

51

1959



სტალინის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

შ რ მ ე ბ ი

Т Р У Д Ы

ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ СТАЛИНА

76

მათემატიკურ მეცნიერებათა სერია
Серия математических наук

I

სტალინის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Издательство Тбилисского государственного университета имени Сталина

თბილისი

1959

შრომები

Т Р У Д Ы

ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
имени С Т А Л И Н А

76

მათემატიკურ მეცნიერებათა სერია
Серия математических наук

I

დაიბეჭდა

ი. ბ. სტალინის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭოს დადგენილებით

საკრედიტაციო კოლეგია:

1. პ. კ. ზერაგია (რექტორი)
2. ა. კ. ხარაძე
3. დ. ი. დოლიძე
4. ვ. გ. ჭელიძე
5. ლ. გ. მადნარაძე

შინაარსი

76. ტომის

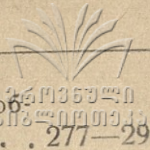
1. გ. კუპრაძე, დრეკადობის თეორიის ახალი სასაზღვრო ამოცანები 1—42
2. ა. ხარაძე, წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგიერთი კერძო სახეების შესახებ 43—52
3. ა. ხარაძე, შენიშვნა ჩებიშევის განზოგადებულ მრავალწევრთა შესახებ 53—58
4. ე. წითლანაძე, ერთი კლასის ფუნქციონალურ განტოლებათა სისტემის ნორმირებული ამოხსნის არსებობის შესახებ 59—66
5. დ. დოლიძე, ბლანტი სითხის არასტაციონარული მცოცავი მოძრაობის ერთი ამოცანის შესახებ 67—74
6. ვ. ჭელიძე, ტაუბერის ტიპის თეორემების შესახებ ჩეზაროსა და აბელის მეთოდებისათვის 75—86
7. პ. ზერაგია, არაწრფივი ბიპარაბოლური განტოლების ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ 87—96
8. ნ. პატარაია, ტალღების არაწრფივი თეორიისათვის 97—106
9. გ. ლომაძე, რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ოთხ-ცვლადიანი კვადრატული ფორმით 107—160
10. პ. კოდონია, მარკოვის რიცხვთა სიმრავლესა და მარკოვის სპექტრს შორის კავშირის შესახებ 161—172
11. ლ. გოკიელი, ინდუქციის შესახებ მათემატიკაში 173—190
12. შ. მიქელაძე, სამწევრა განტოლებების ამოხსნა 191—226
13. ლ. ჟიჟიაშვილი, ფურიეს ორმაგი მწკრივების შეჯამებადობის შესახებ 227—246
14. ხ. ინასარიძე, ზოგიერთი საკითხის შესახებ ნახევარჯგუფთა თეორიიდან 247—260
15. ჯ. სანიკიძე, ინტერპოლაცია ჯერადი კვანძებით და რიცხვითი ინტეგრების ფორმულები 261—276

16. მ. გელაშვილი, რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ განზოგადო-
ებული ოქტაგონალური რიცხვების ჯამების სახით 277—290
17. მ. ჭიჭინაძე, მათემატიკის დაფუძნების ჰეგელის თვალსაზრი-
სის შესახებ 291—302
18. მ. კუკულაძე, თხელკედლიანი პრიზმული გარსების რხევის
საკითხისათვის 303—316
19. მ. სულხანაური, ორმაგი ხვეულები და (C, α, β) მეთოდით
შეჯამებადი ორმაგი მწკრივებისა და ორჯერადი ინტეგრა-
ლების გამრავლება 317—342
-

Содержание

76. тома

1. В. Купрадзе, Новые граничные задачи теории упругости 1—42
2. А. Харадзе, О некоторых частных типах линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами 43—52
3. А. Харадзе, Заметка об одной последовательности многочленов аналогичных тригонометрическим многочленам Чебышева 53—58
4. Э. Цитладзе, О существовании нормированного решения у одного класса нелинейной бесконечной системы функциональных уравнений 59—66
5. Д. Е. Долидзе, Об одной задаче ползучего нестационарного течения вязкой жидкости 67—74
6. В. Г. Челидзе, О теоремах Тауберова типа для методов Чезаро и Абеля 75—86
7. П. Зерагия, О решении некоторых граничных задач нелинейного бипараболического уравнения 87—96
8. Н. Патарая, К нелинейной теории волн 97—106
9. Г. Ломадзе, О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными 107—160
10. П. Когония, О связи между множеством чисел Маркова и марковским спектром (I) 161—172
11. Л. Гокиели, Об индукции в математике 173—190
12. Ш. Е. Микеладзе, Решение трехчленных уравнений . 191—226
13. Л. Жижиашвили, О суммировании двойных рядов Фурье 227—246
14. Х. Инасаридзе, О некоторых вопросах теории полугрупп 247—260
15. Дж. Г. Саникидзе, Интерполирование с кратными узлами и формулы численного интегрирования 261—276

- 
16. М. Гелашвили, О представлении чисел суммами обобщенных октагональных чисел 277—290
17. М. Чичинадзе, О Гегелевской точке зрения относительно обоснования математики 291—302
18. М. Н. Кукуладзе, К вопросу колебаний тонкостенных призматических оболочек 303—311
19. М. Сулханаури, Двойные свертки и умножение (G, α, β) суммируемых двойных рядов и двойных интервалов . . 317—342
-

В. Купрадзе

НОВЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Введение

1. Граничные задачи теории упругости до сих пор в общем виде рассматривались в литературе только в том случае, когда коэффициенты соответствующей системы дифференциальных уравнений относятся к классу непрерывно-дифференцируемых функции². Между тем, с точки зрения теории и в особенности приложений, особый интерес представляют именно те задачи, в которых упомянутые коэффициенты допускают конечные разрывы непрерывности вдоль определенных многообразий, расположенных внутри исследуемой области; так например, сюда относятся граничные задачи для упругих тел, составленных из различных материалов, в которых параметры, характеризующие упругие свойства тела в целом, терпят разрывы вдоль границ раздела смежных кусков. До сих пор для этих задач теории упругости в общем виде не были выяснены вопросы корректности и не была построена теория решений; впрочем, теория упругости не представляет в этом отношении особого исключения: указанное состояние, более или менее, характерно для всей математической физики.

Нетрудно убедиться в том, что случай переменных непрерывно-дифференцируемых коэффициентов, по существу, не отличается от случая постоянных коэффициентов ни общим характером аналитического аппарата, дающего решение краевой задачи, ни физическим характером явления: достаточно указать, хотя бы на то, что и в том и другом случае решение однозначно определяется заданием краевых условий на геометрической границе тела. Если же коэффициенты систем дифференциальных уравнений терпят разрывы (конечные) вдоль некоторых линий или поверхностей вну-

¹ Работа выполнена по плану важнейших работ по Тбилисскому Университету на 1958 год.

² Нам известны работы С. Г. Михлина и Д. И. Шермана (и некоторые другие, непосредственно к ним примыкающие), в которых это ограничение снято, однако, только для плоской задачи и при этом для случая статического равновесия; метод, применяемый в этих работах, специальный и на общие случаи не переносится.



три тела (границы раздела сред), то для однозначности и существования решения необходимо корректно выбрать определенный вид сопряжения решений вдоль границ раздела; кроме собственно краевых условий на геометрической границе тела (за которой тело физически не простирается), в этих задачах необходимо удовлетворить еще дополнительным граничным условиям вдоль физических границ, если условимся называть так совокупность тех точек, в которых физические параметры тела меняются скачками.

Мы рассматриваем ниже краевые задачи подобного рода для изотропных упругих тел; но внимательный читатель заметит, что метод распространяется и на анизотропные тела; более того, проблему можно рассматривать как общую задачу теории линейных систем эллиптических дифференциальных уравнений: при заданном характере разрыва коэффициентов вдоль заданных многообразий в основной области, выделить класс корректно формулируемых краевых задач и указать теорию их решения.

Рассматривая неоднородное упругое, изотропное тело, мы предполагаем в общем случае, что

$$\lambda = f_1(P), \quad \mu = f_2(P),$$

где λ и μ — параметры Лямэ, характеризующие упругие свойства тела, P — его произвольная точка и f_1, f_2 — некоторые, определенные для данного тела, функции, допускающие разрывы первого рода вдоль определенных многообразий внутри области, занятой телом. Практически, однако, почти всегда можно считать функции f_1 и f_2 кусочно-постоянными; это соответствует кусочно-неоднородной структуре тела, т. е. случаю, когда тело составлено из ограниченного числа конечных или бесконечных кусков, каждый из которых имеет различные, но постоянные для данного куска, параметры Лямэ. Более того, для большинства упругих материалов, применяемых в технике, или встречающихся в виде смежно-залегающих геологических пород в естественном состоянии, эти параметры, практически, достаточно хорошо удовлетворяют, так называемой, гипотезе Коши о постоянстве числа Пуассона.

В этой работе рассмотрены основные граничные задачи для кусочно-неоднородных сред и построена общая теория решений для статических состояний и для периодических по времени колебаний.

Нет необходимости подчеркивать значение граничных задач вообще, и в частности для неоднородных тел в самых различных областях техники: они играют важную роль, в частности, при расчете напряжений, возникающих в металлических конструкциях в результате заполнения имеющихся в теле каверн (искусственных, естественных, коррозионных и др.) расплавленным металлом, в задачах на вбивание клина, в задачах о затвердении жидкой массы в углублениях и др., во всех случаях, когда поль-

зование уравнениями теории упругости допустимо. Отметим также особое значение, которое теперь приобретают упругие колебания в машиностроении. „Еще не так давно изучению колебаний здесь не придавалось особого значения, и расчеты на прочность велись на основе статических представлений о зависимости деформаций от нагрузок. Однако, вместе со стремлением к увеличению числа оборотов и уменьшению габаритов при переходе к скоростному машиностроению пренебрегать ролью колебаний и здесь стало уже невозможно. Многочисленные аварии, связанные с увеличением фактических нагрузок из-за возбуждения колебаний, сделали необходимым для конструкторов и инженеров тщательное исследование возможных вибраций узлов машины и оценку их интенсивности“—эти слова, взятые из недавно вышедшей книги Н. Боголюбова и Ю. Митропольского „Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний“ в значительной степени сохраняют силу и для малых колебаний, рассматриваемых в линейной теории упругости и изучение теоретических методов расчета вибрационных напряжений, которые никогда не измерялись и почти наверное никогда не будут измеряться во внутренних точках тела опытным путем, приобретает особое значение.

В некоторых важных для практики случаях решения, которые мы получаем, представляются с помощью такого аналитического аппарата, что уже при современном состоянии техники вычислений, могут быть выражены численно; в других случаях, они дают фундаментальные для теории упругости теоремы существования, единственности и устойчивости, доказательства которых, как это принято считать (см, напр. [1]), принадлежат к трудным задачам теории и отсутствие которых лишало до сих пор теорию граничных задач для неоднородных тел, необходимой математической законченности.

1. Постановка задач и вывод основных интегральных уравнений

1. Пусть упругая среда B_a , характеризуемая постоянными Ляме λ_a и μ_a , заполняет трехмерное пространство всюду, за исключением некоторого (конечного) числа ограниченных, непересекающихся областей B^k , $k=1, 2, \dots, \kappa$, заполненных упругими средами, характеризуемыми, соответственно, постоянными λ^k и μ^k и образующих κ различных включений в среду B_a ; предположим, что каждое из включений ограничено замкнутой поверхностью Ляпунова S^k , вдоль которых реализуются некоторые, механический допустимые, сопряжения данной среды со смежной.

Пусть в некоторой точке P_0 , или в некоторой ограниченной части пространства, задан источник колебаний данной мощности и постоянной частоты ω ; требуется найти поле напряжений (или поле деформаций), возникающее под воздействием этого источника в рассматриваемой составной среде.



თბილისის
სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

Эту задачу будем называть задачей I.

Пусть, теперь, внешняя среда B_a не простирается в бесконечность, а имеет конечную внешнюю границу S_a , которая представляет замкнутую поверхность Ляпунова; пусть на этой поверхности заданы либо а) смещения, либо б) напряжения, либо в) линейная комбинация смещений и напряжений; вдоль же внутренних границ раздела S^k , $k=1, 2, \dots, x$, реализуются, как и прежде, некоторые, механически допустимые, условия сопряжения сред; требуется определить напряженное состояние системы.

Эти задачи будут соответственно называться задачами Π_1 , Π_2 и Π_3 .

Важные частные случаи задач Π получаются, когда S_a есть бесконечная плоскость, а

$$B_a + \sum_{k=1}^x B_i^k$$

есть полупространство с включениями; эти задачи, которые ниже будут обозначаться задачами III, представляют особый интерес для геофизики и математической сейсмологии.

На других видоизменениях краевых задач здесь не останавливаемся, но сделаем два важных замечания:

1) все названные задачи колебания обращаются в соответствующие задачи статического равновесия при $\omega=0$ и решения последних получают-ся из решений первых простой подстановкой

$$\omega=0$$

2) решения всех приведенных выше задач колебания получаются из решения задачи I.

В этой главе мы будем заниматься задачей I; при этом, т. е. случай $x>1$ ничем, кроме формализма, не отличается от случая $x=1$, для сокращения изложения, рассматриваем случай одного включения B_i с границей S и с постоянными Лямэ λ_i , μ_i , при условии жесткого сопряжения пограничных сред вдоль S .

Пусть точка P_0 , где помещен источник колебаний, принадлежит B_a ; пусть $E(P; P_0)$, где $P(x_1, x_2, x_3)$ произвольная точка, есть поле смещений, которое соответствовало бы заданному источнику, если бы он действовал в полном бесконечном пространстве B_a , заполненном средой с постоянными λ_a , μ_a . Отсюда вытекает что:

$$\Delta_a^* E + \omega^2 E = 0, \quad \lim E(P, P_0) = 0 \quad \text{при} \quad r(P, P_0) \rightarrow \infty.$$

При этих условиях задачу I мы ставим следующим образом: Найти вектор упругих смещений $u(P)$, где P произвольная точка пространства, из условий:

06105740
202307010331. Для $P \in B_i$,

$$\Delta_i^* u + \omega^2 u \equiv \mu_i \Delta u + (\lambda_i + \mu_i) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 u = 0,$$

2. Для $P \in B_a$,

$$\Delta_a^* u + \omega^2 u \equiv \mu_a \Delta u + (\lambda_a + \mu_a) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 u = 0,$$

3. Для $P \in S$,

$$u_i = u_a, \quad (T^i u)_i = (T^a u)_a,$$

где

$$T^i u = 2\mu_i \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda_i \bar{n} \operatorname{div} u + \mu_i [\bar{n} \operatorname{rot} u],$$

$$T^a u = 2\mu_a \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda_a \bar{n} \operatorname{div} u + \mu_a [\bar{n} \operatorname{rot} u]^1$$

векторы напряжений в B_i и B_a ².4. Вектор $u(P) - E(P; P_0)$ есть регулярный в B_a вектор,5. Вектор $u(P) - E(P; P_0)$ асимптотически, равномерно по всем направлениям, удовлетворяет условию излучения при удалении точки P на бесконечность.

Для того чтобы эта постановка задачи I была корректной, надо доказать теоремы существования, единственности и устойчивости.

2. Каждый из трех векторов $\Gamma^k(P, Q)$, $k=1, 2, 3$, зависящие от точек P и $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, с проекциями на прямолинейные прямоугольные оси координат $\Gamma_j^k(P, Q)$, $j=1, 2, 3$, определенных равенствами

$$\Gamma_j^k(P, Q) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} + \frac{1}{b^2} \left(\varepsilon_{kj} - \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{e^{ik_2 r}}{r} - \{ \zeta_a(k_1; r) - \zeta_b(k_2; r) \} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right), \quad k=1, 2, 3; \quad (1)$$

где

$$a^2 = \lambda_a + 2\mu_a, \quad b^2 = \mu_a, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{b^2},$$

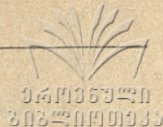
$$\zeta_c(k; r) = \frac{1}{c^2} \left\{ e^{ikr} \left(\frac{r}{ik} + \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{k^2} \right\}, \quad i = \sqrt{-1}; \quad \varepsilon_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2},$$

есть решение уравнения

$$\Delta_a^* u + \omega^2 u = 0. \quad (2)$$

¹ н-орт нормали, [...] знак векторного произведения.² Условия 3 выражают непрерывность смещений и напряжений при переходе через поверхность раздела; нижние значки i и a при переменных величинах указывают на предельные значения изнутри и извне в точках на S .



Каждый из векторов $\Gamma^{k(n)}(P, Q)$, $k=1, 2, 3$, с компонентами

$$\Gamma_j^{k(n)}(P, Q) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} - \zeta_a(k_1; r) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{r}, \quad (3)$$

есть решение уравнениям:

$$\Delta_a^* u + \omega^2 u = \text{grad} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}, \quad (4)$$

и удовлетворяет, кроме того, условиям:

$$\text{rot} \Gamma^{k(n)}(P, Q) = 0 \quad (5)$$

и

$$\text{div} \Gamma^{k(n)}(P, Q) = \text{div} \Gamma^k(P, Q) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{e^{ik_1 r}}{r}. \quad (6)$$

Все это можно проверить непосредственно.

Из векторов $\Gamma^k(P, Q)$ и $\Gamma^{k(n)}(P, Q)$ составим линейную комбинацию

$$\Gamma_*^k(P, Q) = \Gamma^k(P, Q) - \tau \Gamma^{k(n)}(P, Q), \quad (7)$$

где постоянная τ равна

$$\tau = \frac{\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i}{\mu_a(\lambda_i + 2\mu_i)}. \quad (8)$$

Векторы $\Gamma_*^k(P, Q)$, как легко проверить на основании (1), (3) и (7), имеют в точке $P \equiv Q$ полюс первого порядка, точнее — особенность вида $\frac{\text{const}}{r}$.

Полагая в (1) и (2) $\omega=0$, получаем векторы

$$\hat{\Gamma}^k(P, Q) \text{ и } \hat{\Gamma}^{k(n)}(P, Q), \quad (1^\circ)$$

которые являются, соответственно, интегралами уравнений

$$\Delta_a^* u = 0 \quad (2^\circ)$$

и

$$\Delta_a^* u = \text{grad} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}. \quad (4^\circ)$$

Если u и v два регулярных в B_i вектора и за положительное направление нормали принято направление внешней нормали, то справедливо тождество:

$$\iiint_{B_i} (u \Delta^* v - v \Delta^* u) d\tau = \iint_S (u Lv - v Lu) ds, \quad (9)$$

где

$$\Delta^* u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} u, \quad (10)$$

$$Lu = (\alpha + \mu) \frac{\partial u}{\partial n} + \bar{n} \beta \text{div} u + \alpha [\bar{n} \text{rot} u]. \quad (11)$$

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu. \quad (12)$$

В частности, при

$$\alpha = \mu, \quad \beta = \lambda$$

$$Lu \equiv Tu = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda \bar{n} \operatorname{div} u + \mu [n \operatorname{rot} u], \quad (14)$$

и формула (9) обращается в обычную формулу Бетти, известную из теории упругости. Формула (9) неверна для бесконечной области B_a , если на u и v не наложены некоторые дополнительные требования; можно показать, что если векторы u и v в области B_a регулярны в обычном смысле, и, кроме того, удовлетворяют на бесконечности условию излучения, то равенство (9) сохраняется и для бесконечной области B_a^1 .

Кроме того заметим, что в формуле Бетти под знаком объемного интеграла, вместо оператора Δ^* , очевидно, может стоять оператор Δ_i^* , или Δ_a^* ; тогда в правой части, под поверхностным интегралом, оператор L будет снабжен, соответственно верхними индексами i и a , указывающими на то, что, в первом случае $\lambda = \lambda_i$, $\mu = \mu_i$ и во втором $\lambda = \lambda_a$, $\mu = \mu_a$.

3. Предположим сначала, что задача I имеет решение в классе B , под которым понимается совокупность векторов, к которым применима формула Бетти; обозначим его через $u(P)$. Пусть точка P лежит в B_i ; применим формулу Бетти (9) с оператором Δ_i^* в области B_i к векторам $u(Q)$ и $\Gamma_*^k(P, Q)$; исключив особую точку P малой сферой τ_ε с поверхностью (τ_ε) будем иметь, как обычно:

$$\iint_{B_i - \tau_\varepsilon} (u \Delta_i^* \Gamma_*^k - \Gamma_*^k \Delta_i^* u) d\tau_Q = \iint_{S + (\tau_\varepsilon)} \{u_i T^i \Gamma_*^k - \Gamma_*^k (T^i u)_i\} ds_Q \quad (15)$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Из определения оператора Δ_i^* и из формул (5), (6), (7), (8) вытекает, что

$$\Delta_i^* \Gamma_*^k = -\frac{\mu_i}{\mu_a} \omega^2 \Gamma^k(P, Q), \quad (16)$$

и из предположения о существовании решения следует

$$\Delta_i^* u = -\omega^2 u. \quad (17)$$

Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \Gamma_*^k(P, Q) (T^i u)_i ds_Q = 0 \quad (18)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint u(Q) T^i \Gamma_*^k(P, Q) ds_Q = 2\pi \frac{\mu_i}{\mu_a} u_k(P); \quad (19)$$

¹ В. Д. Купрадзе. Граничные задачи теорий установившихся упругих колебаний. Усп. Мат. Наук Т. VIII, в. 3. 1953.

После внесения в (15) значений из (16) и (17) и перехода к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, на основании равенств (18) и (19), получим:

$$\begin{aligned} \mu_i u_k(P) = & \frac{1}{4\pi} \omega^2 \iint_{B_i} u(Q) [(\mu_x - \mu_i) \Gamma^k(P, Q) - \mu_a \tau \Gamma^{k(n)}(P, Q)] d\tau_Q - \\ & - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S \{u_i(Q) T^i \Gamma_{*}^k(P, Q) - \Gamma_{*}^k(T^i u)_i\} ds_Q. \end{aligned}$$

Продолжая считать точку P в B_i , применим формулу Бетти с оператором Δ_a^* в области B_a к векторам $\Gamma_{*}^k(P, Q)$ и

$$D(Q) = u(Q) - E(Q; P_0), \quad Q \in B_a;$$

Вектор $D(Q)$, согласно условию задачи, регулярен в B_a и удовлетворяет условию излучения; тоже самое верно для $\Gamma_{*}^k(P, Q)$; поэтому формула Бетти применима в B_a и приводит, в силу уравнения (4), к равенству:

$$\tau \iiint_{B_a} D(Q) \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\tau_Q + \iint_S \{D_a(Q) T^a \Gamma_{*}^k - \Gamma_{*}^k (T^a D)_a\} ds_Q = 0.$$

Приняв во внимание, что в двух последних равенствах направление нормалей противоположны, и что вдоль S соблюдаются непрерывность смещений и напряжений, выражаемые условиями 3 задачи I, сложим эти равенства; тогда, после некоторых несложных преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \mu_i u_k(P) = & \frac{1}{4\pi} \omega^2 \iint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) \Gamma^k(P, Q) - \mu_a \tau \Gamma^{k(n)}(P, Q)] d\tau_Q - \\ & - \frac{1}{4\pi} \mu_a \tau \iint_{B_a} u(Q) \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\tau_Q + \frac{1}{4\pi} \mu_a \iint_S u(Q) T^* \Gamma_{*}^k(P, Q) ds_Q + \mu_a F_k(P; P_0); \quad (20) \end{aligned}$$

$k=1, 2, 3,$

где

$$T^* = T^a - T^i, \quad (21)$$

а

$$\begin{aligned} F_k(P; P_0) = & \left(1 - \frac{\tau}{3}\right) E_k(P; P_0) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \tau v. p. \iint_{\Omega} E(Q; P_0) \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\tau_Q \quad (22) \end{aligned}$$

есть заданная функция и $P \in B_i$.

До сих пор точку P мы считали лежащей в B_i ; пусть теперь $P \in B_a$. Применим формулу Бетти с оператором Δ_i^* в области B_i к векторам $u(Q)$ и $\Gamma^k(P, Q)$, ($P \in B_a$, $Q \in B_i$); тогда учитывая, что

$$\Delta_i^* \Gamma^k = -\frac{\mu_i}{\mu_a} \omega^2 \Gamma^k + \tau_1 \operatorname{grad} \frac{\partial e^{ik_1 r}}{\partial \xi_k r}, \quad k=1, 2, 3;$$

$$\tau_1 = \frac{\lambda_i \mu_a - \mu_i \lambda_a}{\mu_a (\lambda_a + 2\mu_a)},$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \omega^2 \iiint_{B_i} u(Q) \left[(\mu_a - \mu_i) \Gamma^k + \frac{\mu_a}{\omega^2} \tau_1 \operatorname{grad} \frac{\partial e^{ik_1 r}}{\partial \xi_k r} \right] d\tau_Q - \\ - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S \{u_i \Gamma^k \Gamma^k - \Gamma^k (T^i u)_i\} ds_Q = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Наконец, применяя равенство (9) с оператором Δ_a^* в B_a к векторам Γ^k и $D(Q) = u(Q) - E(Q; P_0)$, получим:

$$\mu_a D_k(P) + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S \{D_a(Q) T^a \Gamma^k(P, Q) - \Gamma^k(P, Q) (T^a D)_a\} ds_Q = 0. \quad (24)$$

Имея в виду, что в двух последних интегральных равенствах (23) и (24) нормали имеют противоположные направления, сложим их, учитывая при этом условия 3 задачи I; тогда получим:

$$\begin{aligned} \mu_a u_k(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) \left[\omega^2 (\mu_a - \mu_i) \Gamma^k(P, Q) + \mu_a \tau_1 \operatorname{grad} \frac{\partial e^{ik_1 r}}{\partial \xi_k r} \right] d\tau_Q + \\ + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u(Q) T^* \Gamma^k(P, Q) ds_Q + \mu_a E(P; P_0) \end{aligned} \quad (25)$$

или, как легко вытекает из (3), (4), (5) и (6):

$$\begin{aligned} \mu_a u_k(P) = \frac{1}{4\pi} \omega^2 \iiint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) \Gamma^k - \mu_a \tau_1 \Gamma^{k(n)}] d\tau_Q + \\ + \frac{1}{4\pi} \mu_a \tau_1 \iiint_{B_i} u \frac{\partial}{\partial \xi_k} \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i T^* \Gamma^k d\tau_Q + \mu_a E \end{aligned} \quad (25)$$

$$P \in B_a; \quad k=1, 2, 3;$$

Т. о. показано, что если задача I имеет решение в классе векторов, допускающих применение формулы Бетти, то это решение удовлетворяет уравнению (20), когда точка $P \in B_i$ и уравнению (25), когда точка $P \in B_a$.

Сделаем теперь несколько важных для дальнейшего замечаний.

1°. Если будет найден вектор $u(P)$, который для $P \in B_i$ удовлетворяет функциональному уравнению (20), то подставив его в (25) под знаком объемного и поверхностного интеграла, получим значение решения при $P \in B_a$.

2°. Уравнение (20), вследствие того, что $P \in B_i$, а интегрирование ведется не только по B_i и S , но также по B_a , не есть обычное уравнение Фредгольма, но как будет показано ниже, для него имеет место теория Фредгольма.

3°. Если уравнения (20), (25) имеют решение, то $u(P) - E$ будет удовлетворять условию излучения; это видно из вида правой части уравнения (25) и из того, что ядра участвующих здесь интегралов — удовлетворяют условию излучения по точке P^1 .

4°. (Теорема единственности). Задача I, при $E=0$, допускает только тривиальное решение.

Доказательство этой теоремы получается из принципа энергии, несущественным изменением обычного доказательства теоремы единственности для внешних задач¹.

Для того, чтобы доказать теорему существования, надо показать:

- а) что уравнения (20), (25) действительно имеют решение и
- б) что это решение удовлетворяет условиям задачи I.

Что касается устойчивости решения, то она вытекает из известных свойств решения уравнений типа Фредгольма и им эквивалентных сингулярных уравнений, к которым уравнения (20), (25) приводятся.

II. Доказательство основной теоремы эквивалентности

В главе I было показано, что если задача I имеет решение в классе B (т. е. в классе векторов, допускающих применение формулы Бетти), то оно будет также решением следующей системы уравнений:

$$\mu_i u(P) = Lu(P) + \mu_a F, \quad \text{для } P \in B_i; \quad (1)$$

$$\mu_a u(P) = L'u(P) + \mu_a E, \quad \text{для } P \in B_a; \quad (2)$$

здесь

$$Lu(P) = \frac{\omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) [\mu_a - \mu_i] \Gamma_{(a)}(P, Q) - \mu_a \tau \Gamma^{(n)}_{(a)}(P, Q) d\tau_Q - \\ - \frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iiint_{B_a} u(Q) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r(P, Q)} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i(Q) T^* \Gamma_*(P, Q) ds_Q,$$

$$L'u(P) = \frac{\omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) \Gamma_{(a)}(P, Q) - \mu_a \tau_1 \Gamma^{(n)}_{(a)}(P, Q)] d\tau_Q + \\ + \frac{\mu_a \tau_1}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r(P, Q)} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i(Q) T^* \Gamma_{(a)}(P, Q) ds_Q.$$

¹ См. ссылку на стр. 7.

$\Gamma_{(a)}(P, Q)$, $\Gamma^{(n)}_{(a)}(P, Q)$ — значения матриц $\Gamma(P, Q)$ и $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ при $x = x_a$,
 $\mu = \mu_a$, $\frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r}$ есть матрица, составленная из компонент векторов
 $\frac{\partial}{\partial \xi_k} \text{grad} \frac{1}{r}$, $k = 1, 2, 3$; смысл других обозначений разъяснен в гл. 1.

Ниже доказывается обратное предложение: решение системы (1), (2) класса B , есть решение задачи I.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_i u(P) = & Lu(P) + \frac{1}{4\pi} (\mu_i - \mu_a) \iint_S (u_i - u_a) T^a \Gamma_*(P, Q) dS_Q + \\ & + \mu_a F(P, P_0); \quad P \in B_i; \end{aligned} \quad (1')$$

$$\begin{aligned} \mu_a u(P) = L' u(P) + \frac{1}{4\pi} (\mu_i - \mu_a) \iint_S (u_i - u_a) T^a \Gamma_{(a)}(P, Q) ds_Q + \\ + \mu_a E(P; P_0); \quad P \in B_a; \end{aligned} \quad (2')$$

и пусть $u(P)$ есть ее решение в классе B . Применим оператор $(\Delta_{(a)}^* + \omega^2)$ к обеим частям равенства (2'); т. е. точка $P \in B_a$, оператор дифференцирования в правой части можно внести под знаки интегралов; тогда, вследствие того, что:

$$\Delta^*_{(a)}\Gamma_{(a)} + \omega^2\Gamma_{(a)} = 0, \quad \Delta^*_{(a)}\Gamma^{(n)}_{(a)} + \omega^2\Gamma^{(n)}_{(a)} = \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} \frac{1}{r}, \quad \Delta^*_{(a)}E + \omega^2E = 0,$$

$$(\Delta_{(a)}^* + \omega^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} = \omega^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r}; \quad (3)$$

$$(\Delta^*_{(a)} + \omega^2)(T^a \Gamma_{(a)}) = (\Delta^*_{(x)} + \omega^2)(T^i \Gamma_{(a)}) = 0,$$

получим для $P \in B_a$

$$\Delta_{(a)}^* u(P) + \omega^2 u(P) = 0. \quad (4)$$

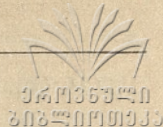
Пусть теперь $P \in B_i$.

Применяя формулу Бетти с оператором $\Delta_{(n)}^*$ к векторам $u(Q)$ и $\Gamma_*^k(P, Q) = \Gamma_{(a)}^k(P, Q) - \tau \Gamma_{(a)}^{(n)k}(P, Q)$, $k=1, 2, 3$ в области V_i , получим

$$\begin{aligned} \mu_i u(P) = & \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S [\Gamma_*(P, Q)(T^i u)_i - u_i(Q) T^i \Gamma^*(P, Q)] d\tau_Q - \\ & - \frac{\mu_i \omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) \Gamma_{(a)} d\tau_Q - \frac{\mu_a}{4\pi} \iiint_{B_i} \Gamma_* \Delta^*_{(i)} u(Q) d\tau_Q. \end{aligned} \quad (5)$$

Снова применяя формулу Бетти, теперь уже в области B_a с оператором $\Delta_{(a)}^*$ и к векторам

$$D(Q) = u(Q) - E(Q; P_0) \quad \text{и} \quad \Gamma_*^k(P, Q), \quad k = 1, 2, 3,$$



получим:

$$0 = \tau \iiint_{B_a} D(Q) \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q - \iint_S D_a(Q) (T^a \Gamma_*) - \Gamma_*(P, Q) (T^a D)_a ds_Q, \quad (6)$$

считая положительную нормаль направленной из B_i в B_a . Умножив (6) на $\frac{\mu_a}{4\pi}$ и сложив с (1'), получим после элементарных преобразований и упрощений:

$$\begin{aligned} \mu_i u(P) &= \frac{\omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u (\mu_a \Gamma_* - \mu_i \Gamma_{(a)}) d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i T^* \Gamma_* ds_Q + \\ &+ \frac{1}{4\pi} (\mu_i - \mu_a) \iint_S (u_i - u_a) T^a \Gamma_* ds_Q - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S [u_a (T^a \Gamma_*) - \Gamma_*(T^a u)_a] ds_Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец, составив разность равенств (7) и (5), будем иметь после упрощений:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu_i}{\mu_a} \iint_S (u_i - u_a) T^a \Gamma_* ds_Q + \iint_S [\Gamma_* (T^a u)_a - (T^i u)_i] ds_Q + \\ &+ \iint_{B_i} \Gamma_* (\Delta_{(i)}^* u + \omega^2 u) d\tau_Q. \end{aligned} \quad (8)$$

Т. к.

$$\Gamma_* = \Gamma_{(a)} - \tau \Gamma_{(a)}^{(n)} \quad \text{и} \quad \Gamma_{(a)} = \Gamma_{(a)}^{(n)} + \Gamma_{(a)}^{(e)}, \quad \text{где} \quad \operatorname{rot} \Gamma_{(a)}^{(n)} = \operatorname{div} \Gamma_{(a)}^{(e)} = 0,$$

(8) распадается на следующие два равенства:

$$H^{(0)} u(P) = \tau H^{(n)} u(P), \quad (9)$$

$$H^{(e)} u(P) = (\tau - 1) H^{(n)} u(P), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} H^{(0)} u(P) &\equiv \iiint_{B_i} \Gamma_{(a)} (\Delta_{(i)}^* u + \omega^2 u) d\tau_Q + \frac{\mu_i}{\mu_a} \iint_S (u_i - u_a) T^a \Gamma_{(a)} ds_Q + \\ &+ \iint_S \Gamma_{(a)} [(T^a u)_a - (T^i u)_i] ds_Q, \end{aligned} \quad (11)$$

а $H^{(n)} u(P)$ и $H^{(e)} u(P)$ получаются из $H^{(0)} u(P)$, соответственно, заменой $\Gamma_{(a)}$ на $\Gamma_{(a)}^{(n)}$ и $\Gamma_{(a)}^{(e)}$.

Легко проверить, что левая часть равенства (10) есть соленоидальный вектор, правая же его часть — вектор потенциальный; поэтому, обозначив их общее значение через $\varphi(P)$, будем иметь:

$$\operatorname{div} \varphi(P) = \operatorname{rot} \varphi(P) = \Delta \varphi(P) = 0, \quad (12)$$

Кроме того (9) и (10) дают:

$$H^{(0)}u(P) = \frac{\tau}{\tau-1} \varphi(P), \quad P \in B_i; \quad (13)$$

Пусть теперь $P \in B_a$. Применив формулу Бетти с оператором $\Delta_{(i)}^*$ в области B_i к векторам $u(Q)$ и $\Gamma_{(a)}^k$, $k=1, 2, 3$, получим:

$$\begin{aligned} \mu_i \omega^2 \iiint_{B_i} u \Gamma_{(a)} d\tau_Q - \mu_a \tau_1 \iiint_{B_i} u \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r} d\tau_Q + \mu_a \iint_{B_i} \Gamma_{(a)} \Delta_{(i)}^* u d\tau_Q + \\ + \mu_a \int_S u_i T^i \Gamma_{(a)} - \Gamma_{(a)} (T^i u)_i ds_Q = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tau_1 = \frac{\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i}{\mu_a (\lambda_a + 2\mu_a)}, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_a + 2\mu_a}$$

Наконец, применяя еще один раз формулу Бетти с оператором $\Delta_{(a)}^*$ в области B_a к векторам $D(P)$ и $\Gamma_{(i)}^k(P, Q)$, $k=1, 2, 3$, получим:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S [u_a T^a \Gamma_{(a)} - \Gamma_{(a)} (T^a u)_a] ds_Q + E, \quad (15)$$

при направлении положительной нормали из B_i в B_a .

Составим разность равенств (2')¹ и (15); после элементарных упрощений будем иметь:

$$\begin{aligned} 0 = \left(1 - \frac{\mu_i}{\mu_a}\right) \omega^2 \iiint_{B_i} u \Gamma_{(a)} d\tau_Q + \tau_1 \iiint_{B_i} u \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} - \omega^2 \Gamma_{(n)}^{(n)} \right) d\tau_Q + \\ + \frac{\mu_i}{\mu_a} \iint_S (u_i - u_a) T^a \Gamma_{(a)} ds_Q - \int_S u_i T^i \Gamma_{(a)} ds_Q + \int_S \Gamma_{(x)} (T^a u)_a ds_Q \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив сюда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{e^{ik_1 r}}{r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} - \omega^2 \Gamma_{(n)}^{(n)}$$

складываем (16) с (14), поделив это последнее, предварительно, на μ_a ; тогда получим в силу (11):

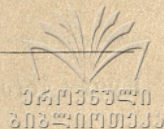
$$H^{(0)}u(P) = 0, \quad (17)$$

$$P \in B_a.$$

Итак, согласно с (13) и (17) можем писать:

$$\begin{aligned} H^{(0)}u(P) = \frac{\tau}{\tau-1} \varphi(P), \quad \text{при } P \in B_i; \\ 0 \quad \text{при } P \in B_a; \end{aligned}$$

¹ Предварительно сократив на μ_a равенство (2').



Составив разности

$$(H^{(0)}u)_i - (H^{(0)}u)_a \quad \text{и} \quad (T^a H^{(0)}u)_i - (T^a H^{(0)}u)_a$$

и воспользовавшись основными свойствами потенциалов, в том числе теоремой аналогичной теореме Ляпунова-Таубера для потенциала двойного слоя¹, получим:

$$u_i - u_a = -\frac{1}{4\pi} \frac{\tau}{\tau - 1} \frac{\mu_a}{\mu_i} \varphi_i \quad (18)$$

$$(T^a u)_a - (T^i u)_i = \frac{1}{4\pi} \frac{\tau}{\tau - 1} (T^a \varphi)_i. \quad (19)$$

Кроме того, полагая $\omega = 0$, и применяя к равенству

$$H^{(0)}u(P) = \frac{\tau}{\tau - 1} \varphi(P), \quad P \in B_i$$

оператор

$$\Delta^*_{(a)} = (\lambda_a + 2\mu_a) \text{grad div} - \mu_a \text{rot rot}$$

получим по формуле Пуассона, в силу (12)

$$\Delta^*_{(i)} u(P) = 0, \quad P \in B_i; \quad (20)$$

Введем вектор

$$\psi(P) = \frac{\mu_a}{\mu_i} \varphi(P) \quad (21)$$

Вследствий (12) можно писать

$$(T^a \varphi)_i = \left\{ T^a \left(\frac{\mu_i}{\mu_a} \psi \right) \right\}_i = 2\mu_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_i + n \lambda_i (\text{div } \psi)_i + \mu_i [n \text{ rot } \psi]_i = (T^i \psi)_i,$$

поэтому (18) и (19) перепишутся в следующем виде:

$$u_i - u_a = -\frac{1}{4\pi} \frac{\tau}{\tau - 1} \psi_i; \quad (T^a u)_a - (T^i u)_i = \frac{1}{4\pi} \frac{\tau}{\tau - 1} (T^i \psi)_i. \quad (22)$$

Введем вектор:

$$U(P) = \begin{cases} u(P) + \frac{\tau}{4\pi(\tau-1)} \psi(P), & P \in B_i; \\ u(P), & P \in B_a; \end{cases} \quad (23)$$

тогда, из (4), (20), (21), (12) и (22) следуют:

$$\begin{aligned} \Delta^*_{(a)} U(P) &= 0, & P \in B_a; \\ \Delta^*_{(i)} U(P) &= 0, & P \in B_i; \end{aligned}$$

¹ См. ссылку на стр. 7.

$$U_i = U_a, \text{ на } S,$$

$$(T^a U)_i = (T^a U)_a \text{ на } S.$$

Кроме того разность $U(P) - E(P; P_0)$ регулярна и на бесконечности удовлетворяет равномерно по всем направлениям условию излучения, как это очевидно из (2').

Т. о. вектор $U(P)$, принадлежащий классу B и определенный равенствами (23), есть решение задачи I при $\omega = 0$; но тогда, согласно доказанному в гл. I, $U(P)$ является решением системы (1), (2).

Система (1), (2) допускает единственное решение; т. о. если система (1'), (2') имеет решение в классе B , то оно есть единственное решение системы (1), (2), удовлетворяющее условиям задачи I и для построения этого решения следует обратиться непосредственно к системе (1), (2). Этим теорема эквивалентности доказана. Некоторой модификацией приведенных выше рассуждений теорема доказывается и для случая $\omega \neq 0$.

Докажем существование решения для системы (1'), (2'). Решение ищется в виде:

$$u(P) = \sum_{s=0}^{\infty} \tau^s u^{(s)}(P). \quad (24)$$

Подставив формально в (1') и (2') и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях τ , получим при $s=0$

$$\begin{aligned} \mu(P) u^{(0)}(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \iint_{B_i} (\mu_a - \mu_i) u^{(0)} \Gamma_{(a)} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S u_i T^* \Gamma_{(a)} ds_Q + \\ & + \frac{1}{4\pi} (\mu_i - \mu_a) \int_S (u_i^{(0)} - u^{(0)}_a) T^a \Gamma_{(a)} ds_Q + \mu_a E, \end{aligned}$$

где

$$\mu(P) = \begin{cases} \mu_i, & \text{для } P \in B_i; \\ \mu_a, & \text{для } P \in B_a; \end{cases}$$

Очевидно, в этом равенстве предполагается $\tau = 0$; поэтому его можно переписать еще в следующем виде¹:

$$\begin{aligned} \mu(P) u^{(0)}(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} (\mu_a - \mu_i) \iint_{B_i} \int u^{(0)}(Q) \Gamma_{(a)}(P, Q) d\tau_Q + \\ & + \frac{1}{4\pi} (\mu_a - \mu_i) \int_S u^{(0)}_a(Q) T^a \Gamma_{(a)} ds_Q + \mu_a E. \end{aligned} \quad (25_0)$$

¹ Из равенства $\tau = 0$ следует, что $T^* = \frac{1}{\mu_a} (\mu_a - \mu_i) T^a$



Продолжая сравнение коэффициентов при степенях τ , будем иметь:
для $s=1$:

$$\begin{aligned} \mu(P) u^{(1)}(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} (\mu_a - \mu_i) \iiint_{B_i} u^{(1)}(Q) \Gamma_{(a)}(P, Q) d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S u_i^{(1)} T^* \Gamma_{(a)} ds_Q + \\ & + \frac{\mu_i - \mu_a}{4\pi} \int_S (u_i^{(1)} - u_a^{(1)}) T^a \Gamma_{(a)} ds_Q + F^{(1)}(P; P_0) \end{aligned} \quad (25_1)$$

где при $P \in B_i$:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(P; P_0) = & -\frac{\mu_a \omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u^{(0)} \Gamma_{(a)}^{(n)} d\tau_Q - \frac{\mu_a}{4\pi} \iiint_{B_a} u^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q - \\ & - \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S u_i^{(0)} T^* \Gamma_{(a)}^{(n)} ds_Q - \frac{1}{4\pi} (\mu_i - \mu_a) \iiint_S (u_i^{(0)} - u_a^{(0)}) T^a \Gamma_{(a)}^{(n)} ds_Q + \\ & + F(P; P_0) - E(P; P_0), \end{aligned} \quad (26'_1)$$

а при $P \in B_a$

$$\begin{aligned} F^{(1)}(P; P_0) = & -\frac{\mu_a \omega^2}{4\pi} \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\lambda_a + 2\mu_a} \iiint_{B_i} u^{(0)} \Gamma_{(a)}^{(n)} d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\lambda_a + 2\mu_a} \iiint_{B_i} u^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q; \end{aligned} \quad (26''_2)$$

и далее,
для $s=m$:

$$\begin{aligned} \mu(P) u^{(m)}(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} (\mu_a - \mu_i) \iiint_{B_i} u^{(m)} \Gamma_{(a)} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S u_i^{(m)} T^* \Gamma_{(a)} d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_i - \mu_a}{4\pi} \int_S (u_i^{(m)} - u_a^{(m)}) T^a \Gamma_{(a)} ds_Q + F^{(m)}(P; P_0), \end{aligned} \quad (25_m)$$

где, при $P \in B_i$

$$\begin{aligned} F^{(m)}(P; P_0) = & -\frac{\mu_a \omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u^{(m-1)} \Gamma_{(a)}^{(n)} d\tau_Q - \frac{\mu_a}{4\pi} \iiint_{B_a} u^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q - \\ & - \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S u_i^{(m-1)} T^* \Gamma_{(a)}^{(n)} ds_Q - \frac{1}{4\pi} (\mu_i - \mu_a) \iiint_S (u_i^{(m-1)} - u_a^{(m-1)}) T^a \Gamma_{(a)}^{(n)} ds_Q \end{aligned} \quad (27'_m)$$

и для $P \in B_a$

$$\begin{aligned} F^{(m)}(P; P_0) = & -\frac{\mu_a \omega^2}{4\pi} \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\lambda_a + 2\mu_a} \iiint_{B_i} u^{(m-1)} \Gamma_{(a)}^{(n)} d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\lambda_a + 2\mu_a} \iiint_{B_i} u^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q \end{aligned} \quad (27''_m)$$

Вернемся к системе (25₀) и покажем, что при $E=0$ она может иметь лишь тривиальное решение.

Пусть $P \in B_i$; имеем из (25₀):

$$\mu_i(\Delta^*_{(a)}u^{(0)} + \omega^2 u^{(0)}) = -\omega^2(\mu_a - \mu_i)u^{(0)}$$

и в силу $\tau = \lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i = 0$, откуда

$$\Delta^*_{(i)}u^{(0)} + \omega^2 u^{(0)} = 0. \quad (28_1)$$

Пусть, далее, $P \in B_a$; тогда из (25₀):

$$\Delta^*_{(a)}u^{(0)} + \omega^2 u^{(0)} = 0. \quad (28_2)$$

Составим разность $\mu_i u^{(0)}_i - \mu_a u^{(0)}_a$; будем иметь

$$\mu_i u^{(0)}_i - \mu_a u^{(0)}_a = -(\mu_a - \mu_i)u^{(0)}_a$$

т. е.

$$u^{(0)}_i = u^{(0)}_a. \quad (28_3)$$

Наконец в силу свойств объемного потенциала и потенциала двойного слоя имеем:

$$\mu_i(T^a u^{(0)})_i = \mu_a(T^a u^{(0)})_a.$$

Но, пользуясь равенством $\tau = 0$, легко показать, что

$$\mu_i(T^a u^{(0)})_i = \mu_a(T^i u^{(0)})_i$$

и следовательно,

$$(T^i u^{(0)})_i = (T^a u^{(0)})_a. \quad (28_4)$$

Кроме того из (25₀) при $P \in B_a$ видно, что $u^{(0)}(P)$ регулярен и удовлетворяет на бесконечности условию излучения; из этого и из равенств (28₁)...(28₄) следует, что $u^{(0)}$ есть решение однородной задачи I при $\tau = 0$, т. е. при гипотезе Коши; откуда, в силу теоремы единственности, вытекает, что при $E = 0$, имеем:

$$u^0 \equiv 0.$$

С другой стороны система сингулярных уравнений (25₀) есть система типа Жиро и можно показать, что к ней применима теория Фредгольма¹. Из предыдущего вытекает, что однородные системы (25₁)...(25_m), для достаточно малых $|\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i|$ допускают только тривиальные решения, и следовательно, соответствующие неоднородные системы разрешимы.

На оценках упомянутых решений, из которых следует равномерная сходимость ряда (24) и на ограничениях, накладываемых на поверхность

¹ G. Giraud. Equations á intégrales principales. Etude suivie d'une application Ann. Ec. N. Sup. 51, 1934. (251—372).

См. также: К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957. (89—93). В работах Жиро рассматривается лишь одно уравнение, но в моей работе, которая печатается в журн. Успехи Мат. Наук. (Москва, 1960) показано, что теория Жиро полностью переносится на системы сингулярных уравнений, интересующего нас вида.



S и другие данные задачи, при которых может быть обеспечена принадлежность суммы ряда (24) классу B , здесь не останавливаемся, имея в виду их рассмотрение при более подробном изложении настоящей работы в другом месте.

III. Теоремы существования и устойчивости

1. Если коэффициенты Пуассона для сред B_i и B_a равны, т. е.

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \mu_a},$$

или

$$\lambda_i \mu_a - \mu_i \lambda_a = 0, \quad (1)$$

то уравнения (20), (25) главы 1 упрощаются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu(P) u_k(P) = & \frac{1}{4\pi} \omega^2 (\mu_a - \mu_i) \iint_{B_i} u(Q) \Gamma^k(P, Q) d\tau_Q + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S u_i T^* \Gamma^k(P, Q) ds_Q + \mu_a E_k(P; P_0), \quad k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu_i, \quad P \in B_i$$

$$\mu(P) = \frac{1}{2} (\mu_i + \mu_a), \quad P \in S \quad (3)$$

$$\mu_a, \quad P \in B_a$$

В силу (1)

$$T^* = T^a - T^i = (\mu_a - \mu_i) \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\lambda_a}{\mu_a} \operatorname{div} + [\bar{n} \operatorname{rot}] \right\} = \left(1 - \frac{\mu_i}{\mu_a} \right) T^a;$$

поэтому (2) можно записать еще в следующей форме:

$$\mu(P) u(P) = \frac{1}{4\pi} \omega^2 (\mu_a - \mu_i) \iint_{B_i} u(Q) \Gamma d\tau_Q + \frac{1}{4\pi} (\mu_a - \mu_i) \iint_S u_i(Q) T^a \Gamma ds_Q + \mu_a E. \quad (4)$$

Здесь $\Gamma(P, Q)$ есть матрица

$$\Gamma(P, Q) = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 & \Gamma_1^2 & \Gamma_1^3 \\ \Gamma_2^1 & \Gamma_2^2 & \Gamma_2^3 \\ \Gamma_3^1 & \Gamma_3^2 & \Gamma_3^3 \end{pmatrix}$$

и произведение вектора на матрицу и обратно определяются обычно, как произведение „однострочной“ матрицы на матрицу и матрицы на „одноколонную“ матрицу.

Покажем, что если это уравнение имеет решение, оно будет удовлетворять всем условиям задачи I, сформулированным в I¹.

¹ Это очевидно следует из результатов гл. II; но в рассматриваемом здесь частном случае получается непосредственно и при более слабых предположениях относительно граничных значений вектора u .

Пусть $P \in B_i$; выполняем операцию $\Delta^*_a + \omega^2$ над обеими частями (4), тогда по известным свойствам объемного потенциала и потенциала двойного слоя, а также в силу того, что

$$(\Delta^*_a + \omega^2)E = 0,$$

будем иметь:

$$\mu_i(\Delta^*_a + \omega^2)u = -\omega^2(\mu_a - \mu_i)u,$$

откуда, в силу (1);

$$(\Delta^*_i + \omega^2)u = 0 \quad (5)$$

это совпадает с первым из условий задачи I.

Пусть теперь $P \in B_a$; выполняя ту же операцию над (4), получаем

$$(\Delta^*_a + \omega^2)u = 0. \quad (6)$$

Это совпадает со вторым из условий задачи I.

Рассмотрим разность

$$\mu_i u_i - \mu_a u_a.$$

Из свойств потенциалов объемного и двойного слоя следует, что эта разность равна

$$\mu_i u_i - \mu_a u_a = -(\mu_a - \mu_i)u_i,$$

т. е.

$$u_i = u_a. \quad (7)$$

Рассмотрим разность

$$\mu_i (T^a u)_i - \mu_a (T^a u)_a$$

из других известных свойств T^a — операции от потенциалов простого и двойного слоя следует, что эта разность равна нулю; но, в силу (1):

$$\mu_i (T^a u)_i = \mu_i \mu_a \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_i + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \bar{n} (\operatorname{div} u)_i + [\bar{n} \operatorname{rot} u]_i \right\} = \mu_a (T^i u)_i \quad (x)$$

и следовательно, заменив в предыдущей разности $\mu_i (T^a u)_i$ на $\mu_a (T^i u)_i$, получим

$$(T^i u)_i = (T^a u)_a, \quad (8)$$

(7) и (8) совпадают с условием третьим задачи I.

Остальные два условия задачи I выполняются решением (4)-го, очевидным образом в силу свойств матрицы $\Gamma(P, Q)$.

Отсюда, в силу теоремы единственности для задачи I, имеет место следующая

Теорема: Однородное уравнение, соответствующее уравнению (4) допускает только тривиальное решение.

2. Докажем теорему существования решения для уравнения (4).

Пусть

$$\Phi(P) = \frac{\mu_a}{\mu_i} E + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_a}{\mu_i} - 1 \right) \iint_S u_i(Q) T^a \Gamma ds_Q; \quad (9)$$

уравнению (4) для $P \in B_i$ можно придать следующий вид:

$$u(P) - \lambda_1 \omega^2 \iint_{B_i} u(Q) \Gamma(P, Q) d\tau_Q = \Phi(P), \quad (10)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_i} \right).$$

Допустим, сначала, что задача I, при условии (1), имеет решение и следовательно уравнение (4) или (10) разрешимо; рассматривая (10) как уравнение 2-го рода с „правой частью“ $\Phi(P)$, можно это решение представить с помощью первой теоремы Фредгольма, если только будет показано, что существует соответствующая резольвента; для того, чтобы показать это, достаточно доказать, что уравнение:

$$v(P) - \lambda_1 \omega^2 \iint_{B_i} v(Q) \Gamma(P, Q) d\tau_Q = 0 \quad (11)$$

имеет лишь нулевое решение; допустим противоположное и продолжим это решение в B_a с помощью (11)-го; полученный т. о. вектор, определенный во всем пространстве, назовем $v(P)$; тем же путем, как это было сделано выше, можно показать, что:

$$\Delta_i^* v + \omega^2 v = 0, \quad P \in B_i$$

$$\Delta_a^* v + \omega^2 v = 0, \quad P \in B_a$$

$$v_i = v_a, \quad P \in S$$

$$\mu_a(T^i v)_i = \mu_i(T^a v)_a, \quad P \in S;$$

наконец на бесконечности, регулярный в B_a , вектор $v(P)$ удовлетворяет условию излучения; из теоремы единственности следует, что

$$v(P) \equiv 0.$$

Применяя к (10) первую теорему Фредгольма, можем написать:

$$u(P) = \Phi(P) + \lambda_1 \iint_{B_i} \Phi(Q) R(Q, P) d\tau_Q, \quad (12)$$

где $R(P, Q)$ резольвента ядра $-\lambda_1 \Gamma(P, Q)$.

Подставив в (12) значение $\Phi(P)$ из (9), после простых преобразований получим:

$$u(P) + \lambda_1 \iint_S u(Q) T^a \Gamma(P, Q) ds_Q + \lambda_2 \iint_S u(Q) K(P, Q) ds_Q = F(P), \quad (13)$$

где $P \in B_i$ и

$$\lambda_1 = \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_i} \right), \quad \lambda_2 = -\frac{\omega^2}{16\pi^2} \left(\frac{\mu_a}{\mu_i} - 1 \right)^2,$$

$$K(P, Q) = \iiint_{B_i} T^a \Gamma(Q', Q) R(P, Q') d\tau_{Q'};$$

0610350-20
202201010333

$$F(P) = \frac{\mu_a}{\mu_i} E + \frac{\omega}{4\pi} \frac{\mu_a}{\mu_i} \left(\frac{\mu_a}{\mu_i} - 1 \right) \iiint_{B_i} E(Q; P_0) R(P, Q) d\tau_Q.$$

При $B_i \ni P \rightarrow Q_0 \in S$ получаем из (13):

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_a}{\mu_i} \right) u(Q_0) + \lambda_1 \iint_S u T^a \Gamma ds_Q + \lambda_2 \iint_S u K(Q_0, Q) ds_Q = F(Q_0). \quad (14)$$

Уравнение (14) есть система сингулярных уравнений, для которой имеют место три основные теоремы Фредгольма¹.

До сих пор предполагалось, что задача I имеет решение при условии (1); это предположение и привело нас к уравнению (14); теперь отбросим это допущение и будем отправляться от уравнения (14), в котором все „заданные элементы“ построены фактически.

Пусть однородное уравнение, соответствующее (14) имеет отличное от нуля решение $u_0(Q_0)$; рассмотрим вектор

$$v(P) = -\lambda_1 \iint_S u_0 T^a \Gamma ds_Q - \lambda_2 \iint_S u_0 K(P, Q) ds_Q; \quad P \in B_i$$

отсюда

$$v_i(Q_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_i} \right) u_0(Q_0) - \lambda_1 \iint_S u_0 T^a \Gamma(Q_0, Q) ds_Q - \\ - \lambda_2 \iint_S u_0 K(Q_0, Q) ds_Q = u_0(Q_0);$$

определим в B_i вектор $u_0(P)$ равенством

$$u_0(P) = v(P), \quad P \in B_i,$$

т. е.

$$u_0(P) + \lambda_1 \iint_S u_0(Q) T^a \Gamma(P, Q) ds_Q + \lambda_2 \iint_S u_0(Q) K(P, Q) ds_Q = 0, \quad (15)$$

Но, это есть однородное уравнение, получающееся из (13) при $E \equiv 0$, или что то же, однородное уравнение, соответствующее уравнению (4); поэтому, согласно с теоремой единственности

$$u_0(P) \equiv 0,$$

и разрешимость уравнения (14) доказана. Обозначим это решение через $u_*(Q_0)$ и построим вектор

¹ См. ссылки на стр. 17.



$$v_*(P) = -\lambda_1 \int_S u_*(Q) T^a \Gamma(P, Q) ds_Q - \lambda_2 \int_S u_*(Q) K(P, Q) ds_Q + E(P) \quad (16)$$

очевидно, при $B_i \ni P \rightarrow Q_0 \in S$:

$$(v_*(P))_i = u_*(Q_0).$$

Определим в B_i вектор $u_*(P)$ из равенства

$$u_*(P) = v_*(P), \quad (17)$$

т. е.

$$u_*(P) + \lambda_1 \int_S u_*(Q) T^a \Gamma(P, Q) ds_Q + \lambda_2 \int_S u_*(Q) K(P, Q) ds_Q = F(P).$$

Но это есть уравнение (13), или что то же — уравнение (4), а $u_*(P)$, определенное (17) и (16) в котором $u_*(Q_0)$ находится из (14), есть его решение.

При условиях, обеспечивающих принадлежность $u_*(P)$ классу B , он представляет решение задачи I при условий (1). В виду того, что коэффициенты Пуассона для различных упругих тел мало разнятся друг от друга, допущение (1) не представляет значительного ограничения общности и установленный выше результат имеет важное самостоятельное значение, как приближенное решение задачи I, практически пригодное почти всегда.

Но, этот результат имеет принципиальное значение; опираясь на него можно исследовать общий случай. К этому мы сейчас и переходим.

3. Решение уравнений (20), (25) гл. 1 ищем в виде ряда:

$$u(P) = \sum_{s=0}^{\infty} \sigma^s u^{(s)}(P) \quad (18)$$

здесь

$$\sigma = \sigma_a - \sigma_i = \frac{1}{2} \frac{\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)(\lambda_a + \mu_a)}. \quad (19)$$

Предположим сначала, что ряд (18) сходится равномерно; неизвестные векторы $u^{(s)}(P)$, $s=0, 1, 2, \dots$ определим, внося (18) в уравнения (20), (25) главы 1 и приравнявая коэффициенты равных степеней σ ; при этом получаем:

$$\mu(P) u^0(P) = \frac{1}{4\pi} (\mu_a - \mu_i) \omega^2 \iint_{B_i} u^0 \Gamma d\tau_Q + \frac{1}{4\pi} \mu_a \iint_S u^0 T^* \Gamma ds_Q + \mu_a E \quad (20^0)$$

$$\mu(P) u^{(1)}(P) = \frac{1}{4\pi} (\mu_a - \mu_i) \omega^2 \iint_{B_i} u^{(1)} \Gamma d\tau_Q + \frac{1}{4\pi} \mu_a \iint_S u^{(1)} T^* \Gamma ds_Q + F^{(1)}(P; P_0) \quad (20_1)$$

.....

$$\begin{aligned} \mu(P) u^{(m)}(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \mu_a - \mu_i \iint_{B_i} u^{(m)} \Gamma d\tau_Q + \\ & + \frac{1}{4\pi} \mu_a \iint_S u^{(m)} T^* \Gamma ds_Q + F^{(m)}(P; P_0), \end{aligned} \quad (20_m)$$

где для $P \in B_i$

$$\begin{aligned} F^{(m)}(P; P_0) = & -\frac{\kappa_1}{4\pi} \left\{ \omega^2 \iint_{B_i} u^{(m-1)} \Gamma d\tau_Q + \iiint_{B_a} u^{(m-1)} \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\tau_Q + \right. \\ & \left. + \iint_S u^{(m-1)} T^* \Gamma^{(n)} ds_Q \right\} \quad m=2, 3, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

а для $P \in B_a$

$$F^{(m)}(P; P_0) = \frac{\kappa_2}{4\pi} \iint_{B_i} u^{(m-1)} \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{e^{ik_1 r}}{r} d\tau_Q, \quad (22)$$

$$\kappa_1 = \frac{2(\lambda_i + \mu_i)(\lambda_a + \mu_a)}{\lambda_i + 2\mu_i}, \quad \kappa_2 = \frac{2(\lambda_i + \mu_i)(\lambda_a + \mu_a)}{\lambda_a + 2\mu_a}, \quad (23)$$

и $\operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{e^{ik_1 r}}{r}$ есть матрица:

$$\operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{e^{ik_1 r}}{r} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} \end{vmatrix} \frac{e^{ik_1 r}}{r}. \quad (24)$$

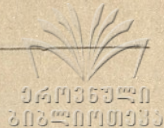
Значение $F^{(1)}(P; P_0)$, незначительно отличающееся от общего выражения (21), также легко составляется.

Уравнения (20₀) и остальные, внешне схожие, отличаются тем, что как нетрудно видеть, в уравнений (20₀)

$$\lambda_a \mu_i - \lambda_i \mu_a = 0,$$

в то время, как в других уравнениях—это условие не соблюдается.

Уравнение (20₀) подробно исследовано выше; его решение определяет правую часть уравнения (20₁); решение этого последнего определяет правую часть уравнения (20₂) и т. д.; т. о., реализация процесса решения возможна лишь в том случае, если однородное уравнение, общее для всех уравнений (20₁)... (20_m)... и имеющее вид



$$\begin{aligned} \mu(P)v(P) - \frac{1}{4\pi}(\mu_a - \mu_i)\omega^2 \iint_{B_i} v(Q) \Gamma(P, Q) d\tau_Q - \\ - \frac{1}{4\pi} \mu_a \iint_S v(Q) T^* \Gamma(P, Q) ds_Q = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

допускает только тривиальное решение. Так как, при

$$\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i = 0,$$

это действительно имеет место, отличное от нуля решение не может существовать для значений $\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i$ близких к нулю. Это следует из того, что уравнение (25) есть система сингулярных уравнений, для которой имеют место теоремы и альтернатива Фредгольма¹.

Равномерная сходимость ряда (18), при достаточно малых σ , получается из обычных оценок для решений ур-ий (20₀)...(20_m).

Мы предполагаем, что искомое решение относится классу B . Доказательство этого свойства требует наложения дополнительных ограничений на поверхность S и на вектор E ; эти ограничения аналогичны тем, которые вводятся в теорий гармонических потенциалов для того чтобы формула Грина была применима к функциям, представленным в виде потенциалов простого или двойного слоя; понятию правильной нормальной производной, введенной с этой целью, здесь соответствует понятие правильной T -операции. Наконец, из теоремы существования вытекает теорема о непрерывной зависимости решения от краевых значений и от самой границы, как следствие известных свойств решений уравнений Фредгольма и эквивалентных им сингулярных уравнений.

IV. Краевые задачи для ограниченных кусочно-неоднородных тел.

В главах I, II, III была исследована задача I, поставленная в гл. 1. Здесь излагается исследование других задач, сформулированных там-же.

Рассмотрим упругое тело с упругими постоянными λ_a, μ_a , ограниченное замкнутой поверхностью S_a ; пусть некоторую часть тела, целиком лежащую внутри, составляет упругое включение B_i , с упругими постоянными λ_i, μ_i , ограниченное замкнутой поверхностью S .

Будем рассматривать на S_a граничные условия двух типов: 1) заданы смещения или 2) заданы напряжения; соответствующие задачи назовем задачами II₁ и II₂.

¹ См. ссылки на стр. 17.

Для решения этих задач необходимо вспомнить некоторые свойства тензоров Грина краевых задач теории упругости.

Обозначим: область между S и S_a через B'_a , область ограниченную поверхностью S_a и равную $B_i + B'_a$ — через B , область дополняющую B до полного пространства — через B_a .

Назовем тензором Грина первым и вторым, области B для задач колебания, такую девятиэлементную квадратную матрицу $G(P_0; P)$ — функцию двух точек P_0 и P , которая удовлетворяет:

а) в B по точке P уравнению:

$$\Delta^*_{(a)} G + \omega^2 G = 0, \quad (1)$$

б) на S_a , первый, условию

$$\lim_{B \ni P \rightarrow Q \in S_a} G(P_0; P) = 0, \quad (2)$$

второй, условию

$$\lim_{B \ni P \rightarrow Q \in S_a} T P G(P_0; P) = 0, \quad (3)$$

в) допускает в B представление:

$$G(P_0; P) = \Gamma_{(a)}(P_0; P) - v(P_0; P),$$

где $v(P_0; P)$ регулярное в B решение уравнения (1).

Допустим, такие тензоры существуют и пусть $u(P)$ есть регулярное в B решение уравнения (1). Применяя формулу Бетти можем написать:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} \Gamma_{(a)}(P_0; Q) (T^a u)_i ds_Q - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} u_i(Q) T^a_Q \Gamma_{(a)}(P; Q) ds_Q,$$

$$0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} v_i(P_0; Q) (T^a u)_i ds_Q - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} u_i(Q) T^a_Q v(P_0; Q) ds_Q,$$

$$\text{и} \quad u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} G(P_0; Q) (T^a u)_i ds_Q - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} u_i(Q) T^a_Q G(P_0; Q) ds_Q. \quad (4)$$

Отсюда видно, что решение первой краевой задачи (на S_a заданы u_i), если оно существует, представляется интегралом

$$u(P_0) = - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} u_i(Q) T^a_Q G_1(P_0; Q) ds_Q, \quad (5)$$

где $G_1(P_0; P)$ — первый тензор Грина, а решение второй краевой задачи (на S_a заданы $(T^a u)_i$), если существует, представляется интегралом:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} G_{11}(P_0; Q) (T^a u)_i ds_Q, \quad (6)$$

где $G_{11}(P_0; P)$ — второй тензор Грина.



Можно доказать обратные предложения: интеграл (5) есть решение первой задачи; интеграл (6) есть решение второй задачи.

Очевидно для того, чтобы это было так, достаточно иметь теоремы существования решения первой и второй задачи; такие теоремы действительно имеют место, если ω отлично от характеристических значений; это условие мы будем предполагать выполненным.

Докажем существование первого и второго тензора Грина области B для задач колебания.

Из (2)-го имеем:

$$\lim_{B \ni P \rightarrow Q_0 \in S_a} v_I(P_0; P) = \Gamma_{(a)}(P_0; Q_0), \quad (2')$$

а из (3):

$$\lim_{B \ni P \rightarrow Q_0 \in S_a} TP v_{II}(P_0; P) = T_{Q_0} \Gamma_{(a)}(P_0; Q_0). \quad (3')$$

Представим v_I и v_{II} в виде потенциалов:

$$v_I(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} \varphi(P_0; Q) T_Q \Gamma_{(a)}(Q; P) ds_Q, \quad (7)$$

$$v_{II}(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} \Gamma_{(a)}(Q; P) \psi(P_0; Q) ds_Q, \quad (8)$$

где φ и ψ неизвестные векторы; тогда граничные условия (2) и (3), в силу известных свойств потенциалов двойного и простого слоя, приводят к интегральным уравнениям:

$$-\varphi(P_0; Q_0) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} \varphi(P_0; Q) T_Q^a \Gamma_{(a)}(Q; Q_0) ds_Q = \Gamma_{(a)}(P_0; Q_0), \quad (9)$$

$$\psi(P_0; Q_0) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} T_{Q_0} \Gamma_{(a)}(Q; Q_0) \psi(P_0; Q) ds_Q = T_{Q_0} \Gamma_{(a)}(P_0; Q_0). \quad (10)$$

Эти уравнения, хотя и не являются обычными уравнениями Фредгольма, но, управляются теоремами Фредгольма¹. Если бы однородные уравнения, соответствующие уравнениям (9) и (10) имели отличные от нуля решения $\varphi_0(P_0; Q_0)$ и $\psi_0(P_0; Q_0)$, то составив потенциалы

$$W(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} \varphi_0(P_0; Q) T_Q \Gamma_{(a)}(Q; P) ds_Q,$$

$$V(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} \Gamma_{(a)}(Q; P) \psi_0(P_0; Q) ds_Q,$$

¹ См. ссылки на стр. 17.

и учитывая, что по условию ω отлично от характеристических значений (соответствующей задачи), имели бы

$$W(P_0; P)=0, \quad V(P_0; P)=0, \quad P \in B; \quad (11)$$

отсюда, по известным свойствам потенциалов

$$\lim (T^a W(P_0; P)) = \lim (T^a W(P_0; P))$$

$$B \ni P \rightarrow Q_0 \in S_a \quad B_a \ni P \rightarrow Q_0 \in S_a$$

$$\lim V(P_0; P) = \lim V(P_0; P)$$

$$B \ni P \rightarrow Q \in S_a \quad B_a \ni P \rightarrow Q_0 \in S_a$$

Т. е., с другой стороны $W(P_0; P)$ и $V(P_0; P)$ являются интегралами уравнения (1) и удовлетворяют на бесконечности условиям излучения, то

$$W(P_0; P)=0, \quad V(P_0; P)=0; \quad P \in B_a; \quad (12)$$

и из (11) и (12) вытекают:

$$\varphi_0(P_0; Q_0)=0, \quad \psi_0(P_0; Q_0)=0, \quad Q_0 \in S_a;$$

это противоречие доказывает разрешимость уравнений (9) и (10), и следовательно, существование $v_I(P_0; P)$ и $v_{II}(P_0; P)$, которые даются потенциалами (7) и (8), а вместе с ними и существование тензоров $G_I(P_0; P)$ и $G_{II}(P_0; P)$.

Рассмотрим вопрос о построении тензоров Грина для первой и второй задачи статики; т. е. $\omega=0$ не есть характеристическое число для первой задачи колебания

$$\Delta_{(a)}^* u + \omega^2 u = 0$$

$$u_i = f(Q_0), \quad Q_0 \in S_a,$$

то, полагая в выражении для $G_I(P_0; P)$, $\omega=0$, получаем $\overset{\circ}{G}_I(P_0; P)$ — первый статический тензор Грина; он имеет вид:

$$\overset{\circ}{G}_I(P_0, P) = \overset{\circ}{\Gamma}_{(a)}(P_0; P) - \overset{\circ}{v}_I(P_0; P), \quad (13)$$

где

$$\overset{\circ}{v}_I(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} \overset{\circ}{\varphi}(P_0; Q) T_Q \overset{\circ}{\Gamma}_{(a)}(Q; P) ds_Q,$$

$\overset{\circ}{\varphi}(P_0; Q_0)$ находится из уравнения (9), в котором $\Gamma_{(a)}$ должно быть заменено на $\overset{\circ}{\Gamma}_{(a)}$. Решение первой краевой задачи статики выражается интегралом

$$u(P_0) = - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} u_i(Q) T^a_Q \overset{\circ}{G}_I(P_0; Q) ds_Q. \quad (14)$$

Для второй краевой задачи:

$$\Delta_{(a)}^* u + \omega^2 u = 0,$$

$$(T^a u)_i = f(Q_0), \quad Q_0 \in S_a;$$

наоборот, значение $\omega = 0$, есть характеристическое число, т. к. для этого значения ω , однородная задача имеет отличное от нуля решение, которое, как известно, выражает движение тела, как целого. Поэтому, второй статический тензор Грина нельзя получить из G_{11} прямой подстановкой $\omega = 0$, ибо при этом теряет смысл условие (3), которое обращается в противоречивое равенство:

$$(TP \Gamma_{(a)}(P_0; P))_i = (TP v(P_0; P))_i^1, \\ P \rightarrow Q_0 \in S_a \quad P \rightarrow Q_0 \in S_a$$

Заменив условие (3) новым:

$$\lim TP \overset{\circ}{G}_{11}(P_0; P) = C, \\ B \ni P \rightarrow Q_0 \in S_a \quad (15)$$

где C — некоторая постоянная матрица, будем иметь:

$$(TP \overset{\circ}{\Gamma}_{(a)}(P_0; P))_i = C + (TP \overset{\circ}{v}_{11}(P_0; P))_i, \\ P \rightarrow Q_0 \in S_a, \quad P \rightarrow Q_0 \in S_a \quad (16)$$

откуда, нетрудно найти, что

$$C_{ik} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{\sigma}, & i=k; \\ 0, & i \neq k; \end{cases}$$

где через C_{ik} обозначен ik -тый элемент матрицы C , а через σ — площадь поверхности S_a .

Разыскивая $\overset{\circ}{v}_{11}(P_0; P)$ в виде потенциала простого слоя

$$\overset{\circ}{v}_{11}(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} \overset{\circ}{\Gamma}(Q; P) \overset{\circ}{\psi}(F_0; Q) ds_Q,$$

в силу краевого условия (16), будем иметь интегральное уравнение для $\overset{\circ}{\psi}(P_0; Q_0)$:

$$\overset{\circ}{\psi}(P_0; Q_0) + \frac{1}{2\pi} \iint_S T_{Q_0} \overset{\circ}{\Gamma}_{(a)}(Q; Q_0) \overset{\circ}{\psi}(P_0; Q) ds_Q = T_{Q_0} \overset{\circ}{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q_0) - C; \quad (17)$$

Из выбора матрицы C , следует разрешимость уравнения (17) и существование

$$\overset{\circ}{G}_{11}(P_0; P) = \overset{\circ}{\Gamma}_{(a)}(P_0; P) - \overset{\circ}{v}_{11}(P_0; P), \quad (18)$$

второго статического тензора Грина; формула (4) показывает, что решение второй статической краевой задачи выражается интегралом:

¹ Противоречивость этого равенства состоит в том, что интеграл по S_a от левой части отличен от нуля, в то время как, тот же интеграл от правой — равен нулю; это легко следует из формул Бетти и Гаусса.

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} \hat{G}(P_0; Q) (T^a u)_i ds_Q - \frac{C}{4\pi} \iint_{S_a} u_i(Q) ds_Q \quad (19)$$

и определено здесь с точностью до постоянного аддитивного слагаемого. В том случае когда S_a есть бесконечная плоскость, можно для статических тензоров Грина получить более простые выражения.

В этом случае $\hat{v}_I(P_0; P)$ и $\hat{v}_{II}(P_0; P)$ следует искать в виде потенциалов:

$$\hat{v}_I(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(P_0; Q) N_Q \hat{\Gamma}_0(Q; P) ds_Q,$$

$$\hat{v}_{II}(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Gamma}_{III}(Q; P) \hat{\psi}(P_0; Q) ds_Q,$$

где N —есть оператор псевдо-напряжения, а $\hat{\Gamma}_{III}(P_0; P)$ элементарное решение третьего рода¹.

Тогда, по известным свойствам соответствующих потенциалов, находим, что:

$$\hat{v}_I(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q) N_Q \hat{\Gamma}_{(a)}(Q; P) ds_Q,$$

и

$$\hat{v}_{II}(P_0; P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Gamma}_{III}(Q; P) \{T_Q \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q)\} ds_Q$$

и

$$\hat{G}_I(P_0; P) = \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; P) - \hat{v}_I(P_0; P) \quad (20)$$

$$\hat{G}_{II}(P_0; P) = \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; P) - \hat{v}_{II}(P_0; P), \quad (21)$$

где $\hat{v}_I(P_0; P)$ и $\hat{v}_{II}(P_0; P)$ предыдущие интегралы.

Непосредственно проверяя, находим по свойствам указанных потенциалов:

$$\lim_{B \in P \rightarrow Q_0 \in S_a} \hat{G}_I(P_0; P) = \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q_0) - \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q_0) = 0$$

$$\lim \hat{G}_{II}(P_0; P) = T_{Q_0} \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q_0) - T_{Q_0} \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q_0) = 0,$$

и это естественно, ибо теперь $C = -\frac{4\pi}{\sigma} = 0$

2. Переходим к исследованию задач II и III.

¹ См. В. Купрадзе. Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний (Усп. Мат. Наук, Т VII, вып. 3, 1953).



Задача II₁: Колебание неоднородного ограниченного тела под влиянием заданных на границе смещений. Интегральное уравнение этой задачи, аналогичное уравнению (20) и (25), гл. 1, получается тем же путем, но теперь с учетом формулы (5), имеет следующий вид:

для $P \in B_i$:

$$\begin{aligned} \mu_i u(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \iint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) G_I - \mu_a \tau G_I^{(n)}] d\tau_Q - \\ & - \frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iiint_{B_a} u(Q) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i(Q) T^* G_I^* ds_Q - \\ & - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f(Q) T^a G_I^* ds_Q \dots \end{aligned} \quad (22)$$

для $P \in B_a$:

$$\begin{aligned} \mu_a u(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \iint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) G_I + \frac{\mu_a \tau^*}{\omega^2} \text{grad} \text{div} G_I] d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i(Q) T^* G_I(P, Q) ds_Q - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f(Q) T^a G_I ds_Q \end{aligned} \quad (20a)$$

Здесь: $G_I(P_0; P)$ есть первый тензор колебания, построенный выше:

$$\begin{aligned} G_I &= \Gamma_{(a)} - v_I(P_0; P); \\ G_I^* &= G_I - \tau G_I^{(n)}, \\ G_I^{(n)} &= \Gamma_{(a)}^{(n)} - v_I^{(n)}, \\ v_I^{(n)} &= -\frac{1}{k_1^2} \text{grad} \text{div} v_I \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tau^* = \frac{-1}{\mu_a} (\lambda_a \mu_r - \lambda_i \mu_a)$$

$$\lim_{P \rightarrow Q_0} u(P) = f(Q_0), \quad Q_0 \in S_a, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_a + 2\mu_a};$$

Решение этого уравнения, которое строится аналогично решению уравнения (20), (25), гл. 1. удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \Delta_{(i)}^* u + \omega^2 u &= 0, & P \in B_i; \\ \Delta_{(a)}^* u + \omega^2 u &= 0, & P \in B_a; \\ \left. \begin{aligned} u_i &= u_a \\ (T^a u)_i &= (T^a u)_a \end{aligned} \right\} & \text{на } S \dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$u_i(Q_0) = f(Q_0), \quad Q_0 \in S_a \dots \quad (25)$$

Кроме того, оно удовлетворяет на бесконечности условию излучения; это свойство и первые (24) равенства доказываются аналогично тому, как это было сделано для задачи I; чтобы проверить условие (25), устремляем в уравнений (22_a) точку P к точке $Q_0 \in S_a$; тогда, в силу свойства (2) первого тензора Грина, интегралы по S и по B обращаются в нуль, а интеграл по S_a , в силу формулы (5), дает

$$u_i(Q_0) = f(Q_0).$$

Очевидно, предполагается, что ω не есть характеристическое число первой задачи для области B .

Задача II₂: Колебание неоднородного ограниченного тела под влиянием заданных усилий на границе. Имея в виду формулу (6), и поступая также, как в случае задачи I, найдем что решение этой задачи удовлетворяет уравнению:

для $P \in B$:

$$\begin{aligned} \mu_i u(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \iint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) G_{ii} \mu_a \tau G^{(n)}_{ii}] d\tau_Q - \frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iint_{B_a} u(Q) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i T^* G^*_{ii} ds_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f G^*_{ii} ds_Q \end{aligned} \quad (26_i)$$

для $P \in B_a$:

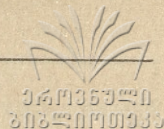
$$\begin{aligned} \mu_a u(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \iint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) G_{ii} + \frac{\mu_a \tau^*}{\omega^2} \text{grad div} G_{ii}] d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i(Q) T^* G_{ii} ds_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f(Q) G_{ii}(P, Q) ds_Q. \end{aligned} \quad (26_a)$$

Здесь $G_{ii}(P_0; P)$ есть второй тензор колебания Грина, построенный выше:

$$\begin{aligned} G_{ii} &= \Gamma_{(a)} - v_{ii}, \\ G^{(n)}_{ii} &= \Gamma^{(n)}_{(a)} - v^{(n)}_{ii} \\ G^*_{ii} &= G_{ii} - \tau G^{(n)}_{ii} \\ v^{(n)}_{ii} &= -\frac{1}{k_1^2} \text{grad div} v_{ii} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T^a u)_i &= f(Q_0) \\ B'_a \ni P &\rightarrow Q_0 \in S_a \end{aligned}$$

Решение уравнения (26_i), (26_a) строится также, как во всех предыдущих случаях и удовлетворяет всем условиям задачи II₂; в частности, граничное условие



$$(T^a u(P))_i = f(Q_0), \\ B'_a \ni P \rightarrow Q_0 \in S_a$$

вытекает из свойства (3) второго тензора Грина и из формулы (6); предполагается, что ω не есть характеристическое число второй задачи в области B .

Задача Π_1^0 : Статическое равновесие неоднородного ограниченного тела под влиянием заданных смещений точек границы.

Как указывалось выше значение $\omega=0$ не есть характеристическое число для первой граничной задачи колебания; поэтому уравнения, соответствующие задаче Π_1^0 , получаются из уравнений задачи Π_1 непосредственно подстановкой $\omega=0$ и имеют вид:

для $P \in B_i$:

$$\mu_a u(P) = -\frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iiint_{B_a} u(Q) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i T^* \overset{\circ}{G}^*_{\text{I}} ds_Q - \\ - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f(Q) T^a \overset{\circ}{C}^*_{\text{I}} ds_Q \dots \quad (27_i)$$

для $B \in P_a$:

$$\mu_a u(P) = \frac{\mu_a \tau^*}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) \text{grad div} \overset{\circ}{G}_{\text{I}} d\tau_Q + \\ + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i(Q) T^* \overset{\circ}{G}_{\text{I}} ds_Q - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f(Q) T^a \overset{\circ}{G}_{\text{I}} ds_Q \quad (27_a)$$

Смысл обозначений ясен из (23).

Задача Π_2^0 . Статическое равновесие однородного ограниченного тела под влиянием заданных усилий на границе. Т. к. $\omega=0$, как отмечалось выше, есть характеристическое число для второй граничной задачи колебания, уравнения соответствующие задаче Π_2^0 не могут быть получены прямой подстановкой $\omega=0$ из (26_i), (26_a), а должны быть построены самостоятельно, с помощью второго статического тензора Грина, задаваемого равенством (18); поступая также, как при решении задачи I, получим уравнения:

для $P \in B_i$:

$$\mu_a u(P) = -\frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iiint_{B_a} u(Q) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i T^* \overset{\circ}{G}^*_{\text{II}} ds_Q + \\ + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f(Q) \overset{\circ}{G}^*_{\text{II}} ds_Q \quad (28_i)$$

для $P \in B_a$:

$$\begin{aligned} \mu_a u(P) = & \frac{\mu_a \tau^*}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{G}_{II} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u_i T^* \hat{G}_{II} ds_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_a} f(Q) \hat{G}_{II} ds_Q. \end{aligned} \quad (28a)$$

Здесь \hat{G}_{II} — есть второй статический тензор Грина, определенный равенством (18); смысл других обозначений ясен из предыдущего.

Задача III_1^0 : Статическое равновесие неоднородного полупространства под влиянием заданных смещений точек границы.

Уравнения, разрешающие эту задачу те же, что и уравнения задачи II_1^0 , но мы можем теперь воспользоваться явным выражением первого тензора Грина, который, как показано выше (см. формулу (20), имеет следующий вид:

$$\hat{G}_I(P_0; P) = \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; P) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q) N_Q \hat{\Gamma}_{(a)}(Q; P) ds_Q.$$

Задача III_2^0 : Статическое равновесие неоднородного полупространства под влиянием заданных усилий в точках границы.

Интегральные уравнения этой задачи совпадают с уравнениями задачи II_2^0 ; но, как и в предыдущей задаче, теперь мы имеем возможность пользоваться явным выражением для второго статического тензора Грина; как показывает формула (21), он имеет следующий вид:

$$\hat{G}_{II}(P_0; P) = \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; P) - \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Gamma}_{III}(Q; P) T_Q \hat{\Gamma}_{(a)}(P_0; Q) ds_Q.$$

Некоторые другие задачи. В частных случаях, построенные выше уравнения значительно упрощаются; таковы, например, задачи о неоднородном пространстве, состоящем из двух различных полупространств, о неоднородной слоистой среде с параллельными границами раздела и некоторые другие.

Рассмотрим задачу I в том случае, когда условие на S :

$$u_i = u_a,$$

заменяется условием

$$u_a - u_i = g(Q_0), \quad Q_0 \in S,$$

где $g(Q_0)$ заданный вектор.



Такое условие возникает, например, в следующей задаче: Пусть в упругой среде B_a имеется каверна (пустота, выемка) формы S ; представим себе, что посредством соответствующих приспособлений в каверну вставляется упругое тело B_i той же формы S , но несколько больших размеров (если речь идет о металлической конструкции, каверна заливается, например, расплавленным металлом); для вектора смещений вдоль S будем иметь в обоих случаях условие вида

$$u_a - u_i = g,$$

где g заданная величина.

Легко видеть, что уравнения разрешающие задачу I в этом случае имеют следующий вид:

для $P \in B_i$:

$$\begin{aligned} \mu_i u(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) \Gamma_{(a)} - \mu_a \tau \Gamma_{(a)}^{(n)}] d\tau_Q - \frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iiint_{B_a} u \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S u_i T^* \Gamma_* ds_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S g(Q) T^a \Gamma_* ds_Q + \mu_a F(P; P_0), \end{aligned}$$

для $P \in B_a$:

$$\begin{aligned} \mu_a u(P) = & \frac{\omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) \Gamma_{(a)} - \mu_a \tau_1 \Gamma_{(a)}^{(n)}] d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a \tau_1}{4\pi} \iiint_{B_i} u \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S u_i(Q) T^* \Gamma_{(a)} ds_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S g(Q) T^a \Gamma_{(a)} ds_Q + \mu_a E(P, P_0). \end{aligned}$$

Если, в частности, вставленное тело из того же материала, что и среда B_a , или заполняющая каверну масса та же, что и несущая каверну, то

$$\lambda_i = \lambda_a, \quad \mu_i = \mu_a, \quad \tau = \tau_1 = 0, \quad T^* \equiv 0. \quad F(P; P_0) = E(P; P_0)$$

и решение задачи получается в явном виде:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S g(Q) l^a \Gamma_{(a)}(P; Q) ds_Q + E(P; P_0).$$

Особенно любопытно, что в явном виде получается решения и для других, значительно более сложных задач. В качестве примера рассмотрим следующие задачи: В бесконечном упругом полупространстве имеются n каверн произвольных форм, ограниченных

поверхностями Ляпунова S_k , $k=1, 2, \dots, x$. В каверны вставлены тела из того же материала таким образом, что вдоль S_k соблюдаются граничные условия:

$$u_i - u_a = g_k(Q), \quad k=1, 2, \dots, x,$$

где $g_k(Q)$, $k=1, 2, \dots, x$ заданные векторы; на плоскости же, ограничивающей рассматриваемую область, заданы либо смещения либо напряжения. В первом случае решение дается формулой

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Q) N_Q \Gamma_{(a)}(P_0, Q) dS_Q + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^x \iint_{S_k} g_k(Q) T^{(a)} \Gamma_{(a)}(P_0, Q) dS_Q.$$

а во втором — формулой

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Q) \Gamma_{III}(P_0, Q) dS_Q + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^x \iint_{S_k} g_k(Q) T^{(a)} \Gamma_{(a)}(P_0, Q) dS_Q;$$

где

$$\varphi(Q_0) = f(Q_0) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^x \iint_{S_k} g_k(Q) T^{(a)} \Gamma_{(a)}(Q_0, Q) dS_Q,$$

и N есть оператор псевдо-напряжения, а $\Gamma_{III}(P, Q)$ — элементарное решение третьего рода; $f(Q_0)$ — заданный на граничной плоскости вектор. Проверить это нетрудно, если воспользоваться свойствами потенциалов двойного и антенного слоя (см. ссылку на стр. 29).

Эффективно решаются ряд других интересных задач II и III в случае $\omega=0$, если для обращения соответствующих интегральных выражений привлекаются еще различные преобразования типа Лапласа. Этим задачам я имею в виду посвятить особую работу.

Кафедра дифер. и интегральных уравнений

(Поступило в редакцию XII 1958 г.)

3. პეკაძე

დრეკადობის თეორიის ახალი სასაზღვრო ამოცანები

რ ე ბ ი უ მ ე

დრეკადობის თეორიის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ნაწილს, რომელიც დღემდე არ არის საკმარისად დამუშავებული, წარმოადგენს სასაზღვრო ამოცანების თეორია უზნობრივ არაერთგვაროვანი ტანებისათვის; ეს ამოცანები უკანასკნელ დრომდე მხოლოდ ზოგიერთ კერძო შემთხვევისათვის იყო შეს-



წავლილი სპეციალური მეთოდებით ყოველი ცალკე ამოცანისათვის ჩვენს გადმოცემულია ამ საკითხების კვლევის ერთი ახალი და ზოგადი მეთოდი.

1. ამოცანების ფართე ჯგუფიდან, რომელიც ამ წრეს განეკუთვნება, ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ რამდენიმე ტიპურ მაგალითზე.

ვთქვათ, უსასრულო დრეკად სამგანზომილებიან არეში B_a , რომელიც ღამეს λ_a და μ_a პარამეტრებით ხასიათდება, მოცემულია x შემოსაზღვრული ჩანართი B_i^k , $k=1, 2, \dots, x$, დრეკადი არეების სახით, რომელიც ხასიათდება, სათანადოდ, λ_i^k , μ_i^k პარამეტრებით: ვიგულისხმობთ, რომ ყოველი ჩანართი შემოსაზღვრულია ლიპუნოვის შეკრული ფართეულით S^k , $k=1, 2, \dots, x$ რომლის გასწვრივ B_a —დრეკადი არე მოსაზღვრე არესთან რაიმე. მექანიკურად დაშვებად, შეუღლებაში იმყოფება. ვთქვათ ნებისმიერ წერტილში P_0 , ან სივრცის ნებისმიერ სასრულო ნაწილში, მოქმედებს მოცემული სიმძლავრის მუდმივი სიხშირის ω , დროით პერიოდული რხევის წყარო, რომელიც იწვევს მთელი სისტემის რხევას იმავე სიხშირით; მოსაძებნია ძაბვების ან გადაადგილებათა სათანადო ველები.

ამ ამოცანას, რომელიც ყველა სხვა მონათესავე ამოცანისათვის ძირითად როლს ითამაშებს—გუწოდებთ 1 ამოცანას.

თუ B_a არე თვით არის შემოსაზღვრული S_a ფართეულით, მაშინ გარდა შეუღლების პირობებისა S^k —ფართეულების გასწვრივ, მოცემული გვექნება კიდევ S_a -ზე ჩვეულებრივ სასაზღვრო პირობები, სახელდობრ 1) გადაადგილებანი, ან 2) ძაბვები ან 3) ამათი წრფივი კომბინაცია; ამ შემთხვევაში გვექნება ამოცანები, რომელიც ქვევით აღინიშნება II_1 , II_2 , II_3 -ით.

კერძოდ, თუ S_a —უსასრულო სიბრტყეა და $B_a + \sum_{i=1}^x B_i^k$ —უსასრულო ნახევარი

რი სივრცე, მივიღებთ ამოცანებს, რომელთაც განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვთ გეოფიზიკაში და მათემატიკურ სეისმოლოგიაში; ეს ამოცანები აღნიშნული იქნება III_1 , III_2 , III_3 -ით.

დასასრულ, თუ ვიგულისხმებთ რომ $\omega = 0$, მაშინ ყველა ზევით მოხსენებული რხევის ამოცანა გადაიქცევა სტატიკის ამოცანად და მათი ამოხსნა მიიღება პირველთა ამოხსნებიდან უბრალო ჩასმით $\omega=0$.

რადგან შემთხვევა $x > 1$ არ განსხვავდება არსებითად შემთხვევისაგან $x=1$, გადმოცემის შესამოკლებლად, ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას ერთი ჩანართისა B_i , რომლის ღამეს პარამეტრებია λ_i , μ_i , შემოსაზღვრულია ფართეულით S და რომელიც ხისტად შეუღლებულია S -ის გასწვრივ B_a -სთან,

ვთქვათ წერტილი P_0 , სადაც წყაროა მოთავსებული, ეკუთვნის B_a -ს; იყოს $E(P, P_0)$, $P(x_1, x_2, x_3)$ ნებისმიერი წერტილია, გადაადგილებათა ის ველი, რასაც მოცემული წყარო წარმოქმნიდა, რომ B_a -ს მთელი სივრცე ეჭიროს, ე. ი. რომ ჩანართი B_i —არ არსებობდეს.

ამ პირობებში I ამოცანას ჩვენ შემდეგნაირად დავაყენებთ:

მოინახოს დრეკად გადაადგილებათა ვექტორი $u(P)$, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. როცა $P \in B_i$,

$$\mu_i \Delta u + (\lambda_i + \mu_i) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 u = 0,$$

2. როცა $P \in B_a$:

$$\mu_a \Delta u + (\lambda_a + \mu_a) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 u = 0,$$

3. როცა $P \in S$

$$u_i = u_a, \quad (T^i u)_i = (T^a u)_a,$$

სადაც

$$(T^i u) = 2\mu_i \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda_i \bar{n} \operatorname{div} u + \mu_i [\bar{n} \operatorname{rot} u]$$

$$(T^a u) = 2\mu_a \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda_a \bar{n} \operatorname{div} u + \mu_a [\bar{n} \operatorname{rot} u],$$

არის ძაბვის ვექტორები B_i და B_a არეებში სათანადოდ¹.

4. ვექტორები $u(P) - E(P, P_0)$, რეგულარული ვექტორია,

5. ვექტორი $u(P) - E(P, P_0)$. თანაბრად ყველა მიმართულებით და ასიმპტოტურად აკმაყოფილებს გამოსხივების პირობებს.

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ I ამოცანის ამგვარი დაყენების კორექტულობა; ამ მიზნით ჩვენ დავამტკიცებთ ამოხსნის არსებობას, ერთადერთობას და მდგრადობას.

2. ყოველი ვექტორი $\Gamma^k(P, Q)$, $k=1, 2, 3$, რომელიც ორ P და $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ წერტილზეა დამოკიდებული და რომელსაც მდგენელებად დეკარტეს ღერძებზე აქვს $\Gamma^k_j(P, Q)$, $j=1, 2, 3$, განზღვრული შემდეგნაირად:

$$\Gamma^k_j(P, Q) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} + \frac{1}{b^2} \left(\varepsilon_{kj} - \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{e^{ik_2 r}}{r} - [\zeta_a(k_1; r) - \zeta_b(k_2; r)] \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r}, \quad (1)$$

სადაც

$$a^2 = \lambda_a + 2\mu_a, \quad b^2 = \mu_a, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{b^2}, \quad \varepsilon_{jk} = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad i = \sqrt{-1};$$

$$\zeta_c(k; r) = \frac{1}{c^2} \left[e^{ikr} \left(\frac{r}{ik} + \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{k^2} \right]$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \zeta_1)^2 + (x_2 - \zeta_2)^2 + (x_3 - \zeta_3)^2},$$

არის ამოხსნა განტოლებისა

$$\Delta^*_{(a)} u + \omega^2 u = 0. \quad (2)$$

¹ \bar{n} — ნორმალის ორტა, [...] ვექტორული ნამრავლის ნიშანია.

ეს პირობები გამოხატავენ ხისტ შეუღლებას, ე. ი. გადაადგილებებისა და ძაბვების უწყვეტობას S —საზღვარზე გადასვლის დროს; ქვევით ყველგან ნიშნები i და a , თუ ისინი დასმული არიან ქვევით ცვალებადობიერებთან (სკალართან, ვექტორთან, მატრიცთან და სხვა) აღნიშნავენ ზღვრულ მნიშვნელობას S -ზე სათანადო სიდიდისა შიგნიდან და გარედან.

ყოველი ვექტორი $\Gamma^{k(p)}(P, Q)$, $k=1, 2, 3$, რომლის მდგენელია

$$\Gamma_j^{k(p)}(P, Q) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} - \zeta_a(k_1; r) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r}, \quad (3)$$

არის ამოხსნა განტოლებისა

$$\Delta_{(a)}^* u + \omega^2 u = \text{grad} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}, \quad (4)$$

და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\text{rot } \Gamma^{k(p)}(P, Q) = 0, \quad (5)$$

$$\text{div } \Gamma^{k(p)} = \text{div } \Gamma^k = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{e^{ik_1 r}}{r}, \quad (6)$$

$$k=1, 2, 3;$$

$\Gamma^k(P, Q)$ და $\Gamma^{k(p)}(P, Q)$ ვექტორებიდან შევადგინოთ წრფივი კომბინაცია

$$\Gamma_*^k(P, Q) = \Gamma^k(P, Q) - \tau \Gamma^{k(p)}(P, Q), \quad (7)$$

სადაც τ არის მუდმივი

$$\tau = \frac{\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i}{\mu_a(\lambda_i + 2\mu_i)}, \quad (8)$$

(1), (3), (7)-დან ადვილი დასანახია, რომ $\Gamma_*^k(P, Q)$ ვექტორს აქვს წერტილ-ში $P \equiv Q$ პირველი რიგის პოლუსი.

თუ (1) და (2)-ში დაუშვებთ $\omega=0$, მივიღებთ ვექტორებს

$$\tilde{\Gamma}^k(P, Q) \text{ და } \tilde{\Gamma}^{k(p)}(P, Q), \quad k=1, 2, 3;$$

რომელიც აკმაყოფილებს, სათანადოდ, განტოლებებს:

$$\Delta_{(a)}^* u = 0, \quad (2^0)$$

$$\Delta_{(a)}^* u = \text{grad} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}. \quad (4^0)$$

თუ u და v , B_i —არეში ორი რეგულარული ვექტორია და თუ დადებით ნორმალად გარე-ნორმალაა მიღებული, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ იგი-ვეობას:

$$\iiint_{B_i} (u \Delta^* v - v \Delta^* u) d\tau = \iint_S (u Lv - v Lu) ds, \quad (9)$$

სადაც

$$\Delta^* u = \lambda \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u, \quad (10)$$

$$Lu = (\alpha + \mu) \frac{\partial u}{\partial n} + \bar{n} \beta \text{div } u + \alpha [\bar{n} \text{rot } u] \quad (11)$$

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu. \quad (12)$$

კერძოდ, თუ

$$\alpha = \mu, \quad \beta = \lambda, \quad (13)$$

მაშინ,

$$Lu \equiv Tu = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \bar{n} \lambda \operatorname{div} u + \mu [\bar{n} \operatorname{rot} u] \quad (14)$$

არის ჩვეულებრივი ძაბვის ვექტორი და იგივეობა (9) ამ შემთხვევაში ბეტის ცნობილ ფორმულად იქცევა, რომელიც დრეკადობის თეორიაში თამაშობს იმავე როლს, რასაც გრინის იგივეობა პოტენციალის თეორიაში.

ბეტის ფორმულა არ არის სამართლიანი B_a —არეში, თუ u და v ვექტორებს დამატებით შეზღუდვებს არ დავადებთ; მაგრამ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ u და v გამოსხივების პირობებს აკმაყოფილებს, მაშინ (9) ძალაში რჩება B_a —არეშიც. ბეტის ფორმულაში, მოცულობითი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, ცხადია, Δ^* ოპერატორის ნაცვლად შეიძლება იდგეს ოპერატორი $\Delta_{(i)}^*$ ან $\Delta_{(a)}^*$; მაშინ ორმაგ ინტეგრალების ქვეშ მარჯვენა მხარეში L ოპერატორი შეიცვლება L^i ან L^a ოპერატორით, რაც იმას ნიშნავს, რომ პირველში $\lambda = \lambda_i$, $\mu = \mu_i$, და მეორეში $\lambda = \lambda_a$, $\mu = \mu_a$.

3. დავუშვათ, რომ I ამოცანას ამოხსნა აქვს; აღვნიშნოთ იგი $u(P)$; იყოს $P \in B_i$; გამოვიყენოთ ბეტის ფორმულა $\Delta_{(i)}^*$ ოპერატორით B_i —არეში $u(Q)$ და $\Gamma_{*k}^i(P, Q)$ ვექტორებზე; თუ საგანგებო წერტილს P -ს გამოვრიცხავთ ε რადიუსიან სფეროთი τ_ε , რომლის ფართეულია (τ_ε), მაშინ გვექნება ჩვეულებრივად:

$$\iint_{B_i - \tau_\varepsilon} (u \Delta_{(i)}^* \Gamma_{*k}^i - \Gamma_{*k}^i \Delta_{(i)}^* u) d\tau_Q = \iint_{S + (\tau_\varepsilon)} [u_i T^i \Gamma_{*k}^i - \Gamma_{*k}^i (T^i u)_i] ds_Q \quad (15)$$

$\Delta_{(i)}^*$ -ის განსაზღვრებიდან და (5), (6), (7), (8) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Delta_{(i)}^* \Gamma_{*k}^i = - \frac{\mu_i}{\mu_a} \omega^2 \Gamma_{*k}^i, \quad k = 1, 2, 3; \quad (16)$$

ხოლო წინადაშვებიდან ამოხსნის არსებობის შესახებ:

$$\Delta_{(i)}^* u = - \omega^2 u. \quad (17)$$

ამის გარდა, პირდაპირი გამოთვლით მტკიცდება, რომ:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\tau_\varepsilon} \Gamma_{*k}^i(P, Q) (T^i u)_i ds_Q = 0, \quad (18)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\tau_\varepsilon} u_i(Q) T^i \Gamma_{*k}^i(P, Q) ds_Q = 4\pi \frac{\mu_i}{\mu_a} u_k(P). \quad (19)$$

თუ (15)-ში შევიტანთ (16) და (17) და გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, მაშინ (18) და (19)-ის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \mu_i u_k(P) &= \frac{\omega^2}{4\pi} \iint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) \Gamma_{*k}^i - \mu_a \tau \Gamma_{*k}^i(p)] d\tau_Q - \\ &- \frac{\mu_a}{4\mu} \iint_S [u_i T^i \Gamma_{*k}^i - \Gamma_{*k}^i (T^i u)_i] ds_Q. \end{aligned} \quad (20)$$



ეხლა გამოვიყენოთ ბეტის ფორმულა $\Delta_{(a)}^*$ -ით B_a -არეში და $D = u - E$ ვექტორებზე; D ვექტორი, პირობის თანახმად, რეკულარულია და აკმაყოფილებს გამოსხივების პირობებს; იგივე სამართლიანია Γ^k -სათვის B_a -ში, ამიტომ ბეტის ფორმულა ძალაშია და გვაძლევს (4)-ის საფუძველზე:

$$\tau \iiint_{B_a} D \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\tau_Q + \iint_S (D_a T^a \Gamma_*^k - \Gamma_*^k (T^a D)_a) ds_Q = 0. \quad (21)$$

(20) და (21)-ში ნორმალთა მიმართულება საპირისპიროა; თუ ამას გავითვალისწინებთ და მივიღებთ მხედველობაში გადაადგილებათა და ძაბვების უწყვეტობას S -ის გასწვრივ, მაშინ (20) და (21) ტოლობების შეკრებით, (უკანასკნელი წინასწარ μ_a -ზე გავამრავლოთ) ზოგიერთი გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$u_k(P) = \frac{\omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) [(\mu_a - \mu_i) \Gamma^k - \mu_a \tau \Gamma^{k(p)}] d\tau_Q - \frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iiint_{B_a} u(Q) \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\tau_Q + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u(Q) T^* \Gamma_*^k(P, Q) ds_Q + \mu_a F_k(P; P_0); \quad k=1, 2, 3; \quad (22)$$

სადაც

$$T^* \equiv T^a - T^i,$$

და

$$F_k(P; P_0) = \mu_a \left(1 - \frac{\tau}{3} \right) E_k(P; P_0) + \frac{\mu_a \tau}{4\pi} \iiint E(Q; P_0) \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\tau_Q \quad (24)$$

არის მოცემული ფუნქცია და $P \in B_i$.

აქამდე P იყო B_i არეში; ეხლა ვივლით, რომ იგი B_a არეშია; გამოვიყენოთ ბეტის ფორმულა $\Delta_{(i)}^*$ ოპერატორით B_i არეში $u(Q)$ და $\Gamma^k(P, Q)$ ვექტორებზე; მაშინ იმის გამო, რომ

$$\Delta_{(i)}^* \Gamma^k(P, Q) = -\frac{\mu_i}{\mu_a} \omega^2 \Gamma^k + \tau_1 \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \\ \tau_1 = \frac{\lambda_i \mu_a - \lambda_a \mu_i}{\mu_a (\lambda_a + \gamma \mu_a)}, \quad (25)$$

მივიღებთ:

$$0 = \frac{\omega^2}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) \left[[(\mu_a - \mu_i) \Gamma^k + \frac{\mu_a \tau_1}{\omega^2} \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{e^{ik_1 r}}{r}] d\tau_Q - \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S \{u_i T^i \Gamma^k - \Gamma^k (T^i u)_i\} ds_Q. \quad (26)$$

დასასრულ გამოვიყენოთ ტოლობა (9) $\Delta_{(a)}^*$ ოპერატორით B_a -ში $\Gamma^k(P, Q)$ და $D = u(Q) - E(Q, P_0)$ ვექტორებზე; მივიღებთ:

$$0 = \mu_a D_k(P) + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S \{D_a T^a \Gamma^k - \Gamma^k (T^a D)_a\} ds_Q. \quad (27)$$

გავითვალისწინოთ ნორმალთა საპირისპირო მიმართულებანი (26) და (27)-ში და პირობები საზღვარზე და შევკრიბოთ ეს ტოლობები წევრობრივ; მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \mu_a u_k(P) = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{B_i} u(Q) \left[\omega^2 (\mu_a - \mu_i) \Gamma^* + \mu_a \tau_1 \operatorname{grad} \frac{\partial e^{ikr}}{\partial \xi_k r} \right] d\tau_Q + \\ & + \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_S u(Q) T^* \Gamma^* ds_Q + \mu_a E(P, P_0). \end{aligned} \quad (28)$$

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ I ამოცანას აქვს ამოხსნა ვექტორთა კლასში, რომელთათვისაც გამოიყენება ბეტის ფორმულა, მაშინ ეს ამოხსნა აკმაყოფილებს დამოკიდებულებას (22) როცა $P \in B_i$, და დამოკიდებულებას (28), როცა $P \in B_a$.

ეხლა შევნიშნოთ, რომ

1°. თუ მოინახება ვექტორი $u(P)$, რომელიც აკმაყოფილებს (22)-ს, როცა $P \in B_i$; მაშინ შევიტანთ რა მას (28)-ში ინტეგრალების ნიშნის ქვეშ, მივიღებთ ამოხსნის მნიშვნელობას B_a არეში.

2°. განტოლება (22), იმის გამო, რომ $P \in B_i$, ინტეგრირება კი ხდება არა მარტო $B_i + S$ -ში, არამედ B_a -ში, არ არის ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლება, მაგრამ მისთვის სამართლიანია ამ უკანასკნელისათვის არსებული ძირითადი თეორემები და ამოხსნის ალგორითმი.

3°. თუ განტოლებებს (22), (2^a) აქვს ამოხსნა $u(P)$, მაშინ ვექტორი $u - E$ დააკმაყოფილებს გამოსხივების პირობებს; ეს თვისება პირდაპირ გამომდინარეობს (28)-ის მარჯვენა მხარის სახიდან და იქედან, რომ ყველა ინტეგრალის გული აქ—გამოსხივების პირობებს აკმაყოფილებს.

4°. (ერთადერთობის თეორემა). I ამოცანას, როცა $E \equiv 0$, აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამოხსნა. ამ თეორემის დამტკიცება მიიღება ენერგიის პრინციპიდან, არსებითად სწორედ ისე, როგორც ერთადერთობის თეორემები მტკიცდება გარე—ამოცანებისათვის. არსებობის თეორემის დასამტკიცებლად ნაჩვენებია, რომ:

1) (22), (28) განტოლებებს ამოხსნა ნამდვილად აქვთ, და

2) ამ ამოხსნას გააჩნია I ამოცანის ამოხსნისაგან მოთხოვნილი ყველა თვისება.

არსებობის თეორემის დამტკიცების შემდეგ ამოხსნის მდგრადობა პირდაპირ მიიღება ფრედჰოლმის ტიპის განტოლებათა ამოხსნების უწყვეტი დამოკიდებულებიდან განტოლების მარჯვენა მხარისაგან.

დასასრულ, განხილულია ამოცანები II, III და ზოგიერთი სხვა.

დიფერ. და ინტეგრ. განტოლებების

კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 5, XII, 1958 წ.)

А. Харалзе

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ ТИПАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

За последние годы опубликован ряд работ, посвященных линейному дифференциальному уравнению

$$(1) \quad y^{(n)} + \binom{n}{1} a x y^{(n-1)} + \dots + \binom{n}{p} a^p x^p y^{(n-p)} + \dots + a^n x^n y = 0$$

и его различным обобщениям, хотя первые результаты, касающиеся частных случаев уравнения (1), относятся к значительно раннему периоду¹. Так, например, случаи $n=2, 3, 4$ рассмотрел Т. Крэг [1], впервые встретившийся с уравнением типа (1) при исследовании линейных уравнений с периодическими интегралами. Сравнительно недавно Л. Поли указал [2] способ приведения уравнения (1) (предполагается $a=1$) к уравнению с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет вид $H_n(r)=0$, где $H_n(r)$ многочлен Эрмита степени n^2 . Тот же способ применяет Поли к уравнению более общего вида

$$y^{(n)} + \binom{n}{1} P_1(x) y^{(n-1)} + \binom{n}{2} P_2(x) y^{(n-2)} + \dots + P_n(x) y = 0,$$

где многочлены $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ образуют последовательность Аппеля, т. е. $P'_n(x) \equiv n P_{n-1}(x)$. Несколько иной подход к решению уравнения (1) предложил Л. Годо [3].

В настоящей статье уравнение (1) обобщается в двух различных направлениях. В одном случае, вместо производных вводятся дифференциальные операторы несколько более общего вида; в другом же направлении, левая часть уравнения (1) заменяется дифференциальным оператором, связанным определенным образом с обобщенными биномиальными коэффициентами.

¹ Библиографическую справку см. в работе [3].

² В заметке [6] студент Г. Беришвили применил метод Коши к представлению частного решения уравнения (1) с правой частью.

циентами, ассоциированными с некоторой последовательностью натуральных чисел.

Пусть $k \geq 2$ фиксированное натуральное число. Функция

$$(2) \quad y = \exp \left(\frac{r x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k} \right),$$

где r параметр, независимый от x , удовлетворяет уравнению

$$(3) \quad y' = (r - x) x^{k-2} y$$

или иначе

$$(4) \quad \frac{y'}{x^{k-2}} = (r - x)y.$$

Последующее дифференцирование совместно с равенством (3) даст

$$\left(\frac{y'}{x^{k-2}} \right)' = (r - x)^2 x^{k-2} y - y$$

или

$$(5) \quad \frac{1}{x^{k-2}} \left[\left(\frac{y'}{x^{k-2}} \right)' + y \right] = (r - x)^2 y.$$

Продолжая дифференцирование и применяя каждый раз равенство (3), мы можем представить выражения $(r - x)^m y$ в виде определенных линейных дифференциальных операторов. Непосредственно видно, что, если введем обозначение

$$(6) \quad L_k^{(m)}[y] = (r - x)^m y,$$

то

$$(7) \quad x^{k-2} L_k^{(m+1)}[y] \equiv \frac{d}{dx} L_k^{(m)}[y] + m L_k^{(m-1)}[y].$$

Таким образом, если

$$L_k^{(0)}[y] \equiv y, \quad L_k^{(1)}[y] \equiv \frac{y'}{x^{k-2}},$$

то с помощью рекуррентного соотношения (7), можно последовательно получить операторы высших порядков в раскрытом виде. Так, например,

$$L_k^{(2)}[y] \equiv \frac{1}{x^{k-2}} \left[\left(\frac{y'}{x^{k-2}} \right)' + y \right] = \frac{xy'' - (k-2)y' + x^{k-1}y}{x^{2k-3}},$$

$$L_k^{(3)}[y] \equiv \frac{1}{x^{k-2}} \frac{d}{dx} L_k^{(2)}[y] + \frac{2}{x^{k-2}} L_k^{(1)}[y] \equiv$$

$$\equiv \frac{x^2 y''' - 3(k-2)xy'' + [3x^k + (k-2)(k-3)]y' - (k-2)x^{k-1}y}{x^{3k-4}}.$$

Введем два символических бинома $(x+a)^{(n)}$ и $(L_k+b)^{(n)}$; первый представляет многочлен степени n относительно x , причем, по раскрытии

бинома, степени a^m заменяются коэффициентами a_m , второй же бином скрывается так, что степени L_k^m заменяются операторами $L_k^{(m)}$, а степени b^m , как выше — коэффициентами b_m . Выражение $(L_k + a + x)^{(n)}$ следует рассматривать как символический бином $[(L_k + a) + x]^{(n)}$ или, что все равно, $[L_k + (x + a)]^{(n)}$. Так, например,

$$\begin{aligned}(L_k + a + x)^{(3)} &= (L_k + a)^{(3)} + 3x(L_k + a)^{(2)} + 3x^2(L_k + a)^{(1)} + x^3 L_k^{(0)} = \\ &= L_k^{(3)} + 3(x + a)^{(1)} L_k^{(2)} + 3(x + a)^{(2)} L_k^{(1)} + (x + a)^{(3)} L_k^{(0)} = L_k^{(3)} + \\ &+ 3(x + a_1) L_k^{(2)} + 3(x^2 + 2a_1 x + a_2) L_k^{(1)} + (x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3) L_k^{(0)}\end{aligned}$$

и, следовательно, $(L_k + x + a)^{(3)}$ представляет определенный линейный дифференциальный оператор третьего порядка.

Рассмотрим, теперь, линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n , записанное в символическом виде

$$(8) \quad [(L_k + a) + x]^{(n)} \equiv [L_k + (x + a)]^{(n)} = 0,$$

при этом будем считать, что многочлены $(x + a)^{(m)}$, $m = 0, 1, \dots, n$, составляют данную последовательность Аппеля.

Легко показать, что, если многочлен $(x + a)^{(n)}$ имеет лишь простые корни r_1, r_2, \dots, r_n , то функции $\exp\left(r_i \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k}\right)$ дают фундаментальную систему решений уравнения (8).

В самом деле, так как по определению

$$y = \exp\left(r \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k}\right), \quad y' = (r - x)x^{k-2}y, \quad L_k^{(m)}[y] = (r - x)^m y,$$

то

$$(L_k + a)^{(m)} \equiv (r - x + a)^{(m)} y,$$

а потому

$$\begin{aligned}[(L_k + a) + x]^{(n)} &\equiv [(r - x + a)^{(n)} + \binom{n}{1}(r - x + a)^{(n-1)}x + \dots + (r - x + a)^{(0)}x^n]y \equiv \\ &\equiv [(r - x + a) + x]^{(n)}y \equiv (r - x + a + x)^{(n)}y \equiv (r + a)^{(n)}y.\end{aligned}$$

Итак, если в левой части уравнения (8) положим

$$y = \exp\left(r \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k}\right),$$

то в результате получим

$$(r + a)^{(n)}y = 0,$$

откуда следует, что значения числового параметра r должны быть корнями многочлена $(x + a)^{(n)}$. Так как полученные n функций

$$\exp\left(r_i \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k}\right)$$



линейно независимы, то этим самым высказанное выше предложение 46 базируется.

Нетрудно видеть, что в том случае, когда оператор $(L_k + a)^{(m)}$ представляет производную $y^{(m)}$ порядка m , уравнение (8) получает вид (1), ибо тогда, по раскрытии символического бинома, будем иметь

$$y^{(m)} + \binom{n}{1} x y^{(n-1)} + \dots + x^n y = 0.$$

С другой стороны, легко проверить, что, если $k=2$ и $(x+a)^{(m)}$ есть многочлен Эрмита $H_m(x)$, то $(L_2 + a)^{(m)}$ как раз даст производную $y^{(m)}$. Действительно, в этом случае имеем

$$y = \exp \left(r x - \frac{x^2}{2} \right),$$

а потому для производной порядка m получим

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= \left[r^m \cdot 1 - \binom{m}{1} r^{m-1} H_1(x) + \right. \\ &+ \left. \binom{m}{2} r^{m-2} H_2(x) - \dots + (-1)^m H_m(x) \right] \exp \left(r x - \frac{x^2}{2} \right) = \\ &= [r - (x + a)]^{(m)} y = [(r - x) + a]^{(m)} y = (L_2 + a)^{(m)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим ближе случай $k=3$, $n=3$, $(x+a)^{(3)} \equiv x^3 - 1$. Имеем

$$(L_3 + a + x)^{(3)} = L_3^{(3)} + 3(x+a)^{(1)} L_3^{(2)} + 3(x+a)^{(2)} L_3^{(1)} + (x+a)^{(3)} L_3^{(0)}.$$

Принимая во внимание, что здесь

$$(x+a)^{(3)} = x^3 - 1, \quad (x+a)^{(2)} = x^2, \quad (x+a)^{(1)} = x,$$

а также

$$L_3^{(0)} = y, \quad L_3^{(1)} = \frac{y'}{x}, \quad L_3^{(2)} = \frac{xy'' - y' + x^2 y}{x^3},$$

$$L_3^{(3)} = \frac{x^2 y''' - 3xy'' + 3(x^3 + 1)y' - x^2 y}{x^5},$$

получим

$$(L_3 + a + x)^{(3)} \equiv \frac{x^2 y''' + 3(x^4 - x)y'' + 3(x^6 + 1)y' + (x^8 + 2x^5 - x^2)y}{x^5}.$$

Таким образом, общее решение уравнения

$$x^2 y''' + 3(x^4 - x)y'' + 3(x^6 + 1)y' + (x^8 + 2x^5 - x^2)y = 0$$

представляется в виде

$$y = \left[C_1 \exp \left(r_1 \frac{x^2}{2} \right) + C_2 \exp \left(r_2 \frac{x^2}{2} \right) + C_3 \exp \left(r_3 \frac{x^2}{2} \right) \right] \exp \left(-\frac{x^3}{3} \right),$$

где r_1, r_2, r_3 — корни уравнения $x^3 - 1 = 0$, другими словами

$$y = \left[c_1 \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x^2\right) + \right. \\ \left. + c_3 \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x^2\right) \right] \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right).$$

Возвращаясь опять к уравнению (8), заметим, что оно допускает дальнейшее обобщение. Именно, рассмотрим уравнение

$$(L_k + b + x + a)^{(n)} = 0,$$

левая часть которого представляет символический бином $[(L_k + a) + (x + b)]^{(n)}$, причем многочлены $(x + a)^{(m)}$, $m = 0, 1, \dots, n$, составляют данную последовательность Аппеля, так же как $(L_k + b)^{(m)}$ представляют линейные дифференциальные операторы, ассоциированные с данной последовательностью числовых коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_m . Легко обнаружить, что уравнение

$$(L_k + b + x + a)^{(n)} = 0$$

также решается в функциях вида $\exp\left(\rho_i \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k}\right)$, где ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) являются корнями алгебраического уравнения

$$[(x + a) + b]^{(n)} = 0$$

или, что все равно, уравнения

$$[(x + b) + a]^{(n)} = 0.$$

Если это уравнение имеет все простые корни, то функции

$$\exp\left(\rho_i \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k}\right)$$

дают фундаментальную систему решений. Это следует из того, что

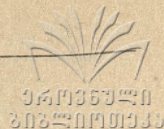
$$(L_k + b + x + a)^{(n)} \equiv (\rho - x + b + x + a)^{(n)} y \equiv (\rho + b + a)^{(n)} y.$$

Перейдем, теперь, к обобщению уравнения (1) в другом направлении. Рассмотрим последовательность линейных дифференциальных операторов

$$D_k^{(0)} \equiv y, \quad D_k^{(1)} \equiv \frac{1}{x^{k-2}} \frac{d}{dx}, \quad D_k^{(2)} \equiv \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{k-2}} \frac{d}{dx},$$

$$D_k^{(3)} \equiv \frac{1}{x^{k-2}} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{k-2}} \frac{d}{dx}, \dots,$$

таких, что оператор четного порядка $D_k^{(2m)}$ представляет результат m -кратной операции $\left(\frac{d}{dx} \frac{1}{x^{k-2}} \frac{d}{dx}\right)$, оператор же нечетного порядка $D_k^{(2m+1)}$ связан с $D_k^{(2m)}$ следующим соотношением



$$D_k^{(2m+1)} \equiv \frac{1}{x^{k-2}} \frac{d}{dx} D_k^{(2m)}$$

Очевидно, при $k=2$, $D_2^{(i)} \equiv y^{(i)}$.

Пусть, как выше, $k \geq 2$ фиксированное натуральное число. Возьмем последовательность чисел вида km и $km+1$ ($m=0, 1, \dots$)

$$(9) \quad 0, 1, k, k+1, 2k, 2k+1, \dots, km, km+1, \dots$$

Для построения обобщенного линейного уравнения, упомянутого выше, нам следует ввести обобщенные биномиальные коэффициенты, ассоциированные с последовательностью (9), а для этого, в свою очередь, введем обобщенные факториалы, ассоциированные с той же последовательностью. Именно, обозначим символом $\{km\}!$ или $\{km+1\}!$ произведение чисел последовательности (9), начиная от единицы и кончая множителем km или $km+1$ соответственно. Введем, далее, обобщенные биномиальные коэффициенты следующим образом: пусть дано натуральное число вида $km+1$; возьмем произведение p чисел ($p \leq 2m+1$) из последовательности (9), начиная от $km+1$ вниз в порядке убывания и разделим его на обобщенный факториал, состоящий из p чисел последовательности (9), начиная от единицы. То же самое можно сделать и для числа вида km , при этом $p \leq 2m$. Легко видеть, что, при $k=2$ получим обыкновенные биномиальные коэффициенты. Следует заметить, что, если эти последние являются целыми числами, то среди обобщенных будут и дробные. Для обобщенных биномиальных коэффициентов введем обозначения $\left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ ks \end{smallmatrix} \right]$ или $\left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ ks+1 \end{smallmatrix} \right]$, $s \leq m$; аналогично, $\left[\begin{smallmatrix} km \\ ks \end{smallmatrix} \right]$, $s \leq m$, или $\left[\begin{smallmatrix} km \\ ks+1 \end{smallmatrix} \right]$, $s < m$. Так, наприм.¹,

$$\left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{(km+1)km}{\{k\}!} = \frac{(km+1)km}{1 \cdot k},$$

$$\left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right] = \frac{(km+1)km[k(m-1)+1]}{\{k+1\}!} = \frac{(km+1)km[k(m-1)+1]}{1 \cdot k \cdot (k+1)},$$

$$\left[\begin{smallmatrix} km \\ 2k+1 \end{smallmatrix} \right] = \frac{km[k(m-1)+1]k(m-1)[k(m-2)+1]k(m-2)}{1 \cdot k \cdot (k+1) \cdot 2k \cdot (2k+1)}.$$

Уравнение (1) обобщается, теперь, естественным образом. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $2m+1$

$$(10) \quad D_x^{(2m+1)}[y] + \left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] x D_k^{(2m)}[y] + \left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k D_k^{(2m-1)}[y] + \\ + \left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right] x^{k+1} D_k^{(2m-2)}[y] + \dots + \left[\begin{smallmatrix} km+1 \\ km \end{smallmatrix} \right] x^{km} D_k^{(1)}[y] + x^{km+1} y = 0.$$

¹ Здесь дроби выписаны в их первоначальном виде, без сокращения.

Здесь числовыми коэффициентами являются обобщенные биномиальные коэффициенты, соответствующие числу $km+1$, а функциональные множители представляют степени независимого переменного x

$$1, x, x^k, x^{k+1}, \dots, x^{km}, x^{km+1}.$$

с показателями из последовательности (9). Ясно, что, при $k=2$, уравнение (10) примет вид (1), в котором $n=2m+1$.

Заметим тут же, что при $k > 2$ и $m=1$, уравнение (10) получит вид

$$(11) \quad D_k^{(3)}[y] + (k+1)x D_k^{(2)}[y] + (k+1)x^k D_k^{(1)}[y] + x^{k+1}y = 0,$$

являющийся уравнением третьего порядка. Если здесь раскрыть символы $D_k^{(i)}[y]$, $i=1, 2, 3$, то уравнение (11) можно переписать так

$$(12) \quad x^2 y''' - [(2k-4)x - (k+1)x^{k+1}]y'' + [(k-1)(k-2) - (k+1)(k-2)x^k + (k+1)x^{2k}]y' + x^{3k-1}y = 0,$$

которое, при $k=2$ даст $y''' + 3xy'' + 3x^2y' + x^3y = 0$ — уравнение типа (1) для случая $n=3$.

Уравнение (10) имеет нечетный порядок, но ясно, что аналогично строится и обобщенное уравнение четного порядка.

Мы здесь подробнее рассмотрим уравнение (11) или, что все равно, (12), а что касается общего случая уравнения нечетного порядка (10), покажем лишь, что частным его решением будет $\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right)$. Начнем, именно, с этого. Нам придется воспользоваться некоторыми свойствами обобщенных эрмитовых многочленов¹, изученных П. Чаттерджи [4] и выражаемых с помощью операторов $D_k^{(2m)}$ и $D_k^{(2m+1)}$ обобщенными формулами типа Родрига следующим образом:

$$(13) \quad \begin{aligned} H_{km}(x) &\equiv \exp\left(\frac{x^k}{k}\right) D_k^{(2m)} \left[\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right) \right], \\ H_{km+1}(x) &\equiv -\exp\left(\frac{x^k}{k}\right) D_k^{(2m+1)} \left[\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right) \right]. \end{aligned}$$

Имеем здесь две последовательности $\{H_{km}(x)\}$ и $\{H_{km+1}(x)\}$, из которых первая состоит из многочленов степеней вида km , причем все члены имеют показатель степени вида kp , а вторая последовательность состоит из многочленов степеней вида $km+1$, в которых все члены имеют показатель вида $kp+1$. Несколько начальных многочленов обеих последовательностей выражаются следующим образом:

¹ Как заметил А. Erdélyi (Math. Reviews, October, 1956, 967), эти многочлены

выражаются через многочлены Лагерра. Так, $H_{km+1} = (-1)^m k^{3m+1} m! L_m\left(\frac{1}{k}\right)(z^k)$.



$$H^0 = 1, \quad H_k = x^k - 1, \quad H_{2k} = x^{2k} - 2(k+1)x^k + (k+1), \\ H_1 = x, \quad H_{k+1} = x^{k+1} - (k+1)x, \quad H_{2k+1} = x^{2k+1} - 2(2k+1)x^{k+1} + (k+1)(2k+1)x.$$

Для многочленов (13) справедливы соотношения

$$(14) \quad H'_{km+1} = (km+1) H_{km}, \quad H'_{km} = km x^{k-2} H_{k(m-1)+1}$$

и, кроме того,

$$(15) \quad H_{km+1}(0) = 0, \quad H_{km}(0) = (-1)^m 1 \cdot (k+1)(2k+1) \dots [k(m-1)+1].$$

Покажем, теперь, что можно подобрать такие постоянные $a_1, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{km}$, чтобы имело место тождество¹

$$(16) \quad H_{km+1} - a_1 x H_{km} + a_k x^k H_{k(m-1)+1} - \\ - a_{k+1} x^{k+1} H_{k(m-1)} + \dots + a_{km} x^{km} H_1 - x^{km+1} H_0 = 0.$$

Приравняем нулю производную левой части, причем при дифференцировании членов суммы, будем объединять слагаемые в пары следующим образом:

$$(H'_{km+1} - a_1 H_{km}) - (a_1 x H'_{km} - a_k k x^{k-1} H_{k(m-1)+1}) + \\ + (a_k x^k H'_{k(m-1)+1} - a_{k+1} (k+1) x^k H_{k(m-1)}) - (a_{k+1} x^{k+1} H'_{k(m-1)} - \\ - a_{2k} 2k x^{2k-1} H_{k(m-2)+1}) + \dots + (a_{km} x^{km} H'_1 - (km+1) x^{km} H_0) = 0.$$

С другой стороны, на основании равенств (14), последнее тождество можно переписать так:

$$(km+1 - a_1) H_{km} - (a_1 km - a_k k) x^{k-1} H_{k(m-1)+1} + \\ + \{a_k [k(m-1)+1] - a_{k+1} (k+1)\} x^k H_{k(m-1)} - [a_{k+1} k(m-1) - \\ - a_{2k} 2k] x^{2k-1} H_{k(m-2)+1} + \dots + [a_{km} - (km+1)] H_0 = 0.$$

Если потребуем выполнение равенств

$$km+1 - a_1 = 0, \quad a_1 km - a_k k = 0, \quad a_k [k(m-1)+1] - a_{k+1} (k+1) = 0, \\ a_{k+1} k(m-1) - a_{2k} 2k = 0, \dots, a_{km} - (km+1) = 0,$$

то этим самым числа a_i будут найдены. Эти условия последовательно дают следующие значения искомых числовых коэффициентов:

$$a_1 = \frac{km+1}{1}, \quad a_k = \frac{(km+1)km}{1 \cdot k}, \quad a_{k+1} = \frac{(km+1)km[k(m-1)+1]}{1 \cdot k \cdot (k+1)}, \\ a_{2k} = \frac{(km+1)km[k(m-1)+1]k(m-1)}{1 \cdot k \cdot (k+1)2k}, \dots, \quad a_{km} = \frac{km+1}{1},$$

¹ Правая часть тождества не может быть постоянной, отличной от нуля, ибо, на основании (15), при $x=0$ левая часть должна быть нулем.

другими словами, мы получим обобщенные биномиальные коэффициенты, ассоциированные с последовательностью (9).

Итак, имеет место тождество

$$(17) \quad H_{km+1} - \begin{bmatrix} km+1 \\ 1 \end{bmatrix} x H_{km} + \begin{bmatrix} km+1 \\ k \end{bmatrix} x^k H_{k(m-1)+1} - \\ - \begin{bmatrix} km+1 \\ k+1 \end{bmatrix} x^{k+1} H_{k(m-1)} + \dots + \begin{bmatrix} km+1 \\ km \end{bmatrix} x^{km} H_1 - x^{km+1} H_0 = 0.$$

Внесем теперь в левую часть дифференциального уравнения (10) вместо y функцию $\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right)$. Принимая во внимание формулы (13), выражающие обобщенные эрмитовы многочлены H_{km} и $H_{k(m+1)}$, в результате подстановки получим произведение функции $\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right)$ и выражения, стоящего в левой части тождества (17). Отсюда и следует, что функция $\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right)$ удовлетворяет уравнению (10), при всяком целом $m \geq 0$.

Заметим, что уравнение четного порядка

$$D_k^{(2m)}[y] + \begin{bmatrix} km \\ 1 \end{bmatrix} x D_k^{(2m-1)}[y] + \dots + x^{km} y = 0$$

также является обобщением (1), но в данном случае $\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right)$ не является его решением.

Перейдем к более подробному рассмотрению уравнения (11) или, что то же, уравнения (12). Так как, согласно вышесказанному, известно одно частное решение $\exp\left(-\frac{x^k}{k}\right)$, то мы придем к уравнению второго порядка обычным способом. Положим, $y = u(rx) \exp\left(-\frac{x^k}{k}\right)$, где r некоторый параметр, независимый от x , значение которого мы подберем впоследствии надлежащим образом. Если внесем это выражение в (12) и вместе с тем введем новую функцию $v = u'$, получим уравнение второго порядка относительно v

$$(18) \quad x^2 v'' - \frac{1}{r} [(2k-4)x - (k-2)x^{k+1}] v' + \frac{1}{r^2} \{ (k-1)(k-2) - \\ - [k(k-2) + 3] x^k - (k-2)x^{2k} \} v = 0.$$

Подберем, теперь, числа a, b, c, d , γ так, чтобы уравнение (18) приняло вид

$$x^2 v'' - [(2a-1)x + 2bcx^{c+1}] v' + [(a^2 - \gamma^2 c^2) + (2a-c)bcx^2 + (b^2 + d^2)c^2 x^{2c}] v = 0,$$

общее решение которого, как известно [5], выражается через гипергеометрические функции

$$v = x^a \exp(bx^c) Z \sqrt{dx^c}.$$

Итак, потребуем выполнение следующих равенств

$$\begin{aligned} 2a-1 &= \frac{2k-4}{r}, & c=k, & & 2bc &= -\frac{k-2}{r}, \\ (2a-c)bc &= \frac{k(k-2)+3}{r^2}, & a^2 - \gamma^2 c^2 &= \frac{(k-1)(k-2)}{r^2}, \\ (b^2+d^2)c^2 &= -\frac{k-2}{r^2}. \end{aligned}$$

Первые четыре условия из этих шести непосредственно дают значения a, b, c, r , выражающиеся через k ; вслед за этим легко находятся γ и d .

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Th. Craig, American Journal of Mathematics, 1885, t. VII, 279—287.
- [2] L. Poli, Polynomes d'Hermite et équations différentielles, Mathesis, 1954, 63, № 9—10, 319—325.
- [3] L. Godeaux, Sur une équation différentielle linéaire, Mathesis, 1955, 64, № 3—5, 81—87.
- [4] Ph. Chatterjee, On a generalisation of Hermite's polynomial, Bull. of the Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 1, 27—41.
- [5] Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1950, стр. 582.
- [6] გ. ბერიშვილი, ზოგიერთი შენიშვნა ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნების შესახებ, სტალინის სახელობის თბილისის სახ. უნივერსიტეტის სტუდენტთა სამეცნიერო შრომების კრებული, 1958, № 8, 1—5.

Кафедра

математического анализа

(Поступило в редакцию 25. XI. 1958)

ბ. სპირაძე

ნაშრომის ავტორიან ლიტერატურის განმარტებით შოთხედითი ქართლ სახელობის შესახებ

(რ ე ზ ი უ მ ე)

განზოგადებული წრფივი დიფერენციალური ოპერატორების გამოყენებით და ერმიტის განზოგადებული პოლინომების საშუალებით მიღებული ზოგიერთი კერძო სახის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამოხსნა.

А. Харадзе

ЗАМЕТКА ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ АНАЛОГИЧНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА

Пусть $k \leq 2$ — фиксированное натуральное число. Составим последовательность целых чисел вида mk и $mk + 1$ ($m=0, 1, 2, \dots$):

$$(A) \quad 0, 1, k, k+1, 2k, 2k+1, \dots$$

Если число n взято из этой последовательности, а $p \leq n$ — произвольное натуральное число, то соответствующим обобщенным биномиальным коэффициентом $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$, ассоциированным с последовательностью (A), назовем дробь, знаменатель которой представляет произведение p множителей, взятых из (A), начиная от единицы, вверх в порядке возрастания, а числитель — произведение p множителей, взятых из той же последовательности (A), начиная от n вниз в порядке убывания¹. Так, например,

$$\begin{bmatrix} 2k+1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{(2k+1)2k(k+1)}{1 \cdot k(k+1)} = 2(2k+1).$$

Обобщенный бином степени n , ассоциированный с последовательностью (A) и обозначаемый в дальнейшем символом $[x+y]^{(n)}$, представляет многочлен степени n (n — число вида mk или $mk+1$) относительно x и y , расположенный по нисходящим степеням одного аргумента и восходящим степеням другого, при том с показателями степеней взятыми из последовательности (A). Что касается числовых множителей при каждом члене этого многочлена, они являются обобщенными биномиальными коэффициентами. Таким образом, по своей алгебраической структуре обобщенный бином вполне аналогичен обычному биному, ассоциированному с последовательностью натуральных чисел. При $k=2$ последовательность (A) представляет натуральный ряд и символы $[x+y]^{(mk)}$, $[x+y]^{(mk+1)}$ в этом

¹ См. [1].

случае выражают обычные биномы $(x+y)^{2m}$, $(x+y)^{2m+1}$ четных и нечетных степеней. Например,

$$[x+y]^{(k)} = x^k + kxy + y^k,$$

$$\begin{aligned} [x+y]^{(2k+1)} &= x^{2k+1} + \frac{2k+1}{1} x^{2k}y + \frac{(2k+1)2k}{1 \cdot k} x^{k+1}y^k + \\ &+ \frac{(2k+1)2k(k+1)}{1 \cdot k(k+1)} x^k y^{k+1} + \frac{(2k+1)2k(k+1)k}{1 \cdot k(k+1)2k} xy^{2k} + \\ &+ \frac{(2k+1)2k(k+1)k \cdot 1}{1 \cdot k(k+1)2k(2k+1)} y^{2k+1} = x^{2k+1} + (2k+1)x^{2k}y + 2(2k+1)x^{k+1}y^k + \\ &+ 2(2k+1)x^k y^{k+1} + (2k+1)xy^{2k} + y^{2k+1}. \end{aligned}$$

Введем символ другого типа $[x-y]^{(n)}$ (n —число вида mk или $mk+1$). Они выражают обобщенные биномы с чередующимися знаками. Так, например,

$$\begin{aligned} [x-y]^{(2k+1)} &= x^{2k+1} - (2k+1)x^{2k}y + 2(2k+1)x^{k+1}y^k - 2(2k+1)x^k y^{k+1} + \\ &+ (2k+1)xy^{2k} - y^{2k+1}. \end{aligned}$$

Следует иметь в виду, что символы $[x+(-y)]^{(n)}$ и $[x-y]^{(n)}$, вообще говоря, не равнозначны, ибо, например, по определению

$$[x-y]^{(k+1)} = x^{k+1} - (k+1)x^k y + (k+1)xy^k - y^{k+1},$$

тогда как

$$[x+(-y)]^{(k+1)} = x^{k+1} + (k+1)x^k(-y) + (k+1)x(-y)^k + (-y)^{k+1},$$

а, следовательно, если k число нечетное, то последний многочлен отличен от $[x-y]^{(k+1)}$.

Назовем обобщенным многочленом Чебышева степени n (n —вида mk или $mk+1$) многочлен $T_{(n)}(x)$, определяемый выражением

$$(1) \quad T_{(n)}(x) = \frac{[x + \sqrt{x^k - 1}]^{(n)} + [x - \sqrt{x^k - 1}]^{(n)}}{2},$$

где в числителе стоит сумма обобщенных биномов, ассоциированных с фиксированной последовательностью (A) . Очевидно, при $k=2$ получим классические многочлены Чебышева. Например,

$$T_{(k+1)}(x) = x^{k+1} + (k+1)x(x^k - 1) = (k+2)x^{k+1} - (k+1)x.$$

Раскрывая обобщенные биномы в равенстве (1), при $n=mk$ получим

$$(2) \quad T_{(mk)}(x) = x^{mk} + \left[\frac{mk}{2} \right] x^{(m-1)k}(x^k - 1) + \left[\frac{mk}{4} \right] x^{(m-2)k}(x^k - 1)^2 + \dots$$

где $\left[\frac{mk}{p} \right]$ обозначают обобщенные биномиальные коэффициенты, ассоциированные с последовательностью (A) .

Если по выражению (2) вычислить производные первых двух порядков $T'_{(mk)}(x)$ и $T''_{(mk)}(x)$, то нетрудно обнаружить, что многочлен $T_{(mk)}(x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$(3) \quad x(1-x^k) T''_{(mk)}(x) - [(k-2) - (k-3)x^k] T'_{(mk)}(x) + mk[(m-1)k+2] x^{k-1} T_{(mk)}(x) = 0.$$

Точно также, при $n = km+1$ легко установить для многочлена $T_{(mk+1)}(x)$ справедливость дифференциального соотношения

$$(4) \quad (1-x^k) T''_{(mk+1)}(x) - x^{k-1} T'_{(mk+1)}(x) + (km+1)^2 x^{k-2} T_{(mk+1)}(x) = 0.$$

Очевидно, при $k=2$ оба уравнения (3) и (4) приводятся к классическому уравнению Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Легко показать, что многочлены степеней вида mk удовлетворяют условию ортогональности в промежутке $[0, 1]$ относительно веса

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(1-x^k)^{k-1}}}.$$

В самом деле, для этого достаточно записать уравнение (3) в виде

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \left(\sqrt[k]{1-x^k} \frac{T'_{mk}(x)}{x^{k-2}} \right) + \frac{mk[(m-1)k+2]}{\sqrt[k]{(1-x^k)^{k-1}}} T_{(mk)}(x) = 0,$$

Заметим, что, так как многочлен $T_{(mk)}(x)$ содержит лишь степени вида x^{rk} , то $\frac{T'_{mk}(x)}{x^{k-2}}$ будет многочленом, содержащим степени вида x^{rk+1} и, следовательно, при $x=0$ этот многочлен обращается в нуль. Таким образом, из (5) будет следовать, что, если $m \neq p$, то

$$(6) \quad \int_0^1 \frac{T_{(mk)}(x) T_{(pk)}(x)}{\sqrt[k]{(1-x^k)^{k-1}}} dx = 0.$$

Точно также, если уравнение (4) записать в виде

$$(7) \quad \frac{d}{dx} \left(\sqrt[k]{1-x^k} T'_{(km+1)}(x) \right) + \frac{(km+1)^2 x^{k-2}}{\sqrt[k]{(1-x^k)^{k-1}}} T_{(km+1)}(x) = 0,$$

то таким же путем обнаружим, что многочлены степеней вида $km+1$ удовлетворяют следующему условию ортогональности

$$\int_0^1 \frac{x^{k-2} T_{(km+1)}(x) T_{(pk+1)}(x)}{\sqrt[k]{(1-x^k)^{k-1}}} dx = 0.$$



Для многочленов степеней вида mk особый интерес представляет случай $k=3$, ибо здесь обнаруживается такая же связь многочленов $T_{(3m)}(x)$ с эллиптическими функциями определенного типа, как у многочленов Чебышева с тригонометрическими функциями. В самом деле, рассмотрим два эллиптических интеграла¹

$$x = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt[3]{(1-t^3)^2}}, \quad x = \int_u^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{(1-t^3)^2}},$$

Обращением этих интегралов получим соответственно две функции $S(x)$ и $C(x)$, удовлетворяющие следующим равенствам

$$(8) \quad S(0)=0, \quad C(0)=1, \quad S^3(x) + C^3(x)=1,$$

$$(9) \quad \frac{dS(x)}{dx} = C^2(x), \quad \frac{dC(x)}{dx} = -S^2(x).$$

Вернемся к соотношению ортогональности (6). При $k=3$ получим

$$\int_0^1 \frac{T_{(3m)}(x) T_{(3p)}(x)}{\sqrt[3]{1-x^3}^2} dx = 0.$$

Если выполним подстановку $x=C(t)$ и примем во внимание равенства (8) и (9), получим

$$\lambda \int_0^1 T_{(3m)}[C(t)] T_{(3p)}[C(t)] dt = 0,$$

где

$$\lambda = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{(1-t^3)^2}}.$$

Подобное же равенство имеет место и для функции $S(t)$.

В заключение заметим, что, если положим $\xi=x^k$ и $y(x)=\eta(\xi)$, то уравнение

$$x(1-x^k)y'' - [(k-2) - (k-3)x^k]y' + n(n-k+2)x^{k-1}y = 0,$$

которому удовлетворяет многочлен $T_{(n)}(x)$ ($n=mk$), приводится к гипергеометрическому виду

$$\xi(\xi-1)\eta'' + \frac{1}{k}(2\xi-1)\eta' - \frac{n(n-k+2)}{k^2}\eta = 0.$$

¹ См. [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. К. Харадзе. О некоторых частных типах линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, Труды Тбилисского гос. унив. им. Сталина, т. 76, 1959.
- [2] Е. Т. Уйттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч II, 1934, стр. 388.

Кафедра
математического анализа

(Поступило в редакцию 15. XI. 1958)

ბ. ხარაძე

შენიშვნა ჩაბიჯების განზოგადებულ მრავალწევრთა შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

განზოგადებული ბინომის გამოყენებით განსახილავი მრავალწევრები გამოისახებიან (1) ტოლობით. თუ $k=2$, ვღებულობთ ჩებიშევის კლასიკურ მრავალწევრებს. თუ $k=3$ და $n=3m$, მიღებულ მრავალწევრთა მიმდევრობა უკავშირდება გარკვეული ტიპის ელიფსურ ფუნქციებს. ეს კავშირი ვლინდება ორთოგონალობის თვისების მეშვეობით.

Э. Цитладзе

О СУЩЕСТВОВАНИИ НОРМИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ У ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе дано приложение одной нашей теоремы (1) к бесконечной системе нелинейных уравнений со счетным множеством неизвестных в гильбертовом полном действительном координатном пространстве l_2 . Упомянутая теорема заключается в следующем:

Если в регулярном банаховом действительном полном пространстве E даны дифференцируемые в смысле Фреше функционалы $f(x)$ и $\varphi(x) = \|x\|$, $x \in E$, $L_f x = \text{grad } f(x) \in \bar{E}$, $N(x) = \text{grad } \varphi(x) \in \bar{E}$, операторы $L_f x$ и Nx удовлетворяют условию Липшица в единичном замкнутом шаре $S_1 \subset E$, Nx имеет в S_1 непрерывный по норме обратный оператор N^{-1} , $f(-x) = f(x)$, $f(x) > 0$ в S_1 , $f(\theta_E) = 0$, где θ_E — нуль элемент пространства E , из $f(x) = 0$ следует $x = \theta_E$, $L_f x$ — вполне непрерывный оператор, $\|L_f \theta_E\| = 0$, при $x \neq \theta_E$ норма $\|L_f x\| > 0$, тогда существует счетное множество геометрически различных нормированных собственных элементов $x_n \in S_1$ таких, что

$$L_f x_n = \lambda_n N x_n, \quad \|x_n\| = 1, \quad (1)$$

где $\lambda_n \neq 0$ — собственное число, соответствующее собственному элементу x_n .

Ниже мы доказываем, что при соответствующем подборе $f(x)$, функциональным аналогом уравнения (1) представляет бесконечная система уравнений с бесконечным числом неизвестных в пространстве l_2 .

Пусть $S_1 \subset l_2$ единичный шар и $x \in S_1$ — его произвольная точка с компонентами $x = (x_1, \dots, x_k, \dots)$. Определим для точек S_1 функционал $f(x)$ следующим равенством:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} a_{\alpha_0} \Psi(x_{\alpha_0}) + \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \alpha_1} \Psi(x_{\alpha_0}, x_{\alpha_1}) + \\
 & + \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \sum_{\alpha_2=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \Psi(x_{\alpha_0}, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) + \dots + \\
 & + \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_k=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} \Psi(x_{\alpha_0}, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}) + \\
 & + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где $\Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)$ — данная неотрицательная в S_1 , определенная на сегменте $-1 \leq x_{\alpha_0}, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots \leq 1$ функция, ограниченная равномерно для всех точек $x \in S_1$, некоторым конечным числом M , $\Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}) = \Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, 0, 0, \dots)$, $\Psi(-x_{\alpha_0}, \dots, -x_{\alpha_n}, \dots) = \Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)$, $\Psi(0, \dots, 0, \dots) = 0$, из $\Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots) = 0$ следует $x = (0, \dots, 0, \dots)$, коэффициенты $a_{\alpha_0}, \dots, a_{\alpha_n}, \dots \geq 0$, $a_{\alpha_0}, \dots, a_{\alpha_n} = a_{\alpha_0}, \dots, a_{\alpha_n}, 0, 0, \dots$. И

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} & < \infty, \\
 \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \right]^2 & < \infty. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Ограниченность функции $\Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)$ и первое из условий (3) обеспечивают сходимость ряда (2) в шаре.

Кроме того, функция Ψ непрерывна по совокупности аргументов $x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots$ и обладает непрерывными частными производными первого порядка на сегменте $(-1, +1)$ и

$$\left| \frac{\partial \Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)}{\partial x_{\alpha_j}} \right| \leq M_1, \quad j=0, 1, \dots, n, \dots \quad (4)$$

для всех $x \in S_1$.

Нетрудно проверить, что условия, накладываемые на функцию $\Psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)$, обеспечивают слабую непрерывность функционала $f(x)$ на множестве S_1 .

Действительно, пусть $\{x^{(k)} = (x_i^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная слабо сходящаяся последовательность из шара S_1 . Слабый предел её обозначим через $x^* = (x_i^*) \in S_1$. Как известно, слабая сходимость в пространстве l_2 последовательности $\{x^{(k)}\}$ к слабому пределу x^* означает сходимость численных последовательностей по координатам: из $x^{(k)} \rightarrow x^*$ вытекает $x_i^{(k)} \rightarrow x_i^*$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Имеем

$$f(x^{(k)}) - f(x^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left[\Psi \left(x_{\alpha_0}^{(k)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(k)} \right) - \Psi(x_{\alpha_0}^*, \dots, x_{\alpha_n}^*) \right] \quad (5)$$

В силу непрерывности Ψ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $k > N$ будем иметь

$$|\Psi(x_{\alpha_0}^{(k)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(k)}) - \Psi(x_{\alpha_0}^*, \dots, x_{\alpha_n}^*)| < \varepsilon$$

и из (4) получим

$$|f(x^{(k)}) - f(x^*)| < \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}.$$

Ввиду произвольности ε и (3), отсюда вытекает слабая непрерывность функционала $f(x)$ в S_1 .

Покажем, что функционал $f(x)$ дифференцируем в сильном смысле в S_1 и найдем его фактически. По определению, если t — численный параметр и $h = (h_1, \dots, h_n, \dots) \in l_2$, то сильный дифференциал $f(x)$ в точке $x \in S_1$ есть $\left. \frac{df(x+th)}{dt} \right|_{t=0}$. Исходя из (2), получим

$$f(x+th) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \Psi(x_{\alpha_0} + th_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n} + th_{\alpha_n}).$$

Откуда

$$\begin{aligned} & \left. \frac{df(x+th)}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_0}} h_{\alpha_0} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_n}} h_{\alpha_n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Легко проверить, что ряд (6), в силу (4), равномерно сходится для всех $x \in S_1$ и произвольного h с конечной нормой. Дифференциал (6) представим еще так



საქართველოს
ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\begin{aligned}
 df(x; h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_0}} h_{\alpha_0} + \dots + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_n}} h_{\alpha_n} = \\
 &= \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} h_{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_0}} + \dots + \\
 &+ \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} h_{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_n}} = \\
 &= \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} h_{\alpha_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_0}} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_n}} \right) \right] = (h, L_f x),
 \end{aligned}$$

где $L_f x$ оператор с компонентами

$$L_f x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_0}} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_n}} \right) \right), \alpha_0 = 1, 2, \dots \quad (7)$$

и отображающий элементы $x \in S_1$ на элементы пространства l_2 , в чем убеждает нас следующая оценка:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_0}} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_n}} \right)^2 \right] \leq \\
 &\leq \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left(\left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_0}} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_n}} \right| \right) \right]^2 \leq \\
 &\leq M_1^2 \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \right]^2 < \infty,
 \end{aligned}$$

получаемая с помощью условий (3) и (4).

Будем в дальнейшем требовать, что частные производные $\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha_j}}$ в S_1 удовлетворяют условию Липшица относительно одного из аргументов x_{α_j} (например относительно x_{α_0}). Если $x^{(1)} = (x_{\alpha_j}^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_{\alpha_j}^{(2)})$, $\alpha_j = 1, 2, \dots$ обозначают две произвольные точки из S_1 , то

$$\left| \frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(1)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(1)})}{\partial x_{\alpha_j}^{(1)}} - \frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(2)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(2)})}{\partial x_{\alpha_j}^{(2)}} \right| \leq \overline{M} |x_{\alpha_0}^{(1)} - x_{\alpha_0}^{(2)}|, \quad (8)$$

где \overline{M} — постоянная, независимая от выбора точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in S_1$. Покажем, что оператор $L_f x$ удовлетворяет условию Липшица в шаре S_1 .

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \|L_f x^{(1)} - L_f x^{(2)}\| &= \left\{ \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left(\frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(1)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(1)})}{\partial x_{\alpha_0}^{(1)}} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + \frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(1)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(2)})}{\partial x_{\alpha_n}^{(1)}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(2)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(2)})}{\partial x_{\alpha_0}^{(2)}} - \dots - \frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(2)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(2)})}{\partial x_{\alpha_n}^{(2)}} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(1)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(1)})}{\partial x_{\alpha_k}^{(1)}} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(2)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(2)})}{\partial x_{\alpha_k}^{(2)}} \right| \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \overline{M} \left\{ \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} |x_{\alpha_0}^{(1)} - x_{\alpha_0}^{(2)}| \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \overline{M} \left\{ \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

т. к. $|x_{\alpha_0}^{(1)} - x_{\alpha_0}^{(2)}| \leq \|x^{(1)} - x^{(2)}\|$. Отсюда

$$\|L_f x^{(1)} - L_f x^{(2)}\| \leq \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \overline{M} \left\{ \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Используя (3) и введя обозначение

$$M_L = \overline{M} \left\{ \sum_{\alpha_0=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

окончательно получим

$$\|L_f x^{(1)} - L_f x^{(2)}\| \leq M_L \|x^{(1)} - x^{(2)}\|. \quad (9)$$



Оператор $L_f x$, порожденный дифференциалом функционала $f(x)$, бо непрерывен в шаре S_1 . Это свойство оператора вытекает из следующего рассуждения. Пусть $\{x^{(k)} = (x_{\alpha_j}^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ обозначает произвольную последовательность элементов шара S_1 , слабо сходящуюся к слабому пределу $x^* = (x_{\alpha_j}^*) \in S_1$. Тогда при любом $j=0, 1, \dots$ будем иметь $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\alpha_j}^{(k)} = x_{\alpha_j}^*$.

Кроме того, для функционала f имеем

$$f(x^{(k)}) - f(x^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \alpha_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} [\psi(x_{\alpha_0}^{(k)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(k)}) - \psi(x_{\alpha_0}^*, \dots, x_{\alpha_n}^*)],$$

и, следовательно, в силу равномерной непрерывности функции ψ , при произвольном $\varepsilon > 0$, существует натуральное N такое, что для всех $k > N$ справедливо неравенство:

$$|f(x^{(k)}) - f(x^*)| < \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \alpha_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}.$$

Так как ε — произвольное число и ряд в правой части этого неравенства сходится, то $f(x)$ слабо непрерывен.

Рассмотрим функционал $\varphi(x) = \|x\|$, $x \in S_1$. Дифференциал в смысле Фреше этого функционала существует в каждой точке $x \neq \Theta$ и равен: $d\varphi(x; h) = \|x\|^{-1}(x, h)$. Оператор $Nx = x$.

Следовательно функционал $f(x)$, определенный равенством (2) и оператор $L_f x$, порожденный его дифференциалом удовлетворяют всем условиям теоремы, приведенной на странице 1. Сформулируем доказанное предложение в виде следующего предложения.

Теорема. Если функционал $f(x)$ определен равенством (2) в единичном шаре $S_1 \subset l_2$, коэффициенты $\alpha_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \geq 0$, $\alpha_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} = \alpha_{\alpha_0, \dots, \alpha_k, 0, 0, \dots}$ и удовлетворяют условиям (3), $\psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)$ — данная неотрицательная, равномерно ограниченная в S_1 функция, определенная на отрезке $-1 \leq x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots \leq 1$, $\psi(-x_{\alpha_0}, \dots, -x_{\alpha_n}, \dots) = \psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)$, $\psi(0, \dots, 0, \dots) = 0$, из $\psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots) = 0$ следует $x = (0, \dots, 0, \dots)$, $\psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}) = \psi(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots)$, ψ непрерывна по совокупности аргументов $x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}, \dots$ обладает частными производными первого порядка, удовлетворяющими условию (4), $L_f x = \text{grad } f(x)$, компоненты которого определяются из (7), то существует счетная последовательность геометрически различных нормированных собственных элементов $x^{(k)} = (x_{\alpha_0}^{(k)})$, $k, \alpha_0 = 1, 2, \dots$ и чисел λ_k , удовлетворяющих функциональному уравнению

$$L_f x^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}, \quad (10)$$

т. е. существует счетная последовательность различных решений $x = x^{(k)} = (x_{\alpha_0}^{(k)})$ бесконечной системы нелинейных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left(\frac{\partial \psi(x_{\alpha_0}^{(k)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(k)})}{\partial x_{\alpha_0}^{(k)}} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{\partial \Psi(x_{\alpha_0}^{(k)}, \dots, x_{\alpha_n}^{(k)})}{\partial x_{\alpha_n}^{(k)}} \right) = \lambda_k x_{\alpha_0}^{(k)}, \quad \alpha_0, k=1, 2, \dots$$

с бесконечным числом неизвестных.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1). Э. С. Цитланадзе, Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения. труды Моск. матем. об-ва, 2 (1953), стр. 235—274.

Кафедра

высшей математики

(Поступило в редакцию 10. X. 1958)

ა. ნითღანაძე

ერთი კლასის უწყვეტობის განვითარებათა სისტემის ნორმირებული ამონის პასუხის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

შრომაში დამტკიცებულია, რომ გარკვეულ პირობებში არსებობს განტოლებათა (10) უსასრულო სისტემის თვლადი მიმდევრობა მაინც ნორმირებული ამონახსნებისა, სადაც $L_f x$, რომლის კომპონენტები განსაზღვრულია (7) ფორმულით, გრადიენტი (2) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციონალისა I_2 სივრცეში.

გამოკვლევაში გამოყენებულია ავტორის შედეგები, რომლებიც გამოქვეყნებულია შრომაში [1].

Д. Е. Долидзе

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОЛЗУЧЕГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

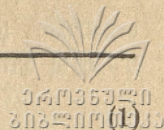
Задачей ползучего нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, создаваемого поступательным перемещением шара в жидкости, или задачей обтекания шара ползучим нестационарным потоком занимались многие авторы; среди них Буссинеск [1], Озеен [2], Лурье [3], Русанов [4].

В настоящей статье мы рассмотрим ползучее течение, создаваемое поступательным перемещением шара, применяя сравнительно простой способ для построения компонентов скорости течения и давления в явном виде. Дадим также оценку предела решения при времени, растущем до бесконечности¹.

Пусть шар, погруженный в вязкую несжимаемую жидкость, перемещается поступательно со скоростью $u^0(t)$, где t —время. Введем сферические координаты r, ϑ, θ . По соображениям симметрии будем рассматривать течение в меридиональной плоскости. Далее, число Рейнольдса будем считать малым и в уравнениях движения жидкости будем пренебрегать нелинейными членами. Обозначая через p давление, а через u, v компоненты скорости абсолютного движения по осям r и ϑ соответственно, из уравнения неразрывности и уравнений Навье-Стокса получим при отсутствии действия массовой силы следующие дифференциальные уравнения:

$$u_r + \frac{2}{r} u + \frac{1}{r} v_{\vartheta} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \vartheta = 0, \quad \left(f_{\vartheta} = \frac{\partial f}{\partial x} \right),$$
$$\nu \left(\Delta u - \frac{2}{r^2} u - \frac{2}{r^2} v_{\vartheta} - \frac{2v}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \right) - u_t = \frac{1}{\rho} p_r, \quad (1)$$

¹ Этому же вопросу, а также вопросу вращения шара посвящена работа [5], в которой некоторые заключения относительно точности уравнения вращения и решения интегральных уравнений ошибочны, на что было обращено мое внимание Б. В. Русановым и А. К. Никитиным.



$$\nu \left(\Delta v + \frac{2}{r^2} u_{\vartheta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - v_t = \frac{1}{\rho} p_{\vartheta},$$

где ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости,

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\vartheta\vartheta} + \frac{f_{\vartheta}}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Рассматривая случай равновесного начального состояния и покоящейся жидкости на бесконечности, будем иметь следующие предельные условия:

$$\begin{aligned} r=a, \quad u=u^0(t) \cos \vartheta, \quad v=-u^0(t) \sin \vartheta; \\ r \rightarrow \infty, \quad u=v=0; \quad t=0, \quad u=v=0, \end{aligned} \quad (2)$$

где a — радиус шара.

Единственность решения задачи (1), (2) вытекает из общей теоремы единственности решения основной граничной задачи нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости [6], если компоненты скорости и их первые производные по координатам затухают на бесконечности как $r^{-(1+\alpha)}$, $\frac{1}{2} \leq \alpha$. Мы будем искать именно такие решения.

Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u = V(r, t) \cos \vartheta, \quad v = - \left(V + \frac{r}{2} V_r \right) \sin \vartheta, \\ p = q(r, t) \cos \vartheta + q^0(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $q^0(t)$ — произвольная функция. Из системы (1) получим для функций V и q

$$\nu \left(V_{rr} + \frac{4}{r} V_r \right) - V_t = \frac{1}{\rho} q_r, \quad (4)$$

$$\nu \left(\frac{r^2}{2} V_{rrr} + 3r V_{rr} + 2V_r \right) - \frac{r^2}{2} V_{rt} - r V_t = \frac{1}{\rho} q,$$

а исключение q из последней системы даст

$$\nu \left(\frac{r^2}{2} V_{rrrr} + 4r V_{rrr} + 4V_{rr} - \frac{4}{r} V_r \right) - \frac{r^2}{2} V_{rrt} - 2r V_{rt} = 0. \quad (5)$$

Согласно предельным условиям (2), будем иметь следующие предельные условия для V :

$$\begin{aligned} r=a, \quad V=u^0(t), \quad V_r=0; \\ r \rightarrow \infty, \quad V=V_r=0; \quad t=0, \quad V=0. \end{aligned} \quad (6)$$

Итак, нам нужно решить уравнение (5) при предельных условиях (6), после чего q определим из второго уравнения системы (4).

Введем новую функцию

$$W(r, t) = rV_r + 3V. \quad (7)$$

Отсюда будем иметь

$$V = \frac{1}{r^3} \int_a^r r^2 W dr + \frac{T(t)}{r^3}, \quad (8)$$

где $T(t)$ — произвольная функция. Если последнее значение подставим в уравнение (5), умножив его предварительно на $2r^2$, после некоторых вычислений получим

$$\nu \left(W_{rr} + \frac{2}{r} W_r \right) - W_t = T_1(t), \quad (9)$$

где $T_1(t)$ — произвольная функция.

Из (8) имеем

$$V_r = \frac{W}{r} - \frac{3}{r^4} \int_a^r r^2 W dr - \frac{3T}{r^4}. \quad (10)$$

На бесконечности $V=0$, поэтому в силу (8) можем принять, что $W=0$ при $r \rightarrow \infty$. Впрочем, это можно утверждать и на основании (3) и (7). В силу этого, можем принять, что $T_1=0$ и

$$\nu \left(W_{rr} + \frac{2}{r} W_r \right) = W_t. \quad (11)$$

Согласно условиям (6) и равенству (7), предельные условия для W запишутся в следующем виде:

$$W(a, t) = 3u^0(t), \quad W(\infty, t) = 0, \quad W(r, 0) = 0. \quad (12)$$

Легко заметить, что уравнение (11) можно переписать в виде

$$\nu \frac{\partial^2 (rW)}{\partial r^2} = \frac{\partial (rW)}{\partial t}, \quad (13)$$

что представляет собой одномерное уравнение теплопроводности для функции rW .

Воспользовавшись фундаментальным решением уравнения (13), а именно, функцией

$$\frac{r-a}{\sqrt{4\nu t}} \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{4\nu t}\right),$$

не трудно проверить непосредственно, что решение задачи (11), (12) представится в виде

$$W(r, t) = \frac{3a}{2r\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{4\nu(t-\tau)}\right) \frac{(r-a)u^0(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}, \quad (14)$$



Подставляя найденное значение W в равенство (8), определим V . Но нам нужно еще удовлетворить предельным условиям (6) для V . Воспользуемся условием

$$r=a, \quad V_r=0.$$

В силу (12), получим из (10)

$$T(t)=a^3 u^0(t),$$

и искомая V , согласно (8), представится в виде¹

$$V(r, t) = \frac{1}{r^3} \left[\int_a^r r^2 W(r, t) dr + a^3 u^0(t) \right]. \quad (15)$$

Выражение (15) удовлетворяет всем условиям задачи при предположении $u^0(0)=0$. На бесконечности V затухает как r^{-3} .

Если найденное значение V подставим во второе уравнение системы (4), то получим значение q , а затем по формулам (3) определим искомые компоненты скорости u, v , а также — давление p . В частности, в силу условий (6), из второго уравнения системы (4) будем иметь при $r=a$

$$\begin{aligned} q(a, t) &= -a\rho \frac{du^0}{dt} + \frac{\mu a^2}{2} V_{rrr} \Big|_{r=a} + 3\mu a V_{rr} \Big|_{r=a} = \\ &= -a\rho \frac{du^0}{dt} + \frac{\mu a}{2} W_{rr} \Big|_{r=a} + \frac{\mu}{2} W_r \Big|_{r=a}, \quad (\mu = \nu\rho). \end{aligned}$$

Вычисляя производные функции W при $r=a$, для чего следует воспользоваться формулой (14), последнее равенство приведем к виду

$$q(a, t) = \frac{a\rho}{2} \frac{du^0}{dt} + \frac{3\mu}{2a} u^0(t) + \frac{3\mu}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{du^0}{d\tau} \frac{d\tau}{t-\tau}. \quad (16)$$

Для вычисления силы сопротивления, действующей на шар, выпишем формулы компонентов напряжения p^{rr} и $p^{r\vartheta}$ в сферических координатах, с учетом того, что проекции относительной скорости жидкости на координатные оси r и ϑ суть

$$u - u^0 \cos \vartheta, \quad v + u^0 \sin \vartheta,$$

будем иметь

$$p^{rr} = -p + 2\mu v_r, \quad p^{r\vartheta} = \mu \left(\frac{1}{r} u_\vartheta + v_r - \frac{v}{r} \right).$$

¹ Формулы (3), (14), (15), дающие решение задачи, по существу, совпадают с формулами, найденными Русановым [4].

Искомая сила сопротивления R представится в следующем виде: ВИД. 1357-20
2022-0710333

$$R = 2\pi a^2 \int_0^\pi (p^{rr} \cos \vartheta - p^{r\vartheta} \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= -\frac{4}{3} \pi a^2 [q(a, t) + \mu W_r(a, t)],$$

или, после подстановки соответствующих значений, получим окончательно

$$R = -\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{du^0}{dt} - 6\pi \mu a u^0(t) - \frac{6\pi \mu a^2}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{du^0}{d\tau} d\tau. \quad (17)$$

Формула (17) была впервые получена Буссинеском [1].

Построенное нами решение удовлетворяет условиям единственности и, как легко проверить, оно удовлетворяет также условию малости нелинейных членов дифференциальных уравнений по сравнению с линейными членами. С другой стороны, как известно, решение линейной стационарной задачи поступательного движения шара в вязкой несжимаемой жидкости при малом значении числа Рейнольдса характеризуется тем недостатком, что на достаточно большом расстоянии от шара инерционные члены не являются пренебрежимо малыми по сравнению с вязкими членами. В связи с этим интересно оценить пределы функций u , v и p при $t \rightarrow \infty$.

Допустим, что предел заданного значения $u^0(t)$ существует при $t \rightarrow \infty$; обозначим этот предел через $u^0(\infty)$. Допустим далее, что $\frac{du^0}{dt}$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Подстановкой $4\nu(t-\tau)\alpha^2 = (r-a)^2$, выражение (14) приведем к виду:

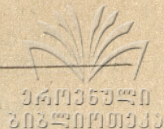
$$W(r, t) = \frac{6a}{r\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r-a}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} u^0 \left[t - \frac{(r-a)^2}{4\nu\alpha^2} \right] \operatorname{erfc}(-\alpha^2) d\alpha,$$

что даст в пределе

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(r, t) = \frac{3a}{r} u^0(\infty). \quad (18)$$

Перейдем теперь к пределу в равенстве (15); в силу (18) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(r, t) = \frac{a u^0(\infty)}{2r} \left(3 - \frac{a^3}{r^3} \right).$$



Согласно последнему равенству, формулы (3) дадут

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} u &= \frac{a u^0(\infty)}{2r} \left(3 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \vartheta, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v &= -\frac{a u^0(\infty)}{4r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \vartheta.\end{aligned}\quad (19)$$

Для вычисления предела давления сперва вычислим предел функции q , для чего можно использовать второе равенство системы (4), откуда получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(r, t) = \frac{3\mu a u^0(\infty)}{2r^2}.$$

На основании последнего равенства, третья формула (3) даст

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p = \frac{3\mu a u^0(\infty)}{2r^2} \cos \vartheta + q^0(\infty). \quad (20)$$

Выражения (19) и (20) совпадают с известным решением задачи Стокса равномерного поступательного движения шара в вязкой несжимаемой жидкости при малом значении числа Рейнольдса.

Кафедра гидроаэромеханики

(Поступило в редакцию 22. XI. 1953)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Boussinesq. Theorie analytique de la chaleur, II, 1903.
2. C. W. Oseen. Neuere Methode und Ergebnisse in der Hydrodynamik, 1927.
3. А. И. Лурье. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики, 1938.
4. Б. В. Русанов. Медленное неустановившееся обтекание шара вязкой жидкостью, ДАН СССР, т. 90, № 1, 1953.
5. Д. Е. Долидзе. Неустановившееся движение вязкой жидкости вокруг шара, Тр. Тбил. матем. инст. им. А. М. Размадзе, т. XVI, 1948.
6. Д. Е. Долидзе. Единственность решения основной граничной задачи нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости, ДАН, т. 96, № 3, 1954.

დ. ღოღიძე

თბილისი
ბიზნეს-სკოლა

ბლანტი სითხის არასტაციონარული მოძრაობის მოძრაობის ერთი ამოცანის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

განხილულია ბლანტი უკუმში სითხეში სფეროს არათანაბარი გადატანითი მოძრაობის ამოცანა რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობის შემთხვევაში. ნავეი—სტოქსის გაწრფივებულ განტოლებათა სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნილია ცხადი სახით, უფრო მარტივი მეთოდით, ვიდრე წინათ იყო ცნობილი. მიღებულია წინააღმდეგობის ძალის ფორმულა.

გამოკვლეულია ამოცანის ამოხსნის ზღვარი დროის უსასრულოდ ზრდის შემთხვევაში და დამტკიცებულია, რომ ამოხსნის ზღვარი ემთხვევა სტოქსის სტაციონარული ამოცანის ამოხსნას.

В. Г. Челидзе

О ТЕОРЕМАХ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО И АБЕЛЯ

В настоящей статье доказываются некоторые теоремы тауберова типа для двойных рядов, которые содержат как частные случаи результаты К. Кноппа [1] и И. Е. Огиевского [2].

Введем сначала следующие определения:

Определение 1. Некоторую двойную последовательность $\{S_{m,n}\}_0^\infty$ мы будем называть квази-ограниченной снизу, если существует целое число $\nu > 0$ такое, что двойная последовательность $\{S_{m,n}\}_{m,n=\nu}^\infty$ ограничена снизу.

Определение 2. Двойную последовательность $\{S_{m,n}\}_0^\infty$ мы будем называть квази-неотрицательной, если существует целое число $\nu > 0$ такое, что $S_{m,n} \geq 0$ при $m, n \geq \nu$.

Рассмотрим теперь двойной числовой ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}. \quad (1)$$

Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$ — данные числа. Ряд (1) называется $C_{\alpha,\beta}$ — суммируемым к числу S , если

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = S,$$

где $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ — чезаровские средние.

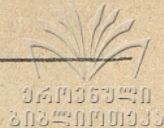
Возьмем теперь какие-нибудь положительные числа γ , δ , λ , удовлетворяющие условиям:

$$\gamma\delta \leq (\alpha + 1)(\beta + 1), \quad \lambda > 1.$$

Ряд (1) мы будем называть $C_{\alpha,\beta}^*$ — суммируемым к числу S , если

$$\lim_{(m,n)_0 \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = S,$$

где символ $(m, n)_0 \rightarrow \infty$ означает, что m и n стремятся к ∞ так что, выполнены условия



$$\frac{1}{\lambda} (n+1)^{\gamma/\alpha+1} \leq m \leq \lambda (n+1)^{\beta+1/\delta}.$$

Ряд (1) называется A -суммируемым к числу S , если степенной ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n \quad (2)$$

сходится при $|x| < 1$, $|y| < 1$ и имеет место равенство

$$\lim_{x,y \rightarrow 1} f(x, y) = S,$$

где

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n. \quad (3)$$

Ряд (1) мы будем называть A^* -суммируемым к числу S , если ряд (2) сходится при $|x| < 1$, $|y| < 1$ и имеет место равенство

$$\lim_{(x,y)_0 \rightarrow 1} f(x, y) = S,$$

где символ $(x, y)_0 \rightarrow 1$ означает, что x и y стремятся к 1 так, чтобы были выполнены условия

$$\frac{1}{\lambda} (1-y)^{\beta+1/\delta} \leq 1-x \leq \lambda (1-y)^{\gamma/\alpha+1}.$$

Теорема 1. Пусть ряд (1) является A -суммируемым к числу S . Если двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}_0^\infty$ квази-неотрицательна и удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \leq m \leq \infty} (A_m^{\alpha+1})^{-1} \left| \sum_{i=0}^m A_i^{\alpha} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} \right| = p_k < \infty \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

$$\sup_{0 \leq n \leq \infty} (A_n^{\beta+1})^{-1} \left| \sum_{k=0}^n A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} \right| = q_i < \infty \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

то ряд (1) будет также $(C, \alpha+1, \beta+1)$ -суммируемым к числу S .

Доказательство. В силу (4) и (5) ряд (2) абсолютно сходится при $|x| < 1$, $|y| < 1$. Поэтому имеет место равенство

$$f(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_m^{\alpha} A_n^{\beta} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n.$$

Положим

$$\varphi_{\nu}(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} x^i y^k, \quad (a)$$

$$\psi_{\nu}(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} x^i y^k, \quad (b)$$

$$f_{\nu}(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \sum_{k=\nu+1}^{\infty} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} x^i y^k, \quad (c)$$

$$\chi_{\nu}(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} x^i y^k, \quad (d)$$

где ν — некоторое целое положительное число. Нетрудно показать, что для любого фиксированного ν ,

$$\lim_{x, y \rightarrow 1} \varphi_{\nu}(x, y) = 0, \quad \lim_{x, y \rightarrow 1} \psi_{\nu}(x, y) = 0. \quad (6)$$

В самом деле, полагая

$$\omega_{m,n} = (A_m^{\alpha+1})^{-1} \sum_{i=0}^m A_i^{\alpha} \sigma_{i,n}^{\alpha,\beta},$$

в силу преобразования Абеля имеем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\alpha} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m = (1-x) \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{m,n} A_m^{\alpha+1} x^m.$$

Далее, принимая во внимание соотношение (4), из последнего равенства получим:

$$0 \leq \sup_{0 \leq x < 1} (1-x)^{\alpha+1} \left| \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\alpha} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m \right| \leq \sup_{0 \leq x < 1} (1-x)^{\alpha+2} \sum_{m=0}^{\infty} |\omega_{m,n}| A_m^{\alpha+1} x^m \leq$$

$$\leq p_n \cdot \sup_{0 \leq x < 1} (1-x)^{\alpha+2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\alpha+1} x^m = p_n < \infty, \quad n=0, 1, 2, \dots$$



На основании полученного неравенства легко заметить справедливость второго равенства (6).

Аналогично доказывается справедливость первого равенства (6).

Затем очевидно, что

$$\lim_{x, y \rightarrow 1} \chi_\nu(x, y) = 0. \quad (7)$$

Следовательно, в силу (6) и (7) получим:

$$\lim_{x, y \rightarrow 1} f_\nu(x, y) = \lim_{x, y \rightarrow 1} f(x, y) = S. \quad (8)$$

Заменив x и y через x^{p+1} и y^{q+1} , получим:

$$\lim_{x, y \rightarrow 1} (1-x^{p+1})^{\alpha+1} (1-y^{q+1})^{\beta+1} \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} (x^{p+1})^m (y^{q+1})^n = S,$$

где p и q — некоторые целые неотрицательные числа.

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} & \lim_{x, y \rightarrow 1} (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} (x^m)^p (y^n)^q x^m y^n = \\ &= \frac{S}{(p+1)^{\alpha+1} (q+1)^{\beta+1}} = \frac{S}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 u^p v^q \left(\ln \frac{1}{u} \right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v} \right)^\beta du dv, \quad (9) \end{aligned}$$

где $\Gamma(\alpha+1)$ — эйлеров интеграл второго рода.

Пусть теперь $Q(u, v)$ — произвольный полином от u и v . Тогда в силу (9) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \lim_{x, y \rightarrow 1} (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} Q(x^m, y^n) x^m y^n = \\ &= \frac{S}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 Q(u, v) \left(\ln \frac{1}{u} \right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v} \right)^\beta du dv. \quad (10) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию $g(u, v)$, определенную следующим образом:

$$g(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{uv}, & \text{если } (u, v) \in [e^{-1}, 1; e^{-1}, 1], \\ 0, & \text{если } (u, v) \in [0, 1; 0, 1] - [e^{-1}, 1; e^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют [3] полиномы $\tilde{p}(u, v)$ и $P(u, v)$ такие, что

$$p(u, v) \leq g(u, v) \leq P(u, v),$$

$$\int_0^1 \int_0^1 [P(u, v) - p(u, v)] \left(\ln \frac{1}{u} \right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v} \right)^\beta du dv < \varepsilon. \quad (12)$$

Далее, так как двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}_0^\infty$ квази-неотрицательна, то существует натуральное число N такое, что

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} \geq 0, \text{ когда } i, k \geq N.$$

Поэтому будем иметь;

$$\begin{aligned} (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} p(x^m, y^n) x^m y^n &\leq \\ &\leq (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} g(x^m, y^n) x^m y^n \leq \\ &\leq (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} P(x^m, y^n) x^m y^n. \end{aligned}$$

Следовательно, принимая во внимание (10) и (11), получим:

$$\begin{aligned} \frac{S}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 p(u, v) \left(\ln \frac{1}{u} \right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v} \right)^\beta du dv &\leq \\ &\leq \lim_{x, y \rightarrow 1} \omega(x, y) \leq \overline{\lim}_{x, y \rightarrow 1} \omega(x, y) \leq \\ &\leq \frac{S}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 P(u, v) \left(\ln \frac{1}{u} \right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v} \right)^\beta du dv, \end{aligned}$$

где

$$\omega(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} g(x^m, y^n) x^m y^n.$$

Поэтому из (11) и (12) вытекает, что

$$\begin{aligned} \left| \overline{\lim}_{x, y \rightarrow 1} \omega(x, y) - \frac{SI}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \right| &< \frac{S\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}, \\ \left| \lim_{x, y \rightarrow 1} \omega(x, y) - \frac{SI}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \right| &< \frac{S\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}, \end{aligned}$$

где

$$I = \int_0^1 \int_0^1 g(u, v) \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha+1} \left(\ln \frac{1}{v} \right)^{\beta+1} du dv = \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)},$$

В силу произвольности ϵ будем иметь:

$$\lim_{x, y \rightarrow 1} \omega(x, y) = \frac{SI}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} = \frac{S}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}. \quad (13)$$

Полагая

$$x = \exp\left(-\frac{1}{m+1}\right), \quad y = \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right), \quad m > N, \quad n > N,$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{\alpha+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{\beta+1} \times \\ &\quad \times \sum_{i=N+1}^{m+1} \sum_{k=N+1}^{n+1} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Но ввиду того, что

$$1 - \exp\left(-\frac{1}{m+1}\right) \simeq \frac{1}{m+1}, \quad 1 - \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) \simeq \frac{1}{n+1},$$

то на основании (13) получаем:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{(m+1)^{\alpha+1}(n+1)^{\beta+1}} \sum_{i=N+1}^{m+1} \sum_{k=N+1}^{n+1} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} = S.$$

Далее, так как

$$A_{m+1}^{\alpha+1} \simeq \frac{(m+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} = S_{i,k}^{\alpha,\beta},$$

то будем иметь:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1})^{-1} \sum_{i=N+1}^{m+1} \sum_{k=N+1}^{n+1} S_{i,k}^{\alpha,\beta} = S.$$

Затем на основании условий (4) и (5) имеем:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1})^{-1} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^n S_{i,k}^{\alpha,\beta} = 0,$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1})^{-1} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^m S_{i,k}^{\alpha,\beta} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1})^{-1} \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{k=0}^{n+1} S_{i,k}^{\alpha,\beta} = S,$$

то есть

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha+1, \beta+1} = S.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть ряд (1) A — суммируем к числу S . Если двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}$ квази-ограничена снизу и удовлетворяет условиям (4) и (5), то ряд (1) будет $C_{\alpha+1, \beta+1}$ — суммируемым к числу S .

Доказательство. Так как двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}_0^\infty$ квази-ограничена снизу, то существует целое число $N \geq 0$ такое, что

$$\sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} \geq -M, \text{ когда } i \geq N, \quad k \geq N,$$

где M — некоторое положительное число. Полагая

$$\psi_{m,n}^{\alpha,\beta} = \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} + M,$$

двойная последовательность $\{\psi_{m,n}^{\alpha,\beta}\}_0^\infty$ квази-неотрицательна и удовлетворяет условиям:

$$0 \leq m < \infty \quad \left| \sum_{i=0}^m A_i^\alpha \psi_{i,k}^{\alpha,\beta} \right| = p'_k < \infty \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$0 \leq n < \infty \quad \left| \sum_{k=0}^n A_k^\beta \psi_{i,k}^{\alpha,\beta} \right| = q'_i < \infty \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Полагая

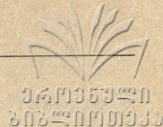
$$\omega_{m,n}^{\alpha,\beta} = (A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1})^{-1} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_i^\alpha A_k^\beta \psi_{m,n}^{\alpha,\beta},$$

$$\varphi(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_m^\alpha A_n^\beta \omega_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n,$$

будем иметь

$$\omega_{m,n}^{\alpha,\beta} = \sigma_{m,n}^{\alpha+1, \beta+1} + M, \quad (14)$$

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + M, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1.$$



Ввиду того, что $\lim_{x, y \rightarrow 1} \varphi(x, y)$ существует и равен $S + M$, то

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \omega_{m, n}^{\alpha, \beta} = S + M.$$

Следовательно, на основании (14) получим:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sigma_{m, n}^{\alpha+1, \beta+1} = S.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Если ряд (1) является $C_{\alpha+1, \beta+1}$ — суммируемым к числу S , и двойная последовательность $\{\sigma_{m, n}^{\alpha, \beta}\}$ удовлетворяет условиям (4) и (5), то ряд (1) будет также A — суммируемым к числу S .

Доказательство. Известно, что

$$\sigma_{m, n}^{\alpha+1, \beta+1} = (A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1})^{-1} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i, k}^{\alpha, \beta}.$$

Принимая во внимание (4), имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sigma_{m, n}^{\alpha+1, \beta+1} \right| &\leq \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \sum_{k=0}^n A_k^{\beta} \left(\frac{1}{A_m^{\alpha+1}} \left| \sum_{i=0}^m A_i^{\alpha} \sigma_{i, k}^{\alpha, \beta} \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \sum_{k=0}^n A_k^{\beta} p_k = p_n^* < \infty \end{aligned}$$

для любого фиксированного n .

Аналогично, в силу (5), получим:

$$\left| \sigma_{m, n}^{\alpha+1, \beta+1} \right| \leq \frac{1}{A_m^{\alpha+1}} \sum_{i=0}^m A_i^{\alpha} q_i = q_m^* < \infty$$

для любого фиксированного m .

Далее ясно, что при $|x| < 1$, $|y| < 1$ справедливы следующие соотношения:

$$(1-x)^{\alpha+2} \left| \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{\alpha+1} \sigma_{i, k}^{\alpha+1, \beta+1} x^i \right| \leq p_k^* < \infty, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

$$(1-y)^{\beta+2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\beta+1} \sigma_{i, k}^{\alpha+1, \beta+1} y^k \right| \leq q_i^* < \infty, \quad i=0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, в силу известной теоремы [4], ряд (1) будем считать суммируемым к числу S .

Объединяя теоремы 2 и 3 получаем теорему:

Теорема 4. Если чезаровские средние $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ ряда (1) удовлетворяют условиям (4) и (5) и, кроме того, двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}_{m,n=0}^{\infty}$ квази-ограничена снизу, то методы суммирования $C_{\alpha+1, \beta+1}$ и A эквивалентны.

Следствие. Если частные суммы ряда (1) удовлетворяют условиям

$$1) \quad 0 \leq m < \infty \quad \sup_{m+1} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{i=0}^m S_{i,k} \right| = p_k < \infty, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

$$2) \quad 0 \leq n < \infty \quad \sup_{n+1} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n S_{i,k} \right| = q_i < \infty, \quad i=0, 1, 2, \dots,$$

3) двойная последовательность $\{S_{m,n}\}$ квази-ограничена снизу, то методы суммирования Чезаро и Абеля эквивалентны.

Лемма 1. Если числовая последовательность $\{S_n\}$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(m+1)^\sigma} \sum_{i=0}^m S_i = 0, \quad (15)$$

где σ — некоторое положительное число, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (1-x)^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} S_i x^i = 0.$$

Доказательство. Принимая во внимание условие (15), легко показать, что ряд

$$\varphi(x) = (1-x)^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} S_i x^i$$

абсолютно сходится при $|x| < 1$. Далее, на основании преобразования Абеля имеем:

$$\varphi(x) = (1-x)^{\sigma+1} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \sigma_i x^i,$$

где

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{(n+1)^{\sigma-1}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\sigma}{A_n^\sigma} = \Gamma(\sigma+1),$$

где $\Gamma(\sigma+1)$ эйлеров интеграл второго рода, то задав положительное число ε можно определить целое число $N > 0$ такое, что

$$|\sigma_n| < \frac{(n+1)^{\sigma-1}}{4\Gamma(\sigma+1)} \varepsilon, \quad (n+1)^\sigma < 2\Gamma(\sigma+1) A_n^\sigma,$$

когда $n > N$.

Далее,

$$\varphi(x) = (1-x)^{\sigma+1} \sum_{i=0}^N (i+1) \sigma_i x^i + (1-x)^{\sigma+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} (i+1) \sigma_i x^i = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi_1(x) = 0.$$

Затем

$$|\varphi_2(x)| \leq (1-x)^{\sigma+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} (i+1) |\sigma_i| x^i <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4\Gamma(\sigma+1)} (1-x)^{\sigma+1} 2\Gamma(\sigma+1) \sum_{i=0}^{\infty} A_n^\sigma x^i = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, существует такое $\eta > 0$, что

$$|\varphi(x)| < \varepsilon, \quad \text{когда } 0 < 1-x < \eta.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть γ, δ, λ — положительные числа такие, что $\gamma\delta \leq (\alpha+1)(\beta+1)$, $\lambda > 1$ и пусть ряд (1) A^* — суммируем к числу S . Если двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}_{0}^{\infty}$ квази-неотрицательна снизу и выполнены условия

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow 1} \left((A_n^{\gamma+\beta+1})^{-1} \sum_{k=0}^n A_k^\beta \sigma_{i,k}^{\alpha,\beta} \right) = 0,$$

для любого фиксированного i ,

$$2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (A_m^{\delta, \alpha+1})^{-1} \sum_{i=0}^m A_i^{\alpha} \sigma_{i,k}^{\alpha, \beta} = 0$$

для любого фиксированного k , то ряд (1) будет также $O_{\alpha+1, \beta+1}^*$ — суммируемым к числу S .

Доказательство. Ряд (4) абсолютно сходится при $|x| < 1$, $|y| < 1$; поэтому

$$f(x, y) = (1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1} \sum_{i,k=0}^{\infty} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha, \beta} x^i y^k,$$

причем ряд в правой части абсолютно сходится.

Допустим теперь, что x и y удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{\lambda} (1-y)^{\beta+1/\delta} \leq 1-x \leq \lambda (1-y)^{\gamma/\alpha+1}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1. \quad (16)$$

Для любого целого числа $\gamma > 0$ имеем:

$$\varphi_{\gamma}(x, y) = \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{(1-y)^{\gamma}} \sum_{i=0}^{\gamma} A_i^{\alpha} x^i \left[(1-y)^{\beta+\gamma+1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha, \beta} y^k \right],$$

где $\varphi_{\gamma}(x, y)$ определено равенством (а).

Принимая во внимание (16), будем иметь:

$$|\varphi_{\gamma}(x, y)| \leq \lambda \sum_{i=0}^{\gamma} A_i^{\alpha} x^i \left| (1-y)^{\beta+\gamma+1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\beta} \sigma_{i,k}^{\alpha, \beta} y^k \right|.$$

Отсюда, на основании условия 1) и леммы 1, имеем:

$$\lim_{(x, y)_0 \rightarrow 1} \varphi_{\gamma}(x, y) = 0. \quad (17)$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{(x, y)_0 \rightarrow 1} \psi_{\gamma}(x, y) = 0. \quad (18)$$

Далее ясно, что

$$\lim_{(x, y)_0 \rightarrow 1} \chi_{\gamma}(x, y) = 0. \quad (19)$$

Так как

$$\lim_{(x, y)_0 \rightarrow 1} f(x, y) = S,$$

то в силу (17), (18) и (19) получим

$$\lim_{(x, y)_0 \rightarrow 1} f_{\gamma}(x, y) = S,$$

где $f_{\gamma}(x, y)$ определяется равенством (с).



Дальнейшее рассуждение такое же, как при доказательстве теоремы 1.

Теорема 6. Если ряд (1) является A^* -суммируемым к числу S и двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}$ квазиограничена снизу и удовлетворяет условиям 1) и 2) предыдущей теоремы, то ряд (1) $C_{\alpha+1, \beta+1}^*$ -суммируем к числу S .

Эта теорема доказывается таким же способом как теорема 2, причем нужно воспользоваться теоремой 5.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. К. Кнорр. Limitierungs — Umkehrsätze für Doppelfolgen. Mathem. Zeitschr., B. 45, 1939.
2. И. Е. Огневский. О сравнимости методов суммирования Абеля и (C, α, β) . Доклады АН. Наук СССР, т. ХСП, № 2, 1953.
3. В. Г. Челидзе. Некоторые вопросы теории двойных рядов. Китай, изд. Уханьского университета, 1958.
4. В. Г. Челидзе. О суммировании кратных рядов. Труды Тбилисского гос. университета им. Сталина, т. 64, 1957.

მათემატიკური ანალიზის კათედრა

(რედაქციაში შემოვიდა 20/XI 58)

3. ჭედიძე

გაუზიარეს გივიონ თაოკაშვილის შესახებ ჩეხაროსა და პეპლის მეთოდებისათვის

რ ე ზ ი უ მ ე

ამ შრომაში დამტკიცებულია ორმაგი მწკრივის შემთხვევაში ტაუბერის ტიპის ზოგიერთი თეორემა, რომლებიც შეიცავს როგორც კერძო შემთხვევას კ. კნოპისა და ი. ე. ოგივეცკის შედეგებს.

3. ზეპირი

პარაბოლური ბიპარაბოლური განვითარების ზოგადი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ

1. განვიხილოთ უმარტივესი პარაბოლური ოპერატორი

$$\delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}$$

და ვუწოდოთ ბიპარაბოლური ოპერატორი გამოსახულებას

$$\delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

დავუშვათ, სიმარტივისათვის, რომ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ორი უწყვეტი და შემოსაზღვრული ფუნქციაა. ცნობილია, რომ (იხ. მაგ. [1], [2]) $u(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრული ფორმულით

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\xi) - y\psi(\xi)] \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right) d\xi, \quad (1)$$

შემოსაზღვრული ფუნქციაა მთელს $0 < x < \infty$ ღერძზე და, როცა $y > 0$, აკმაყოფილებს ბიპარაბოლურ განტოლებას *

$$\delta^2 u(x, y) = 0 \quad (2)$$

და ამასთანავე შემდეგ პირობებს

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \delta u(x, y) = \psi(x). \quad (3)$$

გარდა ამისა, თუ $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს, მაშინ $v(x, y)$ ფუნქცია, განსაზღვრული ფორმულით

$$v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{y+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) (y-\eta) \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi, \quad (4)$$

აკმაყოფილებს არაერთგვაროვან განტოლებას

$$\delta^2 v = f(x, y) \quad (5)$$

* ამ დებულებას ადგილი აქვს უფრო ზოგად პირობებში, იხ. მაგ. [1].

და შემდეგ პირობებს

$$\lim_{y \rightarrow 0} v(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \delta v(x, y) = 0. \quad (6)$$

განვიხილოთ არაწრფივი განტოლება:

$$\delta^2 u(x, y) = f(x, y, u), \quad (7)$$

სადაც $f(x, y, u)$ უწყვეტი და შემოსაზღვრული ფუნქციაა. ჩვენ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $f(x, y, u)$ ფუნქცია x -ის და u -ს მიმართ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას:

$$|f(x_2, y, u_2) - f(x_1, y, u_1)| < A(|x_2 - x_1| + |u_2 - u_1|), \quad (8)$$

სადაც A მუდმივია, რომელიც არაა დამოკიდებული x, y , და u ცვლადებზე.

ქვემოთ ნაჩვენებია იქნება, რომ y -ის შემოსაზღვრული მნიშვნელობები-სათვის არსებობს ისეთი შემოსაზღვრული ფუნქცია $u(x, y)$, რომელიც, როცა $y > 0$, აკმაყოფილებს (7) განტოლებას და, როცა $y = 0$, — შემდეგ საწყის პირობებს:

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \delta u|_{y=0} = \psi(x). \quad (9)$$

ზემონათქვამის თანახმად, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (7)–(9) ამოცანის ამოხსნა ექვივალენტურია შემდეგი არაწრფივი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნისა:

$$u(x, y) = \widetilde{u}_0(x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, u)(y - \eta) \frac{\exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}\right)}{\sqrt{y - \eta}} d\xi, \quad (10)$$

სადაც $\widetilde{u}_0(x, y)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რომელიც, როცა $y > 0$, აკმაყოფილებს ერთგვაროვან $\delta^2 \widetilde{u}_0 = 0$ განტოლებას, ხოლო, როცა $y = 0$, აკმაყოფილებს (9) პირობას. ასეთი ფუნქცია ცნობილია თანახმად (1) ფორმულისა.

ამოცხსნათ (10) განტოლება მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. ამისათვის, ვთქვათ,

$$u_0(x, y) = \widetilde{u}_0(x, y)$$

და

$$u_n(x, y) = u_0(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, u_{n-1})(y - \eta) \frac{\exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}\right)}{\sqrt{y - \eta}} d\xi, \quad (11)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

დავუშვათ,

$$M = \max \{ \max f(x, y, 0), \max |\varphi(x) - y\psi(x)| \},$$

როცა

$$-\infty < x < \infty,$$

და y ღებულობს სასრულ და არაუარყოფით მნიშვნელობებს. მაშინ (1)-ის თანახმად გვექნება:

$$|u_0(x, y)| < \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right)}{\sqrt{y}} d\xi = M.$$

(8)-ს ძალით მივიღებთ;

$$|f(x, y, u_0)| < (A+1)M.$$

ახლა, ვთქვათ, რომ რაიმე $\varphi(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას:

$$|\varphi(x, y)| < ky^p, \quad p \geq 0.$$

მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi \right| < \\ & < \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^p \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi = \\ & = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \eta^p d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi = k \frac{y^{p+1}}{p+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi = 2\sqrt{\pi}.$$

ამიტომ (11)-დან, (8) და (12)-ის ძალით, მივიღებთ:

$$|u_1(x, y) - u_0(x, y)| < 2y^2 M(A+1),$$

და

$$\begin{aligned} & |u_2(x, y) - u_1(x, y)| < \\ & < \frac{2yA}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(\xi, \eta) - u_0(\xi, \eta)| \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi < \\ & < 2Ay \cdot 2M(A+1) \frac{y^3}{3} = 4MA(A+1) \frac{y^4}{3}. \end{aligned}$$

საერთოდ გვექნება

$$|u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y)| < \frac{M(A+1)}{A} (2A)^n \frac{y^{2n}}{(2n-1)!!}. \quad (13)$$

მართლაც, (11)-დან (8), (12) და (13)-ის ძალით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 & |u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y)| < \\
 & < \frac{2Ay}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)| \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi < \\
 & < 2Ay \frac{M(A+1)}{A} (2A)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n-1)!! (2n+1)} = \frac{M(A+1)}{A} (2A)^{n+1} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!!};
 \end{aligned}$$

ამრიგად (13) უტოლობა სამართლიანია.

(13) უტოლობიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა $\{u_n\}$ თანაბრად კრებალია. ვთქვათ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y) = U(x, y).$$

მაშინ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \widetilde{u}_0(x, y) + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, U)(y-\eta) \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi. \quad (14)
 \end{aligned}$$

საიდანაც $f(x, y, u)$ ფუნქციის შესახებ მოთხოვნილი პირობებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $U(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (7) განტოლებას და (9) პირობებს.

ახლა ადვილი საჩვენებელია, რომ მიღებული ამოხსნა ერთადერთია. დავეუშვათ, რომ არსებობს ამოცანის ორი ამოხსნა $U_1(x, y)$ და $U_2(x, y)$. მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned}
 & |U_1(x, y) - U_2(x, y)| < \\
 & < \frac{2Ay}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |U_1(\xi, \eta) - U_2(\xi, \eta)| \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi. \quad (15)
 \end{aligned}$$

ვთქვათ, $E = \max |U_1(x, y) - U_2(x, y)|$, როცა $-\infty < x < \infty$ და y არაუარყოფითი და სასრულია. (15)-დან მივიღებთ

$$E \leq 2AEy^2.$$

ასე, რომ, თუ $y < \frac{1}{2A}$, მაშინ გვექნება $E < \frac{E}{2}$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ (7)–(9) ამოცანას აქვს მხოლოდ ერთადერთი ამოხსნა.

2. აღვნიშნოთ R -ით x, y სიბრტყეზე რაიმე სასრული არე, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს კოორდინატთა სათავეს.

S იყოს არე, რომელიც მდებარეობს R -ის შიგნით და შემოსაზღვრულია $y=0$, $y=T$ მახასიათებლების AB და PQ მონაკვეთებით და Γ_1 და Γ_2 რკალებით, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად:

$$x = \gamma_1(y) \text{ და } x = \gamma_2(y),$$

სადაც

$$\gamma_2(y) > \gamma_1(y) \quad 0 \leq y \leq T.$$

ავიღოთ S არეს შიგნით $M(x, y)$ წერტილი. A_1B_1 იყოს იმ მახასიათებლის მონაკვეთი, რომელიც M წერტილში გაივლის და მოთავსებულია Γ_1 და Γ_2 რკალებს შორის. Γ -თი აღვნიშნოთ Γ_1 , Γ_2 რკალებისა და AB მონაკვეთის ერთობლიობა. არე, რომელიც მოთავსებულია Γ_1 , Γ_2 რკალებსა, AB მონაკვეთსა და y ორდინატთან მახასიათებელს შორის აღვნიშნოთ S_y -ით.

ვიგულისხმობთ, რომ (7) განტოლების მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

როცა $(x, y) \in R$ და $|u| \leq N$, მაშინ $f(x, y, u)$ არის x და y -ის უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს y -ის ან x -ის მიმართ ჰელდერის პირობას, ხოლო u -ს მიმართ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას

$$|f(x, y, u_1) - f(x, y, u_2)| \leq A |u_1 - u_2|. \quad (16)$$

დავუშვათ, რომ K ისეთი დადებითი მუდმივია, რომ

$$\max_{\substack{(x, y) \in R \\ |u| \leq N}} |f(x, y, u)| \leq k.$$

დავსვათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

ვიპოვოთ S არეში (7) განტოლების ისეთი რეგულარული ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$u=0, \text{ და } \delta u=0 \text{ } \Gamma\text{-ზე.} \quad (18)$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად ჩვენ გამოვიყენებთ სითბოგამტარობის განტოლების გრინის ფუნქციას.

როგორც ცნობილია (იხ. მაგ. [3], [4]), არსებობს ისეთი $G(x, y; \xi, \eta)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს სახე:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}} - g(x, y; \xi, \eta), \quad \eta < y$$

სადაც $g(x, y; \xi, \eta)$ რეგულარული ფუნქციაა, რომელიც S_y არეს შიგნით (ე. ი. როცა $\eta < y$) აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0,$$

$A_1 B_1$ მონაკვეთზე იქცევა ნულად, ხოლო AA_1 და BB_1 რკალებზე დებულობს მნიშვნელობას

$$\frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)}{\sqrt{y-\eta}}.$$

$G(x, y; \xi, \eta)$, როგორც x, y ცვლადების ფუნქცია, S არეს შიგნით გარდა $x=\xi, y=\eta$ წერტილისა, აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

ხოლო, როგორც ξ, η ცვლადების ფუნქცია, იმავე არეში, გარდა $\xi=x, \eta=y$ წერტილისა, აკმაყოფილებს შეუღლებულ განტოლებას $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0$.

შემდეგ

$$G(x, y; \xi, \eta) = 0 \quad \Gamma_1 \text{ და } \Gamma_2 \text{ რკალებზე.}$$

და

$$G(x, y; \xi, \eta) > 0 \quad S_y \text{ არეში.}$$

თუ ვისარგებლებთ $G(x, y; \xi, \eta)$ ფუნქციის ხსენებული თვისებებით, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (7)–(18) ამოცანის ამოხსნა ექვივალენტურია შემდეგი არაწრფივი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნისა:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G_2(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u) d\xi d\eta, \quad (19)$$

რომელშიაც

$$G_2(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G(x, y; \xi_1, \eta_1) G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\xi_1 d\eta_1, \quad (20)$$

სადაც $\eta_1 \geq \eta$.

ამოხსნათ (19) განტოლება მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. ამისათვის წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თუ $\varphi(x, y)$ რაიმე ინტეგრებადი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|\varphi(x, y)| < \Phi y^p, \quad (p > -1)$$

მაშინ

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G_2(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| < \frac{\Phi}{p+1} \cdot \frac{y^{p+2}}{p+2}. \quad (21)$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$u_0(x, y), \quad u_1(x, y), \dots, \quad u_n(x, y), \dots,$$

სადაც

$$u_0(x, y) \equiv 0 \quad S_y\text{-ში,}$$

$$u_{n+1}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G_2(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta; u_n) d\xi d\eta, \quad (22)$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

დავუშვათ

$$T^* = \min \left\{ \frac{N}{k}, \frac{1}{A} \right\}, \quad T < \sqrt{2T^*}. \quad (23)$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თუ $u_n(x, y)$ აკმაყოფილებს უტოლობას $|u_n(x, y)| < N$ S -ში, მაშინ $u_{n+1}(x, y)$ აკმაყოფილებს იმავე უტოლობას. მართლაც, (22)-დან, (17), (21) და (23)-ის ძალით გვექნება

$$|u_{n+1}(x, y)| < \frac{1}{2} k y^2 < \frac{1}{2} k T^2 < k T^* < N.$$

ამრიგად,

$$|u_{n+1}(x, y)| < N, \quad \text{როცა } (x, y) \in S.$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$\rho_n = \max_{(x, y) \in S} |u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y)|, \quad (24)$$

მაშინ (16) პირობის თანახმად მივიღებთ

$$\max_{(x, y) \in S} |f(x, y, u_n) - f(x, y, u_{n-1})| \leq A \rho_{n-1}. \quad (25)$$

ამიტომ (22)-დან, (21) და (25)-ის ძალით, გვექნება

$$|u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y)| < \frac{1}{2} A \rho_{n-1} y^2, \quad (x, y) \in S.$$

ამგვარად ვღებულობთ რომ

$$\rho_n \leq \frac{1}{2} A \rho_{n-1} T^2.$$

აქედან, თავის მხრივ ადვილად გამოდინარეობს, რომ

$$\rho_n \leq \left(\frac{1}{2} A T^2 \right)^n \rho_0. \quad (26)$$

ცხადია, რომ

$$\rho_0 < \frac{1}{2} k y^2 < \frac{1}{2} k T^2 < k T^* < N.$$

შემდეგ, როცა $0 < y \leq T$, (23)-ის ძალით გვექნება

$$\frac{1}{2} A T^2 < A T^* < 1.$$

ამიტომ (26)-ის თანახმად მწკრივი $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ კრებალია. აქედან თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y)\}$$

აბსოლუტურად და თანაბრად კრებალია S არეში.

მაშასადამე, არსებობს თანაბრად ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in S.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $U(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$U(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G_2(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, U) d\xi d\eta, \quad (27)$$

ანუ (20)-ის ძალით—განტოლებას

$$U(x, y) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^2} \iint_{S_y} G(x, y; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 \iint_{S_{\eta_1}} G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) f(\xi, \eta, U) d\xi d\eta.$$

$$(\eta_1 \geq \eta)$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ $f(x, y, u)$ ფუნქციის მიმართ მოთხოვნილ პირობებს, მივიღებთ

$$\delta U(x, y) = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, U) d\xi d\eta$$

და

$$\delta^2 U(x, y) = f(x, y, U).$$

შემდეგ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$U=0 \quad \text{და} \quad \delta U=0 \quad \Gamma\text{-ზე.}$$

ამრიგად, $U(x, y)$ ფუნქცია გვაძლევს დასმული ამოცანის ამოხსნას. ადვილი სანახავია, რომ მიღებული ამოხსნა ერთადერთია.

ლიტერატურა — ЛИТЕРАТУРА

1. B. Pini—Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale. Rendiconti del seminario Matematico della università di Padova, 1953, 190—206.
2. M. Nicolescu—Ecuatia iterată a căldurii. Studii si cercetări Matematice, 3—4, 1954, 243—332.

3. M. Gevrey—Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Ann. de Math. pures et appl. (6), 9, 1913, 305—371; (6), 105, 1914, 105—148.
4. П. К. Зерагия—Граничные задачи для некоторых нелинейных уравнений параболического типа. Труды Тбилисского математического института АНГССР, Т. XXIV, 1957, 195—222.

მათემატიკური ანალიზის კათედრა.

(შემოვიდა რედაქციაში 25. XII. 58)

П. Зерагия

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО
БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Резюме

В настоящей статье решаются задача Коши и задача Коши-Дирихле для нелинейного бипараболического уравнения (7).

Н. Патарая

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЛН

§ 1. Некоторые сведения из линейной теории волн

Известно, что задача определения волновых движений тяжелой жидкости по линейной теории волн математически формулируется так:

Найти интеграл уравнения Лапласа

$$\Delta F(x, y, z, t) = 0,$$

который на твердых границах удовлетворяет условию $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$, на сво-

бодной поверхности жидкости за которую, приближенно, принимается невозмущенная поверхность, условию

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=0} = 0$$

(здесь подразумевается, что ось Oz направлена по вертикали и координаты отсчитываются от свободной поверхности при невозмущенном, от волн положении) и двум начальным условиям

$$1. \quad \frac{1}{g} \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_{t=0, z=0} = f(x, y),$$

$$2. \quad [F]_{t=0, z=0} = \varphi(x, y),$$

где $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — заданные функции (форма свободного уровня и значение импульсивного давления в начальный момент времени).

После определения потенциала скорости, удовлетворяющего указанным выше условиям, поле скорости жидкости определяется равенствами:

$$v_x = - \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad v_y = - \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial y}, \quad v_z = - \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial z},$$

а вид волнующейся поверхности формулой

$$\zeta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{z=0}.$$



Хорошо известно, так-же, что в основу такой математической трактовки вопроса лежат три упрощающих положения, которые необходимо устранить в строгой (нелинейной) теории.

Первое упрощение состоит в том, что вид свободной поверхности определяется формулой $\frac{\partial F}{\partial t} - g\zeta = \text{const}$, которая представляет собою интеграл Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} - g\zeta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = \text{const},$$

в котором отброшено слагаемое $-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^2 \right]$ учет которого и представляет главную трудность в нелинейной теории.

Второе упрощение состоит в том, что упрощенный интеграл Коши рассматривается не для свободного уровня жидкости, как это следует из смысла самого интеграла, а для невозмущенной поверхности (для положения равновесия, т. е. когда $\zeta=0$).

В силу этого, аргументами функции $\frac{\partial F}{\partial t}$ рассматриваются не переменные x, y, ζ, t , а $x, y, 0, t$. И, наконец, последнее, третье упрощение линейной теории волн заключается в замене формулы для проекции скорости на вертикальной оси в точках поверхности жидкости $v_z = v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, формулой $v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ и, следовательно, в отбрасывании слагаемых вида $v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y}$, которые ввиду нелинейности, также, создают большие трудности в нелинейной теории.

Из вышеизложенного очевидно с какой критической осторожностью следует отнестись к выводам линейной теории волн и их применениям для практических целей.

2. Вывод граничных и начальных условий в случае нелинейной теории

Допустим, что рассматривается распространение плоских гравитационных волн с конечной амплитудой. Будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат, начало которой расположим на поверхности жидкости в положении равновесия. Ось oy направим вертикально вниз. Жидкость будем считать однородной и несжимаемой средой с плотностью ρ . Согласно общих теорем гидродинамики (см. теорему Томсона и, так-же, теоремы Лагранжа) возникшее под действием импульсного давления и силы тяжести волновое движения идеаль-

ной жидкости будет потенциальным. Если потенциал скорости обозначим через $\Phi(x, y, t)$, то будем иметь:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$p = \rho g y + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \psi(t).$$

Если вместо функции Φ введем другую функцию $\Phi_1 = \Phi - \int_0^t \psi(t) dt$ и

индекс 1, для простоты, отбросим, можно положить

$$p = \rho g y + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (2_1)$$

Так как на свободной поверхности давления должно равняться атмосферному, то применение формулы (2₁) для свободной поверхности даст:

$$p_0 = \rho g \{ y \}_{y=\eta(x,t)} + \rho \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}_{y=\eta(x,t)} - \frac{1}{2} \rho \left\{ \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}_{y=\eta(x,t)},$$

Если ввести вместо функции Φ функцию $\Phi' = \Phi + \frac{p_0}{\rho} t$, для которой $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi'}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho}$, то через функцию Φ' выражение для p_0 примет такой вид:

$$0 = \rho g \eta(x, t) + \rho \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right\}_{y=\eta(x,t)} - \frac{1}{2} \rho \left\{ \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}_{y=\eta(x,t)}. \quad (2_2)$$

Ради простоты, мы отбросим знак и у функции Φ' . Соотношение (2₂) мы удовлетворим если равенству (2₁) дадим следующий окончательный вид

$$p - p_0 = \rho g y + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (2_3)$$

Чтобы получить граничное условие для потенциала скорости на свободной поверхности жидкости, должны исходить из того факта, что частицы жидкости принадлежащие поверхности волны не переходят во внутрь жидкости, и перемещаются все время по изменяющейся поверхности, которая и является поверхностью волны.

Если сказанное сопоставим с тем, что на поверхности волны все время $p = p_0 = \text{const}$, то можем положить:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (2_4)$$



УДК 62-50
ЧТЗ-ДЯВ-133

При этом, для ρ должны пользоваться соотношением (2₂)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} \right].$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - \rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right],$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \rho g + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} - \rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right].$$

В силу этих формул условие (2₄) приведет к

$$\begin{aligned} g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \\ - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2_5)$$

Последнее условие и есть то граничное условие, которое должен удовлетворить потенциал Φ на поверхности волн.

Кроме условия (2₅) потенциал скорости Φ должен удовлетворить условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2_6)$$

На границе твердых стенок, и двум начальным условиям:

$$t=0, \quad \eta(x, 0) = \chi(x), \quad \Phi(x, \eta, 0) = \Phi(x, \chi(x), 0) = \psi(x),$$

где $\chi(x)$ и $\psi(x)$ наперед заданные функции (начальное возмущение свободной поверхности и величина, пропорциональная импульсивной силе).

§ 3. К методу решения точных уравнений нелинейной теории волн

Как известно, трудность решения уравнений нелинейной теории волн заключается не только в нелинейности пограничного уравнения (2₅) для свободной поверхности, а также и в том, что функция $\eta(x, t)$, которую надо подставить в уравнение (2₅) в качестве аргумента функции Φ вместо y , заранее неизвестна и должна быть определена наряду с $\Phi(x, y, t)$;

Иначе говоря, уравнение граничного контура свободной поверхности жидкости, т. е. уравнение профиля волны в точках которой и должно выполняться пограничное условие (2₅), заранее неизвестно и является вторым неизвестным задачи, которое нуждается в определении вместе с потенциалом скорости $\Phi(x, y, t)$.

Надо совместно решить следующую систему уравнений:

$$1. \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial y^2} = 0,$$

Это уравнение должно удовлетвориться во всем пространстве, занятом жидкостью,

$$2. \quad g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \\ - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0,$$

В точках свободного уровня жидкости, т. е. в точках профиля волны (оно является математическим выражением того факта, что на изменяющейся свободной поверхности жидкости расположены одни и те же движущиеся частицы), уравнение которого

$$y = \eta(x, t).$$

Надо определить из уравнения для p (2_3), которое имеет вид

$$3. \quad \rho g \eta(x, t) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} [x, t, \eta(x, t)] - \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial x} \right) [(x, t, \eta(x, t))] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial y} \right) [x, t, \eta(x, t)] \right] = 0.$$

$$4. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = f(x, y, t)$$

на границе жидкости и твердого тела (здесь заданная функция $f(x, y, t)$ представляет собою нормальную составляющую скорости твердой границы.

Так как потенциал скорости зависит и от времени, то мы должны знать начальные данные задачи, т. е. при $t=0$

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x)$$

(уравнение свободной поверхности жидкости в начальный момент времени) и

$$\Phi(x, \eta_0(x), 0) = F(M)$$

(значение потенциала скорости в точках свободной поверхности, где давление $p_0 = \text{const}$, в начальный момент времени).

решение поставленной задачи представляет значительные математические трудности. В этой работе мы рассмотрим плоское волнообразное движение несжимаемой жидкости в канале бесконечной глубины



и будем искать решение системы вышеуказанных уравнений применительно к этой задаче. Нетрудно обобщать рассмотренный нами метод применительно к другим задачам точной теории волн. В этом случае условие $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = f(x, y, t)$ заменяется условием $\lim_{y \rightarrow \infty} \Phi(x, y, t) = 0$.

Решение задачи мы начнем определением начального значения потенциала скорости на части плоскости, ограниченной сверху кривой $y = \eta(x, 0) = \eta_0(x)$ и простирающейся в бесконечность, по начальному граничному значению потенциала скорости

$$\Phi(x, \eta_0(x), 0) = F(M),$$

где $F(M)$ означает заданную функцию на кривой $y = \eta_0(x)$. Мы потребуем от функции $F(M)$, чтобы она имела непрерывные производные до второго порядка вдоль кривой $y = \eta_0(x)$. Это требование диктуется физическими условиями задачи, именно, необходимостью существования конечных скоростей и ускорений жидких частиц, расположенных на кривой $y = \eta_0(x)$ в момент $t = 0$. Согласно общей теории гармонических функций, гармоническая функция, принимающая на кривой $\eta_0(x)$ заданное значение $F(M)$ и стремящаяся к нулю при $y \rightarrow \infty$ равномерно относительно y , существует и единственно, если кривая $\eta_0(x)$ удовлетворяет некоторым общим условиям, требуемым теоремой существования и единственности. Определив одним из известных методов (напр. с помощью конформного отображения части плоскости, занятой жидкостью на нижнюю часть полуплоскости, ограниченной сверху прямой $y = 0$ (начальное значение потенциала и обозначив его через $\Phi_0(x, y)$), приступим к определению $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, 0)$ для части плоскости, занятой жидкостью в начальный момент $t = 0$. При этом заметим, что связь между $\eta_0(x)$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, \eta_0, 0)$ в нелинейной теории волн не будет выражаться тем простым соотношением, каким она выражается в линейной теории¹.

Полагая в уравнение (2₃) $t = 0$ и, следовательно $y = \eta_0(x)$, будем иметь

$$g \eta_0(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, \eta_0(x), 0) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \eta_0(x), 0) \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \eta_0(x), 0) \right)^2 \right] = 0.$$

В этом уравнении вместо $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \eta_0(x), 0)$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \eta_0(x), 0)$ следует подставить компоненты начальной скорости жидких частиц, расположенных на кривой $\eta_0(x)$.

¹ Как известно, по линейной теории $\eta_0(x) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(x, 0, 0)}{\partial t}$.

Решая полученное уравнение относительно $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, \eta_0(x), 0)$, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, \eta_0(x), 0) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \eta_0(x), 0) \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \eta_0(x), 0) \right)^2 \right] - g \eta_0(x) \quad (3_1)$$

Уравнение (3₁) дает граничные значения гармонической функции $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Обозначая правую часть уравнения (3₁) через $\psi(M)$, будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(M, 0) = \psi(M) \quad (3_2)$$

где $\psi(M)$ заданная на кривой $y = \eta_0(x)$ функция. С другой стороны, так как

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \quad \text{то} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, 0)$$

однозначно определяется во всех точках части плоскости, занятой в $t=0$ жидкостью. Ради сокращения, функцию $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, 0)$, которую мы считаем определенной, будем обозначать через $\Phi_1(x, y)$. Поставим себе задачу определения потенциала скорости движения жидкости для произвольного момента времени $t=0$, зная $\Phi(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ и уравнение граничной кривой жидкости в момент $t=0$, $y = \eta_0(x)$.

Будем искать потенциал скорости для $t > 0$, разложенную в степенной ряд по степеням t :

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y) + \frac{t}{1!} \Phi_1(x, y) + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)_0 + \dots + \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n} \right)_0 + \dots \quad (3_0)$$

Для последовательного определения $\left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n} \right)_0$ обратимся к пограничному уравнению (2₅), которое должно выполняться для всех моментов $t \geq 0$ в точках граничной кривой $\eta(x, y)$. Оно дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = & g \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Легко заметить что, если продифференцируем пограничное уравнение по параметру t произвольное число раз, т. е. образуем $\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n}$ ($n=3, 4, \dots$), то полученные уравнения, как и исходное, должны удовлетворяться вдоль пограничной кривой в любой момент времени $t > 0$.



Воспользуемся этим обстоятельством и во все, полученные таким образом уравнения подставим $t=0$.

Мы не можем воспользоваться подстановкой других значений для t , ибо не задан профиль свободной поверхности жидкости когда $t \neq 0$.

В силу сказанного, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3}\right)_0 &= g \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t}\right)_0 + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial t^2}\right)_0 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}\right)_0^2 + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial t^2}\right)_0 + \\
 &+ 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t}\right)_0^2 - 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial t}\right)_0 - \\
 &- 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial t}\right)_0 - 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}\right)_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_0 - \\
 &- 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_0 - 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y \partial t}\right)_0 \\
 &\dots \dots \dots \\
 \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n}\right)_0 g &= \left(\frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial y \partial t^{n-2}}\right)_0 + 2 \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \left(\frac{\partial^{i+1} \Phi}{\partial x \partial t^i}\right)_0 \left(\frac{\partial^{n-i} \Phi}{\partial x \partial t^{n-i-1}}\right)_0 + \\
 &+ 2 \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^i \left(\frac{\partial^{i+1} \Phi}{\partial y \partial t^i}\right)_0 \left(\frac{\partial^{n-i} \Phi}{\partial y \partial t^{n-i-1}}\right)_0 - \\
 &- \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \left(\frac{\partial^{n-i} \Phi}{\partial x^2 \partial t^{n-i-2}}\right)_0 \sum_{k=0}^i C_k^i \left(\frac{\partial^{k+1} \Phi}{\partial x \partial t^k}\right)_0 \left(\frac{\partial^{i-k+1} \Phi}{\partial x \partial t^{i-k}}\right)_0 - \\
 &- \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \left(\frac{\partial^{n-i} \Phi}{\partial y^2 \partial t^{n-i-2}}\right)_0 \sum_{k=0}^i C_k^i \left(\frac{\partial^{n+1} \Phi}{\partial y \partial t^k}\right)_0 \left(\frac{\partial^{i-k+1} \Phi}{\partial y \partial t^{i-k}}\right)_0 - \\
 &- 2 \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \left(\frac{\partial^{n-i} \Phi}{\partial x \partial y \partial t^{n-2-i}}\right)_0 \sum_{k=0}^i C_k^i \left(\frac{\partial^{k+1} \Phi}{\partial x \partial t^k}\right)_0 \left(\frac{\partial^{i-k+1} \Phi}{\partial y \partial t^{i-k}}\right)_0. \quad (3_3)
 \end{aligned}$$

Соотношения (3₃) для граничных значений $\left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n}\right)_0$ на свободной поверхности в момент $t=0$ дает возможность последовательного определения гармонических функций от n к $(n+1)$ во всех точках плоскости ниже кривой $y=\eta_0(x)$. Конечно, вторым граничным условием для $\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n}$ будет условие исчезновения при $y \rightarrow \infty$.

При сходимости ряда (3₀) мы будем иметь гармоническую функцию, определенную на части плоскости, находящейся ниже кривой $y = \eta_0(x)$. Продолжая через кривую $y = \eta_0(x)$ полученную функцию для точек плоскости, находящейся выше кривой $\eta_0(x)$ получим единственную гармоническую функцию, которая будет удовлетворять всем поставленным условиям. Для определения профиля свободной поверхности волнующейся жидкости следует решить уравнение $p = p_0$ т. е. уравнение (2₃)

$$gy + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0.$$

Корень этого уравнения $y = \eta(x, t)$ будет представлять собою неизвестный профиль волны.

Решение вопроса упростится когда рассматриваем движение, вызванное действием импульсивной силы, т. е. когда начальное возмущение свободной поверхности $= 0$. В этом случае граничной кривой будет прямая $y = 0$, а областью определения гармонических функции $\left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n} \right)_0$ будет полуплоскость. Аналитическое продолжение следует проводить через действительную ось комплексного переменного, что будет значительно облегчать задачу. Вопрос о сходимости ряда (3₀) должен быть исследован применительно к конкретной задаче. Выражения $\left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n} \right)_0$ представлены через $\left(\frac{\partial^m \Phi_0}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \right)_{y=\eta_0(x)}$ и $\left[\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 \right]_{y=\eta_0(x)}$ и, поэтому, определяющими факторами сходимости будут кривая $y = \eta_0(x)$ и гармонические функции Φ_0 и $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0$.

ჰიდროავრომექანიკის კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში, 15 V. 58)

Б. პაპიაიძე

გალღების არანგუივი თაორიისათვის

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში განხილულია უკუმში სითხის ტალღური მოძრაობის არაწრფევი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის სქემა, უსასრულო ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით. სიჩქარის პოტენციალი წარმოდგენილია დროის, როგორც პარამეტრის, მიმართ მაკლორენის მწკრივის სახით, რომელშიაც პოტენციალის დროით სხვადასხვა რიგის წარმომავლები განისაზღვრება სასაზღვრო



პირობის n ჯერ გაწარმოების საშუალებით პოტენციალისა და მისი პირველი წარმოებულით. რაც შეეხება პოტენციალისა და მისი პირველი წარმოებულის საწყის მნიშვნელობას, მათი განსაზღვრა მიყვანილია დირიხლესა და შერეულ სასაზღვრო ამოცანაზე ჰარმონიული ფუნქციებისათვის. მიღებული ხარისხი-ვანი მწკრივის კრებადობის საკითხი განხილული უნდა იქნეს კონკრეტული ამოცანის შესაბამისად. ტალღის საწყისი პროფილის $y = \eta_0(x)$ ზევით სიჩქარის პოტენციალი იძებნება ანალიზური გაგრძელების საშუალებით. ტალღის პროფილი ნებისმიერ მომენტში განისაზღვრება ბერნულის ინტეგრალით

$$g\eta(x, t) + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}_{y=\eta(x,t)} = 0.$$

Г. Ломадзе

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С ЧЕТЫРЬМА ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 1. В настоящей работе мы будем применять следующие обозначения: $M, N, a, d, q, r, \lambda, \omega$ — натуральные числа (за исключением § 6, где q — целое); b, u, v — нечетные натуральные числа; p — простые числа; l, x — неотрицательные целые числа; $H, c, g, h, j, k, m, n, x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — целые числа; $A, \mu, \nu, \rho, \xi, t, w, W$ — действительные числа; $\zeta, \zeta, \tau, A, B, C, D$ — комплексные числа, причем $\text{Im } \tau > 0$; K — положительные числа необязательно всюду одни и те же.

Эти буквы, в случае надобности, будут сопровождаться индексами и штрихами.

(h, m) обозначает общий наибольший делитель h и m .

$d|m$ обозначает, что d делит m ; $d \nmid m$ обозначает, что d не делит m ;

$p^i || m$ обозначает, что $p^i | m$, но $p^{i+1} \nmid m$.

$\left(\frac{h}{u}\right)$ обозначает символ Якоби, если $(h, u) = 1, u > 1$; $\left(\frac{h}{u}\right) = 0$, если $(h, u) > 1$; $\left(\frac{h}{1}\right) = 1$.

Далее пусть

$$I(u) = i^{\{(u-1)/2\}^2}; \quad e(\chi) = \exp 2\pi i \chi; \quad Q = e\left(\frac{\tau}{4a a'}\right);$$

$$\text{sgn } \xi = \frac{\xi}{|\xi|} \quad \text{при } \xi \neq 0, \quad \text{sgn } \xi = 0 \quad \text{при } \xi = 0.$$

$\sum_{h \bmod q}$ и $\sum'_{h \bmod q}$ обозначают суммы, в которых h пробегает полную, соответственно приведенную, систему вычетов $\bmod q$. Пустые суммы предполагаем равными нулю, а пустые произведения — равными единице.

Если $\chi \neq 0$, то полагаем

$$-\frac{\pi}{2} < \arg \chi^{1/2} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \chi^{r/2} = \left(\chi^{1/2}\right)^r.$$



$f(\xi) \sim \varphi(\xi)$ обозначает, что $\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} \rightarrow 1$, когда ξ стремится к заданному пределу.

$\mu(q)$ — функция Мёбиуса.

Затем положим

$$S(h, q) = \sum_{j \bmod q} e\left(\frac{hj^2}{q}\right) \quad (\text{сумма Гаусса}), \quad (1.1)$$

$$S\left(\frac{h}{k}; c, N\right) = \sum_{\substack{j \bmod N|k \\ j \equiv c \pmod{N}}} e\left(\frac{hj^2}{2Nk}\right) \quad (k \neq 0, 2|hkN), \quad (1.2)$$

$$c(h, q) = \sum'_{j \bmod q} e\left(\frac{hj}{q}\right) \quad (\text{сумма Рамануджана}), \quad (1.3)$$

$$\tau(h, p^\lambda) = \sum'_{j \bmod p^\lambda} \left(\frac{j}{p}\right) e\left(\frac{hj}{p^\lambda}\right), \quad (1.4)$$

$$\mathfrak{J}_{gh}(\tau, c, N) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \equiv c \pmod{N}}}^{\infty} e\left(\frac{h(m-c)}{2N}\right) e\left(\frac{\left(m + \frac{1}{2}g\right)^2}{2N}\tau\right) \quad (1.5)$$

(тэта — функция с характеристиками g, h),

$$L(q, m) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{m}{u}\right) u^{-q} = \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{m}{p}\right) p^{-q}\right)^{-1} \quad (q > 1). \quad (1.6)$$

§ 2. Пусть $r(n)$ обозначает число представлений $n > 0$ формой

$$f = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a'x_4^2, \quad (2.1)$$

т. е. число решений уравнения

$$n = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a'x_4^2 \quad (2.2)$$

при заданных a, a' .

В 1861—1864 г. с помощью чисто арифметических методов Лиувилль получил большое число точных формул для функции $r(n)$ при различных значениях a и a' и опубликовал их без доказательства в своем журнале.

Впоследствии все эти формулы были доказаны Назимовым [13], Пенином [7], Успенским [14] и Вальфишем [9, 10].

Однако некоторые интересные формы вида (2.1) пока что не изучены.

С помощью модулярных функций и яковиевых тэта-функций Клоостерман [3] получил точные формулы для числа представлений чисел некоторыми формами вида

$$f = x_1^2 + x_2^2 + d(x_3^2 + x_4^2).$$

Этот метод в каждом отдельном случае требует сложных вычислений, связанных с поведением соответствующих модулярных функций в их фундаментальных областях.

С помощью целых модулярных форм Стрефкерк [8] получил точные формулы для числа представлений суммами некоторых обобщенных полигональных чисел.

Комбинируя метод Клоостермана с методом Стрефкерка и вместо обыкновенных тэта-функций применяя тэта-функции с характеристиками, в работе [6] мы получили точные формулы для числа представлений чисел некоторыми формами вида (2.3). Этот комбинированный метод не требует сложных вычислений связанных с поведением соответствующих модулярных функций. Правда и здесь имеются достаточно длинные вычисления, но они вполне элементарны.

В настоящей работе этим методом мы получаем точные формулы для $r(n)$ при $a=1$; $a'=5, 6, 7, 9, 10$. Соответствующая формула при $a=1$, $a'=5$ была уже получена Лиувиллем [5] и впервые доказана Назимовым ([13], стр. 56—61) с помощью весьма сложного аппарата эллиптических функций, а затем Успенским [14] чисто арифметическим путем. Этот случай поэтому можно было и не рассматривать, но представляется интересным получить этот известный результат совершенно иным путем, тем более, что таким же образом будут получены и гораздо более сложные формулы. Кроме того, доказательство Успенского хотя и чисто арифметическое, но достаточно сложное и длинное.

Методом примененным в настоящей работе могут быть исследованы и другие формы вида (2.1).

В дальнейшем, не ограничивая общность, будем предполагать

$$(a, a') = 1. \quad (2.4)$$

§ 3. В этом параграфе приводятся без доказательства некоторые известные результаты.

Пусть Γ —модулярная группа, т. е. группа линейных подстановок

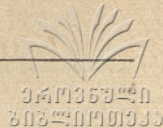
$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Далее, пусть $\Gamma(N)$ —главная группа сравнений N -ой степени, т. е. та подгруппа группы Γ , подстановки которой удовлетворяют условию

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{N}, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{N}.$$

Определение 1 (см., напр., [4], стр. 167). Аналитическая функция $F(\tau)$ называется целой модулярной формой N -ой степени и измерения τ , если она удовлетворяет следующим условиям:



1) $F(\tau)$ регулярна и однозначна в верхней полуплоскости;

2) для каждой подстановки группы $\Gamma(N)$ имеет место

$$F\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = (\gamma\tau+\delta)^r F(\tau);$$

3) в окрестности $\tau = \infty$ имеет место разложение

$$F(\tau) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e\left(\frac{n\tau}{N}\right);$$

4) в окрестности $\tau = -\frac{\delta}{\gamma}$ ($\gamma \neq 0$, $(\gamma, \delta) = 1$) имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^r F(\tau) = C'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n e\left(\frac{n}{N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Если $C'_0 = C'_1 = \dots = C'_{m-1} = 0$ ($m \geq 1$), то говорят, что $\tau = -\frac{\delta}{\gamma}$ является m -кратным нулем функции $F(\tau)$.

Лемма 1 (см., напр., [2]. I, стр. 397 и II, стр. 363). Целая модулярная форма N -ой степени и измерения $-r$ тождественно равна нулю, если в своей фундаментальной области она имеет более чем

$$\frac{r}{24} N^2 \prod_{p|N} (1-p^{-2})$$

нулей (здесь каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

Лемма 2. Если $(h, q) = 1$, то

$$S(ah, aq) = aS(h, q).$$

Это непосредственно следует из (1.1).

Лемма 3 (см., напр., [11], стр. 13, лемма 5). Если $(q_1, q_2) = 1$, то

$$S(h, q_1 q_2) = S(h q_2, q_1) S(h q_1, q_2).$$

Лемма 4 (см., напр., [11], стр. 10, лемма 1). Если $(h, q) = 1$, то

$$\begin{aligned} |S(h, q)| &= q^{1/2} && \text{при } q \equiv 1 \pmod{2}, \\ &= 0 && \text{при } q \equiv 2 \pmod{4}, \\ &= (2q)^{1/2} && \text{при } q \equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Лемма 5 (см., напр., [11], стр. 11, лемма 2). Если h нечетное, то

$$\begin{aligned} S(h, 2^\lambda) &= 0 && \text{при } \lambda = 1 \\ &= (1 + i^h) 2^{\lambda/2} && \text{при четном } \lambda, \\ &= e\left(\frac{h}{8}\right) 2^{(\lambda+1)/2} && \text{при нечетном } \lambda > 1. \end{aligned}$$

Лемма 6 (см., напр., [11], стр. 16, лемма 8). Если $(h, u) = 1$, то

$$S(h, u) = \left(\frac{h}{u}\right) I(u) u^{1/2}.$$

Лемма 7. Если $q = 2^\lambda u$, то

$$\begin{aligned} S(h, q) &= 0 && \text{при } \lambda = 1, \\ &= e\left(\frac{hu}{8}\right) \left(\frac{2}{|h|}\right)^{\lambda+1} \left(\frac{h}{u}\right) i^{(1-u)/2} (2q)^{1/2} && \text{при } \lambda \geq 2. \end{aligned}$$

Это следует из лемм 3, 5 и 6.

Лемма 8. Если $(h_1 h_2, u) = 1$, то

$$S(h_1, u) = \left(\frac{h_1 h_2}{u}\right) S(h_2, u).$$

Это непосредственно следует из леммы 6.

Лемма 9 ([3], стр. 149, форм. 2.413). Если $H = h_1 q_2 + h_2 q_1$, $(h_1, q_1) = (h_2, q_2) = (q_1, q_2) = 1$, то

$$S(aH, q_1 q_2) = S(ah_1, q_1) S(ah_2, q_2).$$

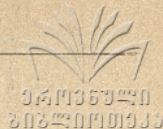
Лемма 10 ([8], стр. 42, лемма 45). Если $k \neq 0$, N — четное, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \equiv 0 \pmod{2N}$ и $k_1 = \gamma h + \delta k \neq 0$, то

$$\begin{aligned} &S\left(\frac{\alpha h + \beta k}{\gamma h + \delta k}; c, N\right) = \\ &= e\left(-\frac{\operatorname{sgn} k_1 \cdot k_1}{8}\right) e\left(\frac{\operatorname{sgn} \gamma \delta}{8}\right) \left(\frac{k_1}{k\delta}\right)^{1/2} S\left(\frac{\beta}{\delta}; c, N\right) S\left(\frac{h}{k}; \alpha c, N\right). \end{aligned}$$

Лемма 11 (см., напр., [11], стр. 176, лемма 7).

$$c(h, q) = \sum_{d|(h, q)} d^\mu \left(\frac{q}{d}\right).$$

Лемма 12 (см., напр., [11], стр. 177, форм. (20)). Если $q = p^\lambda$ и $p^\times \parallel h$, то



$$\begin{aligned}
 c(h, q) &= 0 && \text{при } \kappa < \lambda - 1, \\
 &= -p^{\lambda-1} && \text{при } \kappa = \lambda - 1, \\
 &= p^{\lambda-1}(p-1) && \text{при } \kappa > \lambda - 1.
 \end{aligned}$$

Лемма 13 ([1], стр. 27, лемма 6). Если $p^\kappa || h$, то

$$\begin{aligned}
 \tau(h, p^\lambda) &= 0 && \text{при } \kappa \neq \lambda - 1, \\
 &= p^{\lambda-1/2} \left(\frac{p^{-\kappa} h}{p} \right) I(p) && \text{при } \kappa = \lambda - 1.
 \end{aligned}$$

Лемма 14 (см., напр., [11], стр. 126, лемма 1). Пусть непрерывная функция $f(t)$ определена в интервале $0 \leq t < \infty$, в котором ее действительная и мнимая части имеют ограниченное изменение. Кроме того,

пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ и интеграл $\int_0^\infty f(t) dt$ существует. Тогда

$$\int_0^\infty f(t) dt + 2 \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty f(t) \cos 2m\pi t dt = \frac{1}{2} f(0) + \sum_{m=1}^\infty f(m).$$

Лемма 15 (см., напр., [8], стр. 31, лемма 31). При $\operatorname{Re}(\zeta + \zeta) > 1$, интеграл

$$U(\zeta; \zeta, \tau, \nu) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e(-\nu t) dt}{(t + \tau)\zeta |t + \tau|^s}$$

абсолютно сходится. Функция $U(\zeta; \zeta, \tau, \nu)$ обладает следующими свойствами:

- 1) при $\nu \neq 0$ она может быть продолжена во всю ζ -плоскость;
- 2) $U(\zeta; \zeta, \tau, 0)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(\zeta + \zeta) > 1$;
- 3) если D ограниченная область ζ -плоскости и $\nu \neq 0$, то в D имеет место неравенство

$$|U(\zeta; \zeta, \tau, \nu)| < K \exp(-K' |\nu|),$$

где K и K' не зависят ни от ν , ни от ζ ; если $\nu = 0$, то это неравенство имеет место также и при $\operatorname{Re} \zeta > 1 - \operatorname{Re} \zeta$;

$$\begin{aligned}
 4) U(0; \zeta, \tau, \nu) &= 0 && \text{при } \nu < 0, \\
 &= \Gamma^{-1}(\zeta) e\left(\frac{-\zeta}{4}\right) (2\pi)^\zeta \nu^{\zeta-1} e(\tau \nu) && \text{при } \nu > 0 \text{ и } \zeta \neq 0, -1, -2, \dots,
 \end{aligned}$$

$$U(0; \zeta, \tau, 0) = 0 \quad \text{при } \operatorname{Re} \zeta > 1 \text{ и при } \zeta = 1.$$

§ 4. В этом параграфе формально строится сингулярный ряд соответствующий функции $r(n)$.

Положив

$$M = 4a a' n,$$

уравнение (2.2) примет вид

$$M = a'(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + ay_4^2, \quad (4.1)$$

где $y_1, y_2, y_3 \equiv 0 \pmod{2a}$ и $y_4 \equiv 0 \pmod{2a'}$.

Обозначим через $R(M)$ число решений уравнения (4.1). Очевидно

$$r(n) = R(M). \quad (4.2)$$

Из (1.5) и (4.1) следует

$$\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2a) \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a') = 1 + \sum_{M=1}^{\infty} R(M) Q^M. \quad (4.3)$$

$$M \equiv 0 \pmod{4a a'}$$

Полагая

$$e(\tau) = W e\left(\frac{h}{q}\right), \quad (h, q) = 1, \quad 0 < W < 1, \quad W \rightarrow 1 \quad (4.4)$$

и рассуждая также, как и в работе [6], получим

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2a) \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a') \sim \\ & \sim \frac{\pi^2}{4a(aa')^{3/2} q^4} \widetilde{S}(h, q) \sum_{M=1}^{\infty} M e\left(-\frac{hM}{4aa'q}\right) Q^M, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$M \equiv 0 \pmod{4aa'},$$

где ради сокращения положено

$$\widetilde{S}(h, q) = S^3(ah, q) S(a'h, q).$$

Положим

$$\begin{aligned} \Theta(\tau) = \Theta(\tau; a, a') &= 1 + \sum_{M=1}^{\infty} \rho(M; a, a') Q^M, \\ M &\equiv 0 \pmod{4a a'} \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\rho(M; a, a')$ определено следующим образом

$$\rho(M; a, a') = \frac{\pi^2}{4a(aa')^{3/2}} M \sum_{q=1}^{\infty} A(q), \quad (4.7)$$

$$A(q) = q^{-4} \sum'_{h \pmod{q}} e\left(-\frac{Mh}{4aa'q}\right) \widetilde{S}(h, q). \quad (4.8)$$



Согласно (4.5)–(4.8), функции $\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2a) \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a')$ и $\Theta(\tau)$ ведут себя одинаково при приближении к рациональным точкам.

Ряд (4.7) является искомым сингулярным рядом.

§ 5. В этом параграфе рассматриваются некоторые свойства тэта-функций с характеристиками.

Лемма 16 ([6], стр. 153, лемма 14). *Тождество*

$$\vartheta_{gh}(\tau; c, N) = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$g \equiv N - 2c \pmod{2N}, \quad h \equiv 1 \pmod{2}.$$

Лемма 17 ([12], стр. 84, лемма 7). *При четном g , для каждой подстановки группы $\Gamma(2N)$, имеет место*

$$\begin{aligned} \vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0; N\right) &= e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2h^2}{8N}\right) i^{\operatorname{sgn} \gamma(\operatorname{sgn} \delta - 1)/2} \frac{(\gamma\tau+\delta)^{1/2}}{|\delta|^{1/2}} \\ &\times S\left(\frac{1}{2} \beta N \operatorname{sgn} \delta, |\delta|\right) \vartheta_{gh}(\tau; 0, N). \end{aligned}$$

Лемма 18 ([12], стр. 86, лемма 8). *Если g и N — четные, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, то в окрестности*

$$\tau = -\frac{\delta}{\gamma} \quad (\gamma \neq 0, (\gamma, \delta) = 1)$$

имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^{1/2} \vartheta_{gh}(\tau; c, N) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e\left(\frac{n}{2N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right), \quad \text{если } 2 \nmid \gamma h,$$

$$(\gamma\tau+\delta)^{1/2} \vartheta_{gh}(\tau; c, N) = e\left(\frac{1}{8N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} D_n e\left(\frac{n}{2N} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right), \quad \text{если } 2 \nmid \gamma h.$$

Лемма 19. *Функция $\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2a) \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a')$ является целой модулярной формой степени $4aa'$ и измерения — 2.*

Доказательство. Согласно (1.5) и (4.3), функция $\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2a) \times \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a')$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 1.

Заметим, что каждая подстановка группы $\Gamma(4aa')$ является также и подстановкой групп $\Gamma(4a)$ и $\Gamma(4a')$. Поэтому, согласно лемм 19 и 6, для каждой подстановки группы $\Gamma(4aa')$ имеет место

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^3\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 2a\right) \vartheta_{00}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 2a'\right) &= \\ &= (\gamma\tau+\delta)^2 \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2a) \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a'), \end{aligned}$$

ибо, в силу $|\bar{\delta}| \equiv \pm 1 \pmod{4aa'}$, имеем $\left(\frac{aa'}{|\bar{\delta}|}\right) = 1$. Условие 2) определения таким образом выполнено.

Согласно лемме 20, в окрестности

$$\tau = -\frac{\bar{\delta}}{\gamma} \quad (\gamma \neq 0, \quad (\gamma, \bar{\delta}) = 1, \quad \alpha\bar{\delta} - \beta\gamma = 1)$$

имеет место разложение

$$(\gamma\tau + \bar{\delta})^2 \mathfrak{H}_{00}^3(\tau; 0, 2a) \mathfrak{H}_{00}(\tau; 0, 2a') = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e\left(\frac{n}{4aa'} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \bar{\delta}}\right).$$

Следовательно, условие 4) определения 1 также выполнено.

§ 6. В этом параграфе с помощью метода Стрефверка будет показано, что функция $\Theta(\tau)$, определенная в (4.6) — (4.8), является целой модулярной формой.

Введем вспомогательную функцию

$$\Theta(\tau, \zeta) = 1 - \frac{1}{8a(aa')^{1/2}} \sum_{\substack{q, H = -\infty \\ (H, q) = 1}}^{\infty} \frac{\widetilde{S}(-H \operatorname{sgn} q, |q|)}{q^2(q\tau + H)^2} |q\tau + H|^{-\zeta}, \quad (6.1)$$

здесь штрих обозначает, что отсутствуют члены с $q=0$. В силу леммы 4, $\Theta(\tau, \zeta)$ является регулярной функцией от ζ при $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

Лемма 20. Пусть

$$A(q, \zeta) = q^{-\frac{1}{2}-\zeta} \sum'_{h \bmod q} e\left(-\frac{mh}{4aa'q}\right) \widetilde{S}(h, q). \quad (6.2)$$

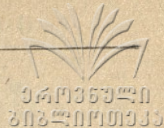
Тогда при $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\Theta(\tau, \zeta) = 1 - 2^{-\frac{1}{2}-2\zeta} a'(aa')^{-\frac{5}{2}-\zeta} \sum_{\substack{m = -\infty \\ m \equiv 0 \pmod{4aa'}}}^{\infty} T(m, \zeta) V(m, \zeta), \quad (6.3)$$

где

$$T(m, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e(-mt) \left(\frac{\tau}{4aa'} + t\right)^{-2} \left|\frac{\tau}{4aa'} + t\right|^{-\zeta} dt, \quad (6.4)$$

$$V(m, \zeta) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q, \zeta). \quad (6.5)$$



Доказательство. При $\operatorname{Re} \chi > 0$ из (6.1) следует

$$\Theta(\tau, \chi) = 1 - \frac{1}{4a(aa')^{1/2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{H=-\infty \\ (H, q)=1}}^{\infty} \frac{\widetilde{S}(-H, q)}{q^2(q\tau + H)^2} |q\tau + H|^{-s}.$$

Положив здесь $H = g + 4aa'qm$, получим

$$\begin{aligned} \Theta(\tau, \chi) &= 1 - a'(4aa')^{-3-s} (aa')^{-1/2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4-s} \sum_{\substack{g \bmod 4aa'q \\ (g, q)=1}} \widetilde{S}(-g, q) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{4aa'} + \frac{g}{4aa'q} + m \right)^{-2} \left| \frac{\tau}{4aa'} + \frac{g}{4aa'q} + m \right|^{-s}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Если в (6.4) положить $t = w + \frac{g}{4aa'q}$, то, согласно лемме 14, получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{4aa'} + \frac{g}{4aa'q} + m \right)^{-2} \left| \frac{\tau}{4aa'} + \frac{g}{4aa'q} + m \right|^{-s} &= \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e\left(\frac{mg}{4aa'q}\right) T(m, \chi). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из (6.6) и (6.7), в силу $\operatorname{Re} \chi > 0$, следует

$$\begin{aligned} \Theta(\tau, \chi) &= 1 - 2^{-6-2s} a' (aa')^{-7/2-s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T(m, \chi) \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4-s} \\ &\times \sum_{\substack{g \bmod 4aa'q \\ (g, q)=1}} e\left(\frac{mg}{4aa'q}\right) \widetilde{S}(-g, q). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Положив $g = h + jq$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{g \bmod 4aa'q \\ (g, q)=1}} e\left(\frac{mg}{4aa'q}\right) \widetilde{S}(-g, q) &= \sum_{\substack{h=1 \\ (h, q)=1}}^q e\left(-\frac{mh}{4aa'q}\right) \widetilde{S}(-h, q) \sum_{j=0}^{4aa'-1} e\left(\frac{mj}{4aa'}\right) \\ &= 4aa' \sum'_{h \bmod q} e\left(-\frac{mh}{4aa'q}\right) \widetilde{S}(h, q), \text{ если } m \equiv 0 \pmod{4aa'}; \end{aligned} \quad (6.9)$$

если же $m \not\equiv 0 \pmod{4aa'}$, то получим 0.

06.03.50-20
203-010033

Из (6.8) и (6.9) следует утверждаемое.

Лемма 21. Пусть $m \equiv 0 \pmod{4aa'}$ и $p > 2$. Тогда при $\operatorname{Re} \tau > -\frac{1}{2}$,

$$|A(p^\lambda, \tau)| < K p^{-3\lambda/2} \sum_{d|(m, p^\lambda)} d, \quad (6.10)$$

где K не зависит ни от p^λ , ни от m , ни от τ .

Доказательство. Пусть q нечетное и

$$q = (q, a)q_1, \quad a = (q, a)a_1; \quad q' = (q, a')q'_1, \quad a' = (q, a')a'_1. \quad (6.11)$$

Из (6.2), (6.11), лемм 2 и 6 следует

$$\begin{aligned} A(q, \tau) &= q^{-2-\tau} (q, a)^{3/2} (q, a')^{1/2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right) \left(\frac{a'_1}{q'_1} \right) I^3(q_1) I(q'_1) \\ &\times \sum'_{h \bmod q} e\left(-\frac{mh}{4aa'q}\right) \left(\frac{h}{q_1 q'_1} \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

В (6.12) положим

$$q = p^\lambda, \quad p^l \parallel aa', \quad p^\kappa \parallel \frac{m}{4aa'}$$

и, в силу (2.4), рассмотрим следующие два случая: $p \nmid a'$ и $p \mid a'$.

1) Пусть $p \nmid a'$. Тогда, согласно (6.11),

$$\begin{aligned} A(p^\lambda, \tau) &= p^{-\lambda(2+\tau)} \cdot p^{3/2 \min(\lambda, l)} \left(\frac{-1}{p} \right)^{\min(\lambda, l)} \left(\frac{p - \min(\lambda, l)}{p} a \right)^{\lambda - \min(\lambda, l)} \\ &\times \left(\frac{a'}{p} \right)^\lambda I^3 \left(p^{\lambda - \min(\lambda, l)} \right) I(p^\lambda) \sum'_{h \bmod p^\lambda} e\left(\frac{mh}{4aa'p^\lambda} \right) \left(\frac{h}{p} \right)^{\min(\lambda, l)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из (6.13) при $\min(\lambda, l) \equiv 0 \pmod{2}$, согласно лемме 11, получаем

$$|A(p^\lambda, \tau)| \leq p^{-\lambda(2+\operatorname{Re} \tau)} \cdot p^{3l/2} \sum_{d|(m, p^\lambda)} d \leq a^{3/2 - \lambda(2+\operatorname{Re} \tau)} \sum_{d|(m, p^\lambda)} d,$$

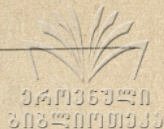
откуда следует утверждаемое в рассматриваемом случае.

Из (6.13) при $\min(\lambda, l) \equiv 1 \pmod{2}$, согласно лемме 13, получаем

$$|A(p^\lambda, \tau)| \leq p^{-\lambda(2+\operatorname{Re} \tau)} \cdot p^{3l/2} \cdot p^{\kappa+1/2} \leq a^2 \cdot p^{-\lambda(2+\operatorname{Re} \tau)} \sum_{d|(m, p^\lambda)} d,$$

если $\kappa = \lambda - 1$; если же $\kappa \neq \lambda - 1$, то получаем

$$A(p^\lambda, \tau) = 0.$$



2) Пусть $p \nmid a$. Тогда согласно (6.11),

$$A(p^\lambda, \tau) = p^{-\lambda(2+s)} \cdot p^{\min(\lambda, l)/2} \left(\frac{a}{p} \right)^\lambda \left(\frac{p^{-\min(\lambda, l)} a'}{p} \right)^{\lambda - \min(\lambda, l)} \times \left(\frac{-1}{p} \right)^{\min(\lambda, l)} I^3(p^\lambda) I(p^\lambda - \min(\lambda, l)) \sum_{h \bmod p^\lambda} e \left(\frac{mh}{4aa'p^\lambda} \right) \left(\frac{h}{p} \right)^{\min(\lambda, l)}. \quad (6.14)$$

Из (6.14) утверждаемое следует так же, как и в случае 1).

Лемма 22. Пусть $m \equiv 0 \pmod{4aa'}$. Тогда при $\operatorname{Re} \tau > -\frac{1}{2}$,

$$|A(2^\lambda, \tau)| < K \cdot 2^{-3\lambda/2} \sum_{d|(m, 2^\lambda)} d, \quad (6.15)$$

где K не зависит ни от 2^λ , ни от m , ни от τ .

Доказательство. Пусть

$$a = 2^\gamma b \quad (\gamma \geq 0), \quad a' = 2^{\gamma'} b' \quad (\gamma' \geq 0),$$

причем, согласно (2.4),

$$\min(\gamma, \gamma') = 0, \quad (b, b') = 1. \quad (6.16)$$

Если в (6.2) вместо h ввести новую букву суммирования k , определенную с помощью сравнения $h \equiv bb'k \pmod{2^\lambda}$, то получим

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+s)} \sum_{k \bmod 2^\lambda} e \left(-\frac{mk}{2^{\lambda+\gamma+\gamma'+2}} \right) S^3(2^\gamma b^2 b' k, 2^\lambda) S(2^{\gamma'} b b'^2 k, 2^\lambda). \quad (6.17)$$

Из (6.17), согласно лемм 2 и 5, получаем:

1) если $\gamma = 0$, то

11) при $\lambda = 1$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 0; \quad (6.18)$$

121) при $2 \leq \lambda \leq \gamma'$, $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+s)} \cdot 2^{\lambda/2+1} \left\{ c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'} b' - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) - c \left(\frac{m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) \right\}; \quad (6.19)$$

122) при $2 \leq \lambda \leq \gamma'$, $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$,

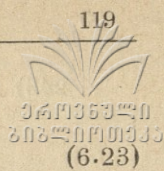
$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+s)} \cdot 2^{(\lambda+3)/2} c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'-1} \cdot 3b' - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right); \quad (6.20)$$

13) при $\lambda = \gamma' + 1$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 0; \quad (6.21)$$

141) при $\lambda > \gamma' + 1$, $\lambda \equiv \gamma' \pmod{2}$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+s)+\gamma'/2+1} \left\{ c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'} b' - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) + ((-1)^{(b+b')/2} - 1) c \left(\frac{m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) - c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'} b - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) \right\}; \quad (6.22)$$



142) при $\lambda > \gamma' + 1$, $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$, $\gamma' \equiv 0 \pmod{2}$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)+\gamma'/2+2} c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'-1}(3b'+b)-m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right); \quad (6.23)$$

143) при $\lambda > \gamma' + 1$, $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$, $\gamma' \equiv 1 \pmod{2}$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)+(\gamma'+3)/2} \left\{ c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'}b' + 2^{\lambda+\gamma'-1}b - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) - c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'-1}b - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) \right\}; \quad (6.24)$$

144) при $\lambda > \gamma' + 1$, $\lambda \equiv \gamma' \equiv 1 \pmod{2}$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)+(\gamma'+3)/2} \left\{ c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'-1}3b' - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) + c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma'-1}3b' + 2^{\lambda+\gamma'}b - m}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda \right) \right\}. \quad (6.25)$$

2) если $\gamma' = 0$, то

21) при $\lambda = 1$

$$A(2^\lambda, \tau) = 0; \quad (6.26)$$

221) при $2 \leq \lambda \leq \gamma$, $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)} \cdot 2^{3\lambda/2} \left\{ c \left(\frac{m}{2^{\gamma+2}}, 2^\lambda \right) + c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma}b - m}{2^{\gamma+2}}, 2^\lambda \right) \right\}; \quad (6.27)$$

222) при $2 \leq \lambda \leq \gamma$, $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)} \cdot 2^{(3\lambda+1)/2} c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma-1}b - m}{2^{\gamma+2}}, 2^\lambda \right); \quad (6.28)$$

23) при $\lambda = \gamma + 1$

$$A(2^\lambda, \tau) = 0; \quad (6.29)$$

241) при $\lambda > \gamma + 1$, $\lambda \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)+3\gamma/2+1} \left\{ c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma}b' - m}{2^{\gamma+2}}, 2^\lambda \right) + ((-1)^{(b+b')/2} - 1) c \left(\frac{m}{2^{\gamma+2}}, 2^\lambda \right) - c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma}b - m}{2^{\gamma+2}}, 2^\lambda \right) \right\}; \quad (6.30)$$

242) при $\lambda > \gamma + 1$, $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$, $\gamma \equiv 0 \pmod{2}$,

$$A(2^\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)} \cdot 2^{3\gamma/2+2} c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma-1}(b+3b') - m}{2^{\gamma+2}}, 2^\lambda \right); \quad (6.31)$$



243) при $\lambda > \gamma + 1$, $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$, $\gamma \equiv 1 \pmod{2}$,

$$A(2\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)} \cdot 2^{3(\gamma+1)/2} \left\{ c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma-1} \cdot 3b' - m}{2^{\gamma+2}}, 2\lambda \right) + c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma} b + 2^{\lambda+\gamma-1} \cdot 3b' - m}{2^{\gamma+2}}, 2\lambda \right) \right\}; \quad (6.32)$$

244) при $\lambda > \gamma + 1$, $\lambda = \gamma \equiv 1 \pmod{2}$,

$$A(2\lambda, \tau) = 2^{-\lambda(2+\varepsilon)} \cdot 2^{3(\gamma+1)/2} \left\{ c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma} b' + 2^{\lambda+\gamma-1} b - m}{2^{\gamma+2}}, 2\lambda \right) - c \left(\frac{2^{\lambda+\gamma-1} b - m}{2^{\gamma+2}}, 2\lambda \right) \right\}. \quad (6.33)$$

Из (6.18)—(6.33), согласно лемме 11, следует

$$|A(2\lambda, \tau)| < K \cdot 2^{-\lambda(2+\operatorname{Re} \varepsilon)} \sum_{d|(m, 2\lambda)} d, \quad (6.34)$$

откуда получаем утверждаемое.

Лемма 23. Функция $V(m, \tau)$, определенная при помощи (6.5) и (6.2), в полуплоскости $\operatorname{Re} \tau > -\frac{1}{2}$ является регулярной функцией от τ и там

$$|V(m, \tau)| < K m^2, \quad (6.35)$$

где K не зависит ни от q , ни от m , ни от τ .

Доказательство. Если $(q_1, q_2) = 1$, то

$$A(q_1, \tau) A(q_2, \tau) = (q_1 q_2)^{-4-\varepsilon} \sum'_{h_1 \bmod q_1} \sum'_{h_2 \bmod q_2} \widetilde{S}(h_1, q_1) \widetilde{S}(h_2, q_2) e \left(-\frac{Hm}{4aa' q_1 q_2} \right),$$

где $H = h_1 q_2 + h_2 q_1$ пробегает приведенную систему вычетов $\bmod q_1 q_2$. Следовательно, согласно лемме 9,

$$A(q_1, \tau) A(q_2, \tau) = A(q_1 q_2, \tau).$$

Таким образом, согласно лемм 21 и 22, при $\operatorname{Re} \tau > -\frac{1}{2}$ имеем

$$|A(q, \tau)| < K q^{-3/2} \sum_{d|(m, q)} d < K q^{-3/2} m^2.$$

Следовательно, ряд $\sum A(q, \tau)$ абсолютно и равномерно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} \tau > -\frac{1}{2}$. Кроме того, при $\operatorname{Re} \tau > -\frac{1}{2}$ имеем

$$|V(m, \tau)| < K m^2.$$

Лемма 24. Функция $\Theta(\tau, \zeta)$ аналитически продолжима в область $\text{Re } \zeta > -\frac{1}{2}$.

Доказательство. Функция $\Theta(\tau, \zeta)$ в полуплоскости $\text{Re } \zeta > 0$ регулярна. Пусть D произвольная ограниченная область полуплоскости $\text{Re } \zeta > -\frac{1}{2}$.

Согласно (6.4) и лемме 15, функция

$$T(m, \zeta) = U\left(\zeta; 2, \frac{\tau}{4aa'}, m\right) \quad (6.36)$$

регулярна в D и там

$$|T(m, \zeta)| < K \exp(-K'|m|). \quad (6.37)$$

Согласно лемме 23 функция $V(m, \zeta)$ также регулярна в D . Из (6.35) и (6.37) следует, что в D

$$|T(m, \zeta)V(m, \zeta)| < K m^2 \exp(-K'|m|).$$

Таким образом ряд

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \equiv 0 \pmod{4aa'}}}^{\infty} T(m, \zeta) V(m, \zeta)$$

абсолютно и равномерно сходится в D и представляет там регулярную функцию от ζ . Следовательно, согласно (6.3),

$$1 - 2^{-4-2\varepsilon} a'(aa')^{-5/2-\varepsilon} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \equiv 0 \pmod{4aa'}}}^{\infty} T(m, \zeta) V(m, \zeta)$$

является искомым аналитическим продолжением $\Theta(\tau, \zeta)$ в полуплоскость $\text{Re } \zeta > -\frac{1}{2}$.

Лемма 25. Функция $\theta(\tau)$ определенная с помощью (4.6) — (4.8) является регулярной и однозначной при $\text{Im } \tau > 0$.

Доказательство. Область D в полуплоскости $\text{Re } \zeta > -\frac{1}{2}$ выберем так чтобы она содержала точку $\zeta=0$. Тогда согласно (6.3), (6.36), лемм 15, 23 и 24

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \theta(\tau, \zeta) = 1 + 2^{-2} a'(aa')^{-5/2} \pi^2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv 0 \pmod{4aa'}}}^{\infty} m e\left(\frac{m\tau}{4aa'}\right) V(m, 0). \quad (6.38)$$

Из (4.8) и (6.2) следует

$$A(q) = A(q, 0), \quad (6.39)$$

следовательно, согласно (6.5),

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = V(M, 0). \quad (6.40)$$

Из (4.6), (4.7), (6.40) и (6.38) следует

$$\theta(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \theta(\tau, \zeta). \quad (6.41)$$

Из (6.41), (6.38) и (6.35) получаем утверждаемое.

Лемма 26. Для каждой подстановки группы $\Gamma(4aa')$ имеет место

$$\theta\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = (\gamma\tau + \delta)^2 \theta(\tau).$$

Доказательство. Заменяя в (6.1)

$$\tau \text{ через } \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

и написав

$$\begin{aligned} \alpha q + \gamma H &= q_0, & \text{т. е.} & \quad \delta q_0 - \gamma H_0 = q, \\ \beta q + \delta H &= H_0, & & \quad -\beta q_0 + \alpha H_0 = H, \end{aligned} \quad (6.42)$$

получим

$$\theta\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \zeta\right) = 1 - \frac{1}{8a(aa')^{1/2}} \sum_{\substack{q, H = -\infty \\ (H, q) = 1}}^{\infty} \frac{\widetilde{S}(-H \operatorname{sgn} q, |q|)}{q^2 \left(\frac{q_0\tau + H_0}{\gamma\tau + \delta}\right)^2} \left|\frac{\gamma\tau + \delta}{q_0\tau + H_0}\right|^{\zeta}. \quad (6.43)$$

Введем теперь в (6.43) новые буквы суммирования q_0 и H_0 вместо q и H . Для этого заметим, что в сумме отсутствуют члены с $q=0$, $H=\pm 1$ и рассмотрим в отдельности случаи: $\gamma \neq 0$ и $\gamma=0$.

1) Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда в новых буквах суммирования должны отсутствовать члены с $q_0=\gamma$, $H_0=\delta$ и $q_0=-\gamma$, $H_0=-\delta$. Члены с $q=-\gamma$, $H=\alpha$ и с $q=\gamma$, $H=-\alpha$ будем теперь иметь при $q_0=0$, $H_0=\pm 1$. Следовательно, при $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \zeta\right) &= 1 - \frac{1}{4a(aa')^{1/2}} (\gamma\tau + \delta)^2 |\gamma\tau + \delta|^{\zeta} \gamma^{-2} \widetilde{S}(\alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) \\ &- \frac{1}{8a(aa')^{1/2}} (\gamma\tau + \delta)^2 |\gamma\tau + \delta|^{\zeta} \sum_{\substack{q_0, H_0 = -\infty \\ (H_0, q_0) = 1}}^{\infty} \frac{\widetilde{S}(-H \operatorname{sgn} q, |q|)}{q^2 (q_0\tau + H_0)^2} |q_0\tau + H_0|^{-\zeta}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

где ради сокращения положено $H = \alpha H_0 - \beta q_0$ и $q = \delta q_0 - \gamma H_0$. Далее, двойные штриха обозначают, что отсутствуют члены с $q_0 = 0$, $H_0 = \pm 1$, с $q_0 = \gamma$, $H_0 = \delta$ и с $q_0 = -\gamma$, $H_0 = -\delta$.

Переходим к вычислению величины $\widetilde{S}(\alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|)$. Очевидно

$$S(a \alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) = S(a |\alpha| \operatorname{sgn} \alpha \gamma, |\gamma|). \quad (6.45)$$

Так как

$$\left(\frac{-a \beta \operatorname{sgn} \alpha \cdot a |\gamma| \operatorname{sgn} \gamma \cdot \operatorname{sgn} \alpha}{|\alpha|} \right) = \left(\frac{-\beta \gamma}{|\alpha|} \right) = \left(\frac{1 - \alpha \delta}{|\alpha|} \right) = 1,$$

то, согласно лемме 8,

$$S(-a \beta \operatorname{sgn} \alpha, |\alpha|) = S(a |\gamma| \operatorname{sgn} \alpha \gamma, |\alpha|). \quad (6.46)$$

Из (6.45) и (6.46), согласно лемм 3, 2 и 7 следует

$$\begin{aligned} S(a \alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) S(-a \beta \operatorname{sgn} \alpha, |\alpha|) &= S(a \operatorname{sgn} \alpha \gamma, |\alpha \gamma|) \\ &= a S\left(\operatorname{sgn} \alpha \gamma, \frac{|\alpha \gamma|}{a}\right) = a e\left(\frac{\operatorname{sgn} \alpha \gamma \cdot u}{8}\right) \left(\frac{\operatorname{sgn} \alpha \gamma}{u}\right)_i^{\frac{1}{2}(1-u)} \left(2 \frac{|\alpha \gamma|}{a}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где положено $\frac{|\alpha \gamma|}{a} = 2\lambda u$. Рассмотрев в отдельности случаи $\alpha \gamma > 0$ и $\alpha \gamma < 0$, получаем

$$S(a \alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) S(-a \beta \operatorname{sgn} \alpha, |\alpha|) = e\left(\frac{\operatorname{sgn} \alpha \gamma}{8}\right) (2a |\alpha \gamma|)^{1/2}, \quad (6.47)$$

аналогично

$$S(a' \alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) S(-a' \beta \operatorname{sgn} \alpha, |\alpha|) = e\left(\frac{\operatorname{sgn} \alpha \gamma}{8}\right) (2a' |\alpha \gamma|)^{1/2}.$$

Таким образом

$$\widetilde{S}(\alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) \widetilde{S}(-\beta \operatorname{sgn} \alpha, |\alpha|) = -4\alpha^2 \gamma^2 a (aa')^{1/2}. \quad (6.48)$$

Так как $|\alpha| \equiv \pm 1 \pmod{4aa'}$, то согласно лемме 6,

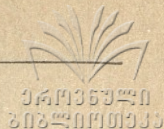
$$\widetilde{S}(-\beta \operatorname{sgn} \alpha, |\alpha|) = \left(\frac{aa'}{|\alpha|}\right) \alpha^2 = \alpha^2. \quad (6.49)$$

Из (6.48) и (6.49) следует

$$\widetilde{S}(\alpha \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) = -4\gamma^2 a (aa')^{1/2}. \quad (6.50)$$

Из (1.1), (1.2), (6.40) и леммы 10 следует

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(-H \operatorname{sgn} q, |q|) &= S^3\left(-\frac{H}{q}; 0, 2a\right) S\left(-\frac{H}{q}; 0, 2a'\right) \\ &= S^3\left(\frac{-\alpha H_0 + \beta q_0}{-\gamma H_0 + \delta q_0}; 0, 2a\right) S\left(\frac{-\alpha H_0 + \beta q_0}{-\gamma H_0 + \delta q_0}; 0, 2a'\right) \\ &= \frac{q^2}{q_0^2 \delta^2} \widetilde{S}(\beta \operatorname{sgn} \delta, |\delta|) \widetilde{S}(-H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|). \end{aligned} \quad (6.51)$$



В (6.49) вместо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ взяв $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$, получим

$$\widetilde{S}(\beta \operatorname{sgn} \delta, |\delta|) = \delta^2. \quad (6.52)$$

Из (6.51) и (6.52) следует

$$q_0^2 \widetilde{S}(-H \operatorname{sgn} q, |q|) = q^2 \widetilde{S}(-H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|). \quad (6.53)$$

В (6.48) вместо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ взяв $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$, получим

$$\widetilde{S}(\beta \operatorname{sgn} \delta, |\delta|) \widetilde{S}(-\delta \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) = -4\delta^2 \gamma^2 a(aa')^{1/2}. \quad (6.54)$$

Из (6.54) и (6.52) следует

$$\widetilde{S}(-\delta \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|) = -4\gamma^2 a(aa')^{1/2}. \quad (6.55)$$

Из (6.44), (6.50) и (6.53) следует

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \tau\right) &= 1 + (\gamma\tau + \delta)^2 |\gamma\tau + \delta|^{-2} + \frac{\widetilde{S}(-\delta \operatorname{sgn} \gamma, |\gamma|)}{4a(aa')^{1/2} \gamma^2} \\ &- \frac{1}{8a(aa')^{1/2}} (\gamma\tau + \delta)^2 |\gamma\tau + \delta|^{-2} \sum_{q_0, H_0 = -\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{S}(-H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|)}{q_0^2 (q_0 \tau + H_0)^2} |q_0 \tau + H_0|^{-2}, \quad (6.56) \\ (H_0, q_0) &= 1 \end{aligned}$$

здесь штрих обозначает, что отсутствуют лишь члены с q_0 . Написав q, H вместо q_0, H_0 и приняв во внимание (6.55), из (6.56) и (6.1) получим при $\operatorname{Re} \tau > 0$

$$\theta\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \tau\right) = (\gamma\tau + \delta)^2 |\gamma\tau + \delta|^{-2} \theta(\tau, \tau).$$

Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, согласно (6.41), получим утверждаемое.

2) Пусть $\gamma = 0$. Так как $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4aa'}$, то в этом случае $\alpha = \delta = 1$. Следовательно, в новых буквах суммирования должны отсутствовать члены с $q_0 = 0, H_0 = \pm 1$, что будет обозначено через \sum' . Таким образом, при $\operatorname{Re} \tau > 0$

$$\begin{aligned} \theta(\tau + \beta, \tau) &= 1 - \\ &- \frac{1}{8a(aa')^{1/2}} \sum_{q_0, H_0 = -\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{S}((\beta q_0 - H_0) \operatorname{sgn} q_0, |q_0|)}{q_0^2 (q_0 \tau + H_0)^2} |q_0 \tau + H_0|^{-2}. \quad (6.57) \\ (H_0, q_0) &= 1 \end{aligned}$$

Ввиду

$$\widetilde{S}((\beta q_0 - H_0) \operatorname{sgn} q_0, |q_0|) = \widetilde{S}(-H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|),$$

из (6.57) и (6.1) получим при $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

$$\theta(\tau + \beta, \zeta) = \theta(\tau, \zeta),$$

откуда переходом к пределу получаем утверждаемое.

Лемма 27. *Функция $\theta(\tau)$ удовлетворяет условию 3) определения 1.*

Доказательство. Утверждаемое следует из (6.41), (6.38) и леммы 23.

Лемма 28. *В окрестности*

$$\tau = -\frac{\delta}{\gamma} (\gamma \neq 0, (\gamma, \delta) = 1, \alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

имеет место разложение

$$(\gamma\tau + \delta)^{2\theta(\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e\left(\frac{n}{4\alpha\alpha'} \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 25 из работы [6].

Лемма 29. *Функция $\theta(\tau)$ является целой модулярной формой ступени $4\alpha\alpha'$ и измерения—2.*

Доказательство. Утверждаемое следует из лемм 25—28 и определения 1.

В последующих параграфах, за исключением леммы 34, $-\alpha, \beta, \gamma$ обозначают неотрицательные целые числа, n —натуральные числа, m —положительные нечетные числа.

§ 7. В этом параграфе методом Клоостермана суммируется сингулярный ряд $\rho(M; a, a')$ определенный в (4.7) и (4.8).

Лемма 30. *Положим*

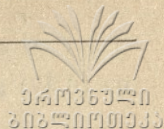
$$\chi_p = 1 + A(p) + A(p^2) + \dots \quad (7.1)$$

Тогда

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_p \chi_p.$$

Доказательство. Как было показано при доказательстве леммы 23, ряд $\sum A(q, \zeta)$ абсолютно и равномерно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > -\frac{1}{2}$ и функция $A(q, \zeta)$ мультипликативна относительно q . Из этого, согласно (6.39), следует утверждаемое.

Лемма 31. *Пусть $n = 2^\alpha m$, $a = 2^\gamma b$, $a' = 2^{\gamma'} b'$, $\min(\gamma, \gamma') = 0$, $(b, b') = 1$. Тогда*



1) *нпу* $\gamma=0$, $\gamma' \equiv 0 \pmod{2}$

$$\begin{aligned}
 \chi_2 &= 3 \cdot 2^{-(\alpha+1)/2}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma' - 3, 2 \nmid \alpha, \\
 &= 3 \cdot 2^{-\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma' - 3, 2 \mid \alpha, bm \equiv 1 \pmod{4}, \\
 &= (1 + (-1)^{(bm-3)/4}) \cdot 2^{-\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma' - 3, 2 \mid \alpha, bm \equiv 3 \pmod{4}, \\
 &= (2 + (-1)^{(bm-1)/2}) \cdot 2^{-\gamma'/2}, & \text{если } \alpha = \gamma' - 2, \\
 &= 3 \cdot 2^{-\gamma'/2}, & \text{если } \alpha = \gamma' - 1, \\
 &= 2^{-\gamma'/2}, & \text{если } \alpha = \gamma', b' \equiv b \pmod{4}, \\
 &= \frac{1}{3} \{ 2(2^{\alpha-\gamma'-1} + 1) + (-1)^{(3b'+b)/4} (2^{\alpha-\gamma'} - 7) 2^{\gamma'/2-\alpha}, \\
 & & \text{если } \alpha > \gamma' + 1, 2 \mid \alpha, b' \equiv b \pmod{4}, \\
 &= (2^{\alpha-\gamma'+1} + (-1)^{(bm-1)/2}) 2^{\gamma'/2-\alpha-1}, \\
 & & \text{если } \alpha \geq \gamma', 2 \nmid \alpha, b' \equiv -b \pmod{4}, \\
 &= \frac{1}{3} \{ 2^{\alpha-\gamma'} + 7 + (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2(2^{\alpha-\gamma'-1} - 1) \} 2^{\gamma'/2-\alpha}, \\
 & & \text{если } \alpha \geq \gamma' + 1, 2 \nmid \alpha, b' \equiv b \pmod{4}, \\
 &= (2^{\alpha-\gamma'+1} + (-1)^{(b+b')/4 + (bm-1)/2}) 2^{\gamma'/2-\alpha-1}, \\
 & & \text{если } \alpha \geq \gamma' + 1, 2 \nmid \alpha, b' \equiv -b \pmod{4};
 \end{aligned}$$

2) *нпу* $\gamma=0$, $\gamma' \equiv 1 \pmod{2}$

$$\begin{aligned}
 \chi_2 &= 3 \cdot 2^{-(\alpha+1)/2}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma' - 2, 2 \nmid \alpha, \\
 &= 3 \cdot 2^{-\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma' - 3, 2 \mid \alpha, bm \equiv 1 \pmod{4}, \\
 &= (1 + (-1)^{(bm-3)/4}) \cdot 2^{-\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma' - 3, 2 \mid \alpha, bm \equiv 3 \pmod{4}, \\
 &= (2^{\alpha-\gamma'+3} + (-1)^{(b+b')/2 + (bm-1)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \\
 & & \text{если } \alpha \geq \gamma' - 1, 2 \mid \alpha, bm \equiv 1 \pmod{4}, \\
 &= (2^{\alpha-\gamma'+3} + (-1)^{(bm-3)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \\
 & & \text{если } \alpha \geq \gamma' - 1, 2 \mid \alpha, bm \equiv 3 \pmod{4}, \\
 &= (2^{\alpha-\gamma'+3} - (-1)^{(b'm-1)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \\
 & & \text{если } \alpha \geq \gamma', 2 \nmid \alpha, b'm \equiv 1 \pmod{4}, \\
 &= (2^{\alpha-\gamma'+3} - (-1)^{(b+b')/2 + (b'm-3)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \\
 & & \text{если } \alpha \geq \gamma', 2 \nmid \alpha, b'm \equiv 3 \pmod{4};
 \end{aligned}$$

3) *нпу* $\gamma'=0$, $\gamma \equiv 0 \pmod{2}$

$$\begin{aligned}
 \chi_2 &= 0, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma - 3, 2 \nmid \alpha, \\
 &= (1 + (-1)^{(b'm-1)/4}) 2^{\alpha/2+1}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma - 3, 2 \mid \alpha, b'm \equiv 1 \pmod{4}, \\
 &= 0, & \text{если } 0 < \alpha \leq \gamma - 3, 2 \mid \alpha, b'm \equiv 3 \pmod{4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_3 &= (1 + (-1)^{(b'm-1)/2}) 2^{\alpha/2}, & \text{если } \alpha = \gamma - 2, \\ &= 0, & \text{если } \alpha = \gamma - 1, \\ &= 2^{\alpha/2}, & \text{если } \alpha = \gamma, b' \equiv b \pmod{4}, \\ &= \frac{1}{3} \{ 2(2^{\alpha-\gamma-1} + 1) + (-1)^{(3b'+b)/4} (2^{\alpha-\gamma-7}) \} 2^{3\gamma/2-\alpha}, \\ & & \text{если } \alpha > \gamma + 1, 2|\alpha, b' \equiv b \pmod{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (2^{\alpha-\gamma+1} + (-1)^{(bm-1)/2}) 2^{3\gamma/2-\alpha-1}, \\ & & \text{если } \alpha \geq \gamma, 2|\alpha, b' \equiv -b \pmod{4}, \\ &= \frac{1}{3} \{ 2^{\alpha-\gamma} + 7 + (-1)^{(3b'+b)/4} 2(2^{\alpha-\gamma-1} - 1) \} 2^{3\gamma/2-\alpha}, \\ & & \text{если } \alpha \geq \gamma + 1, 2 \nmid \alpha, b' \equiv b \pmod{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (2^{\alpha-\gamma+1} + (-1)^{(b+b')/4 + (bm-1)/2}) 2^{3\gamma/2-\alpha-1}, \\ & & \text{если } \alpha \geq \gamma + 1, 2 \nmid \alpha, b' \equiv -b \pmod{4};\end{aligned}$$

4) при $\gamma' = 0, \gamma \equiv 1 \pmod{2}$

$$\begin{aligned}\chi_2 &= 0, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma - 2, 2 \nmid \alpha, \\ &= (1 + (-1)^{(b'm-1)/4}) 2^{\alpha/2+1}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma - 3, 2|\alpha, b'm \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= 0, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \gamma - 3, 2|\alpha, b'm \equiv 3 \pmod{4}, \\ &= (2^{\alpha-\gamma+2} - (-1)^{(b'm-1)/4}) 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \\ & & \text{если } \alpha \geq \gamma - 1, 2|\alpha, b'm \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= (2^{\alpha-\gamma+2} - (-1)^{(b+b')/2 + (b'm-3)/4}) 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \\ & & \text{если } \alpha \geq \gamma - 1, 2|\alpha, b'm \equiv 3 \pmod{4}, \\ &= (2^{\alpha-\gamma+2} + (-1)^{(b+b')/2 + (bm-1)/4}) 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \\ & & \text{если } \alpha \geq \gamma, 2 \nmid \alpha, bm \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= (2^{\alpha-\gamma+2} + (-1)^{(bm-3)/4}) 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \\ & & \text{если } \alpha \geq \gamma, 2 \nmid \alpha, bm \equiv 3 \pmod{4}.\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Пусть $\gamma = 0, \gamma' \equiv 0 \pmod{2}$. Тогда из (7.1), (6.39), (6.18) — (6.23) получим

$$\begin{aligned}\chi_2 &= 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-3} \lambda^{2+1} \left\{ \sum_{h \bmod 2\lambda}' c \left(\frac{hb'}{4} - \frac{hM}{2\lambda + \gamma' + 2} \right) - c \left(\frac{M}{2\gamma' + 2}, 2\lambda \right) \right\} \\ &\lambda \equiv 0 \pmod{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-3\lambda/2+3/2} \sum'_{h \bmod 2\lambda} e\left(\frac{3b'h}{8} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) + \sum_{\lambda=\gamma'+2}^{\infty} 2^{-2\lambda+\gamma'/2+1} \left\{ \sum'_{h \bmod 2\lambda} e\left(\frac{hb}{4} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) \right. \\
& \lambda \equiv 1 \pmod{2} \qquad \qquad \qquad \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\
& \left. - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) + ((-1)^{(b+b')/2} - 1) c\left(\frac{M}{2^{\gamma'+2}}, 2^{\lambda}\right) - \sum'_{h \bmod 2\lambda} e\left(\frac{hb}{4} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) \Big\} \\
& + \sum_{\lambda=\gamma'+2}^{\infty} 2^{-2\lambda+\gamma'/2+2} \sum'_{h \bmod 2\lambda} e\left(\frac{(3b'+b)h}{8} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right). \quad (7.2) \\
& \lambda \equiv 1 \pmod{2}
\end{aligned}$$

Здесь, согласно лемме 12, выражение стоящее в первой сумме по λ равно

$$\begin{aligned}
& 2^{-3\lambda/2+1} \left\{ e\left(\frac{b'}{4} - 2^{\alpha-\lambda} b'b'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{b'x}{2} - 2^{\alpha-\lambda+2} \frac{bb'mx}{2}\right) \right. \\
& \left. - c(2^{\alpha} bb'm, 2^{\lambda}) \right\} = 0, \quad \text{если } \lambda > \alpha + 2, \\
& = (-1)^{(bm-1)/2} \cdot 2^{-\alpha/2-1}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 2, \\
& = 2^{-(\alpha+1)/2}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 1, \\
& = -2^{-\lambda/2}, \quad \text{если } \lambda < \alpha + 1; \quad (7.3)
\end{aligned}$$

выражение стоящее во второй сумме по λ равно

$$\begin{aligned}
& 2^{-3\lambda/2+3/2} e\left(\frac{3b'}{8} - 2^{\alpha-\lambda} bb'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{3b'x}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3} \frac{bb'mx}{4}\right) \\
& = (-1)^{(bm-3)/4} \cdot 2^{-\alpha/2-1}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, \quad bm \equiv 3 \pmod{4}, \\
& = 0, \quad \text{в остальных случаях;} \quad (7.4)
\end{aligned}$$

выражение стоящее в третьей сумме по λ равно

$$\begin{aligned}
& 2^{-2\lambda+\gamma'/2+1} \left\{ e\left(\frac{b'}{4} - 2^{\alpha-\lambda} bb'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{b'x}{2} - 2^{\alpha-\lambda+2} \frac{bb'mx}{2}\right) \right. \\
& \left. + ((-1)^{(b+b')/2} - 1) c(2^{\alpha} bb'm, 2^{\lambda}) \right. \\
& \left. - e\left(\frac{b}{4} - 2^{\alpha-\lambda} bb'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{bx}{2} - 2^{\alpha-\lambda+2} \frac{bb'mx}{2}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{(bm-1)/2} \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha-1}, & \text{если } \lambda = \alpha + 2, \quad b' \equiv -b \pmod{4}, \\
&= 2^{\gamma'/2-\alpha}, & \text{если } \lambda = \alpha + 1, \quad b' \equiv b \pmod{4}, \\
&= -2^{\gamma'/2-\lambda+1}, & \text{если } \lambda < \alpha + 1, \quad b' \equiv b \pmod{4}, \\
&= 0, & \text{в остальных случаях;}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

выражение стоящее в четвертой сумме по λ равно

$$\begin{aligned}
&2^{-2\lambda+\gamma'/2+2} e\left(\frac{3b'+b}{8} - 2^{\alpha-\lambda} b b' m\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{3b'+b}{4} x - 2^{\alpha-\lambda+3} \frac{b' b m x}{4}\right) \\
&= (-1)^{(b+b')/4+(bm-1)/2} \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha-1}, & \text{если } \lambda = \alpha + 2, \quad b' \equiv -b \pmod{4}, \\
&= -(-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha}, & \text{если } \lambda = \alpha + 1, \quad b' \equiv b \pmod{4}, \\
&= (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{-\lambda+\gamma'/2+1}, & \text{если } \lambda < \alpha + 1, \quad b' \equiv b \pmod{4}, \\
&= 0, & \text{в остальных случаях.}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Если $0 \leq \alpha \leq \gamma' - 3$, то из (7.2) — (7.6) следует:

а) при нечетном α

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha-1} 2^{-\lambda/2} + 2^{-(\alpha+1)/2} = 3 \cdot 2^{-(\alpha+1)/2}, \\
\lambda &\equiv 0 \pmod{2}
\end{aligned}$$

б) при четном α и $bm \equiv 1 \pmod{4}$

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{-\lambda/2} + 2^{-\alpha/2-1} = 3 \cdot 2^{-\alpha/2-1}, \\
\lambda &\equiv 0 \pmod{2}
\end{aligned}$$

в) при четном α и $bm \equiv 3 \pmod{4}$

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{-\lambda/2} + (-1)^{(bm-1)/2} \cdot 2^{-\alpha/2-1} + (-1)^{(bm-3)/4} \cdot 2^{-\alpha/2-1} \\
\lambda &\equiv 0 \pmod{2} \\
&= (1 + (-1)^{(bm-3)/4}) \cdot 2^{-\alpha/2-1}.
\end{aligned}$$

Если $\alpha = \gamma' - 2$, то из (7.2) — (7.6) следует

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{-\lambda/2} + (-1)^{(bm-1)/2} \cdot 2^{-\alpha/2-1} = (2 + (-1)^{(bm-1)/2}) \cdot 2^{-\alpha/2-1}, \\
\lambda &\equiv 0 \pmod{2}
\end{aligned}$$

Если $\alpha = \gamma' - 1$, то из (7.2)–(7.6) следует

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha-1} 2^{-\lambda/2} + 2^{-(\alpha+1)/2} = 3 \cdot 2^{-(\alpha+1)/2},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Если $\alpha = \gamma'$, то из (7.2)–(7.6) следует:

а) при $b' \equiv b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{-\lambda/2} = 2^{-\alpha/2},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

б) при $b' \equiv -b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{-\lambda/2} + (-1)^{(bm-1)/2} 2^{\gamma'/2-\alpha-1} = (2 + (-1)^{(bm-1)/2}) \cdot 2^{-\alpha/2-1},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Если $\alpha \geq \gamma' + 1$, то из (7.2)–(7.6) следует:

а) при четном α и $b' \equiv b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-\lambda/2} - \sum_{\lambda=\gamma'+2}^{\alpha} 2^{\gamma'/2-\lambda+1} + \sum_{\lambda=\gamma'+3}^{\alpha-1} (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{-\lambda+\gamma'/2+1}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2} \quad \lambda \equiv 0 \pmod{2} \quad \lambda \equiv 1 \pmod{2}$$

$$- (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha} = \frac{1}{3} \{ 2(2^{\alpha-\gamma'-1} + 1) + (-1)^{(3b'+b)/4} (2^{\alpha-\gamma'} - 7) \} \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha},$$

б) при четном α и $b' \equiv -b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-\lambda/2} + (-1)^{(bm-1)/2} 2^{\gamma'/2-\alpha-1} = (2^{\alpha-\gamma'+1} + (-1)^{(bm-1)/2}) \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha-1},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

с) при нечетном α и $b' \equiv b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-\lambda/2} - \sum_{\lambda=\gamma'+2}^{\alpha-1} 2^{\gamma'/2-\lambda+1} + 2^{\gamma'/2-\alpha} +$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2} \quad \lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{\lambda=\gamma'+3 \\ \lambda \equiv 1 \pmod{2}}}^{\alpha} (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{-\lambda+\gamma'/2+1} \\
& = \frac{1}{3} \{ 2^{\alpha-\gamma'+1} + 7 + (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2(2^{\alpha-\gamma'-1}-1) \} \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha},
\end{aligned}$$

d) при нечетном α и $b' \equiv -b \pmod{4}$

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-\lambda/2} + (-1)^{(b+b')/4+(bm-1)/2} \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha-1} = \\
& \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\
& = (2^{\alpha-\gamma'+1} + (-1)^{(b+b')/4+(bm-1)/2}) \cdot 2^{\gamma'/2-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

2) Пусть $\gamma=0$, $\gamma' \equiv 1 \pmod{2}$. Тогда из (7.1), (6.39), (6.18) — (6.21), (6.24) и (6.25) получим

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-3\lambda/2+1} \left\{ \sum'_{h \bmod 2^\lambda} e\left(\frac{hb'}{4} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) - c\left(\frac{M}{2^{\gamma'+2}}, 2^\lambda\right) \right\} \\
& \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\
& + \sum_{\lambda=2}^{\gamma'} 2^{-3\lambda/2+3/2} \sum'_{h \bmod 2^\lambda} e\left(\frac{3b'h}{4} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) + \\
& \lambda \equiv 1 \pmod{2} \\
& + \sum_{\lambda=\gamma'+2}^{\infty} 2^{-2\lambda+(\gamma'+3)/2} \left\{ \sum'_{h \bmod 2^\lambda} e\left(\frac{hb'}{4} \right. \right. \\
& \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\
& \left. \left. + \frac{hb}{8} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) - \sum'_{h \bmod 2^\lambda} e\left(\frac{hb}{8} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) \right\} + \sum_{\lambda=\gamma'+2}^{\infty} 2^{-2\lambda+(\gamma'+3)/2} \\
& \lambda \equiv 1 \pmod{2} \\
& \times \left\{ \sum'_{h \bmod 2^\lambda} e\left(\frac{3b'h}{8} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) + \sum'_{h \bmod 2^\lambda} \left(\frac{hb}{4} + \frac{3b'h}{8} - \frac{hM}{2^{\lambda+\gamma'+2}}\right) \right\}. \quad (7.7)
\end{aligned}$$

Здесь, также как и в случае 1), значения выражений стоящих в первой и во второй суммах по λ вычисляются по формулам (7.3) и (7.4). Выражение стоящее в третьей сумме по λ равно

$$2^{-2\lambda+(\gamma'+3)/2} \left\{ e \left(\frac{b'}{4} + \frac{b}{8} - 2^{\alpha-\lambda} b b' m \right) \sum_{\kappa=0}^{2^{\lambda-1}-1} e \left(\frac{2b'\kappa}{4} + \frac{b\kappa}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3} \frac{b b' m \kappa}{4} \right) \right. \\ \left. - e \left(\frac{b}{8} - 2^{\alpha-\lambda} b b' m \right) \sum_{\kappa=0}^{2^{\lambda-1}-1} e \left(\frac{b\kappa}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3} \frac{b b' m \kappa}{4} \right) \right\}$$

$$= -(-1)^{(b'm-1)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, b'm \equiv 1 \pmod{4}, \quad (7.8)$$

$$= -(-1)^{(b+b')/2+(b'm-3)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, b'm \equiv 3 \pmod{4},$$

= 0, в остальных случаях;

выражение стоящее в четвертой сумме по λ равно

$$2^{-2\lambda+(\gamma'+3)/2} \left\{ e \left(\frac{3b'}{8} - 2^{\alpha-\lambda} b b' m \right) \sum_{\kappa=0}^{2^{\lambda-1}-1} e \left(\frac{3b'\kappa}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3} \frac{b b' m \kappa}{4} \right) \right. \\ \left. + e \left(\frac{b}{4} + \frac{3b'}{8} - 2^{\alpha-\lambda} b b' m \right) \sum_{\kappa=0}^{2^{\lambda-1}-1} e \left(\frac{2b\kappa}{4} + \frac{3b'\kappa}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3} \frac{b b' m \kappa}{4} \right) \right\} \\ = (-1)^{(b+b')/2+(bm-1)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, bm \equiv 1 \pmod{4}, \\ = (-1)^{(bm-3)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, bm \equiv 3 \pmod{4}, \quad (7.9) \\ = 0, \text{ в остальных случаях.}$$

Если $0 \leq \alpha \leq \gamma' - 3$, то из (7.7), (7.3), (7.4), (7.8) и (7.9) следует тот же результат, что и в случае 1).

Если $\alpha = \gamma' - 2$, то из (7.7), (7.3), (7.4), (7.8) и (7.9) следует

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\alpha-1} 2^{-\lambda/2} + 2^{-(\alpha+1)/2} = 3 \cdot 2^{-(\alpha+1)/2},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

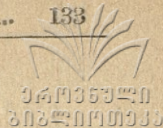
Если $\alpha \geq \gamma' - 1$, то из (7.7), (7.3), (7.4), (7.8) и (7.9) следует:

а) при четном α и $bm \equiv 1 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'-1} 2^{-\lambda/2} + (-1)^{(b+b')/2+(bm-1)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$= (2^{\alpha+3-\gamma'} + (-1)^{(b+b')/2+(bm-1)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha},$$



б) при четном α и $bm \equiv 3 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'-1} 2^{-\lambda/2} + (-1)^{(bm-3)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha} = (2^{\alpha+3-\gamma'} + (-1)^{(bm-3)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

в) при нечетном α и $b'm \equiv 1 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'-1} 2^{-\lambda/2} - (-1)^{(b'm-1)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$= (2^{\alpha+3-\gamma'} - (-1)^{(b'm-1)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha},$$

г) при нечетном α и $b'm \equiv 3 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 - \sum_{\lambda=2}^{\gamma'-1} 2^{-\lambda/2} - (-1)^{(b+b')/2+(b'm-3)/4} \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$= (2^{\alpha+3-\gamma'} - (-1)^{(b+b')/2+(b'm-3)/4}) \cdot 2^{(\gamma'-5)/2-\alpha}.$$

3) Пусть $\gamma' = 0$, $\gamma \equiv 0 \pmod{2}$. Тогда из (7.1), (6.39), (6.26) — (6.31) получим

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{-\lambda/2} \left\{ c \left(\frac{M}{2^{\gamma+2}}, 2^{\lambda} \right) + \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e \left(\frac{bh}{4} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}} \right) \right\}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{-(\lambda-1)/2} \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e \left(\frac{bh}{8} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}} \right) + \sum_{\lambda=\gamma+2}^{\infty} 2^{-2\lambda+3\gamma/2+1} \left\{ \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e \left(\frac{b'h}{4} \right. \right.$$

$$\lambda \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\left. - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}} \right) + ((-1)^{(b+b')/2} - 1) c \left(\frac{M}{2^{\gamma+2}}, 2^{\lambda} \right) - \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e \left(\frac{bh}{4} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}} \right) \left. \right\}$$

$$+ \sum_{\lambda=\gamma+2}^{\infty} 2^{-2\lambda+3\gamma/2+2} \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e \left(\frac{(3b'+b)h}{8} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}} \right). \quad (7.10)$$

$$\lambda \equiv 1 \pmod{2}$$

Здесь, согласно лемме 12, выражение стоящее в первой сумме по λ равно

$$2^{-\lambda/2} \left\{ c(2^\alpha b b' m, 2^\lambda) + e \left(\frac{b}{4} - 2^{\alpha-\lambda} b b' m \right) \sum_{\kappa=0}^{2^{\lambda-1}-1} e \left(\frac{b \kappa}{2} - 2^{\alpha-\lambda+2} \frac{b b' m \kappa}{2} \right) \right\}$$

$$= 2^{\lambda/2-1}, \quad \text{если } \lambda < \alpha+1,$$

$$= -2^{(\alpha-1)/2}, \quad \text{если } \lambda = \alpha+1,$$

$$= (-1)^{(b m - 1)/2} \cdot 2^{\alpha/2}, \quad \text{если } \lambda = \alpha+2,$$

$$= 0, \quad \text{если } \lambda > \alpha+2;$$
(7.11)

выражение стоящее во второй сумме по λ равно

$$2^{-(\lambda-1)/2} e \left(\frac{b}{8} - 2^{\alpha-\lambda} b b' m \right) \sum_{\kappa=0}^{2^{\lambda-1}-1} e \left(\frac{b \kappa}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3} \frac{b b' m \kappa}{4} \right)$$

$$= (-1)^{(b' m - 1)/4} \cdot 2^{\alpha/2+1}, \quad \text{если } \lambda = \alpha+3, b' m \equiv 1 \pmod{4},$$

$$= 0, \quad \text{в остальных случаях.}$$
(7.12)

Заметим, что третья и четвертая суммы по λ в (7.10) получаются из соответствующих сумм в (7.2) заменой $2^{-2\lambda+\gamma'/2+1}$ на $2^{-2\lambda+3\gamma'/2+1}$ и $2^{-2\lambda+\gamma'/2+2}$ на $2^{-2\lambda+3\gamma'/2+2}$; следовательно выражение стоящее в третьей сумме по λ в (7.10) равно

$$(-1)^{(b m - 1)/2} \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha-1}, \quad \text{если } \lambda = \alpha+2, b' \equiv -b \pmod{4},$$

$$2^{3\gamma/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha+1, b' \equiv b \pmod{4},$$

$$-2^{3\gamma/2-\lambda+1}, \quad \text{если } \lambda < \alpha+1, b' \equiv b \pmod{4},$$

$$0, \quad \text{в остальных случаях;}$$
(7.13)

а в четвертой сумме—равно

$$(-1)^{(b+b')/4+(b m - 1)/2} \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha-1}, \quad \text{если } \lambda = \alpha+2, b' \equiv -b \pmod{4},$$

$$-(-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha+1, b' \equiv b \pmod{4},$$

$$(-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{-\lambda+3\gamma/2+1}, \quad \text{если } \lambda < \alpha+1, b' \equiv b \pmod{4},$$

$$0, \quad \text{в остальных случаях.}$$
(7.14)

Если $0 \leq \alpha \leq \gamma-3$, то из (7.10)–(7.14) следует

а) при нечетном α

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha-1} 2^{\lambda/2-1} - 2^{(\alpha-1)/2} = 0,$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

b) при четном α и $b'm \equiv 1 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(b'm-1)/2} \cdot 2^{\alpha/2} + (-1)^{(b'm-1)/4} \cdot 2^{\alpha/2+1}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$= (1 + (-1)^{(b'm-1)/4}) \cdot 2^{\alpha/2+1},$$

c) при четном α , $b'm \equiv 3 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(b'm-1)/2} \cdot 2^{\alpha/2} = 0.$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Если $\alpha = \gamma - 2$, то из (7.10)–(7.14) следует

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(b'm-1)/2} \cdot 2^{\alpha/2} = (1 + (-1)^{(b'm-1)/2}) \cdot 2^{\alpha/2}.$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Если $\alpha = \gamma - 1$, то из (7.10)–(7.15) следует

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha-1} 2^{\lambda/2-1} - 2^{(\alpha-1)/2} = 0.$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Если $\alpha = \gamma$, то из (7.10)–(7.14) следует

a) при $b' \equiv b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{\lambda/2-1} = 2^{\alpha/2},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

b) при $b' \equiv -b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(bm-1)/2} 2^{3\gamma/2-\alpha-1} = (2 + (-1)^{(bm-1)/2}) 2^{\alpha/2-1}.$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Если $\alpha \geq \gamma + 1$, то из (7.10)–(7.14) следует

а) при четном α и $b' \equiv b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{\lambda/2-1} - \sum_{\lambda=\gamma+2}^{\alpha} 2^{3\gamma/2-\lambda+1} + \sum_{\lambda=\gamma+3}^{\alpha-1} (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{-\lambda+3\gamma/2+1}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2} \quad \lambda \equiv 0 \pmod{2} \quad \lambda \equiv 1 \pmod{2}$$

$$- (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha} = \frac{1}{3} \{ 2(1+2^{\alpha-\gamma-1}) + (-1)^{(3b'+b)/4} (2^{\alpha-\gamma}-7) \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha},$$

б) при четном α и $b' \equiv -b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(bm-1)/2} \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha-1} = (2^{\alpha-\gamma+1} + (-1)^{(bm-1)/2}) \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha-1},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

с) при нечетном α и $b' \equiv b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{\lambda/2-1} - \sum_{\lambda=\gamma+2}^{\alpha-1} 2^{3\gamma/2-\lambda+1} + 2^{3\gamma/2-\alpha}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2} \quad \lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$+ \sum_{\lambda=\gamma+3}^{\alpha} (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2^{3\gamma/2-\lambda+1} =$$

$$\lambda \equiv 1 \pmod{2}$$

$$= \frac{1}{3} \{ 2^{\alpha-\gamma} + 7 + (-1)^{(3b'+b)/4} \cdot 2(2^{\alpha-\gamma-1} - 1) \} \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha},$$

д) при нечетном α и $b' \equiv -b \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(b+b')/4+(bm-1)/2} \cdot 2^{3\gamma/2-\alpha-1}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$= (2^{\alpha-\gamma+1} + (-1)^{(b+b')/4+(bm-1)/2}) 2^{3\gamma/2-\alpha-1}.$$

4) Пусть $\gamma' = 0$, $\gamma \equiv 1 \pmod{2}$. Тогда из (7.1), (6.39), (6.26) — (6.29), (6.32) и (6.33) получим

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{-\lambda/2} \left\{ c \left(\frac{M}{2^{\gamma+2}}, 2^{\lambda} \right) + \sum_{h \pmod{2^{\lambda}}} e \left(\frac{bh}{4} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}} \right) \right\}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\lambda=2}^{\gamma} 2^{-(\lambda-1)/2} \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e\left(\frac{bh}{8} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}}\right) + \sum_{\lambda=\gamma+2}^{\infty} 2^{-2\lambda-3(\gamma+1)/2} \left\{ \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e\left(\frac{bh}{8} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}}\right) \right. \\
& \left. - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}}\right) + \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e\left(\frac{bh}{4} + \frac{3b'h}{8} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}}\right) \Big\} + \sum_{\lambda=\gamma+2}^{\infty} 2^{-2\lambda+3(\gamma+1)/2} \\
& \lambda \equiv 1 \pmod{2} \qquad \qquad \qquad \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\
& \times \left\{ \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e\left(\frac{b'h}{4} + \frac{bh}{8} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}}\right) - \sum'_{h \bmod 2^{\lambda}} e\left(\frac{bh}{8} - \frac{Mh}{2^{\lambda+\gamma+2}}\right) \right\}. \quad (7.15)
\end{aligned}$$

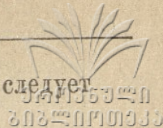
Здесь, также как и в случае 3), значения выражений стоящих в первой и во второй суммах по λ вычисляются по формулам (7.11) и (7.12). Выражение стоящее в третьей сумме по λ равно

$$\begin{aligned}
& 2^{-2\lambda+3(\gamma+1)/2} \left\{ e\left(\frac{3b'}{4} - 2^{\alpha-\lambda}bb'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{3b'x}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3}\frac{bb'mx}{4}\right) \right. \\
& \left. + e\left(\frac{b}{4} + \frac{3b'}{8} - 2^{\alpha-\lambda}bb'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{2bx}{4} + \frac{3b'x}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3}\frac{bb'mx}{4}\right) \right\} \\
& = (-1)^{(b+b')/2 + (bm-1)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, \quad bm \equiv 1 \pmod{4}, \\
& = (-1)^{(bm-3)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, \quad bm \equiv 3 \pmod{4}, \quad (7.16) \\
& = 0, \text{ в остальных случаях;}
\end{aligned}$$

выражение стоящее в четвертой сумме по λ равно

$$\begin{aligned}
& 2^{-2\lambda+3(\gamma+1)/2} \left\{ e\left(\frac{b'}{4} + \frac{b}{8} - 2^{\alpha-\lambda}bb'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{2b'x}{4} + \frac{bx}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3}\frac{bb'mx}{4}\right) \right. \\
& \left. - e\left(\frac{b}{8} - 2^{\alpha-\lambda}bb'm\right) \sum_{x=0}^{2^{\lambda-1}-1} e\left(\frac{bx}{4} - 2^{\alpha-\lambda+3}\frac{bb'mx}{4}\right) \right\} \\
& = -(-1)^{(b'm-1)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, \quad b'm \equiv 1 \pmod{4}, \\
& = -(-1)^{(b+b')/2 + (b'm-3)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}, \quad \text{если } \lambda = \alpha + 3, \quad b'm \equiv 3 \pmod{4}, \quad (7.17) \\
& = 0, \text{ в остальных случаях.}
\end{aligned}$$

Если $0 \leq \alpha \leq \gamma - 3$, то из (7.15), (7.11), (7.12), (7.16) и (7.17) следует тот же результат, что и в случае 3).



Если $\alpha = \gamma - 2$, то из (7.15), (7.11), (7.12), (7.16) и (7.17) следует

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\alpha-1} 2^{\lambda/2-1} - 2^{(\alpha-1)/2} = 0.$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Если $\alpha \geq \gamma - 1$, то из (7.15), (7.11), (7.12), (7.16) и (7.17) следует:

а) при четном α и $b'm \equiv 1 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma-1} 2^{\lambda/2-1} - (-1)^{(b'm-1)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha} = (2^{\alpha-\gamma+2} - (-1)^{(b'm-1)/4}) 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha},$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

б) при четном α и $b'm \equiv 3 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma-1} 2^{\lambda/2-1} - (-1)^{(b+b')/2+(b'm-3)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$= (2^{\alpha-\gamma+2} - (-1)^{(b+b')/2+(b'm-3)/4}) \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha},$$

в) при нечетном α и $bm \equiv 1 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma-1} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(b+b')/2+(bm-1)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

$$= (2^{\alpha-\gamma+2} + (-1)^{(b+b')/2+(bm-1)/4}) \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha},$$

г) при нечетном α и $bm \equiv 3 \pmod{4}$

$$\chi_2 = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\gamma-1} 2^{\lambda/2-1} + (-1)^{(bm-3)/4} \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha} = (2^{\alpha-\gamma+2} + (-1)^{(bm-3)/4}) \cdot 2^{(3\gamma-5)/2-\alpha}.$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

Лемма 32. Пусть $(a, a') = 1$, $p > 2$, $p^3 | n$, $p^2 | aa'$. Тогда

1) при $p \nmid a$

$$\chi_p = (1 + p^{-1})(1 - p^{-(\beta+1)/2}), \quad \text{если } l \geq \beta + 1, 2 \nmid \beta,$$

$$= (1 + p^{-1})(1 - p^{-\beta/2}) + p^{-\beta/2} \left(1 + \left(\frac{-a}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) p^{-1} \right), \quad \text{если } l \geq \beta + 1, 2 | \beta,$$

$$\chi_p = (1+p^{-1})(1-p^{-(l-1)/2}) + p^{-(l-1)/2} \left(1 + \left(\frac{p^{-l}a'}{p} \right)^\beta \left(\frac{-a}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta}n}{p} \right)^{\beta-(\beta-l+2)} \right),$$

если $l \leq \beta, 2 \nmid l$,

$$= (1+p^{-1})(1-p^{-l/2}) + p^{-l/2} \left(1 - \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right) p^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right) p^{-1} \right)^{-1} \\ \times \left(1 - \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^{\beta+1} p^{-(\beta-l+1)} \right), \quad \text{если } l \leq \beta, 2 \mid l;$$

2) при $p \nmid a'$

$$\chi_p = 0, \quad \text{если } l \geq \beta + 1, 2 \nmid \beta,$$

$$= p^{\beta/2} \left(1 + \left(\frac{a'}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta}n}{p} \right) \right), \quad \text{если } l \geq \beta + 1, 2 \mid \beta,$$

$$= p^{(l-1)/2} \left(1 + \left(\frac{-p^{-l}a'}{p} \right)^\beta \left(\frac{a'}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta}n}{p} \right)^{\beta-(\beta-l+1)} \right), \quad \text{если } l \leq \beta, 2 \nmid l,$$

$$= p^{l/2} \left(1 - \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right) p^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right) p^{-1} \right)^{-1} \\ \times \left(1 - \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^{\beta+1} p^{-(\beta-l+1)} \right), \quad \text{если } l \leq \beta, 2 \mid l.$$

Доказательство. 1. Пусть $p \nmid a$. Из (6.14), согласно лемм 12 и 13, получаем:

а) при $l < \lambda, 2 \nmid l$

$$A(p^\lambda) = p^{l/2-\lambda-1}(p-1) \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^\lambda, \quad \text{если } \lambda < \beta + 1, \\ = -p^{l/2-\beta-2} \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^{\beta+1}, \quad \text{если } \lambda = \beta + 1, \quad (7.18) \\ = 0, \quad \text{если } \lambda > \beta + 1;$$

б) при $l < \lambda, 2 \mid l$

$$A(p^\lambda) = p^{(l-1)/2-\beta-1} \left(\frac{p^{-l}a'}{p} \right)^\beta \left(\frac{-a}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta}n}{p} \right), \quad \text{если } \lambda = \beta + 1. \quad (7.19) \\ = 0 \quad \text{если } \lambda \neq \beta + 1;$$

с) при $l \geq \lambda, 2 \mid \lambda$

$$A(p^\lambda) = p^{-\lambda/2-1}(p-1), \quad \text{если } \lambda < \beta + 1, \\ = -p^{-(\beta+3)/2}, \quad \text{если } \lambda = \beta + 1, \quad (7.20) \\ = 0, \quad \text{если } \lambda > \beta + 1;$$

д) при $l \geq \lambda$, $2 \nmid \lambda$

$$A(p\lambda) = p^{-\beta/2-1} \left(\frac{-a}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right), \quad \text{если } \lambda = \beta + 1, \\ = 0, \quad \text{если } \lambda \neq \beta + 1. \quad (7.21)$$

Если $l \geq \beta + 1$, то из (7.1), (7.20), (7.21), (7.18) и (7.19) следует:

а) при нечетном β

$$\chi_p = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\beta-1} p^{-\lambda/2-1} (p-1) - p^{-(\beta+3)/2} = (1+p^{-1})(1-p^{-(\beta+1)/2}), \\ \lambda \equiv 0 \pmod{2}$$

б) при четном β

$$\chi_p = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\beta} p^{-\lambda/2-1} (p-1) + p^{-\beta/2-1} \left(\frac{-a}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) \\ \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\ = (1+p^{-1})(1-p^{-\beta/2}) + p^{-\beta/2} \left(1 + \left(\frac{-a}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) p^{-1} \right).$$

Если $l \leq \beta$, то из (7.1), (7.20), (7.21), (7.19) и (7.18) следует:

а) при нечетном l

$$\chi_p = 1 + \sum_{\lambda=2}^{l-1} p^{-\lambda/2-1} (p-1) + p^{(l-1)/2-\beta-1} \left(\frac{p^{-l} a'}{p} \right)^{\beta} \left(\frac{-a}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) \\ \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\ = (1+p^{-1})(1-p^{-(l-1)/2}) + p^{-(l-1)/2} \left(1 + \left(\frac{p^{-l} a'}{p} \right)^{\beta} \left(\frac{-a}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) p^{-(\beta-l+2)} \right),$$

б) при четном l

$$\chi_p = 1 + \sum_{\lambda=2}^l p^{-\lambda/2-1} (p-1) + \sum_{\lambda=l+1}^{\beta} p^{l/2-\lambda-1} (p-1) \left(\frac{p^{-l} aa'}{p} \right)^{\lambda} \\ \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\ - p^{l/2-\beta-2} \left(\frac{p^{-l} aa'}{p} \right)^{\beta+1} = (1+p^{-1})(1-p^{-l/2}) + p^{-l/2} \left(1 - \left(\frac{p^{-l} aa'}{p} \right) p^{-2} \right) \\ \times \left(1 + \left(\frac{p^{-l} aa'}{p} \right) p^{-1} + \left(\frac{p^{-l} aa'}{p} \right)^2 p^{-2} + \dots + \left(\frac{p^{-l} aa'}{p} \right)^{\beta-l} p^{-(\beta-l)} \right). \quad (7.22)$$

2) Пусть $p \nmid a'$. Из (6.13), согласно лемм 12 и 13, получаем:

а) при $l < \lambda$, $2 \nmid l$

$$\begin{aligned} A(p^l) &= p^{3l/2 - \lambda - 1} (p-1) \left(\frac{p^{-l} a a'}{p} \right)^{\lambda}, \text{ если } \lambda < \beta + 1, \\ &= -p^{3l/2 - \beta - 2} \left(\frac{p^{-l} a a'}{p} \right)^{\beta+1}, \text{ если } \lambda = \beta + 1, \\ &= 0, \text{ если } \lambda > \beta + 1; \end{aligned} \quad (7.23)$$

б) при $l < \lambda$, $2 \nmid l$

$$\begin{aligned} A(p^l) &= p^{3(l-1)/2 - \beta} \left(\frac{-p^{-l} a}{p} \right)^{\beta} \left(\frac{a'}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right), \text{ если } \lambda = \beta + 1, \\ &= 0, \text{ если } \lambda \neq \beta + 1; \end{aligned} \quad (7.24)$$

в) $l \geq \lambda$, $2 \nmid l$

$$\begin{aligned} A(p^l) &= p^{l/2 - 1} (p-1), \text{ если } \lambda < \beta + 1, \\ &= -p^{(\beta-1)/2}, \text{ если } \lambda = \beta + 1, \\ &= 0, \text{ если } \lambda > \beta + 1; \end{aligned} \quad (7.25)$$

г) $l \geq \lambda$, $2 \nmid l$

$$\begin{aligned} A(p^l) &= p^{\beta/2} \left(\frac{a'}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right), \text{ если } \lambda = \beta + 1, \\ &= 0, \text{ если } \lambda \neq \beta + 1. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Если $l \geq \beta + 1$, то из (7.1), (7.25), (7.26), (7.23) и (7.24) следует:

а) при нечетном β

$$\begin{aligned} \chi_p &= 1 + \sum_{\lambda=2}^{\beta-1} p^{l/2-1} (p-1) - p^{(\beta-1)/2} = 0, \\ \lambda &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

б) при четном β

$$\begin{aligned} \chi_p &= 1 + \sum_{\lambda=2}^{\beta} p^{l/2-1} (p-1) + p^{\beta/2} \left(\frac{a'}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) = p^{\beta/2} \left(1 + \left(\frac{a'}{p} \right) \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) \right), \\ \lambda &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Если $l \leq \beta$, то из (7.1), (7.25), (7.26), (7.24) и (7.23) следует:

а) при нечетном l

$$\begin{aligned} \chi_p &= 1 + \sum_{\lambda=2}^{l-1} p^{l/2-1} (p-1) + p^{3(l-1)/2 - \beta} \left(\frac{-p^{-l} a}{p} \right)^{\beta} \left(\frac{a'}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) \\ \lambda &\equiv 0 \pmod{2} \\ &= p^{(l-1)/2} \left(1 + \left(\frac{-p^{-l} a}{p} \right)^{\beta} \left(\frac{a'}{p} \right)^{\beta+1} \left(\frac{p^{-\beta} n}{p} \right) p^{-(\beta-l+1)} \right). \end{aligned}$$

б) при четном l

$$\begin{aligned}
 \chi_p &= 1 + \sum_{\lambda=2}^l p^{\lambda/2-1}(p-1) + \sum_{\lambda=l+1}^{\beta} p^{3l/2-\lambda-1}(p-1) \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^{\lambda} \\
 &\quad \lambda \equiv 0 \pmod{2} \\
 &= p^{3l/2-\beta-2} \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^{\beta+1} = p^{l/2} \left(1 - \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right) p^{-2} \right) \left(1 + \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right) p^{-1} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^2 p^{-2} + \dots + \left(\frac{p^{-l}aa'}{p} \right)^{\beta-l} p^{-(\beta-l)} \right). \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

Лемма 33. Пусть $M = 4aa'n$, $n = 2^\alpha m = 2^\alpha vu$,

$$\begin{aligned}
 v &= \prod_{p|n} p^\beta, \quad u = \prod_{p|n} p^\beta, \quad a = 2^\gamma b, \quad a' = 2^{\gamma'} b', \quad aa' = r^2 \omega \\
 &\quad p|n \quad p|n \\
 &\quad p|bb' \quad p \nmid 2bb' \\
 &\quad p > 2
 \end{aligned}$$

(ω — бесквадратное число). Тогда

$$\begin{aligned}
 \varphi(M; a, a') &= \frac{2^\alpha v \pi^2}{a(aa')^{1/2}} \chi_2 \prod_{p|bb'} \chi_p \prod_{\substack{p > 2 \\ p|r}} \left(1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^{p-2} \right)^{-1} \\
 &\quad \times L^{-1}(2, \omega) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{aa'}{d_1} \right) d_2, \quad (7.28)
 \end{aligned}$$

где

$$L(2, 1) = \frac{\pi^2}{8}, \quad L(2, 2) = \frac{2^{1/2} \pi^2}{16},$$

$$L(2, \omega) = -\frac{\pi^2}{\omega^{3/2}} \sum_{1 \leq h \leq \frac{\omega}{2}} h \left(\frac{h}{\omega} \right), \quad \text{если } \omega \equiv 1 \pmod{4}, \quad \omega > 1,$$

$$= \frac{\pi^2}{2\omega^{3/2}} \left\{ 2 \sum_{1 \leq h \leq \frac{\omega}{4}} h \left(\frac{h}{\omega} \right) + \sum_{\frac{\omega}{4} < h \leq \frac{\omega}{2}} (\omega - 2h) \left(\frac{h}{\omega} \right) \right\}, \quad \text{если } \omega \equiv 3 \pmod{4},$$

$$= \frac{\pi^2}{4\omega^{3/2}} \left\{ \omega \sum_{1 \leq h \leq \frac{\omega}{16}} \left(\frac{h}{\frac{1}{2}\omega} \right) + \dots \right\}$$

$$+ \sum_{\frac{\omega}{16} < h \leq \frac{3\omega}{16}} (\omega - 16h) \left(\frac{h}{\frac{1}{2}\omega} \right) - 2\omega \sum_{\frac{3\omega}{16} < h \leq \frac{\omega}{4}} \left(\frac{h}{\frac{1}{2}\omega} \right) \Bigg\},$$

если $\omega \equiv 2 \pmod{8}$, $\omega > 2$,

$$= \frac{\pi^2}{4\omega^{3/2}} \left\{ 16 \sum_{1 \leq h \leq \frac{\omega}{16}} h \left(\frac{h}{\frac{1}{2}\omega} \right) + \omega \sum_{\frac{\omega}{16} < h \leq \frac{3\omega}{16}} \left(\frac{h}{\frac{1}{2}\omega} \right) + 4\omega \sum_{\frac{3\omega}{16} < h \leq \frac{\omega}{4}} \left(\frac{h}{\frac{1}{2}\omega} \right) - 16 \sum_{\frac{3\omega}{16} < h \leq \frac{\omega}{4}} h \left(\frac{h}{\omega} \right) \right\}, \text{ если } \omega \equiv 6 \pmod{8},$$

значения величин χ_2 и χ_p даны в леммах 31 и 32.

Доказательство. Пусть $p > 2$, $p\beta \mid n$, $p \nmid aa'$. Тогда положив $l=0$ в (7.22) или (7.27), получим

$$\chi_p = \left(1 - \left(\frac{aa'}{p} \right)^{p-2} \right) \sum_{d \mid p\beta} \left(\frac{aa'}{d} \right)^{d-1}; \quad (7.29)$$

пусть $p \nmid 2bb'n$, тогда положив $\beta=0$ в (7.29), получим

$$\chi_p = 1 - \left(\frac{aa'}{p} \right)^{p-2}. \quad (7.30)$$

Из леммы 30, (7.29), (7.30) и (1.6) следует

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} A(q) &= \chi_2 \prod_{p \mid bb'} \chi_p \prod_{p > 2} \left(1 - \left(\frac{aa'}{p} \right)^{p-2} \right) \sum_{d \mid u} \left(\frac{aa'}{d} \right)^{d-1} \\ &= \chi_2 \prod_{p \mid bb'} \chi_p \prod_{\substack{p > 2 \\ p \nmid r}} \left(1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^{p-2} \right)^{-1} L^{-1}(2, \omega) \sum_{d \mid u} \left(\frac{aa'}{d} \right)^{d-1}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Из (4.7) и (7.31) следует утверждаемое, ибо

$$u \sum_{d \mid u} \left(\frac{aa'}{d} \right)^{d-1} = \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{aa'}{d_1} \right)^{d_2}.$$

Значения функции $L(2, \omega)$ даны в работе [8] (стр. 28, лемма 27).

§ 8. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2.$$

Теорема 1.

$$\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 10) = \theta(\tau; 1, 5). \quad (8.1)$$

Доказательство. Согласно лемм 19 и 29, функция

$$\psi(\tau; 1, 5) = \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 10) - \theta(\tau; 1, 5) \quad (8.2)$$

является целой модулярной формой 20-й степени и измерения — 2. Следовательно, согласно лемме 1, она будет тождественно равна нулю, если в своей фундаментальной области она имеет более чем

$$\frac{2}{24} 20^3 \prod_{p|20} (1-p^{-2}) = 480$$

нулей. Для этого достаточно, чтобы точка $\tau = i\infty$ была ее более чем 480-кратным нулем. Таким образом, требуется показать, что в разложении $\psi(\tau; 1, 5)$ по степеням Q , коэффициенты при Q^M ($M \leq 480$) равны нулю.

Положив в леммах 31, 32 и 33

$$a=b=1, \quad a'=b'=5, \quad \gamma=\gamma'=0, \quad v=5^3, \quad l=1,$$

т. е.

$$M=20n, \quad n=2^\alpha m=2^\alpha 5^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 10}} p^\beta, \quad r=1, \quad \omega=5,$$

получим

$$\rho(M; 1, 5) = \frac{2^\alpha \cdot 5^\beta \pi^2}{5^{1/2}} \chi_2 \chi_5 L^{-1}(2, 5) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{5}{d_1} \right) d_2, \quad (8.3)$$

где

$$\chi_2 = 1 \quad \text{если } \alpha = 0, \\ = \frac{1}{3} \{ 2^{\alpha+1} - (-1)^\alpha \cdot 5 \} \cdot 2^{-\alpha}, \quad \text{если } \alpha > 0; \quad (8.4)$$

$$\chi_5 = \left\{ 5^{\beta+1} + (-1)^\alpha \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \cdot 5^{-(\beta+1)}; \quad (8.5)$$

$$L(2, 5) = \frac{\pi^2}{5^{3/2}}. \quad (8.6)$$

Из (8.3) — (8.6) следует

$$\rho(M; 1, 5) = \left\{ 5^{\beta+1} + \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{d_1}{5} \right) d_2, \quad \text{если } \alpha = 0, \quad (8.7)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ 5^{\beta+1} + (-1)^\alpha \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \{ 2^{\alpha+1} - (-1)^\alpha \cdot 5 \} \cdot \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{d_1}{5} \right) d_2, \\ \text{если } \alpha > 0.$$

Положив $Q = e\left(\frac{\tau}{20}\right)$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 10) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{20k^2} \right)^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{100k^2} \\ &= 1 + 6Q^{20} + 12Q^{40} + 8Q^{60} + 6Q^{80} + 26Q^{100} + 36Q^{120} + 24Q^{140} \\ &\quad + 28Q^{160} + 42Q^{180} + 72Q^{200} + 72Q^{220} + 8Q^{240} + 48Q^{260} \\ &\quad + 108Q^{280} + 48Q^{300} + 54Q^{320} + 64Q^{340} + 84Q^{360} + 120Q^{380} \\ &\quad + 26Q^{400} + 72Q^{420} + 144Q^{440} + 88Q^{460} + 84Q^{480} + \dots \end{aligned} \quad (8.8)$$

Вычислив значения $\rho(M; 1, 5)$ по формулам (8.7) и подставив их в (4.7), получим

$$\begin{aligned} \theta(\tau; 1, 5) &= 1 + 6Q^{20} + 12Q^{40} + 8Q^{60} + 6Q^{80} + 26Q^{100} + 36Q^{120} \\ &\quad + 24Q^{140} + 28Q^{160} + 42Q^{180} + 72Q^{200} + 72Q^{220} + 8Q^{240} + 48Q^{260} \\ &\quad + 108Q^{280} + 48Q^{300} + 54Q^{320} + 64Q^{340} + 84Q^{360} + 120Q^{380} + 26Q^{400} \\ &\quad + 72Q^{420} + 144Q^{440} + 88Q^{460} + 84Q^{480} + \dots \end{aligned} \quad (8.9)$$

Из (8.2), (8.8) и (8.9) следует утверждаемое.

Теорема 1а. Пусть $n = 2^\alpha 5^\beta u$, $(u, 10) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} r(n) &= \left\{ 5^{\beta+1} + \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{d_1}{5} \right) d_2, \text{ если } \alpha = 0, \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 5^{\beta+1} + (-1)^\alpha \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \{ 2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha 5} \} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{d_1}{5} \right) d_2, \\ &\quad \text{если } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждаемое следует из (8.1), (4.3), (4.6), (4.2) и (8.7).

§ 9. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_4^2.$$

Лемма 34. Функция

$$\begin{aligned} \psi(\tau; 1, 6) &= \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}(\tau; 0, 12) - \theta(\tau; 1, 6) \\ &\quad - A\vartheta_{40}(\tau; 0, 4)\vartheta_{21}^2(\tau; 0, 6)\vartheta_{40}(\tau; 0, 6), \end{aligned} \quad (9.1)$$

при постоянной A , является целой модулярной формой 24-й степени и измерения -2 .

Доказательство. Согласно лемм 19 и 29, функции $\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \times \vartheta_{00}(\tau; 0, 12)$ и $\theta(\tau; 1, 6)$ являются целыми модулярными формами 24-ой степени и измерения -2 .



В силу (1.5) функция $\vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{40}(\tau; 0, 6)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 1.

Заметим, что всякая подстановка группы $\Gamma(24)$ является также и подстановкой группы $\Gamma(8)$ и $\Gamma(12)$. Поэтому, согласно лемм 17 и 6, для каждой подстановки группы $\Gamma(24)$ имеет место

$$\begin{aligned} & \vartheta_{40}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 4\right) \vartheta_{21}^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 6\right) \vartheta_{40}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 6\right) \\ &= (\gamma\tau+\delta)^2 \vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{40}(\tau; 0, 6), \end{aligned}$$

ибо в силу $|\delta| \equiv \pm 1 \pmod{24}$ имеем $\left(\frac{2}{|\delta|}\right)\left(\frac{3}{|\delta|}\right)=1$. Условие 2) определения 1 таким образом выполнено.

Согласно лемме 18, в окрестности

$$\tau = -\frac{\delta}{\gamma} \quad (\gamma \neq 0, (\gamma, \delta)=1, \alpha\delta - \beta\gamma=1)$$

имеет место разложение

$$\begin{aligned} & (\gamma\tau + \delta)^2 \vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{40}(\tau; 0, 6) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e\left(\frac{n}{24} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, условие 4) определения 1 также выполнено.

Итак, в силу определения 1, функция $\vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{40}(\tau; 0, 6)$ является целой модулярной формой 24-ой степени и измерения—2.

Теорема 2.

$$\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 12) = \theta(\tau; 1, 6) + \frac{4}{3} \vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{40}(\tau; 0, 6). \quad (9.2)$$

Доказательство. Согласно лемм 34 и 1, функция $\psi(\tau; 1, 6)$ будет тождественно равна нулю, если в своей фундаментальной области она имеет более чем

$$\frac{2}{24} 24^3 \prod_{p|24} (1 - p^{-2}) = 768$$

нулей. Для этого достаточно, чтобы точка $\tau=i\infty$ была ее более чем 768-кратным нулем. Таким образом, требуется показать, что в разложении $\psi(\tau; 1, 6)$ по степеням Q , постоянную A можно так подобрать, чтобы коэффициенты при Q^M ($M \leq 768$) были равны нулю.

Положив в леммах 31, 32 и 33

$$a=1, \quad a'=6, \quad b=1, \quad b'=3, \quad \gamma=0, \quad \gamma'=1, \quad v=3\beta, \quad l=1,$$

т. е.

$$M = 24n, \quad n = 2^\alpha m = 2^\alpha 3^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 6}} p^{\beta}, \quad r = 1, \quad \omega = 6,$$

получим

$$\rho(M; 1, 6) = \frac{2^\alpha \cdot 3^\beta \pi^2}{6^{1/2}} \chi_2 \chi_3 L^{-1}(2, 6) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{6}{d_1} \right) d_2, \quad (9.3)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \{2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+(m-1)/4}\} \cdot 2^{-\alpha-2}, \quad \text{если } m \equiv 1 \pmod{4} \\ &= \{2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+(m-3)/4}\} \cdot 2^{-\alpha-2}, \quad \text{если } m \equiv 3 \pmod{4}; \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$\chi_3 = \left\{ 3^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left(\frac{u}{3} \right) \right\} \cdot 3^{-(\beta+1)}, \quad (9.5)$$

$$L(2, 6) = \frac{\pi^2}{4 \cdot 6^{1/2}}. \quad (9.6)$$

Из (9.3)–(9.6) следует

$$\rho(M; 1, 6) = \frac{1}{3} \left\{ 3^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left(\frac{u}{3} \right) \right\} \{2^{\alpha+2} + (-1)^\alpha \varepsilon\} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{6}{d_1} \right) d_2, \quad (9.7)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (-1)^{(m-1)/4}, \quad \text{если } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= (-1)^{(m-3)/4}, \quad \text{если } m \equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Положив $Q = e\left(\frac{\tau}{24}\right)$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 12) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{24k^2} \right)^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{144k^2} \\ &= 1 + 6Q^{24} + 12Q^{48} + 8Q^{72} + 6Q^{96} + 24Q^{120} + 26Q^{144} + 12Q^{168} \\ &\quad + 36Q^{192} + 46Q^{216} + 36Q^{240} + 72Q^{264} + 56Q^{288} + 24Q^{312} + 72Q^{336} \\ &\quad + 60Q^{360} + 54Q^{384} + 96Q^{408} + 52Q^{432} + 72Q^{456} + 120Q^{480} + 48Q^{504} \\ &\quad + 36Q^{528} + 96Q^{552} + 98Q^{576} + 90Q^{600} + 144Q^{624} + 144Q^{648} + 60Q^{672} \\ &\quad + 120Q^{696} + 144Q^{720} + 60Q^{744} + 180Q^{768} + \dots, \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{40}(\tau; 0, 6) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{3(4k+2)^2} \\ &\times \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{2(6k+1)^2} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{2(6k+2)^2} = 2Q^{24} + 2Q^{48}. \end{aligned}$$



$$-4Q^{72}-4Q^{96}+2Q^{144}-4Q^{192}+2Q^{216}+4Q^{264}+8Q^{288}+8Q^{384}-8Q^{408}-10Q^{432}+4Q^{456}-8Q^{528}-4Q^{576}-10Q^{600}+8Q^{648}+8Q^{768}+\dots \quad (9.9)$$

Вычислив значения $\rho(M; 1, 6)$ по формулам (9.7) и подставив их в (4.7), получим

$$\begin{aligned} \theta(\tau; 1, 6) = & 1 + \frac{10}{3} Q^{24} + \frac{28}{3} Q^{48} + \frac{40}{3} Q^{72} + \frac{34}{3} Q^{96} + 24 Q^{120} \\ & + \frac{70}{3} Q^{144} + 12 Q^{168} + \frac{124}{3} Q^{192} + \frac{130}{3} Q^{216} + 36 Q^{240} + \frac{200}{3} Q^{264} \\ & + \frac{136}{3} Q^{288} + 24 Q^{312} + 72 Q^{336} + 60 Q^{360} + \frac{130}{3} Q^{384} + \frac{320}{3} Q^{408} \\ & + \frac{196}{3} Q^{432} + \frac{200}{3} Q^{456} + 120 Q^{480} + 48 Q^{504} + \frac{140}{3} Q^{528} + 96 Q^{552} \\ & + \frac{310}{3} Q^{576} + \frac{310}{3} Q^{600} + 144 Q^{624} + \frac{400}{3} Q^{648} + 60 Q^{672} + 120 Q^{696} \\ & + 144 Q^{720} + 60 Q^{744} + \frac{508}{3} Q^{768} + \dots \end{aligned} \quad (9.10)$$

Теперь постоянную A подберем так, чтобы коэффициент при Q^{24} в разложении $\phi(\tau; 1, 6)$ по степеням Q был равен нулю, т. е. согласно (9.1), (9.8)–(9.10) так, чтобы

$$6 - 2A - \frac{10}{3} = 0.$$

Следовательно, взяв $A = \frac{4}{3}$ и приняв во внимание (9.1), (9.8)–(9.10), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^M ($M \leq 768$) равны нулю.

Теорема 2а. Пусть $n = 2^{\alpha} m = 2^{\alpha} 3^{\beta} u$, $(m, 2) = (u, 6) = 1$, $M = 24n$. Тогда

$$\begin{aligned} r(n) = & \frac{1}{3} \left\{ 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha} \left(\frac{u}{3} \right) \right\} \{ 2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha} \varepsilon \} \\ & \times \sum_{d_1 d_2 = u} (-1)^{(d_1-1)/2} \left(\frac{2}{d_1} \right) \left(\frac{d_1}{3} \right) d_2 + \frac{4}{3} \nu(M), \end{aligned}$$

где $\nu(M)$ — коэффициент при Q^M в разложении $\vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}^3(\tau; 0, 6) \vartheta_{40}(\tau; 0, 6)$ по степеням Q , а

$$\varepsilon = (-1)^{(m-1)/4}, \quad \text{если } m \equiv 1 \pmod{4},$$

$$= (-1)^{(m-3)/4}, \quad \text{если } m \equiv 3 \pmod{4}.$$

Доказательство. Утверждаемое следует из (9.2), (4.3), (4.6), (4.2) и (9.7).

§ 10. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 7x_4^2.$$

Согласно лемме 16 каждая из обеих ветвей

$$X(\tau) = \{\vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}(\tau; 0, 2) \vartheta_{14,0}(\tau; 0, 14) \vartheta_{01}(\tau; 0, 14)\}^{1/2} \quad (10.1)$$

является однозначной регулярной функцией от τ .

Лемма 35. Функция

$$\psi(\tau; 1, 7) = \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 14) - \theta(\tau; 1, 7) - AX(\tau), \quad (10.2)$$

при постоянной A , является целой модулярной формой 28-ой степени и измерения—2.

Доказательство аналогично доказательству леммы 34.

Теорема 3.

$$\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 14) = \theta(\tau; 1, 7) + \frac{3}{4} X(\tau), \quad (10.3)$$

где взята та ветвь $X(\tau)$ для которой

$$\lim_{\text{Im} \tau \rightarrow \infty} e(-\tau) X(\tau) = 2.$$

Доказательство. Согласно лемм 35 и 1, достаточно показать, что в разложении $\psi(\tau; 1, 7)$ по степеням Q , постоянную A можно так подобрать, чтобы коэффициенты при Q^M ($M \leq 1344$) были равны нулю.

Положив в леммах 31, 32 и 33

$$a=b=1, \quad a'=b'=7, \quad \gamma=\gamma'=0, \quad v=7^8, \quad l=1,$$

т. е.

$$M=28n, \quad n=2^\alpha m = 2^\alpha 7^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \nmid 14}} p^\beta, \quad r=1, \quad \omega=7,$$

получим

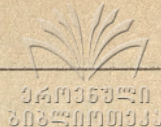
$$\rho(M; 1, 7) = \frac{2^\alpha \cdot 7^\beta \pi^2}{7^{1/2}} \chi_2 \chi_7 L^{-1}(2, 7) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{7}{d_1} \right) d_2, \quad (10.4)$$

где

$$\chi_2 = \{2^{\alpha+1} + (-1)^{(m-1)/2}\} \cdot 2^{-\alpha-1}, \quad (10.5)$$

$$\chi_7 = \left\{ 7^{\beta+1} + (-1)^{\beta+1} \left(\frac{u}{7} \right) \right\} \cdot 7^{-\beta-1}, \quad (10.6)$$

$$L(2, 7) = \frac{2\pi^2}{7^{3/2}}. \quad (10.7)$$



Из (10.4)–(10.7) следует

$$\rho(M; 1, 7) = \frac{1}{4} \left\{ 7^{\beta+1} + (-1)^{\beta+1} \left(\frac{u}{7} \right) \right\} \{ 2^{\alpha+1} + (-1)^{(m-1)/2} \} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{7}{d_1} \right) d_2. \quad (10.8)$$

Положив $Q = e \left(\frac{\tau}{28} \right)$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 14) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{28k^2} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{196k^2} \\ &= 1 + 6Q^{28} + 12Q^{56} + 8Q^{84} + 6Q^{112} + 24Q^{140} + 24Q^{168} + 2Q^{196} + 24Q^{224} \\ &+ 54Q^{252} + 40Q^{280} + 36Q^{308} + 56Q^{336} + 72Q^{364} + 48Q^{392} + 24Q^{420} + 66Q^{448} \\ &+ 96Q^{476} + 84Q^{504} + 40Q^{532} + 72Q^{560} + 144Q^{588} + 24Q^{616} + 12Q^{644} \\ &+ 120Q^{672} + 102Q^{700} + 120Q^{728} + 80Q^{756} + 98Q^{784} + 132Q^{812} + 72Q^{840} \\ &+ 64Q^{868} + 84Q^{896} + 240Q^{924} + 160Q^{952} + 48Q^{980} + 198Q^{1008} + 180Q^{1036} \\ &+ 120Q^{1064} + 72Q^{1092} + 136Q^{1120} + 240Q^{1148} + 240Q^{1176} + 84Q^{1204} + 84Q^{1232} \\ &+ 312Q^{1260} + 120Q^{1288} + 96Q^{1316} + 248Q^{1344} + \dots, \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} &\vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}(\tau; 0, 2) \vartheta_{14, 0}(\tau; 0, 14) \vartheta_{01}(\tau; 0, 14) \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{28k^2} \right)^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{28k^2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{7(2k+1)^2} \\ &\quad \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{49(2k+1)^2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{196k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4Q^{56}(1 + 6Q^{28} + 9Q^{56} - 10Q^{84} - 30Q^{112} + 11Q^{168} - 44Q^{196} - 12Q^{224} \\ &+ 52Q^{252} + 38Q^{280} + 114Q^{308} + 49Q^{336} - 112Q^{364} + 85Q^{392} + 28Q^{420} - 191Q^{448} \\ &- 46Q^{476} - 248Q^{504} - 98Q^{532} + 272Q^{560} - 224Q^{588} - 134Q^{616} + 172Q^{644} \\ &+ 168Q^{672} + 532Q^{700} + 49Q^{728} - 92Q^{756} + 416Q^{784} + 100Q^{812} - 61Q^{840} \\ &- 400Q^{868} - 674Q^{896} - 98Q^{924} + 129Q^{952} - 204Q^{980} - 194Q^{1008} \\ &+ 120Q^{1036} + 64Q^{1064} + 356Q^{1092} + 98Q^{1120} - 580Q^{1148} + 264Q^{1176} \\ &+ 302Q^{1204} - 176Q^{1232} + 204Q^{1260} + 54Q^{1288} - 14^{1344} + \dots), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} X(\tau) &= 2Q^{28} + 6Q^{56} - 10Q^{112} - 14Q^{196} - 2Q^{224} - 6Q^{252} + 28Q^{308} \\ &+ 14Q^{392} + 22Q^{448} - 18Q^{504} - 28Q^{616} - 28Q^{844} + 10Q^{700} + 14Q^{784} \\ &- 4Q^{812} - 18Q^{896} + 30Q^{1008} + 12Q^{1036} + 28Q^{1204} - 28Q^{1232} \\ &+ 28^{1288} - 14Q^{1372} + \dots \end{aligned} \quad (10.10)$$

Вычислив значения $\rho(M; 1, 7)$ по формуле (10.8) и подставив их в (4.7), получим

$$\begin{aligned} \theta(\tau; 1, 7) = & 1 + \frac{9}{2}Q^{28} + \frac{15}{2}Q^{56} + 8Q^{84} + \frac{27}{2}Q^{112} + 24Q^{140} + 24Q^{168} \\ & + \frac{25}{2}Q^{196} + \frac{51}{2}Q^{224} + \frac{117}{2}Q^{252} + 40Q^{280} + 15Q^{308} + 56Q^{336} + 72Q^{364} \\ & + \frac{75}{2}Q^{392} + 24Q^{420} + \frac{99}{2}Q^{448} + 96Q^{476} + \frac{195}{2}Q^{504} + 40Q^{532} + 72Q^{560} \\ & + 144Q^{588} + 45Q^{616} + 33Q^{644} + 120Q^{672} + \frac{189}{2}Q^{700} + 120Q^{728} + 80Q^{756} \\ & + \frac{175}{2}Q^{784} + 135Q^{812} + 72Q^{840} + 64Q^{868} + \frac{195}{2}Q^{896} + 240Q^{924} \\ & + 160Q^{952} + 48Q^{980} + \frac{351}{2}Q^{1008} + 171Q^{1036} + 120Q^{1064} + 72Q^{1092} \\ & + 136Q^{1120} + 240Q^{1148} + 240Q^{1176} + 63Q^{1204} + 105Q^{1232} \\ & + 312Q^{1260} + 99Q^{1288} + 96Q^{1316} + 248Q^{1344} + \dots \end{aligned} \quad (10.11)$$

Теперь постоянную A подберем так, чтобы коэффициент при Q^{28} в разложении $\psi(\tau; 1, 7)$ по степеням Q был равен нулю, т. е. согласно (10.2), (10.9)–(10.11) так, чтобы

$$6 - 2A - \frac{9}{2} = 0.$$

Следовательно, взяв $A = \frac{3}{4}$ и приняв во внимание (10.2), (10.9) — (10.11), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^M ($M \leq 1344$) равны нулю.

Теорема 3а. Пусть $n = 2^\alpha m = 2^\alpha 7^\beta u$, $(m, 2) = (u, 14) = 1$, $M = 28n$. Тогда

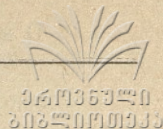
$$\begin{aligned} r(n) = & \frac{1}{4} \left\{ 7^{\beta+1} + (-1)^{\beta+1} \left(\frac{u}{7} \right) \right\} \{ 2^{\alpha+1} + (-1)^{(n-1)/2} \} \\ & \times \sum_{d_1 d_2 = u} (-1)^{(d_1-1)^2} \left(\frac{d_1}{7} \right) d_2 + \frac{3}{4} \nu(M), \end{aligned}$$

где $\nu(M)$ — коэффициенты при Q^M в разложении $X(\tau)$ по степеням Q .

Доказательство. Утверждаемое следует из (10.3), (4.3), (4.6), (4.2) и (10.8).

§ 11. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9x_4^2.$$



Лемма 36. Функция

$$\psi(\tau; 1, 9) = \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 18) - \theta(\tau; 1, 9) - A \vartheta_{61}^4(\tau; 0, 18), \quad (11.1)$$

при постоянной A , является целой модулярной формой 36-ой степени и измерения — 2.

Доказательство аналогично доказательству леммы 34.

Теорема 4.

$$\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 18) = \theta(\tau; 1, 9) + 4 \vartheta_{61}^4(\tau; 0, 18). \quad (11.2)$$

Доказательство. Согласно лемм 36 и 1, достаточно показать, что в разложении $\psi(\tau; 1, 9)$ по степеням Q , постоянную A можно так подобрать, чтобы коэффициенты при Q^M ($M \leq 2592$) были равны нулю.

Положив в леммах 31, 32 и 33

$$a=b=1, \quad a'=b'=9, \quad \gamma=\gamma'=0, \quad v=3\beta, \quad l=2,$$

т. е.

$$M=36n, \quad n=2^\alpha m = 2^\alpha 3^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 6}} p^\beta, \quad r=3, \quad \omega=1,$$

получим

$$\rho(M; 1, 9) = 2^\alpha 3^{\beta+1} \chi_2 \chi_3 \sum_{d|u} d, \quad (11.3)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_2 &= 1, & \text{если } \alpha &= 0, \\ &= 3 \cdot 2^{-\alpha}, & \text{если } \alpha > 0; \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \chi_3 &= \left\{ 3 - \left(\frac{n}{3} \right) \right\} 3^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } \beta &= 0, \\ &= 4 \cdot 3^{-\beta-1} (3^\beta - 1), & \text{если } \beta > 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Из (11.3)–(11.5) следует

$$\begin{aligned} \rho(M; 1, 9) &= 12(3^\beta - 1) \sigma(u), & \text{если } \alpha > 0, \beta > 0, \\ &= 4(3^\beta - 1) \sigma(u), & \text{если } \alpha = 0, \beta > 0, \\ &= 3 \left\{ 3 - \left(\frac{n}{3} \right) \right\} \sigma(u), & \text{если } \alpha > 0, \beta = 0, \\ &= \left\{ 3 - \left(\frac{n}{3} \right) \right\} \sigma(u), & \text{если } \alpha = 0, \beta = 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

где

$$\sigma(u) = \sum_{d|u} d.$$

Положив $Q = e\left(\frac{\tau}{36}\right)$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 18) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{36k^2} \right)^3 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{324k^2} \\ &= 1 + 6Q^{36} + 12Q^{72} + 8Q^{108} + 6Q^{144} + 24Q^{180} + 24Q^{216} + 12Q^{288} \\ &\quad + 32Q^{324} + 36Q^{360} + 48Q^{396} + 24Q^{432} + 36Q^{468} + 96Q^{504} + 48Q^{540} \\ &\quad + 6Q^{576} + 72Q^{612} + 96Q^{648} + 72Q^{684} + 72Q^{720} + 64Q^{756} + 72Q^{792} \\ &\quad + 96Q^{828} + 24Q^{864} + 42Q^{900} + 168Q^{936} + 104Q^{972} + 48Q^{1008} \\ &\quad + 120Q^{1044} + 144Q^{1080} + 48Q^{1116} + 12Q^{1152} + 96Q^{1188} + 108Q^{1224} \\ &\quad + 192Q^{1260} + 96Q^{1296} + 36Q^{1332} + 240Q^{1368} + 112Q^{1404} + 36Q^{1440} \\ &\quad + 168Q^{1476} + 192Q^{1512} + 120Q^{1548} + 144Q^{1584} + 192Q^{1620} + 144Q^{1656} \\ &\quad + 192Q^{1692} + 24Q^{1728} + 150Q^{1764} + 372Q^{1800} + 144Q^{1836} + 84Q^{1872} \\ &\quad + 216Q^{1908} + 312Q^{1944} + 144Q^{1980} + 96Q^{2016} + 160Q^{2052} + 180Q^{2088} \\ &\quad + 240Q^{2124} + 144Q^{2160} + 180Q^{2196} + 384Q^{2232} + 256Q^{2268} + 6Q^{2304} \\ &\quad + 336Q^{2340} + 288Q^{2376} + 72Q^{2412} + 216Q^{2448} + 192Q^{2484} + 288Q^{2520} \\ &\quad + 288Q^{2556} + 96Q^{2592} + \dots, \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{61}^4(\tau; 0, 18) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{(18k+3)^2} \right)^4 = Q^{36} - 4Q^{252} + 2Q^{468} \\ &\quad + 8Q^{684} - 5Q^{900} - 4Q^{1116} - 10Q^{1332} + 8Q^{1548} + 9Q^{1764} \\ &\quad + 14Q^{2196} - 16Q^{2412} - 14Q^{2628} + \dots \end{aligned} \quad (11.8)$$

Вычислив значения $\rho(M; 1, 9)$ по формулам (11.6) и подставив их в (4.7), получим

$$\begin{aligned} \theta(\tau; 1, 9) &= 1 + 2Q^{36} + 12Q^{72} + 8Q^{108} + 6Q^{144} + 24Q^{180} + 24Q^{216} \\ &\quad + 16Q^{252} + 12Q^{288} + 32Q^{324} + 36Q^{360} + 48Q^{396} + 24Q^{432} + 28Q^{468} \\ &\quad + 96Q^{504} + 48Q^{540} + 6Q^{576} + 72Q^{612} + 96Q^{648} + 40Q^{684} + 72Q^{720} \\ &\quad + 64Q^{756} + 72Q^{792} + 96Q^{828} + 24Q^{864} + 62Q^{900} + 168Q^{936} + 104Q^{972} \\ &\quad + 48Q^{1008} + 120Q^{1044} + 144Q^{1080} + 64Q^{1116} + 12Q^{1152} + 96Q^{1188} \\ &\quad + 108Q^{1224} + 192Q^{1260} + 96Q^{1296} + 76Q^{1332} + 240Q^{1368} + 112Q^{1404} \\ &\quad + 36Q^{1440} + 168Q^{1476} + 192Q^{1512} + 88Q^{1548} + 144Q^{1584} + 192Q^{1620} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+144Q^{1656}+192Q^{1692}+24Q^{1728}+114Q^{1764}+372Q^{1800}+144Q^{1836} \\
 &+84Q^{1872}+216Q^{1908}+312Q^{1944}+144Q^{1980}+96Q^{2016}+160Q^{2052} \\
 &+180Q^{2088}+240Q^{2124}+144Q^{2160}+124Q^{2196}+384Q^{2232}+256Q^{2268} \\
 &+6Q^{2304}+336Q^{2340}+288Q^{2376}+136Q^{2412}+216Q^{2448}+192Q^{2484} \\
 &+288Q^{2520}+288Q^{2556}+96Q^{2592}+\dots
 \end{aligned} \quad (11.9)$$

Теперь постоянную A подберем так, чтобы коэффициент при Q^{36} в разложении $\psi(\tau; 1, 9)$ по степеням Q был равен нулю, т. е. согласно (11.1), 11.7) — (11.9) так, чтобы

$$6 - A - 2 = 0.$$

Следовательно, взяв $A=4$ и приняв во внимание (11.1), (11.7) — (11.9), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^M ($M \leq 2592$) равны нулю.

Теорема 4а. Пусть $n=2^\alpha 3^\beta u$, $(u, 6)=1$, $M=36n$. Тогда

$$\begin{aligned}
 r(n) &= 12(3^\beta - 1)\sigma(u), & \text{если } \alpha > 0, \beta > 0, \\
 &= 4(3^\beta - 1)\sigma(u), & \text{если } \alpha = 0, \beta > 0, \\
 &= 3 \left\{ 3 - (-1)^\alpha \left(\frac{u}{3} \right) \right\} \sigma(u), & \text{если } \alpha > 0, \beta = 0, \\
 &= \left\{ 3 - \left(\frac{n}{3} \right) \right\} \sigma(n) + 4\nu(M), & \text{если } n \equiv 1 \pmod{6}, \\
 &= \left\{ 3 - \left(\frac{n}{3} \right) \right\} \sigma(n), & \text{если } n \equiv 5 \pmod{6},
 \end{aligned}$$

где $\nu(M)$ — коэффициент при Q^M в разложении $\vartheta_{61}^4(\tau; 0, 18)$ по степеням Q .

Доказательство. Из (11.8) следует

$$\vartheta_{61}^4(\tau; 0, 18) = Q^{36} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{36 \cdot 3k(3k+1)} \right)^4;$$

следовательно, в разложении $\vartheta_{61}^4(\tau; 0, 18)$ по степеням Q все показатели степени имеют вид

$$M = 36n = 36(6h+1),$$

т. е.

$$\nu(M) = 0, \text{ если } n \not\equiv 1 \pmod{6}. \quad (11.10)$$

Утверждаемое следует из (11.2), (4.3), (4.6), (4.2), (11.6) и (11.10).

§ 12. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 10x_4^2.$$

Лемма 39. *Функция*

$$\begin{aligned} \psi(\tau; 1, 10) &= \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 20) - \theta(\tau; 1, 10) \\ &- A \vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \vartheta_{61}(\tau; 0, 10), \end{aligned} \quad (12.1)$$

при постоянной A , является целой модулярной формой 40-ой степени и измерения—2.

Доказательство аналогично доказательству леммы 36.

Теорема 5.

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 20) &= \theta(\tau; 1, 10) \\ &+ \frac{12}{7} \vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \vartheta_{61}(\tau; 0, 10). \end{aligned} \quad (12.2)$$

Доказательство. Согласно лемм 39 и 1 достаточно показать, что в разложении $\psi(\tau; 1, 10)$ по степеням Q постоянную A можно так подобрать, чтобы коэффициенты при Q^M ($M \leq 3840$) равнялись нулю.

Положив в леммах 31, 32 и 33

$$\begin{aligned} a=b=1, \quad a'=10, \quad b'=5, \quad \gamma=0, \quad \gamma'=1, \quad v=5\beta, \quad l=1, \\ \text{т. е.} \quad M=40n, \quad n=2^\alpha m=2^\alpha 5^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 10}} p^\beta, \quad r=1, \quad \omega=10, \end{aligned}$$

$$\text{получим} \quad \rho(M; 1, 10) = \frac{2^\alpha 5^\beta \pi^2}{10^{1/2} L(2, 10)} \chi_2 \chi_5 \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{10}{d_1} \right) d_2, \quad (12.3)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \chi_2 &= \{2^{\alpha+2} - (-1)^\alpha (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)}\} 2^{-\alpha-1}, \quad \text{если } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= \{2^{\alpha+2} + (-1)^\alpha (-1)^{\frac{1}{4}(m-3)}\} 2^{-\alpha-1}, \quad \text{если } m \equiv 3 \pmod{4}; \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$\chi_5 = \left\{ 5^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{u}{5} \right) \right\} 5^{-(\beta+1)}; \quad (12.5)$$

$$L(2, 10) = \frac{7\pi^2}{2 \cdot 10^{3/2}}. \quad (12.6)$$

Из (12.3)–(12.6) следует

$$\begin{aligned} \rho(M; 1, 10) &= \frac{1}{7} \left\{ 5^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \left\{ 2^{\alpha+2} - (-1)^\alpha (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)} \right\}, \\ &\quad \text{если } m \equiv 1 \pmod{4}, \quad (12.7) \\ &= \frac{1}{7} \left\{ 5^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \left\{ 2^{\alpha+2} + (-1)^\alpha (-1)^{\frac{1}{4}(m-3)} \right\}, \\ &\quad \text{если } m \equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Положив $Q = e\left(\frac{\tau}{40}\right)$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{P}_{00}^3(\tau; 0, 2) \mathfrak{P}_{00}(\tau; 0, 20) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{40k^2} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{400k^2} \\
 &= 1 + 6Q^{40} + 12Q^{80} + 8Q^{120} + 6Q^{160} + 24Q^{200} + 24Q^{240} + 12Q^{320} + 30Q^{360} \\
 &+ 26Q^{400} + 36Q^{440} + 32Q^{480} + 40Q^{520} + 60Q^{560} + 48Q^{600} + 54Q^{640} + 48Q^{680} \\
 &+ 60Q^{720} + 84Q^{760} + 72Q^{800} + 96Q^{840} + 40Q^{880} + 48Q^{920} + 12Q^{960} \\
 &+ 30Q^{1000} + 84Q^{1040} + 128Q^{1080} + 72Q^{1120} + 120Q^{1160} + 96Q^{1200} \\
 &+ 96Q^{1240} + 60Q^{1280} + 48Q^{1320} + 96Q^{1360} + 108Q^{1400} + 174Q^{1440} \\
 &+ 88Q^{1480} + 72Q^{1520} + 144Q^{1560} + 122Q^{1600} + 108Q^{1640} + 96Q^{1680} \\
 &+ 136Q^{1720} + 132Q^{1760} + 216Q^{1800} + 156Q^{1840} + 48Q^{1880} + 176Q^{1920} + 114Q^{1960} \\
 &+ 180Q^{2000} + 288Q^{2040} + 136Q^{2080} + 168Q^{2120} + 240Q^{2160} + 144Q^{2200} \\
 &+ 156Q^{2240} + 144Q^{2280} + 112Q^{2320} + 228Q^{2360} + 216Q^{2400} + 264Q^{2440} \\
 &+ 192Q^{2480} + 144Q^{2520} + 246Q^{2560} + 156Q^{2600} + 336Q^{2640} + 184Q^{2680} \\
 &+ 96Q^{2720} + 384Q^{2760} + 144Q^{2800} + 144Q^{2840} + 252Q^{2880} + 144Q^{2920} + 228Q^{2960} \\
 &+ 344Q^{3000} + 276Q^{3040} + 192Q^{3080} + 288Q^{3120} + 192Q^{3160} + 168Q^{3200} + 294Q^{3240} \\
 &+ 216Q^{3280} + 216Q^{3320} + 336Q^{3360} + 304Q^{3400} + 264Q^{3440} + 192Q^{3480} \\
 &+ 136Q^{3520} + 252Q^{3560} + 338Q^{3600} + 360Q^{3640} + 168Q^{3680} + 352Q^{3720} \\
 &+ 396Q^{3760} + 144Q^{3800} + 408Q^{3840} + \dots, \quad (12.8)
 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{P}_{00}(\tau; 0, 2) \mathfrak{P}_{40}(\tau; 0, 4) \mathfrak{P}_{21}(\tau; 0, 10) \mathfrak{P}_{61}(\tau; 0, 10)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{40k^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{5(4k+2)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{2(10k+1)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{2(10k+3)^2} \\
 &= 2Q^{40} + 4Q^{80} - 2Q^{120} - 4Q^{160} + 4Q^{200} - 6Q^{280} - 4Q^{320} - 2Q^{360} - 4Q^{440} \\
 &- 4Q^{480} + 8Q^{560} + 2Q^{600} + 12Q^{680} - 4Q^{720} + 4Q^{760} + 8Q^{800} - 4Q^{840} \\
 &+ 6Q^{920} + 8Q^{960} - 14Q^{1000} + 8Q^{1080} + 12Q^{1120} - 16Q^{1200} + 8Q^{1240} \\
 &- 8Q^{1280} - 12Q^{1320} - 16Q^{1360} - 2Q^{1400} + 4Q^{1440} - 12Q^{1480} + 4Q^{1600} \\
 &+ 6Q^{1720} - 8Q^{1760} - 4Q^{1800} - 8Q^{1840} - 18Q^{1880} + 16Q^{1920} + 2Q^{1960} \\
 &+ 12Q^{2000} + 8Q^{2040} + 8Q^{2120} + 24Q^{2200} - 8Q^{2240} + 12Q^{2280} - 12Q^{2360} \\
 &- 4Q^{2400} + 4Q^{2440} + 16Q^{2480} + 6Q^{2520} + 16Q^{2560} + 16Q^{2640} - 6Q^{2680} \\
 &- 24Q^{2720} + 4Q^{2760} - 24Q^{2840} + 4Q^{2880} + 12Q^{2920} - 6Q^{3000} + 8Q^{3040} + 12Q^{3080}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8Q^{3160} - 32Q^{3200} - 10Q^{3240} - 14Q^{3320} - 8Q^{3360} + 4Q^{3400} - 24Q^{3520} + 12Q^{3560} \\
 & - 12Q^{3680} - 8Q^{3720} + 24Q^{3760} - 24Q^{3800} - 16Q^{3840} + \dots \quad (12.9)
 \end{aligned}$$

Вычислив значения $\rho(M; 1, 10)$ по формулам (12.7) и подставив их в (4.7) получим,

$$\begin{aligned}
 \theta(\tau; 1, 10) = & 1 + \frac{18}{7}Q^{40} + \frac{36}{7}Q^{80} + \frac{80}{7}Q^{120} + \frac{90}{7}Q^{160} + \frac{120}{7}Q^{200} + 24Q^{240} \\
 & + \frac{72}{7}Q^{280} + \frac{132}{7}Q^{320} + \frac{234}{7}Q^{360} + 26Q^{400} + \frac{300}{7}Q^{440} + \frac{272}{7}Q^{480} + 40Q^{520} \\
 & + \frac{324}{7}Q^{560} + \frac{312}{7}Q^{600} + 54Q^{640} + \frac{192}{7}Q^{680} + \frac{468}{7}Q^{720} + \frac{540}{7}Q^{760} + \\
 & + \frac{408}{7}Q^{800} + \frac{720}{7}Q^{840} + 40Q^{880} + \frac{264}{7}Q^{920} + \frac{744}{7}Q^{960} + 54Q^{1000} + 84Q^{1040} \\
 & + \frac{800}{7}Q^{1080} + \frac{360}{7}Q^{1120} + 120Q^{1160} + \frac{864}{7}Q^{1200} + \frac{576}{7}Q^{1240} + \frac{516}{7}Q^{1280} \\
 & + \frac{480}{7}Q^{1320} + \frac{864}{7}Q^{1360} + \frac{780}{7}Q^{1400} + \frac{1170}{7}Q^{1440} + \frac{760}{7}Q^{1480} + 72Q^{1520} + 144Q^{1560} \\
 & + \frac{806}{7}Q^{1600} + 108Q^{1640} + 96Q^{1680} + \frac{880}{7}Q^{1720} + \frac{1020}{7}Q^{1760} + \frac{1560}{7}Q^{1800} \\
 & + \frac{1188}{7}Q^{1840} + \frac{552}{7}Q^{1880} + \frac{1040}{7}Q^{1920} + \frac{774}{7}Q^{1960} + \frac{1116}{7}Q^{2000} \\
 & + \frac{1920}{7}Q^{2040} + 136Q^{2080} + \frac{1080}{7}Q^{2120} + 240Q^{2160} + \frac{720}{7}Q^{2200} + \frac{1188}{7}Q^{2240} \\
 & + \frac{864}{7}Q^{2280} + 112Q^{2320} + \frac{1740}{7}Q^{2360} + \frac{1560}{7}Q^{2400} + \frac{1800}{7}Q^{2440} + \frac{1152}{7}Q^{2480} \\
 & + \frac{936}{7}Q^{2520} + \frac{1530}{7}Q^{2560} + 156Q^{2600} + \frac{2160}{7}Q^{2640} + \frac{1360}{7}Q^{2680} + \frac{960}{7}Q^{2720} \\
 & + \frac{2640}{7}Q^{2760} + 144Q^{2800} + \frac{1296}{7}Q^{2840} + \frac{1716}{7}Q^{2880} + \frac{864}{7}Q^{2920} + 228Q^{2960} \\
 & + \frac{2480}{7}Q^{3000} + \frac{1836}{7}Q^{3040} + \frac{1200}{7}Q^{3080} + 288Q^{3120} + \frac{1440}{7}Q^{3160} + \\
 & + \frac{1560}{7}Q^{3200} + \frac{2178}{7}Q^{3240} + 216Q^{3280} + 240Q^{3320} + \frac{2448}{7}Q^{3360} + \frac{2080}{7}Q^{3400} \\
 & + 264Q^{3440} + 192Q^{3480} + \frac{1240}{7}Q^{3520} + \frac{1620}{7}Q^{3560} + 338Q^{3600} + 360Q^{3640} \\
 & + \frac{1320}{7}Q^{3680} + \frac{2560}{7}Q^{3720} + \frac{2484}{7}Q^{3760} + \frac{1296}{7}Q^{3800} + \frac{3048}{7}Q^{3840} + \dots \quad (12.10)
 \end{aligned}$$



Теперь постоянную A подберем так, чтобы коэффициент при Q^{18} в разложении $\psi(\tau; 1, 10)$ по степеням Q был равен нулю, т. е. согласно (12.1), (12.8) — (12.10) так, чтобы

$$6 - 2A - \frac{18}{7} = 0.$$

Следовательно, взяв $A = \frac{12}{7}$ и приняв во внимание (12.1) и (12.8) — (12.10), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^M ($M \leq 3840$) в разложении $\psi(\tau; 1, 10)$ равны нулю.

Теорема 5а. Пусть $n = 2^\alpha m = 2^\alpha 5^\beta u$, $(u, 10) = 1$, $M = 40n$. Тогда

$$r(n) = \frac{1}{7} \left\{ 5^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{u}{5} \right) \right\} \{ 2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha\epsilon} \} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{2}{d_1} \right) \left(\frac{d_1}{5} \right) d_2 + \frac{12}{7} \nu(M),$$

где $\nu(M)$ — коэффициент при Q^M в разложении

$$\vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \vartheta_{40}(\tau; 0, 4) \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \vartheta_{61}(\tau; 0, 10)$$

по степеням Q , а

$$\epsilon = \begin{cases} -(-1)^{\frac{(m-1)}{4}}, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ (-1)^{\frac{(m-3)}{4}}, & \text{если } m \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждаемое следует из (12.2), (4.3), (4.7), (4.2) и (12.7).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. P. Bronkhorst. Over het aantal oplossingen van het stelsel diophantische vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 &= n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_s &= m \end{aligned} \right\} \text{ voor } s=6 \text{ en } s=8. \text{ Amsterdam, 1943.}$$
2. F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke. Leipzig, 1890.
3. H. D. Kloosterman. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, 25, 1925, 143—173.
4. H. D. Kloosterman. Theorie des Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, 6, 1928, 163—188.
5. J. Liouville. Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$. Journal de Mathématiques, ser. 2, 9, 1864, 1—12.
6. G. Lomadze. Über die Darstellung der Zahlen durch einige quaternäre quadratische Formen. Acta Arithmetica, V, 1959, 125—170.

7. P. Pepin. Sur quelques formes quadratiques quaternaires. *Journal de Mathématiques*, ser. 4, 6, 1890, 5—67.
8. H. Streefkerk. Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking
$$U = \sum_{i=1}^s (Ax_i^2 + Bx_i + C).$$
 Amsterdam, 1943.
9. A. Walfisz. Zur additiven Zahlentheorie. VI. Труды Тбилисского Математического Института, V, 1938, 197—224.
10. A. Walfisz. Zur additiven Zahlentheorie. VIII. Труды Тбилисского Математического Института, VIII, 1940, 69—107.
11. A. Walfisz. Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Warszawa, 1957.
12. Г. А. Ломадзе. О представлении чисел суммами обобщенных полигональных чисел. I. Труды Тбилисского Математического Института им. А. М. Размадзе, XXII, 1956, 77—102.
13. П. С. Назимов. О приложениях эллиптических функций к теории чисел. Москва, 1885.
14. Я. Успенский. О числе представлений чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя и шестью переменными. Сообщения Харьковского Математического Общества, II сер., XV, 1915, 81—147.

ალგებრა-გეომეტრიის
კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში, 30 XI. 58 წ.)

3. ლამაძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ოთხხველაღიანი კვადრატული ფორმით

რ ე ზ ი უ მ ე

წინამდებარე შრომაში მოცემულია ფორმულები მთელ რიცხვთა წარმოდგენათა რაოდენობისათვის კვადრატული ფორმებით: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_4^2$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 7x_4^2$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9x_4^2$ და $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 10x_4^2$.

П. Когония

О связи между множеством чисел Маркова и марковским спектром (I)

1. Термины и обозначения.

$$M = \{\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad (1)$$

произвольная бесконечная в обе стороны ограниченная последовательность натуральных чисел,

$$Rg(M) = \text{Max}\{a_k\}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \overline{M} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} a_k, \quad (2)$$

$$\lambda_M(k) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \dots] + a_k + [0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots], \quad (3)$$

$$\lambda_M(k, m) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_{k-m}] + a_k + [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m}], \quad (4)$$

$$T_M(k, m) = \{a_{k-m}, a_{k-m+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}, a_{k+m}\}, \quad (5)$$

$$\lambda_M = \sup_{-\infty < k < \infty} \{\lambda_M(k)\}, \quad (6)$$

$$\theta = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots] \quad (7)$$

произвольное иррациональное число с ограниченной последовательностью неполных частных a_k ;

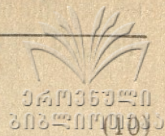
$$\lambda_\theta(k) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1] + a_k + [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots], \quad (8)$$

$$\lambda_\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(k) \quad (9)$$

Числа λ_θ называются числами Маркова, а числа λ_M — числами марковского спектра;

$\{\lambda_\theta\}$ и $\{\lambda_M\}$ обозначают, соответственно, множество всех чисел Маркова и марковский спектр [1]. Как известно, числа λ_θ связаны с характером рациональных аппроксимаций иррациональных чисел θ [2], а числа λ_M суть минимумы бинарных квадратичных форм положительного определителя [3].

2. Цель настоящей работы — исследование связи между множествами $\{\lambda_\theta\}$ и $\{\lambda_M\}$.



Б. Н. Делоне и его ученикам удалось доказать, что

$$\{\lambda_\theta\} \subset \{\lambda_M\}.$$

Предварительно они дают геометризацию вопроса, после чего приводят доказательство (конечно, геометрическое) включения (10) и получают ряд важных следствий [1].

Мне удалось найти вполне элементарное и простое арифметическое доказательство соотношения (10). Для цельности изложения я пока привожу это доказательство, после чего рассматриваю вопрос об обратном включении.

Лемма 1. Если

$$\theta = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots],$$

произвольное иррациональное число с ограниченной последовательностью неполных частных ($1 \leq a_k \leq N$, $k=1, 2, 3, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta, \quad (11)$$

где $\theta_n = [0; a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}, \dots]$, $1 \leq a_k^{(n)} \leq N$, $k=1, 2, \dots$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k$ ($k=1, 2, 3, \dots$),

т. е.

$$a_k^{(n)} = a_k, \quad \text{при } n > N' = N'(k) \quad (12)$$

Доказательство. Пусть (12) имеет место не при любом k и обозначим через k_0 наименьшее значение k , для которого (12) не выполняется; тогда для всех, достаточно больших, значений n ($n > N_1$) имеем

$$a_1^{(n)} = a_1, a_2^{(n)} = a_2, \dots, a_{k_0-1}^{(n)} = a_{k_0-1} \quad (13)$$

и, вместе с тем, для бесконечного множества значений n выполняется неравенство

$$a_{k_0}^{(n)} \neq a_{k_0};$$

последнее неравенство, в свою очередь, означает, что для бесконечного множества значений n выполняется хотя бы одно из двух неравенств

$$a_{k_0}^{(n)} \geq a_{k_0} + 1, \quad a_{k_0}^{(n)} \leq a_{k_0} - 1.$$

Можно предположить (без ограничения общности), что бесконечное число раз выполняется первое из последних двух неравенств, т. е.

$$a_{k_0}^{(n_k)} \geq a_{k_0} + 1, \quad k=1, 2, 3, \dots; \quad (14)$$

в силу (13), при $n > N_1$, имеем

$$\theta_n = [0; a_1; a_2, \dots, a_{k_0-1}, a_{k_0}^{(n)}, \dots]. \quad (15)$$

Если для любого $k \geq 0$ положим

$$\frac{p_k}{q_k} = [0; a_1, a_2, \dots, a_k], \quad r_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \dots], \quad (16)$$

то, как известно [4]

$$\theta = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}}. \quad (17)$$

В силу (17), при $n > N_1$, имеем

$$\theta_n = \frac{p_{k_0-1} \cdot r_{k_0}^{(n)} + p_{k_0-2}}{q_{k_0-1} \cdot r_{k_0}^{(n)} + q_{k_0-1}}, \quad \theta = \frac{p_{k_0-1} \cdot r_{k_0} + p_{k_0-2}}{q_{k_0-1} \cdot r_{k_0} + q_{k_0-2}}, \quad (18)$$

где

$$r_{k_0}^{(n)} = [a_{k_0}^{(n)}; a_{k_0+1}^{(n)}, \dots], \quad r_{k_0} = [a_{k_0}; a_{k_0+1}, \dots]. \quad (19)$$

В силу (14) и (19)

$$\begin{aligned} r_{k_0}^{(n_k)} &> [a_{k_0}^{(n_k)}; a_{k_0+1}^{(n_k)}, a_{k_0+2}^{(n_k)}] \geq [a_{k_0} + 1; N, 1] = \\ &= a_{k_0} + 1 + \frac{1}{N+1}, \quad r_{k_0} < [a_{k_0}; 1] = a_{k_0} + 1, \end{aligned}$$

откуда

$$r_{k_0}^{(n_k)} - r_{k_0} > \frac{1}{N+1}. \quad (20)$$

Из (18) и (20) получаем

$$\begin{aligned} |\theta - \theta_{n_k}| &= \frac{r_{k_0}^{(n_k)} - r_{k_0}}{(q_{k_0-1} \cdot r_{k_0}^{(n_k)} + q_{k_0-2})(q_{k_0-1} \cdot r_{k_0} + q_{k_0-2})} > \frac{\frac{1}{N+1}}{[q_{k_0-1}(N+1) + q_{k_0-2}]^2} = \\ &= \frac{1}{(N+1)[q_{k_0-1}(N+1) + q_{k_0-2}]^2} = C, \end{aligned}$$

где C — постоянная величина. Это же неравенство противоречит условию (11), чем и доказывается справедливость леммы 1.

Лемма 2. Любая предельная точка суммы конечного числа последовательностей действительных чисел равна сумме предельных точек слагаемых.

Доказательство. Пусть даны последовательности

$$\{a_k^{(1)}\}, \{a_k^{(2)}\}, \dots, \{a_k^{(m)}\}, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad \text{и}$$

$$a_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)} + \dots + a_k^{(m)}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Лемма утверждает, что какова бы ни была предельная точка α последовательности — суммы $\{a_k\}$, существуют предельные точки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ соответ-



ственно последовательностей — слагаемых, для которых имеет место равенство

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \quad (21)$$

Как будет видно из приводимого ниже рассуждения, имеет место нечто большее, чем факт, выражаемый равенством (21); именно, существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_k , для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha, \quad \lim_{k \leftarrow \infty} a_{n_k}^{(i)} = \alpha_i, \quad (i=1, 2, 3, \dots, m),$$

т. е. в равенстве (20) можно перейти к пределу по одной и той же последовательности n_k

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a_{n_k}^{(i)} = \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}^{(i)} \quad (22)$$

Итак, мы докажем справедливость утверждения леммы 2 в виде (22). Очевидно, что (без ограничения общности) можно ограничиться случаем двух слагаемых, т. е. положить $m=2$. Пусть

$$a_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)} \quad (k=1, 2, 3, \dots); \quad (23)$$

если α — произвольная предельная точка последовательности $\{a_k\}$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n'_k} = \alpha,$$

откуда, в силу (23)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_{n'_k}^{(1)} + a_{n'_k}^{(2)} \right) = \alpha, \quad (24)$$

в силу ограниченности последовательностей $\{a_k^{(i)}\}$ (последовательности — слагаемые предполагаются ограниченными, что не ограничивает общности),

$\{a_{n'_k}^{(i)}\}$ имеет хоть одну предельную точку α_1 , откуда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n'_{k_i}}^{(1)} = \alpha_1; \quad (25)$$

Из (24) и (25) имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n'_{k_i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(a_{n'_{k_i}}^{(1)} + a_{n'_{k_i}}^{(2)} \right) = \alpha = \alpha_1 + \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n'_{k_i}}^{(2)} = \alpha_1 + \alpha_2;$$

итак,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n'_{k_i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n'_{k_i}}^{(1)} + \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n'_{k_i}}^{(2)}.$$

Теорема 1. Множество чисел Маркова является подмножеством марковского спектра, т. е.

$$\{\lambda_\theta\} \subset \{\lambda_M\}.$$

Доказательство. Пусть θ обозначает любое иррациональное число интервала $(0,1)$ с ограниченной последовательностью неполных частных

$$\theta = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots]; \quad (7)$$

тогда из (9), (10) и лемм 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} \lambda_\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(n_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [0; a_{n_{k-1}}, a_{n_{k-2}}, \dots, a_1] + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} [0; a_{n_{k+1}}, a_{n_{k+2}}, \dots] = [0; b_{-1}, b_{-2}, \dots] + b_0 + [0; b_1, b_2, \dots], \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k-i}} = b_{-i}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = b_0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+i}} = b_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Рассмотрим последовательность

$$M = \{\dots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3, \dots\}; \quad (27)$$

тогда, в силу (5) имеем

$$\lambda_M(0, k) = [0; b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-k}] + b_0 + [0; b_1, b_2, \dots, b_k]. \quad (28)$$

Из (26), (27) и (28) следует

$$\lambda_\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_M(0, k) = \lambda_M(0). \quad (29)$$

Итак, достаточно показать, что

$$\lambda_M(0) = \lambda_M = \sup_{-\infty < k < \infty} \{\lambda_M(k)\}. \quad (30)$$

В самом деле, если бы (30) не имело места, т. е. если бы было $\lambda_M(0) < \lambda_M$, то при некотором k_0 имели бы неравенство

$$\lambda_M(k_0) > \lambda_M(0). \quad (31)$$

С другой стороны, в разложении (7) числа θ , в силу леммы 1 и равенства (26), укладываются отрезки

$$T_M(0, k) = \{b_{-k}, b_{-k+1}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k\}$$

произвольно далеко и произвольной длины k ; все эти отрезки содержат внутри себя член b_{k_0} , при достаточно большом k .

Пусть номера члена b_{k_0} в разложении (7) составляют последовательность $\{n'_k\}$; тогда каково бы ни было положительное число $\varepsilon > 0$, для бесконечной подпоследовательности $\{n_k\}$ последовательности $\{n'_k\}$

$$\lambda_M(k_0) < \lambda_\theta(n_k) + \varepsilon.$$

откуда

$$\lambda_M(k_0) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(n_k) + \varepsilon \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(k) + \varepsilon = \lambda_\theta + \varepsilon,$$

отсюда же, в силу произвольности ε ,

$$\lambda_M(k_0) \leq \lambda_\theta = \lambda_M(0)$$

это же неравенство противоречит неравенству (31), чем доказывается равенство (30), и следовательно, теорема 1.

Заметим, что в процессе доказательства мы получили больше, чем сказано в теореме; именно, теорема утверждает, что любому иррациональному числу θ с ограниченной последовательностью неполных частных соответствует бесконечная в обе стороны ограниченная последовательность M , для которой $\lambda_\theta = \lambda_M$, но о структуре самой M ничего не говорится.

Дело в том, что для любой последовательности M верхняя грань $\lambda_M = \sup \{\lambda_M(k)\}$ не достижима, т. е. λ_M , вообще, не совпадает ни с одним из $\lambda_M(k)$, иначе говоря, множество $\{\lambda_M(k)\}$ может иметь, но может и не иметь максимального элемента.

В связи с этим фактом введем следующее понятие: последовательность M назовем достижимой или недостижимой смотря на то, имеет ли множество $\{\lambda_M(k)\}$ максимальный элемент или нет; итак последовательность M назовем достижимой, если существует хотя бы одно значение $k=k_0$, для которого

$$\lambda_M = \lambda_M(k_0) = \sup \{\lambda_M(k)\},$$

и недостижимой, если для любого $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\lambda_M \neq \lambda_M(k).$$

Из доказанного равенства

$$\lambda_\theta = \lambda_M = \lambda_M(0)$$

следует, что последовательность M , которую мы поставили в соответствие числу θ и для которого $\lambda_\theta = \lambda_M$, является достижимой и именно при $k=0$. Итак, теорему 1 можно уточнить следующим образом.

Следствие 1. Любому иррациональному числу θ с ограниченной последовательностью неполных частных соответствует такая достижимая последовательность M , для которой $\lambda_\theta = \lambda_M$.

Из приведенного при доказательстве рассуждения становится ясной связь последовательности M с разложением числа θ . В самом деле, если

$$\theta = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots],$$

$$M = \{\dots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3, \dots\},$$

и

$$T_M(0, k) = \{b_{-k}, b_{-k+1}, \dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k\},$$

то равенство

$$\lambda_\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(k) = \sup \{\lambda_M(k)\} = \lambda_M = \lambda_M(0) \quad (32)$$

означает, что последовательность $\{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ неполных частных числа θ содержит отрезки $T_M(0, k)$ последовательности M произвольно далеко и произвольной длины, т. е. произвольно длинные отрезки $T_M(0, k)$ встречаются в разложении числа сколь угодно далеко. Равенство (32) запишем в таком обозначении

$$\lambda_\theta = \lambda_M = \lambda_M(0) = [0; b_{-1}, b_{-2}, \dots] + b_0 + [0; b_1, b_2, \dots] = \theta_{-1} + b_0 + \theta_1, \quad (33)$$

где

$$1 \leq b_k \leq N, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Легко заметить, что аналогичный факт имеет место для любой предельной точки множества $\{\lambda_M(k)\}$, точнее, любая предельная точка этого множества имеет вид (33) и, следовательно, соответствующие отрезки в разложении числа θ встречаются аналогичным образом.

3. Рассмотрим теперь обратную задачу: всякая ли достижимая последовательность M соответствует некоторому числу θ указанным выше образом?, т. е. для любой такой M существует ли θ , для которого $\lambda_M = \lambda_\theta$?; как увидим ниже, это, по существу, тот же вопрос обратного включения, о котором говорится в введении.

Предварительно введем еще несколько обозначений:

$E(n)$ — множество всех иррациональных чисел θ , определяемых условиями

$$\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots], \quad 1 \leq a_k \leq n, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots$$

$E(a_0, n)$ — множество всех тех чисел θ множества $E(n)$, для которых a_0 имеет фиксированное значение; в частности $E(0, n)$ — множество всех чисел θ вида

$$\theta = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots], \quad 1 \leq a_k \leq n, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

$2E(0, n)$ — множество всех чисел α , представимых в виде $\alpha = \theta_1 + \theta_2$, где $\theta_1, \theta_2 \in E(0, n)$, т. е.

$$2E(0, n) = \{\theta_1 + \theta_2\}, \quad \theta_1, \theta_2 \in E(0, n), \quad (35)$$

$2E(0, n) + a$ — множество всех чисел вида $\theta_1 + \theta_2 + a$, где $\theta_1, \theta_2 \in E(0, n)$, т. е.

$$2E(0, n) + a = \{\theta_1 + a + \theta_2\} = \{\theta_1 + \theta_2 + a\}, \quad \theta_1, \theta_2 \in E(0, n). \quad (36)$$

Множество $2E(0, n) + a$ получается из множества $2E(0, n)$ „сдвигом“ последнего на a единиц вправо (a — целое положительное число).

В этих обозначениях равенство (33) означает, что при $1 \leq a_k \leq N$

$$\lambda_\theta = \lambda_M = \lambda_M(0) \in 2E(0, N) + b_0, \quad 1 \leq b_0 \leq N. \quad (37)$$



После сказанного займемся обратной задачей; итак, пусть

$$M = \{\dots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad 1 \leq a_k \leq N, \quad (38)$$

обозначает произвольную бесконечную в обе стороны ограниченную последовательность натуральных чисел и

$$\lambda_M = \sup \{\lambda_M(k)\}; \quad (6)$$

требуется исследовать вопрос о том, при каких M существует такое θ , для которого $\lambda_M = \lambda_\theta$. Здесь придется рассмотреть два основных случая:

- 1) λ_M является предельной точкой множества $\{\lambda_M(k)\}$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,
- 2) λ_M является изолированной точкой этого множества.

В настоящей работе мы исследуем случай 1), точнее, добавим, что в этом случае имеет место обратное включение. Случай 2) (требующий рассмотрения нескольких подслучаев) послужит предметом следующей заметки.

Случай 1) разобьем на два подслучая;

1₁) λ_M , будучи предельной, является максимальным числом множества $\lambda_M(k)$, т. е. λ_M совпадает хоть с одним из чисел $\lambda_M(k)$ (это означает, что M — достижимая последовательность); тогда (меняя нумерацию, в случае надобности) можно положить, что

$$\lambda_M = \lambda_M(0) = [0; a_{-1}, a_{-2}, \dots] + a_0 + [0; a_1, a_2, \dots], \quad \text{и} \quad (39)$$

$$\lambda_M(k) \leq \lambda_M(0) = \lambda_M, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (40)$$

Из равенства (39) имеем

$$\lambda_M = \theta_1 + a_0 + \theta_2, \quad \lambda_M \in 2E(0, n) + a_0, \quad (41)$$

для соответствующего n ($n=N-1$ или N , $N=\text{Rg}(M)$).

Из теоретико-множественного равенства

$$\{\lambda_M(k)\} = \{\lambda_M(k)\}^- + \{\lambda_M(0)\} + \{\lambda_M(k)\}^+$$

(где знаки „—“, „+“ означают, что k пробегает соответственно все целые отрицательные и целые положительные значения) следует, что λ_M является предельной точкой хотя бы одного из множеств $\{\lambda_M(k)\}^+$ и $\{\lambda_M(k)\}^-$; можно положить (без ограничения общности), что λ_M предельная точка множества $\{\lambda_M(k)\}^+$; тогда для соответствующей возрастающей последовательности натуральных чисел n_k имеем

$$\lambda_M = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_M(n_k) \quad (42)$$

Рассмотрим число θ , определяемое разложением

$$\theta = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots] \quad (43)$$

т. е. последовательность неполных частных числа θ совпадает с правой частью последовательности M : для положительных значений k имеем

$$\lambda_\theta(k) = [0; a_{k-1}, \dots, a_1] + a_k + [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots],$$

$$\lambda_M(k) = [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots] + a_k + [0; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots],$$

откуда [4] получаем

$$\begin{aligned} |\lambda_\theta(k) - \lambda_M(k)| &= |[0; a_{k-1}, \dots, a_1] - [0; a_{k-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots]| = \\ &= |[0; a_{k-1}, \dots, a_1] - [0; a_{k-1}, \dots, a_1, r_0]| = \\ &= \left| \frac{p'_{k-1} \cdot r_0 + p'_{k-2}}{q'_{k-1} \cdot r_0 + q'_{k-2}} - \frac{p'_{k-1}}{q'_{k-1}} \right| = \frac{1}{q'_{k-1}(q'_{k-1} \cdot r_0 + q'_{k-2})} < \frac{1}{q_{k-1}^{12}} \leq \frac{1}{2^{k-2}}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda_\theta(k) - \lambda_M(k)] &= 0 \end{aligned}$$

что, в свою очередь, дает

$$\lambda_\theta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_M(k). \quad (44)$$

Из определения числа λ_M и равенства (42) следует, что

$$\lambda_M = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_M(k)$$

откуда, в силу (44), получаем

$$\lambda_M = \lambda_\theta.$$

1₂) λ_M , будучи предельной множества $\{\lambda_M(k)\}$, не принадлежит этому множеству, т. е. множество $\{\lambda_M(k)\}$ не имеет максимального элемента ($\lambda_M(k) < \lambda_M$ при любом k), а это, по принятому нами определению означает, что последовательность M недостижима. И в этом случае, почти дословно применимо приведенное выше рассуждение; итак, можно предположить, что $\lambda_M = \sup \{\lambda_k(k)\}$ является предельной для множества $\{\lambda_M(k)\}^+$, откуда

$$\lambda_M = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_M(n_k); \quad (42)$$

но, так как $\lambda_M(k) < \lambda_M$ при любом k , в силу (42), получим

$$\lambda_M = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_M(k); \quad (45)$$

С другой стороны, как и в случае 1₁) имеем

$$\lambda_\theta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_\theta(k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_M(k),$$

где θ определяется совершенно так же, как и выше; из (45) и последнего равенства следует, что

$$\lambda_M = \lambda_\theta. \quad (46)$$

По следствию 1 числу θ соответствует такая достижимая последовательность M' , для которой $\lambda_\theta = \lambda_{M'}$; это равенство вместе с (45) дает

$$\lambda_m = \lambda_m' = \lambda_\theta.$$

В оставшемся случае 2) λ_m является изолированной точкой множества $\{\lambda_m(k)\}$ и, следовательно, будучи верхней гранью, будет максимальной точкой этого множества, т. е. M — достижимая последовательность. Итак, имеем

Следствие 2. Любой бесконечной в обе стороны ограниченной последовательности M соответствует такая достижимая последовательность M' (если сама M достижима, то $M' = M$), что

$$\lambda_m = \lambda_m' \quad (48)$$

Из этого равенства следует, что какова бы ни была M

$$\lambda_m \in 2E(0, n) + b_0 \quad (n = N-1 \text{ или } N, 1 \leq b_0 \leq N, N = \text{Rg}(M)). \quad (49)$$

В силу следствия 2, при исследовании множества $\{\lambda_m\}$ можно ограничиться достижимыми последовательностями M .

Равенство (49) можно выразить так: всякое число λ_m содержится во множестве $2E(0, n) + b$ при соответствующих значениях n и b ; в связи с этим возникает вопрос: какие числа множеств $2E(0, n) + a$ являются значениями λ_m при некотором M ?

Если M произвольная последовательность, то в силу (33) и (45) λ_m допускает представление

$$\lambda_m = \theta_{-1} + b_0 + \theta_1. \quad (50)$$

где

$$\theta_{-1} = [0; b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, \dots], \quad \theta_1 = [0, b_1, b_2, b_3, \dots], \quad 1 \leq b_k \leq \text{Rg}(M) = N, \quad (51)$$

и последовательность

$$M' = \{\dots b_{-1}, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3; \dots\} \quad (52)$$

достижима при $k=0$.

Наоборот, если число α , принадлежащее некоторому множеству $2E(0, n) + b$, допускает представление в виде (51) с условиями (52) и (53) то оно является значением λ_m , при некотором M ; итак

Следствие 3. Число α множества $2E(0, n) + b$ является числом марковского спектра тогда и только тогда, если оно допускает хоть одно представление вида

$$\alpha = [0; b_{-1}, b_{-2}, \dots] + b_0 + [0; b_1, b_2, \dots],$$

для которого соответствующая последовательность

$$M' = \{\dots b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots\}$$

достижима при $k=0$.

Случай 1) исчерпан.

Если в случае 2) $\lambda_m = \sup \{\lambda_m(k)\}$, будучи изолированной, бесконечное число раз повторяется среди членов последовательности $\{\lambda_m(k)\}$, $-\infty < k < \infty$, т. е. если

$$\lambda_m = \lambda_m(k) \quad (53)$$

для бесконечного множества значений k , то можно предположить, как и выше, что (53) имеет место для бесконечного множества положительных значений k ; тогда, полагая

$$\theta = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots],$$

где последовательность $\{a_k\}$ совпадает с правой стороной последовательности M , как и в случае 1), легко покажем, что

$$\lambda_m = \lambda_\theta.$$

Таким образом, остается исследовать тот подслучай случая 2), когда равенство

$$\lambda_m = \lambda_m(k)$$

имеет место только для конечного множества значений k .

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Виноградов, Б. Делоне, и Д. Фукс—ДАН СССР, т. 118, № 5, 1958.
2. П. Г. Когония—ДАН СССР, т. LXXIII, № 4, 1951.
3. А. А. Марков—О бинарных квадратичных формах положительного определителя. Успехи математических наук, т. III, вып. 5 (27), 1948.
4. А. Я. Хинчин—Целые дроби. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва—Ленинград, 1949.

ზოგადი მათემატიკის
 კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში, 10/XII—58 წ.)

3. კოლონია

მარკოვის რიცხვთა სიმრავლესა და მარკოვის სპექტრის შორის კავშირის შესახებ

რ ე ზ ი მ ე

შრომა მიძღვნილია ე. წ. მარკოვის რიცხვთა სიმრავლესა და მარკოვის სპექტრს შორის კავშირისადმი. მასში დამტკიცებულია, რომ მარკოვის ყოველი რიცხვი მისივე სპექტრის რიცხვია. რაც შეეხება შებრუნებულ დამოკიდებულებას, ნაჩვენებია, რომ სპექტრის ძირითადი ნაწილი შედის მარკოვის რიცხვთა სიმრავლეში.

Л. Гокиели

ОБ ИНДУКЦИИ В МАТЕМАТИКЕ

Проблема о характере и роли индукции в математике принадлежит к числу сравнительно мало разработанных проблем. Однако эта проблема заслуживает большого внимания.

В процессе познания выявляется диалектическое единство общего и отдельного. В связи с учетом единичного формируются соответствующие общие понятия и теории и происходит их дальнейшее обобщение и, вместе с тем, применением общего к отдельному решаются различные частные вопросы. Поэтому в процессе развития науки индукция и дедукция постоянно взаимодействуют друг с другом и переплетаются. „Индукция и дедукция,—пишет Ф. Энгельс,—связаны между собой столь же необходимым образом, как синтез и анализ. Вместо того, чтобы односторонне превозносить одну из них до небес за счет другой, надо стараться применять каждую на своем месте, а этого можно добиться лишь в том случае, если не упускать из виду их связь между собою, их взаимное дополнение друг друга“¹.

Индукция и дедукция неразрывны и не может быть такой науки, в которой имела бы место лишь дедукция или лишь индукция.

Единство индукции и дедукции находит свое проявление и форму и в математике. Однако довольно распространено мнение, что математика является царством лишь дедукции и в ней индукция не находит места. На математические теории смотрят как на лишь гипотетико-дедуктивные системы, в которых выводы делаются из произвольно принятых посылок. Такой подход связан, в частности, с ложным пониманием характера и значения аксиоматических систем математики. Считают, что в аксиоматических теориях дело имеет с чистой выводимостью, между тем, как понятие истины имеет определяющее значение и для самого понятия вывода. В логическом ходе мы имеем определенное развитие и в процессе этого развития получают определенные истины.

¹ Фридрих Энгельс. Диалектика природы, 1948, стр. 182—183.



Логический процесс реализующийся в научных теориях не надо понимать так, что во главе этого процесса имеем некоторую систему исходных посылок, в которых уже заранее резервировано все то, что в дальнейшем должно быть получено, и сам процесс этого получения заключается в дедуцировании и высвобождении уже готового материала. Такой подход представлял бы искажение самих понятий вывода и дедукции; вывод заменялся бы его разыгрыванием и инсценировкой. Моя точка зрения относительно логического процесса вывода подробно изложена и обоснована в монографии „О природе логического“ (1958), и по затронутому вопросу здесь ограничусь сказанным выше.

Из общих соображений касающихся природы вывода должно вытекать, что логический процесс, в частности в математике, не может ограничиться дедуктивными выводами.

Для иллюстрации индуктивного хода в математической теории рассмотрим отношение между понятиями бесконечно-малой величины и предела, а также между их свойствами. Бесконечно-малая величина является частным случаем величины, имеющей предел. Но этот случай является наиболее важным. Достаточно иметь понятие бесконечно-малой величины и ее свойства, и уже легко будет перейти к общему понятию предела и к свойствам предела, в отношении которых свойства бесконечно-малых величин будут фигурировать уже в виде частного случая. Здесь мы имеем естественный переход от частного к общему. Этот естественный порядок иногда заменяют обратным и создается иллюзия, что имеем дело с дедуктивным ходом. Легко показать, что такой подход не является логически оправданным. Правда, определение предела может так выглядеть, что понятие бесконечно-малой величины не будет участвовать и о нем не будет идти речь, но устранение бесконечно-малой величины при определении предела будет чисто внешним, а не действительным.

В самом деле, как надо определить понятие предела, чтобы в этом определении не шла речь о бесконечно-малой величине. Определение предела должно выглядеть так: число a является пределом переменной x , если для каждого положительного числа ε существует такое значение x , начиная с которого $|x - a| < \varepsilon$. Правда, здесь не идет речь о бесконечно-малой величине, но это именно потому, что в формулировке определения есть такой отрезок, который, если бы его учли в качестве оформленного момента, был бы выразителем введения бесконечно-малой величины; относительно определенной переменной, именно $x - a$, требуется, чтобы для числа ε был такой момент, начиная с которого эта переменная по абсолютному значению делается меньше ε . Общая мысль, с которой в данном случае имеем дело, заключается в требовании в отношении какой-либо переменной, чтобы для ε она была,

начиная с некоторого момента, меньше него по абсолютному значению, но этим именно будет выражена идея о том, что наша переменная является бесконечно-малой величиной.

Если в приведенном определении предела бесконечно-малое не упоминается, это получается ценой того, что соответствующее место в определении не оформляется, как логически цельное и выступающее в некотором выделенном виде.

Когда в научной теории фигурирует имеющий определенную цельность отрезок, он должен быть в свое время логически оформлен, выражен в виде определенного понятия, предложения и т. д. и должно быть видно его место в общей связи, чтобы была выявлена роль, которую играет та или иная часть теории. Без этого строение теории не будет показано полностью и оно будет представлено логически неполноценно.

После того, как выявляется участие в деле определенного понятия, поздно пытаться его отмыслить, смотреть на него, как на лишь сокращение, нужное для занятия определенного места, чтобы можно было вместо него подставлять нечто другое. Иначе, вместо теории, имеющей определенное логическое строение, получим нечто совершенно аморфное.

Когда при определении предела не используют бесконечно-малой величины и последнюю вводят лишь в дальнейшем, как стремящуюся к нулю переменную, то выходит, что не считаются с тем, что фактически уже имели и требовало оформления, и его вводят как получаемое и производимое лишь на следующей ступени. Здесь имеем методологически неоправданный подход. Бесконечно-малую величину вводят с помощью того, что должно предполагать это понятие, как уже оформленное. Дело не только в том, что запаздывают с введением понятия бесконечно-малой величины, а в том, что создается определенное ложное положение, нарушается естественный порядок понятий, что является логически неприемлемым.

Нельзя дело представлять себе так, что существуют логически равноценные пути: раньше введение понятия бесконечно-малой величины и с её помощью определение предела, или раньше определение предела и затем введение бесконечно-малой величины, в качестве частного случая переменной имеющей предел, и будто зависит от вкуса—какой путь избрать. В действительности дело касается решения того—какой путь является логически и методологически оправданным. Оправдан первый путь, второй же не оправдан. К сожалению, ввиду некоторой установившейся традиции, многие авторы выбирают второй путь, не обращают внимания на методологическую сторону дела и не видят логической неприемлемости того, что будто выбрано по „свободному“ усмотрению.



Включение понятия бесконечно-малой величины в определении предела делается не ради внешней „экономии“, не для того, чтобы определение предела сделать более „коротким“, а для того, чтобы, как отмечалось выше, выявить место и роль участвующих в теории понятий, отношение между ними, представить саму теорию, как логически связанное целое.

Когда не учитывают роль понятия бесконечно-малой величины в определении предела и бесконечно-малую величину вводят впервые, как величину стремящуюся к нулю, тогда, вместо того, чтобы бесконечная малость разности переменной и числа была расценена, как определение предела, на нее смотрят как на определенное предложение $\lim(x-a)=0$, которое доказывают после того, как введено само понятие предела (через a уже обозначен предел x). Выходит, что обстоятельство, которое вначале должно было быть учтено в своем общем виде (именно возможность того, что определенная величина по абсолютному значению делается меньше чем ε) и выявило бы, что идея, выражающая понятие бесконечно-малой величины, участвует в понятии предела (соответствующая величина в данном случае будет представлена разностью $x-a$), учитывается с опозданием и, вместе с тем, в специфическом и усложненном виде ($x-a=0$ по абсолютному значению делается меньше ε). Это опять говорит о том логически неоправданном положении, которое будет вызвано предпосыланием понятия предела понятию бесконечно-малой величины.

Не только понятие предела должно быть выражено в терминах бесконечно-малой величины, но и доказательство свойств пределов должно базироваться на свойствах бесконечно-малых величин. Этот вопрос рассмотрим на примере предложения о пределе суммы, частным случаем которого будет предложение относительно суммы бесконечно-малых величин; на последнем предложении должно быть базировано само доказательство предложения относительно предела суммы.

Является логически неоправданным предпосылание предложения о пределе суммы предложению о сумме бесконечно-малых величин. При попытке такого предпосылания придется поступить так: имеем $\lim x=a$, $\lim y=b$. Надо доказать, что $\lim(x+y)=a+b$, т. е. для данного ε , начиная с определенного момента, будет иметь место $|(x+y)-(a+b)|<\varepsilon$; $(x+y)-(a+b)$ представим таким образом $(x-a)+(y-b)$.

Возьмем положительное число $\frac{\varepsilon}{2}$. Так как x стремится к a , и y к b , существует такой момент, начиная с которого $|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|y-b|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда, если учтем предложение относительно абсолютного значения суммы, получим $|(x-a) + (y-b)| \leq |x-a| + |y-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Этим доказано, что начиная с определенного момента $|(x+y) - (a+b)| < \varepsilon$, т. е. $\lim (x+y) = a+b$. Главная часть доказательства представляется такой схемой $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, $|\alpha+\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, $|\alpha+\beta| < \varepsilon$.

Эта схема выражает именно то суждение, которым доказывается, что сумма бесконечно-малых величин сама есть величина бесконечно-малая. Таким образом, если будет сознательно учтено и выражено с помощью понятий то, что проделано, выйдет, что имеем дело именно с суждением, которым доказывается предложение о сумме бесконечно-малых. Раз явно выражен результат этого суждения, после этого надо для доказательства предложения о пределе суммы использовать уже полученный результат и проделать лишь то, что представляет дальнейшее продолжение дела; не надо каждый раз дело начинать сначала. Поэтому является лишь кажущимся то, что можно провести доказательство о пределе суммы, без того, чтобы в нем логически не участвовало предложение о сумме бесконечно-малых. Будет слишком поздно последнее предложение впервые доказать в качестве вывода из предложения о пределе суммы.

Участие предложения о сумме бесконечно-малых в доказательстве предложения о пределе суммы скрывается тем, что сами же выполняют суждение, результатом которого должно быть предложение о сумме бесконечно-малых, но которое в отношении фиксирования этого результата оставляют неоформленным. После этого остается неучтенным именно то, что заслуживает особого внимания с точки зрения выявления логического строения теории и её внутренних связей.

Вышеприведенный пример хорошо иллюстрирует индуктивныеходы в математике, а также и то, почему из-за логически и методологически неправильного построения соответствующих теорий недооценивается роль индукции в математике. Причину такой недооценки надо искать также в ошибочных общелогических концепциях, связанных с тенденцией универсализации в логике силлогизма. Эти концепции вредят учёту роли индукции, особенно в математике. В данном случае пытаются свойства отдельных соотношений, главным образом математического характера, возвести в ранг общелогических умозаключений. Для этого формулировка соответствующего свойства повторяется в виде своей же большой посылки и сама эта формулировка рассматривается



как энтимема. Например, свойству, заключающемуся в транзитивности отношения параллельности (в геометрии Эвклида), придается характер дедуктивного умозаключения, путем добавления формулировки того же свойства в виде большой посылки. Само „умозаключение“ выглядит так: если первая прямая параллельна второй и вторая — третьей, то и первая параллельна третьей; прямая a параллельна b , b же параллельна c ; следовательно a параллельна c .

В данном случае, вместо того, чтобы ставить вопрос о самом рассматриваемом свойстве, его формулировка добавляется в качестве уже готовой предпосылки для его же подкрепления, в виде же второй посылки фигурирует условие, участвующее в формулировке нашего свойства. В роли заключения силлогистического вывода выступает то, что является результатом указанного условия (сказать: „если первая прямая параллельна второй, а вторая — третьей, то и первая прямая параллельна третьей“ то же, что сказать: „если прямая a параллельна b и b параллельна c , то и a параллельна c “ — и в одном и в другом случае понятия фигурируют с одинаковой общностью).

Здесь в лучшем случае строится другой вывод, а не осуществляется оформление нашего „вывода“. В действительности же получают не вывод, а повторение, и имеют логически ложное положение, создаваемое тавтологией.

Когда в какой-либо формулировке указывается на определенное свойство, то саму ссылку на это свойство нельзя понимать как „сокращение“ и энтимему и выражение чего-то другого. О сокращении можно говорить в отношении другого, что явно не высказывается и подразумевается, а не нечто само по себе может быть сокращением. Энтимема касается лишь словесной формы выражения, а не логической стороны дела.

Мы видим — насколько логически несостоятельна тенденция универсализации дедукции в математике.

Единство индукции и дедукции, в частности в математике, тесно связано с единством анализа и синтеза. Аналитическому, регрессивному ходу некоторым образом отвечает индукция, синтетическому, прогрессивному же ходу — дедукция. Единство анализа и синтеза осуществляется в процессе исторического развития математики.

Для античной математики характерны разобщенность арифметики и геометрии, сфер дискретности и непрерывности, конечного и бесконечного и т. д. Раздвоенному характеру предмета математики соответствовала недостаточная цельность метода математики. Были одно сторонне направлены и разобщены пути открытия и доказательства. Анализ, имевший геометрический характер, годился, главным образом, как метод нахождения нового, но плохо был приспособлен к тому,

чтобы быть средством окончательного доказательства, синтез же предполагал предварительное знание ожидаемого результата и представлял, главным образом, орудие окончательного подтверждения того, что было получено раньше нестрогим путем.

В математике нового времени утверждается единство как внутри предмета, так и внутри метода математики. Можно сказать, что сама задача преобразования метода математики сыграла решающую роль для перестройки математики. В этом отношении характерен путь, приведший Декарта к открытию принципа координат.

Декарт ставил целью создание научного метода, в котором логическая строгость органически соединялась бы с действенностью метода. Чтобы быть орудием открытия, научный метод должен иметь характер анализа. Но он должен быть алгебраическим анализом, а не геометрическим анализом древних, и выполняться с помощью уравнений. Так как в данном случае имеем переходы, которые обычно можно обернуть, то прохождение пути в аналитическом, регрессивном направлении тем самым знаменует его прохождение в синтетическом, прогрессивном направлении, так что анализ приобретает ту логическую силу, которая характерна для синтеза и делается средством не только открытия, но и доказательства. Анализ и синтез тесно связываются друг с другом.

„Будучи моложе, — пишет Декарт, — я изучал из области философии — логику, а из математики — анализ геометров и алгебру — три искусства или науки, которые, как мне казалось, должны были способствовать моему намерению. Но, изучив их, я заметил, что в логике её силлогизмы и большинство других ее правил служат больше для объяснения другим того, что нам известно... Что касается анализа древних и алгебры современников, то, кроме того, что они относятся к вопросам весьма отвлеченным и, повидимому, бесполезным, первый всегда так ограничен рассмотрением фигур, что не может упражнять ум, не утомляя сильно воображение; вторая — настолько подчинилась разным правилам и знакам, что превратилась в темное и запутанное искусство, затрудняющее наш ум, а не в науку развивающую его. По этой причине я и решил, что следует искать другой метод, который совмещал бы достоинства этих трех и был бы свободен от их недостатков“¹. Декарт считал, что открытый им метод характеризуется логической строгостью, как и силлогистическое искусство древних, но в сравнении с ним имеет то преимущество, что является орудием исследования и нахождения нового. Будучи таким средством, он родственен геометрическому анализу древних, но в сравнении с ним имеет то преимущество,

¹ Рене Декарт. Рассуждение о методе, 1953, стр. 21 — 22.



что свободен от перегруженности геометрическими представлениями и дает возможность свободнее рассуждать. Вместе с тем, в отличие от тогдашней алгебры, он не является совершенно отвлеченным и оторванным от геометрических образов. Наоборот, в данном случае связь между арифметикой и геометрией утверждена в самом основании и именно поэтому исследователь может не бояться потери этой связи и вовсе не принужден, из-за опасения такой потери, в каждый момент иметь перед глазами геометрический образ. Основанием указанной связи является принцип координат. Этот принцип положил конец разобщенности арифметики и геометрии узаконенной в античной науке и продолженной и в дальнейшем.

Числа теряют свой подчеркнуто индивидуализированный характер и выступает связывающее их общее, точки же делаются конкретно различимыми. Осуществляется единство общего и отдельного и на передний план выступает понятие переменной величины. В связи с выдвиганием роли переменной величины математика поднялась на новую ступень в отношении отображения количественных закономерностей действительности. „Лишь дифференциальное исчисление, — говорит Энгельс, — дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы“¹.

Весьма существенно то, что утверждение единства и диалектичности имело место как в отношении предмета так и метода математики. Для предмета математики это проявилось в установлении органической связи между арифметикой и геометрией, конечным и бесконечным, дискретным и непрерывным и т. п.; для метода же — в сближении путей открытия и доказательства, анализа и синтеза и т. п.

Мы указывали выше, что усиление связи между анализом и синтезом в процессе развития математики, в свою очередь, свидетельствует об упрочении единства индукции и дедукции в математике.

Значение индукции в математике особенно ярко проявляется в плане математических открытий. Было бы ошибочно думать, что это не имеет отношения к методу математики. Пути открытия участвуют в самом методе математики и, как мы видели, в развитии этого метода утверждается единство путей открытия и доказательства. Это касается вообще математики, поскольку сама она фигурирует как исторически развивающаяся и становящаяся. В утверждении единства путей открытия и доказательства находит проявление само единство логического и исторического. В развитии математики осуществляется органическая связь логической строгости и действенности методов.

Существует сведение, что Архимед, желая найти и проверить правила для вычисления фигур, эти фигуры вырезывал из соответствующим

щего материала и взвешивал. В данном случае встречаемся с индукцией, связанной с опытной стороной имеющей касательство к математике. Эта сторона находит особенно сильное проявление в современной математике, в том значении, которое имеет в ней „машинная математика“. В связи с ссылкой на последнюю, в литературе встречается такое выражение, как „экспериментальная математика“¹.

Само наличие этой „экспериментальной математики“ свидетельствует в пользу значения индукции для математики.

Одно из проявлений индукции в математике, и именно специфическое для математики, имеем в связи с математической индукцией, „переходом от n к $n+1$ “.

Этот ход рассуждения представляет своеобразный вид, но вид все-таки индукции, определяемый соответствующей математической обстановкой. При применении математической индукции некоторое предположение устанавливается для начального числа, например, для $n=1$, затем показывается в общем виде, что, если оно имеет место для какого-либо числа n , то оно останется в силе и для следующего числа, после чего считается установленным, что оно будет иметь место для любого числа. Переход к следующему позволяет придать высказанному предположению общий характер в отношении натуральных чисел. Здесь мы имеем характерный вообще для индукции переход от истинности данного предложения для отдельных случаев к его общей истинности.

Переход от n к $n+1$ имеет общий характер распространения истинности предложения от отдельных случаев вообще на любое натуральное число. На этот переход не надо смотреть как на лишь некоторую внешнюю схему, делающуюся определенным предложением после подстановки вместо n отдельных чисел 1, 2, 3 и т. д. и представляющую лишь сокращенное выражение перехода от 1 к 2, от 2 к 3, от 3 к 4 и т. д. В действительности в самой ссылке на: и т. д. должны поневоле апеллировать к общему смыслу перехода от n к $n+1$. Процесс этого перехода имеет определенный единый характер и его не надо понимать как представляющую актуальную бесконечность переходов от 1 к 2, от 2 к 3 и т. д. Вообще бесконечность нельзя понимать в виде некоторого актуального набора.

Когда на переход от n к $n+1$ смотрят как на сокращенное выражение для различных отдельных переходов, то в этом проявляется номиналистический подход к понятиям: на общее смотрят как лишь на общее название, служащее общему внешнему охвату соответствующих

¹ См., напр., Kurt Schröder. Zur Geschichte der Mathematik in Berlin und allgemeine Bemerkungen zur ihrer künftigen Entwicklung. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Berlin vom 14-bis 18 Januar. 1953. Berlin. S. 1--4.



отдельных. Но и здесь, поскольку имеются в виду отдельные, ^{данного} общего, поневоле приходится учитывать смысл этого общего. Названия не могут заменить понятий, поскольку приходится пользоваться понятием, хотя бы в связи с рассмотрением понятия названия.

Сам же общий смысл перехода от n к $n+1$ выражает переходы касающиеся отдельных чисел, поскольку общее понятие числа имеем в неразрывности с отдельными числами. На общее не надо смотреть как на нечто гипостазированное, которое особо „проходит“ совокупность своих отдельных. При отрыве общего от отдельного придется между ними вставить промежуточную инстанцию, выражающую в общем виде „конкретизированное“, распространенное на свои отдельные общее. Но эта промежуточная инстанция потребует новой инстанции и т. д.

Математическая индукция имеет характер определенного индуктивного хода, а не какого-то чудодейственного молниеносного прохождения совокупности всех отдельных переходов, понимаемых в виде актуального бесконечного набора.

Математическая индукция представляет определенное проявление в математике индуктивного метода. На него не надо смотреть как на некоторый составной элемент определения понятия натурального числа, или как на некоторую аксиому, участвующую в системе аксиом, служащих характеристике натурального числа.

Натуральное число не может быть введено ни с помощью некоторой математической дефиниции, ни постулативным путем на базе определенной системы аксиом. Понятие натурального числа является настолько элементарно-логическим, что приходится его применять уже в связи с самой возможностью производства различных дефиниций, построения аксиоматических схем, их моделирования и т. п.

Будет слишком поздно ввести систему натуральных чисел в виде некоторой аксиоматической схемы, или расценивать её в качестве модели какой-либо такой схемы, усматривая в ней эту схему „с точностью до изоморфизма“. Поскольку натуральные числа приходится применять вообще при моделирование аксиоматической схемы, то в схеме, которую обязывают выразить общий формальный характер системы натуральных чисел, придется сохранить место для момента, отображающего в формальном аспекте участие понятия натурального числа в моделировании самой данной аксиоматической схемы и т. д.

Является философски и логически несостоятельной попытка выход из положения усматривать в том, чтобы понятие числа, используемое при построении самой аксиоматики натуральных чисел, лишить рационального, понятийного характера и рассматривать в аспекте интуитивной данности. В данном случае придется насильственно становиться на примитивную точку зрения, отмышлять содержание уже использован-

ных понятий, и тем не менее эти примитивизированные возможности не использовать в теоретическом плане. Ссылка на то, что здесь используют не теорию, а метатеорию, не только не спасает положения, но сама же демонстрирует наличие соответствующей логической трудности, заключающейся в том, что, с одной стороны, должны иметь дело с теорией, а с другой стороны, принуждены стать по ту сторону теории.

Общее понятие теории имеет цельный характер и нельзя его рассекать на слои в виде теории, метатеории и т. д. Из за того, что теория может касаться самой теории, она не выходит за рамки общего понятия теории и не наслаивается сверху на это понятие.

Общее понятие натурального числа нельзя разлагать на различное число понятий, в зависимости от того — какую меру понятийности в нем будут усматривать.

Понятие натурального числа является одним из философских понятий. Его общая характеристика должна быть дана в философских, а не в математических терминах.

Сказанное меньше всего означает, что математику надо растворить в философии. Наоборот, в данном случае дело касается того, чтобы ясно учесть различие между ними и предохранить себя от их смешения.

Основное понятие, с которым связан предмет математики, — это понятие количества. Это понятие представляет определенную философскую категорию сопоставляемую с категорией качества; в отличие от последней оно выражает относительно внешнюю определенность вещей, и, по своему общефилософскому смыслу, некоторым образом обнимает такие категории, как множество, пространственные формы и т. п. Математика исследует не взаимоотношение указанных категорий, каждая из которых представляет нечто единичное в системе философских категорий но в рамках количества, как общего, производит соответствующие различия, рассматривает виды количества, изучает различные формы количественных отношений. Для математики категория количества выражает общие рамки, для философии же она фигурирует в качестве отдельной категории в сопоставлении с другими категориями.

Рассматривая отдельные виды количества, математика тем самым имеет дело с общим понятием количества, в чем находит одно из основных проявлений связь математики с философией. Но эта связь не означает превращение самой математики в философскую науку. Точки зрения растворения математики в философии и отрыва математики от философии являются родственными.

Если в математике усматривать повторение философии, то получится лишь дважды повторенная философия, математика же, как таковая, останется от нее оторванной.



Некоторые виды категории количества, как отмечалось выше, сами могут быть философскими категориями; таковой является, например, понятие натурального числа. Те виды категории количества, которые сами не являются философскими категориями, можно назвать математическими видами количества. Изучение математических видов количества полностью входит в компетенцию математики, начиная с их исходной характеристики. Что же касается видов количества, которые сами являются философскими категориями, то их начальная характеристика, а также их отношение к общей категории количества, трактуемое в плане вообще взаимоотношения философских категорий, будет предметом философского рассмотрения и лишь после этого исследование будет проводиться в рамках математики. В частности общее понятие натурального числа, являясь определенной философской категорией, требует не математической дефиниции или введения на основе некоторой системы аксиом, а соответствующей философской характеристики. Но уже дальнейшее исследование, проводимое в рамках понятия натурального числа, будет иметь форму математической теории.

В математической теории, касающейся натурального числа, должны уже располагать общим понятием натурального числа и это понятие, как об этом уже говорилось выше, не может быть впервые введено внутри самой математической теории. Поэтому несостоятельны, в частности, попытки определить понятие натурального числа на базе принципа математической индукции, или квалифицировать этот принцип как одну из аксиом, участвующих в формировании понятия натурального числа. В действительности сама математическая индукция предполагает использование общего понятия натурального числа. Именно благодаря наличию понятия натурального числа вообще можно говорить о переходе от n к $n+1$, этот переход будет иметь единый характер, не распадающийся на актуально бесконечный набор отдельных переходов. Это обеспечивается единым смыслом общего, заключающегося в понятии натурального числа.

Если с помощью чисел могут быть выражены различные ступени того или иного процесса и т. п., это не значит, что само общее понятие натурального числа имеет некоторый „ступенчатый“ характер. Общее понятие натурального числа проявляется в наличии отдельных чисел, а вовсе не пластуется из-за этого же наличия.

Нельзя думать, что само число один мы имеем на первой ступени, число два лишь на второй ступени и т. д. Ведь эти: первая, вторая и т. д. именно выражают соответствующие числа. Для точки зрения „ступенчатого“ введения чисел, предшествующая ступень, вместо того, чтобы быть таковой, сама предшествует логически последующей ступени (последнее предшествование тоже должно подчиниться соот-

ветствующему предшествованию и т. д.). Если данному числу логически предшествует предыдущее число, то пока нельзя говорить о его предшествующем числе, так как еще надо до него дойти логически.

Затем, если предшествующее того или иного числа само предшествует ему логически, то прежде, чем говорить вообще о числе, мы должны говорить о предшествующем; но предшествующее само должно быть числом, поэтому до этого должны пользоваться понятием предшествующего предшествующему и т. д. К такому ложному положению приводят не сами понятия бесконечности и натурального числа, а именно их искажение, связанное с их некоторым „ступенчатым“ пониманием. Само отмеченное логически ложное положение в негативном аспекте свидетельствует о том, что уже пользуются понятиями бесконечности и натурального числа, так как надо эти понятия использовать, чтобы констатировать наличие определенной логически ложной ситуации, выражаемой регрессом в бесконечность, к которому приводит соответствующий подход. Мы, таким образом, видим, что понятие натурального числа не может быть введено с помощью понятия перехода к следующему. Такой подход искажает и понятие перехода к следующему (что в действительности предполагает наличие натуральных чисел) и этот переход получает характер сведения последующего к предыдущему. Теряется развитие выражаемое рядом натуральных чисел.

Логическую трудность создает не само понятие ступеней, а их „ступенчатая“ трактовка. Например, единица вовсе не предшествует логически двум. Само понятие единицы теряет смысл без его сопоставления с двойкой. Нельзя дело представлять себе так, что логически раньше мы имеем единицу, а затем двойку. Сказанное не означает, что двойка задним числом делает единицу единицей, так как дело именно в том, что двойка не есть логически последующее. Сама постановка вопроса: что раньше и что позже—уже предполагает пользование понятиями чисел один и два, и поздно для самих этих чисел искать логически первое и второе место.

Мы указывали выше, что пользование общим понятием натурального числа позволяет обеспечить общий характер для акта перехода от n к $n+1$ и освобождает от понимания этого процесса, как актуального прохождения бесконечной совокупности ступеней. Но если само число определить с помощью перехода от n к $n+1$, то уже оно получит ступенчатый характер, что будет выражать искажение как понятия числа, так и перехода от n к $n+1$.

Понятие числа уже наличествует, когда мы говорим о следующем, а не само число вводится с помощью „следующего“ (в последнем случае имели бы „ступенчатый“ подход к числам и его порочность). Но



как раз такое ложное положение получается, если пытаются числа ввести на основе принципа математической индукции. Нельзя говорить о таком переходе к следующему, который предшествует понятию натурального числа и сам должен служить в качестве предварительного средства для построения теории числа.

Когда принцип математической индукции используется в качестве аксиоматической основы для понятия натурального числа, то получается, что постулируется достижение того или иного числа с помощью определенного конечного числа шагов. Раз имеют в виду „достижение“ какого-либо числа n с помощью n шагов (создается иллюзия усиления конечного характера процесса в связи с переживанием того обстоятельства, что для достижения достаточно „только“ n шагов), то здесь уже использовано понятие числа n и оно не вводится в виде того, что просто достигается в процессе соответствующего прохождения. Понятие натурального числа должно быть осмыслено в своей общности. Если постулировать достижение того или иного числа с помощью определенного конкретного числа шагов, то здесь придется опять в общем виде говорить о том или ином „конкретном“ числе. Поэтому придется опять постулировать достижение вообще того или иного „конкретного“ числа с помощью соответствующего конкретного числа шагов и т. д.

Общее понятие натурального числа дано в связи с отдельными натуральными числами и, если пытаться вставить между ними промежуточную инстанцию, фигурирующую в качестве „конкретизированного“ в общем виде натурального числа, то потребуются новая промежуточная инстанция для связи выступающего в общем виде понятия „конкретного“ числа с „самими“ числами и т. д. Полученный регресс в бесконечность выражает логическую порочность, заключающуюся в отрыве друг от друга общего понятия натурального числа и отдельных чисел. Если в самом общем не усматривать конкретности, то уже последняя не может быть достигнута путем общей ссылки на „конкретные“ случаи данного общего.

Мы видели выше, что математическая индукция не является ни определением и ни аксиомой, лежащей в основе понятия натурального числа. Математическая индукция представляет определенный вид индукции, определенный способ индуктивного исследования и доказательства, используемый в математике. Математическая индукция, как вообще всякая индукция, а также и дедукция, базируется не на каком либо постулате, а на философски обоснованном диалектическом единстве общего и отдельного.

Самому отношению общего и отдельного нельзя придать постулативного характера. Попытка формализовать это отношение и базировать на некотором постулате (например, *dictum de omni et nullo*) создает логически ложное положение.

Поздно, после того, как уже имеют в виду то или иное ^{отдельное} ~~общее~~ данного общего, особо декретировать распространяемость ^{общего} ~~отдельного~~ на его отдельные. О самих отдельных данного общего опять придется говорить в общем виде и, если вообще требуется аксиоматическая подпорка для отношения между общим и отдельным, придется раньше урегулировать аксиоматическим путем отношение между вообще отдельными данного общего и „самими“ отдельными и т. д. Затем придется аксиоме, декретирующей возможность распространить общее на его отдельные, предпослать такую же аксиому, разрешающую сам общий характер данной аксиомы распространить на отдельные случаи и т. д.

Если принцип математической индукции выставить в виде аксиомы, то получится, что сами индуктивные ходы в математике базируются на дедукции. Вместо того, чтобы учитывать роль индукции, ее связь с дедукцией, получится, что индукция в математике имеет призрачный характер и придется признать, что сначала же ошибались, квалифицируя соответствующие ходы как индукцию.

Можно усматривать определенное родство между попыткой придать постулативный характер математической индукции и попыткой вообще базировать индукцию на особом постулате относительно единообразия природы. И в последнем случае имеем тенденцию ущемления значения индукции, придачи индукции иллюзорного характера, дедуктивирования самой индукции из определенного общего постулата. Аргумент, обычно приводимый против постулата единообразия природы, является в действительности неотразимым. Каким образом можно будет аксиоматически подпереть ту индукцию, которая должна быть использована, чтобы иметь возможность выставить общий принцип относительно „единообразия природы“? Этот принцип декретирует единообразие природы в отношении подчинения законам. В данном случае гипостатизируется понятие законов природы и, в связи с этим, приходится ставить вопрос об особом „подчинении“ природы ее законам. Когда в виде особого закона формулируют подчинение природы законам, то раньше придется урегулировать вопрос о подчинении самому этому закону и т. д.

Математическая индукция представляет довольно типичное для математики проявление в ней метода индукции. Но математической индукцией не ограничиваются рамки действия индукции в математике. Важное значение индукции в математике вполне отвечает тому обстоятельству, что в математике, как и во всякой другой науке, индукция и дедукция выступают в своем диалектическом единстве. Умаление значения индукции в математике, за счет искусственного усиления дедукции, связано с искажением самого характера математических теорий. В попытке указанного умаления индукции проявляется общая тенден-



ция игнорирования для математики значения конкретного и единичного и выдвижения лишь чисто формальной стороны. Эта тенденция проявляется и в способе изложения, избегающем рассмотрения вопросов на некотором конкретном фоне, из-за боязни нанести вред общности.

Действительную общность в отношении содержания не надо смешивать с той чисто внешней, педантичной „общностью“, которую Гегель удачно назвал формализмом всеобщности и кокетничанием видимостью всеобщности¹.

Маркс в своих математических работах проявляет изумительное умение проводить общие рассуждения на частных примерах, что несколько не вредит их общности, но зато изложение делается более выразительным. Стиль математических работ Маркса является блестящим подтверждением того — насколько большое значение имеет живой, полнокровный, богатый образами и сравнениями язык для полноценного выражения математической мысли, насколько для этого мало обязательна, диктуемая ложно понимаемым академизмом, холодная и бесстрастная, речь. Указанный стиль математических работ Маркса вовсе не является лишь внешним моментом, в нем находит проявление глубокое осознание связи математической формы с конкретностью содержания, связи в математике между общим и отдельным, между индуктивными и дедуктивными ходами.

Для правильного понимания сущности математики весьма важное значение имеет правильная трактовка ее метода, в частности учет для нее роли индукции.

ზოგადი მათემატიკის
კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 3 II. 58 წ.)

ლ. გოკიელი

ინდუქციის შესახებ მათემატიკაში

რეზიუმე

ინდუქცია და დედუქცია განუყრელია და მათი ერთიანობა თავს იჩენს, კერძოდ, მათემატიკაში. შემცდარია აზრი თითქოს მათემატიკა მხოლოდ დედუქციის სამფლობელოა და მასში ინდუქციას ადგილი არა აქვს. მოჩვენებითობა დედუქციის საყოველთაოების შესახებ მათემატიკაში გამოწვეულია სათანადო თეორიების მეთოდოლოგიურად არამართებული გააზრებით, რი-

¹ Гегель. Сочинения, т. V, 1937, стр. 322.

თაც დაჩრდილულია ინდუქციური სვლების მნიშვნელობა. ინდუქციისა და დედუქციის ერთიანობა მათემატიკაში დაკავშირებულია ანალიზისა და სინთეზის ერთიანობასთან, რაც განმტკიცდა მათემატიკის ისტორიული განვითარების პროცესში. ინდუქციის მნიშვნელობა მათემატიკაში განსაკუთრებით ნათლად ჩანს მათემატიკური აღმოჩენების პლანში, მაგრამ ამასთან არსებითია ინდუქციური სვლების მნიშვნელობა თვით მათემატიკის მეთოდში.

ინდუქციის ერთერთ გამოვლენას მათემატიკაში, ამასთანავე სპეციფიურს მათემატიკისათვის, წარმოადგენს მათემატიკური ინდუქცია, „ n -დან $n+1$ -ზე გადასვლა“.

ნაჩვენებია, რომ მათემატიკური ინდუქცია არ არის არც განსაზღვრება და არც აქსიომა მდგომი ნატურალური რიცხვის ცნების საფუძველში. მათემატიკური ინდუქცია წარმოადგენს ინდუქციის გარკვეულ სახეს, ინდუქციური კვლევისა და დასაბუთების მათემატიკაში გამოყენებულ გარკვეულ ხერხს. მათემატიკური ინდუქცია, ისევე როგორც ყოველგვარი ინდუქცია, და აგრეთვე დედუქცია, ეყრდნობა არა რაიმე პოსტულატს, არამედ ზოგადისა და ცალკეულის ფილოსოფიურად დასაბუთებულ დიალექტიკურ ერთიანობას.

Ш. Е. Микеладзе

Решение трехчленных уравнений

§ 1. Вспомогательные замечания

В этой работе отделяются простые корни уравнения¹

$$u^m - pu^n - q = 0 \quad (1)$$

с комплексными коэффициентами p и q посредством контуров, построенных на плоскости комплексного переменного u . Интегрированием по комплексному переменному вдоль этих контуров выводятся разложения логарифмов корней (1) в абсолютно сходящиеся ряды, удобные для вычислений.

Выводятся условия при которых уравнение (1) с вещественными коэффициентами имеет вещественные корни. Определяется число отрицательных и положительных корней (1).

Отделению корней трехчленного уравнения (1) мы предположим изучение некоторых свойств графиков функции

$$q = u^m - pu^n,$$

для всех вещественных значений p и u . Чтобы охватить всевозможные случаи условимся трехчленные уравнения рассматривать для любых натуральных чисел n и m , удовлетворяющих неравенству $n < m$. Переменную u условимся рассматривать как независимую. В зависимости от четности и нечетности чисел m и n мы получим различные графики функции q , обозначенные на чертежах 1—4 $(|, |)$ и $(\|, \|)$; из них графики $(|, |)$ соответствуют случаю $p > 0$, а графики имеющие значки $(\|, \|) - p < 0$.

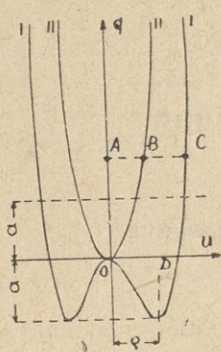
Необходимо различить четыре случая:

1. m и n — четные числа (черт. 1)
2. m и n — нечетные числа (черт. 2)
3. m число нечетное, а n — четное (черт. 3)
4. m число четное, а n нечетное (черт. 4)

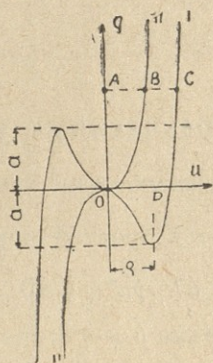
¹ Такие уравнения будем называть „трехчленными уравнениями“ и такое название сохраним на протяжении всей работы.



Пусть теперь значения принимаемые u , p и q комплексны. Тогда дуги кривых $(|,|)$ и $(||, ||)$ лежащие в первых квадрантах и выходящие из точек O и D оси u , могут быть рассмотрены как кривые изменения модулей $|u|$ и $|q|$ (и, следовательно, заменены на черт. 1—4



Черт. 1.



Черт. 2.

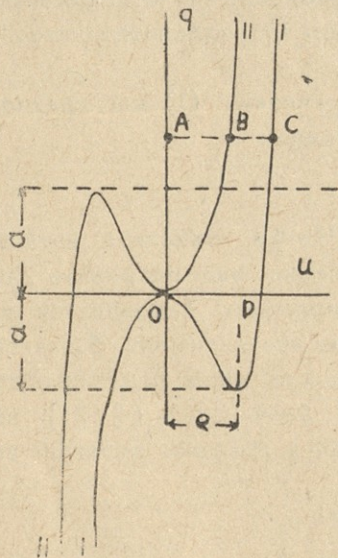
в соответствии с этим u и q на $|u|$ и $|q|$), так что для всех значений $|u|$, $|p|$ и $|q|$ будут иметь место уравнения

$$|u^m| - |pu^n| = |q|, \quad (2)$$

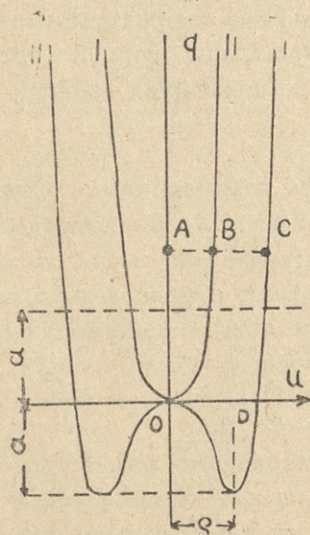
$$|u^m| + |pu^n| = |q|, \quad (3)$$

вдоль этих дуг.

Начиная отсюда мы ограничимся изучением некоторых точек кривых $(|,|)$ и $(||, ||)$ лежащих в первом и четвертом квадрантах, предполагая для общности выводов в дальнейшем формул, переменные u , p и q комплексными. Кроме того вы-



Черт. 3.



Черт. 4.

ведем некоторые неравенства, которым удовлетворяют координаты этих точек. Они имеют значение для построения контуров, отделяющих корни уравнения (1), и разложения логарифмов их в степенные ряды.

Рассмотрим точки A , лежащие на осях $|q|$, имеющие положительные ординаты $|q|$. Обозначим через B и C точки, в которых прямые, проведенные через точки A параллельно осям $O|u|$, пересекают дуги $O||$ и $D|$. Обозначим через r и R соответственно абсциссы этих точек пересечения:

$$AB=r, \quad AC=R.$$

Таким образом на дуге $O||$ имеем $|u|=r$. На дуге $D|$ имеем $|u|=R$. Но тогда из (2) и (3) следует, что для любых двух точек этих дуг с одинаковыми ординатами $|q|$, должно выполняться неравенство $r < R$.

Кроме того в дальнейшем нам понадобятся абсциссы точек D (в которые кривые пересекают ось $|u|$), равные

$$OD = \sqrt[m-n]{p}$$

и точек кривых (1) четвертого квадранта, в которых функция q , определенная уравнением

$$q = |u^m| - |pu^n|,$$

имеет экстремум. Вычисление показывает, что этот экстремум достигается при

$$|u| = \rho = \sqrt[m-n]{\frac{n}{m}|p|} \quad (4)$$

и, что максимум модуля $|q|$ равен

$$a = \frac{(m-n) \frac{n}{m^{m-n}} |p|^{\frac{m}{m-n}}}{m^{\frac{m}{m-n}}}.$$

В точке, где функция принимает экстремальное значение, $a = |q|$. Но тогда в этой точке p и q должны удовлетворять условию:

$$\left| \frac{n^n (m-n)^{m-n} p^m}{m^m q^{m-n}} \right| = 1. \quad (5)$$

Благодаря последнему, кроме (4) мы будем иметь еще две видоизмененные формулы для ρ :

$$\rho = \sqrt[m]{\frac{n}{m-n}|q|} = \sqrt[n]{\frac{m}{m-n} \left| \frac{q}{p} \right|}, \quad (6)$$

верные лишь при соблюдении равенства (5) между p и q .

Используя уравнения (2) и (3), мы убедимся, что при абсциссы любых двух точек дуг $O||$ и $D|$, имеющие одинаковые ординаты, удовлетворяют неравенству

$$r < \sqrt[m]{|q|} < R. \quad (7)$$

Имеем также легко доказуемое неравенство в справедливости которого можно убедиться рассмотрев (4) и графики 1—4:

$$\rho < \sqrt[m-n]{|p|} < R. \quad (8)$$

Кроме того с помощью (3) и правого из равенств (6) убеждаемся, что для любого $|q| \leq a$ существует неравенство

$$r < \sqrt[n]{\left| \frac{q}{p} \right|} < \rho. \quad (9)$$

§ 2. О кратных корнях трехчленного уравнения

Докажем что если уравнение

$$F(u) \equiv u^m - pu^n - q = 0$$

имеет кратные корни то только двукратные. Мы должны поэтому доказать, что для всякого $m > 2$ многочлены

$$F'(u) = u^{n-1} [mu^{m-n} - np],$$

$$F''(u) = u^{n-2} [m(m-1)u^{m-n} - n(n-1)p],$$

не имеют отличных от нуля общих корней. Но если $u \neq 0$, не могут одновременно выполняться равенства

$$mu^{m-n} - np = 0,$$

$$m(m-1)u^{m-n} - n(n-1)p = 0,$$

так как тогда при $p \neq 0$ мы имели бы

$$\frac{np}{m} = \frac{n(n-1)p}{m(m-1)},$$

чего не может быть, поскольку по предположению $n \neq m$.

Пусть теперь при $q \neq 0$ $F(u)$ имеет двукратный корень. Он будет вместе с тем простым нулем $F'(u)$. Таким образом нули производной $F'(u)$, равные

$$u_h = \sqrt[m-n]{\frac{n}{m} p} \exp\left(\frac{2h\pi i}{m-n}\right) (h=0, 1, \dots, m-n-1) \quad (10)$$

должны быть нулями и $F(u)$, а потому полагая в трехчленном уравнении $u = u_h$, получаем

$$q = \frac{(n-m) \frac{n}{n^{m-n}} \frac{m}{p^{m-n}}}{\frac{m}{m^{m-n}}} \exp\left(\frac{2nh\pi i}{m-n}\right) (h = 0, 1, \dots, m-n-1) \quad (11)$$

Из изложенного следует:

Если уравнение

$$u^m - pu^n - q = 0$$

имеет двукратный корень, то значения m , n , p и q удовлетворяют одному из $m-n$ соотношений вида (11).

Отсюда получается необходимое условие существования, у трехчленного уравнения двукратного корня, а именно:

Если трехчленное уравнение имеет двукратный корень, то должно выполняться равенство

$$\frac{q^{m-n}}{p^m} = \frac{n^n(n-m)^{m-n}}{m^m}. \quad (12)$$

Условие (12) достаточно, если m , n , p и q таковы, что все корни u_h ($h = 0, 1, \dots, m-n-1$) двукратны.

Обозначим теперь через a наибольшее значение $|q|$. Поэтому имеем, что в силу равенств (4) и (10) должно быть как $p = |u_h|$, так и

$$a = \frac{(m-n) \frac{n}{n^{m-n}} |p| \frac{m}{m^{m-n}}}{\frac{m}{m^{m-n}}}. \quad (13)$$

Следовательно, если трехчленное уравнение имеет кратные корни, то они будут лежать на окружности радиуса p , с центром в нулевой точке плоскости u .

Рассмотрим теперь уравнение

$$u^3 - pu - q = 0.$$

Приняв в (10) и (11) $h=0$ находим, что это уравнение при

$$q = -2\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

имеет двукратный корень равный

$$u_0 = \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Приняв теперь $h=1$ получаем, что при

$$q = 2\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$



соответствующий двукратный корень равен

$$u_1 = -\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Мы можем объединить оба случая в один. Это приведет к известному равенству (равенству нулю дискриминанта, обеспечивающему наличие двукратного корня)

$$\frac{q^2}{p^3} - \frac{4}{27} = 0,$$

вытекающему из (12) при $m=3$ и $n=1$.

§ 3. Отделение корней

Для последующего изложения необходимо построить контуры, отделяющие корни трехчленного уравнения. В качестве контуров, отделяющих корни мы построим простые замкнутые контуры т. е. контуры для которых конец последней дуги будет совпадать с началом первой и которые, линиями параллельными вещественной и мнимой осям, пересекаются в двух точках. Контурным интегрированием вдоль этих контуров мы получим (§ 6) ряды для вычисления искомых корней. При построении контуров должно различить два случая в зависимости от неравенств

$$|q| > a, \quad |q| < a.$$

А. Рассмотрим сначала случай $|q| > a$ и предположим мы построили контуры $A_k (k=0, 1, \dots, m)$, отделяющие корни уравнения $u^m - q = 0$, вдоль которых

$$\left| \frac{-pu^n}{u^m - q} \right| < 1.$$

Тогда, пользуясь теоремой Руше о корнях функции, мы заключаем, что корни трехчленного уравнения будут расположены по одному внутри построенных контуров.

Для отделения корней $\alpha_k (k=0, 1, \dots, m-1)$ уравнения (1) рассмотрим круговое кольцо плоскости u , ограниченное двумя окружностями γ_1 и γ_2 , описанными из начала координат O как из центра пока что произвольными радиусами r_1 и R_1 (черт. 5)

Проведем из точки O полупрямые, образующие с положительным направлением вещественной оси углы

$$\omega_k = \frac{\varphi + (2k+1)\pi}{m} \quad (k=0, 1, \dots, m-1), \quad (14)$$

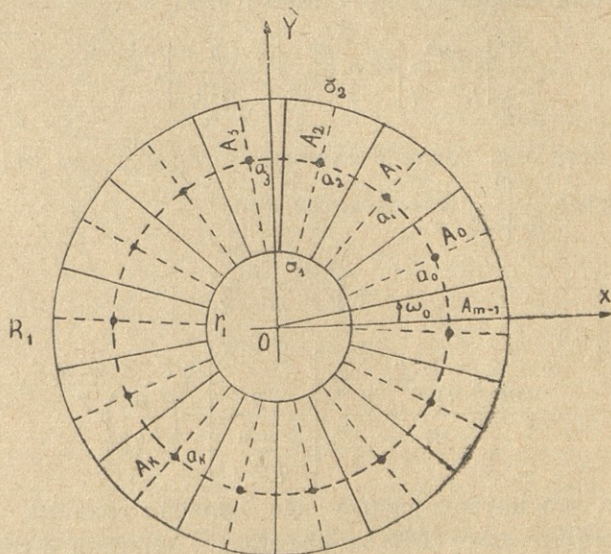
где φ —аргумент q . Мы получим таким образом части кругового кольца A_k , ограниченные отрезками прямых (14), образующих между собой углы $\frac{2\pi}{m}$ с вершиной в точке O и дугами окружностей γ_1 и γ_2 .

Рассмотрим теперь m точек плоскости u .

$$a_k = \sqrt[m]{q} \exp\left(\frac{2k\pi i}{m}\right) \quad (k=0, 1, \dots, m-1), \quad (15)$$

которые соответствуют m различным корням уравнения

$$u^m - q = 0.$$

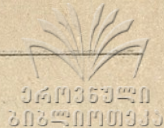


Черт. 5.

Возьмем $R_1 > R$ и $r_1 < r$. Согласно неравенству (7) интересующие нас корни будут внутренними точками построенного нами кольца. Разделим углы между двумя смежными прямыми (14) пополам и рассмотрим точки пересечения полученных биссектрис с окружностью описанной из начала координат радиусом $\sqrt[m]{|q|}$ (на чертеже 5 эта окружность показана пунктиром). Они будут корнями рассмотренного несколькими строками выше двучленного уравнения.

Выберем теперь внутренний радиус r_1 настолько малым, а наружный R_1 —настолько большим, чтобы во всех точках окружностей γ_1 и γ_2 соответственно удовлетворялись неравенства

$$\left| \frac{pu^n}{u^m - q} \right| \leq \frac{|p| R_1^n}{R_1^m - |q|} < 1,$$



$$\left| \frac{p u^n}{u^m - q} \right| \leq \frac{|p| r_1^n}{|q| - r_1^m} < 1.$$

Наша задача будет решена, если аналогичные неравенства мы получим при изменении u вдоль прямых (14).

Полагая

$$u = t \sqrt[m]{q} \exp\left(\frac{(2k+1)\pi i}{m}\right)$$

и изменяя действительный параметр t от 0 до $+\infty$ мы получим все точки этих прямых. Каждой из них будет соответствовать некоторое постоянное положительное число t такое, что

$$\left| \frac{p u^n}{u^m - q} \right| = \frac{t^n}{1 + t^m} \left| \frac{p}{q^{\frac{m-n}{m}}} \right|.$$

С другой стороны, если t изменять от нуля до ∞ , то верхняя граница множителя $\frac{t^n}{1+t^m}$ достигается при

$$t = \sqrt[m]{\frac{n}{m-n}};$$

она равна

$$\frac{(m-n)^{\frac{m-n}{n}} n^{\frac{n}{m}}}{m} \left| \frac{p}{q^{\frac{m-n}{n}}} \right| = \left(\frac{a}{|q|} \right)^{\frac{m-n}{m}}.$$

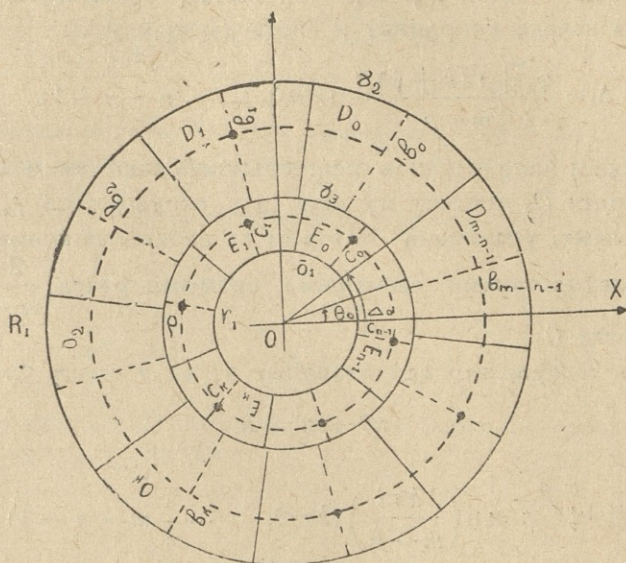
Отсюда следует, что интересующая нас верхняя граница для любого u вдоль любой из прямых (14) не превзойдет 1, если $a < |q|$. Она равна 1, если $a = |q|$. Последнее, как нам известно, возможно, например, при наличии у трехчленного уравнения двукратного корня.

Итак, нами доказано, что при указанных выше предположениях существует концентрическое круговое кольцо с центром в нулевой точке плоскости u такое, что оно может быть подразделено на m одинаковых частей $A_k (k=0, 1, \dots, m-1)$, содержащих по одному простому корню α_k трехчленного уравнения.

С помощью такого наглядного способа распределения корней, мы можем ввести неравенство, характеризующее изменение аргумента искоемых корней.

Сразу видно, что, производя эти распределения корней α_k внутри контуров A_k , по одному в каждом, мы достигнем того, что абсолютная величина разности аргументов α_k и a_k нигде не будет больше $\frac{\pi}{m}$ для любого $k=0, 1, \dots, m-1$.

Б. Рассмотрим теперь случай $|q| < a$. Проведем окружность γ_3 радиуса ρ с центром в начале координат, расположенную внутри построенного выше в п. А концентрического кругового кольца. Это возможно поскольку в силу неравенств (8) и (9) $r < \rho < R$. Окружность γ_3 разобьет кольцо на два кольца. Одно из них назовем внешним, а другое—внутренним по отношению к окружности γ_3 (черт. 6).



Черт. 6.

Мы покажем ниже, что внешнее кольцо содержит при $|q| < a$ $m-n$ простых корней β_k уравнения

$$u^m - pu^n - q = 0,$$

внутреннее же— n таких корней δ_k . Кроме того эти кольца могут быть разложены соответственно на $m-n$ и n равных частей, внутри каждой из которых будет лежать один корень β_k или δ_k . Отделенные таким образом корни β_k и δ_k мы будем называть в дальнейшем соответственно внешними и внутренними корнями.

Рассмотрим сперва вопрос определения $m-n$ корней β_k , лежащих во внешнем кольце. Построим для этого по предыдущему систему контуров, отделяющих простые нули b_k функции $u^m - pu^n$, и притом так, чтобы вдоль каждого контура было бы

$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| < 1. \quad (16)$$

Таким образом разность $(u^m - pu^n) - q$ будет иметь то же самое число нулей внутри построенных контуров, как и функция $u^m - pu^n$, т. е. один нуль.

В следующем пункте мы займемся отделением остальных корней, лежащих во внутреннем кольце.

Обозначим через φ_2 аргумент p и внешнее кольцо разделим на $m-n$ одинаковых частей $D_0, D_1, \dots, D_{m-n-1}$ с помощью полупрямых выходящих из начала координат и составляющих углы

$$\Delta_k = \frac{\varphi_2 + (2k+1)\pi}{m-n} \quad (k=0, 1, \dots, m-n-1) \quad (17)$$

с положительным направлением вещественной оси. таким образом контур каждой части D_k состоит из двух дуг окружностей γ_3 и γ_2 и двух отрезков прямых, уравнения которых на плоскости u имеют вид (17).

Угол между двумя такими смежными прямыми равен $\frac{2\pi}{m-n}$ и имеет вершину в точке O .

Докажем теперь, что все отличные от нуля корни уравнения

$$u^m - pu^n = 0,$$

равные

$$b_k = \sqrt[m-n]{p} \exp\left(\frac{2k\pi i}{m-n}\right) \quad (k=0, 1, \dots, m-n-1) \quad (18)$$

лежат по одному в каждой из областей $D_0, D_1, \dots, D_{m-n-1}$.

Действительно, неравенство (8) говорит о том, что эти корни должны лежать внутри внешнего кольца. Следовательно, остается показать, что они распределены по одному внутри контуров $D_0, D_1, \dots, D_{m-n-1}$. Аргументы интересующих нас корней равны

$$\frac{\varphi_2 + 2k\pi}{m-n} \quad (k=0, 1, \dots, m-n-1)$$

т. е. корни лежат по одному на биссектрисах углов, образуемых двумя смежными лучами (17). Следовательно, следует считать доказанным, что интересующие нас нули функции $u^m - pu^n$ лежат в точках пересечения биссектрис с окружностью радиуса $\sqrt[m-n]{|p|}$ (на черт. 6 эта окружность показана пунктиром), т. е. лежат внутри контуров D_k .

Остается доказать справедливость неравенства (16) вдоль контуров D_k . Положим для этого вдоль прямых (17)

$$u = t \left(\frac{np}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} \exp\left(\frac{(2k+1)\pi i}{m-n}\right),$$

где t — переменный параметр. В силу этого соотношения и равенства (4) при $t=1$ точка u должна лежать на пересечении полупрямой (17) с окружностью γ_3 . От точки пересечения пойдем вдоль этой полупрямой в сторону окружности γ_2 , увеличивая t от 1 до $+\infty$ и радиус окружности γ_2 соответственно от p до $+\infty$. Тогда, если $1 \leq t < \infty$, то

$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| = \frac{m^{\frac{m}{m-n}}}{n^{\frac{n}{m-n}} (n^m + m^n)} \left| \frac{q}{p^{\frac{m}{m-n}}} \right|.$$

Легко теперь видеть, что при изменении t от 1 до ∞ для каждой точки (17) имеет место неравенство

$$n^m + m^n \geq m + n > m - n.$$

Таким образом

$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| < \frac{m^{\frac{m}{m-n}}}{n^{\frac{n}{m-n}} (m - n)} \left| \frac{q}{p^{\frac{m}{m-n}}} \right|.$$

Пользуясь формулой (13) получим, что при всяком t , удовлетворяющем неравенству $1 \leq t < \infty$, имеем

$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| < \frac{|q|}{a} < 1.$$

Перейдем теперь к доказательству неравенства (16) для точек окружности γ_2 . В каждой из них будет

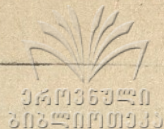
$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| \leq \frac{|q|}{R_1^m - |p| R_1^n},$$

причем правая часть неравенства может быть сделана меньше 1, если радиус внешней окружности R_1 взять достаточно большим.

Остается исследовать случай когда точка u обходит окружность γ_3 . На этой окружности имеем

$$u = \left(\frac{np}{m} \right)^{\frac{1}{m-n}} \exp \left(\frac{2k\pi i}{m-n} \right), \quad (19)$$

где k — переменный параметр. Рассмотрим вектор, идущий из нулевой точки плоскости u в переменную точку (19) окружности γ_3 . Если k пробегает все вещественные значения от 0 до $m-n$ изменение аргумента u будет очевидно равно 2π , т. е. u обойдет окружность γ_3 . Интересующее нас неравенство будет поэтому доказано, если убедимся в том, что при непрерывном изменении k от 0 до $m-n$ отношение q к $u^m - pu^n$ по модулю будет оставаться меньшим 1.



Вдоль окружности γ_3 имеем, что

$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| = \left| \frac{q m^{\frac{m}{m-n}}}{p^{\frac{m}{m-n}} n^{\frac{n}{m-n}} (m-n)} \right|.$$

На основании последнего равенства и формулы (13), вдоль окружности γ_3 будем иметь, что

$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| = \frac{|q|}{a}.$$

Таким образом следует считать доказанным, что вдоль контура γ_3

$$\left| \frac{-q}{u^m - pu^n} \right| < 1$$

при всех значениях u , для которых $|q| < a$.

Благодаря контурам D_k можно составить себе представление о границах аргумента и модуля β_k . Производя распределение корней β_k внутри контуров D_k , по одному в каждом, мы убедимся, что абсолютная величина разности аргументов β_k и b_k нигде не будет больше

$\frac{\pi}{m-n}$ и что уравнение $u^m - pu^n - q = 0$ имеет $m-n$ корней β_k , модули ко-

торых не меньше, чем $\sqrt[m-n]{\frac{n}{m}} |p|$. Остальные n корней уравнения имеют модули меньше, чем ρ .

В. Остается доказать, что внутреннее кольцо содержит n корней и что оно может быть разделено на n равных частей так, чтобы каждая из них содержала один корень.

Для доказательства разделим его на n равных частей E_0, E_1, \dots, E_{n-1} (черт. 6) при помощи полупрямых, выходящих из начала координат, и составляющих с положительным направлением вещественной оси углы

$$\theta_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + (2k+2)\pi}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n-1), \quad (20)$$

где

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \arg \frac{q}{p}.$$

Здесь, одна какая-нибудь часть кольца E_k ограничена двумя дугами окружностей γ_1 и γ_3 и двумя отрезками, соединяющими концы этих дуг. Полупрямые на которых лежат эти отрезки образуют угол равный $\frac{2\pi}{n}$ с вершиной в начале координат.

Докажем, что вдоль контуров E_k

$$\left| \frac{-u^n}{pn^n + q} \right| < 1. \quad (21)$$

Рассуждая как выше, будем иметь, что нули функции $pu^n + q$, равные

$$c_k = \sqrt[n]{\frac{q}{p}} \exp\left(\frac{(2k+1)\pi i}{n}\right) \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (22)$$

лежат на пересечении окружности радиуса $\sqrt[n]{\left|\frac{q}{p}\right|}$ (показанной на черт. 6 пунктиром), описанной из начала координат и луча, составляющего угол

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + (2k+1)\pi}{n}$$

с положительным направлением вещественной оси т. е. на пересечении окружности с биссектрисой двух смежных полупрямых (20). Но отсюда и из неравенства (9) непосредственно следует, что интересующие нас нули c_k лежат внутри контуров E_k по одному в каждом из них, поскольку внутренний радиус r_1 , мы можем взять произвольно малым, т. е. иметь во всех случаях, что

$$r_1 < \sqrt[n]{\left|\frac{q}{p}\right|} < \rho.$$

Итак, мы доказали, что нули функции $pu^n + q$ лежат по одному внутри контуров E_k . Поэтому, если в каждой точке этих контуров имеет место неравенство (21), то прилагая теорему Руше к контурам E_k получим, что корни уравнения

$$u^n - pu^n - q = 0$$

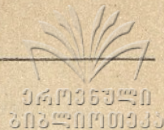
$\delta_k (k=0, 1, \dots, n-1)$ будут тогда по одному лежать внутри E_k .

Проследим за изменением u вдоль прямых, составляющих контуры E_k . Заметим, что на них, u можно представить в виде

$$u = t \sqrt[n]{\frac{mq}{(m-n)p}} \exp\left(\frac{(2k+2)\pi i}{n}\right). \quad (23)$$

где t — переменный параметр. На окружности ρ [в точке пересечения прямой (20) с этой окружностью] этот параметр имеет значение 1 в силу формулы (6). Итак, мы должны u приписывать значения, определяемые последней формулой и неравенством $0 < t \leq 1$ и убедиться, что при изменении t в $(0, 1]$ имеет место неравенство (21).

Вдоль любого прямолинейного отрезка, являющегося частью контура E_k имеет место равенство



$$\left| \frac{-u^m}{pu^n + q} \right| = \frac{m^{\frac{m}{n}} q^{\frac{m-n}{n}}}{(m-n)^{\frac{m-n}{n}} p^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{t^m}{mt^n + m - n}.$$

Легко теперь видеть, что при изменении t от 0 до 1 множитель $t^m (mt^n + m - n)^{-1}$ возрастает от нуля до $\frac{1}{2m-n}$. Замечая, что $2m-n > n$, мы на основании формулы (13) будем иметь:

$$\left| \frac{-u^m}{pu^n + q} \right| < \left(\frac{|q|}{a} \right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Таким образом имеем, что $\left| \frac{-u^m}{pu^n + q} \right| < 1$, при $|q| < a$. На окружности γ_1 описанной из нулевой точки плоскости u радиусом r_1 будем иметь, что

$$\left| \frac{-u^m}{pu^n + q} \right| \leq \frac{r_1^m}{|q| - |p| r_1^n} < 1$$

при всяком достаточно малом r_1 .

Рассматривая теперь точки окружности γ_3 радиуса p заключаем, что все они могут быть описаны переменной u , если в формуле (23) непрерывно изменять k от 0 до $n-1$.

Перемещая u вдоль окружности γ_3 и используя формулу (13) будем иметь

$$\left| \frac{-u^m}{pu^n + q} \right| = \left| \frac{m^{\frac{m}{n}} q^{\frac{m-n}{n}}}{(m-n)^{\frac{m-n}{n}} p^{\frac{m}{n}} (2m-n)} \right| < \left(\frac{|q|}{a} \right)^{\frac{m-n}{n}},$$

откуда

$$\left| \frac{-u^m}{pu^n + q} \right| < 1,$$

при условии

$$|q| < a.$$

Как и в двух предыдущих случаях контуры E_k позволяют сделать заключение, что абсолютное значение разности аргументов δ_k и c_k не больше $\frac{\pi}{n}$ и, что $|\delta_k|$ не превосходит

$$\rho = \sqrt[n]{\frac{m}{m-n} \left| \frac{q}{p} \right|}$$

для любого $k = 0, 1, \dots, n-1$. Все остальные корни уравнения $u^m - pu^n - q = 0$ имеют модули большие, чем ρ .

§ 4 Разложение в ряды

В § 6 мы увидим, что логарифмы от корней уравнения (1) могут быть разложены в бесконечные ряды с коэффициентами, представленными в виде контурных интегралов, легко вычисляемых при помощи формул приведения. Здесь поэтому уместно рассмотреть в связи с этим некоторую более общую задачу.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(u) = u - a - t f(u) = 0, \quad (24)$$

где t — переменный параметр (вообще комплексный). Пусть γ простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Пусть далее $f(u)$ будет некоторая функция регулярная на и внутри γ . Предположим, что точка a находится внутри области, ограниченной этой кривой и для всякой точки u расположенной на γ имеет место неравенство

$$|t f(u)| < |u - a|. \quad (25)$$

Тогда согласно теореме Руше уравнение (24) будет иметь ровно один корень, лежащий внутри γ . Этот корень обозначим через α .

Рассмотрим какуюнибудь функцию $F(u)$, регулярную в замкнутой области с контуром γ . Каждому значению t , удовлетворяющему неравенству (25) при всевозможных положениях u на γ , соответствует определенная точка u внутри γ . Для последующего изложения необходимо иметь некоторое представление $F(\alpha)$. Все случаи, с которыми мы встретимся при построении функций от простого корня уравнения (24), можно легко получить в частности из этого представления.

Докажем теперь две леммы, которые лежат в основании представления $F(\alpha)$.

Лемма 1. Если две функции $F(u)$ и $f(u)$ регулярны внутри замкнутого контура γ и на самом контуре и если функция $\varphi(u)$ определяемая равенством (24) на γ не обращается в нуль а внутри γ имеет единственный простой нуль $u = \alpha$, то

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(u) d \lg \varphi(u). \quad (26)$$

В самом деле, единственный нуль функции $\varphi(u)$, лежащий внутри γ , является простым полюсом подинтегральной функции (26). Соответственно с этим, применяя теорему Коши о вычетах к кривой γ , найдем, что равенство (26) справедливо.

Лемма 2. Если $\psi(u)$ регулярная функция в замкнутой области с контуром γ , то

$$\int_{\gamma} d \frac{\psi(u)}{(u-a)^s} = 0, \quad (27)$$



Эта лемма легко доказывается следующим преобразованием

$$\int_{\gamma} d \frac{\phi(u)}{(u-a)^s} = \int_{\gamma} \frac{\phi'(u)}{(u-a)^s} du - s \int_{\gamma} \frac{\phi(u)}{(u-a)^{s-1}} du,$$

с последующим использованием формулы Коши, выражающей значение производной в точке a , через интеграл, взятый вдоль контура γ , окружающего эту точку.

Можно теперь перейти к выводу интересующего нас представления функции $F(\alpha)$. Рассмотрим для этого равенство

$$\int_{\gamma} F(u) d \lg \varphi(u) = \int_{\gamma} F(u) d \lg(u-a) \cdot \left[1 - \frac{f(u)}{u-a} \right],$$

справедливое для любой фиксированной точки a , лежащей внутри γ .

Левая часть рассмотренного равенства есть произведение вычета подынтегральной функции относительно точки α на $2\pi i$, т. е. $F(\alpha)$, а правая часть равна

$$F(a) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(u) \lg \left[1 - \frac{f(u)}{u-a} \right].$$

Поскольку вдоль всего контура γ имеет место неравенство (25), мы имеем разложение

$$\lg \left[1 - \frac{f(u)}{u-a} \right] = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f^s(u)}{s} \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^{s-1},$$

равномерно сходящееся на γ . Поэтому

$$F(\alpha) = F(a) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f^s}{s} \int_{\gamma} F(u) d \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s.$$

Интегрирование по частям позволяет написать

$$\int_{\gamma} F(u) d \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s = \int_{\gamma} dF(u) \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s - \int_{\gamma} F'(u) \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s du,$$

где первый интеграл справа равен нулю на основании формулы (27), так что последнее равенство перепишется следующим образом:

$$\int_{\gamma} F(u) d \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s = - \int_{\gamma} F'(u) \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s du.$$

Таким образом получаем, что

$$F(\alpha) = F(a) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f^s}{s} \int_{\gamma} F'(u) \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s du. \quad (28)$$

В этом равенстве и состоит содержание упомянутого выше представления $F(\alpha)$.

Важным выводом из этого представления будет формула Лагранжа. В самом деле, пусть $f(a) \neq 0$. Тогда для вычета функции $F'(u) \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s$, имеющего в точке a s -кратный полюс имеем следующее выражение:

$$\frac{2\pi i}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} F'(a) [f(a)]^s.$$

Таким образом, равенство (28), при помощи рассмотренных вычетов, перейдет в такое

$$F(\alpha) = F(a) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} \{ F'(a) [f(a)]^s \}, \quad (29)$$

в котором при t переменном α можно заменить на u . В результате получим формулу Лагранжа для контура γ в том виде, в каком она обычно выводится для окружности, описанной из точки a плоскости u как из центра.

В связи с этим возникает вопрос а нельзя ли формулу (28) получить из формулы Лагранжа? Если мы выведем эту формулу для произвольного простого замкнутого кусочно-гладкого контура γ и используем выражение Коши для $(s-1)$ -ой производной от $\{F'(a)[f(a)]^s\}$, где a точка внутри γ , то получим

$$\frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} \{ F'(a) [f(a)]^s \} = \frac{(s-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} F'(u) \left(\frac{f(u)}{u-a} \right)^s du,$$

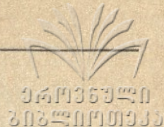
что вместе с формулой Лагранжа дает формулу (28).

Из вышеизложенного получается теорема относительно функции $F(\alpha)$, для произвольного контура γ , которую здесь и укажем.

Теорема. Пусть функции $f(u)$ и $F(u)$ регулярны на и внутри простого замкнутого кусочно-гладкого контура γ , содержащего точку a и пусть $f(a) \neq 0$. Если при произвольном фиксированном t во всех точках γ имеет место неравенство (25), тогда уравнение

$$\alpha - a - t f(\alpha) = 0,$$

рассматриваемое как уравнение относительно α , имеет ровно один корень α внутри контура γ и любая функция $F(\alpha)$, регулярная на и внутри γ , может быть разложена в степенной ряд по t по формуле (28).



§ 5. Разложение функции от корня трехчленного уравнения

В предыдущих параграфах мы убедились, что уравнение

$$u^m - pu^n - q = 0$$

имеет внутри контуров A_k , D_k и E_k ровно по одному простому корню при соблюдении некоторых неравенств вдоль контуров. Поэтому формулы (28) и (29) годятся для разложения в ряды функций от этих корней.

Из формулы (29) в зависимости от неравенств § 3 $|q| \leq a$ легко получить теоремы о разложении функций корней α_k , β_k и δ_k в ряды, с некоторыми в практическом виде записанными неравенствами для сходимости. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $F(u)$ регулярна на контуре A_k , содержащем корень a_k уравнения $u^m - q = 0$, и внутри его, то при произвольных p и q , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| > \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m}, \quad (30)$$

уравнение

$$\alpha_k^m - p\alpha_k^n - q = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m-1),$$

рассматриваемое как уравнение относительно α_k , имеет один корень α_k внутри A_k . Любая функция $F(\alpha_k)$, регулярная на и внутри A_k , может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд

$$F(\alpha_k) = F(a_k) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{p^s}{s!} \quad (k=0, 1, \dots, m-1),$$

где

$$A_s = \left\{ \frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} F'(u) \cdot \left[\frac{u^n (u - a_k)}{u^m - q} \right]^s \right\}_{u=a_k},$$

а a_k определяется формулой (15).

Относительно обозначений заметим следующее. Для контура и коэффициентов соответствующего разложения можно было бы ввести различные обозначения, тем не менее, мы и в дальнейшем сохраним для них одинаковые обозначения.

Теорема 2. Если функция $F(u)$ регулярна на контуре D_k , содержащем корень b_k уравнения $u^m - pu^n = 0$, и внутри его, то при произвольных p и q , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| < \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m}, \quad (31)$$

уравнение

$$\beta_k^m - p\beta_k^n - q = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m-n-1),$$

рассматриваемое как уравнение относительно β_k , имеет один корень внутри контура D_k . Любая функция $F(\beta_k)$, регулярная на и внутри D_k , может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд

$$F(\beta_k) = F(b_k) + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \frac{q^s}{s!} \quad (k=0, 1, \dots, m-n-1),$$

где

$$D_s = \left\{ \frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} F'(u) \cdot \left[\frac{u-b_k}{u^n - pu^n} \right]^s \right\}_{u=b_k},$$

а b_k имеет выражение (18).

Теорема 3. Если функция $F(u)$ регулярна на контуре E_k , содержащем корень c_k уравнения $pu^n + q = 0$, и внутри его, то при произвольных p и q , удовлетворяющих неравенству (31), уравнение

$$\delta_k^m - p\delta_k^n - q = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

рассматриваемое как уравнение относительно δ_k , имеет один корень внутри контура E_k . Любая функция $F(\delta_k)$, регулярная на и внутри E_k , может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд

$$F(\delta_k) = F(c_k) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_s}{s!} \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

где

$$E_s = \left\{ \frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} F'(u) \cdot \left[u^m \left(\frac{u-c_k}{pu^n + q} \right)^s \right] \right\}_{u=c_k},$$

а c_k определяется формулой (22).

Из этих теорем при $F(u) = u^k$ непосредственно следуют [1] теоремы относительно разложений степеней корней уравнения

$$u^m - pu^n - q = 0$$

в сходящиеся ряды.

Коэффициенты A_s , D_s , E_s , в том виде в каком они здесь выписаны для практических вычислений, вообще говоря, мало удобны. В некоторых случаях с помощью (28) им удастся придать вид, удобный для вычислений. Один из таких случаев рассмотрен ниже.

§ 6. Разложение в ряды логарифмов корней трехчленных уравнений

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые частные случаи теоремы, сформулированной в конце § 4. Поставим себе в соответствии с результатами § 4, задачи построения разложений логарифмов корней трехчленных уравнений α_k , β_k и δ_k . С этой целью используем разложение (28) для контуров A_k , D_k и E_k , принимая в качестве



полюса a соответственно точки a_k , b_k и c_k § 3, лежащие внутри этих контуров.

А. Начнем с функции $\lg \alpha_k$. Примем в (28) $F(u) = \lg u$, заменим α на α_k , a на a_k и t на p и положим

$$f(u) = \frac{u^n(u - a_k)}{u^m - q}.$$

Тогда получим

$$\lg \alpha_k = \lg a_k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p^s}{s} \int_{A_k} \frac{u^{ns-1}}{(u^m - q)^s} du.$$

Мы можем написать

$$\int_{A_k} d \frac{u^{ns-m}}{(u^m - q)^{s-1}} = (ns - m) \int_{A_k} \frac{u^{ns-m-1}}{(u^m - q)^{s-1}} du - m(s-1) \int_{A_k} \frac{u^{ns-1}}{(u^m - q)^s} du$$

и так как интеграл стоящий в левой части равенства согласно леммы 2 (§ 4) равен нулю, то мы получаем рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_{ns-1, s} = \int_{A_k} \frac{u^{ns-1}}{(u^m - q)^s} du.$$

Формула эта имеет вид:

$$I_{ns-1, s} = \frac{ns - m}{m(s-1)} I_{ns-1-m, s-1} \quad (s \neq 1).$$

Отсюда выводим последовательно:

$$I_{ns-1-m, s-1} = \frac{ns-2m}{m(s-2)} I_{ns-1-2m, s-2},$$

$$I_{ns-1-2m, s-2} = \frac{ns-3m}{m(s-3)} I_{ns-1-3m, s-3},$$

.....

$$I_{ns-1-(s-2)m, 2} = \frac{ns-(s-1)m}{m \cdot 1} I_{ns-1-(s-1)m, 1};$$

умножая почленно все эти равенства (включая равенство для $I_{ns-1, s}$), найдем

$$I_{ns-1, s} = \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{ns}{m} - 1 \right) \left(\frac{ns}{m} - 2 \right) \dots \left(\frac{ns}{m} - (s-1) \right) \int_{A_k} \frac{u^{m-1-(m-n)s}}{u^m - q} du.$$

Внутри контура A_k есть только один полюс a_k подинтегральной функции $\frac{u^{m-1-(m-n)s}}{u^m - q}$ с вычетом, равным $\frac{a_k^{-(m-n)s}}{m}$, где a_k имеет выражение (15); следовательно

$$\int_{A_k} \frac{u^{m-1-(m-n)s}}{u^m - q} du = \frac{2\pi i}{m} a_k^{-(m-n)s} = \frac{2\pi i}{m} \frac{\exp\left(\frac{2kns\pi i}{m}\right)}{q^{\frac{(m-n)s}{m}}}.$$

Полагая для краткости

$$\xi_k = \exp\left(\frac{2k\pi i}{m}\right) \quad (k=0, 1, \dots, m-1),$$

мы получим

$$\int_{A_k} \frac{u^{ns-1}}{(u^m - q)^s} du = \frac{2\pi i}{m(s-1)!} \left(\frac{ns}{m} - 1\right) \left(\frac{ns}{m} - 2\right) \dots \left(\frac{ns}{m} - (s-1)\right) \frac{\xi_k^{ns}}{q^{\frac{(m-n)s}{m}}},$$

и следовательно,

$$\lg \alpha_k = \lg a_k + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{ns} \left(\frac{p^m}{q^{m-n}}\right)^{\frac{s}{m}} \xi_k^{ns}, \quad (32)$$

где

$$A_s = \frac{1}{s!} \prod_{v=0}^{s-1} \left(\frac{sn}{m} - v\right).$$

Таким образом имеем такое предложение:

Если коэффициенты p и q уравнения

$$u^m - pu^n - q = 0$$

удовлетворяют неравенству (30), то корни этого уравнения α_k ($k=0, 1, \dots, m-1$) лежат по одному внутри контуров A_k и $\lg \alpha_k$ может быть представлен в виде абсолютно сходящегося ряда (32).

Пусть

$$u^5 - u - 1 = 0$$

заданное уравнение. Имеем:

$$p=q=1, \quad m=5, \quad n=1.$$

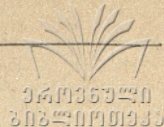
Если $k=0$, то для вычисления логарифма корня α_0 мы можем взять $a_0=1$.

Согласно общей формуле (32), искомый логарифм имеет выражение:

$$\lg \alpha_0 = \frac{1}{5} - \frac{3}{50} + \frac{7}{375} - \frac{11}{2500} + \frac{133}{156250} - \frac{1794}{2734375} + \frac{5049}{15625000} - \dots$$

Просуммировав 7 первых членов этого ряда, находим:

$$\lg_{10} \alpha_0 = 0,154785 - 0,434294 = 0,06722$$



и, следовательно, искомое значение равно

$$\alpha_0 = 1,1674.$$

Точное значение α_0 с четырьмя десятичными знаками будет 1,1673.

Б. Пусть теперь опять $F(u) = \lg u$. Рассмотрим функцию

$$f(u) = \frac{u - b_k}{u^m - pu^n}.$$

Пусть в (28) $t = q$, $a = b_k$ и заменим α на β_k . Это даст нам равенство для логарифмов $m - n$ внешних корней:

$$\lg \beta_k = \lg b_k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^s}{s} \int_{D_k} \frac{du}{u^{ns+1} (u^{m-n} - p)^s}.$$

Затем как и в предыдущем случае находим рекуррентную формулу

$$I_{ns+1, s} = - \frac{ns + m - n}{(m - n)(s - 1)} I_{ns+1+m-n, s-1},$$

для вычисления интегралов

$$I_{ns+1, s} = \int_{D_k} \frac{du}{u^{ns+1} (u^{m-n} - p)^s}.$$

С помощью этой формулы интеграл $I_{ns+1, s}$ последовательно приводится к интегралу

$$I_{ns+1+(s-1)(m-n), 1} = \int_{D_k} \frac{du}{u^{ns+1+(s-1)(m-n)} (u^{m-n} - p)} = \frac{2\pi i}{m-n} b_k^{-sm},$$

где b_k определяется формулой (18).

Окончательно получается, что

$$\lg \beta_k = \lg b_k - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{ns} D_s \left(\frac{q^{m-n}}{p^m} \right)^{\frac{s}{m-n}} \eta_k^{ms}, \quad (33)$$

где

$$D_s = \frac{1}{s!} \prod_{v=0}^{s-1} \left(\frac{sn}{m-n} + v \right)$$

и

$$\eta_k = \exp \left(-\frac{2k\pi i}{m-n} \right) \quad (k=0, 1, \dots, m-n-1).$$

Поэтому мы имеем следующее предложение:

Если коэффициенты p и q уравнения

$$u^m - pu^n - q = 0$$

удовлетворяют неравенству (31), то внешние корни этого уравнения β_k ($k=0, 1, \dots, m-n-1$) лежат по одному внутри контуров D_k и $\lg \beta_k$ может быть представлен в виде абсолютно сходящегося ряда (33).

В. Разложение для $\lg \delta_k$ удается построить подобным же образом. Положим в (28) $F(u) = \lg u$, $a = c_k$ и заменим α на δ_k . Примем $t=1$ и

$$f(u) = \frac{(u - c_k) u^m}{pu^n + q}.$$

Тогда

$$\lg \delta_k = \lg c_k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \int_{E_k} \frac{u^{ms-1}}{(pu^n + q)^s} du.$$

Рекуррентная формула в этом случае принимает вид

$$I_{ms-1, s} = \frac{ms-n}{np(s-1)} I_{ms-1-n, s-1},$$

где

$$I_{ms-1, s} = \int_{E_k} \frac{u^{ms-1}}{(pu^n + q)^s} du.$$

Повторные применения последней формулы, понижающей показатель двучлена знаменателя $pu^n + q$ на единицу, приводит задачу к вычислению интеграла вида:

$$I_{ms-1-(s-1)n, 1} = \int_{E_k} \frac{u^{ms-1-(s-1)n}}{pu^n + q} du.$$

Контур E_k содержит только один полюс c_k , имеющей выражение (22), следовательно вычет подинтегральной функции интеграла справа

относительно этого полюса равен $\frac{1}{np} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{m-n}{n}} \zeta_k^{(m-n)s}$. Мы имеем окончательно

$$I_{ms-1-(s-1)n, 1} = \frac{2\pi i}{np} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{m-n}{n}s} \zeta_k^{(m-n)s},$$

где

$$\zeta_k = \exp\left(\frac{(2k+1)\pi i}{n}\right).$$

В результате получим

$$\lg \delta_k = \lg c_k + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_s}{ms} \left(\frac{q^{m-n}}{p^m} \right)^{\frac{s}{n}} \zeta_k^{(m-n)s}, \quad (34)$$

где

$$E_s = \frac{1}{s!} \prod_{v=0}^{s-1} \left(\frac{ms}{n} - v \right).$$

Этот результат можно формулировать так:

Если коэффициенты p и q уравнения

$$u^m - pu^n - q = 0$$

удовлетворяют неравенству (31), то внутренние корни этого уравнения δ_k ($k=0, 1, \dots, n-1$) лежат по одному внутри контуров E_k и $\lg \delta_k$ может быть представлен в виде абсолютно сходящегося ряда (34).

Заметим наконец, что дополнительное исследование сходимости рядов (32), (33) и (34), проводимое в следующем параграфе, показывает абсолютную сходимость этих рядов и тогда, когда левые части неравенств (30) и (31) делаются равными $\frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m}$.

Кроме того, в том же параграфе доказывается, что ряды (32), (33) и (34) и в этом случае годятся для вычисления логарифмов корней α_k , β_k и δ_k .

§ 7. Разложение в ряды для специальных случаев

Теперь мы можем приступить к исследованию сходимости разложений логарифмов корней трехчленных уравнений в специальном случае, когда

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| = \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m}. \quad (35)$$

Начнем с того, что докажем абсолютную сходимость рядов (32), (33) и (34), при (35). После того как сходимость будет доказана, легко доказать, что величины α_k , β_k и δ_k , получаемые при помощи этих рядов, удовлетворяют уравнению

$$u^m - pu^n - q = 0.$$

Действительно, рассмотрим какую-нибудь последовательность p и q , для которой

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| \rightarrow \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m};$$

тогда мы можем утверждать, что если ряды (32), (33) и (34) сходятся при этом, то величины α_k , β_k и δ_k , определяемые ими, будут стремиться к соответствующим корням трехчленного уравнения, как к своим пределам.

Поэтому нам необходимо изучить сходимость рядов (32), (33) и (34) только для специального случая (35).

А. Мы начнем с доказательства того, что ряд (32) абсолютно сходится, если для коэффициентов p и q имеет место равенство (35).

Условие абсолютной сходимости дается следующей теоремой: для того, чтобы ряд (32) сходиллся абсолютно при выполнении условия (35), достаточно чтобы $m \geq 1$.

В самом деле, ряд (32), будет или не будет абсолютно сходящимся, смотря по тому, будут ли абсолютно сходиться $m-1$ различных между собою рядов из числа m рядов с членами, имеющими значки

$$s + \nu, \quad s + \nu + m, \quad s + \nu + 2m, \quad \dots \quad (\nu = 0, 1, \dots, m-1).$$

Среди этих m рядов имеется ряд все члены которого равны нулю. Его следует исключить. Мы докажем сходимость ряда с общим членом u_s , т. е. ряда для которого $\nu = 0$. Это доказательство остается верным и для остальных рядов.

Рассмотрим отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{u_{m+s}}{u_s} = \frac{s}{m+s} \frac{p^m}{q^{m-n}} \xi_k^{nm} \frac{A_{m+s}}{A_s},$$

где

$$\frac{A_{m+s}}{A_s} = \frac{\prod_{\nu=0}^{m+s-1} [n(m+s) - m\nu]}{m^m \prod_{\nu=1}^m (s+\nu) \prod_{\nu=0}^{s-1} (sn - m\nu)}.$$

Надлежащим преобразованием произведений можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=0}^{m+s-1} [n(m+s) - m\nu] &= (-1)^{m-n} \prod_{\nu=0}^{n-1} [ns + m(n-\nu)] \times \\ &\times \prod_{\nu=0}^{s-1} (ns - \nu m) \prod_{\nu=0}^{m-n-1} [(m-n)s + \nu m]. \end{aligned}$$

Опуская сокращающиеся части произведений, имеем

$$\frac{A_{m+s}}{A_m} = (-1)^{m-n} \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} \left[s + \frac{m}{n} (n-\nu) \right]}{\prod_{\nu=0}^{m-n-1} \left(s + \frac{m}{m-n} \nu \right)} \prod_{\nu=1}^m (s+\nu).$$



Следовательно

$$\frac{u_{s+m}}{u_s} = (-1)^{m-n} \frac{n^n(m-n)^{m-n}}{m^m} \frac{p^m}{q^{m-n}} \frac{s^{m+1} + \frac{m^2}{2} s^m + \dots}{s^{m+1} + \frac{m^2 + 3m}{2} s^m + \dots},$$

которое, при всех значениях p и q , для которых имеет место равенство (35), позволяет написать:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\left| \frac{u_s}{u_{s+m}} \right| - 1 \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} m s^{m+1} + \dots}{s^{m+1} + \dots} = \frac{3}{2} m.$$

По признаку Раабе отсюда следует абсолютная сходимость ряда с общим членом u_s при $m > \frac{2}{3}$.

Этим теорема доказана.

Б. Рассмотрим случай (35) для ряда (33). Пусть мы уже соответственно сгруппировали члены этого ряда и рассмотрим ряды со значками $s + \nu$, $s + \nu + m - n, \dots$ ($\nu = 0, 1, \dots, m - n - 1$). Чтобы доказать сходимость этих рядов, как и раньше, мы ограничимся доказательством сходимости ряда с общим членом u_s .

В этом случае имеем:

$$\frac{u_{s+m-n}}{u_s} = (-1)^{m-n} \frac{s}{s+m-n} \frac{q^{m-n}}{p^m} \eta_k^{m(m-n)} \frac{D_{s+m-n}}{D_s},$$

где

$$\frac{D_{s+m-n}}{D_s} = \frac{\prod_{\nu=0}^{s+m-n-1} [ns + (m-n)(n+\nu)]}{(m-n)^{m-n} \prod_{\nu=1}^{m-n} (s+\nu) \prod_{\nu=0}^{s-1} [ns + (m-n)\nu]}.$$

Но легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=0}^{s+m-n-1} [ns + (m-n)(n+\nu)] &= \prod_{\nu=n}^{s-1} [ns + (m-n)\nu] \prod_{\nu=0}^{m-1} [ms + (m-n)\nu], \\ \prod_{\nu=0}^{s-1} [ns + (m-n)\nu] &= \prod_{\nu=0}^{n-1} [ns + (m-n)\nu] \prod_{\nu=n}^{s-1} [ns + (m-n)\nu], \end{aligned}$$

и, таким образом, опуская сокращающиеся части произведений, получим:

$$\frac{D_{s+m-n}}{D_s} = \frac{m^m}{n^n(m-n)^{m-n}} \frac{\prod_{v=0}^{m-1} \left(s + \frac{m-n}{m} v \right)}{\prod_{v=1}^{m-n} (s+v) \prod_{v=0}^{n-1} \left(s + \frac{m-n}{n} v \right)}.$$

Следовательно

$$\frac{u_{s+m-n}}{u_s} = (-1)^{m-n} \frac{m^m}{n^n(m-n)^{m-n}} \frac{q^{m-n}}{p^m} \frac{s^{m+1} + \frac{1}{2}(m-n)(m-1)s^m + \dots}{s^{m+1} + \frac{1}{2}(m-n)(m+2)s^m + \dots}$$

Теперь, если принять во внимание (35), можно легко убедиться, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\left| \frac{u_s}{u_{s+m-n}} \right| - 1 \right) = \frac{3}{2}(m-n),$$

и, следовательно, согласно признака Раабе, абсолютная сходимость ряда с общим членом u_s имеет место, когда

$$m-n > \frac{2}{3},$$

и доказательство закончено.

Из только что полученного неравенства получаем теорему о сходимости ряда (33), а именно:

Если $m-n \geq 1$ и p и q удовлетворяют (35), то ряд (33) будет абсолютно сходящимся.

Остается таким образом исследовать еще случай, когда равенство (35) имеет место для ряда (34).

В. Рассмотрим ряд с членами, имеющими значки $s, s+n, s+2n, \dots$. Это—один из n различных рядов с членами, имеющими значки $s+v, s+v+n, s+v+2n, \dots$ ($v=0, 1, \dots, n-1$), образованных путем соответствующей группировки членов ряда (34). Исследуем абсолютную сходимость (34) для всех значений p и q , удовлетворяющих (35). Для этого достаточно ограничиться, как раньше, исследованием сходимости ряда с общим членом u_s .

Мы имеем

$$\frac{u_{s+n}}{u_s} = \frac{s}{s+n} \frac{q^{m-n}}{p^m} \zeta_k^{n(m-n)} \frac{E_{s+n}}{E_s},$$

где

$$\frac{E_{s+n}}{E_s} = \frac{\prod_{v=0}^{s+n-1} [ms + (m-v)n]}{n^n \prod_{v=1}^n (s+v) \prod_{v=0}^{s-1} (ms-nv)}.$$



Надлежащим преобразованием произведений можно убедиться в том, что

$$\prod_{\nu=0}^{s+n-1} [ms + (m-\nu)n] = \prod_{\nu=1}^m (ms + \nu n) \prod_{\nu=m}^{s+n-1} [ms + (m-\nu)n],$$

$$\prod_{\nu=0}^{s-1} (ms - n\nu) = \prod_{\nu=1}^{m-n} [(m-n)s + \nu n] \prod_{\nu=m}^{s+n-1} [ms + (m-\nu)n].$$

Поэтому

$$\frac{E_{s+n}}{E_s} = \frac{m^m}{n^n(m-n)^{m-n}} \frac{\prod_{\nu=1}^m \left(s + \frac{n}{m} \nu\right)}{\prod_{\nu=1}^n (s+\nu) \prod_{\nu=1}^{m-n} \left(s + \frac{n}{m-n} \nu\right)}.$$

Перепишем теперь отношение последующего члена к предыдущему в виде

$$\frac{u_{s+n}}{u_s} = (-1)^{m-n} \frac{m^m}{n^n(m-n)^{m-n}} \frac{q^{m-n}}{p^m} \frac{s^{m+1} + \frac{1}{2} n(m+1)s^m + \dots}{s^{m+1} + \frac{1}{2} n(m+4)s^m + \dots}$$

и примем во внимание условие (35).

Мы имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\left| \frac{u_s}{u_{s+n}} \right| - 1 \right) = \frac{3}{2} n,$$

поэтому, согласно признака Раабе, ряд с общим членом u_s будет абсолютно сходиться при $n > \frac{2}{3}$.

Полученное неравенство справедливо для всех значений n и $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, начиная с $n=1$. А это влечет за собой абсолютную сходимость рядов с членами, имеющими значки $s+\nu$, $s+\nu+n$, $s+\nu+2n$, ... Поэтому ряд (34) абсолютно сходится. Следовательно, мы приходим к следующей теореме:

Если коэффициенты трехчленного уравнения p и q удовлетворяют условию (35), то ряд (34) будет абсолютно сходящимся рядом, при любых $n \geq 1$.

Таким образом, имеют место теоремы:

Теорема 1. Если

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| \geq \frac{n^n(m-n)^{m-n}}{m^m}, \quad (36)$$

то ряды (32) сходятся и представляют собой логарифмы простых корней уравнения

$$u^m - pu^n - q = 0,$$

расположенных по одному внутри контуров A_k .

Теорема 2. Если

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| \leq \frac{n(m-n)^{m-n}}{m^m}, \quad (37)$$

то ряды (33) и (34) сходятся, причем из них ряды (33) представляют логарифмы внешних корней уравнения

$$u^m - pu^n - q = 0,$$

расположенных по одному внутри контуров D_k , а ряды (34) — логарифмы n внутренних корней этого же уравнения, лежащих по одному внутри каждого из контуров E_k .

Укажем еще на некоторые полезные следствия, вытекающие из разложений (32), (33) и (34). Будем перемещать параметры p и q непрерывным образом от некоторых начальных значений и следить за тем, чтобы для всяких допустимых p и q имело место неравенство (36). Тогда каждая из точек $u = \alpha_k$, определяемая рядом (32), будет перемещаться тоже непрерывно, не покидая области A_k .

Если же параметры p и q варьировать непрерывно так, чтобы при всяких значениях их удовлетворялось неравенство (37), то одни из точек $u = \beta_k$, числом $m-n$, определяемые рядом (33), будут перемещаться непрерывно, не выходя из областей D_k , остальные же n точек $u = \delta_k$, определяемые рядом (34), будут оставаться в областях E_k .

§ 8. Оценка погрешности рядов

В настоящем параграфе оценим остаточные члены рядов (32), (33) и (34) по модулю сверху. Оценкам предположим следующую лемму.

Пусть ряд

$$M_0 + M_1 + \dots + M_s + \dots \quad (38)$$

с вещественными или комплексными членами сходится; пусть далее τ есть точная верхняя граница совокупности

$$\left| \frac{M_{s+1}}{M_s} \right| = \tau_s, \quad \left| \frac{M_{s+2}}{M_{s+1}} \right| = \tau_{s+1}, \quad \left| \frac{M_{s+3}}{M_{s+2}} \right| = \tau_{s+2}, \dots;$$

тогда если $\tau < 1$, то для модуля R_s остаточного члена ряда (38), справедливо неравенство

$$R_s < \frac{\tau}{1 - \tau} |M_s|.$$



Лемма непосредственно вытекает из неравенства

$$|M_{s+1} + M_{s+2} + M_{s+3} + \dots| \leq |M_s|(\tau_s + \tau_s \tau_{s+1} + \tau_s \tau_{s+1} \tau_{s+2} + \dots),$$

если в правой части заменить $\tau_s, \tau_{s+1}, \tau_{s+2}, \dots$ на τ .

Обозначим через $R_{s+\nu}$ модуль остаточного члена ряда, составленного из членов ряда (32) с индексами $s+\nu, s+\nu+m, s+\nu+2m, \dots$ ($\nu=0, 1, \dots, m-1$). Очевидно, что остаток $R_{s+\nu}$ получается из этого ряда, если оборвать его на члене с индексом $s+\nu$. Поэтому по только что доказанной лемме ошибка будет меньше произведения $|u_{s+\nu}|$ на

$\frac{\tau}{1-\tau}$, где ограничиваясь достаточно большими значениями s , можно

положить

$$\tau = \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m} \left| \frac{p^m}{q^{m-n}} \right|.$$

Если же под $R_{s+\nu}$ разуместь модуль остаточного члена ряда, составленного из членов разложения (33) с индексами

$$s+\nu, s+\nu+(m-n), s+\nu+2(m-n), \dots (\nu=0, 1, \dots, m-n-1),$$

то ошибка будет меньше произведения $|u_{s+\nu}|$ на $\frac{\tau}{1-\tau}$, где

$$\tau = \frac{m^m}{n^n (m-n)^{m-n}} \left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right|.$$

К аналогичному результату мы придем для ряда, составленного из членов разложения (34) с индексами

$$s+\nu, s+\nu+n, s+\nu+2n, \dots (\nu=0, 1, \dots, n-1).$$

§ 9. О вещественных корнях трехчленных уравнений

Рассуждения предыдущих параграфов нам позволяют проанализировать в каких случаях трехчленное уравнение с вещественными коэффициентами p и q имеет вещественные корни и как они должны быть вычислены. В основе наших исследований мы положим графики функции $q=u^m - pu^n$, представленные на черт. 1—4 и формулы (32), (33) и (34). На чертежах 1—4 мы имеем наглядную картину распределения вещественных корней трехчленного уравнения в зависимости от четности и нечетности чисел m и n , знака у p и q и неравенств $|q| \geq a$ и $|q| \leq a$, где a дается формулой (13). Мы получим в результате рассмотрения этих графиков вполне удовлетворительную информацию о вещественных корнях. Остается разобрать вопрос о том, какой конкретный вид примут формулы (32), (33) и (34) в интересующих нас

случаях. Мы изучим это в зависимости от четности и нечетности n и знаков у коэффициентов p и q .

Исследование начнем с того случая когда коэффициенты p и q удовлетворяют неравенству $|q| \geq a$ или, что одно и то же, неравенству (36). Здесь равенство имеет место в том и только в том случае, когда $|q| = a$.

Представится 4 возможных случая. Прежде чем перейти к изложению этих случаев, условимся рассматривать только те значения p и q , для которых неравенство $|q| \geq a$ выполняется.

1. Пусть m и n четные числа. Тогда из черт. 1 легко вывести, что при положительном q , большем a , уравнение

$$u^m - pu^n - q = 0$$

имеет 2 корня, отличающиеся только по знаку. При отрицательном q и положительном p это уравнение не имеет вещественных корней, если $|q| > a$. При отрицательных p и q все корни трехчленного уравнения мнимые.

Если же p и q удовлетворяют равенству $|q| = a$, то трехчленное уравнение при $p > 0$ и $q < 0$ имеет пару двукратных вещественных корней $\pm p$, где $p = \sqrt[m-n]{\frac{n}{m} p}$, а при положительном q — два простых корня с разными знаками, независимо от того каков знак p . При этом если $p < 0$ положительный корень заключен в границах 0 и p , если же $p > 0$ величина $\sqrt[m-n]{\frac{n}{m} p}$ служит нижней границей положительных корней.

Так как q в рассматриваемом случае есть четная функция от u , то достаточно вычислить только положительные корни. Они могут быть получены из формулы (32) принимая в ней $k=0$, т. е. полагая $\xi_0=1$.

Полученная формула годиться для вычисления корней в остальных трех случаях, разбираемых ниже. Пользуясь графиками 1—4 вычисление отрицательных корней можно приводить к вычислению положительных.

2. Пусть теперь m и n нечетны. По тем же основаниям, как выше, из черт. 2 выводим, что при любых p и q , удовлетворяющих неравенству $|q| > a$, трехчленное уравнение имеет один положительный корень при $q > 0$ и один отрицательный корень, когда $q < 0$.

Если же p и q удовлетворяют равенству $|q| = a$, то при $q > 0$ и $p > 0$ уравнение имеет три вещественных корня — положительный простой корень, больший чем $\sqrt[m-n]{\frac{n}{m} p}$ и отрицательный двукратный корень,



равный— ρ . При $p < 0$ и $q > 0$ уравнение имеет положительный корень, заключенный в границах 0 и ρ .

Пусть теперь опять $|q| = a$, но $p > 0$ а $q < 0$. Тогда трехчленное уравнение имеет опять три вещественных корня—отрицательный простой и положительный двукратный—равный ρ . Нам остается рассмотреть случай $p < 0$, $q < 0$. Мы получим в этом случае, что уравнение имеет один отрицательный корень.

3. Если m число нечетное, а n —четное (черт. 3), то можно также легко получить информацию о вещественных корнях трехчленных уравнений.

Прежде всего заметим, что при $|q| > a$ трехчленное уравнение имеет один вещественный корень, который положителен при $q > 0$ и отрицателен, когда $q < 0$.

При положительном q , равном a , и $p < 0$ уравнение имеет простой положительный корень, лежащий в промежутке $(0, \rho)$ и двукратный отрицательный корень, равный— ρ . Когда же p и q положительны, причем $q = a$, уравнение имеет один положительный корень, больший чем $\frac{m-n}{\rho}$.

Если $q < 0$, то при $|q| = a$ и $p > 0$ уравнение имеет один простой отрицательный корень и один положительный двукратный—равный ρ ; когда же q и p отрицательны, причем $|q| = a$, уравнение имеет один простой отрицательный корень.

4. Остается рассмотреть случай когда m число четное, а n —нечетное (черт. 4). Если при этом q положительно и больше чем a , то трехчленное уравнение имеет два простых корня с различными знаками. При q отрицательном большем по абсолютному значению чем a , уравнение не имеет вещественных корней.

Пусть теперь $|q| = a$. Тогда при $q > 0$ уравнение имеет два корня с противоположными знаками, причем когда $p > 0$ положительный корень имеет в качестве нижней границы число $\frac{m-n}{\rho}$; при $p < 0$ он не покидает промежутка $(0, \rho)$. Когда же $q < 0$ уравнение имеет двукратный корень, равный ρ при $p > 0$ и $-\rho$ при $p < 0$.

Исследуем в заключении распределение вещественных корней трехчленного уравнения для тех значений p и q , которые удовлетворяют неравенству $|q| < a$ или, что одно и то же, неравенству (31). Во всем дальнейшем предполагается, что это неравенство соблюдено.

Для последующего изложения необходимо опять вернуться к графикам изменения функции $q = u^m - \rho u^n$. Здесь тоже представится 4 случая. Во всех этих случаях для вычисления корней следует обратиться к формулам (33) и (34), положив в них $k=0$. Пользуясь графиками 1—4 вычисление отрицательных корней можно приводить к вычислению положительных.

1. Пусть m и n четны (черт. 1). Тогда при положительном q трехчленное уравнение имеет два равных с обратными знаками корня. При

этом когда $p > 0$ положительный корень больше чем $\sqrt[m-n]{p}$, при $p < 0$ он заключен в промежутке $(0, p)$.

Если же $q < 0$, $p < 0$ то, как было замечено выше, трехчленное уравнение не имеет вещественных корней. При $q < 0$ и $p > 0$ уравнение имеет две пары равных с обратными знаками корня; положительные корни заключены соответственно в промежутках $(0, p)$ и $(p, \sqrt[m-n]{p})$.

2. Предположим, что m и n нечетны (черт. 2). Пусть, далее, даны $q > 0$ и $p > 0$. Тогда трехчленное уравнение, имеет один положительный корень, больший чем $\sqrt[m-n]{p}$ и два отрицательных корня. Если же $q > 0$ и $p < 0$, уравнение имеет один положительный корень, лежащий в промежутке $(0, p)$.

При $q < 0$ и $p > 0$, уравнение имеет два положительных корня и один отрицательный; для q и p отрицательных, уравнение имеет один отрицательный корень.

3. Если m число нечетное, а n —четное (черт. 3) можно также легко получить информацию о вещественных корнях трехчленных уравнений. Прежде всего заметим, что это уравнение при положительном q и $p > 0$ имеет один положительный корень, больший чем $\sqrt[m-n]{p}$; при $q > 0$ и $p < 0$ уравнение имеет два отрицательных корня и один положительный, лежащий в промежутке $(0, p)$. Если же q отрицательно, то при $p < 0$ уравнение имеет один отрицательный корень, а при $p > 0$ —один отрицательный и два положительных корня, причем один из них лежит в промежутке $(0, p)$, а другой—в промежутке $(p, \sqrt[m-n]{p})$.

4. Остается рассмотреть случай когда m число четное, а n —нечетное (черт. 4). В этом случае, если q положительно, то трехчленное уравнение обладает двумя простыми корнями с различными знаками, при этом когда $p > 0$ $\sqrt[m-n]{p}$ служит нижней границей положительных корней, а при $p < 0$ они заключены в промежутке $(0, p)$. При q отрицательно уравнение имеет два вещественных корня, причем при $p > 0$ оба корня положительны и заключены в промежутках $(0, p)$ и $(p, \sqrt[m-n]{p})$; при $p < 0$ оба корня отрицательны.

Кафедра приближенного анализа
и вычислительной техники

(Поступило в редакцию 12. XII. 1958)

მ. მიქელაძე

სამეცნიერო განვითარების ამოცანა

რ ე ზ ი უ მ ე

შრომში განცალკევდება

$$u^m - pu^n - q = 0 \quad (1)$$

განტოლების მარტივი ფესვები, კომპლექსურ u ცვლადის სიბრტყეზე აგებული კონტურების საშუალებით. ამ კონტურების გასწვრივ ინტეგრებით კომპლექსურ ცვლადით ხერხდება (1) განტოლების ფესვების რეგულარული ფუნქციების დაშლა, აბსოლუტურად კრებად მწკრივებად. გამოყვანილია პირობები ვარგისი იმის დასადგენად, თუ რა შემთხვევებში აქვს (1) განტოლებას ნამდვილი ფესვები, როცა p და q ნამდვილია.

განვიხილოთ u სიბრტყეზე წრიული რგოლი, შემოსაზღვრული სათანადოდ შერჩეული რადიუსების მქონე წრეწირებით, რომლებიც შემოსაზღვრულია კოორდინატთა სათავიდან, როგორც ცენტრიდან. გარეწრეწირზე აღვნიშნოთ m თანატოლად დაშორებული წერტილი, ისე რომ ერთ-ერთის არგუმენტი იყოს $\frac{\pi + \arg q}{m}$. გაყოფის წერტილები ნახევარწრეწირებით შევაერთოთ კოორდინატთა სათავესთან. ამით რგოლი დაიყოფა m თანატოლ ნაწილად A_k ($k=0, 1, \dots, m-1$) (ნახ. 5) ისე რომ, თუ

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| > \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m}, \quad (2)$$

(1) განტოლების ფესვები სათითაოდ მოთავსდება თითოეულ A_k -ს შიგნით. მტკიცდება, რომ თუ დაცულია მე-(2)-ე უტოლობა, ყოველი $F(\alpha_k)$ ფუნქცია, რეგულარული A_k -ზე და მის შიგნით დაიშლება მწკრივად:

$$F(\alpha_k) = F(a_k) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{p^s}{s!} \quad (k=0, 1, \dots, m-1), \quad (3)$$

სადაც a_k -თი $u^m - q = 0$ განტოლების ფესვია აღნიშნული, ხოლო

$$A_s = \left\{ \frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} F'(u) \cdot \left[\frac{u^n (u - a_k)}{u^m - q} \right]^s \right\}_{u=a_k}.$$

მსგავს შედეგებს აქვს ადგილი D_k და E_k კონტურებისათვის (ნახ. 6); რომლებიც მიიღება ორი სათანადოდ შერჩეული რგოლის $m-n$ და n თანატოლ ნაწილად დაყოფით. კონტურების გასწვრივ ინტეგრებით ხერხდება F -ის დაშლა აბსოლუტურად კრებად მწკრივად p -ს და q -ს იმ მნიშვნელობათათვის, რომელნიც აკმაყოფილებენ უტოლობას:

$$\left| \frac{q^{m-n}}{p^m} \right| < \frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m}. \quad (4)$$

თუ მე-(3)-ში მივიღებთ $F(u) = \lg u$, ხოლო p და q აკმაყოფილებს მე-(2)-ში უტოლობას, ჩვენ შევძლებთ α_k ფესვის ლოგარითმის გაშლას შემდეგ აბსოლუტურად კრებად მწკრივად:

$$\lg \alpha_k = \lg a_k + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{ns} \left(\frac{p^m}{q^{m-n}} \right)^{\frac{s}{m}} \exp \left(\frac{2 k n s \pi i}{m} \right),$$

სადაც

$$A_s = \frac{1}{s!} \prod_{v=0}^{s-1} \left(\frac{sn}{m} - v \right).$$

ამის მსგავსად გამწკრივდება (1) განტოლების ფესვების ლოგარითმები [იხ. § 6, ფორმ. (33) და (34)], როცა p და q აკმაყოფილებს მე-(4) უტოლობას.

ზემოთ მიღებული ფესვების ლოგარითმების გამწკრივებით შეიძლება სარგებლობა მაშინაც, როცა p და q მე-(2) და მე-(4) უტოლობების ნაცვლად აკმაყოფილებენ ტოლობას:

$$\frac{q^{m-n}}{p^m} = \frac{n^m (m-n)^{m-n}}{m^m}.$$

ЛИТЕРАТУРА — ლიტერატურა

- [1] შალვა მიქელაძე, გამოკლევა $u^m - pu^n - q = 0$ სახის განტოლებისა, სტალინის სახ. საქართველოს საინჟინრო-სააღმშენებლო ინსტიტუტის მოამბე, ნაკვ. 1, ტფილისი, 1932, გვ. 83—89.

Л. Жижиашвили

О суммировании двойных рядов Фурье

1. А. Зигмунд [1] доказал следующую теорему: Если периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $Lip\alpha$ $0 < \alpha \leq 1$, то ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно $(C, -p)$ суммируем к $f(x)$, где $0 < p < \alpha$.

В настоящей работе мы распространяем результаты А. Зигмунда на функции от двух переменных.

Предварительно введем некоторые понятия, которыми мы воспользуемся в дальнейшем.

Определение 1. Следуя В. Г. Челидзе [3], непрерывную на сегменте $Q = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ функцию $f(x, y)$ будем называть функцией класса $H_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}(Q)$ $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' \leq 1$, если для любых двух точек $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$ из Q выполняются следующие условия:

$$|\Delta_{11}(f; x-x_1, y-y_1)| = |f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_1)| \leq K |x_2 - x_1|^\alpha |y_2 - y_1|^\beta, \quad (1.1)$$

$$|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq K_1(y) |x_2 - x_1|^\alpha, \quad (1.2)$$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K_2(x) |y_2 - y_1|^\beta, \quad (1.3)$$

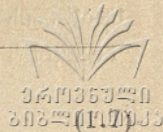
где K некоторая положительная константа, зависящая только от f и $K_1(y), K_2(x)$ — неотрицательные, конечные суммируемые функции.

Определение 2. Непрерывная на сегменте функция принадлежит классу $C_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}(Q)$, $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' < 1$, если для любых двух точек $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$ сегмента Q выполняются следующие условия:

$$|\Delta_{11}(f; x_2 - x_1, y_2 - y_1)| \leq C_0(x_1, x_2, y_1, y_2) |x_2 - x_1|^\alpha |y_2 - y_1|^\beta, \quad (1.4)$$

$$|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq C_1(x_1, x_2, y) |x_2 - x_1|^\alpha, \quad (1.5)$$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq C_2(x, y_1, y_2) |y_2 - y_1|^\beta, \quad (1.6)$$



где

$$0 < C_i \leq B \quad (i=0, 1, 2),$$

$\lim C_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ равномерно относительно x_1, x_2, y_1, y_2 , когда

$$x_2 - x_1 \rightarrow 0, \quad y_2 - y_1 \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

$\lim_{x_2 - x_1 \rightarrow 0} C_1(x_1, x_2, y) = 0$, равномерно относительно y, x_1, x_2 , (1.9)

$\lim_{y_2 - y_1 \rightarrow 0} C_2(x, y_1, y_2) = 0$, равномерно относительно x, y_1, y_2 , (1.10)

Определение 3. Непрерывная на сегменте Q функция $f(x, y)$ принадлежит классу $C_{\alpha, \beta}(Q)$, $0 < \alpha, \beta < 1$, если для любых двух точек $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$ из Q имеем:

$$|\Delta_{11}(f; x_2 - x_1, y_2 - y_1)| \leq C(x_1, x_2, y_1, y_2) |x_2 - x_1|^\alpha |y_2 - y_1|^\beta, \quad (1.11)$$

где

$$0 < C(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq B^*,$$

и

$\lim C(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ равномерно относительно x_1, x_2, y_1, y_2 , когда

$$x_2 - x_1 \rightarrow 0, \quad y_2 - y_1 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим теперь некоторую функцию $f(x, y) \in H_{\alpha, \beta}'(R_0)$, 2π -периодическую относительно x и y , где $R_0 = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$. Пусть

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y), \quad (1.12)$$

где

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если } m=n=0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } m=0, n>0; m>0, n=0, \\ 1, & \text{если } m>0, n>0, \end{cases}$$

$$A_{mn}(x, y) = a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + \\ + d_{mn} \sin mx \sin ny,$$

есть двойной ряд Фурье функции $f(x, y)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\sqrt{a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2} = O(m^{-\alpha} \cdot n^{-\beta}), \quad \text{если } m > 0, n > 0,$$

$$\sqrt{a_{m0}^2 + c_{m0}^2} = O(m^{-\alpha'}),$$

$$\sqrt{a_{0n}^2 + b_{0n}^2} = O(n^{-\beta'}).$$

Возникает вопрос о суммировании ряда Фурье функции $f(x, y)$ методом (C, α, β) .

Примечание 1. В дальнейшем для обозначения абсолютной положительной постоянной все время мы будем пользоваться буквой B . Имеет место следующая

Теорема 1. Если периодическая функция $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}$ (R_0), где $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' < 1$, то внутри R_0 (во всей плоскости) ряд Фурье функции $f(x, y)$ равномерно суммируем к $f(x, y)$ методом $(C, -p, -q)$, где $p = \min\{\alpha, \alpha'\}$, $q = \min\{\beta, \beta'\}$.

Предварительно докажем следующие леммы:

Лемма 1. Если $0 < t \leq \pi$, то

$$\left| \frac{\sin(1-k)t}{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^{1-k}} - \frac{\sin(1-k)\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{\left[\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)\right]^{1-k}} \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{B}{t^{2(1-k)}}, \quad (1.13)$$

$$\left| \frac{\cos(1-k)t}{\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{1-k}} - \frac{\cos(1-k)\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{\left[\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)\right]^{1-k}} \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{B}{t^{2-k}}, \quad (1.14)$$

где

$$0 < k < 1$$

Доказательство. Полагая

$$\omega_\beta(t) = \frac{\sin(1-\beta)t}{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^{1-\beta}}, \quad \overline{\omega}_\beta(t) = \frac{\cos(1-\beta)t}{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^{1-\beta}}, \quad (1.15)$$

имеем:

$$\omega_\beta\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \omega_\beta(t) = \omega_\beta'(\tau) \frac{\pi}{n}, \quad t < \tau < t + \frac{\pi}{n}.$$

Но

$$|\omega_\beta'(\tau)| \leq \frac{B_1 + B_2 t^{1-k}}{t^{2(1-k)}} \leq \frac{B}{t^{2(1-k)}}.$$

Отсюда следует (1.13).

Аналогично доказывается (1.14).

Лемма 2. Если $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}(R_0)$, то

$$R_{mn}^{(1)}(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(x, y(s, t)) k_m^{-\alpha}(s) k_n^{-\beta}(t) ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно (x, y) , где

$$k_n^r(t) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{r-1} D_k(t),$$

$$D_k(t) = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad A_n^r = \binom{n+r}{n},$$

$$\psi(s, t) = f(x+s, y+t) - f(x+s, y) - f(x, y+t) + f(x, y).$$

В самом деле, так как

$$|k_m^{-\alpha}(s)| \leq m, \quad (1.16)$$

то в силу (1.11)

$$|R_{mn}^{(1)}(x, y)| \leq B \cdot m \cdot n \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} s^\alpha t^\beta ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty.$$

Лемма 3. Если $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}(R_0)$, то

$$R_{mn}^{(2)}(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(s, t) k_m^{-\alpha}(s) r_n^{-\beta}(t) ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty$$

равномерно относительно (x, y) , где $r_n^{-\beta}(t)$ некоторая функция от t , удовлетворяющая условию

$$|r_n^{-\beta}(t)| \leq \frac{1}{n \sin^2 \frac{t}{2}}. \quad (1.17)$$

В самом деле, в силу (1.11), (1.16), (1.17).

$$|R_{mn}^{(2)}(x, y)| \leq Bm \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{m}} ds \int_0^{\frac{\pi}{n}} t^{-2+\beta} dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty.$$

Лемма 4. Если $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}(R_0)$, то

$$R_{mn}^{(2)}(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) k_m^{-\alpha}(s) \varphi_n^{-\beta}(t) ds dt = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty$$

равномерно относительно (x, y) , где

$$\varphi_n^{-\beta} = \frac{1}{A_n^{-\beta}} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1-\beta}{2} \right) t + \frac{1-\beta}{2} \pi \right]}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{1-\beta}}, \quad (1.18)$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \cos \left[\left(n + \frac{1-\beta}{2} \right) t + \frac{1-\beta}{2} \pi \right] &= \left[\cos nt \cos \frac{1-\beta}{2} t - \sin nt \sin \frac{1-\beta}{2} t \right] \times \\ &\times \cos \frac{1-\beta}{2} \pi + \left[\sin nt \cos \frac{1-\beta}{2} t + \cos nt \sin \frac{1-\beta}{2} t \right] \sin \frac{1-\beta}{2} \pi \end{aligned} \quad (1.19)$$

то достаточно показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) k_m^{-\alpha}(s) \cdot \frac{\omega_{\beta}(t) \cos}{A_n^{-\beta}}(nt) ds dt = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) k_m^{-\alpha}(s) \frac{\bar{\omega}_{\beta}(t) \cos}{A_n^{-\beta}}(nt) ds dt = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty$$

Следовательно, достаточно установить, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) k_m^{-\alpha}(s) \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos nt ds dt = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Последнее выражение можно представить так:

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) k_m^{-\alpha}(s) \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos nt ds dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2A_n^{-\beta}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{n-1}{n}\pi} \left[\psi(s, t) - \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \right] k_m^{-\alpha}(s) \omega_\beta(t) \cos nt \, ds dt + \right. \\
 &+ \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{n-1}{n}\pi} \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[\omega_\beta(t) - \omega_\beta\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] k_m^{-\alpha}(s) \cos nt \, ds dt + \\
 &+ \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{n-1}{n}\pi}^{\pi} \psi(s, t) \omega_\beta(t) k_m^{-\alpha}(s) \cos nt \, ds dt - \\
 &\left. - \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \omega_\beta\left(t + \frac{\pi}{n}\right) k_m^{-\alpha}(s) \cos nt \, ds dt \right\} = \sum_{k=1}^4 M_{mn}^{(k)}(x, y). \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Так как $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}(R_0)$, то нетрудно показать, что

$$\left| \psi(s, t) - \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq B s^\alpha \cdot \left(\frac{\pi}{n}\right)^\beta.$$

Следовательно,

$$|M_{mn}^{(1)}(x, y)| \leq B \int_0^{\frac{\pi}{m}} s^\alpha ds \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{dt}{t^{1-\beta}} = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.22)$$

Далее, в силу леммы 1, находим:

$$\begin{aligned}
 |M_{mn}^{(2)}(x, y)| &\leq B m \cdot n^{-1+\beta} \int_0^{\frac{\pi}{m}} s^\alpha ds \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} t^{-2+3\beta} dt + \\
 &+ B' \frac{m}{n} \int_0^{\frac{\pi}{m}} s^\alpha ds \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} t^{-2+2\beta} dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь выражение $M_{mn}^{(3)}(x, y)$. Так как $|\psi| \leq B$, то в силу (1.16) имеем:

$$|M^{(3)}_{mn}(x, y)| \leq B \frac{m \cdot n^{\beta}}{\left(\cos \frac{\pi}{2n}\right)^{1-\beta}} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.24)$$

Далее,

$$|M^{(4)}_{mn}(x, y)| \leq B \cdot mn^{\beta} \left(2 \frac{\pi}{n}\right)^{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} ds \frac{dt}{t^{1-\beta}} = o(1) \text{ когда } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.25)$$

Затем, вследствие (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) h_m^{-\alpha}(s) \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{\beta}} \cos n t ds dt = o(1), \text{ когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Если $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}(R_0)$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(s, t) \varphi_m^{-\alpha}(s) \varphi_n^{-\beta}(t) ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\pi}{m} \frac{\pi}{n}$$

равномерно относительно (x, y) , где $\varphi_n^{-\beta}(t)$ определено равенством (1.18).

Доказательство. В силу тождества (1.19) достаточно показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(s, t) \frac{\overline{\omega_{\alpha}(s)}}{A_m^{-\alpha}} \frac{\overline{\omega_{\beta}(t)}}{A_n^{-\beta}} \frac{\cos(ms)}{\sin(ms)} \cdot \frac{\cos(nt)}{\sin(nt)} ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\pi}{m} \frac{\pi}{n}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(s, t) \frac{\overline{\omega_{\alpha}(s)}}{A_m^{-\alpha}} \frac{\overline{\omega_{\beta}(t)}}{A_n^{-\beta}} \frac{\cos(ms)}{\sin(ms)} \cdot \frac{\cos(nt)}{\sin(nt)} ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\pi}{m} \frac{\pi}{n}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi(s, t) \frac{\overline{\omega_{\alpha}(s)}}{A_m^{-\alpha}} \frac{\overline{\omega_{\beta}(t)}}{A_n^{-\beta}} \frac{\cos(ms)}{\sin(ms)} \cdot \frac{\cos(nt)}{\sin(nt)} ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\pi}{m} \frac{\pi}{n}$$

$$\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \cdot \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos(nt) \cos(ms) ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty.$$

Теперь очевидно, что достаточно установить следующее равенство.

$$\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \cdot \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cdot \cos nt ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.26)$$

Запишем последний интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{mn}(x, y) = & \frac{1}{4} \left\{ \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt - \right. \\ & - \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t\right) \frac{\omega_{\alpha}\left(s + \frac{\pi}{m}\right)}{A_m^{-\alpha}} \cdot \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt - \\ & - \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt dx dt + \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_{\alpha}\left(s + \frac{\pi}{m}\right)}{A_m^{-\alpha}} \times \\ & \times \frac{\omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt \left. \right\}. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований, получим:

$$4 H_{mn}(x, y) = \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left[\psi(s, t) - \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t\right) - \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \psi\left(t + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[\frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \cdot \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt + \right. \\
& + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{n-1}{n}\pi} \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \left[\frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} - \frac{\omega_\beta\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_n^{-\beta}} \right] \cos ms \cos nt ds dt + \\
& + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{m-1}{m}\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t\right) \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \left[\frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} - \frac{\omega_\alpha\left(s + \frac{\pi}{m}\right)}{A_m^{-\alpha}} \right] \cos ms \cos nt ds dt - \\
& - \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{m-1}{m}\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{n-1}{n}\pi} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[\frac{\omega_\alpha(s) \cdot \omega_\beta(t)}{A_m^{-\alpha} A_n^{-\beta}} - \right. \\
& \left. - \frac{\omega_\alpha\left(s + \frac{\pi}{m}\right) \omega_\beta\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_m^{-\alpha} A_n^{-\beta}} \right] \cos ms \cos nt ds dt + \\
& + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt + \\
& + \int_{\frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t\right) \frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt - \\
& - \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{m-1}{m}\pi} \int_{\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt - \\
& - \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi \left(s, t + \frac{\pi}{n} \right) \frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt - \\
 & - \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m}} \psi \left(s + \frac{\pi}{m}, t \right) \frac{\omega_\alpha(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt + \\
 & + \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m}} \psi \left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n} \right) \frac{\omega_\alpha \left(s + \frac{\pi}{m} \right)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta \left(t + \frac{\pi}{n} \right)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt + \\
 & + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi \left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n} \right) \frac{\omega_\alpha \left(s + \frac{\pi}{m} \right)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta \left(t + \frac{\pi}{n} \right)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt + \\
 & + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m}} \psi \left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n} \right) \frac{\omega_\alpha \left(s + \frac{\pi}{m} \right)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_\beta \left(t + \frac{\pi}{n} \right)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt = \\
 & = \sum_{k=1}^{13} P_{mn}^{(k)}(x, y). \tag{1.27}
 \end{aligned}$$

Покажем, что

$$P_{mn}^{(k)}(x, y) = o(1) \quad (k=1, 2, \dots, 13) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 |P_{mn}^{(1)}(x, y)| & \leq B_{mn}^{\alpha\beta} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left| \psi \left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n} \right) \right| \frac{dsdt}{t^{1-\beta} \cdot s^{1-\alpha}} \ll \\
 & \ll B \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m}} \frac{C \left(x + s, x + s + \frac{\pi}{n}, y + t, y + t + \frac{\pi}{n} \right)}{s^{1-\alpha} t^{1-\beta}} dsdt.
 \end{aligned}$$

Так как $|C| \leq B$ и

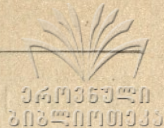
$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} C\left(x+s, x+s+\frac{\pi}{m}, y+t+\frac{\pi}{n}\right) = 0$$

то в силу теоремы Лебега

$$P_{mn}^{(1)}(x, y) = o(1) \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$\begin{aligned} 8P_{mn}^{(2)}(x, y) = & \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m-1}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \left[\psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) - \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \left[\frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_n^{-\beta}} \right] \left[\frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \cos ms \cos ntdsdt + \right. \\ & + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m-1}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[\frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} - \frac{\omega_{\alpha}\left(s + \frac{\pi}{m}\right)}{A_m^{-\alpha}} \right] \left[\frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_n^{-\beta}} \right] \cos ms \cos ntdsdt + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m-1}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \times \\ & \times \left[\frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} - \frac{\omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_n^{-\beta}} \right] \left[\frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \cos ms \cos ntdsdt - \right. \\ & \left. - \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m-1}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \psi\left(t + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[\frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{A_n^{-\beta}} \right] \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \cos ms \cos ntdsdt \right] = \sum_{k=1}^4 u_{mn}^{(k)}(x, y). \quad (1.28) \end{aligned}$$



Так как

$$\left| \phi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) - \phi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq B \left(\frac{\pi}{m}\right)^{\alpha} \left(t + \frac{\pi}{n}\right)^{\beta},$$

то в силу леммы 1 имеем:

$$\left| U_{mn}^{(1)}(x, y) \right| \leq \frac{B}{n^{\beta}} = o(1) \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Затем, на основании той же леммы 1,

$$U_{mn}^{(2)}(x, y) = o(1) \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.30)$$

Аналогично,

$$\left| U_{mn}^{(3)}(x, y) \right| \leq B n^{-1+\beta} \frac{m^{\alpha}}{\left(\cos \frac{\pi}{2n}\right)^{1-\beta}} \cdot \frac{\pi}{n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} t^{-2+2\beta} dt = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

Для интеграла $U_{mn}^{(4)}$ имеем оценку:

$$\left| U_{mn}^{(4)}(x, y) \right| \leq B_{mn}^{\alpha-1+\beta} \int_0^{\frac{\pi}{m}} s^{-1+\alpha} ds \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} t^{-2+2\beta} dt = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.32)$$

Следовательно, принимая во внимание (1.28), (1.29), (1.30), (1.31), (1.32) будем иметь:

$$P_{mn}^{(2)}(x, y) = o(1) \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}(s) \omega_{\beta}(t) - \omega_{\alpha}\left(s + \frac{\pi}{n}\right) \omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) &= \omega_{\alpha}(s) \left[\omega_{\beta}(t) - \omega_{\beta}\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] + \\ &+ \omega_{\beta}(t) \left[\omega_{\alpha}(s) - \omega_{\alpha}\left(s + \frac{\pi}{m}\right) \right], \end{aligned}$$

то рассуждениями, аналогичными вышеизложенным, можно показать,

$$P_{mn}^{(k)}(x, y) = o(1) \quad (k=3, 4) \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Для интеграла $P_{mn}^{(5)}$ имеет место равенство:

$$8 P_{mn}^{(5)}(x, y) =$$

06.03.50
2.010333

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi - \frac{\pi}{m}} \left[\psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) - \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{m}\right) \right] \times \\
 &\times \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt + \int_{\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi - \frac{\pi}{m}} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \times \\
 &\times \left[\frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} - \frac{\omega_{\alpha}\left(s + \frac{\pi}{n}\right)}{A_m^{-\alpha}} \right] \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt + \\
 &+ \int_{\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi - \frac{\pi}{m}} \psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt - \\
 &- \int_{\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{m}} \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \frac{\omega_{\alpha}\left(s + \frac{\pi}{m}\right)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos ntdsdt = \\
 &= \sum_{k=1}^4 L_{mn}^{(k)}(x, y).
 \end{aligned}$$

Оценивая $L_{mn}^{(k)}(x, y)$ ($k=1, 2, 3, 4$) аналогично вышеизложенному, находим, что

$$P_{mn}^{(5)}(x, y) = o(1), \text{ когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Аналогично можно показать, что

$$P_{mn}^{(k)}(x, y) = o(1) \quad (k=6, 7, 8), \text{ при } m, n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь выражение $P_{mn}^{(9)}(x, y)$. Имеем:

$$8 P_{mn}^{(9)}(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi - \frac{\pi}{m}} \left[\psi\left(s, t + \frac{\pi}{n}\right) - \psi\left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \times$$



$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt + \int_0^{\frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}} \phi \left(s, t + \frac{\pi}{n} \right) \left[\frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\omega_{\alpha} \left(s + \frac{\pi}{m} \right)}{A_m^{-\beta}} \right] \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt + \\
 & \quad + \int_0^{\frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}} \phi \left(s, t + \frac{\pi}{n} \right) \frac{\omega_{\alpha}(s)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt - \\
 & \quad - \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \phi \left(s + \frac{\pi}{m}, t + \frac{\pi}{n} \right) \frac{\omega_{\alpha} \left(s + \frac{\pi}{m} \right)}{A_m^{-\alpha}} \frac{\omega_{\beta}(t)}{A_n^{-\beta}} \cos ms \cos nt ds dt = \\
 & \quad = \sum_{k=1}^4 N_{mn}^{(k)}(x, y).
 \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$N_{mn}^{(k)}(x, y) = o(1) \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$P_{mn}^{(9)}(x, y) = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$P_{mn}^{(k)}(x, y) = o(1) \quad (k=10, 11, 12, 13) \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Итак

$$H_{mn}(x, y) = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty,$$

и наша лемма доказана.

Нетрудно доказать следующую лемму:

Лемма 6. Если $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}(R_0)$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \phi(s, t) \tau_m^{-\alpha}(s) \tau_n^{-\beta}(t) ds dt = o(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \psi(s, t) r_m^{-\alpha}(s) r_n^{-\beta}(t) ds dt = o(1) \text{ при } m, n \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно (x, y) , где

$$r_n^{-\beta}(t) = k_n^{-\beta}(t) - \varphi_n^{-\beta}(t). \quad (1.33)$$

а $\varphi_n^{-\beta}(t)$ определено равенством (1.18).

При доказательстве леммы нужно воспользоваться оценкой [1].

$$|r_n^{-\beta}(t)| \leq \frac{B}{(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

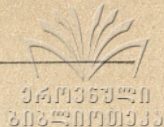
Доказательство теоремы 1. Пусть ряд (1.12) является двойным рядом Фурье функции $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}^{\alpha, \beta}(R_0)$.

Обозначая через $\sigma_{mn}^{-p, -q}(x, y)$ чезаровские $(C, -p, -q)$ средние ряда (1.12), имеем:

$$\sigma_{mn}^{-p, -q}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{R_0} f(x+s, y+t) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt.$$

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества

$$\begin{aligned} & \sigma_{mn}^{-p, -q}(x, y) - f(x, y) = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \psi(s, t) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \psi(s, -t) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \psi(-s, t) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \psi(-s, -t) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt + \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_{x,y}(s) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt + \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_{x,y}(t) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt = \\ &= \sum_{k=1}^6 I_{mn}^{(k)}(x, y). \end{aligned} \quad (1.34)$$



где

$$\varphi'_{x,y}(\beta) = f(x, y + \beta) + f(x, y - \beta) - 2f(x, y),$$

$$\varphi_{x,y}(\alpha) = f(x + \alpha, y) + f(x - \alpha, y) - 2f(x, y).$$

На основании теоремы А. Зигмунда [1]

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} I_m^{(k)}(x, y) = 0 \quad (k=5, 6) \quad (1.35)$$

равномерно относительно (x, y) .

Далее,

$$\begin{aligned} \pi^2 I_{mn}^{(1)}(x, y) &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} + \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \right) \psi(s, t) k_m^{-p}(s) k_n^{-q}(t) ds dt = \\ &= \sum_{k=1}^4 T_{mn}^{(k)}(x, y). \end{aligned} \quad (1.36)$$

В силу леммы 2, имеем:

$$T_{mn}^{(1)}(x, y) = o(1) \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Пользуясь равенством (1.33), на основании леммы 3 и 4

$$T_{mn}^{(k)}(x, y) = o(1) \quad (k=2, 3) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty.$$

Затем в силу лемм 5 и 6, получим:

$$T_{mn}^{(4)}(x, y) = o(1), \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$I_{mn}^{(1)}(x, y) = o(1), \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

Аналогичным рассуждением можно показать, что

$$I_{mn}^{(k)}(x, y) = o(1) \quad (k=2, 3, 4), \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.38)$$

Таким образом, принимая во внимание (1.34), (1.37), (1.38) будем иметь:

$$\sigma_{mn}^{-p, -q}(x, y) - f(x, y) = o(1), \quad \text{когда } m, n \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно (x, y) .

Теорема доказана.

Следствие. Если периодическая функция $f(x, y) \in H_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}(R_0)$, причем $|k'_1(x)| \leq B$, $|k'_2(y)| \leq B$, то внутри R_0 (во всей

плоскости) ряд Фурье функции $f(x, y)$ равномерно суммируем к $f(x, y)$ методом $(C, -p, -q)$, где $p = \min\{\alpha, \alpha'\} - \varepsilon$, $q = \min\{\beta, \beta'\} - \varepsilon$.

2. Отнесем теперь каждому двойному тригонометрическому ряду (1.12) три двойных тригонометрических ряда:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (-b_{mn} \cos mx \cos ny + a_{mn} \sin mx \cos ny - d_{mn} \sin ny \cos mx + c_{mn} \sin mx \sin ny), \quad (2.1)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (-c_{mn} \cos mx \cos ny - d_{mn} \sin mx \cos ny + a_{mn} \sin ny \cos mx + b_{mn} \sin mx \sin ny), \quad (2.2)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (d_{mn} \cos mx \cos ny - c_{mn} \sin mx \cos ny - b_{mn} \sin ny \cos mx + a_{mn} \sin mx \sin ny). \quad (2.3)$$

Следуя А. Чезари [2], назовем ряды (2.1), (2.2), (2.3) сопряженными с рядом (1.12) соответственно по переменному x , по переменному y и по совокупности переменных x и y .

Допустим, что ряд (1.12) является двойным рядом Фурье некоторой функции $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}(R_0)$, $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' < 1$, периодической периода 2π относительно каждого из переменных; тогда ряды (2.1), (2.2), (2.3) во всяком прямоугольнике (во все плоскости) равномерно сходятся соответственно к функциям $\bar{f}^{(1)}(x, y)$, $\bar{f}^{(2)}(x, y)$, $\bar{f}(x, y)$, где

$$\bar{f}^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+s, y) - f(x-s, y)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds,$$

$$\bar{f}^{(2)}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x, y+t) - f(x, y-t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt,$$

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi f(x+s, y+t) \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} ds dt.$$

Легко заметить, что если $f(x, y) \in C_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}(R_0)$, $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' < 1$, то

$$\bar{f}(x, y) \in C_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha'_1, \beta'_1}(R_0), \quad \bar{f}^{(1)}(x, y) \in C_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha'_1, \beta'_1}(R_0), \quad \bar{f}^{(2)}(x, y) \in C_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha'_1, \beta'_1}(R_0),$$

где $\alpha_1 = \alpha - \varepsilon$, $\beta_1 = \beta - \varepsilon$, $\alpha'_1 = \alpha' - \varepsilon$, $\beta'_1 = \beta' - \varepsilon$. Следовательно, в силу теоремы 1 справедлива следующая



Теорема 2. Если периодическая функция $f(x, y) \in C_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'}^{(1)}$, $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' < 1$, то внутри R_0 (по всей плоскости) ряды (2.1), (2.2), (2.3) соответственно равномерно $(C, -\rho, -\beta_1)$, $(C, -\alpha_1, -k)$, $(C, -\alpha_1, -\beta_1)$ суммируемы к функциям $\bar{f}^{(1)}(x, y)$, $\bar{f}^{(2)}(x, y)$, $\bar{f}(x, y)$, где $\rho = \min\{\alpha_1', \alpha_1\}$, $k = \min\{\beta_1', \beta_1\}$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 3. Если функция $f(x, y)$ суммируема и $g(x, y) \in C_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'}^{(1)}(R_0)$, $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' < 1$, то двойной ряд Фурье функции

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{R_0} f(x, t) g(x+t, y+t) ds dt.$$

равномерно $(C, -p, -q)$ суммируем k $Q(x, y)$, где $p = \min\{\alpha, \alpha'\} - \varepsilon$, $q = \min\{\beta, \beta'\} - \varepsilon$, ε некоторое сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. Допустим, что

$$f(x, y) \sim \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{imx} e^{iny},$$

$$g(x, y) \sim \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{imx} e^{iny},$$

$$Q(x, y) \sim \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \beta_{mn} e^{imx} e^{iny},$$

где

$$u_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \iint f(x, y) e^{-imx} e^{-iny} dx dy.$$

Нетрудно показать, что

$$\beta_{mn} = c_{-m, -n} k_{mn}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \beta_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint \left\{ \frac{1}{\pi^2} \iint_{R_0} f(s, t) g(x+s, y+t) ds dt \right\} e^{-i(mx+ny)} dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{R_0} f(t, t) e^{i(ms+nt)} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \iint_{R_0} e(x+s, y+t) e^{-i(m(x+s)+n(y+t))} ds dy \right\} ds dt = \\ &= c_{-m, -n} k_{mn}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q(x, y) \sim \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} C_{-m, -n} k_{mn} e^{imx} e^{iny}. \quad (2.4)$$

Легко показать, что $Q(x, y) \in C_{\alpha-\varepsilon, \beta-\varepsilon}^{\alpha', \beta'}(R_0)$. Следовательно, в силу теоремы 1 ряд (2.4) $(C, -p, -q)$ суммируем к $Q(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Zygmund. Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, Bull. de l' Acad. Polonaise, (1925), p. 1—9.
2. L. Cesari. Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di più variabili, Annali della B. Scuola Normale superiore di Pisa (2), 7 (1938), p. 279—295.
3. В. Г. Челидзе. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье. ДАН СССР, 54. 9 (1946), 117—120.
4. И. Е. Жак. О сопряженных тригонометрических рядах, Мат. Сб. 31 (73), 3 (1952), 469—484.

Кафедра
математического анализа

(Поступило в редакцию, 18. IX. 1958 г.)

დ. ჟიჟიაშვილი

ფურიის ორმაგი მწკრივების შეჯამებადობის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

ამ შრომაში ჩვენ ვიხილავთ ფურის ორმაგი მწკრივების $(C, -\alpha, -\beta)$ შეჯამებადობას. დამტკიცებულია რამოდენიმე თეორემა, რომელნიც წარმოადგენენ ზიგმუნდის ფურის მარტივი მწკრივებისათვის ცნობილი თეორემების განზოგადოებას.

Х. Инасаридзе

О некоторых вопросах теории полугрупп

§ 1. n -простые полугруппы

Полугруппой D называется множество, в котором определена однозначная ассоциативная бинарная операция, относительно которой оно замкнуто. Подмножество A называется правым идеалом полугруппы D , если $AD \subseteq A$; аналогично определяется левый идеал полугруппы D . Подмножество I называется идеалом из D , если оно является одновременно правым и левым идеалом из D . Идеал I называется собственным, если $D \neq I \neq \emptyset$ (где \emptyset пустое множество). Полугруппа называется простой, если она не содержит собственных идеалов. Аналогично определяется простая слева и простая справа полугруппа.

Полугруппу D назовем n -простой, если D^n —простая полугруппа (где n —натуральное число).

Пусть D — n -простая полугруппа и m —произвольное натуральное число. Если $m \geq n$, то D^m есть простая полугруппа. Если $m < n$, то $n = rm + s$ ($0 \leq s < m$). В случае $s = 0$, D^m будет r -простой, а при $s > 0$ имеем $D^n = D^{rm} D^s$ и $D^n D^{m-s} = D^{m(r+1)}$, откуда следует, что D^m является $(r+1)$ -простой.

Полугруппа D является n -простой тогда и только тогда, когда D^n равно пересечению всех собственных идеалов из D . Эта теорема доказывается также как при $n=2$ —случай, который был рассмотрен Тьереном [1].

Идеал I называется изолированным, если из условия $x^r \in I$ следует, что $x \in I$, где r —натуральное число.

Теорема 1.1. n -простая полугруппа D не содержит собственных изолированных идеалов.

Доказательство. Пусть I —собственный изолированный идеал из D . Тогда $I \supseteq D^k \supseteq D^n$, где D^k наименьшая степень полугруппы D , входящая в I . Значит $k > 1$ и $I \neq D^{k-1}$. Пусть $a \in D^{k-1}$ и $a \in I$. Очевидно, $a \cdot a \in D^{2k-2} \subset D^k \subset I$, что невозможно. Этим теорема доказана.

Полугруппа D называется обратимой слева, если $aD \cap bD \neq \emptyset$ при любых a и b из D .



УДК 517.51
ДП-1957-20

Теорема 1,2. n -простая справа полугруппа D^n является обратимой слева полугруппой.

Доказательство. Действительно, тогда D^n есть единственный минимальный правый идеал из D и $aD \cap bD \supset D^n \neq \emptyset$ при любых a и b из D , ч. т. д.

Теорема 1,3. Пусть S —подполугруппа из D , содержащая D^p (где p натуральное число) и $xS = x^2S$ для каждого x из D . Тогда D является суммой попарно непересекающихся $(n+1)$ -простых справа подполугрупп, где D^n —наименьшая степень полугруппы D , входящая в S .

Доказательство. Рассмотрим в D отношение эквивалентности R , определенное следующим образом:

$$x \equiv y(R) \iff xS = yS.$$

Очевидно, что каждый класс $T \bmod R$ есть полугруппа. Пусть $x, y_1, \dots, y_n, y_{n+1} \in T$. Обозначим $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n \cdot y_{n+1} = y$. Имеем $xyS = y_1S$. Существует такой $s \in S$, что $xys = y$. Легко выводится, что $ys \in T$. Действительно, $ysS \subseteq yS$. С другой стороны, $ys' = xys's'$. По условию существует такой $s'' \in S$, что $ss' = s^2s''$. Поэтому $ys' = xys's' = xys^2s'' = yss'' \in yS$, т. е. $yS \subseteq yss''S$ и $yS = yss''S$. Отсюда следует, что $ys \in T$.

Пусть $v, v^{n+1} \in T^{n+1}$. Тогда существует такой элемент a из T , что $v^{n+1} \cdot a = y$, или $v \cdot v^n a = y$, где $v^n a \in T^{n+1}$; это означает, что T^{n+1} есть простая справа полугруппа и теорема доказана.

Отметим, что когда $S = D$, отсюда получаем теорему Тьеррена (см. [1] теорема 9). Приведем пример, который понадобится и ниже.

Пример. Рассмотрим полугруппу $D = \{a, b, c\}$ со следующей таблицей умножения:

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	b

Имеем $D^2 = \{a, b\}$. Пусть $S = D^2$. Тогда $aS = a^2S = bS = b^2S = cS = c^2S = \{a\}$. Все условия теоремы 1, 3 выполнены и n равен двум. Мы получаем только один класс—саму полугруппу D , действительно являющуюся кубично-простой, причем представить ее в виде суммы квадратично-простых подполугрупп, не имеющих попарно общих элементов, невозможно.

Полугруппа D называется сильно обратимой, если для любой пары элементов a и b найдутся такие натуральные числа r, s и t , что $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$.

Теорема 1.4. Пусть D — сильно обратимая полугруппа, удовлетворяющая условию $ab \in b^2aD$ при любых a и b из D . Тогда D является суммой попарно непересекающихся квадратично-простых справа подполугрупп.

Доказательство. Рассмотрим в D отношение эквивалентности R' , определенное следующим образом:

$$x \equiv y(R') \iff x^2D = y^2D.$$

Пусть S — какой-нибудь класс $\text{mod } R'$. Покажем, что S есть полугруппа. Действительно, из условия $ab \in b^2aD$ следует, что $a^2 \in a^3D$ и $a^2D = a^3D$. Далее, имеем

$$a^2D = a^{2+m}D \quad (*)$$

при любом a из D (где m произвольное натуральное число). Очевидно, что, если какая-нибудь степень элемента x содержится в S , то все его степени также содержатся в S .

Пусть $x, y \in S$. Для них найдутся такие числа r, s и t , что $(xy)^r = x^r y^t = y^t x^s$. Так как $x^s, y^t \in S$, то $x^{2s}D = y^{2t}D$ и $x^{4s}D = x^{2s}y^{2t}D = (xy)^{2r}D$, откуда $(xy)^r \in S$ и значит $xy \in S$.

Пусть $x, y_1, y_2 \in S$. Обозначим $y_1 y_2 = y$. По условию существует такой $d_1 \in D$, что $y_1 y_2 = y_2^2 y_1 d_1$. Ясно, что $(xy)^2 D = y^2 D$. Поэтому существует такой элемент $d \in D$, что $(xy)^2 d = y_2^2 y_1 d_1 = y_1 y_2 = y$, т. е. $x y x y d = y$.

Мы сейчас докажем, что $y d \in S$. В самом деле, существуют такие числа r_1, s_1 и t_1 , что $(y d)^{r_1} = y^{s_1} d^{t_1} = d^{t_1} y^{s_1}$. Из равенства (*) следует, что $(y d)^2 D = (y d)^{2r_1} D = y^{2s_1} d^{2t_1} D \subseteq y^2 D$.

Для $x y x$ и $y d$ также найдутся такие числа m, p и q , что $[x y x (y d)]^m = (x y x)^p (y d)^q = (y d)^q (x y x)^p$.

Пусть k и l — натуральные числа, удовлетворяющие условию $2 + k = lm$ и $ql \geq 2$. При любых m и q такие числа существуют. Тогда имеем $y^{2+k} d' = [x y x (y d)]^{lm} \cdot d' = (y d)^{q l} \cdot (x y x)^{p l} \cdot d' \in (y d)^2 D$, т. е. $y^{2+k} D \subseteq (y d)^2 D$. Но из (*) имеем $y^{2+k} D = y^2 D$. Поэтому $y^2 D \subseteq (y d)^2 D$ и $y^2 D = (y d)^2 D$, откуда $y d \in S$.

Пусть $x \in S^2$. Тогда $x y x y d = y$, где $x y x y d \in S^2$; отсюда следует, что S^2 есть простая справа полугруппа. Этим теорема доказана.

Теорема 1.5. Пусть D — сильно обратимая полугруппа, удовлетворяющая условию $ab \in b^3 D$, или условию $ab \in a^3 D$ для любой пары a, b из D . Тогда D является суммой попарно непересекающихся квадратично-простых справа подполугрупп.



Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему.

Теорема 1,6. Пусть D — сильно обратимая полугруппа, удовлетворяющая условию:

$$y_1 \cdot y_2 \cdots y_n \in y_1^{n+1} D,$$

где $n \geq 1$, y_1, \dots, y_n произвольные элементы из D , индекс i фиксирован и может быть любым натуральным числом от единицы до n включительно. Тогда D является суммой попарно непересекающихся n -простых справа подполугрупп.

В D рассматривается отношение эквивалентности

$$x \equiv y \longleftrightarrow x^n D = y^n D$$

и как и выше доказывается, что каждый класс является n -простой справа полугруппой.

Полугруппа называется периодичной, если каждый элемент a имеет конечный порядок, т. е. последовательность a, a^2, a^3, \dots содержит конечное число попарно различных элементов. Элемент e называется идемпотентом, если $e e = e$.

Пусть D — полугруппа и D' ее подполугруппа. Если для каждого элемента a из D' существуют такой элемент $c \in D$ и такое натуральное число $k \geq 2$, что $a = c^k$, то мы назовем такую подполугруппу допустимой в D относительно извлечения корня.

Теорема 1,7. Пусть D — сильно обратимая периодичная полугруппа. Пусть D^2 — допустимая подполугруппа в D относительно извлечения корня. Тогда D является суммой попарно непересекающихся квадратично-простых справа подполугрупп тогда и только тогда, когда $ab \in b^2 a D$ при любых a и b из D .

Доказательство. Так как D сильно обратима, то достаточность вытекает из теоремы 1,4. Докажем необходимость. Пусть $D = \bigcup_{\gamma} S_{\gamma}$, где множества S_{γ} попарно не пересекаются и являются квадратично-простыми справа полугруппами.

Пусть $a, b \in D$. Тогда $ab \in S_{\gamma}$. Пусть a и b принадлежат соответственно к идемпотентам e_1 и e_2 (см. Шварц [7]). Тогда $a e_1 = e_1$ и $b e_2 = e_2$. Из условия следует существование таких чисел r, s и t , что $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$. Далее, $(ab)^r e_1 e_2 = a^s e_1 e_2 b^t e_1 e_2 = e_1 e_2$ т. е. ab принадлежит к идемпотенту $e_1 e_2$. Аналогично, $(b^2 a)^r = b^{2s} a^t = a^t b^{2s}$ и $(b^2 a)^r e_1 e_2 = a^t e_1 e_2 b^{2s} e_1 e_2 = e_1 e_2$, откуда следует, что $b^2 a \in S_{\gamma}$.

По условию $ab = c^k$, где $k \geq 2$. Очевидно, $c \in S_{\gamma}$ и $ab \in S_{\gamma}^2$. Таким же образом получим, что $b^2 a \in S_{\gamma}^2$. Так как S_{γ}^2 простая справа полу-

группа, то существует такой элемент $s \in S^2\gamma$, что $ab = b^2as$. Отсюда следует, что $ab \in b^2aD$ при любых a и b из D , ч. т. д.

Вышерассмотренный пример является примером сильно обратимой периодичной полугруппы, где D^2 допустима в D , причём не выполняется наше условие, так как $c \cdot c \notin c^2 \cdot cD$ и, как мы уже отметили, такое разложение для нее невозможно.

Наконец, отметим, что разложение полугруппы D в условиях теоремы 1,7 влечёт за собой разложение полугруппы D^2 в попарно непесекающиеся простые справа подполугруппы и если $\{e\alpha\}$ есть множество идемпотентов, входящих в $S\gamma$, то $S\gamma = \bigcup_{\alpha} K^{(\alpha)}$, где $K^{(\alpha)}$ является максимальной полугруппой из $S\gamma$, принадлежащей к идемпотенту $e\alpha$ (см. [7] и [11]).

§ 2. 0 коммутанте гомогруппы

Пусть H — полугруппа. Элемент α_1 называется zeroидальным справа элементом полугруппы H , если уравнение $hx = \alpha_1$ разрешимо в H при любом h из H . Аналогично, элемент α_2 называется zeroидальным слева, если уравнение $xh = \alpha_2$ разрешимо в H при любом h из H .

Элемент α называется zeroидальным элементом полугруппы H , если он является zeroидальным одновременно справа и слева элементом полугруппы H . Полугруппа H называется гомогруппой, если она содержит по крайней мере один zeroидальный элемент. Доказывается, что в гомогруппе множество N zeroидальных элементов образует группу, которая является идеалом из H . Единица e этой группы перестановочна с каждым элементом из H и $He = N$ (подробно см. [4]). Тьеррен назвал эту группу нодулем гомогруппы [2], ее единицу — единичным элементом гомогруппы, а подполугруппу, которая является гомогруппой и единичный элемент которой совпадает с единичным элементом данной гомогруппы — правильной подгомогруппой.

Пусть H — гомогруппа. Рассмотрим уравнение

$$ab = xba, \quad (1)$$

где $a, b \in H$. Его решение называем коммутатором пары a, b . Ясно, что решение не единственно, но, как мы увидим, все коммутаторы данной пары при умножении на e отображаются в один и тот же элемент. Ясно также, что не каждая пара будет иметь коммутатор.

Рассмотрим коммутант нодуля гомогруппы H и его полный прообраз в H при гомоморфизме, получающемся умножением на e . Обозначим его через C и назовем коммутантом гомогруппы H . Покажем, что C содержит все решения уравнения (1), т. е. все коммутаторы го-



могруппы. Действительно, если $ab = x_0ba$, то $aebe = x_0ebeae$. Это значит, что x_0 отображается в коммутант нодуля и поэтому $x_0 \in C$.

Очевидно, что C есть полугруппа. Он является даже гомогруппой, нодуль которой совпадает с коммутантом нодуля гомогруппы H . Итак, мы получили следующее предложение.

Теорема 2,1. Коммутант гомогруппы есть правильная подгоморгруппа, нодуль которой совпадает с коммутантом нодуля данной гомогруппы.

§ 3. Некоторые вопросы теории топологических полугрупп

Множество S называется топологической полугруппой, если оно является полугруппой, хаусдорфовым пространством и алгебраическая операция непрерывна в этом пространстве.

Теорема 3,1. В топологической гомогруппе H компонента K единичного элемента e есть правильная подгоморгруппа.

Доказательство. Пусть N — нодуль гомогруппы H . Имеем $eK = K$, откуда следует, что $eK \subset K \cap N$ и $eK = K \cap N$. Очевидно, eK есть компонента элемента e в N и поэтому является нормальным делителем группы N (см. [14]).

K^2 есть связное множество и содержит e , поэтому $K^2 \subset K$. Таким образом K есть гомогруппа с нодулем eK , ч. т. д.

Идемпотент e называется примитивным, если из условия $ef = fe = f$ следует, что $f = e$, где f идемпотентный элемент.

Подмножество A полугруппы D называется квази-идеалом из D , если $AD \cap DA \subset A$.

Доказывается, что пересечение правого идеала с левым идеалом есть квази-идеал и, наоборот, что каждый квази-идеал может быть представлен таким образом (см. [13]).

Теорема 3,2. Пусть S — компактная полугруппа. Тогда компонента K примитивного идемпотента e есть полугруппа, содержащая гомогруппу, причём эта гомогруппа есть квази-идеал компоненты K .

Доказательство. Известно, что компактная полугруппа содержит минимальный идеал, который называется ядром полугруппы. Обозначим его через N . Известно также, что в компактной полугруппе идемпотент примитивен тогда и только тогда, когда он содержится в ядре, что ядро есть объединение всех минимальных правых идеалов полугруппы и что каждый минимальный правый идеал есть в свою очередь объединение попарно непересекающихся изоморфных групп, а эти группы суть левые идеалы данного минимального идеала (см. [6], [10], [8] и [5]).

Пусть G — та группа, которая содержит e . Имеем $e \in G \subset R$, где R есть тот минимальный правый идеал, который содержит G . Имеем так-

же, что $RD \subseteq R$ и $RG = G$. Ясно, что K есть полугруппа. Далее, $eKe \subseteq G$. Очевидно, что eKe есть компонента элемента e в G и поэтому является группой. Пусть H — пересечение eK с Ke . Тогда $eKe = H$. Очевидно, H есть квази-идеал из K . Покажем, что H есть гомогруппа. Для этого достаточно доказать, что eKe есть идеал из H . Пусть $h \in H$ и $k \in K$. Тогда $ekeh = ekek'e = ekeek'e \in eKe$. Аналогично доказывается, что eKe есть левый идеал из H .

Теорема 3,3. Пусть S — топологическая полугруппа. Пусть a — зероидальный справа элемент, перестановочный с каждым элементом из S . Пусть множество $\Gamma(a) = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ компактно. Тогда S есть гомогруппа.

Отметим, что эта теорема совпадает с теоремой Тьеррена (см. [2], теорема 2) в случае дискретных топологических полугрупп.

Доказательство. Шварц доказал [9], что $\Gamma(a)$ есть гомогруппа, содержащая только один идемпотент e . Ясно, что e есть зероидальный справа элемент, перестановочный с каждым элементом из S . Идеал Se есть группа. Действительно, роль единицы играет элемент e и если $se \in Se$, то найдется такой элемент $s' \in S$, что $se \cdot s' = e$ и $ses'e = ee = e$, где $s'e \in Se$. Этим теорема доказана.

Теорема 3,3'. Компактная полугруппа будет гомогруппой тогда и только тогда, когда она содержит зероидальный справа (слева) элемент, перестановочный с каждым элементом полугруппы.

Идеал I полугруппы D называется устойчивым слева, если из условия $ab \in I$ следует, что $a \in I$.

Полугруппа D называется квази обратимой слева, если для каждой пары a, b существует конечное число таких элементов $c_1, c_2, \dots, c_n \in D$, что

$$aD \mid c_1D \mid c_2D \mid \dots \mid c_nD \mid bD,$$

где вертикальная линия означает, что разделенные ею множества имеют непустое пересечение. Совокупность этих множеств назовем цепью. Она называется неприводимой, если каждое входящее в эту цепь множество пересекает только предшествующее множество. Ясно, что из всякой цепи можно получить неприводимую цепь. Длиною неприводимой цепи называется количество входящих в нее множеств.

Рассмотрим в D отношение эквивалентности Σ , определенное следующим образом:

$$a \equiv b(\Sigma),$$

если существуют такие элементы $c_1, \dots, c_n \in D$, что

$$aD \mid c_1D \mid \dots \mid c_nD \mid bD.$$

Тьеррен показал, что D является суммой минимальных устойчивых слева правых идеалов. Отсюда он вывел необходимое и дос-



таточное условие квази обратимости слева полугруппы, которое состоит в том, что полугруппа не должна содержать собственных устойчивых слева правых идеалов (см. [1]).

Лемма 1. Пусть S — компактная полугруппа, которая содержит такие множества M и N , что для каждого элемента $m \in M$ существует такой элемент $n \in N$, что $mS \mid nS$. Тогда для каждого элемента $m^* \in \overline{M}$ найдется такой элемент $n^* \in \overline{N}$, что $m^*S \mid n^*S$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда $m^*S \cap \overline{NS} = \emptyset$. Так как S есть хаусдорфово пространство, а m^*S и \overline{NS} суть компактные множества, то существуют такие открытые множества $U \supset m^*S$ и $V \supset \overline{NS}$, что $U \cap V = \emptyset$.

Из компактности полугруппы S и непрерывности алгебраической операции следует существование такой окрестности u элемента m^* , что $u(m^*)S \subset U$, т. е. $u(m^*)S \cap V = \emptyset$. Пусть $m \in u(m^*) \cap M$. Тогда $mS \cap \overline{NS} = \emptyset$, что противоречит условию.

Теорема 3.4. Если компактная полугруппа S содержит конечное число идемпотентов, то каждый минимальный устойчивый слева правый идеал I замкнут.

Доказательство. Как мы уже отметили, I есть класс $\text{mod } \Sigma$. Пусть $a, x \in I$. Для них найдутся такие элементы $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta \in S$, что

$$aS \mid \alpha S \mid \beta S \mid \dots \mid \gamma S \mid \delta S \mid xS.$$

В силу сделанного выше замечания можем предположить, что цепи неприводимы.

Пусть $C = \{aS \mid \alpha S \mid \dots \mid \delta S \mid xS\}$, где $x \in I$. Очевидно, что длины входящих в C цепей ограничены сверху числом $p+1$, где p число идемпотентов полугруппы S . Поэтому из этих цепей можно получить цепи, содержащие одинаковое количество множеств, например повторением соответственное число раз множества xS . Полученные таким образом цепи вообще не будут неприводимыми. Когда x меняется в I , тогда $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta$ описывают определенные множества A, B, \dots, G, D , которые содержатся в I .

Рассмотрим множества:

$$a, A, B, \dots, G, D, I.$$

Для каждой пары соседних множеств выполняется условие Леммы 1. Если мы ее применим начиная с пары I, D и кончая парой A, a , получим, что для любого $i^* \in \overline{I}$ существуют такие элементы $\alpha^* \in \overline{A}$, $\beta^* \in \overline{B}$, \dots , $\gamma^* \in \overline{G}$, $\delta^* \in \overline{D}$, что

$$aS \mid \alpha^*S \mid \beta^*S \mid \dots \mid \gamma^*S \mid \delta^*S \mid i^*S.$$

Значит $i^* \in I$ и $\overline{I} = I$, ч. т. д.

Теорема 3,5. Каждая компактная полугруппа, держащая конечное число идемпотентов, является суммой попарно непересекающихся квази обратимых слева замкнутых подполугрупп.

Эту теорему для конечных полугрупп доказал Тьеррен [1].

Доказательство. Если S квази обратима слева, то теорема тривиальна. Если S не является квази обратимой слева, то отношение эквивалентности Σ разлагает S в попарно непересекающиеся минимальные устойчивые слева правые идеалы. По теореме 3,4, эти идеалы замкнуты в S и поэтому являются компактными полугруппами с меньшим числом идемпотентов, чем их было в S . Если какая-нибудь из этих полугрупп не является квази обратимой слева, то мы ее разложим подобным образом и так далее. Этот процесс не может быть бесконечным так как полученные полугруппы содержат все меньшее число идемпотентов и мы, наконец, дойдем до такой полугруппы, которая содержит лишь один идемпотент и поэтому является даже обратимой. Этим завершается доказательство.

Лемма 2. Если в компактной полугруппе S из $aS \mid bS$ и $bS \mid cS$ следует $aS \mid cS$, то каждая максимальная обратимая слева подполугруппа A замкнута.

Доказательство. A есть класс $\text{mod } \Sigma[1]$. Пусть $a \in A$. Если к множествам a и A применим лемму 1, то получим, что для каждого a^* из \overline{A} имеем $a^*S \mid aS$, т. е. $a^* \in A$ и $\overline{A} = A$.

Теорема 3,6. Пусть S — компактная полугруппа. Пусть из условий $aS \mid bS$, $bS \mid cS$ и $Sa \mid Sb$, $Sb \mid Sc$ следует, что $aS \mid cS$ и $Sa \mid Sc$. Тогда S является суммой попарно непересекающихся гомогрупп.

Доказательство. Рассмотрим в S два отношения эквивалентности:

$$1. a \equiv b(R) \longleftrightarrow aS = bS.$$

$$2. a \equiv b(R') \longleftrightarrow Sa = Sb.$$

Мы докажем, что $C = A \text{ mod } R \cap B \text{ mod } R'$ есть обратимая полугруппа. Действительно, C есть левый идеал полугруппы A . Пусть $c_1, c_2, c \in C$. Тогда $c_1A \mid c_2A$ и $c_1Ac \mid c_2Ac$. Отсюда следует, что $c_1C \mid c_2C$. Аналогично доказывается обратимость справа. В силу леммы 2, полугруппы A и B суть замкнутые множества. Поэтому C есть компактная обратимая полугруппа и, по одной теореме Исеки [12], C есть гомогруппа.

§ 4. Обобщенные группы

Пусть D — полугруппа. Элемент d из D называется полуобратимым, если существует такой элемент $d_1 \in D$, что $dd_1d = d$. Он называется обобщенно-обратимым, если существует такой элемент $\overline{d} \in D$, что



$d\bar{d}d = d$ и $\bar{d}d\bar{d} = \bar{d}$. Как показал Тьеррен [3], из полуобратимости вытекает обобщенная обратимость. Действительно, если $dd_1d = d$, то $\bar{d} = \bar{d}_1\bar{d}\bar{d}_1$. Элемент \bar{d} называется обобщенно-обратным для элемента d . Очевидно, d есть обобщенно-обратный для элемента \bar{d} .

В. В. Вагнер определил обобщенную группу [15], как полугруппу, в которой дополнительно выполняются следующие две аксиомы:

- 1) каждый элемент полуобратим,
- 2) любые два идемпотента перестановочны между собой.

А. Е. Либер показал [16], что аксиома 2) равносильна аксиоме:

2') каждый элемент обладает единственным обобщенно-обратным элементом.

Мы покажем, что аксиому 2') Либера можно ослабить следующим образом:

2'') каждый идемпотент имеет только один обобщенно-обратный элемент.

Действительно, имеет место следующее предложение.

Теорема 4.1. Если в полугруппе D каждый элемент полуобратим и каждый идемпотент обладает единственным обобщенно-обратным элементом, то каждый элемент полугруппы D имеет только один обобщенно-обратный элемент.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $d \in D$ и пусть существуют два таких элемента \bar{d}_1 и \bar{d}_2 , что

$$\begin{aligned} d\bar{d}_1d &= d, & d\bar{d}_2d &= d, \\ \bar{d}_1d\bar{d}_1 &= \bar{d}_1, & \bar{d}_2d\bar{d}_2 &= \bar{d}_2. \end{aligned}$$

Элементы \bar{d}_1d , $d\bar{d}_1$, \bar{d}_2d и $d\bar{d}_2$ суть идемпотенты. С другой стороны имеем $\bar{d}_1d\bar{d}_2d\bar{d}_1d = \bar{d}_1d\bar{d}_1d = \bar{d}_1d$ и $\bar{d}_2d\bar{d}_1d\bar{d}_2d = \bar{d}_2d\bar{d}_2d = \bar{d}_2d$. Значит \bar{d}_2d есть обобщенно-обратный для элемента \bar{d}_1d и, по условию, $\bar{d}_2d = \bar{d}_1d$. Аналогично получим, что $d\bar{d}_1 = d\bar{d}_2$. Поэтому $\bar{d}_1 = \bar{d}_1d\bar{d}_1 = \bar{d}_2d\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2 = \bar{d}_2d\bar{d}_2 = \bar{d}_2d\bar{d}_1$, откуда $\bar{d}_1 = \bar{d}_2$, ч. т. д.

Из этой теоремы и из первой теоремы Либера [16] получаем следующее предложение.

Теорема 4.2. Если в полугруппе D каждый элемент полуобратим и каждый идемпотент обладает единственным обобщенно-обратным элементом, то любые два идемпотента перестановочны между собой.

Приводим непосредственное самостоятельное доказательство этой теоремы.

Пусть E — множество всех идемпотентов полугруппы D . Пусть $e, f \in E$. Элемент ef полуобратим и поэтому обобщенно-обратим, т. е. существует такой $x \in D$, что

0614353411
003201(1)033

$$ef\bar{x}ef = ef,$$

$$\bar{x}ef\bar{x} = \bar{x}.$$

Элементы $\bar{x}ef$ и $ef\bar{x}$ суть идемпотенты и $\bar{x}ef \cdot f \cdot \bar{x}ef = \bar{x}ef$. Поэтому элемент $f \cdot \bar{x}ef \cdot f = f\bar{x}ef$ есть обобщенно-обратный для элемента $\bar{x}ef$ и $f\bar{x}ef = \bar{x}ef$. Также, $ef\bar{x} \cdot e \cdot ef\bar{x} = ef\bar{x}$ и $ef\bar{x} = e \cdot ef\bar{x} \cdot e = ef\bar{x}e$. Мы получили два равенства

$$\begin{aligned}\bar{x}ef &= f\bar{x}ef, \\ ef\bar{x} &= eef\bar{x}e.\end{aligned}\tag{2}$$

Из первых равенств систем (1) и (2) следует, что $e\bar{x}ef = ef$, откуда $e\bar{x}ef\bar{x} = ef\bar{x}$ и, используя второе равенство системы (1), получим $e\bar{x} = ef\bar{x}$. Поэтому $\bar{x} = \bar{x}ef\bar{x} = \bar{x}e\bar{x}$, т. е. $\bar{x}e$ и $e\bar{x}$ суть идемпотенты. Далее, имеем $\bar{x}e \cdot e \cdot \bar{x}e = \bar{x}e$ и, по условию, $\bar{x}e = e \cdot \bar{x}e \cdot e = e\bar{x}e$. Следовательно, $\bar{x} = e\bar{x}e\bar{x} = e\bar{x}$ и $\bar{x} = \bar{x}x$, т. е. $\bar{x} = ef$. Аналогичное рассуждение относительно элемента fe приведет нас к заключению, что fe есть идемпотент. Ясно, что $ef \cdot fe \cdot ef = ef$ и, поэтому, $ef = fe \cdot ef \cdot fe = fefefe = fe$, ч. т. д.

Таким образом, аксиомы Либера для обобщенной группы примут следующий вид:

а) каждый элемент полуобратим,

в) для любого идемпотента e из равенства $efe = e$ следует, что $fef = e$.

Теорема 4.3. Если в полугруппе D каждый элемент полуобратим и уравнение $exe = e$ имеет единственное решение при любом идемпотенте e , то D есть группа.

Доказательство. Действительно, тогда выполняются аксиомы а) и б) и D есть обобщенная группа. Пусть e и f произвольные идемпотенты. Тогда $ef \cdot e \cdot ef = ef$ и, по условию, $ef = e$. Аналогично, $ef \cdot f \cdot ef = ef$ и $ef = f$. Отсюда следует, что $e = f$. Но обобщенная группа с единственным идемпотентом есть группа и теорема доказана.

Как мы увидели, разрешимость уравнения $dxd = d$ влечет за собой существование такого элемента d^* , что $d^*dd^* = d^*$. Но, наоборот, из существования такого элемента не следует вообще разрешимость этого уравнения.

Рассмотрим теперь полугруппу D , в которой выполнены следующие две аксиомы:

1) для каждого элемента $d \in D$ существует такой элемент $d^* \in D$, что $d^*dd^* = d^*$.

2) любые два идемпотента перестановочны между собой.

Теорема 4.4. Если в D выполняются 1) и 2), то D содержит обобщенную группу.



Доказательство. Пусть A —множество всех ~~полуобратимых~~ элементов полугруппы D (оно не пусто). В виду перестановочности идемпотентов, A есть полугруппа и, удовлетворяя аксиомам Вагнера, является обобщенной группой, ч. т. д.

Ясно, что множество идемпотентов E полугруппы D есть полугруппа. Если D компактна или E конечное множество, то E содержит нуль.

Теорема 4.5. При условиях предыдущей теоремы, D есть гомогруппа тогда и только тогда, когда E содержит нуль.

Доказательство. Достаточность. Пусть N —множество элементов n из A , удовлетворяющих условию $nn=i$, где i есть нуль полугруппы E , а n обобщенно-обратный элемента n . Либер доказал [16], что N есть идеал из A и группа с единицей i . Поэтому достаточно показать, что N есть идеал из D . Пусть $d \in D$. В силу аксиомы 1), существует такой элемент d^* , что $d^*dd^*=d^*$, где $d^* \in A$. Имеем $id \cdot d^* \cdot id = iid = id$, так как $dd^* \in E$. Отсюда вытекает, что $id \in A$ и $\bar{id} = d^*idd^* = d^*i$. Поэтому $idid = d^*iid = d^*id = id^*d = i$, так как i перестановочен с каждым элементом из A и $d^*d \in E$. Отсюда следует, что $id \in N$. Аналогично доказывается, что $di \in N$.

Необходимость. Пусть N —нодуль гомогруппы D и e его единица. Пусть $f \in E$; тогда ef и fe суть идемпотенты и содержатся в N . Но N есть группа и поэтому $ef = fe = e$.

Этим теорема полностью доказана.

В следующей теореме не подразумевается выполнение аксиом 1) и 2).

Теорема 4.6. Полугруппа D есть гомогруппа с единственным идемпотентом тогда и только тогда, когда для каждого элемента $d \in D$ существует единственный элемент d^* , удовлетворяющий условию $d^*dd^*=d^*$.

Доказательство. Необходимость. Пусть N —нодуль гомогруппы D и e его единица. Пусть $d \in D$. Тогда $\bar{n} d \bar{n} = \bar{n}$, где $n = de$. Допустим, что $d^* \neq \bar{n}$ и $d^*dd^*=d^*$. По условию, $da^*=e$. Поэтому, $d^*e=d^*$, т. е. $d^* \in N$, что невозможно.

Достаточность. Пусть $i, f \in E$. Имеем $x^*ifx^*=x^*$, откуда $x^*ifx^*i=x^*i$ и $x^*i=f$. Также, $fx^*ifx^*=fx^*$ и $fx^*=i$. Поэтому, $fx^*i=i$ и, далее, $ff=i$ и $f=i$. Следовательно, D есть полугруппа, удовлетворяющая аксиомам 1) и 2) и E содержит нуль. Поэтому, по теореме 4.5, D есть гомогруппа.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. G. Thierrin, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 30, fasc. 3, 1951, pp. 211–223.
2. G. Thierrin, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 83, fasc. II, 1955, pp. 105–159.

3. G. Thierrin, Comptes Rendus, 234, 1952, pp. 33—34.
4. A. H. Clifford and Miller, American Journal of Math., vol. LXX, № 1, 1948, pp. 117—125.
5. A. H. Clifford, American Journal of Math., vol. LXX, № 3, 1948, pp. 521—526.
6. A. D. Wallace, Bulletin of the American Math. Society, v. 61, № 2, 1955, pp. 95—112.
7. Ш. Шварц, Чехословацкий мат. журнал, т. 3 (78), 1953, pp. 7—21.
8. Ш. Шварц, Чехословацкий мат. журнал, т. 1 (76), 1951, pp. 51—65.
9. Ш. Шварц, Чехословацкий мат. журнал, т. 5 (80), № 1, 1955, pp. 1—23.
10. K. Numakura, Mathematical Journal of Okayama University, vol. 1, 1952, pp. 99—108.
11. K. Iséki, Proceedings of the Japan Academy, 32, vol. 32, № 3, 1956, pp. 174—175.
12. K. Iséki, Proceedings of the Japan Academy, 32, vol. 32, № 4, 1956, pp. 221—224.
13. Otto Steinfield, Publ. Math. Debrecen, 4, 1956, pp. 262—275.
14. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1954.
15. В. В. Вагнер, Доклады Академии наук СССР, 1952, т. LXXXIV, № 6, pp. 1119—1122.
16. А. Е. Либер, Доклады Академии наук СССР, 1954, т. XCVII, № 1, pp. 25—28.

Кафедра
алгебры и геометрии

(Поступило в редакцию, 19. IX. 1958 г.)

ბ. ინესაკიძე

ზოგიერთი საკითხის შესახებ ნახევარჯგუფთა თეორიიდან

რ ე ზ ი უ მ ე

პირველ თავში განიხილება ისეთი ნახევარჯგუფი, რომლის n -ური ხა-
რისხი მარტივი ნახევარჯგუფია და მოცემულია ასეთი ნახევარჯგუფის ზო-
გიერთი თვისება. D ნახევარჯგუფს ეწოდება ძლიერად შექცევადი, თუ ნე-
ბისმიერი a და b ელემენტებისათვის მოიძებნება ისეთი r , s და t ნატურა-
ლური რიცხვები, რომ $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$. მტკიცდება, რომ, თუ ასეთ ნახევარჯ-
გუფში სრულდება პირობა $ab \in b^2 a D$ ნებისმიერი a და b -სათვის D -დან, მა-
შინ D არის ნაერთი ურთიერთარამკვეთი მარჯვნიდან კვადრატულად მარტივი
ქვენახევარჯგუფებისა. გარდა ამისა, მოცემულია რამდენიმე საკმარისი პირო-
ბა იმისათვის, რომ ნახევარჯგუფი წარმოიდგინებოდეს როგორც ნაერთი ურ-
თიერთარამკვეთი მარჯვნიდან n -ურად მარტივი ქვენახევარჯგუფებისა.

მეორე თავში განიხილება ჰომოჯგუფის კომუტანტი და ნაჩვენებია, რომ
ის არის წესიერი ქვეჰომოჯგუფი, რომლის ნოდული არის მოცემული ჰომო-
ჯგუფის ნოდულის კომუტანტი.

მესამე თავში შეისწავლება ტოპოლოგიური ნახევარჯგუფების ზოგიერ-
თი იდეალბოტენტის კომპონენტი. გარდა ამისა მტკიცდება, რომ თუ S ტო-



პოლოგიური ნახევარჯგუფი შეიცავს ისეთ მარჯვნიდან ზეროიდულ ელემენტს, რომელიც გადაადგილებადია S -ის ყოველ ელემენტთან და $I(a) = \{a, a^2, a^3 \dots\}$ სიმრავლე კომპაქტურია, მაშინ S არის ჰომოჯგუფი. მოცემულია აგრეთვე საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ კომპაქტური ნახევარჯგუფი იყოს ნაერთი ურთიერთარამკვეთი კომპაქტური ჰომოჯგუფებისა. ამ თავში მტკიცდება კიდევ, რომ ყოველი კომპაქტური, სასრული რაოდენობა იდემოტენტების მქონე ნახევარჯგუფი არის ნაერთი ურთიერთარამკვეთი მარცხნიდან კვაზი-შექცევადი ჩაკეტილი ქვენახევარჯგუფებისა.

მეოთხე თავში მტკიცდება, რომ D განზოგადოებული ჯგუფი არის ნახევარჯგუფი, რომელშიც სრულდება შემდეგი დამატებითი ორი აქსიომა:

ა) განტოლება $dx d = d$ ამოხსნადია ყოველი d -სათვის D -დან;

ბ) ნებისმიერი e იდემოტენტისათვის D ნახევარჯგუფისა, თუ $efe = e$,

მაშინ ყოველთვის $fef = e$.

განიხილება აგრეთვე ისეთი ნახევარჯგუფი, რომელშიც სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) განტოლება $xdx = x$ ამოხსნადია ყოველთვის d -სათვის;

2) ნებისმიერი ორი იდემოტენტი ერთმანეთთან გადაადგილებადია.

მოცემულია ასეთი ნახევარჯგუფის ზოგიერთი თვისება.

ჯ. სანიკიძე

ინფარქტული ჯიკალი კვანძებით და რიხვითი ინფარქტის ფორმულები

§ 1. შესავალი

წინამდებარე სტატიაში განიხილება გარკვეული სახის კვადრატურული ფორმულები საინტეგრო ფუნქციის წარმოებულებით; სახელდობრ, ეს ფორმულები ფუნქციის წარმოებულებს შეიცავენ ერთ რაიმე ნებისმიერად აღებულ წერტილზე. აღნიშნული სახის ფორმულათა შორის არიან ფორმულები როგორც თანატოლად დაშორებული აბსცისებით, ასევე სპეციალურად შერჩეული აბსცისებითაც, სადაც ამ უკანასკნელთა შერჩევა სხვადასხვა მოსაზრების საფუძველზე ხდება.

პირველ რიგში ჩვენ შევჩერდებით ზოგიერთი საინტეგრაციო ფორმულის გამოყენებაზე, რომელთა ინტეგრებითაც მიიღებიან განსახილველი მექანიკური კვადრატურის ფორმულები.

§ 2. საინტეგრაციო ფორმულები

განვიხილოთ გაყოფილი სხვაობა $f(x, \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$. თუ გა-

მოვიყენებთ შ. ე. მიქელადის ცნობილ ფორმულას (იხ. [1], გვ. 43, ფ. (17)), და გავითვალისწინებთ ტოლობას

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^r (x_1 - a_k)(x_1 - x)} = \sum_{v=1}^r \frac{1}{(x_1 - a_v) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (a_v - a_k)(a_v - x)} +$$

$$+ \frac{1}{(x_1 - x) \prod_{k=1}^r (x - a_k)},$$



მაშინ მოცემული გაყოფილი სხვაობა შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ

$$\begin{aligned}
 & f(x, \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_n, a_1, a_2, \dots, a_r) = \\
 & = (-1)^{n-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^r \frac{f(x_1) - f(a_\nu)}{(x_1 - a_\nu)^n (a_\nu - x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (a_\nu - a_k)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{f(x_1) - f(x)}{(x_1 - x)^n \prod_{k=1}^r (x - a_k)} \right\} + \\
 & + (-1)^{n-2} \left\{ \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{(x_1 - a_\nu)^{n-1} (a_\nu - x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (a_\nu - a_k)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(x_1 - x)^{n-1} \prod_{k=1}^r (x - a_k)} \right\} f'(x_1) + \dots + \\
 & + \dots + \left\{ \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{(x_1 - a_\nu)^3 (a_\nu - x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (a_\nu - a_k)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(x_1 - x)^3 \prod_{k=1}^r (x - a_k)} \right\} \frac{f^{(n-3)}(x_1)}{(n-3)!} - \\
 & - \left\{ \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{(x_1 - a_\nu)^2 (a_\nu - x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (a_\nu - a_k)} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(x_1 - x)^2 \prod_{k=1}^r (x - a_k)} \left\{ \frac{f^{(n-2)}(x_1)}{(n-2)!} + \right.$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)! (x_1 - x) \prod_{k=1}^r (x_1 - a_k)} \left. \right\}.$$

ამ გამოსახულებიდან $f(x)$ -ის ამოხსნა მოგვცემს შემდეგ საინტერპოლაციო ფორმულას:

$$f(x) = f(x_1) + \sum_{v=1}^r \frac{(x_1 - x)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (x - a_k)}{(x_1 - a_v)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (a_v - a_k)} [f(a_v) - f(x_1)] +$$

$$+ \left\{ \sum_{v=1}^r \frac{(x_1 - x)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (x - a_k)}{(x_1 - a_v)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (a_v - a_k)} - (x_1 - x) \right\} f'(x_1) -$$

$$- \left\{ \sum_{v=1}^r \frac{(x_1 - x)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (x - a_k)}{(x_1 - a_v)^{n-2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (a_v - a_k)} - (x_1 - x)^2 \right\} \frac{f''(x_1)}{2!} + \dots +$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + (-1)^{n-2} \left\{ \sum_{\nu=1}^r \frac{(x_1-x)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (x-a_k)}{(x_1-a_\nu)^3 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (a_\nu-a_k)} - (x_1-x)^{n-3} \right\} \frac{f^{(n-3)}(x_1)}{(n-3)!} + \\
 & + (-1)^{n-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^r \frac{(x_1-x)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (x-a_k)}{(x_1-a_\nu)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (a_\nu-a_k)} - (x_1-x)^{n-2} \right\} \frac{f^{(n-2)}(x_1)}{(n-2)!} + \\
 & + \frac{(x-x_1)^{n-1} \prod_{k=1}^r (x-a_k)}{(n-1)! \prod_{k=1}^r (x_1-a_k)} f^{(n-1)}(x_1) + \\
 & + (x-x_1)^n \prod_{k=1}^r (x-a_k) f(x, \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_n, a_1, a_2, \dots, a_r). \quad (1)
 \end{aligned}$$

თუ მიღებულ ფორმულაში დავუშვებთ:

$$x = a + th, \quad x_1 = a + \bar{t}_1 h, \quad a_1 = a + t_1 h, \quad a_2 = a + t_2 h, \dots, a_r = a + t_r h,$$

სადაც a , h და t_i ($i=1, 2, \dots, r$) ნებისმიერი რიცხვებია, მაშინ იგი მიიღებს სახეს:

$$f(a+th) = f(a+\bar{t}_1 h) + \sum_{\nu=1}^r \frac{(\bar{t}_1-t)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t-t_k)}{(\bar{t}_1 \dots \bar{t}_\nu)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t_\nu-t_k)} [f(a+t_\nu h) -$$

$$\begin{aligned}
 & -f(a + \bar{t}_1 h) + \left[\sum_{\nu=1}^r \frac{(\bar{t}_1 - t)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t - t_k)}{(\bar{t}_1 - t_\nu)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t_\nu - t_k)} - \right. \\
 & \left. - (\bar{t}_1 - t) \right] h f'(a + \bar{t}_1 h) - \left[\sum_{\nu=1}^r \frac{(\bar{t}_1 - t)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t - t_k)}{(\bar{t}_1 - t_\nu)^{n-2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t_\nu - t_k)} - \right. \\
 & \left. - (\bar{t}_1 - t)^2 \right] \frac{h^2 f''(a + \bar{t}_1 h)}{2!} + \dots + (-1)^{n-2} \left[\sum_{\nu=1}^r \frac{(\bar{t}_1 - t)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t - t_k)}{(\bar{t}_1 - t_\nu)^3 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t_\nu - t_k)} - \right. \\
 & \left. - (\bar{t}_1 - t)^{n-3} \right] \frac{h^{n-3} f^{(n-3)}(a + \bar{t}_1 h)}{(n-3)!} + \\
 & + (-1)^{n-1} \left[\sum_{\nu=1}^r \frac{(\bar{t}_1 - t)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t - t_k)}{(\bar{t}_1 - t_\nu)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r (t_\nu - t_k)} - \right. \\
 & \left. - (\bar{t}_1 - t)^{n-2} \right] \frac{h^{n-2} f^{(n-2)}(a + \bar{t}_1 h)}{(n-2)!} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & h^{n-1}(\bar{t} - \bar{t}_1)^{n-1} \prod_{k=1}^r (t - t_k) f^{(n-1)}(a + \bar{t}_1 h) \\
 & + \frac{(n-1)! \prod_{k=1}^r (\bar{t}_1 - t_k)}{h^{n+r} (t - \bar{t}_1)^n \prod_{k=1}^r (t - t_k) f(a + t h, \underbrace{a + \bar{t}_1 h, a + \bar{t}_1 h, \dots, a + \bar{t}_1 h}_n, \\
 & \quad a + t_1 h, a + t_2 h, \dots, a + t_r h). \quad (2)
 \end{aligned}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $r=2m$, სადაც m რაიმე ნატურალური რიცხვია და საინტეგრაციო კვანძებად ავიღოთ რიცხვები:

$$a + \bar{t}_1 h, a \pm t_1 h, a \pm t_2 h, \dots, a \pm t_m h.$$

მაშინ უქანასკნელი ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$f(a + t h) =$$

$$\begin{aligned}
 & = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m \frac{(\bar{t}_1 - t)^n H_\nu(t) [(t + t_\nu)(\bar{t}_1 + t_\nu)^n - (t - t_\nu)(\bar{t}_1 - t_\nu)^n]}{t_\nu H_\nu(t_\nu) (\bar{t}_1^2 - t_\nu^2)^n} \right\} f(a + \bar{t}_1 h) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m \frac{(\bar{t}_1 - t)^n H_\nu(t)}{t_\nu H_\nu(t_\nu)} \left\{ \frac{t + t_\nu}{(\bar{t}_1 - t_\nu)^n} f(a + t_\nu h) - \frac{t - t_\nu}{(\bar{t}_1 + t_\nu)^n} f(a - t_\nu h) \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{\nu=1}^m \frac{(\bar{t}_1 - t)^n H_\nu(t) [(t + t_\nu)(\bar{t}_1 + t_\nu)^{n-1} - (t - t_\nu)(\bar{t}_1 - t_\nu)^{n-1}]}{2 t_\nu H_\nu(t_\nu) (\bar{t}_1^2 - t_\nu^2)^{n-1}} + \right. \\
 & \quad \left. + t - \bar{t}_1 \right\} h f'(a + \bar{t}_1 h) - \\
 & - \left\{ \sum_{\nu=1}^m \frac{(\bar{t}_1 - t)^n H_\nu(t) [(t + t_\nu)(\bar{t}_1 + t_\nu)^{n-2} - (t - t_\nu)(\bar{t}_1 - t_\nu)^{n-2}]}{2 t_\nu H_\nu(t_\nu) (\bar{t}_1^2 - t_\nu^2)^{n-2}} - \right. \\
 & \quad \left. - (\bar{t}_1 - t)^2 \right\} \frac{h^2 f''(a + \bar{t}_1 h)}{2!} + \\
 & + \dots + (-1)^{n-2} \left\{ \sum_{\nu=1}^m \frac{(\bar{t}_1 - t)^n H_\nu(t) [(t + t_\nu)(\bar{t}_1 + t_\nu)^3 - (t - t_\nu)(\bar{t}_1 - t_\nu)^3]}{2 t_\nu H_\nu(t_\nu) (\bar{t}_1^2 - t_\nu^2)^3} - \right. \\
 & \quad \left. - (\bar{t}_1 - t)^{n-3} \right\} \frac{h^{n-2} f^{(n-3)}(a + \bar{t}_1 h)}{(n-3)!} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^m \frac{(\bar{t}_1 - t)^n H_{\nu}(t) [(t + t_{\nu})(\bar{t}_1 + t_{\nu})^2 - (t - t_{\nu})(\bar{t}_1 - t_{\nu})^2]}{2 t_{\nu} H_{\nu}(t_{\nu}) (t_1^2 - t_{\nu}^2)^2} - \right. \\
& - (\bar{t}_1 - t)^{n-2} \left\{ \frac{h^{n-2} f^{(n-2)}(a + \bar{t}_1 h)}{(n-2)!} + \frac{h^{n-1} (t - \bar{t}_1)^{n-1} H(t)}{(n-1)! H(t_1)} f^{(n-1)}(a + \bar{t}_1 h) + \right. \\
& \left. + h^{2m+n} (t - \bar{t}_1)^n H(t) f(a + th, \underbrace{a + \bar{t}_1 h, a + \bar{t}_1 h, \dots, a + \bar{t}_1 h}_n, \right. \\
& \left. \left. a \pm t_1 h, a \pm t_2 h, \dots, a \pm t_m h \right), \right. \quad (3)
\end{aligned}$$

სადაც

$$H(t) = \prod_{k=1}^m (t^2 - t_k^2), \quad H_{\nu}(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^m (t^2 - t_k^2), \quad H_{\nu}(t_{\nu}) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^m (t_{\nu}^2 - t_k^2)$$

ცნობილი აღნიშვნებია (იხ. [1], გვ. 98).

თუ (3) ფორმულაში ავიღებთ

$$\bar{t}_1 = 0 \text{ და } n = 2p - 1 \quad (p \geq 1),$$

მაშინ ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}
f(a + th) + f(a - th) &= 2 \left[1 - \sum_{\nu=1}^m \frac{t^{2p} H_{\nu}(t)}{t_{\nu}^{2p} H_{\nu}(t_{\nu})} \right] f(a) + \\
& + \sum_{\nu=1}^m \frac{t^{2p} H_{\nu}(t)}{t_{\nu}^{2p} H_{\nu}(t_{\nu})} [f(a + t_{\nu} h) + f(a - t_{\nu} h)] + \\
& + 2 \sum_{s=1}^{p-2} \frac{h^{2s}}{(2s)!} \left[t^{2s} - \sum_{\nu=1}^m \frac{t^{2p} H_{\nu}(t)}{t_{\nu}^{2p-2s} H_{\nu}(t_{\nu})} \right] f^{(2s)}(a) + \\
& + \frac{2h^{2p-2} t^{2p-2} H(t)}{(2p-2)! H(0)} f^{(2p-2)}(a) + R, \quad (4)
\end{aligned}$$

სადაც

$$H(0) = (-1)^m \prod_{k=1}^m t_k^2$$

და

$$R = 2h^{2p+2m} t^{2p} H(t) f(a \pm th, \underbrace{a, a, \dots, a}_{2p-1}, a \pm t_1 h, a \pm t_2 h, \dots, a \pm t_m h).$$

§ 3. კვადრატურული ფორმულები თანატოლად დაშორებული აბსცისებით

(4) საინტერპოლაციო ფორმულის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_{a-\alpha h}^{a+\alpha h} f(x) dx = h \left\{ A_0 f(a) + \sum_{\nu=1}^m A_\nu [f(a+t_\nu h) + f(a-t_\nu h)] \right\} + \\ + \sum_{s=1}^{p-1} h^{2s+1} B_{2s} f^{(2s)}(a) + R; \quad (5)$$

$$A_0 = 2 \left(\alpha - \sum_{\nu=1}^m A_\nu \right),$$

$$A_\nu = \int_0^\alpha \frac{t^{2p} H_\nu(t)}{t^{2p} H_\nu(t_\nu)} dt$$

$$(\nu=1, 2, \dots, m),$$

$$B_{2s} = \frac{2}{(2s)!} \left(\frac{\alpha^{2s+1}}{2s+1} - \sum_{\nu=1}^m t_\nu^{2s} A_\nu \right)$$

$$(s=1, 2, \dots, p-2),$$

$$B_{2p-2} = \frac{2}{(2p-2)!} \int_0^\alpha \frac{t^{2p-2} H(t)}{H(0)} dt,$$

$$R = 2h^{2p+2m+1} \int_0^\alpha \frac{t^{2p} H(t) f(a \pm th, \underbrace{a, a, \dots, a}_{2p-1}, a \pm t_1 h, a \pm t_2 h, \dots, a \pm t_m h) dt}{2p-1}$$

და მარჯვენა მხარეში მდგომი მეორე ჯამი მიიღება ნულის ტოლად, როცა $p=1$.

დავუშვათ,

$$\alpha = m, \quad t_\nu = \nu \quad (\nu=1, 2, \dots, m),$$

მაშინ (5) ფორმულა მოგვცემს

$$\int_{a-mh}^{a+mh} f(x) dx = h \left\{ A_0 f(a) + \sum_{\nu=1}^m A_\nu [f(a+\nu h) + f(a-\nu h)] \right\} + \\ + \sum_{s=1}^{p-1} h^{2s+1} B_{2s} f^{(2s)}(a) + R, \quad (6)$$

სადაც

$$A_0 = 2 \left(m - \sum_{\nu=1}^m A_\nu \right),$$

$$A_\nu = \frac{2(-1)^{m+\nu}}{\nu^{2p-2}(m+\nu)!(m-\nu)!} \int_0^m t^{2p} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^m (t^2 - k^2) dt$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, m),$$

$$B_{2s} = \frac{2}{(2s)!} \left[\frac{m^{2s+1}}{2s+1} - \sum_{\nu=1}^m \nu^{2s} A_\nu \right]$$

$$(s = 1, 2, \dots, p-2),$$

$$B_{2p-2} = \frac{2(-1)^m}{(2p-2)!(m!)^2} \int_0^m t^{2p-2} \prod_{k=1}^m (t^2 - k^2) dt$$

და

$$R = 2h^{2p+2m+1} \int_0^m t^{2p} \prod_{k=1}^m (t^2 - k^2) f(a \pm ih, \underbrace{a, a, \dots, a}_{2p-1}, a \pm h, a \pm 2h, \dots, a \pm mh) dt.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $p=1$, კოტესის ფორმულები მიიღება.

(6) ფორმულის დამატებით წევრს შეიძლება მიეცეს მარტივი სახე. ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$Q(t) = \int_{-m}^t t \prod_{k=1}^m (t^2 - k^2) dt;$$

მაშინ

$$\begin{aligned} & 2h \int_0^m t^{2p} \prod_{k=1}^m (t^2 - k^2) f(a \pm ih, \underbrace{a, a, \dots, a}_{2p-1}, a \pm h, a \pm 2h, \dots, a \pm mh) dt = \\ & = \int_{-m}^0 t^{2p-2} [f(a + ih, \underbrace{a, \dots, a}_{2p-1}, a \pm h, \dots, a \pm mh) - \\ & - f(a - ih, \underbrace{a, \dots, a}_{2p-1}, a \pm h, \dots, a \pm mh)] dQ(t) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= - \int_{-m}^0 Q(t) \frac{d}{dt} \left\{ t^{2p-2} [f(a+th, \underbrace{a, \dots, a}_{2p-1} \pm h, \dots, a \pm mh) - \right. \\
 &\quad \left. - f(a-th, \underbrace{a, \dots, a}_{2p-1} \pm h, \dots, a \pm mh)] \right\} dt = \\
 &= -h \int_{-m}^0 Q(t) t^{2p-2} [f(a+th, a+th, \underbrace{a, \dots, a}_{2p-1} \pm h, \dots, a \pm mh) + \\
 &\quad + f(a-th, a-th, \underbrace{a, \dots, a}_{2p-1} \pm h, \dots, a \pm mh)] dt - \\
 &\quad - 2(2p-2)h \int_{-m}^0 Q(t) t^{2p-2} f(a \pm th, \underbrace{a, \dots, a}_{2p-1} \pm h, \dots, a \pm mh) dt = \\
 &= - \frac{2h}{(2p+2m)!} [f^{(2m+2p)}(\xi_1) + (2p-2) f^{(2m+2p)}(\xi_2)] \int_{-m}^0 Q(t) t^{2p-2} dt = \\
 &= - \frac{2(2p-1)h}{(2p+2m)!} f^{(2p+2m)}(\xi) \int_{-m}^0 Q(t) t^{2p-2} dt \\
 &\quad (p \geq 1).
 \end{aligned}$$

უკანასკნელი გამოსახულების მიღებისას ჩვენ ვისარგებლეთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემით, რაც სამართლიანია, ვინაიდან $Q(t)$ ნიშანს არ იცვლის $[-m, 0]$ შუალედში (იხ. [1], გვ. 312).

კიდევ ერთხელ ნაწილობითი ინტეგრება მოგვცემს:

$$\begin{aligned}
 \int_{-m}^0 t^{2p-2} Q(t) dt &= - \frac{1}{2p-1} \int_{-m}^0 t^{2p-1} \frac{d}{dt} Q(t) dt = \\
 &= - \frac{1}{2p-1} \int_{-m}^0 t^{2p} \prod_{k=1}^m (t^2 - k^2) dt;
 \end{aligned}$$

მაშასადამე, საბოლოოდ, (6) ფორმულის ნაშთისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{2h^{2m+2p+1} f^{(2m+2p)}(\xi)}{(2m+2p)!} \int_0^m t^{2p} \prod_{k=1}^m (t^2 - k^2) dt \\
 &\quad (a - mh < \xi < a + mh).
 \end{aligned}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $m=1$ და p ნებისმიერია; მაშინ

$$A_0 = \frac{4p}{2p+1},$$

$$A_1 = \frac{1}{2p+1},$$

$$B_{2s} = \frac{4(p-s)}{(2s+1)!(2p+1)}$$

$$(s=1, 2, \dots, p-1),$$

$$R = -\frac{4h^{2p+3} f^{(2p+2)}(\xi)}{(2p+3)!(2p+1)};$$

და (6) ფორმულა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx &= \frac{h}{2p+1} \left[f(a-h) + 4pf(a) + f(a+h) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{s=1}^{p-1} \frac{(p-s)h^{2s} f^{(2s)}(a)}{(2s+1)!} \right] - \frac{4h^{2p+3} f^{(2p+2)}(\xi)}{(2p+3)!(2p+1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$(a-h < \xi < a+h).$$

უკანასკნელი ფორმულა, დამატებითი წევრის უფრო რთული გამოსახულებით, შეიძლება მიღებულ იქნას ობრეშკოვის [2] ფორმულიდანაც. სხვა კერძო შემთხვევები, გამოდინარე (6)-დან, ობრეშკოვის ფორმულიდან აღარ მიიღება.

როცა $p=1$, (7)-დან ვღებულობთ სიმპსონის ფორმულას. $p=3$ -თვის (7) ფორმულა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx &= \frac{h}{7} \left[f(a-h) + 12f(a) + f(a+h) + \right. \\ &\quad \left. \frac{4h^2}{3} f''(a) + \frac{h^4}{30} f^{(IV)}(a) \right] - \frac{h^9 f^{(8)}(\xi)}{635040}, \end{aligned}$$

რომელიც, შეიძლება, ასეც გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(a-h) + 4f(a) + f(a+h)] - \\ &\quad - \frac{4h}{21} \left[f(a-h) - 2f(a) + f(a+h) - 7h^2 f''(a) - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{7h^4}{40} f^{(IV)}(a) \Big] - \frac{h^9 f^{(8)}(\xi)}{6.35040};$$

თუ სიმპსონის ფორმულის დამატებითი წევრის (რომელიც შეიცავს $f(x)$ ფუნქციის მეოთხე რიგის წარმოებულს) შეფასებისას გამოირკვა, რომ სიმპსონის ფორმულით მიღებული შედეგის სიზუსტე არ არის საკმარისი დასმული ამოცანისათვის, მაშინ გამოვიყენოთ $f''(a)$ -სა და $f^{(IV)}(a)$ -ს და უკანასკნელი ფორმულის საშუალებით მივიღებთ მნიშვნელოვნად დაზუსტებულ შედეგს.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (6) ფორმულაში $m=2$. მაშინ გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\begin{aligned} \int_{a-2h}^{a+2h} f(x) dx &= 4h \left(1 - \frac{2^{2p+3} + 6p + 1}{3(2p+1)(2p+3)} \right) f(a) + \\ &+ \frac{2h}{3(2p+1)(2p+3)} \{ 2^{2p+3} [f(a+h) + f(a-h)] + \\ &+ (6p+1) [f(a+2h) + f(a-2h)] \} + \\ &+ 4 \sum_{s=1}^{p-2} \frac{h^{2s}}{(2s)!} \left[\frac{2^{2s}}{2s+1} - \frac{2^{2p+3} + 2^{2s}(6p+1)}{3(2p+1)(2p+3)} \right] f^{(2s)}(a) + \\ &+ \frac{2^{2p+1}(7-6p)h^{2p-1}f^{(2p-2)}(a)}{(2p-1)!(2p+1)(2p+3)} + \frac{2^{2p+5}(1-6p)h^{2p+5}f^{(2p+4)}(\xi)}{(2p+5)!(2p+1)(2p+3)}. \end{aligned} \quad (8)$$

როცა $p=2$, (8) გვაძლევს საკმაოდ ზუსტ ფორმულას:

$$\begin{aligned} \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx &= \frac{2h}{105} \{ 128 [f(a+h) + f(a-h)] - 72 f(a) + \\ &+ 13 [f(a+2h) + f(a-2h)] - 40h^2 f''(a) \} - \frac{44h^9 f^{(8)}(\xi)}{99225}. \end{aligned}$$

განვიხილოთ ისევ (2) საინტერპოლაციო ფორმულა. დავუშვათ მასში $n=2$ და მოვხდინოთ ინტეგრება $[a, a+h]$ საზღვრებში; მაშინ მივიღებთ შემდეგ კვადრატურულ ფორმულას:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = h \left\{ A_0 f(a + \bar{t}_1 h) + \sum_{v=1}^r A_v f(a + t_v h) + h B f'(a + \bar{t}_1 h) \right\} + R,$$

სადაც

$$A_0 = 1 - \sum_{v=1}^r A_v,$$

$$A_v = \int_0^1 \frac{(t - \bar{t}_1)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (t - t_k)}{(t_v - \bar{t}_1)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^r (t_v - t_k)} dt$$

$$(v = 1, 2, \dots, r),$$

$$B = \int_0^1 \frac{(t - \bar{t}_1) \prod_{k=1}^r (t - t_k)}{\prod_{k=1}^r (\bar{t}_1 - t_k)} dt,$$

$$R = h^{r+3} \int_0^1 (t - \bar{t}_1)^2 \prod_{k=1}^r (t - t_k) f(a + t_1 h, a + \bar{t}_1 h, a + \bar{t}_1 h, a +$$

$$+ t_1 h, a + t_2 h, \dots, a + t_r h) dt.$$

თუ უკანასკნელ ფორმულაში დავუშვებთ ჯერ $r = 1$, $\bar{t}_1 = 0$, $t_1 = 1$, ხოლო შემდეგ — $r = 1$, $\bar{t}_1 = 1$, $t_1 = 0$, გვექნება, შესაბამისად, ფორმულები:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{6} [2f(a+h) + 4f(a) + hf'(a)] - \frac{h^3}{72} f'''(\xi) \quad (9)$$

$$(a < \xi < a + h),$$

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{6} [2f(a) + 4f(a+h) - hf'(a+h)] + \frac{h^3}{72} f'''(\xi) \quad (10)$$

$$(a < \xi < a + h),$$

რომლებიდანაც მე-(9) ცნობილი ფორმულაა. ცხადია, რომ ამ ფორმულებში შემავალი ξ -ის მნიშვნელობები, საზოგადოდ, სხვადასხვაა.

ამ ფორმულებს გამოყენება აქვს პირველი და მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ინტეგრებისათვის.

შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული ნიშანს არ იცვლის $(a, a+h)$, შუალედში, მაშინ (9) და (10) ფორმულებიდან ერთ-ერთი მოგვცემს საძიებელი ინტეგრალის მნიშვნელობას ნაკლებობით, ხოლო მეორე — ჭარბობით და ინტეგრალის ნამდვილი მნიშვნელობა მოთავსებული იქნება ამ ორ მნიშვნელობას შორის.



§ 4. მაღალი სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები

ახლა ჩვენ გამოვიყვანოთ მაღალი სიზუსტის კვადრატურულ ფორმულებს დამატებითი წევრის გარდაქმნის ხერხით [3]. ეს მოგვცემს ფორმულებს საინტეგრირებელი ფუნქციის წარმოდგენებით.

დავუბრუნდეთ (5) ფორმულას; ამ ფორმულის დამატებითი წევრი

$$R = h^{2m+2p} \int_0^{\alpha} t^{2p-1} H(t) [\psi(a+th) - \psi(a-th)] dt, \quad (11)$$

სადაც

$$\psi(a+th) = f(a+th, \underbrace{a, a, \dots, a}_{2p-1}, a \pm t_1 h, a \pm t_2 h, \dots, a \pm t_m h).$$

$\psi(a+th) - \psi(a-th)$ შევცვალოთ ცნობილი საინტეგრაციო ფორმულის მიხედვით ([1], გვ. 98):

$$\psi(a+th) - \psi(a-th) = \sum_{\mu=1}^{\lambda} \frac{t H^*_{\mu}(t)}{t^*_{\mu} H^*_{\mu}(t^*_{\mu})} [\psi(a+t^*_{\mu} h) - \psi(a-t^*_{\mu} h)] + R,$$

$$R = 2h^{2\lambda+1} t H^*(t) \psi(a \pm th, a \pm t^*_1 h, a \pm t^*_2 h, \dots, a \pm t^*_{\lambda} h).$$

აქ

$$H^*(t) = \prod_{k=1}^{\lambda} (t^2 - t_k^{*2}) \quad (\lambda \leq m),$$

$$H^*_{\mu}(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^{\lambda} (t^2 - t_k^{*2}).$$

მაშინ (11) მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} R = & h^{2m+2p} \sum_{\mu=1}^{\lambda} \int_0^{\alpha} \frac{t^{2p} H(t) H^*_{\mu}(t)}{t^*_{\mu} H^*_{\mu}(t^*_{\mu})} [\psi(a+t^*_{\mu} h) - \psi(a-t^*_{\mu} h)] dt + \\ & + 2h^{2m+2p+2\lambda+1} \int_0^{\alpha} t^{2p} H(t) H^*(t) \psi(a \pm th, a \pm \\ & \pm t^*_1 h, a \pm t^*_2 h, \dots, a \pm t^*_{\lambda} h) dt. \end{aligned}$$

ავიღოთ

$$\lambda = m, \quad t_i^* = t_i \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad \alpha=1$$

და t_i რიცხვები ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\int_0^1 t^{2p} H(t) H_{\nu}(t) dt = 0 \quad (\nu=1, 2, \dots, m). \quad (12)$$

მაშინ, საბოლოოდ, (5) ფორმულის ნაშთს ექნება სახე:

$$R = \frac{2h^{4m+2p+1}}{(4m+2p)!} f^{(4m+2p)}(\xi) \int_0^1 t^{2p} H^2(t) dt.$$

თუ, კერძოდ, $p=1$, მივიღებთ გაუსის ფორმულებს. როცა $p=2$ და $m=1$, მაშინ t_1 -ის განმსაზღვრავ განტოლებას ექნება სახე:

$$\int_0^1 t^4 (t^2 - t_1^2) dt = 0,$$

საიდანაც $t_1^2 = \frac{5}{7}$ და მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\begin{aligned} \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{125} \left\{ 152 f(a) + 49 \left[f\left(a + \sqrt{\frac{5}{7}} h\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + f\left(a - \sqrt{\frac{5}{7}} h\right) \right] \right\} + \frac{4h^3}{75} f''(a) + \frac{h^5 f^{(8)}(\xi)}{2222640}. \end{aligned} \quad (13)$$

უკანასკნელი ფორმულა თითქმის იმავე სიზუსტისაა, როგორისაც გაუსის ფორმულა ოთხი აბსცისით; შეიცავს ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს საინტეგრო შუალედის შუა წერტილზე და მისი ყველა კოეფიციენტი რაციონალურია.

$p=3$ -თვის, თუ ისევ $m=1$, ხოლო $\alpha=1$ და შესრულებულია (12) პირობა, (5) ფორმულა გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{49} \left\{ \frac{3344}{49} f(a) + \frac{729}{49} \left[f\left(a + \sqrt{\frac{7}{9}} h\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + f\left(a - \sqrt{\frac{7}{9}} h\right) \right] \right\} + \frac{100}{21} h^2 f''(a) + \frac{h^4}{15} f^{(IV)}(a) + \\ + \frac{h^{11} f^{(10)}(\xi)}{404157600}. \end{aligned} \quad (14)$$

შევნიშნოთ, საერთოდ, რომ როცა $m=1$, ფორმულებს, რომლებიც მიიღება (5)-დან (12) პირობის დაცვით, რაციონალური კოეფიციენტები აქვს.

ციტირებული ლიტერატურა

1. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа, Москва, 1953.
2. N. Obreshkoff. Neue Quadraturformeln, Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.—natur. Wiss. Kl. № 4, 1940.
3. Ш. Е. Микеладзе. Формулы механических квадратур для обратных интегралов, Труды Тбилисского математического института, 22, 1956.

მიხელობითი ანალიზისა და
 გამოთვლითი ტექნიკის კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში, 12. X. 1959 წ.)

Дж. Г. Саникидзе

Интерполирование с кратными узлами и формулы численного интегрирования

Резюме

В настоящей работе выводится общая формула квадратур (5), содержащая производные различных порядков от интегрируемой функции в одной какойнибудь произвольно выбранной точке. Конструирование этой формулы осуществляется с помощью интерполяционной формулы (1), обобщающей в определенном смысле интерполяционную формулу Лагранжа. Формула (1) выводится преобразованием формулы Микеладзе для разделенной разности с повторяющимися значениями аргумента ([1], стр. 43).

Квадратурная формула (5) в случае равноотстоящих узлов при $p=1$ переходит в котесовскую формулу. Соответствующим выбором узлов t_i из (5) выводятся формулы квадратур, имеющие по возможности высшую степень точности, содержащие в качестве частного и гауссовские формулы. Из нее же получают формулы вида (13) и (14); имеющие достаточно высокую степень точности.

Наконец, в работе выводятся формулы (9) и (10) имеющие приложение для численного интегрирования дифференциальных уравнений. Они могут быть использованы также для двухсторонней оценки величины определенного интеграла.

ა. გელაშვილი

რიცხვთა ნაკრძალის შესახებ განზოგადოებული ოქავონალური რიცხვების ჯამების სახით

§ 1. ამ ნაშრომში გამოყენებული იქნება შემდეგი აღნიშვნები: M, N, d, q, s, t, μ — ნატურალური რიცხვები; u, v — კენტი ნატურალური რიცხვები; p — მარტივი რიცხვი; j, λ, ν — არაუარყოფითი მთელი რიცხვები; $b, c, g, h, k, m, n, x, y$ — მთელი რიცხვები; z, τ — კომპლექსური რიცხვები, ამასთანავე $I\tau > 0$.

$\left(\frac{h}{u}\right)$ აღნიშნავს იაკობის სიმბოლოს, თუ $(h, u) = 1$,

$\left(\frac{h}{u}\right) = 0$, თუ $(h, u) > 1$;

$\chi(n)$ — ქარაქტერია $\bmod q$;

$p^j \parallel n$ აღნიშნავს, რომ $p^j \mid n$, მაგრამ $p^{j+1} \nmid n$;

$\sum_{k=c}^b = 0$, თუ $b < c$;

$e(z) = \exp 2\pi i z$, $Q = e\left(\frac{\tau}{12}\right)$.

დავუშვათ

$$\vartheta_{gh}(\tau, c, N) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e\left(\frac{h(m-c)}{2N}\right) e\left(\frac{\left(m + \frac{1}{2}g\right)^2}{2N} \tau\right) \quad (1)$$

$$m \equiv c \pmod{N}$$

(თეტა — ფუნქციაა მახასიათებლებით g და h),

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}. \quad (2)$$

ვთქვათ, $m \geq 3$. დავუშვათ,

$$i_m(x) = \left(\frac{1}{2}m-1\right)x^2 - \left(\frac{1}{2}m-2\right)x.$$

$i_m(x)$ რიცხვებს ეწოდება განზოგადოებული m — გონალური რიცხვები.

ამრიგად, განზოგადოებულ ოქტაგონალურ რიცხვებს აქვთ სახე (3)

$$i_8(x) = 3x^2 - 2x.$$

ვთქვათ, $r_s(n)$ აღნიშნავს n -ის წარმოდგენათა რაოდენობას s განზოგადოებული ოქტაგონალური რიცხვების ჯამების სახით, ე. ი.

$$n = \sum_{k=1}^s (3x_k^2 - 2x_k) \quad (4)$$

განტოლების ამონახსნების რაოდენობას მთელ რიცხვებში.

თუ დავუშვებთ, რომ

$$M = 12n + 4s,$$

მივიღებთ

$$M = \sum_{k=1}^s (6x_k - 2)^2.$$

მაშასადამე, (4) განტოლება ღებულობს სახეს

$$M = \sum_{k=1}^s y_k^2. \quad (5)$$

$$y_k \equiv -2 \pmod{6}.$$

(5) განტოლების ამონახსნთა რიცხვი აღვნიშნოთ $R_s(M)$ -ით. მაშინ, ცხადია,

$$r_s(n) = R_s(M). \quad (6)$$

(1) და (5) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$\Phi_{00}^*(\tau; -2, 6) = \sum_{M=1}^{\infty} R_s(M) Q^M. \quad (7)$$

$$M \equiv 4s \pmod{12}$$

სტრეფკერკის მიხედვით ([2], გვ. 49) დავუშვათ, რომ

$$\theta_s(\tau) = \sum_{M=1}^{\infty} \rho_s(M) Q^M, \quad (8)$$

$$M \equiv 4s \pmod{12}$$

სადაც

$$\rho_s(M) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}} M^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot 2^{s-2} \cdot 3^{s-1}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s}$$

$$\times \sum'_{h \bmod q} e\left(-\frac{hM}{12q}\right) S'_{00}\left(\frac{h}{q}; -2,6\right), \quad (9)$$

აქ შტრიხი აღნიშნავს, რომ h გაირბენს ნაშთთა დაყვანილ სისტემას $\bmod q$ და

$$S_{00}\left(\frac{h}{q}; -2,6\right) = \sum_{\substack{m \bmod 6q \\ m \equiv -2 \pmod{6}}} e\left(\frac{hm^2}{12q}\right).$$

როგორც სტრეფკერკმა აჩვენა, (9) მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია, როცა $s \geq 5$ ([2], გვ. 50). მანვე დაამტკიცა ([2], თეორ. 18), რომ

$$\Phi_{00}^s(\tau; -2,6) = \theta_s(\tau) \quad (s=3, M \geq 12). \quad (10)$$

(10), (7) და (8) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ (4) განტოლების ამონახსენთა რიცხვი, და, მაშასადამე, $n \geq 0$ რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობა 3 განზოგადოებული ოქტაგონალური რიცხვის ჯამის სახით $\rho_s(M)$ -ის ტოლია, სადაც $M=12n+12$ ([2], გვ. 97).

როცა $s > 3$, (10) იგივეობა, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი.

გ. ლომაძემ აჩვენა ([3], თეორ. 1), რომ, როცა $s \geq 3$, ადგილი აქვს იგივეობას

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^s(\tau; -2,6) &= \sum_{\substack{M=1 \\ M \equiv 4s \pmod{12}}}^{\infty} \rho_s(M) Q^M \\ &+ \sum_{t=1}^{\lambda} A_s^{(t)} \Phi_{00}^{s-4t}(\tau; -2,6) \Phi_{21}^{4t}(\tau; -2,6), \end{aligned} \quad (11)$$

თუკი შესაძლებელია $A_s^{(t)}$ მუდმივების ისეთნაირი შერჩევა, რომ მის ორივე მხარეში Q -ს ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები დაემთხვეს ერთმანეთს $Q^{s'-მდე}$ ჩათვლით, სადაც

$$\lambda = \left\lfloor \frac{s-1}{3} \right\rfloor \quad \text{და} \quad s' = 4s + 12(2s - \lambda - 1).$$

(11) იგივეობა სამართლიანია, როცა $s=4, 5, 6, 7$ ([3], თეორ. 2, 3, 4, 5).

ამ ნაშრომში მტკიცდება (11) იგივეობის სამართლიანობა, როცა $s=8$. შემდეგ ამ იგივეობიდან გამოიყვანება ფორმულა წარმოდგენათა რაოდენობისათვის 8 განზოგადოებული ოქტაგონალური რიცხვის ჯამის სახით. ამას გარდა ნაჩვენები იქნება, რომ, როცა $s=9$, ზემოთ მოყვანილ საკმარის პირობას უკვე ადგილი არ ექნება.

§ 2. ლემა 1 ([2], თეორ. 10). ვთქვათ, s ლუწია, $M \equiv 4s \pmod{12}$,

$$p^j \parallel M, \quad M_1 = \prod_{\substack{p|M \\ p \nmid 6}} p^j, \quad M = 4M_0, \quad 2^{\nu} \parallel M_0, \quad M_0 = 2^{-\nu} M_0.$$

მაშინ, როცა $s \equiv 0 \pmod{4}$,

$$\rho_s(M) = \frac{M^{\frac{s}{2}-1} \cdot s \cdot \phi(2^v)}{|B_{\frac{s}{2}}| 2^{s-2} 3^{s-1} (2^{\frac{s}{2}} - 1)} \cdot \phi(M_1) \cdot \left(1 - 3^{-\frac{s}{2}}\right)^{-1}, \quad (12)$$

სადაც

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \left(\frac{-1}{d}\right)^{\frac{s}{2}} d^{1-\frac{s}{2}}, \text{ როცა } n \text{ კენტია.} \quad (13)$$

$$= (-1)^n \sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}} (-1)^{\frac{s}{4}(d-1)} d^{1-\frac{s}{2}}, \text{ როცა } s \equiv 0 \pmod{4};$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \dots$$

(ბერნულის რიცხვებია).

თეორემა 1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{00}^s(\tau; -2, 6) &= \sum_{\substack{M=1 \\ M \equiv 8 \pmod{12}}}^{\infty} \rho_s(M) Q^M \\ &- \frac{14}{15} \mathfrak{P}_{00}^4(\tau; -2, 6) \mathfrak{P}_{21}^4(\tau; -2, 6) - \frac{7}{135} \mathfrak{P}_{21}^8(\tau; -2, 6). \end{aligned} \quad (14)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $s=8$, მაშინ $\lambda=2$, $s'=188$. თუ ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს (11) იგივეობას, მას უნდა ჰქონდეს სახე

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{00}^8(\tau; -2, 6) &= \sum_{\substack{M=1 \\ M \equiv 8 \pmod{12}}}^{\infty} \rho_8(M) Q^M \\ &+ A_8^{(1)} \mathfrak{P}_{00}^4(\tau; -2, 6) \mathfrak{P}_{21}^4(\tau; -2, 6) + A_8^{(2)} \mathfrak{P}_{21}^8(\tau; -2, 6), \end{aligned} \quad (15)$$

ვაჩვენოთ, რომ $A_8^{(1)}$ და $A_8^{(2)}$ მუდმივები ისეთნაირად შეიძლება შეიარჩეს, რომ ადგილი ჰქონდეს (15) იგივეობას.

თუ ლემა 1-ში დავუშვებთ $s=8$, მივიღებთ

$$\rho_8(M) = \frac{M^3 \cdot \phi(2^v)}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5} \sum_{d|M_1} d^{-3}, \quad (16)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \phi(2^v) &= 1, & \text{როცა } v=0, \\ &= \frac{8}{7} (1 - 15 \cdot 2^{-3(v+1)}), & \text{როცა } v > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

(16) და (17) ფორმულებიდან ვღებულობთ

$$\rho_8(8) = \frac{7}{135}, \quad \rho_8(20) = \frac{126}{135}, \quad \rho_8(32) = \frac{583}{135},$$

$$\rho_8(44) = \frac{1332}{135}, \quad \rho_8(56) = \frac{2408}{135}, \quad \rho_8(68) = \frac{4914}{135},$$

$$\rho_8(80) = \frac{8946}{135}, \quad \rho_8(92) = \frac{12168}{135}, \quad \rho_8(104) = \frac{15386}{135},$$

$$\rho_8(116) = \frac{24390}{135}, \quad \rho_8(128) = \frac{37447}{135}, \quad \rho_8(140) = \frac{43344}{135},$$

$$\rho_8(152) = \frac{48020}{135}, \quad \rho_8(164) = \frac{68922}{135}, \quad \rho_8(176) = \frac{94572}{135}, \quad \rho_8(188) = \frac{103824}{135}.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \sum_{M=1}^{\infty} \rho_8(M) Q^M &= \frac{7}{135} Q^8 + \frac{126}{135} Q^{20} + \frac{583}{135} Q^{32} \\ M &\equiv 8 \pmod{12} \\ &+ \frac{1332}{135} Q^{44} + \frac{2408}{135} Q^{56} + \frac{4914}{135} Q^{68} + \frac{8946}{135} Q^{80} + \frac{12168}{135} Q^{92} \\ &+ \frac{15386}{135} Q^{104} + \frac{24390}{135} Q^{116} + \frac{37447}{135} Q^{128} + \frac{43344}{135} Q^{140} \\ &+ \frac{48020}{135} Q^{152} + \frac{68922}{135} Q^{164} + \frac{94572}{135} Q^{176} + \frac{103824}{135} Q^{188} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

(1)-დან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} \Phi_{00}(\tau; -2, 6) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q^{m^2} \\ m &\equiv -2 \pmod{6} \\ &= Q^4(1 + Q^{12} + Q^{60} + Q^{96} + Q^{192} + \dots), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(\tau; -2, 6) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{m+2}{6}} Q^{(m+1)^2} \\ m &\equiv -2 \pmod{6} \\ &= Q(1 - Q^{24} - Q^{48} + Q^{120} + Q^{168} - Q^{288} - \dots). \end{aligned} \quad (20)$$

(19) და (20) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$\Phi_{00}^4(\tau; -2, 6) \Phi_{21}^4(\tau; -2, 6) = Q^{20} + 4Q^{32} + 2Q^{44} - 12Q^{56}$$



$$\begin{aligned}
 & -21Q^{68} - 4Q^{80} + 28Q^{92} + 36Q^{104} + 5Q^{116} - 16Q^{128} \\
 & - 16Q^{140} - 12Q^{152} + 7Q^{164} - 8Q^{176} - 16Q^{188} + \dots, \\
 & \Phi_{21}^8(\tau; -2,6) = Q^8 - 8Q^{32} + 20Q^{56} - 70Q^{104} + 64Q^{128} \\
 & \quad + 56Q^{152} + Q^{206} + \dots,
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{00}^8(\tau; -2,6) &= Q^{32} + 8Q^{44} + 28Q^{56} + 56Q^{68} + 70Q^{80} \\
 &+ 64Q^{92} + 84Q^{104} + 176Q^{116} + 289Q^{128} + 336Q^{140} \\
 &+ 364Q^{152} + 504Q^{164} + 708Q^{176} + 784Q^{188} + \dots
 \end{aligned} \tag{23}$$

(15) იგივეობაში $A_8^{(1)}$ და $A_8^{(2)}$ მუდმივები ისეთნაირად უნდა შეირჩეს, რომ (15)-ის ორივე მხარეში Q^8 და Q^{20} -თან მდგომი კოეფიციენტები დაემთხვენ ერთმანეთს, ე. ი. ისეთნაირად, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$\frac{7}{135} + A_8^{(2)} = 0,$$

$$\frac{126}{135} + A_8^{(1)} = 0;$$

აქედან

$$A_8^{(1)} = -\frac{14}{15}, \quad A_8^{(2)} = -\frac{7}{135}. \tag{24}$$

თუ $A_8^{(1)}$ და $A_8^{(2)}$ -ის ნაპოვნ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (15) იგივეობის მარჯვენა მხარეში, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 & \frac{583}{135} - \frac{126}{135} \cdot 4 + \frac{7}{135} \cdot 8 = 1, \quad \frac{1332}{135} - \frac{126}{135} \cdot 2 = 8, \\
 & \frac{2408}{135} + \frac{126}{135} \cdot 12 - \frac{7}{135} \cdot 20 = 28, \quad \frac{4914}{135} + \frac{126}{135} \cdot 21 = 56, \\
 & \frac{8946}{135} + \frac{126}{135} \cdot 4 = 70, \quad \frac{12168}{135} - \frac{126}{135} \cdot 28 = 64, \\
 & \frac{15386}{135} - \frac{126}{135} \cdot 36 + \frac{7}{135} \cdot 70 = 84, \quad \frac{24390}{135} - \frac{126}{135} \cdot 5 = 176, \\
 & \frac{37447}{135} + \frac{126}{135} \cdot 16 - \frac{7}{135} \cdot 64 = 289, \quad \frac{43344}{135} + \frac{126}{135} \cdot 16 = 336, \\
 & \frac{48020}{135} + \frac{126}{135} \cdot 12 - \frac{7}{135} \cdot 56 = 364, \quad \frac{68922}{135} - \frac{126}{135} \cdot 7 = 504, \\
 & \frac{94572}{135} + \frac{126}{135} \cdot 8 = 708, \quad \frac{103824}{135} + \frac{126}{135} \cdot 16 = 784.
 \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, (23)-ის თანახმად, (15)-ის ორივე მხარეში Q -ს ერთ-ნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები ემთხვევა ერთმანეთს Q^{188} ხარის-

ხამდე ჩათვლით. ამით თეორემა 1 დამტკიცებულია. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს.

თეორემა 2. ვთქვათ, $n \geq 0$, $M = 12n + 8$, $2^v \parallel 3n + 2$. მაშინ

$$r_s(n) = \frac{M^3}{8640} \sum_{d|3n+2} d^{-3} - \frac{14}{15} \gamma_s(M), \text{ თუ } n \text{ კენტია,}$$

$$= \frac{M^3}{7560} (1 - 15 \cdot 2^{-3(v+1)}) \sum_{d|2^{-v}(3n+1)} d^{-3} - \frac{14}{15} \gamma_s(M) - \frac{7}{135} \widetilde{\gamma}_s(M)$$

თუ n ლუწია,

სადაც $\gamma_s(M)$ არის Q^M -ის კოეფიციენტი $\vartheta_{00}^s(\tau; -2, 6) \vartheta_{21}^s(\tau; -2, 6)$. ფუნქციის გაშლაში Q -ს ხარისხების მიხედვით, ხოლო $\widetilde{\gamma}_s(M) = Q^M$ -ის კოეფიციენტი $\vartheta_{21}^s(\tau; -2, 6)$ ფუნქციის გაშლაში Q -ს ხარისხების მიხედვით.

დამტკიცება. (20)-ის ძალით

$$\vartheta_{21}^s(\tau; -2, 6) = \left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h Q^{(6h-1)^2} \right)^8$$

$$= Q^8 \left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h Q^{12h(3h-1)} \right)^8,$$

ე. ი. $\vartheta_{21}^s(\tau; -2, 6)$ ფუნქციის გაშლაში Q -ს ხარისხების მიხედვით ყველა მაჩვენებელს აქვს სახე

$$M = 12n + 8 = 24k + 8.$$

აქედან, ცხადია, რომ

$$\widetilde{\gamma}_s(M) = 0, \text{ როცა } n \text{ კენტია.} \quad (25)$$

რადგანაც $M = 12n + 8 = 4(3n + 2)$, ამიტომ $M_1 = 2^{-v}(3n + 2)$.

მაშასადამე დასამტკიცებელი თეორემა გამომდინარეობს (6), (7), (14), (16), (17) და (25) ფორმულებიდან.

§ 3. ლემა 2 ([2], თეორ. 11). ვთქვათ, s კენტია, $M \equiv 4s \pmod{12}$, $p \parallel M$, $2\mu \parallel M$, $M = 2^\mu u^2 v$, $M_1 = \prod_{\substack{p \mid M \\ p \nmid 6}} p^i = u_1^2 v_1$ (v და v_1 უკვადრატო რიცხვები), $M = 4M_0$, $2^v \parallel M_0$, ე. ი. $\mu = v + 2$. მაშინ

$$\rho_s(M) = \frac{(s-1)!! |B_{s-1}| M^{\frac{s}{2}-1} R}{2^{s-2} |B_{s-1}| \left(\frac{s-1}{2}\right)! 3^{s-1} \cdot u_1^{s-2}}$$

$$\times \prod_{p|6} (1+p^{\frac{1-s}{2}})^{-1} \sum_{d^2|M_1} d^{s-2} \prod_{p|d} (1-p^{\frac{1-s}{2}}),$$

თუ M კვადრატია და $s \equiv 1 \pmod{4}$, (26)

$$\rho_s(M) = \frac{(s-1)!! \cdot M^{\frac{s}{2}-1} \cdot R \cdot L\left(\frac{s-1}{2}, \chi\right)}{2^{\frac{3s-7}{2}} \cdot |B_{s-1}| \cdot \pi^{\frac{s-1}{2}} \cdot 3^{s-1} \cdot u_1^{s-2}} (1 - \chi(2) 2^{\frac{1-s}{2}})$$

$$\times (1 + \chi(3) 3^{\frac{1-s}{2}})^{-1} \prod_{p|2(3,v)} (1 - p^{1-s})^{-1} \sum_{d^2|M_1} d^{s-2} \prod_{p|d} (1 - \chi(p) p^{\frac{1-s}{2}})$$

თუ M არარის კვადრატო, (27)

სადაც

$$R = \left(1 - \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(1-s)}\right) \left\{ \left(1 + \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(3-s)}\right) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(v-3)} 2^{n(2-s)} + 2^{\frac{1}{2}(v-1)(2-s)} \right\},$$

თუ v კენტია, (28a)

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(1-s)}\right) \left\{ \left(1 + \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(3-s)}\right) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}v-1} 2^{n(2-s)} + 2^{\frac{1}{2}v(2-s)} \right\},$$

თუ v ლუწია და $v \equiv s-2 \pmod{4}$, (28b)

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(1-s)}\right) \left(1 + \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(3-s)}\right) \sum_{n=0}^{\frac{v}{2}} 2^{n(2-s)},$$

თუ v ლუწია და $v \equiv s-4 \pmod{8}$, (28c)

$$= \left(1 - \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(1-s)}\right) \left(1 + \left(\frac{2}{s}\right) 2^{\frac{1}{2}(3-s)}\right) \sum_{n=0}^{\frac{v}{2}} 2^{n(2-s)} + 2 \cdot 2^{(2-s)\frac{1}{2}v+1},$$

თუ v ლუწია და $v \equiv s \pmod{8}$, (28d)

$$\chi(n) = \left(\frac{n}{v}\right), \text{ თუ } \mu \text{ ლუწია და } v \equiv s \pmod{4}, \quad v \neq 1,$$

$$= \left(\frac{-1}{n}\right) \left(\frac{n}{v}\right), \text{ თუ } \mu \text{ ლუწია და } v \not\equiv s \pmod{4}, \quad (29)$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{n}{v}\right), \text{ თუ } \mu \text{ კენტია და } v \equiv s \pmod{4},$$

$$\chi(n) = \left(\frac{-2}{n}\right) \left(\frac{n}{v}\right), \text{ თუ } \mu \text{ კენტი და } v \not\equiv s \pmod{4}.$$

ლემა 3. თუ v უკვადრატოა და $\equiv 3 \pmod{4}$, მაგრამ $\not\equiv s \pmod{4}$, მაშინ

$$L(4, \chi) = 2^{-4} \cdot 3^{-1} \cdot \pi^4 \cdot v^{-\frac{7}{2}} \left\{ \sum_{0 < h \leq \frac{1}{4}v} h \left(\frac{h}{v}\right) (6v^2 - 32h^2) \right.$$

$$\left. - \sum_{\frac{1}{4}v < h \leq \frac{1}{2}v} \left(\frac{h}{v}\right) (v^3 - 18v^2h + 48vh^2 - 32h^3) \right\}, \text{ როცა } 2 \mid \mu, \quad (30)$$

$$L(4, \chi) = 2^{-\frac{15}{2}} \cdot 3^{-1} \cdot \pi^4 \cdot v^{-\frac{7}{2}} \left\{ \sum_{0 < h \leq \frac{1}{8}v} h \left(\frac{h}{v}\right) (72v^2 - 512h^2) \right.$$

$$\left. - \sum_{\frac{1}{8}v < h \leq \frac{3}{8}v} v \left(\frac{h}{v}\right) (v^2 - 96vh + 192h^2) \right.$$

$$\left. - \sum_{\frac{3}{8}v < h \leq \frac{1}{2}v} \left(\frac{h}{v}\right) (28v^3 - 312v^2h + 768vh^2 - 512h^3) \right\}, \text{ როცა } 2 \nmid \mu, \quad (31)$$

დამტკიცება. ცნობილია (იხ., მაგ., [1], თეორ. 146)

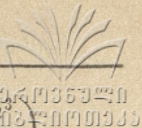
$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}, \text{ როცა } s > 1, \quad (32)$$

სადაც p გაირბენს ყველა მარტივ რიცხვებს.

ასევე ცნობილია ([4], გვ. 298, 299): თუ v უკვადრატოა და $\equiv 3 \pmod{4}$, მაშინ

$$\sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{v}{u}\right) u^{-s} = 2\pi^4 v^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{0 < h \leq \frac{1}{4}v} \left(\frac{h}{v}\right) \left(\frac{1}{2^4} \cdot \frac{h}{v} - \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{v^3}\right) \right.$$

$$\left. - \sum_{\frac{1}{4}v < h \leq \frac{1}{2}v} \left(\frac{h}{v}\right) \left(\frac{1}{2^5 \cdot 3} - \frac{3}{2^4} \cdot \frac{h}{v} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{v^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{v^3}\right) \right\}, \quad (33)$$



$$\sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{2v}{u}\right) u^{-4} = 2^{\frac{1}{2}} \pi^4 v^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{0 < h \leq \frac{1}{8}v} \left(\frac{h}{v}\right) \left(\frac{3}{2^5} \cdot \frac{h}{v} - \frac{2}{3} \cdot \frac{h^2}{v^2}\right) - \frac{1}{8}v < h \leq \frac{3}{8}v \left(\frac{h}{v}\right) \left(\frac{1}{2^5 \cdot 3} - \frac{1}{2^5} \cdot \frac{h}{v} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{h^2}{v^2}\right) - \frac{3}{8}v < h \leq \frac{1}{2}v \left(\frac{h}{v}\right) \left(\frac{7}{2^6 \cdot 3} - \frac{13}{2^5} \cdot \frac{h}{v} + \frac{h^2}{v^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{h^3}{v^3}\right) \right\}. \quad (34)$$

განვიხილოთ ცალცალკე ლუწი და კენტი μ -ს შემთხვევები:

1. ვთქვათ, μ ლუწია და $v \not\equiv s \pmod{4}$. მაშინ (29)-ის ძალით

$$\chi(n) = \left(\frac{-1}{n}\right) \left(\frac{n}{v}\right). \quad (35)$$

ცხადია,

$$\left(\frac{v}{u}\right) = \left(\frac{-1}{u}\right) \left(\frac{u}{v}\right), \text{ როცა } v \equiv 3 \pmod{4}. \quad (36)$$

(2), (35), (32), (36) და (33) ფორმულებიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned} L(4, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) \left(\frac{n}{v}\right) n^{-4} = \prod_p \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{p}{v}\right) p^{-4}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p>2} \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{p}{v}\right) p^{-4}\right)^{-1} = \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{v}{p}\right) p^{-4}\right)^{-1} \\ &= \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{v}{u}\right) u^{-4} \\ &= 2^{-4} \cdot 3^{-1} \cdot \pi^4 \cdot v^{-\frac{7}{2}} \left\{ \sum_{0 < h \leq \frac{1}{4}v} h \left(\frac{h}{v}\right) (6v^2 - 32h^2) - \sum_{\frac{1}{4}v < h \leq \frac{1}{2}v} \left(\frac{h}{v}\right) (v^3 - 18v^2h + 48vh^2 - 32h^3) \right\}. \end{aligned}$$

2. ვთქვათ, μ კენტია და $v \not\equiv s \pmod{4}$. მაშინ (29)-ის ძალით

$$\chi(n) = \left(\frac{-2}{n}\right) \left(\frac{n}{v}\right). \quad (37)$$

ცხადია,

$$\left(\frac{2v}{u}\right) = \left(\frac{-2}{u}\right) \left(\frac{u}{v}\right), \text{ როცა } v \equiv 3 \pmod{4}.$$

(2), (37), (32), (38) და (34) ფორმულებიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned} L(4, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{n}\right) \left(\frac{n}{v}\right) n^{-4} = \prod_p \left(1 - \left(\frac{-2}{p}\right) \left(\frac{p}{v}\right) p^{-4}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{-2}{p}\right) \left(\frac{p}{v}\right) p^{-4}\right)^{-1} = \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{2v}{p}\right) p^{-4}\right)^{-1} \\ &= \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{2v}{u}\right) u^{-4} \\ &= 2^{-\frac{15}{2}} \cdot 3^{-1} \cdot \pi^4 v^{-\frac{7}{2}} \left\{ \sum_{0 < h \leq \frac{1}{8}v} h \left(\frac{h}{v}\right) (72v^2 - 512h^2) \right. \\ &\quad - \sum_{\frac{1}{8}v < h \leq \frac{3}{8}v} v \left(\frac{h}{v}\right) (v^2 - 96vh + 192h^2) \\ &\quad \left. - \sum_{\frac{3}{8}v < h \leq \frac{1}{2}v} \left(\frac{h}{v}\right) (28v^3 - 312v^2h + 768vh^2 - 512h^3) \right\}. \end{aligned}$$

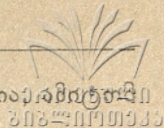
ვთქვათ, $s=9$, მაშინ $\lambda=2$, $M \equiv 0 \pmod{12}$, $s'=216$. თუ ამ შემთხვევაში აღვიღოთ აქვს (11) იგივეობას, მას უნდა ჰქონდეს სახე

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^9(\tau; -2, 6) &= \sum_{M=1}^{\infty} \rho_9(M) Q^M + A_9^{(1)} \Phi_{00}^8(\tau; -2, 6) \Phi_{21}^4(\tau; -2, 6) \\ &\quad + A_9^{(2)} \Phi_{00}^8(\tau; -2, 6) \Phi_{21}^8(\tau; -2, 6). \end{aligned} \quad (39)$$

ვაჩვენოთ, რომ შეუძლებელია $A_9^{(1)}$ და $A_9^{(2)}$ მუდმივების ისე შერჩევა, რომ (39)-ის ორივე მხარეში Q -ს ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები დაემთხვენ ერთმანეთს Q^{216} ხარისხამდე ჩათვლით.

ღემა 2-ში დავუშვათ: $s=9$, $M=12$, ე. ი. $M_1=1$, $u_1=1$, $v=3$, $\mu=2$, $v=0$. მაშინ (27) და (35)-ის ძალით

$$\rho_9(12) = -\frac{8! \cdot 12^{\frac{7}{2}} \cdot R \cdot L(4, \chi)}{2^{10} \cdot |B_8| \cdot \pi^4 \cdot 3^8} (1-2^{-8})^{-1} (1-3^{-8})^{-1}. \quad (40)$$



რადგანაც ჩვენს შემთხვევაში $v \equiv s - 2 \pmod{4}$ და v ლუწია (ამიტომ (28 b)-ს ძალით

$$R = (1 - 2^{-4}) = \frac{15}{16};$$

რადგანაც μ ლუწია, ამიტომ (30)-ის ძალით

$$\begin{aligned} L(4, \chi) &= -2^{-4} \cdot 3^{-1} \cdot \pi^4 \cdot 3^{-\frac{7}{2}} (3^3 - 18 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 - 32) \\ &= -2^{-4} \cdot 3^{-\frac{9}{2}} \cdot 23 \cdot \pi^4. \end{aligned}$$

თუ შევიტანთ R -ისა და $L(4, \chi)$ -ის მიღებულ მნიშვნელობებს (40) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\rho_9(12) = \frac{69}{697}.$$

ახლა ლემა 2-ში დავუშვათ: $s=9$, $M=24$, ე. ი. $M_1=1$, $u_1=1$, $v=3$, $\mu=3$, $v=1$. მაშინ (27) და (37)-ის ძალით

$$\rho_9(24) = \frac{8!! \cdot 24^{\frac{7}{2}} \cdot R \cdot L(4, \chi)}{2^{10} \cdot |B_8| \cdot \pi^4 \cdot 3^8} (1 - 2^{-8})^{-1} (1 - 3^{-8})^{-1}. \quad (41)$$

რადგანაც v კენტია, ამიტომ (28)-ს თანახმად

$$R = \frac{15}{16}.$$

რადგანაც μ კენტია, ამიტომ (31)-ის თანახმად

$$\begin{aligned} L(4, \chi) &= -2^{-\frac{15}{2}} \cdot 3^{-1} \cdot \pi^4 \cdot 3^{-\frac{7}{2}} \cdot 3(9 - 96 \cdot 3 + 192) \\ &= 2^{-\frac{15}{2}} \cdot 3^{-\frac{5}{2}} \cdot 29 \pi^4. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\rho_9(24) = \frac{783}{697}.$$

ახლა ამავე ლემაში დავუშვათ: $s=9$, $M=36$, ე. ი. $M_1=1$, $u_1=1$, $v=1$, $\mu=5$, $v=0$. მაშინ (26)-ის ძალით

$$\rho_9(36) = \frac{8!! \cdot |B_4| \cdot 36^{\frac{7}{2}} \cdot R}{2^7 \cdot |B_8| \cdot 4! \cdot 3^8} (1 + 2^{-4})^{-1} (1 + 3^{-4})^{-1} = \frac{2^7 \cdot 3^3 \cdot R}{697}. \quad (42)$$

რადგანაც v ლუწია და $v \equiv s \pmod{8}$, ამიტომ (28)-ს ძალით

$$R = (1 - 2^{-4})(1 + 2^{-3}) + 2 \cdot 2^{-7} = \frac{137}{2^7},$$

ე. ი.

$$\rho_9(36) = \frac{3699}{697}.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{M=1}^{\infty} \rho_9(M) Q^M = \frac{69}{697} Q^{12} + \frac{783}{697} Q^{24} + \frac{3699}{697} Q^{36} + \dots \quad (43)$$

$$M \equiv 0 \pmod{12}$$

(19), (21), (22) და (23) ფორმულებიდან ვღებულობთ

$$\Phi_{00}^5(\tau; -2, 6) \Phi_{21}^4(\tau; -2, 6) = Q^{24} + 5Q^{36} + \dots, \quad (44)$$

$$\Phi_{00}^8(\tau; -2, 6) \Phi_{21}^8(\tau; -2, 6) = Q^{12} + Q^{24} - 8Q^{36} + \dots, \quad (45)$$

$$\Phi_{00}^9(\tau; -2, 6) = Q^{36} + \dots \quad (46)$$

(39)-ში $A_9^{(1)}$ და $A_9^{(2)}$ მუდმივები ისეთნაირად შევარჩიოთ, რომ მის ორივე მხარეში Q^{12} და Q^{24} -თან მდგომი კოეფიციენტები დაემთხვენ ერთმანეთს, ე. ი. ისეთნაირად, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$\frac{69}{697} + A_9^{(2)} = 0,$$

$$\frac{783}{697} + A_9^{(1)} + A_9^{(2)} = 0,$$

საიდანაც

$$A_9^{(1)} = -\frac{714}{697}, \quad A_9^{(2)} = -\frac{69}{697}. \quad (47)$$

თუ $A_9^{(1)}$ და $A_9^{(2)}$ მუდმივებს განესაზღვრავთ (47) ფორმულების მიხედვით, დაერწმუნდებით, რომ (39) ტოლობის მარჯვენა მხარეში Q^{36} -თან მდგომი კოეფიციენტი არის

$$\frac{3699}{697} - 5 \cdot \frac{714}{697} + 8 \cdot \frac{69}{697} = \frac{681}{697}.$$

მეორე მხრივ, (46)-ის ძალით, (39) ტოლობის მარცხენა მხარეში Q^{36} -თან მდგომი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია.

მაშასადამე, შეუძლებელია $A_9^{(1)}$ და $A_9^{(2)}$ მუდმივების ისეთნაირი შერჩევა, რომ (39) ტოლობის ორივე მხარეში Q -ს ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები დაემთხვენ ერთმანეთს Q^{36} ხარისხამდეც კი.

დასასრულს, გულწრფელ მაღლობას მოვახსენებ დოკ. გ. ლომაძეს მნიშვნელოვანი მითითებებისათვის.

ლიტერატურა

1. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie. B. 1, Leipzig, 1927.
2. H. Streefkerk, Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking

$$U = \sum_{i=1}^s (Ax_i^2 + Bx_i + C). \text{ Amsterdam, 1943.}$$

3. Г. А. Ломадзе, О представлении чисел суммами обобщённых полигональных чисел. II. Труды Тбилисского Математического Института им. А. М. Размадзе, XXIV, 1957, 3—33.
4. გ. ლომაძე, რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ კვადრატთა კენტი რიცხვის ჯამების სახით, ა. რაზმაძის სახ. თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები, XVII, 1949, 281—314.

ალგებრა-გეომეტრიის
 კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 5. IX 1958)

М. Гелашвили

О представлении чисел суммами обобщенных октагональных чисел

Резюме.

Выводится формула для числа представлений целых чисел суммами восьмью обобщенных октагональных чисел.

ა. ჭიჭინაძე

მათემატიკის ლაუზენის ჰეგელის თვალსაზრისის შესახებ

წინამდებარე შრომის მიზანია ნაჩვენებ იქნეს მათემატიკის დაფუძნების ჰეგელიანური თვალსაზრისის ლოგიკური მანკიერება და წინააღმდეგობრივი ხასიათი.

როგორც ცნობილია, ჰეგელთან განსხვავება განსჯასა და გონებას შორის არის განსხვავება აზროვნებისა და შემეცნების დაბალ და მაღალ მეთოდებს შორის. განსჯა—ეს არის დაბალი, „სასრულო აზროვნება“, რომელიც ფორმალური ლოგიკისა და მეტაფიზიკური აზროვნების დამახასიათებელია. განსჯა ქმნის მხოლოდ და მხოლოდ სასრულო, მეტაფიზიკურ განსაზღვრებებს, ის მიდის გაყინულ, უძრავ, ერთმანეთის საწინააღმდეგო დასკვნამდე. გონიერი აზროვნება, ჰეგელის მიხედვით,—ეს არის დიალექტიკური აზროვნება. და აი ჰეგელისათვის მათემატიკა პირველ რიგში სასრულო განსაზღვრებათა მეცნიერებაა და ამიტომ ის განსჯას მიეკუთვნება. ყველაზე სრულად ჰეგელის ასეთი აზრი მათემატიკის შესახებ შეიძლება გადმოცემულ იქნას მისივე შემდეგი სიტყვებით: „შეიძლებადა უფრო ფართოდ გაგვევითარებინა აზრი ფილოსოფიური მათემატიკის შესახებ, რომელიც ცნებებიდან შეიქმნობდა იმას, რაც ჩვეულებრივ მათემატიკურ მეცნიერებას განსჯის მეთოდის საშუალებით გამოყავს წინამძღვრებად მოცემულ განსაზღვრებებიდან. მაგრამ ვინაიდან მათემატიკა მაინც არის მეცნიერება სიდიდის სასრულო განსაზღვრებათა შესახებ, რომელნიც თავიანთ სასრულობაში რჩებიან უძრავნი და მნიშვნელობათა მქონენი, და რადგანაც ისინი როგორც ასეთი არ უნდა გამოვიდნენ ამ საზღვრებიდან, ამიტომ ის უპირატესად განსჯის მეცნიერებაა. და ვინაიდან მას შეუძლია იყოს ასეთი სახის უსრულყოფილესი მეცნიერება, უფრო სჯობია მივისწრაფოდეთ შევინარჩუნოთ ის უპირატესობა, რომელიც მას აქვს ასეთი სახის სხვა დანარჩენ მეცნიერებათა მიმართ, და არ დავარღვიოთ მისი სიწმინდე მასში უცხო ცნებებისა და ემპირიული მიზნების შერევით“¹.

ამავე დროს ჰეგელი მათემატიკას სთვლის წმინდა, აბსოლუტური გარეგნულობის მეცნიერებად „ამ კვდარ ერთეულს, რომელშიაც აზრი აღწევს გარეგნულობის მწვერვალს, შეუძლია შევიდეს გარეგან კომბინაციებში, ხოლო ამ კომბინაციებს — არითმეტიკის ფიგურებს, თავის მხრივ შეუძლიათ

¹ Гегель, Сочинения, т. II, 1934, გვ. 53.



მიიღონ განსჯის განსაზღვრებანი, შეუძლიათ განხილულ იქნან როგორც ტოლნი და არატოლნი, იგიურონი და განსხვავებულნი“¹. წმინდა გარეგნულობა, სასრულობა, უძრაობა და უცვლელობა—აი ყველაფერი ის, რაც ძირითადად ახასიათებს მათემატიკას და რის გამოც ის მიეკუთვნება მეტაფიზიკურ განსაზღვრებათა და განსჯის მეცნიერებათა რიგს.

თავისივე გარეგნულობისა და არაადეკვატურობის წყალობით ის არის სიმბოლოთა მეცნიერება. ყოველივე ამის გამო მას არ შეუძლია დადებითი როლი შეასრულოს გონებით აზროვნებაში. „...უქმი და უმადური შრომა იქნებოდა აზრის გამოსათქმელად გვესარგებლნა ისეთი ჯიუტი და არაადეკვატური მასალით, როგორცაა სივრცითი ფიგურები და რიცხვები, დანაშაულებად გვემსჯელა ამ მასალაზე, როგორც ისეთზე, რომელიც ამ მიზანს შეეფერება. უმარტივესი პირველი ფიგურები და რიცხვები, მათივე სიმარტივის წყალობით, გაუგებრობის გარეშე შეიძლება იქნან გამოყენებულნი სიმბოლოების სახით. მიუხედავად ამისა, ისინი აზრისათვის მუდამ აღმოჩნდებიან ხოლმე გამოთქმის უცხო და ნაკლებ დამაკმაყოფილებელ საშუალებად“².

მათემატიკის გარეგნულობა და მისი სიუცხოვე ცნებით, რაციონალურ აზროვნებისადმი განსაკუთრებით მაშინ იჩენს თავს, როცა საქმე გვაქვს შედარებით მდიდარი შინაარსის ცნებებთან. „შედარებით უფრო მდიდარ ცნებათა გამოსათქმელად ეს საშუალებანი (რიცხვები და ფიგურები—მ. კ.) აღმოჩნდებიან ხოლმე საგსებით არასაკმარისნი, ვინაიდან მათი შეუღლების გარეშული ხასიათი და მათი კავშირის შემთხვევითობა მათ ხდის არაადეკვატურს ცნების ბუნებისადმი“, „...და ამას გარდა ცნებათა დენადობა იფიტება ისეთ გარეგნულ მასალაში, რომელშიც ყოველი განსაზღვრება ვარდება გულგრილ გარეყოფნაში“³. ამგვარად, მათემატიკა თავისივე წმინდა გარეგნულობისა და წმინდა სიმბოლიურობის გამო უცხოა ცნების ბუნებისადმი; და თუ საზოგადოდ შეიძლება მისი დაშვება გონებით აზროვნებაში—ის ამ უკანასკნელში, უკეთეს შემთხვევაში, შევა როგორც უცხო სიმბოლიკა, როგორც მისი არაორგანული ნაწილი.

მათემატიკის მეცნიერება უშინაარსოა და ჰეგელი ცდილობს მათემატიკურ ცნებებს და განსაზღვრებებს თავისი ჰეგმარიტი ბუნება და შინაარსი მოუპოვოს ფილოსოფიაში. მაგრამ ჰეგელი ამ გარემოებას აღიქვამს მწვავე წინააღმდეგობის სახით: მათემატიკას არა აქვს შინაარსი, ის ცარიელია; ამიტომ მან აზრისა და შინაარსის მისაღებად უნდა მიმართოს ფილოსოფიას, მაგრამ ის, ფილოსოფიაში გადატანილი, კარგავს თავის ნამდვილ მნიშვნელობას, იქცევა არამათემატიკად. საჭიროა თუ არა უკანასკნელ გარემოებათა გამო ხელი ავიღოთ მათემატიკისათვის აზრის მიცემაზე, ხელი ავიღოთ „ფილოსოფიურ მათემატიკაზე“? ჰეგელი სწორედ აქ ვარდება წინააღმდეგობათა კსელში. სათანადო ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მისი შინაგანი მისწრაფება,

¹ Гегель, Сочинения, т. II, 1934, გვ. 53.

² Гегель, Там же, გვ. 54.

³ Гегель, Там же, გვ. 54.

მისი განწყობა, ობიექტურად იქითაა მიმართული, რომ ფილოსოფიაში იქნას გადატანილი მათემატიკა, რათა ამ უკანასკნელმა მიიღოს შინაარსი, მაგრამ ეს უნდა მოხდეს ისე, რომ ის, რასაც მივიღებთ ამის შედეგად, აღარ უნდა შევიდეს მათემატიკის დადებით მასალაში, ვინაიდან პირველი უკანასკნელისათვის აღმოჩნდება სრულიად უცხო და ამ გზაზე მათემატიკა დაჰკარგავს არსებობას. ჰეგელი, როგორც ჩვენ უკვე ვნახეთ, თვით მათემატიკისათვის ამჯობინებს ხელუხლებელი დავტოვოთ ამგვარი სამსახურისაგან. ჰეგელი თავს წინააღმდეგობაში იგდებს უკვე იმით, რომ მათემატიკას სთვლის მხოლოდ და მხოლოდ სასრულო განსაზღვრებათა მეცნიერებად, რის გამოც მათემატიკას არ შეუძლია მიღწეოს აზრის სრულყოფამდე. ამიტომ მათემატიკურ უსასრულობას ჰეგელი ცუდ უსასრულობას უწოდებს; უსასრულობა არ წარმოადგენს მათემატიკის ბუნებრივ ობიექტს და ამიტომ „...მათემატიკური განსაზღვრებანი, როგორიც არიან მაგალითად, უსასრულობა, მისი დამოკიდებულებანი, უსასრულოდ მცირენი, თანამამრავლები, ხარისხები და სხვა, თავიანთ ჭეშმარიტ აზრს ჰპოულობენ თვით ფილოსოფიაში. საგნებით არასწორი იქნებოდა ამ უკანასკნელისათვის ისინი გვესესხა თვით მათემატიკიდან, რომელშიაც ისინი აღებულინი არიან ჭეშმარიტი გაგების გარეშე (begriffslös) და ხშირად უაზროდაც. ამ ცნებათა შესწორებას და მათთვის აზრის დადგენას უფრო ფილოსოფიისაგან უნდა მოველოდეთ. მხოლოდ სიზარმაცე აზრისა, რომელსაც სურს თავი დააღწიოს ცნებათა განსაზღვრას, მიმართავს ფორმულებს, რომელნიც აზრის უშუალო გამოხატულებასაც კი არ წარმოადგენენ, და მათ მზა სქემებს“¹. ჩვენ ვხედავთ, რომ ჰეგელისათვის უსასრულობას მათემატიკაში გონიერი აზრი არა აქვს, მაგრამ ის მაინც ვერ ბედავს სრულიად ცხადად გამოთქვას თვალსაზრისი მათემატიკიდან უსასრულობის ამოღების შესახებ; ის მათემატიკურ უსასრულობას მაინც იხსენიებს, როგორც ასეთს, როგორც მათემატიკურ განსაზღვრებას. მაგრამ ასეა თუ ისე, ჰეგელი საჭიროდ სთვლის მისი ჭეშმარიტი ბუნება ფილოსოფიაში ვეძიოთ, როგორც ისეთი რამის, რომელსაც თავის ადგილზე თურმე აზრი არა აქვს და ამიტომ უნდა გადავიტანოთ იქ, სადაც მისი ადგილი არ არის. ეს იმიტომ, რომ ჰეგელი ვერ არკვევს უსასრულობის ფილოსოფიური და მათემატიკური ცნებების ჭეშმარიტ კავშირს და განსხვავებას.

ამგვარად, ჩვენ ვრწმუნდებით, რომ ჰეგელს იპყრობს აზრი: მისცეს მათემატიკას შინაარსობლიობა ფილოსოფიაში გადატანით (და აქ მართლაც გადატანა გამოდის, ვინაიდან უკვე მოასწრეს ის უცხო გაეხადათ ფილოსოფიისათვის); მაგრამ ამასთან ერთად, სწორედ აქ, ჰეგელს ეკარგება მათემატიკა და რჩება მისივე აზრით „ფილოსოფიური მათემატიკა“; მისი, როგორც გონების კმნილების, შეტანა კი განსჯის წმინდა მეცნიერებაში—სავსებით არღვევს და არარაობად აქცევს ამ უკანასკნელს. ჰეგელის ასეთ შეხედულებას კიდევ უფრო მკაფიოდ გამოხატავენ მისი შემდეგი გამოთქმები: „ზემოლ-

¹ Гегель, Сочинения, т. II, 1934, გვ. 54.



ნიშნული ეჭვიანობა შეიძლება თავიდან აგვეციდინა მხოლოდ დასწრებით საშუალებით. მაგრამ, მაშინ აზრის არსებითი გამოხატულება იქნება თვით ეს ახსნა, და მათემატიკური სიმბოლირება აღმოჩნდება არამცთუ უშინაარსო, არამედ ზედმეტიც¹. შემდეგ: „და თუ ჩვენ მოვინდომებდით ფილოსოფიურად განგვეხილა სივრცისა და ერთეულის ფიგურაციები, ისინი დაკარგავდნენ თავიანთ სპეციფიურ მნიშვნელობას და ფორმას“². ამ გვარად, „ფილოსოფიური მათემატიკა“ — ცალკე, მათემატიკა — ცალკე; მათი კონტაქტის შედეგად არაფერი არ დაგვრჩებოდა. „მათემატიკის, როგორც სიდიდეთა მეცნიერების, ჭეშმარიტი ფილოსოფიური მეცნიერება იქნებოდა მეცნიერება ზომათა შესახებ; მაგრამ ამ უკანასკნელს უკვე მხედველობაში აქვს საგანთა რეალური თავისებურებანი, და ეს თავისებურებანი კი არსებობენ მხოლოდ კონკრეტულ ბუნებაში. გარდა ამისა, სიდიდის გარეგნული ხასიათის გამო, ეს მეცნიერება იქნებოდა ყველაზე ძნელი“³. აი კიდევ ერთი უშედეგო ცდა.

როგორც ვხედავთ, ჰეგელის მიერ წინააღმდეგობა მაინც ვერ იქნა გადაჭრილი. მან ვერ შესძლო დაეკავშირებინა მათემატიკა და ფილოსოფია ერთმანეთთან. მათემატიკის გადატანა ფილოსოფიაში დარჩა საესეებით უცხო და უქმი თვით მათემატიკისათვის და ეს გასაგებია: ჰეგელს არ შეეძლო გაეხსნა ეს წინააღმდეგობა იმიტომ, რომ მან ნამდვილი წინააღმდეგობა შეცვალა ხელოვნური, მოგონილი წინააღმდეგობით, ისეთით, რომელმაც ლოგიკურ წრეში მოაქცია თვით ჰეგელი. გადააქცია რა მათემატიკის აბსტრაქტულობა და გარკვეული გარეგნულობა წმინდა გარეგნულობად, ჰეგელმა ამით მათემატიკას წაართვა ობიექტურობა, ხოლო თავისთავს მათემატიკისა და ფილოსოფიის ნამდვილი დამოკიდებულების დანახვის უნარი. როცა მათემატიკას ართმევდნენ ობიექტურობას და შინაარსობლიობას, როცა მას, როგორც სპეციფიურს, ართმევდნენ ზოგადს, მაშინ ნამდვილად ართმევდნენ აზრს, და ამ უკანასკნელის მისაღებად ფილოსოფიისადმი მიმართვა მართლაც მათემატიკის ფილოსოფიაში გადატანას ჰგავს, ცარიელი და უძირო ჭურჭლის მსგავსად, რომელშიც რაღაცას ასხამენ, მაგრამ მასში არაფერი არ რჩება.

„ისტორიულადაც“, უფრო სწორად „თვითგანვითარებადი აბსოლუტური იდეის“ ისტორიაში, ჰეგელი მათემატიკური აზროვნების წარმოშობას მიაკუთვნებს იმ გარდამავალ საფეხურს, რომელსაც გაივლის „აბსოლუტური იდეა“ „ბუნებიდან“ თავისი განვითარების უმაღლეს სტადიაზე, „აბსოლუტურ სულზე“ გადასასვლელად. ჰეგელის ეს აზრი საესეებით ცხადად და სრულადაა გადმოცემული მისი შემდეგი სიტყვებით: „გრძნობით სამყაროზე ამაღლებულ და თავისი არსის შეცნობაში მყოფ სულს, რომელიც თავისი არსის გამოსახატავად ეძებს სტიქიას წმინდა წარმოდგენებისათვის, ვიდრე შეიცნობდეს, რომ ეს სტიქიაა თვით აზრი“.

¹ Гегель, Сочинения, т. II, 1934, 83-54.

² Гегель, Там же, 83-55.

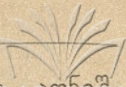
³ Гегель, Там же, 83-54.

და შეიძენდეს მის წარმოსადგენად წმინდა სულიერ გამოსახულებას, რადგან ღმერთი აზრად მოუვიდეს ამოირჩიოს რიცხვი — ეს შინაგანი, აბსტრაქტული გარეგნულობა“. „ის შეადგენს უკანასკნელ საფეხურს იმ არასრულყოფილებაში, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ უზოგადესი აღებულია როგორც დამძიმებული გრძნობითი“¹. ამგვარად, აბსოლუტური იდეა თავის განვითარებაში გარკვეულ ზოგადობას აღწევს, ვინაიდან რიცხვები და გეომეტრიული სახეები ასეთნი არიან, მაგრამ ისინი ჯერ კიდევ არ იძლევიან იდეის სრულყოფას, იმიტომ რომ გრძნობითი არიან დამძიმებულნი. მაგრამ, ეს არის უკანასკნელი საფეხური უზოგადესის არასრულყოფისა, მას დარჩენია განთავისუფლდეს გრძნობადობის მათემატიკური ნარჩენებისაგან და წმინდა იდეის ანუ აბსოლუტური სულის სახით სავსებით ამაღლდეს გრძნობით სამყაროზე; იდეა, სხვადასხვა ბუნების სახით, გადავა თვითშეცნობილ აბსოლუტურ სულში. ამგვარად, „ისტორიულად“ ჰეგელთან მათემატიკა წარმოადგენს „თვითგანვითარებადი აბსოლუტური იდეის“ ერთერთ გამოვლენას. თავის ფილოსოფიას ჰეგელი სთვლის იდეის განვითარების უკანასკნელ საფეხურად და ფილოსოფია მიაჩნია „აბსოლუტურ ცოდნად“. ამიტომ, მათემატიკამ მასში უნდა ჰპოვოს თავისი ჭეშმარიტი აზრი.

სწორედ ეს გარემოებანი უნდა მივიჩნიოთ იმ ძირითად ფილოსოფიურ და ლოგიკურ წანამძღვრებად, რომელთა საფუძველზეც ჰეგელი ცდილობს მათემატიკის დაფუძნების პრობლემის გადაწყვეტას, მაგრამ, როგორც ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან ჩანს, ჰეგელი ამ იდეის განხორციელებას ვერ ახერხებს არა მარტო წანამძღვართა იდეალისტური ხასიათის გამო, არამედ აგრეთვე იმის გამო, რომ ის ერთის მხრივ აზროვნების მთლიან პროცესს ყოფს ორ ერთმანეთისაგან გათიშულ დაბალ და მაღალ, მეტაფიზიკურ და დიალექტიკურ ნაწილად და მათემატიკას მიაკუთვნებს პირველს, ე. ი. განსჯის მეცნიერებათა რიგს, ხოლო მეორეს მხრივ მას არ ძალუძს დაინახოს ნამდვილი კავშირი მათემატიკასა და ფილოსოფიას შორის, როგორც ზოგადისა და სპეციფიკურის კავშირი; ჰეგელი მათემატიკის ფილოსოფიაში გადატანის, ანუ ფილოსოფიის მათემატიკაზე თავმოხვევის გზით, ამაოდ ცდილობს სწორედ იმ კავშირის მოპოვებას, რომელიც ამავე პროცესში იკარგება; ეს გარემოება კი თავს იჩენს მთელ რიგ ლოგიკურ წინააღმდეგობათა სახით.

მარქსისტულ ფილოსოფიას, რომელიც იძლევა ბუნებისა, საზოგადოებისა და აზროვნების განვითარების უზოგადეს კანონებს თვით საზოგადოების ისტორიული პრაქტიკისა და მეცნიერების მიერ დაგროვილი ცოდნის განზოგადოების საფუძველზე, თავისი თავი მიაჩნია არა ყველა „მეცნიერებათა მეცნიერებად“, მსოფლიოს საყოველთაო სქემატიკისა და კონსტრუქციის სპეკულატურ საშუალებად, არამედ კონკრეტული რეალური სამყაროს გამოკვლევის თვალსაზრისად და მეთოდად, და ამიტომ — ყველა მეცნიერებისათვის სავალდებულო მოძღვრებად. ენგელსი „ანტი-დიურინგში“, აკრიტიკებს რა

¹ Гегель, Сочинения, т. V, 1937, 83. 234.



დიურინგის მცდარ შეხედულებას მარქსის დიალექტიკურ მეთოდზე დაყრდნობაზე, ნაღწიანა, რომ მარქსმა უარყოფის-უარყოფის კანონი ჰეგელისებური საფუძველზე, თაო ტრიადის (თეზისი, ანტითეზისი, სინთეზი) მსგავსად ბუნებასა და საზოგადოებას თავზე კი არ მოახვია, არამედ ის მათში გამოავლინა საზოგადოებრივ-ისტორიული პრაქტიკის, ბუნების და საზოგადოების განვითარების შესახებ დაგროვილი ცოდნის მეცნიერული განზოგადოების საფუძველზე. ამიტომ, გასაგებია, რომ ჩვენ ვილაშქრებთ მათემატიკის ფილოსოფიაში „გადატანის“ ანუ მარტო ჰეგელისებურ ობიექტურ-იდეალისტურ კონცეპციის წინააღმდეგ, არამედ მათემატიკის ფილოსოფიაში გადატანის საერთო თვალსაზრისის წინააღმდეგ. მათემატიკის დასაფუძნებლად მისი ფილოსოფიაში გადატანა ზოგადი აზრით ნიშნავს ფილოსოფიის დებულებათა უბრალოდ გავრცელებას და ინტერპრეტაციას მათემატიკურ მისალაზე. მაგრამ, ნამდვილად, ასე უბრალო არ არის დამოკიდებულება ამა თუ იმ სპეციალურ მეცნიერებასა, კერძოდ, მათემატიკასა და ფილოსოფიას შორის. მათემატიკის ფილოსოფიაში, შეიძლება ითქვას, ასეთი გახვევა არაფერს არ იძლევა არცერთისათვის და ფაქტიურად ნიშნავს მათემატიკის გათქვეფას ფილოსოფიაში, ე. ი. მათ შორის განსხვავების იგნორირებას და ამიტომ მათი ერთმანეთისაგან მოწყვეტას. და ბოლოს, ეს ნიშნავს ფილოსოფიის როლის ნამდვილი მეცნიერულ-ისტორიული შეფასების უარყოფას, საბოლოო ჯამში ფილოსოფიის თვითარსის მეცნიერებად გამოცხადებას, ე. ი. წმინდა იდეალისტურ პლატფორმაზე დაშვებას. მარქსისტული ფილოსოფია ყველა სპეციალურ მეცნიერებათა კონკრეტულ კანონზომიერებათა განზოგადოებით გამოავლენს მთელი სინამდვილის არსებობისა და განვითარების უზოგადეს კანონებს „Общее существует лишь в отдельном, через отдельное... Всякое общее есть частичка (или сторона или сущность) отдельного“¹. საყოველთაო კანონები, რომელნიც ობიექტურად არსებობენ, არ მოქმედებენ „სუფთა“ სახით, კერძო კანონებისაგან გამოცალკევებით, ისინი წარმოადგენენ იმ რეალურად საერთოს, რომელსაც შეიცავს ყოველი განსაკუთრებული, კერძო კანონი. მარქსისტული ფილოსოფია არის სპეციალური ცოდნის და პრაქტიკის განზოგადოება. ამიტომ ის თვით იძლევა ერთად-ერთ ჰეგელისებურ მეცნიერულ თვალსაზრისს და მეთოდს ანუ თუ იმ სპეციალური მეცნიერების წარმატებით განვითარებისათვის; ის თვით წარმოადგენს შემეცნების ერთად-ერთ ჰეგელისებურ თეორიას. მეორეს მხრივ, ცალკეული არ არსებობს იმ კავშირის გარეშე, რომელსაც მიჰყვება ზოგადმდე. ამრიგად, ცალკეული კანონი შეიძლება ღრმად და ბოლომდე იქნეს გამოკვლეული და გაგებული მხოლოდ მაშინ, როცა ცნობილია ზოგადი კანონები. ამიტომ მარქსისტული ფილოსოფია არის სპეციალური ცოდნის თეორიული ფუნდამენტი.

მაგრამ, მარქსისტული ფილოსოფია არ არის „მეცნიერებათა მეცნიერება“, მას არ შეუძლია შეცვალოს ცალკეული მეცნიერებები, ვინაიდან ის ვერ ამოსწორავს კერძოს, კონკრეტულს. „Всякое общее лишь приблизительно-

¹ В. И. Ленин, Философские тетради. 1947 г. 329.

но охватывает все отдельные предметы. Всякое отдельное неполно в общем и т. д. и т. д.“¹ კონკრეტული მდიდარია ზოგადზე. ლენინი მიუთითებდა, რომ ფილოსოფია არის ყველა სპეციალურ ცოდნათა არსებითი შინაარსი.

სპეციალური მეცნიერებები და მარქსისტული ფილოსოფია დიალექტიკურ კავშირში იმყოფებიან: დიალექტიკური მატერიალიზმი თვით წარმოადგენს მუდამ მზარდსა და უწყვეტ განვითარებაში მყოფ მეცნიერებას და თვითვე აყენებს დებულებას იმის შესახებ, რომ მას უნდა უყურებდნენ არა როგორც დოგმათა სისტემას, არამედ როგორც განუწყვეტელ განვითარებაში მყოფ მეცნიერებას. თავის განვითარებაში ის პირდაპირ დამოკიდებულია სპეციალურ მეცნიერებათა განვითარებისაგან და, უკეთესს რა ანალიზს მათ ახალ-ახალ მონაპოვართ, თვით მიდის ახალ განზოგადოებებამდე, აზუსტებს და ანვითარებს თავის დებულებებს, ზოგჯერ ცვლის კიდევაც ზოგიერთს, როგორც მოძველებულს; მეორეს მხრივ, როგორც აღვნიშნეთ, ის იძლევა შემეცნების ერთად-ერთ ჭეშმარიტ თეორიას და ამიტომ არცერთი მეცნიერება არ შეიძლება განვითარდეს წარმატებით, ნამდვილად და ფართოდ, არ შეიძლება განვითარდეს ისე, რომ არ დაუშვას ღრმა და პრინციპული შეცდომები, და საბოლოო ჯამში, არ განიცადოს კრიზისი, თუ ის არ იხელმძღვანელებს თავის კვლევა-ძიებაში მარქსიზმ-ლენინიზმის დიადი მოძღვრებით. ასეთია ფილოსოფიისა და სპეციალურ მეცნიერებათა განვითარების აბსოლუტური გზა. ასეთია ფილოსოფიისა და სპეციალურ მეცნიერებათა შორის არსებული დიალექტიკური კავშირის არსებითი შინაარსი. აქედან ჩვენ ის დასკვნა უნდა გავაკეთოთ, რომ, ერთის მხრივ, სპეციალურ მეცნიერებათა წარმატებით განსავითარებლად სრულიად აუცილებელია მარქსისტული დიალექტიკური მეთოდის გამოყენება, მეორეს მხრივ, უდიდესი შეცდომაა ფილოსოფიის დებულებათა უბრალო გავრცელება ამა თუ იმ სპეციალურ მეცნიერების, კერძოდ, მათემატიკის კონკრეტულ, სპეციალურ კანონზომიერებათა გამოკვლევის დროს. მართალია, მათემატიკის მიმართ აუცილებლობით ისმის ფილოსოფიური საკითხები, მაგრამ მათემატიკის მიმართ მათი გადაწყვეტა უბრალოდ ფილოსოფიური „ძალადობის“ შედეგს კი არ წარმოადგენს, არამედ ხდება ფილოსოფიის დებულებათა და მათემატიკურ კანონზომიერებათა შორის არსებული ნამდვილი კავშირის გათვალისწინების საფუძველზე, რომელიც პირველ რიგში არის ზოგად და სპეციფიკურ კანონზომიერებათა შორის განუყრელი კავშირი. ამიტომ ის, ვინც ცდილობს მათემატიკა „გადიტანოს“ ფილოსოფიაში, უხეშ ფილოსოფიურ შეცდომას უშვებს თვით ზოგადისა და კონკრეტულის დიალექტიკური ერთიანობის გაგებაშიც, ფაქტიურად მიდის ფილოსოფიისა და მათემატიკას შორის ყოველგვარი კავშირის უარყოფამდე. ასეთ პირობებში მათემატიკა გამოყვანილი ყავთ ფილოსოფიისთან კავშირის დამყარების მოლოდინში, ე. ი. როგორც ისეთი, რომელსაც ფაქტიურად მასთან არაფერი საერთო არა აქვს და არც

¹ В. И. Ленин, Философские тетради, 1947, гл. 329.



ეკნება. ისეთ მათემატიკას, რომელსაც ფილოსოფიასთან არავითარი კავშირი არა აქვს, ძალით ამ კავშირს ვერაფერს ვერ მოიპოვებს და არც ესაჭიროება. ამგვარად, აზრი მათემატიკის დასაფუძნებლად მისი ფილოსოფიაში გადატანის შესახებ, არამატერიალისტურია და არადიალექტიკური.

გავარკვეოთ ახლა როგორია ჰეგელის ფილოსოფიის გნოსეოლოგიური ფესვები მათემატიკაში, რომელნიც გახდნენ საფუძვლად მათემატიკის დაფუძნების ჰეგელიანური თვალსაზრისისა.

ზემოთ ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ მათემატიკის დაფუძნების ჰეგელიანური ჯონცებუა ლოგიკურად წინააღმდეგობრივია და სწყვეტს კავშირს მათემატიკასა და ფილოსოფიას შორის. როგორც ვნახეთ, ამას ორი ძირითადი მიზეზი ჰქონდა: ჯერ-ერთი, ჰეგელმა აზროვნების მთლიანი პროცესი გაყო ორ, ერთმანეთთან დაუკავშირებელ საფეხურებად — განსჯად და გონებად, ამასთან მათემატიკა მიაკუთვნა პირველს, რითაც წაართვა მას საშუალება გონების სფეროში — დიალექტიკური აზროვნების არეში, გასვლისა, მეორეს მხრივ, მან მათემატიკის არსის შესახებ თავის არასწორ შეხედულებათა წყალობით ვერ შესძლო დაენახა ჰეგელიანური კავშირი ფილოსოფიასა და მათემატიკას შორის, როგორც კავშირი ზოგადისა და სპეციფიკურისა.

მაგრამ ეს შეცდომები არ წარმოადგენენ ჰეგელის პირველად გნოსეოლოგიურ შეცდომებს, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მათი ძირითადი შემეცნებითი ფესვები იმალება მათემატიკის უკიდურესი აბსტრაქტულობისა და გარკვეული გარეგნულობის გადაქცევაში წმინდა აბსტრაქტულობად, „წმინდან აბსტრაქტულ გარეგნულობად“.

მათემატიკის უკიდურესი აბსტრაქტულობა მდგომარეობს იმაში, რომ ის განდგება თვით საგანთა კონკრეტული ნივთიერი შინაარსისაგან და თვისობრიობისაგან. ამავე აზრით ის შეისწავლის სინამდვილის გარეგან განსაზღვრულობას, მაგრამ აქ გარეგნულობა რაიმე ზედაპირულობას კი არ ნიშნავს, ვინც მათემატიკის ურთულეს დამოკიდებულებებს გასცნობია, მას არ შეიძლება ჰქონდეს ასეთი ილუზია. გარეგნულია იმდენად, რამდენადაც რაოდენობრივია, რამდენადაც სივრცით ფორმასთან გვაქვს საქმე, რამდენადაც ხდება სივრცითი ფორმის აზრობრივი გამოცალკევება კონკრეტული ნივთიერი შინაარსისაგან, რაოდენობის აზრობრივი გამოყოფა თვისობრიობისაგან. მართალია, ეს განდგომა უკიდურესად ზოგად ფარგლებში ხდება, მეტად კატეგორიულია, მაგრამ შეიძლება იმის ჩვენება, რომ ეს არაა აბსოლუტური განდგომა, ის მაინც შეფარდებითია, ეს არის განდგომა გარკვეული კონკრეტული ზოგადის ფარგლებში¹.

როცა მათემატიკის შეფარდებით აბსტრაქტულობას და გარეგნულობას გადააქცევენ აბსტრაქტულობისა და გარეგნულობის აბსოლუტად, მაშინ მათემატიკას ფაქტიურად სწყვეტენ ობიექტური რეალობისაგან, ვინაიდან აბსოლუტური განდგომა ანუ აბსტრაქტული აბსტრაქტულობა (თუ საერთოდ

¹ იხ. მაგ., ჩვენი შრომა „მათემატიკური აბსტრაქციის ბუნების შესახებ“. სტალინის სახ. ოსუ შრომები, ტ. 64.

შესაძლებელია მისი წარმოდგენა) უკვე აბსტრაქტულობა კი არაა, არამედ რაღაც, წმინდა შინაგანი ფანტასტიური რაობაა — ეს არის აბსტრაქტულობა, რომელმაც დაჰკარგა თვით განდგომის ობიექტი. მაგრამ მოვწყვიტოთ მათემატიკა ობიექტურ რეალობას, ეს ნიშნავს მოვწყვიტოთ ის იმ ზოგადს, რომელიც მან, როგორც მეცნიერებამ, უნდა ასახოს. და თუ მათემატიკას წავართმევთ ზოგადს, ამით წავართმევთ იმ კავშირს, რომელსაც ის მიყავს უზოგადესი მეცნიერებისაკენ, ვინაიდან მისი ზოგადი არის კონკრეტული იმ ზოგადისა, რომელსაც ფილოსოფია შეისწავლის. ამგვარად, ახდენს რა მათემატიკის აბსტრაქტულობისა და გარკვეული გარეგნულობის აბსოლუტიზაციას, ჰეგელი ლოგიკური აუცილებლობით მიდის ამ ორ მეცნიერებას შორის კავშირის გაწყვეტამდე. როცა ჰეგელი ცდილობს დააფუძნოს მათემატიკა, ე. ი. გამოცარიელებული მათემატიკური რაობანი აავსოს შინაარსით და მისცეს მათ აზრი, რომელთაც ის ფილოსოფიიდან სესხულობს, მაშინ, თავისთვის შეუძენველად, ცდილობს აღადგინოს მის მიერვე დაკარგული კავშირი, მაგრამ ეს უკანასკნელი, გაწყვეტილი მეტაფიზიკურად, მხოლოდ დიალექტიკური სინთეზით შეიძლება იქნეს აღდგენილი.

სთვლის რა მათემატიკას წმინდა გარეგნულობის მეცნიერებად, ამით ჰეგელი მას ართმევს არა მარტო ობიექტურობას და შინაარსობრიობას, არამედ ბუნებრივ დიალექტიკურობასაც; ამიტომ შემთხვევითი არაა, რომ ამგვარად გამოფიტული მათემატიკური რაობანი აღმოჩნდებიან სასრულონი და უცვლელნი, ხოლო მათ შორის დამოკიდებულებებს ექნებათ მხოლოდ და მხოლოდ გარეგნული კომბინაციების ხასიათი. მაშინ, მათ, რა თქმა უნდა, თავისი კანონიერი ადგილი უნდა იპოვონ განსჯის სფეროში, რომლის სარბიელსაც წარმოადგენს სასრულობისა, უცვლელობისა, წმინდა გარეგნულობისა და სხვათა სამეფო. მაგრამ, ამასთან ერთად, ჰეგელი ფიქრობს, რომ მათემატიკა არის ასეთი გვარის უსრულყოფილესი მეცნიერება, მაშასადამე, მისი არსებობა თვით წარმოადგენს ჩვენი აზროვნების დაბალ და მაღალ, მეტაფიზიკურ და დიალექტიკურ, სიმბოლიურ და შინაარსობრივ ნაწილებად, განსჯად და გონებად დაყოფის ბუნებრიობის საუცხოო საფუძველს. ჩვენ აქ შევამჩნევთ ანალოგიას იმასთან, რომ კანტიც თვით მათემატიკის არსებობას სთვლიდა საუკეთესო დამამტკიცებელ საბუთად აპრიორული შემეცნების არსებობისა და ამ გარემოებამვე შეასრულა მნიშვნელოვანი როლი მისი შემეცნების თეორიის ჩამოყალიბებაში.

როგორი მდგომარეობაა „ისტორიულად“?

ჩვენ ვნახეთ, რომ მათემატიკას ერთერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია „თვითგანვითარებამდე აბსოლუტური იდეის“ „სხვადაყოფნიდან“ „აბსოლუტურ სულში“ გადასვლის პროცესში. ჰეგელი პირდაპირ ლაპარაკობს იმის შესახებ, რომ მათემატიკური აზროვნება წარმოადგენს აბსოლუტური იდეის განვითარების გამოვლენის ერთერთ საშუალებდ სტადიას, ამასთან უკანასკნელ სტადიას არასრულყოფისა; მთლიანად სწყვეტს რა მათემატიკის ობიექტურ რეალობას, ჰეგელს ის გადააქვს იდეალურ არსებათა სამყაროში, აცხადებს მას ხსენებული პროცესის შემადგენელ ნაწილად. ამ მხრიდან



ჰეგელის ფილოსოფიურ სისტემაში მათემატიკა შემოდის ყოველგვარ მნიშვნელობის გარეშე.

ის გარემოება, რომ ჰეგელის მათემატიკურმა შეხედულებებმა მნიშვნელოვანი როლი შეასრულეს მისი ფილოსოფიური სისტემის ჩამოყალიბებაში, საუცხოვოდ დასტურდება იმ პარალელიზმით, რომელიც არსებობს მისი შენეცნების თეორიის ფაქტიურ წყობაში და მისი ფილოსოფიის ჩამოყალიბების ისტორიულ ნაზს შორის. ეს პარალელიზმი, პირველ რიგში, იმაში მდგომარეობს, რომ, თუმცა მათემატიკას საკმაოდ საპატიო ადგილი უკავია როგორც ლოგიკურ ისე ისტორიულ ასპექტში, მაინც ის, როგორც წესი, მიეკუთვნება შესაბამისად აზროვნების ან აბსოლუტური სულის განვითარების შედარებით დაბალ საფეხურს. დიდი ანალოგია და პარალელიზმი თავს იჩენს შემდეგ გარემოებაშიც: მსგავსად იმისა, რომ მათემატიკა, მოთავსებულია რა განსჯის ჩარჩოებში, განსჯისა და გონების პრინციპიალური გათიშულობის გამო, ვერ აღწევს აზრის სრულყოფას, თუმცა კი განიცდის ამის მუდმივ აუცილებლობას, ასევე „ისტორიულადაც“, წარმოადგენს რა „აბსოლუტური იდეის“ განვითარების რგოლს, მას არ ძალუძს დაამყაროს კავშირი ამავე პროცესის უმაღლეს სტადიასთან — ჰეგელის ფილოსოფიასთან. მათემატიკას ამაში ისიც კი არ შეეძლოს, რომ ის მოწოდებულია იყოს ამ ჯაჭვის უკანასკნელი რგოლის უშუალო წინამავალი, უფრო მეტიც, ის გამოდის შემაერთებელი და განმთიშავი რგოლის წინააღმდეგობრივ მდგომარეობაში.

მათემატიკის ფილოსოფიაში გადატანის უშედეგო ცდა. ჰეგელისათვის მით უფრო დასაბუთებული უნდა ყოფილიყო, რომ გადატანის იდეა სავსებით შეესაბამებოდა ჰეგელის სისტემის აგებულებას იმ აზრით, რომ მისი ფილოსოფია წარმოადგენს აბსოლუტური იდეის განვითარების უმაღლეს ნაყოფს, აბსოლუტური ცოდნის სფეროს, რომელშიც თავისი ჭეშმარიტი მნიშვნელობა უნდა მოიპოვოს ყველა დანარჩენმა მეცნიერებამ.

ჰეგელის ობიექტურ-იდეალისტური თვალსაზრისი კი არ აერთებს, არამედ სთიშავს ამ ორ მეცნიერებას ერთმანეთისაგან და ამიტომ მას არ შეუძლია შექმნას რაიმე ბაზა მათემატიკის დასაფუძნებლად. პირიქით, ის თავისი ობიექტური მნიშვნელობით მიმართულია ამ მიზნის წინააღმდეგ.

მარქსისტულ-ლენინური თვალსაზრისი გახსნის ფილოსოფიისა და მათემატიკის ურთიერთდამოკიდებულების ჭეშმარიტ შინაარსს, როგორც ზოგადისა და სპეციფიკურის კავშირს, და ამით უზრუნველყოფს ზოგად და სწორ მეთოდოლოგიურ მიდგომას დაფუძნების პრობლემისადმი. მხოლოდ ამ ბაზაზე ირკვევა მათემატიკის დაფუძნების შიგამათემატიკური და ფილოსოფიური ასპექტების ერთიანობა და დაფუძნების ამოცანის მთლიანობა.

ზოგადი მათემატიკის
კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში, 6 XI, 59)

М. Чичинадзе

О гегелевской точке зрения относительно обоснования математики

Резюме

Для проблематики обоснования математики существенное значение имеет выработка правильной точки зрения о соотношении математики и философии; эта точка зрения должна обеспечить общий методологический подход к проблеме обоснования. В этой связи представляется подходящим сопоставить позицию диалектического материализма с позицией Гегеля.

Выявляется логическая несостоятельность гегелевской трактовки проблемы обоснования математики, показывается, что она ведет к отрыву математики от философии.

Показывается, что причиной логической противоречивости и безуспешности гегелевской концепции являются:

а) идеалистический характер предпосылок, превращающих абстрактность и некоторый внешний характер предмета математики в чистую абстрактность и внешность, б) внутренняя несвязанность философской системы Гегеля. Выявляется параллелизм между строением гегелевской теории познания и „исторической“ линией философии Гегеля; подобно тому, как математика, будучи заключенной в рамки рассудка, не может, в силу принципиальной разобщенности рассудка и разума, выйти в сферу „диалектического“ мышления, так и „исторически“, являясь звеном процесса развития абсолютной идеи, она не в состоянии установить связь с высшей стадией развития этого же процесса — с гегелевской философией.

Гегелевская точка зрения „переноса“ математики в философию не связывает, а разъединяет эти науки, поэтому она не в состоянии создать базу для обоснования математики. Лишь на основе марксистско-ленинского учения раскрывается истинное содержание соотношения математики и философии, учитывается правда крайний, но все же относительный характер математической абстракции, и тем самым обеспечивается общий и правильный методологический подход к проблематике обоснования.

ა. კუკელაძე

თხელქელლიანი პრიზმული გარსების რხევის საკითხისათვის

გარსებისა და ნაკეცებისაგან შედგენილი სივრცითი კონსტრუქციების (ბუნკერები, აკვედუკები და სხვა) გაანგარიშების სირთულე დაკავშირებულია, ერთის მხრივ, მეცნიერულად დასაბუთებული და ექსპერიმენტით გამართლებული ისეთი სათანადო დაშვებების მიღებით, რომელიც საანგარიშო სქემას დაუახლოვებს კონსტრუქციის ნამდვილი მუშაობის ხასიათს.

მეორეს მხრივ, პრაქტიკულ სიძნელეებს ვხვდებით სათანადო სტატიკისა და დინამიკის ამოცანების ამოხსნაში. ამის გამო საკმაო ყურადღება უნდა მივაქციოთ მიახლოებითი მეთოდების გამარტივების განვითარებას, რათა ისინი პრაქტიკულად გამოსაყენებელი გავხადოთ.

გარსთა თეორიის განვითარებაში ცნობილია შემთხვევები, როდესაც გარსებისა და ნაკეცოვანი სისტემების გაანგარიშებას უდგებოდნენ უხეში მიახლოებით, რის გამოც ადგილი ქონდა ნაგებობის მუშაობის ნამდვილი სურათის დიდ დამახინჯებას.

ასე, მაგალითად, გარსის პირველი მშენებლები დიშინგერი და ფინსტერვალდერი გაუსის ნულოვანი სიმრუდის გარსებისათვის სარგებლობდნენ უმომენტოთა თეორიით. სხვა ავტორები ნაკეცოვან სისტემას წარმოადგენდნენ ურთიერთ სახსრით შეერთებული ცალკეული ფირფიტების სახით და არა ხისტად, რის შედეგადაც განივ კვეთს ლებულობდნენ შედარებით დიდი მარაგით.

1932 წელს პროფესორების ვ. ვლასოვისა და პასტერნაკის მიერ წარმოდგენილი იქნა (კონსტრუქციის მუშაობის განმსაზღვრელი ყველა მნიშვნელოვანი ფაქტორის მხედველობაში მიღებით) ნაკეცოვანი კონსტრუქციის გაანგარიშების ახალი მეთოდი: ეს მეთოდი შემდეგში განავითარა ვ. ვლასოვმა, რომელმაც გარსის, როგორც სივრცითი კონსტრუქციის მუშაობის სწორი ფიზიკური შეფასების შედეგად ნაკეცოვანი კონსტრუქციის გაანგარიშების რთული მომენტური თეორია ხელმისაწვდომი გახადა რიგითი ინჟინერ-კონსტრუქტორებისათვის.

შრომებში პროფ. ვ. ვლასოვის (1, 2) მიერ დამუშავებულია ნაკეცოვანი სისტემის რხევის გაანგარიშების შედარებით მარტივი მეთოდი.

შრომაში (3) ვ. ვლასოვისა და ბ. ტერენინის მიერ შესწავლილია გადახურვის თხელქელლიანი სისტემის საკუთარი რხევა. განხილულია ხუთწახნა-



გოვანი ერთმალის სივრცითი სისტემა, რომლის წახნაგები მრუდოვანად
ებით თავისუფლად ეყრდნობა ორ განივ დიამეტრს და მალში თავისუფ-
ლად ძევს. ჩამაგრების ასეთ შემთხვევაში ფუნდამენტალურ ფუნქციად მიღე-
ბული აქვს $\sin \frac{n\pi x}{l}$; $n=1, 2, 3, \dots$, რაც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

კონსტრუქციის ყველა სხვა ჩამაგრების შემთხვევებში ამოცანის ამოხ-
ნის მიზნით საჭიროა რხევის დიფერენციალურ განტოლებიდან (სტატიკური
განტოლება) მესამე წევრის ამოგდება, რომელიც გამოსახავს სისტემის გრძი-
ვი გადაადგილებით გამოწვეულ ინერციის ძალებს. წინააღმდეგ შემთხვევაში
ამოცანის შესაბამისი ფუნდამენტალური ფუნქციის გამორყენების დროს შე-
უძლებელი ხდება რხევის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის დაყვანა
ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე.

თხელკედლიანი ნაკეცოვანი კონსტრუქციის რხევის შესწავლის მიზნით
საჭიროდ ვცანით გამოგვეყვლია, თუ რა გავლენას ახდენს სისტემის რხევის
სიხშირეზე:

ა. სისტემის გრძივი გადაადგილებით გამოწვეული ინერციის ძალები.

ბ. დატვირთვა.

გ. ჩამაგრების სხვადასხვა შემთხვევაში რხევის სიხშირის ცვლილება
 l/f -ის ცვლადობასთან დაკავშირებით (სადაც l —მალის სიგრძეა, f —ჩაკიდე-
ბის ისარი).

დ. განაპირა ელემენტების მიმართულების გავლენა პრიზმული გარსის
ლუნვა-გრებიით რხევის სიხშირეზე.

ნებისმიერ რაოდენობის წახნაგებისაგან შედგენილი ნაკეცოვანი კონ-
სტრუქციის თავისუფალი რხევის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა
დატვირთვის ზოგად შემთხვევაში წარმოდგენილია შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=i-1}^{k=i+1} r_{ik}^{\sigma} \sigma_k(x) + \sum_{k=i-2}^{k=i+2} r_{ik}^{\rho} G_k''(x) + \frac{\omega^2}{E} \left[m_i \sigma_i''(x) - \sum_{k=i-2}^{k=i+2} r_{ik}^0 \sigma_k(x) \right] = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{k=i-2}^{k=i+2} \theta_{ik}^{\sigma} \sigma_k(x) + \sum_{k=i-1}^{k=i+1} \theta_{ik}^{\rho} G_k''(x) = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots),$$

სადაც: $\sigma_k(x)$, $G_k(x)$ —საძიებელი ფუნქციებია და წარმოადგენენ გრძივ ნორ-
მალურ ძაბვასა და განივ მლუნავ მომენტს.

r_{ik}^{σ} , r_{ik}^{ρ} , θ_{ik}^{σ} , θ_{ik}^{ρ} , r_{ik}^0 — განტოლების კოეფიციენტებია და დამოკიდებულია
ნაკეცოვანი კონსტრუქციის გეომეტრიულ ზომებზე.

ω —საკუთარი რხევის სიხშირე,

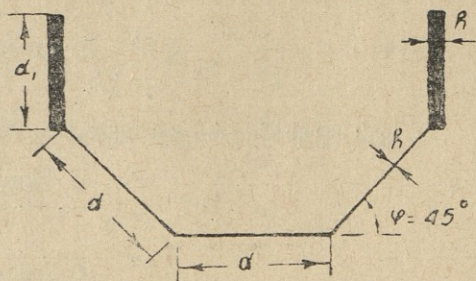
E —დრეკადობის მოდული,

m —მასა.

ა. (1) განტოლებათა სისტემაში გრძივი გადაადგილებით გამოწვეული ინერციის ძალის რხევის სიხშირეზე გავლენის განსაზღვრის მიზნით ჩატარებულია თავისუფლად დაყრდნობილი ხუთწახნაგოვანი ჩაზნექილი ნაკეცოვანი კონსტრუქციის დინამიკური გაანგარიშება. შემდეგი გეომეტრიული ზომებით: $d=2$ მტ. $h=0,15$ მტ. $d_1=1,5$ მტ. $h_1=0,30$ მტ. $l=15$ მტ. იხ. ნახ. 1.

ეს ამოცანა ილუსტრირებულია რიცხვითი მაგალითით და შესრულებულია ორ შემთხვევაში.

1. (1) რხევის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში სისტემის გრძივი გადაადგილებით გამოწვეული ინერციის ძალა მხედველობაშია მიღებული. ამასთან, სიხშირის საანგარიშო ფორმულა ღებულობს სახეს:



ნახ. 1

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 g E F_0}{\gamma l^4} S^2, \quad (2)$$

სადაც: g — სიმძიმის ძალის აჩქარება,

γ — სხეულის მოცულობითი წონა,

l — სისტემის მალი,

$F_0 = 1$ მტ².

S^2 — სიდიდე ω^2 სიხშირის კვადრატის პროპორციულია. ამ შემთხვევაში დადგენილი იქნა სიხშირის შემდეგი მნიშვნელობები:

რხევის სიმეტრიული შემთხვევა:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,05665 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,9002 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{22,817 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

რხევის უკუსიმეტრიული შემთხვევა:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,09007 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,57286 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{5,05197 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$



2. სისტემის გრძივი გადაადგილებით გამოწვეული ინერციის მახასიათებლებში არ არის მიღებული.

რხევის სიმეტრიულ შემთხვევაში ვლებულობთ სიხშირის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,0686 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,94925 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

რხევის უკუსიმეტრიულ შემთხვევაში

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,09093 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,57834 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{6,59422 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

პირველ და მეორე შემთხვევაში სიხშირებს შორის შედარება გვიჩვენებს, რომ რხევის ძირითადი ტონის სიხშირე უმნიშვნელოდ განსხვავდება ერთიმეორისაგან, ხოლო უმაღლეს სიხშირეებს შორის იგი აღწევს 23%-ს.

ბ. დატვირთული ხუთწახნაგოვანი ნაკეცოვანი კონსტრუქციის (აკვედუკის) დინამიკური გაანგარიშების დროს წყლის წნევის შესაბამისი დატვირთვა წიბოებში მოვდოთ მასების (m) სახით და წარმოვიდგინოთ თანაბრად განაწილებულად მთელ სიგრძეზე (ნახ. 2). რხევის სიმეტრიულ შემთხვევაში სიხშირის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$S^6 - 3,1896 S^4 + 0,42256 S^2 - 0,007624 = 0,$$

რომლის ფესვებია:

$$S_3^2 = 3,0518$$

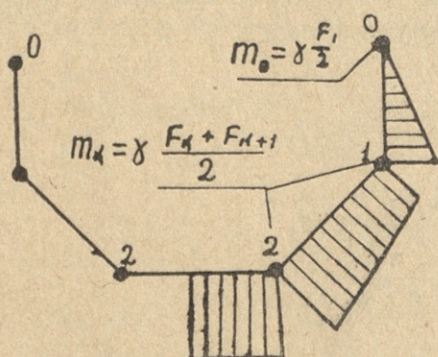
$$S_2^2 = 0,11734$$

$$S_1^2 = 0,01976$$

შესაბამისად, სიხშირის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,01976 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,11794 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$



ნახ. 2

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{3.0518 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

თუ ჩავსვამთ ფესვების ამ მნიშვნელობას ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ ნორმალურ ძაბვათა ამპლიტუდების შემდეგ ფარდობას:

$$\text{როცა } S_1^2 = 0,01976 \quad \frac{A_0}{A_1} = -0,85732 \quad \frac{A_2}{A_1} = -0,5944$$

$$\text{---} S_2^2 = 0,11794 \quad \frac{A_0}{A_1} = -30,4652 \quad \frac{A_2}{A_1} = 23,182$$

$$\text{---} S_3^2 = 3,0511 \quad \frac{A_0}{A_1} = 1 \quad \frac{A_2}{A_1} = 1,$$

$$\text{სადაც: } A_0 = \frac{F_0}{l^4} \sigma_0 \quad A_1 = \frac{F_0}{l^4} \sigma_1 \quad A_2 = \frac{F_0}{l^4} \sigma_2$$

აქ A_0, A_1, A_2 სიდიდე $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ ამპლიტუდებისაგან განსხვავდებიან, მხოლოდ პროპორციონალური კოეფიციენტებით.

რხევის ეს ფორმა მოცემულია ნახ. 3.

უკუსიმეტრიული რხევის შემთხვევაში ვლტულობთ სიხშირის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0.025455 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

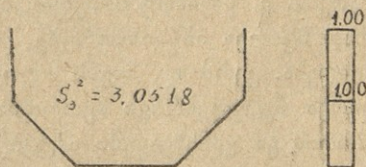
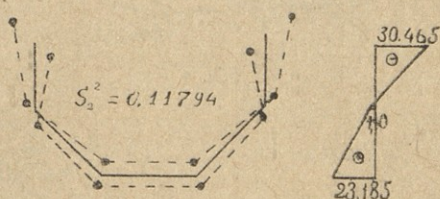
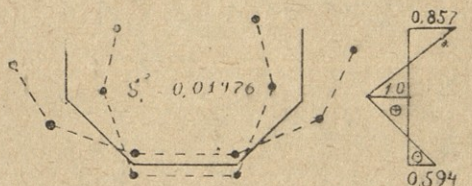
$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0.062445 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0.72805 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

რხევის ეს ფორმა მოცემულია ნახ. 4.

დატვირთული კონსტრუქციის დინამიური გაანგარიშებით გამოვლინებულია, რომ აქ აღგილი აქვს რხევის სიხშირის შემცირებისა და შესაბამისად ნორმალურ ძაბვათა ამპლიტუდების ფარდობის გადიდებას.

კონსტრუქციის დატვირთულ მდგომარეობაში გაანგარიშებისას სისტემის გრძივი გადაადგილებით გამოწვეული ინერციის ძალები არავითარ გავლენას არახდენს კონსტრუქციის რხევის ძირითადი ტონის სიხშირეზე, ხო-



ნახ. 3



ლო უდიდეს სიხშირეებს შორის განსხვავება არ აღემატება 7%. ეს შედეგები ერთხელ კიდევ ასაბუთებს (1) რხევის დიფერენციალურ განტოლებაში მესამე წევრის უგულვებელყოფის სამართლიანობას.

მოცემულ ნაკეცოვან კონსტრუქციის, როგორც ორ საყრდენზე თავითარს რხევის სიხშირის საანგარიშო ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\omega = \frac{n\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (3)$$

სადაც m — გრძივი მასაა და იგი ტოლია

$$m = \gamma \frac{F}{g}.$$

(3) სიხშირის ფორმულაში სათანადო მნიშვნელობების ჩასმით, როცა $n=1$, ვღებულობთ:

$$\omega = 9,21 \text{ სექ}^{-1},$$

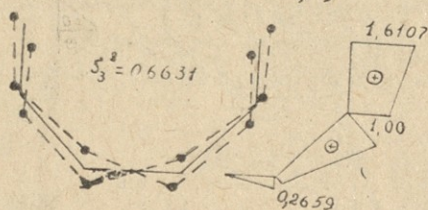
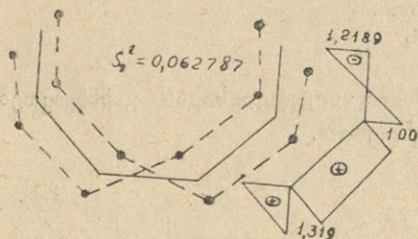
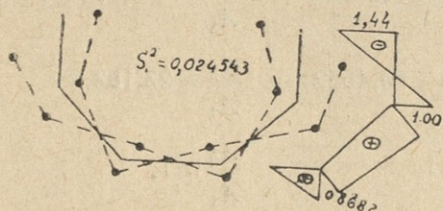
$$\text{სადაც } k = \frac{1}{\delta l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$$

ვ. ვლასოვის მეთოდით ნაკეცოვანი კონსტრუქციის დინამიკური გაანგარიშების დროს რხევის უმცირესი სიხშირე, როგორც მიღებული გვექონდა, ტოლია

$$\omega = 2,3 k \text{ სექ}^{-1}.$$

მიღებული შედეგების შედარება გვიჩვენებს, რომ თხელკედლიანი სისტემებისათვის, ვ. ვლასოვის მეთოდით, მიღებული რხევის უმცირესი სიხშირე ბევრად მცირეა იმ სიხშირეზე, რომელიც ძელის ელემენტალური თეორიით მიიღება, — კერძოდ, ჩვენს მიერ აღებულ შემთხვევაში ეს სიხშირე 3—4-ჯერ მცირეა ჩვეულებრივი მეთოდით მიღებულ რხევის სიხშირესთან. სიხშირეებს შორის ეს განსხვავება ამტკიცებს იმ პრაქტიკული შედეგის სისწორეს, რომელიც ვ. ვლასოვის თეორიის საფუძველზე მიიღება ისეთი რთული კონსტრუქციებისათვის, როგორიცაა ჩვენს მიერ შესწავლილი ნაკეცოვანი სისტემა.

გ. ცნობილია, რომ კონსტრუქციის რხევის საკუთარი სიხშირე (სხვა ძირითად ფაქტორებთან ერთად) დამოკიდებულია სისტემის მალის (1) პროფილის ჩაკიდების ისართან ფარდობაზე.



ნახ. 4

კონსტრუქციის რხევის ძირითადი ტონი $1/f$ ფარდობის შემცირებით თან დაკავშირებით თანდათანობით მატულობს.

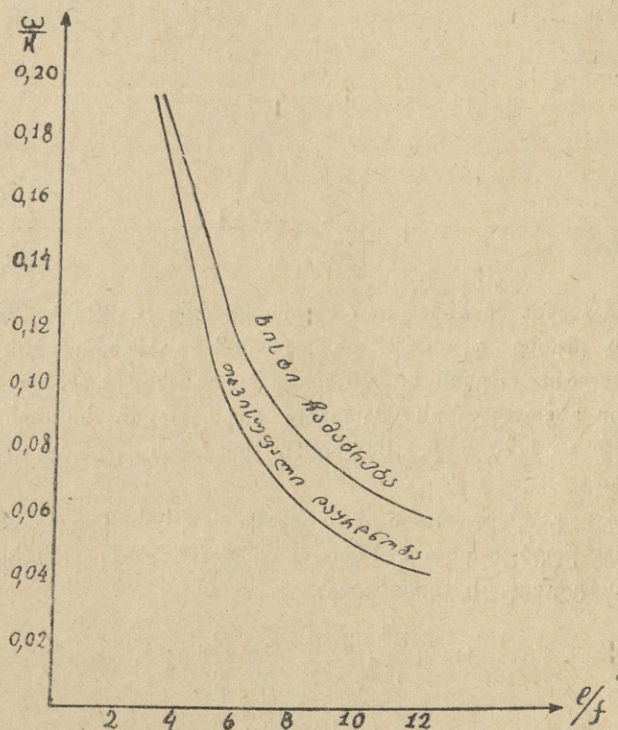
ჩვენს მიერ განხილულია ნაკეცოვანი კონსტრუქციის მრუდი კიდეებით თავისუფლად დაყრდნობილი და ხისტად ჩამაგრებული კონსტრუქციის რხევის სიმეტრიული შემთხვევა.

საილუსტრაციოდ ავიღეთ სისტემის მალის (l) ჩაკიდების ისართან (f) ფარდობის 5 მნიშვნელობა, როცა იგი 3, 5, 8, 10 და 12-ის ტოლია.

მიღებული შედეგები ნაჩვენებია ცხრილში და წარმოდგენილია გრაფიკის სახით (ნახ. 5).

რხევის ძირითადი სიმეტრიული ფორმა

სასაზღვრო პირობა	3	5	8	10	12	შენიშვნა
თავისუფალი დაყრდნობა	0,0258k'	0,0104k'	0,0079k'	0,00757k'	0,00711k'	სადაც $k' = \sqrt{\frac{gEF_0}{\gamma}}$
ხისტი ჩამაგრება	0,0497k'	0,0172k'	0,0113k'	0,0109k'	0,0106k'	



ნახ. 5

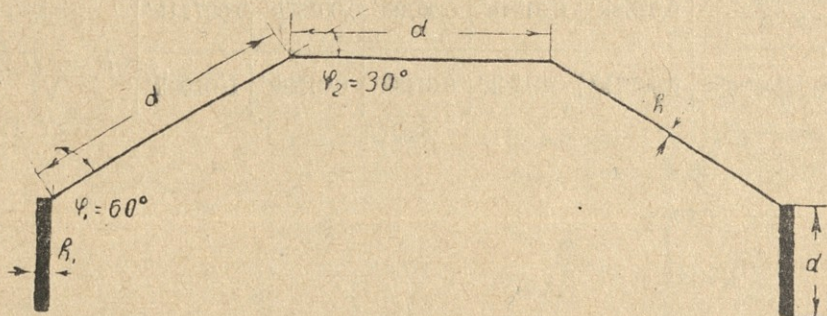
როგორც გრაფიკიდან ჩანს გეომეტრიულად ერთი და იგივე მოხაზულობის, ღრეკადი თვისებების და ერთი და იგივე განივი კვეთის სისტემები-



სათვის სიხშირე დამოკიდებულია სისტემის მალზე ანუ $1/f$ პარამეტრზე. როგორც ეს პარამეტრი კლებულობს, მათი სიხშირეები იზრდება და განხილული სასაზღვრო პირობის შემთხვევისათვის ისინი ერთიმეორეს უახლოვდება.

დ. პრიზმული გარსის რხევის მახასიათებლებზე განივი კვეთის ფორმის გავლენის შესწავლის მიზნით ჩატარებულია ნაკეცოვანი კონსტრუქციის დინამიკური გაანგარიშების ყველა 4 შემთხვევა, როდესაც კონსტრუქციის განაპირა ელემენტს სხვადასხვა მიმართულება აქვს. მაგალითში შესწავლილია თავისუფლად დაყრდნობილი ხუთწახნაგოვანი ნაკეცოვანი სისტემა შემდეგი გეომეტრიული ზომებით: $d_1=1,5$ მტ., $d=3,5$ მტ. $h_1=0,24$ მტ. $h=0,1$ მტ.

შემთხვევა პირველი. დავუშვათ, რომ ნაკეცოვან კონსტრუქციის განაპირა ელემენტებს აქვს ვერტიკალური მიმართულება. შერჩეული სისტემებისათვის შედგენილი იქნა მოძრაობის და ალგებრულ განტოლებათა სის-



7,45 მ

ნახ. 6

ტემა. კერძო მაგალითში მივიღოთ მალის სიგრძე $l=20$ მტ. მოსაზღვრე წახნაგებს შორის კუთხე $\varphi_1=60^\circ$ და $\varphi_2=30^\circ$. გაანგარიშების გამართივების მიზნით განვიხილავთ რხევის სიმეტრიულ და უკუსიმეტრიულ შემთხვევებს.

წინასწარი გამოთვლების შედეგად ვღებულობთ: სისტემის განივი კვეთის ფართი $F=1,75$ მტ², სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატი $c=1,9519$ მტ.

ალგებრულ განტოლებათა სისტემაში გარსის ყველა მნიშვნელობების შეტანის შემდეგ ვღებულობთ სიხშირის შემდეგ მნიშვნელობებს:

რხევის სიმეტრიული შემთხვევა:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{40,5 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{10,289 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,662 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

რხევის უკუსიმეტრიულ შემთხვევაში სიხშირის განტოლებას მივაქვს შემდეგ სახე:

$$S^6 - 30,565 S^4 - 204,164 S^2 - 8,6432 = 0,$$

რომლის ფესვებია:

$$S_1^2 = 0.0426 \quad S_2^2 = 20.734 \quad S_3^2 = 9,784.$$

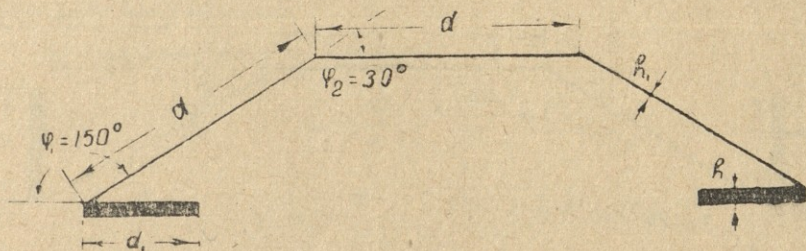
შესაბამისად ვღებულობთ სიხშირის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0.0426 g E F}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{9,784 g E F}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{20.734 g E F}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

შემთხვევა მეორე: ნაკეცოვანი კონსტრუქციის გვერდით წახნაგებს აქვს ჰორიზონტალური მიმართულება (ნახ. 7). სიმძიმის ცენტრის კოორდინატი $c = 0,7$ მტ. $\varphi_1 = 150^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$.



ნახ. 7

გარსის სათანადო მნიშვნელობების ალგებრულ განტოლებაში შეტანით ვღებულობთ სიხშირის განტოლებას, რომლის ფესვებია

$$S_1^2 = 40,5,$$

$$S_2^2 = 0,01445,$$

$$S_3^2 = 1,37745.$$

შესაბამისად სიხშირის მნიშვნელობებია

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{40.5 g E F}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,01445 g E F}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{1,37745 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

რხევის უკუსიმეტრიულ შემთხვევაში სიხშირის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$S^6 - 20,41 S^4 + 94,99 S^2 - 9,135 = 0.$$

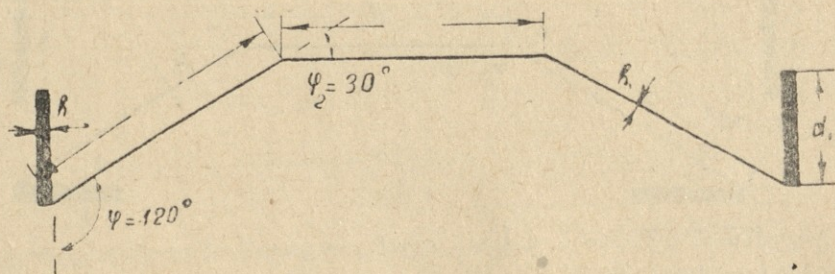
შესაბამისად ვღებულობთ სიხშირის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,0987 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{6,969 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{13,243 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

შემთხვევა მესამე: ნაკეცოვანი კონსტრუქციის განაპირა წახნაგებს აქვს ნახაზზე მოცემული სახე (ნაი. 8). ამ შემთხვევაში წახნაგებს შორის კუთხე $\varphi_1 = -120^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$, სიძიმის ცენტრის კოორდინატი $c = 1,0$ მეტ.



ნაი. 8

რხევის სიმეტრიულ შემთხვევაში ვღებულობთ სიხშირის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{40,5 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,2306 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{3,7948 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

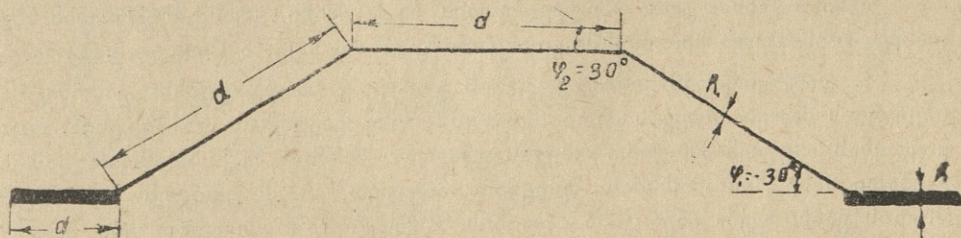
რხევის უკუსიმეტრიული შემთხვევა:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,0971 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{4,677 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{14,585 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

შემთხვევა მეოთხე: ნაკეცოვანი კონსტრუქციის განაპირა წახნაგებს აქვს ჰორიზონტალური მიმართულება. წახნაგებს შორის კუთხე $\varphi_1 = 30^\circ$ $\varphi_2 = 30^\circ$ (ნახ. 9).



ნახ. 9

აღებულ შემთხვევაში კონსტრუქციის რხევის სიხშირეების შემდეგ მნიშვნელობებს ვღებულობთ:

რხევის სიმეტრიული შემთხვევა:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{40,5 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,3541 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{0,4719 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

რხევის უკუსიმეტრიული შემთხვევა:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{1,56 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{9,418 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{48,06 g E F_0}{\gamma}} \text{ სეკ}^{-1}.$$

ჩატარებული გაანგარიშების შემდეგ ვღებულობთ, რომ გვერდითი წახნაგების სხვადასხვა მიმართულების შემთხვევაში სიხშირის ერთი მნიშვნელობა ერთი და იგივე სიდიდისაა და წარმოადგენს განივი კვეთის გრძივი მიმართუ-



ლებით გადაადგილებას, რომლის დროსაც აღვლილი არა იქვს ზედა მნიშვნელობები ლუნვას.

რხევის ყველა დანარჩენი სიხშირეები წარმოადგენენ ლუნვა-გრეხითი რხევის სიხშირეებს, რომელთა ძირითადი ტონის მნიშვნელობები ერთი მეორესაგან განსხვავებულ სიდიდეებს წარმოადგენენ.

დასკვნა

ზემოთ განხილული თხელკედლიანი ნაკეცოვანი კონსტრუქციების სხვადასხვა დინამიკურ პირობებში გაანგარიშებამ მიგვიყვანა შემდეგ დასკვნამდე:

1. დაუტვირთავი კონსტრუქციის გრძივი გადაადგილებით გამოწვეული ინერციის ძალები რხევის ძირითად სიხშირეზე გავლენას არ ახდენენ. ისინი გავლენას ახდენენ მხოლოდ რხევის უმაღლეს სიხშირეზე. სათანადო განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღეთ, რომ უდიდეს სიხშირეებს შორის განსხვავება ინერციის ძალების მხედველობაში მიღებით და მიუღებლად შეადგენს 23%.

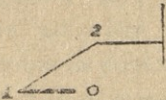
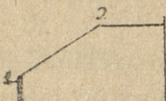
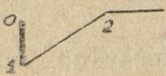
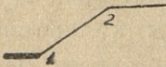
2. სისტემის გრძივი გადაადგილებით გამოწვეული ინერციის ძალების გავლენა რხევის სიხშირეზე მცირდება მასის გაზრდასთან ერთად, დატვირთული იგივე კონსტრუქციის გაანგარიშების დროს მისი გავლენა შემცირდა 7%-მდე. მასის გაზრდა იწვევს რხევის სიხშირის შემცირებას.

3. თხელკედლიანი სივრცითი პრეზმული კონსტრუქციის დაყრდნობის გარკვეულ პირობებში რხევის ძირითად ფორმას წარმოადგენს ლუნვა-გრეხითი რხევა, რომლის ძირითადი ტონის (უმცირესი) სიხშირე გაცილებით დაბალია ლუნვითი რხევის უმცირეს სიხშირეზე.

4. ნაკეცოვანი კონსტრუქციის რხევის სიხშირეები დამოკიდებული არიან $1/f$ პარამეტრზე, როდესაც ეს პარამეტრი კლებულობს რხევის სიხშირეები იზრდება და განხილული სასაზღვრო პირობისათვის მათი მნიშვნელობები ერთმანეთს უახლოვდებიან.

5. თხელკედლიანი ნაკეცოვანი კონსტრუქციებისათვის ე. ვლასოვის ნაკეცის შემცველი მეთოდით მიღებული რხევის ძირითადი ტონის უმცირესი სიხშირე ბევრად მცირეა იმ სიხშირეზე, რომელიც იმავე სისტემის რთული პროფილის ძელის სახით წარმოდგენასა და არსებული ელემენტარული თეორიის საფუძველზე გაანგარიშებით მიიღება. ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში სიხშირე 3—4 ჯერ მცირეა ჩვეულებრივი მეთოდით მიღებულ სიხშირეზე.

6. ნაკეცოვანი კონსტრუქციის ლუნვა-გრეხითი რხევის სიხშირეები დამოკიდებულია კონსტრუქციის განივი კვეთის ფორმაზე. სისტემის გვერდითი წახნაგების სხვადასხვა მიმართულების დროს მიღებული რხევის უმცირესი (ძირითადი ტონი) და უდიდესი სიხშირეები წარმოადგენილია შემდეგ ცხრილში:

განვი კვეთი	უმცირესი სიბ- შირე (ძირითა- დი ტონი)	უმალესი სიბშირე	შენიშვნა
	$0,1205k_2$	$3,655k_2$	<p>სადაც</p> $k_2 = \frac{\pi^3}{l^2} \sqrt{\frac{gEF_0}{\gamma}}$
	$0,2065k_2$	$4,551k_2$	
	$0,3115k_2$	$4,95k_2$	
	$0,595k_2$	$6,948k_2$	

ლიტერატურა

1. В. З. Власов—Строительная механика тонкостенных пространственных систем.
2. Исследования по динамике сооружений. Сборник статей под редакцией проф. Рабиновича.

თეორიული მექანიკის
კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში, 1 VII. 1957 წ.)

М. Н. Кукуладзе

К вопросу колебаний тонкостенных призматических оболочек

Резюме

В настоящей работе с применением метода В. З. Власова рассмотрены расчеты свободных колебаний тонкостенных призматических конструкций при разных нагрузках и направлениях бортовых элементов. В результате анализа мы пришли к следующим выводам:

1. Силы инерции, вызванные продольными перемещениями незагруженной системы, не оказывают влияния на основные частоты колебаний. Их влияние наблюдается только на высшие частоты. В резуль-



тате сравнения решений соответствующих систем уравнений мы установили, что разность между высшими частотами, с учетом и без учета сил инерции составляет 23%.

2. С увеличением массы сооружения влияние сил инерции, вызванных продольными перемещениями систем, на частоты колебаний уменьшаются. При расчете той же конструкции в нагруженном состоянии влияние уменьшилось до 7%-ов. Увеличение массы повлекло уменьшение частот колебаний.

3. Основной формой колебаний вогнутой тонкостенной пространственной складчатой конструкции являются изгибно-крутильные колебания, основные частоты которых значительно ниже основных частот изгибных колебаний.

4. Частоты изгибно-крутильных колебаний вогнутой складчатой системы зависят от параметра l/f (где l —пролет системы, а f стрела прогиба). При уменьшении этого параметра частоты колебаний возрастают и для рассмотренных граничных условий (свободное опирание и жесткие заделки концов) их значения сближаются.

5. Основные частоты колебаний вогнутых тонкостенных складчатых систем, полученных методом заменяющей складки В. Власова, 3—4 раза меньше частот, полученных при представлении той же системы в виде балки сложного профиля и при применении элементарной теории Релея.

6. Частоты изгибно-крутильных колебаний оболочки, в зависимости от формы её поперечного сечения (собственно, только в зависимости от направления бортового элемента), получают ряд значений. Значения основного тона и наивысших частот колебаний конструкций при разных направлениях бортового элемента (см. на стр. 315).

М. Сулханаури

ДВОЙНЫЕ СВЕРТКИ И УМНОЖЕНИЕ (C, α, β) СУММИРУЕМЫХ ДВОЙНЫХ РЯДОВ И ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этой работе доказываются некоторые теоремы о двойных свертках, которые являются распространением известных для функции одного переменного теорем Кноппа и Чезаро [1], [2]. На основании доказанных теорем рассматриваются некоторые вопросы умножения (C, α, β) суммируемых двойных рядов и двойных интегралов. Распространены известные для обыкновенных числовых рядов и интегралов теоремы Чезаро, Чепмена, Харди-Литлвуда и др. [2], на случай двойных рядов и двойных интегралов.

§ 1. О двойных свертках функции двух переменных.

Пусть даны две функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, которые определены в области $R_0 = (0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty)$ и интегрируемы в смысле Лебега в любой области $R = (0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b)$, где a и b произвольные положительные числа. Двойной сверткой этих функции называется функция

$$C(x, y) = \int_0^x \int_0^y a(t, \tau) b(x-t, y-\tau) dt d\tau \quad (1.1)$$

Рассмотрим две положительные функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ определенные в области R_0 и интегрируемые в смысле Лебега в любой области R . Пусть эти функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x, y)}{\Phi(x, y)} = 0, \quad \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, y)}{\Phi(x, y)} = 0, \quad (1.2)$$



$$\left. \begin{aligned}
 \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(x, y)} \int_0^x \int_0^N \varphi(t, \tau) \psi(x-t, y-\tau) dt d\tau &= 0, \\
 \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(x, y)} \int_0^N \int_0^y \varphi(t, \tau) \psi(x-t, y-\tau) dt d\tau &= 0, \\
 \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(x, y)} \int_0^x \int_0^N \psi(t, \tau) \varphi(x-t, y-\tau) dt d\tau &= 0, \\
 \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(x, y)} \int_0^N \int_0^y \psi(t, \tau) \varphi(x-t, y-\tau) dt d\tau &= 0,
 \end{aligned} \right\} (1.2')$$

для любого фиксированного N , где

$$\Phi(x, y) = \int_0^x \int_0^y \varphi(t, \tau) \psi(x-t, y-\tau) dt d\tau. \quad (1.3)$$

Теорема 1. Если имеют место равенства

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{a(x, y)}{\varphi(x, y)} = A, \quad \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{b(x, y)}{\psi(x, y)} = B \quad (1.4)$$

и функции $\{a(x, y)\varphi(x, y)^{-1}\}$ и $\{b(x, y)\psi(x, y)^{-1}\}$ ограничены в области R_0 , то имеет место равенство.

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{\Phi(x, y)} = AB,$$

где $C(x, y)$ определяется равенством (1.1) а $\Phi(x, y)$ равенством (1.3).

Доказательство. Не ограничивая общности можем считать, что $A = B = 1$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $1 - \varepsilon > 0$. Согласно равенств (1.4), для такого числа ε найдется такое число $N(\varepsilon) > 0$, чтобы имели место неравенства:

$$(1 - \varepsilon)\varphi(t, \tau) < a(t, \tau) < (1 + \varepsilon)\varphi(t, \tau), \quad \text{когда } t > N, \tau > N, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 (1 - \varepsilon)\psi(x-t, y-\tau) &< b(x-t, y-\tau) < (1 + \varepsilon)\psi(x-t, y-\tau), \\
 \text{когда } x-t > N, y-\tau > N, & \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

отсюда

$$(1 - \varepsilon)^2 \varphi(t, \tau) \psi(x - t, y - \tau) < a(t, \tau) b(x - t, y - \tau) < (1 + \varepsilon)^2 \varphi(t, \tau) \psi(x - t, y - \tau), \quad (1.7)$$

когда $t > N$, $\tau > N$, $x - t > N$, $y - \tau > N$.

В силу ограниченности функции $\{a(x, y) \varphi(x, y)^{-1}\}$ и $\{b(x, y) \psi(x, y)^{-1}\}$ найдется такое положительное число M , чтобы имели место неравенства

$$|a(x, y)| < M \varphi(x, y), \quad |b(x, y)| < M \psi(x, y) \quad \text{когда } (x, y) \in R_0. \quad (1.8)$$

Теперь допустим, что $x > 2N$, $y > 2N$ и $C(x, y)$ представим так:

$$C(x, y) = \left\{ \iint_{00}^{Ny} + \iint_{N0}^{xN} + \int_{x-N}^x \int_N^y + \int_N^{x-N} \int_{y-N}^y + \right. \\ \left. + \int_N^{x-N} \int_N^{y-N} \right\} a(t, \tau) b(x - t, y - \tau) dt d\tau = \sum_{p=1}^5 J_p(x, y). \quad (1.9)$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Согласно (1.7) имеем

$$\left. \begin{aligned} J_5(x, y) &< (1 + \varepsilon)^2 \int_N^{x-N} \int_N^{y-N} \varphi(t, \tau) \psi(x - t, y - \tau) dt d\tau, \\ J_5(x, y) &> (1 - \varepsilon)^2 \int_N^{x-N} \int_N^{y-N} \varphi(t, \tau) \psi(x - t, y - \tau) dt d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1.9')$$

На основании (1.2') легко показать, что

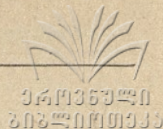
$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(x, y)} \int_N^{x-N} \int_N^{y-N} \varphi(t, \tau) \psi(x - t, y - \tau) dt d\tau = 1,$$

поэтому из (1.9') получается

$$\overline{\lim}_{x, y \rightarrow \infty} \frac{J_5(x, y)}{\Phi(x, y)} \leq (1 + \varepsilon)^2, \quad \underline{\lim}_{x, y \rightarrow \infty} \frac{J_5(x, y)}{\Phi(x, y)} \geq (1 - \varepsilon)^2 \quad (1.10)$$

в силу (1.8) имеем

$$|J_1(x, y) + J_2(x, y) + J_3(x, y) + J_4(x, y)| < M^2 \left\{ \iint_{00}^{Ny} + \iint_{N0}^{xN} + \int_{x-N}^x \int_N^y + \right. \\ \left. + \int_N^{x-N} \int_{y-N}^y \right\} \varphi(t, \tau) \psi(x - t, y - \tau) dt d\tau.$$



Отсюда, согласно (1.2') легко покажем, что

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{J_1(x, y) + J_2(x, y) + J_3(x, y) + J_4(x, y)}{\Phi(x, y)} = 0. \quad (1.11)$$

Соединяя (1.10) и (1.11) получаем

$$(1 - \varepsilon)^2 \leq \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{\Phi(x, y)} \leq \overline{\lim}_{x, y \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{\Phi(x, y)} \leq (1 + \varepsilon)^2.$$

В силу произвольности ε , эти соотношения доказывают теорему.

Теорема 2. Если $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma > -1$, $\delta > -1$ данные числа и имеют место равенства

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{a(x, y)}{x^\alpha y^\beta} = A, \quad \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{b(x, y)}{x^\gamma y^\delta} = B \quad (1.12)$$

кроме того, если функции $\{a(x, y)(x^\alpha y^\beta)^{-1}\}$ и $\{b(x, y)(x^\gamma y^\delta)^{-1}\}$ ограничены в области $R_0 = (0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty)$, то имеет место равенство

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} = AB \cdot K,$$

где

$$K = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+2)\Gamma(\beta+\delta+2)}, \quad (*)$$

а Γ Эйлеров интеграл второго рода.

Эта теорема является частным случаем предыдущей теоремы¹.

Определение. Функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, которые определены в области R_0 и удовлетворяют условиям (1.2) и (1.2'), будем называть λ сопряженными функциями, $\lambda \geq 1$, если для любого фиксированного числа $\nu > 0$ существуют числа $A_\nu > 0$, $B_\nu \geq A_\nu$ такие что, если $\frac{1}{\lambda} \leq$

$\leq \frac{x}{y} \leq \lambda$, то

$$A_\nu \leq \frac{\int_0^{xy} \int_0^{xy} \Phi(t, \tau) \psi(x-t, y-\tau) dt d\tau}{\Phi(x, y)} \leq B_\nu, \quad (1.13)$$

$$A_\nu \leq \frac{\int_0^{\nu y} \int_0^{\nu y} \Phi(t, \tau) \psi(x-t, y-\tau) dt d\tau}{\Phi(x, y)} \leq B_\nu.$$

¹ Теорема 2 нами была доказана самостоятельно [9].

Теорема 3. Пусть $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — сопряженные функции. Если имеют место равенства (1.4) и, кроме этого,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x, y)}{\Phi(x, y)} = 0 \text{ равномерно относительно } y \text{ в} \\ \text{любом конечном интервале из } (0, \infty), \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{a(x, y)}{\Phi(x, y)} = 0 \text{ равномерно относительно } x \text{ в} \\ \text{любом конечном интервале из } (0, \infty) \end{aligned} \right\} (1.14)$$

а функция $\{b(x, y)\psi(x, y)^{-1}\}$ ограничена в области R_0 , то

$$\lim_{(x, y)_{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{\Phi(x, y)} = AB.$$

Символ $(x, y)_{\lambda} \rightarrow \infty$ означает, что при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ выполняется неравенство $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{x}{y} \leq \lambda$.

Доказательство. И здесь допустим $A=B=1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ так чтобы $1 - \varepsilon > 0$. Для этого ε , согласно (1.4), найдется такое число $N(\varepsilon) > 0$, чтобы имели место неравенства (1.5), (1.6) и (1.7). В силу ограниченности функции $\{b(x, y)\psi(x, y)^{-1}\}$ второе неравенство из (1.8) останется в силе.

Согласно (1.14) найдется такое число $N_1 > N$, чтобы имели место неравенства

$$\left. \begin{aligned} |a(x, y)| < \frac{\varepsilon}{MB_N} \Phi(x, y), \text{ когда } x > N_1, 0 \leq y \leq N, \\ |a(x, y)| < \frac{\varepsilon}{MB_N} \Phi(x, y), \text{ когда } y > N_1, 0 \leq x \leq N. \end{aligned} \right\} (1.15)$$

Допустим теперь $x > 2N_1, y > 2N_1$ и обратимся к равенству (1.9). Соотношения (1.10) остаются в силе.

Согласно (1.5) и (1.8) имеем

$$\begin{aligned} |J_3(x, y) + J_4(x, y)| < M(1 + \varepsilon) \left(\int_{x-N}^x \int_N^y + \right. \\ \left. + \int_N^{x-N} \int_{y-N}^y \right) \varphi(t, \tau) \psi(x-t, y-\tau) dt d\tau. \end{aligned}$$



Отсюда, на основании (1.2'), легко показать, что

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{J_3(x, y) + J_4(x, y)}{\Phi(x, y)} = 0. \quad (1.16)$$

$J_1(x, y)$ представим так

$$\begin{aligned} J_1(x, y) &= \left(\int_0^{N N_1} \int_0^{N y} + \int_0^{N y} \int_0^{N N_1} \right) a(t, \tau) b(x-t, y-\tau) dt d\tau = \\ &= J_1^{(1)}(x, y) + J_1^{(2)}(x, y). \end{aligned}$$

В силу (1.6) и (1.2) ясно что

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{J_1^{(1)}(x, y)}{\Phi(x, y)} = 0. \quad (1.17)$$

В силу (1.8) и (1.15) имеем

$$|J_1^{(2)}(x, y)| < \frac{\varepsilon}{M B_N} M \int_0^{N y} \int_0^{N N_1} \Phi(t, \tau) \phi(x-t, y-\tau) dt d\tau.$$

Отсюда, согласно (1.13), получаем

$$\frac{|J_1^{(2)}(x, y)|}{\Phi(x, y)} < \frac{\varepsilon}{B_N} \cdot B_N = \varepsilon, \quad \text{когда} \quad \frac{1}{\lambda} \leq \frac{x}{y} \leq \lambda.$$

Это неравенство в месте с (1.17) дают

$$\overline{\lim}_{(x, y)_{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{|J_1(x, y)|}{\Phi(x, y)} \leq \varepsilon. \quad (1.18)$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{(x, y)_{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{|J_2(x, y)|}{\Phi(x, y)} \leq \varepsilon. \quad (1.19)$$

(1.10), (1.16), (1.18) и (1.19) дают

$$(1-\varepsilon)^2 - 2\varepsilon \leq \lim_{(x, y)_{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{\Phi(x, y)} \leq \overline{\lim}_{(x, y)_{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{\Phi(x, y)} \leq (1+\varepsilon) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε эти соотношения доказывают теорему.

Теорема 4. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma \geq \alpha$, $\delta \geq \beta$, $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ данные числа, причем $\alpha'\beta' \leq (\alpha+1)(\beta+1)$. Если имеют место равенства (1.12) и функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ удовлетворяют условиям:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x, y)}{x^{\alpha+\alpha'}} = 0$ равномерно относительно y в любом конечном интервале из $(0, \infty)$,
2. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{a(x, y)}{y^{\beta+\beta'}} = 0$ равномерно относительно x в любом конечном интервале из $(0, \infty)$,
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b(x, y)}{x^{\gamma+\alpha'}} = 0$ равномерно относительно y в любом конечном интервале из $(0, \infty)$,
4. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{b(x, y)}{y^{\delta+\beta'}} = 0$ равномерно относительно x в любом конечном интервале из $(0, \infty)$,

(1.20)

то имеет место равенство

$$\lim_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} = ABK,$$

где K определяется равенством (*), а символ $(x, y)_0 \rightarrow \infty$ означает, что при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$A_1 y^{\frac{\beta'}{\alpha+1}} \leq x \leq B_1 y^{\frac{\beta+1}{\alpha'}}. \quad (**)$$

$A_1 > 0, B_1 \geq A_1$ числа не зависят от x и y .

Доказательство. Пусть $A=B=1$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, такое что $1 - \varepsilon > 0$. Согласно (1.12) для этого ε найдется такое число $N(\varepsilon) > 0$, чтобы имели место неравенства:

$$(1 - \varepsilon) t^\alpha \tau^\beta < a(t, \tau) < (1 + \varepsilon) t^\alpha \tau^\beta, \text{ когда } t > N, \tau > N; \quad (1.21)$$

$$(1 - \varepsilon) (x - t)^\gamma (y - \tau)^\delta < b(x - t, y - \tau) < (1 + \varepsilon) (x - t)^\gamma (y - \tau)^\delta, \\ \text{когда } x - t > N, y - \tau > N. \quad (1.22)$$

Отсюда

$$(1 - \varepsilon)^2 t^\alpha \tau^\beta (x - t)^\gamma (y - \tau)^\delta < a(t, \tau) b(x - t, y - \tau) < \\ < (1 + \varepsilon)^2 t^\alpha \tau^\beta (x - t)^\gamma (y - \tau)^\delta, \quad (1.23)$$

когда $t > N, \tau > N, x - t > N, y - \tau > N$.

Согласно (1.20) найдется такое число $N_1 > N$, чтобы имели место неравенства

$$\begin{aligned}
 1) \quad & |a(x, y)| < \frac{\varepsilon}{N} x^{\alpha+\alpha'}, \quad \text{когда } x > N_1, 0 \leq y \leq N, \\
 2) \quad & |a(x, y)| < \frac{\varepsilon}{N} y^{\beta+\beta'}, \quad \text{когда } y > N_1, 0 \leq x \leq N, \\
 3) \quad & |b(x, y)| < \frac{\varepsilon}{N} x^{\gamma+\alpha'}, \quad \text{когда } x > N_1, 0 \leq y \leq N, \\
 4) \quad & |b(x, y)| < \frac{\varepsilon}{N} y^{\delta+\beta'}, \quad \text{когда } y > N_1, 0 \leq x \leq N.
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Далее, так как имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha} dt = N$, число

N_1 можем считать таким, чтобы

$$\int_0^N \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha} dt < 2N, \quad \text{когда } x > 2N_1. \tag{1.25}$$

Пусть $x > 2N_1$, $y > 2N_1$. Из правой части равенства (1.9) слагаемое $J_1(x, y)$ представим так

$$\begin{aligned}
 J_1(x, y) &= \left\{ \int_0^N \int_0^{N_1} + \int_0^N \int_{N_1}^y + \int_0^N \int_{y-N}^y \right\} a(t, \tau) b(x-t, y-\tau) dt d\tau = \\
 &= J_1^{(1)}(x, y) + J_1^{(2)}(x, y) + J_1^{(3)}(x, y).
 \end{aligned}$$

На основании (1.22) легко показать, что

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{J_1^{(1)}(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} = 0. \tag{1.26}$$

Согласно (1.22) и (1.24) (второе неравенство) имеем

$$\begin{aligned}
 |J_1^{(2)}(x, y)| &< \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{N} \int_0^N \int_{N_1}^{y-N} \tau^{\beta+\beta'} (x-t)^{\gamma} (y-\tau)^{\delta} dt d\tau < \\
 &< \frac{2\varepsilon}{N} x^{\gamma} y^{\beta+\beta'+\delta+1} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\gamma} \frac{1 - \frac{N}{y}}{\frac{N_1}{y}} \int_{\frac{N_1}{y}}^y \tau^{\beta+\beta'} (1-\tau)^{\delta} d\tau.
 \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (1.25), получим

$$\frac{|J_1^{(2)}(x, y)|}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} < 4\varepsilon \frac{y^{\beta'}}{x^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\beta+\beta'+1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\beta+\beta'+\delta+2)},$$



а отсюда в силу (**)

$$\overline{\lim}_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{|J_1^2(x, y)|}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} \leq \varepsilon M_1, \quad \text{где } M_1 = \frac{4\Gamma(\beta+\beta'+1)\Gamma(\delta+1)}{A_1^{\alpha+1}\Gamma(\beta+\beta'+\delta+2)}. \quad (1.27)$$

Согласно (1.24) (неравенства 2) и 3)) и (1.25) имеем

$$|J_1^{(3)}(x, y)| < \frac{\varepsilon^2}{N^2} \int_0^N \int_{y-N}^y \tau^{\beta+\beta'} (x-t)^{\gamma+\alpha'} dt d\tau < \varepsilon \cdot 4y^{\beta+\beta'} x^{\gamma+\alpha'}.$$

Отсюда в силу (**)

$$\overline{\lim}_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{|J_1^{(3)}(x, y)|}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} \leq \varepsilon M_2, \quad \text{где } M_2 = \frac{4B_1^{\alpha'}}{A_1^{\alpha+1}}. \quad (1.28)$$

Соотношения (1.26), (1.27) и (1.28) дают

$$\overline{\lim}_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{J_1(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} \leq \varepsilon (M_1 + M_2) = \varepsilon M_3. \quad (1.29)$$

Аналогично покажем, что

$$\overline{\lim}_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{|J_2(x, y) + J_3(x, y) + J_4(x, y)|}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} \leq \varepsilon M_4, \quad (1.30)$$

где M_4 — постоянное число не зависящее от x и y .

Согласно (1.23) легко показать, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{J_5(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} &\leq (1 + \varepsilon)^2 K, \\ \lim_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{J_5(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} &\geq (1 - \varepsilon)^2 K. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Из (1.29), (1.30) и (1.31) получим

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)^2 K - \varepsilon(M_3 + M_4) &\leq \overline{\lim}_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} \leq (1 + \varepsilon)^2 + \varepsilon(M_3 + M_4). \end{aligned}$$

Это соотношение доказывает теорему.

§ 2. Двойные свертки числовых последовательностей.

Двойной сверткой двух числовых последовательностей $\{a_{m,n}\}$ и $\{b_{m,n}\}$ называется последовательность $\{c_{m,n}\}$, где

$$C_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{i,k} b_{m-i, n-k}. \quad (2.1)$$

Для последовательности $\{C_{m,n}\}$ имеют место теоремы аналогичные теоремам 1, 2, 3 и 4.

Рассмотрим двойные последовательности положительных чисел $\{l_{m,n}\}$ и $\{r_{m,n}\}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{l_{m,n}}{T_{m,n}} = 0, \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{r_{m,n}}{T_{m,n}} = 0, \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{m,n}} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^N l_{i,k} r_{m-i, n-k} &= 0, \\ \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{m,n}} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^n l_{i,k} r_{m-i, n-k} &= 0, \\ \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{m,n}} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^N r_{i,k} l_{m-i, n-k} &= 0, \\ \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{m,n}} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^n r_{i,k} l_{m-i, n-k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2')$$

для любого фиксированного N , где

$$T_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n l_{i,k} r_{m-i, n-k}. \quad (2.3)$$

Теорема 5. Если имеют место равенства

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{a_{m,n}}{l_{m,n}} = A, \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{b_{m,n}}{r_{m,n}} = B \quad (2.4)$$

и последовательности $\{a_{m,n} l_{m,n}^{-1}\}$, $\{b_{m,n} r_{m,n}^{-1}\}$ ограничены, то имеет место равенство

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{C_{m,n}}{T_{m,n}} = AB,$$

где $C_{m,n}$ определяется равенством (2.1), а $T_{m,n}$ равенством (2.3).

Эта теорема получается из теоремы 1. В самом деле рассмотрим функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ определенные так:

$$a(x, y) = a_{m,n}, \quad b(x, y) = b_{m,n}, \quad \varphi(x, y) = l_{m,n}, \quad \psi(x, y) = r_{m,n},$$

когда $m \leq x < m+1$, $n \leq y < n+1$. Тогда $C(m+1, n+1)$ и $\Phi(m+1, n+1)$ приводятся соответственно к $C_{m,n}$ и $T_{m,n}$.

Определение. Двойные последовательности $\{l_{m,n}\}$ и $\{r_{m,n}\}$, которые удовлетворяют условиям (2.2) и (2.2'), назовем λ -сопряженными последовательностями, $\lambda \geq 1$, если для любого натурального числа γ существуют числа $A_\gamma > 0$, $B_\gamma \geq A_\gamma$ такие что если $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$, то

$$A_\gamma \leq \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{\gamma} T_{i,k} r_{m-i, n-k}}{T_{m,n}} \leq B_\gamma,$$

$$A_\gamma \leq \frac{\sum_{i=0}^{\gamma} \sum_{k=0}^n T_{i,k} r_{m-i, n-k}}{T_{m,n}} \leq B_\gamma.$$

Теорема 6. Если последовательности $\{l_{m,n}\}$ и $\{r_{m,n}\}$ λ -сопряженные и имеют место равенства (2.4), кроме того, если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m,n}}{T_{m,n}} = 0 \text{ для любого фиксированного } n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{m,n}}{T_{m,n}} = 0 \text{ для любого фиксированного } m,$$

а последовательность $\{b_{m,n} r_{m,n}^{-1}\}$ ограничена, то имеет место равенство

$$\lim_{(m,n) \lambda \rightarrow \infty} \frac{C_{m,n}}{T_{m,n}} = AB.$$

Эта теорема выводится из теоремы 2.

Теорема 7. Если $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma > -1$, $\delta > -1$ данные числа и имеют место равенства

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{a_{m,n}}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} = A, \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{b_{m,n}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} = B^1, \quad (2.7)$$

кроме того, последовательности

$$\{a_{m,n} (A_m^{\alpha} A_n^{\beta})^{-1}\} \text{ и } \{b_{m,n} (A_m^{\gamma} A_n^{\delta})^{-1}\}$$

ограничены, то имеет место равенство

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{C_{m,n}}{A_m^{\alpha+\gamma+1} A_n^{\beta+\delta+1}} = AB.$$

Эта теорема является частным случаем теоремы 5.

Теорема 8. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma \geq \alpha$, $\delta \geq \beta$, $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ данные числа, причем $\alpha' \beta' \leq (\alpha + 1)(\beta + 1)$. Если имеют место равенства (2.7) и, кроме того

- 1) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m,n}}{m^{\alpha+\alpha'}} = 0$ для любого фиксированного n ,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{m,n}}{n^{\beta+\beta'}} = 0$ для любого фиксированного m ,
- 3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_{m,n}}{m^{\gamma+\alpha'}} = 0$ для любого фиксированного n ,
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{m,n}}{n^{\delta+\beta'}} = 0$ для любого фиксированного m ,

то имеет место равенство

$$\lim_{(m,n)_0 \rightarrow \infty} \frac{C_{m,n}}{A_m^{\alpha+\gamma+1} A_n^{\beta+\delta+1}} = AB.$$

Эта теорема выводится из теоремы 4.

Рассмотрим теперь двойной числовой ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}. \quad (a)$$

Положим

$$\sigma_{m,n} = \frac{S_{m,n}^{m,n}}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}},$$

¹ Числа A_m^{α} определяются из следующего формального соотношения

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\alpha} x^m = (1-x)^{-\alpha-1}.$$

где $S_{m,n}^{\alpha,\beta}$ определяется из следующего соотношения

$$(1-x)^{-\alpha-1} (1-y)^{-\beta-1} \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n} x^m y^n = \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n,$$

а α и β данные числа > -1 .

Определение 1. Двойной ряд (a) называется (C, α, β) (методом Чезаро) суммируемым к числу S , если имеет место равенство

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = S.$$

Пусть $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ данные числа причем $\alpha'\beta' \leq (\alpha+1)(\beta+1)$.

Определение 2. Двойной ряд (a) называется $C^*_{\alpha,\beta}$ суммируемым к числу S , если имеет место равенство

$$\lim_{(m,n)_0 \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = S.$$

Для метода Чезаро известны следующие две теоремы:

Теорема 1°. Если ряд (a) (C, α, β) суммируем к числу S , $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}$ ограничена, то для всех $\alpha_1 \geq \alpha$, $\beta_1 \geq \beta$ ряд (a) (C, α_1, β_1) суммируем и имеет место равенство

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha_1,\beta_1}.$$

Теорема 2°. Если ряд (a) (C, α, β) суммируем к числу S , $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и имеют место равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}^{\alpha,\beta}}{m^{\alpha+\alpha'}} = 0 \text{ при любом фиксированном } n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}^{\alpha,\beta}}{n^{\beta+\beta'}} = 0 \text{ при любом фиксированном } m,$$

где $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ данные числа, такие что $\alpha'\beta' \leq (\alpha+1)(\beta+1)$, то для всех $\alpha_1 \geq \alpha$, $\beta_1 \geq \beta$, ряд (a) $C^*_{\alpha_1,\beta_1}$ суммируем и

$$\lim_{(m,n)_0 \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha_1,\beta_1} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}.$$



06035040
0020010330

Пусть $\alpha_1 = \alpha + \gamma'$, $\beta_1 = \beta + \delta'$ где $\gamma' > 0$, $\delta' > 0$. Известно, что

$$S_{m,n}^{\alpha_1, \beta_1} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_{m-i}^{\gamma'-1} A_{n-k}^{\delta'-1} S_{i,k}^{\alpha, \beta},$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_{m-i}^{\gamma'-1} A_{n-k}^{\delta'-1} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} = A_m^{\alpha_1} A_n^{\beta_1}.$$

Если выражение $S_{m,n}^{\alpha_1, \beta_1}$ рассмотреть как двойную свертку и учесть, что

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}^{\alpha, \beta}}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} = S, \quad \frac{A_m^{\gamma'-1} A_n^{\delta'-1}}{A_m^{\gamma'-1} A_n^{\delta'-1}} = 1,$$

то легко показать, что теорема 1° является частным случаем теоремы 7, а теорема 2° частным случаем теоремы 8.

§ 3. W — суммируемость двойных интегралов и двойных рядов

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $R^0 = (0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty)$ и интегрируема в смысле Лебега в любой области $R = (0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b)$, где $a > 0$ и $b > 0$ произвольные числа. Рассмотрим положительную функцию $p(x, y)$, определенную в области R_0 и интегрируемую в смысле Лебега в R , которая удовлетворяет следующим условиям

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{p(x, y)}{P(x, y)} = 0, \quad \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{P(x, y)} \int_0^x \int_0^y p(t, \tau) dt d\tau = 0,$$

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{P(x, y)} \int_0^{Ny} \int_0^y p(t, \tau) dt d\tau = 0, \quad (3.1)$$

для любого фиксированного N , где

$$P(x, y) = \int_0^x \int_0^y p(t, \tau) dt d\tau. \quad (3.2)$$

Определение 1. Интеграл

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx dy \quad (3.3)$$

мы будем называть W суммируемым, если имеет место равенство

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{W(x, y)}{P(x, y)} = S,$$

где

$$W(x, y) = \int_0^x \int_0^y S(t, \tau) p(x-t, y-\tau) dt d\tau,$$

$$S(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, \tau) dt d\tau. \quad (3.4)$$

Определение 2. Интеграл (3.3) мы будем называть W^λ -суммируемым, если имеет место равенство

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} \frac{W(x, y)}{P(x, y)} = S.$$

Теорема 9. Если интеграл (3.3) сходится и функция $S(x, y)$ ограничена в области R_0 , а функция $p(x, y)$ удовлетворяет условиям (3.1), то интеграл (3.3) W суммируем и имеет место равенство

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{W(x, y)}{P(x, y)} = \lim_{x, y \rightarrow \infty} S(x, y).$$

Эта теорема выводится из теоремы 1, если $W(x, y)$ рассмотреть как двойную свертку и в теореме 1 допустить $\varphi(x, y) = 1$, $\psi(x, y) = b(x, y) = p(x, y)$, $a(x, y) = S(x, y)$.

Определение 3. Функцию $p(x, y)$, которая удовлетворяет условиям (3.1), назовем λ -функцией, $\lambda \geq 1$ данное число, если для любого $\nu > 0$ числа существуют числа $A_\nu > 0$, $B_\nu \geq A_\nu$, такие, что, когда $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{x}{y} \leq \lambda$,

то

$$A_\nu \leq \frac{\int_0^y \int_0^y P(t, \tau) p(x-t, y-\tau) dt d\tau}{P(x, y)} \leq B_\nu,$$

$$A_\nu \leq \frac{\int_0^x \int_0^y P(t, \tau) p(x-t, y-\tau) dt d\tau}{P(x, y)} \leq B_\nu.$$

Теорема 10. Если $p(x, y)$ λ -функция, интеграл (3.3) сходится и, кроме того

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x, y)}{P(x, y)} = 0 \text{ равномерно относительно } y \text{ в}$$

любом конечном интервале из $(0, \infty)$,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{S(x, y)}{P(x, y)} = 0 \text{ равномерно относительно } x \text{ в}$$

любом конечном интервале из $(0, \infty)$

то интеграл (3.3) W^λ — суммируем и

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} \frac{W(x, y)}{P(x, y)} = \lim_{x, y \rightarrow \infty} S(x, y).$$

Эта теорема выводится из теоремы 3.

Аналогично определяется W (методом Вороного) — суммируемость двойного числового ряда и из теорем 5 и 6 выводятся теоремы аналогичные теоремам 9 и 10¹.

§ 4. Умножение (C, α, β) — суммируемых двойных интегралов².

Пусть теперь даны две функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ определенные в области $R_0 = (0 \leq x < \infty; 0 \leq y < \infty)$. Допустим, что эти функции измеримы и ограничены в области $R = (0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq l)$ для любого $l > 0$. Рассмотрим интегралы

$$\int_0^\infty \int_0^\infty a(x, y) dx dy, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty b(x, y) dx dy. \quad (4.1)$$

Эти интегралы могут быть сходящимися или расходящимися. Интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty C(x, y) dx dy, \quad (4.2)$$

где

$$C(x, y) = \int_0^x \int_0^y a(t, \tau) b(x-t, y-\tau) dt d\tau$$

называют произведением двух данных интегралов.

Пусть $\alpha > -1$ и $\beta > -1$ — данные числа. Функция $f(t, \tau)$, определенная в области R_0 называется $C_{\alpha, \beta}$ — интегрируемой на R_0 , или,

¹ W — суммируемость двойных рядов изучается в работе Т. Цхадая [6]

² Результаты § 4 и § 5 приводятся также в работе [9].

что тоже самое, интеграл $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy$ называется (C, α, β) -суммируемым на R_0 к значению S , если

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} F_{\alpha, \beta}(x, y) = S,$$

где

$$F_{\alpha, \beta}(x, y) = \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \int_0^x \int_0^y (x-t)^\alpha (y-\tau)^\beta f(t, \tau) dt d\tau.$$

Число S называют $C_{\alpha, \beta}$ -интегралом функции $f(x, y)$ по области R_0 и обозначают символом $(C_{\alpha, \beta}) \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy$. Очевидно, что

$$(C_{00}) \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy.$$

Далее, пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ — данные числа, причем $\alpha'\beta' \leq (\alpha+1)(\beta+1)$. Функцию $f(x, y)$ называют $C^*_{\alpha, \beta}$ -интегрируемой на R_0 , если существует конечный предел в ограниченном смысле

$$\lim_{(x, y)_0 \rightarrow \infty} F_{\alpha, \beta}(x, y) = S.$$

Число S называют $C^*_{\alpha, \beta}$ -интегралом функции $f(x, y)$ по области R_0 и обозначают символом

$$(C^*_{\alpha, \beta}) \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy.$$

Положим

$$A^*_{\alpha, \beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y (x-t)^\alpha (y-\tau)^\beta a(t, \tau) dt d\tau,$$

$$B^*_{\gamma, \delta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y (x-t)^\gamma (y-\tau)^\delta b(t, \tau) dt d\tau,$$

$$C^*_{\lambda, \mu}(x, y) = \int_0^x \int_0^y (x-t)^\lambda (y-\tau)^\mu c(t, \tau) dt d\tau.$$



где $C(t, \tau)$ определяется равенством (4.2), а $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ некоторые данные числа.

Лемма 1. Если функции $a(t, \tau)$ и $b(t, \tau)$ суммируемы в области $R = (0 \leq t \leq a; 0 \leq \tau \leq a)$, где $a > 0$ произвольное число, то справедливо равенство

$$\int_0^x \int_0^y A_{\alpha, \beta}^*(t, \tau) B_{\gamma, \delta}^*(x-t, y-\tau) dt d\tau = K C_{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1}^*(x, y), \quad (4.3)$$

где K определяется равенством (*).

Доказательство. В левую часть равенства (4.3) внесем значения $A_{\alpha, \beta}^*(t, \tau)$ и $B_{\gamma, \delta}^*(t, \tau)$. С помощью формулы Дирихле для четырехкратного интеграла [5], можем написать

$$\begin{aligned} & \int_0^x \int_0^y A_{\alpha, \beta}^*(t, \tau) B_{\gamma, \delta}^*(x-t, y-\tau) dt d\tau = \\ & = \int_0^x \int_0^y dt d\tau \int_0^t \int_0^\tau a(u, v) (t-u)^\alpha (\tau-v)^\beta du dv \int_0^{x-t} \int_0^{y-\tau} b(\xi, \eta) (x-t-\xi)^\gamma (y-\tau-\eta)^\delta d\xi d\eta = \\ & = \int_0^x \int_0^y a(u, v) du dv \int_0^{x-u} \int_0^{y-v} b(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_u^x \int_v^y (t-u)^\alpha (\tau-v)^\beta (x-t-\xi)^\gamma (y-\tau-\eta)^\delta dt d\tau, \end{aligned}$$

где $0 \leq u \leq t \leq x$, $0 \leq v \leq \tau \leq y$; $0 \leq \xi \leq x-t \leq x$, $0 \leq \eta \leq y-\tau \leq y$. При фиксированных (u, v) и (ξ, η) (t, τ) изменяется в области $(u \leq t \leq x-\xi; v \leq \tau \leq y-\eta)$; при фиксированном (u, v) (ξ, η) изменяется в области $(0 \leq \xi \leq x-u; 0 \leq \eta \leq y-v)$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^x \int_0^y A_{\alpha, \beta}^*(t, \tau) B_{\gamma, \delta}^*(x-t, y-\tau) dt d\tau = \\ & = K \int_0^x \int_0^y a(u, v) du dv \int_0^{x-u} \int_0^{y-v} (x-u-\xi)^{\alpha+\gamma+1} (y-v-\eta)^{\beta+\delta+1} b(\xi, \eta) d\xi d\eta = K \cdot J. \end{aligned}$$

Преобразование переменных $\omega = \xi + u$, $w = \eta + v$, получим

$$J = \int_0^x \int_0^y (x - \omega)^{\alpha+\gamma+1} (y - w)^{\beta+\delta+1} d\omega dw \int_0^{\omega} \int_0^w a(u, v) b(\omega - u, w - v) du dv =$$

$$= \int_0^x \int_0^y (x - \omega)^{\alpha+\gamma+1} (y - w)^{\beta+\delta+1} C(\omega, w) d\omega dw = C_{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1}^*(x, y).$$

Следовательно, справедливо равенство (4.3)

Лемма 2. Если функции $a(t, \tau)$ и $b(t, \tau)$ суммируемы в области R и $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ данные числа, то справедливо равенство

$$\int_0^x \int_0^y A_{\alpha, \beta}^*(t, \tau) b(x - t, y - \tau) dt d\tau = C_{\alpha, \beta}^*(x, y).$$

Доказательство этой леммы аналогично, но несколько проще.

Теорема 11. Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\delta \geq 0$ данные числа. Если функция $a(t, \tau)_{\alpha, \beta}$ — интегрируема, $b(t, \tau)_{\gamma, \delta}$ — интегрируема и имеют соответственно обобщенными интегралами числа A и B , причем функции $A_{\alpha, \beta}(x, y) = \frac{A_{\alpha, \beta}^*(x, y)}{x^\alpha y^\beta}$ и $B_{\gamma, \delta}(x, y) = \frac{B_{\gamma, \delta}^*(x, y)}{x^\gamma y^\delta}$ ограничены в области R_0 , то функция $C(x, y)_{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1}$ — интегрируема и имеет место равенство

$$(C_{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1}) \int_0^\infty \int_0^\infty C(x, y) dx dy = AB.$$

Доказательство. Равенство (4.3) рассмотрим как двойную свертку двух функций. Очевидно, что условия теоремы 11 соответствуют условиям теоремы 2, поэтому, согласно теореме 2 и леммы 1 имеем

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{C_{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1}^*(x, y)}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} =$$

$$= \frac{1}{K} \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+\gamma+1} y^{\beta+\delta+1}} \int_0^x \int_0^y A_{\alpha, \beta}^*(t, \tau) B_{\gamma, \delta}^*(x - t, y - \tau) dt d\tau =$$

$$= \frac{1}{K} KAB = AB.$$

Теорема доказана.



Теорема 12. Пусть $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq \alpha, \delta \geq \beta, \alpha' > 0, \beta' > 0$ числа причем $\alpha'\beta' \leq (\alpha+1)(\beta+1)$. Если функция $a(t, \tau)$ интегрируема, $b(t, \tau)$ $C_{\gamma, \delta}$ -интегрируема и имеют соответственно обобщенными интегралами числа A и B , причем функции $A_{\alpha, \beta}^*(x, y)$ и $B_{\gamma, \delta}^*(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} 1) A_{\alpha, \beta}^*(x, y) &= 0 (x^{\alpha+\alpha'}), x \rightarrow \infty \text{ равномерно относительно } y, \text{ в любом конечном интервале из } (0, \infty), \\ 2) A_{\alpha, \beta}^*(x, y) &= 0 (y^{\beta+\beta'}), y \rightarrow \infty, \text{ равномерно относительно } x, \text{ в любом конечном интервале из } (0, \infty) \\ 3) B_{\gamma, \delta}^*(x, y) &= 0 (x^{\gamma+\alpha'}), x \rightarrow \infty, \text{ равномерно относительно } y, \text{ в любом конечном интервале из } (0, \infty) \\ 4) B_{\gamma, \delta}^*(x, y) &= 0 (y^{\delta+\beta'}), y \rightarrow \infty, \text{ равномерно относительно } x, \text{ в любом конечном интервале из } (0, \infty), \end{aligned} \right\} (4.4)$$

то функция $C(x, y)$ $C_{\alpha+\gamma+\beta+\delta+1}^*$ -интегрируема и имеет место равенство

$$(C_{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1}^*) \int_0^\infty \int_0^\infty C(x, y) dx dy = AB.$$

Доказательство. И здесь рассмотрим равенство (4.3), как двойную свертку. Ясно, что условия (4.4) соответствуют условиям (1.20), поэтому из теоремы 4 и из леммы 1 вытекает справедливость теоремы 12.

Следствие. Если функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ интегрируемы и их интегралы суть соответственно числа A и B и, кроме того, функции

$$A(x, y) = \int_0^x \int_0^y a(t, \tau) dt d\tau, \quad A(x, y) = \int_0^x \int_0^y b(t, \tau) dt d\tau$$

удовлетворяют условиям:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x, y)}{x} = 0$, равномерно относительно y , в любом конечном интервале из $(0, \infty)$,

$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{A(x, y)}{y} = 0$, равенство относительно x , в любом конечном интервале из $(0, \infty)$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{B(x, y)}{x} = 0$, равномерно относительно y , в любом конечном интервале из $(0, \infty)$,

$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B(x, y)}{y} = 0$, равномерно относительно x , в любом

конечном интервале из $(0, \infty)$.

То функция $C(x, y)$ C_{11}^* -интегрируема и имеет место равенство

$$(C_{11}^*) \int_0^\infty \int_0^\infty C(x, y) dx dy = AB.$$

Справедливость этого следствия ясно из теоремы 12, если допустим в ней $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, $\alpha' = \beta_1 = 1$.

Теорема 13. Если $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и функция $a(x, y)$ $C_{\alpha, \beta}$ -интегрируема, функция $b(x, y)$ абсолютно интегрируема, причем функция $A_{\alpha, \beta}(x, y)$ ограничена, то функция $C(x, y)$ $C_{\alpha, \beta}$ -интегрируема и имеет место равенство

$$(C_{\alpha, \beta}) \int_0^\infty \int_0^\infty C(x, y) dx dy = AB,$$

где

$$A = (C_{\alpha, \beta}) \int_0^\infty \int_0^\infty a(x, y) dx dy, \quad B = \int_0^\infty \int_0^\infty b(x, y) dx dy.$$

Доказательство. Согласно лемме 2

$$C_{\alpha, \beta}^*(x, y) = \int_0^x \int_0^y A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau) b(t, \tau) dt d\tau.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \int_0^x \int_0^y A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau) b(t, \tau) dt d\tau - A \int_0^x \int_0^y b(t, \tau) dt d\tau \right| = \\ & = \left| \int_0^x \int_0^y [(x^\alpha y^\beta)^{-1} A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau) - A] b(t, \tau) dt d\tau \right| \leq \\ & \leq \int_0^x \int_0^y |(x^\alpha y^\beta)^{-1} A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau) - A| |b(t, \tau)| dt d\tau. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В силу абсолютной интегрируемости функции $b(t, \tau)$, для произвольного положительного числа ε , найдется такое положительное число $N(\varepsilon)$, чтобы имело место неравенство

$$\begin{aligned}
 & \int_0^N \int_0^\infty |b(t, \tau)| dt d\tau + \int_0^\infty \int_0^N |b(t, \tau)| dt d\tau + \\
 & + \int_{NN}^{\infty \infty} |b(t, \tau)| dt d\tau < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

где

$$M = \sup_{\substack{0 \leq t \leq x < \infty \\ 0 \leq \tau \leq y < \infty}} |(x^\alpha y^\beta)^{-1} A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau) - A|.$$

Так как

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau)}{x^\alpha y^\beta} = A,$$

для любых фиксированных t, τ , то найдется такое число $N_1 > N$, чтобы имело место неравенство

$$\begin{aligned}
 & |(x^\alpha, y^\beta)^{-1} A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau) - A| < \\
 & < \frac{\varepsilon}{2M^*} \text{ когда } x > 2N_1, y > 2N_1, 0 \leq t, \tau \leq N, \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

где

$$M^* = \int_0^\infty \int_0^\infty |b(x, y)| dx dy.$$

Теперь допустим, что $m > 2N_1, n > 2N_1$ и правую часть неравенства (4.5) представим так:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x \int_0^y |(x^\alpha, y^\beta)^{-1} A_{\alpha, \beta}^*(x-t, y-\tau) - A| |b(t, \tau)| dt d\tau = \int_0^N \int_0^N + \int_0^x \int_N^y + \\
 & + \int_0^N \int_N^x J_1(x, y) + J_2(x, y) + J_3(x, y) + J_4(x, y).
 \end{aligned}$$

Согласно (4.6), получим

$$J_1(x, y) + J_2(x, y) + J_3(x, y) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а согласно (4.7) имеем

$$J_4(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \iint_{00}^{xy} A^{*\alpha, \beta}(x-t, y-\tau) b(t, \tau) dt d\tau - A \iint_{00}^{xy} b(t, \tau) dt d\tau \right| < \varepsilon,$$

когда $x > 2N_1$, $y > 2N_1$. В силу произвольности ε , будем иметь:

$$\begin{aligned} \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{C^{*\alpha, \beta}(x, y)}{x^\alpha y^\beta} &= \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \iint_{00}^{xy} A^{*\alpha, \beta}(x-t, y-\tau) b(t, \tau) dt d\tau = \\ &= A \lim_{x, y \rightarrow \infty} \iint_{00}^{xy} b(t, \tau) dt d\tau = AB. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если в теореме 13 допустим $\alpha = \beta = 0$, то из этой теоремы получается теорема В. Г. Челидзе.

Если первый из интегралов (4.1) абсолютно сходится, а второй сходится условно и функция $\iint_{00}^{xy} b(t, \tau) dt d\tau$ ограничена в области $(0 \leq x < \infty; 0 \leq y < \infty)$, то интеграл (4.2) сходится и справедливо равенство

$$\int_0^\infty \int_0^\infty c(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty a(x, y) dx dy \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty b(x, y) dx dy.$$

§ 5. Умножение (C, α, β) суммируемых двойных рядов.

Пусть даны два двойных ряда

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} u_{m, n} \quad (5.1)$$

и

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} v_{m, n}. \quad (5.2)$$

Под произведением рядов (5.1) и (5.2) по Коши будем понимать двойной ряд

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} c_{m, n}, \quad (5.3)$$

где

$$c_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n u_{i,k} v_{m-i, n-k}.$$

Теорема 14. Если ряд (5.1) (C, α, β) —суммируем к числу u , ряд (5.2) (C, γ, δ) —суммируем к числу v , $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma > -1$, $\delta > -1$ данные числа и обобщенные частные суммы этих рядов $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(u)$ и $\sigma_{m,n}^{\gamma,\delta}(v)$ ¹ ограничены, то ряд (5.3) $(C, \alpha + \gamma + 1, \beta + \delta + 1)$ суммируем к числу uv .

Теорема 15. Если ряд (5.1) (C, α, β) —суммируем к числу u , ряд (5.2) (C, γ, δ) —суммируем к числу v , $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma > \alpha$, $\delta \geq \beta$ и если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}^{\alpha,\beta}(u)}{m^{\alpha+\alpha'}} = 0 \text{ при любом фиксированном } n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}^{\alpha,\beta}(u)}{n^{\beta+\beta'}} = 0 \text{ при любом фиксированном } m,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}^{\gamma,\delta}(v)}{m^{\gamma+\alpha'}} = 0 \text{ при любом фиксированном } n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}^{\gamma,\delta}(v)}{n^{\delta+\beta'}} = 0 \text{ при любом фиксированном } m,$$

где $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ данные числа такие, что $\alpha'\beta' \leq (\alpha+1)(\beta+1)$, то ряд (5.3) $C_{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1}^*$ —суммируем к числу uv .

Доказательство. Из формального равенства

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{m,n} x^m y^n \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} v_{m,n} x^m y^n = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n} x^m y^n$$

$$\frac{(1-x)^{\alpha+1} (1-y)^{\beta+1}}{(1-x)^{\alpha+\gamma+2} (1-y)^{\beta+\delta+2}} = \frac{(1-x)^{\alpha+\gamma+2} (1-y)^{\beta+\delta+2}}{(1-x)^{\alpha+\gamma+2} (1-y)^{\beta+\delta+2}}$$

имеем

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\alpha,\beta}(u) x^m y^n \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\gamma,\delta}(v) x^m y^n = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}^{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1} x^m y^n$$

¹ u и v в скобках обозначают, что обобщенные суммы принадлежат соответственно рядом (5.1) и (5.2)

Умножая ряды в левой части равенства и приравнявая коэффициенты при равных степенях x и y получим

$$C_{m,n}^{\alpha+\gamma+1, \beta+\delta+1} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n S_{i,k}^{\alpha,\beta}(u) S_{m-i, n-k}^{\gamma,\delta}(v).$$

Если это выражение рассмотреть как двойную свертку, то, как легко заметить, теорема 14 выводится из теоремы 7, а теорема 15 из теоремы 8.

Теорема 16. Если (5.1) (C, α, β) —суммируем к числу u , (5.2) сходится к числу v , $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, причем последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(u)\}$ ограничена и (5.2) абсолютно сходится то (5.3) (C, α, β) —суммируем к числу uv .

Легко показать, что

$$C_{m,n}^{\alpha,\beta} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n b_{i,k} S_{m-i, n-k}^{\alpha,\beta}(u).$$

На основании этого равенства теорема 16 доказывается аналогично теореме 13. Для случая $\alpha=\beta=0$ она также была доказана В. Г. Челидзе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г.—Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
2. Кнорр К.—Über summen der form $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots$ Rendicoti del circolo matematico di Palermo. 1911.
3. Челидзе В. Г.—Об умножении двойных рядов и двойных интегралов. Труды Тбилисского Математического института, т. XIX, 1953.
4. Зигмунд А.—Тригонометрические ряды. М.-Л., 1939.
5. Жак И. Е. и Тиман М. Ф.—О суммировании двойных рядов.
6. ცხელიძე ვ. — სავსებები ორმაგი რიგების თეორიაში. 1951.
7. Челидзе В. Г.—О $C_{\alpha,\beta}$ и A -интегрируемости функций двух переменных. Труды Тбилисского Математического института, т. XXI, 1955.
8. Челидзе В. Г.—О суммируемости двойных интегралов. Труды Тбилисского математического института, т. XX, 1954.
9. Сулханаури М.—Некоторые вопросы суммирования двойных рядов и двойных интегралов. Труды ТГУ им Сталина, т. 64, 1957.

Кафедра
математического анализа

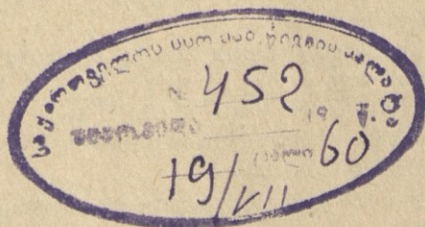
(Поступило в редакцию 12. X, 1958 г.)

მ. სულხანაური

ორმაგი ხვეულები და (C, α, β) მეთოდით შეჯამებადი
 ორმაგი მწკრივებისა და ორჯერადი
 ინტეგრალების გამრავლება

რეზიუმე

შრომაში დამტკიცებულია თეორემები ორმაგი ხვეულების შესახებ. დამტკიცებული თეორემების საფუძველზე შესწავლილია ჩეზაროს მეთოდით შეჯამებადი ორმაგი მწკრივებისა და ორჯერადი ინტეგრალების გამრავლება.



შეკვეთა № 1853

შე 02882

ტირაჟი 500

გადაეცა წარმოებას 2/XII-59 წ., ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10/VI-60 წ.,
ანაწყობის ზომა 7×11 , ქაღალდის ზომა 70×108 , საბეჭდ ფორმათა რაოდენობა, 30,14, სააღრიცხვო-საგამომცემლო ფორმათა რაოდენობა 22,13.

ფასი 16 მ. 50 კ.

სტალინის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
გამომცემლობის სტამბა, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.

Типография Издательства ТГУ им. Сталина, Тбилиси,
проспект И. Чавчавадзе, 1.