევები, მაგრამ სასრულო ამპლიტუდისა, რომლებიც არიან წინაპირობები წარმოების აღმავლობისა და ვარდნის ეკონომიკური ციკლებისა.

## საპარჯიშოები

1. დაეუშვათ, რომ მიწოდების და მოთხოვნის ფუნქციებს აქვთ სახე

$$S_t = A + BP_{t-1}, \quad D_t = C - EP_{t-1}, \quad S_t = D_t. \quad A, B, C, E > 0, C > A.$$

როგორი იქნება წონასწორული წერტილისაკენ კრებადობის პირობა? გამოსახეთ ეს პროცესი გრაფიკულად.

2. მოცემულია ობობასქსელებური მოდელი

$$S_t = 20 + 30P_{t-1}, \quad D_t = 100 - 50P_t, \quad S_t = D_t$$

დაეუშვათ  $P_0 = 0,5$ . გამოვთვალოთ  $P_1$ -?  $P_2$ -?

3. დაეუშვათ, რომ ობობასქსელებურ მოდელში მოთხოვნის

ფუნქცია  $D_t = \frac{3}{P_t}$ , ხოლო მიწოდების ფუნქცია

$$S_t = 5P_{t-1}, \quad P_0 = 1.$$

გრაფიკულად გამოსახეთ გამოშვების მოცულობის და ფასის დინამიკა. როგორია წონასწორული ფასი და გამოშვება? არის თუ არა წონასწორობა მდგრადი?

4. მოცემულია ობობასქსელებური მოდელი. ააგეთ გრაფიკი და შეისწავლეთ მდგრადობაზე.

4.1.  $S_t = 3 + 8P_{t-1}, \quad D_t = 15 - 8P_t, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 1.$

4.2.  $S_t = 12 + 9P_{t-1}, \quad D_t = 18 - 10P_t, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 0,5.$

4.3.  $S_t = 14 + 6P_{t-1}, \quad D_t = 20 - 4P_t, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 0,7.$

4.4.  $S_t = 10 + 4P_{t-1}, \quad D_t = 40 - 11P_t, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 3.$

4.5.  $S_t = 100 + 20P_{t-1}, \quad D_t = 140 - 20P_t, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 2.$

4.6.  $S_t = 80 + 6P_{t-1}, \quad D_t = 110 - 4P_t, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 1.$

4.7.  $S_t = 40 + 12P_t, \quad D_t = 60 - 8P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 2.$

4.8.  $S_t = 30 + 6P_t, \quad D_t = 70 - 2P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 4.$

4.9.  $S_t = 25 + 5P_t, \quad D_t = 75 - 5P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 3.$

4.10.  $S_t = 35 + 4P_t, \quad D_t = 115 - 4P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 9.$

4.11.  $S_t = 10 + 3P_t, \quad D_t = 90 - 5P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 8.$

4.12.  $S_t = 40 + 9P_t, \quad D_t = 120 - 11P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 5.$

§5.10. მაკროეკონომიკური დინამიკის  
კაროდი-ლომარის მოდელი

უწყვეტი დროის მოდელის სახით განვიხილოთ მაკროეკონომიკური დინამიკის უწყვეტი მოდელი (მისი უმარტივესი ვარიანტი - კაროდი-ლომარის მოდელი) [49,50].

მოდელი აღწერს  $Y(t)$  შემოსავლის დინამიკას, რომელიც განიხილება, როგორც  $C(t)$  მოხმარებისა და  $I(t)$  ინვესტიციების ჯამი

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (5.10.1)$$

მოდელში ეკონომიკა ითვლება დახურულად, ამიტომ სუფთა ექსპორტი ნულის ტოლია, ხოლო სახელმწიფო ხარჯები არ გამოიყოფა. ეკონომიკური ზრდის მოდელის ძირითადი წინაპირობაა - ინვესტიციებისა და შემოსავლის ზრდის სინქარეს შორის ურთიერთკავშირის ფორმულა.

მოდელში ივარაუდება, რომ შემოსავლის ზრდის სინქარე ინვესტიციების პროპორციულია

$$I(t) = B \frac{dY(t)}{dt}, \quad (5.10.2)$$

სადაც  $B$  - შემოსავლის მატების კაპიტალდაბანდების კოეფიციენტია,  $\frac{1}{B}$  - მატების კაპიტალუკუება.

ამრიგად, მოდელში ფაქტიურად ჩართულია შემდეგი წინაპირობები:

ა) საინვესტიციო ლაგი (დაგვიანება დროში) ნულის ტოლია: ინვესტიციები მყისიერად გადადის კაპიტალის ნამატში, ანუ

$$\Delta K(t) = I(t),$$

სადაც  $\Delta K(t)$  - კაპიტალის დროში ნამატის უწყვეტი ფუნქციაა;

ბ) არა აქვს ადგილი კაპიტალის გადინებას;

გ) ეს გამომდინარეობს შემოსავლის მატების პროპორციულობიდან კაპიტალის მატებასთან (5.10.2)

$$dY(t) = \frac{1}{B} d(K(t))dt.$$

წრფივ საწარმოო ფუნქციას

$$Y(t) = a \cdot L(t) + b \cdot K(t) + c, \quad (a, b, c = \text{const}),$$

სადაც  $b = \frac{1}{B}$ , გააჩნია ეს თვისება იმ შემთხვევაში, როდესაც  $a = 0$ ,

ან  $L(t) = \text{const}$ ;

დ) შრომის დანახარჯები მუდმივია დროში ან გამოშვება დამოკიდებულია შრომის დანახარჯებისაგან, რადგანაც შრომა არ არის დეფიციტური რესურსი;

ე) მოდელი არ ითვალისწინებს ტექნიკურ პროგრესს.

ზემოთ ჩამოთვლილი წინაპირობები, რა თქმა უნდა, მნიშვნელოვნად აუხეშებენ რეალური მაკროეკონომიკური პროცესების დინამიკის აღწერას, ართულებენ მოცემული მოდელის გამოყენებას, მაგალითად, ერთობლივი გამოშვების ან შემოსავლის სიდიდის უშუალო გამოანგარიშებას ან პროგნოზს. მაგრამ, მოცემული მოდელი არც არის ამისთვის განსაზღვრული; ამავე დროს მოდელის შედარებითი სიმარტივე იძლევა საშუალებას უფრო სიღრმისეულად შევისწავლოთ ინვესტიციების დინამიკისა და გამოშვების მატების ურთიერთკავშირი, მივიღოთ გაკეთებული წინაპირობებისათვის განხილული პარამეტრების ტრაექტორიების ზუსტი ფორმულები.

მაკროეკონომიკური დინამიკის ყველა მოდელში საბაზო არის დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს დროში ინვესტიციების მაჩვენებლებს, მათ მიერ განსაზღვრული ძირითადი კაპიტალის მოცულობას და გამოშვების (შემოსავლის) დონეს. ამის გარდა, ამ მოდელში აუცილებელია განესაზღვროთ გამოშვების (შემოსავლის) სტრუქტურის ფორმირების პრინციპები, მისი განაწილება შემადგენელთა შორის, უპირველეს ყოვლისა - მოხმარებასა და დაგროვებას შორის. ეს პრინციპები ეფუძნება ოპტიმიზაციურ მიდგომას (მოხმარების ერთობლივი მოცულობის მაქსიმიზაცია).

განხილულ მოდელში ივარაუდება, რომ მოხმარების მოცულობის დინამიკა  $C(t)$  მოცემულია ექზოგენურად, ანუ ეს მაჩვენებელი შეიძლება იყოს დროში მუდმივი (მათ შორის, ნულის ტოლი), იზრდებოდეს მოცემული მუდმივი ტემპით ან ჰქონდეს სხვა დინამიკა.

მოდელის უმარტივესი შემთხვევაა, როცა  $C(t) = 0$ . პრაქტიკული თვალსაზრისით, ეს შემთხვევა სრულად არარეალურია, მაგრამ მასში ყველა რესურსი მიმართულია ინვესტიციებზე, რის შედეგად შეიძლება განისაზღვროს მატების ტემპი.

ამ შემთხვევაში (5.10.1), (5.10.2)-დან მივიღებთ

$$Y(t) = C(t) + I(t) = I(t) = B \frac{dY(t)}{dt}. \quad (5.10.3)$$

ამრიგად,  $Y(t)$  ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{B} Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}, \quad (5.10.4)$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}, \quad (5.10.5)$$

სადაც  $\frac{1}{B}$  - მატების უწყვეტი ტემპია, ეს მატების მაქსიმალურად შესაძლებელი (ტექნოლოგიური) ტემპია.

ახლა დავუშვათ,  $C(t) = C = \text{const.}$  მაშინ მივიღებთ არაერთგვაროვან წრფივ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$Y(t) = B \frac{dY(t)}{dt} + C, \quad (5.10.6)$$

რომლის კერძო ამონახსნია  $Y_p(t) = C$ , ხოლო (5.10.6) შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$Y(t) = A \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}.$$

ამრიგად, (5.10.6)-ის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$Y(t) = A \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t} + C$$

და საწყისი პირობის (5.10.4) გამოყენება, მოგვცემს

$$A = Y_0 - C,$$

საიდანაც

$$Y(t) = (Y_0 - C) \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t} + C. \quad (5.10.7)$$

(5.10.7)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ შემოსავლის მატების უწყვეტ ტემპს

$$y(t) = \frac{dY(t)}{dt} / Y(t) = \frac{1}{B} \frac{(Y_0 - C)e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}}{Y(t)} = \frac{1}{B} \frac{Y(t) - C}{Y(t)} = \frac{1}{B} \left(1 - \frac{C}{Y(t)}\right). \quad (5.10.8)$$

როგორც ჩანს (5.10.8)-დან საწყის მომენტში მატების ტემპი ტოლია

$$y(0) = \frac{1}{B} \left(1 - \frac{C}{Y_0}\right)$$

და იზრდება  $t > 0$ -თვის, ხოლო როცა  $t \rightarrow \infty$  მიისწრაფის ტექნოლოგიური ტემპისკენ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{B}, \quad (5.10.9)$$

ბოლო თანაფარდობა (5.10.9) უჩვენებს, რომ შემოსავალი იზრდება, ხოლო მოხმარების მუდმივი მოცულობა შეადგენს მის უფრო ნაკლებ ნაწილს.

სიდიდე  $\alpha(t) = 1 - \frac{C}{Y(t)}$  არის დაგროვების ნორმა დროის  $t$  მომენტში და შემოსავლის მატების ტემპი პროპორციულია როგორც ამ სიდიდისა, ასევე მატების კაპიტალუკუების  $\frac{1}{B}$  მაჩვენებლისა (იხ. 5.10.8)

$$y(t) = \frac{1}{B} \alpha(t). \quad (5.10.10)$$

ამრიგად, სხვა თანაბარ შემთხვევაში, დაგროვების ნორმის მატება პროპორციულად ზრდის შემოსავლის მატების ტემპს.

საბოლოოდ, განვიხილოთ მოდელის ვარიანტი, რომელშიც მოხმარების  $C(t)$  მაჩვენებელი იზრდება მუდმივი  $r$  ტემპით

$$C(t) = C(0)e^{rt} = C_0 e^{rt}, \quad (5.10.11)$$

მაშინ (5.10.1), (5.10.2)-დან მივიღებთ

$$Y(t) = B \frac{dY}{dt} + C_0 e^{rt}. \quad (5.10.12)$$

ამრიგად, მივიღებთ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} - \frac{1}{B} Y(t) = -\frac{C_0}{B} e^{rt}, \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}, \quad (5.10.13)$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება ( $r \neq \frac{1}{B}$ ) შემდეგი სახით

$$Y(t) = \left( Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br} \right) e^{\frac{t}{B}} + \frac{C_0}{1 - Br} e^{rt}. \quad (5.10.14)$$

ზოგადი მოსაზრებიდან ნათელია, რომ მოხმარების მატების ტემპი  $r$  არ უნდა აღემატებოდეს მატების ზოგადი ტემპის მაქსიმალურ შესაძლო მნიშვნელობას, რადგან სხვა შემთხვევაში მოხმარება დაიკავებს უფრო და უფრო მეტ წილს, ხოლო ბოლოს და ბოლოს - შემოსავლის უმრავლეს ნაწილს, რაც დაიყვანს ნულზე ჯერ ინვესტიციას, ხოლო მერე შემოსავალს.

თუ  $r > \frac{1}{B}$ , მაშინ  $\frac{1}{1 - Br} < 0$ , ხოლო  $e^{rt} > e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}$ .

შესაბამისად, გარკვეული  $t_*$  დროის შემდეგ

$$t_* = \frac{B}{rB - 1} \ln \left[ 1 + \frac{Y_0}{C_0} (Br - 1) \right]$$

შემოსავალი გახდება უარყოფითი, რაც შეუძლებელია.

$$Y(t) < 0, \text{ როცა } t > t_*, Y(t_*) = 0.$$

შემოსავლების მატების განხილულ მოდელში, როცა  $r < \frac{1}{B}$ ,

ბევრია დამოკიდებული  $r$  და  $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B}$  ( $\alpha_0 = 1 - \frac{C_0}{Y_0}$  - დაგროვების

ნორმა საწყის მომენტში) თანაფარდობაზე.

თუ  $r = \rho_0$ , მაშინ შემოსავლის მატების ტემპი უდრის მოხმარების მატების ტემპს და (5.10.14)-დან მივიღებთ

$$Y(t) = Y_0 e^{\rho_0 t} = Y_0 e^{\frac{1}{B} \left(1 - \frac{C_0}{Y_0}\right) t}.$$

ამ შემთხვევაში, დაგროვების ნორმა მუდმივია დროში,

$$\alpha(t) = \alpha_0 = 1 - \frac{C_0}{Y_0},$$

ხოლო შემოსავლის მატების ტემპი პროპორციულია დაგროვების ნორმისა და უკუპროპორციულია მატების კაპიტალტევადობისა.



ეკონომიკური ზრდადობის მოდელის ამ მოდიფიკაციას, სადაც დაგროვების ნორმა მუდმივია, პაროდი-დომარის მოდელს უწოდებენ.

კარლ მარქსის ეკონომისტებისათვის ცნობილ გაფართოებული თვითწარმოების მატების მოდელში მიიღება ანალოგიური შედეგი.

მარქსის სქემებში შემოსავლის მატების ტემპი ტოლია

$$\frac{n_1 z}{1 + h_1},$$

სადაც  $n_1$  - დაგროვების ნორმაა პირველ ქვეგანყოფილებაში,  $z = \frac{M}{V}$  -

მომატებული ღირებულების ნორმა,  $h_1 = \frac{C_1}{V_1}$  - პირველ

ქვეგანყოფილებაში კაპიტალის ორგანული აგებულება; ( $C$  - მუდმივი კაპიტალია,  $V$  - ცვლადი კაპიტალია,  $M$  - მომატებული ღირებულება).

მატების განხილული მოდელის ტერმინებში მივიღებთ

$$B = \frac{\Delta(C+V)}{\Delta(V+M)} = \frac{\Delta(h_1 V + V)}{\Delta(V+zV)} = \frac{\Delta V(h_1+1)}{\Delta V(1+z)} = \frac{1+h_1}{1+z},$$

$$\alpha_0 = \frac{\Delta V + \Delta C}{V+M} = \frac{\Delta V + \Delta C}{M\left(1+\frac{1}{z}\right)} = n_1 \frac{z}{z+1},$$

საიდანაც

$$\frac{\alpha_0}{B} = \frac{n_1 z}{z+1} \cdot \frac{z+1}{1+h_1} = \frac{n_1 z}{1+h_1},$$

რაც უჩვენებს შედეგების დამთხვევას მუდმივი მნიშვნელობის სტრუქტურული პარამეტრების მატების ორივე მოდელში.

თუ მატების განხილულ მოდელში სრულდება ორმაგი უტოლობა

$$\frac{1}{B} > r > \rho_0,$$

მაშინ მოხმარების მატების ტემპი ძალიან მაღალია ეკონომიკისთვის. ამ შემთხვევაში კოეფიციენტი

$$Y_0 - \frac{C_0}{1-Br} = -\frac{C_0(r-\rho_0)}{B\left(\frac{1}{B}-\rho_0\right)\left(\frac{1}{B}-r\right)} < 0$$

უარყოფითა, რადგანაც  $\frac{1}{B} > r$ . პირველი შესაკრები (5.10.14)-ში დროის გარკვეული მომენტის შემდეგ მოდულით აღემატება მეორეს, ანუ  $Y(t)$  გახდება უარყოფითი. ამიტომ შემოსავლის მატების ტემპი ვარდება და ზოგიერთი მომენტიდან ხდება უარყოფითი. ამის შემდეგ თვით შემოსავალი  $Y(t)$  გახდება ნულის ტოლი და მოდელი კარგავს ეკონომიკურ აზრს.

ეს შემთხვევა ანალოგიურია  $r \geq \frac{1}{B}$  შემთხვევისა, მაგრამ აქ საქმე უკვე იმაში არ არის, რომ მოხმარების მატების ტემპი პრინციპში მიუღწევადია ხანგრძლივი პერიოდისათვის. მოცემულ შემთხვევაში, ძალიან მცირეა მოხმარების საწყისი  $\alpha_0$  ნორმა.

თუ  $r < \rho_0$ , მაშინ მოხმარების ნორმა და მასთან ერთად შემოსავლის მატების ტემპი იზრდება, ამასთან, უკანასკნელი ზღვარში მიისწრაფვის  $\frac{1}{B}$ -კენ ( $t \rightarrow \infty$ ).

$$y(t) = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{1}{B} + \frac{r\left(\frac{1}{B} - \rho_0\right)}{\rho_0 - r} e^{\left(r - \frac{1}{B}\right)t}}{1 + \frac{\left(\frac{1}{B} - \rho_0\right) e^{\left(r - \frac{1}{B}\right)t}}{\rho_0 - r}} \rightarrow \frac{1}{B},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{B}.$$

მაგრამ, ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს "დაგროვებას დაგროვებისათვის", რადგანაც მოხმარება იზრდება მოცემული  $r$  ტემპით, ხოლო შემოსავლის მატების ტემპის ზრდადობა განპირობებულია ინვესტიციების უფრო ჩქარი ზრდადობით.

მოხმარების  $\alpha_0$  ნორმა აღემატება  $B r$ -ს, როცა  $r < \rho_0$ , რადგანაც

$$r < \rho_0 = \frac{\alpha_0}{B} \Rightarrow r B < \alpha_0$$

და მოხმარების მოცულობის მაქსიმიზაციიდან გამომდინარე, ეს ნორმა ძალიან მაღალია.

მისი უფრო მაღალი დონე ითხოვს საწყისი ინვესტიციების  $I(0) = I_0$  გაზრდას საწყისი მოხმარების  $C_0$  შემცირების ხარჯზე, რაც მოხმარების მატების ფიქსირებული  $r$  ტემპისათვის განაპირობებს მის უფრო დაბალ დონეს მთელ ტრაექტორიაზე.

ამავე დროს მოხმარების მატების საჭირო ტემპი  $r < \frac{1}{B}$  შეიძლება

შეინარჩუნოთ, როცა  $\alpha_0 = Br$  ( $\rho_0 = r$ ).

ამრიგად, თუ საჭიროა მოხმარების მატების მუდმივი  $r$  ტემპის შენარჩუნება, რომელიც არ აღემატება ტექნოლოგიურ ტემპს, მაშინ ნებისმიერი შუალედისათვის მოხმარების მოცულობის მაქსიმიზაციისათვის აუცილებელია დაგროვების საწყისი  $\alpha_0 = Br$  ნორმის დაყენება.

უფრო რთულია საკითხი,  $r$  ტემპის რომელი დონე უფრო მისაღებია. მისი დიდი სიდიდე უზრუნველყოფს მოხმარების დიდ მოცულობას ხანგრძლივი პერიოდისათვის, საწყის ეტაპზე მოხმარების შემცირების ხარჯზე. ამრიგად,  $r$  მნიშვნელობის შერჩევისათვის (თუ ის ივარაუდება მუდმივად) საჭიროა ინფორმაცია იმ პირის განწყობაზე, რომელიც ღებულობს გადაწყვეტილებას.

### საკარგიშრობი

განსაზღვრეთ  $Y(t)$  შემოსავალი და შემოსავლის ზრდის ტემპი

$$y(t) = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$$

$$1. \frac{dY(t)}{dt} - 0,5Y(t) = -2e^{0,4t},$$

$$Y(0) = Y_0 = 20.$$

$$2. \frac{dY(t)}{dt} - 0,6Y(t) = -e^{0,5t},$$

$$Y(0) = Y_0 = 10.$$

$$3. \frac{dY(t)}{dt} - 0,7Y(t) = -7e^{0,6t},$$

$$Y(0) = Y_0 = 70.$$

$$4. \frac{dY(t)}{dt} - 0,4Y(t) = -2e^{0,3t},$$

$$Y(0) = Y_0 = 20.$$

5.  $\frac{dY(t)}{dt} - 0,8Y(t) = -8e^{0,7t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 80.$
6.  $\frac{dY(t)}{dt} - 0,5Y(t) = -2e^{0,4t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 25.$
7.  $\frac{dY(t)}{dt} - 0,5Y(t) = -2e^{0,4t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 70.$
8.  $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{2}{3}Y(t) = -8e^{0,6t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 110.$
9.  $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{2}{5}Y(t) = -6e^{0,3t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 50.$
10.  $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{3}{7}Y(t) = -6e^{0,4t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 200.$
11.  $\frac{dY(t)}{dt} - 0,9Y(t) = -9e^{0,7t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 50.$
12.  $\frac{dY(t)}{dt} - 0,8Y(t) = -16e^{0,6t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 90.$
13.  $\frac{dY(t)}{dt} - 0,6Y(t) = -12e^{0,4t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 70.$
14.  $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{4}{5}Y(t) = -28e^{0,65t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 190.$
15.  $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{7}{8}Y(t) = -14e^{0,7t},$   
 $Y(0) = Y_0 = 85.$

§5.11. მაკროეკონომიკური დინამიკის სოლოუს  
არაწრფივი მოდელი

ეკონომიკური ზრდის სხვა მოდელი წარმოდგენილია ნობელის პრემიის ლაურეატის რ.სოლოუს მიერ.

სხვა, ადრე განხილულ ზრდის მოდელებთან შედარებით მძიმე სოლოუს მოდელი უფრო ზუსტად აღწერს მაკროეკონომიკური პროცესების ზოგიერთ თავისებურებებს [49]:

1<sup>0</sup> ამ მოდელში საწარმოო ფუნქცია არაწრფივია და ხასიათდება ზღვრული წარმოებადობის კლებადობის თვისებით;

2<sup>0</sup> მოდელი ითვალისწინებს ძირითადი კაპიტალის გადინებას;

3<sup>0</sup> სოლოუს მოდელი შეიცავს შრომითი რესურსებისა და ტექნიკური პროგრესის დინამიკის აღწერას და მათ გაეყენას ეკონომიკურ ზრდაზე;

4<sup>0</sup> მოდელში ისმება და იხსნება მოხმარების დონის მაქსიმიზაციის ამოცანა მდგრადი ტრაექტორიების ზოგიერთ სიმრავლეზე.

ბუნებრივია, რომ ყველაფერი ეს ართულებს მოდელის სტრუქტურას და მისი ძირითადი მაჩვენებლების ტრაექტორიების ცვლილებებისათვის ზუსტი ფორმულების მიღება საგრძნობლად რთული ამოცანა ხდება. ამის გამო ზოგიერთი სხვა ასპექტი სოლოუს საბაზო მოდელში გამარტივებულია: მაგალითად, კაპიტალის გადინებისა და შენახვის ნორმები მუდმივია; არ არსებობს საინვესტიციო ლაგები; საწარმოო ფუნქციას გააჩნია მუდმივი უკუგება მასშტაბისაგან. ამის გარდა, მოდელის ანალიზის საწყის დონეზე ვეძებთ არა ყველა მისი მაჩვენებლის ცვლილების ტრაექტორიებს (როგორც პაროდი-დომარის მოდელში) არამედ მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობის მახასიათებლებს, რომლისკენ სისტემა გადის გრძელვადიან პერიოდში.

სოლოუს მოდელის წინამძღვრები და აღნიშვნები:

ა) საწარმოო ფუნქციას აქვს სახე:

$$Y = F(K, L), \quad (5.11.1)$$

სადაც  $Y$  - პროდუქციის გამოშვებაა, ან შემოსავალი,  $K$  - კაპიტალი, ხოლო  $L$  - შრომა.

უკუგება მასშტაბისაგან მუდმივია, ანუ

$$F(zK, zL) = zF(K, L), \quad (5.11.2)$$

ე.ი.  $F(K, L)$  - პირველი ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა.

ფაქტორების ზღვრული წარმობადობა დადებითია, მაგრამ კლებულობს, ე.ი.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0. \quad (5.11.3)$$

ბ) კაპიტალის გადინების  $W$  სიდიდე  $K$  კაპიტალის პროპორციულია

$$W = \delta K, \quad (5.11.4)$$

სადაც  $\delta > 0$  - გადინების ნორმა.

გ) შენახვის (ინვესტიციების)  $\alpha$  ნორმა მუდმივია, ინვესტიციები განისაზღვრება ფორმულით

$$I = \alpha Y, \quad (5.11.5)$$

დ)  $Y$  შემოსავალი ნაწილდება მოხმარებაზე და ინვესტიციებზე

$$Y = C + I, \quad (5.11.6)$$

ე) წარმობაში დაკავებულთა  $L$  რაოდენობა იზრდება მუდმივი  $n$  ტემპით

$$L = L_0 e^{nt}, \quad (5.11.7)$$

სადაც  $L_0$  - საწყის მომენტში წარმობაში დაკავებულთა რაოდენობაა.

ვ) შრომაშემნახველ ტექნიკურ პროგრესს აქვს  $g$  ტემპი, ე.ი. მუდმივი ეფექტურობის შრომის ერთეულების რიცხვი ერთ მომუშავეზე მიმართებაში იზრდება  $g$  ტემპით.

გაკეთებული წინამძღვრების გათვალისწინებით საწარმოო ფუნქცია

შეიძლება განვიხილოთ როგორც შრომის წარმობადობის  $y = \frac{Y}{L}$

დამოკიდებულება მის კაპიტალშეიარაღებაზე (აღჭურვილობაზე)

$k = \frac{K}{L}$ , ანუ

$$y = f(k). \quad (5.11.8)$$

აქ  $L$  - შრომის მუდმივი ეფექტურობის ერთეულთა რიცხვია (შრომაშემნახველი ტექნიკური პროგრესის არარსებობის პირობებში, შრომაში დაკავებულთა რაოდენობაა, ან მისი არსებობის პირობებში, ერთნაირი ეფექტურობის პირობითი თანამშრომელთა რაოდენობაა).

ეს ყველაფერი გამოძღინარეობს (5.11.1), (5.11.2)-დან

$$Y = F(K, L) = F\left(L \cdot \frac{K}{L}, L \cdot \frac{L}{L}\right) = LF\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k),$$

$$F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k), \quad Y = Lf(k) \Rightarrow \frac{Y}{L} = f(k) \Rightarrow y = f(k).$$

ინვესტიციებს მიეყვართ კაპიტალშეიარაღების ზრდისაკენ, ხოლო კაპიტალის გადინებას და მომუშავეთა რაოდენობისა და შრომის მუდმივი ეფექტურობის ერთეულთა რიცხვთა ზრდას – მისი შემცირებისაკენ.

ინვესტიციების შედეგად  $k$  კაპიტალშეიარაღების ნამატს აქვს სახე:

$$i = \frac{I}{L}.$$

სხვა დანარჩენი ფაქტორების გამო კაპიტალაღჭურვილობის ტემპის შემცირება უდრის

$$\delta + n + g$$

(ზუსტად უდრის, თუ  $Y, K, L$  - დროის უწყვეტი ფუნქციებია და მიახლოებით უდრის დისკრეტულ შემთხვევაში მცირე  $\delta, n, g$ -თვის).

ამ ფაქტორების გამო კაპიტალშეიარაღების შემცირების სიდიდე ტოლია:

$$(\delta + n + g)k.$$

$k$  სიდიდე იმყოფება მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობაში, თუ მისი ნამატი ინვესტიციების გამო უდრის მის შემცირებას სხვა ფაქტორების გამო.

რადგანაც  $Y = C + I$ , თუ გავყოფთ ამ ტოლობას ( $L > 0$ ), მივიღებთ

$$y = c + i, \quad (5.11.9)$$

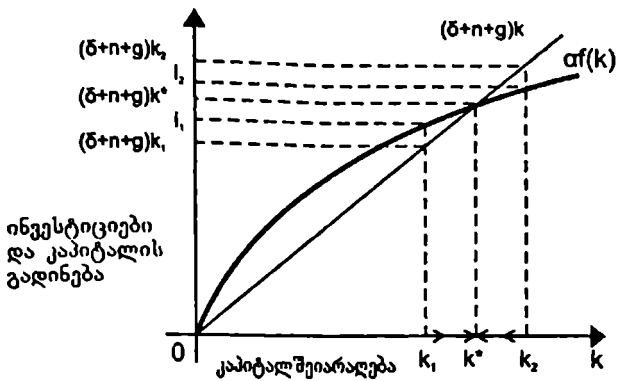
სადაც  $y$  - შემოსავალია,  $c$  - მოხმარება,  $i$  - ინვესტიციებია მუდმივი ეფექტურობის შრომის ერთეულზე. შესაბამისად,

$$i = \alpha f(k). \quad (5.11.10)$$

$k$  მაჩვენებლის სტაბილურობის პირობა, ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$(\delta + n + g)k^* = \alpha f(k^*), \quad (5.11.11)$$

$k^*$  - კაპიტალშეიარაღების მდგრადი ღონეა.



ნახ.5.11.1. კაპიტალშეიარაღება

ნახაზი 5.11.1-ზე ნაჩვენებია წონასწორობის მდგარლობა  $k = k^*$ -თვის. ეს წონასწორობის წერტილია  $k$  მაჩვენებლისათვის, რადგანაც ამ წერტილში კაპიტალშეიარაღების კუთრი ნამატის სიდიდე უდრის მისი კუთრი შემცირების სიდიდეს, და  $k$  მაჩვენებელი რჩება უცვლელად.

წონასწორობა მდგარია, რადგანაც როცა  $k_1 < k^*$  კუთრი ინვესტიციები აღემატება კაპიტალშეიარაღების შემცირებას და მისი სიდიდე იზრდება.  $k_2 > k^*$  შემთხვევისათვის, პირიქით, კუთრი ინვესტიციები ნაკლებია, ვიდრე კაპიტალშეიარაღების შემცირება და მისი სიდიდე კლებულობს, სანამ არ მიაღწევს  $k^*$ .

ნახ.5.11.1-დან შეიძლება დავასკვნათ, რომ შენახვის  $\alpha$  ნორმის გაზრდის შემთხვევაში, ინვესტიციების ფუნქციის ( $\alpha f(k)$ ) გრაფიკი მალლა წავა და გადაკვეთს  $(\delta + n + g)k$  წრფეს უფრო მარჯვნივ. ამრიგად, შენახვის ნორმის ზრდა იწვევს  $k^*$  კაპიტალშეიარაღების მდგარდი დონის მატებას, შესაბამისად შემოსავლის მდგარდი დონის ზრდას შრომის ერთეულზე

$$y^* = f(k^*).$$

თუ შრომით დაკავებულთა რიცხვი არ იზრდება (ან ნელა იზრდება), ე.ი.  $n = 0$ , მაშინ  $(\delta + n + g)k$  წრფეს აქვს ნაკლები დახრილობა და  $k^*$  გადაიწვეს მარჯვნივ. ანალოგიურს აქვს ადგილი უფრო ნაკლები (ან ნულოვანი) შრომაშემნახველი ტექნიკური პროგრესის  $g$  ტემპის შემთხვევაში.



მდგრად მდგომარეობაში  $k, y, c, i$  მარკენებლების მატების ტემპი ნულის ტოლია, რადგანაც ეს კუთრი მარკენებლებია მუდმივი ეფექტურობის შრომის ერთეულზე გაანგარიშებული, ხოლო ერთი მშრომელის შრომის ეფექტურობა იზრდება  $g$  ტემპით, ხოლო კაპიტალის, შემოსავლის, მოხმარების და ინვესტიციების მარკენებლები ერთ შრომით დაკავებულზე გაანგარიშებული, იზრდება  $g$  ტემპით. თუ დაკავებულთა რაოდენობა იზრდება  $n$  ტემპით, მაშინ კაპიტალის შემოსავლის, მოხმარების და ინვესტიციების მოცულობა მდგრად მდგომარეობაში იზრდება  $(n + g)$  ტემპით.

შესაბამისად, სოლოუს მოდელი გვიჩვენებს, რომ ერთ მომუშავეზე შემოსავლის ხანგრძლივი მდგრადი მატების ერთადერთი წყაროა ტექნიკური პროგრესი.

როგორც უკვე ვაჩვენეთ, შენახვის  $\alpha$  ნორმის ყოველ დონეს შეესაბამება გარკვეული მდგრადი მდგომარეობა და მდგრადი მოხმარების თავისი დონე გამოთვლილი მუდმივი ეფექტურობის  $c^*$  შრომის ერთეულზე.

შეიძლება დაისვას მდგრადი მდგომარეობის განსაზღვრის ამოცანა, სადაც  $c^*$  მაქსიმალურია ყველა ასეთ მდგომარეობებიდან. რადგანაც ნებისმიერ მდგრად მდგომარეობაში სრულდება ტოლობა

$$i^* = (\delta + n + g)k^*$$

$$c^* = y^* - i^* = f(k^*) - (\delta + n + g)k^*.$$

მივიღებთ

$$F(k^*) = f(k^*) - (\delta + n + g)k^* \rightarrow \min.$$

$F(k^*)$  დიფერენცირებადი ფუნქციის მაქსიმუმის აუცილებელი პირობაა

$$F'(k^*) = 0.$$

$$F'(k^*) = f'(k^*) - (\delta + n + g) = 0,$$

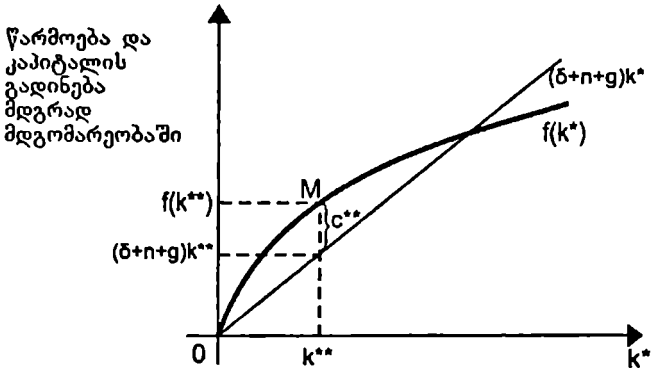
$$f'(k^*) = \delta + n + g. \quad (5.11.12)$$

მოხმარების კუთრი მოცულობის მაქსიმიზაციისათვის კაპიტალის ოპტიმალური მოცულობის არჩევის წესს ოქროს წესს უწოდებენ. მის შესაბამის კაპიტალშეიარაღების  $k^{**}$  სიდიდეს, ოქროს წესით კაპიტალ შეიარაღებას უწოდებენ, ხოლო შენახვის  $\alpha^*$  ნორმას - შენახვის ნორმას ოქროს წესით.  $\alpha^*$  შეიძლება ვიპოვოთ

$$(\delta + n + g) k^{**} = \alpha^* f(k^{**})$$

განტოლებიდან, რომელიც მდგრადი მდგომარეობის აუცილებელი პირობაა. ოქროს წესით მოხმარების კუთრი სიდიდე  $c^{**}$  მიიღება როგორც შემოსავლის და ინვესტიციების სხვაობა

$$c^{**} = f(k^{**}) - (\delta + n + g)k^{**}.$$



ნახ.5.11.2. მდგრადი კაპიტალშეიარაღება

$M(k^{**}, f(k^{**}))$  წერტილში საწარმოო ფუნქციის მზები  $(\delta + n + g)k$  წრფის პარალელურია (5.11.12)-ის ძალით.

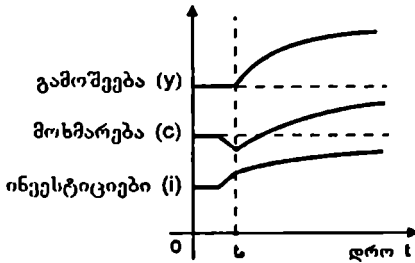
თუ შრომით დაკავებულთა მატების ტემპი უფრო დაბალია, ან შრომაშემნახველი ტექნიკური პროგრესის ტემპი დაბალია, მაშინ  $(\delta + n + g)k$  წრფე უფრო დახრილია აბსცისთა ღერძისკენ და  $k^{**}$  წერტილი მარჯვნივ გადაიწევეს და მოხმარების კუთრი სიდიდე  $c^{**}$  გაიზრდება.

თუ კაპიტალშეიარაღების საწყისი  $k^*$  სიდიდე ნაკლებია  $k^{**}$ -ზე, მაშინ აზრი აქვს შენახვის ნორმის გაზრდას იმ სიდიდეებზე, რომელიც შეესაბამება ოქროს წესს და თანდათანობით ეკონომიკა გადის კუთრი მოხმარების  $c^{**}$  მაქსიმალურ ღონეზე.

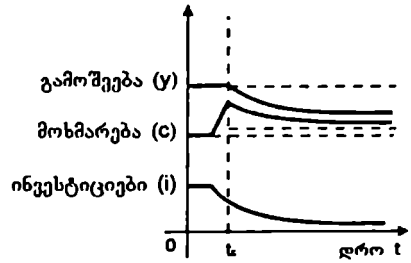
აღვნიშნოთ, რომ თავდაპირველად მოხმარების კუთრი ღონე დაიკლებს, ხოლო მეორე თანდათანობით დაიწყებს ზრდას, ინვესტიციებისა და გამოშვების კუთრი მატებასთან ერთად. თუ კაპიტალშეიარაღების საწყისი  $k^*$  სიდიდე  $k^{**}$ -ზე მეტია, მაშინ

შენახვის ნორმა უნდა შევამციროთ ოქროს წესის შესაბამის დონემდე. მაშინ ეკონომიკა თანდათანობით გავა  $c^{**}$  მოხმარების კუთრ დონეზე. ამ შემთხვევაში, მოხმარების კუთრი დონე თავდაპირველად იზრდება, აღმატება  $c^{**}$ , ხოლო მერე თანდათანობით კლებულობს  $c^{**}$ -მდე, კუთრი ინვესტიციებისა და გამოშვების დაკლებასთან ერთად.

$y, c, i$  მაჩვენებლების დინამიკა ორივე შემთხვევისათვის მოცემულია ნახ.5.11.3, 5.11.4.



ნახ.5.11.3. შენახვის ნორმის ზრდადობა



ნახ.5.11.4. შენახვის ნორმის კლებადობა

## §5.12. წარმოების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელიც აკავშირებს ერთმანეთთან წარმოების მოცულობას, რეალიზებული პროდუქციის მოცულობას, წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობასა და მათი ცვლილების სიჩქარეებს [5].

დავუშვათ, რომ  $x(t)$  - წარმოების მოცულობაა დროის  $t$  მომენტში,  $y(t)$  - რეალიზებული პროდუქციის მოცულობაა,  $a$  - რეალიზებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის ფასია,  $b$  - წარმოებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის თვითღირებულებაა.

მაშინ, წარმოების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, პროდუქციის რეალიზაციიდან ამონაგებსა და წარმოების დანახარჯებს შორის სხვაობისა, ანუ ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ay(t) - bx(t), \quad (5.12.1)$$

სადაც  $a, b$  დადებითი მუდმივებია.

$z(t)$  - აღნიშნოთ წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობა დროის  $t$  მომენტში,  $c$  - ბაზრის მოთხოვნის კოეფიციენტი წარმოების  $x(t)$  მოცულობაზე,  $d$  - ბაზრის გაჯერების კოეფიციენტი,  $p$  - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი.

ბუნებრივია, რომ რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, წარმოებული პროდუქციის ბაზრით უზრუნველყოფის მოცულობისა, გაჯერების მოცულობისა და წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობათა სხვაობისა, რაც განტოლების სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\frac{dy(t)}{dt} = cx(t) - dy(t) - px(t)z(t), \quad (5.12.2)$$

სადაც  $c, d, p$  - დადებითი მუდმივებია.

თუ  $q$ -თი აღვნიშნავთ რესურსების ხარჯვის სიჩქარის კოეფიციენტს, ხოლო  $l$ -ით - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტს, მაშინ

$$\frac{dz(t)}{dt} = -qz(t) + lx(t)y(t), \quad (5.12.3)$$

სადაც  $q, l$  - დადებითი მუდმივებია, ანუ წარმოების რესურსების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, რესურსებით

უზრუნველყოფის მოცულობასა და დაზარალებული რესურსების მოცულობათა შორის სხვაობისა.

ამრიგად, საწარმოს ფუნქციონირების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი აღიწერება შემდეგი არაწრფივი განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ay(t) - bx(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = cx(t) - dy(t) - px(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} = -qz(t) + lx(t)y(t). \end{cases} \quad (5.12.4)$$

აღვილად შევნიშნავთ, რომ (5.12.4) განტოლებათა სისტემა ემთხვევა ლორენცის მათემატიკურ მოდელს, როცა

$$a = b = 10; c = 28; d = p = l = 1; q = 8/3. \quad (5.12.5)$$

ბუნებრივია, რომ (5.12.4) სისტემას დაემატება კოშის საწყისი პირობები

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0. \quad (5.12.6)$$

(5.12.5)-ს შემთხვევაში, ფაზურ სიბრტყეზე მივიღებთ ლორენცის ანტრაქტორს, რომელიც ფრაქტალურ სიმრავლეს წარმოადგენს. ლორენცის ანტრაქტორი შეესაბამება დეტერმინირებულ სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის მოვლენას [18]. ამ შემთხვევაში, წარმოებისა და ამონაგების მოცულობები აღარაა მართვადი და სისტემა მიდის ნგრევისკენ. ამიტომ, ცდილობენ თავი აარიდონ სისტემის ქაოსური მუშაობის რეჟიმებს, პარამეტრების შესაბამისი დინამიკის საშუალებით.

თუ განვიხილავთ, ლორენცის არაწრფივ განტოლებათა სისტემას (5.12.4)-ს, (5.12.5)-ის შემთხვევაში, ერთეულოვანი საწყისი პირობებით ( $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ ), მაშინ მივიღებთ ლორენცის უცნაური ანტრაქტორის სურათს ფაზურ სიბრტყეზე, რომელიც შეესაბამება დეტერმინირებული სისტემის ქაოსურ რეჟიმში გადასვლას, მაგრამ რომელიც იცვლის "კეპლას ფრთების" მოხაზულობას  $c$  - პარამეტრის ცვლილებისას, რაც შეესაბამება ბაზრის მოთხოვნის ცვლილებას წარმოებული პროდუქტის მოცულობაზე.

„საიდუმლოებათა შეგრობება – ყველაზე მშვენიერია ჩვენთვის  
მიღწევადი განცდებიდან. სწორედ ეს შეგრობება ღვას ჭეშმარიტი  
ხელოვნებისა და ნამდვილი მეცნიერების აკვანთან“

ალბერტ აინშტაინი

## თ ა ვ ი VI

### მათემატიკური ფიზიკის მოდელეზი

#### §6.1. ზღვის ცენოზის მოდელი

ზოგადად, ცოცხალი ორგანიზმების ერთობლიობას ბიოცენოზს უწოდებენ (იხ. თავი I-ის შესავალი ნაწილი), შესაბამისად, ზღვის ცენოზი არის ცოცხალ ორგანიზმთა ერთობლიობა, რომლითაც დასახლებულია წყლის მეტნაკლებად ერთგვაროვანი უბანი [7].

ზღვის ცენოზის სხვადასხვა მოდელი შესწავლილი იქნა ა.ლიაპუნოვის მიერ [34].

ვივარაუდოთ, რომ ოკეანე უსასრულო სიღრმისაა და უსასრულოდ ვრცელდება ყველა პორიზონტალური მიმართულებით.

ჩვენ ვითვალისწინებთ მზის სხივს, რომელიც ზემოდან ვერტიკალურად ეცემა, ნახშირმჟავას და ცოცხალ არსებებს, რომლებიც ბინადრობენ ოკეანეში და ფოტოსინთეზის წყალობით გააჩნიათ გამრავლების უნარი.

როგორც ცნობილია, მზის სხივი შთაინთქმება წყლის მიერ. ამიტომ, სიღრმის მომატებით, მცირდება მზის სხივის ინტენსივობა, ანუ მცირდება ფოტოსინთეზის პროცესის ინტენსივობა, რის გამოც, ცოცხალი ორგანიზმების სიმკვრივე მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია სიღრმეზე, რომელზედაც ისინი იმყოფებიან.

დავუშვათ,  $Ox$  ღერძი მიმართულია ოკეანეს ზედაპირიდან სიღრმისკენ, ანუ  $x$  - სიღრმეა. დავუშვათ,  $S(x,t)$  მზის სხივის ინტენსივობაა,  $C(x,t)$  - ნახშირმჟავას კონცენტრაცია,  $\varphi(x,t)$  - დროის  $t$  მომენტში  $x$  სიღრმეზე ცოცხალი ორგანიზმების სიმკვრივე, ხოლო  $p$  - ფოტოსინთეზის პროცესის ინტენსივობა.

შვედადგინოთ საბალანსო თანაფარდობები. განვიხილოთ წყლის ფენა  $x$ -დან  $x + \Delta x$ -მდე. წყლის ეს ფენა შთანთქავს მზის სხივს, რომელიც

პროპორციულია ფენის სისქისა  $\Delta x$  და თვით სხივის ინტენსივობის  $S(x,t)$ .

ამის გარდა, ამ ფენაში იმყოფებიან ცოცხალი ორგანიზმები, რომლებსაც გააჩნიათ ფოტოსინთეზის უნარი. მაშასადამე, მზის სხივები იხარჯება აგრეთვე ფოტოსინთეზზე,  $p$  ფოტოსინთეზის ინტენსივობისა და ცოცხალი ორგანიზმების სიმკვრივის პროპორციულად.

ამრიგად, ფენაში შთანქმული მზის სხივების რაოდენობა განისაზღვრება ტოლობით

$$S(x,t) - S(x + \Delta x, t) = k_1 S \cdot \Delta x + k_2 p \cdot \varphi(x,t) \Delta x, \quad (6.1.1)$$

სადაც  $k_1, k_2$  - შთანქმის კოეფიციენტებია.

(6.1.1) გავყოთ  $\Delta x$ -ზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მაშინ  $S(x,t)$ -თვის მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = k_1 S(x,t) + k_2 p \varphi(x,t). \quad (6.1.2)$$

დროის შუალედში  $t$ -დან  $t + \Delta t$ -მდე  $x$  სიღრმეზე გამრავლების გამო ცოცხალი ორგანიზმების რაოდენობა გაიზრდება. ეს მატება მშობლების რაოდენობის (ანუ  $\varphi(x,t)$ ), ფოტოსინთეზის ინტენსივობისა (რადგანაც ცოცხალი ორგანიზმების გამრავლება ხდება ფოტოსინთეზის მეშვეობით) და დროის  $\Delta t$  შუალედის პროპორციული იქნება. გარდა ამის, ცოცხალი ორგანიზმების ნაწილი იღუპება. ამრიგად

$$\Delta \varphi = \varphi(x, t + \Delta t) - \varphi(x, t) = \varepsilon \varphi \Delta t - \gamma \varphi \Delta t, \quad (6.1.3)$$

სადაც  $\varepsilon$  - ბუნებრივი მატების კოეფიციენტი,  $\gamma$  - სიკვდილიანობის კოეფიციენტი.

ტოლობა (6.1.3) გავყოთ  $\Delta t$ -ზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , მივიღებთ ცოცხალი ორგანიზმების სიმკვრივისათვის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon \varphi - \gamma \varphi. \quad (6.1.4)$$

ახლა შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება ნახშირმჟავას  $C(x,t)$  კონცენტრაციისათვის.

ვივარაუდოთ, რომ არსებობს ნახშირმჟავას მუდმივი შენაკადი (ოკეანეში ქიმიური პროცესების შედეგად). ნახშირმჟავა იხარჯება ფოტოსინთეზზე ამ პროცესის ინტენსივობისა და ცოცხალი

ორგანიზმების რაოდენობის პროპორციულად. ამგვარად დროის შუალედისათვის  $t$ -დან  $t + \Delta t$ -მდე, გვექნება

$$\Delta C(x, t) = C(x, t + \Delta t) - C(x, t) = \beta \Delta t - \delta p \Delta t, \quad (6.1.5)$$

სადაც  $\beta$  - ნახშირმჟავას შენაკადია დროის ერთეულში,  $\delta$  - ნახშირმჟავას ფოტოსინთეზზე ხარჯვის კოეფიციენტი.

(6.1.5) გავყოთ  $\Delta t$ -ზე და გადავიღეთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , მაშინ მივიღებთ

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \beta - \delta p. \quad (6.1.6)$$

ცენოზის სრული აღწერისათვის, უნდა ვიპოვოთ  $p$  ინტენსივობის გამოსახულება. ეს სიდიდე, არ არის მუდმივი. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ფოტოსინთეზის პროცესში მონაწილე მზის სხივების ინტენსივობაზე და ნახშირმჟავას კონცენტრაციაზე.

თუ  $C(x, t)$  და  $S(x, t)$  მცირეა, მაშინ ფოტოსინთეზი მიმდინარეობს მცირე ინტენსივობით. უფრო მეტიც, თუ რომელიმე  $C$  და  $S$  სიდიდიდან ერთი მცირეა, ხოლო მეორე დიდი, ფოტოსინთეზის ინტენსივობა მაინც მცირე იქნება, რადგანაც მცირე რაოდენობის მოლეკულა სინთეზირდება - ზუსტად იმდენი, რამდენისთვისაც ყოფნის მას სხივები და ნახშირმჟავა.

უტკვათ,  $a$  - მზის სხივების ინტენსივობაა, ხოლო  $b$  - ნახშირმჟავას კონცენტრაცია, რომლის დროსაც ფოტოსინთეზი მიმდინარეობს ერთეულოვანი ინტენსივობით (თუ ნახშირმჟავა და მზის სხივები დიდი რაოდენობისაა). მაშინ  $p$  გამოისახება შემდეგი ტოლობით

$$p = \min\left(\frac{S(x, t)}{a}, \frac{C(x, t)}{b}\right), \quad (6.1.7)$$

$a, b$  სტეხიომეტრიკული კოეფიციენტებია.

(6.1.7)-დან ჩანს, რომ თუ, მაგალითად,  $S < a, C > b$ , მაშინ

$$p = \frac{S}{a}.$$

ამრიგად, (6.1.7) ჩავსვათ (6.1.2)-ში, (6.1.4)-სა და (6.1.6)-ში, მივიღებთ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა კვაზინორფივ სისტემას:



$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = -k_1 S - k_2 \varphi \min\left(\frac{S}{a}, \frac{C}{b}\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon \varphi \min\left(\frac{S}{a}, \frac{C}{b}\right) - \gamma \varphi, \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \beta - \delta \varphi \min\left(\frac{S}{a}, \frac{C}{b}\right). \end{cases} \quad (6.1.8)$$

საწყის და სასაზღვრო პირობებს შეიძლება ჰქონდეთ სახე:

$$C(x,0) = f_1(x), \quad \varphi(x,0) = f_2(x), \quad S(0,t) = g(t),$$

სადაც  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $g(t)$ - ცნობილი ფუნქციებია.

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს დიფუზიას.

მაშინ (6.1.8) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებების მარჯვენა მხარეს დაემატებათ "დიფუზიური წევრები"

$$\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{და} \quad \alpha_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

## §6.2. წვერილი წყლის მოძრაობა. ზღვის ტალღების გადგენა

უწყვეტი გარემოს მოძრაობა მოცემულად ითვლება, თუ დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში შეიძლება განვსაზღვროთ გარემოს მიერ დაკავებული მოცულობის ყოველ  $\bar{x}(x, y, z)$  წერტილში გარემოს წერტილთა სიჩქარეთა  $\bar{v}(\bar{x}, t)$  ველი. ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ მოძრავი გარემოს მიერ დაკავებული არის საზღვრები შეიძლება იცვლებოდეს დროის მიმართ, ე.ი. ისინი წინასწარ შეიძლება არ იყოს ცნობილი და უნდა განისაზღვროს ზოგიერთი პირობებიდან სიჩქარეთა ველთან ერთად.

საზოგადოდ, სიჩქარეთა ველის გარდა, ამოცანებში უნდა განისაზღვროს გარემოს მდგომარეობის დამახასიათებელი სხვა სიდიდეები:  $\rho(\bar{x}, t)$  სიმკვრივე,  $p(\bar{x}, t)$  წნევა,  $T(\bar{x}, t)$  ტემპერატურა და ა.შ. [77].

უწყვეტი გარემოს მათემატიკური აღწერისათვის აუცილებელია მოვლენის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა. ამასთან, როგორც წესი, უნდა გავითვალისწინოთ გარემოს მხოლოდ აუცილებელი თვისებები და უგულვებელყოთ დანარჩენები, რადგანაც, რაც უფრო ფართეა ამოცანის დასმა მით უფრო რთულია მათემატიკური მოდელის აგება, რომელიც ექვემდებარება შესწავლას, მით უფრო ნაკლები კონკრეტული შედეგი მიიღება და უფრო რთულია თეორიის შედარება ექსპერიმენტთან.

მათემატიკური მოდელის სწორი არჩევა ხშირ შემთხვევაში უზრუნველყოფს ამოცანის ამოხსნის მიღწევას. განვიხილოთ უკუშემაღლი (სიმკვრივე მუდმივია) სითხის დაუმყარებელი (დროზე დამოკიდებული) ბრტყელი პოტენციური მოძრაობა არაღრმა წყალსაცავში მყარი ფსკერით [61]

$$y = -h(x) \tag{6.2.1}$$

და თავისუფალი სასაზღვრო ზედაპირით

$$y = \eta(x, t). \tag{6.2.2}$$

სიჩქარეთა ვექტორის კოორდინატები ამ შემთხვევაში იქნება

$$\bar{v}(\bar{v}_x, \bar{v}_y, 0) = \bar{v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, 0 \right), \tag{6.2.3}$$

სადაც  $\varphi$  სიჩქარეთა ველის პოტენციალია, ანუ

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi. \quad (6.2.4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$u \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (6.2.5)$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{\eta(x,t)} u(x,y,t) dy. \quad (6.2.6)$$

მართლაც, პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის დიფერენცირების თანახმად, მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{\eta(x,t)} u(x,y,t) dy = \int_{-h(x)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} dy + u(x,\eta,t) \frac{\partial \eta}{\partial x} + u(x,-h,t) h'(x). \quad (6.2.7)$$

მაგრამ თავისუფალ ზედაპირზე (6.2.2) და ფსკერზე (6.2.1) ადგილი აქვთ სასაზღვრო პირობებს:

$$y = \eta(x,t): \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u - v = 0, \quad (6.2.8)$$

$$y = -h(x): \quad u h'(x) + v = 0. \quad (6.2.9)$$

(6.2.8), (6.2.9) მიღებულია ზოგადი პირობებიდან მოძრავ და უძრავ საზღვრებზე.

დავუშვათ, რომ მოძრავი საზღვრის განტოლებას აქვს სახე:

$$F(\bar{x}, t) = 0, \quad (6.2.10)$$

სადაც სკალარული  $F$  ფუნქცია მოცემულია. ნორმალის მიმართულებით საზღვრის მოძრაობის სიჩქარე იქნება:

$$U_n = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{|\text{grad} F|}.$$

მყარი საზღვრებისათვის მიღებულია შეუღწევადობის პირობა, რომლის თანახმად  $U_n$  უნდა ემთხვეოდეს სითხის მოძრაობის სიჩქარის ნორმალურ მდგენელს (საზღვრის მიმართ), ანუ

$$V_n = \left( \text{grad} \varphi, \frac{\text{grad} F}{|\text{grad} F|} \right).$$

ამრიგად,

$$U_n = V_n,$$

$$\frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{|\text{grad} F|} = \left( \text{grad} \varphi, \frac{\text{grad} F}{|\text{grad} F|} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\text{grad} \varphi, \text{grad} F) = 0. \quad (6.2.11)$$

ე.ი. ნებისმიერი  $\bar{x}$  და  $t$ -თვის, რომელთათვის ადგილი აქვს (6.2.10), სასაზღვრო პირობას აქვს სახე (6.2.11).

თუ საზღვარი უძრავია, მაშინ  $F$  დამოუკიდებელია  $t$ -ზე და სასაზღვრო პირობა (6.2.11) უძრავ  $F(\bar{x}) = 0$  საზღვარზე მიიღებს სახეს:

$$(\text{grad} \varphi, \text{grad} F) = 0. \quad (6.2.12)$$

შესაბამისად (6.2.8) მიიღება (6.2.11)-დან, სადაც

$$F \equiv \eta(x, t) - y,$$

ხოლო (6.2.9) მიიღება (6.2.12)-დან,  $F \equiv h(x) + y$ .

ჩავსვათ (6.2.8), (6.2.9) (6.2.7)-ში, მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{\eta(x,t)} u(x, y, t) dy &= \int_{-h(x)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} dy - \frac{\partial \eta}{\partial t} + v(x, \eta, t) - v(x, -h(x), t) = \\ &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy, \end{aligned}$$

ხოლო

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \text{div} \bar{v} = 0$$

უკუშემაღობის პირობის გამო.

წერილი წყლის მათემატიკურ მოდელში, ვარაუდობენ, რომ სითხის წნევა ემთხვევა ჰიდროსტატიკურს, ე.ი. სიღრმის პროპორციულია

$$p = g\rho [h(x, t) - y] + p_0, \quad (6.2.13)$$

$p_0$  – მუდმივი ატმოსფერული წნევაა.

მაშინ გარემოს მოძრაობის განტოლებიდან

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.2.14)$$

მივიღებთ

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}, \quad (6.2.15)$$

ანუ  $\frac{du}{dt}$  არ არის დამოკიდებული  $y$ -ზე.

მაშინ, (6.2.6)-დან მივიღებთ

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\eta + h)u. \quad (6.2.16)$$

შემოვიღოთ სიდიდე

$$\bar{p} = \int_{-h}^{\eta} p dy = \frac{g\rho}{2}(\eta + h)^2. \quad (6.2.17)$$

თუ აღვნიშნავთ  $\bar{\rho} = (\eta + h)\rho$ , მაშინ

$$\bar{p} = \frac{g}{2\rho} \bar{\rho}^2 = k\bar{\rho}^2, \quad (6.2.18)$$

სადაც  $k \equiv \frac{g}{2\rho}$  – მუდმივაა მოცემული სითხისათვის.

ჩავსვათ (6.2.18) (6.2.15), (6.2.16)-ში და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x},$$

მაშინ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (6.2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}u) = 0.$$

განტოლებათა სისტემა (6.2.19) ფორმით ემთხვევა გაზის ერთგანზომილებიანი დაუმყარებელი მოძრაობის განტოლებებს [88]. შეშფოთებების გავრცელების სიჩქარე ჩვენს გარემოში – ეს იქნება ტალღები წყალსაცავის ზედაპირზე და განისაზღვრება როგორც "ბგერის სიჩქარე"

$$c = \sqrt{\frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}}} = \sqrt{g(\eta + h)}. \quad (6.2.20)$$

დავუბრუნდეთ  $\eta$  და  $u$  ცვლადებს და განტოლებათა სისტემა (6.2.15), (6.2.16) გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left( \frac{u^2}{g} - \eta - h \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - h'(x)u, \\ -\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (6.2.21)$$

კერძოწარმოებულაინ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში [32,84] მტკიცდება, რომ სისტემის

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial t} + f_1(u, \eta, x, t), \\ -\frac{\partial \eta}{\partial x} &= d \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} + f_2(u, \eta, x, t) \end{aligned}$$

ტიპი განისაზღვრება

$$\Delta = ac - \left( \frac{b+d}{2} \right)^2$$

დისკრიმინანტის ნიშნით.

(6.2.21) სისტემისათვის დისკრიმინანტი

$$\Delta = \frac{1}{g} \left( \frac{u^2}{g} - \eta - h \right) - \frac{u^2}{g} = -\frac{\eta + h}{g} < 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ სისტემა (6.2.21) ჰიპერბოლური ტიპისაა.

არაწრფივი სისტემა (6.2.21) კვაზიწრფივია, ანუ წრფივია უფროსი წარმოებულის მიმართ, მაგრამ მისი გამოკვლევა მაინც რთულია.

მნიშვნელოვნად ამარტივებს გამოკვლევას ამოცანის გაწრფივება, ანუ იმის ვარაუდი, რომ  $u$  და  $\eta$  სიდიდეები წარმოებულებთან ერთად მცირეა.

მაშინ (6.2.21)-ში შეიძლება უგულებელვყოთ მეორე რიგის სიმცირის წევრებით (მაგალითად  $u^2, \eta \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ ) და სისტემა მიახლოებით შეიცვლება წრფივი სისტემით

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x} - h'(x)u = -\frac{\partial}{\partial x}(hu), \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (6.2.22)$$

სისტემა (6.2.22)-ში მარტივად გამოირიცხება  $u$  ფუნქცია და სითხის ფენის სიმაღლისათვის  $\eta(x,t)$  მიიღება განტოლება

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.2.23)$$

თუ წყალსაცავის ფსკერი სწორია ( $h = \text{const}$ ), მაშინ (6.2.23) დადის ჰიპერბოლური ტიპის მარტივ განტოლებაზე

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (6.2.24)$$

განტოლება (6.2.24)-ის ზოგადი ამონახსნი მარტივად ჩაიწერება ორი ნებისმიერი ფუნქციის მეშვეობით

$$\eta(x,t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad (6.2.25)$$

სადაც  $c_0 = \sqrt{gh}$ , ხოლო  $f, g$  ფუნქციები განისაზღვრება საწყისი და სასაზღვრო პირობებიდან.

ფორმულა (6.2.25) იძლევა ამოხსნას ორი ტალღის ჯამის სახით, რომლებიც მოძრაობენ  $\pm c_0$  სიჩქარით, ხოლო  $f, g$  ფუნქციები განსაზღვრავენ ამ ტალღის ფორმას.

სისტემა (6.2.22)-ის მახასიათებელია

$$x \pm c_0 t = \text{const}$$

წრფეები. ისინი განსაზღვრავენ ტალღის ფრონტს (კერძოდ, აცალკევებენ უძრაობის ზონას შემოფოთების ზონისგან, თუ  $f$  და  $g$  ფუნქციები ნულისაგან განსხვავებული არიან მხოლოდ სასრულო ინტერვალზე, როგორც ხშირად ხდება).

მაგალითად, ამას ადგილი აქვს, როცა რწყავენ ასფალტს, მათზე პატარა აღმართების გამო ვრცელდება შემოფოთება.

საკმაოდ უხეშმა მიახლოებამ (გაწრფივებამ), მიგვიყვანა იმ დასკვნამდე, რომ ტალღები ვრცელდება მუდმივი  $c_0 = \sqrt{gh}$  სიჩქარით. უფრო ფაქიზი ანალიზი გვიჩვენებს, რომ სიჩქარისათვის მართებულია ფორმულა (6.2.20).

ფორმულა (6.2.20)-დან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დასკვნა – წერილ წყალში ტალღის ზედა უბნები, რომელთათვის  $\eta(x, t)$  მაღლობი მეტია, მოძრაობენ უფრო დიდი სიჩქარით ვიდრე ქვედა უბნები.

ეს დასკვნა ხსნის ტალღების გადაბრუნების მოვლენას, როცა ისინი გამოდიან ნაპირზე. ეს დაკვირვება გაუკეთებია ყველას, ვისაც უნახავს, მათ შორის, სოხუმის ზღვის ტალღის გადაბრუნება ნაპირზე გამოსვლისას.

ტალღების გადაბრუნების მათემატიკური მოვლენა იძლევა მაგალითს კერძოწარმოებულნი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისა, რომელსაც გააჩნია თავისებურებანი.

კერძოწარმოებულნი განტოლებათა თეორიაში მტკიცდება, რომ წრფივ ელიფსურ განტოლებებს გლუვი კოეფიციენტებით გააჩნიათ მხოლოდ გლუვი ამონახსნები.

ამიტომ, არაგლუვი (წყვეტილი ან წყვეტილი წარმოებულებით) ამონახსნები გააჩნიათ მხოლოდ ჰიპერბოლურ ან არაწრფივ განტოლებებს.

ამოხსნები თავისებურებებით, რომლებიც ანალოგიურია ტალღების გადაბრუნებისა, მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ზებგერით გაზურ დინამიკაში (დარტყმითი ტალღები, შემჭიდროვების ნახტომები).

თუ განხილული ბრტყელი ამოცანიდან გადავალთ სივრცით ამოცანისკენ, მაშინ გაწრფივების შემთხვევაში სითხის ფენის სიმაღლისათვის  $\xi = \xi(x, y, t)$  (6.2.23)-ის ნაცვლად მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right\} = 0, \quad (6.2.26)$$

რომელსაც აკუსტიკურ განტოლებას უწოდებენ.



### §6.3. ცუნამის მოდელი

სითხის დაუმყარებელი ტალღური მოძრაობების თეორიიდან განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს ორი საკითხი [61]:

1. ტალღსატარის ეფექტი – ხარისხობრივად ახალი მოვლენა, რომელიც გამოწვეულია უსწორო ფსკერით;

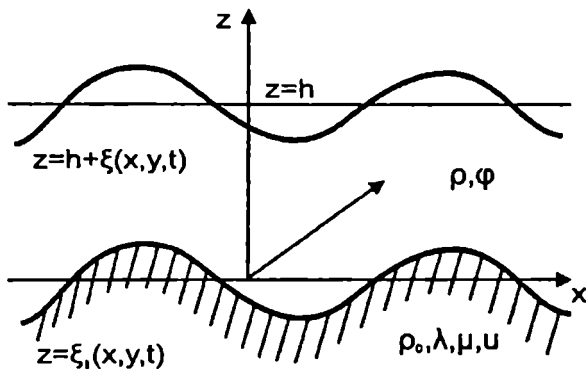
2. სეისმური ინფორმაციის საფუძველზე ცუნამის მოკლევადიანი პროგნოზირების პრობლემა.

ცუნამი – იაპონური ტერმინია და დიდ ტალღას ნიშნავს. ცუნამის ტალღები წარმოიშობა წყალქვეშა მიწისძვრების დროს ოკეანის ფსკერის ფართო უბნების უეცარი გადაადგილებისას. ისინი, როგორც წესი, ადგენენ ვეგუფს ორი-სამი ტალღისა, რომლებიც ღია ზღვაში ძალიან გრძელია (სიგრძე დაახლოებით 100 კმ) და არამალალი დამრეცი (სიმაღლე 1 მ) რის გამოც იქ არ არიან საშიში.

მაგრამ, ნაპირისკენ გადაადგილებისას მათი სიმაღლე იზრდება სიგრძის შემცირების გამო და შეიძლება მიაღწიოს 30 მ-მდე. ბუნებრივია, რომ ისინი ღრმად აღწევენ სანაპირო ტერიტორიაზე და იწვევენ დიდ ნგრევას და ადამიანთა მსხვერპლს. მაგალითად, 1952 წლის 5 ნოემბრის ღამეს, კამჩატკის ნაპირების ახლოს მიწისძვრის შედეგად წარმოშობილმა ცუნამმა მთლიანად გაანადგურა ქალაქი ჩრდილოეთ-კურილსკი. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ გამანადგურებელი ცუნამი – იშვიათი მოვლენაა და მას ადგილი აქვს 100 წელიწადში ერთი-ორჯერ.

ცუნამის დაკვირვებების მონაცემების ანალიზის მიხედვით, ტალღის სიმაღლე სანაპიროზე (ნაპირზე გამოსვლის ერთნაირი პირობებით) არ მცირდება მონოტონურად მიწისძვრის ეპიცენტრიდან დაშორებით. ამ მოვლენის ასახსნელად შეიძლება აღვნიშნოთ ორი მიზეზი – საწყისი პირობებით გამოწვეული ტალღის საწყისი მიმართულება და ფსკერის რელიეფის გავლენა ტალღის გავრცელების პროცესში.

განვიხილოთ ცუნამის მარტივი მოდელი. დედამიწის ქერქი ჩავთვალოთ დრეკად, ერთგვაროვან და იზოტროპულ ნახევარსივრცედ  $\{z < 0\}$ , რომლის ზემოთ არის მუდმივი  $h$  სიღრმის სითხის ფენა (ნახ.6.3.1).



ნახ.6.3.1.

წონასწორობის მდგომარეობაში დრეკადი ძაბვების ტენზორის დელამიწის ქერქში აქვს სახე:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_0 + \rho_0 g z \end{pmatrix}, \quad (6.3.1)$$

სადაც  $\rho_0$  – ქერქის სიმკვრივეა,  $g$  – სიმძიმის ძალის აჩქარებაა,  $p_0$  – წნევაა ნახევარსივრცის საზღვარზე მოძრაობის არ არსებობის დროს.

მიწისძვრის დროს წარმოიშობა დამატებითი  $\sigma$  ძაბვები და გადაადგილებები,  $\bar{u}(x, y, z, t) = (u_1, u_2, u_3)$ , რომლებიც დაკავშირებულია ჰუკის კანონით

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.3.2)$$

სადაც  $\lambda, \mu$  – დელამიწის დრეკადი მუდმივებია,  $\delta_{ij}$  – კრონეკერის სიმბოლოებია,

$$\theta = \text{div} \bar{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$

ანუ  $\theta$  – გადაადგილებების ველის დივერგენციაა.

იმ პროცესების მოდელირება, რომლებსაც გამოყავთ სისტემა უძრავობის მდგომარეობიდან, მოვსხდინოთ მასური ძალების ვექტორული ველით  $\bar{f}(x, y, z, t) = (f_1, f_2, f_3)$ .

რადგანაც, დეამიწის ძაბვების ველი მიწისძვრის შემდეგ  $(\sigma^0 + \sigma)$ -ის ტოლია, შეიძლება ჩავწეროთ დრეკადი რხევების განტოლება [81].

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta u_i + f_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (6.3.3)$$

$\bar{f}$  ფუნქცია დროის შუალედში  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$  იცვლება ზოგიერთი კანონით, როცა მიწისძვრის კერაში ადგილი აქვს აქტიურ გეოფიზიკურ პროცესებს.

რადგანაც სითხის მოძრაობა იწყება უძრავობის მდგომარეობიდან, ჩვენ ჩავთვლით მას პოტენციურად და პოტენციური ფუნქცია აღვნიშნოთ  $\Phi(x, y, z, t)$ .

$$\bar{v} = \text{grad} \Phi. \quad (6.3.4)$$

მოდელში სითხის  $\bar{v}$  სიჩქარე ითვლება მცირე სიდიდელ. წნევა სითხის შიგნით განისაზღვრება კოში-ლაგრანჟის გაწრფივებული ინტეგრალით

$$p = p_0 - \rho \left( gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad (6.3.5)$$

სადაც  $\rho$  - სითხის სიმკვრივეა.

ახლა აღვწეროთ სასაზღვრო პირობები.

თხევადი ტალღების  $\xi$  და დრეკადი ნახევარსივრცის საზღვარზე  $\xi_1$  ტალღების ამპლიტუდებს ჩავთვლით მცირედ და სასაზღვრო პირობებს შესაბამისად განვიხილავთ  $z = h$  და  $z = 0$  სიბრტყეებზე (იხ.ნახ.6.3.1).

სითხის თავისუფალ ზედაპირზე პირობას აქვს სახე:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{როცა } z = h. \quad (6.3.6)$$

ხოლო ფსკერზე - ორი პირობაა: სიჩქარის ნორმალური მდგენელის უწყვეტობა

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t}, \quad \text{როცა } z = 0 \quad (6.3.7)$$

და ნორმალური ძაბვების უწყვეტობის პირობა

$$(\sigma^0 + \sigma) \cdot \bar{k} = -p \bar{k}, \quad (6.3.8)$$

$\bar{k}$  - ერთეულოვანი ვექტორია  $z$  ღერძის მიმართულებით. (6.3.1), (6.3.2) და (6.3.5)-ის გათვალისწინებით (6.3.8) კომპონენტებში გადაიწერება

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0,$$

$$\rho_0 g \xi_1 + \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} = \rho \left( g \xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \text{ როცა } z = 0. \quad (6.3.9)$$

მოღელის მომდევნო გამარტივების მიზნით ჩავთვალოთ, რომ

$$\mu = 0,$$

$$\operatorname{rot} \bar{u} = 0,$$

$$\rho \ll \rho_0. \quad (6.3.10)$$

დავუშვათ,  $l$  და  $\delta$  - მიწისძვრის კერაში მახასიათებელი ზომაა და გადაადგილება, მაშინ

$$\xi_1 \approx \delta, \quad \theta \approx \frac{\delta}{l} \quad (6.3.11)$$

და თუ ვივარაუდებთ, რომ

$$l \ll \frac{\lambda}{\rho_0 g}, \quad (6.3.12)$$

მაშინ (6.3.10) - (6.3.12) გათვალისწინებით სასაზღვრო პირობა (6.3.9) მიიღებს მარტივ სახეს:

$$\theta = 0, \text{ როცა } z = 0. \quad (6.3.13)$$

ახლა მასური ძალები ჩავთვალოთ ვერტიკალურად ( $f_1 = f_2 = 0$ ), მაშინ (6.3.3)-დან (6.3.10) - (6.3.13) გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0. \quad (6.3.14)$$

საწყისი პირობები  $\bar{u}$ -თვის შეიძლება ჩავთვალოთ ნულოვნად, რადგანაც მოძრაობა იწყება უძრაობის მდგომარეობიდან მასური ძალების შედეგად, რომლებიც იწყებენ მოქმედებას  $t_0 \geq 0$  მომენტში. ამის გამო გაყოფის  $z = 0$  საზღვარზე (6.3.14)-ის ძალით, დროის ნებისმიერ მომენტში

$$u_1 = u_2 = 0. \quad (6.3.15)$$

ამრიგად, სასაზღვრო პირობა (6.3.9) მიიღებს სახეს

$$\theta = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0, \text{ როცა } z = 0. \quad (6.3.16)$$

ბოლო დაშვება მოდელში მდგომარეობს იმაში, რომ სითხის ფენის სიღრმე მიწისძვრის კერის ზომასთან შედარებით მცირეა

$$h \ll l,$$

და, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=h} = \left. \frac{\partial u_3}{\partial t} \right|_{z=0} - h \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y, h, t) + \underline{O}(h^2). \quad (6.3.17)$$

განტოლებები და სასაზღვრო პირობები გადავწეროთ უგანზომილებო სახით [76]

$$\begin{aligned} x &= L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}, \quad z = L\bar{z}, \quad t = \frac{L}{c_0} \bar{t}, \\ u_1 &= \delta \bar{u}_1, \quad u_2 = \delta \bar{u}_2, \quad u_3 = \delta \bar{u}_3, \\ f_3 &= \frac{c_0^2 \delta}{L^2} \bar{f}_3, \quad \Phi = \frac{gL\delta}{c_0} \bar{\Phi}, \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

სადაც სიგრძის მასშტაბი  $L$  - მანძილია მიწისძვრის კერიდან დაკვირვების წერტილამდე,  $c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$  ( $\mu = 0$ ) - განივი ღრეკადი

ტალღების სიჩქარის კვადრატია.

რადგანაც

$$\xi = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=h},$$

ბუნებრივია

$$\xi = \delta \bar{\xi}. \quad (6.3.19)$$

(6.3.3)-ის შესაბამე განტოლება ( $i = 3$ ) (6.3.10)-ის გათვალისწინებით მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} + f_3, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \Delta u_3, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{\rho_0} \Delta u_3 + f_3, \quad (6.3.20)$$

ხოლო უგანზომილებო სიდიდეებში (6.3.18)-ის თანახმად (6.3.20) გადაიწერება

$$\square \bar{u}_3 \equiv \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{t}^2} - \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{z}^2} \right) = \bar{f}_3, \quad (6.3.21)$$

სადაც  $\square$  - დალამბერის ოპერატორია.

ამასთან  $\bar{x}_3$  ფუნქცია ნულზე განსხვავებულია მხოლოდ ( $t > t_0$ )-თვის, სადაც  $t_0$  – მიწისძვრის დაწყების მომენტი.

პირობა (6.3.6) (6.3.17)-ის მიახლოებაში (6.3.10) გათვალისწინებით გადაიწერება

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} - \bar{c}^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial t^2} \Big|_{\bar{z}=0}, \quad (6.3.22)$$

სადაც  $\bar{c} = \frac{\sqrt{gh}}{c_0}$ .

განტოლებები (6.3.21), (6.3.22) წარმოადგენენ ცუნამის მოდელის ძირითად განტოლებებს.

სასაზღვრო პირობა განტოლება (6.3.21)-თვის მიიღება (6.3.16)-დან (6.3.18)-ის გათვალისწინებით

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \bar{z} = 0. \quad (6.3.23)$$

საწყის პირობებს აქვთ სახე:

$$\bar{u}_3 = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} = 0, \quad \bar{\xi} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} = 0, \quad \text{როცა } \bar{t} = 0. \quad (6.3.24)$$

ცუნამის გაუენბელებლოფა, ისევე როგორც მიწისძვრის, შეუძლებელია, ამიტომ არსებობს ორი შესაძლებლობა. პირველი მდგომარეობს იმაში, რომ სანაპირო დასახლებებისათვის აირჩეს ისეთი ადგილები, რომელთაც ცუნამი ნაკლებად ეშუქრება. მაგრამ, ასეთი ადგილები ხშირად არასახარბიელოა მშენებლობისათვის და რადგანაც, როგორც წესი, ერთსა და იმავე ადგილას ცუნამი შესაძლებელია იყოს საუკუნეში ერთი-ორჯერ, ეკონომიკურად უფრო მომგებიანია ქლაქების ხელახლა აშენება ცუძანის შემდეგ, ვიდრე მათი მშენებლობა ძნელად მისადგომ რაიონებში.

მთავარია შეისწავლოს ცუნამის პროგნოზირება და მოსალოდნელი საფრთხის შემთხვევაში მოსახლეობის ევაკუაცია საშიში ზონიდან.

ამ მიზნით ასეთ რეგიონებში კეთდება ცუნამის სადგურები, რომლებიც სეისმური ტალღების გაზომვის მეშვეობით პროგნოზირებენ ცუძანის. სეისმოგრაფების მიხედვით განისაზღვრება მიწისძვრის ეპიცენტრის კოორდინატები და მისი ინტენსივობა. თუ ინტენსივობა აღემატება ზღვრულ მნიშვნელობას, მაშინ ეპიცენტრის უახლოეს სანაპირო რაიონებში ცხადდება ცუნამის განგაში.

## § 6.4. არაერთგვაროვანი ტალღსატარის მათემატიკური მოდელი

სივრცით-არაერთგვაროვან ტალღსატარში კელმპოლცის განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პრობლემას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს ბგერითი ტალღების გავრცელების ამოცანებში [8,11,29,30,71].

მაგრამ, პრაქტიკაში აუცილებელია პარმონიული წერტილოვანი წყაროების მიერ წარმოქმნილი ბგერითი ველების კონკრეტული გათვლები.

ამ თვალსაზრისით შედარებით კარგად გამოკვლეულია ბგერის გავრცელების ამოცანა გარემოში, რომელშიც გარდატეხის კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ სიღრმეზე [26]. ეს ბუნებრივია, რადგანაც გარემოს ფენოვნობის ვარაუდი (გარემოს გარდატეხის მაჩვენებელი, ან ბგერის სიჩქარე მუდმივებია ზედაპირის პარალელურ სიბრტყეებზე) ამოცანის ამოხსნისას საშუალებას იძლევა ვისარგებლოთ ცვლადთა განცალკების მეთოდით. ამ შემთხვევაში მიღებული ფორმულები მონერხებულია როგორც რიცხვითი გათვლებსათვის, ასევე ფიზიკური კანონზომიერების დასადგენად.

ფენოვნად-არაერთგვაროვან წყალქვეშა ტალღსატარებში ბგერითი ველების მაღალ სიხშირეებზე გამოთვლისას, როდესაც გავრცელებადი მოდების (ნორმალური ტალღები) რაოდენობა დიდია და მათი გათვლა სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდების საფუძველზე არაეფექტურია, ფართოდ გამოიყენება ასიმპტოტური მეთოდები (სხივური მეთოდი და ნორმალური ტალღების ასიმპტოტური მეთოდები)[27,28,54,83].

საგრძობლად ნაკლებად შესწავლილია ბგერითი ტალღების გავრცელება სამგანზომილებიან არაერთგვაროვან გარემოში. ასეთ გარემოში მაღალსიხშირიანი რხევების გამოკვლევის არსებითად ერთადერთ ზოგად მიდგომას წარმოადგენს სხივური მეთოდი. მაგრამ, სხივური მიდგომისათვის დამახასიათებელია კარგად ცნობილი სიძნელებები, რომლებიც დაკავშირებულია დიფრაქციულ ეფექტებთან: კაუსტიკების, ჩრდილოვანი და ნახევრადჩრდილოვანი ზონების წარმოქმნა. ზოგიერთ შემთხვევაში დასაშვებია ვარაუდი იმის შესახებ, რომ გარემოს პარამეტრები სუსტად არის დამოკიდებული

პორიზონტალურ კოორდინატებზე. ასეთი დაშვება საშუალებას იძლევა ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ მეთოდი, რომელსაც ბერი საერთო ნიშანი აქვს ცვლადთა განცალკების ტექნიკასთან (აკუსტიკაში ეს მეთოდი ცნობილია ბარიდევი-ვეინბერგის სქემის სახელწოდებით [22]).

1. მათემატიკური მოდელის სახით განვიხილოთ ამოცანა წერტილოვანი პარმონიული წყაროს მიერ შექმნილი ბგერითი ველის განსაზღვრის შესახებ სივრცით არაერთგვაროვან ტალღსატარში უსწორო მყარი ფსკერით [90].

პარმონიული წერტილოვანი წყაროს მიერ გამოსხივებული ბგერითი წნევა წყლის ფენის  $x = (x_1, x_2, z)$  წერტილში აღიწერება გამოსახულებით

$$p(x, t) = \operatorname{Re} [U_\varepsilon(x) e^{-i\omega t}],$$

სადაც ბგერითი ველის კომპლექსური ამპლიტუდა  $U_\varepsilon(x)$  (საძიებელი ფუნქციაა  $\Omega_1 = \bar{\Omega}_0 \times (-1 + \varepsilon f(x'), 0)$  არეში) არის შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი

$$(\Delta + k^2 n^2(x)) U_\varepsilon(x) = -\delta(x - x^0), \quad -1 + \varepsilon f(x') < z < 0, \quad (6.4.1)$$

$$U_\varepsilon(x)|_{z=0} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial U_\varepsilon(x)}{\partial z} \right) \right|_{z=-1+\varepsilon f(x')} = 0. \quad (6.4.2)$$

$$U_\varepsilon(x) \rightarrow 0, \quad |x - x^0| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \omega > 0, \quad (6.4.3)$$

სადაც  $n^2(x)$  - წყლის ფენის გარდატეხის მაჩვენებლის კვადრატია,  $z = -1 + \varepsilon f(x')$  - მყარი ფსკერის განტოლებაა უგანზომილებო სახით,  $k$  - უგანზომილებო ტალღური რიცხვია. ამასთან განზომილებიანი ფიზიკური პარამეტრის სახით აღებულია ტალღსატარის  $H$  სიღრმე:

$$H = \max_{x' \in \bar{\Omega}_0} \operatorname{mod} h(x_1, x_2), \quad x' = (x_1, x_2),$$

სადაც  $z = h(x')$  - ფსკერის განზომილებიანი განტოლებაა,  $x^0 = (0, 0, z^0)$  - წყაროს მდებარეობის წერტილია,  $f(x') \geq 0$  - მხოლოდ ზოგიერთ შემოსაზღვრულ  $\Omega$  სიძრავლეზე ნულისაგან განსხვავებული გლუვი ფუნქციაა:



$$\Omega = \bigcup_{j=1}^l \Lambda_j \quad l > 1 \quad \bigcap_{j=1}^l \Lambda_j = \emptyset, \quad l \in \mathbb{N},$$

სადაც  $l$  - ფსკერის უსწორობების რიცხვია,  $\nu_\varepsilon$  - ერთეულოვანი ნორმალთა საზღვრისაკენ, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$\begin{aligned} \nu_\varepsilon(x', -1 + \varepsilon f(x')) &= \left(1 + \varepsilon^2 |\nabla' f(x')|^2\right)^{-1/2} \left(-\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}, -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_2}, 1\right) = \\ &= (0, 0, 1) - \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, 0\right) + \underline{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

ცხადია რომ სასაზღვრო ამოცანა (6.4.1) - (6.4.3) ანალიზურად ზუსტად არ ამოიხსნება.

2. მრავალრიცხოვანი ექსპერიმენტული მონაცემებიდან გამომდინარეობს, რომ რეალურ სიტუაციებში (ოკეანეს ან ზღვის რეალური მონაცემები) წყლის ფენის გარდატეხის მაჩვენებლის კვადრატი ახლოს არის ერთთან [53]. გადახრა  $10^{-2}$  რიგისაა.

ამის გათვალისწინებით ჩვენს მიერ შემოღებულ იქნა მცირე პარამეტრი [90]

$$n^2(x) = 1 + \varepsilon \eta(x), \quad (6.4.5)$$

$$\eta(x) \in C(\Omega_1), \quad \max_{x \in \Omega_1} \text{mod } \eta(x) \leq \underline{O}(1), \quad \varepsilon = \underline{O}(10^{-2}).$$

მოდელში ჩვენ ვუშვებთ, რომ ფსკერის უსწორობების ვერტიკალური ზომის ფარდობა ტალღსატარის სიღრმესთან მცირე  $\varepsilon$  პარამეტრის რიგისაა, რაც გათვალისწინებულია მყარი ფსკერის  $z = -1 + \varepsilon f(x')$

უგანზომილებო განტოლებაში.

სასაზღვრო ამოცანის (6.4.1) - (6.4.3) ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მცირე პარამეტრის ასიმპტოტური მეთოდით.

რადგანაც (6.4.5)-ის გათვალისწინებით, (6.4.1) განტოლებასა და (6.4.2), (6.4.4) სასაზღვრო პირობებში  $\varepsilon$  მცირე პარამეტრი შედის რეგულარული სახით, ამიტომ შეშფოთების თეორიის თანახმად ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ რეგულარული ასიმპტოტური დაშლის სახით [68]

$$U_\varepsilon(x) = \sum_{j \geq 0} U_j(x) \varepsilon^j, \quad (6.4.6)$$

სადაც შწკრივის  $U_j(x), j \geq 0$  კოეფიციენტები მოიძებნება როგორც არაშეშფოთებულ ტალღსატარში ჰელმჰოლცის არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნები.

(6.4.6) დაშლის კოეფიციენტები გამოითვლება რეკურენტული სახით. პრაქტიკულად კი საკმარისია ვიპოვოთ ნულოვანი  $U_0(x)$  და პირველი  $U_1(x)$  მიახლოება.

ამრიგად, (6.4.6) ასიმპტოტიკის მთავარი წევრისათვის  $U_0(x)$  მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას:

$$(\Delta + k^2) U_0(x) = -\delta(x - x^0), \quad -1 < z < 0 \quad (6.4.7)$$

$$U_0(x)|_{z=0} = 0, \quad (6.4.8)$$

$$\left. \frac{\partial U_0(x)}{\partial z} \right|_{z=-1} = 0.$$

სასაზღვრო ამოცანა (6.4.7), (6.4.8) შესაბამისი გამოსხივების (6.4.3) პირობით განსაზღვრავს წერტილოვანი მონოქრომატული ბგერითი წყაროს ველს ერთგვაროვანი წყლის ფენაში (ოკეანეში, ზღვაში) მუდმივი სიღრმით, თავისუფალი სწორი ზედაპირით და მყარი სწორი ფსკერით.

რადგანაც ამოცანა (6.4.7), (6.4.8) ცილინდრულად სიმეტრიულია, მისი ამონახსნი არ იქნება დამოკიდებული კუთხურ  $\varphi$  კოორდინატაზე, ანუ

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad U_0 \equiv U_0(r, z), \quad x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad r \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

ერთგვაროვანი განტოლება (6.4.7) (ნულოვანი მარჯვენა მხარით) შეიძლება ამოხსნათ ცვლადთა განცალების მეთოდით (ფურიეს მეთოდი) [9]. ამ შემთხვევაში ამონახსნს ვეძებთ ნამრავლის სახით

$$U_0(x) = R(z)Q(r). \quad (6.4.9)$$

ჩავსვათ (6.4.9) (6.4.7)-ში ნულოვანი მარჯვენა მხარით

$$(\Delta + k^2)R(z)Q(r) = 0 \quad (6.4.10)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0.$$

ცვლადთა განცალკების შემდეგ (6.4.9), (6.4.10)-დან მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} R''(z) + k^2(1 - \lambda^2)R(z) = 0, \\ Q''(r) + \frac{1}{r}Q'(r) + k^2\lambda^2Q(r) = 0. \end{cases} \quad (6.4.11)$$

ჩვენ, განცალკების მუდმივა, სიმარტივისათვის აღვნიშნეთ  $k^2\lambda^2$ -ით.

(6.4.11)-ის ზოგადი ამონახსნები ჩაიწერება შემდეგი სახით (გამოყენებულია შტურმი-ლიუვილის სპექტრალური ამოცანის საკუთარი მნიშვნელობების თვისება [10]):

$$R(z) = A \sin \beta z + B \cos \beta z, \quad (6.4.12)$$

სადაც  $\beta = k\sqrt{1 - \lambda^2}$ ,

$$Q(r) = CH_0^{(1)}(k\lambda r) + DH_0^{(2)}(k\lambda r), \quad (6.4.13)$$

აქ  $H_0^{(1)}$  და  $H_0^{(2)}$  - შესაბამისად ნულოვანი რიგის პირველი და მეორე გვარის ჰანკელის ფუნქციებია.

სასაზღვრო პირობები (6.4.8) გამოყენებული (6.4.9) ამონახსნისათვის იძლევა ორ პირობას:

$$\begin{aligned} R(0) &= 0, \\ R'(-1) &= 0. \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

მაშინ (6.4.12), (6.4.14)-დან მივიღებთ

$$\beta_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z_0^+ = N \cup \{0\}, \quad (6.4.15)$$

$$\lambda_n = \sqrt{1 - \frac{\beta_n^2}{k^2}}.$$

ამრიგად, (6.4.12), (6.4.14)-დან მივიღებთ თვლადი რაოდენობის  $R_n(z)$  ამონახსნებს

$$R_n(z) = A_n \sin \beta_n z, \quad n \in Z_0^+, \quad (6.4.16)$$

სადაც  $A_n$  მუდმივა ვერ-ვერობით არ არის განსაზღვრული.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ერთ-ერთი ნებისმიერი მუდმივა (6.4.13)-

ში, ვისარგებლოთ გამოსხივების (6.4.3) პირობით. ამ პირობას მიესადაგება ფორმა, რომელიც გამოყოფს წყრორსაგან განშორებად ამონახსნს და მას აქვს სახე [17]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (Q'(r) - ikQ(r)) = 0. \quad (6.4.17)$$

თუ ჩავსვამთ (6.4.13)-ს (6.4.17)-ში, მივიღებთ  $D = 0$ .

ამრიგად, (6.4.9)-ის თანახმად, განხილული სახის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს როგორც სასაზღვრო პირობებს (6.4.8), ასევე გამოსხივების (6.4.17) პირობას, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$U_{0n}(x) = A_n \sin(\beta_n z) H_0^{(1)}(k \lambda_n r), \quad n \in Z_0^+. \quad (6.4.18)$$

ყოველ ამონახსნს (6.4.18) “ნორმალური მოდა” ან უბრალოდ “მოდა” ეწოდება. მოდებს გავრცელებადი ეწოდება, თუ  $\lambda_n$  ნამდვილია და დადებითი, და მიღევადი, თუ  $\lambda_n$ -ებს აქვთ დადებითი წარმოსახვითი ნაწილი, რადგანაც ამ შემთხვევაში  $H_0^{(1)}(k \lambda_n r)$  ექსპონენციალურად კლებულობს  $r$ -ის ზრდის გამო. (6.4.15)-დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს მხოლოდ  $M+1$  გავრცელებადი მოდა, (სადაც  $M$  - უდიდესი მთელი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება  $\frac{k}{\pi} - \frac{1}{2}$ ) და უსასრულოდ ბევრი მიღევადი მოდა.

ამრიგად, ნორმალური ტალღები ვრცელდება წყლის ფენაში მიღევალობის გარეშე, თუ

$$1 - \frac{\beta_n^2}{k^2} > 0, \quad k > \pi(n+0,5),$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} > \pi(n+0,5), \quad \lambda < \frac{2}{n+0,5}, \quad n \in Z_0^+, \quad \max_{n \in Z_0^+} \frac{2}{n+0,5} = 4,$$

$\lambda$  - ტალღის სიგრძეა, ამიტომ თუნდაც ერთი გავრცელებადი მოდის არსებობისათვის, აუცილებელია  $\lambda < 4$ , ე.ი. როცა წყლის ფენის (ტალღსატარი) სიღრმე (უგანზომილებო სახით ერთის ტოლია) მეტია ტალღის სიგრძის მეოთხედისა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა  $\lambda > 4$ , არ არსებობს ისეთი  $n \in Z_0^+$ , რომელთათვის  $\lambda_n$  იქნება ნამდვილი სიდიდე.

სიხშირეს, რომლისათვის  $\lambda = 4$ , ტალღსატარის კრიტიკული სიხშირე ეწოდება. ტალღები კრიტიკულზე ნაკლები სიხშირით, წყლის ფენაში პრაქტიკულად არ ვრცელდება.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ  $U_0(x)$ , ის წარმოვიდგინოთ მოდების ჯგამის სახით (სუპერპოზიციის პრინციპი; სასაზღვრო ამოცანის (6.4.7), (6.4.8) წრფივობის გამო მისი ამონახსნთა სივრცე წრფივია)

$$U_0(x) = U_0(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{0n}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\beta_n z) H_0^{(1)}(k\lambda_n r). \quad (6.4.19)$$

(6.4.19)-ის ჩასმა (6.4.7)-ში, შემდეგი ტოლობის გათვალისწინებით [32,84]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \lambda_n^2\right) H_0^{(1)}(k\lambda_n r) = \frac{4i\delta(r)}{2\pi r}, \quad (6.4.20)$$

სადაც გამოყენებულია ღირაკის  $\delta$ -ფუნქციის თვისება

$$\delta(x - x^0) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z - z^0) = \delta(z - z^0) \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad (6.4.21)$$

მოგვეცემა განტოლებას

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \beta_n z = \frac{i}{4} \delta(z - z^0). \quad (6.4.22)$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ (6.4.22)-დან  $A_n$ , გავამრალთ ტოლობა (6.4.22)  $\sin \beta_m z$ -ზე,  $m \in Z_0^+$  და ვაინტეგრირთ  $z$ -ით  $z = -1$  დან  $z = 0$ -მდე. ამის შედეგად, მივიღებთ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-1}^0 \sin \beta_n z \sin \beta_m z dz = \frac{i}{4} \int_{-1}^0 \sin \beta_m z \delta(z - z^0) dz, \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{2} \delta_{mn} = \frac{i}{4} \sin \beta_m z^0. \quad (6.4.23)$$

აქ გათვალისწინებულ იქნა  $[-1, 0]$  მონაკვეთზე საკუთარი ფუნქციების  $\{\sin \beta_n z\}_{n=0}^{\infty}$  ორთოგონალურობა ერთეულოვანი წონით და ღირაკის  $\delta$ -ფუნქციის თვისება

$$\int_a^b f(z) \delta(z - z^0) dz = f(z^0), \quad z^0 \in (a, b),$$

ხოლო  $\delta_{mn}$  - კრონეკერის სიმბოლოება.

(6.4.23)-დან მარტივად მივიღებთ

$$A_m = \frac{i}{2} \sin \beta_m z^0. \quad (6.4.24)$$

საბოლოოდ, (6.4.24)-ის ჩასმა (6.4.19)-ში, მოგვცემს  $U_0(x)$  ფუნქციის წარმოდგენას ნორმალური მოდების სახით

$$U_0(x) = U_0(r, z) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\beta_n z^0) \cdot \sin(\beta_n z) H_0^{(1)}(k\lambda_n r). \quad (6.4.25)$$

როგორც (6.4.25)-დან გამომდინარეობს, ბგერითი ველი წყლის ფენაში შეიძლება წარმოდგენილ იქნას “ნორმალური ტალღების” ერთობლიობის სახით, რომელთაგან ყოველი ცალკე აკმაყოფილებს პელშოლცის ერთგვაროვან განტოლებას (6.4.7), სასაზღვრო პირობებს (6.4.8) და ვრცელდება ფენის გასწვრივ სიჩქარით:

$$c_n = \frac{\omega}{k \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{k}\right)^2}}, \quad n \in Z_0^+.$$

*შენიშვნა 1.* ბგერითი წნევა  $U_0(x)$  განსაკუთრებით მოხერხებულად გამოითვლება (6.4.25)-ის მეშვეობით, როცა  $kr$  დიდია. ამ შემთხვევაში გასათვალისწინებელია მხოლოდ სასრულო რაოდენობის გავრცელებადი მოდები, რადგანაც მიღვეადი მოდები საგრძნობლად მცირეა.

*შენიშვნა 2.* ფუნქცია  $U_0(r, z)$  სიმეტრიულია შეფარდებით  $z$  და  $z^0$  - სა.

ნულოვანი რიგის პირველი გვარის პანკელის ფუნქციის არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის ასიმპტოტიკის გათვალისწინებით [70,84]

$$H_0^{(1)}(k\lambda_n r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\lambda_n r}} e^{i(k\lambda_n \frac{\pi}{4})} + O\left[(k\lambda_n r)^{-3/2}\right], \quad r \rightarrow \infty \quad (6.4.26)$$

მივიღებთ შეზღუდვას  $\lambda_n$ -ზე, რადგანაც კვადრატული ფესვის შტო (6.4.15) -ში აირჩევა პირობიდან

$$\operatorname{Im} \lambda_n \geq 0, \quad (6.4.27)$$

რაც შეესაბამება ბგერითი ტალღის მიღვეადობას უსასრულობაზე ( $r \rightarrow \infty$ ).

ხოლო ასიმპტოტიკა არგუმენტის მცირე მნიშვნელობებისათვის [70,84]

$$H_0^{(1)}(k\lambda_n r) \cong \frac{2i}{\pi} \ln(k\lambda_n r), \quad k\lambda_n r \rightarrow 0_+ \quad (6.4.28)$$

ძილვა შეზღუდვას უგანზომილებო ტალღურ რიცხვზე ( $k - ზე$ )

$$k \neq (s + 0,5)\pi, \quad s \in Z_0^+. \quad (6.4.29)$$

*შენიშვნა 3.* (6.4.29) შეზღუდვა უგანზომილებო ტალღურ რიცხვზე შემოღებულია იმისათვის, რომ გამოერიცხოთ განივი რეზონანსი, რომლისათვის  $s$  ნომრის შესაბამისი მოდის (ნორმალური ტალღის) ამპლიტუდა უსასრულოდ იზრდება.

3.  $U_1(x)$  პირველი მიახლოებისათვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას:

$$(\Delta + k^2)U_1(x) = -k^2\eta(x)U_0(x), \quad -1 < z < 0, \quad (6.4.30)$$

$$U_1(x)|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_1(x)}{\partial z} \right|_{z=-1} = \psi(x'),$$

$$\psi(x') \equiv \left( \nabla' U_0(x) \cdot \nabla' f(x') - \frac{\partial^2 U_0(x)}{\partial z^2} f(x') \right) \Big|_{z=-1},$$

$$\nabla' \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

შემოვიღოთ სასაზღვრო პირობების მანულისებელი გარდაქმნა

$$W(x) = U_1(x) - z\psi(x'). \quad (6.4.31)$$

მაშინ (6.4.30), (6.4.31)-დან  $W(x)$  ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას:

$$(\Delta + k^2)W(x) = -z(\Delta_2 + k^2)\psi(x') - k^2\eta(x)U_0(x) \quad (6.4.32)$$

$$W(x)|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W(x)}{\partial z} \right|_{z=-1} = 0.$$

(6.4.32)-ის ამონახსნის ინტეგრალური ფორმა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$W(x) = \sum_{j \geq 0} W_j(x') \sin(\beta_j z), \quad (6.4.33)$$

$$W_j(x') = -\frac{i}{4} \int_{\Omega_0} H_0^{(1)}(k\lambda_j |x' - y'|) h_j(y') dy',$$

$$h_j(x') = 2 \int_{-1}^0 h(x) \sin(\beta_j z) dz,$$

$$h(x) = -z(\Delta_2 + k^2)\psi(x') - k^2\eta(x)U_0(x),$$

სადაც  $H_0^{(1)}$  - პირველი გვარის ნულოვანი რიგის ჰანკელის ფუნქციაა.

(6.4.33)-ში ზოგიერთი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ (გავითვალისწინებთ მხოლოდ გავრცელებად მოდებს)

$$W(x) = \frac{i}{2} \sum_{s=0}^M \sin(\beta_s z) \left\{ \frac{4i(-1)^s}{\beta_s^2} \psi(x') + \frac{ik^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\beta_n z^0) \frac{\int I_{sn}(y') H_0^{(1)}(r_n) H_0^{(1)}(\rho_s) dy'}{\Omega_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{ik^2}{2} (-1)^s \int_{\Omega} f(y') G_s(x', y') dy' + \right.$$

$$\left. + 2(-1)^s \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\beta_n z^0) f(0) H_0^{(1)}(k\lambda_s r) \right\},$$

$$I_{sn}(y') = \int_{-1}^0 \eta(y) \sin(\beta_n z) \sin(\beta_s z) dz,$$

$$G_s(x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\beta_n z^0) \times$$

$$\times \left[ H_0^{(1)}(\rho_s) H_0^{(1)}(r_n) + \lambda_n \lambda_s H_1^{(1)}(\rho_s) H_1^{(1)}(r_n) \cos \theta \right],$$

$$\rho_s \equiv k\lambda_s |x' - y'|, \quad r_n \equiv k\lambda_n |y'|, \quad M = \left[ \frac{k}{\pi} - \frac{1}{2} \right] \text{ (მთელი ნაწილი),}$$

სადაც  $\theta$  - კუთხეა  $y'$  და  $(x' - y')$  ვექტორებს შორის,  $H_1^{(1)}$  - პირველი გვარის პირველი რიგის ჰანკელის ფუნქციაა.

$U_1(x)$  ფუნქცია მარტივად მიიღება (6.4.31) და (6.4.34)-დან.

ფორმულა (6.4.34) იძლევა ბგერითი ველის შემფოთებისათვის მოდურ წარმოდგენას.

განვიხილავთ რა  $s$  ფიქსირებული ნომრის მოდის გავრცელებას,



ვნახავთ, რომ აკუსტიკური ველის შემოთქმას  $U_1(x)$  აქვს განშლადი მეორადი ტალღების კონტინუალური ჯამის სახე, რომელთა "წყაროება", გარემოს არაერთგვაროვნობა ( $\eta(x) \neq 0$ ) და ფსკერის უსწორობა ( $f(x) \neq 0$ ), ამასთან ამ ტალღების ამპლიტუდები  $\varepsilon$ -ის პროპორციულია და დამოკიდებულია ყველა მოდის (ნორმალური ტალღის) პარამეტრებზე.

ამ თვალსაზრისით, გაბნევის პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ბგერითი ტალღის ენერჯიის გადასვლა მოცემული მოდის ნომრიდან (დაცემული ტალღა) სხვა ნომრების მოდებისაკენ (გაბნეული ტალღები). ამრიგად, გარემოს არაერთგვაროვნობა და ფსკერის უსწორობა ახორციელებენ კავშირს სხვადასხვა ნომრიან მოდებს შორის, რომლებიც სრულიად დამოუკიდებელი იქნებოდნენ ტალღსატარში ყოველნაირი არაერთგვაროვნობის გარეშე.

აგრეთვე უნდა აღინიშნოს ფორმულა (6.4.34)-ში ორი ტიპის შესაკრების არსებობა: პირველი (მხოლოდ  $\rho_s, \Gamma_0$ -ზე დამოკიდებული) შეესაბამება "ელემენტარული წყაროს" მიერ ტალღების არამიმართულ, ხოლო მეორე (აგრეთვე დამოკიდებულს  $\theta$  - კუთხეზე  $y'$  და  $(x' - y')$  ვექტორებს შორის) მიმართულ გამოსხივებებს, ამასთან პირველ შემთხვევაში "წყარო" იმყოფება  $y' \in \overline{\Omega_0}$  წერტილში, ხოლო მეორეში -  $y' \in \Omega$  წერტილში.

მიღებული (6.4.25), (6.4.34) ფორმულები ანალიზურად აღწერენ ბგერის გაბნევას გარემოს არაერთგვაროვნებისა (რეფრაქცია) და პატარა წყალქვეშა გორაკების მეშვეობით.

*შენიშვნა 4.* რეგულარული ასიმპტოტური დაშლა (6.4.6)-ის თანაბრობის მოთხოვნას [68]

$$U_{j-1}(x) \gg \varepsilon U_j(x), \quad j \in N \quad (6.4.35)$$

პანკელის ფუნქციის ასიმპტოტიკის გათვალისწინებით მივყავართ

$$\varepsilon k \ll 1 \quad (6.4.36)$$

პირობამდე, რაც მცირე სიხშირეებს შეესაბამება (დაბალსიხშირიანი ან გრძელტალღოვანი მიახლოება).

*შენიშვნა 5.* თუ შემოვისაზღვრებით დაშლა (6.4.6)-ის მხოლოდ ორი წევრით, მაშინ ცდომილება მცირე იქნება

$$r \lesssim O(\varepsilon^{-1})$$

მანძილებზე და იზრდება რადიუსის გაზრდასთან ერთად.

შედეგი 1. (6.4.25), (6.4.34) ფორმულები,  $f(x') \equiv 0$  და, მაგალითად,

$$\eta(z) = a(z - z_1^0) + b(z - z_2^0)^2 + z_3^0$$

შემთხვევა იძლევიან ბრტყელფენოვან ტალღსატარში მყარი, სწორი, ფსკერით ბგერითი ტალღების გაბნევის ამოცანის ამონახსნს, ამასთან  $I_{sn}$  კოეფიციენტებს აქვთ სახე:

$$I_{sn} = \frac{a - 2bz_2^0}{2} \left[ \frac{1 + (-1)^{n-s+1}}{(\beta_n - \beta_s)^2} - \frac{1 + (-1)^{n+s}}{(\beta_n + \beta_s)^2} \right] + b \left[ \frac{(-1)^{n-s}}{(\beta_n - \beta_s)^2} - \frac{(-1)^{n+s+1}}{(\beta_n + \beta_s)^2} \right], s \neq n$$

$$I_{ss} = -\frac{(a - 2bz_2^0)(\beta_s^2 + 1)}{4\beta_s^2} + \frac{b(z_2^0)^2 - az_1^0}{2} + \frac{b(2\beta_s^2 + 3)}{12\beta_s^2} + \frac{z_3^0}{2}$$

შედეგი 2. ერთგვაროვანი ტალღსატარის შემთხვევისათვის ( $\eta(x) \equiv 0$ ), როცა  $M = 0$  (ერთი გავრცელებადი მოლეა, მაგალითად დაბალი სიხშირეები  $\frac{\pi}{2} < k < \frac{3}{2}\pi$ ),

$$\begin{cases} |y'| \gg (k\lambda_0)^{-1}, \\ |x' - y'| \gg (k\lambda_0)^{-1}, \end{cases} \quad (6.4.37)$$

ანუ მანძილები  $x^0$  წყაროდან და  $x(x', z)$  მიმღებიდან  $\Omega$  არაერთგვაროვნობამდე დიდია, აგრეთვე

$$d_j = \underline{0} \left[ (k\lambda_0)^{-1} \right]. \quad (6.4.38)$$

$\Lambda_j$  არეების  $d_j$  ღიაშეტრები მცირეა, როცა  $O(0,0) \notin \text{supp} f(x')$ ,  $x' \in \text{supp} \psi(x')$  (6.4.25), (6.4.31), (6.4.34) –დან მივიღებთ

$$U_1(x) \cong -\frac{ik^2}{2\pi} \sin(\beta_0 z^0) \sin(\beta_0 z) \sum_{j=1}^{\Lambda_j} \int f_j(y') \frac{e^{i(\rho_{0j} + r_{0j})}}{\sqrt{\rho_{0j} r_{0j}}} (1 - \lambda_0^2 \cos \theta_j) dy' \quad (6.4.39)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ

$$f(y') = \sum_{j=1}^l f_j(y') \chi_{\Lambda_j}(y'),$$

სადაც  $\chi_{\Lambda_j}(y')$  - მახასიათებელი ფუნქციაა.

(6.4.39) -ში შემავალი ინტეგრალებისათვის ადგილი აქვს მარტივ შეფასებებს

$$I_j = \int_{\Lambda_j} f_j(y') dy' \leq \bar{f}_j \frac{\pi d_j^2}{4},$$

სადაც  $\bar{f}_j$  -  $\Lambda_j$  არეში  $f_j(y')$  ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობაა.

პატარა წყალქვეშა გორაკებზე (მაგალითად, ელიფსოიდალურებზე) ბგერის დიფრაქციის კონკრეტული რიცხვითი გათვლებისათვის  $f_j(y')$  ფუნქციის სახით შეიძლება ავიღოთ

$$f_j(y') = \sum_{j=1}^l c_j \sqrt{1 - \frac{(y_1 - y_{1j})^2 + (y_2 - y_{2j})^2}{d_j^2}} \theta \left[ 1 - \frac{(y_1 - y_{1j})^2 + (y_2 - y_{2j})^2}{d_j^2} \right],$$

$c_j > 0$ ,  $\theta(z)$  - ხვეისაიდის ფუნქციაა.

*შედეგი 3.* ზღვის მყარი ფსკერის უსწორობებზე ბგერის დიფრაქციის ამოცანაში ფორმულა (6.4.39),  $l = 1$  შემთხვევაში იძლევა საშუალებას გავაკეთოდ შეშლევით დასკვნა:

პატარა წყალქვეშა გორაკის მიერ ბგერის გაბნევისას არეკლილი ტალღის  $x^1$ ,  $x^2$  წერტილებში ინტენსიურობების ფარდობა განისაზღვრება თანაფარდობით:

$$\frac{|U_1(x^1)|^2}{|U_1(x^2)|^2} = \left( \frac{\sin(\beta_0 z^{(1)})}{\sin(\beta_0 z^{(2)})} \right)^2 \left( \frac{1 - \lambda_0^2 \cos \theta_1}{1 - \lambda_0^2 \cos \theta_2} \right)^2 \frac{\rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)}}, \quad (6.4.40)$$

სადაც  $\theta_i, \rho_0^{(i)}, z^{(i)}$  -  $\theta, \rho_0, z$  პარამეტრების მნიშვნელობებია  $x^i$  ( $i = 1, 2$ ) წერტილებისათვის.

ფორმულა (6.4.40) აჩვენებს, რომ ერთადერთი წყალქვეშა გორაკზე არეკლილი ბგერითი ტალღის ინტენსივობა არაერთგვაროვნობაზე მანძილის უკუპროპორციულია.

§ 6.5. პარამონიული წერტილოვანი ფაროების  
ბგერითი ველის მოდელირება ოქტანეში (ზღვარში)

არაერთგვაროვან ტალღსატარებში ბგერის გავრცელების თეორიული გამოკვლევების უმრავლესობაში უგულვებელყოფენ ზედაპირის მაღლობსა და შთანთქმას არაერთგვაროვან თხევად ფსკერში [26].

მაგრამ ბგერით სიგნალებს, რომლებიც ეცემიან ფსკერზე საკმაოდ მცირე კუთხით, შეუძლიათ შეღწევა და გავრცელება ფსკერულ ფენებში. ყოველ შემთხვევაში, ტალღები, რომლებიც შეაღწევენ ფსკერში საკმაოდ დიდ სიღრმეზე, უკვე ვერ დაბრუნდებიან წყალში ისეთ ძლიერად, რომ მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანონ დიდ დისტანციებზე გავრცელების საქმეში, ამიტომ აკუსტიკის ამოცანების მოდელირებისას, აუცილებელია დანაკარგების (შთანთქმა) გათვალისწინება თხევად არაერთგვაროვან ფსკერში [26,91,92].

1. მათემატიკური მოდელის სახით განვიხილოთ ამოცანა სასრულო რაოდენობის წერტილოვანი პარამონიული წყაროების მიერ შექმნილი ბგერითი ველის განსაზღვრაზე სივრცით არაერთგვაროვან ტალღსატარში აღეგებულები ზედაპირით და უსწორო ფსკერით [91,92].

პარამონიული წერტილოვანი წყაროების მიერ გამოსხივებული ბგერითი წნევა წყლის ფენის  $x = (x_1, x_2, z)$  წერტილში აღიწერება გამოსახულებით

$$p(x, t) = \operatorname{Re} [U_\varepsilon(x) e^{-i\omega t}],$$

სადაც ბგერითი ველის კომპლექსური ამპლიტუდა  $U_\varepsilon(x)$  (საძიებელი ფუნქციაა  $\Omega_1 = \bar{\Omega}_0 \times (-1 + \varepsilon f(x'), \varepsilon g(x'))$  არეში) არის შემდეგი შეუღლებული ამოცანის ამონახსნი

$$(\Delta + k^2 n^2(x)) U_\varepsilon(x) = - \sum_{j=1}^m \delta(x - x_j^0), \quad -1 + \varepsilon f(x') < z < \varepsilon g(x'), \quad (6.5.1)$$

$$U_\varepsilon(x)|_{z=\varepsilon g(x')} = 0, \quad (U_\varepsilon(x) - u(x))|_{z=-1+\varepsilon f(x')} = 0, \quad (6.5.2)$$

$$\left( \frac{\partial U_\varepsilon(x)}{\partial s_\varepsilon} - \mathfrak{R}^{-1} \frac{\partial u(x)}{\partial s_\varepsilon} \right) \Big|_{z=-1+\varepsilon f(x')} = 0,$$

$$(\Delta + k^2 n_1^2) u(x) = 0, z < -1 + \varepsilon f(x'), \quad (6.5.3)$$

$$U_\varepsilon(x) \rightarrow 0, u(x) \rightarrow 0, \quad |x - x_j^0| \rightarrow \infty, \quad j \in \overline{1, m}, \quad \text{Im } \omega > 0, \quad (6.5.4)$$

სადაც  $n^2(x)$  - წყლის ფენის გარდატეხის მაჩვენებლის კვადრატია,  $n_1^2$  - თხევადი ფსკერის გარდატეხის მაჩვენებლის კვადრატია,  $z = \varepsilon g(x')$ ,  $x' = (x_1, x_2)$  - წყლის ზედაპირის განტოლება (ზედა საზღვარი),  $g(x') \geq 0$  - ზოგიერთი  $\bar{\Omega}_0$ -ზე მოცემული გლუვი ფუნქციაა,  $z = -1 + \varepsilon f(x')$  - თხევადი ფსკერის განტოლება (ქვედა საზღვარი),  $k$  - უგანზომილებო ტალღური რიცხვია, ამასთან განზომილებიანი ფიზიკური პარამეტრის სახით აღებულია ტალღსატარის სიღრმე,  $x_j^0 = (0, 0, z_j)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  - წყაროების მდებარეობის წერტილებია,  $f(x') \geq 0$  - მხოლოდ ზოგიერთ შემოსაზღვრულ  $\Omega$  სიმრავლეზე ნულისაგან განსხვავებული გლუვი ფუნქციაა

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^l \Lambda_j, \quad l > 1, \quad \bigcap_{j=1}^l \Lambda_j = \emptyset, \quad l \in \mathbb{N},$$

სადაც  $l$  - ფსკერის უსწორობების რიცხვია,  $s_\varepsilon$  - ერთეულოვანი ნორმალთა საზღვრისაკენ, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$\begin{aligned} s_\varepsilon(x', -1 + \varepsilon f(x')) &= \left( 1 + \varepsilon^2 |\nabla' f(x')|^2 \right)^{-1/2} \left( -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}, -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right) = \\ &= (0, 0, 1) - \varepsilon \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, 0 \right) + \underline{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

$\mathfrak{R}^{-1} = \rho_1 / \rho_2$  - წყლის ფენის სიმკვრივის ფარდობა თხევადი ფსკერის სიმკვრივესთან.

ცხადია რომ სასაზღვრო ამოცანა (6.5.1) - (6.5.5) ანალიზურად ზუსტად არ ამოიხსნება.

2. მრავალრიცხოვანი ექსპერიმენტული მონაცემებიდან გამომდინარეობს, რომ რეალურ სიტუაციებში (ოკეანეს ან ზღვის

რეალური მონაცემები) წყლის ფენის გარდატეხის მაჩვენებლის კვადრატი ახლოს არის ერთთან [53]. გადახრა  $10^{-2}$  რივისაა.

ამის გათვალისწინებით ჩვენს მიერ შემოღებულ იქნა მცირე პარამეტრი [90]

$$n^2(x) = 1 + \varepsilon \eta(x),$$

$$\eta(x) \in C(\Omega_1), \quad \max_{x \in \Omega_1} \text{mod } \eta(x) \leq \underline{O}(1), \quad \varepsilon = \underline{O}(10^{-2}).$$

მოდელში ჩვენ ვთვლით, რომ ფსკერის უსწორობის და აღელვებული ზედაპირის ვერტიკალური ზომის ფარდობა ტალღსატარის სიღრმესთან მცირე  $\varepsilon$  პარამეტრის რივისაა, რაც გათვალისწინებულია თხევადი ფსკერის

$$z = -1 + \varepsilon f(x')$$

და აღელვებული ზედაპირის

$$z = \varepsilon g(x')$$

განტოლებებში.

რეალურ სიტუაციებში წყლის ფენის სიმკვრივე ბევრად ნაკლებია ფსკერის სიმკვრივეზე.

მაგალითად, მყარი ფსკერის მათემატიკური მოდელისათვის შეფარდება

$$\varpi^{-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

ნულის ტოლად ითვლება (§ 6.4).

ჩვენ აქ განვიხილავთ თხევადი ფსკერის საკმაოდ რეალურ მათემატიკურ მოდელს, როცა

$$\varpi^{-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \alpha \varepsilon, \quad \alpha = \underline{O}(1),$$

რაც, თუნდაც პირველ მიახლოებაში, საშუალებას იძლევა გაითვალისწინოთ ბგერის გავრცელება ფსკერში.

შეუღლებული ამოცანის (6.5.1) - (6.5.5) ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მცირე პარამეტრის ასიმპტოტური მეთოდით [90].

რადგანაც  $\varepsilon$  მცირე პარამეტრი (6.5.1), (6.5.3) განტოლებებში და სასაზღვრო პირობებში (6.5.2), (6.5.5) შედის რეგულარული სახით, ამიტომ შემოფოტების თეორიის თანახმად ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ რეგულარული ასიმპტოტური დაშლის სახით

$$U_\varepsilon(x) = \sum_{j \geq 0} U_j(x) \varepsilon^j, \quad (6.5.6)$$

სადაც მწკრივის  $U_j(x), j \geq 0$  კოეფიციენტები მოიძებნება როგორც არაშეშვოთებულ ტალღსატარში კელმპოლცის არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის ზოგიერთი სასაზღვრო შეუღლებული ამოცანების ამონახსნები.

(6.5.6) დაშლის კოეფიციენტები გამოითვლება რეკურენტული სახით. პრაქტიკულად კი, საკმარისია ვიპოვოთ ნულოვანი  $U_0(x)$  და პირველი  $U_1(x)$  მიახლოებები.

ამრიგად, (6.5.6) ასიმპტოტიკის მთავარი წევრისათვის  $U_0(x)$  მივიღებთ შემდეგ შეუღლებულ ამოცანას

$$(\Delta + k^2)U_0(x) = -\sum_{j=1}^m \delta(x - x_j^0), \quad -1 < z < 0, \quad (6.5.7)$$

$$U_0(x)|_{z=0} = 0, \quad U_0(x)|_{z=-1} = u(x)|_{z=-1},$$

$$\left. \frac{\partial U_0(x)}{\partial z} \right|_{z=-1} = 0,$$

$$(\Delta + k^2 n_1^2)u(x) = 0, z < -1. \quad (6.5.8)$$

(6.5.7) -ის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$U_0(x) = U_0(r, z) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \sin(\beta_n z_j) \cdot \sin(\beta_n z) H_0^{(1)}(k \lambda_n r), \quad (6.5.9)$$

$$r = |x'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \beta_n = (0,5 + n)\pi, \quad n \in Z_0^+ = N \cup \{0\},$$

$$\lambda_n = \left(1 - \beta_n^2/k^2\right)^{1/2}.$$

მაშინ, (6.5.2)-დან გამომდინარე შეუღლების პირობიდან

$$U_0(x)|_{z=-1} = u(x)|_{z=-1},$$

(6.5.9)-ის გათვალისწინებით, მარტივად მიიღება (6.5.8) განტოლების ამონახსნი

$$u(x) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m (-1)^{n+1} \sin(\beta_n z_j) e^{k \sqrt{\lambda_n^2 - n_1^2} (z+1)} H_0^{(1)}(k \lambda_n r). \quad (6.5.10)$$

გამოსხვიების (6.5.4) პირობას, რომელიც შეესაბამება

უსასრულობაზე ( $r \rightarrow \infty$ ) ბგერითი ტალღის მიღვეალობას, მივყავართ შეზღუდვისკენ  $\lambda_n$ -ზე, რადგანაც კვადრატული ფესვის შტო (6.5.9) -ში აიღება პირობიდან

$$\operatorname{Im} \lambda_n \geq 0.$$

გავრცელებადი მოდების შემთხვევაში  $\lambda_n$  ნამდვილი და დადებითია, ამიტომ ფსკერში ამონახსნის უსასრულობაზე ( $z \rightarrow -\infty$ ) მიღვეალობისათვის, აუცილებელია შემდეგი პირობის შესრულება

$$\lambda_n^2 > n_1^2.$$

3.  $U_1(x)$  პირველი მიახლოებისათვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$(\Delta + k^2)U_1(x) = -k^2 \eta(x)U_0(x), \quad -1 < z < 0, \quad (6.5.11)$$

$$U_1(x)|_{z=0} \equiv \varphi(x'), \quad \left. \frac{\partial U_1(x)}{\partial z} \right|_{z=-1} = \psi(x'),$$

$$\varphi(x') \equiv - \left. \frac{\partial U_0(x)}{\partial z} \right|_{z=0} g(x'),$$

$$\psi(x') \equiv \left( \nabla' U_0(x) \cdot \nabla' f(x') - \frac{\partial^2 U_0(x)}{\partial z^2} f(x') \right) \Big|_{z=-1},$$

$$\nabla' \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

$$\mu(r) \equiv \alpha \left. \frac{\partial u(x)}{\partial z} \right|_{z=-1} =$$

$$= \frac{\alpha k i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m (-1)^{n+1} \sqrt{\lambda_n^2 - n_1^2} \sin(\beta_n z_j) H_0^{(1)}(k \lambda_n r).$$

შემოვიღოთ სასაზღვრო პირობების მანულისებელი გარდაქმნა

$$W(x) = U_1(x) - z(\psi(x') + \mu(r)) - \varphi(x'). \quad (6.5.12)$$

მაშინ  $W(x)$  ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას:

$$(\Delta + k^2)W(x) = -(\Delta_2 + k^2)z(\psi(x') + \mu(r)) + \varphi(x') - k^2 \eta(x)U_0(x), \quad (6.5.13)$$

$$W(x)|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W(x)}{\partial z} \right|_{z=-1} = 0.$$



(6.5.13)-ის ამონახსნის ინტეგრალური ფორმა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$W(x) = \sum_{j \geq 0} W_j(x') \sin(\beta_j z), \quad (6.5.14)$$

$$W_j(x') = -\frac{i}{4} \int_{\Omega_0} H_0^{(1)}(k\lambda_j |x' - y'|) h_j(y') dy'$$

$$h_j(x') = 2 \int_{-1}^0 h(x) \sin(\beta_j z) dz,$$

$$h(x) \equiv -(\Delta_2 + k^2) [z(\psi(x') + \mu(r)) + \varphi(x')] - k^2 \eta(x) U_0(x),$$

სადაც  $H_0^{(1)}$  - პირველი გვარის ნულოვანი რიგის ჰანკელის ფუნქციაა.

(6.5.14)-ში ზოგიერთი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ (გავითვალისწინებთ მხოლოდ გავრცელებად მოდებს)

$$\begin{aligned} W(x) = & \frac{i}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^M \sin(\beta_s z) \times \\ & \times \left\{ (-1)^s \frac{\alpha k i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n^2 - n_1^2} (-1)^{n+1} \sin(\beta_n z_j) \int_{\Omega_0} H_0^{(1)}(r_n) H_0^{(1)}(\rho_s) dy' + \right. \\ & + \frac{4i(-1)^s}{\beta_s^2} (\psi(x') + \mu(r)) + \\ & + \frac{ik^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\beta_n z_j) \int_{\Omega_0} I_{sn}(y') H_0^{(1)}(r_n) H_0^{(1)}(\rho_s) dy' + \\ & + \frac{ik^2}{2} (-1)^s \int_{\Omega} f(y') G_{sj}(x', y') dy' \left. + \right. \\ & + 2(-1)^s \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\beta_n z_j) f(0) H_0^{(1)}(k\lambda_s r) + \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\beta_n z_j) \int_{\Omega_0} H_0^{(1)}(\rho_s) (\Delta_2 + k^2) H_0^{(1)}(r_n) g(y') dy' \right\}, \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

$$I_{sn}(y') = \int_{-1}^0 \eta(y) \sin(\beta_n z) \sin(\beta_s z) dz,$$

$$G_{sj}(x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\beta_n z_j) \times \\ \times [H_0^{(1)}(\rho_s) H_0^{(1)}(r_n) + \lambda_n \lambda_s H_1^{(1)}(\rho_s) H_1^{(1)}(r_n) \cos \theta].$$

$$\rho_s \equiv k \lambda_s |x' - y'|, r_n \equiv k \lambda_n |y'|, M = \left[ \frac{k}{\pi} - \frac{1}{2} \right] \text{ (მთელი ნაწილი),}$$

სადაც  $\theta$  - კუთხეა  $y'$  და  $(x' - y')$  ვექტორებს შორის,  $H_1^{(1)}$  - პირველი გვარის პირველი რიგის ჰანკელის ფუნქციაა.

4. რეგულარული ასიმპტოტური დაშლა (6.5.6)-ის თანაბრობის მოთხოვნას [68]

$$U_{j-1}(x) \gg \varepsilon U_j(x), \quad j \in N,$$

მივყავართ

$$\varepsilon k \ll 1$$

პირობამდე, რაც მცირე სიხშირებს შეესაბამება (დაბალსიხშირიანი ან გრძელტალღოვანი მიახლოება).

თუ შემოვისაზღვრებით დაშლა (6.5.6)-ის მხოლოდ ორი წევრით, მაშინ ამონახსნის გამოყენების არე ხასიათდება

$$r \lesssim O(\varepsilon^{-1})$$

რადიუსით.

საბოლოოდ (6.5.9), (6.5.15)-ის აჯამებით (6.5.12), (6.5.6)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ ჰარმონიული წერტილოვანი წყაროების მიერ შექმნილი ბგერითი ველის შემფოთებისათვის მოდურ წარმოდგენას.

განვიხილავთ რა  $s$  ფიქსირებული ნომრის მოდის გავრცელებას, ენახვით, რომ აკუსტიკური ველის  $U_1(x)$  შემფოთებას აქვს განმლაღი მეორადი ტალღების კონტინუალური ჯამის სახე, რომელთა "წყაროებია", გარემოს არაერთგვაროვნობა ( $\eta(x) \neq 0$ ) და

საზღვრების უსწორობა ( $f(x') \neq 0, g(x') \neq 0$ ), ამასთან ამ ტალღების ამპლიტუდები  $\varepsilon$ -ის პროპორციულია და დამოკიდებულია ყველა მოდის (ნორმალური ტალღის) პარამეტრებზე.

ამ თვალსაზრისით, გაბნევის პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ბგერითი ტალღის ენერჯის გადასვლა მოცემული მოდის ნომრიდან (დაცემული ტალღა) სხვა ნომრების მოდებისაკენ (გაბნეული ტალღები). ამრიგად, გარემოს არაერთგვაროვნობა და საზღვრების უსწორობა ახორციელებენ კავშირს სხვადასხვა ნომრების მოდებს შორის, რომლებიც სრულიად დამოუკიდებელი იქნებოდნენ ტალღსატარში ყოველნაირი არაერთგვაროვნობის გარეშე.

*"უმნიშვნელოვანესი ფაქტია ის, რომ მეცნიერებების მიერ დაბატული ბუნების ყველა სურათი, რომელიც შეიძლება იყოს შესაბამისობაში მხოლოდ დაკვირვებებთან, მათემატიკური სურათებია.... მათემატიკური ფორმულების საზღვრებს გარეშე, მსჯელობისას გავდივართ ჩვენს შიშსა და რისკზე"*  
ასტროფიზიკოსი ჯეიმს ჯინსი

## თ ა ვ ი VII

### მექანიკის არაწრფივი მოძღვრება

**§7.1. უწყვეტი გარემოს მათემატიკური მოძღვრების შესახებ.  
შენახვის კანონების ინტეგრალური და დიფერენციალური  
ფორმები**

განვიხილოთ მატერიალური ობიექტი, რომლის ქვეშ ვგულისხმობთ ყოველგვარ სხეულს, რომელსაც შესწავლის პროცესში შეუძლია ნებისმიერად იცვალოს ფორმა და მდებარეობა სივრცეში. ასეთებს განეკუთვნებიან გაზები, სითხეები ან მყარი სხეულები, რომელთაც სივრცეში გარკვეული მოცულობა უკავიათ. მრავალრიცხოვანი დაკვირვებიდან ცნობილია, რომ მატერიალურ ობიექტებს მოლეკულური აგებულება აქვთ, ამასთან, რაგინდ მცირე არ უნდა ავიღოთ სხეულის მოცულობის ელემენტი, ის თვითონ უამრავ მოლეკულას შეიცავს. თუ ვიგულისხმებთ, რომ სხეული დაყოფილია ამგვარ ელემენტებად, ისინი შეიძლება პრაქტიკულად უსასრულო მცირეებად ჩავთვალოთ, და დავახასიათოთ სიჩქარის, აჩქარების და მოლეკულებზე მოქმედი ძალების საშუალო მნიშვნელობებით. ასე, შეიძლება მივიღოთ წარმოდგენა უწყვეტ გარემოზე, როგორადაც ჩვენ ამ თავში განვიხილავთ სხეულებს. მატერიალური ობიექტების უწყვეტ გარემოდ მიღება გვაძლევს საშუალებას, გამოვიყენოთ მათემატიკური ანალიზის მძლავრი აპარატი.

მექანიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მატერიალური ობიექტების მოძრაობასა და წონასწორობას სივრცესა და დროში.

მექანიკის ის ნაწილი, რომელიც ცნობილია თეორიული მექანიკის სახელით, მოიცავს მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის

მათემატიკური აღწერის მეთოდებს. მექანიკური მოძრაობა კი ეწოდება სხეულების ფარდობით გადაადგილებას.

თეორიული მექანიკის განტოლებები სრულად აღწერენ მატერიალურ წერტილთა სისტემებისა და აბსოლუტურად მყარი სხეულების (ე.ი. ისეთი მყარი სხეულების, რომელთა ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია დროში, მიუხედავად იმისა, თუ როგორი ძალები მოქმედებენ მათზე) მოძრაობას. თუ მყარი სხეულის განხილვის პროცესში მასზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილი დროებით ან მუდმივად იცვლება, მაშინ მათ დეფორმად მყარ სხეულებს, ხოლო სხეულის წერტილთა მდებარეობის ასეთ ცვლილებას დეფორმაციას უწოდებენ.

დეფორმადი მყარი სხეულების, ან გაზების და სითხეების მოძრაობის დასახასიათებლად თეორიული მექანიკის განტოლებები უკვე არ გამოდგება.

მექანიკის იმ დარგს, რომელიც დეფორმად მყარ სხეულებს, გაზებს და სითხეებს შეისწავლის, უწვევებთ გარემოთა (სხეულთა) მექანიკა ეწოდება [15,77].

უწყვეტი გარემოთა მექანიკა იყოფა ჰიდრომექანიკად, გაზოდინამიკად, ან რაც იგივეა, სითხეებისა და გაზების მექანიკად და დეფორმადი მყარი სხეულების მექანიკად.

უწყვეტი გარემოს მათემატიკური მოდელის განსაზღვრა ნიშნავს: დაესვათ სრული შეკრული განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს უწყვეტი გარემოს მოძრაობას ან წონასწორობას [75].

უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი მოდელისათვის სრული განტოლებათა სისტემა შედგება:

1<sup>0</sup>. ნიუტონის არარელატივისტური მექანიკის უნივერსალური განტოლებებისაგან, რომელთა შესრულება აუცილებელია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის: მასის შენახვის კანონი; მოძრაობის რაოდენობის (იმპულსი) შენახვის კანონი; მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონი; სრული ენერჯიის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის I კანონი); ენტროპიის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის II კანონი).

2<sup>0</sup>. კონკრეტული უწყვეტი გარემოს თვისების განმსაზღვრელი თანაფარდობებისაგან.

მაგალითად,

სრულყოფილი გაზის მდგომარეობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე [88]:

$$p = A \cdot e^{s/c_v} \rho^\gamma, \quad (7.1.1)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} > 1, R = R_0/\mu,$$

სადაც  $A$  - ზოგიერთი დადებითი მუდმივაა,  $R_0$  - უნივერსალური გაზური მუდმივაა,  $\mu$  - გაზის მოლეკულური წონაა,  $c_p$  - კუთრი სითბოტევადობაა პროცესში მუდმივი წნევით,  $c_v$  - კუთრი სითბოტევადობაა პროცესში მუდმივი მოცულობით,  $p$  - წნევაა,  $\rho$  - სიმკვრივეა,  $s$  - ენტროპიაა,  $\gamma$  - პუასონის მაჩვენებელია.

შენახვის კანონები მოიცემა ინტეგრალური ფორმით, უწყვეტი გარემოს სასრულო ინდივიდუალური მოცულობებისათვის.

თუ უწყვეტი გარემოს მოძრაობა აღიწერება გლუვი ფუნქციებით, მაშინ შენახვის კანონებს მიეყვართ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომელიც სრულდება გარემოს მიერ დაკავებული არის ყოველ წერტილში.

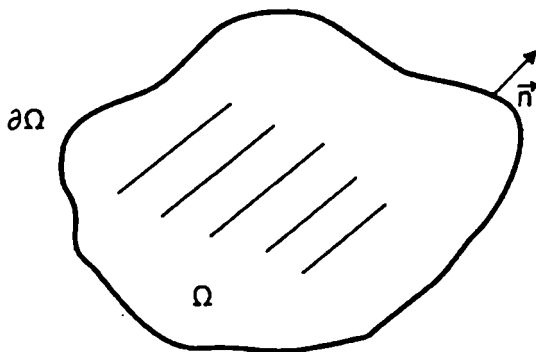
თუ არეში არის გარემოს პარამეტრების წყვეტის ზედაპირები, მაშინ შენახვის კანონების ძალით, პარამეტრების წყვეტები დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან თანაფარდობებით, რომლებსაც ეწოდება პირობები წყვეტის ზედაპირზე.

უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის უნივერსალური შენახვის კანონების ინტეგრალურ ფორმას აქვს შემდეგი სახე [38,39,77]:

ა) მასის შენახვის კანონი: ინდივიდუალური მოცულობის მასა მუდმივა

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x,t) d\tau = 0, \quad (7.1.2)$$

სადაც  $\Omega$  - ინდივიდუალური მოცულობაა,  $\partial\Omega$  -  $\Omega$  არის საზღვარია,  $\bar{\Omega}$  - გარე ნორმალის ვექტორია  $\partial\Omega$ -კენ,  $\rho(x,t)$  - უწყვეტი გარემოს სიმკვრივეა (ნახ. 7.1.1).



ნახ.7.1.1

ბ) მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი (იმპულსის შენახვის კანონი):

ინდივიდუალური მოცულობის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე მასზე მოქმედი გარეგანი ძალების ჯამის ტოლია

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \bar{v} d\tau = \int_{\Omega} \rho \bar{F} d\tau + \int_{\partial\Omega} \bar{P}_n d\sigma, \quad (7.1.3)$$

სადაც  $\bar{v}$  - გარემოს სიჩქარეა,  $\bar{F}$  -  $\Omega$ -ზე მოქმედი გარეგანი ძალების მასური სიმკვრივეა (ძალა მასის ერთეულზე),  $\bar{P}_n$  -  $\partial\Omega$  საზღვარზე მოქმედი ზედაპირული ძალების ზედაპირული სიმკვრივეა (ძალა ფართობის ერთეულზე).

გ) მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონი:

ინდივიდუალური მოცულობის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების სიჩქარე მასზე მოქმედი გარეგანი ძალებისა და წყვილების მომენტების ჯამის ტოლია

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho (\bar{r} \times \bar{v} + \bar{k}) d\tau = \int_{\Omega} \bar{r} \times \rho \bar{F} d\tau + \int_{\partial\Omega} \bar{r} \times \bar{P}_n d\sigma + \int_{\Omega} \rho \bar{h} d\tau + \int_{\partial\Omega} \bar{Q}_n d\sigma, \quad (7.1.4)$$

აქ  $\bar{r}$  - წერტილის რადიუს-ვექტორია,  $\bar{k}$  - მოძრაობის რაოდენობის შინაგანი მომენტების მასური სიმკვრივეა,  $\bar{h}$  და  $\bar{Q}_n$  - მომენტების

გარეგანი მასური და ზედაპირული წყვილების მასური და ზედაპირული სიმკვრივეა.

ღ) ენერგიის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის პირველი კანონი):

ინდივიდუალური მოცულობის სრული ენერგიის ცვლილების სიჩქარე გარედან დროის ერთეულში ენერგიის შენაკადის ტოლია (გარეგანი ძალების მუშაობის, სითბოს და სხვა ფორმით)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) d\tau = \int_{\Omega} \rho \bar{F} \cdot \bar{v} d\tau + \int_{\partial\Omega} \bar{P}_n \cdot \bar{v} d\sigma - \int_{\partial\Omega} q_n^* d\sigma + \int_{\Omega} \rho \frac{dq_{\text{მას}}^*}{dt} d\tau, \quad (7.1.5)$$

სადაც  $u$  - შინაგანი ენერგიის მასური სიმკვრივეა,

$q_n^*$  და  $\frac{dq_{\text{მას}}^*}{dt}$  - დროის ერთეულში მაკროსკოპული ძალების მუშაობის გამოკლებით ენერგიის შენაკადის ზედაპირული და მასური სიმკვრივეა.

ე) ენტროპიის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის მეორე კანონი):

უწყვეტი გარემოს ინდივიდუალური მოცულობის ენტროპიის ცვლილების სიჩქარე გარედან ენტროპიის შენაკადისა და დროის ერთეულში მოცულობის შიგნით ენტროპიის გამომუშავების ჯამის ტოლია

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s d\tau = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt}, \quad \frac{d_i S}{dt} \geq 0, \quad (7.1.6)$$

სადაც  $\frac{d_e S}{dt}$  - დროის ერთეულში გარედან  $\Omega$  მოცულობისკენ

ენტროპიის შენაკადია,  $\frac{d_i S}{dt}$  - ენტროპიის გამომუშავება დროის ერთეულში.

გლუვი მოძრაობებისათვის (გლუვი ფუნქციები) ინტეგრალური კანონები (7.1.2) – (7.1.6) შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების ექვივალენტურია:



ა) უწყვეტობის განტოლება

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (7.1.7)$$

ბ) მოძრაობის განტოლება

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \nabla_j P^{ij} \bar{e}_i, \quad (7.1.8)$$

გ) მომენტების განტოლება

$$\rho \frac{d\bar{k}}{dt} = \rho \bar{h} + \nabla_j Q^{ij} \bar{e}_i + (\bar{e}_i \times \bar{e}_j) P_{ij}, \quad (7.1.9)$$

$$\text{დ) } \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) = (\bar{F} \cdot \bar{v}) \rho + \nabla_j (P^{ij} v_i) + \rho \frac{dq_{\text{მას}}^*}{dt} - \nabla_j q^{*j}, \quad (7.1.10)$$

ე) ენტროპიის განტოლება

$$\rho \frac{dS}{dt} = \rho \frac{d_{\epsilon} S_{\text{მას}}}{dt} - \nabla_j S^j + \rho \frac{d_i S}{dt}, \quad \frac{d_i S}{dt} \geq 0, \quad (7.1.11)$$

სადაც  $P^{ij}$  - დაძაბულობის ტენზორის კონტრვარიანტული კომპონენტებია,  $\nabla_j$  - კოვარიანტული წარმოებულა,  $\bar{e}_i$  - ბაზისის ვექტორებია,  $Q^{ij}$  - მომენტის დაძაბულობის ტენზორის კომპონენტებია,  $q^{*j}$  - ენერგიის შენაკადის ვექტორის კომპონენტებია (მაკროსკოპული ძალების მუშაობის გარეშე),  $S^j$  - ენტროპიის

ნაკადის ვექტორის კომპონენტებია,  $\left( \rho \frac{d_{\epsilon} S_{\text{მას}}}{dt} - \nabla_j S^j \right)$  - დროის

ერთეულში მასის ერთეულისკენ ენტროპიის შენაკადია გარედან,  $\frac{d_i S}{dt}$

- დროის ერთეულში ენტროპიის გამოშვებების მასური სიმკვრივეა.

§7.2. უწყვეტი გარემოს აღწერა ვილერის და  
ლაგრანჟის კოორდინატებში

კლასიკური მექანიკის ფარგლებში უწყვეტი გარემოს ყველა ნაწილაკი განსხვავებულია ერთმანეთისაგან - ინდივიდუალიზირებულია. ყოველ ინდივიდუალურ ნაწილაკს შეესაბამება რიცხვითი სამეული  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . ასეთ სამეულს შესაბამისი ინდივიდუალური ნაწილაკის ლაგრანჟის კოორდინატები ეწოდება. ფაქტიურად ლაგრანჟის კოორდინატები ამ ნაწილაკების "სახელებია", ისევე როგორც ნომრები აღნიშნავენ ნაწილაკების "სახელებს", როცა ისინი დისკრეტულად არიან განლაგებული. როგორც წესი, ნაწილაკის ლაგრანჟის კოორდინატების სახით გამოიყენება იმ წერტილის კოორდინატები, რომელშიც ეს ნაწილაკი იმყოფებოდა დროის საწყის მომენტში [38,39,77].

უწყვეტი გარემოს მოძრაობა და მომხდარი პროცესები აღიწერება ფიზიკური სიდიდეების ველებით (სიჩქარეთა, წნევის, სიმკვრივის, ტემპერატურის ა.შ.). თუ ეს სიდიდეები განიხილება როგორც ლაგრანჟის  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  კოორდინატების და დროის  $t$  ფუნქციები, მაშინ უწყვეტი გარემოს აღწერას ლაგრანჟის ეული ან მატერიალური ეწოდება. ამ მიდგომით მოვლენები აღიწერება, როგორც მოვლენები მომხდარი ინდივიდუალურ წერტილებთან.

ლაგრანჟისეული აღწერისას ძირითადი კინემატიკური მახასიათებელია უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი.

ყოველი  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ნაწილაკისათვის დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში მოძრაობის კანონი განსაზღვრავს მის მდგომარეობას (არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ) - სამგანზომილებიანი ვეკლიდური სივრცის  $\bar{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  ვექტორს.

თუ ამ სივრცეში არჩეულია კოორდინატთა სისტემა (დადგენილია ვექტორებისა და რიცხვითი სამეულების  $\bar{r} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$  ურთიერთცალსახა შესაბამისობა), მაშინ მოძრაობის კანონი აღიწერება აგრეთვე ფუნქციებით:

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = \overline{1,3}. \quad (7.2.1)$$

უწყვეტი გარემოს ნაწილაკთა სიჩქარე და აჩქარება განისაზღვრება თანაფარდობებით

$$\bar{v}(\xi, t) = \frac{\partial \bar{r}(\xi, t)}{\partial t}, \quad \bar{a}(\xi, t) = \frac{\partial \bar{v}(\xi, t)}{\partial t}, \quad (7.2.2)$$

სადაც  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

საერთოდ უწყვეტი გარემოს ინდივიდუალურ ნაწილაკში ზოგიერთი  $A$  სიდიდის ცვლილების სიჩქარეს ინდივიდუალური, ან მატერიალური ეწოდება, ან ამ სიდიდის სრული წარმოებულ დროით. ლაგრანჟისეული აღწერისას ეს უბრალოდ კერძო წარმოებულა  $\frac{\partial A(\xi, t)}{\partial t}$ .

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის და მომხდარი პროცესების მახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეები შეიძლება განვიხილოთ როგორც სივრცული კოორდინატებისა  $(x_1, x_2, x_3)$  და  $t$  დროის ფუნქციები. ამ მიდგომის დროს მოვლენები აღიწერება როგორც მოვლენები, რომლებსაც ადგილი აქვთ სივრცის წერტილებში. ასეთ აღწერას ეილერისეული ან სივრცული ეწოდება.

ეილერისეული აღწერისას ძირითადი კინემატიკური მახასიათებელია სიჩქარეთა ველი  $\bar{v}(x, t)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .  $\bar{v}(x_1, x_2, x_3, t)$  ვექტორი - ეს უწყვეტი გარემოს იმ ნაწილაკის სიჩქარეა, რომელიც  $t$  მომენტში სივრცის  $(x_1, x_2, x_3)$  კოორდინატებიან წერტილში იმყოფება.

ეილერისეული აღწერისას  $A$  სიდიდის ინდივიდუალური წარმოებულ დროით გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{aligned} \frac{dA(x, t)}{dt} &= \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial A(x, t)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial A(x, t)}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial A(x, t)}{\partial x_3} v_3 = \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_i} v_i, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

(7.2.3)

აქ  $v_1 = v_1(x, t)$ ,  $v_2 = v_2(x, t)$ ,  $v_3 = v_3(x, t)$  - გარემოს სიჩქარის ვექტორის  $\bar{v}(x, t)$  კომპონენტებია  $x_i$  კოორდინატთა სისტემაში.

კერძოდ,  $\bar{a}(x, t)$  აჩქარება ეილერისეული აღწერისას განისაზღვრება ფორმულით

$$\bar{a}(x, t) = \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial x_1} v_1(x, t) + \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial x_2} v_2(x, t) + \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial x_3} v_3(x, t).$$

(7.2.4)

ლაგრანჟისეული და ეილერისეული მიდგომები ექვივალენტურია. თუ მოვლენები აღწერილია რომელიმეს ფარგლებში, მაშინ მათი აღწერა მეორე მიდგომის ფარგლებში მიიღება მარტივი პროცედურის მეშვეობით.

მართლაც, იმისათვის, რომ გადავიდეთ ლაგრანჟისეული აღწერიდან ეილერისეულისაკენ, მოძრაობის კანონი (7.2.1) ამოვხსნათ შეფარდებით ლაგრანჟის კოორდინატებისა, ე.ი. ვიპოვოთ ფუნქციები

$$\xi_\alpha = g_\alpha(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha = \overline{1,3}. \quad (7.2.5)$$

ეს შესაძლებელია, როცა (7.2.1) გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან

$$I = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

მაშინ, ყოველი A სიდიდისათვის, რომლის ლაგრანჟისეული A(\xi\_1, \xi\_2, \xi\_3, t) აღწერა ცნობილია, ეილერისეული აღწერა მიიღება როგორც რთული ფუნქცია

$$A(g_1(x, t), g_2(x, t), g_3(x, t), t) = A'(x, t). \quad (7.2.6)$$

იმისათვის, რომ ეილერისეული აღწერიდან გადავიდეთ ლაგრანჟისეულისაკენ, უნდა ვიპოვოთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = \overline{1,3} \quad (7.2.7)$$

საწყისი პირობებით

$$x_1|_{t=0} = \xi_1, \quad x_2|_{t=0} = \xi_2, \quad x_3|_{t=0} = \xi_3. \quad (7.2.8)$$

მისი ამოხსნა  $x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$   $i = \overline{1,3}$  ნებისმიერი  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  არის მოძრაობის კანონი, ხოლო  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  - ნაწილაკების ლაგრანჟის კოორდინატები.

მაშინ, ნებისმიერი B(x\_1, x\_2, x\_3, t) სიდიდისათვის, რომლის ეილერისეული აღწერა ცნობილია, ლაგრანჟისეული აღწერა მიიღება, როგორც რთული ფუნქცია

$$B(f_1(\xi, t), f_2(\xi, t), f_3(\xi, t), t) = B'(\xi, t). \quad (7.2.9)$$

კარგ, მაგრამ არასრულ წარმოდგენას უწყვეტი გარემოს მოძრაობაზე იძლევიან ნაწილაკების ტრაექტორიები და დენის ხაზები.

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ნაწილაკის ტრაექტორია ეწოდება მისი მდგომარეობების გეომეტრიულ ადგილს დროის ყველა მომენტში.

დენის ხაზი ეწოდება მოცემულ  $t_0$  მომენტში განსაზღვრულ წირს, რომლის მხები ყოველ  $x$  წერტილში ემთხვევა  $\vec{v}(x, t_0)$  სიჩქარის ვექტორის მიმართულებას.

დენის ხაზის განტოლებას მოცემულ  $t_0$  მომენტში აქვს სახე

$$\frac{dx_1}{v_1(x, t_0)} = \frac{dx_2}{v_2(x, t_0)} = \frac{dx_3}{v_3(x, t_0)}. \quad (7.2.10)$$

დენის ხაზები დამოკიდებული არიან  $t_0$  მომენტზე, რომლისთვისაც ისინი არიან ჩაწერილი (7.2.10) სახით.

მოძრაობას დამყარებული (სტაციონარული) ეწოდება, თუ სიჩქარეთა ველი ელერისეულ აღწერაში დამოუკიდებელია დროზე და დაუმყარებელი (არასტაციონარული) წინააღმდეგ შემთხვევაში.

დამყარებულ მოძრაობაში დენის ხაზები არ არიან დამოკიდებული  $t_0$ -ზე და ემთხვევიან ნაწილაკების ტრაექტორიებს.

განვიხილოთ რამოდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 1. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$x_1 = \xi_1 + a \cdot t \cdot \xi_2, \quad x_2 = \xi_2 + b \cdot t \cdot \xi_1, \quad x_3 = \xi_3, \quad a, b = \text{const.}$$

შევამოწმოთ, რომ ინდივიდუალური ნაწილაკისათვის  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  რიცხვებს აქვთ სივრცის იმ წერტილის  $x_1, x_2, x_3$  კოორდინატების აზრი, რომელშიც ის იმყოფებოდა დროის  $t = 0$  მომენტში. ლაგრანჟისეულ აღწერაში ვიპოვოთ სიჩქარეთა და აჩქარებათა ველები. დროის  $t_0$  მომენტში რომელი ნაწილაკი იმყოფება სივრცის წერტილში  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  კოორდინატებით?

ამოხსნა:

მართლაც,

$$x_1|_{t=0} = \xi_1, \quad x_2|_{t=0} = \xi_2, \quad x_3|_{t=0} = \xi_3,$$

ანუ  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  - ლაგრანჟის კოორდინატებია.

სიჩქარეთა ველი  $\vec{v}(\xi, t)$  გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\vec{v}(\xi, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) = (a\xi_2, b\xi_1, 0),$$

ანუ  $v_1 = a\xi_2$ ,  $v_2 = b\xi_1$ ,  $v_3 = 0$ .

აჩქარებათა ვედი  $\vec{a}(\xi, t)$  მიიღება

$$\vec{a}(\xi, t) = \frac{\partial \vec{v}(\xi, t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial v_2}{\partial t}, \frac{\partial v_3}{\partial t} \right) = (0, 0, 0), \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

თუ მოძრაობის კანონში ჩავსვამთ  $t = t_0$ ,  $x_1 = x_{01}$ ,  $x_2 = x_{02}$ ,  $x_3 = x_{03}$ , მაშინ

$$x_{01} = \xi_1 + a \cdot t_0 \cdot \xi_2, \quad x_{02} = \xi_2 + b \cdot t_0 \cdot \xi_1, \quad x_{03} = \xi_3,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ დროის მომენტში  $t = t_0$  ( $x_{01}$ ,  $x_{02}$ ,  $x_{03}$ ) წერტილში იმყოფება მატერიალური წერტილი, რომლის ლაგრანჟის კოორდინატებია

$$\xi_1 = \frac{x_{01} - a \cdot t_0 \cdot x_{02}}{1 - a \cdot b \cdot t_0^2}, \quad \xi_2 = \frac{x_{02} - b \cdot t_0 \cdot x_{01}}{1 - a \cdot b \cdot t_0^2}, \quad \xi_3 = x_{03};$$

$$1 - a \cdot b \cdot t_0^2 \neq 0.$$

ამოცანა 2.

ვთქვათ, უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონს აქვს სახე:

$$x_1 = \xi_1 \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right), \quad x_2 = \xi_2 \left( 1 + 2 \frac{t}{\tau} \right), \quad x_3 = \xi_3 \left( 1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right), \quad \tau = \text{const}.$$

ა) ლაგრანჟისეულ აღწერაში ვიპოვოთ სიჩქარეთა და აჩქარებათა ველები.

ბ) სად იმყოფება დროის  $t=3\tau$  მომენტში ნაწილაკი, რომელიც დროის  $t=\tau$  მომენტში იმყოფებოდა სივრცის წერტილში ( $a, b, c$ ) კოორდინატებით?

ამოხსნა:

$$\vec{v}(v_1, v_2, v_3) = \vec{v} \left( \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) = \left( \frac{\xi_1}{\tau}, \frac{2\xi_2}{\tau}, \frac{2\xi_3 t}{\tau^2} \right),$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left( \frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial v_2}{\partial t}, \frac{\partial v_3}{\partial t} \right) = \left( 0, 0, \frac{2\xi_3}{\tau^2} \right).$$

გარემოს მოძრაობის კანონში ჩავსვამთ  $t = \tau$ , მაშინ

$$a = 2\xi_1, \quad b = 3\xi_2, \quad c = 2\xi_3, \quad \text{ან } \xi_1 = a/2, \quad \xi_2 = b/3, \quad \xi_3 = c/2.$$

ამრიგად, როცა  $t = 3\tau$ , მივიღებთ

$$x_1 = \frac{a}{2} \cdot 4 = 2a, \quad x_2 = \frac{b}{3} \cdot 7 = \frac{7}{3}b, \quad x_3 = \frac{c}{2} \cdot 10 = 5c,$$

ე.ი.  $t = 3\tau$  მომენტში ნაწილაკი იქნება  $M\left(2a; \frac{7}{3}b; 5c\right)$  წერტილში.

**აპოცანა 3.**

შემოვიტანოთ ლანგრაჟის კოორდინატები და ვიპოვოთ უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი, თუ სიჩქარეთა ველს აქვს სახე

$$v_1 = \frac{x_1}{t + \tau}, \quad v_2 = \frac{2tx_2}{t^2 + \tau^2}, \quad v_3 = \frac{3t^2x_3}{t^3 + \tau^3}, \quad \tau = \text{const} > 0.$$

ამ შემთხვევაში კოშის ამოცანა (7.2.7), (7.2.3) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t + \tau}, \quad x_1|_{t=0} = \xi_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2tx_2}{t^2 + \tau^2}, \quad x_2|_{t=0} = \xi_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{3t^2x_3}{t^3 + \tau^3}, \quad x_3|_{t=0} = \xi_3.$$

რომელთა ამოხსნას აქვს სახე:

$$x_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \quad x_2 = \xi_2 \left(1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right), \quad x_3 = \xi_3 \left(1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^3\right).$$

**აპოცანა 4.**

შემოვიტანოთ ლანგრაჟის კოორდინატები და ვიპოვოთ უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი, ღენის საზები და ტრაექტორიები, თუ სიჩქარეთა ველს აქვს შემდეგი სახე:

$$v_1 = \frac{Q(t)x_1}{2\pi r^2}, \quad v_2 = \frac{Q(t)x_2}{2\pi r^2},$$

$$v_3 = 0, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad Q(t) > 0$$

**ამოხსნა:**

კოშის ამოცანა (7.2.7), (7.2.8) ჩაიწერება ასე:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{Q(t)x_1}{2\pi r^2}, \quad x_1|_{t=0} = \xi_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{Q(t)x_2}{2\pi r^2}, \quad x_2|_{t=0} = \xi_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0, \quad x_3|_{t=0} = \xi_3,$$

საიდანაც მარტივად მიიღება

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{Q(t)}{\pi} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \equiv r^2 = \frac{1}{\pi_0} \int Q(\tau) d\tau + r_0^2,$$

$$r_0^2 \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad r \equiv \left( r^2 + \frac{1}{\pi_0} \int Q(\tau) d\tau \right)^{1/2}.$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \ln \frac{x_1}{x_2} = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = \text{const} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = r^2, \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{r}{r_0} \xi_2, \\ x_1 = \frac{r}{r_0} \xi_1. \end{cases}$$

ამრიგად, მოძრაობის კანონს აქვს სახე:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{r}{r_0} \xi_1, \\ x_2 = \frac{r}{r_0} \xi_2, \\ x_3 = \xi_3. \end{cases}$$

ღენის ხაზების განტოლებებს დროის  $t_0$  მომენტში (7.2.10)-ის თანახმად, აქვთ შემდეგი სახე:

$$\frac{2\pi r^2}{Q(t_0)} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{2\pi r^2}{Q(t_0)} \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{0}, \quad \text{ანუ} \quad x_3 = \text{const}.$$

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \text{const} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

ამრიგად, ღენის ხაზები მდებარეობენ  $x_3 = \text{const}$  სიბრტყეზე, ასეთ სიბრტყეებზე მათი სურათი ერთნაირია და განტოლებას აქვს

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$



სახე, საიდანაც გამოჰდინარეობს, რომ დენის ხაზები ემთხვევა ტრაექტორიებს.

### სამარჯიშოები

1. იპოვეთ სიჩქარეთა და აჩქარებათა ველები ლაგრანჟისეულ და ეილერისეულ აღწერებში, თუ უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონს აქვს სახე:

ა)  $x_1 = a(t)\xi_1, x_2 = b(t)\xi_2, x_3 = c(t)\xi_3,$

$a(t), b(t), c(t) \in C^2, a(0) = b(0) = c(0) = 1.$

ბ)  $x_1 = \xi_1 + b(t)\xi_2, x_2 = \xi_2, x_3 = \xi_3, b(t) \in C^2, b(0) = 0.$

გ)  $x_i = A_{i1}(t)\xi_1 + A_{i2}(t)\xi_2 + A_{i3}(t)\xi_3,$

$\det \|A_{ik}\| \neq 0, A_{ij}(0) = \delta_{ij}, A_{ik}(t) \in C^2, i, k = \overline{1,3}$

სადაც  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  - კრონეკერის სიმბოლოება.

2. შემოიტანეთ ლანგრაჟის კოორდინატები და იპოვეთ უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი, დენის ხაზები და ტრაექტორიები, თუ სიჩქარეთა ველი განისაზღვრება შემდეგი თანაფარდობებით:

ა)  $v_i = \frac{Q(t)}{4\pi R^3} x_i, i = \overline{1,3}, R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, Q(t) > 0.$

ბ)  $v_1 = -Ax_1, v_2 = Bx_2, v_3 = 0, A = \text{const} > 0, B = \text{const} > 0.$

3. უწყვეტი გარემოს მოძრაობა ხდება შემდეგი კანონით:

$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right), x_3 = \frac{\xi_3}{1 + \frac{t}{t_0}}, t_0 = \text{const}.$

ა) იპოვეთ სიჩქარეთა და აჩქარებათა ველები.

ბ) იპოვეთ დროის  $t = 2\tau$  მომენტში იმ ნაწილაკის სიჩქარე, რომელიც  $t = \tau$  მომენტში იმყოფებოდა წერტილში კოორდინატებით  $(a, a, a).$

4. იპოვეთ სიჩქარეთა და აჩქარებათა ველები ლაგრანჟისეულ და ეილერისეულ აღწერებში, თუ უწყვეტი გარემოს მოძრაობა ხდება შემდეგი კანონით

$x_1 = \xi_1 + c(t)\xi_2, x_2 = \xi_2 + c(t)\xi_3, x_3 = \xi_3, c(t) \in C^2, c(0) = 0.$

5. გარემოს მოძრაობა ხდება სიჩქარეთა ველით

$v_1 = kx_1, v_2 = -kx_2, v_3 = 0, k = \text{const}$

და სიმკვრივეთა ველით

$$\rho = \rho_0 + Ax_2 e^{kt}; \quad \rho_0, A = \text{const.}$$

იპოვეთ სიმკვრივის ცვლილების სიჩქარე უწყვეტი გარემოს ყოველ ნაწილაკში.

6. უწყვეტი გარემოს მოძრაობისას სივრცეში სიჩქარეთა ველით

$$v_1 = -\omega x_2, \quad v_2 = \omega x_1, \quad v_3 = 0, \quad \omega = \text{const.}$$

იქმნება ტემპერატურათა ველი

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = T_0 e^{-\frac{t}{\tau} - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{c}\right)^2}, \quad T_0, \tau, a, b, c = \text{const.}$$

იპოვეთ ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე ინდივიდუალურ ნაწილაკში დროის  $t_0$  მომენტში, თუ ამ მომენტში ის იმყოფება წერტილში კოორდინატებით  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ .

7. უწყვეტი გარემოს მოძრაობა ხდება სიჩქარეთა ველით

$$v_1(x, t) = at, \quad v_2(x, t) = -u \frac{x_2}{x_1}, \quad v_3(x, t) = 0; \quad a, u = \text{const}$$

და ტემპერატურის ველით

$$T(x_1, x_2, t) = T_0 \left( 1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right) \left( 1 + \frac{R^2}{x_1^2 + x_2^2} \right); \quad T_0, \tau, R = \text{const.}$$

იპოვეთ  $t = \tau$  მომენტში ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე ინდივიდუალურ ნაწილაკში, რომელიც იმყოფებოდა სივრცის წერტილში კოორდინატებით

$$x_1 = \frac{u^2}{a}, \quad x_2 = \frac{2u^2}{a}, \quad x_3 = \frac{3u^2}{a}.$$

§7.3. ბლანტი სითხის მოდელი.  
იდეალური სითხის მოდელი

სითხეები და გაზები, რომელთა შორის მექანიკის თვალსაზრისიდან არ არის პრინციპული სხვაობა, აღიწერება მოდელებით, რომელთათვის შეუძლებელია უძრაობის მდგომარეობა მხები დაბევის არსებობის პირობებში. ეს ასახავს სითხეების დენადობის თვისებას. მაშასადამე, უძრაობაში ადგილი აქვს [39,40,77]

$$\bar{P}_n = -p \cdot \bar{n}, p^{ij} = -pg^{ij}, \quad (7.3.1)$$

სადაც  $\bar{P}_n$  -  $\bar{n}$  ნორმალის ფართობზე დაბევის ვექტორია,  $p$  - წნევაა,  $p^{ij}$ ,  $g^{ij}$  - დაბევისა და მეტრიკული ტენზორების კომპონენტებია.

სიბლანტის თვისება ვლინდება იმაში, რომ მოძრაობისას (უფრო ზუსტად, დეფორმირებისას) დაბევის ვექტორის მხები-მდგენელები ზოგად შემთხვევაში ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო დაბევის ტენზორის კომპონენტები წარმოადგინდება შემდეგი სახით:

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}, \quad (7.3.2)$$

სადაც  $\tau^{ij}$  - ბლანტი დაბევის ტენზორის კომპონენტებია, რომლებიც დამოკიდებულია დეფორმაციითა სიჩქარეების ტენზორის  $e_{ij}$  კომპონენტებზე.

ყველა რეალური სითხე - ბლანტი და კუმშვადია, მაგრამ გარკვეულ პირობებში ერთი ან ორივე თვისება შეიძლება იყოს უმნიშვნელო, რაც ამარტივებს მოდელს.

უწყვეტ გარემოს, რომელშიც არა მარტო წონასწორობისას, აგრეთვე მოძრაობისას ადგილი აქვთ თანაფარდობებს

$$p^{ij} = -pg^{ij}, \tau^{ij} = 0, \quad (7.3.3)$$

იდეალური (არაბლანტი) სითხე (გაზი) ეწოდება.

იდეალური სითხე ისეთი სითხეა, რომელიც არ ეწინააღმდეგება თავისი ერთი ფენის მეორეზე სრიალს.

ცხადია, რომ იდეალური სითხის (გაზის) ცნება აბსტრაქტულია, თუმცა გარკვეული აზრით წყალი და ჰაერი შეიძლება განხილული იქნენ როგორც იდეალური.

იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლებებს (ეილერის განტოლებები) აქვს სახე:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\text{grad} p + \rho \bar{F}, \quad (7.3.4)$$

$\rho$  - სიმკვრივეა,  $\bar{v}$  - ნაწილაკის სიჩქარეა,  $\bar{F}$  - მასური ძალების სიმკვრივეა.

რეალურ სითხეებში მისი ერთი ფენის მეორე ფენის მიმართ ფარდობითი მოძრაობისას ფენებს შორის წარმოიშობა ძალები, რომლებიც ამ მოძრაობას ეწინააღმდეგებიან. ასეთ ძალებს ხახუნის ძალებს უწოდებენ და ისინი მხებ ძალებს წარმოადგენენ. თუ ხახუნის ძალების სიდიდე უმნიშვნელოა, მაშინ ისინი შეიძლება უგულვებელყოთ და მივიღებთ იდეალური სითხის შემთხვევას. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში ხახუნის ძალების უგულვებელყოფა არ შეიძლება. თუ სითხის მოძრაობისას გათვალისწინებულია ხახუნის ძალები, მას ბლანტი სითხე ეწოდება (მაგალითად: ზეთი, სისხლი, რძე, ვერცხლისწყალი და ა.შ.).

ბლანტი სითხე ეწოდება უწყვეტ გარემოს, რომლისთვისაც ძალების  $p^{ij}$  ტენზორის კომპონენტებს აქვთ სახე (7.3.2), ამასთან

$$\tau^{ij} = \tau^{ij}(\epsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T) \quad (7.3.5)$$

კუშშვადი სითხისათვის  $p = p(\rho, T)$ , ხოლო უკუშვადისათვის -  $p$  დამოუკიდებელი პარამეტრია.

ბლანტი ძალების  $\tau^{ij}$  ტენზორის კომპონენტები შეიძლება დამოკიდებული იყოს სხვადასხვა ფიზიკო-ქიმიურ პარამეტრზე, მაგალითად, სხვადასხვა სითხეების ნაერთების შემთხვევაში ცალკეული ნივთიერებების კონცენტრაციებზე.  $\tau^{ij}$  არგუმენტებზე დამოკიდებულების ცხადი სახით მოცემა აკონკრეტებს ბლანტი სითხის მოდელს.

ყველაზე ფართოდ გამოიყენება ნაეი-სტოქსის (ნიუტონისეული ან წრფივ-ბლანტი სითხე) მოდელი, რომელშიც  $\tau^{ij}$ -ის დამოკიდებულება  $\epsilon_{\alpha\beta}$ -ზე წრფივია. იზოტროპული (ყველა მიმართულებით თანაბარია) გარემოსათვის მას აქვს სახე

$$\tau^{ij} = \lambda \text{div} \bar{v} \cdot g^{ij} + 2\mu e^{ij}, \quad (7.3.6)$$

სადაც სიბლანტის  $\lambda, \mu$  კოეფიციენტები განსხვავებულია სხვადასხვა გარემოსათვის. ზოგად შემთხვევაში, ისინი, მაგალითად ტემპერატურის ფუნქციებია. მაგრამ, ბევრ შემთხვევაში  $\lambda$  და  $\mu$ -ს ცვლილება უმნიშვნელოა, ამიტომ მათ მუდმივებად თვლიან.

წრფივი იზოტროპული ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლებებს სიბლანტის მუდმივი კოეფიციენტებით  $\mu$  და  $\zeta = \lambda + 2\mu/3$ ,

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} - q \operatorname{grad} p + \left( \xi + \frac{\mu}{3} \right) q \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{v} + \mu \Delta \bar{v} \quad (7.3.7)$$

ნავიე-სტოქსის განტოლებები ეწოდება.

არსებობენ სხვა მოდელები, სადაც  $\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{\alpha\beta})$  დამოკიდებულება არაწრფივია და მათ არანიუტონისეულ სითხეებს უწოდებენ.

ეილერის (7.3.4) და ნავიე-სტოქსის (7.3.7) განტოლებები უწყვეტობის განტოლებასთან

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0,$$

სითხოს შენაკადის განტოლებასთან ( $u$  - შინაგანი ენერჯიის სიმკვრივეა)

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} e_{ij} + \frac{dq}{dt},$$

მდგომარეობის განტოლებებთან

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad u = u(\rho, T), \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{\alpha\beta}, T) \quad (7.3.8)$$

და სითხოს შენაკადის  $dq$  განმსაზღვრელ კანონთან, მაგალითად,

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \bar{q} = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T \quad (7.3.9)$$

ქმნიან შეკრულ განტოლებათა სისტემას შესაბამისად იდეალური ან წრფივ-ბლანტი კუმშვადი სითხისათვის.

კონკრეტული ამოცანების (მოდელების) განხილვისას კერძოწარმოებულნიან დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამონახსნის განსაზღვრისათვის აუცილებელია სასაზღვრო, საწყისი და სხვა პირობების მოცემა.

იდეალური სითხისათვის ტიპური სასაზღვრო პირობები მოიცემა შემდეგნაირად. თუ სითხის  $\partial\Omega$  საზღვრის მდგომარეობა და მოძრაობა მოცემულია, მაშინ  $\partial\Omega$  წერტილებში, როგორც წესი, მოიცემა გარემოს მოძრაობის სიჩქარის ნორმალური მდგენელი, მაგალითად, შეულწვევადი სხეულის ზედაპირზე მოუწყვეტელი გარშემოწინების დროს მოიცემა კინემატიკური "შეულწვევადობის პირობა".

$$v_n|_{x \in \partial\Omega} = U_n; \quad v_n = \bar{v} \cdot \bar{n}, \quad u_n = \bar{U} \cdot \bar{n}, \quad (7.3.10)$$

სადაც  $\bar{n}$  - ნორმალთა  $\partial\Omega$ -კენ,  $\bar{P}$  - საზღვრის სიჩქარეა.

თუ  $\partial\Omega$  - მყარი უძრავი საზღვარია, მაშინ სასაზღვრო პირობა (7.3.10) მიიღებს სახეს:

$$v_n|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (7.3.11)$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ იდეალური სითხის სიჩქარის ვექტორი ძვეს მისი საზღვრის, მყარი უძრავი სხეულის მხებ სიბრტყეზე.

ბევრ შემთხვევაში სითხის საზღვრის მდგომარეობა წინასწარ არაა ცნობილი და უნდა მოიძებნოს ამოცანის ამოხსნიდან. ამ შემთხვევაში  $\partial\Omega$ -ზე კინემატიკურის გარდა დასაკმაყოფილებელია დინამიკური პირობა ძაბვების ვექტორისათვის. კერძოდ, ორი იდეალური სითხის გამყოფის საზღვარზე მოიცემა კინემატიკური

$$v_{n1} = v_{n2} = U_n \quad (7.3.12)$$

და დინამიკური პირობები

$$p_1 = p_2, \quad (7.3.13)$$

სადაც 1 და 2 ინდექსები აღნიშნავენ პარამეტრებს საზღვრის სხვადასხვა მხარეს.

(7.3.13) პირობას ადგილი აქვს ზედაპირული დაჭიმულობის გათვალისწინების გარეშე.

თუ ერთ-ერთი სითხის წნევა მოცემულია, მაგალითად  $p = p_0$  სახით, მაშინ მეორე სითხისთვის პირობას საზღვარზე აქვს სახე:

$$v_n|_{x \in \partial\Omega} = U_n, \quad p|_{x \in \partial\Omega} = p_0, \quad (7.3.14)$$

სადაც  $\bar{P}$  - საზღვრის სიჩქარეა, რომელიც განისაზღვრება ამოცანის ამოხსნის პროცესში. როცა  $p_0 = \text{const}$ , ამ პირობებს ეწოდება პირობები თავისუფალ საზღვარზე (მაგალითად, აკუსტიკურ მოდელებში).

თუ ორი სითხის გამყოფის ზედაპირი გამრუდებულია, მაშინ მასზე მოქმედებენ ზედაპირული დაჭიმულობის ძალები, რომლებიც მიისწრაფვიან ზედაპირის ფართობის შემცირებისაკენ. ამ შემთხვევაში დინამიკური პირობა (7.3.13) გამყოფის ზედაპირზე მიიღებს სახეს (ლაპლასის ფორმულა):

$$p_1 - p_2 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (7.3.15)$$

აქ  $\sigma$  - ზედაპირული დაჭიმულობის კოეფიციენტი, რომელიც იმაზეა დამოკიდებული როგორი სითხეები იმყოფებიან კონტაქტში,  $R_1, R_2$  - სივრცის მოცემულ წერტილში მთავარი სიმრუდეების რადიუსებია,

$R_i, i=1,2$  რადიუსები დადებითად ჩაითვლება, თუ  $i$ -ური სიმრუდის ცენტრი გარემო 1-შია.

ბლანტი სითხისათვის მოძრაობის განტოლების რიგი უფრო მაღალია ვიდრე იდეალურისათვის, და ამიტომ სასაზღვრო პირობების რიცხვი მეტია. შეუღწევად საზღვარზე, მაგალითად, შეიძლება მოცემული იყოს ერთ-ერთი პირობების შემდეგი ვარიანტებიდან:

1<sup>0</sup>. "მიწებების (მიკერის) პირობა"

$$\bar{v}|_{\partial\Omega} = \bar{U}, \quad (7.3.16)$$

სადაც  $\bar{U}$  - საზღვრის მოცემული სიჩქარეა;

2<sup>0</sup>.  $v_n|_{\partial\Omega} = U_n, \quad \bar{P}_{n\tau}|_{\partial\Omega} = \bar{f}_\tau,$

სადაც  $U_n$  და  $\bar{f}_\tau$  - საზღვრის სიჩქარის ნორმალური მდგენელია და მასზე მხები ძაბვაა;

3<sup>0</sup>.  $p_{nn}|_{\partial\Omega} = f_n, \quad \bar{P}_{n\tau}|_{\partial\Omega} = \bar{f}_\tau,$

სადაც  $f_n, \bar{f}_\tau$  -  $\partial\Omega$ -ზე მოცემული ნორმალური და მხები ძაბვებია;

3<sup>0</sup> ამ შემთხვევაში საზღვრის სიჩქარის ნორმალური მდგენელის განსაზღვრისათვის, გამოიყენება თანაფარდობა  $v_n|_{\partial\Omega} = U_n$ , თუ  $f_n = \text{const}$  და  $\bar{f}_\tau = 0$ , მაშინ 3<sup>0</sup>-ს ეწოდება პირობები თავისუფალ საზღვარზე.

ორი ბლანტი სითხის გამყოფის საზღვარზე უნდა სრულდებოდეს ძაბვების ვექტორის უწყვეტობის კინემატიკური

$$v_{n1} = v_{n2} = V_n, \quad \bar{v}_{\tau 1} = \bar{v}_{\tau 2}$$

და დინამიკური

$$\bar{P}_{n1} = \bar{P}_{n2} - \sigma(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \bar{n}$$

პირობები.

თუ არე, რომელიც დაკავებულია იდეალური ან ბლანტი სითხით, ვრცელდება უსასრულობაში, მაშინ მარტივ შემთხვევებში უსასრულობაზე მოიცემა უწყვეტი გარემოს წნევა და სიჩქარე.

სითხეში ტემპერატურის განსაზღვრის ამოცანებში  $\partial\Omega$ -ზე, როგორც წესი, მოიცემა ტემპერატურის, ან სითხის ნაკადის მნიშვნელობა.

იდეალური ან ბლანტი სითხის არჩევის მოდელი განისაზღვრება გაი ოკლდვის მიზნით და შედეგის საჭირო სიზუსტით.

§ 7.4. სრულყოფილი გაზის მათემატიკური მოდელი.  
ინტეგრირებული ფარენციალურ უტოლობათა მეთოდი

გამოყენებითი მათემატიკის მრავალი ამოცანისათვის დამახასიათებელია კომპლექსურობა, რაც მოითხოვს, როგორც წესი ბუნებაში მიმდინარე მრავალი ფიზიკური პროცესის ყოველმხრივი ზეგავლენის გათვალისწინებას მიმდინარე მოვლენაზე. ეს კი თავის მხრივ დასმული ამოცანის გადასატრელად გამოთვლითი ტექნოლოგიების ფართო სპექტრის გამოყენების აუცილებლობას იწვევს. ამ მიზეზით დასმული პრობლემის გადაჭრა რამოდენიმე ეტაპად მიმდინარეობს: საძიებელი ამოცანის ფიზიკური მოდელის შემუშავება, ამოცანის მათემატიკური დასმა, ანალიზური მეთოდებისა და გამოთვლითი ალგორითმების შემუშავება, პროგრამირების ეტაპი და ფიზიკური მოდელის შემდგომი სრულყოფა გამოთვლითი შედეგებისა და ფიზიკური ექსპერიმენტების შედარების საფუძველზე [73].

გაზური დინამიკის პროცესების მათემატიკური მოდელირება წარმოადგენს თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის აქტუალურ პრობლემას [76, 88].

აფეთქებებთან, დარტყმით და დეტონაციურ ტალღებთან (ასევე ლაზერული დეტონაციასთან) დაკავშირებული გაზური დინამიკის პროცესები იწვევს როგორც თეორიულ ასევე დიდ პრაქტიკულ ინტერესსაც. ეს ამოცანები საკმაოდ აქტუალურია, მათ შორის, შანტებში, გაზსადენებში, გაზოლდერებში (საკმაოდ დიდი მოცულობის გაზსაცავები) და ა.შ. აფეთქებებისა და გაზის დეტონაციური წვის გავრცელების შესაძლო კატასტროფული შედეგების მოდელირებისა და გათვლისათვის [57, 88].

ასეთი ამოცანები წარმოიშობა გაზის საწვავ ნარევებში დეტონაციის წარმოქმნისას. ასევე თერმობირთვული დეტონაციისას, როცა გაზში წერტილოვანი აფეთქების შედეგად ვრცელდება დარტყმითი ტალღა. ეს უკანასკნელი იწვევს გაზში ტემპერატურის ისეთ ზრდას, რომლის დროსაც მოსალოდნელია წვის პროცესები. აღნიშნული პროცესების აღწერისათვის გამოიყენება დეტონაციური ტალღის მოდელი. იგულისხმება, რომ ნივთიერება იწვის უშუალოდ დარტყმითი ტალღის მიდამოში. დარტყმითი ტალღა კი, ევზოთერმული ქიმიური რეაქციის ზონასთან ერთად წარმოადგენს



ძლიერი წყვეტის ზედაპირს (მახასიათებელი ფუნქციების პირველი გვარის წყვეტის ზედაპირი). უძრავი სრულყოფილი გაზისათვის მიღებული იყო ძლიერი დეტონაციური ტალღის გავრცელების ავტომოდელური ამოცანის ზუსტი ამოხსნა. რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით შესწავლილ იქნა წერტილოვანი აფეთქების ამოცანა, უსასრულოდ თხელი დეტონაციური ტალღით. მოცემულ იქნა ტალღის ფრონტზე გამოყოფილი ენერგიის დინებაზე ზეგავლენის ზუსტი ანალიზი დეტონაციის ინიცირებასთან უახლოესი დროითი მომენტებისათვის. მოცემული მომენტებისათვის დეტონაციური ტალღა გადაკუმშულია. ასევე შესწავლილია გადაკუმშული დეტონაციური ტალღის ასიმპტოტური ყოფაქცევა, რომლის ინტენსივობაც მცირედ განსხვავდება ჩეპმენ-ჟუგეს ტალღის (წყვეტის ფარდობითი სიჩქარე ნაწილაკების მიმართ წყვეტის ფრონტის უკან ბგერის სიჩქარის ტოლია) ინტენსივობისაგან. დამტკიცდა, რომ წარმოქმნის ადგილიდან სასრულ მანძილზე, ცილინდრული და სფერული ტალღები გადადიან ჩეპმენ-ჟუგეს რეჟიმში. ეს კვლევები საფუძვლად დაედო თანამედროვე გაზური დინამიკის დიდი კომარტულების – დეტონაციის თეორიის განვითარებას, რომლის ამოცანები რეალური მოდულებისათვის, როგორც წესი, ითხოვს რთული გამოთვლითი მეთოდების გამოყენებას [56].

როგორც ცნობილია, გაზური დინამიკის მრავალი პროცესი აღიწერება კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებითა სისტემისათვის დასმული საწყისი-სასაზღვრო ამოცანებით. ცხადია, რომ ასეთი რთული ტიპის ამოცანებისათვის ზუსტი ამოხსნების მიღება შეუძლებელია.

აფეთქებებთან დაკავშირებულ თანამედროვე გაზურ დინამიკაში, ზემოთ აღნიშნული სირთულეების მიზეზით, დასმული ამოცანების ამოსახსნელად აქტუალურია მიახლოებითი ანალიზური მეთოდების დამუშავება [89].

კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის დასმული საწყისი-სასაზღვრო ამოცანების კორექტულობის, ამოხსნათა არსებობისა და სიგლუვის კვლევა წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკური ფიზიკის უმნიშვნელოვანეს საკითხებს. ამიტომ მათი შესწავლა აქტუალურია, როგორც თეორიული თვალსაზრისით, ასევე კონკრეტული ამოცანების რიცხვითი რეალიზაციის დროს.

როგორც ცნობილია, განზომილების თეორიის მეთოდების სისტემატური განვითარება და გამოყენება გაზური დინამიკის ამოცანებისათვის იძლევა საშუალებას დარტყმითი ტალღების და თავისუფალი ზედაპირების მოძრაობებთან დაკავშირებული წერტილოვანი აფეთქების თეორიის რიგი კლასიკური ამოცანის დასმისა და ამოხსნისა. ეს შრომები საფუძვლად დაედო თანამედროვე გაზური დინამიკის დიდი მიმართულების – აფეთქების თეორიის განვითარებას, რომლის ამოცანები, როგორც წესი, ითხოვს რთული გამოთვლითი მეთოდების გამოყენებას [76].

ძირითადად არსებით და პრაქტიკულად მნიშვნელოვან პარამეტრს ამ ამოცანებში, წარმოადგენს დარტყმითი ან დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონი, რომელიც წარმოიშევა აფეთქების შედეგად ან წონასწორობის დინამიური არამდგრადობის გამო. მაგრამ ამოცანის კლასიკური ფორმულირება დიფერენციალური განტოლებების ენაზე, ჩვეულებრივად, გულისხმობს გაზის დინების თვისების სრულ ლოკალურ წინასწარ განსაზღვრას. მეორე მხრივ, აფეთქების მოვლენის აღწერა იდეალური მათემატიკური მოდელით ბუნებრივია, მოითხოვს გამოთვლების განსაზღვრულ სიზუსტეს [36, 42].

ამასთან დაკავშირებით ცხადია, რომ დიდი მნიშვნელობა აქვს ამოცანის საძებნი ინტეგრალური მახასიათებლის (დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონი) უშუალო მიახლოებითი განსაზღვრას ინტეგროდიფერენციალური უტოლობათა სისტემების დადგენის გზით, რომლებიც საშუალებას იძლევიან მივიღოთ მისთვის უბრალო ორმხრივი შეფასებები. ბევრ შემთხვევაში (მაგალითად, ავტომოდელურებში) ეს შეფასებები მისი ამოხსნისათვის ზდება საკმარისი. ამასთან, ხშირად შეფასებების სიზუსტის ცოტა დაკლება საშუალებას იძლევა მთლიანად გამოვსახოთ პასუხი ელემენტარულ ფუნქციებში [42].

*1. სრულყოფილი გაზის სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის განტოლებათა სისტემა და სასაზღვრო პირობები ძლიერი წყვეტის შემდგომ*

უწყვეტი გარემოს (გაზი) მოძრაობას სფერულ-სიმეტრიული ეწოდება, თუ მისი მახასიათებლები დამოკიდებული არიან მხოლოდ ერთ გეომეტრიულ კოორდინატაზე (მანძილი სიმეტრიის ცენტრადმე).

ასეთი მოძრაობისას მოცემული რადიუსის სფეროებზე გარემოს მახასიათებლები მუდმივებია.

სრულყოფილი გაზის სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის განტოლებას ეილერის კოორდინატებში აქვს სახე:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (7.4.1)$$

ზოლო გაზის მდგომარეობის განტოლებას

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (7.4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}.$$

ეილერის კოორდინატებში მასის უწყვეტობის განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (7.4.3)$$

დეკარტული კოორდინატებიდან გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებზე

$$r, \theta, \varphi \leftrightarrow x, y, z (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z),$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

მაშინ მივიღებთ

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \sum_{i=1}^3 (\rho v^i)_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \rho v^i),$$

სადაც  $\sqrt{g}$  - გარდაქმნის იაკობიანა და ის ტოლია

$$I = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\sqrt{g} = I = r^2 \sin \theta.$$

ამრიგად, უწყვეტობის განტოლებას (7.4.3) სფერული სიმეტრიის შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r^2) = 0. \quad (7.4.4)$$

გაზური დინამიკის პროცესების მათემატიკური მოდელირებისას ხშირ შემთხვევაში იხილება ამოცანები, სადაც საპონია, მათ შორის, მოძრავი ძლიერი წყვეტის ზედაპირები, ამიტომ მიზანშეწონილია მოდელის განხილვისას განტოლებათა სისტემები და ზედაპირებზე წყვეტის პირობები ჩაწერილი იყოს ლაგრანჟის კოორდინატებში.

შემოვიღოთ ლაგრანჟის კოორდინატები.

$m$  იყოს  $r$  რადიუსიანი ბირთვის მასა, ანუ

$$m = \int_{\Omega} \rho d\tau, \quad d\tau = dx dy dz = I dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi,$$

ამიტომ ვღებულობთ

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

რადგანაც სფერულ-სიმეტრიულობის შემთხვევაში  $\rho(r, t)$ , მაშინ

$$m = 4\pi \int_0^r \rho(z, t) z^2 dz. \quad (7.4.5)$$

ამის გათვალისწინებით, გადავწეროთ ყველა განტოლება ლაგრანჟის კოორდინატებში.

უწყვეტობის განტოლება (7.4.5)-ის თანახმად ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\rho(m, t) = \left[ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right]^{-1}. \quad (7.4.6)$$

მოძრაობის განტოლება (7.4.1) მიიღებს სახეს:

$$v \equiv \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} = 0. \quad (7.4.7)$$

გაზის მდგომარეობის განტოლება (7.1.1), (7.4.2) ადიაბატური პროცესებისათვის (პროცესები, რომლებიც მიმდინარეობენ მულტივიენტროპიის პირობებში) მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = F(m).$$

ამრიგად, სრულყოფილი გაზის მათემატიკური მოდელი ლაგრანჟის კოორდინატებში ჩაიწერება შემდეგი არაწრფივი განტოლებათა სისტემის სახით:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \\ P = (\gamma - 1)f(m)\rho^\alpha, \\ \rho = \left[ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (7.4.8)$$

სადაც  $r, p, \rho \| m, t$ ,  $\frac{\partial r}{\partial t} = v$  - გაზის მოძრაობის სიჩქარეა, ხოლო  $f(m)$  ფუნქცია, დაკავშირებულია ენტროპიის განაწილებასთან ლაგრანჟის  $m$  კოორდინატით.

საბოლოოდ, სრულყოფილი გაზის ადიაბატური სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის განტოლება სისტემას ლაგრანჟის კოორდინატებში აქვს სახე (7.4.8), ხოლო სასაზღვრო პირობებს ძლიერი წყვეტის ზედაპირზე კი

$$[r]_1^2 = [vM - 4\pi r^2 p]_1^2 = 0, \quad (7.4.9)$$

$$\left[ M \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho} \right) - 4\pi r^2 v p \right]_1^2 = QM.$$

ამასთან,  $Q = 0$  დარტყმითი ტალღის შემთხვევაში,  $Q \neq 0$  დეტონაციური ტალღის შემთხვევაში, ლაზერული დეტონაციის შემთხვევაში  $QM$  (7.4.9)-ში უნდა შეიცვალოს გამოსხივების მოცემული  $P(t)$  სიმძლავრით.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ პირობები ძლიერი წყვეტის ზედაპირზე ეილერის კოორდინატებში ჩაიწერება შემდეგი სახით [75, 77, 88]

$$\left[ \rho \left( \dot{R} - \frac{\partial r}{\partial t} \right) \right]_1^2 = 0, \quad \left[ p + \rho \left( \dot{R} - \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right]_1^2 = 0,$$

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \dot{R} - \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{\gamma p}{\gamma - 1 \rho} \right]_1^2 = Q, \quad [\varphi]_1^2 \equiv \varphi_2 - \varphi_1.$$

## 2. ენერგიის და ლაგრანჟ - იაკობის ინტეგრალური განტოლებები

გარემოს მოძრაობის განტოლებათა სისტემიდან და სასაზღვრო პირობებიდან ძლიერ წყვეტაზე შეიძლება მივიღოთ ენერგიის ინტეგრალური განტოლება, რომელიც ასახავს ნიუტონის მექანიკის ერთ-ერთ უნივერსალურ კანონს, ანუ ენერგიის შენახვის კანონს (თერმოდინამიკის I კანონი).

სრულყოფილი გაზის სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის განტოლება (7.4.7) გავამრავლოთ  $\frac{\partial r}{\partial t}$ -ზე, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} = 0.$$

ბოლო თანაფარდობა ვაინტეგრირებთ  $[0, M(t)]$  მონაკვეთებზე  $dm$ -ით.

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + \int_0^{M(t)} 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial m} dm = 0,$$

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + 4\pi \int_0^{M(t)} r^2 \frac{\partial r}{\partial t} dp = 0. \quad (7.4.10)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები. პირველი ინტეგრალი (7.4.10)-ში ავღნიშნოთ  $I_1$ , მეორე -  $I_2$ .

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm.$$

თუ ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \dot{b}(t)f(t, b(t)) - \dot{a}(t)f(t, a(t)),$$

მაშინ მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm + \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2. \quad (7.4.11)$$

(7.4.10)-ში გადავიღოთ მეორე ინტეგრალზე  $I_2$ .

$$I_2 = 4\pi \int_0^{M(t)} r^2 \frac{\partial r}{\partial t} dp = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial m} \left[ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \right] dm.$$

(7.4.12)

აღვიღი აქვს შემდეგ ლემას:

ლემა. თუ  $r = r(m, t)$  ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგამდე უწყვეტი წარმოებული, მაშინ ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right).$$

დამტკიცება: განვიხილოთ მარცხენა მხარე და გავაწარმოოთ

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \right) = 2r \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial t} + r^2 \frac{\partial^2 r}{\partial m \partial t}.$$

გავაწარმოოთ მარჯვენა მხარე, მაშინ

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right) = 2r \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial m} + r^2 \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial m}.$$

ცხადია, რომ ლემა დამტკიცებულია.

ამ ლემის თანახმად (7.4.12)-დან მივიღებთ:

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left[ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right] dm = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) dm$$

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) dm.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$I_3 = \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) dm,$$

$$p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t};$$

თანაფარდობა  $p = (\gamma_2 - 1)f(m)\rho^{\gamma_2}$  გავაწარმოოთ  $t$ -თი:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma_2 - 1)f(m)\gamma_2 \rho^{\gamma_2 - 1} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{p}{\rho} \gamma_2 \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$-\frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \gamma_2 \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$\frac{p}{\rho^2} (\gamma_2 - 1) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

$$I_3 = - \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dm = - \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm;$$

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm;$$

(7.4.10)- ის თანახმად

$$I_1 + I_2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2 + \\ & + 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm = 0; \end{aligned}$$

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm = \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm - \frac{p}{\rho} \dot{M} \Big|_2;$$



$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2 +$$

$$+ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm - \frac{1}{\gamma_2 - 1} \frac{p}{\rho} \dot{M} \Big|_2 = 0. \quad (7.4.13)$$

$$T \equiv \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm.$$

T არის  $r(m, t)$  რადიუსიანი გაზური ბირთვის კინეტიკური ენერგია, ხოლო შინაგანი ენერგია იქნება:

$$U = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm.$$

ტოლობა (7.4.13) გავაძრავლოთ  $d\tau$ -ზე და ვაინტეგრროთ  $[0, t]$  მონაკვეთზე

$$T + U - \int_0^t \left\{ \dot{M} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right] - 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right\}_2 d\tau = E_0,$$

სადაც  $E_0$  აფეთქების ენერგიაა.

ამრიგად,

$$T + U = E_0 + \int_0^t \left\{ \dot{M} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right] - 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right\}_2 d\tau.$$

საბოლოოდ, (7.4.9)-ის სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$E \equiv T + U = E_0 + \int_0^t \left\{ \dot{M} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + Q \right] - 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right\}_1 d\tau. \quad (7.4.14)$$

მოძრაობის განტოლებიდან გამოვიყვანოთ ლაგრანჟ-ნაკობის ინტეგრალური განტოლება.

$$\text{გავაძრავლოთ (7.4.7) } r(m, t)\text{-ზე და ვაინტეგრროთ } \int_0^{M(t)} dm, \text{ მაშინ}$$

მივიღებთ

$$\int_0^{M(t)} r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + \int_0^{M(t)} 4\pi r^3 \frac{\partial p}{\partial m} dm = 0.$$

პირველი ინტეგრალი ავლნიშნოთ  $I_1$ -ით, მეორე  $I_2$ -ით.

$$\begin{aligned} I_2 &= 4\pi \int_0^{M(t)} r^3 dp = 4\pi r^3 p \Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial(4\pi r^3)}{\partial m} dm = \\ &= 4\pi r^3 p \Big|_2 - 3 \int_0^{M(t)} p \left( 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right) dm = \\ &= 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3 \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm = 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3(\gamma_2 - 1) \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm. \end{aligned}$$

რადგანაც  $U = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm$ , გვექნება

$$I_2 = 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3(\gamma_2 - 1)U,$$

$$I_1 = \int_0^{M(t)} r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm, \quad r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2.$$

$$I_1 = \int_0^{M(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] dm = \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm$$

რადგანაც  $\frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm = T$ , გვექნება

$$I_1 = \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm - 2T.$$

განვიხილოთ ინტეგრალი  $\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm &= \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm \right] - M r \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_2 = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm - M R \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_2, \end{aligned}$$

$$\int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm = \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \frac{\partial r^2}{\partial t} dm = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} r^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M} r^2 \Big|_2,$$

$$I_1 = \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} r^2 dm - \dot{M} R^2 \right] - \dot{M} R \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_2 - 2T,$$

$$I(t) = \int_0^{M(t)} r^2(m, t) dm.$$

ამ სიდიდეს შემფოთებული არის ინერციის მომენტი ეწოდება. საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Psi \equiv 2T + 3(\gamma_2 - 1)U = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( I(t) - \dot{M} R^2 \right) + R \left( 4\pi R^2 p - \frac{\partial r}{\partial t} \dot{M} \right)_1. \quad (7.4.15)$$

(7.4.15) განტოლებას ლაგრანჟ-იაკობის განტოლება ეწოდება.

### 3. ინტეგრირებული ფორმის ინტეგრირებული უტოლობათა მეთოდი სრულყოფილ გაზში მოძრაობის დეტონაციური ტალღისათვის

სრულყოფილი გაზისათვის ინტეგრირებული ფორმის ინტეგრირებული უტოლობათა მეთოდის შინაარსი, რომელიც [42]-ში ადრე იყო შემოთავაზებული მდგომარეობს შემდეგში:

არაწრფივი, კერძოწარმოებულნი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოუხსნელად მივიღოთ ამოცანის მთავარი ინტეგრირებული მახასიათებლის (ძლიერი წყვეტის ზედაპირის, დარტყმითი ან დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის (რადიუსი)) შეფასება.

ზმირ შემთხვევაში, ამ მახასიათებლის ცოდნა საკმარისია პრაქტიკული მნიშვნელობის ამოცანების გადასაწყვეტად.

ინტეგრირებული ფორმის ინტეგრირებული უტოლობათა მეთოდი დამყარებულია სრულყოფილი გაზის კინეტიკური, შინაგანი ენერგიების შეფასებაზე, რომელიც მიიღება ენერგიის და ლაგრანჟ-იაკობის ინტეგრირებული განტოლებებიდან, ჰიოდერის და იენსენის ინტეგრირებული უტოლობების გამოყენებით.

შევაფასოთ შინაგანი ენერგია

$$U = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm = \int_0^{M(t)} f(m) \rho^{\gamma_2 - 1} dm, \quad p = (\gamma_2 - 1) f(m) \rho^{\gamma_2},$$

$$U = \int_0^{M(t)} f(m) \left( 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right)^{1 - \gamma_2} dm = \int_0^{M(t)} f(m) \left( \frac{4\pi}{3} \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{1 - \gamma_2} dm =$$

$$= \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1 - \gamma_2} \int_0^{M(t)} f(m) \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{1 - \gamma_2} dm = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} f(m) \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{1 - \gamma_2} dm$$

$$I = \int_0^{M(t)} f(m) \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{1 - \gamma_2} dm = \int_0^{M(t)} \left[ f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m) \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2}} \right]^{\gamma_2} dm,$$

$$f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m) \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2}} = d, \quad a = \gamma_2,$$

$$\beta = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}, \quad h = \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}}, \quad a^{-1} + b^{-1} = 1.$$

$$\left( \int_0^{M(t)} \left[ f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m) \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2}} \right]^{\gamma_2} dm \right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \times$$

$$\times \left( \int_0^{M(t)} \left[ \left( \frac{\partial r^3}{\partial m} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}} \right]^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}} dm \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}} \geq$$

$$\geq \int_0^{M(t)} f^{\gamma_2}(\mathbf{m}) \left( \frac{\partial r^3}{\partial \mathbf{m}} \right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} \left( \frac{\partial r^3}{\partial \mathbf{m}} \right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}} d\mathbf{m}.$$

$$\left( \int_0^{M(t)} \left[ f^{\gamma_2}(\mathbf{m}) \left( \frac{\partial r^3}{\partial \mathbf{m}} \right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} \right]^{\gamma_2} d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \cdot \left( \int_0^{M(t)} \frac{\partial r^3}{\partial \mathbf{m}} d\mathbf{m} \right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}} \geq$$

$$\geq \int_0^{M(t)} f^{\gamma_2}(\mathbf{m}) d\mathbf{m}.$$

$$\left( \int_0^{M(t)} f(\mathbf{m}) \left( \frac{\partial r^3}{\partial \mathbf{m}} \right)^{1-\gamma_2} d\mathbf{m} \right)^{1/\gamma_2} \cdot R^{\frac{3(\gamma_2-1)}{\gamma_2}} \geq \int_0^{M(t)} f^{1/\gamma_2}(\mathbf{m}) d\mathbf{m}.$$

$$I = \int_0^{M(t)} f(\mathbf{m}) \left( \frac{\partial r^3}{\partial \mathbf{m}} \right)^{1-\gamma_2} d\mathbf{m} \geq R^{3(1-\gamma_2)} \left( \int_0^{M(t)} f^{1/\gamma_2}(\mathbf{m}) d\mathbf{m} \right)^{\gamma_2}.$$

$$U \geq U_- \equiv F \cdot R^{3(1-\gamma_2)},$$

$$F = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\gamma_2-1} \left( \int_0^{M(t)} f^{1/\gamma_2}(\mathbf{m}) d\mathbf{m} \right)^{\gamma_2}. \quad (7.4.16)$$

შევაფასოთ კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{m}.$$

მარტივად მიიღება შეფასება ზემოდან

$$T(t) \leq T_+(t) \equiv \frac{1}{2} \dot{R}^2 M(t).$$

ახლა შევაფასოთ  $T(t)$  ქვემოდან.

გამოვიყენოთ ჰიოლდერის უტოლობა [86].

თუ  $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ , მაშინ

$$\left( \int_a^b f^\alpha(x) dx \right)^{1/\alpha} \left( \int_a^b g^\beta(x) dx \right)^{1/\beta} \geq \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

ავიღოთ გაზის შემოვლელი არის ინერციის მომენტი

$$I = \int_0^{M(t)} r^2 dm,$$

და გავაწარმოოთ  $t$ -თი

$$\dot{I} = \int_0^{M(t)} 2r \frac{\partial r}{\partial t} dm + \dot{M}R^2, \quad \frac{1}{2}(\dot{I} - \dot{M}R^2) = \int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm.$$

ჩავთვალოთ, რომ  $f \equiv \frac{\partial r}{\partial t}$ ,  $g \equiv r$ ,  $\alpha = \beta = 2$ ,  $a = 0$ ,  $b = M(t)$ ,

მაშინ მივიღებთ:

$$\int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm \cdot \int_0^{M(t)} r^2 dm \geq \left( \int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm \right)^2,$$

$$2T \cdot I \geq \frac{1}{4}(\dot{I} - \dot{M}R^2)^2,$$

$$T \geq \frac{1}{8I}(\dot{I} - \dot{M}R^2)^2 \equiv T_- . \quad (7.4.17)$$

მიღებულია კინეტიკური ენერჯის შეფასება ქვემოდან (7.4.17) სახით.

იმის გათვალისწინებით, რომ კუთრი ენტროპია იზრდება დროთა განმავლობაში დარტყმით ტალღებზე, რომლებსაც შეუძლიათ იმოძრაონ წინა დეტონაციური ტალღის უკან, (7.4.9) პირობებიდან ძლიერი წყვეტის ზედაპირზე მივიღებთ [42]:

$$f \geq \frac{\left( \gamma_2 + \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 D^2} - g \right)^{\gamma_2} \left( 1 + \frac{a_1^2}{\gamma_1 D^2} + g \right) D^2}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_2 + 1)^{\gamma_2 + 1} \rho_1^{\gamma_2 - 1}} . \quad (7.4.18)$$

$$a_1^2 = \gamma_1 p_1 / \rho_1, \quad D = \dot{R} - \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_1,$$

$$g\left(\frac{a_1^2}{D^2}, \frac{2(\gamma_2^2 - 1)Q}{D^2}\right) \equiv \\ \equiv \left[ \left(1 - \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 D^2}\right)^2 + \frac{2(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - \gamma_2) a_1^2}{\gamma_1(\gamma_1 - 1) D^2} - \frac{2(\gamma_2^2 - 1)Q}{D^2} \right]^{1/2}.$$

დეტონაციის გარეშე ( $Q = 0$ ) (7.4.16) - (7.4.18)-ის გამოყენება (7.4.14) და (7.4.15) განტოლებებთან ერთად გვაძლევს ინტეგრირებული უტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს  $R(t)$ -ს და  $I(t)$ -ს, დამაკმაყოფილებელს სრულყოფილი გაზისათვის.

თუ გამოვიყენებთ ინტეგრალურ განტოლებებს (7.4.14), (7.4.15) და შეფასებებს (7.4.16) - (7.4.18), მაშინ მივიღებთ:

$$\text{როცა } 1 < \gamma_2 < \frac{5}{3}$$

$$\Psi \geq 3(\gamma_2 - 1)E + (5 - 3\gamma_2)T_-, \quad \Psi \leq 2E + (3\gamma_2 - 5)U_- \quad (7.4.19)$$

$$\gamma_2 > \frac{5}{3}: \Psi \geq 2E + (3\gamma_2 - 5)U_-, \quad \Psi \leq 3(\gamma_2 - 1)E + (5 - 3\gamma_2)T_-;$$

$$\gamma_2 = \frac{5}{3}: \Psi = 2E, E \geq T_- + U_-.$$

პრაქტიკულად მნიშვნელოვან შემთხვევაში დეტონაციური ტალღის მოძრაობისას უძრავ გაზში  $\left(\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1 = 0\right)$  მიღებული უტოლობების გამარტივების მიზნით მივცეთ  $F$ -ის შეფასება, რომელიც მთლიანად საბოლოო სახით იქნება წარმოდგენილი [42].

ამასთან, ჩვენ შემოვიფარგლებით  $\gamma_1 \geq \gamma_2$  შემთხვევით, რაც იძლევა საშუალებას ვიმოქმედოთ ელემენტარული მეთოდებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\Phi(z, y) \equiv \left[ \gamma_2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} z^{\gamma_2} - g(z^{\gamma_2}, y^{\gamma_2}) \right] \left[ 1 + \frac{z^{\gamma_2}}{\gamma_1} + g(z^{\gamma_2}, y^{\gamma_2}) \right]^{1/\gamma_2}, \quad (7.4.20)$$

$$z = \left( \frac{a_1}{D} \right)^{2/\gamma_2}, \quad y = \left[ \frac{2(\gamma_2^2 - 1)Q}{D^2} \right]^{1/\gamma_2}.$$

მტკიცება:  $\Phi(z, y)$  ფუნქცია, როცა  $\gamma_1 \geq \gamma_2$  ამოზნექილია.

(7.4.20)-ის თანახმად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ როცა  $\gamma_1 \geq \gamma_2$  ადგილი აქვთ თანაფარდობებს:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right)^2 > 0. \end{cases}$$

ამიტომ  $\Phi(z, y)$  ფუნქცია ამოზნექილია, როცა  $\gamma_1 \geq \gamma_2$ .

(7.4.16), (7.4.18)-ს, აგრეთვე  $\Phi(z, y)$  ფუნქციის ამოზნექილობის გათვალისწინებით, როცა  $\gamma_1 \geq \gamma_2$ , იენსენის თეორემის გამოყენებით [86].

$$\int_a^b \varphi(d, h) \mu dx \geq \int_a^b \mu dx \cdot \varphi \left( \frac{\int_a^b d \mu dx}{\int_a^b \mu dx}, \frac{\int_a^b h \mu dx}{\int_a^b \mu dx} \right),$$

თუ შესრულებულია სისტემა

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d \partial h} \right)^2 > 0. \end{cases}$$



რაც ორი ცვლადის  $\varphi(d, h)$  ფუნქციის ამოზნექილობის პირობის ექვივალენტურია, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$F \geq \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\gamma_2 - 1} \frac{X^{\gamma_2} \left[ \gamma_2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Z^{\gamma_2} - g(Z^{\gamma_2}, Y^{\gamma_2}) \right]^{\gamma_2} \left[ 1 + \frac{1}{\gamma_1} Z^{\gamma_2} + g(Z^{\gamma_2}, Y^{\gamma_2}) \right]}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_2 + 1)^{\gamma_2 + 1}} \quad (7.4.21)$$

$$X = 4\pi \int_0^R R^{\frac{2}{\gamma_2}} \rho_1^{\frac{1}{\gamma_2}} r^2 dr \geq \frac{W^{\frac{(\gamma_2 + 2)}{\gamma_2}}}{t^{\frac{2}{\gamma_2}}},$$

$$W = (4\pi)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 2}} \int_0^R \rho_1^{\frac{1}{\gamma_2 + 2}} r^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + 2}} dr, \quad (7.4.22)$$

$$Z = \frac{4\pi}{X} \int_0^R a_1^{\frac{2}{\gamma_2}} \rho_1^{\frac{1}{\gamma_2}} r^2 dr,$$

$$Y = \frac{4\pi}{X} \int_0^R [2(\gamma_2^2 - 1)Q]^{\frac{1}{\gamma_2}} \rho_1^{\frac{1}{\gamma_2}} r^2 dr.$$

$X$ -ის შეფასება (7.4.22)-ში  $W$ -ს მეშვეობით მიღებულია ჰიოლდერის უტოლობის დახმარებით და ის შეიძლება გამოყენებულ იქნას (7.4.21)-ის მარჯვენა მხარის მონოტონურობის ძალით.

*შენიშვნა 1.* დეტონაციური ტალღების თეორიაში ავტომოდულური ამოცანებისათვის, როცა  $Q = \text{const}$ ,  $X$  ფუნქცია (7.4.22)-ში გამოითვლება  $\rho_1$  სიმკვრივის საწყისი განაწილებით, რადგანაც ამ შემთხვევაში დეტონაციური ტალღა მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით და

$R^{\frac{2}{\gamma_2}}$  შეიძლება გავითანოთ ინტეგრალის გარეთ.  $X$ -ის შეფასება  $W$ -ს მეშვეობით, აგრეთვე მთლიანობაში (7.4.21) აუცილებელია დეტონაციური ტალღების თეორიაში არაავტომოდულური ამოცანების განხილვის დროს [76].

შენიშვნა 2. გაზური დინამიკის ამოცანების მოდელირებისას წინაწინების გარეშე ( $p_1 = 0$  ე.ი.  $a_1 = 0$ ) ადიაბატის  $\gamma$  მაჩვენებლის უწყვეტობა ძლიერ წყვეტაზე არაა არსებითი.

#### 4. ძლიერი წყვეტის ზედაპირის მოძრაობის კანონის შეფასება

სრულყოფილ გაზში ინტეგროდიფერენციალურ უტოლობათა მეთოდის ილუსტრაციისათვის განვიხილოთ ზოგიერთი ცნობილი ავტომოდელური ამოცანების ზუსტი ამონახსნები.

მაგალითი 1. განვიხილოთ კლასიკური ამოცანა ძლიერი ფეთქებადი დარტყმითი ტალღის გაერცელების შესახებ უძრავ გაზში [76].

(7.4.8) განტოლებათა სისტემის ზუსტ ამონახსნს დარტყმითი ტალღის წინ აქვს სახე:

$$r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{m}{\rho_1}\right)^{1/3}, \quad \rho = \rho_1, p = 0. \quad (7.4.23)$$

ამოცანის ავტომოდელურობის ძალით (მხოლოდ ორი განზომილებიანი მუდმივი სიდიდეა დამოუკიდებელი განზომილებით:  $E_0$  - ფეთქების ენერგია,  $\rho_1 = \text{const}$  - სიმკვრივის საწყისი განაწილება) მივიღებთ ( $Q = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ )

$$R(t) = (E_0 \rho_1^{-1} t^2)^{1/5} R_1, \quad I(t) = E_0 t^2 I_1, \quad (7.4.24)$$

სადაც  $R_1, I_1$  - უგანზომილებო პარამეტრებია.

მხოლოდ ენერგიის ინტეგრალური განტოლების (7.4.14)-ის გამოყენებით მივიღოთ  $R_1$ -ს პირველი უხეში შეფასება.

(7.4.16) უტოლობის საფუძველზე

$$T(t) \geq 0, U \geq \frac{F}{R^{3(\gamma-1)}} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma-1} \frac{1}{R^{3(\gamma-1)}} \left[ 4\pi \int_0^t (v(\gamma) \rho_1)^{1/\gamma} R^{\frac{\gamma+2}{\gamma}} R^2 dt \right]^\gamma,$$

$$v(\gamma) = \frac{2(\gamma-1)^{\gamma-1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}.$$

$$E_0 = T + U > E_0 R_1^5 \frac{32\pi\gamma^7}{75(\gamma-1)(\gamma+1)^{\gamma+1}}. \quad (7.4.25)$$

მაგალითად, ჰაერისათვის ( $\gamma = 1,4$ ) (7.4.25)-დან მივიღებთ  $R_1$ -ის შეფასებას შემოდან

$$R_1 = 1,03 < 1,09, \quad \Delta_+ = 5,6\%,$$

სადაც  $\Delta$  - შეფასების ფარდობითი ცდომილებაა შედარებით ზუსტ ამონახსთან ( $R_1 = 1,03$ ).

ქვემოდან შეფასების მისაღებად და შემოდან შეფასების გასაუმჯობესებლად გამოვიყენოთ მარტივი უტოლობა

$$I = \int_0^M r^2 dm \leq R^2 M, \quad r(m, t) \leq R(t)$$

და (7.4.15), (7.4.19).

მაშინ, როცა  $1 < \gamma < \frac{5}{3}$ , მივიღებთ

$$(3\gamma - 5)R_1^5 \frac{32\pi\gamma^7}{75(\gamma-1)(\gamma+1)^{\gamma+1}} + 2 > \\ > I_1 - \frac{4\pi}{5}R_1^5 > (5 - 3\gamma) \frac{(I_1 - \frac{4\pi}{5}R_1^5)^2}{2I_1} + 3(\gamma - 1), \quad (7.4.26)$$

$$I_1 < \frac{4\pi}{3}R_1^5,$$

საიდანაც მივიღებთ ორმაგ უტოლობას

$$\frac{75(\gamma-1)}{8\pi\gamma} < R_1^5 < \frac{3(2\beta(\gamma-1) + \frac{6\gamma}{5} - 2)}{4\pi((\gamma-1)\beta^2 - \frac{2\beta}{5})},$$

$$\text{სადაც } \beta = \frac{8(5-3\gamma)\gamma^7}{25(\gamma-1)(\gamma+1)^{\gamma+1}}.$$

როცა  $\gamma = \frac{5}{3}$ , განტოლება (7.4.15)-ს  $\psi = 2E$  მიგვიყვანს

ტოლობასთან

$$I_1 = 2 + \frac{4\pi}{5} R_1^2,$$

ზოლო შეფასება  $R_1$ -თვის მიიღება (7.4.14)-დან.

$\gamma = 1,4$ -თვის მივიღებთ

$$0,97 < 1,03 < 1,04, \quad \Delta_+ \cong 1\%, \quad \Delta_- \cong 5,8\%.$$

როცა  $\gamma > \frac{5}{3}$  (7.4.26) უტოლობებში უბრალოდ უნდა შევცვალოთ

უტოლობების ნიშნები.

მაგალითი 2. განვიხილოთ ამოცანა ძლიერი დეტონაციური ტალღის მოძრაობის შესახებ სრულყოფილ არაერთგვაროვან გაზში. სიმეტრიის ცენტრში ენერგია არ გამოიყოფა ( $E_0 = 0$ ) [56, 57, 76].

(7.4.8) განტოლებათა სისტემის ზუსტ ამონახსნს დეტონაციური ტალღის წინ აქვს სახე:

$$r = \left( \frac{3-\omega}{4\pi} \right)^{1/(3-\omega)} \left( \frac{m}{A} \right)^{1/(3-\omega)}, \quad \rho = \rho_1 = Ar^{-\omega}, \quad p = p_1 = 0, \quad (7.4.27)$$

სადაც  $A$  - შესაბამისი განზომილებიანი მუდმივაა.

ამოცანის ავტომოდელურობის ძალით (ამოცანაში მხოლოდ ორი განზომილებიანი  $Q, A$  მუდმივაა დამოუკიდებელი განზომილებით) გვექნება

$$R(t) = \sqrt{QR_1 t},$$

სადაც  $R_1$  - დეტონაციური ტალღის უგანზომილებო რადიუსია.

(7.4.14), (7.4.15) განტოლებების, (7.4.16) - (7.4.18) უტოლობებისა და (7.4.9), (7.4.27)-ის გამოყენებით, დეტონაციური ტალღის უგანზომილებო რადიუსისათვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\text{როცა } \gamma = \frac{5}{3}, \quad \omega = 2, \quad 1,8857 \leq R_1 \leq 2,0547,$$

ამოცანის ზუსტი ამონახსნი იძლევა  $R_1 = 2$ , ამასთან ქვედა და ზედა შეფასებების ფარდობითი ცდომილებები შესაბამისად  $\Delta_- \cong 5,7\%$ ,  $\Delta_+ \cong 2,7\%$  ტოლია.

როცა  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\omega = \frac{5}{4}$ , ზუსტ ამონახსნში [56, 57, 76] ადგილი აქვს ჩეპმენ-უუგეს რეჟიმს ( $g \cong 0$ ), ზოლო უტოლობები იძლევიან  $1,8857 \leq R_1 \leq 1,972$  შეფასებას. ზედა შეფასების

ფარდობითი ცდომილება შეადგენს  $\Delta_+ \cong 4,6\%$ , ხოლო ქველა შეფასება ზუსტია ( $\Delta_- = 0\%$ ).

ამ ავტომოდელური ამოცანის მაგალითზე შევამოწმოთ (7.4.22) X-ის შეფასების სიზუსტე.

(7.4.14), (7.4.15) განტოლებების, (7.4.16) - (7.4.18) უტოლობებისა, (7.4.9), აგრეთვე (7.4.22)-ს X-სათვის შეფასების გამოყენება მოგვცემს შემდეგ შედეგებს:

როცა  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\omega = 2$   $2,04 \leq R_1 \leq 2,41$ , რაც შეესაბამება დეტონაციური ტალღის უგანზომილებო რადიუსის შეფასების  $\Delta_- \cong 2\%$ ,  $\Delta_+ \cong 20,5\%$  ფარდობით ცდომილებებს.

როცა  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\omega = \frac{5}{4}$   $2,188 \leq R_1 \leq 2,449$ , ამასთან შეფასების ფარდობითი ცდომილებები შესაბამისად შეადგენენ  $\Delta_- \cong 16\%$ ,  $\Delta_+ \cong 30\%$ .

უნდა აღინიშნოს, რომ, როცა  $\omega = 2\gamma$ , X-სათვის (7.4.22) შეფასებაში ავტომოდელური ამოცანების შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობას, ხოლო, როცა  $\omega \neq 2\gamma$ , X-სათვის შეფასება W-ს მეშვეობით უზრუნველყოფს პრაქტიკულად კარგ სიზუსტეს.

*შენიშვნა 3.* დეტონაციის გარეშე გაზური დინამიკის ამოცანების განსხვავებით დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის შეფასებისათვის აქ არსებითი როლი შეიძლება ითამაშოს უტოლობამ, რომელიც დაკავშირებულია ჩეპმენ-ჟუგეს პირობასთან

$$D^2 = \dot{R}^2 \geq 2(\gamma_2^2 - 1)Q.$$

ავტომოდელური ამონახსნების მოყვანილი მაგალითები, რომელთა გამოკვლევა სასარგებლოა უფრო რთული არაავტომოდელური ამოცანების იზოთერმული ასიმპტოტიკების შესწავლისათვის და ინტეგრალური უტოლობების მეთოდის გამოყენების არის გარკვევისათვის გვიჩვენებენ, რომ მიღებულ შეფასებებს შეუძლიათ პრაქტიკულად უზრუნველყონ კარგი სიზუსტე, სრულყოფილ გაზში დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის განსაზღვრაში [42].

## § 7.5. ბრავიტირებადი გაზის მათემატიკური მოდელი

ასტროფიზიკის მრავალი ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს გრავიტაციულ ველებთან ურთიერთქმედებაში მყოფი გაზური სხეულების დინამიკის კვლევას. თანამედროვე ასტროფიზიკაში განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ვარსკვლავთა აფეთქებების კატასტროფული მოვლენები, შედეგად მიღებული ნეიტრონული ვარსკვლავები და კოლაფსირებადი სხეულები – შავი ხვრელები. არასტაციონარულ ვარსკვლავთა ნათების სწრაფი და ძლიერი ცვლილება მართლაც ადასტურებს მათში მიმდინარე აფეთქებებს, ანუ დროის უმცირეს მონაკვეთში, მცირე მოცულობაში დიდი რაოდენობის ენერჯის გამოთავისუფლებას [25, 43, 52].

ცხადია, რომ ციური მოვლენების კვლევის კონცეფციას აუცილებლად უნდა დაედოს საფუძვლად გრავიტირებადი გაზის მოძრაობის აღმწერი რიგი დინამიკური ამოცანების დასმა და ამოხსნები. აღნიშნული ამოცანები განიხილება, როგორც ვარსკვლავებისა და ნისლოვანების მოძრაობისა და ევოლუციის მნიშვნელოვანი მახასიათებლების აღმწერი მათემატიკური მოდელები.

გრავიტირებად გაზში დეტონაციური წვის აღმწერი მოდელების აგებისა და კვლევისათვის აუცილებელია გამოყენებულ იქნას აპრობირებული მეთოდები, კერძოდ თანამედროვე თეორიული გაზური დინამიკის – აეროდინამიკის აპარატი და შესაბამისი პრობლემებისათვის დასმული და ამოხსნილი იქნას მექანიკური ამოცანები.

მრავალი დაკვირვების შედეგების თანახმად ახალი და ზეახალი ვარსკვლავების აფეთქებები წარმოადგენენ გაზის დიდი მასების დაუმყარებელ მოძრაობას, რომელსაც თან სდევს გამოსხივებული ენერჯის მკვეთრი ზრდა.

ადრე მიღებულია რიგი ავტომოდელური სფერულ-სიმეტრიული ამოცანების დასმა და დაუმყარებელი, ადიაბატური, ერთგვაროვანი გაზის მოძრაობის განტოლებების ზუსტი ამოხსნების მაგალითები გრავიტაციული ძალების გათვალისწინებით. ეს მოდელები შესაძლებელია განხილულ იქნას, როგორც ვარსკვლავური აფეთქებების რეალური მოვლენების მნიშვნელოვანი ფაქტორების – მახასიათებლების აღმწერი სქემატური მოდელები.

ასეთი გრანდიოზული კოსმიური კატასტროფების თეორიული გააზრებისათვის ლ. სელოვის მიერ გაზური დინამიკის ამოცანებში განზომილების თეორიის მეთოდების გამოყენებამ შესაძლებელი გახადა წერტილოვანი აფეთქების თეორიიდან რიგი კლასიკური ამოცანების დასმა და ამოხსნა. ეს ამოცანები დაკავშირებულები არიან დარტყმითი ტალღების და თავისუფალი ზედაპირების მოძრაობასთან. ამ შრომებმა საფუძველი დაუდეს თანამედროვე გაზის დინამიკის დიდი მიმართულების განვითარებას - აფეთქების თეორიას, რომლის ამოცანებიც მოითხოვენ, როგორც წესი რთული გამოთვლითი მეთოდების გამოყენებას [76].

ძირითადად არსებით და პრაქტიკულად მნიშვნელოვან პარამეტრს ამ ამოცანებში, წარმოადგენს გრავიტირებად გაზში დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონი, რომელიც წარმოიშობა აფეთქების შედეგად, მაგრამ დიფერენციალური განტოლებების ენაზე ამოცანის კლასიკური ფორმულირება, ჩვეულებრივ გულისხმობს მთლიანი ლოკალური მიმდინარეობის თვისების წინასწარ განსაზღვრას. მეორე მხრივ, აფეთქების მოვლენის აღწერა იდეალური მათემატიკური მოდელით ბუნებრივია მოითხოვს გამოთვლების განსაზღვრულ სიზუსტეს. ამასთან დაკავშირებით ცხადია, რომ დიდი მნიშვნელობა აქვს ამოცანის საძებნი ინტეგრალური მახასიათებლის უშუალო მიახლოებით განსაზღვრას, უტოლობების სისტემების დადგენის გზით, რომლებიც საშუალებას იძლევიან მივიღოთ მისთვის უბრალო ორმხრივი შეფასებები. ბევრ შემთხვევაში ეს შეფასებები საკმარისი ხდება მისი ამოხსნისათვის [42].

ამ პარაგრაფში სრულყოფილი გრავიტირებადი გაზის ერთგანზომილებიანი სფერულ-სიმეტრიული დინებისათვის გარემოს მოძრაობის განტოლებების, ენერჯისა და ლაგრანჟ-იაკობის ინტეგრალური განტოლებების საფუძველზე გამოყვანილ იქნება ინტეგროდოფერენციალურ უტოლობათა სისტემა, დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონისათვის და მოძრაობის შემფოთებული არის ინერჯის მომენტისათვის. დეტონაციური ტალღის პრაქტიკულად მნიშვნელოვან უძრავ გაზში მოძრაობის შემთხვევაში საწყისი უტოლობების ამოხსნის დასაბუთებისათვის და მათი გამარტივების მიზნით, ჰიოლდერისა და იენსენის უტოლობების გამოყენებით მიღებულია უტოლობათა სისტემა, რომელიც

წარმოდგენილია საბოლოო სახით. განხილულია რიგი ავტომოდელური ამოცანა [42].

*1. გრავიტირებადი გაზის სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის განტოლებათა სისტემა და სასაზღვრო პირობები კლიერი წვემტის ზედაპირზე*

სრულყოფილი გრავიტირებადი გაზის ადიაბატურ სფერულ-სიმეტრიულ მოძრაობის განტოლებათა სისტემასა და პირობებს ძლიერი წვემტის ზედაპირზე ლაგრანჟის კოორდინატებში აქვთ სახე:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} + \frac{km}{r^2} = 0, \quad p = (\gamma - 1)f(m)p^\gamma, \quad \rho = \left[ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right]^{-1}, \quad (7.5.1)$$

$$[r]_1^2 = [vM - 4\pi r^2 p]_1^2 = 0, \quad (7.5.2)$$

$$\left[ \dot{M} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{kM}{R} \right) - 4\pi r^2 v p \right]_1 = Q \dot{M},$$

სადაც საძებნი ფუნქციებია  $r, p, \rho \| m, t$ ,  $\frac{\partial r}{\partial t} = v$  - გაზის

მოძრაობის სიჩქარეა,  $k$  - გრავიტაციული მუდმივაა, ხოლო  $f(m)$  ფუნქცია დაკავშირებულია ენტროპიის განაწილებასთან ლაგრანჟის  $m$  კოორდინატით,  $Q = 0$  დარტყმითი ტალღის შემთხვევაში,  $Q \neq 0$  დეტონაციური ტალღის შემთხვევაში.

მოძრაობის განტოლება (7.5.1)-ში მიღებულია მოძრაობის განტოლებიდან ეილერის კოორდინატებში

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (7.5.3)$$

სადაც  $\Phi$  არის გრავიტაციული ველის პოტენციალი და ის განისაზღვრება პუასონის განტოლებიდან

$$\Delta \Phi = -4\pi k \rho. \quad (7.5.4)$$

ლაპლასიანს დეკარტულ კოორდინატებში აქვს სახე:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



გადავწეროთ ლაპლასიანი სფერულ კოორდინატებში  
 $(x, y, z) \Rightarrow (r, \theta, \varphi)$ ,

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (7.5.5)$$

მაგრამ სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის შემთხვევაში  $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ,

ამიტომ (7.5.4), (7.5.5)-დან მივიღებთ

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -4\pi k\rho,$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{r^2} 4\pi k \int_0^r \rho z^2 dz + \frac{c_1}{r^2}, \quad \Phi = -4\pi k \int_0^r \frac{1}{r^2} \left( \int_0^r \rho z^2 dz \right) dr - \frac{c_1}{r} + c_2,$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{-4\pi k \int_0^r \rho z^2 dz}{r^2}.$$

ბოლო თანაფარდობაში ინტეგრალი  $4\pi \int_0^r \rho z^2 dz = m$ , ამიტომ

(7.5.3)-დან მარტივად ვღებულობთ გრავიტირებადი გაზის მოძრაობის განტოლებას (7.5.1)-ს სახით.

ამრიგად,  $r = r(m, t)$  - გარემოს მოძრაობის კანონია,  $m = M(t)$  - ძლიერი წყვეტის ზედაპირის მოძრაობის კანონია ლაგრანჟის მასური  $m$  კოორდინატით, ხოლო  $R = r(M(t), t)$  - ძლიერი წყვეტის ზედაპირის მოძრაობის კანონია (რადიუსი).

## 2. ენერგიის და ლაგრანჟ - იაკობის ინტეგრალური განტოლებები

გრავიტირებადი გაზის მოძრაობის განტოლებათა სისტემიდან და სასაზღვრო პირობიდან ძლიერ წყვეტაზე შეიძლება მივიღოთ ენერგიის ინტეგრალური განტოლება, რომელიც ასახავს ნიუტონის მექანიკის ერთ-ერთ უნივერსალურ კანონს, ანუ ენერგიის შენახვის კანონს (თერმოდინამიკის I კანონი).

სრულყოფილი გრავიტირებადი გაზის სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის განტოლება (7.5.1) გავაზრავლოთ  $\frac{\partial r}{\partial t}$ -ზე, მივიღებთ

$$\frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{km}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} = 0.$$

ვანტეგროთ ის  $[0, M(t)]$  მონაკვეთებზე  $dm$ -ით.

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + \int_0^{M(t)} 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial m} dm + \int_0^{M(t)} \frac{km}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} dm = 0,$$

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + 4\pi \int_0^{M(t)} r^2 \frac{\partial r}{\partial t} dp - \int_0^{M(t)} km \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \right) dm = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: პირველი ინტეგრალი ავლნიშნოთ  $I_1$ , მეორე  $-I_2$ , მესამე კი  $-I_3$ -ით.

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm.$$

ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + b(t)f(t, b(t)) - a(t)f(t, a(t)),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm + \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2.$$

გადავიღეთ მეორე ინტეგრალზე  $I_2$

$$I_2 = 4\pi \int_0^{M(t)} r^2 \frac{\partial r}{\partial t} dp = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial m} \left[ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \right] dm,$$

§ 7.4-ში დამტკიცებული ლემის თანახმად მივიღებთ:

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left[ 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right] dm =$$

$$= 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) dm,$$

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) dm.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$I_4 \equiv \int_0^{M(t)} p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) dm,$$

$$p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t};$$

თანაფარდობა  $p = (\gamma_2 - 1)f(m)\rho^\gamma$  გავაწარმოთ  $t$ -თი

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma_2 - 1)f(m)\gamma_2 \rho^{\gamma_2 - 1} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{p}{\rho} \gamma_2 \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$-\frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \gamma_2 \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$\frac{p}{\rho^2} (\gamma - 1) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

$$I_4 = - \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dm = - \frac{1}{\gamma - 1} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm;$$

$$I_2 = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm;$$

$$I_3 = - \int_0^{M(t)} km \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \right) dm = -k \int_0^{M(t)} m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \right) dm =$$

$$= -k \left[ \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \frac{m}{r} dm - M \frac{M}{R} \right] = \frac{kM}{R} \dot{M} - k \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \frac{m}{r} dm;$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2 + \\
& + 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm + \frac{kM}{R} \dot{M} - k \frac{d}{dt} \int_0^M \frac{m}{r} dm = 0, \\
& \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho} \right) dm = \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm - \frac{p}{\rho} \dot{M} \Big|_2, \\
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M}(t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \Big|_2 + \\
& + 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \Big|_2 + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm - k \frac{d}{dt} \int_0^M \frac{m}{r} dm + \\
& + \frac{kM}{R} \dot{M} - \frac{1}{\gamma_2 - 1} \frac{p}{\rho} \dot{M} \Big|_2 = 0.
\end{aligned}$$

ბოლო ტოლობა გავამრავლოთ  $d\tau$ -ზე და ვაინტეგრროთ  $[0, t]$  მონაკვეთზე

$$T + U - kV - \int_0^t \left\{ M \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{kM}{R} \right] - 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right\} d\tau = E_0,$$

სადაც  $T, U, (-kV)$ - შესაბამისად კინეტიკური, შინაგანი და გრავიტაციული ენერგიებია,  $E_0$  - ინტეგრების მუდმივია.

$$\begin{aligned}
T &\equiv \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm, & U &\equiv \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm, \\
V &\equiv \int_0^{M(t)} \frac{m}{r} dm. & & (7.5.6)
\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$T + U - kV = E_0 + \int_0^t \left\{ M \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{kM}{R} \right] - 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right\} d\tau.$$

საბოლოოდ, სასაზღვრო პირობების (7.5.2)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$E \equiv T + U - kV =$$

$$= E_0 + \int_0^t \left\{ M \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma-1)\rho} - \frac{kM}{R} + Q \right] - 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right\} d\tau. \quad (7.5.7)$$

მოდრაობის (7.5.1) განტოლებიდან გამოვიყვანოთ ლაგრანჟ-იაკობის ინტეგრალური განტოლება.

$$\text{ამისათვის ის გავამრავლოთ } r(m, t)\text{-ზე და ვაინტეგრროთ } \int_0^{M(t)} dm,$$

მაშინ

$$\int_0^{M(t)} r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + \int_0^{M(t)} 4\pi r^3 \frac{\partial p}{\partial m} dm + \int_0^{M(t)} \frac{km}{r} dm = 0.$$

ბოლო თანაფარდობაში პირველი ინტეგრალი ავლნიშნოთ  $I_1$ -ით, მეორე  $I_2$ -ით, ხოლო მესამე -  $I_3$ -ით.

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (7.5.8)$$

$I_2 =$

$$\begin{aligned} &= 4\pi \int_0^{M(t)} r^3 dp = 4\pi r^3 p \Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial(4\pi r^3)}{\partial m} dm = 4\pi r^3 p \Big|_2 - 3 \int_0^{M(t)} p \left( 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right) dm = \\ &= 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3 \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm = 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3(\gamma_2 - 1) \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm. \end{aligned}$$

ამრიგად, გვექნება

$$I_2 = 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3(\gamma_2 - 1) U, \quad I_1 = \int_0^{M(t)} r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm.$$

$$r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2$$

$$I_1 = \int_0^{M(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] dm = \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm.$$

ე.ი. (7.5.6)-ს თანახმად გვექნება

$$I_1 = \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm - 2T.$$

განვიხილოთ ინტეგრალი  $\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm$ .

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm \right] - \dot{M} r \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_2 =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm - \dot{M} R \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_2$$

$$\int_0^{M(t)} r \frac{\partial r}{\partial t} dm = \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \frac{\partial r^2}{\partial t} dm = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} r^2 dm - \frac{1}{2} \dot{M} R^2 \Big|_2$$

$$I_1 = \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} \int_0^{M(t)} r^2 dm - \dot{M} R^2 \right] - \dot{M} R \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_2 - 2T.$$

$$I(t) = \int_0^{M(t)} r^2(m, t) dm.$$

$I(t)$  სიდიდეს შეშფოთებული არის ინერციის მომენტი ეწოდება.

საბოლოოდ (7.5.8)-დან მივიღებთ

$$\Psi \equiv 2T + 3(\gamma_2 - 1)U - kV =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( I(t) - \dot{M} R^2 \right) + R \left( 4\pi R^2 p - \frac{\partial r}{\partial t} \dot{M} \right) \Big|_1 \quad (7.5.9)$$

განტოლებას, რომელსაც ლაგრანჟ-იაკობის განტოლება ეწოდება.

3. ინტეგრირებადი სრულყოფილი უტოლობათა მეთოდი  
 მრავლიწილობად გაჯში მოძრაობი დეტონაციური  
 ტალღისათვის

გრავიტირებადი სრულყოფილი გაზისათვის ინტეგრირებადი ფუნქციონალურ უტოლობათა მეთოდის შინაარსი, რომელიც ადრე შემოთავაზებული იყო თ. ჩილაჩავას [42] მიერ, მდგომარეობს შემდეგში:

არაწრფივი, კერძოწარმოებულნიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოუხსნელად მივიღოთ ამოცანის მთავარი ინტეგრალური მახასიათებლის (ძლიერი წვევების ზედაპირის, დარტყმითი ან დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის (რადიუსი)) შეფასება.

ხშირ შემთხვევაში, ამ მახასიათებლის ცოდნა საკმარისია პრაქტიკული მნიშვნელობის ამოცანების გადასაწყვეტად.

ინტეგრირებადი ფუნქციონალურ უტოლობათა მეთოდი დამყარებულია სრულყოფილი გრავიტირებადი გაზის კინეტიკური, შინაგანი და გრავიტაციული ენერგიების შეფასებაზე, რომელიც მიიღება ენერგიის და ლაგრანჟ-თაკობის ინტეგრალური განტოლებებიდან, ჰიოლდერის და იენსენის ინტეგრალური უტოლობების გამოყენებით.

შინაგანი  $U$  და კინეტიკური  $T$  ენერგიებისათვის ადგილი აქვთ (7.4.16), (7.4.17), (7.4.21) შეფასებებს.

ვარჩევთ, რომ გრავიტაციული ენერგია შეფასდება შემდეგნაირად

$$V \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \frac{M^{5/2}}{I^{1/2}} \equiv V_-, \quad (7.5.10)$$

დამტკიცება. ჰიოლდერის უტოლობაში

$$\left(\int_a^b h^\alpha dx\right)^{1/\alpha} \left(\int_a^b f^\beta dx\right)^{1/\beta} \geq \int_a^b fh dx.$$

შევარჩიოთ  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = 3$ ,  $h = \left(\frac{m}{r}\right)^{2/3}$ ,  $f = r^{2/3}$ ,

მაშინ

$$\left(\int_0^{M(t)} \left(\left(\frac{m}{r}\right)^{2/3}\right)^{3/2} dm\right)^{2/3} \cdot \left(\int_0^{M(t)} \left(r^{2/3}\right)^3 dm\right)^{1/3} \geq \int_0^{M(t)} m^{2/3} dm$$

$$\left( \int_0^{M(t)} \frac{m}{r} dm \right)^{2/3} \cdot \left( \int_0^{M(t)} r^2 dm \right)^{1/3} \geq \int_0^{M(t)} m^{2/3} dm, \quad V^{2/3} \cdot I^{1/3} \geq \frac{3}{5} M^{5/3},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$V \cdot I^{1/2} \geq \left( \frac{3}{5} \right)^{3/2} M^{5/2},$$

აქედან კი (7.5.10).

როგორც აღინიშნა § 7.4-ში, გრავიტაციის და დეტონაციის გარეშე ( $k=0, Q=0$ ) (7.4.16) - (7.4.18)-ის გამოყენება (7.4.14) და (7.4.15) განტოლებებთან ერთად გვაძლევს ინტეგრირებული უტოლობათა სისტემას, რომლებიც შეიცავენ  $R(t)$ -ს და  $I(t)$ -ს, დამაკმაყოფილებელს სრულყოფილი გაზისათვის.

გრავიტაციული პოტენციური ენერჯიის ( $-kV$ ) უარყოფითობის გამო გრავიტაციის გათვალისწინება, მნიშვნელოვნად ართულებს ამოცანას.

იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ უტოლობათა სისტემები, აუცილებელია შევავსოთ  $V$  სიდიდე ზემოდან.

ლემმა. როცა  $\gamma_2 > 4/3$  ადგილი აქვს უტოლობას [42]

$$U \geq GV^4(\gamma_2-1) \left( V - \frac{M^2}{2R} \right)^{1-\gamma_2}, \quad (7.5.11)$$

$$G = \frac{1}{(8\pi)^{\gamma_2-1}} \left\{ \int_0^{M(t)} \left[ \frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)} \right]^{1/(3\gamma_2-4)} dm \right\}^{4-3\gamma_2}.$$

დამტკიცება.

(7.5.6)-ს თანახმად

$$V = \int_0^{M(t)} \frac{m dm}{r} = \int_0^{M(t)} \frac{dm^2}{2r} = \frac{m^2}{2r} \Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} \frac{m^2}{2} dr^{-1} =$$

$$= \frac{M^2}{2R} + \int_0^M \frac{m^2}{2r^2} \frac{\partial r}{\partial m} dm$$



$$V - \frac{M^2}{2R} = \frac{1}{2} \int_0^M \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial m} dm.$$

(7.5.11) გადაწერება

$$\int_0^M f(m) \frac{dm}{(4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma_2-1}} \geq \frac{1}{(8\pi)^{\gamma_2-1}} \left\{ \int_0^M \left[ \frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)} \right]^{\frac{1}{3\gamma_2-4}} dm \right\}^{4-3\gamma_2} \left( \int_0^M \frac{m dm}{r} \right)^{4(\gamma_2-1)} \left( \int_0^M \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial m} dm \right)^{1-\gamma_2},$$

$$\int_0^M f(m) \frac{dm}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma_2-1}} \left\{ \int_0^M \left[ \frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)} \right]^{\frac{1}{3\gamma_2-4}} dm \right\}^{3\gamma_2-4} \left( \int_0^M \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial m} dm \right)^{\gamma_2-1} \geq \left( \int_0^M \frac{m dm}{r} \right)^{4(\gamma_2-1)},$$

$$\int_0^M f(m) \frac{dm}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma_2-1}} \left( \int_0^M \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial m} dm \right)^{\gamma_2-1} = \int_0^M \left( \frac{f^{1/\gamma_2}(m)}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}} \right)^{\gamma_2} dm \left( \int_0^M \left[ \left( \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial m} \right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}} \right]^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}} dm \right)^{\gamma_2-1} \geq$$

$$\geq \left( \int_0^M \left( \frac{f^{1/\gamma_2}(m)}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}} \right)^{\gamma_2} dm \right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}} \left( \int_0^M \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial m} dm \right)^{\gamma_2} = \left( \int_0^M \left( \frac{f(m) m^{2(\gamma_2-1)}}{r^{4(\gamma_2-1)}} \right)^{1/\gamma_2} dm \right)^{\gamma_2}.$$

ამრიგად, უნდა ვაჩვენოთ, რომ როცა  $\gamma_2 > \frac{4}{3}$  ადგილი აქვს

$$\left( \int_0^M \left( \frac{f(m) m^{2(\gamma_2-1)}}{r^{4(\gamma_2-1)}} \right)^{1/\gamma_2} dm \right)^{\gamma_2} \left\{ \int_0^M \left[ \frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)} \right]^{\frac{1}{3\gamma_2-4}} dm \right\}^{3\gamma_2-4} \geq$$

$$\geq \left( \int_0^M \frac{m dm}{r} \right)^{4(\gamma_2-1)}.$$

$$\left( \int_0^M \left( \frac{f(m)^{1/4} (\gamma_2 - 1) m^{1/2}}{r} \right)^{\frac{4(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2}} dm \right)^{\frac{\gamma_2}{4(\gamma_2 - 1)}} \times$$

$$\times \left( \int_0^M \left[ \frac{m^{1/2}}{1} \right]^{\frac{4(\gamma_2 - 1)}{3\gamma_2 - 4}} \left[ \frac{1}{f^{4(\gamma_2 - 1)}(m)} \right]^{\frac{3\gamma_2 - 4}{4(\gamma_2 - 1)}} dm \right)^{\frac{3\gamma_2 - 4}{4(\gamma_2 - 1)}} \geq \int_0^M \frac{m dm}{r}.$$

მაგრამ ბოლო უტოლობა მართებულია ჰილდერის უტოლობის ძალით ( $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ ), რადგანაც

$$\alpha = \frac{4(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2} > 1, \quad 4\gamma_2 - 4 > \gamma_2, \gamma_2 > \frac{4}{3}.$$

ეს პირობა კი შესრულებულია ლემის თანახმად, ხოლო

$$\beta = \frac{4(\gamma_2 - 1)}{3\gamma_2 - 4} > 1,$$

რადგანაც  $\gamma_2 > 0$ .

ამრიგად, ლემა დამტკიცებულია.

(7.5.11) უტოლობის და (7.5.7)-ის გამოყენება იძლევა ალგებრულ უტოლობას, რომელსაც მივყავართ  $V$ -ს ორმხრივ შეფასებასთან

$$\max \left( V_-, \frac{M^2}{2R} \right) < V < V_+, \quad (7.5.12)$$

როცა  $\gamma_2 = \frac{4}{3}$  (7.5.11)-ის შეფასებაში

$$G = \left[ \operatorname{ess\,max}_{[0, M]} \frac{(8\pi)^{1/3} m^{2/3}}{f(m)} \right]^{-1}, \quad (7.5.13)$$

თუ გამოვიყენებთ ინტეგრალურ განტოლებებს (7.5.7), (7.5.9) და შეფასებებს (7.4.16), (7.4.17), (7.4.21), (7.5.10)–(7.5.13), მაშინ

მივიღებთ:

$$\text{როცა } \frac{4}{3} \leq \gamma_2 \leq \frac{5}{3},$$

$$\Psi \geq 3(\gamma_2 - 1)E + (5 - 3\gamma_2)T_- + (3\gamma_2 - 4)kV_-,$$

$$\Psi \leq 2E + (3\gamma_2 - 5)U_- + kV_+, \quad (7.5.14)$$

$$\gamma_2 > \frac{5}{3}: \Psi \geq 2E + (3\gamma_2 - 5)U_- + kV_-,$$

$$\Psi \leq 3(\gamma_2 - 1)E + (5 - 3\gamma_2)T_- + (3\gamma_2 - 4)kV_+.$$

აქ  $U_-$  მაქსიმალურია  $U$ -ს ქვედა შეფასებებს შორის,  $V_-, V_+$  -  $V$ -ს ქვედა და ზედა შეფასებებია.

როცა  $\gamma_2 = \frac{5}{3}$   $V_-, V_+$  შეფასებების პონა შესაძლებელია კვადრატული განტოლების ამოხსნით.

#### 4. დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის შესახებ ბრავიტირებად გავში

1. გამოვიყენოთ ზემოთ განვითარებული ინტეგრული ინტეგრირების მეთოდი და გრავიტირებადი გაზის დინამიკის რიგი, ავტომოდელური ამოცანების ანალიზისათვის [42].

განვიხილოთ ამოცანა დეტონაციური ტალღის მოძრაობის შესახებ, როცა ტალღის წინ გაზი იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში, ხოლო ენერგია სიმეტრიის ცენტრში არ გამოიყოფა ( $E_0 = 0$ ). გაზის წონასწორობის შემთხვევაში (7.5.1) განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამონახსნი, დეტონაციური ტალღის წინ, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$r = \frac{m}{4\pi A}, \quad p = \frac{2\pi A^2 k}{r^2}, \quad \rho = \frac{A}{r^2}, \quad (7.5.15)$$

სადაც  $A$  შესაბამისი განზომილებიანი მუდმივაა.

*შენიშვნა.* თვითგრავიტირებადი გაზის ავტომოდელურ მოძრაობაში დეტონაციური ტალღები ჩეპმენ-უეგეს პირობით (7.5.1)-ს ზუსტ ამონახსნში

$$r = \left[ \frac{(3 - \omega)m}{4\pi A} \right]^{1/(3-\omega)}, \quad p = \frac{k(3 - \omega)}{8\pi(\omega - 1)} \left( \frac{4\pi A}{3 - \omega} \right)^2 r^{2-2\omega}, \quad \rho = \frac{A}{r^\omega},$$

შეიძლება შემოვიღოთ მხოლოდ  $\omega = 2$  შემთხვევაში, რადგანაც, როცა  $\omega \neq 2$   $A, k, Q$  სიდიდეებს გააჩნიათ დამოუკიდებელი განზომილებები და ამოცანა არაავტომოდელურია.

(7.5.15) ამოცანის ავტომოდელურობის ძალით (მხოლოდ ორი, მაგალითად,  $A, k$ , განზომილებიანი მუდმივაა დამოუკიდებელი განზომილებით) მივიღებთ

$$R(t) = (Ak)^{1/2} R_1 t, I(t) = A^{\frac{5}{2}} k^{\frac{3}{2}} I_1 t^3, Q = Q_1 Ak. \quad (7.5.16)$$

გარკვეულობისათვის  $\gamma = 5/3$ , ხოლო ყველა სიდიდეს კი ჩავთვლით უგანზომილებოდ. მაშინ (7.5.2), (7.5.7), (7.5.9) და (7.5.15), (7.5.16)-დან გამოვძინარობს:

$$E = 4\pi(Q_1 - \pi)R_1, \quad \psi = 3I_1 - 4\pi R_1^3 + 8\pi^2 R_1. \quad (7.5.17)$$

(7.5.11), (7.4.18), (7.5.15) და (7.5.16)-დან მივიღებთ:

$$G \equiv \frac{0,00108}{\pi^3} HR_1, \quad (7.5.18)$$

$$H(R_1^2, Q_1) = \left[ \frac{5}{3} + \frac{10\pi}{3R_1^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{32Q_1}{9R_1^2}} \right]^{5/3} \cdot$$

$$\cdot \left[ 1 + \frac{2\pi}{R_1^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{32Q_1}{9R_1^2}} \right].$$

საბოლოოდ, (7.5.14) სისტემიდან ზემოთ მოყვანილი უტოლობებისა და ასევე (7.5.15)–(7.5.18)-ის გამოყენებით,  $R_1$  და  $I_1$  –თვის მივიღებთ ტრანსცედენტურ უტოლობათა სისტემას, რომელიც შეიცავს ამოცანის მოცემულ  $Q_1$  პარამეტრს.

$$\Lambda + B \leq 2R_1(3Q_1 - 4\pi) + 4R_1^3 + \frac{5}{4}K. \quad (7.5.19)$$

$$\frac{4\pi}{15} \left[ R_1^3 + 4(Q_1 - 3\pi)R_1 + \Lambda + B \right] \leq I_1 \leq \frac{\pi}{3} [4R_1^3 + 8R_1(Q_1 - 2\pi) + K]$$

$$B = [(R_1^3 + 4(Q_1 - 3\pi)R_1 + \Lambda)^2 + 15R_1^6]^{1/2},$$

$$K = \frac{[1 + (1 + 4GE)^{1/2}] \pi^2}{0,00216R_1 H}, \quad \Lambda = 0,343R_1^3 H.$$

$\gamma = 4/3$  შემთხვევაში, შეფასებები ცოტათი უმჯობესდება იმის გამო, რომ (7.5.11) არაწრფივი განტოლების ამოხსნა V-თვის აუცილებელი არ არის. ამ შემთხვევაში ზოგიერთი გარდაქმნების შემდეგ ვლუბულობთ შემდეგ ტრანსცენდენტულ უტოლობათა სისტემას:

$$4R_1^2 + 6Q_1 + 31,16\pi \geq 1,745H_1R_1^2 + N, \quad (7.5.20)$$

$$\frac{4\pi R_1}{15}(R_1^2 + 4Q_1 + N) \leq I_1 \leq \frac{\pi R_1}{3}(4R_1^2 + 8Q_1 + 24,93\pi - 1,396H_1R_1^2),$$

$$N = [(R_1^2 + 4Q_1)^2 + 15R_1^4]^{1/2},$$

$$H_1(R_1^2, Q_1) = \left[ \frac{4}{3} + \frac{8\pi}{3R_1^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{8\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{14Q_1}{9R_1^2}} \right]^{4/3} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{2\pi}{R_1^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{8\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{14Q_1}{9R_1^2}} \right].$$

(7.5.19) და (7.5.20) უტოლობათა სისტემების რიცხვითი ამოხსნები, ზოგიერთი  $Q_1$ -ის მოყვანილია ქვემოთ. აქ  $\Delta_{\pm}$  აღნიშნავს საშუალო ფარდობით ცდომილებას.  $R_{1-}$ ,  $R_{1+}$ ,  $I_{1-}$ ,  $I_{1+}$  -  $R_1, I_1$ -ს შესაბამისად ქვედა და ზედა შეფასებებია.

ცხრილი 1

$\gamma$	$Q_1$	$R_{1-}$	$R_{1+}$	$I_{1-}$	$I_{1+}$	$\Delta_{+} \%(R_1)$	$\Delta_{+} \%(I_1)$
5/3	$\pi$	5,31	10,31	707,5	4996,7	32	75
	$2\pi$	6,37	10,5	1335	5483	24,5	60,8
	$30\pi$	18,86	23,04	72562,7	69518,88	9,9	24
4/3	$\pi$	4,204	6,39	370	1179	20,6	52,2
	$2\pi$	4,853	6,63	618,3	1404	15,4	38,8
	$30\pi$	12,76	14,53	14647,9	19431,6	6,5	14

2. განვიხილოთ ავტომოდელური ამოცანა, დეტონაციური ტალღის ნულოვან წნევაზე გრავიტირებადი გაზის პარაბოლური კუმშვის დროს.

კერძო შემთხვევაში, როცა დეტონაციური ტალღის უკან ხდება წონასწორობის მდგომარეობის ფორმირება, მოცემულ ამოცანას აქვს ზუსტი ამოხსნა [37].

დავუშვათ, რომ გაზის საწყისი მოძრაობა განისაზღვრება  $k$  მუდმივითი და სიჩქარის კვადრატის განზომილების  $q$  სიდიდით. ამ შემთხვევაში (7.5.1) განტოლებათა სისტემის ინტეგრებით მივიღებთ ზუსტ ამონახსნს დეტონაციური ტალღის წინ:

$$r = \frac{km}{q} \left( \frac{9}{2} \right)^{1/3} (\xi_0 - \xi)^{2/3},$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi k(t_0(m) - t)(3t_0(m) - t)}, p = 0 \quad (7.5.21)$$

$$\xi = \frac{q^{3/2} t}{km}, \quad t_0(m) = \frac{k\xi_0 m}{q^{3/2}},$$

სადაც  $\xi_0$  ზოგიერთი თავისუფალი უგანზომილებო მუდმივაა.

(7.5.21) ამოცანის ავტომოდელურობის ძალით მივიღებთ:

$$R(t) = q^{1/2} R_1 t, \quad I = (q^{5/2}/k) I_1 t^3, \quad Q = Q_1 q. \quad (7.5.22)$$

დავუშვათ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 4/3$  და თავისუფლების არსებობის ძალით  $\xi_0$  პარამეტრის არჩევისას ( $q$ -ს სხვანაირად განსაზღვრით) ავიღოთ კავშირი

$$\xi_0 = \xi_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad (7.5.23)$$

სადაც  $\xi_1$  არის  $\xi$  პარამეტრის მნიშვნელობა დეტონაციური ტალღაზე.  $Q_1 > 0,26$  უტოლობა უზრუნველყოფს  $G \geq 1$  უტოლობას, რომელიც აუცილებელია  $V$ -ს შეფასების მიღებისათვის. (7.5.7), (7.5.9) (7.5.2), ასევე (7.5.21)–(7.5.23)-ის გამოყენებით მივიღებთ რაც შემდეგ უტოლობათა სისტემას, რომელიც შეიცავს  $Q_1$  პარამეტრს, ამასთან  $R_1 = 1/\xi_1$ :

$$\frac{R_1}{15}(4Q_1 + R_1^2 - 4 \cdot \sqrt{2}R_1 + S) \leq I_1 \leq \\ \leq \frac{1}{3}(R_1^3 - \sqrt{2}R_1^2 + 2Q_1R_1 + 1,058R_1 - 0,349L).$$

$$L \equiv \left[ \frac{4}{3} - \sqrt{1 - \frac{14Q_1}{9(R_1 + 2^{1/2})^2}} \right]^{4/3} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{14Q_1}{9(R_1 + 2^{1/2})^2}} \right] \times \\ \times (\sqrt{2} + R_1)^{7/3} R_1^{2/3}.$$

$$S = \sqrt{(4Q_1 + R_1^2 - 4 \cdot \sqrt{2}R_1)^2 + 15R_1^4}.$$

(7.5.24) უტოლობათა სისტემის ამოხსნა მოცემულია ქვემოთ, სადაც ზუსტ ამონახსნს შეესაბამება  $Q_1 = 0,5$ ,  $R_1 \approx 0,3536$ ,  $I_1 \approx 0,0148$ :

ცხრილი 2

$Q_1$	$R_1$	$R_{1*}$	$I_1$	$I_{1*}$	$\Delta_-(R_1)$	$\Delta_+(R_1)$	$\Delta_+(R_1)$	$\Delta_-(r_1)$	$\Delta_-(I_1)$	$\Delta_+(I_1)$
0,3	0,15	0,5	0,01	0,09	-	-	54	-	-	80
0,5	0,2	0,48	0,01397	0,024	35,7	43,4	41	62,1	5,6	26
10	2,53	3,89	12,25	20,13	-	-	21	-	-	24,3

უნდა აღინიშნოს, რომ უტოლობა, რომელიც დაკავშირებულია ჩემპენ-ჟუგეს პირობასთან გვაძლევს ქვედა შეფასებას  $R_1$ -თვის, მხოლოდ მაშინ, როცა  $Q_1 > 9/7$ . შეფასებები უმჯობესდება  $Q_1$  პარამეტრის დიდი მნიშვნელობებისათვის.

ავტომოდელური ამოხსნების მოყვანილი მაგალითები, რომელთა გამოკვლევა სასარგებლოა უფრო რთული ამოცანების იზოთერმული ასიმპტოტიკების შესწავლისათვის და ინტეგრალური უტოლობების მეთოდის გამოყენების არის გარკვევისათვის გვიჩვენებენ, რომ მიღებულ შეფასებებს შეუძლიათ პრაქტიკულად უზრუნველყონ კარგი სიზუსტე გრავიტირებად გაზში დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის განსაზღვრაში.

## § 7.6. ასტროფიზიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთ აქტუალურ პრობლემას წარმოადგენს ასტროფიზიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირება, შესაბამისი მოდელების კვლევის, ანალიზური და რიცხვითი ამოხსნის საკითხები [12, 76, 104].

ასტროფიზიკაში განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევენ ვარსკვლავების აფეთქების კატასტროფული პროცესები და მათ შედეგად მიღებული ნეიტრონული ვარსკვლავები და კოლაფსირებადი სხეულები – შავი ხვრელები. ახალი და ზეახალი ვარსკვლავების გარეგნული წარმოადგენენ გაზის დიდი მასების არასტაციონარულ მოძრაობებს, გამოსხივებული ენერგიის თანმშლები მკვეთრი ზრდადობით [25, 43, 52, 105].

ასტროფიზიკის მრავალი პრობლემის გადაჭრისათვის აუცილებელი ხდება გრავიტაციულ ველთან ურთიერთმოქმედი გაზური სხეულების დინამიკის გამოკვლევა. ამ მხრივ განსაკუთრებით აღსანიშნავია გრავიტაციულ ველში ფეთქებადი დეტონაციური ტალღების გავრცელების პროცესის პრობლემატიკა.

ცხადია, რომ ასტროფიზიკური მოვლენების გამოკვლევის კონცეფციას საფუძვლად უნდა დაედოს გაზის მოძრაობის შესახებ რიგი დინამიკური ამოცანის დასმა და ამოხსნა, რომლებიც განიხილება როგორც ვარსკვლავების მოძრაობისა და ევოლუციის მნიშვნელოვანი თავისებურებების მომცველი მათემატიკური მოდელები [76].

გრავიტირებად გაზებში დეტონაციური წვის აღმწერი მოდელების აგებისა და კვლევისათვის აუცილებელია გამოყენებულ იქნას აპრობირებული მეთოდები, კერძოდ თანამედროვე თეორიული გაზური დინამიკის – აეროდინამიკის აპარატი და შესაბამისი პრობლემებისათვის დასმული და ამოხსნილი იქნას მექანიკური ამოცანები.

პრობლემის გადაჭრისას წარმოქმნილი სირთულეების გამო, ბოლო დროს ფართოდ გამოიყენება ვარსკვლავებში მიმდინარე პროცესებთან დაკავშირებული ამოცანების რიცხვითი მოდელირება, რათა გამოვიკვლიოთ ზეახალის აფეთქებებთან დაკავშირებული მოვლენები. ამასთან განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა თერმობირთვულ რეაქციებსა და ნეიტრონული გამოსხივებასთან დაკავშირებულ ფიზიკურ პროცესებს და ნაკლებად – გაზურ დინამიკას მთლიანობაში.



ადრე თვლიდნენ, რომ ვარსკვლავის ცენტრალური ბირთვის მიერ გამოსხივებული (ელექტრონული ჩაჭიდების შედეგად წარმოქმნილი) ნეიტრინო უნდა გადასცემდეს იმპულსის რადიალურ კომპონენტას ვარსკვლავის გარე ფენებს, რის შედეგადაც წარმოიქმნება ზეახალის აფეთქებები. მაგრამ აფეთქების ასეთი მექანიზმი უარყოფილ იქნა, როცა სუსტი ურთიერთქმედებისას აღმოჩენილ იქნა (თეორიულად და ექსპერიმენტულად) ნეიტრალური დენები, რომლებიც ხელს უწყობენ ნეიტრინოს ვარსკვლავის ბირთვის შიგნით დაკავებას [51, 99, 106, 113].

აფეთქებებთან დაკავშირებულ თანამედროვე გრავიტირებად გაზურ დინამიკაში, ზემოთ აღნიშნული სირთულეების მიზეზით, დასმული ამოცანების ამოსახსნელად აქტუალურია მიახლოებითი ანალიზური მეთოდების დამუშავება [93, 100-103].

კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის დასმული საწყის-სასაზღვრო ამოცანების კორექტულობის, ამოხსნათა არსებობისა და სიგლუვის კვლევა წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკური ფიზიკის უმნიშვნელოვანეს საკითხებს. ამიტომ მათი შესწავლა აქტუალურია, როგორც თეორიული თვალსაზრისით, ასევე კონკრეტული ამოცანების რიცხვითი რეალიზაციის დროს.

ამ პარაგრაფში გრავიტირებადი სრულყოფილი გაზის ადიაბატური სფერულ-სიმეტრიული მოძრაობის მათემატიკური მოდელისათვის განვითარებულია თხელი დარტყმითი ფენის ასიმპტოტური მეთოდი რიგი ახალი არაავტომოდულური ამოცანების ამოხსნისათვის ფეთქებადი დეტონაციური ტალღების ერთგვაროვან და არაერთგვაროვან გრავიტირებად გაზურ ბირთვში გავრცელების შესახებ, რომელიც იმყოფება წონასწორობაში საკუთარ გრავიტაციულ ველში. განიხილება მიახლოებითი ანალიზური მეთოდი, რომელიც იძლევა საშუალებას აღწეროს გრავიტირებადი ერთგვაროვანი ბირთვის (ვარსკვლავის მოდელი) ადიაბატური გაფანტვა სიცარიელეში, მის ზედაპირზე დეტონაციური ტალღის გამოსვლის შემდეგ [40, 41, 94].

# 1. თხელი დარტყმითი ფენის ასიმპტოტური მეთოდი

ფეთქებადი დეტონაციური ტალღის გავრცელება ერთგვაროვან გრავიტირებად გაზურ ბირთვში

განვიხილოთ არაავტომოდელური ამოცანა ცენტრალური აფეთქების შესახებ, რომელიც იწვევს ერთგვაროვანი გრავიტაციული გაზური ბირთვის დეტონაციას.

ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ, თხელი დარტყმითი ფენის ასიმპტოტური მეთოდი, რომელიც გრავიტირებადი გაზისათვის პირველადაა შემოთავაზებული

$$\text{თ.ჩილაჩავას მიერ და დაკავშირებულია } \varepsilon = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \text{ მცირე}$$

პარამეტრთან [94].

ამ მეთოდის გამოსაყენებლად დეტონაციური ტალღის ბირთვის ზედაპირზე გამოსვლამდე აფეთქების ენერჯის სიდიდე და ძლიერ წვეტაზე კუთრი სითბოგამოყოფა უნდა იყოს შესაბამისად  $\frac{1}{\varepsilon^2}$  და  $\frac{1}{\varepsilon}$  რიგის საწყისი მდგომარეობის პარამეტრებთან შეფარდებით. გამოყენებული მცირე პარამეტრის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს აღვწეროთ გაზის ძირითადი მასის სიცარიელეში გაფრქვევის პროცესი. გამოთვლილია ნულოვანი და პირველი მიახლოებები მოძრაობის კანონისა და გარემოს თერმოდინამიკური მახასიათებლებებისათვის.

1.1. საწყისი მონაცემების სახით განვიხილოთ ერთგვაროვანი გრავიტირებადი გაზური ბირთვის წონასწორობის ამოცანის ზუსტი ამონახსნი, სადაც გრავიტაციული მუდმივა, ბირთვის სიმკვრივე და რადიუსი მიღებულია განზომილების ძირითად ერთეულებად.

ამ შემთხვევაში განტოლებათა (7.5.1) სისტემის ზუსტი ამონახსნი ჩაიწერება

$$r = \left(\frac{3m}{4\pi}\right)^{1/3}, \quad p = \frac{2\pi}{3}(1-r^2), \quad \rho = 1. \quad (7.6.1)$$

$m=0$  და  $m=M(t)$  ზედაპირებს შორის მოთავსებული გაზის ენერჯიის ინტეგრალური განტოლება (7.5.7)-ის გათვალისწინებით უგანზომილებო სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$T + U + V = E + \int_0^t \left[ \dot{M} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho} - \frac{M}{R} + Q \right) - 4\pi R^2 v p \right] dt, \quad (7.6.2)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm, \quad U = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^t \frac{p}{\rho} dm, \quad V = - \int_0^t \frac{m dm}{r},$$

სადაც,  $T, U, V$  გაზის კინეტიკური, შინაგანი და პოტენციური (გრავეიტაციული) ენერჯიებია.  $Q$  - არის ენერჯია, რომელიც გამოიყოფა ძლიერ წყვეტაზე გაზის ერთეული მასის წვისას,  $E$  - აფეთქების ენერჯიაა,  $m = M(t)$  - არის დეტონაციური ტალღის მასით მოძრაობის კანონი,  $v \equiv \frac{\partial r}{\partial t}$ ,  $R(t) \equiv r(M(t), t)$ , 1, 2 ინდექსებით შესაბამისად აღნიშნულია გაზის მდგომარეობა დეტონაციური ტალღის წინ და უკან.

(7.5.2)-ს თანახმად სასაზღვრო პირობებს ძლიერ წყვეტაზე, რომლებიც ამოხსნილია დეტონაციური ტალღის უკან მყოფი გაზის პარამეტრების მიმართ აქვთ სახე:

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} \rho_1 \left[ 1 + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \left( \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 (\dot{R} - v_1)^2} + 1 - g \right) \right]^{-1}, \quad a_1^2 = \frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1}. \quad (7.6.3)$$

$$p_2 = \frac{1}{\gamma_2 + 1} \left[ p_1 + \rho_1 (\dot{R} - v_1)^2 + \rho_1 (\dot{R} - v_1)^2 g \right],$$

$$\dot{R} - v_2 = \frac{\dot{R} - v_1}{\gamma_2 + 1} \left[ \gamma_2 + \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 (\dot{R} - v_1)^2} - g \right].$$

$$g \equiv \sqrt{\left( 1 - \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 (\dot{R} - v_1)^2} \right)^2 + \frac{2(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)} \frac{a_1^2}{(\dot{R} - v_1)^2} - \frac{2(\gamma_2^2 - 1)Q}{(\dot{R} - v_1)^2}}.$$

ამასთან დეტონაციური ტალღის რადიუსი განისაზღვრება ფუნქციით  $r = R(t)$  და გასათვალისწინებელია ეილერის და ლაგრანჟის ცვლადების უწყვეტობა

$$[r]_1^2 = 0, \quad [m]_1^2 = 0. \quad (7.6.4)$$

ფაქტიურად, ჩვენ ვღებულობთ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას (7.5.1) არაწრფივი, არაერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემისათვის, სადაც  $r(m, t)$ ,  $p(m, t)$ ,  $\rho(m, t)$  - სამებნი ფუნქციებია.

საწყისი პირობები ( $t = t_0$ , ფონი) საზღვრავენ გრავიტირებადი გაზური ბირთვის საწყის მდგომარეობას და წარმოადგენენ (7.5.1) სისტემის ზუსტ ამონახსნს  $r_1(m, t)$ ,  $p_1(m, t)$ ,  $\rho_1(m, t)$ .

ამრიგად, საწყის-სასაზღვრო ამოცანა იხილება  $\Omega$  არეში:

$$\Omega = \{t \in (t_0, t_*), m \in (0, M(t))\},$$

სადაც  $t_0$  - აფეთქების მომენტია,  $t_*$  - ღროის მომენტია, როდესაც დეტონაციური ტალღა გამოდის სხეულის ზედაპირზე ან კოლაფსის მომენტია.

სასაზღვრო პირობებს გარე წინასწარ უცნობ  $m = M(t)$  საზღვარზე აქვთ (7.6.3), (7.6.4) სახე, ხოლო სიმეტრიის ცენტრში

$$r(m, t) = 0, \quad m = 0. \quad (7.6.5)$$

1.2. უმრავლესობა გაზებისათვის  $\varepsilon = \frac{(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_2 + 1)}$  მცირე

პარამეტრია [88, 89], ამასთან ის შედის როგორც განტოლებათა სისტემა (7.5.1)-ში, ასევე სასაზღვრო (7.6.3) პირობებში და ენერჯიის ინტეგრალურ (7.6.2) განტოლებაში, საიდანაც განისაზღვრება დეტონაციური ტალღის მოძრაობის  $R(t)$  კანონი.

ამრიგად, (7.5.1) განტოლებათა სისტემის, (7.6.3) სასაზღვრო პირობების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ამონახსნი დეტონაციური ტალღის უკან (არე 2, ღია ბირთვი, წინასწარ უცნობი გარე საზღვრით) შეიძლება ვეძებოთ  $\varepsilon$  მცირე პარამეტრის მიმართ ზოგიერთი დაშლის სახით.

მაგრამ, სიმეტრიის ცენტრის ახლოს ( $m \approx 0$ ) დაშლა ხდება სინგულარული [100-103]. ამ არეში ამონახსნის რეგულარიზაციისათვის გამოვიყენოთ თანმიმდევრული მიახლოებების მეთოდი, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: სიმკვრივის  $\rho(m, t)$

გამოსახულების ნულოვან  $\rho_0(m, t)$  მიახლოებაში შევინარჩუნოთ  $\varepsilon$  რიგის წევრები, შემდეგ უწყვეტობის (7.5.1) განტოლებიდან, ცენტრში სასაზღვრო (7.6.5) პირობისა და ნაპოვნი ნულოვანი მიახლოების მეშვეობით ვიპოვით გარემოს მოძრაობის და დეტონაციური ტალღისათვის პირველ მიახლოებას. (7.5.1) სისტემის დანარჩენი განტოლებებიდან (მოძრაობის და ადიაბატურობის განტოლებები) შესაბამისად განისაზღვრება  $p(m, t)$ ,  $\rho(m, t)$ -ს პირველი მიახლოებები.

აღწერილი თხელი დარტყმითი ტალღის ასიმპტოტური მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ (7.5.1) განტოლებათა სისტემისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების საკმაოდ ფართო კლასი. ამასთან, უნდა აღინიშნოს, რომ ასიმპტოტური დაშლის შერჩევა დამოკიდებულია გრავიტირებადი გაზური ბირთვის საწყის მდგომარეობაზე (ზუსტი ამონახსნი ტალღის წინ), აფეთქებისა და ძლიერ წყვეტაზე გამოყოფის ენერგიებზე.

1.3. განვიხილოთ არაავტომოდელური ამოცანა ერთგვაროვან წონასწორობაში მყოფი გრავიტირებად გაზში დროის  $t = 0$  მომენტში წარმოშობილი დეტონაციური ტალღის მოძრაობის შესახებ.

მაშინ, დეტონაციური ტალღის წინ (7.5.1) სისტემის (7.6.1) ზუსტი ამონახსნის რეალიზება ხდება.

ჩავთვალოთ, რომ გარემოს მოძრაობის კანონის ძირითად (ნულოვან) მიახლოებაში, როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$  რეალიზდება ლ. სედოვის ძლიერი წერტილოვანი აფეთქების შესახებ ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტიკა [76].

სხეულის ზედაპირზე გამოსვლამდე ძლიერი დეტონაციური ტალღის არსებობის პირობის (7.6.1), (7.6.3), ენერგიის ინტეგრალური განტოლების (7.6.2), აგრეთვე თანაფარდობის  $Q \gg a_1^2$  (იხ. [65, 76]) ანალიზს მივყავართ პირობამდე

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon^2}, \quad E_0 = O(1), \quad Q = \frac{Q_0}{\varepsilon}, \quad Q_0 = O(1). \quad (7.6.6)$$

ამასთან, დრო რომელიც დასჭირდება დეტონაციურ ტალღას სხეულის ზედაპირამდე გამოსასვლელად  $\sqrt{\varepsilon}$  რიგის იქნება, ამიტომ

მოსახერხებელია შევასრულოთ დროის დამატებითი გაჭიმვა

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}$$

უგანზომილებო სახით გადაწერილი მოძრაობის განტოლების (7.5.1) და სასაზღვრო პირობების (7.5.3) ანალიზი გვიჩვენებს, რომ დეტონაციური ტალღის უკანა მიდამოში ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ მცირე  $\epsilon$  პარამეტრის მიმართ შემდეგი სინგულარული ასიმპტოტური დაშლის სახით:

$$r = R_0(\tau) + \epsilon H(m, \tau) + \dots, \quad R(\tau) = R_0(\tau) + \epsilon R_1(\tau) + \dots, \quad (7.6.7)$$

$$p = \frac{p_0(m, \tau)}{\epsilon} + p_1(m, \tau) \dots, \quad \rho = \frac{\rho_0(m, \tau)}{\epsilon} + \rho_1(m, \tau) \dots,$$

მაგრამ სიმეტრიის ცენტრთან ახლოს (7.6.7) დაშლა არარეგულარულია [41].

ამ არეში ამონახსნის რეგულარიზაციისათვის გამოვიყენოთ ზემოთ აღნიშნული თანმიმდევრული მიახლოებების მეთოდი, რომელსაც მივყავართ ამონახსნამდე, რომელიც  $O(\epsilon^2)$  სიზუსტით ემთხვევა გრავიტაციისა და წყვეტაზე ენერჯიის გამოყოფის არ არსებობის შემთხვევაში ძლიერი აფეთქების ამოცანის ამონახსნის ზუსტ მნიშვნელობას.

თუ (7.6.7)-ს ჩავსვამთ (7.5.1)-ში, მაშინ ნულოვან მიახლოებაში ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე:

$$p_0 = R_0'^2 + \frac{R_0''}{4\pi R_0^2} (M_0 - m), \quad M_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3},$$

$$R_0 = \left( \frac{75E_0 \tau^2}{4\pi} \right)^{1/5}. \quad (7.6.8)$$

$$\rho_0 = p_0^{1/\gamma_2} [R_0'^2(T_0)]^{-1/\gamma_2} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{1}{\gamma_1} - \gamma_* \right) a_1^2(m) + 2Q_0}{R_0'^2(T_0)} \right]^{-1},$$

$$a_1^2(m) = \frac{2\pi\gamma_1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{3m}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \right],$$

$$\gamma_* = \frac{1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 - 1 = \underset{=}{O(1)}; \quad \gamma_* = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - 1} = \underset{=}{O(1)}, \quad \gamma_1 - 1 = \underset{=}{O(\epsilon)},$$

$$\gamma_* \equiv 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2; \quad T_0(m) = \left( \frac{4\pi}{75E_0} \right)^{1/2} \left( \frac{3m}{4\pi} \right)^{5/6},$$

სადაც  $T_0(m)$  არის დროის მომენტი, რომელშიც დეტონაციური ტალღა გაივლის ნაწილაკს ლაგრანჟის  $m$  კოორდინატით.

როგორც (7.6.8)-დან ჩანს უკვე ნულოვან მიახლოებაში ამოცანის ამონახსნი (სიმკვრივის განაწილება) დამოკიდებულია  $Q_0$  ენერჯიის სიდიდეზე, რომელიც გამოიყოფა ძლიერ წყვეტაზე გაზის ერთეული მასის წვის დროს.

1.4. მომდევნო მიახლოებაში სიმკვრივის განსაზღვრა (7.5.1)-ში დეტონაციური ტალღის უკანა მიდამოში გვაძლევს

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} - \int_{m\rho_0(m,\tau)}^M \frac{\epsilon dm}{m\rho_0(m,\tau)}. \quad (7.6.9)$$

დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის განსაზღვრისათვის პირველ მიახლოებაში მოვითხოვთ სიმეტრიის ცენტრში (7.6.5) სასაზღვრო პირობის შესრულება.

თავისი არსით ეს პირობა ექვივალენტურია (7.6.2) ენერჯიის ინტეგრალური განტოლების დაკმაყოფილებისა პირველ მიახლოებაში, რომელიც თავის მხრივ დამატებითად მოითხოვს წნევის განაწილების გამოთვლას.

დაწვრილებით გამოთვლებს (7.6.9) თანაფარდობაში მიყვართ დეტონაციური ტალღისა და გაზის მოძრაობის კანონებისათვის შემდეგ ფორმულებამდე:

$$r = R_0 \xi^{\frac{2\epsilon}{3}} \left( 1 - \frac{2\epsilon}{3} \ln 2(1 + \xi) \right) + \frac{2\epsilon}{3} R_0 M_0 \left[ \beta \ln(1 + \xi) - \frac{\alpha}{4E_0} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} M_0^2 G(\xi) \right] + \underset{=}{O(\epsilon^2)}, \quad (7.6.10)$$

$$M = M_0 \left\{ 1 + 2\varepsilon \left[ -2 \ln 2 + \beta M_0 \ln 2 - \frac{\alpha}{4E_0} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} M_0^{\frac{5}{3}} G(1) \right] \right\} + O(\varepsilon^2),$$

$$R = R_0 \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon}{3} \left[ -2 \ln 2 + \beta M_0 \ln 2 - \frac{\alpha}{4E_0} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} M_0^{\frac{5}{3}} G(1) \right] \right\} + O(\varepsilon^2),$$

$$\xi \equiv \frac{m}{M_0}, \quad \beta \equiv \frac{\alpha + 2Q_0}{4E_0}, \quad \alpha \equiv \frac{2\pi}{3} (1 - \gamma_* \gamma_1),$$

$$G(y) = \int_0^y \frac{z^{\frac{2}{3}} dz}{z+1} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} + \ln(1+y^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3}{4} + \left( y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) + \sqrt{3} \left( \arctg \frac{1-2y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right).$$

გამოვიყენებთ რა მიღებულ (7.6.10) გაზის მოძრაობის კანონს დეტონაციური ტალღის უკან, (7.5.1) მოძრაობისა და ადიაბატურობის განტოლებებიდან შესაძლებელია განვსაზღვროთ  $p_1$  და  $\rho_1$  სიდიდეები, რითაც საბოლოოდ სრულდება პირველი მიახლოების აგება.

$$\begin{aligned} p_1 = & 2R_0' R_1' + \frac{2\pi}{3} \gamma_* \gamma_1 (1 - R_0'^2) - 2Q_0 - R_0'^2 + \\ & + \frac{2}{3} R_0' R_0'' \left[ -2 \ln 2 + \beta M_0 \ln 2 - \frac{\alpha}{4E_0} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} M_0^{\frac{5}{3}} G(1) \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi R_0'^2} \int_m^{M_0} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} + \frac{m}{R_0'^2} - \frac{2HR_0''}{R_0'} \right) dm, \end{aligned} \quad (7.6.11)$$

$$\rho_1 = \rho_0 \left[ \frac{p_1}{p_0} + \frac{2A - \Lambda_* + 1}{A + 1} - \frac{2R_0'(T_0)(R_0''(T_0)T_1 + R_1'(T_0)) + \gamma_* a_1^2(m) - 2Q_0}{R_0'^2(T_0)} \right],$$

$$H = \frac{R_0}{\varepsilon} (\xi^{\frac{2}{3}} - 1) - \frac{2}{3} R_0 \xi^{\frac{2}{3}} \ln 2(1 + \xi) +$$

$$+ \frac{2}{3} R_0 M_0 \left[ \beta \ln(1 + \xi) - \frac{\alpha \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} M_0^{\frac{2}{3}} G(\xi)}{4E_0} \right],$$



$$R_1 = \frac{2}{3} R_0 \left[ -2 \ln 2 + \beta M_0 \ln 2 - \frac{\alpha}{4E_0} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} M_0^{5/3} G(1) \right],$$

$$T_1(m) = -\frac{5}{3} T_0(m) \left[ -2 \ln 2 + \beta m \ln 2 - \frac{\alpha}{4E_0} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} m^{5/3} G(1) \right],$$

$$A \equiv \frac{a_1^2(m) \left( \frac{1}{\gamma_1} - \gamma_* \right) + 2Q_0}{R_0'^2(T_0)}, \quad \Lambda \equiv \frac{2(R_0''(T_0)T_1 + R_1'(T_0))}{R_0'(T_0)}$$

$$\Lambda_* = \frac{(2 - \Lambda)a_1^2(m)}{\gamma_1 R_0'^2(T_0)} - \frac{a_1^4(m)}{4\gamma_1^2 R_0'^4(T_0)} + \frac{\gamma_* a_1^2(m)\Lambda + 2Q_0(2 - \Lambda)}{R_0'^2(T_0)} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left( \frac{2\gamma_* a_1^2(m) - 4Q_0 - \gamma_1^{-1} a_1^2(m)}{R_0'^2(T_0)} \right)^2.$$

ავლნიშნოთ, რომ (7.6.8), (7.6.10) და (7.6.11) ფორმულები იძლევიან  $t \leq O(\sqrt{\varepsilon})$  მცირე დროისათვის ამოცანის ამონახსნს

აფეთქებაზე დეტონირებად გაზში წინაწნევით, თუ გრავიტაციულ მუდმივას მივასწრაფებთ ნულისაკენ და ცენტრში შევინარჩუნებთ საწყისი წნევის მუდმივ სიდიდეს (7.6.1).

1.5. გრავიტირებადი გაზური სხეულის გაფრქვევა სიცარიელეში

სხეულის ზედაპირზე დეტონაციური ტალღის გამოსვლა ხდება დროის  $t_*$  მომენტში, რომელიც განისაზღვრება (7.6.8)-დან

$$t_* = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{4\pi}{75E_0}}, \quad (7.6.12)$$

რაც იწვევს თავისუფალი წვეტიის დაშლას, სიცარიელეში გაზის შემდგომი გავრცელებით.

ვარკენოთ, რომ ზემოთხსენებული მცირე პარამეტრის ასიმპტოტური მეთოდი, ასევე გამოსადეგია გაზის ძირითადი მასის სიცარიელეში ადიაბატური გავრცელების პროცესის აღწერისათვის.

შევნიშნოთ, რომ გაიშვიათებული ტალღის მოძრაობის დრო სხეულის გარე საზღვრიდან ცენტრისაკენ და პირიქით, არის  $\varepsilon$  -

რივის, ანუ მცირეა გაზის მოძრაობის მახასიათებელ  $\sqrt{\varepsilon}$ -დროსთან შედარებით (7.6.12). ამიტომ ქვემოთ აგებული მიახლოებითი ამონახსნი უცებ აღწერს გაზის მდგომარეობას სიცარიელეში გავრცელების დროს ცენტრისაგან არეკლილი გაიშვიათებული ტალღის უკან, იმ არეში, რომელიც შეიცავს თითქმის მთელ მასას, იმ მასის გამოკლებით, რომელიც არის სხეულის საზღვრის მიდამოში და  $\exp\left(-\frac{N}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ ,  $N = O(1)$  რივისაა.

გაზის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე (7.5.1)  $f(m)$  ფუნქციით, რომელიც განისაზღვრება ამონახსნით დეტონაციური ტალღის ბირთვის ზედაპირზე გამოსვლამდე:

$$f(m) = \frac{2E\varepsilon}{m} \left[ 1 + \frac{2Q_0 + \frac{2\pi(1-\gamma_1\gamma_*)}{3}}{4E_0} m - \frac{\pi 3^{2/3} (4\pi)^{-2/3} (1-\gamma_1\gamma_*) m^{5/3}}{6E_0} \right]. \quad (7.6.13)$$

ნულოვან მიახლოებაში (7.5.1) მოძრაობის განტოლებებიდან ვღებულობთ:

$$r = R(t), \quad p = \frac{\ddot{R}}{4\pi R^2} (M_* - m) + \frac{1}{8\pi R^4} (M_*^2 - m^2), \quad (7.6.14)$$

სადაც,  $M_* = 4\pi/3$  - გაზური ბირთვის მასაა.

(7.5.1) უწყვეტობისა და ადიაბატურობის განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$\frac{4\pi}{3} \frac{\partial r^3}{\partial m} = \frac{1}{\rho} = \left[ \frac{4E\varepsilon^2}{\rho m} \left( 1 + \frac{2Q_0 + \frac{2\pi(1-\gamma_1\gamma_*)}{3}}{4E_0} m - \frac{\pi 3^{2/3} (4\pi)^{-2/3} (1-\gamma_1\gamma_*) m^{5/3}}{6E_0} \right) \right]^{1-2\varepsilon} \quad (7.6.15)$$

თუ გავითვალისწინებთ სასაზღვრო პირობას  $r=0$  ცენტრში, როცა  $m=0$  და თანაფარდობებს (7.6.14), (7.6.15)-ის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$r = R(t) \left\{ \left( \frac{m}{M_*} \right)^{2\epsilon} + \left( 1 + \frac{2Q_0\pi}{3E_0} \right) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{m}{M_*} \right)^{2\epsilon} \right] \right\}^{1/3}, \quad (7.6.16)$$

სადაც  $R(t)$  ფუნქცია განისაზღვრება ენერგიის ინტეგრალური (7.6.2) განტოლებიდან

$$\int_1^{R(t)} \left[ \frac{2E_*}{M_*} + \frac{M_*}{y_*} + \frac{2E_*}{M_*} \left( 2\epsilon \frac{E}{E_*} - 1 - \frac{M_*^2}{2E_*} \right) y^{-6\epsilon} \right]^{-1/2} dy = t - t_*, \quad (7.6.17)$$

$$E_* \equiv E + QM_* + \frac{16\pi^2}{15} \left( \frac{1}{3(\gamma_1 - 1)} - 1 \right).$$

ჩავსვათ რა გარემოს მოძრაობის (7.6.16) კანონს (7.5.1) სისტემაში, (7.6.17)-ის გამოყენებით შეიძლება განისაზღვროს სიმკვრივისა და წნევის განაწილება შემდგომ მიახლოებაში.

გარემოს მოძრაობის კანონის, (7.6.16)-ის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ გაზის თითქმის მთლიანი მასა განაწილებულია  $-E|N|E$  რიგის ფარდობითი სისქის წვრილ ფენაში.

(7.6.16)-დან მივიღებთ, რომ სხეულის საზღვრის განტოლებას აქვს სახე

$$R_b(t) = r(m, t) \Big|_{m=M_*} = r(M_*, t) = R(t) \left( 2 + \frac{2\pi Q_0}{3E_0} \right)^{1/3} \quad (7.6.18)$$

და ის მოძრაობს სიჩქარით, რომელიც  $\left[ 2 + \frac{2Q_0\pi}{3E_0} \right]^{1/3}$  -ჯერ მეტია

გაზის ძირითადი მასის მოძრაობის სიჩქარეზე.

შედარებისთვის განვიხილოთ გაზის სიტყვიერებაში გავრცელების საზღვრის მოძრაობის სიჩქარის ზუსტი მნიშვნელობა, რომელიც დაკავშირებულია რიმანის ინვარიანტის შენახვასთან.

$$\dot{R}_b = 2\sqrt{\frac{E}{M_*}} \sqrt{1 + \frac{2\pi Q_0}{3E_0}}$$

(7.6.16)-(7.6.18) მახსოვებითი ფორმულებიდან გამოდის, რომ გაზის საზღვარი მოძრაობს სიჩქარით:

$$\dot{R}_b = 2^{5/6} \sqrt{\frac{E}{M_*}} \left(1 + \frac{Q_0\pi}{3E_0}\right)^{1/3}$$

ამასთან, როცა  $Q_0 = 0$  ცდომილება შეადგენს  $\Delta \approx 9\%$ -ს, რაც დაკავშირებულია ასიმპტოტური მეთოდის არარეგულარულობასთან სხეულის საზღვართან მცირე სიმკვრივის გამო.

## 2. ფეთქებადი დეტონაციური ტალღის გავრცელება

### არაპრეკომპრესიბილ გავრცელებად გაზურ ბირთვში

ახლა საწყისი მონაცემების სახით ავიღოთ (7.5.1)-ის ზუსტი ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება საკუთარ გრავიტაციულ ველში წონასწორობაში მყოფ სიცარიელესთან მოსაზღვრე არაერთგვაროვან გაზურ ბირთვს, სადაც გრავიტაციული მუდმივა, სიმკვრივე ბირთვის ცენტრში და ბირთვის რადიუსი მიღებულია განზომილების ძირითად ერთეულებად [104].

$$\rho = 1 - r^\alpha, \quad m = 4\pi r^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^\alpha}{3 + \alpha} \right), \quad (7.6.19)$$

$$p = 4\pi \left[ \frac{1}{6}(1 - r^2) - \frac{6 + \alpha}{3(3 + \alpha)(\alpha + 2)}(1 - r^{\alpha+2}) + \frac{1 - r^{2\alpha+2}}{2(3 + \alpha)(1 + \alpha)} \right],$$

$$\alpha \in (0, 1)$$

(7.5.1) განტოლებათა სისტემისა და (7.6.3) სასაზღვრო პირობების ანალიზმა გვიჩვენა, რომ დეტონაციური ტალღის უკან (7.5.1)-ის ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სინგულარული დაშლის სახით:

$$r = R_0(\tau) + \varepsilon H(m, \tau) + \dots, \quad R(\tau) = R_0(\tau) + \varepsilon R_1(\tau) + \dots,$$

$$p = p_0(m, \tau) + \varepsilon p_1(m, \tau) + \dots, \quad \rho = \frac{\rho_0(m, \tau)}{\varepsilon} + \rho_1(m, \tau) + \dots,$$

$$\tau = t/\sqrt{\varepsilon}.$$

$$(7.6.20)$$

ჩავსვათ რა (7.6.20) დაშლას განტოლებათა სასტემა (7.5.1)-ში, ინტეგრალურ განტოლება (7.6.2)-ში და სასაზღვრო პირობები (7.6.3)-ში, ზემოთ აღწერილი რეგულარიზაციის მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ ამოცანის ამონახსნის ნულლოვან მიახლოებას

$$p_0 = R_0'^2 (1 - R_0^\alpha) + \frac{R_0''(M_0 - m)}{4\pi R_0^2}, \quad M_0 = 4\pi R_0^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{R_0^\alpha}{3 + \alpha} \right), \quad (7.6.21)$$

$$p_0 = p_0^{1/\gamma_2} \left[ R_0'(T_0) \right]^{-1/\gamma_2} \left[ 1 + \frac{(\frac{1}{\gamma_2} - \gamma_*) a_1^2(m) + 2Q_0}{R_0'(T_0)} \right]^{-1}$$

$$a_1^2(m) = \frac{4\pi\gamma_1}{1 - r^\alpha} \left[ \frac{1}{6}(1 - r^2) - \frac{6 + \alpha}{3(3 + \alpha)(\alpha + 2)}(1 - r^{\alpha+2}) + \frac{1 - r^{2\alpha+2}}{2(3 + \alpha)(\alpha + 1)} \right].$$

$$\gamma_* \equiv \frac{1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 - 1 = \underline{0}(1); \quad \gamma_* \equiv \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - 1} = \underline{0}(1), \quad \gamma_1 - 1 = \underline{0}(\varepsilon),$$

$$\gamma_* \equiv 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad Q = \frac{Q_0}{\varepsilon}, \quad Q_0 = \underline{0}(1),$$

სადაც  $r = r(m)$  განისაზღვრება განტოლებიდან

$$m = 4\pi r^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^\alpha}{3 + \alpha} \right), \quad T_0 = T_0(m) - \text{დროის მომენტი, რომელშიც}$$

დეტონაციური ტალღა გადის ნაწილაკს ლაგრანჟის  $m$  კოორდინატით.

$R_0(\tau)$  ფუნქცია (7.6.21)-ში არის კოსმის შეშლვეი ამოცანის ამონახსნი:

$$\pi(1 - R_0^\alpha) R_0'^2 R_0^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{R_0^\alpha}{3 + \alpha} \right) = E_0, \quad R_0(0) = 0,$$

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon^2}, \quad E_0 = \underline{0}(1) \quad (7.6.22)$$

კერძოდ, როცა  $\alpha = 5/6$  ამოცანა (7.6.22)-ის ზუსტ ანალიზურ ამონახსნს აქვს სახე

$$F(R_0) - F(0) = \sqrt{\frac{23E_0}{6\pi}} \tau, \quad (7.6.23)$$

$$F(R_0) = \left( R_0^{5/6} - \frac{41}{36} \right) \left( R_0^{5/3} + \frac{23 - 41R_0^{5/6}}{18} \right) \left[ \frac{1}{4} \left( R_0^{5/6} - \frac{41}{36} \right)^2 + \frac{2233}{3456} \right] -$$

$$- \frac{130225}{13436928} \ln \left| R_0^{5/6} - \frac{41}{36} + \sqrt{R_0^{5/3} + \frac{23 - 41R_0^{5/6}}{18}} \right| +$$

$$+ \frac{41}{56} \left( R_0^{5/3} + \frac{23 - 41R_0^{5/6}}{18} \right)^{3/2}.$$

ზოგად შემთხვევაში ამოცანა (7.6.22) ამოიხსნება რიცხვითი მეთოდებით (ეილერის და რუნგე-კუტას მეთოდები [16]).

კოშის ამოცანის (7.6.22)-ის ამონახსნის ასიმპტოტიკები, როცა  $\tau \rightarrow 0_+$  და (7.6.23)-დან  $\tau \rightarrow \tau^*$  ( $\tau^* : R_0(\tau^*) = 1$ ) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$R_0(\tau) \cong \left( \frac{75E_0}{4\pi} \right)^{1/5} \tau^{2/5}, \quad \tau \rightarrow 0_+$$

$$R_0(\tau) \cong 1 + \frac{1}{F'(1)} \sqrt{\frac{23E_0}{6\pi}} (\tau - \tau^*), \quad \tau \rightarrow \tau^*;$$

$$\tau^* = [F(1) - F(0)] \sqrt{\frac{6\pi}{23E_0}}, \quad F'(1) \approx 0,058.$$

მიღებული რიცხვითი შედეგებისა და ასიმპტოტიკების საფუძველზე მივიღებ შემდეგ საინტერპოლაციო ფორმულებს [14], როცა  $\tau \in [0, \tau^*]$ :

$$R_0(\tau) \cong \left( \frac{75E_0}{4\pi} \right)^{1/5} \tau^{2/5} + 1961,26\tau^2 - 27,05\tau, \quad \alpha = 0,1, \quad \tau^* = 0,0283;$$

$$R_0(\tau) \cong \left( \frac{75E_0}{4\pi} \right)^{1/5} \tau^{2/5} + 3,15\tau^2 + 17,05\tau, \quad \alpha = 0,25, \quad \tau^* = 0,0567;$$

$$R_0(\tau) \equiv \left( \frac{75E_0}{4\pi} \right)^{1/5} \tau^{2/5} - 28,67\tau^2 + 13,12\tau, \quad \alpha = 0,5, \quad \tau^* = 0,0955.$$

მომდევნო (პირველ) მიახლოებაში მასის უწყვეტობის განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} - \int \frac{M}{m\rho_0(m, \tau)} \text{ed}m.$$

დეტონაციური ტალღის მოძრაობის კანონის პირველი მიახლოების  $R_1(\tau)$  განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობით ცენტრში (7.6.5)

$$R(\tau) = \left[ \frac{3}{4\pi} \int \frac{M}{\rho_0(m, \tau)} \text{ed}m \right]^{1/3},$$

ხოლო (7.5.1) სისტემის მოძრაობისა და ადიაბატურობის განტოლებებიდან, შესაბამისად, ვიპოვით  $p(m, t)$ ,  $\rho(m, t)$  ფუნქციების პირველ მიახლოებებს.

უნდა აღინიშნოს, რომ [103]-ში თხელი დარტყმითი ფენის ასიმპტოტური მეთოდით ამოხსნილია არაავტომოდულური ამოცანა ნულოვან წნევაზე პარაბოლურად კუმშვად (კოლაფსირებად) გრავიტირებად გაზურ ბირთვში ცენტრალური აფეთქების შესახებ ( $t_0 < 0$  - აფეთქების მომენტი), მომდევნო თერმობირთვული დეტონაციით. ნაჩვენებია, რომ დროის ზოგიერთი მომენტიდან თავდაპირველად განშლადი დეტონაციური ტალღა იწყებს კრებადობას ცენტრისაკენ და ადგილი აქვს კოლაფსს.

## ლიტერატურა

1. გილდერმანი ი. ბიოლოგიის მათემატიზაცია, თსუ, თბილისი, 1974, 59 გვ.
2. მელაძე ჰ., სხირტლაძე ნ. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები. თსუ, თბილისი, 2000, 261 გვ.
3. მელაძე ჰ., მენთეშაშვილი მ., მჭედლიშვილი ნ., სხირტლაძე ნ. გამოთვლითი მათემატიკის საფუძვლები. ნაწილი I, თსუ, თბილისი, 2003, 347 გვ.
4. მელაძე ჰ., მენთეშაშვილი მ., სხირტლაძე ნ. გამოთვლითი მათემატიკის საფუძვლები. ნაწილი II, თსუ, თბილისი, 2005, 274 გვ.
5. ოზგაძე თ., ოზგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი. ეკონომიკისი MATHCAD-ის და MATLAB-ის ბაზაზე (II ტომი), თბილისი, 2007, სტუ, 200 გვ.
6. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები). თბილისი, 2006, სტუ, 101 გვ.
7. შათირიშვილი ს., ცაგარელი ს., ცარციძე მ. ზოგადი ბიოლოგია. თსუ, თბილისი, 1999.
8. ჩილაჩავა თ. სივრცით არაერთგვაროვან გარემოში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის შეუღლების ამოცანის ამოხსნის შესახებ. Докл. расшир. засед. Семинара ИПМ им. И.Н. Векуа, т.4, №1, Тбилиси, 1989, с. 136 - 139.
9. ჩილაჩავა თ. მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები. მეთოდური მითითებები და სავარჯიშოები. ნაწილი II, სოხუმი, 1990, 99 გვ.
10. ჩილაჩავა თ. მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები. მეთოდური მითითებები და სავარჯიშოები. ნაწილი I, სოხუმი, 1990, 112 გვ.
11. ჩილაჩავა თ. ჰელმჰოლცის განტოლების ამოხსნადობა სივრცით არაერთგვაროვან ფენაში. აფხ. რეგ. მეც. აკად. მაცნე. საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სერია I, თბილისი 2000, გვ. 13 - 24.
12. ჩილაჩავა თ. ასტროფიზიკური ამოცანების მათემატიკური მოდელირება. აფხ. რეგ. მეც. აკად. მაცნე. საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სერია I, თბილისი 2000, გვ. 4 - 12.
13. ზომერიკი რ. მათემატიკური მეთოდები ბიოლოგიაში, თსუ, თბილისი, 1987.
14. ბიძიგური ც. მათემატიკა საბუნებისმეტყველო სპეციალობებისათვის, "ინოვაცია", თბილისი, 2006, 310 გვ.



15. ჯაიანი გ. უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები. თბილისი, თსუ, 2004, 338 გვ.
16. ჯანგველაძე თ. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მიანზლობებითი ამონხსნის მეთოდები. თსუ, თბილისი, 2005, 307 გვ.
17. Алувэля Д.С., Келлер Дж. Б. Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане. В кн. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980, стр. 20 - 75.
18. Арнольд В.И. Теория катастроф. М., Наука, 1990.
19. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984.
20. Баврин И.И. Высшая математика. М., Академия, 2003, 611 с.
21. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М. Наука, 1985, 165 стр.
22. Барридж Р., Вейнберг Г. Горизонтальные лучи и вертикальные моды. В кн. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980, стр. 76.
23. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. Пер. с англ., М., Мир, 1970, 312 стр.
24. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. М. Финансы и статистика. 2005, 432 стр.
25. Бете Г.А. Теория Сверхновых. Ядерная астрофизика. М., Мир, 1986, стр. 418 – 445.
26. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва, Наука, 1973, 343 стр.
27. Булдырев В.С., Буслаев В.С. Распространение звука в океане. Москва, Препринт ИРЭ АН СССР, 1984, № 45, 43 с.
28. Булдырев В.С., Буслаев В.С. Качественная структура акустического поля в океане. Москва, Препринт ИРЭ АН СССР, 1984, № 44, 55 стр.
29. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния. Акустический журнал, 2003, т. 49, № 5, стр.590.
30. Вайнберг Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Москва, МГУ, 1982, 296 стр.
31. Ващенко Т.В. Математика финансового менеджмента. М. 1996.

32. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1971, 512 стр.
33. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М. Наука, изд.1, 1976, 286 стр., изд. 2, 2004, 288 стр.
34. Гильдерман И.Г. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск. Наука, 1974, 410 стр.
35. Гведенко Б.В. Вопросы математизации современного естествознания. М., 1968.
36. Голубятников А. Н. Интегральные неравенства в задачах газовой динамики. – В кн.: Некоторые вопросы механики сплошных сред. М. : Изд-во МГУ, 1978, стр. 213 - 228.
37. Голубятников А.Н. О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной волны. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 5, стр. 1067 - 1070.
38. Голубятников А.Н., Галин Г.Я. и др. Механика сплошных сред в задачах. Том 1, Теория и задачи. М. Изд. Московский лицей, 1996, 396 стр.
39. Голубятников А.Н., Галин Г.Я. и др. Механика сплошных сред в задачах. Том 2, Ответы и решения. М. Изд. Московский лицей, 1996, 394 стр.
40. Голубятников А.Н., Чилачава Т.И. О центральном взрыве вращающегося гравитирующего тела. Доклады АН СССР, 1983, т. 273, № 4, с. 825 – 829.
41. Голубятников А.Н., Чилачава Т.И. О распространении детонационной взрывной волны в гравитирующем шаре с последующим разлетом в пустоту. Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, № 4, стр. 187 – 191.
42. Голубятников А.Н., Чилачава Т.И. Об оценках движения детонационных волн в гравитирующем газе. Известия АН СССР, МЖГ, 1984, № 2, стр. 140 – 145.
43. Горбацкий Г. Космическая газодинамика. Москва, Наука, 1977, 360 стр.
44. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. Пер. с англ., М., Высшая школа, 1983, 379 стр.
45. Дворяткина С.Н. Практикум по математическому моделированию биологических процессов. Уч. методическое пособие, М., МПУ, 2000.

46. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложение. М. Советское радио. 1964.
47. Дэвис М.Дж. Дифференциальная модель сахарного диабета. В кн. Математическое моделирование. Москва, Изд. Мир, 1979, стр. 128 – 139.
48. Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев. Учебник, М.Ж Альфа –М; ИНФРА-М, 2005, 528 стр.
49. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.В. Математические методы в экономике. Учебник, 2-ое изд. М. ЖМГУ, Изд. Дело и Сервис, 1999, 368 стр.
50. Замков Ю. Математическое моделирование в экономике. Москва, 2000.
51. Иванова Л. Н., Имшенник В. С., Четкович В. М. Термоядерный взрыв вырожденного углеродного ядра звезды. М., 1975, 63 стр. (Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, №31).
52. Каплан С.А. Межзвездная газодинамика. Москва, Физматгиз., 1958, 194 стр.
53. Келлер Дж.Б., Пападакис Дж. С. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980.
54. Келлер Дж. Б. Теория распространения волн и подводная акустика. В кн. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980, стр. 9.
55. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций. Проблемы кибернетики. 1972, вып. 25, стр. 100 – 106.
56. Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В. Теория точечного взрыва. Москва, Физматгиз., 1961, 332 стр. 1973, 278 стр.
57. Коробейников В.П. Задачи теории точечного взрыва в газах. Труды МИАН им. В.А. Стеклова, т.119, Москва, 1973, 278 стр.
58. Косович Е. Финансовая математика: теория и практика финансово-банковских расчетов. М. 1994.
59. Красс М.С., Чупринов Б.Н. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. Учебник, М., 2000.
60. Крушевский А.В. Справочник по экономико-математическим моделям и методам. М., Мир, 1982.

61. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М. Наука, 1973, 416 стр.
62. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. М., Финансы и статистика, 1997.
63. Мак-Кинси Дж. И. Введение в теорию игр. М. Физматгиз, 1960.
64. Маленво Э. Математическая экономика (пер. с франц.), 2000.
65. Марков В.В. Точечный взрыв в детонирующем газе. Научные труды НИИ механики МГУ, 1974, № 31, стр. 93 – 99.
66. Марчук Г.М. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М., Наука, 1991.
67. Меладзе Г.В., Велиев А.А., Садыхов Н.М., Схиртладзе Н.М., Церетели П.А. Рассказы об информатике. Учебное пособие. Баку: Чашыюглу, 2005, 244 стр.
68. Найфэ А. Введение в методы возмущений. Москва, Мир, 1984, 535 стр.
69. Неймарк Ю.Н. Математические модели естествознания и техники. ННГУ, 1994, вып. 1, 83 стр.; 1996, вып. 2, 154 стр.
70. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. Москва, Наука, 1978.
71. Рабинович В.С., Шамайло О.Н. Разрешимость уравнения Гельмгольца в неоднородном слое. ВИНТИ, 1986, № 6544 –В, 20 стр.
72. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продуционных процессов. М., Изд. МГУ, 1993, 301 стр.
73. Самарский А., Михайлов А. Математическое моделирование. Москва, Наука, Физматлит., 1997, 320 стр.
74. Свиричев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М. Наука, 1978, 352 стр.
75. Седов Л. И. Математические методы построения моделей сплошных сред. УМН, 1965, т. 20, вып. 5, стр. 121 – 180.
76. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981, 448 стр.
77. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Москва, Наука, т.1, 1973, 536 стр., т.2, 1976, 584 стр.

78. Смиряев В., Исачкин А.В., Харрасова Л.К. Моделирование от биологии до экономики. Учеб. пос., Изд-ство МСХА, 2002, 122 стр.
79. Смит Дж. М. Математические идеи в биологии. Изд. 2, 2005, 176 стр.
80. Смит Дж. М. Модели в экологии. М. Наука, 1976, 428 стр.
81. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости, Физматгиз, М. 1961.
82. Стеняев Ю.А., Сушко В. Математика и экология. Ленинград, 1985, 17 стр.
83. Тапперт Ф.Д. Метод параболического уравнения. В кн. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980, стр. 180.
84. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 4, Москва, Наука, 1972, 735 стр.
85. Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Григорян А.А., Девяткова Г.Н., Угер Е.Г. Дифференциальные уравнения в экологии: историко-методологическое размышление. Вопросы истории естествознания и техники. 1997, № 3, стр. 141 – 151.
86. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Поля Г. Неравенства. М.: Изд-во Иностран. Лит., 1948, 456 стр.
87. Хилл У. Военное приложение теории игр. В кн. Математическое моделирование. Москва, Изд. Мир, 1979, стр. 202 – 218.
88. Чёрный Г.Г. Газовая динамика. М., Наука, 1988, 424 стр.
89. Чёрный Г.Г. Задача о точечном взрыве. Доклады АН СССР, 1957, т. 112, № 2, стр. 213 – 216.
90. Чилачава Т.И. Рассеяние звука в трёхмерно-неоднородном волноводе с неровным жидким дном. Академия Наук СССР, Акустический жур. 1986, т.32, в. 5, стр. 708-711.
91. Чилачава Т.И. Об одной математической модели теории распространения звуковых волн. სტუ, შრომების კრებული, მართვის ავტომატიზებული სისტემები, 2007, №2(3), გვ.85–93.
92. Чилачава Т.И. Об одной математической модели акустики. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2007, № 2(13), стр. 65 – 68.

93. Чилачава Т.И. Задача о сильном взрыве в однородно сжимающемся гравитирующем газе. Вестник МГУ, серия I, математика, механика, 1985, № 1, с. 78 - 83.
94. Чилачава Т.И. О центральном взрыве в неоднородном шаре, находящемся в равновесии в собственном гравитационном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1988, № 3, стр. 179 – 184.
95. Чилачава Т.И. Об экологической модели «хищник-жертва», учитывающей сезонность размножения популяций. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2008.
96. Чилачава Т.И. Об экологической модели «хищник-жертва», учитывающей сезонность встреч популяций. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2008.
97. Чилачава Т.И. Об экологической модели, учитывающей сезонность размножения и встреч противоборствующих популяций. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2008.
98. Alker H.R. Mathematics and Politics. Macmillan, London, 1965.
99. Arnett W.D. A possible model of supernovae: Detonation of  $C^{12}$ . Astrophys. And Space Sci., 1969, v, 5, № 2, p. 180-212.
100. Chilachava T.I. On the solution of one nonlinear problem of mathematical physics. Reports of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 1997, vol. 23, p. 88 - 94.
101. Chilachava T.I. On the asymptotic method of solution of one class of gravitation theory nonlinear problems. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 1996, vol. 11, N 3, p. 18 - 26.
102. Chilachava T.I. On the asymptotic method of solution of one class of nonlinear mixed problems of mathematical physics. Bulletin of Georgian Academy of Sciences, 1998, vol.157, N3, p. 373 - 377.
103. Chilachava T.I. On the asymptotic method of solution of one class of astrophysic problems. Journal of Applied Mathematics and Informatics. 1999, v. 4, N 2, p. 54 – 66

104. Chilachava T.I. The mathematical modelling of astrophysics problems. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2007, № 2(13), p. 93 -101.
105. Colgate S., White R. The hydrodynamic behaviour of supernovae explosions. Astrophys. Journal, 1966, v. 143, № 3, p. 626 – 681.
106. Domogatsky G.V., Eramzhyan R.A., Nadyozhin D.K. Production of the light elements due to neutrinos emitted by collapsing stellar cores. Astrophys. And Space Sci . 1978, v. 58, №2, p. 273-299.
107. Ford B., Hall G.G. Model Building- An Educational Philosophy for Applied Mathematics. Int. J. Math. Educ. Sci. Tech. 1970, №1, p. 77-83.
108. Giordano F. R., Weir M.D., Fox W.P. A First Course in Mathematical Modeling. Brooks/Cole Publ.Comp., USA, 1997, 526 p.
109. Goel N.S., Maitra S.C., Montroll E.W. On the Volterra and other nonlinear models of interacting populations. Rev. of modern Phys. 1971, v. 43, p. 231 – 276.
110. Hall G.G. Modeling – A Philosophy for Applied Mathematicians. Bull. I.M.A., 1972, № 8, p. 226-228.
111. Hall G.G. The Application of Mathematical Thinking. University of Nottingham Press, 1963.
112. Miller G.A. Mathematics and Psychology. 1964, Wiley, New York.
113. Nadyozhin D.K. The collapse of iron-oxygen start: physical and mathematical formulation of the problem and computational method // Astrophys. and Space Sci. 1977. V. 49. N 2. P. 399-425
114. Renshaw E. Modelling biological population in space and time . Cambridge Univ. Press, 1991.
115. Wallis B.W. How is Mathematics Used? Mathematics Teaching, 1971, №56, p. 14-17.
116. Woods L.C. What is Wrong with Applied Mathematics ? Mathematics Teaching, Bull. I.M.A., 1969, № 5, 70 p.