ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი,
დ. გიორგაძე, ა. კვალიაშვილი

წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

(თეორია, სავარჯიშოები და ამოცანები)

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

პროფესორ ს. თოფურიას რედაქციით

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1988

22.11
510 (022)
თ 776

უმაღლესი მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს პროგრამით გათვალისწინებულ წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის საკითხებს.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკის, ბიოლოგიის, გეოგრაფიის და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებსაც.

რეცენზენტები: 1. სპი-ს მათემატიკის № 3 კათედრის გამგე პროფესორი
ლ. მძინარიშვილი

2. თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის უფრ. მეცნ. თანამშრომელი, პროფესორი
თ. ჭანტურია

$T \frac{1602040000 - 413}{M\ 602\ (08) - 88}$ 332 — 88

ISBN5 — 505 — 00008 — 8

წინასიტყვაობა

წიგნი ერთ-ერთი ნაწილია სახელმძღვანელოთა იმ სერიისა, რომელმაც, ავტორთა აზრით, უნდა შეადგინოს უმაღლესი მათემატიკის სრული კურსი (თეორია და ამოცანათა კრებული) უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის. იგი დაწერილია მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური, გეოგრაფიული და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებს.

წიგნი შედგება ორი განყოფილებისაგან. პირველში გადმოცემულია თეორიული მასალა. მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანასა და სავარჯიშოს. ისინი დალაგებულია თეორიული მასალის შესაბამისად, მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით. თეორიული მასალის ყოველ თავს დართული აქვს კითხვები თვითშემოწმებისათვის.

I თავი

მატრიცები და დეტერმინანტები

§ 1. მატრიცის ცნება. მოქმედებანი მატრიცებზე

მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა ამოცანის შესწავლა მოითხოვს გარკვეული სახის ცხრილების, ე. წ. მატრიცების და მათზე მოქმედებათა წარმოების წესების შემოღებას. მატრიცთა თეორიას ფართო გამოყენება აქვთ წრფივი გარდაქმნებისა და წრფივი განტოლებების თეორიაში, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების ამოხსნაში, რხევათა თეორიაში, წარმოების დაგეგმვაში და სხვ.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $m \times n$ რაოდენობის a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ რიცხვები ამ რიცხვებისაგან შედგენილ მართკუთხა ცხრილს

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ეწოდება მატრიცა m სტრიქონითა და n სვეტით.

A მატრიცის შემადგენელ a_{ij} რიცხვებს ეწოდება მატრიცის ელემენტები. აქ პირველი ინდექსი i და მეორე ინდექსი j შესაბამისად იმ სტრიქონის და სვეტის ნომრებია, რომლებსაც ეკუთვნის ეს ელემენტი. ხშირად ხმარობენ მატრიცის მოკლე ჩაწერას $A = (a_{ij})_{m,n}$. m და n რიცხვებს უწოდებენ მატრიცის რიგებს. ორ მატრიცას ეწოდება ერთნაირი ტიპის, თუ მათი რიგები შესაბამისად ტოლია. იმ შემთხვევაში, როცა $m=n$, მატრიცას ეწოდება კვადრატული, ხოლო $m=n$ რიცხვს მისი რიგი.

კვადრატული მატრიცის ელემენტები $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ქმნიან ეგრეთწოდებულ მთავარ დიაგონალს, ხოლო $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ ელემენტები — არამთავარ დიაგონალს.

განსაზღვრება 1.2. კვადრატულ მატრიცას ეწოდება დიაგონალური, თუ მისი ყველა ელემენტი, გარდა შესაძლებელია მთავარი დიაგონალის ელემენტებისა, ნულის ტოლია, ე. ი. $a_{ij} = 0$, თუ $i \neq j$.

ყოველ n რიგის დიაგონალურ მატრიცას აქვს სახე

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

სადაც $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ნებისმიერი რიცხვებია.

განსაზღვრება 1.3. დიაგონალურ მატრიცას ეწოდება ერთეულოვანი მატრიცა, თუ მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია.

ერთეულოვანი მატრიცა აღინიშნება E ასოთი, ე. ი.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება 1.4. მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება.

ნულოვანი მატრიცა აღინიშნება O სიმბოლოთი:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება 1.5. ერთი სტრიქონისაგან (სვეტისაგან) შედგენილ მატრიცას ეწოდება სტრიქონ-მატრიცა (სვეტ-მატრიცა).

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

არის სტრიქონ-მატრიცა, ხოლო

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

სვეტ-მატრიცა.

განსაზღვრება 1.6. ორ ერთნაირი ტიპის მატრიცას ეწოდება ტოლი, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია.

მატრიცებზე ძირითადი მოქმედებებია: მატრიცთა შეკრება, მატრიცის რიცხვზე გამრავლება და მატრიცის მატრიცზე გამრავლება.

განსაზღვრება 1.7. ორი ერთნაირი ტიპის $A=(a_{ij})_{m,n}$ და $B=(b_{ij})_{m,n}$ მატრიცების ჯამი ეწოდება $C=(c_{ij})_{m,n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი უდრის A და B მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$. A და B მატრიცების ჯამი აღინიშნება $A+B$ სიმბოლოთი.

მაგალითი. თუ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

და

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება 1.8. $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება $C=(c_{ij})_{m,n}$ მატრიცას, რომლის ელემენტები მიიღება A მატრიცის ელემენტების λ რიცხვზე გამრავლებით: $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m;$ $j=1, 2, \ldots, n)$. A მატრიცის λ რიცხვზე ნამრავლი აღინიშნება λA სიმბოლოთი.

იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda=-1$, მიღებულია აღნიშვნა $(-1)A=-A$.

მაგალითი. თუ

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$5A=\begin{pmatrix} -10 & 15 & 0 \\ 5 & -20 & 10 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება 1.9. $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცის $B=(b_{ij})_{n,p}$ მატრიცაზე ნამრავლი ეწოდება $C=(c_{ij})_{m,p}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი გამოითვლება ფორმულით

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}=a_{i1}\,b_{1j}+a_{i2}\,b_{2j}+\cdots+a_{in}\,b_{nj}. \tag{1.1}$$

A მატრიცის B მატრიცაზე ნამრავლი აღინიშნება AB სიმბოლოთი.

(1.1) ფორმულიდან ჩანს, რომ C მატრიცის c_{ij} ელემენტი წარმოადგენს A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამს. მაგალითად, თუ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} \end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის B მატრიცაზე გამრავლება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ეს შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A მატრიცის სვეტების რიცხვი ტოლია B მატრიცის სტრიქონების რიცხვისა. AB მატრიცას იმდენი სტრიქონი აქვს, რამდენიც A-ს და იმდენი სვეტი, რამდენიც B-ს. ორივე ნამრავლი AB და BA განისაზღვრება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A-ს სვეტების რიცხვი უდრის B-ს სტრიქონების რიცხვს და A-ს სტრიქონების რიცხვი უდრის B-ს სვეტების რიცხვს.

ზემოთ მოყვანილ ოპერაციებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. $A + B = B + A$ (ჯამის კომუტაციურობა),
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ჯამის ასოციაციურობა),
3. $A + O = O + A = A$,
4. $A - A = O$,
5. $1 \cdot A = A$,
6. $0 \cdot A = O$,
7. $(\lambda\mu) A = \lambda (\mu A)$,
8. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$,
9. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$,
10. $A \cdot O = O \cdot A = O$,
11. $A \cdot E = EA = A$,
12. $(A + B) C = AC + BC$ (დისტრიბუციულობა მარჯვნიდან),
13. $A (B + C) = AB + AC$ (დისტრიბუციულობა მარცხნიდან),
14. $A (BC) = (AB) C$ (ნამრავლის ასოციაციურობა).

შევნიშნოთ, რომ მატრიცთა გამრავლება არ არის კომუტაციური ოპერაცია, ე. ი. საზოგადოდ $AB \neq BA$. უფრო მეტიც, AB და BA შეიძლება სხვადასხვა ტიპის მატრიცები იყოს. მართლაც, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ხოლო

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

იმისათვის, რომ AB უდრიდეს BA-ს, აუცილებელია A და B იყოს ერთიდაიმავე რიგის კვადრატული მატრიცები, მაგრამ ეს პირობა საკმარისი არ არის. მაგალითად, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

მაშინ $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ხოლო $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

განსაზღვრება 1.10. მატრიცას, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან ყველა სტრიქონის სვეტებით და სვეტების სტრიქონებით შეცვლით, ეწოდება A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა და A' სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი. თუ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ტრანსპონირების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $(A')'=A$;
2. $(A+B)'=A'+B'$;
3. $(\lambda A)'=\lambda A', \quad \lambda \in R$;
4. $(AB)'=B'A'$.

განსაზღვრება 1. 11. კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ $A'=A$, ხოლო ანტისიმეტრიული, თუ $A'=-A$.

ცხადია, რომ თუ A ანტისიმეტრიული მატრიცაა, მაშინ მისი მთავარი დიაგონალის ელემენტები ნულის ტოლია.

§ 2. დეტერმინანტები და მათი ძირითადი თვისებები

განვიხილოთ ნებისმიერი n რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

არსებობს წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ კვადრატულ მატრიცას შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ამ მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება.

თუ $n=1$, მაშინ (2.1) მატრიცა შედგება ერთი a_{11} რიცხვისაგან და მისი შესაბამისი პირველი რიგის დეტერმინანტი ეწოდება თვით ამ რიცხვს.

თუ $n=2$, მაშინ (2.1) მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის შესაბამისი მეორე რიგის დეტერმინანტი ეწოდება $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ რიცხვს და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით:

$$|A|, \quad \det A, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

ე. ი. განსაზღვრით

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

ნებისმიერი $n>2$ რიგის დეტერმინანტი განისაზღვრება ინდუქციის წესით, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $n-1$ რიგის მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის ცნება უკვე შემოყვანილია.

წინასწარ მოვიყვანოთ მატრიცის ელემენტის მინორის და ალგებრული დამატების ცნებები: n რიგის (2.1) მატრიცის a_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) ელემენტის მინორი M_{ij} ეწოდება $n-1$ რიგის იმ მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება (2.1) მატრიციდან მისი i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით.

a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ij} განისაზღვრება ტოლობით

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(2.1) მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება რიცხვს

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} M_{1j}$$

და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით:

$$|A|,\ \det A, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ე. ი. განსაზღვრით

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}. \tag{2.2}$$

A მატრიცის ელემენტებს, სტრიქონებს, სვეტებს და დიაგონალებს ვუწოდებთ შესაბამისად $|A|$ დეტერმინანტის ელემენტებს, სტრიქონებს, სვეტებს და დიაგონალებს.

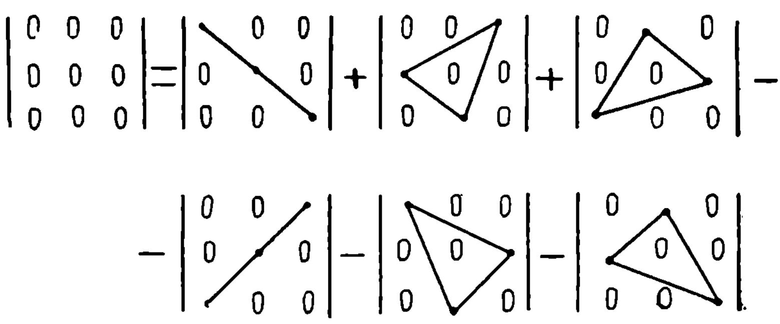
კერძოდ, მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის (2.2)-დან გვაქვს

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} a_{31} -$$

$$- a_{11} a_{23} a_{32} - a_{33} a_{21} a_{12}.$$

ამ ფორმულის დასამახსოვრებლად სასარგებლოა ეგრეთწოდებული სამკუთხედების წესი, რომელიც სიმბოლურად ილუსტრირებულია შემდეგი სქემით:



მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2)\cdot 2 + 0\cdot 3\cdot(-3) + 4\cdot 2\cdot 1 -$$

$$-4\cdot(-2)\cdot 0 - (-1)\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot 3\cdot 2 = 4 + 8 - 3 - 12 = -3.$$

მოვიყვანოთ დეტერმინანტების ძირითადი თვისებები, რომელთა მართებულობას სიმარტივისათვის შევამოწმებთ $n=3$ შემთხვევაში.

1. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტის მათ შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი მოცემული დეტერმინანტის ტოლია, ე. ი.

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3}$$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.4}$$

ეს თვისება შევამოწმოთ მესამე სვეტისათვის. გვაქვს

$$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{33}a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{33}a_{22} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(2.3) და (2.4) ფორმულებს ეწოდება დეტერმინანტის გაშლა შესაბამისად j-ური სვეტისა და i-ური სტრიქონის ელემენტების მიხედვით.

დეტერმინანტის გამოთვლას ამ ფორმულებით უწოდებენ აგრეთვე დეტერმინანტის გამოთვლას მინორებად გაშლის წესით.

ამ თვისებიდან მარტივად მივიღებთ, რომ

$$|E| = 1. \tag{2.5}$$

2. მატრიცის ტრანსპონირებით მისი დეტერმინანტი არ იცვლება, ე. ი.

$$|A'| = |A|.$$

თვისების დასამტკიცებლად საკმარისია ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები გამოვთვალოთ სამკუთხედების წესით.

3. დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს იცვლის, თუ მოვახდენთ მისი ნებისმიერი ორი სვეტის (სტრიქონის) ურთიერთგადანაცვლებას.

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

ამ თვისების მართებულობა მტკიცდება უშუალო შემოწმებით.

4. დეტერმინანტი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტი ნულია.

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს პირველი თვისებიდან.

5. დეტერმინანტი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე ორი სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტები ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, A მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის რომელიმე ორი სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ტოლია. თუ ურთიერთგადავანაცვლებთ ამ სვეტებს (სტრიქონებს) მაშინ მესამე თვისების ძალით $|A|$-ს უნდა შეეცვალოს მხოლოდ ნიშანი. მეორეს მხრივ, დეტერმინანტი არ შეიცვლება, რადგანაც გადანაცვლებული სვეტები (სტრიქონები) ერთნაირია, ე. ი. $|A| = -|A|$, საიდანაც $|A| = 0$.

6. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტის საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ, მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ამ თვისების მართებულობა მტკიცდება უშუალო შემოწმებით.

7. დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტები პროპორციულია სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტებისა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-6 თვისების ძალით პროპორციულობის კოეფიციენტი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ, რის შემდეგ მივიღებთ დეტერმინანტს ორი ერთნაირი სვეტით (სტრიქონით), რომელიც მე-5 თვისების ძალით ნულის ტოლია.

8. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტი ორი შესაკრების ჯამს წარმოადგენს, მაშინ ეს დეტერმინანტი წარმოიდგინება ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით. მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} + a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ეს დეტერმინანტები გავშალოთ მეორე სვეტის ელემენტების მიხედვით და მიღებული შედეგები ერთმანეთს შევადაროთ.

9. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს მივუმატებთ სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული დეტერმინანტის ტოლ დეტერმინანტს.

მართლაც, მიღებული დეტერმინანტი მე-8 თვისების ძალით წარმოიდგინება ისეთი ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით, რომელთაგან ერთი ემთხვევა მოცემულ დეტერმინანტს, მეორე კი ნულის ტოლია, ვინაიდან მისი ორი სვეტი (სტრიქონი) პროპორციულია.

10. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტის ნებისმიერი სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0, \tag{2.6}$$

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=0, \tag{2.7}$$

სადაც $i, j = 1, 2, \dots, n$; $i \neq j$.

შევამოწმოთ, მაგალითად (2.7) ტოლობის მართებულობა მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის, როცა $i=1$ და $j=3$. პირველი და მეხუთე თვისებების ძალით გვაქვს

$$a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თვისება.

11. ორი კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის ამ მატრიცათა დეტერმინანტების ნამრავლს, ე. ი.

$$|AB|=|A|\cdot|B|. \tag{2.8}$$

§ 3. შებრუნებული მატრიცა

ვთქვათ, A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო E— იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა.

განსაზღვრება 3.1. A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ეწოდება ისეთ B მატრიცას, რომლისთვისაც

$$A\cdot B=B\cdot A=E.$$

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება სიმბოლოთი A^{-1}, ე. ი.

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E. \tag{3.1}$$

(3.1) ტოლობა სიმეტრიულია A და A^{-1} მატრიცების მიმართ, ამიტომ თუ A^{-1} არის A-ს შებრუნებული, მაშინ A არის A^{-1}-ის შებრუნებული:

$$A=(A^{-1})^{-1}.$$

სიმეტრიულობიდან ცხადია აგრეთვე, რომ A^{-1} არის იმავე n რიგის კვადრატული მატრიცა.

ვაჩვენოთ, რომ, თუ A მატრიცას ვააჩნია შებრუნებული მატრიცა, მაშინ ის ერთადერთია.

მართლაც, ვთქვათ, რაიმე C მატრიცა აგრეთვე აკმაყოფილებს (3.1) პირობებს. ტოლობა

$$AC=E$$

მარცხნიდან გავამრავლოთ A^{-1}-ზე. მივიღებთ

$$A^{-1}(AC)=A^{-1}\cdot E.$$

მატრიცებზე მოქმედებების მე-11 და მე-14 თვისებების ძალით ეს ტოლობა ასე გადაიწერება

$$(A^{-1}A)C=A^{-1},$$

ანუ

$$EC=A^{-1},$$

ე. ი.

$$C=A^{-1}.$$

განსაზღვრება 3.2. კვადრატულ მატრიცას ეწოდება განსაკუთრებული, თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია; წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული.

განსაზღვრება 3.3. A კვადრატული მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა ეწოდება მატრიცას

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

სადაც A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} $(i, j=1, 2, \dots, n)$ ელემენტის ალგებრული დამატება.

მაშასადამე, A^{*} მატრიცის მისაღებად A მატრიცის ყოველი a_{ij} ელემენტი უნდა შეიცვალოს A_{ji} ალგებრული დამატებით.

ადვილია ჩვენება, რომ

$$E^{*}=E.$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$A^*A = AA^* = |A|\cdot E. \tag{3.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვიპოვოთ $C=A\cdot A^*$ ნამრავლი. მატრიცთა ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}.$$

აქედან (2.4) და (2.6) ტოლობების ძალით მივიღებთ

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad i \neq j, \\ |A|, & \text{როცა} \quad i = j. \end{cases}$$

$A_{11}\ A_{12}\cdots$
$A_{21}\ A_{22}\cdots$
$\cdots$
$A_{1k}\ A_{2k}$

ამრიგად

$$C = A\cdot A^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = |A|\cdot E. \tag{3.3}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$A^*\cdot A = |A|\cdot E.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შებრუნებული მატრიცის არსებობის შესახებ მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. იმისათვის, რომ A მატრიცას გააჩნდეს შებრუნებული მატრიცა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ A იყოს არაგანსაკუთრებული მატრიცა. შებრუნებული მატრიცა გამოითვლება ფორმულით

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A^*. \tag{3.4}$$

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ, A-ს გააჩნია შებრუნებული A^{-1} მატრიცა, ე. ი.

$$A\cdot A^{-1} = E.$$

ამიტომ

$$|A\cdot A^{-1}| = |E|.$$

(2.5) და (2.8)-ის ძალით ამ ტოლობიდან გვაქვს

$$|A|\cdot|A^{-1}| = 1.$$

აქედან ჩანს, რომ

$$|A| \neq 0.$$

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ $|A| \neq 0$, მაშინ (3.2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{|A|}\cdot A^*\cdot A = A\cdot\frac{1}{|A|}\cdot A^* = E.$$

აქედან, შებრუნებული მატრიცის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A^*.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 100 - 84 - 105 + 90 + 16 = -1.$$

ცხადია

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 20) = 38;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 14) = 1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29:$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8-42) = 34;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24.$$

ამრიგად, მიკავშირებული მატრიცა ტოლია

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}.$$

(3.4) ფორმულის მიხედვით გვაქვს

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

დავამტკიცოთ შებრუნებული და მიკავშირებული მატრიცების ზოგიერთი თვისება:

1. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

მართლაც, ტოლობიდან $A^{-1}A = E$ გვაქვს $|A^{-1}A| = 1$, აქედან $|A^{-1}|\cdot|A| = 1$, საიდანაც $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

მატრიცთა გამრავლების ასოციაციურობის თვისების ძალით გვაქვს:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E,$$

ე. ი.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

მართლაც, $AA^{-1} = E$ ტოლობის ორივე მხარის ტრანსპონირებით მივიღებთ

$$(AA^{-1})' = E',$$

საიდანაც

$$(A^{-1})'A' = E.$$

აქედან

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

4. $(A')^{*} = (A^{*})'$.

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან.

5. $(\alpha A)^{*}=\alpha^{n-1}A^{*}$ ($\alpha\in R$, ხოლო n არის A მატრიცის რიგი).

მართლაც, $(\alpha A)^{*}$ მატრიცის $\overline{A_{ij}}$ ელემენტი იქნება $\alpha^{n-1}A_{ij}$ აქედან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

6. $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$, $\alpha\neq 0$.

(3.4) ტოლობისა და წინა თვისების გამოყენებით მივიღებთ:

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{|\alpha A|}(\alpha A)^{*}=\frac{1}{\alpha^{n}|A|}\cdot\alpha^{n-1}A^{*}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

7. $|A^{*}|=|A|^{n-1}$, თუ $|A|\neq 0$.

ეს ტოლობა გამომდინარეობს (3.3)-დან.

მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად კიდევ ორი თვისება:

8. $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$.

9. თუ A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, მაშინ

$$(A^{*})^{*}=\begin{cases} A, & \text{როცა } n=2;\\ |A|^{n-2}A, & \text{როცა } n>2.\end{cases}$$

§ 4. მატრიცის რანგი

განვიხილოთ მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

მისი სტრიქონები თავის მხრივ შეიძლება განვიხილოთ როგორც მატრიცები:

$$\begin{aligned} A_1&=(a_{11},\ a_{12},\dots,a_{1n}),\\ A_2&=(a_{21},\ a_{22},\dots,a_{2n}),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ A_m&=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn}).\end{aligned}$$

განსაზღვრება 4.1. გამოსახულებას

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\dots+\alpha_kA_k,$$

სადაც $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ ($k\leqslant m$) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ეწოდება $A_1,A_2,\dots,A_k$ სტრიქონ-მატრიცთა წრფივი კომბინაცია ან, უბრალოდ, სტრიქონთა წრფივი კომბინაცია.

განსაზღვრება 4.2. სტრიქონებს $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k = O^*. \tag{4.1}$$

განსაზღვრება 4.3, თუ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სტრიქონები არ არის წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მათ წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება. სხვანაირად $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სტრიქონებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ (4.1) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

თეორემა 4.1. იმისათვის, რომ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სტრიქონები იყოს წრფივად დამოკიდებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სტრიქონებიდან ერთ-ერთი წარმოადგენდეს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k > 1)$ სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. ადგილი აქვს (4.1) ტოლობას და $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. გარკვეულობისათვის, დავუშვათ $\alpha_1 \neq 0$, მაშინ (4.1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_3 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} A_k.$$

ამრიგად, A_1 სტრიქონი არის დანარჩენი სტრიქონების წრფივი კომბინაცია.

საკმარისობა. ვთქვათ, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სტრიქონებიდან ერთ-ერთი, მაგალითად A_1 წარმოადგენს დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას, ე. ი. არსებობს ისეთი $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ რიცხვები, რომ

$$A_1 = \beta A_2 + \gamma \cdot A_3 + \cdots + \lambda A_k.$$

აქედან

$$(-1) A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \cdots + \lambda A_k = O.$$

ეს ტოლობა კი ნიშნავს, რომ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია.

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილ ცნებებსა და მსჯელობებში სიტყვა „სტრიქონი“ ყველგან შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „სვეტი“.

---

* აქ $O = (0, 0, \ldots, 0)$ — ნულოვანი სტრიქონია.

განსაზღვრება 4.4. A მატრიცის k-ური რიგის მინორი ეწოდება ამ მატრიცის ნებისმიერი k სტრიქონისა და k სვეტის ($k \leqslant \min(m, n)$) გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ k რიგის დეტერმინანტს.

განსაზღვრება 4.5. r რიცხვს ეწოდება A მატრიცის რანგი, თუ A მატრიცას გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული r რიგის ერთი მაინც მინორი, ხოლო $r+1$ რიგის ყოველი მინორი (თუ ასეთი არსებობს) ნულის ტოლია. მიღებულია, რომ ნულოვანი მატრიცის რანგი ნულის ტოლია.

A მატრიცის რანგი RgA სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ $\mathrm{Rg}\, A \leqslant \min(m, n)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ მატრიცის l რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, მაშინ ამ მატრიცის l-ზე მეტი რიგის ყველა მინორი აგრეთვე ნულის ტოლია, ამიტომ თუ A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა და $\mathrm{Rg}\, A \leqslant n-2$, მაშინ $A^* = O$.

განსაზღვრებაზე დაყრდნობით მატრიცის რანგის გამოთვლა, როდესაც მატრიცის რიგები არც ისე მცირეა, საკმაოდ შრომატევადია. ხშირად რანგის გამოთვლას არსებითად ამარტივებს ე. წ. მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნების გამოყენება.

განსაზღვრება 4.6. მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები ეწოდება:

1) რაიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ნულისაგან განსხვავებულ ერთსადაიმავე რიცხვზე გამრავლებას;

2) რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებისადმი სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების მიმატებას;

3) ორი სტრიქონის (სვეტის) ურთიერთგადანაცვლებას.

ის ფაქტი რომ B მატრიცა მიღებულია A მატრიცისაგან ელემენტარული გარდაქმნებით, შემდეგნაირად აღინიშნება: $A \to B$.

თეორემა 4.2. ელემენტარული გარდაქმნები მატრიცის რანგს არ ცვლის.

დამტკიცება. მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევისათვის, როცა ელემენტარულ გარდაქმნებს ვატარებთ სტრიქონებზე.

სტრიქონის $\lambda \neq 0$ რიცხვზე გამრავლებისას მატრიცის ნებისმიერი მინორი ან არ იცვლება, ან მრავლდება λ რიცხვზე. ამიტომ ნულისაგან განსხვავებული არცერთი მინორი ნულის ტოლი არ გახდება და ნულის ტოლი ყოველი მინორი კვლავ ნულის ტოლი დარჩება.

თუ მატრიცის $r+1$ რიგის ყოველი მინორი ნულის ტოლია, მაშინ სტრიქონთა შეკრება არცერთ მათგანს ნულისაგან განსხვავებულს არ გახდის. მართლაც, გარდაქმნის შედეგად მიღებული მატრიცის $r+1$

რიგის ნებისმიერი მინორი ან წარმოადგენს მოცემული მატრიცის $r+1$ რიგის ორი მინორის ალგებრულ ჯამს, ან უდრის მოცემული მატრიცის $r+1$ რიგის მინორისა და ერთნაირი ორი სტრიქონის მქონე დეტერმინანტის ჯამს. მაშასადამე აღნიშნული გარდაქმნით მატრიცის რანგი არ იზრდება. ცხადია, რომ ის არც მცირდება, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მიღებული მატრიცის სათანადო სტრიქონთა გამოკლებით მისი რანგი გაიზრდებოდა, ვინაიდან მივიღებდით მოცემულ მატრიცას.

ორი სტრიქონის ურთიერთგადანაცვლებისას ნებისმიერი მინორი ან არ იცვლება, ან იცვლის ნიშანს, ან შეიცვლება მინორით, რომელიც მხოლოდ ნიშნით შეიძლება განსხვავდებოდეს მოცემული მატრიცის იმავე რიგის რაიმე მინორისაგან. ე. ი. რანგი ამ შემთხვევაშიც არ იცვლება.

თეორემა დამტკიცებულია.

ელემენტარული გარდაქმნებით ნებისმიერი მატრიცა დაიყვანება ისეთი სახის მატრიცაზე, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, გარდა $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ $(r \leqslant \min(m, n))$ ელემენტებისა. ცხადია მიღებული მატრიცის რანგი r-ის ტოლია, ამიტომ თეორემა 4.2-ის ძალით მოცემული მატრიცის რანგია r.

მაგალითი. გამოთვალეთ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -8 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

მატრიცის რანგი.

ამოხსნა.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -8 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -8 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად $\operatorname{Rg} A = 2$.

მატრიცის რანგის გამოსათვლელად აგრეთვე გამოიყენება შემდეგი წესიც: თუ A მატრიცის r რიგის რომელიმე მინორი განსხვავებულია ნულისაგან და ამ მინორის შემცველი A მატრიცის $r+1$ რიგის ყოველი მინორი ნულის ტოლია, მაშინ $\operatorname{Rg} A=r$.

მაგალითი. გამოთვალეთ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 4 & 9 & 7 & 8\\ 3 & 7 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი.

ამოხსნა. პირველი და მეორე სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი მინორი

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{vmatrix}$$

განსხვავებულია ნულისაგან. განვიხილოთ მისი შემცველი მესამე რიგის მინორები

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 9 & 7\\ 3 & 7 & 4\end{vmatrix}=0 \quad \text{და} \quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 9 & 8\\ 3 & 7 & 3\end{vmatrix}=0.$$

ამრიგად, მატრიცის რანგია 2.

განსაზღვრება 4.7. თუ მატრიცის რანგია r, მაშინ ამ მატრიცის r რიგის ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ მინორს საბაზისო მინორი ეწოდება.

განსაზღვრება 4.8. იმ სტრიქონებსა და სვეტებს, რომელთა გადაკვეთაზე დგას საბაზისო მინორის შემადგენელი ელემენტები, ეწოდება შესაბამისად საბაზისო სტრიქონები და საბაზისო სვეტები.

თეორემა 4.3. (საბაზისო მინორის შესახებ). მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონი (სვეტი) შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც საბაზისო სტრიქონების (საბაზისო სვეტების) წრფივი კომბინაცია.

დამტკიცება. დავუშვათ, $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცის რანგია r. ვინაიდან სტრიქონებისა და სვეტების ურთიერთგადანაცვლებით მატრიცის რანგი არ იცვლება, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ საბაზისო მინორი მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხეშია, ე. ი. დგას მატრიცის პირველი r სტრიქონის და პირველი r სვეტის გადაკვეთაზე. ვთქვათ, i და j ისეთი ნატურალური რიცხვებია, რომ $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$. ვაჩვენოთ, რომ $r+1$ რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}, \tag{4.2}$$

ნულის ტოლია. თუ $i \leqslant r$ ან $j \leqslant r$, მაშინ ამ დეტერმინანტს აქვს ორი ერთნაირი სტრიქონი ან ორი ერთნაირი სვეტი და ამიტომ ის უდრის ნულს. თუ $i > r$ და $j > r$, მაშინ ეს დეტერმინანტი A მატრიცის $(r+1)$ რიგის მინორია და კვლავ ნულის ტოლია, ვინაიდან A მატრიცის რანგია r.

გავშალოთ (4.2) დეტერმინანტი ბოლო სვეტის ელემენტების მიხედვით. ცხადია, ამ სვეტის ელემენტების ალგებრული დამატებები j-საგან დამოუკიდებელია.

თუ $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj}, a_{ij}$ ელემენტების ალგებრულ დამატებებს შესაბამისად აღვნიშნავთ $c_1^i, c_2^i, \ldots, c_r^i, c_{r+1}$-ით, მაშინ გვექნება

$$c_1^i a_{1j} + c_2^i a_{2j} + \cdots + c_r^i a_{rj} + c_{r+1} a_{ij} = 0, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

რადგან $c_{r+1} \neq 0$ (როგორც საბაზისო მინორი) ამიტომ (4.3)-დან მივიღებთ

$$a_{ij} = \lambda_1^i a_{1j} + \lambda_2^i a_{2j} + \cdots + \lambda_r^i a_{rj}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

სადაც

$$\lambda_k^i = -\frac{c_k^i}{c_{r+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

(4.4) ტოლობა ნიშნავს, რომ i-ური სტრიქონი წარმოადგენს საბაზისო სტრიქონების წრფივ კომბინაციას.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ მატრიცის ყოველი სვეტი წარმოიდგინება საბაზისო სვეტების წრფივი კომბინაციით.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 4.4. იმისათვის, რომ n-ური რიგის დეტერმინანტი $|A|$ უდრიდეს ნულს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი სტრიქონები (სვეტები) იყოს წრფივად დამოკიდებული.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ, $|A| = 0$, მაშინ მისი მატრიცის საბაზისო მინორის რიგი r ნაკლებია n-ზე.

ე. ი. A მატრიცის საბაზისო სტრიქონების რაოდენობა ნაკლებია n-ზე. ამიტომ ნებისმიერი სხვა სტრიქონი, თეორემა 4.3-ის ძალით,

წარმოადგენს საბაზისო სტრიქონების წრფივ კომბინაციას. ამ წრფივ კომბინაციაში შეიძლება ჩავრთოთ დანარჩენი სტრიქონებიც ნულის ტოლი კოეფიციენტებით. თეორემა 4.1-ის თანახმად ეს ნიშნავს, რომ მოცემული დეტერმინანტის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ, $|A|$-ს სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მისი ერთ-ერთი სტრიქონი წარმოადგენს დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას. თუ ამ სტრიქონს გამოვაკლებთ აღნიშნულ წრფივ კომბინაციას, (რითაც დეტერმინანტის სიდიდე არ შეიცვლება), მასში მივიღებთ მხოლოდ ნულებისაგან შედგენილ სტრიქონს, ამიტომ $|A|=0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.5. (მატრიცის რანგის შესახებ). მატრიცის რანგი უდრის ამ მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონების (სვეტების) მაქსიმალურ რიცხვს.

დამტკიცება. თუ $\mathrm{Rg}\, A=0$, მაშინ თეორემის მართებულობა ცხადია, რადგან მისი ყველა სტრიქონი ნულოვანია.

ვთქვათ, მატრიცის რანგი $r>0$. თუ მისი საბაზისო სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ წრფივად დამოკიდებული იქნება საბაზისო მინორის სტრიქონებიც და თეორემა 4.4-ის ძალით საბაზისო მინორი იქნება ნულის ტოლი, რაც შეუძლებელია, ე. ი. საბაზისო სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია.

ვაჩვენოთ, რომ A მატრიცის ნებისმიერი p სტრიქონი წრფივად დამოკიდებულია, როცა $p>r$ (თუ ასეთი არსებობს). განვიხილოთ ამ p სტრიქონისაგან შედგენილი B მატრიცა. მისი რანგი არ აღემატება r-ს, რადგან B-ს ყოველი მინორი A-ს მინორიცაა, ამიტომ B-ს რანგი მითუმეტეს ნაკლებია p-ზე. ამრიგად, B მატრიცის ერთი მაინც სტრიქონი არ მონაწილეობს B-ს საბაზისო მინორში, მაშასადამე, ის წარმოადგენს B მატრიცის დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას (თეორემა 4.3).

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ მატრიცის რანგი უდრის მისი წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალურ რიცხვს.

თეორემა დამტკიცებულია.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რას ეწოდება მატრიცა? დიაგონალური მატრიცა? ერთეულოვანი მატრიცა? ნულოვანი მატრიცა? სტრიქონ-მატრიცა? სვეტ-მატრიცა?
2. როგორ ორ მატრიცას ეწოდება ტოლი?
3. რას ეწოდება მატრიცის რიცხვზე ნამრავლი?
4. ჩამოაყალიბეთ მატრიცათა შეკრების წესი.

5. ჩამოაყალიბეთ მატრიცის მატრიცაზე გამრავლების წესი.

6. რას ეწოდება ტრანსპონირებული მატრიცა?

7. როგორ მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული? ანტისიმეტრიული?

8. რას ეწოდება დეტერმინანტი? ჩამოაყალიბეთ დეტერმინანტის თვისებები.

9. რას ეწოდება შებრუნებული მატრიცა? განსაკუთრებული მატრიცა? მიკავშირებული მატრიცა?

10. ჩამოაყალიბეთ თეორემა შებრუნებული მატრიცის არსებობის შესახებ.

11. განსაზღვრეთ სტრიქონ-მატრიცა და სვეტ-მატრიცა, წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა.

12. ჩამოაყალიბეთ სტრიქონ-მატრიცათა და სვეტ-მატრიცათა წრფივად დამოკიდებულების აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

13. რას ეწოდება მატრიცის მინორი? რანგი? საბაზისო მინორი? საბაზისო სტრიქონები? საბაზისო სვეტები?

13. ჩამოაყალიბეთ თეორემები საბაზისო მინორისა და რანგის შესახებ.

14. მოიყვანეთ დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

II თავი

წრფივ განტოლებათა სისტემები

§ 1. ძირითადი ცნებები. კრამერის წესი

ვთქვათ მოცემულია n-უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებია, ხოლო $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ კოეფიციენტები, და $b_1, b_2, \ldots, b_m$ თავისუფალი წევრები კი ცნობილი რიცხვებია. საზოგადოდ, უცნობთა რიცხვი n არ უდრის განტოლებათა m რიცხვს. თუ $n = m$, მაშინ (1.1) სისტემას კვადრატული ეწოდება.

განსაზღვრება 1.1. განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი ყველა თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია, ხოლო არაერთგვაროვანი, თუ ერთი მაინც თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან.

განსაზღვრება 1.2. $c_1, c_2, \dots, c_n$ რიცხვთა ერთობლიობას ეწოდება (1.1) სისტემის ამონახსენი, თუ სისტემაში $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობების ნაცვლად შესაბამისად $c_1, c_2, \dots, c_n$ რიცხვების ჩასმით, სისტემის ყოველი განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად*.

განსაზღვრება 1.3. სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსენი, ხოლო არათავსებადი, თუ მას არა აქვს არც ერთი ამონახსენი.

განსაზღვრება 1.4. მატრიცას

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

რომელიც შედგენილია (1.1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან, ამ სისტემის მატრიცა ეწოდება.

განვიხილოთ $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცა

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

და $b_1, b_2, \dots, b_m$ თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცა

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

მატრიცთა გამრავლების წესის გამოყენებით განტოლებათა (1.1) სისტემა შემდეგნაირად შეიძლება ჩავწეროთ:

$$A \cdot X = B.$$

ეს არის (1.1) სისტემის ჩაწერა მატრიცული ფორმით.

ვთქვათ მოცემულია კვადრატული სისტემა

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.2}$$

* სისტემის ამონახსენი შეიძლება ჩაიწეროს როგორც სტრიქონ-მატრიცის ასევე სვეტ-მატრიცის სახით.

ამ სისტემის მატრიცის დეტერმინანტს

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

სისტემის დეტერმინანტი ეწოდება.

სისტემის Δ დეტერმინანტის j-ური ($j = 1, 2, \ldots, n$) სვეტის ელემენტები შევცვალოთ შესაბამისი თავისუფალი წევრებით. ასეთნაირად მიღებული დეტერმინანტი აღვნიშნოთ Δ_j სიმბოლოთი (მას დამხმარე დეტერმინანტს უწოდებენ), ე. ი.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.1. (კრამერის წესი). თუ (1.2) სისტემის დეტერმინანტი Δ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემა თავსებადია, აქვს ერთადერთი ამონახსენი და ეს ამონახსენი გამოითვლება ფორმულებით

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვაჩვენოთ, რომ სვეტ-მატრიცა $C_0 = A^{-1} B$ არის $AX = B$ მატრიცული განტოლების, ანუ (1.2) სისტემის ამონახსენი. მართლაც

$$A\,C_0 = A\,(A^{-1} B) = (A\,A^{-1})\,B = EB = B.$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს ამონახსენი ერთადერთია. ვთქვათ სვეტ-მატრიცა C არის $AX=B$ განტოლების ნებისმიერი ამონახსენი, ე. ი.

$$AC = B.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი მარცხნიდან გავამრავლოთ A^{-1}-ზე, მივიღებთ

$$A^{-1}\,(AC) = A^{-1}\,B,$$

$$(A^{-1}\,A)\,C = C_0,$$

$$EC = C_0,$$

$$C = C_0.$$

ამრიგად, (1.2) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$X = A^{-1} B = \frac{1}{\Delta} A^* B, \tag{1.4}$$

სადაც A^* არის A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა.

შევნიშნოთ, რომ (1.4) ამონახსენი მიიღება $AX = B$ მატრიცული განტოლების ორივე ნაწილის A^{-1}-ზე მარცხნიდან გამრავლებით.

ახლა (1.4) ტოლობიდან მივიღოთ (1.3) ფორმულები. მატრიცთა გამრავლების წესის ვამოყენებით, გვაქვს

$$X = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \cdots + A_{n1} b_n \\ A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + \cdots + A_{n2} b_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{1n} b_1 + A_{2n} b_2 + \cdots + A_{nn} b_n \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

დეტერმინანტთა პირველი თვისების ძალით

$$\begin{gathered} A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \cdots + A_{n1} b_n = \Delta_1, \\ A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + \cdots + A_{n2} b_n = \Delta_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{1n} b_1 + A_{2n} b_2 + \cdots + A_{nn} b_n = \Delta_n. \end{gathered}$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (1.5)-დან მივიღებთ

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(1.3) ფორმულები კრამერის ფორმულების სახელწოდებითაა ცნობილი. (1.4) არის კრამერის ფორმულების ჩაწერა მატრიცული სახით.

მაგალითი 1. შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

რადგანაც

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

ამიტომ A^{-1} არსებობს. მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(1.4) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

საიდანაც, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

მაგალითი 2. კრამერის ფორმულების გამოყენებით ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -9 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

ამოხსნა. რადგან სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

ამიტომ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი.

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ, რომ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 1 & -9 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -9 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

კრამერის ფორმულების ძალით გვაქვს

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

§ 2. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობა

კრამერის წესი საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა იმ კერძო შემთხვევაში, როცა განტოლებათა რიცხვი უდრის უცნობთა რიცხვს და სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. შევისწავლოთ წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობისა და ამოხსნის საკითხი ზოგად შემთხვევაში.

განვიხილოთ n-უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

მატრიცას

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

რომელიც მიიღება სისტემის $A = (a_{ij})_{m,n}$ მატრიცისაგან თავისუფალი წევრების სვეტის მიწერით, ეწოდება სისტემის გაფართოებული მატრიცა.

თეორემა საბაზისო მინორის შესახებ საშუალებას იძლევა მივიღოთ (2.1) სისტემის თავსებადობის მარტივი და ეფექტური პირობა, რომელიც ცნობილია კრონეკერ-კაპელის თეორემის სახელწოდებით.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. (კრონეკერ-კაპელი). წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის მატრიცის რანგი უდრიდეს მისი გაფართოებული მატრიცის რანგს.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ, (2.1) სისტემის ამონახსენია

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

ე. ი.

$$AC=B,$$

ანუ გაშლილი სახით

$$\begin{pmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ $\widetilde{A}$ გაფართოებული მატრიცის ბოლო სვეტი წარმოადგენს მისი დანარჩენი სვეტების წრფივ კომბინაციას. რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $\widetilde{A}$ მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალური რიცხვი არ აღემატება A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალურ რიცხვს, ე. ი. $\widetilde{A}$-ის რანგი არ აღემატება A მატრიცის რანგს. მეორეს მხრივ, $\operatorname{Rg} A \leqslant \operatorname{Rg} \widetilde{A}$, რადგან A-ს ყოველი მინორი $\widetilde{A}$-ის მინორიცაა. მაშასადამე, $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg} \widetilde{A}$.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ, $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg} \widetilde{A}=r$. A მატრიცაში გამოვყოთ r საბაზისო სვეტი. ცხადია, ეს სვეტები $\widetilde{A}$-ის საბაზისო სვეტებსაც წარმოადგენენ. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ საბაზისოა პირველი r სვეტი. საბაზისო მინორის შესახებ თეორემის ძალით $\widetilde{A}$ მატრიცის ბოლო სვეტი წარმოადგენს საბა-

ზისო სვეტების წრფივ კომბინაციას, ე. ი. არსებობს ისეთი $c_1, c_2, \dots, c_r$ რიცხვები, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$c_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\dots+c_r\begin{pmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{mr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

ან რაც იგივეა

$$c_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\dots+c_r\begin{pmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{mr}\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}a_{1\,r+1}\\a_{2\,r+1}\\\vdots\\a_{m\,r+1}\end{pmatrix}+\dots+0\times$$

$$\times\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $x_1=c_1$, $x_2=c_2, \dots$, $x_r=c_r$, $x_{r+1}=0, \dots$, $x_n=0$ არის (2.1) სისტემის ამონახსენი, ე. ი. სისტემა თავსებადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

მოვიყვანოთ წრფივ განტოლებათა თავსებადი სისტემის ამოხსნის ხერხი. ვთქვათ, (2.1) სისტემა თავსებადია. ე. ი. $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg}\widetilde{A}=r$ $(r\leqslant n)$.

დავუშვათ, $r<n$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ A და $\widetilde{A}$ მატრიცების პირველი r სტრიქონი საბაზისო სტრიქონებია. საბაზისო მინორის შესახებ თეორემის თანახმად გაფართოებული მატრიცის ყოველი სტრიქონი, დაწყებული $(r+1)$-ე სტრიქონიდან, წარმოადგენს ამ მატრიცის პირველი r სტრიქონის წრფივ კომბინაციას. ეს ნიშნავს, რომ (2.1) სისტემის ყოველი განტოლება, დაწყებული $r+1$-ე განტოლებიდან, წარმოადგენს ამ სისტემის პირველი r განტოლების შედეგს (მიიღება მუდმივებზე გამრავლებითა და შეკრებით). მაშასადამე (2.1)-ის პირველი r განტოლებისაგან შედგენილი სისტემის ყოველი ამონახსენი დააკმაყოფილებს სისტემის ყველა დანარჩენ განტოლებასაც.

ამრიგად, საკმარისია ვიპოვოთ მოცემული სისტემის პირველი r განტოლებისაგან შედგენილი სისტემის ყველა ამონახსენი. ეს სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_r \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

თუ $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობებს (თავისუფალ უცნობებს) მივანიჭებთ ნებისმიერ $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ რიცხვით მნიშვნელობებს, მაშინ (2.2) სისტემა გადაიქცევა r უცნობიან r წრფივ განტოლებათა კვადრატულ სისტემად $x_1, x_2, \ldots, x_r$ უცნობების მიმართ, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. ამიტომ მას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი $c_1, c_2, \ldots, c_r$ რომელიც მოიძებნება კრამერის ფორმულებით. მაშასადამე, ნებისმიერად აღებული $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ რიცხვებისათვის არსებობს რიცხვთა ერთადერთი ერთობლიობა $c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n$, რომელიც წარმოადგენს (2.1) სისტემის ამონახსენს. რადგანაც $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობების მნიშვნელობები შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერად, ამიტომ (2.1) სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე უსასრულოა. ვაჩვენოთ, რომ ამ გზით მიიღება სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი. მართლაც, თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ რაიმე ამონახსენია, მაშინ $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობებისათვის შესაბამისად $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$ მნიშვნელობების მინიჭებით (2.2) სისტემიდან მიიღება სწორედ მოცემული ამონახსენი.

თუ $r=n\leqslant m$, მაშინ მოცემული სისტემა ტოლფასია n-უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა სისტემისა ნულისაგან განსხვავებული დეტერმინანტით, ამიტომ მას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ $\operatorname{Rg} A=2$ და $\operatorname{Rg}\widetilde{A}=3$, ამიტომ, კრონეკერ-კაპელის თეორემის ძალით სისტემა არათავსებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ სისტემა.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

ვინაიდან

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

ამიტომ $\mathrm{Rg}\, A = 3 < 4$ და, მაშასადამე, სისტემას აქვს უამრავი ამონახსენი.

ჩავწეროთ მოცემული სისტემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 - 2x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 + x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4 - x_4. \end{cases}$$

აქედან კრამერის ფორმულების გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$x_1 = 9x_4 - 7, \quad x_2 = 16x_4 - 15, \quad x_3 = 12x_4 - 11,$$

სადაც x_4 ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

რადგან $\mathrm{Rg}\, A = 2$, ამიტომ, როგორც ვიცით, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსენს

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

§ 8. წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემები

განვიხილოთ n-უცნობიან m წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

ცხადია, რომ (3.1) სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგან $x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_n = 0$ ყოველთვის აკმაყოფილებს სისტემას (თავსებადობა გამომდინარეობს აგრეთვე კრონეკერ-კაპელის თეორემიდან). ამ ამონახსენს ეწოდება ნულოვანი ანუ ტრივიალური ამონახსენი.

დავადგინოთ, რა შემთხვევაში აქვს ერთგვაროვან სისტემას არანულოვანი ამონახსნებიც. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. იმისათვის, რომ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის A მატრიცის რანგი ნაკლები იყოს უცნობთა n რიცხვზე.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ, სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნები. ვაჩვენოთ, რომ $\mathrm{Rg}\, A=r<n$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $r=n$. მაშინ, როგორც ვიცით (§ 2), სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი. მაშასადამე, გარდა ნულოვანისა მას სხვა ამონახსენი არ გააჩნია, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ, $r<n$. მაშინ, როგორც ვიცით (§ 2), სისტემას გააჩნია ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, ე. ი. გააჩნია არანულოვანი ამონახსნები. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან უშუალოდ მიიღება:

შ ე დ ე გ ი 1. თუ ერთგვაროვანი სისტემის განტოლებათა რაოდენობა ნაკლებია უცნობთა რაოდენობაზე ($m<n$), მაშინ სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნები.

მართლაც, რადგან $m<n$ და $r\leqslant \min(m, n)$, ამიტომ $r<n$.

შ ე დ ე გ ი 2. იმისათვის, რომ n-უცნობიან n წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის დეტერმინანტი უდრიდეს ნულს.

პირობა $|A|=0$ აუცილებელია, რადგან თუ $|A|\neq 0$, მაშინ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ნულოვანი ამონახსენი. ეს პირობა საკმარისიცაა, რადგანაც თუ $|A|=0$, მაშინ $\mathrm{Rg}\, A<n$ და მოცემულ სისტემას გააჩნია ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა. ვთქვათ მოცემული გვაქვს საშეუცნობიან სამ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

რომლისთვისაც $\Delta = 0$, ხოლო ერთი მაინც მეორე რიგის მინორი, მაგალითად

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

მაშინ (3.2) სისტემის პირველი ორი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases} \tag{3.3}$$

რადგანაც $M_{33} \neq 0$, ამიტომ (3.3)-ს ყოველი z-ისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსენი

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{M_{33}} z = \frac{M_{31}}{M_{33}} z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{M_{33}} z = -\frac{M_{32}}{M_{33}} z. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი z-ისათვის (3.4) არის (3.2) სისტემის მესამე განტოლების ამონახსენი. მართლაც

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \frac{M_{31}}{M_{33}} \cdot a_{31}z - \frac{M_{32}}{M_{33}} a_{32}z + a_{33}z =$$

$$= \frac{a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}}{M_{33}} z = \frac{\Delta}{M_{33}} z = 0,$$

ე. ი. სისტემის მესამე განტოლება არის ამავე სისტემის პირველი ორი განტოლების შედეგი.

მაშასადამე, როცა $\Delta = 0$ და $M_{33} \neq 0$, მაშინ (x, y, z), სადაც z ნებისმიერია, ხოლო x და y გამოითვლება (3.4) ტოლობებით არის (3.2) სისტემის ამონახსენი, ე. ი. სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც (3.2) სისტემისათვის $\Delta=0$ და ყველა მეორე რიგის მინორი ნულის ტოლია. ცხადია სისტემის ერთი მაინც კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11}\neq 0$. (3.2) სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ

$$x=-\frac{a_{12}}{a_{11}}y-\frac{a_{13}}{a_{11}}z. \tag{3.5}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (x, y, z), სადაც y და z ნებისმიერია, ხოლო x განისაზღვრება (3. 5) ტოლობით, არის (3.2) სისტემის ამონახსენი. ე. ი ამ შემთხვევაშიც (3.2) სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0\\ x+2z=0\\ 4x-y+3z=0. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-5\neq 0,$$

ამიტომ სისტემას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 3x+2y+z=0\\ x-y-z=0\\ x+4y+3z=0. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

ე. ი. სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე. რადგან მინორი

$$\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

ამიტომ სისტემის A მატრიცის რანგია 2.

მოცემული სისტემის ამონახსნების მოსაძებნად განვიხილოთ სისტემა

$$\begin{cases} 3x + 2y = -z \\ x - y = z. \end{cases}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ სისტემის ამონახსენია $x = \frac{1}{5}z$, $y = -\frac{4}{5}z$, სადაც z ნებისმიერი რიცხვია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ, რომ $\operatorname{Rg} A = 1$, ე. ი. A მატრიცის მეორე რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია.

ამრიგად, სისტემას გააჩნია ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც განისაზღვრებიან ტოლობით $x = 0{,}5y - 0{,}5z$, სადაც y და z ნებისმიერი რიცხვებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან მოცემულ ერთგვაროვან სისტემაში განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, ამიტომ მას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე.

რადგან მინორი

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ამიტომ მოცემული სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} 2x + y = z \\ x - y = -2z. \end{cases}$$

აქედან $x = -\frac{1}{3}z$, $y = \frac{5}{3}z$, სადაც z ნებისმიერი რიცხვია.

§ 4. წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენის სტრუქტურა

დავამტკიცოთ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემების ზოგიერთი თვისება.

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. თუ $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ სტრიქონ-მატრიცები (3.1) სისტემის ამონახსნებია, მაშინ მათი ჯამი აგრეთვე არის ამ სისტემის ამონახსენი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან X და Y არიან (3.1) სისტემის ამონახსნები, ამიტომ ნებისმიერი k-სათვის ($k=1, 2, \dots, m$)

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n=0,$$
$$a_{k1}y_1+a_{k2}y_2+\cdots+a_{kn}y_n=0.$$

ამ ორი ტოლობის შეკრებით მივიღებთ

$$a_{k1}(x_1+y_1)+a_{k2}(x_2+y_2)+\cdots+a_{kn}(x_n+y_n)=0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $X+Y$ არის (3.1) სისტემის ამონახსენი. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 4.2. თუ $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ არის (3.1) სისტემის ამონახსენი, მაშინ ნებისმიერი c მუდმივისათვის cX აგრეთვე არის ამ სისტემის ამონახსენი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან X არის (3.1) სისტემის ამონახსენი, ამიტომ ნებისმიერი k-სათვის ($k=1,2, \dots, m$)

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n=0.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ c-ზე, მივიღებთ

$$a_{k1}(cx_1)+a_{k2}(cx_2)+\cdots+a_{kn}(cx_n)=0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ cX არის (3.1) სისტემის ამონახსენი. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 4.3. ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნების ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია აგრეთვე არის ამ სისტემის ამონახსენი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.1. ერთგვაროვანი სისტემის $X_1, X_2, \dots, X_k$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსენთა სისტემას ეწოდება ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემა, თუ სისტემის ყოველი ამონახსენი წარმოადგენს მათ წრფივ კომბინაციას, ე. ი. ამ სისტემის ნებისმიერი X ამონახსენისათვის არსებობს ისეთი $c_1, c_2, \dots, c_k$ მუდმივები, რომ

$$X=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_kX_k \tag{4.1}$$

თ ე ო რ ე მ ა 4.4. (ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემის არსებობის შესახებ). თუ ერთგვაროვანი (3.1) სისტემის A მატრიცის რან-

გი $r<n$, მაშინ ამ სისტემას გააჩნია ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემა, რომელიც შედგება $k=n-r$ ამონახსენისაგან.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ A მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული r რიგის მინორი მოთავსებულია ამ მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში. სისტემის პირველი r განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1\,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2\,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r\,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4.2}$$

თავისუფალი უცნობებისათვის $x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0,\dots,x_n=0$ მნიშვნელობების მინიჭების შემდეგ (4.2)-დან მიღებული სისტემის ამონახსენი იყოს $x_1=\alpha_1^1,\ x_2=\alpha_2^1,\dots,x_r=\alpha_r^1$. მაშინ (3.1) სისტემის ერთ-ერთი ამონახსენი იქნება

$$X_1=(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1,\dots,\alpha_r^1,\ 1,\ 0,\dots,0).$$

ანალოგიურად, თუ თავისუფალ უცნობებს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს $x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1,\ x_{r+3}=0,\dots,x_n=0$, მივიღებთ (3.1) სისტემის მეორე ამონახსენს

$$X_2=(\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\dots,\alpha_r^2,\ 0,\ 1,\dots,0).$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ (3.1) სისტემის $k=n-r$ რაოდენობის ამონახსენს:

$$\begin{aligned} X_1&=(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1,\dots,\alpha_r^1,\ 1,\ 0,\dots,0),\\ X_2&=(\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\dots,\alpha_r^2,\ 0,\ 1,\dots,0),\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ X_k&=(\alpha_1^k,\ \alpha_2^k,\dots,\alpha_r^k,\ 0,\ 0,\dots,1). \end{aligned}$$

ამონახსნთა $X_1,\ X_2,\dots,X_k$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც

$$C=\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_r^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_r^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \cdots & \alpha_r^k & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

მატრიცის რანგი არის k (ამ მატრიცის ბოლო k სვეტისაგან შედგენილი k რიგის მინორი ნულისაგან განსხვავებულია).

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ამონახსნები $X_1,\ X_2,\dots,X_k$ ქმნიან ფუნდამენტურ სისტემას. ვთქვათ

$$X=(\beta_1,\ \beta_2,\dots,\beta_r,\ \beta_{r+1},\dots,\beta_n)$$

(3.1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსენია. განვიხილოთ სტრიქონ-მატრიცა

$$X_0 = X - \beta_{r+1} X_1 - \beta_{r+2} X_2 - \cdots - \beta_n X_n.$$

თეორემა 4.3-ის ძალით, X_0 არის (3.1) სისტემის ამონახსენი. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ სტრიქონ-მატრიცის ბოლო k ელემენტი ნულია, ე. ი.

$$X_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, 0, 0, \ldots, 0).$$

რადგან X_0 (4.2) სისტემის ამონახსნიცაა, ამიტომ

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1r}\xi_r &= 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2r}\xi_r &= 0. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}\xi_1 + a_{r2}\xi_2 + \cdots + a_{rr}\xi_r &= 0. \end{aligned}$$

ამრიგად $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ რიცხვები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან და ამიტომ

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_r = 0.$$

მაშასადამე

$$X - \beta_{r+1} X_1 - \beta_{r+2} X_2 - \cdots - \beta_n X_n = (0, 0, \ldots, 0),$$

ე. ი.

$$X = \beta_{r+1} X_1 + \beta_{r+2} X_2 + \cdots + \beta_n X_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემის აგების ზემოთ მოყვანილი პროცესიდან ჩანს, რომ ფუნდამენტურ სისტემათა რაოდენობა უსასრულოა. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი მათგანი შედგება ზუსტად $n-r$ ამონახსენისაგან.

მართლაც, ვთქვათ $X_1, X_2, \ldots, X_p$ და $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ ერთგვაროვანი (3.1) სისტემის ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემებია. ვაჩვენოთ, რომ $p = q$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, $p \neq q$. ვთქვათ $q < p$.

განვიხილოთ ტოლობა

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_p X_p = 0. \tag{4.3}$$

რადგან $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემაა, ამიტომ

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1^1 Y_1 + \alpha_2^1 Y_2 + \cdots + \alpha_q^1 Y_q, \\ X_2 &= \alpha_1^2 Y_1 + \alpha_2^2 Y_2 + \cdots + \alpha_q^2 Y_q, \\ \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_p &= \alpha_1^p Y_1 + \alpha_2^p Y_2 + \cdots + \alpha_q^p Y_q. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4) და (4.3) ტოლობებიდან მიიღება:

$$\begin{aligned}&(\alpha_1^1 c_1+\alpha_1^2 c_2+\cdots+\alpha_1^p c_p) Y_1+\\+&(\alpha_2^1 c_1+\alpha_2^2 c_2+\cdots+\alpha_2^p c_p) Y_2+\\+&\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad +\\+&(\alpha_q^1 c_1+\alpha_q^2 c_2+\cdots+\alpha_q^p c_p) Y_q=O.\end{aligned}$$

ვინაიდან $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\begin{cases}\alpha_1^1 c_1+\alpha_1^2 c_2+\cdots+\alpha_1^p c_p=0\\ \alpha_2^1 c_1+\alpha_2^2 c_2+\cdots+\alpha_2^p c_p=0\\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\\ \alpha_q^1 c_1+\alpha_q^2 c_2+\cdots+\alpha_q^p c_p=0.\end{cases}$$

რადგან $q<p$, ამიტომ თეორემა 3.1-ის პირველი შედეგის ძალით ამ სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნები, ე. ი. (4.3) ტოლობას ადგილი აქვს მაშინაც, როცა $c_1, c_2, \ldots, c_p$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ეს იმას ნიშნავს, რომ $X_1, X_2, \ldots, X_p$ წრფივად დამოკიდებულია და ამიტომ იგი არ შეიძლება იყოს ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემა. მივიღეთ წინააღმდეგობა ე. ი. $p=q$. ამრიგად, ამონახსენთა ყოველი ფუნდამენტური სისტემა შედგება ამონახსენთა ერთიდაიგივე რაოდენობისაგან. ამიტომ, თეორემა 4.4-ის ძალით, ერთგვაროვანი (3.1) სისტემის ამონახსენთა ყოველი ფუნდამენტური სისტემა შედგება ზუსტად $n-r$ ამონახსენისაგან.

შევნიშნოთ, რომ რადგან (3.1) სისტემის ყოველი ამონახსენი მიიღება (4.1) ტოლობიდან $c_1, c_2, \ldots, c_p$ მუდმივების სათანადო შერჩევით, ამიტომ (4.1)-ს უწოდებენ (3.1) სისტემის ზოგად ამონახსენს.

თ ე ო რ ე მ ა 4.5. წრფივი არაერთგვაროვანი (2.1) სისტემის ზოგადი ამონახსენი* უდრის მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი (3.1) სისტემის ზოგადი ამონახსენისა და (2.1) სისტემის რაიმე ამონახსენის ჯამს, ე. ი. თუ $c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_kX_k$ არის (3.1) სისტემის ზოგადი ამონახსენი, ხოლო X_0—(2.1) სისტემის რაიმე ამონახსენი, მაშინ (2.1) სისტემის ზოგადი ამონახსენია

$$X=c_1 X_1+c_2 X_2+\cdots+c_k X_k+X_0. \tag{4.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ცხადია (4.5) არის (2.1) სისტემის ამონახსენი. ვაჩვენოთ, რომ ის ზოგადი ამონახსენია. ვთქვათ, $\overline{X}$ არის (2.1) სისტე-

* ე. ი. ისეთი გამოსახულება, რომლისაგანაც მიიღება ამ სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი.

მის ნებისმიერი ამონახსენი, მაშინ $\overline{X} - X_0$ იქნება (3.1) სისტემის ამონახსენი, ე. ი. არსებობს მუდმივები $c_1, c_2, \dots, c_k$ ისეთი, რომ

$$\overline{X} - X_0 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_k X_k,$$

საიდანაც

$$\overline{X} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_k X_k + X_0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა. ვთქვათ მოცემული გვაქვს სამუცნობიან განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2 \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = b_3. \end{cases} \tag{4.6}$$

ამ სისტემიდან მიიღება განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z, \end{cases} \tag{4.7}$$

სადაც Δ_x, Δ_y, Δ_z დამხმარე დეტერმინანტებია.

მართლაც, თუ (4.6) სისტემის განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად ამ სისტემის Δ დეტერმინანტის a_{11}, a_{21}, a_{31} ელემენტების A_{11}, A_{21}, A_{31} ალგებრულ დამატებებზე და მიღებულ განტოლებებს შევკრებთ, გვექნება

$$(a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}) x + (a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31}) y + \\ + (a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31}) z = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}.$$

აქედან დეტერმინანტთა პირველი და მეათე თვისებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Delta \cdot x = \Delta_x.$$

ანალოგიურად მიიღება, რომ $\Delta \cdot y = \Delta_y$, $\Delta \cdot z = \Delta_z$.

ცხადია, რომ (4.6) სისტემის ყოველი ამონახსენი აკმაყოფილებს (4.7) სისტემის განტოლებებს. შებრუნებულ დებულებას საზოგადოდ ადგილი არა აქვს. მართლაც

$$\begin{cases} 5x - y - 2z = 1 \\ 4x - 2y - 3z = -3 \\ 3x - 3y - 4z = -7 \end{cases} \tag{4.8}$$

სისტემისათვის $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. ამიტომ ამ შემთხვევაში (4.7)

სისტემას აკმაყოფილებს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები, მაგალითად $x=y=z=0$, რომელიც არ წარმოადგენს (4.8) სისტემის ამონახსენს.

ამრიგად (4.6) და (4.7) სისტემები არაეკვივალენტურია.

(4.7) ტოლობებიდან ჩანს, რომ თუ $\Delta=0$ და Δ_x, Δ_y, Δ_z დამხმარე დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (4.7) სისტემა და აქედან გამომდინარე (4.6) სისტემაც არათავსებადია*.

შენიშვნა 2. თუ $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ და (4.6) სისტემას ერთი მაინც ამონახსენი გააჩნია, მაშინ მას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე. მართლაც, ვთქვათ (4.6) სისტემის ამონახსენია x_0, y_0, z_0 ე. ი.

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0=b_1 \\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0=b_2 \\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0=b_3. \end{cases} \tag{4.9}$$

(4.6) სისტემის განტოლებებს წევრ-წევრად გამოვაკლოთ (4.9)-ის შესაბამისი იგივეობები:

$$\begin{cases} a_{11}(x-x_0)+a_{12}(y-y_0)+a_{13}(z-z_0)=0 \\ a_{21}(x-x_0)+a_{22}(y-y_0)+a_{23}(z-z_0)=0 \\ a_{31}(x-x_0)+a_{32}(y-y_0)+a_{33}(z-z_0)=0. \end{cases} \tag{4.10}$$

მივიღეთ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ უცნობების მიმართ, რომლის დეტერინანტი ნულის ტოლია. თეორემა 3.1-ის შედეგი 2-ის ძალით (4.10) სისტემას გააჩნია ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე. მაშასადამე (4.6) სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე. კერძოდ, იმ შემთხვევაში, როდესაც $M_{33}\neq0$ (3.4)-ის ძალით (4.6) სისტემის ამონახსენი (x, y, z) მოიცემა ტოლობებით

$$x=x_0+\frac{M_{31}}{M_{33}}z,$$

$$y=y_0-\frac{M_{32}}{M_{33}}z,$$

სადაც z ნებისმიერი რიცხვია.

---

* ეს დებულება სამართლიანია ნებისმიერი რიგის სისტემებისათვის.

იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემის დეტერმინანტის ყველა მეორე რიგის მინორი ნულის ტოლია და $a_{11} \neq 0$, (3.5)-ის ძალით (4.6) სისტემის ამონახსენი (x, y, z) მოიცემა ტოლობით

$$x = x_0 - \frac{a_{12}}{a_{11}} y - \frac{a_{13}}{a_{11}} z,$$

სადაც y და z ნებისმიერი რიცხვებია.

შენიშვნა 3. თუ $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, მაშინ (4.6) სისტემას შეიძლება არ ჰქონდეს ამონახსენი. მართლაც ადვილი შესამოწმებელია, რომ სისტემა

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 3x + 3y + 3z = 12 \end{cases}$$

არათავსებადია მიუხედავად იმისა, რომ $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

ამრიგად, თუ (4.6) სისტემის ყველა დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემა ან არათავსებადია, ან აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე.

მაგალითი. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

ამოხსნა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, ამასთან მეორე რიგის მინორი

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

სისტემის პირველი ორი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - z. \end{cases}$$

აქედან $x = 1$, $y = -z$.

ამრიგად, სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც განისაზღვრებიან ტოლობებით $x = 1$, $y = -z$, სადაც z ნებისმიერი რიცხვია.

§ 5. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით

წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ერთ-ერთ მარტივ და გავრცელებულ მეთოდს წარმოადგენს უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდი ანუ გაუსის მეთოდი.

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.1}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11}\neq 0$ (თუ $a_{11}=0$, მაშინ პირველ განტოლებად ავიღებთ იმ განტოლებას, რომელშიც x_1-ის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან). გარდავქმნათ (5.1) სისტემა ისე, რომ x_1 უცნობი გამოირიცხოს ყველა განტოლებიდან გარდა პირველისა. ამისათვის მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი განტოლება გამრავლებული $\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ზე, მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი განტოლება გამრავლებული $\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ზე, და ა. შ. უკანასკნელ განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი განტოლება გამრავლებული $\frac{a_{m1}}{a_{11}}$-ზე. ამ გზით მივიღებთ (5.1) სისტემის ეკვივალენტურ განტოლებათა სისტემას. თუ მიღებული სისტემის რომელიმე განტოლების მარცხენა ნაწილის ყველა კოეფიციენტი ნულია, ხოლო თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (5.1) სისტემა არათავსებადია და ამით სისტემის ამოხსნა დამთავრებულია. თუ აღნიშნული განტოლების თავისუფალი წევრიც ნულია, მაშინ ამ განტოლების ამოგდებით მიღებული სისტემაც იქნება მოცემულის ეკვივალენტური.

ამრიგად, აღნიშნული გარდაქმნით მიიღება შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad\quad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \qquad\quad a'_{p2}x_2 + a'_{p3}x_3 + \cdots + a'_{pn}x_n = b'_p, \end{cases} \tag{5.2}$$

სადაც $p \leqslant m$, რადგან ზოგიერთი განტოლება შეიძლება აღმოჩნდეს ამოგდებული.

ვიგულისხმოთ, რომ $a'_{22} \neq 0$ (ამას ყოველთვის მივაღწევთ განტოლებათა გადანაცვლებით ან ცვლადების სათანადოდ გადანომრვით). თუ (5.2) სისტემის მესამე და ყოველ შემდეგ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორე განტოლებას, გამრავლებულს შესაბამისად რიცხვებზე

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}},\ \frac{a'_{42}}{a'_{22}},\ldots,\ \frac{a'_{p2}}{a'_{22}},$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2\\
a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\quad\cdot\\
a''_{q3}x_3 + \cdots + a''_{qn}x_n &= b''_q,
\end{aligned}$$

სადაც $q \leqslant p$.

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, რომელიღაც ეტაპზე დავადგენთ, რომ მოცემული სისტემა არათავსებადია ან მოცემული სისტემა საბოლოოდ დაიყვანება მის ეკვივალენტურ შემდეგ სისტემაზე

$$\left\{\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2\,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\quad\cdot\\
a^{(k-2)}_{k-1,\,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1,\,k}x_k + \cdots + a^{(k-2)}_{k-1,\,n}x_n &= b^{(k-2)}_{k-1},\\
a^{(k-1)}_{kk}x_k + \cdots + a^{(k-1)}_{kn}x_n &= b^{(k-1)}_k,
\end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

სადაც $a_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0, \ldots, a^{(k-2)}_{k-1,\,k-1} \neq 0,\ a^{(k-1)}_{kk} \neq 0,\quad k \leqslant q \leqslant m.$

ამ შემთხვევაში (5.3) სისტემა თავსებადია. მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, როცა $k=n$ და უსასრულოდ ბევრი ამონახსენი, როცა $k<n$.

მართლაც თუ $k=n$, მაშინ (5.3) სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\left\{\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\quad\cdot\\
a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n.
\end{aligned}\right.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან ვიპოვით x_n-ს. მისი ჩასმით უკანასკნელის წინა განტოლებაში ვიპოვით x_{n-1}-ს და ა. შ. პირველი განტოლებიდან ვიპოვით x_1-ს.

თუ $k < n$, მაშინ $x_{k+1}, \dots, x_n$ თავისუფალი უცნობებისათვის ნებისმიერი მნიშვნელობების მინიჭებით (5.3) სისტემიდან მივიღებთ $x_1, x_2, \dots, x$ უცნობების მნიშვნელობებს, ე. ი. ამ შემთხვევაში სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე.

გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის დროს უმჯობესია მოვახდინოთ სისტემის კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი მატრიცის გარდაქმნა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & 23 & -26 \\ 0 & 0 & 34 & -23 & 41 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & 23 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right).$$

ჩვენ მივედით სისტემაზე, რომელიც შეიცავს განტოლებას $0=15$, ამიტომ მოცემული სისტემა არათავსებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -5 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$
\to\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 1 & 1 & 2\\
0 & 3 & 1 & -3 & 1\\
0 & 0 & -10 & 12 & 2\\
0 & 0 & -16 & -3 & -19
\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 1 & 1 & 2\\
0 & 3 & 1 & -3 & 1\\
0 & 0 & -10 & 12 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right).
$$

ამრიგად გარდაქმნის შედეგად მივედით სისტემაზე

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2\\
3x_2 + x_3 - 3x_4 = 1\\
-10x_3 + 12x_4 = 2\\
x_4 = 1,
\end{cases}
$$

რომელსაც გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ სისტემა

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3\\
4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9\\
x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0.
\end{cases}
$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & 1 & 3\\
2 & -1 & 3 & -1 & 3\\
4 & 3 & 1 & 1 & 9\\
1 & -3 & 4 & -2 & 0
\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & 1 & 3\\
0 & -5 & 5 & -3 & -3\\
0 & -5 & 5 & -3 & -3\\
0 & -5 & 5 & -3 & -3
\end{array}\right)\to
$$

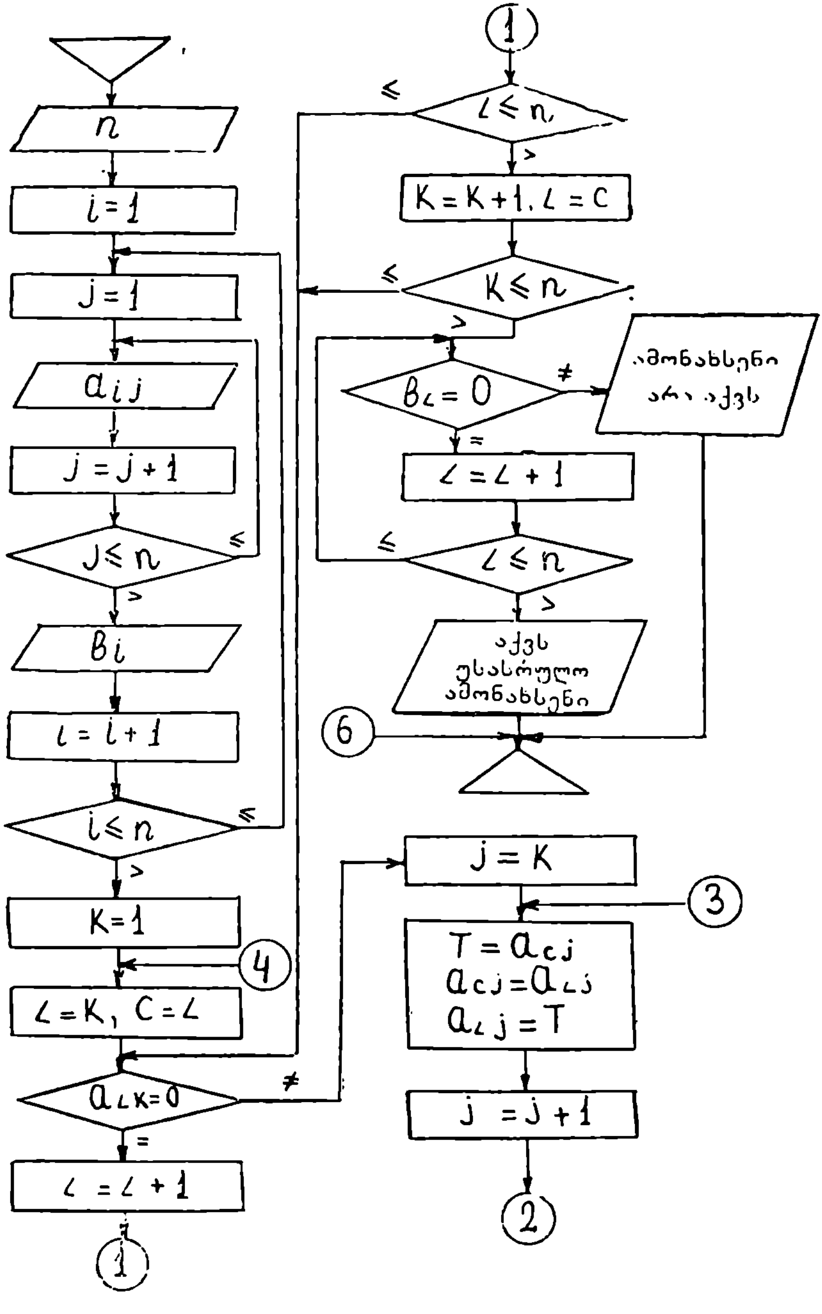
$$
\to\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & 1 & 3\\
0 & -5 & 5 & -3 & -3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

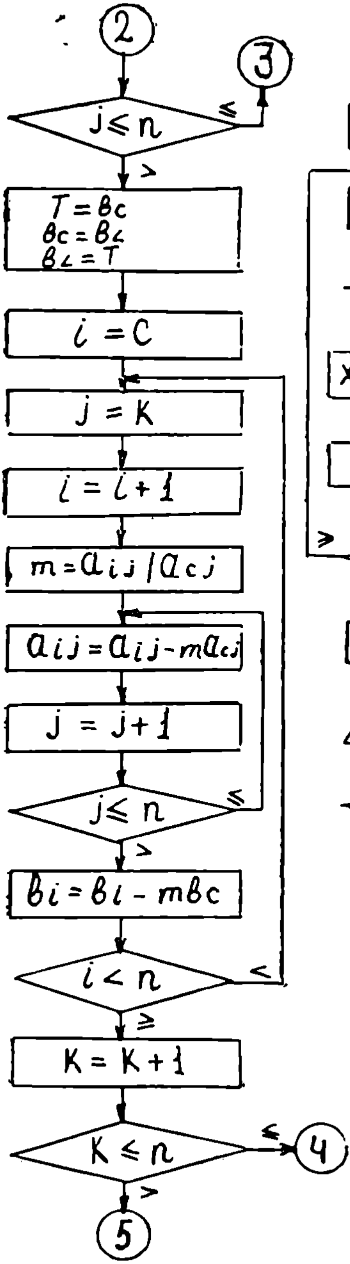
ამრიგად, მოცემული სისტემა ტოლფასია სისტემის

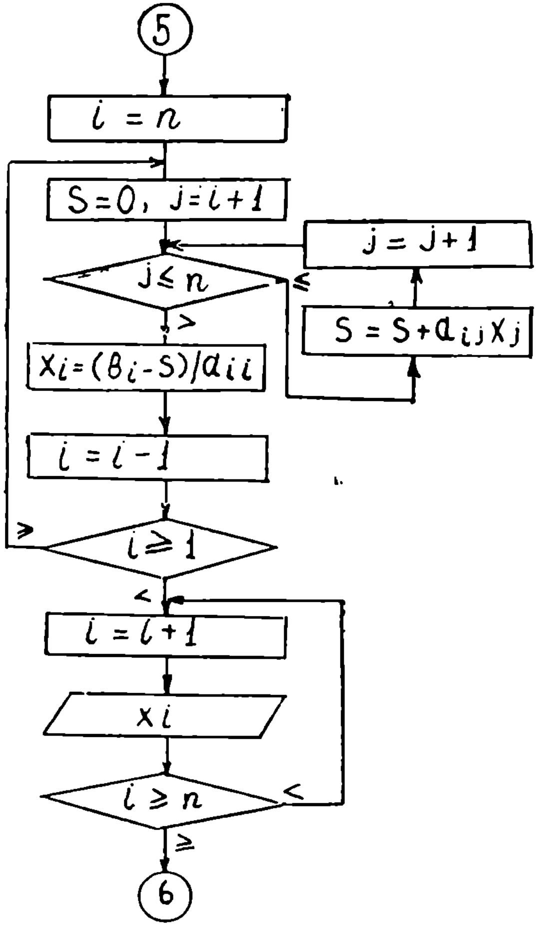
$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3\\
-5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -3,
\end{cases}
$$

რომელსაც გააჩნია ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც მოიცემიან ტოლობებით $x_1 = \frac{9}{5} - x_3 - \frac{1}{5}x_4$, $x_2 = \frac{3}{5} + x_3 - \frac{3}{5}x_4$, სადაც x_3 და x_4 ნებისმიერი რიცხვებია.

გაუსის მეთოდის ბლოკ-სქემა




2
3
j ≤ n
≤
>
T = βc
βc = βℓ
βℓ = T
i = C
j = K
i = i + 1
m = a_ij / a_cj
a_ij = a_ij - m a_cj
j = j + 1
j ≤ n
≤
>
b_i = b_i - m b_c
i < n
<
≥
K = K + 1
K ≤ n
≤
4
>
5


5
i = n
S = 0, j = i + 1
j = j + 1
j ≤ n
≤
>
S = S + a_ij x_j
x_i = (b_i - S) / a_ii
i = i - 1
≥
i ≥ 1
<
i = i + 1
x i
i ≥ n
<
≥
6

გაუსის მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
5 REM --МЕТОД ГАУСА--
10 OPEN 'LP:' FOR OUTPUT
   AS FILE #1
20 DATA n, a11, a12, ..., a1n,
   b1, a21, a22, ..., a2n, b2, an1,
   an2, ..., ann, bn
30 READ N
40 I=1
50 FOR J=1 TO N
60 READ A (I, J)
70 NEXT J
80 READ B (I)
90 I=I+1\IF I<=N GO TO
   50
100 K = 1
110 L = K \ C = L
120 IF A(L, K)<>0 GO TO 210
130 L = L + 1 \ IF L<=N
    GO TO 120
140 K = K + 1 \ L = C \ IF
    K<=N GO TO 120
150 IF B (L) = 0 THEN L =
    =L+1 \ GO TO 180
160 PRINT #1, „НЕ ИМЕЕТ
    РЕШЕНИЯ“
170 GO TO 410
180 IF L<=N GO TO 150
190 PRINT #1, „ИМЕЕТ БЕС-
    КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТ-
    ВО РЕШЕНИЙ“
200 GO TO 410
210 J = K
220 T = A (C, J) \ A (C, J) =
    = A (L, J) \ A (L, J) = T
230 J = J + 1 \ IF J<=N
    GO TO 220
240 T = B (C) \ B (C) = B (L) \
    \ B (L) = T
250 I = C
260 J = K \ I=I + 1 \ M =
    A (I, J) / A (C, J)
270 A (I, J) = A (I, J) — M * A
    (C, J) \ J=J+1
280 IF J<=N GO TO 270
290 B (I) = B (I) — M * B (C)
300 IF I<N GO TO 260
310 K=K+1 \ IF K<=N
    GO TO 110
320 I = N
330 S = 0 \ J = I + 1
340 IF J<=N THEN S = S +
    + A (I, J) * X (J)
350 J = J +1 \ IF J<=N
    GO TO 340
360 X (I) = (B (I) — S) / A (I,
    I) \ I = I — 1
370 IF I>=N GO TO 330
380 I = I + 1
390 PRINT #1, 'X ('; I; ') =
    = '; X (I)
400 IF I<N GO TO 380
410 END
```

გაუსის მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
      PROGRAM CAUS
      DIMENSION A(N, N), B(N)
      REAL * 4 Q
      READ (5, 10) ((A(I, J), J=
     =1, N), I=1, N), (B(I), I=
     =1, N)
   10 FORMAT (F 7. 4)
      K=1
   20 L=K
      L1=L
   25 DO 30 L=1, N
      IF (A(L, K). NE. 0) GOTO 50
   30 CONTINUE
      L=L1
      K=K+1
      IF(K.LE.N) GOTO 25
      DO 40 L=L1, N
      IF (B(L). NE. 0) GOTU 150
   40 CONTINUE
      GO TO 130
   50 DO 60 J=K, N
      T=A(L1, J)
      A(L1, J)=A(L, J)
      A(L, J)=T
   60 CONTINUE
      T=B(L1)
      B(L1)=B(L)
      B(L) = T
      I1=L1+1
      DO 80 I=I1, N
      DO 70 J=K, N
      Q=A(I, J)/A(L1, J)
      A(I, J)=A(I, J)-Q * A(L1, J)
   70 CONTINUE
      B(I)=B(I)—Q * B(I.1)
   80 CONTINUE
      K=K+1
      IF(K. LE. N) GOTO 20
      I=N
      S=0
      J1=I+1
   90 DO 100 J=J1, N
  100 S=S+A(I, J) * X(J)
      X(I)=(B(I)—S)/A(I, I)
      I=I—1
      IF (I. GE. 1) GO TO 90
      DO 120 I=1, N
      WRITE (6, 110), X(I)
  110 FORMAT (5X, F7. 4)
  120 CONTINUE
      GO TO 170
  230 WRITE (6, 140)
  140 FORMAT (5X,' СИСТЕМА
      ИМЕЕТ БЕСКОНЕЧНОЕ
      МНОЖЕСТВО РЕШЕ-
      НИЙ')
      GO TO 170
  150 WRITE (6 ,160)
  160 FORMAT (5X, ' СИСТЕМА
      НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЯ')
  170 STOP
      END
```

§ 6. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციის მეთოდით

როდესაც განტოლებათა სისტემის უცნობთა რიცხვი დიდია, მაშინ გაუსის მეთოდით (რომელიც გვაძლევს ზუსტ ამონახსნს) სისტემის ამოხსნა შრომატევად გამოთვლებთან არის დაკავშირებული. ასეთ შემთხვევაში ზოგჯერ მიმართავენ სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნის მეთოდებს. მოვიყვანოთ სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის

მოძებნის მარტივი იტერაციის (ე. წ.მიმდევრობითი მიახლოების) და ზეიდელის მეთოდები.

განვიხილოთ n-უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n. \end{cases} \tag{6.1}$$

შევცვალოთ ეს სისტემა მისი ტოლფასი შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{2n} x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \cdots + \alpha_{nn} x_n. \end{cases} \tag{6.2}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

მაშინ (6.2) სისტემა ასე ჩაიწერება

$$X = \beta + \alpha X.$$

ვთქვათ (6.2) სისტემის ამონახსენის ნულოვანი (საწყისი) მიახლოებაა

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

სადაც $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ ნებისმიერი რიცხვებია.

ავაგოთ მიმდევრობა (მარტივი იტერაციის პროცესი)

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \beta + \alpha X^{(0)}, \\ X^{(2)} &= \beta + \alpha X^{(1)}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X^{(k)} &= \beta + \alpha X^{(k-1)}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

სადაც

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

ამ მიმდევრობის წევრებს უწოდებენ შესაბამისად სისტემის ამონახსენის პირველ, მეორე და ა. შ. k-ურ მიახლოებებს, ხოლო თვით მიმდევრობის აგების პროცესს — იტერაციის პროცესს.

თუ მიახლოებით ამონახსენთა $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, ე. ი.

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \overline{X},$$

მაშინ იგი იქნება (6.2) სისტემის ამონახსენი. მართლაც, თუ ტოლობაში

$$X^{(k)} = \beta + \alpha X^{(k-1)} \tag{6.3}$$

გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ

$$\overline{X} = \beta + \alpha \overline{X},$$

ე. ი.

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$$

არის (6.2) სისტემის ამონახსენი.

გაშლილი სახით (6.3) ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$x_i^{(k)} = \beta_i + \alpha_{i1} x_1^{(k-1)} + \alpha_{i2} x_2^{(k-1)} + \cdots + \alpha_{in} x_n^{(k-1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k-1)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots).$$

ისმება ამოცანა: რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდნენ (6.2) სისტემის კოეფიციენტები, რომ ამ სისტემას ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსენი და იტერაციის პროცესი იყოს კრებადი. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 6.1. თუ (6.2) სისტემის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| = q < 1, \tag{6.4}$$

მაშინ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი და იტერაციის პროცესი კრებადია ნებისმიერი საწყისი მიახლოებისათვის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ (6.2) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ შესა-

ზამის ერთგვაროვან $X=\alpha X$ განტოლებას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი. მართლაც, ვთქვათ

$$X^{*}=\begin{pmatrix} x_1^{*} \\ x_2^{*} \\ \vdots \\ x_n^{*} \end{pmatrix}$$

არის $X=\alpha X$ განტოლების ამონახსენი. ე. ი.

$$x_i^{*}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,x_j^{*}\quad (i=1,\,2,\ldots,\,n).$$

აქედან (6.4) პირობის ძალით

$$|x_i^{*}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}\,x_j^{*}|\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j^{*}|\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\leqslant q\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{*}|\cdot$$

საიდანაც

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{*}|\leqslant q\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{*}|,$$

ანუ

$$(1-q)\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{*}|\leqslant 0.$$

რადგან $1-q>0$, ამიტომ $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{*}|\leqslant 0$, ე. ი. $x_1^{*}=x_2^{*}=\cdots=x_n^{*}=0$.

ახლა ვაჩვენოთ იტერაციის პროცესის კრებადობა. ვთქვათ

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

არის (6.2) სისტემის ამონახსენი, $X^{(k)}$ — ამონახსენის k-ური მიახლოება, ხოლო

$$\Delta^{(k)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_i^{(k)}|,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} &x_i=\beta_i+\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\cdots+\alpha_{in}x_n,\\ &x_i^{(k)}=\beta_i+\alpha_{i1}x_1^{(k-1)}+\alpha_{i2}x_2^{(k-1)}+\cdots+\alpha_{in}x_n^{(k-1)},\\ &i=1,\,2,\ldots,\,n. \end{aligned}\tag{6.5}$$

ამ ტოლობებიდან (6.4)-ის ძალით გვაქვს

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leqslant |\alpha_{i1}||x_1 - x_1^{(k-1)}| + |\alpha_{i2}||x_2 - x_2^{(k-1)}| + \cdots +$$
$$+ |\alpha_{in}||x_n - x_n^{(k-1)}| \leqslant \Delta^{(k-1)}(|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \cdots + |\alpha_{in}|) \leqslant q\,\Delta^{(k-1)}$$

საიდანაც

$$\Delta^{(k)} \leqslant q\,\Delta^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

აქედან მივიღებთ

$$\Delta^{(k)} \leqslant q\,\Delta^{(k-1)} \leqslant q^2\,\Delta^{(k-2)} \leqslant \cdots \leqslant q^k\,\Delta^{(0)}. \tag{6.6}$$

რადგან $0 < q < 1$, ამიტომ (6.6)-დან გვაქვს

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{(k)} = 0.$$

ეს ტოლობა კი ეკვივალენტურია ტოლობების

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. თუ $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, მაშინ (6.1) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}\,x_2 + \alpha_{13}\,x_3 + \cdots + \alpha_{1n}\,x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}\,x_2 + \alpha_{23}\,x_3 + \cdots + \alpha_{2n}\,x_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}\,x_1 + \alpha_{n2}\,x_2 + \cdots + \alpha_{n\,n-1}\,x_{n-1}, \end{cases}$$

სადაც

$$\beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{როცა } i \neq j, \\ 0, & \text{როცა } i = j, \end{cases}$$

ე. ი. მას აქვს (6.2) სახე. ამ შემთხვევაში (6.4) პირობა მიიღებს სახეს

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

შენიშვნა 2. თეორემა 6.1-ის პირობებში გვაქვს

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant \frac{\beta_0}{1-q}, \tag{6.7}$$

სადაც

$$\beta_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\beta_i|.$$

მართლაც, (6.5)-დან მივიღებთ

$$| x_i | \leqslant \beta_0 + q \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i | \, .$$

აქედან გამომდინარეობს (6.7).

ახლა მოვიყვანოთ ცდომილების შეფასება. (6.6)-ის და (6.7)-ის ძალით

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i - x_i^* | \leqslant q^k \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i - x_i^{(0)} | \leqslant$$

$$\leqslant q^k \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i | + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i^{(0)} | \right) \leqslant q^k \left(\gamma + \frac{\beta_0}{1-q} \right),$$

სადაც

$$\gamma = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i^{(0)} | \, .$$

ამრიგად, იტერაციის მეთოდისათვის ცდომილება შეგვიძლია შევაფასოთ შემდეგი უტოლობით

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i - x_i^{(k)} | \leqslant q^k \left(\gamma + \frac{\beta_0}{1-q} \right).$$

იმისათვის, რომ δ სიზუსტით განვსაზღვროთ (6.1) სისტემის ამონახსენი იტერაციის პროცესი უნდა გავაგრძელოთ, ვიდრე არ შესრულდება პირობა

$$q^k \left(\gamma + \frac{\beta_0}{1-q} \right) < \delta,$$

საიდანაც

$$k > \frac{\ln \left(\dfrac{\delta}{\gamma + \dfrac{\beta_0}{1-q}} \right)}{\ln q} \, .$$

მოვიყვანოთ ახლა სისტემის მიახლოებითი ამოხსნის პოვნის ზეიდელის მეთოდი. ეს მეთოდი წარმოადგენს მარტივი იტერაციის მეთოდის გარკვეულ მოდიფიკაციას. მისი იდეა მდგომარეობს შემდეგში: x_i უცნობის $(k+1)$-ე მიახლოების გამოთვლაში გათვალისწინებულია $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ უცნობებისათვის უკვე გამოთვლილი $(k+1)$-ე მიახლოება. ვთქვათ განტოლებათა სისტემა დაყვანილია (6.2) სახეზე. ამ სისტემის ამონახსენის საწყისი მიახლოება იყოს

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

დავუშვათ, რომ სისტემის ამონახსენის k-ური მიახლოება

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

ცნობილია. ზეიდელის მეთოდის მიხედვით $(k+1)$-ე მიახლოებას ვაგებთ შემდეგი ფორმულებით

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)},$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)},$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}.$$

$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$.

თუ მოყვანილი პროცესი კრებადია, მაშინ მისი ზღვარი იქნება (6.2) სისტემის ამონახსენი.

შევნიშნოთ, რომ მარტივი იტერაციის პროცესის კრებადობის (6.4) საკმარისი პირობა საკმარისია აგრეთვე ზეიდელის მეთოდის პროცესის კრებადობისათვის. იმ შემთხვევაში, როდესაც კრებადობის პირობა არ არის შესრულებული, იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს იტერაციის პროცესის გამოყენება, შესაძლებელია მოვიქცეთ შემდეგნაირად: თუ სისტემის დეტერმინანტი $|A| \neq 0$, მაშინ (6.1) სისტემის გამრავლებით მატრიცაზე $D = A^{-1} - \mathrm{E}$, სადაც $\mathrm{E} = (e_{ij})$ $(i,\ j = 1,\ 2, \dots, n)$, მივიღებთ

$$(A^{-1} - \mathrm{E})\, AX = DB.$$

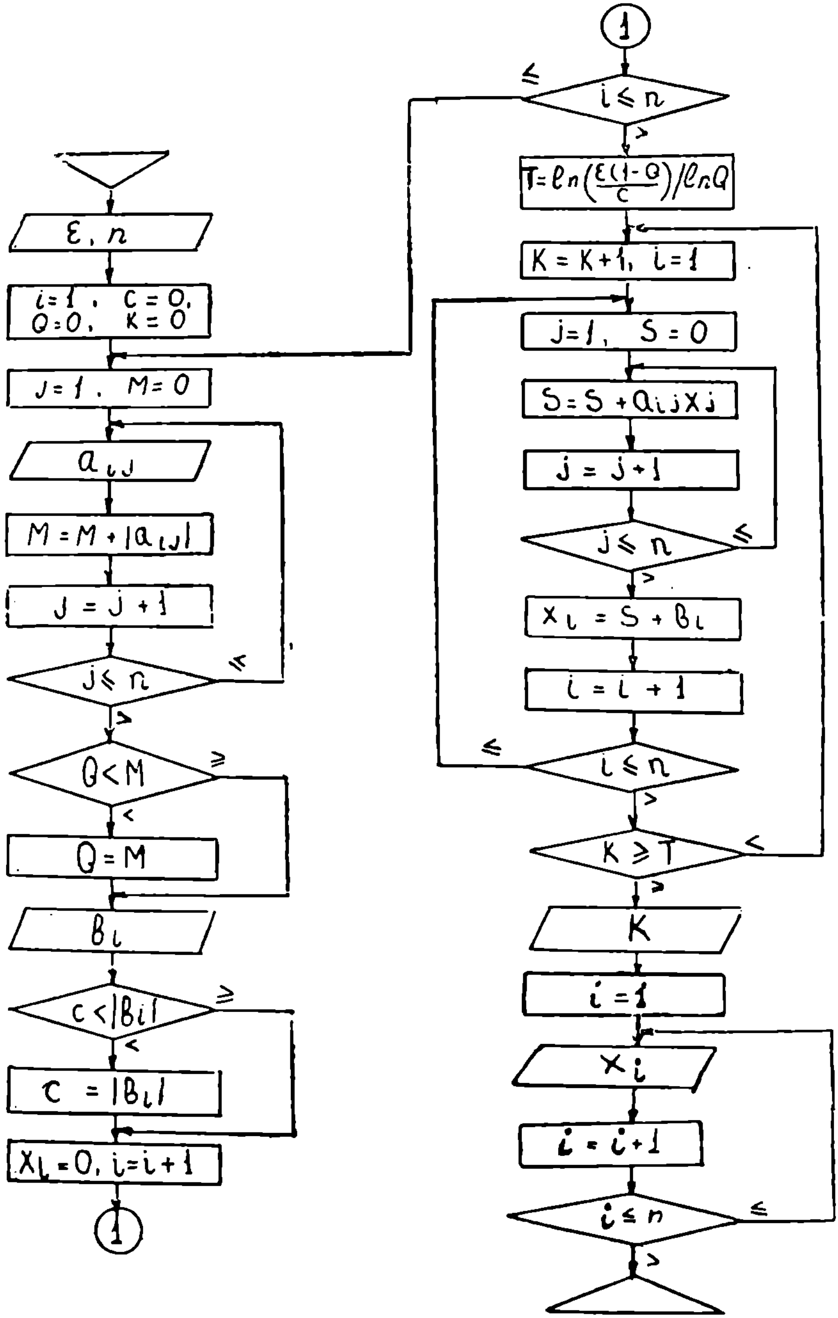
აქედან

$$X = \beta + \alpha X,$$

სადაც $\alpha = \mathrm{E}A$ და $\beta = DB$. ამის შემდეგ უნდა შევარჩიოთ E მატრიცა ისე, რომ შესრულდეს (6.4) პირობა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. კრებად იტერაციის პროცესს აქვს ის თვისება, რომ ცალკეულ გამოთვლებში დაშვებული შეცდომა გავლენას არ ახდენს საბოლოო შედეგზე, რადგანაც შეცდომებიანი მიახლოება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ახალი საწყისი მიახლოება.

ზეიდელის მეთოდის ბლოკ-სქემა



ზეიდელის მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
5 REM—МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ—
10 OPEN 'LP:' FOR OUTPUT
   AS FILE # 1
20 DATA ε, n, a11, a12, ..., a1n,
   b1, a21, a22, ..., a2n, b2, an1,
   an2, ..., ann, bn
30 READ E, N
40 C = 0 \ Q = 0
50 FOR I = 1 TO N
60 M = 0
70 FOR J = 1 TO N
80 READ A (I, J)
90 M = M + ABS (A (I, J) )
100 NEXT J
110 IF Q < M THEN Q = M
120 READ B (I)
130 IF C < ABS (B (I)) THEN
    C = ABS (B (I) )
140 X (I) = 0
150 NEXT I
160 T = LOG (E * (1 — Q) \
    \ LOG (Q)
170 FOR K = 1 TO T + 1
180 FOR I = 1 TO N
190 S = 0
200 FOR J = 1 TO N
210 S = S + A (I, J) * X (J)
220 NEXT J
230 X (I) = S + B (I)
240 NEXT I
250 NEXT K
260 PRINT # 1, 'K ='; K
270 FOR I = 1 TO N
280 PRINT # 1, 'X ('; I; ') =
    = '; X (I)
290 NEXT I
300 END
```

ზეიდელის მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
   PROGRAM ZEIDEL
   DIMENSION X (N),
   (A (N, N), B (N)
   READ (5, 1) A, B
   1 FORMAT (F7.4)
   REAL * 8 EPS, X, M
   C=0
   Q=0
   K=0
   EPS=0.001
   DO 40 J=1, N
   M=0
   DO 10 J=1, N
10 M=M+ABS (A (I, J) )
   IF (Q. GE. M) GO TO 20
   Q=M
20 IF (C. GE. ABS (B (I) ) ) GO
   TO 30
   C=ABS (B (I) )
30 X (I) = 0
40 CONTINUE
   T=(ALOG (EPS * (1—Q) /
   /C) )/ALOG (Q)
50 K=K+1
   DO 70 I=1, N
   S=0
   DO 60 J=1, N
60 S=S+A (I, J) * X (J)
   X (I) = S + B (I)
70 CONTINUE
   IF (K. LT. T) GO TO 50
   WRITE (6, 80) (X (I), I =
   = 1, N), K
80 FORMAT (5X, N F 7. 4),/,
   , 5X, 14)
   STOP
   END
```

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. წრფივ განტოლებათა როგორ სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი? არაერთგვაროვანი? თავსებადი? არათავსებადი?

2. ჩამოაყალიბეთ კრამერის თეორემა.

3. ჩამოაყალიბეთ კრონეკერ-კაპელის თეორემა.

4. რა შემთხვევაში აქვს ერთგვაროვან სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი? არანულოვანი ამონახსნები?

5. რას ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემა?

6. ჩამოაყალიბეთ თეორემა წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემის არსებობის შესახებ.

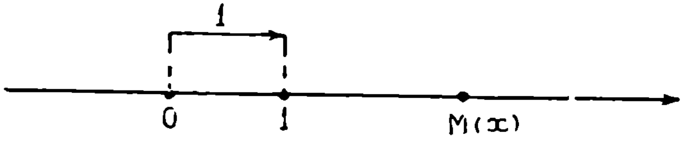
7. ჩამოაყალიბეთ იტერაციის პროცესის კრებადობის საკმარისი პირობა.

III თავი

ვექტორთა ალგებრის ელემენტები

§ 1. დეკარტის კოორდინატთა სისტემები

წრფეს, რომელზედაც ფიქსირებულია რაიმე O წერტილი (სათავე), არჩეულია დადებითი მიმართულება და სიგრძის ერთეული (მასშტაბი), რიცხვითი ღერძი ანუ რიცხვითი წრფე ეწოდება (ნახ. 1).



ნახ. 1

რიცხვითი ღერძის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთადერთი ნამდვილი x რიცხვი და პირიქით. ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს შემდეგი წესით: $x=|OM|$ (OM მონაკვეთის სიგრძეს), თუ O-დან M-საკენ მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას და $x=-|OM|$—წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამ x რიცხვს M წერტილის კოორდინატი ეწოდება. ის ფაქტი, რომ x რიცხვი M წერტილის კოორდინატია, ასე ჩაიწერება: $M(x)$. ცხადია, რომ O სათავის კოორდინატია ნული. მოცემულია წერტილი ღერძზე ნიშნავს, რომ მოცემულია წერტილის კოორდინატი. რიცხვითი ღერძი წარმოადგენს ე. წ. დეკარტის კოორდინატთა სისტემას წრფეზე. თუ

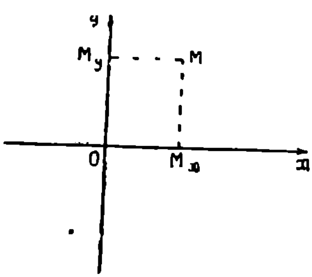
$M_1(x_1)$ და $M_2(x_2)$ ღერძის ნებისმიერი წერტილებია, მაშინ x_2-x_1 სხვაობას M_1M_2 მონაკვეთის სიდიდეს უწოდებენ.

საერთო სათავისა და ერთნაირი მასშტაბის მქონე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძი ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე. საერთო O სათავეს კოორდინატთა სათავე ეწოდება, ხოლო ღერძებს — საკოორდინატო ღერძები. მათ უწოდებენ აგრეთვე აბსცისთა Ox და ორდინატთა Oy ღერძებს.

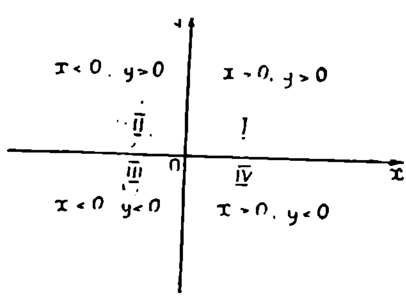
განვიხილოთ სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილი. მისი გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე (ნახ. 2) შესაბამისად აღვნიშნოთ M_x და M_y-ით

წერტილის დეკარტის მართკუთხა x და y კოორდინატები ეწოდება შესაბამისად M_x და M_y წერტილების კოორდინატებს სათანადო ღერძებზე. x კოორდინატს M წერტილის აბსცისა ეწოდება, ხოლო y-ს ორდინატი. ის ფაქტი, რომ M წერტილის კოორდინატებია x და y, ასე ჩაიწერება: $M(x, y)$. ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა ერთადერთი დალაგებული წყვილი და, პირიქით, ნამდვილ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ წყვილს შეესაბამება სიბრტყის ერთადერთი წერტილი. ამრიგად, სიბრტყის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილების სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ოთხ ნაწილად ყოფს, ამ ნაწილებს მეოთხედებს ანუ კვადრანტებს უწოდებენ. მეოთხედების ნუმერაცია ნაჩვენებია მე-3 ნახაზზე. ამავე ნახაზზე ნაჩვენებია წერტილის კოორდინატების ნიშნები მეოთხედების მიხედვით.



ნახ. 2

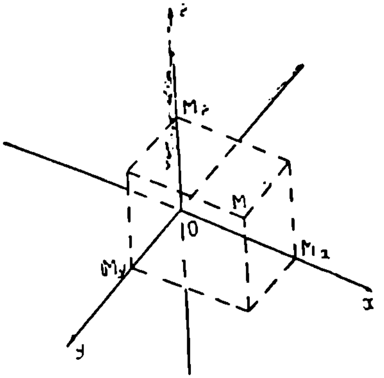


ნახ. 3

დეკარტის კოორდინატთა სისტემა სივრცეში განისაზღვრება სიბრტყეზე დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ანალოგიურად.

საერთო სათავისა და ერთნაირი მასშტაბის მქონე წყვილ-წყვილად ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძი ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში. საერთო O სათავეს კო-

ორდინატთა სათავე ეწოდება, ხოლო ღერძებს — საკოორდინატო ღერძები. მათ უწოდებენ აგრეთვე აბსცისთა Ox, ორდინატთა Oy და აპლიკატთა Oz ღერძებს.



ნახ. 4

ვთქვათ, M_x, M_y და M_z სივრცის ნებისმიერი M წერტილის გეგმილებია შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძებზე (ნახ. 4). M წერტილის დეკარტის მართკუთხა x, y და z კოორდინატები ეწოდება შესაბამისად M_x, M_y და M_z წერტილების კოორდინატებს სათანადო ღერძებზე. x კოორდინატს M წერტილის აბსცისა ეწოდება, y-ს — ორდინატი, ხოლო z-ს — აპლიკატი. ის ფაქტი, რომ M წერტილის კოორდინატებია x, y და z, ასე ჩაიწერება: $M(x, y, z)$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ სივრცის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულების სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

წყვილ-წყვილად აღებული საკოორდინატო ღერძები განსაზღვრავენ ე. წ. საკოორდინატო xOy, yOz და xOz სიბრტყეებს. ეს სიბრტყეები სივრცეს ყოფენ რვა ნაწილად, რომელთაც ოქტანტები (მერვედები) ეწოდება. ადვილია იმის დადგენა, თუ რა ნიშნები ექნება წერტილის კოორდინატებს სხვადასხვა ოქტანტებში.

§ 2. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა. კავშირი დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის

ზემოთ განხილული დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდა, სიბრტყეზე შეიძლება აიგოს კოორდინატთა მრავალი სხვა სისტემაც, რომლებიც საშუალებას იძლევიან განვსაზღვროთ სიბრტყის წერტილის მდებარეობა ორი ნამდვილი რიცხვით.

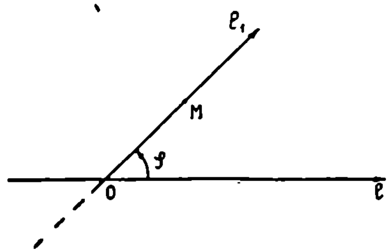
განვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი, ე. წ. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა, რომელიც დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემდეგ ყველაზე მოხერხებულია და საკმაოდ ხშირად გამოიყენება.

ავიღოთ სიბრტყეზე რიცხვითი l ღერძი. ამ ღერძს ვუწოდოთ პოლარული ღერძი, ხოლო მის O სათავეს — პოლუსი.

ვთქვათ, M — სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია, რომელიც პოლუსს არ ემთხვევა. გავავლოთ O პოლუსზე და M წერტილზე l_1 ღერძი, რომლის სათავეა O პოლუსი, ხოლო მიმართულება ემთხვევა O პოლუსიდან M წერტილისაკენ მიმართულებას (ნახ. 5). M წერტილის კოორდინატი

l_1 ღერძზე აღვნიშნოთ ρ-თი და ვუწოდოთ მას M წერტილის პოლარული რადიუსი. იმ უმცირეს φ კუთხეს, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ l ღერძი საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით l_1 ღერძთან შეთავსებამდე, ვუწოდოთ პოლარული კუთხე.

ცხადია, რომ $\rho > 0$, ხოლო $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. ამრიგად, სიბრტყის ყოველ წერტილს რომელიც პოლუსს არ ემთხვევა, შეესაბამება რიცხვთა ერთადერთი დალაგებული წყვილი (ρ, φ) და პირიქით.



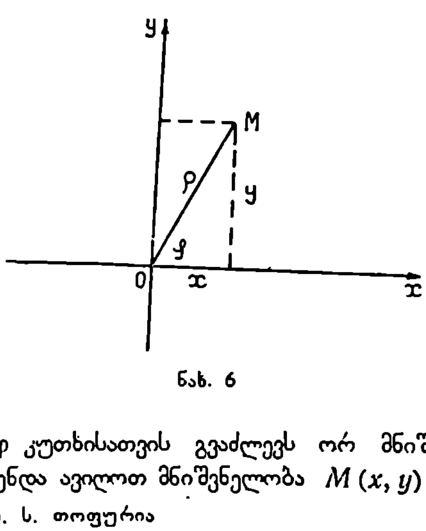
ნახ. 5

პოლუსისათვის პოლარული რადიუსი $\rho = 0$, ხოლო პოლარული φ კუთხე განუსაზღვრელია. პოლუსის მდებარეობა სიბრტყეზე სავსებით განისაზღვრება $\rho = 0$ კოორდინატით.

M წერტილის პოლარულ ρ რადიუსს და პოლარულ φ კუთხეს ეწოდება ამ წერტილის პოლარული კოორდინატები. ის ფაქტი, რომ M წერტილის პოლარული კოორდინატებია ρ და φ ასე ჩაიწერება: $M(\rho, \varphi)$.

თუ სიბრტყეზე არჩეულია პოლარული ღერძი და პოლუსი, მაშინ ვიტყვით, რომ სიბრტყეზე მოცემულია პოლარულ კოორდინატთა სისტემა.

ადვილი საჩვენებელია (ნახ. 6), რომ თუ პოლუსი ემთხვევა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავეს და პოლარული ღერძი-აბსცისთა ღერძს, მაშინ



ნახ. 6

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (2.1)$$

ეს ფორმულები გამოსახავს M წერტილის დეკარტის კოორდინატებს ამავე წერტილის პოლარული კოორდინატებით. პირიქით, თუ ცნობილია M წერტილის დეკარტის კოორდინატები (x, y), მაშინ (2.1) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (2.2)$$

(2.2) ტოლობა $[0; 2\pi[$ შუალედში φ კუთხისათვის გვაძლევს ორ მნიშვნელობას. პოლარული კუთხისათვის უნდა ავიღოთ მნიშვნელობა $M(x, y)$ წერტილის მდებარეობის მიხედვით.

§ 3. ვექტორები. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე

ფიზიკის, მექანიკის და სხვადასხვა ტექნიკური მეცნიერებების შესწავლისას გვხვდება სხვადასხვა სახის სიდიდეები. ზოგი მათგანი სავსებით განისაზღვრება მისი რიცხვითი მნიშვნელობით. ასეთ სიდიდეებს სკალარული სიდიდეები ეწოდება. სკალარული სიდიდეების მაგალითებია სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, მასა, ტემპერატურა და სხვ. არსებობს სხვა სახის სიდიდეებიც, რომელთა განსაზღვრისათვის, გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა, საჭიროა აგრეთვე მათი მიმართულების ცოდნა. ასეთ სიდიდეებს ვექტორული სიდიდეები ეწოდება. ვექტორული სიდიდეებია, მაგალითად, ძალა, სიჩქარე, აჩქარება, მაგნიტური ველის დაძაბულობა და სხვ. სხვადასხვა სახის ვექტორული სიდიდეების ზოგადად შესწავლისათვის (მათი კონკრეტული თვისებების გაუთვალისწინებლად) საჭიროა შემოვიღოთ ე. წ. ვექტორის ცნება.

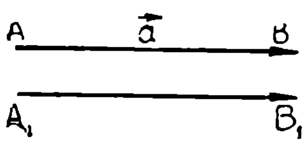
განსაზღვრება 3.1. ვექტორი ეწოდება ორიენტირებულ მონაკვეთს, ე. ი. მონაკვეთს, რომლისთვისაც დასახელებულია სათავე და ბოლო წერტილი.

ვექტორი, რომლის სათავეა A, ხოლო ბოლო წერტილია B, აღინიშნება სიმბოლოთი $\vec{AB}$. ზოგჯერ ვექტორი აღინიშნება აგრეთვე ერთი ასოთი, მაგალითად, $\vec{a}$. ნახაზზე ვექტორი გამოისახება ისრით (ნახ. 7).

ვექტორის სათავეს მისი მოდების წერტილი ეწოდება.

ვექტორს, რომლის სათავე და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, ნულოვანი ვექტორი ანუ ნულ-ვექტორი ეწოდება. ის აღინიშნება $\vec{0}$ სიმბოლოთი. ნულ-ვექტორს გარკვეული მიმართულება არ გააჩნია.

განსაზღვრება 3.2. ვექტორის სიგრძე (მოდული) ეწოდება მანძილს მის სათავესა და ბოლო წერტილს შორის.



ნახ. 7

$\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე აღინიშნება $|\vec{AB}|$ სიმბოლოთი. ცხადია, ნულვექტორის სიგრძე უდრის ნულს.

განსაზღვრება 3.3. ვექტორს, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია, ერთეულოვანი ვექტორი ეწოდება.

განსაზღვრება 3.4. ერთი და იგივე წრფის პარალელურ ვექტორებს კოლინეარული ვექტორები ეწოდება, ხოლო ერთი და იგივე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს — კომპლანარული.

მიღებულია, რომ ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულია, ხოლო თუ სამი ვექტორიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ ისინი კომპლანარულია.

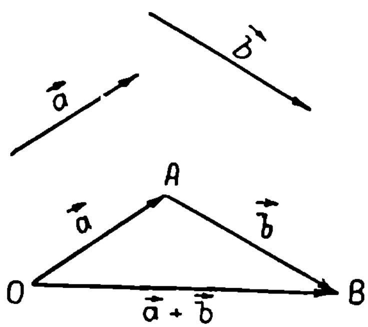
განსაზღვრება 3.5. ორ ვექტორს (მათი მოდების წერტილებისაგან დამოუკიდებლად) ეწოდება ტოლი, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე სიგრძე და მიმართულება.

თუ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{A_1B_1}$ (ნახ. 7) ვექტორები ტოლია, წერენ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$.

ვექტორებზე წრფივი ოპერაციები ეწოდება ვექტორთა შეკრებას და ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას.

ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ნებისმიერი ორი ვექტორია. ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი O წერტილი და ავაგოთ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ვექტორი, შემდეგ კი $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ვექტორი. $\overrightarrow{OB}$ ვექტორს (ნახ. 8) ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი და აღინიშნება შემდეგნაირად: $\vec{a}+\vec{b}$ ე. ი.

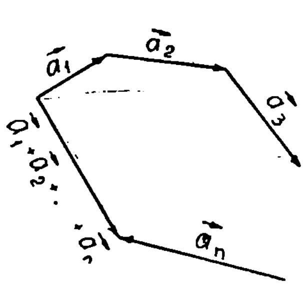
$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}.$$



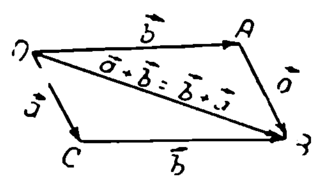
ნახ. 8

ვექტორთა შეკრების ამ წესს სამკუთხედის წესი ეწოდება.

ვექტორთა შეკრების ეს წესი შეიძლება განვაზოგადოთ შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის. ვთქვათ, მოცემულია $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორები. $\vec{a}_1$ ვექტორის ბოლო წერტილზე მოვდოთ $\vec{a}_2$ ვექტორი, $\vec{a}_2$-ის ბოლო წერტილზე — $\vec{a}_3$ ვექტორი და ა. შ. $\vec{a}_{n-1}$ ვექტორის ბოლო წერტილზე — $\vec{a}_n$ ვექტორი. ვექტორს, რომლის სათავეა $\vec{a}_1$-ის სათავე, ხოლო ბოლო წერტილია $\vec{a}_n$-ის ბოლო წერტილი, ეწოდება $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორების ჯამი და ასე აღინიშნება: $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\dots+\vec{a}_n$ (ნახ. 9).



ნახ. 9



ნახ. 10

ვექტორთა შეკრების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

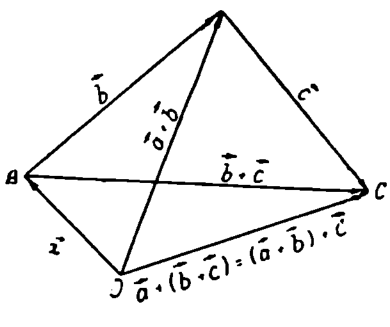
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (კომუტაციურობა),

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ასოციაციურობა).

ამ თვისებების მართებულობა ჩანს შესაბამისად მე-10 და მე-11 ნახაზებიდან.

ცხადია, ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$



ნახ. 11

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\vec{b}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას: 1) $|\vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$, 2) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება, თუ $\lambda > 0$ და ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $\lambda < 0$.

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი აღინიშნება $\lambda\vec{a}$ სიმბოლოთი.

თუ $\lambda = 0$ ან $\vec{a} = \vec{0}$, მაშინ მიღებულია, რომ $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

$\vec{a}$ ვექტორის (-1)-ზე ნამრავლს ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი და აღინიშნება $-\vec{a}$ სიმბოლოთი. ცხადია

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e},$$

სადაც $\vec{e}$ არის $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორი. მას $\vec{a}$ ვექტორის მიმმართველი ვექტორი, ანუ მგეზავი ეწოდება.

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განმარტების თანახმად, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის კოლინეარულია. პირიქით, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, სადაც $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, თუ ამ ვექტორებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ, და $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, თუ

მათ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ. ამრიგად, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. იმისათვის, რომ ორი ვექტორი იყოს კოლინეარული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ერთ-ერთი მათგანი წარმოადგენდეს მეორის ნამრავლს გარკვეულ რიცხვზე.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

2. $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

3. $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

დავამტკიცოთ ეს თვისებები.

1. თუ λ, μ რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულია ან $\vec{a}=\vec{0}$, მაშინ დასამტკიცებელი ტოლობის ორივე ნაწილი ნულოვანი ვექტორებია.

თუ $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$ და $\vec{a}\neq\vec{0}$, მაშინ ვექტორებს $\lambda(\mu\vec{a})$ და $(\lambda\mu)\vec{a}$ აქვთ ერთნაირი მიმართულება. სახელდობრ, მათ აქვთ $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება თუ $\lambda\mu>0$ და $\vec{a}$-ს საწინააღმდეგო მიმართულება თუ $\lambda\mu<0$. გარდა ამისა

$$|\lambda(\mu\vec{a})| = |\lambda||\mu\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}| = |\lambda\mu||\vec{a}|$$

და

$$|(\lambda\mu)\vec{a}| = |\lambda\mu||\vec{a}|,$$

ე. ი.

$$|\lambda(\mu\vec{a})| = |(\lambda\mu)\vec{a}|.$$

ამრიგად

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$$

2. თუ λ, μ და $\lambda+\mu$ რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულია ან $\vec{a}=\vec{0}$, მაშინ თვისების სამართლიანობა ცხადია.

ვთქვათ $\lambda\mu>0$ და $\vec{a}\neq\vec{0}$, მაშინ $\lambda\vec{a}$ და $\mu\vec{a}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება, ამიტომ

$$|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}| = |\lambda\vec{a}| + |\mu\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| + |\mu||\vec{a}| =$$

$$= (|\lambda| + |\mu|)|\vec{a}| = |\lambda+\mu|\,|\vec{a}| = |(\lambda+\mu)\vec{a}|.$$

ვინაიდან λ, μ და $\lambda+\mu$ რიცხვებს აქვთ ერთნაირი ნიშანი, ამიტომ $(\lambda+\mu)\vec{a}$ და $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება.

ამრიგად, ამ შემთხვევაში

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

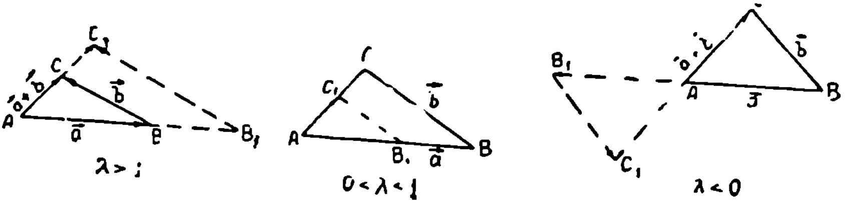
ვთქვათ $\lambda\mu<0$ და $\vec{a}\neq\vec{0}$. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $|\lambda|>|\mu|$. ამ შემთხვევაში $\lambda\vec{a}$ და $\mu\vec{a}$ ვექტორებს აქვთ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება, ამიტომ

$$|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}|=|\lambda\vec{a}|-|\mu\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|-|\mu||\vec{a}|=$$
$$=(|\lambda|-|\mu|)|\vec{a}|=|\lambda+\mu||\vec{a}|=|(\lambda+\mu)\vec{a}|.$$

გარდა ამისა $(\lambda+\mu)\vec{a}$ და $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ ვექტორებს აქვთ $\lambda\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება. ამრიგად, დასამტკიცებელი ტოლობა ამ შემთხვევაშიც მართებულია.

3. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებიდან ერთი მაინც ნულოვანია ან $\lambda=0$, მაშინ ამ თვისების სამართლიანობა ცხადია.

ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია და $\lambda>0$.



ნახ. 12

ავაგოთ $\vec{AC_1}=\lambda(\vec{a}+\vec{b})$ და $\vec{AB_1}=\lambda\vec{a}$ ვექტორები (ნახ. 12). ცხადია, რომ ABC და AB_1C_1 სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე $\overrightarrow{B_1C_1}=\lambda\vec{b}$.

ვექტორთა შეკრების წესის თანახმად

$$\vec{AC_1}=\vec{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}.$$

საიდანაც

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{b}=\mu\vec{a}$ (თეორემა 3.1). ამიტომ პირველი და მეორე თვისებების ძალით გვაქვს

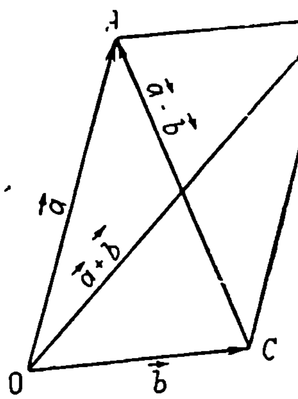
$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda(\vec{a}+\mu\vec{a})=\lambda(1+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\lambda\mu\vec{a}=$$
$$=\lambda\vec{a}+\lambda(\mu\vec{a})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

ამრიგად სამივე თვისება დამტკიცებულია.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა ეწოდება $\vec{a} + (-\vec{b})$ ვექტორს და ასე აღინიშნება: $\vec{a} - \vec{b}$. ცხადია, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა არის ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომ $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

ბოლოს მოვიყვანოთ არაკოლინეარულ ვექტორთა შეკრების კიდევ ერთი წესი, ე. წ. პარალელოგრამის წესი, რომელიც გვაძლევს აგრეთვე ვექტორთა სხვაობის აგების წესს.

ვთქვათ, მოცემულია არაკოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. ეს ვექტორები მოვდოთ ნებისმიერ O წერტილზე და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი (ნახ. 13). ნახაზიდან ჩანს, რომ $\vec{OB}$ დიაგონალი წარმოადგენს ამ ვექტორების ჯამს $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, ხოლო $\vec{CA}$ დიაგონალი — მათ სხვაობას $\vec{CA} = \vec{a} - \vec{b}$.



ნახ. 13

§ 4. ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულება. ბაზისი

ვთქვათ, მოცემულია $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ვექტორები. ამ ვექტორების წრფივი კომბინაცია ეწოდება ვექტორს

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n,$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ნებისმიერი რიცხვებია.

განსაზღვრება 4.1. ვექტორთა $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (4.1)$$

განსაზღვრება. 4.2. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ (4.1) ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები:

1. თუ ვექტორთა სისტემა შეიცავს ნულოვან ვექტორს, მაშინ ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

2. თუ ვექტორთა სისტემა შეიცავს წრფივად დამოკიდებულ ქვესისტემას (ნაწილს), მაშინ თვით მოცემული სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება.

3. წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემის ყოველი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

თეორემა 4.1. იმისათვის, რომ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორთა სისტემა იყოს წრფივად დამოკიდებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ვექტორებიდან ერთ-ერთი წარმოადგენდეს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. ადგილი აქვს (4.1) ტოლობას და $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, $\alpha_1 \neq 0$. მაშინ (4.1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n .$$

ამრიგად, $\vec{a}_1$ ვექტორი არის დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია.

საკმარისობა. დავუშვათ, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორებიდან ერთ-ერთი, მაგალითად, $\vec{a}_1$ წარმოადგენს დანარჩენი ვექტორების წრფივ კომბინაციას, ე. ი. არსებობს ისეთი $\beta, \gamma, \dots, \lambda$, რიცხვები, რომ

$$\vec{a}_1 = \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 + \dots + \lambda\vec{a}_n .$$

აქედან

$$(-1)\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \dots + \lambda\vec{a}_n = \vec{0} .$$

ეს ტოლობა კი ნიშნავს, რომ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. თეორემა დამტკიცებულია.

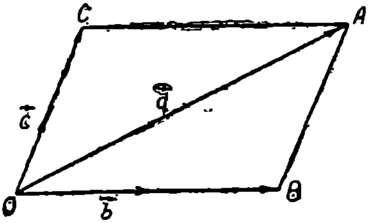
შედეგი. ორი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი კოლინეარულია ან, რაც იგივეა, ორი ვექტორი წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი არაკოლინეარულია.

განვიხილოთ ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის საკითხი სიბრტყეზე და სივრცეში.

თ ე ო რ ე მ ა 4.2. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ყოველი სამი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ვექტორებია. თუ ამ ვექტორებიდან რომელიმე ორი კოლინეარულია, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს შორის არც ერთი წყვილი ვექტორებისა არ არის კოლინეარული, მაშინ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ამ ვექტორებიდან ერთ-ერთი წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას. დავუშვათ, რომ სამივე ვექტორს აქვს საერთო O სათავე (ნახ. 14). გავავლოთ ერთ-ერთი ვექტორის, მაგალითად, $\vec{a}$-ს, ბოლო A წერტილზე დანარჩენი ვექტორების პარალელური წრფეები იმ წრფეების გადაკვეთამდე B და C წერტილებში, რომლებზეც მდებარეობენ შესაბამისად $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები. მივიღებთ, რომ



ნახ. 14

$$\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OC}.$$

რადგან $\vec{OB}$ და $\vec{OC}$ ვექტორები კოლინეარულია შესაბამისად $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებისა, ე. ი. $\vec{OB} = \lambda \vec{b}$ და $\vec{OC} = \mu \vec{c}$, ამიტომ

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ვექტორთა რაოდენობა ორზე მეტია, მაშინ ისინი წრფივად დამოკიდებულია.

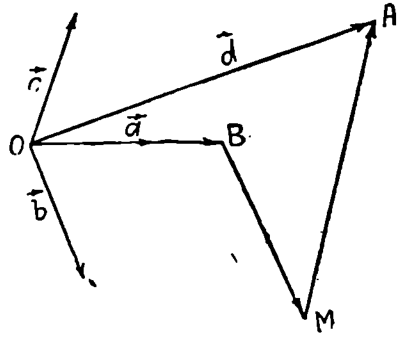
შ ე დ ე გ ი 2. სამი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი კომპლანარულია ან, რაც იგივეა, სამი ვექტორი წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი არაკომპლანარულია.

შ ე დ ე გ ი 3. სიბრტყეზე წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი უდრის ორს.

თ ე ო რ ე მ ა 4.3. ყოველი ოთხი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — ნებისმიერი ვექტორებია. თუ ამ ვექტორებიდან რომელიმე სამი კომპლანარულია, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორებიდან არც ერთი სამი ვექტორი არ არის კომპლანარული, მაშინ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ამ ვექტორებიდან ერთ-ერთი წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას. დავუშვათ, რომ ოთხივე ვექტორს აქვს საერთო O სათავე (ნახ. 15).



ნახ. 15

ერთ-ერთი მათგანის, მაგალითად, $\vec{d}$ ვექტორის ბოლო A წერტილზე გავავლოთ $\vec{c}$ ვექტორის პარალელური წრფე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით განსაზღვრული სიბრტყის გადაკვეთამდე M წერტილში. შემდეგ M წერტილზე გავავლოთ $\vec{b}$ ვექტორის პარალელური წრფე იმ წრფის გადაკვეთამდე B წერტილში, რომელზედაც მდებარეობს $\vec{a}$ ვექტორი, ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\vec{d} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} .$$

რადგან $\overrightarrow{OB}=\lambda \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \mu \vec{b}$, $\overrightarrow{MA} = \nu \vec{c}$, ამიტომ $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ ვექტორთა რიცხვი სამზე მეტია, მაშინ ისინი წრფივად დამოკიდებულია.

შ ე დ ე გ ი 2. წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი უდრის სამს.

ვექტორთა ალგებრის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა ბაზისის ცნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.3 ა) ბაზისი წრფეზე ეწოდება ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერ არანულოვან ვექტორს; ბ) ბაზისი სიბრტყეზე ეწოდება ამ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერ ორ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს, აღებულს გარკვეული რიგით; გ) ბაზისი სივრცეში ეწოდება ნებისმიერ სამ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს, აღებულს გარკვეული რიგით.

ვიტყვით, რომ ვექტორი დაშლილია რაიმე ვექტორების მიხედვით, თუ ის წარმოადგენს ამ ვექტორების წრფივ კომბინაციას.

თ ე ო რ ე მ ა 4.4. 1) წრფის პარალელური ნებისმიერი ვექტორი იშლება ამ წრფის ბაზისის მიხედვით; 2) სიბრტყის პარალელური ყო-

ველი ვექტორი იშლება ამ სიბრტყის ბაზისის ვექტორების მიხედვით; 3) ყოველი ვექტორი იშლება სივრცის ბაზისის ვექტორების მიხედვით.

ყველა ეს დაშლა ერთადერთია.

დამტკიცება: 1) თუ $\vec{e}$ ვექტორი ბაზისია წრფეზე, მაშინ ამ წრფის პარალელური ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის თეორემა 3.1-ის ძალით არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომ $\vec{a} = \lambda \vec{e}$.

2) ვთქვათ, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ სიბრტყის ბაზისია, ხოლო $\vec{a}$ ვექტორი ამ სიბრტყის პარალელურია, მაშინ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ და $\vec{a}$ კომპლანარული ვექტორებია და თეორემა 4.2-ის ძალით

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{a} = \vec{0},$$

სადაც $\alpha_3 \neq 0$, რადგან $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ბაზისია. აქედან

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 .$$

3) ვთქვათ, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ სივრცის ბაზისია, ხოლო $\vec{a}$ — ნებისმიერი ვექტორია, მაშინ წინა შემთხვევის ანალოგიურად თეორემა 4.3-ის ძალით მივიღებთ

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 . \tag{4.2}$$

ვაჩვენოთ (4.2) დაშლის ერთადერთობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, (4.2) დაშლასთან ერთად ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \mu_3 \vec{e}_3 . \tag{4.3}$$

მაშინ, (4.2) და (4.3)-დან გვექნება

$$(\lambda_1 - \mu_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 - \mu_3) \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

აქედან $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0, \quad \lambda_3 - \mu_3 = 0,$$

ე. ი.

$$\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \lambda_3 = \mu_3$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 4.4. λ_1, λ_2, λ_3 რიცხვებს ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები (კომპონენტები) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ბაზისში, თუ ადგილი აქვს (4.2) ტოლობას.

ის ფაქტი, რომ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია λ_1, λ_2, λ_3 რიცხვები, ჩაიწერება ასე $\vec{a}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ან $\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

თ ე ო რ ე მ ა 4.5. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები უდრის ამ ვექტორის სათანადო კოორდინატების იმავე რიცხვზე ნამრავლებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

და α ნებისმიერი რიცხვია. მაშინ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის თვისებების ძალით

$$\alpha \vec{a} = \alpha (\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3) = (\alpha \lambda_1) \vec{e}_1 + (\alpha \lambda_2) \vec{e}_2 + (\alpha \lambda_3) \vec{e}_3 .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 4.6. ვექტორთა ჯამის კოორდინატები უდრის შესაკრები ვექტორების სათანადო კოორდინატების ჯამს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ ორი შესაკრების შემთხვევაში. ვთქვათ

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 , \quad \vec{b} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \mu_3 \vec{e}_3 .$$

მაშინ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის მეორე თვისების ძალით

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3) + (\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \mu_3 \vec{e}_3) =$$

$$= (\lambda_1 + \mu_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 + \mu_3) \vec{e}_3 .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 4.5 და თეორემა 4.6-დან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები.

შ ე დ ე გ ი 1. $\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ და $\vec{b} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ ვექტორების კოლინეარობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\lambda_1 = \alpha \mu_1, \ \lambda_2 = \alpha \mu_2, \ \lambda_3 = \alpha \mu_3.$$

ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3} .$$

ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობას ასეთი სახით ფორმალურად ჩავწერთ იმ შემთხვევაშიც, როცა ამ ვექტორების შესაბამის კოორდინატთა რომელიმე წყვილი ნულოვანია.

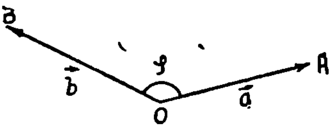
შ ე დ ე გ ი 2. ვექტორთა სხვაობის კოორდინატები უდრის საკლებისა და მაკლები ვექტორების სათანადო კოორდინატების სხვაობას. ე. ი.

$$\vec{a}-\vec{b}=(\lambda_1-\mu_1)\vec{e_1}+(\lambda_2-\mu_2)\vec{e_2}+(\lambda_3-\mu_3)\vec{e_3}\,.$$

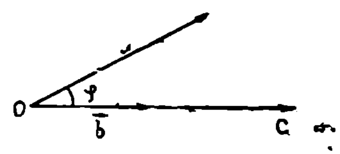
§ 5. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. დეკარტის მართკუთხა ბაზისი

ვთქვათ, მოცემულია ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. სივრცის ნებისმიერ O წერტილზე მოვდოთ $\vec{OA}=\vec{a}$ და $\vec{OB}=\vec{b}$ ვექტორები (ნახ. 16). $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე ეწოდება იმ უმცირეს φ კუთხეს, რომლითაც უნდა მობრუნდეს ერთ-ერთი ვექტორი, რომ მისი მიმართულება დაემთხვეს მეორე ვექტორის მიმართულებას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5.1. კუთხე $\vec{a}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის ეწოდება კუთხეს $\vec{a}$ ვექტორსა და l ღერძის მიმართულების მქონე ნებისმიერ $\vec{b}$ ვექტორს შორის (ნახ. 17).



ნახ. 16



ნახ. 17

ვთქვათ, მოცემულია l ღერძი და $\vec{AB}$ ვექტორი (ნახ. 18). A და B წერტილების ორთოგონალური გეგმილები l ღერძზე შესაბამისად იყოს A_1 და B_1.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5.2. $\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი l ღერძზე ეწოდება A_1B_1 მონაკვეთის სიდიდეს, ე. ი. $|A_1B_1|$-ს, თუ $\vec{A_1B_1}$ ვექტორსა და l ღერძს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ და $-|A_1B_1|$-ს წინააღმდეგ შემთხვევაში.

$\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი l ღერძზე $\text{გეგ}_l\,\vec{AB}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ თუ $\vec{AB}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის კუთხეა α, მაშინ

$$\text{გეგ}_l\,\vec{AB}=|\vec{AB}|\cdot\cos\alpha. \tag{5.1}$$

ცხადია, რომ ტოლ ვექტორებს ერთსა და იმავე ღერძზე ტოლი გეგმილები აქვთ.

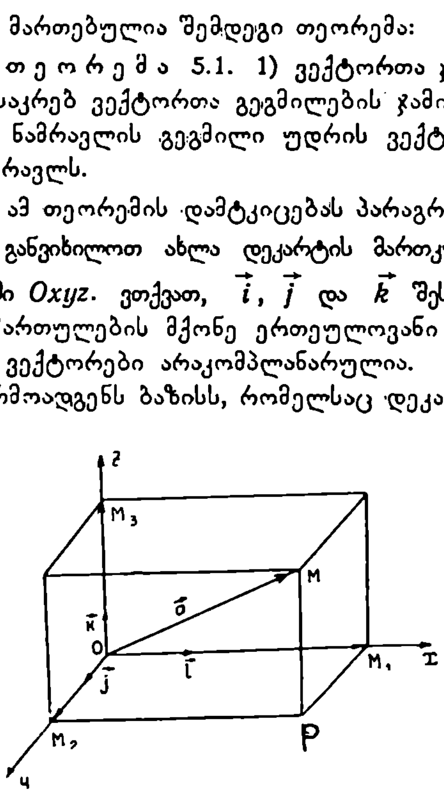
ნახ. 18

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 5.1. 1) ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამის ტოლია; 2) ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გეგმილი უდრის ვექტორის გეგმილის ამავე რიცხვზე ნამრავლს.

ამ თეორემის დამტკიცებას პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანთ.

განვიხილოთ ახლა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში $Oxyz$. ვთქვათ, $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძების მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორებია (ნახ. 19). ცხადია, ეს ვექტორები არაკომპლანარულია. ამიტომ ვექტორთა ეს სისტემა წარმოადგენს ბაზისს, რომელსაც დეკარტის მართკუთხა (ორთონორმირებული) ბაზისი ეწოდება.



ნახ. 19

თეორემა 4.4-ის ძალით, ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი ერთადერთი სახით წარმოიდგინება დეკარტის $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მართკუთხა ბაზისის მიხედვით:

$$\vec{a} = x\cdot\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\,.$$

ამ x, y, z რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები ეწოდება.

ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების გეომეტრიულ აზრს გვაძლევს შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 5.2. ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები უდრის ამ ვექტორის გეგმილებს შესაბამის ღერძებზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}$ ნებისმიერი ვექტორია. მოვდოთ ის კოორდინატთა სათავეზე ($\vec{OM} = \vec{a}$, ნახ. 19). M წერტილზე გავავლოთ საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები. მივიღებთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ერთ-ერთი დიაგონალია $\vec{OM}$ ვექტორი. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{M_1P} + \vec{PM}\,.$$

რადგან $\vec{M_1P} = \vec{OM_2}$ და $\vec{PM} = \vec{OM_3}$, ამიტომ

$$\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}.$$

ამასთან

$$\vec{OM_1} = x \cdot \vec{i}\,,\quad \vec{OM_2} = y \cdot \vec{j}\,,\quad \vec{OM_3} = z \cdot \vec{k}\,,$$

საიდანაც

$$|\vec{OM_1}| = |x|,\quad |\vec{OM_2}| = |y|,\quad |\vec{OM_3}| = |z|\,,$$

ანუ

$$|\text{გეგ}_{ox}\,\vec{OM}| = |x|\,,\quad |\text{გეგ}_{oy}\,\vec{OM}| = |y|\,,\quad |\text{გეგ}_{oz}\,\vec{OM}| = |z|\,.$$

აქედან გეგ$_{ox}\,\vec{OM} = x$, რადგან ეს რიცხვები ორივე დადებითია, თუ $\vec{OM_1}$-ს და $\vec{i}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება და ორივე უარყოფითია, თუ ამ ვექტორებს აქვთ საწინააღმდეგო მიმართულება (ვექტორის ღერძზე გეგმილისა და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრებების ძალით). ანალოგიურად გეგ$_{oy}\,\vec{OM} = y$ და გეგ$_{oz}\,\vec{OM} = z$.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. $\vec{OM}$ რადიუს-ვექტორის* კოორდინატები უდრის მისი ბოლო M წერტილის კოორდინატებს.

თეორემა 5.3. ვექტორის კოორდინატები უდრის მისი ბოლო წერტილისა და სათავის სათანადო კოორდინატების სხვაობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილები, მაშინ

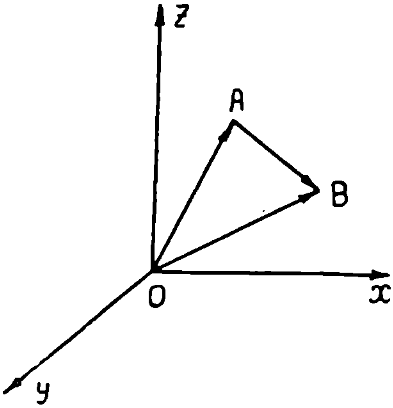
$$\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\,,$$
$$\vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\,.$$

---

* სათავეზე მოდებულ $\vec{OM}$ ვექტორს M წერტილის რადიუს-ვექტორი ეწოდება.

ვექტორთა სხვაობის განსაზღვრისა და § 4-ის მე-2 შედეგის ძალით (ნახ. 20)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}. \quad (5.2)$$



ნახ. 20

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 5.1. ვთქვათ მოცემულია l ღერძი და $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. შევარჩიოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი ემთხვეოდეს l ღერძს.

დავუშვათ:

$$\vec{a} = X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k},$$

$$\vec{b} = X_2\,\vec{i} + Y_2\,\vec{j} + Z_2\,\vec{k}.$$

მაშინ

$$\vec{a} + \vec{b} = (X_1 + X_2)\,\vec{i} + (Y_1 + Y_2)\,\vec{j} + (Z_1 + Z_2)\,\vec{k},$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda X_1)\,\vec{i} + (\lambda Y_1)\,\vec{j} + (\lambda Z_1)\,\vec{k}, \quad (\lambda \in R).$$

თეორემა 5.2-ის ძალით გვაქვს

$$X_1 = \text{გეგ}_l\,\vec{a},\ X_2 = \text{გეგ}_l\,\vec{b},\quad X_1 + X_2 = \text{გეგ}_l\,(\vec{a} + \vec{b}),\ \lambda X_1 = \text{გეგ}_l\,(\lambda\vec{a}).$$

ამრიგად

$$\text{გეგ}_l\,(\vec{a} + \vec{b}) = \text{გეგ}_l\,\vec{a} + \text{გეგ}_l\,\vec{b},\quad \text{გეგ}_l\,(\lambda\vec{a}) = \lambda\ \text{გეგ}_l\,\vec{a}.$$

თეორემა 5.1 დამტკიცებულია.

§ 6. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

განსაზღვრება 6.1. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ან $(\vec{a}, \vec{b})$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრებით

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha, \quad (6.1)$$

სადაც α არის $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, ე. ი. $\alpha = \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$. თუ

მხედველობაში მივიღებთ ვექტორის ღერძზე გეგმილის (5.1) გამოსახულებას, (6.1) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,\text{გეგ}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{გეგ}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,, \tag{6.2}$$

სადაც $\text{გეგ}_{\vec{a}}\,\vec{b}$ არის $\vec{b}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{a}$ ვექტორით განსაზღვრულ ღერძზე. ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის ერთ-ერთი ვექტორის სიგრძისა და ამ ვექტორზე მეორე ვექტორის გეგმილის ნამრავლს.

(6.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\text{გეგ}_{\vec{e}}\,\vec{a} = (\vec{a}, \vec{e})\,,$$

სადაც $\vec{e}$ ერთეულოვანი ვექტორია. კერძოდ, თუ $\vec{a} = X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} + Z\cdot\vec{k}$, მაშინ

$$X = (\vec{a}, \vec{i}),\ \ Y = (\vec{a}, \vec{j}),\ Z = (\vec{a}, \vec{k}).$$

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1°. სკალარული ნამრავლი კომუტატიურია: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

2°. სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები ურთიერთმართობულია ან ერთი მათგანი მაინც ნულ-ვექტორია. ე. ი. ორი ვექტორის მართობულობის პირობაა მათი სკალარული ნამრავლის ნულთან ტოლობა.

3°. ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$, ე. ი.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}\,.$$

4°. საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მგეზავებისათვის მართებულია ტოლობები:

$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1\,,$$
$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{i}, \vec{k}) = 0\,.$$

5°. სკალარული ნამრავლი დისტრიბუციულია ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ, ე. ი.

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})\,.$$

6°. ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისა და λ რიცხვისათვის

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})\,.$$

7°. თუ ნებისმიერი $\vec{d}$ ვექტორისათვის $(\vec{a}, \vec{d}) = (\vec{b}, \vec{d})$, მაშინ $\vec{a} = \vec{b}$.

1°, 2°, 3° და 4° თვისებების მართებულობა გამომდინარეობს სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან.

5° და 6° თვისებების მართებულობა გამომდინარეობს თეორემა 5.1-დან. მართლაც, (6.2)-ის ძალით

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \text{გეგ}_{\vec{a}} (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| (\text{გეგ}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{გეგ}_{\vec{a}} \vec{c}) =$$

$$= |\vec{a}| \text{გეგ}_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \text{გეგ}_{\vec{a}} \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}),$$

ასევე

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \text{გეგ}_{\vec{b}} \lambda \vec{a} = \lambda |\vec{b}| \text{გეგ}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda (\vec{a}, \vec{b}).$$

ამასთან

$$(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{b}, \vec{a}) = \lambda (\vec{b}, \vec{a}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}).$$

დავამტკიცოთ თვისება 7°. თუ $(\vec{a}, \vec{d}) = (\vec{b}, \vec{d})$, მაშინ 5° და 6° თვისებების ძალით $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{d}) = 0$. რადგან $\vec{d}$ ნებისმიერია, ამიტომ 2° თვისების თანახმად, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ ე. ი. $\vec{a} = \vec{b}$.

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 6.1. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის მათი ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. თუ $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ და $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, მაშინ

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{6.3}$$

დამტკიცება. რადგან $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ და $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$, ამიტომ 4°, 5° და 6° თვისებების ძალით

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 (\vec{i}, \vec{i}) +$$

$$+ x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i}, \vec{k}) + y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) +$$

$$+ y_1 z_2 (\vec{j}, \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k}, \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k}, \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k}, \vec{k}) =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მართობულობის პირობა კოორდინატებში ასე ჩაიწერება:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

შედეგი 2. $\vec{a} = \{x, y, z\}$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{6.4}$$

შედეგი 3. მანძილი $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

ამ შედეგის მართებულობა გამომდინარეობს (5.2) ფორმულიდან და შედეგი 2-დან.

შედეგი 4. კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

ვთქვათ, α, β და γ კუთხეებია, რომელსაც $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ვექტორი ადგენს შესაბამისად Ox, Oy, და Oz ღერძებთან. (5.1) ფორმულისა და თეორემა 5.2-ის ძალით, გვაქვს

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad z = |\vec{a}| \cos\gamma. \tag{6.5}$$

(6.4) და (6.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსები ეწოდება. (6.5)-დან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ერთეულოვანი ვექტორის კოორდინატებია მისი მიმართულების კოსინუსები.

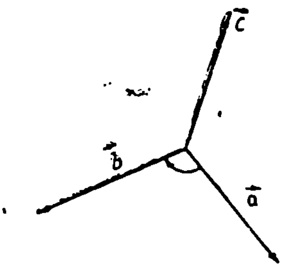
ადვილი შესამოწმებელია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + coc^2\gamma = 1.$$

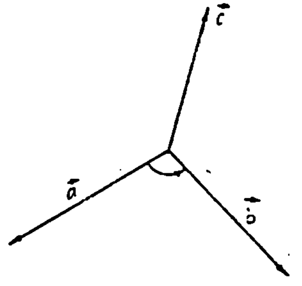
§ 7. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი

გავეცნოთ კიდევ ერთ ოპერაციას ვექტორებზე, ე. წ. ვექტორულ გამრავლებას. წინასწარ შემოვიყვანოთ ვექტორთა დალაგებული სამეულის ორიენტაციის ცნება.

განსაზღვრება 7.1. არაკომპლანარულ ვექტორთა დალაგებულ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ სამეულს ეწოდება მარცხენა ორიენტაციის ან მარცხენა სამეული, თუ მათი ერთ წერტილზე მოდების შემდეგ უმცირესი კუთხით მობრუნება $\vec{a}$ ვექტორისა $\vec{b}$ ვექტორისაკენ $\vec{c}$ ვექტორის ბოლოდან ჩანს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ნახ. 21). თუ ეს მობრუნება ჩანს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ სამეულს მარჯვენა ეწოდება (ნახ. 22).



ნახ. 21



ნახ. 22

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ ვექტორთა ორიენტირებულ სამეულში რომელიმე ორ ვექტორს ურთიერთგადავანაცვლებთ, მაშინ სამეულის ორიენტაცია შეიცვლება. სახელდობრ, თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარცხენა სამეულია, მაშინ $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$; $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$; $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ სამეულები მარჯვენა ორიენტაციისა. სამეულის ორიენტაცია შეიცვლება მაშინაც, როცა სამეულში რომელიმე ვექტორს შევცვლით მისი მოპირდაპირე ვექტორით. მაგალითად, თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, მარცხენა სამეულია, მაშინ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$ სამეული მარჯვენაა.

თუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის საკოორდინატო ღერძების მგეზავები $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ქმნიან მარცხენა (მარჯვენა) სამეულს, მაშინ ამ სისტემას მარცხენა (მარჯვენა) სისტემა ეწოდება. შემდეგში ჩვენ ვისარგებლებთ მხოლოდ მარცხენა სისტემით.

განსაზღვრება 7.2. $\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე, სადაც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი სამი პირობით:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2. $\vec{c}$ ვექტორი მართობულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით განსაზღვრული სიბრტყის;

3. $\vec{c}$ ვექტორის მიმართულება ისეთია, რომ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ მარცხენა სამეულია.

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ მიღებულია, რომ $\vec{a}$ ვექტორის $\vec{b}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი ნულ-ვექტორია.

$\vec{a}$ ვექტორის $\vec{b}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\times\vec{b}$ ან $[\vec{a}, \vec{b}]$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე რიცხობრივად უდრის ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს.

ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1°. ვექტორული ნამრავლი ანტიკომუტაციურია: $[\vec{a}, \vec{b}]=-[\vec{b}, \vec{a}]$.

2°. ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისა და λ რიცხვისათვის

$$[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}].$$

3°. ვექტორული ნამრავლი დისტრიბუციულია ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ:

$$[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{a}, \vec{c}[\quad \text{და} \quad [\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}]=[\vec{a}, \vec{c}]+[\vec{b}, \vec{c}].$$

4°. საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მგეზავებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$[\vec{i}, \vec{j}] = -[\vec{j}, \vec{i}] = \vec{k}, \ [\vec{j}, \vec{k}] = -[\vec{k}, \vec{j}] = \vec{i},$$

$$[\vec{k}, \vec{i}] = -[\vec{i}, \vec{k}] = \vec{j}, \ [\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}.$$

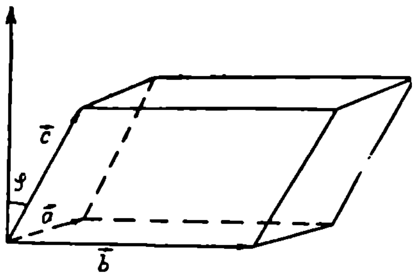
ამ თვისებების მართებულობას დავამტკიცებთ შემდეგ პარაგრაფში.

§ 8. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

განსაზღვრება 8.1, $\vec{a}, \vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს, გამრავლებულს სკალარულად $\vec{c}$ ვექტორზე და აღინიშნება სიმბოლოთი $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, ე. ი.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

თეორემა 8.1. არაკომპლანარული $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლის მოდული უდრის ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას. შერეული ნამრავლი დადებითია, თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარცხენა სამეულია, ხოლო უარყოფითია, თუ ეს სამეული მარჯვენაა.



ნახ. 23

დამტკიცება. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის V მოცულობა უდრის ფუძის $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ ფართობისა და $|\vec{c}|\,|\cos\vartheta|$ სიმაღლის ნამრავლს (ნახ. 23), სადაც ϑ არის კუთხე $\vec{c}$ და $[\vec{a}, \vec{b}]$ ვექტორებს შორის, ე. ი.

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}]|\,|\vec{c}|\,|\cos\vartheta| = |([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \quad (8.1)$$

ამრიგად, თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. რადგან

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]|\,|\vec{c}|\cos\vartheta,$$

ამიტომ შერეული ნამრავლის ნიშანი ემთხვევა $\cos\vartheta$-ს ნიშანს. თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარცხენა (მარჯვენა) სამეულია, მაშინ ϑ მახვილია (ბლაგვია), ამიტომ შერეული ნამრავლი დადებითია (უარყოფითია). თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ კომპლანარული ვექტორებია, მაშინ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

შერეულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1°. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;

2°. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$;

3°. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$.

1°. თვისება გამომდინარეობს თეორემა 8.1-დან.

2°. თვისება გამომდინარეობს სკალარული ნამრავლისა და შერეული ნამრავლის 1° თვისებებიდან. მართლაც,

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

3°. თვისება გამომდინარეობს სკალარული ნამრავლის თვისებებიდან და შერეული ნამრავლის 2° თვისებიდან. მართლაც,

$$(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})=(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2, [\vec{b}, \vec{c}])=(\lambda\vec{a}_1, [\vec{b}, \vec{c}])+$$
$$+(\mu\vec{a}_2, [\vec{b}, \vec{c}])=\lambda(\vec{a}_1, [\vec{b}, \vec{c}])+\mu(\vec{a}_2, [\vec{b}, \vec{c}])=$$
$$=\lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c})+\mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}).$$

ახლა დავამტკიცოთ ვექტორული ნამრავლის თვისებები.

1°. ვექტორთა სამეულები $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ და $\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}$ სხვადასხვა ორიენტაციისაა, ამიტომ შერეული ნამრავლის თვისებების ძალით

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{d})=-([\vec{b}, \vec{a}], \vec{d})=(-[\vec{b}, \vec{a}], \vec{d}).$$

ამ ტოლობიდან სკალარული ნამრავლის 7° თვისების თანახმად (რადგან $\vec{d}$ ნებისმიერი ვექტორია)

$$[\vec{a}, \vec{b}]=-[\vec{b}, \vec{a}].$$

2°, შერეული ნამრავლის 2° თვისების ძალით

$$([\lambda\vec{a}, \vec{b}], \vec{d})=(\lambda\vec{a}, [\vec{b}, \vec{d}])=\lambda(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{d}])=$$
$$=\lambda([\vec{a}, \vec{b}], \vec{d})=(\lambda[\vec{a}, \vec{b}], \vec{d}).$$

აქედან სკალარული ნამრავლის 7° თვისების თანახმად

$$[\lambda\vec{a}, \vec{b}]=\lambda[\vec{a}, \vec{b}].$$

ამასთან,

$$[\vec{a}, \lambda\vec{b}]=-[\lambda\vec{b}, \vec{a}]=-\lambda[\vec{b}, \vec{a}]=\lambda[\vec{a}, \vec{b}].$$

3°. შერეული ნამრავლის თვისებების ძალით

$$([\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}], \vec{d})=(\vec{a}+\vec{b}, [\vec{c}, \vec{d}])=(\vec{a}, [\vec{c}, \vec{d}])+(\vec{b}, [\vec{c}, \vec{d}])=$$
$$=([\vec{a}, \vec{c}], \vec{d})+([\vec{b}, \vec{c}], \vec{d})=([\vec{a}, \vec{c}]+[\vec{b}, \vec{c}], \vec{d}).$$

სკალარული ნამრავლის 7° თვისების თანახმად უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}]=[\vec{a}, \vec{c}]+[\vec{b}, \vec{c}].$$

გარდა ამისა,

$$[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}]=-[\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}]=-[\vec{b}, \vec{a}]-[\vec{c}, \vec{a}]=[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{a}, \vec{c}].$$

4°. თვისება გამომდინარეობს ვექტორული ნამრავლის განმარტებიდან და ვექტორული ნამრავლის 1° თვისებიდან.

§ 9. ვექტორული და შერეული ნამრავლების გამოსახვა კოორდინატებით. სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა

თეორემა. 9.1. თუ $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ და $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, მაშინ

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}. \quad (9.1)$$

დამტკიცება. ვექტორული ნამრავლის თვისებების ძალით გვაქვს

$$\vec{a}\times\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1 x_2(\vec{i}\times\vec{i}) +$$

$$+ x_1 y_2(\vec{i}\times\vec{j}) + x_1 z_2(\vec{i}\times\vec{k}) + y_1 x_2(\vec{j}\times\vec{i}) + y_1 y_2(\vec{j}\times\vec{j}) +$$

$$+ y_1 z_2(\vec{j}\times\vec{k}) + z_1 x_2(\vec{k}\times\vec{i}) + z_1 y_2(\vec{k}\times\vec{j}) + z_1 z_2(\vec{k}\times\vec{k}) =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(9.1) ფორმულის დასამახსოვრებლად სასარგებლოა მისი ჩაწერა დეტერმინანტის საშუალებით

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k}. \quad (9.2)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (9.3)$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ და $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი.

ამოხსნა. (9.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} =$$

$$= -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}.$$

თეორემა 9.2. თუ $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ და $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, მაშინ ამ ვექტორების შერეული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

დამტკიცება. (6.3) და (9.2) ტოლობების ძალით გვაქვს

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9.3. იმისათვის, რომ $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ და $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ ვექტორები იყოს კომპლანარული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი შერეული ნამრავლი უდრიდეს ნულს:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{9.4}$$

დამტკიცება. აუცილებლობა უშუალოდ გამომდინარეობს შერეული ნამრავლის განსაზღვრებიდან. ვაჩვენოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (9.4) პირობას. თუ დავუშვებთ, რომ ეს ვექტორები არაკომპლანარულია, მაშინ მათი შერეული ნამრავლის მოდული თეორემა 8.1-ის ძალით იქნება ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. ვაჩვენოთ, რომ ვექტორები $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ და $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ კომპლანარულია.

ამოხსნა. შევამოწმოთ (9.4) პირობა

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

ამრიგად, მოცემული ვექტორები კომპლანარულია.

1. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით. ვთქვათ, მოცემულია $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილები და ნებისმიერი $\lambda \neq -1$ რიცხვი. $[M_1 M_2]$ მონაკვეთის გაყოფა λ ფარდობით ნიშნავს ისეთი M წერტილის მოძებნას, რომლისთვისაც

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}\,. \tag{10.1}$$

თუ M წერტილის კოორდინატებია x, y, z, მაშინ $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{MM_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$. ამიტომ (10.1)-დან გვაქვს

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x),\ \ y - y_1 = \lambda (y_2 - y),\ \ z - z_1 = \lambda (z_2 - z)$$

აქედან

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

კერძოდ, როცა $\lambda = 1$, მაშინ M არის $[M_1 M_2]$ მონაკვეთის შუაწერტილი და მისი კოორდინატებია:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

2. სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა. ვთქვათ მოცემულია ΔABC, როგორც ვიცით, ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე უდრის ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს, ამიტომ ABC სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ვექტორის სიგრძის ნახევრის ე. ი.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \,|\, \vec{AB} \times \vec{AC} \,|\,.$$

ამოცანა. ვიპოვოთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია $A\,(2;3;1)$, $B\,(5;6;3)$, $C\,(7;1;10)$ წერტილები.

ამოხსნა. ცხადია

$$\vec{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{AC} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k},$$

ამიტომ

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\vec{i} - 17\vec{j} - 21\vec{k}.$$

ამრიგად

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \,|\, 31\vec{i} - 17\vec{j} - 21\vec{k} \,|\, = \frac{\sqrt{1691}}{2}.$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა სამკუთხედის წვეროებია $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ და $C(x_3, y_3)$, სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

3. **ტეტრაედრის მოცულობის გამოთვლა.** ვთქვათ მოცემულია ტეტრაედრი, რომლის წვეროებია A, B, C, D წერტილები.

როგორც ვიცით, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ წიბოებზე აგებული ტეტრაედრის მოცულობა ტოლია ამავე წიბოებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის მეექვსედის, ამიტომ

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}) \right| . \qquad (10.1)$$

ამოცანა. გამოვთვალოთ იმ პირამიდის მოცულობა, რომლის წვეროებია $O(0, 0, 0)$, $A(5, 2, 0)$, $B(2;\ 5;\ 0)$, $C(1;\ 2,\ 4)$.

ამოხსნა. ცხადია

$$\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 2\vec{j},\ \ \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 5\vec{j},\ \ \overrightarrow{OC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\,.$$

ამიტომ

14 + 4 + 3 −

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 84.$$

6 − 7 − 8

აქედან (10.1)-ის ძალით

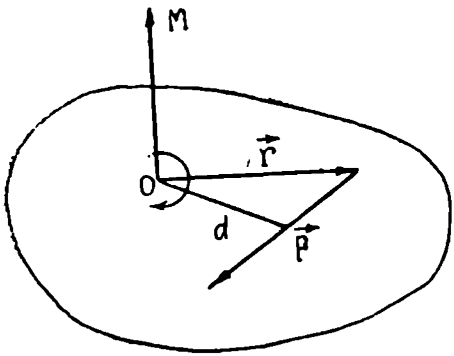
$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14.$$

4. **ძალის მუშაობა.** როგორც ფიზიკიდან ცნობილია, თუ $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით მატერიალური წერტილი სწორხაზოვნად გადაადგილდება A მდებარეობიდან B მდებარეობაში, მაშინ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა გამოითვლება ფორმულით

$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha\,,$$

სადაც $\alpha = \vec{F}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{AB}$, ე. ი. $W = (\vec{F},\ \overrightarrow{AB})$. ამრიგად, $\vec{F}$ ძალის მიერ $\overrightarrow{AB}$ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა ამ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის ტოლია.

5. ძალის მომენტი წერტილის მიმართ. ვთქვათ მოცემულია რაიმე O წერტილი და $\vec{F}$ ძალა, რომელიც არ გადის O წერტილზე. აღვნიშნოთ α-თი $\vec{F}$ ვექტორითა და O წერტილით განსაზღვრული სიბრტყე.



ნახ. 24

O წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის მოქმედების წრფემდე d მანძილს ეწოდება $\vec{F}$ ძალის მხარი O წერტილის მიმართ.

ცნობილია, რომ $\vec{F}$ ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ ეწოდება O წერტილზე მოდებული და α სიბრტყის პერპენდიკულარულ ისეთ $\vec{M}$ ვექტორს, რომელიც მიმართულია ისე, რომ მისი ბოლოდან $\vec{F}$ ძალის მიერ α სიბრტყის „მობრუნება" ჩანს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და რომლის სიგრძე უდრის $\vec{F}$ ვექტორის სიგრძისა და d მხარის ნამრავლს (ნახ. 24).

განვიხილოთ რადიუს-ვექტორი $\vec{r}$, რომლის სათავეა O, ხოლო ბოლო წერტილია $\vec{F}$ ძალის მოდების წერტილი. თუ გავიხსენებთ ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებას და გავითვალისწინებთ, რომ $d = |\vec{r}| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})$, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

ამრიგად, $\vec{F}$ ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ წარმოადგენს $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორისა და $\vec{F}$ ძალის ვექტორულ ნამრავლს.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რა დამოკიდებულებაა დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის?

2. რას ეწოდება ვექტორი? ტოლი ვექტორები? ვექტორთა ჯამი? ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი?

3. როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული? კომპლანარული?

4. განსაზღვრეთ ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა.

5. განსაზღვრეთ ბაზისი.

6. რას ეწოდება ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი? ჩამოაყალიბეთ სკალარული ნამრავლის თვისებები.

7. განსაზღვრეთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი და ჩამოაყალიბეთ მისი თვისებები.

8. განსაზღვრეთ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი და ჩამოაყალიბეთ მისი თვისებები.

9. ჩამოაყალიბეთ სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა.

IV თავი

წრფე და სიბრტყე

§ 1. წირისა და ზედაპირის განტოლებები

ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა და რაიმე L წირი. განვიხილოთ განტოლება

$$F(x,\ y)=0, \tag{1.1}$$

რომელიც აკავშირებს x და y ცვლად სიდიდეებს.

განსაზღვრება 1. 1. $F(x,\ y)=0$ განტოლებას ეწოდება L წირის განტოლება, თუ ამ განტოლებას აკმაყოფილებენ L წირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებენ არცერთი სხვა (L წირზე არამდებარე) წერტილის კოორდინატები.

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ L წირი წარმოადგენს (კოორდინატთა მოცემულ სისტემაში) სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1. 1) განტოლებას. ამის გამო ამბობენ, რომ (1.1) განტოლება განსაზღვრავს L წირს.

წირის განტოლების ცნება საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ გეომეტრიული ამოცანები ალგებრული მეთოდებით. მაგალითად, ორი წირის თანაკვეთის წერტილის მოძებნის ამოცანა დაიყვანება მათი განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემის ამოხსნის ალგებრულ ამოცანაზე.

წირის განსაზღვრა შეიძლება ასეთი სახის განტოლებითაც

$$F(\rho, \varphi) = 0,$$

სადაც ρ და φ წერტილის პოლარული კოორდინატებია.

ხშირად L წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის მოსახერხებელია ამ წირის წერტილების x და y კოორდინატების გამოსახვა მესამე დამხმარე ცვლადის ანუ პარამეტრის დახმარებით:

$$x = x(t), \ y = y(t),$$

სადაც $x(t)$ და $y(t)$ t პარამეტრის ფუნქციებია. ამ განტოლებებს ეწოდება წირის პარამეტრული განტოლებები სიბრტყეზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შევადგინოთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია $C(a, b)$, ხოლო რადიუსია R.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ $M(x, y)$ წრეწირის ნებისმიერი წერტილია. რადგან მანძილი M და C წერტილებს შორის R-ის ტოლია, ამიტომ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

საიდანაც

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{1.2}$$

ცხადია, რომ (1.2) განტოლებას აკმაყოფილებს მოცემული წრეწირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს არცერთი სხვა წერტილის კოორდინატები, ამიტომ (1.2) არის მოცემული წრეწირის განტოლება.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, წრეწირის განტოლებას აქვს სახე

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

შემოვიყვანოთ ახლა ზედაპირისა და წირის განტოლებების ცნებები სივრცეში.

ვთქვათ მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა და რაიმე S ზედაპირი. განვიხილოთ განტოლება

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{1.3}$$

რომელიც აკავშირებს x, y და z ცვლად სიდიდეებს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1. 2. $\Phi(x, y, z) = 0$ განტოლებას ეწოდება S ზედაპირის განტოლება, თუ ამ განტოლებას აკმაყოფილებენ S ზედაპირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილე-

ბენ არცერთი სხვა (S ზედაპირზე არამდებარე) წერტილის კოორდინატები.

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ S ზედაპირი წარმოადგენს (კოორდინატთა მოცემულ სისტემაში) სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1.3) განტოლებას. ამის გამო ამბობენ, რომ (1.3) განტოლება განსაზღვრავს S ზედაპირს.

წირი სივრცეში შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი ზედაპირის თანაკვეთა, ე. ი. როგორც იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ერთდროულად ორ ზედაპირზე მდებარეობენ, ამიტომ წირი შეიძლება განისაზღვროს ორი განტოლების მოცემით. ამრიგად, განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

განსაზღვრავს წირს.

ანალოგიურად სიბრტყეზე მდებარე (ბრტყელი) წირისა, სივრცითი წირის მოცემა შეიძლება პარამეტრული სახის განტოლებებით:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შევადგინოთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C (a; b; c), ხოლო რადიუსია R.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ M (x; y; z) სფეროს ნებისმიერი წერტილია. რადგან მანძილი M და C წერტილებს შორის R-ის ტოლია, ამიტომ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R,$$

საიდანაც

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{1.4}$$

ცხადია, რომ (1.4) განტოლებას აკმაყოფილებს მოცემული სფეროს ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს არცერთი სხვა წერტილის კოორდინატები. ამიტომ (1.4) არის მოცემული სფეროს განტოლება.

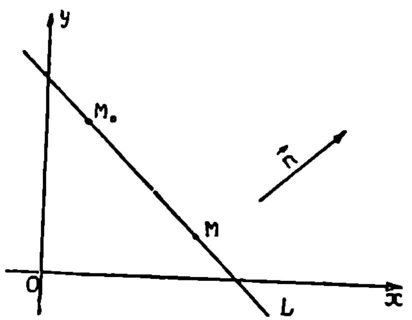
იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, სფეროს განტოლებას აქვს სახე

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

§ 2. წრფე სიბრტყეზე

1. **წრფის ზოგადი სახის განტოლება.** ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია Oxy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და რაიმე L წრფე (ნახ. 25). განვიხილოთ L წრფის პერპენდიკულარული რაიმე არანულოვანი ვექტორი

$$\vec{n}\,(A,\, B)\,.$$



ნახ. 25

ავიღოთ L წრფეზე ნებისმიერი წერტილი $M_0\,(x_0,\; y_0)$. ცხადია, L წრფეზე და მხოლოდ მასზე აღებული ნებისმიერი $M\,(x,\, y)$ წერტილისთვის ვექტორი $\overrightarrow{M_0M}$ იქნება $\vec{n}$ ვექტორის პერპენდიკულარული, ე. ი.

$$(\,\overrightarrow{M_0M}\,,\ \vec{n}\,) = 0\,. \qquad (2.1)$$

რადგან

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0\},$$

ამიტომ (2.1)-დან გვაქვს

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0. \qquad (2.2)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$C = -A\,x_0 - B\,y_0,$$

მაშინ (2.2) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2.3)$$

ამრიგად, L წრფის წერტილების კოორდინატები და მხოლოდ ისინი აკმაყოფილებენ (2.3) წრფივ განტოლებას.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი წრფივი (2.3) სახის განტოლება მოცემული კოორდინატთა სისტემის მიმართ განსაზღვრავს რაღაც წრფეს. რადგან (2.3) პირველი ხარისხის განტოლებაა, ამიტომ A და B მუდმივებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. აქედან გამომდინარე, (2.3) განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსენი $(x_0,\ y_0)$. მაგალითად

$$x_0 = -\frac{AC}{A^2 + B^2}\,, \qquad y_0 = -\frac{BC}{A^2 + B^2}$$

ამონახსენია, რადგან

$$A\,x_0 + B\,y_0 + C = 0. \qquad (2.4)$$

თუ (2.3) განტოლებას გამოვაკლებთ (2.4)-ს, მივიღებთ განტოლებას

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad (2.5)$$

რომელიც (2.3) განტოლების ტოლფასია.

(2.5)-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $M(x, y)$ წერტილი, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2.3) განტოლებას, ძევს წრფეზე, რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე და $\vec{n}(A, B)$ ვექტორის პერპენდიკულარულია.

ამრიგად, სიბრტყეზე ფიქსირებული კოორდინატთა სისტემის მიმართ ყოველი წრფივი განტოლება განსაზღვრავს წრფეს და, პირიქით, ყოველი წრფის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ განტოლებას.

(2.3) განტოლებას ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლება სიბრტყეზე, ხოლო $\vec{n}(A, B)$ ვექტორს — წრფის ნორმალური ვექტორი.

ახლა დავადგინოთ, თუ რა მდებარეობა აქვს წრფეს კოორდინატთა სისტემის მიმართ, როდესაც (2.3) განტოლების ერთი ან ორი კოეფიციენტი ნულია.

I. ვთქვათ $C=0$, მაშინ (2.3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+By=0.$$

რადგან $x=0$, $y=0$ აკმაყოფილებს ამ განტოლებას, ამიტომ წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე.

II. ვთქვათ $B=0$. მაშინ (2.3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+C=0.$$

აქედან

$$x=a,$$

სადაც

$$a=-\frac{C}{A}.$$

ეს წრფე Ox ღერძს კვეთს $(a; 0)$ წერტილში და Oy ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}(A, 0)$ ვექტორი Oy ღერძის მართობულია. კერძოდ, როცა $C=0$ გვაქვს Oy ღერძის განტოლება $x=0$.

III. ვთქვათ $A=0$. მაშინ (2. 3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$By+C=0.$$

აქედან

$$y=b,$$

სადაც

$$b = -\frac{C}{B}.$$

ეს წრფე Oy ღერძს კვეთს (0; b) წერტილში და Ox ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}$ (0; B) ვექტორი Ox ღერძის მართობულია. კერძოდ, როცა $C=0$ გვაქვს Ox ღერძის განტოლება $y=0$.

შემდეგ პუნქტებში ჩვენ მივიღებთ წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებებს.

2. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. დავუშვათ, რომ (2.3) განტოლებაში A, B და C მუდმივები განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ ეს განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

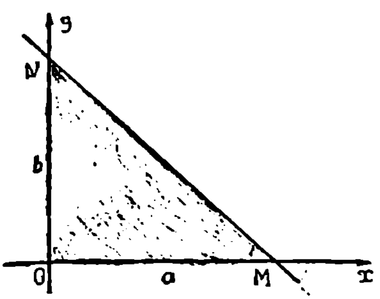
$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B},$$

მაშინ წრფის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2.6)$$



ნახ. 26

a და b პარამეტრებს აქვთ მარტივი გეომეტრიული შინაარსი. a წარმოადგენს (2.6) წრფის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი OM მონაკვეთის სიდიდეს, ხოლო b — ამ წრფის მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი ON მონაკვეთის სიდიდეს (ნახ. 26).

a და b პარამეტრების ამ გეომეტრიული შინაარსის გამო (2. 6) განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.

3. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით. ვთქვათ, $B=0$. მაშინ (2.3) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$-\frac{A}{B}=k, \quad -\frac{C}{B}=b,$$

მაშინ მივიღებთ

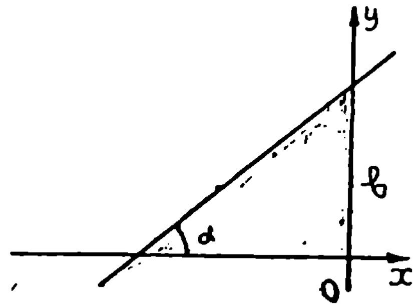
$$y=kx+b. \tag{2.7}$$

ადვილია ჩვენება, რომ k არის იმ α კუთხის ტანგენსი, რომელსაც (2.7) წრფე ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. მას წრფის კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება, b კი წარმოადგენს იმ მონაკვეთის სიდიდეს, რომელსაც წრფე მოკვეთს Oy ღერძზე (ნახ. 27).

(2.7) განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით.

4. **წრფის კანონიკური და პარამეტრული განტოლებები.** ყოველ არანულოვან ვექტორს, რომელიც მოცემული წრფის პარალელურია, ეწოდება მისი მიმმართველი ვექტორი. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომლის მიმმართველი ვექტორია $\vec{q}\,(l, m)$ და რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე. ცხადია, რომ წერტილი $M(x, y)$ ძევს მოცემულ წრფეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ და $\vec{q}$ ვექტორები კოლინეარულია, ე. ი. როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{2.8}$$



ნახ. 27

(2.8) განტოლებას ეწოდება წრფის კანონიკური განტოლება.

წრფის კანონიკური (2.8) განტოლებიდან გვაქვს

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{2.9}$$

სადაც

$$t=\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

(2.9) წარმოადგენს წრფის პარამეტრულ განტოლებებს.

5. **მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.** წრფის კანონიკური (2.8) განტოლებიდან ადვილად

მიიღება ორ $M_0(x_0, y_0)$ და $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ამისათვის, საკმარისია წრფის მიმმართველ ვექტორად ავიღოთ ვექტორი $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0;\ y_1 - y_0\}$. თუ გავითვალისწინებთ ამ გარემოებას, მივიღებთ M_0 და M_1 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებას

$$15 \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

6. მოცემულ წერტილზე მოცემული მიმართულებით გამავალი წრფის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის M_0 წერტილზე და რომლის კუთხური კოეფიციენტია მოცემული k რიცხვი. საძიებელი განტოლება იყოს

$$y = kx + b. \quad 9 \tag{2.10}$$

რადგან ეს წრფე გადის M_0 წერტილზე, ამიტომ

$$y_0 = kx_0 + b. \quad 13 \tag{2.11}$$

(2.10) და (2.11)-დან მივიღებთ

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad 9 \tag{2.12}$$

(2.12) არის მოცემულ წერტილზე მოცემული მიმართულებით გამავალი წრფის განტოლება. ამ განტოლებიდან k-ს სათანადო შერჩევით მიიღება M_0 წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლება გარდა იმ წრფისა, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია. (2.12)-ს უწოდებენ M_0 წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლებას.

7. კუთხე ორ წრფეს შორის. ორი წრფის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები. ვთქვათ სიბრტყეზე ორი წრფე მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებებით:

$$24 \quad \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

ეს წრფეები განსაზღვრავენ ორ კუთხეს, რომელთა ჯამი უდრის 180°-ს. ამ კუთხეებს შორის უმცირესს ვუწოდოთ კუთხე მოცემულ წრფეებს შორის. რადგან $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ და $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ ვექტორები შესაბამისად მოცემული წრფეების პერპენდიკულარულია, ამიტომ მოცემულ წრფეთა შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$20 \quad \cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.13}$$

ცხადია, რომ მოცემულ წრფეთა პარალელობის პირობა იგივეა, რაც მათი ნორმალური $\vec{n}_1$ და $\vec{n}_2$ ვექტორების კოლინეარობის პირობა, ე. ი. მათი კოორდინატების პროპორციულობა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

რადგან ურთიერთპერპენდიკულარული წრფეებისათვის $\cos\varphi=0$, ამიტომ (2.13) ფორმულიდან გვაქვს ორი წრფის პერპენდიკულარობის პირობა

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

ახლა ვთქვათ ზემოთგანხილულ წრფეთა განტოლებები ჩაწერილია კუთხური კოეფიციენტებით:

$$y=k_1x+b_1,$$
$$y=k_2x+b_2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $k_1=-\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2=-\dfrac{A_2}{B_2}$, მაშინ (2.13) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\cos\varphi=\frac{|1+k_1k_2|}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}$$

აქედან მიიღება ფორმულა

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|,$$

რომელიც აგრეთვე გამოიყენება ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელად.

ორი წრფის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები კუთხური კოეფიციენტების საშუალებით შესაბამისად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$k_1=k_2$$

და

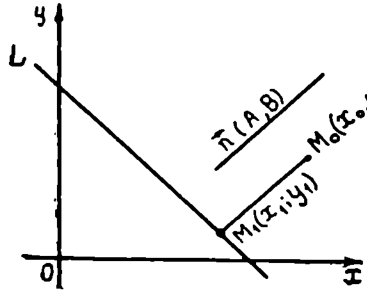
$$1+k_1k_2=0.$$

8. მანძილი წერტილიდან წრფემდე. ვთქვათ, მოცემულია L წრფე (2.3) სახის განტოლებით და სიბრტყის ნებისმიერი $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი. ვიპოვოთ მანძილი $\rho(M_0, L)$, M_0 წერტილიდან L წრფემდე. ამ მიზნით M_0 წერტილიდან L-ზე დავუშვათ პერპენდი-

კულარული და აღვნიშნოთ მისი ფუძე $M_1(x_1, y_1)$-ით (ნახ. 28). ცხადია, რომ საძიებელი მანძილი

$$\rho(M_0, L) = |\overrightarrow{M_0M_1}|.$$

ვექტორები $\vec{n}(A, B)$ და $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0\}$ კოლინეარულია, როგორც ერთი და იმავე L წრფის პერპენდიკულარული ვექტორები, ამიტომ მოიძებნება ისეთი t რიცხვი, რომ $\overrightarrow{M_0M_1} = t\vec{n}$, საიდანაც გვაქვს



ნახ. 28

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = At, \\ y_1 - y_0 = Bt. \end{cases} \tag{2.14}$$

$M_1(x_1; y_1)$ წერტილი ძევს L წრფეზე, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2.3) განტოლებას. თუ (2.14) სისტემიდან x_1 და y_1-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (2.3) განტოლებაში და განვსაზღვრავთ t-ს, მივიღებთ

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

მეორეს მხრივ, რადგან

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

ამიტომ

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = |t| \cdot \sqrt{A^2 + B^2},$$

საიდანაც

$$\rho(M_0, L) = |\overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

კერძოდ,

$$\rho(O, L) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

§ 3. სიბრტყის განტოლებები

1. **სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება.** წინა პარაგრაფში ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყოველი წრფივი განტოლება

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.1}$$

განსაზღვრავს სიბრტყეს ფიქსირებული $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ და პირიქით, ყოველი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ განტოლებას.

(3.1) განტოლებას ეწოდება სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება, ხოლო სიბრტყის პერპენდიკულარულ $\vec{n}(A, B, C)$ ვექტორს ამ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.

დავადგინოთ, თუ რა მდებარეობა აქვს სიბრტყეს კოორდინატთა სისტემის მიმართ, როდესაც (3.1) განტოლების ერთი ან რამდენიმე კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

I. ვთქვათ $D=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax + By + Cz = 0.$$

რადგან $x=0$, $y=0$, $z=0$ აკმაყოფილებს ამ განტოლებას, ამიტომ სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე.

II. ვთქვათ $C=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax + By + D = 0.$$

ეს სიბრტყე Oxy საკოორდინატო სიბრტყეს კვეთს $Ax+By+D=0$ წრფეზე და Oz ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}(A, B, 0)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია Oz ღერძის.

III. ვთქვათ $B=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax + Cz + D = 0.$$

ეს სიბრტყე Oxz საკოორდინატო სიბრტყეს კვეთს $Ax+Cz+D=0$ წრფეზე და Oy ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}(A, 0, C)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია Oy ღერძის.

IV. ვთქვათ $A=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$By + Cz + D = 0.$$

ეს სიბრტყე Oyz საკოორდინატო სიბრტყეს კვეთს $By+Cz+D=0$ წრფეზე და Ox ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}(0, B, C)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია Ox ღერძის.

V. ვთქვათ $A=0$, $B=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Cz + D = 0.$$

აქედან

$$z = -\frac{D}{C}.$$

ეს სიბრტყე Oz ღერძს კვეთს $\left(0;\ 0;\ -\frac{D}{C}\right)$ წერტილში და პარალელურია Oxy საკოორდინატო სიბრტყის, რადგან მისი ნორმალური ვექტორი $\vec{n}\,(0,\ 0,\ C)$ პერპენდიკულარულია Oxy საკოორდინატო სიბრტყის. კერძოდ, როცა $D=0$ გვაქვს Oxy სიბრტყის განტოლება $z=0$.

VI. ვთქვათ $A=0$, $C=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$By+D=0.$$

აქედან

$$y=-\frac{D}{B}.$$

ეს სიბრტყე Oy ღერძს კვეთს $\left(0;\ -\frac{D}{B};\ 0\right)$ წერტილში და პარალელურია Oxz საკოორდინატო სიბრტყის, რადგან მისი ნორმალური ვექტორი $\vec{n}\,(0;\ B;\ 0)$ პერპენდიკულარულია Oxz საკოორდინატო სიბრტყის. კერძოდ, როცა $D=0$, გვაქვს Oxz საკოორდინატო სიბრტყის განტოლება $y=0$.

VII. ვთქვათ $B=0$, $C=0$. მაშინ (3.1) მიიღებს სახეს

$$Ax+D=0.$$

აქედან

$$x=-\frac{D}{A}.$$

ეს სიბრტყე Ox ღერძს კვეთს $\left(-\frac{D}{A};\ 0;\ 0\right)$ წერტილში და პარალელურია Oyz საკოორდინატო სიბრტყის, რადგან მისი ნორმალური ვექტორი $\vec{n}\,(A;\ 0;\ 0)$ პერპენდიკულარულია Oyz საკოორდინატო სიბრტყის. კერძოდ, როცა $D=0$ გვაქვს Oyz საკოორდინატო სიბრტყის განტოლება $x=0$.

2. **სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.** დავუშვათ, რომ (3.1) განტოლებაში A, B, C და D მუდმივები განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ ეს განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C},$$

მაშინ სიბრტყის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

a, b და c პარამეტრებს აქვთ მარტივი გეომეტრიული შინაარ- ისინი წარმოადგენენ იმ მონაკვეთების სიდიდეებს, რომლებსაც მო- მული სიბრტყე ჩამოჭრის შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძებიდ

3. სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლე ვთქვათ მოცემულია ერთ წრფეზე არამდებარე სამი $M_1(x_1, y_1,$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ და $M_3(x_3, y_3, z_3)$ წერტილი. რადგან ეს წერტილები წრფეზე არ მდებარეობენ, ამიტომ ვექტორები

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\}.$$

არაკოლინეარულია. აქედან გამომდინარეობს, რომ წერტილი $M(x, y$ ძევს M_1, M_2 და M_3 წერტილებზე გამავალ სიბრტყეზე, მაშინ და მ ლოდ მაშინ, როცა ვექტორები $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1}$ და $\overrightarrow{M_1M_3}$ კომპლანარულია, ე. ი. მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ლი აქვს ტოლობას

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

ეს არის სამ M_1, M_2 და M_3 წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტ ლება.

4. კ უ თ ხ ე ო რ ს ი ბ რ ტ ყ ე ს შ ო რ ი ს. პ ა რ ა ლ ე ლ ო ს ა დ ა პ ე რ პ ე ნ დ ი კ უ ლ ა რ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ე ბ ი. ვთქ მოცემულია ორი სიბრტყე განტოლებებით

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

რადგან ვექტორები $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ და $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ შესაბამ მოცემული სიბრტყეების პერპენდიკულარულია, ამიტომ მოცე სიბრტყეთა შორის φ კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

ცხადია, რომ მოცემულ სიბრტყეთა პარალელობის პირობა იგივეა, რაც მათი ნორმალური $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ ვექტორების კოლინეარობის პირობა. ე. ი. მათი კოორდინატების პროპორციულობა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

ცხადია აგრეთვე, რომ ამ სიბრტყეთა თანამთხვევის პირობაა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

მოცემულ სიბრტყეთა პერპენდიკულარობის პირობა იქნება $\vec{n}_1$ და $\vec{n}_2$ ვექტორების პერპენდიკულარობის პირობა

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

5. სიბრტყეთა ძნული და სიბრტყეთა კონა

მოცემულ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას ეწოდება სიბრტყეთა ძნული M_0 ცენტრით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ძნულის განტოლებას აქვს სახე

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{3.2}$$

სადაც A, B და C რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

მართლაც, (3.2) განტოლებით განსაზღვრული ნებისმიერი სიბრტყე გადის M_0 წერტილზე. მეორეს მხრივ, თუ მოცემულია M_0 წერტილზე გამავალი რაიმე სიბრტყე, მაშინ ის ცალსახად განისაზღვრება მისი ნორმალური $\vec{n}(A, B, C)$ ვექტორის მოცემით, ე. ი. განისაზღვრება (3.2) განტოლებით.

ამრიგად, მოცემულ M_0 წერტილზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყის განტოლება მიიღება (3.2) განტოლებიდან A, B და C მუდმივების სათანადო შერჩევით.

ერთსა და იმავე L წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას ეწოდება სიბრტყეთა კონა L ღერძით.

ვთქვათ მოცემულია ორი თანამკვეთი სიბრტყე

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{და} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

ვაჩვენოთ, რომ მათი თანაკვეთის წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა კონის განტოლებას აქვს სახე

$$\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0, \quad (3.3)$$

სადაც λ_1 და λ_2 რიცხვები ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ყოველი λ_1 და λ_2 რიცხვებისათვის (რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს) (3. 3) განტოლება პირველი ხარისხისაა. ამისათვის (3.3) განტოლება ასე გადავწეროთ

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) y + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) z + \\ + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2) = 0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0,$$

მაშინ (თუ მაგალითად $\lambda_2 \neq 0$) გვექნება

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

ეს კი მოცემულ სიბრტყეთა პარალელობის პირობაა, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. ამრიგად, (3.3) სიბრტყის განტოლებაა.

ეს სიბრტყე გადის მოცემული სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე. მართლაც, ამ წრფის ნებისმიერი $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ წერტილი ძევს ორივე მოცემულ სიბრტყეზე, ე. ი.

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0 \quad \text{და} \quad A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0.$$

ამიტომ ნებისმიერი λ_1 და λ_2 რიცხვებისათვის

$$\lambda_1 (A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1) + \lambda_2 (A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2) = 0.$$

ამრიგად, მოცემული სიბრტყეების თანაკვეთის წრფის ყოველი წერტილი ძევს (3.3) სიბრტყეზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ კონის ნებისმიერი სიბრტყის განტოლება მიიღება (3.3)-დან. ამისათვის ავიღოთ კონის რომელიმე სიბრტყე და მისი ისეთი $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ წერტილი, რომელიც კონის ღერძზე არ ძევს და ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი λ_1, λ_2 რიცხვები, რომელთათვისაც

$$\lambda_1 (A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1) + \lambda_2 (A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2) = 0. \quad (3.4)$$

რადგან M_0 წერტილი კონის ღერძზე არ ძევს, ამიტომ $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1$ და $A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ვთქვათ მაგალითად $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 +$

$+D_1 \neq 0$. ავიღოთ ნებისმიერი $\lambda_2 \neq 0$ რიცხვი, ხოლო λ_1 განვსაზღვროთ ტოლობით

$$\lambda_1 = -\frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1} \cdot \lambda_2 .$$

ცხადია, რომ ასეთნაირად შერჩეული λ_1 და λ_2 რიცხვებისათვის ადგილი აქვს (3.4) ტოლობას.

6. მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე. ვთქვათ მოცემულია α სიბრტყე განტოლებით

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

და წერტილი $M_0 (x_0, y_0, z_0)$.

M_0 წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი $\rho(M_0, \alpha)$ გამოითვლება ფორმულით

$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|A x_0 + B y_0 + C z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

ეს ფორმულა მიიღება წერტილიდან წრფემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის ანალოგიურად.

§ 4. წრფე სივრცეში

1. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებები. სიბრტყეზე განხილული წრფის შემთხვევის ანალოგიურად, სივრცეში ფიქსირებული $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ იმ წრფის განტოლებები, რომლის მიმმართველი ვექტორია $\vec{q}\,(l, m, n)$ და რომელიც გადის $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე არის

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} . \tag{4.1}$$

ამ განტოლებებს სივრცეში წრფის კანონიკური განტოლებები ეწოდება.

(4.1) განტოლებებიდან მარტივად მივიღებთ წრფის პარამეტრულ განტოლებებს

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

სადაც

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} .$$

თუ კერძოდ ამ განტოლებებს განვიხილავთ, როგორც წერტილის მოძრაობის განტოლებებს, მაშინ ისინი განსაზღვრავენ თანაბარ სწორხაზოვან მოძრაობას. t დროში გავლილი მანძილი იქნება $S=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, ხოლო სიჩქარე $V=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$.

ვთქვათ მოცემულია ორი წერტილი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ და $M_1(x_1, y_1, z_1)$. ამ წერტილებზე გამავალი წრფის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ ვექტორი

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0\}.$$

ამიტომ (4.1)-ის მიხედვით M_0 და M_1 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებებია

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

წრფე სივრცეში შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ორი გადამკვეთი $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ სიბრტყის თანაკვეთა. ამიტომ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{4.2}$$

განსაზღვრავს გარკვეულ წრფეს.

განტოლებათა (4.2) სისტემას ეწოდება წრფის განტოლებები ზოგადი სახით.

ვაჩვენოთ, თუ როგორ დაიყვანება წრფის ზოგადი (4.2) სახის განტოლებები კანონიკურ (4.1) სახეზე. რადგან $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ სიბრტყეები გადამკვეთია, ამიტომ შემდეგი ტოლობებიდან

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

ერთი მაინც არ სრულდება. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

ამიტომ, (4.2)-დან მივიღებთ

$$\begin{cases} x=a_1z+b_1 \\ y=a_2z+b_2. \end{cases}$$

ამრიგად, მოცემული წრფის პარამეტრული განტოლებებია

$$\begin{cases} x = b_1 + a_1 t \\ y = b_2 + a_2 t \\ z = 0 + 1 \cdot t. \end{cases}$$

მაშასადამე, მოცემული წრფე გადის $M_0(b_1, b_2, 0)$ წერტილზე და მისი მიმმართველი ვექტორია $\vec{q}(a_1, a_2, 1)$. ამიტომ მისი კანონიკური განტოლებებია

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2} = \frac{z - 0}{1}.$$

2. წ რ ფ ე თ ა ძ ნ უ ლ ი. მოცემულ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას ეწოდება წრფეთა ძნული M_0 ცენტრით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ძნულის განტოლებებს აქვს სახე

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{4.3}$$

სადაც l, m და n რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. მართლაც, (4.3) განტოლებებით განსაზღვრული ნებისმიერი წრფე გადის M_0 წერტილზე. მეორეს მხრივ, თუ მოცემულია M_0 წერტილზე გამავალი რაიმე წრფე, მაშინ ის ცალსახად განისაზღვრება მისი მიმმართველი $\vec{q}(l, m, n)$ ვექტორის მოცემით, ე. ი. განისაზღვრება (4.3) განტოლებით.

ამრიგად, მოცემულ M_0 წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლება მიიღება (4.3) განტოლებიდან l, m და n მუდმივების სათანადო შერჩევით.

3. კ უ თ ხ ე ო რ წ რ ფ ე ს შ ო რ ი ს. პ ა რ ა ლ ე ლ ო ბ ი ს ა და პ ე რ პ ე ნ დ ი კ უ ლ ა რ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ე ბ ი. ვთქვათ მოცემულია ორი წრფე

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

რადგან $\vec{q_1}(l_1, m_1, n_1)$ და $\vec{q_2}(l_2, m_2, n_2)$ ვექტორები შესაბამისად მო-

ცემული წრფეების პარალელურია, ამიტომ ამ წრფეებს შორის φ კუთხის კოსინუსი გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

ამ წრფეთა პარალელობის პირობაა

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

ხოლო პერპენდიკულარობის პირობაა

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

4. კ უ თ ხ ე წ რ ფ ე ს ა დ ა ს ი ბ რ ტ ყ ე ს შ ო რ ი ს. პ ა რ ა ლ ე ლ ო ბ ი ს ა დ ა პ ე რ პ ე ნ დ ი კ უ ლ ა რ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ე ბ ი. ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე ზოგადი განტოლებით

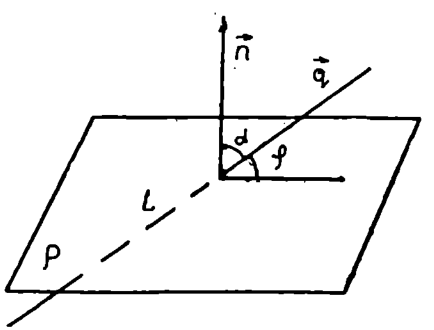
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

და L წრფე კანონიკური განტოლებებით

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

ვიპოვოთ φ კუთხე (ნახ. 29) P სიბრტყესა და L წრფეს შორის. α იყოს კუთხე $\vec{n}(A, B, C)$ და $\vec{q}(l, m, n)$ ვექტორებს შორის, მაშინ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, თუ α მახვილია და $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$, თუ α ბლაგვია, ამიტომ

$$\sin\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$



ნახ. 29

P სიბრტყისა და L წრფის პარალელობის პირობა

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

ხოლო მათი პერპენდიკულარობის პირობა იქნება

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} .$$

§ 5. ზოგიერთი ამოცანა წრფესა და სიბრტყეზე სივრცეში

1. მოცემულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლებები. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი და სიბრტყე

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

რადგანაც საძიებელი წრფე უნდა გადიოდეს M_0 წერტილზე და მის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ მოცემული სიბრტყის ნორმალური $\vec{n}(A, B, C)$ ვექტორი, ამიტომ ამ წრფის განტოლებებია

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} .$$

2. მოცემულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის პარალელურად გამავალი სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი და სიბრტყე

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

რადგან საძიებელი სიბრტყე უნდა გადიოდეს M_0 წერტილზე და მის ნორმალურ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ $\vec{n}(A, B, C)$ ვექტორი, ამიტომ სიბრტყეთა ძნულის (3.2) განტოლების თანახმად ,ამ სიბრტყის განტოლებაა

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

3. მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი და წრფე

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} .$$

რადგან საძიებელი სიბრტყე უნდა გადიოდეს M_0 წერტილზე და მის ნორმალურ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ წრფის მიმმართველი $\vec{q}\,(l, m, n)$ ვექტორი, ამიტომ სიბრტყეთა ძნულის (3.2) განტოლების თანახმად, ამ სიბრტყის განტოლებაა

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0.$$

4. წ რ ფ ი ს ს ი ბ რ ტ ყ ე ზ ე მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ე-ბ ი. ვთქვათ მოცემულია წრფე

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

და სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

რადგან $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი უნდა მდებარეობდეს მოცემულ სიბრტყეზე და წრფის მიმმართველი $\vec{q}\,(l, m, n)$ ვექტორი პერპენდიკულარული უნდა იყოს სიბრტყის ნორმალური $\vec{n}\,(A, B, C)$ ვექტორის, ამიტომ წრფის სიბრტყეზე მდებარეობის პირობებია

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ Al+Bm+Cn=0. \end{cases} \tag{5.1}$$

5. წ რ ფ ი ს ა და ს ი ბ რ ტ ყ ი ს თ ა ნ ა კ ვ ე თ ი ს წ ე რ ტ ი-ლ ი ს მ ო ძ ე ბ ნ ა. ვთქვათ მოცემულია სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5.2}$$

და წრფე

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{5.3}$$

(5.3)-დან x, y და z-ის მნიშვნელობები შევიტანოთ (5.2) განტოლებაში. მივიღებთ

$$(Ax_0+By_0+Cz_0+D)+(Al+Bm+Cn)\,t=0. \tag{5.4}$$

თუ $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ და $Al+Bm+Cn=0$, მაშინ (5.1)-ის ძალით წრფე ძევს სიბრტყეზე.

თუ $Al+Bm+Cn=0$ და $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, მაშინ წრფე სიბრტყის პარალელურია.

თუ $Al+Bm+Cn\neq 0$, მაშინ (5.4) ტოლობიდან განსაზღვრული t-ს მნიშვნელობის ჩასმით (5.3)-ში, მივიღებთ თანაკვეთის წერტილის კოორდინატებს.

6. ორი წრფის ერთ სიბრტყეზე მდებარეობის პირობა. ვთქვათ მოცემულია ორი წრფე

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

ამ წრფეების ერთ სიბრტყეზე მდებარეობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა მათი მიმმართველი $\vec{q}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\vec{q}_2(l_2, m_2, n_2)$ ვექტორებისა და $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$ ვექტორის კომპლანარობა; ე. ი.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{5.5}$$

თუ მოცემული წრფეები აკმაყოფილებენ (5.5) პირობას, მაშინ ისინი იკვეთებიან ან პარალელურია. რადგან მოცემული წრფეების პარალელობის პირობაა

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}, \tag{5.6}$$

ამიტომ იმისათვის, რომ ორი წრფე იკვეთებოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს (5.5) და არ სრულდებოდეს (5.6).

7. მოცემულ წრფეზე და მასზე არამდებარე წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი და წრფე

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

ვიპოვოთ მოცემულ წრფეზე მდებარე, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილისაგან განსხვავებული რაიმე M_2 წერტილი. საძებნი სიბრტყის განტოლება იქნება M_0, M_1, M_2 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

ამოცანა. ვიპოვოთ $M_0(-1;\ 0;\ 1)$ წერტილზე და

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{2}$$

წრფეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

ამოხსნა. ვიპოვოთ მოცემულ წრფეზე მდებარე, M_1 (2; —3; 3) წერტილისაგან განსხვავებული რაიმე M_2 წერტილი. ამისათვის დავუშვათ $z=5$. მაშინ წრფის განტოლებებიდან მივიღებთ $x=3$, $y=-5$, ე. ი. წერტილი M_2 (3; —5; 5) მდებარეობს მოცემულ წრფეზე.

შევადგინოთ M_0, M_1, M_2 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. გვაქვს

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან

$$2x+4y+3z-1=0.$$

ამრიგად, საძებნი სიბრტყის განტოლებაა $2x+4y+3z-1=0$.

8. მოცემულ წერტილზე გამავალი ორი არაპარალელური წრფის პერპენდიკულარული წრფის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ წერტილი და ორი არაპარალელური წრფე

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

საძიებელი წრფის მიმმართველი $\vec{q}$ ვექტორი, პერპენდიკულარული უნდა იყოს $\vec{q}_1(l_1,\ m_1,\ n_1)$ და $\vec{q}_2(l_2,\ m_2,\ n_2)$ ვექტორებისა. რადგანაც $\vec{q}_1$ და $\vec{q}_2$ არაკოლინეარულია, ამიტომ $\vec{q}$ ვექტორად შეგვიძლია ავილოთ $\vec{q}_1$ და $\vec{q}_2$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი $[\vec{q}_1,\ \vec{g}_2]$, ე. ი.

$$\vec{q}=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

რადგან საძიებელი წრფე გადის M_0 წერტილზე, ამიტომ მისი განტოლებები იქნება

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}}.$$

9. მოცემულ წრფეზე მისი არაპარალელური

წ რ ფ ი ს პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ა დ გ ა მ ა ვ ა ლ ი ს ი ბ რ ტ ყ ი ს გ ა ნ- ტ ო ლ ე ბ ა. ვთქვათ მოცემულია ორი არაპარალელური წრფე

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$
$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

საძიებელი სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\vec{n}$, პერპენდიკულარული უნდა იყოს $\vec{q_1}(l_1, m_1, n_1)$ და $\vec{q_2}(l_2, m_2, n_2)$ ვექტორებისა. რადგან $\vec{q_1}$ და $\vec{q_2}$ არაკოლინეარულია, ამიტომ $\vec{n}$ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ $\vec{q_1}$ და $\vec{q_2}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი $[\vec{q_1}, \vec{q_2}]$ ე. ი.

$$\vec{n}=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

რადგან საძიებელი სიბრტყე გადის $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე, ამიტომ მისი განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}(z-z_1)=0.$$

10. მ ო ც ე მ უ ლ წ რ ფ ე ზ ე მ ი ს ი ა რ ა პ ე რ პ ე ნ დ ი კ უ- ლ ა რ უ ლ ი ს ი ბ რ ტ ყ ი ს პ ე რ პ ე ნ დ ი კ უ ლ ა რ უ ლ ა დ გ ა- მ ა ვ ა ლ ი ს ი ბ რ ტ ყ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. ვთქვათ მოცემულია წრფე

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

და სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

საძიებელი სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\vec{n_1}$ პერპენდიკულარული უნდა იყოს $\vec{q}(l, m, n)$ და $\vec{n}(A, B, C)$ ვექტორებისა. რადგან $\vec{q}$ და $\vec{n}$ არაკოლინეარულია, ამიტომ $\vec{n_1}$ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ $\vec{q}$ და $\vec{n}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი $[\vec{q}, \vec{n}]$ ე. ი.

$$\vec{n_1}=\left\{\begin{vmatrix} m & n \\ B & C \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n & l \\ C & A \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l & m \\ A & B \end{vmatrix}\right\}.$$

რადგან საძიებელი სიბრტყე გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე, ამიტომ მისი განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} m & n \\ B & C \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} n & l \\ C & A \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} l & m \\ A & B \end{vmatrix}(z-z_0)=0.$$

11. მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის განტოლება. დავწეროთ მოცემულ M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება (იხ. პუნქტი 3). ვიპოვოთ ამ სიბრტყისა და მოცემული წრფის გადაკვეთის M_1 წერტილი (იხ. პუნქტი 5). საძებნი წრფის განტოლებები იქნება M_0 და M_1 წერტილებზე გავლებული წრფის განტოლებები.

ამოცანა. შევადგინოთ $M_0(-1;\ 0;\ 2)$ წერტილიდან

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{0}$$

წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარული წრფის განტოლებები.

ამოხსნა. M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება იქნება

$$x-y+1=0.$$

ვიპოვოთ მოცემული წრფისა და $x-y+1=0$ სიბრტყის თანაკვეთის წერტილი. ამისათვის მოცემული წრფის განტოლებები ჩავწეროთ პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=0. \end{cases}$$

თუ x, y და z-ის ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ სიბრტყის განტოლებაში, მივიღებთ $t=-2$, ე. ი. გადაკვეთის წერტილია $M_1(0;\ 1;\ 0)$.

დავწეროთ M_0 და M_1 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებები:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}.$$

12. მანძილი წერტილიდან წრფემდე. ისევე, როგორც წინა პუნქტში, ვიპოვოთ მოცემული წრფისა და ამ წრფეზე მოცემული M_0 წერტილიდან დაშვებული პერპენდიკულარის გადაკვეთის M_1 წერტილი. საძებნი მანძილი იქნება მანძილი M_0 და M_1 წერტილებს შორის.

13. ორი აცდენილი წრფის საერთო პერპენდიკულარის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია ორი აცდენილი L_1 და L_2 წრფე. გავავლოთ L_1 წრფეზე L_2 წრფის პარალელური α_0 სიბრტყე (იხ. პუნქტი 9). ამის შემდეგ L_1 და L_2 წრფეებზე გავატაროთ α_0-ის პერპენდიკულარული შესაბამისად α_1 და α_2 სიბრტყეები (იხ. პუნქტი 10). α_1 და α_2 სიბრტყეების გადაკვეთა იქნება საძიებელი წრფე.

ამოცანა. ვიპოვოთ

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-1} \qquad (L_1)$$

და

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} \qquad (L_2)$$

წრფეების საერთო პერპენდიკულარის განტოლებები.

ამოხსნა. L_1 წრფეზე L_2 წრფის პარალელურად გამავალი სიბრტყის განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} (z+1) = 0$$

ანუ

$$x + y + z = 0 \qquad (\alpha_0).$$

L_1 წრფეზე α_0 სიბრტყის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} (z+1) = 0$$

ანუ

$$x - 2y + z + 3 = 0 \qquad (\alpha_1).$$

ანალოგიურად L_2 წრფეზე α_0 სიბრტყის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება იქნება

$$2x - y - z - 1 = 0 \qquad (\alpha_2).$$

საძებნი წრფის განტოლებებია:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

ანუ

$$\frac{x - \frac{5}{3}}{1} = \frac{y + \frac{2}{3}}{1} = \frac{z}{1}.$$

14. მ ა ნ ძ ი ლ ი ო რ წ რ ფ ე ს შ ო რ ი ს. ვთქვათ მოცემულია L_1 და L_2 წრფეები.

თუ ეს წრფეები პარალელურია, მაშინ საძებნი მანძილი იქნება მანძილი ერთ-ერთ წრფეზე აღებული ნებისმიერი წერტილიდან მეორე წრფემდე (იხ. პუნქტი 11).

თუ ეს წრფეები აცდენილია, მაშინ ერთ-ერთ წრფეზე, მაგალითად L_1-ზე გავავლოთ, მეორე L_2 წრფის პარალელური სიბრტყე (იხ. პუნქტი 9). საძებნი მანძილი იქნება მანძილი L_2 წრფის ნებისმიერი წერტილიდან ამ სიბრტყემდე.

ა მ ო ც ა ნ ა. ვიპოვოთ მანძილი

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$$

და

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}.$$

წრფეებს შორის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. L_1 წრფეზე L_2 წრფის პარალელურად გამავალი სიბრტყის განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(x+1)+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\cdot y+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(z-2)=0$$

ანუ

$$3x+5y-z+5=0 \qquad (\alpha).$$

ვიპოვოთ მანძილი L_2 წრფის M_0 (0; 1; 0) წერტილიდან ამ სიბრტყემდე

$$\rho(M_0; \alpha)=\frac{2\sqrt{35}}{7}.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. დაწერეთ წრფის განტოლებები სიბრტყეზე ზოგადი სახით, ღერძთა მონაკვეთებში, კუთხური კოეფიციენტით და პარამეტრული სახით.

2. დაწერეთ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება სიბრტყეზე.

3. დაწერეთ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება.

4. დაწერეთ ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა სიბრტყეზე.

5. მოიყვანეთ ორი წრფის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები სიბრტყეზე.

6. დაწერეთ წერტილიდან წრფემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა სიბრტყეზე.

7. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახით, ღერძთა მონაკვეთებში.

8. დაწერეთ მოცემულ სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

8. დაწერეთ ორ სიბრტყეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა.

10. მოიყვანეთ ორი სიბრტყის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები.

11. დაწერეთ სიბრტყეთა ძნულისა და სიბრტყეთა კონის განტოლებები.

12. დაწერეთ წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა.

13. დაწერეთ წრფის კანონიკური, პარამეტრული და ზოგადი სახის განტოლებები სივრცეში.

14. დაწერეთ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებები სივრცეში.

15. მოიყვანეთ ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა სივრცეში.

16. დაწერეთ ორი წრფის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები სივრცეში.

17. დაწერეთ წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა.

18. მოიყვანეთ წრფისა და სიბრტყის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები.

V თავი

მეორე რიგის წირები და ზედაპირები

განვიხილოთ ორუცნობიანი მეორე რიგის ზოგადი სახის განტოლება

$$A x^2 + 2Bxy + C y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,^{*)} \qquad (*)$$

სადაც A, B და C რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

---

* როგორც შემდგომში ვნახავთ xy, x და y-ის კოეფიციენტების $2B$-თი, $2D$-თი და $2E$-თი აღნიშვნა უფრო მოხერხებულია.

Oxy სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას, მეორე რიგის წირი ეწოდება. შესაძლებელია, რომ სიბრტყეზე არ არსებობს არც ერთი წერტილი, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (*) განტოლებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (*) განტოლება განსაზღვრავს მეორე რიგის წარმოსახვით წირს. მაგალითად, განტოლება

$$x^2 + y^2 = -1$$

არის მეორე რიგის წარმოსახვითი წირის განტოლება. მეორე რიგის წარმოსახვით წირებს ჩვენ არ შევისწავლით.

ზოგჯერ (*) განტოლება განსაზღვრავს პარალელურ, თანამთხვეულ ან გადამკვეთ წრფეთა წყვილს, მაგრამ მაშინაც ამ სიმრავლეებს მეორე რიგის წირებს უწოდებენ.

IV თავის § 1-ში მიღებული იყო წრეწირის განტოლება

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

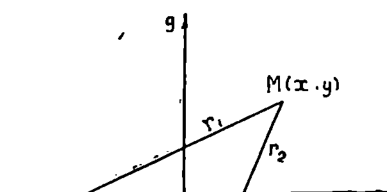
ეს განტოლება მეორე ხარისხისაა x და y ცვლადების მიმართ. ამიტომ წრეწირი მეორე რიგის წირია.

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით მეორე რიგის წირებს: ელიფსს, ჰიპერბოლას და პარაბოლას.

§ 1. ელიფსი

განსაზღვრება 1. 1. ელიფსი ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ, ფოკუსებად წოდებულ წერტილამდე მანძილების ჯამი ერთიდაიგივე მუდმივი სიდიდეა**.

აღვნიშნოთ ფოკუსები F_1 და F_2-ით. ვთქვათ ფოკუსებს შორის მანძილია $2c$, ხოლო ელიფსის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების ჯამი უდრის $2a$-ს (განსაზღვრებით $2a > 2c$).



ნახ. 30

შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ ფოკუსები მდებარეობდეს Ox ღერძზე, ხოლო კოორდინატთა სათავე — $F_1 F_2$ მონაკვეთის შუაწერტილში (ნახ. 30). ცხადია, რომ ამ სისტემაში ფოკუსების კოორდინატებია: $F_1(-c; 0)$ და $F_2(c; 0)$.

** იგულისხმება, რომ ეს მუდმივი სიდიდე მეტია ფოკუსებს შორის მანძილზე.

ვთქვათ $M(x; y)$ ელიფსის ნებისმიერი წერტილია. აღვნიშნოთ r_1 და r_2-ით მანძილები M წერტილიდან ფოკუსებამდე: $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$. ამ რიცხვებს M წერტილის ფოკალური რადიუსები ეწოდება.

განსაზღვრების ძალით

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

ამიტომ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1.1)$$

(1.1) არის ელიფსის განტოლება.

ელიფსის განტოლება (1.1) სახით პრაქტიკული გამოყენებისათვის მოუხერხებელია. ამიტომ დავიყვანოთ ის უფრო მარტივ სახეზე. ამ მიზნით (1.1) ასე გადავწეროთ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

აქედან ტოლობის ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანით მივიღებთ

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

ანუ

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილს ავიყვანთ კვადრატში, გვექნება

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

აქედან

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (1.2)$$

პირობის ძალით $a^2 - c^2 > 0$. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\sqrt{a^2 - c^2} = b,$$

მაშინ (1.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

ანუ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.3)$$

რადგან (1.3) განტოლება მიღებულია (1.1) განტოლების ორივე ნაწილის კვადრატში ორჯერ აყვანით, ამიტომ ელიფსის ნებისმიერი $M(x; y)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1.3) განტოლებასაც, მაგრამ (1.3) განტოლება შეიძლება არ აღმოჩნდეს (1.1) განტოლების ტოლფასი. ვაჩვენოთ, რომ ეს განტოლებები ტოლფასია. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ $M(x; y)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1.3) განტოლებას, მაშინ ისინი დააკმაყოფილებენ (1.1) განტოლებასაც. მართლაც, თუ $M(x; y)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1.3) განტოლებას, მაშინ გვაქვს $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$. ამიტომ

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = a + \frac{c}{a}x,$$

რადგან $\frac{c}{a} < 1$ და (1.3) განტოლებიდან გამომდინარე $|x| \leqslant a$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

ამრიგად $r_1 + r_2 = 2a$. მაშასადამე (1.1) და (1.3) განტოლებები ტოლფასია. (1.3) განტოლებას ელიფსის კანონიკური განტოლება ეწოდება.

დავადგინოთ ელიფსის ფორმა მისი კანონიკური განტოლების მიხედვით. რადგან (1.3) განტოლება x და y ცვლადებს შეიცავს მხოლოდ ლუწ ხარისხებში, ამიტომ ელიფსი სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ. ამის გამო საკმარისია დავადგინოთ ელიფსის ფორმა საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში. რადგან პირველ მეოთხედში $x \geqslant 0$ და $y \geqslant 0$, ამიტომ (1.3) განტოლებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ ელიფსის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში, წარმოადგენს

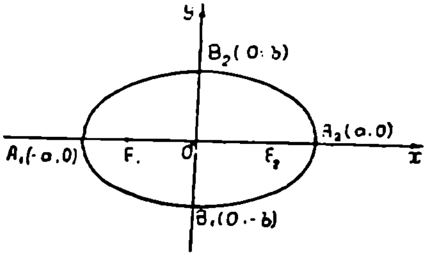
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{1.4}$$

ფუნქციის გრაფიკს, როცა $0 \leqslant x \leqslant a$. (1.4) განტოლებიდან ჩანს, რომ x-ის 0-დან a-მდე ზრდისას, y მცირდება b-დან 0-მდე. მაშასადამე ელიფსის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში,

წარმოადგენს რკალს ბოლოებით $B_2(0;\ b)$ და $A_2(a;\ 0)$ წერტილებში (ნახ. 31). თუ გავითვალისწინებთ ელიფსის სიმეტრიულობას, დავასკვნით, რომ ელიფსს აქვს 31-ე ნახაზზე გამოსახული ფორმა.

საკოორდინატო ღერძებთან ელიფსის გადაკვეთის წერტილებს ელიფსის წვეროები ეწოდება. ელიფსის სიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს, რომ მისი წვეროებია $A_1(-a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $A_2(a;\ 0)$ და $B_2(0;\ b)$ (ნახ. 31).

A_1A_2 და B_1B_2 მონაკვეთებს, აგრეთვე მათ $2a$ და $2b$ სიგრძეებს ($a>b$), ეწოდება ელიფსის დიდი და მცირე ღერძები, ხოლო a და b რიცხვებს კი დიდი და მცირე ნახევარღერძები. ღერძების გადაკვეთის წერტილს ელიფსის ცენტრი ეწოდება.



ნახ. 31

განვიხილოთ ელიფსის ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელი ე. წ. ექსცენტრისიტეტი. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება ფოკუსებს შორის მანძილის ფარდობას დიდ ღერძთან და აღინიშნება e ასოთი. ე. ი.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

რადგან $c<a$, ამიტომ $e<1$. ექსცენტრისიტეტი ახასიათებს ელიფსის ფორმას. მართლაც

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right)^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=1-e^2.$$

აქედან ჩანს, რომ რაც უფრო მცირეა ექსცენტრისიტეტი, მით უფრო ნაკლებად განსხვავდება ერთისაგან ელიფსის ნახევარღერძების ფარდობა, ე. ი. მით უფრო ახლოსაა ელიფსის ფორმა წრეწირის ფორმასთან. ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $b=a$ ($e=0$) ფოკუსები ერთმანეთს ემთხვევა და მიიღება a რადიუსიანი წრეწირი $x^2+y^2=a^2$. პირიქით, რაც უფრო მცირედ განსხვავდება ექსცენტრისიტეტი ერთისაგან, ფარდობა $\dfrac{b}{a}$ მით უფრო მცირედ განსხვავდება ნულისაგან და მით უფრო გაჭიმულია ელიფსი დიდი ღერძის გასწვრივ.

ახლა გამოვიყვანოთ ელიფსის პარამეტრული განტოლებები. განვიხილოთ a რადიუსიანი წრეწირი რომლის ცენტრი ემთხვევა (1.3)

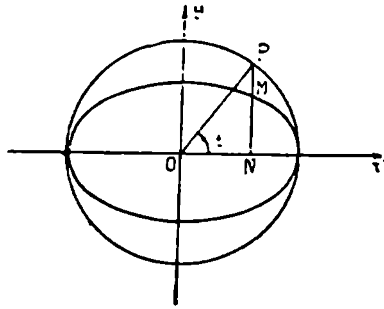
ელიფსის ცენტრს (ნახ. 32). ავიღოთ ელიფსის ნებისმიერი $M(x;\ y)$ წერტილი. M წერტილზე გავავლოთ Oy ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც წრეწირს გადაკვეთს P წერტილში, ხოლო Ox ღერძს N წერტილში.

აღვნიშნოთ t-თი P წერტილის პოლარული კუთხე ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$), გამოვსახოთ M წერტილის დეკარტის x და y კოორდინატები t-ს საშუალებით. ცხადია x არის აგრეთვე P წერტილის აბსცისა. თუ გავიხსენებთ კავშირს დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის (III თავის § 2), გვექნება

$$x = a \cdot \cos t. \qquad (1.5)$$

ელიფსის (1.3) განტოლებიდან გვაქვს

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$



ნახ. 32

ამ ტოლობაში შევიტანოთ x-ის მნიშვნელობა (1.5)-იდან, მივიღებთ

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a^2\cos^2 t) = b^2 \sin^2 t.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sin t$ და y-ს აქვთ ერთიდაიგივე ნიშანი, გვექნება

$$y = b \sin t.$$

ამრიგად, ელიფსის ნებისმიერი $M(x;\ y)$ წერტილისათვის გვაქვს

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \qquad (1.6)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი t-სათვის (1.6) ტოლობებით განსაზღვრული წერტილი ძევს (1.3) ელიფსზე.

(1.6)-ს ეწოდება ელიფსის პარამეტრული განტოლებები.

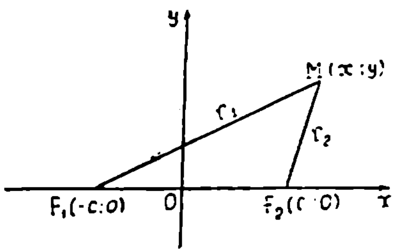
შევნიშნოთ, რომ თუ $b>a$, მაშინ (1.3) განტოლება განსაზღვრავს ელიფსს, რომლის ფოკუსები მდებარეობს Oy ღერძზე სათავის სიმეტრიულად და რომლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების ჯამი უდრის $2b$-ს.

§ 2. ჰიპერბოლა

განსაზღვრება 2.1. ჰიპერბოლა ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ, ფოკუსებად წოდებულ წერტილამდე მანძილების სხვაობის მოდული ერთიდაიგივე მუდმივი სიდიდეა*.

აღვნიშნოთ ფოკუსები F_1 და F_2-ით. ვთქვათ ფოკუსებს შორის მანძილია $2c$, ხოლო ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების სხვაობის მოდული უდრის $2a$-ს (განსაზღვრებით $2a<2c$).

შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ ფოკუსები მდებარეობდეს Ox ღერძზე, ხოლო კოორდინატთა სათავე — F_1F_2 მონაკვეთის შუაწერტილში (ნახ. 33). ცხადია, რომ ამ სისტემაში ფოკუსების კოორდინატებია:



ნახ. 33

$$F_1(-c;\ 0) \text{ და } F_2(c;\ 0).$$

ვთქვათ $M(x;\ y)$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილია. აღვნიშნოთ r_1 და r_2-ით მანძილები M წერტილიდან ფოკუსებამდე $r_1=|F_1M|$, $r_2=|F_2M|$. ამ რიცხვებს M წერტილის ფოკალური რადიუსები ეწოდება.

განსაზღვრების ძალით

$$|r_1-r_2|=2a.$$

ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

ამიტომ

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a. \tag{2.1}$$

(2.1) არის ჰიპერბოლის განტოლება.

ჰიპერბოლის განტოლება (2.1) სახით პრაქტიკული გამოყენებისათვის მოუხერხებელია. ამიტომ დავიყვანოთ ის უფრო მარტივ სახეზე. ამ მიზნით (2.1) ასე გადავწეროთ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

---

* იგულისხმება, რომ ეს მუდმივი სიდიდე ნაკლებია ფოკუსებს შორის მანძილზე.

აქედან, ისევე როგორც ელიფსის შემთხვევაში, ტოლობის ორივე ნაწილის კვადრატში ორჯერ აყვანით მივიღებთ

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2\, y^2 = a^2\, (c^2 - a^2). \tag{2.2}$$

პირობას ძალით $c^2 - a^2 > 0$. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\sqrt{c^2 - a^2} = b\,,$$

მაშინ (2.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$b^2\, x^2 - a^2\, y^2 = a^2\, b^2,$$

ანუ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

ადვილია ჩვენება, რომ (2.3) განტოლება (2.1) განტოლების ტოლფასია.

მართლაც, ისევე როგორც ელიფსის შემთხვევაში, მიიღება, რომ, როცა $x \geqslant a$, მაშინ

$$r_1 = \frac{c}{a}\, x + a, \quad r_2 = \frac{c}{a}\, x - a,$$

ხოლო, როცა $x \leqslant -a$, მაშინ

$$r_1 = -\left(\frac{c}{a}x + a\right), \quad r_2 = -\left(\frac{c}{a}\, x - a\right).$$

საიდანაც $|r_1 - r_2| = 2a$.

(2.3) განტოლებას ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება ეწოდება.

დავადგინოთ ჰიპერბოლის ფორმა მისი კანონიკური განტოლების მიხედვით. რადგან (2.3) განტოლება x და y ცვლადებს შეიცავს მხოლოდ ლუწ ხარისხებში, ამიტომ ჰიპერბოლა სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ. ამის გამო საკმარისია დავადგინოთ ჰიპერბოლის ფორმა საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში. რადგან პირველ მეოთხედში $x \geqslant 0$ და $y \geqslant 0$, ამიტომ (2.3) განტოლებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ ჰიპერბოლის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში წარმოადგენს

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{2.4}$$

ფუნქციის გრაფიკს, როცა $x \geqslant a$. (2.4) განტოლებიდან ჩანს, რომ x-ის ზრდისას a-დან $+\infty$-მდე, y იზრდება 0-დან $+\infty$-მდე, ე. ი. როდესაც

x მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, მაშინ ჰიპერბოლის $M(x;\ y)$ წერტილი მიისწრაფვის ∞-საკენ*.

ვაჩვენოთ, რომ M წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ ისე, რომ იგი უსაზღვროდ უახლოვდება

$$y = \frac{b}{a} x \tag{2.5}$$

წრფეს.

ავიღოთ ნებისმიერი $x \geqslant a$ და განვიხილოთ ორი წერტილი $M(x;\ y)$ და $N(x;\ y')$, სადაც

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \frac{b}{a} x.$$

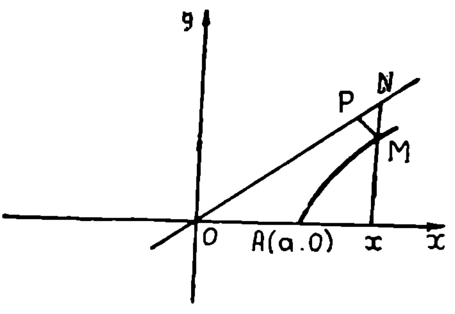
ცხადია, რომ M წერტილი ძევს ჰიპერბოლაზე, ხოლო N წერტილი (2.5) წრფეზე. შევნიშნოთ, რომ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \frac{b}{a} x = y'.$$

ეს ნიშნავს, რომ პირველ მეოთხედში ჰიპერბოლის ყოველი წერტილი ძევს (2.5) წრფის შესაბამისი წერტილის ქვემოთ. გამოვთვალოთ MN მონაკვეთის სიგრძე:

$$|MN| = y' - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\ .$$

აქედან ჩანს, რომ როცა x მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, მაშინ $|MN|$ მიისწრაფვის 0-საკენ და M წერტილიდან (2.5) წრფემდე MP მანძილი (ნახ. 34) მითუმეტეს მიისწრაფვის ნულისაკენ.



ნახ. 34

* წერტილი მიისწრაფვის ∞-საკენ ნიშნავს, რომ მისი ერთი მაინც კოორდინატი მიისწრაფვის ∞-საკენ.

ამრიგად, როცა M წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ ის უსაზღვროდ უახლოვდება $y=\frac{b}{a}x$ წრფეს.

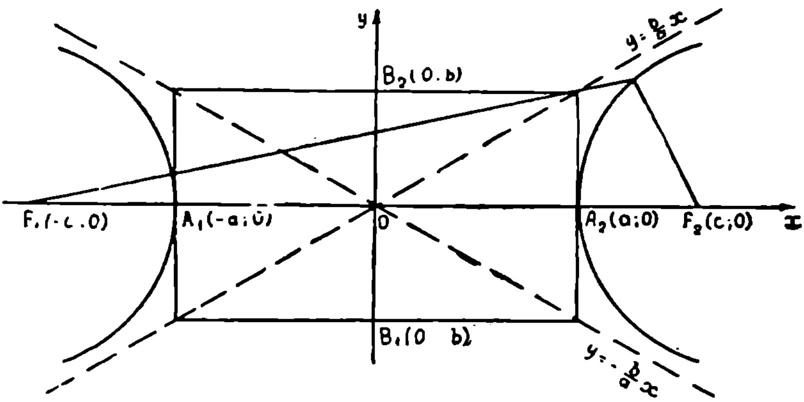
ანალოგიური თვისება გააჩნია ჰიპერბოლის სხვა ნაწილებსაც. სახელდობრ, ჰიპერბოლის მესამე მეოთხედში მოთავსებული ნაწილი უახლოვდება იმავე (2.5) წრფეს, ხოლო მეორე და მეოთხე მეოთხედებში მოთავსებული ნაწილები კი

$$y=-\frac{b}{a}x \tag{2.6}$$

წრფეს.

(2.5) და (2.6) წრფეებს უწოდებენ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს.

ცხადია, რომ ასიმპტოტები წარმოადგენენ Ox და Oy ღერძების მიმართ სიმეტრიული იმ მართკუთხედის დიაგონალების შემცველ წრფეებს, რომლის გვერდის სიგრძეებია შესაბამისად $2a$ და $2b$.



ნახ. 35

თუ გავითვალისწინებთ ჰიპერბოლის სიმეტრიულობას, დავასკვნით, რომ ჰიპერბოლას აქვს 35-ე ნახაზზე გამოსახული ფორმა.

ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ სიმეტრიის Oy ღერძი ჰიპერბოლას არ კვეთს, ხოლო სიმეტრიის Ox ღერძი ჰიპერბოლას კვეთს $A_1(-a;\ 0)$ და $A_2(a;\ 0)$ წერტილებში. ამ წერტილებს ჰიპერბოლის წვეროები ეწოდება. სიმეტრიის ღერძების გადაკვეთის წერტილს ჰიპერბოლის ცენტრი ეწოდება.

A_1A_2 მონაკვეთს და აგრეთვე მის $2a$ სიგრძეს ეწოდება ჰიპერბოლის ნამდვილი ღერძი, ხოლო $B_1(0;\ -b)$ და $B_2(0;\ b)$ წერტილების

შემაერთებელ მონაკვეთს და აგრეთვე მის $2b$ სიგრძეს ეწოდება ჰიპერბოლის წარმოსახვითი ღერძი. a და b რიცხვებს შესაბამისად ჰიპერბოლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძები ეწოდება.

განვიხილოთ ჰიპერბოლის ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელი ე. წ. ექსცენტრისიტეტი. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება ფოკუსებს შორის მანძილის ფარდობას ნამდვილ ღერძთან და აღინიშნება e ასოთი. ე. ი.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

რადგან $c > a$, ამიტომ $e > 1$. გარდა ამისა

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}\right)^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = e^2 - 1.$$

აქედან ჩანს, რომ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების კუთხური კოეფიციენტები განისაზღვრება ექსცენტრისიტეტით. მაშასადამე, ჰიპერბოლის ფორმა გარკვეულად ხასიათდება ექსცენტრისიტეტით.

ჰიპერბოლას, რომლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ღერძები ტოლია, ე. ი, $a=b$, ტოლფერდა ჰიპერბოლა ეწოდება. ტოლფერდა ჰიპერბოლის კანონიკურ განტოლებას აქვს სახე

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

მისი ასიმპტოტების განტოლებებია $y=x$ და $y=-x$. მაშასადამე, ასიმპტოტები წარმოადგენენ საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებს. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ არის ჰიპერბოლა, რომლის ფოკუსები მდებარეობს Oy ღერძზე სათავის სიმეტრიულად, ნამდვილი ნახევარღერძია b, ხოლო წარმოსახვითი ნახევარღერძია a.

§ 8. ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები

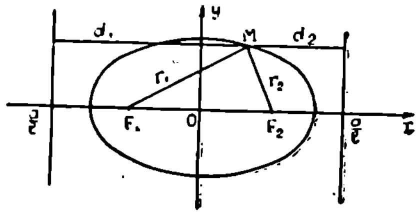
ვთქვათ ელიფსი მოცემულია კანონიკური სახის განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

სადაც $a > b$.

წრფეებს $x=\frac{a}{e}$ და $x=-\frac{a}{e}$ ეწოდება ელიფსის შესაბამისად მარჯვენა და მარცხენა დირექტრისები. რადგან ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $e<1$, ამიტომ დირექტრისები ელიფსს არ კვეთს (ნახ. 36).

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. ელიფსის ყოველი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა ამ ელიფსის ექსცენტრისიტეტის ტოლია.



ნახ. 36

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $M(x; y)$ ელიფსის ნებისმიერი წერტილია. მისი ფოკალური r_1 და r_2 რადიუსებისათვის გვაქვს

$$r_1=a+\frac{c}{a}x=a+ex, \quad r_2=a-\frac{c}{a}x=a-ex, \tag{3.1}$$

მანძილები M წერტილიდან მარცხენა და მარჯვენა დირექტრისებამდე აღვნიშნოთ შესაბამისად d_1 და d_2-ით. მაშინ

$$d_1=\frac{a}{e}+x, \quad d_2=\frac{a}{e}-x. \tag{3.2}$$

(3.1) და (3.2) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a+ex}{\frac{a}{e}+x}=e,$$

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-ex}{\frac{a}{e}-x}=e.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

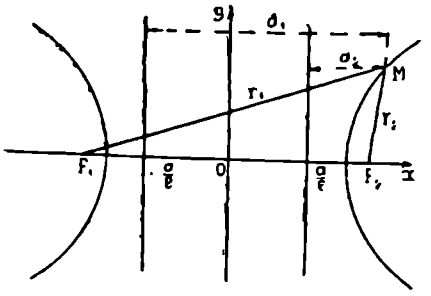
ახლა განვიხილოთ ჰიპერბოლა, რომლის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

წრფეებს $x=\frac{a}{e}$ და $x=-\frac{a}{e}$ ეწოდება ჰიპერბოლის შესაბამისად მარჯ-

ვენა და მარცხენა დირექტრისები. რადგან ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e>1$, ამიტომ დირექტრისები ჰიპერბოლას არ კვეთს (ნახ. 37).

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა ამ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტის ტოლია.



ნახ. 37

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $M(x;\ y)$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილია. მისი ფოკალური r_1 და r_2 რადიუსებისათვის გვაქვს

$$r_1=\left|\frac{c}{a}x+a\right|=|ex+a|,$$

$$r_2=\left|\frac{c}{a}x-a\right|=|ex-a|. \quad (3.3)$$

მანძილები M წერტილიდან მარცხენა და მარჯვენა დირექტრისამდე აღვნიშნოთ შესაბამისად d_1 და d_2-ით. მაშინ

$$d_1=\left|x+\frac{a}{e}\right|,\quad d_2=\left|x-\frac{a}{e}\right|. \quad (3.4)$$

(3.3) და (3.4) ტოლებებიდან გვაქვს

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{|ex+a|}{\left|x+\frac{a}{e}\right|}=e,\quad \frac{r_2}{d_2}=\frac{|ex-a|}{\left|x-\frac{a}{e}\right|}=e.$$

თეორემა დამტკიცებულია

ელიფსისა და ჰიპერბოლის ზემოთ დამტკიცებული თვისება შეიძლება მივიღოთ ამ წირების განსაზღვრებად.

სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლის ყოველი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა ერთიდაიგივე e მუდმივია, არის ელიფსი, როცა $e<1$ და ჰიპერბოლა, როცა $e>1$.

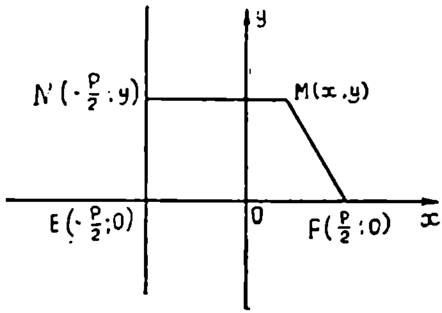
ბუნებრივად ისმის კითხვა: რას წარმოადგენს სიბრტყის წერტილთა ანალოგიურად განსაზღვრული სიმრავლე, როცა $e=1$. როგორც შემდეგ პარაგრაფში ვნახავთ, ასეთ წერტილთა სიმრავლე არის მეორე რიგის წირი, რომელსაც პარაბოლა ეწოდება.

§ 4. პარაბოლა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.1. პარაბოლა ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან მანძილები

მოცემულ წერტილამდე, ე. წ. ფოკუსამდე და მოცემულ წრფემდე, ე. წ. დირექტრისამდე, ერთმანეთის ტოლია*.

აღვნიშნოთ ფოკუსი F-ით, ხოლო მანძილი ფოკუსიდან დირექტრისამდე p-თი (p-ს პარაბოლის პარამეტრი ეწოდება). შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი გადიოდეს F ფოკუსზე დირექტრისის მართობულად და მიმართული იყოს დირექტრისიდან ფოკუსისაკენ. კოორდინატთა სათავედ ავილოთ ფოკუსიდან დირექტრისაზე დაშვებული პერპენდიკულარის შუაწერტილი (ნახ. 38). ცხადია, რომ ამ სისტემაში ფოკუსის კოორდინატებია $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, ხოლო დირექტრისის განტოლებაა $x = -\frac{p}{2}$.



ნახ. 38

ვთქვათ $M(x;\ y)$ პარაბოლის ნებისმიერი წერტილია. აღვნიშნოთ r და d-თი მანძილები M წერტილიდან შესაბამისად ფოკუსამდე და დირექტრისამდე: $r=|MF|$, $d=|MN|$. განსაზღვრების ძალით $r=d$.

ცხადია, რომ თუ წერტილი ეკუთვნის პარაბოლას, მაშინ მისი აბსცისა არაუარყოფითია (წინააღმდეგ შემთხვევაში $r>d$). ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}, \quad d=x+\frac{p}{2}.$$

მაშასადამე

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \qquad (4.1)$$

(4.1) არის პარაბოლის განტოლება. ტოლობის ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანით მივიღებთ

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

ანუ

$$y^2=2px. \qquad (4.2)$$

---

* იგულისხმება, რომ დირექტრისა არ გადის ფოკუსზე.

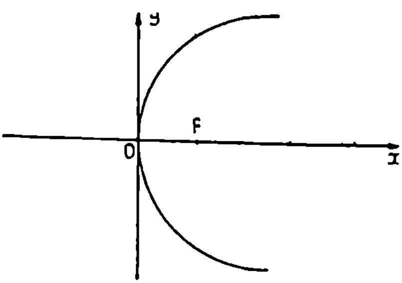
ვაჩვენოთ, რომ (4.2) განტოლება (4.1) განტოლების ტოლფასია. ამისათვის, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ $M(x; y)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (4.2) განტოლებას, მაშინ ისინი დააკმაყოფილებენ (4.1) განტოლებასაც. მართლაც, თუ $M(x; y)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (4.2) განტოლებას, მაშინ $x \geqslant 0$, ამიტომ თუ y^2-ის მნიშვნელობას (4.2) განტოლებიდან შევიტანთ (4.1) განტოლების მარცხენა ნაწილში მივიღებთ:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}.$$

მაშასადამე (4.1) და (4.2) განტოლებები ტოლფასია. (4.2) განტოლებას პარაბოლის კანონიკური განტოლება ეწოდება.

დავადგინოთ პარაბოლის ფორმა მისი კანონიკური განტოლების მიხედვით. რადგან (4.2) განტოლება y ცვლადს შეიცავს მხოლოდ ლუწ ხარისხში, ამიტომ პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ. ამის გამო საკმარისია დავადგინოთ პარაბოლის ფორმა საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში. ვინაიდან პირველ მეოთხედში $y \geqslant 0$, ამიტომ (4.2) განტოლებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ პარაბოლის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში, წარმოადგენს $y=\sqrt{2px}$ ფუნქციის გრაფიკს. თუ გავითვალისწინებთ პარაბოლის სიმეტრიულობას, დავასკვნით, რომ პარაბოლას აქვს 39-ე ნახაზზე გამოსახული ფორმა.



ნახ. 39

სიმეტრიის Ox ღერძს პარაბოლის ღერძი ეწოდება. სიმეტრიის ღერძთან პარაბოლის გადაკვეთის წერტილს, პარაბოლის წვერო ეწოდება.

პარაბოლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე მისი ექსცენტრისიტეტი

$$e=\frac{r}{d}=1.$$

შევნიშნოთ, რომ განტოლება $x^2=2py$ განსაზღვრავს პარაბოლას რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და სიმეტრიის ღერძია Oy.

§ 5. მეორე რიგის წირების განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში

ვთქვათ მოცემული გვაქვს მეორე რიგის წირი — ელიფსი, ჰიპერბოლა ან პარაბოლა (ჰიპერბოლის შემთხვევაში განვიხილავთ მის ერთ-ერთ შტოს). დავუშვათ F არის ამ წირების ფოკუსი.

განვიხილოთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემა, რომლის პოლუსია F, ხოლო პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა F ფოკუსის უახლოესი წვეროდან ამ ფოკუსისაკენ მიმართულებას.

წირის ნებისმიერი M წერტილის პოლარული კოორდინატები იყოს ρ და φ. როგორც ვიცით ადგილი აქვს ტოლობას (იხ. § 3).

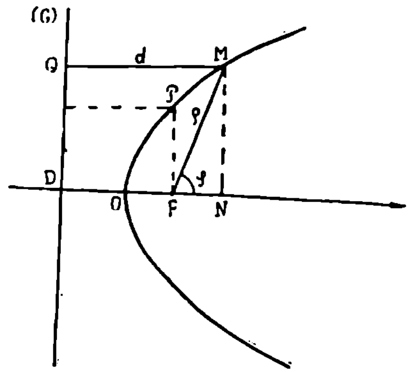
$$\frac{r}{d} = e, \qquad (5.1)$$

სადაც e ექსცენტრისიტეტია, r არის M წერტილის ფოკალური რადიუსი, ხოლო d — მანძილი M წერტილიდან F ფოკუსის შესაბამის დირექტრისამდე. რადგან პოლუსი ემთხვევა F ფოკუსს, ამიტომ $r = \rho$ (ნახ. 40).

ცხადია

$$d = QM = DN = DF + FN =$$

$$= DF + \rho \cos \varphi.$$



ნახ. 40

თუ r და d-ს მნიშვნელობებს შევიტანთ (5.1) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\frac{\rho}{DF + \rho \cos \varphi} = e. \qquad (5.2)$$

ρ-ს მნიშვნელობა $\varphi = \frac{\pi}{2}$-სათვის წარმოადგენს F ფოკუსში გამავალ და ღერძის მართობულ FP მონაკვეთის p სიგრძეს, რომელსაც აღებული წირის ფოკუსური პარამეტრი ეწოდება (პარაბოლის შემთხვევაში ფოკუსური პარამეტრი p ემთხვევა პარაბოლის პარამეტრს). φ-ს ამ მნიშვნელობისათვის (5.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{p}{DF} = e.$$

საიდანაც

$$DF = \frac{p}{e}.$$

თუ DF-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (5.2) ტოლობაში მივიღებთ

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{5.3}$$

ეს წარმოადგენს ელიფსის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში, როდესაც $e<1$*, პარაბოლის განტოლებას, როცა $e=1$ და ჰიპერბოლის ერთი შტოს განტოლებას, როდესაც $e>1$.

შევნიშნოთ, რომ (5.3) მოგვცემს ჰიპერბოლის მეორე შტოს, თუ შევთანხმდებით, რომ უარყოფითი რადიუს-ვექტორის შემთხვევაში ჰიპერბოლის წერტილი ძევს რადიუს-ვექტორის გაგრძელების საწინაალმდეგო მიმართულებაზე.

ვნახოთ ახლა, თუ როგორ შეიძლება შევადგინოთ მეორე რიგის წირის კანონიკური სახის განტოლება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში, თუ ცნობილია მისი (5.3) განტოლება პოლარულ კოორდინატებში (იგულისხმება, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა შერჩეულია ისე, როგორც ამ წირების კანონიკური განტოლების გამოყვანის დროს. ამასთან აბსცისთა ღერძის მიმართულება ემთხვევა პოლარული ღერძის მიმართულებას). განვიხილოთ თითოეული წირი ცალ-ცალკე.

I. თუ $e=1$, მაშინ (5.3) პარაბოლის განტოლებაა, რომლის კანონიკური განტოლება დეკარტის კოორდინატებში იქნება

$$y^2 = 2px.$$

II. თუ $e<1$, მაშინ (5.3) წარმოადგენს ელიფსის განტოლებას, რომლის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ცხადია, რომ $F(-c;\ 0)$ პოლუსის აბსცისის შესაბამისი წერტილის ორდინატი ელიფსზე იქნება $y=\pm p$, ე. ი.

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1. \tag{5.4}$$

აქედან

$$e^2 + \frac{p^2}{b^2} = 1.$$

საიდანაც

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{5.5}$$

---

* იმ შემთხვევაში, როცა $e=0$, (5.3) განტოლებიდან გვაქვს $\rho = p = \text{const}$. ეს არის p რადიუსიანი წრეწირის განტოლება ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

მეორეს მხრივ (5.4)-დან გვაქვს

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1\,.$$

აქედან

$$b^2=a\cdot p. \tag{5.6}$$

(5.5) და (5.6)-დან გვაქვს

$$a=\frac{p}{1-e^2}\,. \tag{5.7}$$

ამრიგად, თუ ელიფსის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში, მაშინ მისი ნახევარღერძები გამოითვლებიან (5.5) და (5.7) ფორმულებით.

III. თუ $e>1$, მაშინ (5.3) წარმოადგენს ჰიპერბოლის განტოლებას, რომლის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ცხადია, რომ $F\,(C;\,0)$ პოლუსის აბსცისის შესაბამისი წერტილის ორდინატი ჰიპერბოლაზე იქნება $y=\pm p$. ე. ი.

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1. \tag{5.8}$$

აქედან

$$e^2-\frac{p^2}{b^2}=1.$$

საიდანაც

$$b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}\,. \tag{5.9}$$

მეორეს მხრივ (5.8)-დან გვაქვს

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1.$$

აქედან

$$b^2=ap. \tag{5.10}$$

(5.9), (5.10)-დან გვაქვს

$$a=\frac{p}{e^2-1}\,. \tag{5.11}$$

ამრიგად, თუ ჰიპერბოლის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში, მაშინ მისი ნახევარღერძები გამოითვლებიან (5. 9) და (5.11) ფორმულებით.

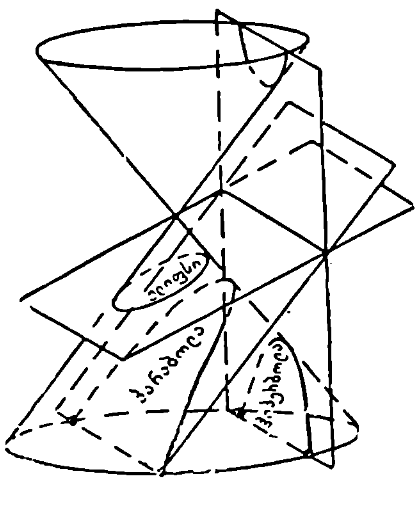
§ 6. მეორე რიგის წირები, როგორც კონუსური კვეთები

წრიული კონუსი ეწოდება ზედაპირს, რომელიც მიიღება წრფის წრიული ბრუნვით მისი თანამკვეთი წრფის (ბრუნვის ღერძი) გარშემო. მბრუნავ წრფეს მის ნებისმიერ მდებარეობაში კონუსის მსახველი ეწოდება, ხოლო წრფეთა თანაკვეთის (უძრავ) წერტილს — კონუსის წვერო. კონუსი მისი წვეროთი იყოფა ორ ნაწილად, რომელთაც კონუსის კალთები ეწოდება.

მტკიცდება, რომ წრეწირი, ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა წარმოადგენენ წრიული კონუსისა და იმ სიბრტყეების გადაკვეთის წირებს, რომლებიც არ გადიან კონუსის წვეროზე. ამის გამო ამ წირებს უწოდებენ კონუსურ კვეთებს.

თუ მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის პერპენდიკულარულია, მაშინ კვეთაში მიიღება წრეწირი.

თუ მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის პერპენდიკულარული არ არის, ჰკვეთს კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას და არ არის პარალელური არცერთი მსახველისა, მაშინ კვეთაში მიიღება ელიფსი.



ნახ. 41

თუ მკვეთი სიბრტყე პარალელურია კონუსის რომელიმე მსახველისა და ჰკვეთს კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას, მაშინ კვეთაში მიიღება პარაბოლა.

თუ სიბრტყე ჰკვეთს კონუსის ორივე კალთას, მაშინ კვეთაში მიიღება ჰიპერბოლა (ნახ. 41).

მეორე რიგის წირებს ფართო გამოყენება აქვთ მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგებში. მოვიყვანოთ ზოგიერთი მაგალითი.

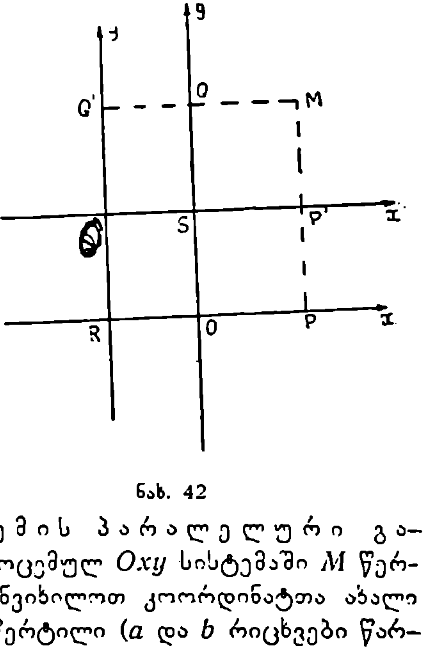
1) ცნობილია, რომ მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის ტრაექტორიები წარმოადგენენ ელიფსებს ერთი საერთო ფოკუსით, რომელშიც მოთავსებულია მზე.

2) თუ სინათლის წყაროს მოვათავსებთ პარაბოლის ფოკუსში, მაშინ სინათლის სხივები პარაბოლიდან აირეკლებიან პარაბოლის ღერძის პარალელურად. ამ თვისებაზეა დამყარებული პროჟექტორის მუშაობის პრინციპი.

3) მექანიკიდან ცნობილია, რომ დედამიწის ზედაპირიდან ჰორიზონტისადმი რაიმე კუთხით გაშვებული რაკეტა, რომლის საწყისი სიჩქარეა $v_0=11,2$ კმ/წმ (II კოსმოსური სიჩქარე) იმოძრავებს რა პარაბოლაზე, უსასრულოდ დაშორდება დედამიწის ზედაპირს. თუ v_0 საწყისი სიჩქარე მეტია 11,2 კმ/წმ-ზე, რაკეტა კვლავ უსასრულოდ შორდება დედამიწის ზედაპირს, ისე რომ მისი მოძრაობის ტრაექტორია იქნება ჰიპერბოლა. თუ v_0 საწყისი სიჩქარე ნაკლებია 11,2 კმ/წმ, მაშინ რაკეტა იმოძრავებს ან ელიფსზე, ან დაეცემა დედამიწის ზედაპირზე, ან გადაიქცევა მის ხელოვნურ თანამგზავრად.

§ 7. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა

ანალიზური გეომეტრიის მრავალი ამოცანის ამოხსნისას მიზანშეწონილია კოორდინატთა მოცემული სისტემა შევცვალოთ კოორდინატთა ახალი სისტემით, რომელსაც უფრო მოხერხებული მდებარეობა აქვს მოცემული ამოცანის ამოხსნისათვის. ამ დროს საზოგადოდ იცვლება, როგორც წერტილის კოორდინატები, ისე წირთა განტოლებებიც; ამიტომ ბუნებრივად ისმება ამოცანა: როგორ ვიპოვოთ წერტილის კოორდინატები კოორდინატთა ახალ სისტემაში, თუ ცნობილია ამ წერტილის კოორდინატები კოორდინატთა მოცემულ ანუ ძველ სისტემაში. განვიხილოთ კოორდინატთა გარდაქმნის სხვადასხვა შემთხვევები.



ნახ. 42

1. კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ი ს ტ ე მ ი ს პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი გ ა დ ა ტ ა ნ ა. ვთქვათ კოორდინატთა მოცემულ Oxy სისტემაში M წერტილის კოორდინატებია x და y. განვიხილოთ კოორდინატთა ახალი სისტემა, რომლის სათავეა O' $(a;\ b)$ წერტილი (a და b რიცხვები წარმოადგენენ O' წერტილის კოორდინატებს Oxy სისტემაში), ხოლო $O'x'$ და $O'y'$ საკოორდინატო ღერძები შესაბამისად Ox და Oy ღერძების თანამიმართულია. M წერტილის კოორდინატები ახალ $O'x'y'$ სისტემაში იყოს x' და y', M წერტილიდან გავავლოთ საკოორდინატო ღერძების პერპენდიკულარული წრფეები. მათი ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ P, Q, P' და Q' ასოებით, ხოლო ძველი და ახალი ღერძების გადაკვეთის წერტილები R და S-ით (ნახ. 42).

ცხადია, რომ

$$x = OP = OR + RP = OR + O'P' = a + x',$$
$$y = OQ = OS + SQ = OS + O'Q' = b + y',$$

ე. ი.

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b. \end{cases} \tag{7.1}$$

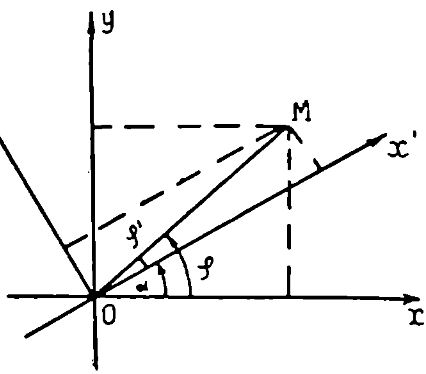
(7.1) წარმოადგენს ფორმულებს, რომელთა საშუალებით გამოითვლება წერტილის ძველი კოორდინატები, თუ ცნობილია ამ წერტილის ახალი კოორდინატები.

(7.1)-დან ვღებულობთ

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases} \tag{7.2}$$

(7.2) ფორმულებით ვპოულობთ წერტილის ახალ კოორდინატებს, თუ ცნობილია მისი ძველი კოორდინატები.

2. კოორდინატთა სისტემის მობრუნება. კოორდინატთა Oxy სისტემა მოვაბრუნოთ O სათავის გარშემო გარკვეული $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ კუთხით $Ox'y'$ მდებარეობამდე (ნახ. 43). ვთქვათ კოორდინატთა მოცემულ Oxy სისტემაში M წერტილის კოორდინატებია x და y, ხოლო ახალ $Ox'y'$ სისტემაში — x' და y'. ρ და φ იყოს M წერტილის კოორდინატები პოლარულ კოორდინატთა იმ სისტემაში, რომლის პოლუსია O წერტილი, ხოლო პოლარული ღერძია Ox ღერძი. ასევე, ρ და φ' იყოს M წერტილის კოორდინატები პოლარულ კოორდინატთა იმ სისტემაში, რომლის პოლუსია O წერტილი და პოლარული ღერძია Ox' ღერძი. ცხადია, რომ ორივე სისტემაში $\rho = |\overline{OM}|$, ხოლო $\varphi = \varphi' + \alpha$, როცა $\alpha \leqslant \varphi$ და $\varphi = \varphi' + \alpha - 2\pi$, როცა $\alpha > \varphi$.



ნახ. 43

თუ გავითვალისწინებთ კავშირს წერტილის პოლარულ და დეკარტის კოორდინატებს შორის, გვექნება

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$
$$x' = \rho\cos\varphi', \quad y = \rho\sin\varphi',$$

ანუ

$$x = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\varphi' + \alpha) = \rho(\cos\varphi'\cos\alpha - \sin\varphi'\sin\alpha) =$$
$$= \rho\cos\varphi'\cos\alpha - \rho\sin\varphi'\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$
$$y = \rho\sin\varphi = \rho\sin(\varphi' + \alpha) = \rho(\sin\varphi'\cos\alpha + \cos\varphi'\sin\alpha) =$$
$$= \rho\cos\varphi'\sin\alpha + \rho\sin\varphi'\cos\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

ამრიგად

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \quad (7.3)$$

(7.3.) ფორმულებით გამოისახება წერტილის ძველი კოორდინატები ახალი კოორდინატების საშუალებით.

თუ განტოლებათა (7.3) სისტემას ამოვხსნით x' და y'-ის მიმართ, მივიღებთ წერტილის ახალი კოორდინატების ძველი კოორდინატებით გამოსახვის ფორმულებს

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \quad (7.4)$$

8. კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის ზოგადი შემთხვევა. განვიხილოთ ახლა კოორდინატთა ახალი $O'x'y'$ სისტემა, რომელიც მიიღება ძველი Oxy სისტემისაგან, თუ სათავეს გადავიტანთ $O'(a;\ b)$ წერტილში, ხოლო საკოორდინატო ღერძებს მოვაბრუნებთ α კუთხით.

(7.1) და (7.3) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \quad (7.5)$$

ასე გამოისახება წერტილის ძველი კოორდინატები ახალი კოორდინატებით.

ანალოგიურად (7.2) და (7.4) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ წერტილის ახალი კოორდინატების გამოსახვას ძველი კოორდინატებით

$$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha \\ y' = -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha. \end{cases}$$

§ 8. მეორე რიგის წირების ზოგადი განტოლების გამარტივება

ანალიზური გეომეტრიის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს წირის გეომეტრიული თვისებების შესწავლა მისი განტოლების მიხედვით. ამ ამოცანის გადაწყვეტა მით უფრო მარტივია, რაც უფრო მარტივია წირის განტოლება.

განვიხილოთ მეორე რიგის წირის ზოგადი განტოლება

$$A x^2 + 2 Bxy + Cy^2 + 2 Dx + 2 Ey + F = 0. \tag{8.1}$$

შევარჩიოთ კოორდინატთა ახალი სისტემა ისე, რომ ამ სისტემის მიმართ (8.1) განტოლებას ჰქონდეს რაც შეიძლება მარტივი სახე. ამასთან ერთად შევისწავლოთ საკითხი: ზემოთ განხილული წრეწირის, ელიფსის, ჰიპერბოლის და პარაბოლის გარდა არსებობენ თუ არა კიდევ სხვა მეორე რიგის წირები.

ლ ე მ ა 1. $\Delta = AC - B^2$ ინვარიანტულია (უცვლელია) კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ განვიხილოთ Oxy სისტემის პარალელური გადატანით მიღებული $O'x'y'$ სისტემა სათავით $O'(x_0;\ y_0)$ წერტილში. როგორც ვიცით

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

ახალ სისტემაში (8.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$A x'^2 + 2 B x'y' + C y'^2 + 2 D'x' + 2 E' y' + F' = 0, \tag{8.2}$$

სადაც

$$D' = A x_0 + B y_0 + D, \quad E' = B x_0 + C y_0 + E,$$

$$F' = Ax_0^2 + 2 B x_0 y_0 + C y_0^2 + 2 D x_0 + 2 E y_0 + F. \tag{8.3}$$

(8.2)-დან ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში $AC - B^2$ უცვლელია.

ახლა განვიხილოთ $Ox'y'$ სისტემა, რომელიც მიღებულია მოცემული Oxy სისტემის α კუთხით მობრუნებით. როგორც ვიცით

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases} \tag{8.4}$$

თუ (8.4)-ს შევიტანთ (8.1)-ში, მივიღებთ განტოლებას, რომელშიც x'^2-ის, $2x'y'$-ის და y'^2-ის კოეფიციენტები იქნება შესაბამისად

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2\alpha + 2 B \cos\alpha \sin\alpha + C \sin^2\alpha, \\ B' &= -A \sin\alpha \cos\alpha + B (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C \sin\alpha \cos\alpha, \\ C' &= A \sin^2\alpha - 2 B \cos\alpha \sin\alpha + C \cos^2\alpha. \end{aligned} \tag{8.5}$$

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$A' C' - B'^2 = AC (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - B^2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = AC - B^2.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 2. თუ $AC - B^2 \neq 0$, მაშინ არსებობს კოორდინატთა ისეთი $O'x''y''$ სისტემა, რომლის მიმართ (7.1) განტოლებას ექნება სახე:

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ განვიხილოთ Oxy სისტემის პარალელური გადატანით მიღებული $O'x'y'$ სისტემა სათავით $O'(x_0;\ y_0)$ წერტილში. ახალ სისტემაში (8.1) განტოლებას ექნება (8.2) სახე (8.3) კოეფიციენტებით. შევარჩიოთ x_0 და y_0 ისე, რომ (8.2) განტოლებაში $D' = E' = 0$. ე. ი. ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \tag{8.6}$$

რადგან $AC - B^2 \neq 0$, ამიტომ (8.6) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $(x_0;\ y_0)$.

თუ $(x_0;\ y_0)$ არის (8.6) სისტემის ამონახსენი, მაშინ (8.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0. \tag{8.7}$$

ახლა განვიხილოთ $O'x''y''$ სისტემა, რომელიც მიღებულია $O'x'y'$ სისტემის α კუთხით მობრუნებით. ამ სისტემაში (8.7) განტოლებას ექნება სახე

$$A'x''^2 + 2B'x''y'' + C'y''^2 + F' = 0, \tag{8.8}$$

სადაც A', B' და C' გამოითვლებიან (8.5) ფორმულებით. შევარჩიოთ α კუთხე ისე, რომ $B' = 0$. ე. ი. ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha.$$

თუ $A = C$, მაშინ $\cos 2\alpha = 0$ და α კუთხედ შეიძლება ავიღოთ $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

თუ $A \neq C$, მაშინ α მობრუნების კუთხე განისაზღვრება ტოლობიდან

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

ამრიგად (8.8) განტოლება მიიღებს სახეს

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0. \tag{8.9}$$

ლემა დამტკიცებულია.

(8.6)-ს ეწოდება მეორე რიგის წირის ცენტრის განტოლებები, ხოლო $(x_0;\ y_0)$ წერტილს — ამ წირის ცენტრი. თუ წირს ერთადერთი ცენტრი გააჩნია, მაშინ მას ცენტრიანი წირი ეწოდება.

$AC-B^2$ გამოსახულების ნიშნის მიხედვით მეორე რიგის წირები იყოფა სამ ტიპად:

1. ელიფსური, თუ $AC-B^2>0$;

2. ჰიპერბოლური, თუ $AC-B^2<0$;

3. პარაბოლური, თუ $AC-B^2=0$.*)

განვიხილოთ ისინი ცალცალკე.

1. ელიფსური ტიპი. რადგან $AC-B^2>0$, ლემა 2-ის ძალით (8.1) განტოლება მიიღებს (8.9) სახეს. ამიტომ ლემა 1-ის ძალით $A'C'=AC-B^2>0$. შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

ა) $A'>0$, $C'>0$ და $F'<0$. მარტივი გარდაქმნებით (8.9) მიიღებს სახეს

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1,$$

სადაც

$$a^2=-\frac{F'}{A'},\quad b^2=-\frac{F'}{C'}.$$

მივიღეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება.

ბ) $A'>0$, $C'>0$, $F'>0$. ამ შემთხვევაში (8.9) მიიღებს სახეს

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1.$$

ამ განტოლებას არ აკმაყოფილებს სიბრტყის არცერთი წერტილის კოორდინატები, ამიტომ მას წარმოსახვითი ელიფსის განტოლება ეწოდება.

გ) $A'>0$, $C'>0$, $F'=0$. მაშინ (8.9) მიიღებს სახეს

$$a^2x''^2+b^2y''^2=0,$$

სადაც $a^2=A'$, $b^2=C'$. მას აკმაყოფილებს ერთადერთი $O'(0;\,0)$ წერტილის კოორდინატები. ამ განტოლებას წარმოსახვითი გადამკვეთი წრფეთა წყვილის განტოლება ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ $A'<0$, $C'<0$ შემთხვევები დაიყვანება $A'>0$ და $C'>0$ შემთხვევებზე განტოლების -1-ზე გამრავლებით.

ამოცანა 1. მეორე რიგის წირის

$$5x^2-8xy+5y^2-2x-2y-7=0 \tag{8.10}$$

განტოლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე.

---

* ცხადია, რომ ელიფსური და ჰიპერბოლური ტიპის წირები ცენტრიანი წირებია, ხოლო პარაბოლური ტიპის — უცენტრო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $A=C=5$ და $B=-4$, ამიტომ

$$AC-B^2=9>0,$$

ე. ი. მოცემული წირი ელიფსური ტიპისაა. ამ წირის ცენტრის $(x_0;\ y_0)$ კოორდინატებისათვის (8.6)-ის თანახმად გვექნება

$$\begin{cases} 5x_0-4y_0-1=0, \\ -4x_0+5y_0-1=0. \end{cases}$$

აქედან $x_0=y_0=1$.

ამრიგად, მოცემული წირის ცენტრია O' (1;1) წერტილი და თუ კოორდინატთა სისტემას გადავიტანთ პარალელურად სათავით O' წერტილში, მაშინ (8.10) განტოლება მიიღებს სახეს (იხ. (7.7))

$$5x'^2-8x'y'+5y'^2-9=0. \qquad (8.11)$$

რადგან $A=C=5$, ამიტომ თუ $O'x'y'$ სისტემას მოვაბრუნებთ $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ კუთხით, (8.11) განტოლება მიიღებს სახეს (იხ. (8.9)):

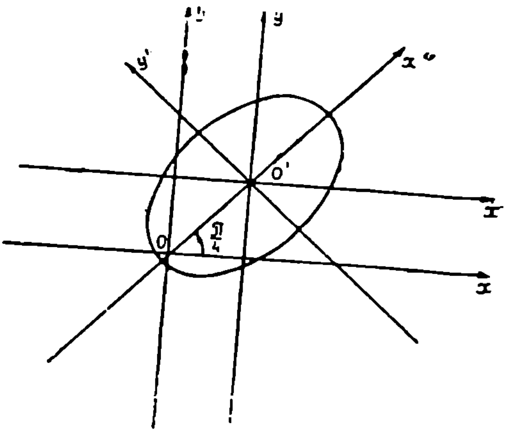
$$x''^2+9y''^2-9=0$$

ანუ

$$\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{1}=1.$$

მივიღეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება.

ამრიგად, (8.10) წირი წარმოადგენს ელიფსს, რომლის ცენტრია $O'(1;\ 1)$ და რომლის დიდი ღერძი Ox ღერძთან ქმნის $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ კუთხეს (ნახ. 44).



ნახ. 44

2. ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი ტ ი პ ი. რადგან $AC-B^2<0$, ლემა 2-ის ძალით (8.1) განტოლება მიიღებს (8.9) სახეს. ამიტომ ლემა 1-ის ძალით

$$A'C'=AC-B^2<0.$$

შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

ა) $A'>0$, $C'<0$ და $F'\neq 0$. ვთქვათ, მაგალითად $F'<0$. მარტივი გარდაქმნებით (8;9) მიიღებს სახეს

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1,$$

სადაც

$$a^2=-\frac{F'}{A'},\quad b^2=\frac{F'}{C'}.$$

მივიღეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება.

ბ) $A'>0$, $C'<0$ და $F'=0$. ამ შემთხვევაში (8.9) მიიღებს სახეს

$$a^2x''^2-b^2y''^2=0,$$

სადაც

$$a^2=A',\ \ b^2=-C'.$$

აქედან

$$ax''-by''=0 \quad \text{ან} \quad ax''+by''=0.$$

მივიღეთ კოორდინატთა O' სათავეზე გამავალი ორი წრფის განტოლება.

შევნიშნოთ, რომ $A'<0$, $C'>0$ შემთხვევები დაიყვანება უკვე განხილულ შემთხვევებზე განტოლების — 1-ზე გამრავლებით.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. ვაჩვენოთ, რომ

$$y=\frac{k}{x}\quad (k\neq 0) \tag{8.12}$$

ფუნქციის გრაფიკი არის ტოლფერდა ჰიპერბოლა, რომლის ასიმპტოტებია საკოორდინატო ღერძები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (8.12) განტოლება

$$xy-k=0 \tag{8.13}$$

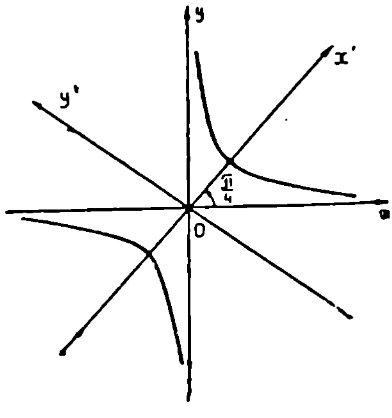
განტოლების ტოლფასია, ე. ი. მოცემული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს მეორე რიგის წირს.

თუ კოორდინატთა Oxy სისტემას მოვაბრუნებთ $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ კუთხით,

მაშინ ძველი x, y კოორდინატები ახალი x', y' კოორდინატების საშუალებით (8.4)-ის ძალით შემდეგნაირად გამოისახება

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'),$$



ნახ. 45

ამიტომ, ახალ $Ox'y'$ სისტემაში (8.13) განტოლება მიიღებს სახეს

$$x'^2 - y'^2 = 2k.$$

ეს იმ ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლებაა, რომლის ასიმპტოტებია $y' = \pm x'$ წრფეები. ცხადია, რომ ეს წრფეები ემთხვევა ძველი Oxy სისტემის საკოორდინატო ღერძებს. როცა $k > 0$, ამ ჰიპერბოლის ფოკუსები ძევს Ox' ღერძზე (ნახ. 45), ხოლო როცა $k < 0$, მაშინ Oy' ღერძზე.

3. პარაბოლური ტიპი: თუ კოორდინატთა Oxy სისტემას მოვაბრუნებთ იმ α კუთხით, რომელიც ლემა 2-ის დამტკიცებაში იყო განხილული, მაშინ ახალ $Ox'y'$ სისტემაში (8.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'F' + F = 0. \tag{8.14}$$

რადგან $AC - B^2 = A'C' = 0$, ამიტომ A' და C' რიცხვებიდან ერთ-ერთი ნულის ტოლია. ვთქვათ $A' = 0$ და $C' \neq 0$. (8.14) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$C'\left[y'^2 + \frac{2E'}{C'}y' + \left(\frac{E'}{C'}\right)^2\right] + 2D'x' + F - \frac{E'^2}{C'} = 0,$$

ანუ

$$C'\left(y' + \frac{E}{C'}\right)^2 + 2D'x' + F' = 0, \tag{8.15}$$

სადაც

$$F' = F - \frac{E'^2}{C'}.$$

გადავიტანოთ კოორდინატთა $Ox'y'$ სისტემის სათავე Oy' ღერძის პარალელურად $O'\left(0; -\frac{E'}{C'}\right)$ წერტილში $\left(x''=x',\ y''=y'+\frac{E'}{C'}\right)$, მაშინ ახალ $O'x''y''$ სისტემაში (8.15) განტოლება მიიღებს სახეს

$$C'\,y''^2 + 2\,D'\,x'' + F' = 0. \tag{8.16}$$

შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

ა) $D' \neq 0$. მაშინ (8.16) განტოლება ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$C'\,y''^2 + 2\,D'\left(x'' + \frac{F'}{2\,D'}\right) = 0. \tag{8.17}$$

ახლა კოორდინატთა $O'\,x''\,y''$ სისტემის სათავე გადავიტანოთ $O'\,x''$ ღერძის პარალელურად $O''\left(-\frac{F'}{2\,D'};\ 0\right)$ წერტილში $\left(x'''=x''+\frac{F'}{2\,D'},\ y'''=y''\right)$, მაშინ ახალ $O''\,x'''\,y'''$ სისტემაში (8.17) განტოლება მიიღებს სახეს

$$C'\,y'''^2 + 2\,D'\,x''' = 0$$

ანუ

$$y'''^2 = 2px''',$$

სადაც $p = -\frac{D'}{C'}$.

მივიღეთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება.

ბ) $D'=0$, მაშინ (8.16) განტოლებას აქვს სახე

$$C'\,y''^2 + F' = 0. \tag{8.18}$$

თუ C' და F'-ს აქვთ სხვადასხვა ნიშანი, მაშინ (8.18) განტოლება მიიღებს სახეს

$$(y''-a)\,(y''+a) = 0,$$

სადაც $a^2 = \left|\frac{F'}{C'}\right|$. ეს განტოლება განსაზღვრავს პარალელურ წრფეთა წყვილს.

თუ C' და F'-ს აქვთ ერთნაირი ნიშანი, მაშინ (8.18) განტოლება მიიღებს სახეს

$$y''^2 + a^2 = 0$$

ამ განტოლებას არ აკმაყოფილებს სიბრტყის არცერთი წერტილის კოორდინატები, მას უწოდებენ წარმოსახვით პარალელურ წრფეთა წყვილის განტოლებას.

და ბოლოს, თუ $F'=0$, მაშინ (8.18) ღებულობს სახეს $y''^2=0$, რომელიც წარმოადგენს $O'x''$ ღერძის განტოლებას. ეს განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ორ თანხვდენილ წრფეთა წყვილის განტოლება.

ამოცანა 3. მეორე რიგის წირის

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0 \qquad (8.19)$$

განტოლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე.

ამოხსნა. რადგან $A=16$, $B=-12$, $C=9$, ამიტომ

$$AC - B^2 = 0,$$

ე. ი. მოცემული წირი პარაბოლური ტიპისაა.

რადგან $A \neq C$, ამიტომ კოორდინატთა Oxy სისტემის მობრუნების α კუთხე განისაზღვრება ტოლობიდან

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} = -\frac{24}{7},$$

საიდანაც $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

თუ კოორდინატთა Oxy სისტემას მოვაბრუნებთ α კუთხით, მაშინ x, y კოორდინატები ახალი x', y' კოორდინატების საშუალებით, (8.4)-ის ძალით, შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'. \end{cases}$$

ამიტომ ახალ $Ox'y'$ სისტემაში (8.19) განტოლება მიიღებს სახეს

$$y'^2 - x' - 2y' + 2 = 0.$$

ეს განტოლება შეიძლება ასეთნაირად გადავწეროთ

$$(y'-1)^2 - (x'-1) = 0. \qquad (8.20)$$

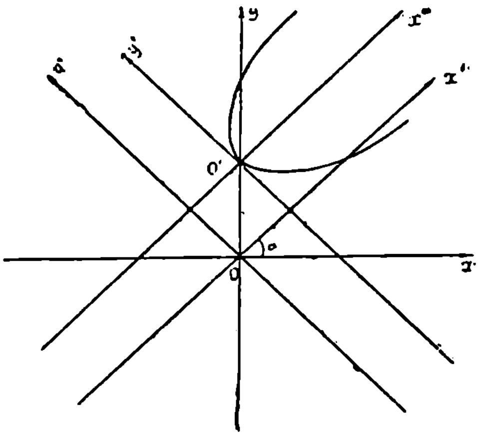
კოორდინატთა $Ox'y'$ სისტემის სათავე გადავიტანოთ პარალელურად $O'(1;\ 1)$ წერტილში ($x'=x''+1$, $y'=y''+1$). მაშინ ახალ $O'x''y''$ სისტემაში (8.20) განტოლება მიიღებს სახეს

$$y''^2 = x''.$$

მივიღეთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება.

ამრიგად, (8.19) წირი წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის წვეროა $O'(1;\ 1)$ და რომლის სიმეტრიის ღერძი Ox ღერძთან ადგენს $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$ კუთხეს (ნახ. 46).

ამ პარაგრაფის ბოლოს ჩამოვაყალიბოთ მეორე რიგის წირის გამოკვლევით მიღებული შედეგები.



ნახ. 46

თუ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მეორე რიგის წირი მოცემულია ზოგადი განტოლებით

$$A x^2 + 2Bxy + C y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

მაშინ არსებობს ისეთი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელშიც ეს განტოლება მიიღებს ერთ-ერთს შემდეგი ცხრა კანონიკური სახიდან:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ელიფსი);
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (წარმოსახვითი ელიფსი);
3. $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$ (წარმოსახვითი გადამკვეთი წრფეთა წყვილი);
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ჰიპერბოლა);
5. $a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0$ (გადამკვეთი წრფეთა წყვილი);
6. $y^2 = 2px$ (პარაბოლა);

7. $y^2 - a^2 = 0$ (პარალელურ წრფეთა წყვილი);
8. $y^2 + a^2 = 0$ (წარმოსახვით პარალელურ წრფეთა წყვილი);
9. $y^2 = 0$ (თანხვდენილ წრფეთა წყვილი).

§ 9. მეორე რიგის ზედაპირები

განვიხილოთ სამუცნობიანი მეორე რიგის ზოგადი სახის განტოლება

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (9.1)$$

სადაც a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13} და a_{23} რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას, მეორე რიგის ზედაპირი ეწოდება. შესაძლებელია, რომ სივრცეში არ არსებობდეს არცერთი წერტილი, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს (9.1) განტოლებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (9.1) განტოლება განსაზღვრავს მეორე რიგის წარმოსახვით ზედაპირს. წარმოსახვით ზედაპირებს ჩვენ არ შევისწავლით. ზოგჯერ (9.1) განტოლება განსაზღვრავს პარალელური ან თანხვდენილი სიბრტყეების წყვილს, გადამკვეთ სიბრტყეთა წყვილს, წრფეს, ან ერთადერთ წერტილსაც კი, მაგრამ მაშინაც ამ სიმრავლეებს მეორე რიგის ზედაპირებს უწოდებენ.

IV თავის § 1-ში მიღებული იყო სფეროს განტოლება

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

ეს განტოლება მეორე ხარისხისაა x, y და z ცვლადების მიმართ. ამიტომ, სფერო წარმოადგენს მეორე რიგის ზედაპირს.

(9.1) განტოლება განსაზღვრავს სხვადასხვა სახის ზედაპირებს, რომელთა კანონიკური განტოლებები მიიღება (9.1) განტოლებიდან გარკვეული წრფივი გარდაქმნებით (იმის ანალოგიურად, როგორც მივიღეთ მეორე რიგის წირების კანონიკური განტოლებები). განვიხილოთ ეს ზედაპირები.

1. ე ლ ი ფ ს ო ი დ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0). \qquad (9.2)$$

კერძოდ, როცა $a = b = c = r$, მაშინ (9.2) განტოლება მიიღებს სახეს $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, რომელიც წარმოადგენს r-რადიუსიანი სფეროს განტოლებას ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

a, b, c რიცხვებს ელიფსოიდის ნახევარღერძები ეწოდება. (9.2) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ელიფსოიდი შემოსაზღვრული ზედაპირია;

2) ელიფსოიდი საკოორდინატო ღერძებს კვეთს წერტილებში

$$A_1(-a;\ 0;\ 0),\quad A_2(a;\ 0;\ 0),\quad B_1(0;\ -b;\ 0),$$
$$B_2(0;\ b;\ 0),\quad C_1(0;\ 0;\ -c),\quad C_2(0;\ 0;\ c),$$

რომლებსაც ელიფსოიდის წვეროები ეწოდება;

3) ელიფსოიდი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ელიფსოიდს აქვს 47-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

2. ც ა ლ კ ა ლ თ ა ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ო ი დ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\quad (a,\ b,\ c>0).$$

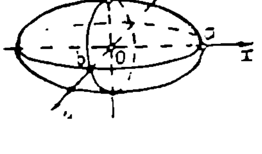
ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

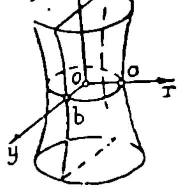
2) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი აბსცისთა ღერძს კვეთს $A_1(-a;\ 0;\ 0)$, $A_2(a;\ 0;\ 0)$ წერტილებში, ორდინატთა ღერძს — $B_1(0;\ -b;\ 0)$, $B_2(0;\ b;\ 0)$ წერტილებში, ხოლო აპლიკატთა ღერძთან საერთო წერტილები არ გააჩნია. A_1, A_2, B_1, B_2 წერტილებს ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წვეროები ეწოდება.

3) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

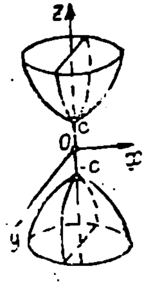
ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის სახე მოცემულია 48-ე ნახაზზე.



ნახ. 47



ნახ. 48



ნახ. 49

3. ო რ კ ა ლ თ ა ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ო ი დ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,\ b,\ c>0).$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

2) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი აპლიკატთა ღერძს კვეთს C_1 (0; 0; $-c$) და C_2 (0; 0; c) წერტილებში, რომელთაც ორკალთა ჰიპერბოლოიდის წვეროები ეწოდება. ორდინატთა და აბსცისთა ღერძებთან ორკალთა ჰიპერბოლოიდს საერთო წერტილები არ გააჩნია;

3) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ორკალთა ჰიპერბოლოიდს აქვს 49-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

4. ე ლ ი ფ ს უ რ ი პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p,\ q>0). \tag{9.3}$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ელიფსური პარაბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია და რადგანაც p, $q>0$, ამიტომ ეს ზედაპირი მდებარეობს $z\geqslant 0$ ნახევარსივრცეში.

2) ელიფსური პარაბოლოიდი აპლიკატთა ღერძს კვეთს (0; 0; 0) წერტილში, რომელსაც ელიფსური პარაბოლოიდის წვერო ეწოდება და ამ წერტილში ეხება Oxy საკოორდინატო სიბრტყეს;

3) ელიფსური პარაბოლოიდი სიმეტრიულია Oxz და Oyz საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ელიფსურ პარაბოლოიდს აქვს 50-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

კერძოდ, როცა $p=q$, მაშინ (9.3) ზედაპირი არის ბრუნვითი ზედაპირი, რომელიც მიიღება $x^2=2pz$ პარაბოლის ბრუნვით Oz ღერძის გარშემო. მას ბრუნვითი პარაბოლოიდი ეწოდება.

5. ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p,\ q>0).$$

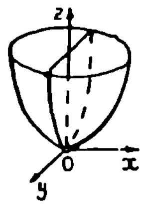
ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

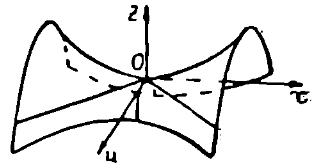
2) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი გადის კოორდინატთა სათავეზე;

3) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი სიმეტრიულია Oxz და Oyz საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს აქვს 51-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 50



ნახ. 51

6. მ ე ო რ ე   რ ი გ ი ს   კ ო ნ უ ს ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a, b, c>0).$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

1) მეორე რიგის კონუსი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

2) მეორე რიგის კონუსი გადის კოორდინატთა სათავეზე;

3) მეორე რიგის კონუსი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

მეორე რიგის კონუსს აქვს 52-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

7. მ ე ო რ ე   რ ი გ ი ს   ც ი ლ ი ნ დ რ უ ლ ი   ზ ე დ ა პ ი რ ე ბ ი. ზედაპირს, რომელიც შექმნილია ურთიერთპარალელური წრფეებით, რომლებიც გავლებულია რაიმე წირის ყველა წერტილზე, ცილინდრული ზედაპირი ეწოდება. ამ წრფეებს ცილინდრული ზედაპირის მსახველები ეწოდება, ხოლო აღებულ წირს — მიმმართველი წირი. თუ მსახველი Oz ღერძის პარალელურია, მაშინ ცილინდრული ზედაპირის განტოლებას აქვს სახე

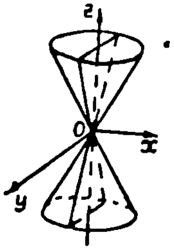
$$f(x, y)=0.$$

Oxy სიბრტყეზე ეს განტოლება წარმოადგენს მიმმართველი წირის განტოლებას.

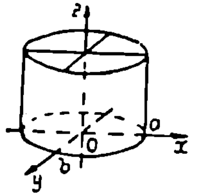
ა) ე ლ ი ფ ს უ რ ი   ც ი ლ ი ნ დ რ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a, b>0)$$

და აქვს 53-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 52



ნახ. 53

ბ) ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი   ც ი ლ ი ნ დ რ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

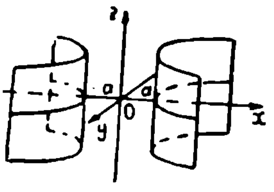
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a,\ b > 0)$$

და აქვს 54-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

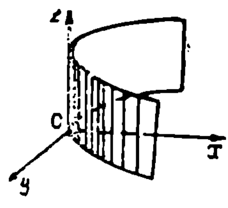
გ) პ ა რ ა ბ ო ლ უ რ ი   ც ი ლ ი ნ დ რ ი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

და აქვს 55-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 54



ნახ. 55

დ) ცილინდრულ ზედაპირებს შეიძლება მივაკუთვნოთ აგრეთვე:

1) ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეთა წყვილი

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0 \quad (a,\ b > 0).$$

2) ურთიერთპარალელურ ან თანხვდენილ სიბრტყეთა წყვილი

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (a > 0) \quad \text{და} \quad z^2 = 0.$$

3) წრფე

$$x^2 + y^2 = 0.$$

8. წ ე რ ტ ი ლ ი

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. მოიყვანეთ ელიფსის განსაზღვრება და დაწერეთ მისი კანონიკური სახის განტოლება;
2. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი;
3. დაწერეთ ელიფსის პარამეტრული სახის განტოლებები;
4. მოიყვანეთ ჰიპერბოლის განსაზღვრება და დაწერეთ მისი კანონიკური სახის განტოლება;
5. განსაზღვრეთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი;
6. დაწერეთ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების განტოლებები;
7. მოიყვანეთ ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისების თვისებები;
8. მოიყვანეთ პარაბოლის განსაზღვრება და დაწერეთ მისი კანონიკური სახის განტოლება;
9. დაწერეთ ელიფსოიდის კანონიკური სახის განტოლება და ჩამოაყალიბეთ მისი ძირითადი თვისებები;
10. დაწერეთ ცალკალათა (ორკალათა) ჰიპერბოლოიდის კანონიკური განტოლება და ჩამოაყალიბეთ მისი ძირითადი თვისებები;
11. დაწერეთ ელიფსური (ჰიპერბოლური) პარაბოლოიდის კანონიკური განტოლება და ჩამოაყალიბეთ მისი ძირითადი თვისებები:
12. დაწერეთ მეორე რიგის კონუსის კანონიკური განტოლება და ჩამოაყალიბეთ მისი ძირითადი თვისებები;
13. განსაზღვრეთ ცილინდრული ზედაპირი და დაწერეთ ძირითადი ცილინდრული ზედაპირების კანონიკური განტოლებანი.

VI თავი

წრფივი სივრცეები

§ 1. წრფივი სივრცის ცნება. წრფივი სივრცის ზოგიერთი თვისება

ჩვენ გავეცანით წრფივ ოპერაციებს (შეკრება და რიცხვზე გამრავლება) მატრიცებზე და ორიენტირებულ მონაკვეთებზე (ვექტორებზე). ეს ოპერაციები მატრიცებისა და ვექტორებისათვის სხვადასხვანაირადაა განსაზღვრული, მაგრამ ახასიათებთ ერთი და იგივე თვისებები: კომუტატიურობა და ასოციაციურობა შეკრების მიმართ, რიცხვზე გამრავლების დისტრიბუციულობა შეკრების მიმართ.

ამ თავში შევისწავლით ნებისმიერი ბუნების ობიექტების სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტებისათვის რაიმე წესით განსაზღვრულია

შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები (წრფივი ოპერაციები) ისე, რომ ეს ოპერაციები აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს.

განსაზღვრება 1.1. ნებისმიერ ობიექტთა E სიმრავლეს ეწოდება წრფივი სივრცე, ხოლო მის ელემენტს — ვექტორი, თუ:

I. მოცემულია წესი (შეკრების ოპერაცია), რომლის მიხედვით E სიმრავლის ყოველ ორ x და y ელემენტს შეესაბამება ამავე სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც x და y ელემენტების ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $x+y$ სიმბოლოთი;

II. მოცემულია წესი (რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია), რომლის მიხედვით E სიმრავლის ყოველ x ელემენტს და ნებისმიერ α რიცხვს შეესაბამება ამავე სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც x ელემენტის α რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება αx სიმბოლოთი;

III. E სიმრავლის ყოველი x, y და z ელემენტებისათვის და ნებისმიერი α და β რიცხვებისათვის სრულდება შემდეგი პირობები (აქსიომები):

1. $x+y=y+x$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3. E სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენტი Θ (ნულოვანი ელემენტი), რომ ყოველი x-სათვის E-დან $x+\Theta=x$;
4. E სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის E-ში არსებობს ე. წ. მოპირდაპირე ელემენტი $(-x)$ ისეთი, რომ $x+(-x)=\Theta$;
5. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;
6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
7. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
8. E სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის $1.x=x$.

მოვიყვანოთ წრფივი სივრცის მაგალითები:

1) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ არის წრფივი სივრცე.

2) ორიენტირებულ მონაკვეთთა სიმრავლეები V_1, V_2 და V_3 (წრფის, სიბრტყის და სივრცის) ორიენტირებულ მონაკვეთთა შეკრების და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ არის წრფივი სივრცე.

3) ერთი და იგივე განზომილების მატრიცთა სიმრავლე მატრიცთა შეკრებისა და მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ არის წრფივი სივრცე.

4) ვთქვათ, E არის ნამდვილ რიცხვთა $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სახის ყველა შესაძლო დალაგებული n-ეულების სიმრავლე. შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$x+y=(x_1,\ x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\dots,x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\dots,\alpha x_n).$$

ადვილია ჩვენება, რომ 1—8 პირობები სრულდება, ე. ი. E არის წრფივი სივრცე. ამ სივრცეს ეწოდება კოორდინატული სივრცე და აღინიშნება R^n სიმბოლოთი. ცხადია, R^n სივრცის ნულოვანი ელემენტია $\Theta=(0,0,\dots,0)$, ხოლო $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტია $-x=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$.

შევნიშნოთ, რომ n ხარისხის მრავალწევრთა სიმრავლე შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ არ ქმნის წრფივ სივრცეს. მართლაც, თუ $x=t^n+t^2$, $y=-t^n+t$ მაშინ $x+y=t^2+t$ არ არის n ხარისხის მრავალწევრი.

მართებულია შემდეგი თეორემები:

თ ე ო რ ე მ ა 1.1. ყოველ წრფივ E სივრცეში ნულოვანი ელემენტი ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-3 აქსიომის თანახმად E სივრცეში არსებობს ერთი მაინც ნულოვანი ელემენტი. დავუშვათ, რომ E სივრცეში არსებობს ორი ნულოვანი ელემენტი Θ_1 და Θ_2, მაშინ ნებისმიერი x-სათვის E-დან

$$x+\Theta_1=x \quad \text{და} \quad x+\Theta_2=x.$$

კერძოდ,

$$\Theta_2+\Theta_1=\Theta_2 \quad \text{და} \quad \Theta_1+\Theta_2=\Theta_1,$$

საიდანაც აქსიომა 1-ის ძალით $\Theta_1=\Theta_2$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 1.2. წრფივი სივრცის ნებისმიერი ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მე-4 აქსიომის თანახმად წრფივი სივრცის ყოველ ელემენტს გააჩნია ერთი მაინც მოპირდაპირე ელემენტი. დავუშვათ, რომ რომელიმე x ელემენტს გააჩნია ორი მოპირდაპირე ელემენტი y_1 და y_2, ე. ი.

$$x+y_1=\Theta \quad \text{და} \quad x+y_2=\Theta.$$

აქედან, წრფივი სივრცის აქსიომების ძალით, გვაქვს

$$y_1=y_1+\Theta=y_1+(x+y_2)=(y_1+x)+y_2=\Theta+y_2=y_2,,$$

ე. ი.

$$y_1=y_2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 1.3. წრფივი სივრცის ნებისმიერი x ელემენტისათვის

$$0 \cdot x = \Theta.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ x ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტია y, მაშინ

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + \Theta = 0 \cdot x + (x + y) = (0 \cdot x + x) + y = (0 + 1)x + y = \Theta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 1.4. ნებისმიერი α რიცხვისათვის

$$\alpha \cdot \Theta = \Theta.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თეორემა 1.3.-ის და მე-7 აქსიომის ძალით გვაქვს

$$\alpha \cdot \Theta = \alpha (0 \cdot x) = (\alpha \cdot 0) x = 0 \cdot x = \Theta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 1.5. თუ $\alpha x = \Theta$, მაშინ ან $\alpha = 0$, ან $x = \Theta$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $\alpha \neq 0$, მაშინ

$$x = 1 \cdot x = \left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right) x = \frac{1}{\alpha} (\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \Theta = \Theta.$$

თუ $x \neq \Theta$, მაშინ, ცხადია, $\alpha = 0$, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში $x = \Theta$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 1.6. წრფივი სივრცის ყოველი x ელემენტისათვის $(-1)\,x$ წარმოადგენს x-ის მოპირდაპირე ელემენტს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს

$$x + (-1)\,x = (1 - 1)\,x = 0 \cdot x = \Theta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა ამართლებს x-ის მოპირდაპირე ელემენტის $-x$-ით აღნიშვნას.

წრფივი სივრცის x და $(-y)$ ელემენტების ჯამს უწოდებენ x და y ელემენტების სხვაობას და $x - y$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

§ 2. წრფივი სივრცის განზომილება, ბაზისი. წრფივი სივრცის ქვესივრცე

ვთქვათ E წრფივი სივრცეა. ამ სივრცის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტთა წრფივი კომბინაცია ეწოდება ჯამს $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ნებისმიერი რიცხვებია.

განსაზღვრება 2.1. წრფივი სივრცის ელემენტთა $x_1, x_2, \dots, x_n$ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \Theta. \tag{2.1}$$

განსაზღვრება 2.2. ელემენტთა $x_1, x_2, \dots, x_n$ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ (2.1) ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

ისევე, როგორც ვექტორების შემთხვევაში (იხ. თავი III, § 4) ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი დებულებები:

1. იმისათვის, რომ წრფივი სივრცის ელემენტთა სისტემა იყოს წრფივად დამოკიდებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სისტემის ერთი მაინც ელემენტი იყოს დანარჩენების წრფივი კომბინაცია.

2. თუ ელემენტთა სისტემა შეიცავს ნულოვან ელემენტს, მაშინ ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

3. თუ ელემენტთა სისტემა შეიცავს წრფივად დამოკიდებულ ქვესისტემას (ნაწილს), მაშინ თვით მოცემული სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება.

4. წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა სისტემის ყოველი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

განსაზღვრება 2.3. წრფივ E სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიანი, თუ E-ში არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი, ხოლო ყოველი $n+1$ ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია. ამ n რიცხვს ეწოდება E სივრცის განზომილება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\dim E$.

ცხადია, რომ წრფივი სივრცის განზომილება არის ამ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვი.

განსაზღვრება 2.4. წრფივ სივრცეს ეწოდება უსასრულო განზომილებიანი, თუ მასში არსებობს ნებისმიერი რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტებისა.

განსაზღვრება 2.5. n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ბაზისი ეწოდება ამ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ n ელემენტთა დალაგებულ სისტემას.

n-განზომილებიანი სივრცის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ მასში ყოველთვის არსებობს ბაზისი.

ვიტყვით, რომ ელემენტი დაშლილია რაიმე ბაზისის მიხედვით, თუ ის წარმოადგენს ამ ბაზისის ელემენტების წრფივ კომბინაციას.

თეორემა 2.1. წრფივი სივრცის ყოველი ელემენტი ერთადერთი სახით იშლება სივრცის ბაზისის მიხედვით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, სივრცე n-განზომილებიანია და მისი ბაზისია $e_1, e_2, \dots, e_n$. განვიხილოთ ამ სივრცის ნებისმიერი x ელემენტი. წრფივი სივრცის განზომილების განსაზღვრის ძალით ელემენტთა სისტემა $x, e_1, e_2, \dots, e_n$ წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. არსებობს რიცხვები $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ისეთი, რომ

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \Theta, \tag{2.2}$$

სადაც $\alpha_i\,(i = 0, 1, \dots, n)$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. კერძოდ, $\alpha_0 \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში (2.2)-დან გამომდინარეობს $e_1, e_2, \dots, e_n$ ელემენტების წრფივად დამოკიდებულება, ამიტომ (2.2)-დან გვაქვს

$$x = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} e_n,$$

ე. ი. x ვექტორი წარმოადგენს $e_1, e_2, \dots, e_n$ ელემენტების წრფივ კომბინაციას.

ვაჩვენოთ დაშლის ერთადერთობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს ორი დაშლა

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n \quad \text{და} \quad x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n,$$

მაშინ

$$(\beta_1 - \gamma_1) e_1 + (\beta_2 - \gamma_2) e_2 + \dots + (\beta_n - \gamma_n) e_n = \Theta. \tag{2.3}$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ ელემენტების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო (2.3)-დან გვაქვს

$$\beta_1 = \gamma_1, \ \beta_2 = \gamma_2, \dots, \beta_n = \gamma_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. 2.6. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებს ეწოდება x ელემენტის კოორდინატები $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისის მიმართ, თუ

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

ცხადია, რომ სივრცის ნულოვანი ელემენტის ყველა კოორდინატი ნებისმიერი ბაზისის მიმართ ნულის ტოლია.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1-დან გამომდინარეობს, რომ თუ n-განზომილებიან E სივრცეში ფიქსირებულია ბაზისი, მაშინ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა E და R^n სივრცეების ელემენტებს შორის.

მაგალითად, ასეთი შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს, თუ სივრცის ყოველ ელემენტს შევუსაბამებთ მისი კოორდინატებისაგან შედგენილ დალაგებულ n-ეულს და პირიქით.

ისევე, როგორც ვექტორებისათვის (იხ. თავი III, § 4), შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. წრფივი სივრცის ელემენტთა ჯამის კოორდინატები უდრის შესაკრები ელემენტების სათანადო კოორდინატების ჯამს. ხოლო ელემენტის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები უდრის ამ ელემენტის სათანადო კოორდინატების იმავე რიცხვზე ნამრავლებს, ე. ი. თუ $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n$, $y=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\cdots+\beta_n e_n$ და λ ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ

$$x+y=(\alpha_1+\beta_1)e_1+(\alpha_2+\beta_2)e_2+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)e_n,$$
$$\lambda x=(\lambda\alpha_1)e_1+(\lambda\alpha_2)e_2+\cdots+(\lambda\alpha_n)e_n.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. თუ V_1, V_2 და V_3 ორიენტირებულ მონაკვეთთა სივრცეებია, მაშინ, $\dim V_1=1$, $\dim V_2=2$, $\dim V_3=3$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $\dim R^n=n$ და ამ სივრცის ერთ-ერთი ბაზისია

$$e_1=(1,\ 0,\dots,0),$$
$$e_2=(0,\ 1,\dots,0),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$e_n=(0,\ 0,\dots,1).$$

მართლაც, ტოლობიდან

$$\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n=\Theta,$$

გვაქვს

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n)=(0,0,\dots,0),$$

ე. ი.

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0.$$

ამრიგად, $e_1, e_2,\dots,e_n$ ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ R^n სივრცის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს ამ ელემენტების წრფივ კომბინაციას. ვთქვათ, $x=(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n)\in R^n$. ამ სივრცეში წრფივი ოპერაციების განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს

$$x=(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\ 0,\dots,0)+(0,\ \alpha_2,\dots,0)+\cdots+$$
$$+(0,0,\dots,\alpha_n)=\alpha_1(1,0,\dots,0)+\alpha_2(0,\ 1,\dots,0)+\cdots+$$
$$+\alpha_n(0,\ 0,\dots,1)=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.7. E წრფივი სივრცის E' ქვესიმრავლეს ეწოდება E წრფივი სივრცის ქვესივრცე (წრფივი ქვესივრცე), თუ ის წრფივი სივრცეა E-ში შემოყვანილი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

ცხადია, რომ ნებისმიერი E სივრცის ყოველი ქვესივრცე შეიცავს E-ს ნულოვან ელემენტს.

ქვესივრცის უმარტივესი მაგალითებია:

1) ნულოვანი, ე. ი. ისეთი ქვესივრცე, რომელიც შედგება მოცემული E სივრცის ერთადერთი ნულოვანი ელემენტებისაგან.

2) E სივრცის ქვესივრცეა თვითონ E სივრცე.

3) V_1 არის V_2-ის ქვესივრცე, ხოლო V_2 არის V_3-ის ქვესივრცე.

4) ერთი და იგივე განზომილების კვადრატულ მატრიცთა სივრცეში სიმეტრიულ მატრიცთა ქვესიმრავლე არის ქვესივრცე.

5) R^n სივრცის ყველა იმ $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $x_1=0$, წარმოადგენს R^n-ის ქვესივრცეს.

6) R^n სივრცის ყველა იმ $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \Theta,$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ფიქსირებული რიცხვებია, წარმოადგენს R^n-ის ქვესივრცეს.

7) R^n სივრცის იმ $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული არის წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1n} x_n = 0 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2n} x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \dots + \alpha_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსენი, არის R^n სივრცის ქვესივრცე.

განსაზღვრება 2.8. წრფივი სივრცის $x_1, x_2, \dots, x_k$ ელემენტთა ყველა შესაძლო $x=\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$ (სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ნებისმიერი რიცხვებია) წრფივ კომბინაციათა სიმრავლეს ეწოდება $x_1, x_2, \dots, x_k$ ელემენტთა სისტემის წრფივი გარსი და აღინიშნება სიმბოლოთი $L(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი დებულებები:

1. E სივრცის ელემენტთა ნებისმიერი სისტემის წრფივი გარსი წარმოადგენს E-ს წრფივ ქვესივრცეს.

2. $L(x_1, x_2, \dots, x_k)$ წრფივი გარსი არის $x_1, x_2, \dots, x_k$ ელემენტების შემცველი E სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცის ქვესივრცე, ე. ი ის არის უმცირესი ქვესივრცე იმ ქვესივრცეთა შორის, რომლებიც შეიცავენ $x_1, x_2, \dots, x_k$ ელემენტებს.

3. ქვესივრცის განზომილება არ აღემატება მთელი სივრცის განზომილებას.

4. $L(x_1, x_2, \dots, x_k)$ წრფივი გარსის განზომილება უდრის $x_1, x_2, \dots, x_k$ ელემენტთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა მაქსიმალურ რიცხვს.

5. წრფივი სივრცის ყოველი ქვესივრცე არის ამ სივრცის ელემენტთა რაღაც $x_1, x_2, \dots, x_k$ სისტემის გარსი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 12x_2 - 17x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

სისტემის ამონახსენთა სიმრავლის განზომილება და ერთ-ერთი ბაზისი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ადვილია ჩვენება, რომ მოცემული სისტემის მატრიცის რანგია 2, ამასთან მისი საბაზისო მინორი მოთავსებულია მარცხენა ზედა კუთხეში. ამიტომ, თუ უკუვაგდებთ სისტემის მე-3 განტოლებას, მაშინ სისტემის პირველი ორი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_1 &= 13x_3 - 17x_4, \\ x_2 &= -4x_3 + 7x_4. \end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.4) სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ მიიღება (2.5)-დან თუ x_3-ს და x_4-ს მივანიჭებთ ნებისმიერ მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ ორი კერძო ამონახსენი

$$\begin{aligned} u &= (13, -4, 1, 0), \\ v &= (-17, 7, 0, 1). \end{aligned}$$

ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც ტოლობას $\alpha u + \beta v = 0$ ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha = \beta = 0$.

ვაჩვენოთ, რომ (2.4) სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი შეიძლება წარმოვადგინოთ u და v ამონახსნების წრფივი კომბინაციით. მართლაც, ვთქვათ, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ რაიმე ამონახსენია, მაშინ

$$\begin{aligned} x_3 u &= (13x_3, -4x_3, x_3, 0), \\ x_4 v &= (-17x_4, 7x_4, 0, x_4). \end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned} x_3 u + x_4 v &= (13x_3 - 17x_4, -4x_3 + 7x_4, x_3, x_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) = x. \end{aligned}$$

ამრიგად, (2.4) სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი წრფივად გამოისახება ორი u და v წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენით, ე. ი. u და v ქმნიან ბაზისს (2.4) სისტემის ამონახსენთა სივრცეში და ამ სივრცის განზომილებაა 2.

ორიენტირებულ მონაკვეთთა V_2 და V_3 სივრცეებში ვექტორის სიგრძისა და ვექტორთა შორის კუთხის ცნებიდან გამომდინარე განისაზღვრება ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი და მტკიცდება მისი თვისებები. მაგრამ, მეორეს მხრივ, თუ დავუშვებთ, რომ ცნობილია ნებისმიერი ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი, მაშინ მასზე დაყრდნობით ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ვექტორის სიგრძე და კუთხე ორ ვექტორს შორის. ზოგად წრფივ სივრცეებში მოხერხებულია აქსიომატურად შემოვიღოთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ცნება და ამ ცნებაზე დაყრდნობით განვსაზღვროთ ვექტორის სიგრძე და კუთხე ორ ვექტორს შორის.

განსაზღვრება 3.1. ვიტყვით, რომ E წრფივ სივრცეში განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვით E სივრცის ყოველ ორ x და y ელემენტს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი (რომელსაც ამ ელემენტებს სკალარული ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება (x, y) სიმბოლოთი) და ეს შესაბამისობა, როგორიც არ უნდა იყოს E სივრცის x, y, z ელემენტები და α რიცხვი, აკმაყოფილებს პირობებს (აქსიომებს):

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $(x, x) > 0$ თუ $x \neq \Theta$ და $(x, x) = 0$ თუ $x = \Theta$.

განსაზღვრება 3.2. წრფივ სივრცეს, რომელშიც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, ევკლიდეს სივრცე ეწოდება.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

1) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$;

2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ y \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y);$$

4) $$\left(x,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x, y_i);$$

5) $(x, \Theta) = 0$.

მაგალითი 1. ორიენტირებულ მონაკვეთთა V_2 და V_3 სივრცეები ევკლიდეს სივრცეებია.

მაგალითი 2. ადვილი შესამოწმებელია, რომ R^n სივრცე წარმოადგენს ევკლიდეს სივრცეს, თუ მისი ნებისმიერი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ელემენტების სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია ტოლობით

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \tag{3.1}$$

სკალარული ნამრავლის მოყვანილი ცნება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ვექტორის სიგრძე და კუთხე ვექტორებს შორის.

განსაზღვრება 3.3. ევკლიდეს სივრცის x ელემენტის სიგრძე ეწოდება რიცხვს

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

(3.1)-ის ძალით R^n სივრცის $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

განსაზღვრიდან გვაქვს

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \sqrt{(x, x)} = |\alpha| \cdot |x|,$$

ე. ი. რიცხვითი მამრავლი ვექტორის სიგრძის ნიშნის გარეთ შეიძლება გამოვიტანოთ აბსოლუტური სიდიდით.

x ვექტორს ეწოდება ნორმირებული, თუ მისი სიგრძე უდრის 1-ს. შესაძლებელია ყოველი არანულოვანი x ვექტორის ნორმირება, ამისათვის საკმარისია გავამრავლოთ ის $\alpha = \dfrac{1}{|x|}$ რიცხვზე.

თეორემა 3.1. ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი x და y ვექტორებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|. \tag{3.2}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ვექტორი $x - ty$, სადაც t ნებისმიერი რიცხვია. სკალარული ნამრავლის მე-4 აქსიომის ძალით

$$(x - ty, x - ty) \geqslant 0,$$

ე. ი. ნებისმიერი t-სათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|y|^2 t^2 - 2(x, y) t + |x|^2 \geqslant 0. \tag{3.3}$$

იმისათვის, რომ (3.3) უტოლობას ჰქონდეს ადგილი, აუცილებელია და საკმარისი $|y|^2 t^2 - 2(x, y) t + |x|^2$ სამწევრის დისკრიმინანტი იყოს არადადებითი, ე. ი.

$$(x, y)^2 - |x|^2 |y|^2 \leqslant 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3.2) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია. (3.2) უტოლობას ეწოდება კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა.

მტკიცდება, რომ (3.3) დამოკიდებულებაში ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა x და y წრფივად დამოკიდებულია.

R^n სივრცეში კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა მიიღებს სახეს

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი x და y ვექტორებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{3.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს

$$|x+y|^2 = (x+y,\ x+y) = |x|^2 + 2(x,\ y) + |y|^2.$$

აქედან კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია. (3.4) უტოლობას სამკუთხედის უტოლობას უწოდებენ.

შ ე დ ე გ ი. ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი x და y ვექტორებისათვის

$$|x+y| \geqslant \big|\,|x| - |y|\,\big|. \tag{3.5}$$

მართლაც,

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \geqslant |x|^2 - 2|(x,\ y)| + |y|^2 \geqslant$$
$$\geqslant |x|^2 - 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2,$$

აქედან მიიღება (3.5) უტოლობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.4. ევკლიდეს სივრცის ორ x და y ვექტორს შორის მანძილი, რომელიც აღინიშნება $\rho(x,\ y)$ სიმბოლოთი, განისაზღვრება $\rho(x,\ y) = |x-y|$ ტოლობით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.5 ევკლიდეს სივრცის x და y ($x \neq \Theta$ და $y \neq \Theta$) ვექტორებს შორის კუთხე განისაზღვრება

$$\varphi = \arccos \frac{(x,\ y)}{|x|\,|y|}$$

ტოლობით.

იმ შემთხვევაში, როცა $x = \Theta$ ან $y = \Theta$ კუთხე x და y ვექტორებს შორის არ განისაზღვრება.

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის ძალით, ვექტორებს შორის კუთხის აქ მოყვანილი განსაზღვრება კორექტულია.

განსაზღვრება 3.6. ევკლიდეს სივრცის x და y ელემენტებს ეწოდება ორთოგონალური, თუ $(x, y)=0$.

ადვილია ჩვენება, რომ თუ x და y ევკლიდეს სივრცის ორთოგონალური ვექტორებია, მაშინ

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2. \tag{3.6}$$

(3.6) ტოლობას პითაგორას თეორემას უწოდებენ ევკლიდეს სივრცეში.

ცხადია, რომ R^n სივრცის $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ვექტორების ორთოგონალობის პირობაა

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = 0.$$

ზემოთ ჩვენ მოვიყვანეთ ბაზისის ცნება წრფივ სივრცეში. წრფივ სივრცეებში არ არის შესაძლებლობა რომელიმე ბაზისს მივცეთ უპირატესობა მეორესთან შედარებით. რაც შეეხება ევკლიდეს სივრცეს მასში ასეთი შესაძლებლობა არსებობს, სახელდობრ, ორთოგონალური ბაზისი უფრო მოხერხებულია ზოგიერთი საკითხის შესწავლის დროს, ვიდრე სხვა რომელიმე ბაზისი.

განსაზღვრება 3.7. ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცის $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისს ეწოდება ორთონორმირებული, თუ

$$(e_i, e_j)=\begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad i=j, \\ 0, & \text{როცა} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{3.7}$$

ე. ი. ეს ვექტორები წყვილ-წყვილად ორთოგონალურია და ყოველი მათგანი ნორმირებულია.

ადვილია ჩვენება, რომ წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არანულოვანი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

მართლაც, ვთქვათ, არანულოვანი ვექტორები $e_1, e_2, \dots, e_n$ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \Theta.$$

გადავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად e_k-ზე, ($k = 1, 2, \dots, n$). მივიღებთ $\alpha_k=0$, რაც მოცემული სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას ამტკიცებს. მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად შემდეგი

თეორემა 3.3. ყოველ n განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი.

R^n სივრცეში ორთონორმირებული ბაზისია ელემენტთა შემდეგი სისტემა:

$$e_1=(0, 0, \dots, 0).$$
$$e_2=(0, 1, \dots, 0),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$e_n=(0, 0, \dots, 1).$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.4. ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი ვექტორის კოორდინატები ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ უდრის ამ ვექტორისა და შესაბამისი საბაზისო ვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ევკლიდეს სივრცის ორთონორმირებული ბაზისია და

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $e_k (k = 1, 2, \dots, n)$ ვექტორზე, მივიღებთ

$$\alpha_k = (x, e_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{3.8}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(3.8) ნამრავლს შეიძლება ვუწოდოთ x ვექტორის გეგმილი e_k ვექტორზე. ამ შემთხვევაში თეორემა 3.4 ასე ჩამოყალიბდება: ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ x ვექტორის კოორდინატები უდრის მის გეგმილებს შესაბამის საბაზისო ვექტორებზე.

თ ე ო რ ე მ ა 3.5. ორთონორმირებულ ბაზისში ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლების ჯამს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცის ორთონორმირებული ბაზისია და

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n,$$

მაშინ

$$(x, y) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,\ y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n).$$

ამ ტოლობიდან სკალარული ნამრავლის აქსიომებისა და (3.7) პირობის ძალით ვღებულობთ

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია

შ ე დ ე გ ი 1. x და y ვექტორების ორთოგონალობის პირობაა

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = 0.$$

შ ე დ ე გ ი 2. ორთონორმირებულ ბაზისში ვექტორის სიგრძის კვადრატი უდრის მისი კოორდინატების კვადრატების ჯამს:

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

R^3 სივრცის ანალოგიურად, R^n სივრცეში განიხილება

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + b = 0 \tag{3.9}$$

სახის განტოლებები, რომლებშიც $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. R^n სივრცის ყველა იმ $(x_1, \dots, x_n)$ წერტილების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.9) განტოლებას, ჰიპერსიბრტყე ეწოდება.

ჰიპერსიბრტყე შეიძლება აღვწეროთ აგრეთვე სკალარული ნამრავლის საშუალებითაც. ვთქვათ $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in R^n$. განვიხილოთ ყველა ის $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ წერტილები, რომელთათვისაც $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი ორთოგონალურია მოცემული $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ვექტორისა. ცხადია, რომ ნებისმიერი ასეთი M წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას

$$(\vec{a}, \overrightarrow{M_0M}) = 0, \tag{3.10}$$

ან გაშლილი სახით

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0. \tag{3.11}$$

ცხადია, რომ (3.11) განტოლება (3.9) სახისაა, ე. ი. ის განსაზღვრავს ჰიპერსიბრტყეს.

(3.9)-ს ეწოდება ჰიპერსიბრტყის კოორდინატული განტოლება, ხოლო (3.10)-ს ჰიპერსიბრტყის ვექტორული განტოლება.

მოცემული $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილი და $\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ვექტორი R^n-ში განსაზღვრავენ წრფეს, როგორც იმ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის კოლინეარულია. ყოველი ასეთი წერტილისათვის ადგილი აქვს პირობებს

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}. \tag{3.12}$$

თუ ამ წილადების საერთო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ t-თი, მაშინ (3.12) ტოლობები ასე გადაიწერება

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 t + x_1^0 \\ x_2 = a_2 t + x_2^0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = a_n t + x_n^0. \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

ეს არის წრფის განტოლებები R^n-ში. მათ აკმაყოფილებენ M_0 წერტილზე $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულებით გამავალი წრფის წერტილები და მხოლოდ ისინი.

(3.13) განტოლებებს ეწოდება წრფის პარამეტრული განტოლებები. t-ს ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის ისინი განსაზღვრავენ წრფის მიმდინარე წერტილის კოორდინატებს.

თუ $\overrightarrow{OM}$ და $\overrightarrow{OM_0}$ ვექტორებს ($O(0, 0, \ldots, 0) \in R^n$) აღვნიშნავთ $\vec{x}$-ით და $\vec{x}_0$-ით, მაშინ (3.13) განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს

$$\vec{X} = \vec{a}t + \vec{X}_0. \tag{3.14}$$

სახით. (3.14) არის წრფის განტოლება ვექტორული სახით.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ წრფივი სივრცე.
2. მოიყვანეთ წრფივი სივრცის მაგალითები.
3. განსაზღვრეთ წრფივი სივრცის ელემენტთა სისტემის წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა.
4. რას ეწოდება წრფივი სივრცის განზომილება? ბაზისი?
5. განსაზღვრეთ წრფივი სივრცის ქვესივრცე.
6. განსაზღვრეთ წრფივი სივრცის ელემენტთა სისტემის გარსი.
7. განსაზღვრეთ ევკლიდეს სივრცე.
8. განსაზღვრეთ ვექტორის სიგრძე და კუთხე ორ ვექტორს შორის ევკლიდეს სივრცეში.
9. მოიყვანეთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა.
10. განსაზღვრეთ ორთონორმირებული ბაზისი.
11. დაწერეთ ჰიპერსიბრტყის კოორდინატული და ვექტორული განტოლებები.
12. დაწერეთ წრფის პარამეტრული და ვექტორული განტოლებები R_n სივრცეში.

VII თავი

წრფივი ოპერატორები

§ 1. წრფივი ოპერატორის ცნება. მოქმედებები წრფივ ოპერატორებზე

ვთქვათ E და F შესაბამისად n და m განზომილებიანი წრფივი სივრცეებია. $A : E \to F$ ასახვას, რომელიც E სივრცის ყოველ x ელემენტს შეუსაბამებს F-ის რაღაც y ელემენტს A ოპერატორი ეწოდება. ამ ასახვას აღნიშნავენ $y = A(x)$ ან $y = Ax$ სიმბოლოთი და მას სივრცის გარდაქმნას უწოდებენ.

განსაზღვრება 1.1. A ოპერატორს ეწოდება წრფივი, თუ E-ს ნებისმიერი x, x_1 და x_2 ელემენტებისათვის და α ნამდვილი რიცხვისათვის სრულდება შემდეგი ორი პირობა

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2),$$
$$A(\alpha x) = \alpha A(x).$$

თუ A წრფივი ოპერატორია, მაშინ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ რიცხვებისათვის და სივრცის ნებისმიერი $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ელემენტებისათვის

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) + \cdots + \alpha_k A(x_k).$$

თუ F სივრცე არის ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, მაშინ A ოპერატორს, რომელიც E-ს ასახავს R-ში, ეწოდება წრფივი ფორმა ან წრფივი ფუნქციონალი.

თუ $E = F$, მაშინ წრფივ A ოპერატორს, რომელიც E-ს ასახავს თავისთავში, უწოდებენ აგრეთვე E სივრცის წრფივ გარდაქმნას.

ცხადია, თუ A არის წრფივი ასახვა E სივრცისა F-ში, მაშინ ის E სივრცის ნულოვან Θ_E ელემენტს ასახავს F-ის ნულოვან Θ_F ელემენტში. მართლაც,

$$A(\Theta_E) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = \Theta_F.$$

მაგალითი 1. ვთქვათ, $(x_1, x_2) \in R^2$ და $(y_1, y_2, y_3) \in R^3$, მაშინ ასახვა R^2-ისა R^3-ში

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$y_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$
$$y_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$$

იქნება წრფივი ოპერატორი.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $\alpha \in R$ და $A: E \to F$ ასახვა განისაზღვრება ტოლობით $A(x) = \alpha x$. ადვილია ჩვენება, რომ ეს ასახვა არის წრფივი გარდაქმნა.

მაგალითი 3. ოპერატორი, რომელიც E სივრცის ყოველ ელემენტს უთანადებს F სივრცის ნულოვან ელემენტს, არის წრფივი ოპერატორი. მას ნულოვანი ოპერატორი ეწოდება და O სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაგალითი 4. ვთქვათ I არის წრფივი სივრცის იგივური გარდაქმნა თავისთავში, ე. ი. $I(x) = x$, ცხადია, I წრფივი ოპერატორია. მას ერთეულოვანი ოპერატორი ეწოდება.

მაგალითი 5. ვთქვათ A წრფივი ოპერატორია. მაშინ ცხადია, რომ ოპერატორი $B(x) = -A(x)$ აგრეთვე წრფივია. მას ეწოდება A-ს მოპირდაპირე ოპერატორი და აღინიშნება $-A$ სიმბოლოთი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვთქვათ A არის xOy სიბრტყის მობრუნება კოორდინატთა სათავის გარშემო φ კუთხით, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ადვილია ჩვენება, რომ ეს გარდაქმნა წრფივია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.2. ვთქვათ A და B წრფივი ოპერატორებია, რომლებიც მოქმედებენ E-დან და F-ში. ამ ოპერატორთა ჯამი, რომელიც აღინიშნება $A+B$ სიმბოლოთი, ეწოდება ოპერატორს განსაზღვრულს ტოლობით

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x).$$

ცხადია, რომ $A+B$ წრფივი ოპერატორია.

ადვილია ჩვენება, რომ თუ A, B და C წრფივი ოპერატორებია, რომლებიც E-ს ასახავენ F-ში, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} & A+B=B+A, \\ & (A+B)+C=A+(B+C), \\ & A+O=A, \\ & A+(-A)=O, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

სადაც O ნულოვანი ოპერატორია, ხოლო $-A$ არის A-ს მოპირდაპირე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.3. α რიცხვისა და A ოპერატორის ნამრავლი, რომელიც აღინიშნება αA სიმბოლოთი, ეწოდება ოპერატორს განსაზღვრულს ტოლობით:

$$(\alpha A)(x) = \alpha A(x).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ A და B წრფივი ოპერატორებია, ხოლო α და β ნებისმიერი რიცხვები, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} & \alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A, \\ & 1\cdot A = A, \\ & 0\cdot A = O, \\ & (\alpha+\beta) A = \alpha A + \beta A, \\ & \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

ყველა იმ წრფივი ოპერატორის სიმრავლე, რომლებიც E სივრცეს ასახავენ F-ში, აღინიშნება $L(E, F)$ სიმბოლოთი. (1.1) და (1.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $L(E, F)$ სიმრავლე ოპერატორთა ზემოთ მოყვანილი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ არის წრფივი სივრცე.

განსაზღვრება 1.4. ვთქვათ, E, F და G წრფივი სივრცეებია და $A\in L(E, F)$, $B\in L(F, G)$. B ოპერატორის A ოპერატორზე ნამრავლი, რომელიც აღინიშნება BA სიმბოლოთი, ეწოდება ოპერატორს განსაზღვრულს ტოლობით

$$(BA)(x) = B(A(x)), \quad x\in E.$$

BA წრფივი ოპერატორია. მართლაც,

$$(BA)(x_1 + x_2) = B(A(x_1 + x_2)) = B(A x_1 + A x_2) =$$
$$= B(A x_1) + B(A x_2) = (BA)(x_1) + (BA)(x_2)$$

და

$$(BA)(\alpha x) = B(A(\alpha x)) = B(\alpha A(x)) = \alpha B(A(x)) = \alpha(BA)(x).$$

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაშიც კი, როცა $A\in L(E, E)$ და $B\in L(E, E)$, საზოგადოდ $AB \neq BA$.

ადვილია შემოწმება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ თვისებებს:

1. თუ $A\in L(E, F)$, $B\in L(F, G)$ და $\alpha\in R$, მაშინ
$$\alpha(BA) = (\alpha B)A.$$

2. თუ $A\in L(F, G)$, $B\in L(F, G)$ და $C\in L(E, F)$, მაშინ
$$(A + B)C = AC + BC.$$

3. თუ $B\in L(E, F)$, $C\in L(E, F)$ და $A\in L(F, G)$, მაშინ
$$A(B + C) = AB + AC.$$

4. $C\in L(E, F)$, $B\in L(F, G)$ და $A\in L(G, H)$, მაშინ
$$A(BC) = (AB)C.$$

შევამოწმოთ მაგალითად მე-4 თვისება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ სივრცის ნებისმიერი x ელემენტისათვის

$$(A(BC))(x) = ((AB)C)(x).$$

მართლაც,

$$(A(BC))(x) = A((BC)(x)) = A(B(C(x))) =$$
$$= (AB)(C(x)) = ((AB)C)(x).$$

თუ $A\in L(E, F)$, მაშინ აღვნიშნოთ $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n\text{ჯერ}}$. ადვილია შემოწმება, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$A^{n+m} = A^n\cdot A^m.$$

§ 2. წრფივი ოპერატორის მატრიცა

ვთქვათ, E და F წრფივი სივრცეებია, ხოლო $e_1, e_2, \dots, e_n$ და $f_1, f_2, \dots, f_m$ შესაბამისად ამ სივრცეების რაიმე ბაზისებია. დავუშვათ, რომ $A \in L(E, F)$, მაშინ რადგანაც $Ae_k \in F$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, ამიტომ ის F სივრცის $f_1, f_2, \dots, f_m$ ბაზისის მიხედვით ერთადერთი სახით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$A e_k = a_{1k} f_1 + a_{2k} f_2 + \dots + a_{mk} f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i. \tag{2.1}$$

(2.1) გაშლის a_{ik} $(i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n)$ კოეფიციენტები შეადგენენ $m \times n$ განზომილების მატრიცას

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

ამ მატრიცას უწოდებენ A ოპერატორის მატრიცას მოცემულ $e_1, e_2, \dots, e_n$ და $f_1, f_2, \dots, f_m$ ბაზისებში. როგორც ვხედავთ, (2.2) მატრიცის სვეტები წარმოადგენენ შესაბამისად $A e_1, A e_2, \dots, A e_n$ ვექტორების კოორდინატებს $f_1, f_2, \dots, f_m$ ბაზისში.

ვთქვათ, ახლა $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ არის E სივრცის ნებისმიერი ელემენტი და $y = Ax = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i f_i$. დავადგინოთ როგორ გამოისახებიან y ვექტორის β_i კოორდინატები x ვექტორის α_k კოორდინატების მიხედვით. (2.1) ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\begin{aligned} y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i = Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A e_k = \\ = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k\right) f_i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ვექტორის ბაზისის მიხედვით გაშლის ერთადერთობის ძალით (2.3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.4}$$

გაშლილი სახით (2.4) ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_m = a_{m1}\alpha_1 + \alpha_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

ამრიგად, თუ ვიცით A ოპერატორის მატრიცა $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ბაზისებში, მაშინ E სივრცის ნებისმიერი x ელემენტისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ $Ax \in F$ ვექტორი. Ax ვექტორის კოორდინატები (2.5) ფორმულებით წრფივად გამოისახება x ვექტორის კოორდინატებით. შევნიშნოთ, რომ (2.5) ფორმულების კოეფიციენტების მატრიცა ემთხვევა A ოპერატორის (2.2) მატრიცას.

მაშასადამე, ვაჩვენეთ, რომ მოცემულ ბაზისებში ყოველ წრფივ A ოპერატორს ცალსახად შეესაბამება (2.2) მატრიცა. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებას. ვთქვათ, (a_{ik}) ნებისმიერი $m \times n$ განზომილების მატრიცაა. თუ $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in E$, მაშინ (2.5) ფორმულების საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ F სივრცის ელემენტი

$$y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული A ოპერატორი ეკუთვნის $L(E, F)$ სივრცეს, ე. ი. წრფივია. შევადგინოთ ამ A ოპერატორის მატრიცა $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ბაზისებში. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში e_1 ვექტორის კოორდინატებია $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$. (2.5) ფორმულების ძალით Ae_1 ვექტორის კოორდინატებია $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$, ე. ი.

$$Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \cdots + a_{m1} f_m.$$

ანალოგიურად,

$$Ae_k = a_{1k} f_1 + a_{2k} f_2 + \cdots + a_{mk} f_m \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

მივიღეთ, რომ A ოპერატორის მატრიცა ემთხვევა მოცემულ (a_{ik}) მატრიცას.

ამრიგად, ყოველი $m \times n$ განზომილების მატრიცა არის $L(E, F)$ სივრცის რაიმე A ოპერატორის მატრიცა (E და F არის შესაბამისად n და m განზომილებიანი წრფივი სივრცეები ფიქსირებული $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ბაზისებით).

მაშასადამე, არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წრფივ ოპერატორთა $L(E, F)$ სიმრავლესა და $m \times n$ განზომილებიან მატრიცთა სიმრავლეს შორის. ამის გამო A წრფივი ოპერატორის შესაბამის მატრიცას აღნიშნავენ იგივე A ასოთი.

შევნიშნოთ, რომ ერთეულოვანი და ნულოვანი ოპერატორების მატრიცებია შესაბამისად ერთეულოვანი და ნულოვანი მატრიცები.

ამრიგად, ყოველი წრფივი გარდაქმნა (ოპერატორი) შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცის საშუალებით, ე. ი. მატრიცთა თეორია არის ის ანალიზური აპარატი, რომლის საშუალებითაც შეისწავლება წრფივი ოპერატორები სასრულგანზომილებიან წრფივ სივრცეში.

შევნიშნოთ, რომ ბაზისის შეცვლისას მოცემული წრფივი ოპერატორის მატრიცა საზოგადოდ იცვლება.

ვთქვათ, A და B წრფივი ოპერატორების მატრიცებია შესაბამისად $A = (a_{ik})$ და $B = (b_{ik})$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$), მაშინ $A + B$ ოპერატორის მატრიცა იქნება $A + B = (a_{ik} + b_{ik})$, ხოლო αA ოპერატორის მატრიცა იქნება $\alpha A = (\alpha a_{ik})$.

ახლა ვიპოვოთ $C = BA$ წრფივი ოპერატორის მატრიცა, სადაც $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, G)$ და $C \in L(E, G)$. ვთქვათ, E, F და G სივრცეების ბაზისებია, შესაბამისად $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ და $(g_1, g_2, \dots, g_r)$, მაშინ

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$Bf_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ji} g_j \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

BA ნამრავლისათვის გვაქვს

$$(BA)\, e_k = B(Ae_k) = B\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i \right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} B f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \sum_{j=1}^{r} b_{ji} g_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ik} \right) g_j.$$

ამ ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $C = BA$ ოპერატორის შესაბამისი

$C = (c_{jk})$ ($j = 1, 2, \dots, r$; $k = 1, 2, \dots, n$) მატრიცის ელემენტები გამოითვლება ფორმულით

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ik},$$

ე. ი. ოპერატორთა ნამრავლს შეესაბამება ამ ოპერატორების შესაბამისი მატრიცების ნამრავლი.

§ 3. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობანი

ვთქვათ, E არის წრფივი სივრცე, $e_1, e_2, \dots, e_n$ ამ სივრცის ბაზისია, A წრფივი გარდაქმნაა $L(E, F)$ სივრციდან, I ერთეულოვანი გარდაქმნაა ამ სივრციდან; $A = (a_{ik})$ არის მოცემული ბაზისის მიმართ A წრფივი გარდაქმნის მატრიცა.

განსაზღვრება 3.1. მრავალწევრს

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

ეწოდება A წრფივი გარდაქმნის (შესაბამისი მატრიცის) მახასიათებელი მრავალწევრი*, ხოლო განტოლებას

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{3.1}$$

ეწოდება A გარდაქმნის მახასიათებელი განტოლება.

განსაზღვრება 3.2. არანულოვან x ვექტორს ეწოდება A წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი, თუ არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომ

$$Ax = \lambda x. \tag{3.2}$$

ამ λ რიცხვს ეწოდება x ვექტორის შესაბამისი A წრფივი გარდაქმნის (შესაბამისი მატრიცის) საკუთრივი მნიშვნელობა, ანუ მახასიათებელი რიცხვი.

ისმის ამოცანა: როგორ ვიპოვოთ წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობა და საკუთრივი ვექტორი. მართებულია შემდეგი

* მტკიცდება, რომ $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრი არ არის დამოკიდებული ბაზისის შერჩევაზე

თეორემა 3.1. იმისათვის, რომ λ რიცხვი იყოს $A \in L(E, E)$ წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობა, აუცილებელია და საკმარისი იგი იყოს A გარდაქმნის მახასიათებელი (3.1) განტოლების ფესვი.

დამტკიცება. ვთქვათ, λ არის A წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობა, ხოლო $x \neq 0$ იყოს λ-ს შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. დავუშვათ, რომ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის E სივრცის ბაზისი, ხოლო $A = (a_{ik})$ მისი მატრიცაა ამ ბაზისის მიმართ, მაშინ, რადგან

$$A e_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{3.3}$$

ამიტომ λ-ს შესაბამისი საკუთრივი

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

ვექტორისათვის (3.2) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned} Ax = {} & \alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + \cdots + \alpha_n A e_n = \\ & = \alpha_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \cdots + a_{n1} e_n) + \alpha_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \cdots + \\ & + a_{n2} e_n) + \cdots + \alpha_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \cdots + a_{nn} e_n) = \\ & = (a_{11} \alpha_1 + \alpha_{12} a_2 + \cdots + a_{1n} \alpha_n) e_1 + (a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \cdots + \\ & + \cdots + a_{2n} \alpha_n) e_2 + \cdots + (a_{n1} \alpha_1 + a_{n2} \alpha_2 + \cdots + a_{nn} \alpha_n) e_n = \\ & = \lambda \alpha_1 e_1 + \lambda \alpha_2 e_2 + \cdots + \lambda \alpha_n e_n. \end{aligned}$$

ვექტორის ბაზისის მიხედვით გაშლის ერთადერთობის ძალით ამ ტოლობიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \cdots + a_{1n} \alpha_n = 0 \\ a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - \lambda) \alpha_2 + \cdots + a_{2n} \alpha_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \alpha_1 + a_{n2} \alpha_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda) \alpha_n = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

იმისათვის, რომ ამ სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსენი, აუცილებელია და საკმარისი მისი დეტერმინანტი უდრიდეს ნულს, ე. ი. ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

ამრიგად, თუ λ საკუთრივი მნიშვნელობაა, მაშინ ადგილი აქვს (3.5) ტოლობას, ე. ი. ის არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი.

პირიქით, ვთქვათ λ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ე. ი. ადგილი აქვს (3.5) ტოლობას. მაშასადამე, წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა (3.4) სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსენი $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, ეს კი ნიშნავს, რომ ვექტორი

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \neq \theta$$

არის λ-ს შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2. იმისათვის, რომ A წრფივი გარდაქმნის $A = (a_{ik})$ მატრიცა მოცემულ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში იყოს დიაგონალური, აუცილებელია და საკმარისი საბაზისო ვექტორები იყოს ამ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორები.

დამტკიცება. ვთქვათ, საბაზისო e_k ვექტორი არის A წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$A e_k = \lambda e_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.6}$$

მაშასადამე, A წრფივი გარდაქმნის მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

ე. ი. ის დიაგონალურია.

პირიქით, ვთქვათ A წრფივი გარდაქმნის მატრიცა მოცემულ ბაზისში დიაგონალურია, ე. ი. აქვს (3.7) სახე. მაშინ (3.3) ტოლობები მიიღებს (3.6) სახეს, ეს კი ნიშნავს, რომ e_k არის A წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, თუ A წრფივ გარდაქმნას აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი, მაშინ თუ ამ ვექტორებს ავიღებთ ბაზისად, ამით A გარდაქმნის $A = (a_{ik})$ მატრიცას დავიყვანთ დიაგონალურ სახეზე. პირიქით, თუ რაღაც ბაზისის მიმართ A გარდაქმნის მატრიცა დიაგონალურია, მაშინ ამ ბაზისის ყველა ვექტორი მოცემული გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორია.

დავამტკიცოთ საკუთრივი ვექტორების კიდევ ერთი თვისება.

თეორემა 3.3. თუ A წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ მნიშვნელობები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ მათი შესაბამისი საკუთრივი $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

დამტკიცება. თეორემის მტკიცება ჩავატაროთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. $k = 1$-სათვის თეორემა მართებულია. მართ-

ლაც, e_1 არანულოვანი ვექტორია და ის წრფივად დამოკიდებულია. ვიგულისხმოთ, რომ თეორემა მართებულია $k-1$ რაოდენობის საკუთრივი ვექტორებისათვის და დავამტკიცოთ მისი მართებულობა k რაოდენობის საკუთრივი ვექტორებისათვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k = 0, \tag{3.8}$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha_1 \neq 0$. (3.8) ტოლობიდან გვაქვს

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k) = 0,$$

ე. ი.

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \tag{3.9}$$

(3.8)-ის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ λ_k-ზე და გამოვაკლოთ (3.9) ტოლობას, მივიღებთ

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) e_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) e_{k-1} = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარის პირველი კოეფიციენტი არ უდრის ნულს (რადგანაც, დაშვებით $\alpha_1 \neq 0$ და თეორემის პირობის ძალით $\lambda_i \neq \lambda_k$, $i \neq k$). ეს კი ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას, რომ $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ A წრფივი გარდაქმნის მახასიათებელ განტოლებას აქვს n სხვადასხვა ფესვი, მაშინ ამ გარდაქმნის შესაბამისი $A=(a_{ik})$ მატრიცა შეიძლება დავიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე.

მართლაც, მახასიათებელი განტოლების ყოველ λ_k ფესვს შეესაბამება ერთი მაინც საკუთრივი ვექტორი, ე. ი. თეორემა 3.3-ის ძალით გვაქვს n წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი $e_1, e_2, \ldots, e_n$. თუ ამ ვექტორებს ავიღებთ ბაზისად, მაშინ A წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა ამ ბაზისის მიმართ იქნება დიაგონალური.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ მატრიცით მოცემული წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობანი და საკუთრივი ვექტორები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვები $\lambda_1=5$ და $\lambda_2=20$ წარმოადგენენ წრფივი გარდაქმნის საკუთრივ მნიშვნელობებს.

საკუთრივი ვექტორების მოსაძებნად განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}(17-\lambda)\,x_1+6\,x_2=0,\\ 6\,x_1+(8-\lambda)\,x_2=0.\end{cases} \tag{3.10}$$

თუ ამ სისტემაში ჩავსვამთ $\lambda=\lambda_1=5$, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას პირველი საკუთრივი $u\,(u_1,\ u_2)$ ვექტორისათვის

$$\begin{cases}12\,u_1+6\,u_2=0,\\ 6\,u_1+3\,u_2=0.\end{cases}$$

ამ სისტემის მატრიცის რანგი $r=1$ და მისი ზოგადი ამონახსენია

$$u_2=-2\,u_1.$$

ამრიგად, პირველი საკუთრივი ვექტორია

$$u\,(u_1,\ u_2)=(u_1;\ -2\,u_1)=u_1\,(1;\ -2).$$

u_1-ის ცვლილებით ჩვენ მივიღებთ კოლინეარულ ვექტორებს. ცხადია, ყველა ის საკუთრივია.

თუ (3.10) სისტემაში ჩავსვამთ $\lambda=\lambda_2=20$, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას მეორე საკუთრივი $v\,(v_1;\ v_2)$ ვექტორისათვის

$$\begin{cases}-3\,v_1+6\,v_2=0\\ 6\,v_1-12\,v_2=0.\end{cases}$$

ამ სისტემის მატრიცის რანგი $r=1$, ხოლო ამონახსენია

$$v_1=2\,v_2.$$

ამრიგად მეორე საკუთრივი ვექტორია

$$v\,(v_1;\ v_2)=(2\,v_2;\ v_2)=v_2\,(2;\ 1).$$

შევნიშნოთ, რომ წრფივი გარდაქმნის მატრიცის სახე დამოკიდებულია ბაზისის შერჩევაზე. თუ ბაზისად ავიღებთ საკუთრივი ვექტორების ერთობლიობას, მაშინ წრფივი გარდაქმნის მატრიცა მიიღებს დიაგონალურ სახეს, სადაც მთავარ დიაგონალზე საკუთრივი მნიშვნელობებია. მაგალითად, ორგანზომილებიან სივრცეში ეს იქნება შემდეგი მატრიცა:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება 4.1. x_1 და x_2 ცვლადების მეორე რიგის ერთგვაროვან მრავალწევრს

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \quad (4.1)$$

ეწოდება ამ ცვლადების კვადრატული ფორმა.

თუ დავუშვებთ, რომ $a_{21} = a_{12}$, მაშინ (4.1) კვადრატული ფორმა სავსებით განისაზღვრება მატრიცით

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

რომელსაც (4.1) კვადრატული ფორმის მატრიცა ეწოდება.

ვიპოვოთ A წრფივი გარდაქმნის (A მატრიცის) საკუთრივი მნიშვნელობები და შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები. თუ ამ ვექტორების ერთობლიობას მივიჩნევთ ბაზისად, მაშინ ამ ბაზისში წრფივი გარდაქმნის მატრიცა იქნება დიაგონალური, დიაგონალზე საკუთრივი მნიშვნელობებით

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

სადაც λ_1, λ_2 საკუთრივი მნიშვნელობებია.

ამ გარდაქმნის შედეგად (4.1) კვადრატული ფორმა მიიღებს სახეს

$$\Phi = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2. \quad (4.2$$

(4.2) გამოსახულებას ეწოდება კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე.

ანალოგიურად დაიყვანება კანონიკურ სახემდე მეტი რაოდენობის ცვლადების კვადრატული ფორმაც.

კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახემდე დაყვანა შეიძლება გამოვიყენოთ მეორე რიგის წირებისა და ზედაპირების განტოლებათა კანონიკურ სახემდე დაყვანისას.

მაგალითი. დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე განტოლება

$$17 x^2 + 12 xy + 8 y^2 - 20 = 0.$$

ამოხსნა. ამ განტოლების კვადრატული ფორმაა

$$17 x^2 + 12 xy + 8 y^2.$$

მისი მატრიცაა

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის შესაბამისი წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობებია $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$, ე. ი. კვადრატული ფორმის

$$17\,x^2 + 12\,xy + 8\,y^2$$

კანონიკური სახე იქნება

$$5\,(x')^2 + 20\,(y')^2\ .$$

ამრიგად, მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$5\,(x')^2 + 20\,(y')^2 - 20 = 0,$$

ანუ

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} = 1.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ ოპერატორი, წრფივი ოპერატორი, ნულოვანი ოპერატორი.

2. განსაზღვრეთ ოპერატორთა ჯამი, რიცხვისა და ოპერატორის ნამრავლი, ოპერატორთა ნამრავლი.

3. განსაზღვრეთ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა და საკუთრივი ვექტორი.

4. განსაზღვრეთ კვადრატული ფორმა.

5. მოიყვანეთ კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე დაყვანის წესი.

სავარჯიშოები და განტოლებები

§ 1. მატრიცები და დეტერმინანტები

1.1. იპოვეთ $A+B$, თუ:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -7 & 4\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -5 & 2 & 6\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -2\\ 4 & 7 & 0\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 0 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 7\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

1.2. მოცემულია მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ: 1) $A+B$; 2) $-4A$; 3) $3B-2B$; 4) $B-A$.

1.3. მოცემულია მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ: 1) $A-B$; 2) $2A+B$; 3) $A-4B$; 4) $3A-2B$.

1.4. იპოვეთ AB ნამრავლი, თუ:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} k & l & m \\ k & l & m \\ -k & -l & -m \end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ p & m & n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} m & p & 1 \\ n & m & 1 \\ p & n & 1 \end{pmatrix}$;

15) $A=(-3 \quad 2 \quad -1 \quad 0), \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$

16) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.5. 1) იპოვეთ A^3, თუ $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$

2) იპოვეთ A^2, თუ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

3) იპოვეთ A^n, თუ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) დაამტკიცეთ, რომ $A^n = 2^{n-1} A$, თუ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

5) დაამტკიცეთ, რომ $D^k=\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda_2^k \cdots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \cdots \lambda_n^k \end{pmatrix}$, თუ $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda_1 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \cdots \lambda_n \end{pmatrix};$

6) დაამტკიცეთ, რომ $A^n=\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$, თუ

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};$$

7) დაამტკიცეთ, რომ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ და $(A+B)\times$ $\times(A-B)=A^2-B^2$, თუ $AB=BA$.

1.6. იპოვეთ A მატრიცის კომუტაციური ყველა მატრიცა, თუ:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$ 2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

1.7. იპოვეთ $AB-BA$, თუ:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.8. იპოვეთ $(AB)C$, თუ:

$$A = (2 \quad 3), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.9. იპოვეთ $A(B+C)$, თუ:

$$A = (1 \ \ 2), \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.10. იპოვეთ $f(A)$, თუ $f(x) = x^2 - 2x$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.11. აჩვენეთ, რომ მეორე რიგის მატრიცა

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

აკმაყოფილებს განტოლებას

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)E = 0.$$

1.12. იპოვეთ C მატრიცა, თუ:

1) $C = A'B - 2B'$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $C = A'B - BA'$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$;

3) $C = A'B - 4B$, $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$;

4) $C = B - AA'$, $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 20 & 19 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}$.

13.1. 1) დაამტკიცეთ, რომ $(A^k)' = (A')^k$, $k \in N$.

2) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცა ერთადერთი გზით წარმოიდგინება ორი მატრიცის ჯამის სახით, რომელთაგან ერთი სიმეტრიულია, ხოლო მეორე ანტისიმეტრიული.

1.14. გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$.

1.15. გამოთვალეთ დეტერმინანტები სამკუთხედების წესით:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & 7 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a & -a & -a \\ a & a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ a & b & c \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

1.16. გამოთვალეთ დეტერმინანტები მინორებად დაშლის წესით:

1) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ 1 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

11) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.17. გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 1 & 0 \cdots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 & 1 & 1 \cdots 0 \end{vmatrix}$ (n-რიგის); 8) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \\ 1 & 0 & 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$ (n-რიგის);

9) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 7 \cdots 7 \\ 7 & 3 & 7 \cdots 7 \\ 7 & 7 & 3 \cdots 7 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 7 & 7 & 7 \cdots 3 \end{vmatrix}$ (n-რიგის); 10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n \\ -1 & 0 & 3 \cdots n \\ -1 & -2 & 0 \cdots n \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ -1 & -2 & -3 \cdots 0 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

1.18. ამოხსენით განტოლებები:

1) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; 2) $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & x \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$;

5) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$;

7) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 7 \\ \cos x & -\sin x & 9 \\ 0 & 0 & 2\cos x \end{vmatrix} = 1$; 8) $\begin{vmatrix} 5 & \cos x & -\sin x \\ 2 & \sin x & \cos x \\ \cos 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

1.19. ამოხსენით უტოლობები:

1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ x^2 & 9 & 16 \end{vmatrix} < 0$; 4) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

1.20. იპოვეთ A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა, თუ:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.21. დაამტკიცეთ, რომ თუ A მეორე რიგის კვადრატული მატრიცაა, მაშინ $|A| = |A^*|$.

1.22. დაამტკიცეთ, რომ თუ A და B ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ $(A'B)^* = ((B'A)^*)'$.

1.23. ვთქვათ A მეორე რიგის კვადრატული მატრიცაა. დაამტკიცეთ, რომ: 1) თუ $A^3 = 0$, მაშინ $A^2 = 0$; 2) თუ $A^2 \neq 0$, მაშინ $A^n \neq 0$ ყოველი $n \geqslant 3$-სათვის.

1.24. იპოვეთ მეორე რიგის ყველა მატრიცა, რომლის:

1) კვადრატი ნულოვანი მატრიცაა;

2) კუბი ნულოვანი მატრიცაა;

3) კვადრატი ერთეულოვანი მატრიცაა.

1.25. იპოვეთ C მატრიცის დეტერმინანტი, თუ:

1) $C = A'B - 3B, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

2) $C = A'B - A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix};$

3) $C = 2A'B - BA', \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix};$

4) $C = AB', \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

5) $C = A'(B^* + A), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$

6) $C = (AB^* - 2A'B)^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$

7) $C = (A'B)^*, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$

8) $C = (A'B)^* - B'A, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

1.26. იპოვეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, თუ:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}15 & 6 & 8\\ 7 & 1 & 6\\ 10 & 5 & 4\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 10 & 2 & 7\end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; 12) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 \cdots 1\\ 1 & 0 & 1 \cdots 1\\ 1 & 1 & 0 \cdots 1\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 1 & 1 & 1 \cdots 0\end{pmatrix}$ (n-რიგის);

14) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 \cdots 0\\ 0 & 1 & -1 \cdots 0\\ 0 & 0 & 1 \cdots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 0 & 0 & 0 \cdots 1\end{pmatrix}$ (n-რიგის).

1.27. ამოხსენით მატრიცული განტოლებები:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$; 2) $X\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$;

3) $X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=(2\ \ 0)$; 4) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -7\\ -1 & 2\\ -3 & -3\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.28. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1) $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}, \quad \alpha \in R, \quad \alpha \neq 0$;

2) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$; 3) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$;

4) $(E - A)^{-1} = E + A + A^2$, თუ $A^3 = 0$;

5) $A^{p+q} = A^p \cdot A^q$, სადაც p და q ნებისმიერი მთელი რიცხვებია ($A^{-n} = (A^{-1})^n$, $n \in N$);

6) $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, თუ $AB = BA$;

7) $|A^*| = |A|^{n-1}$, $n \geqslant 2$.

1.29. იპოვეთ მატრიცის რანგი:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 4 & 12 & -8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 40 & 15 & 6 & 8 \\ 14 & 7 & 1 & 6 \\ 20 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 9 & 9 & 4 \\ 1 & -8 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.30. როგორ შეიძლება შეიცვალოს მატრიცის რანგი, თუ მას მივუწეროთ:

1) ერთ სტრიქონს? 2) ერთ სტრიქონს და ერთ სვეტს?

1.31. რას უდრის A მატრიცის რანგი λ-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$?

1.32. დაამტკიცეთ, რომ $\operatorname{Rg}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B\}$.

§ 2. წრფივ განტოლებათა სისტემები

ამოხსენით სისტემები კრამერის ფორმულების გამოყენებით:

2.1. 1) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 3x + 4y = 18, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

2.2. 1) $\begin{cases} 4x + 3y - 2z = 15 \\ 3x - 4y + 9z = 1 \\ 5x - y + 3z = 6, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0 \\ 3x + 14y + 12z = 18 \\ 5x + 25y + 16z = 39, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 8x + y + 6z = 3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x + 3y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 7y = -1. \end{cases}$

2.3. 1) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 8 \\ 2x - y - 2z = -2 \\ 4x - 6y + 7z = -1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 5, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 5x - 7y + 8z = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$

2.4. 1) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_3 = -5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 13x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

ამოხსენით სისტემები შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით:

2.5. 1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 = 9, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 4x_1 - x_2 = 2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$

2.6. 1) $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით დაადგინეთ თავსებადია თუ არა განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

2.7. 1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 4, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 = 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

2.8. 1) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 8x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 6, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 14. \end{cases}$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

2.9. 1) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 11, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 11x_3 = -3, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.10. 1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 3 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 4, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.11. 1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 7x_2 = 16 \\ 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 8, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 13x_1 + 7x_2 - 12x_4 = 0 \\ 5x_1 + 12x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

გამოიკვლიეთ პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის აქვს სისტემას ერთადერთი ამონახსნი, უამრავი ამონახსნი, არა აქვს ამონახსნი. თავსებადობის შემთხვევაში იპოვეთ მისი ამონახსნები:

2.12. 1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = a \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2. \end{cases}$

2.13. 1) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 = b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 = 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = a, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + ax_4 = 2. \end{cases}$

იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსენთა ფუნდამენტური სისტემა და ზოგადი ამონახსენი:

2.14. 1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

2.15. 1) $\begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენი:

2.16. 1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1, \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები გაუსის მეთოდით:

2.17. 1) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 15 \\ 3x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 4, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$

2.18. 1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 6x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

მარტივი, იტერაციისა და ზეიდელის მეთოდებით იპოვეთ სისტემის მიახლოებითი ამონახსენი $\varepsilon=0{,}001$ სიზუსტით:

2.19. 1) $\begin{cases} 1{,}12\,x_1 - 0{,}21\,x_2 + 0{,}01\,x_3 = 0{,}3 \\ 0{,}15\,x_1 + 1{,}05\,x_2 - 0{,}12\,x_3 = 0{,}42 \\ 0{,}21\,x_1 - 0{,}03\,x_2 - 1{,}11\,x_3 = 0{,}6, \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1{,}05\,x_1 + 0{,}31\,x_2 - 0{,}17\,x_3 = 0{,}01 \\ 0{,}2\,x_1 - 1{,}13\,x_2 - 0{,}22\,x_3 = 0{,}4 \\ 0{,}11\,x_1 - 0{,}02\,x_2 - 0{,}21\,x_3 = 0{,}5, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1{,}13\,x_1 - 0{,}42\,x_2 + 0{,}17\,x_3 + 0{,}02\,x_4 = 0{,}23 \\ 0{,}13\,x_1 + 0{,}27\,x_2 - 0{,}42\,x_3 - 0{,}52\,x_4 = 0{,}1 \\ 0{,}03\,x_1 + 0{,}22\,x_2 - 1{,}23\,x_3 - 0{,}37\,x_4 = 0{,}52 \\ 0{,}62\,x_1 - 0{,}2\,x_2 + 0{,}11\,x_3 - 1{,}24\,x_4 = 0{,}7, \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0{,}27\,x_1 - 0{,}62\,x_2 + 0{,}15\,x_3 - 0{,}03\,x_4 = 0{,}2 \\ 0{,}25\,x_1 - 1{,}25\,x_2 - 0{,}1\,x_3 + 0{,}4\,x_4 = 0{,}1 \\ 0{,}31\,x_1 + 0{,}23\,x_2 - 1{,}17\,x_3 - 0{,}17\,x_4 = 0{,}5 \\ 0{,}01\,x_1 + 0{,}62\,x_2 - 0{,}21\,x_3 - 1{,}11\,x_4 = 0{,}3. \end{cases}$

§ 3. კოორდინატთა სისტემები

3.1. Ox ღერძზე იპოვეთ $x=3$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $x=-2$ წერტილის მიმართ.

3.2. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილები: A (—2; 3), B (4; —1), C (0; 2), D (—3; —2). იპოვეთ მათი Ox ღერძზე გეგმილების კოორდინატები.

3.3. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილები: A (4; —3), B (—2; —4), C (—2; 0), D (3; 5). იპოვეთ მათი Oy ღერძზე გეგმილების კოორდინატები.

3.4. იპოვეთ A (—4; —3), B (0; —4), C (2; 3), D (3; 0) წერტილების სიმეტრიული წერტილები Ox ღერძის მიმართ.

3.5. იპოვეთ A (5; —1), B (—3; —5), C (—4; 0), D (0; 7) წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oy ღერძის მიმართ.

3.6. იპოვეთ A (7; 1), B (—4; 0), C (—5; —2), D (0; 6) წერტილების სიმეტრიული წერტილები კოორდინატთა სათავის მიმართ.

3.7. იპოვეთ A (5; 2), B (—4; —6), C (—3; 1), D (2; —4) წერტილების სიმეტრიული წერტილები პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების მიმართ.

3.8. იპოვეთ A (—4; 1), B (2; —4), C (2; 0), D (—5; —6) წერტილების სიმეტრიული წერტილები მეორე და მეოთხე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების მიმართ.

3.9. განსაზღვრეთ, რომელ საკოორდინატო მეოთხედებს შეიძლება ეკუთვნოდეს $M\ (x;\ y)$ წერტილი თუ:

1) $xy>0$; 2) $xy<0$; 3) $x-y=0$; 4) $x+y=0$;
5) $x+y>0$; 6) $x+y<0$; 7) $x-y>0$; 8) $x-y<0$.

8.10. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ წერტილები:

$A(3;\ -1;\ 5)$, $B(-2;\ 1;\ 3)$, $C(1;\ -4;\ 2)$, $D(1;\ 3;\ -2)$,
$E(-2;\ 0;\ 0)$, $F(-4;\ -3;\ 1)$, $G(-2;\ -4;\ -1)$, $H(-1;\ -2;\ 0)$.

3.11. იპოვეთ $A\ (-4;\ 2;\ -1)$ და $B\ (3;\ -1;\ 1)$ წერტილების გეგმილების კოორდინატები საკოორდინატო ღერძებზე.

8.12. იპოვეთ $A\ (2;\ -3;\ 1)$ და $B\ (-4;\ 2;\ 0)$ წერტილების გეგმილების კოორდინატები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

8.13. იპოვეთ $A\ (-3;\ 1;\ 2)$, $B\ (2;\ 0;\ -1)$, $C\ (3;\ 5;\ 2)$, $D\ (-1;\ -3;\ -2)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oxy საკოორდინატო სიბრტყის მიმართ.

8.14. იპოვეთ $A\ (4;\ -2;\ -1)$, $B\ (-4;\ 1;\ -1)$, $C\ (0;\ -2;\ 1)$, $D\ (4;\ 1;\ 2)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oxz საკოორდინატო სიბრტყის მიმართ.

8.15. იპოვეთ $A\ (-3;\ 2;\ -1)$, $B\ (4;\ 5;\ 2)$, $C\ (-3;\ -2;\ -1)$, $D\ (2;\ -1;\ 0)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Ox ღერძის მიმართ.

3.16. იპოვეთ $A\ (4;\ 3;\ -2)$, $B\ (-4;\ -1;\ 3)$, $C\ (-1;\ 0;\ -2)$, $D\ (-2;\ 1;\ -3)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oz ღერძის მიმართ.

3.17. იპოვეთ $A\ (2;\ -5;\ 1)$, $B\ (-2;\ 3;\ -2)$, $C\ (0;\ -3;\ 3)$, $D\ (4;\ 2;\ 1)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები კოორდინატთა სათავის მიმართ.

8.18. პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ წერტილები $A\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$B\left(2;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(2;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $D\left(3;\ \dfrac{11\pi}{6}\right)$, $E\left(4;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

8.19. იპოვეთ $A\left(3;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $C\left(2;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $D\left(1;\ \dfrac{11\pi}{6}\right)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილების კოორდინატები პოლარული ღერძის მიმართ.

8.20. იპოვეთ $A\left(3;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(1;\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$, $D\left(4;\ \dfrac{5\pi}{3}\right)$

წერტილების სიმეტრიული წერტილების კოორდინატები პოლუსის მიმართ.

3.21. პოლარულ კოორდინატთა სისტემის პოლუსი ემთხვევა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავეს, ხოლო პოლარული ღერძი აბსცისათა ღერძს.

1) პოლარულ სისტემაში მოცემულია წერტილები $A\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $C(7; 0)$, $D\left(4;\ \frac{2\pi}{3}\right)$. იპოვეთ ამ წერტილების დეკარტის კოორდინატები.

2) დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილები A (2; 2), B (3; 0), C (0; 5), D (—5; 0), E (0; —3), F $(2; -2\sqrt{3})$. იპოვეთ ამ წერტილების პოლარული კოორდინატები.

3.22. იპოვეთ მანძილი პოლარული კოორდინატებით მოცემულ $M\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right)$ და $N\left(4;\ \frac{3\pi}{4}\right)$ წერტილებს შორის.

3.23. იპოვეთ მანძილი პოლარული კოორდინატებით მოცემულ $M\left(4;\ \frac{\pi}{4}\right)$ და $N\left(6;\ \frac{7\pi}{12}\right)$ წერტილებს შორის.

§ 4. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე. ვექტორის გეგმილი ღერძზე

4.1. მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის ააგეთ $3\vec{a}, -\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b},\ 4\vec{a}+2\vec{b},\ 2\vec{a}-3\vec{b}$.

4.2. რა პირობებში სრულდება შემდეგი ტოლობები:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

3) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$; 4) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

5) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|-|\vec{a}|$; 6) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;

7) $|\vec{a}|\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\vec{a}$; 8) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

9) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|-|\vec{b}|$; 10) $\alpha\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\beta\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{0}$.

4.3. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები იყვნენ კოლინეარულნი.

4.4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია. λ და μ-ს რა მნიშვნელობებისათვის არიან კოლინეარული ვექტორები $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\vec{c}$ და $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$.

4.5. რა შემთხვევაში ყოფს შუაზე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეს $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორი?

4.6. დაამტკიცეთ, რომ $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

4.7. მოცემულია $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=15$, $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. იპოვეთ $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.8. მოცემულია $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=11$, $|\vec{a}-\vec{b}|=14$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

4.9. მოცემულია $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$ და $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.10. მოცემულია $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=120^\circ$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

4.11. მოცემულია $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$. იპოვეთ $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.12. მოცემულია $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$. იპოვეთ $|5\vec{a}+4\vec{b}|$ და $|5\vec{a}-4\vec{b}|$.

4.13. $ABCD$ პარალელოგრამში $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით შემდეგი ვექტორები; $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ და $\vec{MD}$, სადაც M დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.

4.14. ABC სამკუთხედში $\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებით შემდეგი ვექტორები: $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ და $\vec{CP}$, სადაც M, N და P შესაბამისად BC, AC და AB გვერდების შუაწერტილებია.

4.15. ABC სამკუთხედში $\vec{BC}=\vec{a}$ და $\vec{CA}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით შემდეგი ვექტორები; $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ და $\vec{CP}$, სადაც M, N და P შესაბამისად BC, AC და AB გვერდების შუაწერტილებია.

4.16. ABC სამკუთხედის BC გვერდი გაყოფილია ხუთ ტოლ ნაწილად და დაყოფის D_1, D_2, D_3, D_4 წერტილები შეერთებულია A წვეროსთან. იპოვეთ $\vec{AD_1}$, $\vec{AD_2}$, $\vec{AD_3}$, $\vec{AD_4}$ ვექტორები, თუ $\vec{AB}=\vec{c}$ და $\vec{BC}=\vec{a}$.

4.17. დაამტკიცეთ, რომ თუ C არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი და O სივრცის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$\vec{OC}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB}).$$

4.18. M_1 და M_2 წერტილები A_1B_1 და A_2B_2 მონაკვეთების შუაწერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}).$$

4.19. დაამტკიცეთ, რომ თუ M არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო O სივრცის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

4.20. M_1 და M_2 წერტილები არიან შესაბამისად $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედების მედიანების გადაკვეთის წერტილები. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}).$$

4.21. დაამტკიცეთ, რომ თუ O, A, B წერტილები ერთ წრფეს არ ეკუთვნიან და $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, მაშინ $OBAC$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

4.22. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი O წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.$$

4.23. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

4.24. წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრში მოდებულია ვექტორები, რომელთა ბოლოები მრავალკუთხედის წვეროებშია. დაამტკიცეთ, რომ მათი ჯამი ნულის ტოლია.

4.25. დაამტკიცეთ, რომ თუ M არის $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო O სივრცის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

4.26. O და O_1 წერტილები არიან შესაბამისად $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ პარალელოგრამების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილები. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}).$$

4.27. დაამტკიცეთ, რომ თუ O არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, მაშინ

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}.$$

4.28. $OACB$ ტრაპეციაში $BC=\frac{1}{2}OA$, $BC \parallel OA$, $\vec{OC}=\vec{c}$, $\vec{OB}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{OA}$ ვექტორი $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების საშუალებით.

4.29. B წერტილი წრეწირის $\breve{AC}=90°$ რკალს ჰყოფს ისე, რომ $\breve{AB}:\breve{BC}=2:1$. O წრეწირის ცენტრია. გამოსახეთ $\vec{OC}$ ვექტორი $\vec{OA}=\vec{a}$ და $\vec{OB}=\vec{b}$ ვექტორების საშუალებით.

4.30. არაკომპლანარულ $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$ და $\vec{AA_1}=\vec{c}$ ვექტორებზე აგებულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორებით გამოსახეთ ვექტორები $\vec{DC}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{AC_1}$, $\vec{DB_1}$, $\vec{DC_1}$, $\vec{CB_1}$.

4.31. $ABCD$ ტრაპეციაში $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}$, $\vec{AD}=\vec{c}$. ამ ვექტორების საშუალებით გამოსახეთ ვექტორები $\vec{BC}$, $\vec{DC}$, $\vec{DB}$, $\vec{DK}$ და $\vec{AM}$, სადაც K არის BC წიბოს შუაწერტილი, ხოლო M არის BDC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი.

4.32. იპოვეთ a ვექტორის გეგმილი l ღერძზე, თუ მისი სიგრძეა $|\vec{a}|=4$ და l ღერძთან ადგენს კუთხეს: 1) 30°; 2) 120°.

4.33. იპოვეთ Oxy სიბრტყეზე მდებარე $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე, თუ მისი სიგრძეა $|\vec{a}|=6$ და Ox ღერძთან ადგენს 60°-იან კუთხეს.

4.34. რამდენიმე ვექტორის ერთსა და იმავე ღერძზე გეგმილების ჯამი ნულის ტოლია. შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ ეს ვექტორები ადგენენ შეკრულ ტეხილს?

4.35. იპოვეთ $გეგ_{\vec{l}}(4\vec{a}-3\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\frac{3}{2}$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{l})=45°$, $(\vec{b},\widehat{\ }\vec{l})=60°$.

4.36. იპოვეთ $გეგ_{\vec{l}}(2\vec{a}+5\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{l})=30°$, $(\vec{b},\widehat{\ }\vec{l})=120°$.

4.37. გამოთვალეთ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე, თუ $|\vec{a}|=16$ და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს შესაბამისად $\alpha=45°$, $\beta=60°$ და $\gamma=120°$ კუთხეებს.

5.1. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(1;\ -2;\ 4)$, $\vec{b}(-3;\ 1;\ -2)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები; 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $3\vec{a}-5\vec{b}$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

5.2. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(4;\ -3;\ 6)$, $b(-5;\ 2;\ 4)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე: 1) $3\vec{b}$; 2) $2\vec{a}-5\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+4\vec{b}$; 4) $2\vec{a}-\vec{b}$.

5.3. მოცემულია $A\ (-3;\ 4;\ 2)$ და $B\ (-2;\ 1;\ 5)$ წერტილები. იპოვეთ $\vec{AB}$ და $\vec{BA}$ ვექტორების კოორდინატები.

5.4. მოცემულია $\vec{AB}\ (-4;\ -2;\ 1)$ ვექტორი და $B\ (1;\ 4;\ 5)$ წერტილი. იპოვეთ A წერტილის კოორდინატები.

5.5. მოცემულია $\vec{AB}\ (3;\ 7;\ 1)$ ვექტორი და $A\ (-2;\ 1;\ -3)$ წერტილი. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები.

5.6. მოცემულია $A\ (-2;\ 1;\ 3)$, $B\ (1;\ 4;\ 2)$, $C\ (5;\ 6;\ 4)$ წერტილები. იპოვეთ $\vec{AM}$ ვექტორის კოორდინატები, სადაც M არის BC მონაკვეთის შუაწერტილი.

5.7. კოლინეარულია თუ არა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები თუ;
1) $\vec{a}(-3;\ -2;\ 1)$, $\vec{b}(6;\ 4;\ -2)$; 2) $\vec{a}\left(\frac{1}{2};\ 4;\ \frac{1}{3}\right)$, $\vec{b}(-1;\ -8;\ 1)$.

5.8. λ-ს რა მნიშვნელობისთვისაა კოლინეარული ვექტორები $\vec{a}\ (1;\ -2;\ \lambda)$ და $\vec{b}(-4;\ 8;\ 3)$?

5.9. α და β-ს რა მნიშვნელობებისათვის არის კოლინეარული ვექტორები $\vec{a}(1;\ \alpha;\ -2)$, $\vec{b}(\beta;\ 4;\ 6)$?

5.10. მოცემულია $A(-7;\ 2;\ 2)$, $B(-10;\ -1;\ 5)$, $C(2;\ 5;\ -4)$ და $D\ (8;\ 5;\ -7)$ წერტილები. აჩვენეთ, რომ $\vec{AC}$ და $\vec{BD}$ ვექტორები კოლინეარულია.

5.11. აჩვენეთ, რომ $A\ (-3;\ -1;\ 1)$, $B\ (2;\ 3;\ -1)$, $C\ (3;\ 3;\ -5)$ და $D\ (2;\ -1;\ -19)$ წერტილები წარმოადგენენ ტრაპეციის წვეროებს.

5.12. აჩვენეთ, რომ A (1; —1; 3), B (2; 2; —5), C (4; 1; —6) და D (3; —2; 2) წერტილები წარმოადგენენ პარალელოგრამის წვეროებს.

5.13. პარალელოგრამის სამი მომდევნო წვეროა A (1; 2, 3), B (3; 1; 6), C (0; —1: 4). იპოვეთ პარალელოგრამის მეოთხე წვეროს კოორდინატები.

5.14. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამის სამი მომდევნო წვერო A (1; —2; 1), B (0: 0; —2), C (1; 3; 0). იპოვეთ $\overrightarrow{BD}$ ვექტორის კოორდინატები.

5.15. წრფივად დამოკიდებულია თუ არა შემდეგი ვექტორები:

1) $\vec{a}(2;\ -3;\ 1)$; $\vec{b}(1;\ 5;\ 4)$, $\vec{c}(4;\ 1;\ -3)$:

2) $\vec{a}(2;\ -1;\ 1)$, $\vec{b}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{c}(1;\ -3;\ -2)$.

5.16. მოცემულია $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{p}$ ვექტორები. აჩვენეთ, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ადგენენ ბაზისს. იპოვეთ $\vec{p}$ ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში, თუ:

1) $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{p}=-11\vec{i}-15\vec{j}$;

2) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{p}=\vec{i}-2\vec{j}$;

3) $\vec{a}=5\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{p}=\vec{i}+5\vec{j}$;

4) $\vec{a}=7\vec{i}+9\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{p}=5\vec{i}+12\vec{j}$.

5.17. მოცემულია $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორები. აჩვენეთ, რომ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები ადგენენ ბაზისს; იპოვეთ $\vec{d}$ ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში;

1) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$,
$\vec{c}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{d}=-5\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$;

2) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$,
$\vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{d}=7\vec{i}-7\vec{j}+5\vec{k}$;

3) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$,
$\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=13\vec{i}+7\vec{j}$;

4) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$,
$\vec{c}=5\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{d}=28\vec{i}+4\vec{j}+18\vec{k}$.

5.18. იპოვეთ $\vec{r}$ ვექტორის კოორდინატები e_1', e_2' ბაზისში, თუ ის მოცემულია $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ბაზისში:

1) $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad e_2' = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{r} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$;

2) $e_1' = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \quad e_2' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{r} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$;

3) $e_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad e_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{r} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$;

4) $e_1' = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \quad e_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{r} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$.

5.19. იპოვეთ $\vec{d}$ ვექტორის კოორდინატები e_1', e_2', e_3' ბაზისში, თუ ის მოცემულია $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ბაზისში;

1) $e_1' = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad e_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$

$e_3' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{r} = 9\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$;

2) $e_1' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad e_2' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$

$e_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{r} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$;

3) $e_1' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3, \quad e_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$

$e_3' = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{r} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$;

4) $e_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad e_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$

$e_3' = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{r} = 7\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$.

§ 6. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

6.1. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

6.2. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

6.3. მოცემულია $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$. იპოვეთ

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 6) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$; 7) $\vec{a}(3\vec{a} + 4\vec{b})$; 8) $(2\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

6.4. მოცემულია $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})=\frac{\pi}{3}$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{c})=\frac{\pi}{3}$, $(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$. იპოვეთ: 1) $(3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})(\vec{b}+\vec{c})$; 2) $(\vec{a}-\vec{c})(2\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$; 3) $(\vec{a}-2\vec{b})^2+\vec{c}^2$; 4) $(\vec{a}+2\vec{b})^2-(2\vec{a}-3\vec{c})^2$.

6.5. მოცემულია $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$. იპოვეთ $|2\vec{a}-\vec{b}|$ და $|3\vec{a}+2\vec{b}|$.

6.6. მოცემულია $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=4$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$, $(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$, $(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$. იპოვეთ: 1) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$; 2) $|\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|$.

6.7. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ერთეულოვანი ვექტორები აკმაყოფილებენ პირობას $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

6.8. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორები აკმაყოფილებენ პირობას $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$.

6.9. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}$.

6.10. მოცემულია $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})=\frac{\pi}{3}$. იპოვეთ კუთხე $2\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

6.11. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}-2\vec{b}$ და $2\vec{b}-\vec{c}$ ვექტორებს შორის, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$, $(\vec{a},\widehat{\ }\vec{c})=\frac{\pi}{3}$, $(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$.

6.12. იპოვეთ $\vec{AB}$ და $\vec{AC}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის კუთხე, თუ $|\vec{AB}|=2$, $|\vec{AC}|=\sqrt{2}$, $(\vec{AB},\widehat{\ }\vec{AC})=\frac{\pi}{4}$.

6.13. α-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნებიან $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ და $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$?

6.14. α-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნებიან $2\vec{a}-3\vec{b}$ და $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{2\pi}{3}$?

6.15. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ერთეულოვან ვექტორებს შორის, თუ $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ და $\vec{q}=5\vec{a}-4\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

6.16. იპოვეთ $გეგ_{\vec{a}}\vec{b}$, თუ $|\vec{a}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$.

6.17. იპოვეთ $გეგ_{\vec{b}}(3\vec{a}+2\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{2\pi}{3}$.

/ **6.18.** იპოვეთ $გეგ_{\vec{a}}(2\vec{a}-\vec{b})+გეგ_{\vec{b}}(\vec{a}+2\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$.

6.19 იპოვეთ $გეგ_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{6}$.

6.20. იპოვეთ $გეგ_{3\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a}-3\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{3\pi}{4}$.

6.21. გამოთვალეთ:

1) $(\vec{j}+2\vec{k})^2-(2\vec{i}+\vec{j})(\vec{k}-\vec{j})+\vec{k}(\vec{j}+\vec{k})$;

2) $(\vec{i}-2\vec{j})\cdot\vec{k}-\vec{j}(2\vec{i}+3\vec{k})+(\vec{j}-\vec{k})^2$.

6.22. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი:

1) $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$;

2) $\vec{a}(1;\ 0;\ -5)$, $\vec{b}(-3;\ 1;\ -2)$.

6.23. იპოვეთ $\vec{c}_1$ და $\vec{c}_2$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ:

1) $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{a}(1;-2;-1)$, $\vec{b}(2;1;-1)$;

2) $\vec{c}_1=2\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{c}_2=-3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}(2;-2;-1)$, $\vec{b}(0;\ 3;\ 1)$.

6.24. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$ ვექტორის კოლინეარული $\vec{b}$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\vec{a}\cdot\vec{b}=44$.

6.25. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე და მიმართულების კოსინუსები, თუ:

1) $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}$; 2) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$.

6.26. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{b}-3\vec{c}$ ვექტორის სიგრძე და მიმართულების კოსინუსები, თუ $\vec{b}(1;\ -2;\ 4)$; $\vec{c}(-2;\ 0;\ -3)$.

6.27. იპოვეთ $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ ვექტორის მგეზავი.

6.28. იპოვეთ $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ ვექტორის კოლინეარული $\vec{b}$ ვექტორი, თუ $|\vec{b}|=2\sqrt{14}$.

6.29. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ვექტორის კოლინეარული $\vec{b}$ ვექტორი, თუ ის Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს და $|\vec{b}|=9$.

6.30. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ მისი სიგრძეა 24 და ის Oy და Oz ღერძებთან ადგენს $\beta=\gamma=60°$ კუთხეებს, ხოლო Ox ღერძთან — ბლაგვ კუთხეს.

6.31. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ მისი სიგრძეა 4 და ის Ox და Oz ღერძებთან ადგენს შესაბამისად $\alpha=45°$, $\gamma=60°$ კუთხეებს.

6.32. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ:

1) $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$;

2) $\vec{a}(3;\ -\sqrt{2};\ 5)$, $\vec{b}(-1;\ 2\sqrt{2};\ 0)$.

6.33. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ:

$\vec{a}=\vec{c}+2\vec{d}$, $\vec{b}=2\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{c}=(1;\ -1;\ -1)$, $\vec{d}=(-2;\ 3;\ 1)$.

6.34. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A\,(-1;\ -2;\ 4)$, $B\,(-4;\ -2;\ 0)$, $C\,(3;\ -2;\ 1)$. განსაზღვრეთ B კუთხის სიდიდე.

6.35. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედის A კუთხის სიდიდე, თუ $\vec{AB}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{BC}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

6.36. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A\,(3;\ 2;\ -3)$, $B\,(5;\ 1;\ -1)$, $C\,(1;\ -2;\ 1)$. იპოვეთ A წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე.

6.37. იპოვეთ კუთხე $\vec{AB}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ და $\vec{AD}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის.

6.38. მოცემულია $ABCD$ ოთხკუთხედის წვეროები $A\ (1;\ 2;\ -1)$, $B\ (-1;\ 2;\ 1)$, $C\ (0;\ 1;\ 5)$, $D\ (2;\ 1;\ 3)$. იპოვეთ კუთხე AC და BD დიაგონალებს შორის.

6.39. მოცემულია ოთხკუთხედის წვეროები $A\ (1;\ -2;\ 2)$, $B\ (1;\ 4;\ 0)$, $C\ (-4;\ 1;\ 1)$, $D\ (-5;\ -5;\ 3)$. აჩვენეთ, რომ მისი AC და BD დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

6.40. განსაზღვრეთ, α-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნებიან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ:

1) $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k},\quad \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k};$

2) $\vec{a}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k},\quad \vec{b}=4\vec{i}+\alpha\vec{j}+7\vec{k}.$

6.41. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ და $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ ვექტორების პერპენდიკულარული $\vec{c}$ ვექტორი, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობას:

$$(\vec{c},\ 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6.$$

6.42. მოცემულია $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ და $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ ვექტორები. იპოვეთ Oz ღერძის პერპენდიკულარული ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: $(\vec{a},\ \vec{c})=9,\ (b, \vec{c})=-4.$

6.43. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(3;\ -2;\ 1)$, $\vec{b}(1;0;\ 2)$ და $\vec{c}(2;1;\ -1)$. იპოვეთ ისეთი $\vec{d}$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $(\vec{d},\ \vec{a})=9$, $(\vec{d},\ \vec{b})=5,\ (\vec{d},\ \vec{c})=-2.$

6.44. მოცემულია $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ ვექტორები. იპოვეთ გეგ$_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

6.45. მოცემულია $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ და $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$ ვექტორები. იპოვეთ გეგ$_{\vec{c}}\,(\vec{a}+\vec{b})$.

6.46. მოცემულია $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ და $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ ვექტორები. იპოვეთ გეგ$_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.

6.47. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}\,(-2;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}\,(1;5;0)$ და $\vec{c}\,(4;4;-2)$. იპოვეთ გეგ$_{\vec{c}}\,(3\vec{a}-2\vec{b})$.

6.48. მოცემულია $A\,(1;\ 2;\ -3)$, $B\,(7;\ 4;\ 0)$ და $C\,(1;\ -1;\ 2)$ წერტილები. იპოვეთ გეგ$_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}$.

6.49. სამართლიანია თუ არა შემდეგი ტოლობები:

1) $|\vec{a}|\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$; 2) $|\vec{a}|\cdot\vec{a}^2=|\vec{a}|^3$;

3) $|\vec{a}|^2\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^3$; 4) $\vec{a}\cdot(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2\cdot\vec{b}$;

5) $|\vec{b}|^2\cdot\vec{a}=\vec{a}\,(\vec{b},\vec{b})$; 6) $(\vec{a},\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$?

6.50. შეამოწმეთ $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$ ტოლობის სამართლიანობა. რაში მდგომარეობს მისი გეომეტრიული შინაარსი?

6.51. შეამოწმეთ $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ ტოლობის სამართლიანობა. რაში მდგომარეობს მისი გეომეტრიული შინაარსი?

6.52. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\,(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|^2}$ ვექტორი პერპენდიკულარულია $\vec{a}$ ვექტორის.

6.53. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{p}=\vec{a}\,(\vec{b},\vec{c})-\vec{c}\,(\vec{a},\vec{b})$ ვექტორი პერპენდიკულარულია $\vec{a}$ ვექტორის.

6.54. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{p}=\vec{a}\,(\vec{b},\vec{c})-\vec{b}\,(\vec{a},\vec{c})$ ვექტორი პერპენდიკულარულია $\vec{c}$ ვექტორის.

6.55. დაამტკიცეთ, რომ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი არ შეიცვლება, თუ ერთ-ერთ თანამამრავლს მივუმატებთ მეორე ვექტორის პერპენდიკულარულ ვექტორს.

6.56. დაამტკიცეთ, რომ რომბის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

6.57. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამი, რომლის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია, არის რომბი.

6.58. $ABCD$ პარალელოგრამში გავლებულია BK სიმაღლე ($BK\perp AD$). იპოვეთ $\overrightarrow{BK}$, თუ $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

7.1. $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედში $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$ ვექტორთა სამეულს მარცხენა ორიენტაცია აქვს. განსაზღვრეთ ვექტორთა შემდეგი სამეულების ორიენტაცია;

1) $\vec{DD_1}$, $\vec{DA}$, $\vec{DC}$; 2) $\vec{C_1C}$, $\vec{C_1D_1}$, $\vec{C_1B_1}$; 3) $\vec{D_1D}$, $\vec{D_1B_1}$, $\vec{D_1A_1}$;

4) $\vec{DA}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{BC}$; 5) $\vec{MB}$, $\vec{MD}$, $\vec{MA_1}$,

სადაც M არის AD წიბოს შუაწერტილი.

7.2. იპოვეთ $|\vec{a}\times\vec{b}|$, თუ:

1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$;

2) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2\sqrt{3}$, $(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

7.3. იპოვეთ $|\vec{a}\times\vec{b}|$, თუ:

1) $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$;

2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-24$.

7.4. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$, თუ:

1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$;

2) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=12\sqrt{2}$.

7.5 მოცემულია $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. იპოვეთ:

1) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$; 2) $|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$.

7.6. მოცემულია $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{2\pi}{3}$. იპოვეთ:

1) $(\vec{a}\times\vec{b})^2$; 2) $((2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}))^2$;

3) $((\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b}))^2$; 4) $((\vec{a}-3\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b}))^2$.

7.7. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი, თუ:

1) $\vec{AB}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{AD}=\vec{a}+4\vec{b}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$;

2) $\vec{AB}=2\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{BC}=\vec{a}-3\vec{b}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{5\pi}{6}$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$.

7.8. იპოვეთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომლის დიაგონალები $2\vec{m}-\vec{n}$ და $4\vec{m}-5\vec{n}$, სადაც $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=\frac{\pi}{4}$.

7.9. შეასრულეთ მოქმედებანი:

1) $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$;

2) $3\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})-2\vec{j}(\vec{i}\times\vec{k})-\vec{k}(\vec{i}\times\vec{j})$.

7.10. იპოვეთ $\vec{a}\times\vec{b}$, თუ:

1) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$;

2) $\vec{a}(2;\ -3;\ 1)$, $\vec{b}(-2;\ 0;\ -1)$.

7.11. მოცემულია $\vec{a}(3;\ -1;\ -2)$ და $\vec{b}(1,\ 2;\ -1)$ ვექტორები. იპოვეთ: 1) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$.

7.12. მოცემულია $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(3;\ 2,\ 1)$ წერტილები. იპოვეთ 1) $\vec{AB}\times\vec{BC}$; 2) $(\vec{BC}-2\vec{CA})\times\vec{CB}$.

7.13. მოცემულია $\vec{a}(2;\ -3;\ 1)$, $\vec{b}(-3;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}(1;\ 2;\ 3)$ ვექტორები. იპოვეთ 1) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$; 2) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

7.14. იპოვეთ $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ და $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$ ვექტორების პერპენდიკულარული ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომელიც Oy ღერძთან ბლაგვ კუთხეს ადგენს და რომლის სიგრძეა 26.

7.15. იპოვეთ $\vec{a}$ (8; —15; 3) ვექტორისა და Oz ღერძის პერპენდიკულარული ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომელიც Ox ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს და რომლის სიგრძეა 51.

7.16. იპოვეთ $\vec{a}=3\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ და $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ ვექტორების პერპენდიკულარული ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\vec{c}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=0$.

7.17. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=2\cdot\vec{a}\times\vec{b}$;

2) $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

7.18. დაამტკიცეთ უტოლობა: $(\vec{a}\times\vec{b})^2\leqslant\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$. რა შემთხვევაში აქვს ადგილი ტოლობას?

7.19. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a} \perp \vec{b}$ და $\vec{a} \perp \vec{c}$, მაშინ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$.

7.20. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ არანულოვანი ვექტორებია და $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, მაშინ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ურთიერთპერპენდიკულარული ერთეულოვანი ვექტორებია.

7.21. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{a} \times \vec{d}$, $\vec{b} \times \vec{d}$ და $\vec{c} \times \vec{d}$ ვექტორები კომპლანარულია.

7.22. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, მაშინ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

7.23. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ და $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$, მაშინ $\vec{b} - \vec{c}$ და $\vec{a} - \vec{d}$ ვექტორები კოლინეარულია.

§ 8. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი. ვექტორების ზოგიერთი გამოყენება

8.1. ურთიერთპერპენდიკულარული $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები ქმნიან მარცხენა სამეულს. გამოთვალეთ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, თუ $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$.

8.2. $\vec{c}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების პერპენდიკულარულია. გამოთვალეთ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, თუ $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

8.3. $\vec{c}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით განსაზღვრულ სიბრტყესთან ადგენს $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ კუთხეს. გამოთვალეთ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, თუ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

8.4. დაადგინეთ ვექტორთა $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ სამეულის ორიენტაცია, თუ:

1) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$, 2) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j}$;

3) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{k}$; 4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$;

5) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j}$; 6) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$.

8.5. იპოვეთ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი, თუ:

1) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

8.6. შეამოწმეთ კომპლანარულია თუ არა $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორები

1) $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -1; 3)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$;

2) $\vec{a}(2; -2; 1)$, $\vec{b}(2; 1; 2)$, $\vec{c}(3; -1; -2)$;

3) $\vec{a}(3; -1; 2)$, $\vec{b}(1; 2; -3)$, $\vec{c}(3; -4; 7)$.

4) $\vec{a}(2; 5; 7)$, $\vec{b}(1; 1; -1)$, $\vec{c}(1; 2; 2)$.

8.7. შეამოწმეთ მდებარეობს თუ არა ერთ სიბრტყეში წერტილები:

1) $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4: -4)$; $D(1; 5; 0)$;

2) $A(0; 0; 1)$, $B(2: 3; 5)$; $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$;

3) $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$;

4) $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$.

8.8. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი წვეროებია:

1) $A(2; -3)$, $B(-1; 1)$, $C(3; -2)$;

2) $A(1; 5)$, $B(3; -1)$, $C(4; 5)$.

8.9. იპოვეთ ABC სამკუთხედის BD სიმაღლე, თუ მოცემულია სამკუთხედის წვეროები:

1) $A(-1; 2)$, $B(1; 3)$, $C(3; 5)$;

2) $A(3; 6)$, $B(2; -1)$, $C(-1; 3)$.

8.10. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი სამი წვეროა:

1) $A(-2; 3)$, $B(1; -5)$, $C(3; 1)$;

2) $A(3; -3)$, $B(-2; 1)$, $C(5; -4)$.

8.11. პარალელოგრამის სამი წვეროა A (3; 7), B (2; —3), C (—1; 4). იპოვეთ B წვეროდან AC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

8.12. სამკუთხედის ორი წვეროა A (2; 6) და B (—6; 2), ხოლო მესამე წვერო Ox ღერძზე ძევს. იპოვეთ მესამე C წვეროს კოორდინატები, თუ სამკუთხედის ფართობია 12.

8.13. სამკუთხედის ორი წვეროა A (6; —9) და B (—3; —6), ხოლო მესამე წვერო Oy ღერძზე ძევს. იპოვეთ მესამე C წვეროს კოორდინატები, თუ სამკუთხედის ფართობია 36.

8.14. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი, თუ:

1) $\vec{AB} = \vec{k} - \vec{j}$, $\vec{AD} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

2) $\vec{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{AD} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

8.15. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი წვეროებია:

1) $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$;

2) $A(-2;\ 1;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ -1)$, $C(2;\ 2;\ 2)$.

8.16. იპოვეთ ABC სამკუთხედის BD სიმაღლე, თუ მოცემულია სამკუთხედის წვეროები:

1) $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -6)$;

2) $A(1;\ -2;\ 8)$, $B(0;\ 0;\ 4)$, $C(6;\ 2;\ 0)$.

8.17. გამოთვალეთ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ და $\vec{AD}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ:

1) $\vec{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{AD} = \vec{i} - \vec{k}$;

2) $\vec{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{AC} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{AD} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$.

8.18. იპოვეთ $ABCD$ ტეტრაედრის მოცულობა და D წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე, თუ:

1) $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(4;\ 1;\ 3)$, $C(5;\ 5;\ 3)$, $D(5;\ 5;\ 5)$;

2) $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$, $D(-5;\ -4;\ 8)$.

8.19. ტეტრაედრის მოცულობა $V=5$. მისი სამი წვეროა $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$. იპოვეთ მეოთხე წვეროს კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ ის Oy ღერძზე ძევს.

8.20. აჩვენეთ, რომ ვექტორები $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + (m+1)\cdot\vec{k}$ და $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + m\vec{k}$. არ არიან კომპლანარული m-ის არცერთი მნიშვნელობისათვის.

8.21. აჩვენეთ, რომ:

1) $(\vec{a} - \vec{b},\ \vec{b} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{a}) = 0$;

2) $(\vec{a} + \vec{b},\ \vec{b} + \vec{c},\ \vec{c} - \vec{a}) = 0$;

3) $(\vec{a} + \vec{b},\ \vec{b} + \vec{c},\ \vec{c} + \vec{a}) = 2(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$;

4) $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = (\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$, $\lambda, \mu \in R$.

8.22. აჩვენეთ, რომ $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ და $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$ ვექტორები კომპლანარულია.

8.23. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია. λ-ს რა მნიშვნელობისათვის არიან ვექტორები $\lambda\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\lambda\vec{c}$ კომპლანარული?

8.24. დაამტკიცეთ, რომ $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|$.

8.25. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამი ვექტორიდან რომელიმე ორი კოლინეარულია, მაშინ მათი შერეული ნამრავლი უდრის ნულს.

8.26. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, მაშინ $\vec{a}$, $\vec{b}$, და $\vec{c}$ ვექტორები კომპლანარულია.

8.27. იპოვეთ $\vec{F}$ ძალის მიერ $\vec{s}$ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა, თუ $|\vec{F}|=2$, $|\vec{s}|=5$, $(\widehat{\vec{F}, \vec{s}})=\dfrac{\pi}{6}$.

8.28. იპოვეთ მუშაობა, რომელსაც შეასრულებს $\vec{F}$ (3; —2; —5) ძალა მისი მოდების წერტილის სწორხაზოვანი გადაადგილებისას A (2; —3; 5) წერტილიდან B (3; —2: —1) წერტილამდე.

8.29. მოცემულია ერთ წერტილზე მოდებული სამი ძალა $\vec{M}$ (3; —4; 2), $\vec{N}$ (2; 3; —5) და $\vec{P}$ (—3; —2; 4). გამოთვალეთ მათი ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა, როცა მათი მოქმედების წერტილი სწორხაზოვნად გადაადგილდება A (5; 3; —7) წერტილიდან B (4; —1; —4) წერტილამდე.

8.30. $\vec{F}$ (3; 2; —4) ძალა მოდებულია M (2;—1; 1) წერტილზე. იპოვეთ ამ ძალის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

8.31. $\vec{F}$ (2; —4; 5) ძალა მოდებულია M (4; —2; 3) წერტილზე. იპოვეთ ამ ძალის მომენტი A (3; 2; —1) წერტილის მიმართ.

8.32. $\vec{F}$ (3; 4; —2) ძალა მოდებულია M (2; —1; —2) წერტილზე. იპოვეთ კოორდინატთა სათავის მიმართ ამ ძალის მომენტის სიდიდე და მიმართულების კოსინუსები.

8.33. $\vec{F}$ (2; 2; 9) ძალა მოდებულია M (4; 2; —3) წერტილზე. იპოვეთ A (2; 4; 0) წერტილის მიმართ ამ ძალის მომენტის სიდიდე და მიმართულების კოსინუსები.

8.34. მოცემულია M (—1; 4; —2) წერტილზე მოდებული სამი ძალა $\vec{F_1}$ (2; —1; —3), $\vec{F_2}$ (3; 2; —1), $\vec{F_3}$ (—4; 1; 3). იპოვეთ A (2; 3; —1) წერტილის მიმართ მათი ტოლქმედი ძალის მომენტის სიდიდე და მიმართულების კოსინუსები.

§ ყ. მანძილი ორ წერტილს შორის. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

9.1. იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის:

1) $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 5)$;

2) $A(14;\ 2)$, $B(9;\ 14)$;

3) $A(-1;\ 3;\ 1)$, $B(1;\ 0;\ 7)$;

4) $A(-2;\ -6;\ 2)$, $B(4;\ -6;\ -6)$.

9.2. სამკუთხედის წვეროებია $A(3;\ -4)$, $B(-3;\ 4)$, $C(-2;\ 2)$. იპოვეთ გვერდების სიგრძეები.

9.3. სამკუთხედის წვეროებია $A(1;\ 4;\ 3)$, $B(7;\ 8;\ -1)$ და $C(1;\ 2;\ 1)$. იპოვეთ მისი შუახაზების სიგრძეები.

9.4. Ox ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც $A(3;\ 4)$ წერტილიდან დაშორებულია 5-ის ტოლი მანძილით.

9.5. Oy ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც $A(-8;\ 13)$ წერტილიდან დაშორებულია 17-ის ტოლი მანძილით.

9.6. Oy ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $A(1;\ -4;\ 7)$ და $B(5;\ 6;\ -5)$ წერტილებიდან.

9.7. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$ და $C(5;\ -1)$ მართკუთხაა.

9.8. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(-2;\ 3;\ 4)$, $B(3;\ 1;\ -5)$ და $C(0;\ -2;\ -5)$, ტოლფერდაა.

9.9. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(0;\ -1;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ 3)$ და $C(-4;\ 2;\ 0)$, ბლაგვკუთხაა.

9.10. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(2;\ 1;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 1)$ და $C(0;\ 3;\ 5)$, მახვილკუთხაა.

9.11. კვადრატის მოპირდაპირე წვეროებია $M(2;\ -2)$ და $N(-1;\ 3)$. იპოვეთ ფართობი.

9.12. კუბის მოპირდაპირე წვეროებია $A(-3;\ 1;\ 2)$ და $B(1;\ 4;\ 0)$. იპოვეთ მოცულობა.

9.13. $M(1;\ -2)$ წერტილზე გავლებულია წრეწირი, რომელიც ეხება Ox ღერძს. იპოვეთ ცენტრის კოორდინატები, თუ წრეწირის რადიუსია 5.

9.14. $A(4;\ 2)$ წერტილზე გავლებულია წრეწირი, რომელიც ეხება ორივე საკოორდინატო ღერძს. იპოვეთ წრეწირის ცენტრის კოორდინატები და რადიუსი.

9.15. სამკუთხედის წვეროებია $A(-3;\ 6)$, $B(9;\ -10)$, $C(-5;\ 4)$. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრის კოორდინატები და რადიუსი.

9.16. პირამიდის წვეროებია A (1; —1; 2), B (—1; 1; —2), C (1; 2; 1) და D (—2, 2; 3). იპოვეთ ამ პირამიდაზე შემოხაზული სფეროს ცენტრის კოორდინატები და რადიუსი.

9.17. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები, თუ:

1) A (— 2; 4), B (4; — 6); 2) A (3; — 1; 2), B (4; — 3; 0).

9.18. M არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები, თუ:

1) A (— 3; — 2), M (1; 2); 2) A (1; 3; 1), M (— 2; — 1; 3).

9.19. მოცემულია A (—2; 4) და B (2; 2) წერტილები. იპოვეთ B წერტილის მიმართ A წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.

9.20. სამკუთხედის წვეროებია A (2: —4), B (—3; 1), C (—5; —2). იპოვეთ გვერდების შუაწერტილების კოორდინატები.

9.21. მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია A (—4: —6) და B (2; 8), დაყოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.

9.22. A (—3,5) და B (1; 7) პარალელოგრამის მეზობელი წვეროებია ხოლო M (1; 1) დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ დანარჩენი წვეროების კოორდინატები.

9.23. სამკუთხედის წვეროებია A (3; —1; 5), B (4; 2; —5) და C (—4; 0; 3). იპოვეთ A წვეროდან გავლებული მედიანის სიგრძე.

9.24. მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია A (1; —3) და B (4; 3), დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.

9.25. მოცემულია ერთ წრფეზე მდებარე A (1; —1), B (3; 3) და C (4; 5) წერტილები. განსაზღვრეთ რა ფარდობით ყოფს თითოეული მათგანი დანარჩენი ორით განსაზღვრულ მონაკვეთს.

9.26. განსაზღვრეთ მონაკვეთის A და B ბოლოების კოორდინატები, თუ ეს მონაკვეთი P (2; 0; 2) და Q (5; —2; 0) წერტილებით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად.

9.27. სამკუთხედის წვეროებია $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ და $C(x_3, y_3, z_3)$. დაამტკიცეთ, რომ მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}.$$

9.28. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო A (3; 8) და B (10; 2) და მედიანების გადაკვეთის წერტილი M (1; 1). იპოვეთ სამკუთხედის მესამე წვეროს კოორდინატები.

9.29. სამკუთხედის წვეროებია A (7; 2). B (1; 9) და C (—8;

—11). იპოვეთ მანძილები მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან წვეროებამდე.

9.30. სამკუთხედის წვეროებია A (3; —2; 1), B (3; 1, 5) და C (4 0; 3). იპოვეთ მანძილი მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

9.31. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო A (—4; —1; 2) და B (3; 5; —6). იპოვეთ მესამე C წვეროს კოორდინატები, თუ AC გვერდის შუაწერტილი ძევს Oy ღერძზე, ხოლო BC გვერდის შუაწერტილი კი Oxz სიბრტყეზე.

9.32. სამკუთხედის წვეროებია A (2; —5), B (1; —2) და C (4; 7), ხოლო BD — ბისექტრისაა. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები და BD ბისექტრისის სიგრძე.

9.33. სამკუთხედის წვეროებია A (1; —1; —3), B (2; 1; —2) და C (—5; 2; —6). იპოვეთ A წვეროდან გავლებული ბისექტრისის სიგრძე.

9.34. სამკუთხედის წვეროებია A (0; 0; 0), B (0; 0; 10) და $C\left(\frac{15}{4};\ \frac{15\sqrt{14}}{4};\ \frac{55}{4}\right)$. იპოვეთ ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

9.35. სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია M (2; —1), N (—1; 4) და P (—2; 2). იპოვეთ სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები.

9.36. ოთხკუთხედის წვეროებია A (—3; 12), B (3; —4), C (5; —4) და D (6; 10). რა ფარდობით ყოფს AC დიაგონალი BD დიაგონალს?

§ 10. წრფე სიბრტყეზე

10.1. მოცემულია წრფე $2x—3y—3=0$. შემდეგი წერტილებიდან რომელი მდებარეობს მასზე და რომელი არა: M_1 (3; 1), M_2 (2; 3), M_3 (6; 3), M_4 (—3; —3), M_5 (3; 1), M_6 (—2; 1)?

10.2. M_1, M_2, M_3, M_4 წერტილები მდებარეობენ $3x—2y—6=0$ წრფეზე. იპოვეთ ამ წერტილების ორდინატები, თუ მათი აბსცისებია შესაბამისად 4; 0; 2; — 6.

10.3. M_1, M_2, M_3, M_4 წერტილები მდებარეობენ $x—3y+2=0$ წრფეზე. იპოვეთ ამ წერტილების აბსცისები, თუ მათი ორდინატებია შესაბამისად: 1; 0; —1; 3.

10.4. A (2; a) და B (b; —4) წერტილები მდებარეობენ $3x—y+ +5=0$ წრფეზე. იპოვეთ a და b.

10.5. იპოვეთ $2x—3y—12=0$ წრფის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და ააგეთ ეს წრფე.

10.6. განსაზღვრეთ, a-ს რა მნიშვნელობისთვისაა $(a+2)x+$ $+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$ წრფე:

1) აბსცისთა ღერძის პარალელური;

2) ორდინატთა ღერძის პარალელური;

3) კოორდინატთა სათავეზე გამავალი?

10.7. იპოვეთ შემდეგ წრფეთა გადაკვეთის წერტილები:

1) $3x - 4y - 29 = 0, \quad 2x + 5y + 19 = 0;$

2) $2x - 3y + 5 = 0, \quad x + 2y - 1 = 0.$

10.8. ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდების განტოლებებია შესაბამისად $4x + 3y - 5 = 0$, $x + 3y + 10 = 0$ და $x - 2 = 0$. იპოვეთ სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები.

10.9. დაადგინეთ, იკვეთებიან თუ არა ერთ წერტილში შემდეგი წრფეები:

1) $2x + y - 1 = 0, \quad 3x + 2y - 3 = 0, \quad x - 5y + 16 = 0;$

2) $3x - 5y - 1 = 0, \; 2x + y - 5 = 0, \quad x + 4y - 5 = 0.$

10.10. a-ს რა მნიშვნელობებისათვის იკვეთებიან ერთ წერტილში წრფეები $3x + 2y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$, $ax + 4y - a = 0$?

10.11. წრფის კუთხური კოეფიციენტია k, ხოლო ამ წრფის მიერ Oy ღერძზე მოკვეთილი მონაკვეთის სიდიდეა b. შეადგინეთ წრფის განტოლება და ააგეთ ნახაზი, თუ: 1) $k = 3, \; b = -2$; 2) $k = -1$ $b = \frac{3}{4}$; 3) $k = 2, \; b = 0$; 4) $k = 0, \; b = -3$; 5) $k = -\frac{1}{3}, \; b = \frac{2}{3}$; 6) $k = -2, \; b = -4$.

10.12. შემდეგი წრფეებისათვის იპოვეთ k კუთხური კოეფიციენტი და Oy ღერძზე მოკვეთილი მონაკვეთის b სიდიდე:

1) $5x - y + 3 = 0;$ 2) $2x + 3y - 6 = 0;$

3) $y - 3 = 0;$ 4) $5x + 3y + 2 = 0;$

5) $3x + 2y = 0;$ 6) $x + y = 0.$

10.13. იპოვეთ შემდეგი წრფეების მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის სიდიდე:

1) $2x - 2y + 5 = 0;$ 2) $x + \sqrt{3}\, y - 4 = 0.$

10.14. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს და Oy ღერძზე მოკვეთს b სიდიდის მონაკვეთს:

1) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \; b = -2;$ 2) $\alpha = \frac{5\pi}{6}, \; b = 3.$

10.15. შემდეგი წრფეების განტოლებები ჩაწერეთ ღერძთა მონაკვეთებში და ააგეთ ნახაზი:

1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$;

3) $2x+3y-9=0$; 4) $5x+2y-1=0$.

10.16. რომბის დიაგონალები, რომელთა სიგრძეებია 14 და 8, ძევს შესაბამისად Ox და Oy ღერძებზე. შეადგინეთ რომბის გვერდების განტოლებები.

10.17. შეადგინეთ $P(-3;\ 4)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომლის საკოორდინატო ღერძებს შორის მოთავსებული მონაკვეთი P წერტილით შუაზე იყოფა.

10.18. გამოთვალეთ საკოორდინატო ღერძებითა და მოცემული წრფით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი:

1) $3x+2y-12=0$; 2) $7x-2y-14=0$.

10.19. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(3;\ -7)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთს ნულისაგან განსხვავებულ ერთიდაიგივე სიდიდის მონაკვეთებს.

10.20. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(2;\ 3)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთს ნულისაგან განსხვავებულ ერთიდაიგივე სიგრძის მონაკვეთებს.

10.21. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $C(1;\ 1)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს სამკუთხედს 2-ის ტოლი ფართობით.

10.22. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(8;\ 6)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს სამკუთხედს 12-ის ტოლი ფართობით.

10.23. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(12;\ 6)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს სამკუთხედს 150-ის ტოლი ფართობით.

10.24. შემდეგი წრფეების განტოლებები ჩაწერეთ ზოგადი სახით:

1) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{2}$; 2) $\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y-1}{2}$;

3) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{0}$; 4) $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{6}$.

10.25. შემდეგი წრფეების განტოლებები ჩაწერეთ ზოგადი სახით:

1) $\begin{cases}x=2t-1\\ y=2t+1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=t+1\\ y=3t;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=3\\ y=t-1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=2t\\ y=5t.\end{cases}$

10.26. შეადგინეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება:

1) $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ -1)$; 2) $A(2;\ -2)$, $B(2;\ 3)$;

3) $A(-2;\ -1)$, $B(2;\ 1)$; 4) $A(7;\ 1)$, $B(1;\ 1)$;

5) $A(0;\ 1)$, $B(2;\ -1)$; 6) $A(0;\ -2)$, $B(3;\ 0)$.

10.27. აჩვენეთ, რომ $A\ (x_1;\ y_1)$ და $B\ (x_2;\ y_2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

1) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0;$ 2) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

10.28. აჩვენეთ, რომ $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$ და $C\ (x_3;\ y_3)$ წერტილების ერთ წრფეზე მდებარეობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10.29. იპოვეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტი:

1) $A(2;\ -5)$, $B(3;\ 2)$; 2) $A(5;\ -3)$, $B(-1;\ 6)$.

10.30. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A\ (-2;\ 3)$, $B\ (2;\ 0)$, $C\ (-4;\ -1)$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები.

10.31. $A\ (-12;\ -13)$ და $B\ (-2;\ -5)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე იპოვეთ წერტილი, რომლის აბსცისაა 3.

10.32. $A\ (2;\ -3)$ და $B\ (-6;\ 5)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ორდინატა — 5-ის ტოლია.

10.33. ოთხკუთხედის წვეროებია $A\ (-2;\ 14)$, $B\ (4;\ -2)$, $C\ (6;\ -2)$ და $D\ (6;\ 10)$. იპოვეთ AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

10.34. გამოარკვიეთ, კვეთს თუ არა მოცემული წრფე AB მონაკვეთს:

1) $3x-y+2=0$, $A(-1;\ 14)$, $B(4;\ 4)$;

2) $x+2y-3=0$, $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 3)$;

10.35. შეადგინეთ M_0 წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომლის კუთხური კოეფიციენტია k:

1) $M_0(-2;\ 1)$, $k=2$; 2) $M_0(0;\ 2)$, $k=-1$.

10.36. შეადგინეთ M_0 წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს:

1) $M_0(-3;\ 1)$, $\alpha = 135°$; 2) $M_0(0;\ -2)$, $\alpha = 60°$.

10.37. შეამოწმეთ, პარალელურია თუ არა წრფეები:

1) $y = 2x - 5$, $y = 2x + 1$;

2) $y = -x + 3$, $y = x - 1$;

3) $2x - 3y + 4 = 0$, $3x + 4y - 3 = 0$;

4) $x - 3y - 2 = 0$, $-2x + 6y + 7 = 0$;

5) $9x + 3y + 2 = 0$, $y = -3x + 1$;

6) $x + 3y - 6 = 0$, $y = 2x - 3$?

10.38. შეამოწმეთ, პერპენდიკულარულია თუ არა წრფეები:

1) $y = \frac{1}{3}x + 2$, $y = -3x - 1$;

2) $y = -\frac{4}{3}x + 4$, $y = -\frac{3}{4}x - 2$;

3) $2x - y - 1 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$;

4) $2x - 2y + 1 = 0$, $3x + 3y + 1 = 0$;

5) $2x + 10y - 5 = 0$, $y = 5x - 1$;

6) $x - 3 = 0$, $y - 2 = 0$?

10.39. α-ს რა მნიშვნელობებისათვისაა $3\alpha x - 8y + 13 = 0$ და $(\alpha + 1)x - 2\alpha y - 21 = 0$ წრფეები პარალელური?

10.40. α-ს რა მნიშვნელობებისათვისაა $(3\alpha + 2)x + (1 - 4\alpha)y + 8 = 0$ და $(5\alpha - 2)x + (\alpha + 4)y - 7 = 0$ წრფეები პერპენდიკულარული?

10.41. იპოვეთ იმ წრფის კუთხური კოეფიციენტი, რომელიც $2x + 5y - 2 = 0$ წრფის: 1) პარალელურია; 2) პერპენდიკულარულია.

10.42. შეადგინეთ M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პარალელურად გამავალი წრფის განტოლება:

1) $M_0(0;\ 2)$, $y = \frac{1}{2}x - 1$;

2) $M_0(1;\ 1)$, $y = -3x$;

3) $M_0(2;\ 1)$, $2x + 3y + 4 = 0$;

4) $M_0(-2;\ -5)$, $3x + 4y - 2 = 0$;

5) $M_0(-1;\ 3)$, $x - 4 = 0$;

6) $M_0(1;\ 3)$, $y + 2 = 0$.

10.43. შეადგინეთ M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლება:

1) $M_0(2;\ 2)$, $\quad y = 3x - 1$;

2) $M_0(4;\ 0)$, $\quad y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{5}$;

3) $M_0(1;\ 3)$, $\quad 3x - 3y - 1 = 0$;

4) $M_0(2;\ -1)$, $\quad x - 6y + 12 = 0$;

5) $M_0(2;\ 5)$, $\quad x + 3 = 0$;

6) $M_0\left(\dfrac{1}{6};\ 2\right)$, $\quad 2y - 1 = 0$.

10.44. განსაზღვრეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

1) $y = 2x + 5$, $\quad y = -3x + 1$;

2) $y = \dfrac{3}{2}x + 7$, $\quad y = -\dfrac{2}{3}x - 3$;

3) $5x - y + 7 = 0$, $\quad 3x + 2y = 0$;

4) $2x + 3y - 15 = 0$, $\quad x - 2y - 7 = 0$;

5) $3x + 2y - 1 = 0$, $\quad y = \dfrac{5}{2}x + 3$;

6) $2y - 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0$, $\quad y + 2 = 0$;

7) $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = t + 3; \end{cases}$

8) $2x - 3y + 5 = 0$, $\quad \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -2t + 1; \end{cases}$

9) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4}$, $\quad \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{3}$;

10) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{3}$, $\quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2. \end{cases}$

10.45. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან წრფემდე:

1) $M(2;\ -1)$, $\quad 4x + 3y + 10 = 0$;

2) $M(0;\ -3)$, $\quad 5x - 12y - 23 = 0$;

3) $M(-2;\ 3)$, $\quad y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$;

4) $M(3;\ 1)$, $\quad 3y - 1 = 0$;

5) $M(1;\ -1)$, $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 3t - \dfrac{5}{8}; \end{cases}$

6) $M(-1;\ 0)$, $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2}$.

10.46. $A(2;\ -3)$ წერტილი იმ კვადრატის წვეროა, რომლის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა $3x-2y+1=0$. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

10.47. მოცემულია მართკუთხედის ორი გვერდის განტოლებები $4x-y-7=0$, $x+4y+4=0$ და ერთ-ერთი წვერო — $A(-2;\ 2)$. გამოთვალეთ მართკუთხედის ფართობი.

10.48. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $P(-1;\ 3)$ წერტილზე და $Q(5;\ 1)$ წერტილიდან დაშორებულია 2-ის ტოლი მანძილით.

10.49. იპოვეთ მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის:

1) $3x+y-3\sqrt{10}=0$, $6x+2y+5\sqrt{10}=0$;

2) $2x-y+3=0$, $y=2x-7$;

3) $x-1=0$, $2x+7=0$;

4) $\dfrac{x}{-4}=\dfrac{y+1}{3}$, $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-3}{-6}$.

10.50. კვადრატის ორი გვერდის განტოლებებია $x-3y+5=0$, $x-3y+25=0$. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

10.51. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია $3x+4y-5=0$ წრფის და მისგან დაშორებულია $h=4$ მანძილით.

10.52. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული ორი მოცემული პარალელური წრფიდან:

1) $3x-2y-1=0$, $3x-2y-13=0$;

2) $5x+y+3=0$, $5x+y-17=0$;

3) $2x+3y-6=0$, $4x+6y+17=0$;

4) $3x-15y-1=0$, $x-5y-2=0$.

10.53. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია $x-2y+1=0$, $2x-4y+15=0$ წრფეების და მათ შორის მანძილს ყოფს $1:2$ ფარდობით.

10.54. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $2x+3y-13=0$, $4x-5y+7=0$ და $3x-y-14=0$. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

10.55. სამკუთხედის ორი წვეროა $A(3;\ 1)$ და $B(-1;\ 2)$, ხოლო C წვერო ძევს $3x+y-5=0$ წრფეზე. იპოვეთ C წვეროს კოორდინატები, თუ სამკუთხედის ფართობი 4,5-ის ტოლია.

10.56. სამკუთხედის ორი წვეროა $A(-2;\ 3)$ და $B(1;\ 1)$, ხოლო მედიანების გადაკვეთის წერტილი ძევს $2x-y-4=0$ წრფეზე. იპოვეთ C წვეროს კოორდინატები, თუ სამკუთხედის ფართობი 13,5-ის ტოლია.

10.57. შეადგინეთ $A(5;\ -4)$, $B(-1;\ 3)$, $C(-3;\ -2)$ სამკუთხედის წვეროებზე მოპირდაპირე გვერდების პარალელურად გავლებული წრფეების განტოლებები.

10.58. სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია $M(2;\ 1)$, $N(5;\ 3)$ და $P(3;\ -4)$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები.

10.59. მოცემულია $P(2;\ 3)$ და $Q(-1;\ 0)$ წერტილები. შეადგინეთ Q წერტილზე PQ მონაკვეთის პერპენდიკულარულად გავლებული წრფის განტოლება.

10.60. შეადგინეთ წრფის განტოლება, თუ კოორდინატთა სათავიდან ამ წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის ფუძეა $P(2;\ 3)$ წერტილი.

10.61. მოცემულია $M(3;\ 2)$ და $N(4;\ 1)$ წერტილები. ორდინატთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი P წერტილი, რომ კუთხე PMN იყოს მართი.

10.62. მოცემულია $M(2;\ 2)$ და $N(5;-2)$ წერტილები. აბსცისთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი P წერტილი, რომ კუთხე MPN იყოს მართი.

10.63. იპოვეთ $P(-6;\ 4)$ წერტილის გეგმილი $4x-5y+3=0$ წრფეზე.

10.64. იპოვეთ $P(-8;\ 12)$ წერტილის გეგმილი $A(2;\ -3)$ და $B(-5;\ 1)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე.

10.65. იპოვეთ $P(-2;\ -9)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $2x+5y-38=0$ წრფის მიმართ.

10.66. იპოვეთ $P(1;\ 2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $A(1;\ 0)$ და $B(-1;\ -2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის მიმართ.

10.67. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $3x-y+2=0$ წრფისა $M(-2;\ -2)$ წერტილის მიმართ.

10.68. კვადრატის მოპირდაპირე წვეროებია $A(3;\ 0)$ და $C(-4;\ 1)$. იპოვეთ დანარჩენი ორი B და D წვეროს კოორდინატები.

10.69. კვადრატის მეზობელი წვეროებია $A(2;\ -1)$ და $B(-1;\ 3)$. იპოვეთ დანარჩენი ორი C და D წვეროს კოორდინატები.

10.70. შეადგინეთ $2x+5y-8=0$ და $x-3y+4=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე და $M(4;\ 3)$ წერტილზე გავლებული წრფის განტოლება.

10.71. შეადგინეთ $2x+y-5=0$ და $x-y+2=0$ წრფეების გადა-

კვეთის წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც $A\ (2;4)$ და $B\ (-4;6)$ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს შუაზე ყოფს.

10.72. შეადგინეთ $2x+3y-18=0$ და $x-5y+17=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი საკოორდინატო ღერძების პარალელური წრფეების განტოლებები.

10.73. შეადგინეთ $2x-3y+7=0$ და $3x+y-6=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე $2x-y-5=0$ წრფის პარალელურად გამავალი წრფის განტოლება.

10.74. შეადგინეთ $x-5y+9=0$ და $3x+2y-7=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე $x+y-4=0$ წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლება.

10.75. სამკუთხედის წვეროებია $A\ (2;1)$, $B\ (-1;-1)$ და $C\ (3;2)$. შეადგინეთ სიმაღლეების განტოლებები.

10.76. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $2x-y+3=0$, $x+5y-7=0$ და $3x-2y+6=0$. შეადგინეთ სიმაღლეების განტოლებები.

10.77. სამკუთხედის წვეროებია $A\ (3;2)$, $B\ (5;-2)$ და $C\ (1;0)$. შეადგინეთ მედიანების განტოლებები.

10.78. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $x+y-2=0$, $2x+y-3=0$ და $3x+2y-6=0$. შეადგინეთ მედიანების განტოლებები.

10.79. სამკუთხედის წვეროებია $A\ (-1;-3)$, $B\ (-2;1)$ და $C\ (3;1)$. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან BD მედიანამდე.

10.80. სამკუთხედის წვეროებია $A\ (1;-2)$, $B\ (5;4)$ და $C\ (-2;0)$. შეადგინეთ A წვეროსთან მდებარე შიგა და გარე კუთხეების ბისექტრისების განტოლებები.

10.81. სამკუთხედის წვეროებია $A\ (0;-4)$, $B\ (3;0)$ და $C\ (0;6)$. იპოვეთ მანძილი C წვეროდან A კუთხის ბისექტრისამდე.

10.82. შეადგინეთ $2x-5y-1=0$ და $x+4y-7=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც მონაკვეთს ბოლოებით $A\ (4;-3)$ და $B\ (-1;2)$ ყოფს $\lambda=\dfrac{2}{3}$ ფარდობით (A ბოლოდან).

10.83. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $x-y+2=0$ (AB), $x-2=0$ (BC) და $x+y-2=0$ (AC). D წერტილი AC გვერდს ყოფს ფარდობით $1:3$ (A ბოლოდან). შეადგინეთ B და D წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

10.84. სამკუთხედის წვეროებია $A\ (1;-1)$, $B\ (-2;1)$ და $C\ (3;5)$. შეადგინეთ B წვეროდან გავლებული მედიანისადმი A წვეროდან გავლებული პერპენდიკულარის განტოლება.

10.85. სამკუთხედის წვეროებია A (2; —2), B (3; —5) და C (5; 7). შეადგინეთ A წვეროდან გავლებული ბისექტრისისადმი C წვეროდან გავლებული პერპენდიკულარის განტოლება.

10.86. სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია M (—1; 1), N (1; 9) და P (9; 1). შეადგინეთ გვერდების შუაპერპენდიკულარების განტოლებები.

10.87. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $x+y-3=0$, $2x+3y-7=0$ და $3x+4y-8=0$. იპოვეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის კოორდინატები.

10.88. A (—4; 5) იმ კვადრატის წვეროა, რომლის დიაგონალის განტოლებაა $7x-y+8=0$. შეადგინეთ კვადრატის გვერდებისა და მეორე დიაგონალის განტოლებები.

10.89. მოცემულია მართკუთხედის ორი გვერდის განტოლებები $2x-3y+5=0$, $3x+2y+7=0$ და ერთ-ერთი წვერო A (2; —3). შეადგინეთ დანარჩენი გვერდების განტოლებები.

10.90. მოცემულია მართკუთხედის ორი გვერდის განტოლებები $x-2y+15=0$, $x-2y=0$ და ერთ-ერთი დიაგონალის განტოლება $7x+y-15=0$. იპოვეთ წვეროების კოორდინატები.

10.91. მოცემულია პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებები $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ და ერთ-ერთი დიაგონალის განტოლება $3x+2y+3=0$. იპოვეთ პარალელოგრამის წვეროების კოორდინატები.

10.92. პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებებია $x-y-2=0$ და $x-5y+6=0$. შეადგინეთ დანარჩენი გვერდებისა და დიაგონალების განტოლებები, თუ დიაგონალები კოორდინატთა სათავეში იკვეთებიან.

10.93. პარალელოგრამის ორი მეზობელი წვეროა A (—3; —1) და B (2; 2), ხოლო დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია M (3; 0). შეადგინეთ პარალელოგრამის გვერდების განტოლებები.

10.94. პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებებია $2x-y+5=0$ და $x-2y+4=0$, ხოლო M (1; 4) დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ პარალელოგრამის სიმაღლეები.

10.95. პარალელოგრამის მომდევნო წვეროებია A (0; 0), B (1; 3), C (7;1). იპოვეთ დიაგონალებს შორის კუთხე და აჩვენეთ, რომ პარალელოგრამი წარმოადგენს მართკუთხედს.

10.96. შეადგინეთ M (2; 1) წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც $2x+3y+4=0$ წრფესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს.

10.97. შეადგინეთ M (—3; 2) წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც $\sqrt{3}\,x-y+20=0$ წრფესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს.

10.98. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის წვეროა A (4; 8), ხოლო კათეტის განტოლებაა $x+2y-10=0$. შეადგინეთ მეორე კათეტისა და ჰიპოტენუზის განტოლებები.

10.99. კვადრატის მოპირდაპირე წვეროებია A (—1; 3) და B (6; 2). შეადგინეთ გვერდების განტოლებები.

10.100. კვადრატის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა $x-2y+12=0$, ხოლო კვადრატის ცენტრია M (1; —1). შეადგინეთ დანარჩენი გვერდების განტოლებები.

10.101. შეადგინეთ ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების ბისექტრისების განტოლებები:

1) $x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$;

2) $x-2y-3=0$, $2x+4y+7=0$.

10.102. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების განტოლებებია $7x-y-9=0$ და $x+y-7=0$, ხოლო M (6; —7) წერტილი ძევს ფუძეზე. შეადგინეთ ფუძის განტოლება.

10.103. კუთხის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა $3x-2y+6=0$, ხოლო ბისექტრისის განტოლებაა $x-3y+5=0$. შეადგინეთ მეორე გვერდის განტოლება.

10.104. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო A (0; 1), B (2; 0) და ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი M (1; 1). შეადგინეთ გვერდების განტოლებები და განსაზღვრეთ მესამე წვეროს კოორდინატები.

10.105. M (3; 4) წერტილზე გამავალი სხივი Ox ღერძს ეცემა α კუთხით. შეადგინეთ დაცემული და არეკლილი სხივების განტოლებები, თუ $\operatorname{tg}\alpha=2$.

10.106. სხივი, რომლის განტოლებაა $x-2y+5=0$, ეცემა $3x-2y+7=0$ წრფეს. შეადგინეთ არეკლილი სხივის განტოლება.

10.107. სხივი, რომელიც გადის M (2; 2) წერტილზე ეცემა $x+y-2=0$ წრფეს. იპოვეთ დაცემის წერტილის კოორდინატები, თუ არეკლილი სხივი გადის N (3; 1) წერტილზე.

10.108. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო A (2; —3) და B (5; 1), BC გვერდის განტოლებაა $x+2y-7=0$ და AM მედიანის განტოლებაა $5x-y-13=0$. შეადგინეთ C წვეროდან გავლებული სიმაღლის განტოლება.

10.109. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო A (4; 6) და B (2; —10). იპოვეთ მესამე C წვეროს კოორდინატები, თუ სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია M (2;5).

10.110. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო A (—1; 5) და B (3; —3). შეადგინეთ გვერდების განტოლებები, თუ სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია M (3; 4).

10.111. ABC სამკუთხედში მოცემულია: AB გვერდის განტოლება $5x-3y+2=0$, AM სიმაღლის განტოლებაა $4x-3y+1=0$ და BN სიმაღლის განტოლებაა $7x+2y-22=0$. შეადგინეთ სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდის და მესამე სიმაღლის განტოლებები.

10.112. სამკუთხედის ორი სიმაღლის განტოლებებია $x+y-2=0$ და $9x-3y-4=0$, ხოლო ერთ-ერთი წვეროა A (2; 2). შეადგინეთ გვერდების განტოლებები.

10.113. სამკუთხედში ორი გვერდის განტოლებებია $2x-3y+7=0$ და $6x+5y-21=0$, ხოლო M (2; —1) მესამე გვერდის შუაწერტილია. შეადგინეთ მესამე გვერდის განტოლება.

10.114. სამკუთხედის ორი მედიანის განტოლებებია $2x+11y-7=$ $=0$ და $10x+13y-21=0$, ხოლო ერთ-ერთი წვეროა A (1; 3). შეადგინეთ გვერდების განტოლებები.

10.115. სამკუთხედის ერთი წვეროდან გავლებულია სიმაღლე $x-7y+15=0$ და ბისექტრისა $7x+y+5=0$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები, თუ მისი ერთ-ერთი წვეროა B (2; 6).

10.116. სამკუთხედის ბისექტრისების განტოლებებია $x-1=0$ და და $x-y-1=0$. შეადგინეთ მისი გვერდების განტოლებები, თუ სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროა A (4; —1).

10.117. სამკუთხედის სხვადასხვა წვეროებიდან გავლებულია სიმაღლე $3x-4y+27=0$ და ბისექტრისა $x+2y-5=0$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები, თუ სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროა B (2; —1).

10.118. სამკუთხედის ერთი წვეროდან გავლებულია სიმაღლე $2x-3y+12=0$ და მედიანა $2x+3y=0$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები, თუ სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროა C (4; —1).

10.119. სამკუთხედის სხვადასხვა წვეროებიდან გავლებულია სიმაღლე $3x+y+11=0$ და მედიანა $x+2y+7=0$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები, თუ სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროა B (2; 7).

10.120. სამკუთხედის ერთი წვეროდან გავლებულია ბისექტრისა $x+2y-5=0$ და მედიანა $4x+13y-10=0$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები, თუ მისი ერთ-ერთი წვეროა C (4; 3).

10.121. სამკუთხედის სხვადასხვა წვეროებიდან გავლებულია ბისექტრისა $x-4y+10=0$ და მედიანა $6x+10y-59=0$. შეადგინეთ გვერდების განტოლებები, თუ მისი ერთ-ერთი წვეროა A (3; —1).

10.122. აბსცისთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც მანძილების ჯამი M და N წერტილებამდე არის უმცირესი:

1) $M(6;\ 1)$, $N(-3;\ -2)$;

2) $M(5;\ -2)$, $N(-4;\ -4)$.

10.123. ორდინატთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც მანძილების სხვაობა M და N წერტილებამდე არის უდიდესი:

1) $M(1;\ -3)$, $N(2;\ -7)$;

2) $M(-6;\ -5)$, $N(2;\ 5)$.

10.124. $2x-y-5=0$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც მანძილების ჯამი $M(-7;1)$ და $N(-5;5)$ წერტილებამდე არის უმცირესი.

10.125. $3x-y-1=0$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი რომლიდანაც მანძილების სხვაობა $M(4;\ 1)$ და $N(0;\ 4)$ წერტილებამდე არის უდიდესი.

§ 11. სიბრტყე

11.1. მოცემულია სიბრტყე $x-3y+2z-5=0$. შემდეგი წერტილებიდან რომელი მდებარეობს მასზე და რომელი არა: $M_1(1;\ 2;\ 5)$, $M_2(-2;\ 1;\ 4)$, $M_3(5;\ 3;\ 4)$, $M_4(3;\ 0;\ 1)$.

11.2. $A(2;\ 4;\ a)$, $B(b;\ 5;\ -3)$ და $C(-1;\ c;\ 2)$ წერტილები მდებარეობენ $5x+y-3z+1=0$ სიბრტყეზე. იპოვეთ a, b და c.

11.3. იპოვეთ M წერტილის კოორდინატები, თუ ის მდებარეობს $x-5y+z=0$ სიბრტყეზე და $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის საკოორდინატო ღერძებთან ტოლ კუთხეებს ქმნის.

11.4. იპოვეთ $4x-2y+3z-24=0$ სიბრტყის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და ააგეთ ეს სიბრტყე.

11.5. შეადგინეთ M წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}$:

1) $M(-6;\ 1;\ 3)$, $\vec{n}(2;\ 4;\ 5)$;

2) $M(1,\ -3;\ -2)$, $\vec{n}(5;\ -1;\ 4)$.

11.6. შეადგინეთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}(7;-2;2)$.

11.7. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც Oz ღერძზე მოკვეთს $C=-3$ მონაკვეთს და რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}(4;\ -2;\ 5)$

11.8. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე $\overline{M_2M_3}$ ვექტორის პერპენდიკულარულად:

1) $M_1(3;\ 5;\ 0)$, $M_2(-4;\ 2;\ 7)$, $M_3(5;\ -3;\ 4)$;

2) $M_1(8;\ 1;\ -3)$, $M_2(3;\ 3;\ 3)$, $M_3(-2;\ 4;\ 7)$.

11.9. მოცემულია $M_1(-5; 2; 1)$ და $M_2(2; -2; 3)$ წერტილები. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე $\overline{M_1M_2}$ ვექტორის პერპენდიკულარულად.

11.10. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $P(1; -4; 2)$ და $Q(7; 1; -5)$ წერტილებიდან.

11.11. შეამოწმეთ, პარალელურია თუ არა სიბრტყეები:

1) $x-4y+2z-5=0, \quad x-4y+2z+1=0;$

2) $3x-7y+z-1=0, \quad 6x-14y+2z-5=0;$

3) $5x+y-3z-2=0, \quad 10x+2y+6z+7=0,$

4) $x-z+1=0, \qquad 3x-3z+2=0.$

11.12. a და b-ს რა მნიშვნელობებისთვისაა პარალელური შემდეგი სიბრტყეები:

1) $5x-ay+3z+1=0, \quad 10x+9y+bz-2=0;$

2) $(a+1)x-2y+(3-b)z+(a-b)=0, \quad 9x+6y+9z-13=0.$

11.13. შეამოწმეთ პერპენდიკულარულია თუ არა სიბრტყეები:

1) $5x-2y+3z+2=0, \quad x+y-z=0;$

2) $6x-7y+z+1=0, \quad 5x+4y-z+1=0;$

3) $4x+y-12=0, \qquad 3x-12y+5z=0;$

4) $3y-2z+1=0, \qquad 2x+3y-1=0.$

11.14. a-ს რა მნიშვნელობებისთვისაა პერპენდიკულარული შემდეგი სიბრტყეები:

1) $ax+5y-3z+2=0, \qquad 2x-4y+(a+2)z-2=0;$

2) $(a+1)x-ay+2z-4=0, \quad ax+6y+3z+5=0.$

11.15. შეადგინეთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $6x+4y-2z+9=0$ სიბრტყის პარალელურია.

11.16. შეადგინეთ $M(2; 2; 5)$ წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $4x-y+3z-1=0$ სიბრტყის პარალელურია.

11.17. შეადგინეთ $M(-2; 4; -5)$ წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) Oxy სიბრტყის პარალელურია; 2) Oxz სიბრტყის პარალელურია; 3) Oyz სიბრტყის პარალელურია.

11.18. განსაზღვრეთ a-ს რა მნიშვნელობისთვისაა $(a-3)x+(a^2-5a+4)y+(6-a)z+a=0$ სიბრტყე: 1) Ox ღერძის პარალელური; 2) Oy ღერძის პარალელური; 3) Oz ღერძის პარალელური; 4) გადის კოორდინატთა სათავეზე.

11.19. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის: 1) Ox ღერძზე და $M(3; -4; 1)$ წერტილზე; 2) Oy ღერძზე და $M(-2; 5; -1)$ წერტილზე; 3) Oz ღერძზე და $M(1; 4; 5)$ წერტილზე.

11.20. განსაზღვრეთ a და b-ს რა მნიშვნელობებისთვისაა $(a+b)x+(a-b+2)y+(2a-b+6)z+3a-b=0$ სიბრტყე: 1) Oxy სიბრტყის პარალელური; 2) Oxz სიბრტყის პარალელური; 3) Oyz სიბრტყის პარალელური.

11.21. შეადგინეთ $M_1(1; -1; 3)$ და $M_2(-2; 0; 1)$ წერტილებზე გავლებული იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც პარალელურია: 1) Ox ღერძის; 2) Oy ღერძის.

11.22. შეადგინეთ M წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების პარალელურია:

1) $M(3; 1; -2)$, $\vec{a}(2; 1; -1)$, $\vec{b}(1; -2; -3)$;

2) $M(0; 1; 2)$, $\vec{a}(2; 0; 1)$, $\vec{b}(1; 1; 0)$.

11.23. შეადგინეთ M წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც მოცემული ორი სიბრტყის პერპენდიკულარულია:

1) $M(0; 1; -1)$, $x+y-z+1=0$, $2x-y+z+2=0$;

2) $M(-2; 1; -3)$, $3x-y+z-1=0$, $x+2y-z=0$.

11.24. შეადგინეთ M_1 და M_2 წერტილებზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარულია:

1) $M_1(1; -1; 0)$, $M_2(-2; 0; 1)$, $x-2y+z+3=0$;

2) $M_1(0; 1; -2)$, $M_2(1; -1; 0)$, $2x+y-z+1=0$.

11.25. შეადგინეთ M_1 და M_2 წერტილებზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $\vec{a}$ ვექტორის პარალელურია:

1) $M_1(-1; 0; 2)$, $M_2(0; -2; 1)$, $\vec{a}(2; -1; 0)$;

2) $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(-2; 1; -1)$, $\vec{a}(-1; 2; -3)$.

11.26. შეადგინეთ M_1, M_2, M_3 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება: 1) $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2; 5; 7)$, $M_3(1; -1; -6)$; 2) $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(0; -1; 2)$, $M_3(2, 3; -1)$.

11.27. $M(2; 3; -5)$ წერტილიდან საკოორდინატო სიბრტყეებზე დაშვებულია პერპენდიკულარები. შეადგინეთ ამ პერპენდიკულარების საკოორდინატო სიბრტყეებთან თანაკვეთის წერტილებზე გავლებული სიბრტყის განტოლება.

11.28. განსაზღვრეთ კუთხე შემდეგ სიბრტყეებს შორის:

1) $x-4y-z+5=0,\quad 5x-4y+3z-1=0;$

2) $2x-3y+6z-1=0,\quad x-2y-2z+4=0;$

3) $x+z+1=0,\quad x+y-5=0;$

4) $2x-y+7z+3=0,\quad x-5y-z+1=0.$

11.29. იპოვეთ კუთხე $M(2;-1;3)$ წერტილზე გამავალ იმ სიბრტყეებს შორის, რომელთაგან ერთი გადის Ox ღერძზე, მეორე კი Oz ღერძზე.

11.30. შემდეგი სიბრტყეების განტოლებები ჩაწერეთ ღერძთა მონაკვეთებში და ააგეთ ნახაზი:

1) $4x+3y+6z-24=0;$ 2) $5x-y+3z+30=0;$

3) $2x+5y+3z-20=0;$ 4) $4x+3y-5z+8=0.$

11.31. იპოვეთ იმ სამკუთხედების ფართობები, რომელთაც $12x-9y-z+36=0$ სიბრტყე მოჰკვეთს საკოორდინატო კუთხეებიდან.

11.32. იპოვეთ იმ პირამიდის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო სიბრტყეებით და $6x-4y+3z-12=0$ სიბრტყით.

11.33. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(6;8;1)$ წერტილზე და Oy და Oz ღერძებიდან მოჰკვეთს შესაბამისად $b=-4$ და $C=1$ მონაკვეთებს.

11.34. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(4;3;-10)$, $M_2(-2;-3;-5)$ წერტილებზე და Ox ღერძზე მოჰკვეთს $a=-2$ მონაკვეთს.

11.35. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-5;10;-2)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებიდან მოჰკვეთს ნულისაგან განსხვავებულ ტოლი სიდიდის მონაკვეთებს.

11.36. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(-4;4;3)$ და $M_2(-1;-3;9)$ წერტილებზე და Ox და Oy ღერძებზე მოჰკვეთს ნულისაგან განსხვავებულ ერთიდაიგივე სიგრძის მონაკვეთებს.

11.37. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $\vec{P}(-2;1;-6)$ ვექტორის პარალელურია და Ox და Oy ღერძებიდან მოჰკვეთს შესაბამისად $a=2$, $c=-3$ მონაკვეთებს.

11.38. შეადგინეთ $P(0;3;0)$ და $Q(1;0;0)$ წერტილებზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც Oyz სიბრტყესთან ადგენს $60°$-იან კუთხეს.

11.39. შეადგინეთ $3x-4y+z-3=0$ და $x-y+2z+1=0$ სიბრ-

ტყეების თანაკვეთის წრფეზე და $M(-1; 2; 0)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

11.40. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $4x-y+3z-1=0$ და $x+2y-z+3=0$ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე Ox ღერძის პარალელურად.

11.41. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $3x+y-z+2=0$ და $x-2y+2z-1=0$ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე $\vec{b}(-1; 1; 2)$ ვექტორის პარალელურად.

11.42. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $2x-y-12z-3=0$ და $3x+y-7z-2=0$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე $x+2y+5z-1=0$ სიბრტყის პერპენდიკულარულად.

11.43. შეადგინეთ $x+3y-z+4=0$ და $2x-y+z-1=0$ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც Oy და Oz ღერძებზე მოჰკვეთს ტოლი სიდიდის მონაკვეთებს.

11.44. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $(1+\sqrt{2})x+2y+2z-4=0$ და $x+y+z+1=0$ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე და Oxy სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს.

11.45. გამოარკვიეთ ეკუთვნის თუ არა მოცემული სიბრტყე სიბრტყეთა კონას:

1) $5x-y-1=0, \quad \lambda_1(2x-y+z-3)+\lambda_2(x+y-2z+5)=0;$

2) $4x+y-5z-6=0, \lambda_1(2x-y-3z-1)+\lambda_2(3x-y-z-5)=0.$

11.46. განსაზღვრეთ a და b რიცხვების რა მნიშვნელობებისათვის ეკუთვნის $4x+ay+5z+b=0$ სიბრტყე $\lambda_1(x-7y+3z-3)+$ $+\lambda_2(-2x-9y+z+5)=0$ სიბრტყეთა კონას.

11.47. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე:

1) $M(-3; 1; 2), \quad 2x-3y+6z+11=0;$

2) $M(5; 3; 6), \quad x+2y-2z-8=0;$

3) $M(2; -3; -3), \quad 3x-4z+2=0;$

4) $M(1; -5; 3), \quad 2x-5y-3z=0.$

11.48. იპოვეთ მანძილი $P(2; 5; -1)$ წერტილიდან $M_1(-1; 10; 1)$, $M_2(0; -2; -1)$, $M_3(-1; 2; 0)$ წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე.

11.49. იპოვეთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის:

1) $6x+2y-3z+1=0, \quad 6x+2y-3z+15=0;$

2) $x+2y-2z-3=0, \quad x+2y-2z-15=0.$

11.50. კუბის ორი წახნაგი ძევს სიბრტყეებზე $x-2y-2z-12=0$ და $x-2y-2z-6=0$. გამოთვალეთ კუბის მოცულობა.

11.51. Oz ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც $3x-2y+6z+3=0$ სიბრტყიდან დაშორებულია 3-ის ტოლი მანძილით.

11.52. Oy ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $M(-2; 0; 1)$ წერტილიდან და $2x-6y-3z+9=0$ სიბრტყიდან.

11.53. Ox ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $3x-4y-z+2=0$ და $x+5z+8=0$ სიბრტყეებიდან.

11.54. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული მოცემული ორი პარალელური სიბრტყიდან:

1) $5x+2y-z-3=0, \quad 5x+2y-z-11=0;$

2) $4x-2y+6z-3=0, \quad 2x-y+3z+5=0.$

11.55. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $2x-2y-z-3=0$ სიბრტყის პარალელურია და მისგან დაშორებული $\rho=5$ მანძილით.

11.56. შეადგინეთ იმ სიბრტყეების განტოლებები, რომლებიც შუაზე ჰყოფენ ორი მოცემული სიბრტყით შედგენილ ორწახნაგა კუთხეებს:

1) $5x-2y+z-3=0, \quad 2x-y-5z+6=0;$

2) $x-4y+z+6=0 \quad 4x+5y-3z-1=0.$

11.57. შეადგინეთ $x-3y+7z+36=0$ და $2x+y-z-15=0$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება, თუ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან ამ სიბრტყემდე 3-ის ტოლია.

11.58. შეადგინეთ $x+7y-3z+36=0$ და $2x-y+z-15=0$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება, თუ მანძილი $M(3; -3; -2)$ წერტილიდან ამ სიბრტყემდე 7-ის ტოლია.

11.59. შეადგინეთ $3x-4y+z+6=0$ და $2x-3y+z+2=0$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება, თუ ეს სიბრტყე თანაბრადაა დაშორებული $M_1(3; -4; -6)$ და $M_2(1; 2; 2)$ წერტილებიდან.

11.60. აჩვენეთ, რომ $2x+4y+z+4=0$, $3x-y-4z+2=0$, $5x+3y-8z-4=0$ სიბრტყეები იკვეთებიან ერთ წერტილში და იპოვეთ ამ წერტილის კოორდინატები.

11.61. აჩვენეთ, რომ სიბრტყეები $x-4y+3z-1=0$, $3x+2y-4z+1=0$ და $9x-8y+z-1=0$ იკვეთებიან ერთ წრფეზე.

11.62. აჩვენეთ, რომ $4x-y+2z+3=0$, $x-3y-5z+2=0$ და $9x-5y-z+7=0$ სიბრტყეების წყვილ-წყვილად თანაკვეთის შედეგად მიღებული წრფეები პარალელურია.

11.63. განსაზღვრეთ a და b-ს მნიშვნელობები, რომელთათვისაც სიბრტყეები: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$ და $x + ay - 6z + 10 = 0$;

1) იკვეთებიან ერთ წერტილში;

2) იკვეთებიან ერთ წრფეზე;

3) წყვილ-წყვილად იკვეთებიან პარალელურ წრფეებზე.

11.64. აჩვენეთ, რომ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ წერტილზე $\vec{a_1}(l_1;\ m_1;\ n_1)$ და $\vec{a_2}(l_2;\ m_2;\ n_2)$ ვექტორების პარალელურად, შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

11.65. აჩვენეთ, რომ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ წერტილზე $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ და $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ სიბრტყეების პერპენდიკულარულად, შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

11.66. აჩვენეთ, რომ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ და $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ წერტილებზე $\vec{a}(l;\ m;\ n)$ ვექტრრის პარალელურად, შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

11.67. აჩვენეთ, რომ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც [გადის $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ და $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ წერტილებზე $Ax + By + Cz + D = 0$ სიბრტყის პერპენდიკულარულად, შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

§ 12. წრფე სივრცეში

12.1. შემდეგ წრფეთა განტოლებები ჩაწერეთ ზოგადი სახით:

1) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-5}$; 2) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+4}{1}$;

3) $\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = -2t - 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2t + 1 \\ z = t - 3. \end{cases}$

12.2. შემდეგ წრფეთა განტოლებები ჩაწერეთ პარამეტრული სახით:

1) $\frac{x+4}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{5}$; 2) $\frac{x+2}{0}=\frac{y}{-3}=\frac{z-4}{1}$;

3) $\begin{cases}3x+4y+z-1=0\\2x+3y-3z-3=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x-2y+5z-3=0\\3x-2y-z-5=0.\end{cases}$

12.3. შემდეგ წრფეთა განტოლებები ჩაწერეთ კანონიკური სახით:

1) $\begin{cases}x=2t-2\\y=t+1\\z=-3t+4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=2\\y=-2t-3\\z=t+2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x+2y-z=0\\2x+y-3z+4=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x+y+z+1=0\\4x+y-2z-2=0.\end{cases}$

12.4. დაადგინეთ შემდეგი წრფეების მდებარეობის თავისებურებანი:

1) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0\\A_2x+B_2y+C_2z=0,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}B_1y+D_1=0\\C_2z+D_2=0,\end{cases}$

3) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+D_2=0,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}A_1x+C_1z+D_1=0\\A_2x+C_2z+D_2=0,\end{cases}$

5) $\begin{cases}A_1x+B_1y=0\\A_2x+B_2y=0,\end{cases}$ 6) $\begin{cases}A_1x+B_1y=0\\C_2z+D_2=0,\end{cases}$

7) $\begin{cases}A_1x+By+Cz+D=0\\A_2x+By+Cz+D=0\end{cases}$ $(A_1\neq A_2)$.

12.5. C და D რიცხვების რა მნიშვნელობებისათვის მდებარეობს

$$\begin{cases}x-y+Cz+D=0\\2x+y+z-7=0\end{cases}$$

წრფე Oxz სიბრტყეში?

12.6. შეადგინეთ M წერტილზე $\vec{a}$ ვექტორის პარალელურად გამავალი წრფის განტოლებები:

1) $M(-2;\ 1;\ 3)$, $\vec{a}(4;\ 1;\ -1)$;

2) $M(3;\ -1;\ 2)$, $\vec{a}(0;\ 2;\ -2)$.

12.7. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის $M(2; -3; 3)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს $\alpha = 45°$, $\beta = 120°$ და $\gamma = 60°$ კუთხეებს.

12.8. შეადგინეთ $M(-2; 1; 0)$ წერტილზე გავლებული წრფის განტოლებები, რომელიც პარალელურია: 1) Ox ღერძის; 2) Oy ღერძის; 3) Oz ღერძის.

12.9. შეადგინეთ M წერტილზე მოცემული წრფის პარალელურად გავლებული წრფის განტოლებები:

1) $M(0; 2; -3)$, $\quad \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{1}$;

2) $M(-5; 0; 3)$, $\quad \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-5}{-3}$;

3) $M(-4; 1; -2)$, $\quad \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t-3 \\ z = 3t+2; \end{cases}$

4) $M(2; 0; -1)$, $\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -t+2 \\ z = 5t-1; \end{cases}$

5) $M(4; 1; -2)$, $\quad \begin{cases} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+2y-3z+7=0; \end{cases}$

6) $M(-3; 0; 2)$, $\quad \begin{cases} 3x+y-2z+6=0 \\ 2x-y+z-4=0. \end{cases}$

12.10. შეადგინეთ M წერტილზე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების პერპენდიკულარულად გავლებული წრფის განტოლებები:

1) $M(1; 2; 3)$, $\quad \vec{a}(2; -1; 3)$, $\quad \vec{b}(3; 1; 4)$

2) $M(3; 0; -1)$, $\quad \vec{a}(4; 0; -1)$, $\quad \vec{b}(2; 2; 5)$.

12.11. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის M წერტილზე მოცემული წრფეების პერპენდიკულარულად:

1) $M(2; 2; 2)$, $\quad \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$, $\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$;

2) $M(-2; 0; 4)$, $\quad \begin{cases} x = 3t+3 \\ y = t-1 \\ z = -t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2t-5 \\ y = 2t-1 \\ z = t+4. \end{cases}$

12.12. პარალელურია თუ არა შემდეგი წრფეები:

1) $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{3}$, $\quad\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-10t-3 \\ z=-6t+4; \end{cases}$

2) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-1}{-5}$, $\quad\begin{cases} 6x-y+2z+20=0 \\ 4x+y+2z+10=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=5t-4 \\ y=-t+2 \\ z=-2t-3, \end{cases}\quad\begin{cases} x+5y+z-3=0 \\ x-y-2z=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x+y+z-2=0 \\ 2x+y-z=0, \end{cases}\quad\begin{cases} 5x+y+2z+23=0 \\ x+y-2z-5=0? \end{cases}$

12.13. პერპენდიკულარულია თუ არა შემდეგი წრფეები:

1) $\dfrac{x+4}{-3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{-2}$, $\quad\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$;

2) $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{-4}$, $\quad\begin{cases} x=t+4 \\ y=-3t+1 \\ z=3t; \end{cases}$

3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$, $\quad\begin{cases} x+3y+3z+1=0 \\ 5x-3y+6z-13=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0, \end{cases}\quad\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0? \end{cases}$

12.14. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე, მდებარეობს Oxy სიბრტყეში და $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+8}{-1}$ წრფის პერპენდიკულარულია.

12.15. იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

1) $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$, $\quad\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$;

2) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{z}{-\sqrt{2}}$, $\quad\begin{cases} x=2t+4 \\ y=-\sqrt{2}\,t \\ z=-\sqrt{2}\,t-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases}2x+y-4z+2=0\\4x-y-5z+4=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2t-2\\y=3t+1\\z=-6t;\end{cases}$

4) $\begin{cases}(1+\sqrt{2})x+y-z-1-3\sqrt{2}=0\\x+y-1=0,\end{cases}$

$\begin{cases}x-(1-\sqrt{2})\,y-z-3\sqrt{2}=0\\2x-(1-2\sqrt{2})\,y-2z+15+6\sqrt{2}=0.\end{cases}$

12.16. შეადგინეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებები:

1) $A\,(0;\ 3;\ 1)$, $B\,(-2;\ 1;\ -3)$; 2) $A\,(3;\ -1;\ 2)$, $B\,(1;\ 2;\ 6)$.

12.17. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის $M\,(-3;4;-2)$ წერტილზე და Oy ღერძს ჰკვეთს მართი კუთხით

12.18. მდებარეობს თუ არა ერთ წრფეზე შემდეგი სამი წერტილი:

1) $A\,(2;\ 4;\ 4)$, $B\,(-3;\ 0;\ 5)$, $C\,(-8;\ -4;\ 5)$;

2) $A\,(6;\ -1;\ 2)$, $B\,(5;\ -3;\ 1)$, $C\,(7;\ 1;\ 3)$?

12.19, y და z რიცხვების რა მნიშვნელობებისათვის მდებარეობენ ერთ წრფეზე წერტილები $A\,(3;\ 2;\ 1)$, $B\,(1;\ y;\ -2)$, $C\,(2;\ -1;\ z)$?

12.20. იპოვეთ მოცემული წრფის საკოორდინატო სიბრტყეებთან გადაკვეთის წერტილები:

1) $\begin{cases}5x+3y-5z+1=0\\5x-y+5z-4=0,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+3y-3z-15=0\\2x-3z-9=0,\end{cases}$

3) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{4}$, 4) $\begin{cases}x=t+1\\y=2t-4\\z=6t.\end{cases}$

12.21. წრფე ჰკვეთს ორ საკოორდინატო სიბრტყეს $M\,(1;-3;0)$ და $N\,(0;2;1)$ წერტილებში. იპოვეთ ამ წრფის მესამე საკოორდინატო სიბრტყესთან თანაკვეთის წერტილი.

12.22. იპოვეთ $M_1\,(-2;2;7)$ და $M_2\,(-4;3;11)$ წერტილებზე გამავალი წრფის საკოორდინატო სიბრტყეებთან თანაკვეთის წერტილები.

12.23. აჩვენეთ, რომ

$$\begin{cases}2x+4y-3z-8=0\\x-4y+7z-4=0\end{cases}$$

წრფე ჰკვეთს Ox ღერძს.

12.24. განსაზღვრეთ, a რიცხვის რა მნიშვნელობისათვის კვეთს

$$\begin{cases}3x-y+2z+a=0\\2x+3y-3z-8=0\end{cases}$$

წრფე: 1) Ox ღერძს; 2) Oy ღერძს; 3) Oz ღერძს.

12.25. სამკუთხედის წვეროებია $A(-4; 3; 2)$, $B(3; 5; -5)$ და $C(1; -1; 3)$. შეადგინეთ A წვეროზე გამავალი მედიანის განტოლებები.

12.26. სამკუთხედის წვეროებია $A(1; -4; 1)$, $B(5; 0; 3)$ და $C(-1; 2; 0)$. შეადგინეთ C წვეროზე გავლებული ბისექტრისის განტოლებები.

12.27. იკვეთებიან, თუ არა შემდეგი წრფეები:

1) $\begin{cases}x=3t-1\\y=2t+3\\z=t-5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\tau+4\\y=5\tau+2\\z=-\tau-2;\end{cases}$

2) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+2}{1}$, $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$?

12.28. m-ის რა მნიშვნელობებისათვის იკვეთებიან წრფეები:

1) $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{2}$, $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-3}{1}$;

2) $\dfrac{x+1}{m}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2}$, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$?

12.29. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია

$$\begin{cases}x=3-6t\\y=2+2t\\z=1-3t.\end{cases}$$

იპოვეთ მისი სიჩქარე.

12.30. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია

$$\begin{cases}x=4-12t\\y=3-3t\\z=4t.\end{cases}$$

იპოვეთ მის მიერ გავლილი მანძილი $t=2$ მომენტიდან $t=6$ მომენტამდე.

12.31. შეადგინეთ იმ წერტილის მოძრაობის განტოლებები, რომელიც საწყის მომენტში იმყოფება $M_0(1; -3; 2)$ წერტილში და მოძრაობს $\vec{P}(2; -2; 1)$ ვექტორის მიმართულებით $v=9$ მუდმივი სიჩქარით.

12.32. შეადგინეთ იმ წერტილის მოძრაობის განტოლებები, რომელიც $M_0(-5; 3; -3)$ წერტილიდან იწყებს სწორხაზოვან თანაბარ მოძრაობას და $t=2$ მომენტისათვის იმყოფება $M_1(7; -13; 5)$ წერტილში.

§ 13. წრფე და სიბრტყე

13.1. შეადგინეთ M წერტილზე მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლებები:

1) $M(3; -1; 4)$, $\quad 2x-y+6z+1=0$;

2) $M(0; 5; -2)$, $\quad 3x+2y+3=0$.

13.2. შეადგინეთ N წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება:

1) $N(4; 1; -1)$, $\quad \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$;

2) $N(-2; 3; 1)$ $\quad \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+5 \\ z=-2t+1. \end{cases}$

13.3. B და C რიცხვების რა მნიშვნელობებისათვის არის $6x+By+Cz-3=0$ სიბრტყე

$$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=4t+1 \\ z=-t+3 \end{cases}$$

წრფის პერპენდიკულარული?

13.4. იპოვეთ კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის:

1) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$, $\quad x+4y-z+2=0$;

2) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-5}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+1}{-1}$, $\quad x-y\sqrt{2}+z-1=0$.

13.5. შეამოწმეთ, პარალელურია თუ არა წრფე და სიბრტყე:

1) $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = -2t + 7, \end{cases}$ $\qquad 4x - 5y + z - 8 = 0;$

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{-1}, \qquad 6x + 5y - 3z + 9 = 0?$

13.6. m-ის რა მნიშვნელობებისათვის არიან პარალელური მოცემული წრფე და სიბრტყე:

1) $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-1}{m}, \qquad 4x - 4y + 3z + 1 = 0;$

2) $\begin{cases} x = 4t - 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 4, \end{cases}$ $\qquad 3x + my + 4z - 8 = 0?$

13.7. აჩვენეთ, რომ წრფე მდებარეობს სიბრტყეზე:

1) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}, \qquad 2x - y - 3z - 4 = 0;$

2) $\begin{cases} 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \\ x - 2y + 3z - 4 = 0, \end{cases}$ $\qquad 5x + 2y - 6z - 8 = 0.$

13.8. A და C რიცხვების რა მნიშვნელობებისათვის მდებარეობს

$$\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 3t + 5 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

წრფე $Ax + 3y + Cz + 5 = 0$ სიბრტყეზე?

13.9. იპოვეთ წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის წერტილი:

1) $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t - 1 \\ z = t + 2; \end{cases}$ $\qquad 5x + y + 3z + 2 = 0;$

2) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-4}{-1}, \qquad x - 5y - 4z - 4 = 0.$

13.10. იპოვეთ M წერტილის გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე:

1) $M(2;\ -2;\ -3), \qquad 3x + 2y - 5z + 21 = 0;$

2) $M(-3;\ 2;\ -1), \qquad 5x + 3y - 2z + 8 = 0.$

18.11. შეადგინეთ $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-5}{5}$ წრფის საკოორდინატო სიბრტყეებზე გეგმილების განტოლებები.

18.12. შეადგინეთ $\frac{x-6}{7}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-4}$ წრფის $4x-y+2z-3=0$ სიბრტყეზე გეგმილის განტოლებები.

18.13. იპოვეთ M წერტილის გეგმილი მოცემულ წრფეზე:

1) $M(2;\ -1;\ -6)$, $\quad \frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{5}=\frac{z-5}{-1}$;

2) $M(2;\ 4;\ -2)$, $\quad \begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t-12 \\ z=-5t-6. \end{cases}$

18.14. იპოვეთ M წერტილის სიმეტრიული წერტილი მოცემული სიბრტყის მიმართ:

1) $M(-5;\ 4;\ -4)$, $\quad 3x-5y+3z+4=0$,

3) $M(7;\ 5;\ -4)$, $\quad 3x+y-2z-2=0$.

18.15. იპოვეთ M წერტილის სიმეტრიული წერტილი მოცემული წრფის მიმართ:

1) $M(3;\ 1;\ -2)$, $\quad \frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-3}{2}$;

2) $M(4;\ -1;\ 3)$, $\quad \begin{cases} x=2t+4 \\ y=3t+4 \\ z=-2t+2. \end{cases}$

18.16. დაადგინეთ, ჰკვეთს თუ არა მოცემული სიბრტყე AB მონაკვეთს:

1) $3x+2y-z-16=0$, $\quad A(2;\ 3;\ -2)$, $\quad B(5;\ 3;\ 4)$;

2) $2x+y+3z+2=0$; $\quad A(1;\ 4;\ 4)$, $\quad B(5;\ 1;\ 6)$.

18.17. შეადგინეთ M წერტილიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარული წრფის განტოლებები:

1) $M(8;\ -2;\ -5)$, $\quad \frac{x+2}{2}=\frac{y+6}{1}=\frac{z-1}{4}$;

2) $M(-7;\ -2;\ 3)$, $\quad \begin{cases} x=-5t-3 \\ y=3t+8 \\ z=t-7. \end{cases}$

18.18. სამკუთხედის წვეროებია $A(3; 5; -7)$, $B(6; 4; 0)$ და $C(1; 9; -12)$. შეადგინეთ B წვეროზე გავლებული სიმაღლის განტოლებები.

18.19. შეადგინეთ მოცემულ M წერტილზე და მოცემულ წრფეზე გავლებული სიბრტყის განტოლება:

1) $M(1, -3, 4)$, $\quad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z+3}{6}$.

2) $M(0; 1; -1)$, $\quad \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 5t - 3 \\ z = t - 3. \end{cases}$

18.20. შეადგინეთ $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$ და $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ პარალელურ წრფეებზე გავლებული სიბრტყის განტოლება.

18.21. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(0; -2; 3)$ წერტილზე და ჰკვეთს $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-4}{4}$ და $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-13}{5}$ წრფეებს.

18.22. აჩვენეთ, რომ წრფეები

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{და} \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე და შეადგინეთ ამ სიბრტყის განტოლება.

18.23. შეადგინეთ მოცემულ (L_1) წრფეზე მისი აცდენილი (L_2) წრფის პარალელურად გავლებული სიბრტყის განტოლება:

1) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ (L_1), $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{5}$ (L_2),

2) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$ (L_1), $\quad \begin{cases} x = t - 5 \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}$ (L_2).

18.24. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(4; 2; -1)$ წერტილზე $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{4}$ და $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-4}{-1}$ წრფეების პარალელურად.

13.25. შეადგინეთ მოცემულ წრფეზე მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარულად გავლებული სიბრტყის განტოლება:

1) $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-2}{4}$, $\quad 2x+4y-z-3=0$;

2) $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$, $\quad 3x-y-z+5=0$.

13.26. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან მოცემულ წრფემდე:

1) $M(2;\ -1;\ 5)$, $\qquad \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$;

2) $M(-3;\ 0;\ 1)$, $\qquad \begin{cases} x=t+2\\ y=5t+6\\ z=-3t+1.\end{cases}$

13.27. გამოთვალეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ წრფეებს შორის:

1) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, $\quad \dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$;

2) $\begin{cases} x=3t+1\\ y=2t-1\\ z=3t-2,\end{cases} \qquad \begin{cases} x=3t+3\\ y=2t+4\\ z=3t.\end{cases}$

13.28. აჩვენეთ, რომ

1) $\begin{cases} 2x+2y-z-1=0\\ x-y-z-22=0\end{cases}$ და $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$.

წრფეები პარალელურია და გამოთვალეთ მანძილი მათ შორის.

13.29. იპოვეთ მანძილი შემდეგ წრფეებს შორის:

1) $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$, $\quad \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$;

2) $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z-5}{-5}$, $\quad \begin{cases} x=2t-4\\ y=-t+4\\ z=-2t-1.\end{cases}$

13.30. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის $M(2;-3;1)$ წერტილზე $\vec{a}(3;2;5)$ ვექტორის პერპენდიკულარულად და კვეთს წრფეს

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{1}.$$

13.31. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის $M(3; -4; 9)$ წერტილზე $6x-2y-3z+5=0$ სიბრტყის პარალელურად და კვეთს $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-5}$ წრფეს,

13.32. შეადგინეთ მოცემული წრფეების საერთო პერპენდიკულარის განტოლებები:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-6}{2}, \qquad \frac{x-4}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{3}.$$

13.33. Oxy სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც მანძილების ჯამი M და N წერტილებამდე არის უმცირესი:

1) $M(3; -2; 3)$, $N(-3; 1; -6)$; 2) $M(-3; 5; 2)$, $N(-5; 9; 2)$.

13.34. Oyz სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც მანძილების სხვაობა M და N წერტილებამდე არის უდიდესი:

1) $M(1; 9; 8)$, $N(2; 11; 11)$; 2) $M(2; -1; 0)$, $N(-4; -2; 3)$.

13.35. $2x-3y+3z-17=0$ სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც მანძილების ჯამი $M(3; -4; 7)$ და $N(-5; -14; 17)$ წერტილებამდე არის უმცირესი.

13.36. $2x+3y-4z-15=0$ სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც მანძილების სხვაობა $M(5; 2; -7)$ და $N(7; -25; 10)$ წერტილებამდე არის უდიდესი.

§ 14. წრეწირი

14.1. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C და რადიუსია R:

1) $C(0; 0)$, $R=2$; 2) $C(-3; 1)$, $R=4$.

14.2. შეადგინეთ A წერტილზე გამავალი იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C:

1) $A(3; 1)$, $C(0; 2)$; 2) $A(4; 0)$, $C(-2; 1)$.

14.3. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ A და B წერტილები წარმოადგენენ მისი დიამეტრის ბოლოებს:

1) $A(3; 2)$, $B(-1; 4)$; 2) $A(0; -5)$, $B(4; 3)$.

14.4. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C წერტილი და ეხება მოცემულ წრფეს:

1) $C(0; 0)$, $3x-2y-26=0$; 2) $C(-2; 1)$, $x-3y-5=0$.

14.5. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც Oy ღერძს ეხება A წერტილში და გადის B წერტილზე:

1) $A(0, 3)$, $B(1; 6)$; 2) $A(0; 8)$, $B(-4; 0)$.

14.6. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის A და B წერტილებზე, ხოლო ცენტრი მდებარეობს მოცემულ წრფეზე:

1) $A(3; 1)$, $B(-1; 1)$, $2x+y-1=0$;

2) $A(0, 6)$, $B(2; -2)$, $x+y+2=0$.

14.7. შეადგინეთ მოცემულ სამ წერტილზე გამავალი წრეწირის განტოლება:

1) $A(-4; 4)$, $B(5; 1)$, $C(2; -8)$;

2) $A(0; -3)$, $B(5; -2)$, $C(4; 3)$.

14.8. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C წერტილი და რომელიც მოცემული წრფიდან მოჰკვეთს d სიგრძის ქორდას:

1) $C(3; -1)$, $2x-3y+4=0$, $d=10$.

2) $C(2; -3)$, $x-5y+9=0$, $d=2$.

14.9. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის რადიუსია r და რომელიც მოცემულ წრფეს ეხება M წერტილში;

1) $r=\sqrt{10}$, $x-3y+1=0$, $M(2; 1)$;

2) $r=5$, $3x-4y+9=0$ $M(1; 3)$.

14.10. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება ორ მოცემულ პარალელურ წრფეს, ამასთან ერთ-ერთ მათგანს M წერტილში:

1) $x-y+2=0$, $x-y-6=0$, $M(1; 3)$;

2) $x-5y-6=0$, $x-5y+46=0$, $M(1; -1)$.

14.11. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება ორ მოცემულ პარალელურ წრფეს და გადის M წერტილზე:

1) $3x+2y-10=0$, $3x+2y+16=0$, $M(4; -5)$;

2) $x+2y-6=0$, $x+2y+4=0$, $M(3; 1)$.

14.12. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი მდებარეობს $3x-y+6=0$ წრფეზე და ეხება $2x-y=0$ და $2x-y+10=0$ წრფეებს.

14.13. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი მდებარეობს $3x-y+5=0$ წრფეზე და ეხება $x-2y+10=0$ და $2x-y-1=0$ წრფეებს.

14.14. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება საკოორდინატო ღერძებს და გადის A (4; —2) წერტილზე.

14.15. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის A (2; —3) წერტილზე და ეხება $2x-3y=0$ და $3x-2y-4=0$ წრფეებს.

14.16. იპოვეთ წრეწირის ცენტრი და რადიუსი:

1) $(x-2)^2+(y+3)^2=16$; 2) $x^2+y^2-6x+5=0$;

3) $x^2+y^2+4y-12=0$; 4) $4x^2+4y^2+20x-32y+85=0$.

14.17. დაადგინეთ, სად მდებარეობს M წერტილი: მოცემულ წრეწირზე, მის შიგნით თუ გარეთ:

1) $M(-3;\ 2)$, $(x+2)^2+(y+3)^2=26$;

2) $M(0;\ 5)$, $(x+4)^2+(y-2)^2=32$;

3) $M(1;\ 5)$ $(x-5)^2+y^2=40$;

4) $M(-2;\ 2)$ $x^2+y^2+6x-10y=0$.

14.18. შეადგინეთ $x^2+y^2-6x+2y+5=0$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც $6x+8y-7=0$ წრფის პერპენდიკულარულია.

14.19. შეადგინეთ $x^2+y^2-2x-8y-1=0$ წრეწირის M (—2; 1) წერტილზე გავლებული მხების განტოლება.

14.20. იპოვეთ A (5; —2) წერტილიდან $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ წრეწირისადმი გავლებული მხების სიგრძე.

14.21. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი M წერტილიდან მოცემულ წრეწირამდე:

1) $M(7;\ -3)$, $(x-4)^2+(y-1)^2=9$;

2) $M(3;\ -9)$, $x^2+y^2+4x-6y-3=0$.

14.22. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C (2; 6) წერტილი და რომელიც ეხება $x^2+y^2+10x-4y+56=0$ წრეწირს.

14.23. იპოვეთ წრეწირისა და წრფის თანაკვეთის წერტილები:

1) $(x+3)^2+(y-7)^2=45$, $x-y+1=0$;

2) $x^2+y^2-12x+2=0$, $x+4y+11=0$.

14.24. დაადგინეთ წრეწირისა და წრფის ურთიერთმდებარეობა (იკვეთებიან, არ იკვეთებიან თუ ეხებიან):

1) $(x+3)^2+(y-1)^2=15$, $4x-y-10=0$;

2) $(x-2)^2+(y+1)^2=16$, $2x-3y+6=0$;

3) $x^2+y^2+4x-4y-32=0$, $3x-y-12=0$;

4) $x^2+y^2+2x-13=0$, $3x-7y+2=0$.

5) $x^2+(y+2)^2=7$, $5x+2y-13=0$;

6) $(x+3)^2+(y-1)^2=13$, $2x+3y-10=0$.

14.25. k-ს რა მნიშვნელობისათვის ჰკვეთს $y=kx+6$ წრფე $(x-1)^2+(y+2)^2=20$ წრეწირს? ეხება მას? არ ჰკვეთს?

14.26. შეადგინეთ $(x-3)^2+(y+2)^2=34$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც გადის $4x+y+7=0$ წრფეზე მოკვეთილი ქორდის შუაწერტილზე.

14.27. შეადგინეთ $(x+3)^2+(y-1)^2=32$ წრეწირის იმ ქორდის განტოლება, რომელიც M (1;4) წერტილით შუაზე იყოფა.

14.28. იპოვეთ $(x-5)^2+(y+1)^2=44$ წრეწირის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც M (3; —3) წერტილით შუაზე იყოფა.

14.29. იპოვეთ მანძილი $x^2+y^2-12x+10y+36=0$ წრეწირის ცენტრიდან $(x+1)^2+(y-1)^2=25$ და $(x-3)^2+(y+6)^2=80$ წრეწირების გადაკვეთის წერტილებზე გამავალ წრფემდე.

14.30. იპოვეთ $(x+1)^2+(y+4)^2=50$ და $(x-8)^2+(y-8)^2=125$ წრეწირების საერთო ქორდის სიგრძე.

14.31. შეადგინეთ $(x-2)^2+(y-1)^2=13$ წრეწირისადმი A (—5; 5) წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.

§ 15. ელიფსი

15.1. იპოვეთ მოცემული ელიფსის ნახევარღერძები, ფოკუსები, ექსცენტრისიტეტი და დირექტრისების განტოლებები:

1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 2) $x^2+9y^2=9$;

3) $9x^2+36y^2=1$; 4) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

15.2. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომლის აბსცისაა $x=2\sqrt{3}$.

15.3. შეადგინეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ აბსცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია, რომ:

1) მისი ნახევარღერძებია 7 და 2;

2) მისი დიდი ღერძია 16 და ფოკუსებს შორის მანძილია 12;

3) მისი მცირე ღერძია 10 და ფოკუსებს შორის მანძილია 20;

4) ერთ-ერთი ფოკუსიდან დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 15 და 1;

5) ფოკუსებს შორის მანძილია 16 და ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{4}{5}$-ს;

6) მისი დიდი ღერძია 34, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{15}{17}$-ს;

7) მისი მცირე ღერძია 24, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{5}{12}$-ს;

8) ფოკუსებს შორის მანძილია 4, ხოლო მანძილი დირექტრისებს შორის 25-ის ტოლია;

9) მისი დიდი ღერძია 12, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 9$;

10) მისი მცირე ღერძია 12, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 15$;

11) დირექტრისებს შორის მანძილია 49, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{2}{7}$-ს;

12) $M(3;1)$ ელიფსის წერტილია და მისი მცირე ღერძია 4;

13) $M_1(\sqrt{6};\sqrt{3})$ და $M_2(3;-\sqrt{2})$ ელიფსის წერტილებია.

15.4. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ ორდინატთა ღერძზე კორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია, რომ:

1) მისი ნახევარღერძებია 9 და 5;

2) მისი დიდი ღერძია 8 და ფოკუსებს შორის მანძილია $2\sqrt{15}$;

3) მისი მცირე ღერძია 4 და ფოკუსებს შორის მანძილია 14;

4) ფოკუსებს შორის მანძილია 14 და ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{7}{8}$-ს;

5) მისი დიდი ღერძია 12, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{5}{6}$-ს;

6) მისი მცირე ღერძია 12, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{4}{5}$-ს;

7) ფოკუსებს შორის მანძილია 6, ხოლო მანძილი დირექტრისებს შორის 54-ის ტოლია;

8) მისი დიდი ღერძია 24, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $y=\pm 16$;

9) მისი მცირე ღერძია 6, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $y = \pm 6$;

10) დირექტრისებს შორის მანძილია 32, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{1}{2}$-ს.

15.5. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო ემთხვევა მოცემული ელიფსის ფოკუსებს, ხოლო დანარჩენი ორი მისი მცირე ღერძის ბოლოებს:

1) $4x^2 + 5y^2 = 100$; 2) $2x^2 + y^2 = 32$.

15.6. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{64} = 1$ ელიფსის ფოკუსიდან ამ ფოკუსების შესაბამის დირექტრისამდე.

15.7. ელიფსის ფოკუსებია F_1 (—5; 0) და F_2 (5; 0), ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{1}{2}$. იპოვეთ მანძილები დირექტრისამდე ელიფსის იმ წერტილიდან, რომლის აბსცისაა — 3.

15.8. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $M_1(x_1; y_1)$ წერტილი ძევს $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის შიგნით, მაშინ $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, ხოლო თუ $M_2(x_2; y_2)$ წერტილი მდებარეობს ამ ელიფსის გარეთ, მაშინ $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} > 1$.

15.9. დაადგინეთ, სად მდებარეობენ მოცემული წერტილები $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ელიფსზე, მის შიგნით, თუ გარეთ: $A(2; \sqrt{3})$, $B(-1; 2)$, $C(-2; -1)$, $D(-3; 1)$, $E(2\sqrt{3}; 1)$, $F(3; -2)$.

15.10. დაადგინეთ, რას წარმოადგენს შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული წირი:

1) $y = \frac{12}{5}\sqrt{25 - x^2}$, 2) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

15.11. შეადგინეთ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ელიფსის $M(2; 3)$ წერტილის ფოკალური რადიუსების განტოლებები.

15.12. იპოვეთ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ ელიფსის $M(4; 6)$ წერტილის ფოკალური რადიუსები.

15.13. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{4}{5}$ ხოლო ელიფსის M

წერტილის ფოკალური რადიუსია 16. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან შესაბამის დირექტრისამდე.

15.14. ელიფსის ექსცენტრისიტეტია $e=\frac{3}{4}$, ხოლო ელიფსის M წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილია 12. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ამ დირექტრისის შესაბამის ფოკუსამდე.

15.15. ელიფსის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. მისი ექსცენტრისიტეტია $e=\frac{2}{3}$, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 24$. იპოვეთ ელიფსის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსები, რომლის აბსცისაა —6.

15.16. იპოვეთ $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ ელიფსის ის წერტილები, რომლებიც ამ ელიფსის მარჯვენა ფოკუსიდან დაშორებულია 5-ის ტოლი მანძილით.

15.17. იპოვეთ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ ელიფსის ის წერტილები, რომლებიც ამ ელიფსის მარცხენა ფოკუსიდან დაშორებულია 7-ის ტოლი მანძილით.

15.18. იპოვეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ: 1) მცირე ღერძი ფოკუსიდან ჩანს 60°-იანი კუთხით; 2) მცირე ღერძი ფოკუსიდან ჩანს 90°-იანი კუთხით; 3) მანძილი დირექტრისებს შორის სამჯერ მეტია ფოკუსებს შორის მანძილზე; 4) მანძილი ცენტრიდან დირექტრისამდე დიდი ღერძის ტოლია.

15.19. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ელიფსისა და $x+2y-4=0$ წრფის გადაკვეთის წერტილები.

15.20. m-ის რა მნიშვნელობისათვის ჰკვეთს $y=\frac{1}{2}x+m$ წრფე $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{4,5}=1$ ელიფსს? ეხება მას? არ ჰკვეთს?

15.21. დაწერეთ $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{2}=1$ ელიფსის $M\,(3;\,1)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება.

15.22. დაამტკიცეთ, რომ $y=kx+b$ წრფე ეხება $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $k^2a^2+b^2=m^2$:

15.23. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის $M(x_0, y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

15.24. შეადგინეთ $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ ელიფსის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $x-2y+2=0$ წრფის პარალელურია.

15.25. შეადგინეთ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ელიფსის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $3x-y+4=0$ წრფის მართობულია.

15.26. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ ელიფსზე იპოვეთ $x-2y+26=0$ წრფის უახლოესი M წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან ამ წრფემდე.

15.27. შეადგინეთ $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსისადმი $M\left(5; \frac{5}{3}\right)$ წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.

15.28. $M\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right)$ წერტილიდან $\frac{x^2}{13,5}+\frac{y^2}{3}=1$ ელიფსისადმი გავლებულია მხებები. გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან შეხების წერტილებზე გამავალ წრფემდე.

15.29. ელიფსის რაიმე K წერტილში გავლებული მხები ელიფსის ერთ-ერთი ღერძის გაგრძელებას ჰკვეთს M წერტილში, ხოლო K წერტილიდან ამ ღერძზე დაშვებული პერპენდიკულარის ფუძეა N. დაამტკიცეთ, რომ ელიფსის ცენტრიდან M და N წერტილებამდე მანძილების ნამრავლი ელიფსის შესაბამისი ნახევარღერძის კვადრატის ტოლია.

15.30. ელიფსის F ფოკუსიდან დიდი ღერძისადმი აღმართული პერპენდიკულარი ელიფსს ჰკვეთს M წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ:

$$b^2=ap, \quad a=\frac{p}{1-e^2}, \quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}},$$

სადაც a და b ელიფსის ნახევარღერძებია, e ელიფსის ექსცენტრისიტეტია, ხოლო $p=|FM|$.

15.31. დაამტკიცეთ, რომ ელიფსის ფოკუსებიდან მის ნებისმიერ მხებამდე მანძილების ნამრავლი მცირე ნახევარღერძის კვადრატის ტოლია.

15.32. შეადგინეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსებია $F_1(-4; 0)$ და $F_2(4; 0)$ და რომლის მხებია $x+2y-6=0$ წრფე.

15.33. შეადგინეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის დიდი ღერძის ბოლოებია $A_1(-3; 0)$ და $A_2(3; 0)$ და რომელიც ეხება $2x-3y-9=0$ წრფეს.

15.34. შეადგინეთ საკოორდინატო ღერძების მიმართ სიმეტრიული იმ ელიფსის განტოლება, რომელიც გადის M წერტილზე და ეხება მოცემულ წრფეს:

1) $M(2; -3)$, $x-2y+8=0$;

2) $M\left(-4; \dfrac{12}{5}\right)$, $3x-5y+25=0$,

3) $M(4; \sqrt{7})$, $x-y+9=0$.

15.35. შეადგინეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ და ეხება $x-y+5=0$ და $x-4y-10=0$ წრფეებს.

15.36. დაამტკიცეთ, რომ ელიფსის რაიმე წერტილზე გავლებული მხები ამ წერტილის ფოკალური რადიუსებით შედგენილი კუთხის მოსაზღვრე კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს.

15.37. დაამტკიცეთ, რომ თუ α და β სიბრტყეები ადგენენ φ მახვილ კუთხეს, მაშინ α სიბრტყეზე მდებარე a-რადიუსიანი წრეწირის გეგმილი β სიბრტყეზე წარმოადგენს ელიფსს, რომლის დიდი ნახევარღერძია a, ხოლო მცირე ნახევარღერძი $b=a\cos\varphi$.

15.38. α და β სიბრტყეები ადგენენ $\varphi=30^\circ$-იან კუთხეს. იპოვეთ β სიბრტყეზე მდებარე იმ ელიფსის ნახევარღერძები, რომელიც წარმოადგენს α სიბრტყეზე მდებარე $R=4$ რადიუსიანი წრეწირის გეგმილს.

15.39. ელიფსი, რომლის მცირე ნახევარღერძია 8, წარმოადგენს $R=16$ რადიუსიანი წრეწირის გეგმილს. იპოვეთ კუთხე იმ სიბრტყეებს შორის, რომელზედაც მდებარეობენ ელიფსი და წრეწირი.

15.40. დაამტკიცეთ, რომ b რადიუსიანი წრიული ცილინდრის კვეთა ღერძისადმი φ მახვილი კუთხით დახრილი სიბრტყით წარმოადგენს ელიფსს, რომლის მცირე ნახევარღერძია b, ხოლო დიდი ნახევარღერძია $a=\dfrac{b}{\cos\varphi}$.

15.41. იპოვეთ იმ ელიფსის ნახევარღერძები, რომელიც მიიღება $R=9$ რადიუსიანი წრიული ცილინდრის კვეთით მისი ღერძისადმი $\varphi=60^\circ$-იანი კუთხით დახრილი სიბრტყით.

15.42. $R=3$ რადიუსიანი წრიული ცილინდრის კვეთა წარმოადგენს ელიფსს, რომლის დიდი ღერძია 12. იპოვეთ კუთხე კვეთის სიბრტყესა და ცილინდრის ღერძს შორის.

§ 16. ჰიპერბოლა

16.1. იპოვეთ მოცემული ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, ფოკუსები, ექსცენტრისიტეტი, ასიმპტოტების და დირექტრისების განტოლებები:

1) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1;$ 2) $4x^2-y^2=4;$

3) $16x^2-9y^2=1;$ 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=-1.$

16.2. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომლის აბსცისაა $x=-4$.

16.3. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ აბსცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია:

1) მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია შესაბამისად 5 და 3;

2) მისი წარმოსახვითი ღერძია 4 და ფოკუსებს შორის მანძილია 14;

3) ერთ-ერთი ფოკუსიდან ნამდვილი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 13 და 3;

4) ფოკუსებს შორის მანძილია 20 და ექსცენტრისიტეტი უდრის 2-ს;

5) მისი ნამდვილი ღერძია 16, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{9}{8}$-ს;

6) მისი წარმოსახვითი ღერძია 6, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{5}{4}$-ს;

7) ფოკუსებს შორის მანძილია 30, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{4}x;$

8) ფოკუსებს შორის მანძილია 16, ხოლო მანძილი დირექტრისებს შორის 6-ის ტოლია;

9) მისი ნამდვილი ღერძია 12, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x = \pm 4$;

10) მისი წარმოსახვითი ღერძია 8, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x = \pm 6$;

11) დირექტრისებს შორის მანძილია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის 2-ს;

12) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{50}{13}$, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y = \pm \frac{12}{5} x$.

13) $M(8; -3)$ ჰიპერბოლის წერტილია და მისი ნამდვილი ღერძია 8;

14) $M_1(-10; 3)$ და $M_2(20; -3\sqrt{6})$ ჰიპერბოლის წერტილებია;

15) $M(-8; 2\sqrt{2})$ ჰიპერბოლის წერტილია, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y = \pm \frac{1}{2} x$.

16.4. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ ორდინატთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია:

1) მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია შესაბამისად 4 და 7;

2) მისი ნამდვილი ღერძია 6 და ფოკუსებს შორის მანძილია 14;

3) ერთ-ერთი ფოკუსიდან ნამდვილი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 11 და 5;

4) ფოკუსებს შორის მანძილია 14 და ექსცენტრისიტეტია $\frac{7}{6}$;

5) მისი ნამდვილი ღერძია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის 1,8-ს;

6) მისი წარმოსახვითი ღერძია 16, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{5}{3}$-ს;

7) ფოკუსებს შორის მანძილია 26, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y = \pm \frac{12}{5} x$;

8) ფოკუსებს შორის მანძილია 20, ხოლო მანძილი დირექტრისებს შორის უდრის 16-ს;

9) მისი ნამდვილი ღერძია 16, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $y = \pm 4$;

10) მისი წარმოსახვითი ღერძია 10, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $y=\pm 5$;

11) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{1}{2}$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის 4-ს;

12) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{18}{5}$, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{4}x$;

13) $M(-3, 10)$ ჰიპერბოლის წერტილია და მისი ნამდვილი ღერძია 10;

14) $M_1(6; 5)$ და $M_2(9; 5\sqrt{2})$ ჰიპერბოლის წერტილებია;

15) $M(3; -4)$ ჰიპერბოლის წერტილია, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{2}{3}x$.

16.5. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან ასიმპტოტზე დაშვებული მართობი წარმოსახვითი ნახევარღერძის ტოლია.

16.6. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო ემთხვევა მოცემული ჰიპერბოლის ფოკუსებს, ხოლო დანარჩენი ორი მისი წარმოსახვითი ღერძის ბოლოებს:

1) $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{36}=1$; 2) $8x^2-y^2=-8$.

16.7. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები მოცემული ჰიპერბოლის ღერძების ბოლოებია:

1) $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{20}=1$; 2) $4x^2-y^2=8$.

16.8. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{108}=1$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან ამ ფოკუსის შესაბამის დირექტრისამდე.

16.9. ჰიპერბოლის ფოკუსებია $F_1(-16; 0)$ და $F_2(16; 0)$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. იპოვეთ მანძილი დირექტრისამდე ჰიპერბოლის იმ წერტილიდან, რომლის აბსცისაა -8.

16.10. დაადგინეთ რას წარმოადგენს შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული წირი:

1) $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-12}$; 2) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x^2-24}$.

16.11. შეადგინეთ $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლის $M(5;\ -2)$ წერტილის ფოკალური რადიუსების განტოლებები.

16.12. იპოვეთ $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$ ჰიპერბოლის $M(4;\ 3)$ წერტილის ფოკალური რადიუსები.

16.13. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტია $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. იპოვეთ მახვილი კუთხე ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს შორის.

16.14. იპოვეთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი, თუ მის ასიმპტოტებს შორის კუთხეა 60°.

16.15. დაამტკიცეთ, რომ თუ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e=\sqrt{2}$, მაშინ მისი ასიმპტოტები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

16.16. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტია $e=3$, ხოლო ჰიპერბოლის M წერტილის ფოკალური რადიუსია 21. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან შესაბამის დირექტრისამდე.

16.17. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტია $e=2$, ხოლო ჰიპერბოლის M წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილია 13. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ამ დირექტრისის შესაბამის ფოკუსამდე.

16.18. ჰიპერბოლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, მისი ექსცენტრისიტეტია $e=\frac{5}{3}$, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 6$. იპოვეთ ჰიპერბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსები, რომლის აბსცისაა 15.

16.19. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$ ჰიპერბოლის ის წერტილები, რომლებიც ამ ჰიპერბოლის მარჯვენა ფოკუსიდან დაშორებულია 16-ის ტოლი მანძილით.

16.20. იპოვეთ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$ ჰიპერბოლის ის წერტილები, რომლებიც ამ ჰიპერბოლის მარცხენა ფოკუსიდან დაშორებულია 9-ის ტოლი მანძილით.

16.21. იპოვეთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი, თუ:

1) ნამდვილი ღერძი წარმოსახვითი ღერძის ბოლოდან ჩანს 60°-იანი კუთხით;

2) ფოკუსიდან წარმოსახვითი ღერძი ჩანს 60°-იანი კუთხით;

3) ფოკუსებს შორის მანძილი ცხრაჯერ მეტია დირექტრისებს შორის მანძილზე;

4) ნამდვილი ღერძი ოთხჯერ მეტია დირექტრისებს შორის მანძილზე.

16.22. შეადგინეთ იმ ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები ემთხვევა $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$ ელიფსის ფოკუსებს.

16.23. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ექსცენტრისიტეტი $e=3$ და რომლის ფოკუსები ემთხვევა $\frac{x^2}{300}+\frac{y^2}{75}=1$ ელიფსის ფოკუსებს.

16.24. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები ემთხვევა $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{21}=1$ ელიფსის წვეროებს, ხოლო დირექტრისები ამ ელიფსის ფოკუსებზე გადის.

16.25. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები წარმოადგენს $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ ელიფსის წვეროებს, ხოლო წვეროები — ამ ელიფსის ფოკუსებს.

16.26. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის დირექტრისები გადის $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{21}=1$ ელიფსის ფოკუსებზე დიდი ღერძის მართობულად, ხოლო ფოკუსები ამ ელიფსის დირექტრისებზე ძევს.

16.27. ჰიპერბოლის დირექტრისები გადის ელიფსის ფოკუსებზე დიდი ღერძის მართობულად, ხოლო ელიფსის დირექტრისები გადის ჰიპერბოლის ფოკუსებზე. დაამტკიცეთ, რომ ელიფსის დიდი ღერძი ემთხვევა ჰიპერბოლის ნამდვილ ღერძს.

16.28. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ასიმპტოტებამდე მანძილების ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა და $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$-ის ტოლია.

16.29. დაამტკიცეთ, რომ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებით

და ჰიპერბოლის ნებისმიერ წერტილზე ასიმპტოტების პარალელურად გავლებული წრფეებით, მუდმივი სიდიდეა და $\frac{ab}{2}$-ის ტოლია.

16.80. იპოვეთ $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლისა და $2x+3y-4=0$ წრფის გადაკვეთის წერტილები.

16.81. გამოარკვიეთ მოცემული წრფისა და ჰიპერბოლის ურთიერთმდებარეობა (ჰკვეთს, ეხება თუ არ ჰკვეთს):

1) $2x-5y+5=0,\qquad \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{10}=1;$

2) $3x-2y-16=0,\qquad \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1;$

3) $2x-y+1=0,\qquad \frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{36}=1.$

16.82. გამოარკვიეთ m-ის რა მნიშვნელობებისათვის $y=2x+m$ წრფე $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ ჰიპერბოლას: ჰკვეთს, ეხება, არ ჰკვეთს.

16.83. შეადგინეთ $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{25}=1$ ჰიპერბოლის $M(-10;\ 15)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლება.

16.84. დაამტკიცეთ, რომ თუ $y=kx+m$ წრფე ეხება $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლას, მაშინ $k^2a^2-b^2=m^2$.

16.85. დაამტკიცეთ, რომ თუ $k^2a^2-b^2=m^2$, მაშინ $y=kx+m$ წრფე წარმოადგენს $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის მხებს, თუ $m\neq 0$, ხოლო თუ $m=0$, ეს წრფე ჰიპერბოლის ასიმპტოტია.

16.86. დაამტკიცეთ, რომ თუ $y=kx+m$ წრფე ეხება $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ჰიპერბოლას, მაშინ $k^2a^2-b^2=-m^2$.

16.87. დაამტკიცეთ, რომ თუ $k^2a^2-b^2=-m^2$, მაშინ $y=kx+m$ წრფე წარმოადგენს $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ჰიპერბოლის მხებს, თუ $m\neq 0$, ხოლო თუ $m=0$, ეს წრფე ჰიპერბოლის ასიმპტოტია.

16.38. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის $M(x_0;\ y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

16.39. შეადგინეთ $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $2x+y-3=0$ წრფის პარალელურია.

16.40. შეადგინეთ $\frac{x^2}{30}-\frac{y^2}{14}=1$ ჰიპერბოლის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $x+3y+6=0$ წრფის პერპენდიკულარულია.

16.41. $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ $x-y-1=0$ წრფის უახლოესი M წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან ამ წრფემდე.

16.42. შეადგინეთ $x^2-y^2=25$ ჰიპერბოლისადმი $M\left(\frac{5}{2};\ \frac{5}{8}\right)$ წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.

16.43. ჰიპერბოლის რაიმე K წერტილში გავლებული მხები ჰიპერბოლის ერთ-ერთი ღერძით განსაზღვრულ წრფეს ჰკვეთს M წერტილში, ხოლო K წერტილიდან ამ წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის ფუძეა N. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლის ცენტრიდან M და N წერტილებამდე მანძილების ნამრავლი ჰიპერბოლის შესაბამისი ნახევარღერძის კვადრატის ტოლია.

16.44. ჰიპერბოლის F ფოკუსიდან ნამდვილი ღერძისადმი აღმართული პერპენდიკულარი ჰიპერბოლას ჰკვეთს M წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ

$$b^2=ap,\qquad a=\frac{p}{e^2-1},\qquad b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}},$$

სადაც a ჰიპერბოლის ნამდვილი ნახევარღერძია, b წარმოსახვითი ნახევარღერძია, e ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტია, ხოლო $p=|FM|$.

16.45. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლის ფოკუსებიდან მის ნებისმიერ მხებამდე მანძილების ნამრავლი წარმოსახვითი ნახევარღერძის კვადრატის ტოლია.

16.46. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსებია $F_1(-2;\ 0)$ და $F_2(2;\ 0)$ და რომლის მხებია $3x+y-4=0$ წრფე.

16.47. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის წვეროებია A_1 (—3; 0) და A_2 (3; 0) და რომლის მხებია $y=2x-4$ წრფე.

16.48. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ, გადის $M(5\sqrt{2};\ 3)$ წერტილზე და ეხება $x-2y=1$ წრფეს.

16.49. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ და ეხება მოცემულ წრფეებს:

1) $x-y+1=0$, $2x-y-4=0$; 2) $2x-y+1=0$, $x-y+5=0$.

16.50. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლის რაიმე წერტილზე გავლებული მხები ამ წერტილის ფოკალური რადიუსებით შედგენილი კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს.

§ 17. პარაბოლა

17.1. $y^2=12x$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილები, რომლის აბსცისაა $x=3$.

17.2. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და მისი ფოკუსია:

1) $F(3;\ 0)$; 2) $F(-1;\ 0)$; 3) $F(0;\ 2)$; 4) $F(0;\ -5)$.

17.3. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და დირექტრისის განტოლებაა:

1) $x+4=0$; 2) $x-7=0$; 3) $y+10=0$; 4) $y-6=0$.

17.4. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მოცემულია მისი ფოკუსი და დირექტრისის განტოლება:

1) $F(4;\ 0)$, $x+4=0$; 2) $F(-8;\ 0)$, $x-8=0$;

3) $F(0;\ 3)$, $y+3=0$; 4) $F(0;\ -1)$, $y-1=0$.

17.5. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, თუ ცნობილია, რომ:

1) პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ და გადის A (2; —8) წერტილზე;

2) პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ და გადის A (—9; 6) წერტილზე;

3) პარაბოლა სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ და გადის A (1; 4) წერტილზე;

4) პარაბოლა სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ და გადის A (10; —5) წერტილზე.

17.6. დაადგინეთ, რას წარმოადგენს შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული წირი:

1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$; 3) $y = -5\sqrt{-x}$; 4) $y = 2\sqrt{-3x}$;

5) $x = -\sqrt{5y}$; 6) $x = 4\sqrt{2y}$; 7) $x = 2\sqrt{-5y}$; 8) $x = -\sqrt{-7y}$.

17.7. იპოვეთ მოცემული პარაბოლის F ფოკუსი და დირექტრისის განტოლებები:

1) $y^2 = 32x$; 2) $y^2 = -12x$;

3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -40y$.

17.8. შეადგინეთ მოცემული პარაბოლის M წერტილის ფოკალური რადიუსის განტოლება:

1) $y^2 = 36x$, $M(1;\ 6)$; 2) $y^2 = -4x$, $M(-4;\ 4)$;

3) $x^2 = 9y$, $M(-3;\ 1)$; 4) $x^2 = -5y$, $M(5;\ -5)$.

17.9. იპოვეთ მოცემული პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის აბსცისაა x_0, თუ:

1) $y^2 = 16x$, $x_0 = 5$; 2) $y^2 = -20x$, $x_0 = -3$.

17.10. იპოვეთ მოცემული პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის ორდინატია y_0, თუ:

1) $x^2 = 36y$, $y_0 = 1$; 2) $x^2 = -12y$, $y_0 = -4$.

17.11. მოცემულ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილები, რომელთა ფოკალური რადიუსები r-ის ტოლია:

1) $y^2 = 4x$, $r = 10$; 2) $y^2 = -20x$, $r = 10$;

3) $x^2 = 16y$, $r = 8$; 4) $x^2 = -100y$, $r = 26$.

17.12. იპოვეთ წრფისა და პარაბოლის თანაკვეთის წერტილი:

1) $4x - y - 8 = 0$, $y^2 = 16x$ 2) $x + y + 2 = 0$, $x^2 = 8y$;

3) $3x + 2y - 3 = 0$, $y^2 = -9x$; 4) $4x + y - 15 = 0$, $x^2 = -4y$.

17.13. გამოარკვიეთ მოცემული წრფისა და პარაბოლის ურთიერთმდებარეობა (ჰკვეთს, არ ჰკვეთს, ეხება):

1) $3x - y + 2 = 0$, $y^2 = 3x$;

2) $8x + y + 4 = 0$, $x^2 = \frac{1}{4}y$;

3) $5x + 7y + 10 = 0$, $y^2 = -15x$.

17.14. გამოარკვიეთ, k-ს რა მნიშვნელობებისათვის $y = kx - 3$ წრფე $x^2 = 3y$ პარაბოლას: ჰკვეთს, ეხება, არ ჰკვეთს.

17.15. გამოარკვიეთ, b-ს რა მნიშვნელობებისათვის $y=5x+b$ წრფე $y^2=8x$ პარაბოლას: ჰკვეთს, ეხება, არ ჰკვეთს.

17.16. დაამტკიცეთ, რომ $y=kx+b$ წრფე ეხება $y^2=2px$ პარაბოლას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p=2bk$.

17.17. დაამტკიცეთ, რომ $y=kx+b$ წრფე ეხება $x^2=2py$ პარაბოლას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $pk^2+2b=0$.

17.18. დაამტკიცეთ, რომ $y^2=2px$ პარაბოლისადმი შეიძლება ერთადერთი მხების გავლება, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია მოცემული $k\neq0$ რიცხვი.

17.19. დაამტკიცეთ, რომ $x^2=2py$ პარაბოლისადმი შეიძლება ერთადერთი მხების გავლება, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია მოცემული k რიცხვი.

17.20. შეადგინეთ მოცემული პარაბოლისადმი M წერტილში გავლებული მხების განტოლება:

1) $y^2=9x$, $M(4;\ -6)$; 2) $x^2=18y$, $M(12;\ 8)$.

17.21. დაამტკიცეთ, რომ $y^2=2px$ პარაბოლის $M(x_0;\ y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა $y_0y=p(x+x_0)$.

17.22. დაამტკიცეთ, რომ $x^2=2py$ პარაბოლის $M(x_0;\ y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა $x_0x=p(y+y_0)$.

17.23. შეადგინეთ მოცემული პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც მოცემული წრფის პარალელურია:

1) $y^2=24x$, $3x-y+2=0$; 2) $x^2=-56y$, $2x-4y+1=0$.

17.24. შეადგინეთ მოცემული პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც მოცემული წრფის პერპენდიკულარულია:

1) $y^2=-30x$, $4x+3y-3=0$; 2) $x^2=24y$, $4x+10y-3=0$.

17.25. $y^2=48x$ პარაბოლაზე იპოვეთ $4x-y+20=0$ წრფის უახლოესი M წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან ამ წრფემდე.

17.26. შეადგინეთ $y^2=48x$ პარაბოლისადმი $M(2;\ 10)$ წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.

17.27. პარაბოლის K წერტილზე გავლებული მხები პარაბოლის ღერძს კვეთს M წერტილში, ხოლო K წერტილის გეგმილი ამ ღერძზე არის N. დაამტკიცეთ, რომ პარაბოლის წვერო MN მონაკვეთის შუაწერტილშია.

17.28. პარაბოლის M წერტილზე გავლებული მხები მის ღერძს ჰკვეთს N წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ M და N წერტილები თანაბრად არიან დაშორებული ფოკუსიდან.

§ 18. მეორე რიგის წირების განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში

18.1. მოცემულია ელიფსის განტოლება $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. შეადგინეთ მისი განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის მიმართულებას, ხოლო პოლუსი მოთავსებულია: 1) მარცხენა ფოკუსში; 2) მარჯვენა ფოკუსში.

18.2. მოცემულია ჰიპერბოლის განტოლება $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. შეადგინეთ მისი მარჯვენა შტოს განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის მიმართულებას, ხოლო პოლუსი მოთავსებულია: 1) მარჯვენა ფოკუსში; 2) მარცხენა ფოკუსში.

18.3. მოცემულია ჰიპერბოლის განტოლება $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. შეადგინეთ მისი მარცხენა შტოს განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის მიმართულებას, ხოლო პოლუსი მოთავსებულია: 1) მარცხენა ფოკუსში; 2) მარჯვენა ფოკუსში.

18.4. მოცემულია პარაბოლის განტოლება $y^2=12x$. შეადგინეთ მისი განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის მიმართულებას, ხოლო პოლუსი მოთავსებულია პარაბოლის ფოკუსში.

18.5. გამოარკვიეთ, რა წირებია მოცემული შემდეგი პოლარული განტოლებებით:

1) $\rho=\frac{85}{5-2\cos\varphi}$; 2) $\rho=\frac{13}{3-3\cos\varphi}$;

3) $\rho=\frac{78}{3-4\cos\varphi}$; 4) $\rho=\frac{15}{7+4\cos\varphi}$.

18.6. დაადგინეთ, რომ $\rho=\frac{18}{5-4\cos\varphi}$, განტოლებით მოცემული წირი წარმოადგენს ელიფსს და განსაზღვრეთ მისი ნახევარღერძები.

18.7. დაადგინეთ, რომ $\rho=\frac{225}{8-17\cos\varphi}$ განტოლებით მოცემული წირი წარმოადგენს ჰიპერბოლის ერთ შტოს და განსაზღვრეთ მისი ნახევარღერძები.

18.8. $\rho=\frac{10}{7-4\cos\varphi}$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილები, რომელთა პოლარული რადიუსი 2-ის ტოლია.

18.9. $\rho=\frac{18}{3-2\sqrt{3}\cos\varphi}$ ჰიპერბოლის შტოზე იპოვეთ წერტილები, რომელთა პოლარული რადიუსი 3-ის ტოლია.

18.10. $\rho=\frac{3}{1-\cos\varphi}$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილები, რომელთა პოლარული რადიუსი 6-ის ტოლია.

18.11. $\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილები:

1) უმცირესი პოლარული რადიუსით;

2) პარამეტრის ტოლი პოლარული რადიუსით.

18.12. დაამტკიცეთ, რომ $\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}$ ელიფსის დირექტრისების პოლარული განტოლებებია $\rho=\frac{p}{e\cos\varphi}$ და $\rho=\frac{p(1+e^2)}{e(1-e^2)\cos\varphi}$.

18.13. შეადგინეთ $\rho=\frac{7}{3-2\cos\varphi}$ ელიფსის დირექტრისების პოლარული განტოლებები.

18.14. დაამტკიცეთ, რომ თუ ჰიპერბოლის ერთი შტოს განტოლება $\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}$, მაშინ:

1) დირექტრისების განტოლებებია $\rho=-\frac{p}{e\cos\varphi}$ და $\rho=-\frac{p(e^2+1)}{e(e^2-1)\cos\varphi}$;

2) ასიმპტოტების განტოლებებია $\rho=\frac{pe}{\sqrt{e^2-1}(\sin\varphi-\sqrt{e^2-1}\cos\varphi)}$ და $\rho=-\frac{pe}{\sqrt{e^2-1}(\sin\varphi+\sqrt{e^2-1}\cos\varphi)}$.

18.15. შეადგინეთ ჰიპერბოლის დირექტრისებისა და ასიმპტოტების პოლარული განტოლებები, თუ მისი ერთ-ერთი შტოს განტოლებაა $\rho=\frac{144}{5-13\cos\varphi}$.

18.16. დაამტკიცეთ, რომ $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ პარაბოლის დირექტრისის პოლარული განტოლებაა $\rho = \dfrac{p}{\cos\varphi}$.

18.17. შეადგინეთ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის მიმართულებას, ხოლო პოლუსი მოთავსებულია ელიფსის ცენტრში.

18.18. შეადგინეთ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოს განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის მიმართულებას, ხოლო პოლუსი მოთავსებულია ჰიპერბოლის ცენტრში.

18.19. შეადგინეთ $y^2 = 2px$ პარაბოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლარული ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის მიმართულებას, ხოლო პოლუსი მოთავსებულია პარაბოლის წვეროში.

§. 19. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა

19.1. დაწერეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, თუ სათავე გადატანილია O' წერტილში, ხოლო ღერძების მიმართულება უცვლელია:

1) $O'(2; 5)$; 2) $O'(-3; 4)$; 3) $O'(2; -7)$; 4) $O'(-5; -11)$.

19.2. კოორდინატთა სისტემის სათავე გადატანილია $O'(-5; 2)$ წერტილში, ხოლო ღერძების მიმართულება უცვლელია. $A(2; 8)$ $B(-2; 0)$, $C(3; -5)$, $D(-4; -2)$ წერტილების კოორდინატები მოცემულია ახალ სისტემაში. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები ძველ სისტემაში.

19.3. მოცემულია $A(1; 7)$, $B(3; -11)$, $C(-5; -3)$, $D(-8; 1)$ წერტილები. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები ახალ სისტემაში, თუ სათავე გადატანილია $O'(3; -1)$ წერტილში, ხოლო ღერძების მიმართულება უცვლელია.

19.4. იპოვეთ ახალი სისტემის O' სათავის კოორდინატები ძველ სისტემაში, თუ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებია:

1) $\begin{cases} x = x' + 7 \\ y = y' + 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = x' - 9 \\ y = y', \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = x' - 15 \\ y = y' - 6. \end{cases}$

19.5. იპოვეთ ახალი სისტემის O' სათავის კოორდინატები ძველ სისტემაში, თუ A (—2; 5) წერტილი მდებარეობს ახალი სისტემის აბსცისთა ღერძზე, ხოლო B (—4; —1) წერტილი მდებარეობს ახალი სისტემის ორდინატთა ღერძზე, ამასთან ღერძების მიმართულება უცვლელია.

19.6. დაწერეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, თუ A (4; —6) წერტილი მდებარეობს ახალი სისტემის აბსცისთა ღერძზე, ხოლო B (—3; 1) წერტილი მდებარეობს ახალი სისტემის ორდინატთა ღერძზე, ამასთან ღერძების მიმართულება უცვლელია.

19.7. დაწერეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, თუ ღერძები მობრუნებულია α კუთხით, ხოლო სისტემის სათავე უცვლელია:

1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = 90^\circ$; 3) $\alpha = 180^\circ$; 4) $\alpha = 270^\circ$; 5) $\alpha = 135^\circ$; 6) $\alpha = 240^\circ$.

19.8. კოორდინატთა სისტემის ღერძები მობრუნებულია $\alpha = 120^\circ$-ით, ხოლო სათავე უცვლელია. $A(2;\ 4\sqrt{3})$, $B(-6;\ 0)$, $C(0;\ -2\sqrt{3})$, $D(6\sqrt{3};\ -2)$ წერტილების კოორდინატები მოცემულია ახალ სისტემაში. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები ძველ სისტემაში.

19.9. მოცემულია $A(4;\ 0)$, $B(0;\ -8\sqrt{3})$, $C(2\sqrt{3};\ 6)$, $D(10;\ -2\sqrt{3})$ წერტილები. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები ახალ სისტემაში, თუ ღერძები მობრუნებულია $\alpha = 30^\circ$-იანი კუთხით, ხოლო სათავე უცვლელია.

19.10. იპოვეთ საკოორდინატო ღერძების მობრუნების კუთხე, თუ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებია:

1) $\begin{cases} x = -y' \\ y = x'; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y'; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'. \end{cases}$

19.11. დაწერეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, თუ კოორდინატთა სისტემის სათავე უცვლელია, ხოლო ახალი სისტემის აბსცისთა ღერძის მიმართულება ემთხვევა A (5; 12) წერტილის რადიუს-ვექტორის მიმართულებას.

19.12. დაწერეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, თუ სა-

თავე გადატანილია O' წერტილში, ხოლო ღერძები მობრუნებულია α კუთხით:

1) $O'(-4;\ 1)$, $\alpha = 60^\circ$; 2) $O'(3;\ -5)$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

19.13. კოორდინატთა სისტემის სათავე გადატანილია $O'(6;\ -1)$ წერტილში, ხოლო ღერძები მობრუნებულია $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$ კუთხით. $A(5;\ -10)$ და $B(0;\ 15)$ წერტილების კოორდინატები მოცემულია ახალ სისტემაში. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები ძველ სისტემაში.

19.14. მოცემულია $A(-12;\ 10)$, $B(14;\ 3)$ წერტილები. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები ახალ სისტემაში, თუ ცენტრი გადატანილია $O'(1;\ 3)$ წერტილში, ხოლო ღერძები მობრუნებულია $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$ კუთხით.

19.15. იპოვეთ ახალი სისტემის O' სათავის კოორდინატები ძველ სისტემაში და საკოორდინატო ღერძების მობრუნების α კუთხე, თუ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებია:

1) $\begin{cases} x = 3 - y' \\ y = -1 + x'; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -5 - x' \\ y = -y'; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y'; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 5 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = -2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'. \end{cases}$

19.16. მოცემულია $A(1;\ 2)$ და $B(5;\ 5)$ წერტილები. დაწერეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, თუ სათავე გადატანილია A წერტილში, ხოლო ახალი სისტემის აბსცისთა ღერძის მიმართულება ემთხვევა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მიმართულებას.

19.17. პოლარულ კოორდინატთა სისტემის პოლარული ღერძი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის აბსცისთა ღერძის თანამიმართულია, ხოლო პოლუსია $P(3;\ -1)$ წერტილი. $A\left(4;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B(5;\ 0)$, $C(1;\ \pi)$, $D\left(8;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ წერტილების კოორდინატები მოცემულია პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

19.18. პოლარულ კოორდინატთა სისტემის პოლარული ღერძი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის აბსცისთა ღერძის თანამიმართულია, ხოლო პოლუსია $P(-2;\ 4)$. $A(-2;\ 7)$, $B(-4;\ 4)$, $C(-2;\ 3)$, $D(3;\ 4+5\sqrt{3})$ წერტილების კოორდინატები მოცემულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

§ 20. მეორე რიგის წირების განტოლებების დაყვანა კანონიკურ სახეზე

20.1. დაადგინეთ, შემდეგი წირებიდან რომლებია ცენტრიანი, რომლებს არ გააჩნიათ ცენტრი და რომლებს გააჩნიათ ცენტრთა უსასრულო სიმრავლე:

1) $2x^2+6xy+7y^2-10x-2y+1=0$;

2) $2x^2+8xy+8y^2-6x+10y-9=0$;

3) $x^2-12xy+36y^2+10x-60y+13=0$;

4) $3x^2+2xy+2y^2-10x-6y-1=0$.

20.2. დაადგინეთ, რომ შემდეგი წირები ცენტრიანია და იპოვეთ მათი ცენტრების კოორდინატები:

1) $3x^2-8xy+10y^2+10x-12y+1=0$;

2) $4x^2+2xy+2y^2+10x-8y-5=0$.

20.3. აჩვენეთ, რომ შემდეგ წირებს გააჩნიათ ცენტრთა უსასრულო სიმრავლე და თითოეული მათგანისათვის შეადგინეთ ცენტრთა გეომეტრიული ადგილის განტოლება:

1) $x^2+4xy+4y^2-10x-20y+7=0$;

2) $4x^2-8xy+4y^2-6x+6y-15=0$.

20.4. აჩვენეთ, რომ შემდეგი განტოლებები განსაზღვრავენ ცენტრიან წირებს; დაწერეთ თითოეული მათგანის განტოლება კოორდინატთა ახალ სისტემაში, რომელიც მიიღება ღერძების პარალელური გადატანით ისე, რომ ახალი სისტემის სათავე ემთხვევა წირის ცენტრს:

1) $3x^2+4xy+5y^2-8x+2y-3=0$;

2) $3x^2+10xy+7y^2-4x-4y+6=0$.

20.5. m და n რიცხვების რა მნიშვნელობებისათვის განსაზღვრავს

$$mx^2+8xy-2y^2-6x+2ny-5=0$$

განტოლება:

1) ცენტრიან წირს;

2) უცენტრო წირს;

3) წირს, რომელსაც გააჩნია ცენტრთა უსასრულო სიმრავლე.

20.6. დაადგინეთ შემდეგი წირების ტიპები (ელიფსური, ჰიპერბოლური თუ პარაბოლური):

1) $3x^2 - 6xy + 8y^2 - 10x - 4y + 3 = 0$;

2) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 4y - 17 = 0$;

3) $5x^2 + 8xy - 4y^2 - 2x - 9 = 0$;

4) $x^2 + 4xy - 6x - 10y - 2 = 0$;

5) $5x^2 - 20xy + 20y^2 - 6y - 15 = 0$;

6) $2x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 10y = 0$.

20.7. საკოორდინატო ღერძების პარალელური გადატანით შემდეგი წირების განტოლებები დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე. რა წირს განსაზღვრავს თითოეული მათგანი:

1) $5x^2 + 8y^2 + 40x + 16y + 8 = 0$;

2) $y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$;

3) $3x^2 - 2y^2 - 30x - 16y + 37 = 0$;

4) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$;

5) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$;

6) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$?

20.8. კოორდინატთა სისტემის მობრუნებით შემდეგი წირების განტოლებები დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე. რა წირს განსაზღვრავს თითოეული მათგანი:

1) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$;

2) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$;

3) $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$;

4) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$?

20.9. კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნით შემდეგი წირების განტოლებები დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე. რა წირს განსაზღვრავს თითოეული მათგანი:

1) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;

2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

3) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;

4) $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$;

5) $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$;

6) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$;

7) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$;

8) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$;

9) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$?

20.10. აჩვენეთ, რომ თუ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

განტოლება ელიფსური ტიპისაა, მაშინ A და C კოეფიციენტები განსხვავებულია ნულისაგან და ისინი ერთნაირნიშნიანი რიცხვებია.

20.11. აჩვენეთ, რომ თუ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

განტოლება პარაბოლური ტიპისაა, მაშინ A და C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ისინი არ შეიძლება იყოს სხვადასხვანიშნიანი რიცხვები.

20.12. მოცემულია განტოლება:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

აღვნიშნოთ

$$\delta = AC - B^2, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

დაამტკიცეთ, რომ მოცემული განტოლება განსაზღვრავს:

1) ელიფსს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\delta > 0$, ხოლო A და Δ სხვადასხვანიშნიანი რიცხვებია;

2) ჰიპერბოლას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\delta < 0$ და $\Delta \neq 0$;

3) პარაბოლას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\delta = 0$ და $\Delta < 0$;

4) წარმოსახვით ელიფსს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\delta > 0$, ხოლო A და Δ ერთნაირნიშნიანი რიცხვებია;

5) წარმოსახვით გადამკვეთ წრფეთა წყვილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\delta > 0$ და $\Delta = 0$;

6) გადამკვეთ წრფეთა წყვილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\delta < 0$ და $\Delta = 0$.

§ 21. მეორე რიგის ზედაპირები

21.1. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C და რადიუსი R, თუ:

1) $C(0;\ 0;\ 0)$, $R = 5$; 2) $C(-2;\ 3;\ -7)$, $R = 4$.

21.2. შეადგინეთ A წერტილზე გამავალი იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C:

1) $A(-4;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ -2;\ 1)$; 2) $A(3;\ -5;\ 2)$, $C(-1;\ 7;\ -2)$.

21.3. შეადგინეთ სფეროს განტოლება, თუ A და B წერტილები მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია:

1) $A(-4; -5; 1)$, $B(2; -3; 5)$; 2) $A(3; -2; 4)$, $B(-1; 2; 6)$.

21.4. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C წერტილი და რომელიც ეხება მოცემულ სიბრტყეს:

1) $C(-1; 3; -2)$, $2x + 2y - z + 12 = 0$;

2) $C(3; -1; 4)$, $6x - 3y - 2z + 8 = 0$.

21.5. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომელიც გადის $M_1(9; -3; 10)$. $M_2(5; -2; 1)$, $M_3(0; 1; 5)$ წერტილებზე, ხოლო ცენტრი მდებარეობს $2x-y-7z+38=0$ სიბრტყეზე.

21.6. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომელიც გადის $M_1(-4; 4; 4)$, $M_2(4; 7; 5)$, $M_3(-1; -5; 0)$ წერტილებზე, ხოლო ცენტრი მდებარეობს $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{2}$ წრფეზე.

21.7. შეადგინეთ $M_1(5; -1; 0)$, $M_2(9; -4; 3)$, $M_3(6; -5; -1)$, $M_4(8; -5; 3)$ წერტილებზე გამავალი სფეროს განტოლება.

21.8. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია $C(-1; 2; -5)$ და, რომელიც $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{8}$ წრფიდან მოჰკვეთს $6\sqrt{2}$ სიგრძის ქორდას.

21.9. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის რადიუსია $\sqrt{43}$ და რომელიც $3x-3y-5z+50=0$ სიბრტყეს ეხება $M(-3; 2; 7)$ წერტილში.

21.10. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C წერტილი და რომელიც ეხება მოცემულ სფეროს:

1) $C(6; 4; -8)$, $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$;

2) $C(1; 1; 3)$, $(x+5)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 64$.

21.11. იპოვეთ იმ სფეროს რადიუსი, რომელიც ეხება $x-2y+2z-9=0$ და $x-2y+2z+3=0$ სიბრტყეებს.

21.12. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი მდებარეობს $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{5}$ წრფეზე და რომელიც ეხება $6x+2y-3z-8=0$ და $6x+2y-3z+20=0$ სიბრტყეებს.

21.13. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომელიც ეხება $9x+2y+6z+30=0$ და $9x+2y+6z-212=0$ სიბრტყეებს, ამასთან ერთ-ერთ მათგანს $A(-2; 6; -4)$ წერტილში.

21.14. იპოვეთ სფეროს ცენტრი და რადიუსი:

1) $(x-7)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$;

2) $(x+5)^2+y^2+(z-8)^2=81$;

3) $x^2+y^2+z^2+4x+6y-10z+37=0$;

4) $x^2+y^2+z^2+8x-6y=0$.

21.15. დაადგინეთ სად მდებარეობს M წერტილი, მოცემულ სფეროზე, მის შიგნით, თუ გარეთ:

1) $M(-6;\ 8;\ -13)$, $(x+5)^2+(y-7)^2+(z+10)^2=20$;

2) $M(-3;\ -4;\ 8)$, $(x+5)^2+(y+7)^2+(z-2)^2=49$;

3) $M(4;\ 3;\ 2)$, $(x-7)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=50$.

21.16. შეადგინეთ $(x+2)^2+(y-7)^2+z^2=27$ სფეროს იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც $3x+5y-9z+11=0$ სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

21.17. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი M წერტილიდან მოცემულ სფერომდე:

1) $M(9;\ -2;\ 6)$, $x^2+y^2+z^2=9$;

2) $M(4;\ 5;\ -5)$, $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=49$;

3) $M(7;\ 0;\ 6)$, $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-386=0$;

4) $M(6;\ 1;\ -1)$, $x^2+y^2+z^2+6x+2y-10z-86=0$.

21.18. დაადგინეთ სფეროსა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა (იკვეთებიან, არ იკვეთებიან თუ ეხებიან):

1) $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=20$, $z=1$;

2) $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=72$, $x-2y+2z-28=0$;

3) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$, $3x+y-4z-3=0$;

4) $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$, $2x-9y+6z-32=0$.

21.19. დაადგინეთ სფეროსა და წრფის ურთიერთმდებარეობა (იკვეთებიან, არ იკვეთებიან თუ ეხებიან):

1) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$, $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-8}{5}$;

2) $x^2+(y-2)^2+z^2=49$, $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-25}{-21}=\dfrac{z-1}{2}$;

3) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=81$, $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+27}{-2}$.

21.20. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=12$ სფეროზე იპოვეთ $9x-6y+2z-88=0$ სიბრტყის უახლოესი წერტილი.

21.21. შეადგინეთ $M(5;\ -5;\ 2)$ წერტილზე გამავალი $(x+4)^2+(y-1)^2+z^2=121$ სფეროს მხები სიბრტყის განტოლება.

21.22. აჩვენეთ, რომ $6x-2y-3z+14=0$ სიბრტყე ეხება $(x-5)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=49$ სფეროს და იპოვეთ შეხების წერტილის კოორდინატები.

21.23. a-ს რა მნიშვნელობებისათვის ეხება $2x-2y+z+a=0$ სიბრტყე $(x+3)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=16$ სფეროს.

21.24. დაამტკიცეთ, რომ $Ax+By+Cz+D=0$ სიბრტყე ეხება $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $R^2(A^2+B^2+C^2)=D^2$.

21.25. დაამტკიცეთ, რომ $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის განტოლებაა $xx_0+y\cdot y_0+z\cdot z_0=R^2$.

21.26. დაამტკიცეთ, რომ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ სფეროს $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის განტოლებაა $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=R^2$.

21.27. შეადგინეთ $\dfrac{x+7}{15}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{-4}$ წრფის და $(x-2)^2+(y+7)^2+(z-3)^2=121$ სფეროს გადაკვეთის წერტილებზე გამავალი სფეროს მხები სიბრტყეების განტოლებები.

21.28. შეადგინეთ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ სფეროს იმ მხები სიბრტყეების განტოლებები, რომლებიც $2x-y-2z+2=0$ სიბრტყის პარალელურნი არიან.

21.29. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+8}{-2}$ წრფეზე შეიძლება $(x-6)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$ სფეროს ორი მხები სიბრტყის გავლება.

21.30. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z-1}{-4}$ წრფეზე არ შეიძლება $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=49$ სფეროს მხები სიბრტყის გავლება.

21.31. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+10}{6}$ წრფეზე შეიძლება $(x+5)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=225$ სფეროს მხოლოდ ერთი მხები სიბრტყის გავლება.

21.32. რა ზედაპირს განსაზღვრავს მოცემული განტოლებები:

1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{81}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$;

3) $\dfrac{x^2}{16}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=-1$; 4) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=2z$;

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; 6) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}-z^2=1$;

7) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{5}=2z$; 8) $y^2=10x$;

9) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=0$; 10) $3x^2-4y^2-24z=0$;

11) $x^2+3y^2-12=0$; 12) $x^2+y^2+4z^2-16=0$;

13) $z^2-18y=0$; 14) $2x^2+2y^2-3z^2=0$;

15) $x^2+2y^2-6z^2-6=0$; 16) $3x^2+8y^2-48z=0$;

17) $x^2-3y^2-18=0$; 18) $2x^2+4y^2-z^2+16=0$.

21.33. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{27}+\frac{z^2}{12}=1$ ელიფსოიდის $x-4=0$ სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

21.34. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{32}+\frac{z^2}{8}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის $z-2=0$ სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ჰიპერბოლას. იპოვეთ ამ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები და წვეროები.

21.35. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{27}-\frac{z^2}{3}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის $z+1=0$ სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

21.36. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{3}=-1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის $z-2=0$ სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

21.37. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{50}+\frac{z^2}{18}=-1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის $x-4=0$ სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ჰიპერბოლას. იპოვეთ ამ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები და წვეროები.

21.38. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$ ელიფსური პარაბოლოიდის $z-2=0$ სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

21.39. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=2z$ ელიფსური პარაბოლოიდის

$y-4=0$ სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს პარაბოლას. იპოვეთ ამ პარაბოლის წვერო.

21.40. გამოარკვიეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{12}=2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის კვეთა მოცემული სიბრტყით და იპოვეთ მიღებული წირების წვეროები:

1) $z-1=0$; 2) $z+6=0$; 3) $y+12=0$; 4) $x-6=0$.

21.41. დაადგინეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ ელიფსოიდის $4x+2y-3z-11=0$ სიბრტყით კვეთა და იპოვეთ მისი ცენტრი.

21.42. დაადგინეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის $3x+4y-3z+2=0$ სიბრტყით კვეთა და იპოვეთ მისი ცენტრი.

21.43. დაადგინეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z$ ელიფსური პარაბოლოიდის $3x-y+6z-14=0$ სიბრტყით კვეთა და იპოვეთ მისი ცენტრი.

21.44. დაადგინეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის $9x-6y+2z-28=0$ სიბრტყით კვეთა და იპოვეთ მისი ცენტრი.

21.45. დაადგინეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის $x-2y+2=0$ სიბრტყით კვეთა.

21.46. აჩვენეთ, რომ $x-2y-2z-2=0$ სიბრტყე ეხება $\frac{x^2}{4}+y^2=2z$ ელიფსურ პარაბოლოიდს და იპოვეთ შეხების წერტილის კოორდინატები.

21.47. აჩვენეთ, რომ $x-2y-2z+18=0$ სიბრტყე ეხება $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ ელიფსოიდს და იპოვეთ შეხების წირტილის კოორდინატები.

21.48. აჩვენეთ, რომ $5x+2z+5=0$ სიბრტყე ეხება $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-$

$\frac{z^2}{25} = -1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდს და იპოვეთ შეხების წერტილის კოორდინატები.

21.49. შეადგინეთ

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ელიფსის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება.

21.50. შეადგინეთ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

ელიფსის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება.

21.51. შეადგინეთ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ჰიპერბოლის Oz ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება.

21.52. იპოვეთ მოცემული ზედაპირისა და წრფის გადაკვეთის წერტილები:

1) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1;$ $\quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4};$

2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1,$ $\quad \frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4};$

3) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z,$ $\quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2};$

4) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z,$ $\quad \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$

§ 22. წრფივი სივრცე. წრფივი ოპერატორები

22.1. გამოარკვიეთ, მოცემული სიმრავლე წარმოადგენს თუ არა წრფივ სივრცეს, თუ მასში განმარტებულია მისი ნებისმიერი ორი a და b ელემენტის ჯამი და ნებისმიერი α რიცხვისა და ნებისმიერი a ელემენტის ნამრავლი:

1) ყველა იმ რადიუს-ვექტორთა სიმრავლე, რომელთა ბოლოები მოთავსებულია მოცემულ წრფეზე, თუ წრფივი ოპერაციები განმარტებულია ჩვეულებრივად;

2) ყველა იმ რადიუს-ვექტორთა სიმრავლე, რომელთა ბოლოები მოთავსებულია მოცემულ სიბრტყეზე, თუ წრფივი ოპერაციები განმარტებულია ჩვეულებრივად;

3) ყველა იმ ორიენტირებულ მონაკვეთთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები მთელი რიცხვებია, თუ წრფივი ოპერაციები განმარტებულია ჩვეულებრივად;

4) ყველა ორიენტირებულ მონაკვეთთა სიმრავლე, თუ ჯამია $\vec{a}\times\vec{b}$, ხოლო ნამრავლია $\alpha\cdot\vec{a}$;

5) ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლე, თუ ჯამია $a\cdot b$, ხოლო ნამრავლია a^{α};

6) ყველა უარყოფით რიცხვთა სიმრავლე, თუ ჯამია $-|a|\cdot|b|$, ხოლო ნამრავლია $-|a|^{\alpha}$;

7) ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, თუ ჯამია $a\cdot b$, ხოლო ნამრავლია αa;

8) $[0, 1]$ შუალედზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის სიმრავლე ჩვეულებრივი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

9) $[-1, 1]$ შუალედზე განსაზღვრული ყველა ლუწი (კენტი) ფუნქციის სიმრავლე, ჩვეულებრივი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

10) ერთი ცვლადის ყველა იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს, ჩვეულებრივი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

11) ერთიდაიმავე განზომილების დიაგონალურ მატრიცთა სიმრავლე, მატრიცთა შეკრებისა და მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

12) ერთიდაიმავე განზომილების სიმეტრიულ მატრიცთა სიმრავლე, მატრიცთა შეკრებისა და მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

22.2. გამოარკვიეთ ვექტორთა მოცემული სისტემის წრფივად დამოკიდებულების საკითხი მოცემულ შუალედში:

1) $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $2,\ \sin x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,\ (-\infty;\ +\infty)$;

3) $1,\ x,\ \sin x,\ (-\infty;\ +\infty)$;

4) $e^x, e^{2x}, e^{3x}, (-\infty; +\infty)$;

5) $x, x^2, (1+x)^2, (-\infty; +\infty)$;

6) $1, x, x^2, (1+x)^2, (-\infty; +\infty)$;

7) $\cos x, \quad \sin x, \quad \sin 2x, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

8) $e^x, \quad e^{-x}, \quad e^{2x}, \quad (-\infty; +\infty)$;

9) $1+x+x^2, \quad 1+2x+x^2, \quad 1+3x+x^2, (-\infty; +\infty)$;

10) $\frac{1}{x}, \quad x, \quad 1, \quad (0; 1)$.

22.3. ვთქვათ წრფივი სივრცის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$. დაამტკიცეთ, რომ y ამ სისტემის საშუალებით უამრავი გზით წარმოიდგინება.

22.4. ვთქვათ x, y, z წრფივი სივრცის ელემენტთა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა. იქნება თუ არა წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტთა შემდეგი სისტემა:

1) $x, x+y, x+y+z$; 2) $x+y, y+z, z+x$; 3) $x-y, y-z, z-x$.

22.5. აჩვენეთ, რომ წრფივი სივრცის ნებისმიერი x, y, z ელემენტებისათვის და ნებისმიერი α, β, γ რიცხვებისათვის ვექტორთა სისტემა $\alpha x - \beta y, \gamma y - \alpha z, \beta z - \gamma x$ წრფივად დამოკიდებულია.

22.6. იპოვეთ მრავალწევრთა შემდეგი სისტემის წრფივი გარსი:

1) $1, \quad t, \quad t^2$; 2) $1, t, t^2, t^3$;

3) $1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2$; 4) $1-t^2, t-t^2, 2-t-t^2$;

5) $1-t^2, t-t^2$.

22.7. აჩვენეთ, რომ თუ წრფივი სივრცის ელემენტთა $y_1, y_2, \ldots, y_n$ სისტემა წრფივად გამოისახება ამავე სივრცის ელემენტთა $x_1, x_2, \ldots, x_m$ სისტემით, მაშინ პირველი სისტემის წრფივი გარსი შედის მეორე სისტემის წრფივ გარსში.

22.8. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა შემდეგი სისტემები წარმოადგენენ R^n სივრცის ბაზისს:

1) $x_1 = (1; 2; 3; \cdots; n)$,
$x_2 = (0; 2; 3; \cdots; n)$,
. . . . .
$x_n = (0; 0; 0; \cdots; n)$,

2) $x_1 = (1; 1; 1; \cdots; 1; 1)$,
$x_2 = (1; 1; 1; \cdots; 1; 0)$,
. . . . .
$x_n = (1; 0; 0; \cdots; 0; 0)$.

22.9. იპოვეთ n რიგის კვადრატულ მატრიცთა სივრცის განზომილება და აჩვენეთ, რომ მისი ერთ-ერთი ბაზისია:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & 0\cdots 0\\ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ 0 & 0\cdots 0\end{pmatrix},\quad A_2'=\begin{pmatrix}0 & 1\cdots 0\\ 0 & 0\cdots 0\\ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ 0 & 0\cdots 0\end{pmatrix},\ \cdots,\ A_n=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots 1\\ 0 & 0\cdots 0\\ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ 0 & 0\cdots 0\end{pmatrix}.$$

22.10. იპოვეთ ვექტორთა მოცემული სისტემის წრფივი გარსის განზომილება და ბაზისი:

1) $x_1=(3;\ -1;\ 2;\ 1;\ -1),\quad x_2=(2;\ 3;\ -2;\ 0;\ 1),$
$x_3=(4;\ -5;\ 6;\ 2;\ 1),\quad x_4=(7;\ 5;\ -2;\ 1;\ 3);$

2) $x_1=(1;\ 3;\ -2;\ 0;\ -1),\quad x_2=(2;\ 1;\ 1;\ -3;\ 2),$
$x_3=(0;\ 1;\ -1;\ 2;\ 1),\quad x_4=(3;\ 3;\ 0;\ -5;\ 2),$
$x_5=(1;\ -1;\ 2;\ -1;\ 2).$

22.11. იპოვეთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსენთა სიმრავლის განზომილება და ერთ-ერთი ბაზისი:

1) $\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3-4x_4=0,\\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0,\\ 4x_1-x_2+4x_3-9x_4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3-2x_4=0,\\ 2x_1+5x_2-2x_3-5x_4=0,\\ x_1+4x_2+5x_3+x_4=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+8x_2+2x_3-19x_4=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3-2x_4=0,\\ 13x_1+7x_3-12x_4=0,\\ 5x_1+12x_2-x_3=0,\\ 2x_1-3x_2+2x_3-3x_4=0.\end{cases}$

22.12. აჩვენეთ, რომ თუ x ვექტორი ორთოგონალურია $y_1, y_2, \dots, y_n$ ვექტორებისა, მაშინ ის მათი ნებისმიერი წრფივი კომბინაციის ორთოგონალურიცაა.

22.13. აჩვენეთ, რომ არანულოვან ვექტორთა ორთოგონალური სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

22.14. გამოთვალეთ x და y ვექტორების სკალარული ნამრავლი:

1) $x=(1;\ 1;\ 2;\ 2),\quad y=(-1;\ 2;\ 2;\ -1);$

2) $x=(3;\ 2;\ 1;\ 0;\ -1),\quad y=(1;\ -1;\ 1;\ 1;\ 0).$

22.15. განსაზღვრეთ კუთხე x და y ვექტორებს შორის:

1) $x=(3;\ 2;\ 1;\ 2),\quad y=(1;\ 5;\ 3;\ 1)$

2) $x=(4;\ 3;\ 3;\ 1;\ 1;\ 1),\quad y=(5;\ 4;\ 2;\ 2;\ 0).$

22.16 დაამტკიცეთ, რომ თუ R^n სივრცის ვექტორთა სისტემა

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n}), \\ x_2 &= (0, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}) \\ x_3 &= (0, 0, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n}), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= (0, 0, 0, \dots, \alpha_{nn}) \end{aligned}$$

ადგენს ამ სივრცის ორთოგონალურ ბაზისს, მაშინ $\alpha_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ და $\alpha_{ij} = 0$, თუ $i \neq j$.

22.17. წრფივია თუ არა $x = (x_1; x_2; x_3)$ ვექტორის შემდეგი გარდაქმნა:

1) $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \ -3x_1 - 2x_2 - x_3, \ x_2 + 2x_3)$;

2) $Ax = (6 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \ x_2 + 2)$.

22.18. აჩვენეთ, რომ R^3 სივრცის ვექტორების შემდეგი გარდაქმნები წრფივია და იპოვეთ მათი მატრიცები ორთონორმირებულ ბაზისში:

1) $Ax = (x_2 + x_3; \ \ 2x_1 + x_3; \ \ 3x_1 - x_2 + x_3)$;

2) $Ax = (0; \ \ x_2 - x_3; \ 0)$.

22.19. ვთქვათ $x = (x_1; x_2; x_3)$, $Ax = (x_2 - x_3; \ x_1; \ x_1 + x_3)$, $Bx = (2x_2, \ 3x_3, \ x_1)$. იპოვეთ 1) $(2A + 3B^2)x$; 2) $(B(A - B))\,x$.

22.20. აჩვენეთ, რომ იმ მრავალწევრთა სივრცეში, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს და რომლის ბაზისია $1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{n}$, ჩვეულებრივი გაწარმოების ოპერაცია წარმოადგენს წრფივ ოპერატორს. იპოვეთ ამ ოპერატორის მატრიცა ბაზისში $1, t, t^2, \dots, t^n$.

22.21. იპოვეთ შემდეგი მატრიცით მოცემული წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობანი და საკუთრივი ვექტორები:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\qquad$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\qquad$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

პასუხები

§ 1

1.1. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 11 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 8 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$. **1.2.** 1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. **1.3.** 1) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -8 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 7 & -17 & -2 \\ -12 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 11 & -11 & 4 \\ -6 & 6 & -5 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4. 1) $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 16 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -7 \\ 19 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 10 & -4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 28 & -13 \\ 10 & 4 \\ 18 & -17 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 46 \\ 23 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 11 & 10 & -10 \\ 10 & 13 & -17 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 10 & -11 & -12 \\ -10 & 7 & -26 \\ -22 & 19 & 17 \end{pmatrix}$; 13) $(a+b-c)\begin{pmatrix} k & l & m \\ 2k & 2l & 2m \\ 3k & 3l & 3m \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} m+n+p & m+n+p & 3 \\ m^2+n^2+p^2 & mn+mp+np & m+n+p \\ mn+mp+np & m^2+n^2+p^2 & m+n+p \end{pmatrix}$; 15) (-1); 16) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$. **1.5.** 1) $\begin{pmatrix} 37 & 18 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 10 & 4 \\ -4 & 9 & 3 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^n = O$, თუ $n \geqslant 4$.

1.6. 1) $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{b}{2} & a-2b \end{pmatrix}$, სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია; 2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c+\frac{b}{2} & a+b & c+\frac{b}{2} \\ b & 2c & a+b-c \end{pmatrix}$, სადაც a, b, c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. **1.7.** 1) $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 7 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.8. $(51\ \ 7\ \ 24)$. **1.9.** $(2\ \ 21)$. **1.10.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. **1.12.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 46 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -10 \end{pmatrix}$. **1.13.** 2) მითითება: $A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$. **1.14.** 1) 10; 2) 17; 3) $\sin(\alpha-\beta)$; 4) $\cos(\alpha+\beta)$. **1.15.** 1) 44; 2) 6; 3) 63; 4) -139; 5) $4a^3$; 6) 0; 7) $-x^3-x$; 8) $3(3b+c)$. **1.16.** 1) 2; 2) 72; 3) 0; 4) 26; 5) $(x-y)(y-z)(z-x)$; 6) $4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 7) $\sin(\beta-\alpha)$; 8) $a(x-y)(y-z)(z-x)$; 9) 21; 10) 75; 11) 160; 12) 0. **1.17.** 1) 48; 2) 1800; 3) $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)$; 4) x^2y^2; 5) 394; 6) 665; 7) $(-1)^{n-1}$. მითითება; პირველი სტრიქონი გამოვაკლოთ ყველა დანარჩენს; 8) $(-1)^{n-1}$; 9) $(-4)^{n-1}(7n-4)$. მითითება: ყველა სტრიქონი დავუმატოთ პირველ სტრიქონს. შემდეგ პირველი სვეტი გამოვაკლოთ დანარჩენ სვეტებს; 10) $n!$ მითითება: პირველი სტრიქონი დავუმატოთ ყველა დანარჩენ სტრიქონს; 11) $\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$. მითითება: თუ n რიგის ვანდერმონდის დეტერმინანტს აღვნიშნავთ D_n-ით, მაშინ $D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}$. ამ ტოლობის დასამტკიცებლად ბოლო სტრიქონის ელემენტებს გამოვაკლოთ a_1-ზე გამრავლებული წინა სტრიქონის ელემენტები და საზოგადოდ ყოველი k-ური სტრიქონის ელემენტებს გამოვაკლოთ a_1-ზე გამრავლებული $k-1$ სტრიქონის ელემენტები. **1.18.** 1) $-\frac{1}{6}$; $\frac{3}{2}$; 2) 2; 0,5; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$; 5) 0; 6) -9; 2; 7) $\pm\frac{2\pi}{3}+$

$+2\pi k,\ k\in Z$; 8) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **1.19.** 1) $x>3$; 2) $-1<x<7$; 3) $3<x<4$; 4) $-2\leqslant x\leqslant 0$. **1.20.** 1) $\begin{pmatrix}4&2\\-3&1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1&2&6\\15&-1&-3\\-5&10&1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}2&1&1\\-6&-3&2\\-3&-4&1\end{pmatrix}$. **1.23.** 1) მითითება: თუ $A^3=0$, მაშინ $|A|=0$. ამიტომ $A^2=(a+d)A$ (იხ. ამოცანა 1.11), ე. ი. $0=A^3=(a+d)A^2$. აქედან, თუ $a+d\neq 0$, მაშინ $A^2=0$. თუ $a+d=0$, მაშინ $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|A|=0$, მივიღებთ $A^2=0$. **1.24.** 1) $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, სადაც $bc=-a^2$ და b, c ნებისმიერი რიცხვებია. 2) $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, სადაც $bc=-a^2$ და b, c ნებისმიერი რიცხვებია, 3) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ მატრიცები და $\begin{pmatrix}a&b\\\frac{1-a^2}{b}&-a\end{pmatrix}$ მატრიცა, სადაც $a\neq 0$ და $b\neq 0$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. **1.25.** 1) 4; 2) -130; 3) 90; 4) 40; 5) -4; 6) 900; 7) 0; 8) 8640. **1.26.** 1) $\begin{pmatrix}-2&1\\1{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}\frac{3}{11}&\frac{2}{11}\\\frac{4}{11}&-\frac{1}{11}\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}2&-1\\5&-3\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}-13&8&14\\16&-10&-17\\\frac{25}{2}&-\frac{15}{2}&-\frac{27}{2}\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}11&13&-10\\-13&-16&12\\-12&-14&11\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}\frac{7}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} -\frac{6}{17} & \frac{7}{17} & \frac{9}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{7}{34} & -\frac{3}{17} & \frac{19}{17} & \frac{2}{17} \\ -\frac{9}{34} & \frac{1}{17} & \frac{5}{34} & \frac{5}{17} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$;

12) შებრუნებული მატრიცა არ არსებობს; 13) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \cdots & 2-n \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 0 & 1 & 1 \cdots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$. **1.27.** 1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 3) (1 1);

4) $\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -8 & -51 \\ -3 & -23 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.29.** 1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 1; 5) 2; 6) 3; 7) 3; 8) 4; 9) 4; 10) 4; 11) 2; 12) 2. **1.30.** 1) შეიძლება გაიზარდოს არაუმეტეს 1-ით; 2) შეიძლება გაიზარდოს არაუმეტეს 2-ით. **1.31.** 1) 3; 2) 2, თუ $\lambda = 0$ და 3, თუ $\lambda \neq 0$.

§ 2

2.1. 1) $x = 1$; $y = -1$, 2) $x = 2$; $y = 3$. 3) $x = 0$; $y = 0$, 4) $x = 0$; $y = 0$. **2.2.** 1) $x = 1$; $y = 5$; $z = 2$. 2) $x = -4$; $y = 3$; $z = -1$. 3) $x = 5$; $y = -7$; $z = 5$. 4) $x = 17$; $y = 5$; $z = -21$. **2.3.** 1) $x = 1$; $y = 2$; $z = 1$. 2) $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$. 3) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. 4) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. **2.4.** 1) $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$. 2) $x_1 = 3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 0$. 3) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = -2$. 4) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = -1$. **2.5.** 1) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$. 2) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. 3) $x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $x_3 = -1$. 4) $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$. **2.6.** 1) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$. 2) $x_1 = -7$; $x_2 = -11$; $x_3 = 8$. 3) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$. 4) $x_1 = -1$;

$x_2 = -1$; $x_3 = -1$; $x_4 = -1$. **2.7.** 1) თავსებადია. 2) არათავსებადია. 3) არათავსებადია. 4) თავსებადია. **2.8.** 1) თავსებადია. 2) თავსებადია 3) არათავსებადია. 4) თავსებადია. **2.9.** 1) $x_1 = \frac{19}{3} + x_3$; $x_2 = -\frac{14}{15} + \frac{2}{5}x_3$; x_3 — ნებისმიერია. 2) $x_1 = 0{,}5 + 0{,}5\,x_3$; $x_2 = -0{,}5 + 1{,}5\,x_3$; x_3 — ნებისმიერია. 3) $x_1 = -\frac{5}{7}x_3$; $x_2 = \frac{11}{7}x_3$; x_3 — ნებისმიერია. 4) $x_1 = -\frac{1}{3}x_3$; $x_2 = \frac{5}{3}x_3$; x_3 — ნებისმიერია. **2.10.** 1) $x_1 = 1 + 2x_2 - 3x_3$; x_2 და x_3 ნებისმიერია. 2) $x_1 = x_2 - x_3$; x_2 და x_3 ნებისმიერია. 3) $x_1 = 0{,}5 + 0{,}5\,x_2$; $x_3 = 0$; x_2 — ნებისმიერია. 4) $x_1 = -x_3$; $x_2 = 0$; x_3 — ნებისმიერია. **2.11.** 1) $x_1 = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}x_3$; $x_2 = \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x_3$; x_3 — ნებისმიერია. 2) $x_1 = 9x_4 - 7$; $x_2 = 16x_4 - 15$; $x_3 = 12x_4 - 11$; x_4 ნებისმიერია. 3) $x_1 = x_3 + x_4$; $x_2 = x_3$; x_3 და x_4 ნებისმიერია. 4) $x_1 = -\frac{7}{13}x_3 + \frac{12}{13}x_4$; $x_2 = \frac{4}{13}x_3 - \frac{5}{13}x_4$; x_3 და x_4 — ნებისმიერია. 5) $x_1 = -1 + x_3 + 2x_4$; $x_2 = -3 + x_3 + 2x_4$; x_3 და x_4 ნებისმიერია. 6) $x_1 = 6 - x_5$; $x_2 = -5 + x_5$; $x_3 = 3$; $x_4 = -1 - x_5$; x_5 — ნებისმიერია. **2.12.** 1) თუ $a \neq 5$ სისტემა არათავსებადია. თუ $a = 5$ სისტემა თავსებადია და მისი ამონახსენია: $x_1 = -4 + x_3$; $x_2 = 5{,}5 - 2x_3$; x_3 ნებისმიერია. 2) თუ $a \neq -3$, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი: $x_1 = -\frac{1}{a+3}$; $x_2 = \frac{4a+11}{3(a+3)}$; $x_3 = -\frac{a+11}{3(a+3)}$. თუ $a = -3$ სისტემა არათავსებადია. 3) თუ $\lambda = -2$, სისტემა არათავსებადია. თუ $a = 1$ სისტემის ამონახსენია: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, სადაც x_2 და x_3 ნებისმიერია. თუ $(a-1)(a+2) \neq 0$, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{a+2}$. 4) თუ $a = -2$, სისტემა არათავსებადია. თუ $a = 1$, სისტემის ამონახსენია $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, სადაც x_2 და x_3 ნებისმიერია. თუ $(a-1)(a+2) \neq 0$, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $x_1 = -\frac{a+1}{a+2}$; $x_2 = \frac{1}{a+2}$; $x_3 = \frac{(a+1)^2}{a+2}$. **2.13.** 1) თუ $b(a-1) \neq 0$, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი: $x_1 = \frac{2b-1}{b(a-1)}$; $x_2 = \frac{1}{b}$; $x_3 =$

$=\dfrac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$. თუ $a=1$ და $b=\dfrac{1}{2}$, სისტემის ამონახსენია: $x_1=$ $=2-x_3$; $x_2=2$, სადაც x_3 ნებისმიერია. სხვა შემთხვევებში სისტემას ამონახსენი არა აქვს. 2) თუ $b(a-1)(a+2)\neq 0$, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი: $x_1=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)}$; $x_2=\dfrac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$; $x_3=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. თუ $a=-2$ და $b=-2$, მაშინ სისტემის ამონახსენია: $x_1=-1-2x_2$; $x_3=-1-2x_2$, სადაც x_2 ნებისმიერია. თუ $a=1$ და $b=1$, მაშინ სისტემის ამონახსენია $x_1=1-x_2-x_3$, სადაც x_2 და x_3 ნებისმიერია. სხვა შემთხვევებში სისტემას ამონახსენი არა აქვს. 3) თუ $a\neq 0$, სისტემა არათავსებადია. თუ $a=0$, მაშინ სისტემის ამონახსენია; $x_1=-\dfrac{5}{2}x_3-\dfrac{13}{2}x_4-\dfrac{3}{2}$, $x_2=-\dfrac{7}{2}x_3-\dfrac{19}{2}x_4-\dfrac{7}{2}$, სადაც x_3 და x_4 ნებისმიერია. 4) თუ $a=0$, სისტემა არათავსებადია. თუ $a\neq 0$, სისტემის ამონახსენია: $x_1=\dfrac{4-a}{5a}-\dfrac{3}{5}x_3$; $x_2=\dfrac{9a-16}{5a}-\dfrac{8}{5}x_3$, $x_4=\dfrac{1}{a}$, სადაც x_3 ნებისმიერია. **2.17.** 1) $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=2$. 2) $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=1$. 3) სისტემა არათავსებადია. 4) $x_1=2{,}2-$ $-1{,}2\,x_3$, $x_2=2{,}6-1{,}6\,x_3$, სადაც x_3 ნებისმიერია. **2.18.** 1) $x_1=2$; $x_2=-1$; $x_3=1$; $x_4=-1$. 2) სისტემა არათავსებადია. 3) $x_3=6-$ $-15x_1+10x_2$, $x_4=-7+18x_1-12x_2$, სადაც x_1 და x_2 ნებისმიერია. 4) $x_1=6-x_5$; $x_2=-5+x_5$, $x_3=3$, $x_4=-1-x_5$, სადაც x_5 ნებისმიერია.

§ 3

3.1. $x=-7$. **3.2.** $(-2;\ 0)$, $(4;\ 0)$, $(0;\ 0)$, $(-3;\ 0)$. **3.3.** $(0;\ -3)$, $(0;\ -4)$, $(0;\ 0)$, $(0;\ 5)$. **3.4.** $(-4;\ 3)$, $(0;\ 4)$, $(2;\ -3)$, $(3;\ 0)$. **3.5.** $(-5;\ -1)$, $(3;\ -5)$, $(4;\ 0)$, $(0;\ 7)$. **3.6.** $(-7;\ -1)$, $(4;\ 0)$, $(5;\ 2)$, $(0;\ -6)$. **3.7.** $(2;\ 5)$, $(-6;\ -4)$, $(1;\ -3)$, $(-4;\ 2)$. **3.8.** $(-1;\ 4)$, $(4;\ -2)$, $(0;\ -2)$, $(6;\ 5)$. **3.9.** 1) პირველს ან მესამეს; 2) მეორეს ან მეოთხეს; 3) პირველს ან მესამეს; 4) მეორეს ან მეოთხეს; 5) პირველს, მეორეს ან მეოთხეს; 6) მეორეს, მესამეს ან მეოთხეს; 7) პირველს, მესამეს ან მეოთხეს; 8) პირველს, მეორეს ან მესამეს. **3.11.** A წერტილის გეგმილების კოორდინატებია $(-4;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 2;\ 0)$ და $(0;\ 0;$ $-1)$. B წერტილის გეგმილების კოორდინატებია $(3;\ 0;\ 0)$, $(0;\ -1;\ 0)$ და $(0;\ 0;\ 1)$ **3.12.** A წერტილის გეგმილების კოორდინატებია $(2;\ -3;\ 0)$,

$(2;\ 0;\ 1)$, $(0;\ -3;\ 1)$; B წერტილის გეგმილების კოორდინატებია $(-4;\ 2;\ 0)$, $(-4;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 2;\ 0)$. **3.13.** $(-3;\ 1;\ -2)$, $(2;\ 0;\ 1)$, $(3;\ 5;\ -2)$, $(-1;\ -3;\ 2)$. **3.14.** $(4;\ 2;\ -1)$, $(-4;\ -1;\ -1)$, $(0;\ 2;\ 1)$, $(4;\ -1;\ 2)$. **3.15.** $(-3;\ -2;\ 1)$, $(4;\ -5;\ -2)$, $(-3;\ 2;\ 1)$, $(2;\ 1;\ 0)$. **3.16.** $(-4;\ -3;\ -2)$, $(4;\ 1;\ 3)$, $(1;\ 0;\ -2)$, $(2;\ -1;\ -3)$. **3.17.** $(-2;\ 5;\ -1)$, $(2;\ -3;\ 2)$, $(0;\ 3;\ -3)$, $(-4;\ -2;\ -1)$. **3.19.** $\left(3;\ \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(1;\ \frac{\pi}{5}\right)$.

3.20. $\left(3;\ \frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(2;\ \frac{11\pi}{6}\right)$, $\left(1;\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(4;\ \frac{2\pi}{3}\right)$. **3.21.** 1) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0;\ 4)$, $(7;\ 0)$, $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(2\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$, $(3;0)$, $\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $(5;\ \pi)$, $\left(3;\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(4;\ \frac{5\pi}{3}\right)$. **3.22.** 5. **3.23.** $2\sqrt{7}$.

§ 4

4.2. 1) $\vec{b} = \vec{0}$; 2) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორებია ან ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია; 3) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორებია და $|\vec{a}| \geqslant |\vec{b}|$, ან $\vec{b} = \vec{0}$; 4) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია ან ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია; 5) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია და $|\vec{b}| \geqslant |\vec{a}|$, ან $\vec{a} = \vec{0}$; 6) $\vec{a} \perp \vec{b}$, ან ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია; 7) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორებია ან ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია; 8) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორებია ან მათ შორის კუთხე მახვილია; 9) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია ან მათ შორის კუთხე ბლაგვია; 10) $\alpha = \beta$, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია და $\alpha = -\beta$, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართულია. **4.3.** $\vec{a}$ და $\vec{b}$ უნდა იყვნენ კოლინეარული. **4.4.** $\lambda = \mu = 1$. **4.5.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **4.7.** $5\sqrt{10}$. **4.8.** 12. **4.9.** $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$. **4.10.** 7. **4.11.** 7. **4.12.** $|5\vec{a} + 4\vec{b}| = \sqrt{129}$; $|5\vec{a} - 4\vec{b}| = 7$. **4.13.** $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$. **4.14.** $\overrightarrow{AM} =$

$=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$, $\overrightarrow{BN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c})$, $\overrightarrow{CP}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$. **4.15.** $\overrightarrow{AM}=-(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a})$, $\overrightarrow{BN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$. **4.16.** $\overrightarrow{AD_1}=\vec{c}+\frac{1}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{AD_2}=\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{AD_3}=\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{AD_4}=\vec{c}+\frac{4}{5}\vec{a}$. **4.28.** $\overrightarrow{OA}=2(\vec{b}-\vec{c})$. **4.29.** $\overrightarrow{OC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{a}$. **4.30.** $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CC_1}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. $\overrightarrow{DB_1}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{DC_1}=\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{CB_1}=\vec{b}+\vec{c}$. **4.31.** $\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{c}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{5}{3}\vec{c}$. **4.32.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) -2. **4.33.** 3; $3\sqrt{3}$. **4.34.** არა. **4.35.** $4\sqrt{2}-2{,}25$. **4.36.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-15)$. **4.37.** $8\sqrt{2}$; 8; -8.

§ 5

5.1. 1) $(-2;\ -1;\ 2)$; 2) $(4;\ -3;\ 6)$; 3), $(2;\ -4;\ 8)$; 4) $(18;\ -11;\ 22)$; 5) $(-7;\ -1;\ 2)$; 6) $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. **5.2.** 1) -15, 6, 12; 2) 33, -16, -8; 3) -18, $\frac{13}{2}$, 19; 4) 13, -8, 8. **5.3.** $\overrightarrow{AB}(1;\ -3;\ 3)$, $\overrightarrow{BA}(-1;\ 3;\ -3)$. **5.4.** $A(5;\ 6;\ 4)$. **5.5.** $B(1;\ 8;\ -2)$. **5.6.** $\overrightarrow{AM}(5;\ 4;\ 0)$. **5.7.** 1) კოლინეარულია; 2) არაკოლინეარულია. **5.8.** $\lambda=-\frac{3}{4}$. **5.9.** $\alpha=-\frac{4}{3}$, $\beta=-3$. **5.13.** $(-2;\ 0;\ 1)$. **5.14.** $\overrightarrow{BD}(2;\ 1;\ 5)$. **5.15.** 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოკიდებულია. **5.16.** 1) $\vec{p}=2\vec{a}-5\vec{b}$; 2) $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$; 4) $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$. **5.17.** 1) $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$; 4) $\vec{p}=3\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$. **5.18.** 1) $\vec{r}=11\vec{e}_1'-7\vec{e}_2'$; 2) $r=\frac{8}{7}\vec{e}_1'+\frac{5}{7}\vec{e}_2'$;

3) $\vec{r} = -13\vec{e}_1' + 8\vec{e}_2'$; 4) $\vec{r} = \frac{7}{4}\vec{e}_1' - \frac{3}{2}\vec{e}_2'$. **5.19.** 1) $\vec{d} = 3\vec{e}_1' - \vec{e}_2' - \vec{e}_3'$; 2) $\vec{d} = 2\vec{e}_1' - \vec{e}_3' - \vec{e}_3'$; 3) $\vec{d} = 2\vec{e}_1' + \vec{e}_2' + 3\vec{e}_3'$; 4) $\vec{d} = 2\vec{e}_1' + \vec{e}_2' - 3\vec{e}_3'$.

§ 6

6.1. 5. **6.2** -6. **6.3.** 1) -3; 2) 9; 3) 4; 4) 7; 5) 19; 6) 61; 7) 15; 8) 49. **6.4.** 1) 20; 2) 26; 3) 16; 4) -24. **6.5.** $\sqrt{129}$; $\sqrt{124}$. **6.6.** 1) $\sqrt{47}$; 2) $\sqrt{391}$. **6.7.** $-\frac{3}{2}$. **6.8.** -7. **6.9.** $\frac{\pi}{4}$. **6.10.** $\frac{\pi}{2}$. **6.11.** $\arccos\frac{23}{2\sqrt{221}}$. **6.12.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **6.13.** $\alpha = \pm\frac{4}{3}$. **6.14.** $\alpha = \frac{17}{33}$. **6.15.** $\frac{\pi}{3}$. **6.16.** -2. **6.17.** -1 **6.18.** 13. **6.19.** -1. **6.20.** $\frac{59}{\sqrt{61}}$. **6.21.** 1) 7; 2) 2. **6.22.** 1) -1; 2) 7. **6.23.** 1) -11; 2) 87. **6.24.** $\vec{b}(4; 6; -6)$. **6.25.** 1) $|\vec{a}|=6$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\cos\beta = -\frac{5}{6}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{6}$. 2) $|\vec{a}| = 7$, $\cos\alpha = \frac{2}{7}$. $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = -\frac{6}{7}$. **6.26.** $|\vec{a}| = \sqrt{369}$, $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{369}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{369}}$, $\cos\gamma = \frac{17}{\sqrt{369}}$. **6.27.** $\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$. **6.28.** $6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ და $-6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. **6.29.** $-6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$. **6.30.** $\vec{a}(-12\sqrt{2}; 12; 12)$. **6.31.** $\vec{a}(2\sqrt{2}; 2; 2)$ და $\vec{a}(2\sqrt{2}; -2; 2)$. **6.32.** 1) $\arccos\frac{5}{21}$; 2) $\arccos\left(-\frac{7}{18}\right)$. **6.33.** $\arccos\frac{12}{\sqrt{170}}$. **6.34.** $\frac{\pi}{4}$. **6.35.** $\arccos\frac{3}{2\sqrt{21}}$. **6.36.** $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$. **6.37.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{35}}$. **6.38.** $\arccos\frac{5}{\sqrt{133}}$. **6.40.** 1) $\alpha = -6$; 2) $\alpha = -4$. **6.41.** $\vec{c} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$. **6.42.** $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. **6.43.** $\vec{d}(1; -2; 2)$. **6.44.** 6. **6.45.** -4. **6.46.** 5. **6.47.** -11. **6.48.** $\frac{9\sqrt{34}}{34}$. **6.49.** 1) არ არის სამართლიანი; 2) სამართლიანია; 3) არ არის სამართლიანი; 4) სა-

მართლიანია მხოლოდ კოლინეარული ვექტორებისათვის; 5) სამართლიანია; 6, სამართლიანია მხოლოდ კოლინეარული ვექტორებისათვის. **6.58.** $\vec{BK} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} - \vec{b}$.

§ 7

7.1. 1) მარცხენა; 2) მარჯვენა; 3) მარცხენა; 4) მარცხენა; 5) მარცხენა. **7.2.** 1) 6; 2) 15. **7.3.** 1) 16; 2) $6\sqrt{3}$. **7.4.** 1) ± 30; 2) $\pm 15\sqrt{2}$. **7.5.** 1) 24; 2) 60. **7.6.** 1) 3; 2) 27; 3) 300; 4) 127. **7.7.** 1) 70; 2) 16,5. **7.8.** $1{,}5\sqrt{2}$. **7.9.** 1) $2(\vec{k} - \vec{i})$; 2) 4. **7.10.** 1) $-5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$; 2) $3\vec{i} - 6\vec{k}$. **7.11.** 1) $10\vec{i} + 2\vec{j} + 14\vec{k}$; 2) $20\vec{i} + 4\vec{j} + 28\vec{k}$. **7.12.** 1) $6\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$; 2) $-12\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}$. **7.13.** 1) $-7\vec{i} + 14\vec{j} - 7\vec{k}$; 2) $10\vec{i} + 13\vec{j} + 19\vec{k}$. **7.14.** $-6\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$. **7.15.** $45\vec{i} + 24\vec{j}$. **7.16.** $7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$.

§ 8

8.1. 24. **8.2.** ± 27. **8.3.** ± 2. **8.4.** 1) მარცხენა; 2) მარჯვენა; 3) მარჯვენა; 4) მარცხენა; 5) ვექტორები კომპლანარულია; 6) მარჯვენა. **8.5.** 1) -7; 2) -21. **8.6.** 1) კომპლანარულია; 2) არაკომპლანარულია; 3) არაკომპლანარულია; 4) კომპლანარულია. **8.7.** 1) მდებარეობს; 2) არ მდებარეობს; 3) მდებარეობს; 4) არ მდებარეობს. **8.8.** 1) 3,5; 2) 9. **8.9.** 1) 0,4; 2) 5. **8.10.** 1) 34; 2) 13. **8.11.** 7,4. **8.12.** $C(-16; 0)$ და $C(-4; 0)$. **8.13.** $C(0; -15)$ და $C(0; 1)$. **8.14.** 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{195}$. **8.15** 1) 14; 2) $\dfrac{\sqrt{251}}{2}$. **8.16.** 1) 5; 2) $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$. **8.17.** 1) 3; 2) 12. **8.18.** 1) $\dfrac{8}{3}$; 2. 2) $\dfrac{154}{3}$; $\dfrac{77}{\sqrt{13}}$. **8.19.** (0; 8; 0) და (0; -7; 0). **8.23.** $\lambda = 1$ და $\lambda = -2$. **8.27.** $5\sqrt{3}$. **8.28.** 31. **8.29.** 13. **8.30.** (2; 11; 7). **8.31.** (-4; 3; 4). **8.32.** 15; $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$; $\cos\beta = -\dfrac{2}{15}$; $\cos\gamma = \dfrac{11}{15}$. **8.33.** 28; $\cos\alpha = -\dfrac{3}{7}$; $\cos\beta = -\dfrac{6}{7}$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{7}$. **8.34.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{66}}$; $\cos\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{66}}$; $\cos\gamma = -\dfrac{7}{\sqrt{66}}$.

§ 9

9.1. 1) 5; 2) 13; 3) 7; 4) 10. **9.2.** $|AB| = 10$, $|AC| = \sqrt{61}$, $|BC| = \sqrt{5}$. **9.3.** $\sqrt{19}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$. **9.4.** (0; 0), (6; 0). **9.5.** (0; —2), (0; 2). **9.6.** (0; 1; 0). **9.11.** 17. **9.12.** 27. **9.13.** (— 3; 5) და (5; — 5). **9.14.** (2; 2), $R = 2$; (10; 10), $R = 10$. **9.15.** (3; — 2), $R = 10$. **9.16.** $\left(\frac{77}{30}; \frac{11}{30}; \frac{11}{10}\right)$, $R = \frac{\sqrt{4619}}{30}$. **9.17.** 1) (1; —1); 2) $\left(\frac{7}{2}; -23; 1\right)$. **9.18.** 1) (5; 6); 2) (— 5; — 5; 5). **9.19.** (6; 0). **9.20.** $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$, $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$. **9.21.** $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, (— 1; 1), $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **9.22** (5; — 3), (1; — 5). **9.23.** 7. **9.24.** (2; — 1), (3; 1). **9.25.** $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3$; $\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$, **9.26.** $A(-1;\ 2;\ 4)$, $B(8;\ -4;\ -2)$. **9.28.** $C(-10;\ -7)$. **9.29.** $\sqrt{53}$; $\sqrt{82}$; $\sqrt{185}$. **9.30.** $\frac{\sqrt{182}}{3}$. **9.31.** $C(4;\ -5;\ -2)$. **9.32.** $D\left(\frac{5}{2}; -2\right)$, $|BD| = \frac{3}{2}$. **9.33.** $\frac{3}{2}\sqrt{14}$. **9.34.** $\left(\frac{5}{6}; \frac{5\sqrt{14}}{6}; \frac{15}{2}\right)$. **9.35.** (1; — 3), (3; 1), (— 5; 7). **9.36.** $BO : OD = 1 : 3$, სადაც O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.

§ 10

10.1. M_1, M_3, M_4 წერტილები მდებარეობენ წრფეზე, ხოლო M_2, M_5, M_6 არ მდებარეობენ. **10.2.** 3; — 3; 0; — 12. **10.3.** 1; — 2; — 5; 7. **10.4.** $a = 11$, $b = -3$. **10.5.** (6; 0), (0; — 4). **10.6.** 1) $a = -2$; 2) $a = \pm 3$; 3) $a = 1$ და $a = \frac{5}{3}$. **10.7.** (3; —5), (—1; 1). **10.8.** $A(2;\ -1)$, $B(5;\ -5)$, $C(2;\ -4)$. **10.9.** 1) იკვეთებიან; 2) არ იკვეთებიან. **10.10.** $a = 2$. **10.11.** 1) $3x - y - 2 = 0$; 2) $4x + 4y - 3 = 0$; 3) $2x - y = 0$; 4) $y + 3 = 0$; 5) $x + 3y - 2 = 0$; 6) $2x + y + 4 = 0$. **10.12.** 1) $k = 5$, $b = 3$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $b = 2$; 3) $k = 0$, $b = 3$;

4) $k=-\frac{5}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$; 5) $k=-\frac{3}{2}$, $b=0$; 6) $k=-1$, $b=0$.

10.13. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$. **10.14.** 1) $\sqrt{3}x-y-2=0$; 2) $x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$. **10.15.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{8}=1$; 3) $\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{\frac{1}{5}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$. **10.16.** $4x+7y-28=0$; $4x-7y+28=0$; $4x-7y+28=0$; $4x+7y-28=0$. **10.17.** $4x-3y+24=0$. **10.18.** 1) 12; 2) 7. **10.19.** $x+y+4=0$. **10.20.** $x+y-5=0$, $x-y+1=0$, **10.21.** $x+y-2=0$, $(1+\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})y-2=0$, $(1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})y-2=0$. **10.22.** $3x-2y-12=0$; $3x-8y+24=0$. **10.23.** $x+3y-30=0$, $3x+4y-60=0$, $3x-y-30=0$, $x-12y+60=0$. **10.24.** 1) $2x-9y+5=0$; 2) $x+3=0$; 3) $y+1=0$; 4) $6x-5y+10=0$. **10.25.** 1) $x-2y+1=0$; 2) $3x-y-3=0$; 3) $x-3=0$; 4) $5x-2y=0$. **10.26.** 1) $x+y-1=0$; 2) $x-2=0$; 3) $x-2y=0$; 4) $y-1=0$; 5) $x+y-1=0$; 6) $2x-3y-6=0$. **10.29.** 1) 7; 2) $-\frac{3}{2}$. **10.30.** $3x+4y-6=0$, $x-6y-2=0$, $2x-y+7=0$.

10.31. (3; — 1). **10.32.** (4; — 5). **10.33.** (4,5; 1). **10.34.** 1) ჰქვეთს; 2) არ ჰქვეთს. **10.35.** 1) $2x-y+5=0$; 2) $x+y-2=0$. **10.36.** 1) $x+y+2=0$; 2) $\sqrt{3}x-y-2=0$. **10.37.** 1) პარალელურია; 2) არაპარალელურია 3) არაპარალელურია; 4) პარალელურია; 5) პარალელურია; 6) არაპარალელურია. **10.38.** 1) პერპენდიკულარულია; 2) არ არიან პერპენდიკულარული; 3) არ არიან პერპენდიკულარული; 4) პერპენდიკულარულია; 5) პერპენდიკულარულია; 6) პერპენდიკულარულია.

10.39. $\alpha=2$ და $\alpha=-\frac{2}{3}$. **10.40.** $\alpha=0$ და $\alpha=1$. **10.41.** 1) $-\frac{2}{5}$; 2) $\frac{5}{2}$. **10.42.** 1) $x-2y+4=0$; 2) $3x+y-4=0$; 3) $2x+3y-7=0$; 4) $3x+4y+26=0$; 5) $x+1=0$; 6) $y-3=0$. **10.43.** 1) $x+3y-8=0$; 2) $2x-y-8=0$; 3) $x+y-4=0$; 4) $6x+y-11=0$; 5) $y-5=0$; 6) $3x-1=0$. **10.44.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\mathrm{arctg}\,\frac{7}{4}$; 5) $\mathrm{arctg}\,\frac{16}{11}$; 6) $\frac{\pi}{3}$; 7) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$;

8) arctg 8; 9) $\arccos \frac{24}{25}$; 10) $\arccos \frac{7}{\sqrt{65}}$. **10.45.** 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{3}{2}$; 6) $\sqrt{5}$. **10.46.** 13. **10.47.** 10. **10.48.** $y-3=0$ და $3x+4y-9=0$. **10.49.** 1) $\frac{11}{2}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{22}{5}$. **10.50.** 40. **1051.** $3x+4y+15=0$ და $3x+4y-25=0$. **10.52.** 1) $3x-2y-7=0$; 2) $5x+y-7=0$; 3) $8x+12y+5=0$; 4) $6x+30y-7=0$. **10.53.** $3x-6y+16=0$ და $6x+12y+23=0$. **10.54.** 11. **10.55.** $C(2;\,-1)$ და $C\left(\frac{4}{11};\ \frac{43}{11}\right)$. **10.56.** $C(4;\,-10)$ და $C\left(\frac{43}{4};\ \frac{7}{2}\right)$. **10.57.** $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$. **10.58.** $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$. **10.59.** $x+y+1=0$. **10.60.** $2x+3y-1=0$. **10.61.** $P(0;\,-1)$. **10.62.** $P(1;\,0)$ და $P(6;\,0)$. **10.63.** $(-2;\,1)$. **10.64.** $(-12;\,5)$. **10.65.** $(10;\,21)$. **10.66.** $(3;\,0)$. **10.67.** $3x-y+6=0$. **10.68.** $B(0;\,4)$, $D(-1;\,-3)$. **10.69.** $C(-5;\,0)$, $D(-2;\,-4)$ და $C(3;\,6)$, $D(6;\,2)$. **10.70.** $17x-40y+52=0$. **10.71.** $x+y-4=0$. **10.72.** $x-3=0$, $y-4=0$. **10.73.** $2x-y+1=0$. **10.74.** $x-y+1=0$. **10.75.** $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$. **10.76.** $22x+33y-35=0$, $5x-y+3=0$, $17x+34y-38=0$. **10.77.** $x-3=0$, $x+y-3=0$, $y=0$. **10.78.** $4x+3y-8=0$, $y-1=0$, $5x+3y-9=0$. **10.79.** $\frac{10}{\sqrt{13}}$. **10.80.** $5x+y-3=0$, $x-5y-11=0$. **10.81.** $\sqrt{10}$. **10.82.** $2x-y-5=0$. **10.83.** $5x-3y+2=0$. **10.84.** $4x+y-3=0$. **10.85.** $x-5=0$. **10.86.** $x-y=0$, $x+5y-15=0$, $5x+y-14=0$. **10.87** $(-15;\,-18)$. **10.88.** $4x+3y+1=0$, $3x-4y+32=0$, $4x+3y-24=0$, $3x-4y+7=0$, $x+7y-31=0$. **10.89.** $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$. **10.90.** $(2;\,1)$, $(4;\,2)$, $(-1;7)$, $(1;\,8)$. **10.91.** $(1;\,-3)$, $(-2;\,5)$, $(5;\,-9)$, $(8;\,-17)$. **10.92.** $x-y+2=0$, $x-5y-6=0$, $x+y=0$, $x-2y=0$. **10.93.** $3x-5y+4=0$, $x+7y-16=0$, $3x-5y-22=0$, $x+7y+10=0$. **10.94.** $h_1=h_2=\frac{6}{\sqrt{5}}$. **10.95.** $\arccos\frac{3}{5}$. **10.96.** $x-5y+3=0$ და $5x+y-11=0$. **10.97.** $y-2=0$ და $\sqrt{3}x+y+3\sqrt{3}-2=0$.

10.98. $2x-y=0$, $3x+y-20=0$, $x-3y+20=0$. **10.99.** $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$. **10.100.** $2x+y-16=0$, $2x+y+14=0$, $x-2y-18=0$. **10.101.** 1) $4x-4y+3=0$, $2x+2y-7=0$; 2) $4x+1=0$, $8y+13=0$. **10.102.** $x-3y-27=0$. **10.103.** $6x+17y-15=0$. **10.104.** $x+2y-2=0$, $x-2y+2=0$, $2x+y-4=0$, $C\left(\frac{1}{5};\ \frac{8}{5}\right)$. **10.105.** $2x-y-2=0$, $2x+y+2=0$. **10.106.** $29x-2y+33=0$. **10.107.** $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. **10.108.** $3x+4y-15=0$. **10.109.** $C(-6;\ 6)$. **10.110.** $2x+y-3=0$, $y-5=0$, $4x-y-15=0$. **10.111.** $3x+4y-22=0$, $2x-7y-5=0$, $3x+5y-23=0$. **10.112.** $x+3y-8=0$, $x-y=0$, $7x+5y-8=0$. **10.113.** $x+2y=0$. **10.114.** $2x-3y+7=0$, $6x+5y-21=0$, $x+2y=0$. **10.115.** $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$. **10.116.** $2x-y+3=0$, $2x+y-7=0$; $x-2y-6=0$. **10.117.** $4x+7y-1=0$, $y-3=0$, $4x+3y-5=0$. **10.118.** $3x+7y-5=0$, $3x+2y-10=0$, $9x+11y+5=0$. **10.119.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **10.120.** $x+y-7=0$. $x+7y+5=0$, $x-8y+20=0$. **10.121.** $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-41=0$. **10.122.** 1) (3; 0). 2) (2; 0). **10.123.** 1) (0; 1). 2) (0; 10). **10.124.** (2; —1). **10.125.** (2; 5).

§ 11

11.1. M_1 და M_4 წერტილები მდებარეობენ სიბრტყეზე, ხოლო M_2 და M_3 წერტილები არ მდებარეობენ. **11.2.** $a=5$, $b=-3$, $c=10$. **11.3.** $M(1;\ 1;\ 1)$. **11.4.** (6; 0; 0), (0; — 12; 0), (0; 0; 8). **11.5.** 1) $2x+4y+5z-7=0$; 2) $5x-y+4z=0$. **11.6.** $7x-2y+2z=0$. **11.7.** $4x-2y+5z+15=0$. **11.8.** 1) $9x-5y-3z-2=0$; 2) $5x-y-4z-51=0$. **11.9.** $7x-4y+2z+41=0$. **11.10.** $6x+5y-7z-27=0$. **11.11.** 1) პარალელურია; 2) პარალელურია; 3) არ არის პარალელური; 4) პარალელურია. **11.12.** 1) $a=-4{,}5$; $b=6$; 2) $a=-4$; $b=6$. **11.13.** 1) პერპენდიკულარულია; 2) არ არის პერპენდიკულარული; 3) პერპენდიკულარულია; 4) არ არის პერპენდიკულარული. **11.14.** 1) $a=-26$; 2) $a=2$ და $a=3$. **11.15.** $3x+2y-z=0$. **11.16.** $4x-y+3z-21=0$. **11.17.** 1) $z+5=0$; 2) $y-4=0$; 3) $x+2=0$. **11.18.** 1) $a=3$; 2) $a=1$, $a=4$; 3) $a=6$; 4) $a=0$. **11.19.** 1) $y+4z=0$; 2) $x-2z=0$; 3) $4x-y=0$. **11.20.** 1) $a=-1$, $b=1$; 2) $a=-2$, $b=2$; 3) $a=-4$, $b=-2$. **11.21.**

1) $2y+z-1=0$; 2) $2x-3z+7=0$. **11.22.** 1) $x-y+z=0$; 2) $x-y-2z+5=0$. **11.23.** 1) $y+z=0$; 2) $x-4y-7z-15=0$. **11.24.** 1) $3x+4y+5z+1=0$; 2) $y+z+1=0$. **11.25.** 1) $x+2y-3z+7=0$; 2) $3y+2z-1=0$. **11.26.** 1) $5x-3y+z-2=0$; 2) $2x-y-1=0$. **11.27.** $15x+10y-6z-60=0$. **11.28** 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) $\arccos\frac{4}{21}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **11.29.** $\arccos\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

11.30. 1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{30}+\frac{z}{-10}=1$; 3) $\frac{x}{10}+\frac{y}{2}+\frac{z}{\frac{20}{3}}=1$; 4) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-\frac{8}{3}}+\frac{z}{\frac{8}{5}}=1$. **11.31.** 6; 54; 72.

11.32. 4. **11.33.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{1}=1$. **11.34.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-5}=1$.

11.35. $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$. **11.36.** $3x+3y+2z-6=0$ და $3x-3y-5z+39=0$. **11.37.** $3x-6y-2z-6=0$. **11.38.** $3x+y\pm\sqrt{26}\,z-3=0$. **11.39.** $4x-3y+13z+10=0$. **11.40.** $9y-7z+13=0$. **11.41.** $7x-7y+7z-2=0$. **11.42.** $4x+3y-2z-1=0$. **11.43.** $5x+y+z+2=0$. **11.44.** $\sqrt{2}\,x+y+z-5=0$ და $(3\sqrt{2}-4)x+(2\sqrt{2}-3)y+(2\sqrt{2}-3)z+2\sqrt{2}-9=0$. **11.45.** 1) ეკუთვნის; 2) არ ეკუთვნის. **11.46.** $a=-5$, $b=-11$. **11.47.** 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) $\frac{18}{\sqrt{38}}$. **11.48.** 1.

11.49. 1) 2; 2) 4. **11.50.** 8. **11.51.** $(0;\ 0;\ -4)$ და $(0;\ 0;\ 3)$. **11.52.** $(0;\ -2;\ 0)$ და $\left(0;\ -6\frac{4}{13};\ 0\right)$. **11.53.** $(3;\ 0;\ 0)$ და $\left(-\frac{5}{2};\ 0;\ 0\right)$. **11.54.** 1) $5x+2y-z-7=0$; 2) $8x-4y+12z+7=0$. **11.55.** $2x-2y-z-18=0$ და $2x-2y-z+12=0$. **11.56.** 1) $3x-y+6z-9=0$ და $7x-3y-4z+3=0$; 2) $17x-5y-4z+27=0$ და $7x+35y-14z-33=0$. **11.57.** $3x-2y+6z+21=0$ და $189x+28y+48z-591=0$. **11.58.** $2x-6y-3z+19=0$ და $6x-3y-2z+18=0$. **11.59.** $x-2y+z-2=0$ და $x-5y+4z-20=0$. **11.60.** $(-3;\ 1;\ -2)$. **11.63.** 1) $a\neq 7$; 2) $a=7,\ b=3$; 3) $a=7,\ b\neq 3$.

§ 12

12.1. 1) $\begin{cases}x+2y+1=0\\5y+z+10=0,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+2y-6=0\\y+3z+9=0,\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+y+1=0\\2y+3z+5=0\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+y-1=0\\y+2z+5=0.\end{cases}$ **12.2.** 1) $\begin{cases}x=-t-4\\y=2t+3\\z=5t,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=-2\\y=-3t\\z=t+4,\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=-15t-9\\y=11t+7\\z=t\end{cases}$

4) $\begin{cases}x=-6t-2\\y=-\frac{19}{2}t-\frac{11}{2}\\z=t.\end{cases}$ **12.3.** 1) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-3}$; 2) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{-2}=$

$=\frac{z-2}{1}$; 3) $\frac{x-8}{-5}=\frac{y+20}{13}=\frac{z}{1}$; 4) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+10}{-10}=\frac{z}{1}$.

12.4. 1) გადის კოორდინატთა სათავეზე; 2) პარალელურია Ox ღერძის; 3) პარალელურია Oyz სიბრტყის; 4) პარალელურია Oy ღერძის; 5) ემთხვევა Oz ღერძს; 6) Oz ღერძს კვეთს მართი კუთხით; 7) მდებარეობს Oyz სიბრტყეში. **12.5.** $C=\frac{1}{2}$; $D=-\frac{7}{2}$. **12.6.** 1) $\frac{x+2}{4}=$

$=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$; 2) $\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$. **12.7.** $\frac{x-2}{\sqrt{2}}=$

$=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-3}{1}$. **12.8.** 1) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{0}$; 2) $\frac{x+2}{0}=$

$=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$; 3) $\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$. **12.9.** 1) $\frac{x}{-1}=$

$=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}$; 2) $\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-3}$; 3) $\begin{cases}x=2t-4\\y=-t+1\\z=3t-2,\end{cases}$

4) $\begin{cases}x=2\\y=-t\\z=5t-1,\end{cases}$ 5) $\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{10}=\frac{z+2}{7}$; 6) $\frac{x+3}{1}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{5}$.

12.10. 1) $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{5}$; 2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-11}=\frac{z+1}{8}$.

12.11. 1) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{0}$; 2) $\begin{cases}x=3t-2\\y=-t\\z=8t+4.\end{cases}$ **12.12.** 1) პარალელურია; 2) პარალელურია; 3) არ არიან პარალელური; 4) პარალელურია. **12.13.** 1) პერპენდიკულარულია; 2) არ არიან პერპენდიკულარული;

3) პერპენდიკულარულია; 4) პერპენდიკულარულია. **12.14.** $\frac{x}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}$.

12.15. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **12.16.** 1) $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{4}$; 2) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$. **12.17.** $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+2}{2}$.

12.18. 1) არ მდებარეობს; 2) მდებარეობს. **12.19.** $y=-4$; $z=-\frac{1}{2}$.

12.20. 1) $(0;\ 3;\ 2)$, $\left(\frac{3}{5};\ 0;\ \frac{4}{5}\right)$, $(1;\ -2;\ 0)$; 2) $(0;\ 2;\ -3)$, $(3;\ 0;\ -1)$, $\left(\frac{9}{2};\ -1;\ 0\right)$; 3) $\left(0;\ \frac{3}{2};\ -6\right)$, $(3;\ 0;\ -12)$, $(-3;\ 3;\ 0)$; 4) $(0;\ -6;\ -6)$, $(3;\ 0;\ 12)$, $(1;\ -4;\ 0)$, **12.21.** $\left(\frac{2}{5};\ 0;\ \frac{3}{5}\right)$. **12.22.** $(0;\ 1;\ 3)$, $(2;\ 0;\ -1)$, $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{4};\ 0\right)$.

12.24. 1) $a=-12$; 2) $a=\frac{8}{3}$; 3) $a=\frac{16}{3}$. **12.25.** $\frac{x+4}{6}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{-3}$. **12.26.** $\frac{x+1}{25}=\frac{y-2}{-48}=\frac{z}{16}$. **12.27.** 1) იკვეთებიან; 2) არ იკვეთებიან. **12.28.** 1) $m=-3$; 2) $m=14$. **12.29.** 7.

12.30. 52. **12.31.** $\begin{cases} x=6t+1 \\ y=-6t-3 \\ z=3t+2. \end{cases}$ **12.32.** $\begin{cases} x=-5+6t \\ y=3-8t \\ z=-3-4t. \end{cases}$

§ 13

13.1. 1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{6}$; 2) $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+2}{0}$.

13.2. 1) $3x-4y+4z-4=0$; 2) $3x+2y-2z+2=0$.

13.3. $B=12$ $C=-3$. **13.4.** 1) $\arcsin\frac{1}{10}$; 2) $\frac{\pi}{6}$. **13.5** 1) არაპარალელურია; 2) პარალელურია. **13.6.** 1) $m=4$; 2) $m=-12$.

13.8. $A=-\frac{1}{2}$, $C=-7$. **13.9.** 1) $(1;\ -4;\ 1)$; 2) $(9;\ 1;\ 2)$.

13.10. 1) $(-1;\ -4;\ 2)$; 2) $(2;\ 5;\ -3)$ **13.11.** $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{0}$,

$\frac{x-4}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-5}{5}$, $\frac{x}{0}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-5}{5}$. **13.12.** $\frac{x+1}{1}=$ $=\frac{y-3}{0}=\frac{z-5}{-2}$. **13.13.** 1) (1; 2; 6); 2) (— 3; — 11; — 1). **13.14.** 1) (1; —6; 2); 2) (1; 3; 0). **13.15.** 1) (1; —1; 4); 2) (0; 3; 5). **13.16.** 1) ჰკვეთს; 2) არ ჰკვეთს. **13.17.** 1) $\frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+2}{-3}$; 2) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{-5}$. **13.18.** $\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}$. **13.19.** 1) $46x-9y+4z-89=0$; 2) $x+z+1=0$. **13.20.** $7x+$ $+13y+4z-1=0$. **13.21** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+4}{7}$. **13.22.** $4x+$ $+5y-2z+6=0$. **13.23.** 1) $16x-19y-14z+75=0$; 2) $11x-$ $-7y-z+21=0$. **13.24.** $x-2y+z+1=0$. **13.25.** 1) $x-y-$ $-2z+5=0$; 2) $5x+9y+6z-16=0$. **13.26.** 1) $\sqrt{29}$; 2) $\sqrt{26}$. **13.27.** 1) $\sqrt{29}$; 2) $\sqrt{11}$. **13.28.** 25. **13.29.** 1) $\frac{81}{\sqrt{381}}$; 2) 3. **13.30.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{-3}$. **13.31.** $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-9}{6}$. **13.32.** $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{-3}$. **13.33.** 1) (1; —1; 0); 2) (—4; 7; 0). **13.34.** 1) (0; 7; 5); 2) (0; 0; — 3). **13.35.** (— 2; —2; 5). **13.36.** (— 1; 3; — 2).

§ 14

14.1. 1) $x^2+y^2=4$; 2) $(x+3)^2+(y-1)^2=16$ **14.2.** 1) x^2+ $+(y-2)^2=10$; 2) $(x+2)^2+(y-1)^2=37$. **14.3.** 1) $(x-1)^2+$ $+(y-3)^2=5$; 2) $(x-2)^2+(y+1)^2=20$. **14.4.** 1) $x^2+y^2=52$; 2) $(x+2)^2+(y-1)^2=10$. **14.5.** 1) $(x-5)^2+(y-3)^2=25$; 2) $(x+10)^2+(y-8)^2=100$. **14.6.** 1) $(x-1)^2+(y+1)^2=8$; 2) $(x+3)^2+(y-1)^2=34$. **14.7.** 1) $(x+1)^2+(y+2)^2=45$; 2) $(x-2)^2+y^2=13$. **14.8.** 1) $(x-3)^2+(y+1)^2=38$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=22$. **14.9.** 1) $(x-3)^2+(y+2)^2=10$, $(x-1)^2+(y-4)^2=10$; 2) $(x-4)^2+(y+1)^2=25$, $(x+2)^2+$ $+(y-7)^2=25$, **14.10.** 1) $(x-3)^2+(y-1)^2=8$; 2) $x^2+(y-4)^2=26$. **14.11.** 1) $(x-1)^2+(y+3)^2=13$, $\left(x-\frac{61}{13}\right)^2+\left(y+\frac{111}{13}\right)^2=13$;

2) $(x-1)^2+y^2=5, \left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=5$. **14.12.** $(x+1)^2+(y-3)^2=5$. **14.13.** $(x+1)^2+(y-2)^2=5$, $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{19}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$. **14.14.** $(x-2)^2+(y+2)^2=4$, $(x-10)^2+(y+10)^2=100$. **14.15** $(x-5)^2+(y+1)^2=13$, $(x-109)^2+(y+105)^2=21853$. **14.16.** 1) $C(2; -3)$, $R=4$; 2) $C(3; 0)$, $R=2$; 3) $C(0; -2)$, $R=4$; 4) $C\left(-\frac{5}{2}; 4\right)$, $R=1$. **14.17.** 1) მდებარეობს წრეწირზე; 2) მდებარეობს წრეწირის შიგნით; 3) მდებარეობს წრეწირის გარეთ; 4) მდებარეობს წრეწირის შიგნით. **14.18.** $4x-3y-15=0$. **14.19.** $x+y+1=0$. **14.20.** 6. **14.21.** 1) 2; 2) 9. **14.22.** $(x-2)^2+(y-6)^2=8$. **14.23.** 1) (3; 4), (0; 1); 2) (1; −3), (9; 5). **14.24.** 1) არ იკვეთებიან; 2) იკვეთებიან; 3) ეხებიან; 4) იკვეთებიან; 5) არ იკვეთებიან; 6) ეხებიან. **14.25.** კვეთს, როცა $k<-\frac{22}{19}$ ან $k>2$; ეხება, როცა $k=-\frac{22}{19}$ ან $k=2$; არ კვეთს, როცა $-\frac{22}{19}<k<2$. **14.26.** $x-4y-11=0$. **14.27.** $4x+3y-16=0$. **14.28.** 12. **14.29.** $\sqrt{65}$. **14.30.** 10. **14.31.** $3x+2y+5=0$, $x+18y-85=0$.

§ 15

15.1. 1) $a=5$, $b=4$, $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$, $e=\frac{3}{5}$, $x=\pm\frac{25}{9}$; 2) $a=3$, $b=1$, $F_1(-2\sqrt{2}; 0)$, $F_2(2\sqrt{2}; 0)$, $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $x=\pm\frac{9\sqrt{2}}{4}$; 3) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$, $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 4) $a=3$, $b=4$, $F_1(0; -\sqrt{7})$, $F_2(0; \sqrt{7})$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$; $y=\pm\frac{16\sqrt{7}}{7}$. **15.2.** $\left(2\sqrt{3}; -\frac{3}{2}\right)$ და $\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$. **15.3.** 1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$; 3) $\frac{x^2}{125}+\frac{y^2}{25}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{15}=1$; 5) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$;

6) $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{64}=1$; 7) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 8) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$;
9) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$; 10) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$, $\frac{x^2}{180}+\frac{y^2}{36}=1$;
11) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{45}=1$; 12) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$; 13) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

15.4. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}=1$; 2) $x^2+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{53}=1$;
4) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{64}=1$; 5) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$; 6) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$;
7) $\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{81}=1$; 8) $\frac{x^2}{63}+\frac{y^2}{144}=1$; 9) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$;
10) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$. **15.5.** 1) 20; 2) 32. **15.6.** 16. **15.7.** 17; 23.
15.9. A და E მდებარეობენ ელიფსზე. C და D მის შიგნით, ხოლო B და F მის გარეთ. **15.10.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1$ ელიფსის ზედა ნახევარს; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ელიფსის ქვედა ნახევარს. **15.11.** $x=2$, $3x-4y+6=0$. **15.12.** 6; 10. **15.13.** 20. **15.14.** 9. **15.15.** 20; 12.
15.16. $(6; \sqrt{21})$, $(6; -\sqrt{21})$. **15.17.** $(2; 2\sqrt{6})$, $(2; -2\sqrt{6})$.
15.18. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **15.19.** $(-2; 3)$; $(4; 0)$. **15.20.** კვეთს, როცა $|m|<3$; ეხება, როცა $m=\pm 3$; არ კვეთს, როცა $|m|>3$. **15.21.** $x+3y-6=0$. **15.24.** $x-2y-8=0$ და $x-2y+8=0$. **15.25.** $x+3y-\sqrt{13}=0$ და $x+3y+\sqrt{13}=0$.
15.26. $M(-4; 6)$; $2\sqrt{5}$. **15.27.** $2x+3y-15=0$, $x+6y-15=0$.
15.28. $\frac{3}{\sqrt{10}}$. **15.32.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. მითითება; გამოიყენეთ ამოცანა 15.30-ში მოყვანილი ელიფსის თვისება. **15.33.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.
15.34. 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ და $\frac{9x^2}{400}+\frac{y^2}{9}=1$;
3) $\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{9}=1$ და $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{63}=1$, **15.35.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.
15.38. 4; $2\sqrt{3}$. **15.39.** $60°$. **15.41.** $6\sqrt{3}$; 9. **15.42.** $30°$.

16.1. 1) $a=12$, $b=5$, $F_1(-13;\ 0)$, $F_2(13;\ 0)$, $e=\frac{13}{12}$, $y=\pm\frac{5}{12}x$, $x=\pm\frac{144}{13}$. 2) $a=1$, $b=2$, $F_1(-\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(\sqrt{5};\ 0)$, $e=\sqrt{5}$, $y=\pm 2x$, $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. 3) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{3}$, $F_1\left(-\frac{5}{12};\ 0\right)$, $F_2\left(\frac{5}{12};\ 0\right)$, $e=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{3}{20}$. 4) $a=8$, $b=6$, $F_1(0;\ -10)$, $F_2(0;\ 10)$, $e=\frac{5}{3}$; $y=\pm\frac{3}{4}x$, $y=\mp 3{,}6$. **16.2.** $(-4;\ 1)$, $(-4;\ -1)$. **16.3.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$;
2) $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{4}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$;
5) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{17}=1$; 6) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 7) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$;
8) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{40}=1$; 9) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1$; 10) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1$;
11) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{300}=1$; 12) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; 13) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}=1$;
14) $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{6}=1$; 15) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$. **16.4.** 1) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=-1$.
2) $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{9}=-1$; 3) $\frac{x^2}{55}-\frac{y^2}{9}=-1$; 4) $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{36}=-1$;
5) $\frac{x^2}{56}-\frac{y^2}{25}=-1$; 6) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=-1$; 7) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=-1$;
8) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{80}=-1$; 9) $\frac{x^2}{192}-\frac{y^2}{64}=-1$; 10) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=-1$;
11) $\frac{x^2}{15}-y^2=-1$; 12) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 13) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{25}=-1$;
14) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=-1$; 15) $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{12}=-1$. **16.6.** 1) 84; 2) 6.
16.7. 1) 60; 2) 8. **16.8.** 9. **16.9** 5; 11 **16.10.** 1) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$

ჰიპერბოლის ნაწილს მოთავსებულს ქვედა ნახევარსიბრტყეში; 2) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{54}=1$ ჰიპერბოლის ნაწილს მოთავსებულს ზედა ნახევარსიბრტყეში. **16.11** $2x+11y+12=0$, $2x-y-12=0$. **16.12.** $\sqrt{10}$; $3\sqrt{10}$. **16.13.** $60°$. **16.14.** $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ან $e=2$. **16.16.** 7. **16.17.** 26. **16.18.** 15; 35. **16.19.** $(10; 6\sqrt{7})$, $(10; -6\sqrt{7})$, $(-6; 2\sqrt{15})$, $(-6; -2\sqrt{15})$ **16.20.** $(-4; 2\sqrt{14})$, $(-4; -2\sqrt{14})$. **16.21.** 1) 2; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 3) 3; 4) 4. **16.22.** $x^2-y^2=8$. **16.23.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{200}=1$. **16.24.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$. **16.25.** $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{18}=1$. **16.26.** $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{84}=1$. **16.30.** $(5; -2)$, $(-10; 8)$. **16.31.** 1) ჰკვეთს; 2) ეხება; 3) არ ჰკვეთს. **16.32.** ჰკვეთს, როცა $|m|>\sqrt{119}$; ეხება, როცა $|m|=\sqrt{119}$ და არ ჰკვეთს, როცა $|m|<\sqrt{119}$. **16.33.** $5x+3y+5=0$. **16.39.** $2x+y+8=0$, $2x+y-8=0$. **16.40.** $3x-y-16=0$, $3x-y+16=0$. **16.41.** $M(8; 4)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **16.42.** $5x+4y-15=0$; $13x-12y-25=0$. **16.46.** $x^2-y^2=2$. მ ი თ ი თ ე ბ ა; გამოიყენეთ ამოცანა 16.45-ში მოყვანილი ჰიპერბოლის თვისება. **16.47.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{20}=1$. მ ი თ ი თ ე ბ ა; გამოიყენეთ ამოცანა 16.36. **16.48.** $\frac{x^2}{5}-y^2=1$ და $\frac{x^2}{10}-\frac{4y^2}{9}=1$. **16.49.** 1) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{33}=-1$.

§ 17

17.1. $(3; -6)$, $(3; 6)$ **17.2.** 1) $y^2=12x$; 2) $y^2=-4x$; 3) $x^2=8y$; 4) $x^2=-20y$. **17.3.** 1) $y^2=16x$; 2) $y^2=-28x$; 3) $x^2=40y$; 4) $x^2=-24y$. **17.4.** 1) $y^2=16x$; 2) $y^2=-32x$; 3) $x^2=12y$; 4) $x^2=-4y$. **17.5.** 1) $y^2=32x$; 2) $y^2=-4x$; 3) $x^2=\frac{1}{4}y$; 4) $x^2=-20y$. **17.6.** 1) $y^2=9x$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული ზედა ნახევარსიბრტყეში; 2) $y^2=x$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული ქვედა ნახევარსიბრტყეში; 3) $y^2=-25x$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსე-

ბული ქვედა ნახევარსიბრტყეში; 4) $y^2 = -12x$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული ზედა ნახევარსიბრტყეში; 5) $x^2 = 5y$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული მარცხენა ნახევარსიბრტყეში; 6) $x^2 = 32y$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში; 7) $x^2 = -20y$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში; 8) $x^2 = -7y$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული მარცხენა ნახევარსიბრტყეში. **17.7.** 1) $F(0; 8)$, $x + 8 = 0$; 2) $F(0; -3)$, $x - 3 = 0$; 3) $F(1; 0)$, $y + 1 = 0$; 4) $F(-10; 0)$, $y - 10 = 0$. **17.8.** 1) $3x + 4y - 27 = 0$; 2) $4x + 3y + 4 = 0$; 3) $5x - 12y + 27 = 0$; 4) $3x + 4y + 5 = 0$. **17.9.** 1) 9; 2) 8. **17.10.** 1) 10; 2) 7. **17.11.** 1) $(9; 6)$, $(9; -6)$; 2) $(-5; 10)$, $(-5; -10)$, 3) $(-8; 4)$, $(8; 4)$; 4) $(-10; -1)$, $(10; -1)$. **17.12.** 1) $(1; -4)$, $(4; 8)$ 2) $(-4; 2)$; 3) $(-1; 3)$; 4) $(6; -9)$, $(10; -25)$. **17.13.** 1) არ ჰკვეთს; 2) ეხება; 3) ჰკვეთს. **17.14.** ჰკვეთს, როცა $|k| > 2$; ეხება, როცა $|k| = 2$; არ ჰკვეთს, როცა $|k| < 2$. **17.15.** ჰკვეთს, როცა $b < \frac{2}{5}$; ეხება, როცა $b = \frac{2}{5}$; არ ჰკვეთს, როცა $b > \frac{2}{5}$. **17.20.** 1) $3x + 4y + 12 = 0$; 2) $4x - 3y - 24 = 0$. **17.23.** 1) $3x - y + 20 = 0$; 2) $x - 2y + 7 = 0$. **17.24.** 1) $3x - 4y - 40 = 0$; 2) $5x - 2y - 75 = 0$. **17.25.** $M\left(\frac{3}{4}; 6\right)$, $\sqrt{17}$. **17.26.** $3x - y + 4 = 0$, $2x - y + 6 = 0$.

§ 18

18.1. 1) $\rho = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi}$; 2) $\rho = \frac{25}{13 + 12\cos\varphi}$. **18.2.** 1) $\rho = \frac{18}{4 - 5\cos\varphi}$; 2) $\rho = -\frac{18}{4 - 5\cos\varphi}$. **18.3.** 1) $\rho = \frac{16}{3 + 5\cos\varphi}$; 2) $\rho = -\frac{16}{3 + 5\cos\varphi}$. **18.4.** $\rho = \frac{6}{1 - \cos\varphi}$. **18.5.** 1) ელიფსი; 2) პარაბოლა; 3) ჰიპერბოლის ერთი შტო; 4) ელიფსი. **18.6.** 10; 6. **18.7.** 8; 15. **18.8.** $\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2; \frac{5\pi}{3}\right)$. **18.9.** $\left(3; \frac{5\pi}{6}\right)$; $\left(3; \frac{7\pi}{6}\right)$. **18.10.** $\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$; $\left(6; \frac{5\pi}{3}\right)$. **18.11.** 1) $\left(\frac{p}{2}; \pi\right)$; 2) $\left(p; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(p; \frac{3\pi}{2}\right)$. **18.13.** $\rho = -\frac{7}{2\cos\varphi}$, $\rho = \frac{91}{10\cos\varphi}$.

18.15. $\rho = -\dfrac{194}{13\cos\varphi}$, $\rho = -\dfrac{144}{13\cos\varphi}$, $\rho = \dfrac{156}{5\sin\varphi - 12\cos\varphi}$, $\rho = -\dfrac{156}{5\sin\varphi + 12\cos\varphi}$. **18.17.** $\rho^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. **18.18.** $\rho^2 = \dfrac{b^2}{e^2\cos^2\varphi - 1}$. **18.19.** $\rho = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

§ 19

19.1. 1) $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 4, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 7, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = x' - 5 \\ y = y' - 11. \end{cases}$ **19.2.** $A(-3; 10)$, $B(-7; 2)$, $C'(-2; -3)$, $D(-9; 0)$. **19.3.** $A(-2; 8)$, $B(0; -10)$, $C(-8; -2)$, $D(-11; 2)$. **19.4.** 1) $O'(7; 1)$; 2) $O'(-9; 0)$; 3) $O'(2; -3)$; 4) $O'(-15; -6)$.

19.5. $O'(-4; 5)$. **19.6.** $\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 6. \end{cases}$ **19.7.** 1) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y', \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -y' \\ y = x', \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y', \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = y' \\ y = -x', \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y'. \end{cases}$ **19.8.** $A(-7; -\sqrt{3})$, $B(3; -3\sqrt{3})$, $C(-3; \sqrt{3})$, $D(-2\sqrt{3}; 10)$. **19.9.** $A(2\sqrt{3}; -2)$, $B(-4\sqrt{3}; -12)$, $C(6; 2\sqrt{3})$, $D(4\sqrt{3}; -8)$. **19.10.** 1) 90°; 2) 180°; 3) 45°; 4) 210°.

19.11. $\begin{cases} x = \dfrac{5}{13}x' - \dfrac{12}{13}y' \\ y = \dfrac{12}{13}x' + \dfrac{5}{13}y'. \end{cases}$ **19.12.** 1) $\begin{cases} x = -4 + \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3 + \dfrac{4}{5}x' - \dfrac{3}{5}y' \\ y = -5 + \dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y'. \end{cases}$ **19.13.** $A(17; -3)$, $B(-6; 8)$.

19.14. $A(7;\ 17)$, $B(-12;\ -5)$. **19.15.** 1) $O'(3;\ -1)$, $\alpha = 90°$; 2) $O'(-5;\ 0)$, $\alpha = 180°$; 3) $O'(1;\ 1)$, $\alpha = 60°$; 4) $O'(5;\ -2)$, $\alpha = 135°$.

19.16. $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{4}{5}x' - \dfrac{3}{5}y' \\ y = 2 + \dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y'. \end{cases}$ **19.17.** $A(3;3)$, $B(8;\ -1)$, $C(2;\ -1)$, $D(3 + 4\sqrt{3};\ 3)$. **19.18.** $A\left(3;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B(2;\ \pi)$, $C\left(1;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $D\left(10;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$.

§ 20

20.1. 1) წირი ცენტრიანია; 2) წირი უცენტროა; 3) წირს გააჩნია ცენტრთა უსასრულო სიმრავლე; 4) წირი უცენტროა. **20.2.** 1) $(1;\ 2)$; 2) $(-2;\ 3)$, **20.3.** 1) $x + 2y - 3 = 0$; 2) $4x - 4y - 3 = 0$. **20.4.** 1) $3x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 - 12 = 0$; 2) $3x'^2 + 10x'y' + 7y'^2 + 6 = 0$. **20.5.** 1) $m \neq -8$; 2) $m = -8$, $n \neq \dfrac{3}{2}$; 3) $m = -8$, $n = \dfrac{3}{2}$. **20.6.** 1) ელიფსური ტიპი; 2) პარაბოლური ტიპი; 3) ჰიპერბოლური ტიპი; 4) ჰიპერბოლური ტიპი; 5) პარაბოლური ტიპი; 6) ელიფსური ტიპი. **20.7.** 1) ელიფსი: $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{10} = 1$; 2) პარაბოლა: $y'^2 = 4x'$; 3) ჰიპერბოლა: $\dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{3} = 1$; 4) წარმოსახვითი ელიფსი: $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{9} = -1$; 5) წარმოსახვით გადამკვეთ წრფეთა წყვილი: $2x'^2 + 3y'^2 = 0$; 6) გადამკვეთ წრფეთა წყვილი: $4x'^2 - y'^2 = 0$. **20.8.** 1) ელიფსი $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$; 2) ჰიპერბოლა: $\dfrac{x'^2}{9} - \dfrac{y'^2}{4} = 1$; 3) წარმოსახვით გადამკვეთ წრფეთა წყვილი: $x'^2 + 4y'^2 = 0$; 4) გადამკვეთ წრფეთა წყვილი: $x'^2 - y'^2 = 0$. **20.9.** 1) ელიფსი: $\dfrac{x'^2}{30} + \dfrac{y'^2}{5} = 1$; 2) ჰიპერბოლა: $x'^2 - \dfrac{y'^2}{4} = 1$; 3) პარაბოლა: $y'^2 = 2x'$; 4) წარმოსახვითი ელიფსი: $2x'^2 + 3y'^2 = -1$; 5) წარმოსახვით გადამკვეთ წრფეთა წყვილი: $x'^2 + 2y'^2 = 0$; 6) გადამკვეთ წრფეთა წყვილი: $x'^2 - 4y'^2 = 0$; 7) პარალელურ წრფეთა წყვილი: $x'^2 - 1 = 0$; 8) წარმოსახვით პარალელურ წრფეთა წყვილი; $y'^2 + 1 = 0$; 9) თანამთხვეულ წრფეთა წყვილი: $y'^2 = 0$.

21.1. 1) $x^2+y^2+z^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+7)^2=16$. **21.2.** 1) $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=26$; 2) $(x+1)^2+(y-7)^2+(z+2)^2=176$. **21.3.** 1) $(x+1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=14$; 2) $(x-1)^2+y^2+(z-5)^2=9$. **21.4.** 1) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$; 2) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$. **21.5.** $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-7)^2=49$. **21.6.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=49$. **21.7.** $(x-7)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. **21.8.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=50$. **21.9.** $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=43$. **21.10.** 1) $(x-6)^2+(y-4)^2+(z+8)^2=36$, $(x-6)^2+(y-4)^2+(z+8)^2=256$. 2) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=225$. **21.11.** 2. **21.12.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$. **21.13.** $(x-7)^2+(y-8)^2+(z-2)^2=121$. **21.14.** 1) $C(7;\ -3;\ 1)$, $R=5$; 2) $C(-5;\ 0;\ 8)$, $R=9$; 3) $C(-2;\ -3;\ 5)$, $R=1$; 4) $C(-4;\ 3;\ 0)$, $R=5$. **21.15.** 1) მდებარეობს სფეროს შიგნით. 2) მდებარეობს სფეროზე. 3) მდებარეობს სფეროს გარეთ. **21.16.** $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-7}{5}=\dfrac{z}{-9}$.

21.17. 1) 8; 2) 4; 3) 13; 4) 0 **21.18.** 1) იკვეთებიან; 2) არ იკვეთებიან 3) ეხებიან; 4) იკვეთებიან. **21.19.** 1) იკვეთებიან; 2) ეხებიან; 3) არ იკვეთებიან. **21.20.** $(8;\ -4;\ 3)$. **21.21.** $9x-6y+2z-79=0$. **21.22.** $(-1;\ -2;\ 4)$. **21.23.** $a=7$ და $a=-19$. **21.27.** $9x-6y-2z+67=0$ და $6x+9y-2z-64=0$. **21.28.** $2x-y-2z+15=0$ და $2x-y-2z-3=0$. **21.32.** 1) ელიფსოიდი; 2) ჰიპერბოლური ცილინდრი; 3) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი; 4) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი; 5) ელიფსური ცილინდრი; 6) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი; 7) ელიფსური პარაბოლოიდი; 8) პარაბოლური ცილინდრი; 9) მეორე რიგის კონუსი; 10) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი; 11) ელიფსური ცილინდრი; 12) ელიფსოიდი; 13) პარაბოლური ცილინდრი; 14) მეორე რიგის კონუსი; 15) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი; 16) ელიფსური პარაბოლოიდი; 17) ჰიპერბოლური ცილინდრი; 18) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი. **21.33.** 3; 2; $(4;\ 3;\ 0)$, $(4;\ -3;\ 0)$, $(4;\ 0;\ 2)$, $(4;\ 0;\ -2)$. **21.34.** 5; 4; $(5;\ 0;\ 2)$, $(-5;\ 0;\ 2)$. **21.35.** 8; 6; $(8;\ 0;\ -1)$, $(-8;\ 0;\ -1)$, $(0;\ 6;\ -1)$, $(0;\ -6;\ -1)$. **21.36.** 3; 2; $(3;\ 0;\ 2)$, $(-3;\ 0;\ 2)$, $(0;\ 2;\ 2)$, $(0;\ -2;\ 2)$. **21.37.** 10; 6; $(4;\ 10;\ 0)$, $(4;\ -10;\ 0)$. **21.38.** 6; 4; $(6;\ 0;\ 2)$, $(-6;\ 0;\ 2)$, $(0;\ 4;\ 2)$, $(0;\ -4;\ 2)$. **21.39.** $(0;\ 4;\ 1)$. **21.40.** 1) ჰიპერბოლა; $(-6;\ 0;\ 1)$, $(6;\ 0;\ 1)$. 2) ჰიპერბოლა; $(0;\ -12\ -6)$, $(0;\ 12;\ -6)$. 3) პარაბოლა; $(0;\ -12;\ -6)$. 4) პარაბოლა; $(6;\ 0;\ 1)$. **21.41.** ელიფსი ცენტრით $(1;\ 2;\ -1)$ წერტილში. **21.42.** ჰიპერბოლა ცენტრით $(1;\ -2;\ -1)$ წერტილში. **21.43.** ელიფსი ცენტრით $(-1;\ 1;\ 3)$

წერტილში. **21.44.** ჰიპერბოლა ცენტრით (2; —3; —4) წერტილში. **21.45.** პარაბოლა. **21.46.** (2; —1; 1). **21.47.** (—8; 4; 1). **21.48.** (3; 0; —10). **21.49.** $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **21.50.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. **21.51.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z}{c^2}=1$. **21.52.** 1) (3; 4; —2), (6; —2; 2); 2) (4; —3; 2); 3) არ ჰკვეთს; 4) წრფე ძევს ზედაპირზე.

§ 22

22.1. 1) წრფივი სივრცეა, თუ წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში არ არის წრფივი სივრცე. 2) წრფივი სივრცეა, თუ სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში არ არის წრფივი სივრცე. 3) არ არის წრფივი სივრცე. 4) არ არის წრფივი სივრცე. 5) წრფივი სივრცეა. 6) წრფივი სივრცეა. 7) არ არის წრფივი სივრცე. 8) წრფივი სივრცეა. 9) წრფივი სივრცეა. 10) წრფივი სივრცეა. 11) წრფივი სივრცეა. 12) წრფივი სივრცეა. **22.2.** 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოკიდებულია; 3) წრფივად დამოუკიდებელია; 4) წრფივად დამოუკიდებელია; 5) წრფივად დამოუკიდებელია; 6) წრფივად დამოკიდებულია; 7) წრფივად დამოუკიდებელია; 8) წრფივად დამოუკიდებელია; 9) წრფივად დამოკიდებულია; 10) წრფივად დამოუკიდებელია. **22.4.** 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამოუკიდებელია. **22.6.** 1) ყველა იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს; 2) ყველა იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება სამს; 3) ყველა იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს; 4) ყველა იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს და კოეფიციენტების ჯამი ნულის ტოლია; 5) ყველა იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს და კოეფიციენტების ჯამი ნულის ტოლია. **22.9.** განზომილებაა n^2 **22.10.** 1) განზომილებაა 2; ბაზისია, მაგალითად, x_1, x_2; 2) განზომილებაა 3; ბაზისია, მაგალითად, x_1, x_2, x_3. **22.11.** 1) განზომილებაა 2; ბაზისია, მაგალითად, $u=(-7;\ -8;\ 5;\ 0)$, $v=(14;\ 11;\ 0;\ 5)$. 2) განზომილებაა 2; ბაზისია, მაგალითად, $u=(19;\ -6;\ 1;\ 0)$, $v=(5;\ -1;\ 0;\ 1)$. 3) განზომილებაა 2; ბაზისია, მაგალითად, $u=(-38;\ 12;\ 9;\ 0)$, $v=(-63;\ 45;\ 0;\ 9)$. 4) განზომილებაა 1; ბაზისია, მაგალითად, $u=(23;\ -10;\ 0;\ 26)$. **22.14.** 1) 3; 2) 2. **22.15.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos\frac{20}{21}$. **22.17.** 1) წრფივია;

2) არ არის წრფივი. 22.18. 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22.19. 1) $(2x_1 + 16x_3;\ 11x_1;\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3)$; 2) $(2x_1 - 6x_3;\ -3x_3;\ -x_2 - x_3)$. 22.20. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. 22.21. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. საკუთრივი ვექტორია ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორი. 2) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. საკუთრივი ვექტორებია $u_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $v_2 = (1;\ 0;\ 1)$, $g_1 = (1;\ 1;\ 0)$. 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. საკუთრივი ვექტორებია $u_1 = (0;\ 1;\ -1)$, $v_1 = (3;\ 4;\ -3)$. 4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. საკუთრივი ვექტორებია $u_1 = (1;\ 1;\ 0)$, $v_1 = (0;\ 1;\ 2)$.

ლათინური ანბანი

A, a — ა		N, n — ენ	
B, b — ბე		O, o — ო	
C, c — ცე		P, p — პე	
D, d — დე		Q, q — ქუ	
E, e — ე		R, r — ერ	
F, f — ეფ		S, s — ეს	
G, g — ჟე		T, t — ტე	
H, h — ჰაშ		U, u — უ	
I, i — ი		V, v — ვე	
J, j — ჟი		W, w — დუბლ-ვე	
K, k — კა		X, x — იქს	
L, l — ელ		Y, y — იგრეკ	
M, m — ემ		Z, z — ზეტ	

ბერძნული ანბანი

Α, α — ალფა	Ν, ν — ნიუ
Β, β — ბეტა	Ξ, ξ — ქსი
Γ, γ — გამა	Ο, o — ომიკრონი
Δ, δ — დელტა	Π, π — პი
Ε, ε — ეფსილონ	Ρ, ρ — რო
Ζ, ζ — ძეტა	Σ, σ — სიგმა
Η, η — ეტა	Τ, τ — ტაუ
Θ, ϑ — თეტა	Φ, φ — ფი
Ι, ι — იოტა	Χ, χ — ხი
Κ, $\varkappa$ — კაპა	Υ, υ — იფსილონ
Λ, λ — ლამბდა	Ψ, ψ — ფსი
Μ, μ — მიუ	Ω, ω — ომეგა

ლიტერატურა

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1980. — 335 с.
2. ა. ბუაძე. წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისი, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1980. — 244 გვ.
3. Болгов В. А. и др. Сборник задач по математике для ВТУзов, линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М., Наука, 1986. — 462 с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Наука. 1980 — 174 с.
5. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М., Наука, 1974. — 336 с.
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., Наука, 1971. — 271 с.
7. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее придложения. М., Наука, 1975. — 407 с.
8. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть I. М., Высшая школа, 1974. — 416 с.
9. ნ. დურგლიშვილი. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწილი I. თბილისი, განათლება, 1977.—234 გვ.
10. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., Наука, 1969. — 272 с.
11. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., Наука, 1974. — 528 с.
12. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. М., Наука, 1975. — 320 с.
13. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1971. — 232 с.
14. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М., Наука, 1974. — 296 с.
15. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М., Физматгиз, 1963. — 274 с.
16. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1980. — 240 с.
17. ჰ. კრინსკი. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1974. — 538 გვ.
18. Кручкович Г. И. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. М., Высшая школа, 1970. — 511 с.
19. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1971. — 431 с.
20. ა. ქურჩიშვილი. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწილი I. თბილისი, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1979.—312 გვ.
21. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М., Наука, 1978. — 352 с.
22. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М., Наука, 1978. — 384 с.
23. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Высшая школа, 1972. — 420 с.

24. ს. თოფურია, დ. გიორგაძე, ა. კვალიაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი. წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისი, სპი-ს გამომცემლობა, 1984. — 148 გვ.
25. ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, გამოთვლითი მათემატიკა. თბილისი, სპი-ს გამოცემა, 1985. — 144 გვ.
26. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Наука, 1968. — 336 с.
27. ვლ. ჭელიძე, ნ. ლომჯარია, გ. ხახუბია. უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტომი II. თბილისი, ცოდნა, 1964. — 418 გვ.
28. Шипачев В. С. Высшая математика. М., Высшая школа, 1985. — 471 с.
29. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики, т. I. М., Высшая школа, 1978. — 383 с.

სარჩევი

წინასიტყვაობა 3

I თავი. მატრიცები და დეტერმინანტები

§ 1. მატრიცის ცნება. მოქმედებანი მატრიცებზე . 4
§ 2. დეტერმინანტები და მათი ძირითადი თვისებები 9
§ 3. შებრუნებული მატრიცა 13
§ 4. მატრიცის რანგი 18

II თავი. წრფივ განტოლებათა სისტემები

§ 1. ძირითადი ცნებები. კრამერის წესი 25
§2. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობა 30
§ 3. წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემები 35
§ 4. წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენის სტრუქტურა . 39
§ 5. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით . . . 46
§ 6. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციის მეთოდით . 52

III თავი. ვექტორთა ალგებრის ელემენტები

§ 1. დეკარტის კოორდინატთა სისტემები 62
§ 2. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა. კავშირი დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის 64
§ 3. ვექტორები. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე . . 66
§ 4. ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულება. ბაზისი . . . 71
§ 5. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. დეკარტის მართკუთხა ბაზისი 77
§ 6. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი . . 80
§ 7. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი . 83
§ 8. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი 85
§ 9. ვექტორული და შერეული ნამრავლების გამოსახვა კოორდინატებით. სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა 88
§ 10. ვექტორების ზოგიერთი გამოყენება . . . 90

IV თავი. წრფე და სიბრტყე

§ 1. წირისა და ზედაპირის განტოლებები 93
§ 2. წრფე სიბრტყეზე . . . [illegible]
§ 3. სიბრტყის განტოლებები . . . 102
§ 4. წრფე სივრცეში 103
§ 5. ზოგიერთი ამოცანა წრფესა და სიბრტყეზე სივრცეში 112

V თავი. მეორე რიგის წირები და ზედაპირები

§ 1. ელიფსი 121
§ 2. ჰიპერბოლა 126

§ 3. ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები . . . 130

§ 4. პარაბოლა . . . 132

§ 5. მეორე რიგის წირების განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში . 135

§ 6. მეორე რიგის წირები, როგორც კონუსური კვეთები . . . 138

§ 7. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა . . . 139

§ 8. მეორე რიგის წირების ზოგადი განტოლების გამარტივება . . 141

§ 9. მეორე რიგის ზედაპირები . . . 151

VI თავი. წრფივი სივრცეები

§ 1. წრფივი სივრცის ცნება. წრფივი სივრცის ზოგიერთი თვისება . 156

§ 2. წრფივი სივრცის განზომილება, ბაზისი. წრფივი სივრცის ქვესივრცე 159

§ 3. ევკლიდეს სივრცე . . . 165

VII თავი. წრფივი ოპერატორები

§ 1. წრფივი ოპერატორის ცნება. მოქმედებები წრფივ ოპერატორებზე . . 171

§ 2. წრფივი ოპერატორის მატრიცა . . . 175

§ 3. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობანი . . . 178

§ 4. კვადრატული ფორმები . . . 183

სავარჯიშოები და ამოცანები

§ 1. მატრიცები და დეტერმინანტები . . . 185

§ 2. წრფივ განტოლებათა სისტემები . . . 195

§ 3. კოორდინატთა სისტემები . . . 200

§ 4. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე. ვექტორის გეგმილი ღერძზე . . 202

§ 5. ბაზისი. ვექტორის კოორდინატები . . . 206

§ 6. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი . . . 208

§ 7. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი . . . 214

§ 8. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი. ვექტორების ზოგიერთი გამოყენება 216

§ 9. მანძილი ორ წერტილს შორის. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით 220

§ 10. წრფე სიბრტყეზე . . . 222

§ 11. სიბრტყე . . . 234

§ 12. წრფე სივრცეში . . . 240

§ 13. წრფე და სიბრტყე . . . 246

§ 14. წრეწირი . . . 251

§ 15. ელიფსი . . . 254

§ 16. ჰიპერბოლა . . . 260

§ 17. პარაბოლა . . . 267

§ 18. მეორე რიგის წირების განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში 270

§ 19. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა . . . 272

§ 20. მეორე რიგის წირების განტოლებების დაყვანა კანონიკურ სახეზე . . 275

§ 21. მეორე რიგის ზედაპირები . . . 277

§ 22. წრფივი სივრცე. წრფივი ოპერატორები . . . 283

პასუხები . . . 288

ლათინური და ბერძნული ანბანი . . . 315

ლიტერატურა . . . 316

Топурия Сергей Багратьевич,
Хочолава Владимир Владимирович,
Мачарашвили Нодар Давидович,
Георгадзе Демури Степанович,
Квалиашвили Автандил Георгиевич

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

(На грузинском языке)

რედაქტორი რ. დ ა ნ ე ლ ი ა
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზ ა კ ა ლ ა შ ვ ი ლ ი
ტექრედაქტორი ნ. ძ ნ ე ლ ა ძ ე
უფროსი კორექტორი ც. ნ ო ზ ა ძ ე
კორექტორი მ. კ ა პ ა ნ ა ძ ე
გამომშვები გ. შ ა რ ი ქ ა ძ ე

ИБ № 3818. Учебное издание для вуза

გადაეცა ასაწყობად 8.01.88. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 8.06.88. საბეჭდი ქაღალდი № 1. ქაღალდის ზომა 60×90¹/₁₆. გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა მაღალი. ნაბეჭდი თაბახი 20. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 16,34. ტირაჟი 10 000. შეკვეთა № 128. უე № 08471.

ფ ა ს ი 75 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50

1988

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, მეგობრობის გამზირი № 7.

Тбилисская книжная фабрика им. И. Чавчавадзе Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, пр. Дружбы № 7.