

ბ. გუგუშვილი

ექსპერტობისა და მანეჯმენტის თეორია

ნაწილი

I

წიგნისიხსნაობა

წიგნი შედგენილია სტალინის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტზე მთელი რიგი წლების განმავლობაში ავტორის მიერ ნაკითხული ლექციების მიხედვით და შეესაბამება ელექტროდინამიკის კურსის პროგრამას.

ვინაიდან ელექტრომაგნიტური ველის თეორია მოვლენათა აურაცხელ რაოდენობას მოიცავს, ამიჯომ მიზანშეწონილად მივიჩნით მისი ორ ნაწილად გაყოფა.

პირველი ნაწილი წარმოადგენს მიკროელექტროდინამიკას, რომელშიც განხილულია ელექტრომაგნიტური მოვლენები სივარცელში.

მეორე ნაწილი, რომლის გამოცემა ახლო მომავალშია გათვალისწინებული, დათმობილი ექნება მაკროეღერ სხეულებში მიმდინარე ელექტრომაგნიტური პროცესების შესწავლას.

ავტორი იმედოვნებს მკითხველთა ფართო წრის შენიშვნების საფუძველზე მორიგ გამოცემაში გამოასწოროს ზოგიერთი ხარვეზი.

დასასრულს მინდა მადლობა გადაუხადო წიგნის რედაქტორს პროფ. ი. მირცხულავას, რომელმაც მრავალი სასარგებლო მითითება მომცა.

მაისი, 1955

თბილისი

ბ. გუჩუნიძე

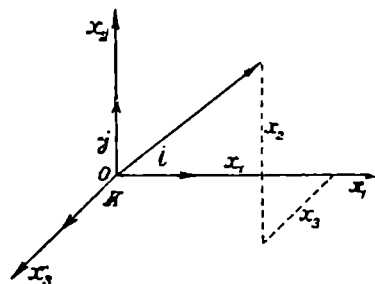
ვექტორული და ვანზორული ანალიზის ელემენტები

§ 1. ვექტორები. სკალარული და ვექტორული ნამრავლი

მატერიის ამა თუ იმ თვისების გამოსახატავად ფიზიკაში შემოღებულია ისეთი სიდიდეები, რომელთა უშუალო გაზომვა შესაძლებელია. მათ ფიზიკური სიდიდეები ეწოდებათ. ფიზიკური სიდიდეები 2 ჯგუფად იყოფიან — სკალარებად და ვექტორებად. სკალარები ეწოდება ისეთ სიდიდეებს, რომლებიც ხასიათდებიან მხოლოდ რიცხობრივი მნიშვნელობებით, მაგალითად: სიმკვრივე, მოცულობა, ტემპერატურა და სხვა. ვექტორული სიდიდეებისათვის დამახასიათებელია როგორც რიცხობრივი მნიშვნელობა ისევე გარკვეული მიმართულება, მაგალითად: სიჩქარე, აჩქარება, ძალა და სხვა.

ვექტორული სიდიდე გეომეტრიულად მოგეხუი სწორი ხაზის მონაკვეთით გამოისახება. ჩვეულებრივ ვექტორს აღნიშნავენ რომელიმე ასოთი, რომელსაც ზემოდან დასმული აქვს ისარი¹. ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე (სკალარული მნიშვნელობა) აღინიშნება იმავე ასოთი უისროთ.

სივრცეში მატერიალური წერტილის მდებარეობა შეიძლება განვსაზღვროთ 3 სკალარული სიდიდის — x_1 , x_2 , x_3 კოორდინატების, ანდა x რადიუსვექტორის საშუალებით. თუ მართკუთხა კოორდინატა სისტემის ღერძების მგეზავებად ავიღებთ i , j და k ერთეულოვან ვექტორებს, მაშინ წერტილის რადიუსვექტორი x შემდეგნაირად ჩაიწერება:



ნახ. 1.

$$x = ix_1 + jx_2 + kx_3. \tag{1,1}$$

არჩევენ ვექტორების ორგვარ ნამრავლს — სკალარულს და ვექტორულს. როდესაც ორი ვექტორის გადამრავლების შედეგად ვღებულობთ სკალარს, ასეთ ნამრავლს სკალარული ეწოდება; ხოლო როდესაც 2 ვექტორის გადამრავლება გვაძლევს ისევ ვექტორს — ვექტორული ნამრავლი ეწოდება.

¹ ვექტორები ჩვენ ყველგან ზავი მსხვილი ასოთი გვეწმება აღნიშნული.

ორი x და y ვექტორის სკალარული ნამრავლი აღინიშნება შემდეგი სახით: (x, y) , რომელიც ნიშნავს $x \cdot y \cdot \cos \alpha$, სადაც α წარმოადგენს ამ ვექტორებს შორის კუთხეს.

თუ x და y ვექტორებს წარმოვიდგენთ (1,1) ფორმულის საშუალებით, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი მოგვეცემს:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad (1,2)$$

ორი x და y ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ჩაიწერება $[x, y]$ სახით, ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მართობია აღებული x და y ვექტორების. მის დადებით მიმართულებად მიღებულია მარჯვენა ბურლის გადატანის მიმართულება, როდესაც ბურლის სახელურს ვაბრუნებთ სამრავლიდან მამრავლისაკენ უმცირესი კუთხით. $[x, y]$ — ნამრავლის აბსოლუტური სიდიდე უდრის $x \cdot y \cdot \sin \alpha$, რომელიც გეომეტრიულად გამოხატავს ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს.

თუ x და y ვექტორებს წარმოვიდგენთ (1,1) ფორმულით, მაშინ მათი ვექტორული ნამრავლი მოგვეცემს:

$$[x, y] = i(x_2 y_3 - x_3 y_2) + j(x_3 y_1 - x_1 y_3) + k(x_1 y_2 - x_2 y_1), \quad (1,3)$$

ეს უკანასკნელი კი შეიძლება წარმოვიდგინოთ დეტერმინანტის სახით:

$$[x, y] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (1,4)$$

(1,2) და (1,4) ფორმულების საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

$$(x, [y, z]) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (1,5)$$

ეს ნამრავლი გეომეტრიულად გამოხატავს აღებულ სამ x , y და z ვექტორებზე, როგორც წიბოებზე, აგებული პარალელოპიპედის მოცულობას.

თუ გამოვიყენებთ დეტერმინანტის ცნობილ თვისებებს ადვილად შეიძლება უჩვენოთ, რომ სამი ვექტორის შერეული (სკალარულ-ვექტორულ) ნამრავლი თანამამრავლთა წრიული გადასმის შედეგად არ იცვლება, ე. ი.

$$(x [y, z]) = (y [z, x]) = (z [x, y]). \quad (1,6)$$

თუ აღებული სამი ვექტორიდან ორს აქვთ ერთი და იგივე მიმართულება, მაშინ შერეული ნამრავლი (1,5) ნულის ტოლია. ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$[x [y, z]] = y(x, z) - z(x, y) \quad (1,7)$$

$$([x, y], [z, \xi]) = (x [y [z, \xi]]) = (x, z(y, \xi) - \xi(y, z)) - \xi(y, z) = (x, z)(y, \xi) - (x, \xi)(y, z) \quad (1,8)$$

§ 2. ვექტორული ანალიზი

განვიხილოთ სივრცის ის ნაწილი, რომლის ყოველ წერტილში რომელიმე ფიზიკური სიდიდის გამოხატველ ვექტორს აქვს გარკვეული — ნულისაგან განსხვავებული მნიშვნელობა.

აღებული სივრცის წერტილებში განსახილველი ვექტორის მნიშვნელობათა ერთობლიობა შეადგენს φ . ვექტორულ ველს. მაგალითად, მიმდინარე სითხის ნაწილაკების სიჩქარეები გვაძლევენ სიჩქარეთა ველს, ნაწილაკებზე მოქმედი ძალები — ძალთა ველს და ა. შ.

რადგან ქვევით ჩვენ უმთავრესად საქმე გვექნება ვექტორულ ველებთან, შევეცდებით მოკლედ ჩანოვაყალიბოთ ვექტორული ველის ძირითადი თვისებები.

ყოველი სკალარული ველიდან, რომელიც განსახილველია რაიმე სკალარული $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა უწყვეტი მიმდევრობით, შეიძლება შევადგინოთ ვექტორული ველი.

ეთქვათ მოცემულია სივრცის ყოველ (x_1, x_2, x_3) წერტილისათვის უწყვეტი სკალარული ფუნქცია $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. რომლას პირველი რიგის წარმოებულებიც აგრეთვე უწყვეტია. მოვანხოთ მისი ნაზრდი სივრცის ერთი წერტილიდან მეორეში $dx(dx_1, dx_2, dx_3)$ მანძილზე გადასვლის დროს. ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$d\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3, \quad (2.1)$$

წარმოადგენს ფუნქციის ცვლილების სიდიდეს dx მანძილზე, ამიტომ მანძილის ერთეულზე ეს ცვლილება გამოიხატება შეფარდებით:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dx} = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos(x, x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cos(x, x_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cos(x, x_3). \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1) განტოლების მარჯვენა მხარე შეიძლება წარმოვიდგინოთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის სახით

$$d\varphi = (\text{grad } \varphi, dx), \quad (2.3)$$

სადაც $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ და $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ სიდიდეები წარმოადგენენ $\text{grad } \varphi$ -ს მდგენელებს x_1, x_2 და x_3 კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ, ამიტომ (1.1) ფორმულის თანახმად, $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციის გრადიენტი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\text{grad } \varphi(x_1, x_2, x_3) = i \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + j \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + k \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}, \quad (2.4)$$

ამ უკანასკნელს ფორმალურად შემდეგი სახით გადავწერთ:

$$\text{grad } \varphi(x_1, x_2, x_3) = \nabla \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (2.5)$$

სადაც გაწარმოების ოპერატორი

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (2,6)$$

(2,4)-დან გამომდინარეობს, რომ:

$$(\text{grad } \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2, \quad (2,7)$$

სკალარული ფუნქციის გრადიენტი მიმართულია $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ ზედაპირის პერპენდიკულარულად აღებულ წერტილში ფუნქციის ზრდის მიმართულებით. აზგვარად, თუ მოცემულია სივრცითი კოორდინატების, თავისი პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად, უწყვეტი ფუნქცია $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, მაშინ მისგან გაწარმოების გზით შეიძლება შევადგინოთ ვექტორი (2,4), რომელიც დამოუკიდებელია კოორდინატთა სისტემის არჩევანზე¹. ასევე შესაძლებელია ვექტორული აიდიდეების გაწარმოების გზით შევადგინოთ ახალი, კოორდინატთა სისტემის სახეზე დამოუკიდებელი, ინვარიანტული სიდიდეები.

ვექტორების გაწარმოების ოპერაცია გაცილებით უფრო რთულია ვიდრე სკალარული ფუნქციებისა, რადგან მათი არგუმენტები შეიძლება იყვნენ როგორც სკალარები ისე ვექტორები. ამიტომ მესაბამისად უნდა განვიხილოთ სკალარული და ვექტორული გაწარმოების შემთხვევები. როგორც პირველი, ისევე წარმოვიტყუოთ ვექტორული ფუნქციები, რომლებიც სივრცის ყოველ წერტილში დროის ნებისმიერი მომენტისათვის სრულიად გარკვეულ სასრულო მნიშვნელობებს ღებულობენ, შეადგინენ ვექტორულ ველებს.

ვექტორული ველის თვალსაჩინო გეომეტრიული წარმოდგენის მიზნით ავებენ მრუდების ოჯახს, ისეთნაირად, რომ აღებულ მრუდის ყოველ წერტილში სათანადო ვექტორს ჰქონდეს მხების მიმართულება. სივრცის ერთი წერტილიდან მეორეში გადასვლის (ე. ი. მოცემული სკალარული ან ვექტორული ფუნქციის არგუმენტის შეცვლის) დროს. ცხადია ფუნქციაც შეიცვლება.

სკალარული არგუმენტის შემთხვევაში სკალარული და ვექტორული ფუნქციების წარმოებულები ჩვეულებრივი წესით განისაზღვრებიან:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \\ \frac{dA}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (2,8)$$

გადავიდეთ ახლა ვექტორული არგუმენტის ფუნქციის გაწარმოების ოპერაციის განილივანზე. პირველად მოვანახოთ ვექტორული არგუმენტის სკალარული ფუნქციის $\varphi(x)$ წარმოებული.

¹ $\text{grad } \varphi(x_1, x_2, x_3)$ ვექტორის დამოუკიდებლობა კოორდინატთა სისტემის არჩევანზე ნაჩვენები იქნება ქვემოთ.

როდესაც ფუნქციის არგუმენტი ვექტორია, გაწარმოების ოპერაცია შემდეგნაირად უნდა გვესმოდეს: წარმოვიდგინოთ შეკრული ზედაპირით შემოსაზღვრული სივრცე. ზედაპირი დავყოთ უსასრულო მცირე $dx = dx^2$ ¹ ელემენტებად. ყოველი ელემენტიდან აღვმართოთ ერთეულოვანი ვექტორი n_0 აღებული ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით. ზედაპირის ყოველი ელემენტისათვის შევადგინოთ ვექტორი $\varphi(x_1, x_2, x_3) \cdot n_0 dx^2$ და შემდეგ ავჯამოთ მთელი შეკრული ზედაპირის მიმართ.

$$\oint n_0 \varphi(x_1, x_2, x_3) dx^2 = \int n_0 \varphi(x) dx^2,$$

სადაც

$$dx^2 = n_0 dx^2,$$

რონელიც საინტეგრაციო ზედაპირის შეკუმშვის შედეგად $\Delta V \rightarrow 0$, ზღვარში მოგვეყვანოს $\varphi(x)$ სკალარული ფუნქციის უსწრაფესი ცვლილების სიდიდისა და მიმართულების გამომხატველ ვექტორს, გაყოფილს აღებული ზედაპირით შემოსაზღვრულ მოცულობაზე. ამ უკანასკნელს უწოდებენ $\varphi(x)$ ფუნქციის გრადიენტს.

$$\text{grad } \varphi(x) = \nabla \varphi(x) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint n_0 \varphi dx^2, \quad (2.9)$$

ანდა

$$\nabla = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint n_0 dx^2. \quad (2.10)$$

ვექტორული არგუმენტის სკალარული ფუნქციის გაწარმოების წესი ადვილად შეიძლება გავავრცელოთ $A(x)$ ვექტორულ ფუნქციებზე; ამისათვის საკმარისია ნამრავლი $n_0 \varphi(x)$ შევცვალოთ n_0 და $A(x)$ ვექტორების სკალარული (n_0, A) ან $[n_0, A]$ ვექტორული ნამრავლებით, მაშინ მივიღებთ:

$$(\nabla, A) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint (n_0, A) dx^2, \quad (2.11)$$

$$[\nabla, A] = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint [n_0, A] dx^2, \quad (2.12)$$

გაწარმოების ნაჩვენები ოპერაციები (2,9), (2,11) და (2,12) საინტეგრაციო ზედაპირის ფორმისა და მისი ცვლილებისაგან დამოუკიდებელი არიან. აღნიშნული ფორმულების გეომეტრიული აზრის მიხედვით, გაწარმოებათა ეს მოქმედებები კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე არ არიან დამოკიდებული, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ (2,12) გამოსახულების ნიშნის ცვლილებას საწინააღმდეგოზე, კოორდინატთა მარჯვენა სისტემიდან მარცხენაზე, ანდა შებრუნებული გადასვლის დროს.

ამგვარად, გრადიენტი, რომელიც მიმართულია ნორმალის გასწვრივ, დაბალი დონის ზედაპირიდან მაღლისაკენ, კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე

¹ აქ და შემდეგშიც ზედაპირის ელემენტი აღვნიშნავთ dx^2 -ით, სივრცისა და მოცულობის ელემენტებს კი სათანადოდ dx და dx^3 -ით.

დამოუკიდებელია, ამიტომ სათანადოდ გაწარმოების ∇ ოპერატორიც ინვარიანტულია.

სიმბოლიური ∇ ვექტორის შემოღების შედეგად (2,9), (2,11) და (2,12) გაწარმოების ინვარიანტული ოპერაციები შემდეგი სახით ჩაიწერებიან:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad \text{div } A = (\nabla, A), \quad \text{rot } A = [\nabla A]. \quad (2,13)$$

ჩვენს მიერ შემოღებული ∇ ოპერატორი ფორმალურად შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი და გავაერთიანოთ მასზე ჩვეულებრივ ვექტორებზე ცნობილი ყველა მოქმედებანი; რაც საშუალებას მოგვცემს ადვილად და სწრაფად შევესრულოთ გაწარმოების საკმაოდ რთული ოპერაციები. სიმბოლიური ∇ ვექტორული ოპერატორის გამოყენების დროს ყოველთვის უნდა ვიგულისხმოთ, რომ გაწარმოების ეს ოპერატორი (2,4) „მოქმედებს“ მხოლოდ მის ნარჩენზე დაწერილ ფუნქციებზე. მაგალითად ∇ და A ვექტორების სკალარული ნამრავლი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$(\nabla, A) = \nabla_1 A_1 + \nabla_2 A_2 + \nabla_3 A_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \text{div } A. \quad (2,14)$$

ხოლო ვექტორული ნამრავლი:

$$[\nabla A] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \text{rot } A, \quad (2,15)$$

რომლის მდგენელები x_1 , x_2 და x_3 ღერძებზე არიან

$$\left. \begin{aligned} [\nabla A]_1 &= \nabla_2 A_3 - \nabla_3 A_2 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \text{rot}_1 A \\ [\nabla A]_2 &= \nabla_3 A_1 - \nabla_1 A_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = \text{rot}_2 A \\ [\nabla A]_3 &= \nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \text{rot}_3 A \end{aligned} \right\} \quad (2,16)$$

მოვნახოთ ორი სკალარული φ და f ფუნქციის ნამრავლის გრადიენტი. (2,4) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\nabla (f \cdot \varphi) = i \frac{\partial}{\partial x_1} (f \cdot \varphi) + j \frac{\partial}{\partial x_2} (f \cdot \varphi) + k \frac{\partial}{\partial x_3} (f \cdot \varphi) = f \nabla \varphi + \varphi \nabla f. \quad (2,17)$$

ანალოგიური გზით მიიღებინ შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\text{div} (\varphi A) = (\nabla, \varphi A) = (\nabla \varphi, A) + \varphi (\nabla, A) = (\text{grad } \varphi, A) + \varphi \text{div } A, \quad (2,18)$$

$$\text{rot} (\varphi A) = [\nabla, \varphi A] = [\nabla \varphi, A] + \varphi [\nabla, A] = [\text{grad } \varphi, A] + \varphi \text{rot } A \quad (2,19)$$

$$(\nabla, [AB]) = (B[\nabla A]) + (A[B, \nabla]) = (B[\nabla A]) - (A[\nabla B]),$$

ანდა

$$\operatorname{div} [AB] = (B, \operatorname{rot} A) - (A, \operatorname{rot} B). \quad (2,20)$$

სადაც გამოყენებულია (1,6) თვისება და გაწარმოების ∇ ოპერაციის როგორც გობით „მოქმედება“ A და B ფუნქციებზე.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} A = (\nabla, [\nabla, A]) = (A[\nabla \nabla]) = 0. \quad (2,21)$$

$$\begin{aligned} [\nabla [AB]] &= [\nabla [AB]]_{A=\text{Const}} + [\nabla [A, B]]_{B=\text{Const}} = \\ &= A(\nabla, B) - (A\nabla)B - [\nabla [BA]]_{B=\text{Const}} = A(\nabla B) - \\ &- (A\nabla)B - B(\nabla A) + (B\nabla)A = A \operatorname{div} B - B \operatorname{div} A - (A\nabla)B + (B\nabla)A. \end{aligned} \quad (2,22)$$

$$\begin{aligned} (A, \nabla) \varphi &= A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = (A, \nabla \varphi) = \\ &= A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos(A, x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cos(A, x_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cos(A, x_3) \right) = A \frac{\partial \varphi}{\partial A}. \end{aligned} \quad (2,23)$$

$$(A, \nabla) B = A_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial B}{\partial x_3}.$$

$$[A[\nabla B]]_{A=\text{Const}} = \nabla(A, B)_{A=\text{Const}} - (A, \nabla)B,$$

$$[B[\nabla A]]_{B=\text{Const}} = \nabla(A, B)_{B=\text{Const}} - (B\nabla)A.$$

რომლებიდანაც შეიკრების შედეგად ვღებულობთ:

$$\nabla(AB) = [A[\nabla B]]_{A=\text{Const}} + [B[\nabla A]]_{B=\text{Const}} + (A, \nabla)B + (B, \nabla)A,$$

ანდა

$$\operatorname{grad}(AB) = [A, \operatorname{rot} B] + [B, \operatorname{rot} A] + (A, \nabla)B + (B\nabla)A. \quad (2,24)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla, \nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}. \quad (2,25)$$

$$(\operatorname{grad} \varphi)^2 = (\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2. \quad (2,26)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla, \nabla \varphi] = [\nabla, \nabla] \varphi = 0. \quad (2,27)$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} A = \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right). \quad (2,28)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = [\nabla[\nabla A]] = \nabla(\nabla, A) - \nabla^2 A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A. \quad (2,29)$$

(2,11) და (2,12) ფორმულებიდან მოცულობისა და ზედაპირის სასრულო ნაწილებისათვის სათანადოდ მიიღებინ ინტეგრალური დამოკიდებულებები: ოსტროგრადსკი — გაუსის ფორმულა

$$\int \operatorname{div} A dx^3 = \oint (A_3 n_3) dx^2. \quad (2,30)$$

და სტოქსის ფორმულა

$$\int (\text{rot } A, n_0) dx^2 = \oint (A, dx). \quad (2,31)$$

პირველი მათგანი (2,30) გვაძლევს A ვექტორის ნაკადს აღებული მოცულობის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე, ხოლო მეორე ((2,31)) მის ცირკულიაციას იმ ნეკრულ კონტურზე, რომელზედაც დაყრდნობილია საინტეგრაციო ზედაპირი.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევები როდესაც φ და A არგუმენტს წარმოადგენს სკალარული $f(x)$ ფუნქცია, ე. ი. $\varphi = \varphi(f(x))$ და $A = A(f(x))$. რადგან φ და A დამოკიდებული არიან x -ზე $f(x)$ ფუნქციის საშუალებით, ამიტომ x -ით მათი წარმოებულების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ, დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილი, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი, მივიღებთ:

$$\text{grad } \varphi(f) = \nabla \varphi(f) = \frac{d\varphi}{df} \nabla f(x). \quad (2,32)$$

$$\text{div } A(f) = (\nabla, A(f)) = \left(\frac{dA}{df}, \nabla f \right). \quad (2,33)$$

$$\text{rot } A(f) = [\nabla, A(f)] = \left[\nabla f, \frac{dA}{df} \right]. \quad (2,34)$$

$$(B, \text{grad } A) = (B, \nabla) A(f) = (B, \nabla f) \frac{dA}{df}. \quad (2,35)$$

§ 3. ვექტორის წარმოებული მიმართულებით. ტენზორები

$\text{div } A$ სკალარს და $\text{rot } A$ ვექტორს სათანადოდ შეიძლება უწოდოთ A ვექტორის სკალარული და ვექტორული წარმოებულები. მათ გარკვეული გეომეტრიული აზრი აქვთ, მაგრამ ისინი საკმარისი არ არიან A ვექტორული ველის ყველა თვისებების შესასწავლად. ამიტომ ჩვენ დაგვირდება გაწარმოების ზოგიერთი ახალი ოპერაციების განხილვა, რომლებიც სკალარებსა და ვექტორებთან შედარებით უფრო რთული ბუნების სიდიდეების შემოღების აუცილებლობაზე მიგვიყვანს.

აქილთ ვექტორი A და გამოვარკვეოთ როგორი იქნება მისი წარმოებული მოცემული მიმართულებით.

ველის $A(x)$ ვექტორის ცვლილება, $P(x)$ წერტილიდან მეზობელ $P'(x + dx)$ წერტილში გადასვლის დროს, ტოლია

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial A}{\partial x_3} dx_3 = \\ &= (i dx_1 + j dx_2 + k dx_3) \left(i \frac{\partial A}{\partial x_1} + j \frac{\partial A}{\partial x_2} + k \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) = (dx, \nabla) A, \quad (3,1) \end{aligned}$$

რადგან ყოველი ვექტორული ფუნქცია A შეიძლება ავსგოთ სამი სკალარული A_1, A_2, A_3 — ფუნქციების საშუალებით:

$$A = i A_1 + j A_2 + k A_3,$$

ამიტომ (0,22)-დან თითოეული მდგენელისათვის გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial x} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \cos(x, x_1) + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \cos(x, x_2) + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \cos(x, x_3) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \cos(x, x_1) + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \cos(x, x_2) + \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \cos(x, x_3) \\ \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \cos(x, x_1) + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \cos(x, x_2) + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \cos(x, x_3) \end{aligned} \right\} (3,2)$$

რომლებიც ცხადია შეიძლება ხელახლად გავაერთიანოთ ერთ ვექტორულ ტოლობაში:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x_1} \cos(x, x_1) + \frac{\partial A}{\partial x_2} \cos(x, x_2) + \frac{\partial A}{\partial x_3} \cos(x, x_3). \quad (3,3)$$

ამგვარად A ვექტორის რომელიმე მდგენელის წარმომავალი რაიმე მიმართულებით, ისევე როგორც მისი გეგმილი რომელიმე მიმართულებაზე, დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში განისაზღვრება მისი მდგენელებისა და სათანადო მიმართულების კოსინუსების წრფივი ერთგვაროვანი ფორმით. რადგან A — ვექტორის სამი მდგენელი აქვს, ამიტომ მიმართულებით ვექტორის წარმომავლის განსაზღვრისათვის ჩვენ დაგვეჭირდება 9 სიდიდის ცოდნა.

თუ სკალარის გაწარმოების შედეგად სამი სკალარის საშუალებით განსაზღვრული ახალი ბუნების სიდიდე ვექტორი მიიღება, ვექტორის მიმართულებით გაწარმოების გზით თავის მხრივ გაცილებით უფრო რთული, 9 სკალარისაგან შედგენილი სიდიდეს — მეორე რანგის ტენზორს ვღებულობთ. ჩვენ ვხედავთ, რომ გაწარმოების ოპერაციებს სულ უფრო და უფრო რთული სიდიდეებისაქვს მივყავართ, რამაც ერთი შეხედვით შეიძლება საქმის გართულება გამოიწვიოს, სინამდვილეში კი, ახალი სიდიდეების (ვექტორებისა და ტენზორების) შემოღება მნიშვნელოვნად ამარტივებს ფიზიკის კანონების სახეს, თუ ეს კანონები ვექტორული ბუნების ფიზიკური სიდიდეების კავშირებს გამოხატავენ. უფრო მეტიც, ელექტრომაგნიტური ველის თეორიის წარმოშობასა და ჩამოყალიბებაში გადამწყვეტი როლი ითამაშა ვექტორულმა და ტენზორულმა ანალიზმა. ეს ადვილი გასაგები გახდება თუ გავითვალისწინებთ, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ძირითადი დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეები ვექტორული და ტენზორული ხასიათის არიან.

ფიზიკაში ხშირად, ვექტორის რაიმე მიმართულებით წარმომავლის (3,3) მსგავსად, ვექტორი A შეიძლება წარმოვადგინოთ სამი ურთიერთ პერპენდიკულიარული ვექტორის წრფივი კომბინაციის სახით,

$$A = B \cos(AB) + C \cos(AC) + D \cos(AD). \quad (3,4)$$

B, C და D ვექტორები, ამოცანის ზოგადობის დაურღვევლად, შეიძლება შეუთავსოთ დეკარტის ორთოგონალური კოორდინატა სისტემის x_1, x_2 და x_3 ღერძებს. ვინაიდან თითოეული ვექტორი სამი სკალარით წარმოიდგინება, ამიტომ სიდიდე A , (3,4) ფორმულის თანხმად, 9 სიდიდის ($B_1 B_2 B_3 C_1 C_2 C_3 D_1 D_2 D_3$) ერთობლიობით განისაზღვრება.

ისევე როგორც სამი სკალარი A_1, A_2 და A_3 , განსაზღვრავენ A ვექტორს, სამი B, C და D ვექტორი შეიძლება გაეაერთიანოთ ახალ სიდიდედ, რომელსაც სამგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორი ეწოდება.

თუ შემოვიღებთ ერთეულოვან n_0 ვექტორს, რომლის გეგმილები კოორდინატა ღერძებზეა სათანადოდ $n_{01} = \cos(Ax_1), n_{02} = \cos(Ax_2), n_{03} = \cos(Ax_3)$, მაშინ (3,4) ტოლობა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$A = Bn_{01} + Cn_{02} + Dn_{03},$$

რომელიც ფორმალურად ორი ვექტორის ნამრავლის სახით წარმოიდგინება:

$$A = F \cdot n_0,$$

სადაც F შედგენილია B, C და D ვექტორებისაგან, ცხადია, ეს უკანასკნელი არ წარმოადგენს არც ვექტორულ და არც სკალარულ ნამრავლს. 3 ვექტორისაგან, როგორც უკვე ზემოდ აღვნიშნეთ, შეიძლება შევადგინოთ მეორე რანგის სამგანზომილებიანი ტენზორი. ამგვარად ვექტორი A მიიღება 2F ტენზორის გადამრავლებით ერთეულოვან n_0 ვექტორზე. 2F ტენზორის ნებისმიერ x ვექტორზე გამრავლების შედეგად ვღებულობთ ისევ ვექტორს.

შემოღებული ახალი სიდიდის — ტენზორის ფიზიკური აზრის გამოსარკვევად განვიხილოთ ტეტრაედრის წონასწორობის პირობა, როდესაც მის გვერდებზე მიყენებულია ძალები: $T, -T_1, -T_2$ და $-T_3$.

ტეტრაედრის abc გვერდის ზედაპირის ფართი აღვნიშნოთ dx^2 -ით, ხოლ 3

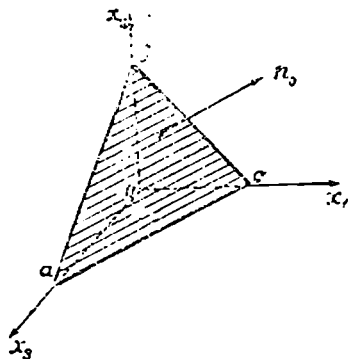
ნორმალი n_0 -ით. მაშინ, ცხადია, aob, aoc და boc ზედაპირების ფართობთა მისაღებად dx^2 უნდა გავამრავლოთ სათანადოდ: $\cos(n_0 x_1), \cos(n_0 x_2)$ და $\cos(n_0 x_3)$ სიდიდეებზე.

ტეტრაედრის წონასწორობისათვის საჭიროა მის გვერდებზე მომქმედი ძალების ჯამი იყოს ნულის ტოლი:

$$T dx^2 - T_1 dx^2 \cos(n_0, x_1) - T_2 dx^2 \cos(n_0, x_2) - T_3 dx^2 \cos(n_0, x_3) = 0$$

საიდანაც:

$$T = T_1 \cos(n_0, x_1) + T_2 \cos(n_0, x_2) + T_3 \cos(n_0, x_3). \tag{3,5}$$



ნახ. 2.

ამ უკანასკნელის (3,4) გამოსახულებასთან შედარება გვიჩვენებს, რომ სხეულის ზედაპირზე მიყენებული ძალა მეორე რანგის 2T ტენზორით გამოიხატება.

თუ (3,5) ტოლობას დავაგვემიღებთ კოორდინატთა ღერძებზე გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} T_{x_1} &= T_{11} \cos(n_0 x_1) + T_{21} \cos(n_0 x_2) + T_{31} \cos(n_0 x_3) \\ T_{x_2} &= T_{12} \cos(n_0 x_1) + T_{22} \cos(n_0 x_2) + T_{32} \cos(n_0 x_3) \\ T_{x_3} &= T_{13} \cos(n_0 x_1) + T_{23} \cos(n_0 x_2) + T_{33} \cos(n_0 x_3) \end{aligned} \right\} \quad (3,6)$$

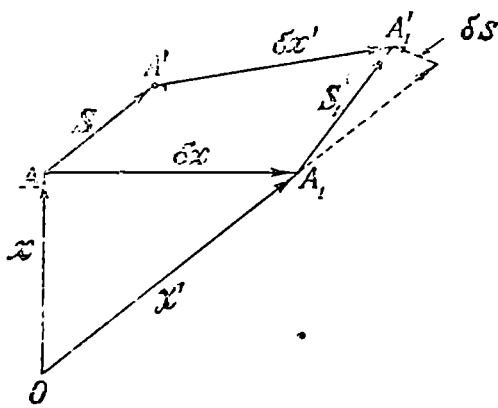
სიდიდეები: $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, \dots$ ტენზორის მდგენელებია, რომელთა საშუალებითაც მეორე რანგის ტენზორი შექმდენაირად ჩაიწერება,

$${}^2T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (3,7)$$

§ 4. სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორები. მათი ინვარიანტული თვისებები

მეორე რანგის სავანსომილებიანი ტენზორის შემოღების აუცილებლობამდე მიყავათ აგრეთვე წყარო სხეულის ან სითხის დეფორმაციათა ანალიზს.

უწყვეტ გაუმოში ავიღოთ A და A_1 წერტილები, რომელთა რადიუსვექტორებია x და x' . თუ სხეულზე ვიმოქმედებთ დეფორმაციის გასომწვევი ძალით, რომელიც წერტილის რადიუსვექტორის ფუნქციას წარმოადგენს, მაშინ A და A_1 წერტილები გადავლენ A' და A'_1 ახალ მდებარეობებში (ნახ. 3). დავეშვათ, რომ ამ წერტილების გადაადგილებები δx და $\delta x'$ სათანადო რადიუსვექტორების უწყვეტი ფუნქციებია $\delta x = \delta x(x)$ და $\delta x' = \delta x'(x')$.



ნახ. 3.

A წერტილის მიმართ A_1 -ის მდებარეობა განისაზღვრება $\delta x = x' - x$ ვექტორით, ხოლო დეფორმაციით გამოწვეული ფარდობითი გადაადგილება $\delta x = x' - x = x(x + \delta x) - x(x)$.

თუ ამ უკანასკნელს გავშლით ტეილორის მწკრივად და შემოვისაზღვრებით δx -ის პირველი ხარისხებით, მივიღებთ:

$$\delta x = (\delta x, \text{grad}) x, \quad (4,1)$$

ანდა გეგმილებში:

$$\delta S_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial S_i}{\partial x_k} \delta x_k, \quad (4,2)$$

წარმოებულები $\frac{\partial S_i}{\partial x_k}$, რომელთა რიცხვია ცხრა, შეადგენს მეორე რანგის სამგანზომილებიან T_{ik} ტენზორს.

ყოველი $\frac{\partial S_i}{\partial x_k}$ სიდიდე შეიძლება ორი შესაქრების ჯამის სახით წარმოვიდგინოთ. სახელდობრ:

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_k} + \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_k} - \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \right).$$

ანდა

$$T_{ik} = T'_{ik} + T''_{ik}. \quad (4,3)$$

სადაც:

$$T'_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_k} + \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \right); \quad (4,4)$$

და

$$T''_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_k} - \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \right). \quad (4,5)$$

(4,4) და (4,5)-დან გამომდინარეობს, რომ i და k ინდექსების ადგილების შეცვლის დროს პირველი ნიშანს არ იცვლის $T'_{ik} = T'_{ki}$; ხოლო მეორე კი ნიშანს იცვლის $T''_{ik} = -T''_{ki}$. სათანადოდ პირველს (4,4) ეწოდება სიმეტრიული, მეორეს (4,5) კი ანტისიმეტრიული ტენზორი. T''_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორის მდგენელები ემთხვევიან ისეთი A ვექტორის მდგენელებს. რომლებიც შემდეგი ტოლობით არიან განსაზღვრული:

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{rot} S = \frac{1}{2} [\nabla, S]. \quad (4,6)$$

მეორე ტენზორითი გადაადგილება $\delta S'$ და $\delta S''$ გადაადგილებათა ჯამზე დაიყვანება, რომელთაგან პირველი სიმეტრიული, მეორე კი ანტისიმეტრიული ტენზორებით გამოიხატებიან. $\delta S'$ განსაზღვრავს აღებული სხეულის მოცულობის ΔV ელემენტის ადგილობრივ დეფორმაციებს, გაჭიმვას და ლუნვას, ხოლო $\delta S'' = \frac{1}{2} [A \delta x]$ კი, შემობრუნებას მოცემული A ვერტიკალის ირგვლივ $\frac{1}{2} \operatorname{rot} S$ კუთხური სიჩქარით. ამგვარად ყოველი ტენზორი იმავე რანგის სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ჯამის სახით წარმოიდგინება.

განვიხილოთ ნამრავლი: $T'_{ik} \cdot T'_{ik}$. თუ i და k ინდექსებს ადგილებს შეუცვლით და გავითვალისწინებთ, რომ ადებულ ნამრავლში აჯამება უნდა მოვახდინოთ ორივე ინდექსებით მივიღებთ:

$$T'_{ik} \cdot T'_{ik} = -T'_{ki} T'_{ki} = -T'_{ik} T'_{ik} = 0, \quad (4,7)$$

ე. ი. სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ნამრავლი ყოველთვის ნულის ტოლია. ახლა ადვილად შეიძლება გამოვარკვიოთ და დავადგინოთ ტენზორის ის თვისებები, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან დამოუკიდებელი არიან. ამისათვის (3,3) გადმოვწეროთ შემოკლებული ფორმით:

$$T_{xi} = T_i = \sum_{k=1}^3 T_{ik} n_{ok}, \quad (4,8)$$

თუ შემოვბრუნებთ კოორდინატთა სისტემას ისეთნაირად, რომ T და n_o სიდიდეების მდგენელები ახალ ღერძებზე სათანადოდ გახდნენ T'_i და n'_{oi} , მაშინ ან უკანასკნელთა შორის დამოკიდებულება საზოგადოდ წარმოდგენილი იქნება (4,8)-გან განსხვავებული კოეფიციენტების საშუალებით:

$$T'_i = \sum_{i=1}^3 T'_{ii} n'_{oi}. \quad (4,9)$$

კოორდინატთა სისტემის ბრუნვა, როგორც ცნობილია, აღიწერება ძველის მიმართ ახალი კოორდინატთა სისტემის ღერძების მიმართულების კოსინუსების (α_{ik} კოეფიციენტების) საშუალებით, რომელთა რიცხვია 9.

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$T'_i = \sum \alpha_{il} T_l; \quad n'_{oi} = \sum \alpha_{ik} n_{ok}. \quad (4,10)$$

თუ ახლა (4,10) გამოსახულებებს შევტანთ (4,8) და (4,9) განტოლებებში და გავითვალისწინებთ, რომ α_{ik} კოეფიციენტებს შორის, კოორდინატთა სისტემის ორთოგონალობის გამო. არსებობს შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\sum \alpha_{ik} \alpha_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } k=l \\ 0, & \text{თუ } k \neq l \end{cases}$$

მივიღებთ:

$$\sum_{l,k=1}^3 \alpha_{il} T_{lk} n_{ok} = \sum_{l,k=1}^3 T'_{il} \alpha_{lk} n_{ok}.$$

რომელსაც ადგილი აქვს ყოველგვარი n ვექტორისათვის. ამგვარად ჩვენ გვაქვს

$$\sum \alpha_{il} T_{lk} = \sum T'_{il} \alpha_{lk}.$$

ამ უკანასკნელის α_{mk} -ზე გამრავლებისა და k — ინდექსით აჯამების შედეგად მიიღება T_{ik} მდგენელების გარდაქმნის ფორმულები, კოორდინატთა სისტემაში ღერძების შემობრუნების დროს

$$T'_{im} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{mk} T_{ik}. \quad (4,11)$$

მიღებულიდან პირველყოვლისა გამომდინარეობს, რომ თუ $T_{ik} = \pm T_{ki}$, მაშინ სათანადოდ $T'_{ik} = \pm T'_{ki}$. ე. ი. ტენზორის სიმეტრიის თვისებები კოორდინატთა სისტემისაგან სრულიად დამოუკიდებელია. გარდა ამისა თუ (4,11)-ში დავუშვებთ, რომ $i = m$ და მოვახდენთ შეჯამებას m ინდექსის მიხედვით, გვექნება:

$$\sum_{m=1}^3 T'_{mm} = \sum_{k=1}^3 T_{kk},$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ტენზორის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული წევრების ჯამი აგრეთვე ინვარიანტულ სიდიდეს წარმოადგენს. ყოველი სკალარული სიდიდე (რაიმე რიცხვი λ) ინვარიანტია. ასეთივე თვისებისაა „ერთეულოვანი ტენზორი“ δ_{im} , ის არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის შემობრუნების დროს. ცხადია აგრეთვე ინვარიანტი იქნება ნამრაველი $\lambda \delta_{im}$. გამოვიყენოთ (4,11) განტოლება და შევადგინოთ სხვაობა:

$$T'_{im} - \lambda \delta_{im} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{mk} (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}).$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $\alpha_{ii} = 1$, კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი $\|\alpha_{ii}\| = 1$, მაშინ დეტერმინანტთა გამრავლების ცნობილი წესის გამოყენების შედეგად, უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$D(\lambda) = \|T'_{im} - \lambda \delta_{im}\| = \|T_{ik} - \lambda \delta_{ik}\| \quad (4,12)$$

დამოუკიდებელია კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. მაშასადამე, $D(\lambda)$ დეტერმინანტის გაშლის ყოველი კოეფიციენტი ინვარიანტია. კერძოდ ინვარიანტულ სიდიდეებს წარმოადგენენ $D(\lambda) = 0$ განტოლების ფესვები λ_1 , λ_2 და λ_3 . ანალოგიური მსჯელობები უნდა ჩავატაროთ მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რანგის ტენზორების მიმართ. ჩვენ მათ არ შეეხებოდა, რადგან მთელი კურსის მანძილზე მხოლოდ მეორე რანგის ტენზორებთან გვექნება საქმე.

უარყოფითობის სპეციალური თეორია

§ 5. მატერია და მისი თვისებები

ჩვენს ირგვლივ სამყაროში უთვალავი მოვლენები მიმდინარეობენ. ბუნების მოვლენების ამ დაუსრულებელი ნაირსხვაობის ერთიან საფუძველს მატერია წარმოადგენს.

მარქსისტული ფილოსოფიური მატერიალიზმის თანახმად, სამყაროს ნამდვილი ერთიანობა მის მატერიალურობაში მდგომარეობს. სამყარო თავისი ბუნებით მატერიალურია.

დიალექტიკური მატერიალიზმი გვასწავლეს, რომ ბუნების ყოველი მოვლენის საფუძველს მატერიის მოძრაობა წარმოადგენს. ყოველ მოვლენაში, და კერძოდ კი ფიზიკურში, ჩვენ საქმე გვაქვს სხვადასხვა სახის ფიზიკურ მოძრაობათა ცვლილებებსა და მათ ურთიერთ გარდაქმნებთან.

საგანთა ურთიერთკავშირსა და ურთიერთ გარდაქმნადობის დაუსრულებელ მიმდინარეობაში ვლინდება სამყაროს ერთიანობა. ყოველი ნივთი, ობიექტური სამყაროს ყოველი მოვლენა, დაუსრულებლად იცვლის თავის ფორმას, განიცდის რაოდენობრივ და თვისობრივ ცვლილებებს.

მატერია არის ბუნების ყოველი მოვლენის ერთადერთი წყარო და მიზეზი. მატერია არ ისპობა და არც ჩნდება, ის მხოლოდ იცვლის თავის ფორმებს. გარეშე პირობების, ე. ი. გარემომცველ სამყაროსთან ურთიერთობის ცვლილებათა შესაბამისად ერთი ფორმიდან მატერია მეორეში გადადის. მატერიის თვისებები ამოუწურავია. სხვადასხვა პირობებში, ის განსხვავებულ თვისებებს გვიჩვენებს. ენგელსი წერდა, რომ იმ დაუსრულებელ პროცესებში, რომლებშიც საქმე გვაქვს მატერიის მოძრაობასთან, არაფერი არაა მუდმივი, გარდა მუდამ მოძრაობასა და ცვალებადობაში მყოფი მატერიისა და მისი მოძრაობისა და ცვლილებების კანონებისა. მატერიალური სამყაროს ერთიანობის გაგებამდე აღამიანები მივიდნენ ფილოსოფიისა და ბუნებისმეტყველების ხანგრძლივი განვითარების შედეგად.

მატერია მრავალ სხვადასხვა თვისებებს იჩენს¹: 1) ის მუდამ მოძრაობის მდგომარეობაშია, ამ თვისების შესაბამის ფიზიკურ სიდიდეს ენერგიას უწოდებთ. 2) ერთი მატერიალური სხეული მოქმედებს მეორეზე, ეს მოქმედება შეიძლება სხვადასხვა ბუნების იყოს, მაგალითად, გრავეტაციული, ელექტრული,

¹ აქ და ყველგან ჩვენ ვგულისხმობთ მატერიის პირველადობის თვისებას და ვხვებით მხოლოდ მის ფიზიკურ თვისებებს.

მაგნიტური, ატომგულური და სხვა, რასაც სათანადოდ ფიზიკური სიდიდით — ძალით ვახასიათებთ. 3) წინააღმდეგობას უწევს მასზე მოქმედ ძალას, ე. ი. აქვს ინერციის თვისება, რომლის საზომადაც ფიზიკური სიდიდე — მასაა შენობებული და სხვა.

ამგვარად, ყოველი ფიზიკური სიდიდე-სიჩქარე, ენერგია. მასა, ძალა, აჩქარება, იმპულსი და სხვა წარმოადგენენ მოძრავი მატერიის ობიექტური თვისებების აბსტრაქტულ გამოხატულებებს, ასახავენ მის თვისობრივ მხარეებს და ახასიათებენ მატერიის მოძრაობის სხვადასხვა გამოვლინებათა რაოდენობრივ მხარეებს. მაგალითად: სიჩქარე, აჩქარება, იმპულსი და სხვა მექანიკური მოძრაობის სხვადასხვა საზომს წარმოადგენენ. მათი შემოღება აუცილებელია, რადგან ისინი ცალ-ცალკე მექანიკური მოძრაობის თვისობრივად განსხვავებულ მხარეებს ასახავენ. ფიზიკურ მოვლენათა ბუნების გასარკვევად საჭიროა გარკვეული ფიზიკური სიდიდეების შემოღება, რომელთა თვისობრივი შინაარსი მკიდროლო უნდა იყოს დაკავშირებული მუდამ მოძრავობაში და განვითარებაში მყოფი მატერიის თვისებებთან.

მატერიის მოძრაობის თვისობრივად განსხვავებული ფორმები ერთიანობისგან არიან დაკავშირებული, მაგრამ ერთის მეორეზე დაყვანა არ შეიძლება. ფიზიკის მეცნიერების ძირითად ამოცანას წარმოადგენს განსახილველ მოვლენაში მატერიის თვისებების შესაბამისი ფიზიკური სიდიდეების დადგენა და მათ შორის რაოდენობრივი კავშირის დამყარება. ფიზიკის ყოველი კანონი, სათანადო მოვლენის დამახასიათებელ ფიზიკურ სიდიდეთა შორის კავშირს გამოხატავს. მაგალითად, მექანიკის II-ე კანონი $F = ma$, მატერიალურ სხეულთა ურთიერთქმედების თვისებას — ძალას აკავშირებს ინერციის თვისებასთან — მასასთან. სხვა კანონებში მატერიის მოძრაობის თვისება — ენერგია მეორე თვისების გამოხატველ ფიზიკურ სიდიდესთან — ძალასთან, მასასთან ან რომელიმე სხვასთან იქნება დაკავშირებული.

მეცნიერების განვითარების ისტორია გვიჩვენებს, რომ შეუძლებელია მატერიის მაღალი ფორმების თვისებების შესწავლა დაყვანილი იქნეს მატერიის დაბალი ფორმების თვისებებზე.

არ შეიძლება, მაგალითად, მექანიკური მოვლენების, ე. ი. მატერიალურ ნაწილაკთა მექანიკური მოძრაობის კანონების საშუალებით ავსხნათ ელექტრო-მაგნიტური მოვლენები. ცნობილია, რომ სინათლის წარმოშობისა და გავრცელების მოვლენების ასახსნელად იყენებდნენ ჰიპოთეზურ გარემოს — ეთერს. „ეთერის“ ნაწილაკების მექანიკური რხევითი მოძრაობის გადაცემა ერთი ადგილიდან მეორეზე, ბევრითი ტალღების გავრცელების ანალოგიურად, განიხილებოდა როგორც სინათლის ტალღების წარმოშობის მიზეზი. მაგრამ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სინათლე არ წარმოადგენს რომელიმე გარემოს მატერიალური ნაწილაკების მექანიკური რხევითი მოძრაობის გადაცემის შედეგს. მართლაც, თუ დახურულ კურკელში მოვათავსებთ ელექტრულ ზარს, წრელის შეკვრისას ჩვენ ხმას გავიგონებთ და ზარის ბურთულის მოძრაობასაც დავინახავთ, ხოლო თუ კურკლიდან ჰაერს გამოვდევნით, მაშინ ბგერის ტალ-

ლები არ წარმოიშობიან, სინათლის სხივი კი გაიშვიათებულ სივრცეშიც ვრცელდება. მაშასადამე სინათლის მოვლენები, როგორც ამას ჩვენ უფრო გვიან ვნახავთ, მატერიის მოძრაობის უფრო მაღალ ფორმებთან არიან დაკავშირებული. მატერიის მოძრაობის მაღალი ანუ მატერიის მდგომარეობის ახალი ფორმების შესასწავლად, უნდა შემოვიღოთ სათანადო ფიზიკური სიდიდეები, რომლებიც მოვლენათა განსახილველი ერთობლიობისათვის ყველაზე ზოგადი იქნებიან, და მათ შორის გარკვეული რაოდენობრივი კავშირი დაეამყაროს.

ფიზიკის ერთადერთ და უმნიშვნელოვანეს პრობლემას წარმოადგენს მატერიის მოძრაობის პრობლემა. მოძრაობა, როგორი მარტივი სახითაც არ უნდა გვეჩვენებოდეს ის, სინამდვილეში ძალიან რთულია. კაცობრიობამ ყველაზე უფრო დაბალი ფორმის — მექანიკური მოძრაობის შესწავლას ათასეული წლები შესწირა. მოვლენათა შესასწავლად, პირველყოვლისა უნდა მოვნახოთ ისეთი ზოგადი პრინციპები, რომლებიც საფუძვლად დაედება მოვლენათა რაც შეიძლება დიდ რიცხვს. ასეთი პრინციპების სახით ჩვენ გვაქვს, მაგალითად, ენერჯის და იმპულსის მუდმივობის კანონები. მიუხედავად იმისა, რომ სამყაროში მიმდინარე ყოველი მოვლენისათვის ადგილი აქვთ ენერჯის და იმპულსის მუდმივობის კანონებს, ისინი საკმარისი არ არიან ამა თუ იმ ჯგუფის ფიზიკური მოვლენების კანონების ჩამოსაყალიბებლად.

მათ გარდა ჩვენ უნდა ავირჩიოთ სრულიად გარკვეული ჰიპოთეზა. ამ ჰიპოთეზას დასაწყისში შეიძლება არაავითარი ექსპერიმენტალური გამართლება არა ჰქონდეს, მისი უშუალოდ ცდით შემოწმება შეუძლებელი იყოს. მაგრამ თუ ძირითად პრინციპებზე და ჩვენს მიერ არჩეულ ჰიპოთეზაზე დამყარებით ჩამოყალიბებული თეორიის შედეგები ცდებით დადასტურდებიან, მაშინ ვიტყვი, რომ ჰიპოთეზა სწორია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ის უნდა შეეცვალოს ისეთით, რომლის საფუძველზე მიღებული კანონების სისწორეს ცდები დადასტურებენ.

თეორია, რომელსაც ცდები, დაკვირვებანი და პრაქტიკა ამართლებს, თავისი გამოყენების გარკვეულ საზღვრებში სწორია.

შეუძლებელია მატერიის ყველა თვისებების ერთდროულად ერთიმეორესთან დაკავშირება. როდესაც კონკრეტულ მოვლენას ვსწავლობთ, ჩვენ საქმე გვაქვს მატერიის მხოლოდ ზოგიერთ თვისებებთან. სხვა მოვლენის განხილვისას საქმე გვექნება განსხვავებულ თვისებებთან.

ბუნებრივია დაისმება შემდეგი საკითხი. რადგან ჯგუფ-ჯგუფად, მხოლოდ ზოგიერთი ფიზიკური სიდიდეები (მატერიის თვისებები) იმყოფებიან ერთიმეორესთან კავშირში, შეიძლება თუ არა ეს კავშირები, რომლებსაც ფიზიკის კანონებს უწოდებთ, მიღებული იქნენ ერთი და იგივე ზოგადი პრინციპიდან? ანუ სხვანაირად, შეიძლება თუ არა მექანიკური, ელექტრული, მაგნიტური, ოპტიკური და სხვა მოვლენათა კანონები გამოვიყვანოთ ერთი საერთო „უნივერსალური“ პრინციპიდან? ამ კითხვაზე დადებითად უნდა უპასუხოთ. მართლაც, ელექტრომაგნიტური მოვლენების კანონების მისაღებად ქვემოთ ჩვენ

ვისარგებლებთ იგივე პრინციპით, რომელიც საფუძვლად უდევს მექანიკურ მოვლენებს.

მაგრამ ამავე დროს მეორე კითხვა წამოიჭრება. სახელდობრ, არსებობს თუ არა რაიმე კავშირი პირველი შეხედვით ერთიმეორისაგან სრულიად განსხვავებულ მატერიალურ სხეულთა მექანიკურ, ელექტრულ, მაგნიტურ, ოპტიკურ, გრავიტაციულ და სხვა თვისებათა შორის? მიუხედავად მრავალი ცდისა, მოხდინათ ყველა სახის მოვლენათა გაერთიანება, ჯერჯერობით ერთიანი თეორია არ არსებობს. აღსანიშნავია, რომ, განსაკუთრებით მეცხრამეტე საუკუნეში, ცდილობდნენ ელექტრული და მაგნიტური მოვლენები აეხსნათ მექანიკის კანონების გამოყენებით და ამგვარად ისინი მექანიკურ მოვლენებზე დაეყვანათ. ამ პერიოდის ფიზიკას კლასიკურ ფიზიკას უწოდებენ. ბოლო დროს ცხადი გახდა, რომ ელექტრომაგნიტური მოვლენების მექანიკის კანონებით ახსნა არ შეიძლება. გამოირკვა, რომ სხეულების ელექტრული და მაგნიტური თვისებები მკიდრო კავშირში იმყოფებიან. ჯერ კიდევ გამოურკვეველია ელექტრომაგნიტური თვისებების კავშირი სხვა თვისებებთან, მაგალითად მექანიკურ და გრავიტაციულ თვისებებთან. ამგვარად, ელექტრული და მაგნიტური, ანუ მოკლედ ელექტრომაგნიტური მოვლენები, მექანიკური მოვლენებისაგან ძირფესვიანად განსხვავდებიან. მიუხედავად ამისა მათ შორის გარკვეული კავშირი მაინც გვაქვს. მექანიკური და ელექტრომაგნიტური მოვლენების დამაკავშირებელ ხიდს წარმოადგენს ის ზოგადი პრინციპი, რომელიც მათ საფუძვლად უდევს: ამ პრინციპის შესახებ უფრო დაწვრილებით ქვევით გვექნება საუბარი.

§ 6. ელემტარული და მაგნიტური ველაზი

თუ ორ სხვადასხვა არამეტალურ სხეულებს ერთიმეორეზე გავხეხავთ, (მინის ღერო შალის ნაქერზე) ანდა მოვიყვანთ მათ მკიდრო შეხების მდგომარეობაში, შემდეგ კი მათ დავაშორებთ, ადვილად შევამჩნევთ, რომ თითოეული მათგანი შეიძენს ახალ თვისებას, გარკვეული ძალით მიიზიდავს მსუბუქ სხეულებს: ქალაღდის ან თმის ნაკუწებს. ეს ურთიერთქმედების ძალა გაცილებით უფრო დიდია ვიდრე ამავე სხეულებს შორის მომქმედი გრავიტაციული ძალა, რომელიც პრაქტაკულად ყოველთვის შეუმჩნეველი რჩება.

გამოირკვა, რომ არსებობს ორი გვარის ელექტროობა: დადებითი და უარყოფითი. პირობით, მინის მიერ შალის ნაქერზე გახეხვის დროს მიღებულ ელექტრულ მუხტებს დადებით (+) ნიშანს მიაწერენ, ხოლო შალისას უარყოფითს (-). ერთნაირი ნიშნის ელექტროობით დამუხტული სხეულები ყოველთვის განიზიდებიან, სხვადასხვა ნიშნისა კი მიიზიდებიან.

ასეთი მარტივი ცდების შედეგები შეიძლება ორი ერთიმეორისაგან განსხვავებული თვალსაზრისით აეხსნათ. პირველისათვის მნიშვნელოვანია მხოლოდ და მხოლოდ დამუხტულ სხეულთა ელექტრული მდგომარეობანი, უფრო სწორად, მათზე მოთავსებული მუხტების რაოდენობანი და ურთიერთქმედებაში არაერთარ როლს არ თამაშობს მათ შორის მოთავსებული სივრცე-

როგორც ცნობილია, ორ მუხტს შორის ურთიერთქმედების ძალა პირდაპირ პროპორციულია მუხტების ნამრავლისა და უკუპროპორციული მათ შორის მანძილის კვადრატისა. კულონის ამ კანონს ისეთივე სახე აქვს, როგორც მსოფლიო მიზიდულობის კანონს.

ამგვარად, სხეულთა ელექტრული, მაგნიტური და გრავიტაციული ურთიერთქმედებანი შეიძლება აეხსნათ ამ ურთიერთქმედებათა გადაძვემი მექანიზმის გარეშე. ორი სხეული ერთიმეორეზე მოქმედებს მიუხედავად იმისა როგორია მათ შორის მანძილი. ერთი სხეული უნდა წარმოვიდგინოთ, როგორც ურთიერთქმედების ძალის წყარო, ხოლო მეორე ამ ძალის უშუალო მიყენების ობიექტად. ამ სხეულთა შორის მანძილის მიუხედავად, ისინი ერთდროულად წარმოადგენენ ურთიერთქმედების ძალის წყაროებს და ობიექტებს. სივრცის რომელიმე ადგილზე მატერიალური სხეულის (ნეიტრალური თუ დამუხტულის) შეტანისთანავე თავს იჩენს ძალა, რომელიც იმავე მომენტში იწყებს მოქმედებას მისგან ნებისმიერ მანძილზე მოთავსებულ სხვა მატერიალურ სხეულებზე. ერთი სხეულიდან მეორეზე ურთიერთქმედების გადაცემა მყისვე ხდება, ურთიერთქმედება ვრცელდება უსასრულო დიდი სიჩქარით, მატერიალური გარემოს, როგორც გადაძვემი მექანიზმის, მონაწილეობის გარეშე. ეს თვალსაზრისი ნიუტონს ეკუთვნის და მას მანძილზე მოქმედების თეორიას უწოდებენ.

პირველისაგან ძირფესვიანად განსხვავებული თვალსაზრისით, ფარადეი შეეცადა მეცნიერულად აეხსნა ელექტრო-მაგნიტური მოვლენები.

ფარადეის ვერ წარმოედგინა ორი სხეულის ურთიერთქმედება მატერიალური გარემოს, როგორც ურთიერთქმედების გადაძვემი მექანიზმის. მონაწილეობის გარეშე. მისი აზრით შეუძლებელია ერთმა სხეულმა იმოქმედოს მეორეზე და გამოიწვიოს მისი გადაადგილება ისე, რომ ისინი ერთიმეორესთან რაიმე მექანიზმით არ იყვნენ დაკავშირებული. მაგალითად, ზარის ბურთულა შესაძლებელია მოვიყვანოთ მოძრაობაში სხვადასხვა მექანიზმების საშუალებით. თუ ზარის ბურთულას მოვაბამთ თოკის ერთ ბოლოს, ხოლო მეორეს ხელით გამოვწვით, მაშინ ჩვენი მოქმედება თოკის საშუალებით გადაეცემა ბურთულას, ეს უკანასკნელი ამოძრავდება და ზარი გამოსცემს ბგერებს. იგივე ზარი შეიძლება ჩავრთოთ ელექტრულ წრედში. თუ წრედს შევკრავთ ჩამრთველით, ბურთულა ამოძრავდება, ანდა კიდევ ბურთულა შეიძლება მოვიყვანოთ მოძრაობაში დგუშის საშუალებით — ჰაერის ნაკადის მიმართვის გზით.

პირველ შემთხვევაში ზარის ბურთულაზე ჩვენი ურთიერთქმედების გადაძვემი მექანიზმს თოკი წარმოადგენს, მეორეში ელექტრული წრედი, მესამეში ჰაერის ნაკადი.

აღნიშნული მექანიზმების გარეშე ძნელი წარმოსადგენია ბურთულას ამოძრავება. ამრიგად ფარადეის თვალსაზრისით, ორი სხეულის ურთიერთქმედების გადაცემა ერთიმეორეზე ხდება მათ შორის მოთავსებული მატერიალური გარემოს უშუალო მონაწილეობით. მოქმედება სხეულიდან გადაეცემა მის უშუალო მახლობლობაში მყოფ მატერიალური გარემოს წერტილებს, საიდანაც თანმიმდევრობით ვრცელდება მეორე სხეულამდე. ფარადეის

თვალსაზრისის ახლოქმედების პრინციპი ეწოდება. ახლო ქმედების თეორია განსაკუთრებით ნაყოფიერია ელექტრო-მაგნიტური მოვლენების შესასწავლად. მანძილზე და ახლოქმედების პრინციპების შესახებ უფრო დაწვრილებით ქვემოდ გვექნება საუბარი. ახლა კი განვიხილოთ ზემოდ მოყვანილი ექსპერიმენტალური ფაქტი, ახლო ქმედების პრინციპის თვალსაზრისით.

ვისარგებლებთ რა ახლო ქმედების პრინციპით ვიტყვით, რომ: გახეხილი მინის ღეროს (შალის ნაჭერზე) ირგვლივ სივრცეში წარმოიშობა ელექტრული ველი, რომელიც განისაზღვრება სივრცის ყოველ წერტილში ველის დამახასიათებელი სიდიდეების ადგილობრივი მნიშვნელობებით. განსახილველი სივრცის ყოველ წერტილში მოთავსებულ დამუხტულ სხეულზე მოქმედი ძალების მნიშვნელობანი განსაზღვრავენ ველის თვისებებს. ახლო ქმედების პრინციპის თანახმად საკმარისია ვიციოდეთ ველის ადგილზე წერტილში მოთავსებულ სხეულზე მოქმედი ძალა, და არ გვაინტერესებს, თუ რამ შექმნა ეს ველი და როგორია მისი თვისებები სხვა ადგილებში.

ამ თვალსაზრისით ახლო ქმედების პრინციპს დიდი უპირატესობა აქვს მანძილზე ქმედების პრინციპთან შედარებით. რადგან აღებული მატერიალური სხეული ურთიერთქმედებს სამყაროში არსებულ ყველა სხეულთან, ამიტომ მანძილზე ქმედების პრინციპის თანახმად, ჩვენ ვალდებული ვართ შევისწავლოთ მისი ურთიერთქმედება ყველა დანარჩენებთან, ეს ამოცანა ყოველთვის დიდ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული, მაშინ როდესაც ახლოქმედების პრინციპი მათგან თავისუფალია.

წინა პარაგრაფში ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ ელექტრომაგნიტური მოვლენები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან მექანიკური მოვლენებისაგან, ამიტომ აუცილებელი გახდა ახალი ფიზიკური თეორიის — ელექტრომაგნიტური მოვლენების თეორიის შექმნა. ყოველი ფიზიკური თეორიის შექმნისა და განვითარების პირველ ეტაპს შეადგენს იმ სიდიდეთა მოძებნა რომელთა სივრცეში და დროში ცვალებადობა უნდა ასახავდეს მეცნიერების ამ დარგის მიერ განსახილველი მოვლენების მიმდინარეობას. მეორე საფეხურს წარმოადგენს ადგილზე სიდიდეთა შორის დამოკიდებულების გამოხატველი მათემატიკური ფორმის მონახვა. ამის შემდეგ ის შეიძლება განვიხილოთ როგორც მათემატიკური მეცნიერება, რომლის კერძო პრობლემებზე გამოყენების შედეგები კარგ თანხობაში უნდა იყოს ცდების მონაცემებთან.

ჩვენს ძირითადი საკითხი შემდეგია: რა სიდიდით დავახასიათოთ რომელიმე ნივთიერებაში, რაიმე გზით წარმოშობილი ელექტრული და მაგნიტური ველები? იმისათვის რომ უპასუხოთ ამ კითხვაზე, უნდა მივმართოთ უშუალოდ ცდას და დაკვირვებას. ფარადეის აზრით ელექტრულ (მაგნიტურ) მუხტებს შორის მოთავსებული სივრცე წარმოადგენს განსაკუთრებულ გარემოს და თამაშობს ელექტრულ (მაგნიტური) ურთიერთქმედების გადამცემი მექანიზმის როლს. ეს გარემო უნდა განვიხილოთ როგორც უწყვეტი. იმ შემთხვევაში როდესაც ელექტრული (მაგნიტური) მუხტები არა გვაქვს, გარემო იმყოფება ნორმალურ მდგომარეობაში, რაც სრულიად შეუძნეველია, გამოუმჯდავებელია. თუ სივრცის რომელიმე ადგილზე მოვათავსებთ დაელექტრირებულ

სხეულს, მაშინ ელექტრული მუხტები გამოიწვევენ სივრცის წინანდელი მდგომარეობის შეცვლას, რაც ადვილად შეიძლება აღმოვაჩინოთ იქ შეტანილ ელექტრულ (მაგნიტურ) მუხტზე, როგორც საცდელ სხეულზე მექანიკური ძალის მოქმედების მიხედვით.

ელექტრული ველის შესასწავლად უნდა ავიღოთ სათანადოდ შერჩეული „საცდელი სხეული“, მაგალითად, ძალიან წვრილ ძაფზე დაკიდული ანწლის ღეროს გულისაგან დამზადებული ბურთულა. ის წინასწარ უნდა დაემუხტოთ, რისთვისაც საკმარისია შევახოთ შალის ნაპერზე გახეხილ მინის ღეროს. „საცდელი სხეული“ შევიტანოთ ველში და გავზომოთ მის მიერ შეძენილი იმპულსის მიხედვით მასზე მოქმედი ძალის სიდიდე და მიმართულება. თუ ასეთი გზით გავზომავთ „საცდელ სხეულზე“ მოქმედ ძალას სივრცის ყოველ წერტილში, სადაც ველი გვაქვს, მაშინ ჩვენ ფაქტიურად განოკლებული გვექნება „ძალთა ველი“. ანუ ელექტრული ველი.

ამგვარად, თუ ჩვენ გვინდა აღმოვაჩინოთ და გავზომოთ ელექტრული მუხტის ველი, აუცილებელია მეორე ელექტრული მუხტის გამოყენება, რომელიც პირველის ელექტრულ ველში შეიძენს გარკვეულ იმპულსს.

თუ ველის ყოველ წერტილში „საცდელ სხეულზე“ მოქმედი ძალა სიდიდით და მიმართულებით ერთი და იგივე აღმოჩნდება, ვიტყვი, რომ ველი „ერთგვაროვანია“; წინააღმდეგ შემთხვევაში კი „მრავალგვაროვანი“.

საზოგადოდ „საცდელ სხეულზე“ მოქმედი ძალა, რომელსაც ვექტორით გამოვხატავთ, შეიძლება იცვლებოდეს სიდიდით და მიმართულებით ველის ერთი წერტილიდან მეორეში გადასვლის დროს. ელექტრულ ველს დავახასიათებთ ერთეულოვან დადებით ელექტრულ მუხტზე მოქმედი ძალით და მას ველის დაძაბულობას უწოდებთ.

ელექტრული ველის შესასწავლად მის ყოველ წერტილში „საცდელ სხეულზე“ მოქმედი ძალის განსაზღვრის დროს ჩვენ მხედველობაში უნდა მივიღოთ ერთი არსებითი მნიშვნელობის გარემოება. ერთი ელექტრული მუხტის მიერ შექმნილი ველის აღმოსაჩენად და გასაზომად იქ უნდა შევიტანოთ მეორე ელექტრული მუხტი, რომელიც თავის ირგვლივ აგრეთვე წარმოშობს ელექტრულ ველს. ეს უკანასკნელი იკრიბება პირველის ელექტრულ ველთან, ისე რომ ჩვენს მიერ გაზომილი მექანიკური ძალა სიდიდით და მიმართულებით დამოკიდებული იქნება როგორც პირველი, ისევე მეორე — „საცდელი სხეულის“ მუხტების ველების თვისებებზე. ცდები იძლევიან, რომ „საცდელ სხეულზე“ მოქმედი მექანიკური ძალა მით უფრო დიდია, რაც უფრო ძლიერად გახეხილ მინის ღეროს შევახებთ მას, ე. ი. დამოკიდებულია ელექტრული მუხტის სიდიდეზე. იმისათვის, რომ გამოსაკვლევ ველზე „საცდელი სხეულის“ ელექტრული ველის გავლენა მცირე გავხადოთ, საჭიროა მასზე მოთავსებული მუხტის სიდიდე რაც შეიძლება მცირე იყოს.

ამ პირობებში ელექტრული ველის დაძაბულობა შეგვიძლია შემდეგნაირად განვსაზღვროთ

$$e = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q}, \quad (6,1)$$

სადაც F არის „საცდელი სხეულის“ q მუხტზე მოქმედი მექანიკური ძალა. პირობას $q \rightarrow 0$ მიყვავართ მეორე პრინციპიალურ სიძნელესთან. სახელდობრ, რადგან ძალიან მცირე სიდიდის მუხტი ($q \rightarrow 0$) შეიძლება მოვთავსოთ ძალიან მცირე მოცულობისა და, მაშასადამე, მცირე მასის სხეულზე, ეს უკანასკნელი გარეშე ელექტრულ ველში შეიძენს დიდ აჩქარებას. ველის დაძაბულობა, (5,1) თანახმად, შენდევნიარად განისაზღვრება:

$$\epsilon_x = \frac{P_{0x} - P'_{0x}}{q \cdot T}, \quad (6,2)$$

სადაც P_{0x} და P'_{0x} სათანადოდ წარმოადგენენ „საცდელი სხეულის“ იმპულსებს საწყის t_0 და საბოლოო t' მომენტებში, ხოლო $T = t' - t_0$.

აღნიშნულ სიძნელეთა გამო შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ ველის თვისებების შესწავლა თითქოს გაცილებით რთული და ძნელი საქმე უნდა იყოს, ვიდრე ელექტრული და მაგნიტური მოვლენების შესწავლა მანძილზე ქმედების თეორიის თვალსაზრისით. ჩვენ შემდეგ ვნახავთ, რომ ეს თეორიები, განსაკუთრებით სტატიკურ და სტაციონარულ მოვლენებში, სრულიად ტოლფასი არიან და მიყვავართ ერთსა და იგივე შედეგებამდე. ხოლო არასტაციონარულ პროცესებში ველის თეორიას გარკვეული უპირატესობები აქვს.

ელექტრული ძალებისა და ველების გარდა ბუნებაში ჩვენ ვხვდებით აგრეთვე წათ ანალოგიურს და თავისი ბუნებით განსხვავებულ მაგნიტურ ძალებსა და ველებს. მაგნიტური ველი შეიძლება გამოვიწვიოთ სხვადასხვა გზით. მაგალითად: რკინის მადანი $F_{\epsilon_3} O_4$, ელექტრული დენი, ხელოვნური მაგნიტი თავის ირგვლივ სივრცეში წარმოშობენ მაგნიტურ ველს, რომლის აღმოჩენაც არაუეითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

¹ ქვანტური მექანიკის ძირითადი დებულებების თანახმად ϵ_x -ის გაზომვა შეიძლება მხოლოდ გარკვეული $\Delta \epsilon_x$ სიზუსტით, რაც გამოწვეულია შემდეგი გარემოებებით:

1. t საწყის და t' საბოლოო მომენტებში სხეულის იმპულსის P_x გაზომვისას დაშვებული ΔP_x შეცდომით.
 2. მდებარეობის (კოორდინატის) გაზომვისას დაშვებული შეცდომით Δx .
 3. ველის მიერ საცდელი სხეულისათვის აჩქარების მინიკებით და
 4. v_{0x} სიჩქარით, რომელსაც სხეული იძენს საწყის t_0 მომენტში ველის მოქმედებით.
- ϵ_x -ის გაზომვაში დაშვებული $\Delta \epsilon_x$ შეცდომისათვის, (5,2) თანახმად გვექნება:

$$\Delta \epsilon_x = \frac{\Delta P_x}{qT} = \frac{h}{q \Delta x T},$$

საიდანაც გამოდინარეობს, რომ ნებისმიერი Δx -თვის $\Delta \epsilon_x$ შეიძლება გავხადოთ ნებისმიერად მცირე „საცდელი სხეულის“ q მუხტის გადიდების გზით. მაგრამ ძალიან დიდი მუხტის მიერ შექმნილი ძლიერი ელექტრული ველი თან დაერთვის გასაზომ ველს და ჩვენს მიერ გაზომილი დაძაბულობა გამოსაკვლევე გარეშე ველისა და „საცდელი სხეულის“ მუხტის საკუთარი ველის დაძაბულობათა ჯამის ტოლი იქნება.

ამგვარად, ელექტრული ველის დაძაბულობის ხუსტი მნიშვნელობის გამოთვლა შეუძლებელია, რადგან „საცდელი სხეულის“ იმპულსი და კოორდინატი (მდებარეობა) განისაზღვრებიან გარკვეულ სიზუსტით $\Delta P_x \cdot \Delta x \sim h$.

ჯერჯერობით ჩვენ არ შეუდგებით მაგნიტური ველის წარმოშობის მიზეზების გამოკვლევას, შევისწავლით მხოლოდ არსებული მაგნიტური ველის დამახასიათებელ თვისებებს. უფრო გვიან კი ჩვენ ენახავთ, რომ მატერიალური სხეულების მაგნიტური თვისებები აიხსნებიან ელექტრული მუხტების სპეციფიკური მოძრაობებით.

მაგნიტური ველი მოქმედებს როგორც მაგნიტზე ისევე დენიან გამტარზე, ამიტომ მათი საშუალებით შეიძლება გამოვიკვლიოთ ამ ველის თვისებები. დენიანი გამტარის გამოყენება დაკავშირებულია პრაქტიკულ სიძნელესთან, რადგან მისი ელემენტის გამოყოფა შეუძლებელია. პრაქტიკულად გარეშე მაგნიტური ველის დაძაბულობის გასაზომად ალექსანდრე ვუიჩი წარადგინა უნდა დაეანაგროთ გამტარის ყველა ნაწილები გარდა ერთისა („დენის ელემენტი“) და გავზომოთ ის ძალა, რომლითაც ველი ამ ელემენტზე მოქმედებს. ცხადია, რომ „დენის ელემენტთან“ ერთად გადაადგილდება მთელი წრედი, რაც განიჭვევს გასაზომი ველის შეცვლას. უფრო მოსახერხებელია სიმძიმის ცენტრის გაშვება თავისუფლად მოძრავი მაგნიტური ისრის გამოყენება. გარეშე მაგნიტური ველის მოქმედების შედეგად ისარი შემობრუნდება და მისი შემობრუნების მექანიკური მომენტის გაზომვის გზით განვსაზღვრავთ მაგნიტური ველის დაძაბულობას.

თუ ველის ყოველ წერტილში ბრუნვის მომენტი, ერთი და იგივეა. მაშინ ანბობენ, რომ ველი ერთგვაროვანია. მაგნიტური ველის დაძაბულობის ნიშანტულებად მიღებულია მასში შეტანილი მაგნიტური ისრის მიმართულება, სამხრეთი პოლუსიდან ჩრდილოეთისაკენ. მაგნიტური ველის დაძაბულობის სიდიდის ზუსტი განსაზღვრა ისრის ბრუნვის მექანიკური მომენტის სიდიდის მიხედვით შეუძლებელია, რადგან ეს უკანასკნელი დამოკიდებულია თვით მაგნიტური ისრის თვისებებზე.

მატერიალური სხეულების ელექტრული და მაგნიტური თვისებებისა და მათი ცვალებადობის, ე. ი. ელექტრომაგნიტური პროცესების შესასწავლად, საკმარისია მივიღოთ ელექტრული მუხტების არსებობა, როგორც ექსპერიმენტალური ფაქტი, და სივრცის ყოველ წერტილს მივაწეროთ ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობის მნიშვნელობანი e , h .

სანამ e და h ვექტორების ურთიერთკავშირისა და დროში მათი ცვალებადობის კანონის გამოყვანას შეუდგებოდეთ გამოვარკვეოთ როგორი ანალიზური სახე უნდა ქონდეთ ველის თეორიის კანონებს.

როგორც უკვე § 6-ში აღვნიშნეთ, ელექტრომაგნიტური ველის შესასწავლად სივრცის ყოველ წერტილში უნდა განვსაზღვროთ დაძაბულობის ვექტორები $e(x_1, x_2, x_3, t)$ და $h(x_1, x_2, x_3, t)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ველის განტოლებებში არ შეიძლება შედიოდნენ ველის დამახასიათებელი სიდიდეები ალექსანდრე ვუიჩის სხვადასხვა წერტილებში. ფიზიკის ენით ეს პირობა შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვყალიბოთ: სივრცის ნებისმიერ (x_1, x_2, x_3) წერტილში ველის მდგომარეობის დამახასიათებელი რომელიმე ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობა $f_1(x_1, x_2, x_3)$, დამოკიდებული უნდა იყოს მხოლოდ და მხოლოდ

ნივე (x_1, x_2, x_3) წერტილში სხვა სიდიდეების, როგორც მდგომარეობის ფუნქციების, $f_2(x_1, x_2, x_3)$, $f_3(x_1, x_2, x_3)$... $f_n(x_1, x_2, x_3)$ მნიშვნელობებზე, ე. ი.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \Psi \{ f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3) \dots f_n(x_1, x_2, x_3) \}. \quad (1,3)$$

საზოგადოდ ველის განტოლებები, როგორც ამას შემდეგ ვნახავთ, ნაწილობითი წარმოებულებანი დიფერენციალური განტოლებებია და ამიტომ მათში შევლენ მდგომარეობის ფუნქციათა ნაწილობითი წარმოებულები:

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial f_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3},$$

აღებულ წერტილში ამ წარმოებულების განსაზღვრისათვის უნდა ვიცოდეთ $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$... $f_n(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციების მნიშვნელობანი (x_1, x_2, x_3) წერტილის ნებისმიერად მცირე მახლობლობაში.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_3}, \quad \text{ნაწილობითი წარმოებულები კი აიღებინან } (x_1, x_2, x_3)$$

წერტილში. ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სივრცის რომელიმე წერტილში ფიზიკური მოვლენა სრულიად განსაზღვრულია თუ ცნობილია ის ამ წერტილის ნებისმიერად მცირე მახლობლობაში. ამასთან დაკავშირებით ველის ქმედებას უწოდებენ „ახლო ქმედებას“, „მანძილზე ქმედებისაგან“ განსხვავებით.

§ 7. აბსოლუტური და ფარდობითი მოძრაობა. ღრმ და სივრცე

ყოველი მატერიალური ნაწილაკი თავისი ელექტრული ან მაგნიტური თვისებების მიხედვით შეიძლება იყოს დადებითი ან უარყოფითი მუხტის მატარებელი, ანდა ნეიტრალური.

ჩვენს ძირითად ამოცანას შეადგენს მუხტის მოძრაობით გამოწვეული ელექტრომაგნიტური ველის კანონების გამოკვლევა (ჩამოყალიბება). აქაც ნაწილაკის მოძრაობის შესწავლასთან გვაქვს საქმე, როგორც მექანიკაში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ მათ ელექტრული მუხტები აქვთ. ამიტომ უნდა იქნას, რომ დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობისა და მასთან დაკავშირებით წარმოშობილი ელექტრო მაგნიტური ველის კანონების შესწავლის დაწყებამდე უმჯობესი იქნება განვიხილოთ ნეიტრალური ნაწილაკის მოძრაობის კანონები. ის ძირითადი თვალსაზრისი, რომლითაც ნაწილაკის მექანიკური მოძრაობის შესწავლას მიუდგებით, აგრეთვე დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის შესასწავლადაც გამოგვადგება.

ყოველი მატერიალური სხეული, მცირე თუ დიდი, განუწყვეტლივ მოძრაობის მდგომარეობაში იმყოფება, რომელიც თავის მხრივ ცვლილების პროცესშია. ამ თვალსაზრისით ვამბობთ, რომ მატერიის მოძრაობას აბსოლუტური ხასიათი აქვს. მატერია მოძრაობის გარეშე არ შეიძლება არსებობდეს, ის ნულამოძრაობის მდგომარეობაშია. მეცნიერების ამოცანას შეადგენს მატერიის მოძრაობის შესწავლა. ბუნებრივია ჩვენ დაგვებადება კითხვა: როგორ შევისწავლოთ ეს მოძრაობა? ეს კითხვა ჯერ კიდევ უძველეს დროში დაებადა

ბერძენ ფილოსოფოსებს და პირველად არისტოტელი შეეცადა გაეცა პასუხი. მან სცადა დაემყარებია კავშირი მოძრაობის დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეებიდან ძალასა და სიჩქარეს შორის. ის იმ მოსაზრებებიდან გამოდიოდა, რომ თუ სხეულზე ძალა მოქმედებს, მას უთუოდ სიჩქარე ექნება. აქედან არისტოტელი იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ სხეულზე მოქმედი ძალა სიჩქარის პროპორციული უნდა იყოს.

როგორც ცნობილია არისტოტელმა ვერ შესძლო მოძრაობის კანონის ჩამოყალიბება. ეს კანონი მხოლოდ ორი ათასეული წლის შემდეგ იქნა მიღებული. არისტოტელის დებულება (ძალა სიჩქარის პროპორციულია) სწორი არ აღმოჩნდა იმის გამო, რომ მისი მიდგომა — შემცდარი იყო. როდესაც რაიმე ფიზიკურ სიდიდეებს ერთი გეორგესთან ვაკავშირებთ და კანონი გამოგვეყვას, უნდა შევეცადოთ ის უშუალოდ ცდით შევამოწმოთ, რადგან ყოველი თეორიის სისწორეს ცდა — პრაქტიკა უნდა ადასტურებდეს. რაინე კანონის ექსპერიმენტალური შემოწმება კი მხოლოდ მაშინ იქნება მოსახერხებელი, როდესაც ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილებში მდგომი ფიზიკური სიდიდეების გაზომვის შესაძლებლობა გვექნება.

ძალისა და სიჩქარის პროპორციულობის დებულების სისწორის გამოსარკვევად უნდა შეგვეცდოს ძალის და სიჩქარის გაზომვა. სიჩქარის გასაზომად საჭიროა მანძილისა და დროის ინტერვალის გაზომვის წესის დადგენა. ინიციათის, რომ ორ წერტილს (რომლებიც სხეულის მდებარეობებს შეესაბამებოდნენ ორ სხვადასხვა მონენტში) შორის მანძილი გავზომოთ, უნდა გვეკონდეს თითონ ამ წერტილთა მდებარეობების განსაზღვრის წესი. წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის შემოგვანებს კოორდინატთა სისტემა, რომელიც შეიძლება ყველა უთვალავი სხეულებიდან ერთ-ერთ რომელიმეს დავეუკავშიროთ. კოორდინატთა სისტემის შემოღებისას ჩვენ აუცილებლად უნდა უჩვენოთ ის სხეული, რომელთანაც ეს სისტემა დაკავშირებული. მაშასადამე, ჩვენ გვექნება იმდენი კოორდინატთა სისტემა, რამდენიც სხეულია სამყაროში, ე. ი. უთვალავი. სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემების მიმართ წერტილის მდებარეობანი სრულიად სხვადასხვა იქნებიან. ამ სისტემებში მოთავსებული დამკვირვებლებიდან ერთი და იგივე წერტილი (მატერიალური ნაწილაკი) სხვადასხვა მანძილით იქნება დაშორებული. ჩვენ უფრო მეტიც შეგვიძლია ვთქვათ, ერთი და იგივე მოვლენა, მაგალითად, მოძრავი მატარებლიდან საგნის თავისუფალი ვარდნა, ორ სხვადასხვა დამკვირვებელს, რომელთაგან ერთი დედამიწაზე დგას მეორე მოძრავ მატარებელშია, სრულიად სხვადასხვანაირად ეჩვენებათ. პირველი დამკვირვებელი იტყვის, რომ საგანი მოძრაობს მატარებლის მოძრაობის მიმართულებით, დახრილ მრუდზე, ხოლო მეორეს კი ეჩვენება საგნის ვერტიკალური ვარდნა. აქ ფიზიკური მოვლენა — საგნის ვარდნა — ერთია, მისი სახე კი დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. მოძრავ ვაგონში მოთავსებული საგნის სიჩქარე ვაგონის მიმართ ნულია, მაგრამ დედამიწის მიმართ სიჩქარე ნულს არ უდრის. ერთი და იგივე ძალის მოქმედების ქვეშ მყოფი ნაწილაკის სიჩქარეს შეიძლება ქონდეს იმდენი მნიშვნელობები, რამდენი ათვლის სისტემაც შეიძლება ავირჩიოთ. აქედან გამომდინარეობს,

რომ არისტოტელის დებულება „ძალა სიჩქარის პროპორციულია“ სწორი არაა, რადგან ერთსა და იგივე ძალას ნებისმიერი სიჩქარე შეიძლება შეესაბამებოდეს.

ჩვენ რომ შეგვეძლოს უამრავი შესაძლო კოორდინატთა სისტემებიდან, ერთ-ერთი რომელიმე უპირატესი სისტემების გამოყოფა, მაშინ მატერიალური ნაწილაკების ყველა სახის მოძრაობებს მის მიმართ შევისწავლიდით და მოძრაობის კანონები მის მიმართ იქნებოდნენ სამართლიანი. მაგრამ არ არსებობს რაიმე ფიზიკური მოვლენა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა გამოგვეყო რომელიმე უპირატესი ათვლის სისტემა. მაგრამ თუ ცდასთან ერთად აბსტრაქციასაც მოვიშველიებთ, მაშინ შესაძლებელი გახდება ყველა შესაძლო ათვლის სისტემებიდან გამოვყოთ ათვლის სისტემათა ერთი ჯგუფი, რომელშიც შემაჯავლი ყველა სისტემა ტოლფასი იქნება, და მის მიმართ შევისწავლოთ ნაწილაკის მოძრაობა. სწორედ ასე მოიქცა გალილეი და ნიუტონი, რამაც მათ საშუალება მისცა დაედგინათ მოძრაობის კანონები.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ცდა: ვთქვათ ბურთულაზე ვიმოქმედებთ გარკვეული ძალით, რის გამოც ის მიიღებს მოძრაობას, და გარკვეულ მანძილის გავლის შემდეგ გაჩერდება. იმავე ძალის მოქმედებით ბურთულა ყინულზე, ე. ი. უფრო გლუვ ზედაპირზე, უფრო დიდხანს იგორებს და პეტ მანძილს გაივლის, რისი ცდით შემოწმება არაავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. თუ იგივე ცდას გავიმეორებთ უფრო მეტად გლუვი ზედაპირის შენთხვევაში, გავლილი მანძილი კიდევ უფრო მეტი იქნება და ბოლოს აბსოლუტურად გლუვ ზედაპირზე, რომელიც პრაქტიკულად არ შეიძლება დამზადდეს, ბურთულა დაუსრულებლად იმოძრაავებს მუდმივი სიჩქარით. მიუხედავად იმისა, რომ უკანასკნელ შემთხვევაში სხეულზე არაავითარი ძალა არ მოქმედებს, ის შეიძლება მოძრაობდეს მუდმივი სიდიდისა და მიმართულების სიჩქარით. ცდის შედეგების ლოგიკური განზოგადოებით მიღებულ კანონს, ნიუტონმა ინერციის კანონი უწოდა, ხოლო სათანადო სისტემას, რომელშიაც ადგილი აქვს ინერციის კანონს — ინერციული სისტემა. ყოველი სისტემა, რომელიც ინერციული სისტემის მიმართ მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს, აგრეთვე ინერციულია. ინერციულ სისტემათა რიცხვი აგრეთვე უამრავია. ინერციული სისტემის არსებობის დაშვებიდან გამომდინარეობს მექანიკის მეორე კანონი. ზართლაც, თუ სხეულზე ძალა არ მოქმედებს ის შეიძლება მოძრაობდეს მუდმივი სიჩქარით, ძალის მოქმედებით კი სხეულის სიჩქარე იცვლება. სხეულზე ნორმალური ძალა დროის ერთეულში სიჩქარის ცვლილების სიდიდის პროპორციულია.

ყველა ინერციულ სისტემაში მექანიკის კანონებს ერთი და იგივე სახე აქვთ, რასაც ის გარემოება შეესაბამება, რომ ერთი და იგივე მექანიკური მოვლენა ყველა ინერციულ სისტემაში ერთნაირად მიმდინარეობს. კლასიკური მექანიკის ანუ ნიუტონის კანონები სამართლიანი არიან მხოლოდ ინერციულ სისტემებში. არა ინერციული სისტემებისათვის ეს კანონები საპირობებენ გარკვეულ შესწორებებს. ისინი მით უფრო სამართლიანი არიან, რამდენადაც

ათვის სისტემა უახლოვდება ინერციულ სისტემას (ჰელიოცენტრული სისტემის უპირატესობა გეოცენტრიულთან შედარებით).

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ მატერიალური ნაწილაკების (სხეულების) მოძრაობის კანონების ჩამოსაყალიბებლად გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს ათვის სისტემის არჩევასა და მანძილისა და დროის ინტერვალის გაზომვის წესის დადგენას, ანუ სხვანაირად, დრო და სივრცის თვისებებს.

მატერია მოძრაობს დროსა და სივრცეში, ისინი წარმოადგენენ მატერიის ყოფიერების ფორმებს. რადგან მატერიის მოძრაობის შესწავლის საკითხი დრო და სივრცის თვისებებთან უნდა იყოს დაკავშირებული, ბუნებრივია წარმოიჭრება კითხვა: დრო და სივრცის თვისებები არიან თუ არა დამოკიდებული მატერიის თვისებებზე? ეს საკითხი მეტისმეტად რთულია. სირთულე შექმნეში მდგომარეობს: დრო და სივრცეს, როგორც ობიექტურ რეალობას, ჩვენ ვიყენებთ მატერიის მოძრაობის შესასწავლად. თუ მათ თვისებებს მატერიის თვისებებიდან დავადგენთ, ე. ი. ფარდობით ხასიათს მივაწერთ, მაშინ მატერიის თვისებები თავის მხრივ უნდა გამომდინარეობდნენ დრო და სივრცის თვისებებიდან. როდესაც დრო და სივრცის თვისებების პოსტულირებას მატერიისაგან მოწყვეტით მოვახდენთ (აბსოლუტური დრო და სივრცე), მაშინ მას არაფერი საერთო არ ექნება მატერიის თვისებებთან და ამ უკანასკნელის მოძრაობის კანონებზე მან არავითარი გავლენა არ უნდა მოახდინოს.

ამგვარად, მატერიის მოძრაობის დასახასიათებლად შემოღებული ფარდობითი დრო და სივრცე, თვით მატერიის თვისებებზე იქნება დამოკიდებული. ხოლო აბსოლუტური დრო და სივრცე სრულიად დამოუკიდებელი უნდა იყოს მატერიის თვისებებზე. დრო და სივრცეზე ამ ორი წარმოდგენიდან ერთ-ერთი უნდა ავირჩიოთ. საკითხი იმის შესახებ, დრო და სივრცეს მივაწეროთ აბსოლუტური თუ ფარდობითი ხასიათი, ცდამ უნდა გადაწყვიტოს. მაგრამ ხშირად ცდის არასწორ ინტერპრეტაციას პრინციპიალურ შეცდომებანდე მივყავართ. ასე დავმართა ნიუტონსაც.

მიუხედავად იმისა, რომ მექანიკის კანონები სამართლიანია მხოლოდ ინერციული სისტემებისათვის, რომელთა რიცხვი უსასრულოა, ნიუტონი ამტკიცებდა რომ არსებობს მხოლოდ ერთი აბსოლუტური ყოველთვისაგან დამოუკიდებელი სივრცე. ამ უძრავ სივრცესთან ნიუტონი კოორდინატთა სისტემას აკავშირებდა და გამოყოფდა ინერციული სისტემების ჯგუფიდან. მას ნიუტონი უპირატეს სისტემად თვლიდა, და მოძრაობას მის მიმართ განიხილავდა; თუმცა რომელიმე მექანიკური მოვლენა როგორც აბსოლუტურ სივრცეში, ანუ უძრავ ათვის სისტემაში, ისევე მის მიმართ თანაბრად მოძრავ ათვის სისტემებში ინერციულ სისტემებში სრულიად ერთნაირად მიმდინარეობენ. არც ერთი მექანიკური მოვლენის მიმდინარეობა საშუალებას არ იძლევა განვასხვავოთ უძრავი სისტემა მოძრავი ინერციული სისტემისაგან. აქედან გამომდინარეობს, რომ კლასიკურ მექანიკაში ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს, რომლის თანახმადაც ბუნებაში გვხვდება სხეულების მხოლოდ ფარდობითი მოძრაობები და არ არსებობს აბსოლუტური, ე. ი. რომელიმე ერთ-ერთი განსაკუთრებული ათვის სისტემის მიმართ, მოძრაობა. ამ ძირითად

თვისებას. რომელსაც აკმაყოფილებს სხეულების მექანიკური მოძრაობა, ინერციული სისტემების მიმართ მოძრაობის ინვარიანტობის პირობას უწოდებენ.

განტოლება ან რაიმე გამოხატულება ინვარიანტულია კოორდინატთა (ათვის) სისტემების მიმართ თუ მისი სახე უცვლელი რჩება რომელიმე ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. კლასიკური მექანიკის ამ ერთ-ერთი ძირითად პრინციპს ეწოდება გალილეი—ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპი.

საინტერესოა გავარკვიოთ თუ რა მოსაზრებიდან გამოდიოდა ნიუტონი, როდესაც ის აბსოლუტურ უძრავ სივრცეს ყველა სხვა ინერციულ სისტემებიდან განოყოფდა და ვარკვეულ პრივილეგიას ანიჭებდა. თუმცა გალილეი—ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპი გვეუბნება, რომ სხეულის მოძრაობა ყოველთვის ფარდობითია, ნიუტონს მაინც მოყავდა მთელი რიგი მაგალითებისა და მათი საშუალებით ამტკიცებდა მოძრაობის აბსოლუტურ ხასიათს.

მაგალითის სახით განვიხილოთ ბრუნვითი მოძრაობა. იმ დროს როდესაც სწორხაზოვანი გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში ყველა ინერციული სისტემები სრულიად ტოლფასნი არიან, ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში, კლასიკური ფიზიკის თანახმად, საქმე სულ სხვანაირადაა. თუ სხეული ბრუნავს რომელიმე ინერციული ათვის სისტემის მიმართ, მაშინ თავს იჩენს ცენტრიდანული ძალა, ხოლო თუ შებრუნებით, სხეული უძრავია ათვის სისტემაში ბრუნავს — ცენტრიდანული ძალები არ წარმოიშობიან.

მოძრაობის პროცესის შესწავლის დროს ათვის სისტემის, როგორც ცენტრალური სხეულის მიმართ განსახილველი სხეულის ბრუნვის შეცვლას, ჩვენ მივყავართ ერთი მეორისაგან განსხვავებულ მოძრაობის სახეებთან. აქედან გამომდინარე, ნიუტონი იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ ბრუნვა აბსოლუტურ მოძრაობას უნდა წარმოადგენდეს. ასეთივე თვალსაზრისის იყო ნიუტონი საერთოდ აჩქარებული მოძრაობის მიმართ. თუ ათვის სისტემას გადავიტანთ ინერციული სისტემის მიმართ აჩქარებულად მოძრავ სხეულზე, ე. ი. აჩქარებულად მოძრავ სხეულსა და იმ სხეულს, რომელთანაც დამაგრებულია ინერციული სისტემა, ადგილებს შეუცვლით, მაშინ აღრიცხვითი ინერციული სისტემის ნაცვლად ჩვენ გვექნება არაინერციული სისტემა, რომლისთვისაც მექანიკის ძირითადი კანონები აღარ გამოდგებიან.

ნიუტონის მექანიკა ამტკიცებს, რომ აბსოლუტური აჩქარება შეიძლება აღმოვაჩინოთ აჩქარებული, მაგალითად, მბრუნავი, ათვის სისტემაში წარმოშობილი ცენტრგამშორი და კორიოლისის ძალების მოქმედების მიხედვით. საიდანაც აჩქარებული მოძრაობის შემთხვევაში, ავტომატიურად გამომდინარეობს აბსოლუტური სივრცის, ანუ უძრავი ინერციული სისტემის არსებობის აუცილებლობა. ამას უნდა დაუმატოთ აგრეთვე ნიუტონის მტკიცება მოძრაობის აბსოლუტურობის და არა ფარდობითობის შესახებ.

ნიუტონი შემდეგნაირად მსჯელობდა: ავიღოთ ცილინდრული კუბკელი, მასში ჩავასხათ სითხე (მაგალითად წყალი), დავიდოთ ის თოკზე და მოვიყვანოთ ბრუნვით მოძრაობაში თავისი ღერძის ირგვლივ. პირველად სანამ სითხე უძრავია, ჩისი ზედაპირი ბრტყელი იქნება, მაგრამ შემდეგ ხახუნის გამო კუბკელის კედლები სითხეს ჩაითრევს ბრუნვით მოძრაობაში. ბოლოს სითხე ცილინდრთან

ერთად დაიწყებს მოძრაობას, ისევე როგორც მყარი სხეული. ამ შემთხვევაში სითხის ზედაპირი გამრუდდება (ჩაიზნაქება). დასაწყისში სითხე უძრავია, — ქურქელი კი მოძრაობს. თუ ქურქელს სწრაფად გავაჩერებთ, სითხე მოძრაობას განაგრძობს. საბოლოო მომენტში სითხე მოძრაობს, ქურქელი — უძრავია. ნიუტონის თვალსაზრისით აქ ჩვენ გვაქვს პირობის კინემატიკური შებრუნება (შექცევა). საწყის და საბოლოო მომენტებში სითხისა და ქურქლის ფარდობითი მოძრაობები სრულიად ერთი და იგივეა, ამიტომ თუ ბრუნვას ფარდობითი ხასიათი ექნებოდა სითხის ზედაპირის ფორმა ორივე შემთხვევაში ერთნაირი უნდა ყოფილიყო, სინამდვილეში ფორმა იცვლება: დასაწყისში ბოტყელი იყო. ბოლო მომენტში პარაბოლოიდალური. აქ ჩვენ გვაქვს ობიექტურად განსხვავებული მოვლენები, თუმცა ფარდობითი მოძრაობა ორივე შემთხვევაში სრულიად ერთი და იგივეა. ნიუტონი ამ ფაქტს ბრუნვითი მოძრაობის აბსოლუტური ხასიათის დადასტურებად თვლიდა. ის ამბობდა: სითხის ფორმის ცვლილება იმითაა გამოწვეული, რომ სითხე აბსოლუტური სივრცის მიმართ დასაწყისში უძრავია, ბოლო მომენტში კი მოძრაობსო. მაშასადამე, ბრუნვითი მოძრაობა ყოველთვის აბსოლუტურ ხასიათს ატარებსო. ბრუნვით მოძრაობაზე აბსოლუტური სივრცის გაუღენის ნიუტონის ზემოდმოყვანილი არგუმენტაცია ერთი შეხედვით დამაჯერებელია და თითქოს ექვს არ იწვევს, საინდანაც უნდა გამოინდინარეობდეს მოძრაობის აბსოლუტური და არა ფარდობითი ხასიათი.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნიუტონის დასკვნა სწორი არაა. ამისათვის საჭიროა დასახელებული ცდის ანალიზი ჩავატაროთ. ნიუტონის მსჯელობის ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ აღწერილი ცდის საბოლოო ფაზა სინამდვილეში არ წარმოადგენს დასაწყისის კინემატიკურად შებრუნებულს (შექცეულს). მართლაც, დასაწყისში ჩვენ გვაქვს შემდეგი სურათი:

უძრავია: სითხე და მთელი დანარჩენი სამყარო, მოძრაობს: ქურქელი	}	I ფაზა
ცდის დასასრულს ე. ი. საბოლოო ფაზაში უძრავია: ქურქელი და მთელი დანარჩენი სამყარო, მოძრაობს: სითხე	}	II ფაზა

იმისათვის, რომ ცდის დასასრული, ე. ი. II ფაზა დასაწყისი — I ფაზის კინემატიკურად შებრუნებული ვახდეს, საჭიროა ცდის დასასრულს სითხესთან ერთად მოძრაობდეს მთელი დანარჩენი სამყარო. ამ შემთხვევაში ცდის დასაწყისში და დასასრულს ფარდობითი მოძრაობები ერთი და იგივე იქნებოდენ. ამგვარად, ჩვენ რომ შეგვძლებოდა ცდის საბოლოო ეტაპზე, როცა ქურქელი გაჩერებულია, სითხესთან ერთად მოძრაობაში მოგვეყვანა მთელი დანარჩენი სამყარო, მაშინ სითხის ზედაპირის ფორმის მიხედვით გამოვარკვევდით მოძრაობის ხასიათს. თუ სითხის ზედაპირის ფორმის ცვლილებას ადგილი ექნებოდა, მაშინ ვიტყოდით, რომ მოძრაობა აბსოლუტურია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ფარდობითი.

ცხადია, ასეთი ცდის ჩატარება პრაქტიკულად შეუძლებელია, მაგრამ აბსოლუტურ სივრცეზე ნიუტონის წარმოდგენების დასარღვევად ზემოდმოყვანილი ლოგიკური მსჯელობაც საკმარისია. ამგვარად, ნიუტონის მიერ განხილული ცდა სრულიადაც არ ამტკიცებს ბრუნვითი მოძრაობის აბსოლუტურ ხასიათს.

§ 8. ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი პრინციპები. სინათლის აბრაკაცია, ფიზოს და მანიქალსონის ცდები

მიუხედავად იმისა, რომ ნიუტონის თვალსაზრისით დრო და სივრცე აბსოლუტურია, კლასიკურ მექანიკაში არსებობს ფარდობითობის პრინციპი, რომლის თანახმადაც ნიუტონის მექანიკის ძირითადი კანონი, გამოხატული სამი დიფერენციალური განტოლებით:

$$F_1 = m \frac{d^2 x_1}{dt^2}; \quad F_2 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2}; \quad F_3 = m \frac{d^2 x_3}{dt^2}, \quad (8,1)$$

სახეს არ იცვლის ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ინერციული სისტემების ამ თვისების მათემატიკურ გამოხატულებას წარმოადგენს გალილეის გარდაქმნის ფორმულები:

$$x_1 = x'_1 + v_1 t; \quad x_2 = x'_2 + v_2 t; \quad x_3 = x'_3 + v_3 t, \quad t = t', \quad (8,2)$$

რომლებიც (8,1) განტოლებებს ინვარიანტულს ტოვებენ.

მექანიკური მოვლენებისათვის არსებული ფარდობითობის პრინციპი მკიდრო კავშირშია მექანიკის კანონებთან. რომლებიც სამართლიანია მხოლოდ ინერციულ სისტემებში. თავიდანვე იგულისხმება, რომ ინერციული სისტემები არსებობენ და ერთი მეორის ტოლფასი არიან. ჩვენ ზემოდ აღვნიშნეთ ნიუტონის იმ ნებედულების უსაფუძვლობა, რომლის მიხედვითაც მან ყველა ინერციული სისტემებიდან გამოყო აბსოლუტურ უძრავ სივრცესთან დაკავშირებული სისტემა და მას უპირატესობა მიანიჭა.

მექანიკური მოვლენებისათვის ფარდობითობის პრინციპის სამართლიანობა გამოარცხავს აბსოლუტური — ყოველივესაგან დამოუკიდებელი უძრავი სივრცის არსებობის შესაძლებლობას. ინერციის კანონის აღიარება გვაიძულებს შემოვიღოთ აბსოლუტური სივრცისა და დროის ცნებები: მათ გარეშე ინერციის კანონს ნიუტონის მექანიკაში აზრი არ ექნებოდა. ანტიომ საჭიროა დაწვრილებით შევისწავლოთ გალილეი-ნიუტონის კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი და გამოვარკვეოთ რამდენად „რეალური“ არიან აბსოლუტური დროისა და სივრცის ცნებები მათი ფიზიკური აზრის მიხედვით.

როგორც ვიცით, რაიმე ცნებას მხოლოდ იმ შემთხვევაში აქვს ფიზიკური აზრი, როდესაც შესაძლებელია მისი საშუალებით გამოხატული სიდიდის გაზომვა. რეალობის ასეთი განსაზღვრიდან, რომელიც ფიზიკის მეცნიერების პრაქტიკის ჩარჩოებში თავსდება, ადვილად მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ ნიუტონის აბსოლუტური უძრავი ათვლის სისტემა რეალობას მოკლებულია; რადგან სამყაროში მისი მონახვა შეუძლებელია.

მართლაც, თუ დაეუშვებთ, რომ ერთი რომელიმე ათვლის სისტემა უძრავია, მაშინ მის მიმართ თანაბრად და სწორხაზოვნად მოძრავი მეორე სისტემა, ფარდობითობას პრინციპის საფუძველზე, იგივე უფლებით შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც უძრავი. მექანიკური მოვლენა ყველა ინერციულ სისტემაში ერთნაირად მიმდინარეობს და არც ერთი მექანიკური მოვლენა საშუალებას არ იძლევა განვასხვავოთ ერთი ინერციული სისტემა მეორისაგან და ამ გზით მოვნახოთ აბსოლუტურ — უძრავ სივრცესთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა. კერძოდ, შეუძლებელია მექანიკური მოვლენების მიმდინარეობაზე დაკვირვების გზით აღმოვაჩინოთ დედამიწის გადატანითი მოძრაობა აბსოლუტური უძრავი სივრცის მიმართ, თუ მას ადგილი აქვს სინამდვილეში. ამიტომ, ჯერ კიდევ გასულ საუკუნეში, მეცნიერება შეეცადა გამოეძებნა აბსოლუტური უძრავი სივრცის, როგორც უპირატესი ათვლის სისტემის, არსებობის დამადასტურებელი გზები და საშუალებები. ამ საქმეში უდიდესი როლი შეასრულა ოპტიკურ მოვლენებზე დაკვირვებებმა.

განვიხილოთ ის ძირითადი ოპტიკური მოვლენები, რომელთა შედეგებიც გვაიძულებენ განვაზოგადოთ გალილეი-ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპი და შევცვალოთ ნიუტონის წარმოდგენები დროსა და სივრცეზე.

ისტორიულად, ფიზიკის დარგებს შორის ყველაზე ადრე მექანიკა წარმოიშვა და დასრულებული სახე მიიღო, როგორც მეცნიერებამ.

მექანიკა ისტორიული თვალსაზრისითა და თავისი შინაარსის მიხედვით, თუმცა ის ფიზიკის ერთ-ერთ ნაწილს შეადგენს, წარმოადგენს ფიზიკის საფუძველს, ამიტომ ყოველი ახალი მოვლენის შესასწავლად გასული საუკუნეების მეცნიერება ცდილობდა გამოეყენებინა მექანიკის ძირითადი კანონები. სახელდობრ, სინათლის ტალღების წარმოშობისა და გავრცელების პროცესების ასახსნელად იყენებდნენ მექანიკურ ანალოგიებს. ბგერითი ტალღების, როგორც მატერიალური გარემოს შენადგენელი ნაწილაკების (ატომ-მოლეკულების) რხევითი მოძრაობის გადაცემის შედეგის, მსგავსად, სინათლის მოვლენები წარმოდგენილი ჰქონდათ რაღაც ჰიპოთეზური გარემოს — ეთერის ნაწილაკების რხევითი მოძრაობის სივრცის ერთი ადგილიდან მეორეში თანდათანობით გადაცემის სახით. ეთერის თვისებები არსებითად განსხვავებული უნდა იყვნენ მატერიალური გარემოს თვისებებისაგან. მაშინ როდესაც ბგერითი ტალღები მხოლოდ მატერიალურ გარემოში წარმოიშობიან და ვრცელდებიან, ხოლო სიცარიელეში კი არა; სინათლის ტალღები, შებრუნებით, სიცარიელეში მაქსიმალური სიჩქარით ვრცელდებიან; მათი გავრცელების სიჩქარე მით უფრო ნაკლებია, რაც მეტია მატერიალური გარემოს სიმკვრივე.

სიცარიელე¹, რომელიც ძველი წარმოდგენების მიხედვით ეთერით უნდა იყოს გავსებული, სინათლისათვის გამსჭვირვალა.

¹ სიცარიელე, როგორც ამას ჩვენ ქვევით გამოვარკვევთ, ბუნებაში არ არსებობს. მატერიალური სხეულებიდან მეტად დიდი მანძილებით დაშორებული სივრცის ნაწილებიც კი შეიცავენ მატერიალურ ნაწილაკებს და ელექტრომაგნიტურ ველს, რომელიც აგრეთვე მატერიალურია. ეს ცნება ფარდობითია. მის ქვეშ ჩვენ წარმოვიდგინებთ სივრცის იმ ნაწილს, რომელიც მნიშვნელოვნად გაიშვიათებულია, ე. ი. შეიცავს მატერიალური ნაწილაკების საკმაოდ მცირე რიცხვს.

სინათლის მოვლენების მექანიკური თვალსაზრისით ასახსნელად, ეთერი წარმოდგენილი ჰქონდათ უწონო, უფორმო და ძრავალ სხვა ფიზიკურ თვისებებს მოკლებული ნივთიერების სახით. წინა დ მას თვლიდნენ რეალურ ნივთიერებად. კლასიკურმა ფიზიკამ ის დაუკავშირა აბსოლუტურ უძრავ სივრცეს. ამ თვალსაზრისით ეთერის მიმართ ყოველგვარი მოძრაობა აბსოლუტურ ხასიათს უნდა ატარებდეს. ჩვენთვის საინტერესოა გამოვარკვიოთ საზოგადოდ როგორია ელექტრომაგნიტური, და კერძოდ კი ოპტიკური, მოვლენების მიმდინარეობის ხასიათი.

კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი გამომდინარეობს ცდების საფუძველზე დადგენილი კანონებიდან. მექანიკის ცდებისა და თეორიების საფუძველზე განისაზღვრებიან დრო—სივრცის თვისებები. რა თქმა უნდა ფიზიკის ახალი დარგების წარმოშობას (ელექტრობა და მაგნეტიზმი, ოპტიკა) თან უნდა მოჰყოლოდა დრო და სივრცეზე წინა დ არსებული წარმოდგენების დაზუსტება. ეს ასედაც მოხდა. იმისათვის, რომ დრო და სივრცეზე კლასიკური ფიზიკის წარმოდგენების გადასინჯვა მოეხდინოთ, მათი დასაბუთების ან შეცვლის მიზნით, საჭიროა მივმართოთ ისეთ ცდებს, რომლებშიაც საქნე გვექნება ოპტიკურ მოვლენებთან.

რადგან მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი მხოლოდ მექანიკურ მოვლენებს შეეხება, ჩვენ დაგვირდება შევამოწმოთ გამოდგება თუ არა ის ოპტიკური (საზოგადოდ ელექტრომაგნიტური) მოვლენებისათვის.

განვიხილოთ ინერციულ კოორდინატთა სისტემები: K , K' , K'' ... და ა. შ. თუ რომელიმე ელექტრომაგნიტური (ოპტიკური) მოვლენის კანონს მოვინახავთ K სისტემაში, მაშინ ჩვენ უნდა მოვითხოვოთ, რომ იგივე კანონი განოღდეს ყველა დანარჩენ ინერციულ სისტემებში; რადგან აღებული მოვლენა წარმოადგენს ობიექტურ რეალობას და მისი მიმდინარეობა არ უნდა იყოს დამოკიდებული ინერციული სისტემის არჩევანზე. სათანადოდ, ოპტიკური მოვლენების გამომხატველი განტოლება არ უნდა იცვლიდეს თავის სახეს ერთი K ინერციული სისტემიდან მეორეში გადასვლის დროს.

K სისტემა უძრავად დაუკავშიროთ აბსოლუტურ სივრცეს—ეთერს. ოპტიკური მოვლენებისათვის ეთერი ისეთსავე როლს თამაშობს, როგორსაც უპირატესი აბსოლუტური უძრავი სივრცე ნიუტონის მექანიკაში.

K' სისტემა დავიწვინოთ დედამიწა. თუმცა ის მზისა და თავისი საკუთარი ღერძის ირგვლივ ბრუნვის გამო არა ინერციული სისტემაა. მაგრამ საქმეო მიახლოებით დედამიწა შეიძლება ინერციულ სისტემად ჩავთვალოთ; რადგან ექსპერიმენტის ხანგრძლიობა გაცილებით მცირეა იმ დროსთან შედარებით, რომლის განმავლობაშიაც დედამიწის სიჩქარე მნიშვნელოვნად იცვლება.

თუ მექანიკის გალილეი-ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპს ელექტრომაგნიტურ (ოპტიკურ) მოვლენებზედაც გავავრცელებთ, ე. ი. დავუშვებთ, რომ ამ უკანასკნელისათვისაც ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს, მაშინ რომელიმე ოპტიკური მოვლენის, მაგალითად, სხივის გავრცელების კანონი ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივე უნდა იყოს. უძრავი ეთერი და

მის მიმართ დაახლოებით მუდმივი სიჩქარით მოძრავი დედამიწა ტოლფასი სისტემები უნდა იყვნენ.

ობტიკურ მოვლენებზე დაკვირვება, ისევე როგორც მექანიკურზე, არ უნდა იძლეოდეს ეთერის მიმართ დედამიწის მოძრაობის აღმოჩენის შესაძლებლობას; თუ მათთვისაც სამართლიანია მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი.

უძრავ ეთერში სინათლე ყველა მიმართულებით ერთი და იგივე სიჩქარით ვრცელდება. ამ სიჩქარეს c -თი აღვნიშნავთ. ეთერის მიმართ გარკვეული v სიჩქარით მოძრავ დედამიწაზე, სიჩქარეთა შეკრების მექანიკის კანონის თანახმად, სინათლის სიჩქარე დამოკიდებული უნდა იყოს მათი ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარეზე. თუ დედამიწის ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარე სხივის გავრცელების მიმართულების თანხედენილია, მაშინ მის მიმართ სხივის სიჩქარე უნდა იყოს $c - v$; საწინააღმდეგო შემთხვევაში $c + v$.

თუ ექსპერიმენტალურად აღმოვაჩინებთ დედამიწის მიმართ სინათლის სხივის გავრცელების სიჩქარის ცვალებადობას წლის ორი სხვადასხვა დროისათვის, რომლებიც ერთიმეორისაგან ნახევარი წლის შუალედით არიან დაშორებული, მაშინ უფლება გვექნება ვამტკიცოთ, რომ არსებობს აბსოლუტური უძრავი სივრცე, როგორც ათვლის უპირატესი სისტემა. ამ შემთხვევაში ობტიკური მოვლენებისათვის ფარდობითობის პრინციპს ადგილი არ ექნება. ხოლო თუ დედამიწის მიმართ სინათლის სხივის გავრცელების სიჩქარის ცვლილებას ადგილი არ ექნება, ეს იმის მაჩვენებელი იქნება, რომ ობტიკური მოვლენებისათვისაც იარსებებს ფარდობითობის პრინციპი.

ამგვარად, ობტიკური მოვლენების მიმდინარეობათა უშუალო ექსპერიმენტალური შესწავლის გზით უნდა გამოვარკვეოთ მათი ხასიათი, სახელდობრ, შეიძლება თუ არა ელექტრომაგნიტურ (ობტიკურ) მოვლენებზე მექანიკის ფარდობითობის პრინციპის განზოგადოება.

ამ საკითხის გადასაწყვეტად განვიხილოთ ზოგიერთი ძირითადი ექსპერიმენტები.

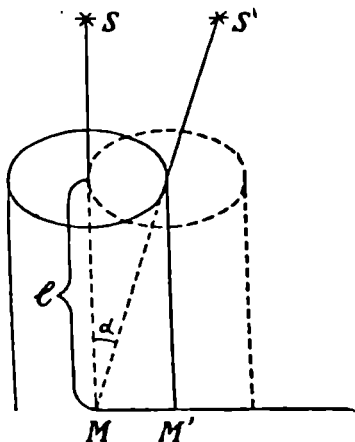
ა) სინათლის აბერაცია

აბერაცია ეწოდება უძრავი ვარსკვლავიდან დედამიწისაკენ წამოსული სხივის გადახრას. ეს მოვლენა ადვილად შეიძლება აღმოვაჩინოთ ისეთი სხივისათვის, რომელიც ვრცელდება მოძრავი დამკვირვებლის სიჩქარის პერპენდიკულარული მიმართულებით. მართლაც დაუშვათ, რომ უძრავ ეთერში მოთავსებული გვაქვს ტელესკოპი, მიმართული უძრავი S ვარსკვლავისაკენ (ნახ. 4); მაშინ S ვარსკვლავის გამოსახულებას მივიღებთ ობიექტივის ფოკალურ სიბრტყეში, ძაფების გადაკვეთის M წერტილში. თუ ტელესკოპს უძრავად დავამაგრობთ დედამიწაზე, რომელიც ვარსკვლავიდან წამოსული სხივის პერპენდიკულარული მიმართულებით მოძრაობს, ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ტელესკოპის ობიექტივში შესული სხივი აღარ მოხდება ძაფების გადაკვეთის წერტილში, რადგან იმ დროში, რომელსაც სხივი ანდომებს ტელესკოპის L სიგრძის (ობიექტივიდან M ჯვარამდე მანძილის) გავლას, ტელესკოპი MM' მანძილზე გადაადგილდება. MM' და L მანძილებს ტელესკოპი (დედა-

მიწა) და სხივი ერთსა და იგივე Δl დროში გადის; ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{MM'}{l} = \frac{v}{c} = \text{tg } \alpha. \quad (8,3)$$

იმისათვის რომ ვარსკვლავი დავინახოთ დედამიწიდან, ტელესკოპი უნდა დავხაროთ α კუთხით წინ — დედამიწის მოძრაობის მიმართულებით. როდესაც



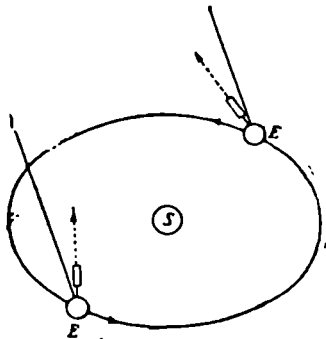
ნახ. 4.

ტელესკოპით დედამიწიდან ვსაზღვრავთ ვარსკვლავის მდებარეობას, ის უნდა გამოჩნდეს არა S წერტილში, სადაც სინამდვილეში იმყოფება, არამედ S' წერტილში (ნახ. 4). ვარსკვლავის გამოსახულების მდებარეობის პრაქტიკული განსაზღვრა ადვილია, ამისათვის საჭიროა დავევირდეთ ვარსკვლავს დედამიწის ორბიტის იმ ორი წერტილიდან, რომლებიც მზის მიმართ დიამეტრალურად საწინააღმდეგოდ არიან განლაგებული ნახ. 5-ზე $E - E'$ წერტილები. ამ წერტილებში დედამიწა ეოთინეორის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობს. სათანადოდ უნდა განვსაზღვროთ ამ წერტილებიდან ვარსკვლავის მდებარეობები. ვარსკვლავის

გამოსახულებანი აღმოჩნდებიან ორ სხვადასხვა მხარეს, გადაადგილებული. ამ გზით პირველად 1727 წელს ბრადლეიმ მონახა ტელესკოპის ღერძის დახრის კუთხის სიდიდე. აღმოჩნდა, რომ ეს კუთხე შეადგენს $20,5''$ სეკუნდს, საიდანაც ადვილად მიიღება დედამიწის ორბიტზე მოძრაობის სიჩქარე v .

$$\text{tg } 20,5'' = \frac{v}{c} = 10^{-4}, \quad v = 30 \frac{\text{კმ}}{\text{სეკ}}. \quad (8,4)$$

ამგვარად სინათლის აბერაციის მოვლენა და მასთან დაკავშირებული ოპტიკური მოვლენები, საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ დედამიწის აბსოლუტური მოძრაობა. მოძრაობა არა ციური სხეულების, არამედ უძრავი ეთერის მიმართ. ეს ცდა გვეუბნება, რომ ეთერი უძრავია და მასში ყოველი მატერიალური სხეული უნდა მოძრაობდეს სრულიად თავისუფლად, მას ეთერთან არ მიჰყვება, მატერიალური სხეულების ფარდობითი მოძრაობა არაერთაზრად გავლენას არ უნდა ახდენდეს ოპტიკური მოვლენების მიმდინარეობაზე.

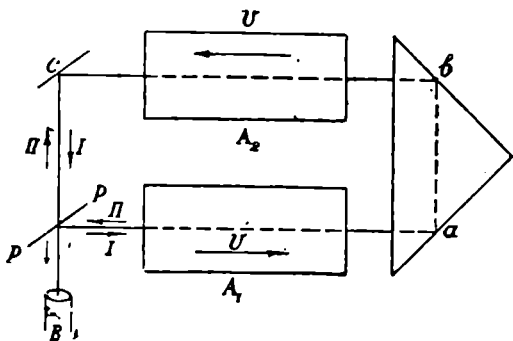


ნახ. 5.

ბ) ფიზოს ცდა

მეორე ოპტიკურად ცდა, რომელიც 1851 წელს ფიზომ ჩაატარა, შეეხება მოძრავ სხეულებში სინათლის გავრცელების საკითხს. თუ ეთერს წარმოვიდგინებთ როგორც ელექტრომაგნიტური ველის მატარებელ გარემოს, მაშინ საზოგადოდ ელექტრომაგნიტური, კერძოდ კი ოპტიკური მოვლენების მიმდინარეობა მატერიალურ სხეულებში დამოკიდებული უნდა იყოს ამ სხეულების მიმართ ეთერის მოძრაობაზე. სათანადოდ უნდა შეიძლებოდეს ოპტიკური მოვლენების საშუალებით ეთერის მიმართ აღებული სხეულის მოძრაობის ან უძრაობის ფაქტის დადგენა, რაც საბოლოოდ აბსოლუტური სივრცის არსებობის ან არ არსებობის საკითხს გადაჭრიდა.

იმის გამოსარკვევად თუ რა გავლენას ახდენს სინათლის სიჩქარეზე იმ მატერიალური გარემოს მოძრაობა, რომელშიც სხივი ვრცელდება, ფიზომ შემდეგი ცდა ჩაატარა: მან აიღო ინტერფერენციული დანადგარი (ნახ. 6). სინათლის წყაროდან წამოსული სხივი ეცემა ნახევრად გამსჭვირვალე PP სარკეს. სხივის ერთი ნაწილი გადის, მეორე აირეკლება. გამავალს



ნახ. 6.

დავარქვათ I სხივი, არეკვლილს II სხივი. I სხივი A_1 და A_2 მილებში გადის სითხის მოძრაობის მიმართულებით, ხოლო II სხივი -- სითხის დინების საწინააღმდეგოდ. I და II სხივები ბოლოს B ინტერფერომეტრში იკრიბებიან.

მექანიკის კანონების თანახმად მოძრავ გარემოში (სითხეში) სხივის გავრცელების სიჩქარე, ტოლი უნდა იყოს უძრავ გარემოში სხივის გავრცელებისა და მოძრავი სითხის სიჩქარეთა ვექტორული ჯამის. მატერიალური გარემოს მოძრაობის მიმართულებით სხივი უფრო სწრაფად უნდა ვრცელდებოდეს ვიდრე საწინააღმდეგო მიმართულებით.

თუ სინათლის სიჩქარეს უძრავ გარემოში (ეთერში) აღვნიშნავთ c -თი, ხოლო მოძრავი სითხის სიჩქარეს v -თი, მაშინ სხივის სიჩქარე u ტოლი იქნება: $u = c \pm v$ გარემოს მოძრაობის მიმართულებით და $u = c - v$ საწინააღმდეგო მიმართულებით. ეს მარტივი დამოკიდებულება $u = c \pm v$, იმ შემთხვევაში გვექნება, თუ მოძრავი სხეულები თან წარიტაცებენ ჰიპოთეზურ ეთერს. მაგრამ თუ სხეულები თავიანთი გადაადგილების დროს ეთერს არ წარიტაცებენ, მაშინ მოძრავ სითხეში სხივის გავრცელების სიჩქარე ყველა მიმართულებით ერთი და იგივე უნდა აღმოჩნდეს. ფიზოს ცდა მიზნად ისახავდა გამოერკვევა წარიტაცებენ თუ არა ეთერს მოძრავი სხეულები, ე. ი. უძრავია ის თუ მოძრაობს სხეულებთან ერთად.

ფიზოს დანადგარში I და II სხივები გადიან ერთსა და იგივე მანძილებს, მაგრამ პირველი სითხის დინების, ხოლო მეორე კი მის საწინააღმდეგო მიმართულებით. თუ Δ_1 და Δ_2 მილებში მიმდინარე სითხის მოძრაობა გავლენას მოახდენს ამ სხივების გავრცელების სიჩქარეებზე, რაც მათ სვლათა სხვაობას გამოიწვევს, მაშინ B ინტერფერომეტრში უნდა მივიღოთ ინტერფერენციული სურათი. მოძრავი სითხის მიერ ეთერის ნაწილობრივი ან სრული წარტაცების დასახასიათებლად შემოვიღოთ k კოეფიციენტი და მივიღოთ, რომ მოძრავ სითხეში სხივის სიჩქარე $u = c \pm kv$. სადაც k რიცხვი მოთავსებულია შუალედში $0 \leq k \leq 1$; მას წარტაცების კოეფიციენტი ეწოდება. თუ I და II სხივების მიერ გავლილ მანძილს B ინტერფერომეტრში მათ შეხვედრამდე l -ით აღვნიშნავთ, მაშინ მათ მიერ l მანძილის გასავლელად საჭირო დროთა სხვაობა

$$\Delta t = \frac{l}{c - kv} - \frac{l}{c + kv} \approx \frac{2lkv}{c^2}. \quad (8,5)$$

მაშასადამე, II სხივი B ინტერფერომეტრში დაგვიანებით მოდის, ამიტომ ხელსაწყოში უნდა მივიღოთ ინტერფერენციული სურათი.

ინტერფერენციული ზოლების განლაგების მიხედვით ფიზომ განსაზღვრა Δt , საიდანაც (8,5) ფორმულიდან k წარტაცების კოეფიციენტისათვის მან მიიღო:

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}; \quad (8,6)$$

სადაც n აღებული სითხის გადატეხვის მაჩვენებელია.

ამრიგად. დამოკიდებულება

$$u = c \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (8,7)$$

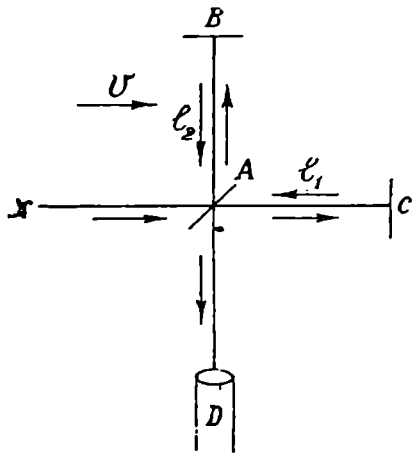
გვიჩვენებს, რომ ეთერს მხოლოდ ნაწილობრივ წარტაცებს მასში მოძრავი მატერიალური სხეულები. მაშინ როდესაც აბერაციის მოვლენიდან გამომდინარეობს ეთერის სრული უძრაობა, ფიზოს ცდა მიგვითითებს ეთერის ნაწილობრივ მოძრაობის შესახებ; ამიტომ აბერაციის მოვლენისა და ფიზოს ცდის შედეგები ნაწილობრივ ეწინააღმდეგებიან ერთმანეთს.

გ) მაიკელსონის ცდა

„აბსოლუტური“ სივრცის ანუ უძრავი ეთერის მიმართ დედამიწის მოძრაობის აღმოჩენის მიზნით 1881 წელს ოპტიკური ცდა ჩაატარა მაიკელსონმა. ამ ექსპერიმენტის ძირითად იდეას შეადგენდა დედამიწისაკენ შორეული ვარსკვლავიდან წარმოსული სხივის გავრცელების სიჩქარეთა გაზომვა დედამიწის მოძრაობის გასწვრივ და საწინააღმდეგო მიმართულებით. მაიკელსონის ცდამ გადამწყვეტი როლი შეასრულა ფარდობითობის თეორიის ჩამოყალიბების საკითხში.

ჯერ კიდევ ადრე მაქსველი იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ დედამიწის მოძრაობა უძრავი ეთერის მიმართ, თუ ეს უკანასკნელი ნამდვილად არსებობს, უნდა დაადასტუროს სათანადო ელექტროდინამიკურმა — ოპტიკურმა ცდამ.

მისი საშუალებით უნდა მოხერხდეს დედამიწის აბსოლუტური მოძრაობის შემჩნევა. მაგრამ ყველა ცდები უშედეგოდ დამთავრდნ. მრავალ ცდებს შორის, ყველაზე მნიშვნელოვანია მაიკელსონის ცდა. რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: სინათლის სხივი x წყაროდან ეცემა A ნახევრად გასკვივრვალე სარკეს, რომელიც ინტერფერენციული ხელსაწყო მოძრაობის მიმართულებასთან (v) შეადგენს 45° კუთხეს (ნახ. 7). სინათლის სხივი დაცემის წერტილში ორ ნაწილად იყოფა. ერთი მათგანი (გამავალი სხივი) ვრცელდება x -ს გასწვრივ, ეცემა C სარკეს, საიდანაც არეკვლის შედეგად ბრუნდება უკან, რომელიც A სარკეზე დაცემის დროს ორად გაიყოფა, არეკვლილი სხივი წავა ქვევით D ინტერფერომეტრში. x წყაროდან წამოსული და A სარკეზე არეკვლილი სხივი წავა ზევით — B სარკისაკენ, რომლის ზედაპირიდან არეკვლილი სხივი დაცემა ისევ A სარკეს. ნაწილი ამ სხივისა A სარკეში გაივლის, ეს უკანასკნელი შეიკრიბება პირველ სხივთან ინტერფერომეტრში.



ნახ. 7.

მაიკელსონის ხელსაწყო დამაგრებულია მასიურ ფიტარზე, რომელიც კურავს ვერცხლისწყალში ისე რომ მისი შემობრუნება ნებისმიერ კუთხეზე, ყოველგვარი შერხევის გარეშე, ადვილია.

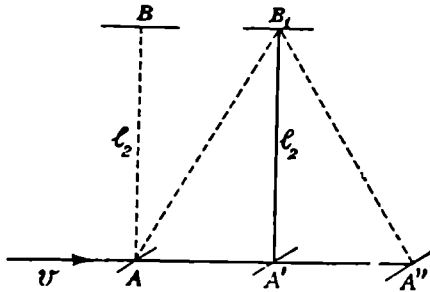
სინათლის გავრცელების სიჩქარეები დედამიწის (მასთან ერთად ხელსაწყოს) მოძრაობის გასწვრივ, პერპენდიკულიარული და საწინააღმდეგო მიმართულებებით სხვადასხვა უნდა იყვნენ. თუ ეს ასეა, მაშინ სინათლის გავრცელების კანონზე დედამიწის მოძრაობის გავლენა შესამჩნევი უნდა გახდეს.

დაეუშვათ, რომ დედამიწის და მასთან ერთად ინტერფერომეტრის მოძრაობის სიჩქარე v თანხედენილია შორეული ვარსკვლავიდან მომავალი სხივის გავრცელების მიმართულების. დედამიწაზე, ე. ი. მოძრავ ინერციულ (დასაშვები მიახლოებით) სისტემაზე მყოფი დამკვირვებლის მიმართ სინათლის სიჩქარე A -დან C სარკისაკენ მისი სვლის დროს იქნება $c - v$, რადგან C სარკე გაუბრძის სხივს, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით, ე. ი. C სარკიდან A -კენ გავრცელების სიჩქარე მიიღება მათი სიჩქარეების შეკრებით $c + v$, ამ შემთხვევაში C სარკე ეგებება სხივს.

დრო რომელსაც პირველი სხივი მოანდომებს t_1 მანძილის გავლას, წინ და უკან, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (8,8)$$

(8,9)-გან განსხვავებული დრო დასჭირდება მეორე სხივს დედამიწის მოძრაობის პერპენდიკულარული მიმართულებით, ე. ი. B სარკისაგენ წინ და უკან l_2 მანძილის გასაღელვლად. იმისათვის რომ ეს დრო გამოვთვალოთ, ჩვენ დაგვეკირდება ამ სხივის სკლის ნამდვილი გზა მოვენახოთ.



ნახ. 8.

ლი სხივი l_2 მანძილს გაივლის, B სარკე გარკვეულ მანძილზე გადაადგილდება. ის დრო რომლის განმავლობაშიც არეკვლილი სხივი A სარკიდან B სარკემდე და უკან ისევ A სარკემდე მანძილს გადის აღენიშნოთ l_2 -თი. წინ ამ სხივმა AB_1 მანძილი უნდა გაიაროს უკან B_1A'' . ცხადია, რომ ეს მონაკვეთები ტოლი უნდა იყენენ $AB_1 = B_1A''$. ამგვარად l_2 დროის განმავლობაში A სარკიდან არეკვლილი სხივი გადის $2AB_1$ მანძილს. ამავე l_2 დროში A სარკე, და რა თქმა უნდა B სარკეც, დედამიწასთან ერთად v_2 მანძილზე გადაინაცვლებს.

AB_1A'' სამკუთხედიდან ადვილად განისაზღვრება სხივის მიერ l_1 დროში გავლილი მთლიანი მანძილი $2AB_1 = \sqrt{4l_2^2 + v^2 l_2^2}$; რომელიც თავის მხრივ ct_2 სიდიდით გამოიხატება; $ct_2 = \sqrt{4l_2^2 + v^2 l_2^2}$, საიდანაც

$$l_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8,9)$$

ამგვარად, A'' წერტილში (ინტერფერომეტრში) შეკრებილი ორი სხივის სულათა სხვაობა ნულისაგან განსხვავებული იქნება, რადგან დროთა სხვაობა:

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\} \neq 0 \quad (8,10)$$

A სარკიდან C და B სარკეების დაშორებები თუნდაც რომ ტოლი ყოფილიყენენ, სათანადო სხივების სულათა შესაბამისი დროების სხვაობა ნულისაგან განსხვავებული იქნებოდა, მართლაც,

$$t_2 - t_1 = \frac{2l}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \approx \frac{l}{c} \frac{v^2}{c^2}$$

თუ მთელ ხელსაწყოს 90° კუთხით შემოვებრუნებთ, მაშინ l_1 და l_2 მხრები როლებს შეიცვლიან. დედამიწის მოძრაობის გასწვრივ მიმართული l_1 მხარის ადგილს დაიკერს $l_2 \cdot C$ და B სარკეები უბრალოდ ადგილებს იცვლიან. მობრუნების შემდეგ დროთა სხვაობისათვის გვექნება:

$$l'_2 - l'_1 = \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}. \quad (8,11)$$

როგორც პირველ (8,10) შემთხვევაში ისევე მეორეში (8,11) ინტერფერომეტრში უნდა მივიღოთ ინტერფერენციული სურათები, რომლებიც ერთიმეორეს არ დაემთხვევიან, რადგან $l_2 - l_1 \neq l'_2 - l'_1$.

ამგვარად ხელსაწყოს 90° კუთხეზე შემობრუნების შედეგად უნდა მოხდეს ინტერფერენციული ზოლების გადაადგილება, რომელიც გამოწვეული იქნება ჩვენს მიერ გამოთვლილი (8,10) და (8,11) დროთა სხვადასხვაობით. მოვნახოთ ამ დროთა სხვაობის სიდიდე Δt (8,10) და (8,11) სიდიდეების ერთიმეორიდან გამოკლება მოგვცემს:

$$\Delta t = \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}; \quad (8,12)$$

რომლიდანაც, მცირე სიჩქარეებისათვის ($v \ll c$) მივიღებთ:

$$\Delta t = \frac{l_1 + l_2}{c} \frac{v^2}{c^2}. \quad (8,13)$$

საინტერესოა გამოვარკვიოთ შეიძლება თუ არა მისი ექსპერიმენტალური გაზომვა. აღმატება თუ არა ის ცდის დროს დასაშვები შეცდომის სიდიდეს. ამ საკითხის გამოსარკვევად Δt დრო შევადაროთ სინათლის რხევის პერიოდს. იმისათვის, რომ ინტერფერენციული ზოლის გადაადგილება მოხდეს ერთი ზოლის სიგანის მანძილზე, რაც აუცილებელია ზოლების ერთიმეორისაგან გასარჩევად, აუცილებელია სხივების სვლათა სხვაობის შესაბამისი Δt დრო $\frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c} = T$ სხივის რხევის პერიოდის ტოლი იყოს. ცნობილია, რომ დედა-

მიწის სიჩქარე $v = 3,10^6 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$ და $\lambda \simeq 5,10^{-5}$ სმ. ამიტომ ერთი ზოლის სიგანეზე

გადაადგილებისათვის საჭიროა $l_1 + l_2$ უდრიდეს 50 მეტრს. მაიკელსონმა, სინათლის სხივის პრაველჯერ არეკვლის გზით, მოახერხა C და B სარკეებამდე მანძილების ჯამის გადიდება 50 მეტრამდე.

ეს ცდა პრაველჯერ იქნა განმეორებული; მაგრამ, მიუხედავად იმისა, რომ ხელსაწყოს სისტემატურად აუშჯობესებდნენ და ამაღლებდნენ მის მგრძნობიარობას, ინტერფერომეტრში არც ინტერფერენციული სურათი მიიღებოდა

ტოლი ნხრების ($l_1 = l_2$) შემთხვევაში და არც ინტერფერენციული ზოლების გადაადგილება ხელსაწყოს შემობრუნების შედეგად.

ამგვარად, მაიკლსონის ცდამ მოგვცა იმის სრულიად საწინააღმდეგო შედეგი რასაც ნოველოდით. აღმოჩნდა, რომ სინათლის გავრცელების სიჩქარე ნოდრავ დედამიწაზე ყველა მიმართულებით ერთი და იგივეა. თუ უძრავ ეთერში სინათლის სიჩქარეს აღვნიშნავთ c -თი, მაშინ ეთერის მიმართ v სიჩქარით მოძრავ დედამიწაზე (v სიჩქარით მოძრავ ინერციულ სისტემაში) მოთავსებული დამკვირვებლის თვალსაზრისით, კლასიკური მექანიკის კანონების თანახმად, სინათლის სხივის გავრცელების სიჩქარე უნდა იყოს $c - v$ ან $c + v$, იმის მიხედვით სხივი ვრცელდება დედამიწის მოძრაობის გასწვრივ თუ საწინააღმდეგო მიმართულებით.

მაიკლსონის ცდა, რომლის გაზომვების სიზუსტეში ექვის შეტანა არ შეიძლება, ამტკიცებს, რომ ეთერის მიმართ დედამიწის მოძრაობა სრულიად შეუძენვეელი რჩება; საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ოპტიკური მოვლენებისთვისაც ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს. მაიკლსონის ცდის უარყოფითი შედეგის ასახსნელად, უძრავი ეთერის თეორიის შემომქმედმა ლორენცმა და მისგან დამოუკიდებლად ფიცჯერალდმა, წამოაყენეს დაუსაბუთებელი ჰიპოთეზა, რომლის თანახმადაც მატერიალური სხეულები მოძრაობის დროს, მათ შიგნით მომქმედი მოლეკულიარული ძალების სათანადო კვლილებათა გამო მოძრაობის მიმართულებით უნდა განიცდიდნენ შემოკლებას

$\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ -ჯერ. სიგრძის ასეთი ჰიპოთეზური ცვლილებით ლორენცი

კვლილობდა (8.10) ანუ რაც იგივეა (8.12) სიდიდე ნულზე დაეყვანა. მართლაც, ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ შემოკლების ჰიპოთეზის საფუძველზე აიხსნება მაიკლსონის ცდის უარყოფითი შედეგი.

ლორენც-ფიცჯერალდის ჰიპოთეზა მეტისმეტად ხელოვნურია. მისი ააშუალებით ლორენცი კვლილობდა ჩამოყალიბებულია მოძრავ სხეულებში მიმდინარე ელექტრომაგნიტური პროცესების წინააღმდეგობისაგან თავისუფალი თეორია. ის ძალაში ტოვებდა დრო და სივრცის შესახებ კლასიკური მექანიკის წარმოდგენებს, მათ აბსოლუტურ ხასიათს. მაგრამ ასეთი თეორიის ჩამოსაყალიბებლად საჭირო იყო ახალ-ახალი დაუსაბუთებელი რთული ჰიპოთეზების შენობება.

მაიკლსონის ცდის უარყოფითი ეფექტის ასახსნელად რიტცმა წამოაყენა ჰიპოთეზა. რომლის თანახმადაც სინათლის სიჩქარე დამოკიდებული უნდა იყოს წყაროს მოძრაობის სიჩქარეზე. სინათლის სიჩქარე წყაროს მოძრაობის გასწვრივ მეტი უნდა იყოს ვიდრე საწინააღმდეგო მიმართულებით. მაგრამ ორმაგ ვარსკვლავებზე ჩატარებულმა ასტრონომიულმა დაკვირვებებმა (დესიტრუჩი), რიტცის ჰიპოთეზის უსაფუძველობა დაადასტურეს. მაშასადამე, მაიკლსონის ცდის უარყოფითი შედეგის დამაკმაყოფილებელი ახსნა კლასიკური მექანიკის ფარგლებში არ მოხერხდა.

კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ცდა, რომელიც იმავე მიზანს ისახავდა რასაც მაიკელსონის ცდა, ჩაატარეს ტროუტონმა და რანკინმა. მათ დენიანი განტარი მოათავეს ჯერ დედამიწის მოძრაობის გასწვრივ. შემდეგ კი პერპენდიკულარული მიმართულებით. თუ დედამიწის მოძრაობა გავლენას მოახდენდა განტარის შიგნით ელექტრომაგნიტური პროცესების მიმდინარეობაზე, მაშინ ნასუნდა გამოეწვია გამტარის წინააღმდეგობის ცვლილება. ტროუტონმა და რანკინმა ზუსტი ცდებით გამოარკვეეს, რომ დედამიწის (გამტარის) მოძრაობა გავლენას არ ახდენს წინააღმდეგობაზე.

თუ ახლა ზემოდ ჩამოთვლილი ცდების შედეგებს ერთნაწილად შევადარებთ, დავჩანახათ რომ ისინი ერთიმეორეს ეწინააღმდეგებიან. კლასიკური მექანიკის¹ ჩარჩოებში შეუძლებელია ერთიანი მეცნიერული თვალსაზრისით მათი ახსნა.

მაშინ როდესაც სინათლის აბერაციის მოვლენის თანახმად ოპტიკური მოვლენებისათვის ფარდობითობის პრინციპს ადგილი არა აქვს, ფიზოს ცდის შედეგი მიგვიბრუნებს, რომ ნაწილობრივ ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს, ხოლო მაიკელსონის ცდა კი ამტკიცებს, რომ ოპტიკური მოვლენებისთვის სამართლიანია ფარდობითობის პრინციპი. ისევე როგორც მექანიკურ მოვლენებისათვის. ჩამოთვლილი ოპტიკური ცდების შედეგების საფუძველზე შესაძლებელია ორი ერთიმეორის საწინააღმდეგო დასკვნის გამოტანა: ან ოპტიკური მოვლენებისათვის საზოგადოდ ადგილი არა აქვს ფარდობითობის პრინციპს, ანდა პირიქით, მათთვის ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს.

ბუნებრივია, უმჯობესი იქნება მივიღოთ, რომ ოპტიკური მოვლენებისათვისაც ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს და შევეცადოთ თვორია ისეთნაირად ჩამოვყალიბოთ, რომ მან მოგვცეს ყველა დანაოჩენი მოვლენების მეცნიერული ახსნა. მართლაც, ჩვენ გამოვარკვეით, რომ მექანიკური მოვლენები ყველა ინერციულ სისტემაში ერთნაირად მიმდინარეობენ და არ არსებობს აბსოლუტურად უძრავი, როგორც უპირატესი ინერციული სისტემა, ამიტომ ვცადოთ გავავრცელოთ მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი ოპტიკურ მოვლენებზედაც. ამით ჩვენ თავს დაკალწვევთ აბსოლუტური უძრავი სისტემის ხელახლად შემოღების აუცილებლობას.

ამგვარად. მაიკელსონის ცდის შედეგის — (სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობა ყველა ინერციულ სისტემებში) ძირითად გამოსავალ პუნქტად აღიარება საშუალებას გვაძლევს განიღვივოთ განოვრიცხოთ უძრავი აბსოლუტური სივრცე მასთან დაკავშირებული ეთერით.

რადგან უძრავი აბსოლუტური სივრცის მიწართ სხეულების მოძრაობა შეუძენველია, ნიუტონის აბსოლუტური სივრცე და დრო კარგავენ თავისი, ისედაც დაუსაბუთებელი, არსებობის უფლებას. აბსოლუტურ სივრცესთან დაკავშირებული კოორდინატა სისტემა ფიზიკურად უაზრობას წარმოადგენს. ამიტომ ჩვენ უნდა შევეცვალოთ გალილე-ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპის ფორმულირება ისეთნაირად, რომ მასში არსად ლაპარაკი არ იყოს აბსოლუტურ სივრცესთან დაკავშირებულ უძრავ კოორდინატა სისტემის შესახებ. ინერციული სისტემებიდან აღარ უნდა შეიძლებოდეს ერთ-ერთი

უპირატესი სისტემის გამოყოფა. ერთსა და იგივე შემთხვევაში არ შეიძლება ველაპარაკოთ რამდენიმე სივრცეზე. მოვლენის შესასწავლად სრულიად საკმარისი უნდა იყოს ერთი ათვლის სისტემა, ანუ მისი შესაბამისი ერთი სივრცე. სათანადოდ კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი შემდგენიერად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: არსებობს უსასრულოდ ბევრი ერთიმეორის მიმართ თანაბრად და სწორხაზოვნად მოძრავი ტოლფასი — ინერციული სისტემები, რომლებშიაც სამართლიანია მექანიკის კანონები თავისი კლასიკური ფორმით. ასეთივე თვალსაზრისით უნდა მიუღვეთ ელექტრომაგნიტური მოვლენების შესწავლასაც. რომელიმე ელექტრომაგნიტური პროცესის მიმდინარეობა ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივე უნდა იყოს. ერთი შეხედვით აქ ისეთი შეხედულება იქნება თითქოს საკმარისი იყო ელექტრომაგნიტურ მოვლენებზე კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპის უბრალო გადატანა. სინამდვილეში მექანიკის ფარდობითობის პრინციპის უბრალო გავრცელება ოპტიკურ მოვლენებზე არ შეიძლება. რადგან მათთვის სიჩქარეთა შეკრების მექანიკის კანონი სრულიად განოუსადაგებარია, როგორც ამას ადასტურებს მაიკელსონის ცდა.

მექანიკის სიჩქარეთა შეკრების კანონი თავის მხრივ გამომდინარეობს გალილეის გარდაქმნების (7,2) ფორმულებიდან, ამიტომ ცხადია, რომ (7,2) გარდაქმნის ფორმულები. რომლებიც კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპის ნათქვამიკურ განმარტულებებს წარმოადგენენ, ოპტიკური მოვლენებისათვის არ გამოდგებიან.

ანგვარად, ოპტიკურ მოვლენებისათვის ფარდობითობის პრინციპის სამართლიანობის მოთხოვნა (მაიკელსონის ცდის შედეგი) გვაიძულებს ფარდობითობის პრინციპი ისეთნაირად ჩამოვაყალიბოთ, რომ მის საფუძველზე შექმნილი თეორია იძლეოდეს როგორც მექანიკური, ისევე ელექტრომაგნიტური მოვლენების მიმდინარეობის დამაკმაყოფილებელ ახსნას. ამ ამოცანის დადებითად გადაწყვეტამ მოითხოვა დროზე და სივრცეზე კლასიკური ფიზიკის წარმოდგენების გადასინჯვა.

დრო და სივრცის აბსოლუტური ხასიათის უარყოფის შესახებ საკითხი პირველად 1905 წელს ეინშტეინმა დასვა. მან საკითხი შემდგენიერად დააყენა: შეიძლება თუ არა დრო და სივრცეზე არსებული წარმოდგენების (აბსოლუტური დრო და სივრცე) შეცვლის გზით დრო-სივრცის ისეთი თვისებები გამოენახოთ, რომლის მიხედვითაც ერთი მხრივ პრინციპიალურად შეუძლებელი იქნება უპირატესი ინერციული სისტემის გამოყოფა. ხოლო მეორე მხრივ შესაძლებელი გახდება სინათლის აბერაციის მოვლენისა და ფიზოს და მაიკელსონის ცდების შედეგების ერთიანი მეცნიერული თვალსაზრისით ახსნა.

მაიკელსონის ცდის შედეგს ეინშტეინი ლებულობს თავისი თეორიის ეკავთხედად და ანზოგადოებს გალილეი-ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპს ყველა მოვლენებზე, კერძოდ კი ელექტრომაგნიტურზედაც. ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალურ თეორიას საფუძვლად უდევს შემდეგი დებულებები:

1. სივრცის ერთგვაროვნება, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ სივრცის ყველა წერტილები ტოლფასია. სივრცის ნებისმიერი წერტილი შეიძლება

ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ, საიდანაც გამოვდინარეობს რომ ათვლის ორ სხვადასხვა სისტემაში აღებული წერტილის კოორდინატებს შორის კავშირი წრფივი უნდა იყოს.

2. სივრცის იზოტროპულობა, რომლის მიხედვითაც სივრცეში ყველა მიმართულება ტოლფასია. თუ (x'_1, x'_2, x'_3) წერტილი მოძრაობს (x_1, x_2, x_3) -ს მიმართ v სიჩქარით, მაშინ (x_1, x_2, x_3) წერტილის სიჩქარე (x'_1, x'_2, x'_3) -ს მიმართ იქნება $-v$.

3. სინათლის გავრცელების სიჩქარე ერთი და იგივეა ყველა ინერციულ სისტემაში, ყველა მიმართულებით.

4. არ არსებობს გაზომვის ისეთი ფიზიკური მეთოდი, ანდა მექანიკური. ელექტრომაგნიტური ან რომელიმე სხვა მოვლენა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა მოგვეჩვენა უპირატესი ინერციული სისტემა. შეუძლებელია რაიმე ცდის საფუძველზე ერთი ინერციული სისტემა გავარჩიოთ მეორისაგან. ყველა ინერციული სისტემა ტოლფასია.

§ 9. სივრცისა და მოვლენის ხანგრძლიობის გაზომვის წესი ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში

წინა პარაგრაფში ვრცლად შევხებთ სხვადასხვა ოპტიკური ცდების შედეგების კრიტიკულ ანალიზს, რომლის საფუძველზედაც ეინშტეინმა ფარდობითობის სპეციალური თეორია ჩამოაყალიბა. ამ თეორიის თანახმად ყოველი მექანიკური, ოპტიკური ან ელექტრომაგნიტური მოვლენის მიმდინარეობა ყველა ინერციულ სისტემაში ერთნაირად უნდა გამოიყურებოდეს. შესაბამისად. აღებული მოვლენის გამომხატველი განტოლების სახე, ათვლის სისტემის არჩევაზე არ უნდა იყოს დამოკიდებული. მაგალითად, მექანიკის მეორე კანონში

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

მარცხენა მხარეში მდგომი სიდიდე-ძალა გამოხატავს ორ სხეულს

შორის არსებულ უთრეოტქმედებას, რომელიც დამოუკიდებელია კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე; ამიტომ იმისათვის, რომ ეს განტოლება ბუნების კანონს გამოხატავდეს, საჭიროა მარჯვენა მხარეც დამოუკიდებელი იყოს ათვლის სისტემაზე.

თუ განტოლების მარცხენა და წარჯვენა მხარეებში მდგომი გამოხატულებანი, მიღებდავად იმისა რომ ისინი ინვარიანტები არ არიან, ერთი და იგივე კანონით გარდაიქმნებიან, მაშინ ისინი სამაოქლიანი იქნებიან ყველა სისტემაში. მათ კოვარიანტული განტოლებები ეწოდებათ.

ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში არსებული გალილეი-ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპის მათემატიკურ გამოხატულებას გალილეის გარდაქმნის ფორმულები (8,2) წარმოადგენენ, ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალურ პრინციპსაც გარკვეული სახით მათემატიკური ჩამოყალიბება ესაჭიროება.

ჩვენ მოვიხსოვთ, რომ ამა თუ იმ ფიზიკური მოვლენის კანონი ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივე სახის იყოს; მიუხედავად იმისა, რომ

ინერციული სისტემები ერთიმეორისაგან თავიანთი მოძრაობის სიჩქარეებით განსხვავდებიან.

რადგან სივრცის რომელიმე წერტილის კოორდინატები აღებული ინერციული სისტემების მიმართ ერთიმეორისაგან განსხვავებული არიან, ჩვენ დაგვიკირდება ორ სხვადასხვა ინერციულ სისტემებში გამოთვლილი წერტილის კოორდინატებისა და სათანადოდ ამავე სისტემებში მოვლენის ხანგრძლიობათა დაკავშირება.

კლასიკურ მექანიკაში გაბატონებული აბსოლუტური სივრცის და მისგან მოწყვეტილი, ყოველივესაგან დამოკიდებული აბსოლუტური დროის შესახებ წარმოდგენების უარყოფა და დრო-სივრცის ფარდობითი ხასიათის აღიარება გვაიძულებს უყუვავდეთ სიგრძისა და დროის გაზომვის ძველი წესი, ხოლო მის ნაცვლად დავადგინოთ ახალი. დრო და სივრცის გაზომვის ისეთი წესი უნდა დავადგინოთ, რომ იქედან გამომდინარეობდეს ყველა ინერციულ სისტემაში ყველა მიმართულებით სინათლის სიჩქარის მუდმივობა. პირიქით, ამ უკანასკნელი პირობიდან კი, ცხადია, დრო და სივრცის სპეციფიკური თვისებები უნდა მიიღებოდნენ.

ეინშტეინმა გამოიყენა ექსპერიმენტების მონაცემები, როგორც ოპტიკური და საზოგადოდ ელექტრომაგნიტური მოვლენებისათვის ფარდობითობის პრინციპის არსებობის უტყუარი დამამტკიცებელი ფაქტები და ჩაატარა გალილეის გარდაქმნის ფორმულების დრმა ანალიზი. ის შეეცადა მათთვის ისეთი სახე მიეცა, რომ ისინი თანხმობაში მოეყვანა ოპტიკური მოვლენებისათვის არსებულ ფარდობითობის პრინციპთან.

სინათლის სიჩქარის ინერციული სისტემის მოძრაობის სიჩქარისაგან დამოუკიდებლობის ფაქტიდან გამომდინარეობს, რომ გალილეის გარდაქმნის ფორმულები, რომლებიც მექანიკის სიჩქარეთა შეკრების კანონს გვაძლევს, ოპტიკური (ელექტრომაგნიტური) მოვლენებისათვის არ გამოდგებიან. ასევე გამოუსადეგარი იქნება დრო და სივრცის გაზომვის ძველი წესი.

ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის, ანუ როგორც ამბობენ, გარდაქმნის ფორმულების მიღებამდე საჭიროა შევიმუშაოთ დროისა და სიგრძის გაზომვის წესები, რადგან ყოველი მოვლენა მხოლოდ მაშინაა განსაზღვრული, როდესაც ჩვენ უჩვენებთ ადგილს და დროს სად და როდის მოხდა ის.

რაიმე მოვლენის ადგილსა და დროზე ლაპარაკს მხოლოდ მაშინ აქვს მეცნიერებისათვის გარკვეული აზრი, როდესაც უშუალო გაზომვით განსაზღვრული იქნება მათი რიცხვითი მნიშვნელობანი, ე. ი. ადგილისა და დროის კოორდინატები. კოორდინატებისა და დროის გასაზომად. საჭიროა გვეკონდეს არჩეული მასშტაბები და საათები. თუ მასშტაბს შევარჩევთ ჩვენ შეგვიძლია სივრცის ყოველი წერტილი დავნომროთ, რასაც ადვილად მოვახერხებთ ერთადერთი რომელიმე წერტილიდან, რომელსაც კოორდინატთა სათავედ ჩავთვლით, აღებულ წერტილამდე მასშტაბის გადაზომვით. მაგალითად, თუ მასშტაბი ეროვნურ მოთავსდა კოორდინატთა სათავედან აღებულ წერტილამდე მანძილში, მაშინ მას დავაწეროთ 1, თუ ორჯერ მოთავსდა 2-ს და ა. შ. ყოველ დანომრილ

წერტილში უნდა მოვათავსოთ დამკვირვებელი საათით იმისათვის რომ იქ შესაძლებელი იყოს მოვლენის მოხდენის დროის აღნიშვნა.

სივრცის ყოველი წერტილის დანომრისა და სათანადოდ საათების მოთავსების შემდეგ ჩვენ აღვიღად მოვახერხებთ მოვლენის ადგილისა და დროის განსაზღვრას იმ წერტილის ნომრისა და საათის ისრის ჩვენების მიხედვით, რომელთანაც ეს მოვლენა მოხდა.

ავიღებთ რა კოორდინატთა სისტემას, ნისი სათავიდან ჩვენს შივრ არჩეული მასშტაბის გადაზომვითა გზით დაენომრათ ყოველ წერტილს, რის შემდეგაც აუცილებელია მოვახდინოთ ამ წერტილებში მოთავსებული საათების სინქრონიზაცია ისე, რომ ყველანი ერთსადაიგივე დროს გვიჩვენებდეს. ცხადია აქ ჩვენ ვჯულისბობთ, რომ საათების სელა არაა დამოკიდებული იმ წერტილების მდებარეობებზე, რომლებშიაც ისინი არიან მოთავსებული და ანავე დროს მათი სელები (ისრების მოძრაობანი) სრულიად ერთნაირი არიან.

სათების სინქრონიზაციისათვის ყველაზე მარტივი გზა იქნება გადმოვიტანოთ ყველანი კოორდინატთა სათავეში და მათი ისრები დავაყენოთ ერთსადაიგივე დანაყოფზე, შემდეგ ისევე უკანვე გადავიტანოთ. კლასიკური მექანიკის თვალსაზრისით სინქრონიზაციის ეს მეთოდი სრულიად დასაშვებია, რადგან იქ დრო და სივრცე აბსოლუტური — ყოველივესაგან დამოუკიდებელი არიან, ამიტომ დროის მიმდინარეობას და საათის სელას არ უნდა ცვლიდეს საათის (მასთან დაკავშირებული ათელის სისტემის) მოძრაობა.

სულ სხვანაირადაა საქმე ეინშტეინის ფარდობითობის თეორიაში. დრო და სივრცე აქ უკვე აბსოლუტური აღარ არიან, ამიტომ უნდა ვიფიქროთ, რომ საათების სინქრონიზაციის ზემოდ აღწერილი გზა გამოუსადეგარი იქნება. საათების მოძრაობამ, მათი ერთი ადგილიდან მეორეში გადატანის დროს, შეიძლება შეცვალოს მათი სელა. ამ საექვო გარემოების თავიდან ასაცილებლად საათები წინასწარ მოვათავსოთ დანომრილ წერტილებში და შემდეგ მოვახდინოთ მათი რეგულარიზაცია ისე, რომ ყველა მათგანი ერთსა და იგივე დროს გვიჩვენებდეს და ეს ჩვენებები ემთხვეოდეს კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული საათის ჩვენებას.

სათების რეგულარიზაციის მოსახდენად ვისარგებლოთ სინათლის გავრცელების სიჩქარის მუდმივობით. კოორდინატთა სათავეში მოვათავსოთ სინათლის წყარო, რომლიდანაც t მომენტში გაუშვით სინათლის სხივი. სხივი ყველა მიმართულებით ვრცელდება c სიჩქარით (ჯერჯერობით ჩვენ განვიხილავთ ოპტიკურ მოვლენებს სიციარიელეში). კოორდინატთა სათავიდან x მანძილით დაშორებულ წერტილამდე მისვლას მოანდომებს $\Delta t = \frac{x}{c}$ დროს, ამ

წერტილში სხივი მიადწევს $t + \frac{x}{c}$ მომენტში, ამიტომ საათის ისარი, როდესაც

საც იქ სხივი მივა, უნდა გვიჩვენებდეს არა t არამედ $t + \frac{x}{c}$ დროს. ასეთი გზით უნდა მოვახდინოთ აღებულ კოორდინატთა სისტემის ყოველ წერტილში

მ.ათავსებელი საათების რეგულიარობაცია, ანუ სინქრონიზაცია. ამის შემდეგ ჩვენ საშუალება გვქვამება გამოვარკვიოთ ორ ან რამოდენიმე წერტილში მოვლენები მოხდება ერთდროულად თუ არა.

ამგვარად, სხვადასხვა ადგილებში ორი მოვლენის ერთდროულობის საკითხი მჭიდროდაა დაკავშირებული საათების სინქრონიზაციის წესთან.

ახლა ჩვენ უნდა გამოვარკვიოთ თუ როგორი წესით გავზომოთ მონაკვეთის (ღეროს) სიგრძე და მოვლენის ხანგრძლიობა ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში.

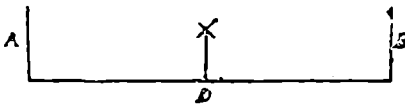
ფარდობითობის სპეციალური თეორია შემდეგი წესის პოსტულირებას ახდენს.

სივრცის ყოველ დანომრილ წერტილში უნდა მოვათავსოთ დამკვირვებელი სინქრონიზირებული საათით. მათ ეძლევათ ინსტრუქცია აღნიშნონ ღეროს ბოლო წერტილების, მათი მოთავსების წერტილებთან, გამოჩენის დროები. ამ დამკვირვებლების მიერ გადმოცემული ნომრებისა და დროის მომენტებიდან უნდა ავარჯიოთ ის ორი ნომერი (კოორდინატი) რომლებიც ერთსადაიმავე მომენტში იქნენ აღნიშნული. ერთი ნომერი (კოორდინატი) მოგვცენს ღეროს ერთი ბოლო წერტილის მდებარეობას, ხოლო მეორე, მეორე ბოლო წერტილის მდებარეობას. ამგვარად ღეროს სიგრძის გასაზომად საჭიროა ღეროს (მონაკვეთის) ბოლო წერტილების მდებარეობანი დანიშნული იყვნენ ერთსადაიგივე მომენტში. ღეროს ბოლო და საწყისი წერტილების კოორდინატების სხვაობა მოგვცენს მის სიგრძეს. აქ ჩვენ ვხედავთ, რომ ღეროს სიგრძის გაზომვის პროცესში გადამწყვეტ როლს თამაშობს ერთდროულობის ცნება.

რომელიმე მოვლენის ხანგრძლიობის გასაზომად კი აუცილებელია ვიცოდეთ მისი დაწყებისა და დამთავრების მომენტები, რომლებიც ერთი და იგივე საათით უნდა იქნენ ნაჩვენები. ამგვარად, მოვლენის ხანგრძლიობის გაზომვა ნხოლოდ მაშინ შეიძლება თუ ის იწყება და მთავრდება ერთსადაიგივე სხეულთან.

სინათლის სიჩქარის მუდმივობის კანონსა და სიგრძის და მოვლენის ხანგრძლიობის გაზომვის ნაჩვენებ წესს მიეყვებათ სიგრძისა და ერთდროულობის ცნების ფარდობით ხასიათამდე.

წარმოვიდგინოთ ჩვენ გვაქვს უძრავი სისტემა, რომელშიაც ავიღოთ ორი წერტილი A და B (ნახ. 9). ამ წერტილებში მოვათავსოთ ორი დამკვირვებელი,



ნახ. 9.

სინქრონიზირებული საათებით. AB მანძილი გავყოთ შუაზე და D წერტილში მოვათავსოთ სინათლის წყარო. ნახ. 9-ზე წარმოდგენილი სისტემა (A და B დამკვირვებლები საათებითა და

ეკრანებით და წყარო D) უძრავია, ამიტომ სინათლის წყაროდან (D) გამოსული სხივები A და B დამკვირვებლებთან მიაღწევენ ერთდროულად, მაშასადამე. A და B ეკრანებზე სხივების დაცემა ერთდროულად მოხდება — ორი მოვლენა ერთდროულია.

განვიხილოთ (ნახ. 10-ზე) წარმოდგენილ სისტემაში მოვლენების მიმდინარეობა. დაუშვათ, რომ ეს სისტემა (A და B დამკვირვებლები ეკრანებით და საათებით და D სინათლის წყარო) მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ v სიჩქარით. ცხადია, რომ D სინათლის წყაროდან ერთდროულად გამოსული ორი სხივი A_1 დამკვირვებელთან უფრო ადრე ნიაღწევს ვიდრე B_2 -თან, რადგან A დამკვირვებელი სხივის შეხვედრად მოძრაობს, B — სხივს გაუბრუნებს.



ნახ. 10.

აღნიშნული ცდებიდან ნათლად მოჩანს, რომ ორი მოვლენა (სხივების დაცემა A და B ეკრანებზე) ერთდროული ერთ სისტემაში, აღარაა ერთდროული მეორე სისტემაში. ერთდროულობის ცნება არაა აბსოლუტური, ის ფარდობითია და დაკავშირებულია კოორდინატთა (ათვის) სისტემასთან. ასევე ფარდობითია სივრცის ცნება, რაც ნაჩვენებია იქნება ქვემოთ. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ საათების სინქრონიზაცია შესაძლებელია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი განლაგებული არიან ერთსადაიმევე კოორდინატთა სისტემაში. საათების სინქრონულ სვლას აზრი აქვს რომელიმე ერთ-ერთ სისტემაში, ისევე როგორც წერტილის ყველა კოორდინატები განსაზღვრული უნდა იქნენ ერთსა და იგივე სისტემაში.

§ 10. ლორენცის გარდაქმნები

ყოველი მატერიალური სხეული, დროის აღებულ მომენტში, სრულიად განსაზღვრულ ადგილს იკავებს რომელიმე სხვა სხეულის მიმართ. ეს ადგილები, რომლებსაც მატერიალური ნაწილაკი დროის სხვადასხვა მომენტებში იკავებს, გარკვეული მიმდევრობით არიან დლაგებული სივრცეში. ასევე, აურაცხელი მოვლენების მიმდინარეობაში ჩვენ ვამჩნევთ მოვლენათა ვარკვეული მიმდინარეობით დლაგებას. რომელიმე ფიზიკური მოვლენა მხოლოდ მაშინაა განსაზღვრული, როდესაც ადგილის გარდა სადაც ის მოხდა, ჩვენ უჩვენებთ, რა ადგილს იკავებს ის მოვლენათა მიმდევრობაში.

ყოველი სივრცითი ზემოქმედება და აღქმა დროის გარკვეულ მომენტს ეთანადება და დროის მომენტის ჩვენება დაკავშირებულია სივრცით პროცესებთან. მაშასადამე, სამყაროში ყოველი პროცესი მიმდინარეობს დროსა და სივრცეში. თუ კლასიკურ მექანიკაში დრო და სივრცე ერთი მეორისაგან სრულიად მოწყვეტილი იყვნენ, ეინშტეინის ფარდობითობის თეორიაში ისინი მჭიდროდ დაუკავშირდნენ ერთმანეთს. მათი განუწყვეტელი კავშირი ყოველ ფიზიკურ მოვლენაში, გამოწვეულია დრო და სივრცის ფარდობითი ხასიათით.

ქვევით ყოველთვის საქმე გვექნება ოთხგანზომილებიან ინერციულ K, K', K'' და ა. შ. კოორდინატთა სისტემებთან, რომელთა ღერძებზედაც სათანადოდ გადაზომილი იქნებიან სივრცისა და დროის კოორდინატები:

$$x_1, x_2, x_3 \text{ და } t.$$

აღებულ ორ სისტემაში განსაზღვრული წერტილის კოორდინატების (შტრიხიანი და უშტრიხო) დამაკავშირებელი განტოლებების მიღება ჩვენს ერთ-ერთ უნიშვნელოვანეს ამოცანას შეადგენს. კოორდინატთა გარდაქმნის ამ ახალი განტოლებების გამოსაყვანად საკმარისია გააოვიყენოთ ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი დებულებები (§ 8).

განვიხილოთ ორი K და K' ინერციული სისტემა, რომელთაგან K პირობით უძრავად ჩავთვალოთ, ხოლო K -ს მიმართ K' -ს მოძრაობის სიჩქარე აღვნიშნოთ v -ით. K და K' სისტემებში განსაზღვრული, რომელიმე წერტილის კოორდინატები სათანადოდ აღვნიშნოთ x_1, x_2, x_3, t და x'_1, x'_2, x'_3, t' -ით.

საზოგადოდ, უშტრიხო და შტრიხიანი კოორდინატთა ლერძები, შესაძლებელია თანხვედნილი არ იყვნენ.

x_1, x_2, x_3, t და x'_1, x'_2, x'_3, t' კოორდინატების ერთმანეთთან დასაკავშირებლად გამოვიყენოთ ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი დებულებები (§ 8). ამ თეორიის მესამე პრინციპის თანახმად K და K' ინერციულ სისტემებში სინათლის სიჩქარე ერთი და იგივეა, რაც შემდეგნაირად შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$c^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{t^2} = \frac{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}{t'^2} = \text{inv.} \quad (10,1)$$

ეს უკანასკნელი პირობა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 - c^2 t'^2 = \text{inv.} \quad (10,2)$$

ფარდობითობის თეორიაში სივრცითი და დროითი კოორდინატები სრულიად თანაბარუფლებიანი არიან, არც ერთ მათგანს არ შეიძლება რაიმე უპირატესობა ჰქონდეს; ამიტომ ყველა გამოსახულებაში ისინი სიმეტრიული სახით უნდა შედიოდნენ. ეს უკანასკნელი პირობა დაკმაყოფილებული იქნება თუ 1 დროითი კოორდინატის ნაცვლად შემოვიღებთ ახალ კოორდინატს განსაზღვრულს ტოლობით: $x_4 = ict$. სათანადოდ (10,2) ფორმულა შევადგინოთ სახით: მიიღებთ:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4 = \text{inv.} \quad (10,3)$$

თუ x_1, x_2, x_3, x_4 სიდიდეებს მივიღებთ ოთხგანზომილებიანი ვექტორის (4 — ვექტორი) მდგენელებად, მაშინ (10,3) პირობით გ. მოხატული გვექნება 4 — ვექტორის კვადრატის ინვარიანტობა. ჩვენს ამოცანას შეადგენს მოვნახოთ ისეთი გარდაქმნის ფორმულები, რომლებიც 4 — ვექტორის კვადრატს ინვარიანტულად დატოვებს.

როგორც ცნობილია x_1, x_2, x_3 სიბრტყეზე ვექტორის კვადრატი $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის შემობრუნების გარდაქმნების მიმართ, ასევე სავანზომილებიან სივრცეში ვექტორის კვადრატი $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის მობრუნების გარდაქმნების მიმართ.

მინკოვსკიმ განაზოგადა ანალიზური გეომეტრიის ეს ძირითადი დებულებები და (10,3) განტოლებით განსაზღვრული პირობა წარმოადგინა ოთხგანზომილებიანი ვექტორის სიგრძის კვადრატის უცვლელობის სახით ყველა

იმ სისტემებში, რომელთა სათავეები ემთხვევიან, ხოლო ღერძები კი ერთიმეორეს მიმართ რაღაც კუთხეებით არიან შემობრუნებული. ის იმ თვალსაზრისიდან გამოდიოდა, რომ ყოველი მოვლენა გარკვეულ ადგილზე და დროის მომენტში იწყება, რომ ჩვენს დაკვირვებებსა და შეგრძნებებში ადგილისა და დროის წარმოდგენები ყოველთვის ერთადაა მოცემული; მათი ერთიმეორისაგან დაშორება არ შეიძლება.

მინკოვსკი ოთხი x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატით მოცემულ წერტილს, მსოფლიო წერტილს უწოდებს, ორ მსოფლიო წერტილს შორის მანძილს კი ოთხგანზომილებიანი ვექტორის სიგრძეს. აღებული მსოფლიო წერტილის პირველი სამი x_1, x_2, x_3 კოორდინატი სივრცეში იმ ადგილს განსაზღვრავს, სადაც მოვლენა მოხდა, ხოლო მეოთხე კოორდინატი x_4 , დროის იმ მომენტს გვიჩვენებს როდესაც ის მოხდა. ამ თვალსაზრისით მსოფლიო წერტილი, ოთხგანზომილებიანი სივრცეში, გამოხატავს მოვლენას აღებულ მომენტში.

ვთქვათ დროის ცვლილებას dt -ს შეესაბამება დანარჩენი კოორდინატების ცვლილებები: dx_1, dx_2, dx_3 , მაშინ მივიღებთ ახალ მსოფლიო წერტილს. მსოფლიო წერტილის „მდებარეობათა“ დაუსრულებელი ცვლილება ოთხგანზომილებიანი სივრცეში მოგვცემს რაიმე მრუდს, რომელსაც მსოფლიო ხაზი უწოდება.

ანგვარად, ოთხგანზომილებიანი სივრცის, ანუ, როგორც ხშირად მას უწოდებენ, მინკოვსკის სივრცის გეომეტრიაში ყველა კოორდინატები x_1, x_2, x_3, x_4 სრულიად თანაბარ უფლებიანი ხდებიან.

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ პირობა $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$ განსაზღვრავს ნებისმიერ ორთოგონალურ გარდაქმნას

$$x_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x'_k. \quad (10,4)$$

სადაც α_{ik} , ქვემოდ ნაჩვენები სქემის მიხედვით მოცემულ მიმართულების კოსინუსებს წარმოადგენენ.

$$\begin{array}{c|ccc} & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ \hline x_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ x_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ x_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \quad (10,5)$$

როგორც ცნობილია, α_{ik} სიდიდეები შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებენ:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \alpha_{ik}^2 = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik}^2 = 1 \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{kj} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ji} \alpha_{jk} = 0 \end{array} \right\} \quad (10,6)$$

(10,6) ფორმულები წარმოადგენენ ორთოგონალურ გარდაქმნებს, რომლებიც კოორდინატთა ღერძების მობრუნების მიმართ ვექტორის სიგრძის კვადრატს უცვლელს სტოვებენ. სწორხაზოვანი თანაბარი სიჩქარით გადატანის მიმართ ინვარიანტობის თვისება, კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპისა და დრო და სივრცეზე მისი შეხედულების თანახმად, წარმოდგენილია (10,5)-გან განსხვავებული სქემით:

$$\begin{array}{c|cccc} & x'_1 & x'_2 & x'_3 & t' \\ \hline x_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ x_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ x_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (10,7)$$

(10,7) სქემით მოცემული გარდაქმნა გვაძლევს გალილეის გარდაქმნის ფორმულებს.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ გალილეის გარდაქმნის ფორმულები არ აკმაყოფილებენ (10,2) პირობას; ამიტომ საჭიროა მოვნახოთ გარდაქმნის ისეთი ფორმულები, რომლებიც (10,2) პირობას დააკმაყოფილებენ.

რადგან § 8-თანახმად სივრცე ერთგვაროვანია x_i და x'_k კოორდინატებს შორის კავშირი უნდა იყოს წრფივი, ე. ი.

$$x_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} x'_k. \quad (10,8)$$

სადაც α_{ik} კოეფიციენტები როგორც კოორდინატებზე დამოუკიდებელი სიდიდეები, მოცემულია შემდეგი სქემით:

$$\begin{array}{c|cccc} & x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ \hline x_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ x_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ x_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ x_4 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array} \quad (10,9)$$

ჩვენი მიზანია მოვნახოთ მათი მნიშვნელობანი, რისთვისაც გამოვიყენოთ (10,2) პირობა.

(10,8)-ს ჩასმა (10,2)-ში α_{ik} კოეფიციენტებისათვის შემდეგ დამოკიდებულებებს გვაძლევს:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \alpha^2_{i1} = \sum_{i=1}^4 \alpha^2_{i2} = 1 \\ \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} \alpha_{kj} = \sum_{j=1}^4 \alpha_{ji} \alpha_{jk} = 0 \end{array} \right\} \quad (10,10)$$

გამოთვლების გამარტივების მიზნით, პრობლემის ზოგადობის დაუბრუნებლად, შეგვიძლია დაუშვათ, რომ K' სისტემა მოძრაობს K -ს მიმართ v სიჩქარით x_1 ღერძის გასწვრივ. გარდა ამისა მივიღოთ რომ K კოორდინატთა სისტემის სათავე O , $t=0$ მომენტში თანხვედნილია K' სისტემის O' სათავესთან $t'=0$ მომენტში. x_1 და x'_1 ღერძების თანხვედნას ადგილი ექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $x_2=0$ და $x_3=0$ პირობებიდან ყოველთვის მიიღებინა პირობები: $x'_2=0$ და $x'_3=0$. ამ შემთხვევაში x_2 და x_3 კოორდინატები დამოუკიდებელი იქნებიან x_1 და x'_1 -ზე. ამიტომ ზემოდ მოყვანილი გარდაქმნის ფორმულები x_2 და x_3 კოორდინატებისათვის შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \alpha_{22} x'_2 + \alpha_{23} x'_3 \\ x_3 &= \alpha_{32} x'_2 + \alpha_{33} x'_3 \end{aligned} \right\} \quad (10,11)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულები ახასიათებენ შემობრუნებას $x_2 O x_3$ სიბრტყეში, მაგრამ წმინდა სივრცითი ბრუნვა ჩვენთვის საინტერესო არაა. ნაშასადამე, უნდა მოვითხოვოთ, რომ $x_2=0$ სიბრტყე გადადიოდეს $x'_2=0$ სიბრტყეში, ხოლო $x_3=0$. $x'_3=0$ -ში.

x_2 და x_3 ღერძების მიმართულებათა სრული ტოლფასობიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილი უნდა ქონდეს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$x_2 = \alpha_{22} x'_2, \quad x_3 = \alpha_{33} x'_3, \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$$

შესაბამისად (10,9) სქემა შემდეგ სახეზე დაიყვანება:

$$\begin{array}{c|cccc} & x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ \hline x_1 & \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ x_2 & 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ x_4 & \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{array} \quad (10,12)$$

(10,10) პირობების თანახმად, α_{ik} კოეფიციენტებისათვის გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2_{11} + \alpha^2_{14} &= \alpha^2_{11} + \alpha^2_{41} = \alpha^2_{11} + \alpha^2_{44} = \alpha^2_{41} + \alpha^2_{44} = \alpha^2_{41} + \alpha^2_{44} = 1 \\ \alpha^2_{22} &= \alpha^2_{33} = 1; \quad \alpha_{11} \alpha_{44} + \alpha_{41} \alpha_{14} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10,13)$$

(10,13)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha^2_{11} = \alpha^2_{44}; \quad \alpha^2_{14} = \alpha^2_{41}. \quad (10,14)$$

(10,13)-დან მიიღება, რომ $\alpha_{11} = \pm \sqrt{1 - \alpha^2_{14}} = \pm \alpha$, სადაც α ჯერჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივი სიდიდეა.

ადგილი საჩვენებელია, რომ (10,13) და (10,14) პირობები დაკმაყოფილებული იქნებიან, თუ დაუშვებთ შემდეგი ტოლობების არსებობას:

$$\alpha_{11} = \alpha_{44} = \alpha, \quad \alpha_{14} = -\alpha_{41}, \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1. \quad (10,15)$$

α და α_{14} სიდიდეების მოსაძებნად ვისარგებლოთ წმინდა ფიზიკური მოსაზრებებით. სახელდობრ, გამოვიყენოთ სივრცის იზოტროპიულობის თვისება და შევანახოთ x_1 და x_4 კოორდინატების გარდაქმნის კოეფიციენტები α_{11} , α_{14} , α_{41} , α_{44} . (10,12) სქემის მიხედვით ჩვენ გვაქვს:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{14} x'_4 \\ x_4 &= \alpha_{41} x'_1 + \alpha_{44} x'_4 \end{aligned} \quad (10,16)$$

დაშვების თანახმად წერტილი $x'_1 = 0$ მოძრაობს x_1 ღერძის გასწორივ v სიჩქარით, მაშასადამე, პირობა $x'_1 = 0$, $x_1 = vt$ პირობის ტოლფასია. შებრუნებით, $x_1 = 0$ ტოლფასია $x'_1 = -vt'$ პირობისა.

თუ ამ პირობებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (10,16)-დან მივიღებთ:

$$x'_1 = -\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}} x'_4 = -vt'.$$

ამ უანახსენელიდან კი განომდინარეობს, რომ:

$$\alpha_{14} = -i \frac{v}{c} \alpha_{11} = -i \frac{v}{c} \alpha. \quad (10,17)$$

საიდანაც, (10,15) ფორმულის გამოყენების გზით, α -თვის მიიღება შემდეგი მნიშვნელობა:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10,18)$$

α სიდიდის საშუალებით კი განისაზღვრებიან ყველა დანარჩენი α_{ik} კოეფიციენტები. რომლებიც შემდეგ მატრიცას აღვწენ:

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{vmatrix}. \quad (10,19)$$

აგვარად, საძიებელ გარდაქმნის ფორმულებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 - i \frac{v}{c} x'_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ x_4 &= \frac{x'_4 + i \frac{v}{c} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} (10,20)$$

რომლებსაც ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები ეწოდებათ. ისინი გვაძლევენ წერტილის კოორდინატებს K სისტემის მიმართ, თუ ცნობილია იმავე წერტილის კოორდინატები K' სისტემაში, შებრუნებით გადასვლის ფორმულები მიიღებინან იმავე (10,20)-დან, რისთვისაც საკმარისია v შევცვალოთ — v -თი, v -ით.

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + i \frac{v}{c} x_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= \frac{x_4 - i \frac{v}{c} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} (10,21)$$

თუ (10,20)-ში ჩავსვათ $x_4 = ict$ და $x'_4 = ict'$ მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

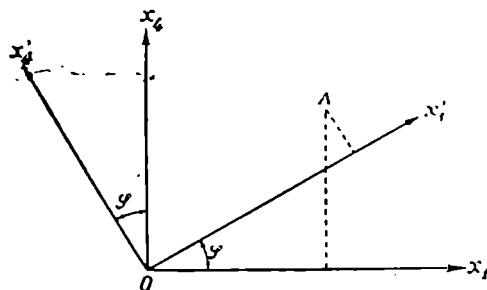
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} (10,22)$$

ლორენცის გარდაქმნის α_{ik} კოეფიციენტები შეიძლება აგრეთვე შემდგენიარადაც მივიღოთ.

ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს აღნიშნული ტიპის გარდაქმნებს ერთი კოორდინატთა სისტემის მიმართ მეორის გადატანა და შემობრუნება შეესაბამება. კოორდინატთა სისტემების თავისთავისაღმი

პარალელური გადატანა ჩვენთვის საინტერესო არაა, რადგან ის ტოლფასია კოორდინატთა სათავის და დროის ათვლის მომენტის შეცვლის; რაც სივრცის ერთგვაროვნობის გამო, ვერავითარ გაულენას ვერ მოახდენს პროცესების მიმდინარეობაზე. დაგვრჩება მხოლოდ ოთხგანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემის ბრუნვა.

ოთხგანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემის ყოველი შემობრუნება დაიყვანება $x_1 O x_2$, $x_1 O x_3$, $x_2 O x_3$, $x_1 O x_4$, $x_2 O x_4$ და $x_3 O x_4$ სიბრტყეებში შემობრუნებათა ერთობლიობაზე. ამ ექვსი ბრუნვიდან სამი ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში ცნობილი შემობრუნებებია, რომლებიც გვაძლევენ



ნახ. 11.

სივრცითი კოორდინატების გარდაქმნებს, ამიტომ ისინიც ჩვენთვის არ არიან საინტერესო. ამგვარად, ამოცანა დაიყვანება სამი დანარჩენი ბრუნვის შესწავლაზე; რომლებიც მოგვცემენ სივრცითი კოორდინატების კავშირს დროის კოორდინატთან. ამ უკანასკნელებიდან საკმარისია ერთ-ერთი მათგანი შევისწავლოთ; მაგალითად, ბრუნვა $x_1 O x_2$ სიბრტყეში, რადგან ამ მობრუნებას შეესაბამება

x_1 ღერძის გასწვრივ მუდმივი სიჩქარით მოძრავ სისტემაზე გადასვლა.

განვიხილოთ $x_1 O x_2$ და $x_1' O x_2'$ სიბრტყეები, რომელთა x_1 და x_1' ღერძები შეადგენენ φ კუთხეს (ნახ. 11).

ღერძების კოორდინატები, აღებული პირველ და მეორე კოორდინატთა სისტემებში ერთიმეორესთან დაკავშირებული არიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1' \cos \varphi - x_2' \sin \varphi \\ x_2 &= x_1' \sin \varphi + x_2' \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10,23)$$

ვინაიდან K' სისტემა მოძრაობს K ინერციული სისტემის მიმართ v სიჩქარით, x_1 ღერძის გასწვრივ, ამიტომ უნდა ვიფიქროთ, რომ კუთხე φ დამოკიდებული იქნება ამ სისტემათა ფარდობითი მოძრაობის $v = c \cos t$ სიჩქარეზე.

განვიხილოთ K' სისტემის სათავის $x_1' = 0$ მოძრაობა K სისტემაში: მისთვის გვექნება:

$$x_1 = -x_2' \sin \varphi, \quad x_2 = x_2' \cos \varphi,$$

საიდანაც

$$\frac{x_1}{x_2} = -\operatorname{tg} \varphi \quad \text{ანუ} \quad \frac{x_1}{ict} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{x_1}{t} = v$, მივიღებთ;

$$\operatorname{tg} \varphi = i \frac{v}{c}. \quad (10,24)$$

ანდა

$$\sin \varphi = \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10,25)$$

რომელთა ჩასმა (10,23)-ში გადაძლევს:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 - i \frac{v}{c} x'_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x_4 &= \frac{x'_4 + i \frac{v}{c} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (10,26)$$

ანდა

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (10,27)$$

რომლებიც ზუსტად ემთხვევიან წინა მონებულ (10,22) ფორმულებს. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ (10,22) ფორმულები ლორენცმა გაცილებით უფრო რთული გზით მიიღო 1904 წელს. ის აბსოლუტური უძრავი სივრცის (ეთერის) თვალსაზრისის იზიარებდა და მთლიანად მისი მომხრე იყო, ამიტომაც მას ახალი ხელოვნური ჰიპოტეზების შემოღება და გრძელი გამოთვლების ჩატარება მოუხდა. ლორენცის გამოთვლებს, ამის გამო, მხოლოდ ისტორიული ხასიათი შერჩა.

§ 11. ლორენცის გარდაქმნიდან გამომდინარე შედეგები

როგორც ლორენცის გარდაქმნების ფორმულების მისაღებად ჩატარებული მსჯელობებიდან ნათლად სჩანს, მათგან უნდა გამომდინარეობდეს დროისა და სივრცის ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც პოსტულირებულია ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში (§ 8).

თუ ლორენცის გარდაქმნის (10,22) ფორმულების დრმა ანალიზს ჩაეტარებთ მეტად საინტერესო შედეგებს მივიღებთ. ადვილი შესაძლებელია, რომ (10,22) გარდაქმნის ფორმულები, კლასიკური მექანიკის კანონებს ინვარიანტულს არ ტოვებენ, მაშინ როდესაც ისინი ინვარიანტულს ტოვებენ ოპტიკური (საზოგადოდ ელექტრომაგნიტური) მოვლენების კანონებს.

ენშტეინმა ფარდობითობის პრინციპი ოპტიკურ მოვლენებზედაც გაავრცელა, რამაც გამოიწვია გარდაქმნის ახალი (10,22) ფორმულების გამოცდების აუცილებლობა.

(10,22) გარდაქმნის ფორმულების მიღების შემდეგ ახალმა წინააღმდეგობებმა იჩინეს თავი. სახელდობრ: კლასიკური მექანიკის განტოლებები მხოლოდ გალილეის და არა ლორენცის გარდაქმნების მიმართ არიან ინვარიანტული. მაშინ როდესაც ოპტიკის კანონები ინვარიანტული არიან მარტო ლორენცის გარდაქმნების მიმართ. ეს შეუსაბამო გარემოებები თითქოს მიგვითითებენ, რომ ან კლასიკური მექანიკის კანონები, ანდა ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები არ არიან სწორი.

სინაპდეილეში ერთი სწორია და მეორეც, მათ სამართლიანობაში ექვის შეტანა არ შეიძლება. ზემოდ აღნიშნული შეუსაბამობა იმითაა გამოწვეული, რომ ყოველ კანონს, კერძოდ კლასიკური მექანიკის კანონებს, თავისი გამოყენების სრულიად გარკვეული საზღვრები აქვს.

კლასიკური მექანიკის კანონები და მასთან ერთად გალილეის გარდაქმნის ფორმულები გამოდგებიან სხეულების მცირე სიჩქარეებით მოძრაობის შემთხვევებში. თუ სხეულის სიჩქარე უახლოვდება c —სინათლის სიჩქარეს, მაშინ მოძრაობის შესასწავლად მათი გამოყენება აღარ შეიძლება, ასეთ შემთხვევებში აუცილებელია კლასიკური მექანიკის კანონების შესწორება-დაზუსტება.

ძალიან დიდი სიჩქარეებით მოძრაობის მოვლენების შესასწავლად უნდა მოვახდინოთ კლასიკური მექანიკის კანონებისა და დებულებათა გადასინჯვა. ჩანოვაცალოთ მათ გამოუსადეგარი დებულებები და წარმოდგენები, ხოლო დანაჩენთა სათანადო სახეცვლილება მოვახდინოთ. მაგალითად, მთლიანად უარეყოფთ რა კლასიკური ფიზიკის წარმოდგენებს დრო და სივრცეზე, იმავე დროს აღარ შეიძლება მექანიკის მეორე კანონი დავტოვოთ თავისი პირვანდელი ($F = ma$) სახით. ამ კანონს ფარდობითობის თეორია ისეთ სახეს აძლევს, როგორც ინვარიანტულია ლორენცის გარდაქმნების მიმართ.

ამგვარად, ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები და რელატივისტური მექანიკა გალილეის გარდაქმნის ფორმულებისა და ნიუტონის მექანიკის კანონების კანონზომიერ განზოგადოებას წარმოადგენენ მატერიალური ნაწილაკების დიდი სიჩქარეებით ($v \approx c$) მოძრაობის შემთხვევებისათვის და გადადიან მათში მცირე სიჩქარეებისათვის ($v \ll c$). მართლაც (10,22)-ში თუ დაუშვებთ, რომ $v \ll c$ მივიღებთ გალილეის ფორმულებს (8,2).

თუ (10,22) ფორმულებს დავაკვირდებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველთვის ადვილი უნდა ჰქონდეს უტოლობას $v < c$; წინააღმდეგ შეითხვევაში ფიზიკური სიდიდეები (კოორდინატები, სიჩქარეები და სხვა) წარმოაჩენილი აღმოჩნდებოდნენ; რაც შეუთავსებელია მათ ბუნებასთან. ამიტომ ფარდობითობის სპეციალური თეორია იძლევა ახალ შეზღუდვას: ყოველი სხეულის მოძრაობის სიჩქარე სინათლის სიჩქარეზე ნაკლებია და მას არ შეიძლება გაუტოლდეს.

სინათლის სიჩქარე წარმოადგენს მატერიალური სხეულების მოძრაობის სიჩქარეთა ზედა ზღვარს. ეს პირობა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ფიზიკაში,

რადგან იქედან გამომდინარეობს, რომ, როგორც ელექტრომაგნიტური, ისევე ყოველგვარი ურთიერთქმედება სასრულო, მაგრამ ნაქსინალური სიჩქარით ვრცელდება; მაშინ როდესაც თანახმად კლასიკური მექანიკისა ურთიერთ-ქმედება მყისვე, ე. ი. უსასრულო დიდი სიჩქარით გადაეცემა.

მართლაც, ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (10,22) გალილეის გარდაქმნის (8,2) ფორმულებში გადავლენ, თუ დაუშვებთ, რომ $c \rightarrow \infty$.

დრო და სივრცის ხასიათის გამოსარკვევად გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (10,22).

K „უძრავ“ კოორდინატთა სისტემაში გავზომოთ სხეულის — ვთქვათ, ღეროს სიგრძე, რისთვისაც ვისარგებლოთ § 9-ში დადგენილი დრო და სივრცის გაზომვის წესით. დაუშვათ, რომ ღეროს ბოლო წერტილების კოორდინატები $x^{(1)}_1$ და $x^{(2)}_1$ გაზომილია დროის ერთსა და იგივე t მომენტში; მაშინ მისი სიგრძე იქნება $l = x^{(2)}_1 - x^{(1)}_1$. იმავე წესით გავზომოთ ღეროს სიგრძე K' მოძრავ სისტემაში, მისი სიგრძე $l' = x'^{(2)}_1 - x'^{(1)}_1$. გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (10,22) l და l' სიდიდეებს შორის კავშირის მოსახაზავად

$$x^{(1)}_1 = \frac{x'^{(1)}_1 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x^{(2)}_1 = \frac{x'^{(2)}_1 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$x^{(2)}_1 - x^{(1)}_1 = \frac{x'^{(2)}_1 - x'^{(1)}_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{ანუ} \quad l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11,1)$$

ეს დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ ერთი და იგივე ღეროს სიგრძე სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში სხვადასხვაა. სხეული მოძრაობის მიმართულებით შემოკლებას განიცდის. ამ მოვლენას ლორენცის შემოკლება ეწოდება. ცხადია, რომ სხეულის მოცულობაც მოძრავ სისტემაში იმდენჯერე შემცირდება, რამდენჯერაც მოძრაობის მიმართულებით მისი ხაზოვანი ზომა, ხოლო მოძრაობის პერპენდიკულარული მიმართულებით სხეულის ხაზოვანი ზომები არ იცვლება, ამიტომ

$$V = \frac{V'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11,2)$$

ბუნებრივია წამოიჭრება კითხვა: შესაძლებელია თუ არა ღეროს სიგრძის ცვლილების პრაქტიკული აღმოჩენა? ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს შეუძლებელია; რადგან მოძრავ სისტემაში სხეულთან ერთად მასშტაბიც იგივე

$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ -ჯერ მოკლებდა. ამრიგად, ღეროს სიგრძის გამომხატველი

რიცხვი ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივეა; რაც სრულ თანხმობაშია ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალური თეორიის მეოთხე დებულებასთან.

მოდრავ K' სისტემაში მოთავსებული ღერო შემოკლებულია უძრავ K სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის თვალსაზრისით, რადგან ის შემოკლებულ მოძრავ ღეროს სიგრძეს თავისი მასშტაბით ზომავს.

განვიხილოთ ახლა მოვლენის ხანგრძლიობა ორ სხვადასხვა K და K' სისტემებში, რისთვისაც აგრეთვე ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები უნდა გამოვიყენოთ.

მოვლენის დასაწყისი და დასასრული უძრავ და მოძრავ სისტემებში აღვნიშნოთ სათანადოდ t_1, t_2 და t'_1, t'_2 -ით. დროის ინტერვალის გაზომვის წესის გათვალისწინების შედეგად მივიღებთ:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11,3}$$

ე. ი. მოვლენის ხანგრძლიობა უძრავ სისტემაში მეტია ვიდრე მოძრავში და დამოკიდებულია ერთი სისტემის მეორეს მიმართ მოძრაობის სიჩქარეზე.

(11,2) ფორმულის თანახმად, საათს მიძრავ სისტემაში უფრო ნელი სკლა აქვს ვიდრე უძრავში.

ისევე როგორც ღეროს სიგრძის, მოვლენის ხანგრძლიობის ცვლილების პრაქტიკული აღმოჩენაც შეუძლებელია, რადგან მოძრავ სისტემაში მოვლენის ხანგრძლიობის შემცირებასთან ერთად იმდენჯერვე შენელებული ხდება მასში მოთავსებული საათის სკლა.

ამგვარად, ფარდობითობის სპეციალური თეორიის თანახმად, დრო და სივრცე ფარდობითი ბუნების არიან და მათი ამ თვისების მათემატიკურ გამოხატულებას, ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები წარმოადგენენ.

ყოველ ინერციულ სისტემას დრო და სივრცის თავისი საკუთარი მასშტაბები აქვს. აღებულ კოორდინატთა სისტემაში უძრავად დამაგრებული საათით ათვლილ დროს, საკუთარი დრო ეწოდება. (11,3) ფორმულა აკავშირებს ორი სხვადასხვა ინერციული სისტემის საკუთარ დროებს.

საკუთარი დრო შეიძლება დაუკავშიროთ ორ მსოფლიო წერტილს შორის მანძილს — ოთხგანზომილებიან ინტერვალს. ამისათვის დაუშვათ, რომ ვიმყოფებით K „უძრავ“ ინერციულ სისტემაში. ამ სისტემაში უძრავად დამაგრებული საათით ათვლილი დროის უსასრულო მცირე dt შუალედის განმავლობაში, K' სისტემა, მასში დამაგრებულ საათთან ერთად, გაივლის

$$\sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}$$

მანძილს. უნდა გამოვარკვიოთ დროის რა შუალედს გვიჩვენებს მოძრავი საათი.

რადგან K' სისტემაში საათი უძრავია, ე. ი. $dx'_1 = dx'_2 = dx'_3 = 0$, ამიტომ ოთხგანზომილებიანი ds ინტერვალის ინვარიანტობის პირობიდან მივიღებთ:

$$(ds)^2 = -\sum_{i=1}^4 (dx_i)^2 = -(dx'_4)^2,$$

საიდანაც

$$ds = \sqrt{-(dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 + c^2(dt)^2} = cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11,4)$$

თუ ახლა (11,3) დამოკიდებულებას გავითვალისწინებთ გვექნება:

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11,5)$$

მოვლენის ხანგრძლიობის ფარდობითი ხასიათის ექსპერიმენტალურ დამადასტურებელ ფაქტებს საკმაო რაოდენობით ვხვდებით ბუნებაში და პრაქტიკაში. თუ მაგალითად, დავამზადებთ ორ ერთნაირ სინქრონულ საქანთან საათს, ერთს მოვათავსებთ „უძრავ“, მეორეს კი მოძრავ სისტემაში, მაშინ მათი T და T' პერიოდები დაკავშირებული იქნებიან ფორმულით

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad \text{ასეთ საათებად შეგვიძლია განვიხილოთ სათანადოდ}$$

„უძრავი“ და დიდი სიჩქარით მოძრავი წყალბადის ატომები.

სწრაფად მოძრავი ატომის მიერ გამოსხივებული ტალღის პერიოდი T' მეტი უნდა იყოს „უძრავი“ ატომის T პერიოდთან შედარებით, ამიტომ წყალბადის სპექტრში უნდა მოხდეს $H\alpha$ ხაზის გადაადგილება. ეინშტეინის ეს წინასწარმეტყველება, შესაძლო წითელი გადაადგილების შესახებ, ცდებით იქნა დადასტურებული.

რადიოაქტიური ნიმუშის სწრაფად მოძრავი ატომების სიცოცხლის ხანგრძლიობა მეტი უნდა იყოს „უძრავი“ ატომების სიცოცხლის ხანგრძლიობასთან შედარებით; ოასაც აგრეთვე ცდები ადასტურებენ.

ასევე, რაზეცის მიერ ცდებით იქნა დადგენილი, რომ კოსმიური სხივების შემადგენლობაში სწრაფად მოძრავი მეზონის სიცოცხლის ხანგრძლიობა $\tau' \approx 7,10^{-5}$ სექ. (ამ დროის შემდეგ მეზონი უფრო მსუბუქ ნაწილაკებად იშლება), მაშინ როდესაც იგივე კოსმიური სხივებიდან გამოსული და ნივთიერებაში შეჩერებული იმავე ტიპის მეზონის სიცოცხლის ხანგრძლიობაა $\tau \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$ სექ. ამ გზით, მეზონის სიცოცხლის ხანგრძლიობათა შეფარდების მიხედვით, საზღვრავენ მეზონის ენერჯისა და სიჩქარის თეორიულ მნიშვნელობებს.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau'}{\tau} \approx \frac{7 \cdot 10^{-5}}{1,5 \cdot 10^{-6}} \approx 50.$$

საიდანაც აღვიღებთ მიიღება მეზონის ნოდრაობის სიჩქარე:

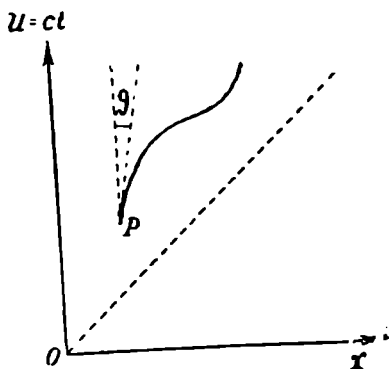
$$v \approx c \left(1 - \frac{1}{5000} \right).$$

ამგვარად, ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ყველა ძირითადი დებულებები საკმაოდ კარგ თანხმობაში არიან ექსპერიმენტალურ მონაცემებთან.

§ 12. ლორენცის გარდაქმნების გეომეტრიული წარმოდგენა

(10,22) ფორმულებიდან გამომდინარე შედეგების (სივრცისა და დროის მასშტაბების ცვლილება) თვალსაჩინო გეომეტრიული წარმოდგენები მოგვცა მინკოვსკიმ.

განვიხილოთ უძრავი K და მის მიმართ v სიჩქარით მოძრავი K' სისტემები. დაუშვათ, რომ, (10,22) ფორმულების შესაბამისად, K' მოძრაობს



ნახ. 12.

x_1 ღერძის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში რაიმე მოვლენის დრო-სივრცეში მიმდინარეობის შესასწავლად ორივე სისტემაში დრო-სივრცის დიაგრამები უნდა ავაგოთ, რომლებშიაც აბსცისათა ღერძებად აღებული იქნებიან x_1 და x'_1 , ხოლო ორდინატთა ღერძებად $u = ct$ და $u' = ct'$.

თუ აღებულ კოორდინატთა სისტემაში ნაწილაკი უძრავია, მაშინ დრო სივრცის დიაგრამაზე ეს მდგომარეობა გამოიხატება დროის ღერძის პარალელური ხაზით (სივრცითი კოორდინატა უცვლელია, დრო კი განუწყვეტლივ მიმდინარეობს). ამ ხაზს, მსოფლიო ხაზს

უწოდებენ. ამგვარად უძრავი ნაწილაკის მდგომარეობა t ღერძის პარალელური მსოფლიო ხაზით გამოისახება, მოძრავისა კი რაღაც მრუდი ხაზით (ნახ. 12).

ლორენცის გარდაქმნის (10,22) ფორმულები, აღებულ შემთხვევაში, შემდეგ სახეს მიიღებენ:

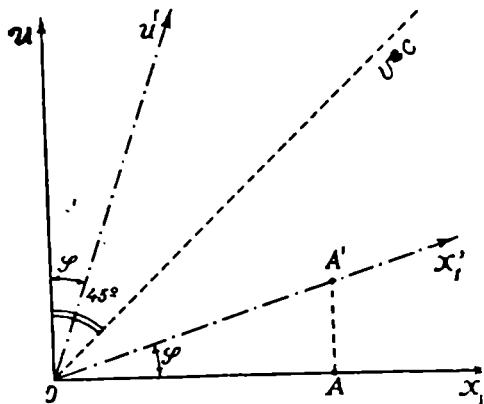
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + \frac{v}{c} u'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & x'_1 &= \frac{x_1 - \frac{v}{c} u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ u &= \frac{u' + \frac{v}{c} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & u' &= \frac{u - \frac{v}{c} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (12,1)$$

შევისწავლოთ K' სისტემის კოორდინატთა სათავის ($x'_1 = 0$) მოძრაობა K სისტემაში. (12,1)-ში $x'_1 = 0$ მნიშვნელობის ჩასმის შედეგად მივიღებთ $x_1 - \frac{v}{c} u = 0$, სადაც სიდიდე $v = \frac{x_1}{t}$ წარმოადგენს K' კოორდინატთა სისტემის სათავის მოძრაობის სიჩქარეს. ოთხგანზომილებიან სივრცეში ($x_1 O u$ სიბრტყეზე) მოძრაობის გამომხატველი მრუდის ასაგებად უნდა ვიპოვოთ ის კუთხე, რომელსაც აღებულ წერტილში, საძიებელი მრუდის წხები ადგენს დროის ღერძთან. ეს კუთხე, როგორც ცნობილია,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dx_1}{du} = \operatorname{arctg} \frac{v}{c}.$$

რადგან $v < c$, რადგან $v < c$. როდესაც $v \rightarrow c$, მაშინ φ მიისწრაფვის თავის მაქსიმალურ — $\varphi = 45^\circ$ მნიშვნელობისაკენ. ახლა ავაგოთ K და K' სისტემების შესაბამისი დრო-სივრცის დიაგრამები, რისთვისაც უნდა გამოვიყენოთ (12,1) ფორმულები.

K' სისტემის სათავე ($x'_1 = 0$ და $u' = 0$) K -ს მიმართ მოძრაობს v სიჩქარით, მისი მსოფლიო ხაზი O წერტილზე გამავალი წრფეა, რომელიც დროის ღერძთან შეადგენს $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{c}$ კუთხეს. მეორე მხრივ, $x_1 = 0$ წარმოადგენს K' სისტემაში დროის ღერძის განტოლებას, ხოლო x'_1 ღერძის განტოლებაა $u' = 0$. ამ უკანასკნელის (12,1) განტოლებაში შეტანის შედეგად მივიღებთ: $u = ct = \frac{v}{c} x_1$; საიდანაც გამომდინარეობს, რომ x'_1 და x_1 ღერძებს შორის შედგენილი



ნახ. 13.

კუთხე $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{c}$. როგორც

ვხედავთ, K' სისტემის შესაბამის დრო-სივრცის დიაგრამაზე, ღერძები მართობული აღარ არიან. რაც უფრო დიდია K' სისტემის მოძრაობის სიჩქარე v , მით უფრო მცირეა u' და x'_1 ღერძებს შორის კუთხე. ზღვრულ შემთხვევაში როცა $v \rightarrow c$, u' და x'_1 ღერძები მიისწრაფიან ორივე მხრიდან $v=c$ კრიტიკული წრფისაკენ.

ამავე დიაგრამაზე ნათლად მოსჩანს, რომ ორი მოვლენა ერთდროული ერთ სისტემაში, აღარ არიან ერთდროული მეორე სისტემაში. მართლაც x'_1 ღერძზე მოთავსებული ყოველი მოვლენა ერთდროულია K' სისტემაში,

მაგალითად, მოვლენები O და A' . იგივე მოვლენები, K სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის თვალსაზრისით, არ არიან ერთდროული, სახელდობრ A მოვლენა $\frac{u}{c} = \frac{1}{c} AA'$ დროით უფრო გვიან ხდება, ვიდრე O . პირიქით K' სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის თვალსაზრისით, A მოვლენა ხდება $\frac{1}{c} AA'$ დროის შუალედით უფრო ადრე, ვიდრე O .

დროის და სივრცის მასშტაბების ცვლილებათა გეომეტრიული წარმოდგენისათვის დრო-სივრცის დიაგრამაზე ავაგოთ მრუდები:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 - u^2 &= a \\ u^2 - x_1^2 &= a. \end{aligned} \right\} \quad (12,2)$$

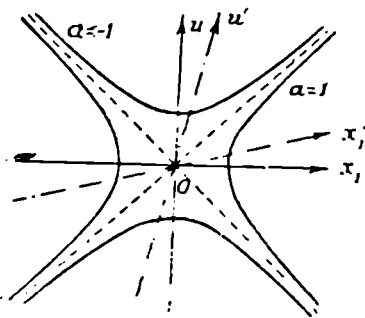
ეს განტოლებები ინვარიანტული არიან. რაშიც ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ (12,1) გარდაქმნის ფორმულების გამოყენების გზით. (12,2) განტოლებებს ფუნდამენტალურ ინვარიანტს უწოდებენ. გამოვიყენოთ ეს ინვარიანტი ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში სივრცისა და დროის ერთეულის დასადგენად. ამ მიზნით მოვნახოთ ყველა იმ მსოფლიო წერტილების გეომეტრიული ადგილები, რომლებისთვისაც $a = \pm 1$. (12,2)-დან გამომდინარეობს, რომ როცა $a = 1$, $x_1 = 1$ წარმოადგენს კოორდინატა სათავიდან გავლებული ერთეულოვანი მასშტაბის ბოლო წერტილს $t = 0$ მომენტში. ამგვარად $a = 1$ განსაზღვრავს სივრცის ერთეულს იმ ინერციულ სისტემაში, რომელშიაც (12,2) განტოლებაა დაწერილი. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ $a = -1$ მოგვცემს დროის ერთეულს.

$x_1^2 - u^2 = 1$ და $u^2 - x_1^2 = 1$ განტოლებები დრო-სივრცის დიაგრამაზე გვაძლევენ ტოლგვერდა ჰიპერბოლებს (ნახ. 14). ზემოდ ჩატარებული მსჯელობიდან ცხადია, რომ სათავეზე გამავალი ყოველი მსოფლიო ხაზი რომელიც $a = 1$ ჰიპერბოლს გადაკვეთს, შეიძლება ავირჩიოთ x_1 ღერძად, მაშინ სათანადოდ მანძილი კოორდინატა სათავიდან ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილამდე — სივრცის ერთეული იქნება.

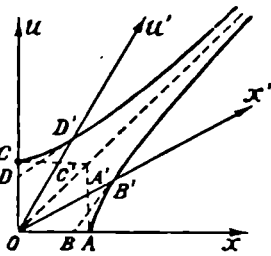
მსოფლიო ხაზი რომელიც $a = -1$ ჰიპერბოლს გადაკვეთს, დროის ღერძად უნდა ჩავთვალოთ, ხოლო მანძილი სათავიდან გადაკვეთის წერტილამდე — დროის ერთეულად.

უძრავ K სისტემაში სივრცის ერთეულოვანი მასშტაბია OA (ნახ. 15). O და A წერტილების მსოფლიო ხაზებია OC და AA' . K' სისტემაში უძრავი დამკვირვებლისათვის იმავე მასშტაბის ბოლო წერტილების ერთდროული მდებარეობა ($u' = 0$) მოცემულია O და B' წერტილებით, ამ დამკვირვებლისათვის სივრცის ერთეულოვანი მასშტაბია OB' . ცხადია $OB' > OA$, ე. ი. მისი თვალსაზრისით K სისტემის ერთეულოვანი მასშტაბი OA შემოკლებულაა. პირიქით K' სისტემაში სივრცის ერთეულოვანი OB' მასშტაბის ბოლო წერტილების ერთდროული მდებარეობა, K სისტემაში მყოფი დამკვირვებლისათვის იქნება O და B წერტილები. მონაკვეთი $OB < OA$, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ K სისტემის OA ერთეულოვანი მასშტაბი K' სისტემაში მყოფ უძრავ

დამკვირვებელს შემოკლებული ეჩვენება. სრულიად ანალოგიური მსჯელობა უნდა ჩავატაროთ დროის მასშტაბების შესახებ ორივე სისტემებში, საიდანაც



ნახ. 14.



ნახ. 15.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველ სისტემას დროის საკუთარი მასშტაბი აქვს. მაგალითად, თუ K სისტემაში უძრავი საათის ისარი C წერტილში ამთავრებს ერთ სრულ შემობრუნებას, მაშინ K' სისტემაში მოთავსებული საათის ისარი ერთ სრულ შემობრუნებას დაამთავრებს D' წერტილში, ე. ი. უფრო გვიან. მაშასადამე მოძრავი საათის სელა, უძრავთან შედარებით, შენე-ლებულია.

§ 13. ინტერვალები

ფარდობითობის თეორიაში სივრცითი კოორდინატები: x_1, x_2, x_3 მკიდროდ არიან დაკავშირებული x_4 დროის კოორდინატთან. მეოთხე ლერძი (x_4) წარმოსახვითია. წარმოსახვითი კოორდინატის შემოღება იმით იყო გამართლებული, რომ 4 — სივრცეში x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატები სრულიად ტოლფასი ყოფილიყვნენ, რაც საშუალებას გვაძლევს ადვილად გადავიტანოთ სამგანზომილებიანი სივრცის გეომეტრიის ყველა დებულებები ოთხგანზომილებიანი სივრცეში. მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ ოთხგანზომილებიანი ვექტორი, რომლის სამი მდგენელი ნამდვილია, მეოთხე კი წარმოსახვითი.

4 — ვექტორის შემოღება საშუალებას გვაძლევს სათანადო განტოლებები ოთხგანზომილებიანი სახით ჩავწეროთ. განტოლებათა ოთხგანზომილებიანი ფორმებში ჩამოყალიბება ნიშნავს მათ აპრიორულ ინვარიანტობას. თუ რომელიმე განტოლებას ოთხგანზომილებიანი სახით ჩავწეროთ, მაშინ მათი ინვარიანტობის პირობების შემოწმება ალარ დაგვიკირდება.

ოთხგანზომილებიანი სივრცეში განვიხილოთ ორი წერტილი: $(0, 0, 0, 0)$ და (x_1, x_2, x_3, x_4) . მათ შორის მანძილი

$$s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, \tag{13,1}$$

როგორც ვიცით, ინვარიანტს წარმოადგენს.

შემოვიღოთ K და K' კოორდინატთა სისტემები და ამ სისტემებში დავეწროთ ორ წერტილს შორის მანძილის კვადრატის გამოხატულებები:

$$\left. \begin{aligned} s^2 &= l^2 - c^2 t^2 \\ s'^2 &= l'^2 - c^2 t'^2 \end{aligned} \right\} \quad (13,2)$$

ოთხგანზომილებიანი მანძილის კვადრატის ინვარიანტობის პირობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$l^2 - c^2 t^2 = l'^2 - c^2 t'^2. \quad (13,3)$$

ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ კოორდინატთა ისეთი K' სისტემა, რომელშიაც ერთმეორისაგან s' ინტერვალთა დაშორებული ორი მოვლენა ერთსა და იმავე ადგილზე მოხდება, ე. ი. ამ სისტემაში გვექნება $l' = 0$; მაშინ (13,3)-დან მივიღებთ, რომ

$$s = \pm \sqrt{l^2 - c^2 t^2} = \pm ict' \quad (s^2 < 0). \quad (13,4)$$

უკანასკნელი სახის წარმოსახვით ინტერვალებს — დროისმაგვარი ინტერვალები ეწოდებათ. რადგან $\frac{l}{t} \doteq v$, ამიტომ პირობა $l^2 - c^2 t^2 < 0$ იმის მაჩვენებელია,

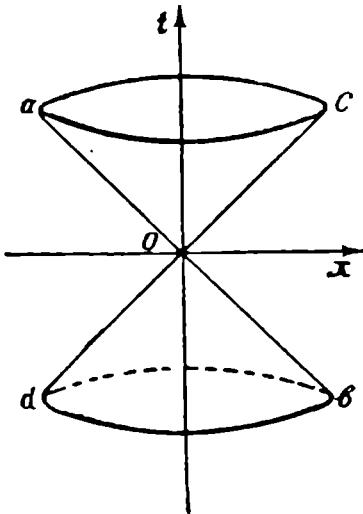
რომ სიჩქარე $v < c$. ახლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც ორი მოვლენა ერთდროულია K' სისტემაში, ე. ი. $t' = 0$, რასაც ადვილად მივალწვეთ K' სისტემის სათანადო შერჩევით, ამ შემთხვევაში (13,3)-დან მივიღებთ, რომ

$$s^2 = l^2 - c^2 t^2 = l'^2 > 0 \quad \text{ანუ } v > c. \quad (13,5)$$

ასეთ ინტერვალებს, სივრცისმაგვარი ინტერვალებს უწოდებენ.

დროისმაგვარი და სივრცისმაგვარი ინტერვალების ეს სახელწოდებები იმით არიან გაბართლებული, რომ პირველი — როგორც წარმოსახვითი, ხოლო მეორე — როგორც ნამდვილი სიდიდეები, კოორდინატთა ლერძების შემობრუნების გზით, შეიძლება შეუუთავსოთ სათანადოდ დროის წარმოსახვით და სივრცის ნამდვილ ლერძებს.

ინტერვალების ორ ჯგუფად დაყოფა, ე. ი. მათი თვისება, იყვნენ დროის ან სივრცისმაგვარი, აბსოლუ-



ნახ. 16.

ტურია და არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემაზე. თუ ერთ სისტემაში ინტერვალთა დროისმაგვარია, მაშინ ის ყოველ სისტემაში დროისმაგვარი იქნება. იგივე დებულებას აქვს ადგილი სივრცისმაგვარი ინტერვალებისათვისაც.

დრო-სივრცის აღებულ დიაგრამაზე, მატერიალური ნაწილაკის მუდმივი v სიჩქარით მოძრაობა, გამოიხატება კოორდინატთა სათავეზე გამავალი მსოფ-

ლიო ხაზით, რომლის მიერ l ლერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსი $\frac{v}{c}$ შეფარდების ტოლია; რადგან $v < c$, ეს კუთხე არ შეიძლება 45° -ს აღემატებოდეს.

ამგვარად, მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის გამომხატველი მსოფლიო ხაზი მოთავსებული უნდა იყოს cO არეში, თუ ის მოძრაობს x_1 ლერძის დადებითი ზემართულებით. საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობის შესაბამისი მსოფლიო ხაზი, მოთავსდება aO არეში. მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის გამომხატველი მსოფლიო ხაზი არ შეიძლება გადიოდეს cOb და aOd არეებში, რადგანაც ნაწილაკის სიჩქარე ყოველთვის ნაკლებია c -ზე. დროისმაგვარი ინტერვალების (aOc) არედან სივრცისმაგვარი ინტერვალების (cOb) არეში, ანდა პირიქით, გადასვლა შეუძლებელია, ფარდობითობის სპეციალური პრინციპის ერთ-ერთი მოთხოვნის, $v < c$. ძალით.

aO არეში $l > 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი მოვლენა ამ არეში მოხდება O მოვლენის შემდეგ. ორი მოვლენა, რომლებიც დროისმაგვარი ინტერვალით არიან დაშორებული, არ შეიძლება მოხდეს ერთ დროულად. არ შეიძლება ისეთი კოორდინატთა სისტემის არჩევა, რომლის aOc არეში მოვლენა მოხდება O მომენტზე ადრე, ე. ი. არც ერთ სისტემაში არ შეიძლება ამ არისათვის ადგილი ჰქონდეს $l < 0$ უტოლობას. ამიტომ O წერტილი დროისათვის, ანუ საწყის მომენტადაა მიღებული, და სათანადოდ aOc -ს აბსოლუტური მომავლის არე ეწოდება. ქვედა bOd არეს კი, რომლის ყოველი წერტილისათვისაც $l < 0$, წარსული დრო შეესაბამება და მას აბსოლუტური წარსულის არე ეწოდება.

ab და cd მსოფლიო ხაზების ის ზღვრული მდებარეობანი, როდესაც ისინი l ლერძთან 45° — კუთხეს შეადგენენ, მთელი მსოფლიო სივრციდან კონუსის ზედიპირით ერთი მეორისაგან გამოყოფენ დროისმაგვარი და სივრცის მაგვარი ინტერვალების არეებს. მას სინათლის კონუსი ეწოდება, რომლის განტოლებაა $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0$.

ყოველი მოვლენის მიმდინარეობა უნდა განვიხილოთ მხოლოდ და მხოლოდ სინათლის კონუსის შიგნით. მხოლოდ ამ არეში შეიძლება მიზეზობრივად ორი მოვლენის ერთმანეთთან დაკავშირება, რადგან ყოველი მოქმედება სივრცეში სასრულო $v \leq c$ სიჩქარით ვრცელდება, ხოლო სინათლის კონუსის გარეთ აღებულ ყოველ წერტილს შეესაბამება ურთიერთქმედების გავრცელების ისეთი სიჩქარეები, რომლებიც კრიტიკულ c — სიჩქარეს აღემატებიან.

§ 14. ოთხგანზომილებიანი სიჩქარე და აჩქარება

მე-10 პარაგრაფში ჩვენ გამოვარკვეით, რომ ყოველ სისტემას სივრცის და დროის ინტერვალის თავისი საკუთარი საზომი მასშტაბი აქვს. მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის შესასწავლად, ჩვეულებრივ, სიჩქარე და აჩქარება უნდა შემოვიღოთ. ამ უკანასკნელთა რაოდენობრივი და თვისობრივი მზა-

რეების განსაზღვრისათვის საჭიროა მანძილისა და დროის შუალედის გაზომვა. სივრცეში ნაწილაკის გადაადგილებისას იცვლებიან მისი დრო და სივრცითი კოორდინატები. x_i კოორდინატების ცვლილების კანონის დასადგენად, ისინი უნდა წარმოვადგინოთ როგორც რაიმე პარამეტრის ფუნქციები $x_i = x_i(t)$; t პარამეტრად, ცხადია, უნდა ავიაროთ ე. წ. „საკუთარი დრო“ — ის დრო რომელსაც გვიჩვენებს აღებულ სისტემაში უძრავად მოთავსებული საათი.

როდესაც ოთხგანზომილებიანი სივრცის ერთი წერტილიდან გადავდივართ მასთან უსასრულო მცირე მახლობლობაში მოთავსებულ წერტილში, მაშინ პირველი მსოფლიო წერტილის ოთხივე კოორდინატა შეიცვლება Δx_i სიდიდეებით. თუ ავიღებთ Δx_i სიდიდეების შეფარდებას ამ სისტემაში მოთავსებული საათით ათვლილ იმ $\Delta t'$ დროის შუალედთან, რომლის განმავლობაშიც კოორდინატები Δx_i სიდიდეებზე შეაცვალენ და გადავალთ ზღვარზე როდესაც $\Delta t' \rightarrow 0$, მაშინ მივიღებთ ახალ სიდიდეს, რომელსაც, კლასიკური მექანიკის ტერმინოლოგიის მიხედვით, სიჩქარე ეწოდება

$$v_i = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t'} = \frac{dx_i}{dt'} \quad (14,1)$$

ამ უკანასკნელს 4 მდგენელი აქვს და მას, სათანადოდ, ოთხგანზომილებიან სიჩქარეს უწოდებენ. (14,1) განტოლებიდან, ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის ოთხივე მდგენელისათვის ვღებულობთ

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt'} = \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_{x1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt'} = \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_{x2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ v_3 &= \frac{dx_3}{dt'} = \frac{v_{x3}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ v_4 &= \frac{dx_4}{dt'} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (14,2)$$

საიდანაც ადვილად მიიღება რომ

$$\sum_{i=1}^4 v_i^2 = -c^2 \quad (14,3)$$

ამგვარად, ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის კვადრატი v_i^2 — ინვარიანტული სიდიდეა. მისი შეოთხე მდგენელი v_i წარმოსახვითი სიდიდეა. v_i დროისმავარი ვექტორია და მოთავსებულია სინათლის კონუსის შიგნით.

სრულიად ანალოგიური გზით განისაზღვრება, ოთხგანზომილებიანი აჩქარება a_i . მის მისაღებად ოთხგანზომილებიანი სიჩქარე v_i უნდა გავაწარმოოთ საკუთარი დროით, მივიღებთ

$$a_i = \frac{dv_i}{dt'} = \frac{dv_i}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (14,4)$$

რომლის მდგენელებიც დაკავშირებული არიან ჩვეულებრივი აჩქარების მდგენელებთან შემდეგნაირად:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{a_{x_1}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_{x_1} (v a)}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_{x_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{a_{x_2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_{x_2} (v a)}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \\ a_3 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_{x_3}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{a_{x_3}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_{x_3} (v a)}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \end{aligned} \right\} (14,5)$$

$$a_4 = \frac{d}{dt'} \left(\frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{i}{c} \frac{(v a)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \quad (14,6)$$

(14,5) და (14,6) ფორმულებში a სამგანზომილებიანი, — ჩვეულებრივ აჩქარებას წარმოადგენს. ოთხგანზომილებიანი აჩქარების კვადრატი

$$\sum_{i=1}^4 a_i^2 = \frac{a^2 - \left(\left[\frac{v}{c}, a\right]\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} > 0. \quad \frac{a^2 - \left(\left[\frac{v}{c}, a\right]\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \quad (14,7)$$

მართლაც, იმ სისტემაში, რომელშიაც ნაწილაკი უძრავია ($v=0$), (14,5) და (14,6) დამოკიდებულებებიდან მივიღებთ:

$$a'_1 = a_{x_1}, \quad a'_2 = a_{x_2}, \quad a'_3 = a_{x_3}, \quad a'_4 = 0. \quad (14,8)$$

საიდანაც უშუალოდ გამოდინარეობს (14,7) უტოლობა. მაშასადამე, a_i 4-ვექტორი სივრცისმაგვარი ვექტორია.

(14,3) ტოლობის საკუთარი დროით გაწარმოების შედეგად გვექნება

$$v_i a_i = 0, \quad (14,9)$$

ე. ი. ოთხგანზომილებიანი სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, სათანადოდ როგორც დროისა და სივრცისმაგვარი ვექტორები, ყოველთვის ურთიერთპერპენდიკულიარული არიან.

§ 15. სიჩქარეთა შემკავის კანონი

გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (10,22) ერთ სისტემაში მატერიალური ნაწილაკის სიჩქარის დასაკავშირებლად იმავე ნაწილაკის სიჩქარესთან მეორე სისტემაში. დაუშვათ, რომ ჩვენ გვაქვს ორი სისტემა K და K' . K' სისტემის მოძრაობის სიჩქარე x_1 ღერძის გასწვრივ K „უძრავი“ სისტემის მიმართ აღენიშნოთ v_0 -ით. K და K' სისტემებში მატერიალური ნაწილაკის სიჩქარეების მდგენელები სათანადოდ იქნებიან: $\frac{dx_i}{dt}$ და $\frac{dx'_i}{dt'}$. ამ სიდიდეთა ურთიერთ დასაკავშირებლად დავეწვროთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (10,22) კოორდინატთა დიფერენციალებისათვის:

$$dx_1 = \frac{dx'_1 + v_0 dt'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad dx_2 = dx'_2, \quad dx_3 = dx'_3, \quad dt = \frac{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

რომელთა dt -ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dx'_1 + v_0 dt'}{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dx'_2 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'_1}, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{dx'_3 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'_1}, \end{aligned} \right\} (15,1)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{x_1} &= \frac{v'_{x_1} + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} v'_{x_1}}, \quad v_{x_2} = \frac{v'_{x_2} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_0}{c^2} v'_{x_1}}, \\ v_{x_3} &= \frac{v'_{x_3} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_0}{c^2} v'_{x_1}}. \end{aligned} \right\} (15,2)$$

(15,2) ფორმულები წარმოადგენენ სიჩქარეთა შეკრების კანონს ფარდობითობის თეორიაში, რომლებიც არსებითად განსხვავდებიან კლასიკური მექანიკის სიჩქარეთა შეკრების კანონისაგან. თუ დაუშვებთ, რომ $c \rightarrow \infty$, მაშინ ისინი კლასიკური მექანიკის სიჩქარეთა შეკრების კანონში გადავლენ.

კერძოდ, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს x_1 ღერძის პარალელურად, მაშინ $v_{x_1} = v$, $v_{x_2} = v_{x_3} = 0$, $v'_{x_1} = v'$, $v'_{x_2} = v'_{x_3} = 0$ ამ შემთხვევაში ფარდობითობის თეორიის სიჩქარეთა შეკრების კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2}} \quad (15,3)$$

სიჩქარეთა შეკრების (15,3) კანონი სრულ თანხმობაშია ფარდობითობის სპეციალური თეორიის იმ დებულებასთან, რომლის მიხედვითაც მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარე არც ერთ სისტემაში არ შეიძლება აღემატებოდეს სინათლის სიჩქარეს c . მართლაც, თუ დაუშვებთ, რომ $v_0 = c$, (K' სისტემის მოძრაობის სიჩქარე K -ს მიმართ) მაშინ v -თვის გვექნება:

$$v = \frac{v' + c}{c + v'} \cdot c = c.$$

ე. ი. მიუხედავად იმისა, რომ c სიჩქარით მოძრავ K' სისტემაში მატერიალური ნაწილაკი მოძრაობს v' სიჩქარით, მისი სიჩქარე K „უძრავი“ სისტემის მიმართ არ აღემატება c -ს; მაშინ როდესაც კლასიკური მექანიკის სიჩქარეთა შეკრების კანონის თანახმად უნდა მიგვეღო $v = v' + c$. იმავე (15,3) ფორმულის გამოყენების საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს ფიზოს ცდის შედეგის ახსნა ყოველგვარი დამატებითი ჰიპოთეზის გარეშე. ეს ახსნა შემდეგში მდგომარეობს: როგორც ოპტიკიდან ცნობილია, სინათლის სხივის სიჩქარე რაიმე გარემოში $v' = \frac{c}{n}$, სადაც n მოცემული გარემოს გადატეხვის მაჩვენებელია. თუ ახლა ამ გარემოს ავამოძრავებთ v_0 სიჩქარით, სინათლის გავრცელების მიმართულებით, მაშინ, (15,3) ფორმულის თანახმად, უძრავი დამკვირვებლის მიერ გაზომილი სხივის გავრცელების სიჩქარე

$$v = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{nc}}$$

რომელიც $v \ll c$ შემთხვევაში (რასაც ადგილი ჰქონდა ფიზოს ცდის პირობებში) მოგვცემს:

$$v = \left(\frac{c}{n} + v_0 \right) \left(1 - \frac{v_0}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); \quad (15,4)$$

რაც ზედმიწევნით კარგ თანხმობაშია ფიზოს გაზომვებით მიღებულ შედეგებთან. ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როდესაც მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარეები v და v' , შესაბამისად K და K' სისტემებში, შეადგენენ კოორდინატთა x_1 და x'_1 ღერძებთან θ და θ' კუთხეებს. გამოთვლების

გამარტივების მიზნით დაეუშვათ, რომ ნაწილაკი მოძრაობს $x_1 O x_2$ სიბრტყეში ($x_3 = 0$ და $x'_3 = 0$).

K და K' სისტემებში ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებებს, შემდეგი სახე აქვთ:

$$\begin{aligned} x_1 &= vt \cos \varphi, & x'_1 &= v' t' \cos \varphi' \\ x_2 &= vt \sin \varphi, & x'_2 &= v' t' \sin \varphi' \\ x_3 &= 0, & x'_3 &= 0 \\ x_4 &= ct, & x'_4 &= c t'. \end{aligned} \quad (15,5)$$

უნდა მოვნახოთ კავშირი ერთი მხრივ v და v' სიჩქარეებსა და მეორეს მხრივ φ და φ' -ს შორის, ამისათვის გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (10,22), გვექნება:

$$\begin{aligned} vt \cos \varphi &= \frac{v' \cos \varphi' + v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} t' \\ vt \sin \varphi &= v' t' \sin \varphi' \\ t &= \frac{1 + \frac{v' v_0}{c^2} \cos \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} t', \end{aligned}$$

პირველი ორი ტოლობის მესამეზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} v \cos \varphi &= \frac{v' \cos \varphi' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2} \cos \varphi'} \\ v \sin \varphi &= \frac{v' \sin \varphi' \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2} \cos \varphi'} \end{aligned} \right\} \quad (15,6)$$

საიდანაც ადვილად მოვნახავთ საძიებელი v სიჩქარის სიდიდესა და მიმართულებას:

$$v = \frac{\sqrt{v'^2 + v_0^2 + 2v_0 v' \cos \varphi' - \frac{v'^2 v_0^2}{c^2} \sin^2 \varphi'}}{1 + \frac{v' v_0}{c^2} \cos \varphi'} \quad (15,7)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v' \sin \varphi' \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{v' \cos \varphi' + v_0} \quad (15,8)$$

უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს სიჩქარის მიმართულება იცვლება. ვინაიდან სინათლის სხივი K და K' სისტემებში ერთი და იგივე სიჩქარით ვრცელდება $v=v'=c$, ამიტომ ამ შემთხვევაში (15,6) და (15,8) ფორმულები შემდეგ სახესღებულობენ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \sin \vartheta'}{\frac{v_0}{c} + \cos \vartheta'} \\ \sin \vartheta &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \sin \vartheta'}{1 + \frac{v_0}{c} \cos \vartheta'} \\ \cos \vartheta &= \frac{\cos \vartheta' + \frac{v_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c} \cos \vartheta'} \end{aligned} \right\} \quad (15,9)$$

ეთქვათ K' სისტემა უძრავადაა დაკავშირებული დედამიწასთან. მაშინ v_0 იქნება დედამიწის მოძრაობის სიჩქარე. რადგან დედამიწის მოძრაობის სიჩქარე v_0 გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარეზე $v_0 \ll c$, ამიტომ (15,9) ფორმულებიდან მიიღება:

$$\sin \vartheta - \sin \vartheta' = -\frac{v_0}{c} \sin \vartheta \cos \vartheta'. \quad (15,10)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ϑ და ϑ' კუთხეები ძალიან მცირედ განსხვავდებიან ერთმეორისაგან ($\vartheta - \vartheta' \approx 20,5''$), ამიტომ $\sin \vartheta - \sin \vartheta' \approx \vartheta - \vartheta' = \Delta\vartheta$ და $\cos \vartheta' \approx 1$; მაშინ (15,10) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\Delta\vartheta = \frac{v_0}{c} \sin \vartheta. \quad (15,11)$$

ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს სინათლის აბერაციის ფორმულას.

ამგვარად, ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალური თეორია იძლევა სინათლის აბერაციის მოვლენისა და ფიზოსა და მაიკელსონის ცდების შედეგების დამაკმაყოფილებელ ახსნას, რაც პრინციპულად შეუძლებელი იყო კლასიკური მექანიკის ჩარჩოებში.

ეინშტეინის თეორია სრულიადაც არ საკიროებს მოძრავი, უძრავი ან ნაწილობრივ მოძრავი ეთერის შემოღებას, ამიტომ ამ თეორიაში ეთერის არსებობის საკითხი მთლიანად მოხსნილი იქნა.

§ 16. ოთხგანზომილებიანი ვექტორები და ტენზორები

სამგანზომილებიან სივრცეში ვექტორების შემოღება მნიშვნელოვნად ამარტივებს ფიზიკური კანონების გამოხატველი განტოლებების ფორმებს; რაც იმასთანაა დაკავშირებული, რომ სამგანზომილებიან სივრცეში ვექტორის სიგრძე ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის შემობრუნების მიმართ. ვექტორების შემოღებისა და სათანადო ვექტორული ანალიზის ერთ-ერთ პრინციპიალურ უპირატესობას აგრეთვე შეადგენს ვექტორულ ფორმაში ჩაწერილ განტოლებათა კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე დამოუკიდებლობის თვისება. ვექტორული ანალიზის შექმნამ დიდად შეუწყო ხელი ფიზიკის ყოველი დარგის განვითარებას.

ვექტორული ანალიზის ძირითად დებულებათა ოთხგანზომილებიან სივრცეში ფორმალური გადატანით, მოსახერხებელი გახდა მექანიკური და ოპტიკური ნოვლებების ერთიანი თვალსაზრისით ახსნა და მათზე ფარდობითობის პრინციპის გავრცელება.

იხვევ როგორც სამგანზომილებიანი ორი ვექტორიდან შევადგინეთ სამგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორი (§ 3); ჩვენ შეგვიძლია ოთხგანზომილებიანი ორი A_i და B_i ; ვექტორების მდგენელებიდან შევადგინოთ მეორე რანგის ოთხგანზომილებიანი ტენზორი, რომელიც განსაზღვრული იქნება შემდეგი 16 სიდიდით:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} A_1 B_1, & A_1 B_2, & A_1 B_3, & A_1 B_4 \\ A_2 B_1, & A_2 B_2, & A_2 B_3, & A_2 B_4 \\ A_3 B_1, & A_3 B_2, & A_3 B_3, & A_3 B_4 \\ A_4 B_1, & A_4 B_2, & A_4 B_3, & A_4 B_4 \end{pmatrix}. \quad (16,1)$$

სამგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორის მსგავსად, ოთხგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორი შეიძლება წარმოვიდგინოთ სიმეტრიული და ანტი-სიმეტრიული ტენზორების ჯამის სახით. ფიზიკაში განსაკუთრებულ როლს ასრულებენ ანტისიმეტრიული ტენზორები, რომელთა ტიპურ მაგალითს წარმოადგენს ორი A_i და B_i ვექტორების ვექტორული ნამრავლი:

$$T_{ik} = A_i B_k - B_i A_k.$$

ოთხგანზომილებიანი მეორე რანგის T_{ik} ტენზორის ყველა მდგენელი ნამდვილია, გარდა იმ წევრებისა, რომელთა ერთ-ერთი ინდექსი (i ან k) 4-ის ტოლია.

შევეხოთ ვექტორული ანალიზის ზოგიერთ ძირითად დებულებებს. ვთქვათ. მოცემულია რაიმე სკალარული ფუნქცია $\varphi(x_i)$ ოთხგანზომილებიან სივრცეში. მისგან გაწარმოების გზით შეიძლება შევადგინოთ ვექტორული ფუნქცია. ანისათვის განვსაზღვროთ ამ ფუნქციის ცვლილება ოთხგანზომილებიანი dx_i ვექტორის გასწვრივ x_i -დან $x_i + dx_i$ წერტილში გადასვლის დროს. ეს ცვლილება შემდეგნაირად გამოიხატება:

$$d\varphi(x_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} dx_4. \quad (16,2)$$

$d\varphi(x_i)$, როგორც გარკვეული ფიზიკური სადიდის ობიექტური ცვლილების გამოხატულება, არ შეიძლება დამოკიდებული იყოს კოორდინატა სისტემის არჩევანზე; ამიტომ ის ინვარიანტულ სიდიდეს უნდა წარმოადგენდეს. $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ სიდიდეს შეიძლება უწოდოთ ოთხგანზომილებიანი გრადიენტი; ამიტომ (16,2) შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი ოთხგანზომილებიანი $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ და dx_i ვექტორების სკალარული ნამრავლი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ეს სკალარული ნამრაველი ინვარიანტული სიდიდეა, ისევე როგორც ყოველი სკალარი. ნართლაც, ავიღოთ K და K' ინერციული სისტემები. x_i კოორდინატები x'_i კოორდინატების ცალსახა ფუნქციებია

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4),$$

რის გამოც:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial x_i}{\partial x'_3} dx'_3 + \frac{\partial x_i}{\partial x'_4} dx'_4. \quad (16.3)$$

სათანადოდ, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ შეიძლება გამოვხატოთ $\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}$ -ის საშუალებით, გვექნება:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial\varphi}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}. \quad (16.4)$$

შევადგინოთ სკალარული ნამრავლი:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\partial\varphi}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} dx'_k = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial\varphi}{\partial x'_k} dx'_k = \text{inv}. \quad (16.5)$$

საზოგადოდ ორი 4 — ვექტორის სკალარული ნამრაველი ინვარიანტული სიდიდეა. მაგალითად, პუშაობა როგორც ძალისა და გადაადგილების ვექტორთა სკალარული ნამრაველი წარმოადგენს კოორდინატთა სისტემის არჩევანზე დამოუკიდებელ სიდიდეს — ინვარიანტს.

ოთხგანზომილებიანი გრადიენტი $\text{grad } \varphi(x_i)$ შეიძლება ფორმალურად შემდეგი სახით ჩაეწეროს:

$$\text{grad } \varphi(x_i) = \nabla_i(x_i),$$

სადაც ოპერატორი ∇_i წარმოადგენს 4 — ვექტორს, რომლის მდგენელებია

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

ამ სიმბოლური ∇_i ოპერატორის საშუალებით შეიძლება შევადგინოთ 4 — ვექტორის განზღადობა (დივერგენცი), რომელიც, ორი 4 — ვექტორის სკალარული ნამრავლის მსგავსად, აგრეთვე ინვარიანტულია.

$$(\nabla_i A_i) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \text{inv}. \quad (16.6)$$

თუ ახლა $\varphi(x_i)$ სკალარიდან გავწარმოების გზით შევადგენთ A_i 4 — ვექტორის
ისე, რომ ის $\varphi(x_i)$ ფუნქციის გარადიენტს წარმოადგენს, ე. ი. $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, მაშინ
(16,6) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \text{inv.} \quad (16,7)$$

ეს უკანასკნელი ფორმალურად შემდეგი სახით იწერება:

$$\square \varphi(x_i) = \text{inv.} \quad (16,8)$$

$\square = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ -ს დალამბერის ოპერატორი ეწოდება.

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (16,8) გამოსახულება ლორენცის
გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულია. მართლაც (10,22) ფორმულების გამო-
ყენება გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial x'_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2_1} &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_1} + \frac{2i \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_4} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2_2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_3} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2_4} &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_4} - \frac{2i \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_1} \end{aligned}$$

რომლებიდანაც შეკრების გზით მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_i} = \text{inv.}$$

4 — ვექტორის მდგენელების გარდაქმნის კანონი (10,8) საშუალებას გვაძლევს
მოვინახოთ T_{ik} ტენზორის მდგენელების გარდაქმნის კანონი.

ეთქვათ, მოცემულია ორი A_i და B_i 4 — ვექტორები; მათი მდგენელების
ნამრავლები შემდეგნაირად გარდაიქმნებიან:

$$A_i B_k = \sum_{i=1}^4 \sum_{m=1}^4 \alpha_{im} \alpha_{km} A'_i B'_m.$$

ე. ი.

$$T_{ik} = \sum \sum a_{ii} a_{km} T'_{im}. \quad (16,9)$$

სადაც a_{ii} და a_{im} ლორენცის გარდაქმნის მატრიცის ელემენტებია.

(16,3) ფორმულის მიხედვით dx_i 4 — ვექტორის გარდაქმნის კანონი მოცემულია $\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}$ კოეფიციენტების საშუალებით. ხოლო $\text{grad } \varphi(x_i)$ 4 — ვექტორის გარდაქმნის კანონი, (16,4) ფორმულის თანახმად, მოცემულია $\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}$ კოეფიციენტების საშუალებით.

როგორც ვხედავთ dx_i და $\text{grad } \varphi(x_i)$ 4 — ვექტორების გარდაქმნების კანონები სხვადასხვაა. ყოველ 4 — ვექტორს, რომელიც გარდაიქმნება (16,3) კანონის მიხედვით (ე. ი. როგორც კოორდინატის დიფერენციალი dx_i) კონტრავარიანტული ვექტორი ეწოდება. 4 — ვექტორს, რომელიც გარდაიქმნება (16,4) კანონის მიხედვით (ე. ი. როგორც გრადიენტის მდგენელები) ეწოდება კოვარიანტული ვექტორი.

კონტრავარიანტული ვექტორის მდგენელებს ჩვეულებრივ ინდექსებს აწერენ ზემოდან.

$$A^i = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} A'^k. \quad (16,10)$$

კოვარიანტული ვექტორი აღინიშნება ინდექსით ქვემოდან:

$$A_i = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} A'_k. \quad (16,11)$$

დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში კონტრავარიანტულ და კოვარიანტულ ვექტორებს შორის განსხვავება არ არსებობს; მათი გარდაქმნის კანონები სრულიად ერთი და იგივეა; რაც გამოწვეულია ორთოგონალობის პირობით:

$$\sum_{i=1}^4 a_{ii} a_{ki} = \delta_{ik} \quad \text{სადაც} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{როცა } i = k \\ 0 & \text{როცა } i \neq k. \end{cases}$$

მხოლოდ მრუდწირულ კოორდინატებში იჩენს თავს კონტრა და კოვარიანტული ვექტორებისა და მათი გარდაქმნის კანონების განსხვავება. (16,5) ფორმულის თანახმად, მხოლოდ კონტრა და კოვარიანტული ვექტორების სკალარული ნამრავლი გვაძლევს ინვარიანტს.

რადგან ორი ოთხგანზომილებიანი ვექტორის მდგენელებისაგან ვაღვენთ მეორე რანგის ტენზორს, ამიტომ ორი კონტრავარიანტული ვექტორის მდგენელებიდან შეიძლება შევადგინოთ კონტრავარიანტული ტენზორი, კოვარიანტული ვექტორის მდგენელებიდან ვაღვენთ კოვარიანტულ ტენზორს; ხოლო კონტრა და კოვარიანტული ვექტორებისაგან კი შერეულ ტენზორს. სათანა-

დოდ, კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეულ ტენზორების მდგენე-
ლები შემდეგი კანონების მიხედვით გარდაიქმნებიან:

$$T'^{ik} = \sum \sum \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} T'_{im}. \quad (16,12)$$

$$T_{ik} = \sum \sum \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} T'_{im}. \quad (16,13)$$

$$T^k_i = \sum \sum \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} T'_{im}. \quad (16,14)$$

ერთი და იგივე კოვარიანტობის ან კონტრავარიანტობის ხასიათის ტენზორის
სიმეტრიის თვისებები (სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული) ინვარიანტულია.
 T^k_i შერეული ტენზორისათვის კი საზოგადოდ სიმეტრია-ანტისიმეტრიის თვი-
სებას აზრი არა აქვს, რადგან ქვედა და ზედა ინდექსების გარდაქმნები სხვა-
დასხვა კანონებით სწარმოებს და კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე
გადასვლის დროს სიმეტრიის თვისებები ცვალებადობას განიცდიან.

თ ა ვ ი III

რელატივისტური მექანიკა

§ 17. უმცირესი ძველების პრინციპი

როგორც ცნობილია, კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება მიიღება უმცირესი ქმედების პრინციპიდან. თუ მოცემულია ნაწილაკის ორი a და b მდებარეობები დროის t_1 და t_2 მომენტებში, მაშინ ის რეალური ტრაექტორია, რომლის გასწვრივაც იმობრავებს ნაწილაკი, a -დან b -ში გადასვლის დროს, მოინახება შემდეგი პირობიდან:

$$\delta S = 0. \quad (17,1)$$

S -ს ეწოდება ქმედების ფუნქცია და განისაზღვრება ტოლობით:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (17,2)$$

სადაც $L = L(x_i, \dot{x}_i)$ ლაგრანჟის ფუნქციაა.

(17,2) გამოსახულების (17,1)-ში ჩასმის გზით ვღებულობთ:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt = 0.$$

მეორე შესაკრებიდან ნაწილობითი ინტეგრაციის ჩატარებისა და $(\delta x_i)_{t_1} = (\delta x_i)_{t_2} = 0$ პირობების გათვალისწინების შედეგად მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt \equiv 0. \quad (17,3)$$

რადგან δx_i ვარიაციები დამოუკიდებელი სიდიდეებია, ამიტომ (17.3) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უნდა იყოს ნულის ტოლი, ე. ი.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (17,4)$$

ეს უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლება, ლაგრანჟის II გვარის განტოლების სახელწოდებითაა ცნობილი და წარმოადგენს ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას.

ამგვარად, ნაწილაკი, ანდა ნაწილაკთა სისტემა, *a* მდებარეობიდან *b*-ში გადავა ისეთი მრუდის გასწვრივ, რომელზედაც (17,2) ქმედების ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს. ამიტომ (17,1) განტოლებით, განსაზღვრული ნამდვილი ტრაექტორიის გასწვრივ, ადგილი აქვს *N* ფუნქციით მოცემული სიდიდის (ქმედების) უმცირეს ხარჯვას. მაშასადამე უმცირესი ქმედების პრინციპი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ: ნაწილაკი ან ნაწილაკთა სისტემა იმოძრავეს მხოლოდ ისეთ მრუდზე, რომლის გასწვრივაც იხარჯება მინიმალური ქმედება. ამ პრინციპს უმცირესი ქმედების პრინციპი ეწოდება. უმცირესი ქმედების (17,1) პრინციპიდან მიიღებთან როგორც ლაგრანჟის, ისევე ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები:

$$\frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_k}.$$

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერად მოძრავ დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემა. ელექტრომაგნეტიზმის თეორიის ძირითად ამოცანას შეადგენს დამუხტულ ნაწილაკთა და ველის თვისებებისა და მათ ურთიერთმოქმედებათა შესწავლა. მართალია, ელექტრომაგნიტური მოვლენები უფრო რთული ბუნებისა არიან ვიდრე მექანიკური; რის გამოც შეუძლებელია მათი შესწავლა მექანიკის კანონების საშუალებით, მაგრამ არსებობენ ზოგადი პრინციპები (ენერჯის მუდმივობის კანონი), რომლებიც საფუძვლად უდევს ბუნების ყველა მოვლენას და მათ შორის ელექტრომაგნიტურ მოვლენებსაც.

მიუხედავად იმისა, რომ ბუნების ყოველ მოვლენაში ადგილი აქვს ენერჯის მუდმივობის კანონს, მარტო ამ კანონიდან არ შეიძლება გამოვიყვანოთ ფიზიკის კანონები; თუნდაც იმის გამო, რომ ენერჯია სკალარია, მაშინ როდესაც მრავალი ფიზიკური სიდიდე უფრო რთული ბუნების — ვექტორული და ტენზორული სიდიდეებით გამოისახებიან.

ნაწილაკების ცნება დაკავშირებულია მატერიის წყვეტილ — დისკრეტულ განაწილებასთან სივრცეში, ველისა კი უწყვეტთან. ამიტომ თუ ნაწილაკის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია 4 სიდიდის — x_i კოორდინატების ცოდნა, ველისათვის მდებარეობის ცნებას აზრი არა აქვს; რადგან ის უწყვეტად ავსებს სივრცეს. სათანადოდ, ელექტრომაგნიტური ველის მდგომარეობის დასახასიათებლად დაგვიკრძება ოთხგანზომილებიანი ვექტორული $A_i (A_1, A_2, A_3, A_4)$ ფუნქციის შემოღება, რომლის ყოველი მდგენელი A_i თავის მხრივ სივრცითი კოორდინატების ფუნქციაა: $A_i = A_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_i(x_i)$. მაშინ როდესაც ნაწილაკის მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი 4-ია ველის თავისუფლების ხარისხი უსასრულოდ დიდია. მიუხედავად ამ უკანასკნელი განსხვავებისა, შესაძლებელია ერთი და იგივე პრინციპიდან მივიღოთ, როგორც ნაწილაკის მოძრაობის, ისევე ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები; რისთვისაც უნდა ვისარგებლოთ კლასიკური მექანიკის ანალოგიებით, რადგან ის რელატივისტური მექანიკის ზღვრულ შემთხვევას ($c \rightarrow \infty$) წარმოადგენს.

რელატივისტური მექანიკისა და ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებათა მისაღებად იმავე გზას უნდა დავადგეთ რა გზითაც მიიღებინან ნაწილაკთა სისტემის მოძრაობის ლაგრანჟისა და ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ აქ ჩვენ უნდა შევიარჩიოთ ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტული ქმედების ფუნქცია S ; რომლის მინიმუმის პირობა $\delta S = 0$, მოგვცემს სათანადო ნაწილაკებისა და ველის განტოლებას. ამგვარად, ამოცანა დაიყვანება ნაწილაკის, ელექტრომაგნიტური ველისა და ამავე ველისა და ნაწილაკების სისტემის ინვარიანტული ქმედების ფუნქციების შედგებაზე.

§ 18. თავისუფალი ნაწილაკის ქმედების ფუნქცია

რელატივისტური მექანიკის ჩამოსაყალიბებლად საჭიროა კლასიკური მექანიკის მნიშვნელოვანი გადაშუშავება იმისათვის, რომ ეს თანხმობაში იქნეს მოყვანილი ფარდობითობის სპეციალური თეორიის დებულებებთან. ამ თვალსაზრისით რელატივისტური მექანიკის კანონებს უნდა მიეცეთ ლორენც კოვარიანტული ფორმა, საიდანაც მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში ($v \ll c$) უნდა მიიღებოდეს კლასიკური მექანიკის განტოლებები. ამ ამოცანის გადაწყვეტა არსებით სიძნელესთანაა დაკავშირებული. ეს სიძნელე იმითაა გამოწვეული, რომ კლასიკურ მექანიკაში, დროის ადგებულ მომენტში, სხეულზე მოქმედი ძალა განისაზღვრება მასთან ურთიერთქმედებაში მყოფი ყველა დანარჩენი სხეულების მდებარეობებით იმავე მომენტში¹. სხეულების „მდებარეობათა ერთდროულობის, ე. ი. ერთი და იგივე მომენტის“ დამოუკიდებლობა კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე, შეუთავსებელია ფარდობითობის სპეციალური თეორიის პრინციპებთან; რადკან თითოეულ სხეულს შეიძლება შეუსაბამოთ გარკვეული ინერციული სისტემა, რომელთაგან თითოეულს თავისი საკუთარი დრო აქვს. ამიტომ შეუძლებელია კლასიკური მექანიკის კანონების ლორენც კოვარიანტულ ფორმაში ავტომატური გადაწერა.

სხვადასხვა სხეულებისათვის „ერთი და იგივე მომენტის ცნებას“ აზრი აქვს მხოლოდ მანძილზე მოქმედების თეორიის თვალსაზრისით, რომლის მიხედვითაც ყოველგვარი ურთიერთქმედება უსასრულო დიდი სიჩქარით ვრცელდება. რელატივისტურ მექანიკაში, რომელიც ახლო მოქმედების პრინციპზეა დაწყებული, ამ ცნებას აზრი არა აქვს. ამიტომ რელატივისტური მექანიკის კანონები გამოდგებიან მხოლოდ ისეთი მოვლენების შესასწავლად, რომლებშიაც მანძილზე მოქმედი ძალები შეიძლება გამოვრიცხოთ. თავისუფალი ნაწილაკის შემთხვევაში აღნიშნული პირობა დაკმაყოფილებულია.

¹ კლასიკური მექანიკის თვალსაზრისით ერთი სხეულის მოქმედება მეორეზე გადაეცემა მყისად, ე. ი. უსასრულო დიდი სიჩქარით; მოქმედება და შედეგი ერთდროულია. ცდები კი გვიჩვენებენ, რომ მყისა მოქმედებანი ბუნებაში არ არსებობენ. ერთი საეულიდან მეორეზე ურთიერთქმედების გადაცემას გარკვეული დრო ესაჭიროება—ყოველი სახის ურთიერთქმედება სასრულო სიჩქარით ვრცელდება. სიცარიელეში ერთი ადგილიდან მეორეზე ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება მაქსიმალური c — სიჩქარით გადაეცემა. c — წარმოადგენს ურთიერთქმედების გადაცემის და მოძრაობის სიჩქარის ზედა საზღვარს.

თავისუფალი ნაწილაკის ქმედების ფუნქციის შესადგენად ავიღოთ უმარტივესი ინვარიანტი — რაიმე სკალარი. ასეთ ინვარიანტს წარმოადგენს ორ მსოფლიო წერტილს შორის მანძილი: $ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. სათანადოდ, ქმედების ფუნქცია S გარკვეული B მუდმივის სიზუსტით, (17,2) ანალოგიურად ტოლი იქნება ds ინტეგრალიდან აღებული ინტეგრალის

$$S = B \int_a^b ds = Bc \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (18,1)$$

ინტეგრალი უნდა ავიღოთ იმ მსოფლიო წირის გასწვრივ, რომელიც გაივლის a და b მსოფლიო წერტილებზე. რადგანაც დრო უძრავ სისტემაში უფრო სწრაფად მიმდინარეობს ვიდრე მოძრავში (18,1) სიდიდეს მაქსიმალური მნიშვნელობა ექნება უძრავი ნაწილაკის მსოფლიო ხაზის გასწვრივ, ხოლო ნებისმიერად დიდი (c -ზე ნაკლები) მუდმივი სიჩქარით მოძრავი სისტემისათვის ის შეიძლება გავხადოთ ნებისმიერად მცირე, ამიტომ მას მინიმუმი არ ექნება. იმისათვის რომ (18,1) ფუნქციის მინიმუმი ექნეს, მას წინ უნდა დაუწეროთ ნიშანი მინუსი.

$$S = - Bc \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int L dt. \quad (18,2)$$

B მუდმივი კოეფიციენტის მოსანახავად გამოვიყენოთ ის პირობა, რომ მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში ($v \ll c$) მიიღებოდეს კლასიკური მექანიკის ლაგრანჟის ფუნქცია. (17,2) და (18,2) გამოსახულებათა შედარება, ზემოთ აღნიშნული პირობის გათვალისწინების შედეგად მოგვცემს:

$$L = - Bc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq - Bc + \frac{Bv^2}{2c}. \quad (18,3)$$

თუ აგრეთვე გავითვალისწინებთ რომ ლაგრანჟის ფუნქციის გამოხატულებაში შემავალი მუდმივი ადიტიური წევრები არაავითარ როლს არ თამაშობენ, ხოლო კლასიკურ მექანიკაში თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟის ფუნქციაა $L = \frac{m'v^2}{2}$, მაშინ (18,3)-დან მივიღებთ: $B = mc$, საიდანაც საბოლოო სახით მიიღებთან თავისუფალი ნაწილაკის ქმედებისა და ლაგრანჟის ინვარიანტული ფუნქციები:

$$S = - m'c \int_a^b ds. \quad (18,4)$$

და

$$L = - m'c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (18,5)$$

§ 19. თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება, ოთხგანზომილებიანი იმპულსი და ენერგია

რელატივისტური მექანიკის კანონების მისაღებად გამოვიყენოთ უმცირესი ქმედების პრინციპი, რომლის თანახმადაც მოძრაობის განტოლება მიიღება ქმედების ფუნქციის მინიმუმის პირობიდან.

თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობის რელატივისტური განტოლების მისაღებად ავიღოთ (18,4) ქმედების ფუნქცია და მისი ვარიაცია გაუტოლოთ ნულს

$$\delta S = -m'c \int_a^b ds = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ $ds = \sqrt{-(dx_i)^2}$, გვექნება

$$\delta S = -m'c \int_a^b \delta \sqrt{-(dx_i)^2} = -m'c \int_a^b \frac{-dx_i \delta dx_i}{\sqrt{-(dx_i)^2}} = \int_a^b m' v_i \delta x_i. \quad (19,1)$$

სადაც სიდიდეები $v_i = c \frac{dx_i}{ds} = \frac{dx_i}{dt'}$ — ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის მდგენელებია. (19,1)-დან ნაწილობითი ინტეგრაციის გზით მივიღებთ

$$\delta S = m' v_i \delta x_i \Big|_a^b - m' \int_a^b \delta x_i \frac{dv_i}{dt'} dt'. \quad (19,2)$$

რადგანაც $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$, პირობა $\delta S = 0$ გვაძლევს

$$m' \int_a^b \delta x_i a_i dt' = 0. \quad (19,3)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ თავისუფალი ნაწილაკის აჩქარება $a_i = 0$, რაც ოთხგანზომილებიანი v_i სიჩქარის მუდმივობის პირობას წარმოადგენს.

ზემოთ ჩვენ ერთიმეორეს ვადარებდით ისეთ ტრაექტორიებს, რომელთა ბოლო წერტილები დამაგრებული იყო $((\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0)$. თუ გვინდა მოვნახოთ ქმედების ფუნქციის ვარიაცია δS , როგორც კოორდინატების ფუნქცია, საჭიროა ერთი წერტილი, მაგალითად a , დავამაგროთ $((\delta x_i)_a = 0)$, მეორე კი ცვლადად ჩავთვალოთ და განვიხილოთ მხოლოდ ის რეალური ტრაექტორიები, რომლებიც მოძრაობის განტოლებებს $(a_i = 0)$ აკმაყოფილებენ. თუ ტრაექტორიის ბოლო წერტილის კოორდინატების ცვლილებებს აღვნიშნავთ δx_i -ით $((\delta x_i)_b = \delta x_i)$, მაშინ (19,2) და (19,3) გამოხატულებებიდან მივიღებთ:

$$\delta S = m' v_i \delta x_i,$$

საიდანაც

$$m' v_i = \frac{\delta S}{\delta x_i}. \quad (19,4)$$

$\frac{\partial S}{\partial x_i}$ სიდიდეები აღგენენ ოთხგანზომილებიან იმპულსს

$$p_i = m'v_i. \quad (19,5)$$

რომლის სივრცითი მდგენელები: $\frac{\partial S}{\partial x_1}$, $\frac{\partial S}{\partial x_2}$ და $\frac{\partial S}{\partial x_3}$ გვაძლევენ სამგანზომილებიან იმპულსს P . ხოლო მეოთხე მდგენელი $\frac{\partial S}{\partial x_4} = \frac{\partial S}{icdt}$ წარმოსახებითა

და დაკავშირებულია ნაწილაკის ენერჯიასთან. მართლაც, თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟის ფუნქციიდან (18,5), კლასიკური მექანიკის ფორმულების თანახმად, ადვილად მიიღება ნაწილაკის იმპულსისა და სრული ენერჯიის განოხატულებანი:

$$\left. \begin{aligned} p_{x_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial v_{x_1}} = \frac{m'v_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ p_{x_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial v_{x_2}} = \frac{m'v_{x_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ p_{x_3} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = \frac{\partial L}{\partial v_{x_3}} = \frac{m'v_{x_3}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (19,6)$$

$$\mathcal{E} = \sum_{\alpha=1}^3 p_{x_\alpha} v_{x_\alpha} - L = \frac{m'c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19,7)$$

თუ ახლა (19,5) ფორმულებში (14,2)-დან v_i -ს მნიშვნელობებს ჩავსვამთ, და (19,6) და (19,7) დამოკიდებულებებს გავითვალისწინებთ, მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{m'v_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_{x_1} \\ p_2 &= \frac{m'v_{x_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_{x_2} \\ p_3 &= \frac{m'v_{x_3}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_{x_3} \\ p_4 &= \frac{im'c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i\mathcal{E}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (19,8)$$

იმპულსის 4-ვექტორი აგრეთვე შემდეგნაირადაც შეიძლება ჩაწეროს $p(p_1, p_2, p_3, p_4) = p\left(p, i \frac{\mathcal{E}}{c}\right)$. როგორც ვიცით, ყოველი 4-ვექტორის მდგენელები გარდაიქმნებიან ლორენცის (10,22) ფორმულების მიხედვით, ამიტომ p_i -ს მდგენელები შემდეგი სახით გარდაიქმნებიან:

$$p_1 = \frac{p_1 + \frac{iv}{c} \mathcal{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad p_2 = p'_2; \quad p_3 = p'_3; \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + vp'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.9)$$

ამგვარად, p_i ოთხგანზოპლებიანი ვექტორი ნაწილაკის იმპულსსა და ენერჯიას შორის ინვარიანტულ კავშირს ამყარება.

თუ ნაწილაკი K' სისტემაში უძრავია. მაშინ

$$p'_1 = p'_2 = p'_3 = 0 \quad \text{და} \quad p_4 = \frac{i\mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

სადაც სიდიდეს

$$\mathcal{E}' = mc^2 \quad (19.10)$$

აღებულს K' სისტემის წინართ, ნაწილაკის უძრავობის ენერჯია ეწოდება. (19,10) ფორმულა მიღებული იქნა ეინშტეინის შიერ და გამობატაქს მასისა და ენერჯიის ექვივალენტობას.

\mathcal{E}' ნაწილაკის ენერჯიაა იმ სისტემაში, რომელშიაც მისი იმპულსი ნულის ტოლია $p' = 0$.

თუ ახლა K' სისტემაში უძრავ მატერიალურ ნაწილაკს დავაკვირდებით K სისტემიდან, რომლის მიმართაც K' მოძრაობს მუდმივი v სიჩქარით x_1 ღერძის გასწვრივ, მაშინ (19,9)-დან იმპულსის მდგენელებისათვის მივიღებთ:

$$p_1 = \frac{\mathcal{E}' v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0; \quad p_4 = \frac{p'_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.11)$$

ანდა, თუ ამ უკანასკნელ ტოლობებს სამგანზომილებიან ფორმაში ჩაწეროთ გვექნება:

$$p = \frac{\mathcal{E}' v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.12)$$

და

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2. \quad (19.13)$$

(19.6) ფორმულებთან (19,12)-ს შედარება გვიჩვენებს, რომ სიდიდე $\frac{\mathcal{E}'}{c^2}$ მართლაც ნაწილაკის m' „უძრაობის“ მასის როლს თამაშობს.

(19.13) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ მატერიალური ნაწილაკის სრული ენერგია დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემაზე.

(19,7), (19,10) და (19,13) ფორმულების შედარება გვაძლევს ნაწილაკის სიჩქარის მიხედვით მისი მასის ცვლილების კანონს

$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19,14)$$

ამ უქანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სინათლის ქვანტებს, რომლებიც c სიჩქარით ვრცელდებიან სივარცხელში, განვიხილავთ როგორც ნაწილაკებს, ანაბნ მათი უძრაობის მასა ნულის ტოლი უნდა იყოს, ($m' = 0$);

ჩინააღმდეგ შემთხვევაში ფოტონის მასა $m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ უსასრულო დი-

დი იქნებოდა.

(19,12) და (19,13) ფორმულებიდან, პირველის მეორეზე გაყოფის გზით, მიიღება მატერიალური ნაწილაკის იმპულსსა და სრულ ენერგიას შორის რელატივისტური კავშირი

$$p = \frac{\mathcal{E}'}{c^2}. \quad (19,15)$$

თუ გავითვალისწინებთ (14,3) პირობას, (19,8)-დან მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^4 p_i^2 = p^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m'^2 c^2, \quad (19,16)$$

საიდანაც

$$\mathcal{E} = \pm c \sqrt{p^2 + m'^2 c^2}. \quad (19,16 a)$$

ნაწილაკის კინეტიკური ენერგიის მისაღებად. სრული ენერგიის (19,13) გამოხატულებას უნდა გამოვავლოთ მისივე „უძრაობის“ ენერგია (19,10), გვექნება:

$$\mathcal{E} = m' c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (19,17)$$

თუ ახლა (19,16)-ში შევიტანთ p_i -ს მნიშვნელობებს (19,4), მივიღებთ:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_i} \right)^2 = -m'^2 c^2.$$

ანდა

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (19,18)$$

ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას რელატივისტურ მექანიკაში; საიდანაც შეიძლება ადვილად მივიღოთ კლასიკური მექანიკის შესაბამისი განტოლება შემდეგი გზით: რადგან ენერგია \mathcal{E} ქმედების

S ფუნქციასთან, (19,4) თანახმად, დაკავშირებულია ფორმულით $\mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}$,

ხოლო მეორე მხრივ $\mathcal{E} = mc^2$, ამიტომ თუ S ფუნქციის ნაცვლად შემოვიღებთ ქმედების ახალ ფუნქციას

$$S' = S + m'c^2 t. \quad (19,19)$$

მაშინ (19,18) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + 2m' \frac{\partial S'}{\partial t} = 0,$$

საიდანაც, ზღვრულ შემთხვევაში ($c \rightarrow \infty$), მიიღება კლასიკური მექანიკის ჰამილტონ-იაკობის განტოლება:

$$\frac{1}{2m'} \left\{ \left(\frac{\partial S'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial x_3}\right)^2 \right\} + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

მასისა და ენერგიის შორის არსებული დამოკიდებულება $\mathcal{E}' = m'c^2$, ფარდობითობის სპეციალური თეორიის უმნიშვნელოვანესი შედეგია. ამ კანონის თანახმად სხეულის მასა შეიძლება ენერგიის საზომით განვსაზღვროთ და პირიქით. თუ სხეულის ენერგიას $\Delta \mathcal{E}$ სიდიდით შევცვლით, მაშინ (19,13)

ფორმულის თანახმად, მისი მასა შეიცვლება $\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}}{c^2}$ სიდიდით.

თუ კლასიკურ ფიზიკაში ენერგიისა და მასის მუდმივობის კანონები ცალ-ცალკე არსებობენ, ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში ორივე კანონი გაერთიანებულია ერთ კანონად.

მასისა და ენერგიის ექვივალენტობის კანონის არა სწორ ინტერპრეტაციას ხშირად გაუგებრობამდე მივყავართ.

არ შეიძლება მატერიის ცნების არევა მის თვისებებთან, ანუ ფიზიკურ სიდიდეებთან. ენერგია, მასა, ძალა, განერცობა და სხვა ფიზიკური სიდიდეები არ უნდა გავაიგივოთ მატერიასთან, რომლის თვისებების გამოხატულებებსაც ისინი წარმოადგენენ. თუ მატერიას გავაიგივებთ მისი რომელიმე ერთ-ერთი თვისების, მაგალითად, ინერციულობის რაოდენობრივ საზომთან — მასასთან, მაშინ ეინშტეინის კანონი (19,10) იმ დასკვნამდე მიგვიყვანს, რომ მატერია ენერგიაში უნდა გადადიოდეს და პირიქით; რაც, რა თქმა უნდა, შეუძლებელია და მცდარ შეხედულებას წარმოადგენს. მატერიისა და მასის ცნებები სხვადასხვაა. არ შეიძლება მატერია გადავიდეს მის თვისებაში და პირიქით. შეუძლებელია მასის გადასვლა მატერიაში. მაგრამ მატერიის ერთი თვისება

აუცილებლად ნის რომელიმე სხვა თვისებასთანაა დაკავშირებული და ამიტომ ნასწი უნდა გადადგოდეს. მატერიის ერთი თვისების შეცვლისას, მეორე თვისებაც უნდა შეიცვალოს ისეთ სიდიდებზე. რომელსაც ნათ შორის არსებული დამოკიდებულების გამოიხატავს კანონი განსაზღვრავს. მატერიალური ნაწილაკის ენერჯიის შეცვლას თან უნდა სდევდეს მისი მასის ცვლილება და პირიქით. ეს ურთიერთ გადასვლა ხორციელდება $\mathcal{E}' = mc^2$ კანონის მიხედვით. თუ სხეულა კარგავს — გადასცემს სხვა სხეულს $\Delta \mathcal{E}$ რაოდენობის ენერჯიას, ეს

ტოლფასია მისი მასის $\Delta m = -\frac{\Delta \mathcal{E}}{c^2}$ სიდიდით შემცირების. რა თქმა უნდა შებრუნებული დებულებაც სწორია. სხეულის მიერ Δm მასის შეძენა ნიშნავს მისი ენერჯიის $\Delta \mathcal{E} = \Delta mc^2$ სიდიდით გადიდების. ამგვარად, ეინშტეინის ფორმულა $\mathcal{E}' = \Delta mc^2$, ბუნების კანონის ზუსტ გამოხატულებას წარმოადგენს; მასთან დაკავშირებული გაუგებრობისა და „სიძნელეების“ გამომწვევი მიზეზია ცნებათა არევა — მატერიის გაიგივება მის თვისებებთან; რაც ყოველად დაუმეგებელია.

§ 20. იმპულსის მუდმივობის კანონი რელატივისტურ მექანიკაში

კლასიკურ მექანიკის იმპულსის მუდმივობის კანონი $p = \sum_x m_x v_x = \text{Const}$,

ანდა ნისი ტოლფასი სავი კანონი

$$\left. \begin{aligned} p_{x_1} &= \sum m_x v_{x_1} = \text{Const} \\ p_{x_2} &= \sum m_x v_{x_2} = \text{Const} \\ p_{x_3} &= \sum m_x v_{x_3} = \text{Const} \end{aligned} \right\} \quad (20,1)$$

კოვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. თუ ერთ რომელიმე ინერციულ სისტემაში მატერიალურ ნაწილაკთა სრული იმპულსი მუდმივია, მაინც ის აგრეთვე მუდმივი იქნება ყველა ინერციულ სისტემაში.

(8,2) და (10,22) გარდაქმნის ფორმულების წრფივობის გამო, ინერციის კანონი ინვარიანტულია, როგორც გალილეის ისევე ლორენცის გარდაქმნების მიმართ. მაგრამ კლასიკური მექანიკის, იმპულსის მუდმივობის კანონები (20,1) ლორენცის გარდაქმნების მიმართ არ არიან კოვარიანტული; რაშიაც ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ (10,22) ფორმულების უშუალოდ გამოყენების გზით. ამიტომ საჭიროა მუდმივობის კანონების ლორენც კოვარიანტულ ფორმაში ჩამოყალიბება, საიდანაც მკირე სიჩქარეების შემთხვევაში ($v \ll c$) უნდა მიიღებოდეს (20,1) განტოლებები.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ იმპულსის მუდმივობის კანონების სახე რელატივისტურ მექანიკაში. განვიხილოთ ისეთი მოვლენები, რომლებშიაც შესაძლებელი იქნება ნაწილზე მომქმედი ძალების გამორიცხვა. ასეთ მოვლენებს ეკუთვნის ნაწილაკთა დაჯახების მოვლენები.

გამოთვლების გამარტივების მიზნით შენოვისახლეოთ ორი ნაწილაკის დრეკადი დაჯახების მოვლენის განხილვით. იგულისხმება, რომ ნაწილაკთა ურთიერთქმედებას ადგილი აქვს იმ მცირე დროში, რომლის განმავლობაზრაც ეს ნაწილაკები ერთიმეორიდან უსასრულო მცირე მანძილზე იპყობებიან.

საკმაო მიახლოებით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ზოლოდ დროის ამ უსასრულო მცირე შუალედის განმავლობაში, ურთიერთ ქმედების გამო, ნაწილაკები მოძრაობენ აჩქარებულად, დაჯახებანდე და დაჯახების შემდეგ კი მათი სიჩქარეები მუდმივია.

ვისარგებლოთ მატერიალური ნაწილაკის იმპულსის (19,8) გამოსახულებით და განვიხილოთ ორი ტოლი მასის ნაწილაკების დრეკადი დაჯახება. შემოვიღოთ K და K' ინერციული სისტემები, მათი ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარე აღვნიშნოთ v_0 -ით. პირველი და მეორე ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახებამდე K და K' სისტემებში აღვნიშნოთ სათანადოდ v_+ , v_- , v'_+ და v'_- -ით, ხოლო დაჯახების შემდეგ u_+ , u_- , u'_+ და u'_- -ით. K და K' სისტემები ისეთნაირად შევარჩიოთ, რომ დაჯახებამდე K' სისტემაში ნაწილაკთა სიმძინის ცენტრი უძრავი იყოს, ე. ი. ნაწილაკები მოძრაობდნენ ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული სიჩქარეებით:

$$v'_+ = -v'_- \quad (v'_{1+} = -v'_{1-}, v'_{2+} = -v'_{2-}, v'_{3+} = -v'_{3-}). \quad (20,2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $|v'_+| = |v'_-| = v'$ და დავუშვათ, რომ K' სისტემა მოძრაობს K -ს მიმართ x_1 ღერძის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა შეკრების (15,2) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$v^2_{\pm} = \frac{v^2_{\pm} + 2v'_{1\pm} v_0 + v^2_0 - v^2_{2\pm} \frac{v_0^2}{c^2} - v^2_{3\pm} \frac{v_0^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v'_{1\pm} v_0}{c^2}\right)^2}, \quad (20,3)$$

საიდანაც, (15,8) ფორმულის გამოყენებით, ადვილად მიიღება შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2}} &= \frac{1 + v'_{1\pm} \frac{v_0}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{v^2_0}{c^2}\right)^{1/2}} \\ \frac{v_{1\pm}}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2}} &= \frac{v'_{1\pm} + v_0}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{v^2_0}{c^2}\right)^{1/2}} \\ \frac{v_{2\pm}}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2}} &= \frac{v'_{2\pm}}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2}}; \\ \frac{v_{3\pm}}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2}} &= \frac{v'_{3\pm}}{\left(1 - \frac{v^2_{\pm}}{c^2}\right)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (20,4)$$

თუ (20.2) პირობას გამოვიყენებთ, (20,4)-დან მივიღებთ:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v_-^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (20,5)$$

$$\frac{v_{1+}}{\left(1 - \frac{v_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v_{1-}}{\left(1 - \frac{v_-^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{2v_0}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (20,6)$$

$$\frac{v_{2+}}{\left(1 - \frac{v_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v_{2-}}{\left(1 - \frac{v_-^2}{c^2}\right)^{1/2}} = 0. \quad (20,7)$$

$$\frac{v_{3+}}{\left(1 - \frac{v_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v_{3-}}{\left(1 - \frac{v_-^2}{c^2}\right)^{1/2}} = 0. \quad (20,8)$$

სადაც $v'_+ = v'_- = v$. (20,5) და (20,6) განტოლებათა მარჯვენა მხარეები შეიცავენ მხოლოდ K და K' სისტემების ფარდობით $v_0 = \text{Const}$ სიჩქარეს და K' სისტემის მიმართ ნაწილაკთა სიჩქარეების კვადრატებს (v'^2), რის გამოც, მათი მარჯვენა მხარეები არ არიან დამოკიდებული ნაწილაკთა მოძრაობის მიმართულებებზე.

რადგან K' სისტემაში ნაწილაკთა სიმძიმის ცენტრი უძრავია (სრული იმპულსი ნულის ტოლია), დრეკადი დაჯახების შემდეგაც, იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად, ის უძრავი უნდა დარჩეს. ამგვარად, ორი ნაწილაკის დრეკადი დაჯახების დროს მათი ფარდობითი სიჩქარე არ იცვლება; იცვლება მხოლოდ სიჩქარეების მიმართულებები. რადგანაც (20,5) და (20,6) განტოლებათა მარჯვენა მხარეები ნაწილაკთა დაჯახების შედეგად არ იცვლებიან, ამ ფორმულების მარცხენა მხარეებიც მუდმივი უნდა რჩებოდნენ, ე. ი.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(1 - \frac{v_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v_-^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \\ & = \frac{1}{\left(1 - \frac{u_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{u_-^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (20,9)$$

და

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i+}}{\left(1 - \frac{v_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v_{i-}}{\left(1 - \frac{v_-^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \\ & = \frac{u_{i+}}{\left(1 - \frac{u_+^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{u_{i-}}{\left(1 - \frac{u_-^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (20,10)$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, ნაწილაკთა სიჩქარეების ისეთი ფუნქციები (20,9) და (20,10), რომლებიც დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ ტოლნი არიან.

რადგან ნაწილაკის „უძრაობის“ მასა აღებული ინერციული სისტემის მიმართ მუდმივია, (20,10) გამოსახულების ორივე მხარეების m -ზე გამრავლების შედეგად ისევ მუდმივ სიდიდეს მივიღებთ; ამიტომ შეიძლება დაეწეროს:

$$\begin{aligned} & \frac{mv_{i+}}{\left(1 - \frac{v_{+}^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{mv_{i-}}{\left(1 - \frac{v_{-}^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \\ & = \frac{mu_{i+}}{\left(1 - \frac{u_{+}^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{mu_{i-}}{\left(1 - \frac{u_{-}^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \text{Const.} \end{aligned} \quad (20,11)$$

რომელიც წარმოადგენს ორი ნაწილაკისაგან შედგენილი იზოლირებული სისტემის იმპულსის მუდმივობის კანონს.

თუ იზოლირებული სისტემა რამოდენიმე ნაწილაკისაგან შედგება, მაშინ იმპულსის მუდმივობის კანონი (20,11) შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} v_{\alpha i}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\alpha}^2}{c^2}}} = \text{Const} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (20,12)$$

თუ (20,9) გამოსახულების ორივე მხარეს mc^2 -ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v_{+}^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v_{-}^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \\ & = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{u_{+}^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{u_{-}^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \text{Const.} \end{aligned} \quad (20,13)$$

ანდა საზოგადოდ ნაწილაკთა იზოლირებული სისტემისათვის

$$\sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} c^2}{\left(1 - \frac{v_{\alpha}^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \text{Const.} \quad (20,14)$$

ეს უკანასკნელი იზოლირებული სისტემის ენერჯიის მუდმივობის კანონს წარმოადგენს.

§ 21. მასათა ლეფექტი

განვიხილოთ ორი ნაწილაკის დაჯახება. მათი მასები და სიჩქარეები დაჯახებამდე იყოს m_1 , m_2 , $v^{(1)}$ და $v^{(2)}$. დაუშვათ, რომ დაჯახების შედეგად ისინი შეერთდნენ ერთ სხეულად, რომელიც განაგრძობს მოძრაობას v სიჩქარით. (20,13) განტოლება ამ შემთხვევისათვის მოგვცემს:

$$m'_1 v^{(1)} + m'_2 v^{(2)} = M' v. \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (21,1)$$

აქ ჩვენ გვაქვს 4 განტოლება, რომელთა საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ დაჯახების შემდეგ სიჩქარის ოთხივე მდგენელი v_i .

გარდა (21,1) განტოლებათა სისტემისა (4 — განტოლება), v_i აგრეთვე აკმაყოფილებს (14,3) პირობას. ამგვარად ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის 4 — მდგენელისათვის ფაქტიურად ჩვენ გვაქვს 5 განტოლება. მაგრამ თუ (21,1) — განტოლებებში, ნაწილაკთა შეერთების შედეგად მიღებული სხეულის M' მასასაც უცნობ სიდიდედ ჩავთვლით (ე. ი. $m'_1 + m'_2 \neq M'$), მივიღებთ 5 განტოლებას 5 უცნობით. თუ (21,1)-ში შევიტანთ $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ და v_i სიჩქარეების მეოთხე მდგენელის მნიშვნელობებს (14.2), მივიღებთ:

$$\frac{m'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (21,2)$$

ეს უკანასკნელი განტოლება დავწეროთ ისეთ კოორდინატთა სისტემაში, როგორშიაც M' მასის მქონე ნაწილაკი უძრავია — $v = 0$. ტოლობის ორივე მხარის c^2 -ზე გადამრავლების შედეგად გვექნება:

$$M'c^2 = m'_1c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - 1 \right) + \\ + m'_2c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - 1 \right) + m'_1c^2 + m'_2c^2, \quad (21,3)$$

საიდანაც გამოდინარეობს, რომ ორი m'_1 და m'_2 მასების მქონე ნაწილაკთა შეერთების შედეგად მიღებული ნაწილაკის „უძრავობის“ ენერგია $M'c^2$ ტოლია დაჯახებამდე ნაწილაკთა m'_1c^2 და m'_2c^2 „უძრავობისა“ და მათივე კინეტიკური ენერგიების ჯამის. ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგია, დაჯახების მომენტში, შეიძლება გარდაიქმნას სითბურ, სიმძიმის ცენტრის ირგვლივ ბრუნვის, რხევის, შეკავშირების ან რომელიმე სხვა სახის ენერგიად.

ენეოგის ამა თუ იმ კონკრეტულ ფორმას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, აქ მნიშვნელოვანი ისაა, რომ რომელიმე სახის ენერგიის წარმოქმნა („აქაობა“) ტოლფასია ექვივალენტური რაოდენობით სხეულის ინერციული მასის გადიდების (შემცირების).

(21,3) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ

$$M' > m'_1 + m'_2. \quad (21,4)$$

ე. ი. ნაწილაკთა შეერთების ან დაშლის დროს საერთო მასა იცვლება. მასის ამ ცვლილებას

$$\Delta M = M' - (m'_1 + m'_2). \quad (21,5)$$

მასების დეფექტი ეწოდება.

საზოგადოდ n ნაწილაკისაგან შედგენილი მდგარი სისტემისათვის მას-დეფექტი

$$\Delta M = \underline{M}' - \sum_{\alpha=1}^n m'_{\alpha} \quad (21,6)$$

თუ მასდეფექტი უარყოფითია ($\Delta M < 0$), მაშინ ნაწილაკთა დაჯახების შედეგად წარმოიქმნება მდგრადი სისტემა; ხოლო თუ ის დადებითია ($\Delta M > 0$) — ადებული ნაწილაკი დაიშლება ორ ან რამდენიმე შემადგენელ ნაწილაკებად. მოვიყვანოთ რამოდენიმე მაგალითი.

ცნობილია, რომ ჟანგბადის (${}^8_8\text{O}^{16}$) ატომის მასა 16-ია. მისი გულის შემადგენელი 8 პროტონისა და 8 ნეიტრონის მასათა ჯამი

$$\sum_{\alpha=1}^{16} m_{\alpha} = 8m'_{p} + 8m'_{n} = 8 \cdot 1,00312 + 8 \cdot 1,00893 = 16,13640,$$

მაშასადამე, ჟანგბადის ატომის მასდეფექტი

$$\Delta M = 0,13640.$$

მასის ეს დანაკლისი, რომლის სიდიდებედაც მცირდება 8 პროტონისა და 8 ნეიტრონის საერთო მასა ჟანგბადის ატომგულად შეერთების გამო, აინსნება ეინშტეინის $E = mc^2$ ფორმულის საფუძველზე. მართლაც, თუ ამ უკანასკნელს გამოვიყენებთ, ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ნაწილაკთა რთულ სხეულად შეერთების პროცესებში ადვილი აქვს როგორც ენერჯის ისევე მასის მუდმივობის კანონს. ანისათვის განვიხილოთ მატერიალური სხეული (ატომგული), რომლის შემადგენელი ნაწილაკებიც ურთიერთქმედებაში იმყოფებიან. მათ გააჩნიათ ურთიერთქმედებისა და კინეტიკური ენერჯიები, რომლებიც სათანადოდ, მასების ექვივალენტური არიან. ეს ენერჯიები წარმოიშობიან ΔM მასების დეფექტის ხარჯზე, ცალკეული ნაწილაკებისაგან (მაგალითად პროტონ ნეიტრონებისაგან) ოთული სხეულის (ატომგულის) შედგენის დროს. ამგვარად, ნაწილაკთა შეერთების შედეგად მათი სრული მასის შემცირება გამოწვეულია შეკავშირების ენერჯიაში მისი გადასვლით.

„ბარტივი“ ნაწილაკებისაგან (პროტონები, ნეიტრონები) ოთული სხეულის (ატომგული) წარმოშობის შებრუნებულ მოვლენას წარმოადგენს ოთული სხეულის (მძიმე ატომგულის) ორ ან რამოდენიმე სხეულად (უფრო მსუბუქ ატომგულებად) დაშლის პროცესი. ასეთი პროცესი ლაბორატორიულ პირობებში განხორციელებული იქნა 1938 წლის ბოლოს და მდგომარეობს შემდეგში: მძიმე ელემენტის ურანის ${}_{92}\text{U}^{235}$ ატომგული, ნეიტრონის შთანთქმის შედეგად, ორ — დაახლოებით ტოლი მასების — ატომგულად, ბარიუმად B_n და კრიპტონად K_r , ზოგჯერაც ქსენონად X , და სტრონციუმად S_r იშლება. ურანისა და ნეიტრონის მასათა ჯამი მნიშვნელოვნად განსხვავდება დაშლის პროდუქტების მასების ჯამისაგან. ამ პროცესშიაც ადვილი აქვს მასის მოჩვენებით „გაქრობას“; მაგრამ აქაც საკმარისია დაშლის პროდუქტების მიერ შექმნილი კინეტიკური ენერჯიები ექვივალენტური მასით შეეცვალოთ და

შეედაროთ სათანადო მასდენეექტებს, იმისათვის, რომ დაერწმუნდეთ მასის მუდმივობის კანონის სისწორეში. ამგვარად, ატომგულის დაშლისა და წარმოქმნის პროცესების ექსპერიმენტალურმა შესწავლამ გვიჩვენა, რომ დამოკიდებულება $\Delta = mc^2$. რომელიც მასისა და ენერჯიის მუდმივობის კანონებს ერთ კანონად აერთებს. ზედმიწევნით სწორია. ამ კანონის სისწორის შემოწმება შესაძლებელი გახდა მხოლოდ ატომგულური გარდაქმნების ზუსტი ენერგეტიკული ბალანსის დადგენის გზით.

აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ მას დენეექტი ატომგულურ რეაქციებში თვით ატომგულის მასის დაახლოებით, $0,1$ პროცენტს შეადგენს. მაკროსკოპიული სხეულების შემთხვევაში კი აღებული სხეულის მასის მხოლოდ 10^{-10} ნაწილს შეადგენს; რის გამოც ის პრაქტიკულად ყოველთვის შეუმჩნეველი რჩება.

§ 22. იმპულსის მომენტი

გარდაქმნათა რომელიმე უწყვეტი ჯგუფის მიმართ ლაგრანჟის ფუნქციის ინვარიანტობის პირობიდან გამომდინარეობს სათანადო მუდმივობის კანონები. (ნეტერის თეორემა). მაგალითად: სივრცის ერთგვაროვნების, ანუ ღრობისა და სივრცის კოორდინატების ათვლის წერტილის არჩევის მიმართ ლანგრანჟის ფუნქციის ინვარიანტობის პირობიდან გამომდინარეობენ ენერჯიისა და იმპულსის ვექტორის მუდმივობის კანონები.

ლაგრანჟის ფუნქციის ინვარიანტობას სივრცეში შემობრუნების მიწარა ნიყავართ იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონამდე (3 კანონი); ხოლო ლორენცის გარდაქმნების მიმართ (ბრუნვა $x_1 O_1$, $x_2 O_2$ და $x_3 O_3$ სიბრტყეებში) ლაგრანჟის ფუნქციის ინვარიანტობის პირობიდან კი მიიღება სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის მუდმივობის კანონი (3 კანონი).

აღნიშნული 10 უნივერსალური მუდმივობის კანონი საზოგადოდ შეესაბამება 10 პარამეტრიან, უწყვეტი, უსასრულო მცირე გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ განტოლებათა ინვარიანტობას.

განვიხილოთ იზოლირებულ მატერიალურ ნაწილაკთა სისტემა. სივრცის იზოტროპიულობის თვისების თანახმად ლაგრანჟის ფუნქციები არ შეიცვლებიან თუ მთელ სისტემას, როგორც მთლიანს, მოვაბრუნებთ ოთხგანზომილებიან სივრცეში ნებისმიერად აღებული რაიმე ღერძის ირგვლივ, უსასრულო მცირე $\delta\varphi$ კუთხით. ცხადია, რომ სისტემის მობრუნების ნაცვლად შეგვიძლია შემოვაბრუნოთ კოორდინატთა სისტემა.

სისტემის შემადგენელი ერთ-ერთი ნაწილაკის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_i -ით. ოთხგანზომილებიან სივრცეში უსასრულო მცირე შემობრუნებისას ყოველი ნაწილაკის x_i კოორდინატები გადავლენ x'_i კოორდინატებში.

x_i კოორდინატები, სივრცის ერთგვაროვნების გამო, წრფივი ფორმით გარდაიქმნებიან

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^4 x_k \delta a_{ik}. \quad (22,1)$$

სადაც i და k ინდექსები იცვლებიან 1-დან 4 მდე¹: ხოლო δa_{ik} — ოთხგანზომილებიანი უსასრულო მცირე ნეორე რანგის ტენზორია. ის განსაზღვრავს სისტემის წემობრუნებას. თუ $x_i^2 = x_i'^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) პირობაში ჩავსვათ (22,1) გაოსახულებას და უგულებელვყოფთ δa_{ik} -ს მიმართ კვადრატულ წევრებს მივიღებთ:

$$x_i x_k \delta a_{ik} = 0. \quad (22,2)$$

ვინაიდან $x_i x_k$ სიმეტრიული ტენზორია. ამიტომ (4,7) თანახმად, δa_{ik} უნდა იყოს ანტისიმეტრიული, ე. ი.

$$\delta a_{ik} = -\delta a_{ki}. \quad (22,3)$$

(19,4) ფორმულის თანახმად, ნაწილაკთა სისტემის ქმედების ფუნქციის ვარიაცია δS , კოორდინატთა უსასრულო მცირე ცვლილების დროს შემდეგნაირად გამოიხატება:

$$\delta S = \sum p_i \delta x_i. \quad (22,4)$$

ამ უკანასკნელში აჯამვა სწარმოებს სისტემის შემადგენელი ყველა ნაწილაკების მიხედვით. რადგან სისტემის წემობრუნების შემთხვევაში $\delta x_i = \delta a_{ik} x_k$, გვექნება

$$\delta S = \delta a_{ik} \sum p_i x_k. \quad (22,5)$$

$p_i x_k$ მეორე რანგის ტენზორია, ის შეიძლება წარმოვიდგინოთ სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ჯამის სახით

$$p_i x_k = \frac{1}{2} (p_i x_k + p_k x_i) + \frac{1}{2} (p_i x_k - p_k x_i).$$

ჩვენ ვიცით, რომ სიმეტრიული ტენზორის ნამრავლი ანტისიმეტრიულ ტენზორზე ყოველთვის ნულის ტოლია, ამიტომ (22,5)-ში დაგვრჩება მხოლოდ ანტისიმეტრიული ტენზორების ნამრავლი. ამგვარად,

$$\delta S = \delta a_{ik} \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i). \quad (22,6)$$

როგორც ზემოდ აღვნიშნეთ, სივრცის იზოტროპიულობის თვისების გამო. იზოლირებული სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია არ უნდა შეიცვალოს კოორდინატთა სისტემის წემობრუნების დროს, ე. ი.

$$\frac{\delta S}{\delta a_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i)$$

მუდმივი სიდიდეა.

ეს ტენზორული გამოსახულება M_{ik} -თი აღვნიშნოთ. მას ოთხგანზომილებიანი იმპულსის მომენტი ეწოდება

$$M_{ik} = \sum (p_i x_k - p_k x_i) = \text{Const}. \quad (22,7)$$

თუ i და k ინდექსებს რიგრიგობით მივცემთ მნიშვნელობებს 1-დან 4-მდე, მივიღებთ იმპულსის მომენტის ოთხივე მდგენელს. ამ 4—ვექტორის სივრცითი

¹ შემდეგში, ჩაწერის გამარტივების მიზნით ჯამის ნიშანს აღარ ვიხმართ. ყველა გამოსახულებაში, რომელშიაც ერთი და იგივე ინდექსი ორჯერ გამოთრდება, ვიგულისხმებთ შეჯამებას ამ ინდექსით.

მდგენელები ($i, k = 1, 2, 3$) ადგენენ სამგანზომილებიანი იმპულსის მომენტის ვექტორს

$$M = \sum |x p|, \tag{22,8}$$

ხოლო მეოთხე -- დროითი მდგენელი

$$M_{4z} = \sum (p_x x_z - p_z x_x), \tag{22,8 a}$$

სადაც $z = 1, 2, 3$. თუ (22,8)-ში შევიტანთ $p_x = \frac{i\mathcal{L}}{c}$ (19,8) და $x_x = ict$ მნიშვნელობებს და გავითვალისწინებთ (22,7)-ს, გვექნება:

$$M_{4z} = ic \sum \left(\frac{\mathcal{L}_z x_x}{c^2} - p_z t \right) = \text{Const.}$$

ანდა ვექტორული სახით:

$$ic \sum \left(\frac{\mathcal{L} x}{c^2} - p t \right) = \text{Const.} \tag{22,9}$$

მეორეს მხრივ განმზოლოებული სისტემის სრული ენერგია $\sum \mathcal{L}$ აგრეთვე მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს; ამიტომ (22,9) ტოლობის ორივე მხარის $\sum \mathcal{L}$ მუდმივ სიდიდეზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{\sum \mathcal{L} x}{\sum \mathcal{L}} - \frac{c^2 \sum p t}{\sum \mathcal{L}} = \text{Const.} \tag{22,10}$$

ამ უანასკნელის დროით გაწარმოების შედეგად მივიღებთ ნაწილაკთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის სიჩქარეს:

$$v_c = \frac{c^2 \sum p}{\sum \mathcal{L}}. \tag{22,11}$$

საიდანაც სიმძიმის ცენტრის რადიუს ვექტორისათვის მიიღება:

$$x_c = \frac{\sum \mathcal{L} x}{\sum \mathcal{L}}. \tag{22,12}$$

კლასიკურ მიახლოებაში ($v \ll c$) (22,11) და (22,12) ფორმულები გვაძლევენ:

$$v_c = \frac{\sum m v}{\sum m}$$

და

$$x_c = \frac{\sum m x}{\sum m}$$

ამგვარად, ფარდობითობის თეორიაში სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები და მისი სიჩქარე განისაზღვრებიან კლასიკური მექანიკის ფორმულების ანალოგიური (22,11) და (22,12) გამოსახულებებით; განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ამ ფორმულებში სისტემის მასის როლს თამაშობს სრული ენერგია $\sum \mathcal{L}$. საკიროა შევნიშნოთ, რომ (22,12)-ში x_c ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი ვექტორია, ამიტომ, კოორდინატთა ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, ის არ გარდაიქმნება ლორენცის (10,22) ფორმულებს მიხედვით.

თავი IV

ელექტრომაგნიტური ველის ძირითადი განვითარებები სისხრიულში

§ 23. ელექტრომაგნიტური ველის ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი

ელექტრული და მაგნიტური მოვლენების შესასწავლად საკმარისია გამოვიკვლიოთ ელექტრომაგნიტური ველი. ეს ველი განსაზღვრული გვექნება თუ გვეცოდინება e და h დაძაბულობის ვექტორების მნიშვნელობანი სივრცის ყოველ წერტილში. ამ უკანასკნელთა მიღება, ელექტრომაგნიტური ველის თეორიის ძირითად ამოცანას შეადგენს.

როგორც ცნობილია, „უძრავი“ მუხტის ველის დასახასიათებლად შემოღებულია სივრცითი კოორდინატების სკალარული ფუნქცია $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, ხოლო მოძრავი მუხტის შემთხვევაში კი ვექტორული ფუნქცია $A(x_1, x_2, x_3, t)$. მათ გარკვეული ფიზიკური აზრი არა აქვთ, რადგან მათი უშუალო გაზომვა შეუძლებელია. ამიტომ ისინი მხოლოდ დამხმარე ფუნქციებს წარმოადგენენ.

თუ გაეითვალისწინებთ რომ „უძრაობის“ ცნება ფარდობითია, მაშინ, ყოველი დამუხტული ნაწილაკი ირგვლივ სივრცეში წარმოშობს როგორც ელექტრულ ასევე მაგნიტურ ველს; საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სამყაროში ეს ველები ერთად არსებობენ — ელექტრომაგნიტური ველის სახით¹. ელექტრული და მაგნიტური ველები მკიდრო კავშირში იმყოფებიან და ერთმეორისაგან მათი სრული გამოყოფა არ შეიძლება. ეს გარემოება მიგვიჩინებს, რომ ელექტრომაგნიტური ველი შეიძლება დავახასიათოთ ისეთი ერთი სიდიდით, რომელიც უნდა შეიცავდეს როგორც ელექტრულ ისევე მაგნიტურ ველების დაძაბულობის e და h ვექტორებს. სათანადოდ, ელექტრომაგნიტური ველის დაწინააღმდეგე $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ სკალარული და $A(x_1, x_2, x_3, t)$ ვექტორული ფუნქციები უნდა გაეაერთიანოთ ერთ ოთხგანზომილებიან $A_4(x_1, x_2, x_3, t)$ ფუნქციად, რომლის პირველი სამი სივრცითი მდგენელი მოგვცემს $A(x_1, x_2, x_3, t)$ ვექტორ-პოტენციალს, ხოლო მეოთხე მდგენელი $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ სკალარპოტენციალს.

¹ როდესაც ვამბობთ, რომ „უძრავი“ მუხტის ირგვლივ სივრცეში გვაქვს ელექტრული ველი, ამ შემთხვევაში მუხტის მაგნიტურ ველს მხედველობაში არ ვღებულობთ, რადგან ეს უკანასკნელი ელექტრულთან შედარებით გაცილებით სუსტია. ასევე, როდესაც ჩვენ ვლაპარაკობთ ელექტრული დენის მაგნიტურ ველზე, ეს სრულიადაც არ ნიშნავს, რომ ელექტრული ველი არ არსებობს, პირიქით, ელექტრული ველის მოქმედებითაა გამოწვეული გამტარის შიგნით მუხტების გადაადგილება — ელექტრული დენი. მაგრამ, მაგნიტურ ველთან შედარებით, ელექტრულის სიმცირე ზოგჯერ უფლებას გვაძლევს ეს უკანასკნელი არ განვიხილოთ და შემოვიწავლოთ მაგნიტური ველის შესწავლით.

როგორც ვიცით ელექტრომაგნიტური ველის ინვარიანტული განტოლებების ნისაღებად, ველის დამახასიათებელი სიდიდეები ოთხგანზომილებიანი ვექტორებით უნდა გამოვხატოთ; ამიტომ ოთხმდგენელიანი A_i ფუნქცია უნდა შეადგენდეს ოთხგანზომილებიან ვექტორს (4 — პოტენციალს); რასაც ადვილად მივალწევთ თუ დაუშვებთ რომ მისი მდგენელებია:

$$\left. \begin{aligned} A_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= A_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ A_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= A_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ A_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= A_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ A_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= i\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned} \right\} \quad (23,1)$$

განვიხილოთ დამუხტული ნაწილაკი გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში. მუხტისა და ველის ურთიერთქმედების შესასწავლად, ველისა და ნაწილაკის დამახასიათებელი ოთხგანზომილებიანი სიდიდეებიდან უნდა შევადგინოთ ინვარიანტული ქმედების ფუნქცია. თუ ამ უკანასკნელს S_{12} -ით აღვნიშნავთ, ის შეიძლება განვსაზღვროთ A_i ოთხგანზომილებიანი პოტენციალისა და dx_i — ორ მსოფლიო წერტილს შორის მანძილის (ინტერვალის) სკალარული ნამრავლის პროპორციული სიდიდის საშუალებით, რადგან ორი 4 — ვექტორის სკალარული ნამრავლი ინვარიანტია, ამგვარად

$$S_{12} = \text{Const} \int_a^b A_i dx_i. \quad (23,2)$$

რადგან ელექტრომაგნიტური ველი მხოლოდ დამუხტულ ნაწილაკზე მოქმედებს, ცხადია, (23,2) ქმედების ფუნქციის გამოხატულებაში მუდმივი მამრაველი (Const) უნდა შეიცავდეს ნაწილაკის მუხტს q -ს. თუ (23,2) ფუნქციაში შემავალი სიდიდეების განზომილებებსაც გავითვალისწინებთ, მაშინ ამ ფორმულაში შემავალი მუდმივი $\frac{q}{c}$ სიდიდის პროპორციული აღმოჩნდება

$\left(\text{Const} = B \cdot \frac{q}{c} \right)$; მაგრამ რადგან ჯერჯერობით მუხტის ერთეული შერჩეული არა გვაქვს, ამიტომ პროპორციულობის კოეფიციენტი შეიძლება გაუტოლოთ ერთს ($B=1$), ე. ი. გვექნება:

$$S_{12} = \frac{q}{c} \int_a^b (A_i dx_i) = \frac{q}{c} \int_a^b (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4). \quad (23,3)$$

მაშასადამე, გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში შეტანილი დამუხტული ნაწილაკის ქმედების სრულ ფუნქციას შემდეგი სახე ექნება:

$$S' = \int_a^b \left\{ -m'c^2 dt' + \frac{q}{c} (A_i dx_i) \right\}. \quad (23,4)$$

სადაც პირველი წევრი თავისუფალი ნაწილაკის ქმედების ფუნქციას (18,4) წარმოადგენს.

თუ (23,4)-ში A_i ოთხგანზომილებიანი ვექტორის მდგენელებს (23,1) მნიშვნელობებს შევიტანთ და გავითვალისწინებთ, რომ $dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, მივიღებთ:

$$S = \int_a^b \left\{ -m'c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \left(A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2 \frac{dx_2}{dt} + A_3 \frac{dx_3}{dt} \right) - q\varphi \right\} dt. \quad (23,5)$$

გეორგის მხრივ, (18,2) ფორმულის შედარება (23,5)-თან, გვაძლევს რელატივისტური მექანიკის ლაგრანჟის ფუნქციას გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებული დამუხტული ნაწილაკისათვის

$$L = -m'c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \left(A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2 \frac{dx_2}{dt} + A_3 \frac{dx_3}{dt} \right) - q\varphi. \quad (23,6)$$

ანდა

$$L = -m'c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} (A v) - q\varphi, \quad (23,7)$$

სადაც პირველი წევრი თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟის ფუნქციაა, ხოლო დანარჩენი ორი წევრი წარმოადგენს ნაწილაკისა და ელექტრომაგნიტური ველის ურთიერთქმედების ლაგრანჟიანს.

(23,6) ლაგრანჟის ფუნქციიდან ადვილად მოინახებიან ნაწილაკის განზოგადოებულ იმპულსის მდგენელები P_i :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial L}{\partial v_1} = \frac{m' v_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c} A_1 = p_{x_1} + \frac{q}{c} A_{x_1} \\ P_2 &= \frac{\partial L}{\partial v_2} = p_{x_2} + \frac{q}{c} A_{x_2} \\ P_3 &= \frac{\partial L}{\partial v_3} = p_{x_3} + \frac{q}{c} A_{x_3} \end{aligned} \right\} \quad (23,8)$$

ანდა ვექტორული სახით:

$$P = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c} A = p + \frac{q}{c} A. \quad (23,9)$$

სადაც $P = \frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ წარმოადგენს მატერიალური ნაწილაკის ჩვეულებრივ

სამგანზომილებიან იმპულსს.

იგივე (23,6) ლაგრანჟიანიდან მიიღება გარეშე ველში დამუხტული ნაწილაკის რელატივისტური ჰამილტონის ფუნქცია (სრული ენერჯია):

$$H = v \frac{\partial L}{\partial v} - L = \frac{m'c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi, \quad (23,10)$$

რომლის საშუალებითაც მიიღებთან გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის რელატივისტური განტოლებები: ...

$$\frac{dx_i}{dt'} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt'} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (23,11)$$

(23,10) ჰამილტონიანი შეიძლება აგრეთვე შემდგენიარადაც განესაზღვროთ:

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4) = \sum_{i=1}^4 p_i v_i - L. \quad (23,12)$$

თუ ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ L და p_i -ს მნიშვნელობებს (23,7), (23,8) ფორმულებიდან გვექნება:

$$H(x_i, p_i) = \frac{1}{2m'} \left(P_i - \frac{q}{c} A_i \right)^2, \quad (23,13)$$

რომელიც სამგანზომილებიან ფორმაში შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\left(\frac{H - q\varphi}{c} \right)^2 = m'^2 c^2 + \left(P - \frac{q}{c} A \right)^2.$$

საიდანაც,

$$H = \sqrt{m'^2 c^4 + \left(P - \frac{q}{c} A \right)^2} + q\varphi. \quad (23,14)$$

ნაწილაკის მცირე სიჩქარით მოძრაობის შემთხვევაში ($v \ll c$), (23,7) და (23,10) ფორმულებიდან სათანადოდ მიიღებთან კლასიკური მექანიკის ლაგრანჟისა და ჰამილტონის ფუნქციები:

$$L = \frac{m'v^2}{2} + \frac{q}{c} (A v) - q\varphi,$$

$$H = \frac{1}{2m'} \left(P - \frac{q}{c} A \right)^2 + q\varphi.$$

ამგვარად, 4 — პოტენციალი A_i ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელ ფუნქციას წარმოადგენს. ის შედის ნაწილაკისა და ველის ძირითადი ფიზიკური სიდიდეების გამოხატულებებში და განსაზღვრავს ნაწილაკის მოძრაობის მდგომარეობას და ველის თვისებებს.

§ 24. მუხტის მოძრაობა გარე ველეკტრომაგნიტურ ველში

თუ გარე ველეკტრომაგნიტურ ველში დამუხტულ ნაწილაკს შევიტანთ, ამ უქანასკნელზე ველი იმოქმედებს გარკვეული ძალით, რომლის სიდიდე დამოკიდებულია ნაწილაკის q მუხტისა და ველის დამახასიათებელი e და h დაძაბულობის ვექტორების სიდიდეებზე.

როდესაც გარე ველეკტრომაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკი შეგვაქვს, ამ უქანასკნელის ველი თან ერთვის გარე ველს და მასთან იკრიბება პარამ, თუ მუხტის სიდიდე მცირეა, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია უგულვებლევოთ გარე ველის ცვლილება, გამოწვეული მუხტის საკუთარი ველით, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ მუხტზე მოქმედებს მხოლოდ ის ველი, რომელიც მუხტის შეთანამდე არსებობდა. ამგვარად, ჯერჯერობით, როგორც ველის თეორიაში ასევე რელატივისტური მექანიკის განტოლებებში, გარე ველში შეთანხმებული მუხტის საკუთარ ველს არ გავითვალისწინებთ. შემდეგში ჩვენ მოვიხილავთ ნაწილაკის საკუთარი ველის ნაწილობრივი გათვალისწინება, რადგანაც ის გარკვეულ როლს თამაშობს, როგორც ველეკტრომაგნიტური პროცესების მიმდინარეობაში ისევე დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებებსა და ენერგია-იმპულსის მუდმივობის კანონებში.

განვიხილოთ დამუხტული ნაწილაკისა და ველეკტრომაგნიტური ველის სიტყვა. ასეთი სისტემის ლაგრანჟიანი დამოკიდებული იქნება ნაწილაკის x_i კოორდინატებზე, \dot{x}_i სიჩქავეებზე, ველის $A_i -$ პოტენციალის A_1, A_2, A_3, A_4 მდგენელებზე და მათ წარმოებულებზე $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, ე. ი.

$$L = L(x_i, \dot{x}_i, A_i, \frac{\partial A_i}{\partial x_k}). \quad (24.1)$$

(17,1) ლაგრანჟის ფუნქციის სწორად შესარჩევად უნდა გამოვიყენოთ ველეკტრომაგნიტური ველის ყველა ის დამახასიათებელი თვისებები, რომლებიც ექსპერიმენტალური მონაცემებიდან გამომდინარეობენ. მაგალითად, ცნობილია, რომ ორი ან რამოდენივე მუხტის საერთო ველის დაძაბულობა, საკმაო სიზუსტით, უდრის ცალკეული მუხტების ველეების დაძაბულობათა გეოკეტრიულ ჯამს, საიდანაც გამოჰდინარეობს, რომ ველეკტრომაგნიტური ველის კანონები უნდა გამოიხატებოდნენ წოფივი დიფერენციალური განტოლებებით. ეს პირობა ლაგრანჟის ფუნქციას გარკვეულ შეზღუდვებს უყენებს. კერძოდ, L უნდა შეიცავდეს A_i ფუნქციებსა და მისი პირველი რიგის წარმოებულებს $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, არა უმეტეს მეორე ხარისხში.

მოცულობის ერთეულისათვის განსახლვრულ ლაგრანჟიანს, — ლაგრანჟის ფუნქციის სიმკრეივე ეწოდება. აღვნიშნოთ ის L -ით; მაშინ ბთელი სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \int L dx_1 dx_2 dx_3. \quad (24,2)$$

ნალო ქმედების ფუნქციისათვის კი გვექნება:

$$S = \int_{x'_1}^{x''_1} \int_{x'_2}^{x''_2} L \left(A_i \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) dx^4 \quad (dx^4 = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4). \quad (24,3)$$

დაც ინტეგრაცია უნდა მოვახდინოთ ოთხგანზომილებიანი სივრცის მოცულობის ელემენტით.

ველის განტოლებას მისაღებად ჩვენ შეგვიძლია (24,3)-ში საინტეგრაციო ანუ უკვლელად დავტოვოთ, სამაგიეროდ მოვახდინოთ $A_i(x_i)$ ფუნქციის ვარირება ისეთნაირად, რომ $\delta A_i(x_i)$ ვარიაცია ნულის ტოლი იყოს მოცულობის ჰემომსაზღვრელი ზედაპირის ყოველ წერტილში, t' და t'' მომენტებში. (24,3) გამოსახულების ვარირება მოგვცემს:

$$\delta S = \int_{x'_1}^{x''_1} dx_4 \int_{x'_2}^{x''_2} dx^3 \left\{ \frac{\partial L}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} \delta \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right\} \quad (24,4)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ სტაციონალური უმცირესი ქმედების პრინციპში აღვნიშნავთ ტოლობებს: $\delta \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i$, მაშინ (24,4)-ში მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრაციის გზით მივიღებთ:

$$\delta S = \int_{x'_1}^{x''_1} dx_4 \int_{x'_2}^{x''_2} dx^3 \left\{ \frac{\partial L}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} \right\} \delta A_i. \quad (24,5)$$

კლასიკური ფიზიკის უმცირესი ქმედების პრინციპი მოითხოვს, რომ S ქმედების ფუნქციას, ნაწილაკის რეალური ტრაექტორიის გასწვრივ, უნდა ჰქონდეს ექსტრენალური (მინიმალური) მნიშვნელობა; ამიტომ ველის განტოლების მისაღებადაც უნდა მოვითხოვოთ, რომ ნებისმიერი δA_i ვარიაციებისათვის S საინტეგრაციო მოცულობისაგან დამოუკიდებლად ქმედების ფუნქციის ვარიაცია იყოს ნულის ტოლი $\delta S = 0$. (24,5) ინტეგრალის ნულთან ტოლობა ნებსადლებელია იხლოდ იმ შემთხვევაში როდესაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულება დროის ნებისმიერი მომენტისათვის იგიურად ნულის ტოლია.

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} = 0. \quad (24,6)$$

აღვნიშნავთ ნაწილობით დიფერენციალურ განტოლებებს ეწოდება ლაგრანჟის განტოლებები. ამ განტოლებებიდან, ლაგრანჟიანის სათანადო შერჩევით მიიღებინა როგორც მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის ისევე ველის განტოლებები.

§ 25. ალაბტრომაგნიტური ველის ტენზორი

საზოგადოდ, ყოველი სახის მოქმედება მხოლოდ მაშინ ხდება როდენობრივად განსაზღვრული. როდესაც მას მექანიკურ საზომში გამოვხატავთ. ელექტრული და მაგნიტური ველებიც თავიანთ არსებობას, ძირითადად მატერიალურ ნაწილაკებზე მექანიკური მოქმედებით ამჟღავნებენ, ამიტომ საკიროა მოვნახოთ კავშირი დანუხტულ ნაწილაკზე მოქმედ ძალასა და e და h დაძაბულობების ვექტორებს შორის. მის მისაღებად გამოვიყენოთ (23,4) ქმედების ფუნქცია.

უმცირესი ქმედების პრინციპის თანახმად:

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-m'cdS + \frac{q}{c} A_i dx_i \right) = 0. \quad (25,1)$$

თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ $ds = \sqrt{-dx^2}$, მაშინ S ქმედების ფუნქციის ვარიაციისათვის მივიღებთ:

$$\delta S = \int_a^b \left(m'c \frac{dx_i}{ds} \delta dx_i + \frac{q}{c} A_i \delta dx_i + \frac{q}{c} \delta A_i dx_i \right) = 0. \quad (25,2)$$

ვინაიდან $\delta dx_i = d\delta x_i$ და $\frac{dx_i}{ds} = \frac{v_i}{c}$, სადაც v_i — ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის მდგენელებია, ამიტომ (25,2)-ში პირველი და მეორე წევრების ნაწილობითი ინტეგრაცია მოგვცემს:

$$\int_a^b \left(-m' d v_i \delta x_i - \frac{q}{c} \delta x_i d A_i + \frac{q}{c} \delta A_i dx_i \right) + \left(m' v_i + \frac{q}{c} A_i \right) \delta x_i \Big|_a^b = 0. \quad (25,3)$$

ამ ტოლობის მეორე წევრი ნულის ტოლია; რადგან პირობის თანახმად:

$$(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0.$$

რადგან $A_i = A_i(x_i)$; ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k, \quad d A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k,$$

რომელთა ჩასია (25,3)-ში გვაძლევს:

$$\int_a^b \left(-m' d v_i \delta x_i - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k \delta x_i + \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k dx_i \right) = 0. \quad (25,4)$$

ამ უკანასკნელში შევიტანოთ $dv_i = \frac{dv_i}{dt} dt$ და $dx_i = v_i dt$, ხოლო მესამე წევრში i და k ინდექსებს ადგილები შევცვალოთ (რაც არავითარ ცვლილებას არ გამოიწვევს, რადგან შეჯამება სწარმოებს ერთდროულად i და k ინდექსებით), მივიღებთ:

$$\int_a^b \left\{ -m' \frac{dv_i}{dt'} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) v_k \right\} \delta x_i dt' = 0.$$

საიდანაც გამოდინარეობს, რომ:

$$m' \frac{dv_i}{dt'} = \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) v_k, \quad (25,5)$$

რადგან δx_i სიდიდეები ერთიმეორეზე დამოუკიდებელ ვარიაციებს წარმოადგენენ.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \quad (25,6)$$

თუ i და k ინდექსებს მიეცემთ მნიშვნელობებს 1-დან 4-მდე, მივიღებთ 16 სიდიდეთა ერთობლიობას, რომლებიც ადგენენ ოთხგანზომილებიან მეორე რანგის ტენზორს; მას ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი ეწოდება. (25,6) ფორმულის თანახმად F_{ik} — ანტისიმეტრიული ტენზორია ($F_{ik} = -F_{ki}$) და შემდეგი მატრიცის სახით წარმოიდგინება:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{31} & -F_{32} & 0 & F_{34} \\ -F_{41} & -F_{42} & -F_{43} & 0 \end{pmatrix}. \quad (25,7)$$

თუ (25,5)-ში შევიტანთ F_{ik} ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორს, მაშინ მუხტის მოძრაობის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$m' \frac{dv_i}{dt'} = \frac{q}{c} F_{ik} v_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (25,8)$$

რომლის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ნაწილაკზე მომქმედი ძალის მდგენელებს. (25,8) ძალას 4 მდგენელი აქვს და ოთხგანზომილებიანი ძალის სახელწოდებითაა ცნობილი.

მეორეს მხრივ, გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის განტოლების მისაღებად ლაგრანჟის ფუნქცია (23,7) ჩავსვათ (24,6) განტოლებაში. რადგან ჯერჯერობით ჩვენ მხოლოდ ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებები გვინტერესებს, ამიტომ დამოუკიდებელ ცვლადებად უნდა ავიღოთ ნაწილაკის x_i კოორდინატები. მიღებული განტოლებების შედარება (25,8)-ის პირველ სამ განტოლებასთან, საშუალებას მოგვცემს გამოვარკვიოთ F_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორის მდგენელების ფიზიკური შინაარსი. დავეწროთ ლაგრანჟის განტოლება სამგანზომილებიან ფორმაში:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial x_i}{\partial t}} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (25,9)$$

თუ ვისარგებლებთ (23,7) ლაგრანჟის ფუნქციით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} (A v) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (i=1, 2, 3). \quad (25,10)$$

ეს სამი სკალარული განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ვექტორული სახით

$$\text{grad } L = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{q}{c} \text{grad } (A, v) - q \text{grad } \varphi. \quad (25,11)$$

გარდა ამისა (23,7) ლაგრანჟის ფუნქციიდან აგრეთვე მიიღება:

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = ic \frac{\partial L}{\partial v_i} = ic \left(p_i + \frac{q}{c} A_i \right). \quad (25,12)$$

სადაც p_i ნაწილაკის იმპულსის მდგენელებია.

თუ გამოვიყენებთ ვექტორული ანალიზის ცნობილ ფორმულას

$$\text{grad } (A v) = (A \nabla) v + [A \text{ rot } v] + (v \nabla) A + [v \text{ rot } A].$$

და გავითვალისწინებთ, რომ ნაწილაკის სიჩქარე v , x_1, x_2, x_3 სივრცით კოორდინატებზე დამოუკიდებელია, მაშინ (25,11) დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{q}{c} (v \nabla) A + \frac{q}{c} [v, \text{rot } A] - q \text{grad } \varphi. \quad (25,13)$$

(25,11) და (25,12) გამოსახულებათა (25,9)-ში ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt} \left(p + \frac{q}{c} A \right) = \frac{q}{c} (v \nabla) A + \frac{q}{c} [v \text{ rot } A] - q \text{grad } \varphi. \quad (25,14)$$

თუ გავითვალისწინებთ რომ $A(x_1, x_2, x_3, t)$ ფუნქციის სრული წარმოებულად რჩებით

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v, \nabla) A,$$

მაშინ (25,14) განტოლება მიიღებს შემდეგ მარტივ სახეს:

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - q \text{grad } \varphi + \frac{q}{c} [v \text{ rot } A]. \quad (25,15)$$

(25,15) წარმოადგენს გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას.

ვინაიდან $\frac{dp}{dt}$ ნაწილაკზე მოქმედი ძალაა, ამიტომ (25,15) განტოლების

მარჯვენა მხარეში მდგომი სიდიდე წარმოადგენს იმ ძალას, რომლითაც გარეშე ელექტრომაგნიტური ველი მოქმედებს მუხტზე. მარჯვენა ნაწილში პირველი და მეორე წევრები ნაწილაკის სიჩქარეს არ შეიცავენ, ამიტომ ძალა

$-\frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - q \text{grad } \varphi$ იმოქმედებს აგრეთვე უძრავ მუხტზედაც. მეორე მხრივ, იგივე ძალა განისაზღვრება q მუხტისა და ელექტრული ველის დაძაბულობის e ვექტორის ნამრავლის სახით, მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$qe = -\frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - q \text{grad } \varphi.$$

საიდანაც

$$e = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (25,16)$$

მესამე $\frac{q}{c} [\nu \text{rot } A]$ წევრით განსაზღვრული ძალა დამოკიდებულია q მუხტის სიჩქარეზე და მის პერპენდიკულიარულადაა მიმართული. ის მხოლოდ მოძრავ ელექტრულ მუხტებზე მოქმედებს. მაგრამ, ცნობილია, რომ მოძრავ ელექტრულ მუხტებზე (ელექტრულ დენზე) მოქმედებს მაგნიტური ველი, ამიტომ ბუნებრივია ის მაგნიტური ველის მოქმედებას დაუკავშიროთ.

ერთეულოვან ($q=1$) მუხტზე მოქმედი ძალა $\frac{1}{c} [\nu \text{rot } A]$, მაგნიტური ველის დაძაბულობის პროპორციული უნდა იყოს. თუ პროპორციულობის კოეფიციენტად $\frac{\nu}{c}$ სიდიდეს ავიღებთ, მაშინ მაგნიტური ველის დაძაბულობის h — ვექტორი განსაზღვრული იქნება შემდეგი ტოლობით:

$$h = \text{rot } A. \quad (25,17)$$

შენაოღებული e და h დაძაბულობის ვექტორების საშუალებით (25,15) მოძრაობის განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\frac{dp}{dt} = qe + \frac{q}{c} [\nu h]. \quad (25,18)$$

სადაც

$$p = \frac{m' \nu}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}.$$

(25,18) ნოდრაობის რელატივისტური განტოლებიდან მიიღება არა რელატივისტური განტოლება, თუ $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}$ გამოსახულებას შევცვლით 1-ით.

F_{ik} ტენზორის მდგენელების e და h ვექტორებთან დასაკავშირებლად განვიხილოთ (25,8) განტოლება, $i=1$ გვადლევს

$$\frac{dp_1}{dt'} = \frac{q}{c} (F_{12} v_2 + F_{13} v_3 + F_{14} v_4).$$

თუ ამ უკანასკნელში (14,2) და (25,6)-დან შესაბამისად v_2, v_3, v_4 და F_{12}, F_{13}, F_{14} სიდიდეების მნიშვნელობებს შევიტანთ, მივიღებთ:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c} \left\{ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \frac{v_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) \frac{v_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}$$

რომელიც (11,5) (2,16) (25,16) და (25,17) ფორმულების თანახმად, შენდევს სახეზე დაიყვანება:

$$\frac{dp_1}{dt} = qe_1 + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}]_1. \quad (25,19 a)$$

ანალოგიურად $i=2$ და $i=3$ შემთხვევებში:

$$\frac{dp_2}{dt} = qe_2 + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}]_2. \quad (25,19 b)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = qe_3 + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}]_3. \quad (25,19 c)$$

(25,19 a), (25,19 b) და (25,19 c) სკალარული განტოლებები შეიძლება გავაეროთ თიანოდ ერთ ვექტორულ განტოლებაში:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{e} + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}]. \quad (25,20)$$

ეს უკანასკნელი კი ზუსტად ემთხვევა (25,18) განტოლებას.

ამგვარად, F_{ik} ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის მდგენელები e და \mathbf{h} ვექტორების მდგენელების საშუალებით გამოიხატებიან; სახელდობრ:

$$\left. \begin{aligned} F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0 \\ F_{12} = -F_{21} = h_3; \quad F_{13} = -F_{31} = -h_2; \quad F_{14} = -F_{41} = -ie_1 \\ F_{23} = -F_{32} = h_1; \quad F_{24} = -F_{42} = -ie_2; \quad F_{34} = -F_{43} = -ie_3 \end{aligned} \right\} \quad (25,21)$$

მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი შემდეგი მატრიცით წარმოიდგინება:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0, & h_3, & -h_2, & -ie_1 \\ -h_3, & 0, & h_1, & -ie_2 \\ h_2, & -h_1, & 0, & -ie_3 \\ ie_1, & ie_2, & ie_3, & 0 \end{pmatrix} \quad (25,22)$$

როგორც (25,22)-დან სჩანს, F_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორის სივრცითი მდგენელები განსაზღვრავენ მაგნიტური ველის დაძაბულობის \mathbf{h} ვექტორს, ხოლო დროითი (გეოთხე) მდგენელები წარმოსახვითია და ელექტრული ველის

დაძაბულობის e ვექტორის მდგენელებს (e_1, e_2, e_3) იძლევიან. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ F_{ix} ტენზორის ანტისიმეტრიულობის თვისებიდან გამომდინარეობს h ვექტორის ბუნება. კოორდინატთა ლერძების მიმართულებათა საწინააღმდეგოვე შეცვლის დროს მისი მდგენელები ნიშანს არ იცვლიან, თვით h ვექტორი კი ნიშანს იცვლის; ამიტომ ის აქსიალურ ვექტორს წარმოადგენს. რაც შეეხება ელექტრული ველის e ვექტორს, ის ჩვეულებრივი პოლარული ვექტორია.

(25,20) განტოლების თანახმად, ელექტრული ველი მოქმედებს როგორც უძრავ ისევე მოძრავ მუხტზე, მაგნიტური ველი კი მხოლოდ მოძრავ მუხტზე. მაგრამ ერთი სისტემის მიმართ უძრავი მუხტი მეორეს მიმართ მოძრავია, ამიტომ მაგნიტური ველის მოქმედება ფარდობით ხასიათს ატარებს. თუ ერთ რომელიმე სისტემაში, რომელშიაც მუხტი უძრავია, მაგნიტური ძალა $\frac{q}{c} [v h]$ ნულის ტოლია, ის ნულისაგან განსხვავებულია ყოველ სისტემაში, რომლის მიმართაც მუხტი მოძრაობს.

როდესაც დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარე ძალიან მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით ($v \ll c$), (25,20) მოძრაობის განტოლება გადადის შემდეგ განტოლებაში:

$$m' \frac{dv}{dt} = qe + \frac{q}{c} [v h], \quad (25,24)$$

რომელშიაც სიჩქარის მიხედვით მასის ცვლილება გათვალისწინებული არაა.

(25,20) განტოლების მარჯვენა მხარეში წარმოდგენილ $qe + \frac{q}{c} [v h]$ ძალას,

რომლითაც ელექტრომაგნიტური ველი მოქმედებს მასში შეტანილ q ელექტრულ მუხტზე, ლორენცის ძალა ეწოდება.

ადვილად შეიძლება მივიღოთ იმ მუშაობის გამოსახულება, რომელსაც ასრულებს ელექტრომაგნიტური ველი ერთ სეკუნდში q მუხტის გადაადგილების დროს. ენერჯიის მუდმივობის კანონის თანახმად, ველის მიერ შესრულებული მუშაობა ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯიის ნამატის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი.

$$\frac{d\mathcal{E}_{კინ}}{dt} = q \left\{ \left(v, e + \frac{1}{c} [v h] \right) \right\} = q(v, e). \quad (25,25)$$

მაშასადამე, ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტის გადაადგილების დროს მუშაობას მხოლოდ ელექტრული ველი ასრულებს. მაგნიტური ველი დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარის სიდიდეს არა ცვლის, მისი მოქმედება მხოლოდ სიჩქარის მიმართულების შეცვლას იწვევს.

(25,25) ფორმულის გამოყენების გზით შეიძლება მოენახოთ გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი მუხტის აჩქარება. მართლაც (19,12) და (19,17) ფორმულების გამოყენების გზით ვლებულობთ:

$$\frac{dp}{dt} = qe + \frac{q}{c} [v h] = \frac{v}{c^2} \frac{d\mathcal{E}_{\text{ვ.გ.}}}{dt} + \frac{\mathcal{E}_{\text{ვ.გ.}}}{c^2} \frac{dv}{dt}, \quad (25,26)$$

სადაც აგრეთვე გათვალისწინებულია, რომ $\frac{d\mathcal{E}_{\text{ვ.გ.}}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ და $d\mathcal{E}_{\text{ვ.გ.}} = (v dp)$.

(25,26) განტოლებაში (25,25)-დან $\frac{d\mathcal{E}_{\text{ვ.გ.}}}{dt}$ სიღრმის შეტანის შედეგად გვექნება:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ e + \frac{1}{c} [v h] - \frac{1}{c^2} v(e v) \right\}. \quad (25,27)$$

§ 26. დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა ერთგვაროვან ელექტრულ ველში

წინა პარაგრაფში მიღებული (25,18) განტოლება განოვიყენოთ გარეშე ერთგვაროვან მუდმივ ელექტრულ ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის შესასწავლად. ნაწილაკის მასა აღვნიშნოთ m -ით, მუხტი q -ით. რადგან $e = C_{\text{ენ.ს.}}$, ანიტომ საკმარისია განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა მის v სიჩქარეზე და ველის e ვექტორზე გამავალ სიბრტყეში.

თუ ამ სიბრტყეზე ავიღებთ x_1 და x_2 კოორდინატთა ღერძებს ისე, რომ x_1 ღერძი ემთხვეოდეს e ვექტორის მიმართულებას, მაშინ მუხტის მოძრაობის (25,18) განტოლება მოგვეცემს:

$$\frac{dp_1}{dt} = qe_1; \quad \frac{dp_2}{dt} = 0. \quad (26,1)$$

თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობებს: $v = v_0$ და $x_1 = x_2 = 0$, როცა $t = 0$, მაშინ (26,1) განტოლებათა ინტეგრაციის შედეგად მივიღებთ

$$p_1 = qe_1 t; \quad p_2 = p_0. \quad (26,2)$$

ნაწილაკის სრული ენერჯიის (19,16) გამოსახულებაში (26,2) სიდიდეების ჩასმით მივიღებთ:

$$\mathcal{E} = c \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2 + (qet)^2}.$$

ნაწილაკის ტრეკტორიის მოსანახავად გამოვიყენოთ (19,15) ტოლობა, რაც მოგვეცემს:

$$v_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{p_1 c^2}{\mathcal{E}} = \frac{qc^2 et}{\mathcal{E}}.$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრაცია ზემოდ მოყვანილ საწყის პირობებში გვაძლევს:

$$x_1 = \frac{c}{qe} \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2 + (qet)^2}. \quad (26,3)$$

x_2 კოორდინატა კი განისაზღვრება განტოლებით:

$$\frac{dx_2}{dt} = v_{x_2} = \frac{v_0}{m'} = \frac{\rho_0 c^2}{c \sqrt{m'^2 c^2 + \rho_0^2}}.$$

საიდანაც

$$x_2 = \frac{\rho_0 c}{qe} \arcsin \frac{qe t}{\sqrt{m'^2 c^2 + \rho_0^2}}. \quad (26,4)$$

(26,3) და (26,4) განტოლებებიდან t -ს გამორიცხვა გვაძლევს დამუხტული ნაწილაკის ტრაექტორიის განტოლებას:

$$x_1 = \frac{c \sqrt{m'^2 c^2 + \rho_0^2}}{qe} \operatorname{cosh} \frac{qe}{\rho_0 c} x_2. \quad (26,5)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ჯაქვწირის განტოლებას. ამგვარად ერთგვაროვან ელექტრულ ველში მუხტი მოძრაობს ჯაქვწირზე. როდესაც ნაწილაკის სიჩქარე ძალიან მცირეა ($v \ll c$), მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\rho_0 = m' v_0; \quad \sqrt{m'^2 c^2 + \rho_0^2} \approx m' c, \quad \text{ხოლო} \quad \operatorname{cosh} \frac{qe}{m' v_0 c} x_2 \approx \left(\frac{qe x_2}{m' v_0 c} \right)^2;$$

აჩიონ (26,5) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x_1 = \frac{qe}{2m' v_0} x_2^2. \quad (26,6)$$

ეს კი პარაბოლის განტოლებაა. მაშასადამე, ერთგვაროვან ელექტრულ ველში, მცირე სიჩქარით მოძრავი მუხტი მოძრაობს პარაბოლზე.

§ 27. მუხტის მოძრაობა ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში

გადავიდეთ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის შესწავლაზე. (25,20) მოძრაობის განტოლებას, ამ შემთხვევაში, შემდეგი სახე ექნება:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{q}{c} [v h]. \quad (27,1)$$

გამოთვლების გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ h მიმართულია x_3 ღერძის გასწვრივ $\xi(O, O_3, h)$; ამ შემთხვევაში (27,1)-დან ვლევულობთ მოძრაობის შემდეგ განტოლებებს:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{q}{c} [v h]_1 = \frac{q}{c} h \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{q}{c} [v h]_2 = -\frac{q}{c} h \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} &= \frac{q}{c} [v h]_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27,2)$$

თუ (19,13) დამოკიდებულებას გამოვიყენებთ, მაშინ (27,2) განტოლებები შეიძლება გადმოვწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{hqc}{\mathfrak{L}} \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\frac{hqc}{\mathfrak{L}} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27,3)$$

(27.3)-ის შესამე განტოლება გვიჩვენებს, რომ h მაგნიტური ველი \vec{x}_3 ღერძის (h ვექტორის) გასწვრივ მუხტის მოძრაობაზე არავითარ გავლენას არ ახდენს.

x_1, x_2 სიბრტყეში მუხტის მოძრაობის შესასწავლად შემდეგნაირად მოვიქცეთ: (27,3)-ს პირველი ორი განტოლების ინტეგრაციის ჩასატარებლად შემოვიღოთ კომპლექსური ცვლადი $\xi = x_1 + ix_2$ და შევისწავლოთ მოძრაობა x_1, ix_2 კომპლექსურ სიბრტყეში.

თუ მეორე განტოლებას გავამრავლებთ i -ზე და პირველთან შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -i \frac{qch}{\mathfrak{L}} \frac{d\xi}{dt} = -i\omega \frac{d\xi}{dt}. \quad (27,4)$$

სადაც

$$\omega = \frac{qch}{\mathfrak{L}}. \quad (27,5)$$

თუ საწყის პირობებად ავიღებთ: $(\xi)_{t=0} = \xi_0$ და $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=0} = \frac{d\xi_0}{dt} = \dot{\xi}_0$, მაშინ (27,4) განტოლების ამოხსნა შემდეგი სახით იქნება განსაზღვრული:

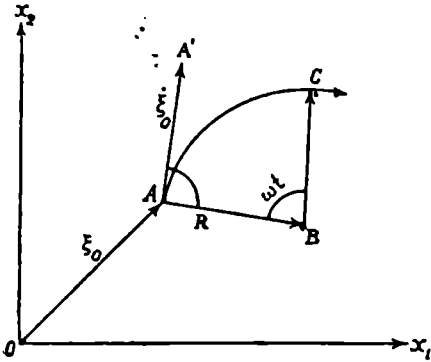
$$\xi(t) = \xi_0 + \frac{\dot{\xi}_0}{i\omega} (1 - e^{-i\omega t}). \quad (27,6)$$

ამგვარად, x_1, ix_2 კომპლექსურ სიბრტყეზე, $\xi(t)$ ვექტორი სამი — $\xi_0, \frac{\dot{\xi}_0}{i\omega}$ და $-\frac{\dot{\xi}_0}{i\omega} e^{-i\omega t}$ კომპლექსური ვექტორის ჯამით განისაზღვრება.

თუ $h = \text{Const}$ და $\mathfrak{L} = \frac{m'c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{Const}$, მაშინ ω სიდიდეც მუდ-

მივი იქნება და სანივე $\xi_0 = OA, \frac{\dot{\xi}_0}{i\omega} = AB$ და $-\frac{\dot{\xi}_0}{i\omega} e^{-i\omega t} = BC$ — კომპლექსური ვექტორი, მოძრაობის მთელი პერიოდის განმავლობაში, აგრეთვე მუდმი-

ვებოდარჩებთან. ცხადია, რომ $|AB| = |BC|$, მაგრამ BC პერიოდულად იცვლის თავის მიმართულებას, ის ბრუნავს აკუთხური სიჩქარით, B წერტილის ირგვლივ; ამიტომ მისი ბოლო წერტილი შემოსწვრს $|BC| = |R|$ რადიუსიან წრეხაზს (ნახ. 17).



ნახ. 17.

x_1Ox_2 სიბრტყეში, წრეხაზზე, რომლის რადიუსია $R = AB = \left| \frac{v_0}{i\omega} \right| = \frac{c v_0}{qch}$, ხოლო თუ მისი საწყისი სიჩქარე $v_{0x_3} \neq 0$, მაშინ ის იმოდრავებს რა $\omega = c \sin \alpha$ სიჩქარით, დაძაბულობის პერპენდიკულარულ x_1Ox_2 სიბრტყეში, იმავე დროს იმოდრავებს x_3 ღერძის გასწვრივაც v_{0x_3} მუდმივი სიჩქარით ისე, რომ ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია იქნება ხრახნწირი.

ნაწილაკის მცირე სიჩქარეებით ($v \ll c$) მოძრაობის შემთხვევაში $\mathcal{L} = m'c^2$, ამიტომ (27,5) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\omega = \frac{q\hbar}{m'c} \tag{27,7}$$

ზემოდმოყვანილი თეორიის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ, მუდმივი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის გავლენით გამოწვეული, ატომების ორბიტალური ელექტრონების ბრუნვის სიხშირის ცვლილება. დაეუშვათ რომ წყალბადის ატომის გულის ირგვლივ ელექტრონი ბრუნავს x_1Ox_2 სიბრტყეში, ω_0 კუთხური სიჩქარით. მისი მოძრაობის განტოლებაა

$$m' \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

რომლის ამოხსნას წარმოადგენს $x = x_0 \sin \omega_0 t$ ფუნქცია, სადაც

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{k}{m'}}.$$

უკანასკნელში ფესვის წინ ორი (\pm) ნიშანი იმის მაჩვენებელია, რომ ატომში ელექტრონი გულის ირგვლივ შეიძლება ორი ერთმეორის საწინააღმდეგო მიმართულებით — საათის ისრის მოძრაობის, ანდა მის საწინააღმდეგოდ ბრუნავდეს.

თუ ასეთ ატომებს მოვითავსებთ ორბიტის სიბრტყის პერპენდიკულარულ მაგნიტურ ველში, მაშინ ყოველ ელექტრონზე, გარდა ქვაზიდრეკადი kx ძალისა, დამატებით იმოქმედებს მაგნიტური ძალა $\frac{q}{c} [v h]$; ამიტომ ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$\frac{dp}{dt} = -kx + \frac{q}{c} [v h]. \quad (27,8)$$

$$p = \frac{\xi v}{c^2}$$

ამ უკანასკნელი ვექტორული განტოლების x_1 , x_2 და x_3 კოორდინატა ღერძებზე დაგეგმილების შედეგად მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -kx_1 + \frac{qh}{c} \frac{dx_2}{dt} \quad \text{ანდა} \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k \frac{c^2}{\mathcal{E}} x_1 + \frac{qh}{c} \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k \frac{c^2}{\mathcal{E}} x_2 - \frac{qh}{c} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27,9)$$

(27,9) სისტემის მეორე განტოლების i -ზე გადამრავლებისა და პირველთან შეკრების გზით მივიღებთ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2 \xi = -i \frac{qhc}{\mathcal{E}} \frac{d\xi}{dt}. \quad (27,10)$$

სადაც

$$\xi = x_1 + ix_2.$$

უკანასკნელი განტოლების ამოხსნა ვეძებთ შემდეგი სახით: $\xi = Ae^{i\omega t}$, რომლის (27,10)-ში ჩასმის შედეგად გვექნება:

$$\omega^2 + \omega_0^2 + i \frac{qhc}{\mathcal{E}} \omega = 0;$$

საიდანაც

$$\omega = i \frac{qhc}{2\mathcal{E}} \pm i \sqrt{\omega_0^2 + \frac{q^2 h^2 c^2}{4\mathcal{E}^2}}.$$

მიღებული გამოსახულება, სუსტი მაგნიტური ველების შემთხვევაში, $\left(\frac{q^2 h^2 c^2}{4\mathcal{E}^2} \ll \omega_0^2 \right)$, რასაც ყოველთვის ადგილი აქვს პრაქტიკულად მისალწვევი მაგ-

ნიტური ველებისათვის) გვაძლევს:

$$\omega = i \frac{qhc}{2\mathcal{E}} \pm i\omega_0. \quad (27,11)$$

რადგან ატომის ელექტრონების ორბიტალური მოძრაობის სიჩქარეები c -თან შედარებით საკმაოდ მცირე არიან, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ: $\mathcal{L} = mv^2$. მაშინ (27,11) სიხშირისათვის მივიღებთ ორ მნიშვნელობას:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\omega_0 + \omega_L \\ \omega_2 &= +\omega_0 + \omega_L \end{aligned} \right\} \quad (27,12)$$

სადაც $\omega_L = \frac{qh}{2m'c}$ დამატებით სიხშირეს, გამოწვეულს გარეშე მაგნიტური ველის მოქმედებით, ლარმორის სიხშირე ეწოდება. ეს მოვლენა პირველად ზეემანის მიერ იყო აღმოჩენილი, ხოლო მისი თეორიული ახსნა მოგვცა ლარმორმა.

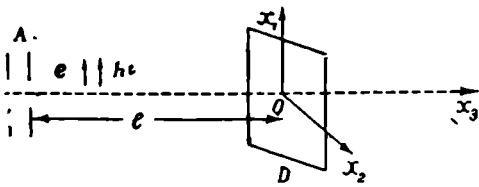
(27,12)-დან გამომდინარეობს, რომ ორბიტის პერპენდიკულიარულად მიმართულ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში h , ატომგულის ირგვლივ ელექტრონის ბრუნვის ω_0 კუთხურ სიჩქარეს ემატება ω_L საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მბრუნავი ელექტრონისათვის, და აკლდება ω_L საწინააღმდეგოდ მბრუნავი ელექტრონისათვის.

ჩვენ ზემოდ აღვნიშნეთ, რომ მაგნიტური ველის ქმედება არ იწვევს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას, ასევე უცვლელი რჩება იმ წრის რადიუსი, რომლის წრეხაზზედაც მოძრაობს მუხტი. ბუნებრივია წამოიჭრება კითხვა, აღნიშნულ პირობებში, რა იწვევს ბრუნვის კუთხური სიჩქარის ცვლილებას. ამ საკითხს ჩვენ უფრო გვიან ისევ დაუბრუნდებით, სადაც გამოვარკვევთ კუთხური სიჩქარის ცვლილების მიზეზს.

§ 28. მუხტის მოძრაობა ერთგვაროვან ელემენტრულ და მაგნიტურ ველეებში

ერთგვაროვანი ელექტრული და მაგნიტური ველების ერთდროული მოქმედებით მუხტის მოძრაობის შესასწავლად დაუბრუნდეთ ისევ (25,20) განტოლებას. თუ შემოვიხაზღვრებით ნაწილაკების მცირე სიჩქარეებით ($v \ll c$)

მოძრაობის შემთხვევებით, მაშინ (25,20) განტოლების ნაცვლად შეიძლება გამოვიყენოთ (25,24). ნაწილაკის v_0 საწყისი სიჩქარის გასწვრივ მიემართოთ x_2 ღერძი, მაშინ x_1 და x_2 ღერძები მოთავსებული იქნებიან x_3 ღერძის მართობ სიბრტყეში.



ნახ. 18.

A დიაფრაგმიდან l მანძილზე $x_1 O x_2$ სიბრტყეში მოვითავსოთ ფლუორესცენციკრებადი D ეკრანი, რომლის მარცხენა ზედაპირი დაფარულია გოგირდოვანი ცინკით.

როდესაც ელექტრული და მაგნიტური ველები არა გვაქვს, მაშინ კათოდური სხივები D ეკრანზე დაეცემიან O წერტილში, რის შედეგადაც ამ წერტილში, თითოეული დამუხტული ნაწილაკის დაცემის დროს, მივიღებთ განათებას, რომელიც შეიძლება შემჩნეული იქნეს მიკროსკოპის საშუალებით. თუ კი x_1 ღერძის მიმართულებით ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს შევქმნით ($e(e, 0, 0)$, $h(h, 0, 0)$), მაშინ დადებით მუხტს ელექტრული ველი გადახრის x_1 ღერძის გასწვრივ, ხოლო მაგნიტური ველი კი გამოიწვევს მის გადაადგილებას x_2 ღერძის მიმართულებით. მათი ერთდროული მოქმედების შედეგად, დამუხტული ნაწილაკი გადაიხრება როგორც x_1 ისევე x_2 ღერძის გასწვრივ. ჩვენი მიზანია D ეკრანზე მოენახოთ იმ წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომლებშიაც დაეცემიან კათოდური სხივები; ამისათვის გამოვიყენოთ მუხტის მოძრაობის (25,24) განტოლება, გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} m' \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= qe \\ m' \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{qh}{c} \frac{dx_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (28,1)$$

თუ A დიაფრაგმის ხვრელში მუხტის გავლის მომენტს საწყის მომენტად ავირჩევთ, მაშინ გვექნება:

$$x_1 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{და} \quad \frac{dx_2}{dt} = 0; \quad \text{როცა} \quad t = 0.$$

ამ საწყისი პირობების შესაბამისი, (28,1) განტოლებების ამოხსნები იქნებიან:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{e t^2}{c^2} \\ x_2 &= \frac{1}{2} \frac{q}{m c} \frac{h e t^2}{c} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{e t^2}{c^2} \\ \frac{1}{2} \frac{q}{m c} \frac{h e t^2}{c} \end{aligned} \right\} \quad (28,2)$$

(28,1)-ს მეორე განტოლების ამოხსნის დროს ჩვენ დაეუშვით, რომ $v_{x_2} \simeq v_0$, რაც იმითაა გამართლებული, რომ x_1 და x_2 ღერძების გასწვრივ გადახრები მცირეა. (28,2) განტოლებებიდან პირველის მეორეზე გაყოფით მიიღება:

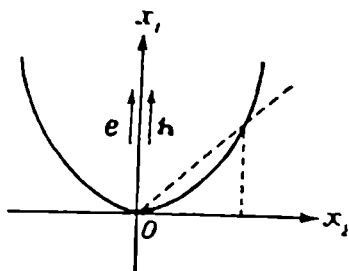
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h v}{e c} \quad (28,3)$$

და

$$\frac{x_1}{x_2} = 2 \frac{m}{q} \frac{c^2 e}{h^2 v^2} \quad (28,4)$$

(28,3)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ ყველა დამუხტული ნაწილაკების სიჩქარეები ერთი და იგივეა ($v = C \sin \alpha$) ხოლო შეფარდება $\frac{m}{q}$ ნებისმიერი, მაშინ

D ეკრანზე მათი მოხვედრის წერტილების გეომეტრიული ადგილი იქნება კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი სწორი ხაზი (ნახ. 19). (ნაჩვენებია პუნქტირით), ხოლო თუ ისინი მოძრაობენ სხვადასხვა სიჩქარეებით, მაგრამ სათანადოდ მათი მასების მუხტებთან შეფარდებანი მუდმივია,



ნახ. 19.

$\frac{m}{q} = \text{Const}$, ეკრანზე მიიღება პარაბოლა

რომლის პარამეტრი, (28,4) თანახმად

დამოკიდებულია $\frac{m}{q}$ შეფარდებაზე. ეს

შედეგები დადასტურებული იქნა ექსპერიმენტალურად.

მცირე სიჩქარეებით მოძრავი კათოდური სხივებისათვის, რომლებსაც,

ჯგუფ-ჯგუფად, $\frac{m}{q}$ სიდიდის მუდმივი მაგრამ ერთი მეორისაგან განსხვავებული მნიშვნელობები აქვთ, ეკრანზე ცდები გვაძლევს პარაბოლების ოჯახს. პირველად, პარაბოლების შესწავლის გზით, D ეკრანზე მიღებული პარაბოლის რომელიმე წერტილის x_1 და x_2 კოორდინატების უშუალო გაზომვით, დამუხტული ნაწილაკებისათვის გამორკვეული იქნა $\frac{m}{q}$ შეფარდების რიცხობრივი მნიშვნელობა. დიდი სიჩქარეების ნაწილაკების შემთხვევაში ადგილი აქვს პარაბოლის დამახინჯებას, განსაკუთრებით კი წვეროსთან და მის მახლობლობაში.

ანლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც e და h ვექტორები მდებარეობენ $x_2 O x_3$ სიბრტყეში. თუ h -ს მივმართავთ x_3 ღერძის გასწვრივ, მაშინ (25,24) ვექტორული განტოლება შემდეგ სამ სკალარულ განტოლებად დაიშლება:

$$\left. \begin{aligned} m' \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{qh}{c} \frac{dx_2}{dt} \\ m' \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= qe_2 - \frac{qh}{c} \frac{dx_1}{dt} \\ m' \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= qe_3 \end{aligned} \right\} \quad (28,5)$$

მესამე განტოლების ინტეგრაციით ვღებულობთ:

$$x_3 = \frac{q}{2m'} e_3 t^2 + v_{0e_3} t. \quad (28,6)$$

მეორის i -ზე გამრავლებისა და პირველთან შეკრების შედეგად გვექნება:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + i\omega \frac{d\xi}{dt} = i \frac{q}{m'} e_2. \quad (28,7)$$

სადაც

$$\xi = x_1 + ix_2, \text{ და } \omega = \frac{qh}{m'c}.$$

მიღებული არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, როგორც ცნობილია, ერთგვაროვანის ზოგადისა და არაერთგვაროვანის კერძო ამონახსნების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + i \frac{dx_2}{dt} = Ae^{-i\omega t} + \frac{ce_2}{h}. \quad (28,8)$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში A მუდმივი საზოგადოდ კონპლექსურია და შეიძლება შემდეგი სახით განვსაზღვროთ: $A = Be^{-i\alpha}$, მაშინ (28,8)-დან მიიღება:

$$\frac{dx_1}{dt} + i \frac{dx_2}{dt} = B \{ \cos(\alpha + \omega t) - i \sin(\alpha + \omega t) \} + \frac{ce_2}{h}.$$

თუ ამ განტოლების ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს ცალკე-ცალკე ერთმანეთს გაუტოლებთ მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A \cos \omega t + \frac{ce_2}{h} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -A \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (28,9)$$

როგორც ვხედავთ, ნაწილაკის სიჩქარე დროის პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს. რადგან $\sin \omega t = \cos \omega t = 0$, სიჩქარის მდგენელების საშუალო მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ:

$$\overline{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{ce_2}{h} \text{ და } \overline{\frac{dx_2}{dt}} = 0. \quad (28,10)$$

ნაწილაკის სიჩქარის x_2 მდგენელის საშუალო მნიშვნელობის ნულთან ტოლობა იმის მაჩვენებელია, რომ ნაწილაკი მოძრაობს e და h ვექტორების პერპენდიკულარული (ჩვენს შემთხვევაში x_1 ღერძის) მიმართულებით, დრეიფის სახით.

თუ მივიღებთ, რომ $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$, როცა $t = 0$, მაშინ (28,9) განტოლებათა ინტეგრაცია მოგვცემს:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{\omega} \sin \omega t + \frac{ce_2}{h} t \\ x_2 &= \frac{A}{\omega} (\cos \omega t - 1). \end{aligned} \right\} \quad (28,11)$$

ეს უკანასკნელი განტოლებები გვაძლევენ ეგრეთწოდებულ ტროხოიდებს, რომელთა სახე დამოკიდებულია A მუდმივისა და $\frac{ce_2}{h}$ პარამეტრის ფარდობაზე. იმ შემთხვევაში, როდესაც $A = -\frac{ce_2}{h}$, მაშინ ტროხოიდის გვემილი $x_1, O x_2$ სიბრტყეზე მოგვცემს ციკლოიდს; რომლის განტოლებებია:

$$x_1 = \frac{ce_2}{\omega h} (\omega t - \sin \omega t),$$

$$x_2 = \frac{ce_2}{\omega h} (1 - \cos \omega t).$$

განსაკუთრებით დიდ ინტერესს წარმოადგენს გარეშე ველში დამუხტული ნაწილაკების მოძრაობის შესწავლა კოსმიური სხივების ფიზიკაში. სამყაროს შორეული ნაწილებიდან წამოსული დიდი ენერჯიის დამუხტული ნაწილაკები განიცდიან ვარსკვლავებისა და პლანეტების მანეტიური ველების მოქმედებას. ამ ველების არაერთგვაროვნობის გამო, ნაწილაკების ტრაექტორიები მეტად რთული სახის მრუდებს წარმოადგენენ. მაგალითად, დედამიწის არაერთგვაროვან მაგნეტიურ ველში შემოქრილი დამუხტული ნაწილაკი, თავისი დრეიფის დროს, ათასობით მარჯუეს შემოსწერს. ეს საკითხები იმდენად რთულია, რომ ისინი სპეციალურ განხილვას მოითხოვენ. ამიტომ მათ დეტალურ შესწავლას აქ ჩვენ არ შეუდგებით.

§ 29. ლორენცის გარდაქმნები ელემენტარმაგნიტური ველის e და h ვექტორებისათვის

ახლა ჩვენს ამოცანას შეადგენს K' სისტემაში განსაზღვრული ელექტრომაგნეტიური ველის F'_{ik} ტენზორის მდგენელების საშუალებით გამოვხატოთ K სისტემაში აღებული F_{ik} ტენზორის მდგენელები. ამისათვის გამოვიყენოთ ოთხგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორის მდგენელების გარდაქმნის კანონი (16,13).

თუ ვისარგებლებთ დრო და სივრცის x_i კოორდინატების გარდაქმნის ლორენცის (10,22) ფორმულებით, ნებისმიერი ოთხგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორის T_{ik} მდგენელებისათვის მივიღებთ შემდეგი სახის გარდაქმნის ფორმულებს:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} T'_{11} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} T'_{21} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} T'_{31} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} T'_{41} + \\ &+ \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} T'_{12} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} T'_{13} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} T'_{14} + \dots = \\ &= \frac{T'_{11} - i \frac{v}{c} (T'_{14} + T'_{41}) - \frac{v^2}{c^2} T'_{44}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

ანალოგიური გზით დანარჩენი მდგენელებისათვის მივიღებთ:

$$T'_{11} = \frac{T'_{11} - i \frac{v}{c} (T'_{14} + T'_{41}) - \frac{v^2}{c^2} T'_{44}}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$T'_{44} = \frac{T'_{44} + i \frac{v}{c} (T'_{14} + T'_{41}) - \frac{v^2}{c^2} T'_{11}}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$T'_{14} = \frac{T'_{14} - i \frac{v}{c} (T'_{44} - T'_{11}) + \frac{v^2}{c^2} T'_{41}}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$T'_{41} = \frac{T'_{41} + i \frac{v}{c} (T'_{11} - T'_{44}) + \frac{v^2}{c^2} T'_{14}}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

;

$$T'_{12} = \frac{T'_{12} - i \frac{v}{c} T'_{42}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$T'_{21} = \frac{T'_{21} - i \frac{v}{c} T'_{24}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(29,1)

$$T'_{13} = \frac{T'_{13} - i \frac{v}{c} T'_{43}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$T'_{31} = \frac{T'_{31} - i \frac{v}{c} T'_{34}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$T'_{24} = \frac{T'_{24} + i \frac{v}{c} T'_{44}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$T'_{42} = \frac{T'_{42} + i \frac{v}{c} T'_{12}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$T'_{34} = \frac{T'_{34} + i \frac{v}{c} T'_{44}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$T'_{43} = \frac{T'_{43} + i \frac{v}{c} T'_{13}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$T'_{22} = T'_{22},$$

$$T'_{23} = T'_{23}$$

$$T'_{33} = T'_{33},$$

$$T'_{32} = T'_{32}$$

ელექტრომაგნიტური ველის ანტისიმეტრიული F_{ik} ტენზორისათვის ($F_{ii}=0$, $F_{ik} = -F_{ki}$), (29,1) თანათარღობები მნიშვნელოვნად მარტივდება;

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= \frac{F'_{12} + i \frac{v}{c} F'_{24}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & F_{14} &= F'_{14} \\ F_{13} &= \frac{F'_{13} + i \frac{v}{c} F'_{34}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & F_{24} &= \frac{F'_{24} - i \frac{v}{c} F'_{12}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ F_{23} &= F'_{23}, & F_{34} &= \frac{F'_{34} - i \frac{v}{c} F'_{13}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} (29,2)$$

თუ ახლა F_{ik} ტენზორის მდგენელებს, (25,21) ფორმულების მიხედვით, e და h ვექტორების მდგენელებით გამოვხატავთ, მაშინ გვექნება:

$$e_1 = e'_1, \quad e_2 = \frac{e'_2 + \frac{v}{c} h'_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad e_3 = \frac{e'_3 - \frac{v}{c} h'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (29,3)$$

$$h_1 = h'_1, \quad h_2 = \frac{h'_2 - \frac{v}{c} e'_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad h_3 = \frac{h'_3 + \frac{v}{c} e'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (29,4)$$

(29,3) და (29,4) ფორმულებით წარმოდგენილი ლორენცის გარდაქმნები გვიჩვენებენ, რომ, ისევე როგორც მრავალი სხვა ფიზიკური სიდიდე, e და h ფარდობით სიდიდეებს წარმოადგენენ. ისინი სხვადასხვა სისტემაში ერთიმეორისაგან მნიშვნელოვნად განსხვავებული არიან. უფრო მეტიც, ელექტრული ან მაგნიტური ველი შესაძლებელია ერთ სისტემაში არ გვექონდეს იმ დროს როდესაც მეორე სისტემაში ნულისაგან განსხვავებულია. იმავე (29,3), (29,4) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობის მიმართულებით ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობათა მდგენელები ($e_{||}$, $h_{||}$) უცვლელი რჩებიან. e და h ვექტორები დავშალოთ K' სისტემის მოძრაობის გასწვრივ $e_{||}$, $h_{||}$ და პერპენდიკულიარულ e_{\perp} , h_{\perp} მდგენელებად. მოძრაობის პარალელური მდგენელებისათვის გვაქვს: $e_{||} = e'_{||}$, $h_{||} = h'_{||}$.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $[v h]_{||} = 0$ და $[v e]_{||} = 0$, მაშინ, იმავე (29,3) და (29,4) ფორმულებიდან მიიღებიან:

$$e_{\perp} = \frac{e'_{\perp} - \frac{1}{c} [v h']_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{და} \quad e_{\parallel} = e'_{\parallel} - \frac{1}{c} [v h']_{\parallel}. \quad (29,5)$$

ანალოგიურად, h ვექტორის h_{\parallel} და h_{\perp} მდგენელებად დაშლის შედეგად მივიღებთ:

$$h_{\perp} = \frac{h'_{\perp} + \frac{1}{c} [v e']_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{და} \quad h_{\parallel} = h'_{\parallel} + \frac{1}{c} [v e']_{\parallel}. \quad (29,6)$$

მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში ($v \ll c$) (29,5) და (29,6) ფორმულები გვაძლევს:

$$\left. \begin{aligned} e &= e' - \frac{1}{c} [v h'] \\ h &= h' + \frac{1}{c} [v e'] \end{aligned} \right\} \quad (29,7)$$

ისევე როგორც (20,22)-ში, K სისტემიდან K' -ზე გადასვლის შებრუნებული ფორმულები მიიღებიან (29,5) და (29,6)-ში v სიჩქარის ნიშნის საწინააღმდეგოზე ($-v$ -ზე) შეცვლის გზით.

(29,7)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ K' სისტემაში მაგნიტური ველია გვაქვს, $h' = 0$, მაშინ K სისტემაში

$$h = \frac{1}{c} [v e'] = \frac{1}{c} [v e]. \quad (29,8)$$

აგრეთვე, თუ K' სისტემაში $e' = 0$, მაშინ K სისტემაში

$$e = -\frac{1}{c} [v h'] = -\frac{1}{c} [v h]. \quad (29,9)$$

როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში K სისტემაში ელექტრული და მაგნიტური ველების e და h ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული არიან.

(29,7)-დანვე მიიღება აგრეთვე ლორენცის ძალის (25,24) გამოხატულება. მართლაც, K' სისტემაში q მუხტზე მოქმედი ძალა $q \cdot e'$ ნამრავლის ტოლია, რაც (29,7) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს:

$$m' \frac{dv}{dt} = qe' = q \left\{ e + \frac{1}{c} [v h] \right\}. \quad (29,10)$$

ეს უკანასკნელი, მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში ($v \ll c$) ემთხვევა (25,24)-ს და წარმოადგენს ყველა იმ ძალების ტოლქმედს, რომლებითაც q მუხტზე მოქმედებენ ელექტრული და მაგნიტური ველები.

იგივე (29,7)-დან იმ დასკვნაჲდ მივიღივართ, რომ (29,10) ლორენცის ძალის მაგნიტური ანალოგი უნდა იყოს ძალა $h' = h - \frac{1}{c} [v e]$, რომელიც ნაკმეღებს ერთეულოვან დადებით მაგნიტურ პოლუსზე.

§ 30. ელექტრომაგნიტური ველის ინვარიანტები

ადრე ჩვენ მივიღეთ მოძრაობის განტოლებები და შევისწავლეთ როგორც თავისუფალი ისევე გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში შეტანილი დამოუკიდებელი ნაწილაკის მოძრაობა, მაგრამ არაფერი არ გვითქვამს თვით ველის კანონების შესახებ. ჩვენ დავკმაყოფილით მხოლოდ ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეების თვისებებისა და გარდაქმნის კანონების გამორკვევით: ამიტომ მორიგ ამოცანას შეადგენს ველის კანონების ჩამოყალიბება.

ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებათა მისაღებად ჩვენ დაგვირდება ველის ინვარიანტების მონახვა. რომელთა საშუალებითაც უნდა შევადგინოთ ქედების ფუნქცია. ამ მიზნით ელექტრომაგნიტური ველის F_{ik} ტენზორის მდგენელებიდან შევადგინოთ ინვარიანტული სიდიდეები. ამ ინვარიანტების ნოსაქებნად გამოვიყენოთ მეორე რანგის ტენზორის მთავარ ღერძებზე დაყვანის ცნობილი მეთოდი.

ავიღოთ სინეტრიული ტენზორი T_{ik} , გაავარავლოთ ის რაიმე A_i 4-ვექტორზე. მივიღებთ ახალ B_i 4-ვექტორს, რომელსაც, საზოგადოდ, პირველისაგან განსხვავებული სიდიდე და მიმართულება ექნება. ჩვენ გვინდა მივიღოთ ისეთი ახალი ვექტორი, რომლის მიმართულება A_i ვექტორის მიმართულებას ენთხვევა, სიგრძე კი შესაძლებელია შეცვლილი იყოს რაიმე λ — რიცხვჯერ, ე. ი.

$$T_{ik} A_i = \lambda A_k. \quad (30,1)$$

სადაც λ რაღაც სკალარია.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველთვის ადგილი აქვს ტოლობას: $\lambda \cdot A_i = \delta_{ik} \lambda A_i$, მაშინ (30,1) შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$(T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_i = 0. \quad (30,2)$$

ეს უქანასკნელი წრფივი ერთგვაროვანი სისტემაა. როგორც აღგებრიდან ცნობილია, იმისათვის, რომ მას ნულისაგან განსხვავებული ამოხსნა ჰქონდეს, აუცილებელია მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულის ტოლი იყოს, ე. ი.

$$\| T_{ik} - \lambda \delta_{ik} \| = 0. \quad (30,3)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ λ -ს ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც (30,3) პირობას აკმაყოფილებს, A_i ვექტორს შეუნარჩუნებს უცვლელად თავის მიმართულებას.

გამოვიყენოთ (30,3) პირობა ელექტრომაგნიტური ველის ოთხგანზომილებიანი ანტისიმეტრიული F_{ik} ტენზორისათვის. (25,21) თანახმად გვექნება:

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1 & h_3 & -h_2 & -ie_1 \\ -h_3 & -\lambda_1 & h_1 & -ie_2 \\ h_3 & -h_1 & -\lambda_1 & -ie_3 \\ ie_1 & ie_2 & ie_3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (30,4)$$

ამ დეტერმინანტის გახსნით მიიღება:

$$\lambda^3 + \lambda^2(h^2 - e^2) - (eh)^2 = 0. \quad (30,5)$$

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ თუ (30,4) პირობა დაკმაყოფილებულია, მაშინ ოთხგანზომილებიან სივრცეში მოიხაზება 4 ისეთი ურთიერთპერპენდიკულიარული მიმართულებები, — განსაზღვრული (30,5) განტოლების 4 ფესვით: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, რომელთა გასწვრივაც A_i ვექტორი ოთხგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორზე (F_{ik}) მისი განოვლებების დროს ინარჩუნებს თავის მიმართულებას. (30,5)-ს ფესვები λ_i , რომლებიც $(h^2 - e^2)$ და $(eh)^2$ კოეფიციენტებით გამოისახებიან, ინვარიანტები უნდა იყვნენ, საიდანაც ავტომატურად გამომდინარეობს $(h^2 - e^2)$ და $(eh)^2$ სიდიდეთა ინვარიანტობა.

$$h^2 - e^2 = h'^2 - e'^2 = \text{inv}. \quad (30,6)$$

$$(eh)^2 = (e'h')^2 = \text{inv}. \quad (30,7)$$

ამ პირობების შემოწმება ადვილია, რისთვისაც საკმარისია განვიყენოთ ველი-სათვის ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (29,3) და (29,5). განტოლებები (30,6) და (30,7) გვიჩვენებენ, რომ თუ K' სისტემაში $(eh) = 0$, მაშინ ყველა ინერციულ K' სისტემაში დაძაბულობათა ვექტორების სკალარული ნამრაველი აგრეთვე ნულის ტოლი იქნება ($(e'h') = 0$), ე. ი. თუ ერთ სისტემაში e და h ურთიერთპერპენდიკულიარული ვექტორებია — ისინი ურთიერთპერპენდიკულიარული დარჩებიან ყველა ინერციულ სისტემაში.

სიდიდე (eh) აგრეთვე ინვარიანტულია ლორენცის გარდაქმნების (29,3) და (29,4) მიმართ, მაგრამ ის ნიშანს იცვლის კოორდინატთა ღერძების მიმართულებათა საწინააღმდეგოზე შეცვლის ანუ, როგორც ამბობენ, სარკობრივი არეკვლის დროს. მართლაც $h \rightarrow -h$ ვექტორი სარკობრივი არეკვლვის დროს ნიშანს იცვლის, $h \rightarrow -h$, როცა $x_i \rightarrow -x_i$; ხოლო $e \rightarrow e$. ამგვარად (eh) სიდიდე არ წარმოადგენს ნამდვილ სკალარს; ამიტომ მას ფსევდოსკალარს უწოდებენ.

(30,6) და (30,7) პირობებიდან კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი დასკვნა შეიძლება გამოვიტანოთ. სახელდობრ, თუ რომელიმე K სისტემაში ადგილი აქვს უტოლობას $|e| < |h|$ (ანდა პირიქით $|e| > |h|$), მაშინ ყოველ სხვა K' ინერციულ სისტემაში აგრეთვე გვექნება $|e'| < |h'|$ ($|e'| > |h'|$).

(29,3) და (29,4) ლორენცის გარდაქმნის ფორმულების გამოყენების გზით, შესაძლებელია e და h ვექტორებმა, კოორდინატთა K' სისტემის სათანადო შერჩევით, მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობები, რაც არ გამოიწვევს (30,6) და (30,7) პირობების დარღვევას. კერძოდ, თუ K' სისტემას ისეთნაირად შევარჩევთ, რომ მასში e და h ვექტორები ერთიანობის პარალელური

ოცნენ, მაშინ (30,6) და (30,7) ინვარიანტობის პირობები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$e^2 - h^2 = e'^2 - h'^2; \quad eh = e'h'.$$

თუ $(h, e) = 0$, მაშინ ყოველთვის მოინახება კოორდინატთა ისეთი სისტემა, რომელშიაც $e = 0$ ან $h = 0$: ამ შემთხვევებში აღებულ სისტემაში ჩვენ გვექნება მხოლოდ მაგნიტური¹ ან ელექტრული ველი. შებრუნებით, თუ რომელიმე რხერციულ სისტემაში $e = 0$ ან $h = 0$, მაშინ ყოველ სხვა ინერციულ სისტემაში ისინი ურთიერთპერპენდიკულარული იქნებიან.

§ 31. მუხტების განაწილების სიმკვრივე

როგორც ვიცით, ყოველი მატერიალური სხეული დადებითად და უარყოფითად დამუხტული ნაწილაკებისაგან შედგება. სივრცეში ამ ელექტრული მუხტების განაწილებისა და მოძრაობათა სპეციფიკური სახეები განსაზღვრავენ ელექტრომაგნიტური პროცესების მიმდინარეობას სივრცეში¹ და მატერიალურ სხეულებში. მუხტების განაწილების საკითხი ნაწილობრივ შეიძლება დამუხტული ნაწილაკების განაწილებას დაუკავშიროთ.

წინა პარაგრაფებში ჩვენ შევეხეთ დამუხტული ნაწილაკების მოძრაობისა და განაწილების საკითხებს, მაგრამ არსად მხედველობაში არ მიგვიღია მათი მოცულობები. სინამდვილეში, ნაწილაკი, როგორც მცირეც არ უნდა იყოს ის, სივრცის გარკვეულ ნაწილს იკავებს; ამიტომ, გარდა იმისა, რომ სივრცეში ნაწილაკთა რაიმე სახის განაწილებას მუხტთა სათანადო განაწილება შეესაბამება. თვით ნაწილაკზე მუხტების განაწილების შესახებ ჩვენ შეგვიძლია ერთიმეორისაგან განსხვავებული წარმოდგენები შევიმუშაოთ. ქვემოთ ჩვენ დავინახავთ, რომ სივრცეში მუხტების უწყვეტი განაწილება ფორმალურად წყვეტილ განაწილებებზე დაიყვანება და პირიქით, ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ: 1) სივრცეში მუხტები უწყვეტადაა განაწილებული, ანდა 2) განაწილება წყვეტილია. მაგალითად, კლასიკური ფიზიკის ჩარჩოებში, ატომი შეიძლება განვიხილოთ როგორც დადებითი და უარყოფითი ელექტრული სითხეებით გავსებული სფერო (უწყვეტი განაწილება) ანდა როგორც დადებითად და უარყოფითად დამუხტული ნაწილაკების დინამიკური სისტემა (წყვეტილი განაწილება). მათემატიკური სიმარტივის მოსაზრებით, ხშირად პირველი წარმოდგენით ვისარგებლებთ, თუმცა ასევე ხშირად გამოვიყენებთ მეორესაც. ამ ორ წარმოდგენას შორის პრინციპიალური განსხვავება არ არსებობს და ერთსა და იგივე საბოლოო შედეგს იძლევიან.

¹ სივრცეზე ეწოდება მატერიალური ნაწილაკებისაგან თავისუფალ სივრცის ნაწილს. მაგრამ, როგორც ამას უამრავი ცდები და დაკვირვებები ამტკიცებენ, სამყაროში არ არსებობს ისეთი ადგილები, რომლებიც მატერიას არ შეიცავენ. როგორც გაიშვიათებულად არ უნდა იყოს სივრცის ესა თუ ის ნაწილი (მაგალითად, ვარსკვლავთშორისი სივრცე, სადაც მატერიის სიმკვრივე მერის მტად მცირეა) ის მაინც შეიცავს მატერიას — ნაწილაკებისა და ელექტრომაგნიტური ველის სახით. ამ თვალსაზრისით სივრცის სივრცის ცნების ქვეშ ჩვენ უნდა გვესმოდეს მატერიისაგან საკმაოდ გაიშვიათებული სივრცის ნაწილი.

ამასთან დაკავშირებით, ჩვენ უნდა გამოვინახოთ ისეთი მათემატიკური ოპერაცია, რომელიც საშუალებას მოგვცემს უწყვეტი განაწილებიდან გადავიდეთ წვეტილზე და პირიქით.

ელექტრომაგნიტური ველის თეორიაში მუხტების განაწილების კანონების ფორმების დასადგენად, მივმართოთ მექანიკურ ანალოგიებს და ნივთიერების სიმკვრივის მსგავსად, შემოვიღოთ ელექტრული მუხტების სიმკვრივის ცნება. დავუშვათ, რომ მუხტები უწყვეტადაა განაწილებული x_1 ღერძზე, მაშინ მუხტების ხაზოვანი სიმკვრივე შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\sigma = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta x_1} = \frac{dq}{dx_1} \quad (31,1)$$

ანალოგიურად შეიძლება განესაზღვროთ მუხტების ზედაპირული და მოცულობითი განაწილების სიმკვრივები:

$$\eta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (31,2)$$

და

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (31,3)$$

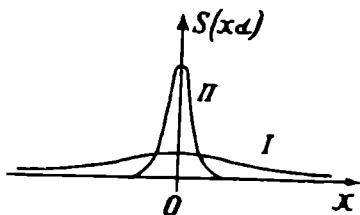
დავუშვათ რომ აღებული მუხტები განაწილებული არიან წვეტილი სახით წერტილოვანი მუხტების, ან მათ მიერ შედგენილი გარკვეული ჯგუფების სახით. სათანადოდ საკირაა შემოვიღოთ წვეტილი განაწილების შესაბამისი სიმკვრივები, რომლებიც შემდეგ უწყვეტი განაწილების სიმკვრივის (31,1), (31,2) და (31,3) ფუნქციებს უნდა დაუკავშიროთ.

მუხტების ან რომელიმე სხვა სიდიდეების სიმკვრივის ცნების შესანარჩუნებლად და უწყვეტი და წვეტილი განაწილების სიმკვრივების ერთიმეორესთან დასაკავშირებლად დირაკმა შემოიღო განსაკუთრებული ყოფაქცევის ფუნქცია, რომელსაც დირაკის $\delta(x_1 - x'_1)$ (დელტა) ფუნქცია ეწოდება. ვთქვათ, მუხტები განაწილებულია x_1 ღერძზე და დაუშვათ რომ ხაზოვანი განაწილების სიმკვრივეა σ (31,1). სათანადოდ უნდა განესაზღვროთ სიმკვრივე იმ შემთხვევაში, როდესაც მუხტები მოთავსებული არიან x_1 ღერძზე $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ წერტილებში. ჩვენ აქ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ უწყვეტი განაწილება წვეტილის ზღვრულ შემთხვევას წარმოადგენს. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მუხტთა ერთი სახის განაწილებიდან მეორეზე გადასასვლელად გამოიყენება დირაკის $\delta(x_1 - x_i)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგი თვისებებით ხასიათდება: x_1 ღერძის ყველა წერტილებში ის ნულის ტოლია გარდა $x_1 = a_i$ წერტილებისა, სადაც ის უსასრულო დიდი ხდება. მისი გრაფიკი მოგვაგონებს გაუსის განაწილების ფუნქციის

$$S(x_1, a) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{a}}}{a} \quad (31,4)$$

გრაფიკს.

α პარამეტრის სასრულო მნიშვნელობისათვის (31,4) ფუნქციის გრაფიკი I მრუდით გამოისახება (ნახ. 20). როდესაც α მცირდება, მაშინ $x=0$ წერტილის მახლობლობაში მრუდი ორდინატა ღერძს უახლოვდება, ხოლო როცა $\alpha \rightarrow 0$, ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი სულ უფრო და უფრო მალა იწევს, მრუდი ორი მხრიდან იკუმშება და $x=0$ სწორი ხაზისაყენ მიისწრაფვის, $x=0$ წერტილში ფუნქცია უსასრულო დიდ მნიშვნელობას ღებულობს. ჩრუდის ამ დეფორმაციის მთელი პროცესის განმავლობაში აბსცისათა



ნახ. 20.

ღერძითა და მის მიერ შემოსაზღვრული ფართი მუდმივი რჩება; რომელიც ადვილად შეიძლება ნორმირებული იქნეს ერთზე.

ამგვარად, $\delta(x_1 - a_i)$ წარმოადგენს სინგულიარულ ფუნქციას, ის უფრო ზოგადი სახით შეიძლება წარმოვიდგინოთ განსხვავებულ ფორმებში, ანალიზურ ფუნქციათა მიმდევრობის გარკვეული ზღვარის სახით. ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი სახე, რომელიც ძირითადად უმრავლეს შემთხვევაშია გამოყენებული, შეიცავს

$$\frac{\sin \alpha x_1}{\pi x_1} \quad (31,5)$$

ფუნქციას, რომელშიაც α — მუდმივი დადებითი ნამდვილი რიცხვია. ეს უკანასკნელი ფუნქცია, $x_1 \neq 0$ წერტილზე, ღებულობს $\frac{\alpha}{\pi}$ მნიშვნელობას. ის

ოსცილირებადი ფუნქციაა, კლებადი ამპლიტუდით, მისი პერიოდია $\frac{2\pi}{\alpha}$.

α პარამეტრის სიდიდისაგან დამოუკიდებლად (31,5) ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x_1 dx}{\pi x_1} = 1. \quad (31,6)$$

თუ ახლა α პარამეტრს მონოტონურად გავზრდით $\alpha \rightarrow \infty$, მაშინ $x_1=0$ წერტილზე (31,5) მიიღებს უსასრულო დიდ მნიშვნელობას, ხოლო $|x_1|$ -ის ზრდასთან ერთად ის ნულისაყენ მიისწრაფვის, ისე რომ მთელ უსასრულო შუალედზე ($-\infty \leq x_1 \leq +\infty$) აღებული ინტეგრალი (31,6) არსებითად განისაზღვრება $x_1=0$ წერტილის მახლობლობაში (31,5) ფუნქციის მნიშვნელობით. ამგვარად, (31,5) ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი, როცა $\alpha \rightarrow \infty$, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც გარკვეული ფუნქცია

$$\delta(x_1) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x_1}{\pi x_1}. \quad (31,7)$$

საიდანაც გამომდინარეობს $\delta(x_1)$ ფუნქციის შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენის შესაძლებლობა

$$\delta(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} e^{ik_1 x_1} dk_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_1 x_1} dk_1. \quad (31,8)$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ (31,8) ფუნქციისათვის ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} dk_1 dk_2 dk_3 = \delta(x). \quad (31,9)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta(x_1) &= \delta(-x_1), \\ \delta'(x_1) &= -\delta'(-x_1) \\ x_1 \delta(x_1) &= 0 \\ x_1 \delta'(x_1) &= -\delta(x_1) \\ \delta(ax_1) &= \frac{1}{a} \delta(x_1) \\ \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2a} \{ \delta(x_1 - a) + \delta(x_1 + a) \} \\ \int \delta(a - x_1) \delta(x_1 - b) dx_1 &= \delta(a - b) \end{aligned} \right\} \quad (31,10)$$

ხოლო $\delta(x_1)$ ფუნქციის თვისებებიდან კი უშუალოდ გამომდინარეობს ტოლობა

$$\begin{aligned} \int f(x_1) \delta'(x_1) dx_1 &= f(x_1) x_1 \delta(x_1) - \int \delta(x_1) \frac{d}{dx_1} (f(x_1) x_1) dx_1 = \\ &= - \int \delta(x_1) \{ f(x_1) + x_1 f'(x_1) \} dx_1 = - \int f(x_1) \delta(x_1) dx_1. \end{aligned} \quad (31,11)$$

დაეუშვათ, რომ $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ მუხტები მოთავსებულია x_1 ღერძზე $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ წერტილებში. ავაგოთ ისეთი ფუნქცია, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელი იქნება როგორც ცალკეული მუხტების მდებარეობათა, ისევე საერთო მუხტის სიდიდის მიღება. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ წყვეტილი განაწილების შემთხვევაში (31,1) ხაზოვანი სიმკვრივე შემდეგი სახით განისაზღვრება

$$\sigma = \sum_{k=1}^n q_k \delta(x_1 - a_k). \quad (31,12)$$

ანალოგიურად, თუ მუხტები მოთავსებული არიან სივრცის x_2 წერტილებში, მაშინ მოცულობითი სიმკვრივისათვის გვექნება:

$$\rho = \sum_{k=1}^n q_k \delta(x - x_k). \quad (31,13)$$

(31,13) ფორმულიდან, $\delta(x - x_k)$ ფუნქციის თვისებების გამო, გამომდინარეობს, რომ x_k წერტილებში მუხტის სიმკვრივეები უსასრულო დიდია, მაგრამ მუხტის საერთო რაოდენობა სასრულია; მართლაც

$$Q = \int \rho dx^3 = \int \sum q_k \delta(x - x_k) dx^3 = \sum_{k=1}^n q_k. \quad (31,14)$$

უქანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ სხეულის საერთო მუხტი განისაზღვრება შემადგენელი დამუხტული ნაწილაკების მუხტთა ალგებრული ჯამით და იზოლირებული სხეულისათვის მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს. თუ სხეულის ერთი ნაწილიდან მეორეში მუხტის გადასვლას ადგილი არ ექნება, მაშინ მოცულობის ყოველ ΔV ელემენტში მოთავსებული Δq მუხტიც აგრეთვე კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე დამოუკიდებელი მუდმივი სიდიდე იქნება.

32. ოთხგანზომილებიანი ღენი

როგორც ვიცით, მუხტის მდებარეობისა და მოძრაობის მდგომარეობის დასახასიათებლად საჭიროა x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატები და ოთხგანზომილებიანი v ; სიჩქარე. x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატების საშუალებით განისაზღვრება ორ მეზობელ მსოფლიო წერტილს შორის ოთხგანზომილებიანი ვექტორის სიგრძე

$$ds(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) \quad (32,1)$$

და ოთხგანზომილებიანი სივრცის მოცულობის ელემენტი

$$dx^4 = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad (32,2)$$

რომლებიც კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე დამოუკიდებელ სიდიდეებს წარმოადგენენ, მაშინ როდესაც სამგანზომილებიანი სივრცის მოცულობის ელემენტი $dx^3 = dx_1 dx_2 dx_3$ გარდაიქმნება (11,2) ფორმულის მიხედვით.

რადგან მუხტის სიდიდე dq ინვარიანტია, ამიტომ სხვა ინვარიანტებთან მისი ნამრავლი ან შეფარდება აგრეთვე ინვარიანტულ სიდიდეს მოგვცემს.

თუ dq -ს გავამრავლებთ (32,1)-ზე და გავყოფთ (32,2) გამოსახულებაზე მივიღებთ 4 — ვექტორს, რომლის მდგენელები შემდეგი სახით იქნებიან განსაზღვრული

$$j_i = \frac{dq}{dx_1 dx_2 dx_3} \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic \right) = \rho \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic \right) \quad (32,3)$$

ანდა,

$$j_i = \rho v_i, \quad (32,3a)$$

რომელსაც ოთხგანზომილებიანი ღენის სიმკვრივის ვექტორი ეწოდება.

(32,3)-ში სიდიდე $\rho = \frac{dq}{dx^3}$ წარმოადგენს სამგანზომილებიანი სივრცის

მოცულობის ერთეულში მოთავსებული მუხტების რაოდენობას — მუხტის მოცულობით სიმკვრივეს.

j_4 — ვექტორის პირველი სამი მდგენელი:

$$\rho \frac{dx_1}{dt}, \quad \rho \frac{dx_2}{dt} \quad \text{და} \quad \rho \frac{dx_3}{dt},$$

წარმოადგენენ ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი დენის სიმკვრივის ვექტორს:

$$j = \rho v; \quad (32,4)$$

ხოლო მეოთხე მდგენელი წარმოსახვითია და მუხტების განაწილების სიმკვრივისთანაა დაკავშირებული

$$j_4 = ic \rho. \quad (32,5)$$

ვინაიდან j_i წარმოადგენს 4 — ვექტორს, ამიტომ მისი მდგენელები გარდაიქმნებიან ლორენცის (10,22) ფორმულების მიხედვით.

$$j_1 = \frac{j'_1 - i \frac{v}{c} j'_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad j_2 = j'_2, \quad j_3 = j'_3, \quad j_4 = \frac{j'_4 + i \frac{v}{c} j'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (32,6)$$

დავუშვათ, რომ K' — სისტემაში მუხტი უძრავია ($j'_1 = j'_2 = j'_3 = 0$), ხოლო K' მოძრაობს K -ს მიმართ მუდმივი სიჩქარით ($v = \text{const}$), მაშინ (32,6)-დან მივიღებთ:

$$j_1 = \rho v_1 = \frac{\rho' v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad j_2 = \rho v_2 = 0, \\ j_3 = \rho v_3 = 0, \quad j_4 = ic \rho = \frac{ic \rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

ამ უკანასკნელი განტოლებებიდან გამომდინარეობს მუხტების სიმკვრივის გარდაქმნის კანონი

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (32,7)$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ მოძრავი მუხტების განაწილების სიმკვრივე იმ სისტემაში, რომლის მიმართაც ისინი მოძრაობენ, დიდდება. ეს შედეგი ადვილად შეიძლება ავხსნათ. მართლაც, რადგან მუხტის სიდიდე ინვარიანტულია, ხოლო ნაწილაკის (რომელზედაც მუხტებია განაწილებული) მოცულობა მცირდება (11,2) ფორმულის მიხედვით, ამიტომ სიმკვრივე ρ , სათანადოდ, (32,7)-ს მიხედვით უნდა შეიცვალოს.

თუ ρ -ს მოცულობის dx^3 ელემენტზე გავამრავლებთ, მაშინ მივიღებთ ამ მოცულობაში მოთავსებული მუხტების საერთო რაოდენობას $dq = \rho dx^3$.

თუ ახლა მოცულობის ელემენტისა და მუხტთა სიმკვრივის გარდაქმნის (11,2) და (32,7) ფორმულებს გამოვიყენებთ, გვექნება

$$dq = \rho dx^3 = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dx'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho' dx'^3 = \text{inv.} \quad (32,8)$$

ასევე, სისტემის სრული მუხტიც

$$Q = \int \rho dx^3 = \int \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dx'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = Q'.$$

აგრეთვე ინვარიანტულ სიდიდეს წარმოადგენს.

განვიხილოთ q მუხტის მოძრაობა. (32,13) ფორმულის თანახმად, დენის სიმკვრივის ვექტორისათვის გვექნება

$$j = qv \delta(x - x_0), \quad (32,9)$$

სადაც v მუხტის სიჩქარეა, ხოლო x_0 q მუხტის რადიუს ვექტორი.

მუხტის სიმკვრივე $\rho = q\delta(x - x_0)$ წარმოადგენს $x - x_0$ სიდიდის ფუნქციას. რადგან მუხტის მოძრაობის დროს იცვლება x_0 , ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_0}, v \right). \quad (32,10)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{\partial \rho(x - x_0)}{\partial x_0} = - \frac{\partial \rho(x - x_0)}{\partial x} = - \text{grad } \rho(x - x_0), \quad (32,11)$$

მაშინ (32,10)-დან მივიღებთ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v, \text{grad } \rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0, \quad (32,12)$$

სადაც გამოყენებულია ვექტორული ანალიზის (2,18) ფორმულა. (32,12) განტოლებას ოთხგანზომილებიან ფორმაში შემდეგი სახე ექნება

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} + \frac{\partial j_4}{\partial x_4} = 0. \quad (32,13)$$

ეს უკანასკნელი ელექტრული მუხტების მუდმივობის კანონს წარმოადგენს, ჩაწერილს ოთხგანზომილებიანი ფორმით.

მუხტის მუდმივობის კანონის ფიზიკური ინტერპრეტაციისათვის (32,12) დიფერენციალური კანონი ვადავწეროთ ინტეგრალური სახით. ამისათვის დავუშვათ, რომ მოცულობა, რომელშიც მუხტებია განაწილებული, უძრავია. უკანასკნელი პირობა უფლებას გვაძლევს გადავანაცვლოთ სამგანზომილებიანი მოცულობის ელემენტით ინტეგრაციისა და დროით გაწარმოების ოპერაციები, რის შედეგადაც მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dx^3 = - \oint (\rho v, dx^2), \quad (32,14)$$

სადაც გამოყენებულია გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა. (32,14) განტოლებების მარცხენა მხარე წარმოადგენს დროის ერთეულში აღებული მოცულობის შიგნით მუხტის ცვლილების სიდიდეს, მარჯვენა მხარე კი გვაძლევს აგრეთვე დროის ერთეულში მოცულობის შემომსახლრელ შეკრულ ზედაპირზე ორივე მიმართულებით (შიგნით და გარეთ) გასული მუხტების ალგებრულ ჯამს¹.

ამგვარად, მუხტის მუდმივობის (32,13) კანონი, ან მისი ტოლფასი (32,14) ფორმულა შემდეგნაირად გამოითქმება: აღებულ მოცულობაში მუხტების საერთო რაოდენობის ცვლილება დროის ერთეულში ტოლია ამავე დროში მოცულობის შემომსახლრელ შეკრულ ზედაპირზე მუხტების ნაკადისა.

§ 33. ელექტრომაგნიტური ველის ქმედების ფუნქცია

.წინა პარაგრაფში ჩვენ მივიღეთ როგორც თავისუფალი ნაწილაკის ქმედების ფუნქცია (18,4) და ლაგრანჟიანი (18,5), ისევე გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში შტანილ დამუხტული ნაწილაკის ქმედების ფუნქცია (23,4) და სათანადო ლაგრანჟიანი (23,7). ახლა უნდა გადავიღოთ ელექტრომაგნიტური ველის კანონების ჩამოყალიბებაზე, რისთვისაც გამოვიყენოთ უმცირესი ქმედების პრინციპი.

ისევე როგორც მატერიალური ნაწილაკისათვის, ელექტრომაგნიტური ველისათვისაც, მისი დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეებიდან უნდა შევადგინოთ ინვარიანტული ქმედების ფუნქცია.

რადგან ქმედების ფუნქცია ადითიური თვისების მქონე ლაგრანჟის ფუნქციის საშუალებით განისაზღვრება, ამიტომ ისიც ადითიურ სიდიდეს წარმოადგენს. თუ ავიღებთ დამუხტულ ნაწილაკთა და ელექტრომაგნიტური ველის სისტემას, მაშინ მისი ქმედების ფუნქცია

$$S = S_1 + S_{12} + S_2, \quad (33,1)$$

სადაც

$$S_1, S_{12} \text{ და } S_2$$

წარმოადგენენ სათანადოდ, დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემის, ნაწილაკებისა და ელექტრომაგნიტური ველის ურთიერთქმედებისა და ელექტრომაგნიტური ველის ქმედების ფუნქციებს.

S_1 და S_{12} ქმედების ფუნქციათა გამოხატულებებში შეჯამება სწარმოებს ყველა დამუხტული ნაწილაკების მიხედვით. მაშინ როდესაც S_1 მხოლოდ ნაწილაკთა თვისებებით განისაზღვრება ხოლო S_{12} დამოკიდებულია ნაწილაკებისა და ველის თვისებებზე, ელექტრომაგნიტური ველის ქმედების ფუნქცია S_2 საკუთრივ ამ ველის თვისებების გამოხატველ სიდიდეებს უნდა შეიცავდეს.

¹ თუ პირობით ზედაპირის ნორმალის დადებით მიმართულებად მივიღებთ ზედაპირის გარე ნორმალს, მაშინ სიდიდე $(\rho v, d\mathbf{x}^2)$ დადებითი იქნება, როდესაც მუხტები აღებულ მოცულობიდან გარეთ გამოდიან; წინააღმდეგ შემთხვევაში ის უარყოფითია.

ინვარიანტული S_2 ფუნქციის შესადგენად გამოვიყენოთ ელექტრომაგნიტური ველის ინვარიანტები (30,6) და (30,7).

ამ ინვარიანტებიდან უნდა ავიღოთ პირველი. მეორე ინვარიანტი ჩვენ არ გამოგვადგება, რადგან (24,6) ლაგრანჟის განტოლებაში მისი ჩასმის შედეგად მივიღებთ არაწრფივ განტოლებას. მართლაც, $(e h)^2$ ინვარიანტი მეოთხე ხარისხის გამოსახულებას წარმოადგენს, ამიტომ, თუ მას (24,6)-ში შევიტანთ, ორჯერ გაწარმოების შედეგად, ველის განტოლებაში შევლენ e და h -ის მიმართ კვადრატული წევრები. ასევე, ელექტრომაგნიტური ველის ქმედების ფუნქციის შესადგენად არ გამოგვადგება $(e h)$. რადგან ის ფსევდოსკალარია; თუმცა ეს უკანასკნელი წრფივ განტოლებას მოგვცემდა.

პირველი ინვარიანტი $h^2 - e^2$ გამოვხატოთ ელექტრომაგნიტური ველის F_{ik} ტენზორის მდგენელების საშუალებით; ამისათვის გამოვიყენოთ (25,21) დამოკიდებულებები. (25,21) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$F^2_{ik} = 2(h^2 - e^2). \quad (33,2)$$

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ველის ქმედების ფუნქცია შემდეგ სახეს მიიღებს

$$S_2 = \text{Const} \int F^2_{ik} dx^4, \quad (33,3)$$

სადაც სივრცითი კოორდინატებითა და დროით ინტეგრაციის არეებს წარმოადგენენ სათანადოდ მუხტებისა და ველის მიერ დაკავებული მოცულობა და დროის მოცემული შუალედი.

ახლა უნდა გამოვარკვეოთ როგორია (33,3)-ში ინტეგრალის წინ მდგომი მულტიპლის რიცხვითი მნიშვნელობა და ნიშანი. როგორც ვიცით, ელექტრული ველის დაძაბულობა $e = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ რომელშიაც, $\nabla\phi$ წვერთან შედარებით,

მთავარ როლს $\frac{\partial A}{\partial t}$ წვერი ასრულებს. ადვილად შეიძლება დაეამტკიცოთ, რომ

F^2_{ik} ინვარიანტი $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$ წვერს დადებითი ნიშნით უნდა შეიცავდეს. მართლაც,

სწრაფად ცვლადი ველების შემთხვევაში სიდიდე $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$ ველის სიხშირის თანდათანობით ზრდით, შეიძლება ნებისმიერად დიდი გავხადოთ. თუ ამ სიდიდეს მინუს ნიშნით ავიღებდით, მაშინ ის ნებისმიერად მცირე მნიშვნელობებს მიიღებდა და S_2 ქმედების ფუნქციას მინიმუმი არ ექნებოდა. ამიტომ უმცირესი ქმედების პრინციპის მოთხოვნის დასაკმაყოფილებლად (33,2) გამოხატულება უნდა ავიღოთ მინუს ნიშნით, რაც შეეხება მულტიპლის რიცხვით მნიშვნელობას, ის დამოკიდებულია იმ ერთეულთა სისტემის არჩევაზე, რომელშიაც უნდა გაიზომონ ველის დამახასიათებელი სიდიდეები. ერთეულთა გაუსის აბსოლუტურ სისტემაში (33,3)-ს Const-ად მიღებულია სიდიდე: $-\frac{1}{16\pi ic}$.

ამგვარად, ველის ქმედების ფუნქციის საბოლოო სახე შემდეგია

$$S_2 = \frac{i}{16\pi c} \int F^2_{ik} dx^4. \quad (33,4)$$

ანდა სამგანზომილებიან ფორმაში

$$S_2 = \frac{1}{8\pi} \int (e^2 - h^2) dx^3 dt, \quad (33,5)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ლაგრანჟის ფუნქციაა

$$L = \frac{1}{8\pi} \int (e^2 - h^2) dx^3. \quad (33,6)$$

მაშასადამე, დამუხტული ნაწილაკებისა და ელექტრომაგნიტური ველის სისტემის სრული ქმედების ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$S = - \sum \int m_i c dt + \sum \int \frac{q}{c} A_i dx_i + \frac{i}{16\pi c} \int F^2_{ik} dx^4. \quad (33,7)$$

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ A_i და F_{ik} წარმოადგენენ აღებულ მოცულობაში მოთავსებული დამუხტული ნაწილაკების მიერ შექმნილ ველებთან გარეშე ელექტრომაგნიტური ველის შეკრების შედეგად მიღებული საერთო ველის 4 — პოტენციალსა და ტენზორს, ამიტომ ისინი დამოკიდებული არიან მუხტების კოორდინატებზე და სიჩქარეებზე.

§ 34. ლორენცის განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ დამუხტულა მატერიალური ნაწილაკების სისტემა სიცარიელეში. ისინი, ჯერჯერობით, წერტილოვან მუხტებად ჩავთვალოთ. იმ სისტემაში, როგლის მიმართაც მუხტები მოძრაობენ, ყოველი მათგანი თავის ირგვლივ სივრცეში წარმოშობს ელექტრომაგნიტურ ველს. მოძრაი მუხტები, ელექტრომაგნიტური ველის წყაროებსა და იმავე დროს ამ ველის მოქმედების ობიექტებს წარმოადგენენ.

ელექტრომაგნიტური ველის კანონები, მუხტებისა და მათ მიერ შექმნილ ელექტრომაგნიტური ველების თვისებების ურთიერთკავშირს უნდა გამოხატავდნ.

ელექტრომაგნიტური ველის კანონების საშუალებით ველის სიდიდეების მონახვა იმ შემთხვევაში იქნება შესაძლებელი, როდესაც მისი გამომწვევი მიზეზი — ელექტრული მუხტების მოძრაობა მოცემულია (ცნობილია). მაშასადამე, უმცირესი ქმედების პრინციპიდან ველის კანონების მისაღებად, მუხტების მოძრაობის მდგომარეობა (კოორდინატები და სიჩქარეები) უნდა ჩავთვალოთ როგორც წინასწარ მოცემული და მოვხდინოთ ველის დამახასიათებელი სიდიდეების, მაგალითად A_i პოტენციალის ვარირება.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ მუხტების მდგომარეობათა დამახასიათებელი j_i და dx_i სიდიდეები მოცემულია, ე. ი. $\delta j_i = \delta x_i = 0$, ხოლო აღებული

სისტემის მიერ დაკავებული მოცულობის შემომსახურელი ზედაპირის ყოველ წერტილში i' და i'_2 — მომენტებში $\delta A_i = 0$, მაშინ (32,7) ქმედების ფუნქციის ვარიაციისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left\{ \frac{1}{ic^2} j_i \delta A_i + \frac{i}{16\pi c} \delta (F_{ik}^2) \right\} dx^4 = \\ &= \frac{1}{ic} \int \left\{ \frac{j_i}{c} \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \delta F_{ik} \right\} dx^4, \end{aligned} \quad (34,1)$$

სადაც მუხტების მიხედვით შეჯამების ოპერაცია შეცვლილია ინტეგრაციით და ამავე დროს გამოყენებულია (31,7) დამოკიდებულება. (25,6) F_{ik} -ს მდგენელების მნიშვნელობათა (34,1)-ში ჩასმის გზით მივიღებთ:

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left\{ \frac{j_i}{c} \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k + \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right\} dx^4. \quad (34,2)$$

რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქციის უკანასკნელ ორ წევრში შეჯამება სწარმოებს i და k ინდექსებით ($i, k=1, 2, 3, 4$), ამიტომ შეგვიძლია მათ ადგილები შევუსვალთ, თუ აგრეთვე გავითვალისწინებთ, რომ F_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორია, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k = F_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i = - F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i.$$

ამ უკანასკნელის ჩასმა (34,2)-ში გვაძლევს

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left(\frac{j_i}{c} \delta A_i + \frac{1}{4\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right) dx^4. \quad (34,3)$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მეორე შესაკრების ნაწილობითი ინტეგრაციით მივიღებთ

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left(\frac{1}{c} j_i - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right) \delta A_i dx^4 + \frac{1}{4\pi ic} \int F_{ik} \delta A_i dx^4.$$

რადგან ამ გამოსახულების უკანასკნელ შესაკრებში ინტეგრაცია სწარმოებს მუხტებისა და ველის სისტემის შემომსახურელ ზედაპირზე i'_1 და i'_2 მომენტებში, სადაც პირობის თანახმად $(\delta A_i)_{i'_1} = (\delta A_i)_{i'_2} = 0$, ამიტომ ეს წევრი ნულის ტოლია.

უმცირესი ქმედების პრინციპის თანახმად, ელექტრომაგნიტური ველის განტოლების მისაღებად, ქმედების ფუნქციის ვარიაცია ნულს უნდა გაუტოლოთ

$$\int \left(\frac{j_i}{c} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right) \delta A_i dx^4 = 0,$$

საიდანაც, საინტეგრაციო არის შერჩევისაგან დამოუკიდებლად ინტეგრალის ნულთან ტოლობისა და ველის 4 — პოტენციალის δA_i ვარიაციების დამოუ-

კიდებლობის გამო, გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{\partial F_{it}}{\partial x_t} = \frac{4\pi}{c} j_i \quad (34,4)$$

თუ i — ინდექსს მიმდევრობით $i=1, 2, 3, 4$ მნიშვნელობებს მივცემთ, მივიღებთ 4 განტოლებას:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c} j_1 \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c} j_2 \\ \frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c} j_3 \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c} j_4 \end{aligned} \right\} \quad (34,5)$$

ინვარიანტულ განტოლებათა ეს სისტემა შეიძლება გადავწეროთ სამგანზომილებიან ფორმაში. თუ გამოვიყენებთ (25,21) და (32,4) დამოკიდებულებებს. მაშინ (34,5)-ს პირველი სამი განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\operatorname{rot} h = \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad (34,6)$$

მეოთხე განტოლება კი მოგვცემს:

$$\operatorname{div} e = 4\pi \rho. \quad (34,7)$$

(34,4), ანდა მისი ტოლფასი (34,6) და (34,7) განტოლებათა სისტემა, ლორენცის განტოლებათა პირველი წყვილის სახელწოდებითაა ცნობილი.

ელექტრომაგნიტური ველის მდგომარეობისა და თვისებების შესასწავლად მარტო (34,4) განტოლება საკმარისი არაა, რადგან ის ორ (e და h) უცნობს შეიცავს. ლორენცის განტოლებათა მეორე წყვილის მისაღებად დავუბრუნდეთ (25,16) და (25,17) დამოკიდებულებებს. თუ (25,16)-ის ორივე მხარეზე ვიმოქმედებთ გაწარმოების ოპერაციით — rot -ით და გავითვალისწინებთ, რომ ადგილი აქვს იგივეობას: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla, \nabla \varphi] = 0$, მაშინ მივიღებთ:

$$\operatorname{rot} e = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (34,8)$$

თუ ახლა „უძრავ“ სისტემაში მიმდინარე ელექტრომაგნიტური პროცესების განხილვით შემოვიხსნათ განტოლებით, მაშინ უფლება გვქვია (34,8)-ში სივრცითი

კოორდინატებითა და ღრობით გაწარმოების ოპერაციებს აღვიღებთ შევუსკვა-
ლოთ, ე. ი. $\operatorname{rot} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} A$; რაც, (2,21) და (25,17)-თან ერთად, მოგვცემს:

$$\operatorname{rot} e = -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (34,9)$$

და

$$\operatorname{div} h = 0. \quad (34,10)$$

მიღებული (34,9) და (34,10) განტოლებები, რომლებიც ჩაწერილია სამგან-
ზომილებიან — ვექტორულ ფორმაში, შეადგენენ ლორენცის განტოლებათა
მეორე წყვილს. ჩავწეროთ ეს უკანასკნელი განტოლებები ოთხგანზომილებიანი
სახით. ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (34,9) და (34,10) განტოლებები
ტოლფასია შემდეგი ერთი ინვარიანტული, ოთხგანზომილებიან ფორმაში ჩაწე-
რილი, განტოლების

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} = 0, \quad (34,11)$$

რომელიც უშუალოდ მიიღება (25,6)-დან. მართლაც, ეს უკანასკნელი განტო-
ლება, F_{ik} ტენზორის ანტისიმეტრიულობის გამო, ტრივიალურად დაკმაყო-
ფილებული იქნება სამივე ინდექსის ($i=j=k$), ანდა რომელიმე ორი ინდექსის
ტოლობის შემთხვევაში; ხოლო დანარჩენი 4 განტოლება, რომლებიც მიიღე-
ბიან $i \neq j \neq k$ შემთხვევაში, მოგვცემენ (34,9) და (34,10) განტოლებებს,
რასაც ადვილად დავრწმუნდებით (25,21) დამოკიდებულებათა გამოყე-
ნების გზით.

ლორენცის განტოლებათა ორი წყვილი (34,4) და (34,11) განსაზღვრავს
სიციარიელეში ნებისმიერი სიჩქარეებით ($v < c$) მოძრავი ელექტრული მუხ-
ტების ელექტრომაგნიტურ ველს „უძრავი“ ათვლის სისტემაში. ამგვარად,
სიციარიელეში, ელექტრომაგნიტური ველის კანონები

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{4\pi}{c} j_i \\ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34,12).$$

ანდა ვექტორულ ფორმაში

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} h &= \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho v \\ \operatorname{div} e &= 4\pi \rho \\ \operatorname{rot} e &= -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t} \\ \operatorname{div} h &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34,13).$$

შეადგენენ ელექტრონთა თეორიის საფუძველს.

§ 35. ლორენცის განტოლებების ინტეგრალური წარმოდგენები

ლორენცის (34,13) განტოლებები, ველის ცნების შესაბამისად, დიფერენციალურ კანონებს წარმოადგენენ, მაგრამ მათ შეიძლება აგრეთვე მივცეთ ინტეგრალური ფორმაც. საზოგადოთ ელექტრომაგნიტური ველის ყოველი კანონი შეგვიძლია ჩაწეროთ დიფერენციალურ ან ინტეგრალურ ფორმაში. ხშირად, ერთი ფორმიდან მეორეზე გადასვლა საშუალებას გვაძლევს გამოვავლინოთ ველის ახალი თვისებები. მაგალითად, მაშინ როდესაც (34,7) დიფერენციალური კანონის თვალსაჩინო ფიზიკური ინტერპრეტაცია არ არსებობს. მისი ინტეგრალური ფორმა გვაძლევს ამ კანონით განსაზღვრული ელექტრომაგნიტური პროცესის ნათელ ფიზიკურ სურათს. ასევე ითქმის ველის დანარჩენი კანონების შესახებაც.

ავილოთ განტოლება (34,7). მასში შემავალი ელექტრული დაძაბულობის ვექტორი e და ელექტრული მუხტების განაწილების სიმკვრივე ρ , საზოგადოთ, დრო და სივრცის კოორდინატების ფუნქციებია: $e = e(x_i)$, $\rho = \rho(x_i)$. მათი მნიშვნელობები აღებული რომელიმე მსოფლიო წერტილში ერთიმეორესთან დაკავშირებული არიან ლორენცის (34,7) განტოლებით. მოვინახოთ მათ შორის არსებული დამოკიდებულებების ისეთი ფორმა, რომელშიც მოცემული იქნება e და ρ სიდიდეებს შორის კავშირი სასრულო არესათვის. ანისათვის $\text{div } e = 4\pi\rho$ განტოლების ორივე მხარე dx^3 მოცულობის ელემენტზე გავამრავლოთ და $\rho(x_i)$ სიმკვრივით განაწილებული მუხტების მიერ დაკავშულ V მოცულობაზე ავილოთ ინტეგრალი; გვექნება

$$\int \text{div } e \, dx^3 = 4\pi \int \rho \, dx^3 = 4\pi Q,$$

ანდა, (2,31) ფორმულის თანახმად:

$$\int (e dx^2) = 4\pi Q. \tag{35,1}$$

ეს ფორმულა აკავშირებს V მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე გამავალი ელექტრული ველის ძალხაზების ნაკადს მის შიგნით მოთავსებული მუხტების საერთო რაოდენობასთან. ძალხაზების საშუალებით ველის თვალსაჩინო გეომეტრიული წარმოდგენები ხშირად ძალიან სასარგებლოა, განსაკუთრებით კი მუხტის სიდიდეზე დაძაბულობის ვექტორის დამოკიდებულების გამოსახატავად.

ანალოგიური გზით, h მაგნიტური ვექტორის განზღადობის (34,10) კანონი, ინტეგრალურ ფორმაში შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\int \text{div } h \, dx^3 = \int (h dx^2) = 0. \tag{35,2}$$

მიღებული განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ შეკრულ ზედაპირზე გამავალი h მაგნიტური ვექტორის ნაკადი ყოველთვის ნულის ტოლია; რაც იმის მაჩვენებელია, რომ აღებული შეკრული ზედაპირიდან გამოსული h ვექტორის ხაზების რიცხვი შიგნით შესული h ხაზების რიცხვის ტოლია. ე. ი. მაგნიტური

ძალბაზები ყოველთვის ჩაკეტილი წირებია. თუ შეკრული ზედაპირიდან გამო-
სულ h ხაზების რიცხვს დადებით ნიშანს მივაწერთ, ხოლო შიგნით შესულს
უარყოფითს, მაშინ (35,2)-ის თანახმად, მათი ალგებრული ჯამი ნულის ტოლი
იქნება. (34,7) და (34,10) განტოლებების ერთიმეორესთან შედარებას იმ
დასკვნამდე მივყევართ, რომ თავისუფალი მაგნიტური მუხტები, ელექტრული-
საგან განსხვავებით, არ უნდა არსებობდნენ.

(35,2) განტოლება შეიძლება სხვა გზითაც მივიღოთ. სახელდობრ, თუ
(34,9) განტოლების ორივე მხარეზე ვიმოქმედებთ განშლადობის div ოპერა-
ციით და გავითვალისწინებთ, რომ (2,21)-ს თანახმად, $\text{div rot } e = 0$, მივიღებთ

$$\text{div rot } e = -\frac{1}{c} \text{div } \frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ უძრავ კოორდინატთა სისტემაში ადგილი
აქვს ტოლობას $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } h = 0$, ე. ი. $\text{div } h = \text{const}$. მისი შესაბამისი ინტეგრა-
ლური ფორმა მიიღება მოცულობის dx^3 ელემენტზე გადამრავლებისა და შემ-
დგომი ინტეგრაციის გზით. თუ აღნიშნულ მოქმედებებს შევასრულებთ, მივი-
ღებთ. რომ საინტეგრაციო არეს არჩევისაგან დამოუკიდებლად

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \text{div } h \, dx^3 = 0,$$

რაც მხოლოდ მაშინაა შესაძლებელი, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია
ნულის ტოლია. იგივე დასკვნამდე შეიძლება მივიღოთ წმინდა ფიზიკური მო-
საზრების საფუძველზე. სახელდობრ, რადგან უსასრულობაში $h_{\infty} = 0$, ამიტომ
პირობიდან $\text{div } h_{\infty} = 0$ გამომდინარეობს, რომ საზოგადოდ $\text{div } h = 0$.

უფრო ღრმა ფიზიკური მნიშვნელობის დასკვნებს მივიღებთ თუ (34,9)
განტოლებას ჩავწერთ ინტეგრალურ ფორმაში. თუ (34,9) განტოლების ორივე
მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ ზედაპირის dx^2 ელემენტზე და ინტეგ-
რაციის დროს გამოვიყენებთ, სტოქსის (2,31) ფორმულას. გვექნება

$$\oint (e \, dx) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int (h \, dx^2). \quad (35,3)$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს იმ მუშაობას, რომელსაც
ელექტრული ველი ასრულებს შეკრულ კონტურზე ერთეულოვანი დადებითი
ელექტრული მუხტის შემოტარების დროს. ეს მუშაობა, (35,3)-ის თანახმად,
ნულისაგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც აღე-
ბულ კონტურზე დაყრდნობილ ზედაპირზე გამავალი h ვექტორის ნაკადი
იცვლება დროში. $\oint (e \, dx)$ მუშაობას — ელექტრომომძრავებელი ძალა
ეწოდება, ხოლო ზედაპირზე მაგნიტური ვექტორის ნაკადის ცვალებადობით
განპოწვეულ პროცესებს — ელექტრომაგნიტური ინდუქციის მოვლენები.

ანალოგიური მსჯელობა შეიძლება ჩავატაროთ (34,6) განტოლების მიმართაც, გვექნება

$$\oint (hd\mathcal{E}) = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial e}{\partial t}, dx^2 \right) + \frac{4\pi}{c} \int \rho (v dx^2). \quad (35,4)$$

უქანასკნელიდან კი გამომდინარეობს, ჯერ ერთი, რომ $\frac{\partial e}{\partial t}$ და ρv ერთი და

იგივე ბუნების სიდიდეებია; სახელდობრ, ისინი ელექტრული დენის სიმკვრივის ვექტორებს წარმოადგენენ, მორე ნხრივ, შეკრულ კონტურზე ერთეულოვანი დადებითი მაგნიტური მუხტის შემოტარების დროს შესრულებული მუშაობა $\oint (hd\mathcal{E})$, ამ კონტურზე დაყრდნობილ ზედაპირზე გამავალი ჩვეულებ-

რივი ρv და ე. წ. წანაცვლების $\frac{\partial e}{\partial t}$ დენების სიმკვრივეთა ჯამის საშუალებით

განისაზღვრება. ამ დამოკიდებულებიდან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ ყოველი სახის ელექტრული დენი, თავის ირგვლივ სივრცეში, წარმოშობს გრივალურ მაგნიტურ ველს, რომელიც გეომეტრიულად კონცენტრიული წრიული ხაზების — მაგნიტური ველის ძალხაზების საშუალებით წარმოიდგინება.

§ 36. ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივე

§ 25-ში ჩვენ მივიღეთ გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში შეტანილი დამუხტული მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება (25,8). მის მარჯვენა მხარეში მოცემულია q მუხტზე მომქმედი ოთხგანზომილებიანი ძალის მდგენელები F_{ik} მოცულობის ერთეულში მოთავსებულ მუხტებზე მომქმედი ძალის მისაღებად q -ს ნაცვლად (25,8)-ში უნდა ჩავწეროთ ρ . ამ ძალას

$$f_i = \frac{mdv_i}{dt'} = \frac{\rho}{c} F_{ik} v_k \quad (36,1)$$

ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივე ეწოდება.

(36,1) ძალას შეიძლება სხვა სახე მივცეთ. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ (32,3a) დამოკიდებულებებს, მაშინ (36,1) შემდგენაირად ჩაიწერება

$$f_i = \frac{1}{c} F_{ik} j_k, \quad (36,2)$$

რომლის პირველი სამი მდგენელი, ჩაწერილი ჩვეულებრივ სამგანზომილებიანი ფორმით, გვაძლევს ლორენცის ძალის სიმკვრივეს:

$$f = \rho \left\{ e + \frac{1}{c} [v h] \right\}. \quad (36,3)$$

ხოლო მეოთხე მდგენელი

$$f_4 = \frac{1}{c} (F_{41} j_1 + F_{42} j_2 + F_{43} j_3) = \frac{i\rho}{c} (v e),$$

ლორენცი, (36,3)-ს თანახმად, შემდეგ სახეს ღებულობს

$$f_4 = \frac{i}{c} (v, f). \quad (36,4)$$

ეს უკანასკნელი წარმოსახვითი სიდიდეა და დაკავშირებულია f ძალის მიერ დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობასთან.

(36,4) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ ალებულ K სისტემაში ნაწილაკი უძრავია, $v=0$, მაშინ $f_4=0$. მაშასადამე, თუ რომელიმე ინერციული K' სისტემის მიმართ ნაწილაკი უძრავია (სხვა ინერციული სისტემის მიმართ ის მოძრაობს $v'=C \cos t$ სიჩქარით), მაშინ მასზე მომქმედი ძალების მუშაობა ნულის ტოლია; რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ნაწილაკის სიჩქარე არ იცვლება, არც სიდიდით და არც მიმართულებით. ამგვარად, კლასიკური მექანიკის I კანონი — ინერციის კანონი, რელატივისტურ მექანიკაშიც სამართლიანია.

ρ ელექტრულ მუხტებზე მომქმედი ძალის სიმკვრივის f ვექტორის ანუალეობით (რომელიც ექსპერიმენტულად იზომება უშუალოდ ვის მიერ გამოწვეული მექანიკური მოქმედებების მიხედვით), შეიძლება მოვხახოთ $1'$ მოცულობაში მოთავსებულ მუხტებზე მომქმედი ძალა F ; ამისათვის საჭიროა ალებული მოცულობა დავანაწილოთ dx^3 ელემენტებად. ამ ელემენტში მოხვედრილ ρdx^3 მუხტზე მომქმედი ძალა $f dx^3$ სიდიდით გამოიხატება, ხოლო მთელ $1'$ მოცულობაში მოთავსებულ მუხტებზე მომქმედი F ძალა მიიღება ცალკეულ dx^3 ელემენტებზე მომქმედი ძალების შეკრების გზით, ე. ი.

$$F = \int f dx^3. \quad (36,5)$$

ეს F ძალა არაა ინვარიანტული სიდიდე, თუმცა ის მიღებულია ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივიდან, რაც იმითაა გამოწვეული, რომ მოცულობის dx^3 ელემენტი მოძრაობის მიმართულებით ლორენცის შემოკლებას განიცდის.

დავუბრუნდეთ ისევ ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივის f_i 4-ვე ვექტორს. ავიღოთ K და K' სისტემები, ამ სისტემებში ალებული ძალის სიმკვრივის f_i და f'_i მდგენელები ერთიმეორესთან დაკავშირებული არიან ლორენცის გარდაქმნების (10,22) ფორმულებით:

$$f_1 = \frac{f'_1 - i \frac{v}{c} f'_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad f_2 = f'_2; \quad f_3 = f'_3; \quad f_4 = \frac{f'_4 + i \frac{v}{c} f'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (36,6)$$

დავუშვათ, რომ K' სისტემაში მუხტი უძრავია, $f'_4=0$, მაშინ (36,6)-დან ვეკენება:

$$\left. \begin{aligned} f_1 = f_{x_1} &= \frac{f'_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{f'_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ f_2 = f_{x_2} &= f'_{x_2} = f'_{x_2} \\ f_3 = f_{x_3} &= f'_{x_3} = f'_{x_3} \end{aligned} \right\} \quad (36,7)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ მოცულობის ელემენტი (11,2) ფორმულის მიხედვით გარდაიქმნება, მაშინ (36,7) გამოხატულებებიდან V მოცულობის შიგნით ინტეგრაციის გზით მივიღებთ:

$$F_{x_1} = F'_{x_1}; \quad F_{x_2} = F'_{x_2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad F_{x_3} = F'_{x_3} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (36,8)$$

სადაც

$$F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3} \text{ და } F'_{x_1}, F'_{x_2}, F'_{x_3}$$

სიდიდეები სათანადოთ წარმოადგენენ V მოცულობაში მოთავსებულ მუბტებზე მოქმედი ძალის მდგენელებს K და K' სისტემებში. (36,8) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემაზე მოქმედი F ძალა მართლაც ინვარიანტი არაა. მისი მდგენელები იცვლებიან ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, სახელდობრ, მოძრაობის გასწვრივ ძალის მდგენელი უცვლელია, ხოლო სიჩქარის პერპენდიკულარული მიმართულებით ძალის მდგენელები გარდაიქმნებიან და მიისწრაფიან ნულისაკენ, როცა მოძრაობის სიჩქარე სინათლის სიჩქარეს უახლოვდება ($v \rightarrow c$).

მიღებული შედეგი (36,8) სრულიად ბუნებრივია. მართლაც, მოძრაობის განტოლებაში, საზოგადოთ, ერთ მხარეს გვხვდება ძალის გამოხატულება, რომელიც ტოლობის ნიშნით დაკავშირებულია ნაწილაკის მასისა და აჩქარების ნამრავლთან. ეს უკანასკნელი სახეს იცვლის ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის შედეგად. ამიტომ შესაბამისად ძალაც გარდაქმნას უნდა განიცდიდეს. ამ გარემოებასთან დაკავშირებით ვამბობთ, რომ რაიმე ფიზიკური მოვლენის კანონი ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივეა — ინვარიანტულია, თუ მისი გამოხატველი განტოლების ორივე მხარის გარდაქმნის თვისება ერთი და იგივეა.

§ 37. ენერგია-იმპულსის ტენზორი

იმისათვის, რომ ენერჯიის, იმპულსისა და იმპულსის მომენტის მდგენელების მუდმივობის კანონები ჩავწეროთ ინვარიანტული სახით, საჭიროა მათ მიეცეთ ოთხგანზომილებიანი ფორმა; რისთვისაც უნდა შემოვიღოთ ენერჯიისა და იმპულსის მდგენელების საშუალებით განსაზღვრული ოთხგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორი. ეს ტენზორი აგრეთვე გამოგვადგება სისტემის ენერჯიის, იმპულსისა და სისტემაში მოქმედი მექანიკურ ძალებს შორის კავშირის დასაბუთებლად.

დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის (36,2) განტოლების სახით, მოცემული გვაქვს მექანიკური ძალის კავშირი ელექტრომაგნიტური ველის დამაბულობათა (e, h) და დენის სიმკვრივის j ვექტორებთან. თუ (36,2)-ში (34,4)-დან j_k -ს გამოსახულებას შევიტანთ, მივიღებთ

$$f_i = \frac{1}{4\pi} F_{ik} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i}. \quad (37,1)$$

მოვალდინოთ მიღებული განტოლების მარჯვენა მხარის გარდაქმნა, რისთვისაც გამოვიყენოთ იგივეობა:

$$F_{ik} \frac{\partial F_{il}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{il} F_{ik}) - F_{il} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i}.$$

რადგან მარჯვენა მხარის მეორე შესაქრებში შეჯამება ხდება k და l ინდექსებით, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია მათ ადგილები შევუცვალოთ. თუ k და l ინდექსებს გადავსვამთ და გავითვალისწინებთ რომ F_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორია ($F_{ik} = -F_{ki}$), გვექნება

$$F_{il} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left\{ F_{il} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + F_{ik} \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} \right\} = \frac{1}{2} F_{il} \left\{ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} \right\}.$$

თუ ახლა ლორენცის (37,1) განტოლებას გამოვიყენებთ, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა შემდეგ სახეს მიიღებს

$$F_{il} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (F_{ik} F_{il}) + \frac{1}{2} F_{il} \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l} (F_{ik} F_{il}) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{il}^2).$$

ამგვარად, (37,1) ოთხგანზომილებიანი ძალისათვის ვღებულობთ:

$$f_i = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{ik} F_{il}) + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{il}^2). \quad (37,2)$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება სხვა სახითაც გადავწეროთ, რისთვისაც საკმარისია k და l ინდექსებს ადგილები შევუცვალოთ. თუ იმავე დროს (37,2)-ის მეორე წევრში k შეჯამების ინდექსის ნაცვლად ახალ m ინდექსს შემოვიღებთ და გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}$, მაშინ (37,2)-დან გვექნება

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{4\pi} (F_{il} F_{ik}) + \frac{\delta_{ik}}{16\pi} (F_{il}^2) \right\} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \quad (37,3)$$

სადაც

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{il} F_{ik} + \frac{\delta_{ik}}{4} F_{il}^2 \right\}. \quad (37,4)$$

T_{ik} -ს ენერჯისა და იმპულსის ტენზორი ეწოდება. როგორც (37,4) გამოხატულებიდან სჩანს, T_{ik} სიმეტრიულ ტენზორს წარმოადგენს ($T_{ik} = T_{ki}$). მისი მდგენელები ადვილად შეიძლება გამოვხატოთ ელექტრომაგნიტური ველის e და h ვექტორების მდგენელების საშუალებით. მართლაც, (25,21)-დან ელექტრომაგნიტური ველის F_{ik} ტენზორის მდგენელების (37,4)-ში ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{1}{4\pi} \left(e_1^2 + h_1^2 - \frac{1}{2} (e^2 + h^2) \right) \\
 T_{12} = T_{21} &= \frac{1}{4\pi} (e_1 e_2 + h_1 h_2) \\
 T_{13} = T_{31} &= \frac{1}{4\pi} (e_1 e_3 + h_1 h_3) \\
 T_{14} = T_{41} &= \frac{i}{4\pi} (e_3 h_2 - e_2 h_3) \\
 T_{22} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ e_2^2 + h_2^2 - \frac{1}{2} (e^2 + h^2) \right\} \\
 T_{23} = T_{32} &= \frac{1}{4\pi} (e_2 e_3 + h_2 h_3) \\
 T_{24} = T_{42} &= \frac{i}{4\pi} (e_1 h_3 - e_3 h_1) \\
 T_{33} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ e_3^2 + h_3^2 - \frac{1}{2} (e^2 + h^2) \right\} \\
 T_{34} = T_{43} &= \frac{i}{4\pi} (e_2 h_1 - e_1 h_2) \\
 T_{44} &= \frac{1}{8\pi} (e^2 + h^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (37,5)$$

როდესაც აღებულ V მოცულობაში დამუხტული ნაწილაკები არა გვაქვს, მაშინ ლორენცის ძალის სიმკვრივე ნულის ტოლი იქნება $f_i = 0$, საიდანაც, (37,3) თანახმად, გვექნება:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (37,6)$$

ამგვარად, სივრცეში ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორის ოთხგანზომილებიანი განზღადობა ყოველთვის ნულის ტოლია.

T_{ik} ტენზორის მდგენელების ფიზიკური შინაარსის გამოსარკვევად დავეწროთ (37,3) ძალის მიერ შესრულებული მუშაობის გამოხატულება ოთხგანზომილებიან ფორმაში

$$\int (f_i ds) dx^3 = \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} ds_i dx^3.$$

თუ გამოვიყენებთ (11,4) დამოკიდებულებას, უკანასკნელი განტოლება შეგმდეგი სახით გადაიწერება:

$$\int \frac{d(m' cv_i)}{ds} ds dx^3 = c \int dt \int \frac{\partial T_{in}}{\partial x_n} dx^3 + \frac{1}{i} \int dt \frac{d}{dt} \int T_{i4} dx^3, \quad (37,7)$$

სადაც ინდექსი n ლეზულობს მნიშვნელობებს: $n = 1, 2, 3$.

უკანასკნელი განტოლების მარჯვენა მხარის პირველი წევრის გარდაქმნა გაუს-ოსტროგრადსკის (2,31) ფორმულის მიხედვით გვაძლევს

$$\int d \left\{ m'v_i - \frac{1}{ic} \int T_{i3} \right\} dx^3 = \int dt \oint T_{in} dx^2. \quad (37,8)$$

რადგან უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარეში, დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ, პირველი წევრი იმპულსია, ამიტომ მეორე შესაქრებიც იმპულსი უნდა იყოს.

მატერიალური ნაწილაკის $m'v_i$ იმპულსის ანალოგიათ, სიდიდეს

$$G_i = -\frac{1}{ic} \int T_{i3} dx^3 \quad (37,9)$$

ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსი (მოძრაობის რაოდენობა) ეწოდება.

ანგვარად, სიდიდეები: $-\frac{1}{ic} T_{i3}$ ($i=1, 2, 3, 4$) წარმოადგენენ ელექტრო-

მაგნიტური ველის იმპულსის სიმკვრივის მდგენელებს.

გადავიდეთ (37,8) განტოლების მარჯვენა მხარის ბუნების გამორკვევაზე. რადგან მის მარცხენა მხარეში ჩვენ გვაქვს იმპულსის ცვლილება, ამიტომ მარჯვენა მხარე სათანადოდ ძალის იმპულსს უნდა წარმოადგენდეს. მაგრამ იმის გამო, რომ ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში ინტეგრაცია უნდა ჩავატაროთ აღებული მოცულობის შემომსახურებელ ზედაპირზე (დროის სხვადასხვა მომენტებისათვის). ეს წევრი ნულისაგან განსხვავებული მხოლოდ იმ შემთხვევაში იქნება როდესაც ელექტრომაგნიტური ველი მოქმედებს ზედაპირის ელემენტებზე. ამ ზედაპირული ძალის იმპულსი აღნიშნოთ J_i ით

$$J_i = \int dt \oint T_{in} dx^2. \quad (37,10)$$

საზოგადოდ, G_i და J_i სიდიდეები შესაძლებელია არ ადგენდნ 4 — ვექტორს; მაგრამ, მათი წრფივი ფორმის სათანადო შერჩევის გზით, შეიძლება შევადგინოთ 4 — ვექტორი.

(37,8)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ ზედაპირული ძალების იმპულსი ნულის ტოლია $J_i=0$, მაშინ

$$m'v_i + G_i = \text{Const}, \quad (37,11)$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს დამუხტულ ნაწილაკთა და ელექტრომაგნიტური ველისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის იმპულსის მუდმივობის კანონს. (36,4), (36,5) და (37,3) ფორმულების საშუალებით ადვილად გამოითვლება V მოცულობაში მოთავსებულ მუხტებზე მომქმედი ძალის მიერ დროის ერთეულში შესრულებული მუშაობა

$$A = \int (f v) dx^3 = \frac{c}{i} \int f_4 dx^3 = \frac{c}{i} \left\{ \int \left(\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} \right) dx^3 + \right. \\ \left. + \frac{c}{i} \int \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} dx^3 = \frac{c}{i} \oint T_{4n} dx^2 - \frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} dx^3 \quad (n=1, 2, 3). \right.$$

თუ უკანასკნელ განტოლებაში (37,5)-დან ენერგია-იმპულსის ტენზორის მდგენელებს შევითანო მივიღებთ

$$A = \int (fv) dx^3 = - \frac{d}{dt} \int w dx^3 - \int (\mathcal{S} dx^2). \quad (37,12)$$

სადაც

$$w = T_{44} = \frac{1}{8\pi} (e^2 + h^2). \quad (37,13)$$

ხოლო \mathcal{S} წარმოადგენს ვექტორს რომლის მდგენელებია:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= ic T_{14} = \frac{c}{4\pi} (e_3 h_2 - e_2 h_3) = \frac{c}{4\pi} [e h]_1 \\ S_2 &= ic T_{24} = \frac{c}{4\pi} (e_1 h_3 - e_3 h_1) = \frac{c}{4\pi} [e h]_2 \\ S_3 &= ic T_{34} = \frac{c}{4\pi} (e_2 h_1 - e_1 h_2) = \frac{c}{4\pi} [e h]_3 \end{aligned} \right\} \quad (37,14)$$

ვინაიდან მუშაობა ყოველთვის სრულდება ენერგიის შემცირების ხარჯზე, ამიტომ (37,12) დამოკიდებულების თანახმად, $\frac{d}{dt} \int w dx^3$ წარმოადგენს ალბულის მოცულობის ელექტრომაგნიტური ენერგიის ცვლილების სიდიდეს დროის ერთეულში. (37,12)-დან გამომდინარეობს რომ ელექტრომაგნიტური ენერგია, შეიძლება ორი მიზეზით შეიცვალოს: 1) ელექტრომაგნიტური ენერგიის შემცირების ხარჯზე შესრულდეს მუშაობა და 2) ალბულის მოცულობის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე ადგილი ჰქონდეს ელექტრომაგნიტური ენერგიის დენას უწყვეტი ნაკადის სახით.

მაშასადამე, (37,12) ფორმულაში შემავალი გამოხატულება $\int (\mathcal{S} dx^2)$ წარმოადგენს დროის ერთეულში განსახილველი მოცულობის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე გამავალი ენერგიის რაოდენობას. სათანადოდ \mathcal{S} ვექტორს, რომლის მდგენელები (37,14)-ით განისაზღვრებიან, ენერგიის ნაკადის ვექტორი ეწოდება.

(37,14) სკალარული განტოლებები შეიძლება ერთი ვექტორული განტოლების სახით ჩაეწეროს

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} [e h]. \quad (37,15)$$

ეს ვექტორი სივრცის ყოველ წერტილში განისაზღვრება e და h ვექტორების ადგილობრივი მნიშვნელობებით და გამოხატავს ენერგიის იმ რაოდენობას, რომელიც დროის ერთეულში გადის ფართის ერთეულზე ნორმალის მიმართულებით.

საკითხი ენერგიის ნაკადის ანუ მოძრაობის შესახებ დაახლოებით 70 წლის წინად წამოიჭრა, უშუალოდ ცდებისა და პრაქტიკული დაკვირვებების საფუძველზე. მაგალითად, ჩვენს ყურადღებას იპყრობს მზიდან გამოსხივებული

ენერჯიის დიდ მანძილებზე, დედამიწის ზედაპირამდე, გადაცემის მოვლენა. ცადა, რომ ამ ენერჯიამ, სანამ ის დედამიწამდე მოაღწევდეს, უნდა გაიაროს იმ სივრცეში, რომელიც მზესა და დედამიწას ერთიმეორისაგან აშორებს; ამასთან დაკავშირებით საინტერესო ხდება ენერჯიის მოძრაობის (გადაცემის) გზებისა და კანონების შესწავლა. ამ მიმართულებით პირველი მეცნიერული გამოკვლევები ნ. უმოვის ეკუთვნის.

ჯერ კიდევ 1871 წელს, ენერჯიის შესახებ მოძღვრების ადრინდელ საფეხურზე, უმოვი იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ დეფორმაციის ენერჯია უწყვეტი ნაკადის სახით მიედინება სხივის გასწვრივ — დეფორმაციის გავრცელების მიმართულებით. ენერჯიის ნაკადი რიცხობრივ სივრცის სათანადო წერტილში წნევის სიდიდისა და დეფორმაციის გავრცელების სიჩქარის ნამრავლით გამოიხატება. უფრო გვიან, 1884 წელს, ენერჯიის ნაკადის შესახებ უმოვის დებულება პოინტინგმა გამოიყენა ელექტრომაგნიტური ველისათვის და ამ ველის ენერჯიის ნაკადისათვის მიიღო (37,15) გამოხატულება, რის გამოც მას უმოვ-პოინტინგის ვექტორს უწოდებენ.

განვიხილოთ დამუხტული ნაწილაკებისა და ელექტრომაგნიტური ველის სისტემა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ელექტრომაგნიტური ველი მუშაობას ასრულებს თავისი ენერჯიის შემცირების ხარჯზე, რის შედეგადაც ნაწილაკის ენერჯია \mathcal{E} იზრდება

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \int (f v) dx^3, \quad (37,16)$$

მაშინ (37,8) და (37,12) ფორმულები შემდეგი სახით ჩაიწერებიან:

$$\frac{d}{dt} (p_i + G_i) = e \int T_{in} dx^3. \quad (37,17)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E} + W) = - \oint S_n dx^2. \quad (37,18)$$

(37,17) და (37,18), სათანადოდ, იმპულსისა და ენერჯიის მუდმივობის კანონებს წარმოადგენენ. ამ განტოლებებიდან ნათლად სჩანს, რომ ადგილი აქვს მხოლოდ ნაწილაკისა და ველის სრული იმპულსისა და სათანადოდ სრული ენერჯიის მუდმივობის კანონებს; ნაწილაკის, ანდა ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსები და ენერჯიები ცალცალკე მუდმივობის კანონს არ ემორჩილებიან.

ენერჯიისა და იმპულსის მუდმივობის ეს კანონები უფრო თვალსაჩინო სახით შეიძლება მიღებული იქნენ სამგანზომილებიან ფორმაში. მართლაც, თუ (34,13)-დან განსაზღვრულ მუხტის ρ სიმკვრივეს, მოძრაობის v სიჩქარეს და (36,3)-დან f ლორენცის ძალის მნიშვნელობას (37,16)-ში ჩავსვათ, გვექნება

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \int (f v) dx^3 = \frac{c}{4\pi} \int \left(e, \operatorname{rot} h - \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} \right) dx^3$$

და

$$\frac{dP}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int \left(e \operatorname{div} e - [h \operatorname{rot} h] - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial e}{\partial t} h \right] \right);$$

რომლებიც

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} [e h] = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial e}{\partial t} h \right] + [e \operatorname{rot} e],$$

და

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^2 + h^2) = \left(e \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \right) + c (h \operatorname{rot} e),$$

იგივეობათა გამოყენების გზით შემდეგ სახეზე მიიყვანებიან:

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{dw}{dt} + \frac{c}{4\pi} \int \{ (e \operatorname{rot} h) - h, \operatorname{rot} e \} dx^3. \quad (37,19)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dG}{dt} + \frac{c}{4\pi} \int (e \operatorname{div} e - [h \operatorname{rot} h] - [e \operatorname{rot} e]) dx^3. \quad (37,20)$$

თუ გამოვიყენებთ ვექტორული ანალიზიდან ცნობილ ფორმულებს,

$$\operatorname{div} [e h] = (h \operatorname{rot} e) - (e \operatorname{rot} h),$$

და

$$\operatorname{Div}_1 T = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = e_1 \operatorname{div} e + h_1 \operatorname{div} h - [h \operatorname{rot} h]_1 - [h \operatorname{rot} e]_1,$$

მაშინ ამ უქანასკნელ დამოკიდებულებათა (37,19) და (37,20)-ში ჩასმის შედეგად მივიღებთ (37,17) და (37,18) ფორმულებს.

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიისა და იმპულსის ტენზორი T_{ik} შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_3 \\ -\frac{i}{c} S_1 & -\frac{i}{c} S_2 & -\frac{i}{c} S_3 & w \end{pmatrix}, \quad (37,21)$$

სიდაც T_{ik} ტენზორის სივრცითი მდგენელები $T_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), (35,8)-ს თანახმად, აღებული მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე მომქმედი ძალების იმპულსის მდგენელებს განსაზღვრავენ. ამ ძალებს ზედაპირულ ანუ დაკვიშვლობის ძალებს უწოდებენ. დრო სივრცითი შერეული მდგენელები $T_{i4} = T_{4i}$, საკუთრივ ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მდგენელებია, ხოლო წმინდა დროითი მდგენელი $T_{44} = \frac{1}{8\pi} (e^2 + h^2)$, ამ ველის ენერჯიის სიმკვრივეა. (37,21) გამოხატულებაში შემავალი g_α სიდიდეები ელექტრო-

მაგნიტური ველის იმპულსის სიმკვრივის ვექტორის სივრცითი მდგენელებია ($G_x = \int g_x dx^3$) და განისაზღვრებიან ენერგიის ნაკადის ვექტორის საშუალებით

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{4\pi c} [e h]_1 \\ g_2 &= \frac{1}{4\pi c} [e h]_2 \\ g_3 &= \frac{1}{4\pi c} [e h]_3 \end{aligned} \right\} \quad (37,22)$$

რომლებიც ვექტორული სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$S = c^2 g. \quad (37,23)$$

უკანასკნელიდან კი გამომდინარეობს, რომ ელექტრომაგნიტური ენერგიის ნაკადს ყოველთვის შეესაბამება ველის იმპულსის სიმკვრივე g .

§ 38. ელემენტარული მაგნიტური ველის ენერგია და იმპულსი

წინა პარაგრაფში ენერგიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონების ((35,12) და (35,13)) მისაღებად ჩვენ გამოვიყენეთ გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა (2,31) ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის. ოთხგანზომილებიან სივრცეში ინტეგრაციისა და 4 — ვექტორის ოთხგანზომილებიანი განზღაღობის (div) ოპერაციების ცოტა თუ ბევრად თვალსაჩინო ინტეგრაცეციის მიზნით დავუშვათ, რომ ოთხგანზომილებიანი ტენზორი T_{ik} ნულისაგან განსხვავებულია სივრცის სასრულო ნაწილში. ვთქვათ ამ არეში მისი ოთხგანზომილებიანი განზღაღობა ყველგან ნულის ტოლია $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$, მაშინ ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში ინტეგრალი

$$\int T_{4i} dx^3, \quad (38,1)$$

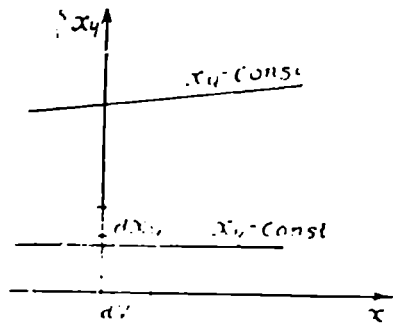
აღებული მთელ განსახილველ მოცულობაზე, ინვარიანტული სიდიდეა. ამ თეორემის დასამტკიცებლად გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა (2,31) ფორმალურად გავავრცელოთ ოთხგანზომილებიან სივრცეზე, რის შედეგადაც გვექნება:

$$\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dx^4 = \int T_{in} dx^3. \quad (38,2)$$

უკანასკნელი განტოლების მარჯვენა მხარეში ინტეგრაცია უნდა მოვახდინოთ ოთხგანზომილებიანი რაიმე სასრულო სივრცის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე. ასეთ საინტეგრაციო სივრცეთ ავირჩიოთ ის მოცულობა, რომელიც შენოსაზღვრულია ორი სამგანზომილებიანი, $x_4 = \text{const}$ და $x'_4 = \text{const}$, სივრცეებით. ეს სივრცეები წარმოადგენენ დროის ლერძების პერპენდიკულიარულ „სიბრტყეებს“.

ამ „სიბრტყეების“ ფართის“ ელემენტებს წარმოადგენენ ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი სივრცის მოცულობის dx^3 ელემენტები (ნახ. 21). ხოლო ოთხგანზომილებიანი სივრცის მოცულობის ელემენტი კი განისაზღვრება „ზედაპირის“ ფართისა და x_4 ღერძზე აღებული „სიგრძის“ ელემენტების ნამრავლის სახით $dx^4 = dx^3 dx_4$. „ზედაპირი“ $d_4 = \text{Const}$ იმით ხასიათდება, რომ მისი ყველა წერტილები ერთდროულ მოვლენებს გამოხატავენ, ასევე უნდა გვესმოდეს $x'_4 = \text{Const}$ ზედაპირისათვისაც ერთდროულობის ცნება.

ავილოთ რაიმე 4 — ვექტორი A_i , შევადგინოთ მისი ოთხგანზომილებიანი განზღაღობა $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ და ოთხგანზომილევ-



ნახ. 21

ბიანი სივრცის სასრულო ნაწილისათვის გამოვიყენოთ გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა (2,31). რადგან $x_4 = \text{Const}$ და $x'_4 = \text{Const}$ „ზედაპირები“ უსასრულობაში მიდიან, ამიტომ გვერდითი ზედაპირებიც სათანადოდ უსასრულობაში იქნებიან მოთავსებული, სადაც ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეები (E და H) ნულის ტოლებია. თუ ამ გარემოებას გავითვალისწინებთ. მაშინ A_i 4 — ვექტორის განზღაღობისათვის გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენების შედეგად, გვერდითი „ზედაპირზე“ აღებული ინტეგრალი მოისპობა, რის გამოც ვექტება

$$\int \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dx^4 = \int A_{i3} dx^3 = \int A_i dx^3 - \int A'_i dx^3, \quad (38,3)$$

სადაც მარჯვენა მხარეში ინტეგრალქვეშა ფუნქციებად A_i 4 — ვექტორის მეოთხე მდგენელებია აღებული, რადგან ისინი $x_4 = \text{Const}$ და $x'_4 = \text{Const}$ „ზედაპირების“ „ნორმალურ“ მდგენელებს წარმოადგენენ. (38,3)-ში $x_4 = \text{Const}$ „ზედაპირზე“ ინტეგრალი აღებულია + ნიშნით, ხოლო $x'_4 = \text{Const}$ „ზედაპირზე“ კი — ნიშნით, ვინაიდან მათ ნორმალებს საწინააღმდეგო მიმართულებები აქვთ.

თუ ახლა დავეშვებთ, რომ საინტეგრაციო სივრცის შიგნით ყოველ წერტილში A_i 4 — ვექტორის განზღაღობა ნულის ტოლია $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$, მაშინ

(38,3)-დან მივიღებთ

$$\int A_i dx^3 = \int A'_i dx^3 = iuv. \quad (38,4)$$

მიღებული პირობა (38,4) შეიძლება გამოვიყენოთ T_{ik} ტენზორის T_{i4} მდგენელებისათვის. მართლაც, რადგან T_{ik} ტენზორის რაიმე მუდმივ B_k ვექტორზე გადამრავლების შედეგად A_i 4 — ვექტორი ჩიილება ($E_k T_{ik} = A_i$), ამიტომ

A_4 — ვექტორისათვის დადგენილი დებულებები აგრეთვე სამართლიანი იქნება T_{ik} ტენზორისთვისაც. მაშასადამე, T_{ik} -თვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int T_{ik} dx^3 = \int T'_{ik} dx'^3 = \text{inv.} \quad (38,5)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ (37,5) თანახმად ენერგია-იმპულსის T_{ik} ტენზორის T_{ik} მდგენელების საშუალებები განისაზღვრება ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის (G_i 4 — ვექტორი, მაშინ (38,5) ტოლობიდან მნიშვნელოვან შედეგს მივიღებთ. სახელდობრ, თუ მუხტებისაგან თავისუფალი V სასრულო ნოცულობის შიგნით ელექტრომაგნიტური ველი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მისი ენერგია და იმპულსი ადგენენ 4 — ვექტორს, რომლის მდგენელები ლორენცის (10,22) ფორმულების მიხედვით გარდაიქმნებიან

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{G'_1 + \frac{v}{c} W'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ G_2 &= G'_2 \\ G_3 &= G'_3 \\ W &= \frac{W' + \frac{v}{c} G'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (38,6)$$

როდესაც გარეშე ელექტრომაგნიტური ველში დამუხტული ნაწილაკია მოთავსებული, მაშინ ელექტრომაგნიტური ველისა და ნაწილაკის იმპულსების გარდაქმნის კანონები არსებითად განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან. ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ (37,8) განტოლება და გამოვიყენოთ (37,9) და (37,3) ტოლობები, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$c \int \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k} dx^4 = -G_1 + c \int dt \oint T_{1n} dx^2 \quad (38,7)$$

$$ic \int \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k} dx^4 = W + \int dt \oint S_n dx^2, \quad (38,8)$$

სადაც G და W სათანადოდ წარმოადგენენ ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის სამგანზომილებიან ვექტორსა და სრულ ენერგიას. უკანასკნელი განტოლებების მარჯვენა მხარეებში მეორე წევრები გამოხატავენ იმპულსისა და ენერგიის ნაკადს ველის მიერ უკავებული მოცულობის შემომსაზღვრელ შეკრულ ზედაპირზე სასრულო დროში.

(38,7) და (38,8) გამოხატულებები, რომლებშიაც ინტეგრაცია დროითა უნდა ჩავატაროთ, დროის აღებულ მომენტში განისაზღვრებიან ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი e და h სიდიდეებით არა მარტო ამ

მომენტებში, არამედ აგრეთვე მათივე მნიშვნელობებით წინა მომენტებშიაც. მაგრამ იმპულსისა და ენერჯიის განსაზღვრის მიხედვით, მათ აზრი აქვთ მხოლოდ აღებული მომენტისათვის და სრულიადაც არ უნდა იყვნენ დამოკიდებული სისტემის წარსულ მდგომარეობებზე — მის ისტორიაზე. რადგან (38,6) და (38,7) განტოლებათა საშუალებით განსაზღვრული ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსი და ენერჯია, ზემოდ აღნიშნულ პირობებს არ აკმაყოფილებენ, ამიტომ ისინი საზოგადოდ არ შეადგენენ ოთხგანზომილებიან ვექტორს, მატერიალური ნაწილაკის ოთხგანზომილებიანი იმპულსის ვექტორისაგან განსხვავებით. ამგვარად ჩვენ იმ დასკვნამდე მივიღივართ, რომ ველის თვისებები, ლორენცის გარდაქმნების მიმართ, განსხვავდებიან ნაწილაკის ანალოგიური თვისებებისაგან. ამაშია ნაწილაკისა და ველის ცნებათა შორის ერთ-ერთი პრინციპიალური განსხვავება, რამაც მექანიკური ინერციული მასის ელექტრომაგნიტური მასით შეცვლის მოსაზრებას გადაულახავი წინააღმდეგობა შეუქმნა. ყოველი მატერიალური ნაწილაკი ხასიათდება გარკვეული სიდიდის მექანიკური—ინერციული მასით, თუ ეს ნაწილაკი დამუხტულია, მაშინ მისი ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიას, ენშტეინის (19,10) კანონის თანახმად,

შესაბამება გარკვეული მასა $m' = \frac{w}{c^2}$, რომელსაც ელექტრომაგნიტური მასა

ეწოდება. ამ თვალსაზრისით ნაწილაკის მექანიკური მასა შეიძლება დაგვეყვანა წმინდა ელექტრომაგნიტურ მასაზე, რაც მხოლოდ იმ შემთხვევაში იქნებოდა დასაშვები, თუ ნაწილაკისა და ველის ძირითადი თვისებები ერთნაირი აღმოჩნდებოდნენ. მაგრამ, როგორც უკვე ვნახეთ, მათი იმპულსისა და ენერჯიის გარდაქმნის კანონები, საზოგადოდ, განსხვავებული არიან. ამიტომ ფარდობითობის თეორიის თვალსაზრისით, მექანიკური — ინერციული მასის ელექტრომაგნიტური მასით შეცვლა შეუძლებელია.

თუ მექანიკური მასა, მატერიალური ნაწილაკის ინერციის იმ თვისების საზომს წარმოადგენს, რომელსაც ის იჩენს მასზე გარეშე ძალის მოქმედების დროს, ელექტრომაგნიტური მასა ანალოგურად, უნდა განვსაზღვროთ როგორც დამუხტული ნაწილაკის ინერციის ის თვისება, რომელსაც ის გამოამჟღავნებს გარეშე ელექტრომაგნიტური ველში ამ უკანასკნელის მოქმედების შედეგად. ელექტრომაგნიტური მასის ასეთნაირად განსაზღვრის შესაბამისად, აუცილებელი ხდება მუხტის საკუთარი ველის გამოყოფა გარეშე ელექტრომაგნიტური ველისაგან.

როგორც ზემოდ ჩვენ გამოვარკვეეთ მუხტის საკუთარი ველის ენერჯია და იმპულსი არ შეადგენენ ოთხგანზომილებიან ვექტორს, რაც გვაიძულებს დამუხტულ ნაწილაკს (ელექტრონს) მივაწეროთ არა ელექტრომაგნიტური წარმოშობის ინერციული მასა.

ცალკეულ შემთხვევებში ველის ენერჯია და იმპულსი ადგენენ ოთხგანზომილებიან ვექტორს. ზემოდ ჩვენ ჩამოვყალიბეთ ის პირობები, რომლებშიც ადგილი აქვს აღნიშნულ თვისებას $\left(\text{თუ } \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \text{ ველის ყოველ წერტილში.} \right)$

და $T_{ik} = 0$ მოცულობის შემომსახლერელ ზედაპირზე, მაშინ სიდიდე $G_i = \frac{i}{c} \int T_{i4} dx^3$ 4-ვექტორია). ამ პირობებს აკმაყოფილებს ელექტრო-მაგნიტური ველი სივრცეში, ამ გარემოებამ, სხვათა შორის, ეინშტეინის საშუალება მისცა ელექტრომაგნიტური ველის ქვანტებისათვის, გარდა ენერჯისა $\mathcal{E} = h\nu$, მიეწერა აგრეთვე იმპულსი $p = \frac{\mathcal{E}}{c}$, რომელიც ენერჯიასთან ერთად 4-ვექტორს აღგენს.

§ 39. ლაშუს თეორემა

იმის გამოსარკვევად თუ რა პირობები უნდა იყოს შესრულებული, იმისათვის, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯია და იმპულსი აღგენდნენ 4-ვექტორს ველში მუხტების არსებობის შემთხვევაში, განვიხილოთ დამუხტული ნაწილაკის, ვთქვათ ელექტრონის, ელექტრომაგნიტური ველი და მოვინახოთ ამ ველის G_i იმპულსის 4-ვექტორის გარდაქმნის კანონი.

ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა K' , რომელშიც ელექტრონი უძრავია. ამ სისტემაში მისი სტატიკური ელექტრული ველი სფერული სიმეტრიით ხასიათდება; ამიტომ T_{ik} ტენზორის არადიაგონალური წევრებისათვის ($i \neq k$), გვექნება

$$\int T'_{ik} dx'^3 = 0, \quad (39.1)$$

ხოლო დიაგონალური, წევრები:

$$\int T'_{11} dx'^3, \quad \int T'_{22} dx'^3, \quad \int T'_{33} dx'^3 \quad \text{და} \quad \int T'_{44} dx'^3,$$

საზოგადოდ, შესაძლებელია ნულისაგან განსხვავებული იყვნენ. ვინაიდან T_{ik} -ს არადიაგონალური მდგენელები მუხტის ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მდგენელებს განსაზღვრავენ. ხოლო დიაგონალური T_{44} —ენერჯიას; ამიტომ უძრავი ელექტრონის შემთხვევაში გვექნება

$$G'_i = 0, \quad G'_4 = \frac{iW'}{c}. \quad (39.2)$$

სადაც

$$W' = \int T'_{44} dx'^3. \quad (39.2a)$$

ელექტროსტატიკური ველის ენერჯიას წარმოადგენს. G_i 4-ვექტორის ტრანსფორმაციის თვისებების გამოსარკვევად გადავიდეთ K' სისტემაზე რობლის მიმართ K' სისტემა მოძრაობს x_1 ღერძის გასწვრივ v სიჩქარით. T_{ik} ტენზორის დიაგონალური მდგენელებისათვის ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები (29,1) მოგვცემენ:

$$T_{14} = - \frac{i \frac{v}{c} (T'_{44} - T'_{11})}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (39,3)$$

$$T_{44} = \frac{T'_{44} - \frac{v^2}{c^2} T'_{11}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (39,4)$$

საიდანაც, (37,9) ფორმულის გამოყენების გზით, მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int (T'_{44} - T'_{44}) dx'^3 \\ G_4 &= \frac{i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int (T'_{44} - \frac{2}{c^2} T'_{11}) dx'^3 \end{aligned} \right\} \quad (39,5)$$

რადგან ფარდობითობის თეორია მოითხოვს, რომ როგორც ნაწილაკის ისევე ველის ენერგია და იმპულსი უნდა ადგენდნენ ოთხგანზომილებიან ვექტორს, ამიტომ G_i იქნება 4 — ვექტორი თუ მისი მდგენელები ლორენცის (10,22) ფორმულების მიხედვით გარდაიქმნებიან.

$$G_i = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \cdot G'_k. \quad (39,6)$$

თუ ახლა (10,22) ფორმულებს გამოვიყენებთ და (39,2) პირობას გავითვალისწინებთ, მაშინ (39,6)-დან მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= - \frac{iv}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} G'_4 = \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int T'_{44} dx'^3 \\ \text{და} \\ G_4 &= \frac{i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int T'_{44} dx'^3 \end{aligned} \right\} \quad (39,7)$$

(37,5) და (37,7) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია და იმპულსი მხოლოდ მაშინ შეადგენენ 4 — ვექტორს, როდესაც შესრულებული იქნება პირობა:

$$\int T'_{11} dx'^3 = 0. \quad (39,8)$$

ეს უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს ლაუეს თეორემის მათემატიკურ გამოხატულებას, რომლის თანახმადაც ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსი G_i მხოლოდ მაშინ ადგენს ოთხგანზომილებიან ვექტორს, როდესაც ელექტრო-

ნის ნიმართ უძრავ K' სისტემაში ენერგია იმპულსის ტენზორის ყველა მდგენელებისათვის, გარდა T'_{44} -სა, სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\int T'_{i4} dx^i = 0. \quad (39,9)$$

ზოლო

$$\int T'_{44} dx^i = W' = \text{Const}, \quad (39,10)$$

W' ელექტრონის საკუთარი ენერგიის სახელწოდებითაა ცნობილი. ამ უკანასკნელიდან ეინშტეინის (19,10) ფორმულის საშუალებით მიიღება ამ ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური მასის სიდიდე

$$m = \frac{W'}{c^2} = \frac{1}{c^2} \int T'_{44} dx^i. \quad (39,11)$$

აღსანიშნავია აგრეთვე ის გარემოება, რომ (39,9) პირობა არა მარტო ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის ხასიათის განმსაზღვრელია, ის იმავე დროს მუხტის (ელექტრონის) წონასწორობის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს. მართლაც, რადგან უძრავი მუხტის სტატიკური ველის შემთხვევაში $T_{\alpha 4} = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), ამიტომ (39,9) პირობა შემდეგი სახით შეიძლება გადაეწეროს:

$$\int T'_{\alpha\beta} dx^i = 0. \quad (39,12)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ იგივეურ დამოკიდებულებებს, მაშინ (37,12) დან ნაწილობითი ინტეგრაციის გზით მივიღებთ

$$\int x'^\alpha \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial x'^\beta} dx^i = 0. \quad (39,13)$$

ვინაიდან, (35,3)-ს თანახმად, სიდიდე $\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial x'^\beta}$ ძალის სიმკვრივეა, (37,13)-ში

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ძალის ვირიალს წარმოადგენს. ეს უკანასკნელი, როგორც ცნობილია, სისტემის კინეტიკური ენერგიის საშუალო მნიშვნელობის პროპორციულია, ამიტომ ძალის ვირიალის ნულთან ტოლობა ნიშნავს, რომ საშუალო კინეტიკური ენერგიაც აგრეთვე ნულია; რაც თავის მხრივ სისტემის (ელექტრონის) სრული მუხტის წონასწორობის პირობას გამოხატავს. ამგვარად, თუ ლაუეს პირობა (37,9) შესრულებულია, მაშინ მუხტის ცალკეულ ელემენტებზე მოქმედი ძალები ერთმანეთს აბათილებენ და ნაწილაკის ენერგისა და იმპულსის 4 — ვექტორი შეიძლება შევცვალოთ მისი ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის 4 — ვექტორით.

§ 40. ელემენტარმაგნიტური ველის იმპულსის მომენტი

37-ე პარაგრაფში ჩვენ შევადგინეთ ელექტრომაგნიტური ველის ენერგისა და იმპულსის ტენზორი T_{ik} , რომლის ოთხგანზომილებიანი განშლადობის ნულთან ტოლობა მუხტებისა და ველისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის ენერგიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონების გამომხატველია.

ახლა გადავიღეთ ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მომენტის განხილვაზე. რადგან ელექტრომაგნიტურ ველს, ისევე როგორც ნაწილაკთა სისტემას, გარკვეული იმპულსი (37,9) გააჩნია, ამიტომ მას აგრეთვე იმპულსის მომენტიც უნდა ჰქონდეს. თუ ნაწილაკთა სისტემის იმპულსის მომენტის (22,7) გამოხატულებაში ნაწილაკების იმპულსების ნაცვლად ველის იმპულსს (37,9) ჩავსვამთ და შეჯამების ნაცვლად ინტეგრაციის ოპერაციას გამოვიყენებთ, მაშინ მივიღებთ ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მომენტს

$$M_{[ik]} = -\frac{i}{c} \int (x_i T_{ik} - x_k T_{ii}) dx^3. \quad (40,1)$$

როგორც ვიცით, ნაწილაკთა იზოლირებული სისტემის იმპულსის მომენტი მუდმივია როდესაც იმპულსის მომენტის ტენზორის ოთხგანზომილებიანი განზღადობა ნულის ტოლია (§ 22). ანალოგიურად, ელექტრომაგნიტური ველისათვის (40,1) გამოსახულების ოთხგანზომილებიანი განზღადობის ნულთან ტოლობა ამ ველის იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონის გამოხატველი იქნება.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ T_{ik} -ს მდგენელები x_i კოორდინატებზე ცხადად არ არიან დამოკიდებული, გვექნება

$$\frac{\partial M_{[ik]}}{\partial x_i} = -\frac{i}{c} \int (\delta_{ii} T_{ik} - \delta_{ik} T_{ii}) dx^3 = 0. \quad (40,2)$$

სადაც: $\delta_{ii} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i}$ და $\delta_{ik} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i}$ კრონეკერის სიმბოლოებია. (40,2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$T_{ki} - T_{ik} = 0 \quad \text{ანუ} \quad T_{ik} = T_{ki}. \quad (40,3)$$

მეზასადაშე, იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს, საჭიროა ენერგია-იმპულსის ტენზორი იყოს სიმეტრიული. რადგან ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორი (37,4) სიმეტრიულია, ამიტომ მისი საშუალებით განსაზღვრული (40,1) იმპულსის მომენტისათვის ყოველთვის ადგილი ექნება მუდმივობის კანონს. ამგვარად, ენერგია-იმპულსის T_{ik} ტენზორის სიმეტრიის თვისება ($T_{ik} = T_{ki}$) მკიდრო კავშირშია იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონთან. ეს ტენზორი ჩვენ მივიღეთ დამუხტულ ნაწილაკებზე მოქმედი (25,8) ძალის გამოხატულებიდან, რომელიც დამოკიდებულია როგორც ელექტრომაგნიტური ველის, ისევე დამუხტული ნაწილაკის თვისებებზე. მისი საშუალებით ჩვენ გარკვევით მუხტებისა და ელექტრომაგნიტური ველის სისტემის ზოგიერთი ფრიად მნიშვნელოვანი თვისებები. ახლა ელექტრომაგნიტური ველის უფრო დაწვრილებით შესასწავლად, განვიხილოთ ველი სიცარიელეში. რა თქმა უნდა, დამუხტული ნაწილაკებისაგან ელექტრომაგნიტური ველის გამოყოფის ცნება პირობითია და საზოგადოდ ერთი მეორისაგან მათი სრული მოწყვეტა არ შეიძლება, მით უმეტეს, რომ ელექტრომაგნიტურ ველსა და ნაწილაკებს შორის პრინციპიალური განსხვავება არ არსებობს. ამის დამადასტურებელ

უღაო ფაქტებს წარმოადგენენ ელექტრონისა და პოზიტრონის, როგორც მატერიალური ნაწილაკების, გადასვლა მატერიის ახალ ფორმაში—ელექტრომაგნიტური ველის ქვანტებად. აგრეთვე ცნობილია შებრუნებული გადასვლის მოვლენებიც, მატერიალურ ნაწილაკებად (ელექტრონ-პოზიტრონად) ქვანტების გარდაქმნის პროცესები. ამ თვალსაზრისით, მატერიალური ნაწილაკების მოძრაობისა და სათანადო ველების განტოლებები ერთი და იგივე უნივერსალური პრინციპიდან გამოგვეყავს (უმცირესი ქმედების პრინციპი) (§ 33). ნაწილაკთა სისტემისა და ველს შორის განსხვავება მხოლოდ იმაში მდგომარეობს, რომ პირველის მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი სასრულოა, მეორისა კი უსასრულო, ამიტომ სათანადოდ ველი აღიწერება დრო სივრცის x_i კოორდინატების უწყვეტი $A_\mu(x_i)$ ფუნქციების საშუალებით.

იმ გზას და მეთოდს, რომლის მიხედვითაც ველის განტოლებათა მისაღებად უნდა გამოვიყენოთ კლასიკური მექანიკის ძირითადი პრინციპები, ე. ი. ვისარგებლოთ კლასიკური მექანიკის ანალოგიებით, კანონიკური ფორმალიზმი ეწოდება. კანონიკურმა ფორმალიზმმა, რომლის მიხედვითაც ველის თეორიაში გადმოტანილია კლასიკურ მექანიკაში ცნობილი, მატერიალურ ნაწილაკთა სისტემის ძირითადი დამახასიათებელი სიდიდეების, მაგალითად, ლაგრანჟისა და ჰამილტონის ფუნქციების განსაზღვრები, საშუალება მოგვცა ნაწილაკთა სისტემის დინამიკის განტოლებათა მსგავსად, ველის განტოლებები მიგველო. ეს გზა მეტად ნაყოფიერი გამოდგა, კერძოდ ელექტრომაგნიტური ველისათვის. მის საფუძველზე მიიღება, რომ ელექტრომაგნიტურ ველს გააჩნია ენერგია (39,2ა) და იმპულსი (37,9). კანონიკური ფორმალიზმის ჩარჩოებში შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ველის განტოლება, ხოლო სათანადო ენერგია-იმპულსის ტენზორის საშუალებით — მუდმივობის კანონები. ახლა გადავიდეთ ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი სიდიდეების კანონიკურ გამოხატულებათა მიღებაზე.

ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის კანონიკური ტენზორის მისაღებად განვიყენოთ ველის ლაგრანჟის ფუნქცია (32,6), საიდანაც (32,2)-ს თანახმად ლაგრანჟის ფუნქციის სიმკვრივისათვის გვექნება

$$L = -\frac{(F_{in})^2}{16\pi} = -\frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_m} \right). \quad (40,4)$$

რადგან (40,4) ლაგრანჟიანი არ შეიცავს A_i პოტენციალებს, ამიტომ ელექტრომაგნიტური ველის შემთხვევაში (24,6) განტოლება მოგვეცემს:

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0. \quad (40,5)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ L , ფუნქცია x_i კოორდინატებზე დამოკიდებულია $\frac{\partial A_i}{\partial x_\mu}$ გამოხატულებათა საშუალებით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right). \quad (40,6)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} &= -\frac{F_{im}}{8\pi} \left\{ \frac{\partial \left(\frac{\partial A_m}{\partial A_i} \right)}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} - \frac{\partial \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_m} \right)}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial x_k}} \right\} = \\ &= -\frac{F_{im}}{8\pi} |\delta_{mi} \delta_{ik} - \delta_{ik} \delta_{mi}| = \frac{-F_{ik} + F_{ik}}{8\pi} = \frac{F_{ik}}{4\pi}; \end{aligned} \quad (40,7)$$

რის შედეგადაც:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{F_{ik}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{F_{ik}}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right) - \\ &- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{F_{ik}}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (40,8)$$

ვინაიდან $\frac{\partial L}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial L}{\partial x_k}$, ხოლო სიცარიელეში $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = 0$, (40,8) ტოლობები შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(-L \delta_{ki} + \frac{F_{ik}}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial T_{ik}^{can}}{\partial x_k} = 0. \quad (40,9)$$

სადაც

$$T_{ik}^{can} = \frac{F_{ik}}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \delta_{ik} L. \quad (40,10)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის კანონიკურ ტენზორის გამოხატულებას. ანალოგიური გზით მიიღება ნებისმიერი ველის ენერჯიისა და იმპულსის კანონიკური ტენზორი.

(40,9) განტოლებიდან, კერძოდ, მიიღება ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონები მართლაც, $k=4$ -თვის ნივთიერებაზე განტოლებას

$$\frac{\partial T_{13}^{can}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}^{can}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}^{can}}{\partial x_3} + \frac{1}{ic} \frac{\partial T_{43}^{can}}{\partial t} = 0, \quad (40,11)$$

ანდა სამგანზომილებიან ფორმაში

$$\text{div } T_k - \frac{i}{c} \frac{\partial T_{4k}}{\partial t} = 0, \quad (40,11 a)$$

საიდანაც ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი მოცულობის dx^3 ელემენტზე გარეაქციებისა და ინტეგრაციის გზით მივიღებთ;

$$\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int T_{4k} dx^3 = \int (T_k dx^3).$$

რადგან უსასრულობაში $T_{ik}{}^{can}$ ტენზორის მდგენელები ისპობიან, ამიტომ უკანასკნელი განტოლებიდან გამომდინარეობს ენერგიის მუდმივობის კანონი

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} dx^3 = 0 \quad \text{ანუ} \quad \int T_{44} dx^3 = \text{Const.} \quad (40,12)$$

ანალოგიური გზით, თუ k ინდექსს მიეცემთ მნიშვნელობებს: $k=1, 2, 3$, მივიღებთ ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მუდმივობის კანონებს.

ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის კანონიკური ტენზორი $T_{ik}{}^{can}$ წარმოადგენს ნაწილაკის ჰამილტონის ფუნქციის განზოგადოებას ველის შემთხვევაზე. ამ ტენზორის $T_{44}{}^{can}$ მდგენელი გვაძლევს ველის ენერგიის სიმკვრივეს ($H=T_{44}$).

(40,10) ფორმულიდან სჩანს, რომ $T_{ik}{}^{can} \neq T_{ki}{}^{can}$, ამიტომ ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მომენტი

$$M_{[ik]} = \frac{i}{c} (x_i T_{k4}{}^{can} - x_k T_{i4}{}^{can}) \quad (40,13)$$

გვაძლევს

$$M_{[ik]} = -M_{[ki]}. \quad (40,13 a)$$

(40,13)-ს ოთხგანზომილებიანი განშლადობა

$$\frac{\partial M_{[ik]}}{\partial x_l} = \frac{i}{c} (T_{ki}{}^{can} - T_{ik}{}^{can}) = \frac{i}{4\pi e} \frac{\partial}{\partial x_l} (A_i F_{kl} - A_k F_{il}) \neq 0, \quad (40,14)$$

რაც ადვილად შეიძლება მივიღოთ თუ სხვაობის

$$T_{ik}{}^{can} - T_{ki}{}^{can} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ik} \frac{\partial A_l}{\partial x_i} - F_{il} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)$$

გამოსახულებაში ჩაესვამთ

$$\frac{\partial A_l}{\partial x_i} = \frac{\partial A_l}{\partial x_l} + F_{il} \quad \text{და} \quad \frac{\partial A_l}{\partial x_k} = \frac{\partial A_l}{\partial x_l} + F_{kl}$$

სიდიდეებს და გამოვიყენებთ (34,4) განტოლებას სიცარიელის შემთხვევაში $\left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} = 0 \right)$.

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ველის „ორბიტალური“ ანუ ჩვეულებრივი მექანიკური იმპულსის მომენტის ოთხგანზომილებიანი განშლადობის ნულთან ტოლობა (40,14) იმის მაჩვენებელია, რომ იმპულსის მომენტი (40,13) არ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს. იმისათვის, რომ ველის იმპულსის მომენტისათვის დაცული იყოს მუდმივობის კანონი, (40,13) „ორბიტალურ“ იმპულსის მომენტს უნდა დაუმატოთ ისეთი გამოსახულება $S'_{[ik]}$, რომ მიღებული ჯამის ოთხგანზომილებიანი განშლადობა ნულის ტოლი იყოს

$$\frac{\partial M'_{[ik]}}{\partial x_l} = 0, \quad (40,15)$$

სადაც

$$M'_{[ik]} = M_{[ik]} + S_{[ik]}. \quad (40,16)$$

ზემოაღნიშნული ოპერაცია ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის კანონიკური ტენზორის სიმეტრიზაციას გამოხატავს. მართლაც, არასიმეტრიული T'_{ik} — ტენზორის სიმეტრიზაციისათვის საჭიროა მას ისეთი T''_{ik} — ტენზორი დაუმატოთ, რომელიც მას სიმეტრიულ ტენზორად გადააქცევს და ამასთან ერთად ენერგიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონებს არ დაარღვევს, ე. ი. დაკმაყოფილებული იქნება პირობა

$$\frac{\partial T''_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

ახლა გამოვარკვიოთ ჩვენს მიერ შემოღებული $S_{[ik]}$ ტენზორის სახე. იმისათვის, რომ შესრულებული იყოს (40,15) პირობა, ამ ტენზორს შემდეგი სახე უნდა ჰქონდეს

$$S_{[ik]} = -S_{[ki]} = -\frac{i}{4\pi c} (A_i F_{ki} - A_k F_{ii}). \quad (40,17)$$

ამ ტენზორით განსაზღვრული იმპულსის მომენტი, რომელიც აუცილებლად უნდა დაუმატოთ ელექტრომაგნიტური ველის „ორბიტალურ“ მომენტს, იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს, დაკავშირებულია ველის შინაგან ბუნებასთან და მას, სათანადოდ საკუთარი, ანუ სპინური მომენტი ეწოდება.

განვსაზღვროთ ელექტრომაგნიტური ველის სპინური მომენტი, რისთვისაც გამოვიყენოთ (40,17) ფორმულა, რომლიდანაც სპინური მომენტის ვექტორის მდგენელების საშუალო მნიშვნელობებისათვის ვლებულობთ:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_1 &= \int S_{[32]}_k dx^3 \\ \bar{S}_2 &= \int S_{[21]}_k dx^3 \\ \bar{S}_3 &= \int S_{[12]}_k dx^3 \end{aligned} \right\}. \quad (40,18)$$

უქანასკნელი ტოლობებიდან კი მიიღება

$$\bar{S} = \frac{1}{4\pi} \int [e A] dx^3. \quad (40,19)$$

განვიხილოთ პერიოდული ელექტრომაგნიტური ველის შემთხვევა, რომლისთვისაც

$$|e| = \frac{1}{c} \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| = \frac{2\pi\nu}{c} |A| \text{ და } |e| = |h|.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ პოლარიზებული ელექტრომაგნიტური ტალღის შემთხვევაში e და A ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორებია, ხოლო ველის ენერგია

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (e^2 + h^2) dx^3,$$

მაშინ \vec{A} სპინურ მომენტსა და $11'$ სრულ ენერგიას შორის შემდეგი კავშირი გვექნება

$$|\vec{A}| = \frac{1}{4\pi} \frac{c}{2\pi\nu} \int e^2 dx^3 = \frac{1}{2\pi\nu} 11'. \quad (40,20)$$

თუ ახლა, პლანკის ჰიპოტეზის თანახმად, დავუშვებთ, რომ $11' = h\nu$, გვექნება

$$|\vec{A}| = \frac{h}{2\pi}. \quad (40,21)$$

მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ველის ქვანტების ანუ ფოტონების სპინური მომენტი, $\frac{h}{2\pi}$ ერთეულში, ერთის ტოლია.

§ 41. კლასიკური ელემენტარული თეორიის არსი

XIX საუკუნის ბოლო წლებში მეცნიერება იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ ყოველი ატომის შემადგენლობაში ელექტრონები უნდა შედიოდნენ. თუმცა ელექტრონულ თეორიას ადრე ჩაეყარა ფიზიკური საფუძვლები, მაგრამ მისი დასრულებული სახით ჩამოყალიბება მხოლოდ ელექტრონის აღმოჩენის შემდეგ მოხდა.

იმ დროს როდესაც ელექტრობისა და მაგნეტიზმის თეორიის უდიდესი შემოქმედელი მეცნიერები ფარადეი და მაქსველი ელექტრულ მუხტთან შედარებით წინ ძალხაზებს აყენებდნენ, ელექტრონთა თეორიის ფუძემდებლის — ლორენცისათვის, არსებითია სიცარიელეში მოძრავი ელექტრული მუხტები.

მაქსველის შეხედულებათა საპირისპიროდ, ორი მატერიალური გარემოს ელექტრული და მაგნიტური თვისებების განსხვავებას ლორენცი ხსნიდა მათ შიგნით ელექტრონებისა და იონების შეკავშირებისა და მოძრაობის მდგომარეობათა სხვადასხვაობით. ლორენცის აზრით, ზოგიერთ მატერიალურ სხეულებში ელექტრონები მტკიცედ არიან მიჯაჭვული იონებთან; ზოგში კი ეს კავშირი გაცილებით სუსტია.

კლასიკური ელექტრონული თეორია, იონების მიმართ ელექტრონების მოძრაობისა და მათი ურთიერთ კავშირის პოსტულირების გზით ხსნიდა არა მარტო ელექტრულ და მაგნიტურ მოვლენებს, არამედ ოპტიკურსაც.

სხეულთა ელექტრული და მაგნიტური თვისებების ასახსნელად საკმარისი არაა ცალკეული ელექტრონის მოძრაობის მდგომარეობისა და თვისებების შესწავლა. რადგან მატერიალური სხეულები შედგებიან იონებისა და ელექტრონების ძალიან დიდი რაოდენობისაგან, ამიტომ საპიროა გავითვალისწინოთ ურთიერთმოქმედებათა ყველა სახეები. მატერიალურ სხეულებში ჩვენ საქმე გვაქვს არა მარტო ელექტრონთა ურთიერთქმედებასთან, ელექტრონები ურთიერთქმედებაში იმყოფებიან აგრეთვე იონებთან. ჩვენ არ შეუდგებოდა ყველა ამ ურთიერთქმედებათა განხილვას, შემოვიხსნაზღვრებით მხოლოდ ცალკეული ელექტრონის მოძრაობისა და თვისებების შესწავლით. შეიძლება პირველი შეხედვით მოგვეჩვენოს, რომ ეს ამოცანა არც თუ ისე რთულია რათა

ის მსჯელობის საგნად გავიხადოთ, მაგრამ მალე დავრწმუნდებით რომ ასეთი შეხედულება მცდარია.

ელექტრონი როგორც ინდივიდიალური ნაწილაკი აღმოჩენილი იქნა ექსპერიმენტულად 1895 წელს. მისი მუხტის, რომელიც ელექტრული მუხტის უმცირეს პორციას — ელექტრობის ატომს წარმოადგენს, და მასის განსაზღვრის შემდეგ ელექტრონის ყველა თვისებები ამოწურულად მიიჩნის; მაგრამ არ გასულა დიდი დრო და ელექტრონმა ახალი — მანამდე სრულიად უცნობი თვისებები გამოამჟღავნა. აღმოჩნდა, რომ ელექტრონის „მასა“ მისი მოძრაობის სიჩქარეზე დამოკიდებული, ის თავის კორპუსკულარულ ბუნებასთან ერთად იჩენს ტალღურ თვისებებსაც, მას აქვს საკუთარი მექანიკური მომენტი ე. წ. „სპინი“. ელექტრონს შეესაბამება მისი სიმეტრიული ნაწილაკი დადებითი მუხტით — პოზიტრონი, რომელთან შეხვედრის დროს ადგილი აქვს ელექტრონ-პოზიტრონის წყვილის მატერიის ახალ ფორმაში — ელექტრომაგნიტური ტალღის ქვანტებში, ანუ ფოტონებში გადასვლას და პირიქით. უკანასკნელ წლებში აღმოჩნდა აგრეთვე, რომ ელექტრონს უნდა გააჩნდეს დანატებითი მაგნიტური მომენტი და სხვა. ელექტრონი ახალ-ახალ თვისებებს ავლენს ახალ პირობებში. ლენინის სიტყვებით რომ ვთქვათ „ელექტრონი ისევე ამოუწურავია, როგორც ატომი“ (ვ. ი. ლენინი, მატერიალიზმი და ემპირიოკრიტიციზმი).

თანამედროვე ეტაპზე მეცნიერებისათვის უცნობია ელექტრონის რადიუსი, თუ კი შეიძლება საერთოდ ამაზე ლაპარაკი, რადგან მისი ფორმის შესახებ სფერულია ის თუ არა, ჯერჯერობით არაფრის თქმა არ შეგვიძლია. ბოლოს თუნდაც ელექტრონის მდგრადობის საკითხიც აგრეთვე აუხსნელია.

კლასიკური ელექტრონთა თეორია უნდა განვიხილოთ, როგორც ელექტრონისა და მაგნიტიზმის მოვლენებზე — ატომ მოლეკულარული თეორიის თავისებური გავრცელება.

მიუხედავად იმისა, რომ ატომის აგებულების მრავალი მოდელი შეიქვალა, მატერიის ელექტრულ აგებულებაზე კლასიკური ფიზიკის ელექტრული თეორიის ძირითადი წარმოდგენები უცვლელი დარჩენ.

ფიზიკაში „კლასიკური“ იმ ეპოქას ეწოდება, როდესაც პრინციპიალურად შესაძლებლად მიაჩნდათ ნებისმიერად მცირე მოცულობებში მიმდინარე მოვლენების შესასწავლად იმ კანონების გამოყენება, რომლებიც შედარებით დიდი (მაკროსკოპიული) მოცულობებისათვის არიან სამართლიანი. მაშასადამე, „კლასიკური ფიზიკის“ თვალსაზრისით მაკროსკოპიულ და მიკროსკოპიულ სივრცეებში პროცესების მიმდინარეობები ერთსა და იგივე კანონებს უნდა ემორჩილებოდნენ, ე. ი. მიკრო და მაკრო პროცესების კანონები ერთი და იგივე უნდა იყვნენ. როგორც ცნობილია, ატომის თეორიაში კლასიკურმა ფიზიკამ სრული მარცხი განიცადა.

მართალია კლასიკურმა ელექტრონულმა თეორიამ, კლასიკურ ფიზიკასთან ერთად, მიკროსამყაროებში (ატომები, მოლეკულები, ატომგული) გამოყენება ვერ პოვა, მაგრამ მისი კვლევადიების შესანიშნავად თვალსაჩინო გზები და მეთოდები დღესაც არ კარგავენ თავიანთ მნიშვნელობებს.

კლასიკური ელექტრონული თეორიის ძირითადი განტოლებები (34,6) ჩვენ იმ დაშვებით მივიღეთ, რომ სამყაროში არსებობენ დამუხტული ნაწილაკები. მათი მოძრაობა გვაძლევს ელექტრულ დენებს, რომლებიც ელექტრომაგნიტურ ველებს წარმოშობენ.

ლორენცის (34,12) განტოლებები, რომლებიც არაეითარ მიახლოებებს არ შეიცავენ, უნდა შევავსოთ ლორენცის ძალის (36,2) გამოსახულებით, რადგან გარდა მუხტების მიერ შექმნილი ველისა ჩვენ გვინტერესებს მუხტზე ველის მოქმედება.

ლორენცის განტოლებებიდან § 38-ში ჩვენ მივიღეთ ენერჯიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონები. ამავე განტოლებებიდან გამომდინარეობს ელექტრული მუხტის მუდმივობის კანონი. მართლაც, (34,7)-დან, x_i -ით მისი გაწარმოების შედეგად გვექნება

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

ამ უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარეში მდგომი წევრი როგორც F_{ik} ანტისიმეტრიული და $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ — სიმეტრიული ტენზორების ნამრავლი, (4,7)-ს თანახმად, ნულის ტოლია; მაშასადავე

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0, \quad (41,1)$$

რომელიც სამგანზომილებიან ფორმაში შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (41,2)$$

ელექტროსტატიკური და მაგნიტოსტატიკური ველები

§ 42. ელემენტარული სისტემები

(34,13) განტოლებათა სისტემით განსაზღვრული ელექტრომაგნიტური ველიდან თავისი სიმარტივით გამოირჩევა „უძრავი“ მუხტის ველი, რომელსაც ელექტროსტატიკური ველი ეწოდება, ანალოგიურად ველს ეწოდება მაგნიტოსტატიკური, თუ ის შექმნილია უძრავი მაგნიტური მუხტების (მაგნიტების) მიერ. ლორენცის განტოლებათა ინერციული სისტემების მიმართ ინვარიანტობის პირობა საშუალებას გვაძლევს მოვინახოთ ველის დამახასიათებელი სიდიდეები ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში თუ განვსაზღვრავთ მას იმ ინერციულ სისტემაში, რომლის მიმართაც მუხტი უძრავია.

„უძრავი“ მუხტის ($v=0$) ელექტრული ველი აღებული სისტემის მიმართ დროში არ იცვლება, ამიტომ e და h ვექტორების დროით წარმოებულები ნულს უნდა გაუტოლოთ. მაშასადამე, ლორენცის (34,13) განტოლებები ელექტრო და მაგნიტოსტატიკური ველების შემთხვევაში შემდეგ მარტივ სახეს მიიღებენ:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} e &= 0 & \operatorname{rot} h &= 0 \\ \operatorname{div} e &= 4\pi\rho & \operatorname{div} h &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42,1)$$

(42,1)-დან გამომდინარეობს, რომ ელექტროსტატიკური ველი მაგნიტოსტატიკურისაგან სრულიად დამოუკიდებელია, ისინი შეიძლება არსებობდნენ ცალ-ცალკე. საზოგადოდ, ელექტრომაგნიტური ველის ეს დაყოფა ფარდობითია, რადგან მუხტის უძრავობა ფარდობითი ცნებაა. თუ დამუხტული მატერიალური ნაწილაკი უძრავია ერთი რომელიმე K' სისტემის მიმართ, მაშინ ის მოძრავი იქნება K' -ს მიმართ, მუდმივი სიჩქარით მოძრავი სისტემების მიმართ, და ამიტომ ამ სისტემებში ელექტრული და მაგნიტური ველების ერთი მეორისაგან გამოცალკევება უკვე აღარ შეიძლება.

დავუშვათ, რომ q წერტილოვანი მუხტი მოთავსებულია უძრავად K' კოორდინატთა სისტემის სათავეში. ამ შემთხვევაში, (24,16)-ს თანახმად, მუხტის სიმკვრივე $\rho = q\delta(x)$ და სათანადოდ (42,1) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} e &= 0 \\ \operatorname{div} e &= 4\pi q\delta(x) \end{aligned} \right\} \quad (42.2)$$

ელექტრული ველის მოსანახავად უნდა ჩავატაროთ (42,2) წრფივი ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრაცია. ველის

დაძაბულობის e ვექტორის მონახვის შემდეგ ადვილად ვიპოვით ენერგია-იმპულსის T_{ik} ტენზორს, რომლის საშუალებითაც შეისწავლება ველის თვისებები.

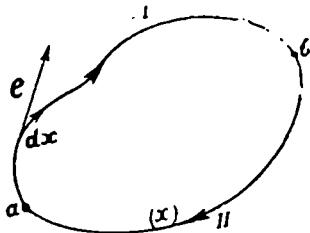
იმისათვის რომ (42,2)-ს პირველი განტოლების ინტეგრაცია ჩავატაროთ გადავიდეთ ელექტროსტატიკური ველის კანონების ინტეგრალურ ფორმაზე. თუ აღებულ განტოლებას სკალარულად გადავამრავლებთ ზედაპირის dx^2 ელემენტზე და ჩავატარებთ ინტეგრაციას რაიმე ზედაპირზე, მაშინ გვექნება

$$\int (\text{rot } e \, dx^2) = 0,$$

საიდანაც, (2,31) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ

$$\oint (e \, dx) = 0. \quad (42,3)$$

ველის დაძაბულობა e , განმარტების თანახმად, წარმოადგენს იმ ძალას, რომლითაც ველი მოქმედებს აღებულ წერტილში მოთავსებულ ერთეულოვან დადებით მუხტზე. ვთქვათ ამ ძალის (ველის) მოქმედების შედეგად მუხტი გადაადგილდა dx მანძილზე. სიდიდე (e, dx) სარმოადგენს იმ მუშაობას, რომელსაც ველი ასრულებს ერთეულოვანი მუხტის dx მანძილზე გადაადგილების დროს; ხოლო $\oint (e \, dx)$ მოგვცემს შეკრულ კონტურზე (გზაზე) ერთეულოვანი მუხტის შემოტარების დროს ელექტრული ველის მიერ შესრულებულ მუშაობას.



ნახ. 22.

(42,3)-ს თანახმად, ელექტროსტატიკურ ველში შეკრულ კონტურზე q მუხტის შემოტარების დროს შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. ცნობილია, რომ თუ რაიმე გამობატულებიდან აღებული ინტეგრალი შეკრულ კონტურზე ნულის ტოლია, მაშინ ინტეგრალქვეშა სიდიდე რაიმე ფუნქციის სრულ დიფერენციალს უნდა წარმოადგენდეს, ე. ი.

$$(e \, dx) = -d\varphi(x_1, x_2, x_3) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3\right),$$

საიდანაც (2,1) და (2,4) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} e &= -\left(i \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + j \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + k \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}\right) = \\ &= -\text{grad } \varphi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (42,4)$$

$\varphi(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციის თვისებების გამოსარკვევად (x) შეკრულ კონტურზე ავიღოთ a და b წერტილები (ნახ. 22). დაეაწესოთ ამ კონტურზე შემოვლის ერთი გარკვეული მიმართულება, მაგალითად, საათის ისრის მოძრაობის

გასწვრივ და გამოვთვალოთ a -დან b -ში $+1$ მუხტის გადატანის დროს ელექტრული ველის მიერ შესრულებული მუშაობა. I გზაზე ეს მუშაობა

$$A_{ab} = \int_a^b (e dx) = - \int_a^b (\nabla \varphi, dx) = \varphi_a - \varphi_b. \quad (42,5)$$

თუ ახლა ველის მოქმედებით იგივე მუხტი b -დან a -ში II გზით გადავა, მაშინ ამ გზაზე შესრულებული მუშაობისათვის გვექნება

$$A_{ba} = \int_b^a (e dx) = \varphi_b - \varphi_a. \quad (42,6)$$

(42,5) და (42,6) გამოხატულებათა შეკრების შედეგად ვღებულობთ

$$A = A_{ab} + A_{ba} = 0. \quad (42,7)$$

ამგვარად, (x) შეკრულ კონტურზე $+1$ მუხტის შემოტარების დროს ელექტროსტატიკური ველის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. მაშასადამე, ელექტროსტატიკურ ველში ელექტრული მუხტის a -დან b წერტილში გადატანის დროს შესრულებული მუშაობა დამოუკიდებელია გზის ფორმაზე და განისაზღვრება გზის საწყისი და ბოლო წერტილების მდებარეობათა მიხედვით.

იმ ველებს, რომლებიც ამ პირობას აკმაყოფილებენ, როგორც ცნობილია, პოტენციალურ ველებს უწოდებენ. ხოლო სათანადო $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციას — ველის პოტენციალს. ამგვარად, ელექტროსტატიკური ველი პოტენციალური ველია.

ელექტროსტატიკურ ველში შეკრულ კონტურზე მუხტის შემოტარების დროს შესრულებული მუშაობის ნულთან ტოლობის (42,3) პირობა შეიძლება აგრეთვე წმინდა ფიზიკური მოსაზრების საფუძველზედაც მივიღოთ. მართლაც, დაეუშვათ, რომ ეს მუშაობა ნულისაგან განსხვავებულია ($A = \oint (e dx) \neq 0$) და წარმოვიდგინოთ, რომ ელექტროსტატიკური ველის მოქმედებით აღებულ კონტურზე მუხტმა მრავალჯერ შემოიარა; მაშინ ველის მიერ შესრულებული მუშაობა შეიძლება გავხადოთ რაგინდ დიდი. მაგრამ მუშაობა, ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად, შეიძლება შესრულდეს ელექტრული ველის ენერგიის შემცირების ხარჯზე. რადგან ველის ენერგია, (37,5) და (39,2a) ფორმულების მიხედვით, ველის დაძაბულობით განისაზღვრება, ამიტომ ეს უკანასკნელი უნდა შემცირდეს ველის ენერგიის შემცირების გამო. ხოლო თუ ველის დაძაბულობა შეიცვლება, მაშინ ის სტატიკური აღარ დარჩება. მაშასადამე, ელექტროსტატიკურ ველში ყოველთვის დაცული უნდა იყოს (42,3) პირობა.

ამგვარად, (42,1) განტოლებათა სისტემით განსაზღვრული ელექტროსტატიკური ველის შესასწავლად საკმარისია შემოვიღოთ დამხმარე პოტენციალური ფუნქცია $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. თითონ ამ ფუნქციას უშუალო ფიზიკური აზრი არა აქვს და ამიტომ მისი ექსპერიმენტული გაზომვის საკითხი თავიდანვე

მოსხნილია. მხოლოდ ველის ორ წერტილში აღებულ φ ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობაა (წარმოებულები) დაკავშირებული ფიზიკურ სიდიდეებთან (42,4).

ჩვენს ამოცანას შეადგენს იმ განტოლების მიღება, რომელსაც $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ აკმაყოფილებს.

§ 43. პუასონის განტოლება

წინა პარაგრაფში ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ ელექტროსტატიკური ველის დასახასიათებლად საკმარისია მოენახოთ $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ პოტენციალური ფუნქცია. თუ ლორენცის (34,7) განტოლებაში (42,4)-დან ჩავესვამთ ρ -ს მნიშვნელობას, მაშინ φ -თვის მივიღებთ განტოლებას

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 4\pi\rho,$$

რომელიც, (2,25)-ს თანახმად, შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\Delta \varphi(x_1, x_2, x_3) = -4\pi\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (43,1)$$

სადაც $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ წარმოადგენს გაწარმოების ლაპლასის ოპერატორს.

(43,1) მეორე რიგის არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას პუასონის განტოლება ეწოდება.

თუ აღებული მოცულობის შიგნით დამუხტული ნაწილაკები არ იმყოფებიან ($\rho=0$), მაშინ (43,1) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (43,2)$$

ამ უკანასკნელს ლაპლასის განტოლება ეწოდება, მისი ამონახსნი გვაძლევს იმ მუხტების მიერ შექმნილი ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალს, რომლებიც აღებული მოცულობის გარეთ მდებარეობენ.

როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, არაერთგვაროვანი (43,1) განტოლების ამონახსნი, (43,2) ერთგვაროვანის ზოგადი და არაერთგვაროვანის კერძო ამონახსნების ჯამის ტოლია; რაც იმას ნიშნავს, რომ (43,1) განტოლების ამონახსნი φ წარმოადგენს აღებული მოცულობის შიგნით და გარეთ მოთავსებული ელექტრული მუხტების მიერ შექმნილი ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალს.

ამგვარად, თუ მუხტების განაწილება ($\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ფუნქცია) ცნობილია, მაშინ პუასონის განტოლების ინტეგრაციის შედეგად მოენახავთ φ -ს. სანამ ზოგად შემთხვევას შევხებოდეთ, განვიხილოთ წერტილოვანი q მუხტის ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი. დავუშვათ, რომ q მუხტი კოორდინატთა სთავეშია მოთავსებული, მაშინ, (31,13)-ს თანახმად, (43,1) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\Delta \varphi = -4\pi q \delta(x). \quad (43,3)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ გრინის ფუნქციის საშუალებით ინტეგრაციის მეთოდი, რომლის თანახმადაც

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \int G(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi^3. \quad (43,4)$$

გრინის $G(x - \xi)$ ფუნქციის ასაგებად, როგორც ცნობილია, არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარე ფორმალურად უნდა გავყოთ ოპერატორზე. თუ ახლა (43,3)-ში ღირაქის $\delta(x)$ ფუნქციის (31,9) გამოხატულებას შევიტანთ და გავითვალისწინებთ, რომ $G(x - \xi)$ გრინის ფუნქციაა აგრეთვე მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს, ე. ი.

$$\Delta G(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) = -\delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3); \quad (43,5)$$

მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} G(|x - \xi|) &= -\Delta^{-1} \delta(|x - \xi|) = \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(k \cdot x - \xi)}}{k^3} d\theta, \end{aligned}$$

საიდანაც, θ და ϕ კუთხეებით ინტეგრაციის შედეგად მივიღებთ

$$G(|x - \xi|) = \frac{1}{4\pi X}; \quad (43,6)$$

სადაც $X = |x - \xi|$ წარმოადგენს დაკვირვების წერტილიდან q მუხტამდე მანძილს. თუ (43,4)-ში (43,6)-დან $G(|x - \xi|)$ ფუნქციის გამოხატულებას ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 4\pi q G(X) = \frac{q}{X}. \quad (43,7)$$

ამგვარად, q წერტილოვანი მუხტის პოტენციალი, სივრცის ადებულ წერტილში განისაზღვრება მუხტის სიდიდისა და მუხტამდე მანძილის შეფარდებით.

(43,7)-დან, (42,4) ფორმულის მიხედვით, ადვილად გამოითვლება q მუხტის ელექტროსტატიკური ველის დაძაბულობა

$$e = -\text{grad } \varphi = \frac{q}{X^2} \text{grad } (X) = \frac{q}{X^3} X. \quad (43,8)$$

ეთქვათ ადებული სასრულო V მოცულობის შიგნით ρ სიმკვრივით განაწილებულია მუხტები. მათი ველის პოტენციალის მოსანახავად, შემდეგნაირად მოვიქცეთ: რაიმე $f \cdot A$ ვექტორისათვის, სადაც f სკალარული ფუნქციაა, დაეწეროთ ოსტროგრადსკ-გაუსის (2,30) ფორმულა და გამოვიყენოთ (2,18) დამოკიდებულება, გვექნება:

$$\int \text{div}(A \cdot f) dx^3 = \int f(A, dx^2) = \int \{f \text{ div } A + (A, \nabla f)\} dx^3.$$

დაეუშვათ, რომ $A = \text{grad } \psi$. ამ გამოხატულების უკანასკნელ ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს:

$$\int f(\nabla \psi, dx^2) = \int \{f \text{ div grad } \psi + (\nabla f, \nabla \psi)\} dx^3. \quad (43,9)$$

თუ ახლა (43,9)-ში f და ψ ფუნქციებს ადგილებს შეუცვლით, მაშინ უშუალო გამოკლების გზით მივიღებთ:

$$\int (f \Delta \psi - \psi \Delta f) dx^3 = \int \left(f \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial f}{\partial n} \right) dx^2. \quad (43,10)$$

ეს უკანასკნელი გრძინის ფორმულის სახელწოდებითაა ცნობილი და სამართ-
ლიანია ნებისმიერი უწყვეტი f და ψ ფუნქციებისათვის, რომელთა პირველი
რიგის წარმოებულებიც აგრეთვე უწყვეტია.

პუასონის განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ (43,10) ფორმულა,
რომელშიაც მივიღოთ, რომ $f = \frac{1}{X}$ ხოლო $\psi = \varphi$, სადაც φ ელექტროსტა-
ტიკური ველის პოტენციალია, გვექნება

$$4\pi \int \left\{ \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{X} + \frac{\varphi}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{X} \right) \right\} d\xi^3 = \int \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{1}{X} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\xi^2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ფუნქცია $\frac{1}{X}$ (43,2) ლაპლასის განტოლებას
აკმაყოფილებს, რაშიაც ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ უშუალო გაწარ-
მოების გზით, მაშინ უკანასკნელი ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს

$$4\pi \int \frac{\rho}{X} d\xi^3 = \int \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{1}{X} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\xi^2. \quad (43,11)$$

რადგან X წარმოადგენს მანძილს დაკვირვების წერტილიდან მუხტის ρdx^3
ელემენტამდე, ამიტომ (43,11)-ში ინტეგრალქვეშა ფუნქციები, ალბუღი მო-
ცულობის შიგნით, გარდა $X=0$ წერტილისა, ყველგან უწყვეტი არიან. მაშა-
სადამე, (43,11) ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ მთელი განსახილველი
მოცულობისათვის თუ ამ უკანასკნელიდან $X=0$ წერტილს ამოვავდებთ. ამი-
სათვის დაკვირვების წერტილის, როგორც ცენტრის ირგვლივ, შემოვწეროთ
ძალიან მცირე x_0 რადიუსიანი სფერო და მის მიერ დაკავებული მოცულობა
 V -დან გამოვრიცხოთ; მაშინ (43,11)-ს მარჯვენა მხარეში ზედაპირული ინტეგ-
რალი სათანადოდ უნდა გავავრცელოთ V მოცულობის შემომსახლვრელ გარე
(σ) და x_0 რადიუსიანი სფეროს (σ_0) ზედაპირებზე, ხოლო მოცულობითი ინტეგ-
რალი — ამ ორი ზედაპირით შემოსაზღვრულ მოცულობაზე. იმისათვის, რომ
 x_0 რადიუსიანი სფეროს გამორიცხვამ მუხტთა სისტემის ველის სიდიდეზე
მნიშვნელოვანი გავლენა არ მოახდინოს (მოცულობის ამოკრა ნიშნავს მის შიგ-
ნით მოთავსებული მუხტების ველის უგულვებელყოფას), საჭიროა ამ სფეროს
მოცულობა (რადიუსი x_0) მივასწარაფოთ ნულისაყენ. ამგვარად, გვექნება

$$4\pi \int \frac{\rho}{X} d\xi^3 = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_{(\sigma_0)} \left\{ \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{1}{X} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\xi^2 + \right. \\ \left. + \int_{(\sigma)} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{1}{X} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\xi^2. \quad (43,12)$$

თუ ახლა საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას გამოვიყენებთ და გავითვალისწინებთ, რომ (43,12)-ს მარჯვენა მხარეში პირველ შესაკრებში საინტეგრაციო ზედაპირის ფართობია $4\pi x_0^2$, რომელზედაც φ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $\bar{\varphi}$ შეიძლება მუდმივად ჩავთვალოთ, ხოლო (σ_0) ზედაპირის ნორმალური ალბებულის სფეროს რადიუსის საწინააღმდეგოდაა მიმართული, მაშინ მივიღებთ

$$4\pi \int \frac{\rho}{X} d\xi^3 = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \left\{ \varphi \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right\} 4\pi x_0^2 + \int_{(\sigma)} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{1}{X_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\xi^2,$$

საიდანაც

$$\bar{\varphi} = \varphi_{\mu}(x_1, x_2, x_3) = \int \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{X} d\xi^3 + \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{1}{X} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} d\xi^2, \quad (43,13)$$

სადაც φ_{μ} წარმოადგენს ველის პოტენციალის მნიშვნელობას P წერტილში,

ხოლო $X = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ — მუხტის ელემენტსა და P წერტილს შორის მანძილს.

რადგან ელექტრული ველი წარმოადგენს ალბებული მოცულობის შიგნით და გარეთ მოთავსებული მუხტების ველების ჯამს, ამიტომ საძიებელი ველის პოტენციალი არ შეიცვლება თუ (43,13)-ში საინტეგრაციო ზედაპირს უსასრულობაში გადავიტანთ. ამ შემთხვევაში ზედაპირული ინტეგრალი მოისპობა, რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, როცა $X \rightarrow \infty$, მიისწრაფის ნულისაკენ როგორც $\frac{1}{X^3}$, ხოლო საინტეგრაციო ზედაპირი მიისწრაფის ∞ -კენ როგორც X^2 . მაშასადამე, (43,13)-დან დაგვრჩება

$$\varphi_{\mu}(x_1, x_2, x_3) = \int \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{X} d\xi^3. \quad (43,14)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ სივრცეში განაწილებული ელექტრული მუხტების ველის პოტენციალი, თუ მათი უწყვეტი განაწილების სიმკვრივე ρ ცნობილია.

ცხადია, რომ მუხტთა წყვეტილი განაწილების შემთხვევაში, $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$. მუხტების ველის პოტენციალის მისაღებად (43,14)-ში ინტეგრაციის ოპერაცია უნდა შევცვალოთ შეჯამებით, გვექნება

$$\varphi = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{X_k}. \quad (43,15)$$

§ 44. მუხტთა სისტემის ენერგია, იონზოუს თეორემა

ვთქვათ მოცემულია ელექტრული მუხტების სისტემა, რომელიც ირგვლივ სივრცეში ჰქმნის ელექტრულ ველს. მოვანახოთ ამ ველის ენერგია. (37,13) და (39,5) ფორმულების თანახმად, ელექტრული ველის ენერგია

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int e^2 dx^3. \quad (44,1)$$

თუ ახლა (2,18) და (42,4) დამოკიდებულებებს გამოვიყენებთ, მაშინ (44,1)-დან ნივთიერება

$$W' = - \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{div} (e\varphi) - \varphi \operatorname{div} e) dx^3. \quad (44,2)$$

(44,2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში პირველი ინტეგრალი, (2,30) ფორმულის საშუალებით, დაიყვანება $\frac{1}{8\pi} \int e\varphi dx^3$ ზედაპირულ ინტეგრალზე, რომელიც საინტეგრაციო (აღებული მოცულობის შემომსახდრელი) ზედაპირის უსასრულობაში გადატანისას მიისწრაფის ნულისაკენ როგორც $\frac{1}{X}$ როცა $X \rightarrow \infty$, ამიტომ (44,2)-დან დაგვრჩება

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} e dx^3. \quad (44,3)$$

საინტეგრაციო ზედაპირი უსასრულობაში გადაგვაქვს იმ მიზნით, რომ აღებული მოცულობა თავის შიგნით მთლიანად მოიცავდეს ყველა მუხტის მიერ შექმნილ ველს. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ფიზიკაში უსასრულობის ცნება ფაქტობრივია. ელექტრული და მაგნიტური მოვლენების შესწავლისას უსასრულო შორეულ წერტილად ვთვლით იმ ადგილს, სადაც ელექტრულ და მაგნიტურ მოქმედებებს პრაქტიკულად ადგილი აღარა აქვთ.

თუ (44,3)-ში $\operatorname{div} e$ -ს ნაცვლად (34,7)-დან ჩავეწერთ $4\pi\rho$ სიდიდეს, ნივთიერება

$$W' = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dx^3, \quad (44,4)$$

რომელიც განსახილველ მოცულობაში მოთავსებული მუხტების ურთიერთქმედების ენერჯიას წარმოადგენს.

მუხტთა წყვეტილი განაწილების შემთხვევაში, მუხტთა სისტემის ელექტრული ენერჯია მიიღება (44,4)-დან ინტეგრაციის ოპერაციის შეჯამების ნიშნით შეცვლის გზით

$$W' = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i, \quad (44,5)$$

აადაც φ_i წარმოადგენს გარდა i -რი მუხტისა ყველა დანარჩენი მუხტების მიერ შექმნილი ველის პოტენციალს იმ წერტილში სადაც q_i მუხტია მოთავსებული.

თუ (43,15) ფორმულას გამოვიყენებთ, მაშინ (44,5) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$W' = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (44,6)$$

რადგან მუხტები განიხილებიან როგორც წერტილოვანი, ამიტომ (44,6)-ში განიხილებული გვაქვს $i = k$ შემთხვევები. თუ დაუშვებთ, რომ $i = k$, მაშინ i -რი

და k -რი მუხტები ერთ წერტილში აღმოჩნდებიან ($x_{ik}=0$) და სათანადო: ენერგია უსასრულო დიდი გახდება.

გამოვთვალოთ ცალკეული q მუხტის ელექტრული ველის, ანუ მოკლედ, q მუხტის ენერგია; რისთვისაც გამოვიყენოთ (42,2) და (42,4) დამოკიდებულებები. (44,4)-დან გვექნება

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \frac{q^2}{x^4} dx^3,$$

საიდანაც, სფერულ კოორდინატებზე გადასვლისა და ინტეგრაციის გზით მიიღება

$$W = \frac{q^2}{8\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{q^2}{2x} \Big|_0^\infty \rightarrow \infty. \quad (44,7)$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, რომ წერტილოვანი მუხტის საკუთარი ენერგია უსასრულო დიდია; რაც ფიზიკურად უაზრობას გამოხატავს. ამ სიძნელის თავიდან ასაცილებლად საკმარისია ნაწილაკს მივაწეროთ გარკვეული მოცულობა, რომლის შიგნით ან ზედაპირზე მუხტია განაწილებული.

თუ ელემენტარული მუხტის მატარებელ ნაწილაკს განვიხილავთ როგორც x_0 რადიუსიან სფეროს, მაშინ მისი ელექტრომაგნიტური ენერგიისათვის (44,7)-დან მივიღებთ:

$$W = \frac{q^2}{2x_0}. \quad (44,8)$$

ამგვარად, თუ ნაწილაკს გარკვეულ — ნულისაგან განსხვავებულ x_0 რადიუსს მივაწეროთ, მაშინ მისი ენერგია სასრულო გახდება; მაგრამ სამაგიეროდ თავს იჩენს ახალი წინააღმდეგობა, დაირღვევა ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი მოთხოვნა — ლორენც ინვარიანტობის პირობა.

ფარდობითობის სპეციალური თეორიის თანახმად ყოველგვარი ურთიერთქმედების გადაცემის სიჩქარე სასრულოა; ის არ შეიძლება აღემატებოდეს სიციარიელეში ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების c სიჩქარეს. გაზობრივ, თხევად ან მყარ სხეულებში ნაწილაკიდან ნაწილაკზე ურთიერთქმედების გადაცემას გარკვეული — ნულისაგან განსხვავებული დრო ესაქიროება. სხეული, რომ აბსოლუტურად მყარი ყოფილიყო¹, მაშინ მის შიგნით ურთიერთქმედება უსასრულო დიდი სიჩქარით გადაეცემოდა.

¹ თუ აბსოლუტურად მყარი სხეულიდან დამზადებულ დისკოს სწრაფ ბრუნვით მოძრაობაში მოვიყვანდით, მაშინ მისი ბაზოვანი ზომები (წრეხაზის სიგრძე და დიამეტრი) არ უნდა შეცვლილიყვნენ. სინამდვილეში, ლორენცის შემოკლების თანახმად, მისი წრეხაზის სიგრძე მნიშვნელოვნად შემცირდება, დიამეტრისა კი არა, რადგან ეს უკანასკნელი ყოველთვის მოძრაობის პერპენდიკულარულადაა მოთავსებული. სათანადოდ, მბრუნავი დისკოს წრეხაზის სიგრძის დიამეტრთან შეფარდება მოგვეცემა π -გან განსხვავებულ რიცხვს. რადგან ყოველი სხეული თავისი მოძრაობის დროს განიცდის რთული სახის დეფორმაციებს, რომლებიც აღებული ნივთიერების გვარობაზეა დამოკიდებული, ამიტომ დისკოს წრეხაზის და დიამეტრის სიგრძეები ისეთნაირად იცვლებიან, რომ მათი შეფარდება გვეძლეოს π -ს. მაშასადამე, ბუნებაში აბსოლუტურად მყარი სხეულები არ შეიძლება არსებობდენ.

თუ შემოვიღებთ ელემენტარული ნაწილაკის (რომელიც არ შეიძლება შედგენილი იყოს უფრო მარტივი ნაწილაკებისაგან) ცნებას, მაშინ მის შიგნით რაიმე სახის დეფორმაცია გავრცელდებოდა უსასრულო დიდი სიჩქარით, რაც ეწინააღმდეგება ფარდობითობის თეორიის ძირითად პრინციპებს. ელემენტარულ ნაწილას რომ სასრულო მოცულობა ჰქონოდა, მაშინ ის დეფორმადი უნდა ყოფილიყო, დეფორმაციების ცნებები კი დაკავშირებულია სხეულის შექადგენელი ნაწილაკების დამოუკიდებელი მოძრაობის მდგომარეობათა არსებობასთან. რადგან ელემენტარული ნაწილაკი არ შეიძლება შედგენილი იყოს, ამიტომ ის არა დეფორმადი, ე. ი. აბსოლუტურად მყარი უნდა იყოს, რაც შეუძლებელია; ამიტომ ყოველი ელემენტარული ნაწილაკი ფარდობითობის თეორიის თვალსაზრისით წერტილოვანია.

ამგვარად, წერტილოვანი მუხტის ენერჯიის განსაზღვრისა და ელექტრონის რადიუსის საკითხებმა გამოააშკარავეს კლასიკური ელექტრომაგნიტური ველის თეორიის ის შინაგანი წინააღმდეგობანი, რომლებიც თავს იჩენენ მიკროსკოპულ მოკულობებში გადასვლისას. აღნიშნულიდან ის დასკვნა უნდა გამოვიტანოთ, რომ კლასიკური თეორია სრულიად გამოუსადეგარია საკმაოდ მცირე მანძილებისათვის. ამ საკითხს ჩვენ ქვევითაც შევეხებით, მისი უალრესად დიდი და პრინციპიალური მნიშვნელობის გამო. და დავადგენთ კლასიკური ელექტრომაგნიტური ველის თეორიის გამოყენების საზღვრებს. აქ კი გამოთვლების გაპარტივების მიზნით მუხტებს წერტილოვნად ჩავთვლით, ხოლო მუხტთა სისტემის სრული ელექტრული ენერჯიის გამოსახულებაში მათ საკუთარ ენერჯიებს არ გავითვალისწინებთ.

(43, 2) ფორმულის მიხედვით მუხტთა სისტემის სრული ენერჯია $\frac{e^2}{5\pi}$ სიმკვრივით განაწილებულია მთელ იმ სივრცეში, სადაც ველი ნულისაგან განსხვავებულია ($e \neq 0$). ამ თვალსაზრისით, (ახლოქმედების პრინციპი) ენერჯია აქვს ველს. (44, 6) დამოკიდებულების მიხედვით კი იგივე ენერჯიის ბატარებელია დამუხტული ნაწილაკები და მანძილზე მათი ურთიერთქმედების ენერჯიას წარმოადგენს. ეს უკანასკნელი წარმოდგენა მანძილზე მოქმედების თეორიას ეკუთვნის და როგორც ვხედავთ ახლო და მანძილზე ქმედების შეხედულებანი, დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემის ელექტრული ენერჯიის შესახებ, ერთიანობისაგან არსებითად განსხვავებული არიან.

ცნობილია, რომ ელექტრული (მაგნიტური) ველი ემორჩილება ე. წ. სუპერპოზიციის პრინციპს, რომლის მიხედვითაც რამოდენიმე მუხტის ელექტრული (მაგნიტური) ველის დაძაბულობა e ცალკეული მუხტების ველების დაძაბულობის ვექტორების ჯამის ტოლია. განვიხილოთ ორი, q_1 და q_2 მუხტი, თუ დაკვირვების წერტილში მათი ველების დაძაბულობებს სათანადოდ აღვნიშნავთ e_1 და e_2 -თი, მაშინ ამ ორი მუხტის მიერ შექმნილი მთლიანი ელექტრული ველის დაძაბულობა

$$e = e_1 + e_2,$$

საიდანაც

$$|e|^2 = |e_1|^2 + |e_2|^2 + 2(e_1 e_2),$$

ბოლო, q_1 და q_2 მუხტების მთლიანი ველის ელექტრული ენერგია

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |e|^2 dx^3 = \frac{1}{8\pi} \int |e_1|^2 dx^3 + \frac{1}{8\pi} \int |e_2|^2 dx^3 + \frac{1}{4\pi} \int (e_1 e_2) dx^3;$$

ანდა

$$W = W_{11} + W_{22} + W_{12}. \quad (44,9)$$

ცხადია, რომ სივრცეში აღებული ყოველი წერტილისათვის ადგილი ექნება შემდეგ პირობას

$$(e_1 - e_2)^2 \geq 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს რომ:

$$|e_1|^2 + |e_2|^2 \geq 2(e_1 e_2),$$

ანუ რაც იგივე

$$W_{11} + W_{22} \geq W_{12}. \quad (44,10)$$

W_{11} და W_{22} სიდიდეები მუხტების საკუთარ ენერგიებს წარმოადგენენ, W_{12} კი — ურთიერთქმედების ენერგიას. ამგვარად, (43,10)-დან გამომდინარეობს, რომ მუხტთა საკუთარი ენერგიების ჯამი აღემატება ურთიერთქმედების ენერგიას, ანდა უკიდურეს შემთხვევაში ამ უქანასკნელის ტოლია.

მუხტთა სისტემის ურთიერთქმედების ენერგიის (43,6) გამოსახულების საშუალებით ადვილად შეიძლება გადავკრათ ამ სისტემის მდგრადობის საკითხი. როგორც ცნობილია, იმისათვის რომ სისტემა წონასწორობაში იყოს საჭიროა ურთიერთქმედების ენერგიას ჰქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა, რისთვისაც (43,6)-ის პირველი წარმოებულები უნდა გაუტოლოთ ნულს, ხოლო მეორე რიგის წარმოებულები ნულზე მეტი უნდა იყოს.

განვიხილოთ (43,6)-ს მეორე რიგის წარმოებულ

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} = \frac{1}{2} \sum q_i q_k \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{X_{ik}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{1}{X_{ik}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{1}{X_{ik}} \right) \right\}.$$

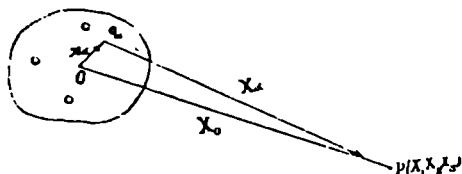
უქანასკნელ ფორმულაში მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია, რადგან ფუნქცია $\frac{1}{X_{ik}}$

ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებს $\left(\Delta \left(\frac{1}{X_{ik}} \right) = 0 \right)$. ამგვარად, მუხტთა

სტატიკური სისტემა არ შეიძლება მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობაში იმყოფებოდეს. ეს დებულება ირწოუს თეორემის სახელწოდებითაც ცნობილი. ნაშასადაამე, მხოლოდ მუხტთა დინამიკური სისტემა შეიძლება იმყოფებოდეს მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობაში, რომლის თვალსაჩინო დადასტურებას დადებითად და უარყოფითად დამუხტული ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემების — ატომების მაგალითზე ვხედავთ.

§ 45. მულტიპოლის კოტენციალი

განვიხილოთ უძრავ მუხტთა სისტემა. დაეუშვათ, რომ იმ მოცულობის ხაზოვანი განზომილება, რომლის შიგნითაც მუხტებია განაწილებული, გაცილებით ნაკლებია დაკვირვების P წერტილამდე მანძილთან შედარებით $x_\alpha \ll X_\alpha$.



ნახ. 23.

(ნახ. 22). იმისათვის, რომ P წერტილში განვსაზღვროთ ალელულ მუხტთა სისტემის მიერ შექმნილი ელექტრული ველის დაძაბულობა ϵ , საჭიროა მოვინახოთ ველის პოტენციალი φ . პოტენციალის გამოსათვლელად კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვათავსოთ მუხტთა სისტემის მიერ დაკავებული მოცულობის შიგნით O წერტილში. O წერტილი შევფართოთ ცალკეულ q_α მუხტებთან და დაკვირვების P წერტილთან. შესაბამისი რადიუსვექტორები აღვნიშნოთ $x_\alpha (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha})$ და X_α -ით, ხოლო ცალკეული მუხტების რადიუსვექტორები P დაკვირვების წერტილის მიმართ — $X_\alpha (X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, X_{3\alpha})$ -ით. P წერტილში მუხტთა სისტემის მიერ შექმნილი ველის პოტენციალი

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{|X_\alpha|} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{|X_0 - x_\alpha|}. \quad (45,1)$$

პირობის თანახმად

$$x_\alpha \ll X_\alpha; \quad (45,2)$$

ამიტომ სიდიდე $\frac{1}{|X_0 - x_\alpha|}$ შეიძლება გავშალოთ ტეილორის მწკრივად $\frac{1}{|X_0|}$ სიდიდის მახლობლობაში.

თუ ჩაწერის გამარტივების მიზნით α ინდექსებს არ დავწერთ, მაგრამ ვიგულისხმებთ შეჯამებას ყველა მუხტების მიხედვით, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \varphi(X_1, X_2, X_3) &= \frac{\sum q}{X_0} - \sum q x_i \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{1}{X} \right)_{X=X_0} + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum q x_i x_k \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \left(\frac{1}{X} \right)_{X=X_0} - \\ &- \frac{1}{3!} \sum q x_i x_k x_l \frac{\partial^3}{\partial X_i \partial X_k \partial X_l} \left(\frac{1}{X} \right)_{X=X_0} + \dots \quad (45,3) \end{aligned}$$

ამგვარად, მუხტთა სისტემის პოტენციალი (45,3) შემდეგი ჯამის სახით წარმოიდგინება

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots \quad (45,4)$$

სადაც

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_0 &= -\frac{\sum q}{X_0} \\
 \varphi_1 &= -\sum q x_i \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{1}{X} \right)_{X=X_0} \\
 \varphi_2 &= \frac{1}{2!} \sum q x_i x_k \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \left(\frac{1}{X} \right)_{X=X_0} \\
 \varphi_3 &= -\frac{1}{3!} \sum q x_i x_k x_l \frac{\partial^3}{\partial X_i \partial X_k \partial X_l} \left(\frac{1}{X} \right)_{X=X_0} \\
 &\dots \\
 \varphi_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum q x_i^{(n_1)} x_k^{(n_2)} x_l^{(n_3)} \frac{\partial^{n_1}}{\partial X_i^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial X_k^{n_2}} \frac{\partial^{n_3}}{\partial X_l^{n_3}} \left(\frac{1}{X_0} \right)_{X=X_0} \\
 &\quad (n_1 + n_2 + n_3 = n)
 \end{aligned} \right\} (45,5)$$

(45,5)-ში φ_n წარმოადგენს qz წერტილოვანი მუხტების პოტენციალს. დანარჩენი სიდიდეების ბუნების განოსარკვევად განვიხილოთ ისინი სათითაოდ.

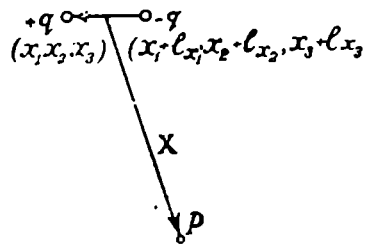
φ_1 შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\varphi_1(X_1, X_2, X_3) = -\sum \left(p, \text{grad} \left(\frac{1}{X} \right)_{X=X_0} \right), \quad (45,6)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა $p = qx$.

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს q მუხტის ნამრავლს O წერტილის მიმართ მის რადიუს ვექტორზე, მას მუხტისა და მანძილის ნამრავლის განზომილება აქვს და ელექტრული დიპოლური მომენტი ეწოდება. ელექტრული დიპოლი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც სიდიდით ტოლი და საწინააღმდეგო ნიშნის ორი მუხტის სისტემა, რომელთა შორის მანძილი (x) გაცილებით ნაკლებია დიპოლიდან დაკვირვების წერტილამდე მანძილთან შედარებით ($x \ll X$) (ნახ. 24).

φ_2 ფუნქციის გამოსახულებაში მამრავლის სახით შედის სიდიდე $q x_i x_k$, რომელსაც მუხტზე ფართის ნამრავლის განზომილება აქვს. ეს გარემოება მიგვივითითებს, რომ φ_2 წარმოადგენს სიბრტყეზე განლაგებული მუხტების ველის პოტენციალს.



ნახ. 24.

თუ ტოლი და საწინააღმდეგო ნიშნის ორი მუხტი დიპოლს შეადგენს, თავის მხრივ სიდიდით ტოლი და ერთმეორისაგან უსასრულოდ მცირე მანძილით დაშორებული საწინააღმდეგო მომენტების მქონე ორი დიპოლისაგან შეიძლება შევადგინოთ ახალი სისტემა,

რომელსაც კვადრუპოლი ეწოდება (ნახ. 25). მაშასადამე, q_2 წარმოადგენს, კვადრუპოლების სისტემის პოტენციალს.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ თითველი კვადრუპოლის პოტენციალი

$$\varphi_{2x} = q_2 \cdot x_{1z} \cdot x_{2z} \frac{\partial^2}{\partial X_{1z} \partial X_{2z}} \left(\frac{1}{X} \right)_{X_0} \quad (45,7)$$

9 შესაკრებს შეიცავს, რომელთა შორის დამოუკიდებელი წევრების რიცხვია 6 $\left(x_i \cdot x_k \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} = \right.$

$$\left. = x_k \cdot x_i \frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_i} \right), \text{ და გარდა ამისა } \frac{1}{X} \text{ თუქცია.}$$

$$(43,2) \text{ განტოლებას აკმაყოფილებს } \left(\Delta \left(\frac{1}{X} \right) = \right.$$

$= 0$), მაშინ (45,7)-ში დამოუკიდებელ შესაკრებთა რიცხვი შემცირდება 5-მდე.

რადგან $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ჩვენ შეგვიძლია დაწვეროთ $\bar{x}_1^2 = \bar{x}_2^2 = \bar{x}_3^2 = \frac{x^2}{3}$ თუ აგრეთვე გავითვალისწინებთ, რომ $x^2_i = x_i \cdot x_k \delta_{ik}$, მაშინ კვადრუპოლის პოტენციალისათვის შემდეგ გამოსახულებას მივიღებთ

$$\varphi_3(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{6} \sum q (3x_i \cdot x_k - \delta_{ik} x^2) \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \left(\frac{1}{X} \right)_{X_0}. \quad (45,8)$$

ამ უქანასკნელში შემავალ

$$D_{ik} = \sum q (3x_i \cdot x_k - \delta_{ik} x^2) \quad (45,9)$$

სიდიდეს სისტემის კვადრუპოლური მომენტი ეწოდება.

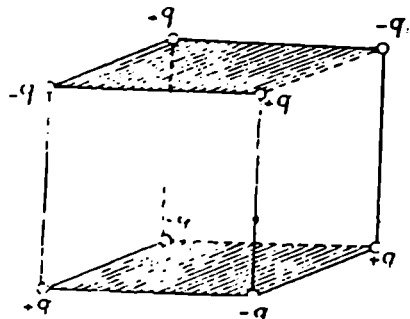
(45,9)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ სივრცეში მუხტები სიმეტრიულად არიან განაწილებული, მაშინ აღებული სისტემის კვადრუპოლური მომენტი ნულის ტოლი იქნება.

როგორც (45,9)-დან სჩანს, D_{ik} მეორე რანგის სამგანზომილებიანი სიმეტრიული ტენზორია. მისი დიაგონალური ელემენტების ჯამი ნულის ტოლია

$$D_{ii} = 0. \quad (45,10)$$

რადგან ეს ტენზორი სიმეტრიულია ($D_{ik} = D_{ki}$), ამიტომ მისი დამოუკიდებელი მდგენელების რიცხვია 5. ანალოგიური გზით შეიძლება მივიღოთ უფრო მაღალი რიგის სისტემების პოტენციალები. ჩვენ არ შეუდგებით მათ დაწვრილებით განხილვას, შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ კვადრუპოლის 180° — კუთხეზე თავის სიბრტყეში შემობრუნებისა და თავისივე სიბრტყის პერპენდიკულარული მიწართულებით კვადრუპოლის ხაზოვანი განზომილების რიგის მანძილზე გადაადგილებით, რომლის დროსაც კვადრუპოლების სიბრტყეები პარალელური რჩებიან, მიიღება 8 მუხტის სისტემა, რომელსაც ოქტუპოლი ეწოდება

(ნახ. 26). ასეთი ოქტუპოლების სისტემას წარმოადგენს მაგალითად NaCl-ის კუბური ფორმის კრისტალები, რომელთა ფუძეები ერთი მეორის მიმართ 180°-ით შემობრუნებულ კვადრუპოლებს წარმოადგენენ. ხოლო კუბის წვეროებში დადებითი (+q) და უარყოფითი (-q) მუხტებია მოთავსებული (ნახ. 26).



ნახ. 26.

φ_3 — სათანადოდ ოქტუპოლის პოტენციალს წარმოადგენს, მის გამოსახულებაში შედიან სივრცეები $q x_i x_i$, რომელთაც მუხტზე მოცულობის ნამრავლის განზომილება აქვთ. მაშასადამე, ოქტუპოლის მუხტები მოცულობაში არიან განლაგებული. ერთი ოქტუპოლის შემობრუნებითა და მეორეში ჩაშენებით მიიღება უფრო მაღალი რიგის მულტიპოლი და ა. შ. ამგვარად, (45,3)-დან გამომდინარეობს, რომ მუხტთა სისტემა დაიყვანება წერტილოვანი მუხტების, დიპოლების, კვადრუპოლების, ოქტუპოლების და უფრო მაღალი რიგის მულტიპოლების სისტემაზე. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $\sum q x = 0$, მაშინ დიპოლთა სისტემის მომენტი $p = \sum e x x$, ინვარიანტულია კოორდინატთა სათაისი არჩევის მიმართ, მართლაც, ვთქვათ ორ სხვადასხვა სისტემაში ერთი და იგივე მუხტების რადიუს ვექტორებია x_α და x'_α ისე, რომ $x_\alpha = x'_\alpha + x_0$. ამ უკანასკნელის დიპოლური მომენტის გამოსახულებაში ჩასმით მივიღებთ: $p = \sum q x x = \sum q x x'_\alpha + x_0 \sum q x = \sum q x x'_\alpha$, რაც p -ს ინვარიანტობის მაჩვენებელია.

§ 46. მუხტთა სისტემის ელექტროსტატიკური ველი და ენერჯია

წინა პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, რომ მუხტთა სისტემა დაიყვანება ცალკეული მუხტების, დიპოლების, კვადრუპოლების, ოქტუპოლების და უფრო მაღალი რიგის მულტიპოლების სისტემაზე, რომელთა პოტენციალებიც (45,5) ფორმულების მიხედვით გამოითვლებიან. სათანადოდ ამ სისტემის ელექტროსტატიკური ველი, (42,4) და (45,4) ფორმულების თანახმად, განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$e = \sum e_n = - \text{grad } \varphi_0 - \text{grad } \varphi_1 - \text{grad } \varphi_2 - \dots \quad (46,1)$$

სადაც

$$e_n = - \text{grad } \varphi_n.$$

გამოვთვალოთ ელექტრული დიპოლების ველი. (45,6)-ის თანახმად, დიპოლის ველის დაძაბულობა

$$\begin{aligned} e_1 &= - \text{grad } \varphi_1 = \text{grad} \left(p, \text{grad} \left(\frac{1}{X} \right) \right) = \\ &= - (p, \kappa) \text{grad} \left(\frac{1}{X^3} \right) - \frac{1}{X^3} \text{grad} (p, \kappa); \end{aligned}$$

თუ ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ $\text{grad} \left(\frac{1}{X} \right) = -\frac{3X}{X^4}$ მნიშვნელობას და (2,24) დამოკიდებულებას გამოვიყენებთ, მაშინ გვექნება:

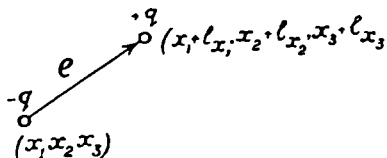
$$\text{grad}_p(\rho, X) = \rho,$$

რადგან დიპოლის მომენტი ρ დაკვირვების წერტილის $X_1 X_2 X_3$ კოორდინატებზე დამოუკიდებელია და $\text{rot} X = 0$.

ამგვარად, დიპოლის ველის დაძაბულობისათვის მივიღებთ

$$e_1 = \frac{3(X, \rho)X - \rho X^2}{X^5}. \quad (46,2)$$

ანალოგიური გზით გამოითვლება მულტიპოლის ველის დაძაბულობა. პრაქტიკაში, უფრო ხშირად, გადამწყვეტ როლს თამაშობენ წერტილოვანი მუხტებისა და დიპოლების ველები. მაგრამ ზოგჯერ, როდესაც დიპოლური მომენტი ნულის ტოლია, ანდა ძალიან მცირეა, აუცილებელი ხდება კვადრუპოლის ველის გათვალისწინება. სხვათაშორის ზოგჯერ ისეც ხდება, რომ კვადრუპოლური ველი მნიშვნელოვნად აღემატება დიპოლურს. წერტილოვანი მუხტის პოტენციალის საშუალებით ადვილად გამოითვლება გარეშე ელექტრულ ველში მოთავსებული ელექტრული დიპოლის ველთან ურთიერთქმედების ენერგია. დიპოლი, როგორც $+q$ და $-q$ მუხტებისაგან შედგენილი სისტემა. გარეშე ელექტრული ველის მხრივ განიცდის ძალის ქმედებას. ამ ძალის ქმედებით დიპოლი საზოგადოდ გადაადგილდება, რომელიც სწორხაზოვანი გადატანისა და ბრუნვით მოძრაობათა ერთობლიობაზე დაიყვანება. დიპოლის მოძრაობათა სახეების გამოსარკვევად მოვნახოთ გარეშე ველისა და დიპოლის ურთიერთქმედების ენერგია, საიდანაც ადვილად მოვნახავთ დიპოლზე მოქმედ ძალას და ამ ძალის მომენტს.



ნახ. 27.

ვთქვათ მოცემულ გარეშე ელექტრულ ველში, რომლის დაძაბულობაა e , მოთავსებულია ელექტრული დიპოლი, $\rho = ql$ მომენტით. მუხტებს შორის მანძილი l — პიოველი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა.

დიპოლის $-q$ მუხტის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_1, x_2, x_3 -ით, მაშინ $+q$ მუხტის კოორდინატები იქნებიან: $x_1 + l_1, x_2 + l_2, x_3 + l_3$ (ნახ. 27). სათანადოდ, გარეშე ველის პოტენციალები $(-q)$ და $(+q)$ მუხტების მოთავსების წერტილებში იყოს $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ და $\varphi(x_1 + l_1, x_2 + l_2, x_3 + l_3)$, მაშინ, (44,5)-ს თანახმად, გარეშე ველში დიპოლის ენერგიისათვის გვექნება

$$W = -q\varphi(x_1, x_2, x_3) + q\varphi(x_1 + l_1, x_2 + l_2, x_3 + l_3).$$

თუ $\varphi(x_1 + l_{x_1}, x_2 + l_{x_2}, x_3 + l_{x_3})$ ფუნქციას გაეშლით ტეილორის მწკრივად (x_1, x_2, x_3) წერტილის მახლობლობაში და შემოვიყენებთ პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრებით (l -ის პირველი ხარისხებით) მივიღებთ:

$$IV = e \left(l_{x_1} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + l_{x_2} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + l_{x_3} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right) = \\ = (q, \text{grad } \varphi) = -(\rho, e). \quad (46,3)$$

(46,3)-ში $e = -\nabla \varphi$ გარეშე ველის დაძაბულობაა იმ ადგილზე, სადაც მოთავსებულია დიპოლი.

გარეშე ელექტრული ველისა და მასში შეტანილი დიპოლის ურთიერთქმედების (46,3) ენერგიის გამოყენების გზით ადვილად მიიღება ის ძალა, რომლითაც გარეშე ელექტრული ველი მოქმედებს მასში შეტანილ დიპოლზე. ცნობილია, რომ პოტენციალურ ველებში ძალა ენერგიის გრადიენტით განისაზღვრება, ე. ი.

$$F = + \text{grad } (\rho, e). \quad (46,4)$$

თუ $\rho = \text{const}$, მაშინ (46,4)-დან, (2,24)-ს თანახმად, მივიღებთ

$$F = (\rho \nabla) e. \quad (46,5)$$

(46,5)-დან გამომდინარეობს, რომ ერთგვაროვანი ელექტრული ველი ($e = \text{const}$) დიპოლზე არ მოქმედებს.

დიპოლზე მომქმედი (46,5) ძალის მომენტისათვის გვექნება

$$N = [\rho, e], \quad (46,6)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ გარეშე ელექტროსტატიკურ ველში დიპოლი ცდილობს შემობრუნდეს და დაიკავოს ისეთი მდებარეობა, რომლის დროსაც მისი დიპოლური მომენტის ρ ვექტორი მიმართული იქნება ველის დაძაბულობის გასწვრივ. თუ ρ და e ანტიპარალელური იქნებიან, მბრუნავი მომენტი (46,6) ნულის ტოლი აღმოჩნდება, მაგრამ წონასწორობის მდგომარეობა არამდგრადი იქნება. ჩვენ აღარ შევხებით კვადრუპოლის ენერგიისა და მასზე მომქმედი ძალის გამოთვლას, რადგან ეს უკანასკნელი უმრავლეს ელექტრულ მოვლენებში შედარებით მცირე როლს ასრულებს.

სვასიონარული და ღინამიქური ელექტრომაგნიტური ველები

§ 47. მუდმივი სიჩქარით მოძრავი მუხტის ველი

წინა პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლეთ „უძრავი“ მუხტისა და მუხტთა სტატიკური სისტემის ველი, მაგრამ იმის გამო, რომ მატერიალური ნაწილაკები მათთან დაკავშირებულ მუხტებთან ერთად მუდამ მოძრაობის მდგომარეობაში იმყოფებიან, ხოლო სტატიკური სისტემის არსებობა, ირწოუს თეორემის თანახმად, გამორიცხულია, ჩვენთვის არსებითია მოძრავი მუხტების ველის განსაზღვრა.

მუდმივი სიჩქარით მოძრავი მუხტის ველი ადვილად მიიღება ლორენცის გარდაქმნების (29,3) და (29,4) ფორმულების საშუალებით, როდესაც ცნობილია „უძრავი“ მუხტის ველი (43,8).

მუდმივი სიჩქარით ($v = \text{const}$) მოძრავი q მუხტის ველის შესასწავლად განვიხილოთ უძრავი K და მის მიმართ v სიჩქარით მოძრავი K' კოორდინატთა სისტემები. დავუშვათ, რომ, q მუხტი მოთავსებულია K' კოორდინატთა სისტემის სათავეში, K და K' სისტემების სათავეები O და O' საწყის $t=0$ მომენტში თანხედენილი არიან, ხოლო ღერძები პარალელური რჩებიან.

K სისტემის მიმართ X_1 ღერძის გასწვრივ v სიჩქარით მოძრავი q მუხტის კოორდინატები t მომენტში იქნებიან: $X_1 = vt$, $X_2 = X_3 = 0$.

რადგან K' სისტემის სათავეში მოთავსებული მუხტი ამ სისტემის მიმართ უძრავია, აზიტომ მის მიერ შექმნილი ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი $\varphi'(X'_1, X'_2, X'_3) = \frac{q}{X'}$, ხოლო $A' = 0$; სადაც $X' = \sqrt{X'^2_1 + X'^2_2 + X'^2_3}$

წარმოადგენს მანძილს მუხტიდან დაკვირვების წერტილამდე.

(43,7)-ს თანახმად, K სისტემაში ველის პოტენციალი

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \frac{\varphi'(X'_1, X'_2, X'_3)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q}{X' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (47,1)$$

K სისტემაში $\varphi(X_1, X_2, X_3)$ პოტენციალის მისაღებად საჭიროა X' გამოვსახოთ X_1, X_2, X_3 კოორდინატების საშუალებით; რისთვისაც საკმარისია გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნების (10,22) ფორმულები, რომლებიც მოგვცემენ

$$X'^2 = \frac{(X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(X_2^2 + X_3^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (47,2)$$

მაშასადამე,

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \frac{q}{\left\{ (X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (X_2^2 + X_3^2) \right\}^{1/2}} \quad (47,3)$$

მიუხედავად იმისა, რომ K' სისტემაში $A' = 0$, K სისტემის მიმართ ველის ვექტორპოტენციალი A ნულისაგან განსხვავებულია. თუ (23,1) ფორმულების მიხედვით, A და φ ფუნქციების საშუალებით, A_i 4 — ვექტორის შევადგენთ და მისი მდგენელებისათვის (10,22) გარდაქმნის ფორმულებს გამოვიყენებთ, გვექნება:

$$A_1 = \frac{A'_1 + \frac{v}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c} \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A_3 = 0, \quad (47,4)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$A(X_1, X_2, X_3) = \frac{v}{c} \varphi(X_1, X_2, X_3). \quad (47,5)$$

გადავიდეთ თანაბრად მოძრაი q მუხტის ველის გამოთვლაზე. რადგან K' სისტემაში q მუხტი უძრავია, ამიტომ ველი ელექტროსტატიკურია, ე. ი.

$$e' = \frac{qX'}{X'^2}, \quad h' = 0. \quad (47,6)$$

K სისტემაში ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობათა მისაღებად გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნების (29,4) და (29,5) ფორმულები, გვექნება

$$e_1 = e'_1 = \frac{qX'_1}{X'^2}; \quad e_2 = \frac{e'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qX'_2}{X'^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$e_3 = \frac{qX'_3}{X'^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

ანდა,

$$e = \frac{q \cdot X' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left\{ (X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (X_2^2 + X_3^2) \right\}^{3/2}}; \quad (47,7)$$

სადაც X' წარმოადგენს $P(X_1, X_2, X_3)$ დაკვირვების წერტილის რადიუსვექტორის q მუხტის მიმართ. რადგან q მუხტი K სისტემის მიმართ მოძრაობს X_1 ღერძის გასწვრივ v სიჩქარით, ამიტომ X' — ვექტორის მდგენელებია: $X_1 - vt$, X_2 , X_3 (ნახ. 28).

(47,7) გამოსახულება შეიძლება უფრო მარტივი სახით გადავწეროთ. ნართლატ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $X_1^2 + X_2^2 = X^{*2} \sin^2 \varphi$, მივიღებთ:

$$(X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (X_2^2 + X_3^2) = X^{*2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \varphi\right),$$

რომლის ჩასმა (47,7)-ში მოგვცემს

$$e = \frac{qX^*}{X^{*3}} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \varphi\right)^{3/2}}. \quad (47,8)$$

ამ უქანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ ელექტრული ველის დაძაბულობის აბსოლუტური სიდიდე დამოკიდებულია მუხტის მოძრაობის მიმართულებაზე. ნართლატ,

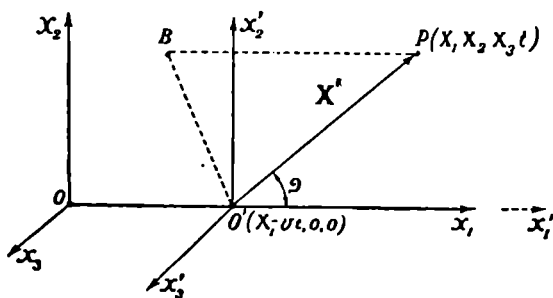
$$|e| = \frac{q}{X^{*2}} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \varphi\right)^{3/2}}. \quad (47,9)$$

განვიხილოთ (47,9) ფორმულის ორი შემთხვევა: 1) $\varphi = 0, \pi$ და 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

პირველ შემთხვევაში (47,9)-დან გვქვებება

$$e_{11} = \frac{q \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{X^{*2}}, \quad (47,10)$$

ე. ი. ველის დაძაბულობის ნდგენელი მოძრაობის მიმართულებით მცირდება, როდესაც ნუხტის სიჩქარე v იზრდება, და მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $v \rightarrow c$.



ნახ. 28.

(47,10) ფორმულით განისაზღვრება თანაბრად მოძრავე q მუხტის ელექტრული ველის დაძაბულობა X_1 ღერძის ($\varphi = 0$) ყოველ წერტილში.

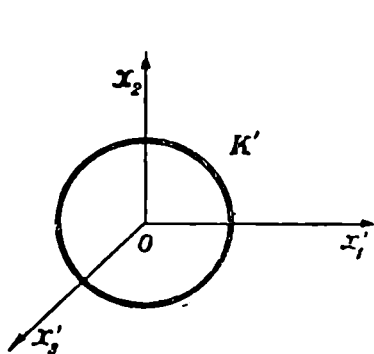
მეორე შემთხვევაში ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) (47,9)-დან მიიღება q მუხტის მოძრაობის სიჩქარის პერპენდიკულარული მიმართულებით ველის დაძაბულობის ვექტორის მდგენელის შემდეგი გამოსახულება

$$e_{\perp} = \frac{q}{X'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (47,11)$$

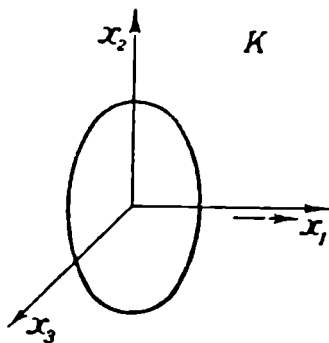
საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მოძრაობის მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში ველის დაძაბულობა იზრდება მუხტის სიჩქარის ზრდასთან ერთად. $e_{\perp} \rightarrow \infty$, როდესაც $v \rightarrow c$.

ამგვარად, უძრავი მუხტის ველი, რომელიც სფერული სიმეტრიით ხასიათდება, მოძრაობის შედეგად განიცდის „შებრტყელებას“ მოძრაობის მიმართულებით და როცა მუხტის სიჩქარე სინათლის სიჩქარეს უახლოვდება ($v \rightarrow c$) მთელი ველი სწრაფად იზრდება და თავს იყრის მოძრაობის მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში, მოძრაობის მიმართულებით კი ველი ისპობა.

თანაბრად მოძრავი მუხტის ველის გეომეტრიული წარმოდგენისათვის ავსაგოთ იზოპოტენციალური ზედაპირები K' და K სისტემებში (ნახ. 29, ნახ. 30).



ნახ. 29.



ნახ. 30.

K' სისტემაში, რომელშიც q მუხტი უძრავია, $\varphi'(X'_1, X'_2, X'_3) = \text{Const}$ იზოპოტენციალურ ზედაპირებს $X'^2_1 + X'^2_2 + X'^2_3 = X'^2 = \text{Const}$ სფეროები წარმოადგენენ. ველის დაძაბულობის e ვექტორი ყოველ წერტილში იზოპოტენციალური ზედაპირის მართობულია (ნახ. 29). K სისტემის მიმართ $v = \text{Const}$ სიჩქარით მოძრავი q მუხტის იზოპოტენციალური ზედაპირების $\varphi(X_1, X_2, X_3) = \text{Const}$ განტოლებიდან, (47,3)-ს თანახმად, იზოპოტენციალური ზედაპირების განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$(X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (X_2^2 + X_3^2) = \text{Const}. \quad (47,12)$$

რადგან $v = \text{Const}$, (47,12) განტოლებით განსაზღვრული იზოპოტენციალური ზედაპირის ფორმა უცვლელია, მისი ცენტრი კი მოძრაობს v სიჩქარით, ამიტომ საკმარისია შევისწავლოთ ზედაპირის ფორმა $t=0$ საწყის მომენტში, გვექნება

$$X^2_1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (X^2_2 + X^2_3) = \text{Const}. \quad (47,13)$$

თუ ახლა ახალ ცვლადებს შემოვიღებთ: $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \frac{\xi_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

$X_3 = \frac{\xi_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, მაშინ (47,13) შემდეგნაირად გადაიწერება

$$\xi^2_1 + \xi^2_2 + \xi^2_3 = \text{Const}, \quad (47,14)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს სფეროს განტოლებას. თუ ახლა ისევ X_1, X_2, X_3 ძველ ცვლადებს დავუბრუნდებით, დავინახავთ, რომ (47,14) სფერო გაქიმულია X_2 და X_3 ღერძების გასწვრივ, ხოლო X_1 ღერძის გასწვრივ ორივე მხრიდან შებრტყელებულია. ამგვარად, (47,12) განტოლებით წარმოდგენილი ზედაპირი გამოხატავს შებრტყელებულ ბრუნვის ელიფსოიდს, რომელც მუხტის სიჩქარის ზრდასთან ერთად თანდათან იკუმშება X_1 ღერძის მიმართულებით, ხოლო იკიმება X_2 და X_3 ღერძების გასწვრივ და ზღვარში, როდესაც $v \rightarrow c$, $X_2 O X_3$ სიბრტყეში გადადის. მაშასადამე, დიდი სიჩქარით ($v \approx c$) მოძრავი მუხტის ველი ძლიერია ეკვატორული სიბრტყის ვიწრო ზოლში ($\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ მცირე ნახლობლობაში). ამ ზოლის სისქე, მუხტის სიჩქარის ზრდასთან ერთად, თანდათან კლებულობს.

§ 48. კონვექციური (ჰივისაიდიის) კოტენციალი

K სისტემაში, (29,8) და (47,6) ფორმულების მიხედვით განსაზღვრული, თანაბრად მოძრავი q მუხტის მაგნიტური ველის დაძაბულობა

$$h = \frac{1}{c} [v e]. \quad (48,1)$$

მცირე სიჩქარეების შეწითხვევაში ($v \ll c$), შემდეგ სახეს ღებულობს

$$h = \frac{q}{c} \frac{|v X|}{X^2}. \quad (48,2)$$

განოვთვალათ ეს ძალა, რომლითაც $v = \text{Const}$ სიჩქარით ნოძრავი q მუხტის ველი მოქმედებს მასთან ერთად ნოძრავ ერთეულოვან მუხტზე. მაგალითად, თუ q და ერთეულოვანი მუხტების მქონე ორი ნაწილაკი მოძრაობს ერთი და იგივე სიჩქარით, $v = \text{Const}$, მაშინ ისინი ერთიმეორეზე იმოქმედებენ ლორენ-

ცის ძალით (36,3), რომელიც ჩვენს შემთხვევაში, (48,1) ფორმულის თანახმად, შემდეგი სახით განისაზღვრება

$$f = e + \frac{1}{c} [v h] = e + \frac{1}{c^2} [v(v e) - v^2 e] = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) e + \frac{v}{c^2} v e, \quad (48.3)$$

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) e_1 + \frac{v^2}{c^2} e_1 = e_1 = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial \varphi(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} \\ f_2 &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) e_2 = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial \varphi(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2} \\ f_3 &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) e_3 = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial \varphi(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3} \end{aligned} \right\} \quad (48.4)$$

ანდა ვექტორული სახით

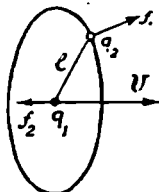
$$f = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \text{grad } \varphi(X_1, X_2, X_3) = - \text{grad } \Psi(X_1, X_2, X_3). \quad (48.5)$$

ამგვარად, v სიჩქარით მოძრავ ერთეულოვან მუხტზე მოქმედი ძალა, e -გან განსხვავებით, პოტენციალურ ველს შეადგენს. ამ ძალის პოტენციალის

$$\Psi = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \varphi = \frac{q \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left\{(X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(X_2^2 + X_3^2)\right\}^{1/2}}. \quad (48.6)$$

იზოზედაპირები (47,12) ბრუნვის შებრტყილებული ელიფსოიდების თანხედრილი არიან.

Ψ ფუნქციას ჰივისაიდის პოტენციალი ეწოდება. მას აგრეთვე კონვექტურ პოტენციალსაც უწოდებენ. ჰივისაიდის პოტენციალის იზოზედაპირები (47,12) მიიღებიან თუ კონცენტრულ სფეროებს შევკუმშავთ მოძრაობის (ჩვენს შემთხვევაში X -ს) მიმართულენით, ორივე მხრიდან. ეს იზოზედაპირები იმით არიან შესანიშნავი, რომ მოძრავი მუხტების ურთიერთქმედების ძალა ყოველთვის მათ პერპენდიკულარულადაა მიმართული ($f = -\text{grad } \Psi$). იმისათვის, რომ მიღებული შედეგიდან ზოგიერთი საინტერესო დასკვნა გამოვიტანოთ, განვიხილოთ ორი q_1 და q_2 მუხტი. ვთქვათ ისინი დამაგრებული არიან რაიმე მატერიალური სხეულისაგან დამზადებული ღეროს ბოლოებზე. თუ ღერო (ე. ი. მუხტები) უძრავია, მაშინ მუხტებს შორის მოქმედი (მიზიდვის ან განზიდვის) ძალა მიმართული იქნება მათი შემაერთებელი სწორი ხაზის — ღეროს გასწვრივ. თუ ახლა ღეროს (მუხტებს) ავაშოვნებთ X_1 ღერძის გასწვრივ, $v = \text{const}$ სიჩქარით, მაშინ ამ მუხტების ურთიერთქმედების ძალები აღარ დაემთხვევიან მათ შემაერთებელ ხაზს, ე. ი.



ნახ. 31.

ღეროს. ეს ძალები, როგორც მე-31-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. ჰივისაიდის პოტენციალის იზოხედაპირის პერპენდიკულარულად იქნებიან მიმართული.

თუ q_1 და q_2 მუხტების ნიშნები ერთნაირია, მაშინ f_1 და f_2 ძალები მიმართული იქნებიან იზოხედაპირის მართობულად გარეთ. ეს ძალები ცდილობენ შემოაპრუნონ ღერო ისე, რომ ის დაემთხვეს ν მოძრაობის სიჩქარის მიმართულებას. პირიქით თუ ამ მუხტებს საწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ, მაშინ f_1 და f_2 ძალები სათანადოდ მიმართული იქნებიან იზოხედაპირის შიგნით და მუხტებზე მათი მოქმედების შედეგად ღერო უნდა შემობრუნდეს ისეთნაირად, რომ ის გადაადგილების მიმართულების პერპენდიკულარულად გაჩერდეს.

მოვინახოთ მომქმედი ძალების მომენტი, რისთვისაც დაეწეროთ მუხტებს შორის ურთიერთქმედების ძალის გამოსახულება $F = -q_1 \text{ grad } \Psi_2$, სადაც Ψ_2 წარმოადგენს მეორე მუხტის ჰივისაიდის პოტენციალის მნიშვნელობას იმ წერტილში, სადაც q_1 მუხტია მოთავსებული. ძალის მომენტისათვის (48,6)-დან მივიღებთ:

$$M = |XF| = - \left[X, \text{ grad } \frac{q_1 q_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left\{ (X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (X_2^2 + X_3^2) \right\}^{1/2}} \right], \quad (48,7)$$

სადაც X მანძილია q_1 და q_2 მუხტებს შორის. თუ დაეუშვებთ, რომ X და ν ვექტორები $X_1 O X_2$ სიბრტყეში არიან განლაგებული, მაშინ X_3 ღერძის გასწვრივ (48,7) ძალის მომენტის მდგენელისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} M_3 &= - \frac{e_1 e_2 (X_1 - vt) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) X_2}{\left\{ (X_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (X_2^2 + X_3^2) \right\}^{3/2}} = \\ &= - \frac{e_1 e_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \sin \theta \sin \theta}{X \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (48,8)$$

მებრუნებელი მომენტი M_3 ისეთი რიგის სიდიდეა, რომელიც გაზომვის სიზუსტის ფარგლებშია, ისე რომ მისი ექსპერიმენტალური გაზომვა შესაძლებელი უნდა იყოს. თუ ელექტრონთა თეორიის ძირითადი განტოლებები სწორია, მაშინ მათ საფუძველზე მიღებული შედეგების სისწორე ცდებმა უნდა დაადასტუროს; მაგრამ ყოველი ცდა, აღმოეჩინათ (48,8) მებრუნებელი მომენტის არსებობა, უშედეგოდ დამთავრდა.

ასევე სრულიად უშედეგო აღმოჩნდა თანაბრად დამუხტული სფეროს ანოძრავების შედეგად მუხტის სიმკვრივის ცვლილების ექსპერიმენტული დადგენის ცდები. თანაბრად დამუხტული სფეროს დიდი სიჩქარით მოძრაობაში მოყვანის დროს, (48,8)-ს მიხედვით, უნდა წარმოიშვას ძალები, რომლე-

ბიკ გამოიწვევენ ელექტრული მუხტების დაგროვებას პოლუსებზე, ხოლო ეკვატორულ (მოძრაობის მიმართულების პერპენდიკულარულ) სიბრტყეში მუხტების განაწილების სიმკვრივე მნიშვნელოვნად უნდა შემცირდეს. სინამდვილეში არც ღეროს შემობრუნებას და არც სფეროს პოლუსებზე ნუხტების დაგროვებას ადგილი არა აქვს, რაც ზუსტი ცდებით დაამტკიცეს ტროუტონმა და ნობლმა. ბუნებრივია წამოიჭრება საკითხი, რა მიზეზითაა გამოწვეული ცდისა და თეორიული გამოთვლების (36,20) შედეგის სრული შეუსაბამობა. ის გარემოება, რომ ცდები არ ადასტურებენ მამბრუნებელი მოწენტის (ღეროსათვის) არსებობას, ანდა მუხტების პოლუსებზე დაგროვებას, კარგ თანხმობაშია ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითად დებულებებთან. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ საშუალება გვქვენებოდა თანაბარი სიჩქარით მოძრაობის მდგომარეობა აღმოგვეჩინა და სათანადოდ აღებული კოორდინატთა სისტემა სხვა ინერციული სისტემებიდან გამოგვეცალკეებოდა; რაც ფარდობითობის სპეციალური თეორიის მიხედვით დაუშვებელია.

ერთი შეხედვით მოგვეჩვენება, რომ ელექტრონული თეორიის ძირითადი განტოლებებიდან გამომდინარე (48,8) შედეგის ექსპერიმენტული დადასტურების შეუძლებლობა თითქოს უფლებას გვაძლევს ევეი შევიტანოთ ლორენცის განტოლებათა სისტემის სისწორეში, მაგრამ ამ განტოლებათა სისწორეში ექვის შეტანა არ შეიძლება, რადგან ისინი ზედმიწევნით კარგად ასახევენ ელექტრომაგნიტური პროცესების მიმდინარეობას სივრცით და დროით, რომ მართო ელექტრული ძალების არსებობის დაშვებით ჩვენ ვერ მოვახერხებთ ელექტრომაგნიტურ მოვლენათა აანსას. ღეროს სპეციფიკური აგებულების გამო მის შიგნით უნდა არსებობდნენ ისეთი მექანიკური ძალები და დიპოლობები, რომელთა მოქმედება აკომპენსირებს მამბრუნებელ ელექტრომაგნიტურ მომენტს. ასევე, თანაბრად დამუხტული სფეროს შემთხვევაში პოლუსებთან მუხტების განაწილების სიმკვრივის ცვლილების ცდებზე შემზნევის შეუძლებლობა ადვილად შეიძლება ახსნათ ნოდრაობის მიმართულებით სფეროს შემოკლების — პოლუსებთან მისი შებრტყელების ეფექტით. ეს უკანასკნელი იწვევს მუხტების დაგროვებას ეკვატორზე. მაშასადამე, მამბრუნებელი ელექტრომაგნიტური მომენტისა და სფეროს შემოკლების ეფექტები ერთმეორეს აკომპენსირებენ.

§ 49. თანაბრად მოძრავი მუხტის იმპულსი. ელექტრომაგნიტური მასა

§ 37-ში ჩვენ განვსაზღვრეთ ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის სიმკვრივე (37,23), რომელიც თანაბრად მოძრავი მუხტის შემთხვევაში, (48,1) ფორმულის თანახმად,

$$g = \frac{1}{4\pi c} [e \dot{h}] = \frac{1}{4\pi c^2} \{v e^2 - e(v \cdot e)\}. \quad (49,1)$$

განვიხილოთ ძალიან დიდი სიჩქარით ($v \simeq c$) მოძრავი ელექტრონი. ის სივრცეში ქმნის ელექტრომაგნიტურ ველს, რომლის ენერგია და იმპულსი (37,5), (37,9), (47,7) და (49,1) ფორმულების თანახმად შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (e^2 + h^2) dx^3 = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ e_1^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (e_2^2 + e_3^2) \right\} dx^3, \quad (49,2)$$

$$G = \frac{1}{c} \int g dx^3 = \frac{1}{4\pi c^2} \int (v e^2 - e(v e)) dx^3. \quad (49,3)$$

განოვთვალეთ იმპულსის მდგენელების საშუალო მნიშვნელობები, გვექნება:

$$\overline{G_1} = \frac{v}{4\pi c^2} \int (\overline{e^2 - e^2_1}) dx^3 = \frac{v}{4\pi c^2} \int (\overline{e^2_2 + e^2_3}) dx^3. \quad (49,4)$$

$$\overline{G_2} = -\frac{v}{4\pi c^2} \int \overline{e_1 e_2} dx^3 = 0. \quad (49,5)$$

$$\overline{G_3} = -\frac{v}{4\pi c^2} \int \overline{e_1 e_3} dx^3 = 0. \quad (49,6)$$

ორი უქანასკნელი გამოსახულების ნულთან ტოლობა გამომდინარეობს სიმეტრიის მოსაზრებიდან (e_1, e_2, e_3 სიდიდეები ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად ლებულობენ \pm ნიშნებს).

(49,4)-დან $\overline{G_1}$ იმპულსის მდგენელის გამოსათვლელად K სისტემიდან, რომლის მიმართაც ელექტრონი მოძრაობს v სიჩქარით, გადავიდეთ K' სისტემაში, სადაც ელექტრონი უძრავია. რადგან K' სისტემაში ელექტრონის ველი ელექტროსტატიკურია, ამიტომ მას სფერული სიმეტრია ახასიათებს, ე. ი. შეიძლება დავწეროთ

$$\overline{e'^2_1} = \overline{e'^2_2} = \overline{e'^2_3} = \frac{1}{3} e'^2. \quad (49,7)$$

K სისტემაში ველის მისაღებად გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის (29,4) ფორმულები, რომლებიც მოგვცემენ

$$e_2 = \frac{e'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad e_3 = \frac{e'_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (49,8)$$

ამასთან ერთად თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ K და K' სისტემებში აღებული მოცულობის ელემენტები (dx^3 და dx'^3) ერთი-მეორესთან დაკავშირებული არიან (11,2) ფორმულით, მაშინ ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯისა და იმპულსისათვის (49,2) და (49,4)-დან მივიღებთ:

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int e'^2 dx'^3. \quad (49,9)$$

$$\int \overline{e'^2_2} dx'^3 = \int \overline{e'^2_3} dx'^3 = \frac{8\pi}{3} W'. \quad (49,10)$$

$$\overline{G_1} = \frac{v}{4\pi c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int (\overline{e'^2_2 + e'^2_3}) dx'^3 = \frac{4}{3} \frac{W'}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (49,11)$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება ჩაიწეროს ვექტორული სახით

$$G = \frac{4}{3} \frac{II'}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (49,12)$$

თუ ახლა v სიჩქარით მოძრავი ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველის (49,12) იმპულსს მატერიალური ნაწილაკის იმპულსის (19,12) გამოსახულებას შევადარებთ, დაინახავთ, რომ (49,12)-ში სიდიდე

$$\frac{4}{3} \frac{II'}{c^2} = III' \quad (49,13)$$

მასის როლს ასრულებს, და ამიტომ მას ელექტრონის ელექტრომაგნიტურ მასას უწოდებენ. ეს უკანასკნელი, (49,13) ფორმულის თანახმად, $\frac{4}{3}$ კოეფიციენტის სიზუსტით წარმოადგენს „უძრავი“ ელექტრონის (საზოგადოდ კი დამუხტული ნაწილაკის) ელექტრული ველის ენერჯიის (II') შეფარდებას c^2 -თან. ამ კოეფიციენტის ფიზიკური შინაარსი ფაქტიურად ჩვენ 39-ე პარაგრაფში გამოვარკვეით, სადაც აღვნიშნეთ, რომ დამუხტული ნაწილაკის (ელექტრონის) მდგრადობისათვის აუცილებელია გარდა ელექტრული ძალებისა მივიღოთ მექანიკური ძალებისა და დაკუმულობათა არსებობა. თუ

ელექტრული ძალების ველს მივაწერთ $\frac{II'}{c^2}$ ელექტრომაგნიტურ მასას, მაშინ, (49,13)-ს თანახმად, მექანიკური ძალების ველს უნდა მივაწეროთ $\frac{1}{3} \frac{II'}{c^2}$

სიდიდის ტოლი მასა.

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, რომ v სიჩქარით მოძრაე ელექტრონის (მუხტის) ელექტრომაგნიტურ ველს ვაჩნია იმპულსი (49,12) და მასა (49,13).

ჯერ კიდევ მეცხრამეტე საუკუნის მეორე ნახევარში მაქსველი, თავისი ელექტრომაგნიტური ველის თეორიის საფუძველზე, იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ სინათლე უნდა აწარმოებდეს წნევას იმ ზედაპირზე, რომელზედაც ის ეცემა.

სინათლის წნევა ექსპერიმენტულად, მეოცე საუკუნის დასაწყისში (1901 — 1902 წ.) პირველად ლებედევმა აღმოაჩინა და მანვე გაზომა მისი სიდიდე.

ლორენცმა და აბრაგამმა, ეინშტეინის ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ჩამოყალიბებამდე უფრო ადრე, მიიღეს ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის გამოსახულება (49,12) სახით; საიდანაც გამომდინარეობს აგრეთვე ელექტრონის სიჩქარეზე ელექტრომაგნიტური მასის დამოუკიდებლობის კანონი

$$m_{ად.} = \frac{m'_{ად.}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (49,14)$$

ამგვარად, ელექტრონს, როგორც მატერიალურ ნაწილაკს, მექანიკური მასის გარდა, (49,12) თანახმად, უნდა გააჩნდეს ელექტრომაგნიტური მასა. ელექტრონის ის მასა, რომელიც ექსპერიმენტულად იზომება და მოვლენებში

მელანდებდა როგორც ერთი გარკვეული ექსპერიმენტული მასა. შეიძლება წარმოვიდგინოთ გექანიკური და ელექტრომაგნიტური მასების ჯამის სახით. ასევე დასაშვებია წარმოვიდგინოთ, რომ ელექტრონის მასა მთლიანად ელექტრომაგნიტური წარმოშობისაა.

მასის ბუნების გამოსარკვევად, მეოცე საუკუნის დასაწყისში, ჩატარებული იყო მრავალი ცდა, რომლებიც მიზნად ისახავდნენ შეემოწმებიათ მასის ცვლილების კანონი (49,14), რადგან ეგონათ, რომ ეს კანონი მხოლოდ ელექტრომაგნიტური მასისათვის უნდა ყოფილიყო სამართლიანი. მაგრამ იმავე პერიოდში ჩამოყალიბებული რელატივისტურ მექანიკის მიერაც დადგენილი იქნა მექანიკური მასის ცვლილების კანონი (49,14) სახით, რამაც შეუძლებელი გახადა ამ პრინციპიალური საკითხის გამორკვევა. რადგან წმინდა თეორიული მოსაზრებები ელექტრონის მასის ნამდვილი ბუნების (მექანიკური ან ელექტრომაგნიტური) გამორკვევის საშუალებას არ იძლევიან, ამიტომ ამ საკითხის გადასაწყვეტად ისევ ცდებსა და ექსპერიმენტებს უნდა მივმართოთ. ახლა გამოვარკვიოთ თუ რა ექსპერიმენტების საფუძველზე შეიძლება აღნიშნული საკითხის გადაკრა. ამისათვის დაუბრუნდეთ ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის (49,12) გამოსახულებას, სადაც ჩვენ გვქონდა

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int e'^2 (X'_1, X'_2, X'_3) dx'^3.$$

X' სისტემაში, სადაც ელექტრონი უძრავია, W' -ს გამოსათვლელად დაევშვათ, რომ ელექტრონი წარმოადგენს x_0 რადიუსიან სფეროს და მთელი ნისი მუხტი განაწილებულია ზედაპირზე თანაბრად. ამ პირობებში მივიღებთ

$$W' = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{q^2}{X^2} dX = \frac{q^2}{2x_0}. \quad (49,15)$$

საიდანაც (49,12)-ის თანახმად, გვექნება

$$G = \frac{2}{3} \frac{q^2 v}{x_0 c^2}. \quad (49,16)$$

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ აღებული x_0 რადიუსიან დამუხტულ სფეროს (ელექტრონს) არ გააჩნია მექანიკური მასა — მისი მასა წმინდა ელექტრომაგნიტური წარმოშობისაა, მაშინ (49,16) დამოკიდებულების მიხედვით, მას მაინც ექნება გარკვეული იმპულსი, რომელიც უნდა შეიძინოს ნაწილაკმა იმისათვის, რომ ის ამოძრავდეს v სიჩქარით. მაშასადამე, დამუხტულ სფეროს (ელექტრონს) უნდა ჰქონდეს გარკვეული ინერციული მასა

$$m' = \frac{2}{3} \frac{q^2}{x_0 c^2}, \quad (49,17)$$

საიდანაც ელექტრონის რადიუსისათვის მივიღებთ

$$x_0 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m' c^2}. \quad (49,18)$$

თუ ამ უკანასკნელი განტოლების მარჯვენა მხარეში ელექტრონის მასის მუხტის და c უნივერსალური სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობებს ჩავსვამთ, მაშინ ელექტრონის რადიუსისათვის გვექნება

$$r_0 \approx 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ სმ.}$$

ეს სიდიდე იმდენად მცირეა, რომ მისი ექსპერიმენტული გაზომვა ჯერჯერობით არ ხერხდება. თუ გამოირკვეა, რომ ელექტრონის რადიუსი აღნიშნული სიდიდის ტოლია, მაშინ ვიტყვი, რომ ელექტრონის მასა წმინდა ელექტრომაგნიტური ბუნებისაა. თუ კი რადიუსი გაცილებით უფრო დიდი აღმოჩნდება, მაშინ მასა მექანიკური ბუნების იქნება.

§ 50. სიჩქარეზე მასის დამოკიდებულების კანონის ექსპერიმენტული შემოწმება

მეოცე საუკუნის დასაწყისში ფიზიკაში დიდი როდენობით დაგროვდა წმინდა თეორიული მოსაზრებებიდან გამომდინარე დებულებები, რომლებიც ექსპერიმენტულ შემოწმებას მოითხოვდნენ. კერძოდ, მეცნიერებას უნდა დაედგინა სიჩქარის მიხედვით მასის ცვლილების კანონი (19,14). სათანადო ექსპერიმენტები ემყარებიან დიდი სიჩქარით მოძრავე დამუხტულ ნაწილაკებზე ელექტრული და მაგნიტური ველების მოქმედებაზე.

§ 28-ში ჩვენ შევისწავლეთ მუხტის მოძრაობა პარალელურ ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში და გამოვარკვიეთ, რომ ასეთ ველებში გავლის შემდეგ ნაწილაკების საწყისი სიჩქარის პეოპენდიკულარულად მოთავსებულ ეკრანზე დაცემის წერტილების გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს პარაბოლი; როდესაც ყველა ნაწილაკებს ერთი და იგივე ხვედრითი მუხტი აქვთ $\left(\frac{q}{m} = \text{Const}\right)$.

პარაბოლის წვეროსთან ახლოს ეცემიან ყველაზე დიდი სიჩქარის ($v \approx c$) მქონე ნაწილაკები, ხოლო პარაბოლის შორეულ წერტილებში კი მოხვდებიან მცირე სიჩქარეებით მოძრავე ნაწილაკები.

მეორე შემთხვევა, როდესაც ერთი და იგივე სიჩქარეებით მოძრავე ნაწილაკების კვალი ეკრანზე კოორდინატთა სათავეზე გამავალი სწორი ხაზია, ახალს არაფერს არ მოგვცემს; ამიტომ განვიხილოთ პირველი შემთხვევა.

§ 28-ში ჩვენ მხედველობაში არ მიგვიღია მატერიალური ნაწილაკის მასის ცვლილება მისი სიჩქარის მიხედვით. თუ ახლა მასის ცვლილებას გავითვალისწინებთ, მაშინ იქ მიღებული პარაბოლები თავიანთ სახეებს შეიცვლიან.

ჯერჯერობით გამოვარკვიოთ როგორი იქნება პარაბოლის ფორმის ცვლილება, რისთვისაც ავავაგოთ შეცვლილი ანუ დამახინჯებული პარაბოლი, შემდეგ კი ისინი შევადაროთ ექსპერიმენტულ მრუდებს. თუ ადგილი ექნება მათ დამთხვევას, მაშინ ვიტყვი, რომ სიჩქარეზე მასის დამოკიდებულების (19,14) ანდა (49,14) კანონი სწორია; წინააღმდეგ შემთხვევაში ექსპერიმენტული მრუდების ანალიზის საფუძველზე მოგვიხდება ახალი დამოკიდებულების მონახვა.

ისევე როგორც § 28-ში, e და h ვექტორები მიემართოთ. x_1 ლერძის გასწვრივ, ხოლო ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტების (ელექტრონების) შესვლამდე მათი სიჩქარეები x_3 ლერძის გასწვრივ იყოს მიმართული.

თუ წინასწარ გავითვალისწინებთ, რომ ელექტრული და მაგნიტური ველები მუხტებს გადახრიან სათანადოდ x_1 და x_2 ლერძების მიმართულებებით, მაშინ მუხტის მოძრაობის შესასწავლად საკმარისი იქნება ორი განტოლება, რომლებსაც, (18,9) ფორმულის თანახმად, შემდეგი სახე ექნებათ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m'v_{x_1}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = qe \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m'v_{x_2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{q}{c} h v_{x_3} \end{aligned} \right\} \quad (50,1)$$

რადგან q მუხტის სიჩქარე ძალიან დიდია ($v \simeq c$) და ველში შესვლამდე ის მიმართულია x_3 ლერძის გასწვრივ, ხოლო x_1 და x_2 ლერძების გასწვრივ სიჩქარეთა მდგენელები v_{x_1} და v_{x_2} , გამოწვეული ელექტრული და მაგნიტური ველების მოქმედებით, ძალიან მცირე სიდიდეებს წარმოადგენენ საწყის სიჩქარესთან შედარებით ($v_{x_1} \ll v$, $v_{x_2} \ll v$), ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ პრაქტიკულად $v_{x_3} = v = \text{Const}$.

(50,1) განტოლებათა ინტეგრაცია, $x_1 = x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ როცა $t=0$ საწყის პირობებში მოგვცემს:

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{qe}{m'} \frac{l}{v^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (50,2)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{qh}{m'c} \frac{l^2}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (50,3)$$

რომლებიდანაც ადვილად მიიღება შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h v}{e c}. \quad (50,4)$$

და

$$\frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{1}{2} \frac{q}{m'} \frac{h^2}{e} \frac{l^2}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (50,5)$$

თუ (50,4) და (50,5) განტოლებებიდან v სიჩქარეს გამოვრიცხავთ, მაშინ x_1 და x_2 სიდიდეების მიმართ მივიღებთ მეოთხე რიგის მრუდს. ეს უკანასკნელი, ზღვარში, როდესაც $v \ll c$ უნდა გვაძლევდეს კლასიკურ პარაბოლს (§ 28), რომელიც ნახ. 32-ზე მოცემულია პუნქტურით. ამგვარად, სიჩქარის მიხედვით ნაწილაკის მასის ცვლილების გათვალისწინების შედეგად მიღებული მრუდი გადაგვარებულ პარაბოლს წარმოადგენს. ნამდვილი პარაბოლისაგან მისი განსხვავება მნიშვნელოვანია განსაკუთრებით დიდი სიჩქარეების არეში, ე. ი.

O წერტილთან ახლოს, ხოლო მცირე სიჩქარეებზე გადასვლისას განსხვავება თანდათან უმნიშვნელო ხდება. ამ მრუდისა და პარაბოლის წვეროები თანხედენილია და კოორდინატა სათავეში მდებარეობენ. O — კოორდინატა სათავის მისაღებად (50,5) გამოსახულებაში უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $v \rightarrow c$.

სათანადოდ, (50,4)-დან $\frac{x_2}{x_1}$ შეფარდების ზღვარი მოგვცემს

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{v \rightarrow c} \frac{x_2}{x_1} = \frac{h}{e}.$$

ხოლო (50,5)-დან კი გვექნება $\lim_{v \rightarrow c} \frac{x_2^2}{x_1} = 0$, ე. ი. $x_2 = 0$; რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ახალ მრუდს წვეროსთან მხები არა აქვს — ის O წერტილშია გადატეხილი.

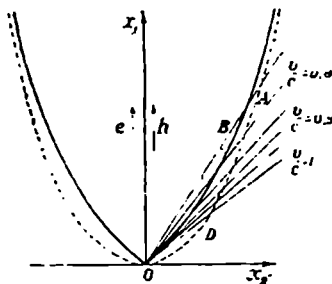
ანალიზურთან შედარებით, გაცილებით უფრო ადვილია (50,5) განტოლებით მოცემული მრუდის გეომეტრიული აგების გზა. თუ (50,5) და (28,3) ტოლობებს ერთიმეორეს შევადარებთ დავინახავთ, რომ დამახინჯებული პარაბოლის (უწყვეტი მრუდი) ყოველი წერტილის კოორდინატები მიიღებიან (28,3) პარაბოლის (პუნქტირული მრუდი) შესაბამისი წერტილის კოორდინატებიდან, ამ უკანასკნელთა გადამრავლებით $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ სიდიდეებზე.

ამიტომ (28,3) კლასიკური პარაბოლიდან (50,5) დამახინჯებული პარაბოლის მისაღებად შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ: O კოორდინატა სათავიდან გავატაროთ (50,4) ფორმულით განსაზღვრული x_1 ღერძისადმი α კუთხით დახრილი სწორი ხაზი. მისი სიგრძე, O სათავიდან პარაბოლის გადაკვეთის A წერტილამდე, OA გავამრავლოთ $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ სიდიდებზე. მიღებული მონაკვეთი სათავიდან გადავზომოთ OA -ზე, მისი ბოლო წერტილი B მოგვცემს (50,5) გადავარებული პარაბოლის შესაბამის წერტილს. ამ გზით შეიძლება მოენახოთ კლასიკური პარაბოლის ყოველი წერტილის შესაბამისი წერტილი საძიებელ მეოთხე რიგის მრუდზე.

ასეთნაირად აგებული მრუდი ემთხვევა ექსპერიმენტულ მრუდს, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ სიჩქარის მიხედვით ნაწილაკის მასის ცვლილების გამომსახველი (49,14) ფორმულა ბუნების ზუსტ კანონს წარმოადგენს.

§ 51. ნებისმიერად მოძრავი მუხტების ველი

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ აღებული კოორდინატა სისტემის ნიშნით უძრავი და თანაბრად მოძრავი მუხტების ველები. გადავიდეთ ახლა ნებისმიერად მოძრავი დამუხტული მატერიალური ნაწილაკების ელექტრო-



ნახ. 32.

მაგნიტური ველის შესწავლაზე. (34,13) ფორმულების მიხედვით მუხტთა-სისტემის მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველის მონახვა მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, როდესაც ცნობილია მუხტების განაწილების სახე $\rho(x_1, x_2, x_3, x_4)$ და მოძრაობის სიჩქარეები.

§ 23-ში ველის შესასწავლად ჩვენ შემოვიღეთ ოთხგანზომილებიანი ვექტორპოტენციალი $A_i(x_i)$, რომლის საშუალებით განისაზღვრება ელექტრო-მაგნიტური ველის ტენზორი

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

თუ ამ უკანასკნელს ლორენცის (34,4) განტოლებაში ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{c} j_i \quad (51,1)$$

ჩვენ შეგვიძლია მოვითხოვოთ, რომ A_i პოტენციალები აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობას:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0, \quad (51,2)$$

რომელიც სამგანზომილებიან ფორმაში შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (51,3)$$

(51,2)-ს ლორენცის პირობა ეწოდება.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (51,2) ლორენცის პირობას ყოველთვის ექნება ადგილი. ამ საკითხის გამოსარკვევად გავიხსენოთ, რომ პოტენციალები ($A_i(x_i)$) მხოლოდ დამხმარე ფუნქციებია და ველის განტოლებებში ისინი უშუალოდ არ შედიან; (34,13) განტოლებები მხოლოდ მათ წარმოებულებს შეიცავენ. ამასთანავე ვიცით, რომ ფიზიკური სიდიდეები დაკავშირებული არიან პოტენციალების წარმოებულებთან; რის გამოც შეგვიძლია დავუშვათ, რომ პოტენციალები რაღაც ნებისმიერი ადითიური მუდმივის სიზუსტით არიან განსაზღვრული. გარდა ამისა, პოტენციალები ჩვენ უფრო დიდი მოთხოვნებით შევზღუდეთ. სახელდობრ, ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ (51,2) პირობას; რასაც ადვილად მივაღწევთ ოთხგანზომილებიანი $A_i(x_i)$ პოტენციალის მდგენელების სათანადო შერჩევის გზით. თუ მაგალითად, $A_i(x_i)$ ლორენცის პირობას არ აკმაყოფილებს, მაშინ მის ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ ისეთი ოთხგანზომილებიანი ახალი ფუნქცია $A'_i(x_i)$, რომელიც (51,2) პირობას დააკმაყოფილებს, ხოლო მისი საშუალებით განსაზღვრული ელექტრომაგნიტური ველი დავმთხვევა $A_i(x_i)$ -ით წარმოდგენილ ველს.

უშუალო ჩასმით ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ზემოდ ჩამოთვლილ პირობებს დააკმაყოფილებს 4 — პოტენციალის მდგენელების შემდეგი გარდაქმნა

$$A'_i(x_i) = A_i(x_i) + \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}; \quad (51,4)$$

სადაც $f(x_i)$ დრო და სივრცის კოორდინატების სკალარულ ფუნქციას წარმოადგენს. $f(x_i)$ ფუნქცია შეიძლება შემდეგნაირად მოენახოთ: რადგან $A'_i(x_i)$ (51,2) პირობას აკმაყოფილებს, ამიტომ გვექნება

$$\frac{\partial A'_i(x_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i(x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} = 0,$$

საიდანაც $f(x_i)$ მოიძებნება $A_i(x_i)$ ცნობილი ფუნქციის საშუალებით შემდეგი განტოლებიდან:

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial A_i(x_i)}{\partial x_i}. \quad (51,5)$$

ახლა უნდა დავამტკიცოთ, რომ (51,4) გარდაქმნა, რომელსაც მეორე გვარის გარდინენტული გარდაქმნის ანუ ყალიბობის პირობა ეწოდება, უცვლელად ტოვებს ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობათა ვექტორებს, ე. ი. ეს გარდაქმნა საძიებელ ველზე არავითარ გავლენას არ ახდენს. მართლაც, თუ ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის (25,6) გამოსახულებაში (51,4)-ს ჩავსვანთ, მივიღებთ:

$$F'_{ik} = \frac{\partial A'_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = F_{ik};$$

რადგან

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

ამგვარად, (51,2) პირობის შესაბამისად, (51,1) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\square A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i. \quad (51,6)$$

სადაც

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

რომელსაც დალამბერის ოპერატორი ეწოდება.

(51,6) შეიძლება აგრეთვე გადავწეროთ სამგანზომილებიანი ფორმით, გვექნება

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j. \quad (51,7)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (51,8)$$

(51,7) და (51,8) განტოლებები წარმოადგენს A_1, A_2, A_3 და A_4 ($A_4 = i\varphi$) ფუნქციებისათვის სრულიად ერთი და იგივე სახის არაერთგვაროვან მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ამ განტოლებათა ამოსახსნელად ჩვენ დაგვეკირდება ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი და არაერთგვაროვანის კერძო ამოსხსნების მოძებნა.

იმის გამო, რომ (51,6) განტოლებები პუასონის (45,1) განტოლების სახეს ლეზულობენ, როდესაც A ; ფუნქციები დროზე დამოუკიდებელი არიან, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (51,6) არაერთგვაროვანი განტოლებების კერძო ამონახსნები მოგვცემს ალელული მოცულობის შიგნით მოძრავი მუხტების ველს. ხოლო ერთგვაროვანის ამონახსნით წარმოდგენილი ველი კი შექმნილია ამ მოცულობის გარეთ მოძრავი მუხტების მიერ.

§ 52. ტალღის განტოლება

სივრცის იმ ნაწილებში სადაც ელექტრული მუხტები არა გვაქვს (სივრცეში) (51,7) და (51,8) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (52,1)$$

როგორც ვხედავთ A და φ ფუნქციებისათვის მიიღებინ ერთი და იგივე სახის წრფივი ერთგვაროვანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებები (52,1); ამიტომ ნაცვლად (52,1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნების ძიებისა საქმარისია მოვინახოთ ერთ-ერთი განტოლების ამონახსნი, ყველა დანარჩენი განტოლებების ამონახსნებს მიღებულის ანალოგიური სახე ექნებათ. ეს გარემოება უფლებას გვაძლევს (52,1) განტოლებათა სისტემა (სულ 4 განტოლება) ფორმალურად ერთ განტოლებაზე დავიყვანოთ და ვეძებოთ მხოლოდ ამ უკანასკნელის ამონახსნი. იმისათვის რომ ერთი მეორისაგან განსხვავებული A და φ ფუნქციებისათვის მიღებული (52,1) განტოლებების ერთი განტოლებით წარმოდგენა მოსახერხებელი იყოს, საჭიროა შემოვიღოთ A და φ -ს საშუალებით განსაზღვრული რაიმე ვექტორული ფუნქცია $\zeta(x_i)$, რომელიც (51,3) ლორენცის პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს. ადვილად შეიძლება დავარწმუნდეთ, რომ თუ შემოვიღებთ $\zeta(x_i)$ ფუნქციას განსაზღვრულს შემდეგი დამოკიდებულებების მიხედვით:

$$A = \frac{1}{c} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = i \frac{\partial \zeta}{\partial x_4} \quad (52,2)$$

$$\varphi = -\operatorname{div} \zeta, \quad (52,3)$$

მაშინ დაკული იქნება ლორენცის პირობა (51,3), მართლაც.

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \zeta = 0. \quad (52,4)$$

ამ უკანასკნელიდან კი გამომდინარეობს, რომ (52,2) და (52,3) დამოკიდებულებები სამართლიანია იმ შემთხვევაში როდესაც ელექტრომაგნიტური პროცესების მიმდინარეობას განვიხილავთ უძრავ გარემოში; რადგან მხოლოდ ამ შემთხვევაშია დასაშვები დროითა და სივრცითი კოორდინატებით გაწარმოების ოპერაციების ერთი მეორის მიმართ გადანაცვლება, ე. ი. (52,4) ტოლობა.

(52,2) და (52,3) ფორმულების მიხედვით შემოღებულ წვექტორულ ფუნქციას ჰერცის ვექტორი ეწოდება.

ამგვარად, ჰერცის ვექტორისათვის, (52,1) განტოლებათა სისტემის ნაცვლად, ჩვენ გვექნება ერთი ვექტორული განტოლება

$$\Delta \zeta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (52,5)$$

თუ (52,5)-დან მოენახავთ ζ -ს, მაშინ მისი საშუალებით, (52,2) და (52,3) ფორმულების მიხედვით, ადვილად მივიღებთ ოთხგანზომილებიანი პოტენცილის ყველა მდგენელს.

(52,5) განტოლების ამოსახსნელად წინასწარ ის გადავწეროთ პოლარულ კოორდინატებში (x , φ , θ). ამასთანავე გავითვალისწინოთ, რომ ამოცანას სფერული სიმეტრია აქვს — $\zeta = \zeta(x)$, სადაც $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{x_1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_1^2}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x_1^2}{x^3} \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (52,6)$$

ანალოგიური გზით მიიღებინ დანარჩენებიც:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_2^2}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x_2^2}{x^3} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (52,6 a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_3^2}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x_3^2}{x^3} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (52,6 b)$$

(52,6), (52,6 a) და (52,6 b) განტოლებათა შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$\Delta = \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

თუ ამ უკანასკნელს (52,5) განტოლებაში შევითანთ, მაშინ ის შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2 (\zeta \cdot x)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0, \quad (52,7)$$

სადაც გამოყენებულია იგივეობა $\frac{2}{x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial^2 (\zeta \cdot x)}{\partial x^2}$. რადგან x დროზე დამოუკიდებელია, ამიტომ (52,7) განტოლება შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ

$$\frac{\partial^2 (\zeta \cdot x)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\zeta \cdot x)}{\partial t^2} = 0. \quad (52,8)$$

ხოლო თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\zeta \cdot x = f(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (52,9)$$

მაშინ (52,8) შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (52,10)$$

ამ უკანასკნელი განტოლების ამოსახსნელად შემოვიღოთ ახალი ცვლადები:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= t - \frac{x}{c} \\ \eta &= t + \frac{x}{c} \end{aligned} \right\} \quad (52,11)$$

სათანადოდ გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (52,12)$$

ანალოგიური გზით მარტივი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right). \quad (52,13)$$

(52,12) და (52,13) გამოსახულებათა (52,10)-ში ჩასმა გვაძლევს:

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (52,14)$$

რომლის ინტეგრაციის შედეგად ვღებულობთ:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \text{Const} \quad \text{და} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \text{Const}.$$

უკანასკნელი ორი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(\xi, \eta)$ წარმოადგენს ისეთი ორი ფუნქციის ჯამს, რომელთაგან ერთი დამოკიდებულია მხოლოდ ξ ცვლადზე, მეორე კი — η -ზე, ე. ი.

$$f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (52,15)$$

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ველის 4 — პოტენციალის (52,1) განტოლებათა ანდა მათი ტოლფასი (52,5) განტოლების ამონახსნს შემდეგი სახე ექნება:

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{x} f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (52,16)$$

რომლის საშუალებით ადვილად მოინახებიან ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორები:

$$\vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \text{grad div } \zeta = \text{rot rot } \zeta; \quad (52,17)$$

(სადაც გამოყენებულია (2,29), (52,2) და (52,3) ფორმულები)

$$h = \text{rot } A = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (52,18)$$

როგორც $f_1 \left(1 - \frac{x}{c}\right)$ და $f_2 \left(1 + \frac{x}{c}\right)$ ფუნქციების წრფივი ფორმა, ასევე ცალ-ცალკე ეს ფუნქციები, (52,10) წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს წარმოადგენენ. მაგრამ ყველა დასაშვები ამონახსნიდან ჩვენთვის საინტერესოა მხოლოდ ისეთები, რომლებიც გარკვეულ ფიზიკურ პროცესებს გამოსახავენ; ამიტომ ზოგადი ამონახსნიდან უნდა შევარჩიოთ ფიზიკური შინაარსის მქონე ამონახსნები. მაშინ როდესაც მათემატიკური თვალსაზრისით

ორივე $\left(f_1 \left(1 - \frac{x}{c}\right) \text{ და } f_2 \left(1 + \frac{x}{c}\right)\right)$ ფუნქციები მისაღებია, ფიზიკური

მოსაზრებით დასაშვებია მხოლოდ $f_1 \left(1 - \frac{x}{c}\right)$. $f_1 \left(1 - \frac{x}{c}\right)$ და $f_2 \left(1 + \frac{x}{c}\right)$

ფუნქციების ფიზიკური შინაარსის გამოსარკვევად დაეუშვათ, რომ x რადიუს ვექტორის მიმართულება x_1 ღერძის თანხვედნილია $(x(x, 0, 0))$, ამ შენთხვევაში x_1 ღერძის ყველა იმ წერტილებში, რომლებიც აკმაყოფილებენ $t - \frac{x_1}{c} = \text{Const}$ ანუ $x_1 = \text{Const} + ct$ პირობას, $f_1 \left(1 - \frac{x_1}{c}\right)$ ფუნქციით განსაზღვრულ ელექტრომაგნიტურ ველს ექნება ერთი და იგივე მნიშვნელობა. მაშასადამე, ის მნიშვნელობა, რომელიც ველს $\left(f_1 \left(1 - \frac{x_1}{c}\right) \text{ ფუნქციის } \right)$ ჰქონ

და $t=0$ მომენტში $x_1 = \text{Const}$ წერტილში, ველს ექნება აგრეთვე t მომენტში $x_1 = \text{Const}$ სიბრტყიდან ct მანძილით დაშორებულ პარალელურ სიბრტყეში. ამგვარად, $f_1 \left(1 - \frac{x_1}{c}\right)$ ფუნქციის საშუალებით განისაზღვრება ის ელექტრო-

მაგნიტური ველი, რომელიც ვრცელდება x_1 ღერძის დადებითი მიმართულებით c სიჩქარით. ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება ადვილად გამოვარკვიოთ, რომ $f_2 \left(1 + \frac{x_1}{c}\right)$ ფუნქცია გვაძლევს x_1 ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით მიმავალ ელექტრომაგნიტურ ტალღას.

რადგან ელექტრომაგნიტური მოქმედება სივრცეში c სიჩქარით ვრცელდება და ველის წყაროდან დაკვირვების P წერტილამდე x მანძილის გასაველად მას სათანადოდ $\frac{x}{c} = \Delta t$ დრო ესაჭიროება, ამიტომ

e და h ვექტორების მნიშვნელობანი t მომენტში დამოკიდებული უნდა იყვნენ ელექტრული მუხტების განაწილებისა და მოძრაობის მდგომარეობებზე უფრო ადრე $t' = t - \frac{x}{c}$ მომენტში. ამგვარად, $f_1 \left(1 - \frac{x}{c}\right)$, როგორც ელექ-

ტრომაგნიტური ველის წყაროს — მუხტის მოძრაობის მდგომარეობის ფუნქცია, იმის მაჩვენებელია, რომ $t - \frac{x}{c}$ მომენტში მუხტის მიერ წარმოშობილი ველი მისგან x მანძილით დაშორებულ დაკვირვების $P(x_1, x_2, x_3)$ წერტილში მივა t ნომენტში. ჯერ მუხტებმა უნდა შექმნან ველი, ხოლო გარკვეული დროის $\left(\frac{x}{c} = \Delta t\right)$ შემდეგ ის მიაღწევს დაკვირვების წერტილში. ამ თვალსაზრისით $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ფუნქცია დაგვიანებულ მოქმედებას გამოხატავს და თანხმობაშია მიზეზობრიობის კანონთან, რომლის მიხედვით ჯერ ველის გამოწვევი მიზეზი მუხტის მოძრაობა — უნდა არსებობდეს უფრო გვიან კი შედეგი — ელექტრომაგნიტური ველი. ანალოგიური მსჯელობით ადილად დავრწმუნდებით, რომ მეორე ფუნქცია — $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$ იძლევა წინმსწრებ მოქმედებას. ამ ფუნქციით t მომენტში განსაზღვრული ველი უნდა წარმოიშვას უფრო გვიან, სახელდობრ $t + \frac{x}{c}$ მომენტში; რაც ეწინააღმდეგება მიზეზობრიობის კანონს; ამიტომ ეს უკანასკნელი შეიძლება უგულვებელყოთ და შემოვისაზღვროთ $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ -ით.

ამგვარად, (52,5) განტოლების ფიზიკური შინაარსის მქონე ამონახსნია

$$\zeta = \frac{1}{x} f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (52,19)$$

§ 53. დაგვიანებული პოტენციალები

გადავიდეთ (51,6) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი განტოლება

$$\square\phi_i = 0. \quad (53,1)$$

ფაქტიურად ჩვენ აქ საქმე გვაქვს ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის თეორიასთან, რომელიც შეიძლება განვავითაროთ სამგანზომილებიანი პოტენციალის თეორიაში ცნობილი დებულებების ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის შემთხვევაზე განზოგადების გზით.

მაშინ როდესაც (43,2) ლაპლასის განტოლების ამონახსნი მანძილის უკუპროპორციულ სიდიდეს წარმოადგენს, $\phi = \frac{\text{Const}}{x}$, (53,1) განტოლების ამონახსნი — ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი ორ მსოფლიო წერტილს შორის მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია

$$\phi_i = \frac{\text{Const}}{R^2}. \quad (53,2)$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ მუხტის კოორდინატებია $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, ხოლო დაკვირვების წერტილისა კი x_1, x_2, x_3, x_4 , მაშინ $R^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 + (\xi_4 - x_4)^2 = \sum (\xi_i - x_i)^2$ - მათ შორის მანძილის კვადრატისათვის შემდეგი დამოკიდებულებები გვექნება:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{R^2} \right) = - \frac{2(\xi_i - x_i)}{R^4} \quad \text{და} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{1}{R^2} \right) = - \frac{2}{R^4} + \frac{8(\xi_i - x_i)^2}{R^6},$$

საიდანაც ადვილად მიიღება, რომ

$$\square \Phi_i = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x_i^2} = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{\text{Const}}{R^2} \right) = \text{Const} \left(- \frac{8}{R^4} + \frac{8(\xi_i - x_i)^2}{R^6} \right) = 0. \quad (53,3)$$

ასევე ადვილად შეიძლება შევემოწმოთ, რომ $n+2$ განზომილებიან სივრცეში პოტენციალი სათანადო მანძილის n -რი ხარისხის უკუპროპორციულია. (51,6) განტოლებიდან ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის მოსანახავად გამოვიყენოთ იგივე მეთოდი, რომლის საშუალებითაც ადრე ჩვენ ამოვხსენით პუასონის განტოლება (43,1). ამისათვის ოთხგანზომილებიან სივრცეში ავიღოთ თავის წარმოებულებთან ერთად ორი უწყვეტი ψ_i და Φ_i ფუნქციები და მათთვის დავწეროთ გრინის ფორმულა (43,10)

$$\int (\psi_i \square \Phi_i - \Phi_i \square \psi_i) d\xi^4 = \int \left(\psi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \Phi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) d\xi^3. \quad (53,4)$$

ეს ფორმულა გამოვიყენოთ $\Phi_i = \frac{1}{R^2}$ და $\psi_i = A_i$ ფუნქციებისათვის. რადგან

$\frac{1}{R^2}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (53,3) განტოლებას ხოლო 4 - პოტენციალი A_i - (51,6)-ს, ამიტომ (53,4) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{4\pi}{c} \int \frac{j_i}{R^2} d\xi^4 = \int \left(A_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial A_i}{\partial n} \right) d\xi^3, \quad (53,5)$$

(53,5) სამართლიანია მთელი უსასრულო ოთხგანზომილებიანი სივრცის ყოველი წერტილისათვის, გარდა იმ წერტილებისა, რომლებშიც ინტეგრალ-ქვეშა ფუნქციებს პოლუსები (განკუთრი წერტილები) აქვთ. (53,5) განოსახულებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციებისათვის ასეთ საგანგებო წერტილს წარმოადგენს მხოლოდ დაკვირვების $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ წერტილი, სადაც $R^2 = 0$: ამიტომ იმისათვის რომ მთელ განსახილველ სივრცეში შესაძლებელი იყოს (53,5) ფორმულის გამოყენება, საჭიროა ადგილი მოცულობიდან P წერტილის ამოგდება. ამისათვის საკმარისია ამ წერტილის ირგვლივ შემოვწეროთ R_0 რადიუსიანი სფერო და (53,5)-ში ინტეგრაცია ჩავატაროთ გარეთა და შემოწერილი სფეროს ზედაპირებით შემოსაზღვრულ მოცულობაზე; მაშინ ტოლობის მარჯვენა მხარე ორი ზედაპირული ინტეგრალის ჯამად დაიშლება. თუ ადგილი მოცულობის შემოსაზღვრულ გარეთა ზედაპირს უსასრულობაში გადავიტანთ, მაშინ სათანადო ზედაპირული ინტეგრალი ნულს გაუტოლდება: რის

ვანოც (53,5)-ს მარჯვენა მხარეში დაგვრჩება I_0 რადიუსიანი სფეროს ზედაპირზე აღებული ინტეგრალი.

ანგვარად, (53,5) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{4\pi}{c} \int \frac{j_i(\xi_i)}{R^2} d\xi^4 = \int_{C_{R_0}} \left\{ A_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial A_i}{\partial n} \right\} d\xi^3. \quad (53,6)$$

ახლა მიღებული განტოლების მარჯვენა მხარეში უნდა გადავიღეთ ზღვარზე, როცა $R_0 \rightarrow 0$. თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, რომლის თანახმადაც

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \int_{C_{R_0}} \left\{ A_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial A_i}{\partial n} \right\} d\xi^3 = \lim_{R_0 \rightarrow 0} \left\{ (A_i)_{R_0} \cdot \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{\partial A_i}{\partial n} \right)_{R_0} \right\} \alpha R_0^3 = \alpha (A_i)_{R_0}; \quad (53,7)$$

აადაც გამოყენებულია $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R_0}$ დამოკიდებულება, მაშინ (53,6)-დან

მივიღებთ:

$$A_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{4\pi}{ac} \int \frac{j_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{R^2} d\xi^4. \quad (53,8)$$

(53,8)-ში α ჯერჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივი სიდიდეა. (53,7)-ში α -ს შემოღება შემდეგი მიზეზითაა გამოწვეული: როგორც ვიცით, სამგანზომილებიან სივრცეში R რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობი $4\pi R^2$, ამავე სფეროს ზედაპირის ფართი ოთხგანზომილებიან სივრცეში სათანადოდ R^3 -ს პროპორციული უნდა იყოს. იმის გამო. რომ ჩვენთვის უცნობია სამგანზომილებიანი სხეულების ფორმა ოთხგანზომილებიან სივრცეში, სფეროს ზედაპირის ფართი შეიძლება განვსაზღვროთ $\alpha \cdot R^3$ -ის სახით, სადაც α პროპორციულობის მუდმივი კოეფიციენტს წარმოადგენს. ამ α მუდმივს ჩვენ ქვემოთ სათანადო ფიზიკური მოსაზრების საფუძველზე განვსაზღვრავთ.

(53,8) ფორმულის საშუალებით განისაზღვრება ნებისმიერად მოძრავი ელექტრონული მუხტების ელექტრომაგნიტური ველის A_i ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი. თუ მოცემულია $j_i(\xi_i)$ ფუნქცია, მაშინ, (53,8)-ს მიხედვით ოთხგანზომილებიან სივრცეზე ინტეგრაციის გზით მიიღება A_i ფუნქცია. მაშასადამე, (51,6) განტოლების კერძო ამოხსნის მოძებნის ამოცანა ჩვენ დავიყვანეთ (53,8) ინტეგრალის გამოთვლაზე. ცხადია, რომ ამ გზით მიღებული (51,6) განტოლების ამონახსნები $A_i(x_i)$ უნდა აკმაყოფილებდნენ ლორენცის (51,2) პირობას. თუ გავითვალისწინებთ მუხტის მუდმივობის კანონს (41,1), მაშინ ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ (53,8) მართლაც აკმაყოფილებს ლორენცის პირობას. ამისათვის შევადგინოთ (53,8) გამოსახულების ოთხგანზომილებიანი განზღაბობა, გვექნება:

$$\frac{\partial A_i(x_i)}{\partial x_i} = \frac{4\pi}{c\alpha} \int \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{j_i(\xi_i)}{R^2} \right\} d\xi^4 = \frac{4\pi}{c\alpha} \int \left(j_i(\xi_i), \nabla_i \left(\frac{1}{R^2} \right) \right) d\xi^4. \quad (53,9)$$

რადგან $\text{grad}_x \left(\frac{1}{R^2} \right) = \text{grad}_\xi \left(\frac{1}{R^2} \right)$, ნაწილობითი ინტეგრაციის გზით (53,9)-დან მივიღებთ:

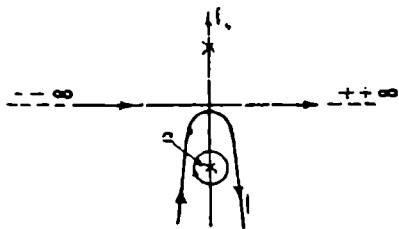
$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = -\frac{4\pi}{c\alpha} \int \frac{\partial j_i(\xi_i)}{\partial \xi_i} \frac{d\xi^4}{R^2} = 0,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

(53,8)-დან $A_i(x_i)$ -ს გამოსათვლელად ინტეგრაცია უნდა ჩავატაროთ მთელ უსასრულო ოთხგანზომილებიან სივრცეზე — ξ_i კოორდინატების ყველა მნიშვნელობებისათვის — $-\infty \leq \xi_i \leq +\infty$ შუალედში.

თუ, ზოგადობის დაურღვევლად, დაკვირვების დროთ ავირჩევთ $t=0$ მომენტს, მაშინ $j_i(\xi_i)$ სიდიდეები, დავიანებული მოქმედების გამო, უნდა ავიღოთ უფრო ადრე მომენტებში ($t' < 0$), ამით ჩვენ ფაქტიურად გამოირიცხული გვექნება ξ_4 ცვლადის დადებითი მნიშვნელობების შესაბამისი საინტეგრაციო არე. მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში ($t=0, t' < 0$), ξ_4 ცვლადით საინტეგრაციო არეს წარმოადგენს ქვედა (უარყოფითი) კომპლექსური ნახევარსიბრტყე; რადგან $\xi_4 = ic't' = -ic'|t'|$ წერტილები მდებარეობენ დროის წარმოსახვით უარყოფით ღერძზე.

(53,8)-ში ინტეგრაცია ჩავატაროთ პირველად ξ_4 ცვლადით, შენდეჯ $\xi_1 = \xi_1, \xi_2 = \xi_2$ სივრცითი კოორდინატების მიხედვით. ცხადია, შეიძლება ინტეგრაცია მოგვეხდინა შებრუნებული რიგით, რაც ინტეგრალის მნიშვნელობაზე არავითარ გავლენას არ მოახდენდა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ξ_4 -ით ინტეგრაცია უნდა ჩავატაროთ ქვედა კომპლექსურ სიბრტყეში; მაშასადამე, ξ_4 -ით საინტეგრაციო კონტური მთლიანად ამ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული. თუ მოვახდენთ ამ კონტურის დეფორმაციას ისე, რომ ის წარმოადგენდეს უარყოფითი წარმოსახვითი (დროის) ღერძის მახლობლობაში — $i\infty$ -დან ისევე — $-i\infty$ -ში მიმავალ შეკრულ მრუდს (ნახ. 33), მაშინ აღებული ინტეგრალის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციითა თეორიაში ცნობილი თეორემა ფუნქციის ნაშთის შესახებ.



ნახ. 33.

თუ საინტეგრაციო კონტურად ავირჩევთ ნახ. 33-ზე მოცემულ შეკრულ მრუდს (ეს მრუდი ჩაიკეტება — $i\infty$ -ში), მაშინ ჩვენ დაგვირღვება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის განკუთრი წერტილების გამოკვლევა.

(53,8) გამოსახულებაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის განაკუთრ წერტილებს წარმოადგენენ ის წერტილები, რომლებზედაც $R^2 = 0$. რადგან

$R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 + (x_4 - \xi_4)^2 = (x - \xi)^2 + (x_3 - \xi_3)^2$,
 ანტიონ პირობა $R^2 = 0$ შემდეგნაირად ჩაიწერება.

$$\{(x - \xi) + i(x_3 - \xi_3)\} \{(x - \xi) - i(x_3 - \xi_3)\} = 0, \quad (53,10)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (53,8)-ში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მარტივ პოლუსებს წარმოადგენენ წერტილები (a) და (b):

$$x_3 - \xi_{a3} = +i(x - \xi). \quad (53,11)$$

$$x_3 - \xi_{b3} = -i(x - \xi). \quad (53,12)$$

ეს წერტილები მდებარეობენ წარმოსახვით (დროის) ღერძზე, პირველი (a) ქვედა სიბრტყეში (უარყოფით ღერძზე) მეორე კი ზედა სიბრტყეში (დადებით ღერძზე). იმის გამო, რომ ჩვენ, $t' < 0$ პირობის შესაბამისად, საინტეგრაციო არედი კომპლექსური ქვედა ნახევარსიბრტყე ავირჩიეთ, ამ არეში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მხოლოდ a წერტილში ექნება მარტივი პოლუსი (53,11). მეორე მარტივ პოლუსს ჩვენ არ განვიხილავთ, რადგან ის საინტეგრაციო არის გარეთ მდებარეობს.

(53.8)-ში $d\xi_4$ -თი ინტეგრაციის ჩასატარებლად გამოვიყენოთ ფუნქციის ნაშთის შესახებ კოშის თეორემა, რომლის მიხედვით $f(\xi_4)$ ფუნქციიდან შეკრულ კონტურზე აღებული ინტეგრალი განისაზღვრება მარტივ პოლუსებზე $f(\xi_4)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ჯამის ნამრავლით $2\pi i$ -ზე, გვექნება:

$$\oint \frac{j_i(\xi_4)}{R^2} d\xi_4 = \oint \frac{j_i(\xi_4) d\xi_4}{\{(x_3 - \xi_{a3}) - i(x - \xi)\} \{(x_3 - \xi_4) + i(x - \xi)\}} = \frac{\pi \cdot j_i(a)}{x - \xi}, \quad (53,13)$$

სადაც $j_i(a)$ წარმოადგენს $j_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ ფუნქციის მნიშვნელობას a წერტილში, რომლისთვისაც $x_3 - \xi_{a3} = i(x - \xi)$.

თუ (53,13) გამოსახულებას ჩავსვამთ (53,8)-ში, მივიღებთ:

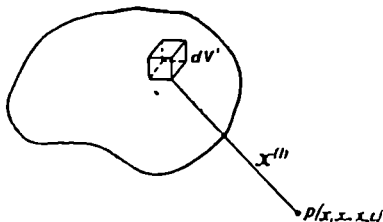
$$A_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{4\pi^2}{c\alpha} \int \frac{j_i(a)}{x - \xi} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (53,14)$$

თუ დაკვირვების მომენტად მივიღებთ t -ს, ხოლო a წერტილის შესაბამის დროს აღვნიშნავთ t' -ით, მაშინ, (53,11) ფორმულის თანახმად გვექნება: $ict = ict' + i(x - \xi)$, საიდანაც

$$t' = t - \frac{x - \xi}{c}. \quad (53,15)$$

ამგვარად, ჩვენ გამოვარკვეით რომ $P(x_1, x_2, x_3, ict)$ — დაკვირვების წერტილში ელექტრომაგნიტური ველის A_i — ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის გამოსათვლელად (53,14)-ში ინტეგრალქვეშა $j_i(\xi_4)$ ფუნქციების მნიშვნელობები უნდა ავიღოთ $t' = t - \frac{x - \xi}{c}$ მომენტში. მაშასადამე, $A_i(x_i)$ ფუნქციები დაგ-

ვიანებულ მოქმედებას გამოხატავენ. (x_1, x_2, x_3) წერტილში t მომენტში ველის პოტენციალის გამოსათვლელად, (53,14)-ის თანახმად, მთელი მოცულობა, რომელშიაც მუხტთა დინამიკური სისტემა მოთავსებული, უნდა დაევანწილოთ უსასრულო მცირე $dV' = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ ელემენტებად. რადგან ყოველ ელემენტს შეესაბამება $\rho dV'$ მუხტი და დენის ძალის $j dV'$ 4 — ვექტორი, ამიტომ $P(x_1, x_2, x_3, t)$ დაკვირვების წერტილში ელექტრომაგნიტური ველი წარმოადგენს ყველა განსახილველი ელემენტების ერთობლივი მოქმედების შედეგს.



ნახ. 34.

რადგან ეს ელემენტები P წერტილიდან სხვადასხვა მანძილებით არიან დაშორებული, ამიტომ მათი მოქმედებანი უნდა განვიხილოთ დროის სხვადასხვა მომენტებში. დაკვირვების წერტილში t მომენტში მუხტთა სისტემის საერთო ველის მისაღებად აუცილებელია

რომ dV' ელემენტები ველს გზავნიდნენ სხვადასხვა, ე. ი. $t - \frac{x}{c} = t - \Delta t$, მო-

მენტებში.

ჩვენ შეგვეძლოს არ შეგვეზღუდა ამოცანა - არ მოგვეთხოვა $t' < 0$ პირობა; მაშინ (53,8)-ში ინტეგრაცია უნდა ჩავეტარებოდა მთელ კომპლექსურ (ზედა და ქვედა) სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მეორე პარტივი პოლუსისათვის (53,12)-დან მივიღებთ:

$$t' = t + \frac{x - \xi}{c} \tag{53,16}$$

და სათანადო $d\xi_1$ -ით აღებული ინტეგრალი ორი წევრის ჯამის სახით იქნებოდა წარმოდგენილი. ორივეს მათ (53,13)-ს სახე ექნებოდათ იმ განსხვავებით რომ პირველში უნდა აგველო j -ს მნიშვნელობა a წერტილში, მეორეში კი b წერტილში. თუ (53,14) და (53,16) დამოკიდებულებებს ერთიმეორეს შევადარებთ, დავიანახავთ, რომ (53,16) წინმსწრებ მოქმედებას უნდა გამოსახავდეს. მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში ჩვენ გვექნებოდა დაგვიანებულ და წინმსწრებ მოქმედებათა ერთობლიობა. მაგრამ იმის გამო, რომ მიზნობრიობის პრინციპთან თანხმობაშია მხოლოდ დაგვიანებული მოქმედება (ახლოქმედების პრინციპი) ფიზიკური მნიშვნელობის მქონეა (53,14), ხოლო მეორე შეიძლება არ განვიხილოთ.

ამ თვალსაზრისით ჩვენს მიერ მიღებული დაშვება $t' < 0$, რომელიც გამორიცხავს წინმსწრებ მოქმედებას, სრულიად გამართლებულია.

ოთხგანზომილებიან ფორმაში ჩაწერილი (53,14) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ სამგანზომილებიან ფორმაში, გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{4\pi^2}{c\alpha} \int \frac{j\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{x - \xi}{c}\right)}{x - \xi} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{4\pi^2}{c\alpha} \int \frac{\rho\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{x - \xi}{c}\right)}{x - \xi} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \right\} (53,17).$$

რომლებიც, სათანადოდ, (51,7) და (51,8) არაერთგვაროვან განტოლებათა ამონახსნებს წარმოადგენენ.

§ 54. ლენარდისა და ვიხარტის პოტენციალები

ნებისმიერად მოძრავ მუხტთა სისტემის ელექტრომაგნიტური ველის A — ვექტორული და φ — სკალარული პოტენციალების (51,7) და (51,8) განტოლებათა (53,17) კერძო ამონახსნების მოძებნის შემდეგ შეიძლება დავწეროთ პათი სრული ამონახსნები, არაერთგვაროვანის კერძო და ერთგვაროვანის ზოგადი ამონახსნების ჯამის სახით:

$$A(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{4\pi^2}{c\alpha} \int \frac{j\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{x - \xi}{c}\right)}{x - \xi} d\xi^3 + A_0. \quad (54,1).$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{4\pi^2}{\alpha} \int \frac{\rho\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{x - \xi}{c}\right)}{x - \xi} d\xi^3 + \varphi_0. \quad (54,2).$$

სადაც A_0 და φ_0 (52,1) განტოლებების ზოგადი ამონახსნებია.

დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ აღებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოსაძებნად საჭიროა მოცემული იყოს გარკვეული საწყისი პირობები. მაშასადამე, (51,6) განტოლებების ამონახსნულად უნდა გვექონდეს საწყისი პირობები, ე. ი. ველის დამახულობის ვექტორების მნიშვნელობები საწყის მომენტში. სინამდვილეში ასეთი პირობები არასოდეს არა გვხვდებიან; მაგრამ მათ ნაცვლად საკმარისია ვიცოდეთ მუხტთა სისტემის ველი შორ მანძილებზე. მაგალითად, თუ ცნობილია სისტემაზე დამკვიდრებული ველექტრომაგნიტური ტალღის ველი, მაშინ შეიძლება მოვნახოთ მუხტებთან ამ ველის ურთიერთქმედებით გამოწვეული დამატებითი ველი.

ჩვენს ამოცანას შეადგენს მოვნახოთ მუხტების დინამიკური სისტემის მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველი, პოტენციალების (54,1) და (54,2) გამოსახულებათა მიხედვით.

რადგან (53,17) ფორმულებში ინტეგრალქვეშა სიდიდეები (j და ρ), $t - \frac{x - \xi}{c}$, ანუ ე. წ. რეტარდირებული დროის ფუნქციებია და სათანადოდ დაკვირვების $P(x, t)$ წერტილში მოსული ველი წარმოადგენს სისტემის შენად-

გენელი მუხტების არაერთდროული მოქმედების შედეგს, ამიტომ უშუალო ინტეგრაციის გზით A და φ ფუნქციების გამოთვლა შეუძლებელია. მაგრამ თუ დავუშვებთ, რომ დენი და მუხტები კონცენტრირებულია უსასრულოდ მცირე მოცულობაში, როგორც მაგალითად ელექტრონის შემთხვევაში. მაშინ (32,3) ფორმულის თანახმად მისთვის შეიძლება დავწეროთ:

$$\int j_i(\xi_i) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int \rho v_i d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = q(v_1, v_2, v_3, ic) = -q \frac{d\xi_i}{dt'}, \quad (54,3)$$

სადაც $\frac{d\xi_i}{dt'}$ სიდიდეები ელექტრონის ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის მდგენელებია და წარმოადგენენ

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi_1(t'))^2 + (x_2 - \xi_2(t'))^2 + (x_3 - \xi_3(t'))^2 + (x_4 - \xi_4(t'))^2}$$

ოთხგანზომილებიანი მანძილის წარმოებულებს ელექტრონის t' საკუთარი დროით

$$\frac{dR}{dt'} = \dot{R} = -\left(\frac{d\xi_1}{dt'}, \frac{d\xi_2}{dt'}, \frac{d\xi_3}{dt'}, ic\right) = -(\nu, ic), \quad (54,4)$$

ამგვარად, უსასრულო მცირე მოცულობაში მოთავსებული — წერტილოვანი მუხტის ველის 4 — პოტენციალისათვის, (54,3)-ის თანახმად, (53.8)-დან გვექნება:

$$A_i(x_i) = -\frac{4\pi q}{ca} \int \frac{d\xi_i}{dt'} \cdot \frac{1}{R^2} d\xi_4 = \frac{4\pi q}{ca} \int \frac{\dot{R}}{R^2} d\xi_4. \quad (54,5)$$

ამ უკანასკნელში ინტეგრაციის ჩასატარებლად მოვახდინოთ საინტეგრაციო კონტურის დეფორმაცია ქვედა ნახევარ კომპლექსურ სიბრტყეში (§ 53, ნახ. 33) რადგან ერთის მხრივ (54,5)-ში ინტეგრალქვეშა ფუნქციას a წერტილში აქვს მარტივი პოლუსი, ხოლო მეორე მხრივ „წერტილოვანი“ მუხტის (მაგალითად ელექტრონის) კოორდინატები საინტეგრაციო ცვლადის ფუნქციებს წარმოადგენენ: $\xi_1 = \xi_1(\xi_4)$, $\xi_2 = \xi_2(\xi_4)$ და $\xi_3 = \xi_3(\xi_4)$, ამიტომ ამ მუხტის მსოფლიო ხაზი a წერტილის უშუალო მახლობლობაში უნდა გადიოდეს; რაც უფლებას გვაძლევს R^2 გავშალოთ მწკრივად $(\xi_4 - \xi_{a4})$ -ს ხარისხებად a წერტილის მახლობლობაში, გვექნება:

$$R^2 = R_a^2 + (\xi_4 - \xi_{a4}) \left(\frac{dR^2}{d\xi_4}\right)_a + \frac{(\xi_4 - \xi_{a4})^2}{2!} \left(\frac{d^2 R^2}{d\xi_4^2}\right)_a + \dots \quad (54,6)$$

თუ $\xi_4 - \xi_{a4}$ სიდიდის, მეორე და უფრო მაღალ ხარისხიან წევრებს გადავაგდებთ, მათი სიმცირის გამო, და აგრეთვე გავითვალისწინებთ, რომ $R_a^2 = 0$

და $\frac{dR^2}{d\xi_4} = \frac{2}{ic} (R, \dot{R})$, მაშინ (54,6)-დან მივიღებთ:

$$R^2 = \frac{2}{ic} (R \dot{R}) \cdot (\xi_4 - \xi_{a4}). \quad (54,7)$$

მიღებული (54,7) გამოსახულების (54,5)-ში ჩასმის შედეგად, მიიღება

$$A_i(x_i) = \frac{2\pi i q}{\alpha} \frac{\dot{R}}{(R \dot{R})} \oint \frac{d\bar{\xi}_4}{\bar{\xi}_4 - \bar{\xi}_{i4}}$$

საიდანაც

$$A_i(x_i) = \frac{4\pi^2 q}{\alpha} \frac{\dot{R}}{(R \dot{R})}, \quad (54,8)$$

სადაც გამოყენებულია კოშის თეორემა $\oint \frac{d\bar{\xi}_4}{\bar{\xi}_4 - \bar{\xi}_{i4}} = -2\pi i$.

გამოთვალეთ R და \dot{R} ოთხგანზომილებიანი ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(R \dot{R})$. რადგან R და \dot{R} 4-ვექტორების მდგენელებია $x - \xi$, $i(x - \bar{\xi})$ და $-v$, $-ic$ სათანადოდ, ამიტომ გვექნება:

$$(R, \dot{R}) = (x - \bar{\xi}) \cdot c - (v, x - \xi) = (x - \bar{\xi}) c \left(1 - \frac{v_x}{c} \right). \quad (54,9)$$

სადაც v_x წარმოადგენს v სიჩქარის მდგენელს $x - \xi$ რადიუს-ვექტორის გასწვრივ.

თუ (54,9)-ს ჩავსვამთ (54,8)-ში მივიღებთ

$$A_i(x_i) = \frac{4\pi^2 q}{\alpha (x - \bar{\xi})} \cdot \frac{v_i}{c \left(1 - \frac{v_x}{c} \right)}, \quad (54,10)$$

ანდა სამგანზომილებიან ფორმაში

$$A(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{4\pi^2 q v}{\alpha (x - \bar{\xi}) c \left(1 - \frac{v_x}{c} \right)} \quad (54,11)$$

და

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{4\pi^2 q}{\alpha (x - \bar{\xi}) \left(1 - \frac{v_x}{c} \right)}. \quad (54,12)$$

ამ, უკანასკნელ ფორმულებში შემავალი α მუდმივის რიცხვითი მნიშვნელობის გამოსარკვევად სკალარული პოტენციალის (54,12) გამოსახულებიდან განვსაზღვროთ უძრავი მუხტის ($v=0$) ველის პოტენციალი, რომელიც შემდეგ (43,7)-ს შეეადაროთ. ეს შედარება გვაძლევს, რომ $\alpha = 4\pi^2$.

ამგვარად, „წერტილოვანი“ მუხტის (ელექტრონის) ნებისმიერი (აჩქარებული) მოძრაობით გამოწვეული ელექტრომაგნიტური ველის 4-პოტენციალისათვის საბოლოოდ შემდეგ გამოსახულებას ვღებულობთ

$$A_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{q v_i}{c (x - \bar{\xi}) \left(1 - \frac{(v, x - \bar{\xi})}{c (x - \bar{\xi})} \right)}, \quad (54,13)$$

ანდა სამგანზომილებიან ფორმაში:

$$A(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{qv}{c(x-\xi)} \left(1 - \frac{(v, x-\xi)}{c(x-\xi)} \right)_{t'=t-\frac{x-\xi}{c}} \quad (54,14)$$

და

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{q}{(x-\xi)} \left(1 - \frac{(v, x-\xi)}{(x-\xi)c} \right)_{t'=t-\frac{x-\xi}{c}} \quad (54,15)$$

(54,14) და (54,15) განტოლებათა მარცხენა მხარეებში მდგომი A და φ სიდიდეები t მომენტში განისაზღვრებიან მუხტის v სიჩქარისა და $x-\xi$ რადიუს-ვექტორის მნიშვნელობათა მიხედვით $t'=t-\frac{x-\xi}{c}$ მომენტში, ამიტომ მარ-

ჯვენა მხარეში მიწერილია ეს უკანასკნელი ინდექსი.

რადგან (54,14) და (54,15) ფორმულები პირველად ლენარდმა და ვიხერტმა მიიღეს, ამიტომ მათ ლენარდ-ვიხერტის პოტენციალებს უწოდებენ.

ლენარდ-ვიხერტის პოტენციალების (54,14) და (54,15) გამოსახულებები მიახლოებითია, ისინი მხოლოდ „წერტილოვანი“ მუხტებისათვის გამოდგებიან. რაც შეეხება (54,1) და (54,2) ზოგადი ფორმულების გამოყენების საკითხს, უნდა აღვნიშნოთ შემდეგი: სასრულო მოცულობაში მოთავსებული მუხტების სისტემისათვის არა თუ (54,1) და (54,2) ინტეგრალების გამოთვლა, არამედ სისტემის $\int \rho \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{x-\xi}{c} \right) d\xi^3$ სრული მუხტის ზუსტი განსაზღვრაც კი შეუძლებელია; რაც იმითაა გამოწვეული, რომ მოცულობის ყოველ $d\xi^3$ ელემენტში მოთავსებული $\rho d\xi^3$ მუხტი სათანადო რეტარდირებულ $t'=t-\frac{x-\xi}{c}$ დროში უნდა ავილოთ. რადგან, მუხტთა მოძრაობის გამო, იმ დროთა

შუალედებში, რომლებითაც განსხვავდებიან სხვადასხვა ელემენტების რეტარდირებული დროები, მუხტების გარკვეული რაოდენობა აღებული მოცულობიდან გარეთ გამოვა ან შიგნით შევა, ამიტომ $\int \rho d\xi^3$ არ მოგვცემს სისტემის მუხტის საერთო რაოდენობას.

§ 55. ნებისმიერად მოძრავ მუხტთა ველი

წინა პარაგრაფში ჩვენ გამოვარკვეეთ. რომ თუ მუხტების სიჩქარეები v_{zi} და მათი განაწილების ρ ფუნქცია მოცემულია, მაშინ (53,8) ფორმულის საშუალებით გამოითვლება ელექტრომაგნიტური ველის 4 — პოტენციალი

$$A_i(x_i) = \frac{1}{\pi c} \int \frac{j_i(\xi_i) d\xi^4}{R^2},$$

საიდანაც ველის ტენზორისათვის, (25,6) თანახმად, გვექნება:

$$F_{ik} = \frac{1}{\pi c} \int \left\{ j_k(\xi_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{R^2} \right) - j_i(\xi_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right\} d\xi^4 = \\ = -\frac{2}{\pi c} \int \left\{ j_k(\xi_i) \frac{x_i - \xi_i}{R^4} - j_i(\xi_k) \frac{x_k - \xi_k}{R^4} \right\} d\xi^4 = \frac{2}{\pi c} \int |j(\xi_i) R|_{ik} \frac{d\xi^4}{R^4}; \quad (55,1)$$

სადაც ჩვენ მოვხდინეთ $d\xi_i$ — მუხტების კოორდინატებით ინტეგრაციისა და დაკვირვების წერტილის (x_1, x_2, x_3, x_4) კოორდინატებით გაწარმოების ოპერაციების გადასმა, რაც განსახილველ შემთხვევაში დასაშვებია.

(55,1)-ში მამრავლი $[j, R]$ ნიშნავს j და R ოთხგანზომილებიანი ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს, რომლის სივრცე-სივრცითი მდგენელების ნამრავლი სამგანზომილებიანი j და $x - \xi$ ვექტორების ჩვეულებრივ ვექტორულ ნამრავლს გვაძლევს, ხოლო მისი სივრცე-დროითი ნაწილების (შერეული) ნამრავლები წარმოსახვით — მეოთხე მდგენელს განსაზღვრავენ.

თუ (55,1) ფორმულაში i და k ინდექსებს მიეცემა ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს 1-დან 4-მდე, მივიღებთ ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის ექვსსავე მდგენელს, საიდანაც (25,21) დამოკიდებულებათა მიხედვით განისაზღვრებიან e და h ვექტორების მდგენელები.

თუ ახლა (32,3) და (54,4) დამოკიდებულებებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (55,1) ფორმულა შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ:

$$F_{ik} = \frac{2}{\pi c} \int \frac{\rho(\xi_i) [R_i \dot{R}_i]_{ik}}{R^4} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4. \quad (55,2)$$

(55,2)-ში ინტეგრაციის ჩასატარებლად, ისევე როგორც § 52-ში, მოვხდინოთ საინტეგრაციო კონტურის დეფორმაცია კომპლექსურ ქვედა ნახევარ სიბრტყეში და გავითვალისწინოთ, რომ (55,2)-ში ინტეგრალი ნულისაგან განსხვავებულ სიდიდეს მოგვცემს მხოლოდ იმ წერტილების მახლობლობაში, რომლებშიაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის აქვს პირველი რიგის პოლუსები. მაშასადამე, წინასწარ ჩვენ დაგვირდება გამოვიკვლიოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ხასიათი; რისთვისაც მრიცხველი და მნიშვნელი a წერტილის მახლობლობაში გავშალოთ მწკრივებად $\xi_4 - \xi_{4a}$ სიდიდის ხარისხებად.

წინა პარაგრაფისაგან განსხვავებით, სადაც გაშლის მხოლოდ $(\xi_4 - \xi_{4a})$ სიდიდის პირველ ხარისხიანი წევრით დაგვამყოფილდით, აქ ჩვენ უნდა ავიღოთ მეორე წევრიც, რადგან a წერტილზე ინტეგრალქვეშა თუნქციის მეორე რიგის პოლუსი აქვს ($R^2 = (R^2)^2 = 0$).

ამგვარად, თუ (55,2)-ში მრიცხველსა და მნიშვნელს $\frac{\xi_4 - \xi_{4a}}{ic} = y$ სიდიდის ხარისხიდან მწკრივად გავშლით და შემოვისაზღვრებით y -ს მიმართ კვადრატული წევრებით, მივიღებთ:

$$R^2 = R^2_0 + y \left(\frac{dR^2}{dt} \right)_0 + \frac{y^2}{2!} \left(\frac{d^2 R^2}{dt^2} \right)_0 + \dots = 2y (\dot{R}R)_0 + y^2 (\ddot{R}R + \dot{R}\dot{R})_0,$$

საიდანაც

$$R^4 \simeq 4y^2 (\dot{R} R)^2 \left\{ 1 + y \frac{(\ddot{R} R) + (\dot{R} \dot{R})}{(\dot{R} R)} \right\}_a. \quad (55,3)$$

ანალოგიურად, მრიცხველისათვის გვექნება

$$[R \dot{R}] = [R \dot{R}]_a + y \{ [\dot{R} \dot{R}]_a + [R \ddot{R}]_a \} = [R \dot{R}]_a + y [R \ddot{R}]_a; \quad (55,4)$$

რადგან $[\dot{R} \dot{R}] = 0$.

თუ (55,4) გამოსახლებას გავყოფთ (55,3)-ზე და განაყოფში დაეტოვებთ მხოლოდ იმ წევრებს, რომლებიც შეიცავენ y^{-1} -ს ((55,2) ინტეგრალში ნულისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობას მხოლოდ ეს წევრები მოგვცემენ), მაშინ (55,2)-დან მივიღებთ:

$$F_{,4} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{\rho(\xi_1)}{(\dot{R} R)^2_a} \frac{dy}{y^2} \{ [R \dot{R}]_{ik} + y [R \ddot{R}]_{ik} \left(1 - y \frac{(\ddot{R} R) + (\dot{R} \dot{R})}{(\dot{R} R)} \right)_a d\xi_1^3 = \\ = \int \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{(\dot{R} R)^2_a} \left\{ [R \dot{R}]_{ik} - [R \ddot{R}]_{ik} \frac{(\ddot{R} R) + (\dot{R} \dot{R})}{(\dot{R} R)} \right\}_a d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (55,5)$$

ან უკანასკნელი ფორმულით გამოითვლება სივრცეში $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ სიმკვრივით განაწილებული ნებისმიერად (აჩქარებულად) მოძრავი მუხტების მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი. (55,5)-ის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალქვეშა ფუნქციებზე მიწერილი a ნიშნაკი იმის მაჩვენებელია, რომ

მათი მნიშვნელობები უნდა ავიღოთ $t' = t - \frac{x - \xi}{c}$ მომენტებში ($\xi_4 = ict' = ict' - \frac{x - \xi}{c}$); რაც პრინციპულად დაუძლეველ სიძნელებს ჰქმნის

(55,5) ინტეგრალის გამოთვლის დროს. შეუძლებელია მუხტთა სისტემის მიერ დაკავებულ მთელ სასრულო მოცულობაზე ნაჩვენები ინტეგრაციის ჩატარება; ამიტომ სასრულო მოცულობაში მოთავსებული ნებისმიერად მოძრავი მუხტთა სისტემის ველის განსაზღვრა საზოგადოდ არ ხერხდება.

(55,5) ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ „წერტილოვანი“ მუხტის ველის გამოსათვლელად, ე. ი. ისეთ შემთხვევებში, როდესაც მუხტების მიერ დაკავებული სივრცის მოცულობა იმდენად მცირეა, რომ მისი ელემენტების რეტარდირებულ $t'_k = t - \frac{x_k - \xi_k}{c}$ დროთა განსხვავებები შეიძლება მხედველობაში არ მივიღოთ.

იმ შემთხვევებში, როდესაც ინტეგრაცია მოსახერხებელი იქნება, (55,5) ფორმულის საშუალებით ადვილად გამოითვლებიან e და h ვექტორები, რისთვისაც საკმარისია i და k ინდექსებს მიმდევრობით მივცეთ მნიშვნელობები $i, k = 1, 2, 3, 4$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$\left. \begin{aligned} R(x_1 - \bar{\xi}_1, x_2 - \bar{\xi}_2, x_3 - \bar{\xi}_3, x_4 - \bar{\xi}_4) &= R(x - \xi, x_4 - \bar{\xi}_4) \\ (R)_a &= R(x - \xi, i(x - \bar{\xi})) \\ (\dot{R})_a &= -(\nu, ic) \\ (\ddot{R})_a &= -(\dot{\nu}, 0) \\ (\dot{R}, R) &= c(x - \bar{\xi}) \left\{ 1 - \frac{(\nu, x - \xi)}{c(x - \bar{\xi})} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (55,6).$$

მაშინ ორი 4-ვექტორის ვექტორული ნამრავლი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$[R \dot{R}] = - \begin{bmatrix} x_1 - \bar{\xi}_1 & x_2 - \bar{\xi}_2 & x_3 - \bar{\xi}_3 & i(x - \bar{\xi}) \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & ic \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x - \xi & i(x - \bar{\xi}) \\ \nu & ic \end{bmatrix}, \quad (55,7)$$

რომლის სივრცე-სივრცითი და დრო-სივრცითი ნაწილებისათვის ვლებულობთ:

$$[R \dot{R}] = \left\{ \begin{aligned} -[x - \xi, \nu] &= [\nu, x - \xi] \text{ სივრცე-სივრცითი ნაწილი} \\ -i(x - \bar{\xi})c + i\nu(x - \bar{\xi}) & \text{ სივრცე-დროითი ნაწილი} \end{aligned} \right\}. \quad (55,8)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $i, k=1, 2, 3$ მნიშვნელობები მოგვეყვებენ (55,5) გამოსახულების სივრცე-სივრცით ნაწილს, რომელიც გვაძლევს მაგნიტური ვექტორის მდგენელებს, ხოლო ინდექსების $i=4$ და $k=1, 2, 3$ მნიშვნელობანი კი დრო-სივრცითი ნაწილს გამოყოფს; ეს უკანასკნელი, როგორც ვიცით, დაკავშირებულია ელექტრულ ვექტორთან.

ამგვარად, (55,5)-დან ჩვენ გვექნება:

$$h(x_1, x_2, x_3, t) = \int \frac{\rho \left(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, t - \frac{x - \bar{\xi}}{c} \right) d\bar{\xi}^3}{c^3(x - \bar{\xi})^3 \left(1 - \frac{(\nu, x - \xi)}{c(x - \bar{\xi})} \right)^3} \left\{ [\nu, x - \xi] (c(x - \bar{\xi}) - (\nu, x - \xi)) - [x - \xi, \nu] ((x - \xi, \nu) - v^2 + c^2) \right\}. \quad (55,9)$$

$$e(x_1, x_2, x_3, t) = \int \frac{\rho \left(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, t - \frac{x - \bar{\xi}}{c} \right) d\bar{\xi}^3}{c^3(x - \bar{\xi})^3 \left(1 - \frac{(\nu, x - \xi)}{c(x - \bar{\xi})} \right)^3} \left\{ \dot{\nu}(x - \bar{\xi}) (c(x - \bar{\xi}) - (\nu, x - \xi)) - ((x - \xi)c - \nu(x - \bar{\xi})) \cdot ((\nu, x - \xi) - v^2 + c^2) \right\}. \quad (55,10)$$

ამ უკანასკნელი ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერად (აჩქარებულად) მოძრაი მუხტების ველი ორი ნაწილისაგან შედგება: პირველი სიჩქარეზე დამოკიდებული, მეორე კი — აჩქარებაზე. ეს ველები არსებითად განსხვავდებიან ერთი მეორისაგან. სახელდობრ, სიჩქარეზე და აჩქარებაზე დამოკიდებული ველები, სათანადოთ, დაკვირვების წერტილამდე მანძილის კვადრატისა და პირველი ხარისხის უკუპროპორციულად იცვლებიან. მაშასა-

დამე, მუხტებიდან ახლო მანძილებზე გაცილებით ძლიერია პირველი, შორ მანძილებზე — მეორე.

(55,9) და (55,10), ფორმულებიდანვე მიიღებინა შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$h = [n_0 e]; \quad (n_0 e) = (n_0 h) = 0, \quad (55,11)$$

სადაც $n_0 = \frac{x - \xi}{x - \xi}$ წარმოადგენს ერთეულოვან ვექტორს $x - \xi$ რადიუსვექტორის მიმართულებით.

§ 56. ნებისმიერად მოძრავი მუხტის ველი

წინა პარაგრაფში ჩვენ მივიღეთ ნებისმიერად მოძრავ მუხტთა სისტემის ველის დაძაბულობათა ვექტორების გამობატულებები (55,9) და (55,10), რომელთა ინტეგრაცია, საზოგადოდ შეუძლებელია. ეს ფორმულები შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ „წერტილოვანი“ მუხტების ველის e და h ვექტორების გამოსათვლელად. იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს დამუხტული ნაწილაკის ველის პრაქტიკული განსაზღვრა (55,9) და (55,10) ფორმულების საშუალებით, საჭიროა მუხტის მიერ დაკავებული მოცულობა მივასწრაფოდ ნულისაკენ. მაგრამ ნაცვლად ამ ზღვრული გადასვლისა, მუხტის ველის გამოსათვლელად შეიძლება უფრო თვალსაჩინო გზა ავირჩიოთ. სახელდობრ, სამგანზომილებიანი ჯორმით წარმოდგენილი ლენარდ-ვიხერტის (54,11) და (54,12) პოტენციალებიდან, (25,16) და (25,17) ფორმულების მიხედვით, უშუალოდ განვსაზღვროთ e და h ვექტორები. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$s = (x - \xi) \left(1 - \frac{v \cdot (x - \xi)}{c(x - \xi)} \right), \quad (56,1)$$

მაშინ ვიხერტ-ლენარდის (54,11) და (54,12) პოტენციალები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$A = \left(\frac{qv}{cs} \right)_{t'} = t - \frac{x - \xi}{c} \quad \text{და} \quad \varphi = \left(\frac{q}{s} \right)_{t'} = t - \frac{x - \xi}{c}; \quad (56,2)$$

რომლებიდანაც A და φ -ს შორის შემდეგი დამოკიდებულება მიიღება:

$$A = \frac{v}{c} \varphi. \quad (56,3)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $t' = t - \frac{x - \xi}{c}$ განტოლებიდან

$$c(t - t') = x - \xi = \sqrt{(x_1 - \xi_1(t'))^2 + (x_2 - \xi_2(t'))^2 + (x_3 - \xi_3(t'))^2}, \quad (56,4)$$

მაშინ, (25,16) და (25,17) ფორმულებში (56,2) გამოსახულებათა ჩასმის შედეგად, ნებისმიერად მოძრავი მუხტის ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობათა ვექტორებისათვის მივიღებთ:

$$e = \frac{q}{s^2} \text{grad } s + \frac{qv}{c^2 s^2} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{q}{c^2 s} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (56,5)$$

$$h = \text{rot} \left[\frac{q\mathbf{v}}{cs} \right] = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \text{grad } s] + \frac{q}{cs} \text{rot } \mathbf{v}. \quad (56,6)$$

გამოვთვალოთ (56,5) და (56,6) ფორმულებში შემავალი სიდიდეები: $\frac{\partial s}{\partial t}$,

$\text{grad } s$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ და $\text{rot } \mathbf{v}$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial (x - \xi)}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{E})}{c} \right) \right\} \frac{\partial t'}{\partial t} = \\ &= \left\{ - \frac{(x_1 - \xi_1(t')) \frac{d\xi_1(t')}{dt'} + (x_2 - \xi_2(t')) \frac{d\xi_2(t')}{dt'} + (x_3 - \xi_3(t')) \frac{d\xi_3(t')}{dt'}}{x - \xi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{v})^2}{c} - \frac{(x - \mathbf{E}, \frac{d\mathbf{v}}{dt'})}{c} \right\} \frac{\partial t'}{\partial t} = \\ &= \left\{ - \frac{(x - \xi, \mathbf{v})}{x - \xi} + \frac{v^2}{c} - \frac{(x - \mathbf{E}, \dot{\mathbf{v}})}{c} \right\} \frac{\partial t'}{\partial t}. \end{aligned} \quad (56,7)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } s &= \text{grad} (x - \xi) - \frac{1}{c} \text{grad} (\mathbf{x} - \mathbf{E}, \mathbf{v}) = \frac{x - \mathbf{E}}{x - \xi} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{E}, \mathbf{v})}{x - \xi} \text{grad } t' - \\ &- \frac{1}{c} \text{grad} [v_1(x_1 - \xi_1(t')) + v_2(x_2 - \xi_2(t')) + v_3(x_3 - \xi_3(t'))] = \\ &= \frac{x - \mathbf{E}}{x - \xi} - \frac{\mathbf{v}}{c} - \left\{ \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{E})}{x - \xi} - \frac{v^2}{c} + \frac{(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{x} - \mathbf{E})}{c} \right\} \text{grad } t'. \end{aligned} \quad (56,8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (56,9)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = [\nabla, \mathbf{v}] = [\text{grad } t', \dot{\mathbf{v}}]. \quad (56,10)$$

$\frac{\partial t'}{\partial t}$ და $\text{grad } t'$ გამოსახულებათა გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (56,4) დამოკიდებულება, მივიღებთ:

$$c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = \frac{\partial (x - \xi)}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{E})}{x - \xi} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

საიდანაც

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{x - \xi}{s}, \quad (56,11)$$

$$-c \text{grad } t' = \text{grad} (x - \xi(t')) = \frac{x - \mathbf{E}}{x - \xi} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{E}, \mathbf{v})}{x - \xi} \text{grad } t',$$

საიდანაც

$$\text{grad } t' = -\frac{x - \xi}{cs} \quad (56,12)$$

თუ ახლა ზემოდ გამოთვლილი სიდიდეების (56,7), (56,8), (56,9), (56,10), (56,11) და (56,12) მნიშვნელობებს (56,5) და (56,6) ფორმულებში ჩავსვათ, მაშინ ზოგიერთი მარტივი გარდაქმნებისა და წვერების დაჯგუფების შედეგად გვექნება:

$$e = -\frac{q(x - \xi)v'}{s^2 c^2} + \frac{q(x - \xi)}{s^3} \left(\frac{x - \xi}{x - \xi} - \frac{v}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(x - \xi, v')}{c^2} \right) \quad (56,13)$$

$$h = -\frac{q[x - \xi, v']}{s^2 c^2} + \frac{q[v, x - \xi]}{s^2 c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(x - \xi, v')}{c^2} \right) \quad (56,14)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულები შეიძლება აგრეთვე შემდეგ სახეზე დავიყვანოთ:

$$\frac{e}{q} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{s^3} \left(x - \xi - \frac{v}{c} (x - \xi) \right) + \frac{1}{s^2 c^2} \left[x - \xi \left[(x - \xi) - \frac{v}{c} (x - \xi), v' \right] \right] \quad (56,15)$$

$$\frac{h}{q} = \frac{[e, x - \xi]}{x - \xi} \quad (56,16)$$

(56,16)-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერად (აჩქარებულად) მოძრავი მუხტების მაგნიტური ველის h ვექტორი ყოველთვის e და $x - \xi$ ვექტორების პერპენდიკულარულია. h -გან განსხვავებით, e — ვექტორს $x - \xi$ რადიუს-ვექტორის პერპენდიკულარული მდგენელის გარდა აქვს გასწვრივი მდგენელიც.

მიღებული ფორმულები ზოგადი სახის არიან და გამოდგებიან მუხტის ნებისმიერად დიდი სიჩქარით მოძრაობის შემთხვევისათვის, რომელიც შეიძლება ძალიან ახლოს იყოს c -თან.

რადგან (56,15) და (56,16) ფორმულები სანართლიანია მხოლოდ „წერტილოვანი“ მუხტისათვის, ამიტომ ისინი აღარ გამოდგებიან აღებული და-მუხტული ნაწილაკიდან ისეთ მანძილებზე, რომლებიც ამ „წერტილოვანი“ მატერიალური დამუხტული ნაწილაკის რადიუსის რიგის არიან. მაგალითად, ეს ფორმულები გამოუსადეგარი ხდებიან სივრცის იმ წერტილებისათვის, რომლებიც უშუალოდ ეკვრიან ელექტრონს. მაშასადამე, ელექტრონის შიგნით მათი გამოყენება ყოვლად შეუძლებელია. (56,13) და (56,14) განტოლებები გვიჩვენებენ, რომ აჩქარებულად მოძრავი მუხტის ელექტრომაგნიტური ველი წარმოადგენს განსხვავებული თვისებების მქონე ორი ველის ჯამს

$$e = e_1 + e_2 \text{ და } h = h_1 + h_2, \quad (56,17)$$

სადაც e_1 და h_1 ვექტორები სათანადოდ წარმოადგენენ მუხტის სიჩქარეზე, ხოლო e_2 და h_2 — აჩქარებაზე დამოკიდებულ ველებს. გამოვიკვლიოთ ეს ველები ცალ-ცალკე.

(56,13) და (56,14) ფორმულებიდან სიჩქარეზე დამოკიდებული ველის მისაღებად საკმარისია აჩქარება ნულს გაუტოლოთ ($v = 0$), მივიღებთ:

$$e_1 = \frac{q(x - \xi)}{s^3} \left(\frac{x - \xi}{x - \xi} - \frac{v}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (56,18)$$

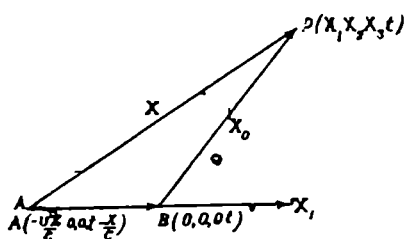
$$h_1 = -\frac{q(x - \xi)}{s^3 c} [x - \xi, v] \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right); \quad (56,19)$$

რომლებიდანაც მიიღებთან შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\left(e_1, \frac{x - \xi}{x - \xi} \right) = \frac{q}{s^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (56,20)$$

$$\left(h_1, \frac{x - \xi}{x - \xi} \right) = 0. \quad (56,21)$$

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ e_1 და h_1 მართლაც მუდმივი სიჩქარით მოძრავი მუხტის ველს წარმოადგენენ. ამისათვის დავეშვათ, რომ q მუხტი



ნახ. 35.

ვ სიჩქარით მოძრავი მუხტი გაივლის $AB = v\Delta t$ მანძილს, ისე რომ, როდესაც ველი P წერტილში მივა, ნაწილაკი B მდებარეობას დაიკავებს. თუ A და B წერტილებს P -თან შევადრებთ X და X_0 რადიუს-ვექტორებით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$X_0 = X - \frac{X}{c} v.$$

თუ ამ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს კვადრატში ავიყვანთ და გავითვალისწინებთ, რომ აუგალი აქვთ შემდეგ ტოლობებს:

$$[X_0, v] = [X, v] \text{ და } ([X_0, v])^2 = ([X, v], [X, v]) = X^2 v^2 - (X \cdot v)^2;$$

მაშინ მივიღებთ:

$$X^2_0 - \left(\left[X_0 \frac{v}{c} \right] \right)^2 = \left(X - \frac{(Xv)}{c} \right)^2, \quad (56,22)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ლენარდი-ვიხერტის პოტენციალების მნიშვნე-
ლი (56,1) X_0 რადიუს ვექტორის საშუალებით გამოისახება. მართლაც,

$$\begin{aligned} r &= X \left(1 - \frac{(Xv)}{cX} \right) = \sqrt{X^2_0 - \left(\frac{1}{c} [X_0 v] \right)^2} = \\ &= \sqrt{X^2_1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (X^2_2 + X^2_3)} \end{aligned} \quad (56,23)$$

თუ ახლა (56,18)-ში შემავალ $\left(\frac{X}{X} - \frac{v}{c} \right)$ გამრავლს r -ით გამოვსახავთ, მა-
შინ X რადიუს ვექტორის გასწვრივ e_1 ვექტორის მდგენელისათვის გვექნება:

$$e_{1X} = \left(e_1, \frac{X}{X} \right) = \frac{q}{r^3} \left(X - \frac{(X, v)}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{q \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{r^2},$$

რომელიც ზუსტად ემთხვევა (47,10)-ს.

სრულიად ანალოგიური გზით (56,19)-დან მიიღება (48,2) დამოკიდებუ-
ლება. ამგვარად, სიჩქარეზე დამოკიდებული ველისათვის აქაც ჩვენ გვაქვს

$$h_1 = \frac{1}{c} [v e_1]. \quad (56,24)$$

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ველის მეორე — აჩქარებაზე დამოკი-
დებული ნაწილი. ამ ველის ბუნების გამოსარკვევად დაუბრუნდეთ (56,13) და
(56,14) განტოლებებს, რომლებიდანაც ადვილად მიიღება შემდეგი დამოკი-
დებულებები:

$$e_2 = -\frac{q(x - \xi) \dot{v}}{r^2 c^2} + \frac{q(x - \xi)(x - \xi, \dot{v})}{r^3 c^2} \left(\frac{x - \xi}{x - \xi} - \frac{v}{c} \right) \quad (56,25)$$

$$h_2 = \left[\frac{x - \xi}{x - \xi} e_2 \right]. \quad (56,26)$$

უკანასკნელი განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ ელექტრომაგნიტური
ველის აჩქარებაზე დამოკიდებული მეორე ნაწილი მნიშვნელოვნად განსხვავ-
დება პირველისაგან. ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობათა
 e_2 და h_2 ვექტორები, ყოველთვის ურთიერთპერპენდიკულარული არიან და
რადიუსვექტორთან შეადგენენ სწორ კუთხეს. e_2 და h_2 ვექტორები მუდამ
ველის გავრცელების მიმართულების პერპენდიკულარულად არიან განლაგე-
ბული. ეს ველი, ამიტომ განივ ველად იწოდება, პირველი ნაწილისაგან,
განსხვავებით, რომელიც თანაბრად მოძრავ მუხტს თან ზიჰყვება.

საბოლოოდ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ნებისმიერად მოძრავი ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველი წარმოადგენს ორი ველის ჯამს, რომლებიდანაც პირველი მუდმივი სიჩქარით მოძრავი ელექტრონის ელექტროსტატიკური ველია, რომელიც თან მიყვება ნაწილაკს, ხოლო მეორე კი განივია და წარმოიშობა მხოლოდ და მხოლოდ ელექტრონის აჩქარებული მოძრაობის დროს. მანძილზე მათი დამოკიდებულების მიხედვით პირველი სქარბობს მუხტიდან ახლო მანძილებზე, მეორე კი შორს. იმ ზონას, სადაც მეორე ველი წინწინელოვნად ძლიერი ხდება პირველთან შედარებით, ტალღურ ზონას უწოდებენ.

§ 57. მონოპოლმაგნიტური ელემენტარული ელემენტარული ტალღა

წინა პარაგრაფებში ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ აჩქარებულად მოძრავი მუხტი (ელექტრონი) ელექტრომაგნიტური ველის წყაროს წარმოადგენს. ის გარეშე ძალა, რომელსაც მუხტი აჩქარებული მოძრაობის მდგომარეობაში მოჰყავს. ასრულებს გარკვეულ მუშაობას. შესრულებული მუშაობის ხარჯზე იზრდება დამუხტული ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია. ეს უკანასკნელი არ შეიძლება უსასრულოდ იზრდებოდეს. მაშასადამე, აჩქარებულად მოძრავი მუხტი თავისი ენერგიის გარკვეულ ნაწილს იმ გარემოს უნდა გადასცემდეს, რომელშიც ის მოძრაობს.

რადგან აჩქარებულად მოძრავი დამუხტული ნაწილაკი სივრცეში წარმოშობს ელექტრომაგნიტურ ველს, რომელსაც თან მიაქვს ენერგია, ანტიმომსაბუნებლოდ პროცესს ელექტრომაგნიტური ენერგიის გასხივებას უწოდებენ. დამუხტული ნაწილაკის (ელექტრონის) მიერ გასხივებულ ელექტრომაგნიტურ ენერგიას შთანთქავს ირგვლივ სივრცეში მოძრავი მატერიალური სხეულები; რომლებიც თავის მხრივ აგრეთვე დამუხტული ნაწილაკებისაგან შედგებიან.

ელექტრომაგნიტური ენერგიის გამოსხივებისა და შთანთქმის მოვლენები რეალურად მიმდინარეობენ და დიდ როლს ასრულებენ ბუნებაში და ტექნიკაში.

§ 52-ში ჩვენ მივიღეთ ველის ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის (52,4) განტოლების ამონახსნი — (52,13) პერიოდული ფუნქციის სახით და გამოვარკვეეთ რომ ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ტალღას, რომელიც სივრცეში c სიჩქარით ვრცელდება.

ახლა, იმისათვის რომ შევისწავლოთ აჩქარებულად მოძრავი მუხტის ელექტრომაგნიტური ველი და გამოვიკვლიოთ e და h ვექტორების ბუნება, მათთვის შევადგინოთ სათანადო დიფერენციალური განტოლებები.

თუ ლორენცის განტოლებათა (34,13) სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარეზე ვიმოქმედებთ დაკვირვების წერტილის კოორდინატების მიხედვით გაწარმოების rot ოპერაციით და გამოვიყენებთ მესამე განტოლებას, მაშინ მივიღებთ:

$$\text{rot rot } h = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2},$$

საიდანაც, (2,29)-ს თანახმად, გვექნება:

$$\Delta h - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0. \quad (57,1)$$

ასევე, სივრცის იმ ნაწილში, სადაც ელექტრული მუხტები არა გვაქვს ($j_i = 0$), ანალოგიური გზით, e ვექტორისათვის მიიღება განტოლება

$$\Delta e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0. \quad (57,2)$$

მაშასადამე, e და h ვექტორები ტალღის განტოლებას აკმაყოფილებენ; საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ისინი დროის პერიოდული ფუნქციებით უნდა გამოისახებოდნენ. ამგვარად, (57,2) განტოლების ამოხსნა შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$e = e_0(x_1, x_2, x_3) e^{\pm i\omega t}, \quad (57,3)$$

რომლის ჩასმით (57,2)-ში მივიღებთ:

$$\Delta e_0(x_1, x_2, x_3) + \frac{\omega^2}{c^2} e_0(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (57,4)$$

თუ ახლა დაეუშვებთ, რომ $e_0 = e_0(x_1)$, მაშინ (57,4) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2 e_0(x_1)}{dx_1^2} + \frac{\omega^2}{c^2} e_0(x_1) = 0. \quad (57,5)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის განტოლებას, რომლის ამონახსნი, როგორც ცნობილია

$$e_0(x_1) = e^{\circ} e^{\pm i \frac{\omega}{c} x_1}. \quad (57,6)$$

ამგვარად, (57,2) განტოლებით განსაზღვრული ელექტრომაგნიტური ველის e ვექტორისათვის, რომელიც მხოლოდ x_1 და t კოორდინატებზეა დამოკიდებული, გვექნება

$$e(x_1, t) = e^{\circ} e^{\pm i\omega \left(t \pm \frac{x_1}{c} \right)}. \quad (57,7)$$

ეს უკანასკნელი, § 52-ს თანახმად, წარმოადგენს x_1 ღერძის გასწვრივ $\left(e^{\circ} e^{\pm i\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right)} \right)$ და მის საწინააღმდეგოდ $\left(e^{\circ} e^{\pm i\omega \left(t + \frac{x_1}{c} \right)} \right)$ მიმავალ ტალღებს, რომლებიდანაც უნდა ავიღოთ პირველი; რადგან მხოლოდ ის აკმაყოფილებს მიზნობრივობის პრინციპის მოთხოვნებს, ე. ი.

$$e(x_1, t) = e^{\circ} e^{i\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right)}. \quad (57,8)$$

ეს შედეგი ადვილად შეიძლება განვაზოგადოთ იმ შემთხვევაზე, როდესაც სივრცეში ვრცელდება ტალღა, რომლის გავრცელების მიმართულება x_1, x_2 და

x_2 ლერძებთან შეადგენს სათანადოდ α_1 , α_2 და α_3 კუთხეებს. ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$e(x_1, x_2, x_3, x_4) = e_0(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega \left(\frac{x_4}{ic} - \frac{x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 + x_3 \cos \alpha_3}{c} \right)}. \quad (57,9)$$

აუ ტალღის გავრცელების მიმართულებით ავიღებთ n ერთეულოვან ვექტორს. მაშინ (57,9) შემდეგნაირად შეიძლება გადავწეროთ

$$e(x_i) = e_0(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega \left(\frac{x_4}{ic} - \frac{(x, n)}{c} \right)}. \quad (57,10)$$

სრულიად ანალოგიური სახე აქვს მაგნიტურ ვექტორს

$$h(x_i) = h_0(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega \left(\frac{x_4}{ic} - \frac{(x, n)}{c} \right)}, \quad (57,11)$$

ოონელიც (57,1) განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს.

(57,10) და (57,11) გამოსახულებებში $e_0(x_1, x_2, x_3)$ და $h_0(x_1, x_2, x_3)$ სიდიდეებს, შესაბამისად, e და h ვექტორების რხევის ამპლიტუდები ეწოდებათ, ხოლო $\omega \left(\frac{x_4}{ic} - \frac{(x, n)}{c} \right)$ -ს კი — ტალღის ფაზა.

საზოგადოდ, ტალღას ეწოდება მონოკრომატული თუ მისი ველი (e და h) დროის მარტივი პერიოდული ფუნქციების საშუალებით განისაზღვრება, ე. ი. როდესაც (57,10) და (57,11) ფორმულებში შემავალ ω სიდიდეს აქვს ერთი გარკვეული მნიშვნელობა.

რადგან ფაზა გვიჩვენებს რხევადი ფიზიკური სიდიდის (e და h ვექტორების) გადახრის მიმართულებას, რაც ობიექტურ რეალობას წარმოადგენს. ამიტომ ის არ შეიძლება დამოკიდებული იყოს კოორდინატა სისტემის არჩევაზე, მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ტალღის ფაზა, თავისი ბუნებით განსხვავებულია e და h ვექტორების ამპლიტუდებისაგან, რომელთა სიდიდეები დამოკიდებული არიან ათვლის სისტემაზე (§ 29).

კოორდინატა სისტემის არჩევაზე ტალღის ფაზის დამოუკიდებლობის, ე. ი. ლორენცის გარდაქმნების მიმართ მისი ინვარიანტობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ფაზა უნდა წარმოადგენდეს ორი ოთხგანზომილებიანი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს. მართლაც, ფაზა შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც ორი x_i და k_i 4 — ვექტორების სკალარული ნამრავლი:

$$\varphi = \omega \left(\frac{x_4}{ic} - \frac{(x, n)}{c} \right) = - (k_i x_i), \quad (57,12)$$

სადაც x_i — ოთხგანზომილებიანი მანძილია, ხოლო k_i — აგრეთვე 4 — ვექტორი შემდეგი მდგენელებით:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} n_1, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} n_2, \quad k_3 = \frac{\omega}{c} n_3, \quad k_4 = \frac{i\omega}{c}. \quad (57,13)$$

აქ n_1, n_2, n_3 სათანადოდ წარმოადგენენ n -ს მდგენელებს x_1, x_2 და x_3 ღერძებზე. k_i ოთხგანზომილებიანი ვექტორის პირველი სამი: k_1, k_2 და k_3 მდგენელი შეადგენს სამგანზომილებიან k ვექტორს, რომელსაც ტალღური ვექტორი ეწოდება; მისი აბსოლუტური სიდიდე $|k| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, გვაძლევს ტალღათა რიცხვს 2π სმ. მანძილზე. სივრცეში k მიმართულია ტალღის გავრცელების (n) მიმართულებით.

რადგან $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, ამიტომ k_i შემდეგ პირობას აკმაყოფილებს:

$$k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (57,14)$$

ე. ი. სივრცეში k_i ნულოვანი სივრცის ვექტორია.

თუ ელექტრომაგნიტური ტალღის k_i 4 — ვექტორის კვადრატს ნაწილაკის იმპულსის 4 — ვექტორის კვადრატს (19,16) შევადარებთ, დავინახავთ. რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის უძრაობის მასა ნულის ტოლია ($m' = 0$), მაშასადამე, ფოტონებს უძრაობის მასა არა აქვთ; რაც სრულ თანხმობაშია (19,14) დამოკიდებულებიდან გამომდინარე შედეგთან.

რადგან k_i 4 — ვექტორია, ამიტომ მისი მდგენელები, ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, ლორენცის (10,22) ფორმულების მიხედვით გარდაიქმნებიან:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{k'_1 - i \frac{v}{c} k'_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ k_2 &= k'_2 \\ k_3 &= k'_3 \\ k_4 &= \frac{k'_4 + i \frac{v}{c} k'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (57,15)$$

ანდა თუ ამ მდგენელების ნაცვლად (57,15)-ში ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს (57,13)-დან, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} v \cos \alpha_1 &= v' \frac{\cos \alpha'_1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ v \cos \alpha_2 &= v' \cos \alpha'_2 \\ v \cos \alpha_3 &= v' \cos \alpha'_3 \\ v &= v' \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (57,16)$$

მაშასადამე, ტალღის სიხშირე ν დამოკიდებულია წყაროს მოძრაობის სიჩქარეზე. როდესაც წყაროს სიჩქარე ძალიან მცირეა ($v \ll c$), მაშინ (57,16)-ს მეოთხე განტოლება გვაძლევს დოპლერის ეფექტის ცნობილ ფორმულას

$$\nu - \nu' = \Delta\nu = \frac{\nu}{c} \cos \alpha_1. \quad (57,17)$$

თუ ახლა (57,16) სისტემის პირველ განტოლებას გავყოფთ მეოთხეზე, გვექნება:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos \alpha'_1 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha'_1}. \quad (57,18)$$

ეს უკანასკნელი ზუსტად ემთხვევა აბერაციის მოვლენის (15,9) ფორმულას.

ეთქვათ მოძრავ K' სისტემაში უძრავი წყარო ასხივებს ν' სიხშირის ელექტრომაგნიტურ ტალღებს. იგივე ტალღების სიხშირე უძრავ K სისტემაში, (57,16) ფორმულების თანახმად, დამოკიდებულია წყაროს სიჩქარეზე და ამ სიჩქარესა და გავრცელების მიმართულებას შორის შედგენილ კუთხეზე.

თუ დაეუშვებთ, რომ წყაროს მიმართ დამკვირვებელი მოძრაობს x_1 ღერძის გასწვრივ, მაშინ (57,16)-დან ადვილად მიიღება ამ მოძრავი დამკვირვებლისათვის ტალღის სიხშირის სიდიდე; რისთვისაც საკმარისია აღნიშნულ ფორმულებში ν და ν' -ს შეუცვალოთ ადგილები ხოლო v -ს ნიშანი, გვექნება:

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha_1}. \quad (57,19)$$

ეს ფორმულა აკავშირებს x_1 ღერძის პარალელურად მოძრავი დამკვირვებლის მიერ გაზომილ ν სიხშირეს უძრავი დამკვირვებლის მიერ გაზომილ ν' სიხშირესთან და წარმოადგენს დოპლერის გასწვრივი ეფექტის კანონის გამოხატულებას.

როდესაც დამკვირვებელი მოძრაობს x_1 ღერძზე, მაშინ $\cos \alpha = \cos \alpha_1 = \pm 1$ და ამიტომ (57,19) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 \pm \frac{v}{c}} \approx \nu' \left(1 \pm \frac{v}{c} + \frac{1}{2!} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right). \quad (57,20)$$

განვიხილოთ წყაროს მოძრაობის პერპენდიკულარული მიმართულებით ტალღის გავრცელების ($\cos \alpha_1 = 0$) მოვლენა. ამ შემთხვევაში (57,19)-დან მივიღებთ

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (57,21)$$

წყაროს მოძრაობის სიჩქარის პერპენდიკულარული მიმართულებით ტალღის სიხშირის ცვლილებას დოპლერის განივი ეფექტი ეწოდება, რომლის კანონიც მოცემულია (57,21) ფორმულით.

რადგან ელექტრომაგნიტური ტალღის e და h ვექტორების ანალიტიკულები (e_0 და h_0) (29,3) და (29,4) ფორმულების მიხედვით გარდაიქმნებიან, ამიტომ (57,19)-ის თანახმად გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e_0}{v} &= \frac{|e'_0|}{v'} = \text{inv} \\ \frac{h_0}{v} &= \frac{|h'_0|}{v'} = \text{inv} \end{aligned} \right\} \quad (57,22)$$

ამგვარად, ერთი ინერციული სისტემიდან (K) მეორეზე (K') გადასვლის დროს ელექტრომაგნიტური ტალღის ამპლიტუდა A და სიხშირე ν ერთი და იგივე (57,19) კანონის მიხედვით გარდაიქმნებიან ისე, რომ აღებულ სისტემაში მათი სიდიდეების შეფარდება ინვარიანტულ სიდიდეს წარმოადგენს

$$\frac{A}{\nu} = \frac{A'}{\nu'} = \text{inv}. \quad (57,22 a)$$

რადგან ენერჯიის სიმკვრივე ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია ($w \sim e^2$), ამიტომ (57,22)-დან გამომდინარეობს, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის ენერჯიის სიმკვრივე ისეთნაირადვე გარდაიქმნება როგორც ნისი სიხშირის კვადრატი, ე. ი.

$$\frac{w}{\nu^2} = \frac{w'}{\nu'^2} = \text{inv}. \quad (57,23)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გამოვიყენოთ, V სასრულო მოცულობაში მოთავსებულ, ერთიმეორის მიმდევრო ელექტრომაგნიტური ტალღების ჯგუფის სრული ენერჯიის

$$W' = w \cdot V \quad (57,24)$$

გარდაქმნის კანონის მისაღებად. მოძრავ K' სისტემაში W' სრული ენერჯიის გამოსახულების მისაღებად, უნდა მოენახოთ ელექტრომაგნიტურ ტალღათა ჯგუფის მიერ დაკავებული V' მოცულობის გარდაქმნის კანონი. ამ შემთხვევაში (11,2) ფორმულა არ გამოგვადგება, რადგან განსახილველი მოცულობა c სიჩქარით მოძრაობს. ელექტრომაგნიტურ ტალღათა ჯგუფს არ შეიძლება მივაწეროთ „საკუთარი“ მოცულობა, რადგან (11,2) ფორმულის მიხედვით ეს უკანასკნელი ნულის ტოლია. ამ სიძნელის თავიდან ასაცილებლად განვიხილოთ V_0 „საკუთარი“ მოცულობა, რომელიც K' სისტემის მიმართ მოძრაობს u' სიჩქარით. (11,2) ფორმულის თანახმად

$$V' = V_0 \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}. \quad (57,25)$$

თუ x'_1 ლერძთან v' სიჩქარის მიერ შედგენილ კუთხეს აღენიშნავთ φ' -ით, K' სისტემის სიჩქარეს K -ს მიმართ v_0 -ით, ხოლო V_0 მოცულობის სიჩქარეს K -ს მიმართ v -ით, მაშინ (15,7) და (57,25) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} V &= V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = V_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'v_0}{c^2} \cos \varphi'} = \\ &= V' \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'v_0}{c^2} \cos \varphi'}, \end{aligned} \quad (57,26)$$

თუ ამ უკანასკნელ განტოლებაში გადავალთ ზღვარზე როცა $v' \rightarrow c$, მაშინ მივიღებთ c სიჩქარით მოძრავი V' მოცულობის გარდაქმნის კანონს

$$V = V' \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_0}{c} \cos \varphi'}. \quad (57,27)$$

(57,26) ფორმულის შედარება (57,19)-თან გვიჩვენებს, რომ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს V მოცულობა გარდაიქმნება როგორც $\frac{1}{\gamma}$, ისე, რომ ნაბრაველი $V \cdot v$ ინვარიანტს წარმოადგენს, საიდანაც, (57,23) და (57,24) ფორმულების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{W}{v} = \frac{W'}{v'} = \text{inv}. \quad (57,28)$$

ამგვარად, ტალღათა მიმდევრობის გარკვეული ნაწილის (ჯგუფის) ენერჯიისა და სიხშირის მნიშვნელობათა შეფარდება ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივეა.

§ 58. ბრტყელი პოლარიზებული ტალღა

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ველი სიციარიელეში. ამ შემთხვევაში ველის ძირითადი განტოლებები (34,6) და (34,7) შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } h &= \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} \\ \text{div } e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (58,1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } e &= -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t} \\ \text{div } h &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (58,2)$$

თუ (58,1) სისტემის მეორე განტოლებაში e -ს გამოსახულებას (57,8)-დან შევიტანთ და (57,11) დამუკიდებულებებს გავითვალისწინებთ გვექნება:

$$(k, e_0) = 0, \tag{58,3}$$

ანალოგიური გზით (58,2) სისტემის მეორე განტოლებიდან მიიღება

$$(k, h_0) = 0. \tag{58,4}$$

(58.3) და (58.4) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის e და h ვექტორები ყოველთვის ტალღის გავრცელების (k ტალღური ვექტორის) მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მდებარეობენ.

დავუშვათ, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღა ვრცელდება x_1 ღერძის გასწვრივ, მაშინ e და h ვექტორები ყოველთვის $x_2 O x_3$ სიბრტყეებში იქნებიან განლაგებული. თუ ტალღის გავრცელების მიმართულების (x_1 ღერძი) პერპენდიკულარული $x_2 O x_3$ სიბრტყის ყოველ წერტილში ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობათა ვექტორების e_2, e_3, h_2 და h_3 მდგენელებს ცალ-ცალკე უცვლელი მნიშვნელობები აქვთ, ე. ი. $e_2 = e_2(x_1, t), e_3 = e_3(x_1, t), h_2 = h_2(x_1, t), h_3 = h_3(x_1, t)$, მაშინ ასეთ ტალღას ბრტყელი ეწოდება, ზემოდ აღნიშნულ შემთხვევაში $x_2 O x_3$ სიბრტყეები ტალღის ზედაპირებს წარმოადგენენ.

რადგან e და h ვექტორების e_2, e_3, h_2 და h_3 მდგენელები x_2 და x_3 ცვლადებზე დამოუკიდებელი არიან, ამიტომ ამ ფუნქციათა წარმოებულები x_2 და x_3 ცვლადებით ნულის ტოლია და შესაბამისად (58,1) და (58,2) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial e_1}{\partial t} &= 0, & -\frac{1}{c} \frac{\partial h_1}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial e_2}{\partial t} &= -\frac{\partial h_3}{\partial x_1}, & \frac{1}{c} \frac{\partial h_2}{\partial t} &= \frac{\partial e_3}{\partial x_1} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial e_3}{\partial t} &= \frac{\partial h_2}{\partial x_1}, & \frac{1}{c} \frac{\partial h_3}{\partial t} &= -\frac{\partial e_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial e_1}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{58,5}$$

პირველი ორი განტოლების თანახმად ელექტრომაგნიტური ველის გასწვრივი მდგენელები e_1 და h_1 მუდმივ სიდიდეებს წარმოადგენენ. თუ ამასთან ერთად ორ უკანასკნელ განტოლებასაც გავითვალისწინებთ, მაშინ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ e_1 და h_1 საზოგადოდ დროსა და სივრცეში არ იცვლებიან. მაშინაც კი, როდესაც ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი მნიშვნელობები აქვთ, ელექტრომაგნიტურ ტალღასთან მათ საერთო არაფერი ექნებათ, რადგან ელექტრო და მაგნიტოსტატიკური ველები, § 56 თანახმად, ელექტრომაგნიტური ტალღებისაგან სრულიად განცალკევებით არსებობენ და ამ უკანასკნელთან არავითარი კავშირი არა აქვთ.

მაშასადამე, შეგვიძლია დავუშვათ რომ $e_1 = h_1 = 0$.

გადავიღეთ (58,5) განტოლებათა ინტეგრაციას. თუ (58,5) განტოლებათა სისტემის მეორე წყვილის პირველ განტოლებას t -თი გავაწარმოებთ, ხოლო მეორეს x_1 -ით და შემდეგ მათ შევკრებთ, მაშინ e_2 -თვის მივიღებთ ტალღის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e_2}{\partial t^2} = 0,$$

რომლის ამონახსნი, (57,8) თანახმად, დროის პერიოდული ფუნქციით წარმოიდგინება

$$e_2 = A \cdot e^{i\omega} \left(t - \frac{x_1}{c} \right). \quad (58,6)$$

ანალოგიური გზით მივიღებთ, რომ h_3 აგრეთვე ტალღის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 h_3}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2} = 0$$

აკმაყოფილებს; ანიტომ მისი ამონახსნიც პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს

$$h_3 = A \cdot e^{i\omega} \left(t - \frac{x_1}{c} \right). \quad (58,7)$$

რადგან $e_2(x_1, t)$, $e_3(x_2, t)$, $h_2(x_1, t)$ და $h_3(x_1, t)$ ერთის მხრივ ტალღის განტოლებას, ხოლო მეორეს მხრივ (58,5) განტოლებებს აკმაყოფილებენ, ამიტომ ზემოდ ჩატარებული მსჯელობიდან შეიძლება შემდეგი დასკვნა გამოვიტანოთ: ელექტრომაგნიტური ტალღები განივია; რის შესახებ მიგვიჩიებენ აგრეთვე (58,3) და (58,4) დამოკიდებულებები.

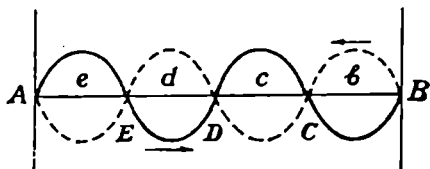
(58,6) და (58,7) გამოსახულებათა შედარება გვიჩვენებს, რომ ელექტრომაგნიტურ ტალღაში e და h ვექტორების ფაზები ერთი და იგივეა.

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ტალღა, ბგერითი ტალღებისაგან განსხვავებით, რომლებიც უშუალოდ მატერიალური ნაწილაკების — ატომ მოლეკულების პერიოდული რხევითი მოძრაობის გადაცემის შედეგად წარმოადგენენ, ეკლის დამბულობათა e და h ვექტორების პერიოდული ცვლილების სივრცის ერთი ადგილიდან მეორეში გადაცემის პროცესს უნდა დაუკავშიროთ.

როგორც ვხედავთ, ელექტრომაგნიტური ეკლის თეორიის თანახმად, ყოველი პერიოდული აღზნება სივრცის ერთი ადგილიდან მეორეში ტალღების სახით გადაეცემა. რადგან (58,5) განივ ტალღაში e_2 და h_3 დროის პერიოდულ ფუნქციებს წარმოადგენდნენ, ამიტომ ამ ტალღების არსებობის აღმოსაჩენად, და მათი თვისებების შესასწავლად შეიძლება გამოვიყენოთ ბგერის ტალღების თვისებების შესწავლის მეთოდი. ეს მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ ნაცვლად ერთი ტალღისა დებულობენ ერთი მეორის საწინააღმდეგოდ ნიშნავალ ორ ტალღას, რომლებიც შეკრების შედეგად „მდგარ“ ტალღას იძლევიან.

• თუ A -დან B -კენ მიმავალ ტალღას, გავრცელების მიმართულების პერპენდიკულარულად, ამრეკლ ზედაპირს დაუხვედრებთ, მაშინ არეკვლილი

ტალღა დამცემთან შეიკრიბება რის შედეგადაც ისინი სივრცის ზოგიერთ წერტილებში ერთი მეორეს შეასუსტებენ, ზოგჯერ გააძლიერებენ. თუ ტალღას A -დან B -კენ გავუშვებთ და სათანადოდ A და B ამრეკლ ზედაპირებს ისეთნაირად შევარჩევთ, რომ A B მანძილში ტალღის სიგრძე თავსდებოდეს მთელ რიცხვჯერ ($AB = n \cdot \lambda$), მაშინ ამ ზედაპირებს შორის მოთავსებულ სივრცეში წარმოიშობა მდგარი ტალღა. (ნახ. 36). $e, d, c, b \dots$ წერტილებში ტალღის ამპლიტუდა გაორ-



ნახ. 36.

კეცებულია, ხოლო E, D, C -ში კი ნულის ტოლია. (ნახ. 36).

ამგვარად. ელექტრომაგნიტური ტალღების აღმოსაჩენად, თუ x_1 ღერძის გასწვრივ მიმავალ ტალღას დავახვედრებთ სარკეს (სიმარტივისათვის დაეშვათ, რომ სარკე იდეალურია, ე. ი. მთლიანად არეკლავს მასზე დაცემულ ტალღებს), მაშინ არეკვლილი ტალღები გავრცელდებიან x_1 ღერძის უარყოფითი მიმართულებით.

არეკვლილი ტალღის ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის e_2 მდგენელის მისაღებად საკმარისია (58,6)-ში x_1 კოორდინატს შეუტყვალთ ნიშანი $x_1 \rightarrow -x_1$, რის შედეგადაც გვექნება:

$$e_2 = Ae^{i\omega \left(t + \frac{x_1}{c} \right)}, \quad (58,8)$$

ხოლო h_3 -ს მისაღებად (58,8) გამოსახლება უნდა ჩავსვათ (58,5) სისტემის მეორე წყვილის პირველ განტოლებაში, რაც მოგვცემს:

$$h_3 = -Ae^{i\omega \left(t + \frac{x_1}{c} \right)}. \quad (58,9)$$

მაშასადამე, დაცემული და არეკვლილი ტალღებისათვის e_2 და h_3 -ის ამპლიტუდები ტოლნი არიან, რადგან სარკე იდეალურია.

დამცემი და არეკვლილი ტალღების შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= A \left\{ e^{i\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right)} + e^{i\omega \left(t + \frac{x_1}{c} \right)} \right\} = 2A \cos \frac{\omega x_1}{c} e^{i\omega t} \\ h_3 &= A \left\{ e^{i\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right)} - e^{i\omega \left(t + \frac{x_1}{c} \right)} \right\} = -2i \sin \frac{\omega x_1}{c} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (58,10)$$

რადგან ფიზიკური სიდიდეები ნამდვილი რიცხვების საშუალებით გამოიხატებიან, ამიტომ (58,10) სიდიდეებიდან ჩვენ უნდა ავიღოთ ნამდვილი ნაწილი; რაც მოგვცემს:

$$e_1 = 2A \cos \frac{\omega x_1}{c} \cos \omega t. \quad (58,11)$$

$$h_3 = 2A \sin \frac{\omega x_1}{c} \sin \omega t. \quad (58,12)$$

ამ უკანასკნელი განტოლებებიდან კი გამომდინარეობს, რომ e_2 და h_3 სიდიდეების ამპლიტუდები $2A \cos \frac{\omega x_1}{c}$ და $2A \sin \frac{\omega x_1}{c}$ მხოლოდ x_1 კოორდინატის ფუნქციებს წარმოადგენენ.

ელექტრული ველის e_2 მდგენელის ამპლიტუდას, (58,11) ფორმულის თანახმად, მაქსიმალური მნიშვნელობები აქვს იმ წერტილებში, რომლებიც შემდეგ პირობას აკმაყოფილებენ:

$$\frac{\omega x_1}{c} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ ანუ } x_1 = \frac{2n + 1}{2} \frac{\lambda}{2}, \quad (58,13)$$

ხოლო მისი ამპლიტუდა ნულის ტოლია იმ წერტილებში, სადაც

$$x_1 = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots). \quad (58,14)$$

მაგნიტური ვექტორის h_3 მდგენელის ამპლიტუდა კი პირიქით, (58,12)-ს თანახმად, მაქსიმალურ მნიშვნელობებს აღწევს შემდეგ წერტილებში:

$$x_1 = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (58,15)$$

და ნულის ტოლია იმ წერტილებში, სადაც ელექტრული ვექტორის ამპლიტუდა მაქსიმალურია, ე. ი. იქ სადაც

$$x_1 = \frac{2n + 1}{2} \frac{\lambda}{2}. \quad (58,16)$$

ამგვარად, სივარცხელში ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები (58,1) და (58,2) აღწერენ ისეთ ტალღებს, რომლებიც არეკვლის შედეგად გვაძლევენ (58,11) და (58,12) მდგარ ტალღებს. ამ მდგარი ელექტრომაგნიტური ტალღისათვის დამახასიათებელი ისაა, რომ ელექტრული ვექტორის კვანძი წერტილები მაგნიტური ვექტორისათვის ბურცობებს წარმოადგენენ და პირიქით.

როგორც ელექტრული ისევე მაგნიტური ვექტორის ორ უახლოეს კვანძს წერტილს შორის მანძილი ტალღის სიგრძის ნახევრის ტოლია, ხოლო კვანძსა და ბურცობს წერტილებს შორის მანძილია $\frac{\lambda}{4}$.

თუ რაიმე ცდის საშუალებით აღმოვაჩინებ ამ კვანძებს და ბურცობებს, მაშინ ამით ჩვენ ექსპერიმენტულად დავამტკიცებთ ელექტრომაგნიტური ტალღების არსებობას; რაც აგრეთვე ელექტრომაგნიტური ველის (34,13) ძირითად განტოლებათა სისწორის დამადასტურებელი იქნება.

აღნიშნული ცდის ჩატარება შესაძლებელია ორი სხვადასხვა მეთოდით: შეიძლება გამოვიყენოთ ისეთი ხელსაწყო, რომლის საშუალებითაც, სივრცის ალებულ ადგილზე, ელექტრული ველის დამახასიათებელი სიდიდეები გაიზომებინ, ანდა ისეთი, რომელიც გამოდგება მხოლოდ მაგნიტური ველის გამო-საკვლევად. პირველი ტიპის ხელსაწყოს სახით შეიძლება ავიღოთ თერმოელე

შენტი. ეს უქანასკნელი ელექტრულ ველში შეტანისას შთანთქავს ენერგიას; რის შედეგადაც გამტარი გათბება. წარმოშობილი ჯოვლის სითბო ელექტრული ველის დაძაბულობის კვადრატის პროპორციულია და იზომება აღქრული თერმოდენის ძალის სიდიდის მიხედვით; რომელიც გალვანომეტრის საშუალებით გაიზომება. გალვანომეტრი დენის ძალის მაქსიმალურ მნიშვნელობებს გვიჩვენებს თერმოწყვილის იმ ადგილებში, მოთავსებისას, რომლებშიაც ელექტრულ ვექტორს ბურცობი წერტილები აქვს. შესაბამისად, დენის ძალას მინიმალური (ნული) მნიშვნელობები ექნება კვანძ წერტილებში.

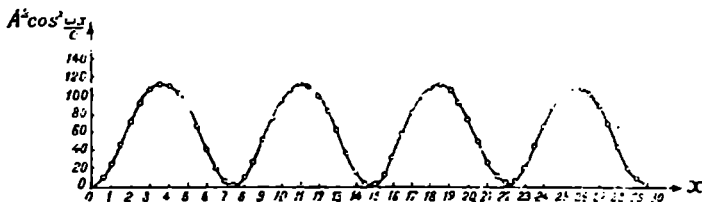
ელექტრული ვექტორის დროში ცვალებადობის (რხევების) გამო. ელექტრული ველის ენერგია სიმკვრივე აგრეთვე დროზე იქნება დაოკიდებული; ამიტომ ჩვენ დაგვეჩრდება მისი საშუალო მნიშვნელობა:

$$|\overline{e_1}|^2 = \overline{e_2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e_2^2 dt.$$

თუ ამ უქანასკნელში (58,11)-დან e_2 -ს მნიშვნელობას შევიტანთ, მივიღებთ

$$|\overline{e_1}|^2 = \frac{4A^2}{T} \cos^2 \frac{\omega x_1}{c} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = 2A^2 \cos^2 \frac{\omega x_1}{c}. \quad (58,17)$$

ამგვარად, x_1 ღერძის გასწვრივ თერმოწყვილის მოძრაობის დროს გალვანომეტრის ისრის ჩვენებათა მიმდევრობა სათანადო დიაგრამაზე (58,17) ფუნქციის შესაბამისი მრუდით უნდა გამოიხატებოდეს (ნახ. 37).

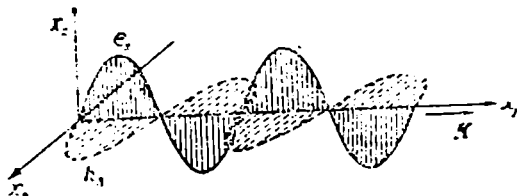


ნახ. 37.

დიდი სიზუსტით ჩატარებული ცდების შედეგები კარგ თანხმობაშია თეორიული გამოთვლებით მიღებულ (58,11), (58,12) ფორმულებთან. ამგვარად ექსპერიმენტის თეორიასთან შესანიშნავი კარგი თანხვედნა მიგვითითებს ელექტრომაგნიტური ველის (34,13) განტოლებათა სამართლიანობისა და ელექტრომაგნიტური ტალღების რეალური არსებობის შესახებ. ამ ცდების საფუძველზე გამოქვეყნდა ახლოქმედების პრინციპის უპირატესობა მანძილზე ქმედების თეორიასთან შედარებით; რადგან მათი საშუალებით დადგენილი იქნა ელექტრომაგნიტური ველის როგორც ობიექტური რეალობის ფაქტი.

(58.6) და (58.7) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ელექტრომაგნიტურ ტალღაში, რომელიც x_1 ღერძის გასწვრივ ვრცელდება, e და h ვექ-

ტორები, დროის ადებულ მომენტში, სათანადოდ x_2 და x_3 ღერძების გასწვრივ არიან მიმართული, მაშინ ტალღის გავრცელების მიუღ პროცესში ისინი ამ მიმართულებებს უცვლელად შეინარჩუნებენ. თავიანთი რხევის დროს ელექტრული ვექტორის ბოლო წერტილი აღწერს x_2 ღერძის, ხოლო მაგნიტური ვექტორისა კი— x_3 ღერძის პარალელურ სწორ ხაზებს.



ნახ. 38.

ცემულია ნახ. 38-ზე. თუ ელექტრული ვექტორი მუდამ $x_1 O x_2$ სიბრტყეში მდებარეობს, ააშინ მისი ბოლო წერტილის მდებარეობათა კვალი ამ სიბრტყეში მოგვცემს კონინუსოიდს. სათანადოდ მაგნიტური ვექტორი მოთავსებული იქნება $x_1 O x_3$ სიბრტყეში და მისი ბოლო წერტილის მდებარეობათა გეომეტრიული ადგილი $x_1 O x_3$ სიბრტყეში იქნება სინუსოიდი. ასეთ ტალღას წრფივად პოლარიზებული ტალღა ეწოდება.

პოლარიზაციის სიბრტყედ პირობით მიღებულია ის სიბრტყე, რომელშიაც ირხევა მაგნიტური ვექტორი. საზოგადოდ ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრული დაძაბულობის ვექტორი, სიდიდესთან ერთად, შეიძლება იცვლიდეს მიმართულებასაც, ისე რომ მისი ბოლო წერტილი სივრცეში შემოწერდეს რაღაც მრუდს, მაშინ ელექტრული და მაგნიტური ვექტორების ურთიერთ პერპენდიკულარულობის გამო, უკანასკნელის ბოლო წერტილიც პირველის მსგავს მრუდს შემოსწერს. თუ მაგალითად ელექტრულ ვექტორს ტალღის გავრცელების მიმართულების პერპენდიკულარულ $x_2 O x_3$ სიბრტყეში შეუძლია მიიღოს ყველა შესაძლო მდებარეობები, მაშინ, (58,5)-ს თანაბმად, მას ექნება e_2 და e_3 მდგენელები, რომლებიც სათანადოდ, (58,7) მიხედვით, შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= A_1 e^{i\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right)} \\ e_3 &= A_2 e^{i\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (58,18)$$

საიდანაც შევვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{e_2^2}{2|A_1|^2} + \frac{e_3^2}{2|A_2|^2} = 1 \quad (58,19)$$

ამ უკანასკნელიდან კი გამოიღინარეობს, რომ $x_2 O x_3$ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში e ვექტორის სიდიდე და მიმართულებები სხვადასხვაა. e ბრუნავს $x_2 O x_3$ სიბრტყეში $O x_1$ ღერძის ირგვლივ ისე, რომ მისი ბოლო წერტილი შემოწერს ელიფსს, რომლის ნახევარ ღერძებია $\sqrt{2|A_1|^2}$ და $\sqrt{2|A_2|^2}$. ასეთ

ტალღებს ელიფსურად პოლარიზებული ტალღები ეწოდება. თუ $\sqrt{2|A_1|^2} = \sqrt{2|A_2|^2}$, მაშინ (58,19) ელიფსი წრეში გადავა, და სათანადო ტალღას წრიულად პოლარიზებული ტალღა ეწოდება.

თუ $|A_1|^2$ ან $|A_2|^2$ ნულის ტოლი აღმოჩნდება, მაშინ მივიღებთ წრფივად პოლარიზებულ, ანუ სიბრტყეში პოლარიზებულ ტალღას. ამ თვალსაზრისით ელიფსურად პოლარიზებული ტალღა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წრფივად პოლარიზებული ორი ტალღის სუპერპოზიციის შედეგი.

§ 59. აჩქარებულად მოძრავი მუხტის გამოსხივება

§ 55-ში შევისწავლეთ ნებისმიერად მოძრავი მუხტის ველი, სადაც ჩვენ გამოვარკვიეთ, რომ აჩქარებულად მოძრავი მუხტი წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ტალღების წყაროს. ის სივრცეში ასხივებს ელექტრომაგნიტურ ენერგიას.

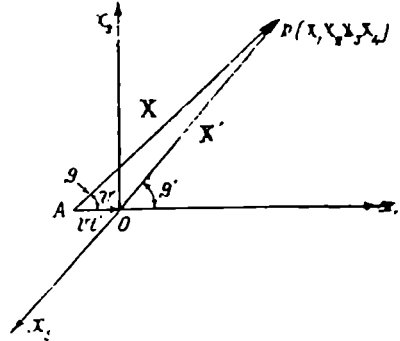
დროის ერთეულში, ზედაპირის ფართის ერთეულზე პერპენდიკულიარული მიმართულებით ვადატანილი ენერგია, (37,15) ფორმულის თანახმად, განისაზღვრება უმოვ-პოინტინგის ვექტორით

$$S = \frac{c}{4\pi} [e \ h]. \tag{59,1}$$

თუ (59,1)-ში ჩავსვამთ e და h ვექტორების მნიშვნელობებს (56,13) და (56,14)-დან, მაშინ მივიღებთ ელექტრომაგნიტური ენერგიის ნაკადის ზოგად გამოსახულებას, რომელიც ყოველი კერძო შემთხვევისათვის გამოდგება. რადგან ჩვენ ყოველთვის საქმე გვაქვს ამა თუ იმ კონკრეტული სახის პრობლემასთან, რომელსაც გარკვეული ფიზიკური პირობები შეესაბამება, აქიტომ მიზანშეწონილი იქნება განვიხილოთ კერძო სახის ამოცანა.

დავუშვათ, რომ q მუხტი (ელექტრონი) მოძრაობს x_1 ღერძის გასწვრივ. აჩქარებულად მოძრავი q მუხტის ველიდან ((56,13) და (56,14)) გამოვყოთ ის ნაწილი, რომელიც აჩქარებაზე დამოკიდებულია.

ვინაიდან განსახილველ შემთხვევაში q მუხტს x_1 სიჩქარესა და აჩქარებას, დროის ყოველ მომენტში, ერთნაირი მიმართულებები აქვთ, ამიტომ მუხტის აჩქარებაზე დამოკიდებული ელექტრომაგნიტური ველის e_x და h_x ვექტორებისათვის (56,25) და (56,26) ფორმულების თანახმად ვღებულობთ:



ნახ. 39.

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= \frac{q}{c^2 r^3} [X[X a]] \\ h_3 &= \left[\frac{X}{X} e_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (59,2).$$

სადაც $a = \frac{dv'}{dt}$ მუხტის აჩქარებას წარმოადგენს. თუ ახლა (59,1)-ში ჩავსვამთ (59,2) სიდიდეებს, გვექნება:

$$S = \frac{c}{4\pi} \left[e_2 \left[\frac{X}{X} e_2 \right] \right] = \frac{c}{4\pi} e_2^2 \frac{X}{X}. \quad (59,3)$$

(59,3)-ში გამოყენებულია X და e_2 ვექტორების პერპენდიკულიარობის პირობა.

$$\left(\frac{X}{X}, e_2 \right) = 0.$$

(1,8) ფორმულის თანახმად, (59,2)-დან მივიღებთ:

$$(e_2)^2 = \frac{q^2}{c^4 r^6} ([X[X, a]])^2 = \frac{q^2 X^4 a^2}{c^4 r^6} (1 - \cos^2 \vartheta) = \frac{q^2 X^4 a^2 \sin^2 \vartheta}{c^4 r^6}. \quad (59,4)$$

თუ ჩაწერის გამარტივების მოსაზრებით მუხტის რადიუსვექტორის ნულის ტოლად მივიღებთ ($\mathbb{E} = 0$), ე. ი. ვიგულისხმებთ, რომ l მომენტში მუხტი კოორდინატთა სათავეშია (ნახ. 38), მაშინ (59,4)-ში შემავალი r სიდიდისათვის, (56,2) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$r = X \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right). \quad (59,5)$$

როგორც ვხედავთ (59,4)-ში მანძილის გამოხატულებაში შედის არა ϑ' კუთხე, რომელსაც X' რადიუს ვექტორი l მომენტში ადგენს მუხტის სიჩქარის მიმართულენასთან, არამედ ϑ , რომელსაც X რადიუსვექტორი ადგენს სიჩქარესთან $l - l'$ მომენტში; რაც თავის მხრივ დაგვიანებულ მოქმედებას გამოხატავს.

თუ (59,5)-ს ჩავსვამთ (59,4)-ში, ხოლო ამ უკანასკნელს კი (59,3) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$S = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3 X^2 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right)^6} \frac{X}{X}. \quad (59,6)$$

მიღებული ვექტორული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის ნაკადის ვექტორი S სივრცის ყოველ წერტილში მიმართულია აღებულ წერტილზე გამავალი რადიუსვექტორის გასწვრივ.

მუხტის მიერ გასხივებული ენერჯიის კუთხური განაწილების შესასწავლად საკმარისია (59,6) რელატივისტური დამოკიდებულება გადავწეროთ სკალარულ ფორმაში, გვექნება:

$$S = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3 X^2 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^6}, \quad (59,7)$$

რომელიც მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში ($v \ll c$) მოგვცემს არა რელატივისტურ დამოკიდებულებას

$$S = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3 X^2}. \quad (59,8)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ აჩქარებულად მოძრაი მუხტი (ელექტრონი) ელექტრომაგნიტურ ტალღებს (ენერგიას) მაქსიმალური რაოდენობით ასხივებს თავისი მოძრაობის სიჩქარის პერპენდიკულიარული მიმართულებით ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$), ხოლო თვით სიჩქარის მიმართულებით გამოსხივებას ადგილი არა აქვს. ($S=0$, როცა $\vartheta=0, \pi$).

განსხვავებული სურათი გვეჩვენა რელატივისტურ ($v \simeq c$) შემთხვევაში. მართლაც, (59,7) ფორმულის თანახმად, რხევადი მუხტის (ელექტრონის) მიერ გასხივებული ელექტრომაგნიტური ენერგიის ინტენსიობა დამოკიდებულია ϑ კუთხეზე და მუხტის მოძრაობის სიჩქარეზე. მაშინ როდესაც არა რელატივისტურ ($v \ll c$) შემთხვევაში გასხივებულ ენერგიას მაქსიმალური ინტენსიობა ჰქონდა რხევის პერპენდიკულიარული მიმართულებით, რელატივისტურ შემთხვევაში ეს მაქსიმუმი მნიშვნელოვნადაა გადაანაცვლებული ϑ კუთხის მცირე მნიშვნელობებისაკენ.

ენერგიის მაქსიმალური გასხივების მიმართულების მოსანახავად (59,7) გამოსახულება ϑ -თი გავაწარმოთ და შემდეგ ნულს გაუტოლოთ; რაც $\vartheta_{აკვ}$ კუთხისათვის შემდეგ კვადრატულ განტოლებას გვაძლევს:

$$\cos \vartheta_{აკვ} = 3 \frac{v}{c} - 2 \frac{v}{c} \cos^2 \vartheta_{აკვ}. \quad (59,9)$$

ამ უკანასკნელიდან განომდინარეობს, რომ მცირე სიჩქარისა ($v < c$) და დიდი კუთხეებისათვის ($\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}$)

$$\cos \vartheta_{აკვ} \simeq 3 \frac{v}{c}, \quad \vartheta_{აკვ} \simeq \frac{\pi}{2} - 3 \frac{v}{c}. \quad (59,9a)$$

ხოლო თუ მუხტის სიჩქარე ელექტრომაგნიტური ტალღის სიჩქარეს უახლოვდება ($v \rightarrow c$), მაშინ გვეჩვენა:

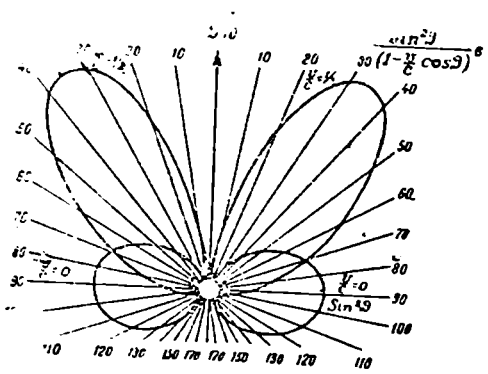
$$\cos \vartheta_{აკვ} = 1 - \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{15}, \quad \vartheta_{აკვ} \simeq \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{5}}. \quad (59,9b)$$

(59,7) და (59,8) გამოსახულებათა ერთიმეორესთან შესადარებლად ნახ. 40-ზე მოყვანილია მათი გრაფიკები, რომლებიც გვიჩვენებენ $\vartheta=0$ მიმარ-

თულებით აჩქარებულად მოძრაავი მუხტის მიერ გასხივებული ენერჯიის მ კუთხის მიხედვით განაწილებას.

მე-40 ნახაზზე ხედა მრუდი გამობატავს x_2 ღერძის გასწვრივ აჩქარებულად მოძრაავი ნუხტის გამოსხივებას როდესაც სიჩქარის მყისა მნიშვნელობა

$v = \frac{c}{2}$. როგორც ნახაზიდან სჩანს, ეს მრუდები დახრილი არიან მოძრაობის მიმართულებით. სივრცეში გამოსხივების განაწილების სურათის მისაღებად



ნახ. 40.

საკმარისია ისინი შემოვაბრუნოთ x_2 ღერძის ირგვლივ. (59,7) დამოკიდებულება შეიძლება გამოვიყენოთ ანტიკათოდზე კათოდური სხივების დამუხრუჭების დროს წარმოშობილი რენტგენის სხივების ინტენსიობის სივრცეში განაწილების შესასწავლად. (59,7) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ კათოდური სხივების (ელექტრონების) მოძრაობის მიმართულებით გამოსხივებას ადგილი არა აქვს, ხოლო მაქსიმალური გამოსხივებისა და კათოდური სხივების მოძრაობის მიმართულებები,

$v = \frac{c}{2}$ შემთხვევაში, შეადგენენ ($30^\circ - 35^\circ$) კუთხეს. პრაქტიკულად ამ შუალედზე

მოღის თითქმის მთელი გამოსხივება. დიდი სიჩქარის კათოდური სხივების დამუხრუჭების დროს გასხივებული ენერჯიის კუთხური განაწილების (59,7) კანონის ექსპერიმენტული შემოწმების მიზნით კულენკამფმა ანტიკათოდად აიღო მეტისმეტად თხელი (რამდენიმე მიკრონის სისქის) ეკრანი (ანტიკათოდის სქელ ფენაზე დამკემი დიდი სიჩქარის მქონე მუხტის მოძრაობა ზიგზაგისებურია, რის გამოც შეუძლებელია გასხივებული ენერჯიის კუთხური განაწილების კანონის ექსპერიმენტული გამოკვლევა). მიღებული შედეგები სრულ თანხმობაში იმყოფებიან (59,7) კანონთან.

იმავე (59,7) კანონით აიხსნება ელექტრომაგნიტური ტალღების (სინათლის, რენტგენის სხივების, γ სხივების და სხვა) გაფანტვისა და მეორადი რენტგენის სხივების წარმოშობის მოვლენები, რომლებსაც ჩვენ უფრო გვიან შევეხებით.

თუ (59,7) განტოლების ორივე მხარეს X რადიუსიანი სფეროს (რომლის ცენტრში მოთავსებულია რხევადი მუხტი) ზედაპირის ფართის ელემენტზე ($X^2 \sin^2 \theta d\theta d\phi$) გადავამრავლებთ და შემდეგ ამ სფეროს მთელ ზედაპირზე ინტეგრაციას ჩავატარებთ, მაშინ მივიღებთ მუხტის მიერ დროის ერთეულში ყველა მიმართულებით გასხივებული ენერჯიის რაოდენობას

$$\frac{dW}{dt} = \int (S dx^2) = \frac{q^2 a^2}{4\pi c^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \psi\right)^4} \int_0^{2\pi} d\psi,$$

საიდანაც ელემენტარული გამოთვლების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2 a^2}{3c^2} \frac{1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4}, \quad (59,10)$$

რომელიც არა რელატივისტური სიჩქარეებისათვის ($v \ll c$) მოგვცემს:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2 a^2}{3c^2}. \quad (59,11)$$

§ 60. რხევადი მუხტის (დიპოლის) ველი

განვიხილოთ q მუხტის რხევები კოორდინატთა სათავის, როგორც წონასწორობის მდებარეობის, მახლობლობაში და შევისწავლოთ მისი ველი. ამ ველის დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეების რაოდენობრივი და თვისობრივი მხარეების გამოსარკვევად, გამოვიყენოთ ჰერცის ვექტორი (52,19).

დავუშვათ, რომ ეს ვექტორი მიმართულია x_1 ღერძის გასწვრივ $\zeta(\zeta, 0, 0)$ და გამოვიკვლიოთ ელექტრომაგნიტური ველი კოორდინატთა სათავის (q მუხტის) მახლობლობაში. ამ შემთხვევაში, მუხტიდან დაკვირვების წერტილამდე x მან-

ძილის სიმცირის გამო, ფუნქცია $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ შეიძლება გავშალოთ მწკრივად $\frac{x}{c}$ სიდიდის ხარისხებად, გვექნება:

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = f(t) - \frac{x}{c} f'(t) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{c}\right)^2 f''(t) + \dots \quad (60,1)$$

თუ x იმდენად მცირეა, რომ აღგილი აქვს პირობას:

$$f(t) \gg \frac{x}{c} f'(t) \text{ ანუ } x \ll \frac{cf(t)}{f'(t)}, \quad (60,2)$$

მაშინ (60,1) მწკრივში შეიძლება დავტოვოთ მხოლოდ პირველი წევრი, ყველა დანარჩენი წევრები კი უგულვებელყოთ. სათანადოდ. ჰერცის ვექტორის საშუალებით, (52,17) ფორმულის თანახმად, ელექტრული ველის დაძაბულობის მდგენელებისათვის მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x_1^2} = -\frac{f(t)}{x^3} + \frac{3f(t)x_1^2}{x^5} \\ e_2 &= \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{3f'(t)x_1 x_2}{x^5} \\ e_3 &= \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{3f'(t)x_1 x_3}{x^5} \end{aligned} \right\} \quad (60,3)$$

მიღებული (60,3) განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ როდესაც შესრულებულია (60,2) პირობა, მაშინ ელექტრული ველის დაძაბულობა გამოიხატება

$$\varphi = f(t) \frac{x_1}{x^3} = -f(t) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (60,4)$$

ფუნქციის გრადიენტის სახით:

$$e = -\text{grad } \varphi = \text{grad} \left(f(t) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{x} \right) \right). \quad (60,5)$$

რადგან $\zeta = \frac{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}{x}$ ვექტორი, პირობის თანახმად, მიმართულია x_1 ღერძის გასწვრივ, ამიტომ (60,4)-ში ტოლობის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ $f(t)$ და $\text{grad} \left(\frac{1}{x} \right)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლის სახით $\left(f(t), \nabla \left(\frac{1}{x} \right) \right)$. ეს უქანასკნელი, (45,6) ფორმულის თანახმად, წარმოადგენს ისეთი ელექტრული დიპოლის პოტენციალს რომლის მომენტიცა $f(t)$.

ამგვარად, O წერტილის მახლობლობაში x_1 ღერძის გასწვრივ რხევადი მუხტის ველი ახლო მანძილებზე, რომელიც (60,2) პირობით განისაზღვრება, O წერტილში x_1 ღერძზე მოთავსებული ელექტრული დიპოლის ველის ტოლფასია.

ახლო მანძილებზე მაგნიტური ველის დაძაბულობისათვის, (52,18)-ს თანახმად, გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 0 \\ h_2 &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{f'(t)}{c} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{x} \right) \\ h_3 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = -\frac{f'(t)}{c} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (60,6)$$

რომლებიდანაც გამომდინარეობს, რომ მიღებული მაგნიტური ველი O წერტილში x_1 ღერძზე მოთავსებული $Jdl = f'(t)$ ელექტრული დენის ელემენტის მაგნიტური ველის ექვივალენტურია.

ამგვარად, კოორდინატთა სათავეში x_1 ღერძზე მოთავსებული ელექტრული დიპოლი $f(t)$ ცვლადი ელექტრული მომენტით თავის უშუალო მახლობლობაში წარმოშობს $f(t)$ დიპოლური მომენტისა და $f'(t)$ დენის ძალის მყისა მნიშვნელობებით განსაზღვრულ ველს, რომელიც სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველისაგან თითქმის არ განსხვავდება.

განვიხილოთ ახლა მეორე ზღვრული შემთხვევა, როდესაც კოორდინატთა სათავიდან (მუხტიდან) დაკვირვების წერტილებამდე მანძილი იმდენად დიდია რომ მათთვის შესრულებულია პირობა:

$$x \gg \frac{cf(t)}{f'(t)} \quad (60,7)$$

ამ შემთხვევაში ველის შესასწავლად (60,5) და (60,6) განტოლებები აღარ გამოდგებიან, რადგან $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ფუნქციის მწყრივად გაშლა არ შეიძლება. რადგან x დროზე დამოუკიდებელია, ამიტომ (60,3) და (60,6)-ში დაგვრჩება მხოლოდ ის წევრები, რომლებიც უშუალოდ $\left(t - \frac{x}{c}\right)$ არგუმენტით გაწარმოების გზით მიიღებიან. თუ აღნიშნულ მოქმედებას შევასრულებთ, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\frac{x_1^2 + x_2^2}{c^2 x^3} f''\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ e_2 &= \frac{x_1 x_2}{c^2 x^3} f''\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ e_3 &= \frac{x_1 x_3}{c^2 x^3} f''\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \right\} \quad (60,8)$$

სადაც e_i გამოსახულების მისაღებად გამოყენებულია ტოლობა

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3^2}\right).$$

სათანადოდ, მაგნიტური ველის დაძაბულობის მდგენელებისათვის მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 0 \\ h_2 &= \frac{x_3}{c^2 x^2} f''\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ h_3 &= -\frac{x_2}{c^2 x^2} f''\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \right\} \quad (60,9)$$

(60,8) და (60,9) განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილა აქვე შემდეგ ტოლობებს: $(x, e) = (x, h) = (e, h) = 0$ ე. ი. x , e და h ურთიერთ პერპენდიკულარული ვექტორებია. მაშასადამე, რხევადი მუხტის ელექტრომაგნიტურა ველი შორ მანძილებზე წარმოადგენს განივ ტალღას, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან სივრცეში ვრცელდება c სიჩქარით.

ამგვარად, რხევადი მუხტის ელექტრომაგნიტური ველი შორს მანძილებზე ისეთივე ბუნებისაა, როგორიც მუხტის აჩქარებაზე დამოკიდებული ელექტრომაგნიტური ველი (§ 56).

ჩვენ ვხედავთ, რომ შორს მანძილებზე ელექტრომაგნიტური პროცესები არსებითად განსხვავდებიან ახლო მანძილებზე მიმდინარე პროცესებისაგან. ახლო მანძილებზე ველი პერიოდულია, როცა $f(t)$ ფუნქცია პერიოდულია, ხოლო შორს მანძილებზე — „ტალღურ ზონაში“ მუდამ სწარმოებს ენერჯის გადატანა და პროცესის პერიოდულობა მხოლოდ იმაში მდგომარეობს, რომ

პერიოდულად იცვლებიან e_2 და h_2 ვექტორები და მათსადაამე, ენერჯიის ნაკადის სიდიდე.

საინტერესოა გამოვარკვიოთ დიპოლიდან რა მანძილებზე იწყება გადასვლა ქვაზისტაციონარული პროცესებიდან ტალღურ ზონაში, ე. ი. როგორია (60.2) პირობით განსაზღვრული ახლო მანძილის სიდიდის რიგი. ამისათვის განვიხილოთ x_1 ღერძზე ერთიმეორისაგან l მანძილით დაშორებული ორი მუხტი: $+q$ და $-q$. ეს მუხტები შეადგენენ დიპოლს $q \cdot \underline{L} = \underline{r}$ მომენტი. დაეუშვათ, რომ მუხტებს შორის მანძილი l ცვალებადია და სათანადოთ მისი მომენტი დროის პერიოდული ფუნქციაა. ჩვენ შეგვეძლოს აგრეთვე მიგველო მეორე დაშვება, რომლის მიხედვითაც შეიძლება თვით $\pm q$ მუხტები იცვლებოდნენ, ხოლო l უცვლელი იყოს. ამგვარად, თუ დაეუშვებთ, რომ დიპოლური მომენტი პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს

$$q(t) = f(t) = q_0 \cos \omega t, \tag{60,10}$$

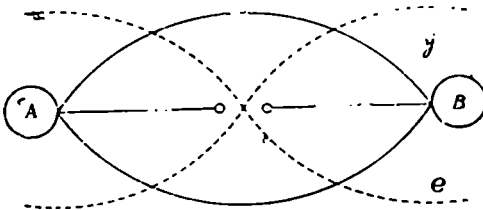
მაშინ (60,2) პირობა მოგვცემს:

$$x \ll \frac{c f(t)}{f(t)} \approx \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{60,11}$$

ამგვარად, ვიტყვი, რომ ვიყოფებით ახლო მანძილებზე თუ წყაროდან დაკვირვების წერტილამდე მანძილი გაცილებით მცირეა ვიდრე გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის სიგრძე.

ჩვენ უნდა შეგვეძლოს ელექტრომაგნიტური ტალღების წყაროს — ელექტრული დიპოლის ზომის მიხედვით ვიმსჯელოთ დაკვირვების წერტილის სიშორეზე ან სიახლოვეზე. ამ საკითხის გამოსარკვევად განვიხილოთ ჰერცის ცდა.

ხელსაწყო, რომელსაც ჰერცის ვიბრატორს უწოდებენ, წარმოადგენს ორი საწინააღმდეგო ნიშნის ელექტროობით დამუხტულ ბირთვებს. ისინი



ნახ. 4:.

შეერთებული არიან დენის წყაროს პოლუსებთან, ხოლო მათ შორის დაცლის შეაღები არსებობს. როდესაც პოტენციალთა სხვაობა გარკვეულ სიდიდეს მიაღწევს იწყება დაცლა, რომელსაც პერიოდული ხასიათი აქვს.

უშუალოდ დენის წყაროს პოლუსებთან შეერთების ნაცვლად, ბირთვები შეიძლება შეეერთოთ A და B სფეროსთან, რომლებსაც ელექტროტევადობის დიდი კოეფიციენტები აქვთ.

თუ A და B სფეროებს სათანადოთ დადებითად და უარყოფითად დაემუხტავთ, მაშინ ოსცილატორში ცვლადი დენი გაივლის.

დენის გავლამდე A და B დამუხტული სფეროების ირგვლივ სივრცეში ჩვენ გვეჩვენება ელექტრული ველი. დასაწყისში სფეროებთან დენის ძალა ნულის

ტოლია. დაცლის მომენტში, როდესაც ოსცილატორის ცენტრში დენის ძალა მაქსიმალურია, ელექტრული ველის დაძაბულობა ნულის ტოლია და პერიოდი. ნახ. 41-ზე ველის დაძაბულობის გრაფიკი მოცემულია პუნქტირით, ხოლო დენის ძალისა კი — უწყვეტი მრუდით.

შეიძლება ითქვას, რომ A და B სფეროებთან მიმაგრებული გამტარების ბოლო წერტილებთან წარმოიშობიან ელექტრული ველის ბურცობი და დენის ძალის კვანძი წერტილები. რადგან ორ უახლოეს ბურცოებზე შორის მანძილი ტალღის სიგრძის ნახევარს ტოლია, ანიტომ ოსცილატორის ხაზოვანი ზომა, საზოგადოთ, წარწოშობილი ელექტრომაგნიტური ტალღის სიგრძის ნახევრის რიგისაა.

მაშასადამე, მოკლე ელექტრომაგნიტური ტალღების ნისაღებად საკიროა ძალიან მცირე ზომის ეობრატორი, ანუ ელექტრული დიპოლი.

მოკლე ტალღების ნილება იმდენად ძიელია, რომ 0,1 მილიმეტრ-იანი ტალღების ნილება იხოლოდ 1920 წელს მოხერხდა.

წრფივი ოსცილატორის (პერცის ეობრატორი) შემთხვევაში ჰერცის ვექტორის (52,19) გამოსახულებაში $f\left(1 - \frac{x}{c}\right)$ ფუნქცია დიპოლის ელექტრული მომენტის როლს ასრულებს. თუ (60,10)-ს ჩავსევანთ (59,11)-ში, მაშინ დროის ერთეულში გასხივებული ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \omega^4 e^2 = \frac{1}{3} \frac{q^2 j_0^2}{c^3} \omega^4 = \frac{(2\pi)^4 q^2 j_0^2 \omega^4}{3} \frac{1}{\lambda^3}. \quad (60,12)$$

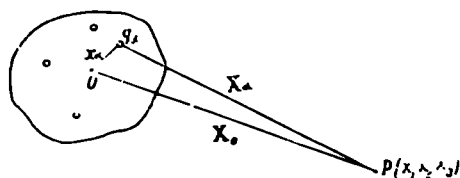
ამ უკანასკნელიდან განომდინარეობს, რომ რხევადი დიპოლის მიერ დროის ერთეულში გასხივებული ელექტრომაგნიტური ენერგიის რაოდენობა არსებითად ტალღის სიგრძეზეა დამოკიდებული. მაგალითად, თეთრი სინათლის უველა ფერიდან მაქსიმალური ინტენსიობა ექნება იისფერს, შემდეგ კი — ცისფერ სხივებს.

ცისფერი სხივების ინტენსიობა, დაახლოებით 2^1 ჯერ მეტია ვიდრე წითელი ფერისა, რადგან $\lambda_{\text{წითელი}} \cong 2\lambda_{\text{ცისფერი}}$.

§ 61. მუხტთა სისტემის მაგნიტური მომენტი

§ 45 — 46-ში ჩვენ შევისწავლეთ მუხტთა სისტემის სტაციონარული (დროზე დამოუკიდებელი) ელექტრული ველი ისეთ მანძილებზე, რომლებიც მნიშვნელოვნად აღემატებიან თვით სისტემის ხაზით ზომას. აღნიშნულ პირობებში მუხტთა სისტემა დავიყვანეთ წერტილოვანი მუხტების, დიპოლების, კვადრუპოლების და უფრო მაღალი რიგის პოლუსების (მულტიპოლების) სისტემებზე. ჩვენ აგრეთვე გამოვარკვეეთ, რომ მუხტთა სტატიკური სისტემა არამდგრადია. მაშასადამე, დამუხტული ნაწილაკები, სისტემის შიერ დაკავებული მცირე მოცულობის შიგნით განუწყვეტილად უნდა მოძრაობდნენ შემოსაზღვრული სიჩქარეებით. ცხადია, რომ მოძრავ დამუხტულ მატერიალურ ნაწილაკებს გარკვეული იმპულსები ექნებათ, რომელთა ვექტორული ჯამი მოგვცემს მთელი სისტემის იმპულსს.

მუხტთა სისტემიდან შორს მანძილებზე წარმოშობილი სტაციონარული მაგნიტური ველი შეიძლება წარმოვიდგინოთ მაგნიტის მიერ შექმნილი ექვივალენტური სტაციონარული მაგნიტური ველის სახით. ანდა პირიქით. რადგან მოძრავ დამუხტულ მატერიალურ ნაწილაკების სისტემას ერთის მხრივ გააჩნიათ იმპულსი და იმპულსის მექანიკური ზომენტი, ხოლო მეორე მხრივ



ნახ. 42.

სისტემა და მის შიგნით რომელიმე წერტილში მოვათავსოთ კოორდინატთა სისტემის სათავე (ნახ. 42).

თუ ცალკეული q მუხტების რადიუს ვექტორებს, ამ სისტემაში აღვნიშნავთ x_α -თი, ხოლო დაკვირვების წერტილის (რომელშიაც ველს ვეძებთ) რადიუს ვექტორს — X_0 -ით, მაშინ დაკვირვების წერტილის რადიუს ვექტორები q_α მუხტების მიმართ განსაზღვრული იქნებიან შემდეგი ტოლობებით:

$$X_\alpha = X_0 - x_\alpha.$$

განვიხილოთ მუხტთა მცირე სიჩქარეებით მოძრაობისა და სტაციონარული მაგნიტური ველის შემთხვევა. მუხტთა სისტემის მიერ შექმნილი გასაშუალოებული მაგნიტური ველის ვექტორ პოტენციალის საშუალო მნიშვნელობის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ (45,1) და (47,5) ფორმულები, გვექნება:

$$\overline{A^j X_1, X_2, X_3, X_4} = \frac{1}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha v_\alpha}{|X_\alpha|} = \frac{1}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha v_\alpha}{|X_0 - x_\alpha|}. \quad (61,1)$$

სადაც ზემოდან ხაზი დროის მიხედვით გასაშუალოების ოპერაციის მაჩვენებელია. პირობის თანახმად $X_\alpha \ll X_0$, ამიტომ (61,1) შეიძლება გავამწკრივოთ X_0 — სიდიდის ხარისხებად. თუ გაშლის პირველი ორი წევრით დავკმაყოფილებით, გვექნება:

$$\overline{A^j(X_1, X_2, X_3, X_4)} = \frac{1}{c X_0} \sum q_\alpha v_\alpha - \frac{1}{c} \sum q_\alpha v_\alpha \left(x_\alpha, \nabla \left(\frac{1}{X_0} \right) \right). \quad (61,2)$$

მოვანახოთ მარჯვენა მხარის პირველ და მეორე შესაკრებთა საშუალო მნიშვნელობები. რადგან მოძრაობა სასრულო მოცულობაში სწარმოებს და x_α შემოსაზღვრული სიდიდეებია, პირველისათვის გვექნება:

$$\sum q_\alpha v_\alpha = \frac{d}{dt} \sum e_\alpha x_\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(\sum e_\alpha x_\alpha)_T - (\sum e_\alpha x_\alpha)_0}{T} = 0;$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\nabla \left(\frac{1}{X_0} \right) = \text{grad} \left(\frac{1}{X_0} \right) = -\frac{X_0}{X_0^3}, \quad v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$$

და X_0 , მუდმივი ვექტორია, მეორე წევრისათვისაც მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \sum e_\alpha v_\alpha \left(x_\alpha, \nabla \left(\frac{1}{X_0} \right) \right) &= -\frac{1}{X_0^3} \sum e_\alpha v_\alpha (x_\alpha, X_0) = \\ &= -\frac{1}{X_0^3} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum e_\alpha x_\alpha (x_\alpha, X_0) + \frac{1}{2} \sum e_\alpha [v_\alpha (x_\alpha, X_0) - x_\alpha (v_\alpha, X_0)] \right\}; \end{aligned}$$

საიდანაც გასაშუალოების წესის გამოყენების გზით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \overline{A(X_1, X_2, X_3, X_4)} &= \frac{1}{2cX_0^3} \sum e_\alpha \overline{[v_\alpha (x_\alpha, X_0) - x_\alpha (v_\alpha, X_0)]} = \\ &= \frac{1}{2cX_0^3} \sum e_\alpha \overline{[x_\alpha, v_\alpha] X_0}. \end{aligned} \quad (61,3)$$

თუ შემოვიღებთ ახალ სიდიდეს

$$m = \frac{1}{2c} \sum q_\alpha [x_\alpha v_\alpha], \quad (61,4)$$

რომელსაც სისტემის მაგნიტური მომენტი ეწოდება, მაშინ \overline{A} შემდეგი სახით ჩაიწერება

$$\overline{A} = \frac{[m, X_0]}{X_0^3} = - \left[m, \nabla \left(\frac{1}{X_0} \right) \right]. \quad (61,5)$$

როგორც ვხედავთ, მუხტთა სისტემის გასაშუალოებული სტაციონარული მაგნიტური ველის \overline{A} ვექტორპოტენციალს ელექტრული დიპოლის სტაციონარული ელექტრული ველის პოტენციალის სახე აქვს, განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ პოტენციალის გამოსახულებაში (45,6) ელექტრული დიპოლური მომენტისა და $\text{grad} \left(\frac{1}{X_0} \right)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლის

ნაცვლად (61,5)-ში ჩვენ გვაქვს m მაგნიტური მომენტისა და $\nabla \left(\frac{1}{X_0} \right)$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი.

(61,5)-ს საშუალებით მუხტთა სისტემის გასაშუალოებული მაგნიტური ველის დაძაბულობის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (25,17), (2,18) და (2,22) ფორმულები, გვექნება:

$$\begin{aligned} \overline{h} = \text{rot} \left\{ \frac{[m, X_0]}{X_0^3} \right\} &= \overline{m} \text{div} \left(\frac{X_0}{X_0^3} \right) - \frac{X_0}{X_0^3} \text{div} \overline{m} + \\ &+ \left(\frac{X_0}{X_0^3}, \nabla \right) \overline{m} - (\overline{m}, \nabla) \frac{X_0}{X_0^3}. \end{aligned} \quad (51,6)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ სისტემის მაგნიტური მომენტი m დაკვირვების წერტილის კოორდინატებზე დამოუკიდებელია, ხოლო

$$\operatorname{div} \left(\frac{X_0}{X_0^3} \right) = \left(X_0, \nabla \left(\frac{1}{X_0^3} \right) \right) + \frac{1}{X_0^3} \operatorname{div} X_0 = 0,$$

და

$$\left(\overline{m}, \nabla \right) \frac{X_0}{X_0^3} - \frac{1}{X_0^3} \left(\overline{m}, \nabla \right) X_0 + X_0 \left(\overline{m}, \nabla \left(\frac{1}{X_0^3} \right) \right) = \frac{\overline{m}}{X_0^3} - \frac{3X_0 (\overline{m}, X_0)}{X_0^5};$$

მაშინ (61,6)-დან მივიღებთ:

$$\overline{h} = \frac{3X_0 (\overline{m}, X_0) - \overline{m} X_0^2}{X_0^5}. \quad (61,7)$$

თუ ყოველი დამუხტული ნაწილაკის q_a მუხტის შეფარდება m_a მასასთან ერთი და იგივეა $\frac{q_a}{m_a} = \frac{q}{m} = \text{Const}$, მაშინ (61,4) გამოსახულების მარჯვენა მხარის m_a -ზე გამრავლებისა და იმავე დროს გაყოფის შედეგად მივიღებთ:

$$m = \frac{q}{2mc} \sum [x_a, m_a v_a] = \frac{q}{2mc} M, \quad (61,8)$$

სადაც $M = \sum [x_a, m_a v_a]$, მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში ($v \ll c$). ემთხვევა სისტემის შემადგენელი დამუხტული ნაწილაკების იმპულსების მომენტების ჯამს, ანუ მთელი სისტემის მექანიკურ მომენტს.

ამგვარად, (61,8) ფორმულის თანახმად, დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემის მაგნიტური მომენტის შეფარდება მექანიკურთან მუდმივი სიდიდეა და უნივერსალური q , c და m მუდმივების საშუალებით გამოიხატება

$$\frac{\overline{m}}{M} = \frac{q}{2mc}. \quad (61,9)$$

მუხტთა სისტემა, რომლის მაგნიტური მომენტიცა m , h დაძაბულობის გარეშე მაგნიტურ ველში ამ უკანასკნელის მხრივ განიცდის მოქმედებას. ჯრთიერთქმედების ენერჯია, გარეშე ელექტრულ ველში მოთავსებული ელექტრული დიპოლის ენერჯიის (46,3) ანალოგიურად, გამოიხატება

$$-(m, h). \quad (61,10)$$

სკალარული ნამრავლით.

თუ გარეშე მაგნიტური ველი ერთგვაროვანია ($h = \text{Const}$), მაშინ m მაგნიტური მომენტის მქონე სისტემაზე მოქმედი მექანიკური ძალა ნულის ტოლია

$$F = -\nabla(m, h) = 0. \quad (61,11)$$

ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში სისტემაზე იმოქმედებს მხოლოდ ძალთა წყვილი, რომლის მომენტი, (46,5)-ს ანალოგიურად, განისაზღვრება ფორმულით:

$$N = [m, h]. \quad (61,12)$$

ეს უკანასკნელი იწვევს სისტემის ბრუნვას.

გამოვარკვევით როგორია გარეშე ველის მოქმედებით გამოწვეული ბრუნვითი მოძრაობის სახე და სათანადო კუთხური სიჩქარე.

როგორც ვიცით (§ 27), თუ \mathbf{a} კუთხური სიჩქარით მბრუნავ მუხტს (მაგ. ელექტრონი) მოძრაობის სიბრტყის პერპენდიკულარულ გარეშე მაგნიტურ ველში მოვათავსებთ, მაშინ ამ მუხტის საკუთარი ბრუნვის სიხშირე (ა) შეიცვლება

$$\omega_L = -\frac{q h}{2mc} \quad (61,13)$$

ლარმორის სიხშირით. ეს გარემოება უფლებას გვაძლევს, პირველი მიახლოებით, მაგნიტური ველის მოქმედება შევცვალოთ ველის დაძაბულობის h ვექტორის გასწვრივ აღებული ლერძის ირგვლივ ω_L კუთხური სიჩქარით მბრუნავი კოორდინატთა სისტემით.

მბრუნავ სისტემაში, როგორც ცნობილია, თავს იჩენს კორიოლისის ძალა

$$F_{კორ} = 2m [\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_L], \quad (61,14)$$

რ. მელშიაც (61,13)-ს ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$F_{კორ} = -\frac{q}{c} [\mathbf{v} h]. \quad (61,15)$$

ეს უკანასკნელი ლორენცის ძალის (25,24) ტოლია ($e=0$) და საწინააღმდეგოდაა მიმართული. ამგვარად, მუხტზე მოქმედ ლორენცის ძალას აწონასწორებს კორიოლისის ძალა.

მექანიკიდან ცნობილია, რომ თუ ნაწილაკთა სისტემაზე არ მოქმედებენ გარეშე ძალები, მაშინ მისი იმპულსის მომენტი დროში არ იცვლება — მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს; ამიტომ (61,9)-ს თანახმად, მისი პროპორციული სიდიდე — მაგნიტური მომენტიც მუდმივი იქნება. რადგან ერთგვაროვან გარეშე ველში მუხტთა სისტემაზე მოქმედებს ძალთა წყვილი (61,12), ამიტომ გარეშე მაგნიტურ ველში მოთავსებისას სისტემა იწყებს ბრუნავს, რომლის დროსაც სათანადოდ იცვლება მისი მექანიკური მომენტი.

თუ მუხტთა სისტემას წარმოვიდგენთ როგორც მყარ სხეულს (ვგულისხმობთ, რომ სიდიდე $\frac{q}{m}$ ყველა ნაწილაკისათვის ერთი და იგივეა), მაშინ მყარი სხეულის დინამიკიდან ცნობილი დამოკიდებულება

$$\frac{dM}{dt} = N$$

(61,12) და (61,13) დამოკიდებულებებთან ერთად მოგვცემს:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{q}{2mc} \dot{M} h = -[M \boldsymbol{\omega}_L]. \quad (61,16)$$

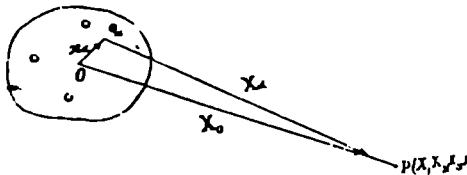
ამ უკანასკნელი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ M ვექტორი, ანდა მისი პროპორციული მაგნიტური მომენტის m ვექტორი, მაგნიტური ველის

დაძაბულობის h — ვექტორის ირგვლივ ბრუნავს ω_L კუთხური სიჩქარით. (61,16) წარმოადგენს პრეცესიული მოძრაობის განტოლებას, რომლის თანახმადაც გარეშე მაგნიტური ველის გავლენით სისტემის მაგნიტური მომენტის m ვექტორი h -ის ირგვლივ ასრულებს პრეცესიულ მოძრაობას ისე, რომ მისი მიმართულება h -თან ერთსა და იგივე კუთხეს ადგენს.

რადგან ყოველი მატერიალური სხეულის ატომები და მოლეკულები დამუხტული ნაწილაკებისაგან შედგებიან, რომლებიც მუდმივი მოძრაობის მდგომარეობაში იმყოფებიან, ამიტომ, პირველ მიახლოებაში მიღებული, მუხტთა სისტემის მაგნიტური და მექანიკური მომენტების დამაკავშირებელი (61,8) ფორმულის გამოყენება საშუალებას მოგვცემს, შევისწავლოთ მატერიალური სხეულების მაგნიტური თვისებები. ამ საკითხს ჩვენ გვიან ისევ დავუბრუნდებით, როდესაც მატერიალური სხეულების მაგნიტური თვისებების შესწავლას შეუდგებით.

§ 62. ელემენტარული კვადრუპოლური და მაგნიტური დიპოლური გამოსხივება

განვიხილოთ მცირე მოცულობაში წყვეტილი სახით განაწილებულ მუხტთა სისტემა. მის შიგნით ავიღოთ O წერტილი, რომლის მიმართ q_a მუხტის



ნახ. 43.

რადიუსვექტორი აღენიშნოთ x_a -თი. P დაკვირვების წერტილამდე O -დან მანძილი აღენიშნოთ X_0 -ით, ხოლო q_a მუხტიდან კი — X_a -თი (ნახ. 43).

დავუშვათ, რომ სისტემის ხაზოვანი ზომა ძალიან მცირეა დაკვირვების წერტილამდე მანძილთან შედარებით:

$$x_a \ll X_0, \tag{62,1}$$

(54,1) და (54,2) დაგვიანებული პოტენციალების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ $\phi(x)$ — ფუნქცია. თუ გაითვალისწინებთ, რომ $X_a = X_0 - (n, x_a)$, მაშინ მუხტთა განაწილების სიმკვრივე, (31,7)-ს თანახმად, შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$\rho' = \sum q_a \delta \left(r_a - r_0 + \frac{(n, x_a)}{c} \right), \tag{62,2}$$

სადაც: $n = \frac{X_0}{X_0}$ ერთეულოვანი ვექტორია, $\frac{x_a}{c}$ გვაძლევს იმ დროს, რომელსაც ელექტრომაგნიტური მოქმედება (ველი) q -დან O წერტილში მისვლას ანდომებს, ხოლო $r_a = \frac{X_a}{c} = r_0 - \frac{(n, x_a)}{c}$.

თუ ახლა (62,2) ფორმულას გამოვიყენებთ, მაშინ განსახილველი მუხბთა სისტემის ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალებისათვის გვექნება

$$\varphi(X_1, X_2, X_3, t) = \sum_{\alpha} \int \frac{q_{\alpha} \delta \left(\tau_{\alpha} - t_0 + \frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})}{c} \right)}{X_{\alpha}} dx^3 \quad (62,3)$$

$$A(X_1, X_2, X_3, t) = \frac{1}{c} \sum_{\alpha} \int \frac{q_{\alpha} v_{\alpha} \delta \left(\tau_{\alpha} - t_0 + \frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})}{c} \right)}{X_{\alpha}} dx^3. \quad (62,4)$$

როგორც § 52-ში გამოვარკვეეთ, უშუალო ინტეგრაციის გზით დაგვიანებული პოტენციალების მონახვა არ შეიძლება; რადგან ყოველი ელემენტი (ρdx^3) შესაბამის $t'_{\alpha} = t - \frac{X_{\alpha}}{c}$ მომენტში უნდა იქნეს აღებული. იმისათვის რომ (62,3)

და (62,4) ფორმულების საშუალებით ველის პოტენციალები გამოვთვალოთ, აუცილებელია τ_{α} სხვადასხვა დროები ერთ დროზე დავიყვანოთ; რასაც ადვილად მივაღწევთ თუ გამოვიყენებთ (62,1) პირობას და $\delta \left(\tau_{\alpha} - t_0 + \frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})}{c} \right)$

ფუნქციას გავშლით ტეილორის მწვერივად $(\tau_{\alpha} - t_0)$ -ს მახლობლობაში $\frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})}{c}$ სიდიდის ხარისხებად, გვექნება

$$\begin{aligned} \delta \left(\tau_{\alpha} - t_0 + \frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})}{c} \right) &= \delta(\tau_{\alpha} - t_0) + \frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})}{c} \frac{\partial}{\partial \tau_{\alpha}} \delta(\tau_{\alpha} - t_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})}{c} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_{\alpha}^2} \delta(\tau_{\alpha} - t_0) + \frac{1}{6} \frac{(n, \mathbf{x}_{\alpha})^3}{c^3} \frac{\partial^3}{\partial \tau_{\alpha}^3} \delta(\tau_{\alpha} - t_0) + \dots \end{aligned} \quad (62,5)$$

თუ ამ უკანასკნელ მწვერივს ჩავსვამთ (62,3) და (62,4) გამოსახულებებში და გამოვიყენებთ $\delta(\tau_{\alpha} - t_0)$ ფუნქციისა და მისი წარმოებულების საშუალებით ინტეგრაციის წესს (§ 31), მაშინ მწვერივის წვერობრივი ინტეგრაციის გზით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \varphi(X_1, X_2, X_3, t) &= \frac{1}{X_0} \sum q_{\alpha} + \frac{1}{cX_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum q_{\alpha}(n, \mathbf{x}_{\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{2c^2 X_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \sum q_{\alpha}(n, \mathbf{x}_{\alpha})^2 + \dots \end{aligned} \quad (62,6)$$

$$\begin{aligned} A(X_1, X_2, X_3, t) &= \frac{1}{cX_0} \sum q_{\alpha} v_{\alpha} + \frac{1}{c^2 X_0} \frac{\partial}{\partial t'} \sum q_{\alpha} v_{\alpha}(t')(n, \mathbf{x}_{\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{2c^3 X_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \sum q_{\alpha} v_{\alpha}(t')(n, \mathbf{x}_{\alpha})^2 + \dots, \end{aligned} \quad (62,7)$$

სადაც $I' = I - \frac{X_0}{c}$ ყველა მუხტებისათვის ერთი და იგივეა. ამგვარად, ჩვენ

მრავალწევრად $I'_{\alpha} = I - \tau_{\alpha}$ რეტარდილებული დროების ერთ დროზე დაყვანა.

თუ ახლა (62,6) და (62,7) ფორმულებში (n, x_{α}) სიდიდის პირველი ხარისხიანი წევრებით, ე. ი. მხოლოდ მუხტის სიჩქარესა და აჩქარებაზე დამოკიდებული წევრებით შემოვისახლებებით, მაშინ ვექტორპოტენციალისათვის გვექნება:

$$A(X_1, X_2, X_3, t) = \frac{1}{cX_0} \sum q_{\alpha} v_{\alpha}(t') + \frac{1}{c^2 X_0} \frac{\partial}{\partial t'} \sum q_{\alpha} v_{\alpha}(t')(n, x_{\alpha}), \quad (62,8)$$

რომლის პირველი მესაქრები სისტემის ელექტრული დიპოლური მომენტის დროით წარმოებულს წარმოადგენს

$$\frac{dP}{dt'} = \frac{d}{dt'} \sum q_{\alpha} x_{\alpha}, \quad (62,9)$$

ხოლო მეორე ჯამი ადვილად შეიძლება, მარტივი გარდაქმნების გზით, ცნობილი სიდიდეების საშუალებით გამოვსახოთ. მართლაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ n ვექტორი დროზე დამოუკიდებელია, მაშინ შეგვიძლია დაკვივროთ

$$\begin{aligned} v(n, x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} x(n, x) + \frac{1}{2} v(n, x) - \frac{1}{2} x(n, v) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} x(n, x) + \frac{1}{2} [[x, v]n]. \end{aligned} \quad (62,10)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ, (61,4) ფორმულის თანახმად, სიდიდე $\frac{1}{2} \sum q_{\alpha} [x_{\alpha}, v_{\alpha}]$ სისტემის მაგნიტური მომენტია, ვექტორპოტენციალისათვის მივიღებთ

$$A = \frac{1}{cX_0} \frac{\partial P}{\partial t'} + \frac{1}{2c^2 X_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \sum q_{\alpha} x_{\alpha}(n, x_{\alpha}) + \frac{1}{cX_0} \left[\frac{\partial m}{\partial t'}, m \right]. \quad (62,11)$$

სანამ (62,11) გამოსახულების შემადგენელი წევრების ფიზიკური აზრის გამორკვევას შეუდგებოდეთ, განვსაზღვროთ ალბებულ მუხტთა სისტემის ზეგრძნობილი ელექტრომაგნიტური ველის e და h ვექტორები შორ მანძილებზე. რადგან წყაროდან შორ მანძილებზე e და h ურთიერთპერპენდიკულარულია და სიდიდით ტოლი ვექტორებია $e = |h, n|$ (§ 59), ამიტომ საკმარისია ერთის, მაგალითად, e -ს განსაზღვრა. ამ უკანასკნელის გამოსათვლელად (62,11) ფორმულა შედგევი სახით წარმოვადგინოთ

$$A = \frac{f(I')}{X_0}, \quad (62,12)$$

სადაც

$$I' = I - \frac{X_0}{c}$$

თუ ახლა (25,17) ფორმულას გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$h = \text{rot} \frac{f(t')}{X_0} = \left[\nabla \left(\frac{1}{X_0} \right), f(t') \right] + \frac{1}{X_0} \text{rot} f(t') = -\frac{1}{X_0^2} [n, f(t')] +$$

$$+ \left[\nabla t', \frac{\partial f(t')}{\partial t'} \right] = -\frac{1}{X_0^2} [n, f(t')] - \frac{1}{cX_0} \left[n, \frac{\partial f(t')}{\partial t'} \right] \approx -$$

$$-\frac{1}{cX_0} \left[n \frac{\partial(t')}{\partial t'} \right] = \frac{1}{c} \left[\frac{dA}{dt}, n \right] = \frac{1}{c} [A, n], \quad (62,13)$$

სადაც გამოყენებულია $\nabla t' = \nabla \left(t - \frac{X_0}{c} \right) = -\frac{1}{c} \nabla X_0 = -\frac{n}{c}$ დამოკიდებულე

ბა და გადაგდებულია მანძილის კვადრატის უკუპროპორციული წევრი, რომელიც დიდ მანძილებზე გაიკლებით მკირება ვიდრე პირველი შესაქრები.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ:

$$h = \frac{1}{c} [A, n] \text{ და } e = \frac{1}{c} [[A, n], n]. \quad (62,14)$$

უკანასკნელი ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ A -ს, ანდა თვით A ვექტორპოტენციალს ისეთ ნებისმიერ ვექტორს დავემატებთ, რომელსაც n -ს მიმართულება აქვს, ეს ოპერაცია გამოსათვლელ ელექტრომაგნიტურ ველზე არაავითარ გავლენას არ მოახდენს; ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია (62,11)

განტოლების მარჯვენა მხარეს დავემატოთ $-\frac{n}{6c^2 X_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \sum q_\alpha x_\alpha^2$ გამოსახუ-

ლება. მივიღებთ:

$$A = \frac{1}{cX_0} \frac{\partial P}{\partial t'} + \frac{1}{6c^2 X_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \sum q_\alpha (3x_\alpha (n \cdot x_\alpha) - (n \cdot x_\alpha)^2) + \frac{1}{cX_0} \left[\frac{\partial m}{\partial t'}, n \right], \quad (62,15)$$

(62,15)-ს მარჯვენა მხარის მეორე წევრში ჯამის ნიშნის ქვეშ მდგომი გამოსახულება წარმოადგენს მუხტთა სისტემის (45,1) კვადრუპოლური მომენტის ნამრავლს n ერთეულოვან ვექტორზე. იუ შემოვიღებთ D ვექტორს მდგენელებით: $D_i = D_{ik} \cdot n_k$, მაშინ გვექნება:

$$A = \frac{1}{cX_0} \frac{\partial P}{\partial t'} + \frac{1}{6c^2 X_0} \frac{\partial^2 D}{\partial t'^2} + \frac{1}{cX_0} \left[\frac{\partial m}{\partial t'}, n \right]. \quad (62,16)$$

ამ უკანასკნელის (62,14) ფორმულებში ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$h = \frac{1}{c^2 X_0} \left\{ \left[\frac{\partial^2 P}{\partial t'^2}, n \right] + \frac{1}{6c} \left[\frac{\partial^2 D}{\partial t'^3}, n \right] + \left[\left[\frac{\partial^2 m}{\partial t'^2}, n \right], n \right] \right\}. \quad (62,17)$$

$$e = \frac{1}{c^2 X_0} \left\{ \left[\left[\frac{\partial^2 P}{\partial t'^2}, n \right], n \right] + \frac{1}{6c} \left[\left[\frac{\partial^2 D}{\partial t'^3}, n \right], n \right] + \left[n, \frac{\partial^2 m}{\partial t'^3} \right] \right\}, \quad (62,18)$$

თუ (62,17) და (62,18) სიდიდეებს (37,15) ენერჯიის ნაკადის გამოსახულებაში ჩავსვამთ, მივიღებთ სისტემის მიერ დროის ერთეულში გასხვიებული ელექტრო-მაგნიტური ენერჯიის იმ რაოდენობას, რომელიც ზედაპირის ნორმალურად ფართის ერთეულზე გადის. ზედაპირის $dx^2 = X^2_0 d\Omega$ ელემენტზე ანუ $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში, რომლითაც dx^2 ზედაპირის ფართი მოსჩანს, დროის ერთეულში გამავალი ენერჯიის რაოდენობის, ე. ი. ინტენსიობის, მისაღებად უმოკ-პოინტინგის ვექტორის მნიშვნელობა dx^2 -ზე უნდა გავამრავლოთ. თუ (62,14) ტოლობას გამოვიყენებთ, მაშინ გვიქნება

$$dJ = S X^2_0 d\Omega = \frac{c}{4\pi} h^2 X^2_0 d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} \left\{ (\dot{P})^2 - \dot{P}_\alpha \dot{P}_\beta n_\alpha n_\beta + \right. \\ \left. + \frac{1}{36c^2} [(\ddot{D}_{\alpha\beta})^2 (n_\alpha n_\beta)^2 - \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\gamma\delta} n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta] + (\ddot{m})^2 n^2 - \ddot{m}_\alpha \ddot{m}_\beta n_\alpha n_\beta + \right. \\ \left. + 2[(\dot{P}, \ddot{D})n^2 - (n, \dot{P})(n, \ddot{D})] + 2[\dot{m}, \dot{P}]_\alpha n_\alpha n^2 - \frac{1}{3c} [\ddot{D}, \ddot{m}]_\alpha n_\alpha n^2 \right\}, \quad (62,19)$$

სადაც სიდიდე $[\dot{m}, \dot{P}]_\alpha$ წარმოადგენს \dot{m} და \dot{P} ვექტორების ვექტორული ნამ-რავლის α მდგენელს. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ინდექსები იცვებიან 1-დან 3 მდე.

მუხბთა სისტემის მიერ დროის ერთეულში ირგვლივ სივრცეში ყველა მიმართულებით გამოსხივებული ენერჯიის სრული ინტენსიობის მისაღებად, (62,19) გამოსახულება გავასაშუალოთ n -ს ყველა შესაძლო მიმართულებათა მიხედვით და ჩავატაროთ ინტეგრაცია $d\Omega$ სხეულოვანი კუთხით. გასაშუა-ლოებისათვის გამოვიყენოთ x_1, x_2 და x_3 ლერძებზე n ერთეულოვანი ვექტო-რის მდგენელების ნამრავლთა საშუალო მნიშვნელობების შემდეგი გაბო-სახულებები:

$$\overline{n^2_\alpha} = n^2 = 1, \quad (62,20)$$

$$\overline{n_\alpha} = 0, \quad \overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}, \quad \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = 0, \quad \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = 0, \quad (62,20 a)$$

ოცა ამ უკანასკნელში $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$.

$$\overline{(n_\alpha n_\beta)^2} = 1, \quad (62,20 b)$$

$$\overline{\left(\sum_{\alpha=1}^3 n^2_\alpha \right)^2} = 3\overline{n^4_\alpha} + 6\overline{n^2_\alpha n^2_\beta} = 1,$$

საიდანაც

$$\overline{n^2_\alpha n^2_\beta} = \frac{1 - 3\overline{n^4_\alpha}}{6}. \quad (62,20 c)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\overline{n^4_\alpha} = \overline{\cos^4 \vartheta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{5},$$

მაშინ (62,20 c) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\overline{n^2_{\alpha} n^2_{\beta}} = \frac{1}{15},$$

ანდა საზოგადოთ

$$\overline{n_{\alpha} n_{\beta} n_{\gamma} n_{\delta}} = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}). \quad (62,20 d)$$

თუ (62,20) — (62,20 d) ფორმულებს გამოვიყენებთ, მაშინ (62,19) დან მუხტთა სისტემის სრული გამოსხივებისათვის მივიღებთ:

$$J = \frac{2}{3c^3} (\dot{P})^2 + \frac{1}{180c^3} (\ddot{D}_{ik})^2 + \frac{2}{3c^3} (\ddot{m})^2. \quad (62,21)$$

როგორც ვხედავთ, სრული გამოსხივება სამი ერთიმეორეზე დამოუკიდებელი და სრულიად განსხვავებული ტიპის გამოსხივებისაგან შედგება. პირველი წევრი წარმოადგენს ელექტრულ დიპოლურ გამოსხივებას, მეორე — ელექტრულ კვადრუპოლურს, მესამე კი — დიპოლურ მაგნიტურს. ამოცანის სპეციფიკური ფიზიკური პირობების მიხედვით (62,21)-ში ზოგჯერ პირველი წევრი სჭარბობს, ზოგჯერაც მეორე, მესამე წევრი კი უმრავლეს შემთხვევაში პირველ ორთან შედარებით უმნიშვნელოა. გამოვარკვიოთ ელექტრული დიპოლური, კვადრუპოლური და მაგნიტური დიპოლური გამოსხივებათა ფარდობითი სიდიდეების დამოკიდებულება აღებულ მუხტთა სისტემის რივისებებზე.

განვიხილოთ ელექტრულ მუხტთა სისტემა და პირველად დავადგინოთ ის პირობები, რომლებშიაც სამართლიანი იქნება (62,5) მწკრივად გაშლის საფუძველზე მიღებული (62,8) ფორმულა, რომელშიაც უგულვებელყოფილია $\frac{(x_{\alpha}, n)}{c}$ — სიდიდის მეორე და უფრო მაღალი ხარისხები. თუ (μ) -ის პირველი

ხარისხის შემველ წევრსაც გადავადგებთ, მაშინ (62,21)-ში დაგვრჩება მხოლოდ პირველი წევრი, ე. ი. ელექტრული დიპოლური გამოსხივება. $\frac{(n, x_{\alpha})}{c}$

სიდიდე, როგორც ვიცით, იმ დროს წარმოადგენს, რომლის განმავლობაშიაც ელექტრომაგნიტური ტალღა (ურთიერთქმედება) კოორდინატთა სათავედან $4x$ მუხტამდე მანძილს გადის; ამიტომ თუ სისტემის მდგომარეობა ამ დროის განმავლობაში უმნიშვნელოდ იცვლება, მაშინ შეგვიძლია (62,8)-ში მარტო პირველი წევრით დავკმაყოფილდეთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა ავიღოთ მომდევნო მეორე წევრიც.

ის დრო, რომლის განმავლობაში მუხტთა სისტემის მდგომარეობა მნიშვნელოვნად იცვლება აღვნიშნოთ T -თი, ხოლო სისტემის ზაზოვანი ზომა — l -ით. რადგან სისტემის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის პერიოდი T -ს რიგისა და $\frac{l}{c} \sim \frac{(n, x_{\alpha})}{c}$, ამიტომ იმისათვის, რომ T დრო-

ში სისტემაში მუხტების მდგომარეობა მნიშვნელოვნად არ შეიცვალოს, დატული უნდა იყოს შემდეგი პირობა:

$$\frac{(n, x_\alpha)}{c} \ll T, \text{ ანუ } l \ll cT = \lambda. \quad (62,22)$$

ანგვარად, (62,21)-ში პირველი წევრით — ელექტრული დიპოლური გამოსხივებით მხოლოდ იმ შემთხვევაში შეიძლება დაგვეყოფილდეთ, როდესაც გამოსხივებული ტალღის სიგრძე გაცილებით დიდია, ვიდრე სისტემის ხაზოვანი ზომა.

(62,22) პირობას შეიძლება სხვა სახე მივცეთ; სახელდობრ, რადგან $T \approx \frac{l}{v}$ ე. ი. $\lambda \approx \frac{cl}{v}$, სადაც v მუხტის სიჩქარეა, ეს პირობა შემდეგნაირად გადაიწერება

$$v \ll c, \quad (62,23)$$

ე. ი. (62,22) პირობას ადგილი აქვს არარელატივისტურ შემთხვევაში. მაშასადამე, პრაქტიკაში უმთავრესად საქმე გვაქვს ელექტრულ დიპოლურ გამოსხივებასთან; ელექტრული კვადრუპოლური და დიპოლური მაგნიტური გამოსხივებები კი უფრო მაღალი რიგის ელექტებს წარმოადგენენ. მაგრამ ზოგჯერ გვხვდება ისეთი შემთხვევებიც, როდესაც ელექტრული დიპოლური გამოსხივება არ არსებობს; მაშინ, გადამწყვეტი მნიშვნელობა ელექტრულ კვადრუპოლურს და მაგნიტურ დიპოლურ გამოსხივებას ექნებათ.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ თუ სისტემის შემადგენელი დამუხტული ნაწილაკების მუხტების შეფარდება მასებთან ერთი და იგივეა, მაშინ ელექტრულ და მაგნიტურ დიპოლურ გამოსხივებას ადგილი არ ექნება. მართლაც, ასეთი სისტემის დიპოლური მომენტისათვის გვექნება:

$$P = \sum_{\alpha} P_{\alpha} = \sum q_{\alpha} x_{\alpha} = \sum \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} m_{\alpha} x_{\alpha} = \text{Const} \sum m_{\alpha} x_{\alpha}. \quad (62,24)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $\sum m_{\alpha} x_{\alpha} = x_c \sum m_{\alpha}$, სადაც x_c სისტემის სიმძიმის ცენტრის რადიუსვექტორია, მაშინ \vec{P} , როგორც სიმძიმის ცენტრის აჩქარების პროპორციული სიდიდე ნულს უნდა გაუტოლოთ; რადგან სისტემის სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე მუდმივია. ასევე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ აღნიშნული სისტემისათვის, ელექტრულთან ერთად, მაგნიტური დიპოლური გამოსხივებაც არ არსებობს. ეს უკანასკნელი გარემოება იმიტომ გამოწვეულა, რომ როდესაც $\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} = \text{const}$, მაშინ სისტემის იმპულსი და მისი

პროპორციული მაგნიტური მომენტი მუდმივ სიდიდეებს წარმოადგენენ; რის გამოც (62,21)-ში უკანასკნელი წევრი ისობა ($m=0$). ამავე მიზეზით ორი მუხტისაგან შედგენილი სისტემის მაგნიტურ დიპოლურ გამოსხივებას არასოდეს ადგილი არა აქვს.

§ 63. მულტიპოლის გამოსხივება

§ 45-ში ჩვენ გამოვარკვეით, რომ მუხტთა ნებისმიერი სისტემის, რომლის ხაზოვანი ზომა დაკვირვების წერტილამდე მანძილთან შედარებით ძალიან მცირეა, ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალი ცალკეული მუხტების, დიპოლების, კვადრუპოლების, ოქტუპოლების და უფრო მაღალი რიგის მულტიპოლების სისტემების პოტენციალების ჯამის სახით წარმოიდგინება.

იქვე მივიღეთ მუხტთა სისტემის პოტენციალის ისეთი ზოგადი გამოსახულება, რომლიდანაც მიიღებოდა ნებისმიერი რიგის მულტიპოლის პოტენციალები (მუხტი, დიპოლი, კვადრუპოლი და ა. შ. წარმოადგენენ სათანადო: ნულოვანი, პირველი, მეორე და ა. შ. რიგის მულტიპოლებს).

განვიხილოთ რაიმე მცირე მოცულობაში ნებისმიერად განაწილებულ მუხტთა სისტემა. დავუშვათ, რომ აღებული მოცულობა (მუხტთა სისტემა) a რადიუსიანი სფერო შეიგნითაა მოთავსებული. ეს მოცულობა დავანაწილოთ dx^3 ელემენტებად. ამ ელემენტის რადიუსვექტორი აღენიშნოთ ξ -თი, ხოლო მუხტის სიდიდე dq -თი.

თუ x_3 ღერძს პოლარულ ღერძად ავირჩევთ ხოლო P დაკვირვების წერტილის რადიუსვექტორს აღენიშნავთ X_0 -ით (ნახ. 44), მაშინ გვექნება:

$$x_1 = X_0 \sin \theta \cos \psi, \quad x_2 = X_0 \sin \theta \sin \psi, \quad x_3 = X_0 \cos \theta. \quad (63,1)$$

სათანადოდ, dq მუხტსა და $P(x_1, x_2, x_3)$ დაკვირვების წერტილის შორის მანძილისათვის, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |x| &= |x_0 - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2} = \\ &= \sqrt{x_0^2 - \xi^2 - 2x_0\xi \cos \theta}. \end{aligned} \quad (63,2)$$

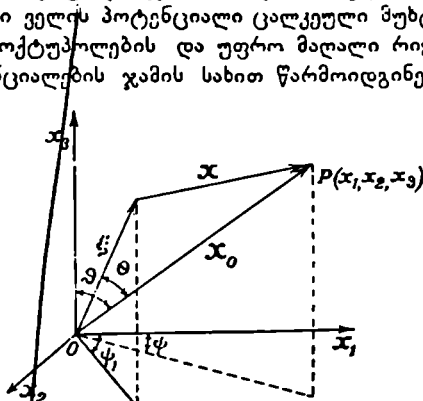
სადაც

$$\cos \theta = (\alpha \cos \psi + \beta \sin \psi) \sin \theta + \gamma \cos \theta. \quad (63,3)$$

ამ უკანასკნელში სიდიდეები: $\alpha = \cos(\xi, x_1)$, $\beta = \cos(\xi, x_2)$, $\gamma = \cos(\xi, x_3)$, წარმოადგენენ ξ — ვექტორის მიმართულების კოსინუსებს.

თუ P წერტილი მუხტთა სისტემის მიერ დაკავებული მოცულობის გარეთ იმყოფება $|\xi| < |X_0|$, მაშინ dq მუხტის ველის პოტენციალის

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_0, \theta, \psi) = \frac{dq}{|x|}. \quad (63,4)$$



ნახ. 44.

განოსახულებაში, სიდიდე $\frac{1}{x}$ შეიძლება გავშალოთ მწკრივად $\frac{\xi}{X_0}$ —სიდიდის ხარისხებად, გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= (X_0^2 + \xi^2 - 2\xi X_0 \cos \theta)^{-1/2} = \frac{1}{X_0} \left\{ 1 + \frac{\xi^2 - 2\xi X_0 \cos \theta}{X_0^2} \right\}^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{X_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{X_0^2 - 2\xi X_0 \cos \theta}{X_0^2} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \left(\frac{X_0^2 - 2\xi X_0 \cos \theta}{X_0^2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left(\frac{X_0^2 - 2\xi X_0 \cos \theta}{X_0^2} \right)^3 + \dots \right\} = \frac{1}{X_0} \left\{ 1 + \frac{\xi}{X_0} \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{\xi}{X_0} \right)^2 + \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2} \left(\frac{\xi}{X_0} \right)^3 + \dots \right\}. \quad (63,5) \end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება აგრეთვე შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\varphi(X_0, \theta) = \frac{1}{X_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{X_0} \right)^n P_n(\cos \theta). \quad (63,6)$$

ანალოგიური გზით, იმ შემთხვევაში როდესაც დაკვირვების წერტილი მუხტთა სისტემის შიგნითაა მოთავსებული $\xi \leq a < X_0$, გვექნება

$$\varphi(X_0, \theta, \psi) = \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{X_0}{\xi} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad (63,7)$$

(63,5) და (63,6) მწკრივებში $P_n(\cos \theta)$ გაშლის კოეფიციენტები ერთი და იგივეა, რადგან ზღვარში, როცა $X_0 = \xi$ და $\theta \neq 0$ ეს მწკრივები ერთმანეთში უნდა გადადიოდნენ. $P_n(\cos \theta)$ კოეფიციენტები $\cos \theta$ -ს მიმართ n -რი ხარისხის პოლინომებს წარმოადგენენ, მათ სფერულ ფუნქციებს უწოდებენ.

თუ (63,5)-ში (63,3) გამოსახულებას ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$\varphi(X_0, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d q \xi^{(n)}}{X_0^{n+1}} Y_n(\theta, \psi). \quad (63,8)$$

ამ უკანასკნელის (45,5)-თან შედარება გვაძლევს

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{(-1)^{n_1} n_2 + n_3}{n!} \frac{\partial^{n_1} \partial^{n_2} \partial^{n_3}}{\partial \xi_1^{n_1} \partial \xi_2^{n_2} \partial \xi_3^{n_3}} \left(\frac{1}{X_0} \right). \quad (63,9)$$

თუ ახლა წარმოვიდგენთ, რომ $d q$ -ს შემადგენელი მუხტების რადიუსვექტორებია $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ მაშინ X_0 რადიუსვექტორია და ξ_i ვექტორებს შორის შედგენილი კუთხეების კოსინუსებისათვის გვექნება:

$$\cos \theta_l = (\alpha_l \cos \psi + \beta_l \sin \psi) \sin \theta + \gamma_l \cos \theta; \quad (l=0, 1, 2, \dots, n). \quad (63,10)$$

სადაც სიდიდეები: $\alpha_l = \cos(\xi_l, x_1)$, $\beta_l = \cos(\xi_l, x_2)$ და $\gamma_l = \cos(\xi_l, x_3)$ წარმოადგენენ ξ_l ვექტორების მიმართულების კოსინუსებს.

თუ (63,9) გამოსახულებებს (63,4)-ში ჩავსვამთ, გვქვება:

$$\varphi_0(X_0, \vartheta, \psi) = \frac{dq}{X_0} Y_0(\vartheta, \psi) = \frac{dq}{X_0}. \quad (63,11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(X_0, \vartheta, \psi) = \frac{dq}{X_0^2} \xi Y_1(\vartheta, \psi) = \frac{dq}{X_0^2} \{ (\alpha_0 \cos \psi + \\ + \beta_0 \sin \psi) \sin \vartheta + \gamma_0 \cos \vartheta \}. \end{aligned} \quad (63,12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(X_0, \vartheta, \psi) = \frac{dq}{X_0^3} \xi^2 Y_2(\vartheta, \psi) = \frac{dq \xi^2}{X_0^3} \left\{ \left(\gamma_0 \gamma_1 - \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1}{2} \right) \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(\beta_0 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_0) \sin \psi + \frac{1}{2} (\gamma_0 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_0) \cos \psi \right] \frac{3 \sin 2\vartheta}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) \sin 2\psi + (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1) \cos^2 \psi] 3 \sin^2 \vartheta \right\} = \\ = \frac{dq \xi^2}{X_0^3} \{ a_{20} P_2^0(\cos \vartheta) + (a_{21} \cos \psi + b_{21} \sin \psi) P_2^1(\cos \vartheta) + \\ + (a_{22} \cos 2\psi + b_{22} \sin 2\psi) P_2^2(\cos \vartheta) \}. \end{aligned} \quad (63,13)$$

სადაც

$$\begin{aligned} a_{20} = \gamma_0 \gamma_1 - \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1}{2}, \quad a_{21} = \beta_0 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_0, \quad b_{21} = \gamma_0 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_0, \\ a_{22} = \frac{1}{4} (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) \quad \text{და} \quad b_{22} = \frac{1}{4} (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1) \end{aligned}$$

მუდმივ სიდიდეებს წარმოადგენენ, როდესაც მუხტები უძრავია.

როგორც უკანასკნელი ფორმულებიდან სჩანს, მულტიპოლის პოტენციალი, გარდა X_0 მანძილისა, აკრთვე დამოკიდებულია ϑ და ψ კუთხეებზე. (63,10) — (63,14) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$Y_0(\vartheta, \psi) = 1, \quad (63,14)$$

$$Y_1(\vartheta, \psi) = (\alpha_0 \cos \psi + \beta_0 \sin \psi) \sin \vartheta + \gamma_0 \cos \vartheta, \quad (63,15)$$

$$\begin{aligned} Y_2(\vartheta, \psi) = a_{20} P_2^0(\cos \vartheta) + (a_{21} \cos \psi + b_{21} \sin \psi) P_2^1(\cos \vartheta) + \\ + (a_{22} \cos 2\psi + b_{22} \sin 2\psi) P_2^2(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (63,16)$$

$$Y_n(\vartheta, \psi) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\psi + b_{nm} \sin m\psi) P_n^m(\cos \vartheta) = \sum_{m=0}^n Y_n^m(\vartheta, \psi). \quad (63,17)$$

რადგან (63,4) ლაპლასის განტოლების ამონახსნია, ამიტომ ცხადია (63,5), ანუ რაც იგივეა (63,8) მწკრივების ყოველი წევრი აგრეთვე (43,2) ლაპლასის განტოლებას დააკმაყოფილებს.

როგორც ცნობილია, (43,2) ლაპლასის განტოლების ამონახსნები ჰარმონული ფუნქციებია. რადგან φ ფუნქციის მწკრივად გაშლის ყოველი φ_n წევრი

ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებს, ამიტომ ისინი აგრეთვე ჰარმონიულ ფუნქციებს წარმოადგენენ. მაშასადამე, n -რი რიგის მულტიპოლის პოტენციალი n -რი რიგის პოლინომით გამოისახება, რომელიც სფერულ კოორდინატებში (63,17) სახით წარმოიდგინება. ეს უკანასკნელი n -რი რიგის ჰარმონიული ფუნქციაა და შეიცავს $2n+1$ ნებისმიერ მუდმივს, რომლებიც საკმარისი არიან სათანადო მულტიპოლის მონენტის სიდიდისა და მისი ღერძების მიმართულებათა განსასაზღვრელად.

ამგვარად, თუ სასრულო რადიუსიანი სფეროს შიგნით მუხტები განაწილებულია ნებისმიერად, მაშინ სფეროს გარეთ ყოველ წერტილში პოტენციალი (63,17) ჰარმონიული ფუნქციების საშუალებით განისაზღვრება.

როდესაც ამოცანას ღერძული სიმეტრია ახასიათებს, მაგალითად, მუხტები განაწილებულია x_3 ღერძზე ($\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$), მაშინ (63,8), (63,9) და (63,10) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\varphi(X_0, \vartheta) = \frac{dq}{X_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{X_0}\right)^n P_n(\cos \vartheta) = dq \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_3^n} \left(\frac{1}{X_0}\right); \quad (63,18)$$

საიდანაც გამოვძინარეობს, რომ:

$$\frac{P_n(\cos \vartheta)}{X_0^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_3^n} \left(\frac{1}{X_0}\right). \quad (63,19)$$

ზემოდ ჩვენ განვიხილეთ მცირე სასრულო მოცულობაში ნებისმიერად განაწილებულ უძრავ მუხტთა სისტემა; ახლა შევიწყვლოთ აჩქარებულად მოძრავე მუხტების ველი, რისთვისაც გამოვიყენოთ (62,17) და (62,18) ფორმულები. თუ n ერთეულოვან ვექტორისა და ξ , რადიუსვექტორებს მიმართულებებს შორის შედგენილი კუთხეებისათვის (63,10) ფორმულას გამოვიყენებთ, მაშინ არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალებისათვის მივიღებთ (63,8)-ს ნაკავს გამოსახულებებს. აღებულ მოცულობაში ნებისმიერად მოძრავე მუხტების ველი წარმოდგენილი იქნება ცალკეული მუხტების, დიპოლების, კვადრუპოლების და უფრო მაღალი რიგის მულტიპოლების ელექტრომაგნიტური ველების ჯამის სახით. სათანადოდ, სისტემის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღა უნდა განვიხილოთ როგორც მულტიპოლების მიერ გამოსხივებულ ტალღათა სუპერპოზიციის შედეგი.

იმის მიხედვით თუ რომელი რიგის სფერულ ფუნქციას ავიღებთ, პოტენციალების გამოხატულებაში, ჩვენ საქმე გვაქვს იმავე რიგის პოლუსთან. $Y_1(\vartheta, \psi)$ ფუნქციით წარმოდგენილი ველი გამოწვეულია დიპოლით (პირველი რიგის პოლუსი), $Y_2(\vartheta, \psi)$ — კვადრუპოლით, $Y_3(\vartheta, \psi)$ — ოქტუპოლით და ა. შ. ამგვარად, მუხტთა სისტემის როგორც სტაციონარული, ისევე დინამიკური ელექტრომაგნიტური ველი, მულტიპოლების სისტემის ველზე დაიყვანება.

რადგან სხვადასხვა რიგის მულტიპოლები ერთიმეორისაგან შემადგენელ მუხტთა სიდიდის, ურთიერთგანლაგებისა და მომენტების მიხედვით განსხვავდებიან, ამიტომ სათანადო ველებიც ერთიმეორისაგან განსხვავებული არიან. მულტიპოლის შემადგენელ მოძრავე მუხტთა მომენტის, სიდიდეს რო-

გორც ვიცით, არსებითად მათ ურთიერთგანლაგებაზეა დამოკიდებული. რასაც $Y^m_n(\theta, \psi)$ ფუნქციის რიგის მაჩვენებელი n რიცხვის მნიშვნელობით ვახასიათებთ. სათანადოთ, სივრცეში მულტიპოლის ორიენტაცია განისაზღვრება m -- ინდექსის მნიშვნელობებით. მაგალითად, თუ კვადრუპოლი მოთავსებულია $x_1 O x_2$ სიბრტყეში, მაშინ (63,13)-დან მივიღებთ:

$$\varphi_2(X_0, \theta, \psi) = \frac{dq_2^2}{X_0^3} [a_0 P_2^0(\cos \theta) + (a_{22} \cos 2\psi + b_{22} \sin 2\psi) P_2^2(\cos \theta)]. \quad (63,20)$$

ხოლო, როდესაც ის $x_1 O x_2$ სიბრტყეშია, მაშინ იგივე (63,13) ფორმულიდან გვექნება

$$\varphi_2(X_0, \theta, \psi) = \frac{dq_2^2}{X_0^3} b_{21} \sin \psi P_2^1(\cos \theta), \quad (63,21)$$

რომელიც (63,20)-გან მნიშვნელოვნად განსხვავდება.

ამგვარად, მუხტთა სისტემის ველი მათ მიერ დაკავებული მოცულობის გარეთ აღებულ რომელიმე წერტილში, გარდა მუხტის სიდიდისა და დაკვირვების წერტილამდე მანძილისა, მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული მულტიპოლების ღერძების მიმართულებებზე. ეს გარემოება არსებით როლს ასრულებს ელექტრომაგნიტური ველის (გამოსხივების) დაწებულ მატერიალურ ნაწილაკებთან ურთიერთქმედების პროცესებში.

§ 64. დაგვიანებული მოქმედების ეფექტი

თუ ლენარდ-ვიხერტის

$$\varphi = \frac{q_1}{x \left(1 - \frac{v_1 x_1}{c r} \right)}$$

პოტენციალის გამოსახულებას უძრავი მუხტის ველის $\varphi = \frac{q}{x}$ პოტენციალს

წვედარებთ, დაინახავთ, რომ მუხტის მოძრაობით გამოწვეული კულონური ველის პოტენციალის შესწორება ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველი დაკავშირებულია $t' = t - \frac{x}{c}$ რეტარდირებული დროის, ხოლო მეორე — $\frac{1}{1 - \frac{v_x}{c}}$

ნამრავლის შემოღებასთან. ეს უკანასკნელი ფაქტორი იმის მაჩვენებელია, რომ დამუხტული ნაწილაკი წერტილოვანი არაა. სილიდე $1 - \frac{(v, x)}{cx} = 1 - \frac{v_x}{c}$

გვაძლევს მუხტის ეფექტური მოცულობის ცვლილებას, ანუ დროის იმ შუალედის ფარდობით ცვლილებას, რომლის განმავლობაშიც მუხტიდან გამოსული ველი P დაკვირვების წერტილში აღწევს t მომენტში. მართლაც, თუ მუხტს, მაგალითად, ელექტრონს, ძალიან მცირე, მაგრამ, გარკვეულ მოცულობას მივაწერთ, მაშინ მის ელემენტებს ერთიმეორისაგან განსხვავებული რეტარდირებული დროები ექნებათ; რადგან P წერტილიდან ელექტრონის მიერ

დაკავებული მოცულობის ელემენტები სხვადასხვა მანძილებით იქნებიან და-
შორებული. ამ ელემენტების რეტარდირებული დროები, თუმცა უმნიშვნე-
ლოდ. მაგრამ მაინც განსხვავებული არიან. ამიტომ t' მომენტში ელექტრონის
მიერ დაკავებული მოცულობა არ თანხვდება სივრცის იმ ადგილს, რომლის-

თვისაც $T = t - \frac{X}{c}$. სინამდვილეში ჩვენ უნდა ავიღოთ ყოველი ელემენტის

რადიუსვექტორი და მათთვის გამოთვლილი პოტენციალების მნიშვნელობები
შევკრიბოთ; რაც პრაქტიკულად მოუხერხებელია. რადგან მუხტის (ელექტრო-

ნის) ყოველ ელემენტს თავისი $r'_a = t - \frac{X_a}{c}$ რეტარდირებული დრო შეესაბა-

მება; ამიტომ, მუხტის პოტენციალის განოსახლებლაში, საინტეგრაციო
მოცულობა არ თანხვდება T მომენტში მუხტის (ელექტრონის) მიერ დაკავე-
ბულ მოცულობას.

დავუშვათ, რომ ელექტრონი მოძრაობს x_1 ღერძის გასწვრივ სწორბა-
ზოადა. ცვლადი სიჩქარით; მაშინ ელექტრონის ერთ-ერთი რომელიმე O წერ-
ტილისათვის ყოველთვის შეიძლება მოიხაზოს მდებარეობის ისეთი წერტილი,
რომლიდანაც გამოსული მოქმედება (ელექტრომაგნიტური ველი) t მომენტში
მიალწევს დაკვირვების P წერტილში. თუ იმ დროს, რომლის განმავლობაშიც
ელექტრონი ამ „ეფექტურ“ მდებარეობას იკავებს აღვნიშნავთ $(t' - T)$ -ით,
მაშინ O წერტილის „ეფექტური“ კოორდინატა შეიძლება შემდეგი მწკრივის
საბით წარმოვიდგინოთ:

$$\begin{aligned} \xi_1(t') &= \xi_1(T) - v(T)(t' - T) + \frac{1}{2!} \dot{v}(T)(t' - T)^2 - \frac{1}{3!} \ddot{v}(T)(t' - T)^3 + \dots = \\ &= \xi_1(T) - v(T) \frac{x}{c} + \frac{1}{2} \dot{v}(T) \left(\frac{x}{c} \right)^2 - \frac{1}{6} \ddot{v}(T) \left(\frac{x}{c} \right)^3 + \dots \quad (64,1) \end{aligned}$$

ხოლო იმის გამო, რომ ელექტრონი x_1 ღერძის გასწვრივ მოძრაობს, O წერტი-
ლის „ეფექტური“ მდებარეობის ორი დანარჩენი კოორდინატისათვის გვექნება:

$$\xi_2(t') = \xi_2(T) \quad \text{და} \quad \xi_3(t') = \xi_3(T). \quad (64,2)$$

(64.1) და (64.2) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ O წერტილები,
რომლებიც T მომენტში მოთავსებული არიან $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$ მოცულობაში, იკა-
ვებენ $d\xi_1(t') d\xi_2 d\xi_3$ „ეფექტურ“ მოცულობას; სადაც

$$\begin{aligned} d\xi_1(t') &= d\xi_1(T) \left\{ 1 - \frac{v}{c} \frac{\xi_1(t') - \xi_1(T)}{x} + \right. \\ &\left. + \frac{v}{c^2} (\xi_1(t') - \xi_1(T)) - \frac{\ddot{v}}{2c^3} (\xi_1(t') - \xi_1(T)) x + \dots \right\}. \quad (64,3) \end{aligned}$$

სათანადოთ, ელექტრონის მოცულობის ყოველ $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ ელემენტს, რომელ-
საც მუხტები იკავებენ T მომენტში, შეესაბამება მოცულობის ელემენტი

$$d\tilde{\xi}_1(t') d\tilde{\xi}_2(t') d\tilde{\xi}_3(t') = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \left\{ 1 - \frac{v}{c} \frac{(\xi_1(t') - \xi_1(T))}{x} + \frac{\dot{v}}{c^2} (\xi_1(t') - \xi_1(T)) - \frac{\ddot{v}}{2c^3} (\xi_1(t') - \xi_1(T))x + \dots \right\}, \quad (64,4)$$

რომელშიაც მუხტების ρ სიმკვრივე t' მომენტში, $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ ელემენტში T მომენტში მუხტის სიმკვრივის ტოლია.

$x = c(t' - T)$ მანძილის მწკრივად გაშლისა და (64,4) დამოკიდებულების გამოყენების გზით, (54,13) ლენარდ-ვიხერტის პოტენციალებისათვის მივიღებთ:

$$\varphi = \int \frac{\rho}{x} \left\{ 1 - \frac{\dot{v}}{2c^2} (\xi_1(t') - \xi_1(T)) - \frac{\ddot{v}}{3c^3} (\xi_1(t') - \xi_1(T))x + \dots \right\} d\xi^3. \quad (64,5)$$

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{\rho}{x} \left\{ v - \frac{\dot{v}}{c} x + \frac{\ddot{v}}{2c^2} x^2 - \dots \right\} d\xi^3. \quad (64,6)$$

ამ უკანასკნელ ფორმულაში ინტეგრაცია სწარმოებს ელექტრონის მიერ T მომენტში დაკავებულ მოცულობაზე.

(64,5) და (64,6) გამოსახულებების საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ ელექტრონის ელემენტების ურთიერთქმედების (36,3) ლორენცის ძალა. ამ ძალის გამოსახულებაში, რომელიც უსასრულო მწკრივით წარმოიდგინება, მხოლოდ სიჩქარისა და აჩქარების პროპორციულ წევრებს აქვთ უშუალო ფიზიკური აზრი, ხოლო დანარჩენების წარმოშობისა და ბუნების შესახებ ჩვენ არაფრის თქმა არ შეგვიძლია. საკმაოდ გრძელი და რთული გამოთვლების გზით, რომელიც პირველად ლორენცმა ჩაატარა, მიიღებინა მწკრივის პირველი ორი წევრის მიახლოებითი მნიშვნელობანი. აქ არ შეუღებებით აღნიშნული ძალის გამოთვლას. მის მისაღებად ქვემოდ ჩვენ გამოვიყენებთ ენერჯის მულტიპოლის კანონს; რაც მნიშვნელოვნად გაამარტივებს გამოთვლებს.

დაგვიანებული მოქმედების ეფექტის ფიზიკური აზრის გამოსარკვევად, $x_a(t_a)$ რადიუსექტორი გამოვსახოთ როგორც T -ს ფუნქცია. რადგან t_a და T ერთიმეორისაგან $\frac{(x_a, X_0)}{X_0 c}$ მცირე სიდიდით განსხვავდებიან, ამიტომ

შეიძლება $x_a(t_a)$ გავშალოთ მწკრივად $\frac{(x_a, X_0)}{cX_0}$ სიდიდის ხარისხებად, გვექნება:

$$x_a(t_a) = x_a(T) + x_a \frac{(x_a, X_0)}{cX_0} + \dots \quad (64,7)$$

თუ ამ უკანასკნელს q_a -ზე გადავამრავლებთ და ავჯამავთ, მივიღებთ

$$\sum q_a x_a(t') = \sum q_a x_a(T) + \sum q_a \dot{x}_a \frac{(x_a, X_0)}{cX_0} + \dots \quad (64,8)$$

სადაც პირველი წევრი

$$P = \sum q_a \dot{x}_a(T)$$

სისტემის ელექტრულ დიპოლურ მომენტს წარმოადგენს, ხოლო მეორე

$$D = \sum q_a \dot{x}_a \frac{(x_a \times X_0)}{r_{X_0}}$$

დაგვიანებული მოქმედების ეფექტითაა გამოწვეული და მუხტთა სისტემის კვადრუპოლური მომენტია. კვადრუპოლური მომენტი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს იმ შემთხვევაში, როცა მუხტთა განაწილება ისეთია, რომლის დროსაც ელექტრული დიპოლური მომენტი ისპობა.

ამგვარად, აჩქარებულად მოძრავე დამუხტული მატერიალური ნაწილაკის, რომლის ელემენტებისა და ცენტრის რეტარდირებული დროები განსხვავებული არიან, ელექტრომაგნიტური ველი დიპოლების, კვადრუპოლებისა და უფრო მაღალი რიგის პოლუსების ველებზე სუპერპოზიციას წარმოადგენს.

§ 65. ძვალის ღრეკადი კალით ზმული ელექტრონი

ელექტრონთა თეორიის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას შეადგენდა ატომის აღნაგობის დეტალური შესწავლა. ამ მიმართულებით პირველი ცდა ომსონს ეკუთვნის, რომლის თვალსაზრისით ატომი წარმოდგენილი იყო მის შიგნით, უწყვეტად განაწილებული დადებითი ნიშნის ელექტრული მუხტების— დადებითი ელექტრული სითხის სახით, რომელშიაც ცურავენ უარყოფითი მუხტები—ელექტრონები.

რადგან v სიხშირის ელექტრომაგნიტური ტალღის წყაროს წარმოადგენს ამავე სიხშირით რხევადი ელექტრული მუხტი, ამიტომ ატომების გამოსხივების ასახსნელად უნდა განვიხილოთ და შევისწავლოთ მათი შემადგენელი მუხტების რხევები.

თუ ატომს ტომსონის მოდელის მიხედვით, წარმოვიდგენთ. მაშინ ატომის შიგნით, ცენტრიდან x მანძილზე მოთავსებულ ელექტრონზე მოქმედი ძალის მისაღებად, ელექტრონის მუხტი q უნდა გავამრავლოთ x რადიუსიანი სფეროს შიგნით მოთავსებული დადებითი მუხტების სიდიდეზე და გავყოთ სფეროს (ატომის) ცენტრიდან ელექტრონამდე მანძილის კვადრატზე; რადგან თანაბრად დამუხტული სფერო მის გარეთ (ზედაპირზე) ალბებულ წერტილში ისე მოქმედებს თითქოს მთელი მუხტი მოთავსებული იყოს მის ცენტრში. თუ ატომის რადიუსს a -თი აღვნიშნავთ, მაშინ მისი ცენტრიდან x მანძილზე მოთავსებულ ელექტრონზე იმოქმედებს კულონური ძალა

$$F = - \frac{q \cdot q \frac{x^3}{a^3}}{x^2} \frac{x}{x} = - \frac{q^2}{a^3} x, \tag{65,1}$$

სადაც $\frac{q}{a^3} x^3$ წარმოადგენს x რადიუსიანი სფეროს შიგნით მოთავსებული დადებითი მუხტის სიდიდეს.

(65,1) ძალა, რომლითაც ატომის დადებითი მუხტები მოქმედებენ ელექტრონზე, ატომის ცენტრიდან, როგორც წონასწორობის მდებარეობიდან მანძილის (გადაადგილების) პროპორციულია და გადაადგილების საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს. ასეთ ძალას, როგორც ცნობილია, ქვაზი დრეკადი ძალა ეწოდება. მისი გავლენით ნაწილაკი ჰარმონიული რხევითი მოძრაობის მდგომარეობაში იმყოფება. მაშასადამე, ატომის ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{q^2}{a^3} x = 0, \quad (65,2)$$

ანდა

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0; \quad (65,2 a)$$

სადაც

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{q^2}{ma^3}}. \quad (65,3)$$

(65,3) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ატომის რადიუსის სიდიდის რიგი. მართლაც, თუ (65,3)-ში შევიტანთ თეთრი ფერის სინათლის სიხშირის ($\omega \approx 10^{15}$ სეკ⁻¹), ელექტრონის მუხტის ($q = 4,8 \cdot 10^{-10}$) და ელექტრონის მასის ($m \approx 9 \cdot 10^{-28}$ გრ) მნიშვნელობებს, მივიღებთ: $a \approx 10^{-9}$ სმ.

ცნობილია, რომ რეზერფორდის ცდის საფუძველზე, ტომსონის მოდელი შეცვლილი იქნა ბორის მოდელით. ამ უკანასკნელის ანალიზს არ შეუდგებოთ, რადგან ის ჩვენს ამოცანას არ შეადგენს.

დაუბრუნდეთ ისევ (65,2a) განტოლებას. მისი ამონახსნია

$$x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t; \quad (65,4)$$

სადაც a და b რხევის ამპლიტუდებია (საწყისი ფაზები ნულის ტოლად გვაქვს მიღებული). (65,4) გამოსახულების საშუალებით ადვილად მიიღება ჰარმონიულად რხევადი ელექტრონის სრული ენერგია

$$W = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} (x)^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (a^2 + b^2) = \text{Const}. \quad (65,5)$$

მივიღეთ, რომ ჰარმონიულად რხევადი ელექტრონის სრული ენერგია დროში არ იცვლება—მუდმივი სიდიდეა. მაგრამ § 60-ში ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ რხვადი ელექტრონი (მუხტი) ელექტრომაგნიტური ველის წყაროს წარმოადგენს. აჩქარებულად მოძრავე ელექტრონის მიერ ელექტრომაგნიტური ტალღების, ე. ი. ენერგიის გასხივების შედეგად მისი ენერგია (65,5) უნდა შემცირდეს. ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად, დროის ერთეულში ელექტრონის მიერ გასხივებული ენერგია (59,11) ამავე დროში მისი სრული ენერგიის ცვლილების სიდიდეს უნდა გაუტოლოთ. მაშასადამე, (59,11) და (65,5) ფორმულების თანახმად, აჩქარებულად მოძრავე ელექტრონის სრული ენერგიის დროის მიხედვით ცვლილების კანონს შემდეგი სახე ექნება:

$$S = \frac{dW}{dt} = \frac{q^2 \omega_0^4}{3c^3} (a^2 + b^2) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega_0^2}{mc^3} W, \quad (65,6)$$

საიდანაც ინტეგრაციის გზით მიიღება ელექტრონის რხევის მილევის კანონი:

$$W = W_0 e^{-\gamma t}, \quad (65,7)$$

სადაც

$$\gamma = \left(\frac{2q^2 \omega_0^2}{3mc^3} \right). \quad (65,8)$$

(65,7) განტოლება გვიჩვენებს, რომ $T = \frac{1}{\gamma}$ დროის განმავლობაში ელექტ-

რონის ენერგია მცირდება e -ჯერ.

ამგვარად, გამოსხივების შედეგად ენერგიის კარგვის გამო, ელექტრონის კინეტიკური ენერგია დროში უნდა მცირდებოდეს. იმისათვის, რომ ატომში ელექტრონის მოძრაობა პერიოდულ ხასიათს ინარჩუნებდეს აუცილებელია ენერგიის ამ დანაკარგის აღდგენა ხდებოდეს რაიმე ძალის მიერ შესრულებული მუშაობის ხარჯზე. ახლა ჩვენ უნდა მოვინახოთ ამ ძალის გამოსახულება და გამოვარკვიოთ მისი ბუნება.

დროის ერთეულში გასხივებული ენერგიის სიდიდე ჩვენ მივიღეთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ელექტრონის მოძრაობა (მასზე მოქმედი გარეშე ძალა) მოცემული იყო. მაგრამ სწორი არ იქნებოდა ელექტრონის მოძრაობა გაგვესაზღვრა მხოლოდ გარეშე ძალების მოქმედებით. გარეშე ძალების მოქმედებას უნდა დავუმატოთ შინაგანი ძალების — ელექტრონის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის თვით ელექტრონზე უკუქმედების ძალა. ენერგიის მუდმივობის კანონი მოითხოვს, რომ ჰარმონიულად რხევადი ელექტრონის მიერ გასხივებული ენერგიის აღდგენა ხდებოდეს ელექტრონზე თავისივე საკუთარი ელექტრომაგნიტური ველის მხრივ მოქმედი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის ხარჯზე. მოძრავი მუხტის მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველის უკუქმედებას ველის რეაქცია ეწოდება.

რეაქციის ძალა, საზოგადოთ, მუხტზე მოქმედ გარეშე ძალასთან შედარებით მცირეა. ამ ძალის განოათვლელად გამოვიყენოთ ენერგიის მუდმივობის კანონი. ცხადია, რომ ენერგიის კარგვის (გასხივების) პროცესი გავლენას მოახდენს მუხტის (ელექტრონის) რხევებზე; ამიტომ მოძრაობის განტოლება უნდა შეიცავდეს იმ ძალას რომლის მიერ შესრულებული მუშაობა ენერგიის დანაკარგის ტოლი იქნება. რადგან ენერგიის დანაკარგი ელექტრონის სრულ ენერგიასთან შედარებით ძალიან მცირეა, ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ჰირველ მიახლოებაში გამოსხივების შედეგად მუხტის მოძრაობის ხასიათი არ იცვლება. მხოლოდ მეორე მიახლოების სახით მოძრაობის განტოლებაში შეიძლება შემოვიღოთ დამატებითი მცირე წევრი, რომელიც ისეთნაირად უნდა შევარჩიოთ, რომ ენერგიის მუდმივობის კანონი არ დაირღვეს.

ნებისმიერად მოძრავი მუხტის ველი შეგვიძლია თანაბრად მოძრავი მუხტის ველის (e_1, h_1) ენერგიისა და იმ ენერგიის ჯამის სახით წარმოვიდგინოთ, რომელიც უნდა დაეხარჯოთ იმისათვის, რომ მუხტმა აჩქარება შეიძინოს;

რასაც თან სდევს e_2, h_2 ელექტრომაგნიტური ველის წარმოშობა. როგორც § 60-ში გამოვარკვიეთ, რხევადი მუხტიდან (დიპოლიდან) ახლო მანძილებზე გადაწყვეტ როლს h_1 სტაციონარული მაგნიტური და e_1 სტატიკური ელექტრული ველები ასრულებენ. მათი ენერგიები შესაბამისად აღენიშნოთ W_1 და W_0 -ით. $W_1 + W_0$ ენერგია წარმოადგენს მუხტის ელექტრული და მაგნიტური ენერგიების ჯამს, ის ძირითადად ტალღური ზონის დასაწყისამდე — მუხტის უშუალო მახლობლობაშია განაწილებული, ხოლო e_2, h_2 ველის ენერგია კი — გვექნება ტალღურ ზონაში.

რხევადი მუხტის (ოსცილატორის), ანდა მუხტთა სისტემის, როგორც ცენტრის ირგვლივ შემოწერილ (σ) ზედაპირზე ელექტრომაგნიტური ენერგიის დენას მხოლოდ იმ შემთხვევაში ექნება ადგილი, როდესაც, ამ ზედაპირის შიგნით არსებული ენერგიის რაოდენობა მცირდება. მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ენერგიის გასხივება შეიძლება მოხდეს $W_0 + W_1$ ელექტრომაგნიტური ენერგიის შექცირების ხარჯზე. W_0 ელექტრული ენერგიის სიდიდის შემცირებას, საზოგადოთ თან სდევს მაგნიტურის, ე. ი. დინამიკური ნაწილაკის კინეტიკური ენერგიის ზრდა.

თუ დამოხტული ნაწილაკი მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს, ე. ი. მასზე პოქქედი გარეშე ძალების ჯამი ნულის ტოლია $f=0$. მაშინ (38.12) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$\frac{dW}{dt} = \int S_n dx^2, \tag{65.9}$$

სადაც W მუხტის ელექტრომაგნიტური ველის სრულ ენერგიას წარმოადგენს. ცალკეული ელექტრონის მუდმივი სიჩქარით მოძრაობის შემთხვევაში, როგორც § 47-ში გამოვარკვიეთ, ელექტრომაგნიტური ველი თან მყვება ელექტრონს — ის დროში არ იცვლება. მაშასადამე, (65.9) გამოსახულების მარცხენა მხარე ნულის ტოლია, ამიტომ, მარჯვენა მხარეში მდგომი წევრიც ნულს უნდა უდრიდეს, როგორც არ უნდა იყოს შეკრული საინტეგრაციო ზედაპირის ფორმა. ამ გარემოების თვალსაჩინო ინტერპრეტაცია შეუძლებელია. ელექტრომაგნიტური ველის ყოველ წერტილში, სადაც e და h ვექტორები ნულისაგან განსხვავებული და არაპარალელური არიან, ველის კონკრეტული სახისაგან (სტატიკური, სტაციონარული, დინამიკური ელექტრომაგნიტური ველი) დამოუკიდებლად ენერგიის ნაკადის \mathcal{E} ვექტორი ნულისაგან განსხვავებულია. პირობა $\mathcal{E} \neq 0$ იმის მაჩვენებელია, რომ თუნდაც სტატიკური ველის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ვადატანას — დენას. როგორც სტატიკური, ისევე სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველისათვისაც (48,13) განტოლების მარცხენა მხარე ნულის ტოლია, რომლის ერთადერთი ასხნა იმაში მდგომარეობს, რომ ადგილი აქვს სტატიკური და სტაციონარული ველების ელექტრომაგნიტური ენერგიის ნაკადის ცირკულაციას, რომელიც ფიზიკურ მოვლენებში არა ვლინდება.

ჩვენთვის საინტერესოა დინამიკური, ე. ი. აჩქარებულად მოძრავი ელექტრონის (მუხტის) ელექტრომაგნიტური ველის ის შემთხვევა, როდესაც შექ-

რელ ზედაპირზე ელექტრომაგნიტური ენერგიის ნაკადი ნულისაგან განსხვავებულია მაშინაც კი, თუ საინტეგრაციო ზედაპირს უსასრულობაში გადავიტანთ. ამ შემთხვევაში, (38,12)-ს თანახმად, გარეშე ძალის მიერ შესრულებული ნუშაობის ხარჯზე იზრდება ელექტრონის (მუხტის) ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია, რომლის ნაწილიც სივრცეში სხივდება უწყვეტი ნაკადის სახით.

ამგვარად, ერთი და იგივე პერიოდული ძალის მიერ შესრულებული მუშაობის მხოლოდ გარკვეული (მნიშვნელოვანი) ნაწილი ხმარდება ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ზრდას. დანარჩენი, შედარებით მკირე ნაწილი კი სხივოსნური ენერგიის სახით იფანტება სივრცეში. მუხტის ენერგია, რომელსაც ის გარეშე ძალის მოქმედებით იძენს. დროში მცირდება. ამ პროცესს მექანიკის ენაზე რხევის მიღევა ეწოდება. მექანიკური ანალოგიების გზით, რხევის მიღევის ეს მოვლენა შეიძლება დაიყვანოთ „სხივოსნური“ ხახუნის ძალის მოქმედებაზე, რომლის ნიერ დროის ერთეულში შესრულებული მუშაობა (59,11) გასხივებული ენერგიის ტოლი უნდა იყოს. როგორც ზემოდ აღვნიშნეთ, მკირე სიჩქარეებით მოძრაობის შემთხვევაში ელექტრონის (მუხტის) მოძრაობის განტოლება უნდა შესწორდეს. სახელდობრ, მოქმედ გარეშე F ძალას უნდა დამატოს სხივოსნური „ხახუნის“ ძალა F_s , რომელსაც აგრეთვე საკუთარ ძალასაც უწოდებენ. მაშასადამე, ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$F + F_s = m \frac{dv}{dt}. \quad (65,10)$$

F_s ძალის მოსანახავად დავუშვათ, რომ დროის ორ t_1 და t_2 მომენტებში ელექტრონის მოძრაობის მდგომარეობა ერთი და იგივეა. თუმცა ელექტრონი აჩქარებულად მოძრაობს, მაგრამ, სხივოსნური ხახუნის ძალის მოქმედების შედეგად ენერგიის კარგვის გამო, მისი აჩქარების მნიშვნელობანი t_1 და t_2 მომენტებში, პირობის თანახმად, ნულს უნდა გავუტოლოთ. ცხადია, რომ t_1 და t_2 მომენტებში ელექტრონის ველის ენერგიები ტოლი იქნებიან, ხოლო F_s ძალის მიერ $t_2 - t_1$ დროის შუალედში შესრულებული მუშაობა კი გამოი-სახება ამავე დროში გასხივებული ენერგიის რაოდენობით, ე. ი.

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_s, v) dt = - \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{v})^2 dt. \quad (65,11)$$

თუ გამოვიყენებთ $(\dot{v})^2 = \frac{d}{dt} (v \dot{v}) - v \frac{d^2 v}{dt^2}$ იგივეობას და $\dot{v}(t_1) = \dot{v}(t_2) = 0$ პირობას. მაშინ (65,11)-დან მივიღებთ:

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_s, v) dt = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d^2 v}{dt^2}, v \right) dt,$$

საიდანაც

$$F_s = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{d^2 v}{dt^2}. \quad (65,12)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს საძიებელი „სხივოსნური“ ხახუნის ძალას, რომელიც აჩქარების ცვლილების სიდიდებზეა დამოკიდებული. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ქვაზი დრეკადი ძალით ბმული ელექტრონის (65,2a) მოძრაობის განტოლების ის შესწორება, რომელსაც ენერჯის მდმივობის კანონი შოითხოვს.

თუ ველის რეაქციის ძალის (65,12) გამოსახულებას (65,10)-ში ჩავსვამთ-ქვაზი დრეკადი ძალით ბმული ელექტრონის მოძრაობის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{q^2}{a^3} x = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^3 x}{dt^3}. \quad (65,13)$$

„სხივოსნური“ ხახუნის ძალის (65,12) გამოსახულების მიღების დროს ჩვენ ვვულისხმობდით, რომ ელექტრონის მოძრაობა პერიოდულია.

მაშასადამე, მუხტის რხევები რეაქციის ძალის მოქმედების შედეგად პერიოდულ ხასიათს უნდა ინარჩუნებდეს, რაც შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როდესაც რეაქციის არაპერიოდული ძალა გაცილებით იცირება მომქმედ ქვაზი დრეკად ძალასთან შედარებით.

მაგალითის სახით განვიხილოთ წონასწორობის მდებარეობის მახლობლობაში x_1 ღერძის გასწვრივ რხევადი ელექტრონის მოძრაობაზე (65,12) რეაქციის ძალის გავლენა. რადგან მოძრაობა, პირობის თანახმად, პერიოდულია, ამიტომ შეგვიძლია დაწეროთ:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega_0^2 \frac{dx_1}{dt}. \quad (65,14)$$

თუ (65,14) პირობას გავითვალისწინებთ, ელექტრონის მოძრაობის (65,13) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{2q^2 \omega_0^2}{3c^2 m} \dot{x}_1, \quad (65,15)$$

რომლის ამონახსნი

$$x_1 = x_{01} e^{-i\omega t} \quad (65,16)$$

წარმოადგენს მიღევად პერიოდულ რხევებს; რაც ნაჩვენებია იქნება § 67-ში.

გამოვარკვეით როგორია რხევის სიხშირე ω და რა დროის შემდეგ ანდა თავისი გზის რა მანძილზე დაეცემა ელექტრომაგნიტური ტალღის ამპლიტუდა e -ჯერ; ამისათვის დავუშვათ, რომ

$$\omega = \omega_0 (1 + a); \quad (55,17)$$

სადაც $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ საკუთარი სიხშირეა, ხოლო a ჯერ-ჯერობით უცნობი კომპლექ-

სური რიცხვია. ამ უკანასკნელის მოსანახავად (65,13)-ში ჩავსვით (65,16) და გავითვალისწინოთ (65,17) დამოკიდებულება, მივიღებთ:

$$-(1+a)^2 + 1 = i \frac{2q^2}{3mc^3} \omega_0 (1+a)^3 = \frac{2\pi}{\lambda} i \frac{2q^2}{3mc^2} (1+a)^3. \quad (65,18)$$

რადგან ელექტრონის კლასიკური რადიუსი $\left(\frac{q^2}{mc^2} = x_0 \simeq 2,10^{-13} \text{ სმ} \right)$ გასხივებული ტალღის სიგრძესთან (λ) შედარებით ძალიან მცირეა, ამიტომ (65,18)-ში მარცხენა მხარეში შეიძლება უგულვებელყოთ a^2 , ხოლო მარჯვენაში კი a , რის შედეგადაც გვექნება:

$$a = -\frac{2\pi}{3} i \frac{x_0}{\lambda}. \quad (65,19)$$

როგორც ვხედავთ a წარმოსახვითი სიდიდეა; რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ელექტრონის რხევის საკუთარი სიხშირე ω_0 „ხახუნის ძალის“ გავლენით შესამჩნევად არ იცვლება, რაც შეეხება რხევის ამპლიტუდას, (61,17) და (65,19) გამოსახულებათა (65,16)-ში ჩასმის შედეგად ვღებულობთ დროის მიხედვით მისი ცვლილების კანონს

$$x_{01} = e^{-\frac{2}{3} \pi \frac{x_0}{\lambda} \omega_0 t} = e^{-\frac{4\pi^2}{3} \frac{x_0}{\lambda} \frac{t}{T}}; \quad (65,20)$$

საიდანაც გამოვძინარეობს, რომ

$$t = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda}{x_0} T \quad (65,21)$$

დროში რხევის ამპლიტუდა e -ჯერ მცირდება.

სათანადოთ, ტალღის მიერ გავლილი მანძილი, რომელზედაც ტალღის ამპლიტუდა e -ჯერ მცირდება, (65,21) ფორმულის თანახმად, შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება:

$$x_1 = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{x_0}. \quad (65,22)$$

თუ უკანასკნელ ფორმულას თეთრი ფერის სხივისათვის ($\lambda = (4-7,6) \cdot 10^{-5} \text{ სმ}$) გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$x_1 \simeq 8 \cdot 10^2 \text{ სმ} = 8 \text{ მეტ.}$$

რადგან ოსცილატორი განუწყვეტლივ ასხივებს, ამიტომ იმ მომენტში. როდესაც პირველი ტალღა რხევადი მუხტიდან (65,22) მანძილით იქნება დაშორებული, გასხივებული მიმდევრო ტალღის ამპლიტუდა e -ჯერ მცირე იქნება პირველის ამპლიტუდასთან შედარებით. თავის მხრივ, თუ პირველი ტალღა ოსცილატორიდან $2x_1$ მანძილით იქნება დაშორებული, ანდა, როდესაც (65,21) დროის დაგვიანებით გასხივებული ტალღა ოსცილატორიდან x_1 მანძილზე აღმოჩნდება, ამ მომენტში გასხივებული ტალღის ამპლიტუდა e -ჯერ ნაკლები იქნება წინა ტალღის ამპლიტუდასთან შედარებით. ამგვარად, (65,22) მანძილით ჩამორჩენილი ყოველი ტალღის ამპლიტუდა e -ჯერ ნაკლებია მისი წინა ტალღის ამპლიტუდასთან შედარებით.

მაშასადამე, ოსცილატორის რხევის ამპლიტუდა დროში მცირდება, რის გამოც გარკვეული დროის შემდეგ ის უნდა გაჩერდეს წონასწორობის მდებარეობის წერტილში.

აღსანიშნავია, რომ რეაქციის ძალისა და მისგან გამომდინარე (65,20 — 65,22) სიდიდეთა გამოთვლა საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ წრფივი ოსცილატორის ამპლიტუდის ის მნიშვნელობა, რომელსაც ლებულობს თერმიული გამოსხივების დროს ენერჯის პორციის გასხივების პროცესის დამთავრების შედეგად. ამ თვალსაზრისით გამოსხივების რეაქციის ძალა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს შავი სხეულების გამოსხივების პლანკის თეორიაში.

§ 66. საკუთარი ძალა

ელექტრომაგნიტური ველის თეორიის ძირითად ამოცანას შეადგენს პირველყოვლისა ელექტრულ მუხტებს შორის ურთიერთქმედების ძალების. როგორც მათი მოძრაობისა და მდებარეობის ფუნქციების, განსაზღვრა, ხოლო მეორეს მხრივ ამ მოძრაობათა და მდებარეობათა, როგორც ურთიერთქმედების ძალების ფუნქციების შესწავლა.

პირველი ამოცანა, კლასიკური ფიზიკის ჩარჩოებში, გადაკერილია, ხოლო მეორე მოითხოვს „საკუთარი“ ძალის შემოღებას.

წინა პარაგრაფში ჩვენ მივიღეთ სხივოსნური „ხახუნის“ ძალის განსაზღვრება (65,12). „ხახუნის“ ძალის გამოთვლის ის მეთოდი, რომელიც § 65-ში გამოვიყენეთ, ბუნდოვანი და არადაამაკმაყოფილებელია, მიუხედავად იმისა, რომ ის ენერჯის მუდმივობის კანონზეა დამყარებული. აღნიშნული მეთოდი არავითარ წარმოდგენას არ იძლევა „ხახუნის“ ძალის წარმოშობისა და ბუნების შესახებ და აბსურდულ შედეგებამდე მივყავართ. საკმარისია ელექტრონის აჩქარებულ მოძრაობის შემთხვევა გავარჩიოთ იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ მის უსაფუძვლობაში. განვიხილოთ ელექტრონის აჩქარებული მოძრაობა.

ვთქვათ, ელექტრონი მოძრაობს გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში. ამ ველიდან გასვლის შემდეგ ($F = 0$) მისი მოძრაობის განტოლებას, (65,10) და (65,12) ფორმულების თანახმად, შემდეგი სახე ექნება

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^2v}{dt^2} \tag{66.1}$$

რომელსაც, გარდა $v = \text{Const}$ ტრივიალური ამონახსნისა, აკმაყოფილებს ფუნქცია:

$$\frac{dv}{dt} = \text{Const} \cdot e^{-\frac{3c^3m}{2q^2} t} \tag{66.2}$$

(66,2)-დან გამომდინარეობს, რომ ელექტრონის აჩქარება, მას შემდეგ რაც ის გარეშე ელექტრომაგნიტური ველიდან უკვე გავიდა, უსასრულოდ უნდა იზრდებოდეს. მაშასადამე, ადგილი უნდა ჰქონდეს ელექტრონის „თვით აჩქარებას“. ცხადია, რომ ელექტრონის (ზემოაღნიშნული დებულებანი შეეხებოდა აგრეთვე ნებისმიერ ელექტრულ მუხტს) აჩქარების უსასრულო ზრდის ეს შედეგი, მოკლებულია ფიზიკურ აზრს. მიუხედავად ამისა ენერჯის მუდმივობის პრინციპი გვაიძულებს სხივოსნური ხახუნის ძალა შემოვიღოთ.

ბუნებრივია წამოიკრება საკითხი, როგორ უნდა მოქმედებდეს ელექტრონის (მუხტის) მიერ გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღა ანავე ელექტრონზე ისე, რომ ეს საკუთარი ველი მისი აჩქარების ზრდას იწვევდეს.

საკუთარი ველის ელექტრონზე უკუქმედების ძალის ბუნების გამოსარკვევად უნდა გამოვთვალოთ ის საერთო ძალა, რომლითაც ელექტრონის მოცულობის ელემენტები ერთიმეორეზე მოქმედებენ. თუ წარმოვიდგენთ, რომ ელექტრონის მუხტი განაწილებულია ელექტრონის მიერ დაკავებულ სივრცეში. ე. ი. ელექტრონის მოცულობაში ρ მოცულობითი ანდა η ზედაპირული სიმკვრივით, მაშინ მისი ორი dx_1^3 და dx_2^3 ელემენტის ურთიერთქმედების ძალისათვის გვექნება

$$dF_{12} = \frac{\rho_1 \rho_2 dx_1^3 dx_2^3}{x_{12}^3} (x_1 - x_2) (x_{12} = |x_1 - x_2|). \quad (66,3)$$

dx_1^3 ელემენტზე მომქმედი ძალა მიიღება ყველა დანარჩენი ელემენტების მხრივ მომქმედი ძალების შეკრებით

$$F = \rho_1 dx_1^3 \int \rho_2 \frac{dx_2^3}{x_{12}^3} (x_1 - x_2). \quad (66,4)$$

ხოლო ის ძალა, რომლითაც ელექტრონის მუხტის ელემენტები ერთიმეორეზე მოქმედებენ — ელექტრონის თავისთავზე მოქმედების ძალა კი მიიღება ინტეგრაციის გზით, ე. ი.

$$F = \int \rho_1 \rho_2 \frac{x_1 - x_2}{x_{12}^3} dx_1^3 dx_2^3. \quad (66,5)$$

თუ ელექტრონი უძრავია, ანდა მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს, მაშინ (66,5) საკუთარი ძალა ნულის ტოლია; მაგრამ, აჩქარებული მოძრაობის შემთხვევაში, ის ნულისაგან განსხვავდება. პირველყოვლისა უნდა შევნიშნოთ, რომ (66,5) ძალა არ შეიცავს მაგნიტური ველის დამახულობას, ამიტომ საკმარისია მხოლოდ მუხტის ელემენტების ელექტრული ველის განხილვით შემოვისაზღვროთ. ამ ძალის მისაღებად ჩვენ მოგვიხდება, დროის ალებულ მომენტში, dx_1^3 მოცულობის ელემენტის მდებარეობის წერტილში დანარჩენი ელემენტების ელექტრომაგნიტური ველის (53,14) დაგვიანებული პოტენციალების მნიშვნელობათა გამოთვლა. ეს გამოთვლები, აჩქარებულად მოძრავი ელექტრონის (მუხტის) შემთხვევაში, იმდენად რთულია და გადაულახავ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული, რომ დღემდე ისინი მკაცრი ფორმით არავის არ ჩაუტარებია. მხოლოდ სპეციალურ დაშვებათა (გამარტივებათა) საფუძველზე ლორენცმა მიიღო (66,5) ძალის მიახლოებითი გამოსახულება.

აჩქარებულად მოძრავი ელექტრონის dq ელემენტების ველის დაგვიანებული პოტენციალებისათვის (53,14) ფორმულების პირდაპირი გამოყენება არ შეიძლება; რადგან ისინი გვაძლევენ წერტილოვანი მუხტის ველს სივრცის ალებულ P წერტილში, რომელიც t მომენტში უძრავია, თითონ მუხტის მდებარეობა და სიჩქარე კი ალებულია $t' = t - \frac{x}{c}$ მომენტში.

განსახილველ შემთხვევაში მოძრავი მუხტის ყოველი ელემენტი და მათ შორის dq_i , რომლის მდებარეობის წერტილშიც ველს ვეძებთ, შეკავშირებულია დანარჩენებთან და მათთან ერთად მოძრაობს. იმისათვის, რომ შეიძლებოდეს

(53,14) ფორმულების გამოყენება, საკიროა t მომენტში, რომელშიაც საკუთარ ძალას ვეძებთ, dq_1 მუხტი უძრავი იყოს, ე. ი.

$$v(t) = 0. \quad (66,6)$$

მაგრამ (66,6) პირობიდან არ გამომდინარეობს, რომ $t' = t - \frac{x}{c}$ მომენტში

მუხტის სიჩქარე ნულის ტოლია, საზოგადოდ $v(t') \neq 0$.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (66,6) პირობა ამოცანის ზოგადობას არ არღვევს და ამიტომ არსებითი მნიშვნელობის შეზღუდვას არ წარმოადგენს. მართლაც, იმ სისტემიდან, რომლის მიმართაც მუხტი უძრავია, ე. ი. დაცულია (66,6) პირობა, ლორენცის გარდაქმნების (10,22) ფორმულების საშუალებით, შეგვიძლია გადავიღეთ ისეთ სისტემაზე, რომელშიაც მუხტი v სიჩქარით მოძრაობს.

მუხტის dq_1 ელემენტის მიერ შექმნილი ელექტრული ველის დაძაბულობა, (56,15) ფორმულის თანახმად, შემდგენიარად განისაზღვრება:

$$de_s(t) = \frac{dq_1}{s^3} \left\{ \left(1 - \frac{v^2(t')}{c^2} \right) \left(x - \frac{v(t')}{c} x \right) + \frac{1}{c^2} \left[x \left[x - \frac{v(t')}{c} x, \frac{dv(t')}{dt} \right] \right] \right\}; \quad (66,7)$$

სადაც

$$s = x - \frac{v(t'), x}{c}.$$

საკუთარი ძალის მისაღებად (66,7) გამოსახლება უნდა გავამრავლოთ მუხტის $dq_2 = \rho dx^2$ ელემენტზე და ჩავატაროთ ინტეგრაცია ელექტრონის მოცულობაზე. ინტეგრაციის დროს მხედველობიდან არ უნდა გამოვტოვოთ, რომ ელექტრონის მუხტის ყოველ dq_2 ელემენტს თავისი $t'_2 = t - \frac{x_2}{c}$ რეტარდირებული დრო

შეესაბამება. ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ „საკუთარი“ ძალა არსებითადაა დამოკიდებული სისტემის ისტორიაზე — წარსულში მისი მოძრაობის მდგომარეობაზე. ეს ძალა, რომლის ნამდვილი ბუნება ჩვენთვის უცნობია, მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ელექტრონის მდგრადობის საკითხებში და მის აჩქარებულ მოძრაობასთან დაკავშირებულ პროცესებში.

როგორც ვიცით, ელექტრომაგნიტური ველის (34,13) ლორენცის განტოლებათა და (36,3) ლორენცის ძალის საშუალებით, შეიძლება გამოვთვალოთ ელექტრონის მოძრაობით გამოწვეული ელექტრომაგნიტური ველი და განვსაზღვროთ ის ძალა, რომლითაც ეს ველი მოქმედებს მასში შეტანილ მეორე მუხტზე. მაგრამ, იმის გამო, რომ ელექტრონის (მუხტის) მოძრაობაზე მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს საკუთარი ძალა, ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ ეს უკანასკნელი; ურომლისოდაც ველის განტოლებათა სისტემა სრული არ იქნება. იმისათვის, რომ ელექტრონთა თეორიის განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემა მივიღოთ, უნდა გამოვწახოთ ისეთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შევისწავლოთ მოცემული გარეშე ძალების მოქმედებით გამოწვეული

ელექტრონის მოძრაობის მდგომარეობა. საკითხის მთელი სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ ელექტრონზე მოცემული გარეშე ძალების მოქმედების დროს თავს იჩენს თავისთავზე მოქმედების — საკუთარი ძალები. ცხადია, რომ ელექტრონის მოძრაობის განტოლებაში უნდა შედიოდნენ ელექტრონზე მოქმედი ყველა ძალები, მათ შორის საკუთარი ძალაც. ჯერჯერობით თეორიის ერთადერთი შესაძლო ვარიანტი, რომელიც ცოტა თუ ბევრად პასუხობს ელექტრონზე თავისი საკუთარი ველის მოქმედების ფაქტს, დამყარებულია განვრცობილი ელექტრონის წარმოდგენაზე. ამ თვალსაზრისით საკუთარი ძალა წარმოადგენს ელექტრონის „შემადგენელი“ ელემენტების ურთიერთმოქმედების სპეციფიკურ შედეგს. ბუნებასა და პრაქტიკაში ვაკეირდებით და ვსახლვრავთ გარეშე ძალების მოქმედებას, ხოლო მატერიალური ნაწილაკის, მაგალითად, ელექტრონის თავის თავზე მოქმედება ჩვენთვის შეუძინეველი რჩება. არ არსებობს ცოტა თუ ბევრად გონივრული თეორიული ან ექსპერიმენტული მონაცემი, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა „საკუთარი“ ძალები გარეშე ძალებიდან გამოგვეყო. გარეშე ძალის ცნება ორგანიულად დაკავშირებულია მატერიის ცნობილ თვისებებთან, „საკუთარი“ ძალების ქვეშ კი მატერიის ჯერჯერობით შეუცნობელი თვისებები იმალებიან. „საკუთარი“ ძალების წარმოშობა და ბუნება ისევე უცნობია როგორც მატერიალური ნაწილაკის, თუნდაც ელექტრონის ზოგიერთი თვისებები. ამ ახალ თვისებათა გამოვლინებასა და ვამომკვლავებდასთან ერთად, შესაბამისი ახალი ფიზიკური სიდიდეებიც გარკვეულ ადგილებს დაიკავებენ მეცნიერებაში. მაშასადამე, გარეშე და „საკუთარ“ ძალებად დაყოფა მხოლოდ პირობითია და მას არავითარი პრინციპული მნიშვნელობა არა აქვს.

მიუხედავად იმისა, რომ ელექტრონის თავისთავზე მოქმედების მექანიზმი ჩვენთვის უცნობია, განვრცობილი ელექტრონის თეორია ისეთნაირად უნდა ჩამოვყალიბოთ, რომ მია საფუძველზე შეიძლებოდეს ელექტრონის მოძრაობის შესწავლა და მისი წონასწორობის საკითხის გამოკვლევა.

რადგან „საკუთარი“ ძალა დროს ადრინდელ მომენტებში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის მდგომარეობაზეა დამოკიდებული, ამიტომ მისი გამოთვლა შესაძლებელია მოძრაობათა მხოლოდ ზოგიერთი მარტივი — სპეციფიკური სახეებისათვის. მაშასადამე, „საკუთარი“ ძალის გამოსახულების მისაღებად, დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა გარკვეულ შეზღუდვებს უნდა დავუქვემდებაროთ. მაგალითად, განვიხილოთ ნაწილაკის ნელად ცვლადი მოძრაობა. დავუშვათ, რომ მუხტის აჩქარების ცვლილება იმ დროში, რომელსაც ელექტრომაგნიტური ტალღა მუხტთა სისტემის მიერ დაკავებულ მოცულობაში გავლას ანდომებს, გაცილებით ნაკლებია თვით აჩქარების სიდიდესთან შედარებით, ე. ი.

$$\frac{x_0}{c} \left| \frac{d^2 v}{dt^2} \right| \ll \left| \frac{dv}{dt} \right|; \quad (66,8)$$

სადაც x_0 წარმოადგენს მუხტის მოცულობის ხაზოვან ზომას.

თუ გავითვალისწინებთ (66,6) და (66,8) პირობებს, მაშინ (66,7) გამოსახულებაში, დაგვიანების ეფექტის როლის გამოსარკვევად, მუხტის სიჩქარე

და აჩქარება შეიძლება გავშალოთ მწკრივად, $\frac{x_0}{c}$ სიდიდის ხარისხების მიხედ-
ვით, გვექნება

$$v(t') = -\frac{dv(t)}{dt} \frac{x_0}{c} + \frac{1}{2} \frac{d^2v(t)}{dt^2} \left(\frac{x_0}{c}\right)^2 + \dots \quad (66,9)$$

$$\frac{dv(t')}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} - \frac{d^2v(t)}{dt^2} \frac{x_0}{c} + \frac{1}{2} \frac{d^3v(t)}{2dt^3} \left(\frac{x_0}{c}\right)^2 + \dots \quad (66,10)$$

ეს უკანასკნელი მწკრივები ჩავსვით (66,7)-ში და შემოვისაზღვროთ $\frac{x_0}{c}$ სიდი-
დის დაბალ ხარისხიანი წევრებით $\left(\frac{x_0}{c}\right)^3$ -ს ჩათვლით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} de_s(t) &= \frac{dq_1}{x^3} \left(1 - 3 \frac{(x, \dot{v}(t))}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{(x, \ddot{v}(t)) \cdot x}{c^3} \right) \left\{ x - \frac{\dot{v}(t)}{c^2} \cdot x^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\dot{v}(t)}{c^2} \frac{x_0}{c} - \frac{1}{2} \ddot{v}(t) \left(\frac{x_0}{c}\right)^2 \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left[x \left[x - \dot{v}(t) \frac{x_0}{c} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \ddot{v}(t) \left(\frac{x}{c}\right)^2; \ddot{v}(t) \frac{x}{c} - \dot{v}(t) \right] \right] \right\} = \\ &= \frac{dq_1}{x^3} \left\{ 2 \frac{x(x, \dot{v}(t))}{c^2} - \frac{x(x, \ddot{v}(t)) \cdot x}{2c^3} - x - \frac{\ddot{v}(t) \cdot x^3}{c^3} \right\}; \quad (66,11) \end{aligned}$$

სადაც გამოყენებულია ფორმულა

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} &= \frac{1}{x^3} \left(1 - \frac{(v(t'), x)}{cx} \right)^{-3} = \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{(\dot{v}(t), x)}{c^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{(\ddot{v}(t), x) \cdot x}{c^3} + \dots \right)^{-3} = \frac{1}{x^3} \left(1 - \frac{3(\dot{v}(t), x)}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{x}{c^3} (x, \ddot{v}(t)) + \dots \right). \end{aligned}$$

თუ (66,11) გამოსახულებას, რომელიც დამოკიდებულია x რადიუსვექტორის მიმართულებაზე — ში პოლარულ კუთხეზე, მუხტის dq_2 ელემენტზე გადავამრავ-
ლებთ და ინტეგრაციას ჩავატარებთ, მივიღებთ „საკუთარი“ ძალას. საინტეგრა-
ციო მოკულობათ ავირჩიოთ სფერო, როგორც უმარტივესი გეომეტრიული
სხეული. მართლაც, რადგან დამუხტული ნაწილაკის, მაგალითად ელექტრონის,
გეომეტრიული ფორმა ჩვენთვის სრულიად უცნობია, ამიტომ შეგვიძლია ის
სფეროდ ჩავთვალოთ.

თუ (62,20)–(62,20 d) ფორმულებს გამოვიყენებთ და (66,11)-ს ში კუთხის
მიხედვით გავასაშუალებთ, მაშინ „საკუთარი“ ძალისათვის მივიღებთ:

$$F_s = \int \rho dx^3 d\overline{F}_s = \int dq_1 dq_2 \left\{ -\frac{2}{3} \frac{\dot{v}}{xc^2} + \frac{2}{3} \frac{\ddot{v}}{c^3} \right\} = F_1 - F_2, \quad (66,12)$$

სადაც

$$F_1 = -\frac{2}{3} \frac{\dot{v}}{c^2} \frac{1}{2} \int \frac{dq_1 dq_2}{x} = -\frac{2}{3} \frac{W'}{c^2} \dot{v} \quad (66,13)$$

წარმოადგენს მექანიკაში ცნობილი — $m\dot{v}$ ინერციული ძალის ანალოგს. როგორც ვხედავთ, დამუხტული ნაწილაკის ელექტროსტატიკური ველის ენერგია

$W' = \frac{1}{2} \int \frac{dq_1 dq_2}{x}$ ნაწილაკის სტრუქტურაზე დამოკიდებული. (66,13)-ში სიდი-

დე $\frac{W'}{c^2}$ — ელექტრომაგნიტური მასა, ნაწილაკის ინერციული მასის როლს ასრულებს.

როგორც § 49-ში გამოვარკვეით წერტილოვანი მუხტის საკუთარი ენერგია W' და სათანადო ელექტრომაგნიტური მასა $\frac{W'}{c^2}$ უსასრულო დიდია, ხოლო სასრულო მოცულობის მქონე დამუხტული ნაწილაკისათვის, რომელსაც x_0 რადიუსიანი სფეროს სახით წარმოვიდგენთ, ეს ენერგია სასრულოა

$$\left(W' = \frac{q^2}{x_0} = m'_{\text{эл}} c^2 \right).$$

ამგვარად, „საკუთარი“ ძალის (66,13) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ ნაწილაკს გარკვეული მოცულობა უნდა ჰქონდეს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს ძალა უსასრულო დიდი გახდებოდა. თუ ნაწილაკის რადიუსი x_0 სიდიდეზე ნაკლები აღმოჩნდებოდა, მაშინ F_1 საკუთარი ძალა — $m\dot{v}$ ინერციულ ძალას გადააჭარბებდა, რაც მოკლებულია ფიზიკურ აზრს. მაშასადამე, წმინდა ფიზიკური მოსაზრება გვაიძულებს ნაწილაკს სასრულო რადიუსი, ე. ი. სასრულო მოცულობა მივაწეროთ. მაგრამ ელექტრომაგნიტური ველის თეორიაში (ასევე თანამედროვე ქვანტურ ელექტროდინამიკაში) ელემენტარული ნაწილაკის სასრულო რადიუსის შემოღებას მეორე გადაუჭრელ წინააღმდეგობამდე მივყავართ. თუ ელემენტარულ ნაწილაკს სასრულო რადიუსს მივაწერთ, მაშინ დაირღვევა თეორიის რელატივისტური ინვარიანტობის პირობა.

გადავიდეთ ჩვენთვის საინტერესო გამოსხივების რეაქციის ძალის განხილვაზე, რომელსაც (66,12)-ში მეორე შესაჯრები წარმოადგენს. ეს ძალა

$$F_2 = \frac{2}{3} \frac{\ddot{v}}{c^3} \int dq_1 dq_2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{v} \quad (66,14)$$

აჩქარების დროით წარმოებულის პროპორციულია და სრულიად დაპოკიდებელია ნაწილაკის მუხტის განაწილებაზე. (66,14)-ის ძალაა, როქელმაც მუხტის ჰარმონიული რხევითი მოძრაობის დროს უნდა აღადგინოს გასხივებაზე ენერ-

გიის დანაკარგი $\left(\frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3} \right)$.

მუხტის თავისთავზე მოქმედების (66,14) ძალა ჩვენ მივიღეთ მუხტის (66,5) საკუთარი ძალის გამოსახულებაში შემავალი $v(t')$ და $\dot{v}(t')$ სიდიდეების

$\frac{x_0}{c}$ -ს ხარისხებად გაშლის გზით. ამგვარად, ნაწილაკის (ელექტრონის) შემადგენელი ელემენტებისათვის $i'_{\alpha} = i - \frac{ix}{c}$ რეტარდირებული დროების შემოღების, ე. ი. მის შიგნით დაგვიანების ეფექტის გათვალისწინების შედეგად მიღებული პირველი მიახლოება (წვერი, რომელიც $\frac{x_0}{c}$ სიდიდის პირველ ხარისხს შეიცავს) გვაძლევს დაზუსტული ნაწილაკის თავისთავზე მოქმედების (66,14) ძალას.

თუ (66,9) მწკრივში გარდა პირველი ორი წევრისა მომდევნო წევრებსაც ავიღებთ, მივიღებთ მუხტის თავისთავზე მოქმედი ძალის დამატებით გამოსახულებებს:

$$\frac{q^2}{cx_0} \left(\frac{x_0}{c}\right)^2 \dots, \frac{q^2}{c^2 x_0} \left(\frac{x_0}{c}\right)^3 \dots, \dots \quad (66,15)$$

ამ უკანასკნელი მიმდევრობის ყველა წევრი დამოკიდებულია „ელემენტარული“ ნაწილაკის (ელექტრონის) სტრუქტურაზე. სახელდობრ, ისინი ნაწილაკის რადიუსის პირველი, მეორე და ა. შ. ხარისხების პროპორციულ სიდიდეებს წარმოადგენენ, ხოლო წერტილოვანი „ელემენტარული“ ნაწილაკისათვის ნულის ტოლი ხდება. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (66,15) მწკრივის ყოველი მომდევნო წევრის წინა წევრთან შეფარდება $\frac{x_0}{\lambda}$ სიდიდის რიგისაა. მართლაც, რადგან

$$\frac{\ddot{v}}{v} \sim \frac{1}{v}, \text{ ამიტომ } \frac{F''_e}{F'_e} \simeq \frac{cx_0}{v} = \frac{x_0}{\lambda}; \quad (66,16)$$

რაც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს გამოსხივების თეორიაში.

(66,16) ფორმულის თანახმად, საკუთარი ძალის $\frac{x_0}{\lambda}$ სიდიდის ხარისხებად უსასრულო წკრივად გაშლას აზრი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $\frac{x_0}{\lambda} \ll 1$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ყოველი შემდგომი მიახლოება წინაზე დიდი აღმოჩნდებოდა. ამგვარად, იმისათვის, რომ (66,5) საკუთარი ძალის გამოსახულებაში ყოველი მომდევნო წევრი წინა წევრთან შედარებით ძალიან მცირე იყოს (რაც უფლებას მოგვცემს გაშლის პირველი ორი წევრით დაკმაყოფილდეთ) აუცილებელია დაცული იყოს შემდეგი პირობა:

$$\frac{x_0}{\lambda} \ll 1, \quad (66,17)$$

(66,17) იმას მაჩვენებელია, რომ გასხივებული ტალღის სიგრძე გაცილებით დიდი უნდა იყოს დამუხტული ნაწილაკის რადიუსთან შედარებით.

ზემოთ ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ დამუხტული ნაწილაკის თავის თავზე ნოქმედების ძალის გავლენით მისი აჩქარება დროში უსასრულოდ უნდა იზრდებოდეს. ეს ფიზიკურად უაზრო შედეგს წარმოადგენს. ამ უაზრო შედეგის თავიდან ასაცილებლად უნდა დაეუშვათ, რომ თავისთავზე მოქმედების (66,14) ძალა გაცილებით ნაკლებია როგორც — $m\dot{v}$ ინერციულ, ისევე (36,3) ლორენცის ძალასთან შედარებით. მაშასადამე, გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტის მოძრაობის

$$m \frac{dv}{dt} = q \left(e + \frac{1}{c} [v, h] \right) + \frac{2}{2} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^2v}{dt^2}. \quad (66,18)$$

განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ ამ უკანასკნელს აზრი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში შესრულებული იქნება შემდეგი პირობები:

$$m \frac{dv}{dt} \gg \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^2v}{dt^2}, \quad q \left(e + \frac{1}{c} [v, h] \right) \gg \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^2v}{dt^2}, \quad (66,19)$$

(66,19) პირობებიდან პირველი გვაძლევს (66,16) პირობას. ადვილად შეიძლება დაერწმუნდეთ, რომ მეორეც აგრეთვე (66,16)-ის ტოლფასია. მართლაც, (66,18) განტოლების დროით გაწარმოების შედეგად გვექნება:

$$\frac{d^2v}{dt^2} \simeq \frac{q}{m} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{q}{mc} [v, h] \simeq \frac{q}{m} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{q^2}{m^2c} [e, h], \quad (66,20)$$

სადაც პირველი მიახლოებით (66,18)-დან აღებულია პირველი ორი წევრი, ხოლო v -ს ნაცვლად ჩასმულია სიდიდე $\frac{q}{m} e$. თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ პერიოდული ველისათვის ადგილი აქვთ ტოლობებს:

$$\left| \frac{\partial e}{\partial t} \right| = \omega |e| \quad \text{და} \quad \frac{q^2}{m^2c} [e, h] \simeq \frac{q^2}{m^2c} e \cdot h,$$

მაშინ (66,14) რეაქციის ძალის სიმცირის (66,19) პირობა მოგვცემს: $\frac{q^2 \omega}{m^2 c^3} \ll 1$,

საიდანაც გამომდინარეობს, შემდეგი უტოლობა

$$\lambda \gg \frac{q^2}{m^2 c^2} = \lambda_0, \quad (66,21)$$

ეს უკანასკნელი პირობა კი ემთხვევა (66,17)-ს.

ამგვარად, ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტის მოძრაობის (66,18) განტოლება და საერთოდ ელექტრომაგნიტური ველის კლასიკური თეორია სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როდესაც დაცემული ან გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის სიგრძე გაცილებით დიდია დამუხტული ნაწილაკის რადიუსთან შედარებით. მაგალითად, $\nu \approx 10^{22}$ სეკ.⁻¹ სიხშირის ($\lambda \approx 10^{-13}$ სმ) ელექტრომაგნიტური ტალღებისათვის კლასიკური ელექტრონთა თეორიის (34,13) განტოლებები აღარ

გამოდგებიან. (66,21) პირობა აწესებს კლასიკური ველის თეორიის გამოყენების საზღვრებს. სახელდობრ, $\alpha_0 = \frac{q^2}{mc^2}$ — ელექტრონის რადიუსი ის მინიმალური მანძილია, რომლის იქით ელექტრომაგნიტური ველის თეორია წინააღმდეგობაში მოდის თავის თავთან. ელექტრომაგნიტური ველის ლორენც-მაქსველის თეორია სრულიად გამოუსადეგარია ელექტრონის მიერ დაკავებული მოცულობის რიგის სივრცეებისათვის; უფრო მეტიც, ის ატომის შიგნით მიმდინარე პროცესების ახსნასაც ვერ იძლევა.

მუხტის თავის თავზე მოქმედების ძალის გამოსახულებიდან ადვილად მიიღება მაგნიტური ველის დაძაბულობის ის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლის ზევითაც ელექტრომაგნიტური ველის კლასიკური თეორიის გამოყენება აღარ შეიძლება. მართლაც, თუ (66,14)-ში ჩავსვამთ $\frac{d^2v}{dt^2}$ -ს მნიშვნელობას (66,20)-დან და გავითვალისწინებთ, რომ თავის თავზე მოქმედების

$$F_s \approx \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{q^4}{m^2 c^4} [e h].$$

ძალის გამოსახულებაში მეორე წევრი qe სიდიდესთან შედარებით ძალიან მცირეა, გვექნება

$$\frac{q^3}{m^2 c^4} h \ll 1 \quad \text{ანდა} \quad h \ll \frac{m^2 c^4}{q^3}. \quad (66,22)$$

მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ველის კლასიკური თეორია გამოდგება მხოლოდ ისეთი მაგნიტური ველების შესასწავლად, რომლებიც (66,22) პირობას აკმაყოფილებენ.

§ 67. სპექტრალური ხაზის სიგანე

§ 59-ში ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ ყოველი აჩქარებულად მოძრაი მუხტი ელექტრომაგნიტური ტალღების წყაროს წარმოადგენს. რხევადი მუხტის მიერ დროის ერთეულში გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ენერგიის რაოდენობა, (60,12)-ის თანახმად, დამოკიდებულია მუხტის რხევის სიხშირეზე. მაშასადამე, სხვადასხვა სიხშირის ტალღებს თან მიაქვთ განსხვავებული სიდიდის ენერგიები. თუ მუხტის რხევის სიხშირე უცვლელია, მაშინ გასხივებული ტალღების მიერ დროის ტოლ შუალედებში გადატანილი ენერგიები ერთი და იგივე უნდა იყოს.

რადგან წრფივი ოსცილიატორი, ანუ ჰარმონიულად რხევადი მუხტი ერთი სიხშირით ირხევა, ამიტომ ის მხოლოდ ერთი გარკვეული სიხშირის ელექტრომაგნიტურ მონოქრომატიულ ტალღას უნდა ასხივებდეს. მაგრამ, სივრცეში ენერგიის გასხივების გამო, ოსცილიატორის სრული ენერგია და რხევის ამპლიტუდა, სათანადოთ, (65,7) და (65,14) ფორმულების მიხედვით მცირდება დროში. თუ დავუშვებთ, რომ რხევის მთელი პროცესის განმავლობაში ოსცილიატორის სრული ენერგია (65,5) უცვლელია, მაშინ რხევის

ამპლიტუდის შემცირების დროს სიხშირე უნდა იზრდებოდეს და პირიქით-ამგვარად, ოსცილატორის მიერ ენერჯიის გასხივებასთან დაკავშირებულია რხევის სიხშირის ცვლილება, რასაც თან სდევს პარამონიული მოძრაობიდან გადახრა. რხევის სიხშირის ცვალებადობის გამო, მონოქრომატული ტალღის ნაცვლად მივიღებთ სხვადასხვა სიხშირეების მონოქრომატული ტალღების ერთობლიობას. მონოქრომატულ ტალღათა ეს ერთობლიობა გვაძლევს ერთმთლიან ელექტრომაგნიტურ ტალღას, რომელიც სიხშირეთა უსასრულო მცირე ინტერვალში მოთავსებულ ტალღათა სუპერპოზიციის შედეგს წარმოადგენს-

წინა პარაგრაფში, მუხტის პარამონიული რხევის დროს ენერჯიის მუდმივობის კანონის სამართლიანობის მოთხოვნის დაქმყოფილების მიზნით, შემოვიღეთ სხივისნური რეაქციის ძალა. ცხადია, რომ რხევადი მუხტის ენერჯიის კარგვის პროცესის გავლენა მუხტის მოძრაობაზე შეიძლება აეხსნათ სხივისნური „ხახუნის“ ძალის მოქმედებით. მაშასადამე, საკმარისია გამოვარკვიოთ როგორია პარამონიულად რხევადი მუხტის მოძრაობაზე რეაქციის ძალის მოქმედების შედეგი. თუ (65,1) ქვაზიდრეკად ძალასთან ერთად (65,12) რეაქციის ძალასაც გავითვალისწინებთ, მაშინ მუხტის (ელექტრონის) მოძრაობის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^3x}{dt^3}. \quad (67,1)$$

იმისათვის, რომ ელექტრონი პერიოდულად მოძრაობდეს საჭიროა — $m \frac{d^2x}{dt^2}$

ინერციისა და $-\omega_0^2 x$ ქვაზიდრეკადი ძალები ცალ-ცალკე მნიშვნელოვნად აღემატებოდნენ რეაქციის ძალას. რადგან მუხტის რხევა პერიოდული უნდა იყოს, ამიტომ (66,14) რეაქციის ძალის მოქმედება მოძრაობის პერიოდულ ხასიათს არ უნდა ცვლიდეს — ეს მოძრაობა თითქმის პერიოდული უნდა იყოს, ე. ი. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{d^3x}{dt^3} \approx -\omega_0^2 \frac{dx}{dt}. \quad (67,2)$$

თუ (67,2) დამოკიდებულებას გავითვალისწინებთ, მაშინ (67,1) განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{2}{3} \frac{q^2 \omega_0^2}{mc^3} \frac{dx}{dt} = -\gamma \frac{dx}{dt}, \quad (67,3)$$

სადაც

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^2} \frac{\omega_0^2}{c} \quad (67,4)$$

მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს.

თუ უკანასკნელ ფორმულაში ელექტრონის მუხტის, მასისა და სინათლის სიჩქარის რიცხვით მნიშვნელობებს ჩავსვათ, მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\gamma \ll \omega_0^2. \quad (67,5)$$

გადავიდეთ (67,3) განტოლების ამოხსნაზე. მისი ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით $x = A \cdot e^{st}$, რომელიც (67,3)-ში ჩასმის შედეგად s -თვის ორ მნიშვნელობას მოგვცემს:

$$s_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}, \quad s_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}.$$

თუ ახლა (67,5) პირობას გავითვალისწინებთ, გვექნება

$$x = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{i\omega_0 t}, \quad (67,6)$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ წრფივი ოსცილატორის ენერჯიის საშუალო მნიშვნელობას. მართლაც, თუ ოსცილატორის სრული ენერჯიის (65,5) გამოსახლებაში (67,6)-ს შევიტანთ და მიღებულს გავასაშუალოებთ იმ დროში, რომელიც რხევის პერიოდს აღემატება, მივიღებთ:

$$W = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = W_0 e^{-\gamma t}. \quad (67,7)$$

ეს უკანასკნელი განტოლება ოსცილატორის ენერჯიის მიღების კანონია, ის ზუსტად ემთხვევა რხევადი მუხტის ენერჯიის ცვლილების გამოსახველ (65,7) ფორმულას. (67,7)-დან გამომდინარეობს, რომ ოსცილატორის ენერჯია $\frac{1}{\gamma}$ დროში e -ჯერ მცირდება. $\frac{1}{\gamma}$ დროს ოსცილატორის სიკოცხლის ხანგრძლიობა ეწოდება. (67,4) პირობა იმის მაჩვენებელია, რომ, რეაქციის ძალის სიმცირის გამო, ოსცილატორის სიკოცხლის ხანგრძლიობა გაცილებით დიდია T რხევის პერიოდთან შედარებით

$$\frac{1}{\gamma} \gg T; \quad (67,8)$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში მოძრაობა დაახლოებით პერიოდულიც არ იქნებოდა. რადგან ოსცილატორის მიერ დროის ერთეულში გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის ენერჯია ერთის მხრივ მუხტის აჩქარების კვადრატის პროპორციულია, ხოლო მეორე მხრივ — ველის დაძაბულობის, ამიტომ, (67,6) ფორმულის თანახმად, ოსცილატორის ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორთა დროში ცვლილების კანონებს შემდეგი სახე ექნებათ:

$$e = e_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega_0 t} \quad \text{და} \quad h = h_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega_0 t}. \quad (67,9)$$

(67,9) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღა მონოქრომატული აღარაა. მისთვის დამახასიათებელია ინტენსიობის გარკვეული განაწილება ჰარმონიული რხევის ω_0 სიხშირის მახლობლობაში. მაშასადამე, მუხტი (ელექტრონი) რომელიც მიღვევად რხევით მოძრაობას ასრულებს, ასხივებს სხვადასხვა სიხშირის ელექტრომაგნიტურ ტალღებს ისე, რომ გასხივებული ტალღა წარმოადგენს ისეთი ტალღების სუპერპოზიციას, რომელთა სიხშირეები (ω_0 , $\omega_0 \pm \Delta\omega$) — უსასრულო მცირე ინტერვალშია მოთავ-

სებული. ამგვარად, ყოველი პერიოდული პროცესი შეიძლება განვიხილოთ. როგორც პერიოდულ პროცესთა ისეთი სუპერპოზიცია რომელიც პროცესის პერიოდულ ხასიათს მნიშვნელოვნად არ ცვლის. სუპერპოზიციის ეს თვისება დამახასიათებელია ნხოლოდ სუსტი და საშუალო ველებისათვის. მაგრამ თუ ელექტრომაგნიტური ტალღის ქვანტის ენერგია $1 MeV$ -ს აღემატება, მაშინ თავს იჩენს ახალი — კლასიკური ფიზიკისათვის უცხო ეფექტები — ქვანტების გარდაქმნა მატერიალური ნაწილაკების — ელექტრონ-პოზიტრონის წყვილად. ამ პროცესებში შესამჩნევია სუპერპოზიციის პრინციპიდან გადახვევები; რასაც ჯერჯერობით ჩვენ არ განვიხილავთ.

ელექტრომაგნიტური ველის სუპერპოზიციის თვისების მათემატიკურ გამოსახულებას წარმოადგენს ფურიეს თეორემა, რომლის მიხედვითაც ყოველი პერიოდული პროცესი აგრეთვე პერიოდულ პროცესთა სუპერპოზიციის სახით წარმოიდგინება. შესაბამისად, ყოველი პერიოდული ფუნქცია შეიძლება ფურიეს მწკრივად ან ინტეგრალად გაეშალოს.

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ტალღა, როგორც სხვადასხვა სიხშირეების მონოქრომატულ ტალღათა ერთობლიობა და მოვინახოთ შემადგენელი ტალღების ინტენსიობათა განაწილების კანონი.

ფურიეს თეორემის თანახმად, ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი (67,9) სიდიდეები, რომლებიც $f(t)$ -თი აღვნიშნოთ, შეიძლება გაეშალოს უსასრულო მწკრივად:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_n t} \quad \left(\omega_n = \frac{2\pi}{T} \right). \quad (67,10)$$

$f(t)$ ფუნქციის (67,10) მწკრივად გაშლის f_n კოეფიციენტების მოსანახავად აღებული განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $e^{i\omega_n t}$ -ზე და ჩავატაროთ ინტეგრაცია t ცვლადით, მივიღებთ:

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{i\omega_n t} dt. \quad (67,11)$$

რადგან ყოველი ფიზიკური სიდიდე ნამდვილი რიცხვით გამოისახება, ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ ტოლობას:

$$f_{-n} = f_n^* \quad (67,12)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ტალღის ინტენსიობის, რომელიც ველის დაძაბულობის კვადრატის პროპორციულ სიდიდეს წარმოადგენს, საშუალო მნიშვნელობა შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$\begin{aligned} \overline{f^2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_n t} \right)^2 dt = f_0^2 + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{n,m} f_n f_m e^{-i\omega_0(n+m)t} dt = \\ &= f_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2; \end{aligned} \quad (67,13)$$

სადაც გამოყენებულია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0(n+m)t} dt = \begin{cases} 1, & \text{როცა } n+m=0 \\ 0, & \text{" } n+m \neq 0 \end{cases}$$

ამგვარად, (67,13)-ს თანახმად, პერიოდული ელექტრომაგნიტური ტალღის ინტენსიობა შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა ჯამის ტოლია.

პერიოდული ველებისაგან განსხვავებით, ხშირად გვხვდება ისეთი არა-პერიოდული ველებიც, რომლებიც დროში მნიშვნელოვნად არ იცვლებიან. მათი გაშლა ფურიეს მწკრივად ან ინტეგრალად, საზოგადოდ, შეუძლებელია. მხოლოდ ისეთი არაპერიოდული ფუნქცია, რომელიც უსასრულობაში ნულის ტოლია, შეიძლება გავშალოთ ფურიეს ინტეგრალად

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (67,14)$$

თუ ამ უკანასკნელი განტოლების ორივე მხარეს $e^{i\omega t}$ -ზე გადავამრავლებთ და დროით ინტეგრაციას ჩავატარებთ, გაშლის $f(\omega)$ კოეფიციენტებისათვის გვექნება:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{i\omega t} dt. \quad (67,15)$$

ისევე, როგორც პერიოდული ფუნქციის შემთხვევაში, აქაც ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$f(-\omega) = f^*(\omega). \quad (67,16)$$

თუ (67,16) თვისებას გამოვიყენებთ, მაშინ ტალღის ინტენსიობის საშუალო მნიშვნელობა შეიძლება მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა საშუალებით გამოვსახოთ. მართლაც, თუ (67,16) პირობას გაეთვალისწინებთ, მაშინ (67,14) და (67,15) ფორმულები მოგვეცემენ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega;$$

საიდანაც, t და ω საინტეგრაციო ცვლადებით ინტეგრაციის რიგის შეცვლის გზით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) f(-\omega) d\omega = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\omega)|^2 d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (67,17)$$

ამ უკანასკნელიდან ინტენსიობის საშუალო მნიშვნელობის მისაღებად ავიღოთ დროის საკმაოდ დიდი შუალედი T . ცხადია, რომ ორი მეზობელი ტალღის სიხშირეთა სხვაობა $\Delta\omega = \frac{2\pi\Delta T}{T^2}$ ძალიან მცირე იქნება, რაც უფლებას გვაძლევს (67,13)-ში ω ინდექსით შეჯამება ω სიხშირის მიხედვით ინტეგრაციის ოპერაციით შევცვალოთ. თუ ამ გარემოებას გავითვალისწინებთ, მაშინ (67,15) და (67,17) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2 dt = \frac{4\pi}{T} \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\pi T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f e^{i\omega t} dt \right|^2 d\omega. \quad (67,18)$$

(67,18) ფორმულა ტალღის ინტენსიობის საშუალო მნიშვნელობას აკავშირებს შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობებთან და საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ტალღის ინტენსიობის განაწილება სიხშირეთა ნებისმიერ (ω , $\omega \pm \Delta\omega$) ინტერვალში.

ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია გამოვარკვეოთ ტალღურ ზონაში როგორია წრფივი ოსცილიატორის ელექტრომაგნიტური ველის შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა განაწილება. ცხადია, რომ ზოგიერთი სიხშირის ტალღებს მეტი ინტენსიობა ექნებათ, ზოგს ნაკლები. ჩვენს ამოცანას შეადგენს ამ ინტენსიობათა სათანადო ტალღის სიხშირეზე დამოკიდებულების შესწავლა; რისთვისაც გამოვიყენოთ ფურიეს თეორემა და ველის დაძაბულობის ელექტრული ვექტორი (67,9) გავშალოთ ფურიეს ინტეგრალად, გვექნება

$$e = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

ამ უკანასკნელში $e(\omega)$ გაშლის კოეფიციენტები, (67,9) და (67,15) ფორმულების თანახმად, შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e e^{-i\omega t} dt = \frac{e_0}{2\pi_0} \int_0^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} e^{-\frac{\gamma}{2}t} dt = \frac{e_0}{2\pi} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}}, \quad (67,19)$$

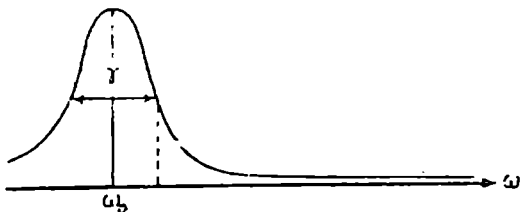
სადაც ღროის მიხედვით ინტეგრაცია მოხდენილია 0-დან $+\infty$ -მდე, რადგან $t \geq 0$; წინააღმდეგ შემთხვევაში (უარყოფითი ღროისათვის) (67,19) გამოსახულების მოდული უსასრულო დიდი იქნებოდა. რადგან მონოქრომატული ტალღის ინტენსიობა ველის დაძაბულობის ვექტორის კვადრატის პროპორციულია ($J(\omega) \sim |e(\omega)|^2$), ამიტომ თუ (67,19)-ს გამოსახულების მოდულის კვადრატს ავიღებთ, მივიღებთ გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა განაწილების კანონს

$$J(\omega) = J_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (67,20)$$

სადაც J_0 წარმოადგენს ტალღის სრულ ინტენსიობას $J_0 = \int J(\omega) d\omega$.

სიხშირეთა მიხედვით ინტენსიობის განაწილების (67,20) ფუნქციის მრუდი მოცემულია ნახ. 45-ზე.

$J(\omega)$ ფუნქციას, რომლის გამომსახველი მრუდი გადის კოორდინატთა სათავეზე, მაქსიმუმი აქვს $\omega = \omega_0$ წერტილში. ოსცილატორის მიერ გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის ინტენსიობის განაწილების (67,20) კანონი გვიჩვენებს, რომ მაქსიმალური ინტენსიობა აქვთ იმ მონოქრომატულ ტალღებს, რომელთა სიხშირეები ძალიან ახლოს არიან ოსცილატორის ω_0 - საკუთარ სიხშირესთან. $\omega = \omega_0$ მაქსიმუმის წერტილის ორივე მხარეს ინტენსიობის მრუდი შედარებით ნელა ეცემა.



ნახ. 45.

ω_0 სიხშირის უშუალო მახლობლობაში სახელდობრ, $\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \ll \omega \ll \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$

შუალედში მოხვედრილი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობები $J(\omega_0)$ მაქსიმალური ინტენსიობის რიგის არიან; ამიტომ ერთიმეორისაგან მათი გარჩევა შეუძლებელია.

როდესაც $\omega_0 - \omega = \frac{\gamma}{2}$, ინტენსიობა, (67,20) ფორმულის თანახმად,

$$J\left(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} J(\omega_0),$$

ე. ი. იმ მონოქრომატული ტალღის ინტენსიობა, რომლის სიხშირეა $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$, $J(\omega_0)$ მაქსიმალური ინტენსიობის ნახევრის ტოლია. ω_0 წერტილიდან

ორთავე მხარეს უფრო შორს ვიდრე $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$, ინტენსიობა სწრაფად

ეცემა და სათანადო სიხშირეთა მონოქრომატიული ტალღების წვლილი იმდენად უმნიშვნელოა, რომ ისინი მხედველობაში არ მიიღებიან.

ანგვარად, ველის რეაქციის ძალის მოქმედების შედეგად, ოსცილიატორი ასხივებს ყოველგვარი სიხშირის მონოქრომატულ ტალღებს; მაგრამ მათგან არსებითი მნიშვნელობა აქვთ მხოლოდ იმ ტალღებს, რომელთა სიხშირეები

ნოთავსებულია $\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$ ინტერვალში.

მონოქრომატიული ტალღების სიხშირეთა იმ დიაპაზონს (γ), რომელზედაც მოდის ტალღის თითქმის მთელი ენერგია, სპექტრალური ხაზის სიგანე ეწოდება.

(67,7)-დან გამომდინარეობს, რომ ხაზის სიგანე γ სიციოცხლის ხანგრძლიობის შებრუნებულ სიდიდეს წარმოადგენს. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ხაზის სიგანე დამოუკიდებელია ტალღის სიხშირეზე და უნივერსალური მუდმივით გამოისახება. ნართლაც, თუ ტალღის სიგრძეს λ γ სიდიდესთან დავაკავშირებთ, გვექნება

$$\frac{\gamma}{2} = \Delta\omega = c \left(\frac{\Delta\omega}{c} \right) = c \Delta \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) = 2\pi c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{\omega_0^2 \Delta\lambda}{2\pi c};$$

საიდანაც, (67,4)-ს თანახმად, მივიღებთ

$$\Delta\lambda = \frac{\pi \gamma c}{\omega_0^2} = \pi \frac{2}{3} \frac{\omega_0^2 c}{c \omega_0^2} x_0 \approx \frac{2\pi}{3} x_0 \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ სმ.} \quad (67,21)$$

ნაშასადამე, ჩვენ გამოვარკვეთ, რომ ოსცილატორის მიერ გასხივებულ ელექტრომაგნიტურ ტალღას არა აქვს მკაფიო საზღვრები. ის მილევადი რხევების შესაბამის ტალღათა სერიას წარმოადგენს. მაგრამ, იმის გამო, რომ ტალღათა ინტენსიობა ω_0 წერტილიდან ორთავე მხარეს სწრაფად ეცემა, ჩვენ შეგვიძლია ამ მონოქრომატიული მილევადი ტალღების სერია შევცვალოთ ტალღათა ისეთი სერიით, რომელსაც ხაზის სიგანე γ -ს სიდიდის ტოლი ექნება, ხოლო საზღვრები — მკაფიო.

§ 68. ხაზის გაბანიერების მიზნუმი

წინა პარაგრაფში განხილული, ოსცილიატორის მიერ გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრონზე უქუქნდება, ანუ გამოსხივების რეაქციის ძალის მოქმედება, სპექტრალური ხაზის გაგანიერების ერთად ერთი მიზეზი არაა. მის გარდა ადგილი აქვს სხვა მოვლენებსაც, რომლებიც ავრთვე ხაზის გაგანიერებას იწვევენ. მათ რიცხვს ეკუთვნის: ოსცილიატორთა ურთიერთ დაჯახების მოვლენები, დოპლერის ეფექტი და სხვა.

განვიხილოთ პირველი მათგანი. რადგან აღებული ოსცილიატორი სხვა მეზობელ ნაწილაკებთან დაჯახებებს განიცდის, ამიტომ მისი რხევითი მოძრაობის მდგომარეობა ცვალებადობას განიცდის. წარმოვიდგინოთ, რომ დაჯახებათა შედეგად ოსცილიატორის რხევის შემოთებები მეორდება

τ პერიოდებით. ეს უკანასკნელი სიდიდეები, სტატისტიკის კანონების თანახმად, შემდეგი კანონით არიან განაწილებული

$$w(\tau_i) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\frac{\Gamma}{2} \tau_i}, \quad (68,1)$$

სადაც $w(\tau_i)$ წარმოადგენს ყველა შესაძლო პერიოდებიდან τ_i პერიოდის მქონე დაჯახებათა ფარდობით რიცხვს, ანუ სათანადო მათემატიკურ ალბათობას. დაჯახებათა τ_i პერიოდების დიაპაზონი, ფიზიკური პირობების მიხედვით, შეიძლება ძალიან დიდი იყოს. სახელდობრ, $0 \leq \tau_i \leq \tau_{\text{ავს}}$; სადაც $\tau_{\text{ავს}}$ პრაქტიკული გამოთვლების დროს, შეიძლება უსასრულო დიდი ავილოთ. სათანადოთ, ალბათობა იმისა, რომ დაჯახებათა პერიოდის მნიშვნელობა იქნება τ , შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება

$$w(\tau) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\frac{\Gamma}{2} \tau},$$

საიდანაც, იმ დაჯახებათა ფარდობითი რიცხვისათვის, რომელთა პერიოდები მოთავსებულია τ და $\tau + d\tau$ -ს შორის, გვექნება

$$w(\tau) d\tau = \frac{\Gamma}{2} e^{-\frac{\Gamma}{2} \tau} d\tau. \quad (68,2)$$

დაჯახების შედეგად ოსცილიატორის რხევითი მოძრაობის ფაზის ცვლილებას თან სდევს იმ ტალღის ფაზის ცვლილება, რომელსაც ის დაჯახებამდე ასხივებდა, რადგან ტალღის ფაზა სიხშირესთანაა დაკავშირებული, ამიტომ გასხივებული ტალღა აღარ იქნება მონოქრომატული. მაშასადამე, ტალღის ვექტორი e შეიძლება ფურიეს ინტეგრალის საშუალებით წარმოვიდგინოთ, რომლის გაშლის კოეფიციენტები, (67,15)-ს მსგავსად, შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$e(\omega) = \frac{e_0}{2\pi} \int_0^{\tau} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{e_0}{2\pi} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} - 1}{i(\omega_0 - \omega)}. \quad (68,3)$$

აქ ჩვენ მხედველობაში არ მიგვიღია ველის რეაქციის ძალის მოქნელება, რომელსაც სპექტრალური ხაზის γ სიდიდეზე გაგანიერებამდე მიყვავართ.

დაჯახებათა τ პერიოდების მიხედვით ტალღის ინტენსიობის გასაშუალოებული მნიშვნელობის მისაღებად (68,3) უნდა გავამრავლოთ სათანადო (68,2) ალბათობაზე და ჩავატაროთ ინტეგრაცია, მივიღებთ:

$$\overline{e(\omega)^2} = \int_0^{\infty} w(\tau) |e(\omega)|^2 d\tau = \frac{e_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\Gamma^2}{2}}. \quad (68,4)$$

ეს უკანასკნელი გარეგნულად მთლიანად ემთხვევა (67,20) ფორმულას, განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ სპექტრალური ხაზის რადიკული სიგანე γ , შეცვლილია Γ -სიდიდით. Γ -ს მნიშვნელობის გამოსარკვევად, გამოვიყენოთ (68,1)

ფორმულა, რომლის საშუალებით განვსაზღვროთ ორ მომდევნო დაჯახებათა შორის დროის ინტერვალის, ე. ი. τ პერიოდის საშუალო მნიშვნელობა, გვექნება

$$\bar{\tau} = \frac{\Gamma}{2} \int_0^{\infty} \tau e^{-\frac{\Gamma \tau}{2}} d\tau = \frac{2}{\Gamma}; \quad (68,5)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ დაჯახებებით გამოწვეული სპექტრალური ხაზის სიგანე Γ დამოკიდებულია $\bar{\tau}$ სიდიდის მნიშვნელობაზე. ამ ეფექტს ადკილი აქვს ხაზის რადიაციული გაგანიერების მოვლენასთან ერთად და მისგან სრულიად დამოუკიდებელია.

$\frac{1}{\Gamma}$ სიდიდეს, რადიაციული სიციცხლის ხანგრძლიობის $\frac{1}{\gamma}$ გამოხატულების ანალოგიურად, ეწოდება დაჯახებებით გამოწვეული სიციცხლის ხანგრძლიობა.

ხაზის გაგანიერების კიდევ ერთ-ერთ მიზეზს წარმოადგენს ოსცილიატორების გადატანითი მოძრაობა. თუ ოსცილიატორების სისტემას წარმოვიდგენთ როგორც ვაზს (რაც სრულიად ბუნებრივია, რადგან ფაქტიურად ყოველი ატომი ოსცილატორია). მაშინ მათი სიჩქარეები განაწილებული იქნება მაქსველის კანონის მიხედვით.

ოსცილატორის, როგორც მთლიანის, მოძრაობის მიმართულებით გასხივებული ტალღის სიხშირის ცვლილების, ე. ი. უძრავი ოსცილიატორების სპექტრალური ხაზის მდებარეობიდან გადახრის სიდიდისათვის, (57,20) ფორმულის თანახმად, მცირე სიჩქარეების ($v \ll c$) შემთხვევაში (დოპლერის გასწვრივი ეფექტი), გვექნება

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{v}{c}.$$

თუ ოსცილიატორების სიჩქარეთა განაწილებისათვის მაქსველის კანონს

$$w(\Delta\omega) = \text{Const} e^{-\frac{Mc^2(\Delta\omega)^2}{2\omega_0^2 kT}} \quad (68,6)$$

გამოვიყენებთ, მაშინ გაგანიერებული ხაზის მქონე ტალღის შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა განაწილებისათვის შემდეგ კანონს მივიღებთ:

$$J(\omega)\Delta\omega = \text{Const} \cdot e^{-\frac{Mc^2(\Delta\omega)^2}{2\omega_0^2 kT}} \Delta\omega. \quad (68,7)$$

ამ უკანასკნელის საშუალებით ადვილად გამოითვლება $\Delta\omega$ სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა. მართლაც,

$$\bar{\omega} = \bar{\Delta\omega} = \int_0^{\infty} \text{Const} \Delta\omega e^{-\frac{Mc^2(\Delta\omega)^2}{2\omega_0^2 kT}} d(\Delta\omega) = \omega_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \lg 2}, \quad (68,8)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ დოპლერის გასწვრივი ეფექტით გამოწვეული ხაზის სიგანე $\bar{\omega}$ დამოკიდებულია ω_0 სიხშირეზე და აბსოლუტურ ტემპერატურაზე.

რახე. δ სიდიდის γ -თან ((67,4)) შედარება გვიჩვენებს, რომ დოპლერის გასწვრივ ეფექტთან დაკავშირებული ხაზის გაგანიერება მნიშვნელოვნად აღემატება რეაქციის ძალით გამოწვეულ გაგანიერებას ($\delta > \gamma$).

გარდა ზემოდ ჩამოთვლისა არსებობენ სხვა მიზეზებიც, რომლებიც აგრეთვე ხაზის გაგანიერებას იწვევენ. მათ ჩვენ არ განვიხილავთ, რადგან ისინი კვანტურ ეფექტებთან არიან დაკავშირებული და ამიტომ მათი შესწავლა კვანტური თეორიის ამოცანას შეადგენს.

დასასრულს γ , Γ და δ სიდიდეები ერთმანეთს შევადაროთ და ზოვახდინოთ მათი კლასიფიკაცია. როგორც ზემოდ აღვნიშნეთ, ხაზის რადიაციული გაგანიერება γ დამოუკიდებელია ოსცილიატორის სიხშირეზე. მას ადგილი აქვს ყოველთვის, როგორც არ უნდა იყოს ოსცილიატორის თვისებები; ანტიტომ γ -ს ბუნებრივ სივანესაც უწოდებენ. რაც შეეხება დაჯახებებით (Γ) და დოპლერის გასწვრივი ეფექტით (δ) გამოწვეულ გაგანიერებას, მათ მხოლოდ სათანადო პირობებში აქვთ ადგილი. ამ უკანასკნელი ეფექტების ხვედრითი წონა დამოკიდებულია ოსცილიატორთა სისტემის ფიზიკური მდგომარეობის სპეციფიკურ პირობებზე — ქაოტიურ და მოწესრიგებულ მოძრაობათა თანაფარდობაზე. საზოგადოდ, ოსცილიატორთა სისტემისათვის, მუდმივ მოქმედრადიაციულ გაგანიერების ეფექტთან ერთად, ორი დანარჩენი ფაქტორიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებს.

(57,20) და (68,7) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, რომ ბუნებრივი და დოპლერის გასწვრივი ეფექტით გამოწვეული გაგანიერების შესაბამისი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა განაწილების მრუდები ერთმანეთისაგან მნიშვნელოვნად განსხვავებული არიან. (67,20) ფუნქციის მრუდი მაქსიმუმის წერტილის (ω_0) ორთავე მხარეს გაცილებით უფრო ნელა ეცემა ვიდრე (68,7)-ს გამომსახველი მრუდი; რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ω_0 წერტილის უშუალო მახლობლობაში სკარბობს δ , ხოლო უფრო შორ მანძილებზე γ , მაშასადამე, ω_0 — მაქსიმუმის წერტილიდან დაშორებით ($\Delta\omega \gg \delta$), ინტენსიობის განაწილების სახე არსებითად γ — რადიაციული გაგანიერების სიდიდით განისაზღვრება.

§ 69. ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვა ელექტრონზე

ელექტრონთა თეორიის (34,13) ლორენცის განტოლებათა სისტემის უდიდესი ღირსება იმაში მდგომარეობს, რომ მათ საფუძველზე შეისწავლება როგორც ნებისმიერად (აჩქარებულად) მოძრავი მუხტების ელექტრომაგნიტური ველი, აგრეთვე ელექტრომაგნიტური ველის მოქმედებით გამოწვეული მუხტის (ელექტრონის) მოძრაობა.

ლორენც-მაქსველის თეორია ამომწურავ პასუხს იძლევა დამუხტულ ნაწილაკზე ელექტრომაგნიტური ტალღების მოქმედების მექანიზმისა და შედეგების შესახებ. როგორც ვიცით, მოძრავი მუხტი ელექტრომაგნიტური ველის წყაროს წარმოადგენს. მუხტის მოძრაობის მდგომარეობა განსაზღვრავს წარმოშობილი ველის თვისებებს, ხოლო გარეშე ველში შეტანილი მუხტის მოძრაობის სახე განისაზღვრება ელექტრომაგნიტური ველის თვისებების

მიხედვით. მაგალითად, პერიოდული ელექტრომაგნიტური ველის მოქმედებით მუხტი ასრულებს პერიოდულ მოძრაობას. როდესაც მუხტს დაეცემა ელექტრომაგნიტური ტალღა, მაშინ ეს უკანასკნელი მუხტს (ელექტრონს) გადასცემს ენერგიას და იმპულსს; რის გამოც ელექტრონი მოდის პერიოდული მოძრაობის მდგომარეობაში. ელექტრონი, შთანთქავს რა მასზე დაეცემულ ელექტრომაგნიტურ ტალღას, თავისი იძულებითი აჩქარებული მოძრაობის შედეგად თითონ იწყებს ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივებას; რომელთაც მეორად ტალღებს უწოდებენ.

ამგვარად, ელექტრონზე ტალღის გაფანტვას ჩვენ წარმოვიდგენთ ორი ერთიმეორის მომდევნო პროცესის—დაცემული ტალღის შთანთქმისა და მეორადის გამოსხივების სახით. ცხადია, რომ ელექტრონი შთანთქავს ელექტრომაგნიტური ტალღის ენერგიის მხოლოდ ნაწილს. ამიტომ გაფანტვის მოვლენის დასახასიათებლად ლეზლობენ გარკვეული მიმართულებით $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში გასხივებული ენერგიის რაოდენობის ფარდობას ელექტრონზე დამცემი ტალღის ენერგიის ნაკადის სიმკვრივესთან. ამ სიდიდეს გაფანტვის დიფერენციალური ეფექტური კვეთი ეწოდება.

ამ სიდიდეს მექანიკაში იყენებენ გამფანტავ ცენტრზე ნაწილაკთა ნაკადის გაფანტვის პროცესების შესასწავლად.

გაფანტვის ეფექტურ კვეთს მექანიკაში იყენებენ რაიმე გამფანტავ ცენტრზე ნაწილაკთა ნაკადის გაფანტვის პროცესების შესასწავლად. თუ მაგალითად, დამუხტული ნაწილაკების (ელექტრონების, იონების) ნაკადს თავის გზაზე, გამფანტავი ცენტრის სახით, იონს დაუხვედრებთ, მაშინ ამ უკანასკნელის მოქმედებით ნაკადის შემადგენელი ნაწილაკები დაჯახების შედეგად თავიანთი პირვანდელი მოძრაობის მიმართულებიდან სხვადასხვა კუთხეებზე გადაიხრებიან. გაფანტვის ინტენსიობის დასახასიათებლად შემოღებულია σ და $\sigma + d\sigma$ -ს შორის მოთავსებულ კუთხეებზე გაფანტული ნაწილაკების რიცხვის (dn) შეფარდება დამცემი ნაწილაკების სიჩქარის პერპენდიკულარულად მოთავსებულ ფართის ერთეულზე (1 სმ^2) გამავალი ნაწილაკების რიცხვთან (n)

$$d\sigma = \frac{dn}{n}. \quad (69,1)$$

რადგან $d\sigma$ -ს ფართის განზომილება აქვს

$$[d\sigma] = \frac{1}{\frac{1}{\text{სმ}^2}} = \text{სმ}^2,$$

ამიტომ მას გაფანტვის ეფექტური განივი კვეთი ეწოდება.

ანალოგიურად, ელექტრონზე ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვის ინტენსიობის საზომად შემოღებულია σ და $\sigma + d\sigma$ კუთხეებს შორის, ანუ რაც იგივეა, $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში დროის ერთეულში გასხივებული ენერგიის რაოდენობის ფარდობა დამცემი ტალღის ენერგიის ნაკადის სიმკვრივეს-

თან. მაშასადამე, (69,1)-ს მსგავსად, ელექტრონზე ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვის დიფერენციალური ეფექტური კვეთისათვის გვექნება

$$d\sigma = \frac{dJ}{S}. \quad (69,2)$$

განვიხილოთ თავისუფალ „უძრავ“ ელექტრონზე ტალღის გაფანტვა. ვთქვათ, „უძრავ“ ელექტრონს ეცემა ბრტყელი პოლარიზებული მონოქრომატული ტალღა (§ 58). თუ გავითვალისწინებთ, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის მოქმედების შედეგად ელექტრონის მიერ შეძენილი სიჩქარე c -თან შედარებით ძალიან მცირეა ($v \ll c$), მაშინ ლორენცის ძალის (36,3) გამოსახულებაში მაგნიტური ველის მოქმედება შეიძლება უგულვებელვყოთ. სათანადოთ, ელექტრონის მოძრაობის (25,18) განტოლება, (57,10)-ს თანახმად, შემდეგ სახეს იძლევა:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = qe_0 \cos(kx - \omega t + \delta). \quad (69,3)$$

რადგან დამცემი პერიოდული ელექტრომაგნიტური ტალღის გავლენით ელექტრონი წონასწორობის მდებარეობის (მაგ. კოორდინატთა სათავის) მახლობლობაში პერიოდულ რხევით მოძრაობის მდგომარეობაში იწყოფება; ამიტომ შეიძლება მივიღოთ, რომ მასზე მოქმედებს ის ველი, რომელიც კოორდინატთა სათავეში გვაქვს. მაშასადამე, (69,3) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = qe_0 \cos(\omega t + \delta), \quad (69,4)$$

რომლის ამონახსნია

$$x = -\frac{qe_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \delta). \quad (69,5)$$

(69,5) განტოლება გვიჩვენებს, რომ ელექტრონის რხევის სიხშირე დამცემი ტალღის სიხშირის ტოლია, ხოლო ფაზა 180° — კუთხითაა განსხვავებული. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს მეორადი ტალღის $\frac{T}{2}$ დროის დაყოვნებით გამოსხივების აუცილებელ ფიზიკურ პირობას.

თუ (69,5) გამოსახულებას ელექტრონის მუხტის სიდიდეზე (q) გავამრავლებთ, მივიღებთ დიპოლურ მომენტს

$$p = qx = -\frac{q^2 e_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \delta),$$

რომლის საშუალებითაც, (59,8)-ის მიხედვით, განისაზღვრება დროის ერთეულში dJ სხეულოვან კუთხეში გასხივებული ენერჯიის საშუალო მნიშვნელობა

$$\overline{dJ} = \frac{\overline{p^2} \sin^2 \theta d\Omega}{4\pi c^3} = \frac{q^4 e_0^4 \sin^2 \theta d\Omega}{8\pi m^2 c^3}; \quad (69,7)$$

სადაც გამოყენებულია ფორმულა: $\overline{\cos^2(\omega t + \delta)} = \frac{1}{2}$.

მეორეს მხრივ დამცემი ელექტრომაგნიტური ტალღის ენერჯიის ნაკადის სიმკვრივისათვის, რომელიც უმოვ-პოიტონგის (37,15) ვექტორით განისაზღვრება, (56,26) და (58,6) ფორმულების თანახმად, გვექნება

$$S = \frac{c}{4\pi} \overline{e^2} = \frac{c}{8\pi} e^2_0. \quad (69,8)$$

თუ (69,2)-ში (69,7) და (69,8) გამოსახულებებს შევიტანთ, მაშინ ტალღის გაფანტვის დიფერენციალური ეფექტური კვეთისათვის მივიღებთ

$$d\sigma = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \, d\Omega, \quad (69,9)$$

სადაც $\frac{q^2}{mc^2} = x_0$ ელექტრონის კლასიკური რადიუსია, ხოლო ϑ წარმოადგენს კუთხეს დამცემი ტალღის e ვექტორსა და მეორადი — გაფანტული ტალღის გავრცელების მიმართულებას შორის.

(66,9) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ელექტრონზე ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვის ეფექტური კვეთი არსებითად დამოკიდებულია ელექტრონის რადიუსზე, ხოლო დამცემი ტალღის სიხშირეზე სრულიად დამოუკიდებელია.

თუ (69,9)-დან ავიღებთ ინტეგრალს $d\Omega$ სხეულოვანი კუთხით, მივიღებთ ტალღის გაფანტვის სრულ ეფექტურ კვეთს

$$\sigma = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot d\theta = \frac{8\pi}{3} x_0^2. \quad (69,10)$$

(69,10) ფორმულა პირველად მიღებული იყო ტომსონის მიერ.

ამგვარად, ელექტრონზე ტალღის გაფანტვის სრული ეფექტური კვეთის სიდიდე (69,10) ელექტრონის, როგორც x_0 რადიუსიანი სფეროს, განივი კვეთის ფართის რიგისაა

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} x_0^2 \approx 6,5 \cdot 10^{-25} \text{ სმ}^2. \quad (69,11)$$

ტომსონის ფორმულა (69,10) გვიჩვენებს, რომ ელექტრონი შთანთქავს ელექტრომაგნიტური ტალღის არა მარტო იმ ნაწილს, რომელიც უშუალოდ მას ეცემა. მის მიერ შთანთქმული ენერჯიის რაოდენობა ელექტრონის განივი კვეთის ფართობზე ($\approx x_0^2$) მომავალი ტალღის ენერჯიას $\frac{8}{3}$ -ჯერ აღემატება; რაც იმ გარემოებითაა გამოწვეული, რომ ელექტრონზე მოქმედებს მთელი დამცემი ტალღა.

ზემოთ ჩვენ შევისწავლეთ ელექტრონზე პოლარიზებული ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვის მოვლენა. ახლა განვიხილოთ ბუნებრივი, ე. ი. არაპოლარიზებული ტალღის გაფანტვა და გამოვთვალოთ სათანადო ეფექტური კვეთი.

დაეშვათ, რომ დამცემი ტალა x_2 ღერძის გასწვრივ ვრცელდება. მაშინ დამცემი ტალის e ელექტრული ვექტორი მოთავსებული იქნება $x_1 O x_3$ სიბრტყეში; სადაც ის x_1 ღერძთან შეიძლება ნებისმიერ კუთხეს ადგენდეს ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$): (ნახ. 46).

გაფანტული (გეორადი) ტალის გაერცელების გასწვრივ მიემართოთ n - ერთეულოვანი ვექტორი. კოორდინატთა ღერძები ისეთნაირად ავარჩიოთ, რომ n და k (დამცემი ტალის ტალღური ვექტორი) ვექტორები $x_1 O x_2$ სიბრტყეში მდებარეობდნენ. დაცემული და გაფანტული ტალღების გაერცელების მიმართულებათა შორის შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ θ -თი. ცხადია, რომ θ -ს გარკვეული მნიშვნელობისათვის, φ - კუთხემ შეიძლება $(0, 2\pi)$ შეუღღდში ნებისმიერი მნიშვნელობა მიიღოს.

თუ n - ვექტორს e -ზე დავაგვეჩილებთ, მივიღებთ

$$(n, e) = \cos \theta = \sin \theta \cos \varphi;$$

საიდანაც

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi. \quad (69,12)$$

რადგან დამცემი ტალა ბუნებრივია, ამიტომ (69,12) გამოსახულება e ვექტორის ყველა შესაძლო მდებარეობათა, ე. ი. φ კუთხის მიხედვით უნდა გავასაშუალოთ.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ θ - კუთხის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის $\overline{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \theta}{2}$, მაშინ ელექტრონზე არაპოლარიზებული ელექტრომაგნიტური ტალის გაფანტვის დიფერენციალური ეფექტური კვეთისათვის (69,9) და (69,12) ფორმულების საშუალებით მივიღებთ

$$d\sigma = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \overline{\sin^2 \theta} d\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta) d\Omega. \quad (69,13)$$

(69,13)-დან გაფანტვის სრული ეფექტური კვეთისათვის, $d\Omega$ სხეულოვანი კუთხით ინტეგრაციის ჩატარების შედეგად, გვექნება

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^2 \quad (69,14)$$

ეს უკანასკნელი ზუსტად ემთხვევა (69,10)-ს. მაშასადამე, პოლარიზებული და ბუნებრივი ელექტრომაგნიტური ტალღების გაფანტვის დიფერენციალური ეფექტური კვეთები (69,9) და (69,13) ერთიმეორისაგან განსხვავდებიან, ხოლო სრული (ინტეგრალური) კვეთები კი ტოლია.

§ 70. ტალის გაფანტვა ოსცილატორზე

განვიხილოთ ბრტყელი პოლარიზებული ტალის გაფანტვა ოსცილატორზე, რომელიც ქვაზიდრეკადი ძალის გავლენით ω_0 სიხშირით პარამონიულ რხევით მოძრაობას ასრულებს. ქვაზიდრეკად ძალასთან ერთად, შეიძლება

აგრეთვე გამოსხივების რეაქციის (65,12) ძალის მოქმედებაც გავითვალისწინოთ. რეაქციის ძალა აქაც (66,19) პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს. ამ ძალის სიმცირის — მოძრაობის პერიოდული ხასიათის გამო, დაცემული ელექტრომაგნიტური ტალღის ველში ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} e_0 e^{i\omega t}. \quad (70,1)$$

აღვილად შეიძლება შევემოწმოთ, რომ (70,1) განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს ფუნქცია

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad (70,2)$$

სადაც

$$x_0 = \frac{\frac{q}{m} e_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (70,3)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma = ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)^{1/2} e^{i\theta},$$

სადაც θ აღებული კომპლექსური რიცხვის ფაზას წარმოადგენს

$$\text{tg } \theta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (70,4)$$

მაშინ (70,3) ფორმულიდან $\frac{d^2 x}{dt^2}$ სიდიდისათვის გვექნება

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\frac{q}{m} e_0 \omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)^{1/2}} e^{i(\omega t - \theta)}. \quad (70,5)$$

ეს უქანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ გაფანტული (მეორადი) ტალღის ფაზა ($\omega t - \theta$) დაცემული ტალღის (ωt) ფაზისაგან θ სიდიდით განსხვავდება. (70,4)-დან გამომდინარეობს, რომ ფაზის ცვლილება (θ) მნიშვნელოვანია მხოლოდ ω_0 — ოსცილატორის საკუთარი სიხშირის მახლობლობაში.

თუ (70,5) გამოსახულების არსი ნაწილის კვადრატს (59,9) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ დროის ერთეულში $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში ოსცილატორის მიერ გასხივებული — მეორადი ელექტრომაგნიტური ტალღების ინტენსიობას

$$dJ = \frac{q \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega}{4\pi c^3} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{e_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta d\Omega \cos^2(\omega t - \theta)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (70,6)$$

თუ (70,6) გამოსახულებას დროის მიხედვით გავასაშუალოებთ და (69,2)-ში ჩავსვამთ, ხოლო შემდეგ $d\Omega$ სხეულოვანი კუთხით ინტეგრაციას ჩავატარებთ,

მივიღებთ ოსცილიატორზე ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვის ინტეგრალურ ეფექტურ კვეთს

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (70,7)$$

უქანასკნელი ფორმულიდან მიიღება თავისუფალ ელექტრონზე ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვის ინტეგრალური ეფექტური კვეთი (69,14), თუ დაუშვებთ, რომ $\omega_0 \rightarrow 0$, ხოლო $\omega \gg \gamma$.

როდესაც $\omega \sim \omega_0$, მაშინ (70,7) დამოკიდებულება შეიძლება შემდეგი სახით გადაეწეროს:

$$\sigma = \frac{2\pi}{3} x_0^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (70,8)$$

(70,8) რეზონანსული ფლუორესცენციის ფორმულას წარმოადგენს, რომელშიც სხივისნური „ხახუნის“ ძალის კოეფიციენტი γ მნიშვნელოვან როლს ასრულებს.

§ 71. ტალღის შთანთქმა

წინა პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლეთ როგორც თავისუფალი ელექტრონის, ისევე ოსცილიატორის მიერ ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვის მოვლენები. ამ პროცესების ნექანიზმად მივიღეთ მონოქრომატული ბრტყელი ტალღის მიერ ელექტრონზე ენერჯის გადაცემისა და მეორადი ტალღის გამოსხივების გამარტივებული სქემები. სინამდვილეში, როგორც ეს ჩვენ § 67-ში გამოვარკვიეთ, მონოქრომატული ტალღები პრაქტიკულად არ არსებობენ. ყოველი ტალღა წარმოადგენს სხვადასხვა სიხშირეების მქონე ტალღების ერთობლიობას (თუმცა მათი სიხშირეები ერთმანეთთან ძალიან ახლოს არიან), შემდეგ § 70-ში აგრეთვე გამოვარკვიეთ, რომ დაცენული — შთანთქმული და გამოსხივებული ტალღების ფაზები განსხვავებული არიან. ფაზათა სხვაობა δ , (70,4) ფორმულის თანახმად, მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული დაცემული ტალღის სიხშირეზე. ამიტომ, თუ ოსცილიატორს მონოქრომატულ ტალღათა ჯგუფი ეცემა, მაშინ მათი გაფანტვის შედეგად მიღებული ტალღების ფაზები სხვადასხვა იქნებიან. მონოქრომატულ ტალღათა ფაზების ცვლილებების გამომსახველი $\delta\omega$ სიდიდეების რიცხობრივ მნიშვნელობათა და ნიშნების შესახებ ჩვენ გადაჭრით არაფრის თქმა არ შეგვიძლია, ამიტომ მივიღოთ, რომ ისინი განაწილებული არიან ალბათური კანონის მიხედვით.

ელექტრომაგნიტური ტალღის შემადგენელი ცალკეული მონოქრომატული ტალღის მიერ ოსცილიატორზე გადაცემული ენერჯის რაოდენობა, (70,6)-ს თანახმად, დამოკიდებულია ოსცილიატორისა და დაცემული ტალღის ფაზათა სხვაობაზე. მაშასადამე, ბუნებრივი ტალღის შთანთქმის მოვლენა რთულია, რადგან მისი შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების შთანთქმა მეტნაკლები რაოდენობით სწარმოებს. აღნიშნული სიძნელის თავიდან ასაცილებლად შემდეგნაირად მოვიქცეთ: პირველად განვსაზღვროთ დაცემული

ტალლის ერთ-ერთი რომელიმე შემადგენლის — ω სიხშირის მონოქრომატული ტალლის ნიერ ოსცილიატორზე გადაცემული ენერჯიის რაოდენობა \mathfrak{E} , რომელიდანაც ავიღოთ ინტეგრალი დროის ისეთ ($0, \tau$) შუალედზე, რომე \mathfrak{E} -ც შეიცავს ტალლის პერიოდის $\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ ჯერად რიცხვს. მიღებული სიდიდე

მოგვცემს τ დროის განმავლობაში ω სიხშირის მონოქრომატული ტალლის მიერ ოსცილიატორზე გადაცემულ ენერჯიას. თუ შემდეგ ამ უკანასკნელი სიდიდიდან ავიღებთ ინტეგრალს სიხშირეთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა მიხედვით 0 -დან $+\infty$ -მდე, მივიღებთ ოსცილატორის მიერ τ დროში შთანქმეულ ენერჯიას.

ამგვარად, განვიხილოთ ω_0 სიხშირით რხევად ოსცილიატორზე დაცემული ტალლის ω სიხშირის ფურიეს მდგენლის (მონოქრომატული ტალლის) მოქმედება. თუ რეაქციის ძალის (66,14) მოქმედებას მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინ ოსცილიატორის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} e(\omega) \cos(\omega t + \delta\omega), \quad (71,1)$$

სადაც $\delta\omega$ წარმოადგენს ω სიხშირის ტალლის საწყის ფაზას.

თუ საწყის პირობებს ისეთნაირად შევარჩევთ, რომ $t=0$ მომენტში გვექონდეს მხოლოდ ოსცილიატორის საკუთარი რხევა ω_0 სიხშირით, მაშინ (71,1) განტოლების ამონახსნი შემდეგი ფუნქციით იქნება განსაზღვრული

$$x = \frac{q}{m} e(\omega) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \{ \cos(\omega t - \delta\omega) - \cos(\omega_0 t + \delta\omega) \} + A \sin(\omega_0 t + \theta), \quad (71,2)$$

რაშიც ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ ამ უკანასკნელის (71,1)-ში უშუალო ჩასმის გზით.

(71,2)-ში A წარმოადგენს ოსცილიატორის ამპლიტუდას, ხოლო θ — საწყის ფაზას $t=0$ მომენტში.

რადგან, ენერჯიის მუდმივობის კანონის თანახმად, დაცემული ტალლის მონოქრომატული შემადგენლის მიერ დროის ერთეულში შესრულებული მუშაობა ამავე დროში ოსცილიატორზე გადაცემული ენერჯიის ტოლი უნდა იყოს, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$q \left(\frac{dx}{dt}, e(\omega) \right) \cos(\omega t + \delta\omega) = \mathfrak{E}(\omega). \quad (71,3)$$

თუ (71,2)-დან განსაზღვრულ $\frac{dx}{dt}$ სიდიდეს (71,3)-ში შევიტანთ და დროის მიხედვით ინტეგრაციას ჩავატარებთ, მივიღებთ

$$\int_0^{\tau} \mathfrak{E}(\omega) dt = \frac{q^2 e^2(\omega)}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \int_0^{\tau} \{ \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta\omega) - \omega \sin(\omega t - \delta\omega) \} \cos(\omega t + \delta\omega) dt + q(A, e(\omega)) \omega_0 \int_0^{\tau} \cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega t + \delta\omega) dt. \quad (71,4)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ერთი სრული რხევის პერიოდის, ანდა მისი ჯერადი τ დროის შუალედისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_0^{\tau} \sin(\omega t + \delta\omega) \cos(\omega t + \delta\omega) dt = \frac{\sin^2(\omega t + \delta\omega)}{2} \Big|_0^{\tau} = \\ = \frac{\sin^2(n \cdot 2\pi + \delta\omega) - \sin^2 \delta\omega}{2} = 0, \quad (71,5)$$

მაშინ (71,4)-დან დაგვრჩება შემდეგი გამოსახულება

$$\int_0^{\tau} \mathcal{E}(\omega) dt = \frac{q^2 e^2(\omega)}{m} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \int_0^{\tau} \sin(\omega_0 t + \delta\omega) \cos(\omega t + \delta\omega) dt + \\ + q(A, e(\omega)) \int_0^{\tau} \cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega t + \delta\omega) dt. \quad (71,6)$$

(71,6) განტოლების მარჯვენა მხარეში შემავალი ინტეგრალების სიდიდეები და ნიშნები არსებითად $\omega_0 t + \delta\omega$, $\omega t + \delta\omega$ და $\omega_0 t + \theta$ ფაზებზე არიან დამოკიდებული. ფაზათა ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის (71,6) გამოსახულება შეიძლება უარყოფითიც გახდეს. ამ შემთხვევაში ოსცილიატორი, ნაცვლად იმისა, რომ დაცემული ტალღის ენერგიას შთანთქმავდეს, პირიქით თითონ გადასცემს მას ენერგიას. ასეთ მოვლენებს, რომელთა დროსაც ოსცილიატორი ენერგიას კარგავს, დაცემულ ტალღაზე მისი გადაცემის გზით, ელექტრომაგნიტური ტალღის ინდუცირებული გამოსხივება ეწოდება.

მონოქრომატულ ტალღათა $\delta\omega$ ფაზების შესახებ მივიღეთ დაშვება, რომლის მიხედვით დაცემულ ტალღაში ისინი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონს ექვემდებარებიან; ამიტომ ჩვენ მოგვიხდება ოსცილიატორის მიერ τ დროში შთანთქმული (71,6) ენერგიის გასაშუალოება $\delta\omega$ ფაზების მიხედვით. ამ გასაშუალოების დროს (71,6) გამოსახულებაში მეორე ინტეგრალი მოიხიბება, რადგან $\cos(\omega t + \delta\omega) = 0$, ხოლო პირველისათვის გვექნება

$$\int_0^{\tau} \sin(\omega_0 t + \delta\omega) \cos(\omega t + \delta\omega) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} (\sin \omega_0 t \cos \omega t - \sin \omega t \cos \omega_0 t) dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \sin(\omega_0 - \omega) t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_0 - \omega) \tau}{\omega_0 - \omega}, \quad (71,7)$$

სადაც გამოყენებულია იგივეობა

$$\sin(\omega_0 t + \delta\omega) \cos(\omega t + \delta\omega) = (\sin \omega_0 t \cos \delta\omega + \\ + \sin \delta\omega \cos \omega_0 t) (\cos \omega t \cos \delta\omega - \sin \omega t \sin \delta\omega).$$

თუ (71,7)-ს ჩავსვამთ (71,6)-ში მივიღებთ

$$\int_0^{\tau} \overline{\mathcal{E}}(\omega) dt = \frac{q^2 e^2(\omega)}{2m} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_0 - \omega)\tau}{\omega_0 - \omega}. \quad (71,8)$$

(71,8)-დან გამომდინარეობს, რომ ოსცილატორს ის მონოქრომატული ტალღა გადასცემს მაქსიმალურ ენერგიას, რომლის სიხშირე ძალიან ახლოსაა ოსცილატორის ω_0 საკუთარი სიხშირესთან ($\omega \approx \omega_0$). სიხშირის იმ მნიშვნელობას, რომელიც ოსცილატორის საკუთარი სიხშირის ტოლია, რეზონანსული სიხშირე ეწოდება.

მაშასადამე, ოსცილატორზე დაცემული ტალღის შემადგენელი მონოქრომატული ტალღებიდან ოსცილატორი ყველაზე ძლიერად რეზონანსული სიხშირის ტალღას შთანთქავს, ხოლო იმ ტალღებს, რომელთა სიხშირეები ω_0 -დან საკმაოდ შორს არიან — სუსტად.

რადგან ყოველი მონოქრომატული ტალღა ენერგიის გარკვეულ რაოდენობას გადასცემს ოსცილატორს, ამიტომ (71,8) გამოსახულებიდან. რომელიც ω სიხშირის ტალღის მიერ ოსცილატორზე გადაცემული ენერგიის რაოდენობას წარმოადგენს, უნდა ავიღოთ ინტეგრალი სიხშირის $(0, +\infty)$ ინტერვალზე. აჯამების ნაცვლად ინტეგრაციის ოპერაცია დასაშვებია იმის გამო, რომ მონოქრომატული ტალღების სიხშირეები ფაქტიურად უწყვეტ მიმდევრობას შეადგენენ.

ამგვარად, დროის ერთეულში ოსცილატორის მიერ შთანთქმული ენერგიის რაოდენობა შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$S = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} \overline{\mathcal{E}}(\omega) dt d\omega = \frac{\omega_0}{\tau} \frac{q^2 e^2(\omega)}{2m} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(\omega_0 - \omega)\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0 - \omega)} d\omega. \quad (71,9)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $y = (\omega_0 - \omega)\tau$ და გავითვალისწინებთ, რომ (71,9) გამოსახულებას $\omega = \omega_0$ წერტილზე აქვს მკვეთრი მაქსიმუმი, რაც უფლებას გვაძლევს დავწეროთ $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) = \frac{2\omega_0}{\tau} y$, მაშინ (71,9) შემდეგ სახეზე დაიყვანება

$$S = \frac{q^2 e^2(\omega)}{2m} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy. \quad (71,10)$$

ეს უკანასკნელი ინტეგრალი ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ როდესაც დაცულია პირობა $\omega_0 \tau \gg 1$. ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია,

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2},$$

რომლის ჩასმა (71,10)-ში მოგვცემს

$$S = \frac{\pi q^2 e^2(\omega_0)}{4m} = \frac{2\pi^2 q^2 J_0(\omega_0)}{m}, \quad (71,11)$$

სადაც სიდიდე

$$J_0(\omega_0) = \frac{c}{4\pi} \overline{e^2(\omega) \cos^2(\omega t + \delta_\omega)} = \frac{c}{8\pi} e^2(\omega_0),$$

დამცემი ტალღის ინტენსიობის საშუალო მნიშვნელობას წარმოადგენს.

(71,11)-დან გამომდინარეობს, რომ ოსცილატორის მიერ შთანთქმული ენერჯიის რაოდენობა არსებითად იმ მონოქრომატული ტალღის ინტენსიობით განისაზღვრება, რომელსაც რეზონანსული სიხშირე აქვს. ეს ენერჯია აგრეთვე დროის წრფივ ფუნქციას წარმოადგენს.

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ტალღის მიერ ოსცილატორზე გაუძაცემული ენერჯია, საზოგადოთ, ტალღის სიხშირეზე დამოუკიდებელია.

§ 72. ტალღის ფაზური და ჯგუფური სიჩქარეები

განვიხილოთ ბრტყელი მონოქრომატული ელექტრომაგნიტური ტალღა, რომელიც, (58,8) ის თანახმად, შემდეგი ჰარმონიული ფუნქციით აღიწერება:

$$\psi(x, t) = A e^{i(\omega t - (k, x))}. \quad (72,1)$$

სივრცის ყველა იმ წერტილების ერთობლიობა, რომელშიაც მონოქრომატული ელექტრომაგნიტური ტალღის ფაზას ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს

$$\omega t - (k, x) = \text{const}. \quad (72,2)$$

კვაძლევს ე. წ. ტალღურ ზედაპირს.

ტალღური ზედაპირის გადატანის სიჩქარის მისაღებად გამოვიყენოთ (72,2) განტოლება. დაეუშვათ, რომ ბრტყელი ტალღა x_1 ღერძის გასწვრივ ვრცელდება. სათანადოთ, ტალღის ზედაპირის (72,2) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\omega t - kx_1 = \text{const}; \quad (72,3)$$

საიდანაც, დროით გაწარმოების გზით, მივიღებთ ტალღის ზედაპირის გადატანის სიჩქარეს

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\omega}{k} = c, \quad (72,4)$$

რომელსაც ფაზური სიჩქარე ეწოდება.

ამგვარად, მონოქრომატული ბრტყელი ტალღის ზედაპირის გადაადგილების ფაზური სიჩქარე c -ს ტოლია. მაგრამ § 67-ში ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ მონოქრომატული ტალღები ბუნებაში არ არსებობენ. ყოველი ტალღა სინამდვილეში წარმოადგენს ისეთი მონოქრომატული ტალღების ერთობლიობას,

რომელთა სიხშირეები $\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$ მცირე ინტერვალშია მოთავსებული

რადგან ტალღის ზედაპირის (72,2) განტოლებაში სხვადასხვა მონოქრომატული ტალღების სიხშირეები უნდა შევიტანოთ, ამიტომ მათი ზედაპირები ერთმეორეს არ დაემთხვევიან. მაშასადამე, ტალღის ერთი გარკვეული ზედაპირის ნაცკლად ფაქტიურად ჩვენ გვექნება ერთი მეორესთან ძალიან ახლოს მდებარე ზედაპირთა ერთობლიობა. მიუხედავად იმისა, რომ ტალღის შემადგენელი

მონოქრომატული ტალღების ზედაპირები ერთმანეთთან ძალიან ახლოს არიან. მათ განსხვავებული ფაზები აქვთ. ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ტალღა აღარ შეიძლება (72,1) მარტივი ჰარმონიული ფუნქციით წარმოვადგინოთ; რის გამოც ტალღის ფაზური სიჩქარის ცნება თავის აზრს კარგავს. ამ თვალსაზრისით „ტალღის ფრონტის სიჩქარე“ და „სინათლის სიჩქარე“ დაუზუსტებელ ცნებებს წარმოადგენენ. ამ ცნებათა ზუსტ განსაზღვრას მრავალი ექსპერიმენტი მოითხოვს: მათ შორის ის ექსპერიმენტები რომლებიც საფუძვლად უდევენ ფარდობითობის სპეციალურ თეორიას. „ტალღის ფრონტის სიჩქარის“ ცნების დაზუსტების საკითხს განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა ენიჭება პრაქტიკაში, მოკლე ტალღებიანი გადაცემის საქმეში.

ის გარემოება, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის ზედაპირის სივრცესა და დროში ზუსტი ლოკალიზაცია შეუძლებელია, დაკავშირებულია ელექტრომაგნიტური ველის ანალოგიურ თვისებასთან და ამ უკანასკნელიდან გამომდინარეობს. მაშასადამე. ტალღის თვისებები ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი თვისებებიდან უნდა გამომდინარეობდნენ.

რადგან, მცირე ენერგიების შემთხვევაში, ელექტრომაგნიტური ველისათვის ადგილი აქვს სუპერპოზიციის პრინციპს, ამიტომ სივრცის ერთსა და იგივე ადგილზე ორი ელექტრომაგნიტური ტალღის შეხვედრის დროს ისინი შეიკრიბებიან. მიღებული ტალღის ველი აღებული ტალღების ველების ჯამით წარმოიდგინება.

როგორც ვიცით, ტალღის ინტენსიობა $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ფუნქციის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობით განისაზღვრება, ამიტომ ორი ტალღის შეკრების შედეგად მიღებული ტალღის ინტენსიობისათვის გვექნება

$$J_{12} = \overline{\left(f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)^2}. \quad (72,5)$$

(72,5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$J_{12} \neq J_1 + J_2, \quad (72,6)$$

ე. ი. ელექტრომაგნიტური ტალღის ინტენსიობა შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა ჯამისაგან განსხვავდება. მხოლოდ ზოგიერთ

კერძო შემთხვევებში, როდესაც $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) \cdot f_2\left(t - \frac{x}{c}\right) = 0$, ადგილი აქვს შენევე ტოლობას

$$J_{12} = J_1 + J_2. \quad (72,7)$$

ეს უკანასკნელი დამოკიდებულება სამართლიანია კორპუსკულარული თეორიის თვალსაზრისით, მაშინ როდესაც ტალღური — ელექტრომაგნიტური ველის თეორიის მიხედვით, საზოგადოთ, ადგილი აქვს ინტენსიობათა შეკრების (72,7) კანონიდან გადახვევებს. ამ მოვლენას, როგორც ცნობილია, ტალღათა ინტერფერენცია ეწოდება. ტალღური თეორიის თანახმად ტალღათა ინტერფერენ-

ცია სათანადო ელექტრომაგნიტური ტალღების ველების თანდადების — სუპერ-პოზიციის შედეგია; რის გამოც ინტენსიობათა შეკრების (72,7) კანონი ირღვევა.

პრაქტიკაში, უშუალო ცდებისა და დაკვირვებათა დროს, უმრავლეს შემთხვევებში დაკულია ინტენსიობათა შეკრების (72,7) კანონი; რაც გარეგნულად ეწინააღმდეგება ტალღურ თეორიას. მოვლენათა დაწერილებით შესწავლა გვიჩვენებს, რომ (72,7) კანონის ადგილი აქვს იმ შემთხვევებში როდესაც შესაკრებ ელექტრომაგნიტურ ტალღებს ასხივებენ ერთიმეორისაგან სრულიად დამოუკიდებელი სხვადასხვა წყაროები. რადგან პრაქტიკაში თითქმის მუდამ ასეთი განსხვავებული წყაროების მიერ გამოსხივებული ტალღების შეკრებასთან გვაქვს საქმე, ამიტომ ინტერფერენციის მოვლენებიც იშვიათად გვხვდებიან.

მართალია ტალღური თეორია ელექტრომაგნიტური ტალღების ინტერფერენციის მოვლენას კარგად ხსნის, მაგრამ საკითხი იმის შესახებ თუ რატომაა შეუძლებელი უმრავლეს შემთხვევებში ინტერფერენციის შემჩნევა, დამატებით ახსნას მოითხოვს.

ცდები გვიჩვენებენ, რომ თავისი ფიზიკური თვისებებით განსხვავებული წყაროების მიერ გამოსხივებული ტალღები ინტერფერენციულ სურათს არ იძლევიან. პირიქით. ერთი და იგივე წყაროს ელექტრომაგნიტური ტალღები კოჰერენტულია — მათთვის ადგილი აქვს ინტერფერენციის მოვლენას.

ტალღური თეორიის ჩარჩოებში ჩვენ უნდა გამოვარკვიოთ როგორია არაკოჰერენტობის თვისების განმწვევი მიზეზები.

§ 60-ში ჩვენ გამოვარკვიეთ, რომ რხვევადი მუხტი (პარამონიული ოსცილატორი) დაახლოებით მონოქრომატულ ტალღებს ასხივებს, ამიტომ ერთნაირი ოსცილატორების მიერ გამოსხივებული ტალღები შეიძლება კოჰერენტულ ტალღებად ჩავთვალოთ.

ნაცვლად ერთი და იგივე სიხშირის მონოქრომატული ტალღების შეკრებისა, რასაც მათ ინტერფერენციასთან მივყავართ, განვიხილოთ ერთი მიმართულებით მიმავალი ისეთი ორი პოლარიზებული მონოქრომატული ტალღა რომელთა სიხშირეები ω და ω' ერთიმეორესთან ძალიან ახლოს არიან. ამ ტალღათა შესაკრებად, როგორც ვიცით, საჭიროა მათი შესაბამისი ელექტრული და მაგნიტური ველების შეკრება. მაგრამ იმის გამო, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრულ და მაგნიტურ ვექტორებს სრულიად ერთი და იგივე სხებე აქვთ (§ 58), საკმარისია მოვხდინოთ ტალღათა ელექტრული ველების დაძაბულობათა შეკრება (მაგნიტური ვექტორები ანალოგიური გზით შეიკრიბებიან).

თუ ავიღებთ ორ წრფივად პოლარიზებულ მონოქრომატულ ტალღას, რომელთა ელექტრული ველების დაძაბულობათა ვექტორები, (58,6) ფორმულის თანახმად, შემდეგნაირად გამოისახებიან:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= A \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \\ e_2 &= A e^{i\omega' \left(t - \frac{x}{c} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (72,8)$$

და გავითვალისწინებთ, რომ ფიზიკური სიდიდეები ნამდვილი რიცხვებით გამოისახებიან, მაშინ (72,8) სიდიდეების არსი ნაწილების შეკრება მოგვცემს:

$$e = e_1 + e_2 A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + A \cos \omega' \left(t - \frac{x}{c} \right) = \\ = 2A \cos \frac{\omega' - \omega}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \cos \frac{\omega' + \omega}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (72,9)$$

თუ ახლა შემოვიღებთ აღნიშვნას, $\Delta\omega = \omega' - \omega$ და აგრეთვე მხედველობაში მივიღებთ, რომ k ტალღური ვექტორი ტალღის გავრცელების მიმართულების (x — რადიუს ვექტორის) თანხედენილია, მაშინ, (57,13) ფორმულების დახმარებით, (72.9) შეიძლება შემდეგნაირად გადმოვწეროთ

$$e = 2A \cos \frac{1}{2} (\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x) \cos \left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x \right]. \quad (72,10)$$

ეს უკანასკნელი განტოლება გვიჩვენებს, რომ ორი წრფივად პოლარიზებული მონოქრომატული ტალღის, რომელთა სიხშირეები ძალიან მცირედ განსხვავდებიან, შეკრების შედეგად მიიღება მათი სიხშირეებისაგან (ω და ω') $\frac{\Delta\omega}{2}$ სიდიდით განსხვავებული სიხშირის ტალღა. მიღებული ტალღის ამპლიტუდა

$$2A \cos \frac{1}{2} (\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x). \quad (72,11)$$

ძალიან ნელა იცვლება შენაღდგენელი ტალღების ამპლიტუდების ჯამსა (2A) და ნულს შორის.

რადგან ტალღის ინტენსიობა ამპლიტუდის კვადრატით გამოისახება, ამიტომ (72,10) ტალღის ინტენსიობისათვის გვექნება

$$J \sim 4A^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x). \quad (72,12)$$

ამგვარად, განსახილველ შემთხვევაში, მიღებული საერთო ტალღის ინტენსიობა პერიოდულად იცვლება. სივრცის ყოველ წერტილში რიგრიგობით მიიღებიან ტალღის ინტენსიობის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები, რომლებიც (72,12) განტოლებით განისაზღვრებიან. ამავე განტოლებიდან გამოვდინარეობს, რომ აღებულ წერტილში ტალღის ინტენსიობის მინიმალური და

მაქსიმალური მნიშვნელობების მონაცვლეობა სწარმოებს $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$ დროის განმავ-

ლობაში. მაშასადამე, $T = \frac{4\pi}{\Delta\omega}$ დრო სწარმოადგენს ტალღის ინტენსიობის რხევის პერიოდს.

(72,10) ფორმულა, როგორც ცნობილია, ძვერის მოვლენას გამოსახავს. ტალღის ამ ძვერათა ექსპერიმენტული აღმოჩენა მხოლოდ გარკვეულ პირობებშია შესაძლებელი. ტალღათა ძვერის სურათი დამოკიდებულია სიხშირეთა

სხვაობის ($\omega' - \omega = \Delta\omega$) სიდიდეზე. თუ მაგალითად, ეს სხვაობა შედარებით დიდია, მაშინ T იმდენად მცირე იქნება, რომ უშუალო გაზომვის გზით (72,12) ინტენსიობის საშუალო მნიშვნელობას მივიღებთ. მართლაც, თუ (72,12)-ს

$T = \frac{4\pi}{\Delta\omega}$ დროის მიხედვით გავასაშუალოებთ. მივიღებთ

$$\overline{J} \sim \frac{4A^2}{T} \int_0^T \cos^2 \frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right) dt = 2A^2; \quad (72,13)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სწრაფი ძვრების დროს მიღებული ტალღის ინტენსიობა შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობათა ჯამის ტოლია. მაშასადამე, თუ ძვრები ისე სწრაფად სწარმოებს, რომ თვალით ან რაიმე ხელსაწყოს საშუალებით მათი შემჩნევა შეუძლებელია, მაშინ ინტერფერენციას ადგილი არა აქვს.

ამგვარად, ორი ან რამდენიმე მონოქრომატული ტალღის სუპერპოზიციამ გვაძლევს ტალღათა ჯგუფების პერიოდულ მიმდევრობებს. სივრცის ზოგიერთ ადგილებში ამ ჯგუფების ანპლიტუდები მაქსიმალურია, ზოგან მინიმალური (ნულთან ძალიან ახლოს). მაქსიმუმის და მინიმუმის ადგილები დროის წიხედვით თავიანთ მდებარეობებს პერიოდულად იცვლიან. მაშასადამე, აქ ჩვენ ისეთ სურათს ვღებულობთ, თითქოს ტალღათა ჯგუფის ამპლიტუდის მაქსიმუმის (მინიმუმის) არე გარკვეული სიჩქარით მოძრაობდეს, იმ სიჩქარეს, რომლითაც ჯგუფის ინტენსიობის მაქსიმუმის არე მოძრაობს ფაზური სიჩქარისაგან განსხვავებით, ჯგუფური სიჩქარე ეწოდება. ჯგუფური სიჩქარის გამოსახულების მისაღებად დაუებრუნდეთ (72,10) განტოლებას, რომელიც გვიჩვენებს, რომ ერთი და იგივე ამპლიტუდის მქონე ტალღათა ჯგუფის ზედაპირი შენდები განტოლებით განისაზღვრება

$$\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t = \text{Const}, \quad (72,14)$$

(72,14)-დან გამომდინარეობს, რომ ტალღათა ჯგუფის ვაერცელების სიჩქარეა

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (72,15)$$

მაშასადამე, ჯგუფური სიჩქარე წარმოადგენს სიხშირეთა სხვაობის შეფარდებას ტალღური რიცხვების სხვაობასთან.

ორი მონოქრომატული ტალღის შეკრების ზემოდგანხილულ მაგალითზე ჩვენ გამოვარკვეით, რომ ისინი ერთიმეორეს სივრცის მხოლოდ ზოგიერთ ადგილებში აძლიერებენ, დანარჩენ ადგილებში კი პრაქტიკულად სპობენ. სრულიად ანალოგიურ სურათს მივიღებთ, თუ შევკრებთ ისეთ მონოქრომატულ ტალღებს, რომელთა სიხშირეები მცირე $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$ შუალედშია მოთავსებული. უფრო მეტიც, ფურიეს ინტეგრალის თეორიის თანახმად, ტალღათა ნებისმიერი ფორმის ჯგუფი შეიძლება შევადგინოთ მონოქრომატული ტალღების ამპლიტუდების, როგორც სიხშირის ან ტალღური რიცხვის

ფუნქციების, სათანადო შერჩევისა და ინტეგრაციის გზით. ტალღათა ჯგუფისაჲს, ნაცვლად (72,1) ჰარმონული ფუნქციისა, გვექნება:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(\omega t - (k x))} dk. \quad (72,16)$$

რადგან ჯგუფური სიჩქარის ცნება დაკავშირებულია სპექტრის (მონოქრომატულ ტალღების სიხშირეების) მცირე დიაპაზონთან, ამიტომ (72,16)-ში უნდა მოვიტხოვოთ, რომ $A(k)$ ამპლიტუდები $k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$ შუალედს გარეთ იმდენად მცირე სიდიდეები იყვნენ, რომ მათი უგულვებელყოფა შეიძლებოდეს. თუ $A(k)$ სიდიდეებს აღნიშნულ შეზღუდვებს დაუმორჩილებთ, მაშინ (72,16)-ს ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ:

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(\omega t - (k x))} dk. \quad (72,17)$$

ეს უქანასკნელი ფუნქცია გამოსახავს ტალღური რიცხვების $k_0 - \Delta k$, $k_0 + \Delta k$ შუალედში მოთავსებულ მონოქრომატულ ტალღათა ჯგუფს, რომელსაც „ტალღურ პაკეტს“ უწოდებენ.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ სიხშირე ტალღური რიცხვის ფუნქციის წარმოადგენს $\omega = \omega(k)$, მაშინ საკმარისად მცირე $2\Delta k$ ინტერვალში $\omega(k)$ ფუნქცია k_0 წერტილის მახლობლობაში შეიძლება გავშალოთ ტეილორის მწკრივად, გვექნება

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots \quad (72,18)$$

თუ (72,18)-ში, $k - k_0 = \Delta k$ სიდიდის სიმცირის გამო, პირველი ორი წევრით დავკვაყოფილდებით, მაშინ (72,17) ტალღური პაკეტისათვის გვექნება

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega_0 t - (k_0 x))}, \quad (72,19)$$

სადაც ψ_0 საშუალო ამპლიტუდა შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება

$$\psi_0 = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(k - k_0) \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} t \right]} dk. \quad (72,20)$$

ამ უქანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \cdot t = \text{Const}, \quad (72,21)$$

ხედაპირის ყოველ წერტილში ამპლიტუდას ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს. (72,21) განტოლებიდან, თავის მხრივ, მიიღება ტალღური პაკეტის ჯგუფური სიჩქარე

$$u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}. \quad (72,22)$$

თუ ახლა ω -ს ნაცვლად (72,22)-ში $k \cdot v$ სიდიდეს შევიტანთ, გვექნება

$$u = v + k \frac{dv}{dk} = v + \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)}. \quad (72,23)$$

ჯგუფური სიჩქარის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მას აზრი აქვს სპექტრის უსასრულო მცირე ვიწრო არეში მოთავსებული მონოქრომატული ტალღებისაგან შედგენილი პაკეტისათვის. Δk ინტერვალის ზრდასთან ერთად მონოქრომატული ტალღების ფაზური სიჩქარეები მნიშვნელოვნად განსხვავებული ხდებიან და შესაბამისად იწყება „ტალღური პაკეტის“ დეფორმაცია, რის გამოც ჯგუფური სიჩქარე ფიზიკურად უმინარსო ხდება.

§ 73. გამოსხივება დაჯახების დროს

საზოგადოთ, ორი დამუხტული ნაწილაკის ერთიგორესთან დაახლოების დროს თავს იჩენს ურთიერთქმედების ძალები. ამ ძალის გავლენით იცვლება ნაწილაკთა სიჩქარეები, რის გამოც ისინი ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივებას იწყებენ. გამოსხივების შედეგად ნეიტრალური დამუხტული ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯია ჩვენს ამოცანას შეადგენს ცალკეული დაჯახების¹ დროს ენერჯიის ცვლილების სიდიდის გამოთვლა. პრაქტიკაში უმრავლეს შემთხვევებში ჩვენ ვხვდებით დამუხტული მსუბუქი ნაწილაკების — ელექტრონების დაჯახებებს ატომებთან. ამ დაჯახებათა დროს გამოსხივების პროცესებში გადამწყვეტ როლს ატომგულთან დამკვიდრებული ელექტრონის მოქმედება ასრულებს, რადგან ატომგულთან ელექტრონის ურთიერთქმედების კულონური ძალა Z -ჯერ მეტია ელექტრონთან ურთიერთქმედების ძალასთან შედარებით.

განვიხილოთ რელატივისტური სიჩქარით ($v \approx c$) მოძრაე ელექტრონის ატომგულთან დაჯახება და გამოვთვალოთ ის ენერჯია, რომელსაც კარგავს ელექტრონი ელექტრომაგნიტური ტალღების — ფოტონების გამოსხივების სახით. დიდი სიჩქარით მოძრაე ელექტრონი ატომგულის Zq ნუბტის ელექტრულ ველში დამუხტულებას განიცდის. იცვლება მისი მოძრაობის სიჩქარის როგორც სიდიდე ასევე მიმართულება. ატომგულის სიჩქარის ცვლილება შეიძლება ნხედველობაში არ მივიღოთ, რადგან მისი მასა გაცილებით დიდია ელექტრონის მასასთან შედარებით. ჩვენ აგრეთვე უგულებელვყოფთ დამკვიდრებული ელექტრონის ურთიერთქმედებას ატომის ელექტრონებთან.

შემოვიღოთ ატომგულთან უძრავად დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემა. მას ლაბორატორიული სისტემა ეწოდება. შეიძლება აგრეთვე ავირჩიოთ ათვლის ისეთი სისტემა, რომელშიაც ელექტრონი უძრავია, ხოლო ატომგული — v სიჩქარით მოძრაობს.

¹ დამუხტული ნაწილაკების დაჯახების მოვლენა არ უნდა გავიგოთ მათი უშუალო — შუბლური დაჯახების სახით. ისეთი მოვლენები, რომელთა დროსაც ნაწილაკებს შორის უმცირეს მანძილზე დაახლოების დროს მათ შორის ურთიერთქმედების ძალა სიჩქარის შესაბამისად ცვლილებას გამოიწვევს, აგრეთვე დაჯახების მოვლენებს მიეკუთვნება.

ამ უქანასკნელ სისტემაში ველის დაძაბულობის ვექტორები ადვილად მიიღებინა (29,7) ფორმულების საშუალებით, თუ გვეცოდინება მათი მნიშვნელობანი ლაბორატორულ სისტემაში.

ლაბორატორულ სისტემაში Zq მუხტის ველი ელექტროსტატიკურია, ხოლო იმ სისტემაში, სადაც ელექტრონი უძრავია, რელატივისტური ($v \approx c$) თანაბარი სიჩქარით მოძრავი Zq მუხტის (ატომგულის) ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის e და h ვექტორები, (29,8)-ს თანახმად, დაახლოებით ტოლი სიდიდის არიან. ეს გარემოება უფლებას გვაძლევს ელექტრონის მიმართ მოძრავი ატომგული განვიხილოთ როგორც ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღების ჯგუფი. სათანადოთ, ელექტრონისა და ატომგულის ურთიერთქმედება შეიძლება დავიყვანოთ ატომგულის ველის, როგორც ტალღური პაკეტის შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების ელექტრონზე გაფანტვის მოვლენათა ერთობლიობაზე.

მაშინ როდესაც ელექტრონთან უძრავად დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემაში ატომგულის ელექტრომაგნიტური ველის ტალღები ელექტრონზე გაფანტვის განიციდიან, ლაბორატორულ სისტემაში აღნიშნულ მოვლენას მოძრავი ელექტრონის მიერ ტალღების გამოსხივება შეესაბამება.

ანგვარად, ატომგულის (Zq მუხტის) ველში ელექტრონის დამუხრუჭების დროს გამოსხივებული ენერჯიის გამოსათვლელად უნდა მოვანხოთ ვასხივებული ტალღური პაკეტის ენერჯია; რომელიც დაჯახებამდე და დაჯახების შენდევ დამუხრუჭული ნაწილაკის (ელექტრონის) ენერჯიათა სხვაობის ტოლია. ამ ანოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა:

- 1) მოვანხოთ Zq მუხტის ველი ელექტრონთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში;
- 2) დავადგინოთ ტალღურ პაკეტში სპექტრალური განაწილების კანონი;
- 3) განვსაზღვროთ ელექტრონზე ტალღური პაკეტის გაფანტვის ეფექტური კვეთი;
- 4) ელექტრონთან დაკავშირებული სისტემიდან გადავიდეთ ლაბორატორულ სისტემაზე.

დაჯახების პარამეტრი — ის მინიმალური მანძილი, რომელზედაც ელექტრონი Zq მუხტს ჩაუვლიდა თუ მათ შორის ურთიერთქმედებას ადგილი არ ექნებოდა, აღნიშნოთ b -თი. ეს მანძილი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს გამოსხივების თეორიაში. თუ b დიდია ატომგულის რადიუსთან შედარებით, მაგრამ მცირე ვიდრე ატომის რადიუსი, მაშინ გამოსხივების პროცესში ელექტრონზე მომქმედი ველი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც Zq წერტილოვანი მუხტის კულონური ველი. ხოლო თუ b მანძილი ატომის რადიუსის რიგისაა, ანდა მას აღემატება, მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული ატომის ელექტრონების ველი, რომელიც ატომგულის ველის ეკრანირებას იწვევს. ბოლოს თუ დაჯახების პარამეტრი ატომგულის რადიუსის რიგისაა, მაშინ მისი ველი აღარ შეიძლება წერტილოვანი მუხტის ველის სახით წარმოვიდგინოთ.

რადგან ელექტრონის მიერ რადიაციული გამოსხივების პროცესებს ადგილი აქვთ ისეთ მანძილებზე, რომლებიც ატომგულის რადიუსს აღემატებიან, ამიტომ ატომგული შეიძლება განვიხილოთ როგორც წერტილოვანი მუხტი. მაშასადამე, ლაბორატორულ სისტემაში Zq წერტილოვანი მუხტიდან b მანძილზე ელექტრული ველის დაძაბულობა, (43,8)-ს თანახმად, შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$|e^0| = \frac{Zq}{b^2}. \quad (73,1)$$

ელექტრონთან დაკავშირებულ სისტემაში ამ ველის მდგენელი Zq მუხტის მოძრაობის მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში, (29,5)-ს მიხედვით,

დიდება $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ -ჯერ, ე. ი.

$$e_{\perp} = e^0_{\perp} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Zq}{b^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (73,2)$$

ამავე სისტემაში მაგნიტური ვექტორის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ e და v ვექტორებთან h -ის პერპენდიკულარობის პირობით, რაც (29,9)-ს თანახმად მოგვცემს

$$h_{\parallel} = e^0_{\perp} \frac{v}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Zq \cdot v}{b^2 c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim \frac{Zq}{b^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (73,3)$$

ამგვარად, e_{\perp} და h_{\parallel} , ისევე როგორც ბრტყელ ელექტრომაგნიტურ ტალღაში, რელატივისტური სიჩქარეების შემთხვევაში ტოლი სიდიდის არიან.

ლაბორატორულ სისტემაში ელექტრონის ენერგია $\mathcal{E} = \frac{m'c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ძალიან

დიდია, რადგან $v \simeq c$.

მაშინ როდესაც ლაბორატორულ სისტემაში Zq მუხტის ველი სფერული სიმეტრიით ხასიათდება (ეკვიპოტენციალური ზედაპირები სფეროს ზედაპირებს წარმოადგენენ), ელექტრონთან დაკავშირებულ სისტემაში ეს ველი მოძრაობის მიმართულებით ორივე მხრიდან იკუმშება და $b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ სისქის ვიწ-

რო არეში იყრის თავს. ეს არე მუხტის მოძრაობის პერპენდიკულარულად მოთავსებული დისკოს სახით უნდა წარმოვიდგინოთ და მას, სათანადოთ, ტალღათა ჯგუფი შეესაბამოთ.

დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ ამ ტალღათა ჯგუფის ენერგიათა სხვაობა მოგვცემს დაჯახების პროცესში გასხივებული ტალღური პაკეტის ენერგიას.

ტალღური პაკეტის სპექტრის დასადგენად გავითვალისწინოთ, რომ დაჯახების პარამეტრის შესაძლო მნიშვნელობანი და მონოქრომატული ტალღების ინტენსიობები შემთხვევითი სიდიდეების კანონის მიხედვით არიან განაწილებული. იმის მიხედვით თუ როგორი იქნება დაჯახების პარამეტრი, რელატივისტური დამუხტული ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველის ვექტორების სადიდებები და მაშასადამე, დისკოს ზედაპირის ფართის ერთეულზე მომავალი ენერგიების მნიშვნელობები ერთიანეორისაგან განსხვავებული იქნებიან. თუ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებისათვის გაუსის ფუნქციას გამოვიყენებთ, მაშინ Zq მუხტის ველის დაძაბულობათა დროისა და სიხშირის მიხედვით ცვლილებათა გამოპსახველ კანონებს შემდეგი სახე ექნებათ:

$$e_{\perp} = h_{\theta} \sim \exp\left(-\frac{c^2 t^2}{2b^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right), \quad (73,4)$$

$$e_{\perp} = h_{\theta} \sim \exp\left(-\frac{b^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2c^2}\right) \omega^2. \quad (73,5)$$

(73,4) და (73,5) ფორმულებში სიდიდე $\frac{b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c}$ დროის იმ შუალედს წარმოადგენს, რომლის განმავლობაში მუხტის აჩქარება მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს. ამ დროს დაჯახების ხანგრძლიობას უწოდებენ.

თუ ახლა გასხივებულ ველს ფურიეს ინტეგრალად გავშლით, მაშინ იმ წდგენელების ინტენსიობა, რომელთა სიხშირეები

$$\omega' = \frac{1}{\tau'} = \frac{c}{b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (73,6)$$

სიდიდეს აღემატებიან, ნულთან ძალიან ახლოს იქნებიან. მაშასადამე, ნული-საგან განსხვავებული ინტენსიობის ტალღების სიხშირეები პრაქტიკულად (0, ω') შუალედში იქნებიან მოთავსებული. როგორც ზემოდ აღვნიშნეთ, Zq მუხტის ველის ეკვიპოტენციალურ ზედაპირებს ელექტრონის სისტემაში დისკოს ფორმა აქვთ, ამიტომ ამ დისკოს ზედაპირის ფართის ერთეულზე მომავალი ველის ენერგია b -ს ფუნქციას წარმოადგენს. პირველად გამოვთვალოთ დისკოს მოცულობის ერთეულის ენერგია. (37,13), (73,2) და (73,3) რამოკიდებულებათა თანახმად გვექნება

$$w = \frac{e^2 + h^2}{8\pi} \approx e^2 = \left(\frac{Zq}{b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)^2. \quad (73,7)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ დისკოს ზედაპირის ერთეულზე, როგორც ფუძეზე დაყრდნობილი მისი ელემენტის მოცულობა $b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ სიდიდის

ტოლია, მაშინ ზედაპირის ერთეულოვან ფართზე მომავალი ელექტრომაგნიტური ენერგიისათვის (73,5)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} w' &= \left(\frac{Zq}{b^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \frac{Z^2 q^2}{b^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\text{ერგი}}{\text{სმ}^2}. \end{aligned} \quad (73,8)$$

ოადგან ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება არსებითად დაჯახების ხანგრძლიობის (73,4) განმავლობაში სწარმოებს. ამიტომ ატომგულიდან b მანძილზე წარმოშობილი, სიხშირეთა ω , $\omega + \Delta\omega$ ინტერვალში მოთავსებული ტალღების მიერ გადატანილი ენერგიის მისაღებად (73,7) გამოსახულება $\Delta\omega \Delta w'$ სიდიდეზე უნდა გადავანრავლოთ, მივიღებთ

$$w'' \Delta\omega = \frac{Z^2 q^2}{b^2 c} \Delta\omega. \quad (73,9)$$

1 სმ² ფართზე მომავალი, სიხშირეთა $\Delta\omega$ ინტერვალში გამოსხივებული ფოტონების რიცხვის მისაღებად (73,8) გამოსახულება ვაფყოთ ფოტონის ენერგიაზე, რომელიც $h\omega$ -ს ტოლია. თუ აგრეთვე გავითვალისწინებთ, რომ (73,4) ფორმულით განსაზღვრული w' მაქსიმალურ სიხშირეს წარმოადგენს, მაშინ ატომგულიდან b მანძილზე ფართის ერთეულზე მომავალი ფოტონების რიცხვისათვის მივიღებთ

$$N = \frac{Z^2 q^2 \Delta\omega}{b^2 c} \cdot \frac{1}{h\omega} = \begin{cases} \frac{Z^2 q^2 \Delta\omega}{chb^2 \omega}, & \text{როდესაც } \omega \leq \frac{c}{b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & \text{როდესაც } \omega > \frac{c}{b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (73,10)$$

როგორც ცნობილია, ყოველი ელექტრომაგნიტური ტალღა შეიძლება ფოტონების ნაკადის სახით წარმოვიდგინოთ. მაშასადამე, ატომგულის ელექტრომაგნიტური ველი იმ სისტემაში, სადაც ელექტრონი უძრავია, შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფოტონების ნაკადი. სათანადოთ, ამ ველის ტალღური პაკეტის ელექტრონზე გაფანტვის მოვლენა შეგვიძლია ექვივალენტური ფოტონთა ნაკადის გაფანტვის ცნობილ (§ 69) პროცესებს დაუჯავშნოთ. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ თავისუფალ ელექტრონზე ω სიხშირის მონოქრომატული ტალღის გაფანტვის ეფექტური კვეთის (69,11) ფორმულას, მაშინ b მანძილზე ω სიხშირის ფოტონთა გაფანტვის აქტების საშუალო რიცხვისათვის გვექნება

შეზღ. [ω სიხშირის ფოტონთა სიმკვრივე (1 სმ²)].

ამ უკანასკნელი გამოსახულებიდან, (73,10)-ს თანახმად, ω სიხშირის ფოტონების გაფანტვის აქტების რიცხვის, როგორც b მანძილის ფუნქციისათვის. მივიღებთ

$$\Delta n = -\frac{Z^2 q^2}{hc b^2} \frac{\Delta \omega}{\omega} \sigma_{\text{გომ.}} \quad (73,11)$$

თუ (73,11)-დან ტალღური პაკეტის მთელ ზედაპირზე ავიღებთ ინტეგრალს ($2\pi b db$ ელემენტით), მივიღებთ ω სიხშირის ფოტონების გაფანტვის აქტების სრულ რიცხვს

$$n = \sigma_{\text{გომ.}} \cdot \frac{(2\pi)^2 Z^2 q^2}{hc} \frac{\Delta \omega}{\omega} \int \frac{bdb}{b^2} = \sigma_{\text{გომ.}} \cdot \frac{Z^2 q^2 \Delta \omega}{ch \omega} l_n \frac{b_{\text{მაკ.}}}{b_{\text{მინ.}}}, \quad (73,12)$$

სადაც $b_{\text{მაკ.}}$ და $b_{\text{მინ.}}$ შემდეგი პირობებით განისაზღვრებიან:

1) (73,4)-ს თანახმად, b -ს იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც

$b_{\text{მაკ.}} = \frac{c}{\omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ სიდიდეს აღემატებიან ტალღურ პაკეტში შესაბამისი

ω' სიხშირის ტალღები აღარ გვექნება, 2) ატომგულიდან $b_{\text{მაკ.}} = \frac{a_0}{Z^{1/3}}$ მანძი-

ლებზე, სადაც a_0 წყალბადის ატომის პირველი ორბიტის რადიუსია, ელექტრონზე მომქმედი ველი წარმოადგენს ატომგულისა და ელექტრონების ველების სუპერპოზიციას, რაც მნიშვნელოვნად ცვლის ატომგულის ველს. რაც შეეხება $b_{\text{მინ.}}$ -ს, მისთვის, როგორც დაჯახების პარამეტრის შესაძლო მინიმალური მნიშვნელობისათვის, შეიძლება ავიღოთ ელექტრონის დე-ბროილის ტალღის სიგრძე; რომელიც რელატივისტური ელექტრონისათვის ელექტრონის კომპტონის ტალღის სიგრძის რიგისაა. მაშასადამე, $b_{\text{მინ.}} = \lambda_{\text{კომპ.}}$

ზემოაღნიშნული მეორე ფაქტორი პირველთან შედარებით საზოგადოთ ყოველთვის მცირეა. ხოლო თუ ატომგულის ველის ეკრანირების ეფექტს მთლიანად უგულვებელყოფთ, ე. ი. განვიხილავთ ელექტრონის დაჯახებას იზოლირებულ ატომგულთან, მაშინ (73,12) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$n = \sigma_{\text{გომ.}} \cdot \frac{(2\pi)^2 Z^2 q^2}{hc} \frac{\Delta \omega}{\omega} l_n \frac{a_0}{\lambda_{\text{კომპ.}} Z^{1/3}} \approx \frac{4\pi^2 Z^2 q^2}{hc} \sigma_{\text{გომ.}} \cdot l_n \frac{183}{Z^{1/3}}. \quad (73,13)$$

(73,13)-ში ω წარმოადგენს ტალღური პაკეტის შემადგენელი მონოქრომატული ტალღის სიხშირეს იმ სისტემაში, სადაც ელექტრონი უძრავია. გადავიღოთ ლაბორატორულ სისტემაზე, რისთვისაც გამოვიყენოთ ტალღის სიხშირის გარდაქმნის კანონი (57,16); რომლის თანახმადაც

$$\omega^0 = \omega \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (73,14)$$

ამ უკანასკნელიდან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება

$$\frac{\Delta\omega^\circ}{\omega^\circ} \simeq \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (73,15)$$

თუ (73,15) დამოკიდებულებას გამოვიყენებთ, მაშინ (73,13)-დან კოორდინატა ლაბორატორიულ სისტემაში ω° სიხშირის ფოტონების ატომგულზე გაფანტვის ეფექტური კვეთისათვის მივიღებთ

$$n = \frac{4Z^2}{173} \frac{\omega\Delta\omega^\circ}{\omega^\circ} x_0^2 l_n \frac{183}{Z^{1/2}} \quad (73,16)$$

სადაც: x_0 ელექტრონის რადიუსია, ხოლო $\frac{1}{137} = \frac{2\pi e^2}{hc}$ მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს.

თუ (73,15) გამოსახულებას $h\omega^\circ$ — ფოტონის ენერგიაზე გავამრავლებთ, მივიღებთ დაჯახების დროს ელექტრონის მიერ გამოსხივებული ω° სიხშირის ფოტონის ენერგიას. ეს უკანასკნელი ელექტრონის სისტემაში ω° სიხშირის ფოტონების მიერ ელექტრონზე გადაცემულ ენერგიას წარმოადგენს. იმისათვის, რომ ელექტრონის სისტემაში ტალღური პაკეტის ენერგია, ანდა ლაბორატორულ სისტემაში ელექტრონის მიერ გასხივებული ენერგიის რაოდენობა მივიღოთ, $n \cdot h\omega$ სიდიდეები უნდა ავჯამოთ ტალღური პაკეტის შემადგენელი მონოქრომატული ტალღების სიხშირეების მიხედვით. რადგან ამ ტალღების სიხშირეები ერთმანეთთან ძალიან ახლოს არიან, ამიტომ აჯამვის მოქმედება შეიძლება ინტეგრაციით შევცვალოთ.

წინასწარ გამოვარკვიოთ როგორი უნდა იყოს საინტეგრაციო საზღვრები. ცხადია, რომ სიხშირის ქვედა საზღვარი განისაზღვრება ელექტრონის უძრავობის ენერგიით

$$\omega_{\text{min}} = \frac{m'c^2}{h} \quad (73,17)$$

მართლაც, ელექტრონი, რომლის ენერგია $m'c^2$ — თავისი საკუთარი უძრავობის ენერგიას არ აღემატება, ფოტონებს ვერ გამოასხივებს.

ω_{max} -ს მნიშვნელობა კი მოცემულია (73,4) ფორმულით, რომლიდანაც, (19,13) ფორმულის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ

$$\omega_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}}{h} \quad (73,18)$$

ამგვარად, ატომგულთან დაჯახების (დამუხრუქების) პროცესში ელექტრონის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის ენერგიისათვის, რომელიც ელექტრონის ენერგიის შემცირების სიდიდის ტოლია, გვექნება

$$-d\mathcal{E} = \frac{4Z^2}{137} \mathcal{E}_0^2 x_0^2 l_n \frac{183}{Z^{1/2}}, \quad (73,18)$$

სადაც \mathcal{L} წარმოადგენს დაჯახებამდე ელექტრონის კინეტიკურ ენერჯიას. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ზემოდ ჩატარებულ გამოთვლებში ჩვენ გამოვიყენეთ ტომსონის ფორმულა (69,11), რომელიც სამართლიანია არარელატივისტური სიჩქარეებისათვის. დიდი სიჩქარეების შემთხვევებში, როდესაც ელექტრონის კინეტიკური ენერჯია mc^2 — უძრავობის ენერჯიის რივისაა, ანდა მას აღემატება, (73,19) ფორმულა გამოუსადეგარი ხდება.

(73,19)-დან მიიღება ნივთიერებაში გავლის დროს მანძილის ერთეულზე ატომგულთან დაჯახებათა პროცენტებში ელექტრონის ენერჯიის დანაკარგის — დამუხრუჭებითი გამოსხივების გამომსახველი ფორმულა

$$-\frac{d\mathcal{L}}{dx} = \frac{4Z^2}{137} N_{\mathcal{L}} x^2 \sigma'_{\text{el}} \frac{183}{Z^{1/2}}, \quad (73,20)$$

სადაც N წარმოადგენს ატომგულების რიცხვს 1 სმ²-ში.

(73,20) დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ ნივთიერებაში გავლისას მანძილის ერთეულზე დამუხრუჭული ნაწილაკის (ელექტრონის) ენერჯიის დანაკარგი დამოკიდებულია აღებულ ნივთიერების რიგით ნომერზე (Z^2) და ნაწილაკის საწყის ენერჯიაზე.

დამუხრუჭებით, ანუ რადიაციულ გამოსხივებას ჩვენ ვხვდებით ბუნების მრავალ მოვლენაში. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ამ პროცესების როლი კოსმოსური სხივების ფიზიკაში, სადაც საქმე გვაქვს ძალიან დიდი ენერჯიის ნაწილაკებთან.

§ 74. ატომური ელემენტების ატომური მასების მდგრადობა

განვიხილოთ ატომგულის ველში ერთ-ერთი ატომური ელექტრონის მოძრაობა. რადგან ატომგულის მუხტია Zq , ამიტომ მისი ელექტრული ველის პოტენციალი

$$\varphi = \frac{Zq}{x}, \quad (74,1)$$

ხოლო ატომგულისა და ელექტრონის ურთიერთქმედების ენერჯია, (44,6)-ს თანახმად,

$$W = -\frac{Zq^2}{x}. \quad (74,2)$$

(74,1) და (74,2) ფორმულებში x წარმოადგენს მანძილს ატომგულიდან ელექტრონამდე. სიმარტივის მიზნით ავიღოთ წყალბადის ატომი და შევისწავლოთ პროტონის ($Z=1$) ირგვლივ ელექტრონის მოძრაობა. რადგან პროტონის მასა 1840-ჯერ აღემატება ელექტრონის მასას, ამიტომ პირველი მიახლოებით პროტონი შეიძლება „უძრავად“ ჩავთვალოთ.¹

წყალბადის ატომში ელექტრონის მოძრაობის შესასწავლად გამოვიყენოთ (19,17) და (25,18) ფორმულები, რომელთა მიხედვით პროტონის ელექტრო-

¹ საზოგადოთ კი წყალბადის ატომში პროტონ-ელექტრონის სისტემის სიმძიმის ცენტრია ირგვლივ პროტონის მოძრაობის უზუსტებელყოფა არ შეიძლება.

სტატიკურ ველში ($e = -\text{grad } \varphi$, $h=0$, $A=0$) ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q \text{grad } \varphi, \quad (74,3)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ პროტონის ცენტრალური სიმეტრიის ველში $\text{grad } \varphi$ მიმართულია x -ის გასწვრივ, მაშინ (74,3) განტოლების x — რადიუს-ვექტორზე ვექტორული გადამრავლების შედეგად გვექნება

$$\left[x, \frac{d}{dt} \left(\frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{m' [x, v]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) - \frac{m \left[\frac{dx}{dt}, v \right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0, \quad (74,5)$$

(74,4)-ში მეორე შესაკრები ნულის ტოლია რადგანაც

$$\left[\frac{dx}{dt}, v \right] = [v, v] = 0. \quad (74,5)$$

(74,4)-დან გამომდინარეობს, რომ დამუხტული ნაწილაკის (ელექტრონის) ენერჯიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონებთან ერთად, ადგილი აქვს იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს. მაშასადამე, ელექტრონის იმპულსის მომენტი

$$M = \frac{m' [x, v]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{Const} \quad (74,6)$$

წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალს. მისი სიდიდე და მიმართულება უცვლელია. რადგან, (74,6)-ს თანახმად, ელექტრონი მუდამ ერთსა და იგივე სიბრტყეში მოძრაობს, ამიტომ საკმარისია მისი მოძრაობა ამ სიბრტყეში შევისწავლოთ.

თუ ელექტრონის სიჩქარეს შემდეგი ცნობილი ფორმულების საშუალებით (x, θ) პოლარ კოორდინატებში გამოვსახავთ

$$v = \frac{dx}{dt} \frac{x}{x} + x \frac{d\theta}{dt} \tau + \dot{x} n + x \dot{\tau} \tau. \quad (74,7)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2, \quad (74,8)$$

სადაც τ წარმოადგენს x -ის პერპენდიკულარულ ერთეულოვან ვექტორს, მაშინ (74,6) ფორმულა მოგვცემს

$$|M| = \frac{m'x^2\dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M_\theta = \text{Const.} \quad (74,9)$$

(74,9) ფორმულით განისაზღვრება ელექტრონის იმპულსის მხები მდგენელი.

რადიალური მდგენელის $\left(P_r = \frac{m'x\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$ მოსაზნახვად გამოვიყენოთ

გარეშე — პროტონის ელექტრულ ველში, ელექტრონის სრულ ენერჯიასა და იმპულსს შორის ცნობილი (23,14) დამოკიდებულება, რომელიც, (74,2)-ს თანახმად, მოგვცემს

$$H = c \sqrt{p^2 + m'^2 c^2} - \frac{q^2}{x}, \quad (74,10)$$

ანდა

$$p^2 = \frac{1}{c^2} \left(H + \frac{q^2}{x} \right)^2 - m'^2 c^4. \quad (74,11)$$

თუ ახლა (74,8) და (74,9) დამოკიდებულებებს გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$p^2 = \frac{m'^2 x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m'^2 (v^2 - x^2 \dot{\theta}^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{H^2}{c^2} - m'^2 c^2 + \frac{2Hq^2}{c^2 x} + \left(\frac{q^4}{c^2} - \frac{M^2 \theta}{m'^2} \right) \frac{1}{x^2}. \quad (74,12)$$

ანუ

$$p_x = \frac{m'x\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{A}{x^2} + \frac{2B}{x} + D}, \quad (74,13)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები:

$$A = q^4 - \frac{M^2 \theta}{m'^2} \cdot c^2, \quad B = Hq^2, \quad D = H^2 - m'^2 c^4. \quad (74,14)$$

რადგან ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში ნაწილაკის სრული ენერჯია ყოველთვის დადებითია ($H > 0$), ამიტომ (74,14)-ში $B > 0$.

თუ (74,9) ფორმულას გამოვიყენებთ, მაშინ (74,13) შეიძლება შემდეგ სახეზე დავიყვანოთ

$$\frac{dx}{d\theta} = \pm \frac{x^2}{cM_\theta} \sqrt{\frac{A}{x^2} + \frac{2B}{x} + D},$$

საიდანაც ინტეგრაციის გზით მივიღებთ

$$\theta = \theta_0 + cM_\theta \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{A}{x^2} + \frac{2B}{x} + D}}. \quad (74,15)$$

(74,15) განტოლებით განისაზღვრება ელექტრონის მოძრაობის ტრაექტორია, რომლის სახე არსებითად A , B და D კოეფიციენტებზეა დამოკიდებული.

განვიხილოთ A და D კოეფიციენტების დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობები და გამოვარკვიოთ შესაბამის მოძრაობათა ტიპები.

რადგან ელექტრონი ერთსა და იგივე სიბრტყეში მოძრაობს, ანიტომ მისი ტრაექტორია მოთავსებული იქნება (x, θ) სიბრტყის იმ ნაწილში, სადაც (74,15)-ის ფესვქვეშა გამოსახულება დადებითია.

როდესაც x მანძილი უსასრულოდ იზრდება ($x \rightarrow \infty$), მაშინ ფესვქვეშა გამოსახულებაში მხოლოდ D წევრი დაგვრჩება. მაშასადამე, უსასრულობანი ნიჰავალი ნაწილაკის (ელექტრონის) ტრაექტორიისათვის დაცული უნდა იყოს პირობა

$$D = H^2 - m'^2 c^4 > 0. \quad (74.16)$$

პირიქით, ელექტრონის ტრაექტორია ატომგულიდან სასრულო მანძილზე მოთავსებული ჩაკეტილი მრუდით წარმოიდგინება იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$D = H^2 - m'^2 c^4 < 0. \quad (74.17)$$

რადგან H წარმოადგენს ნაწილაკის სრულ ენერგიას $m'c^2$ — „უძრაობის“ ენერჯიის ჩათვლით, ამიტომ (74,17) პირობა შეიძლება აგრეთვე შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\bar{H} = H - m'c^2 < 0. \quad (74.18)$$

როგორც ცნობილია, პირველი ტიპის (74,16) ტრაექტორიებს ჰიპერბოლები წარმოადგენენ, რომლებიც ჩვენთვის საინტერესო არ არიან; ამიტომ გადავიდეთ მეორე ტიპის (74,17) — კეპლერის მოძრაობის ორბიტების მსგავსი ტრაექტორიების განხილვაზე. წინასწარ გამოვარკვიოთ A -ს ნიშანი, რისთვისაც (74,15)-ში ფესვქვეშა გამოსახულებაში x მივასწრაფოთ ნულისაკენ. როდესაც $x \rightarrow 0$, მაშინ, იმის გამო რომ ფესვქვეშა გამოსახულება დადებითი უნდა იყოს, ელექტრონის შესაძლო რეალური ტრაექტორიისათვის გვექნება

$$A > 0. \quad (74.19)$$

თუ დაცულია (74,19) პირობა, მაშინ ელექტრონმა შეიძლება ატომგულზე გაიაროს. ე. ი. ის ატომგულს დაეჯახოს. ზომიერფელდმა შეისწავლა მოძრაობა $A > 0$ პირობებში და გამოარკვია, რომ (74,19) პირობას ადგილი აქვს მხოლოდ ისეთი ატომისათვის, რომელთა რიგითი ნომერი აღემატება 137-ს. მაგრამ, რადგან $Z > 137$ რიგითი ნომრის მქონე ელემენტები ბუნებაში არა გვხვდებიან, ამიტომ დღემდე ცნობილი ელემენტების ატომებში ატომგულზე გამავალი ელექტრონების ორბიტები არ შეიძლება არსებობდნენ. ამავე თვალსაზრისით შეიძლება ავხსნათ $Z > 92$ ელემენტების ატომების, რომლებიც ხელოვნურად მიიღებიან. არამდგრადობის თვისება. ამგვარად, ჩვენთვის მნიშვნელოვანია ელექტრონის ისეთი მოძრაობები, რომლებშიც განიხილული იქნება ატომგულთან ელექტრონის დაჯახების პროცესის შესაძლებლობა, ე. ი. A კოეფიციენტს უნდა ჰქონდეს უარყოფითი მნიშვნელობები

$$A < 0. \quad (74.20)$$

როდესაც ადგილი აქვს (74,17) და (74,20) პირობებს, მაშინ ფესვებზე გამო-
სახულება დადებითი იქნება

$$\frac{A}{x^2} + \frac{2A}{x} + D = 0$$

განტოლების x_1 და x_2 ფესვების მნიშვნელობათა შორის მოთავსებული x მან-
ძილებისათვის.

A , B და D კოეფიციენტების ნიშნების დადგენის შემდეგ შეიძლება
შეუდგეთ (74,15) მოძრაობის განტოლების ინტეგრაციას.

თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადს

$$y = \frac{1}{x}, \quad dy = -\frac{dx}{x^2}, \quad (74,21)$$

მაშინ (74,15) შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\theta = \theta_0 - M_\theta \cdot c \int \frac{dy}{\sqrt{Ay^2 + 2By + D}}. \quad (74,22)$$

უკანასკნელ ფორმულაში შემავალი ინტეგრალის გამოსათვლელად გავითვა-
ლისწინოთ (74,17) და (74,20) პირობები და მოვახდინოთ ჩასმა

$$r = \frac{-A}{\sqrt{B^2 - 4AD}} \left(y + \frac{B}{A} \right), \quad (74,23)$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt{A^2 + 2B_1 + D}} &= \int \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-A}} \arccos r + \text{Const}, \end{aligned} \quad (74,24)$$

საიდანაც

$$r = \cos \frac{\sqrt{-A}}{cM_\theta} (\theta - \theta'_0). \quad (74,25)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\gamma = \frac{\sqrt{-A}}{cM_\theta} = \sqrt{1 - \frac{H^2}{cM_\theta}}, \quad (74,26)$$

მაშინ (74,21), (74,23) და (74,25) ფორმულების გამოყენების გზით მივიღებთ

$$\frac{1}{x} = C + \varepsilon \cos \gamma (\theta - \theta'_0), \quad (74,27)$$

სადაც C , ε და θ'_0 მუდმივ სიდიდეებს წარმოადგენენ.

შევისწავლოთ (74,27) განტოლებით მოცემული მოძრაობის სახე. ამ
განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{1}{x}$ სიდიდე იცვლება ($C + \varepsilon$, $C - \varepsilon$)

შუალედში $\left(C - \varepsilon \leq \frac{1}{x} \leq C + \varepsilon \right)$, სახელდობრ

$$x_1 = \frac{1}{C + \varepsilon}, \quad x_2 = \frac{1}{C - \varepsilon}. \quad (74,28)$$

(74,27) წარმოადგენს კლასიკური ფიზიკის ელიფსური ორბიტის განტოლების განზოგადებას. ეს განზოგადება იმაში მდგომარეობს, რომ ერთის მხრივ $\gamma \neq 1$, ხოლო მეორე მხრივ ციზ-ის ნიშნის ქვეშ, მ-ს ნაცვლად, $\gamma \cdot \theta$ ნამრაველი გვაქვს. კლასიკურ ელიფსზე გადასასვლელად (74,26)-ში უნდა გადავიღოთ ზღვარზე. როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. რაც შეეხება γ მაჩრავლს, (74,27) ფორმულაში მისი შემოკრა გამოწვეულია რელატივისტური შესწორებით. (74,11) დამოკიდებულებების გამოყენება ნიშნავს, გარდა ჩვეულებრივი კულონური ძალებისა, ნანდილის კების უკუპროპორციული დამატებითი ძალის შემოღებას. ამ უკანასკნელი ძალის გავლენით მოძრაობა კარგავეს პერიოდულ ხასიათს. მართლაც, როდესაც (74,27)-ში θ კუთხე 0-დან 2π -მდე იცვლება, ე. ი. ერთი სრული შემობრუნების შედეგად, x რადიუსვექტორის სიდიდე თავის პირვანდელ მნიშვნელობას არ უბრუნდება. რადიუსვექტორის პირვანდელი სიდიდის აღდგენა მოხდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც θ შეიცვლება

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\gamma} \quad (74,29)$$

კუთხეზე.

ამგვარად, ატომგულის ირგვლივ ელექტრონის მოძრაობა უნდა წარმოვიდგინოთ როგორც ბრუნვა ელიფსზე, რომელიც თავისავე სიბრტყეში ბრუნავს ელექტრონის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ელიფსის ამ დამატებით ბრუნავს პრეცესია ეწოდება.

ელიფსზე ელექტრონის ერთჯერ შემოვლის დროის განმავლობაში ელიფსის შემობრუნების კუთხის განოსათვლელად შევადგინოთ სხვაობა

$$\Delta\theta - 2\pi = 2\pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{H^2}{c^2 M^2 g}}} - 1 \right\},$$

რომელიც მცირე ენერგიების შემთხვევაში ($H^2 \ll c^2 M^2 g$), მოგვცემს

$$\Delta\theta - 2\pi = \frac{\pi H^2}{c^2 M^2 g}. \quad (74,30)$$

ელიფსის დამატებით ბრუნვით მოძრაობას გარკვეული ენერგია შეესაბამება, რაც მნიშვნელოვნად ცვლის ელექტრონის მოძრაობის ენერგიის სიდიდეს. ეს გარემოება წარმოადგენს წყალბადის ატომის სპექტრალური თერმების გახლეჩის ერთ-ერთ მიზეზს.

შემოდ ჩატარებული გამოთვლები; რომლებიც დამყარებული არიან ელექტრონის ენერგიისა და იმპულსის რელატივისტურ კავშირზე, საკმაო მიხედვით საშუალებას იძლევა აეხსნათ წყალბადის ატომის სპექტრალური კანონზომიერება.

მიღებული შედეგები შეიძლება განვაზოგადოთ მძიმე ელემენტების ატომების შემთხვევებზე, რისთვისაც საჭიროა (74,10)-ში q^2 შევცვალოთ Zq^2 -ით და აგრეთვე გავითვალისწინოთ ატომის ელექტრონების მიერ ატომგულის ველის ეკრანირების ეფექტი. რადგან ეს გამოთვლები დიდ სიძნელეებთან არიან დაკავშირებული, ამიტომ აქ მათ არ განვიხილავთ.

§ 75. წახეხაზე თანაბარი სიჩაპრით მბრუნავი ელექტრონის გამოსხივება

ცნობილია, რომ ატომის აღნაგობის გაორკვევის საქმეში უდიდესი როლი შეასრულა დიდი ენერჯიის მქონე α — ნაწილაკებმა, რომლებსაც რადიაქტიური ელემენტების ატომები ასხივებენ. ატომის სტრუქტურის დადგენა მოსახერხებელი გახდა მას შემდეგ რაც ექსპერიმენტატორის განკარგულებაში აღმოჩნდა ყუმბარები — α ნაწილაკები, რომლებიც ნივთიერების თხელ ფენებში თითქმის თავისუფლად გადიან. ამ მხრივ საკმარისია გავიხსენოთ 1909 — 1911 წლებში რეზერფორდის მიერ ჩატარებული ცდები, რომლებმაც საფუძველი ჩაუყარეს ატომის პლანეტარულ მოდელს. ასევე, დიდი ენერჯიის მქონე ელექტრომაგნიტური ველის ქვანტები (რენტგენისა და γ — სხივები), გადიან რა ნივთიერების თხელ ფენაში, საშუალებას გვაძლევენ ნივთიერების აგებულება გამოვარკვიოთ. სათანადოთ, ატომგულის აღნაგობისა და შეიადგენელ ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედების ძალების ბუნების გამოსარკვევად აუცილებელი შეიქნა ისეთი ძალიან დიდი ენერჯიების ნაწილაკების მიღება, რომლებიც ადვილად შეაღწევიდნენ ატომგულში და მის დაშლა-გარდაქმნის პროცესებს გამოიწვევიდნენ. რადგან ბუნებრივი რადიაქტიური ელემენტებიდან გამოტყუორცნილი α ნაწილაკების ენერჯიები (4 — 6) MeV ატომგულის დასაშლელად საკმარისი არ აღმოჩნდება, ამიტომ წამოიჭრა დამუხტული ნაწილაკებისათვის დიდი სიჩქარეების (ენერჯიების) ხელოვნურად მინიჭების ამოცანა; რისთვისაც მეცნიერებას ხელოვნური ამაჩქარებლების აგება მოუხდა. ასეთ ამაჩქარებელ ხელსაწყოებს ეკუთვნიან: ციკლოტრონი, ბეტატრონი, სინხროტონი, ბევატრონი და სხვა. მათი საშუალებითა დამუხტული ნაწილაკის ენერჯია შეიძლება რამდენიმე ასეულ და ათასეულ MeV-მდე გავზარდოთ. მაგალითად, ამჟამად α ნაწილაკის ენერჯიისათვის მიღწეულია 1000 MeV, ხოლო ელექტრონებისათვის 200 MeV ენერჯია.

აღნიშნულ ხელსაწყოთა დეტალური აღწერილობა ჩვენს მიზანს არ შეადგენს, შევხებით მხოლოდ მათი მოქმედების საერთო პრინციპებსა და სათანადო მოვლენათა თეორიულ მხარეებს.

§ 29-ში ჩვენ გამოვარკვიეთ, რომ ერთგვაროვან გარეშე ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია განისაზღვრება e და h ვექტორების მნიშვნელობათა მიხედვით. ამ უკანასკნელთა სათანადო შერჩევით შესაძლებელია მუხტს საჭირო სიჩქარე მივანიჭოთ და ვაიძულოთ იმოძრაოს გარკვეული სახის მრუდზე. სახელდობრ, ელექტრული ველის მოქმედებით მუხტი შეიძლება ავაჩქაროთ, ხოლო მაგნიტური ველის

გაეღწიოთ ვაბრუნოთ წრეხაზზე, რომლის რადიუსი, (27,7)-ს თანახმად, განისაზღვრება ფორმულით

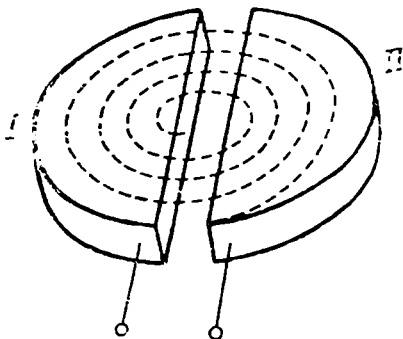
$$r = \frac{m'c^2 v}{qh \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (75,1)$$

ხოლო კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r} = \frac{qh \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m'c}. \quad (75,2)$$

უმარტივესი ამაჩქარებელი — ციკლოტრონი წარმოადგენს შუაზე გაპრილ ბრტყელ ცილინდრული ფორმის მეტალის ყუთს (ნახ. 47), რომელსაც ათავსებენ მისი ღერძის პარალელურ მაგნიტურ ველში, ხოლო ნახევრებს დიდი სიხშირის გენერატორის პოლუსებთან აერთებენ. თუ ამ ყუთის შიგნით და მუხტულ ნაწილაკს შევითანთ,

მაშინ ის მიიზიდება ერთ-ერთი ნახევრის — დუანტის მიერ. დუანტების სიღრუეში მუხტს წრეხაზზე ამოძრავებს მაგნიტური ველი. თუ ელექტრული ველის სიხშირეს ისეთნაირად შევარჩევთ, რომ ის (75,2) განტოლებით განსაზღვრულ ბრუნვის პერიოდის ნახევარს $\left(\frac{T}{2}\right)$ გაუტოლდეს, მა-



ნახ. 47.

შინ პირველი დუანტიდან ყოველი გასვლისას ელექტრული ველი მუხტს ააჩქარებს. ამ გზით შესაძ-

ლებელია დამუხტული ნაწილაკის სიჩქარე (ენერგია) თანდათანობით გაზრდით.

მეორე ხელსაწყოს, რომელიც ელექტრონების ასაჩქარებლად იქნა აგებული, ბეტატრონი ეწოდება. მისი აგებულების პრინციპი დამყარებულია დროში მაგნიტური ველის ცვალებადობით გამოწვეული გრიგალური ელექტრული ველის მოქმედებაზე. მაგნიტური ველი, გარდა იმისა რომ თავისი ცვალებადობის გამო მუხტის ამაჩქარებელ ელექტრულ ველს წარმოშობს, ისეთი უნდა იყოს, რომ ის აიძულებდეს აჩქარებულ ელექტრონებს იმოძრაონ გარკვეულ სტაბილურ ორბიტზე.

თუ მაგნიტურ ველს ღერძული სიმეტრია ექნება, მაშინ (34,9) განტოლების თანახმად, მისი ცვალებადობით გამოწვეული გრიგალური ელექტრული ველის ძალხაზები კონცენტრიული წრეხაზებით გამოისახებიან, რომელთა ცენტრები სიმეტრიის ღერძებზე იქნებიან მოთავსებული. ბეტატრონი შიგნითაქსიალური მაგნიტური ველის დროში ცვლილების სიდიდის საშუალებით მიიღება წრეხაზზე ელექტრონის ერთჯერ შემოტარების დროს გრიგალური

ელექტრული ველის მიერ შესრულებული მუშაობა. მართლაც, (34,9) განტოლების ორივე მხარის ელექტრონის q მუხტზე გამრავლების შედეგად მივიღებთ იმ მუშაობას, რომელსაც ელექტრული ველი ასრულებს. ეს მუშაობა წრეხაზზე ერთჯერ შემოტარების დროს ელექტრონის მიერ შეძენილი ენერჯიის სიდიდის ტოლია

$$A = -\frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int (h, dx^2) = q \oint (e dx) = 2\pi r e \cdot q. \quad (75,3)$$

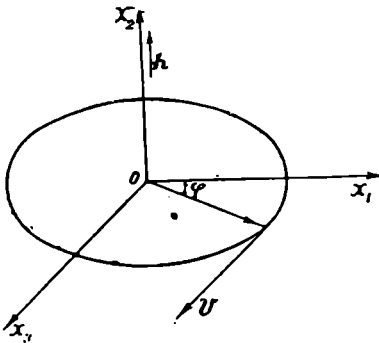
მაშასადამე, წრეხაზზე ყოველი შემოტარების შედეგად ელექტრონის ენერჯია მატულობს (75,3) სიდიდით. თუ ელექტრონი n -ჯერ შემობრუნდება, მაშინ მისი ენერჯია $n \cdot 2\pi r q e$ სიდიდით გაიზარდება.

განვიხილოთ აქსიალური სიმეტრიის პერიოდული მაგნიტური ველი $h(0, h, 0)$, სადაც $h = h(r) \sin \omega t$. ამ ველისათვის, (75,3) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$e = -\frac{1}{2\pi r c} \frac{\partial}{\partial t} \int (h, dx^2) = \frac{r}{2c} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (75,4)$$

სადაც \bar{h} საინტეგრაციო ზედაპირზე გასაშუალოებულ მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორის სიდიდეს წარმოადგენს.

ციკლოტრონის მიმართ ბეტატრონის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ მისი საშუალებით ელექტრონის ენერჯია, მის საკუთარ $m'c^2$ ენერჯიასთან შედარებით, შეიძლება ძალიან დიდი გავხადოთ, მაშინ როდესაც ციკლოტრონში ელექტრონის მიერ შეძენილმა ენერჯიამ არ შეიძლება $m'c^2$ სიდიდეს გადააქარბოს. ეს უკანასკნელი გარემოება სიჩქარის მიხედვით მასის ზრდის ეფექტითაა გამოწვეული. მიუხედავად აღნიშნული უპირატესობისა, ბეტატრონში მოქმედებს სხვა მნიშვნელოვანი ფაქტორი, რომელიც საზღვარს უდებს ელექტრონის ენერჯიის დაუსრულებელი ზრდის პროცესს. გამოვარკვიოთ ელექტრონის ენერჯიის შესაძლო მნიშვნელობათა შემოსაზღვრულობის მიზეზი. რადგან ამჩქარებელში ელექტრონი აჩქარებულად მოძრაობს, ამიტომ ის ელექტრომაგნიტურ ტალღებს ასხივებს. სიჩქარის ზრდასთან ერთად,



ნახ. 48.

(59.10)-ს თანახმად, ელექტრონის ენერჯიის დანაკარგიც მატულობს, ამიტომ ელექტრონის ენერჯიის ზრდის პროცესი შეწყდება მაშინ, როდესაც ამჩქარებლის ველის მუშაობის ხარჯზე შეძენილი ენერჯია ამავე დროში გასხივებული ენერჯიის რაოდენობას გაუტოლდება. შესაძლებელია აგრეთვე, ამჩქარებელი ელექტრული ველის ფაზიდან ელექტრონის გამოვარდნის შედეგად, ამჩქარებლის ნორმალური მუშაობა დაიკარგოს. ამიტომ საჭიროა გამო-

ვიკლიოთ ამაჩქარებლის ნორმალური მუშაობის პირობები. ამ მიზნით გამოვარკვიოთ როგორია ელექტრონის მოძრაობაზე გამოსხივების გავლენა.

რადგან რელატივისტური ($v \sim c$) ელექტრონისათვის დროის ერთეულში გამოსხივებული ენერგია საკმაოდ დიდ მნიშვნელობებს აღწევს, ამიტომ ელექტრონის მოძრაობაზე გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის გავლენა (გამოსხივების ველის რეაქცია) არსებით როლს უნდა ასრულებდეს. თუ რეაქციის ძალის მოქმედებასაც გავითვალისწინებთ, მაშინ ამაჩქარებლის ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას. ოთხგანზომილებიან ფორმაში, შემდეგი სახე ექნება

$$m' \frac{dv_i}{dt'} = \frac{q}{c} F_{ik} v_k + F_{si}, \quad (75,5)$$

სადაც F_{si} ველის რეაქციის ოთხგანზომილებიან ძალას წარმოადგენს. F_{si} ოთხგანზომილებიანი ძალის გამოსახულების მოსანახავად გამოვიყენოთ პირობა, რომლის მიხედვით F_{si} 4 — ვექტორის პირველი სამი მდგენელი მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში უნდა გვაძლევდეს ველის რეაქციის (66,14) ძალას.

თუ F_{si} -ს შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ

$$F_{si} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^2} \frac{d^2 v_i}{dt'^2}, \quad (75,6)$$

მაშინ ამ უკანასკნელის პირველი სამი მდგენელი, მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში, მართლაც მოგვცემს (66,14) რეაქციის ძალას, მაგრამ, (75,6) არ აკმაყოფილებს (14,9) პირობას. იმისათვის რომ დაცული იყოს (14,9), ანუ

$$F_{si} v_i = 0 \quad (75,7)$$

პირობა, (75,6) განტოლების მარჯვენა მხარეს უნდა დაუმატოთ ისეთი წევრი, რომელიც არ შეცვლის (66,14) რეაქციის ძალის სიდიდეს. ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (75,7) პირობას დააკმაყოფილებს შემდეგი ოთხგანზომილებიანი ძალა

$$F_{si} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left(\frac{d^2 v_i}{dt'^2} + \frac{v_i v_k}{c^2} \frac{d^2 v_k}{dt'^2} \right). \quad (75,8)$$

მართლაც, თუ (14,3) პირობას გამოვიყენებთ, გვექნება

$$F_{si} v_i = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left\{ \frac{d^2 v_i}{dt'^2} v_i + \frac{v^2}{c^2} \left(v_k \frac{d^2 v_k}{dt'^2} \right) \right\} = 0.$$

ამგვარად, ბეტატრონში ელექტრონის მოძრაობის განტოლება (75,5) შენდებ სახეს მიიღებს

$$m' \frac{dv_i}{dt'} = \frac{q}{c} F_{ik} v_k + \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left\{ \frac{d^2 v_i}{dt'^2} + \frac{v_i}{c^2} \left(v_k \frac{d^2 v_k}{dt'^2} \right) \right\}. \quad (75,9)$$

თუ i ინდექსს მიეცემთ მნიშვნელობას $i=1, 2, 3$, მაშინ (75,9)-დან მივიღებთ ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას სამაგნეტიზმიდან ფორმაში:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = & q \left(e + \frac{1}{c} [v h] \right) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left\{ \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left(\left(v \frac{d^2 v}{dt^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{c^2} \frac{\left(v \frac{dv}{dt} \right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) + \frac{3}{c^2} \frac{dv}{dt} \left(v \frac{dv}{dt} \right) \right\} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (75,10)$$

$i=4$ მნიშვნელობისათვის კი გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & q(v, e) + \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left\{ \left(v, \frac{dv}{dt} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{c^2} \frac{\left(v, \frac{dv}{dt} \right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (75,11)$$

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ველის რეაქციის ძალის მოქმედებას, მაშინ (75,10)-დან დაგვრჩება

$$\frac{dp}{dt} = q \left(e + \frac{1}{c} [v h] \right). \quad (75,12)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გამოვიყენოთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ელექტრონზე მხოლოდ მუდმივი მაგნიტური ველი მოქმედებს ($e=0$), გვექნება

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{v}{c} h \right]; \quad (75,13)$$

საიდანაც

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{q}{m'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{1}{c} \frac{dv}{dt}, h \right] = \frac{q^2}{m'^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left[\left[\frac{v}{c} h \right] h \right]. \quad (75,14)$$

(75,13) და (75,14) გამოსახულებათა (75,11)-ში ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & \frac{2q^2}{3c^3} \left\{ \frac{v \left[\left[\frac{v}{c} h \right] h \right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2} \frac{q^2}{m'^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} = \\ & = - \frac{2q^2}{3c^3} \frac{q^2}{m'^2 c} \frac{[v h]^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (75,15)$$

(75,15) შეიძლება აგრეთვე შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = x_0^2 [\nu h]^2 \left(\frac{\mathcal{E}}{m'c^2} \right)^2, \quad (75,16)$$

სადაც $\mathcal{E} = \frac{m'c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, ხოლო $x_0 = \frac{q^2}{m'c^2}$ — ელექტრონის კლასიკური რადიუსია.

დღისია.

(75,16) ფორმულით განისაზღვრება ერთგვაროვან მუდმივ მაგნიტურ ველში მოძრავი ელექტრონის მიერ დროის ერთეულში გასხივებული ენერჯიის რაოდენობა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ელექტრონის სიჩქარე ველის დაძაბულობის ვექტორისა და აჩქარების პერპენდიკულარულია ($v \perp h, v \perp \frac{dv}{dt}$) და (75,2) ფორმულას გამოვიყენებთ, მაშინ (75,16)-დან მივიღებთ ერთი სრული შემობრუნების დროის განმავლობაში ელექტრონის მიერ გასხივებული ენერჯიის სიღრდეს

$$\Delta \mathcal{E}' = -\frac{4\pi}{3} \frac{r^2}{r} \left(\frac{\mathcal{E}}{m'c^2} \right)^4, \quad (75,17)$$

ხოლო მანძილის ერთეულზე გასხივებული ენერჯიისათვის კი გვექნება

$$\Delta \mathcal{E}' = -\frac{2}{3} x_0^2 \nu^2 \left(\frac{\mathcal{E}}{m'c^2} \right)^2. \quad (75,18)$$

(75,17) და (75,18) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ ბრუნვის პერიოდის (T) განმავლობაში გასხივებული ენერჯია ნაწილაკის (ელექტრონის) მასის მეოთხე ხარისხის უკუპროპორციულია, ხოლო მანძილის ერთეულზე კი — მასის კვადრატისა. (75,16) და (75,17) დამოკიდებულებათა საშუალებით ადვილად მოვნახავთ ენერჯიის იმ მაქსიმალურ მნიშვნელობას, რომელიც ბეტატრონის მაგნიტურ ველში შეიძლება შეიძინოს ელექტრონმა. ეს მაქსიმალური ენერჯია იმ პირობით განისაზღვრება, რომ ელექტრონის მიერ ბრუნვის პერიოდის განმავლობაში შეძენილი ენერჯია, ამავე დროში გასხივებული (75,17) ენერჯიის რაოდენობის ტოლი უნდა იყოს. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ერთი შემობრუნებისას ელექტრონის მიერ შეძენილი ენერჯია (75,3) ფორმულით განისაზღვრება, მაშინ ამ უკანასკნელში (75,4)-დან ϵ -ს მნიშვნელობის ჩასმისა და (75,17)-თან განტოლების გზით, მივიღებთ

$$\frac{r^3}{c} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{4}{3} \frac{q}{r} \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{მაქს.}}}{m'c^2} \right)^4,$$

საიდანაც, ელექტრონის ენერჯიათა შესაძლო მნიშვნელობების მაქსიმალურ სიღრდისათვის, გვექნება

$$\xi_{\text{მაკ.}} = m'c^2 \left(\frac{3r}{4qc} \right)^{1/4}. \quad (75,19)$$

ბეტატრონში ცალკეული ელექტრონის მოძრაობისა და გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღების სპექტრის შესასწავლად დაეუბრუნდეთ ისევ (65,9) განტოლებას. რადგან ჩვენს შემთხვევაში h მინიმალურია x_2 ღერძის გასწვრივ, ხოლო e მის პერპენდიკულარულ x_1Ox_3 სიბრტყეშია მოთავსებული (ნახ. 48), ამიტომ e -ს მხოლოდ ორი მდგენელი ექნება

$$e_1 = -\frac{x_3}{r} e, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = \frac{x_1}{r} e \quad (r = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}). \quad (75,20)$$

თუ (75,20) დამოკიდებულებებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (75,9)-დან მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} m' \frac{dv_1}{dt'} &= \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} e_1 - \frac{q}{c} \frac{dx_3}{dt'} h + \\ &+ \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^2} \left\{ \frac{d^2 v_1}{dt'^2} + \frac{v_1}{c} \left(v_k \frac{d^2 v_k}{dt'^2} \right) \right\} \\ m \frac{av_2}{dt'} &= \frac{qh}{c} \frac{dx_3}{dt'} + \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left\{ \frac{d^2 v_2}{dt'^2} + \frac{v_2}{c^2} \left(v_k \frac{d^2 v_k}{dt'^2} \right) \right\} \\ m' \frac{dv_2}{dt'} &= \frac{qe_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{qh}{c} \frac{dx_1}{dt'} + \\ &+ \frac{2q^2}{3c^3} \left\{ \frac{d^2 v_2}{dt'^2} + \frac{v_2}{c^2} \left(v_k \frac{d^2 v_k}{dt'^2} \right) \right\} \\ m' \frac{dv_3}{dt'} &= \frac{iq}{c} \left(e_1 \frac{dx_1}{dt'} + e_3 \frac{dx_3}{dt'} \right) + \\ &+ \frac{2q^2}{3c^3} \left\{ \frac{d^2 v_3}{dt'^2} + \frac{v_3}{c} \left(v_k \frac{d^2 v_k}{dt'^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (75,21)$$

ამ განტოლებათა მარჯვენა მხარეებში ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული განოსახლებები შეიძლება მნიშვნელოვნად გავამარტივოთ. მართლაც, თუ (14,3) და (14,9) დამოკიდებულებებს გამოვიყენებთ, გვექნება

$$v_k \frac{d^2 v_k}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \left(v_k \frac{dv_k}{dt'} \right) - \left(\frac{dv_k}{dt'} \right)^2 = -a^2_{ii}$$

რომლის ჩასმის შედეგად (75,21) განტოლებათა სისტემა სამგანზომილებიან ფორმაში შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{m'v_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = qe_1 - \frac{qh}{c} \frac{dx_3}{dt} + \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left\{ \frac{d^3x_1}{dt^3} \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{dx_1}{dt} \left[\left(\frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 - c^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \right\} \\
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{m'v_{x_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -\frac{qh}{c} \frac{dx_3}{dt} + \frac{2q^2}{3c^3} \left\{ \frac{d^3x_2}{dt^3} \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{dx_2}{dt} \left[\left(\frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 - c^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \right\} \\
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{m'v_{x_3}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = qe_3 + \frac{qh}{c} \frac{dx_1}{dt} + \frac{2q^2}{3c^3} \left\{ \frac{d^3x_3}{dt^3} \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{dx_3}{dt} \left[\left(\frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 - c^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \right\} \\
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{m'c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{q}{c} \left(\frac{dx_1}{dt} e_1 + \frac{dx_3}{dt} e_3 \right) + \\
 & \quad + \frac{2q^2}{3c^3} \left\{ \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{c} \left[\left(\frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 - c^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (75,22)$$

თუ (75,22) განტოლებათა სისტემის მეოთხე განტოლებაში უგულვებელყოფთ მეორე და მესამე რიგის წარმოებულებიან და $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ სიდიდის შემცველ წევრებს, როგორც მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეებს და დატოვებთ მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებიან და $\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ მამრავლის

შემცველ წევრებს, მაშინ დროის ერთეულში ელექტრონის სრული ენერჯიის ცვლილებისათვის გვექნება:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m'c^3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q(v, e) - \frac{2}{3} \frac{q^2(a)^2}{c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \quad (75,23)$$

(75,23)-დან გამომდინარეობს, რომ ბეტატრონში ელექტრონის ენერგია იზრდება მისი ამჩქარებელი ელექტრული ველის მუშაობის ხარჯზე, მაგრამ იმავე დროს შექმნილი ენერგიის $\frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}$ ნაწილს ელექტრონი

კარგავს გამოსხივების სახით.

განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც (75,23) გამოსახულება ნულის ტოლია, ე. ი. ელექტრონის მიერ შექმნილი და გასხივებული ენერგიების ალგებრული ჯამი უდრის ნულს. სათანადო წრეულ ორბიტზე, რომლის რადიუსია r_0 , ელექტრონს მაქსიმალური ენერგია ექნება, ხოლო მოძრაობის მდგომარეობა იქნება მდგრადი. მოძრაობის მდგრადობის, ანუ წონასწორული ორბიტის განმსაზღვრელი პირობის მისაღებად (75,12) განტოლება დავაგეგმილოთ $x_1 O x_2$ სისტემაზე, გვექნება

$$\frac{1}{r_0} \frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q}{c} h. \quad (75,24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = qe. \quad (75,25)$$

(75,24) — განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{q}{c} r_0 \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (75,26)$$

თუ (75,6) დამოკიდებულებას გამოვიყენებთ, მაშინ (75,26) და (75,25) ფორმულების შედარება მოგვცემს ბეტატრონში ელექტრონის წონასწორული ორბიტის განმსაზღვრელ ძირითად პირობას

$$h = \frac{1}{2} \bar{h}. \quad (75,27)$$

(75,27) პირობა იმის მაჩვენებელია, რომ წონასწორული ორბიტის ყოველ წერტილში მაგნიტური ველის დაძაბულობა (h) ორჯერ ნაკლები უნდა იყოს ვიდრე ორბიტით შემოსაზღვრული ფართის მიხედვით გასაშუალოებული ველის დაძაბულობა (\bar{h}).

§ 76. მნათი ელემენტრონი

წრეხაზზე მოძრავი ელექტრონის გამოსხივების სპექტრალური და კუთხური განაწილების შესასწავლად გამოვთვალოთ $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღების ინტენსიობა

$$dJ = \frac{c}{4\pi} [e, h] x^2 d\Omega. \quad (76,1)$$

თუ (76,1)-ში ჩავსვამთ e -ს მნიშვნელობას განსაზღვრულს (56,15)-დან და აგრეთვე გავითვალისწინებთ (56,16) დამოკიდებულებას, გვექნება

$$dJ = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left\{ \left[n \left[n - \frac{v}{c}, a \right] \right]^2 \frac{d\Omega}{\left(1 - \frac{(v, n)}{c} \right)^6} = \right. \\ \left. = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{a^2}{\left(1 - \frac{(n, v)}{c} \right)^4} + \frac{2(a, n)(a, v)}{c \left(1 - \frac{(n, v)}{c} \right)^5} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (n, a)^2}{\left(1 - \frac{(v, n)}{c} \right)^6} \right\}, \quad (76,2)$$

საიდანაც ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ ბრუნვის პერიოდის (T) განმავლობაში გასხივებული ენერჯიის საშუალო მნიშვნელობა

$$\overline{dJ} = \frac{q^2 d\Omega}{4\pi c^3 T} \int_0^T \left\{ \frac{a^2}{\left(1 - \frac{(v, n)}{c} \right)^3} + \frac{2(a, n)(a, v)}{c \left(1 - \frac{(v, n)}{c} \right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (a, n)^2}{\left(1 - \frac{(v, n)}{c} \right)^5} \right\} dt. \quad (76,3)$$

(76,3)-ში ინტეგრაცია უნდა ჩავუტარებოთ t' რეტარდირებული დროით, რადგან (76,2) გამოსახულება t' -ის ფუნქციას წარმოადგენს. მაგრამ, თუ ვისარგებლებთ $t' = t - \frac{(x, n)}{c}$, ანუ რაც იგივეა

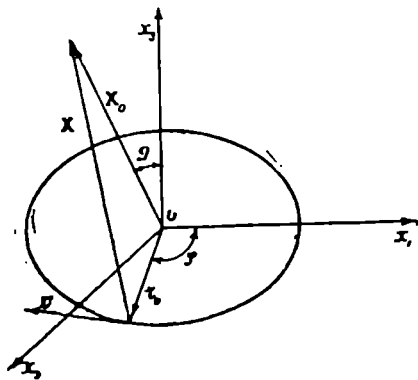
$$dt' = \left(1 - \frac{(v, n)}{c} \right) dt,$$

ტოლობით, მაშინ (76,2)-დან dt' -ით აღებული ინტეგრალი მოგვცემს (76,3)-ს.

(76,3) ფორმულით მოცემული გასხივებული ენერჯიის კუთხური განაწილების კანონის დასადგენად შემდეგნაირად მოვიქცეთ:

ავილოთ კოორდინატთა სისტემა, რომლის x_0, x_3 სიბრტყეში მოთავსებული იყოს ელექტრონის ორბიტა. ორბიტის ცენტრი მოვათავსოთ კოორდინატთა სათავეში. მაგნიტური ველის h ვექტორი მივმართოთ x_3 ღერძის

გასწვრივ, ხოლო გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის გავრცელების მიმართულებაზე (ერთეულოვან n — ვექტორზე) გაავატაროთ $x_2 O x_3$ სიბრტყე. (ნახ. 49).



ნახ. 49.

კუთხე, რომელსაც n ერთეულოვანი ვექტორი შეადგენს გარეშე მაგნიტური ველის დაძაბულობის h ვექტორთან აღენიშნოთ θ -თი. $\varphi = \omega_0 t$ იყოს ის კუთხე, რომელსაც ელექტრონის რადიუსვექტორი r მომენტში ადგენს x_1 ღერძთან. შესაბამისად, ელექტრონის ν სიჩქარესა და n — გასხივების მიმართულებას შორის შედგენილი კუთხის კოსინუსი შემდგენაირად განისაზღვრება.

$$\cos(n, \nu) = \sin \theta \cos \varphi. \quad (76,4)$$

ასევე, a — ცენტრისკენულ აჩქარებას და n -ს შორის შედგენილი კუთხის კოსინუსისათვის გვექნება

$$\cos(a, n) = \sin \theta \sin \varphi, \quad \cos(\nu, a) = 0, \quad (76,5)$$

თუ (76,4) და (76,5) გამოსახულებებს (76,3)-ში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \overline{dJ} &= \frac{q^2 a^3 d\Omega}{T \cdot 4\pi \cdot c^3 \omega_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{\nu}{c} \sin \theta \cos \varphi\right)^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\left(1 - \frac{\nu}{c} \sin \theta \cos \varphi\right)^5} \right\} d\varphi = \\ &= \frac{q^2 a^3 d\Omega}{8\pi^2 c^3} \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\nu}{c} - \sin \theta \cos \varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{\nu}{c} \sin \theta \cos \varphi\right)^5} d\varphi. \quad (76,6) \end{aligned}$$

სადაც გამოყენებულია ტოლობა $d\varphi = \omega_0 dt$.

მარტივი, მაგრამ საკმაოდ გრძელი გამოთვლების შედეგად, (76,6)-ს ინტეგრაცია გვაძლევს

$$\overline{dJ} = \frac{cq^2 \left(\frac{\nu}{c}\right)^4 d\Omega}{8\pi r^2} \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta - \frac{\nu^2}{4c^2} \left(1 + 3\frac{\nu^2}{c^2}\right) \sin^4 \theta}{\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{7/2}} \right\}. \quad (76,7)$$

თუ (76,7)-დან ავიღებთ რენტგენის d -ს ხეულოვანი კუთხით. მივიღებთ რხევის პერიოდის განმავლობაში ყველა მიმართულებით გასხივებული ენერჯიის საშუალო მნიშვნელობას. ადვილი შესამჩნევია, რომ ძალიან დიდი ენერჯიების შემთხვევაში ($\beta \gg m'c^2$, ე. ი. $v \approx c$) ადვილი აქვს გამოსხივების კონცენტრაციას ელექტრონის მოძრაობის მიმართულების ირგვლივ მცირე ხეულოვან კუთხეში, რომლის გაშლის კუთხე რადიანებში $\frac{m'c^2}{\beta}$ სიდიდის რიგისაა.

იმავე (76,7)-დან გამომდინარეობს, რომ მცირე სიჩქარეებისათვის ($v \ll c$) გამოსხივების კუთხური განაწილება $(1 + \cos^2\theta)$ მამრავლით განისაზღვრება. ამგვარად, რელატივისტური ელექტრონის გამოსხივება ძირითადად თავს იყრის ორბიტის სიბრტყეში — ტრაექტორიის ირგვლივ მცირე ხეულოვან კუთხეში. გადავიდეთ გამოსხივების სპექტრალური განაწილების შესწავლაზე.

როგორც § 75-ში გამოვარკვეეთ, ამჩქარებელში ელექტრონის ენერჯია $m'c^2$ -დან $\beta m'c^2$ -მდე იზრდება. სათანადოთ, (75,1)-ს მიხედვით, იზრდება მისი ორბიტის რადიუსი, ხოლო ბრუნვის სიხშირე, (75,2)-ს თანახმად, მნიშვნელოვნად მცირდება. მაშასადამე, პერიოდული მოძრაობის მდგომარეობაში მყოფი, ანუ $\omega = \frac{2\pi\nu}{T}$ წრიული სიხშირით რხევადი ელექტრონის მიერ გამოს-

ხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღების სიხშირეები $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ დიაპაზონში იქნებიან მოთავსებული. რადგან ჩვენს შემთხვევაში ელექტრონის მოძრაობა პერიოდულია, ამიტომ მისი ველის დამახასიათებელი სიდიდეები შეიძლება გავშალოთ ფურიეს მწკრივებად. თუ მოვნახავთ მაგალითად, ელექტრომაგნიტური ველის ვექტორპოტენციალის $A(\omega)$ — ფურიეს მდგენელს, მაშინ მისი საშუალებით ადვილად გამოვთვლით ველის დაძაბულობის ვექტორების ფურიეს $E(\omega)$ და $H(\omega)$ მდგენელებს.

დავუშვათ, რომ ელექტრონი მოძრაობს r_0 რადიუსთან წრეხაზზე, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული (ნახ. 50). $P(X_0, \theta, \varphi)$ დაკვირვების წერტილის რადიუს ვექტორები l მომენტში კოორდინატთა სათავესა და ელექტრონის მიმართ სათანადოთ აღვნიშნოთ X_0 და X -ით.

ვთქვათ, l' მომენტში ელექტრონი იმყოფება a წერტილში $a(r_0, \theta_1, \varphi_1)$. ამ წერტილის გეგმილი $x_1 O x_2$ სიბრტყეში იქნება $b(r_0 \sin \theta_1, r_0 \sin \theta_1 \cos \varphi_1, r_0 \sin \theta_1 \sin \varphi_1)$, ხოლო $P(X_0, \theta, \varphi)$ წერტილის გეგმილი $x_1 O x_2$ სიბრტყეზე — $c(X_0 \sin \theta \cos \varphi, X_0 \sin \theta \sin \varphi)$.

თუ $x_1 O x_2$ სიბრტყეზე r_0 და X_0 ვექტორების გეგმილებს შორის კუთხეს აღვნიშნავთ χ -თი, ხოლო $x_1 O x_2$ სიბრტყეზე ელექტრონის სიჩქარისა და X_0 — ვექტორის გეგმილებს შორის შედგენილ კუთხეს — α -თი, მაშინ ადვილად მივიღებთ (ნახ. 50)-ზე მოცემულ კუთხეთა შორის შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\alpha = \chi + \frac{\pi}{2}, \quad \chi = \omega l - \varphi_1 = \varphi - \varphi_1; \quad (\varphi = \omega l). \quad (76,8)$$

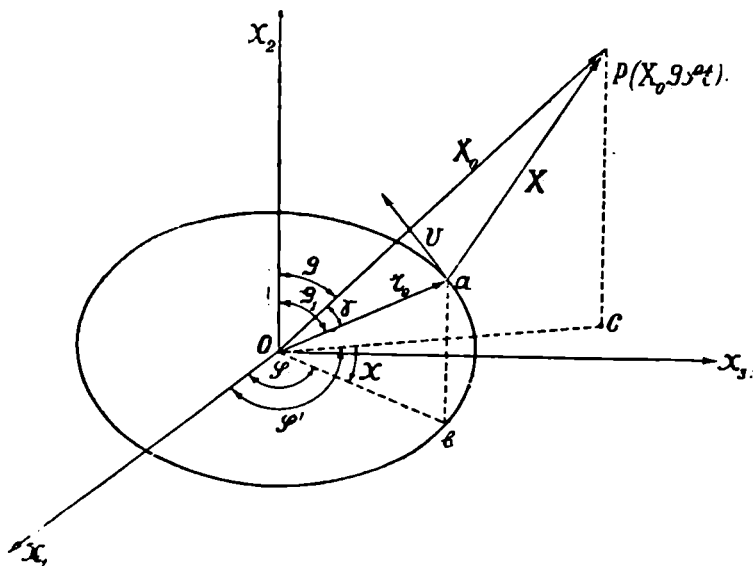
r_0 რადიუსიან წრეხაზზე მოძრავი ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველის ვექტორპოტენციალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (54,14) ფორმულა, გვექნება

$$A = \frac{q}{c} \int \frac{v}{X} \delta \left(t' - t + \frac{X}{c} \right) dt'. \quad (76,9)$$

რადგან ამოცანას სფერული სიმეტრია ახასიათებს, ამიტომ უმჯობესია X მანძილი სფერულ კოორდინატებში გამოვსახოთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} X &= [X_0^2 - 2(X_0, r_0) + r_0^2]^{1/2} = X_0 \left\{ 1 - 2 \frac{r_0}{X_0} \sin \vartheta \cos \chi + \frac{r_0^2}{X_0^2} \right\}^{1/2} \approx \\ &\approx X_0 - r_0 \sin \vartheta \cos \chi, \end{aligned} \quad (76,10)$$

სადაც გამოყენებულია პირობა $r_0 \ll X_0$.



ნახ. 50.

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ ელექტრონის მოძრაობა პერიოდულია ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), ხოლო $\delta(t')$ ფუნქცია, შემდეგი მშკრივის.

$$\delta(t') = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta^n (n\omega t'). \quad (76,11)$$

სახით წარმოიდგინება (31,8), მაშინ ველის ვექტორპოტენციალისათვის, (76,10) და (76,11) ფორმულების თანახმად, გვექნება

$$A(X, t) = \frac{q}{c} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \frac{v}{X_0} \delta \left(t' - t - \frac{X_0}{c} - \frac{r_0}{c} \sin \vartheta \sin \alpha \right) dt' =$$

$$= \frac{q\omega}{2\pi c X_0} \int v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega} \left(t' - t - \frac{X_0}{c} - \frac{r_0}{c} \sin \vartheta \sin \alpha \right) dt'. \quad (76,12)$$

თუ (76,8) დამოკიდებულებებს გამოვიყენებთ, მაშინ (76,12) შემდეგ სახეს მიიღებს

$$A(X, t) = \frac{q}{2\pi c X_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int v e^{i \left(n\alpha - \frac{n\omega}{c} r_0 \sin \vartheta \sin \alpha \right)} d\alpha \cdot$$

$$e^{in \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2} - \omega t + \frac{X_0 \omega}{c} \right)}. \quad (76,13)$$

მეორეს მხრივ $A(X, t)$, როგორც პერიოდული ფუნქცია, შეიძლება გავშალოთ ფურიეს მწკრივად

$$A(X, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-in\delta}. \quad (76,14)$$

(76,13) და (76,14) გამოსახულებათა შედარება გვიჩვენებს, რომ თუ

$$\delta = \omega t - \frac{X_0 \omega}{c} - \varphi_1 + \frac{\pi}{2},$$

მაშინ ვექტორპოტენციალის ფურიეს მდგენელი A_n განისაზღვრება ტოლობით:

$$A_n = \frac{q}{c X_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} v e^{i \left(n\alpha - n \frac{v}{c} \sin \vartheta \sin \alpha \right)} d\alpha, \quad (76,15)$$

სადაც გამოყენებულია (76,8)-დან გამომდინარე დამოკიდებულებები:

$$\omega dt' = d\chi = d\alpha; \quad \frac{n\omega r_0}{c} = \frac{nv r_0}{cr_0} = n \frac{v}{c}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ სფერულ კოორდინატებში ელექტრონის სიჩქარის მდგენელებია:

$$\left. \begin{aligned} v_\varphi &= v \cos \chi = v \sin \alpha \\ v_\vartheta &= v \sin \chi \cos \vartheta = -v \cos \vartheta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (76,16)$$

მაშინ ვექტორპოტენციალის (76,15) ფურიეს მდგენელებისათვის გვექნება:

$$A_{\varphi}(n) = \frac{qv}{2\pi c X_0} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin \alpha \cdot e^{i \left(n\alpha - n \frac{v}{c} \sin \vartheta \sin \alpha \right)} d\alpha. \quad (76,17)$$

$$A_{\vartheta}(n) = - \frac{qv}{2\pi c X_0} \cos \vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \alpha \cdot e^{i \left(n\alpha - n \frac{v}{c} \sin \vartheta \sin \alpha \right)} d\alpha. \quad (76,18)$$

ცილინდრულ ფუნქციათა თეორიაში ცნობილი შემდეგ დამოკიდებულებათა:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp \left\{ i \left(n\alpha - n \frac{v}{c} \sin \vartheta \sin \alpha \right) \right\} d\alpha = J_n \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) = J_n(y)$$

$$J_{n+1}(y) - J_{n-1}(y) = \frac{2n}{y} J_n(y)$$

გამოყენების გზით, (76,17) და (76,18) ფორმულები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\left. \begin{aligned} A_{\varphi}(n) &= i \frac{qv}{c X_0} \frac{dJ_n(y)}{dy} \\ A_{\vartheta}(n) &= - \frac{q}{X_0} \cot \vartheta J_n(y) \end{aligned} \right\} \quad (76,19)$$

სადაც შემოღებული გვაქვს აღნიშვნა: $y = n \frac{v}{c} \sin \vartheta$.

X_0 რადიუსვექტორის გასწვრივ ვექტორპოტენციალის მდგენელი ჩვენთვის ინტერესს არ წარმოადგენს, რადგან ტალღურ ზონაში მხოლოდ განივი ელექტრომაგნიტური ველი გვაქვს.

როგორც § 57-ში გამოვარკვეით ტალღურ ზონაში $|e| = |h|$ და $e_{\varphi} = -h_{\vartheta}$, (e , h და X_0 ვექტორები შეადგენენ კორდინატთა მარჯვენა სისტემას, თუ e ვექტორის ძალხაზები ეკვატორი პარალელურ სიბრტყეებშია განლაგებული, მაშინ h — ძალხაზები მერიდიანულში იქნებიან მოთავსებული).

დავწეროთ e და h ვექტორების h_{ϑ} და e_{φ} მდგენელები სფერულ კოორდინატებში, გვექნება

$$h_{\vartheta} = -e_{\varphi} = - \frac{1}{X_0} \frac{\partial}{\partial X_0} (X_0 A_{\varphi}) = - \frac{1}{X_0} \frac{\partial}{\partial X_0} \sum X_0 A_{\varphi}(n) e^{-in\vartheta}.$$

რომლის ნამდვილი ნაწილისათვის გვექნება

$$h_{\vartheta} = -e_{\varphi} = R_0 \left\{ -\frac{i}{X_0} \frac{\partial}{\partial X_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{qv}{c} J'_n \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) \cdot e^{-in \left(\omega t - \frac{X_0 v}{cr_0} - \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \right)} \right\} =$$

$$= \frac{2q}{r_0 X_0} \frac{v^2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} n J'_n \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) \cos n\delta. \quad (76,20)$$

$$e_{\varphi} = h_{\varphi} = (\text{rot } A)_{\varphi} = \frac{1}{X_0} \frac{\partial}{\partial X_0} (X_0 A_{\vartheta}) =$$

$$= R_0 \left\{ \frac{q}{X_0} \frac{\partial}{\partial X_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cot \vartheta J_n \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) e^{-in\delta} \right\} =$$

$$= -\frac{2q}{r_0 X_0} \cot \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} n J_n \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) \sin n\delta. \quad (76,21)$$

შიდებული (76,20) და (76,21) სიდიდეების საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ უმოვ-პოინტინგის ვექტორის რადიალური მდგენელი

$$S = \frac{c}{4\pi} (e_{\vartheta} h_{\varphi} - e_{\varphi} h_{\vartheta}) = \frac{c}{4\pi} (h_{\varphi}^2 + h_{\vartheta}^2), \quad (76,22)$$

საიდანაც დროის ერთეულში $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღების ენერჯიისათვის გვექნება

$$dW = S d\Omega. \quad (76,23)$$

თუ ამ უქანასკნელში ჩავსვამთ (76,20), (76,22) და (76,21) გამოსახულებებს და იმავე დროს გავითვალისწინებთ, რომ ყოველთვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\int_0^T \cos n'\delta \cos n\delta dt = \int_0^T \sin n'\delta \sin n\delta dt = \frac{1}{2} \delta_{n'n},$$

მივიღებთ

$$dW = \sum_{n=1}^{\infty} dW'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^2 n^2 v^2}{2\pi r_0^2 c} \left\{ \cot^2 \vartheta J_n^2 \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) + \frac{v^2}{c^2} J_n^2 \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) \right\} d\Omega. \quad (76,24)$$

(76,24) წარმოადგენს $\omega = n\omega_0$ ($n = 1, 2, 3, 4 \dots$) სიხშირეების მქონე გასხივებული ტალღების ინტენსიობათა ზე კუთხის მიხედვით სივრცეში განაწილების კანონს. ეს ფორმულა, რომელიც 1912 წელს შოტტმა მიიღო; გარდა კუთხური განაწილებისა აგრეთვე გვაძლევს გასხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღების დამოკიდებულებას ჰარმონიკის n - ნომერზე.

გამოსხივების სრული ინტენსიობის n -ზე დამოკიდებულების მოსანახავათ უნდა ჩავატაროთ (76,24) გამოსახულების ინტეგრაცია სხეულოვანი კუთხით. სათანადო გამოთვლები იმდენად რთულია, რომ (76,24) უსასრულო მწკრივის ინტეგრაცია მხოლოდ ზოგიერთ კონკრეტულ პირობებშია მოსახერხებელი. თუ ბესელის ფუნქციათა შორის არსებულ დამოკიდებულებებს გამოვიყენებთ, მაშინ მრავალი გარდაქმნებისა და გრძელი გამოთვლების შედეგად საძიებელი ინტეგრალი შემდეგ სახეზე დაიყვანება

$$W_n = \frac{q^2 v n}{r_0^2} \left\{ 2 \frac{v^2}{c^2} J_{2n}' \left(2n \frac{v}{c} \right) - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{2 \frac{v}{c} n} \int_0^{\frac{v}{c}} J_{2n} \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) d \left(n \frac{v}{c} \sin \vartheta \right) \right\}. \quad (76,25)$$

ეს უკანასკნელი გვაძლევს გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღების ინტენსიობათა განაწილებას ჰარმონიკის n ნომრის მიხედვით. ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის შემადგენელი $\omega = n\omega_0$ სიხშირის ტალღების ინტენსიობები მნიშვნელოვნად არიან დამოკიდებული მათ სიხშირეებზე, ე. ი. n -ზე. n - რიცხვი W_n ინტენსიობის გამოსახულებაში შედის არამარტო მამრავლის სახით, მას შეიცავს აგრეთვე ბესელის ფუნქცია რიგის მაჩვენებლისა და არგუმენტის სახით. ამიტომ (76,25) ფორმულის პრაქტიკული გამოყენება შეუძლებელია. მხოლოდ ველის ფუნქციათა ასიმპტოტური მნიშვნელობების ჩასმით (76,25)-დან მიიღება მიახლოებითი ფორმულა

$$W_n = \frac{4q^2 v^{2n+2}}{c^{2n+1} r_0^2} \cdot \frac{n^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{n+1}{2}, \quad (76,26)$$

რომელიც იმ შემთხვევაში გამოდგება, როდესაც ელექტრონის სიჩქარე არარელატივისტურია ($v \ll c$).

(76,26)-დან გამომდინარეობს, რომ ყველა შესაძლო სიხშირეების $\omega = n\omega_0$ ტალღებიდან მაქსიმალური ინტენსიობით გამოსხივდება ძირითადი ტონი $n = 1$,

$$W_1 = \frac{2}{3} \frac{q^2 v^4}{c^3 r_0^2} = \frac{2}{3} \frac{q^2 r_0^3 \omega_0^4}{c^3}. \quad (76,27)$$

უფრო მაღალი სიხშირის $n\omega_0$ ($n = 2, 3, 4 \dots$) ტალღის ინტენსიობა $\left(\frac{v}{c}\right)^{2(n-1)} \cdot W$ სიდიდის რიგის იქნება, ამიტომ არარელატივისტურ შემთხვე-

ევბში, მათი უგულებელყოფა შესაძლებელია. (76,27) ზუსტად ემთხვევა ჰარმონიული ოსცილატორის მიერ დროის ერთეულში გასხივებული ენერჯიის გამომსახველ (60,12) ფორმულას.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ $\omega_0 = \frac{v}{r_0}$ პირობიდან მიიღება შემდეგი დამოკიდებულება

$$\lambda = 2\pi \frac{r_0 c}{v}$$

საიდანაც გამომდინარეობს რომ $\lambda > r_0$, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ელექტრონი გამოასხივებს ისეთ ტალღებს, რომელთა ტალღის სიგრძეები მნიშვნელოვნად აღემატებიან ორბიტის რადიუსს. სრულიად განსხვავებული სურათი გვაქვს ელექტრონის რელატივისტური სიჩქარეების შემთხვევაში. როდესაც ელექტრონის სიჩქარე სინათლის სიჩქარესთან ძალიან ახლოსაა, მაშინ არ გუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის ($n \gg 1$) (76,24)-ში შეიძლება შევიტანოთ ბესელის ფუნქციითაა ასიმპტოტური გამოსახულებები; რაც მოგვცემს

$$W_n = \frac{q^2 c \cdot 2\xi n}{r_0^2 \pi \sqrt{3}} \left\{ 2K^{3/2} \left(\frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2} \right) - \int_0^\infty K^{1/2}(y) dy - \frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2} \right\}, \quad (76,28)$$

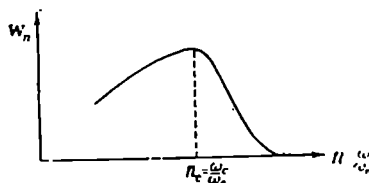
სადაც:

$$\xi = 1 - \frac{v}{c}; \quad y = n \frac{\omega_0}{\omega_c}, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{2\xi} = \frac{m' c^2}{\varepsilon}$$

ხოლო $K(y)$ ბესელის მეორე გვარის ფუნქციაა. (76,28)-ის მარჯვენა მხარე ულტრარელატივისტურ შემთხვევაში, ძალიან მცირე სიდიდეს წარმოადგენს. ისევე როგორც არარელატივისტური სიჩქარეებისათვის, აქაც n -რი ჰარმონიკის სიხშირე განისაზღვრება $\omega = n\omega_0$ ფორმულით, რომელშიაც $\omega_0 = \frac{v}{r_0}$.

(76,28) განტოლების მრუდი (ნახ. 51), გვიჩვენებს, რომ გასხივებულ ენერჯიას მაქსიმუმი აქვს ω_c სიხშირისათვის. ω_c -ს კრიტიკული სიხშირე ეწოდება და შემდეგი განტოლებიდან განისაზღვრება:

$$\omega_c = \frac{3\omega_0}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2}. \quad (76,29)$$



ნახ. 51.

როგორც ნახაზზე სჩანს, მაქსიმუმის წერტილის მარცხნივ ინტენსიობა შედარებით ნელა ეცემა, ვიდრე მარჯვნივ.

(76,29)-დან გამომდინარეობს, რომ ω_c — კრიტიკული სიხშირე, რომელზედაც მოდის გამოსხივებული ტალღის ინტენსიობის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ელექტრონის სიჩქარის სათანადო შერჩევით, შეიძლება გაუტოლდეს ხილული სხივის შემადგენელი რომელიმე ფერის სიხშირეს. მაშასადამე, შესაძლებელია ელექტრონმა ხილული სხივები გამოასხივოს. ამგვარად, ამაჩქა-

რებელში წრიულ ორბიტზე მოძრავი ელექტრონი შეიძლება გახდეს „მნათ-
ნაწილაკად. ეს თვალსაზრისი 1944 წელს გამოთქმული იყო დ. ივანენ-
კოსა და ი. პომერანჩუკის მიერ. მათ მოგვცეს გასხივებაზე ელექტრო-
ნის ენერჯიის დანაკარგის ფორმულები და დაადგინეს ამაჩქარებელის მუშაო-
ბის ზედა ჰერი, რომლისთვისაც გამოსხივების სახით ენერჯიის დანაკარგი,
ამაჩქარებლისაგან ელექტრონის მიერ შეძენილი ენერჯიის ტოლია. მაგნიტური
ველის გავლენით ელექტრონის წრეხაზზე ბრუნვის დროს. ენერჯიის გასხივე-
ბის გამო, ჩატარებული გამოთვლების მიხედვით, ადგილი უნდა ჰქონდეს
ორბიტის რადიუსის შემცირებას. ამ თვალსაზრისის სისწორე მართლაც
დაადასტურეს ბლუიტის ცდებმა. ბეტატრონიში, რომელიც $100 MeV$ ენერჯიაზე
მუშაობდა, შემჩნეული და გაზომილი იქნა 83 სმ. რადიუსიანი ორბიტის
წევრებში. რადიუსის შემცირების სიდიდე აღწევდა 3 სმ.

ნეორე შესანიშნავი ეფექტი, რომელიც აგრეთვე ივანენკომ და პომერან-
ჩუკმა იწინასწარმეტყველეს ბეტატრონის ტიპის ამაჩქარებლებში ელექტრონის
ნიერ ხილული სხივების შესაძლო გამოსხივების შესახებ, ექსპერიმენტულად
აღმოჩენილი იქნა 1947 წ. ელექტრონის „ნათების“ მოვლენა. რომელსაც ად-
გილი აქვს ამაჩქარებელში $100 MeV$ ენერჯიის პირობებში, საშუალებას იძლევა
უშუალოდ (მიკროსკოპით) „დავიხაზოთ“ ელექტრონი. ამასთან დაკავშირებით
აღსანიშნავია შემდეგი გარემოება: მიუხედავად იმისა, რომ ელექტრონი,
როგორც ელემენტარული ნაწილაკი, აღმოჩენილი იყო 1895 წელს, მისი
უშუალო დამხერა საკმაოდ ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში არ მოხერხ-
და. მხოლოდ ამაჩქარებელში ელექტრონის მიერ გამოსხივებული ხილული
სპექტრის მიხედვით შეიძლება დავაკვირდეთ მას. უნდა ვიფიქროთ, რომ
ელექტრონის „ნათების“ მოვლენის მასშტაბი სცილდება ლაბორატორული
ექსპერიმენტების ჩარჩოებს. ის დიდ როლს თამაშობს სამყაროში ციური
სხეულების მაგნიტურ ველში სწრაფი ელექტრონებისა და სხვა დამუხტული
ნაწილაკების გამოსხივების პროცესებში. არაა გამორიცხული, რომ კოსმოსურ
ნაწილაკთა აღნიშნული ტიპის ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივება
წარმოადგენდეს უკანასკნელ დროს აღმოჩენილ ვარსკვლავთა რადიო გამოსხი-
ვების ერთ-ერთ სახეობას.

ელექტრონის „ნათება“ იმითაცაა საინტერესო, რომ ის წარმოადგენს
წრეხაზზე მოძრავი ცალკეული ელექტრონის გამოსხივების შედეგს და არავი-
თარ მონაწილეობას არა ღებულობს გარემო, რომელშიაც ის მოძრაობს. ის
სრულიად ახალი ტიპის მოვლენაა.

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით ცალკეული ელექტრონის გამოსხივების
სპექტრალურ და კუთხურ განაწილებას. სინამდვილეში ბეტატრონის ტიპის
ამაჩქარებლებში საქმე გვაქვს წრეხაზზე მოძრავ ელექტრონთა ნაკადთან —
წრიულ დენთან. თუ ამაჩქარებელში ელექტრონთა ნაკადს წრიული დენის
სახით წარმოვიდგენთ, მაშინ კლასიკური ფიზიკის თანახმად ელექტრომაგნი-
ტური ტალღების გამოსხივებას ადგილი არ უნდა ჰქონდეს. სინამდვილეში კი
ამაჩქარებელში ელექტრონთა ნაკადის გამოსხივება შემადგენელი ცალკეული
ელექტრონების გამოსხივებათა ჯამის ტოლია. დ. ივანენკოს თვალსაზრისით

ეს გამოსხივება გამოწვეულია ელექტრონთა ნაკადის სიმკვრივის ფლუქტუაციებით. ელექტრონის „ნათების“ მოვლენის აღმოჩენამ გაამდიდრა ჩვენი ცოდნა მატერიის თვისებების შესახებ. ელექტრონის, როგორც მატერიალური ნაწილაკის მრავალ თვისებას, რომლებიც მან გამოაგლინა ნახევარი საუკუნის მანძილზე დღიდან მისი აღმოჩენისა, შეემატა კიდევ ერთი მეტად საინტერესო თვისება. ექსპერიმენტული ტექნიკის ყოველდღიურ გაუმჯობესებასა და განვითარებასთან ერთად შესაძლებელი ხდება ელექტრონის სულ ახალ-ახალი თვისებების გამოძიება და შესწავლა.

§ 77. ველის კანონიერი განტოლებები

მიუხედავად იმისა, რომ მექანიკური და ელექტრომაგნიტური მოვლენები ერთიმეორისაგან არსებითად განსხვავებული არიან, მათ ერთი და იგივე უმცირესი ქმედებისა და ენერჯიის, იმპულსის და იმპულსის მომენტის მუდმივობის უნივერსალური პრინციპები უდევთ საფუძვლათ. ელექტრომაგნიტური ველის შესასწავლათ ადრე ჩვენ შემოვიღეთ დრო-სივრცითი კოორდინატების უწყვეტი ფუნქციები, რომლებიც შეადგენენ ოთხგანზომილებიან პოტენციალს. სათანადოთ, ველი განვიხილეთ როგორც სისტემა, რომლის მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი უსასრულო დიდია.

რადგან (34,13) პირველი რიგის ნაწილობით წარმოებულებანი ელექტრომაგნიტური ველის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა თავისი ფორმითა და სირთულით ნაწილაკთა სისტემის (23,11) კანონიერ განტოლებათა სისტემისაგან არსებითად განსხვავებულია, ამიტომ, ერთი შეხედვით, ნაწილაკთა სისტემასა და ელექტრომაგნიტურ ველს შორის პრინციპიალური განსხვავებას დავინახავთ. მაგრამ, ფიზიკური მოვლენები მიგვიითხებენ, რომ მატერიალურ ნაწილაკებსა და ელექტრომაგნიტურ ველს მრავალი საერთო თვისება აქვთ.

ელექტრომაგნიტური ველი არ არსებობს დამუხტული მატერიალური ნაწილაკის გარეშე და შებრუნებით. დამუხტული მატერიალური ნაწილაკის განხილვა მისი მოძრაობის მოცემული მდგომარეობით გამოწვეული ელექტრომაგნიტური ველის გარეშე არ შეიძლება. საზოგადოთ ელექტრომაგნიტური ველი, ნაწილაკის მოძრაობის მდგომარეობის შეცვლასთან ერთად ცვლილებას განიცდის, და თავის მხრივ გავლენას ახდენს, როგორც მასში შეტანილი მუხტის, ასევე მისივე წყაროს მოძრაობის მდგომარეობაზე.

მაშასადამე, ელექტრული მუხტისა და ელექტრომაგნიტური ველის ცნებები მკიდრო განუყოფელ კავშირში იმყოფებიან. ნაწილაკი და ელექტრომაგნიტური ველი მატერიის ორი სხვადასხვა მდგომარეობის ფორმებია. სათანადო პირობებში ადგილი აქვს ერთი ფორმიდან მეორეში გადასვლას; რასაც მრავალი ექსპერიმენტი ადასტურებს. ერთის მხრივ ველისა და ნაწილაკების მრავალ თვისებათა საერთო ხასიათი, ხოლო მეორე მხრივ მათი განტოლებების გარეგნული სახისა და შინაარსობრივ განსხვავებულობის გამო, ბუნებრივია, ჩვენს წინაშე შემდგეი კითხვა წამოიჭრება: შეიძლება თუ არა ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელ სიდიდეებს (ენერჯია, იმპულსი და სხვა)

ნაწილაკთა სისტემის შესაბამისი სიდიდეების სახე, ხოლო ველის განტოლებებს — კანონიკური ფორმა მიეცეთ. როგორც ქვემოთ ვნახეთ, ამ კითხვაზე შეიძლება დადებითი პასუხი გავცეთ.

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ველი სიცირიელეში სასრულო მოცულობის კუბის შიგნით, რომლის წიბოს სიგრძე აღვნიშნოთ l -ით. თუ აღებულ \mathcal{P} მოცულობაში დამუხტული ნაწილაკები არ გვექნება, მაშინ ველის ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის მეოთხე მდგენელი ($A_4 = ip$), გრადიენტული ინვარიანტობის (51,4) პირობის თანახმად, შეიძლება ნულს გავუტოლოთ. მაშასადამე, როდესაც აღებული მოცულობის შიგნით დამუხტული ნაწილაკები არ იმყოფებიან, მაშინ ელექტრომაგნიტური ველის დასაბამისათვის საქმარისია ვიცოდეთ A_4 ; 4 — პოტენციალის პირველი სამი მდგენელი, ე. ი. A ვექტორ-პოტენციალი. რადგან სიცირიელეში φ სკალარული პოტენციალი არავითარ როლს არ ასრულებს ($\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$), ამიტომ (51,3), (51,7) და (51,8) განტოლებებიდან დაგვრჩება

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (77,1)$$

და

$$\operatorname{div} A = 0. \quad (77,2)$$

ანგვარად, სიცირიელეში ელექტრომაგნიტური ველის A — ვექტორ-პოტენციალი, რომელიც (77,1) განტოლებიდან განისაზღვრება, დამატებით (77,2) პირობას აკმაყოფილებს. (77,1) განტოლების ამოსახსნელად, როგორც ცნობილია, საჭიროა გვექონდეს გარკვეული სასაზღვრო პირობები. სახელდობრ, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ A — ფუნქციის ყოფა-ქცევა აღებული მოცულობის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე. განსახილველ შემთხვევაში დაუშვათ, რომ ზემოდ აღნიშნული კუბის მოპირდაპირე კედლებზე A — ფუნქციას და მის წარმოებულებს ერთი და იგივე მნიშვნელობები აქვთ, ე. ი.

A პერიოდულია კუბის ზედაპირზე.

თუ ეს უკანასკნელი პირობა დაცულია, მაშინ კუბის შიგნით მდგარი ელექტრომაგნიტური ტალღები წარმოიშობიან, რომლებისთვისაც, გვექნება (§ 58)

$$l = n \cdot \lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (77,3)$$

(77,3) დამოკიდებულება უფლებას გვაძლევს (77,1) განტოლების ამონახსნი წარმოვადგინოთ ფურიეს მწკრივის საშუალებით

$$A(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega_n t}. \quad (77,4)$$

თუ (77,4) გამოსახულებას (77,1)-ში ჩავსვამთ მივიღებთ

$$\Delta A_n(x_1, x_2, x_3) + \frac{\omega_n^2}{c^2} A_n(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (77,5)$$

რომლის ამონახსნია (§ 57)

$$A_n(x_1, x_2, x_3) = a_n e^{i(k_n, x)} + a_n^* e^{-i(k_n, x)}, \quad (77,6)$$

სადაც: $k_n = \frac{\omega_n}{c} n_0$, ხოლო a_n და a_n^* მუდმივი კომპლექსური ვექტორული სიდიდეებია. იმისათვის, რომ აღებული კუბის შიგნით მდგარი ელექტრომაგნიტური ტალღები მივიღოთ, (77,6)-ში შემავალი a და a_n^* კოეფიციენტები შემდეგ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ

$$a_{-n} = a_n^*. \quad (77,7)$$

თუ (77,7) დამოკიდებულებებს გავითვალისწინებთ, მაშინ ვექტორპოტენციალის (77,4) გამოსახულება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_n e^{i[\omega_n t - (k_n, x)]} + a_n^* e^{i[\omega_n t + (k_n, x)]} \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ q_n(t) A_n(x_1, x_2, x_3) + q_n^*(t) A_n^*(x_1, x_2, x_3) \} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sin[(k_n, x) + \beta] q_n(t). \end{aligned} \quad (77,8)$$

(77,8)-ში $a_n \sin[(k_n, x) + \beta]$ მამრავლი მდგარი ტალღების ამპლიტუდას წარმოადგენს, ხოლო $q_n(t)$ — დროის პერიოდულ ფუნქციაა ($q_n(t) \sim e^{i\omega_n t}$). (57,13) ფორმულების თანახმად, \sin -ის არგუმენტი შეიძლება სხვა სახითაც გადავწეროთ სახელდობრ,

$$\gamma_n = (k_n, x) + \beta = \frac{\omega_n}{c} (n_0, x) + \beta = \frac{2\pi}{\lambda_n} (n_0, x) + \beta \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (77,9)$$

n_0 — ერთეულოვანი ვექტორის შესაძლო მიმართულებები სივრცეში შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონის მიხედვით მოიძებნებიან.

თუ (77,2) განტოლებაში (77,8) გამოსახულებას ჩავსვამთ, მაშინ ჯამის ყოველი წევრისათვის გვექნება

$$(k_n, a_n) = 0. \quad (77,10)$$

(77,10) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ტალღის, რომელიც (77,2) პირობას აკმაყოფილებს, გავრცელების მიმართულება (k_n) ყოველთვის e — ელექტრული ვექტორის პერპენდიკულარულია. ამგვარად, (77,2) განტოლება წარმოადგენს იმის პირობას, რომ ტალღა განივია. ის ყველა შესაძლო ტიპის ელექტრომაგნიტური ტალღებიდან განივ ტალღებს გამოყოფს.

თუ (77,8) გამოსახულებას (77,1)-ში ჩავსვამთ, ჯამის ყოველი წევრისათვის გვექნება

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + c^2 k_n^2 q_n(t) = \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = 0, \quad (77,11)$$

რომელთაც მატერიალური ნაწილაკის ჰარმონიული რხევის განტოლების სახე აქვთ.

იმისათვის, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიასა და იმპულსს ჰარმონიულად რხევადი ნაწილაკთა სისტემის სრული ენერჯიისა

$$\mathcal{E} = \sum H_n = \sum \frac{m}{2} (\dot{q}_n(t))^2 + \omega_n^2 q_n(t)^2$$

და იმპულსის

$$p = \sum p_n$$

სახე მივცეთ, განვსაზღვროთ ველის e და h დაძაბულობის ვექტორები. ამ ვექტორების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (77,6) გამოსახულებები, რომლებიც

$$2a_n \cos \gamma_n \text{ და } 2a_n \sin \gamma_n \quad (77,12)$$

ორთოგონალურ ფუნქციათა უსასრულო მიმდევრობას გვაძლევენ. წინასწარ მოვახდინოთ (77,12) ფუნქციათა ნორმირება. a_n კოეფიციენტები ისეთნაირად შევარჩიოთ, რომ მათი საშუალებით განსაზღვრული ველის ენერჯიამ ოსცილიატორთა ენერჯიის სახე მიიღოს. როგორც ქვევით ვნახავთ, ამისათვის საკმარისია (77,12) ფუნქციათა ნორმირება შემდეგნაირად მოვახდინოთ:

$$\int (a_n, a_m) \sin \gamma_n \sin \gamma_m = 4\pi c^2 \delta_{nm}. \quad (77,13)$$

თუ (77,13) დამოკიდებულებებს გამოვიყენებთ, მაშინ A შემდეგი სახის ფუნქციებით წარმოიდგინება:

$$\sqrt{8\pi c^2} a_n^o \cos \gamma_n, \quad \sqrt{8\pi c^2} a_n^o \sin \gamma_n, \quad (77,14)$$

სადაც a_n^o პოლარიზაციის ვექტორია. რადგან ყოველი a_n^o — ვექტორის შესაძლო მიმართულებათა რიცხვი ორის ტოლია, ამიტომ (77,14) გამოსახულებათა მანორმირებულ მაშრავლში დაწერილია დამატებითი მაშრავლი 2.

რადგან (77,14) გამოსახულებები მხოლოდ სივრცითი კოორდინატების ფუნქციებია, ამიტომ ველი, ძირითადად, $q_n(t)$ — ამპლიტუდებით იქნება განსაზღვრული. ამ თვალსაზრისით (77,11) განტოლებათა სისტემა ველის (77,1) განტოლების ტოლფასია. გადავიდეთ ველის დაძაბულობათა ვექტორებისა და ენერჯიის გამოთვლაზე. თუ გამოვიყენებთ (2,19) ფორმულას და გავითვალისწინებთ, რომ a_n მუდმივი ვექტორია ($\text{rot } a_n = 0$), მაშინ (25,16), (25,17) და (77,8) ფორმულების თანახმად, გვექნება

$$e = -\frac{1}{c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{q}_n(t) a_n \sin \gamma_n. \quad (77,15)$$

$$h = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(t) \text{rot}(a_n \cdot \sin \gamma_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(t) [k_n, a_n] \cos \gamma_n. \quad (77,16)$$

(77,15) და (77,16) ფორმულების საშუალებით, ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯისათვის, (37,13)-ს მიხედვით, მივიღებთ

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (e^2 + h^2) dx^3 = \frac{c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\dot{q}_n^2(t)}{c^2} + q_n^2(t) ([k_n, a^n])^2 \right\}, \quad (77,17)$$

სადაც გამოყენებულია ფუნქციათა ნორმირების (77,13) პირობა.

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $\dot{q}_n(t) = ik_n q_n(t)$, ხოლო, (1,8)-ს თანახმად,

$$([k_n, a^n])^2 = k_n^2 a^{2n} \cdot (k_n, a^n) = k_n^2 (a^n \perp h_n),$$

მაშინ (77,17) შემდეგ სახეს მიიღებს

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ \dot{q}_n^2(t) + \omega_n^2 q_n^2(t) \} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_n. \quad (77,18)$$

სათანადოთ, ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის 4-ვექტორის (37,9) გამოსახულებაში ველის დაძაბულობათა ვექტორების (77,16) და (77,17) მნიშვნელობათა ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$G = \int g dx^3 = \frac{1}{4\pi c} \int [e, h] dx^3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k_n}{k} \frac{W_n}{c}. \quad (77,19)$$

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯია (77,18) და იმპულსი (77,19), შესაბამისად, ჰარმონიული ოსცილატორების ენერჯიების და იმპულსების ჯამებით წარმოიდგინებიან. ამ ოსცილატორთა რიცხვი უსასრულოა ($n = \pm \infty$).

რადგან ყოველი წრფივი ოსცილატორის მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია, ამიტომ ველი ფორმალურად შეგვიძლია დავიყვანოთ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ სიხშირეებით რხევადი ოსცილატორების სისტემაზე, რომლის მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი უსასრულო დიდია. სათანადოთ, $q_n(t)$ და $\dot{q}_n(t)$ სიდიდეები კანონიკური ცვლადების როლს ასრულებენ.

ველის თეორიაში დამუხტულ ნაწილაკთა ურთიერთქმედება განხილულია ამ ნაწილაკების მიერ ელექტრომაგნიტური ველის ტალღების გამოსხივებისა და შთანთქმის პროცესების სახით. გამოსხივების (ელექტრომაგნიტური ტალღის) არსებობის ფაქტის დადგენა მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როდესაც აღებულ ადგილზე არსებობს მშთანთქმელი.

მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ტალღის გამოსხივებისა და შთანთქმის მოვლენები ერთიმეორეს მოსდევენ. თუ ერთი მუხტი ტალღას გამოასხივებს, მეორე მას შთანთქავს და პირიქით—მეორე მუხტის მიერ გამოსხივებულ ტალღას პირველი შთანთქავს. რადგან ამ გზით ხორციელდება დამუხტულ ნაწილაკებს შორის ელექტრული ურთიერთქმედებები, ამიტომ ტალღის განტოლების ამონახსნი (77,8) შეიცავს K_n და $-K_n$, ე. ი. ერთიმეორის საწინააღმდეგო მიმართულებით მიმავალ ტალღებს:

$$a_n e^{i[\omega_n t - (k_n, x)]}, \quad (77,20)$$

$$a_n^* e^{i[\omega_n t + (k_n, x)]}, \quad (77,21)$$

(77,20) წარმოადგენს მუხტის მიერ გასხივებულ ტალღას, ხოლო (77,21) — ამავე მუხტისაკენ რომაველ ტალღას, რომელსაც ეს მუხტი შთანთქავს.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ელექტრო-მაგნიტური ველის ვექტორპოტენციალი გასხივებული და დამცემი ტალღების უკანის სახით უნდა განვსაზღვროთ, ე. ი.

$$A(x_1, x_2, x_3, t) = \sum [q_n(t) A_n(x_1, x_2, x_3) + q_n^*(t) A_n^*(x_1, x_2, x_3)], \quad (77,22)$$

სადაც

$$\left. \begin{aligned} A_n(x_1, x_2, x_3) &= \sqrt{4\pi c^2} e^{i(k_n, x)} \\ q_{-n}(t) &= q_n^*(t) = |q_n(t)| e^{i\omega_n t} \end{aligned} \right\} \quad (77,23)$$

ადვილად შეიძლება დაერწმუნდეთ, რომ (77,22)-ში შემავალი $q_n(t)$ სიდიდეები და მათივე წარმოებულები $\dot{q}_n(t)$ კანონიკური ცვლადები არ არიან. მაგრამ, თუ მათი საშუალებით შემდეგი განტოლებების მიხედვით ახალ $Q_n(t)$ და $P_n(t)$ ცვლადებს შემოვიღებთ

$$\left. \begin{aligned} Q_n(t) &= q_n(t) + q_n^*(t) \\ P_n(t) &= -i\omega_n (q_n(t) - q_n^*(t)) = \dot{Q}_n \end{aligned} \right\} \quad (77,24)$$

მაშინ $Q_n(t)$ და $P_n(t)$ ნამდვილი სიდიდეები იქნებიან და კანონიკური ცვლადების როლს შეასრულებენ. მართლაც, თუ (77,24) დამოკიდებულებებს გამოვუკენებთ, მაშინ (77,18) შემდეგ სახეზე დაიყვანება

$$\begin{aligned} W &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\omega_n^2 q_n(t) q_n^*(t) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (P_n^2 + \omega_n^2 Q_n^2). \end{aligned} \quad (77,25)$$

ამ უკანასკნელს ჰარმონიული ოსცილატორების სისტემის სრული ენერჯიის სახე აქვს. მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯია ჩვენ დავიყვანეთ უსასრულო თავისუფლების ხარისხის მქონე ოსცილატორთა სისტემის ენერჯიაზე. ანალოგიური გზით ველის იმპულსი (77,19) აგრეთვე ოსცილატორთა სისტემის სრულ იმპულსზე დაიყვანება. რადგან ველის ენერჯიისა და იმპულსის ფორმალურად შეიძლება ოსცილატორთა ენერჯიისა და იმპულსის სახე მივცეთ, ამიტომ, ნაწილაკთა სისტემის (23,11) განტოლებათა მსგავსად, ელექტრო-მაგნიტური ველის კანონიკური განტოლებები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\dot{P}_n = -\frac{\partial H}{\partial Q_n}, \quad \dot{Q}_n = \frac{\partial H}{\partial P_n}. \quad (77,26)$$

(77,26) განტოლებათა სისტემიდან, (77,25) დამოკიდებულების თანახმად, მიიღება ჰარმონიული ოსცილატორის რხევის განტოლებები

$$\ddot{Q}_n + \omega_n^2 Q_n = 0 \quad (n = \pm \infty), \quad (77,27)$$

რომლებიდანაც (77,24) ფორმულების გამოყენების გზით, ადვილად მიიღება (77,11) ველის განტოლებები.

ამგვარად, როდესაც სივრცის სასრულო მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე A ფუნქცია პერიოდულია ($\text{div } A = 0$), მაშინ ამ მოცულობაში მოთავსებული ელექტრომაგნიტური ველი მარტივ ჰარმონიულ ოსცილატორთა სისტემაზე დაიყვანება.

გამოვარკვიოთ როგორია მოცულობის ერთეულში აღებული ველის ტოლფას ოსცილატორთა რიცხვი. პირველყოვლისა მოენახოთ l^3 მოცულობაში, მოცემული პოლარიზაციისა და გავრცელების გარკვეულ მიმართულების ($\Delta \Omega$ სხეულოვან კუთხეში), ω , $\omega + \Delta \omega$ სიხშირეთა ინტერვალში მოთავსებული ელექტრომაგნიტური ტალღების შესაბამისი რაღაცეული ოსცილატორების რიცხვი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ l^3 -ში მდგარი ელექტრომაგნიტური ტალღებისა ($l = n \cdot \lambda_n$), მაშინ (77,9) ფორმულაში, k_n — ტალღური ვექტორის k_{n1} , k_{n2} და k_{n3} მდგენელებისათვის გვექნება

$$k_{n1} = \frac{2\pi}{l} n_{01}, \quad k_{n2} = \frac{2\pi}{l} n_{02}, \quad k_{n3} = \frac{2\pi}{l} n_{03} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (77,28)$$

(77,28) დამოკიდებულებათა თანახმად, როდესაც კუბის წიბოს სიგრძე l ძალიან დიდია ტალღის სიგრძესთან შედარებით, მაშინ k_{n1} , k_{n2} და k_{n3} სიდიდეების მეზობელი (უახლოესი) მნიშვნელობები ერთიმეორესთან ძალიან ახლოს იქნებიან, რადგან n რიცხვების ორ მეზობელ მნიშვნელობათა სხვაობის l -თან შეფარდება ძალიან მცირე სიდიდეს წარმოადგენს. მაშასადამე, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$n_1 = n \cdot n_{01}, \quad n_2 = n \cdot n_{02}, \quad n_3 = n \cdot n_{03} \quad (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n^2),$$

მაშინ (77,28) ფორმულებიდან შემდეგ დამოკიდებულებებს მივიღებთ:

$$\Delta n_1 = \frac{l}{2\pi} \Delta k_{n1}, \quad \Delta n_2 = \frac{l}{2\pi} \Delta k_{n2}, \quad \Delta n_3 = \frac{l}{2\pi} \Delta k_{n3}, \quad (77,29)$$

(77,29)-დან გამომდინარეობს, რომ სიხშირეთა ω , $\omega + \Delta \omega$, ანუ ტალღური ვექტორის k , $k + \Delta k$ ინტერვალში მოთავსებული ტალღური ვექტორის შესაძლო მდებარეობათა რიცხვი Δn შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$\Delta n = \Delta n_1 \cdot \Delta n_2 \cdot \Delta n_3 = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^3 \Delta k_{n1} \Delta k_{n2} \Delta k_{n3}. \quad (77,30)$$

ამ უკანასკნელის საშუალებით k_n , $k_n + \Delta k_n$ ინტერვალში, $\Delta \Omega$ სხეულოვან კუთხეში k_n — ტალღური ვექტორის აბსოლუტური სიდიდის მნიშვნელობათა

მისაღებად k ვექტორის სივრცეში შემოვიღოთ სფერულ კოორდინატა სისტემა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამ სისტემაში მოცულობის ელემენტი

$$\Delta k_{n_1} \cdot \Delta k_{n_2} \cdot \Delta k_{n_3} = k^2 n \Delta k_n \Delta \Omega,$$

მაშინ (77,30) გამოსახულება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\Delta n = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^3 k^2 n \Delta k_n \Delta \Omega,$$

რომელიც ზღვარში მოგვცემს

$$dn = \rho_n d\omega_n d\Omega l^3 = \left(\frac{l}{2\pi c}\right)^3 \omega^2 n d\omega_n d\Omega. \quad (77,31)$$

ρ_n — ფუნქციის ელექტრომაგნიტური ტალღების სიმკვრივე ეწოდება. (77,31)-დან, მოცულობის ერთეულში ($l^3 = 1$) ოსცილიატორთა რიცხვისათვის მივიღებთ

$$\rho_n d\omega_n d\Omega = \frac{\omega^2 n d\omega_n d\Omega}{(2\pi c)^3}. \quad (77,32)$$

§ 78. ბანისი და ზანდვარიში ელემენტარმაგნიტური ველი

§ 77-ში, დამუხტული ნაწილაკებისაგან თავისუფალ სივრცეში მოთავსებული მდგარი ელექტრომაგნიტური ტალღების „მოძრაობის“ განტოლება დაიყვანეთ ნაწილაკთა სისტემის კანონიკურ განტოლებათა სახეზე.

ახლა განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ველი მასში მოთავსებულ დამუხტულ ნაწილაკებთან ერთად. მუხტების სიდიდეები აღვნიშნოთ $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ -ით. რადგან ყოველი მუხტი დანარჩენი მუხტების ველში იმყოფება, ამიტომ მუხტებისა და მათივე ველის მოძრაობის მდგომარეობის შესასწავლად გამოვიყენოთ გარეშე ველში n -რი მუხტის ჰამილტონის ფუნქცია

$$H_n = q_n \varphi_n + c \sqrt{m^2 n^2 c^2 + \left(p - \frac{q_n}{c} A_n\right)^2}, \quad (78,1)$$

სადაც A_n და φ_n წარმოადგენენ აღებული მოცულობის შიგნით და გარეთ მოთავსებულ მუხტთა ველის პოტენციალებს n -რი მუხტის მდებარეობის წერტილში.

თუ ცალკეულ ნაწილაკთა (78.1) ჰამილტონის ფუნქციებს შევკრებთ, მივიღებთ დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემის ჰამილტონის ფუნქციას

$$H = \sum H_n. \quad (78,2)$$

რადგან A_n და φ_n — ფუნქციები (51,7) და (51,8) განტოლებათა ამონახსნებია, ამიტომ ამ განტოლებებს აგრეთვე კანონიკური ფორმა უნდა მიეცეთ, რისთვისაც უნდა დავუშვათ, რომ A და φ პერიოდული ფუნქციებია ზედაპირზე.

როდესაც აღებულ მოცულობაში გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველთან ერთად დამუხტული ნაწილაკებია მოთავსებული, მაშინ (77,2) პირობას ადგილი

არ ექნება, მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია საერთო ელექტრომაგნიტური ველი ორი ველის ჯამის სახით წარმოვიდგინოთ

$$A = A_1 + A_2, \quad (78,3)$$

სადაც

$$\operatorname{div} A_1 = 0, \quad (78,4)$$

ხოლო

$$A_2 = \operatorname{grad} f. \quad (78,5)$$

A_1 ჩვენთვის უკვე ცნობილ განივ ელექტრომაგნიტურ ველს გვაძლევს, რომელიც, (77,24)-ს თანახმად, ფურიეს მწკრივით გამოისახება

$$A_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(t) A_n. \quad (78,6)$$

ანალოგიურად, A_2 პერიოდული ველი შეგვიძლია ფურიეს მწკრივად გავშალოთ

$$A_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_i(t) A_i. \quad (78,7)$$

თუ ამ უკანასკნელს ტალღის განტოლებაში შევიტანთ, მაშინ (78,7) მწკრივად გაშლის A_i — კოეფიციენტებისათვის შემდეგ განტოლებას მივიღებთ

$$\Delta A_i + \frac{\omega^2}{c^2} A_i = 0. \quad (78,8)$$

რადგან, (78,5) ფორმულის თანახმად, A_2 პოტენციალური ველია, ამიტომ (78,8) განტოლების ამონახსნი შეიძლება $f(x_1, x_2, x_3)$ სკალარული ფუნქციის გრადიენტის სახით წარმოვიდგინოთ

$$A_i = \frac{c}{\omega_i} \operatorname{grad} f, \quad (78,9)$$

რასიაც შეიძლება ადვილად დავრწმუნდეთ (78,8) განტოლებაში (78,9)-ის უშუალო ჩასმის გზით.

(78,9) დამოკიდებულებიდან, (2,29)-ს თანახმად, გამომდინარეობს, რომ A_2 არაგრიგალურ ველს წარმოადგენს

$$\operatorname{rot} A_2 = 0. \quad (78,10)$$

ისევე როგორც A_2 ვექტორპოტენციალი, φ სკალარული პოტენციალი, პერიოდულობის გამო, აგრეთვე შეგვიძლია ფურიეს მწკრივად გავშალოთ, გვექნება

$$\varphi = \sum_{\xi=-\infty}^{+\infty} a_\xi(t) \varphi_i, \quad (78,11)$$

რომლის გაშლის φ_i კოეფიციენტები

$$\Delta \varphi_i + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_i = 0 \quad (78,12)$$

განტოლებას აკმაყოფილებენ.

რადგან A_i და φ_i ერთი და იგივე სახის განტოლებებს აკმაყოფილებენ, ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\varphi_i = f$, საიდანაც, (78,9)-ს თანახმად, გვექნება

$$A_i = \frac{c}{\omega_i} \text{grad } \varphi_i. \quad (78,13)$$

(78,7) და (78,11) მწკრივებში შემაჯავლი $q_i(t)$ და $a_i(t)$ კოეფიციენტებს შორის კავშირის მოსანახავათ გამოვიყენოთ (51,3) ლორენცის პირობა. თუ ამ უკანასკნელში (78,7) და (78,11) გამოსახულებებს ჩავსვამთ და (78,12) განტოლებას გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$\omega_i q_i(t) = \dot{a}_i(t). \quad (78,14)$$

$q_n(t)$, $q_i(t)$ და $a_i(t)$ ამპლიტუდებისათვის განტოლებათა მისაღებად (51,7) და (51,8) განტოლებებში სათანადოთ შევიტანოთ (78,6), (78,7) და (78,11) გამოთხადებები. თუ მიღებული განტოლებების ორივე მხარეებს შესაბამისად A_n , A_i და φ_i ფუნქციებზე გადავამრავლებთ და ამ უკანასკნელთა ორთოგონალობის პირობებს გავითვალისწინებთ, მაშინ ინტეგრაციის შედეგად, წერტილოვანი მუხტების შემთხვევაში მივიღებთ:

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{c} \int \rho(v, A_n) dx^3 = \frac{1}{c} \sum q_m(v_m, A_n), \quad (78,15)$$

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{c} \int \rho(v, A_i) dx^3 = \frac{1}{c} \sum q_m(v_m, A_i). \quad (78,16)$$

$$\ddot{a}_i(t) + \omega_i^2 a_i(t) = \int \rho \varphi_i dx^3 = \sum q_m \varphi_m. \quad (78,17)$$

ეს უკანასკნელი განტოლებები ოსცილატორის იძულებითი რხევების განტოლებებს წარმოადგენენ. q_m მუხტის იძულებითი რხევა გამოწვეულია სისტემის შემადგენელი დამუხტული ნაწილაკების (გარდა q_m — მუხტის ველის) და გარეშე ელექტრომაგნიტური ველების მოქმედებით. (78,15), (78,16) და (78,17) განტოლებათა არაერთგვაროვნობის გამომსახველი მარჯვენა მხარეები შეიცავენ დამუხტული ნაწილაკებისა და გარეშე ელექტრომაგნიტური ველის ურთიერთქმედების ენერგიებს (q_m მუხტის მიმართ ყველა დანარჩენი მუხტების ველიც გარეშე ველს მიეკუთვნება). აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ (78,15)—(78,17) განტოლებები მიიღებიან ნაწილაკების (78,1) ჰამილტონის ფუნქციებიდან, თუ ამ უკანასკნელთ ჩავსვამთ ველის (77,26) კანონიკურ განტოლებებში, რომლებშიც განზოგადოებული კოორდინატების როლს $q_n(t)$, $q_i(t)$ და $a_i(t)$ სიბლიდებები შეასრულებენ.

როგორც (78,4) პირობა გვიჩვენებს A_1 განივ ველს წარმოადგენს, რომლის შესაბამის ოსცილატორთა ჰამილტონის ფუნქციაა

$$H_m = \frac{1}{2} \sum \{p_n^2(t) + \omega_n^2 q_n^2(t)\}. \quad (78,18)$$

ელექტრომაგნიტური ველის მეორე შემადგენელი ნაწილი A_z (78,5)-ს თანახმად, მიმართულია ორი მუხტის შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ. ეს ველი განივის პერპენდიკულარულია და ამიტომ მას გასწვრივი ველი ეწოდება. გასწვრივი ველი ოსცილიატორთა სისტემის ისეთ ორ ჯგუფზე დაიყვანება, რომელთა ჰამილტონის ფუნქციები, სათანადოდ, $q_i(t)$ და $a_i(t)$ — სიდიდეების საშუალებით შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$\sum_i H_i = \frac{1}{2} \sum (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2). \quad (78.19)$$

$$\sum_i H'_i = -\frac{1}{2} \sum (p_i'^2 + \omega_i^2 a_i^2). \quad (78.20)$$

(78,20)-ში მინუს ნიშანი აღებულია იმიტომ, რომ დამუხტული ნაწილაკის (78.1) ჰამილტონის ფუნქციაში φ სკალარული და A ვექტორპოტენციალი სხვადასხვა ნიშნებით შედიან.

ამგვარად, ნებისმიერი ელექტრომაგნიტური ველისა და წერტილოვან მუხტთა სისტემა შეიძლება სამი ტიპის ოსცილიატორთა სისტემების ერთობლიობაზე დაიყვანოს, რომლის ჰამილტონის ფუნქცია შემდეგი ჯამით ვახსნავს:

$$H = \sum_{m=1}^N H_m + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (H_l + H'_l). \quad (78.21)$$

(78,21) ჰამილტონის ფუნქციის ფიზიკური აზრი შემდეგია: პირველი ჯამი წარმოადგენს დამუხტული მატერიალური ნაწილაკების სრულ ენერჯიას. მეორე — განივი ელექტრომაგნიტური ტალღების ენერჯიას, ხოლო მესამე — „გასწვრივი ტალღების“ (გასწვრივი ველის) ენერჯიას. ეს უკანასკნელი წევრი ნულისაგან განსხვავებულია როცა ველში მოთავსებულია დამუხტული ნაწილაკები და უშუალოდ მუხტთა კულონურ ურთიერთქმედებასთანაა დაკავშირებული.

მიღებული ჰამილტონის ფუნქციების საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია აღებული მოცულობის შიგნით და გარეთ განაწილებული მუხტების ელექტრომაგნიტური ველის (51,7) და (51,8) განტოლებები შემდეგ კანონიკურ განტოლებათა სისტემაზე დაიყვანოს.

$$\frac{\partial H}{\partial q_m} = \dot{p}_m, \quad \frac{\partial H}{\partial p_m} = \dot{q}_m \quad (\text{ნაწილაკები}). \quad (78,22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = -\dot{p}_n, \quad \frac{\partial H}{\partial p_n} = \dot{q}_n \quad (\text{განივი ველი}). \quad (78,23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, & \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial a_i} &= -\dot{p}'_i, & \frac{\partial H}{\partial p'_i} &= \dot{a}_i \end{aligned} \right\} (\text{გასწვრივი ველი}). \quad (78,24)$$

თატი VII

ლორენსის განვოლბათა (ველის) გასაშუალოება

§ 79. მუხტთა სისტემის ველის გასაშუალოება

წინა პარაგრაფებში ლორენცის განტოლებათა საშუალებით შევისწავლეთ ნებისმიერად მოძრავი დამუხტული ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველი. ჩვენ აგრეთვე გამოვარკვეეთ, რომ სუსტი და სამუალო ელექტრომაგნიტური ველებისათვის ადგილი აქვს სუპერკოზიციის თვისებას. მაშასადამე, მუხტთა სისტემის ველის მოსანახავად ცალკეული მუხტების ველები უნდა შევკრიბოთ. თუ მატერიალური სხეულების აგებულების რეალურ სურათს გადავხედავთ დაკრწმუნდებით, რომ ნივთიერების შიგნით რომელიმე წერტილში ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორების მონახვა, შეუძლებელია დამუხტული ნაწილაკების ველების შეკრების გზით, შეუძლებელია. უფრო მეტიც, რადგან ატომ-მოლეკულების, როგორც რთული დინამიკური სისტემების შეუძლებელი დამუხტული ნაწილაკების მოძრაობის მდგომარეობები ძალიან სწრაფად იცვლებიან, ამიტომ მოცემულ ადგილზე დროის ალბულ მომენტში შეუძლებელია ამ ნაწილაკების ველის e და h ვექტორების გამოთვლა. მაგალითად, უმარტივეს დინამიკურ სისტემაში — წყალბადის ატომში, პროტონის ირგვლივ ელექტრონის სწრაფი მოძრაობის გამო, ამ ატომის შიგნით ალბულ რომელიმე წერტილში დროის მოცემულ მომენტში ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველის e და h ვექტორების მნიშვნელობათა თეორიული ან ექსპერიმენტული განსაზღვრა გადაუღახავ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. ატომისა და მოლეკულის მიერ დაკავებული სივრცის შიგნით e და h ვექტორები სიდიდით და მიმართულებით ისე სწრაფად იცვლებიან, რომ ალბულ წერტილში მათი უშუალო გაზომვის ყოველგვარი ცდაც კი სრულიად უნაყოფოა.

ამგვარად, ჩვენ იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ სივრცეში მოძრავი დამუხტული მატერიალური ნაწილაკების ელექტრომაგნიტური ველის (34,13) განტოლებები, მატერიალურ სხეულებში მიმდინარე ელექტრომაგნიტური პროცესების შესასწავლად გამოუსადეგარი არიან. იმის გამო, რომ ლორენცის განტოლებებში შემავალი ძირითადი სიდიდეები: $e(x_i)$, $h(x_i)$ და $p(x_i)$ დრო-სივრცის კოორდინატების ისეთი სწრაფად ცვლადი ფუნქციებია, რომელთა უშუალო გამოთვლა და გაზომვა ნივთიერების შიგნით რომელიმე წერტილში შეუძლებელია, ამ განტოლებათა გამოყენება მოუხერხებელია.

რადგან სამყაროში სივრცეში არ არსებობს, ხოლო ელექტრომაგნიტური პროცესები ყოველთვის მატერიალურ სხეულებში მიმდინარეობენ,

ამიტომ, რომ შესაძლებელი იყოს ელექტრონთა თეორიის (34,13) განტოლებათა პრაქტიკული გამოყენება, e და h სწრაფად ცვლადი — არა რეგულიარული ფუნქციებიდან უნდა გადავიდეთ ნელად ცვლად რეგულიარულ ფუნქციებზე.

თუ ელექტრონს წერტილოვანი მუხტის სახით წარმოვიდგინოთ, მაშინ, (65,15) და (65,16)-ს თანახმად, მისი ელექტრომაგნიტური ველის e და h ვექტორები ელექტრონის მოთავსების წერტილში, ანდა ძის უშუალო მახლობლობაში, ანომალურად დიდ ძნიშნელობებს მიიღებენ. ეს წერტილები ელექტრომაგნიტური ველის არა რეგულიარულ წერტილებს წარმოადგენენ. ელექტრონიდან შორ მანძილებზე კი ველი პრაქტიკულად არ არსებობს. მაგრამ, იპის გამო, რომ ატომში ელექტრონები განუწყვეტლივ სწრაფი მოძრაობის მდგომარეობაში იმყოფებიან ველის არა რეგულიარული წერტილებიც შესაბამისად თავიანთ მდებარეობებს იცვლიან. ატომ-მოლეკულათა შიგნით ელექტრონები ისე სწრაფად მოძრაობენ, რომ ის დრო, რომლის განმავლობაში მოძრაობა (ელექტრომაგნიტური ველი) მნიშვნელოვნად იცვლება, ვაკუუმით მცირეა ვიდრე ველის დამაბულობათა ვექტორების გასაზომად საჭირო ექსპერიმენტის ხანგრძლიობა. ეს გარემოება უფლებას გვაძლევს დრო და სივრცის კოორდინატების $e(x_i)$, $h(x_i)$ და $\rho(x_i)$ არა რეგულიარული ფუნქციებიდან, რომლებიც ზოგიერთ წერტილებში ანომალურად დიდ, ზოგიც ძალიან მცირე მნიშვნელობებს ღებულობენ, უწყვეტ რეგულიარულ $E(x_i)$ და $H(x_i)$ ფუნქციებზე გადავიდეთ. $E(x_i)$ და $H(x_i)$ ფუნქციები, $e(x_i)$ და $h(x_i)$ -საგან განსხვავებით, ისე ნელა უნდა იცვლებოდნენ რომ მატერიალური სხეულის შიგნით აღებული წერტილიდან მცირე მახლობლობაში მდებარე მეზობელ წერტილში გადასვლის დროს ისინი პრაქტიკულად არ იცვლებოდნენ, ანდა ამ ცვლილების სიმცირის გამო მათი გაზომვა შესაძლებელი იყოს. მაშინ, როდესაც e და h ვექტორების გამოთვლის დროს ჩვენ უნდა გავითვალისწინოთ მუხტთა დინამიკური სისტემის შემადგენელი ცალკეული მუხტების ინდივიდუალური მოძრაობის მდგომარეობები, E და H ვექტორების ველისათვის ცალკეული მუხტების მოძრაობათა მდგომარეობების განხილვა საჭირო აღარაა. სათანადოთ, ჩვენ აღარ დაგვირდება მატერიალური სხეულის შემადგენელი დამუხტული ნაწილაკების ველების გამოთვლა და შეკრება. მატერიალური გარემოს ელექტრული და მაგნიტური თვისებების გამოსარკვევად და იქ მიმდინარე ელექტრომაგნიტური პროცესების შესასწავლად საკმარისი იქნება E და H ვექტორების, როგორც დრო-სივრცის კოორდინატების ნელად ცვლადი ფუნქციების განსაზღვრა.

ამგვარად, ჩვენს ამოცანას შეადგენს e და h არა რეგულიარული ფუნქციების დროსა და სივრცეში გასაშუალოების, ანუ როგორც ხშირად ამბობენ «გაუთოების» გზით, მივიღოთ E და H ნელად ცვლადი რეგულიარული ფუნქციები და მოვნახოთ ის განტოლებები, რომლებსაც ეს უკანასკნელი ფუნქციები აკმაყოფილებენ.

თუ გასაშუალოების («გაუთოების») ოპერაციას ჩავატარებთ, მაშინ e და h ფუნქციების ანომალურად დიდი და მცირე მნიშვნელობათა წერტილები, რომელთა მონახვა შეუძლებელია, თავიანთ განსაკუთრებულ ხასიათს დაკარ-

გავენ და გასაშუალოების შედეგად მიღებული E და H რეგულიარული ფუნქციების ჩვეულებრივი წერტილების ადგილებს დაიკავებენ.

ცხადია, რომ (34,13) ლორენცის განტოლებათა სისტემაში e და h მიკრო სიდიდეების გასაშუალოებული მნიშვნელობების შეტანის შედეგად მივიღებთ მაკრო განტოლებებს, რომლებიც გამოდგებიან მატერიალურ სხეულებში ელექტრომაგნიტური პროცესების მიმდინარეობის შესასწავლად. მაშასადამე, ლორენცის განტოლებებში შემაჯავალი სიდიდეების გასაშუალოება თვით განტოლებათა თავისებური გასაშუალოების ტოლფასია.

ამ გასაშუალოებისათვის რამოდენიმე გზა არსებობს. თითოეული მათგანი მოითხოვს სპეციალურ დაშვებებს და შეზღუდვებს ზუხტთა სისტემის როგორც მთლიანისა და შექმნილი ნაწილაკების მოძრაობის მდგომარეობათა შესახებ. ჩვენ განვიხილავთ ამოცანას ყველაზე ზოგადი სახით. სახელდობრ მიკროსკოპული ელექტრონთა თეორიიდან. დამუხტულ ნაწილაკთა ნებისმიერი სისტემისაგან შედგენილი მაკროსკოპიული სხეულებისათვის, ყოველგვარი შეზღუდვის გარეშე, მივიღებთ მაკროსკოპიული E და H ფუნქციებისათვის განტოლებათა ახალ სისტემას.

ელექტრონთა თეორიის განტოლებათა დრო-სივრცით გასაშუალოების ნაცვლად, რაც ზოგიერთ შეზღუდვებს მოითხოვს, გამოვიყენოთ სტატისტიკური ანსამბლის გასაშუალოების მეთოდი, რომელიც გაცილებით უფრო სრული და დამაკმაყოფილებელია როგორც ფიზიკური, ისევე მათემატიკური თვალსაზრისით.

ეს მეთოდი იმდენად ზოგადია, რომ მისი გამოყენება შესაძლებლობას გვაძლევს შევისწავლოთ ელექტრომაგნიტურ ველში მატერიის ყოფაქცევის მრავალი მოვლენა. სახელდობრ ეს მეთოდი გამოსაყენებელია მრავალ კონტინუალური სისტემისათვის, რომელშიაც ყოველი კომპონენტი ნებისმიერად მოძრაობს. ის განიხილავს აგრეთვე დიფუზიის მოვლენებსაც. დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემა წარმოვიდგინოთ ანსამბლის სახით, მისთვის გამოვიყენოთ სტატისტიკურ ფიზიკაში ცნობილი ანსამბლის გასაშუალოების წესი. ჩვენ აქ აღარ დაგვიჩნდება შემოვიისაზღვროთ აღებული კოორდინატთა სისტემის მიმართ უძრავი ან მუდმივი სიჩქარეებით მოძრავი მატერიალური სხეულების განიხილვით. მიღებული განტოლებები გამოდგებიან ნებისმიერი სიჩქარით მოძრავი მატერიალური გარემოს შიგნით მიმდინარე ელექტრომაგნიტური მოვლენების შესასწავლად. ის მეთოდი რომლითაც ჩვენ აქ ვისარგებლებთ ახალი არაა, იმავე გზით მიიღება ჰიდროდინამიკის ძირითადი განტოლებები.

§ 80. ბანაწილავის ფუნქცია

განვიხილოთ N ატომისაგან შემდგარი სისტემა, ($k = 1, 2, 3, \dots, N$), რომლის ყოველი k -რი ატომი თავის მხრივ შედგება q_k მუხტის მქონე წერტილოვანი ატომგულისა და Z_k წერტილოვანი ელექტრონებისაგან, რომელთა მუხტებია q_k .

k -რი ატომის გულის ცენტრისა და იმპულსის ვექტორები აღვნიშნოთ R_k და P_k თი, ხოლო იმავე ატომის ელექტრონებისა კი, სათანადოთ,

r_{ki} და P_{ki} — ვექტორებით. ეს უკანასკნელი ვექტორები ალებული არიან k -რი ატომგულის მიმართ.

მთელი სისტემის მდგომარეობა შევისწავლოთ

$$\sum_{k=1}^N 6(Z_k + 1)$$

განზომილებიან ფაზურ სივრცეში, რომელიც შეესაბამება ყველა ნაწილაკების კოორდინატებისა და იმპულსების ერთობლიობას.

ალებული სისტემის ერთ-ერთ გარკვეულ მდგომარეობაში ყოფნის (ალ-მოჩენის) ალბათობა მიიღება ფაზურ სივრცეში ალბათობათა განაწილების ფუნქციის საშუალებით, რომელიც აღენიშნოთ შემდეგი ფუნქციით

$$f = f(R_k^N, r_{ki}^{Z_k N}, P_k^N, P_{ki}^{Z_k N}, t). \quad (80,1)$$

სადაც, მაგალითად, $r_{ki}^{Z_k N}$ აღნიშნავს, რომ f დამოკიდებულია ყველა r_{ki} ვექტორზე, რომლის ინდექსი k გაიზღვის მნიშვნელობებს 1-დან N -მდე, ხოლო i ინდექსი 1-დან Z_k -მდე.

ჩაწერის გამარტივების თვალსაზრისით ფაზურ სივრცეში რაიმე სილიდიდან, მაგალითად, f -დან ალებული ინტეგრალი შემდეგნაირად აღენიშნოთ:

$$\langle f \rangle = \int f \prod_k dR_k \prod_{k,i} dr_{ki} \prod_k dP_k \prod_{k,i} dP_{ki}. \quad (80,2)$$

მივიღოთ რომ (80,1) განაწილების ფუნქცია f ნორმირებულია

$$\langle f \rangle = 1. \quad (80,3)$$

სტატისტიკური ფიზიკის დებულებათა მიხედვით, რაიმე დინამიკური სილიდის

$$\psi = \psi(R_k^N, r_{ki}^{N Z_k}, P_k^N, P_{ki}^{N Z_k}, R, t), \quad (80,4)$$

რომელიც დამოკიდებულია არა მარტო სისტემის მდგომარეობაზე, არაჲედ აგრეთვე ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში ალებულ R რადიუსვექტორზე და t დროზე, საშუალო მნიშვნელობა მოინახება შემდეგნაირად:

$$\psi_{\text{საშუალო}}(R, t) = \langle \psi f \rangle. \quad (80,5)$$

თუ საჭიროა ვექტორული ან ტენზორული სილიდის საშუალო მნიშვნელობის მოინახება, მაშინ (80,5) ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ მისი ყოველი მდგენელი-სათვის. შემდეგში ჩვენ აგრეთვე დაგვეჩიღება ზოგიერთი სახის ატომური განაწილების ფუნქციები:

$$g_k = g_k(R_k, r_{ki}, t) = \int f \prod_{j \neq k} dR_j \prod_{\substack{j' \\ j \neq k}} dr_{j' i} \prod_{j \neq k} dP_j \prod_{\substack{j' \\ j \neq k}} dP_{j' i}, \quad (80,6)$$

სადაც ინტეგრაცია უნდა ჩავატაროთ ყველა ცვლადების მიხედვით, გარდა k -რი ატომის გულისა და მისივე ელექტრონების R_k და r_{ki} კოორდინატებისა.

ამგვარად, ახლა ჩვენ შეგვიძლია, (80,6) ფორმულის გამოყენების გზით, გავასაშუალოოთ ψ დინამიკური სილიდე გარდა R_k და r_{ki} ორისა (შეიძლება

აგრეთვე R და t ცვლადების გამოკლებით) ყველა დანარჩენი ცვლადების მიხედვით, რაც მოგვცემს:

$$g_k \overline{\psi}(R_k, r_{ki}, R, t) = \int \psi f \prod_{j \neq i} dR_j \prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} dr_{kj} \prod_j dP_j \prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} dP_{j\dot{i}}. \quad (80,7)$$

(80,5), (80,6) და (80,7) ფორმულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\psi_{საშუალო} = \langle \psi f \rangle = \int \overline{\psi} g_k dR_k \prod_i dr_{ki}. \quad (80,8)$$

§ 81. დინამიკურ სიდიდეთა დროით წარმოებულები

ფაზურ სივრცეში ალბათობის მუდმივობის კანონიდან $\left(\frac{df}{dt} = 0\right)$

ზიილდება, რომ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & - \sum_k (\nabla_{R_k} \cdot f, \dot{R}_k) - \sum_{k,i} (\nabla_{r_{ki}} \cdot f, \dot{r}_{ki}) - \\ & - \sum_k (\nabla_{P_k} \cdot f, \dot{P}_k) - \sum_{k,i} (\nabla_{P_{ki}} \cdot f, \dot{P}_{ki}), \end{aligned} \quad (81,1)$$

სადაც R_k ფაზურ სივრცეში. ∇_{R_k} -- ჩვეულებრივი ნაბლა დიფერენციალური ოპერატორია, ხოლო \dot{R}_k -- სიჩქარე თუ გამოვიყენებთ (80,5) ფორმულას, მაშინ ადვილად შეიძლება განვსაზღვროთ ψ დინამიკური სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის დროით წარმოებულე

$$\frac{\partial \psi_{საშ}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi f \rangle = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} f \right\rangle + \langle \psi \frac{\partial f}{\partial t} \rangle. \quad (81,2)$$

თუ ამ უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა მხარისი მეორე წევრში $\frac{\partial f}{\partial t}$ -ის

ნაცვლად ჩავსვათ (81,1) გამოსახულებას და გამოვიყენებთ გაუს-ოსტროგ-რადსკის თეორემას, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \psi_{საშ}}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} f \right\rangle, \quad (81,3)$$

რადგან $f \rightarrow 0$, როდესაც კოორდინატები და იმპულსები $\rightarrow \infty$ -კენ.

ამგვარად, ფაზურ სივრცეში ψ დინამიკური სიდიდის დროით სრული წარმოებულისათვის ვუქნება

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_k (\dot{R}_k, \nabla_{R_k} \psi) + \sum_{k,i} (\dot{r}_{ki}, \nabla_{r_{ki}} \psi) + \\ & + \sum_k (\dot{P}_k, \nabla_{P_k} \psi) + \sum_{k,i} (\dot{P}_{ki}, \nabla_{P_{ki}} \psi). \end{aligned} \quad (81,4)$$

§ 82. ელემენტური და მაგნიტური მომენტების გასაშუალება

რადგან ატომის თითქმის მთელი მასა ატომგულშია თავმოყრილი, ამიტომ, როგორც არ უნდა იყოს ატომგულის იმპულსი და ელექტრონების კოორდინატები, i მომენტში R რადიუსვექტორით განსაზღვრულ მდებარეობაში ატომგულის ყოფნის ალბათობა დირაკის (31,9) ფუნქციის საშუალებით შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$w(R, i) = (\bar{\delta}(R_k - R) f). \quad (82,1)$$

ვინაიდან ატომების გულები იმავე სივრცეში არიან მოთავსებული, რომელიც დაკავებული აქვთ ატომებს, ამიტომ, დირაკის იგივე $\bar{\delta}(R_k - R)$ ფუნქციის გამოყენების გზით, ადვილად შეიძლება განვსაზღვროთ ატომგულის R მდებარეობისათვის i მომენტში მოცულობის ერთეულში მოთავსებულ ატომთა საშუალო რიცხვი $n(R, i)$ (სიმკვრივე), რომელსაც, (82,1)-ს თანახმად, შემდეგი სახე ექნება

$$n(R, i) = \sum_k (\bar{\delta}(R_k - R) f). \quad (82,2)$$

k -რი ატომის მუხტი $\sum_i (q_k + q_{ki})$ წარმოადგენს ატომგულის q_k და იმავე ატომის ელექტრონების q_{ki} მუხტების ჯამს.

$\rho(R, i)$ მუხტის სიმკვრივის მისაღებად k -რი ატომის მუხტის სიდიდე $n(R, i)$ -ზე უნდა გავამრავლოთ და k ინდექსის მიხედვით აეჯამოთ, გვექნება

$$\rho(R, i) = \left(\sum_{k,i} (q_k + q_{ki}) \bar{\delta}(R_k - R) f \right) = \sum_k \int \sum_i (q_k + q_{ki}) g_k \prod_j dr_{kj}. \quad (82,3)$$

სადაც გამოყენებულია (80,8) დამოკიდებულება. k -რი ატომის, როგორც მთლიანის, მუხტთა მოძრაობით გამოწვეული დენის მისაღებად მუხტის სიდიდე უნდა გავამრავლოთ \dot{R}_k სიჩქარეზე, საიდანაც R მდებარეობისათვის i მომენტში დენის ძალის საშუალო მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$\frac{(\sum (q_k + q_{ki}) \dot{R}_k \bar{\delta}(R_k - R) f)}{(\sum \bar{\delta}(R_k - R) f)}. \quad (82,4)$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან, R მდებარეობისა და i მომენტისათვის, კეშმარიტი დენის სიმკვრივის მისაღებად (82,4) გამოსახულება უნდა გავამრავლოთ $n(R, i)$ სიმკვრივეზე. თუ იმავე დროს გამოვიყენებთ (80,8) დამოკიდებულებას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} j(R, i) &= \left(\sum_{k,i} (q_k + q_{ki}) \dot{R}_k \bar{\delta}(R_k - R) f \right) = \\ &= \sum_k \int \sum_i q_k + q_{ki} \overline{\dot{R}_k} g_k(R, r_{ki}, i) \prod_j dr_{kj}, \end{aligned} \quad (82,5)$$

სადაც $\overline{\dot{R}_k}$ წარმოადგენს გარდა k -რი ატომისა ყველა დანარჩენი მუხტების მიხედვით გასაშუალოებულ სიჩქარეს, ხოლო g_k ატომური განწილების ფუნქციაა.

(82,3) და (82,4)-დან, (81,3) ფორმულის გამოყენების გზით, ადვილად მიიღება მუხტის მულტიპოლარობის კანონი:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla_R, j). \quad (82,6)$$

ასევე თუ ვისარგებლებთ ატომური ელექტრული დიპოლური და კვადრუპოლური, ხოლო მაგნიტური დიპოლური მომენტების ცნობილი გამოსახულებებით

$$P_k = \sum q_{ki} r_{ki} \quad (82,7)$$

$$D_k = \sum q_{ki} (r_{ki} r_{ki}) \quad (82,8)$$

$$M_k = \frac{1}{2c} \sum q_{ki} [r_{ki} \dot{r}_{ki}] \quad (82,9)$$

(სადაც k -რი ატომის მომენტი განსაზღვრულია მისი ატომგულის R_k მდებარეობის მიმართ), მაშინ ამ მომენტების სიმკვრივეებისათვის გვექნება:

$$P(R, t) = \left\langle \sum_{k,i} q_{ki} r_{ki} \delta(R_k - R) f \right\rangle = \sum_k \int \sum_i q_{ki} r_{ki} g_k(R, r_{ki}, t) \prod_j dr_{kj}. \quad (82,10)$$

$$\begin{aligned} Q(R, t) &= \left\langle \frac{1}{2} \sum_{k,i} q_{ki} (r_{ki} r_{ki}) \delta(R_k - R) f \right\rangle = \\ &= \sum_k \int \frac{1}{2} \sum_i q_{ki} (r_{ki} r_{ki}) g_k(R, r_{ki}, t) \prod_j dr_{kj}. \end{aligned} \quad (82,11)$$

$$\begin{aligned} M(R, t) &= \frac{1}{2c} \left\langle \sum_{k,i} q_{ki} [r_{ki} \dot{r}_{ki}] \delta(R_k - R) f \right\rangle = \\ &= \sum_k \int \frac{1}{2c} q_{ki} [r_{ki} \dot{r}_{ki}] g_k(R, r_{ki}, t) \prod_j dr_{kj}. \end{aligned} \quad (82,12)$$

R წერტილში მომენტთა სიმკვრივეების ამ გამოსახულებებში მხოლოდ ის ატომები მოგვცემენ გარკვეულ წვილს, რომელთა გულები ადებულ R წერტილში მდებარეობენ.

შემდეგში ჩვენ დაგვეკვირდება $P(R, t)$, $Q(R, t)$ და $M(R, t)$ მომენტების დროით და სივრცითი კოორდინატებით წარმოებულები, ამიტომ გადავიდეთ მათ გამოთვლაზე.

თუ გამოვიყენებთ (82,10) ფორმულას და გავითვალისწინებთ, რომ r_{ki} დამოკიდებულია R -ზე, მაშინ მოცულობის ერთეულის ელექტრული დიპოლური მომენტის, ანუ P პოლარიზაციის ვექტორის განზღაბობა შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$\operatorname{div} P = (\nabla_R, P) = \sum_k \int \sum_i q_{ki} (r_{ki}, \nabla_R) g_k \prod_j dr_{kj}. \quad (82,13)$$

ბოლო დროით წარმოებულისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \left\langle f \frac{d}{dt} \sum_{k,i} q_{ki} r_{ki} \delta(R_k - R) \right\rangle = \left\langle f \sum_{k,i} q_{ki} r_{ki} (\dot{R}_k, \nabla_{R_k}) \delta(R_k - R) \right\rangle + \\ & + \left\langle f \sum_{k,i} q_{ki} \dot{r}_{ki} \delta(R_k - R) \right\rangle, \end{aligned} \quad (82,14)$$

სადაც წერტილით ზემოდან აღნიშნული გვაქვს აღებული სიდიდის დროის მიხედვით წარმოებული

$$\frac{dR_k}{dt} = \dot{R}_k.$$

(82,14) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში პირველი შესაქრებიდან ნაწილობითი ინტეგრაციის ჩატარების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & - \left\langle \sum q_{ki} r_{ki} \delta(R_k - R) (\nabla_{R_k} \dot{R}_k) f \right\rangle + \left\langle f \sum_{k,i} q_{ki} \dot{r}_{ki} \delta(R_k - R) \right\rangle = \\ = & - \sum_k \int \sum_i q_{ki} r_{ki} (\nabla_{R_k}, \dot{R}_k) g_j \Pi_j dr_{ki} + \sum_k \int \sum_i q_{ki} \dot{r}_{ki} g_j \Pi_j dr_{ki}. \end{aligned} \quad (82,15)$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება განვიხილოთ როგორც P პოლარიზაციის ვექტორის რხევის (ცვლილების) განტოლება.

ანალოგიური გზით მიიღებთან შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\text{grad}_R Q = \nabla_R Q = \sum_k \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2} r_{ki} (r_{ki}, \nabla_{R_k} g_k) \Pi_j dr_{ki}. \quad (82,16)$$

$$\text{div grad } Q = (\nabla_{R_k}, \nabla_{R_k} Q) = \sum_k \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2} r_{ki} r_{ki} : \nabla_{R_k} \nabla_{R_k} g_k(R, r_{ki}, t) \Pi_j dr_{ki}, \quad (82,17)$$

სადაც $r_{ki} \cdot r_{ki} : \nabla_{R_k} \nabla_{R_k}$ წარმოადგენს r_{ki} და ∇_{R_k} ვექტორთა მდგენელების კვადრატულ ფორმათა ნამრავს.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} = & - \sum_k \int \sum_i \frac{1}{2} q_{ki} r_{ki} \cdot r_{ki} : (\nabla_{R_k}, \dot{R}_k) g_k(R, r_{ki}, t) \Pi_j dr_{ki} + \\ & + \sum_k \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2} (r_{ki} r_{ki} + r_{ki} \dot{r}_{ki}) g_k(R, r_{ki}, t) \Pi_j dr_{ki}. \end{aligned} \quad (82,18)$$

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{\partial Q}{\partial t} = & \nabla_R \frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_k \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2} r_{ki} (\nabla_{R_k}, \dot{r}_{ki} g_k(R, r_{ki})) \Pi_j dr_{ki} + \\ & + \sum_k \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2} (r_{ki}, \nabla_{R_k}) \dot{r}_{ki} g_k(R, r_{ki}, t) \Pi_j dr_{ki} - \\ & - \sum_k \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2} r_{ki} \{ r_{ki}, \nabla_{R_k} (\nabla_{R_k}, \dot{R}_k g_k(R, r_{ki}, t)) \} \Pi_j dr_{ki}. \end{aligned} \quad (82,19)$$

ბოლოს

$$\begin{aligned} \text{rot}_R M = [\nabla_R, M] &= \sum_k \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2c} r_{ki} (\nabla_R, \bar{r}_{ki} g_k(R, r_{ki}, t)) \prod_j dr_{kj} - \\ &- \sum_j \int \sum_i \frac{q_{ki}}{2c} (r_{ki}, \nabla_R) \bar{r}_{ki} g_k(r_{ki}, t) \prod_j dr_{kj}. \end{aligned} \quad (82,20)$$

ზემოთ მიღებული (82,15)–(82,20) დამოკიდებულებები გამოვიყენოთ ელექტრო-მაგნიტური ველის დამახასიათებელი მიკროსიდიდებების გასასაშუალოებლად.

განვიხილოთ მუხტთა სისტემის ელექტრომაგნიტური ველის ფიზიკური სიდიდეები

$$e = e(R_k^N, r_{ki}^{NZ_k}, p_k^N, p_{ki}^{NZ_m}, R, t) \quad (82,21 a)$$

$$h = h(R_k^N, r_{ki}, p_k^N, p_{ki}^{NZ_m}, R, t) \quad (82,21 b)$$

$$j = j(R_k^N, r_{ki}, p_k^N, p_{ki}^{NZ_m}, R, t) \quad (82,21 c)$$

რომლებიც ცხადათ არიან დამოკიდებული სისტემის მდგომარეობაზე და მუხტთა დრო-სივრცის კოორდინატებზე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ e , h და j ოთხგანზომილებიანი ვექტორების ტიპის დინამიკურ სიდიდეებს წარმოადგენენ, მაშინ მათთვის შეიძლება გამოვიყენოთ ყველა ის ოპერაციები, (მოქმედებანი) რომლებიც ზემოთ ψ ფუნქციისათვის დაუადგინეთ.

დავწეროთ (34,13) ლორენცის განტოლებათა სისტემა, რომელსაც განსახილველ შემთხვევაში (81,1): (82,4) და (82,6) ფორმულების თანახმად შემდეგი სახე ექნება:

$$(\nabla_R h) = 0. \quad (82,22)$$

$$\frac{dh}{dt} = -c [\nabla_R, e]. \quad (82,22 a)$$

$$(\nabla_R, e) = 4\pi \left\{ \sum_k q_k \delta(R_k - R) + \sum_{k,i} q_{ki} \delta(R_k + r_{ki} - R) \right\}. \quad (82,22 b)$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= c [\nabla_R h] - 4\pi \left\{ \sum_k q_k \dot{R}_k \delta(R_k - R) + \right. \\ &\left. + \sum_{k,i} q_{ki} (\dot{R}_k + \dot{r}_{ki}) \delta(R_k + r_{ki} - R) \right\}. \end{aligned} \quad (82,22 c)$$

რადგან e და h ვექტორები ცხადათ დამოკიდებული არიან არა მარტო დროზე, არამედ სისტემის მდგომარეობაზედაც, რომელიც იცვლება სისტემის კონფიგურაციის ცვლილების გამო, ამიტომ (82,22 a) და (82,22 c) ფორმულებში აღებულია დროით სრული წარმოებულებები. (82,22 b) და (82,22 c) განტოლებებში მუხტისა და დენის სიმკვრივები წარმოდგენილი არიან დირაკის ფუნქციების საშუალებით და განიხილებიან როგორც დრო-სივრცის უწყვეტი ფუნქციები.

ლორენცის მიკროგანტოლებათა სისტემიდან მაკროგანტოლებათა მისაღებად გამოვიყენოთ მიკროსიდიდეთა ანსამბლით გასაშუალოების მეთოდი (§ 80, § 81, § 82).

(82,22) და (82,22 ა) განტოლებებისათვის ამ მეთოდის გამოყენება გვაძლევს:

$$(\nabla_R B) = 0. \quad (82,23)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -c [\nabla_R E], \quad (82,23 \text{ ა})$$

სადაც

$$B = (hf) \quad (82,24)$$

და

$$E = (ef) \quad (82,25)$$

მაკროსკოპიული მაგნიტური და ელექტრული ველების დაძაბულობათა ვექტორებია. ანსამბლით გასაშუალოების იგივე წესი (82,22 b)-თვის ნოვაცივს:

$$\begin{aligned} (\nabla_R, E) &= 4\pi \left\langle \sum_k q_k \delta(R_k - R) f \right\rangle + 4\pi \left\langle \sum_{k,i} q_{ki} \delta(R_k + r_{ki} - R) f \right\rangle = \\ &= 4\pi \sum_k \int \left\{ q_k g_k(R, r_{ki}, t) + \sum_i q_{ki} g_k(R - r_{ki}, r_{ki}, t) \right\} \prod_j dr_{kj}. \end{aligned} \quad (82,26)$$

უკანასკნელ ფორმულაში g_k ფუნქციის არგუმენტები: R და $R - r_{ki}$, R_k ცვლადებით ინტეგრაციის შედეგად გაჩნდნენ.

თუ $g_k(R - r_{ki}, r_{ki}, t)$ ფუნქციას გავშლით ტეილორის მწკრივად R წერტილის მახლობლობაში და შემოვიღებოთ გაშლის პირველი სამი წევრით, მაშინ მიღებულის ჩასმით (82,26)-ში მივიღებთ:

$$\begin{aligned} (\nabla_R, E) &= 4\pi \left\{ \sum_k \int \left(q_k + \sum_i e_{ki} \right) g_k(R, r_{ki}, t) \prod_j dr_{kj} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k,i} \int q_{ki} (r_{ki}, \nabla_R) g_k(R, r_{ki}, t) \prod_j dr_{kj} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k,i} \int \frac{1}{2} q_{ki} (r_{ki} \cdot r_{ki}) : (\nabla_R, \nabla_R) g_k(R, r_{ki}, t) \prod_j dr_{kj}. \right. \end{aligned} \quad (82,27)$$

ეს უკანასკნელი, (82,3), (82,13) და (82,17) დამოკიდებულებათა გამოყენების ზრით, შევძლებ სახეზე დაიყვანება

$$\operatorname{div} E = (\nabla_R, E) = 4\pi \{ \rho - (\nabla_R, P - \nabla_R Q) \}. \quad (82,28)$$

თუ შემოვიღებთ ახალ სიდიდეს:

$$D = E + 4\pi (P - \nabla_R Q), \quad (82,29)$$

მაშინ (82,29) განტოლება შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\operatorname{div} D = (\nabla_R, D) = 4\pi \rho. \quad (82,30)$$

(82,29) ფორმულის საშუალებით მოცემული ელექტრული ინდუქციის D ვექტორი მისი ჩვეულებრივი განსაზღვრისაგან კვადრუპოლური (grad $_R Q$) წევრით განსხვავდება. ამ დამატებით წევრს საზოგადოთ მხედველობაში არა ლეგულობენ. მაგრამ (82,29)-ში (grad $_R Q$) ელექტრული კვადრუპოლური წევრის დატოვება მიზანშეწონილია, თუნდაც იმის გამო, რომ ლორენცის გასაშუალოებულ (82,22 c) განტოლებაში მისივე რიგის წევრი დამაგნიტების ვექტორის გამო-სახულებაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს.

$g_k(R - r_{ki}, r_{ki}, t)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლა მხოლოდ იმ შემთხვევაშია დასაშვები, როდესაც ის უმნიშვნელოდ იცვლება ატომის რადიუსის ($|r_{ki}|$) რიგის მანძილებზე. მაშასადამე, ყოველი მაკროსკოპული სიდიდე უნდა იყოს სივრცითი კოორდინატების მეტად ნელად ცვლადი ფუნქცია. ბოლოს განვიხილოთ (82,22 c) განტოლება. თუ გამოვიყენებთ (80,7), (82,2; i) და (82,25) ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & c[\nabla_R B] + 4\pi \sum_k \int \left\{ q_k \bar{A}_k g_k(R, r_{ki}, t) + \right. \\ & \left. + \sum_j q_{kj} (\bar{A}_k + \bar{r}_{kj}) g_k(R - r_{ki}, r_{ki}, t) \right\} \times \int_j dr_{kj}. \end{aligned} \quad (82,31)$$

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ \bar{A}_k და r_{ki} იმავე არგუმენტების ფუნქციებია, როგორსაც g_k ; ამიტომ \bar{A}_k სიდიდეები (82,31) გამოსახულების მარჯვენა მხარის პირველ და მეორე შესაკრებებში ერთი და იგივე არ არიან.

$g_k(R - r_{ki}, r_{ki}, t)$ და $\bar{A}_k(R - r_{ki}, r_{ki}, t)$ და $\bar{r}_{kj}(R - r_{ki}, r_{ki}, t)$ ფუნქციები ტოლობის მწკრივებად გავშალოთ და (74,31)-ში ჩავსვათ. თუ r_{ki} და r_{kj} სიდიდეთა მიმართ კვადრატული წევრებით შემოვისაზღვრებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & c \operatorname{rot} B - 4\pi \left\{ \sum_k \int (q_{ki} + \sum e_{ki}) \bar{A}_k g_k \int_j dr_{kj} - \sum_{k,i} \int q_{ki} \bar{r}_{ki} g_k \int_j dr_{kj} + \right. \\ & + \sum_{k,i} \int q_{ki} (r_{ki} \nabla_R) \bar{A}_k g_k \int_j dr_{kj} - \sum_{k,i} \frac{1}{2} \int q_{ki} (r_{ki} r_{ki} : \nabla \nabla) \bar{A}_k g_k + \\ & + \sum_{k,i} q_{ki} (r_{ki} \nabla_R) \bar{r}_{ki} g_k \int_j dr_{kj} + \sum_{k,i} \int q_{ki} \bar{A}_k (r_{ki} \nabla_R) g_k \int_j dr_{ki} - \\ & - \sum_{k,i} \int q_{ki} \bar{A}_k (r_{ki} \nabla) (r_{ki} \nabla g_k) \int_j dr_{kj} - \sum_{k,i} q_{ki} \bar{r}_{ki} (r_{ki} \nabla_R g_k) \int_j dr_{kj} - \\ & \left. - \sum_{k,i} \frac{1}{2} \int q_{ki} \bar{A}_k (r_{ki} r_{ki} : \nabla_R, \nabla_R) g_k \int_j dr_{kj} \right\} = c \operatorname{rot} B - 4\pi \left\{ j + \frac{\partial P}{\partial t} - \right. \\ & \left. - \nabla_R \frac{\partial Q}{\partial t} + c[\nabla_R M] + \sum_{k,i} \int \left[\nabla_R \left[\sum_{k,i} q_{ki} r_{ki}, \bar{A}_k g_k \right] \right] \int_j dr_{ki} \dots \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_k \int \sum_j \frac{1}{2} q_{ki} (r_{ki} r_{ki} : \nabla_R \nabla_R) \bar{H}_k g_k \prod_j dr_{kj} + \\
 & + \sum_{k,j} \int \frac{1}{2} q_{ki} r_{ki} (r_{ki} \nabla_R (\nabla_R \bar{H}_k) g_k) \prod_j dr_{kj} \quad (82,32)
 \end{aligned}$$

სადაც გამოყენებულია (82,5), (82,14) და (82,20) დამოკიდებულებები. (82,32)-ში ორი უკანასკნელი წევრი შეიძლება გარდაექმნათ, რისთვისაც შემდეგი იგივეობა გამოიყენოთ

$$A [A, \nabla (\nabla B)] - (A A : \nabla \nabla) B = [\nabla (\nabla A, [A B])], \quad (82,33)$$

რომელიც სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როდესაც A ვექტორი ∇ -თი გაწარმოების მიმართ, შედმივია. თუ (82,33) იგივეობით ვისარგებლებთ, მაშინ (82,32) საბოლოოდ შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial t} = & c \operatorname{rot} B - 4\pi \left\{ j + \frac{\partial}{\partial t} (P - \nabla_Q Q) + \operatorname{rot} M + \right. \\
 & \left. + \left[\nabla_R, \left(\sum_{k,j} \int q_{ki} [r_{ki}, \bar{H}_k g_k] - \frac{1}{2} (\nabla_R, r_{ki}) [r_{ki} \bar{H}_k g_k] \right) \right] \prod_j dr_{kj} \right\}. \quad (82,34)
 \end{aligned}$$

თუ ელექტრული ინდუქციის (82,29) ვექტორის ანალოგიურად შემოვიღებთ მაგნიტური ინდუქციის H ვექტორს (რომელიც ლიტერატურაში ჩვეულებრივ დაძაბულობის ვექტორის სახელწოდებითაა ცნობილი)

$$H = B - 4\pi \left\{ M + \frac{1}{c} \sum_{k,j} \int q_{ki} \left\{ [r_{ki}, \dot{H}_k g_k] - \frac{1}{2} (\nabla_R r_{ki}) [r_{ki} \bar{H}_k g_k] \right\} \prod_j dr_{kj} \right\}. \quad (82,35)$$

მაშინ (82,34) განტოლება შემდეგ სახეზე დაიყვანება:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = c \operatorname{rot} H - 4\pi j. \quad (82,36)$$

ამგვარად, ელექტრონთა თეორიის (34,13) განტოლებათა გასაშუალოების შედეგად ვლებულობთ მაკროსკოპული ელექტროდინამიკის განტოლებებს

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \\
 \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\
 \operatorname{div} D &= 4\pi \rho \\
 \operatorname{div} B &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (82,37)$$

(82,37) განტოლებათა სისტემა მიღებულია მუხტთა სისტემის მოძრაობის მდგომარეობის შესახებ რაიმე შეზღუდვის გარეშე, ამიტომ ის ყველაზე ზოგადია. მისი საშუალებით განისაზღვრება ელექტრომაგნიტური ველი მატერიალურ სხეულებში.

თუ უძრავ ($\vec{R}_k=0$) სხეულებში მიმდინარე ელექტრომაგნიტური პროცესების განხილვით შემოვიისაზღვრებით, მაშინ (82,29) და (82,35) ფორმულები მოგვცემს:

$$\frac{D - E}{4\pi} = P, \quad (82,38)$$

$$\frac{B - H}{4\pi} = M. \quad (82,39)$$

უქანასკნელი ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ მატერიალური სხეულების ელექტრული და მაგნიტური თვისებები არსებითად ($D - E$) და ($B - H$) სიდიდეების საშუალებით განისაზღვრებიან. თუ დავუშვებთ, რომ აღებული სხეულის ელექტრული და მაგნიტური თვისებები არ იცვლებიან, მაშინ შეიძლება დავწეროთ

$$D = \epsilon E, \quad (82,40)$$

$$B = \mu H, \quad (82,41)$$

რომელთა ჩასმა (82,38) და (82,39) ფორმულებში მოგვცემს

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E. \quad (82,42)$$

$$M = \frac{\mu - 1}{4\pi} H. \quad (82,43)$$

ϵ და μ სიდიდეებს, რომლებიც მატერიალური სხეულების ელექტრულ და მაგნიტურ თვისებებს ახასიათებენ, სათანადოთ დიელექტიკული მუდმივი და მაგნიტური განვლადობა ეწოდებათ.

მაშასადამე, „უძრავ“ ერთგვაროვან მატერიალურ სხეულებში მიმდინარე ელექტრომაგნიტური მოვლენები შემდეგი განტოლებათა სისტემით აღიწერებიან

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{div} D &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} B &= 0 \\ D &= \epsilon E \\ B &= \mu H \\ j &= \sigma E \end{aligned} \right\} \quad (82,44)$$

ეს განტოლებები მე-19-ე საუკუნის 70-იან წლებში, გაცილებით ადრე ვიდრე ელექტრონთა თეორიის (34,13) განტოლებები, მიღებული იყო მაქსველის მიერ და ამიტომ მაქსველის განტოლებათა სახელწოდებით არიან ცნობილი.

თავი VIII

ფარდობითობის ზოგადი თეორია

§ 83. ძვირვალენტობის პრინციპი

დასასრულს შევეხოთ ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ძირითად პრინციპებს. ეს თეორია ჩამოყალიბებული იქნა 1915 — 1916 წლებში ეინშტეინის მიერ და ფიზიკაში მას საპატიო ადგილი უჭირავს. დასაწყისში, ფარდობითობის სპეციალური თეორიის შესწავლის დროს, ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ ყოველი ფიზიკური მოვლენისათვის ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს — მექანიკური ან ელექტრომაგნიტური მოვლენა ერთნაირად მიმდინარეობს ყველა ინერციულ სისტემაში. მაშასადამე, ფიზიკური მოვლენის კანონს ყველა ინერციულ სისტემაში ერთნაირი სახე აქვს. ყველა ინერციული სისტემები ტოლფასია. ფარდობითობის სპეციალური პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ აბსოლუტური უძრაობა სრულიად უაზრო ცნებას წარმოადგენს, ხოლო თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობა ფარდობითია. მაგრამ ეს პრინციპი არაფერს არ გვეუბნება არათანაბარი, ე. ი. აჩქარებული მოძრაობის ხასიათის შესახებ. სახელდობრ საკითხი იმის შესახებ, აჩქარებული მოძრაობა ფარდობითია თუ აბსოლუტური¹, სპეციალურ თეორიაში გადაუქრელი რჩება. ფარდობითობის სპეციალური თეორია აბსოლუტურ უძრაობას უარყოფს, მაგრამ აბსოლუტური მოძრაობის შესაძლებლობას არ გამოირიცხავს. სითხიანი ცილინდრული ქურკლის ბრუნვის პოვლენის კრიტიკულმა ანალიზმა ჩვენ იმ დასკვნამდე მიგვიყვანა, რომ ყოველგვარი მოძრაობა (თანაბარი, აჩქარებული, — მათ შორის ბრუნვითი) ფარდობითია, რადგან ინერციული სისტემების ტოლფასობა თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობის ფარდობითი ხასიათის მაჩვენებელია. ამიტომ, აჩქარებული (საერთოდ ყოველი სახის) მოძრაობის ფარდობითობის პრინციპიც არაინერციული სისტემების ტოლფასობას მოითხოვს. ფარდობითობის სპეციალურ თეორიას საკმე აქვს მხოლოდ ინერციულ სისტემებთან, რომლებიც ყველა შესაძლო ათვლის სისტემებიდან გამოირჩევიან უმარტივესი თვისე-

¹ აქ ჩვენ აბსოლუტური მოძრაობის ცნებას ვხმარობთ არაფილოსოფიური გაგებით. ჩვენ გვინტერესებს გამოვარკვეოთ საკითხი: რომელიმე სხეულის აჩქარებული მოძრაობა სხვა სხეულის მიმართ ფარდობით ხასიათს ატარებს თუ აბსოლუტურს. ფილოსოფიური თეოლსაზრისით კი ყოველი მოძრაობა აბსოლუტურია, რადგან მატერია მუდმივ მოძრაობისა და გარდაქმნის პროცესში იმყოფება, რასაც რა თქმა უნდა ყოველგვარი ეჭვის გარეშე იზიარებს ფიზიკა და საზოგადოდ ბუნებისმეტყველების ყოველი დარგი. მართლაც, აბსოლუტური უძრაობის უარყოფა აბსოლუტური მოძრაობის აღიარებაა.

ბეზით თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ პრაქტიკულად ჩვენ ყოველთვის საქმე გვაქვს არაინერციულ სისტემებთან (ინერციულ სისტემადა შეიძლება ჩავთვალოთ ესა თუ ეს სხეული მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით), ამიტომ არაინერციულ, ე. ი. მბრუნავ ან საზოგადოთ აჩქარებულ სისტემათა მიმართ რომელიმე ფიზიკური მოვლენის გამომსახველი კანონის ინვარიანტობის საკითხი ფიზიკის ერთ-ერთი ცენტრალური პრობლემაა. ინერციულისაგან არაინერციული სისტემები იმით განირჩევიან რომ მათში თავს იჩენს დამატებითი, ე. წ. ინერციული ძალები (ცენტრგამზიდი, კორიოლისის და სხვა), რომელთა მოქმედების შედეგს ხშირად ვხვდებით ბუნებაში და პრაქტიკაში (ფუტკის საქანის ნოდრაობა, დედამიწის შებრტყელება პოლუსებთან, მდინარეთა კალაპოტის ჩამორეცხვა და სხვა).

თუცა სიჩქარე ფარდობითია — არ არსებობს აბსოლუტური სიჩქარე, მაგრამ შეიძლება ვიუქროთ, რომ აჩქარება და ბრუნვითი მოძრაობა აბსოლუტურია. ეს უკანასკნელი დაშვება ჩვენ დაგვაბრუნებდა აბსოლუტური დრო და სივრცის შესახებ ნიუტონის წარმოდგენებთან, რაც სპეციალური თეორიის უარყოფის მომასწავებელი იქნებოდა.

ფარდობითობის სპეციალური თეორიის განზოგადება ეინშტეინმა მოახდინა.

ეინშტეინის თვალსაზრისით, ისევე როგორც ამას ადგილი აქვს ინერციულ სისტემებში, რაიმე ფიზიკური მოვლენის გამომსახველ კანონს ყოველი ათვლის სისტემის მიმართ ერთი და იგივე სახე უნდა ჰქონდეს.

თუ ერთ რომელიმე სისტემაში ბუნების მოვლენების ზოგადი კანონის სახე ცნობილია, მაშინ ის თავის ფორმას უნდა ინარჩუნებდეს ალბულის სისტემის მიმართ ნებისმიერად მოძრავ ყოველ ათვლის სისტემაში. რადგან მოვლენის მიმდინარეობა სრულიად დამოუკიდებელია ათვლის სისტემის არჩევაზე, ამიტომ ის არ უნდა იყოს დამოკიდებული დამკვირვებლის თვალსაზრისზე. ბუნების ძირითადი კანონები რომ მხოლოდ ერთ ან რამოდენიმე ათვლის სისტემაში ყოფილიყვნენ სამართლიანი, მაშინ ჩვენ შესაძლებლობა გვექნებოდა უპირატესი სისტემა გამოგვეყო.

მაშასადამე, ფარდობითობის ზოგად თეორიაში ათვლის სისტემებს შორის პრინციპული განსხვავება არ არსებობს. ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ის ძირითადი პრინციპი, რომლის მიხედვით ერთი და იგივე მოვლენის მიმდინარეობა ყველა სისტემაში ერთნაირი უნდა იყოს, ე. ი. ბუნების ზოგადი კანონები ინვარიანტულია ყოველი ნებისმიერად მოძრავი კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მნიშვნელოვნად ამარტივებს ფიზიკური მოვლენების შესწავლის საქმეს.

თუ ფარდობითობის თეორიის ზემოაღნიშნულ პრინციპს საფუძვლად დაუდებთ მეცნიერებას, მაშინ ფიზიკის კანონებს უნდა მივცეთ ინვარიანტული სახე. მაშინ როდესაც ინერციული სისტემების მიმართ მექანიკური და ელექტრომაგნიტური მოვლენების კანონების ინვარიანტობის პირობამ (10,22) ლორენცის გარდაქმნების ფორმულების მონახვის აუცილებლობამდე მიგვიყვანა, ფარდობითობის ზოგადი თეორია მოითხოვს მოიძებნოს გარდაქმნის ისეთი ფორმულები, რომლებიც ფიზიკის კანონებს ინვარიანტულს დატოვებს

ერთი არაინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ არაინერციული სისტემებისათვის ზოგადი სახის გარდაქმნის ფორმულები არ არსებობენ. მათი სახე მხოლოდ ზოგიერთ კერძო შემთხვევებში შეიძლება მოინახოს.

ზოგჯერ, გარკვეულ კონკრეტულ პირობებში, მოსახერხებელია აღებული აჩქარებული ათვლის სისტემით შევცვალოთ ძალთა ველი, რომლის საშუალებითაც ჩვენ მივალწვეთ ძირითად კანონებში შემოკრიბილი ინერციული ძალების განდევნას.

ამ საკითხების გამოსარკვევად, და მაშასადამე, ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ძირითადი აზრის გასაგებად განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი მაგალითი.

ვთქვათ ოთახში ქერიდან ვარდება ქვა. ქვის თავისუფალი ვარდნა თანაბარ აჩქარებულია ოთახის, როგორც კოორდინატთა სისტემის, მიმართ. ქვის ვარდნის მიზეზს წარმოადგენს დედამიწის გრავიტაციული ველის მოქმედება, რომელიც ოთახის შიგნით შეიძლება ჩავთვალოთ როგორც ერთგვაროვანი. ჩვენს მიერ არჩეული ათვლის სისტემის — ოთახის მიმართ, რომელსაც „უძრავად“ ან თანაბრად მოძრავად ვღებულობთ, სამართლიანია მოძრაობის ნიუტონის კანონები. სიმძიმის ძალა, კლასიკური მექანიკის თვალსაზრისით, დამოუკიდებელია კოორდინატთა სისტემაზე, ხოლო ქვის მოძრაობა აბსოლუტურია.

პირდაპირ საწინააღმდეგო შეხედულებას ანეითარებს ეინშტეინი ფარდობითობის ზოგად თეორიაში. სახელდობრ, ეინშტეინის მიხედვით ოთახის მიმართ ქვის მოძრაობა ფარდობითია. ოთახი და ქვა ერთად, სამყაროში შეიძლება იმყოფებოდნენ რთული მოძრაობის მდგომარეობაში, რაც შეუმჩნეველი გვრჩება. ჩვენ ვაკვირდებით ქვის ფარდობით მოძრაობას ოთახის მიმართ, ანდა შებრუნებით. რადგან ეს მოძრაობა მხოლოდ და მხოლოდ ფარდობითია, პრინციპიალურად უნდა შეიძლებოდეს მოძრავი სხეულის (ქვის) შეცვლა ათვლის სხეულით (ოთახით) და პირიქით, ისე, რომ მათი როლების შეცვლამ არავითარი გავლენა არ მოახდინოს მოძრაობის პროცესზე. ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ქვა მოძრაობს ოთახის მიმართ *გ* აჩქარებით, ანდა შებრუნებით, ოთახი დედამიწასთან და მთელ სამყაროსთან ერთად მოძრაობს ქვის მიმართ საწინააღმდეგო მიმართულებით იგივე *გ* აჩქარებით. ეს ორი გამოთქმა სრულიად ტოლფასი უნდა იყოს.

პირველ შემთხვევაში ქვა მოძრაობს დედამიწის უძრავ გრავიტაციულ ველში. მეორე შემთხვევაში კი ქვა უძრავია (ანდა იმყოფება თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობის მდგომარეობაში), ხოლო კოორდინატთა სისტემა (ოთახი) მოძრაობს — *გ* აჩქარებით ისე, რომ გრავიტაციული ველი არა გვაქვს. მაშასადამე, დედამიწის გრავიტაციული ველი შეიძლება აჩქარებული სისტემით შევცვალოთ. ცხადია რომ, რადგან დედამიწის გრავიტაციული ველი არაერთგვაროვანია, დედამიწის გრავიტაციული ველის შეცვლა აჩქარებული სისტემით არ შეიძლება. როდესაც სივრცის აღებულ ნაწილში გრავიტაციული ველი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთგვაროვანი, მაშინ დასაშვებია ამ ველის შეცვლა აჩქარებული კოორდინატთა სისტემით. მხოლოდ ამ შემთხვევაში აქვს

აღვილი გრავიტაციული ველისა და აჩქარებულად მოძრავი სისტემის ტოლფასობას. ერთგვაროვან გრავიტაციულ ველთან დაკავშირებული „უძრავი“ და გრავიტაციული ველის გარეშე აღებული აჩქარებულად მოძრავი სისტემების ტოლფასობის (ექვივალენტობის) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ არავითარი ფიზიკური მოვლენა არ უნდა იძლეოდეს ამ სისტემათა შორის განსხვავების აღმოჩენის შესაძლებლობას. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ აღნიშნული ორი სისტემის ექვივალენტობას მაშინ ექნება ადგილი, რო-

დესაც მატერიალური სხეულის ინერციული $\left(m_i = \frac{F}{x}\right)$ და გრავიტაციული $\left(m_g = \frac{P}{g}\right)$ მასები ტოლია, ე. ი. $m_i = m_g$.

მართლაც, $F = P$ ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m_g}{m_i} g. \quad (83,1)$$

თუ ახლა ექვივალენტობის პირობას გავითვალისწინებთ, რომლის თანახმად

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g, \quad (83,2)$$

(83,1)-დან მივიღებთ

$$m_i = m_g. \quad (83,3)$$

ინერციული და გრავიტაციული მასების ტოლობა (83,3) ექსპერიმენტულად აღრე იყო დადგენილი, რამაც, რა თქმა უნდა, დიდათ შეუწყო ხელი ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ჩამოყალიბებას.

გრავიტაციული ველისაგან თავისუფალ აჩქარებულად მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში (g აჩქარებით მოძრავი ოთახი) საქმე გვაქვს ინერციულ, ხოლო გრავიტაციული ველის მოქმედებით ქვის აჩქარებული ვარდნის შემთხვევაში, სადაც კოორდინატთა სისტემა უძრავია, გრავიტაციული მასასთან. იმის მიხედვით თუ რომელ კოორდინატთა სისტემას ავირჩევთ, სათანადოთ ჩვენ გვექნება ინერციული ან გრავიტაციული მასა, ამგვარად, ზემოდ მოყვანილი მაგალითის საფუძველზე შემდეგი დასკვნა შეიძლება გამოვიტანოთ: მატერიალური ნაწილაკის თანაბარ აჩქარებული მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც გრავიტაციული მასის აჩქარებული მოძრაობა უძრავ ერთგვაროვან გრავიტაციულ ველში, ანდა როგორც ინერციული მასის თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობა გრავიტაციული ველისაგან თავისუფალ თანაბრად აჩქარებულ კოორდინატთა სისტემაში. მაშასადამე, ერთგვაროვანი გრავიტაციული ველი შეიძლება შევცვალოთ თანაბარ აჩქარებული კოორდინატთა სისტემით და პირიქით. ეს უკანასკნელი დებულება ეინშტეინის ექვივალენტობის პრინციპის სახელწოდებითაა ცნობილი.

კოორდინატთა სისტემის სათანადო შერჩევის გზით ჩვენ შეგვიძლია მთლიანად მოვსპოთ, — ე. ი. გამოვირიცხოთ აჩქარება. მატერიალური ნაწილაკის ნებისმიერი აჩქარებით მოძრაობა რომელიმე ინერციული სისტემის მიმართ დაიყვანება მუდმივი სიჩქარით მოძრაობაზე ისეთი კოორდინატთა სისტემის

შემოდების გზით, რომლის აჩქარება სიდიდით ნაწილაკის აჩქარების ტოლია. ამ თვალსაზრისით მატერიალური ნაწილაკის თავისუფალი ან არათავისუფალი მოძრაობის ცნება ფარდობითია.

ექვივალენტობის პრინციპის საფუძველზე სათანადო გარდაქმნის ფორმულების საშუალებით შესაძლებელია მხოლოდ და მხოლოდ ერთგვაროვანი გრავიტაციული ველის „გამორიცხვა“, ანდა პირიქით მისი „შემოღება“. რადგან საზოგადოთ მატერიალური სხეულების წონითი მასის შესაბამისი გრავიტაციული ველები ერთგვაროვანი არ არიან, ექვივალენტობის პრინციპის გამოყენება დასაშვებია სივრცის ისეთი მცირე ელემენტისათვის, რომლის შიგნითაც ველი შეიძლება ჩავთვალოთ როგორც ერთგვაროვანი.

მატერიალური სხეულის ინერციისა და მიზიდულობის (წონის) ექვივალენტობის პირობიდან საინტერესო დასკვნები მიიღებოდა. რადგან ინერციის ან წონის თვისება დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემაზე, ამიტომ ამ სისტემების ერთობლიობის—სივრცის თვისებები სამყაროში მატერიის განაწილებისა და თვისებათა მიხედვით უნდა განისაზღვრებოდნენ. მაშასადამე, მატერიის გრავიტაციული თვისებების შესასწავლად დაგვირდებოდა ოთხგანზომილებიანი სივრცის თვისებების გამორკვევა. ნაცვლად იმისა რომ გრავიტაციული ველი მატერიალურ სხეულთა მასების განაწილების მიხედვით დავახასიათოთ (ნიუტონის მექანიკა), ფარდობითობის ზოგად თეორიაში გრავიტაციული ძალები განისაზღვრებიან მასების განაწილებაზე დამოკიდებული პოტენციალების საშუალებით.

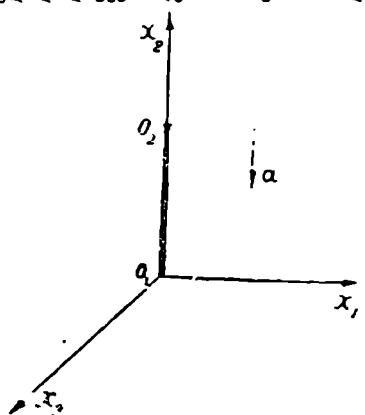
ექვივალენტობის პრინციპი შეიძლება აგრეთვე ელექტრომაგნიტურ ნოვლებზედაც ვაგავრცელოთ. მაგალითის სახით განვიხილოთ სინათლის გავრცელების მოვლენა.

ვთქვათ სინათლე ვრცელდება x_2 ღერძის გასწვრივ, ხოლო კოორდინატთა სისტემა მოძრაობს a აჩქარებით x_1 ღერძის უარყოფითი მიმართულებით (ნახ. 52).

თუ დავუშვებთ რომ კოორდინატთა სისტემა აჩქარებულ მოძრაობას იწყებს O_1 სათავიდან სხივის გამოსვლის $t=0$ მომენტში, მაშინ t მომენტში O_2 წერტილში სხივის მისვლის დროს კოორდინატთა სისტემას ექნება სიჩქარე $v = a \cdot t$.

თუ O_1 და O_2 წერტილებში ტალღის სიხშირეებს ω_1 და ω_2 -ით აღვნიშნავთ, მაშინ მოძრაე სისტემაში, დიპლერის პრინციპის თანახმად (58,5) გვექნება

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} \quad (83,4)$$



ნახ. 52.

საიდანაც არარელატივისტური სიჩქარეებისათვის ($v \ll c$) მივიღებთ

$$\omega_1 = \omega_2 \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad (83,5)$$

თუ სინათლის სიჩქარეს $O_1 O_2$ მანძილზე მუდმივად ჩავთვლით, მაშინ შეიძლება დავწეროთ $t = \frac{O_1 O_2}{c}$, რის შედეგადაც რხევის სიხშირისათვის მივიღებთ:

$$\omega_1 = \omega_2 \left(1 + \frac{O_1 O_2 \cdot a}{c^2} \right). \quad (83,6)$$

აჩქარებულად მოძრავი ათვის სისტემა, ექვივალენტობის პრინციპის თანახმად, შევცვალოთ გრავიტაციული ერთგვაროვანი ველით, რომელიც ხასიათდება Φ პოტენციალით. თუ O_1 და O_2 წერტილებში პოტენციალების მნიშვნელობებს აღვნიშნავთ Φ_1 და Φ_2 -ით, მაშინ აჩქარებისა და მანძილის ნამრავლი მოგვცემს O_1 წერტილიდან O_2 -ში გადასვლის დროს ველის პოტენციალის ცვლილებას $\Phi_1 - \Phi_2 = a \cdot O_1 O_2$. მაშასადამე, (84,6) შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\omega_1 = \omega_2 \left(1 + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2} \right). \quad (83,7)$$

ამგვარად, თუ სინათლე ერთგვაროვან გრავიტაციულ ველში გადადის მაღალი პოტენციალის ადგილიდან დაბალი პოტენციალის ადგილში, მაშინ მისი სიხშირე $\omega_2 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}$ სიდიდეზე იცვლება.

გრავიტაციული ველის მცირე პოტენციალის ადგილებიდან, ე. ი. დიდი მასების სხეულებიდან, მაგალითად მზიდან, ჩვენამდე მოსული სინათლის სიხშირე (83,7)-ს მიხედვით უნდა შემცირდეს, რის გამოც სათანადო სპექტრალური ხაზის გადაადგილება უნდა მოხდეს წითელი ფერისაკენ. მზიდან დედამიწაზე მოსული სხივის შემთხვევაში გვექნება

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{\Phi_0 - \Phi}{c^2} \right). \quad (83,8)$$

სადაც მზის ველის პოტენციალი $\Phi_0 = -\frac{\gamma M}{R}$, ხოლო დედამიწისა კი $\Phi = -\frac{\gamma m}{r}$, რადგან $\Phi \ll \Phi_0$, შეგვიძლია დავწეროთ,

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \gamma \frac{M}{Rc^2} \right). \quad (83,9)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მზის სპექტრალური ხაზები დედამიწაზე მყოფი დამკვირვებლისათვის სპექტრის წითელი ბოლოსაკენ უნდა იყოს გადაადგილებული. გადაადგილების სიდიდეები ადვილად მიიღებთან (83,9)-დან თუ ამ

უქანასკნელში ჩავსვამთ მზის მასის ($M = 1,96 \cdot 10^{33}$ გრ), რადიუსისა ($R = 6,10^{10}$ სმ) და გრავიტაციული მუდმივის $\left(\gamma = 6,667 \cdot 10^{-8} \frac{\text{სმ}^3}{\text{გრ სექ}^2} \right)$ მნიშვნელობებს.

გაწყენებული რიცხვი $\frac{\Phi_0}{c^2} = 2,10^{-6}$, $\lambda = 0,6 \mu = 6000 \text{ \AA}$ ტალღის შემთხვე-

ვაში გვაძლევს $0,012 \text{ \AA}$ სიღრღეზე წითელი ფერისაკენ სპექტრალური ხაზის გადაადგილებას. ამ ეფექტის ექსპერიმენტული შემოწმება ძალიან ძნელია, რადგან გასაზომი სიდიდე — გადაადგილება იმდენად მცირეა, რომ გაზომვის სიზუსტის ფარგლებიდან გამომდინარე, ამიტომ მისი საბოლოო ექსპერიმენტული დადასტურება ჯერ-ჯერობით არ არსებობს.

გრავიტაციული ველის გავლენით ტალღის სიხშირის ცვლილება, ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ტერმინოლოგიით, ნზეზე და დედანიწაზე საათების სვლების სხვადასხვაობით აიხსნება.

რადგან რომელიმე გარკვეული ტალღის პერიოდი ნზეზე ნაკლებია ვიდრე დედანიწაზე, ამიტომ ნზეზე მოთავსებული საათის სვლის სიჩქარე მეტი უნდა იყოს. საზოგადოთ, სივრცის რომელიმე ადგილზე რაც უფრო ნაკლებია გრავიტაციული პოტენციალი (დიდია ზასა) მით უფრო დიდი უნდა იყოს დროის გასაზომად იქ გამოყენებული საათის სვლის სიჩქარე.

§ 84. ფარდობითობის ზოგადი თეორიის კავშირი გეომეტრიასთან. ფუნდამენტალური მატრიკული ტენზორი

ექვივალენტობის პრინციპი საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვეოთ გრავიტაციისა და ინერციის ძალების ნამდვილი ბუნება. თუ კლასიკური მექანიკის თვალსაზრისით (დღაამბერის პრინციპი) ინერციის ძალები თავს უნდა იჩენდნენ მხოლოდ და მხოლოდ ათვლის სისტემის არაინერციულობის გამო, ფარდობითობის ზოგადი თეორიის თვალსაზრისით ისინი გამოწვეული არიან სამყაროში მასების განაწილებით. მსოფლიო მიზიდულობის (გრავიტაციის) კანონი წარმოადგენს ინერციის გალილეი-ნიუტონის კანონის ბუნებრივ განზოგადებას. საინტერესოა გამოვარკვეოთ როგორ და რა მიმართულებით შეიძლება ინერციის კანონის განზოგადება. ინერციის კანონის თანახმად, თუ მატერიალურ ნაწილაკზე არ მოქმედებენ გარეშე ძალები, მაშინ ის იძოძრავებს თანაბარი სიჩქარით სწორი ხაზის გასწვრივ. სათანადოთ ნაწილაკის კოორდინატები დროის წრფივ ფუნქციებით წარმოიდგინებოდა. არაინერციულ სისტემებში მოვლენების მიმდინარეობის შესასწავლად ინერციის კანონი ისეთ-ნაირად უნდა განვაზოგადოთ, რომ ბუნების ძირითადი კანონები ინვარიანტული იყვნენ ნებისმიერად მოძრავი კოორდინატთა სისტემების მიმართ, როგორც ამას ადგილი აქვს ინერციული სისტემების მიმართ. ექვივალენტობის პრინციპის თანახმად ეს მოთხოვნა ნიშნავს განტოლებათა ინვარიანტობას ყოველი ტიპის გრავიტაციული ველის მიმართ.

ცხადია, რომ ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ჩამოსაყალიბებლად იგივე გზა უნდა ავირჩიოთ, რომელმაც ფარდობითობის სპეციალური თეორიის

ბრწყინვალე შედეგებამდე მიგვიყვანა. მოვლენათა შესასწავლად, ისევე როგორც სპეციალურ თეორიაში, ჩვენ გამოვიყენებთ ყველაზე ზოგადი ხასიათის დრო-სივრცის ოთხგანზომილებიან სივრცეთა კონტინუუმს. რომლის თვისებების დადგენა გადაუღებელ ამოცანას შეადგენს. დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად ჩვენ დაგვიკრძება ფიზიკის გეომეტრიული საფუძვლების განზოგადება.

მაშინ როდესაც ინერციული სისტემების მიმართ ნაწილაკის თანაბარი მოძრაობის გამომსახველი მსოფლიო ხაზი წრფე იყო. გრაფიტაციული ველის მოქმედების შემთხვევაში, მსოფლიო ხაზები წრფეები აღარ იქნებიან.

არაინერციულ სისტემებში ნაწილაკის თავისუფალი მოძრაობის გამომსახველი მრუდის ფორმა მკიდროდაა დაკავშირებული იმ ოთხგანზომილებიანი ზოგადი სივრცის სპეციფიკურ თვისებებთან, რომლებიც განსაზღვრავენ ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლის ფორმულების სახე. ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში ორ წერტილს შორის მანძილის გასაზომად ვიყენებთ მასშტაბს. მოცემულ მონაკვეთზე მისი უშუალოდ დადების გზით ვსაზღვრავდით ღეროს სიგრძეს, ანალოგიური თვალსაზრისით უნდა მიუდგეთ დროის ინტერვალის გაზომვას. ზოგად თეორიაში კი გაზომვის ეს წესი აღარ გამოგვადგება, რადგან ნაცვლად ევკლიდის ბრტყელი სივრცისა ჩვენ საქმე გვაქვს საზოგადოთ გამრუდებულ სივრცესთან.

სივრცის გამრუდების ფეჟქტი უნდა მივაწეროთ გრაფიტაციული ველის მოქმედებას. იმის გამოსარკვევად თუ როგორ ამრუდებს მატერია მინკოვსკის ოთხგანზომილებიან სივრცეს, განვიხილოთ გეომეტრია არა სიბრტყეზე, არამედ მრუდ ზედაპირზე. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ აჩქარებულად მოძრავ, მაგალითად ღერძის ირგვლივ მბრუნავ სისტემაში ჩატარებული გაზომვების შედეგები შეუთავსებელი იქნებიან „უძრავ“ (ინერციულ) სისტემაში მიღებულ ანალოგიურ სიდიდეებთან. მართლაც თუ R რადიუსთან დისკოს ბრუნვით მოძრაობაში მოვიყვანთ მისი ზედაპირის სიბრტყის პერპენდიკულიარული ღერძის ირგვლივ, მაშინ ამ დისკოსთან უძრავად დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემაში წრეხაზის სიგრძე $2\pi R$ — სიდიდიდან მნიშვნელოვნად განსხვავებული აღმოჩნდება. მართლაც, ლორენცის შემოკლების გაზომვით,

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}} = 2\pi R \sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}} < 2\pi R, \quad (84,1)$$

ე. ი. მბრუნავი დისკოს წრეხაზის სიგრძე მცირდება, ხოლო დისკოს დიამეტრი $2R$ უცვლელი რჩება, რადგან ის მუდამ სიჩქარის პერპენდიკულიარულადაა მოთავსებული. წრეხაზის სიგრძე, როგორც (84,1) გვიჩვენებს, მით უფრო სწრაფად მცირდება რაც უფრო დიდია მისი რადიუსი. ამგვარად, მბრუნავ, სისტემაში წრეხაზის სიგრძის შეფარდება მის დიამეტრთან π -ზე ნაკლებია

$$\pi \sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}} < \pi, \quad (84,2)$$

რაც ეწინააღმდეგება ევკლიდის გეომეტრიის ძირითად დებულებებს. რადგან მხოლოდ თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობის შემთხვევაში შეიძლება ფარ-

დობითობის სპეციალური თეორიის დებულებათა (ლორენცის შემოკლება) გამოყენება. ამიტომ ზემოდ ჩატარებული მსჯელობის დროს ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ დროის მცირე შუალედებისათვის, ბრუნვა თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობის ტოლფასია. ასეთ მბრუნავ სისტემას წარმოადგენს მაგალითად დედამიწა, რომლისთვისაც, ისევე როგორც მბრუნავი დისკოსათვის, გამოუსადეგარია მყარი მასშტაბების უშუალო შეთავსებით სიგრძის გაზომვის წესი. რაც შეეხება ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში დროის ინტერვალის გაზომვის ცნობილ წესს, ისიც კარგავს თავის მნიშვნელობას. დისკოს ცენტრში მოთავსებული უძრავი და წრეხაზზე მოძრავი საათების სელები განსხვავებული არიან. წრეხაზზე მოძრავი საათის სელა მით უფრო შენელებულია, რაც უფრო შორსაა ცენტრიდან. მაშასადამე, მბრუნავ სისტემაში საათების სელა დამოკიდებულია მათ ნდებარეობაზე (სივრცითი კოორდინატებზე), საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერად მოძრავ სისტემაში სივრცითი და დროითი ანათვლები ერთი მეორესთან მკიდრო კავშირში იმყოფებიან და მათი გაცალკეება აღარ შეიძლება.

ყოველ ნებისმიერად მოძრავ (აჩქარებულად მოძრავ ანდა მბრუნავ) კოორდინატთა სისტემას, ექვივალენტობის პრინციპის თანახმად, შეესაბამება არაერთგვაროვანი გრავიტაციული ველი. სიგრძისა და დროის ერთეულები ამ ველის სხვადასხვა წერტილებში განსხვავებული არიან. ამგვარად, ფარდობითობის ზოგად თეორიაში დრო-სივრცის ერთობლიობა არაეკვილიდურია, სადაც წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება მრუდწირული კოორდინატების, ანუ პარამეტრების საშუალებით.

რადგან უსასრულო მცირე მოცულობაში მოძრაობა შეიძლება ჩათვალოს როგორც თანაბარ აჩქარებული, ხოლო გრავიტაციული ველი როგორც ერთგვაროვანი, ამიტომ ამ არეში საზარტლიანი იქნება ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი დებულებები და ექვივალენტობის პრინციპი.

ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს განვაზოგადოთ ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი დებულებანი არა ეკვილიდური სივრცეების შემთხვევაში—ფარდობითობის ზოგად თეორიაში.

განვიხილოთ p მსოფლიო წერტილის უსასრულო მცირე მახლობლობაში მეორე მსოფლიო წერტილი p' . მათ შორის მანძილის კვადრატი, ფარდობითობის სპეციალური თეორიის თანახმად, შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება

$$ds^2 = (dx_4)^2 = (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 - (dx_5)^2. \quad (84,3)$$

ეს ელემენტი გრავიტაციული ველისაგან თავისუფალ, ე. ი. ინერციულ სისტემასთან დაკავშირებულ ოთხგანზომილებიან სივრცეში, წარმოადგენს სწორი ხაზის მონაკვეთს. მაგრამ ნებისმიერად მოძრავ სისტემაში, რომლებსაც განიხილავს ზოგადი თეორია, p' წერტილის მდებარეობა p -ს მიმართ განისაზღვრება 4 დიფერენციალური dx_1 , dx_2 , dx_3 და dx_4 პარამეტრის საშუალებით.

მსოფლიოს ერთი ადგილიდან მეორეში გადასვლის დროს (84,3) კავშირი ცვალებადობას განიცდის, რომელიც არსებითად გრავიტაციული ველის (აჩქარების) არაერთგვაროვნობითაა გამოწვეული.

ცხადია, რომ ზოგად თეორიაში, ისევე როგორც სპეციალურ თეორიაში, მანძილის ელემენტის კვადრატი ინვარიანტული სიდიდე უნდა იყოს. თუ მას (dx_i) დიფერენციალური პარამეტრების შემდეგი კვადრატული ფუნქციის სახით წარმოვიდგინოთ

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \quad (84,4)$$

მაშინ გაშლის კოეფიციენტები g_{ik} , როგორც დრო სივრცის x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატების ფუნქციები, ოთხგანზომილებიანი მეორე რანგის ტენზორის კოვარიანტულ მდგენელებს უნდა წარმოადგენდენ; რადგან $dx_i dx_k$ კონტრავარიანტული ტენზორის მდგენელებია.

g_{ik} ტენზორს ფუნდამენტალური მეტრიკული ტენზორი ეწოდება. მსოფლიო წერტილებში უწყვეტი $g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ფუნქციის ნიშვნელობათა ერთობლიობა შეადგენს ფუნდამენტალური ტენზორის ველს, რომელსაც მეტრიკული ველი ეწოდება. ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი დებულების — მსოფლიო ხაზის სიგრძის ელემენტის ინვარიანტობის პირობიდან ადვილად შეიძლება g_{ik} ფუნქციების ფიზიკური აზრის გამორკვევა და მათემატიკური გამოსახულებების მიღება. მართლაც, თუ ვისარგებლებთ ds^2 სიდიდის ინვარიანტობის პირობით და აგრეთვე გავითვალისწინებთ, რომ კოორდინატთა K სისტემიდან ნებისმიერად მოძრავ K' სისტემაზე გადასვლისას სათანადო კოორდინატთა დიფერენციალები წრფივი ფორმით უნდა გარდაიქმნებოდნენ

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} dx'_3 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_4} dx'_4 \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} dx'_3 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_4} dx'_4 \\ dx_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} dx'_3 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_4} dx'_4 \\ dx_4 &= \frac{\partial x_4}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial x_4}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial x_4}{\partial x'_3} dx'_3 + \frac{\partial x_4}{\partial x'_4} dx'_4 \end{aligned} \right\} \quad (84,5)$$

მაშინ გვექნება:

$$ds^2 = (dx_i)^2 = g_{ik} dx'_i dx'_k, \quad (84,6)$$

სადაც:

$$g'_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}. \quad (84,7)$$

(84,7)-დან გამომდინარეობს, რომ g'_{ik} სიმეტრიული ტენზორია

$$g'_{ik} = g'_{ki}. \quad (84,8)$$

მაშასადამე, g_{ik} ტენზორის დამოუკიდებელი მდგენელების რიცხვი 10-ის ტოლია.

(84,6) კვადრატული ფორმა, საზოგადოთ, არა ეკვლიდურია. g_{ik} -ს გამო-
სახელებებში შემაჯავლი $\frac{\partial x_i}{\partial x'_i}$ და $\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}$ კოეფიციენტები საზოგადოთ ცვლადი
სიდიდეებია. ისინი იცვლებიან ერთი მსოფლიო წერტილიდან მეორეში გადასვ-
ლის დროს. ოთხგანზომილებიანი სივრცის სხვადასხვა წერტილებში მათ გან-
სხვავებული რიცხვითი მნიშვნელობები აქვთ. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ჯერ-
ჯერობით არ არსებობს ორი მსოფლიო წერტილისათვის მათი მნიშვნელობე-
ბის დამაკავშირებელი განტოლება. ეს უკანასკნელი გარემოება გვიძლავს
(84,6) და (84,7) დამოკიდებულებათა გამოყენების არე აღებული წერტილის
უშუალო მცირე მახლობლობით შემოვფარგლოთ. თუ ამ მოცულობას საკნაოდ
მცირეს ავიღებთ, მაშინ შეიძლება $\frac{\partial x_i}{\partial x'_i}$ და $\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}$ კოეფიციენტები აღებული
მოცულობის შიგნით მუდმივებად ჩავთვალოთ. მაშასადამე, თუ ნებისმიერ
კოორდინატთა სისტემის ყოველ წერტილს ვექტორის ან ტენზორის გარკვეულ
მნიშვნელობებს მივაწერთ, მაშინ ამ სიდიდეთა გარდაქმნის კოეფიციენტები,
რომლებიც წერტილიდან მეორე წერტილში გადასვლისას იცვლებიან, განსაზ-
ღვრული იქნებიან (84,7) ფორმულებით. ამგვარად, ფარდობითობის ზოგად
თეორიაში ინვარიანტობის თვისებას ადგილი აქვს მხოლოდ სივრცის ისეთი
მცირე არეებისათვის, რომლებშიც g_{ik} — კოეფიციენტები შეიძლება განვიზი-
ლოთ როგორც მუდმივი სიდიდეები.

(84,7) არა ეკვლიდური ფორმიდან ეკვლიდურის მისაღებად g_{11} , g_{22} ,
 g_{33} და g_{44} სიდიდეები უნდა გაუტოლოთ მუდმივებს, ხოლო ყველა დანარჩენი
 g_{ik} კოეფიციენტები ($i \neq k$) — ნულს.

ცხადია, რომ (84,3) ეკვლიდურ ფორმას შეესაბამება მეტრიკული
ტენზორი

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (84,9)$$

(84,7) სიმეტრიული ტენზორი განსაზღვრავს ოთხგანზომილებიანი არა ეკვი-
დური სივრცის თვისებებს, რომლებიც დამოკიდებული არიან გრავიტაციული
ველის ხასიათზე. რადგან g_{ik} — კოეფიციენტები დრო-სივრცითი კოორდინა-
ტების ფუნქციებს წარმოადგენენ და გრავიტაციულ ველს ახასიათებენ, ამი-
ტომ ეინშტეინი მათ გრავიტაციულ პოტენციალებს უწოდებს.

ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ამოცანას შეადგენს იმ განტოლებათა
მონახვა, რომლებსაც g_{ik} გრავიტაციული პოტენციალები დააკმაყოფილებენ.
ეს განტოლებები, პუასონის

$$\Delta \Phi = -4\pi k \rho$$

სკალარული განტოლების განზოგადოების გზით პირველად ეინშტეინმა მიიღო.

§ 85. გეოდეზური წირის განტოლება

ფუნდამენტალური მეტრიკული ტენზორის შემოღება და მისი მდგენელეების განსაზღვრა საშუალებას გვაძლევს მოვნახოთ ადებული გეომეტრიული სივრცის ორ ფიქსირებულ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილი. იმ წირს, რომლის გასწვრივაც მანძილი მინიმალურია, გეოდეზურ წირი ეწოდება. განწარტებიდან გამომდინარეობს, რომ გეოდეზური წირი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:

$$\delta \int_a^b ds = 0. \quad (85,1)$$

ამ განტოლების სახე კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე არ უნდა იყოს დამოკიდებული. გეოდეზური წირის განტოლების მისაღებად მოცემულ ორ წერტილზე გაშვებული წირის სიგრძე l განვიხილოთ როგორც რაიმე t პარამეტრის ფუნქცია, რომელიც აღნიშნულ წერტილებზე სათანადოთ a და b მნიშვნელობებს ღებულობს. გვექნება:

$$l = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}} dt = \int_a^b F dt, \quad (85,2)$$

სადა,

$$F^2 = g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}. \quad (85,3)$$

ამგვარად, გეოდეზური წირისათვის გვექნება:

$$\delta \int_a^b F dt = 0. \quad (85,4)$$

თუ გავითვალისწინებთ რომ $g_{ik} = g_{ki}$, (85,3)-დან მივიღებთ:

$$2F \delta F = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \delta x_i + 2g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \delta \left(\frac{dx_k}{dt} \right). \quad (85,5)$$

(85,3) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ როდესაც $l=t$, მაშინ $F=1$, ხოლო (85,5) შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\delta F = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \delta x_i + g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{d\delta x_k}{ds}. \quad (85,6)$$

ამ უკანასკნელის (85,4)-ში ჩასვლა და მეორე შესაკრების ნაწილობითი ინტეგრაციის შედეგად მივიღებთ:

$$\int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \delta x_i - \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \right) \delta x_k \right\} ds = 0, \quad (85,7)$$

სადაც δx_i და δx_k კოორდინატების ნებისმიერ ვარიაციებს წარმოადგენენ. რადგან (85,7)-ში ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში შეჯამება სწარმოებს

l, i და k ინდექსებით, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია δx_k შევცვალოთ δx_i — ვარიაციით, მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{ii} \frac{dx_i}{ds} \right) = 0. \quad (85,8)$$

ანდა

$$g_{ii} \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0. \quad (85,9)$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ შეჯამება i და k ინდექსებით სწარმოებს, მეორე შესაკრები შემდეგ სახეზე მიიყვანება:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds},$$

ხოლო (85,9) განტოლება კი მიიღებს სახეს:

$$g_{mi} \frac{d^2 x_m}{ds^2} + \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right] \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0. \quad (85,10)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა:

$$\left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} \right). \quad (85,11)$$

რომელსაც კრისტოფელის პირველი გვარის სიმბოლო ეწოდება.

g_{ik} ტენზორის სიმეტრიულობის გამო, (85,11) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ კრისტოფელის პირველი გვარის სიმბოლოც სიმეტრიულია, მისი სიდიდე არ იცვლება ზედა ინდექსების ადგილების შეცვლით.

თუ (85,10) განტოლების ორივე მხარეს მეორე რანგის კონტრაგარიანტულ g^{ln} ტენზორზე გავამრავლებთ და n ინდექსით ავჯამავთ მივიღებთ

$$\frac{d^2 x_n}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} ik \\ n \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \quad (85,12)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა:

$$g^{ln} \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} ik \\ n \end{matrix} \right\} = \Gamma^n_{ik}, \quad (85,13)$$

რომელსაც კრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლო ეწოდება.

(85,12) წარმოადგენს გეოდეზიური წირის განტოლებას.

გეოდეზიური წირი ისეთ, მრუდია, რომელიც უცვლელად ინარჩუნებს თავის მიმართულებას სივრცეში.

(85,12) ინვარიანტული განტოლება იმავე დროს ნებისმიერი აჩქარებით მოძრავი კოორდინატთა სისტემის მიმართ ანდა ექვივალენტურ ერთგვაროვან გრაეიტაციულ ველში თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის კანონს გამოსახავს. თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექ-

ტორია, ნებისმიერი კოორდინატთა სისტემის მიმართ სათანადო გეოდეზურ წირით წარმოიდგინება. ამგვარად ჩვენ მოვახდინეთ გალილეი-ნიუტონის ინერციის კანონის განზოგადება აჩქარებულად მოძრავი კოორდინატთა სისტემების შემთხვევებზე.

დასასრულს, ჩვენ არ შეუდგებით არა თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობის შესწავლას, აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ფარდობითობა ზოგადი თეორიის ძირითადი დებულებები ცოტა თუ ბევრად სარწმუნო ექსპერიმენტებით დასტურდებიან.

ს ა რ ჩ ე ე ი

თ ა ვ ი I

30

ვექტორული და ტენზორული ანალიზის ელემენტები

§ 1. ვექტორები, სკალარული და ვექტორული ნამრავლი	5
§ 2. ვექტორული ანალიზი	7
§ 3. ვექტორის წარმოებული მიმართულებით, ტენზორები	12
§ 4. სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორები. მათი ინვარიანტული თვისებები	15

თ ა ვ ი II

ფარდობითობის სპეციალური თეორია

§ 5. მატერია და მისი თვისებები	19
§ 6. ელექტრული და მაგნიტური ველები	22
§ 7. აბსოლუტური და ფარდობითი მოძრაობა დრო და სივრცე	28
§ 8. ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ძირითადი პრინციპები. სინათლის აბერაცია, ფიზოს და მაიკლსონის ცდები	34
§ 9. სივრცისა და მოვლენის ხანგრძლიობის გაზომვის წესი ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში	47
§ 10. ლორენცის გარდაქმნები	51
§ 11. ლორენცის გარდაქმნებიდან გამომდინარე შედეგები	59
§ 12. ლორენცის გარდაქმნების გეომეტრიული წარმოდგენა	64
§ 13. ინტერვალები	67
§ 14. ოთხგანზომილებიანი სიჩქარე და აჩქარება	69
§ 15. სიჩქარეთა შეკრების კანონი	72
§ 16. ოთხგანზომილებიანი ვექტორები და ტენზორები	76

თ ა ვ ი III

რელატივისტური მექანიკა

§ 17. უმცირესი კმედების პრინციპი	81
§ 18. თავისუფალი ნაწილაკის კმედების ფუნქცია	83
§ 19. თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება, ოთხგანზომილებიანი იმპულსი და ენერგია	85
§ 20. იმპულსის მუდმივობის კანონი რელატივისტურ მექანიკაში	90
§ 21. მასათა დეფექტი	93
§ 22. იმპულსის მომენტი	97

თ ა ვ ი IV

ელექტრომაგნიტური ველის ძირითადი განტოლებები ხეცარიელში

§ 23. ელექტრომაგნიტური ველის ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი	99
§ 24. მუხტის მოძრაობა გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში	103
§ 25. ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი	105

§ 26.	დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა ერთგვაროვან ელექტრულ ველში	111
§ 27.	მუხტის მოძრაობა ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში	112
§ 28.	მუხტის მოძრაობა ერთგვაროვან ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში	116
§ 29.	ლორენცის გარდაქმნები ელექტრომაგნიტური ველის <i>e</i> და <i>h</i> ვექტორებისათვის	120
§ 30.	ელექტრომაგნიტური ველის ინვარიანტები	124
§ 31.	მუხტების განაწილების სიმკვრივე	126
§ 32.	ოთხგანზომილებიანი დენი	130
§ 33.	ელექტრომაგნიტური ველის ქმედების ფუნქცია	133
§ 34.	ლორენცის განტოლებათა სისტემა	135
§ 35.	ლორენცის განტოლებების ინტეგრალური წარმოდგენები	139
§ 36.	ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივე	141
§ 37.	ენერგია-იმპულსის ტენზორი	143
§ 38.	ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია და იმპულსი	150
§ 39.	ლაუეს თეორემა	154
§ 40.	ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის მომენტი	156
§ 41.	კლასიკური ელექტრონული თეორიის არსი	162

თ ა ვ ი V

ელექტროსტატიკური და მაგნიტოსტატიკური ველები

§ 42.	ელექტროსტატიკური ველი	165
§ 43.	პუასონის განტოლება	168
§ 44.	მუხტთა სისტემის ენერგია, ირწოუს თეორემა	171
§ 45.	მულტიპოლის პოტენციალი	176
§ 46.	მუხტთა სისტემის ელექტროსტატიკური ველი და ენერგია	179

თ ა ვ ი VI

სტაციონარული და დინამიკური ელექტრომაგნიტური ველები

§ 47.	მუდმივი სიჩქარით მოძრავი მუხტის ველი	182
§ 48.	კონვექციური (ჭივისაიდის) პოტენციალი	186
§ 49.	თანაბრად მოძრავი მუხტის იმპულსი, ელექტრომაგნიტური მასა	189
§ 50.	სიჩქარეზე მასის დამოკიდებულების კანონის ექსპერიმენტული შემოწმება	93
§ 51.	ნებისმიერად მოძრავი მუხტების ველი	195
§ 52.	ტალღის განტოლება	198
§ 53.	დაგვიანებული პოტენციალები	202
§ 54.	ლენარდისა და ვიხერტის პოტენციალები	208
§ 55.	ნებისმიერად მოძრავ მუხტთა ველი	211
§ 56.	ნებისმიერად მოძრავი მუხტის ველი	215
§ 57.	მონოკრომატული ელექტრომაგნიტური ტალღა	220
§ 58.	ბრტყელი პოლარიზებული ტალღა	226
§ 59.	აჩქარებულად მოძრავი მუხტის გამოსხივება	233
§ 60.	რხევადი მუხტის (დიპოლის) ველი	237
§ 61.	მუხტთა სისტემის მაგნიტური მომენტი	241
§ 62.	ელექტრული კვადრუპოლური და მაგნიტური დიპოლური გამოსხივება	246
§ 63.	მულტიპოლის გამოსხივება	253
§ 64.	დაგვიანებული მოქმედების ეფექტი	257
§ 65.	ქვახი დრეკადი ძალით ბმული ელექტრონი	260
§ 66.	საკუთარი ძალა	267
§ 67.	სპექტრალური ხაზის სიგანე	275

§ 68. ხაზის გაგანეერების მიზეზები	282
§ 69. ელექტრომაგნიტური ტალღის გაფანტვა ელექტრონზე	285
§ 70. ტალღის გაფანტვა ოსცილატორზე	289
§ 71. ტალღის შთანთქმა	291
§ 72. ტალღის ფაზური და უკუფური სიჩქარეები	295
§ 73. გამოსხივება დაჯახების დროს	301
§ 74. ატომური ელექტრონის რელატივისტური მოძრაობა	308
§ 75. წრეხაზზე თანაბარი სიჩქარით მბრუნავი ელექტრონის გამოსხივება	314
§ 76. მნათი ელექტრონი	323
§ 77. ველის კანონიკური განტოლებები	333
§ 78. განივი და გასწვრივი ელექტრომაგნიტური ველები	340

თ ა ვ ი VII

ლორენცის განტოლებათა (ველის) გასაშუალოება

§ 79. მუბტთა სისტემის ველის გასაშუალოება	344
§ 80. განაწილების ფუნქცია	346
§ 81. დინამიკურ სიდიდეთა დროით წარმოებულები	348
§ 82. ელექტრული და მაგნიტური მომენტების გასაშუალოება	349

თ ა ვ ი VIII

ფარდობითობის ზოგადი თეორია

§ 83. ექვივალენტობის პრინციპი	357
§ 84. ფარდობითობის ზოგადი თეორიის კავშირი გეომეტრიასთან. ფუნდამენტალური მეტრიკული ტენზორი	363
§ 85. გეოდეზური წირის განტოლება	368

რედაქტორი პრფ. ნ. ლაკვიანი
გამომცემლობის რედაქტორი დ. ნათიშვილი
ტექნიკური კ. კროშინაძე
კორექტორები (ს. კვინიტაძე
ლ. სერინდოშვილი

ხელნაწერი დასაბეჭდად 20/VIII-63 წ. ანაწილის ზონა 7x11,
კალაღის ზონა 70x108, სასტამბო თაბაქი 36,25, სააღრიცხვო-
საგანმეცნელო—38,63, სააქტორო—37,69.

უფ 00018

შვკ. № 30/88

ტირ. 3000

შპსი 1 შპს. 7 კპპ.

შრომის წითელი დროშის ორდენის საქართველოს სასოფლო-
სამეურნეო ინსტიტუტის სტამბა.
თბილისი, ი. ჭავჭავაძის ქროსპექტი, 33.

Типография - Грузинского ордена Трудового
Красного Знамени сельскохозяйственного института.
Тбилиси, просп. И. Чавчаваძე 33.

Проф. Джаши Иван Леонтьевич

ОРГАНИЗАЦИЯ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

(на грузинском языке)

Государственное издательство „Цодна“
Министерства культуры Грузинской ССР

Тбилиси—1963