გ. ვაჩნაძე

გამოყენებითი პერსპექტივის საფუძვლები

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1966

513
515.6
ვ 263

Вачнадзе Георгий Александрович
Основы прикладной перспективы
(на грузинском языке)

რედაქტორი პ. ლ ა პ ა რ ტ ყ ა ვ ა
მხატვრული რედაქტორი ს. ბ ო ტ კ ო ვ ე ლ ი
გარეკანის მხატვარი ზ. ხ ა რ ა ბ ა ძ ე
ტექრედაქტორი გ. ჯ ო ხ ა ძ ე
კორექტორი თ. ხ ა ტ ი ა შ ვ ი ლ ი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 11.XI.66.
ქაღალდის ზომა 60×90. ნაბეჭდი
თაბახი 11.25, სააღრ.-საგამომც. თაბახი 10,57.

ფასი 56 კაპ.

შეკვ. № 89. უე 00377. ტირაჟი 2.000.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, კამოს ქ., 18.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Камо, 18.
1966

სტამბა № 1, თბილისი, ორჯონიკიძის ქ., 50.

Типография № 1, Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50.

3-1-3
189-66

სარჩევი

შესავალი

გეგმარების პროცესში არქიტექტორის წინაშე მუდამ დგას შემდეგი პრაქტიკული ამოცანა: სიბრტყეზე ავგოს სივრცითი, ე. ი. სამგანზომილებიანი, სხეულების ისეთი გამოსახულება, რომელსაც მივიღებთ რომელიმე გარკვეული წერტილიდან მზერის დროს ან, უფრო ზუსტად, ამ სხეულების ფოტოგრაფირების შედეგად.

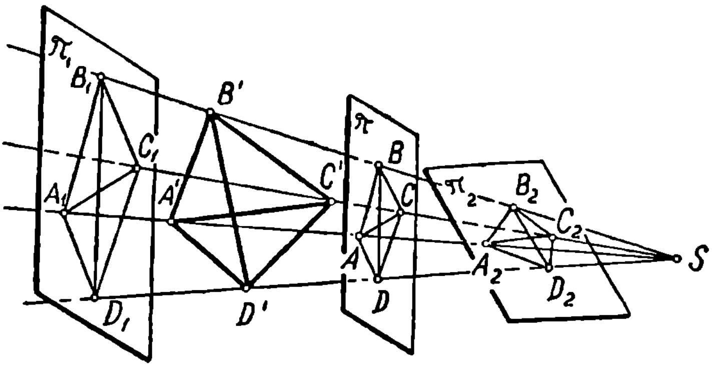
ასეთ გამოსახულებებს შეისწავლის მხაზველობითი გეომეტრიის ერთ-ერთი ნაწილი, რომელსაც პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი ვ ა ეწოდება; პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი ვ ა ს ან პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი უ ლ გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა ს უწოდებენ აგრეთვე თვით მიღებულ გამოსახულებასაც.

არქიტექტორისათვის პერსპექტივის განსაკუთრებული მნიშვნელობა ცხადი გახდება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ სიბრტყეზე სივრცითი საგნების გამოსახვის არც ერთი სხვა მეთოდი არ გვაძლევს ისეთ შთაბეჭდილებას, როგორსაც პერსპექტივიდან ვიღებთ. მეორე მხრივ, გეგმარების დროს, როდესაც მომავალი არქიტექტურული ნაგებობა ჯერჯერობით მხოლოდ არქიტექტორის აზროვნებაში ისახება და ვითარდება, სწორედ ასეთი პერსპექტიული გამოსახულება, შემოქმედების ყოველ ცალკეულ საფეხურზე, ავტორს აძლევს კომპოზიციური ჩანაფიქრის შემოწმებისა და მასში კორექტივების შეტანის საშუალებას.

სიბრტყეზე პერსპექტიული გამოსახვის გეომეტრიული სქემა შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვიდგინოთ (ნახ. 1): სივრცეში მდებარე $A'B'C'D'$ საგნის ყოველი წერტილიდან არეკლილი სინათლის სხივი მაყურებლის S თვალში გადის; ეს უკანასკნელი წერტილად წარმოვიდგინოთ. თუ $A'B'C'D'$ საგანსა და მაყურებლის თვალს შორის მოვათავსებთ გამჭვირვალე π ფირფიტას, სინათლის ყოველი სხივი მას გარკვეულ წერტილში გადაკვეთს, რომელიც საგნის შესაბამისი წერტილის გამოსახულება იქნება; ამგვარად მიღებული ყველა წერტილის ერთობლიობა კი მთლიანად საგნის $ABCD$ გამოსახულებას მოგვცემს.

შევნიშნავთ, რომ π ფირფიტის სივრცეში გადაადგილება თავის პირვანდელი მდებარეობის პარალელურად საქმის შინაარსს არსებითად არ ცვლის. მაგალითად, თუ π_1 ფირფიტა ისე ავიღეთ, რომ $A'B'C'D'$ საგანი S თვალსა და π_1 ფირფიტას შორის აღმოჩნდება, თანაც ისე, რომ π_1 ფირ-

ფიტის სიბრტყე π ფირფიტის სიბრტყის პარალელური იქნება, მაშინ სინათლის სხივები შეგვიძლია აზრობრივ განვაგრძოთ π_1 ფირფიტის გადაკვეთამდე, მივიღებთ ახალ $A_1B_1C_1D_1$ გამოსახულებას, რომელიც, ცხადია, π ფირფიტაზე მიღებული $ABCD$ გამოსახულების მსგავსი იქნება π და π_1 ფირფიტების სიბრტყეთა პარალელურობის გამო. ახლა თუ სინათლის SA_1, SB_1... სხივები ისეთი ახალი π_2 ფირფიტით გადავკვეთეთ, რომლის სიბრტყე π ფირფიტის სიბრტყესთან დახრილია, მაშინ π_2 ფირფიტაზე მიღებულ $A_2B_2C_2D_2$ გამოსახულებასა და $ABCD$ გამოსახულებას შორის უფრო მნიშვნელოვან განსხვავებას მივიღებთ. ასეთი საკითხები ქვემოთ დაწვრილებით იქნება განხილული.



ნახ. 1.

ზემოთ აღწერილ გეომეტრიულ სქემაზეა დამყარებული ფოტოგრაფირების პროცესიც: საგნის ყოველი ხილვადი წერტილიდან სინათლის სხივი გადის ობიექტივის ცენტრში და კვეთს ფოტოგრაფიულ კამერაში მოთავსებულ სინათლის მგრძნობიარე ფირფიტას, რომელზედაც ამ წერტილის გამოსახულება აღიბეჭდება.

ასეთი გეომეტრიული სქემით მიღებულ გამოსახულებასა და გამოსახულ სამგანზომილებიან ობიექტს შორის გარკვეული დამოკიდებულება არსებობს, რომლის შესწავლა, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მხაზველობითი გეომეტრიის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს.

I. ძირითადი ცნებები

1. ცენტრალური გეგმილები

სივრცეში ავიღოთ ნებისმიერი π სიბრტყე და ამ სიბრტყის გარე მდებარე S წერტილი (ნახ. 2). გეომეტრიული აგება, რომელიც ჩვენ უნდა შევასრულოთ, ორი ნაწილისაგან შედგება:

1) S წერტილიდან სივრცეში აღებულ ყოველ ნებისმიერ A', B', C' წერტილზე წრფე გავატაროთ;

2) მიღებული SA', SB', SC',... წრფეებით π სიბრტყე გადავკვეთოთ.

ამ ორი მოქმედების შედეგად π სიბრტყეზე A, B, C,... წერტილებს მივიღებთ.

ჩვენს მიერ ჩატარებულ ოპერაციას ეწოდება S წ ე რ ტ ი ლ ი დ ა ნ A', B', C',... წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი ს π ს ი ბ რ ტ ყ ე ზ ე ც ე ნ ტ რ ა ლ უ რ ი (კ ო ნ უ ს უ რ ი, პ ო ლ ა რ უ ლ ი, პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი უ ლ ი) დ ა გ ე გ მ ი ლ ე ბ ა.

S წერტილს გ ე გ მ ი ლ თ ც ე ნ ტ რ ი ან პ ო ლ უ ს ი ეწოდება, SA', SB', SC',... წრფეებს კი — მ ა გ ე გ მ ი ლ ე ბ ე ლ ი ს ხ ი ვ ე ბ ი.

π სიბრტყეს ვუწოდებთ გ ე გ მ ი ლ თ ს ი ბ რ ტ ყ ე ს, ს უ რ ა თ ი ს ს ი ბ რ ტ ყ ე ს ან, მოკლედ, ს უ რ ა თ ს.

მაგეგმილებელი სხივების π სიბრტყესთან გადაკვეთის A, B, C,... წერტილებს, შესაბამისად, A', B', C',... წერტილების ც ე ნ ტ რ ა ლ უ რ ი (პოლარული, კონუსური) გეგმილები ან პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი ვ ა ეწოდება.

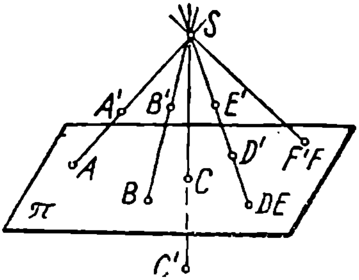
შემდეგში, ცენტრალურ გეგმილს, გ ე გ მ ი ლ ს ვუწოდებთ ხოლმე, მოცემულ დასაგეგმილებელ წერტილს კი — ო რ ი გ ი ნ ა ლ ს.

მიღებული დაგეგმილების შედეგად შეგვიძლია შემდეგ დასკვნამდე მივიდეთ:

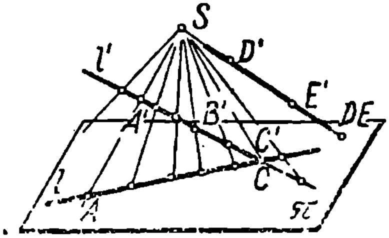
ყოველ მაგეგმილებელ SA', SB', SC',... სხივს π სიბრტყეზე ერთადერთი (A, B, C,...) წერტილი შეესაბამება. ამგვარად, სივრცეში აღებულ ნებისმიერ წერტილს, რომელზედაც ესა თუ ის მაგეგმილებელი სხი-

ვი გადის, საზოგადოდ, ერთადერთი გეგმილი ექნება (აქ ჩვენ გამონაკლისს შევხვდებით, რის შესახებაც ქვემოთ იქნება აღნიშნული).

დასაგეგმილებელ წერტილებს სივრცეში შეიძლება სხვადასხვა მდებარეობა ჰქონდეს. როგორც ნახაზიდან ჩანს, A' და B' წერტილები π გეგმილთ სიბრტყის ერთ მხარეს მდებარეობს, C' წერტილი კი მეორე მხარეს. F' წერტილი უშუალოდ π სიბრტყეზე მდებარეობს, ამის გამო ის თავის F გეგმილთანაა შეთავსებული. D' და E' წერტილები ერთსა და



ნახ. 2.



ნახ. 3.

იმავე SD' მაგეგმილებელ სხივზე მდებარეობს, რის გამოც მათი D და E გეგმილები ერთ წერტილში შეთავსდება.

უკანასკნელ შემთხვევას იმ მოსაზრებამდე მივყავართ, რომ მოცემულ ნებისმიერ წერტილს, აღწერილი გზით, სიბრტყეზე შეგვიძლია ერთადერთი გარკვეული გეგმილი მოვუძებნოთ, მაგრამ, თუ π სიბრტყეზე რომელიმე წერტილის E გეგმილია მოცემული, ამ გეგმილით თვით E' წერტილს ვერ განვსაზღვრავთ. ჩვენ მხოლოდ ის გვეცოდინება, რომ E გეგმილის შესაბამისი E' წერტილი აუცილებლად SE მაგეგმილებელ სხივზე მდებარეობს. ამგვარად, π გეგმილთ სიბრტყეზე მდებარე E წერტილი SE მაგეგმილებელ სხივზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის გეგმილად შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

ახლა განვიხილოთ წრფის დაგეგმილება (ნახ. 3).

l' წრფის დაგეგმილება შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც წრფეზე მდებარე ყველა წერტილის დაგეგმილება ზემოთ აღწერილი გზით. ამისათვის l' წრფის ყოველ წერტილზე S წერტილიდან მაგეგმილებელი სხივი უნდა გავატაროთ და ამ სხივის π სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი ავაგოთ. ასე მიღებული წერტილების გეომეტრიული ადგილი l' წრფის გეგმილი იქნება.

ცხადია, რომ S წერტილზე და l' წრფის ყველა წერტილზე გატარებული სხივების გეომეტრიული ადგილი სიბრტყეა, რომელსაც l' წრფის

მაგეგმილებელი სიბრტყე ეწოდება. რადგანაც l' წრფის l გეგმილს ამ მაგეგმილებელი სიბრტყის π გეგმილით სიბრტყესთან გადაკვეთის შედეგად ვღებულობთ, ამიტომ ვასკვნით, რომ წრფის გეგმილი წრფეს წარმოადგენს.

ერთადერთი გამონაკლისი ამ დებულებიდან მხოლოდ იმ შემთხვევაში გვექნება, როდესაც წრფე S გეგმილთ ცენტრზე გადის, როგორც, მაგალითად, $D'E'$ წრფე (ნახ. 3). ამ შემთხვევაში $D'E'$ წრფის გეგმილი წერტილს წარმოადგენს, რომელიც ორი D და E ასოთია აღნიშნული ნიშნად იმისა, რომ ეს წერტილი წრფის გეგმილია და არა წერტილისა.

l' წრფის C' წერტილი წარმოადგენს l' წრფის π სიბრტყესთან განკვეთის წერტილს. C' წერტილს, ისევე, როგორც დაგეგმილების სხვა სისტემაში, აქაც l' წრფის კვალი ეწოდება. ცხადია, რომ ეს კვალი თავის C გეგმილთან იქნება შეთავსებული.

მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, რომ ყოველი წრფე, რომელიც l' წრფის მაგეგმილებელ Sl' სიბრტყეში იქნება აღებული, ისევ l წრფეში დაგეგმილდება.

ყოველ მაგეგმილებელ სიბრტყეს (ე. ი. ისეთ სიბრტყეს, რომელიც S წერტილზე გადის) π გეგმილთ სიბრტყეზე ერთადერთი წრფე შეესაბამება (სწორედ ის წრფე, რომელზედაც მაგეგმილებელი სიბრტყე π სიბრტყესა კვეთს). ამგვარად, ყოველ წრფეს, რომელზედაც ეს სიბრტყე გაივლის, გეგმილთ სიბრტყეზე საზოგადოდ, ერთადერთი გეგმილი ექნება (აქაც, ისევე როგორც წერტილების დაგეგმილებისას, გამონაკლისი გვექნება, რომელსაც შემდეგ განვიხილავთ).

2. არასაკუთრივი ანუ უსასრულოდ შორს მდებარე ელემენტები

წრფის დაგეგმილებიდან დავრწმუნდებით, რომ მოცემული წრფე და მისი გეგმილი გეგმილთ ცენტრთან ერთად ერთსა და იმავე, ე. წ. მაგეგმილებელ სიბრტყეზე მდებარეობს. ეს მაგეგმილებელი სიბრტყე ცალკე განვიხილოთ (ნახ. 4).

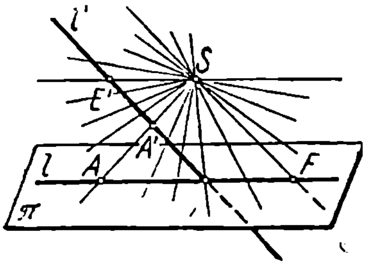
l' წრფის l წრფეში დაგეგმილება ზემოთ ჩვენ წარმოდგენილი გვქონდა როგორც l' წრფის ყველა წერტილის დაგეგმილება. იგივე პროცესი შეიძლება სხვანაირადაც აღვწეროთ. სახელდობრ, წარმოვიდგინოთ, რომ l' წრფეზე ნებისმიერი A' წერტილი მოძრაობს და ამ წრფის ყოველი წერტილის მდებარეობას გადის. A' წერტილის SA' მაგეგმილებელი სხივიც იმოძრავებს (S წერტილის ირგვლივ იბრუნებს) და l' წრფის l გეგმილს სხვადასხვა წერტილში გადაკვეთს, რის შედეგადაც A' წერტილის ყოველ მდებარეობას, საზოგადოდ, l წრფეზე გარკვეული ერთადერთი A გეგმილი ექნება.

ამგვარად, l' და l წრფეთა წერტილებს შორის გარკვეული დამოკიდებულება მყარდება, რომელსაც *პერსპექტიული შესაბამისობა* ან *პერსპექტიული თანადობა* ეწოდება. ამბობენ ხოლმე, რომ A *წერტილი* A' *წერტილის პერსპექტიულია* ან, შებრუნებით, A' *წერტილი* A *წერტილის პერსპექტიულია*, მიუხედავად იმისა, თუ რომელ ამ ორ წერტილთაგანს ვთვლით მეორის გეგმილად.

ახლა მივუთითოთ ერთ გამონაკლისზე, რომელიც ზემოთ შევნიშნეთ.

მე-4 ნახაზიდან ვრწმუნდებით, რომ l' წრფეზე მოძრავი A' წერტილი გარკვეულ მომენტში ისეთ E' მდებარეობას დაიკავებს, რომ შესაბამისი SE' მაგეგმილებელი სხივი l გეგმილის (მაშასადამე, თვით გეგმილთ სიბრტყის) პარალელური გახდება. მაშასადამე, განმარტების თანახმად, E' წერტილს π სიბრტყეზე გეგმილი არა აქვს. მეორე მხრივ, l წრფეზედაც ისეთი F წერტილი არსებობს, რომ მასზე გატარებული SF მაგეგმილებელი სხივი l' წრფეს არ კვეთს, ე. ი. l წრფეზე ერთი ისეთი F წერტილი აღმოჩნდა, რომელიც l' წრფის არც ერთი წერტილის გეგმილი არ არის.

ცხადია, l' წრფეზე E' წერტილი ერთადერთია, რომელსაც გეგმილი არ აღმოაჩნდა; მართლაც, როგორც კი A' წერტილი გასცდება E' წერტილს, იმავე მომენტში l წრფესა და SA' მაგეგმილებელ სხივს შორის პარალელურობა დაირღვევა, ე. ი. მაგეგმილებელი სხივი სადღაც გადაკვეთს l წრფეს. ასევე დავრწმუნდებით, რომ l წრფეზე F წერტილი ერთადერთია, რომელიც l' წრფეზე მდებარე არც ერთი წერტილის გეგმილი არ არის.



ნა. 4.

ამ გამონაკლისის თავიდან აცილების მიზნით, ურთიერთ პარალელური წრფეების შემთხვევაში გამოვიყენოთ ახალი გამოთქმა, რომ ეს წრფეები *უსასრულოდ შორს მდებარე*, ანუ *არასაკუთრივ* წერტილში იკვეთება.

ასეთი გამოთქმის შინაარსი შეიძლება უფრო ცხადი გახდეს, თუ წარმოვიდგენთ, რომ, როდესაც A' წერტილი l' წრფეზე E' წერტილისაკენ მოძრაობს, მაშინ A' წერტილის A გეგმილი l წრფეზე გარკვეული ერთი მიმართულებით გადაადგილდება.

რაც უფრო მეტად მიუახლოვდება A' წერტილი E' წერტილს, მით უფრო შემცირდება კუთხე SA' და SE' მაგეგმილებელ სხივებს შორის და მით უფრო მეტად დაშორდება A' წერტილის A გეგმილი თავის პირვანდელ

მდებარეობას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მანძილი A გეგმილისა და მის პირვანდელ მდგომარეობას შორის უსასრულოდ იზრდება.

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ A' წერტილი E' წერტილს შეუთავსდა, მაშინ, ცხადია, SA' სხივი SE' სხივს შეუთავსდება, ე. ი. l წრფის პარალელური გახდება.

SA' სხივისა და l წრფის სწორედ ამ განსაკუთრებულ დამოკიდებულებას, პარალელურობას, ახალი ტერმინებით ასე გამოვთქვამთ: SA' სხივისა და l წრფის გადაკვეთის A წერტილი „უსასრულოდ შორს“ გადაადგილდა, ანუ SA' სხივი და l წრფე უსასრულოდ შორს მდებარე ანუ არასაკუთრივ წერტილში იკვეთება. ეს წერტილი ჩვენ E_∞ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ.

უსასრულოდ შორს მდებარე წერტილებისაგან განსხვავებით წრფის სხვა ყველა წერტილს ჩვეულებრივ ან საკუთრივ წერტილებს უწოდებენ.

ცენტრალური დაგეგმილების განმარტების თანახმად, E_∞ წერტილი E' წერტილის გეგმილად უნდა ჩავთვალოთ, რადგანაც E' წერტილზე გატარებული მაგეგმილებელი SE' სხივი, ახალი ტერმინოლოგიის შესაბამისად, l წრფეს E_∞ წერტილში კვეთს.

თუ A' წერტილი $A'E'$ მიმართულებით მოძრაობას განუწყვეტლად განაგრძობს, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, შესაბამისი SA' მაგეგმილებელი სხივი ისევ გადაკვეთს l წრფეს A და F წერტილების მარჯვნივ (ნახ. 4). როდესაც A' წერტილი E' წერტილს შორდება, მისი A გეგმილი l წრფეზე მოძრაობისას მარჯვნიდან უახლოვდება F წერტილს.

გარკვეული მომენტის შემდეგ SA' სხივი SF სხივს შეუთავსდება. ეს მაშინ მოხდება, როდესაც A' წერტილი l' წრფის არასაკუთრივი წერტილი გახდება. A' წერტილის ახალი მდებარეობა F'_∞ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. SF სხივი F'_∞ წერტილზე გადის და l წრფეს F წერტილში კვეთს. განმარტების თანახმად, F წერტილი F'_∞ წერტილის გეგმილია.

ამგვარად, ახალი ტერმინების შემოღებით, ჩვენ მოვსპეთ ზემოთ აღნიშნული გამონაკლისები, რომლებიც წრფის ცენტრალური დაგეგმილებისას შეგვხვდა. ახლა უკვე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ:

თუ l' წრფე ნებისმიერი S ცენტრიდან l წრფეში გეგმილდება, მაშინ l' წრფის ყოველ წერტილს (ორიგინალს) l წრფეზე ერთადერთი გეგმილი აქვს და, პირიქით, l' წრფის ყოველი წერტილი l წრფის რომელიმე ერთი წერტილის გეგმილს წარმოადგენს.

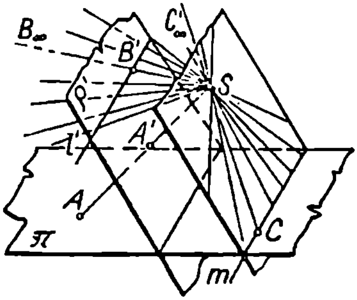
სხვანაირად რომ ვთქვათ, l' და l წრფეთაგან ერთ-ერთ მათგანზე აღებულ ნებისმიერ წერტილს მეორე

წრფეზე ერთადერთი პერსპექტიულად თანადი წერტილი აქვს.

ახლა განვიხილოთ ერთ სიბრტყეზე მდებარე წერტილების დაგეგმილება.

მოცემულია π გეგმილთ სიბრტყე და S გეგმილთ ცენტრი (ნახ. 5). ნებისმიერ ρ' სიბრტყეზე მდებარე A' წერტილი π სიბრტყეზე დავაგეგმილოთ. ამისათვის A' წერტილზე გატარებულია SA' მაგეგმილებელი სხივი, რომელიც π სიბრტყეს A წერტილში კვეთს.

დაგეგმილების საშუალებით ρ' სიბრტყისა და π სიბრტყის წერტილებს შორის პერსპექტიული შესაბამისობა მყარდება, ისევე როგორც ორი წრფის წერტილებს შორის მყარდებოდა (პ. 2. ნახ. 4), ე.ი. ρ' სიბრტყის ყოველ წერტილს (ორიგინალს) π სიბრტყეზე, საზოგადოდ, გარკვეული ერთადერთი გეგმილი მოეძებნება, ხოლო π სიბრტყის ყოველ წერტილს, საზოგადოდ, ρ' სიბრტყეზე ერთადერთი ორიგინალი შეესაბამება.



ნახ. 5.

ზუსტად ასევე, ρ' სიბრტყის ნებისმიერი წრფე (ორიგინალი), საზოგადოდ, π სიბრტყის გარკვეულ ერთ წრფეში გეგმილდება და, პირიქით, π სიბრტყეზე მდებარე წრფეებს ρ' სიბრტყეზე საზოგადოდ თითო წრფე—ორიგინალი შეესაბამება.

მაგრამ აქაც, ისევე როგორც წრფის დაგეგმილების შემთხვევაში, გარკვეულ გამონაკლისს აქვს ადგილი. სახელდობრ, თუ S წერტილზე π სიბრტყის პარალელურ SB' სხივს გავატარებთ, რომელიც ρ' სიბრტყეს გარკვეულ B' წერტილში კვეთს, დავრწმუნდებით, რომ B' წერტილს π სიბრტყეზე გეგმილი არ ექნება. ρ' სიბრტყეზე ასეთი წერტილები უამრავია და მათი გეომეტრიული ადგილი წრფე იქნება. მართლაც, S წერტილზე π სიბრტყის პარალელურად უამრავი წრფე გატარდება. ამ წრფეთა გეომეტრიული ადგილი, ცხადია, π სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს წარმოადგენს, რომელიც ρ' სიბრტყეს აგრეთვე π სიბრტყის პარალელურ l' წრფეზე გაკვეთს. მაშასადამე, l' წრფეს π სიბრტყეზე გეგმილი არ ექნება. ცხადია, რომ l' წრფე ერთადერთია ρ' სიბრტყეზე, რომელსაც π სიბრტყეზე გეგმილი არა აქვს, რადგანაც S წერტილზე π სიბრტყის პარალელურად მხოლოდ ერთი სიბრტყე გატარდება.

ახლა, თუ S წერტილზე ρ' სიბრტყის პარალელურად გავატარებთ მაგეგმილებელ სიბრტყეს, ეს უკანასკნელი π სიბრტყეს ისეთ m წრფეზე

გადაკვეთს, რომლის ნებისმიერ C წერტილს ρ' სიბრტყეზე ორიგინალი არ ექნება, რადგან ამ წერტილზე გავლებული SC სხივი ρ' სიბრტყის პარალელურია.

ანალოგიურად პარალელური წრფეების შემთხვევისა, აქაც შემოვიღოთ გამოთქმა: პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე ე ბ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ შ ო რ ს მ დ ე ბ ა რ ე (ა რ ა ს ა კ უ თ რ ი ვ) წ რ ფ ე ზ ე ი კ ვ ე თ ე ბ ა; აგრეთვე, ს ი ბ რ ტ ყ ე დ ა მ ი ს ი პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი წ რ ფ ე უ ს ა ს რ უ ლ ო დ შ ო რ ს მ დ ე ბ ა რ ე (ა რ ა ს ა კ უ თ რ ი ვ) წ ე რ ტ ი ლ შ ი ი კ ვ ე თ ე ბ ა.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის შემდეგ, რომელიც ორ პარალელურ წრფეს ეხებოდა, ცხადი ხდება ამ დებულებათა გეომეტრიული შინაარსი.

ρ' სიბრტყის l' წრფე π სიბრტყის არასაკუთრივ წრფეში დაგეგმილდება, რადგანაც, შემოღებული ტერმინოლოგიის თანახმად, l' წრფის მაგეგმილებელი Sl' სიბრტყე და π გეგმილთ სიბრტყე არასაკუთრივ წრფეზე იკვეთება.

პირიქით, π სიბრტყის m წრფე ρ' სიბრტყის არასაკუთრივი წრფის გეგმილია, რადგანაც Sm მაგეგმილებელი სიბრტყე და ρ' სიბრტყე აგრეთვე არასაკუთრივ წრფეზე იკვეთება.

ამგვარად, ρ' სიბრტყის ყოველ წრფეს π სიბრტყეზე ერთადერთი გეგმილი აქვს და π სიბრტყის ყოველ წრფეს ρ' სიბრტყეზე ერთადერთი წრფე—ორიგინალი მოეძებნება.

არასაკუთრივი ელემენტების ცნება ჩვენ შეგვიძლია კიდევ გავაფართოვოთ. სახელდობრ, სივრცეში აღებული ყველა წრფის არასაკუთრივი წერტილებისა და სიბრტყეთა არასაკუთრივი წრფეების ერთობლიობა ერთ სიბრტყეს მივაკუთვნოთ, რომელსაც სივრცის ა რ ა ს ა კ უ თ რ ი ვ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე ვუწოდოთ.

ახალი ცნებების (არასაკუთრივი წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყის) შემოღება არ ნიშნავს სივრცეში მდებარე პარალელური წრფეების ან პარალელური სიბრტყეების გადაკვეთილ წრფეებად ან სიბრტყეებად გადაქცევას. მოხდა მხოლოდ ტერმინების შეცვლა. მაგალითად, წინადადება — „წრფეები არასაკუთრივ წერტილში იკვეთება", უბრალოდ აღნიშნავს იმას, რომ ამ წრფეებს ერთი მიმართულება აქვთ.

არასაკუთრივი ელემენტების ცნებას ფუნდამენტალური მნიშვნელობა აქვს ცენტრალური დაგეგმილების თეორიაში და მისი შემოღების მიზანშეწონილობაში თანდათან დავრწმუნდებით ქვემოთ განხილული საკითხების შესწავლის დროს.

გ. წერტილთა წრფივი მწკრივი

წერტილთა წრფივი მწკრივი ეწოდება წრფის ყველა წერტილთა ერთობლიობას. იგი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც წრფეზე მოძრავი წერტილის ყველა მდებარეობის ერთობლიობა.

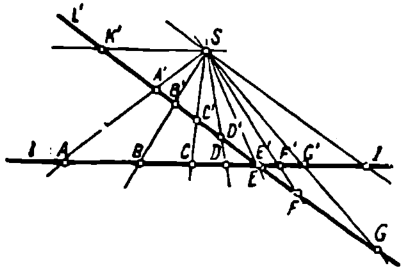
მაგალითად (ნახ. 6), l' წრფეზე მოცემულია წერტილთა წრფივი მწკრივი, რომელსაც ასე აღვნიშნავთ: $l(A', B', C',...)$.

დავუშვათ, რომ l' წრფე S ცენტრიდან დაგეგმილებულია l წრფეში. $A', B', C',...$ წერტილები დაგეგმილდება l წრფის გარკვეულ $A, B, C...$ წერტილებში. ამგვარად, დაგეგმილების შედეგად l წრფეზეც მივიღეთ წერტილთა $l(A, B, C...)$ წრფივი მწკრივი.

როგორც უკვე ვიცით, ამ ორი მწკრივის შესაბამის წერტილთა შორის პერსპექტიული თანადობაა დამყარებული. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $l'(A', B', C'...)$ და $l(A, B, C...)$ მ წ კ რ ი ვ ე ბ ი პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი უ ლ ი ა, რასაც მოკლედ ასე აღნიშნავენ:

$$l'(A', B', C',...) \overset{=}{\wedge} l(A, B, C,...).$$

ამ თანადობაში წერტილთა წყვილები — A' და A, B' და B და ა. შ. ურთიერთ პერსპექტიულია. ცხადია, რომ l და l' წრფეთა გადაკვეთის $E(E')$ წერტილი თავისი თავის პერსპექტიულია, რაც თვით პერსპექტიული თანადობის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს.



ნახ. 6.

K' წერტილის თანად წერტილს l წრფის არასაკუთრივი K_∞ წერტილი წარმოადგენს, რადგან SK' მაგეგმილებელი სხივი l წრფის პარალელურია.

პირიქით, l წრფის I წერტილის თანადი წერტილი l' წრფის არასაკუთრივი I'_∞ წერტილი იქნება, რადგან SI მაგეგმილებელი სხივი l' წრფის პარალელურია.

l' წრფის ნებისმიერი ორი A' და B' წერტილი გარკვეულ $A'B'$ მონაკვეთს განსაზღვრავს, რომელიც l წრფეზე AB მონაკვეთში გეგმილდება.

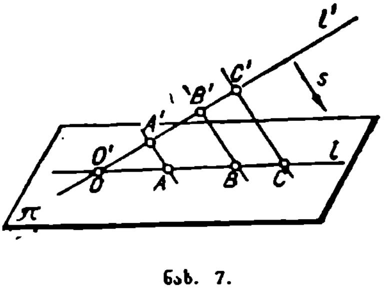
ნახაზის უშუალო განხილვიდან ადვილად დავასკვნით, რომ წრფის მონაკვეთი საზოგადოდ თავისი სიდიდით არ გეგმილდება. მაგალითად, $A'B'$ მონაკვეთი თავის AB გეგმილთან შედარებით მცირეა, $G'F'$ მონაკვეთი კი — თავის GF გეგმილზე მეტი.

მაგრამ, ახლა დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი ერთი და იმავე ცენტრიდან ნებისმიერ გეგმილთსიბრტყეზე დაგეგმილებისას ერთ წრფეზე მდებარე მონაკვეთის სიგრძეთა შორის გარკვეული წესით მიღებული ფარდობა ამ მონაკვეთების შესაბამისი გეგმილების სიგრძეთა შორის იმავე წესით მიღებული ფარდობის ტოლია.

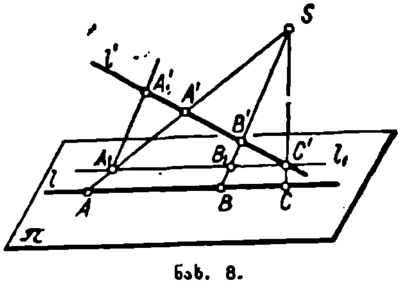
ამ გეომეტრიული ფაქტის კონკრეტულ შინაარსს დაწვრილებით გავეცნოთ, რადგან მას პერსპექტივის ამოცანების გადაწყვეტაში დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს.

ჯერ განვიხილოთ პარალელური დაგეგმილება (ნახ. 7). π სიბრტყეზე s მიმართულების პარალელური სხივებით დაგეგმილებულია l' წრფის წერტილები. ამათგან ნებისმიერი A', B', C' სამეული l წრფეზე სამ $A'B'$, $B'C'$ და $A'C'$ მონაკვეთს განსაზღვრავს (შევნიშნავთ, რომ აქ მხედველობაში გვაქვს ამ მონაკვეთების აბსოლუტური სიდიდე). ამ სამი მონაკვეთიდან ნებისმიერი ორი მონაკვეთის სიგრძეთა ფარდობას **სამი წერტილის მარტივი ფარდობა** ეწოდება, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობა A', B' და C' წერტილების მდებარეობაზეა დამოკიდებული.

მაგალითად, $\frac{A'B'}{B'C'}=k$, სადაც k ამ ფარდობის შედეგად მიღებული რიცხვია. ცხადია, რომ A', B' და C' წერტილების A, B და C გეგმილებით მიღებული შესაბამისი მარტივი ფარდობა $\frac{A'B'}{B'C'}$ ფარდობის ტოლია,



ნახ. 7.



ნახ. 8.

ე. ი. $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=k$. მართლაც, ეს შედეგი OAA', OBB' და OCC' სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს.

ცენტრალური დაგეგმილების შემთხვევაში სამი წერტილის მარტივი ფარდობა საზოგადოდ ირღვევა, ე. ი. ერთ წრფეზე მდებარე სამი წერტილით შექმნილი ფარდობა ამ წერტილების გეგმილებით შექმნილი ფარდობის ტოლი არ არის (ნახ. 8).

S ცენტრიდან π სიბრტყეზე დაგეგმილებულია l' წრფის A', B' და C' წერტილები. ამ წერტილებით განსაზღვრული ფარდობა k' სიმბოლოთი აღვნიშნოთ: $\frac{A'B'}{B'C'}=k'$

მოცემული წერტილების შესაბამისი A, B და C გეგმილებიც რაღაც მარტივ ფარდობას განსაზღვრავს, რომლის სიდიდე k სიმბოლოთი აღვნიშნოთ: $\frac{AB}{BC}=k$.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $k \neq k'$. ამისათვის C' წერტილზე l წრფის პარალელური l_1 წრფე გავავლოთ, რომელიც SA და SB სხივებს შესაბამისად A_1 და B_1 წერტილებში გადაკვეთს.

l და l_1 წრფეების პარალელურობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ფარდობათა ტოლობა:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C'}=k.$$

ახლა A_1 წერტილზე B_1B' წრფის პარალელურად $A_1A'_1$ წრფე გავავლოთ. ეს უკანასკნელი l' წრფეს რომელიმე A'_1 წერტილში გადაკვეთს, რომელიც უეჭველად A' წერტილისაგან განსხვავებული იქნება.

$A_1A'_1$ და B_1B' წრფეთა პარალელურობის გამო $\frac{A_1B_1}{B_1C'}=\frac{A'_1B'}{B'C'}$; თუ ამ ტოლადობას წინას შევადარებთ, მივიღებთ:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'_1B'}{B'C'}=k;$$

მეორე მხრივ, რადგანაც A' და A'_1 წერტილები განსხვავებულია, ამიტომ

$$\frac{A'_1B'}{B'C'}\neq\frac{A'B'}{B'C'}=k';$$

აქედან კი უშუალოდ მივიღებთ იმას, რაც მოითხოვებოდა, ე. ი.

$$\frac{AB}{BC}\neq\frac{A'B'}{B'C'}.$$

ამ მსჯელობიდან, სხვათაშორის, იმ დასკვნამდეც მივდივართ, რომ, თუ წრფე გეგმილთ სიბრტყის პარალელურია (როგორც, მაგალითად, l_1 წრფე), ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი სამი წერტილის მარტივი ფარდობა ცენტრალური დაგეგმილების დროსაც არ ირღვევა.

l' წრფეზე ნებისმიერი ოთხი A', B', C' და D' წერტილი S ცენტრიდან π სიბრტყეზე დავაგეგმილოთ (ნახ. 9).

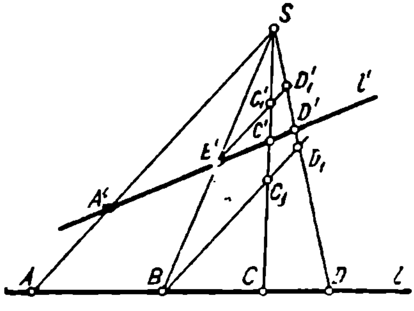
ამ ოთხი წერტილით განსაზღვრული მონაკვეთებისაგან შემდეგნაირი ორი ფარდობა შევადგინოთ.

ჯერ მხოლოდ A', B' და C' წერტილები გამოვყოთ. მათგან, ცნობილი გზით, სამი წერტილის მარტივი ფარდობა მიიღება, ე.ი. $\frac{A'B'}{B'C'}=k$. შემდეგ C' წერტილი D' წერტილით შევცვალოთ და A', B', D' წერტილებისაგან ახალი ფარდობა შევადგინოთ: $\frac{A'B'}{B'D'}=k_1$.

ახლა ამ ორი ფარდობის ფარდობა განვიხილოთ, ე. ი.

$$\frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'B'}{B'D'} = \frac{k}{k_1}.$$

ამ გზით ჩვენ ახალი რიცხვი $\left(\frac{k}{k_1}\right)$ მივიღეთ, რომელსაც **ოთხი წერტილის რთული ფარდობა** ეწოდება.



ნახ. 9.

ცხადია, რომ ამ ოთხი წერტილიდან ერთ წერტილსაც რომ შევუცვალოთ ადგილი l' წრფეზე, ოთხი წერტილის რთული ფარდობის ახალ რიცხვითს მნიშვნელობას მივიღებთ.

ჩვენ უკვე მივედით ცენტრალური დაგეგმილების ერთი უმნიშვნელოვანესი თვისების გამორკვევამდე.

სახელდობრ, ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი გეგმილთ ცენტრიდან ნებისმიერ სიბრტყეზე დაგეგმილების დროს ერთსა და იმავე l' წრფეზე აღებული ოთხი A', B', C' და D' წერტილით შედგენილი რთული ფარდობა და ამ წერტილების A, B, C და D გეგმილებით შედგენილი ასეთივე ფარდობა ტოლია.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ერთ წერტილზე გამავალი ოთხი წრფე, რომ მეხუთე ნებისმიერი წრფით გავკვეთოთ, კვეთაში მიღებული ოთხი წერტილით შექმნილი რთული ფარდობა დამოკიდებული არ იქნება მკვეთი წრფის მდებარეობაზე.

ვთქვათ, l' წრფის A', B', C', D' ოთხი წერტილი S ცენტრიდან π სიბრტყეზე დაგეგმილდა l წრფის A, B, C, D ოთხ წერტილში.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}. \tag{1}$$

B' წერტილზე გავატაროთ SA' სხივის პარალელური $B'D'_1$ წრფე, რომელიც SC და SD სხივებს შესაბამისად C'_1 და D'_1 წერტილებში კვეთს. $A'C'S$ და $B'C'C'_1$ სამკუთხედების მსგავსებიდან გვექნება:

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{A'S}{B'C'_1},$$

ხოლო $A'D'S$ და $B'D'D'_1$ მსგავსი სამკუთხედებიდან კი

$$\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A'S}{B'D'_1}.$$

პირველი ტოლობის მეორეზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{B'D'_1}{B'C'_1}. \tag{2}$$

ახლა B წერტილზე გავატაროთ SA' სხივის პარალელური BD' წრფე, რომელიც SC და SD სხივებს შესაბამისად C_1 და D_1 წერტილებში კვეთს.

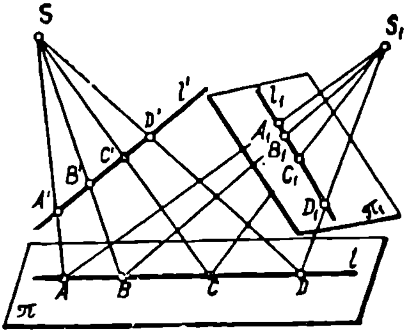
ACS და BCC_1 სამკუთხედებისა და აგრეთვე ADS და BDD_1 სამკუთხედების მსგავსებიდან იგივე მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{BD_1}{BC_1}. \tag{3}$$

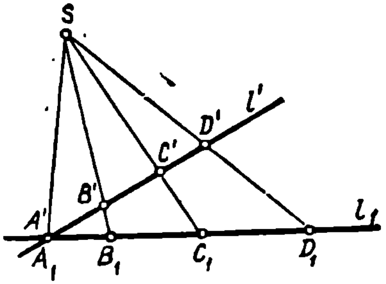
(2) და (3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილები ტოლია $B'D'_1$ და BD_1 წრფეთა პარალელურობის გამო; მაშასადამე, მარცხენა ნაწილებიც ტოლი იქნება, ე. ი. (1) ტოლობა სამართლიანი ყოფილა, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ზემოთ დამტკიცებული დებულებიდან შემდეგი დასკვნების გამოტანა შეგვიძლია (ნახ. 10): ვთქვათ, l' წრფეზე მდებარე წერტილების $l'(A', B', C'...)$ მწკრივი S წერტილიდან π სიბრტყეზე $l(A, B, C...)$ მწკრივში დაგეგმილდა, ხოლო ეს უკანასკნელი ახალი S_1 ცენტრიდან ახალ π_1 სიბრტყეზე დავაგეგმილეთ, რის შედეგადაც $l_1(A_1, B_1, C_1...)$ წერტილთა წრფივი მწკრივი მივიღეთ. ცხადია, დაგეგმილების ასეთი თანმიმდევრობა შეგვიძლია დაუსრულებლად განვაგრძოთ.

როგორც უკვე ვიცით, $l'(A', B', C',\ldots)$ და $l(A, B, C\ldots)$ მწკრივებს შორის პერსპექტიული თანადობაა დამყარებული. ასეთივე თანადობა მყარდება $l(A, B, C,\ldots)$ და $l_1(A_1, B_1, C_1\ldots)$ მწკრივებს შორისაც, მაგრამ $l'(A', B', C',\ldots)$ და $l_1(A_1, B_1, C_1\ldots)$ მწკრივებს შორის პერსპექტიული თანადობა, საერთოდ, აღარ არსებობს, ე. ი. თუ ამ მწკრივების



ნახ. 10.



ნახ. 11.

თანადი წერტილების წყვილებს წრფეებით შევაერთებთ (A' წერტილს—A_1 წერტილთან, B' წერტილს—B_1 წერტილთან და ა.შ.), ყველა ეს წრფეები ერთ წერტილში აღარ გაივლის. მიუხედავად ამისა l' და l_1 წრფეებზე მიღებულ მწკრივებს შორის გარკვეული კავშირი მაინც არსებობს.

მართლაც, როგორც ახლა დამტკიცდა, წერტილთა A', B', C', D' და A, B, C, D პერსპექტიული ოთხეულებისაგან შედგენილი რთული ფარდობები ტოლია, მაგრამ l_1 მწკრივის A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილებით მიღებული რთული ფარდობაც აგრეთვე ტოლი უნდა იყოს A, B, C, D წერტილებით მიღებული რთული ფარდობისა l და l_1 მწკრივების პერსპექტიულობის გამო. აქედან ვრწმუნდებით, რომ A', B', C', D' წერტილები და A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილები ერთსა და იმავე რთულ ფარდობას ქმნის, ე. ი.

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1}.$$

თუ l' წრფეზე აღებულ მწკრივში სამ ნებისმიერ, მაგალითად, A', B' და C' წერტილს უძრავად დავტოვებთ და D' წერტილს l' წრფეზე გადავაადგილებთ ისე, რომ D' წერტილმა მოცემული მწკრივის ყველა დანარჩენი წერტილის მდებარეობა დაიკავოს, მაშინ D' წერტილის ყველა ახალი მდებარეობის შესაბამისად ოთხი A', B', C', D' წერტილის რთული ფარდობის ახალ რიცხვით მნიშვნელობას მივიღებთ.

ცხადია, რომ D' წერტილის l' წრფეზე გადაადგილება l წრფეზე D წერტილისა და l' წრფეზე D_1 წერტილის გადაადგილებას გამოიწვევს; სამივე წრფეზე შესაბამისი ოთხი წერტილის რთული ფარდობა, ყოველ ცალკე მომენტში, ტოლი იქნება.

ახლა l' და l_1 წრფეებზე აღებულ წერტილთა (არაპერსპექტიული) მწკრივების დამოკიდებულება უკვე ცხადია:

თუ l' წრფეზე აღებულ A', B' და C' წერტილებს l_1 წრფეზე A_1, B_1 და C_1 წერტილები შეესაბამება, მაშინ l' წრფეზე აღებულ ყოველ ნებისმიერ მეოთხე D' წერტილს l_1 წრფეზე სრულიად გარკვეული, ერთადერთი შესაბამისი D_1 წერტილი მოეძებნება იმ პირობით, რომ l' წრფის ოთხი წერტილისა და l_1 წრფის შესაბამისი ოთხი წერტილის რთული ფარდობები ტოლი იყოს.

წერტილთა ასეთ ორ წრფივ მწკრივს გეგმილურ მწკრივებს უწოდებენ და ამ დამოკიდებულებას მოკლედ ასე წერენ:

$$l'(A', B', C', D', \dots) \bar{\wedge} l_1(A_1, B_1, C_1, D_1 \dots).$$

გეგმილური მწკრივების მიღება შესაძლებელია პერსპექტიული მწკრივებიდანაც. მართლაც, თუ, მაგალითად, l' და l პერსპექტიულ მწკრივებს (ნახ. 10) სივრცეში ადგილს ნებისმიერად შევუცვლით, ცხადია, მათ შორის პერსპექტიულობა დაირღვევა, ე. ი. შესაბამისი წერტილების შემაერთებელი წრფეები ($A'A$ $B'B$, $C'C$ და ა. შ.) ერთ წერტილში აღარ გაივლის, მაგრამ მათ შორის დარჩება გეგმილურობა, რადგანაც ამ ორი წრფის შესაბამის წერტილთა შორის ოთხი წერტილის რთული ფარდობა არ შეცვლილა.

პირიქით, ყოველთვის შესაძლებელია წერტილთა ორი გეგმილური მწკრივის პერსპექტიულ მწკრივებად გადაქცევა. მაგალითად, l' და l_1 წრფეებზე მოცემული გეგმილური მწკრივების (ნახ. 10) პერსპექტიულობაში მოყვანისათვის აუცილებელი იქნება ამ წრფეებზე სამ-სამი თანადი წერტილი გვქონდეს მოცემული.

l' და l_1 წრფეები ისე გადავაადგილოთ, რომ ერთი წრფის რომელიმე წერტილი მეორე წრფეზე მდებარე შესაბამის წერტილს შეუთავსდეს (მაგალითად A' წერტილი — A_1 წერტილს, ნახ. 11).

ამის შემდეგ დანარჩენ ორ წყვილ შესაბამის წერტილებზე $B'B_1$ და $C'C_1$ წრფეები გავატაროთ, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. ეს წრფეები გარკვეულ S წერტილში გადაიკვეთება. ამგვარად, პერსპექტიულობის ცენტრი განისაზღვრა.

ახლა l_1 წრფის ნებისმიერ მეოთხე D_1 წერტილს, რომ l' წრფეზე შესაბამისი წერტილი მოვუძებნოთ (ან პირიქით), საკმარისია SD_1 წრფე გავატაროთ, რომლის l' წრფესთან გადაკვეთა საძიებელ D' წერტილს მოგვცემს.

აღვნიშნოთ წერტილთა პერსპექტიული მწკრივების განსაკუთრებული შემთხვევა, როდესაც ორი ასეთი მწკრივი პარალელურ წრფეებზეა განლაგებული (ნახ. 8). როგორც ზემოთ დავრწმუნდით, l წრფეზე აღებული სამი A, B და C წერტილი და l_1 წრფეზე მდებარე A_1, B_1 და C' წერტილებით შექმნილი მარტივი ფარდობები ტოლია, რაც მხოლოდ იმით იყო გამოწვეული, რომ l_1 წრფე l წრფის პარალელურად არის გატარებული. ცხადია, რომ, თუ ერთ-ერთ, მაგალითად, l წრფეზე, ნებისმიერ მეოთხე წერტილს ავიღებთ და მას S ცენტრიდან l_1 წრფეზე დავაგეგმილებთ, მაშინ ამ ორ წრფეზე მიღებული ოთხი წერტილის რთული ფარდობა სამი წერტილის ორ მარტივ ფარდობათა ფარდობად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ.

გარდა ამისა, რადგან ეს ორი წრფე ურთიერთს არასაკუთრივ წერტილში კვეთს, ამიტომ, ცხადია, რომ ეს არასაკუთრივი წერტილი თავისი თავის თანადია.

4. პარალელური წრფეების ცენტრალური გეგმილები

ნებისმიერ ρ' სიბრტყეზე (ნახ. 12) მდებარე პარალელური a', b', c' წრფეები S ცენტრიდან π სიბრტყეზე დავაგეგმილოთ. წრფის გეგმილის ასაგებად საკმარისია მისი ნებისმიერი ორი წერტილის გეგმილების მოძებნა.

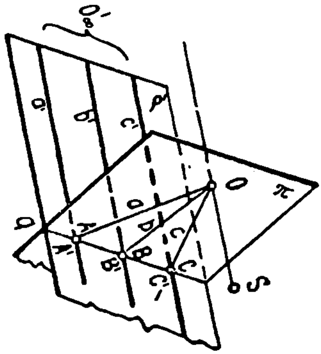
მაგალითად, a' წრფის გეგმილის ასაგებად ვისარგებლოთ a' წრფის π გეგმილთ სიბრტყესთან გადაკვეთის A' წერტილით, რომელიც π და ρ' სიბრტყეთა გადაკვეთის q წრფეზე (ე. ი. ρ' სიბრტყის კვალზე) მდებარეობს. ცხადია, A' წერტილი თავის A გეგმილთან იქნება შეთავსებული.

მეორე წერტილად a' წრფის არასაკუთრივი O'_∞ წერტილი მივიღოთ. O'_∞ წერტილის დასაგეგმილებლად S ცენტრზე a' წრფის პარალელური SO წრფე უნდა გავატაროთ. SO წრფის π სიბრტყესთან გადაკვეთის O წერტილი O'_∞ წერტილის გეგმილი იქნება; A და O წერტილებზე გატარებული a წრფე კი, ცხადია—ρ' წრფის გეგმილი.

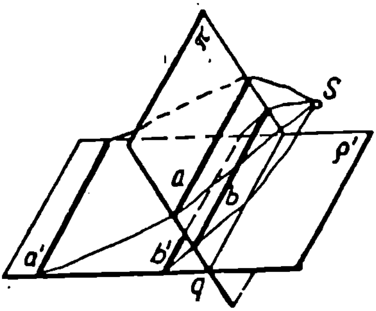
მსგავსად აიგება დანარჩენი b' და c' წრფეთა გეგმილებიც, მაგრამ რადგანაც პარალელურ წრეებს ერთი, საერთო არასაკუთრივი O'_∞ წერტილი აქვს, ამიტომ b' და c' წრფეთა b და c გეგმილებიც აუცილებლად O წერტილში გაივლის.

ნახაზზე წარმოდგენილია ერთ სიბრტყეზე მდებარე წრფეები, მაგრამ ცხადი უნდა იყოს, რომ პარალელური წრფეების ნებისმიერი ერთობლიობა ერთ სიბრტყეშიც რომ არ მდებარეობდეს, მათი ცენტრალური გეგმილები მაინც ერთ წერტილში გაივლის, სახელდობრ, ამ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილის გეგმილში.

ეს დებულება ძალაში აღარ არის მხოლოდ ერთ შემთხვევაში; სახელდობრ მაშინ, როდესაც პარალელური წრფეები გეგმილთ სიბრტყის პარალელურია.



ნახ. 12.



ნახ. 13.

მართლაც, განვიხილოთ ორი პარალელური a' და b' წრფე (ნახ. 13), რომლებიც ამავე დროს π გეგმილთ სიბრტყის პარალელურია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, a' და b' წრფეები π სიბრტყეს არასაკუთრივ წერტილში კვეთს, რომელიც O'_∞ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ.

a' და b' წრფეებზე გამავალი ρ' სიბრტყე π გეგმილთ სიბრტყეს q-წრფეზე კვეთს, რომელიც, ცხადია, a' და b' წრფეთა პარალელურია, ე. ი. q წრფეც ამ ორი წრფის არასაკუთრივ O'_∞ წერტილში გადის.

რადგანაც O'_∞ წერტილი გეგმილთ სიბრტყეს ეკუთვნის, ის აუცილებლად თავის გეგმილთან შეთავსებული უნდა იყოს ისევე, როგორც გეგმილთ სიბრტყის ყოველი სხვა წერტილი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ a' და b' წრფეთა a და b გეგმილებიც O'_∞ წერტილში გაივლის, ე. ი. a', b' და q წრფეთა პარალელურად განლაგდება.

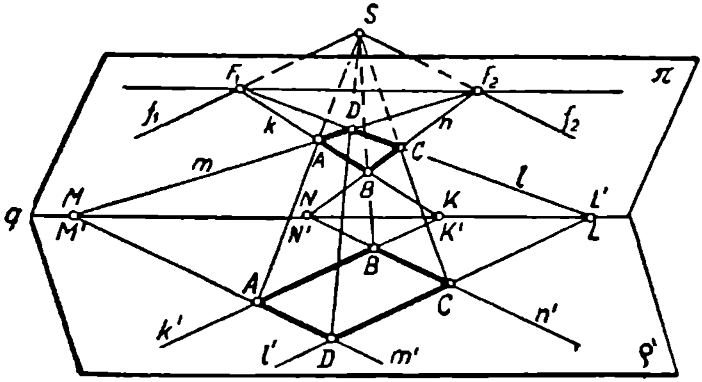
ამრიგად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ 1) *საერთოდ პარალელური წრფეების ცენტრალური გეგმილები გეგმილთ სიბრტყეზე ერთ საკუთრივ წერტილში იკვეთება.*

2) *თუ პარალელური წრფეები ერთდროულად გეგმილთ სიბრტყის პარალელურიცაა, მაშინ*

ამ წრფეთა გეგმილებიც ურთიერთ პარალელურია.

პირველი დასკვნიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი პარალელოგრამის ცენტრალური გეგმილი უკვე პარალელოგრამი აღარ იქნება (თუ ამ პარალელოგრამის სიბრტყე გეგმილთ სიბრტყის პარალელური არ არის).

განვიხილოთ ρ' სიბრტყეზე წყვილ-წყვილად პარალელური ოთხი k', l', m' და n' წრფე ($k' \parallel l''$ და $m' \parallel n'$) (ნახ. 14).



ნახ. 14.

ეს ოთხი წრფე ურთიერთკვეთაში $A'B'C'D'$ პარალელოგრამს შექმნის: ნებისმიერი S ცენტრიდან ოთხივე წრფის π სიბრტყეზე დაგეგმილებით $A'B'C'D'$ პარალელოგრამის $ABCD$ გეგმილს მივიღებთ.

ვთქვათ, ჯერ k' და l' წრფეები დავაგეგმილეთ. ეს ორი წრფე π სიბრტყეს შესაბამისად K' და L' წერტილებში კვეთს. ავაგოთ k' და l' წრფეთა არასაკუთრივი წერტილის გეგმილი. ამისათვის S ცენტრზე ამ ორ წრფეთა პარალელურად გავატაროთ f_1 სხივი. ეს უკანასკნელი π სიბრტყეს F_1 წერტილში გადაკვეთს, რომელიც არასაკუთრივი წერტილის საძიებელი გეგმილი იქნება. რადგან K' და L' წერტილები, შესაბამისად თავის K და L გეგმილებს უთავსდება, ამიტომ მათი F_1 წერტილთან შეერთებით k' და l' წრფეთა k და l გეგმილებს მივიღებთ. ამგვარად, k და l წრფე საკუთრივ წერტილში გადაკვეთილი აღმოჩნდა. ასეთივე გზით ავაგებთ m' და n' წრფეთა m და n გეგმილებს, რომლებიც აგრეთვე F_2 საკუთრივ წერტილში იკვეთება. k, l, m და n წრფეთა ურთიერთკვეთით მიღებული $A'B'C'D'$ პარალელოგრამის გეგმილი—$ABCD$ ოთხკუთხედი, რომლის გვერდები უკვე ურთიერთპარალელური არ არის.

დავუშვათ, რომ σ' სიბრტყეზე მდებარე $A'B'C'$ სამკუთხედი S ცენტრიდან σ სიბრტყეზე ABC სამკუთხედში გეგმილდება (ნახ. 15). დაგეგმილების შედეგად, როგორც ვიცით, σ და σ' სიბრტყის წერტილებს შორის პერსპექტიული თანადობა მყარდება, სადაც A წერტილს A' შეესაბამება, B წერტილს—B' წერტილი, C წერტილს კი C' წერტილი. ასეთი თანადობის დამყარებისას მნიშვნელობა არა აქვს იმას, თუ რომელი სიბრტყის წერტილებს ჩავთვლით ორიგინალად; შეიძლება პირიქით, ABC სამკუთხედი მოცემულად ჩავთვალოთ, $A'B'C'$ სამკუთხედი კი მის გეგმილად. მივაქციოთ ყურადღება მხოლოდ იმ ფაქტს, რომ ორივე სამკუთხედის თანადი წვეროების შემაერთებელი წრფეები (ე. ი. $A'A$, $B'B$ და $C'C$) ერთ წერტილში—S გეგმილთ ცენტრში იკვეთება. თუ განვიხილავთ ორივე სამკუთხედის რომელიმე თანადი გვერდების წყვილს, მაგალითად, $A'C'$ და AC გვერდებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ გაგრძელების შემთხვევაში ორივე გვერდი σ და σ' სიბრტყეთა საერთო s წრფეს ერთსა და იმავე K წერტილში გაკვეთს. მართლაც, ვთქვათ, $A'C'$ წრფე s წრფეს K წერტილში კვეთს. რადგანაც K წერტილი $A'C'$ წრფეს ეკუთვნის, ამიტომ K წერტილის გეგმილი $A'C'$ წრფის AC გეგმილზე უნდა მდებარეობდეს. მეორე მხრივ, K წერტილი თავის გეგმილთან შეთავსდება, რადგან ის σ და σ' სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე მდებარეობს; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $A'C'$ და AC წრფეები s წრფეს ერთ წერტილში კვეთს. ასეთივე მსჯელობით ვრწმუნდებით, რომ $A'B'$ და AB, $B'C'$ და BC თანადი წრფეებიც, შესაბამისად, s წრფეზე მდებარე M და L წერტილებში იკვეთება.

ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ დებულება, რომელსაც დეზარგის თეორემა[1] ეწოდება.

თუ ორი სამკუთხედის თანადი წვეროების შემაერთებელი წრფეები ერთ წერტილში გადის, მაშინ ამ სამკუთხედების თანადი გვერდები ერთ წრფეზე მდებარე სამ წერტილში იკვეთება.

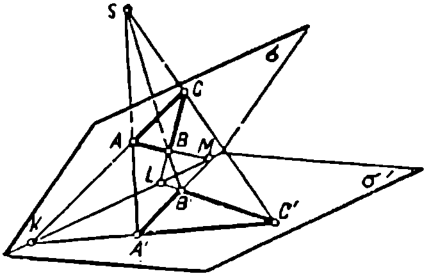
ადგილი აქვს დეზარგის შებრუნებულ თეორემასაც, ე. ი. თუ ორი სამკუთხედის თანადი გვერდები ერთ წრფეზე მდებარე სამ წერტილში იკვეთება, მაშინ ამ სამკუთხედების თანადი წვეროების შემაერთებელი წრფეები ერთ წერტილში გადის[2].

---

[1] ჟერარ დეზარგი — (1593—1662) ქ. ლიონის არქიტექტორი, გეგმილური გეომეტრიის ერთ-ერთი ფუძემდებელი.

[2] შებრუნებული თეორემისა და აგრეთვე, სიბრტყეზე დეზარგის თეორემის დამტკიცება მოცემულია, მაგალითად, ნ.ა. გლაგოლევის წიგნში—გეგმილური გეომეტრია.

ორ სამკუთხედს, რომლებიც დეზარგის თეორემას აკმაყოფილებენ, *პერსპექტიული სამკუთხედები* ეწოდება. თანადი წვეროების შემაერთებელ წრფეთა საერთო S *წერტილს პერსპექტივის ცენტრი* ეწოდება, ხოლო ამ სამკუთხედების სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეს—*პერსპექტივის ღერძი*.



ნახ. 15.

ამ ტერმინების შესაბამისად დეზარგის თეორემას ხშირად ასე გამოსთქვამენ ხოლმე:

თუ ორ სამკუთხედს აქვს პერსპექტივის ცენტრი, მათ აქვთ პერსპექტივის ღერძიც და, პირიქით, თუ ორ სამკუთხედს აქვს პერსპექტივის ღერძი, მათ პერსპექტივის ცენტრიც ექნებათ.

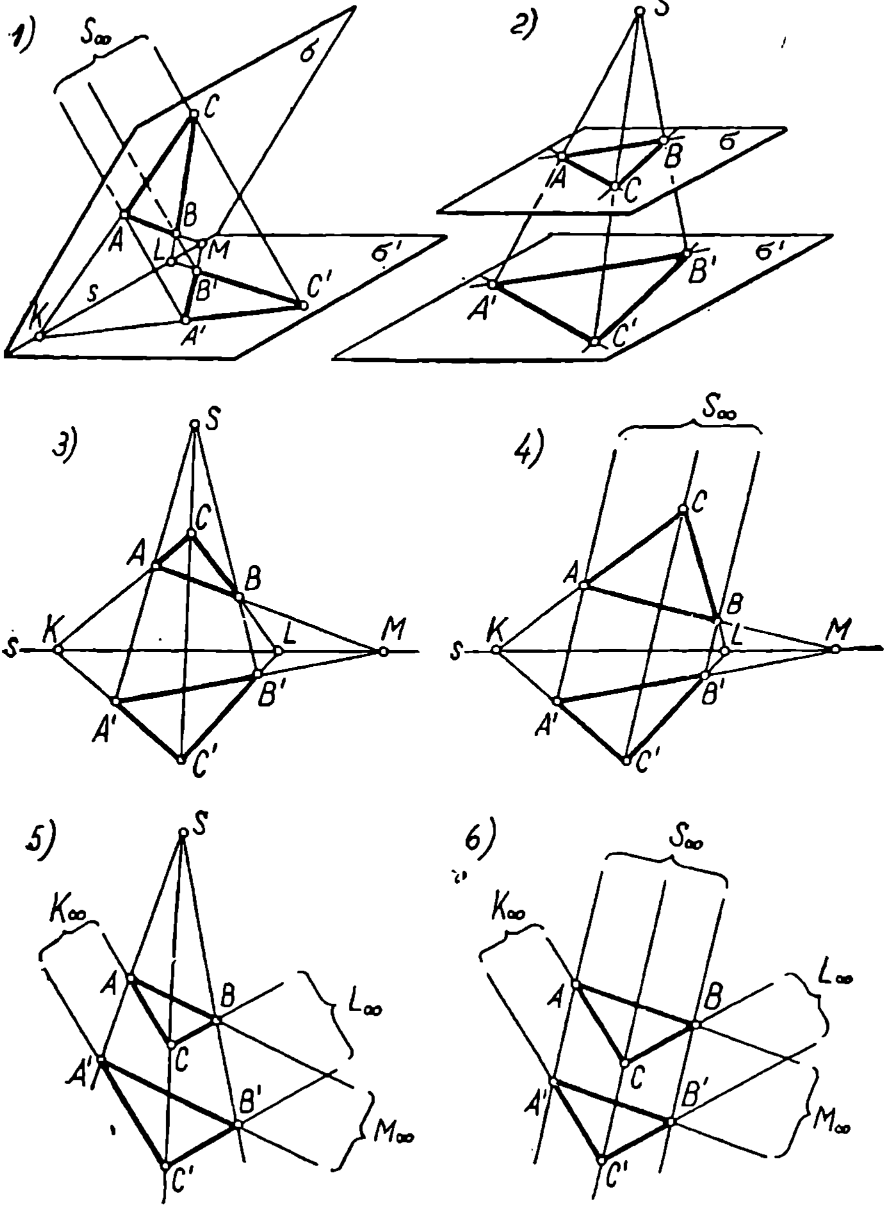
ნახაზზე მიღებული წერტილებისა და წრფეების ერთობლიობას *დეზარგის კონფიგურაცია* ეწოდება. ნახაზიდან უშუალოდ შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ იგი ათი წერტილის და ათი წრფისაგან შედგება; ამავე დროს ყოველ წრფეზე სამი წერტილი მდებარეობს, ყოველ წერტილზე კი სამი წრფე გადის.

შევნიშნავთ, რომ დეზარგის თეორემა ძალაში რჩება მაშინაც, თუ კონფიგურაციაში შემავალი რომელიმე წერტილი, ან რომელიმე წრფე (მასზე მდებარე სამი წერტილით) არასაკუთრივი იქნება.

მაგალითად, შესაძლებელია, რომ პერსპექტივის ცენტრად არასაკუთრივი S_∞ წერტილი მივიღოთ (ნახ. 16_1); ან, თუ სამკუთხედების σ და σ' სიბრტყეებს პარალელურად წარმოვიდგენთ, მაშინ პერსპექტივის ღერძი იქნება არასაკუთრივი (ნახ. 16_2). უკანასკნელ შემთხვევაში პერსპექტიული ABC და $A'B'C'$ სამკუთხედები მსგავსია და თანადი გვერდები კი ურთიერთ პარალელური.

ადვილი წარმოსადგენია ისეთი შემთხვევაც, როდესაც პერსპექტივის ცენტრი და ღერძი ერთდროულად არასაკუთრივია. ამ შემთხვევაში სამკუთხედები არა მარტო მსგავსი, არამედ ტოლიც იქნება.

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ σ და σ' სიბრტყეები პერსპექტივის ღერძის ირგვლივ ვაბრუნეთ და ურთიერთს შევუთავსეთ (ნახ. 16_3). მტკიცდება, რომ დეზარგის თეორემა ამ შემთხვევაშიც ძალაში რჩება; ე. ი. თუ


1)
S_∞
C
б
A
B
L
M
б'
s
B'
C'
K
A'
2)
S
B
б
A
C
B'
б'
A'
C'
3)
S
C
A
B
s
K
L
M
B'
A'
C'
4)
S_∞
C
A
B
s
K
L
M
B'
A'
C'
5)
S
K_∞
A
B
L_∞
C
A'
B'
M_∞
C'
6)
S_∞
K_∞
L_∞
A
B
C
A'
B'
M_∞
C'

ნახ. 15

ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარე სამკუთხედების თანადი წვეროების შემაერთებელი წრფეები ერთ S წერტილში გადის, მაშინ, სამკუთხედების თანადი გვერდების გადაკვეთის წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს.

ძალაშია აგრეთვე შებრუნებული თეორემაც. მიღებულ კონფიგურაციას დეზარგის ბრტყელი კონფიგურაცია ეწოდება.

ბრტყელი კონფიგურაციის შემთხვევაშიც შეგვიძლია მივიღოთ ისეთი კერძო შემთხვევები, როდესაც რომელიმე მისი წერტილი ან წრფე არასაკუთრივია. მაგალითად, მე-$16_{ა}$ ნახაზზე მოცემულია შემთხვევა, სადაც პერსპექტივის ცენტრი არასაკუთრივი S_∞ წერტილია. მე-$16_{ბ}$ ნახაზზე პერსპექტივის ღერძია არასაკუთრივი, რის გამოც მოცემული სამკუთხედების თანადი გვერდები პარალელურია და ამის გამო თვით სამკუთხედები მსგავსია.

მე-$16_{გ}$ ნახაზზე პერსპექტივის ცენტრიცა და ღერძიც ერთდროულად არასაკუთრივია. ამ შემთხვევაში პერსპექტიული სამკუთხედები ტოლია და მათი თანადი გვერდები პარალელური.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: უკანასკნელ შემთხვევაში პერსპექტივის S_∞ ცენტრი პერსპექტივის არასაკუთრივ s_∞ ღერძზე მდებარეობს. ეს ასეც უნდა იყოს, რადგანაც კონფიგურაციის ყველა წერტილი და წრფე ერთ სიბრტყეშია, სიბრტყეს კი ერთადერთი არასაკუთრივი წრფე აქვს, რომელიც სიბრტყეზე მდებარე ყველა არასაკუთრივი წერტილის გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს. განიხილება დეზარგის კონფიგურაციის ისეთი სახეებიც, სადაც პერსპექტივის ცენტრი პერსპექტივის ღერძზე მდებარეობს და ორივე მათგანი საკუთრივია. ასეთი კერძო შემთხვევები შესაძლებელია მხოლოდ ბრტყელი კონფიგურაციის პირობებში გვქონდეს.

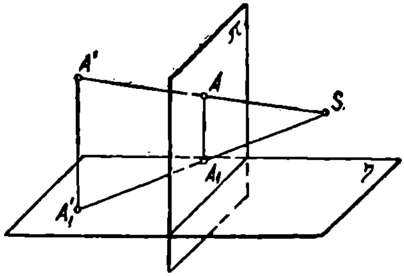
II. პერსპექტივა შვეულ სიბრტყეზე

ა. ცენტრალური დაგეგმილების სისტემა

ცენტრალური დაგეგმილების განმარტებიდან უკვე ვიცით, რომ წერტილის ერთი გეგმილით თვით წერტილის სივრცეში მდებარეობის განსაზღვრა შეუძლებელია (ნახ. 2). მეორე მხრივ, ჩვენი მიზანია, სიბრტყეზე სივრცითი სხეულების ისეთი გამოსახულება მივიღოთ, რომლის საშუალებითაც სივრცეში მოცემული გეომეტრიული ნაკვთების ურთიერთდამოკიდებულებაზე სრული წარმოდგენა გვექნება.

ამ მიზნით შემოღებულია ცენტრალური დაგეგმილების სპეციალური სისტემა (ნახ. 17).

გეგმილთ სიბრტყის მართობულად (რომელიც აქ π სიმბოლოთია აღნიშნული) გატარებულია დამხმარე η სიბრტყე ისე, რომ ის S გეგმილთ ცენტრზე არ გადის.



ნახ. 17.

სივრცის ნებისმიერი A' წერტილი ჯერ η სიბრტყეზე ორთოგონალურად დავაგეგმილოთ. მივიღებთ A'_1 წერტილს. ახლა ორივე A' და A'_1 წერტილი S წერტილიდან π სიბრტყეზე ცენტრალურად დავაგეგმილოთ. მივიღებთ A და A_1 წერტილებს, რომლებიც, შესაბამისად, A' და A'_1 წერტილების ცენტრალურ გეგმილებს წარმოადგენს.

შევნიშნავთ, რომ S, A' და A'_1 წერტილებზე გატარებული სიბრტყე η სიბრტყის მართობული იქნება, რადგანაც იგი η სიბრტყის მართობულ $A'A'_1$ წრფეზე გადის. A და A_1 წერტილების შემაერთებელი AA_1 წრფე კი წარმოადგენს $SA'A'_1$ სიბრტყისა და π სიბრტყის გადაკვეთის წრფეს; ამის გამო AA_1 წრფეც η სიბრტყის მართობული იქნება.

ასეთი გეომეტრიული აგებით სივრცის ყოველი წერტილისათვის სიბრტყეზე შეგვიძლია მივიღოთ ორი წერტილი: ერთი იქნება მოცემული წერტილის ცენტრალური გეგმილი ანუ პერსპექტივა, ხოლო მეორე—

მოცემული წერტილის η სიბრტყეზე ორთოგონალური გეგმილის პერსპექტივა.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ აღწერილი გზით π სიბრტყეზე მიღებული ორი წერტილი (A და A_1) სრულიად განსაზღვრავს სივრცეში მოცემული A' წერტილის მდებარეობას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, არ არსებობს სხვა ისეთი წერტილი, რომელსაც π სიბრტყეზე იგივე A და A_1 წერტილები შეესაბამებოდეს.

მართლაც, თუ წარმოვიდგენთ, რომ A' წერტილი სივრცეში სრულიად ნებისმიერად გადავაადგილეთ, მაშინ, ცხადია, მისი A'_1 ორთოგონალური გეგმილიც η სიბრტყეზე ადგილს შეიცვლის. ამის გამო SA' და SA'_1 მაგეგმილებელი სხივების მდებარეობა შეიცვლება, რაც გამოიწვევს π სიბრტყეზე A და A_1 წერტილების გადაადგილებას.

დავუშვათ, რომ A' წერტილის სივრცეში გადაადგილება ნაწილობრივ შევზღუდეთ. სახელდობრ, ჯერ წარმოვიდგინოთ, რომ A' წერტილი მხოლოდ η სიბრტყის მართობულ $A'A'_1$ წრფეზე მოძრაობს. ცხადია, მისი ორთოგონალური A'_1 გეგმილი ადგილზე დარჩება, რის გამოც ამ უკანასკნელის A_1 პერსპექტივაც ადგილს არ შეიცვლის. მაგრამ SA' მაგეგმილებელი სხივის მდებარეობა უცვლელი აღარ იქნება და ამიტომ ის π გეგმილთ სიბრტყეს უკვე სხვა, A წერტილისაგან განსხვავებულ, წერტილში გადაკვეთს. მაშასადამე, A' წერტილის აღწერილი გადაადგილება A და A_1 წერტილებიდან ერთ-ერთი მათგანს მაინც ცვლის.

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ A' წერტილი მხოლოდ SA' მაგეგმილებელ სხივზე მოძრაობს. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში მისი A პერსპექტივა ადგილს არ შეიცვლის, მაგრამ A'_1 ორთოგონალური გეგმილი კი η სიბრტყეზე გადაადგილდება. რადგანაც S წერტილი η სიბრტყეზე არ მდებარეობს, ამის გამო SA'_1 წრფეც მდებარეობას შეიცვლის და π სიბრტყეს A_1 წერტილში ველარ გადაკვეთს. მაშასადამე, A' წერტილის SA' სხივზე მოძრაობამ A'_1 წერტილის გადაადგილება გამოიწვია.

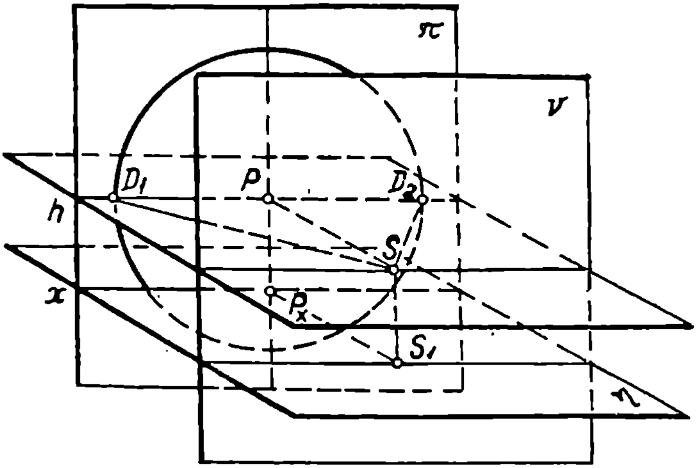
შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ზემოთ აღწერილი გზით **სივრცის ნებისმიერი A' წერტილისათვის π სიბრტყეზე მუდამ მოიძებნება გარკვეული, ერთადერთი (A, A_1) წყვილი** და, პირიქით, **π სიბრტყეზე, გარკვეული წესით აღებული, წერტილთა ნებისმიერი (A, A_1) წყვილი სივრცეში ერთადერთ A' წერტილს განსაზღვრავს.**

შემდეგში, სიბრტყეზე ცენტრალური გეგმილების აგება მთლიანად დამყარებული იქნება მე-17 ნახაზზე ნაჩვენებ გეომეტრიულ ხერხზე, ამიტომ მას დაწვრილებით განვიხილავთ.

ცენტრალური დაგეგმილების სისტემის ძირითადი ელემენტები და ტერმინები

π გეგმილთ სიბრტყეს, რომელსაც შემდეგ ხშირად *სურათის სიბრტყეს* ან უბრალოდ *სურათს* ვუწოდებთ, შვეულ მდგომარეობაში ავიღებთ (ნახ. 18). η სიბრტყეს, რომელსაც თარაზულ მდგომარეობაში ავიღებთ და რომელზედაც შემდეგ მოცემულ წერტილებს ორთოგონალურად დავაგეგმილებთ, *ფუძეთა სიბრტყე* ვუწოდოთ.

π სიბრტყის η სიბრტყესთან გადაკვეთის x წრფეს *სურათის ფუძე* ეწოდება.



ნახ. 18.

S გეგმილთ ცენტრზე (მას ხშირად *მზერის წერტილს* ვუწოდებთ) გავატაროთ η სიბრტყის პარალელური სიბრტყე; მას *ჰორიზონტის სიბრტყე* ვუწოდოთ.

η სიბრტყე და ჰორიზონტის სიბრტყე არასაკუთრივ h_∞ წრფეზე იკვეთება, როგორც პარალელური სიბრტყეები. მეორე მხრივ, რადგანაც ჰორიზონტის სიბრტყე მაგეგმილებელია (ის S წერტილზე გადის), მისი გადაკვეთა სურათის π სიბრტყესთან არასაკუთრივ h_∞ წრფის h გეგმილს მოგვცემს (იხ. პ. 2, ნახ. 5).

h წრფეს *ჰორიზონტის წრფე* ან, მოკლედ, *ჰორიზონტი* ეწოდება. S წერტილზე π სიბრტყის მართობულად გატარებულ SP სხივს *მთავარი სხივი* ეწოდება, ხოლო ამ სხივის SP მონაკვეთს კი — *მთავარი მანძილი*. PS წრფის π სიბრტყესთან გადაკვეთის P წერტილს სურათის *მთავარი წერტილი* ეწოდება.

P წერტილზე h წრფის მართობულად გატარებულ PP_x წრფეს სურათის ღ ე რ ძ ი ეწოდება.

S წერტილზე გატარებულია η სიბრტყის პარალელური SD_1 და SD_2 წრფეები, რომლებიც h ჰორიზონტთან 45°-იანი კუთხით არიან დახრილი. ამ წრფეთა h ჰორიზონტთან გადაკვეთის D_1 და D_2 წერტილებს დ ი ს ტ ა ნ ც ი ი ს წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი ეწოდება. ცხადია, $PD_1=PD_2=SP$.

P წერტილი მიღებულია ცენტრად და π სიბრტყეში PD_1 რადიუსით შემოწერილია წრეწირი; მას დ ი ს ტ ა ნ ც ი ი ს წ რ ე წ ი რ ი ეწოდება.

S წერტილზე π სურათის პარალელურად გატარებულ ν სიბრტყეს ნ ე ი ტ რ ა ლ უ რ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე ეწოდება. ν სიბრტყე სივრცეს ორ ნაწილად ჰყოფს. სივრცის იმ ნაწილს, სადაც π სიბრტყე იმყოფება, ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ს ი ვ რ ც ე ეწოდება, ხოლო ν სიბრტყის მეორე მხარეს მდებარე სივრცის ნაწილს — წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ს ი ვ რ ც ე. ასეთი ტერმინოლოგია შემდეგი მოსაზრებიდან გამომდინარეობს: ჩვენ ვთვლით, რომ ჩვენი თვალი S წერტილში მდებარეობს და π სურათს ვუმზერთ SP მიმართულებით. ამ შემთხვევაში, ცხადია, წარმოსახვითს სივრცეს ვერ დავინახავთ. ამის გამო პერსპექტივაში საბოლოოდ მხოლოდ იმ წერტილებს გამოსახავენ ხოლმე, რომლებიც ნამდვილ სივრცეში მდებარეობენ. წარმოსახვითს სივრცეში მდებარე წერტილების გამოსახვას მიმართავენ მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეს წერტილები საბოლოო პერსპექტიული სურათის გეომეტრიულ აგებაში დამხმარე როლს ასრულებენ.

სივრცეში მოცემულ წერტილებს აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით, შტრიხებით: A', B', C',... (ნახ. 17) ან შტრიხიანი რიცხვებით: $1'$, $2'$, $3'$,...

მოცემული წერტილის ორთოგონალურ გეგმილს η სიბრტყეზე ვუწოდებთ ამ წერტილის ფ უ ძ ე ს და აღვნიშნავთ შესაბამისად: A'_1, B'_1, C'_1,... ან $1'_1$, $2'_1$, $3'_1$...

მოცემული წერტილის პერსპექტივას π სიბრტყეზე აღვნიშნავთ იმავე სიმბოლოთი, რითაც წერტილია აღნიშნული სივრცეში, მაგრამ უშტრიხოდ, ე. ი. A, B, C,..., ან 1, 2, 3,...

წერტილის ფუძის პერსპექტივას წერტილის მ ე ო რ ე უ ლ ი გ ე გ მ ი ლ ი ვუწოდოთ და, შესაბამისად, A_1, B_1, C_1,... ან 1_1, 2_1, 3_1,... სიმბოლოთი აღვნიშნოთ.

მოცემულ წრფეებს აღვნიშნავთ მცირე ლათინური ასოებით, შტრიხით: a', b', c',... ან, როდესაც წრფე ორი წერტილით არის განსაზღვრული, შესაბამისად, ამ ორი წერტილის სიმბოლოთი: $A'B'$, $C'D'$ და ა.შ.

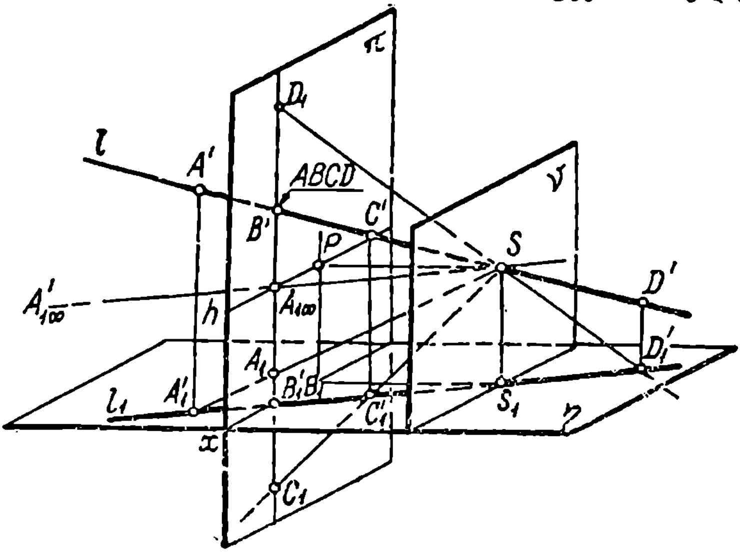
ანალოგიურად წერტილებისა, წრფის ფუძეს (ე. ი. წრფის ორთოგონალურ გეგმილს η სიბრტყეზე) აღვნიშნავთ შესაბამისად: a'_1, b'_1, c'_1,... ან A'_1, B'_1, $C'_1D'_1$ და ა. შ.

წრფის პერსპექტივას აღვნიშნავთ შესაბამისად: a, b, c,... ან AB, CD და ა. შ. წრფის ფუძის პერსპექტივას, ე.ი. წრფის მეორეულ გეგმილს კი ასე: a_1, b_1, c_1,... ან A_1B_1, C_1D_1,...

ჟ. წერტილების ძირითადი მდებარეობანი სივრცეში

განვიხილოთ ერთსა და იმავე მაგეგმილებელ l სხივზე მდებარე A', B', C', და D' წერტილები (ნახ. 19). ამ წერტილების ფუძეებიც, შესაბამისად, A'_1, B'_1, C'_1 და D'_1 აგრეთვე ერთ წრფეზე უნდა მდებარეობდეს, სახელდობრ, l სხივის l_1 ფუძეზე.

როგორც ვიცით, ოთხივე მოცემული წერტილი π სიბრტყის ერთსა და იმავე წერტილში დაგეგმილდება, მაგრამ ამ წერტილების მეორადი გეგმილები ერთმანეთს არ შეუთავსდება. ზემოთ ჩვენ დავრწმუნდით (იხ. ნახ. 17), რომ წერტილის პერსპექტივა და მისი მეორეული გეგმილი ერთსა და იმავე შვეულ წრფეზე განლაგდება; ეს წრფე წარმოადგენს η სიბრტყის მართობული $SA'A_1'S_1$ სიბრტყის π სიბრტყესთან გადაკვეთას.



ნახ. 19.

განხილულ შემთხვევაში, რადგანაც მოცემული წერტილების პერსპექტივა ერთ წერტილში იქნება შეთავსებული, ამიტომ მათი ოთხივე მეორეული გეგმილი (A_1, B_1, C_1, D_1) ერთ შვეულ წრფეზე განლაგდება სწორედ იმ წრფეზე, რომელზედაც $SA'A_1'S_1$ სიბრტყე π სურათს კვეთს π სიბრტყეზე A_1, B_1, C_1 და D_1 წერტილების მდებარეობა სავსებით განსაზღვრავს თვით A', B', C' და D' წერტილების სივრცეში მდებარეობას.

მართლაც, A' წერტილი ნახაზზე მოთავსებულია π სიბრტყის მარცხნივ (ე. ი. A' წერტილი და მზერის S წერტილი π სიბრტყის მიმართ სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს), მაშინ, როგორც ეს ნახაზიდან ჩანს, A' წერტილის A_1 მეორეული გეგმილი სურათის x ფუძესა და h ჰორიზონტს შორის მდებარეობს.

თუ A' წერტილს l სხივზე მარცხნივ, უსასრულოდ შორს გადავაადგილებთ, მაშინ მისი A'_1 ფუძეც l_1 წრფეზე უსასრულოდ შორს გადაადგილდება; A'_1 წერტილის მაგეგმილებელი სხივი l_1 წრფის პარალელური გახდება და ამიტომ η სიბრტყის პარალელურიც და π სურათს გადაკვეთს h ჰორიზონტის რომელიმე $A_{1\infty}$ წერტილში.

პირიქით, თუ A' წერტილს l წრფეზე მოძრაობისას უსასრულოდ მივუახლოვებთ π სიბრტყეს, მაშინ, ცხადია, მისი მეორეული გეგმილი უსასრულოდ მიუახლოვდება სურათის x ფუძეს.

როდესაც წერტილი თვით π სურათზეა მოცემული (B' წერტილი), მაშინ ცხადია, მისი B'_1 ფუძე და ფუძის B_1 პერსპექტივა შეთავსებულია და x წრფეზე მდებარეობს.

C' წერტილი აღებულია π სიბრტყესა და ნეიტრალურ ν სიბრტყეს შორის. ასეთ შემთხვევაში მისი C_1 მეორეული გეგმილი სურათის x ფუძის ქვემოთ მდებარეობს. რაც უფრო ახლოს იქნება წერტილი ν სიბრტყესთან, მით უფრო ქვემოთ იქნება C_1 წერტილი.

ის შემთხვევა, როდესაც წერტილი მზერის S წერტილს ემთხვევა, არ განიხილება, რადგანაც ასეთ წერტილს გარკვეული გეგმილი არა აქვს.

ბოლოს განვიხილოთ წარმოსახვითს სივრცეში მდებარე D' წერტილი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, მისი D_1 მეორეული გეგმილი h ჰორიზონტის ზემოთ მდებარეობს. თუ D' წერტილს მზერის S წერტილს უსასრულოდ მივუახლოვებთ, D_1 წერტილი შვეული მიმართულებით უსასრულოდ შორს გადაადგილდება.

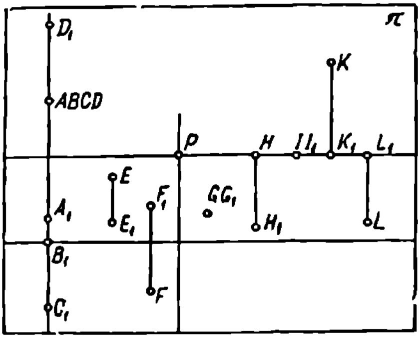
თუ D' წერტილი l წრფეზე მარჯვნივ უსასრულოდ შორს გადავაადგილეთ, მისი D' ფუძე l_1 წრფეზე უსასრულოდ შორს გადაადგილდება, D'_1 წერტილის მაგეგმილებელი სხივი l_1 წრფის პარალელური გახდება (ე. ი. $SA_{1\infty}$ სხივს შეუთავსდება) და D'_1 ფუძის პერსპექტივა h ჰორიზონტზე $A_{1\infty}$ წერტილთან შეთავსებული აღმოჩნდება.

ამგვარად, როდესაც წერტილი მაგეგმილებელ სხივზე მოძრაობს ისე, რომ ამ სხივის ყველა წერტილის მდებარეობას მიიღებს, მაშინ ამ წერტილის მეორეული გეგმილი π სიბრტყეზე გარკვეული შვეული წრფის ყველა წერტილს გაირბენს.

მე-20 ნახაზზე მოცემულია ნახაზის სიბრტყესთან შეთავსებული π სურათის სიბრტყე. მასზე გამოსახულია სხვადასხვა მდებარეობის წერტილების პერსპექტივა და მეორეული გეგმილები (შემდეგში ხშირად, გა-

მოთქმის სიმარტივისათვის, სურათზე მიღებული წერტილის პერსპექტივას მოკლედ „წერტილს“ ვუწოდებთ, ხოლო წერტილის მეორეულ გეგმილს კი — „წერტილის ფუძეს“).

$A(A_1)$, $B(B_1)$, $C(C_1)$ და $D(D_1)$ წერტილები, როგორც წინა ნახაზის განხილვისას დავრწმუნდით, ერთ მაგეგმილებელ სხივზე მდებარეობს.



ნახ. 20.

ყველა მოცემული წერტილი, გარდა $D(D_1)$, $I(I_1)$, $K(K_1)$ და $L(L_1)$ წერტილებისა, ნამდვილ სივრცეში მდებარეობს. მართლაც, ყოველი ამ წერტილის ფუძე ჰორიზონტის ქვემოთაა განლაგებული.

მე-19 და 20 ნახაზების ერთობლივი განხილვიდან ნამდვილ სივრცეში მდებარე წერტილებისათვის შემდეგ დასკვნებს მივიღებთ:

1. თუ წერტილი ჰორიზონტის სიბრტყის ზემოთ მდებარეობს ($A'(A'_1)$, $B'(B'_1)$, $C'(C'_1)$ წერტილები), მისი პერსპექტივა π სიბრტყეზე h ჰორიზონტის ზემოთ იქნება (A, B, C).

2. წერტილი $E(E_1)$ (ნახ. 20) სივრცეში ჰორიზონტის სიბრტყის ქვემოთ იმყოფება, რადგან მისი E პერსპექტივა ჰორიზონტის ქვემოთ მდებარეობს.

3. $H(H_1)$ წერტილი ჰორიზონტის სიბრტყეშია (ნახ. 20), რადგან მისი H პერსპექტივა h ჰორიზონტზე მდებარეობს.

4. $F(F_1)$ წერტილი (ნახ. 20) η ფუძეთა სიბრტყის ქვემოთ მდებარეობს, რადგან მისი F პერსპექტივა F_1 ფუძის ქვემოთ იმყოფება.

5. $G(G_1)$ წერტილი η ფუძეთა სიბრტყეშია, რადგან მისი პერსპექტივა და ფუძე შეთავსებულია.

რაც შეეხება $I(I_1)$ წერტილს, ის $G(G_1)$ წერტილის მსგავსად η ფუძეთა სიბრტყეზე მდებარეობს, მაგრამ ამ სიბრტყის არასაკუთრივ წრფეზე, ამიტომ მას არც ნამდვილ სივრცეს მივაკუთვნებთ და არც წარმოსახვითს. ვიტყვით მხოლოდ, რომ $I(I_1)$ წერტილი სივრცის არასაკუთრივ წერტილს წარმოადგენს.

ასეთივე არასაკუთრივი წერტილებია $K(K_1)$ და $L(L_1)$, რადგან ამ წერტილების K_1 და L_1 ფუძეები η სიბრტყის არასაკუთრივი წერტილებია. მათ შორის ის განსხვავებაა, რომ $K(K_1)$ წერტილი η სიბრტყის ზემოთ მდებარეობს, $L(L_1)$ წერტილი კი — ქვემოთ.

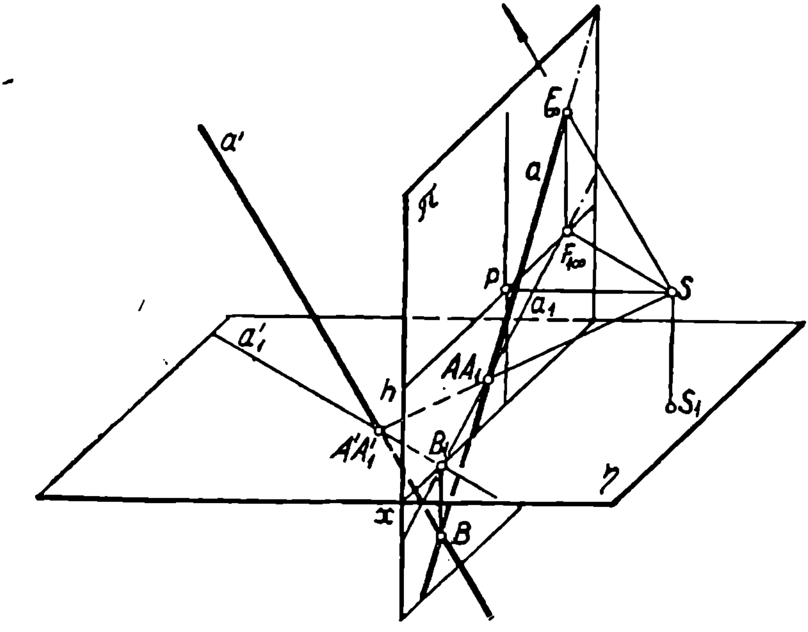
ჩვენ შევძელით სივრცეში მდებარე ყველა წერტილი π სიბრტყეზე გამოგვესახა პერსპექტივისა და მეორეული გეგმილის საშუალებით და, პირიქით, მოვახერხეთ გამოსახული პერსპექტივისა და მეორეული გეგმილის საშუალებით ამ წერტილების სივრცეში მდებარეობის დადგენა.

გამონაკლისს წარმოადგენს ნეიტრალურ ν სიბრტყეში მდებარე წერტილი, რომელიც π სიბრტყეზე ვერ გამოისახება. მართლაც, მაგეგმილებელი სხივი, რომელსაც ამ წერტილზე და მის ფუძეზე გავავლებთ, π სიბრტყის პარალელური აღმოჩნდება და მას სასრულო წერტილში არ გადაკვეთს.

ე. წ რ ფ ე

1°. **ზოგადი მდებარეობის წრფე.** რადგან წრფის გეგმილი ისევ წრფეა, მოცემული წრფის პერსპექტივის ასაგებად საკმარისია მისი ნებისმიერი ორი წერტილის პერსპექტივა ავაგოთ და მათზე წრფე გავატაროთ.

მოცემულია $a'(a'_1)$ წრფე (ნახ. 21), რომელიც $B(B_1)$ წერტილში კვეთს π სურათს და ნებისმიერად დახრილია სურათისა და საგანთა სიბრტყეებისადმი. ასეთ წრფეს *ზოგადი მდებარეობის წრფე* *ვუწოდოთ*.



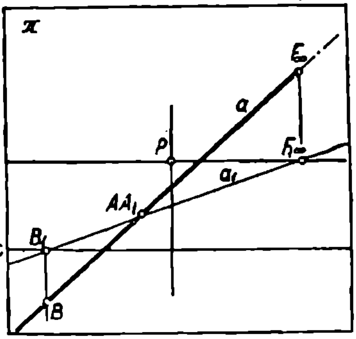
ნახ. 21.

ჩვენ უნდა ავაგოთ ორი წრფის ცენტრალური გეგმილი: თვით a' წრფისა და მისი a'_1 ფუძის გეგმილები. მიღებული a და a_1 წრფეთა წყვილი, შესაბამისად, a' წრფისა და მისი a'_1 ფუძის პერსპექტივას წარმოადგენს.

a' წრფის პერსპექტივას ორი წერტილით ავაგებთ: ერთი მათგანი B წერტილია (a' წრფის კვალი), თავის პერსპექტივასთან შეთავსებული. მეორე წერტილად მივიღოთ a' წრფის არასაკუთრივი F'_∞ წერტილი. ამ წერტილის F_∞ პერსპექტივას მივიღებთ, თუ S მზერის წერტილზე a' წრფის პარალელურად მაგეგმილებელ SF_∞ სხივს გავატარებთ π სურათის გადაკვეთამდე. $BF_\infty \equiv a$ წრფე a' წრფის პერსპექტივას წარმოადგენს.

ანალოგიურად ავაგებთ a'_1 ფუძის a_1 პერსპექტივასაც. B_1 წერტილი a'_1 წრფის კვალია, $F_{1\infty}$ წერტილი კი—ამ წრფის არასაკუთრივი $F'_{1\infty}$ წერტილის პერსპექტივა. $F_{1\infty}$ წერტილის ასაგებად a'_1 წრფის პარალელურად გატარებულია $SF_{1\infty}$ სხივი.

რადგანაც a'_1 წრფის არასაკუთრივი $F'_{1\infty}$ წერტილი η სიბრტყის არასაკუთრივ h_∞ წრფეზე მდებარეობს, ამიტომ $F'_{1\infty}$ წერტილის პერსპექტივა h_∞ წრფის პერსპექტივაზე, ე. ი. h ჰორიზონტის წრფეზე დევს. $B_1F_{1\infty} \equiv a_1$ წრფე მოცემული a' წრფის მეორეული გეგმილია.



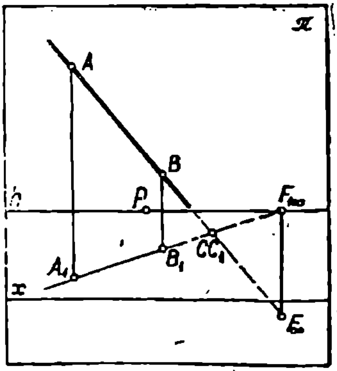
ნახ. 22.

22-ე ნახაზზე მოცემულია π სურათი $a(a_1)$ წრფით. ნახაზიდან ცხადი უნდა იყოს, რომ $a(a_1)$ წრფე ზოგადი მდებარეობისაა. მართლაც, $A(A_1)$ წერტილი, სადაც a წრფე თავის ფუძეს კვეთს, η სიბრტყისა და მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილია, $B(B_1)$ წერტილი კი — ამავე წრფის π სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი.

თუ მოცემული წრფის პარალელურად გატარებული მაგეგმილებელი სხივი π სურათს h ჰორიზონტის ზემოთ გადაკვეთს, მაშინ ამ წრფეს ზ ე ა ღ მ ა ვ ა ლ ი წ რ ფ ე ეწოდება.

განმარტების თანახმად, $a'(a'_1)$ წრფე ზეაღმავალია, რაც 22-ე ნახაზიდანაც ირკვევა, რადგანაც წრფის არასაკუთრივი F_∞ წერტილი h ჰორიზონტის ზემოთ მდებარეობს.

წრფის აგება შეიძლება მისი ნებისმიერი ორი წერტილის პერსპექტივითაც (ნახ. 23). აგებულია $A(A_1)$ და $B(B_1)$ წერტილები. A და B წერტილებზე გადის წრფის პერსპექტივა, A_1 და B_1 წერტილებზე კი—წრფის ფუძე.

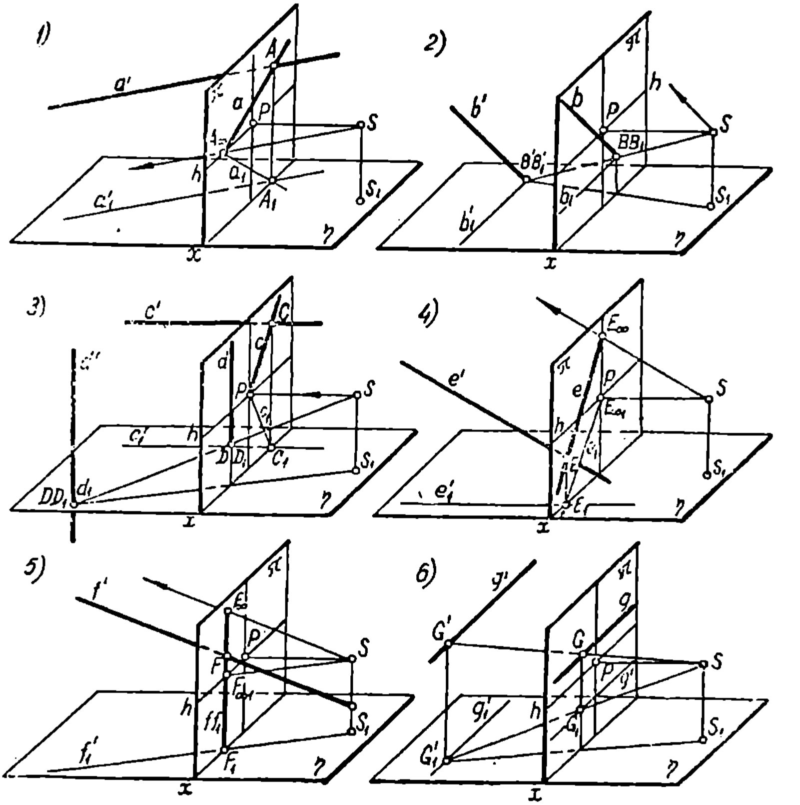


ნახ. 23.

ნახაზიდან ჩანს, რომ $AB(A_1B_1)$ წრფე $C(C_1)$ წერტილში კვეთს ფუძეთა სიბრტყეს. წრფის არასაკუთრივი წერტილის ასაგებად A_1B_1 გაგრძელებულია h ჰორიზონტის $F_{1\infty}$ წერტილში გადაკვეთამდე, სადაც აღმართულია h წრფის მართობი AB წრფის გადაკვეთამდე.

რადგანაც წრფის არასაკუთრივი წერტილის F_∞ პერსპექტივა ჰორიზონტის ქვემოთ მდებარეობს, ამიტომ ვასკვნით, რომ სივრცეში $A'B'$ წრფის პარალელურად გატარებული მაგეგმილებელი სხივი π სურათს h ჰორიზონტის ქვემოთა კვეთს. ამ თვისების მქონე წრფეებს *ქვედამავალ წრფეს* უწოდებენ.

2°. **კერძო მდებარეობის წრფეები.** კერძო მდებარეობის წრფეებს ისეთებს ვუწოდებთ, რომლებსაც განსაკუთრებული მდებარეობა აქვთ სურათის ან ფუძეთა სიბრტყისა და მზერის S წერტილის მიმართ (ნახ. 24).



ნახ. 24.

1) ნახ. 24_1. $a'(a'_1)$ წრფე ფუძეთა η სიბრტყის პარალელურია. ამ შემთხვევაში a' თავისი a'_1 ფუძის პარალელურია, ე. ი. ორივეს ერთი არასაკუთრივი A'_∞ წერტილი აქვს. A'_∞ წერტილის პერსპექტივის ასაგებად a' და a'_1 წრფეთა პარალელური მაგეგმილებელი SA_∞ სხივი უნდა გავავლოთ, რომელიც h ჰორიზონტს გადაკვეთს, როგორც η სიბრტყის პარალელური წრფე.

ამგვარად, $a'(a'_1)$ წრფის დამახასიათებელი პირობაა წრფისა და მისი ფუძისათვის საერთო არასაკუთრივი წერტილის A_∞ პერსპექტივის h ჰორიზონტზე მდებარეობა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, წრფის a პერსპექტივა და მისი a_1 ფუძე h წრფეს ერთ წერტილში კვეთს.

2) ნახ. 24_2. $b'(b'_1)$ წრფე π სურათის პარალელურია, ამის გამო b'_1 ფუძე სურათის x ფუძის პარალელურია და დაგეგმილების შედეგად მეორეული b_1 გეგმილიც აგრეთვე x ფუძის პარალელურია.

b' წრფის არასაკუთრივი B'_∞ წერტილის მაგეგმილებელი სხივი π სიბრტყის პარალელურია და b' წრფის b პერსპექტივაც b' წრფის პარალელურია. ამგვარად, $b \parallel b'$ და $b_1 \parallel b'_1 \parallel x$. მაშასადამე, b და b_1 წრფეთა შორის კუთხე თვით b' წრფის η სიბრტყესთან დახრის კუთხის ტოლია.

3) ნახ. 24_3. $c'(c'_1)$ წრფე π სურათის მართობულია. ცხადია, ამ დროს $c' \parallel c'_1$, ე.ი. წრფესა და მის ფუძეს ერთი საერთო არასაკუთრივი წერტილი აქვს, რომლის ასაგებად c' წრფის პარალელურად გატარებულია მაგეგმილებელი SP სხივი. მაშასადამე, მოცემული წრფის c პერსპექტივა და მისი c_1 ფუძე სურათის მთავარ P წერტილში იკვეთება.

4) ნახ. 24_3. $d'(d'_1)$ წრფე η სიბრტყის მართობულია, რის გამოც წრფის d'_1 ფუძე წერტილს წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში $d'(d'_1)$ წრფის მაგეგმილებელი სიბრტყე η სიბრტყის მართობული იქნება და ამიტომ π სურათს შვეულ d წრფეზე გადაკვეთს. მაშასადამე, η სიბრტყის მართობული წრფის პერსპექტივა სურათის x ფუძის მართობულია, მისი d_1 ფუძე კი — წერტილია.

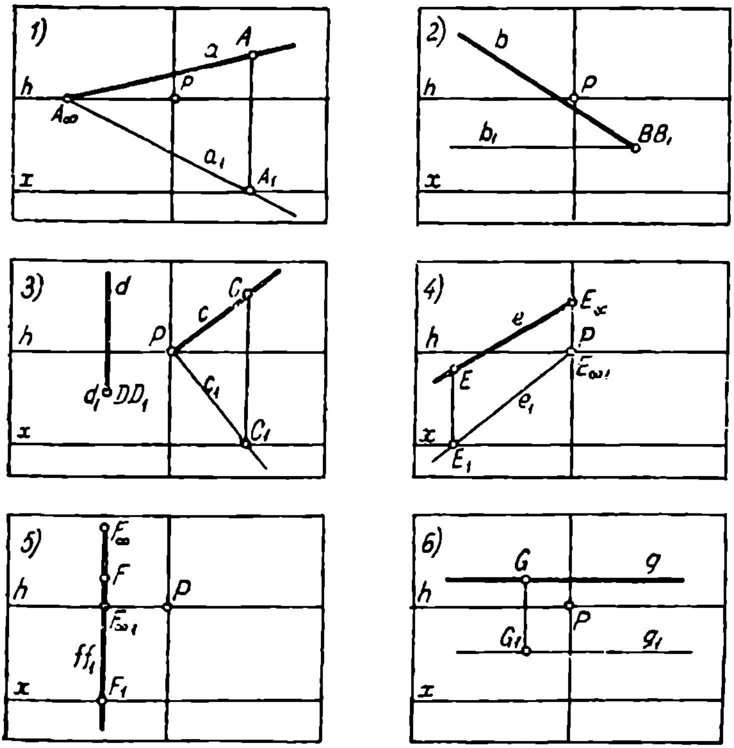
5) ნახ. 24_5. $e'(e'_1)$ წრფე სურათისა და ფუძეთა სიბრტყის მართობულ (პროფილურ) სიბრტყეში მდებარეობს. ამ შემთხვევაში, ცხადია, წრფის e'_1 ფუძე x წრფის მართობულია, რის გამოც მისი არასაკუთრივი $E'_{1\infty}$ წერტილის $E_{1\infty}$ პერსპექტივა P წერტილს ემთხვევა.

თვით e' წრფის არასაკუთრივი E'_∞ წერტილის პერსპექტივის ასაგებად e' წრფის პარალელურად გატარებულია მაგეგმილებელი SE_∞ სხი-

ეი, რომელიც π სურათის ღერძს E_∞ წერტილში გადაკვეთს. რადგანაც წრფე ზეაღმავალია, ამიტომ E_∞ წერტილი h ჰორიზონტის ზემოთ მდებარეობს.

ამგვარად, პროფილის სიბრტყეში მდებარე წრფის არასაკუთრივი წერტილი სურათის ღერძზე მდებარეობს.

6) ნახ. 24ნ. $f'(f'_1)$ წრფე კვეთს S და S_1 წერტილების შემაერთებელ წრფეს. ამ შემთხვევაში f' წრფის მაგეგმილებელი სიბრტყე SS_1 წრფეზე გადის და ამიტომ η სიბრტყის მართობულია: ეს სიბრტყე π სურათს შვეულ $f\equiv f_1$ წრფეზე გაკვეთს. რადგანაც f' წრფე და მისი f'_1 ფუძე ერთსა და იმავე მაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ ორივე წრფის პერსპექტივა ერთ $f\equiv f_1$ წრფეში შეთავსდა. f' წრფის არასაკუთრივი წერტილი h ჰორიზონტის ზემოთ F_∞ წერტილში დაგეგმილდა, ხოლო მისი ფუძის არასაკუთრივი წერტილი კი, ცხადია, h ჰორიზონტზე $F_{\infty 1}$ წერტილში.



ნახ. 25.

მაშასადამე, თუ წრფე SS_1 წრფესა კვეთს, მისი პერსპექტივა და ფუძის პერსპექტივა ერთ შვეულ წრფეს წარმოადგენს.

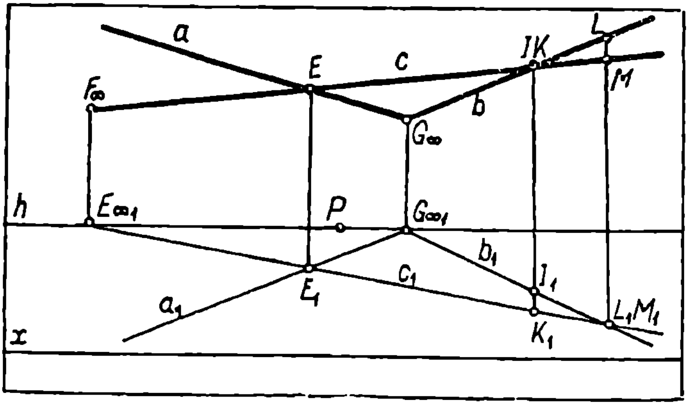
7) ნახ. 24ზ. $g'(g'_1)$ წრფე ერთდროულად π და η სიბრტყეების პარალელურია.

წრფისა და მისი ფუძის პერსპექტივა (g და g_1) x წრფის პარალელურია.

ამ შემთხვევაში საკმარისია წრფის ერთი ნებისმიერი $G'(G'_1)$ წერტილის პერსპექტივა ავაგოთ და მასზე, აღნიშნული მიმართულებით, წრფის პერსპექტივა გავატაროთ.

ყველა ეს კერძო მდებარეობის წრფეები ზემოთ მოყვანილი თანამიმდევრობით არის გამოსახული 25-ე ნახაზზე.

3°. **აცდენილი, გადაკვეთილი და პარალელური წრფეები** (ნახ. 26). $a(a_1)$ და $b(b_1)$ წრფეები პარალელურ წრფეებს გამოსახავს, რადგანაც ისინი არასაკუთრივ $G_\infty(G_{1\infty})$ წერტილში იკვეთებიან.



ნახ. 26.

$a(a_1)$ და $c(c_1)$ წრფეები ურთიერთგადამკვეთია, რადგანაც მათი საერთო $E(E_1)$ წერტილი საკუთრივ წერტილს წარმოადგენს.

$c(c_1)$ წრფე $b(b_1)$ წრფისაგან სივრცეში აცდენილია. მართლაც, თუმცა b და c წრფეები ნახაზზე ერთ წერტილში იკვეთება, მაგრამ ახლა დავრწმუნდებით, რომ აქ ორი წერტილია დაგეგმილებული: ერთი მათგანი (I) b წრფეს ეკუთვნის, მეორე (K) კი—c წრფეს, რადგან ამ წერტილების I_1 და K_1 ფუძეები განსხვავებულია და, შესაბამისად, b_1 და c_1 წრფეებზე მდებარეობს.

სრულიად ასევე, b_1 და c_1 ფუძეების გადაკვეთის წერტილში ორი წერტილის ფუძეა შეთავსებული, ერთი b წრფეზე მდებარე L წერტილის ფუძეა, ხოლო მეორე კი c წრფეზე მდებარე M წერტილის ფუძე.

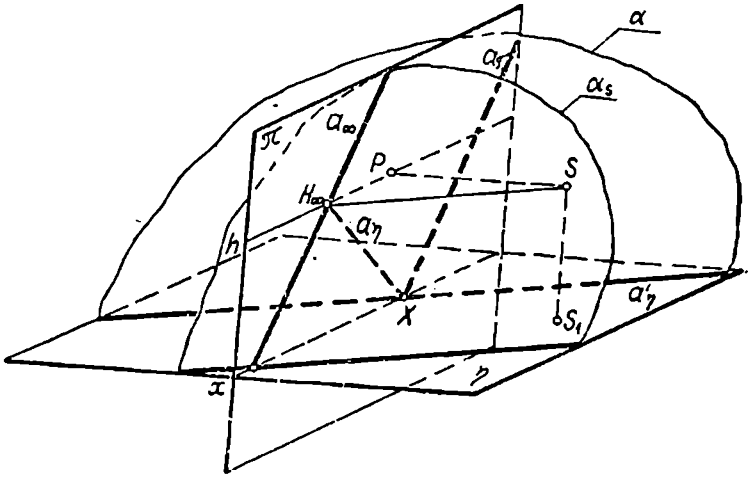
ამგვარად, $b(b_1)$ და $c(c_1)$ წრფეებს სივრცეში საერთო წერტილი არა აქვს.

10. სიბრტყე

1°. **ზოგადი მდებარეობის სიბრტყე**. განვიხილოთ π სურათის, η ფუძეთა სიბრტყისა და სურათის x ფუძისადმი ნებისმიერად დახრილი α სიბრტყე (ნახ. 27). ასეთ სიბრტყეს ზოგადი მდებარეობის სიბრტყე ვუწოდოთ.

α სიბრტყე ფუძეთა სიბრტყეს a'_η წრფეზე კვეთს, π სურათს კი a_π წრფეზე, რომელსაც α სიბრტყის კვალი ეწოდება.

a'_η და a_π წრფეები α სიბრტყის მდებარეობას სივრცეში სავსებით განსაზღვრავს, ამის გამო, სურათზე სიბრტყის გამოსახვის მიზნით, შეგვიძლია ამ ორი წრფით ვისარგებლოთ.



ნახ. 27.

a_π წრფე თავის პერსპექტივას უთავსდება, როგორც სურათზე მდებარე წრფე; a'_η წრფის პერსპექტივის ასაგებად საკმარისი იქნება მისი არასაკუთრივი წერტილის H_∞ პერსპექტივა ავაგოთ და ეს წერტილი a_π და x წრფეთა გადაკვეთის X წერტილს წრფით შევუერთოთ.

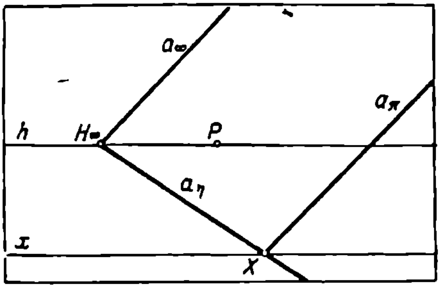
H_∞ წერტილის ასაგებად S წერტილზე გატარებულია a'_η წრფის პარალელური სხივი.

ავაგოთ α სიბრტყის არასაკუთრივი წრფის პერსპექტივა. ამისათვის S წერტილზე α სიბრტყის პარალელურად გატარებულია მაგეგმილებელი α_s სიბრტყე, რომელიც π სურათს a_∞ წრფეზე კვეთს. a_∞—საძიებელ წრფეს წარმოადგენს (იხ. პ. 2, ნახ. 5).

ცხადია, რომ a_π და a_∞ წრფეები ურთიერთპარალელურია, როგორც ორი პარალელური a და a_s სიბრტყეების მესამე π სიბრტყით კვეთის შედეგად მიღებული წრფეები.

ამგვარად, სიბრტყის არასაკუთრივი წრფის პერსპექტივა სიბრტყის კვალის პარალელურია.

28-ე ნახაზზე მოცემულია π სურათი, რომელზედაც α_π, α_η და a_∞ წრფეთა საშუალებით გამოსახულია α სიბრტყე.



ნახ. 28.

ცხადია, რომ, თუ ამ სამ წრფეთაგან რომელიმე ნებისმიერი წყვილია მოცემული, მესამე წრფე განსაზღვრული იქნება.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნახაზზე მოცემული a_π კვალისა და a_η წრფის მდებარეობა მხოლოდ ზოგადი მდებარეობის სიბრტყეს შეესაბამება.

1) a_π წრფე სურათის x ფუძესთან და, მაშასადამე, η სიბრტყესთან დახრილია, მაშასადამე, მასზე გატარებული α სიბრტყე η სიბრტყის პარალელური არ იქნება.

α სიბრტყე η სიბრტყის მართობულიც არ შეიძლება იყოს, რადგან a_π წრფეზე η სიბრტყის მართობულად ერთადერთი სიბრტყის გატარება შეიძლება; ასეთი სიბრტყე კი π სიბრტყეა.

ამგვარად, a_π კვალის x წრფესთან დახრილობა თვით α სიბრტყის η სიბრტყესთან დახრილობას გვიჩვენებს.

2) a_η წრფე x წრფესთან და, მაშასადამე, π სიბრტყესთან დახრილია (მართობული რომ იყოს, მაშინ მისი არასაკუთრივი H_∞ წერტილი მთავარ P წერტილს დაემთხვეოდა).

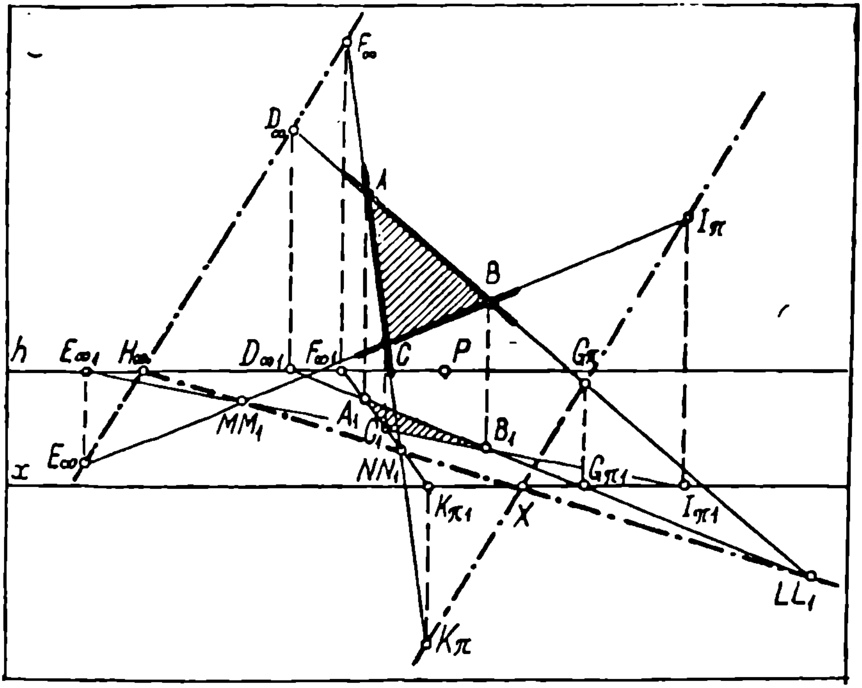
a_η წრფეზე π სიბრტყის მართობულად მხოლოდ η სიბრტყე გადის. მაშასადამე, ამავე წრფეზე გამავალი α სიბრტყე π სიბრტყესთან დახრილი იქნება.

ამგვარად, a_η წ რ ფ ი ს x წ რ ფ ე ს თ ა ნ დ ა ხ რ ი ლ ო ბ ა თ ვ ი თ α ს ი ბ რ ტ ყ ი ს π ს ი ბ რ ტ ყ ე ს თ ა ნ დ ა ხ რ ი ლ ო ბ ი ს მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ე ლ ი ა.

ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ α სიბრტყე x წრფის პარალელური არ არის.

სიბრტყე შეიძლება მოცემული იყოს არა ერთ წრფეზე მდებარე სამი წერტილითაც (ნახ. 29).

ნახაზზე მოცემულია სამკუთხედის ABC პერსპექტივა და მისი $A_1B_1C_1$ ფუძე. $ABC(A_1B_1C_1)$ სამკუთხედი სივრცეში გარკვეულ სიბრტყეს განსაზღვრავს.



ნახ. 29.

ავაგოთ ამ სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე, კვალი და η სიბრტყესთან განკვეთის წრფე.

არასაკუთრივი წრფის ასაგებად საკმარისი იქნება ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი ორი წრფის არასაკუთრივი წერტილების აგება.

მაგალითად, AB წრფის არასაკუთრივი წერტილის ასაგებად ჯერ A_1B_1 ფუძის h ჰორიზონტთან გადაკვეთის $D_{1\infty}$ წერტილს ავაგებთ. ეს არის A_1B_1

წრფის არასაკუთრივი წერტილი, საიდანაც h ჰორიზონტისადმი მართობი აღემართოთ AB წრფის გადაკვეთამდე. D_∞ წერტილი AB წრფის არასაკუთრივი წერტილია.

მსგავსადვეა აგებული BC წრფის არასაკუთრივი E_∞ წერტილი. D_∞ და E_∞ წერტილები მოცემულ სიბრტყეს ეკუთვნის, ამიტომ ამ წერტილებზე გატარებული წრფეც სიბრტყის არასაკუთრივი წრფეა. ნახაზზე აგებულია AC წრფის არასაკუთრივი F_∞ წერტილიც, რომელიც, ცხადია, $D_\infty E_\infty$ წრფეზე მდებარეობს.

$D_\infty E_\infty$ წრფე h ჰორიზონტს H_∞ წერტილში კვეთს, რომელიც მოცემული სიბრტყისა და η სიბრტყის საერთო წერტილს წარმოადგენს. მაშასადამე, ABC სამკუთხედის სიბრტყისა და η სიბრტყის განკვეთის წრფე H_∞ წერტილზე გაივლის, ამიტომ საკმარისი იქნება ამ წრფის კიდევ ერთი წერტილის აგება. ამისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ AB წრფისა და მისი A_1B_1 ფუძის გადაკვეთის $L(L_1)$ წერტილით.

$H_\infty L$ წრფე წარმოადგენს მოცემული სიბრტყის η სიბრტყესთან განაკვეთს. ამ წრფეზე მდებარეობს BC და AC წრფეების საკუთარ ფუძესთან განკვეთის $M(M_1)$ და $N(N_1)$ წერტილებიც.

$L(L_1)$, $M(M_1)$ და $N(N_1)$ წერტილების ერთ წრფეზე მდებარეობა დეზარგის თეორემიდანაც გამომდინარეობს. მართლაც, ABC სამკუთხედისა და მისი $A_1B_1C_1$ ფუძის თანადი წვეროების შემაერთებელი AA_1, BB_1 და CC_1 წრფეები ერთ (არასაკუთრივ) წერტილზე იკვეთება (იხ. პ. 5, ნახ. 16). $H_\infty L$ წრფე სურათის x ფუძეს X წერტილში კვეთს. ეს წერტილი მოცემული სიბრტყისა და π სურათის საერთო წერტილია, ამიტომ მოცემული სიბრტყის XI_π კვალი X წერტილზე არასაკუთრივი წრფის პარალელურად გაივლის.

XI_π და XH_∞ წრფეთა განლაგება გვიჩვენებს, რომ მოცემული სიბრტყე ზოგადი მდებარეობისაა.

საძიებელი სამი წრფის განსაზღვრისათვის ჩვენ გაცილებით ნაკლები წერტილებისა და წრფეების აგება დაგვჭირდება, ვიდრე ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. აქ ყველა წერტილი და წრფე არის აგებული მათ შორის დამოკიდებულების უფრო სრული ილუსტრაციის მიზნით.

მაგალითად, ნახაზიდან ჩანს, რომ მოცემულ სიბრტყეზე მდებარე AB, BC და AC წრფეების G_π, I_π და K_π კვალები ერთ წრფეზე (სიბრტყის კვალზე) მდებარეობს. თითოეული მათგანის, მაგალითად, BC წრფის I_π კვალის ასაგებად საკმარისია ამ წრფის B_1C_1 ფუძისა და x წრფის გადაკვეთის $I_{\pi 1}$ წერტილზე შვეული წრფე გატარდეს BC წრფის გადაკვეთამდე.

2°. **კერძო მდებარეობის სიბრტყეები.** განვიხილოთ π სურათისა და η ფუძეთა სიბრტყის მართობული სიბრტყეები (ნახ. 30). α სიბრტყე ფუ-

ქეთა სიბრტყის მართობულია, რადგან მის a_π კვალს და ამიტომ არასაკუთრივ a_∞ წრფესაც შვეული მდებარეობა აქვს.

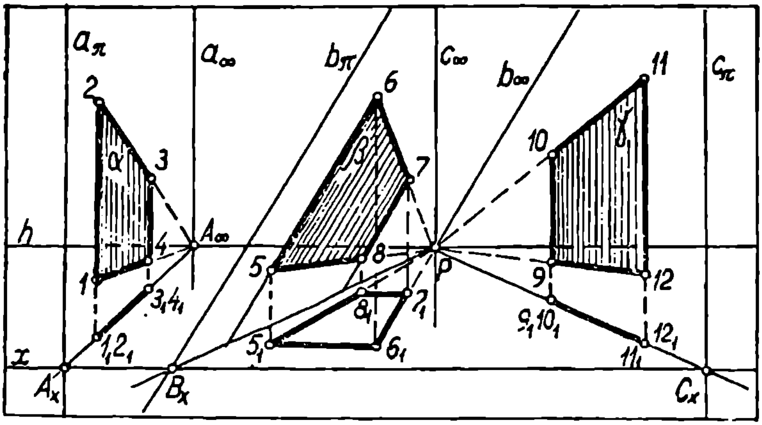
α სიბრტყე π სურათის მიმართ დახრილია, რადგან α სიბრტყისა და η სიბრტყის კვეთის $A_x A_\infty$ წრფე x წრფისადმი დახრილია (არასაკუთრივი A_∞ წერტილი P_∞ წერტილს არ ემთხვევა).

სიბრტყეში მოცემული 1—2—3—4 (1_1—2_1—3_1—4_1) ნაკვთი მართკუთხედს წარმოადგენს, რაშიც იმით ვრწმუნდებით, რომ 1—2 და 3—4 გვერდები η სიბრტყის მართობული წრფეებია, 2—3 და 1—4 გვერდები კი — η სიბრტყის პარალელური; მართლაც, მათი არასაკუთრივი A_∞ წერტილი h ჰორიზონტზე მდებარეობს.

სწორედ იმიტომ, რომ განხილული მართკუთხედი η სიბრტყის მართობულ სიბრტყეში მდებარეობს, მისი 1_1—2_1—3_1—4_1 ფუძე წრფის მონაკვეთს წარმოადგენს.

β სიბრტყე π სურათის მართობულია, რადგან β და η სიბრტყეების გადაკვეთის $B_x P$ წრფე x წრფის მართობულია (P წერტილი მის არასაკუთრივ წერტილს წარმოადგენს).

β სიბრტყე η სიბრტყისადმი დახრილია, რადგან მისი b_π კვალი x წრფისადმი დახრილია ($b_\pi \parallel b_\infty$).



ნახ. 30.

β სიბრტყეში მოცემული 5—6—7—8(5_1—6_1—7_1—8_1) ნაკვეთი მართკუთხედია, რადგან მისი 6—7 და 5—8 გვერდები π სურათის მართობულია. დანარჩენი ორი, 5—6 და 7—8, გვერდი კი—π სურათის პარალელური. განხილულ შემთხვევაში მართკუთხედის 5_1—6_1—7_1—8_1 ფუძეც აგრეთვე მართკუთხედია, რადგან მისი ორი გვერდი x წრფის პარალელურია, დანარჩენი ორი კი—x წრფის მართობული.

γ სიბრტყე ერთდროულად π და η სიბრტყეთა მართობულია, რადგან γ და η სიბრტყეების გადაკვეთის C_xP წრფეცა და C_π კვალიც x წრფისმართობულია.

γ სიბრტყის არასაკუთრივი c_∞ წრფე სურათის ღერძს უთავსდება.

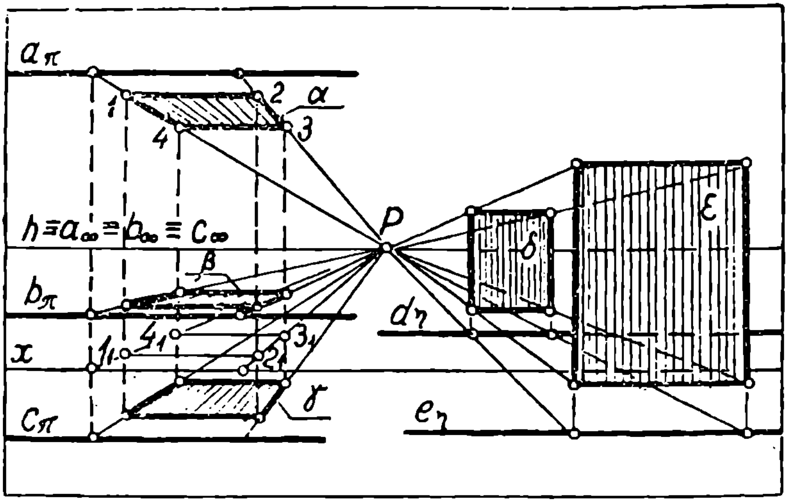
γ სიბრტყეში მდებარე 9—10—11—12 ნაკვთი მართკუთხედს წარმოადგენს ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე.

31-ე ნახაზზე გამოსახულია η ფუძეთა სიბრტყისა და π სურათის პარალელური სიბრტყეები.

η სიბრტყის პარალელური α სიბრტყე მოცემულია თავისი კვალით და არასაკუთრივი a_∞ წრფით.

ცხადია, რომ a_π კვალი x წრფის პარალელური უნდა იყოს, რადგანაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, α სიბრტყეს η სიბრტყესთან საერთო წერტილი და ამიტომ საერთო წრფეც ექნებოდა.

α სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე h ჰორიზონტს უთავსდება, რად-



ნახ. 31.

გან η და α პარალელურ სიბრტყეებს საერთო არასაკუთრივი წრფე უნდა ჰქონდეს.

α სიბრტყეში მოთავსებული 1—2—3—4 (1_1—2_1—3_1—4_1) ნაკვთი მართკუთხედია, რადგან მისი 1—2 და 3—4 გვერდები π სურათის პარალელურია, 1—4 და 2—3 გვერდები კი—π სურათის მართობული.

ამავე დროს α სიბრტყე ჰორიზონტის სიბრტყის ზემოთ მდებარეობს, რადგან მისი a_π კვალი h ჰორიზონტის ზემოთ გადის.

η სიბრტყის პარალელურია β და γ სიბრტყეებიც, რომელთა კვალები, შესაბამისად, b_π და c_π წრფეებია, ხოლო მათი არასაკუთრივი b_∞ და c_∞ წრფეები h წრფესთან არის შეთავსებული. განსხვავება ამ ორი სიბრტყის მდებარეობას შორის იმაშია, რომ β სიბრტყე η სიბრტყის ზემოთ არის (მაგრამ ჰორიზონტის სიბრტყის ქვემოთ), γ სიბრტყე კი η სიბრტყის ქვემოთ; ამას b_π და c_π კვალები გვაჩვენებს.

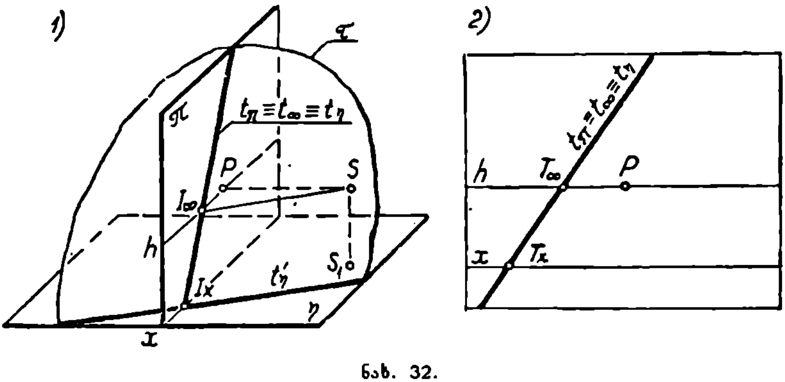
β და γ სიბრტყეებში მდებარეობს α სიბრტყეში მდებარე 1—2—3—4 მართკუთხედის ტოლი მართკუთხედები, რომელთა წვეროები 1—2—3—4 მართკუთხედის შესაბამის წვეროებთან ერთად შვეულ წრფეებზეა. ამის გამო ორივე მართკუთხედის ფუძე $1_1—2_1—3_1—4_1$ ფუძეს უთავსდება.

δ და ε სიბრტყეები π სურათის პარალელურია, რადგან მათ კვალი არა აქვთ; ამის გამო მათი η სიბრტყესთან გადაკვეთის d_η და e_η წრფეები x წრფის პარალელურია.

რადგანაც d_η წრფე x წრფის ზემოთ მდებარეობს, e_η წრფე კი ქვემოთ, ამიტომ ვასკვნით, რომ δ სიბრტყე π სურათის უკან მდებარეობს, ε სიბრტყე კი — წინ.

δ და ε სიბრტყეებში მდებარე მართკუთხედების ტოლობაში იქიდან ვრწმუნდებით, რომ მათი შესაბამისი წვეროების შემაერთებელი წრფეები ურთიერთპარალელურია.

S წერტილზე გამავალი τ სიბრტყე მაგეგმილებელია (ნახ. 32_1), რადგანაც ასეთ სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფე π სურათზე ერთ წრფეში გეგმილდება. ამიტომ τ სიბრტყის არასაკუთრივი t'_∞ წრფისა და η სიბრტყესთან გადაკვეთის t'_η წრფის პერსპექტივა τ სიბრტყის t_π კვალთან არის შეთავსებული. მაშასადამე, საკმარისია ავაგოთ t'_η წრფის პერსპექ-



ნახ. 32.

ტივა, ამისათვის კი ვისარგებლებთ τ სიბრტყისა და x წრფის გადაკვეთის T_x წერტილით და t'_η წრფის არასაკუთრივი წერტილის T_∞ პერსპე-

ქტივით. ამ უკანასკნელის ასაგებად S წერტილზე t'_η წრფის პარალელურად გატარებულია ST_∞ სხივი.

ამგვარად, სურათზე (ნახ. 32₂) τ სიბრტყეს გამოხატავს ერთი $t_\pi \equiv \equiv t_\infty \equiv t_\eta$ წრფე, რომელიც სამი წრფის გამოსახულებას წარმოადგენს.

ა მ ო ც ა ნ ა 1 (ნახ. 33). სურათზე მოცემულია ზოგადი მდებარეობის $\alpha(a_\pi, a_\eta, a_\infty)$ სიბრტყე და $M(M_1)$ წერტილი. ამ წერტილზე უნდა გავატაროთ α სიბრტყის პარალელური β სიბრტყე და მისი b_π კვალი, ავაგოთ b_η და b_∞ წრფეები.

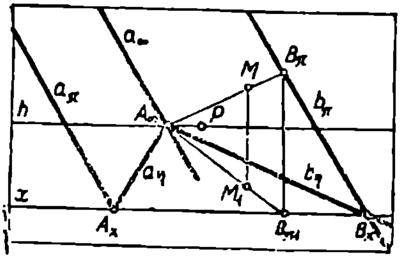
ამისათვის $M(M_1)$ წერტილზე α სიბრტყის პარალელურად ნებისმიერი წრფე გავატაროთ. ნახაზზე გატარებულია a_η წრფის პარალელური MA_∞ (M_1A_∞) წრფე; მართლაც, ეს წრფე და a_η წრფე არასაკუთრივ A_∞ წერტილში იკვეთება.

რადგანაც α და β სიბრტყეები პარალელურია, ამიტომ მათ საერთო არასაკუთრივი წრფე უნდა ჰქონდეთ; ამ შემთხვევაში—α სიბრტყის არასაკუთრივი a_∞ წრფე.

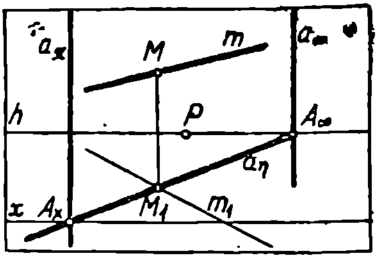
β სიბრტყე უკვე განსაზღვრულია $MA_\infty(M_1A_\infty)$ და a_∞ წრფეებით. ახლა b_π კვალის ასაგებად $MA_\infty(M_1A_\infty)$ წრფის B_π კვალი ავაგოთ, რისთვისაც ამ წრფის M_1A_∞ ფუძისა და x წრფის განკვეთის $B_{1\pi}$ წერტილიდან ავმართოთ x წრფის მართობი MA_∞ წრფის განკვეთამდე.

მიღებულ B_π წერტილზე გაივლის β სიბრტყის b_π კვალი არასაკუთრივი $a_\infty \equiv b_\infty$ წრფის პარალელურად.

b_η წრფე A_∞ და B_x წერტილებზე გაივლის.



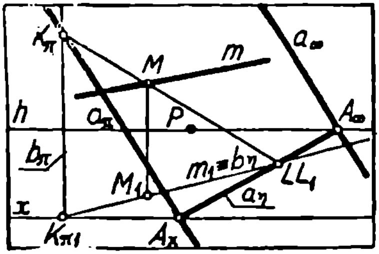
ნახ. 33.



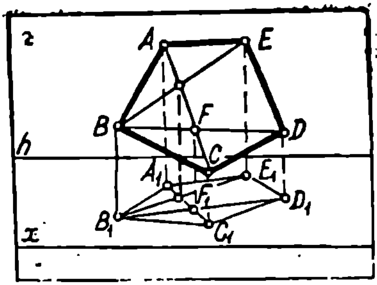
ნახ. 34.

ა მ ო ც ა ნ ა 2 (ნახ. 34). მოცემულია η სიბრტყის მართობული $\alpha(a_\pi, a_\eta, a_\infty)$ სიბრტყე და $m(m_1)$ წრფე. ავაგოთ მათი გადაკვეთის წერტილი. საძიებელი წერტილის ფუძე, ცხადია, $m(m_1)$ წრფის ფუძეზე უნდა მდებარეობდეს. მეორე მხრივ, იმის გამო რომ ეს წერტილი სიბრტყესაც ეკუთვნის, ეს უკანასკნელი კი η სიბრტყის მართობულია, ამ წერტილის ფუძე a_η წრფეზედაც უნდა იდოს. ამგვარად, თუ a_η და m_1 წრფეთა გადაკვეთის M_1 წერტილზე შვეულ წრფეს გავატარებთ m წრფის M წერტილში გადაკვეთამდე, ამოცანა ამოხსნილი იქნება.

ა მ ო ც ა ნ ა 3 (ნახ. 35). ზოგადი მდებარეობის $\alpha(a_\pi, a_\eta, a_\infty)$ სიბრტყე $m(m_1)$ წრფესთან გავკვეთოთ. ამ მიზნით $m(m_1)$ წრფეზე η სიბრტყის მართობულად გატარებულია $\beta(b_\pi, b_\eta)$ სიბრტყე. ამ შემთხვევაში ამ წრფის m_1 ფუძე β და η სიბრტყეთა გადაკვეთის b_η წრფეს შეუთავსდება—$(m\equiv b_\eta)$, რადგანაც $m(m_1)$ წრფე შვეულ β სიბრტყეში დევს. ახლა α და β სიბრტყეების განკვეთის წრფე ავაგოთ; ამისათვის მათი ორი საერთო წერტილით ვისარგებლოთ: a_π და b_π კვალების გადაკვეთის $K_\pi(K_{1\pi})$ წერტილით და a_η და b_η წრფეთა საერთო $L(L_1)$ წერტილით. ამ წერტილების შემაერთებელი წრფის $K_\pi L$ პერსპექტივა და მოცემული წრფის m პერსპექტივა M წერტილში იკვეთება. ამგვარად, M წერტილი საძიებელი წერტილია, რომლის M_1 ფუძე m_1 წრფეზე მდებარეობს.



ნახ. 35.

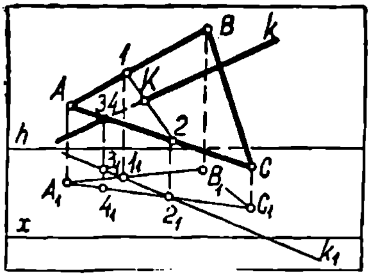


ნახ. 36.

ა მ ო ც ა ნ ა 4 (ნახ. 36). ავაგოთ ნებისმიერი ბრტყელი $ABCDE$ $(A_1B_1C_1D_1E_1)$ ხუთკუთხედი. ხუთკუთხედის $ABCDE$ პერსპექტივა ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ, ხოლო მისი ფუძე კი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ეს ხუთკუთხედი ბრტყელი იყოს. ხუთკუთხედის სამი წვეროს ფუძე, მაგალითად, A_1, B_1 და C_1 წერტილები, ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ. დანარჩენი წვეროების ფუძეთა აგებისას მხედველობაში მივიღოთ, რომ მრავალკუთხედის სიბრტყეში მდებარე წრფეები ურთიერთს ვერ ასცდება, ე. ი. ურთიერთგადაკვეთილი ან პარალელური იქნება. ამიტომ D წვეროს D_1 ფუძის ასაგებად BD დიაგონალი გავატაროთ და მისი B_1D_1 ფუძე ისე ავაგოთ, რომ $AC(A_1C_1)$ და $BD(B_1D_1)$ დიაგონალები გადაკვეთილი აღმოჩნდეს. ამისათვის AC და BD წრფეთა გადაკვეთის F წერტილის F_1 ფუძე A_1C_1 წრფეზე უნდა მდებარეობდეს, ხოლო D წვეროს D_1 ფუძე B_1F_1 წრფეზე. ასეთივე გზით ავაგებთ E წვეროს E_1 ფუძესაც.

ა მ ო ც ა ნ ა 5 (ნახ. 37). $ABC(A_1B_1C_1)$ სამკუთხედი $K(K_1)$ წრფით გავკვეთოთ. ეს ამოცანა მე-3 ამოცანისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ აქ სიბრტყე სამკუთხედით არის განსაზღვრული, ამიტომ გადაწყვე-

ტის მსვლელობა იგივე იქნება. სახელდობრ, $k(k_1)$ წრფეზე η სიბრტყის მართობულად გატარებული დამხმარე სიბრტყე წარმოვიდგინოთ.



ნახ. 37.

ეს სიბრტყე η სიბრტყეს K_1 წრფეზე გაკვეთს. ახლა დამხმარე სიბრტყისა და $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყის განკვეთის წრფე ავაგოთ; ამისათვის საკმარისია დამხმარე სიბრტყის $AB(A_1B_1)$ და $AC(A_1C_1)$ წრფეებთან გადაკვეთის წერტილები ავაგოთ (იხ. ამოცანა 2) და მიღებული $1(1_1)$ და $2(2_1)$ წერტილები წრფით შევაერთოთ. $1-2$ წრფისა და k წრფის გადაკვეთის K წერტილი ამოცანის პასუხია; მისი ფუძე უშუალოდ განისაზღვრება.

ახლა თუ წარმოვიდგენთ, რომ ABC $(A_1B_1C_1)$ სამკუთხედი გაუმჭვირვალ ფირფიტას წარმოადგენს, იგი $k(k_1)$ წრფეს ნაწილობრივ დაფარავს. $k(k_1)$ წრფის უხილავი ნაწილის გამორკვევა შემდეგნაირად შეგვიძლია:

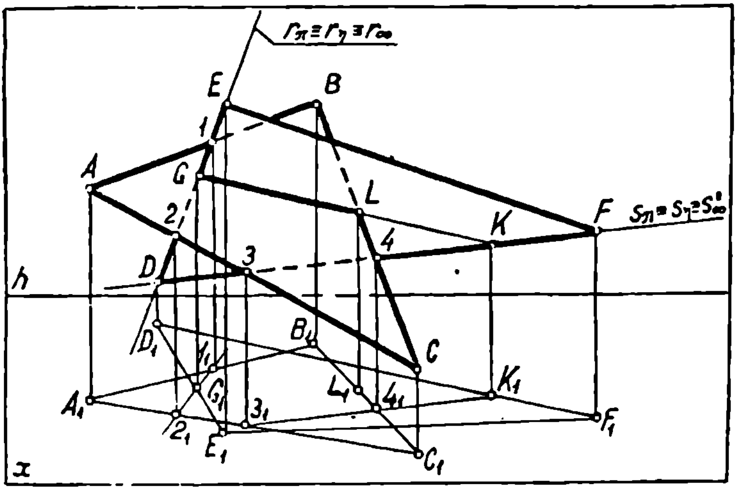
AC და k წრფეთა გადაკვეთის წერტილში ორი წერტილის პერსპექტივა გვექნება: ერთი წერტილი (3) მოცემულ (kk_1) წრფეს ეკუთვნის, მეორე კი (4)—AC წრფეს. უნდა გამოვარკვიოთ, რომელი უფრო ახლოა მზერის წერტილთან. ამისათვის ამ წერტილების 3_1 და 4_1 ფუძეები ავაგოთ. 3_1 წერტილი h ჰორიზონტთან უფრო ახლოა, ვიდრე 4_1 წერტილი, რაც იმას ნიშნავს, რომ 3_1 წერტილი უფრო შორს არის მზერის წერტილიდან. მაშასადამე, თვით $3(3_1)$ წერტილი უფრო შორს არის მზერის წერტილიდან და ჩვენი თვალისათვის (რომელიც S წერტილში იმყოფება) დაფარულია მე-4 (4_1) წერტილით; აქედან ვასკვნით, რომ k წრფის მონაკვეთი მე-3 (3_1) წერტილიდან K წერტილამდე უხილავია, K წერტილიდან მარჯვნივ კი — წრფე მთლიანად ხილვადია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. გეომეტრიული ელემენტების ხილვადობას მხოლოდ მათ პერსპექტიულ გამოსახულებაზე ვარკვევთ ხოლმე, რადგანაც ეს უკანასკნელი ძირითად გამოხატულებას წარმოადგენს, ფუძე კი მხოლოდ დამხმარე დანიშნულებას ასრულებს.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. (ნახ. 38). ABC $(A_1B_1C_1)$ და $DEF\,(D_1E_1F_1)$ სამკუთხედების განკვეთის წრფე ავაგოთ.

აქ ორი სიბრტყის ურთიერთკვეთასთან გვაქვს საქმე. ამიტომ საკმარისია ამ სიბრტყეთა ნებისმიერი ორი საერთო წერტილის აგება, რომლებიც საძიებელ წრფეს განსაზღვრავს. ერთ-ერთ ასეთ წერტილად შეიძლება მივიღოთ $ABC(A_1B_1C_1)$ სამკუთხედის სიბრტყისა და მეორე სამკუთხედის $DE(D_1E_1)$ გვერდების გადაკვეთის $G(G_1)$ წერტილი, რომლის აგება წინა ამოცანაში ნაჩვენები გზით შეიძლება. განსხვავება მხოლოდ ის არის,

რომ აქ $DE(D_1E_1)$ წრფეზე მაგეგმილებელი $\rho(r_\pi, r_\eta, r_\infty)$ სიბრტყეა გატარებული. ρ სიბრტყე სამკუთხედის $AB(A_1B_1)$ გვერდს $1(1_1)$ წერტილში კვეთს. ეს წერტილი უშუალოდ მოიძებნება; ჯერ მის 1 პერსპექტივას ავაგებთ, რომელიც AB წრფისა და $r_\pi \equiv r_\eta \equiv r_\infty$ წრფის გადაკვეთის წერტილია, საიდანაც გავატარებთ შვეულ წრფეს A_1B_1 ფუძის 1_1 წერტილში გადაკვეთამდე. მსგავსად მოიძებნება $AC(A_1C_1)$ გვერდის ρ სიბრტყესთან განკვეთის $2(2_1)$ წერტილიც. $ABC(A_1B_1C_1)$ სამკუთხედის სიბრტყისა და ρ სიბრტყის განკვეთის წრფე $1—2(1_1—2_1)$ წრფე იქნება, რომლის $1—2$ პერსპექტივა DE წრფეს ემთხვევა. ამიტომ ამ ორი წრფის



ნახ. 38.

განკვეთის წერტილის ასაგებად ჯერ $1_1—2_1$ და D_1E_1 ფუძეების განკვეთის G_1 წერტილს განვსაზღვრავთ, საიდანაც შვეული წრფე გატარდება DE წრფის გადაკვეთამდე.

შემდეგ მოძებნილია $ABC(A_1B_1C_1)$ სამკუთხედის სიბრტყისა და მეორე სამკუთხედის $DF(D_1F_1)$ გვერდის გადაკვეთის $K(K_1)$ წერტილი, რისთვისაც $DF(D_1F_1)$ წრფეზე გატარებულია მაგეგმილებელი $\sigma(s_\pi, s_\eta, s_\infty)$ სიბრტყე, აგებულია ამ სიბრტყის $AB(A_1B_1)$ და $BC(B_1C_1)$ გვერდებთან გადაკვეთის $3(3_1)$ და $4(4_1)$ წერტილები, ხოლო $K(K_1)$ წერტილი განსაზღვრულია როგორც $DF(D_1F_1)$ და $3—4(3_1—4_1)$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი.

$GK(G_1K_1)$ წრფე მოცემული სამკუთხედის სიბრტყეთა ურთიერთკვეთის წრფეა. ამოცანის პასუხია ამ წრფის $GL(G_1L_1)$ მონაკვეთი, რომელიც ორივე სამკუთხედს ეკუთვნის.

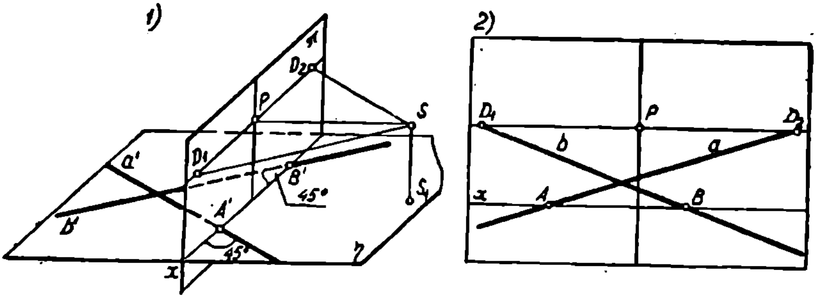
თუ სამკუთხედებს გაუმჭვირვალ ფირფიტებად წარმოვიდგენთ, მათი ხილვადი და უხილავი ნაწილები წინა ამოცანაში მოცემული გზით გამოირკვევა.

III. ელემენტარული მეტრული ამოცანები

11. დისტანციის წერტილები და დისტანციის წრეწირი

გეომეტრიაში მეტრული ამოცანები ისეთებს ეწოდება, რომლებიც მონაკვეთის სიგრძის, ფართობის, მოცულობის ან კუთხის სიდიდის ცნებასთან არის დაკავშირებული. მრავალი მეტრული ამოცანის გადაწყვეტა პერსპექტივაში უშუალოდ დამოკიდებულია დისტანციის წერტილებსა და წრეწირზე, რომელთა გეომეტრიულ არსს ახლა განვიხილავთ.

ფუძეთა η სიბრტყეზე (ნახ. 39_1) a' და b' წრფეებია მოცემული, რომლებიც სურათის ფუძესთან 45°-იანი კუთხითაა დახრილი ორი მიმართულებით და მას, შესაბამისად, A' და B' წერტილებში კვეთს. ამ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილების პერსპექტივა რომ მოვნახოთ, საკმარისია,



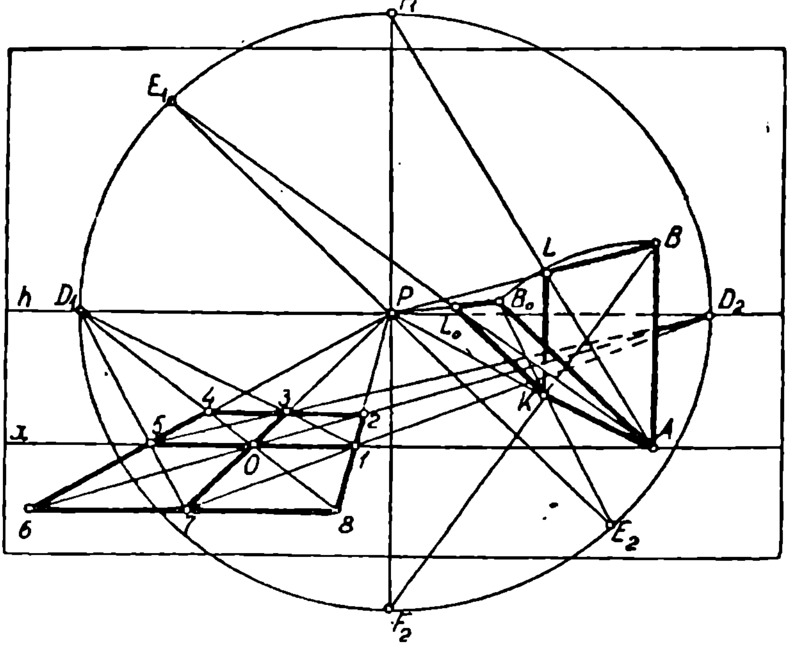
ნახ. 39.

როგორც ვიცით, მზერის S წერტილზე ამ წრფეთა პარალელური SD_1 და SD_2 სხივები გავატაროთ, რომლებიც სურათს D_1 და D_2 წერტილებში გადაკვეთენ. D_1 წერტილი b' წრფის არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივაა, D_2 წერტილი კი—a' წრფისათვის ასეთივე წერტილი. იმის გამო, რომ SD_1 და SD_2 წრფეები h წრფესთან აგრეთვე 45°-იან კუთხეს ქმნის, SPD_1 და SPD_2 სამკუთხედები მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედებია, სადაც PD_1 და PD_2 კათეტები მთავარი SP მანძილის ტოლია. როგორც ვიცით, D_1 და D_2 წერტილებს დისტანციის წერტილები ეწოდება (იხ. პ. 7, ნახ. 18).

მაშასადამე, a' და b' წრფეების პერსპექტივა სურათზე (ნახ. $39_ე$) ისეთი a და b წრფეებით გამოისახება, რომლებიც შესაბამისად D_2 და D_1 წერტილებში გადიან. ცხადია, რომ ამ წრფეთა პარალელური ყველა წრფის პერსპექტივა, შესაბამისად, ამავე წერტილებში გაივლის, ე. ი. დავასკვნით, რომ სურათის π სიბრტყესთან 45°-ით დახრილი და ამავე დროს ფუძეთა სიბრტყის პარალელური წრფეების პერსპექტივა დისტანციის წერტილებში გადის.

ამ დასკვნის საფუძველზე შემდეგი ამოცანების ამოხსნა შეიძლება:

ამოცანა 7. ფუძეთა სიბრტყეზე ისეთი კვადრატი ავაგოთ, რომლის ერთი წვერო მოცემულ O წერტილში და ერთი გვერდი სურათის x ფუძესთანაა შეთავსებული (ნახ. 40).



ნახ. 40.

დავუშვათ, რომ კვადრატის გვერდი O-1 მონაკვეთის ტოლია, რომელიც x წრფეზე მდებარეობს. O წერტილსა და 1 წერტილზე OP და 1—P წრფეები გავავლოთ. ცხადია, ეს წრფეები სივრცეში O—1 წრფის მართობულია და, მაშასადამე, ასაგები კვადრატის ორი გვერდი ამ წრფეებზე უნდა მდებარეობდეს. 1 წერტილზე 1—D_1 წრფე გავატაროთ. ზემოთ

დავრწმუნდით, რომ სივრცეში ეს წრფე x წრფესთან (ამიტომ OP წრფესთანაც) 45°-ით არის დახრილი; მაშასადამე, $1—O—3$ სამკუთხედი ტოლფერდა და მართკუთხა ყოფილა, ე. ი. $O—1$ და $O—3$ მონაკვეთები სივრცეში ტოლი და ურთიერთმართობულია. საკმარისია 3 წერტილზე x წრფის პარალელური წრფე გავავლოთ, რომ საბოლოოდ კვადრატის $O—1—2—3$ პერსპექტივა მივიღოთ, სადაც $1—3$ წრფე მის დიაგონალს წარმოადგენს. ცხადია, რომ მეორე $O—2$ დიაგონალი დისტანციის D_2 წერტილში გაივლის.

ამოცანას ოთხი პასუხი აქვს. დანარჩენი სამი კვადრატის ასაგებად ისევ დისტანციის წერტილებს გამოვიყენებთ. მაგალითად, $O—1—8—7$ კვადრატის ასაგებად საკმარისია OD_1 ან $1—D_2$ წრფე გავატაროთ. OD_1 წრფე $1—P$ წრფეს 8 წერტილში გადაკვეთს და ისევ ტოლფერდა მართკუთხა $O—1—8$ სამკუთხედს მოგვცემს, სადაც $O—1$ და $1—8$ მონაკვეთები სივრცეში ტოლია. საკმარისია x წრფის პარალელურად $8—9$ წრფე გავატაროთ და კვადრატი აგებული იქნება. ასევეა აგებული დანარჩენი ორი კვადრატიც.

შევნიშნავთ, რომ $1—3$, $3—5$, $5—7$ და $7—1$ მონაკვეთების ერთობლიობა სივრცეში კვადრატს განსაზღვრავს, რომლის გვერდები სურათთან 45°-ით არის დახრილი. ამის დასაბუთებას მკითხველს ვანდობთ.

განვიხილოთ დისტანციის $D_1F_1D_2F_2$ წრეწირი. რადგანაც მისი რადიუსი მთავარი მანძილის ტოლია, ამიტომ მზერის S წერტილსა და ამ წრეწირის ნებისმიერ წერტილზე გატარებული სხივი სურათის სიბრტყესთან 45°-ით იქნება დახრილი. ეს სხივი, ცხადია, სურათზე დააგეგმილებს თავის პარალელურ ყველა წრფეთა არასაკუთრივ წერტილს. ყველა ასეთ სხივთა ერთობლიობა კი ბრუნვის კონუსს ქმნის, რომლის წვერო S წერტილია, დისტანციის წრეწირი — მისი მიმმართველი, SP წრფე კი — ღერძია.

ამგვარად ვასკვნით, რომ სურათის π სიბრტყესთან 45°-ით დახრილ ყველა წრფეთა არასაკუთრივი წერტილების პერსპექტივა დისტანციის წრეწირზე მდებარეობს.

ა მ ო ც ა ნ ა 8. სურათის x ფუძის მართობულ სიბრტყეში ისეთი $ABLK$ კვადრატი ავაგოთ, რომლის AB გვერდი სურათის სიბრტყეშია მოცემული (ნახ. 40).

კვადრატის სიბრტყის არასაკუთრივი წრფის პერსპექტივა სურათის ღერძს ემთხვევა (პ. 10, 2°, ნახ. 30). ამ სიბრტყეში მდებარე წრფეების არასაკუთრივი წერტილებიც სურათის ღერძზე უნდა მდებარეობდეს. მეორე მხრივ, თუ ამავე სიბრტყეში გავატარებთ სურათის სიბრტყისადმი 45°-ით დახრილ წრფეებს, მათი არასაკუთრივი წერტილები დისტანციის წრეწირს უნდა ეკუთვნოდეს. მაშასადამე, ასაგები კვადრატის BK და AL

დიაგონალების არასაკუთრივი წერტილებიც ორივე პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს, ე. ი. სურათის F_1F_2 ღერძსა და დისტანციის წრეწირის გადაკვეთის F_1 და F_2 წერტილებს უნდა წარმოადგენდეს. გავატაროთ ერთერთი AL დიაგონალი. კვადრატის BL და AK გვერდები P წერტილზე გაივლის, როგორც სურათის სიბრტყის მართობული წრფეები. AL და BL წრფეების გადაკვეთაში კვადრატის მესამე L წვეროს მივიღებთ, კვადრატის LK გვერდი კი სურათზედაც AB გვერდის პარალელური იქნება.

ა მ ო ც ა ნ ა 9. დავუშვათ, რომ $ABLK$ კვადრატის სიბრტყე AK წრფის ირგვლივ ნებისმიერი კუთხით მოვაბრუნეთ. ავაგოთ კვადრატის ახალი AB_0L_0K პერსპექტივა.

AK გვერდი, ცხადია, ადგილზე დარჩება. AB გვერდი კი ახალ AB_0 მდებარეობას მიიღებს. მაგრამ $AB_0=AB$, რადგანაც ეს გვერდი ისევ სურათის სიბრტყეში მდებარეობს. KL გვერდი π სურათის პარალელურ სიბრტყეში იბრუნებს, ამიტომ მისი ახალი KL_0 პერსპექტივაც ისევ KL მონაკვეთის ტოლი იქნება და AB_0 გვერდის პარალელური. B_0L_0 გვერდი ისევ P წერტილში გაივლის.

AB_0L_0K კვადრატი ჩვენ ავაგეთ, როგორც $ABLK$ კვადრატის მობრუნების შედეგი, მაგრამ მისი აგება დამოუკიდებლადაც შეგვეძლო. სახელდობრ, AB_0L_0K კვადრატი სურათის მართობულ სიბრტყეში მდებარეობს, რადგან მისი AK გვერდი სურათის მართობულია. AB_0 გვერდი სურათის სიბრტყეშია და ამიტომ კვადრატის სიბრტყის კვალი ამ გვერდს ემთხვევა.

კვადრატის სიბრტყის არასაკუთრივი E_1E_2 წრფე ამ სიბრტყის AB_0 კვალის პარალელურია და P წერტილზე გაივლის.

კვადრატის AL_0 და B_0K დიაგონალების არასაკუთრივი წერტილები, ერთი მხრივ, დისტანციის წრეხაზზე მდებარეობენ (რადგან სურათის სიბრტყესთან 45°-ით არიან დახრილი), მეორე მხრივ კი—კვადრატის სიბრტყის არასაკუთრივ E_1E_2 წრფეზე. დიაგონალების, შესაბამისად, კვადრატის AK და B_0L_0 გვერდებთან გადაკვეთით კვადრატის დანარჩენ ორ წვეროსაც მივიღებთ.

ა მ ო ც ა ნ ა 10. წრფის მონაკვეთის პროპორციულ ნაწილებად დაყოფა.

მოცემულია $AB(A_1B_1)$ მონაკვეთი და საჭიროა მისი სამ ტოლ ნაწილად დაყოფა (ნახ. 41).

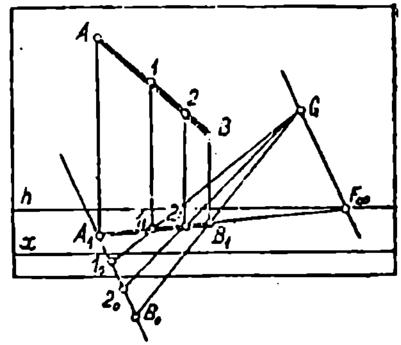
აქ მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ მონაკვეთის ტოლ ნაწილებად დაყოფაზე რომ ვლაპარაკობთ იგულისხმება სივრცეში მოცემული $A'B'$ ორიგინალის დაყოფა, რომელიც ნახაზზე თავისი AB პერსპექტივითა და A_1B_1 ფუძით არის მოცემული. რადგან მოცემული მონაკვეთი სურათის სიბრტყის პარალელური არ არის, ამიტომ არც მისი AB პერსპექტი-

ვა და, ცხადია, არც A_1B_1 ფუძე ტოლ ნაწილებად არ დაიყოფა (იხ. პ. 3, ნახ. 6, 8.)

მაშასადამე, ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემული $A'B'$ მონაკვეთის AB პერსპექტივაზე მოვძებნოთ ისეთი წერტილები, რომელთა ორიგინალები სივრცეში $A'B'$ მონაკვეთს სამ ტოლ ნაწილად ყოფს.

ეს ამოცანა სხვადასხვა გზით შეიძლება გადაწყდეს.

მაგალითად, პირველ შემთხვევაში (ნახ. 41) ჯერ მონაკვეთის A_1B_1 ფუძეზე ავაგოთ გამყოფი წერტილები, ე. ი. ამოცანა დავიყვანოთ η სიბრტყეზე მდებარე მონაკვეთის სამ ტოლ ნაწილად გაყოფაზე.



ნახ. 41.

A_1B_1 მონაკვეთი წარმოადგენს სივრცეში აღებული $A'B'$ მონაკვეთის $A'_1B'_1$ ფუძის პერსპექტივას.

ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ თუ წრფეზე მდებარე სამი წერტილის პერსპექტივა მოცემულია, მაშინ ამ წრფეზე ნებისმიერი მეოთხე წერტილის პერსპექტივის აგება მუდამ შეგვიძლია ოთხი წერტილის რთული ფარდობის თვისების გამოყენებით (იხ. პ. 3, ნახ. 10,11). A_1B_1 წრფეზე სამი წერტილი დავნიშნოთ — A_1, B_1 და ამ წრფის h ჰორიზონტთან გადაკვეთის F_∞ წერტილი. ცხადია, რომ F_∞ წერტილი სივრცეში მოცემული $A'_1B'_1$ ორიგინალის არასაკუთრივი F'_∞ წერტილის გეგმილს წარმოადგენს.

შემდეგ, A_1B_1 მონაკვეთის ერთ-ერთ, მაგალითად, A_1 ბოლოზე *ნებისმიერი* მიმართულების წრფე გავატაროთ და მასზე A_1 წერტილიდან *ნებისმიერი* სიდიდის სამი ტოლი A_11_0, 1_02_0 და 2_0B_0 მონაკვეთი გადავზომოთ.

A_1B_1 და A_1B_0 წრფეთა წერტილებს შორის ისეთი პერსპექტიული თანადობა დავამყაროთ, რომ A_1 წერტილს ისევ A_1 წერტილი ეთანადებოდეს, B_1 წერტილს—B_0 წერტილი, F_∞ წერტილს კი A_1B_0 წრფის არასაკუთრივი წერტილი.

ამგვარად დამყარებულ თანადობაში A_1B_1 წრფეზე ავაგოთ 1_0 და 2_0 წერტილების თანადი წერტილები. ამისათვის კი პერსპექტიულობის ცენტრი მოვძებნოთ. თანადი წერტილები სხივებით შევაერთოთ, ე.ი. B_1 წერტილი—B_0 წერტილთან, F_∞ წერტილი კი A_1B_0 წრფის არასაკუთრივ წერტილთან, რაც იმას ნიშნავს, რომ F_∞ წერტილზე A_1B_0 წრფის პარალელური $F_\infty G$ წრფე უნდა გავავლოთ. B_0B_1 და $F_\infty G$ წრფის გადაკვე-

თის G წერტილი პერსპექტიულობის საძიებელი ცენტრი იქნება. 1_0 და 2_0 წერტილებზე 1_0G და 2_0G წრფეები გავატაროთ, რომლებიც A_1B_1 წრფესთან კვეთაში 1_0 და 2_0 წერტილების თანად 1_1 და 2_1 წერტილებს მოგვცემს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მიღებული 1_1 და 2_1 წერტილები სწორედ ისეთი $1'_1$ და $2'_1$ წერტილების პერსპექტივას წარმოადგენს, რომლებიც A_1B_1 მონაკვეთის $A'_1B'_1$ ორიგინალს სივრცეში სამ ტოლ ნაწილად ყოფენ.

A_1B_1 წრფე სივრცეში მდებარე $A'_1B'_1$ წრფის პერსპექტივას წარმოადგენს, ე. ი. A_1B_1 და $A'_1B'_1$ ორიგინალის წერტილებს შორისაც ისეთი პერსპექტიული თანადობა მყარდება, სადაც პერსპექტიულობის ცენტრი S მზერის წერტილია. ამ უკანასკნელ თანადობაში A_1 წერტილს სივრცის A'_1 წერტილი ეთანადება, B_1 წერტილს—B'_1 წერტილი და, რაც მეტად მნიშვნელოვანია, $F\infty$ წერტილს $A'_1B'_1$ წრფის არასაკუთრივი $F'\infty$ წერტილი ეთანადება.

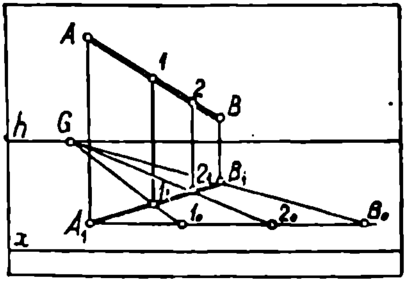
მაშასადამე, A_1B_1 წრფე ერთდროულად A_1B_0 წრფის პერსპექტიულია (პერსპექტიულობის G ცენტრით) და სივრცეში მდებარე $A'_1B'_1$ წრფის პერსპექტიულიც (S ცენტრით). აქედან ვასკვნით, რომ $A'_1B'_1$ წრფე A_1B_0 წრფის გეგმილურად თანადი ყოფილა, სადაც A_1 წერტილს სივრცის A'_1 წერტილი ეთანადება, B_0 წერტილს — სივრცის B'_1 წერტილი, ხოლო A_1B_0 წრფის არასაკუთრივ წერტილს კი $A'_1B'_1$ წრფის აგრეთვე არასაკუთრივი $F'\infty$ წერტილი.

მაგრამ, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, თუ ორ პერსპექტიულ ან გეგმილურ წერტილთა მწკრივებში ერთი მწკრივის არასაკუთრივ წერტილს მეორე მწკრივის არასაკუთრივი წერტილი ეთანადება, მაშინ ამ ორ მწკრივში სამი წერტილის მარტივი ფარდობა ტოლია. ამის გამო, რადგან A_1B_0 წრფეზე A_11_0, 1_02_0 და 2_0B_0 მონაკვეთები ტოლია, სივრცეში $A'_1 1'_1$, $1'_1 2'_1$ და $2'_1B'_1$ მონაკვეთებიც ტოლი იქნება, რომელთა პერსპექტივას, შესაბამისად, A_11_1, 1_12_1 და 2_1B_1 მონაკვეთები წარმოადგენს.

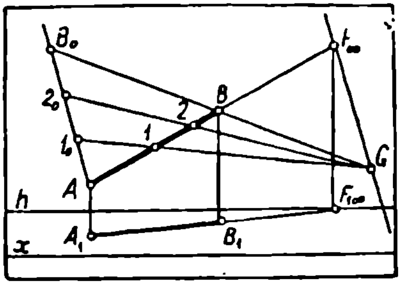
საბოლოოდ, AB მონაკვეთის სამ ტოლ ნაწილად დაყოფისათვის საკმარისია 1_1 და 2_1 წერტილებზე h ჰორიზონტის მართობული 1_11 და 2_12 წრფეები გავატაროთ, რომლებიც, ცხადია, AB მონაკვეთზე ისეთ 1 და 2 წერტილებს მოგვცემს, რომ მიღებულ $A1$, 1—2, $2B$ მონაკვეთებს სივრცეში ტოლი $A'1'$, $1'$—$2'$ და $2'B'$ ორიგინალები ექნება.

ამოცანის პასუხის სისწორეში სხვა გზითაც შეიძლება დავრწმუნდეთ. ჩვენ მიერ გატარებული A_1B_0 წრფე შეიძლება π სურათის პარალელური წრფის პერსპექტივად ჩავთვალოთ. ამის გამო, მასზე გადაზომილი ტოლი მონაკვეთები აგრეთვე ტოლი ორიგინალების (ე. ი. სივრცეში ტოლი მონაკვეთების) პერსპექტივა იქნება.

A_1B_0 და A_1B_1 წრფეებზე სივრცეში ერთი გარკვეული სიბრტყე გაივლის, რომლის არასაკუთრივი $F_\infty G$ წრფე, ცხადია, A_1B_1 წრფის არასაკუთრივ წერტილზე გაივლის და ამავე დროს A_1B_0 წრფის პარალელურად, რადგან ეს უკანასკნელი π სურათის პარალელური და ამის გამო მასზე გამავალი სიბრტყის კვალის პარალელურია (იხ.პ. 10, 1°). 1_01_1, 2_02_1 და B_0B_1 წრფეები G წერტილში კვეთს არასაკუთრივ $F_\infty G$ წრფეს, ე.ი. არასაკუთრივ წერტილში იკვეთება, ანუ სივრცეში პარალელური ყოფილა, რის გამოც A_1B_1 წრფეზე A_11_0, 1_02_0 და 2_0B_1 მონაკვეთების პროპორციულ (ე. ი. ურთიერთ ტოლ) მონაკვეთებს მოკვეთს.



ნახ. 42.



ნახ. 43.

იმავე ამოცანის გადასაწყვეტად დამხმარე A_1B_0 წრფე შეიძლებოდა სურათის x ფუძის პარალელურად აგვეღო (ნახ. 42), რაც ხშირად გამოხაზვას გააადვილებს. ამის შედეგად, თუ წინა აგებებს გავიმეორებთ, G წერტილი h ჰორიზონტზე აღმოჩნდება, სადაც თავს მოიყრის 1_01_1, 2_02_1 და B_0B_1 დამხმარე წრფეები. მაგრამ A_1B_0 წრფის ასეთი შერჩევა მიზანშეწონილი იქნება მაშინ, თუ ჰორიზონტის სიმაღლე, ანუ h და x წრფეთა შორის მანძილი, საკმარისად დიდია და წრფეთა გადაკვეთის წერტილების აგებისას ზედმეტ ცდომილებას არ გამოიწვევს. ყოველ შემთხვევაში მკითხველს უნდა ახსოვდეს, რომ დამხმარე A_1B_0 წრფის შერჩევა მხოლოდ მასზეა დამოკიდებული.

იგივე ამოცანა სხვა გზითაც გადავწყვიტოთ. სახელდობრ, შევეცადოთ, რომ მონაკვეთის ტოლ ნაწილებად დაყოფა უშუალოდ ამ მონაკვეთის AB პერსპექტივაზე განვიხილოთ (ნახ. 43).

ჯერ $AB(A_1B_1)$ წრფის არასაკუთრივი F_∞ წერტილი ავაგოთ, რისთვისაც A_1B_1 ფუძისა და h ჰორიზონტის გადაკვეთის $F_{1\infty}$ წერტილიდან h წრფის მართობი ავაგოთ AB წრფის გადაკვეთამდე. AB მონაკვეთის A ბოლოზე გატარებულია ნებისმიერი AB_0 წრფე და ზედ ნებისმიერი, ტოლი $A1_0$, 1_02_0, 2_0B_0 მონაკვეთია გადაზომილი.

AB და AB_0 წრფეთა წერტილებს შორის ისეთი პერსპექტიული თანადობა დავამყაროთ, რომ A წერტილი თავის თავს ეთანადებოდეს, B წერტილი B_0 წერტილს, F_∞ წერტილი კი—AB_0 წრფის არასაკუთრივ წერტილს. ასეთი თანადობისათვის პერსპექტიულობის ცენტრის მოსაძებნად საკმარისია თანადი წერტილები წრფეებით შევაერთოთ. სახელდობრ, B—B_0 წერტილთან და F_∞ კი—AB_0 წრფის არასაკუთარ წერტილთან, ე. ი. F_∞ წერტილზე AB_0 წრფის პარალელური წრფე გავატაროთ. BB_0 და $F_\infty G$ წრფეთა გადაკვეთის G წერტილი პერსპექტიულობის საძიებელი ცენტრი იქნება, რომელზედაც გაივლის $G1_0$ და $G2_0$ წრფეები. ამ წრფეთა AB წრფესთან გადაკვეთაში მიიღება 1 და 2 წერტილები. აქაც წინა შემთხვევის მსგავსად, მიღებული წერტილები ისეთი $1'$ და $2'$ წერტილების პერსპექტივას წარმოადგენს, რომლებიც სივრცეში $A'B'$ ორიგინალს სამ ტოლ ნაწილად ყოფს.

მართლაც, AB წრფესა და მის $A'B'$ ორიგინალს შორის პერსპექტიული თანადობაა დამყარებული, სადაც მზერის S წერტილი პერსპექტიულობის ცენტრს წარმოადგენს. ამ თანადობაში AB წრფის F_∞ წერტილს $A'B'$ ორიგინალის არასაკუთრივი F'_∞ წერტილი ეთანადება. მეორე მხრივ, AB წრფესა და AB_0 წრფეს შორის დამყარებულ ასეთივე თანადობაში იგივე F_∞ წერტილი AB_0 წრფის აგრეთვე არასაკუთრივ წერტილს ეთანადება. მაშასადამე, AB_0 წრფისა და $A'B'$ ორიგინალის წერტილებს შორის ისეთი გეგმილური თანადობაა დამყარებული, სადაც ერთი წრფის არასაკუთრივ წერტილს მეორე წრფის აგრეთვე არასაკუთრივი წერტილი ეთანადება. აქედან კი დავასკვნით, რომ 1 და 2 წერტილების $1'$ და $2'$ ორიგინალები ისევე ყოფენ $A'B'$ მონაკვეთს ტოლ ნაწილებად, როგორც 1_0 და 2_0 წერტილები—AB_0 მონაკვეთს.

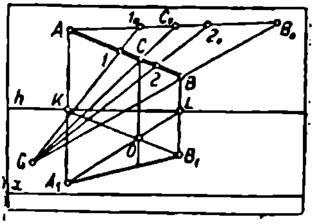
ნახაზზე მიღებული გეომეტრიული აგებანი სხვანაირადაც შეიძლება აიხსნას. სახელდობრ, AB_0 წრფე π სურათის პარალელური წრფის გეგმილად შეიძლება მივიღოთ, ამიტომ მასზე აღებული ტოლი მონაკვეთების ორიგინალები სივრცეში ტოლები იქნება.

AB_0 და AB წრფეები სივრცეში სიბრტყეს განსაზღვრავს, რომლის არასაკუთრივი $F_\infty G$ წრფე AB წრფის არასაკუთრივ F_∞ წერტილზე AB_0 წრფის პარალელურად გაივლის. ამის გამო G წერტილიც არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივა იქნება და, მაშასადამე, 1_0G, 2_0G და BG წრფეები სივრცეში პარალელური წრფეების პერსპექტივაა; აქედან კი ვასკვნით, რომ $A1$, 1—2, $2B$ მონაკვეთები სივრცეში ტოლი მონაკვეთების პროპორციული, ე. ი. თვითონაც ტოლი მონაკვეთები ყოფილა.

ზემოთ განხილული ამოცანის გადაწყვეტის ორივე შემთხვევაში (ნახ. 41, 42 და 43) მოცემული წრფის არასაკუთრივი წერტილით ან ამ წრფის ფუძის არასაკუთრივი წერტილით სარგებლობა დაგვჭირდა. ხშირად ეს

წერტილები იმდენად შორს, ნახაზის საზღვრებს გარეთ, შეიძლება მდებარეობდეს, რომ ზემოთ ნაჩვენები გეომეტრიული აგებანი საკმაოდ უხერხული აღმოჩნდება. ასეთ შემთხვევაში იგივე ამოცანა უფრო მოხერხებული გზით შეიძლება გადაიჭრას.

ამ ამოცანის გადასაჭრელად საჭირო გახდა მოცემულ წრფეზე სამი, სრულიად გარკვეული წერტილი გვქონოდა. წინა შემთხვევაში მოცემული $AB(A_1B_1)$ მონაკვეთის ბოლოებით და ამ წრფის არასაკუთრივი წერტილით ვისარგებლეთ. ახლა კი არასაკუთრივი წერტილი სხვა წერტილით უნდა შევცვალოთ. ამ ახალი წერტილის წრფეზე მდებარეობა სავსებით განსაზღვრული უნდა იყოს, ე. ი. ზუსტად უნდა ვიცოდეთ მისი დამოკიდებულება მონაკვეთის ბოლო წერტილებთან.



ნახ. 44.

ყველაზე ადვილი იქნება, თუ AB წრფეზე ისეთ C წერტილს ავიღებთ, რომლის C' ორიგინალი AB მონაკვეთის $A'B'$ ორიგინალს შუაზე ყოფს (ნახ. 44).

C წერტილის მოსაძებნად შემდეგნაირად მოვიქცეთ: ABB_1A_1 სიბრტყეში ისეთი მართკუთხედი ავაგოთ, რომლის ერთი გვერდი A_1B_1 მონაკვეთი იქნება, ხოლო დანარჩენი ორი გვერდი კი AA_1 და BB_1 წრფეებზე მდებარეობდეს. ყველაზე ადვილი იქნება, თუ AA_1 და BB_1 წრფეების h წრფესთან გადაკვეთის K და L წერტილებს ამ მართკუთხედის ორ წვეროდ მივიჩნევთ. ცხადია, რომ სივრცეში KL წრფე A_1B_1 წრფის პარალელურია და ამიტომ A_1KLB_1 ნაკვთი სივრცეში მართკუთხედს წარმოადგენს. მისი KB_1 და LA_1 დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილი მართკუთხედის ცენტრია. ცხადია, რომ O წერტილზე გატარებული შვეული OC წრფის A_1B_1 და AB მონაკვეთებთან გადაკვეთის წერტილები ორივე ამ მონაკვეთის შუა წერტილებს გვაძლევს.

ახლა A წერტილიდან ნებისმიერი მიმართულების AB_0 წრფეზე სამი ტოლი $A1_0$, 1_02_0 და 2_0B_0 მონაკვეთი გადავზომოთ, ხოლო შემდეგ AB_0 მონაკვეთის შუა C_0 წერტილი მოვძებნოთ.

AB და AB_0 წრფეებს შორის ისეთი პერსპექტიული თანადობა დავამყაროთ, რომ A წერტილი თავის თავს შეესაბამებოდეს, C_0 წერტილი—C წერტილს, ხოლო B_0—B წერტილს. თანადი წერტილების შემაერთებელი C_0C და B_0B წრფეები პერსპექტიულობის G ცენტრში გადაიკვეთება.

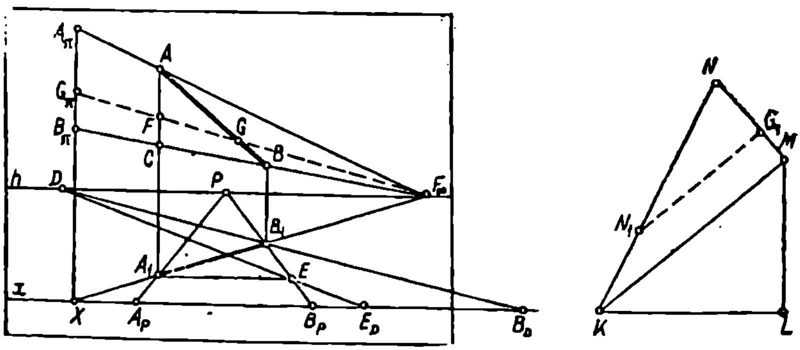
ცხადია, რომ მუდამ შეიძლება AB_0 მონაკვეთისა და მისი მიმართულების ისეთნაირად შერჩევა, რომ G წერტილი ნახაზის ფარგლებში აღმოჩნ-

დეს. ამის შემდეგ AB წრფეზე 1_0 და 2_0 წერტილების თანადი 1 და 2 წერტილები ავაგოთ.

რადგანაც სივრცეში ადგილი აქვს ტოლობას: $\frac{AC_0}{C_0B_0}=\frac{AC}{CB}$, ამიტომ CC_0 და BB_0 წრფეები პარალელური ყოფილა, ხოლო G წერტილი — ამ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილი.

ცხადია, რომ G წერტილში გამავალი 1_01 და 2_02 წრფეებიც ამ წრფეთა პარალელური იქნება და ამის გამო AB წრფესთან კვეთაში აგრეთვე ტოლ მონაკვეთებს მოგვცემს.

ა მ ო ც ა ნ ა 11. წრფის მონაკვეთის სიგრძის განსაზღვრა და წრფეზე მოცემული სიდიდის მონაკვეთის პერსპექტივის აგება (ნახ. 45).



ნახ. 45.

წინასწარ შევნიშნავთ, რომ ზემოთ განხილულ მე-10 ამოცანაში მოცემული არ გვქონდა არც სურათის მთავარი P წერტილი და არც მთავარი მანძილი, ანუ მზერის S წერტილის π სურათიდან დაშორება, რამდენადაც ამოცანის შედეგი ამ მონაცემებზე დამოკიდებული არ იყო. ამაში თვით ამოცანის გადაწყვეტის მსვლელობისას ვრწმუნდებით.

მე-11 ამოცანის გადაწყვეტისას ეს მონაცემები აუცილებელია. მართლაც, წრფის მონაკვეთის ცენტრალური გეგმილის სიდიდე და მდებარეობა არსებითად არის დამოკიდებული სივრცეში მზერის წერტილის მდებარეობაზე. ამის გამო 45-ე ნახაზზე სურათის მთავარი P წერტილიც არის მოცემული და დისტანციის ერთ-ერთი D წერტილიც. PD მონაკვეთი კი მთავარ მანძილს წარმოადგენს.

ჯერ ამოცანის პირველი ნაწილი განვიხილოთ.

მოცემულია $AB(A_1B_1)$ მონაკვეთი; მისი სიგრძის განსაზღვრისათვის შემდეგ ხერხს მივმართავთ. მონაკვეთის B ბოლოზე A_1B_1 ფუძის პარალელური BC წრფე გავავლოთ. ამისათვის A_1B_1 წრფის არასაკუთრივი F_∞

წერტილი ავაგოთ, რომელზედაც, ცხადია, BC წრფეც გაივლის. მივიღებთ ACB სამკუთხედს, რომლის $A'C'B'$ ორიგინალი მართკუთხა სამკუთხედი იქნება; AC და BC მონაკვეთები კათეტების პერსპექტივას წარმოადგენს, AB კი — ჰიპოტენუზის პერსპექტივას. კათეტების სიგრძის განსაზღვრით ჰიპოტენუზის სიდიდეც განისაზღვრება.

ჯერ AC კათეტის სიგრძე გავიგოთ. ამისათვის A წერტილზე BC წრფის პარალელური წრფე გავავლოთ, ე.ი. ეს წრფეც არასაკუთრივ F_∞ წერტილში უნდა გადიოდეს.

ახლა AF_∞ და BC წრფეთა A_π და B_π კვლები (ე. ი. π სურათთან გადაკვეთის წერტილები) ავაგოთ. ამისათვის საკმარისია A_1B_1 წრფისა და სურათის x ფუძის გადაკვეთის X წერტილზე AC წრფის პარალელურად XA_π წრფე გავატაროთ. ამ წრფის AF_∞ და BC წრფეებთან გადაკვეთა A_π და B_π წერტილებს მოგვცემს. AC და $A_\pi B_\pi$ მონაკვეთების ორიგინალები ტოლი უნდა იყოს, როგორც $A_\pi B_\pi CA$ მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები. მეორე მხრივ, $A_\pi B_\pi$ მონაკვეთი π სურათის სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ ნატურალური სიგრძით არის მოცემული და, მაშასადამე, AC მონაკვეთის სიგრძესაც გამოსახავს.

BC კათეტის სიგრძის განსაზღვრისას მხედველობაში მივიღოთ, რომ სივრცეში $CB=A_1B_1$, როგორც A_1CBB_1 მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები, ამიტომ საკმარისი იქნება A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძის გაგება.

A_1 და B_1 წერტილებიდან სურათის x ფუძეზე შესაბამისად A_1Ap და B_1Bp მართობები დავუშვათ. ეს იმას ნიშნავს, რომ სურათზე ეს წრფეები მთავარ P წერტილში უნდა გადიოდეს.

A_1 წერტილზე x წრფის პარალელური A_1E წრფე გავატაროთ. ცხადია, რომ A_1EB_1 სამკუთხედის ორიგინალი მართკუთხა სამკუთხედია, სადაც A_1B_1 მონაკვეთი ჰიპოტენუზაა. A_1E და $ApBp$ მონაკვეთები სივრცეში ტოლია; მეორე მხრივ, $ApBp$ მონაკვეთი ნამდვილი სიდიდით არის მოცემული. მაშასადამე, A_1E კათეტის სიგრძე განსაზღვრულია. B_1E მონაკვეთის სიგრძეს შემდეგნაირად გამოვარკვევთ:

B_1 და E წერტილებზე D წერტილში გამავალი DB_1 და DE წრფეები გავატაროთ. როგორც ვიცით, ეს წრფეები ურთიერთპარალელურია და სურათის x ფუძესთან 45°-ით დახრილი. აქედან გამომდინარეობს, რომ B_1BpB_D და $EBpE_D$ სამკუთხედები მართკუთხა და ტოლფერდა ყოფილა, ე. ი. პირველ სამკუთხედში $B_1Bp=BpB_D$, მეორეში კი — $EBp=BE_D$, საიდანაც ვასკვნით, რომ B_1E მონაკვეთი E_DB_D მონაკვეთის ტოლი უნდა იყოს.

ამგვარად, A_1EB_1 სამკუთხედის ორივე კათეტის სიგრძე განსაზღვრულია; სივრცეში $A_1E_1=ApBp$ და $B_1E=E_DB_D$.

A_1B_1 ჰიპოტენუზის ნატურალური ზომის განსაზღვრისათვის ნახაზის მარჯვენა ნაწილში აგებულია მართკუთხოვანი KLM სამკუთხედი, სადაც $KL=ApBp$, $LM=E_DB_D$.

ამგვარად, KLM სამკუთხედი A_1EB_1 სამკუთხედის ორიგინალის ტოლი ყოფილა და ამიტომ A_1B_1 მონაკვეთის ნატურალური სიგრძე KM ჰიპოტენუზის ტოლია.

რადგანაც სივრცეში $A_1B_1=BC$, ამიტომ ACB სამკუთხედის ორივე კათეტია განსაზღვრული: $AC=A_\pi B_\pi$ და $BC=KM$.

KM მონაკვეთის M ბოლოზე აგებულია KM წრფის მართობი, $A_\pi B_\pi$ მონაკვეთის ტოლი MN მონაკვეთი. ეჭვი არ არის, რომ KMN მართკუთხა სამკუთხედი ACB სამკუთხედის ორიგინალის ტოლია და KM ჰიპოტენუზა კი — AB მონაკვეთის ორიგინალის ტოლი.

ახლა ამოცანის მეორე ნაწილი განვიხილოთ (ნახ. 45). მოცემულ AB (A_1B_1) წრფეზე A წერტილიდან გადავზომოთ მოცემული NN_1 მონაკვეთის ტოლი AG მონაკვეთი.

დავუშვათ, რომ AG მონაკვეთი განვსაზღვრეთ და G წერტილმა AB წრფეზე რაღაც მდგომარეობა მიიღო. G წერტილზე AF_∞ და BF_∞ წრფეთა პარალელური GF_∞ წრფე გავატაროთ, რომელიც AC წრფეს F წერტილში კვეთს და სურათის სიბრტყეს კი—G_π წერტილში.

ცხადია, რომ ACB და AFG სამკუთხედების ორიგინალები მსგავსია. ამავე დროს ACB სამკუთხედი NMK სამკუთხედის ტოლია. N წერტილიდან NK ჰიპოტენუზაზე მოცემული NN_1 სიგრძის მონაკვეთი გადავზომოთ და N_1 წერტილიდან KM კათეტის პარალელური N_1G_1 წრფე გავატაროთ; მივიღებთ NGN_1 სამკუთხედს, რომელიც AFG სამკუთხედის ორიგინალის ტოლი იქნება; ამიტომ $NG_1=AF=A_\pi G_\pi$.

აქედან ვასკვნით, რომ დასმული ამოცანის გადაწყვეტისათვის ჯერ მოცემულ წრფეზე ნებისმიერი მონაკვეთი უნდა ავიღოთ და მისი ნატურალური სიგრძე განვსაზღვროთ, ისე, როგორც ეს 45-ე ნახაზზეა შესრულებული. შემდეგ იმავე წრფეზე მოცემული სიგრძის მონაკვეთი ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე აიგება.

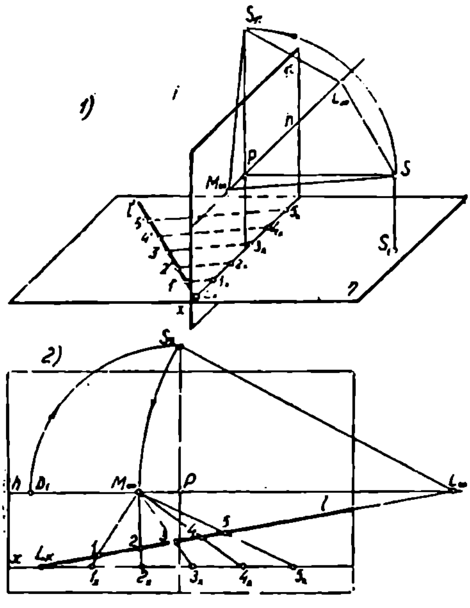
12. ზომის წერტილები. წრფეზე მონაკვეთების გადაზომვა პერსპექტივაში

ფუძეთა η სიბრტყეზე მოცემულია l' წრფე (ნახ. 46_1), რომელიც L_x წერტილში კვეთს სურათის x ფუძეს. l' წრფეზე მოცემულია წერტილთა მწკრივი — $1'$, $2'$, $3'$ და ა. შ. x წრფეზედაც მოცემულია წერტილთა ასეთივე მწკრივი—1_x, 2_x, 3_x და ა. შ. იმ პირობით, რომ $L_x1'=L_x1_x$; $L_x2'=L_x2_x$ და ა. შ. წერტილთა ყველა წყვილისათვის.

ცხადია, l' წრფისა და x წრფის წერტილთა წყვილებზე გატარებული წრფეები, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები, ურთიერთპარალელურია, ამის გამო სამკუთხედები—$1'L_x1_x$, $2'L_x2_x$ და ა.შ. მსგავსი და ტოლფერდა იქნება.

$1'1_x$, $2'2_x$, $3'3_x$ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივა რომ ავაგოთ, საკმარისია მზერის S წერტილზე მათი პარალელური SM_∞ სხივი გავატაროთ, რომელიც h ჰორიზონტს M_∞ წერტილში გადაკვეთს. ავაგოთ l' წრფის არასაკუთრივი წერტილის L_∞ პერსპექტივაც.

$SL_\infty M_\infty$ სამკუთხედი η სიბრტყეზე მიღებული სამკუთხედების მსგავსია, რადგან $SM_\infty \parallel 1'1_x$, $SL_\infty \parallel l'$ და $M_\infty L_\infty \parallel x$. მაშასადამე, $SL_\infty M_\infty$ სამკუთხედიც ტოლფერდა ყოფილა, სადაც $SL_\infty = M_\infty L_\infty$.



ნახ. 46.

ახლა გადავწყვიტოთ ასეთი ამოცანა:

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს l' წრფის l პერსპექტივა და სურათის x ფუძეზე L_x, 1_x, 2_x, 3_x... წერტილები (ნახ. 46_2). საჭიროა ავაგოთ l' წრფეზე განლაგებული წერტილების პერსპექტივა. ამისათვის საკმარისი იქნება $1_x1'$, $2_x2'$, $3_x3'$... წრფეთა პერსპექტივის აგება, რომლებიც l წრფეს საძიებელ წერტილებში გადაკვეთს.

ავაგოთ ამ წრფეთა არასაკუთრივი M_∞ წერტილი (ნახ. 46_1). $SL_\infty M_\infty$ სამკუთხედის სიბრტყე (ე. ი. ჰორიზონტის სიბრტყე) h წრფის ირგვლივ ბრუნვით π სურათს შევუთავსოთ. ამის შედეგად მზერის S წერტილი PS რადიუსით P ცენტრიდან რკალს შემოწერს და სურათის ღერძზე S_π მდებარეობას მიიღებს.

სურათზე (ნახ. 46_2) S_π წერტილს მივიღებთ, თუ სურათის ღერძზე P წერტილიდან PD_1 მონაკვეთის ტოლ PS_π მონაკვეთს გადავზომავთ (PS_π მონაკვეთი ჰორიზონტის ქვემოთაც შეგვეძლო გადაგვეზომა). ამგვარად, ტოლფერდა $S_\pi L_\infty M_\infty$ სამკუთხედის S_π და L_∞ წვეროები უკვე მივიღეთ. მესამე M_∞ წვეროს ასაგებად საკმარისია ჰორიზონტზე L_∞ წერტი-

ლიდან $L_\infty S_\pi$ მონაკვეთის ტოლი $L_\infty M_\infty$ მონაკვეთი გადავზომოთ, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.

მიღებულ M_∞ წერტილში გაივლის $1_x1'$, $2_x2'$... წრფეთა გეგმილები და l წრფესთან გადაკვეთაში მივიღებთ საძიებელ 1, 2, 3,... წერტილებს.

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ხერხი, რომლის საშუალებითაც შეგვიძლია ფუძეთა η სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი სიგრძის მონაკვეთი უშუალოდ სურათზე გამოვსახოთ. ამისათვის საკმარისი იქნება ეს მონაკვეთი ნატურალური ზომით ავიღოთ სურათის x ფუძეზე და მის ბოლოებზე გავატაროთ M_∞ წერტილში გამავალი წრფეები. ამ წრფეთა მოცემულ წრფესთან გადაკვეთის წერტილები განსაზღვრავენ საძიებელ მონაკვეთს. მაგალითად, ამავე ნახაზზე, თუ მხოლოდ l წრფე და M_∞ წერტილი გვექნება მოცემული და მოვისურვებთ, რომ l წრფეზე 2 წერტილიდან გადაიზომოს 2_x5_x მონაკვეთის ტოლი მონაკვეთი, შემდეგნაირად მოვიქცევით: $M_\infty 2$ წრფეს გავატარებთ, რომელიც x წრფეს 2_x წერტილში გადაკვეთს. x წრფეზე 2_x5_x მონაკვეთს ნატურალური ზომით ავიღებთ და 5_xM_∞ წრფეს გავატარებთ. l წრფეზე მიღებული 2—5 მონაკვეთი ამოცანის პასუხია.

შებრუნებით, თუ l წრფეზე მოცემულია, მაგალითად, 3—4 მონაკვეთი, მისი ნატურალური ზომის გასაგებად საკმარისია $M_\infty 3$ და $M_\infty 4$ წრფეები გავატაროთ, რომლებიც x წრფეზე საძიებელი ზომის 3_x4_x მონაკვეთს განსაზღვრავს.

M_∞ წერტილს ზ ო მ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება. 46-ე ნახაზზე მოცემულ გეომეტრიულ აგებათა შედეგად ადვილად დავასკვნით, რომ პარალელურ წრფეებს ერთი და იმავე ზომის წერტილი ექნება, ხოლო სხვადასხვა მიმართულების წრფეებს კი თავ-თავისი ზომის წერტილი. მაგალითად, სურათის სიბრტყესთან 45°-ით დახრილი წრფეების ზომის წერტილებს დისტანციის D_1 და D_2 წერტილები წარმოადგენს (ნახ. 40 და 45).

ახლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც სურათზე მოცემულია ზოგადი მდებარეობის $l(l_1)$ წრფე (ნახ.47) და საჭიროა ამ წრფეზე $L(L_1)$ წერტილიდან გადაიზომოს მოცემული R_0T_0 მონაკვეთის (ნახაზზე ზედა მარჯვენა კუთხეში) ტოლი მონაკვეთები.

ზემოთ განხილულ შემთხვევაში წრფე საგანთა სიბრტყეზე მდებარეობდა და ამოცანის გადაწყვეტისას, როგორც კი ზომის M_∞ წერტილი მოიძებნა, ყველა დამხმარე გეომეტრიული აგება ფუძეთა სიბრტყეზე მიმდინარეობდა.

ახლაც $l(l_1)$ წრფეზე სიბრტყე უნდა გავატაროთ, რომელზეც ანალოგიური დამხმარე აგება განხორციელდება. ასეთ სიბრტყედ π სიბრტყის მართობული α სიბრტყე მივიღოთ.

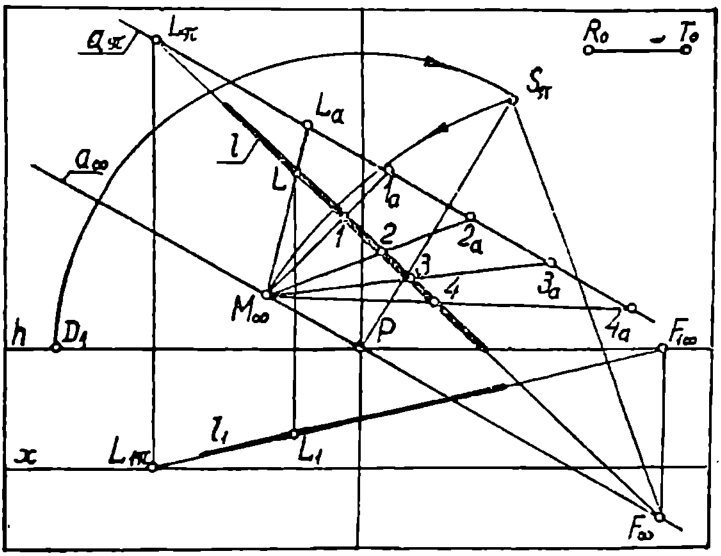
α სიბრტყის არასაკუთრივი a'_∞ წრფე აუცილებლად P წერტილზე გაივლის (იხ. პ. 10, 2°, ნახ. 30); ამავე დროს, რადგანაც $l(l_1)$ წრფე α სიბ-

რტყეში მდებარეობს, ამიტომ a_∞ წრფე მოცემული წრფის არასაკუთრივ F_∞ წერტილზეც უნდა გადიოდეს.

α სიბრტყის a_π კვალი ავაგოთ. a_π წრფე α სიბრტყის არასაკუთრივი a_∞ წრფის პარალელური უნდა იყოს. ამიტომ საკმარისია a_π წრფის ერთი წერტილი განვსაზღვროთ. ასეთ წერტილად $l(l_1)$ წრფის L_π კვალი შეიძლება გამოვიყენოთ, რომელზედაც a_π წრფეს a_∞ წრფის პარალელურად გავატარებთ.

ზომის M_∞ წერტილი a_∞ წრფეზე უნდა მდებარეობდეს და, როგორც ზემოთ გამოვარკვიეთ, $l(l_1)$ წრფის არასაკუთრივი F_∞ წერტილიდან იმავე მანძილით იქნება დაშორებული, როგორც მზერის S წერტილი.

ისევე, როგორც წინა ამოცანაში, აქაც ტოლფერდა $SF_\infty M_\infty$ სამკუთხედი α სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეშია. $SF_\infty M_\infty$ სამკუთხედის სიბრტყე π სიბრტყეს შევუთავსოთ. M_∞ და F_∞ წერტილები უძრავად დარჩება, S წერტილი კი შეუთავსდება π სიბრტყის S_π წერტილს, რომელიც P წერტილიდან a_∞ წრფისადმი ამართულ PS_π მართობზე მდებარეობს და a_∞ წრფიდან მთავარი მანძილითაა დაშორებული.



ნახ. 47.

a_∞ წრფეზე F_∞ წერტილიდან $F_\infty S_\pi$ სიგრძის $F_\infty M_\infty$ მონაკვეთი გადავზომოთ. მიღებული M_∞ წერტილი $l(l_1)$ წრფის ზომის წერტილია.

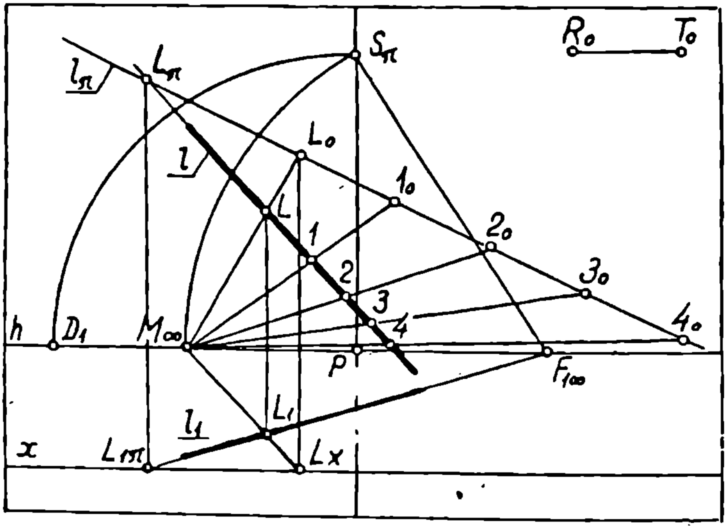
ახლა L წერტილზე a_π წრფის გადაკვეთამდე LM_∞ წრფე გავატაროთ. L_a წერტილიდან a_π წრფეზე R_0T_0 მონაკვეთის ტოლი L_a1_a, 1_a2_a და ა. შ.

მონაკვეთები ავაგოთ. მიღებული 1_0, 2_0,... წერტილები კი წრფეებით M_∞ წერტილთან შევაერთოთ. ეს წრფეები l წრფესთან გადაკვეთაში განსაზღვრავს საძიებელ L—1, 1—2, 2—3,... მონაკვეთებს.

იგივე ამოცანა სხვა გზით გადავწყვიტოთ (ნახ. 48).

$l(l_1)$ წრფის $L_\pi(L_{1\pi})$ კვალი ავაგოთ. $LL_1L_{1\pi}L_\pi$ სიბრტყე η სიბრტყის მართობულია; ამ სიბრტყეში მდებარეობს l წრფე და მისი l_1 ფუძე. ეს სიბრტყე π სურათს $L_\pi L_{1\pi}$ წრფეზე კვეთს. $LL_1L_{1\pi}L_\pi$ სიბრტყე $L_\pi L_{1\pi}$ წრფის ირგვლივ ვაბრუნოთ π სიბრტყესთან შეთავსებამდე. მაშინ, ცხადია, l_1 წრფე სურათის x ფუძეს შეუთავსდება, l წრფე კი—π სიბრტყეზე გარკვეულ l_π მდებარეობას დაიკავებს, რომელიც უნდა ვიპოვოთ.

ჯერ l_1 წრფის M_∞ ზომის წერტილი ავაგოთ ცნობილი წესით (ნახ. 46); შემდეგ $M_\infty L_1$ წრფე გავატაროთ, რომელიც x წრფესთან კვეთაში L_x წერტილს მოგვცემს. როგორც ვიცით, $L_{1\pi}L_1=L_{1\pi}L_x$, რაც იმას ნიშნავს, რომ, როდესაც $LL_1L_{1\pi}L_\pi$ სიბრტყე π სიბრტყეს შეუთავსდება, L_1 წერტილი $L_{1\pi}L_1$ რადიუსით η სიბრტყეში წრეწირს შემოწერს და L_x წერტილს შეუთავსდება. ამიტომ LL_1 მონაკვეთი L_x წერტილში გამავალ L_xL_0 წრფეს შეუთავსდება.



ნახ. 48.

L წერტილის შეთავსებული მდებარეობის მოსაძებნად $M_\infty L$ წრფე გავატაროთ L_xL_0 წრფის L_0 წერტილის გადაკვეთამდე. LL_1 და L_0L_x მონაკვეთები სივრცეში ტოლია, როგორც $M_\infty L_0$ და $M_\infty L_x$ პარალელურ წრფეებს შორის მოთავსებული პარალელური მონაკვეთები. მაშასადამე, L წერტილი L_0 წერტილში შეთავსდება.

L_π წერტილი უძრავია, როგორც ბრუნვის ღერძზე მდებარე. აქედან ვასკვნით, რომ l წრფე შეთავსების შემდეგ l_π მდებარეობას მიიღებს, რომელიც L_π და L_0 წერტილებზე გადის.

საკმარისია L_0 წერტილიდან l_π წრფეზე R_0T_0 მონაკვეთის ტოლი $L_0 1_0$, $1_0 2_0$,... მონაკვეთები გადავზომოთ და 1_0, 2_0... წერტილები M_∞ ზომის წერტილს შევუერთოთ. l წრფეზე მივიღებთ საძიებელ L—1, 1—2, 2—3,... მონაკვეთებს.

18. კუთხე ორ წრფეს შორის

ფუძეთა სიბრტყეზე მოცემულია O' წერტილზე გამავალი და სურათის სიბრტყესთან 45°-ით დახრილი ორი a' და b' წრფე (ნახ. 49_1). ცხადია, რომ $a' \perp b'$.

როგორც ვიცით, ამ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილების პერსპექტივა, შესაბამისად, D_1 და D_2 დისტანციის წერტილებია, შესაბამისი SD_1 და SD_2 სხივები კი ურთიერთმართობულია.

დავუშვათ, რომ a' წრფე η სიბრტყეში O' წერტილის ირგვლივ ნებისმიერი კუთხით მოვაბრუნეთ, რის შედეგადაც მან $\bar{a}'$ მდებარეობა მიიღო. $\bar{a}'$ წრფის არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივის მისაღებად S წერტილზე ვატარებთ მის პარალელურ SF_1 სხივს. ჰორიზონტზე მივიღებთ F_1 წერტილს. ცხადია, რომ კუთხე SD_1 და S_1F_1 სხივებს შორის a' და $\bar{a}'$ წრფეთა შორის კუთხის ტოლია.

η სიბრტყეში O' წერტილზე $\bar{a}'$ წრფის მართობული $\bar{b}'$ წრფე გავატაროთ. $\bar{b}'$ წრფის არასაკუთრივი წერტილის F_2 პერსპექტივის მისაღებად ვატარებთ SF_2 სხივს ($SF_2 \parallel \bar{b}'$). D_2SF_2 კუთხე b' და $\bar{b}'$ წრფეთა შორის კუთხის ტოლია, F_1SF_2 კუთხე კი მართი კუთხეა, როგორც $\bar{a}'$ და $\bar{b}'$ წრფეთა შორის კუთხის ტოლი.

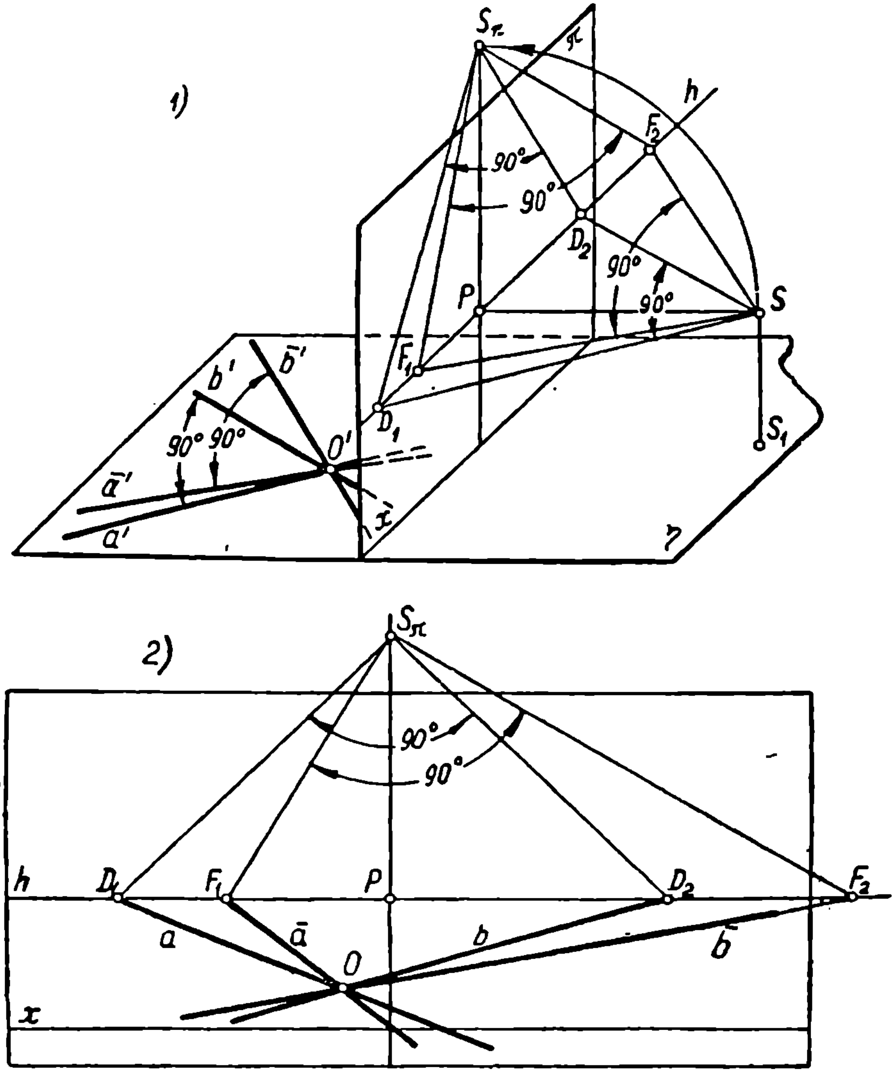
ყველა აქ განხილული გეომეტრიული დამოკიდებულების საფუძველზე ჩვენ უშუალოდ სურათზე შეგვიძლია ავაგოთ წრფეების პერსპექტივა, რომლებიც სივრცეში ურთიერთ გადაკვეთისას მოცემულ კუთხეს ქმნიან. ამისათვის წინასწარ SD_1D_2 ჰორიზონტის სიბრტყე სურათის π სიბრტყეს შევუთავსოთ, როგორც წინა შემთხვევაში მოვიქეცით.

დავუშვათ, რომ სურათზე (ნახ. 49_2) მოცემულია O' წერტილის O პერსპექტივა. ავაგოთ a' და b' წრფეთა პერსპექტივა. ამისათვის O წერტილზე D_1 და D_2 წერტილებში გამავალი a და b წრფეები ავაგოთ.

$\bar{a}'$ წრფის პერსპექტივის ასაგებად S_π წერტილზე $S_\pi F_1$ წრფე გავატაროთ, რომელიც ისეთ კუთხეს უნდა შეადგენდეს $S_\pi D_1$ წრფესთან, როგორსაც სივრცეში a' და $\bar{a}'$ წრფეები ადგენენ. O და F_1 წერტილებზე გატარებული $\bar{a}$ წრფე $\bar{a}'$ წრფის პერსპექტივაა.

$\bar{b}'$ წრფის პერსპექტივის ასაგებად S_π წერტილზე SF_1 წრფის მართობული $S_\pi F_2$ წრფე გავატაროთ. O და F_2 წერტილებზე გაივლის $\bar{b}'$ წრფის $\bar{b}$ პერსპექტივა.

ჩვენ შეგვიძლია შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტა. სახელდობრ, თუ სურათზე მოცემულია, მაგალითად, ორი წრფის b და $\bar{b}$ პერსპექტივა,



ნახ. 49.

მათ შორის კუთხის განსაზღვრისათვის საკმარისია ამ წრფეთა არასაკუთრივი D_2 და F_2 წერტილები S_π წერტილს წრფეებით შევუერთოთ ზემოთ მოყვანილი აგების საფუძველზე. $S_\pi D_2$ და $S_\pi F_2$ წრფეთა შორის კუთხე ამოცანის პასუხი უნდა იყოს.

14. გეომეტრიული სხეულების პერსპექტივის აგება. უმარტივესი ამოცანები

ა მ ო ც ა ნ ა 12. ავაგოთ მართკუთხა $1'2'3'4'5'6'7'8'$ პარალელეპიპედის (ციფრებით აღნიშნულია მისი წვეროები) პერსპექტივა მოცემული ზომების მიხედვით და შემდეგი პირობების დაცვით:

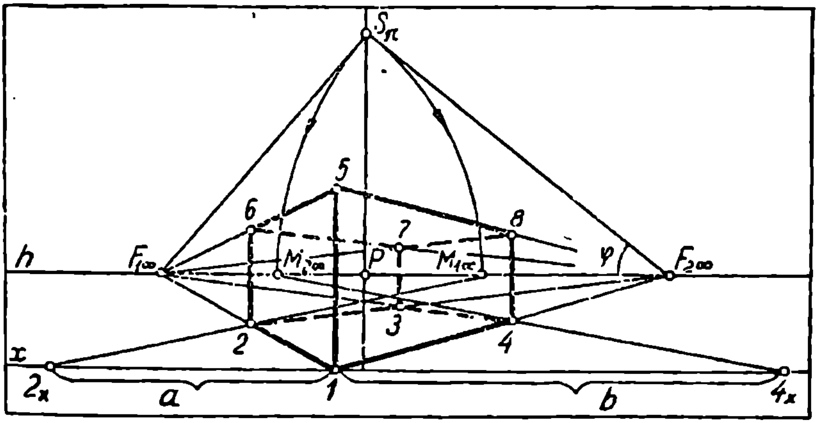
1) პარალელეპიპედის $1'2'3'4'$ წახნაგი ფუძეთა η სიბრტყეზე მდებარეობს, ამიტომ ამ წახნაგს პარალელეპიპედის ფუძე ვუწოდოთ.

2) ფუძის $1'$ წვერო მდებარეობს სურათის x ფუძეზე, ამიტომ $1'$ წვეროზე გამავალი შვეული წიბო სურათის π სიბრტყეში მდებარეობს.

3) ფუძის $1'4'$ გვერდი x წრფესთან დახრილია φ კუთხით.

4) ფუძის გვერდების სიგრძეა a და b, პარალელეპიპედის სიმაღლე—c. a, b და c სიმბოლოებით წიბოების გაზომვის შედეგად მიღებული რიცხვებია აღნიშნული.

გარდა ამისა, მოცემულია მთავარი მანძილი $S_\pi P$ და ჰორიზონტის სიმაღლე (ნახ. 50).



ნახ. 50.

პარალელეპიპედის $1'2'3'4'$ ფუძის ასაგებად მოვძებნოთ ფუძის გვერდების არასაკუთრივი წერტილები.

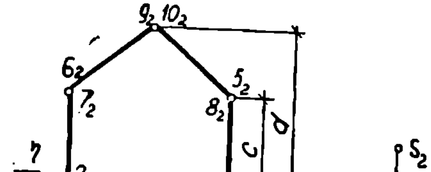
რადგან ფუძის $1'4'$ გვერდი სურათის x ფუძესთან φ კუთხით არის დახრილი, ამიტომ S_π წერტილზე გავატაროთ ჰორიზონტთან ამავე კუთხით

დახრილი $S_\pi F_{2\infty}$ წრფე. $F_{2\infty}$ წერტილი 1′4′ წრფის არასაკუთრივი წერტილია. თუ S_π წერტილზე $S_\pi F_{2\infty}$ წრფის მართობულ $S_\pi F_{1\infty}$ წრფეს გავატარებთ, მივიღებთ 1′4′ წიბოს მართობული წრფეების არასაკუთრივ $F_{1\infty}$ წერტილს.

ფუძის 1′ წვეროს 1 პერსპექტივა სურათის ფუძეზე ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ, რადგან მისი მდებარეობის განმსაზღვრელი სხვა პირობა მოცემული არ არის. 1 წერტილი $F_{1\infty}$ და $F_{2\infty}$ წერტილებთან წრფეებით შევაერთოთ. $1F_{2\infty}$ წრფეზე მდებარეობს 1—4 წიბო, $1F_{1\infty}$ წრფეზე კი—1—4 წიბოს მართობული 1—2 წიბო.

მე-2 და მე-4 წერტილების ასაგებად $1F_{1\infty}$ და $1F_{2\infty}$ წრფეთათვის ზომის $M_{1\infty}$ და $M_{2\infty}$ წერტილები ავაგოთ ცნობილი ხერხით.

1—2 წიბოს ასაგებად x წრფეზე 1 წერტილიდან 1—2 წიბოს ნატურალური ზომის ტოლი a მონაკვეთი გადავზომოთ, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. მიღებულ 2_x წერტილზე $2_xM_{1\infty}$ წრფე გავატაროთ, რომელიც $1F_{1\infty}$ წრფეს მე-2 წერტილში გადაკვეთს. მსგავსადვე ავაგებთ 1—4 წიბოს. ამისათვის x წრფეზე აგებულია 1—4 წიბოს ნატურალური ზომის ტოლი b მონაკვეთი და $4_xM_{2\infty}$ წრფის გატარებით $1F_{2\infty}$ წრფეზე მიღებულია მე-4 წერტილი.



ნახ. 51.

ახლა მე-2 წერტილზე $1F_{2\infty}$ წრფის პარალელური $2F_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ, მე-4 წერტილზე კი—$1F_{1\infty}$ წრფის პარალელური $4F_{1\infty}$ წრფე; ეს ორი წრფე ურთიერთ გადაკვეთაში მე-3 წერტილს, ე. ი. საძიებელი ოთხკუთხედის მეოთხე წვეროს, განსაზღვრავს.

პარალელეპიპედის შვეული წიბოების ასაგებად ფუძის წვეროებზე წინასწარ გავატაროთ h ჰორიზონტის მართობული წრფეები. 1—5 წიბო სურათის სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ, 1 წერტილიდან ზემოთ c სიგრძის 1—5 მონაკვეთი გადავზომოთ. მიღებული წერტილი პარალელეპიპედის ზედა წახნაგის ერთ-ერთი წვეროა. ამ წვეროზე 1—2 და 1—4 წრფეების შესაბამისად პარალელური $5F_{1\infty}$ და $5F_{2\infty}$ წრფეები გავატაროთ, რომლებიც 2—6 და 4—8 წიბოებთან კვეთაში მოგვცემენ ზედა წახნაგის კიდევ ორ წვეროს. მე-7 წერტილი მიიღება მე-3 წერტილის ანალოგიურად.

ა მ ო ც ა ნ ა 13. ავაგოთ მარტივი ფორმის შენობის პერსპექტივა.

შენობა მოცემულია სქემატურად, ორთოგონალური გეგმილებით, ზედხედით (გეგმა) და წინხედით (წინა ფასადი) (ნახ. 51). მოცემულია აგრეთვე მზერის (S_1, S_2) წერტილი და მთავარი სხივის მიმართულება. S_1P მთავარი სხივი მხოლოდ ზედხედშია მოცემული, რადგან ცნობილია, რომ ის თარაზული სიბრტყის პარალელურია.

სურათის π სიბრტყე, ცხადია, მთავარი სხივის მართობულად უნდა ავიღოთ, მაგრამ მისი დაშორება მზერის წერტილიდან მხოლოდ იმაზეა დამოკიდებული, თუ რა ზომის პერსპექტივა გვინდა მივიღოთ; რაც უფრო მეტადაა დაშორებული π სიბრტყე S წერტილიდან, მით უფრო დიდი ზომის პერსპექტიულ გამოსახულებას მივიღებთ.

ვთქვათ, რომ π სიბრტყე შენობის 2—6 წიბოზე გადის. ფუძეთა η სიბრტყე შენობის ფუძეზე გავატაროთ.

პერსპექტივის ასაგებად (ნახ. 52) ჰორიზონტი და სურათის ფუძე გავატაროთ. ცხადია, რომ h და x წრფეთა შორის მანძილი S წერტილის η სიბრტყიდან დაშორების ტოლი უნდა იყოს; ამ ზომას ორთოგონალური გეგმილებიდან ვიღებთ. h ჰორიზონტზე მთავარი P წერტილი ავიღოთ, საიდანაც h წრფის მართობი აღვმართოთ და ზედ მთავარი მანძილის ტოლი PS_π მონაკვეთი გადავზომოთ.

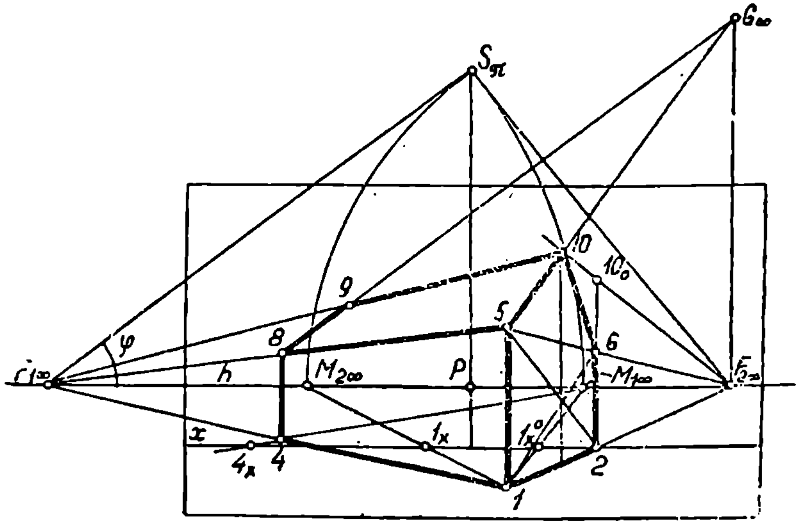
ავაგოთ შენობის თარაზული წიბოების არასაკუთრივი წერტილები. აქაც, როგორც წინა ამოცანებში, თარაზულ წიბოებს ორი, ურთიერთმართობი მიმართულება აქვს, ამიტომ ორი არასაკუთრივი წერტილის აგება მოგვიხდება. 1—4 წიბო და მისი პარალელური წიბოები π სიბრტყესთან φ კუთხით არის დახრილი (ნახ. 51). ამიტომ მათი არასაკუთრივი წერტილების ასაგებად S_π წერტილზე ჰორიზონტთან φ კუთხით დახრილი $S_\pi F_{1\infty}$ სხივი გავატაროთ. 1—2 წიბო და მისი პარალელური წიბოები 1—4 წიბოს მართობულია; ამიტომ S_π წერტილზე $S_\pi F_{1\infty}$ სხივის მართობული $S_\pi F_{2\infty}$ სხივი გავატაროთ და მეორე არასაკუთრივ წერტილს მივიღებთ.

თარაზული წიბოებისათვის ზომის $M_{1\infty}$ და $M_{2\infty}$ წერტილებს ცნობილი ხერხით ავაგებთ.

ახლა უკვე შეგვიძლია შენობის პერსპექტივის აგებას შევუდგეთ. დავიწყოთ შენობის ფუძიდან.

შევნიშნავთ, რომ არქიტექტურულ პრაქტიკაში პერსპექტიულ გამოსახულებაზე ობიექტის მხოლოდ ხილვად მხარეს აჩვენებენ, ასეთი წესი თვით პერსპექტივის დანიშნულებიდან გამომდინარეობს. უხილავი ელემენტები, როგორც დამხმარე საშუალება, საჭიროების მიხედვით მხოლოდ პერსპექტივის აგების პროცესში გამოისახება ხოლმე. ამიტომ აქ ჩვენ შენობის მხოლოდ ხილვადი ნაწილების პერსპექტივას ავაგებთ.

შენობის ფუძის აგება მიზანშეწონილია მე-2 წერტილიდან დავიწყოთ, რადგან ის სურათის x ფუძეზე მდებარეობს. იგი სურათის ღერძიდან მარჯვნივ e მანძილითაა დაშორებული (ნახ. 51). მე-2 წერტილზე $2F_{2\infty}$



ნახ. 52.

წრფე გავატაროთ, რომელზედაც 1—2 წიბო მდებარეობს. 1—2 წიბოს a სიგრძე უშუალოდ ორთოგონალური გეგმილიდან ავიღოთ და x წრფეზე მე-2 წერტილიდან მარცხნივ გადავზომოთ. მიღებულ 1_x წერტილზე $1_xM_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ 1—2 წრფის გადაკვეთამდე. შემდეგ გავატაროთ $1F_{1\infty}$ წრფე; მასზე მდებარეობს 1—4 წიბო. მე-4 წერტილის ასაგებად გამოვიყენოთ $1F_{1\infty}$ წრფის ზომის წერტილი — $M_{1\infty}$. $1M_{1\infty}$ წრფის გატარებით x წრფესთან გადაკვეთაში მივიღებთ 1^0_x წერტილს, საიდანაც x წრფეზე 1—4 წიბოს b სიგრძე გადავზომოთ ($b=1^0_x4_x$); $4_xM_{1\infty}$ წრფე $1F_{1\infty}$ წრფესთან კვეთაში საძიებელ მე-4 წერტილს მოგვცემს.

ახლა შენობის შვეული წიბოები ავაგოთ. 1, მე-2 და მე-4 წერტილებზე წინასწარ შვეული წრფეები გავატაროთ. 2—6 წიბო სურათის სიბრტყეშია და ამიტომ მისი c სიმაღლე უშუალოდ ფასადიდან სურათზე შეუცვლელად გადავიტანოთ. რადგან ყველა შვეული წიბო ტოლია, ამიტომ საკმარისია მე-6 წერტილზე $6F_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ 1—5 წრფის მე-5 წერტილში გადაკვეთამდე, მე-5 წერტილზე კი — $5F_{1\infty}$ წრფე, რომელიც 4—8 წიბოს ზედა წერტილს მოგვცემს. ამით დამთავრდა შენობის 1—5—8—4 წახნაგის აგება, რომელიც მართკუთხედს წარმოადგენს.

წინა წახნაგის ასაგებად საკმარისია მე-10 წერტილი ავაგოთ. ამ წახნაგს სიმეტრიის შვეული ღერძი აქვს, რომელზედაც მე-10 წერტილი მდებარეობს. მაშასადამე, ჯერ სიმეტრიის ღერძი ავაგოთ. ამისათვის 1—6 და 2—5 წრფეები გავატაროთ. ეს წრფეები სივრცეში 1—2—6—5 მართკუთხედის დიაგონალებს წარმოადგენს და ამიტომ მათი გადაკვეთის წერტილზე გაივლის 1—5—10—6—2 ხუთკუთხედის საძიებელი სიმეტრიის ღერძი.

მე-10 წერტილი შენობის ფუძიდან d სიმაღლეზეა. ეს სიგრძე შეგვიძლია 2—6 წრფეზე მე-2 წერტილიდან ზემოთ გადავზომოთ და მიღებული 10° წერტილი $F_{2\infty}$ წერტილს შევუერთოთ. $10^\circ F_{2\infty}$ წრფე აგებულ სიმეტრიის ღერძთან გადაკვეთაში მე-10 წერტილს მოგვცემს. მე-5 და მე-6 წერტილები მე-10 წერტილს შევუერთოთ და შენობის წინა წახნაგი აგებული იქნება.

მე-10 წერტილზე 5—8 წრფის პარალელურად გადის 9—10 წიბო, ე.ი. სახურავის კეხი. მის ასაგებად 10—$F_{1\infty}$ წრფე გავატაროთ.

საბოლოოდ, სახურავის ხილვადი 5—8—9—10 ნაწილის აგება რომ დასრულდეს, ამისათვის 8—9 წრფის გატარებაა საჭირო. სივრცეში ეს წრფე 5—10 წრფის პარალელურია. მოვძებნოთ ამ წრფეთა არასაკუთრივი G_∞ წერტილი.

5—10 წრფე უკვე აგებული 1—2—6—10—5 ხუთკუთხედის სიბრტყეში მდებარეობს და ამიტომ მისი არასაკუთრივი წერტილი ამ სიბრტყის არასაკუთრივ წრფეზე უნდა მდებარეობდეს. რადგან ხუთკუთხედის სიბრტყე შვეულია, მისი არასაკუთრივი წრფე h ჰორიზონტის მართობულად გაივლის. ამ სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე $F_{2\infty}$ წერტილზე გამავალი შვეული $F_{2\infty}$ G_∞ წრფე იქნება.

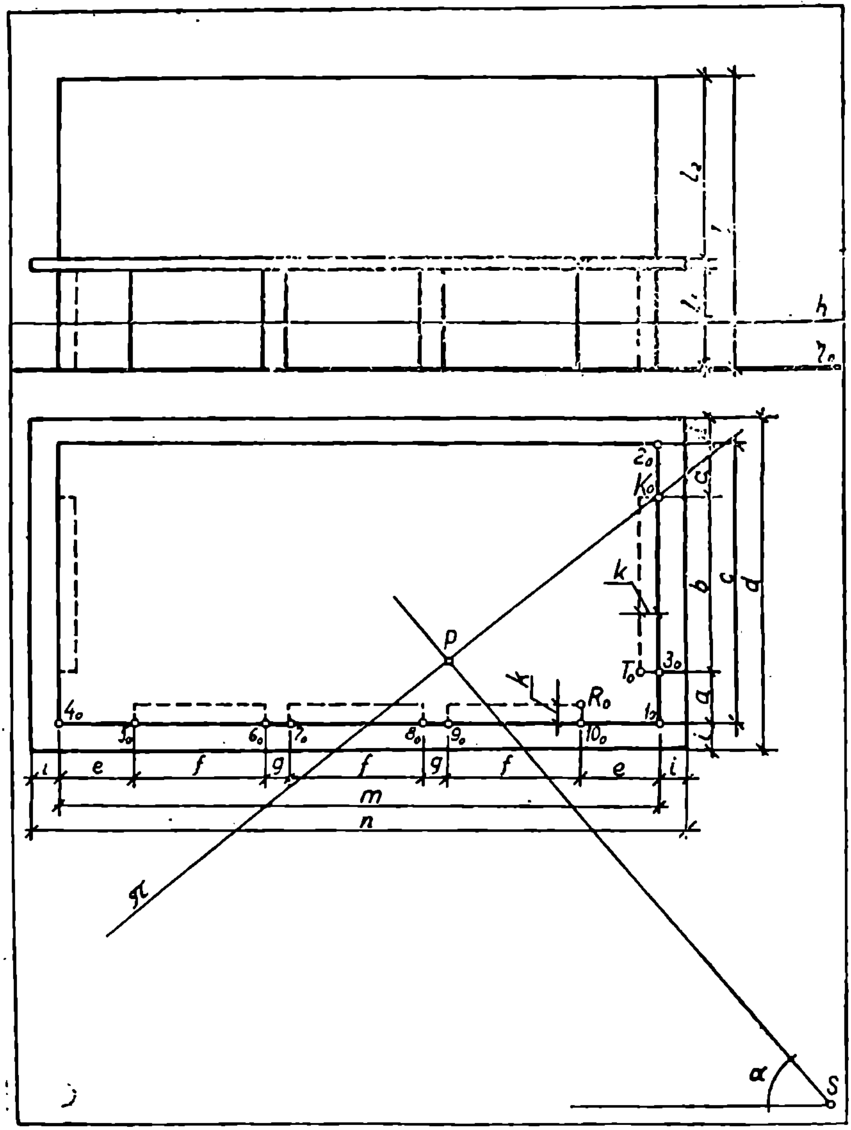
5—10 წრფისა და $F_{2\infty}G_\infty$ წრფის გადაკვეთის G_∞ წერტილი 5—10 წრფის არასაკუთრივი წერტილია. მაშასადამე 8—9 წრფეც G_∞ წერტილში უნდა გავატაროთ, რითაც პერსპექტივის აგება დამთავრებულია.

ა მ ო ც ა ნ ა 14. მოცემულია შენობის გეგმა და ფასადი (ნახ. 53). ამოცანის მიზანია, აიგოს პერსპექტივა, როდესაც შენობის ფასადი დანაწევრებულია შვეული და თარაზული ელემენტებით.

გეგმაზე ნაჩვენებია სურათის π სიბრტყე, რომელიც გადის შენობის K_0 წერტილზე, და მზერის S წერტილი. მოცემულია α კუთხე, რომელსაც შეადგენს მთავარი SP სხივი შენობის წინა ფასადის სიბრტყესთან. ფასადზე გატარებულია h ჰორიზონტი. მიწის ზედაპირი წარმოდგენილია თარაზულ სიბრტყედ და η_0 სიმბოლოთია აღნიშნული.

პერსპექტივის ასაგებად (ნახ. 54) გატარებულია h ჰორიზონტი, ზედ აღებულია მთავარი P წერტილი და ისევე, როგორც წინა შემთხვევებში, მოძებნილია პარალელურ წრფეთა არასაკუთრივი $F_{1\infty}$, $F_{2\infty}$ წერტილები და აგრეთვე ზომის $M_{1\infty}$ და $M_{2\infty}$ წერტილები.

საჭიროა აგრეთვე განისაზღვროს სურათის x ფუძე და ამით ფუძე
η სიბრტყის მდგომარეობაც.



ნახ. 53.

წინა ამოცანაში მიწის ზედაპირი, რომელიც აგრეთვე თარაზულ სიბრტყედ იგულისხმებოდა, ფუძეთა η სიბრტყედ მივიღეთ.

ახლა მიწის ზედაპირი, ანუ η_0 სიბრტყე, მზერის S წერტილთან მეტად ახლოა, ამიტომ მისი საგანთა სიბრტყედ მიღება უხერხულობას გამოიწვევს; უხერხულობა მდგომარეობს იმაში, რომ ჩვენ საკმაოდ ვიწრო ზოლში, h ჰორიზონტსა და სურათის x ფუძეს შორის, დაგვჭირდება დამხმარე წრფეების მნიშვნელოვანი რაოდენობის გატარება და ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილების ზუსტად მოძებნა. ამ უხერხულობის თავიდან აცილება ადვილად შეიძლება.

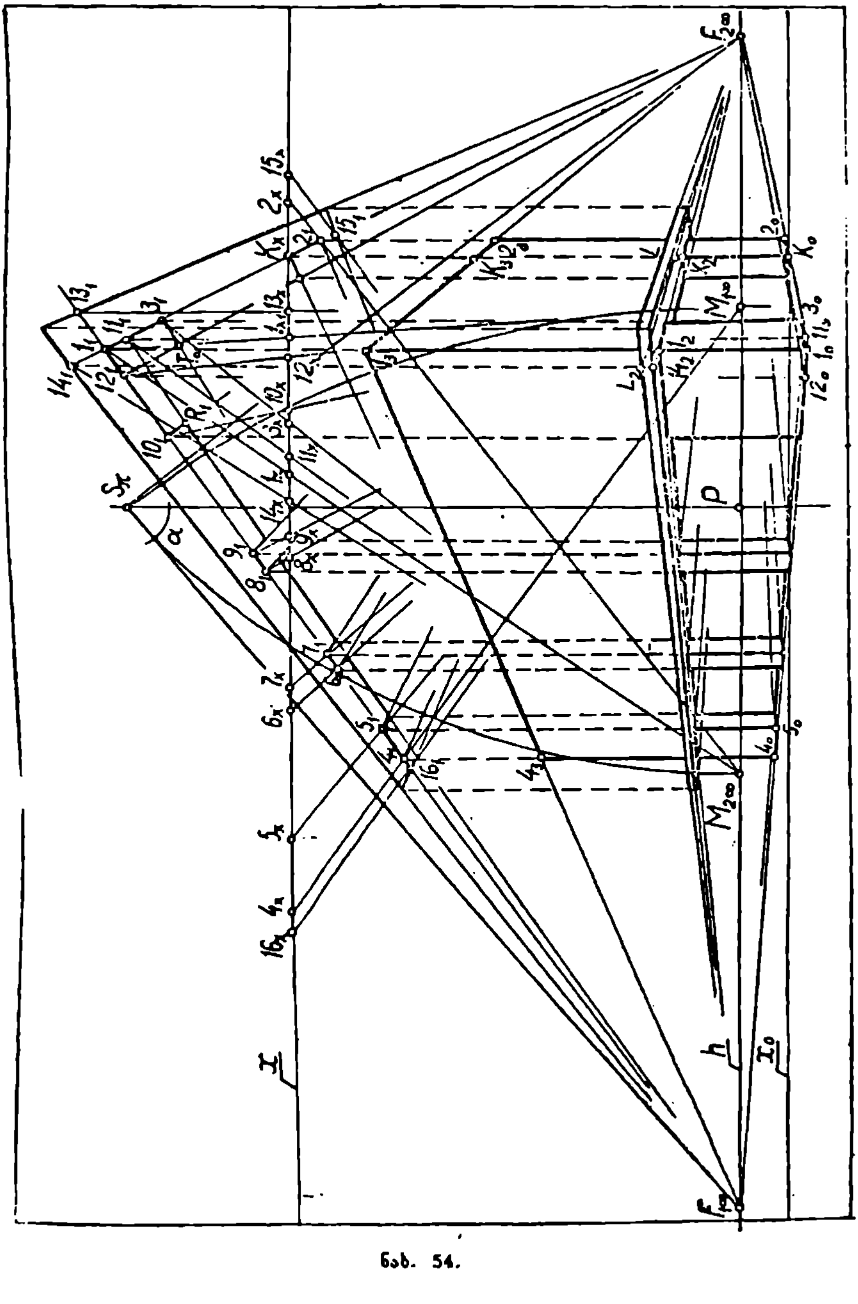
უნდა გვახსოვდეს, რომ ფუძეთა η სიბრტყის არჩევა სრულიად ნებისმიერად შეგვიძლია, იმ პირობით კი, რომ ის მზერის წერტილზე არ გადიოდეს, რადგან ამ შემთხვევაში მასზე მდებარე ყველა წერტილების პერსპექტივას ერთ წრფეზე მივიღებთ. რაც უფრო მეტადაა ფუძეთა სიბრტყე მზერის წერტილიდან დაშორებული, მით უფრო მკაფიოდ გამოისახება სივრცეში მოცემული წერტილებისა და წრფეების ფუძეთა პერსპექტივა; ამის შესახებ ზემოთაც იყო ნათქვამი.

სწორედ ამიტომ, ახლა η სიბრტყე მზერის წერტილიდან საკმაოდ შორს, და ამავე დროს, მის ზემოთ არის აღებული. η სიბრტყის მდებარეობას სურათის x ფუძე განსაზღვრავს (ნახ. 54).

ჯერ ავაგოთ შენობის ფუძის პერსპექტივა. აგებას დავიწყებთ K_0 წერტილიდან, რომლის K_x ფუძე სურათის x ფუძეზე იდება, სურათის ღერძიდან PK_0 მანძილით დაშორებული (ნახ. 53). K_x წერტილზე ტარდება $K_xF_{2\infty}$ წრფე — 1_02_0 წრფის ფუძე. 1_0 წერტილის ფუძის ასაგებად ზედხედიდან ავიღებთ K_01_0 მონაკვეთის ზომას და K_x წერტილიდან x წრფეზე გადავზომავთ. ვატარებთ $1_xM_{2\infty}$ წრფეს $K_xF_{2\infty}$ წრფის 1_1 წერტილში გადაკვეთამდე. 1_1 წერტილზე ვატარებთ $1_1F_{1\infty}$ და $1_1F_{2\infty}$ წრფეებს.

$1_1F_{1\infty}$ წრფეზე ავიღოთ ზედხედში აღნიშნული 4_0, 5_0, 6_0, 7_0, 8_0, 9_0 და 10_0 წერტილების ფუძეები. ამისათვის ვატარებთ $1_1M_{1\infty}$ წრფეს x ფუძის 1_{x1} წერტილში გადაკვეთამდე. ზედხედიდან ავიღებთ ზემოაღნიშნულ წერტილებს შორის e, f და g მანძილებს და 1_{x1} წერტილიდან x წრფეზე გადავზომავთ. მივიღებთ, შესაბამისად, 4_x, 5_x, 6_x, 7_x, 8_x, 9_x, და 10_x წერტილებს. ამ წერტილებზე გავატარებთ $M_{1\infty}$ წერტილზე გამავალ წრფეებს $1_1F_{1\infty}$ წრფის გადაკვეთამდე. მივიღებთ საძიებელ 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 9_1 და 10_1 წერტილებს.

ასეთივე გზით $1_1F_{2\infty}$ წრფეზე ავაგებთ $1_0 2_0$ წრფეზე მდებარე 2_0 და 3_0 წერტილების ფუძეებს, K_x წერტილიდან x წრფეზე გადავზომავთ ზედხედიდან აღებულ a და b სიგრძის K_x2_x და K_x3_x მონაკვეთებს; 2_x და 3_x წერტილებზე ვატარებთ $M_{2\infty}$ წერტილზე გამავალ წრფეებს $1_1F_{2\infty}$ წრფის 2_1 და 3_1 წერტილებში გადაკვეთამდე.



ნახ. 54.

ახლა ავაგოთ წრფის ფუძე, რომელიც R_0 წერტილზე $1_0 4_0$ წრფის პარალელურად გადის და ამ წრფიდან k მანძილითაა დაშორებული. ამისათვის 1_x წერტილიდან x წრფეზე k სიგრძის $1_x 11_x$ მონაკვეთი მოვზომოთ და 11_x წერტილზე $11_x M_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ, რომელიც $1_1 2_1$ წრფეს 11_1 წერტილში კვეთს. გავატაროთ $11_1 F_{1\infty}$ წრფე. ეს საძიებელი წრფეა. 10_1 წერტილზე გატარებული $10_1 F_{2\infty}$ წრფე $11_1 F_{1\infty}$ წრფეს R_1 წერტილში გადაკვეთს. ზუსტად ასევე, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 9_1 და 10_1 წერტილებიდან $F_{2\infty}$ წერტილში გატარებული წრფეებით გავკვეთოთ $11_1 F_{1\infty}$ წრფე და წინა ფასადის პერსპექტივის ფუძეს მივიღებთ.

ზუსტად ასეთივე ხერხითაა აგებული T_0 წერტილზე $1_0 2_0$ წრფიდან k მანძილით გატარებული წრფის ფუძეც. ამისათვის 1_{x1} წერტილიდან x წრფეზე გადაზომილია k სიგრძის $1_{x1} 12_x$ მონაკვეთი და $M_{1\infty}$ წერტილის დახმარებით 12_1 წერტილია აგებული, რომელზედაც $12_1 F_{2\infty}$ წრფეა გატარებული. ეს წრფე გადაკვეთილია $3_1 F_{1\infty}$ და $K_x F_{1\infty}$ წრფეებით, რითაც გვერდის ფასადის ფუძის აგება დასრულებულია.

საჭიროა აიგოს თარაზული ფილის ფუძეც, რომელიც მიწის ზედაპირიდან (η_0 სიბრტყიდან) l_1 სიმაღლეზეა (ნახ. 53, წინხედი).

ფილის გადმოშვერა შენობის ოთხივე კედლიდან i ზომისაა (ზედხედი), ამიტომ i სიგრძის მონაკვეთები 1_{x1} წერტილიდან x წრფეზე მარჯვნივ გადავზომოთ ($1_{x1} 13_x$) და 4_x წერტილიდან—მარცხნივ ($4_x 16_x$). $13_x M_{1\infty}$ და $16_x M_{1\infty}$ წრფეების გატარებით მივიღებთ 13_1 და მე-16_1 წერტილებს.

სრულიად ასევე, ასეთივე სიგრძის მონაკვეთები x წრფეზე გადავზომოთ 1_x წერტილიდან მარცხნივ ($1_x 14_x$) და 2_x წერტილიდან მარჯვნივ ($2_x 15_x$). $M_{2\infty}$ წერტილის დახმარებით ავაგებთ 14_1 და 15_1 წერტილებს.

13_1 და 16_1 წერტილები წრფეებით $F_{2\infty}$ წერტილთან შევაერთოთ, 14_1 და 15_1 წერტილები კი—$F_{1\infty}$ წერტილთან. ამ ოთხი წრფის წყვილწყვილად გადაკვეთით ფილის საძიებელ ფუძეს მივიღებთ.

ნახაზზე ბოლომდე აგებულია ფუძის მხოლოდ ის ნაწილი, რომელიც შენობის მხოლოდ ხილვად ნაწილს შეესაბამება.

ახლა შენობის პერსპექტივა ავაგოთ. გავატაროთ η_0 სიბრტყისა და სურათის სიბრტყის განკვეთის x_0 წრფე. მისი დაშორება h ჰორიზონტიდან იგივეა, რაც თვით η_0 სიბრტყის მზერის S წერტილიდან დაშორება.

x_0 წრფეზე მდებარეობს K_0 წერტილი; მის ასაგებად საკმარისია K_x წერტილიდან x_0 წრფეზე მართობი დავუშვათ. $K_0 F_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ, რომელზედაც 1_1, 2_1 და 3_1 წერტილები შვეულად ჩამოვაგეგმილოთ. მივიღებთ 1_0, 2_0 და 3_0 წერტილებს. $1_0 F_{1\infty}$ წრფე გავატაროთ და ზედ 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 9_1, 10_1 წერტილები ჩამოვაგეგმილოთ. მივიღებთ 4_0, 5_0 წერტილებსა და ყველა დანარჩენ წერტილებს, რომლებიც ნახაზის ზედმეტად გადატვირთვის თავიდან ასაცილებლად აღუნიშნავად დავტოვეთ.

ჩამოვაგეგმილოთ შესაბამის წრფეებზე 11_1 და 12_1 წერტილებიც. მიღებულ 11_0 წერტილზე $11_0F_{1\infty}$ წრფე გავავლოთ, 12_0 წერტილზე კი— $12_0F_{2\infty}$ წრფე. ამ წრფეებზე ჩამოგეგმილებულია ფუძის ყველა ის დანარჩენი წერტილი, რომელიც პერსპექტივაზე ხილვადი იქნება და მიღებული წერტილები შეერთებულია იმავე თანმიმდევრობით, როგორც თვით ფუძეზე.

ამგვარად, შეიძლება ითქვას, რომ η სიბრტყეზე აგებული შენობის ფუძე შვეული მიმართულებით გადმოვაადგილეთ და η_0 სიბრტყეზე მოვათავსეთ.

K_0 წერტილზე შვეულად გატარებული K_0K_3 წრფე სურათის სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ შენობის შვეული ელემენტების სიმაღლე მასზე შეგვიძლია გადავზომოთ.

η_0 სიბრტყიდან ფილის ქვედა სიბრტყემდე l_1 მანძილი (იხ. ფასადი) K_0 წერტილიდან ზემოთ გადავზომოთ ($K_0K_2=l_1$). K_2 წერტილიდან ზემოთ ფილის სისქე გადავზომოთ, მივიღებთ L წერტილს. K_0 წერტილიდანვე გადავზომოთ მთლიანად შენობის l სიმაღლე ($K_0K_3=l$).

K_2 და K_3 წერტილებიდან $F_{2\infty}$ წერტილში წრფეები გავატაროთ 1_01_3 და 2_02_3 წრფეების გადაკვეთამდე. $1_2F_{1\infty}$ და $1_3F_{1\infty}$ წრფეები გავატაროთ 4_04_3 წრფის გადაკვეთამდე.

ავაგოთ ფილის პერსპექტივა.

$K_2F_{2\infty}$ და $LF_{2\infty}$ წრფეები გავატაროთ 14_1 წერტილიდან შვეულად გატარებული წრფის გადაკვეთამდე. მიღებულ 14_2 და L_4 წერტილებზე გავატაროთ $F_{1\infty}$ წერტილში გამავალი წრფეები ფილის ფუძის შესაბამისი წვეროებიდან შვეულად დაშვებულ წრფეების გადაკვეთამდე. ანალოგიურად აიგება ფილის დანარჩენი ხილვადი წიბოები.

ფილის ქვედა სიბრტყე ხილვადია და მასზე ჩვენ ისეთივე აგება უნდა ჩავატაროთ, როგორც η სიბრტყეზე: ე. ი. შენობის ფუძეზე მიღებული კონტური η სიბრტყიდან ფილის ქვედა სიბრტყეზე შვეულად გადმოვაადგილოთ.

15. მზერის წერტილისა და მთავარი სხივის შერჩევა

აქამდე პერსპექტივის აგების ზემომოყვანილ მაგალითებში მზერის წერტილის მდებარეობა და მთავარი სხივის მიმართულება ნებისმიერად იყო მოცემული, მაგრამ არქიტექტურული პერსპექტივის აგებისას ამ ორი ელემენტის შერჩევას არსებითი მნიშვნელობა აქვს.

შესავალში უკვე აღნიშნული იყო, რომ საგნების პერსპექტიული გამოსახულება შეესაბამება მზერით შთაბეჭდილებას, რომელიც მიიღება უძრავი თვალით საგნის განხილვისას.

როგორც ვიცით, ნებისმიერი წერტილიდან ნებისმიერ სიბრტყეზე სივრცის ყოველი წერტილის დაგეგმილება მუდამ შესაძლებელია, მზერის დროს კი, უძრავი თვალი მკაფიოდ ხედავს სივრცის მხოლოდ გარკვეულ ნაწილს. ეს ნაწილი შემოსაზღვრულია კონუსური ზედაპირით, რომლის წვერო თვალის ბროლის ცენტრში მდებარეობს, კონუსის ღერძი კი მზერის მიმართულებას (მთავარ სხივს) ემთხვევა. ასეთ კონუსურ ზედაპირს მ ზ ე რ ი ს კ ო ნ უ ს ი ეწოდება. სივრცის ის ნაწილი, რომელიც ამ კონუსის გარეთ მდებარეობს, კონუსის ზედაპირიდან დაშორების შესაბამისად, თვალისათვის თანდათან ბუნდოვანი და ბოლოს უხილავი ხდება.

თვალის ასეთი თვისებებით აიხსნება ის გარემოება, რომ პერსპექტივის აგებისას დასაგეგმილებელი ობიექტის ნაწილები, რომლებიც მზერის კონუსის გარეთ მდებარეობს, სურათზე თვალისათვის უჩვეულო დამახინჯებით გამოისახება ხოლმე.

ამგვარად, დ ა მ ა ხ ი ნ ჯ ე ბ უ ლ ი გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ი ს თ ა ვ ი დ ა ნ ა ც ი ლ ე ბ ი ს მ ი ზ ნ ი თ, მ ზ ე რ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი ს მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ა დ ა მ თ ა ვ ა რ ი ს ხ ი ვ ი ს მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა ი ს ე უ ნ დ ა შ ე ვ ა რ ჩ ი ო თ, რ ო მ პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი ვ ა შ ი გ ა მ ო ს ა ს ა ხ ა ვ ი ო ბ ი ე ქ ტ ი მ თ ლ ი ა ნ ა დ მ ზ ე რ ი ს კ ო ნ უ ს ი ს შ ი გ ნ ი თ მ ო თ ა ვ ს დ ე ს.

მზერის კონუსად მიღებულია ისეთი ბრუნვის კონუსი, რომლის მსახველი კონუსის ღერძთან (ე. ი. მზერის მთავარ სხივთან) 30^0-იან კუთხეს შეადგენს.

კონუსის 2 მსახველი, რომლებიც კონუსის ღერძზე გამავალ სიბრტყეში მდებარეობენ, ქმნის ე. წ. მ ზ ე რ ი ს კ უ თ ხ ე ს.

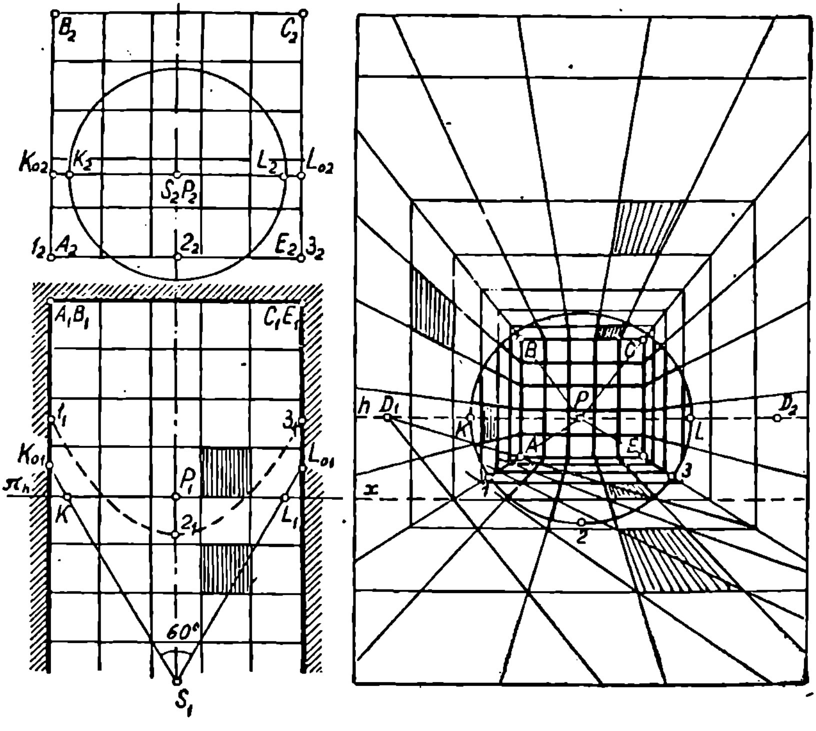
მზერის კონუსის მნიშვნელობაში შეიძლება დავრწმუნდეთ 55-ე ნახაზზე მოყვანილი მაგალითით.

ნახაზის მარცხენა მხარეს, ორთოგონალურ გეგმილებში, გამოსახულია პარალელეპიპედი, რომლის წახნაგები დაყოფილია ერთნაირი ზომის კვადრატებით. მზერის $S(S_1,S_2)$ წერტილი აღებულია პარალელეპიპედით შემოსაზღვრულ სივრცეში, $SP(S_1P_1, S_2P_2)$ მთავარი სხივი კი $ABCE$ $(A_1B_1C_1F_1, A_2B_2C_2F_2)$ წახნაგის მართობულია.

სურათის π სიბრტყე, რომელიც თავისი π_h თარაზული კვალითაა გამოსახული, მზერის წერტილიდან ნებისმიერ მანძილზეა აღებული, რადგანაც, როგორც ვიცით, მზერის წერტილიდან π სიბრტყის დაშორება მხოლოდ პერსპექტიული სურათის მასშტაბზე მოქმედებს.

მზერის კონუსის განსაზღვრისათვის საკმარისია ავაგოთ ამ კონუსის $SK_0(S_1K_{01}, S_2K_{02})$ და $SL_0(S_1L_{01}, S_2L_{02})$ მსახველები, რომლებიც ჰორიზონტის სიბრტყეში მდებარეობენ და ამიტომ მზერის თარაზულ კუთხეს განსაზღვრავენ.

წინხედში აგებულია წრეწირი, რომელიც მზერის კონუსის π სიბრტყესთან კვეთაში მიიღება. პარალელეპიპედის ოთხი წახნაგი, რომლებიც კონუსის SP ღერძის პარალელურია, ამ კონუსს ჰიპერბოლებზე გადაკვეთს. მაგალითად, ქვედა წახნაგთან კონუსის კვეთა ($1_1 2_1 3_1$, $1_2 2_2 3_2$) ჰიპერბოლას მოგვცემს.



ნახ. 55.

S წერტილიდან π სიბრტყეზე დაგეგმილების შედეგად ოთხივე ჰიპერბოლა, ისევე როგორც კონუსის ზედაპირზე მდებარე ყოველი წერტილი, $KL(K_1L_1,\ K_2L_2)$ წრეწირზე დაგეგმილდება. ამგვარად, თვითეული ჰიპერბოლა შემოსაზღვრავს შესაბამისი წახნაგის იმ ნაწილს, რომელიც პერსპექტივაში დაუმახინჯებლად გამოისახება. მაგალითად, დაუმახინჯებლად უნდა გამოისახოს ქვედა წახნაგის ($1_1 2_1 3_1 E_1 A_1 1_1$, $1_2 2_2 3_2 E_2 A_2 1_2$) ნაწილი.

ნახაზის მარჯვენა მხარეს აგებულია პარალელეპიპედის შიგა სივრცის პერსპექტივა. აგების თანახმად, $K—2—3—L$ წრეწირის შიგნით გამოსა-

ხულია სივრცის ის ნაწილი, რომელიც მზერის კონუსის შიგნით მდებარეობს.

ნახაზიდან აშკარად ჩანს, თუ როგორ დამახინჯებას განიცდის მზერის კონუსის გარეთ მდებარე კვადრატი. ეს დამახინჯება მით უფრო მეტია, რაც უფრო შორსაა კვადრატი მზერის კონუსის ზედაპირიდან.

არქიტექტურული პერსპექტივის აგებისას მზერის წერტილის შერჩევა სხვა მოსაზრებითაც უნდა ხდებოდეს. უპირველეს ყოვლისა, მზერის წერტილი რეალური უნდა იყოს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ უნდა ავარჩიოთ მზერის წერტილის მხოლოდ ისეთი მდებარეობა, სადაც სინამდვილეში შეიძლება მოვათავსოთ ადამიანის თვალი და საიდანაც სინამდვილეში შეიძლება ჩანდეს ჩვენი არქიტექტურული ობიექტი აშენების შემდეგ. გარდა ამისა, ყველა შესაძლებელი რეალური მზერის წერტილიდან მიზანშეწონილია ისეთი წერტილების შერჩევა, საიდანაც შენობას ხალხის უფრო დიდი რაოდენობა დაინახავს; მაგალითად, თუ ადგილმდებარეობის ზედაპირი, სადაც შენობა დგას, თარაზულია, როგორც ეს უმრავლეს შემთხვევებში ქალაქის პირობებში გვხვდება, მაშინ მზერის წერტილის დაშორება მიწის დონიდან ადამიანის თვალის, ე. ი. დაახლოებით 170 სმ სიმაღლეზე აიღება ხოლმე.

შენობის დაგეგმარების პროცესში პერსპექტივას მზერის რამდენიმე წერტილიდან აგებენ იმისათვის, რომ უკეთ შემოწმდეს, თუ რამდენად დამაკმაყოფილებელია შენობის საერთო ფორმა ან მისი ფრაგმენტები, და ასეთი განხილვის შემდეგ საჭიროებისდა მიხედვით პროექტში შეტანილ იქნეს ცვლილებები.

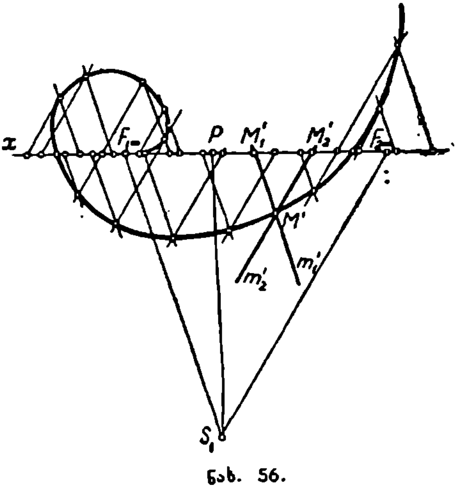
IV. პერსპექტივის აგება ზუსტი ორთოგონალური გეგმილების დახმარებით

პერსპექტივის აგებისას (ამოცანები 12, 13, 14) იმ ზომებით ვსარგებლობდით, რომლებიც მოცემულ ორთოგონალურ გეგმილებზე იყო აღნიშნული. მანძილი ყოველ ორ წერტილს შორის ან კუთხე ორ წრფეს შორის რიცხობრივად იყო მოცემული. ასეთ შემთხვევაში მოცემული ნახაზების გრაფიკულ სიზუსტეს ჩვენთვის არავითარი მნიშვნელობა არ ჰქონდა.

ახლა განვიხილოთ პერსპექტივის აგების ისეთი ხერხები, სადაც არსებითი მნიშვნელობა მოცემული ორთოგონალური გეგმილების მხოლოდ გრაფიკულ სიზუსტეს ექნება.

16. ფუძეთა სიბრტყეში მდებარე მრუდის პერსპექტივა

განვიხილოთ ფუძეთა სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი მრუდი (ნახ. 56); საჭიროა მისი პერსპექტივის აგება.



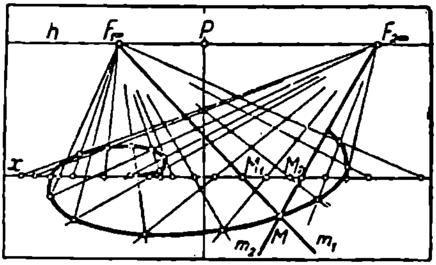
ნახ. 56.

ნახაზზე მოცემულია სურათის x ფუძისა და მზერის წერტილის S_1 ფუძის მდებარეობა. მრუდის პერსპექტივის აგება პრაქტიკულად მისი წერტილების პერსპექტივის აგებას ნიშნავს. ცხადია, შედეგის სიზუსტე აგებული წერტილების სიმრავლეზეა დამოკიდებული.

მრუდის ყოველი წერტილი შეგვიძლია განვსაზღვროთ ამ წერტილზე გამავალი ნებისმიერი ორი წრფით, რომლებიც აგრეთვე ფუძეთა სიბრტყეში მდებარეობენ.

მაგალითად, მრუდის M' წერტილზე გატარებულია m'_1 და m'_2 წრფეები. ცხადია, თუ m'_1 და m'_2 წრფეთა პერსპექტივას ავაგებთ, ამით M' წერტილის პერსპექტივა აგებული იქნება. გრაფიკულ აგებათა გაადვილების მიზნით მიზანშეწონილი იქნება მრუდის ყოველ წერტილზე გატარდეს m'_1 და m'_2 წრფეთა პარალელური წრფეები.

m'_1 წრფის პერსპექტივის აგებისათვის მისი ორი წერტილით ვისარგებლოთ — არასაკუთრივი წერტილითა და m'_1 წრფის სურათის x ფუძესთან გადაკვეთის M'_1 წერტილით. არასაკუთრივი წერტილის განსაზღვრისათვის S_1 წერტილზე ვატარებთ m'_1 წრფის პარალელურ $S_1F_{1\infty}$ წრფეს. სრულიად ასევე, m'_2 წრფე განისაზღვრება M'_2 წერტილითა და არასაკუთრივი $F_{2\infty}$ წერტილით.



ნახ. 57.

სურათზე (ნახ. 57) აგებულია x ფუძე და h ჰორიზონტი, რომელზედაც აღნიშნულია მთავარი P წერტილი და m'_1 და m'_2 წრფეთა არასაკუთრივი $F_{1\infty}$ და $F_{2\infty}$ წერტილები.

ჰორიზონტის სიმაღლე ნებისმიერად არის მოცემული, რადგანაც იგი დასმული ამოცანის გადაწყვეტის მსვლელობაზე არავითარ გავლენას არ ახდენს.

ცნობილი წესით ავაგებთ m'_1 და m'_2 წრფეთა პერსპექტივას, ე. ი. m_1 და m_2 წრფეებს, მათი გადაკვეთა M' წერტილის M პერსპექტივას განსაზღვრავს. ასევეა აგებული მრუდის დანარჩენი წერტილებიც.

მრუდზე აღებული წერტილების მდებარეობისა და რაოდენობის შერჩევა დამოკიდებულია მრუდის მოხაზულობის ხასიათსა და სიზუსტის მოთხოვნილებებზე და ყოველ ცალკე შემთხვევაში დამოუკიდებლად უნდა გადაწყდეს.

17. ფუძეთა სიბრტყეზე მდებარე მრავალკუთხედის პერსპექტივის აგება (ნახ. 58)

ამ შემთხვევაში მრავალკუთხედის ყოველი წვერო ისევ ორი წრფით განვსაზღვროთ. ერთი ამ წრფეთაგანი მრავალკუთხედის ის გვერდი შეიძლება იყოს, რომელიც განხილულ წვეროზე გადის, მეორე კი — ამ წვეროზე და მზერის წერტილის S_1 ფუძეზე გამავალი წრფე. მაგალითად, $2'$ წვერო შეიძლება განვსაზღვროთ მრავალკუთხედის $2'—3'$ გვერდით და S_12' წრფით (ნახაზის ზემო ნაწილი); ამიტომ ამ წრფეთა პერსპექტივა ავაგოთ (ნახაზის ქვემო ნაწილი).

ჰორიზონტის სიმაღლე აქაც ნებისმიერად არის მოცემული. $2'$—$3'$ წრფის ერთ-ერთი წერტილი სურათის x ფუძეზე მდებარეობს, ამიტომ ამ წრფის განსაზღვრისათვის კიდევ ერთი წერტილი გვჭირდება. ვისარგებლოთ მისი არასაკუთრივი წერტილით. ამისათვის S_1 წერტილზე $2'$—$3'$ წრფის პარალელურად გატარებულია $S_1F_{1\infty}$ წრფე. $3'$ და $F_{1\infty}$ წერტილები ჩამოტანილია სურათზე; სურათის x ფუძეზე მივიღებთ $3_x \equiv 3$ წერტილს, ჰორიზონტზე კი—$F_{1\infty}$ არასაკუთრივ წერტილს. ამ ორი წერტილის შემაერთებელ წრფეზე მდებარეობს $2'$—$3'$ მონაკვეთის პერსპექტივა.

S_12' წრფე S_1 წერტილზე გადის. მაგრამ უკვე ცნობილია, რომ, თუ წრფე S მხედის წერტილზე გამავალ შვეულ სიბრტყეში მდებარეობს, მაშინ ასეთი წრფის პერსპექტივა სურათზე შვეულ წრფეს წარმოადგენს (იხ. პ. 9, 2°). ამიტომ S_12' წრფის პერსპექტივის ასაგებად საკმარისია მისი ერთი წერტილი ვიპოვოთ. ვსარგებლობთ S_12' წრფისა და x წრფის გადაკვეთის $2'_x$ წერტილით, რომელიც სურათზე 2_x წერტილის მდებარეობას დაიკავებს. ამგვარად, S_12' წრფის პერსპექტივა 2_x2 წრფე იქნება, მისი $3F_{1\infty}$ წრფესთან გადაკვეთა კი—$2'$ წერტილის პერსპექტივა.

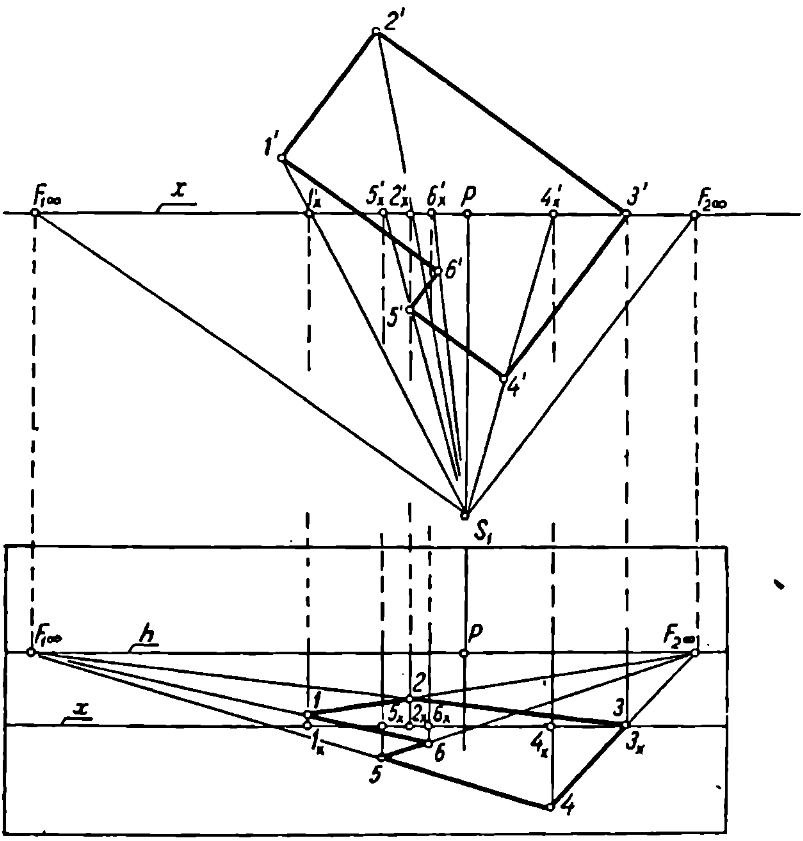
1 წერტილის ასაგებად ვისარგებლოთ $1'$—$2'$ გვერდით და $1'S_1$ წრფით. $1'$—$2'$ წრფის პერსპექტივის ასაგებად მისი არასაკუთრივი წერტილი ავაგოთ, რისთვისაც $1'$—$2'$ წრფის პარალელურად $S_1F_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ. $F_{2\infty}$ წერტილი სურათზე შვეულად ჩამოვიტანოთ. $2F_{2\infty}$ წრფე $2'F_{2\infty}$ წრფის პერსპექტივაა, რომელზედაც $1'$—$2'$ მონაკვეთის პერსპექტივა მდებარეობს. $1'S_1$ წრფისა და x წრფის გადაკვეთის $1'_x$ წერტილი სურათზე გადმოვიტანოთ. მიღებული 1_x წერტილიდან x წრფისადმი მართობული წრფე $1'S_1$ წრფის პერსპექტივაა, მისი $2F_{2\infty}$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილი კი—$1'$ წერტილის პერსპექტივა.

ასეთი თანამიმდევრობით მრავალკუთხედის სრულ პერსპექტივას ავაგებთ. ამ შემთხვევაში მრავალკუთხედის გვერდები მხოლოდ ორი მიმართულების პარალელურია, სახელდობრ, $2'$—$3'$, $1'$—$6'$ და $4'$—$5'$ გვერდები $S_1F_{1\infty}$ წრფის პარალელურია, დანარჩენი სამი გვერდი კი $S_1F_{2\infty}$ წრფის პარალელური. ამის გამო, ისევე როგორც წინათ განხილულ ამოცანებში (ნახ. 50, 52 და 54), მხოლოდ ორი არასაკუთრივი წერტილით სარგებლობა მოგვიხდა.

ერთი მხრივ, ამის შედეგად, და მეორე მხრივ, იმიტომ, რომ დამხმარე ხაზებად თვით ასაგები მრავალკუთხედის გვერდებიც გამოვიყენეთ, პერსპექტივის აგება შედარებით გამარტივდა და შედეგიც უფრო ზუსტი იქნება.

როგორც ვხედავთ, ზემოთ აღწერილი აგების ხერხის გამოყენება მით უფრო ხელსაყრელია, რაც უფრო ნაკლებია მრავალკუთხედის გვერდების

მიმართულება, რადგანაც ამ გვერდების არასაკუთრივი წერტილების ნაკ-ლები რაოდენობის აგება დაგვჭირდება.



ნახ. 58.

სამოქალაქო და სამრეწველო შენობების უმრავლესობას გეგმაში მართ-კუთხოვანი კონფიგურაცია აქვს, რის გამოც გეგმის კონტური ორი (ურთიერთმართობული) მიმართულების მქონე წრფეებისაგან შედგება. ამიტომ პერსპექტივის აგების ზემომოყვანილი ხერხი პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება.

ჯერ ფუძეთა სიბრტყეზე მდებარე წერტილების პერსპექტივა ავაგოთ. ამისათვის ამ სიბრტყეში იღებენ დეკარტის მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემას. ამოცანის გამარტივების მიზნით სისტემის ერთ-ერთი, მაგალითად, Ox ღერძი სურათის x ფუძესთან თავსდება (ნახ. 59, ზემოთ). კოორდინატთა O-სათავის მდებარეობა ნებისმიერია.

მოითხოვება ფუძეთა სიბრტყეში მდებარე მრავალკუთხედის აგება, რომელსაც წესიერი ხუთწვერიანი ვარსკვლავის ფორმა აქვს. ასეთი ფიგურის პერსპექტივის აგება პ. 17-ში მოყვანილი ხერხით მიზანშეწონილი არ არის, რადგან მისი გვერდების აგებისათვის ხუთი არასაკუთრივი წერტილის აგება დაგვჭირდებოდა.

მრავალკუთხედის ყოველი წვერო ორთოგონალურად გეგმილდება Ox და Oy ღერძებზე. მაგალითად, $1'$ წვეროს დაგეგმილებით მიღებულია, შესაბამისად, $1'_x$ და $1'_y$ წერტილები.

$O—1'_x$ მონაკვეთის ზომა $1'$ წერტილის აბსცისაა, $O—1'_y$ მონაკვეთის ზომა კი — ორდინატა. თვით $O—1'_x$ და $O—1'_y$ მონაკვეთებს (აგრეთვე, შესაბამისად, მათ ტოლ $1'_y—1'$ და $1'_x—1'$ მონაკვეთებსაც) წერტილის საკოორდინატო მონაკვეთები ეწოდება. პრაქტიკული პერსპექტივის ლიტერატურაში ხშირად წერტილის აბსცისას ამ წერტილის ს ი გ ა ნ ე ს უწოდებენ, ორდინატს კი — ს ი ღ რ მ ე ს.

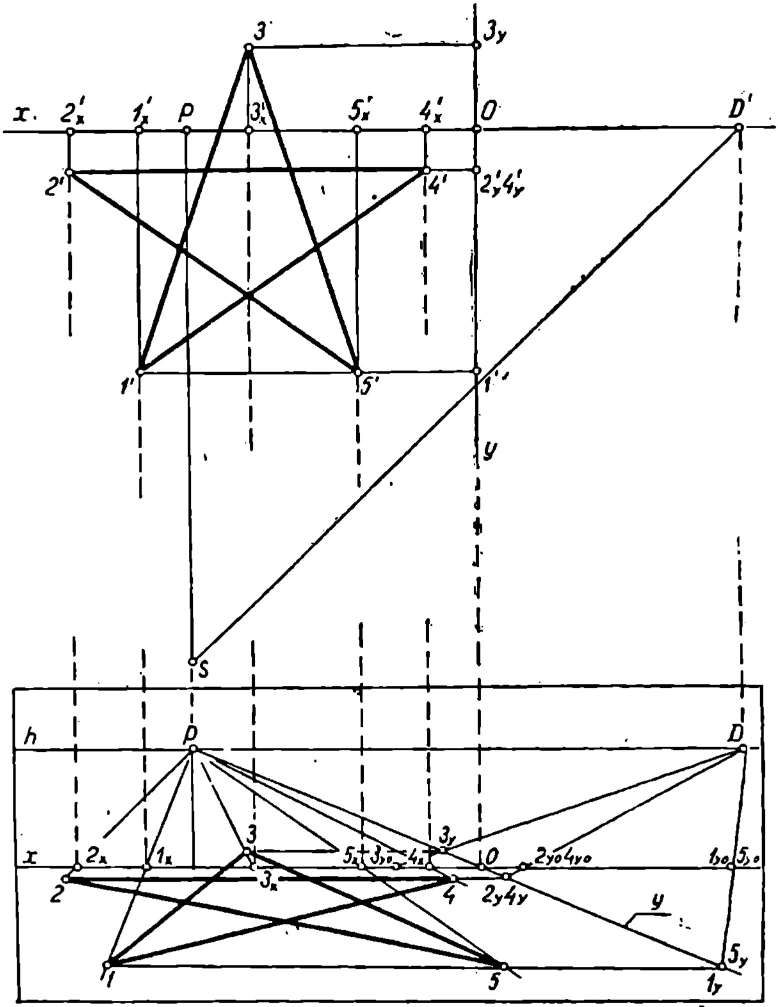
სურათზე (ქვემოთ) აგებულია კოორდინატთა სისტემის პერსპექტივა. Ox ღერძის პერსპექტივა სურათის x ფუძეს შეუთავსდა. O წერტილი კოორდინატთა სათავის პერსპექტივაა.

Oy ღერძის OP პერსპექტივა კი—სურათის მთავარ P წერტილზე გადის, რადგანაც ეს ღერძი π სურათის მართობულია.

ავაგოთ $1'_x$ და $1'_y$ წერტილების პერსპექტივა. $1'_x$ წერტილის პერსპექტივას უშუალოდ x წრფეზე სურათის ღერძიდან $1'_x—P$ მანძილით დაშორებულ 1_x წერტილში მივიღებთ. $1'_y$ წერტილის პერსპექტივის აგება ცნობილი ხერხით ხდება. ჯერ x წრფეზე O წერტილიდან გადავზომავთ $O—1'_y$ სიღრმის ტოლ $O—1_{y0}$ მონაკვეთს. ვატარებთ $1_{y0}—D$ წრფეს $OP=$ $=Y$ წრფის 1_y წერტილში გადაკვეთამდე. $O—1_y$ მონაკვეთი სინამდვილეში $O—1'_y$ მონაკვეთის ტოლია, რადგანაც $1_{y0}—D$ წრფე დისტანციის წერტილში გადის.

ახლა $1'—1'_x$ და $1'—1'_y$ წრფეთა პერსპექტივა ავაგოთ. $1'—1'_x$ წრფის პერსპექტივა მთავარ წერტილში გაივლის ($1_x—1$), ხოლო მეორე წრფის პერსპექტივა, ცხადია, სურათის x ფუძის პარალელური იქნება. ამ ორი წრფის გადაკვეთის 1 წერტილი $1'$ წერტილის პერსპექტივაა. ასევე აიგება დანარჩენი ოთხი წერტილის პერსპექტივაც.

პერსპექტივის აგებისას ყურადღება უნდა ექცეოდეს წერტილების მდებარეობას კოორდინატთა ღერძების მიმართ, ე. ი. წერტილის კოორდინატების ნიშნებს. მაგალითად, 1′ და 3′ წერტილები სხვადასხვა საკოორდინატო მეოთხედებში მდებარეობს, ამიტომ მათი ორდინატები (სიღრმეები) საწინააღმდეგო ნიშნისაა. აქ მნიშვნელობა არა აქვს იმას, ღერძების



ნახ. 59.

რომელ მიმართულებას ჩავთვლით დადებითად, მაგრამ როგორც კი მათ შევარჩევთ, კოორდინატების ნიშანი მუდამ მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ. ამას მნიშვნელობა აქვს განსაკუთრებით წერტილის სიღრმის აგების დროს. ჩვენს შემთხვევაში 1′ წერტილის $O—1'_y$ სიღრმე სურათის x ფუძეზე გადაზომილია O წერტილის მარჯვნივ ($O—1_{y0}$ მონაკვეთი), 3′ წერტილის $O—3'_y$ სიღრმე კი—მარცხნივ ($O—3_{y0}$ მონაკვეთი). აქ მხედველობაში უნდა გვქონდეს ისიც, დისტანციის რომელ წერტილს გამოვიყენებთ აგების დროს. ჩვენ რომ დისტანციის მეორე წერტილით გვესარგებლა (რომელიც P წერტილის მარჯვნივ მდებარეობს), მაშინ $O—1_{y0}$ და $O—3_{y0}$ მონაკვეთებს, შესაბამისად, საწინააღმდეგო მხარეს გადავზომავდით.

19. კოორდინატების ხერხი. სივრცითი სხეულების აგება

მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედის და $S(S_1,S_2)$ მზერის წერტილის ორთოგონალური გეგმილები (ნახ. 60, ზემოთ).

სივრცეში აღებულია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ საკოორდინატო Oxz სიბრტყე შეთავსებულია სურათის π სიბრტყესთან, Oxy სიბრტყე კი შეთავსებულია პარალელეპიპედის ქვედა — 1′—2′—3′—4′ წახნაგთან და მიღებულია ფუძეთა სიბრტყედ. იმავე ნახაზზე, ქვემოთ, აგებულია პერსპექტივა.

1′—2′—3′—4′ მართკუთხედის პერსპექტივა აგებულია 59-ე ნახაზზე ნაჩვენები გზით.

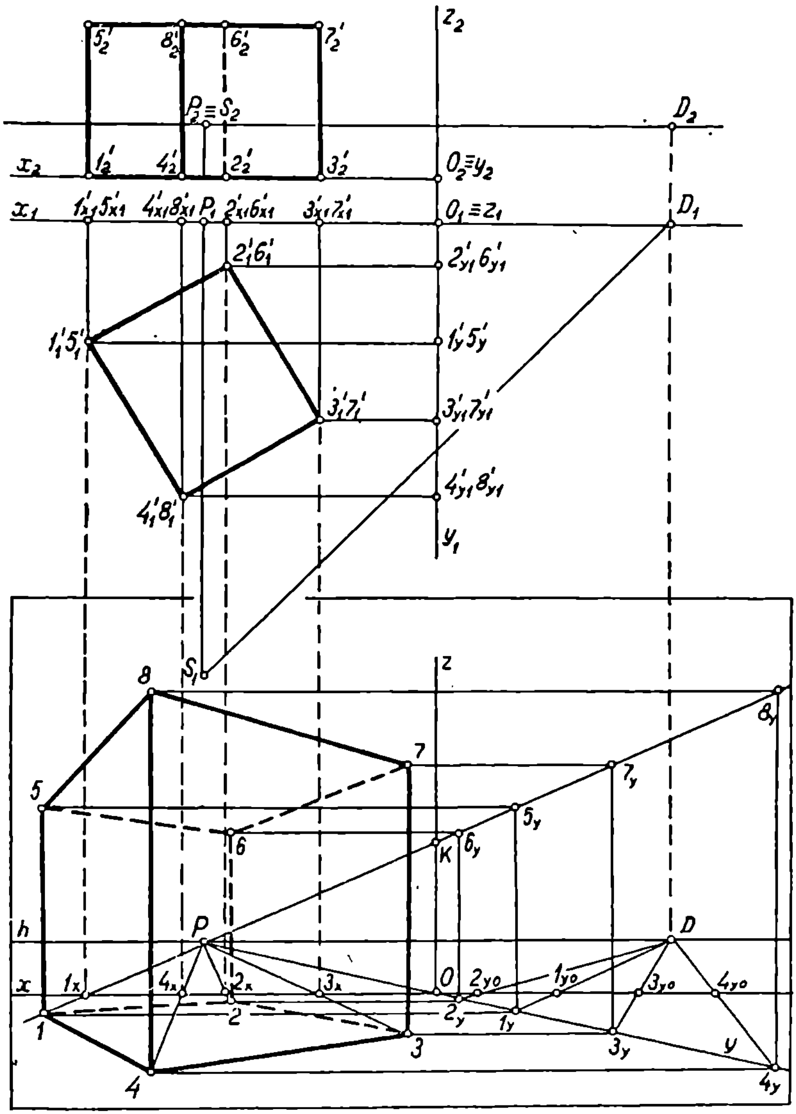
ავაგოთ პარალელეპიპედის დანარჩენი ოთხი წვერო.

სურათზე აგებულია Oz წრფე—მესამე კოორდინატთა ღერძის პერსპექტივა. ამ ღერძზე დაუმახინჯებლად გადაიზომება წერტილების აპლიკატი, ანუ, პერსპექტივის ტერმინოლოგიის თანახმად, წერტილების სიმაღლე.

ამ შემთხვევაში ოთხივე ასაგებ წერტილს (5′, 6′, 7′, 8′) ერთი სიმაღლე აქვს, რომელსაც Oz ღერძზე გადავზომავთ. მიღებულ K წერტილზე და მთავარ P წერტილზე წრფე გავატაროთ.

ავაგოთ, მაგალითად, 7′ წერტილის პერსპექტივა. ეს წერტილი შვეული 3′—7′ წიბოს ზედა წერტილია. ამიტომ მე-3 წერტილზე შვეული 3—7 წრფე გავატაროთ. 3_y წერტილზე აგრეთვე გავატაროთ შვეული წრფე, რომელიც KP წრფეს 7_y წერტილში გადაკვეთს. $3_y—7_y$ მონაკვეთის ორიგინალი, ცხადია, OK მონაკვეთის ტოლია. 7_y წერტილზე Ox ღერძის პარალელური 7_y —7 წრფე გავატაროთ, რომელიც 3—7 წრფესთან გადაკვეთაში 7′ წერტლის პერსპექტივას მოგვცემს.

ასევეა აგებული დანარჩენი სამი წვეროს პერსპექტივაც.



ნახ. 60.

20. კოორდინატების ხერხი. წილადი წერტილების გამოყენება

როდესაც ობიექტის ორთოგონალური გეგმილები მცირე მასშტაბშია მოცემული, პერსპექტიული გამოსახულება კი შედარებით დიდი ზომისა

მოითხოვება, საკმარისია მთავარი SP მანძილი შესაბამისად გავზარდოთ, ე. ი. სურათის სიბრტყე მზერის წერტილს ნებისმიერად დავაშოროთ. ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, დისტანციის წერტილებიც შესაბამისად დაშორდება მთავარ P წერტილს. ეს გამოიწვევს ნახაზის ჩარჩოების გაზრდასაც, რის საშუალებაც შესაძლებელია ყოველთვის არ გვქონდეს.

ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლია ე. წ. წ ი ლ ა დ ი წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი თ ვისარგებლოთ (ნახ. 61).

მოცემული პარალელეპიპედის ასაგებად შერჩეულია მზერის წერტილი და კოორდინატთა სისტემა. π სურათი შეთავსებულია Oxz სიბრტყესთან.

ვთქვათ, რომ საჭიროა სამჯერ უფრო დიდი ზომის პერსპექტივა იმასთან შედარებით, რასაც მოცემულ π სურათზე მივიღებთ.

იმის მაგივრად, რომ სურათის სიბრტყე გადავაადგილოთ, შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ (ნახ. 61, ქვემოთ):

ჯერ კოორდინატთა ღერძების x, y და z პერსპექტივა ავაგოთ გაუდიდებლად, ე. ი. მოცემული პირობების შესაბამისად.

თუ სურათის სამჯერ გადიდება მოითხოვება, y ღერძზე ($y \equiv OP$) P წერტილიდან გადავზომოთ $P\overline{O}$ მონაკვეთი, რომელიც PO მონაკვეთზე სამჯერ დიდია. $\overline{O}$ წერტილზე $\overline{x}$ და $\overline{z}$ წრფეები გავატაროთ, შესაბამისად, x და z წრფეების პარალელურად.

ახლა პარალელეპიპედის პერსპექტივა ავაგოთ.

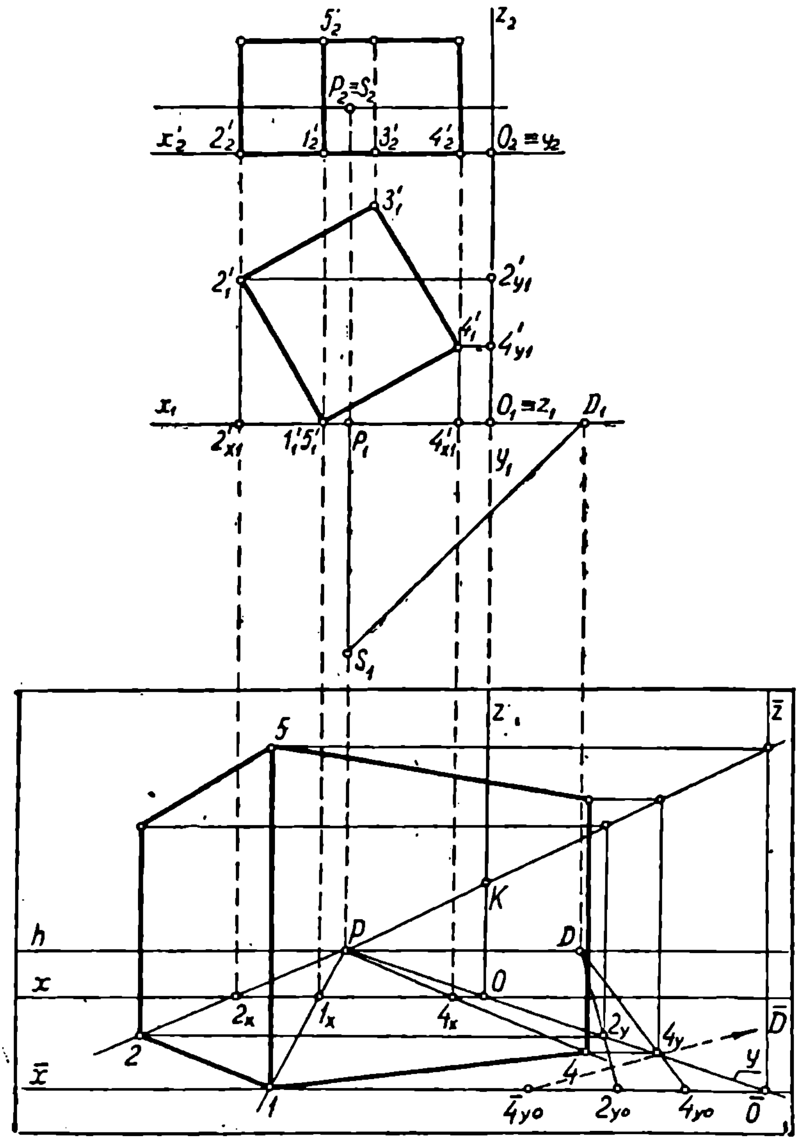
განვიხილოთ, მაგალითად, $(4'_1, 4'_2)$ წერტილის აგება, რომელსაც ორთოგონალურ გეგმილებში $4'_1—4'_{x1}$ და $4'_1—4'_{y1}$ წრფეები განსაზღვრავს. ავაგოთ ამ ორი წრფის პერსპექტივა. პირველი მათგანი მაშინვე განისაზღვრება, თუ x ღერძზე გადავზომავთ $O_1—4'_{x1}$ მონაკვეთის ტოლ $O—4_x$ მონაკვეთს და $P—4_x$ წრფეს გავატარებთ. ეს იქნება $4'_1—4'_{x1}$ წრფის პერსპექტივა.

მეორე წრფის ასაგებად საკმარისია $4'_{y1}$ წერტილის პერსპექტივა ავაგოთ. რადგანაც სურათს სამჯერ ვადიდებთ, ამიტომ $P'_1D'_1$ დისტანცია და $O—4_{y1}$ ორდინატიც შესაბამისად უნდა გავზარდოთ. $\overline{x}$ წრფეზე უნდა გადავზომოთ $\overline{O}—\overline{4}_{y0}$ მონაკვეთი, რომელიც $O_1—4'_{y1}$ მონაკვეთზე სამჯერ დიდია, და $\overline{4}_{y0}$ წერტილი დისტანციის $\overline{D}$ წერტილს უნდა შევუერთოთ ($\overline{D}$ წერტილი ნახაზის ფარგლებს სცილდება და აღნიშნული არ არის).

$\overline{4}_{y0}—\overline{D}$ და $P\overline{O}$ წრფეთა გადაკვეთაში საძიებელ 4_y წერტილს მივიღებთ.

როგორც ჩანს, ამ გზით 4_y წერტილის აგება ერთგვარად გართულებულია ჯერ ერთი იმით, რომ მისი $O—4'_{y1}$ სიღრმის გაზრდა დაგვჭირდა და იმითაც, რომ დისტანციის $\overline{D}$ წერტილი ნახაზის ჩარჩოებიდან შორსაა და ამიტომ ძნელი მისაწვდომია.

ეს გართულება თავიდან აცილებულია წილადი წერტილების შემოღე-ბით.



ნახ. 61.

განვიხილოთ $P4_y\overline{D}$ და $\overline{O}4_y\,\overline{4}_{y0}$ სამკუთხედები (ნახ. 61, სურათზე). ეს სამკუთხედები მსგავსია, რადგან $P\overline{D}$ და $\overline{4}_{y0}\,\overline{O}$ გვერდები პარალელურია. დანარჩენი გვერდები კი წყვილ-წყვილად ერთ წრფეზე მდებარეობს. სამკუთხედების საერთო 4_y წვეროზე გატარებული ნებისმიერი წრფე სამკუთხედების მოპირდაპირე გვერდებთან გადაკვეთისას მათ თანაბარი ფარდობით გაყოფს.

ამიტომ, თუ $\overline{x}$ წრფეზე $\overline{O}—\overline{4_{y0}}$ მონაკვეთის მაგიერ, მაგალითად, სამჯერ მცირე $\overline{O}—4_{y0}$ მონაკვეთს გადავზომავთ და 4_{y0} წერტილზე 4_{y0} — 4_y წრფეს გავატარებთ, ეს უკანასკნელი h წრფეს ისეთ D წერტილში გადაკვეთს, რომ PD მონაკვეთიც სამჯერ მცირე იქნება $P\overline{D}$ მონაკვეთზე.

ამგვარად, 4_y წერტილის ასაგებად შეგვიძლია D წერტილით ვისარგებლოთ იმ პირობით, რომ 4_y წერტილის სიღრმე სამჯერ არ გავადიდოთ და გეგმიდან $\overline{x}$ წრფეზე შეუცვლელად გადავზომოთ.

4_y წერტილზე გატარებულია $4'_{y1}—4'_1$ წრფის $4_y—4$ პერსპექტივა, რომელიც $P—4_x$ წრფესთან გადაკვეთაში მე-4 წერტილს მოგვცემს.

ამავე საფუძველზეა აგებული ($2'_1$; $2'_y$) წერტილის პერსპექტივაც.

ამ წერტილის $O_1—2'_{x1}$ სიგანე უცვლელადაა გადმოტანილი სურათზე (x წრფეზე—$O—2_x$) და გატარებულია $P—2_x$ წრფე. $\overline{x}$ წრფეზე გადაზომილია $\overline{O}—2_{y0}$ მონაკვეთი (წერტილის სიღრმე—უცვლელად) და გატარებულია $2_{y0}—D$ წრფე; y წრფეზე მიღებულია 2_y წერტილი და გატარებულია $2_y—2$ წრფე $P—2_x$ წრფის გადაკვეთამდე.

პარალელეპიპედის ზედა წვეროები აგებულია წინა შემთხვევის მსგავსად.

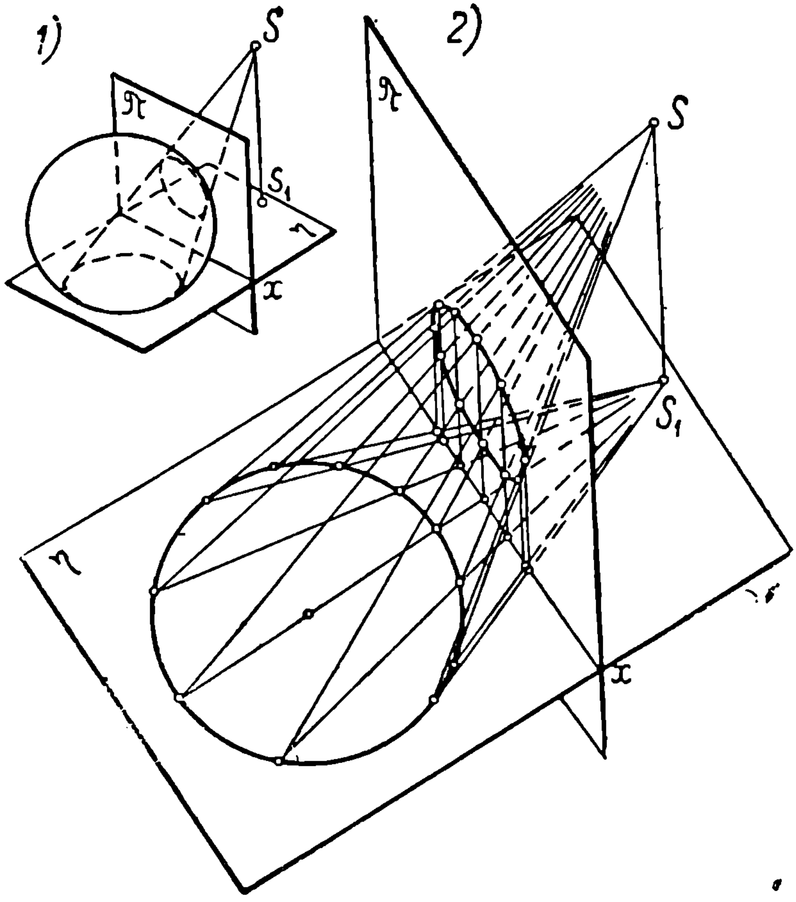
D_14_{y0} და 2_{y0} წერტილებს წილადი წერტილები ეწოდება იმ მოსაზრებით, რომ ისინი შესაბამისი მონაკვეთების პროპორციულ ნაწილებს განსაზღვრავენ.

21. წრეწირის პერსპექტივა (ნახ. 62)

წრეწირი მოცემულია ფუძეთა სიბრტყეზე. როგორც ნახაზიდან ჩანს, წრეწირის წერტილების მაგეგმილებელი სხივები სივრცეში კონუსურ ზედაპირსა ქმნის; მას მაგეგმილებელი კონუსი ეწოდება. ამ კონუსის წვერო S წერტილშია. თვით წრეწირი მაგეგმილებელი კონუსისა და η სიბრტყის ურთიერთკვეთის შედეგია.

გავიხსენოთ, რომ კონუსის ზედაპირს მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს კ ო ნ უ ს ი ეწოდება, თუ მისი კვეთა ნებისმიერი სიბრტყით (ისე რომ მკვეთი სიბრტყე კონუსის წვეროზე არ გადის) მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს წ ი რ ს წარმოადგენს, ე. ი. წრეწირს, ელიფსს, პარაბოლასა და ჰიპერბოლას. შებრუნებითაც, თუ კონუსის განკვეთა ერთ-ერთი სიბრტყით მაინც რომე-

ლიმე მეორე რიგის წირს გვაძლევს, მაშინ ამ კონუსის ყოველნაირი სიბრტყით განკვეთისას აგრეთვე მეორე რიგის წირს მივიღებთ, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული კონუსი მეორე რიგისაა.



ნახ. 62.

განმარტების თანახმად, ჩვენი მაგეგმილებელი კონუსი მეორე რიგისაა, რადგან მოცემული წრეწირი ამ კონუსის ერთ-ერთ კვეთას წარმოადგენს.

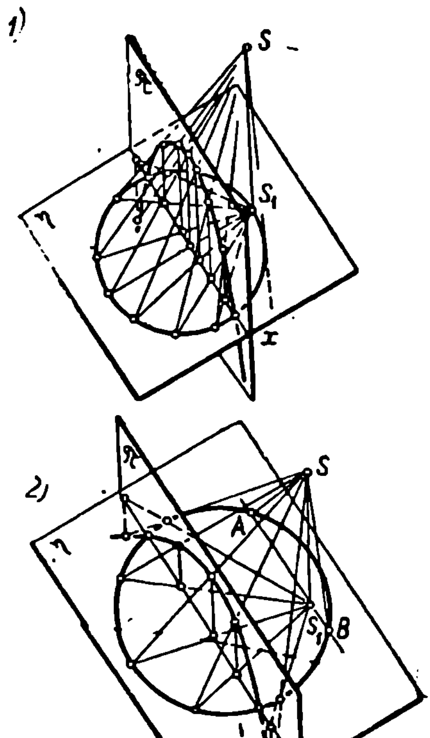
წრეწირის პერსპექტივა მიიღება მაგეგმილებელი კონუსის და სურათის π სიბრტყის ურთიერთკვეთაში. რადგანაც მაგეგმილებელი კონუსი

მეორე რიგისაა, ამიტომ მისი π სიბრტყესთან განკვეთა უეჭველად მეორე რიგის მრუდს უნდა გვაძლევდეს, ე.ი. წრეწირის პერსპექტივა, აუცილებლად, მეორე რიგის ერთ-ერთ მრუდს უნდა წარმოადგენდეს.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 1. მეორე რიგის კონუსის სიბრტყით კვეთაში ე ლ ი ფ ს ი მიიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც მკვეთი სიბრტყე კონუსის ყველა მსახველთან დახრილია და ამიტომ მათ საკუთრივ წერტილებში კვეთს. 62_2-ე ნახაზზე სწორედ ეს შემთხვევაა მოცემული.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განხილულ შემთხვევაში წრეწირის პერსპექტივა შესაძლებელია ისევ წრეწირი იყოს, ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ მოცემული წრეწირი და მისი პერსპექტივა ერთსა და იმავე სფეროზე იქნება მოთავსებული (ნახ. 62_1).

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 2. მეორე რიგის კონუსის სიბრტყესთან კვეთაში პარაბოლა მიიღება მაშინ, როდესაც მკვეთი სიბრტყე კონუსის ერთი ნებისმიერი მსახველის პარალელურია. ამის გამო მას არასაკუთრივ წერტილში გაკვეთს, დანარჩენ მსახველებს კი—საკუთრივ წერტილებში.

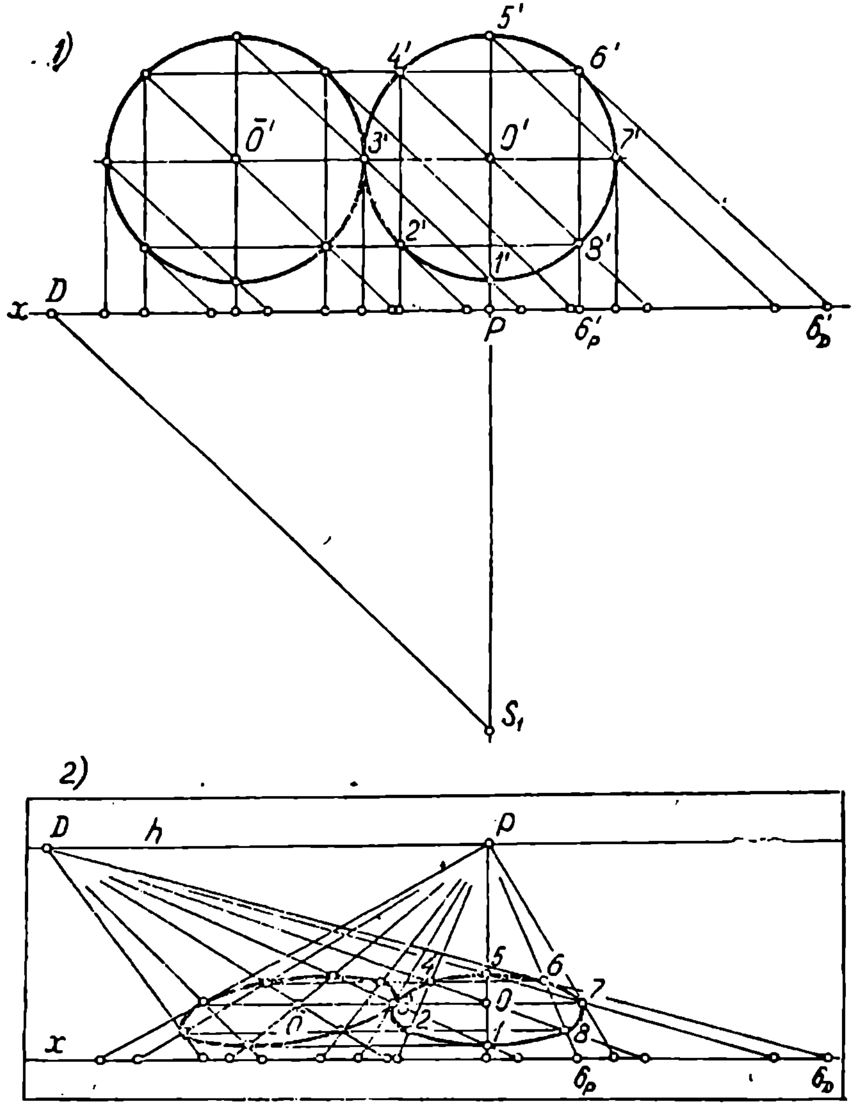


ნახ. 63.

მაშასადამე, წრეწირი, რომ პარაბოლად დაგეგმილდეს, მაგეგმილებელი კონუსის ერთი მსახველი სურათის π სიბრტყის პარალელური უნდა იყოს. ეს კი მაშინ მოხდება, როდესაც მოცემული წრეწირი S მზერის წერტილის S_1 ფუძეზე გაივლის (ნახ. 63_1). მართლაც, ამ შემთხვევაში π სიბრტყის პარალელური SS_1 წრფე მაგეგმილებელი კონუსის მსახველია.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 3. მეორე რიგის კონუსის სიბრტყესთან კვეთაში ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ა მიიღება მაშინ, როდესაც მკვეთი სიბრტყე კონუსის ორი ნებისმიერი მსახველის პარალელურია და, მაშასადამე, მათ არასაკუთრივ წერტილებში კვეთს. იმისათვის, რომ მაგეგმილებელი კონუსის ორი მსახველი π სიბრტყის პარალელური იყოს (ნახ. 63_2), საკმარისია, რომ მოცემული წრეწირი კვეთდეს ნეიტრალური და ν სიბრტყისა და II

სიბრტყის გადაკვეთის AB წრფეს. მაშინ კონუსის SA და SB მსახველები π სიბრტყის პარალელური იქნება და პერსპექტივაში ჰიპერბოლას მივიღებთ.



ნახ. 64.

წრეწირის პერსპექტივის აგება არსებითად არ განსხვავდება ნებისმიერი მრუდის პერსპექტივის აგებისაგან; საჭიროა მისი წერტილების პერსპექტივის აგება ერთ-ერთი ცნობილი წესით.

64_1-ე ნახაზზე მოცემულია ორი წრეწირი O' და $\overline{O}'$ ცენტრებით. ამ წრეწირების თვითეულ წერტილზე გატარებულია ორი დამხმარე წრფე. ამ შემთხვევაში ერთი წრფე სურათის მართობულია, მეორე კი მასთან 45°-ით დახრილი. მაგალითად, $6'$ წერტილზე გატარებულია $6'—6'_p$ და $6'—6'_D$ წრფეები. $6'$ წერტილის ასაგებად საკმარისია ამ ორი წრფის პერსპექტივა ავაგოთ (ნახ. 64_2).

ვსარგებლობთ $6'_p$ და $6'_D$ წერტილებით; მათი პერსპექტივა სურათის x ღერძზე, შესაბამისად, 6_p და 6_D წერტილებშია. $6'—6'_p$ წრფის პერსპექტივა სურათის მთავარ P წერტილში გაივლის, $6'—6'_D$ წრფისა კი—დისტანციის D წერტილში. $6_p—P$ და $6_D—D$ წრფეთა კვეთის წერტილი $6'$ წერტილის პერსპექტივაა.

ასეთივე გზით ავაგებთ დანარჩენ წერტილებსაც.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ წრეწირის ცენტრის O პერსპექტივა ელიფსის ცენტრს არ წარმოადგენს. მართლაც, წრეწირის ცენტრი დიამეტრების შუა წერტილია, მაგრამ მონაკვეთის შუა წერტილი პერსპექტივაში უკვე შუა წერტილად აღარ გადავა, რადგანაც სამი წერტილის მარტივი ფარდობა პერსპექტივაში საზოგადოდ ირღვევა. გამონაკლისს $3'—7'$ დიამეტრი წარმოადგენს, მისი $3—7$ პერსპექტივა O წერტილით შუაზე იყოფა, რადგანაც ეს დიამეტრი სურათის სიბრტყის პარალელურია.

უშუალოდ ნახაზზე მკაფიოდ ჩანს, რომ მარცხენა ელიფსი x წრფესთან დახრილია, მარჯვენა კი არა. ეს მოვლენა იმით აიხსნება, რომ მარჯვენა წრეწირის O' ცენტრი (ნახ. 64_1) S_1 წერტილიდან x წრფისადმი დაშვებულ S_1P მართობზე მდებარეობს.

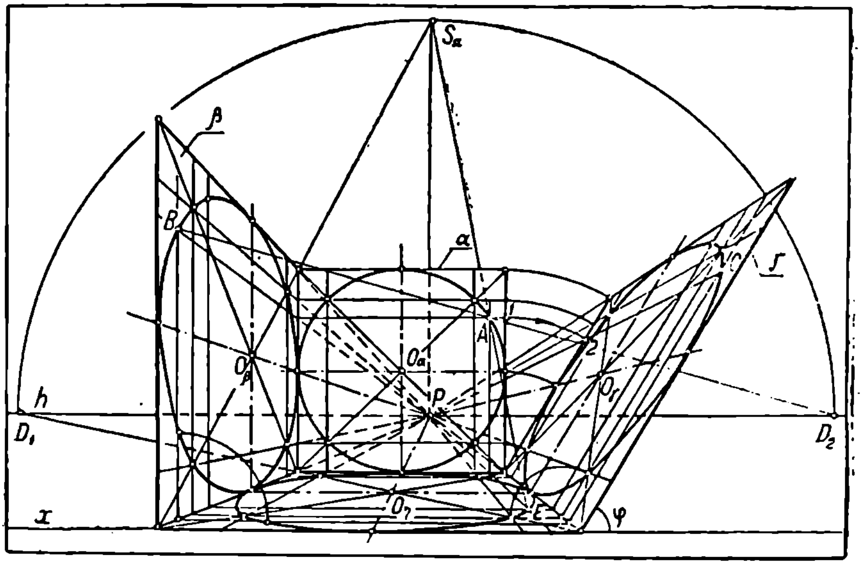
ელიფსი მით უფრო დახრილი იქნება x წრფესთან, რაც უფრო მეტად იქნება დაშორებული ამ ელიფსის ორიგინალის, ე. ი. წრეწირის, ცენტრი S_1P წრფიდან.

წრეწირი სხვადასხვა სიბრტყეში (ნახ. 65).

საჭიროა ტოლრადიუსიანი წრეწირების პერსპექტივის აგება ოთხ სიბრტყეში: ფუძეთა η სიბრტყეში, სურათის პარალელურ α სიბრტყესა, x წრფის მართობულ β სიბრტყესა და სურათის მართობულ, ხოლო საგანთა სიბრტყესთან დახრილ γ სიბრტყეში.

ეს ამოცანა გადაწყვეტილია შემდეგნაირად: η სიბრტყეში აგებულია კვადრატი, რომლის ერთი გვერდი მოცემული წრეწირის დიამეტრის ტო-

ლია და სურათის x ფუძეს ემთხვევა. ამ გვერდის მოპირდაპირე გვერდზე აგებულია კვადრატის პერსპექტივა α სიბრტყეში. ცხადია, რომ α სიბრტყეში მდებარე კვადრატის პერსპექტივა ისევ კვადრატი იქნება, რადგან $\alpha \parallel \pi$, მაგრამ სათანადოდ შემცირებული ზომით დაგეგმილდება. β და γ სიბრტყეებში მდებარე კვადრატების ის გვერდი, რომელიც სურათის სიბრტყეშია—აგრეთვე ნატურალური ზომის იქნება, იმ განსხვავებით, რომ



ნახ. 6[illegible].

β კვადრატის გვერდი შვეულია, γ კვადრატისა კი — x წრფესთან იმავე კუთხეს შეადგენს, რომელსაც თვით γ სიბრტყე η სიბრტყესთან ადგენს. ასეთი კვადრატების აგება უკვე მე-40 ნახაზზე იყო განხილული. ოთხივე კვადრატის დიაგონალები გავავლოთ, რითაც მათში ჩახაზული წრეწირების ცენტრებს ვიპოვით. მიღებულ O_α, O_β, O_γ და O_η ცენტრებზე შესაბამისი კვადრატის ორივე გვერდის პარალელური წრფეებიც გავატაროთ; მათი გადაკვეთა კვადრატის გვერდებთან საძიებელი წრეწირების ოთხ წერტილს მოგვცემს.

α კვადრატში ჩაწერილი წრეწირის პერსპექტივა ისევ წრეწირია და ამიტომ მას უშუალოდ ფარგლის საშუალებით ავაგებთ, დანარჩენი სამი წრეწირის პერსპექტივა ელიფსებად გამოისახება; მათი აგება O_α წრეწირის დახმარებით შეგვიძლია.

მაგალითად, O_α წრეწირზე ნებისმიერი A წერტილი ავიღოთ და მასზე α სიბრტყეში თარაზული წრფე გავატაროთ β სიბრტყის გადაკვეთამდე. მიღებულ წერტილზე კი β სიბრტყეშიც გავატაროთ თარაზული PB წრფე. თუ ამ წრფეს AD_2 წრფით გავკვეთთ, O_β წრეწირის B წერტილს მივიღებთ, რომელიც A წერტილის სიმაღლეზეა.

ანალოგიურად მივიღებთ η სიბრტყეში მდებარე ელიფსის E წერტილს. ამისათვის ისევ A წერტილზე შვეული წრფე გავატაროთ η სიბრტყის გადაკვეთამდე. ამ წერტილიდან კი — π სიბრტყის მართობული PE წრფე. ახლა A წერტილზე AS_π წრფე გავატაროთ. ამ წრფის არასაკუთრივი S_π წერტილი დისტანციის წრის უმაღლესი წერტილია, ამიტომ AS_π წრფე β სიბრტყის პარალელურია და α და η სიბრტყესთან 45°-ით დახრილი. AS_π და PE წრფეთა გადაკვეთის E წერტილი O_η წრეწირის ერთ-ერთი წერტილია.

ასეთივე C წერტილი γ სიბრტყეზე შემდეგნაირად შეიძლება მივიღოთ: A—1 წრფისა და კვადრატის გვერდის გადაკვეთის 1 წერტილი 1—2 რკალით გადავიტანოთ γ კვადრატის გვერდზე და P—2 წრფე გავატაროთ. B წერტილზე β სიბრტყეში გავატაროთ შვეული წრფე η სიბრტყის გადაკვეთამდე, საიდანაც გავატაროთ წრფე x ფუძის პარალელურად γ სიბრტყის გადაკვეთამდე. ამ წერტილიდან კი γ სიბრტყეში გავატაროთ წრფე კვადრატის დახრილი გვერდის პარალელურად P—2 წრფის C წერტილში გადაკვეთამდე.

28. წრეწირის პერსპექტივის აგება წრფეთა კონების საშუალებით

66-ე ნახაზზე, მარცხნივ, მოცემულია $A'_0A'B'B'_0$ მართკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ნახევარი. გატარებულია $A'_0B'_0$ დიამეტრის მართობი $O'R'$ რადიუსი.

წრეწირის ნებისმიერ $1'$ წერტილზე A'_0—$1'$ და B'_0—$1'$ წრფეები გავატაროთ. A'_0—$1'$ წრფე $A'R'$ წრფეს $1'_2$ წერტილში კვეთს, B'_0—$1'$ წრფე კი — $O'R'$ წრფეს — $1'_1$ წერტილში.

$\Delta A'_0A'1'_2$ და $\Delta B'_0O'1'_1$ მსგავსებია, რადგან შესაბამისი გვერდები ურთიერთმართობულია. მაგრამ ეს სამკუთხედები ტოლიცაა, რადგან ორი შესაბამისი კათეტი ტოლი აქვთ: $O'B'_0 = A'A'_0$; ამიტომ $O' — 1'_1 = A'—1'_2$.

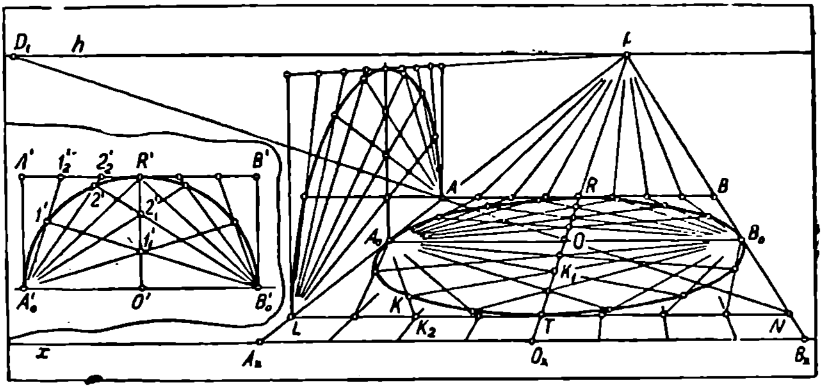
$1'$ წერტილი წრეწირზე ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ მიღებულ შედეგს წრეწირის ყოველი წერტილისათვის ექნება ადგილი.

აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ შებრუნებული აგებით წრეწირის ნებისმიერი წერტილის მიღება შეგვიძლია. მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული იყო წრეწირის $A'_0B'_0$ დიამეტრი. O' ცენტრიდან $O'R'$

რადიუსი გავატაროთ და $A_0A'B'B'_0$ მართკუთხედი ავაგოთ. $A'R'$ და $O'R'$ მონაკვეთები ისე დავყოთ, რომ შესაბამისი მონაკვეთები ტოლი იყოს, ე. ი. $A'—1'_2=O'—1'_1$, $A'—2'_2=O'—2'$ და ა. შ.

გრაფიკული მუშაობის გაადვილების მიზნით უმჯობესია, რომ $A'R'$ და $O'R'$ მონაკვეთები ტოლ ნაწილებად დაიყოს, როგორც ეს ნახაზზეა შესრულებული. $A'R'$ წრფეზე მიღებული წერტილები A'_0 წერტილს შევუერთოთ, $O'R'$ წრფის წერტილები კი—B'_0 წერტილს. ამგვარად, წრფეთა ორ კონას მივიღებთ, რომელთა ცენტრები, შესაბამისად, A'_0 და B'_0 წერტილებია. ამ კონათა შესაბამისი სხივების გადაკვეთა საძიებელი წრეწირის წერტილებს მოგვცემს.

ასეთი აგებით წრეწირის მარცხენა მეოთხედს მივიღებთ; მარჯვენა მეოთხედის მისაღებად $A'R'$ მონაკვეთის ნაცვლად $R'B'$ მონაკვეთი უნდა გამოვიყენოთ ისე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 66.

ახლა ცხადი უნდა იყოს, რომ ზემოთ განხილული ხერხით წრეწირის პერსპექტივასაც ავაგებთ. 66-ე ნახაზზე, მარჯვნივ, ფუძეთა სიბრტყეში მოცემულია წრეწირის O ცენტრი და მოითხოვება წრეწირის პერსპექტივის აგება.

O წერტილზე სურათის მართობული O_xP წრფე გავავლოთ. x წრფეზე O_x წერტილიდან ორივე მიმართულებით წრეწირის რადიუსის ტოლი O_xA_x და O_xB_x მონაკვეთები გადავზომოთ. A_x და B_x წერტილები P წერტილს შევუერთოთ. O წერტილზე დისტანციის D_1 წერტილში გამავალი OD_1 წრფე გავატაროთ, რომელიც A_xP და B_xP წრფესთან კვეთაში A და N წერტილებს იძლევა. ამ ორ წერტილზე x წრფის პარალელური AB და NL წრფეები გავატაროთ. მიღებული $ABNL$ ოთხკუთხედი იმ კვადრატის პერსპექტივაა, რომელშიც საძიებელი წრეწირი ჩაიხაზება. O წერტილზე x

წრფის პარალელური A_0B_0 წრფე გავატაროთ. A_0 და B_0 წერტილები იმ წრფეთა კონების ცენტრებად მივიღოთ, რომლებიც წრეწირის წერტილებს მოგვცემს.

კვადრატის LN და AB გვერდები დაყოფილია ტოლ ნაწილებად. ამდენივე ტოლნაწილადაა დაყოფილი RT მონაკვეთიც (ცხადია, პერსპექტივაში ეს ტოლი მონაკვეთები ჩვენგან დაშორების შესაბამისად მცირდება. აგება ცხადი წესით ხდება და ნახაზზე ნაჩვენები არ არის).

OT წრფეზე აღებულია K_1 წერტილი, LT წრფეზე კი მისი შესაბამისი K_2 წერტილი. გატარებულია A_0K_2 და B_0K_1 წრფეები, რომლებიც გადაკვეთაში წრეწირის ერთ-ერთ K წერტილს გვაძლევენ, ასევეა აგებული დანარჩენი წერტილებიც.

ნახაზზე აგებულია აგრეთვე შვეულ სიბრტყეში მდებარე წრეწირი, რომლის ერთ-ერთ დიამეტრს AL მონაკვეთი წარმოადგენს.

ა მ ო ც ა ნ ა 15. თ ა ღ ი ს პ ე რ ს პ ე ქ ტ ი ვ ი ს ა გ ე ბ ა (ნახ. 67). მოცემულია თაღის ორთოგონალური გეგმილები, მზერის S წერტილი და მთავარი სხივის SP_1 თარაზული გეგმილი. π სიბრტყე გატარებულია შენობის $4'$ წერტილზე.

ვსარგებლობთ პ. 17-ში მოყვანილი ხერხით.

ავაგოთ $1'_1—2'_1$ მიმართულების წრფეთათვის არასაკუთრივი F_∞ წერტილი, $1'_1—4'_1$ მიმართულების წრფეთა არასაკუთრივ წერტილს არ გამოვიყენებთ, რადგანაც იგი საკმაოდ შორსაა.

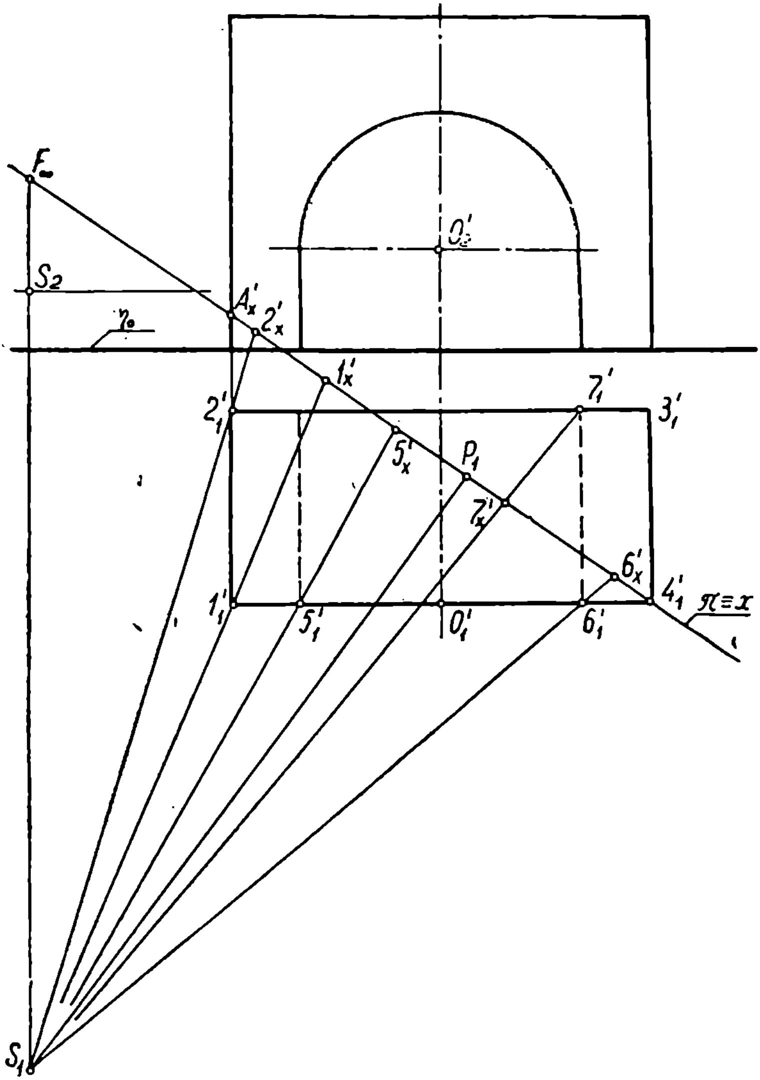
თაღის თარაზული გეგმილი S_1 წერტილიდან $\pi\equiv x$ წრფეზე ცენტრალურად დავაგეგმილოთ; $1'_1—2'_1$ გვერდი განვაგრძოთ x წრფის A'_x წერტილში გადაკვეთამდე. პერსპექტივა აგებულია 68-ე ნახაზზე.

გატარებულია h ჰორიზონტი და მიწის η_0 სიბრტყისა და π სურათის გადაკვეთის x_0 წრფე. რადგანაც ჰორიზონტის სიმაღლე მცირეა, ნახაზის დაჩრდილვის თავიდან ასაცილებლად ფუძის η სიბრტყე გატარებულია მიწის სიბრტყიდან ქვემოთ, მისგან ნებისმიერ მანძილზე; შესაბამისად ამისა, ნახაზზე აღებულია სურათის x ფუძე.

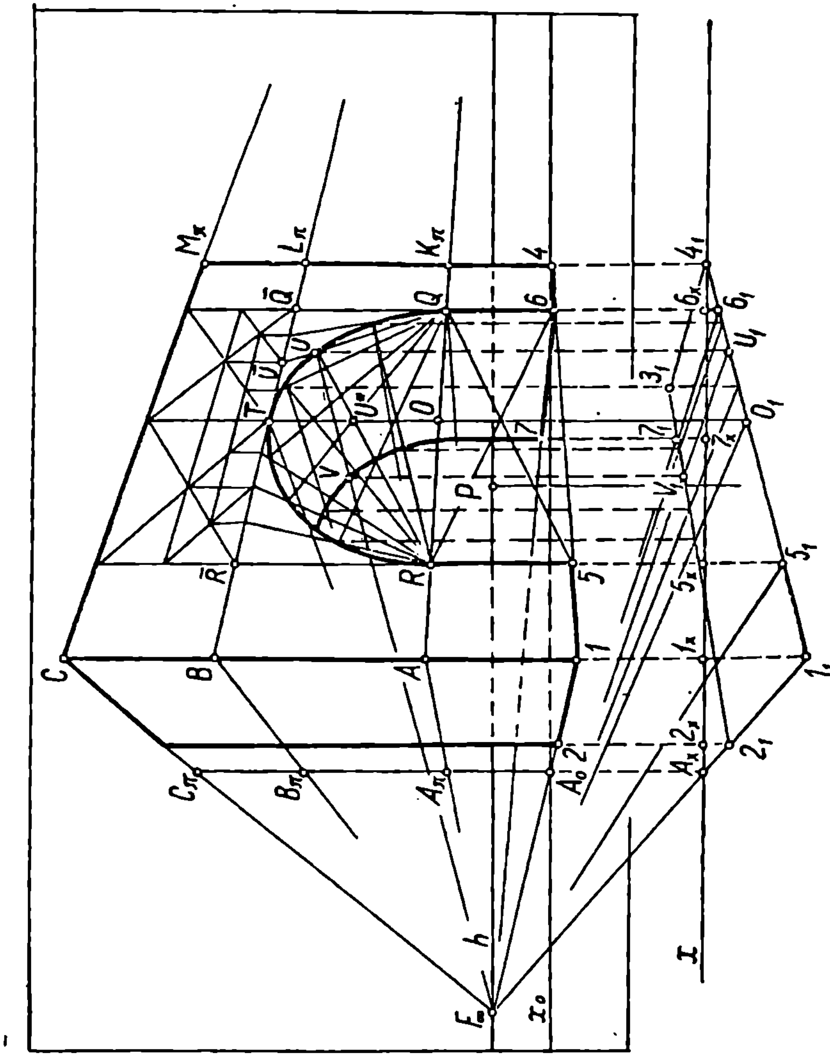
x წრფეზე, სურათის ღერძიდან $P_1A'_x$ მანძილზე, რომელიც ორთოგონალური გეგმილებიდანაა აღებული, მდებარეობს $1'_1—2'_1$ წრფის A_x კვალი. გატარებულია A_xF_∞ წრფე, რომელზედაც $1'_1—2'_1$ მონაკვეთის პერსპექტივა მდებარეობს.

1_1 წერტილი აგებულია შემდეგნაირად: ორთოგონალური გეგმილებიდან $P_1—1_x$ მონაკვეთის ზომა გადმოტანილია x წრფეზე სურათის ღერძიდან მარცხნივ. მიღებულია 1_x წერტილი; მასზე გატარებულია შვეული 1_x1_1 წრფე A_xF_∞ წრფის გადაკვეთამდე. ასევეა აგებული 2_1, 5_1, 6_1, და 7_1 წერტილები. 4_1 წერტილი უცვლელად რჩება x წრფეზე. $2_1—7_1$ და $4_1—F_\infty$ წრფეთა გადაკვეთით მივიღებთ 3_1 წერტილს.

A_x წერტილზე გატარებულია შვეული A_xA_0 წრფე, რომელიც ცხადია, სურათის სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ მასზე მონაკვეთები ნატურალური ზომით გამოისახება. A_0 წერტილი ამავე დროს მიწის სიბრტყეში მდებარეობს, საიდანაც გადაზომილია თაღის ღერძისა, თაღისა და შენო-



ნახ. 67.



ნახ. 68.

ბის სიმაღლეები, შესაბამისად, A_0A_π, A_0B_π და A_0C_π. A_0, C_π, B_π და A_π წერტილებზე გატარებულია F_∞ წერტილში მიმავალი წრფეები 1_1 წერტილიდან ამართული შვეული წრფის გადაკვეთამდე.

4_1 წერტილზე გატარებული შვეული 4_1—4 წრფეც სურათის სიბრტყეშია; ამიტომ მასზე აგრეთვე ნატურალური ზომითაა გადატანილი ზემოთ მოყვანილი სიმაღლეები: 4—K_π, 4—L_π და 4—M_π.

1—4 წრფე მიწის სიბრტყეშია, AK_π წრფე თაღის ღერძის სიმაღლეზეა, BL_π წრფე—თაღის სიმაღლეზე, ხოლო CM_π წრფე შენობის ზედა წიბოა.

5_1—R და 6_1—Q წრფეები განსაზღვრავს თაღის სიგანეს პერსპექტივაში.

შენობის სიმეტრიის OT ღერძი $5RQ6$ მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადის. თაღის უმაღლესი T წერტილი OT და BL_π წრფეების გადაკვეთას წარმოადგენს.

RTQ წრეწირის წერტილები აგებულია 66-ე ნახაზზე მოცემული ხერხით. ამისათვის $\overline{R}Q$ წრფის ზემოთ აღებული მართკუთხედის დიაგონალების გამოყენებით $\bar{R}T$ და $T\bar{Q}$ მონაკვეთები დაყოფილია ოთხ თანასწორ ნაწილად, OT მონაკვეთი კი უშუალოდ დაიყოფა. წრეწირის ნებისმიერი U წერტილი RU^* და $Q\overline{U}$ წრფეების გადაკვეთით მიიღება.

თაღის უკანა წრეწირის V წერტილი შემდეგნაირადაა აგებული: U წერტილის U_1 ფუძიდან 2_1—3_1 წრფის გადაკვეთამდე UF_∞ წრფეა გატარებული. V_1 წერტილი საძიებელი V წერტილის ფუძეა. V_1 წერტილზე გატარებულია შვეული წრფე UF_∞ წრფის გადაკვეთამდე. ასეთივე გზითაა აგებული ამ წრეწირის დანარჩენი ხილვადი წერტილები.

V. შეთავსების მეთოდი. პერსპექტიული გამოსახულების რეკონსტრუქცია

24. ფუძეთა სიბრტყის შეთავსება სურათის სიბრტყესთან

ფუძეთა სიბრტყის სურათის სიბრტყესთან შეთავსება განხორციელებულია ფუძეთა სიბრტყის ბრუნვით სურათის x ფუძის ირგვლივ.

ვთქვათ, რომ ფუძეთა η სიბრტყეზე მოცემულია $A'B'C'$ სამკუთხედი (ნახ. 69_1), მისი პერსპექტივაა ABC სამკუთხედი.

η სიბრტყე შევათავსოთ π სიბრტყესთან და ავაგოთ $A'B'C'$ სამკუთხედი შეთავსებულ მდებარეობაში. ამისათვის საკმარისია მისი ერთ-ერთი, მაგალითად, A' წვეროს შეთავსება განვიხილოთ.

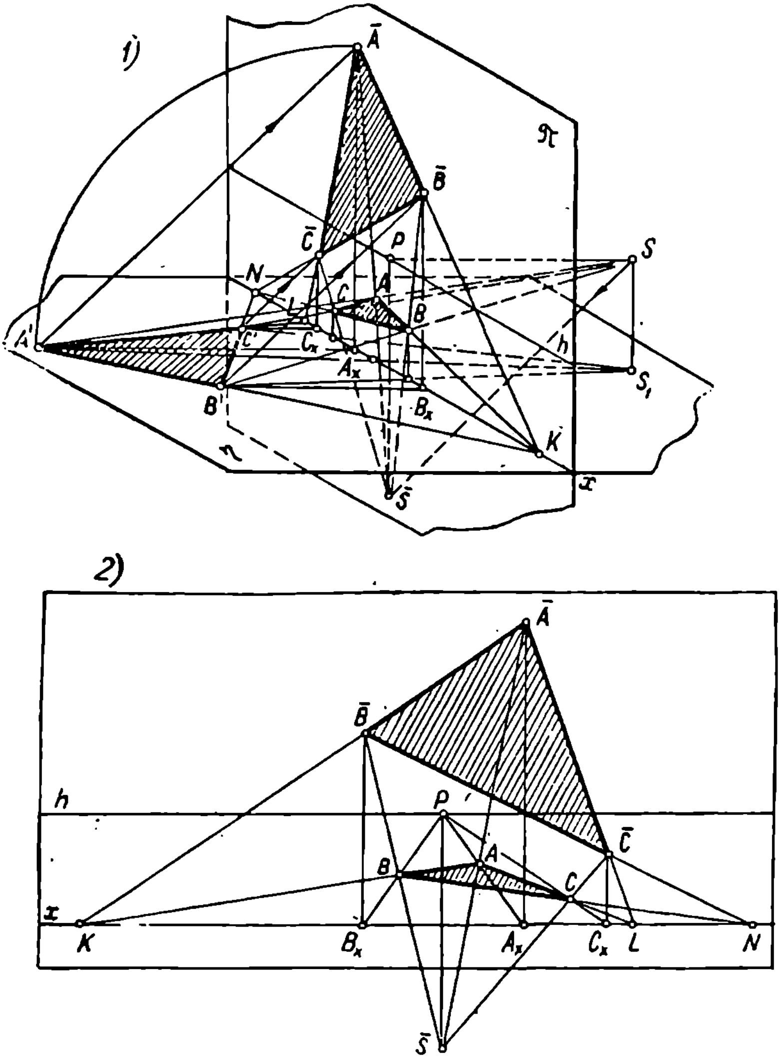
A' წერტილიდან x წრფეზე $A'A_x$ მართობი დავუშვათ. A_x წერტილი A' წერტილის ბრუნვის ცენტრია, $A'A_x$ მონაკვეთი კი ბრუნვის რადიუსი. შეთავსების შემდეგ A' წერტილი $\overline{A}$ მდებარეობას დაიკავებს, ცხადია, რომ $A_x\overline{A}\perp x$ და $A_x\overline{A}=A_xA'$; ამავე დროს A' და $\overline{A}$ წერტილების შემაერთებელი წრფე x წრფის მართობია და η და π სიბრტყესთან 45°-ით დახრილია. ამგვარად, η სიბრტყის ყოველ წერტილს π სიბრტყეზე ერთადერთი წერტილი (შეთავსება) შეესაბამება. სახელდობრ, მოცემული სამკუთხედის A', B' და C' წვეროებს π სიბრტყეზე $\overline{A}$, $\overline{B}$ და $\overline{C}$ წერტილები შეესაბამება; შესაბამისი წერტილების შემაერთებელი წრფეები კი ურთიერთპარალელურია: $A'\overline{A}\parallel B'\overline{B}\parallel C'\overline{C}$.

ამ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივა ავაგოთ. ამისათვის მზერის S წერტილზე $A'\overline{A}$ წრფის პარალელური $S\overline{S}$ წრფე გავატაროთ. ცხადია, რომ $SP=\overline{S}P$ და $\overline{S}P\perp h$.

$A'\overline{A}$, $B'\overline{B}$ და $C'\overline{C}$ წრფეთა პერსპექტივა, ე. ი. $A\overline{S}$, $B\overline{S}$ და $C\overline{S}$ წრფეები $\overline{S}$ წერტილზე გადაიკვეთება. ამავე დროს, A' წერტილი $A'\overline{A}$ წრფეს ეკუთვნის, ამიტომ A' წერტილის A პერსპექტივა $A'\overline{A}$ წრფის $A\overline{S}$ პერსპექტივაზე მდებარეობს; აგრეთვე, B წერტილი — $B\overline{S}$ წრფეზე და C წერტილი $C\overline{S}$ წრფეზე უნდა მდებარეობდეს. მაშასადამე, $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ და ABC სამკუთხედები $\overline{S}$ წერტილის მიმართ პერსპექტიულია. დეზარგის თეორემის თანახმად (იხ. პ. 5, ნახ. 15), ამ სამკუთხედების გვერდთა თანადი წყვილების გადაკვეთის წერტილები ერთ წრფეზე უნდა მდებარეობდეს.

ვაჩვენოთ, რომ ეს წრფე სურათის x ფუძე იქნება, ხოლო გვერდების გადაკვეთის წერტილები კი—K, L და M წერტილები, რომლებზედაც მოცემული $A'B'C'$ სამკუთხედის გვერდები გადის.

მართლაც, $A'B'C'$ სამკუთხედი და ABC პერსპექტივა დეზარგის თეორემას აკმაყოფილებს და მათი გვერდების თანად წყვილთა გადაკვეთის წერ-



ნახ. 69.

ტილები η და π სიბრტყეთა გადაკვეთის x წრფეზე უნდა მდებარეობდეს. ეს წერტილები K, L და M წერტილებია. η სიბრტყის π სიბრტყესთან შეთავსების შემდეგ ეს წერტილები უძრავი იქნება, როგორც ბრუნვის ღერძზე მდებარე, რის გამოც შეთავსების შედეგად მიღებული $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ სამკუთხედის გვერდებიც, შესაბამისად, ამ წერტილებზე უნდა გადიოდეს.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია პერსპექტიული გამოსახულების მიხედვით ნაკვთის შეთავსების აგება უშუალოდ სურათზე მივიღოთ. ამისათვის ნაკვთის პერსპექტივის გარდა მთავარი P წერტილი და მთავარი მანძილი უნდა გვქონდეს მოცემული (ნახ. 69_2).

მოცემულია სამკუთხედის ABC პერსპექტივა. მთავარი P წერტილიდან ამართულია h ჰორიზონტის მართობული და მთავარი მანძილის ტოლი $P\bar{S}$ მონაკვეთი.

ავაგოთ, მაგალითად, B წერტილის შეთავსება. ამისათვის მასზე სურათის მართობული BP წრფე გავატაროთ. BP და x წრფეთა გადაკვეთის B_x წერტილზე გავატაროთ შვეული $B_x\bar{B}$ წრფე, რომელიც, ცხადია, BP წრფის π სურათთან შეთავსებას წარმოადგენს. იმავე B წერტილზე $B\bar{S}$ წრფე გავატაროთ. წინა ნახაზის განხილვიდან უკვე ვიცით, რომ ამ წრფის ორიგინალი სურათისა და ფუძეთა სიბრტყეებთან 45°-ით არის დახრილი და ამიტომ $B\bar{S}$ და BP წრფეთა გადაკვეთით მივიღებთ $BB_x\bar{B}$ სამკუთხედს, რომლის ორიგინალი მართკუთხა და ტოლფერდა სამკუთხედია, ე. ი. BB_x მონაკვეთი სინამდვილეში $B_x\bar{B}$ მონაკვეთის ტოლია. ეს უკანასკნელი კი ნატურალური სიდიდითაა მოცემული, რადგან სურათის სიბრტყეში მდებარეობს. ამგვარად, $\bar{B}$ წარმოადგენს B წერტილის შეთავსებას. ასევეა აგებული დანარჩენი ორი წვეროს შეთავსებაც.

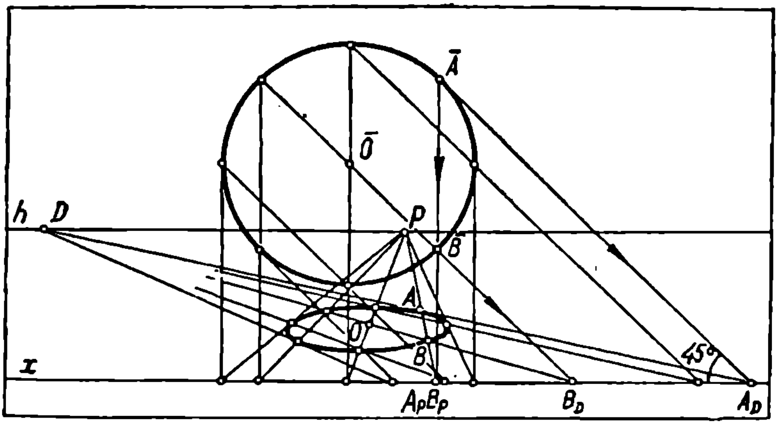
ზემოთ განხილულ აგებაში შეიძლება ცვლილება შევიტანოთ. სახელდობრ, შეიძლება გამოვიყენოთ პერსპექტიული სამკუთხედების თანადი გვერდების გადაკვეთის K, L და M წერტილები.

მას შემდეგ, რაც ზემოთ ნაჩვენები გზით აგებული იქნება სამკუთხედის ერთი წვერო მაინც (მაგალითად, $\bar{B}$ წერტილი), AB და x წრფეთა გადაკვეთის K წერტილზე $K\bar{B}$ წრფე გავატაროთ, $\bar{S}$ წერტილზე კი—$\bar{S}A$ წრფე. მათ გადაკვეთაში $\bar{A}$ წერტილს მივიღებთ, $\bar{C}$ წერტილს კი $\bar{B}N$ და $\bar{A}L$ წრფეების გადაკვეთის შედეგად მივიღებთ. შეთავსების ასეთი გზით აგება მოსახერხებელია მაშინ, თუ K, L და M წერტილები ნახაზის ფარგლებს გარეთ შორს არ არის განლაგებული.

π სიბრტყესთან შეთავსების შედეგად გეომეტრიული ნაკვთის მოცემული პერსპექტივიდან ამ ნაკვთის ნამდვილი სახე მივიღეთ. შესრულებულ ამოცანას **პერსპექტივის რეკონსტრუქცია** ეწოდება.

მკითხველისათვის ცხადი უნდა იყოს, რომ ზემოთ განხილული გეომეტრიული აგება შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტის საშუალებასაც გვაძლევს. სახელდობრ, შეგვიძლია სურათის π სიბრტყეზე გამოხაზული ნაკვთის საშუალებით მისი პერსპექტივა მივიღოთ.

მართლაც, თუ ჯერ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ სამკუთხედს მოცემულად ჩავთვლით, P და S წერტილების დახმარებით ABC პერსპექტივას მივიღებთ, ანალოგიური ამოცანა 70-ე ნახაზზეა განხილული.



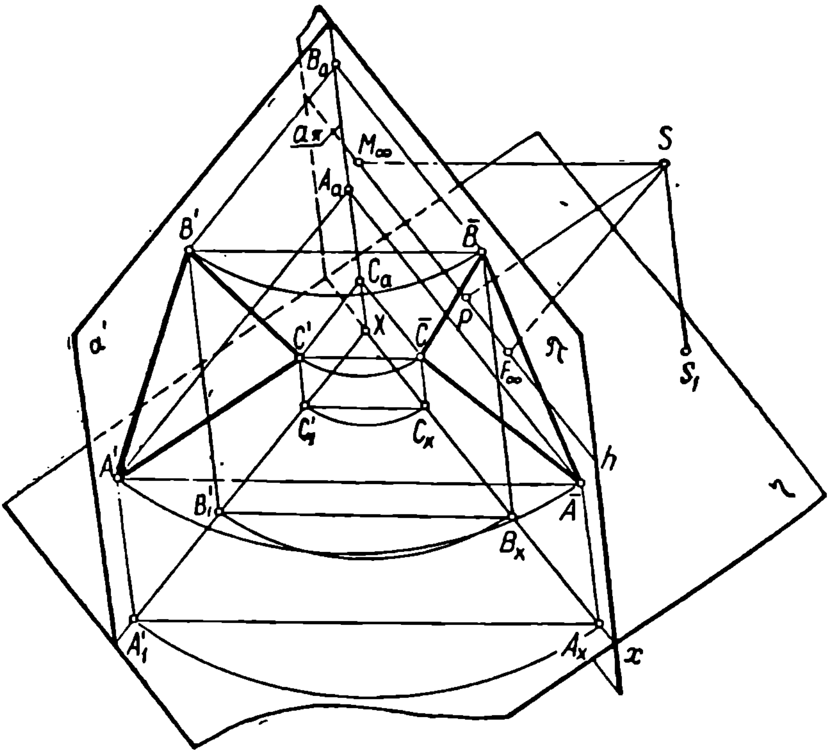
ნახ. 70.

π სიბრტყეზე მოცემულია წრეწირი, ასაგებია მისი პერსპექტივა. წრეწირის ნებისმიერ $\bar{A}$ წერტილზე ორი წრფე გავატაროთ: $\bar{A}A_p \perp x$ და თარაზულ მიმართულებასთან 45°-ით დახრილი $\bar{A}A_D$ წრფე. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ π სიბრტყე x წრფის ირგვლივ ბრუნებით η სიბრტყეს შევუთავსეთ. ამის შედეგად $\bar{A}A_p$ წრფის A_pP პერსპექტივა მთავარ P წერტილში გაივლის, $\bar{A}A_D$ წრფის პერსპექტივა კი დისტანციის D წერტილში. A_pP და A_DD წრფეთა გადაკვეთის A წერტილი $\bar{A}$ წერტილის პერსპექტივაა, ასევეა აგებული $\bar{B}$ წერტილის პერსპექტივაც.

25. ფუძეთა სიბრტყის მართობული სიბრტყის შეთავსება სურათის სიბრტყესთან

η სიბრტყის მართობულ α' სიბრტყეში მოცემულია $A'B'C'$ სამკუთხედი (ნახ. 71). α' სიბრტყის π სიბრტყესთან შეთავსებისას ბრუნვის ღერძად ამ სიბრტყეთა გადაკვეთის a_π წრფე მიიღება. B' წერტილის $\bar{B}$ შეთავსება რომ მივიღოთ, ბრუნვის რადიუსად a_π წრფის მართობი $B'B_a$

უნდა მივიღოთ. ცენტრად კი a_π წრფის B_a წერტილი. ანალოგიურად მივიღებთ დანარჩენი წვეროების $\bar{A}$ და $\bar{C}$ შეთავსებებს.



ნახ. 71.

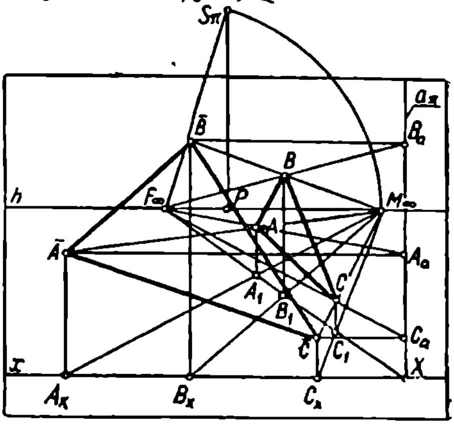
გავატაროთ $A'\bar{A}_1$, $B'\bar{B}_1$ და $C'\bar{C}$ წრფეები და მათი A'_1A_x, B'_1B_x, C'_1C_x ფუძეები. ცხადია, ყველა ეს წრფე ურთიერთპარალელურია. მათი არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივა M_∞ წერტილია (h ჰორიზონტზე). a' სიბრტყეში მდებარე თარაზული წრფეების არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივა F_∞ წერტილია.

M_∞ და F_∞ წერტილების დახმარებით სამკუთხედის რეკონსტრუქციას უშუალოდ სურათზე შევძლებთ (ნახ. 72).

სურათზე მოცემულია შვეულ სიბრტყეში მდებარე სამკუთხედის ABC პერსპექტივა და მისი $A_1B_1C_1$ ფუძე. ეს ფუძე მდებარეობს სამკუთხედის სიბრტყისა და η სიბრტყის გადაკვეთის XF_∞ წრფეზე. X წერტილზე x წრფის მართობულად გადის სამკუთხედის სიბრტყისა და π სურათის გადაკვეთის a_π წრფე.

M_∞ წერტილის საპოვნელად მთავარ P წერტილზე h ჰორიზონტის მართობულად მთავარი მანძილის ტოლი PS_π მონაკვეთია ამართული. F_∞ ცენტრიდან $F_\infty S_\pi$ რადიუსით შემოწერილი წრეწირი h ჰორიზონტს საძიებელ M_∞ წერტილში გადაკვეთს. მკითხველისათვის ცხადი უნდა იყოს, რომ M_∞ წარმოადგენს XF_∞ წრფისათვის ზომის წერტილს.

ავაგოთ სამკუთხედის A წვეროს $\bar{A}$ შეთავსება π სიბრტყეზე. ეს ამოცანა სამნაირი გზით შეიძლება გადაწყდეს.



ნახ. 72.

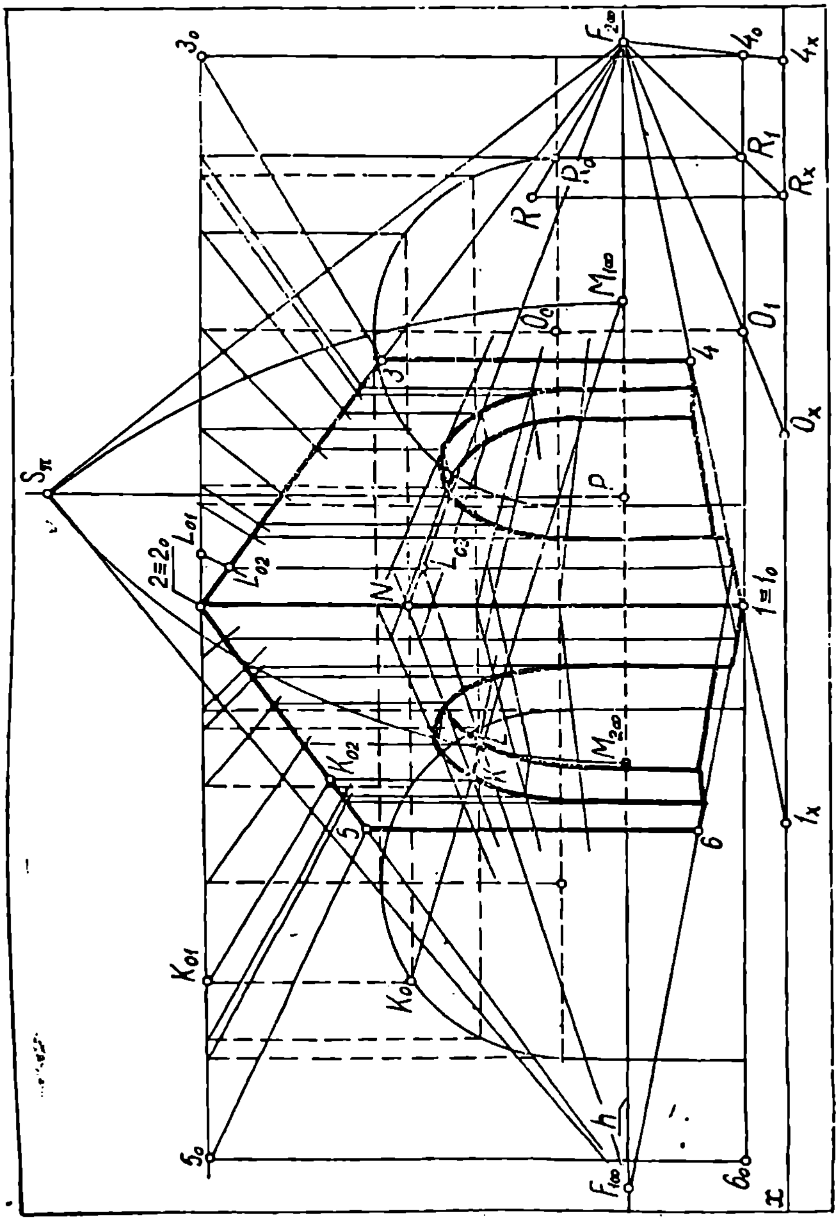
1) M_∞ წერტილზე გავატაროთ $M_\infty A_1$ და $M_\infty A$ წრფეები. $M_\infty A_1$ წრფისა და x წრფის გადაკვეთის A_x წერტილიდან შვეული წრფე გავატაროთ $M_\infty A$ წრფის გადაკვეთამდე. მიღებული $\bar{A}$ წერტილი ამოცანის პასუხია.

2) F_∞ წერტილზე $F_\infty A$ წრფე გავატაროთ a_π წრფის A_a წერტილში გადაკვეთამდე. A_a წერტილზე კი h ჰორიზონტის პარალელური $A_a\bar{A}$ წრფე ტარდება $M_\infty\bar{A}$ წრფის გადაკვეთამდე.

3) ვატარებთ $M_\infty A_1$, $A_x\bar{A}$, $F_\infty A$ და $A_a\bar{A}$ წრფეებს. $A_x\bar{A}$ და $A_a\bar{A}$ წრფეთა გადაკვეთაში $\bar{A}$ წერტილს მივიღებთ.

ამ სამი გზიდან ისეთი უნდა შევარჩიოთ, რომელსაც ყოველ ცალკე შემთხვევაში უფრო მიზანშეწონილად ჩავთვლით. მაგალითად, მეორე გზით გადაწყვეტისას შესაძლებელია $M_\infty\bar{A}$ და $A_a\bar{A}$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი ზუსტად ვერ მოიძებნოს, თუ ამ წრფეთა შორის კუთხე საკმაოდ მცირეა; ასეთ შემთხვევას ადგილი ექნება მაშინ, როდესაც A წერტილიდან h წრფემდე მანძილი მეტად მცირეა. ასევე, ზუსტად ველარ მოიძებნება A_x წერტილი (პირველი გზით), თუ ჰორიზონტის სიმაღლე მეტად მცირეა, რის გამოც კუთხე x და $M_\infty A_x$ წრფეთა შორის აგრეთვე მცირე იქნება.

შეთავსების ხერხის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია π სურათზე გამოსახული ბრტყელი ნაკვეთის მიხედვით ავაგოთ პერსპექტივა ნებისმიერ შვეულ სიბრტყეზე. ამისათვის საკმარისია ზემოთ მოყვანილი გეომეტრიული აგებანი შებრუნებული თანამიმდევრობით განვიხილოთ. შეთავსების ხერხი გამოყენებულია ქვემოთ მოყვანილ ამოცანაში.



3_0
$F_{2\infty}$
4_0
4_x
R_1
R_x
R
P_0
$M_{1\infty}$
O_0
O_1
O_x
4
3
S_π
P
L_{01}
L_{02}
L_{03}
$2 \equiv 2_0$
N
$1 \equiv 1_0$
$M_{2\infty}$
K_{02}
5
6
1_x
K_{01}
K_0
5_0
h
$F_{1\infty}$
6_0
x

Ábr. 73.

ა მ ო ც ა ნ ა 16. მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი კვადრატული ფუძით და გვერდის წახნაგებში ჩატანებული თაღოვანი ნიშებით (ნახ. 73). ავაგოთ მისი პერსპექტივა.

ვთქვათ, რომ აგებულია ერთ-ერთი წიბოს 1—2 პერსპექტივა და გვერდის წახნაგების სიბრტყეთა η სიბრტყესთან გადაკვეთის $1—F_{1\infty}$ და $1—F_{2\infty}$ წრფეები. მოცემულია გვერდის წახნაგების სიგანეც.

1—2 წიბოზე გამავალი ხილვადი წახნაგები ჯერ π სურათის პარალელურ სიბრტყეში შეთავსებულად წარმოვიდგინოთ. ასეთი შეთავსება შეიძლება განხორციელდეს ამ წახნაგების ბრუნვით 1—2 წიბოს ირგვლივ. შეთავსების შემდეგ ორივე წახნაგის ქვედა წიბოები x წრფის პარალელურ $6_0—4_0$ წრფეზე განლაგდება, ზედა წიბოები კი $5_0—3_0$ წრფეზე. $1—F_{2\infty}$ და x წრფეთა გადაკვეთის 1_x წერტილიდან x წრფეზე წახნაგის ნატურალური სიგანის ტოლი $1_x—4_x$ მონაკვეთი მოვზომოთ და $4_x—F_{2\infty}$ წრფე გავავლოთ. ეს უკანასკნელი $6_0—4_0$ წრფეს 4_0 წერტილში კვეთს, რომელზედაც შვეული $4_0—3_0$ წრფე გავატაროთ. ამით დასრულდება $1_0—2_0—3_0—$ $—4_0$ მართკუთხედის აგება, რომელიც 1—2—3—4 წახნაგის ზემონახსენები შეთავსების შედეგად მიიღება. ცხადია, ამ მართკუთხედის $1_0—2_0$ გვერდი 1—2 წიბოსთან შეთავსებული დარჩება. ზუსტად ასეთივე $1_0—2_0—5_0$ $—6_0$ მართკუთხედი პარალელეპიპედის მეორე წახნაგის შეთავსებას წარმოადგენს.

იმისათვის, რომ წახნაგების პერსპექტივა ავაგოთ, საჭიროა ამ წახნაგების სიბრტყეში მდებარე თარაზულ წრფეთა ზემო წერტილები ავაგოთ. ცნობილი წესით აგებულია 1—2—3—4 წახნაგის შესაბამისი ზომის $M_{2\infty}$ წერტილი და 1—2—5—6 წახნაგის შესაბამისი $M_{1\infty}$ წერტილი.

გავატაროთ $2—F_{1\infty}$ და $2—F_{2\infty}$ წრფეები. ახლა 3_0 წერტილზე გავატაროთ $M_{2\infty}$ წერტილში გამავალი წრფე, რომელიც $2—F_{2\infty}$ წრფეს მე-3 წერტილში გადაკვეთს.

გავატაროთ შვეული 3—4 წრფე, რითაც წახნაგის 1—2—3—4 პერსპექტივის აგება დასრულდა.

$M_{1\infty}$ წერტილის გამოყენებით ანალოგიურად აიგება მეორე წახნაგის 1—2—5—6 პერსპექტივა.

ახლა წახნაგებში ჩატანებული ნიშების პერსპექტივა ავაგოთ იმ პირობით, რომ ნიშის თაღის ცენტრი წახნაგის სიმეტრიის შვეულ ღერძზე მდებარეობდეს.

x წრფეზე $1_x—4_x$ მონაკვეთის შუა O_x წერტილიდან თაღის რადიუსის ტოლი O_xR_x მონაკვეთი მოვზომოთ. $O_xF_{2\infty}$ და $R_xF_{2\infty}$ წრფეების გატარებით $1_0—4_0$ წრფეზე O_1 და R_1 წერტილებს მივიღებთ, რომლებზედაც, შესაბამისად, შვეული O_1O_0 და R_1R_0 წრფეები გავატაროთ.

R_x წერტილზე გატარებულ შვეულ წრფეზე თაღის ცენტრის სიმაღლის ტოლი R_xR მონაკვეთი მოვზომოთ და $RF_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ; იგი R_1R_0 წრფეს R_0 წერტილში კვეთს; შემდეგ R_0O_0 წრფე გავატაროთ. O_0 წერტილს ცენტრად მივიღებთ, O_0R_0 მონაკვეთს რადიუსად და 1—2—3—4 წახნაგში გამოკვეთილი თაღის შეთავსებას ავაგებთ. $1_0—2_0$ წრფისადმი სიმეტრიულად აგებულია მეორე წახნაგში მდებარე თაღის შეთავსებაც.

ახლა თაღების პერსპექტივა ავაგოთ. მარცხენა შეთავსებული თაღის K_0 წერტილზე K_0K_{01} შვეული წრფე გავატაროთ. შემდეგ $M_{1\infty}$ წერტილში გამავალი K_0K და $K_{01}K_{02}$ წრფეები ავაგოთ. $2 — F_{1\infty}$ და $K_{01}K_{02}$ წრფეთა გადაკვეთის K_{02} წერტილზე შვეული წრფე გავატაროთ; იგი K_0K წრფეს K წერტილში კვეთს. მივიღეთ K_0 წერტილის შესაბამისი პერსპექტივა. ასე აიგება ორივე თაღის ყველა წერტილი.

ასეთივე სიდიდის წრეწირი უნდა ავაგოთ ნიშის უკანა სიბრტყეში. ამისათვის $2_0—3_0$ წრფეზე გადაზომილია ნიშის სიღრმის ტოლი $2_0—L_{01}$ მონაკვეთი და L_{01} წერტილიდან $M_{2\infty}$ წერტილში გატარებულია L_{01} L_{02} წრფე 2—3 წრფის გადაკვეთამდე. L_{02} წერტილზე კი გატარებულია შვეული $L_{02}L_{03}$ წრფე.

K წერტილზე გავატაროთ $F_{1\infty}$ წერტილში მიმავალი KN წრფე და $F_{2\infty}$ წერტილში მიმავალი KL წრფე. გავატაროთ აგრეთვე $NF_{2\infty}$ წრფე, რომელიც $L_{02}L_{03}$ წრფეს L_{03} წერტილში კვეთს. $L_{03}F_{1\infty}$ წრფე გავატაროთ. მისი განკვეთა KL წრფესთან ნიშის უკანა სიბრტყეში მდებარე წრეწირის ერთ-ერთ L წერტილს მოგვცემს. K და L წერტილები ერთ სიმაღლეზე მდებარეობს.

ანალოგიურადაა აგებული ყველა დანარჩენი წერტილები.

VI. პერსპექტივის აგების მაგალითები

26. პერსპექტივის აგება ნახაზის ჩარჩოებიდან გამოუსვლელად

მოცემულია შენობის გეგმა და ორი ფასადი (ნახ. 74); არჩეულია: 1) მზერის წერტილი, რომელიც თარაზული S_1 გეგმილითა და ჰორიზონტის სიმაღლით (ფასადზე h წრფე) განისაზღვრება, 2) მთავარი S_1P_1 სხივი და 3) სურათის π სიბრტყე. π სიბრტყის S_1 წერტილიდან დაშორება შერჩეულია პერსპექტივის სასურველი ზომის შესაბამისად.

ჩვენი მიზანია, პერსპექტივის აგებისას უკვე ცნობილი ხერხები ისე გამოვიყენოთ, რომ მთელი გეომეტრიული აგება ნახაზის ჩარჩოებს არ გასცდეს.

ჯერ ავაგოთ ($1_1 2_1 3_1 4_1, 1_2 2_2 3_2 4_2$) მართკუთხედის პერსპექტივა. ამისათვის წინასწარ გეგმაზე შემდეგი აგებაა შესრულებული:

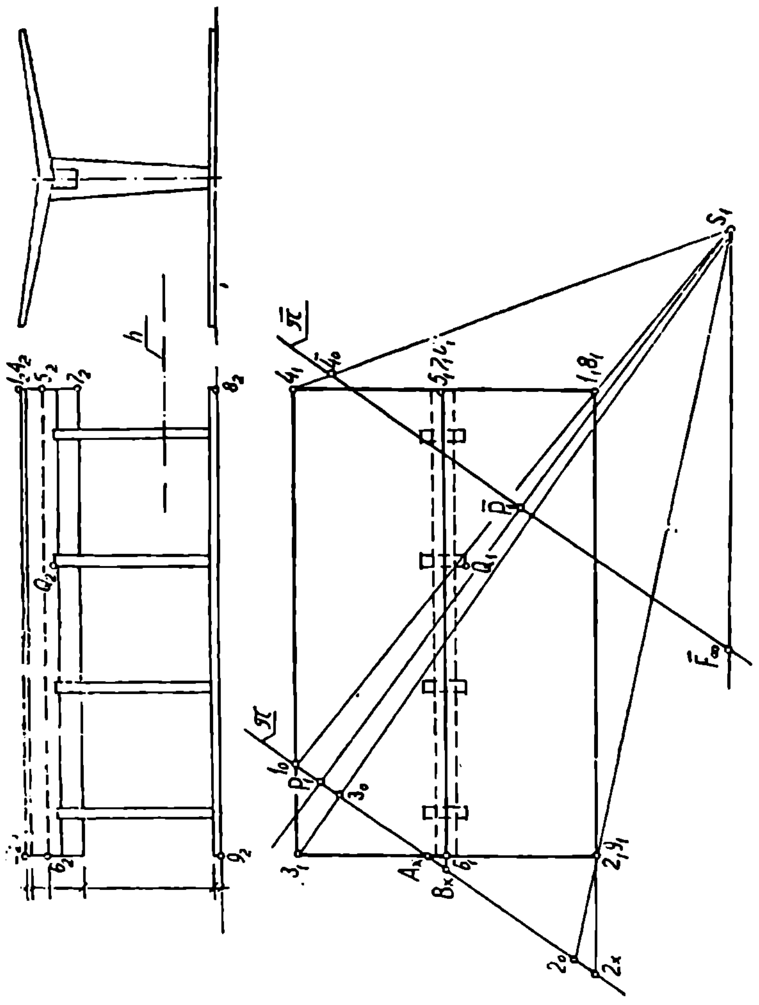
1_1, 2_1 და 3_1 წერტილები S_1 წერტილიდან π სიბრტყეზე 1_0, 2_0 და 3_0 წერტილებში დავაგეგმილეთ.

ამავე სიბრტყეზე 4_1 წერტილის გეგმილი ნახაზის ფარგლებს შორ ცილდება. ასევე შორს არის $1_1 2_1$ და $3_1 4_1$ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილის F_∞ პერსპექტივა, რომელიც შემდეგ უნდა გამოვიყენოთ.

ამისათვის π სიბრტყის პარალელურად და S_1 წერტილთან უფრო ახლოს გავატაროთ დამხმარე სურათის $\overline{\pi}$ სიბრტყე. ჩვენს შემთხვევაში $\overline{\pi}$ სიბრტყე S_1P_1 მთავარი მანძილის შუა $\overline{P}_1$ წერტილზეა გატარებული. $\overline{\pi}$ სიბრტყეზე ავაგეთ 4_1 წერტილის $\overline{4}_0$ პერსპექტივა და აგრეთვე $1_1 2_1$ წრფის არასაკუთრივი წერტილის $\overline{F}_\infty$ პერსპექტივაც.

ცხადია, რომ $\overline{P}_1\overline{4}_0$ და $\overline{P}_1\overline{F}_\infty$ მანძილები ორჯერ უფრო მცირეა π სურათზე მიღებულ შესაბამის მანძილებთან შედარებით, რასაც შემდეგ მხედველობაში მივიღებთ. ავაგოთ $1_1 2_1, 5_1 6_1$ და $2_1 3_1$ წრფეთა π სურათთან განკვეთის 2_x, B_x და A_x წერტილებიც.

ფუძეთა სიბრტყის არჩევა ჩვენზეა დამოკიდებული. მიწის თარაზული ზედაპირი მეტად ახლოა მზერის წერტილთან და ამიტომ ფუძეთა სიბრტყედ მისი მიღება გრაფიკულ სამუშაოს გააძნელებს. η სიბრტყედ მივიღოთ 1, მე-2, მე-3 და მე-4 წერტილებზე გამავალი სიბრტყე. ამიტომ სურათზე (ნახ. 75) ჰორიზონტსა და სურათის x ფუძეს შორის მანძილი შესაბამისად



ნახ. 74.

ავიღოთ. ამავე დროს, ცხადია, სურათის x ფუძე h ჰორიზონტის ზემოდ უნდა მდებარეობდეს.

h ჰორიზონტზე მთავარი P წერტილის მარცხნივ ავიღოთ $1_1 2_1$ წრფის არასაკუთრივი წერტილის F_∞ პერსპექტივა; ამისათვის 74 ნახაზიდან $\overline{PF}_\infty$ მონაკვეთის გაორკეცებული ზომის PF_∞ მონაკვეთი ავაგოთ. წინა ნახაზიდან x წრფეზე, ცნობილი წესით, გადმოვიტანოთ 2_x, B_x, A_x და 1_0 წერტილებიც.

(2_1, 2_2) წერტილის პერსპექტივა ავაგოთ. ამისათვის $F_\infty 2_x$ წრფე გავატაროთ. ეს იქნება $2_x 2_1$ წრფის პერსპექტივა. $S_1 2_0$ წრფის პერსპექტივა 2_0 წერტილზე x წრფის მართობულად გაივლის. $F_\infty 2_x$ და 2_0 2 წრფეთა გადაკვეთის 2 წერტილი (2_1, 2_2) წერტილის პერსპექტივაა.

1_0 წერტილზე შვეული $1_0 1$ წრფე გავატაროთ $F_\infty 2$ წრფის 1 წერტილში გადაკვეთამდე.

$2A_x$ წრფე გავატაროთ და 3_0 წერტილზე გატარებულ $3_0 3$ წრფესთან გადავკვეთოთ; მივიღებთ (3_1, 3_2) წერტილის პერსპექტივას.

$F_\infty 3$ წრფე ($3_1 4_1$, $3_2 4_2$) წრფის პერსპექტივაა. ავაგოთ (4_1, 4_2) წერტილის პერსპექტივა. ამ მიზნით წინა ნახაზზე მიღებული $\overline{4}_0$ წერტილით ვისარგებლოთ.

რადგანაც $\overline{\pi}$ სიბრტყე ორჯერ უფრო ახლოა S_1 წერტილთან, ვიდრე π სურათი, ამიტომ x წრფეზე, სურათის ღერძიდან მარჯვნივ, გაორკეცებული $\overline{P4}_0$ მონაკვეთი უნდა გადავზომოთ. მიღებულ 4_0 წერტილზე გატარებული შვეული $4_0 4$ წრფე $F_\infty 3$ წრფესთან მე-4 წერტილში იკვეთება.

ჩვენ მივიღეთ ფუძეთა სიბრტყეში მდებარე მართკუთხედის 1—2—3—4 პერსპექტივა.

2_x წერტილზე შვეული $2_x 9_\pi$ წრფე გავატაროთ. ამ წრფის ყოველი მონაკვეთი დაუმახინჯებელი იქნება, რადგან ეს წრფე სურათის სიბრტყეში მდებარეობს. ამიტომ ამ წრფეზე შეგვიძლია გადავზომოთ მოცემული შენობის მთლიანი და აგრეთვე ცალკე ნაწილების სიმაღლეები.

$2_x 9_\pi$ — შენობის მთლიანი სიმაღლეა (ცხადია, იმავე მასშტაბში, რომელშიც გეგმა და ფასადებია დახაზული). $F_\infty 9_\pi$ წრფე 1—8 და 2—9 შვეულ წრფეებთან გადაკვეთაში გვაძლევს მე-8 და მე-9 წერტილებს, ე.ი. (8_1, 8_2) და (9_1, 9_2) წერტილების პერსპექტივას.

B_x წერტილზე $F_\infty B_x$ წრფე გავატაროთ 1—4 წრფის გადაკვეთამდე. მიღებული 5_1 წერტილი 1—4 მონაკვეთის შუა წერტილია. მასზე შვეული $5_1 E$ წრფე გავატაროთ. მე-4 და მე-8 წერტილები წრფით შევაერთოთ. ეს უკანასკნელი $5_1 E$ წრფეს C წერტილში კვეთს. ახლა, თუ $1C$ წრფეს გავატარებთ $4_0 4$ წრფის გადაკვეთამდე, მივიღებთ კიდევ ერთ წერტილს, რომელიც მე-8 წერტილს შევუერთოთ.

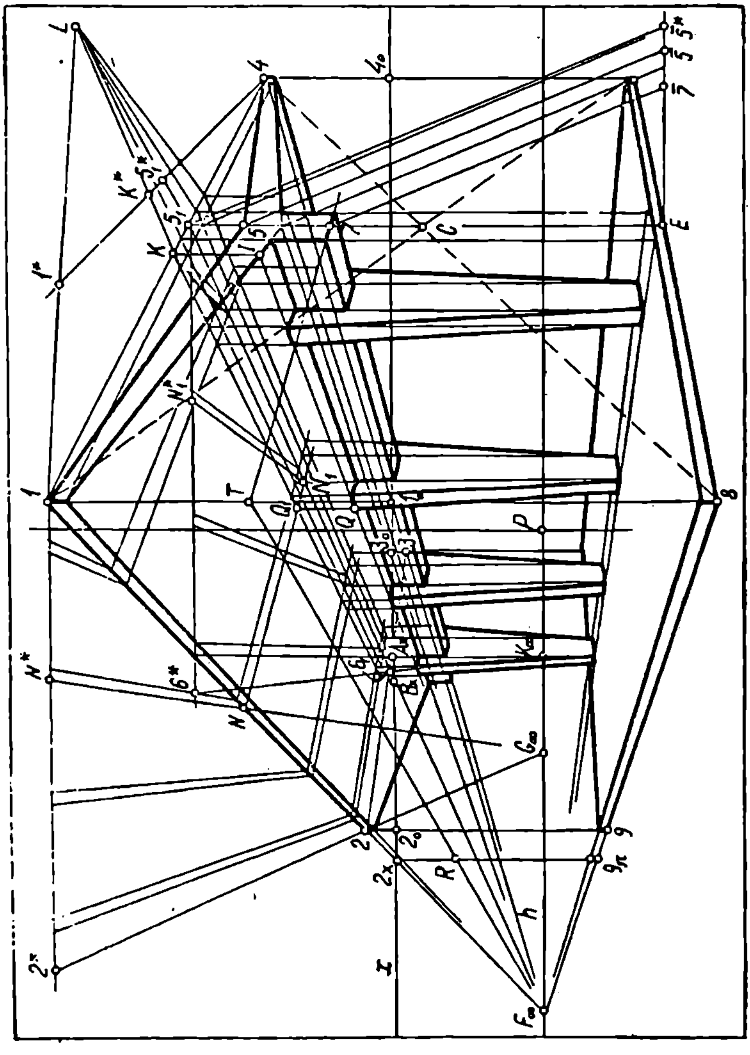


Abb. 75.

E წერტილზე თარაზული წრფე გავატაროთ და მასზე შენობის სიმაღლის ტოლი (მოცემული ფასადის მასშტაბში) $E\bar{5}^*$ მონაკვეთი გადავზომოთ. 5_1E და $E5^*$ წრფეები π სურათის პარალელურ სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ ორივე წრფეზე სამი წერტილის მარტივი ფარდობა იგივე იქნება, რაც ორიგინალში. ეს საშუალებას გვაძლევს ადვილად ავაგოთ 5_1E წრფეზე მდებარე წერტილების პერსპექტივა.

მაგალითად, $E\bar{5}^*$ წრფეზე $E\bar{7}$ მონაკვეთი გადავზომოთ, მისი სიგრძე ფასადიდან იქნება აღებული; ეს არის მანძილი მიწიდან კოჭის ქვედა წიბომდე. $5_1\bar{5}^*$ წრფე გავატაროთ და $\bar{7}$ წერტილზე მისი პარალელური $\bar{7}$—7 წრფე გავავლოთ 5_1E წრფის გადაკვეთამდე. ასეთივე წესითაა მიღებული 5_1E წრფეზე მდებარე სხვა წერტილების პერსპექტივაც.

ახლა $2_\pi 9_\pi$ წრფეზე გადავზომოთ $E\bar{7}$ მონაკვეთის ტოლი $9_\pi R$ მონაკვეთი და $F_\infty R$ წრფე გავატაროთ 1—8 წრფის T წერტილში გადაკვეთამდე, $T7$ წრფე ზუსტად განსაზღვრავს კოჭის ქვედა წიბოს პერსპექტივის მიმართულებას, რადგან T და 7 წერტილები ერთსა და იმავე სიმაღლეზეა.

ასეთივე გზით მიიღება ყველა თარაზული წრფეების პერსპექტივა.

სახურავის ფილის დახრილი წიბოები მიიღება მას შემდეგ, როცა მათი ბოლო წერტილების პერსპექტივა იქნება აგებული. მაგალითად, მას შემდეგ, როდესაც $E\bar{5}^*$ წრფის დახმარებით, 7 წერტილის ანალოგიურად, მე-5 წერტილიც მოიძებნება, საკმარისია იგი 1 და მე-4 წერტილებს შევუერთოთ.

სვეტების პერსპექტივის აგებამდე η სიბრტყეზე მათი მეორეული გეგმილები ავაგოთ. 1 წერტილზე გავლებულია თარაზული წრფე; მასზე გადაზომილია შენობის სიგრძის ტოლი 1—2* მონაკვეთი; ეს ზომა გეგმიდანაა აღებული. 1—2* მონაკვეთი დაყოფილია ისევე, როგორც გეგმაზე 5_16_1 მონაკვეთი. მაგალითად, 1—2* წრფეზე აღებულია $1N^*$ მონაკვეთი, რომელიც გეგმაში Q_1 წერტილიდან 1_14_1 წრფემდე მანძილის ტოლია. გატარებულია 2*2 წრფე ჰორიზონტის G_∞ წერტილში გადაკვეთამდე. რადგანაც 1—2 და 1—2* წრფეები თარაზულია, ამიტომ 2*—2 წრფეც თარაზული იქნება და G_∞ წერტილი კი, როგორც ჰორიზონტზე მდებარე, — ამ წრფის არასაკუთრივი წერტილი.

1—2* წრფეზე აღებული წერტილები G_∞ წერტილს შევუერთოთ. ცხადია, მივიღებთ პარალელური წრფეების პერსპექტივას; ამ წრფეებით 1—2 წრფე გადავკვეთოთ. მაგალითად, N^*G_∞ წრფე 1—2 წრფეს N წერტილში კვეთს. $1N$ მონაკვეთის ორიგინალი $1N^*$ მონაკვეთის ტოლი იქნება, რადგანაც 1—2 მონაკვეთის ორიგინალი 1—2* მონაკვეთის ტოლია, 2*—2 და N^*N წრფეები კი ურთიერთპარალელურია.

ამგვარად, G_∞ წერტილი 1—2 წრფისათვის ზომის წერტილს წარმოადგენს.

ახლა 5_1 წერტილზე გავატაროთ თარაზული 5—6* წრფე და მასზეც ზუსტად ისევე ავიღოთ წერტილები, როგორც 1—2* წრფეზე. 6*—6_1 წრფე გავატაროთ ჰორიზონტის K_∞ წერტილში გადაკვეთამდე. K_∞ წერტილი 5_16_1 წრფის ზომის წერტილი იქნება. ამიტომ, N_1^* წერტილიდან ($N_1^*5_1 = N^*1$) $N_1^*K_\infty$ წრფე გავატაროთ 5_16_1 წრფის N_1 წერტილში გადაკვეთამდე. გავატაროთ NN_1 წრფე.

4 წერტილზე ნებისმიერი წრფე გავატაროთ და მასზე შენობის 1_14_1 სიგანის ტოლი (იხ. გეგმა) 4—1* მონაკვეთი გადავზომოთ. 1 წერტილი 1* წერტილს შევუერთოთ, 5_1 წერტილი კი—4—1* მონაკვეთის შუა 5_1^* წერტილს.

1—4 წრფეზე 1, 5_1 და 4 წერტილები გარკვეულ მწკრივს განსაზღვრავს. 1*4 წრფეზე კი მივიღებთ ამ მწკრივის პერსპექტიულ მწკრივს, რომელიც 1*, 5_1^* და 4 წერტილებით განისაზღვრება. 1—1* და $5_15_1^*$ წრფეთა გადაკვეთის L წერტილი პერსპექტიულობის ცენტრია. 4—1* წრფეზე გეგმიდან საჭირო წერტილები გადმოვიტანოთ. მაგალითად, $5_1^*K^*$ მონაკვეთის ზომა Q_1 წერტილიდან (გეგმაზე) 5_16_1 წრფემდე დაშორების ტოლია. LK^* სხივის გატარებით 1—4 წრფეზე K^* წერტილის პერსპექტიულ K წერტილს მივიღებთ. KF_∞ წრფე გავატაროთ, მისი NN_1 წრფესთან განკვეთა Q_1 წერტილს გვაძლევს, ე. ი. მოცემული (Q_1, Q_2) წერტილის მეორეულ გეგმილს. ასეთივე გზითაა აგებული ერთ-ერთი სვეტის მეორეული გეგმილი მთლიანად. (Q_1,Q_2) წერტილის პერსპექტივის ასაგებად საკმარისია შვეული KI გავატაროთ და I წერტილზე კი IF_∞ წრფე. შვეული Q_1Q წრფის IF_∞ წრფესთან გადაკვეთა საძიებელ Q წერტილს გვაძლევს.

ყველა დანარჩენი წერტილები ანალოგიური გზითაა აგებული. წინა თავებში მოცემულ მასალაზე დაყრდნობით მათი აგება მკითხველმა თვითონ უნდა შეძლოს.

შევნიშნავთ, რომ ამ ამოცანაში არჩეული გადაწყვეტის ხერხი ერთადერთი არაა. თუ ჩვენ ნახაზის ჩარჩოებით არ შევიზღუდებით და, მაგალითად, წრფეებისა და ყველა სიბრტყეების არასაკუთრივი ელემენტებით ვისარგებლებთ, ამოცანის ამოხსნა შესამჩნევად გამარტივდება. მაგრამ აქ ყველა შემზღუდველი პირობები წინასწარი მოსაზრებით დავაყენეთ, რადგან პროექტირების მრავალ შემთხვევაში, თუნდაც დიდი ზომის პერსპექტივების აგებისას, არქიტექტორს ნახაზის ჩარჩოებიდან გამოსვლის საშუალება არა აქვს და იძულებულია მარტივი გზები შედარებით შრომატევადი გრაფიკული ხერხებით შეცვალოს.

27. ბრუნვის ზედაპირების პერსპექტივა

მოცემულია ბრუნვის ზედაპირის ორთოგონალური გეგმილები (ნახ. 76, მარცხნივ), რომლის ($O_1\bar{O}_1$, $O_2\bar{O}_2$) ღერძს შვეული მდებარეობა აქვს.

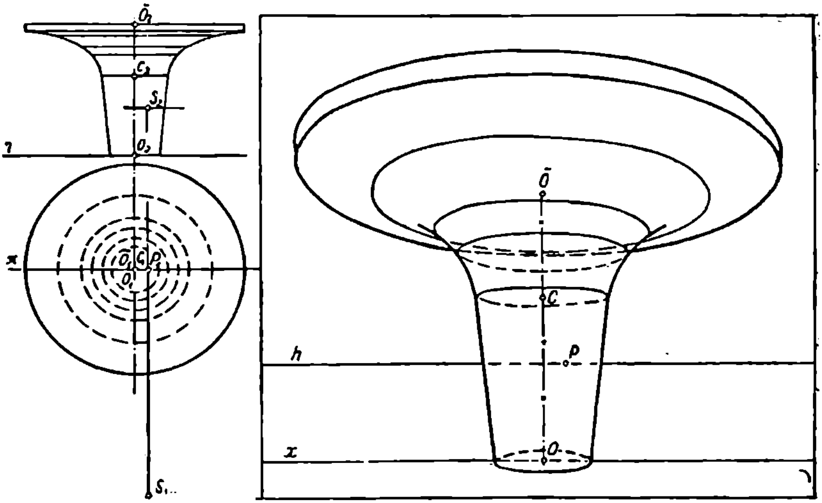
ფუძეთა η სიბრტყე (O_1, O_2) წერტილზე გადის, სურათის π სიბრტყე კი ბრუნვის ღერძზე. (S_1, S_2) მზერის წერტილია.

ბრუნვის ზედაპირის პერსპექტივის აგება დაიყვანება წრეწირების პერსპექტივის აგებაზე, რომელიც მიიღება ამ ზედაპირის განკვეთით ბრუნვის ღერძის მართობული სიბრტყეებით (ასეთ წრეწირებს ზედაპირის პარალელები ეწოდება); ამიტომ მოცემულ ზედაპირზე წინასწარ აღებულია პარალელები.

რადგანაც (O_1, O_2) წერტილიდან (C_1, C_2) წერტილამდე ზედაპირი კონუსურია, ამიტომ ამ წერტილში პარალელების გატარება ზედმეტია.

ნახაზზე, მარჯვნივ, აგებულია ორჯერ უფრო მეტი ზომის პერსპექტივა, ვიდრე მას მივიღებდით π სურათის არჩეულ მდებარეობისათვის. ამიტომ ჰორიზონტის სიმაღლე წინასწარ აღებულია ორჯერ გადიდებული.

რადგანაც ზედაპირის ღერძი სურათის სიბრტყეშია, ამიტომ შესაძლებლობა გვაქვს წრეწირების (პარალელების) ცენტრები პერსპექტივაში უშუალოდ მასზე გადავიტანოთ, მაგრამ მათ შორის მანძილი ორჯერ უნდა გავზარდოთ.



ნახ. 76.

ყოველი ცენტრისათვის, ცნობილი ხერხით, შესაბამისი წრეწირის პერსპექტივა ავაგოთ.

მიღებული სხეულის კონტური რომ მივიღოთ, საჭიროა აგებული პარალელების მომვლები წირის გამოხაზვა.

ჩვენს შემთხვევაში O პარალელიდან C პარალელამდე მომვლები წირი უბრალოდ ამ ორი მრუდის მხებ წრფეს წარმოადგენს, რადგან მათ შორის მოთავსებული ზედაპირი კონუსია.

C პარალელის ზემოთ კი მომვლები წირი მრუდია. ერთ-ერთ პარალელთან შეხების შემდეგ მომვლები მრუდი უნდა შევწყვიტოთ, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები, რადგან შემდეგ ერთი პარალელის პერსპექტივა მთლიანად მეორე პარალელის პერსპექტივის შიგნითაა. ასეთ შემთხვევაში კი მრუდებს საერთო მომვლები წირი არა აქვს.

გამოსახულება მით უფრო ზუსტი იქნება, რაც უფრო ხშირად ავიღებთ ბრუნვის ზედაპირის პარალელებს.

28. სფეროს პერსპექტივა

სფეროც ბრუნვის ზედაპირს წარმოადგენს. იგი შეიძლება მივიღოთ წრეწირის ბრუნვით მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ირგვლივ. მაგრამ სხვა ბრუნვის ზედაპირთაგან განსხვავებით, სფეროს პერსპექტივების აგება შედარებით ადვილია. აგების სიმარტივე ის არის, რომ ნებისმიერ სიბრტყესთან გადაკვეთაში სფეროზე წრეწირს მივიღებთ. ამიტომ შეგვიძლია სფერო გავკვეთოთ π სურათის პარალელური სიბრტყეებით. კვეთაში მიღებული წრეწირები π სურათზე ისევ წრეწირებად დაგეგმილდება (სხვა ბრუნვის ზედაპირების შემთხვევაში ასეთი შესაძლებლობა საერთოდ არა გვაქვს გარდა იმ შემთხვევისა, როდესაც ზედაპირის ღერძი π სურათის მართობია. ამ დროს ზედაპირის პარალელები სურათის პარალელურ სიბრტყეებში აღმოჩნდება და ყველა პარალელი სურათზე წრეწირად დაგეგმილდება).

წინასწარ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სფეროს პერსპექტივის კონტური, საერთოდ, მეორე რიგის წირი იქნება, ე. ი. წრეწირი, ელიფსი, პარაბოლა ან ჰიპერბოლა.

მართლაც, სფეროს პერსპექტივის კონტურს მივიღებთ, თუ მზერის წერტილზე სფეროს ყველა მხები მაგეგმილებელი სხივების და სურათის სიბრტყის გადაკვეთის წერტილს ავაგებთ. ყველა ასეთ სხივთა ერთობლიობა ბრუნვის კონუსს წარმოადგენს, ამ სხივების სფეროსთან შეხების წერტილთა გეომეტრიული ადგილი კი წრეწირია. ამგვარად, გამოდის, რომ სფეროს პერსპექტივის კონტური წარმოადგენს იმ წრეწირის პერსპექტივას, რომელიც სფეროსთან სხივთა კონუსის შეხების წირია, წრეწირი კი მეორე რიგის ერთ-ერთ მრუდში დაგეგმილდება.

ავაგოთ ტოლ რადიუსიანი ω და $\bar{\omega}$ სფეროების პერსპექტივა იმ პირობით, რომ მათი O და $\bar{O}$ ცენტრები სურთის x ფუძის პარალელურ წრფეზე მდებარეობდეს და, ამას გარდა, ω სფეროს O ცენტრი SP მთავარ სხივზე გამავალ და x ფუძის მართობულ სიბრტყეში იყოს (ნახ. 77_1).

სფეროს ცენტრების და მზერის წერტილის სიმაღლე ნებისმიერად მივიღოთ, ამიტომ ნახაზზე ეს სფეროები მხოლოდ თარაზული გეგმილებითაა მოცემული.

წარმოვიდგინოთ, რომ სფეროები გადაკვეთილია π სურათის პარალელური სიბრტყეებით. ამის შედეგად მივიღებთ წრეწირებს, რომელთა ცენტრები სურათის მართობულ წრფეებზე განლაგდება. მაგალითად, $\bar{\omega}$ სფეროზე მიღებული წრეწირების ცენტრები $\bar{O}\bar{A}$ დიამეტრზე უნდა განლაგდეს. ეს წრეწირები S წერტილიდან π სიბრტყეზე დავაგეგმილოთ. ამისათვის დაგეგმილებულია ცენტრები და თარაზული რადიუსების ბოლო წერტილები. მაგალითად, $\bar{C}$ ცენტრის გეგმილი $\bar{C}_\pi$ წერტილია, K წერტილის გეგმილი კი K_π წერტილი. მაშასადამე, შესაბამისი წრეწირის პერსპექტივის რადიუსი $C_\pi K_\pi$ მონაკვეთის ტოლია.

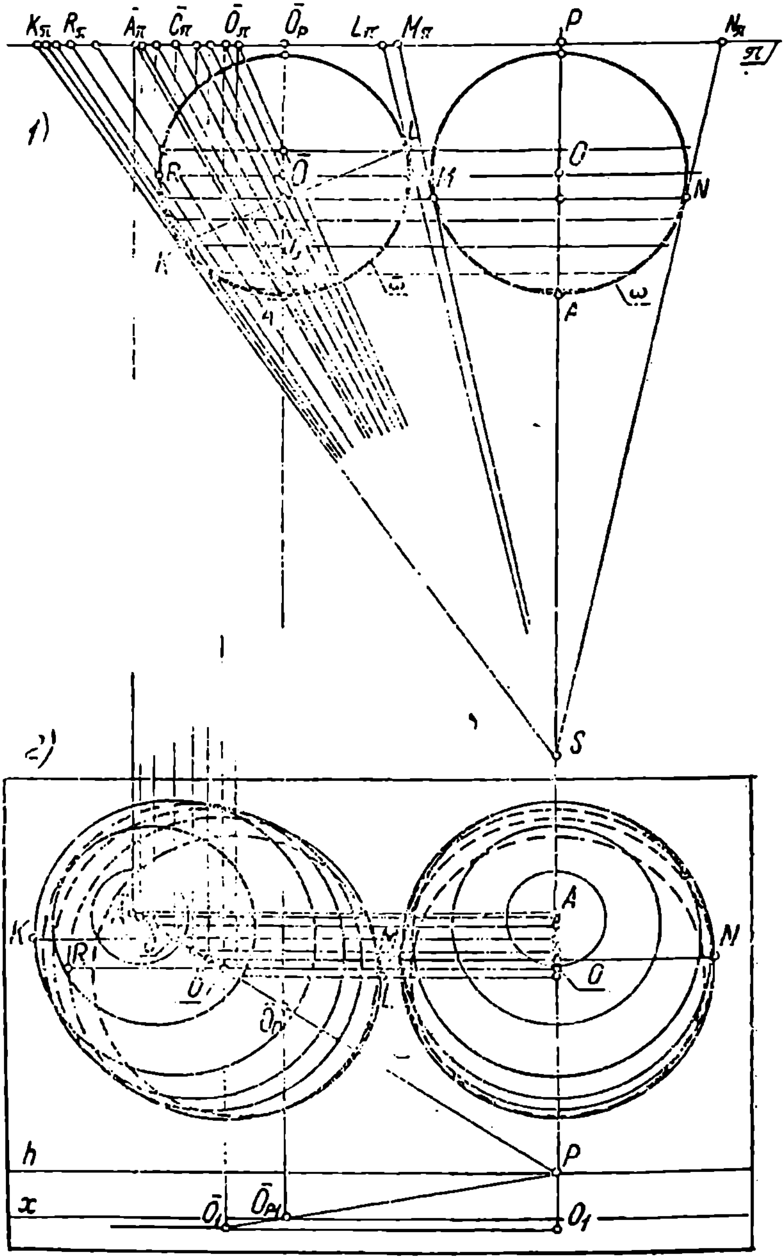
სფეროს $\bar{O}$ ცენტრის გეგმილი $\bar{O}_\pi$ წერტილია, დიდი წრეწირის $\bar{O}R$ რადიუსი კი $\bar{O}_\pi R_\pi$ მონაკვეთად დაგეგმილდება. ყველა ეს აგება ჯერჯერობით ორთოგონალურ გეგმილზე (ზედხედში) ვაწარმოეთ.

ახლა თვით პერსპექტივის აგება დავიწყოთ (ნახ. $77_{\text{ა}}$). ვთქვათ, h ჰორიზონტი და სურათის x ფუძე მოცემულია. ზედა ნახაზიდან მთავარი წერტილი h ჰორიზონტზე ჩამოვიტანოთ.

ავაგოთ $\bar{\omega}$ სფეროს $\bar{O}\bar{A}$ დიამეტრის პერსპექტივა, რომელზედაც დამხმარე წერტილების ცენტრები მდებარეობს. ეს დიამეტრი განვაგრძოთ π სიბრტყის $\bar{O}_p$ წერტილში გადაკვეთამდე (ზედხედი). ეს წერტილიც სურათზე გადმოვიტანოთ. მისი $\bar{O}_{p1}$ ფუძე x წრფეზე იდება, ხოლო თვით $\bar{O}_p$ წერტილს x წრფიდან იმ სიმაღლეზე ავიღებთ, როგორც ის სინამდვილეში იქნება დაშორებული ფუძეთა სიბრტყიდან (ცხადია, ვგულისხმობთ, რომ ეს სიმაღლე მოცემული უნდა იყოს). გავავლოთ $\bar{O}_p P$ წრფე. $\bar{O}_{p1} P$ წრფე მისი მეორეული გეგმილია. $\bar{O}pP$ წრფეზე ზედხედიდან O_π წერტილი ჩამოვიტანოთ, მივიღებთ $\bar{O}$ წერტილს — სფეროს ცენტრის პერსპექტივას.

$\bar{O}$ წერტილი ცენტრად მივიღოთ და $\bar{O}_\pi R_\pi$ მონაკვეთის ტოლი $\bar{O}R$ რადიუსით წრეწირი ავაგოთ. ასეთივე გზით მოძებნილია $\bar{C}$ წერტილიც, იგი მიღებულია ცენტრად და $\bar{C}_\pi K_\pi$ მონაკვეთის ტოლი $\bar{C}K$ რადიუსით შემოხაზულია კიდევ ერთი წრეწირი. $\bar{\omega}$ სფეროს ყველა დანარჩენი პარალელების პერსპექტივა ასევეა აგებული.

ჩვენ მივიღეთ ექსცენტრული წრეწირები $\bar{O}P$ წრფეზე განლაგებული ცენტრებით. ამ წრეწირების ნაწილს საერთო მომვლები ექნება. ეს სწორედ ის ელიფსია, რომელიც $\bar{\omega}$ სფეროს პერსპექტივის კონტურს წარმოადგენს.



ნახ. 77.

შევნიშნავთ, რომ სფეროს გამოსახულების კონტურის აგებისათვის ისევე, როგორც წინა ამოცანაში, ყველა პარალელის აგება არაა საჭირო, ამაში უშუალოდ ნახაზის განხილვიდან ვრწმუნდებით. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში ზედმეტად გატარებული პარალელების სიმრავლე კარგად ავლენს ზედაპირის მოცულობით ფორმას.

ω სფეროს პერსპექტივა აგებულია ანალოგიურად. მაგრამ ამ სფეროს პარალელების ცენტრები განლაგებულია OP წრფეზე, რომლის პერსპექტივას ნახაზზე შვეული მდებარეობა აქვს. რადგანაც OP და $\overline{OP}$ წრფეები ერთ თარაზულ სიბრტყეშია და ამავე დროს ორივე სფეროს პარალელები წყვილ-წყვილად სურათის პარალელურ სიბრტყეებში მდებარეობს, ამიტომ ω სფეროს პარალელების ცენტრები შეიძლება ავაგოთ $\overline{\omega}$ სფეროს პარალელების ცენტრების უშუალო დახმარებით, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ სფეროს ცენტრის მდებარეობა მთავარი სხივის მიმართ სავსებით განსაზღვრავს სფეროს პერსპექტივის კონტურს. სახელდობრ, რაც უფრო მეტადაა დაშორებული სფეროს ცენტრი მთავარი სხივიდან, მით უფრო წაგრძელებული ელიფსის ფორმა აქვს სფეროს კონტურს; ამავე დროს ელიფსის დიდი ღერძი ემთხვევა წრფის პერსპექტივას, რომელზედაც სფეროს პარალელების ცენტრები მდებარეობს. 77_2-ე ნახაზზე ეს გარემოება საკმაოდ ნათლადაა გამოსახული.

აქ აღარ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როდესაც სფეროს ცენტრი მთავარ სხივზე მდებარეობს. ადვილი წარმოსადგენია, რომ ასეთ შემთხვევაში მაგეგმილებელი კონუსის ღერძიც მთავარ სხივს შეუთავსდება. თვით კონუსი კი π სურათს წრეწირზე გადაკვეთს.

ეს ერთადერთი შემთხვევაა, როდესაც სფეროს პერსპექტივის კონტური წრეწირს წარმოადგენს.

VII. პერსპექტივა დახრილ სიბრტყეზე

29. დაგეგმილების პირობები დახრილ სიბრტყეზე

როგორც ვიცით, დასაგეგმილებელი ობიექტი მთლიანად უნდა მოთავსდეს მზერის კონუსის შიგნით; ამ კონუსის ღერძი კი სურათის სიბრტყისადმი მართობული უნდა იყოს.

არის შემთხვევები, როდესაც მზერის წერტილები საკმაოდ ზემოთაა დასაგეგმილებელ ობიექტთან შედარებით, მაგალითად, მაშინ, როდესაც დაბლობში მდგომ შენობას დიდი სიმაღლიდან დავყურებთ, პირიქით, მზერის წერტილის მდებარეობა შესაძლებელია მეტად დაბალი იყოს, გამოსახვის ობიექტი კი დიდ სიმაღლეზე მდებარეობდეს. ასეთი მდგომარეობა გვექნება, მაგალითად, მაშინ, როდესაც გვსურს დაბლიდან მაღალი კოშკის ზემო ნაწილის დანახვა.

ორივე შემთხვევაში პერსპექტივის აგება შვეულ სიბრტყეზე ცუდ შედეგს მოგვცემს. მართლაც, ამ დროს გამოსახვის ობიექტი მზერის კონუსის ფარგლებში ველარ მოთავსდება და ასეთ პირობებში აგებული პერსპექტივა დამახინჯებული იქნება.

ზემოთ განხილულ შემთხვევაში პერსპექტივა დახრილი სურათის სიბრტყეზე აიგება. ამ დროს მთავარი სხივი, ე. ი. მზერის კონუსის ღერძი, თარაზულ სიბრტყესთან იმდენად დაიხრება, რომ დასაგეგმილებელი ობიექტი მზერის კონუსის შიგნით მოთავსდება; სურათის სიბრტყე კი კონუსის ღერძის მართობულად გატარდება. ასეთ პირობებში აგებული პერსპექტივა შეესაბამება ფოტოსურათს, რომელიც გადაღებულია თარაზულ სიბრტყესთან აპარატის ღერძის დახრის შემთხვევაში.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ დახრილ სიბრტყეზე პერსპექტივის აგებას იგივე თეორიული საფუძველი აქვს, რომელსაც ვეყრდნობოდით შვეული სურათის სიბრტყის შემთხვევაში. მაგრამ დახრილ სიბრტყეზე პერსპექტივის აგება შედარებითი სირთულით გამოირჩევა. ეს სირთულე შემდეგი პირობებით აიხსნება.

არქიტექტურულ პერსპექტივაში გამოსახაზავი ობიექტების გეომეტრიული ფორმები ძირითადად შვეული და თარაზული ელემენტებისაგან შედგება. თარაზული ელემენტების სიჭარბემ განაპირობა ფუძეთა η სიბრტყის თარაზული მდებარეობაც.

შვეული სურათის სიბრტყის შემთხვევაში განსაკუთრებით ადვილი იყო შვეული ელემენტების პერსპექტივის აგება იმის გამო, რომ შვეული წრფეები სურათის სიბრტყის პარალელურია და ასეთ წრფეებზე განლაგებული სამი წერტილის მარტივი ფარდობა ცენტრალური დაგეგმილების დროს არ იცვლება, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ წრფეზე განლაგებული მონაკვეთების სიდიდე პერსპექტივაში პროპორციულად იცვლება. გარდა ამისა, შვეული წრფეები პარალელურ წრფეებში გეგმილდება.

დახრილი სურათის სიბრტყის შემთხვევაში ამოცანა შედარებით გართულდა. შვეული წრფეები, რაც ასე დამახასიათებელია არქიტექტურულ ნაგებობისათვის, სურათის სიბრტყისადმი უკვე პარალელური აღარაა და ამის გამო მათი პერსპექტივის აგებაც არაფრით არ განსხვავდება სურათისადმი დახრილი ყველა წრფის აგებისაგან.

იმისათვის, რომ ადვილად გამოვარკვიოთ დახრილი სურათის სიბრტყეზე აგებული პერსპექტივის ძირითადი დამახასიათებელი ნიშნები, კერძო მაგალითი განვიხილოთ (ნახ. 78).

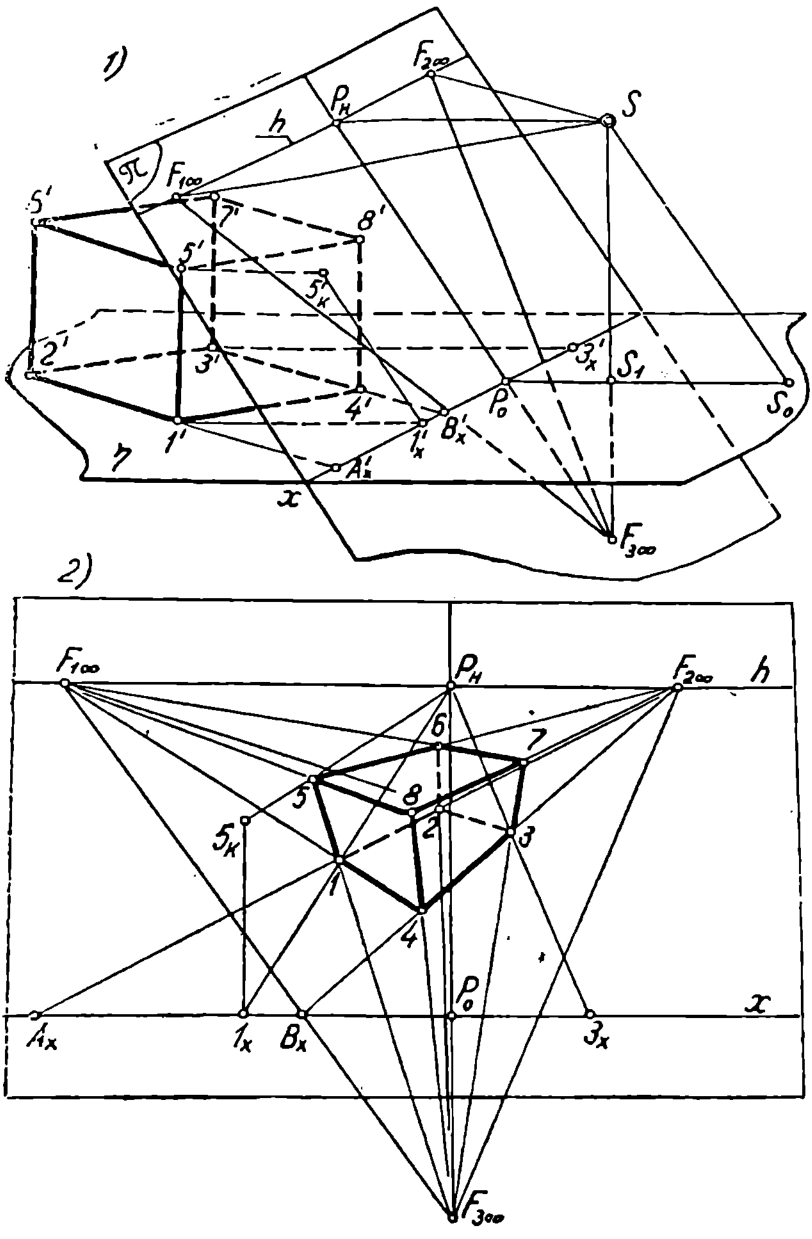
საგანთა η სიბრტყეზე ერთ-ერთი წახნაგით დგას მართკუთხა 1′2′3′4′5′6′7′8′ პარალელეპიპედი. მისი პერსპექტივა დახრილ π სიბრტყეზე ავაგოთ.

მოცემული პარალელეპიპედის თარაზული წიბოების პერსპექტივა ერთ-ერთი, უკვე ცნობილი ხერხით, ავაგოთ.

მაგალითად, 1′2′ წრფის პერსპექტივის ასაგებად მისი ორი წერტილით ვისარგებლოთ: ერთი მათგანი იყოს 1′2′ წრფისა და x წრფის* გადაკვეთის A'_x წერტილი, მეორე კი — იმავე წრფის არასაკუთრივი წერტილის $F_{2\infty}$ პერსპექტივა. $F_{2\infty}$ წერტილის მისაღებად მზერის S წერტილიდან გატარებულია 1′2′ წრფის პარალელური $SF_{2\infty}$ წრფე π სურათის გადაკვეთამდე. ასევე 3′4′ წიბოსათვის გამოვიყენებთ B'_x და იგივე $F_{2\infty}$ წერტილებს.

ყველა თარაზული წრფეების არასაკუთრივი წერტილების გეგმილებს მივიღებთ, თუ S წერტილზე η სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს (ე. ი. ჰორიზონტის სიბრტყეს) გავატარებთ. ეს უკანასკნელი π სურათს h წრფეზე (ჰორიზონტზე) გადაკვეთს. ამ წრფეზე მდებარეობს 1′4′ წიბოსა და მისი პარალელური წრფეების არასაკუთრივი $F_{1\infty}$ წერტილიც. S წერტილ-

* შევნიშნავთ, რომ პერსპექტივაში „ფუძე“ ვუწოდეთ ამა თუ იმ გეომეტრიულ ობიექტის ორთოგონალურ გეგმილს ფუძეთა სიბრტყეზე. შვეული სურათის შემთხვევაში x წრფე π სიბრტყის ორთოგონალურ გეგმილს წარმოადგენდა η სიბრტყეზე, ამიტომ მას სურათის ფუძე სავსებით სამართლიანად ეწოდებოდა. დახრილი სურათის სიბრტყისა და η სიბრტყის გადაკვეთის x წრფე, ცხადია, სურათის ორთოგონალურ გეგმილს აღარ წარმოადგენს და ამიტომ მას სურათის ფუძეს ველარ ვუწოდებთ, თუმცა ამ წრფეს ისევე x სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.


1)
2)
π
h
P_H
S
$F_{1\infty}$
$F_{2\infty}$
$F_{3\infty}$
5'
7'
8'
5'
$5'_K$
2'
3'
$3'_x$
S_1
P_0
S_0
4'
1'
$1'_x$
B'_x
A'_x
x
6
7
5
8
2
3
5_K
1
4
P_0
A_x
1_x
B_x
3_x

ნახ. 78.

ზე, ჰორიზონტის სიბრტყეში, x წრფის მართობული SP_H წრფე გავატაროთ. π სურათთან გადაკვეთაში მივიღებთ P_H წერტილს; ეს არის ისეთი თარაზული წრფეების არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივა, რომლებიც ამავე დროს x წრფის მართობულია. ასეთი წრფეებია, მაგალითად, η სიბრტყეში მდებარე $1'1_x$ და $3'3_x$ წრფეები.

შვეული სურათის შემთხვევაში ჩვენ გვქონდა მთავარი P წერტილი, სადაც თავს იყრიდა სურათის სიბრტყის მართობულ წრფეთა პერსპექტივა. მთავარი წერტილი ახლაც შეგვეძლო აგვეგო: ამისათვის საკმარისი იყო S წერტილიდან π სიბრტყეზე მართობი დაგვეშვა. მაგრამ ახლა ასეთი წერტილი საერთოდ აღარ გვჭირდება, რადგან დახრილი სურათის შემთხვევაში სურათის მართობული წრფეები პრაქტიკულად აღარ შეგვხვდება.

განვიხილოთ ჯერ პარალელეპიპედის $1'2'3'4'$ ფუძის პერსპექტივის აგება (ნახ. 78_2).

P_HP_0 მანძილზე გავატაროთ h ჰორიზონტი და x წრფე. ჰორიზონტზე გადმოვიტანოთ $F_{1\infty}$, $F_{2\infty}$ და P_H წერტილები, x წრფეზე კი A_x და B_x წერტილები. $A_xF_{2\infty}$ და $B_xF_{2\infty}$ წრფეები შესაბამისად $1'2'$ და $3'4'$ წრფეების პერსპექტივაა.

$1'$ წერტილის პერსპექტივის ასაგებად $1'1'_x$ წრფის პერსპექტივა ავაგოთ. ამისათვის სურათის 1_x წერტილზე 1_xP_H წრფე გავატაროთ. 1_xP_H და $A_xF_{2\infty}$ წრფეთა გაკვეთის 1 წერტილი $1'$ წერტილის პერსპექტივაა. $1F_{1\infty}$ წრფე გავატაროთ $B_xF_{2\infty}$ წრფის გადაკვეთამდე. 1—4 მონაკვეთი $1'4'$ წიბოს გეგმილია.

$3'$ წერტილის პერსპექტივა მიიღება $B_xF_{2\infty}$ და 3_xP_H წრფეთა გადაკვეთით. ეს უკანასკნელი $3'3_x$ წრფის პერსპექტივაა.

3 წერტილზე $3F_{1\infty}$ წრფე გავატაროთ $A_xF_{2\infty}$ წრფის გადაკვეთამდე, რითაც დამთავრდება პარალელეპიპედის ფუძის 1—2—3—4 პერსპექტივის აგება.

ავაგოთ შვეული წიბოების პერსპექტივა (ნახ. 78_1).

S წერტილზე შვეული წიბოების პარალელურად გატარებული წრფე $F_{3\infty}$ წერტილში ჰკვეთს სურათის π სიბრტყეს. მაშასადამე, $F_{3\infty}$—შვეულ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილის გეგმილი ყოფილა და ამის გამო შვეული წიბოების პერსპექტივაც ამ წერტილზე გაივლის.

შევნიშნავთ, რომ $F_{3\infty}$ წერტილი სურათის P_HP_0 ღერძზე მდებარეობს. მართლაც, SP_H და $SF_{3\infty}$ წრფეები x წრფის მართობულია, ამიტომ ამ წრფეებზე გამავალი $SP_HF_{3\infty}$ სიბრტყეც x წრფის მართობული იქნება. $P_HF_{1\infty}$ წრფე $SP_HF_{3\infty}$ და π სიბრტყეთა კვეთის წრფეა, ამიტომ $P_HF_{3\infty} \perp x$.

$F_{3\infty}$ წერტილი სურათზე გადმოვიტანოთ (ნახ. 78_2) და 1-ლ, მე-2, მე-3 და მე-4 წერტილებს წრფეებით შევუერთოთ. ამ წრფეებზე მდებარეობს შვეული წიბოების პერსპექტივა.

ავაგოთ, მაგალითად, $1'5'$ წიბოს პერსპექტივა (ნახ. 78_1). $5'$ წერტილზე გავატაროთ $5'5'_k$ წრფე, $1'1'_x$ წრფის პარალელურად; $1'_x$ წერტილზე კი P_HP_0 წრფის პარალელური $1'_x5'_k$ წრფე. ამ წრფეთა გადაკვეთის შედეგად მიღებულია $5'_k$ წერტილი, რომელიც პარალელეპიპედის ზედა წახნაგის სიბრტყეშია.

ავაგოთ $5'_k5'$ წრფის პერსპექტივა. ამისათვის სურათზე (ნახ. 78_2) 1_x წერტილიდან P_HP_0 წრფის პარალელური 1_x5_x მონაკვეთი ნატურალური სიდიდით გადავზომოთ და 5_k წერტილზე 5_xP_H გავატაროთ. ამ წრფის $F_{3\infty}1$ წრფესთან გადაკვეთა მოგვცემს $5''$ წერტილის პერსპექტივას.

ახლა საკმარისია $5F_{1\infty}$ წრფე ავაგოთ, რომლის $F_{3\infty}4$ წრფესთან გადაკვეთაში ზედა წახნაგის კიდევ ერთ, მე-8 წვეროს მივიღებთ. ანალოგიურადაა აგებული მე-6 წვერო და საბოლოოდ, $F_{1\infty}6$ და $F_{2\infty}8$ წრფეთა გადაკვეთის შედეგად მე-7 წვერო.

ა მ ო ც ა ნ ა 17. ზემოთ მიღებული შედეგების საფუძველზე ობიექტის ორთოგონალური გეგმილების დახმარებით დახრილ სიბრტყეზე პერსპექტივა ავაგოთ.

მოცემულია კოშკის ორთოგონალური გეგმილები (ნახ. 79). თარაზულ გეგმილთან შეთავსებულია ნაწილობრივი ჭრილიც, რომელიც მიიღება მაშინ, თუ კოშკს თარაზული δ სიბრტყით გავკვეთთ.

გრაფიკული აგების გამარტივების მიზნით კოშკი გამოსახულია ისეთ მდებარეობაში, რომ სურათის π სიბრტყე შვეულად მაგეგმილებელი იყოს (წინხედში P_{H2} $F_{2\infty2} \equiv \pi$ წრფე).

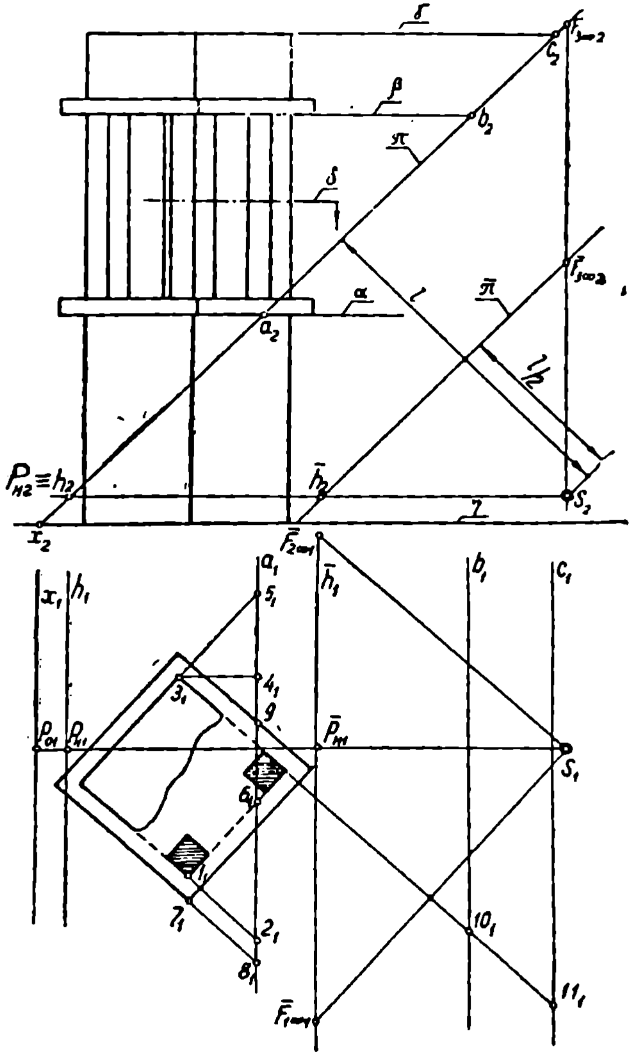
მიწის ზედაპირი მიღებულია საგანთა η სიბრტყედ. მზერის S წერტილზე გატარებული თარაზული სიბრტყე π სიბრტყესთან კვეთაში გვაძლევს h ჰორიზონტს, რომელიც წინხედში h_2 წერტილად გეგმილდება.

შვეული წრფეების არასაკუთრივი $F_{3\infty}$ წერტილის ასაგებად გატარებულია შვეული $SF_{3\infty}$ წრფე π სიბრტყის გადაკვეთამდე.

თარაზულ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილები h წრფეზე მოთავსდება.

თუ ზედხედში S_1 წერტილზე გავატარებთ კოშკის თარაზული წიბოების პარალელურ წრფეებს, დავრწმუნდებით, რომ h ჰორიზონტთან მათი გადაკვეთა ნახაზის ფარგლების გარეთაა, საკმაოდ შორს. ამ უხერხულობის ასაცილებლად შემდეგ ხერხს მივმართოთ: სურათის π სიბრტყე მზერის S წერტილიდან l მანძილითაა დაშორებული. π სიბრტყის პარალელურად მზერის წერტილთან უფრო ახლოს გავატაროთ დამხმარე $\overline{\pi}$ სიბრტყე და დროებით სურათის სიბრტყედ მივიღოთ. ჩვენს შემთხვევაში $\overline{\pi}$ სიბრტყე S წერტილიდან $l/2$ მანძილითაა აღებული და S წერტილზე გატარებულ თარაზულ სიბრტყეს $\overline{h}$ წრფეზე კვეთს.

მზერის წერტილზე გატარებულია კოშკის თარაზული წიბოების პარალელური $S\overline{F}_{1\infty}$ და $S\overline{F}_{2\infty}$ წრფეები. მათი $\overline{h}$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილები ($\overline{F}_{1\infty}$ და $\overline{F}_{2\infty}$) საძიებელი არასაკუთრივი წერტილებია იმ შემთხვევისათვის, თუ სურათად $\overline{\pi}$ სიბრტყეს მივიღებთ.



ნახ. 79.

ახლა შეგვიძლია სურათზე ძირითადი განმსაზღვრელი ელემენტები ავაგოთ (ნახ. 80).

გავატაროთ სურათის $P_0F_{3\infty}$ ღერძი. მასზე ავიღოთ P_0, P_H და $F_{3\infty}$ წერტილები, რომელთა შორის მანძილები წინა ნახაზიდან (შვეული გეგმილიდან) უშუალოდ გადმოგვაქვს.

P_0 წერტილზე გაივლის x წრფე, P_H წერტილზე კი—h ჰორიზონტი. h წრფეზე უნდა ავიღოთ თარაზულ წრფეთა არასაკუთრივი წერტილები.

რადგანაც წინა ნახაზზე დამხმარე $\overline{\pi}$ სიბრტყე π სიბრტყესთან შედარებით ორჯერ უფრო ახლოა S წერტილთან, ამიტომ h წრფეზე $F_{1\infty}$ და $F_{2\infty}$ წერტილების ასაგებად წინა ნახაზზე მიღებული $\overline{P_H}\overline{F}_{1\infty}$ და $\overline{P_H}\overline{F}_2$ მონაკვეთების გაორკეცებული სიგრძე უნდა გადავზომოთ. $F_{1\infty}F_{3\infty}$ და $F_{2\infty}F_{3\infty}$ წრფეები, შესაბამისად, კოშკის კედლების სიბრტყეთა არასაკუთრივი წრფეებია.

პერსპექტივა აგებულია შემდეგი თანამიმდევრობით:

ჯერ აგებულია იმ კვადრატის პერსპექტივა, რომელიც თარაზული α სიბრტყით კოშკის ზედაპირის განკვეთისას მიიღება (ნახ. 79). ამისათვის აგებულია α და π სიბრტყეთა განკვეთის $a(a_1a_2)$ წრფე, კვადრატის ერთ-ერთი გვერდის a წრფესთან განკვეთის 6_1 წერტილი და მეორე გვერდის გაგრძელების გადაკვეთის 2_1 წერტილი. a წრფე ამ ორივე წერტილით გადმოტანილია სურათზე (ნახ. 80). a წრფის დაშორება h წრფიდან უშუალოდ წინხედიდან მიიღება (h_2a_2).

გატარებულია $2F_{2\infty}$ და $6F_{1\infty}$ წრფეები. მათი გადაკვეთის 1 წერტილი კვადრატის შესაბამის წვეროს პერსპექტივას წარმოადგენს.

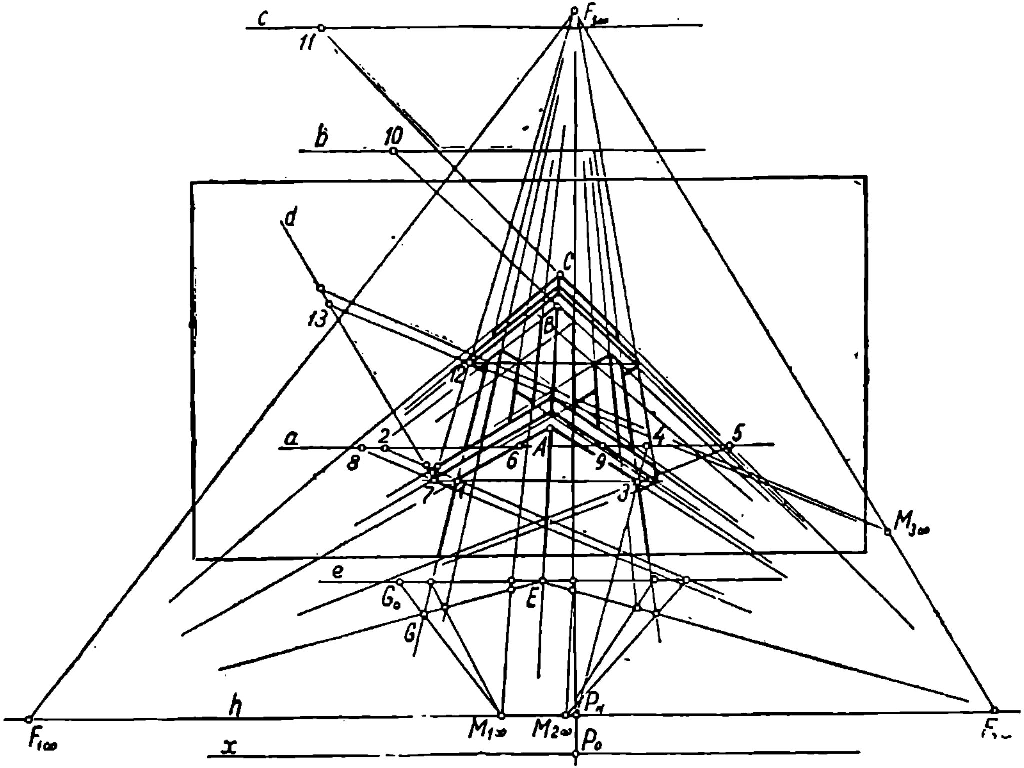
ზედხედში (ნახ. 79) 3_1 წერტილზე გატარებულია 3_14_1 წრფე და გაგრძელებულია კვადრატის ერთი გვერდი a წრფის გადაკვეთამდე. მიღებული 4_1 და 5_1 წერტილები გადმოტანილია სურათზე (ნახ. 80); აგებულია 3_14_1 და 3_15_1 წრფეთა პერსპექტივა (შესაბამისად $4P_H$ და $5F_{1\infty}$). მათი გადაკვეთის მე-3 წერტილი 3_1 წერტილის პერსპექტივაა. 1, მე-6 და მე-3 წერტილების საშუალებით აგებულია მთელი კვადრატის პერსპექტივა.

კვადრატის 1, A და მე-3 წვეროებზე გატარებული, $F_{3\infty}$ წერტილში გადაკვეთილი წრფეები კოშკის ხილვადი შვეული წიბოების პერსპექტივას წარმოადგენს.

ასეთივე კვადრატს მივიღებთ თარაზულ β სიბრტყეში (ნახ. 79).

ავაგოთ β და π სიბრტყეთა გადაკვეთის b_1 წრფე. β სიბრტყეში მიღებული კვადრატის ერთ-ერთი გვერდი b_1 წრფის 10_1 წერტილში გადაკვეთამდე გავაგრძელოთ.

b_1 წრფე და 10_1 წერტილი სურათზე გადმოვიტანოთ (ნახ. 80). $10F_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ. მისი $AF_{3\infty}$ წრფესთან კვეთის B წერტილი კვადრატის



c
11
$F_{3\infty}$
b
10
d
C
13
B
12
a
2
8
6
A
9
4
5
7
1
3
$M_{3\infty}$
e
G_0
E
G
h
P_1
$F_{1\infty}$
$M_{1\infty}$
$M_{2\infty}$
P_0
x

ნახ. 80.

ერთ-ერთი წვეროს პერსპექტივა იქნება. $BF_{1\infty}$ და $BF_{2\infty}$ წრფეები გავატაროთ.

ასევე აიგება კვადრატის პერსპექტივა თარაზულ γ სიბრტყეში (ნახ. 79). კვადრატის ერთი გვერდი გაგრძელებულია γ და π სიბრტყეთა გადაკვეთის (c_1, c_2) წრფის გადაკვეთამდე 11_1 წერტილში. სურათზე მიღებულ 10 წერტილზე გატარებულია $11—F_{2\infty}$ წრფე; მისი $AF_{3\infty}$ წრფესთან გადაკვეთის C წერტილი კვადრატის ერთ-ერთი ხილვადი წვეროა. $CF_{1\infty}$ და $CF_{2\infty}$ წრფეთა გატარებით კვადრატის ხილვადი წიბოების პერსპექტივას მივიღებთ.

ახლა ავაგოთ თაროს პერსპექტივა, რომლის ქვედა წახნაგი α სიბრტყეში მდებარეობს. ამ თაროს გარე კონტურიც კვადრატს წარმოადგენს. მისი ერთ-ერთი გვერდი განვაგრძოთ (a_1, a_2) წრფის 8_1 წერტილში გადაკვეთამდე (ნახ. 79). სურათზე მე-8 წერტილს მივიღებთ. $8F_{2\infty}$ წრფე გავატაროთ. გავატაროთ აგრეთვე $1A3$ კვადრატის 1—3 დიაგონალი (ნახ. 80), რომელიც ასაგები კვადრატის შესაბამის დიაგონალს ემთხვევა. ამიტომ 1—3 წრფისა და $8F_{2\infty}$ წრფეთა გადაკვეთის მე-7 წერტილში ასაგები კვადრატის ერთ-ერთი წვეროს პერსპექტივას მივიღებთ.

$7F_{1\infty}$ და $7F_{2\infty}$ წრფეების გატარებით კვადრატის ორი გვერდის პერსპექტივა განისაზღვრება. დანარჩენი ორი გვერდის ასაგებად კვადრატის გვერდის a წრფესთან გადაკვეთის მე-9 წერტილითა და 1 — 3 წრფით ვსარგებლობთ.

ზედა თაროს ერთ-ერთი წვერო ავაგოთ. ამისათვის საკმარისია მე-7 წერტილზე გავავლოთ შვეული წრფის $7F_{3\infty}$ პერსპექტივა და β სიბრტყეში აგებული კვადრატის დიაგონალი, რომელიც სივრცეში 1—3 წრფის პარალელურია. ამ ორი წრფის გადაკვეთა მე-12 წერტილს მოგვცემს. თაროს ქვედა წახნაგის დანარჩენი ნაწილების აგება უკვე ცნობილი ხერხით ხდება.

თაროების პერსპექტივის მთლიანად აგებისათვის მე-7 წერტილზე $F_{2\infty}F_{3\infty}$ წრფის პარალელური d წრფე გავატაროთ. ცხადია, რომ ეს ორი წრფე ერთ სიბრტყეშია, კერძოდ ისეთ სიბრტყეში, რომლისთვისაც $F_{2\infty}F_{3\infty}$ წრფე არასაკუთრივია. იმავე სიბრტყეში მდებარეობს 7—12 წრფეც.

d წრფეზე ავიღოთ α და β სიბრტყეებს შორის მანძილის ტოლი 7—13 მონაკვეთი. მე-13 და მე-12 წერტილებზე წრფე გავატაროთ. ამ წრფის არასაკუთრივი $M_{3\infty}$ წერტილი ცხადია, $F_{2\infty}$ და $F_{3\infty}$ წრფეზე მდებარეობს.

ახლა a წრფეზე, შესაბამისად, თაროების სისქის ტოლი კიდევ ორი მონაკვეთი გადავზომოთ, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები, და მიღებული წერტილები წრფეებით $M_{3\infty}$ წერტილს შევუერთოთ. მიღებული წრფეების ორიგინალები პარალელურია და ამიტომ 7—12 წრფეზე თავის ტოლ

მონაკვეთებს მოკვეთს. 7-12 წრფეზე მიღებული ახალი ორი წერტილის დახმარებით თაროების პერსპექტივას მთლიანად ავაგებთ.

ავაგოთ სვეტების პერსპექტივა. ამისათვის AB წიბოს ნებისმიერი E წერტილი $F_{1\infty}$ წერტილს წრფით შევუერთოთ. ეს წრფე კოშკის წახნაგის სიბრტყეში მდებარეობს და მეორე წიბოს G წერტილში კვეთს. E წერტილზე თარაზული e წრფეც გავატაროთ და მასზე მთლიანად წახნაგის EG_0 სიგანე და სვეტებს შორის მანძილი გადავზომოთ. G_0G წრფე გავატაროთ h ჰორიზონტის $M_{1\infty}$ წერტილში გადაკვეთამდე. $M_{1\infty}$ წერტილი EG_0 მონაკვეთზე მიღებულ წერტილებს შევუერთოთ. გატარებული სხივების EG წრფესთან გადაკვეთაში მივიღებთ წერტილებს, რომელთა $F_{1\infty}$ წერტილთან შეერთება განსაზღვრავს სვეტების წახნაგებს პერსპექტივაში. ზუსტად ასევე მოვიქცევით მარჯვენა ხილვადი წახნაგების მიმართაც, რის შემდეგ ცნობილი ხერხით სვეტების პერსპექტივის აგებას დავასრულებთ.

30. კოორდინატების ხერხი

კოორდინატების ხერხი შეიძლება გამოვიყენოთ დახრილი სურათის შემთხვევაშიც. იგი ხელსაყრელია განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც შეუღლი წრფეების არასაკუთრივი წერტილი მეტად შორდება ნახაზის ჩარჩოებს და მისი გამოყენების საშუალება არა გვაქვს. ასეთი მაგალითები კი საკმაოდ ხშირად შეგვხვდება პრაქტიკაში.

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი (ნახ. 81).

ორთოგონალურ გეგმილებში მოცემულია პარალელეპიპედი, $S(S_1, S_2)$ მზერის წერტილი და π სიბრტყე.

პარალელეპიპედის ქვედა ფუძის სიბრტყე η სიბრტყედ მივიღოთ. მაშინ π სიბრტყე შეიძლება განვსაზღვროთ η სიბრტყესთან გადაკვეთის $x(x_1, x_2)$ წრფეთა და უდიდესი ქანობის ერთ-ერთი $i(i_1, i_2)$ წრფით. ცხადია, ამ წრფის i_1 თარაზული გეგმილი x წრფის x_1 თარაზული გეგმილის მართობი იქნება.

აგებათა გამარტივების მიზნით კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ $x(x_1, x_2)$ წრფე აბსცისათა ღერძად მივიღოთ, $i(i_1, i_2)$ წრფის თარაზული i_1 გეგმილი კი—y ღერძად.

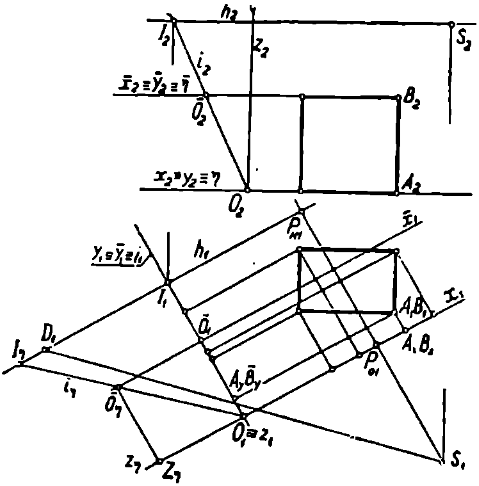
x და y ღერძებზე პარალელეპიპედის ქვედა ოთხი წვერო დავაგეგმილოთ.

$h(h_1, h_2)$ ჰორიზონტის წრფე განვსაზღვროთ. ამისათვის მზერის $S(S_1, S_2)$ წერტილზე გავატაროთ η სიბრტყის პარალელური სიბრტყე, რომელიც $i(i_1, i_2)$ წრფეს $I(I_1, I_2)$ წერტილში კვეთს.

ამ წერტილზე გაივლის $h(h_1, h_2)$ ჰორიზონტი $x(x_1, x_2)$ წრფის პარალელურად. ჰორიზონტზე დავნიშნოთ $x(x_1, x_2)$ წრფის მართობი და თარაზული წრფეების არასაკუთრივი P_H წერტილი და დისტანციის D წერტი-

ლი (ნახაზზე მოცემულია ამ წერტილების თარაზული გეგმილები, D_1 და P_{H1}).

სურათის ასაგებად $x(x_1, x_2)$ წრფესა და ჰორიზონტს შორის მანძილი უნდა ვიცოდეთ. ეს არის (O_1I_1, O_2I_2) მონაკვეთის ნატურალური ზომა, რომელიც განისაზღვრება, თუ საკოორდინატო Oxz სიბრტყეს i წრფესთან ერთად η სიბრტყეს შევუთავსებთ. მივიღებთ O_1I_η მონაკვეთს.



ნახ. 81.

სურათზე (ნახ. 82) გატარებულია x ღერძი; მისი ერთ-ერთი O წერტილი მიღებულია სათავედ, საიდანაც ამართულია x წრფის მართობი OI წრფე ($OI = O_1I_\eta$). I წერტილზე h ჰორიზონტი გაივლის. სურათის ღერძი OI წრფიდან I_1P_{H1} მანძილითაა დაშორებული. y ღერძის პერსპექტივა O და P_H წერტილებზე გადის. z ღერძი აგებაში მონაწილეობას არ იღებს და ამიტომ პერსპექტივაში აღარ გამოვსახეთ.

ავაგოთ პარალელეპიპედის ქვედა წახნაგი. მაგალითად, (A_1, A_2) წერტილის პერსპექტივა შემდეგნაირად მივიღეთ:

x ღერძზე გადაზომილია OA_x აბსცისა, ამავე ღერძზე გადავზომეთ ორდინატის ტოლი OA_{y0} მონაკვეთი და $A_{y0}D$ წრფე გავავლეთ, რომელმაც $OP_H \equiv y$ წრფე A_y წერტილში გადაკვეთა. A_yA და A_xP_H წრფეების გადაკვეთაში საძიებელ A წერტილს მივიღებთ. ასევე ავაგებთ დანარჩენ წვეროებსაც.

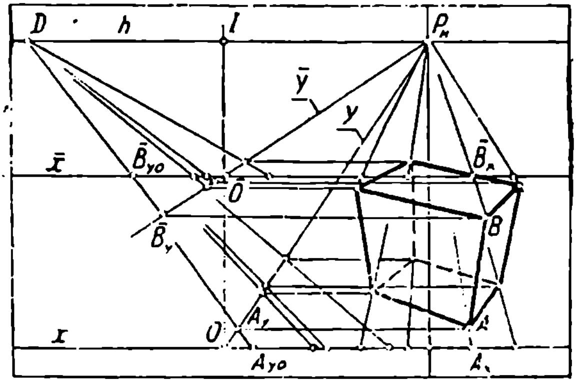
ზედა წახნაგის ასაგებად მისი $\overline{\eta}$ სიბრტყე ახალ საკოორდინატო სიბრტყედ მივიღოთ (ნახ. 81).

$\overline{\eta}$ სიბრტყე $i\ (i_1, i_2)$ წრფეს $\overline{O}(\overline{O}_1, \overline{O}_2)$ წერტილში კვეთს.

ამ წერტილზე $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ წრფის პარალელურად გაივლის π სურათისა და $\overline{\eta}$ სიბრტყის გადაკვეთის $\overline{x}(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ წრფე, რომელიც კოორდინატთა ერთ-ერთ ღერძად მივიღოთ. $\overline{y}(\overline{y_1}, \overline{y_2})$ ღერძი $\overline{x}\ (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ წრფის მართობულად $\overline{O}(\overline{O_1}, \overline{O_2})$ წერტილზე გადის.

განვსაზღვროთ $\overline{x}$ წრფის მდებარეობა სურათზე. ამისათვის $i(i_1, i_2)$ წრფის i_η შეთავსებაზე $\overline{O}(\overline{O}_1, \overline{O}_2)$ წერტილის $\overline{O}_\eta$ შეთავსება ავაგოთ

$O_1\overline{O}_\eta$ მონაკვეთის ზომა სურათის OI წრფეზე გადავიტანოთ (ნახ. 82). მიღებულ $\overline{O}$ წერტილზე ახალი $\overline{x}$ და $\overline{y}$ ღერძები გაივლის.



ნახ. 82.

თარაზულ გეგმილზე ზედა წახნაგის წვეროების საკოორდინატო მონაკვეთები განვსაზღვროთ ახალი ღერძების მიმართ. მაგალითად, $B(B_1, B_2)$ წერტილის $\overline{O}_1\overline{B}_y$ ორდინატას მივიღებთ, თუ B_1 წერტილიდან $y_1 \equiv \overline{y}_1$ ღერძზე $B_1\overline{B}_y$ მართობს დავუშვებთ, თვით $B_1\overline{B}_y$ მონაკვეთის სიგრძე კი B წერტილის აბსცისა იქნება.

სურათის $\overline{x}$ წრფეზე გადაზომილია $\overline{O}\overline{B}_{y0} = \overline{O}_1\overline{B}_y$ მონაკვეთი და გატარებულია $\overline{D}\overline{B}_{y0}$ წრფე $\overline{y}$ წრფის გადაკვეთამდე; $\overline{B}_y$ წერტილზე კი, $\overline{x}$ წრფის პარალელურად, გატარებულია $\overline{B}y\overline{B}$ წრფე. $\overline{x}$ ღერძზე გადაზომილია $\overline{O}\overline{B}_x = \overline{B}_y\overline{B}_1$ მონაკვეთი; გატარებულია $P_H\overline{B}_x$ წრფე $\overline{B}_yB$ წრფის B წერტილში გადაკვეთამდე.

დანარჩენი წვეროებიც ასეთივე გზითაა აგებული.

შევნიშნავთ, რომ საჭიროების შემთხვევაში, მაგალითად, უფრო დიდი ზომის სურათის მისაღებად. შეგვიძლია აქაც წილადი წერტილებით ვისარგებლოთ (ნახ. 61. პ. 20).

VIII. ჩრდილების აგება პერსპექტივაში

31. ძირითადი ცნებები

სივრცითი საგნების მზერით ათვისებაში გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს განათებას. კერძოდ, სხეულების ზედაპირის განათების ინტენსიურობის განსხვავება საშუალებას გვაძლევს, სწორად განვსაზღვროთ მათი გეომეტრიული ფორმა. სწორედ ამიტომ სივრცის პერსპექტიულ გამოსახულებაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ჩრდილების აგებას.

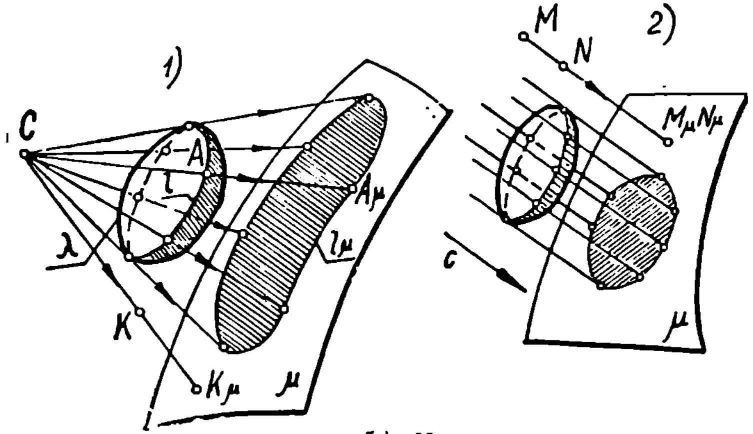
ზედაპირების განათება წარმოდგენილია შემდეგნაირად: იგულისხმება, რომ სინათლის წყაროდან გამომავალი სხივები სივრცეში წრფეწირულად ვრცელდება. ნებისმიერი სხეულის ზედაპირის იმ ნაწილს, რომელიც სინათლის წყაროს მხარეს იმყოფება, სინათლის სხივები ეცემა და მას ანათებს. ზედაპირის დანარჩენი ნაწილი — ჩრდილშია (ნახ. 83_1).

სინათლის წყარო C წერტილის სახით წარმოვიდგინოთ (ეს შეიძლება ელექტრონათურა იყოს). სხეულის λ ზედაპირის ერთი ნაწილი განათებულია, მეორე კი (დაშტრიხული) — გაუნათებელი. ზედაპირის განათებულ ნაწილს გაუნათებელისაგან l წირი საზღვრავს. ამ წირს მივიღებთ, თუ C წერტილიდან λ ზედაპირის მხებ სხივებს გავატარებთ. თითოეული სხივი, მაგალითად, CA, λ ზედაპირს რომელიმე A წერტილში ეხება. ასეთი წერტილების გეომეტრიულ ადგილს l წირი წარმოადგენს; CA სხივთა გეომეტრიულ ადგილს-კი—კონუსი, რომელსაც სხივთა კონუსი ეწოდება.

შევნიშნავთ, რომ, თუ მრუდე ზედაპირს გადატეხის წიბო არა აქვს (აქ სწორედ ასეთი მაგალითია განხილული), განათებულ და გაუნათებელ ადგილებს ასეთი მკვეთრი საზღვარი არ ექნება; განათების ინტენსივობა თანდათანობით შეიცვლება. ეს ცვლილება დამოკიდებულია ზედაპირთან სხივების დახრილობაზე და ზედაპირის სიმქრქალეზე. გარდა ამისა, ზედაპირის სხვადასხვა ნაწილში განათების სიძლიერე შეიძლება გამოწვეული იყოს არა მარტო უშუალო განათებით, არამედ ზედაპირთან ახლოს მყოფი საგნებიდან ანარეკლი სინათლის სხივებითაც. ასეთ საკითხებს აქ არ განვიხილავთ. ჩვენი მიზანია ზუსტად დავადგინოთ მხოლოდ სინათლის წყაროდან უშუალოდ მიღებული განათების საზღვრები, ამ საზღვრების გეომეტრიული ხასიათი და მათი აგების ხერხები.

l წირი ასეთ საზღვარს წარმოადგენს. ზედაპირის გაუნათებელ ნაწილზე მიღებულ ჩრდილს სხეულის (ან ზედაპირის) საკუთარი ჩრდილი ეწოდება. ხოლო l წირს — საკუთარი ჩრდილის კონტური.

ამავე ნახაზზე წარმოდგენილია მეორე μ ზედაპირი. რამდენადაც λ სხეული μ ზედაპირსა და სინათლის C წყაროს შორის მდებარეობს, ცხადია, μ ზედაპირის გარკვეულ ნაწილს სინათლის სხივები აღარ დაეცემა.



ნახ. 83.

ამ გაუნათებელი ნაწილის საზღვრის დასადგენად სივრცეში ნებისმიერი K წერტილი განვიხილოთ. ამ წერტილზე სინათლის ერთ-ერთი CK სხივი გაივლის. თუ K წერტილს მატერიალურ წერტილად წარმოვიდგენთ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ CK სხივი K წერტილთან შეჩერდება და μ ზედაპირამდე ველარ მიაღწევს. ამგვარად, μ ზედაპირზე რაღაც K_μ წერტილი გაუნათებელი იქნება. K_μ წერტილი წარმოადგენს CK სხივისა და μ ზედაპირის გადაკვეთას; მას K წერტილის ჩრდილი ეწოდება.

ახლა უკვე ცხადია, როგორ უნდა მივიღოთ λ სხეულიდან μ ზედაპირზე დაცემული ჩრდილი. C წერტილზე გავლებული μ ზედაპირის შემხები სხივების ერთობლიობა კონუსურ ზედაპირს შექმნის. ამ კონუსის შიგნით მდებარე სხივები λ ზედაპირს ეცემა და, მაშასადამე, η ზედაპირს ვერ აღწევს. ყველა დანარჩენი სხივი კი μ ზედაპირს ეცემა და ანათებს. გაუნათებელი ზედაპირის საზღვარს წარმოადგენს l_μ წირი, რომელზეც სხივთა კონუსი μ ზედაპირს გადაკვეთს. l_μ წირის ნებისმიერი A_μ წერტილი l წირის შესაბამისი A წერტილის ჩრდილია, ამიტომ მთლიანად l_μ წირი l წირის ჩრდილს წარმოადგენს. l_μ წირის შიგნით მდებარე გაუნათებელ

ნაწილს λ ზედაპირის *დაცემული ჩრდილი* ეწოდება, l_μ წირს კი *დაცემული ჩრდილის კონტური.*

რადგანაც l_μ წირი l წირის ჩრდილია, ამიტომ ვასკვნით, რომ *დაცემული ჩრდილის კონტური საკუთარი ჩრდილის კონტურის ჩრდილია.*

ამ დებულებას შემდგომში პრაქტიკული გამოყენება ექნება.

ჩვენ განვიხილეთ ის შემთხვევა, როდესაც სინათლის წყარო სივრცის საკუთრივ წერტილს წარმოადგენდა. ეს წერტილი შეიძლება არასაკუთრივიც იყოს. ადვილი წარმოსადგენია, რომ ამის შედეგად სინათლის სხივები ურთიერთპარალელური იქნება და საკმარისია მათი მიმართულება ვიცოდეთ (ნახ. 83ა). ამ შემთხვევაშიც ზემოთ მიღებული ყველა შედეგი ძალაში დარჩება. პარალელური სხივები იგულისხმება მზით განათების დროს.

მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, რომ მოცემულ μ ზედაპირზე დაცემული ჩრდილების აგება ფაქტიურად სივრცეში მდებარე წერტილების დაგეგმილებას წარმოადგენს. ერთ შემთხვევაში C წერტილიდან ცენტრალურ დაგეგმილებასთან გვაქვს საქმე, მეორე შემთხვევაში კი — პარალელურ დაგეგმილებასთან. K წერტილს μ ზედაპირზე CK სხივი აგეგმილებს, ე. ი. l წირს სხივთა კონუსი l_μ წირში აგეგმილებს. K_μ წერტილი K წერტილის ცენტრალურ გეგმილს წარმოადგენს. 83ბ-ე ნახაზზე M და N წერტილები ერთსა და იმავე წერტილში დაგეგმილდა, რადგან ეს ორი წერტილი ერთსა და იმავე მაგეგმილებელ სხივზე (ე. ი. სინათლის ერთ სხივზე) მდებარეობს.

თუ დაცემულ ჩრდილებს ნებისმიერი μ ზედაპირის ნაცვლად სიბრტყეზე ავაგებთ, მაშინ საქმე სიბრტყეზე დაგეგმილებასთან გვექნება და დაცემულ ჩრდილებს იგივე თვისებები ექნება, რაც, შესაბამისად, ცენტრალურ ან პარალელურ გეგმილებს ახასიათებს.

ამიტომ სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილების შესახებ შეგვიძლია ვთქვათ:

1) *წერტილის ჩრდილი სიბრტყეზე — წერტილია.*

2) *წრფის ჩრდილი სიბრტყეზე — წრფეა.*

პარალელური სხივებით სიბრტყეზე მიღებული ჩრდილების შესახებ შემდეგ დებულებებს მივიღებთ:

1) თუ წრფის მონაკვეთი სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ამ სიბრტყეზე მიღებული მონაკვეთის ჩრდილი თვით მონაკვეთის პარალელურია და ჩრდილის სიგრძე—მონაკვეთის ტოლია.

2) თუ გეომეტრიული ნაკვთი მოცემული სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში მდებარეობს, მაშინ ნაკვთის ამ სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილი თვით ნაკვთის ტოლია.

3) პარალელური წრფეების ჩრდილები პარალელური წრფეებია.

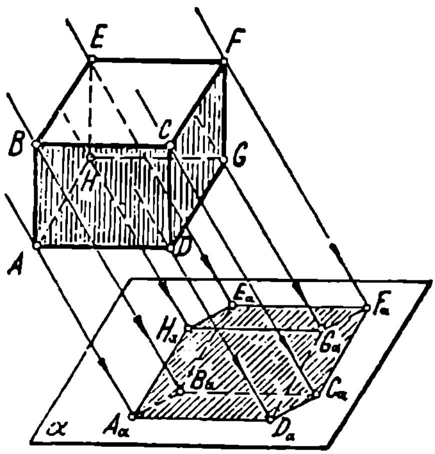
ბოლო სამი დებულება 84-ე ნახაზზეა ილუსტრირებული.

მოცემულია $ABCDEFGH$ მართკუთხა პარალელეპიპედი და α სიბრტყე $ADGH$ წახნაგის პარალელურად.

პარალელური სხივებით განათების შედეგად სიბრტყეზე მიღებულია პარალელეპიპედის დაცემული ჩრდილი, რომელიც ირიბკუთხოვან პარალელურ გეგმილს წარმოადგენს.

$ADGH$ და $BCFE$ წახნაგების დაცემული ჩრდილი ამ წახნაგების ტოლი $A_aD_aG_aH_a$ და $B_aC_aF_aE_a$ მართკუთხედებია.

აგებულია ექვსივე წახნაგის დაცემული ჩრდილი და, როგორც ნახაზიდან ჩანს, ეს ჩრდილები ურთიერთზე ნაწილობრივ გადაფარულია. ურთიერთს არ ფარავს მხოლოდ სამი წახნაგის ჩრდილი; სახელდობრ $A_aB_aE_aH_a$, $B_aC_aF_aE_a$ და $A_aB_aC_aD_a$. ეს სამი პარალელოგრამი სწორედ იმ წახნაგების ჩრდილებია, რომლებსაც სინათლის სხივები ეცემა. ჩვენ რომ მხოლოდ ეს სამი წახნაგი გვქონდეს მოცემული, დაცემული ჩრდილის კონტური იგივე $A_aH_aE_aF_aC_aD_aA_a$ მრავალკუთხედი იქნებოდა.



ნახ. 84.

ახლა უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ საკუთარი და დაცემული ჩრდილები.

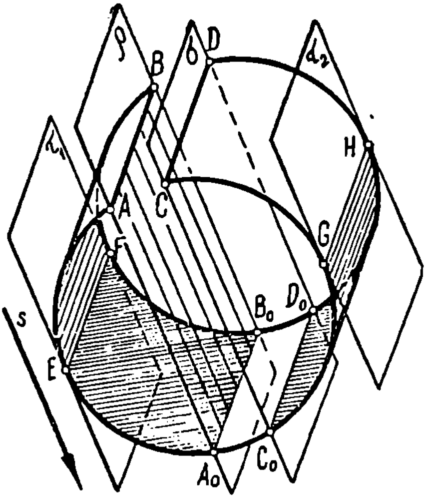
ხშირ შემთხვევაში ერთსა და იმავე ზედაპირზე შეიძლება გვქონდეს როგორც საკუთარი, ისე დაცემული ჩრდილები. ეს დამოკიდებულია ზედაპირის ფორმასა და სინათლის სხივების მიმართულებაზე. ერთ-ერთი მაგალითი 85-ე ნახაზზეა განხილული.

მოცემულია ცილინდრული ზედაპირის ნაწილი და s ისრით ნაჩვენებია სინათლის სხივების მიმართულება.

საკუთარი ჩრდილის საზღვრების დასადგენად s ისრის მიმართულებით გატარებულია ორი τ_1 და τ_2 სიბრტყე, რომლებიც ცილინდრს, შესაბამისად, EF და GH მსახველებზე ეხება. ეს მსახველები ზედაპირის გარეთა მხარის საკუთარი ჩრდილის კონტურია.

განვიხილოთ ზედაპირის $ABFE$ და $CDHG$ ნაწილები, რომლებიც EF და GH მსახველების ზემოთ მდებარეობენ. ამ ზედაპირის გარეთა მხარე

სინათლის წყაროსაკენაა მიმართული და ამიტომ განათებულია, შიგა მხარე კი საკუთარ ჩრდილშია. დაჩრდილული მხარე ნაწილობრივ მოჩანს EF მსახველის ზემოთ და მსახველების მიმართულებითაა დაშტრიხული.



ნახ. 85.

EF და GH მსახველების ქვემოთ მდებარე ზედაპირის ნაწილი განვიხილოთ. მისი გარეთა მხარე საკუთარ ჩრდილშია, რადგანაც სინათლის წყაროს საწინააღმდეგოდაა მიმართული. დაჩრდილული მხარე ნაწილობრივ მოჩანს GH მსახველის ქვემოთ და დაშტრიხულია მსახველების მიმართულებით.

ზედაპირის $ABFE$ და $CDHG$ ნაწილები რომ არა გვქონდეს, მაშინ დარჩენილი $EFHG$ ზედაპირის შიგნითა მხარე მთლიანად განათებული იქნება, რადგანაც სინათლის სხივი ამ ზედაპირის ყოველ წერტილს დაეცემა. მაგრამ ახლა ამ ნაწილებისაგან $EFHG$ ზედაპირის შიგა მხარეზე დაცემულ ჩრდილს მივიღებთ. სახელდობრ, $ABFE$ ნაწილისაგან ცილინდრის შიგა ზედაპირზე დაცემულ EFA_0B_0 ჩრდილს მივიღებთ. ამ დაცემული ჩრდილის საზღვარი ზუსტად დადგინდება, თუ AB მსახველის ჩრდილს ავაგებთ. ამისათვის AB მსახველზე სხივთა ρ სიბრტყეა გატარებული, რომელიც ცილინდრს A_0B_0 მსახველზე კვეთს. A_0B_0 და EF წრფეები დაცემული ჩრდილის საზღვრებია.

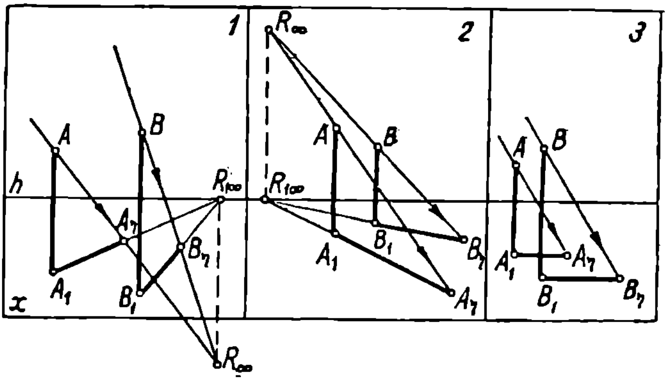
ასევე მივიღებთ ზედაპირის $CDHG$ ნაწილისაგან დაცემულ ჩრდილს. CD მსახველზე გატარებული სხივთა σ სიბრტყე ცილინდრს C_0D_0 მსახველზე კვეთს. ეს უკანასკნელი CD წრფის ჩრდილია. C_0D_0 და GH მსახველებს შორის მოთავსებული ცილინდრის შიგა ზედაპირი მთლიანად დაცემულ ჩრდილს უკავია, რომელიც ნაწილობრივ მოჩანს. შიგა ზედაპირის $A_0B_0D_0C_0$ ნაწილი განათებულია ρ და σ სიბრტყეებს შორის გამავალი სხივებით.

ვჲ. მზის სხივების სამი ძირითადი მიმართულება

პერსპექტივაში ჩრდილების აგების დროს მზის სხივების სამ ძირითად მიმართულებას განიხილავენ: 1) ქვედამავალ, 2) ზეამავალ და 3) სურათის სიბრტყის პარალელურ სხივებს.

პირველ შემთხვევაში სხივების არასაკუთრივი R_∞ წერტილი ჰორიზონტის ქვემოთ მდებარეობს (ნახ. 86_1), მეორე შემთხვევაში ეს R_∞ წერტილი ჰორიზონტის ზემოთაა (ნახ. 86_2), ხოლო მესამე შემთხვევაში სხივი მოცემულია თავისი პერსპექტივითა და ფუძით (ნახ. 86_3).

განვიხილოთ ჩრდილების აგება პირველი შემთხვევისათვის (ნახ. 86_1). მაგალითისათვის აგებულია შვეულად მდგარი წრფის მონაკვეთების ჩრდილი ფუძეთა η სიბრტყეზე.



ნახ. 86.

სხივთა არასაკუთრივი წერტილი მოცემულია R_∞ პერსპექტივითა და მისი $R_{1\infty}$ ფუძით.

AA_1 მონაკვეთის ქვედა A_1 წერტილი η სიბრტყეში მდებარეობს (იგი მონაკვეთის ზედა A წერტილის ფუძესაც წარმოადგენს), ამიტომ მისი ჩრდილი მასთანვეა შეთავსებული (აქაც და ხშირად შემდეგშიც, თუ წერტილი თავის ჩრდილს ემთხვევა, აღნიშვნების გამარტივების მიზნით, ჩრდილს ცალკე სიმბოლოს აღარ მივაკუთვნებთ, რაც წინასწარი განმარტების შემდეგ გაუგებრობას არ გამოიწვევს).

A წერტილის ჩრდილის ასაგებად მასზე AR_∞ სხივს ვატარებთ. ამ სხივის ფუძე, ცხადია, $A_1R_{1\infty}$ წრფეა. AR_∞ სხივისა და მისი $A_1R_{1\infty}$ ფუძის გადაკვეთის A_η წერტილი η სიბრტყეზე A წერტილის ჩრდილს წარმოადგენს.

რადგან წრფის ჩრდილი სიბრტყეზე ისევ წრფეა, ამიტომ AA_1 მონაკვეთის ჩრდილის განსაზღვრისათვის მისი ორი წერტილის ჩრდილი სრულიად საკმარისია. A_1 და A_η წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი ამოცანის პასუხი იქნება.

ასეთივე გზითაა აგებული BB_1 მონაკვეთის $B_\eta B_1$ ჩრდილიც.

როგორც ვხედავთ, მოცემული შვეული მონაკვეთების ჩრდილები ურთიერთპარალელურია, რადგან მათი პერსპექტივა არასაკუთრივ $R_{1\infty}$ წერტილში იკვეთება.

განხილულ შემთხვევაში მზის სხივები ქვედამავალია; მაშასადამე, ამ დროს მზე მაყურებლის (მზერის წერტილის) უკან იმყოფება.

მეორე შემთხვევაში (ნახ. 86_2) ჩრდილები იგივე ხერხითაა აგებული; მაგრამ აქ სხივები ზეაღმავალია, ე. ი. მზე სურათის სიბრტყის უკან მდებარეობს.

მესამე შემთხვევაში (ნახ. 83_3) მზე (თუ მას წერტილად წარმოვადგენთ) სურათის ერთ-ერთი არასაკუთრივი წერტილია.

33. საკუთარი და დაცემული ჩრდილები პერსპექტივაში

განვიხილოთ შვეულ სიბრტყეებში მდებარე α და β მართკუთხედები (ნახ. 87), რომელთაც საერთო 2_12 გვერდი აქვთ, მათი 1_12_1 და 2_13_1 გვერდები კი ფუძეთა η სიბრტყეში მდებარეობს.

ჯერ β მართკუთხედის ჩრდილი ავაგოთ. 2_12 გვერდის ჩრდილის ასაგებად საკმარისია ჯერ მე-2 წერტილის ჩრდილის აგება; ამისათვის გავატაროთ $2R_\infty$ წრფე და მისი $2_1R_{1\infty}$ ფუძე. ამ ორი წრფის გადაკვეთის 2_0 წერტილი მე-2 წერტილის ჩრდილია η სიბრტყეზე, 2_12_0 მონაკვეთი 2_12 მონაკვეთის ჩრდილია.

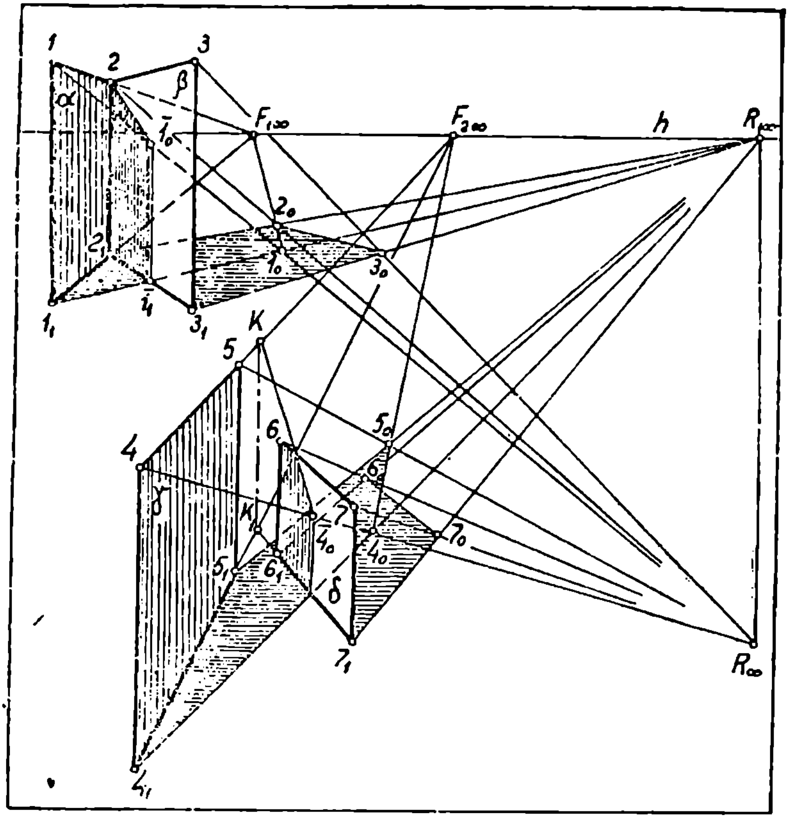
ასევეა აგებული 3_13 გვერდის 3_13_0 ჩრდილიც. 2_0 და 3_0 წერტილების შეერთებით საბოლოოდ პარალელოგრამს მივიღებთ, რადგან სივრცეში $2_12_0 \parallel 3_13_0$ და $2_13_1 \parallel 2_03_0$. $2_12_03_03_1$ პარალელოგრამი β მართკუთხედის ჩრდილია.

ახლა α მართკუთხედის დაცემული ჩრდილი ავაგოთ. ჯერ წარმოვიდგინოთ, რომ β მართკუთხედი არ არსებობს. მაშინ α მართკუთხედის დაცემული ჩრდილი მთლიანად η სიბრტყეზე მოთავსდება. 2_12 გვერდის ჩრდილი უკვე აგებულია, ხოლო 1_11 გვერდის ჩრდილს ცნობილი წესით ავაგებთ.

საბოლოოდ პარალელოგრამის $1_12_12_01_0$ პერსპექტივას მივიღებთ. ახლა β მართკუთხედიც მივიღოთ მხედველობაში.

იმის გამო, რომ 1_11_0 წრფე β მართკუთხედის 2_13_1 გვერდსა კვეთს, ვასკვნით, რომ 1_11 გვერდის ჩრდილის ნაწილი β მართკუთხედზე უნდა მდებარეობდეს. ამავე დროს, რადგანაც 1_11 წრფე β სიბრტყის პარალელურია, ამ წრფის ჩრდილი β სიბრტყეზე თვით წრფის პარალელური იქნება, ე. ი. მასაც შვეული მდებარეობა ექნება. ამიტომ 1_11_0 და 2_13_1 წრფეთა გადაკვეთის $\overline{1}_1$ წერტილიდან β სიბრტყეში შვეული წრფე გავატაროთ,

რომელიც $1R_\infty$ სხივს $\overline{1}_0$ წერტილში კვეთს. ეს უკანასკნელი $1R_\infty$ სხივისა და β სიბრტყის განკვეთის წერტილია, ე. ი. 1 წერტილის ჩრდილს წარმოადგენს.



ნახ. 87.

შევნიშნავთ, რომ $\overline{1}_0$ წერტილის აგებისას ისევე უნდა მოვიქცეთ, როგორც წრფის სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილის მოძებნის დროს (იხ. პ. 10, 2°, ამოც. 2, ნახ. 34). სახელდობრ, ვიგულისხმოთ, რომ $1R_\infty$ წრფეზე დამხმარე სიბრტყეს ვატარებთ. ამ უკანასკნელის β სიბრტყესთან განკვეთის წრფეს ავაგებთ და ბოლოს—ამ წრფის $1R_\infty$ წრფესთან განკვეთის წერტილს.

მოცემულ შემთხვევაში $1R_\infty$ წრფეზე η სიბრტყის მართობული დამხმარე სიბრტყის გატარება ვამჯობინოთ. ასეთი სიბრტყე, ცხადია, $1_1 1$

წრფეზედაც გაივლის, η სიბრტყეს $1_1R_{1\infty}$ წრფეზე გაკვეთს, β სიბრტყეს კი— შვეულ $\overline{1}_11_0$ წრფეზე. ცხადია, რომ ეს დამხმარე სიბრტყე სინათლის იმ სხივთა სიბრტყეს წარმოადგენს, რომლებიც 1_11 წრფის წერტილებზე გადიან. ამიტომ მისი η სიბრტყესთან განკვეთის 1_11_0 და β სიბრტყესთან განკვეთის $\overline{1}_11_0$ წრფეები, შესაბამისად, η და β სიბრტყეებზე 1_11 წრფის ჩრდილებია.

ამგვარად, 1_11 გვერდის ჩრდილის $1—\overline{1}_1$ ნაწილი η სიბრტყეზე ეცემა, ხოლო დანარჩენი $\overline{1}_1\overline{1}_0$ ნაწილი—β სიბრტყეზე. ჩვენ შეგვიძლია ზუსტად განვსაზღვროთ, გვერდის რომელი ნაწილები იძლევიან ჩრდილებს η და β სიბრტყეებზე, ამისათვის საკმარისია $\overline{1}_1$ წერტილზე $\overline{1}_1R_\infty$ სხივი გავატაროთ, რომელიც 1_11 წრფეს რომელიმე წერტილში გადაკვეთს. მიღებული წერტილი 1_11 გვერდს ორ მონაკვეთად გაყოფს, ქვედა მონაკვეთის ჩრდილი მთლიანად η სიბრტყეზე მოთავსდება.

ავაგოთ 1—2 გვერდის ჩრდილი β სიბრტყეზე. რადგანაც მე-2 წერტილი უშუალოდ β სიბრტყეზე მდებარეობს, თავისი ჩრდილი მასვე შეუთავსდება. ამიტომ საკმარისია ეს წერტილი $\overline{1}_0$ წერტილს წრფით შევუერთოთ, მივიღებთ 1—2 გვერდის β სიბრტყეზე დაცემულ ჩრდილს.

ამგვარად, α მართკუთხედის დაცემული ჩრდილის $1_1\overline{1}_12_1$ ნაწილი η სიბრტყეზეა, $\overline{1}_1\overline{1}_022_1$ კი—β მართკუთხედზე.

α მართკუთხედის ჩრდილის რა ნაწილი დაეცემა β მართკუთხედს, ეს შეიძლება ადვილად განვსაზღვროთ, თუ ორივე მართკუთხედის η სიბრტყეზე დაცემულ ჩრდილებს განვიხილავთ. ნახაზიდან ჩანს, რომ α მართკუთხედის η სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილის $2_1\overline{1}_11_02_0$ ნაწილი β სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილის კონტურის შიგნით მდებარეობს, რაც იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული ნაწილის შესაბამისი ჩრდილი, ე. ი. $2_1\overline{1}_1\overline{1}_02$ ოთხკუთხედი, თვით β ოთხკუთხედზე დაეცემა.

სურათზე ჩვენ ვხედავთ α მართკუთხედის დაჩრდილულ მხარეს (საკუთარ ჩრდილს) და β მართკუთხედის განათებულ მხარეს.

როგორ გავარკვიოთ პერსპექტიულ ნახაზზე მოცემული ნაკვთის ჩრდილიან მხარეს ვხედავთ თუ განათებულს?

ამისათვის შეიძლება შემდეგ ხერხს მივმართოთ:

წინასწარ შევნიშნავთ, რომ განათებული მხარე მაშინ გამოჩნდება, როდესაც სინათლის წყარო და მზერის წერტილი ნაკვთის სიბრტყის ერთ მხარესაა მოთავსებული. ამ შემთხვევაში, თუ ნაკვთის გამოსახულების და მისი დაცემული ჩრდილის კონტურებს ერთი მიმართულებით შემოვუვლით, აღმოჩნდება, რომ ნაკვთის კონტურზე მდებარე წერტილებისა და დაცემული ჩრდილის კონტურის შესაბამისი წერტილების თანმიმდევრობა ერთნაირი იქნება.

მართლაც, თუ β ოთხკუთხედის გამოსახულებას, მაგალითად, საათის ისრის მიმართულებით შემოვუვლით, მისი წვეროების თანმიმდევრობა შემდეგია: $2—3—3_1—2_1—2$. ახლა, თუ დაცემულ ჩრდილსაც იმავე მიმართულებით შემოვუვლით, მივიღებთ $2_0—3_0—3_1—2_1—2_0$ თანამიმდევრობას, ე. ი. წვეროების თანამიმდევრობა მათი ჩრდილების თანამიმდევრობას ემთხვევა. მაშასადამე, ჩვენი თვალი (მზერის წერტილი) და სინათლის წყარო (მზე) β სიბრტყის ერთ მხარეს ყოფილა მოთავსებული და ამიტომ β მართკუთხედის განათებულ მხარეს ვხედავთ.

თუ α ოთხკუთხედის გამოსახულებას ამავე მიმართულებით შემოვუარეთ, მივიღებთ წვეროების $1—2—2_1—1_1—1$ თანამიმდევრობას; ასეთივე შემოვლა ოთხკუთხედის დაცემული ჩრდილის ირგვლივ $1_0—1_1—2_1—2_0—1_0$ თანამიმდევრობას გვაძლევს. ამ შემთხვევაში ვხედავთ, რომ წვეროების თანამიმდევრობა თავისი ჩრდილების თანამიმდევრობას ვეღარ ემთხვევა, რაც იმას ნიშნავს, რომ α სიბრტყე სინათლის წყაროსა და მზერის წერტილს შორის მდებარეობს, რის გამოც α მართკუთხედის გაუნათებელ მხარეს ვხედავთ.

აქ და შემდეგშიც დაცემული ჩრდილები საკუთარ ჩრდილებთან შედარებით უფრო მუქადაა აღნიშნული.

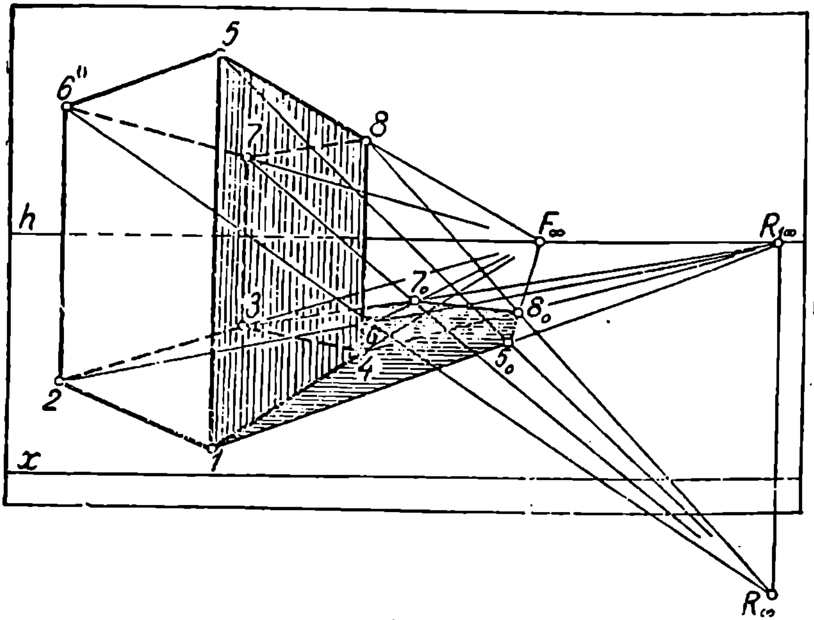
ამავე ნახაზზე კიდევ ერთი მსგავსი ამოცანაა განხილული იმ განსხვავებით, რომ მოცემულ γ და δ მართკუთხედებს საერთო წერტილები აღარა აქვს.

ამ ორი ნაკვთის η სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილები ზემოთ მოყვანილი ხერხითაა აგებული. ასეთივე ხერხით ავაგეთ 4_14 წიბოს ჩრდილი δ სიბრტყეზე. 4—5 წრფის ჩრდილის ასაგებად შემდეგ ხერხს მივმართოთ: γ და δ სიბრტყეთა განკვეთის წრფე ავაგოთ. ამისათვის 4_15_1 და 6_17_1 წრფეთა განკვეთის K_1 წერტილი ვიპოვოთ (ეს ორივე წრფე η სიბრტყეში მდებარეობს). K_1 წერტილზე შვეული K_1K წრფე γ და δ სიბრტყეების კვეთის წრფეა. ამ წრფის 4—5 წრფესთან გადაკვეთის K წერტილი ორივე მართკუთხედის სიბრტყეს ეკუთვნის; ამიტომ, როდესაც 4—5 წრფის ჩრდილს δ სიბრტყეში ავაგებთ, K წერტილის ჩრდილი მასთანვე იქნება შეთავსებული. მე-4 წერტილის 4_0 ჩრდილი δ სიბრტყეში უკვე გვაქვს. ამიტომ K და $\overline{4}_0$ წერტილებზე გატარებული წრფე 4—5 წრფის ჩრდილი იქნება δ სიბრტყეში. ამ ჩრდილის ნაწილი თვით δ ოთხკუთხედის კონტურში მოთავსდა. ყველა დანარჩენ შემთხვევაში ისე ვიქცევით, როგორც ზემოთ აღინიშნა და ამიტომ აღარ გავიმეორებთ.

§4. მართკუთხა პარალელეპიპედის ჩრდილი

პარალელეპიპედი 1 — 2—3—4 წახნაგით ფუძეთა სიბრტყეზე მდებარეობს (ნახ. 88). R_∞ წერტილი სხივების არასაკუთრივი წერტილია,

η სიბრტყეზე უკვე ცნობილი წესით აგებულია პარალელეპიპედის ზედა წერტილების ჩრდილები, რომლებიც ქვედა წახნაგის წვეროებთან ერთად



ნახ. 88.

განსაზღვრავენ ყველა წახნაგის დაცემულ ჩრდილს, თუ ამ წახნაგებს ცალ-ცალკე, დამოუკიდებლად წარმოვიდგენთ.

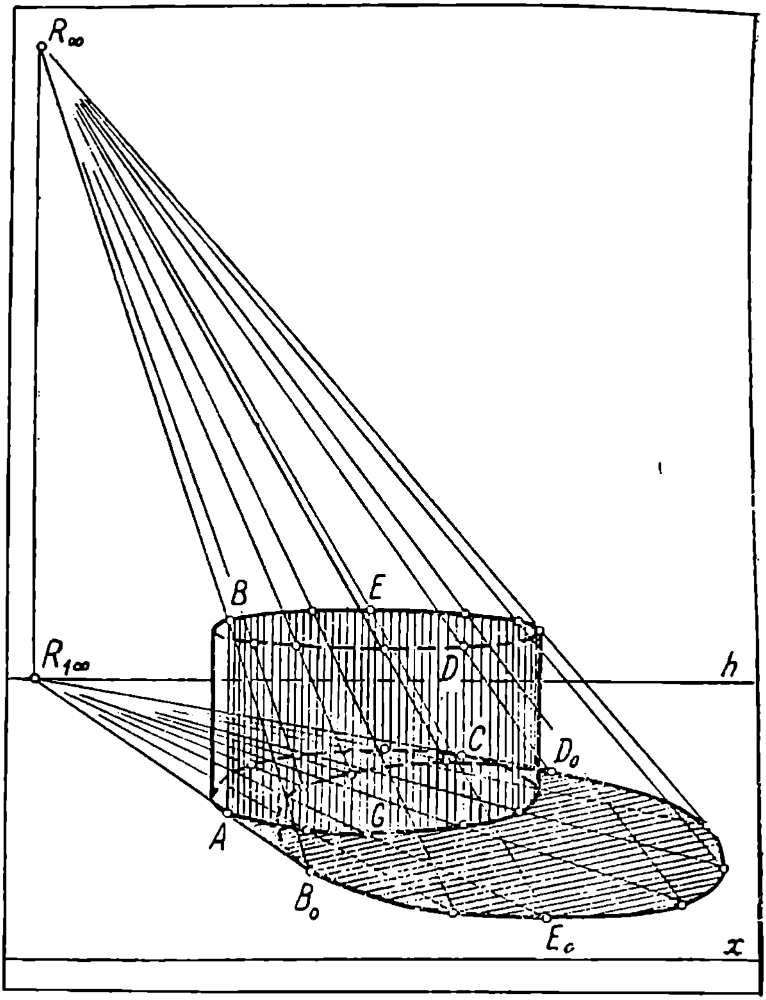
საბოლოო შედეგისათვის საჭირო არ არის ყველა წვეროსა და წიბოს ჩრდილის აგება. კერძოდ, 2—6, 5—6, 6—7 და 4—8 წიბოების ჩრდილი არ განსაზღვრავს დაცემული ჩრდილის კონტურს, რადგან მთლიანად მის შიგნით თავსდება.

§5. ცილინდრის ჩრდილი

სწორი წრიული ცილინდრი ერთ-ერთი ფუძით η სიბრტყეზე მდებარეობს (ნახ. 89). მოცემულია სხივების არასაკუთრივი R_∞ წერტილი. ამ შემთხვევაში სხივები ზეაღმავალია.

ვთქვათ, მოვისურვეთ ცილინდრის ყველა მსახველის ჩრდილის აგება η სიბრტყეზე. ამისათვის საკმარისია თვითეულის ბოლო წერტილების ჩრდილის აგება. მაგალითად, GE მსახველის ჩრდილი ავაგოთ. G წერტილის ჩრდილი, ცხადია, მასვე ემთხვევა. E წერტილის ჩრდი-

ლის ასაგებად გატარებულია $R_\infty E$ სხივი და მისი $R_{1\infty}G$ ფუძე (G წერტილი E წერტილის ფუძეს ემთხვევა). სხივისა და მისი ფუძის გადა-



ნახ. 89.

კვეთის E_0 წერტილი E წერტილის ჩრდილია, GE_0 მონაკვეთი კი—GE მსახველის ჩრდილი. თუ ასე განვაგრძობთ მსახველების ზედა წერტილების ჩრდილის აგებას, საბოლოოდ ცილინდრის ზედა BED ფუძის დაცემული ჩრდილის $B_0E_0D_0$ კონტურს მივიღებთ. ეს კონტური ცილინდრის ფუძის

ტოლ წრეწირს წარმოადგენს, რადგანაც ცილინდრის BED ფუძე η სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში მდებარეობს და ამიტომ პარალელური სხივებით ამ სიბრტყეზე $B_0E_0D_0$ წრეწირში დაგეგმილდება. $B_0E_0D_0$ წრეწირის ნაწილი ცილინდრის დაცემული ჩრდილის კონტურის ნაწილია.

დაცემული ჩრდილის მთელი კონტურის ასაგებად საკმარისია ცილინდრის საკუთარი ჩრდილის კონტური განვსაზღვროთ, ამისათვის კი ცილინდრის მომვლები სხივთა ზედაპირი უნდა აიგოს.

R_∞ წერტილზე გატარდება სხივთა ორი სიბრტყე, რომლებიც ცილინდრს მსახველებზე შეეხება: $R_\infty R_{1\infty}AB$ სიბრტყე ცილინდრს AB მსახველზე ეხება და η სიბრტყესთან გადაკვეთაში ამ მსახველის AB_0 ჩრდილს განსაზღვრავს. $R_\infty R_{1\infty}CD$ სიბრტყე კი ცილინდრს CD მსახველზე ეხება და, სრულიად ასევე, მის CD_0 ჩრდილს გვაძლევს.

სხივთა ზედაპირის დანარჩენი ნაწილი ორი ცილინდრული ზედაპირის ნაწილებისაგან შედგება. ერთი მათგანი მოცემული ცილინდრის ზედა ფუძის BED რკალზე გადის (ე. ი. წრეწირის იმ ნახევარზე, რომელშიც E წერტილი შედის), მეორე კი ცილინდრის ქვედა ფუძის AC ნახევარზე გადის (ე. ი. იმ ნახევარზე, რომელშიც G წერტილი არ შედის).

ამგვარად, სხივთა მთლიანი მომვლები ზედაპირი ცილინდრის საკუთარი ჩრდილის მთლიან კონტურს განსაზღვრავს, რომელიც AB და CD მსახველებისა და ED და AC რკალებისაგან შემდგარ შეკრულ წირს წარმოადგენს. ახლა ადვილად დავადგენთ, რომ განათებული იქნება ცილინდრის ზედა ფუძე და გვერდითი ზედაპირის მზისკენ მიმართული ნაწილი (AB მსახველიდან CD მსახველამდე). ჩვენთვის ხილვადი იქნება განათებული ზედაპირის მცირე ნაწილი AB მსახველიდან მარცხნივ.

ცილინდრის დაცემული ჩრდილის კონტური განისაზღვრება, როგორც საკუთარი ჩრდილის კონტურის ჩრდილი. ამის შედეგად შეკრულ $AB_0E_0D_0CA$ წირს მივიღებთ.

შევნიშნავთ, რომ ქვედა ფუძის დაცემული ჩრდილი თვით ამ ფუძესთანაა შეთავსებული, რადგანაც ეს ფუძე η სიბრტყეზე მდებარეობს.

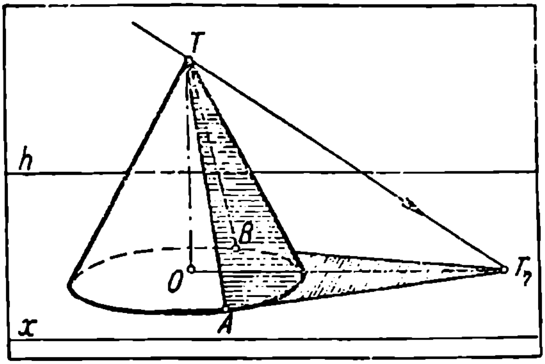
86. კონუსის ჩრდილი

სწორი წრიული კონუსი ფუძით η სიბრტყეზე მდებარეობს (ნახ. 90). სინათლის სხივები სურათის პარალელურია, მათი მიმართულება TT_η სხივით განისაზღვრება. ეს სხივი კონუსის T წვეროს T_η ჩრდილს გვაძლევს.

საკუთარი ჩრდილის კონტური ავაგოთ. ამისათვის სხივთა მომვლები ზედაპირი განვსაზღვროთ.

კონუსს სხივთა ორი სიბრტყე ეხება; ერთი, TA მსახველზე და TT_η სხივზე გაივლის, მეორე კი — TB მსახველზე და იმავე TT_η სხივზე. ალ-

ნიშნული მსახველები განსაზღვრავს კონუსის განათებულ და დაჩრდილულ ნაწილებს, მსახველების AT_η და BT_η ჩრდილები კი—კონუსის დაცემული ჩრდილის კონტურს.



ნახ. 90.

37. ჩრდილების აგება წახნაგოვან ზედაპირზე

ა მ ო ც ა ნ ა 18. ავაგოთ ჩრდილები კიბეზე (ნახ. 91). ჯერ შვეული AA_1 წრფის ჩრდილი ავაგოთ. ეს ჩრდილი დაეცემა შვეულ და თარაზულ სიბრტყეებზე, რომლებისგანაც საფეხურების ზედპირი შედგება. წინასწარ ვიცით, რომ შვეული წრფის თარაზულ სიბრტყეზე ჩრდილი სხივთა არასაკუთრივი წერტილის $R_{1\infty}$ ფუძეზე გაივლის.

ამიტომ A_1 წერტილზე $A_1R_{1\infty}$ წრფე გავატაროთ. მისი A_11 მონაკვეთი წარმოადგენს AA_1 წრფის ჩრდილს მიწის თარაზულ ზედაპირზე.

შვეული წრფის შვეულ სიბრტყეზე ჩრდილი ისევ შვეული წრფეა. ამიტომ 1 წერტილზე შვეული 1—2 წრფე გავატაროთ. ეს იქნება იგივე AA_1 წრფის ჩრდილი პირველი საფეხურის შვეულ ზედაპირზე.

ამავე საფეხურის თარაზულ ზედაპირზე A_1A წრფის ჩრდილის მისაღებად საკმარისია მე-2 წერტილზე $2R_{1\infty}$ წრფე გავავლოთ. მისი 2—3 მონაკვეთი საძიებელი ჩრდილია.

2—3 ჩრდილი სხვა გზითაც შეგვიძლია მივიღოთ. ამისათვის საფეხურის ზედა სიბრტყე AA_1 წრფის გადაკვეთამდე გაგრძელებულად წარმოვიდგინოთ. გადაკვეთის K წერტილს მივიღებთ, თუ საფეხურის წიბოს გაგრძელებას ამ წრფესთან გადავკვეთთ. მაშინ $KR_{1\infty}$ წრფეს ისევე ავაგებთ, როგორც A_11 ავაგეთ. $KR_{1\infty}$ წრფეზე მდებარეობს 2—3 მონაკვეთი.

მეორე საფეხურის შვეულ ზედაპირზე აგებულია AA_1 წრფის 3—4 ჩრდილი იმავე ხერხით, როგორითაც 1—2 ჩრდილი პირველ საფეხურზე.

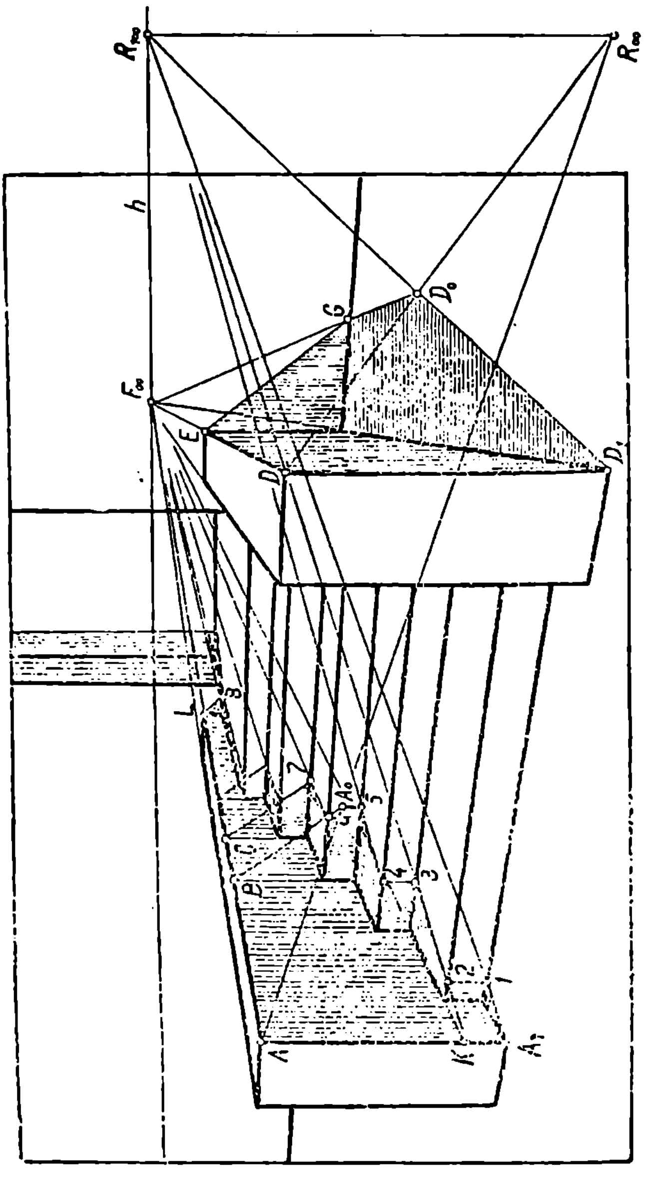


Abb. 91.

ასეთი თანამიმდევრობითაა მიღებული მთლიანად AA_1 წრფის ჩრდილი კიბეზე, ე. ი. A_1—1—2—4—5... ტეხილი. მაგრამ ეს ტეხილი წყდება A_0 წერტილში, სადაც A წერტილზე გატარებული AR_∞ სხივი კვეთს აგებულ ტეხილს. A_0 წერტილი A წერტილის ჩრდილია კიბის ზედაპირზე. აქ თავდება AA_1 მონაკვეთის ჩრდილი კიბეზე და იწყება AL წრფის ჩრდილი.

საბოლოოდ AA_1 წრფის ჩრდილის აგება საფეხურებზე ასე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ: AA_1 წრფეზე სხივთა სიბრტყე გადის, რომელიც, ცხადია, η სიბრტყის მართობულია. სხივთა სიბრტყისა და კიბის ზედაპირის გადაკვეთას წარმოადგენს მიღებული ტეხილი ჩრდილი.

ახლა ავაგოთ AL წრფის ჩრდილი. ეს ჩრდილი წარმოადგენს AL წრფეზე გატარებულ სხივთა სიბრტყისა და კიბის ზედაპირის გადაკვეთას.

აგება A_0 წერტილიდან დავიწყოთ. AL წრფის ჩრდილი მესამე საფეხურის შვეულ ზედაპირზე—წრფეა, რომლის A_0 წერტილი უკვე გვაქვს. საჭიროა კიდევ ერთი წერტილი.

საფეხურის შვეული ზედაპირისა და AL წრფის გადაკვეთის B წერტილი ავაგოთ. A_1B წრფის ნაწილი A_0 -დან მე-6 წერტილამდე საძიებელი ჩრდილია. მე-6 წერტილზე გაივლის AL წრფის ჩრდილი ამავე საფეხურის თარაზულ სიბრტყეზე. რადგანაც AL წრფე ამ სიბრტყის პარალელურია, ეს წრფე თავისი ჩრდილის პარალელურიცაა. ამიტომ მე-6 წერტილზე გავავლოთ AL წრფის პარალელური $6F_\infty$ წრფე. მასზე მდებარე 6—7 მონაკვეთი საძიებელი ჩრდილია.

შემდეგი საფეხურის შვეულ სიბრტყეზე ჩრდილის აგება წინა შემთხვევის ანალოგიურია. ასეთივე ხერხით აიგება მთლიანად AL წრფის ჩრდილი კიბის ზედაპირზე.

შენობის კედლისა და კიბის ბაქნის გადაკვეთის ხაზზე მივიღებთ მე-8 წერტილს. მისი L წერტილთან შეერთება მოგვცემს $L8$ მონაკვეთს, ე. ი. AL წრფის ჩრდილის ნაწილს შენობის კედელზე.

ტეხილი A_1 წერტილიდან L წერტილამდე განსაზღვრავს დაცემულ ჩრდილს კიბეზე.

კიბის მარჯვნივ აგებულია დაცემული ჩრდილი მიწაზე და შენობის კედელზე, რომლის კონტურს განსაზღვრავს DD_1 და DE წრფეთა ჩრდილები. DD_1 მონაკვეთის ჩრდილი მთლიანად მიწაზე ეცემა; მისი აგების წესი ცნობილია.

D_0 წერტილზე ვატარებთ DE წრფის D_0F_∞ ჩრდილს ამ წრფის პარალელურად; D_0F_∞ წრფე კედელს G წერტილში კვეთს. EG მონაკვეთი DE წრფის ჩრდილის ის ნაწილია, რომელიც შენობის კედელს ეცემა.

ა მ ო ც ა ნ ა 19. გამოსახულია შენობა მასებში (ნახ.92). ავაგოთ ჩრდილები. სხივები სურათის პარალელურია; მათი მიმართულება მოცემულია $r(r_1)$ წრფით. მიწის ზედაპირი თარაზულია და მიღებულია ფუძეთა სიბრტყედ.

დავიწყოთ მარცხენა მხრიდან.

D წერტილზე გატარებულია DD_0 სხივი მისი D_1D_0 ფუძის გადაკვეთამდე. D_0 წერტილი D წერტილის ჩრდილია მიწაზე, D_1D_0 მონაკვეთი კი DD_1 შვეული მონაკვეთის ჩრდილი.

$DF_{2\infty}$ წრფე და მისი $D_0F_{2\infty}$ ჩრდილი მიწაზე ურთიერთპარალელურია. მიწაზე ამ ჩრდილის D_06 ნაწილი ეცემა. მე-6 წერტილიდან კი—კედელზე (6-7).

D_1D_06—7 ტეხილი განსაზღვრავს D_1D7 წახნაგის დაცემული ჩრდილის კონტურს მიწასა და კედელზე.

ავაგოთ ABC 5—1—2 მრავალწახნაგას დაცემული ჩრდილი α სიბრტყეზე. დავიწყოთ A წერტილიდან.

წინასწარ α კედელი A წერტილის დონემდე ამაღლებული წარმოვიდგინოთ, ე. ი. $2E$ წრფე შვეულად ზემოთ გადავაადგილოთ. ამისათვის 1—2 წრფე $A3$ წრფესთან გადავკვეთოთ და $2E$ წრფის პარალელური $3F_{1\infty}$ წრფე გავავლოთ.

ახლა A წერტილზე სურათის x ფუძის პარალელური $A4$ წრფე გავატაროთ $3F_{1\infty}$ წრფის მე-4 წერტილში გადაკვეთამდე.

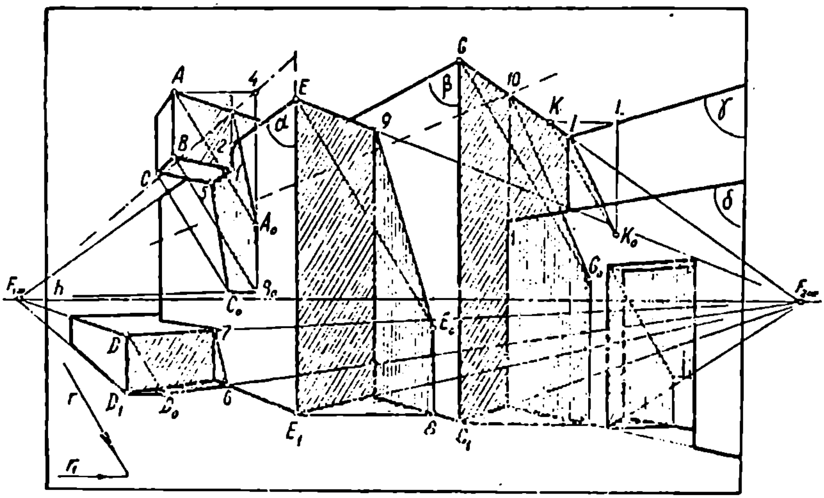
A წერტილზე გატარებული სინათლის AA_0 სხივი და $A4$ წრფე სურათის პარალელურ სიბრტყეშია, რომლის α სიბრტყესთან გადაკვეთა შვეულ $4A_0$ წრფეს მოგვცემს. ცხადია, რომ AA_0 სხივის $4A_0$ წრფესთან განკვეთის A_0 წერტილი A წერტილის ჩრდილია α სიბრტყეზე. $A3$ წრფის ჩრდილი α სიბრტყეზე უკვე განსაზღვრულია, რადგანაც A წერტილის ჩრდილი ავაგეთ, მე-3 წერტილი კი $A3$ წრფისა და α სიბრტყის საერთო წერტილია.

AB მონაკვეთის ჩრდილის აგება უკვე სიძნელეს არ წარმოადგენს, რადგან მისი ერთ-ერთი წერტილის A_0 ჩრდილი უკვე აგებულია. AB წრფე α სიბრტყის პარალელურია, ამიტომ იგი თავისი ჩრდილის პარალელურიც უნდა იყოს; ამიტომ საკმარისია B წერტილზე სხივი გავატაროთ $4A_0$ წრფის B_0 წერტილში გადაკვეთამდე.

BC წრფეც თავისი ჩრდილის პარალელური იქნება, ამიტომ B_0 წერტილზე ვატარებთ $B_0F_{1\infty}$ წრფეს CC_0 სხივის გადაკვეთამდე. მე-5 წერტილი $C5$ წრფის და α სიბრტყის საერთო წერტილია; ამიტომ $C5$ წრფის ჩრდილი C_0 და მე-5 წერტილებზე გადის. ამით დამთავრდა α სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილის აგება.

შევნიშნავთ, რომ $5C_0B_0A_03$ ჩრდილის აგებაში ფუძეთა სიბრტყით არ გვისარგებლია. ამისათვის მოცემული წერტილების ფუძეებიც უნდა აგვეგო. ჩვენს შემთხვევაში საკმარისი იქნებოდა მხოლოდ A წერტილის ფუძე. მკითხველს ვურჩევთ, ასეთი გზით ამ ჩრდილის აგება სავარჯიშო სახით ჩაატაროს.

β სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილის კონტურს $E9$ და E_1E წრფეთა ჩრდილები განსაზღვრავს. მსგავსი აგება წინა ამოცანებში გვხვდება.



ნახ. 92.

ასევეა აგებული ჩრდილი δ კედელზე; ჯერ წინა შემთხვევის მსგავსად მოძებნილია G წერტილის G_0 ჩრდილი და აგებულია G_1G წრფის ჩრდილი. GI წრფის ჩრდილის ასაგებად δ წახნაგის სიბრტყისა და GI წრფის გადაკვეთის 10 წერტილია მოძებნილი; მისი G_0 წერტილთან შემაერთებელი წრფე δ სიბრტყეზე GI წრფის ჩრდილს განსაზღვრავს. მაგრამ, ცხადია, რომ δ კედელზე GI წრფის ჩრდილის მხოლოდ ნაწილი ეცემა. დანარჩენი კი γ სიბრტყესა და γ და δ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ უხილავ ზედაპირს დაეცემა, ამიტომ საკმარისია ამ წრფის ჩრდილი γ კედლის ხილვად ნაწილზე ავაგოთ.

GI წრფის და γ სიბრტყის საერთო I წერტილი მოცემულია. საკმარისია ავაგოთ ამ წრფის ნებისმიერი K წერტილის ჩრდილი, იმავე გზით, რომლითაც A წერტილის ჩრდილი მოვძებნეთ.

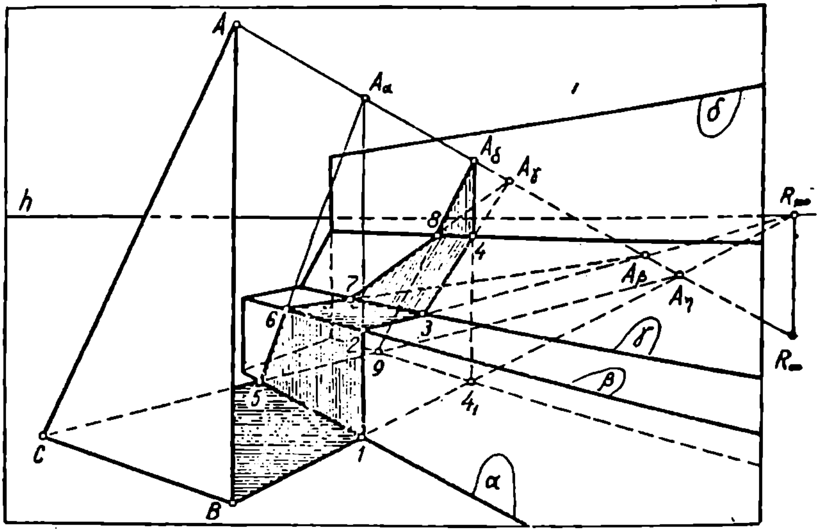
γ წახნაგის ზედა წიბო და GI წრფე ერთ დონეზეა, ამიტომ K წერტილზე სურათის ფუძის პარალელურად გატარებული KL წრფე ამ წიბოს გაკვეთს. ავაგოთ შეეული LK_0 წრფე KK_0 სხივის გადაკვეთამდე. K_0 ჩრდილი ჩვენთვის უხილავია; მისი K წერტილთან შეერთება GI წრფის ჩრდილს განსაზღვრავს.

ცნობილი ხერხითაა აგებული დაცემული ჩრდილი მართკუთხოვან ნიშში, რომელიც კედელშია მოწყობილი.

ა მ ო ც ა ნ ა 20. ბრტყელი მრავალკუთხედის დაცემული ჩრდილი წახნაგოვან სხეულზე (ნახ. 93). აქ ის შემთხვევაა განხილული, როდესაც ერთ-ერთი γ წახნაგის სიბრტყე ნებისმიერადაა დახრილი სურათისა და ფუძეთა სიბრტყეებთან. ABC სამკუთხედი, რომლის დაცემულ ჩრდილს ვეძებთ, მართკუთხაა, BC კათეტი ფუძეთა სიბრტყეზე მდებარეობს, AB კათეტი კი ამ სიბრტყის მართობია.

ჯერ შვეული AB კათეტის ჩრდილი ავაგოთ.

η სიბრტყეზე ამ კათეტის მთლიანი ჩრდილი BA_η მონაკვეთია და α წახნაგის ფუძეს 1 წერტილში კვეთს. 1 წერტილიდან A_η-მდე ჩრდილი წარმოსახვითია, ე. ი. სინამდვილეში იგი არ არსებობს და ამოცანის გადაწყვეტაში მხოლოდ დამხმარე როლს ასრულებს.



ნახ. 93.

α წახნაგის სიბრტყეში კათეტის ჩრდილი შვეულია, იგი 1 წერტილიდან იწყება, მე-2 წერტილამდე ნამდვილია, მე-2-დან A_α-მდე კი — წარმოსახვითი.

β წახნაგის სიბრტყეში ჩრდილი BA_η ჩრდილის პარალელურია და მე-3-დან A_β-დე წარმოსახვითია.

γ სიბრტყეზე ჩრდილი დახრილი იქნება და მისი უშუალო აგებისათვის 3—4 წრფის არასაკუთრივი წერტილი დაგვჭირდება, რომელიც $R_\infty R_{1\infty}$ წრფეზე მდებარეობს და ნახაზის ფარგლებიდან შორსაა. სიძნელის თავიდან ასაცილებლად AB კათეტის ჩრდილს ჯერ შვეულ δ სიბრტყეზე ავა-

გებთ. BA_η წრფე δ წახნაგის ფუძეს 4_1 წერტილში კვეთს, აქედან კათეტის ჩრდილი δ სიბრტყეზე შვეულად გაივლის AR_∞ სხივის A_δ წერტილში გადაკვეთამდე. 4_1-დან მე-4-მდე ეს ჩრდილი წარმოსახვითია.

γ სიბრტყეზე AB კათეტის ჩრდილი მე-3 და მე-4 წერტილების შეერთებით მიიღება.

ახლა AC ჰიპოტენუზის ჩრდილი ავაგოთ.

η სიბრტყეზე A წვეროს A_η ჩრდილი უკვე გვაქვს; მისი C_* წერტილთან შეერთებით ჰიპოტენუზის ჩრდილს მივიღებთ.

α სიბრტყეზე ჩრდილის მისაღებად მე-5 წერტილი შევუერთოთ A წერტილის ჩრდილს α სიბრტყეზე, ე. ი. A_α წერტილს.

β სიბრტყეზე A წერტილის ჩრდილი—A_β წერტილია, ამიტომ გავატარებთ $6A_\beta$ წრფეს. მისი 6—7 მონაკვეთი β წახნაგზე AC ჰიპოტენუზის ჩრდილია.

დახრილ γ წახნაგზე ჩრდილის ასაგებად შეგვიძლია ორი გზა ავარჩიოთ. პირველ შემთხვევაში მე-7 წერტილი A წერტილის γ სიბრტყეზე A_γ ჩრდილს შევუერთოთ. უკანასკნელი მიღებულია 3—4 წრფის AR_∞ სხივთან გადაკვეთის შედეგად.

მეორე შემთხვევაში ჩრდილი ჯერ δ სიბრტყეზე ავაგოთ, ამისათვის CA_η წრფისა და δ წახნაგის ფუძის გადაკვეთის მე-9 წერტილი A_δ წერტილს შევუერთოთ; შემდეგ მე-8 და მე-7 წერტილები წრფით შევაერთოთ. ამით დამთავრდება დაცემული ჩრდილის კონტურის აგება.

ა მ ო ც ა ნ ა 21. ასაგებია წრფის ჩრდილი წრფოვან ზედაპირზე, კერძო შემთხვევა (ნახ.94). შვეული AA_1 წრფის ჩრდილი ეცემა ზედაპირზე, რომლის ძირითადი ნაწილი ცილინდრია.

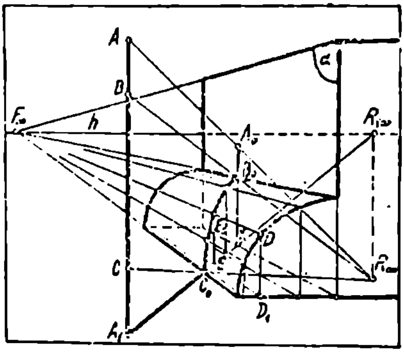
წრფეზე გამავალი სხივთა ზედაპირი შვეულ სიბრტყეს წარმოადგენს. მაშასადამე, ამოცანა ის არის, რომ ავაგოთ ამ სიბრტყისა და მოცემული ზედაპირის განკვეთის წირი.

სხივთა სიბრტყის η სიბრტყესთან განკვეთა $A_1R_{1\infty}$ წრფეა, შვეულ α სიბრტყესთან განკვეთა კი — KA_0 წრფე (იხ. წინა ამოცანა). $A_1R_{1\infty}$ წრფე ცილინდრს C_0 წერტილში ჰკვეთს, KA_0 წრფე კი—B_0 წერტილში.

სხივთა სიბრტყისა და ცილინდრის განკვეთის წირი B_0 და C_0 წერტილებზე გაივლის. მისი აგება ცილინდრის მსახველებისა და სხივთა სიბრტყის გადაკვეთამდე დაიყვანება. მაგალითად, DF_∞ მსახველის D_1F_∞ ფუძე ამ სიბრტყის $A_1R_{1\infty}$ წრფეს E წერტილში ჰკვეთს, საიდანაც ტარდება შვეული წრფე DF_∞ მსახველის გადაკვეთამდე; E_0 საძიებელი წერტილია. ასეთი წერტილების გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს $C_0E_0B_0$ წირი, რომელიც ცილინდრის ზედაპირზე მოცემული წრფის ჩრდილია.

სხვათაშორის, ჩვენ ზუსტად შეგვიძლია განვსაზღვროთ, წრფის რომელი ნაწილის ჩრდილი ეცემა ცილინდრის ზედაპირს. ამისათვის B_0 და

C_0 წერტილებზე, შესაბამისად, $R_\infty B_0$ და $R_\infty C_0$ სხივები გავატაროთ, რომლებიც AA_1 წრფეს B და C წერტილებში კვეთს; მაშასადამე, ცილინდრზე ჩრდილს წრფის BC მონაკვეთი წარმოშობს.



ნახ. 94.

ა მ ო ც ა ნ ა 22. ავაგოთ წრფის ჩრდილი სიბრტყეზე (ნახ. 95). თარაზულ სიბრტყეში მოცემულია წრიული გაუმჭვირი ფირფიტა, რომელიც O ცენტრით შვეული წრფის OA მონაკვეთს ეყრდნობა. მის სიახლოვეს შვეული კედელია; მიწის ზედაპირი თარაზულია.

კედლის და მიწის სიბრტყეთა გადაკვეთას a წრფე წარმოადგენს; A წერტილი მიწის სიბრტყეში მდებარეობს. საჭიროა ავაგოთ წრის დაცემული ჩრდილი.

დაცემული ჩრდილის კონტურის ასაგებად მოცემული წრეწირის წერტილებზე სინათლის სხივები უნდა გავატაროთ. ეს სხივები ცილინდრულ ზედაპირს (სხივთა ცილინდრს) შეჰქმნის; ამიტომ ჩვენი ამოცანა ცილინდრისა და სიბრტყის გადაკვეთაზე დაიყვანება.

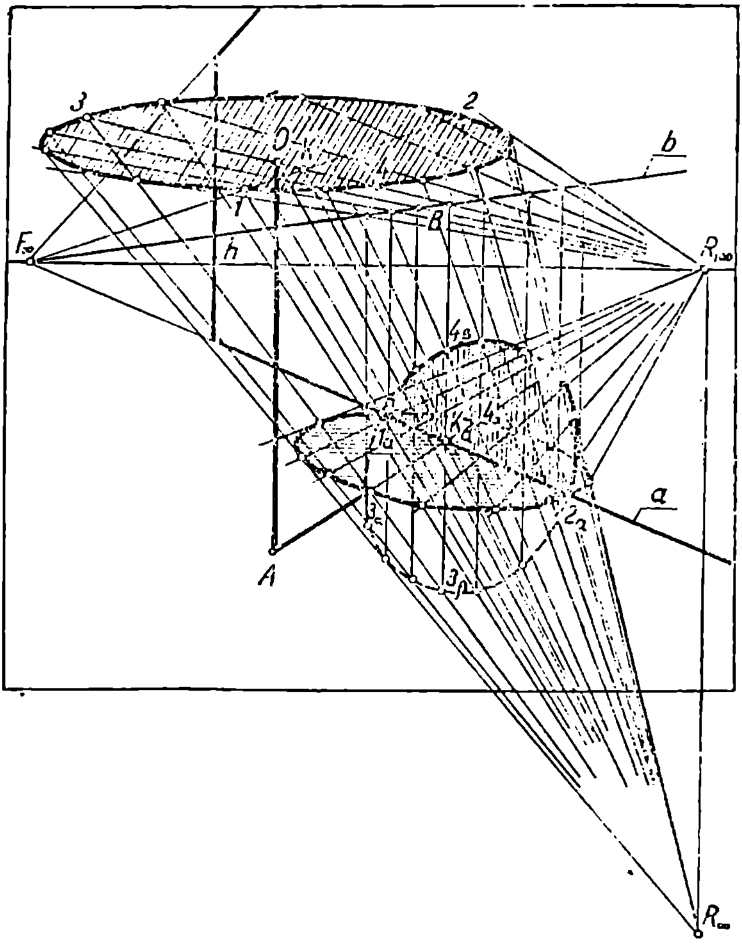
ნახაზიდან ჩანს, რომ წრეწირის ჩრდილი როგორც მიწის, ისე კედლის სიბრტყეზე ეცემა, ამიტომ სხივთა ცილინდრის გადაკვეთა ორივე სიბრტყესთან უნდა ვიპოვოთ.

ჯერ კედლის სიბრტყისა და სხივთა ცილინდრის გადაკვეთა ავაგოთ. ამ შემთხვევაში ხელსაყრელი იქნება, რომ ფუძეთა η სიბრტყედ წრფის სიბრტყე მივიღოთ. მაშინ წრეწირის ნებისმიერ წერტილზე და $R_1\infty$ წერტილზე გატარებული წრფე სინათლის შესაბამისი სხივის ფუძე იქნება.

წრეწირისა და კედლის სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე ავაგოთ. ეს წრფე a წრფის პარალელური უნდა იყოს და ამიტომ საკმარისია მისი ერთი წერტილის აგება. ამისათვის, მაგალითად, $OR_1\infty$ წრფის კედელთან განკვეთა ვიპოვოთ. $OR_1\infty$ წრფეზე დამხმარე შვეული სიბრტყე [გავატაროთ, რომელიც, ცხადია, OA წრფეზე გაივლის და მიწის სიბრტყეს $AR_1\infty$ წრფეზე გადაკვეთს, კედლის სიბრტყეს კი—K_aB წრფეზე. $OR_1\infty$ და K_aB წრფეთა გადაკვეთის B წერტილი წრისა და კედლის სიბრტყეთა საერთო წერტილია და ამიტომ მასზე ამ სიბრტყეთა გადაკვეთის b წრფე გადის.

b წრფე სინათლის სხივთა ფუძეებს გადაკვეთს, რომელთა საშუალებით თვით სხივების კედელთან განკვეთას უშუალოდ ავაგებთ. მაგალითად, $OR_1\infty$ წრფესთან სინათლის ორი სხივის ფუძეა შეთავსებული: $3R\infty$ სხივის $3R_1\infty$ ფუძე და $4R\infty$ სხივის $4R_1\infty$ ფუძე, რომლებიც b წრფესთან

B წერტილში იკვეთება. B წერტილზე ვატარებთ შვეულ წრფეს $3R_\infty$ და $4R_\infty$ სხივების გადაკვეთამდე. მიღებული 3_β და 4_β წერტილები, შესაბამისად, მე-3 და მე-4 წერტილების ჩრდილია კედლის სიბრტყეში.



ნახ. 95.

ასეთივე გზითაა აგებული დანარჩენი სხივების კედელთან განკვეთის წერტილები, რომელთა ერთობლიობა ეკუთვნის მოცემულ წრფის დაცემული ჩრდილის კონტურს შვეულ კედელზე.

მიწის სიბრტყეზე ჩრდილის აგებისას უმჯობესი იქნება ფუძეთა სიბრტყედ მიწის ზედაპირი მივიღოთ. მაშინ ყოველი სხივის ფუძე ისევე აი-

გება, როგორც $3R_\infty$ და $4R_\infty$ სხივთა ფუძეები. სახელდობრ, ამ ორი სხივის ახალი ფუძეების ასაგებად საკმარისი იყო B წერტილზე შვეული წრფის გატარება a წრფის K_a წერტილში გადაკვეთამდე და $K_aR_{1\infty}$ წრფის აგება, რაც უკვე მანამდე შევასრულეთ. ასევეა აგებული დანარჩენი სხივების ფუძეც.

ახლა საკმარისია ყოველი სხივი თავის ფუძესთან გადავკვეთოთ. მაგალითად, იგივე $3R_\infty$ და $4R_\infty$ სხივები $K_aR_{1\infty}$ წრფესა კვეთს. მიღებული 3_a და 4_a წერტილები, შესაბამისად, მე-3 და მე-4 წერტილების ჩრდილია მიწის სიბრტყეში. ასეთი წერტილების ერთობლიობა გვაძლევს წრფის ჩრდილის კონტურს მიწაზე.

წრფის მთლიანი ჩრდილები ორივე სიბრტყეზეა აგებული, მაგრამ ცხადია, რომ სინამდვილეში როგორც ერთზე, ისე მეორე სიბრტყეზე ამ ჩრდილების მხოლოდ ნაწილს მივიღებთ. მაგალითად, მე-3 წერტილის ჩრდილი სინამდვილეში მიწაზე გვექნება, რადგანაც $3R_\infty$ სხივი ჯერ მიწის ზედაპირს ეცემა. ასევე, მე-4 წერტილის ჩრდილს კედლის სიბრტყეზე მივიღებთ.

იმისათვის, რომ ზედმეტი აგება არ დაგვჭირდეს, ზუსტად შეიძლება განვსაზღვროთ ორივე სიბრტყეზე დაცემული ჩრდილების საზღვარი. სახელდობრ მას შემდეგ, რაც $AR_{1\infty}$ წრფე გავატარეთ და K_a წერტილი მივიღეთ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ეს არის K წერტილის ჩრდილი. K წერტილი კი მდებარეობს იმ დიამეტრზე, რომლის ჩრდილი მიწაზე $AR_{1\infty}$ წრფეს ემთხვევა. ასეთი დიამეტრია 3—4 წრფე. ამიტომ K წერტილს ვიპოვით 3—4 წრფისა და K_aR_∞ სხივის გადაკვეთით. K წერტილზე a წრფის პარალელურად გატარებული ქორდის ჩრდილი, ცხადია, a წრფეს დაეცემა. $1R_\infty$ და $2R_\infty$ სხივების გატარებით a წრფეზე ვიპოვით ქორდის ბოლო წერტილების 1_a და 2_a ჩრდილებს. ამგვარად, 1—2 ქორდა ზუსტად განსაზღვრავს, წრფის რომელი ნაწილის ჩრდილი ეცემა მიწაზე ან კედელზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 23. წრფის დაცემული ჩრდილი შვეულ ცილინდრულ ზედაპირზე (ნახ. 96).

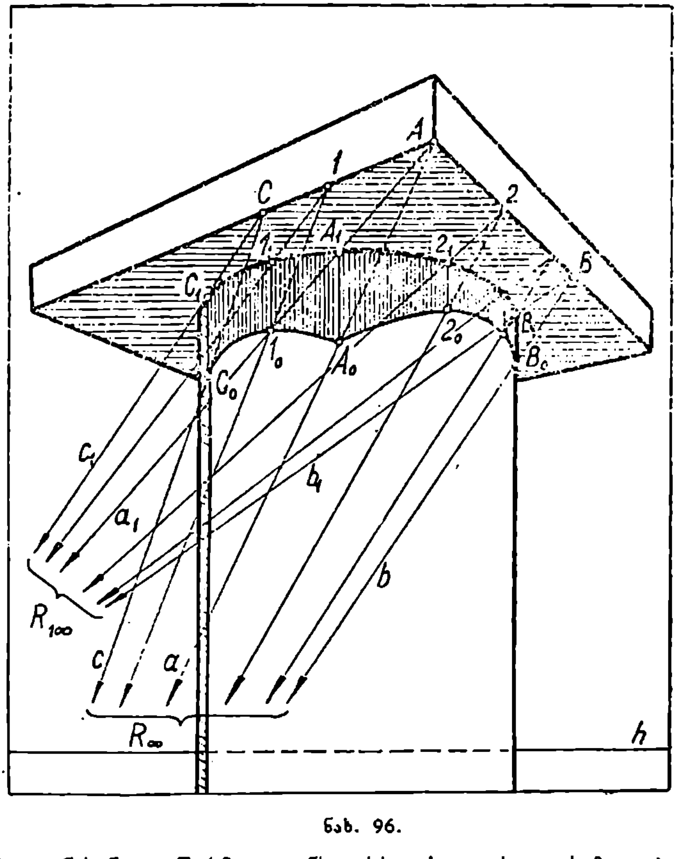
მოცემულია ცილინდრული სვეტი, რომელსაც ეყრდნობა მართკუთხა ფილა. უნდა ავაგოთ ფილისაგან სვეტის ზედაპირზე დაცემული ჩრდილი. ამ ჩრდილის კონტური წარმოადგენს ფილის ქვედა წიბოების დაცემულ ჩრდილს სვეტის ზედაპირზე.

ფილის წიბოს წერტილებზე გატარებული სინათლის სხივები სიბრტყეს შექმნის, რომლის გადაკვეთა სვეტის ზედაპირთან დაცემული ჩრდილის საძიებელი კონტურია. მაშასადამე, ჩვენი ამოცანა ახლაც დაიყვანება ცილინდრისა და სიბრტყის ურთიერთგანკვეთაზე. წინა ამოცანის გეომეტრიული შინაარსიც იგივე იყო იმ განსხვავებით, რომ იქ სხივთა დახრილი ცილინდრი შვეულ სიბრტყესთან იკვეთებოდა, ახლა კი შვეული ცილინდრული ზედაპირი სხივთა დახრილ სიბრტყესთან იკვეთება.

სხივების მდებარეობა R_∞ და $R_{1\infty}$ წერტილებით განისაზღვრება (ეს წერტილები ჩვენი ნახაზის ფარგლებს გარეთ იმყოფება).

აქ უმჯობესია ფუძეთა η სიბრტყედ ფილის ქვედა წახნაგის სიბრტყე მივიღოთ.

ჯერ A წერტილის ჩრდილი ავაგოთ. ამ წერტილზე a სხივი გადის. სხივის ფუძე a_1 წრფეა, რომელიც სვეტის ზედაპირს A_1 წერტილში კვეთს. A_1 წერტილზე გატარებული შვეული A_1A_0 წრფე a სხივს A_0 წერტილში



ნახ. 96.

კვეთს; ეს უკანასკნელი წარმოადგენს a სხივისა და სვეტის ზედაპირის გადაკვეთის წერტილს, ე.ი. A წერტილის ჩრდილს. ასევეა ნაპოვნი 1-ლ და მე-2 წერტილების 1_0 და 2_0 ჩრდილები.

ცხადია, რომ წიბოთა წერტილების მხოლოდ ნაწილი მოგვცემს ჩრდილს სვეტის ზედაპირზე. ამავე დროს მიღებული ჩრდილის მხოლოდ ნაწილს დავინახავთ.

ჩვენთვის ხილვადი ჩრდილის კონტური შეგვიძლია ზუსტად განვსაზღვროთ. ამისათვის სხივის b_1 ფუძე, რომელიც ცილინდრის მარჯვენა განაპირა B_1B_0 მსახველის ზედა B_1 წერტილზე გადის, განვაგრძოთ ფილის წიბოს B წერტილში გადაკვეთამდე. B წერტილის B_0 ჩრდილი ხილვადი კონტურის საზღვარია. მაშასადამე, წიბოს მხოლოდ AB ნაწილის ჩრდილის აგება დაგვჭირდება.

ახლა გავატაროთ ცილინდრისა და ფილის ქვედა სიბრტყის გადაკვეთის წირისადმი მხები c_1 წრფე, რომელიც AC წიბოს რომელიმე C წერტილში გადაკვეთს. s_1 წრფე C წერტილში გამავალ c სხივის ფუძედ უნდა მივიღოთ და C წერტილის C_0 ჩრდილი ავაგოთ. ცხადია, რომ ცილინდრზე მხოლოდ AC მონაკვეთის ჩრდილს მივიღებთ.

ამავე დროს ირკვევა, რომ C_1C_0 მსახველის მარცხნით ცილინდრის ზედაპირის საკუთარ ჩრდილს მივიღებთ.

ოა. დახრილ წრფოვან ზედაპირზე დაცემული ჩრდილი

საჭიროა აიგოს წრფის MN მონაკვეთის ჩრდილი ცილინდრის ზედაპირზე, რომელიც ფუძით დგას თარაზულ α სიბრტყეზე და ამ სიბრტყის მიმართ დახრილია. სინათლის სხივების მიმართულება მოცემულია R ისრით (ნახ. 97_1).

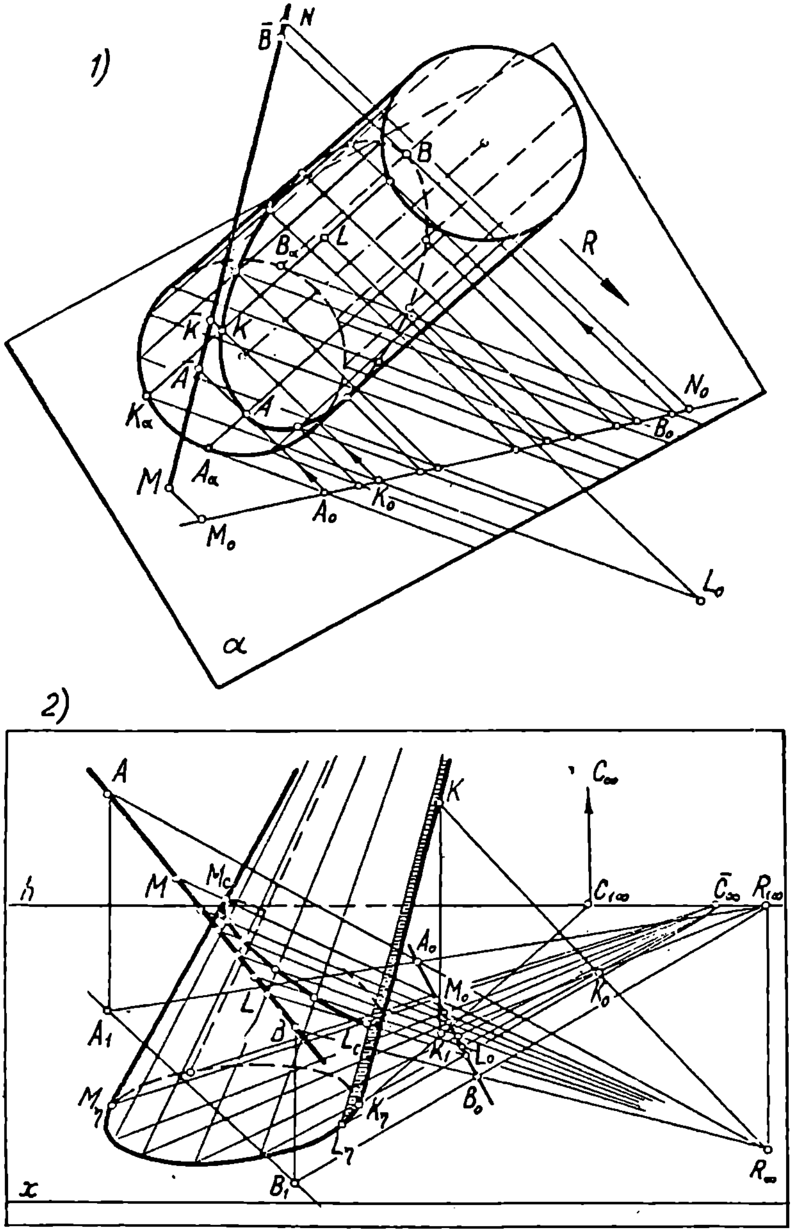
უკვე ცნობილია, რომ ეს ამოცანა დაიყვანება ცილინდრისა და სიბრტყის ურთიერთ კვეთაზე; მაგრამ წინა ამოცანებისაგან განსხვავებით როგორც ცილინდრს, ისევე სიბრტყეს სივრცეში შემთხვევითი მდებარეობა უკავია.

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად მხაზველობითი გეომეტრიის ერთ-ერთ ცნობილ ხერხს მივმართოთ. სახელდობრ, ჯერ α სიბრტყეში ცილინდრის მსახველებისა' და MN მონაკვეთის დაცემული ჩრდილები ავაგოთ.

ავაგოთ ცილინდრის ნებისმიერი მსახველის, მაგალითად, $K_\alpha L$ მსახველის ჩრდილი. ამისათვის საკმარისია გვქონდეს ამ მსახველის ერთ-ერთი, L წერტილის L_0 ჩრდილი. $K_\alpha L_0$ წრფე მსახველის ჩრდილია. ცხადია, დანარჩენი მსახველების ჩრდილი $K_\alpha L_0$ წრფის პარალელურად გატარდება. MN მონაკვეთის M_0N_0 ჩრდილს განვსაზღვრავთ M და N წერტილების ჩრდილის აგებით.

ვისარგებლოთ M_0N_0 ჩრდილისა და მსახველების ჩრდილების გადაკვეთის წერტილებით. მაგალითად, M_0N_0 წრფე $K_\alpha L_0$ წრფესთან K_0 წერტილში იკვეთება.

K_0 წერტილზე გატარებული სინათლის სხივი $K_\alpha L$ მსახველს K წერტილში კვეთს, MN წრფეს კი — $\overline{K}$ წერტილში. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{K}$ წერტილის ჩრდილი ცილინდრის $K_\alpha L$ მსახველს K წერტილში ეცემა.


1)
B̄
N
B
R
L
B_α
K̄
K
Ā
A
K_α
A_α
M
M_0
A_0
K_0
B_0
N_0
L_0
α
2)
A
C_∞
K
M
M_C
h
C_1∞
C̄_∞
R_1∞
A_0
M_0
K_0
L
A_1
B
L_C
K_1
L_0
B_0
M_η
K_η
L_η
R_∞
B_1
x

ნახ. 97.

K წერტილი MN წრფეზე გატარებულ სხივთა სიბრტყისა და ცილინდრის ზედაპირის ერთ-ერთი საერთო წერტილია, კერძოდ, $K_a L$ მსახველისა და სხივთა სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

ზემოთ მოყვანილი ხერხით ავაგებთ ნებისმიერი მსახველის განკვეთას სხივთა სიბრტყესთან. ასეთი წერტილების ერთობლიობა წარმოადგენს ცილინდრის და სხივთა სიბრტყის განკვეთის წირს, რომელიც ნახაზზე მთლიანადაა გამოსახული.

ჩვენი ამოცანა მდგომარეობდა MN მონაკვეთის ცილინდრზე დაცემული ჩრდილის მოძებნაში.

ცხადია, რომ ეს ჩრდილი ჩვენს მიერ აგებულ წირს ემთხვევა და ამავე დროს ამ წირის ნაწილს წარმოადგენს.

დავადგინოთ კვეთის წირის რა ნაწილზე ვრცელდება საკუთრივ MN წრფის ჩრდილი და ამ წრფის რომელი მონაკვეთი გვაძლევს ჩრდილს ცილინდრზე.

ცილინდრის ფუძის მხები $A_a A_0$ და $B_a B_0$ წრფეები ცილინდრის დაცემული ჩრდილის კონტურს ეკუთვნის. ეს ორი წრფე, შესაბამისად, $A_a A$ და $B_a B$ მსახველების ჩრდილია. $M_0 N_0$ წრფე დაცემული ჩრდილის კონტურს A_0 და B_0 წერტილებზე კვეთს. ამ წერტილებზე გატარებული $A_0\bar{A}$ და $B_0 B$ სხივები ცილინდრზე მიღებულ წირს, შესაბამისად, A და B წერტილებში ეხება, MN წრფეს კი $\bar{A}$ და $\bar{B}$ წერტილებში კვეთს. ეს ნიშნავს, რომ ცილინდრზე MN წრფის $\bar{A}\bar{B}$ მონაკვეთის ჩრდილი ეცემა და ამ ჩრდილის საზღვრებს A და B წერტილები წარმოადგენს.

განხილულ მაგალითში ჩვენ გავეცანით ცილინდრის ზედაპირზე წრფის დაცემული ჩრდილის აგებას. მაგრამ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან უშუალოდ უნდა დავრწმუნდეთ, რომ ჩრდილის აგების განხილული ხერხით შეიძლება ვისარგებლოთ ნებისმიერი წრფოვანი ზედაპირის შემთხვევაშიც.

მსგავსი ამოცანა გადავწყვიტოთ უშუალოდ პერსპექტიულ სურათზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 24 (ნახ. 97_2). მოცემულია დახრილი ცილინდრი, რომლის ფუძე η სიბრტყეზე მდებარეობს (ცილინდრის მსახველების არასაკუთრივი C_∞ წერტილი ნახაზის ფარგლებს გარეთ მდებარეობს). ასაგებია ცილინდრზე AB წრფის დაცემული ჩრდილი.

ჯერ ავაგოთ η სიბრტყეზე ცილინდრის მსახველების დაცემული ჩრდილი. რადგანაც ეს ჩრდილები ორიგინალში პარალელურებია, ამიტომ საკმარისია ერთ-ერთი მათგანის განსაზღვრა.

ავიღოთ, მაგალითად, ცილინდრის კონტურის $K_\eta K$ მსახველი, რომლის ფუძე $C_{1\infty}$ წერტილზე გაივლის. η სიბრტყეზე მისი ჩრდილი ავაგოთ. ამისათვის ამ მსახველზე მდებარე $K(K_1)$ წერტილის ჩრდილი მოვძებნოთ.

გავატაროთ KR_∞ სხივი, რომელიც თავის $K_1R_{1\infty}$ ფუძეს K_0 წერტილში კვეთს. $K_\eta K_0$ წრფე $K_\eta K$ მსახველის ჩრდილია, მისი ჰორიზონტთან გადაკვეთის $\overline{C}_\infty$ წერტილი კი— მსახველების დაცემული ჩრდილების არასაკუთრივი წერტილი. ამიტომ ცილინდრის ფუძის წერტილების $\overline{C}_\infty$ წერტილთან შეერთებით მსახველთა ჩრდილებს მივიღებთ.

ახლა η სიბრტყეზე, ცნობილი ხერხით, AB წრფის A_0B_0 ჩრდილი ავაგოთ. A_0B_0 წრფისა და მსახველების ჩრდილებთან გადაკვეთის წერტილებზე სინათლის სხივები გავატაროთ შესაბამისი მსახველების გადაკვეთამდე; მიღებული წერტილების ერთობლიობა AB წრფის ცილინდრზე დაცემულ ჩრდილს მოგვცემს.

გამოვარკვიოთ მიღებული ჩრდილის საზღვრები.

$\overline{C}_\infty$ წერტილზე ცილინდრის ფუძის ხილვად L_η წერტილში $\overline{C}_\infty L_\eta$ მხები გავავლოთ. ეს უკანასკნელი, ცხადია, $L_\eta L_c$ მსახველის ჩრდილია. მაშასადამე, $L_\eta L_c$ მსახველი ცილინდრის საკუთარი ჩრდილის კონტურს ეკუთვნის, რომლის ნაწილს ვხედავთ $L_\eta L_c$ და $K_\eta K$ მსახველთა შორის.

A_0B_0 და $\overline{C}_\infty L_\eta$ წრფეთა განკვეთის L_0 წერტილზე სინათლის $R_\infty L_0$ სხივი გავატაროთ. ეს სხივი $L_\eta L_c$ მსახველს L_c წერტილში კვეთს, AB წრფეს კი—L წერტილში; მაშასადამე, L წერტილის ჩრდილი ცილინდრზე L_c ყოფილა, ე. ი. L_c წერტილი ცილინდრზე დაცემული ჩრდილის ერთ-ერთი განაპირა წერტილია.

ცილინდრის კონტურის $M_\eta M_c$ მსახველზეც AB წრფის ერთ-ერთი წერტილის ჩრდილი ეცემა. მის მისაღებად მსახველის $M_\eta \overline{C}_\infty$ ჩრდილისა და A_0B_0 წრფის გადაკვეთის M_0 წერტილზე სინათლის $R_\infty M_0$ სხივი გავატაროთ და $M_\eta M_c$ მსახველთან მისი M_c განკვეთა ვიპოვოთ. M_c წერტილი ცილინდრზე დაცემული ჩრდილის ხილვადი ნაწილის საზღვარია.

§ ი. ჩრდილები თაღებსა და კამარებში. წრფოვანი ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთის განსაკუთრებული შემთხვევები

განვიხილოთ ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთის ისეთი შემთხვევები, რომლებიც უშუალოდ არიან დაკავშირებული ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებთან.

1°. კონუსების ურთიერთგადაკვეთა (ნახ. 98_1). მოცემულია ორი კონუსი ისე, რომ α სიბრტყეში მდებარე KM_1LM_2 წრეწირი ერთდროულად ორივე კონუსის ზედაპირს ეკუთვნის. ამგვარად, ეს წრეწირი მოცემული კონუსების გადაკვეთის წირს წარმოადგენს.

შევნიშნავთ, რომ მოცემული კონუსების ზედაპირები მეორე რიგისაა, რადგან მათი α სიბრტყესთან გადაკვეთა წრეწირს (ე. ი. მეორე რიგის წირს) წარმოადგენს (იხ. პ. 21).

ცნობილია, რომ მეორე რიგის ორი ზედაპირის ურთიერთგადაკვეთის შედეგად ზოგად შემთხვევაში მეოთხე რიგის სივრცითი წირი მიიღება. ამ წირს „სივრცითი“ იმიტომ ვუწოდეთ, რომ მისი წერტილები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს (უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, მეოთხე რიგის სივრცით წირს სიბრტყესთან საერთო ოთხ წერტილზე მეტი არასდროს არ შეიძლება ჰქონდეს).

კერძო შემთხვევაში მეორე რიგის ორი ზედაპირის ურთიერთგადაკვეთის შედეგად ორი მეორე რიგის წირი მიიღება. ამ დროს იტყვიან ხოლმე, რომ მეოთხე რიგის წირი მეორე რიგის ორ წირად „დაიშალაო“.

ჩვენ აქ სწორედ ასეთ შემთხვევას განვიხილავთ.

მოცემულ ორ კონუსს α სიბრტყეში მდებარე საერთო წრეწირი (ე.ი. მეორე რიგის მრუდი) აქვს; აქედან ვასკვნით, რომ ამ ზედაპირებს საერთო წერტილები კიდევ უნდა ჰქონდეს. ამ წერტილების მოსაძებნად მხაზველობითი გეომეტრიის ერთ-ერთ ცნობილ ხერხს მივმართოთ. სახელდობრ, მოცემული კონუსები ისეთი სიბრტყეებით გავკვეთოთ, რომლებიც ორივე კონუსის წვეროზე გაივლის. კონუსები ყოველ ასეთ დამხარე სიბრტყესთან ორ-ორ მსახველზე გადაიკვეთება, ხოლო მიღებული მსახველების ურთიერთგადაკვეთის წერტილები, ცხადია, ორივე კონუსისათვის საერთო იქნება.

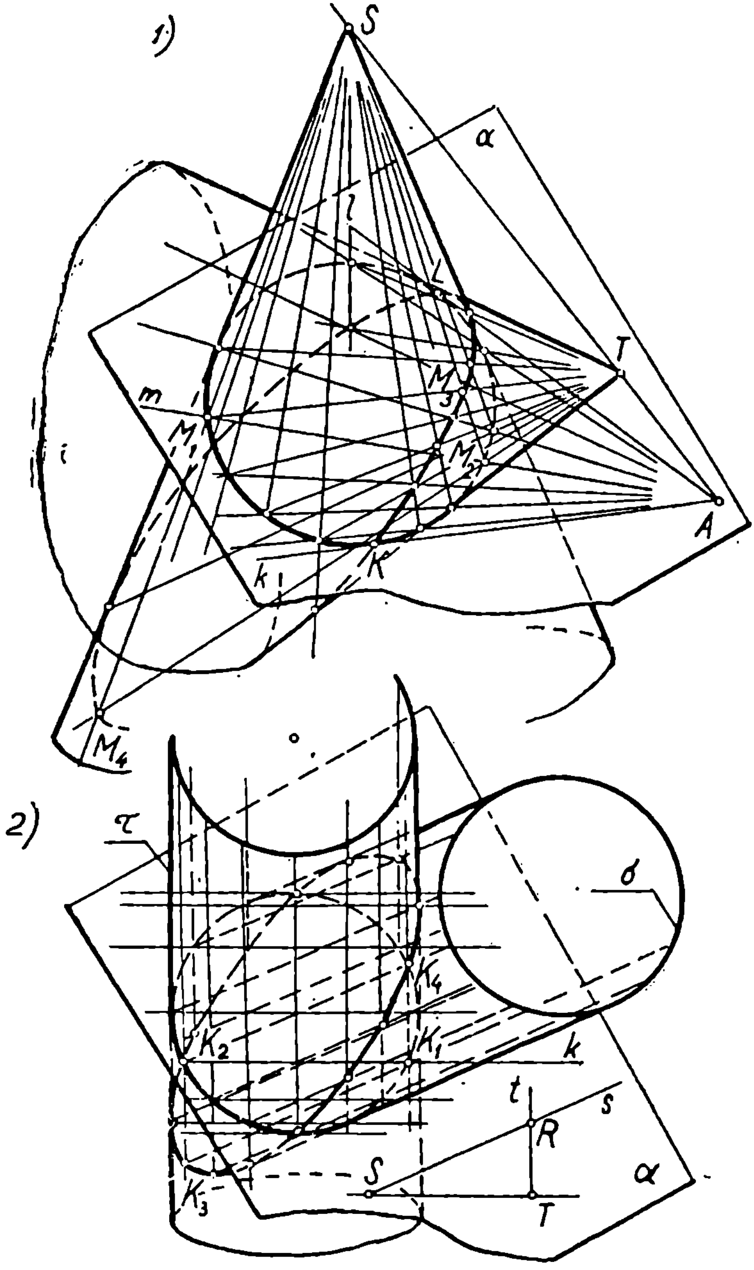
ამოცანის ამოხსნის ასეთი გზა ნაჩვენებია 98_1-ე ნახაზზე. კონუსების წვეროებზე გატარებულია ST წრფე, რომელიც α სიბრტყეს რომელიმე A წერტილში გადაკვეთს. წვეროებზე გამავალი ნებისმიერი დამხმარე სიბრტყე ST წრფეზეა და ამიტომ A წერტილზედაც გაივლის.

ამავე წერტილზე გაივლის დამხმარე სიბრტყისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წრფეც.

ვთქვათ, ST წრფეზე გავატარეთ ერთი სიბრტყე, რომლის α სიბრტყესთან გადაკვეთაში m წრფე მივიღეთ. თუ ეს სიბრტყე კონუსებსა კვეთს, m წრფე KM_1LM_2 წრეწირს აუცილებლად ორ, M_1 და M_2, წერტილებში გადაკვეთს. აქედან ცხადია, რომ გატარებული დამხმარე სიბრტყე ერთ კონუსს SM_1 და SM_2 მსახველებზე გადაკვეთს, მეორეს კი—TM_1 და TM_2 მსახველებზე.

ეს ოთხივე მსახველი ერთ სიბრტყეშია და ამიტომ საერთო წერტილები ექნება. ამათგან M_1 და M_2 წერტილები KM_1LM_2 წრეწირს ეკუთვნის; ახალ M_3 და M_4 წერტილებს მივიღებთ, შესაბამისად, SM_2 და TM_1 მსახველებისა და SM_1, TM_2 მსახველების გადაკვეთის შედეგად.

ასეთივე გზით მივიღებთ კონუსების სხვა საერთო წერტილებსაც. KM_1LM_2 წრეწირის მხები k და l წრფეები წარმოადგენს კონუსების მხები სიბრტყეების α სიბრტყესთან გადაკვეთის წრფეებს. ამგვარად, ეს ორი წრფე საზღვრავს დამხმარე სიბრტყეთა ერთობლიობას. საბოლოოდ



ნახ. 98.

ყველა მიღებული წერტილის ერთობლიობა განსაზღვრავს მეორე რიგის ერთ-ერთ წირს (წრეწირს, ელიფსს, პარაბოლასა ან ჰიპერბოლას), რომელიც KM_1LM_2 წრეწირთან ერთად ორი კონუსის ყველა საერთო წერტილს შეიცავს.

ამგვარად, მოცემული კონუსები ორ მეორე რიგის წირზე იკვეთება, რომელთაგან ერთ-ერთი უკვე მოცემული გვქონდა.

შევნიშნავთ, რომ სავალდებულო არ არის, ერთი მათგანი აუცილებლად წრეწირი იყოს, როგორც ეს ჩვენ შემთხვევაშია. ამოცანის გადაწყვეტის მსვლელობიდან ცხადი უნდა იყოს, რომ წრეწირის ნაცვლად შესაძლებელია ნებისმიერი მეორე რიგის წირი გვქონოდა.

2°. **ორი ცილინდრის ურთიერთგადაკვეთა** (ნახ. 98$_ე$). წინა შემთხვევის ანალოგიურად α სიბრტყეში მდებარე K_1K_2 წრეწირი ორ, σ და τ, ცილინდრს ეკუთვნის. საჭიროა ავაგოთ ამ ცილინდრების დანარჩენი საერთო წერტილები.

რადგანაც ცილინდრის მსახველები, როგორც პარალელური წრფეები, ერთ არასაკუთრივ წერტილში იკვეთება, ამიტომ ნებისმიერი ცილინდრი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ისეთ კონუსად, რომლის წვერო არასაკუთრივი წერტილია.

ახლა, თუ ამოცანის გადაწყვეტას ზემომოყვანილი გზით მოვისურვებთ, უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ კონუსების არასაკუთრივ წვეროებზე წრფეს გავატარებთ, რომელიც აგრეთვე არასაკუთრივი იქნება; ამ წრფეზე კი, წინა შემთხვევის მსგავსად, ორივე კონუსის მკვეთი სიბრტყეები ტარდება. მაგრამ ეს დამხმარე სიბრტყეები, როგორც ერთსა და იმავე არასაკუთრივ წრფეზე გატარებული, ურთიერთპარალელური იქნება და ამიტომ მათი α სიბრტყესთან გადაკვეთის წრფეებიც ურთიერთპარალელური უნდა იყოს. საკმარისია მათი მიმართულება ვიცოდეთ. ამისათვის ნებისმიერ R წერტილზე ორი წრფე გავატაროთ: s წრფე σ ცილინდრის მსახველების პარალელური (ე. ი. ამ მსახველების არასაკუთრივ წერტილზე გამავალი), t წრფე კი — τ ცილინდრის მსახველების პარალელური. ეს წრფეები α სიბრტყეს, შესაბამისად, S და T წერტილებში გაჰკვეთს, ამ ორ წრფეზე გამავალი სიბრტყე კი—ST წრფეზე. α სიბრტყეში ST წრფის პარალელური წრფეები გავატაროთ.

მაგალითად, ასეთი k წრფე K_1K_2 წრეწირს K_1 და K_2 წერტილებში ჰკვეთს, k წრფეზე გამავალი სიბრტყე კი—σ და τ ცილინდრებს ორ-ორ მსახველზე. წინა შემთხვევის მსგავსად, K_1 და K_2 წერტილების გარდა, ამ მსახველებს კიდევ ორი საერთო წერტილი ექნება: K_3 და K_4, რომლებიც ორივე ცილინდრის ზედაპირს ეკუთვნის. ანალოგიური ხერხით ვიპოვით სხვა საერთო წერტილებს, რომლებიც მეორე რიგის ერთ წირზე მდებარეობენ.

მიღებულ შედეგებს უშუალოდ გამოვიყენებთ ჩრდილების აგების კონკრეტულ ამოცანებში.

ა მ ო ც ა ნ ა 25. მოცემულია ნიში (ნახ. 99), რომლის ზედა ნაწილი ცილინდრულ კამარას წარმოადგენს; ეს კამარა ეყრდნობა შვეულ კედლებს. ნიშის წინა კედლის სიბრტყე, რომელშიც $AML\ldots$ რკალი, A_1A და B_1B წიბოები იმყოფება, სურათის სიბრტყესთან დახრილია. ეს სიბრტყე α სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. სინათლის სხივები განსაზღვრულია არასაკუთრივი R_∞ წერტილით.

მიწის ზედაპირისა და ნიშის შიგა ზედაპირზე ჩრდილი ეცემა. ამ ჩრდილის კონტური წარმოადგენს A_1A წიბოსა და $AMLCB$ რკალის დაცემულ ჩრდილს.

ჯერ $AML\ldots$ რკალის ჩრდილი ავაგოთ.

ამ რკალის წერტილებზე გატარებული AR_∞, MR_∞, LR_∞ და ა. შ. სინათლის სხივები სხივთა ცილინდრსა ჰქმნის. უნდა ავაგოთ სხივთა ცილინდრისა და კამარის შიგა ზედაპირის გადაკვეთის წირი. შევნიშნავთ, რომ ჩვენ არ გვაინტერესებს ამ ორი ცილინდრული ზედაპირის მთელი გადაკვეთის წირის აგება; ჩვენ გვჭირდება ამ წირის მხოლოდ ის ნაწილი, რომელიც კამარის რეალურად არსებული ზედაპირის ფარგლებში მდებარეობს, როგორც დაცემული ჩრდილის კონტური.

კამარის შიგა ზედაპირის მსახველები არასაკუთრივ $F_{1\infty}$ წერტილში გადის, სხივთა ცილინდრის მსახველები კი—R_∞ წერტილში. ამიტომ ორივე ცილინდრი კონუსებად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომელთა წვეროები, შესაბამისად, $F_{1\infty}$ და R_∞ წერტილებია.

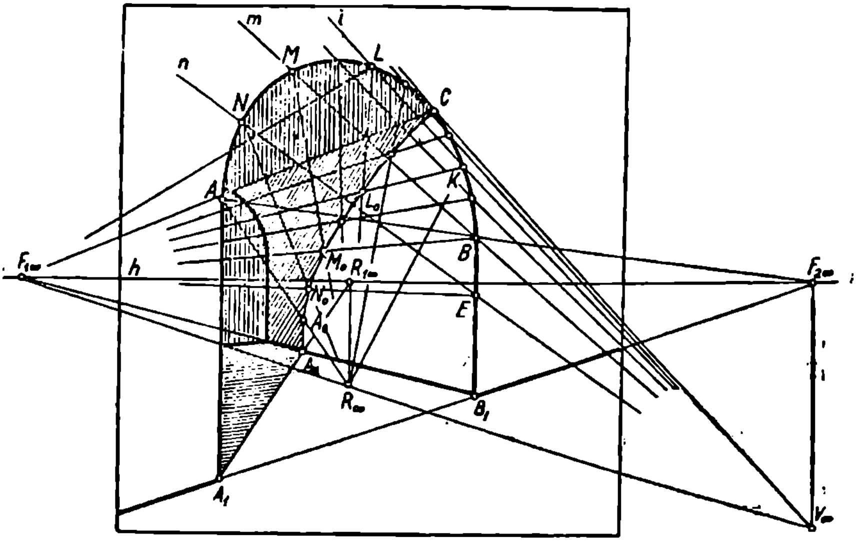
გავატაროთ ისეთი დამხმარე სიბრტყეები, რომლებიც $F_{1\infty}$ და R_∞ წერტილებზე გადის; ამისათვის $F_{1\infty}R_\infty$ წრფე გავატაროთ.

$AML\ldots$ რკალი ორივე კონუსს ეკუთვნის და α სიბრტყეში მდებარეობს. ამიტომ ავაგოთ $F_{1\infty}R_\infty$ წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის V_∞ წერტილი. $F_{1\infty}R_\infty$ წრფე არასაკუთრივია, ამიტომ V_∞ წერტილიც არასაკუთრივი უნდა იყოს და, ამის გამო, α სიბრტყის არასაკუთრივ $F_{2\infty}V_\infty$ წრფეზე უნდა მდებარეობდეს.

ახლა $F_{1\infty}R_\infty$ წრფეზე ორივე კონუსის მკვეთი დამხმარე სიბრტყეები გავატაროთ. ყოველი ასეთი სიბრტყისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წრფე V_∞ წერტილზე გაივლის და $AML\ldots$ რკალს გადაკვეთს.

დავუშვათ, რომ ერთი ასეთი λ სიბრტყე α სიბრტყეს l წრფეზე კვეთს, l წრფე კი—კამარის რკალს K და L წერტილებში. რადგანაც λ სიბრტყე R_∞ და $F_{1\infty}$ წერტილებზე გადის, ამიტომ სხივთა კონუსს KR_∞ და LR_∞ სხივებზე გადაკვეთს, კამარის ზედაპირს კი—$KF_{1\infty}$ და $LF_{1\infty}$ მსახველებზე. ეს მსახველები, როგორც ერთ სიბრტყეში მდებარე, ურთიერთს გადაკვეთს.

მაგრამ ამ წერტილებიდან ჩვენ მხოლოდ ერთი წერტილი გვჭირდება; სახელდობრ — LR_∞ და $KF_{1\infty}$ წრფეების გადაკვეთის L_0 წერტილი, რადგანაც ეს უკანასკნელი სინათლის LR_∞ სხივისა და კამარის რეალურად არსებული ზედაპირის გადაკვეთას, ე.ი. L წერტილის ჩრდილს, წარმოადგენს. $LF_{1\infty}$ და KR_∞ წრფეების გადაკვეთის წერტილს ჩვენთვის არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, რადგან ის კამარის ზედაპირის რეალური ნაწილის გარეთ იმყოფება.



ნახ. 99.

ასეთი ხერხით ავაგებთ სხვა წერტილების ჩრდილსაც.

შევნიშნავთ, რომ, თუ გვინდა ზუსტად დავადგინოთ კამარის ცილინდრულ ზედაპირზე დაცემული ჩრდილის საზღვრები, უნდა გავატაროთ ამ ცილინდრის $BF_{1\infty}$ მსახველი, რომლის ქვემოთ უკვე სიბრტყე გვაქვს,; შემდეგ ამ მსახველზე დაცემული ჩრდილი განვსაზღვროთ. ამისათვის B წერტილზე $m \equiv V_\infty B$ წრფე გავატაროთ, რომელიც კამარის რკალს კიდევ ერთ M წერტილში კვეთს. M წერტილზე გატარებული სინათლის MR_∞ სხივი $BF_{1\infty}$ მსახველს M_0 წერტილში კვეთს. ამ წერტილის ქვემოთ დაცემული ჩრდილი სიბრტყეზე გვექნება.

ახლა ჩრდილის ზედა საზღვარიც გამოვარკვიოთ. ამისათვის V_∞ წერტილზე $AML\ldots$ რკალის მხები $V_\infty C$ წრფე გავატაროთ.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე (ნახ. 98_1) დავასკვნით, რომ ზედაპირის გადაკვეთის საძიებელი წირი C შეხების წერტილზე გაივლის.

ამგვარად, ეს წერტილი M_0 წერტილთან ერთად, წრის იმ M_0L_0C მონაკვეთს განსაზღვრავს, რომელიც AML რკალიდან ნიშის ცილინდრულ ზედაპირზე ეცემა.

ამავე დროს გაირკვა, რომ M_0L_0C მონაკვეთი რკალის MLC მონაკვეთის ჩრდილს წარმოადგენს.

აქედან ცხადია, რომ რკალის დანარჩენი AM ნაწილის ჩრდილი დაეცემა $BF_{1\infty}$ წრფის ქვემოთ, ნიშის შვეულ კედელზე. ამ ჩრდილის ასაგებად იგივე ხერხს გამოვიყენებთ, ე. ი $F_{1\infty}R_\infty$ წრფეზე სიბრტყეს ვატარებთ,რომელიც რკალის სიბრტყეს n წრფეზე კვეთს,სხივთა ცილინდრს— NR_∞ სხივზე, ნიშის $B_1BF_{1\infty}$ სიბრტყეს კი —$EF_{1\infty}$ წრფეზე, NR_∞ სხივისა და $EF_{1\infty}$ წრფის გადაკვეთა ჩრდილის ერთ-ერთ N_0 წერტილს განსაზღვრავს.

A წერტილის ჩრდილი სხვა გზით არის მოძებნილი. სახელდობრ, A_1A წიბოს დაცემულ ჩრდილს ავაგებთ, რომლის ნაწილი A_1A_η მონაკვეთის სახით მიწის ზედაპირზე ეცემა. ნაწილი კი—შვეულ კედელზე $A_\eta A_0$ მონაკვეთს გვაძლევს. A_0 წერტილი მოიძებნება, როგორც AR_∞ სხივისა და $A_\eta A_0$ წრფის გადაკვეთის წერტილი.

ამგვარად, დაცემული ჩრდილის კონტური მთლიანად აგებულია.

შევნიშნავთ, რომ კამარის $CF_{1\infty}$ მსახველი წარმოადგენს საზღვარს ნიშის ზედაპირზე მიღებულ დაცემულ ჩრდილსა და საკუთარ ჩრდილს შორის (იხ. პ. 31, ნახ. 85).

ა მ ო ც ა ნ ა 26 (ნახ. 100). აქ იგივე მოცემულობაა, რაც წინა ამოცანაში, მაგრამ ერთ-ერთი პირობა შეცვლილია, რაც გრაფიკულ აგებაში გარკვეულ ცვლილებას იწვევს.

კერძოდ, ამ შემთხვევაში ნიშის $AML\ldots$ რკალი სურათის სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეშია (ამ სიბრტყეს ისევ α სიმბოლოთი აღვნიშნავთ).

ამის შედეგად, სხვათაშორის, კამარის მსახველები სურათის მართობულია და ამიტომ მათი არასაკუთრივი წერტილი მთავარ P წერტილს ემთხვევა.

სინათლის სხივები თავისი არასაკუთრივი R_∞ წერტილითაა განსაზღვრული.

როგორც წინა ამოცანაში, აქაც სხივთა ცილინდრისა და კამარის ზედაპირს ისევ კონუსებად წარმოვიდგენთ, რომელთა წვეროები, შესაბამისად, R_∞ და P წერტილებია და რომელთაც α სიბრტყეში $AML\ldots$ წირი აქვთ.

R_∞ და P წვეროებზე PR_∞ წრფეს ვატარებთ, ამ წრფეზე კი—ორივე კონუსის მკვეთ დამხმარე სიბრტყეებს.

დამხმარე სიბრტყეებისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წრფეების აგება იმავე გზით წარიმართება, როგორითაც წინა ამოცანაში.

ეს წრფეები გაივლის არასაკუთრივი PR_∞ წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის V_∞ წერტილში, რომელიც ცხადია აგრეთვე არასაკუთრივი იქნება. მაშასადამე, V_∞ წერტილი α სიბრტყის არასაკუთრივ წრფეზე მდებარეობს.

წინა ამოცანაში α სიბრტყე სურათთან დახრილი იყო, რის გამოც მისი არასაკუთრივი წრფის პერსპექტივა სურათის საკუთრივ წრფეს წარმოადგენდა (ნახ. 99); ახლა, იმის გამო, რომ α სიბრტყე სურათის სიბრტყის პარალელურია, მისი არასაკუთრივი წრფის პერსპექტივაც სურათის სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე იქნება.

მაშასადამე, PR_∞ წრფის α სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილის V_∞ პერსპექტივაც აგრეთვე არასაკუთრივი წერტილი უნდა იყოს.

ამგვარად, დამხმარე სიბრტყეთა α სიბრტყესთან გადაკვეთის წრფეები PR_∞ წრფის პარალელურად უნდა გავატაროთ.

მაგალითად, ერთ-ერთი მათგანი l წრფეა, რომელიც თაღის AML რკალს K და L წერტილებში კვეთს. ამ წრფის დახმარებით აგებულია დაცემული ჩრდილის კონტურის L_0 წერტილი.

ყველა გეომეტრიული აგება წინა ამოცანაში იყო განხილული და ამიტომ აქ აღარ გავიმეორებთ; მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ MC რკალის M_0C ჩრდილი მთლიანად კამარის ცილინდრულ ზედაპირზეა, AM რკალის A_0M_0 ჩრდილი კი — ნიშის შვეული კედლის სიბრტყეზე.

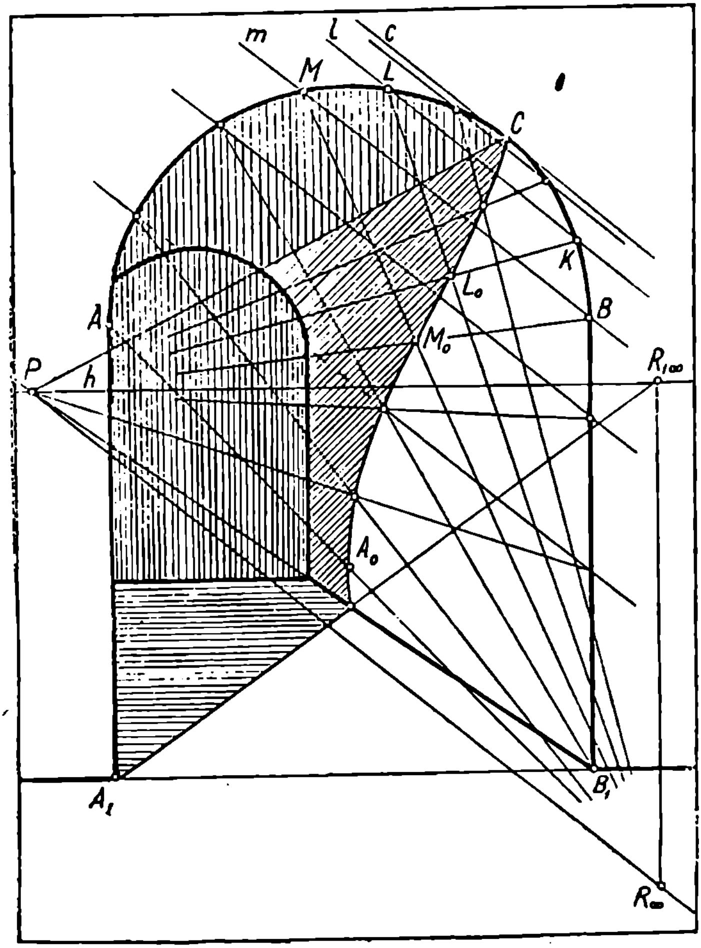
ბოლო ორი ამოცანის გადაწყვეტა სრულიადაც არ არის დამოკიდებული მოცემული ნიშის კამარის მოხაზულობაზე, რაშიაც მკითხველი ამოცანის განხილვიდან უშუალოდ უნდა დარწმუნდეს.

კამარებისა და თაღების ან სხვა არქიტექტურული დეტალების მრუდწიროვანი ზედაპირი, მრავალ შემთხვევაში, მეორე რიგის ზედაპირს წარმოადგენს, მაგალითად — წრიული ცილინდრის ზედაპირს. ამიტომ უნდა გვახსოვდეს, რომ ასეთ ზედაპირზე დაცემული ჩრდილი, თვით კამარის მრუდწიროვან წიბოდან, მეორე რიგის ორი ზედაპირის (კამარის ზედაპირისა და სხივთა ზედაპირის) ურთიერთგადაკვეთის წირს წარმოადგენს. ეს შემთხვევები ზემოთ ზოგადად განვიხილეთ (იხ. პ. 39, 1°, 2°) და დავრწმუნდით, რომ გადაკვეთაში მეორე რიგის წირები მიიღება.

25-ე და 26-ე ამოცანებში სწორედ ასეთი შემთხვევა გვქონდა; კერძოდ, კამარის ზედაპირი წრიულ ცილინდრს წარმოადგენდა და წრეწირზე გავლებულ სხივთა ცილინდრთან იკვეთებოდა. ამის გამო, გადაკვეთის შედეგად მიღებული M_0L_0C რკალი (ნახ. 99 და 100) მეორე რიგის წირის მონაკვეთია.

პირველ შემთხვევაში (ნახ. 99) M_0L_0C რკალი მარცხნივ არის შეზნექილი, მეორე შემთხვევაში კი—მარჯვნივ (ნახ. 100). ეს შეზნექილობა მხოლოდ მზერის წერტილის მდებარეობაზეა დამოკიდებული. რადგან

მეორე რიგის წირი ბრტყელია, ამიტომ შეიძლება გვქონდეს ისეთი შემთხვევაც, როდესაც ეს რკალი პერსპექტივაში წრფის მონაკვეთად გამოისახება. ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ წირის სიბრტ-

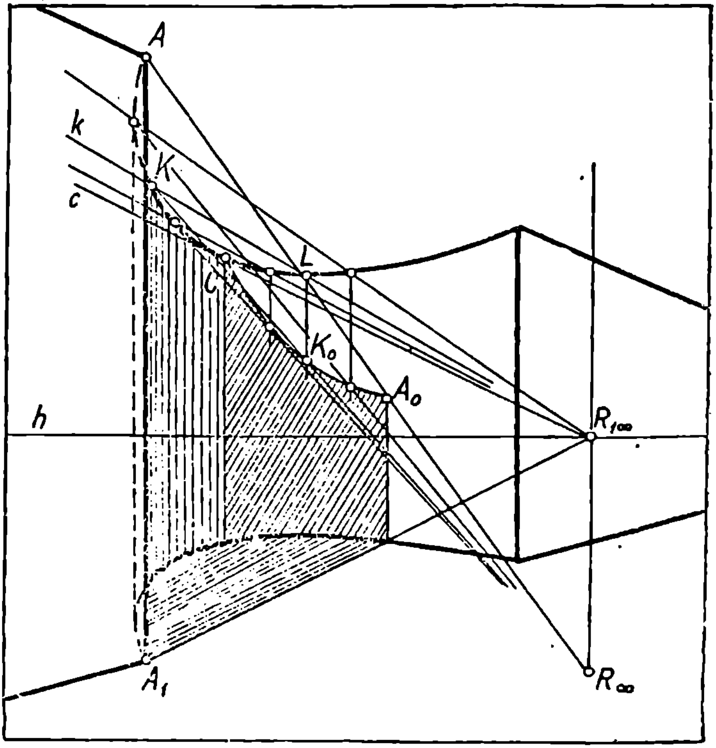


ნახ. 100.

ყე მზერის წერტილზე გაივლის. საერთოდ ასეთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერ გეომეტრიულ ფიგურას წრფის სახით დავინახავთ. მაგრამ, რადგანაც პრაქტიკაში ასეთი შემთხვევა მეტად იშვიათია, პერსპექტივაში წრფედ გამოსახული მრუდი უჩვეულო, არაბუნებრივ შთაბეჭდი-

ლებას სტოვებს, ამიტომ შეძლებისამებრ უნდა ვეცადოთ, მზერის წერტილი ისე შევარჩიოთ, რომ ეს შემთხვევა თავიდან ავიცილოთ.

ა მ ო ც ა ნ ა 27. მოცემულია შვეული კედელი, რომლის ერთი ნაწილის ზედაპირი წრიულ ცილინდრს წარმოადგენს (ნახ. 101). ავაგოთ ამ ზედაპირზე დაცემული ჩრდილი. ჩრდილის კონტურის ნაწილი AA_1 წიბოს ჩრდილია, ნაწილი კი—AKL რკალისა, რომელიც თარაზულ α სიბრტყეში მდებარეობს.



ნახ. 101.

კედლის ცილინდრულ ზედაპირზე რკალის ჩრდილის აგება, წინა შემთხვევების მსგავსად, ორი ცილინდრის გადაკვეთაზე დაიყვანება. სხივთა ცილინდრის მსახველები $R\infty$ არასაკუთრივ წერტილში იკვეთება.

კედლის ცილინდრული ზედაპირის მსახველები სურათის პარალელურია, ამიტომ მათი არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივაც სურათის სიბრტყის არასაკუთრივი წერტილი იქნება. ამ ორ წერტილზე გატარებულ

დამხმარე $R\infty R\infty_1$ წრფეს შვეული მდებარეობა ექნება და $R_1\infty$ წერტილზე გაივლის.

$R\infty R_1\infty$ წრფე თარაზულ α სიბრტყეს $R_1\infty$ წერტილში გადაკვეთს, ამიტომ დამხმარე სიბრტყეებისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წრფეები $R_1\infty$ წერტილზე გაივლის.

მაგალითად, ერთ-ერთი დამხმარე λ სიბრტყისა და α სიბრტყის განკვეთის k წრფე AKL რკალს K და L წერტილებში კვეთს. მაშასადამე, λ სიბრტყე სხივთა ცილინდრს $KR\infty$ და $LR\infty$ სხივებზე გადაკვეთს, კედლის ზედაპირს კი—შვეულ წრფეებზე.

ამათგან LK_0 წრფე $KR\infty$ სხივთან K_0 წერტილზე იკვეთება, ე. ი. K_0 წერტილი K წერტილის ჩრდილია. ასეთივე გზითაა აგებული სხვა წერტილების ჩრდილიც. მიღებული წირის CK_0A_0 მონაკვეთი AKC რკალის ჩრდილია.

AKL რკალს დამხმარე c წრფე C წერტილში ეხება. ამიტომ C წერტილზე გატარებული შვეული წრფე საზღვრავს ზედაპირზე დაცემულ ჩრდილს მისი საკუთარი ჩრდილისაგან.

40. სფეროს საკუთარი ჩრდილი

საერთოდ, საკუთარი ჩრდილის კონტური წარმოადგენს მოცემულ ზედაპირთან სინათლის სხივების შეხების წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს (ნახ. 83_1 და 83_2).

სფეროს საკუთარი ჩრდილის კონტურიც ასევე წარმოიქმნება.

მზით განათების დროს, სხივები ურთიერთპარალელურია; ამიტომ სფეროს მხები პარალელური სხივების ერთობლიობა წრიულ ცილინდრსა ქმნის. ასეთი ცილინდრი სფეროს დიდ წრეწირზე ეხება, ამ წრეწირის სიბრტყე კი სინათლის სხივების მართობულია.

ამგვარად, სფეროს საკუთარი ჩრდილის კონტურის განსაზღვრა შემდეგ გეომეტრიულ ამოცანაზე დაიყვანება.

სფეროს ცენტრზე უნდა გავატაროთ სინათლის სხივის მართობული სიბრტყე და ამ სიბრტყის სფეროსთან გადაკვეთის წრეწირი უნდა ავაგოთ (ნახ. 102).

მოცემულია სფეროს პერსპექტივა და მისი ფუძე, სფეროს ცენტრი $O(O_1)$ წერტილია.

სინათლის სხივები განისაზღვრება $R\infty(R_1\infty)$ არასაკუთრივი წერტილით. ჯერ ავაგოთ სინათლის სხივის პარალელური და სფეროს ცენტრზე გამავალი $OR\infty(O_1R_1\infty)$ წრფე.

სფეროს ცენტრზე გავატაროთ $OR\infty$ წრფის მართობული λ სიბრტყე.

ეს ამოცანა მეტრულია და ამიტომ დამოკიდებულია მზერის წერტილის მდებარეობაზე. მზერის წერტილი განსაზღვრულია სურათის მთა-

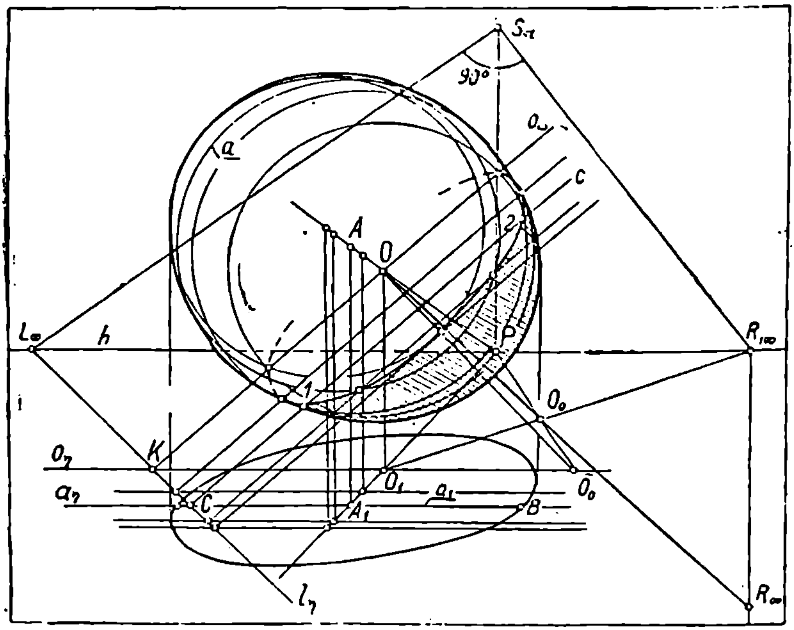
ვარი P წერტილით და $S_\pi P$ მონაკვეთით, რომელიც მზერის წერტილიდან სურათის სიბრტყემდე მანძილის ტოლია.

განვსაზღვროთ λ სიბრტყე.

მხაზველობითი გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, რომ სიბრტყისა და წრფის მართობულობის დროს ნებისმიერ სიბრტყეზე ამ წრფის ორთოგონალური გეგმილი და მოცემული სიბრტყის კვალი ურთიერთმართობულია. ამიტომ ჩვენ შემთხვევაშიც OR_∞ წრფის $O_1R_{1\infty}$ ფუძე და λ სიბრტყის η სიბრტყესთან გადაკვეთის l_η წრფე ურთიერთმართობული იქნება.

ავაგოთ l_η წრფე.

$O_1R_{1\infty}$ წრფე η სიბრტყეშია. ამავე სიბრტყეში მდებარე და ამ წრფის მართობული წრფეების აგება პერსპექტივაში უკვე ცნობილია (იხ. პ. 13). ამისათვის $S_\pi R_{1\infty}$ წრფის მართობული $S_\pi L_\infty$ წრფე გავატაროთ. მისი



ნახ. 102.

h ჰორიზონტთან გადაკვეთის L_∞ წერტილი ყველა იმ წრფის არასაკუთრივი წერტილია, რომლებიც $O_1R_{1\infty}$ წრფის მართობულია და, ამავე დროს, η სიბრტყეში მდებარეა, ან η სიბრტყის პარალელური.

ცხადია, λ სიბრტყისა და η სიბრტყის გადაკვეთის l_η წრფეც L_∞ წერტილზე გაივლის. l_η წრფის განსაზღვრისათვის კიდევ ერთი წერტილია საჭირო.

სფეროს O ცენტრზე სურათის სიბრტყის პარალელური ω სიბრტყე გავატაროთ, ეს სიბრტყე η სიბრტყეს h ჰორიზონტის პარალელურ o_η წრფეზე გადაკვეთს.

OR_∞ წრფე ω სიბრტყეზე ორთოგონალურად დავაგეგმილოთ. O წერტილი ω სიბრტყეშია და ამიტომ თავის გეგმილს შეუთავსდება.

OR_∞ წრფისა და მისი $O_1R_{1\infty}$ ფუძის გადაკვეთის O_0 წერტილის გეგმილი ავაგოთ; ამისათვის PO_0 წრფე გავატაროთ. PO_0 წრფე სივრცეში ω სიბრტყის მართობია, ამიტომ მისი o_η წრფესთან გადაკვეთის $\overline{O}_0$ წერტილი O_0 წერტილის ორთოგონალური გეგმილი იქნება. ამგვარად, $O\overline{O}_0$ წრფე ω სიბრტყეზე OR_∞ წრფის ორთოგონალური გეგმილია.

λ სიბრტყისა და OR_∞ წრფის მართობულობის გამო λ და ω სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე $O\overline{O}_0$ წრფის მართობული უნდა იყოს. ამავე დროს, რადგანაც ω სიბრტყე სურათის პარალელურია, ამიტომ მასზე მდებარე წრფეთა შორის კუთხე პერსპექტივაში დაუმახინჯებლად გამოისახება.

მაშასადამე, თუ O წერტილზე $O\overline{O}_0$ წრფის მართობულ o_ω წრფეს გავატარებთ, შეიძლება ვთქვათ, რომ ეს უკანასკნელი λ და ω სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე იქნება.

o_ω წრფითა და L_∞ წერტილით λ სიბრტყე განსაზღვრულია. o_ω და O_η წრფეთა გადაკვეთის K წერტილი η სიბრტყეში მდებარეობს; ამიტომ, λ და η სიბრტყეების გადაკვეთის l_η წრფე L_∞ და K წერტილებზე გაივლის.

ახლა λ სიბრტყისა და სფეროს გადაკვეთის წრეწირი ავაგოთ, რომელიც საძიებელი საკუთარი ჩრდილის კონტური იქნება.

აქაც მხაზველობითი გეომეტრიიდან უკვე ცნობილი ხერხით ვისარგებლოთ. სახელდობრ, დამხმარე სიბრტყეები გავატაროთ. ყოველი დამხმარე სიბრტყე λ სიბრტყეს წრფეზე გადაკვეთს, სფეროს კი—წრეწირზე. მიღებული წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილები სფეროსა და λ სიბრტყისათვის საერთო იქნება.

ამოცანის გამარტივების მიზნით დამხმარე სიბრტყეებს სურათის სიბრტყის პარალელურად გავატარებთ. გამარტივება იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველ ასეთ სიბრტყესთან სფეროს გადაკვეთის წრეწირი სურათზე ისევ წრეწირად გამოისახება.

მაგალითად, გავატაროთ სურათის პარალელური ნებისმიერი α სიბრტყე. მისი η სიბრტყესთან გადაკვეთის a_η წრფე h ჰორიზონტის პარალელურია.

ავაგოთ α სიბრტყისა და სფეროს გადაკვეთაში მიღებული წრეწირის A ცენტრი. ეს წერტილი სფეროს იმ დიამეტრზე მდებარეობს, რომელიც სურათის მართობულია. ასეთი დიამეტრის OP პერსპექტივა და O_1P ფუძე მთავარ P წერტილზე გაივლის.

O_1P და a_η წრფეთა გადაკვეთის A_1 წერტილი A ცენტრის ფუძეა. თვით A ცენტრს კი, ცხადია, შვეული A_1A წრფისა და OP წრფის გადაკვეთაში მივიღებთ.

α სიბრტყისა და სფეროს გადაკვეთის a წრეწირის a_1 ფუძე a_η წრფესთან იქნება შეთავსებული; ეს მონაკვეთი იმ წერტილებით განისაზღვრება რომლებშიც სფეროს ფუძის კონტური a_η წრფესთან იკვეთება. A_1 წერტილი ამ მონაკვეთის შუა წერტილია, ამიტომ A_1B მონაკვეთის სიგრძე წრეწირის რადიუსის ტოლია. A წერტილი მივიღოთ ცენტრად და A_1B მონაკვეთის ტოლი რადიუსით a წრეწირი შემოვწეროთ.

ახლა დამხმარე α სიბრტყით λ სიბრტყე გადავკვეთოთ. ამ ორი სიბრტყის ერთი საერთო წერტილია l_η და a_η წრფეთა გადაკვეთის C წერტილი.

C წერტილზე გაივლის α და λ სიბრტყეთა გადაკვეთის c წრფე.

c წრფე α სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ სურათის სიბრტყის პარალელური იქნება.

λ სიბრტყეში უკვე გვაქვს სურათის სიბრტყის პარალელური o_ω წრფე. ამიტომ c წრფე o_ω წრფის პარალელურად გატარდება.

a წრეწირი c წრფესთან 1 და მე-2 წერტილებში იკვეთება. მაშასადამე, ეს ორი წერტილი λ სიბრტყისა და სფეროს საერთო წერტილებია.

ასეთივე გზითაა ნაპოვნი λ სიბრტყისა და სფეროს სხვა საერთო წერტილებიც; მათი ერთობლიობა სფეროს საკუთარი ჩრდილის კონტურს განსაზღვრავს.

41. სფეროს დაცემული ჩრდილი სიბრტყეზე

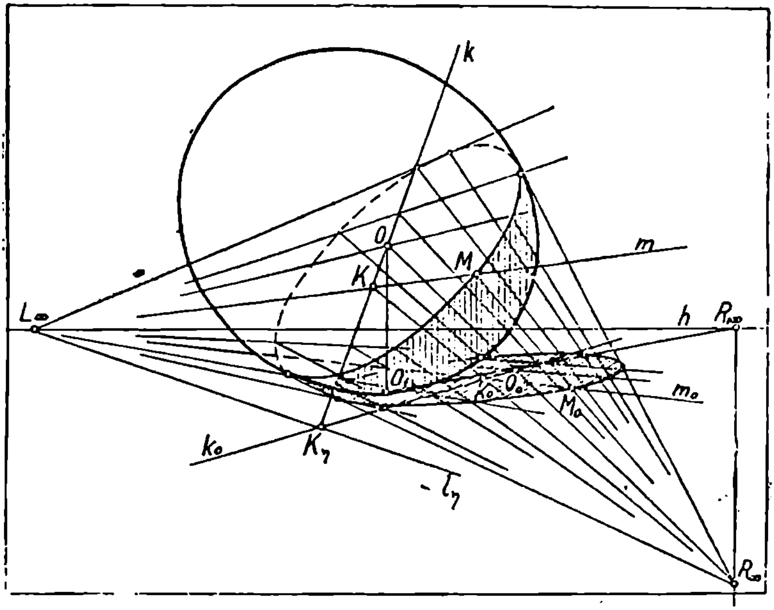
სხეულიდან რომელიმე ზედაპირზე დაცემული ჩრდილის კონტური წარმოადგენს თვით სხეულის საკუთარი კონტურის ჩრდილს. ამიტომ, თუ აგებულია საკუთარი ჩრდილი, მას უშუალოდ გამოვიყენებთ დაცემული ჩრდილის ასაგებად.

მოცემულია სფერო (ნახ. 103), რომელიც ეყრდნობა ფუძეთა სიბრტყეს. ამგვარად, O ცენტრის O_1 ფუძე სფეროსა და η სიბრტყის შეხების წერტილია.

ვთქვათ, რომ აგებულია სფეროს საკუთარი ჩრდილის კონტურიც, რომლის სიბრტყე η სიბრტყეს l_η წრფეზე ჰკვეთს.

ავაგოთ დაცემული ჩრდილის კონტური, როგორც საკუთარი ჩრდილის კონტურის ჩრდილი.

ამოცანა ის არის, რომ საკუთარი ჩრდილის კონტურზე გატარებული სხივთა ცილინდრისა და η სიბრტყის გადაკვეთა ვიპოვოთ. სხივთა ცილინდრის მსახველები არასაკუთრივ R_∞ წერტილზე გადის. იმისათვის, რომ სინათლის სხივთა ფუძეების ცალ-ცალკე აგება არ დაგვჭირდეს, შემდეგნაირად მოვიქცეთ:



ნახ. 103.

საკუთარი ჩრდილის კონტურის (ე. ი. წრეწირის) ნებისმიერი k დიამეტრი გავატაროთ და η სიბრტყის K_η წერტილში გადაკვეთამდე გავაგრძელოთ.

ავაგოთ k წრფის ჩრდილი η სიბრტყეზე; ამისათვის, ცნობილი წესით, O ცენტრის O_0 ჩრდილი ავაგოთ. K_η წერტილის ჩრდილი თვით ამ წერტილს შეუთავსდება. ამგვარად, k წრფის k_0 ჩრდილი K_η და O_0 წერტილებზე გაივლის.

ახლა l_η წრფის პარალელურად საკუთარი ჩრდილის კონტურის მკვეთი წრფეები გავატაროთ.

მაგალითად, M წერტილზე m წრფე გადის. ამ წრფის m_0 ჩრდილი ავაგოთ.

რადგანაც m წრფე თარაზულია, ის თავისი m_0 ჩრდილის პარალელურიც იქნება. ამიტომ საკმარისია m და k წრფეთა კვეთის K წერტილის K_0 ჩრდილი ავაგოთ; K_0 წერტილი KR_∞ სხივისა და k_0 წრფის გადაკვეთაზეა.

საძიებელი m_0 ჩრდილი K_0 და L_∞ წერტილებზე გაივლის.

M წერტილის M_0 ჩრდილი m_0 წრფეზე უნდა მდებარეობდეს, იქ, სადაც MR_∞ სხივი m_0 წრფესა კვეთს. ასეთივე გზითაა აგებული დაცემული ჩრდილის კონტურის სხვა წერტილებიც.

შეცდომათა გასწორება

გვერდი	სტრიქონი		დაბეჭდილია	უნდა იყოს
	ზემ.	ქვემ.		
127	16		საგანთა	ფუძეთა
130		16	საგანთა	ფუძეთა
158	5		წრფის	წრის