გ. კომლაძე

ელემენტარული მათემატიკის სპეციალური კურსი

არითმეტიკა

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"

თბილისი — 1967

Комладзе Георгий Малакиевич

Специальный курс элементарной математики
Арифметика

(на грузинском языке)

რედაქტორი თ. ხითარიძე
გარეკანის მხატვარი ტ. შეყილაძე
მხატვრული რედაქტორი შ. ნიორაძე
ტექრედაქტორი მ. ასათიანი
კორექტორი ე. ნევეროვსკაია

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 24/VII-67 წ. ქაღალდის ზომა 60×90.
ნაბეჭდი თაბახი 16,25. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 14,54.
ტირაჟი 1000 უე 00300 შეკვ. № 303

ფასი 81 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, კამოს ქ. № 18.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Камо № 18.
1967

სტამბა № 1, თბილისი, ორჯონიკიძის ქ., № 50.
Типография № 1. Тбилиси, ул. Орджоникидзе, № 50.

2-2-2
226—67

წინასიტყვაობა

მათემატიკა, ფ. ენგელსის განმარტებით, არის მეცნიერება ნამდვილი სამყაროს სივრცითი ფორმებისა და რაოდენობითი დამოკიდებულებების შესახებ. როგორც ცნობილია, საშუალო სკოლაში მოსწავლე სწავლობს ეგრეთ წოდებულ ელემენტარულ მათემატიკას, ხოლო უმაღლეს სასწავლებელში—უმაღლეს მათემატიკას. ელემენტარულ და უმაღლეს მათემატიკას შორის მკაცრი საზღვარი არ არსებობს. ელემენტარული მათემატიკა სამყაროს სწავლობს როგორც უცვლელს, სასრული პროცესების მქონეს. უმაღლესი მათემატიკა კი სამყაროს განიხილავს ზოგადად, როგორც ცვლადს, უსასრულო პროცესის შედეგს.

ელემენტარული მათემატიკა, საერთოდ, მათემატიკის პირველი საფეხურია. იგი სამყაროს გარკვეულ ნაწილს მარტივი, არამკაცრი მეთოდებით სწავლობს, მაგრამ ელემენტარულ მათემატიკას არ შეუძლია უმაღლესი მათემატიკისაგან დამოუკიდებლად შეისწავლოს სამყაროს ის ნაწილიც, რომელიც მისთვისაა „განკუთვნილი". მაგალითად, საკითხები: ნამდვილი რიცხვის, წრეწირის სიგრძის, წრის ფართობის, პირამიდის მოცულობის და სხვ. შეუძლებელია უმაღლესი მათემატიკის მეთოდების გარეშე იქნეს შესწავლილი.

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია ელემენტარული მათემატიკის სპეციალური კურსის ნაწილი—არითმეტიკა, ამ ნაწილს უჭირავს თითქმის გარდამავალი ადგილი ელემენტარულ და უმაღლეს მათემატიკას შორის. არითმეტიკა აქ განხილულია უმაღლესი მათემატიკის მეთოდების გამოყენებით. ამდენად არითმეტიკის სპეციალური კურსი წარმოადგენს ელემენტარული და უმაღლესი მათემატიკის ერთ-ერთ შემაერთებელ რგოლს.

სახელწოდება არითმეტიკა წარმოდგება ბერძნული სიტყვებისაგან არითმოს—რიცხვი, ტექნე—ხელოვნება. არითმეტიკა მეცნიერებაა რიცხვების შესახებ; იგულისხმება რაციონალური რიცხვები.

წინამდებარე სახელმძღვანელოში განხილულია არითმეტიკის თეორიული საფუძვლები, ზუსტი და მიახლოებითი გამოთვლები და გამოთვ-

ლების დამხმარე საშუალებანი. ამ წიგნში მოცემულია ხსენებული საკითხების მხოლოდ მცირე ნაწილი.

არითმეტიკის სპეციალური კურსი ისწავლება პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის პირველ კურსზე. სახელმძღვანელო შედგენილია ელემენტარული მათემატიკის სპეციალური კურსის პროგრამის მიხედვით და განკუთვნილია პედაგოგიური ინსტიტუტების სტუდენტებისათვის.

ცხადია, წინამდებარე სახელმძღვანელო არ იქნება უნაკლო. შენიშვნებს ავტორი დიდი მადლობით მიიღებს.

თავი I

ზუსტი გამოთვლები

§ 1. ზოგადი შენიშვნები

როგორც ცნობილია, მათემატიკა მეტად პრაქტიკული საგანია. ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნა არა მარტო სათანადო ფორმულის შედგენაში მდგომარეობს, არამედ იმ გამოთვლების ჩატარებაშიც, რომლებიც ამოცანის პასუხისათვისაა აუცილებელი. ცხადია, რიცხვითი პასუხი უნდა იქნეს მიღებული არა უგეგმოდ, დროის უსარგებლო კარგვით, არამედ პასუხი უნდა იყოს მიღებული რაც შეიძლება მცირე დროში. ამისათვის კი საჭიროა გამოთვლების რაციონალურად ჩატარება. ამიტომ მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანათაგანია გამოთვლების ჩატარების რაციონალური გზების მონახვა.

გამოთვლების რაციონალურად ჩატარების ცოდნა აუცილებელია ყველა კულტურული ადამიანისათვის, განსაკუთრებით კი—გამომთვლელებისათვის.

არ უნდა დავივიწყოთ ის, რომ გამოთვლების რაციონალურად ჩატარების ცოდნას აღმზრდელობითი მნიშვნელობაც აქვს. მისი საშუალებით ადამიანში ვითარდება პასუხისმგებლობის გრძნობა, მუშავდება თვით შემოწმება, შეამჩნიოს თავის თავში შეცდომები და გამოასწოროს იგი, კარგად გაანაწილოს სამუშაო დრო.

ძნელი არ არის იმის წარმოდგენა, რომ პრაქტიკაში უმეტესად მიახლოებით რიცხვებთან გვაქვს საქმე. მაგალითად, საგნის წონა მიახლოებით განისაზღვრება, ასევე, მონაკვეთის სიგრძეც მიახლოებით განისაზღვრება და სხვ. ზუსტი რიცხვებისაგან განსხვავებით მიახლოებითი რიცხვები თავისებურ მოქმედებას მოითხოვს, მაგალითად, ამოცანებისათვის, სადაც მიახლოებითი რიცხვებია, საჭიროა მოინახოს არა მარტო ამონახსენის რიცხვითი მნიშვნელობა, არამედ უნდა დადგინდეს ამონახსენში ცდომილების სიდიდე.

ქვემოთ, სათანადო ადგილი დაეთმობა ზუსტი გამოთვლების წარმოებას, მიახლოებით გამოთვლებს, გამოთვლების საშუალებებს: ცხრილებს, სათვლელ მანქანებს, ნომოგრამებს და სხვას.

გამოთვლები, საზოგადოდ, ორნაირად წარმოებს: ზეპირად და წერით.

წერითი გამოთვლების წარმოება ერთნიშნა რიცხვებზე ზეპირი გამოთვლების გარეშე შეუძლებელია. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია დიდ რიცხვებზე გამოთვლების წარმოების დროს ზეპირი გამოთვლების გამოყენება. ამით უფრო მოკლე დროში შესრულდება გამოთვლები.

საერთოდ, ზეპირი გამოთვლები დიდ რიცხვებზე უმეტესად კერძო ხერხებით წარმოებს.

ქვემოთ, ცალკე განვიხილავთ ზეპირ გამოთვლებს, ცალკე—წერით გამოთვლებს.

§ 2. ზეპირი გამოთვლები

ზეპირი გამოთვლები ან, როგორც ამბობენ, ზეპირი ანგარიში, მრავალნიშნა ნატურალურ რიცხვებზე საბოლოოდ სრულდება ერთნიშნა რიცხვების ცხრილების გამოყენებით. საერთოდ კი ზეპირი ანგარიში არითმეტიკულ მოქმედებათა კანონების საფუძველზე წარმოებს. თუ ზეპირ ანგარიშში შუალედური გამოთვლების შედეგებს ჩავწერთ, მაშინ მას ნახევარწერითი ანგარიში ეწოდება.

ზეპირ და ნახევარწერით ანგარიშს შორის მკაცრი საზღვარი არ არსებობს, ამიტომ ზეპირ და ნახევარწერით ანგარიშს ზეპირი ანგარიში დავარქვათ.

საერთოდ, ზეპირი ანგარიშის ცოდნა კარგ ვარჯიშს მოითხოვს. ეს ვარჯიში უნდა განხორციელდეს თანდათან, ერთნიშნა რიცხვებიდან მრავალნიშნა რიცხვებზე გადასვლით.

ვგულისხმობთ, რომ ერთნიშნა რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებათა ზეპირად შესრულება ცნობილია.

დავიწყოთ ორნიშნა რიცხვებზე მოქმედებით:

1. შეკრება. პირველი ძირითადი ხერხი ზეპირად შეკრებისა არის შესაკრებთა დაშლის ხერხი, რის შემდეგაც ერთეულებსაც და ათეულებსაც, სათანადოდ, ზეპირად შევკრებთ და შემდეგ კი ორივე შედეგს ერთად შევკრებთ.

მაგალითად, $75+86$.

ეს მოქმედება ასე შევასრულოთ:

$$75+86=(70+5)+(80+6)=(70+80)+(5+6)=161.$$

პირველი შესაკრები—75 ზეპირად დავშალოთ: 7 ათეული და 5 ერთეული, მეორე შესაკრებიც დავშალოთ: 8 ათეული და 6 ერთეული. 7 ათეული და 8 ათეული მოგვცემს 15 ათეულს, 6 ერთეული და 5 ერთეული ერთად მოგვცემს 1 ათეულს და ერთ ერთეულს. ადრე მიღებული 15 ათეული და 1 ათეული მოგვცემს 16 ათეულს, კიდევ გვქონდა 1 ერთეული, ამიტომ გვექნება 161.

იგივე მაგალითი გამოვთვალოთ სხვა ხერხით:

$$75+86=(75+5)+(86-5)=80+81=161.$$

აქ ძირითადია პირველი შესაკრების მთელ ათეულად გადაქცევა. ამისათვის საკმარისია პირველ შესაკრებს—75-ს დავუმატოთ 5 ერთეული, რომელიც მეორე შესაკრებს გამოვაკელით.

ცხადია, ასეთი მოქმედება შეგვეძლო შეგვესრულებინა მეორე შესაკრებზეც:

$$75+86=(75-4)+(86+4)=71+90=161.$$

იგივე მაგალითი ასეც შეიძლება გამოითვალოს:

$$75+86=(75+80)+6=155+6=161,$$

$$75+86=(70+86)+5=156+5=161;$$

$$75+86=2\cdot 70+5+16=140+21=161.$$

2. გამოკლება. ორნიშნა რიცხვების გამოკლება უნდა შევასრულოთ მაკლების ჯერ ათეულების და შემდეგ ერთეულების გამოკლებით; ამ უკანასკნელში რიგს მნიშვნელობა არა აქვს: ჯერ გამოვაკლებთ ერთეულებს და შემდეგ ათეულებს, თუ პირიქით, მოქმედებანი ერთნაირი შრომატევადობისაა.

მაგალითად, 97—58.

$$97-58=(97-50)-8=47-8=(47-7)-1=40-1=39.$$

იგივე მაგალითი ასეც შეგვეძლო გამოგვეთვალა:

$$97-58=(97-60)+2=37+2=39,$$

$$97-58=(97-7)-51=(90-50)-1=40-1=39,$$

$$97-58=100-(58+3)=100-61=(100-60)-1=40-1=39.$$

საერთოდ, უმჯობესია ერთნიშნა მაკლების ისეთი გარდაქმნა მოვახდინოთ, რომ მასში 5-ზე ნაკლები რიცხვი მივიღოთ. მაგალითად, 57—9.

$$57-9=(57-10)+1=47+1=48,$$

$$83-7=(83-10)+3=73+3=76.$$

3. გამრავლება. ჯერ განვიხილოთ ორნიშნა რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე გამრავლება. ასეთი რიცხვების გამრავლება შევასრულოთ ნამრავლის განრიგებადობის კანონის საფუძველზე

მაგალითად, 56·7.

6 ერთეული გავამრავლოთ 7-ზე, გვექნება 4 ათეული და ორი ერთეული; 5 ათეული გავამრავლოთ 7-ზე, გვექნება 35 ათეული, რაც წინ მიღებულ 4 ათეულთან ერთად მოგვცემს 39 ათეულს; გვაქვს კიდევ 2 ერთეული. ამიტომ, საბოლოოდ, გვექნება 392.

$$56\cdot 7=392.$$

ორნიშნა რიცხვების გამრავლება, საზოგადოდ, ჯვარედინი გადამრავლებით სრულდება. მაგალითად, 65·47.

5·7 მოგვცემს 3 ათეულს და 5 ერთეულს. 5 გამრავლებული 4 ათეულზე, მოგვცემს 20 ათეულს; ეს უკანასკნელი წინ მიღებულ 3 ათეულ-

თან ერთად მოგვცემს 23 ათეულს. 6 ათეული 7-ზე გამრავლებით მოგვცემს 42 ათეულს; 42 ათეული და 23 ათეული ერთად მოგვცემს 65 ათეულს, ანუ 6 ასეულს და 5 ათეულს; 6 ათეული 4 ათეულზე ნამრავლში მოგვცემს 24 ასეულს. ეს უკანასკნელი კი მიღებულ 6 ასეულთან შეკრებით მოგვცემს 30 ასეულს. ასე რომ, მივიღებთ 30 ასეულს, 5 ათეულს და 5 ერთეულს. ე. ი.

$$65 \cdot 47 = 3055.$$

ცხადია, აღნიშნული გამრავლება ასე შესრულდა:

$$65 \cdot 47 = (60+5)(40+7) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 40 + 60 \cdot 7 + 60 \cdot 40 =$$
$$= 35 + 200 + 420 + 2400.$$

თუ ერთ-ერთი მამრავლი შეიძლება დაიშალოს მარტივ რიცხვთა ნამრავლებად, მაშინ შეიძლება გამრავლება შევასრულოთ თანდათანობითი გამრავლებით. მაგალითად, 38·12.

$$38 \cdot 12 = 38 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = (30 \cdot 3 + 8 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2 = 114 \cdot 2 \cdot 2 = 228 \cdot 2 = 456.$$

განვიხილოთ გამრავლების კერძო შემთხვევები.

5-ზე გამრავლება. 5-ზე გამრავლება სრულდება 2-ზე გაყოფით, რადგანაც

$$a \cdot 5 = \frac{a \cdot 10}{2}.$$

მაგალითად, $72 \cdot 5 = \frac{720}{2} = 360.$

9-ზე გამრავლება. 9-ზე გამრავლება სრულდება შემდეგნაირად:

$$a \cdot 9 = a(10-1) = 10a - a.$$

მაგალითად, $37 \cdot 9 = 370 - 37 = 333.$

ამგვარად, რაიმე რიცხვი რომ 9-ზე გავამრავლოთ, საჭიროა 10-ზე გამრავლებულ აღებულ რიცხვს გამოვაკლოთ იგივე რიცხვი.

11-ზე გამრავლება. 11-ზე გამრავლება შემდეგნაირად სრულდება:

$$a \cdot 11 = a(10+1) = 10a + a.$$

მაგალითად, $53 \cdot 11 = 530 + 53 = 500 + 30 + 50 + 3 =$
$$= 500 + (3+5)10 + 3 = 583.$$

ე. ი. ორნიშნა რიცხვის 11-ზე გასამრავლებლად, საჭიროა მოცემული რიცხვის ციფრთა ჯამი ჩავწეროთ იგივე ციფრებს შორის, თუ ეს ჯამი ერთნიშნა რიცხვია. თუ ჯამი ორნიშნა რიცხვია (იგი ნაკლებია 20-ზე), მაშინ სამრავლის ათეულების ციფრი ერთით გავადიდოთ და ციფრებს შორის ჩავწეროთ მათი ჯამის ერთეულების ციფრი.

მაგალითად, $79\cdot11=790+79=700+(90+70)+9=700+(9+7)\cdot10+9=$
$=700+16\cdot10+9=800+60+9=869.$

მოკლედ, ეს ასე შესრულდება:

$$79\cdot11=7(7+9)9=869.$$

15-ზე გამრავლება. 15-ზე გამრავლება ასე შესრულდება:

$$a\cdot15=10a+5a=10a+\frac{10a}{2}.$$

მაგალითად, $14\cdot15=140+\frac{14\cdot10}{2}=140+70=210.$

$$17\cdot15=170+85=255.$$

25-ზე გამრავლება. 25-ზე გამრავლება სრულდება შემდეგნაირად:

$$a\cdot25=\frac{a\cdot100}{4}.$$

მაგალითად, $42\cdot25.$

$$42\cdot25=\frac{42\cdot100}{4}=1300.$$

თუ მამრავლებს ათეულის ციფრები ერთნაირი აქვთ, მაშინ გამრავლება შემდეგნაირად სრულდება:

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+(b+c)\,10a+bc.$$

მაგალითად,

$$42\cdot47=1600+(2+7)40+2\cdot7=1600+360+14=1960+14=1974.$$

ეს ხერხი მეტად კარგია, თუ ათეულების ციფრი 1-ის ტოლია.

მაგალითად,

$$12\cdot17=100+9\cdot10+14=204.$$

გამრავლება შემოკლებული ფორმულების საშუალებით. გამრავლება შემოკლებული ფორმულების საშუალებით უფრო მეტად გამოიყენება რიცხვთა კვადრატების მოძებნის დროს, ან იმ რიცხვების გამრავლების შემთხვევაში, როდესაც ეს რიცხვები მრგვალ ათეულებთანაა ახლოს. ავიღოთ ფორმულები:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2,$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

მაგალითად,

$$43^2=1600+240+9=1849,$$

$$62\cdot58=(60+2)(60-2)=3600-4=3596,$$

$$47^2=(50-3)^2=2500-300+9=2200+9=2209.$$

ზემოთ განხილული გამრავლების კერძო შემთხვევები იმაზე მიგვითითებს, რომ ზეპირი გამრავლების დროს განსაკუთრებით უნდა ვისარ-

გებლოთ მოცემული რიცხვების თვისებებით და, საერთოდ, არითმეტიკული მოქმედების კანონებით. რამდენადაც რაციონალურად ვისარგებლებთ ამ თვისებებით, იმდენად მცირე დროში და ნაკლები ენერგიის დახარჯვით შევასრულებთ გამრავლებას.

4. გაყოფა. გაყოფა ზეპირად მიმდევრობით სრულდება: გაყოფა იწყება უდიდესი თანრიგის ციფრებიდან და გადავდივართ დაბალი თანრიგის ციფრებზე.

მაგალითად, $639:3$.

გაყოფას ასე შევასრულებთ: 6 ასეული გავყოთ 3-ზე, მივიღებთ 2 ასეულს; შემდეგ 3 ათეული გავყოთ 3-ზე, მივიღებთ 1 ათეულს, 9 გავყოთ 3-ზე, მივიღებთ 3-ს. ამგვარად, გვექნება:

$$639:3=213.$$

ხშირად გამყოფს შლიან მარტივ მამრავლებად და გასაყოფს თითოეულ თანამამრავლზე ცალ-ცალკე ყოფენ.

მაგალითად, $2418:6$.

$$2418:6=2418:2:3=1209:3=403.$$

განვიხილოთ ზეპირი გაყოფის რამდენიმე კერძო შემთხვევა.

5-ზე გაყოფა. ვინაიდან 5 არის ათის ნახევარი, ამიტომ რიცხვის 5-ზე გასაყოფად საკმარისია, მოცემული რიცხვი გავამრავლოთ 2-ზე და გავყოთ 10-ზე ან, შებრუნებით, შეგვიძლია ჯერ გავყოთ 10-ზე და შემდეგ გავამრავლოთ 2-ზე.

$$255:5=255\cdot 2:10=510:10=51,$$

$$255:5=255:10\cdot 2=25,5\cdot 2=51.$$

25-ზე გაყოფა. 25-ზე გაყოფა შესრულდება მოცემული რიცხვის $\frac{100}{4}$-ზე გაყოფით, ე. ი. მოცემული რიცხვი უნდა გავამრავლოთ 4-ზე და მიღებული შედეგი გავყოთ 100-ზე. ცხადია, 25-ზე გაყოფა შესრულდება პირიქითაც: რიცხვი გავყოთ 100-ზე და გავამრავლოთ 4-ზე.

მაგალითად,

$$7600:25=76\cdot 4=304.$$

15-ზე გაყოფა. რადგანაც $\frac{1}{15}$ შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{1}{15}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{10},$$

ამიტომ a რიცხვის 15-ზე გაყოფა ასე შესრულდება:

$$a:15=a\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{10}=\left(a-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{10}.$$

ამგვარად, რაიმე რიცხვი რომ 15-ზე გავყოთ, საჭიროა მოცემულ რიცხვს გამოვაკლოთ მისი მესამედი ნაწილი და მიღებული შედეგი გავყოთ 10-ზე.

მაგალითად, $645:15=\left(645-\frac{645}{3}\right)\cdot\frac{1}{10}=(645-215)\cdot\frac{1}{10}=$

$$=430\cdot\frac{1}{10}=43.$$

§ 3. ნებისმიერ რიცხვებზე ზეპირი მოქმედებანი

ის ხერხები, რომლებიც გამოყენებული იყო ორნიშნა რიცხვებზე ზეპირი მოქმედების შესასრულებლად, შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მრავალნიშნა რიცხვებზე მოქმედებათა შესასრულებლადაც.

განვიხილოთ თითოეული მოქმედება ცალ-ცალკე:

შეკრება. ჩვეულებრივად, შეკრება დაშლის ხერხით წარმოებს. გამოვყოფთ ცალკე ასეულებს, ათეულებს და ერთეულებს და ვკრებთ. მაგალითად, $268+321$ ჯერ შევკრიბოთ ასეულები: მივიღებთ 5 ასეულს; შემდეგ—ათეულები: მივიღებთ 8 ათეულს; შემდეგ შევკრიბოთ ერთეულები: მივიღებთ 9 ერთეულს. ამგვარად; გვექნება:

$$268+321=589.$$

შეკრებაში წარმატებით გამოიყენება რიცხვთა დამრგვალების ხერხი. ეს ხერხი შემდეგში მდგომარეობს: ერთ-ერთ შესაკრებს ვუმატებთ მეორე შესაკრებიდან იმდენ ერთეულს, რამდენიც საჭიროა პირველი შესაკრების მრგვალ რიცხვამდე მისაყვანად:

მაგალითად, $681+276$.

პირველ შესაკრებს საჭიროა დავუმატოთ 19, რომ მივიღოთ მრგვალი რიცხვი 700, ამგვარად:

$$681+276=(681+19)+(276-19)=700+257=957.$$

გამოკლება. აქაც, როგორც მიმატების შემთხვევაში, გამოიყენება დაშლის ხერხი:

$$879-236=(800-200)+(70-30)+(9-6)=643.$$

ასევე გამოიყენება დამრგვალების ხერხი:

$$476-234=500-(234+24)=(500-200)-58=300-58=242.$$

$$687-249=(687+1)-(249+1)=688-250=438.$$

გამრავლება. მრავალნიშნა რიცხვების გამრავლება თითქმის ისე წარმოებს, როგორც ორნიშნა რიცხვების გამრავლება. განვიხილოთ დამრგვალების ხერხი:

$$245\cdot398=245(400-2)=(200\cdot4+40\cdot4+5\cdot4)100-245\cdot2=$$

$$=(800+160+20)100-245\cdot2=98000-490=97510.$$

ახლა განვიხილოთ განრიგებადობის ხერხი:

$$245 \cdot 321 = 245 \cdot 300 + 245 \cdot 20 + 245 \cdot 1 = 73500 + 4900 + 245 =$$
$$= (73\,500 + 4\,900) + 245 = 78\,645.$$

მრავალნიშნა რიცხვების ზეპირ გამრავლებას, მისი სირთულის გამო, იშვიათად მიმართავენ.

განვიხილოთ გამრავლების კერძო შემთხვევები, რომლებიც არითმომეტრის შესამოწმებლად იხმარება: ასეთია $a = 12345679$-ს, 9, 18,···, 81-ზე ნამრავლები:

$$a \cdot 9 = 11\ 111\ 111; \qquad a \cdot 45 = 55\ 555\ 555;$$
$$a \cdot 18 = 22\ 222\ 222; \qquad a \cdot 54 = 66\ 666\ 666;$$
$$a \cdot 27 = 33\ 333\ 333; \qquad a \cdot 63 = 77\ 777\ 777;$$
$$a \cdot 36 = 44\ 444\ 444; \qquad a \cdot 72 = 88\ 888\ 888;$$
$$a \cdot 81 = 99\ 999\ 999.$$

აგრეთვე, თითქმის ერთი და იგივე ციფრისაგან შედგენილ რიცხვს იძლევა $a = 987654321$-ის ნამრავლები:

$$a \cdot 9 = 8\ 888\ 888\ 889; \qquad a \cdot 45 = 44\ 444\ 444\ 445;$$
$$a \cdot 18 = 17\ 777\ 777\ 778; \qquad a \cdot 54 = 53\ 333\ 333\ 334;$$
$$a \cdot 27 = 26\ 666\ 666\ 667; \qquad a \cdot 63 = 62\ 222\ 222\ 223;$$
$$a \cdot 36 = 35\ 555\ 555\ 555; \qquad a \cdot 72 = 71\ 111\ 111\ 112;$$
$$a \cdot 81 = 80\ 000\ 000\ 001.$$

§ 4. წერითი გამოთვლები

წერითი გამოთვლები საშუალო სკოლის არითმეტიკის კურსიდან საკმარისადაა ცნობილი. მაგრამ ქვემოთ შევჩერდებით ზოგიერთ მათგანზე.

1. გამრავლება. ჩვეულებრივად გამრავლება მარჯვნიდან მარცხნივ სრულდება. მაგალითად, $527 \cdot 326$;

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 527 \\ 326 \end{array} \\ \hline 3162 \\ +\ 1054 \\ 1581 \\ \hline 171802 \end{array}$$

იგივე გამრავლება შეგვიძლია შევასრულოთ მარცხნიდან მარჯვნივ: 3 ასეულზე გავამრავლოთ 527. მივიღებთ 1581 ასეულს. დავწეროთ 1581 და ვიგულისხმოთ, რომ ორი ნული ბოლოში მიწერილი აქვს. შემდეგ

527 გავამრავლოთ 2 ათეულზე, მივიღებთ 1054 ათეულს. ეს რიცხვი მოვათავსოთ წინა 1581 ასეულის ქვეშ; ერთნაირი თანრიგის ციფრები რომ ერთმანეთის ქვეშ მოხვდეს საკმარისია მეორე შესაკრები პირველი შესაკრების ქვეშ ისე დავწეროთ, რომ ერთი ციფრით მარჯვნივ იყოს გატანილი. შემდეგ 527 გავამრავლოთ 6-ზე და ნამრავლი მეორე შესაკრების ქვეშ დავწეროთ, მაგრამ კვლავ ერთი ციფრით მარჯვნივ იყოს გაწეული. მივიღებთ:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 527 \\
326 \\
\hline
+\ 1581 \\
1054 \\
3162 \\
\hline
171802
\end{array}
$$

რიცხვების ერთიმეორის ქვეშ სწორად მისაწერად შეგვეძლო 1581-ის ადგილას დაგვეწერა 158100, 1054-ის ადგილას—10540 და შემდეგ ეს ნულები გადაგვეხაზა, მაგრამ ოდნავი ყურადღება საკმარისია, რომ მიწერის დროს შეცდომა არ დავუშვათ. ასეთი ხერხით გამრავლების უპირატესობა ახსნილი იქნება მიახლოებითი რიცხვების გამრავლების დროს (§ 18).

გამრავლების დროს ყურადღებას იპყრობს 6, 7, 8, 9-ზე გამრავლების ნაცვლად 4, 3, 2 და 1-ზე გამრავლება. 6 შევცვალოთ

$$10-4=10+\bar{4}=1\bar{4},\ 7=10+\bar{3}=1\bar{3},\ 8=10+\bar{2}=1\bar{2},\ 9=10+\bar{1}=1\bar{1}.$$

ამის საშუალებით ყოველი ნატურალური რიცხვი შეგვიძლია ისე ჩავწეროთ რომ არ ვისარგებლოთ 6, 7, 8, 9-ებით. მაგალითად:

$$37=30+7=30+10+\bar{3}=4\bar{3};$$

$$49=40+9=40+10+\bar{1}=5\bar{1};$$

$$86=80+10+\bar{4}=9\bar{4}=1\bar{1}\bar{4};$$

$$78=8\bar{2}=1\bar{2}\bar{2};$$

$$26897=2690\bar{3}=27\bar{1}0\bar{3}=3\bar{3}\bar{1}0\bar{3}.$$

ამგვარად, ციფრი, რომელიც 5-ზე მეტია იცვლება იმ ციფრით, რომელიც ამ ციფრს აკლია ათამდე, ხოლო წინა ციფრი დიდდება 1-ით. რიცხვის ამგვარი შეცვლა უმჯობესია დავიწყოთ მარჯვნიდან:

$$47368=5\bar{3}4\bar{3}\bar{2}.$$

მივიღებთ რა ასეთ ჩაწერას მხედველობაში, მაშინ გამრავლების დროს გვექნება დადებით რიცხვებთან ერთად უარყოფითი რიცხვებიც.

განვიხილოთ მაგალითი: 6895·8997.

ჩვეულებრივი გამრავლება მოგვცემს:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 6895 \\ 8997 \end{array} \\
\hline
48265 \\
+\;62055 \\
62055 \\
55160 \\
\hline
62034315
\end{array}
$$

მამრავლის უარყოფით ციფრებზე გადაყვანა მოგვცემს:

$$8997=1\bar{1}00\bar{3}.$$

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 6895 \\ 1\bar{1}00\bar{3} \end{array} \\
\hline
\bar{2}0\bar{6}\bar{8}\bar{5} \\
+\;\bar{6}\bar{8}\bar{9}\bar{5} \\
6895 \\
\hline
621\bar{6}\bar{5}\bar{6}\bar{8}\bar{5}=62034315
\end{array}
$$

უარყოფითი ციფრები ასე შევცვალეთ:

$\bar{5}$ ნიშნავს (—5)-ს, ამიტომ წინა ციფრებიდან ავიღოთ ერთი (ერთიათეული) და მას გამოვაკლოთ 5, მივიღებთ 5, მაგრამ (—8)-ის ადგილას გვექნება (—9). ამ ციფრის წინ არის (—6), ამიტომ ამ ციფრიდანაც ავიღოთ 1, რომელსაც გამოვაკლოთ მომდევნო თანრიგის 9 ერთეული, მივიღებთ 1-ს და ა. შ.

ამ მაგალითზე ადვილი შესამჩნევია, რომ 5-ზე მეტი ციფრების მისი დამატებითი შეცვლით, გამრავლება უფრო ნაკლები შრომით სრულდება.

2. შემოწმება. გამოთვლებში დიდი მნიშვნელობა აქვს შემოწმებას. შემოწმება გვიჩვენებს გამოთვლების სისწორეს. ჩვეულებრივად, შემოწმება აღებული მოქმედების შებრუნებული მოქმედებით სრულდება, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როდესაც შებრუნებული მოქმედება უფრო რთულია, ვიდრე პირდაპირი მოქმედება, მაშინ უმჯობესია აღებული მოქმედების გამეორებით ჩავატაროთ შემოწმება. მაგალითად, შეკრების შემოწმებას ვაწარმოებთ შეკრებით ან გამოკლებით. გამოკლების შემოწმებას შეკრებით. გამრავლების შემოწმებას კვლავ გამრავლებით, გაყოფის შემოწმებას გამრავლებით. ზოგჯერ შემოწმებას ვაწარმოებთ უხეში საშუალებით: ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრით (§ 18). მოცემული რიცხვების დამრგვალებით და შედეგს დამრგვალებული რიცხვებით გამოვითვლით და სხვ. ამით შევამოწმებთ მიღებულ შედეგში არის თუ არა უხეში შეცდომა დაშვებული.

§ ნ. ზეპირი და წერითი გამოთვლების შეუღლება. გამოთვლების რაციონალიზაცია

ზეპირი და წერითი ანგარიშის ერთდროული გამოყენება გვჭირდება განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც შესაკრებია რამდენიმე რიცხვი. ამ შემთხვევაში მოცემული რიცხვებიდან ავარჩევთ ისეთ შესაკრებებს, რომელთა შეკრება ადვილია ზეპირად და მათ ადგილას მიღებულ შედეგს დავწერთ. ასევე მოვიქცევით სხვა შესაკრებებზედაც. შემდეგ კი მიღებულ შედეგს შევკრებთ.

მაგალითად,

$$517+698+309+283=(517+283)+(698+309)=$$
$$=800+1007=1807.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული რიცხვების შეკრება ზეპირად არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. შემდეგაც მიღებული 800-ის და 1007-ის შეკრებაც ზეპირად ადვილად შეიძლება.

ასევე შეგვიძლია მოვიქცეთ გამოკლების დროსაც.

მაგალითად,

$$987-265-135-68-46=987-400-114=587-114=473.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ 265-ისა და 135-ის ჯამი ზეპირად ადვილად მოიძებნება. ასევე 68-ისა და 46-ის ჯამიც ადვილად მოიძებნება. მიღებული 400 და 114-იც შეგვიძლია 987-ს ზეპირად გამოვაკლოთ.

გამრავლების შემთხვევაში ზეპირი გამოთვლები შეგვიძლია განრიგებადობის კანონის საფუძველზე შევასრულოთ, მაგალითად,

$$468\cdot325=468(300+25)=140400+11700=152100.$$

საზოგადოდ, თუ რომელიმე მამრავლი დაიშლება ისეთ შესაკრებებად, რომლებზედაც ზეპირი გამრავლება შესაძლებელია, მაშინ შევასრულოთ ცალკეული გამრავლება და ნამრავლები შევკრიბოთ.

მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის, რომ ზეპირი გამრავლების გამოყენებამ არ გაართულოს გამოთვლები. წინააღმდეგ შემთხვევაში ზეპირი მოქმედების გამოყენებას აზრი არ ექნება.

განსაკუთრებით ზეპირ გამოთვლებს ვიყენებთ გაყოფის დროს. ყოველთვის უნდა ვეცადოთ სათანადო ნაშთები ზეპირად დავწეროთ:

მაგალითად, 5688 : 12;

$$\begin{array}{l}
5688:12=474\\
\underline{88}\\
\underline{48}\\
0
\end{array}$$

პირველი ნაშთი 8 ზეპირად ძნელი მისაღები არ არის: $56-4\cdot12=8$. ასევე ძნელი მისაღები არ არის მეორე ნაშთი: $88-7\cdot12=4$ და ა. შ.

რა ხასიათისაც უნდა იყოს გამოთვლები, მთავარია გამოთვლების რაციონალურად ჩატარება. ყოველგვარი ჩანაწერი უნდა იყოს სუფთად და გარკვეული მიმდევრობით მოთავსებული. გამოთვლების შედეგების შემოწმება ჩანაწერით უნდა შეძლოს არა მარტო თვით გამომთვლელმა, არამედ სხვა დაინტერესებულმა პირმაც.

ყოველი შედეგი უნდა ჩაიწეროს მისთვის განკუთვნილ ადგილას. თუ გამოთვლის ჩატარება ზეპირად ძნელია, იგი წერით უნდა გაკეთდეს. საბოლოო შედეგს უნდა დაერთოს სათანადო შემოწმება ან ცდომილების სიდიდე. გამოთვლების დროს უნდა ვისარგებლოთ გამოთვლების სხვადასხვა საშუალებებით: ცხრილებით (გამრავლების, კვადრატების, კუბების, კვადრატული ფესვების, ტრიგონომეტრიული, ლოგარითმული და სხვ.), სათვლელი მანქანებით და სხვ.

გავარჩიოთ მაგალითი:

ვიპოვოთ კონუსის ტოლდიდი კუბის წიბო a, თუ კონუსის მსახველი l ფუძესთან ადგენს α კუთხეს:

$$l=12{,}5 \text{ სმ}; \quad \alpha=38^\circ 14'.$$

სათანადო ამოხსნა მოგვცემს:

$$a=l\sqrt[3]{\frac{\pi\cos\alpha\sin 2\alpha}{6}},$$

$$\lg a=\lg l+\frac{1}{3}(\lg\pi+\lg\cos\alpha+\lg\sin 2\alpha-\lg 6)=\lg l+\frac{1}{3}\lg b.$$

გამოთვლები ასე ჩავატაროთ:

$$\begin{array}{lcrcr}
l=12{,}5, & & \lg\pi=0{,}4971 & + & \lg l=1{,}0969 \\
\alpha=38^\circ 14', & + & \lg\cos\alpha=\bar{1}{,}8951 & & \frac{1}{3}b=\bar{1}{,}8672 \\
2\alpha=76^\circ 28', & & \lg\sin 2\alpha=\bar{1}{,}9877 & & \hline \\
 & & -\lg 6=\bar{1}{,}2218 & & \lg a=0{,}9641 \\
\hline
 & & b=\bar{1}{,}6017 & & a=9{,}206.
\end{array}$$

რადგანაც შედეგში ბოლო ციფრი სანდო არ არის, ამიტომ გვექნება:

$$a=9{,}21 \text{ სმ}.$$

თ ა ვ ი II

იარაღებით გამოთვლები

§ 6. ზოგადი შენიშვნები

სახალხო მეურნეობის განვითარება დიდადაა დაკავშირებული სხვადასხვაგვარ გამოთვლით ოპერაციებთან. ნებისმიერი მშენებლობა: გემის, ელექტროსადგურის, ატომური რეაქტორის, თვითმფრინავის, ხელოვნური

თანამგზავრისა და სხვა, მოითხოვს რთულ გამოთვლებს. უმეტეს შემთხვევაში გამოთვლების სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ საბოლოო შედეგისათვის საჭიროა მილიონობით და მილიარდობით არითმეტიკული ოპერაციის შესრულება. მაგალითად, სამასუცნობიან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის მისაღებად, საჭიროა ათეული მილიონი არითმეტიკული მოქმედების შესრულება. ასეთი გამოთვლების შესრულება კარგი გამომთვლელისაგან მოითხოვს ათეული წლების დაძაბულ მუშაობას. ამონახსნის მიღება შეიძლება დაჩქარდეს, თუ ამოცანა დაიყოფა რამდენიმე დამოუკიდებელ ქვეამოცანებად, მაგრამ საბოლოო შედეგის მისაღებად მაინც საკმარისი დრო იქნება საჭირო.

უძველესი დროიდან ცდილობდნენ გამოთვლითი სამუშაოების შემსუბუქებას რაიმე საშუალებებით. დღეს კი ისე განვითარდა გამოთვლითი ტექნიკა, რომ ერთ სეკუნდში მანქანას იმდენი სამუშაოს შესრულება შეუძლია, რაც კარგ, გამოცდილ გამომთვლელს ერთ თვეში. გამოთვლითი ტექნიკა განსაკუთრებით განვითარდა მეორე მსოფლიო ომის შემდეგ.

მრავალი ამოცანა, რომელთა ამოხსნა ცოტა ხნის წინ ფორმალურად შეუძლებელი იყო, გამოთვლითი ტექნიკის განვითარებამ ცხადჰყო მათი ამოხსნის შესაძლებლობა და ამონახსენის ფაქტიურად მიღება. ამ უკანასკნელმა გავლენა მოახდინა თვით თეორიული მათემატიკის განვითარებაზე; ამოცანის რთული სახით გამოსახული ამონახსენი ახლა არავითარ დაბრკოლებას არ წარმოადგენს რიცხვითი პასუხისათვის.

მათემატიკური მანქანების გამოყენება იძლევა არა მარტო გამოთვლითი შრომის ნაყოფიერების გაზრდას, არამედ აუმჯობესებს გამოთვლების შედეგების სიზუსტესაც.

ქვემოთ ძალიან მოკლედ აღწერილი იქნება ზოგიერთი პატარა საანგარიშო მანქანა და მათზე მუშაობის ხერხები. აგრეთვე მოცემულ იქნება მცირე ცნობები სწრაფმოქმედი ელექტრონული გამომთვლელი მანქანების შესახებ.

§ 7. გამოთვლების საშუალებანი

მათემატიკური გამოთვლების საშუალებანია: ცხრილები, გრაფიკები, ნომოგრამები, საანგარიშო მანქანები და სხვ.

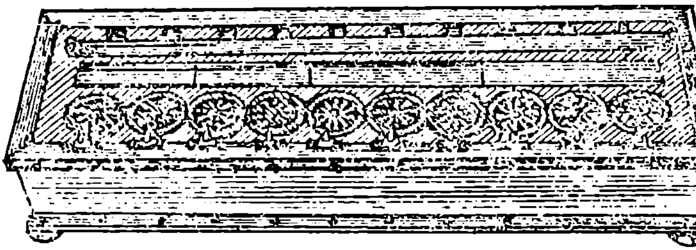
მათემატიკური ცხრილები უძველესი დროიდანაა ცნობილი. ცხრილები სხვადასხვა სიზუსტისაა. მეტად გავრცელებულია: ლოგარითმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, კვადრატების, კუბების, შებრუნებული სიდიდეების, გამრავლების, პროცენტების და სხვა ცხრილები.

საანგარიშო ხელსაწყოებიდან მეტად ცნობილია რუსული საანგარიშე, ამ ხელსაწყოს წინაპარი „ფიცრის საანგარიშეს“ სახელწოდებით იყო ცნობილი. თანამედროვე სახე მან მიიღო XVIII საუკუნიდან.

საანგარიშო ხელსაწყოებიდან მეტად გავრცელებულია აგრეთვე ლო-

გარითმული სახაზავი. ეს ხელსაწყო გამოგონილია 1620 წელს ოქსფორდის უნივერსიტეტის პროფესორის ე. გუტნერის მიერ (1581—1626). იგი დაფუძნებულია დ. ნეპერის (1550—1617) შრომებზე ლოგარითმების შესახებ. ჩვეულებრივი ზომის (25 სმ) ლოგარითმული სახაზავი შედეგს იძლევა 3—4 ნიშნადი ციფრით. ამ ხელსაწყოზე სრულდება მრავალი მოქმედება. მოქმედებანი მეტად მექანიზებულია და შედეგი სწრაფად მიიღება.

ნომოგრამები წარმოადგენს გამოთვლების სპეციალურ საშუალებას. ყოველი ნომოგრამა შედგენილია სათანადოდ ერთი ფორმულისათვის და შედეგს იძლევა არგუმენტისათვის შემოსაზღვრულ არეში. ნომოგრამა შედეგს იძლევა 2—3 ნიშნადი ციფრით.



ნახ. 1.

გამოთვლებისათვის მეტად ძლიერი საშუალებაა საანგარიშო მანქანები.

პირველი მექანიკური მანქანა ეკუთვნის გამოჩენილ ფრანგ ფიზიკოსს და მათემატიკოსს ბ. პასკალს (1623—1662). 18 წლის ასაკში მან შექმნა შემკრები მოწყობილობა, რომელიც შემდეგ მრავალჯერ გააუმჯობესეს (ნახ, 1)

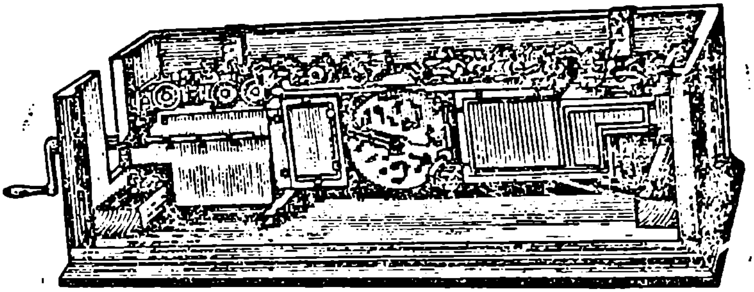
1673 წელს გამოჩენილმა მათემატიკოსმა, დიფერენციალური აღრიცხვის ერთ-ერთმა შემქმნელმა გ. ვ. ლეიბნიცმა (1646—1716) გამოიგონა საანგარიშო მანქანა, რომელზედაც სრულდებოდა ოთხი არითმეტიკული მოქმედება (ნახ. 2). ლეიბნიცის მანქანა წარმოადგენდა თანამედროვე არითმომეტრის წინაპარს.

1847 წელს რუსმა მასწავლებელმა კუმმერმა გამოიგონა მანქანა შეკრებისა და გამოკლებისათვის. მაგრამ რუსული საანგარიშეს გავრცელების გამო ამ მანქანამ რუსეთში ვერ პოვა გამოყენება, სამაგიეროდ ევროპაში კარგად გავრცელდა.

1845 წელს ი. სლონიმსკიმ შექმნა მანქანა, რომელზედაც მარტივად სრულდებოდა არა მარტო გამრავლება და გაყოფა, არამედ კვადრატული ფესვის ამოღებაც.

1867 წელს გამოჩენილმა რუსმა მათემატიკოსმა ვ. ი. ბუნიაკოვსკიმ (1804—1889) მოგვცა მანქანა შეკრებისა და გამოკლებისათვის.

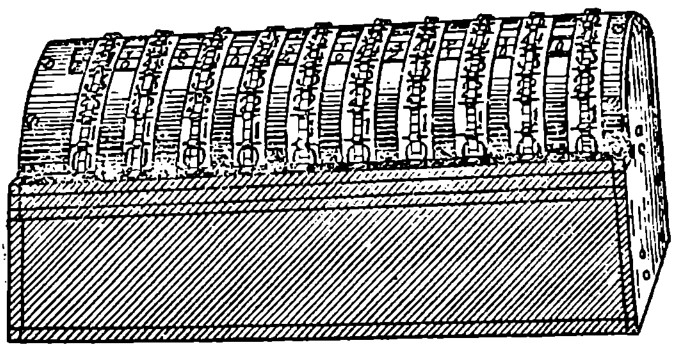
პირველი არითმომეტრი, რომელმაც გაითქვა მთელ მსოფლიოში სახელი სრულყოფილ იქნა რუს ინჟინერ ვ. ტ. ოდნერის მიერ 1874 წ. ამ მანქანის მასიური გამოშვება დაიწყო 1891 წელს ქ. პეტროგრადში. ავტომატური მანქანის წინაპრად ჩაითვლება გამოჩენილი რუსი მათემა-



ნახ. 2.

ტიკოსის პ. ლ. ჩებიშევის (1821—1894) მიერ 1878 წელს შექმნილი მანქანა (ნახ. 3). ეს გამოგონება არ იქნა გავრცელებული. ერთადერთი მანქანა, რომელიც დამზადებული იყო ავტორის მიერ, ინახება პარიზის მუზეუმში.

გამოთვლითი პროცესების მექანიზაციაში დიდი ღვაწლი მიუძღვის აკად. ა. ნ. კრილოვს (1863—1945). მან დაამუშავა დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნისათვის მანქანების თეორია და მოგვცა რამდენიმე მანქანის კონსტრუქცია.



ნახ. 3.

საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტმა ი. ს. ბრუკმა შექმნა მრავალი მათემატიკური მანქანა, მათ რიცხვში პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირების მანქანა.

დიდი წვლილი შეიტანეს საანგარიშო მანქანების განვითარებაში საბჭოთა მეცნიერებმა ს. პ. ლებედევმა, ი. ი. ბაზილევსკიმ, მ. ა. ბონჩ-ბრუევიჩმა, ლ. ი. გუტენმახერმა, პ. გ. ხომენკომ, ბ. ი. რომეევმა და სხვ.

დღეისათვის გამოთვლების მექანიზაციისათვის გამოიყენება შემდეგი სახის მანქანები:

1) მანქანები, სადაც მოცემული მნიშვნელობანი უნდა დავაყენოთ ხელით. ამ მანქანებს ეკუთვნის შემაჯამებელი და საანგარიშო მანქანები. შემაჯამებელი მანქანები უფრო მეტად განკუთვნილია შეკრებისა და გამოკლებისათვის. ასეთია СДМ-107, СДМ-133 და სხვ. საანგარიშო მანქანებით კი სრულდება ოთხივე არითმეტიკული მოქმედება. განსაკუთრებით კი—გამრავლება და გაყოფა. საანგარიშო მანქანები სხვადასხვა ტიპისაა: მექანიკური, მაგალითად არითმომეტრი „Феликс", ВК-1; ნახევრად ავტომატური, მაგ. ВМ-2, აქ გაყოფა სრულდება ავტომატურად; ამავე ტიპის მანქანებს ეკუთვნიან ВК-2М, ВМП-2, КЕЛР—2с და სხვ. ავტომატური მანქანები, სადაც სრულდება ავტომატურად არა მარტო გაყოფა, არამედ გამრავლებაც, ასეთია ВММ-2, САР-2с და სხვ.

2) საანგარიშო ანალიზური მანქანები, სადაც მოცემულებანი სპეციალური ბარათით შეიტანება. ასეთია „Табулятор-5". იგი შედგება რამდენიმე მოწყობილობისაგან: პერფორატორი, შემმოწმებელი, დამხარისხებელი და თვით ტაბულიატორი. საანგარიშო ანალიზური მანქანა გამოიყენება მასიური გამოთვლების, სტატისტიკური, საინჟინრო-ტექნიკური გამოთვლების დროს და სხვ. ამ მანქანით გამოთვლების წარმოებადობა 100-ზე მეტჯერ იზრდება, ვიდრე ჩვეულებრივ არითმომეტრზე.

3) სწრაფმოქმედი გამომთვლელი მანქანები. აღნიშნული მანქამებით სრულდება არითმეტიკული მოქმედებანი, გაწარმოება, ინტეგრება და სხვ. ამ მანქანებით სრულდება აგრეთვე ზოგიერთი ლოგიკური ხასიათის მოქმედებანი.

სწრაფმოქმედი გამომთვლელი მანქანები გამოიყენება მეცნიერებისა და ტექნიკის თითქმის ყველა დარგში.

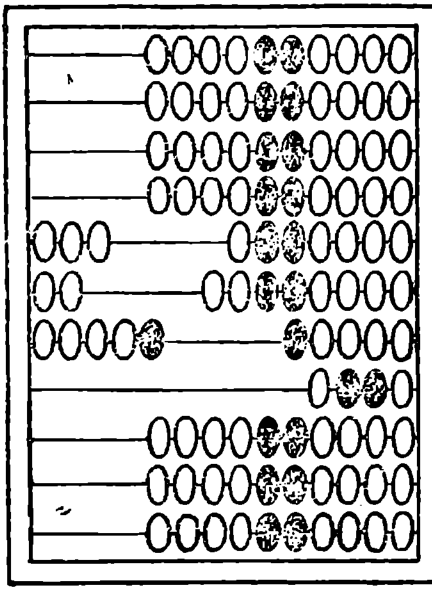
4) სპეციალური დანიშნულების მანქანები. ეს მანქანები იხმარება ერთი და იგივე ტიპის ამოცანათა ამოსახსნელად. მაგალითად, წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის, პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრებისათვის, პირობითი ექსტრემუმის განსაზღვრისათვის და სხვ.

§ 8. რუსული საანგარიშე

რუსული საანგარიშე წარმოადგენს ხის ჩარჩოს პარალელური მავთულებით (ნახ. 4). მავთულთა რიცხვი ჩვეულებრივად 15-ია. თითოეულ მავთულზე, გარდა მეოთხე მავთულისა, ათ-ათი კოჭია. მეოთხე მავთულზე ოთხი კოჭია. ყოველ მავთულზე თვალის ჰიგიენისათვის შუა კოჭები შავი

ფერისაა. თითოეული მავთული შეესაბამება გარკვეულ თანრიგს, ხოლო თითოეული კოჭი გამოსახავს სათანადო თანრიგის ერთეულს.

თანრიგების რიგი იწყება ქვემოდან. პირველი მავთული პირველი თანრიგისაა. მეორე მავთული—მეორე თანრიგისა და ა. შ. მეოთხე მავთული მხედველობაში არ მიიღება.



ნახ. 4.

მეოთხე მავთულის კოჭებით აიღება მთელის მეოთხედი ნაწილები ან იგი იხმარება ძველი ზომისათვის —ათეული ფუნტების ასაღებად. მეოთხე მავთული საზღვრადაც იხმარება, მის ზევით აიღება მთელი რიცხვები, ხოლო ქვემოთ—წილადები: /მეათედი, მეასედი და მეათასედი. ზოგიერთ ახალი კონსტრუქციის საანგარიშეზე მეოთხე მავთულზედაც ათი კოჭია.

საანგარიშეზე რიცხვის ასაღებად საჭიროა სათანადო კოჭები გავიტანოთ მარცხენა ნაპირზე. კოჭების გატანას ვიწყებთ უფროსი თანრიგებიდან. ამ მოქმედებას „ჩასვლა", ანუ „გასვლა" ეწოდება.

დაწვრილებით განვიხილოთ არითმეტიკული მოქმედებანი.

შეკრება. იმისათვის, რომ ორი რიცხვი შევკრიბოთ, საჭიროა ჯერ პირველი რიცხვი ჩავიდეთ, შემდეგ მეორე და ა. შ. რიცხვების ჩასვლა უნდა დავიწყოთ მაღალი თანრიგის ერთეულებიდან. თუ მეორე შესაკრების აღების დროს რომელიმე მავთულზე არ კმარა კოჭები, მაშინ საჭიროა შემდეგი თანრიგის მავთულზე ავიღოთ ერთი კოჭი, ხოლო იმ მავთულზე, რომელზედაც კოჭები არ გვეყო, მარჯვნივ გამოვიტანოთ („გამოსვლა") იმდენი კოჭი, რამდენიც აკლია ჩასასვლელ რიცხვს ათამდე.

მაგალითად,

$$573+284=(500+70+3)+200+84=(700+70+3)+$$
$$+(100-20)+4=800+(70-20)+(3+4)=857.$$

გამოკლება. გამოკლების შესასრულებლად საჭიროა ჯერ ჩავიდეთ საკლები და შემდეგ გამოვიდეთ მაკლები. გამოსვლასაც მაღალი თანრიგის ერთეულებიდან ვიწყებთ.

მაგალითად,

$$768-234=(700+60+8)-234=(700-200)+(60-30)+(8-4)=534.$$

თუ გამოკლებისას რომელიმე მავთულზე არ კმარა მაკლების შესაბამისი თანრიგის ციფრისათვის კოჭები, მაშინ ზედა მავთულზე გამოვიდეთ ერთი კოჭი, ხოლო აღებულ მავთულზე ჩავიდეთ იმდენი კოჭი, რამდენიც მაკლების სათანადო ციფრს აკლია ათამდე.

მაგალითად,

$$637-283=(600+30+7)-200-83=(400+30+7)-80-3=$$
$$=(400-100+30+7)+20-3=300+50+(7-3)=354.$$

გამრავლება. გამრავლება მიიყვანება შეკრებაზე:

$$a\cdot b=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b\text{-ჯერ}},$$

ე. ი. საჭიროა სამრავლი a გავიმეოროთ იმდენჯერ შესაკრებად, რამდენი ერთეულიცაა b მამრავლში. ასევე მოვიქცევით მაშინაც, როდესაც ათწილადები გვაქვს მამრავლებად. წინასწარ კი უნდა განვსაზღვროთ ათწილადის ნიშნების რაოდენობა ნამრავლში, რომელსაც გამრავლების შემდეგ გამოვყოფთ ნამრავლიდან.

მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული ხერხით გამრავლების ჩატარება საანგარიშეზე შესაძლებელია, ამ ხერხს იყენებენ მხოლოდ ერთნიშნა რიცხვზე გამრავლებისას.

ვთქვათ, a მრავალნიშნაა:

$$a=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0,$$

ხოლო b ერთნიშნა რიცხვია, მაშინ

$$ab=a_nb\cdot 10^n+a_{n-1}b\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1b\cdot 10+a_0b.$$

გამრავლება ასე შესრულდება: პირველად ვიპოვოთ a_0b (ერთნიშნა რიცხვების ნამრავლი) და ჩავიდეთ პირველი თანრიგის მავთულებზე. შემდეგ ვიპოვოთ a_1b და ჩავიდეთ ერთი თანრიგით მაღალი რიგის მავთულზე a_1b-სთან შედარებით ($a_1b\cdot 10$) და ა. შ. ვიპოვით a_nb და ჩავიდეთ n-ური თანრიგის მავთულზე ($a_nb\cdot 10^n$). თანრიგის ადგილი რომ არ დაგვავიწყდეს საანგარიშეზე, საჭიროა მარცხენა ხელის ცერი მოვიხმაროთ. როცა a_0b-ს ვიღებთ, ცერი მოვათავსოთ პირველი თანრიგის მავთულზე, შემდეგ როცა a_1b-ს ვიღებთ, ცერი მოვათავსოთ მეორე თანრიგის მავთულზე და ა. შ.

მაგალითად,

$$523\cdot 4=5\cdot 4\cdot 10^2+2\cdot 4\cdot 10+3\cdot 4=3\cdot 4+(2\cdot 4)10+$$
$$+(5\cdot 4)10^2=12+8\cdot 10+20\cdot 10^2=2092.$$

ადვილი შესამჩნევია მრავალნიშნა რიცხვების გამრავლება დაიყვანება ერთნიშნა რიცხვების გამრავლებაზე.

მაგალითად,

$$523\cdot 46=523\cdot 40+523\cdot 6.$$

ცხადია, ჯერ ვიპოვით $523 \cdot 6$, შემდეგ მივუმატებთ $523 \cdot 40$. ამისათვის $523 \cdot 40$-ის აღებას მეორე თანრიგის მავთულიდან დავიწყებთ. ასევე შესრულდება სამნიშნა რიცხვზე გამრავლება; მაგალითად,

$$523 \cdot 746 = 523 \cdot 6 + 523 \cdot 40 + 523 \cdot 700.$$

გაყოფა. საანგარიშეზე გაყოფა დაიყვანება გასაყოფიდან გამყოფის მიმდევრობით გამოკლებაზე.

მაგალითად, 72 825 : 25.

რიცხვი 72 825 ავიღოთ საანგარიშეზე. მარცხენა ხელის ცერით გამოვყოთ მე-4 და მე-5 მავთულზე 72. ამ რიცხვიდან მიმდევრობით გამოვიდეთ 25. ორჯერ 25-ის გამოსვლა 72-დან მოგვცემს 22.

ზემოდან პირველ მავთულზე გავიდეთ 2 კოჭი. ახლა ავიღოთ 228. ცერი მოვათავსოთ ერთი მავთულით ქვემოთ. მიმდევრობით გამოვიდეთ 25. რამდენჯერაც გამოვალთ 25-ს, იმდენი კოჭი გავიდეთ ზემოდან მეორე მავთულზე. ამ მავთულზე მივიღებთ 9 კოჭს, ხოლო 228-ის ადგილას დაგვრჩება 3. ახლა ავიღოთ 32. ცერი კვლავ ჩავწიოთ ერთი მავთულით ქვემოთ. გამოვიდეთ ამ რიცხვიდან მიმდევრობით 25. რამდენჯერაც 25-ს გამოვალთ 32-დან, იმდენი კოჭი ჩავიდეთ მესამე მავთულზე. მესამე მავთულზე მივიღებთ 1 კოჭს, ხოლო 32-ის ადგილას დაგვრჩება 7. ახლა ავიღოთ 75. ცერი კვლავ ერთი მავთულით ჩამოვწიოთ. 75-დან სამჯერ 25-ის გამოსვლით დამთავრდება გაყოფა. სამი კოჭი ავიღოთ ზემოდან მეოთხე მავთულზე. ამგვარად, განაყოფში მივიღებთ 2913.

ადვილი შესამჩნევია, რომ გაყოფა ასეთი მიმდევრობით შევასრულეთ:

$$7\,2825 : 25 = 72\,000 : 25 + 825 : 25 = 2000 + 22000 : 25 + 825 : 25 =$$
$$= 2000 + 22800 : 25 + 25 : 25 = 2000 + 900 + 300 : 25 +$$
$$+ 25 : 25 = 2000 + 900 + 320 : 25 + 5 : 25 = 2000 + 900 +$$
$$+ 10 + 70 : 25 + 5 : 25 = 2000 + 900 + 10 + 75 : 25 = 2000 +$$
$$+ 200 + 10 + 3 = 2913.$$

ცხადია, ის გამარტივებანი, რომლებსაც ვიყენებთ ზეპირი გამრავლების დროს, შეგვიძლია გამოვიყენოთ საანგარიშეზედაც:

$$a \cdot 9 = a(10 - 1) = 10a - a,$$

$$a \cdot 5 = \frac{a \cdot 10}{2},$$

$$a \cdot 25 = \frac{a \cdot 100}{4},$$

$$a : 5 = a : \frac{10}{2} = \frac{2a}{10},$$

$$a:25=a:\frac{100}{4}=\frac{4a}{100}\quad \text{და სხვ.}$$

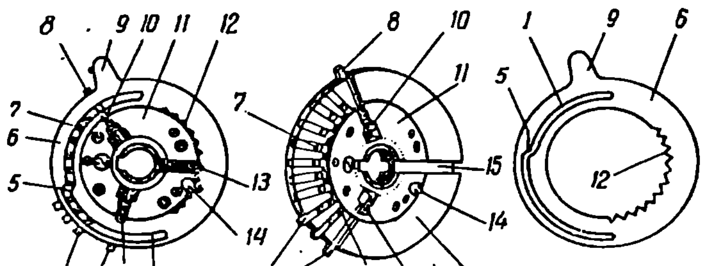
ძნელი არ არის იმის წარმოდგენა, თუ როგორი სიმარტივე აქვს აგებულებით რუსულ საანგარიშეს, განსაკუთრებით მარტივად სრულდება მასზე შეკრება და გამოკლება. სწორედ ამ მიზეზით აიხსნება მისი ფართო გამოყენება დღესაც გამოთვლებში.

§ 9. მექანიკური საანგარიშო მანქანები

არითმომეტრი

მექანიკური საანგარიშე მანქანები მასიურად გავრცელდა მთელ მსოფლიოში 1874 წლის შემდეგ, როდესაც ინჟინერმა ვ. ტ. ოდნერმა შექმნა საანგარიშო ბორბალი (ოდნერის ბორბალი) და ააგო ხელსაწყო, რომელსაც არითმომეტრი ეწოდება.

ოდნერის ბორბალი. ოდნერის ბორბალი ნაჩვენებია მე-5 ნახაზზე. იგი შედგება ორი დისკოსაგან, რომლებზედაც კბილათა რაოდენობა იცვლება. ძირითადი დისკოს (16) ცილინდრულ შვერილზე (11) წამოცმულია მეორე დისკო (6), რომელსაც აქვს ბერკეტი (9) და ორი ამონაჭერი—ფიგურული (1) და კბილოვანი (12). ძირითადი დისკო უძრავად წამოცმულია სათვლელი

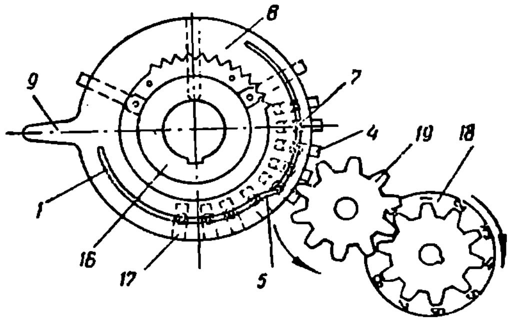


ნახ. 5. ოდნერის ბორბალი.

1—ფიგურული (ორრადიუსიანი) გამონაჭერი; 2 და 10—გადახრილი კბილაკების ზამბარები; 3 და 8—ათეულების გადამტანი გადახრილი კბილაკები; 5—კბილაკების გამომწევი; 4—მოძრავი კბილაკი; 6—საყენებელი დისკო; 7—მოძრავი კბილაკის შვერილი; 9—საყენებელი ბერკეტი; 11—ძირითადი დისკოს ცილინდრული გამონაშვერი; 12—კბილანა ამონაჭერი; 13—სამაგრი (ფიქსატორი); 14—ნახვრეტი ღეროსათვის; 15—ცილინდრული შვერილის კილო; 16—ძირითადი (სქელი) დისკო; 17—რადიალური კილოები.

მანქანის ძირითად მბრუნავ ღერძზე. ძირითად დისკოს რადიუსის გასწვრივ აქვს ღარები, რომლებშიაც შეუძლიათ გადაადგილება კბილაკებს (4). ამ კბილაკების გადაადგილება ხდება მასზე მოთავსებული სპეციალური შვერილების (7) საშუალებით, ეს შვერილები გამოდიან ფიგურულ ამონაჭერში. ამ ფიგურული ამონაჭერით (1) კბილაკებს შეუძლიათ მიიღონ

სხვადასხვა მდებარეობა: გამოვა სათანადო ღარიდან ან ჩაიმალება მასში. მეორე დისკოს (6) გადაადგილება წარმოებს ბერკეტის (მოძრავი ბერკეტი 9) საშუალებით. თუ მეორე დისკოს ვაბრუნებთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ კბილაკები (4) ჩაიმალებიან თავიანთ ღარებში, ხოლო, თუ დისკოს ვაბრუნებთ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ კბილაკები გარეთ გამოიწევიან. გარეთ გამოწეული კბილაკები ედება შუალედურ ბორბალს (14) (ნახ. 6), რომელიც თავის მხრივ აბრუნებს ბორბალს ციფრებით (18). ამ უკანასკნელზე მიღებული სათანადო ციფრი გამოჩნდება არითმომეტრის წინა ნაწილის სათანადო სარკმელში.



ნახ. 6. ოდნერის ბორბლის გადამცემი მექანიზმის სქემა.
18—ციფრებიანი ბორბალი; 19—შუალედური ბორბალი.

როდესაც ციფრებიან ბორბალზე მოხდება შემობრუნება, რომელიც იძლევა შემდეგი თანრიგის ერთეულს, მაშინ შემდეგ ბორბალზე ციფრის მისაღებად იხმარება სპეციალური შვერილები (3) და (8), რომელთაგან ერთი მოქმედებს გამოკლებისა და გაყოფის დროს, ხოლო მეორე მიმატებისა და გამრავლების დროს.

რადგანაც არითმომეტრში 9 ოდნერის ბორბალია, ამიტომ არითმომეტრზე შეიძლება არა უმეტეს ცხრანიშნა რიცხვი ავიღოთ.

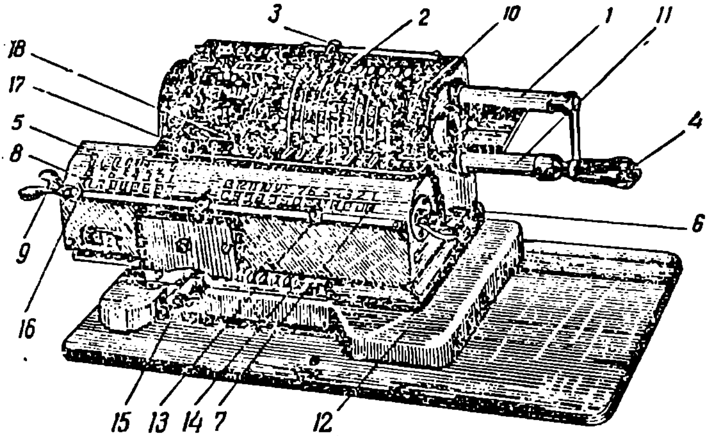
ოდნერის ბორბალი გამოიყენება თანამედროვე ბერკეტიან და კლავიშებიან არითმომეტრებში.

მეტად გავრცელებულია საანგარიშო მანქანა-არითმომეტრი „Феликс" (ნახ. 7).

არითმომეტრი „Феликс". იგი შედგება უძრავი კორპუსისაგან, რომელშიაც მბრუნავ ღერძზე წამოცმულია გადამცემი მექანიზმი. მბრუნავი ღერძი მოძრაობაში მოჰყავს სახელურს—ოპერაციული სახელური (4). მბრუნავ ღერძზე მოთავსებულია 9 ძირითადი და 4 დამატებითი ოდნერის ბორბალი.

მოცემული რიცხვების არითმომეტრზე აღება შეიძლება მოძრავი ბერკეტების (2) საშუალებით, რომლებიც სათანადო ჭრილში გადაადგილდებიან. ბერკეტის დაყენება შეიძლება ყოველ ციფრზე 0, 1, . . . ,9. ეს ციფრები დაწერილია არითმომეტრის წინა ნაწილზე (არითმომეტრის დოლი).

არითმომეტრის მეორე ძირითადი ნაწილია მოძრავი დგიმთამწე (5), რომლის მარჯვენა ნაწილზე მოთავსებულია 13-თანრიგიანი შედეგის მრიცხველი, მარცხენა ნაწილზე—კი 8-თანრიგიანი ბრუნვათა მრიცხველი. მარჯვენა ნაწილში ციფრთა ბორბლებზე აწერია თეთრი საღებავით 0, 1, ..., 9. ხოლო მარცხენა ნაწილში ბრუნვათა აღმრიცხველის ციფრთა ბორბლებზე ერთ მხარეს 0,1,...,9—თეთრი საღებავით, ხოლო მეორე მხარეს 1, 2,...,8 ციფრები წითელი საღებავით. ბერკეტით—(15) დგიმთამწე გადაადგილდება როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ. რიცხვთა გა-



ნახ. 7. არითმომეტრი „Феликс".

1—მთავარი მბრუნავი ლილვი; 2—საყენებელი ბერკეტი; 3—მოძრავი ათწილადის ნიშანი (,); 4—ოპერაციული სახელური; 5—მოძრავი დგიმთამწე; 6—შედეგის მრიცხველის გამქრობი; 7—შედეგის მრიცხველის სარკმელი; 8—ბრუნთა მრიცხველის სარკმელი; 9—ბრუნთა მრიცხველში ციფრების გამქრობი; 10—მოქმედების მიმართულების მაჩვენებელი ისრები; 11—ოპერატიული სახელურის საბრჯენი; 12—საყრდნობი; 13—შედეგის მრიცხველის მოძრავი ათწილადის ნიშანი; 14—კბილანა თამასა; 15—დგიმთამწის ბერკეტი; 16—ბრუნთა მრიცხველის მოძრავი ათწილადის ნიშანი; 17—დგიმთამწის მდგომარეობის განმსაზღვრელი ისარი; 18—ბერკეტების საწყის მდგომარეობაში მომყვანი კნოპი.

საქრობად მრიცხველებზე იხმარება სახელურები (9), რომლებიც უნდა ვაბრუნოთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით დაჩხაკუნებამდე. არითმომეტრის ზემო ნაწილზე აღებული რიცხვების გასაქრობად იხმარება კნოპი (18). კნოპი—(18) უნდა გავწიოთ მარცხნით მარცხენა ხელის ცერით და ვაბრუნოთ სახელური (4) ზემოთ და ჩვენსკენ, ვიდრე ბერკეტები (2) არ დაედება (4) კნოპზე დამაგრებულ სავარცხელს.

მოქმედებანი „Феликс"-ზე. არითმომეტრზე შეიძლება ოთხი არითმეტიკული მოქმედების შესრულება და, აგრეთვე, ფესვის ამოღება.

გამრავლება და გაყოფა დაიყვანება თანრიგით შეკრებაზე, ე. ი. მიმდევრობით შეკრებაზე, ხოლო გაყოფა მიმდევრობით გამოკლებაზე.

არითმომეტრზე მოქმედების დაწყებამდე საჭიროა დგიმთამწე იყოს მთლიანად გატანილი მარცხნივ, ოპერაციული სახელური იყოს ქვემო მდგომარეობაში, შვერილით სათანადო ჭრილში მოთავსებული. მრიცხველების გამქრობი სახელურები იყოს ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში. თუ გამქრობი სახელურები ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში არ არის, მაშინ დგიმთამწე არ გადაადგილდება და ოპერაციული სახელური არ მობრუნდება.

რიცხვთა დაყენება წარმოებს მოძრავი ბერკეტით (2), რომელიც გადაადგილდება ზემოდან ქვემოთ. მას შეუძლია ათი მდგომარეობის მიღება 0,1,...,9. ნუმერაცია იწყება მარჯვნიდან მარცხნივ. რიცხვები მოთავსებულია არითმომეტრის თავზე 1,2,...,9. აქვეა სპეციალური თამასა (ჩხირი), რომელზედაც მოთავსებულია ათწილადის ნიშანი—(,). მისი საშუალებით შეიძლება ათწილადის მთელი ნაწილის გამოყოფა წილადისაგან.

შეკრება. ვთქვათ, საჭიროა რიცხვები 62,98 და 47,013 შევკრიბოთ. ჯერ გავაერთმნიშვნელიანოთ ეს რიცხვები: 62,980; 47,013. არითმომეტრის თავზე ათწილადის ნიშანი მოვათავსოთ 3-სა და 4-ს შორის. ასევე, შედეგის მრიცხველის თავზე ათწილადის ნიშანი მოვათავსოთ 3-სა და 4-ს შორის. შემდეგ ავიღოთ მეხუთე მოძრავი ბერკეტი (2), ვამოძრაოთ ჩვენკენ და დავაყენოთ ციფრზე 6. მეოთხე მოძრავი ბერკეტი დავაყენოთ 2-ზე, მესამე—9-ზე, მეორე ბერკეტი 8-ზე. ამის შემდეგ ოპერატიული სახელური ვამოძრაოთ „პლუს" (შეკრების) მიმართულებით ერთჯერ (არითმომეტრს ზემო ნაწილზე აქვს შეკრების —(+) და გამრავლების —(×) ნიშნები). შედეგის მრიცხველზე მივიღებთ 629,8. შემდეგ არითმომეტრზე მიღებული რიცხვი (არითმომეტრის დოლზე) ჩავაქროთ ჩამქრობი კნოპის საშუალებით.

დავუბრუნოთ ოპერატიული სახელური საწყის მდგომარეობას და მიმდევრობით მეხუთე ბერკეტიდან დაწყებული ბერკეტები დავაყენოთ 4, 7, 0, 1, 3-ზე. ამის შემდეგ კვლავ ვაბრუნოთ ერთჯერ ოპერატიული სახელური შეკრების მიმართულებით. შედეგის მრიცხველზე მივიღებთ 676,813.

$$62,980+47,013=109,993.$$

ორჯერ ოპერატიული სახელურის ბრუნვით, ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ 2-ს.

გამოკლება. არითმომეტრი უნდა იყოს საწყის მდგომარეობაში. ვთქვათ, გვინდა გამოვიანგარიშოთ:

$$3128,69-943,2.$$

ამისათვის არითმომეტრის დოლზე ავიღოთ რიცხვი 3128,69 და ერთი „პლუს“ ბრუნვით გადავიტანოთ შედეგის მრიცხველზე. შემდეგ აღებული რიცხვი 3128.69 გავაქროთ დოლზე. კვლავ ავიღოთ მეორე რიცხვი 943,20 დოლზე და ოპერატიული სახელური დავაბრუნოთ „მინუს“ მიმართულებით ერთჯერ, ე. ი. სახელური ვაბრუნოთ უკან და ზემო მიმართულებით. შედეგის მრიცხველზე მივიღებთ 2185.49, ე. ი.

$$3128,69-943,2=2185,49.$$

თუ მაკლები აღმოჩნდება ნაკლები საკლებზე, მაშინ გამოკლება ისევე სრულდება, როგორც წინა შემთხვევაში: შედეგს ექნება უარყოფითი ნიშანი, ხოლო აბსოლუტური მნიშვნელობა მიიღება იმ ციფრებისაგან, რომლებიც უნდა დავუმატოთ შედეგის მრიცხველზე მიღებულ ციფრებს, რომ მივიღოთ ცხრიანები, გარდა უკანასკნელი ციფრისა; უკანასკნელი ციფრი უნდა იყოს ისეთი, რომ შედეგის მრიცხველზე მისი დამატებით მივიღოთ ათი.

მაგალითად,

$$1234-3672=\cdots 997562=-2438.$$

გამრავლება. გამრავლება სრულდება მიმდევრობითი შეკრების საშუალებით. ავიღოთ დოლზე 968. გადავიტანოთ ერთი „პლუს“ ბრუნვით ეს რიცხვი შედეგის მრიცხველზე. ბრუნთა მრიცხველზე გამოჩნდება 1, მეორე „პლუს“ ბრუნვა შედეგის მრიცხველზე მოგვცემს 1936, ხოლო ბრუნთა მრიცხველზე გამოჩნდება 2, ე. ი.

$$968\cdot 2=1936.$$

თუ სახელურს „პლუს“ ბრუნვით სამჯერ შემოვაბრუნებთ, მივიღებთ შედეგის მრიცხველზე 2904, ე. ი.

$$968\cdot 3=2904.$$

გადავაადგილოთ დგიმთამწე მარჯვნივ, ერთ დანაყოფზე და ვაბრუნოთ სახელური „პლუს“ ბრუნვით ოთხჯერ. ბრუნთა მრიცხველზე გვექნება 43, ხოლო შედეგის მრიცხველზე—41624, ე. ი.

$$968\cdot 43=41624.$$

ცხადია, თუ გვექნება წილადები, მაშინ ათწილადის ნიშნებს ყურადღებას არ მივაქცევთ, გადავამრავლებთ, როგორც მთელ რიცხვებს და შედეგის მრიცხველზე ათწილადის ნიშანს მოვათავსებთ მარჯვნიდან იმდენი ციფრის შემდეგ, რამდენი ათწილადი ნიშანიცაა სამრავლში და მამრავლში ერთად.

გაყოფა. მაგალითად, გამოვიანგარიშოთ:

$$425726:432$$

გავიტანოთ დგიმთამწე მარჯვნივ ისე, რომ ბრუნთა მრიცხველის თავზე მოთავსებული ისარი მოხვდეს 5-ის თავზე. დოლის მარცხენა ნა-

წილში ავიღოთ რიცხვი 425726 და გადავიტანოთ ეს რიცხვი შედეგის მრიცხველზე. ბრუნთა მრიცხველზე 5-ის ქვეშ გამოჩნება 1. გავაქროთ ეს ერთიანი. ასევე გავაქროთ დოლზე 425726. ავიღოთ დოლის მარცხენა ნაწილში 432. რადგანაც შედეგის მრიცხველის მარცხენა მხარეში მოთავსებულია 425, რომელიც არ იყოფა 432-ზე, ამიტომ დგიმთამწე გადავიტანოთ მარცხნივ ერთ დანაყოფზე; რის შედეგადაც 432-ის ქვეშ მოთავსდება 4257. ვაბრუნოთ ოპერატიული სახელური „მინუს“ ბრუნვით. თან დავაკვირდეთ: 432-ის ქვეშ არ გამოჩნდეს ისეთი რიცხვი, რომელიც არ გაიყოფა 432-ზე. თუ 432-ის ქვეშ გამოჩნდა ისეთი რიცხვი, რომელიც არ გაიყოფა 432-ზე, მაგრამ მაინც ვაბრუნეთ სახელური, მაშინ გავიგონებთ არითმომეტრის ზარის ხმას და 432-ის ქვეშ გამოჩნდება 9-ები. ამის შემდეგ სახელურს ვაბრუნებთ ერთჯერ „პლუს“ ბრუნვით. 432-ის ქვეშ მივიღებთ 369-ს, ხოლო ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ 9-ს. შემდეგ დგიმთამწე გადავაადგილოთ მარცხნივ, ერთ დანაყოფზე და კვლავ დავიწყოთ სახელურის „მინუს“ მიმართულებით მობრუნება. აქაც, ისევ დავაკვირდეთ 432-ის ქვეშ მოთავსებულ რიცხვს. სახელური ვაბრუნოთ მანამდე, ვიდრე არ გავიგონებთ ზარის ხმას. ზარის ხმის შემდეგ შევასრულოთ სახელურის ერთი „პლუს“ ბრუნვა, რის შედეგადაც 432-ს ქვეშ მივიღებთ 236, ხოლო ბრუნთა მრიცხველზე 8-ს. დგიმთამწე გადავაადგილოთ ერთ დანაყოფზე მარცხნივ და ა. შ.

ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ 985, ხოლო ნაშთში—შედეგის მრიცხველზე 206. ბრუნთა მრიცხველზე 985-ის შემდეგ მოვათავსოთ ათწილადის ნიშანი. დგიმთამწე გავიტანოთ ერთ დანაყოფზე მარცხნივ და კვლავ დავიწყოთ გაყოფა; ნაშთში მივიღებთ 332, განაყოფში —4-ს. განაყოფის შემდეგი ციფრისათვის ბრუნთა მრიცხველზე ადგილი აღარ არის. ამგვარად მივიღებთ;

$$425726:432=985{,}4 \text{ ნაშთით } 33.2.$$

ასევე მოვიქცევით, როდესაც ათწილადი გვინდა გავყოთ მთელზე ან ათწილადზე. საერთოდ, წინასწარ გავარკვიოთ განაყოფის მთელ ნაწილში ციფრთა რაოდენობა: განაყოფში იქნება იმდენი ციფრი, რასაც უდრის გასაყოფისა და გამყოფის ციფრთა სხვაობას მიმატებული ერთი, თუ გასაყოფის პირველი ციფრი იყოფა გამყოფის პირველ ციფრზე; თუ გასაყოფის პირველი ციფრი არ იყოფა გამყოფის პირველ ციფრზე, მაშინ დაგვჭირდება დგიმთამწის მარცხნივ გადაადგილება. ამ შემთხვევაში ციფრთა რაოდენობა განაყოფში ტოლია გასაყოფისა და გამყოფის ციფრთა სხვაობისა. ამის შემდეგ გაყოფა ისე შევასრულოთ, როგორც ზემოთ იყო ახსნილი. შემდეგში კი ათწილადის ნიშნით გამოვყოთ მარცხნიდან მარჯვნივ სათანადო რაოდენობის ციფრები.

კვადრატული ფესვის ამოღება. წინასწარ მოვიგონოთ, რომ კვადრატულ ამონაფესვში იმდენი ნიშნადი ციფრია, რამდენი მუხლიცაა ფესვქვეშ.

მაგალითად, $\sqrt{1'82'25}$-ში იქნება სამი ნიშნადი ციფრი. რიცხვი 18225 გადავიტანოთ შედეგის სკალაზე მარცხენა მხარეს, რისთვისაც დგიმთამწე ისე გადავიტანოთ მარჯვნივ, რომ ბრუნთა მრიცხველის თავზე მყოფი ისარი მოთავსდეს 5-იანის თავზე. ბრუნთა სკალაზე გამოჩენილი 1-იანი გავაქროთ. ასევე გავაქროთ დოლზე აღებული რიცხვი 18225. პირველი მუხლის თავზე მოვათავსოთ 1 და შევასრულოთ „მინუს" ბრუნვა. ბრუნთა სკალაზე გამოჩნდება 1. შემდეგ დგიმთამწე გადავაადგილოთ მარცხნივ ერთ დანაყოფზე და დოლზე ავიღოთ 21. შემოვაბრუნოთ სახელური „მინუს" ბრუნვით 1-ჯერ. შემდეგ დოლზე ავიღოთ 23 და კვლავ ვაბრუნოთ სახელური „მინუს" ბრუნვით 1-ჯერ. შემდეგ ავიღოთ დოლზე 25 და კვლავ ვაბრუნოთ სახელური „მინუს" ბრუნვით და ა. შ. ვიდრე ნაშთში არ მივიღებთ უფრო ნაკლებს, ვიდრე დოლზე აღებული რიცხვია. 25-სათვის ნაშთში მივიღებთ 13-ს.

შემდეგ გადავაადგილოთ დგიმთამწე ერთ დანაყოფზე მარცხნივ, ხოლო დოლზე ავიღოთ 261 (25+1, პირველ თანრიგში კი ისევ 1-ავიღოთ). ვაბრუნოთ უარყოფითი მიმართულებით სახელური ერთჯერ, შემდეგ ავიღოთ 263, კვლავ ვაბრუნოთ სახელური უარყოფითი მიმართულებით ერთჯერ, და ა. შ. სულ დაგვჭირდება 5-ჯერ შემობრუნება. ამგვარად, ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ 135.

$$\sqrt{18225}=135.$$

თუ რიცხვი ერთზე ნაკლებია, მაშინ ფესვი ისე გარდავქმნათ, რომ ფესვქვეშ მთელი რიცხვი გაჩნდეს. მაგალითად,

$$\sqrt{0,000625}=0,001\sqrt{625}=0,001\cdot25=0,025.$$

თუ რიცხვიდან ზუსტად არ ამოდის კვადრატული ფესვი, მაშინ დამთავრდება თუ არა რიცხვის მთელი ნაწილიდან კვადრატული ფესვის ამოღება, მაშინვე ბრუნთა მრიცხველში დავსვათ ათწილადი ნიშანი და სათანადო გამოკლება გავაგრძელოთ, ე. ი. გადავიტანოთ დგიმთამწე ერთ დანაყოფზე; დოლზე კი ავიღოთ რიცხვი, რომელიც მიიღება წინ მიღებული რიცხვიდან ერთის მიმატებით და მივუწეროთ კიდევ მარჯვნიდან ერთი. ეს რიცხვი გამოვაკლოთ შედეგის მრიცხველზე მიღებულ რიცხვს და ა. შ.

არითმომეტრის შემოწმება. არითმომეტრის შემოწმების მრავალი ხერხი არსებობს. აქედან განვიხილოთ ერთი ხერხი.

დოლზე ავიღოთ რიცხვი 123 456 789. გავამრავლოთ ეს რიცხვი 9-ზე, სახელური ვაბრუნოთ 9-ჯერ, უნდა მივიღოთ 1 111 111 101. გავამრავლოთ კიდევ 9-ზე აღებული რიცხვი, მივიღებთ 2 222 222 202 და ა. შ. ამგვარად, არითმომეტრის შემოწმებისათვის გვექნება ც ხ რ ი ლ ი:

დოლზე	ბრუნთა მრიცხველის პირველ თანრიგზე	სახელურის ბრუნთა რიცხვი	შედეგის მრიცხველზე
123456789	9	9	1 111 111 101
123456789	0	18	2 222 222 202
123456789	9	27	3 333 333 303
. . . .	......	.....	. . . .
123456789	0	72	8 888 888 808
123456789	9	81	9 999 999 909

არითმომეტრის შემოწმების მეორე ხერხი მდგომარეობს შემდეგში: დოლზე აღებული რიცხვი 123456789 გავამრავლოთ 9-ზე, შემდეგ 99 და ა. შ. უნდა მივიღოთ შემდეგი ც ხ რ ი ლ ი:

დოლზე	ბრუნთა მრიცხველზე	შედეგის მრიცხველზე
12345679	9	111 111 111
12345679	99	1 222 222 221
12345679	999	12 333 333 321
12345679	9999	123 444 444 321
12345679	99999	1 234 555 554 321
12345679	999999	2 345 666 654 321
12345679	9999999	3 456 777 654 321
12345679	99999999	4 567 887 654 321

აღნიშნული ხერხებით არითმომეტრის შემოწმებისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ არც ერთი ხერხთაგანი არ იძლევა იმის სრულ იმედს, რომ არითმომეტრი წესიერ მდგომარეობაშია. ამაში მდგომარეობს არითმომეტრის დიდი ნაკლი. ეს იმის გამო, რომ, თუ ერთი რომელიმე მოძრავი კბილანა არ ედება რომელიმე შუალედური ბორბლის კბილანას, არამედ გაძვრება ერთ კბილანაზე, რომელიც შეიძლება, არ მონაწილეობდეს სათანადო გამოთვლაში, მაშინ არ შეგვიძლია შევამოწმოთ და აღმოვაჩინოთ ამ ადგილას არითმომეტრის უწესრიგობა. არითმომეტრის შემოწმებისათვის შედარებით უფრო სანდოა მეორე ხერხი, რადგანაც თითქმის ყველა მრიცხველის თანრიგის ციფრი მონაწილეობს შემოწმებაში.

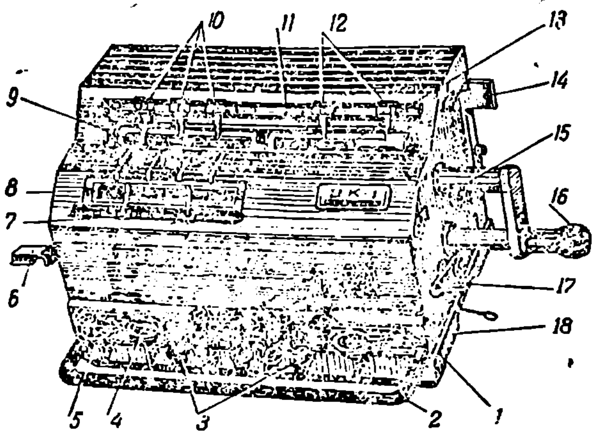
ათკლავიშიანი საანგარიშო მანქანა BK—1

საერთო აღწერილობა. როგორც საბჭოთა კავშირში, ისე უცხოეთში გავრცელებულია არითმომეტრები, რომლებიც წარმოადგენენ ოდნერის არითმომეტრის გაუმჯობესებას; ეს მანქანები განკუთვნილია ოთხი არითმეტიკული მოქმედების შესასრულებლად. ასეთი მანქანის ტიპს ეკუთვნის მანქანა BK—1.

არითმომეტრ „Феликс"-ისაგან განსხვავებით მოძრავი ბერკეტების ნაცვლად მანქანა BK—1-ს აქვს ათი კლავიში (ნახ. 8), რომლებიც ორ

რიგადაა განლაგებული. პირველ რიგში: 1, 3, 0, 7, 8, ხოლო მეორე რიგში: 2, 4, 5, 7, 9-ის კლავიშებია მოთავსებული.

რიცხვების დაყენება ხდება კლავიშებზე (3) თითის დაჭერით.



ნახ. 8. ათკლავიშიანი საანგარიშო მანქანა BK—1.

1—საყრდნობი; 2—დამცველი; 3—საყენებელი კლავიატურა; 4—დაყენებული რიცხვის მარჯვნივ თანრიგით გადამტანი კლავიში; 5—დაყენებული რიცხვის მარცხნივ თანრიგით გადამტანი კლავიში; 6—შედეგის გამქრობი ბერკეტი. 7,10 და 12—ათწილადის მოძრავი ნიშნები (მძიმეები); 8—შემმოწმებელი სარკმელი; 9—შედეგის მრიცხველის სარკმელი; 11—თამასა, რომელზედაც შეუძლიათ მოძრავ მძიმეებს გადაადგილება. 13—ბრუნთა მრიცხველის სარკმელი; 14—ბერკეტი, რომლის საშუალებითაც ხდება ბრუნთა მრიცხველზე შედეგის გაქრობა; 15—ოპერატიული სახელურის საბრჯენი; 16—ოპერატიული სახელური; 17—საყენებელ დოლზე აღებული რიცხვის გამქრობი ბერკეტი; 18—კლავიატურაზე აღებული რიცხვის სწრაფად მარცხენა მხარეში გადატანის კლავიში.

დოლის გადაადგილება თანრიგით ხდება.—მარცხნივ წითელი კლავიშით (5), ხოლო მარჯვნივ წითელი კლავიში (4). (4) და (5)-ის საშუალებით სათანადოდ ხდება წითელი მძიმის გადაადგილება ბრუნვათა (13) და შედეგის (9) მრიცხველებზე.

დოლის მარცხენა უკიდურეს მდგომარეობაში სწრაფად გადასატანად გვეხმარება წითელი კლავიში (18). როგორც „Феликс"-ზე, ისე აქაც შეგვიძლია დოლზე ცხრანიშნა რიცხვი ავიღოთ. შედეგის მრიცხველი 13-თანრიგიანია, ხოლო ბრუნთა მრიცხველი რვათანრიგიანი.

რიცხვის გაქრობა დოლზე და დოლის საწყის, მარჯვენა უკიდურეს მდგომარეობაში, დაბრუნება ხდება (17) ბერკეტის საშუალებით, რომელზედაც უნდა დავაჭიროთ მარჯვენა ხელის ცერი. ამ დროს მარჯვენა ხელის დანარჩენი თითები მოთავსებულია საბრჯენზე. შედეგისა და ბრუნთა მრიცხველებზე რიცხვების გაქრობა ხდება, სათანადოდ, (6) და (14) ბერკეტებზე დაჭირებით. რიცხვის დოლზე აღების დროს სათანადო

რიცხვი გამოჩნდება მრიცხველზე (8), რომელსაც საკონტროლო მრიცხველი ეწოდება. ამ უკანასკნელზედაც მოთავსებულია ათწილადის მოძრავი ნიშანი (,).

როგორც შედეგის, ისე ბრუნთა მრიცხველზე ხდება ათეულის გადაცემა, რის გამოც, როცა სახელურს (16) შემოვაბრუნებთ 10-ჯერ, ბრუნთა მრიცხველზე გამოჩნდება 10. როგორც ვიცით, ასეთი გადაცემა „Феликс"-ზე არ ხდება.

მოქმედებანი. ვიდრე რაიმე გამოთვლას დავიწყებდეთ, საჭიროა მანქანაზე ყველა მექანიზმი იყოს საწყის მდგომარეობაში: სახელური (16) უნდა იყოს ვერტიკალურ მდგომარეობაში, სათანადო შვერილით ჭრილში. ყველა მრიცხველზე უნდა იყოს ნული, დოლი უნდა იყოს მარჯვენა უკიდურეს მდგომარეობაში, უკანასკნელისათვის საკმარისია (17) ბერკეტისძირის ჩამოწევა.

უნდა გვახსოვდეს, რომ ის ნაწილები, რომლებიც BK—1-ში არ მონაწილეობს მუშაობის დროს, ავტომატურად იკეტება.

რიცხვის აღება კლავიატურაზე ხდება როგორც ცქერით, ისე ბრმად. ამისათვის საჭიროა სათანადო ვარჯიში. მარცხენა ხელის მაჩვენებელი თითი განსაზღვრულია 6, 7, 8 და 9-ისათვის, შუა თითი—4, 5 და 0-ისათვის, არათითი—2 და 3-ისათვის, ნეკი—1-ისათვის, ცერი (4), (5) და (6) ბერკეტისათვის. (6) ბერკეტზე ცერის დაჭირების დროს დანარჩენი თითები ეყრდნობა დამცველ კავს (2).

სახელური (6) ყოველთვის უნდა ვაბრუნოთ მთლიანად.

შ ე კ რ ე ბ ა. ვთქვათ, უნდა მოვძებნოთ

$$58,674+325,7+68,35.$$

შესაკრებები მივიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე:

$$58,674+325,700+68,350.$$

შედეგისა და შემოწმების მრიცხველებზე მოძრავი მძიმეები დავაყენოთ მესამე ციფრზე: მძიმის ნახვრეტში გამოჩნდება ციფრი 3.

კლავიატურაზე თითის დაჭირებით ავიღოთ რიცხვი 58,674. კლავიშებზე თითის დაჭირება იმ რიგით მოვახდინოთ, როგორც ჩვეულებრივად რიცხვს ვწერთ. შემოვაბრუნოთ სახელური (16), ერთი „პლუს" ბრუნით, რითაც ეს რიცხვი გადავა შედეგის სკალაზე. ამ დროს გაქრება ჩაწერილი რიცხვი საკონტროლო მრიცხველზე. (17) ბერკეტით გავაქროთ აღებული რიცხვი დოლზე.

კლავიატურაზე ავიღოთ მეორე შესაკრები 325,700. სახელურის (16) ერთხელ „პლუს" ბრუნით, შედეგის მრიცხველზე გამოჩნდება რიცხვი 384,374;

$$58,674+325,700=384,374.$$

გავაქროთ დოლზე აღებული რიცხვი 325,700 ბერკეტი (17)-ით. შემ-

დეგ ავიღოთ რიცხვი 68,350. ეს რიცხვიც სახელურის ერთი „პლუს“ ბრუნით გადავიტანოთ შედეგის მრიცხველზე; მივიღებთ: 452,724;

$$384,374+68,350=472,724.$$

რიცხვი 472,724 წარმოადგენს საძიებელ რიცხვს:

$$58,674+325,7+68,35=472,724.$$

გამოკლება. გამოკლებაც ისეთივე მოქმედებით სრულდება, როგორც შეკრება, მაგრამ საკლების დაყენების შემდეგ, შედეგის მრიცხველზე მაკლები უნდა გადავიტანოთ „მინუს“ ბრუნით.

გამრავლება. ვთქვათ, 537,65 უნდა გავამრავლოთ 27,84-ზე. ათწილადის ნიშნებს ყურადღება არ მივაქციოთ. კლავიატურაზე ავიღოთ 537,65. სახელურის ერთი „პლუს“ ბრუნით ეს რიცხვი გადაიტანება შედეგის სკალაზე, ხოლო ბრუნთა მრიცხველზე გამოჩნდება 1. სახელურის 4-ჯერ შემობრუნებით ბრუნთა მრიცხველზე გამოჩნდება 4, ხოლო შედეგის მრიცხველზე მიიღება: 215060, ამის შემდეგ თითი დავაჭიროთ (5) კლავიშს, რითაც დოლი გადაადგილდება სათანადოდ ერთ თანრიგზე. ვაბრუნოთ სახელური 8-ჯერ, მაშინ ბრუნთა მრიცხველზე მიიღება 84, ხოლო შედეგის მრიცხველზე მიიღება 4516260;

$$53765\cdot84=4516260.$$

კვლავ დავაჭიროთ თითი მარცხენა სვლის კლავიშს (5) და სახელური 7-ჯერ მოვაბრუნოთ. შემდეგ კიდევ დავაჭიროთ თითი (5) კლავიშს და სახელური მოვაბრუნოთ 2-ჯერ. საბოლოოდ ბრუნთა სკალაზე მიიღება 2784, ხოლო შედეგის სკალაზე 149681760, ე. ი.

$$537,65\cdot27,84=14968,1760.$$

ამგვარად, ბრუნთა მრიცხველზე გვექნება მამრავლი, კონტროლის მრიცხველზე—სამრავლი, ხოლო შედეგის მრიცხველზე—ნამრავლი.

გაყოფა. მაგალითად, 559,24 : 68,2. გასაყოფი და გამყოფი მივიყვანოთ მთელ რიცხვებზე: 55924 : 6820. კლავიატურაზე ავიღოთ გასაყოფი 55924. დოლი გავიტანოთ მარცხენა მდებარეობაში კლავიშ (18)-ზე თითის დაჭირებით. სახელურის „პლუს“ ბრუნით 55924 გადავიტანოთ შედეგის სკალაზე.

გადავიტანოთ დოლი მარჯვენა მდგომარეობაში (17) ბერკეტის საშუალებით. კლავიატურაზე ავიღოთ რიცხვი 6820 და გადავიტანოთ დოლი მარცხენა მდგომარეობაში (18) კლავიშის საშუალებით. (14) ბერკეტით გავაქროთ მიღებული რიცხვი ბრუნთა მრიცხველზე. ამ მანქანაზე გაყოფა ისე წარმოებს, როგორც „Феликс“-ზე მიმდევრობითი გამოკლების საშუალებით. სახელური (16) ვაბრუნოთ „მინუს“ ბრუნით, მანამ, სანამ არ გავიგონებთ ზარის ხმას, ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთი „მინუს“ ბრუნით მეტი გავაკეთეთ. სახელური ვაბრუნოთ ერთი „პლუს“ ბრუნით. ამის

შემდეგ მარჯვენა ხელის კლავიშს დავაჭიროთ ერთხელ თითი და კვლავ დავიწყოთ სახელურის „მინუს“ ბრუნება. აქაც ბრუნება შევასრულოთ მანამ, სანამ არ გავიგონებთ ზარის ხმას და ა. შ.

საბოლოოდ მივიღებთ ბრუნთა მრიცხველზე განაყოფს, შედეგის მრიცხველზე კი ნაშთს, ხოლო შემმოწმებელ მრიცხველზე გვექნება გამყოფი.

განვსაზღვროთ ციფრთა რაოდენობა განაყოფში (იხ. გვ. 66). ჩვენ შემთხვევაში განაყოფის მთელ ნაწილში იქნება 1 ციფრი. ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ 82, ე. ი.

$$559{,}24 : 68{,}2 = 8{,}2.$$

შემოწმება. BK—1-ის შემოწმება ისევე წარმოებს, როგორც არითმომეტრ „Феликс“-ის.

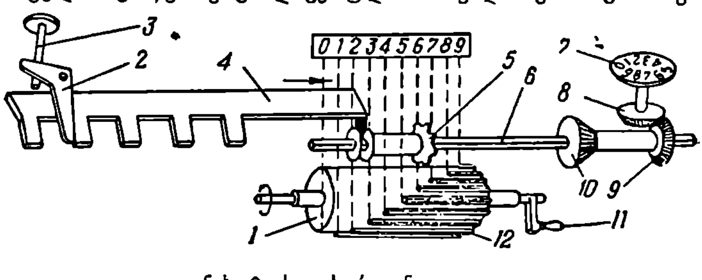
ადვილი შესამჩნევია, რომ არითმომეტრ BK—1-ზე უფრო სწრაფად წარმოებს გამოთვლები, ვიდრე „Феликс“-ზე. განსაკუთრებით სწრაფად სრულდება გამოთვლები, თუ მარცხენა ხელით ვმუშაობთ კლავიშებზე, ხოლო მარჯვენა ხელით ჩავწერთ შუალედური გამოთვლების შედეგებს.

§ 10. ნახევრად ავტომატური და ავტომატური გამომთვლელი მანქანები

საფეხუროვანი ლილვი

ბევრი თანამედროვე ნახევრად ავტომატური და ავტომატური საანგარიშო მანქანა აგებულია საფეხუროვანი ლილვის მუშაობის საფუძველზე (ნახ. 9).

საფეხუროვანი ლილვი შედგება ცილინდრული ნაწილისაგან (1), რომლის მსახველის გასწვრივ განლაგებულია სხვადასხვა სიგანის კბილანები



ნახ. 9. საფეხუროვანი ლილვი.

1—ცილინდრული ლილვი, 2—მუხლანა ბერკეტი, 3—კლავიში, 4—სავარცხელა, 5—ათკბილა ბორბალი, 6—კვადრატული კვეთის ლილვი, 7—მრიცხველის ციფერბლატი, 8—9—კონუსური კბილანა, 10—ბორბალი, 11—ლილვის საბრუნებელი სახელური, 12—სხვადასხვა სიგანის ცხრა კბილაკი.

(12). ცილინდრული ღერძის პარალელურად მოთავსებულია მეორე ღერძი (6), რომელზედაც მოთავსებულია კბილანა ბორბალი (5). იმავე (6) ღერძზე მოთავსებულია გადამცემი ბორბალი (9), რომელიც ამოძრავებს მისდამი

მართობულ სიბრტყეში მოთავსებულ ბორბალს (8). ამ უკანასკნელზე მოთავსებულია მრიცხველის ციფერბლატი (7).

კლავიში (3) ისეთნაირადაა მოთავსებული, რომ მასზე თითის დაჭირება იწვევს ბერკეტის (2) მობრუნებას, რომელიც თავის მხრივ გადააადგილებს სავარცხელს (4)-ს. ეს კი გადააადგილებს კბილანა ბორბალს (5), რომელიც სხვადასხვა მდგომარეობაში გადაკვეთს სხვადასხვა რაოდენობის კბილანებს (12)-ს. იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ კბილს (12)-ს შეეხება (5) კბილანა ბორბალი ცილინდრის (1) ერთი შემობრუნების დროს, იმდენად შემობრუნდება კბილანა ბორბალი (5) და, ცხადია, ციფერბლატიც სათანადოდ შემობრუნდება. მოხდება შემობრუნებათა აღრიცხვა.

ბორბალი (10)-ის მდგომარეობის მიხედვით კვადრატულ ღერძზე (6) ციფერბლატს (7) შეუძლია სხვადასხვა მიმართულებით ბრუნვა, როდესაც ცილინდრული ლილვი (1) ბრუნავს ერთი მიმართულებით. მაშასადამე, ბორბალი (10)-ის გადაადგილებით ღერძზე (6) მექანიზმი ერთი მოქმედებიდან, მაგალითად, შეკრებიდან, შეგვიძლია გადავიყვანოთ მეორე მოქმედებაზე, მაგალითად, გამოკლებაზე და პირიქით.

ათკლავიშიანი მანქანა BK—2

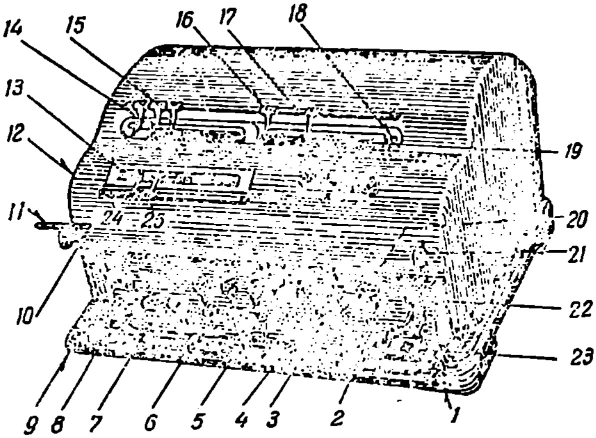
ზოგადი აღწერილობა. ათკლავიშიანი მანქანა BK—2 ითვლება ნახევრად ავტომატურ სათვლელ მანქანად და განსაზღვრულია ოთხი არითმეტიკული მოქმედების შესასრულებლად (ნახ. 10). მასზე მხოლოდ გაყოფა სრულდება ავტომატურად.

ამ მანქანას აქვს 10 ციფრი—კლავიში (5). ზედა ნაწილში მოთავსებულია ცამეტთანრიგიანი შედეგის მრიცხველი, მარჯვნივ რვათანრიგიანი ბრუნთა მრიცხველი (19). კლავიშების საშუალებით შეიძლება რიცხვის დაყენება. რიცხვის აღება კლავიშებზე ისე ხდება როგორც BK—1-ზე. BK—2-ზე მოქმედება წარმოებს მარცხენა ხელით. რაც მთლიანად ათავისუფლებს მარჯვენა ხელს. მარჯვენა ხელით მხოლოდ შედეგების ჩაწერა წარმოებს. ეს უკანასკნელი კი მეტად აჩქარებს საბოლოო შედეგების მიღებას.

BK—2-ზე ციფრთა კლავიშებთან ერთად მოთავსებულია სხვა კლავიშები. მაგალითად, კლავიში (21) აქრობს საკონტროლო მრიცხველს, კლავიში (2) იხმარება გამოკლებისა და გაყოფისათვის, კლავიში (4) იხმარება დოლის მარცხენა ნაწილში გადასატანად, კლავიში (20) იხმარება თანრიგით დოლის გადასატანად მარცხნით, კლავიში (3) იხმარება მიმატებისათვის, კლავიში (7) იხმარება დოლის მარჯვენა მხარეს—თანრიგით გადასატანად. კლავიში (23) იხმარება გამრავლებისათვის.

BK—2 მარცხენა მხარეს მოთავსებულია ბერკეტები (10) და (11); (10) იხმარება ბრუნვათა რიცხვის გასაქრობად, ხოლო (11)—შედეგის

მრიცხველზე მიღებული რიცხვის გასაქრობად. მანქანის წინა მხარეს მოთავსებულია მთავარი ბერკეტი (8). ამ ბერკეტს შეუძლია სამი მდგომარეობის მიღება. თითოეული მდგომარეობა შეესაბამება, სათანადოდ, გამრავლებას, შეკრებას, გამოკლებას ან გაყოფას. თუ ბერკეტი (8) იმყო-



ნახ. 10. არითმომეტრი BK—2.

1—საყრდნობი; 2—გამოკლებისა და გაყოფის კლავიში; 3—შეკრების კლავიში; 4—დოლზე დაყენებული რიცხვის მარცხენა მხარეში სწრაფად გადატანის კლავიში; 5—საყენებელი კლავიატურა; 6—გამრავლების მოძრაობის გადამთვლელი; 7—დოლზე დაყენებული რიცხვის მარჯვნივ თანრიგით გადამტანი კლავიში; 8—მართვის მთავარი ბერკეტი; 9—დამცველი კავი: 10—ბრუნთა რიცხვის გამქრობი; 11—შედეგის რიცხვის გამქრობი; 12—ბრუნთა მრიცხველის მუშაობის მიმართულების შემცვლელი კნოპი; 13—აღებული რიცხვის შემმოწმებელი სარკმელი; 14—შედეგის მრიცხველის სარკმელი; 15, 16 და 25—მოძრავი ათწილადის ნიშნები (,); 17 და 24—ათწილადის ნიშნების თამასები; 19—ბრუნთა მრიცხველის სარკმელი; 18—სასიგნალო; 20—დოლზე აღებული რიცხვის მარცხენა მხარეში თანრიგით გადატანის კლავიში; 21—დოლზე დაყენებული რიცხვის გამქრობი კლავიში; 22—მაკლები რიცხვის ავტომატურად გამქრობი კლავიში; 23—გამრავლებას კლავიში.

ფება მარცხენა მდგომარეობაში, მაშინ შეგვიძლია შევასრულოთ გამრავლება. ბერკეტის საშუალო მდგომარეობაში—შეკრება, მარჯვენა მდგომარეობაში—გამოკლება, ხოლო, თუ გადამრთველი (6) ამასთანავე იმყოფება მარჯვენა უკიდურეს მდგომარეობაში, მაშინ შეიძლება გაყოფის წარმოება.

ბერკეტი (22) იხმარება მაკლების ავტომატურად გასაქრობად. (18) ნახვრეტი მიუთითებს ბორბლების ბრუნვის მიმართულებას. შავი ნიშნის გამოჩენა გვიჩვენებს, რომ ბრუნთა ბორბლები ბრუნავენ შედეგის ბორბლების მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოჩნდება წითელი ნიშანი.

მანქანის ზემო ნაწილში მოთავსებულია მრიცხველები: (13)—შემმოწმებელი, (14)—შედეგის, (19)—ბრუნთა რიცხვის.

BK—2 მუშაობს 100 ან 220 ვოლტი ძაბვის ცვლადი დენის ძრავით, აკეთებს 350-მდე ბრუნს წუთში.

გამოთვლები. ვიდრე გამოთვლებს შევუდგებოდეთ, საჭიროა მანქანა ჩავრთოთ განათების ქსელში და მექანიზმი მივიყვანოთ საწყის მდგომარეობაში. ამისათვის შედეგის მრიცხველზე (14) და ბრუნთა მრიცხველზე უნდა იყოს მხოლოდ ნულები, რაც შესრულდება (10) და (11) ბერკეტებზე ხელის დაჭირებით. დოლს უნდა ეჭიროს უკიდურესი მარჯვენა მდგომარეობა, რისთვისაც საკმარისია დავაჭიროთ კლავიშს (21)-ს. სასიგნალო ნახვრეტში (18)—უნდა იყოს შავი ფერი. ავტომატურად გამქრობი ბერკეტი (22) უნდა იყოს ზედა მდგომარეობაში, მთავარი ბერკეტი (1) უნდა იყოს შუა მდგომარეობაში.

შეკრება და გამოკლება. ბერკეტი (8) უნდა იყოს შუა მდგომარეობაში. ავიღოთ რიცხვები 59,12 და 6,578. ორივე რიცხვი მივიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე: 59,120; 6,578. ათწილადის ნიშნები (15) და (25) მოვათავსოთ მესამე თანრიგზე. ნახვრეტებში გამოჩნდება 3-ანები. კლავიშებზე ავიღოთ რიცხვი 59,120 ისეთი მიმდევრობით, როგორც იწერება. საკონტროლო მრიცხველზე გამოჩნდება 59,120. ამის შემდეგ დავაჭიროთ თითი შეკრების კლავიშს (3) და რიცხვი 59,120 გადაიტანება შედეგის მრიცხველზე. (21) კლავიშზე თითის დაჭირებით დოლზე გაქრება აღებული რიცხვი და დოლი მივა საწყის მდგომარეობაში. შემდეგ კლავიშებით ავიღოთ მეორე რიცხვი 6,578, რომლის სისწორე შემოწმდება საკონტროლო მრიცხველით, დავაჭიროთ თითი (3) კლავიშს. შედეგის მრიცხველზე მივიღებთ 65,698:

$$59,120+6,573=65,698.$$

თუ გვინდა 59,120-ს გამოვაკლოთ 6,578, მაშინ გადართვის კნოპი (12) ჩამოვწიოთ ძირს, რის შედეგადაც სასიგნალო ხვრელში (18) გამოჩნდება წითელი შუქი. დავაჭიროთ თითი გამოკლების კლავიშს (2), ამის შედეგად შედეგის მრიცხველზე მივიღებთ 52,547.

$$59,120-6,573=52,547.$$

ბრუნთა მრიცხველზე (19) მივიღებთ 2-ს.

გამრავლება. გამრავლება სრულდება შეკრების პრინციპით. ბერკეტი (8) უნდა იყოს მარცხნივ გაწეული, მაგალითად, 52,74-ზე გვინდა გავამრავლოთ 89,63. ჯერ ავიღოთ კლავიშებით რიცხვი 89,63, რაც სათანადოდ გამოჩნდება საკონტროლო მრიცხველზე. დავაჭიროთ გამრავლების კლავიშს (23) და გვეჭიროს მანამ, სანამ ბრუნთა მრიცხველზე არ გამოჩნდება ციფრი 4. როგორც კი ხელს ავუშვებთ გამრავლების კლავიშს, მაშინვე გამრავლება შეწყდება და დოლი ავტომატურად გადაიწევს ერთი თანრიგით მარცხნივ. შემდეგ კვლავ დავაჭიროთ გამრავლების კლავიშს (23) ხელი და გვეჭიროს მანამ, სანამ ბრუნთა მრიცხველზე მეორე ფანჯარაში

არ გამოჩნდება 7, ე. ი. ბრუნთა მრიცხველზე გამოჩნდება 74, მიმდევრობით გავიმეორებთ 2 და 5-ისათვის აღნიშნულ მოქმედებას ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ 5274, ხოლო შედეგის სკალაზე 47 270 862:

$$89{,}63 \cdot 52{,}74 - 4727{,}0862.$$

ამგვარად, სამრავლი გვექნება დოლზე (შემმოწმებელ მრიცხველზე) მამრავლი—ბრუნთა მრიცხველზე, ნამრავლი კი შედეგის მრიცხველზე. თუ გამრავლების დროს გამრავლების კლავიში ზედმეტ დროს გვეჭირა და, მაგალითად, ნაცვლად 4-ისა ბრუნთა მრიცხველზე პირველ ფანჯარაში მივიღეთ 6, მაშინ (7) კლავიშით დოლს გადავაადგილებთ მარჯვნივ და დავაჭერთ (2) კლავიშს, (2) კლავიში გვეჭირება მანამ, სანამ 6-ის ადგილას ბრუნთა მრიცხველზე არ გამოჩნდება 4. თუ გამრავლების კლავიში ცოტა ხანს გვექნება დაჭირებული, მაშინ (20) კლავიშით დოლს გადავაადგილებთ ერთი თანრიგით მარცხნივ და კვლავ დავაჭერთ გამრავლების კლავიშს (23), მანამ, სანამ, პირველ ფანჯარაში ბრუნთა მრიცხველზე არ გამოჩნდება 4.

გაყოფა: ვთქვათ, გვინდა გამოვიანგარიშოთ:

$$725:25 - 304:16.$$

მივიყვანოთ მანქანა საწყის მდგომარეობაში, სადაც ბერკეტი (8) მოვათავსოთ მარჯვენა მდგომარეობაში, კლავიატურაზე ავიღოთ რიცხვი 725. დავაჭიროთ თითი (4) კლავიშს, რომლითაც დოლი გადავა მარცხენა უკიდურეს მდგომარეობაში. გადავიტანოთ რიცხვი—725 შედეგის მრიცხველზე (3) კლავიშით. შემდეგ კლავიატურაზე ავიღოთ გამყოფი 25 და გადავიტანოთ დოლი მარცხენა მდგომარეობაში. დავაჭიროთ თითი გაყოფის კლავიშს (2), რის შემდეგაც შესრულდება ავტომატურად გაყოფა. ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ განაყოფს 29.

გავაქროთ დოლზე გამყოფი 25 კლავიშით (21) და ამით დოლი მივა საწყის მდგომარეობაში. ავიღოთ კლავიატურაზე რიცხვი 304 და დოლი გადავიტანოთ მარცხენა უკიდურეს მდგომარეობაში (4) კლავიშით. გადავიტანოთ რიცხვი 304 შედეგის მრიცხველზე შეკრების კლავიშით (3) და გავაქროთ დოლზე აღებული რიცხვი. ავიღოთ კლავიატურაზე 16, კნოპი (12) ჩამოვწიოთ დაბლა და გამოვწიოთ ჩვენკენ. შემდეგ დავაჭიროთ თითი კლავიშს (2), რის შედეგადაც მოხდება ავტომატური გაყოფა და გამოკლება. ბრუნთა მრიცხველზე მივიღებთ 10-ს.

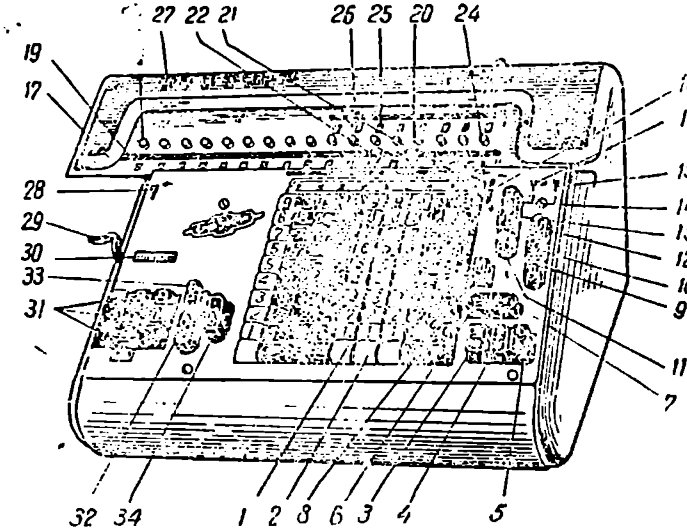
$$725:25 - 304:16 = 10.$$

ВК—2-ის შემოწმება ისევე ხდება, როგორც „Феликс"-ისა.

ავტომატური მანქანა ВММ—2

საერთო აღწერილობა. საანგარიშო მრავალკლავიშიანი ავტომატური მანქანა ВММ—2 (ნახ. 11) ეკუთვნის იმ ტიპის მანქანებს, რომლებიც მუშაობენ საფეხურებიანი ლილვის საფუძველზე. მანქანის დანიშნულება

საანგარიშო სამუშაოს მექანიზაცია. ავტომატი BMM—2 მუშაობს ელექტროძრავით. ძრავა განსაზღვრულია როგორც მუდმივი, ისე ცვლადი დენისათვის ძაბვით 110, 120, 130, 160, 200, 220 ვოლტი, რისთვისაც მას აქვს სათანადო გადამრთველი.



ნახ. 11. მრავალკლავიშიანი საანგარიშო მანქანა BMM—2.

ციფრითი კლავიატურის კლავიშები: 1—მრავალკლავიშიანი კლავიატურის ციფრითი კლავიშები, 2—ციფრითი კლავიატურის თანრიგით გამქრობი კლავიში, 31—გამრავლების მექანიზმის კლავიატურის კლავიშები. სამართავი კლავიშები: 3—გამოკლების კლავიში, 4—შეკრების კლავიში, 5—ავტომატური გაყოფის კლავიში, 6—დგამთამწის მარცხნივ გატანის კლავიში, 7—დგამთამწის მარჯვნივ გატანის კლავიში, 8—მრავალკლავიშიანი კლავიატურის კლავიშების ერთდროული გაქრობის კლავიში, 9—შედეგის რიცხვის გაქრობის კლავიში, 10—ბრუნთა რიცხვის გაქრობის კლავიში, 11—ავტომატური გაყოფის შეწყვეტის კლავიში, 12—შედეგის მრიცხველიდან რიცხვის კლავიატურაზე გადატანის კლავიში, 13—გამეორების კლავიში, 14—გამეორების მექანიზმის გამომრთველი კლავიში, 32—გამრავლების კლავიში, 33—ნამრავლისა და გამოკლების კლავიში, 34—გაყოფის მომზადების კლავიში. სამართავი ბერკეტები: 15—ბრუნთა რიცხვის ავტომატური გაქრობის ბერკეტი, 16—შედეგის რიცხვის გამქრობი, 18—ბრუნთა მრიცხველის გადართვის ბერკეტი, 27—განაყოფში ნიშნად ციფრთა შემოსაზღვრის კლავიშური ტაბულატორი, 28—გამრავლების დროს დგამთამწის შებრუნებული სვლის გამომრთველი ბერკეტი; 29—მამრავლის კორექტორის ბერკეტი, 17—დგამთამწე, 19—შემმოწმებელი მექანიზმი, 21—შემმოწმებელი მექანიზმის მძიმის მოძრავი მაჩვენებელი, 22—შედეგის რიცხვის მძიმის მაჩვენებელი, 20—თანრიგის მაჩვენებელი; 23—შედეგის მრიცხველი, 24—რიცხვის ხელით დაყენების თავაკები, 25—ბრუნთა მრიცხველი, 26—ბრუნთა მრიცხველის მძიმის მაჩვენებელი, 30—მამრავლთა შემმოწმებელი მექანიზმი.

საანგარიშო მანქანა BMM—2-ზე სრულდება ოთხივე არითმეტიკული მოქმედება, ამათგან გამრავლება და გაყოფა სრულდება ავტომატურად.

მანქანაზე შეიძლება შესრულდეს ზოგიერთი შერეული არითმეტიკული მოქმედებაც. მაგალითად, ნამრავლების ჯამი ან სხვაობა გამრავლდეს სხვა მამრავლზე ისე, რომ არ ვაწარმოოთ შუალედური შედეგის ჩაწერა.

მანქანის მთელი მექანიზმი მოთავსებულია უძრავ კორპუსზე და დგიმთამწეზე (17), რომელზედაც იმყოფება ორი მრიცხველი შედეგის (23) და ბრუნვა რიცხვის (25). მრიცხველზე (23) მიიღება: ჯამი შეკრების დროს, სხვაობა გამოკლების დროს, ნამრავლი, ან ნაშთი გაყოფის დროს, ხოლო ბრუნთა მრიცხველზე მიიღება მამრავლი გამრავლების დროს და განაყოფი გაყოფის დროს. მოვიგონოთ, რომ „Феликс"-ზეც ასეთი მრიცხველები გვაქვს.

მანქანაზე რიცხვის აღება ხდება კლავიატურის საშუალებით, რისთვისაც საკმარისია კლავიშზე თითის დაჭირება. თვალის ჰიგიენისათვის კლავიშები სხვადასხვა ფერისაა. ვერტიკალურ ზოლში შეიძლება მხოლოდ ერთ კლავიშზე თითის დაჭერა. კლავიშზე აღებული რიცხვი გამოჩნდება საკონტროლო სარკმელში (19). აღებული რიცხვის ციფრების გაქრობა წარმოებს სათანადო ციფრის ვერტიკალის ბოლოში მყოფ თანრიგით გაქრობის კლავიშზე (2) თითის დაჭირებით.

აღებული რიცხვის მთლიანად გაქრობა წარმოებს ერთდროულად გაქრობის კლავიშზე (8) თითის დაჭირებით. შედეგის მრიცხველზე (23) რიცხვის გაქრობისათვის იხმარება კლავიში (9), ხოლო ბრუნთა მრიცხველზე რიცხვის გაქრობა წარმოებს კლავიში (10).

დგიმთამწის (17) გასატანად მარცხნივ იხმარება კლავიში (6), ხოლო მარჯვნივ—კლავიში (7).

რიცხვთა მიმატებისა და გამოკლების შესასრულებლად და აგრეთვე არაავტომატურად (ისე, როგორც „Феликс"-ზე) გამრავლება-გაყოფის შესასრულებლად კლავიში წარწერით „П" (13) უნდა იყოს თავისუფალ მდგომარეობაში, ხოლო ავტომატურად გამრავლებისა და გაყოფისათვის კლავიშ „П"-ზე თითი უნდა დავაჭიროთ. არითმეტიკული მოქმედებისათვის გვაქვს კლავიშები: შეკრების (4), გამოკლების (3), ავტომატურად გაყოფის (5) და გამრავლების „П". კლავიშ „П"-ს განთავისუფლებისათვის თითი უნდა დავაჭიროთ გამეორების მექანიზმის გამომრთველ კლავიშს (14)-ს.

კლავიატურაზე შეიძლება ავიღოთ რიცხვი არაუმეტეს 9 თანრიგისა. რიცხვი, რომელიც მიღებულია შედეგის მრიცხველზე, შეგვიძლია გადავიტანოთ კლავიატურაზე, ამისათვის საკმარისია დავაჭიროთ თითი კლავიშს (12).

ავტომატური გაყოფა რომ შევწყვიტოთ, საჭიროა თითი დავაჭიროთ კლავიშს (11), ხოლო გამრავლება რომ შევწყვიტოთ, საჭიროა თითი დავაჭიროთ გამეორების შემწყვეტ კლავიშს (14).

განაყოფში ნიშნად ციფრთა რაოდენობის შემოსაზღვრისათვის იხმარება კლავიშები (27).

ავტომატურად მოქმედების შესასრულებლად მანქანის მარცხენა კუთხეში მოთავსებულია: გამრავლების კლავიში (32); ნამრავლის გამოკლების კლავიში (33), გაყოფის მომზადების კლავიში (34).

მანქანის ზედა ნაწილზე მოთავსებულია სათანადოდ ბრუნთა მრიცხველში მძიმის მოძრავი მაჩვენებელი (26), საკონტროლო მექანიზმის მძიმის მოძრავი მაჩვენებელი (21), შედეგის მრიცხველის მძიმის მოძრავი მაჩვენებელი (22).

ვიდრე მუშაობას დავიწყებდეთ, უნდა შევამოწმოთ განათების ქსელში ძაბვა, რომლის შესაბამისად უნდა გადავრთოთ ელექტროძრავა. ქარხნის მიერ გამოშვებული მანქანის ძრავაში გადამრთველი დაყენებულია 220 ვოლტზე.

არითმეტიკული მოქმედებანი: შ ე კ რ ე ბ ა. მანქანის ყველა კლავიში და ბერკეტი უნდა იყოს საწყის მდგომარეობაში. სიმარტივისათვის ავიღოთ მაგალითი 415+612+67. მესამე, მეორე და პირველი თანრიგის კლავიშზე ავიღოთ სათანადოდ 4, 1 და 5. აღებული რიცხვი შევამოწმოთ საკონტროლო მექანიზმით (19). შემდეგ ხანმოკლე დროით დავაჭიროთ თითი შეკრების კლავიშზე (4), რის შედეგად რიცხვი 415 გამოჩნდება შედეგის მრიცხველზე (23), კლავიატურაზე აღებული რიცხვი კი გაქრება. შემდეგ ისევ ავიღოთ კლავიატურაზე რიცხვი 612, რომელიც კვლავ შევამოწმოთ მაკონტროლებელი მექანიზმით. შეკრების კლავიშზე ხანმოკლე დროით თითით დაჭირების შედეგად შედეგის მრიცხველზე გამოჩნდება 1027. ასევე ავიღებთ რიცხვ 67-ს მეორე და პირველი თანრიგის კლავიშზე და ზემოთ აღწერილი მოქმედების გამეორებით შედეგის მრიცხველზე მივიღებთ 1094.

ათწილადების შეკრების შემთხვევაში ათწილადის ნიშნის ადგილი წინასწარ უნდა განვსაზღვროთ შედეგში, რისთვისაც საჭიროა მძიმის მოძრავი მაჩვენებელი შედეგის მრიცხველზე სათანადო ადგილას მოვათავსოთ და შემდეგ ავიღოთ კლავიატურაზე სათანადო რიცხვები.

გ ა მ ო კ ლ ე ბ ა. გამოკლება სრულდება ისევ იმ რიგით, რა რიგითაც შეკრება. მაგალითად, 625—78. ჯერ ავიღებთ საკლებს 625 და გადავიტანთ შედეგის მრიცხველზე შეკრების კლავიშით, შემდეგ კლავიატურაზე ავიღებთ 78-ს (თანრიგების დაცვით) და ხანმოკლე დროით თითს დავაჭერთ გამოკლების კლავიშს (3), რის შედეგადაც შედეგის მრიცხველზე გამოჩნდება რიცხვი 547. ცხადია, ასევე მოვიქცეოდით კიდევ, რომ გვქონებოდა სხვა მაკლები.

თუ გვინდა მოქმედებათა რიცხვი დავთვალოთ, მაშინ პატარა ბერკეტი (18) უნდა გადავწიოთ „მინუსზე“ გამოკლების დროს და „პლუსზე“ მიმატების დროს. შედეგი მიიღება ბრუნთა მრიცხველზე.

გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა. გამრავლება მანქანაზე სრულდება ავტომატურად. მაგალითად, 345·697. ამისათვის სამრავლი—345 უნდა ავიღოთ კლავიატურაზე მარჯვნიდან ჩვეულებრივად. მამრავლი 697 ავიღოთ მამრავლის კლავიატურაზე (31) შემდეგნაირად: პირველად ავიღოთ უდიდესი თანრიგის რიცხვი მარცხნიდან—6, შემდეგ მას უნდა მოჰყვეს უფრო დაბალი თანრიგის ციფრები. აღებული რიცხვი შევამოწმოთ მაკონტროლებელი მექანიზმით (19), ხოლო მამრავლი მაკონტროლებელი მექანიზმით (30). დავაჭიროთ თითი გამრავლების კლავიშს (32), რის შედეგადაც შესრულდება გამრავლება. ნამრავლი 240465 მიიღება შედეგის მრიცხველზე (23), მამრავლი—ბრუნთა მრიცხველზე (25). ამავე დროს მამრავლის მაკონტროლებელ სარკმელში (30) მამრავლი გაქრება.

თუ გვინდა მიღებული ნამრავლი კიდევ მესამე მამრავლზე, მაგალითად, 476-ზე გავამრავლოთ, საჭიროა მიღებული ნამრავლი 240465 გადავიტანოთ კლავიატურაზე, რისთვისაც საკმარისია თითი დავაჭიროთ (12) კლავიშს, ამ მოქმედების შედეგად წაიშლება რიცხვები შედეგის მრიცხველზე და ბრუნთა მრიცხველზე. ახალი მამრავლი ისევ ავიღოთ გამრავლების კლავიატურაზე (31) და კვლავ დავაჭიროთ თითი გამრავლების კლავიშს (32), რის შედეგადაც მივიღებთ შედეგის მრიცხველზე 114 461 340.

თუ გვაქვს ათწილადი რიცხვები, ნამრავლში წინასწარ უნდა განვსაზღვროთ ათწილადი ნიშნის მდებარეობა და სათანადოდ მოვათავსოთ მძიმის მაჩვენებელი შედეგის მრიცხველზე (23). ასევე მოვათავსოთ მძიმის მაჩვენებელი სათანადო ადგილას მაკონტროლებელზე (21) და ბრუნთა მრიცხველზე (25).

ისეთი გამრავლების შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს დიდი რიცხვი ათწილადი ნიშნებისა, ცხადია, ყოველთვის არ იკმარებს დასაყენებელი მექანიზმის თანრიგები, ამიტომ უნდა გადავაადგილოთ დგიმთამწე იმდენად მარჯვნივ, რომ ის ბოლო მარჯვენა ციფრი, რომელიც გვსურს ავიღოთ დასაყენებელ მექანიზმზე, მოთავსდეს კლავიატურის მარჯვენა ბოლო თანრიგის თავზე და შემდეგ დავაჭიროთ თითი (12) კლავიშზე. მხედველობაში მივიღოთ, რომ შედეგის მრიცხველზე მოთავსებული 9 თანრიგიდან კლავიატურაზე გადაიტანება მხოლოდ 8 ციფრი, მე-9 ციფრი, ე. ი. მარცხენა ბოლო ციფრი კლავიატურაზე არ გადაიტანება. ამიტომ აქაც სათანადოდ დაგვჭირდება დგიმთამწის გადაადგილება.

ადვილი შესამჩნევია, კომბინირებული მოქმედება $ab+cd-ef$ ისე შეგვიძლია შევასრულოთ, რომ არ დაგვჭირდეს შუალედური შედეგის ჩაწერა.

მართლაც, ab მიიღება შედეგის მრიცხველზე. ეს ნამრავლი ავტომატურად არ წაიშლება, თუ ბერკეტ II-ს (16) გადავაადგილებთ ზევით,

შემდეგ c და d ავიღოთ სათანადოდ კლავიატურაზე და მამრავლის მექანიზმზე. cd ნამრავლი მიემატება ab-ს, თუ თითს დავაჭერთ (32) კლავიშს. ასევე ავიღოთ e და f და თითი დავაჭიროთ ნამრავლის გამოკლების კლავიშს (33), რითაც შედეგის მრიცხველზე მივიღებთ $(ab+cd)-ef$. თუ გვსურს სამრავლთა ჯამი ვიცოდეთ, მაშინ ბერკეტს (15) გადავაადგილებთ ზევით და ვისარგებლებთ მამრავლებით, როგორც სამრავლით. ბრუნთა მრიცხველზე მიიღება მათი ჯამი $a+c+e$.

გაყოფა. გაყოფა არის გამეორებული გამოკლება. ამიტომ გასაყოფს ვაკლებთ გამყოფს მანამ, სანამ შედეგის მრიცხველზე არ გამოჩნდება ნულები ან ციფრები, რომლებიც ნაკლებია გამყოფის სათანადო ციფრზე.

მაგალითად, 224 : 14. ავტომატის მექანიზმი მოვათავსოთ საწყის მდგომარეობაში, რაც სრულდება (6) კლავიშზე თითის დაჭირებით. გასაყოფი 224 ავიღოთ კლავიატურაზე (1). დავაჭიროთ თითი გაყოფის მომამზადებელ კლავიშს (34), რის შედეგადაც დგიმთამწე ავტომატურად გადავა მარჯვნივ და გასაყოფი გადაიტანება შედეგის მრიცხველზე. („Феликс"-ზე ყველაფერი ეს ხელით სრულდება). შემდეგ კლავიატურაზე (1) ავიღოთ გამყოფი ისე, რომ გასაყოფის პირველი ციფრის ქვეშ მოთავსდეს გამყოფის პირველი ციფრი. თუ დავაჭირებთ თითს გამყოფის კლავიშს (5), მაშინ გაყოფა ავტომატურად შესრულდება და განაყოფი—16 მიიღება ბრუნთა მრიცხველზე. თუ გვაქვს ათწილადები, განაყოფში წინასწარ უნდა განვსაზღვროთ ათწილად ნიშანთა რაოდენობა. ამისათვის დავაყენოთ მძიმეები გასაყოფში—შედეგის მრიცხველზე, გამყოფში—მაკონტროლებელ მექანიზმზე. დავთვალოთ ათწილად ნიშანთა რაოდენობა მძიმიდან მთელი შედეგის მრიცხველზე მარჯვნივ, ასევე მაკონტროლებელ მექანიზმზეც მარჯვნივ და ავიღოთ მათ შორის სხვაობა, რაც მოგვცემს განაყოფში—ბრუნთა მრიცხველზე ათწილად ნიშანთა რაოდენობას.

თუ გვინდა შევწყვიტოთ სასურველ თანრიგზე გაყოფა ან შეიძლება წესიერად არ არის აღებული რიცხვი, საჭიროა თითი დავაჭიროთ კლავიშს (11).

ზოგჯერ საჭიროა დგიმთამწემ მიიღოს სასურველი მდგომარეობა იმისათვის, რომ განაყოფში იყოს ჩვენთვის საჭირო რაოდენობის თანრიგი, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ ტაბულატორის კლავიშით (27). სათანადო კლავიშზე თითის დაჭირებით დგიმთამწე გადაადგილდება მარჯვნივ აღებულ თანრიგამდე.

§ 11. საანგარიშო ანალიზური მანქანა

ზოგადი აღწერილობა. ყველა ზემოთ განხილული მცირე საანგარიშო მანქანები მიეკუთვნება იმ მანქანებს, სადაც მოცემული სიდიდეები ხელით უნდა დავაყენოთ. ამ მანქანებისაგან განსხვავებით საანგარიშო ანალიზურ მანქანებში მოცემული სიდიდეები შეიტანება ავტომატურად

სპეციალური ფირფიტებით, რომელთაც პ ე რ ფ ო რ ა ც ი უ ლ ი ბარათი ან მოკლედ პ ე რ ფ ო ბ ა რ ა თ ი ეწოდება.

გამოანგარიშებათა სიჩქარეს ხელს უწყობს მანქანაში ერთდროულად რამდენიმე პერფობარათის შეტანა.

საანგარიშო ანალიზური მანქანა შედგება რამდენიმე მოწყობილობისაგან:

1) პერფორატორი, რომლითაც ხდება ბარათების პერფორაცია (განსაზღვრული ადგილების ამოჭრა);

2) შემმოწმებელი, რომელიც პერფორაციის შემოწმებისათვის იხმარება;

3) დამხარისხებელი, რომელიც დაალაგებს პერფობარათებს რაიმე ნიშნის მიხედვით,

4) ტაბულატორი, რომლის საშუალებითაც ხდება მოქმედება და შედეგის ავტომატურად ჩაწერა,

მანქანების ტიპი და რაოდენობა, რომლებიც კომპლექსში შედიან შეიძლება იყოს სხვადასხვა იმისდა მიხედვით, თუ როგორი ხასიათისაა შესასრულებელი გამოთვლები.

მუშაობა სათვლელ ანალიზურ მანქანაზე შემდეგნაირად მიმდინარეობს:

ბარათის პერფორაციის შემდეგ მოწმდება ბარათზე აღებული რიცხვის სისწორე. შემოწმებული ბარათები რაიმე ნიშნის მიხედვით ნაწილდება დამხარისხებელი მანქანით. შემდეგ ბარათები გადაეცემა ტაბულატორს, სადაც ხდება ბარათზე აღებული რიცხვების შეკრება და ავტომატურად შედეგის ჩაწერა.

რიცხვები, რომლებიც ბარათზეა აღებული მიიღება მანქანის მიერ ელექტრული გზით.

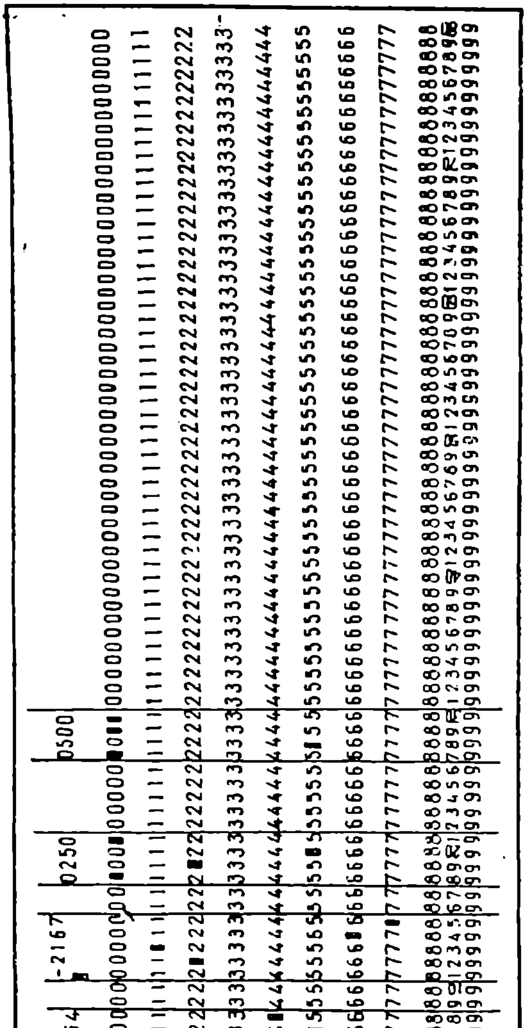
პერფობარათი. პერფობარათი (ნახ. 12) წარმოადგენს სპეციალური მუყაოსაგან დამზადებულ ოთხკუთხედს, ზომით 187,4·82,5·0,18 მმ³. პერფობარათის წინაპირზე დაბეჭდილია ციფრების ათი სტრიქონი 0, 1,...,9 და 80 სვეტი. მოცემული რიცხვი ჩაიწერება ბარათზე. სპეციალური ხვრელების საშუალებით, რომელთაც ოთხკუთხედის ფორმა აქვთ. რიცხვთა განლაგება პერფობარათზე წარმოებს განსაზღვრული წესით.

პერფობარათს ჩამოჭრილი აქვს კუთხე, რათა ისინი ერთი მიმართულებით დალაგდეს.

პერფორატორი და შემმოწმებელი. მოცემული რიცხვების ბარათზე გადასატანად იხმარება სპეციალური მანქანა-პერფორატორი (ნახ. 13). პერფორატორი ბარათზე სპეციალურ ნახვრეტებს აკეთებს სპეციალურ კლავიშზე დაჭირების შედეგად. პერფობარათები თავსდება ყუთში. ყუთი იტევს 250-მდე პერფობარათს. გამოცდილი პერფორატორი რვა საათის განმავლობაში ამზადებს 2500-მდე პერფობარათს.

პერფორატორი π—80 მოძრაობაში მოდის მუდმივი დენის ელექტროძრავით, რომლის სიმძლავრე 75 ვატია, მანქანა იწონის 75 კგ.

პერფორაციის შესამოწმებლად იხმარება სპეციალური მანქანა, რომელსაც შემმოწმებელი (მაკონტროლებელი) ეწოდება. იგი მუშაობს პერფორატორის ანალოგიურად (ნახ. 14).



ნახ. 12. პერფობარათი.

ბარათები თავსდება შემმოწმებლის სპეციალურ ყუთში, საიდანაც მიეწოდება შემმოწმებლის მექანიზმს. თუ ბარათის ნახვრეტი არ შეესაბამება აღებულ რიცხვს, მაშინ შემმოწმებელში ტრანსპორტირება წყდება. ხშირად ბარათების შემოწმება ხდება სინათლით ან სხვა საშუალებით.

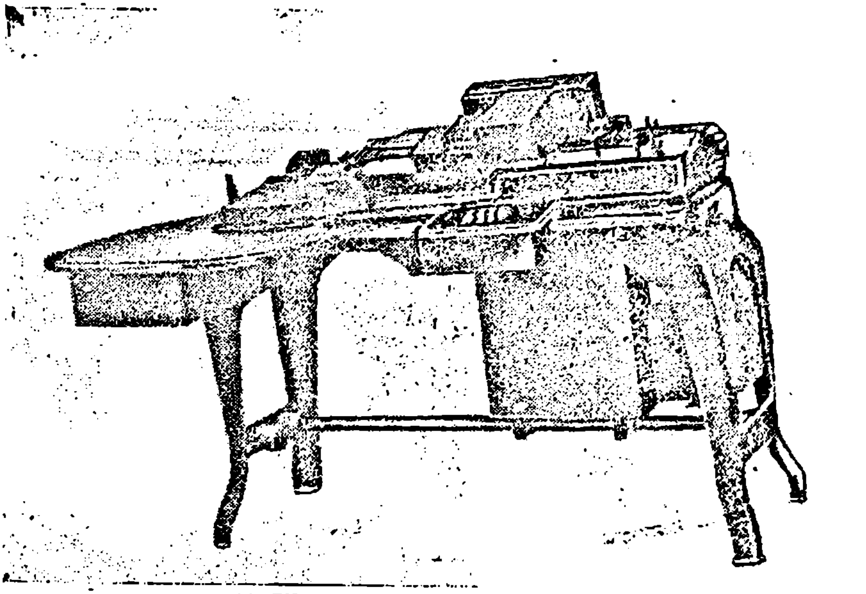
ბარათების პერფორაციაზე და მის შემოწმებაზე იხარჯება თითქმის მთელი საანგარიშო დროის 70%.

დამხარისხებელი. პერფობარათების დახარისხება წარმოებს სპეციალური მანქანის საშუალებით, რომელსაც დამხარისხებელი ეწოდება (ნახ. 15). მანქანის მთავარი ნაწილია ყუთი ბარათების მოსათავსებლად. პერფობარათი საჭიროა იმდენჯერ გავატაროთ დამხარისხებელში, რამდენი ნიშანიცაა დახარისხებაში. მაგალითად, თუ პერფობარათების დამაჯგუფებელია 4 ნიშანი, პერფობარათმა დამხარისხებელში ოთხჯერ უნდა გაიაროს. მანქანას შეუძლია წუთში გაატაროს 400 პერფობარათი.

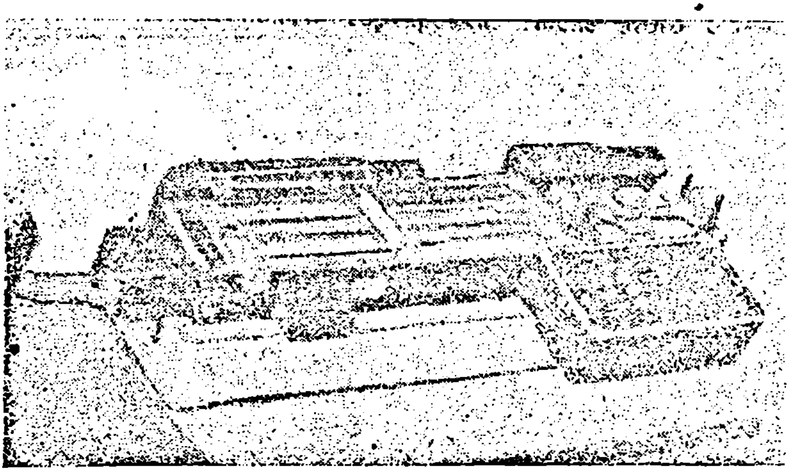
ტაბულატორი. ტაბულატორი (ნახ. 16) ასრულებს ორი სახის მუშაობას:

1) სტრიქონში ჩაწეროს ის რიცხვები, რომლებიც პერფობარათზეა. და დაგროვოს ჩაწერილი შედეგები („ბეჭდვა“),

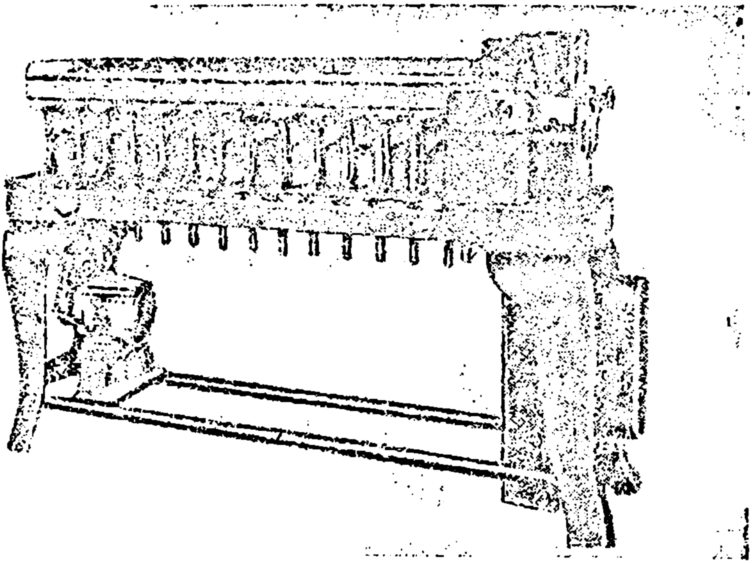
2) შედეგების ჩაწერა („შედეგი“).



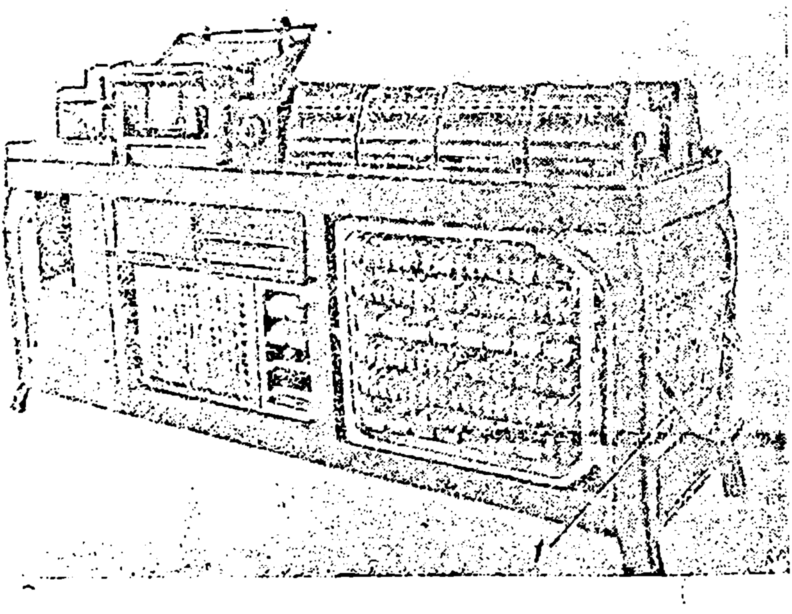
ნახ. 13. პერფორატორი.



ნახ. 14. შემმოწმებელი.



ნახ. 15. დამხარისხებელი.



ნახ. 16. ტაბულატორი.

საბჭოთა წარმოება უშვებს სხვადასხვა ნიმუშის ტაბულატორს, ყველაზე უკეთესია ტაბულატორი T—5, რომლის ტექნიკური სიჩქარეა 5000 ბარათის გატარება საათში „ბეჭდვაზე“ და 9000—„შედეგზე“.

ტაბულატორი განსაკუთრებით გამოიყენება შეკრება გამოკლებისათვის. მასზე შეიძლება 72000 შეკრება საათში. ტაბულატორ T—5-ით შეიძლება შევასრულოთ გამრავლება მიმდევრობითი შეკრების საფუძველზე.

ტაბულატორზე არის მოძრავი შემაერთებელი დაფა—(1) (ნახ. 16). მასზე მოთავსებულია ბუდეები, რომლებიც სპეციალური გამტარებით ერთდება, ასე მომზადებული დაფით მანქანა ასრულებს სათანადო მოქმედებას.

ტაბულატორზე ყველაფერი ავტომატურად სრულდება იმის შემდეგ, როცესაც სათანადო პერფობარათები მოთავსებულ იქნება ტაბულატორის ყუთში.

§ 12. მოკლე ცნობები ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანებზე

გამომთვლელი მანქანები მეტად მძლავრი საშუალებაა ერთი ტიპის დიდი რაოდენობის გამოთვლითი სამუშაოების შესასრულებლად.

ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანებზე რამდენიმე საათში შეიძლება ისეთი ამოცანები ამოიხსნას, რომლებზედაც არითმომეტრის საშუალებით ათეული და ასეული წლებია საჭირო. თანამედროვე ელექტრონული მანქანა ერთ წამში აწარმოებს დაახლოებით ათნიშნა რიცხვების 20 000-ზე მეტ შეკრებას და 2000-ზე მეტ გამრავლებას.

სწრაფმოქმედი მანქანები იყოფა ორ ჯგუფად:

1) ელექტრონული ციფრული მანქანები, რომელთაც დ ი ს კ რ ე ტ უ ლ ი თ ვ ლ ი ს მ ა ნ ქ ა ნ ე ბ ი ეწოდება და

2) მოდელური აგებულების, რომელსაც უ წ ყ ვ ე ტ ი მ ო ქ მ ე დ ე ბ ი ს მ ა ნ ქ ა ნ ე ბ ი ეწოდება.

ციფრულ მანქანებში გამოთვლების სიზუსტე განისაზღვრება მოცემულ რიცხვში ნიშნად ციფრთა რაოდენობით. სიზუსტე შეიძლება იყოს საკმარისად დიდი.

უწყვეტი მოქმედების მანქანები პრაქტიკაში გვხვდება, როგორც მექანიკური ისე ელექტრონული.

უწყვეტი მოქმედების ელექტრონულ მანქანებში რიცხვები წარმოიდგინება უწყვეტი ფიზიკური პარამეტრებით, მაგალითად, ელექტრული დენის ძაბვის, დენის ძალის, ფაზის და სხვა საშუალებით.

უწყვეტი მოქმედების მექანიკურ მანქანებში რიცხვები წარმოიდგინება ლილვის მობრუნების კუთხით, (მაგ. პლანიმეტრი), ნაწილების გადაადგილების სიგრძით (მაგ. ლოგარითმული საანგარიშო—შიშშა) და სხვ.

ცხადია, უწყვეტი მოქმედების მანქანების სიზუსტე არ შეიძლება იყოს დიდი, რადგანაც ფიზიკური პარამეტრების გაზომვა შეიძლება 2, 3 ნიშნადი ციფრით.

უწყვეტი მოქმედების ელექტრონულ მანქანებში ცალკეული მოქმედება სრულდება სპეციალური სქემის საშუალებით. თითოეული სქემა გათვალისწინებულია ერთადერთი მოქმედებისათვის. ტიპიური მოქმედებანია: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა, გაწარმოება, ინტეგრება, ტრიგონომეტრიული და ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციების მნიშვნელობათა მიღება. უწყვეტი მოქმედების ელექტრონული მანქანა წარმოადგენს სხვადასხვა ფუნქციონალური ბლოკების ერთიანობას, რომლებიც ჩამოთვლილ მოქმედებას ასრულებს. რადგანაც ბლოკების რიცხვი თითოეულ მანქანაში შემოსაზღვრულია, ცხადია, რომ ცალკეულ ელექტრონულ მანქანას შეუძლია ამოხსნას ერთი გარკვეული კლასის ამოცანები. ამდენად უწყვეტი მოქმედების ელექტრონული საანგარიშო მანქანები ითვლებიან სპეციალიზებულ მანქანებად.

ციფრული მანქანები გაიყოფიან ორ კლასად:

1) უნივერსალური მანქანები, რომლებიც იძლევიან სხვადასხვა გამოთვლების ჩატარების შესაძლებლობას და

2) სპეციალიზებული მანქანები, რომლებიც სპეციალური გამოთვლებისათვისაა დანიშნული. მაგალითად, წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნისათვის, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნისათვის და სხვ.

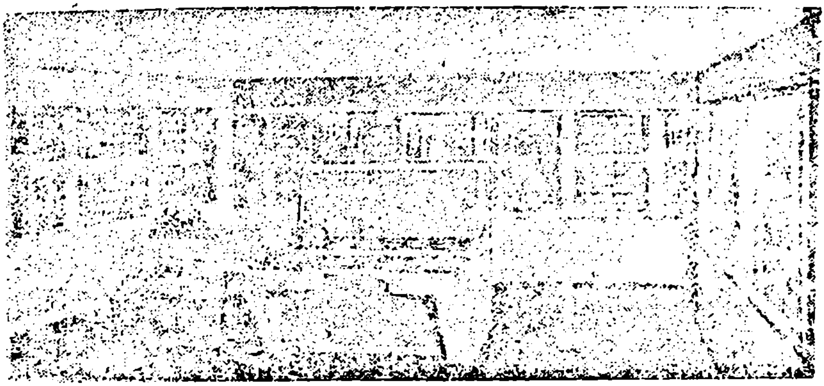
ელექტრონული ციფრული მანქანები წარმოადგენენ სხვადასხვა ელექტრონული ავტომატიკის რთულ კომპლექსს. ელექტრონული ციფრული მანქანის ძირითადი ელემენტებია ელექტრონული მილაკები, ნახევარგამტარები და მაგნიტური ელემენტები, რომელთაც ელექტრული დენი შეუძლიათ ერთი მიმართულებით გაატარონ, ე. ი. ელემენტი დენისათვის ღიაა ან დაკეტილია. ამისდა მიხედვით ელექტრონულ მანქანებზე იხმარება ისეთი თვლის სისტემა, რომელშიაც ორი ციფრია: ერთი და ნული. ამიტომ უფრო მეტად ელექტრონულ მანქანებზე თვლის ორობითი სისტემა გამოიყენება.

პირველი დიდი ელექტრონული ციფრული მანქანა ЭНИАК, რომელიც შეიქმნა პენსილვანიის უნივერსიტეტში, გამოშვებული იქნა 1946 წელს. ამ მანქანას ჰქონდა დაახლოებით 18000 ელექტრონული მილაკი, იწონიდა დაახლოებით 30 ტ. მანქანა გათვალისწინებული იყო ყუმბარის გასროლის ტრაექტორიის გამოთვლისათვის. ამ მანქანით ყუმბარის გასროლის ტრაექტორიის აგებისათვის საჭირო იყო გაცილებით ნაკლები დრო, ვიდრე სათანადო მიზნის დაზიანებისათვის. ამჟამად ეს მანქანა უფრო გაუმჯობესებულია და გამოიყენება ბალისტიკაში ამოცანების ამოსახსნელად. აღნიშნული მანქანით გამოთვლილ იქნა π-ს მნიშვნელობა 2000 ნიშნით.

1951 წელს საბჭოთა კავშირში გამოშვებული იქნა ელექტრონული

მანქანა БЭСМ, რომელიც აგებული იყო აკად. ს. ა. ლებედევის ხელმძღვანელობით (ნახ. 17).

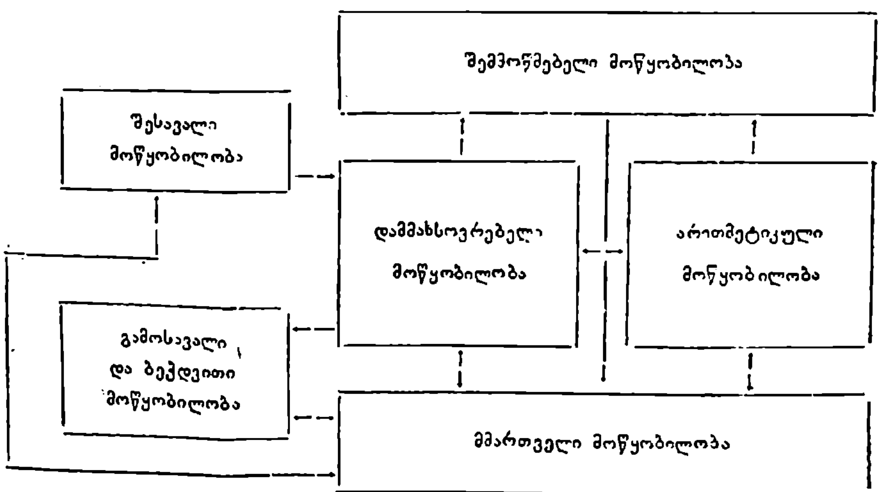
ამჟამად ჩვენში გამოშვებულია და წარმატებით მუშაობს როგორც დიდი, ისე მცირე სხვადასხვა გამომთვლელი ელექტრონული მანქანა, მაგალითად: „Стрела“, „Урал“-ი, „Минск“-ი და სხვ.



ნახ. 17. სწრაფმოქმედი ელექტრონული საანგარიშო მანქანა „БЭСМ“.

ელექტრონული ციფრული მანქანა შედგება შემდეგი ძირითადი ნაწილებისაგან, რომელიც სქემაზეა ნაჩვენები.

ს ქ ე მ ა



1) შესავალი მოწყობილობა, რომლის საშუალებითაც მანქანაში შეაქვთ წინასწარ მოცემული რიცხვები და გამოთვლების პროგრამა.

2) დამახსოვრებელი მოწყობილობა, რომელიც იმახსოვრებს საწყის მონაცემებს, შუალედური გამოთვლების შედეგებს და საბოლოო შედეგს.

3) არითმეტიკული მოწყობილობა, რომელიც აწარმოებს არითმეტიკულ მოქმედებას და ლოგიკურ მოქმედებას, მაგალითად, შეადარის რიცხვთა აბსოლუტური მნიშვნელობანი და სხვ.

4) მანქანის მართვის მოწყობილობა, რომელიც უზრუნველყოფს პროგრამის შესაბამისად მოქმედებათა მიმდევრობის ავტომატურად შესრულებას.

5) შემმოწმებელი მოწყობილობა, რომელიც სპეციალურ ნიშანს იძლევა მანქანის არაწესიერად მუშაობისა და გამოთვლებში შეცდომის მიღების შემთხვევაში.

6) გამტანი მოწყობილობა, რომლის საშუალებითაც მანქანიდან გამოთვლების შედეგი მიიღება ჩვეულებრივი საბეჭდი მანქანით ან პერფოლენტით.

მანქანაში მოცემული რიცხვების და მოქმედებათა რიგის მაჩვენებელი სიმბოლოების (ამოცანის პროგრამა) შეტანა წარმოებს პერფოლენტით, მაგნიტური ლენტით და სხვა საშუალებით.

ამოცანა რომ ელექტრონულ მანქანაზე ამოვხსნათ, საჭიროა წინასწარ მისი მომზადება. მანქანამ ადამიანის ჩარევის გარეშე უნდა შეასრულოს გამოთვლების მთელი პროცესი. თუ ადამიანი გამოთვლით პროცესში ჩაერია, მაშინ შედეგის მიღება ძალიან დაგვიანდება, რადგანაც გამოთვლები სწრაფმოქმედ ელექტრონულ ციფრულ მანქანაზე სრულდება წამის მეათიათასედზე ნაკლებ დროში, ხოლო მანქანის სათანადო სვლის შეცვლას წუთები ესაჭიროება. ასე რომ, მანქანა ისე უნდა აეწყოს, რომ იგი არა მარტო აწარმოებდეს არითმეტიკულ მოქმედებას, არამედ ლოგიკურსაც, ე. ი. მანქანა ერთი ოპერაციიდან უნდა გადადიოდეს მეორე ოპერაციაზე ავტომატურად. ეს სრულდება მანქანის პროგრამული მართვით.

ახლა მათემატიკურმა მეცნიერებამ, რომელიც ახდენს ამოცანის სათანადო ელემენტარულ მოქმედებებად დანაწილებას და ადგენს მანქანის მუშაობის პროგრამას, მიიღო სახელწოდება „დაპროგრამების თეორია".

მართვისა და კავშირის სისტემა, როგორც ცნობილია, განიხილება სხვადასხვა მეცნიერებაში. მაგალითად, მათემატიკაში, ლოგიკაში, ბიოლოგიაში, ფსიქოლოგიაში, ფიზიოლოგიაში, ლინგვისტიკაში, ავტომატური რეგულირების თეორიაში და სხვ. კიბერნეტიკა კი ერთი თვალსაზრისით სწავლობს მართვისა და კავშირის საკითხებს სხვადასხვა სისტემაში.

მართვისა და კავშირის სისტემა განიხილება აგრეთვე ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანების თეორიაში. ამდენად ელექტრონული გამომთვლელი მანქანები მიეკუთვნება კიბერნეტიკულ მანქანებს.

სიტყვა „კიბერნეტიკა" ბერძნული სიტყვისაგან—„კიბერნოს"-აგან წარმოდგება, რაც ნიშნავს მართვის (მესაჭეობის) ხელოვნებას. პირველად ასეთი სახელწოდება იმ დროისათვის არ არსებული მეცნიერებისათვის ნახმარია ფრანგი ფიზიკოსის ა. მ. ამპერის (1715—1836) შრომებში, რომელიც 1843 წელს გამოვიდა. ამპერი ფიქრობდა, რომ უნდა არსებობდეს მეცნიერება სახელმწიფოს მართვის შესახებ.

კიბერნეტიკა, როგორც ახალი მეცნიერება მოცემულია კოლუმბიის უნივერსიტეტის პროფესორის ნორბერტ ვინერის ნაშრომში „კიბერნეტიკა, ანუ მართვა და კავშირი ცხოველსა და მანქანაში", რომელიც გამოვიდა 1948 წელს. ამ ნაშრომის სახელწოდებიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ კიბერნეტიკა ვინერის გაგებით განსხვავდება იმ კიბერნეტიკისაგან, რომელიც ამპერს ჰქონდა წარმოდგენილი.

პროგრამული ელექტრონული მანქანის მუშაობის შესწავლისას შეინიშნა მსგავსება ადამიანის ტვინის ფუნქციასა და ელექტრონული მანქანის ფუნქციას შორის. მაგალითად, მანქანას აქვს თვისება დააგროვოს და შეინახოს რიცხვები, რაც შეესაბამება ადამიანის ტვინის ფუნქციას. ამოცანა მანქანაზე იმავე მიმდევრობით (რომელიღაც ერთი) ამოიხსნება, რა მიმდევრობითაც ადამიანი ამოხსნიდა იმავე ამოცანას. ეს მსგავსება იძლევა იმას, რომ ადამიანის ტვინი და ელექტრონული მანქანა თვითმმართველი სისტემაა, რომელთა მუშაობაში ხდება სხვადასხვა მონაცემებისა და შედეგების გაცვლა და გადამუშავება.

ძნელი მისახვედრი არ არის, რომ მიუხედავად იმ დიდი მსგავსებისა, რაც ადამიანის ტვინთან აქვს ელექტრონულ მანქანას, იგი ვერ შეცვლის ადამიანს; მანქანა დაეხმარება ადამიანს სწრაფად და ნაკლები ენერგიის დახარჯვით მიიღოს ამა თუ იმ ამოცანის პასუხი.—მანქანას შეუძლია შეასრულოს გონებრივი შრომის მხოლოდ ის ნაწილი, რომლის მექანიზაციაც შეიძლება.

თავი III

სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა. მოქმედებანი მიახლოებით რიცხვებზე

§ 18. სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

1. ნაბიჯის საშუალო სიგრძე. წინასწარ ცნობილი მანძილი, მაგალითად, 60 მ, თავისუფალი ნაბიჯით რამდენჯერმე გავზომოთ. ვთქვათ, პირველი

გაზომვით მივიღეთ 88 ნაბიჯი, მეორე გაზომვით—92 ნაბიჯი, მესამე გაზომვით—92,5 ნაბიჯი, მეოთხე გაზომვით—89,5 ნაბიჯი. მაშინ 60 მ-ში საშუალოდ მოთავსდება 90,5 ნაბიჯი:

$$\frac{88+92+92,5+89,5}{4}=\frac{362}{4}=90,5.$$

ერთი ნაბიჯის საშუალო სიგრძე კი იქნება შემდეგი განაყოფი:

$$60:90,5=600:905=0,662\ldots\ (\text{მ}).$$

ამგვარად, ერთი ნაბიჯის საშუალო მნიშვნელობად შეგვიძლია მივიღოთ 0,66 მ ან 0,67 მ. განაყოფიდან ცხადია, ნაბიჯის ნამდვილი მნიშვნელობა x მ მოთავსებულია 0,66 მ-სა და 0,67 მ-ს შორის:

$$0,66<x<0,67.$$

2. ქანჩის დიამეტრის საშუალო სიგრძე. ქანჩების საამქროში ერთი და იგივე ქანჩები ერთი პროექტის მიხედვით მზადდება. მათი დიამეტრები სხვადასხვა ზომის იქნება, რადგანაც ქანჩები საერთოდ სხვადასხვა დაზგაზე, სხვადასხვა იარაღით და სხვადასხვა მუშის მიერ არის დამზადებული. თუმცა ქანჩები ერთი და იგივე მუშის მიერაც რომ დამზადდეს, მათი დიამეტრები მაინც სხვადასხვა ზომისა იქნება. მაგრამ არსებობს გარკვეული ზომა—„დაშვება", რომელსაც არ უნდა აღემატებოდეს პროექტით განსაზღვრული დიამეტრის სიგრძესა და დამზადებული ქანჩის დიამეტრის x სიგრძეს შორის სხვაობა.

თუ ქანჩის დიამეტრის დაშვება 0,1 მმ-ია, მაშინ

$$|x-d|\leqslant 0,1,$$

ე. ი.

$$-0,1\leqslant x-d\leqslant 0,1,$$

ანუ

$$d-0,1\leqslant x\leqslant d+0,1.$$

3. მაღაზიის სასწორით სხეული შეგვიძლია ავწონოთ 0,005 კგ სიზუსტით, ე. ი. სხეულის ნამდვილ x წონისა და მიღებულ P წონას შორის შემდეგი დამოკიდებულება გვექნება:

$$P-0,005\leqslant x\leqslant P+0,005.$$

4. ტემპერატურას ვზომავთ 0,1°-მდე სიზუსტით. თუ ტემპერატურის ჩვენება 15°-ია, ეს ნიშნავს: ტემპერატურის ნამდვილი სიდიდე x მოთავსებული იქნება შუალედში:

$$15°-0,1\leqslant x\leqslant 15°+0,1°.$$

5. ლექციის ხანგრძლიობას ვზომავთ წუთებით. წამის რაოდენობა მხედველობაში არ მიიღება.

ამგვარად, სიგრძის, წონის, ტემპერატურისა და სხვა სიდიდეების გაზომვა იძლევა მხოლოდ მიახლოებით რიცხვს. ყოველგვარი გაზომვა წარმოებს განსაზღვრული სიზუსტით. გაზომვის სიზუსტე დამოკიდებულია იმისაგან, თუ რას ზომავენ, რით ზომავენ, ვინ ზომავს, რისთვის ზომავენ და სხვ. როდესაც რაიმე გაზომვის შედეგთან გვაქვს საქმე, ყოველთვის უნდა დავფიქრდეთ, ზომის ერთეულის რა ნაწილია მხედველობაში მიღებული და რა ნაწილია უკუგდებული.

რიცხვს, რომელიც წარმოადგენს რაიმე სიდიდის მიახლოებით მნიშვნელობას, ეწოდება მიახლოებითი რიცხვი.

გაზომვით მიღებული შედეგი ყოველთვის მიახლოებითია, თვლით მიღებული შედეგი კი ზოგჯერ ზუსტია. მაგალითად, გაკვეთილს ესწრება 25 მოსწავლე. რიცხვი 25 ზუსტია. ქალაქში ცხოვრობს 985 ათასი მოქალაქე. რიცხვი 985 ათასი მიახლოებითია, რადგანაც ყოველდღიურად მოსალოდნელია ადამიანთა სიკვდილიანობა, დაბადება, ქალაქიდან გასვლა, ქალაქში მოსვლა და სხვა, რაც ქალაქში მცხოვრებთა რიცხვს ცვლის.

§ 14. გაზომვის სიზუსტე

ვთქვათ, რამდენიმე მოსწავლემ მოისურვა განსაზღვროს, რამდენი მარცვალია 10 გრამ ხორბალში. რადგანაც მარცვლები სხვადასხვა ზომისაა და სხვადასხვა სასწორით აწონეს, ამიტომ მარცვალთა რაოდენობა სხვადასხვა მოსწავლისათვის სხვადასხვა იქნება. ვთქვათ, ერთმა მოსწავლემ მიიღო 328 მარცვალი, მეორემ—342 მარცვალი, მესამემ—332 მარცვალი, მეოთხემ—308 მარცვალი, მეხუთემ—306 მარცვალი. ამ შემთხვევაში, ცხადია, უნდა ავიღოთ მიღებულ რიცხვთა საშუალო არითმეტიკული:

$$\frac{328+342+332+308+306}{5}=323,2.$$

ამგვარად 10 გრამ ხორბლის მარცვლეულში საშუალოდ 323 მარცვალია. რიცხვი 323 მიახლოებითია, მაგრამ უფრო სანდოა, ვიდრე თითოეული შედეგი ცალ-ცალკე.

გავარჩიოთ, მიღებული საშუალო არითმეტიკულის რომელი ციფრი უფრო სანდოა. აქ ასეულების ციფრი 3 სანდოა, რადგანაც იგი ყველა შედეგში შედის. ათეულების ციფრი 2 არაა მთლიანად სანდო, რადგანაც თითოეულ შედეგში ათეულების ციფრი სხვადასხვაა; 2, 4, 3, 0, 0. ერთეულების ციფრი 3 კი სრულებით არ არის სანდო. ამის გამო 323,2-ში ერთეულების ციფრი და მის შემდეგ მდგომი ათწილადის ციფრი უნდა უკუვაგდოთ.

მაშასადამე, 10 გრ წონის ხორბლის მარცვლეული შეიცავს $32\underline{0}$ მარცვალს. აქ უკუგდებული ციფრი 3-ის ნაცვლად დავწერეთ $\underline{0}$.

ცხადია, 1 კგ წონის პურის მარცვალი შეიცავს საშუალოდ $32\underline{000}$ მარცვალს.

შევთანხმდეთ, რომ გაზომვათა საშუალო არითმეტიკულში დავტოვოთ ყველა სანდო ციფრი და ერთი საეჭვო ციფრი, დანარჩენი ციფრები კი უკუვაგდოთ.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი.

ვთქვათ, გაზომვების შედეგად მივიღეთ:

$$150,236; \quad 150,359; \quad 150,478; \quad 150,491.$$

სათანადო საშუალო არითმეტიკული იქნება:

$$\frac{150,236+150,359+150,478+150,491}{4}=\frac{601,564}{4}=150,391.$$

აქ, საშუალო არითმეტიკულში, ციფრები 1, 5, 0 სანდოა, ციფრი 3 საეჭვოა, დანარჩენი ციფრები არავითარ ნდობას არ იმსახურებენ; ამიტომ საძებნი სიდიდის მნიშვნელობად უნდა მივიღოთ: $150,\underline{400}=150,4$. ცხადია, ბოლო ციფრების $\underline{0}$-ების დაწერა საჭირო არ არის.

ამგვარად, $\underline{0}$-ების დაწერა დაგვჭირდება მხოლოდ რიცხვის მთელ ნაწილში უკუგდებული ციფრების ნაცვლად, ხოლო წილად ნაწილში $\underline{0}$-ების დაწერა აუცილებელი არ არის.

$\underline{0}$-ების ხმარება შეგვიძლია თავიდან ავიცილოთ, თუ ვიხმართ მსხვილ ერთეულებს: მაგალითად,

$$52\,3\underline{00}\ \text{მ}=52,3\ \text{კმ},$$

$$24\,0\underline{00}=24,0\ \text{ათასი},$$

$$670\underline{0}\ \text{კგ}=6,70\ \text{ტ}$$

და ა. შ.

მსხვილი ერთეულები 10-ის ხარისხებით შეგვიძლია გამოვსახოთ, მაშინ დამატებითი ნიშნების გარეშე შეგვიძლია ჩავწეროთ მიახლოებითი რიცხვები. მაგალითად,

$$127\,\underline{000}\ \text{სმ}=1,27\cdot 10^5\ \text{სმ},$$

$$523\,6\underline{00}\ \text{გ}=523,6\cdot 10^3\ \text{გ},$$

$$3\,240\,\underline{000}=3240\cdot 10^3=324,0\cdot 10^4=32,40\cdot 10^5$$

და ა. შ.

ამგვარად, ყოველ მიახლოებით რიცხვში ვტოვებთ ყველა სანდო ციფრს და ერთ საეჭვო ციფრს. მიახლოებითი რიცხვის ჩაწერის ეს პრინციპი ეკუთვნის აკად. ა. ნ. კრილოვს[1], რომელიც ასე გამოითქმის:

ყოველგვარი გამოთვლისა და გაზომვის შედეგი ისე უნდა ჩაიწეროს, რომ ამ ჩანაწერით ვიმსჯელოთ სიზუსტის ხარისხზე. ამისათვის საკმარისია, შედეგში დავტოვოთ ყველა სანდო ნიშნადი ციფრი გარდა ბოლო ციფრისა, ბოლო ციფრი შეიძლება შეიცავდეს შეცდომას, მაგრამ არაუმეტეს საშუალოდ ერთი ერთეულისა[2].

§ 15. ათწილადები და ნიშნადი ციფრები

ვთქვათ, რაიმე მონაკვეთის შეუიარაღებელი თვალით გაზომვით მივიღეთ 25,1 სმ, ხოლო შეიარაღებული თვალით—25,135 სმ. ცხადია, მეორე გაზომვით მიღებული შედეგი უფრო ზუსტია, ვიდრე პირველი გაზომვით მიღებული შედეგი: პირველი შედეგი ერთ ათობით ნიშანს შეიცავს, ხოლო მეორე—სამ ათობით ნიშანს.

ათობითი (ანუ ათწილადი) ნიშანი ეწოდება ყველა ციფრს, რომელიც რიცხვში მთელი ნაწილის მარჯვნივაა მოთავსებული.

ერთი და იმავე სიდიდის მიახლოებითი რიცხვი მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მეტ ათობით ნიშანს შეიცავს.

მაგალითად: 3,1; 3,14; 3,141-დან ყველაზე ზუსტია 3,141.

განვმარტოთ ნიშნადი ციფრი.

ნიშნადი ციფრი ეწოდება ყველა ციფრს 1, 2,...,9. 0-იც ნიშნადი ციფრია, თუ იგი მოთავსებულია სხვა ნიშნადი ციფრის მარჯვნივ და არ უჭირავს უკუგდებული ციფრის ადგილი.

---

[1] აკად. ალექსი ნიკოლოზის ძე კრილოვი (1863—1945) გამოჩენილი მათემატიკოსი, გემთმშენებელი ინჟინერი, ასტრონომი, ფიზიკოსი, გეოფიზიკოსი, არტილერისტი. იგი 279 მეცნიერული შრომის ავტორია. მისი შრომა—„ლექციები მიახლოებითი გამოთვლების შესახებ"—მიახლოებითი გამოთვლების საფუძვლებს წარმოადგენს.

[2] კრილოვის პრინციპი ზუსტად ასე გამოითქმის: ყოველგვარი გამოთვლისა და გაზომვის შედეგი გამოისახება რიცხვით; შევთანხმდეთ ეს რიცხვები ისე ვწეროთ, რომ ამ ჩანაწერით შეიძლებოდეს სიზუსტის ხარისხზე მსჯელობა. ამისათვის საკმარისია; წესად მივიღოთ: ვწეროთ რიცხვი ისე, რომ მასში ყველა ნიშნადი ციფრი, გარდა უკანასკნელისა, იყოს სანდო და მხოლოდ უკანასკნელი ციფრი შეიძლება იყოს საეჭვო, ამასთანავე არა უმეტეს ერთი ერთეულისა.

რადგანაც, საზოგადოდ, ბოლო ციფრში შეცდომის დადგენა შეუძლებელია, ან ბოლო ციფრში შეცდომა ზოგჯერ ერთ ერთეულზე მეტია, მაგრამ მისი შენარჩუნება მაინც აუცილებელია, ამიტომ კრილოვის პრინციპში დაემატა სიტყვა საშუალოდ (§ 24).

მაგალითად, 3,1 შეიცავს ორ ნიშნად ციფრს, 0,0204—სამ ნიშნად ციფრს, 0,0020300 შეიცავს ოთხ ნიშნად ციფრს.

თუ მოვიგონებთ კრილოვის პრინციპს მიახლოებითი რიცხვის ჩაწერის შესახებ, მაშინ ნიშნადი ციფრი ასე შეგვიძლია განვსაზღვროთ:

მიახლოებით რიცხვში ნიშნადი ციფრი ეწოდება ყველა ციფრს, რომელიც მოთავსებულია პირველი, ნულისაგან განსხვავებული ციფრის მარჯვნივ ამ ციფრის ჩათვლით.

მაგალითად, $5340 \cdot 10^3$-ში ოთხი ნიშნადი ციფრია, 0,00230-ში სამი ნიშნადი ციფრია $0{,}06030 = 0{,}0006030 \cdot 10^2$-ში ოთხი ნიშნადი ციფრია.

შევადაროთ ერთმანეთს სხვადასხვა ნიშნადციფრებიანი რიცხვები.

ვთქვათ, ნახაზზე აღებული მონაკვეთის გაზომვით მივიღეთ 4,5 სმ, ქუჩის სიგრძის გაზომვით—632 მ. ძნელი წარმოსადგენი არ არის, რომ მეორე გაზომვა უფრო კარგადაა შესრულებული, ვიდრე პირველი გაზომვა. აქ პირველ შედეგში ორი სანდო ნიშნადი ციფრია, ხოლო მეორეში—სამი სანდო ნიშნადი ციფრი.

ავიღოთ კიდევ მაგალითი. ვთქვათ, ავწონეთ სხეულები და მივიღეთ, რომ პირველის წონაა 5,16 კგ და მეორის—0,08 კგ. ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ მეორე სხეულის წონა უფრო უხეშადაა გამოთვლილი, ვიდრე პირველის წონა.

ამგვარად, მიახლოებითი რიცხვებიდან ის რიცხვი უფრო ზუსტია, რომლის ნიშნად ციფრთა რაოდენობა მეტია.

§ 16. რიცხვთა დამრგვალება

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

წრეწირის სიგრძის თავის დიამეტრთან შეფარდება გამოისახება რიცხვით:

$$\pi = 3{,}14159253589793238462 38\cdots$$

პრაქტიკული თვალსაზრისით სრულიად საკმარისია, ავიღოთ:

$$\pi = 3{,}14.$$

წელიწადში 365,242199... დღე-ღამეა, მაგრამ პრაქტიკულად ხმარობენ 365,25 დღე-ღამეს და უფრო ხშირად—365 დღე-ღამეს.

ხშირად საჭიროა მოცემული რიცხვი შეიცვალოს სხვა ისეთი რიცხვით, რომელიც მოცემულ რიცხვთან ახლოსაა, წარმოსათქმელად და ჩასაწერადაც ადვილია. მაგალითად, ტყის ნაკვეთზე 25327 ძირი ხეა. ამ შემთხვევაში ვიტყვით—ტყის ნაკვეთზე 25 ათასი ძირი ხეა. რიცხვის ასეთ შეცვლას რიცხვთა დამრგვალება ეწოდება.

გავარჩიოთ რიცხვთა დამრგვალება დაწვრილებით.

ავიღოთ რიცხვი 658,3724. თუ ამ რიცხვის მაგივრად ავიღებთ

658,372-ს, მაშინ ვიტყვით, მოცემული რიცხვი დამრგვალებულია სიზუსტით ერთ მეათასედამდე. აქ რიცხვის დამრგვალება ნაკლებობითაა შესრულებული. მოცემული რიცხვის მაგივრად ავიღოთ 658,4. მაშინ ვიტყვით— რიცხვი დამრგვალებულია სიზუსტით ერთ მეათედამდე; დამრგვალება მეტობითაა შესრულებული. აქ პირველი უკუგდებული ციფრია 7, მეორე—2 და მესამე—4.

საზოგადოდ, რიცხვთა დამრგვალებას შემდეგი ხერხით ვაწარმოებთ: თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ზე ნაკლებია, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს არ ვცვლით; თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ზე მეტია ან ტოლი, მაგრამ მომდევნო ციფრებიდან ზოგიერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს ერთი ერთეულით ვზრდით. თუ უკუგდებული პირველი ციფრი 5-ის ტოლია და შემდეგი ციფრები კი ნულებია, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს არ ვცვლით, თუ ის ლუწია, ხოლო ვზრდით ერთი ერთეულით, თუ კენტია.

მაგალითად,

$$568354 \approx \begin{cases} 568350 = 5{,}6835 \cdot 10^5 \\ 568400 = 5{,}684 \cdot 10^5 \\ 568000 = 5{,}68 \cdot 10^5, \\ 570000 = 5{,}7 \cdot 10^5 \end{cases} \quad 8{,}76503 \approx \begin{cases} 8{,}7650 \\ 8{,}765 \\ 8{,}77 \\ 8{,}8 \end{cases}$$

აღნიშნული ხერხით რიცხვთა დამრგვალებას ეწოდება რიცხვთა დამრგვალება დამატებითი წესით.

ავიღოთ 5,4 და 5,42. პირველი რიცხვი მიღებულია მეორე რიცხვიდან მეათედამდე დამრგვალებით. უკუგდებულია 0,02, ე. ი. მიახლოებითი რიცხვი 5,4 შეიცავს შეცდომას, რომელიც ტოლია 0,02. ამ შემთხვევაში ვიტყვით—დამრგვალებით დაშვებული ცდომილება 0,02-ის ტოლია. ცხადია, თუ ავიღებთ 5,41; 5,43; 5,45-ს და დავამრგვალებთ მეათედამდე. მაინც 5,4-ს მივიღებთ. აქ ცდომილებანი სათანადოდ ტოლია: 0,01; 0,03; 0,05-ის.

ასევე, თუ ავიღებთ 5,35; 5,36; 5,37; 5,39, მაშინ ცდომილებანი სათანადოდ იქნება: 0,05; 0,04; 0,03; 0,01. მიღებულ ცდომილებებიდან უდიდესია 0,05.

ცხადია, თუ ცნობილია მიახლოებითი რიცხვი 5,4 მიღებულია დამრგვალების შედეგად, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ: ცდომილება არ აღემატება 0,05-ს, ე. ი. ცდომილება არ აღემატება 0,1-ის ნახევარს.

ზოგჯერ, ნაცვლად იმისა, რომ ვთქვათ: რიცხვი დავამრგვალოთ რაიმე

თანრიგის ერთეულამდე, ვიტყვით: რიცხვი დავამრგვალოთ სათანადო რაოდენობის ნიშნად ციფრამდე.

მაგალითად, რიცხვი 527,685 დავამრგვალოთ ოთხ ნიშნად ციფრამდე, მივიღებთ: $527{,}685 \approx 527{,}7$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ რიცხვი დამრგვალებულია დამატებითი წესით n ნიშნად ციფრამდე, მაშინ მიღებულ რიცხვს აქვს n სანდო ციფრი.

ზოგჯერ რიცხვთა დამრგვალებას ვაწარმოებთ უბრალოდ: n-ური ნიშნადი ციფრის შემდეგ ყველა ციფრს ვუკუვაგდებთ და დატოვებულ ბოლო ციფრს არ ვცვლით. მაგალითად,

$$52{,}357 \approx 52{,}3; \quad 634{,}78 \approx 600 = 6 \cdot 10^2.$$

პირველ მაგალითში უკუგდებულია ციფრები 5 და 7, ხოლო მეორეში ციფრები 3, 4. 7 და 8.

ზოგჯერ ამოცანის ხასიათის მიხედვით აუცილებელია რიცხვთა დამრგვალება ვაწარმოოთ მეტობით ან ნაკლებობით.

მაგალითად, მოქალაქეს აქვს 87,5 მან. ეს ფული მას შეუძლია დახარჯოს 8 დღეში. მაშინ ერთ დღეში უნდა დახარჯოს აღებული ფულის მერვედი ნაწილი:

$$87{,}5 : 8 = 10{,}9375 \text{ (მან.)}.$$

ცხადია, 1 მანეთიდან 0,9375 ნაწილის აღება არ შეიძლება, რადგანაც ფულის უმცირესი ნიშანია 0,01 მან. ამიტომ 10,9375 მან. უნდა დამრგვალდეს 0,01-მდე (ოთხ ნიშნად ციფრამდე); თუ 10,9375-ს დავამრგვალებთ ჩვეულებრივად, მივიღებთ:

$$10{,}9375 \approx 10{,}94 \text{ (მან.)}.$$

მაგრამ, მაშინ მოქალაქეს აღნიშნული თანხა არ ეყოფა 8 დღეს, დააკლდება ფული. ამიტომ, ბუნებრივია, დამრგვალება უნდა მოვახდინოთ ნაკლებობით:

$$10{,}9375 \approx 10{,}93.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი.

ვთქვათ, გამოვიანგარიშეთ, რომ ფიცრის წყალში ჩაძირვისათვის საჭიროა ამ ფიცარზე 4,13 კგ ტვირთის დადება. მაგრამ ისეთი სასწორი გვაქვს, რომელიც 0,05 კგ სიზუსტეს იძლევა. ცხადია, ამ სასწორით შეგვიძლია ავწონოთ 4,1; 4,15; 4,2 კგ ტვირთი. აქედან რომ ავიღოთ 4,1 კგ, მაშინ შეიძლება ეს ტვირთი საკმარისი არ აღმოჩნდეს სხეულის ჩაძირვისათვის, რადგანაც ტვირთის ნამდვილი წონა x იქნება მოთავსებული 4,1—0,05-სა და 41+0,05-ს შორის:

$$4{,}05 < x < 4{,}15$$

და არავითარი საფუძველი არ გვაქვს ვთქვათ, რომ ტვირთის ნამდვილი წონა აუცილებლად 4,13 კგ-ზე მეტია. ამიტომ ტვირთის წონა უნდა და-

ვამრგვალოთ 0,1-მდე მეტობით: $4,13 \approx 4,2$. ამ წონის ტვირთი აუცილებლად ჩაძირავს აღებულ სხეულს, რადგანაც აღებულ სასწორზე აწონილი ტვირთის ნამდვილი x კგ წონა მოთავსებული იქნება 4,2—0,05-სა და 4,2+0,05-ს შორის:

$$4,15 < x < 4,25.$$

x-ის ქვედა საზღვარიც კი მეტია 4,13 კგ-ზე.

§ 17. მიახლოებით რიცხვთა შეკრება და გამოკლება

ავიღოთ ერთი და იგივე ათობითი ნიშნების მქონე მიახლოებითი რიცხვები და შევკრიბოთ

$$22,53+34,65+11,24+20,36=88,78,$$

გამოვარკვიოთ, მიღებულ ჯამში რამდენი ათწილადი ნიშანია სანდო.

ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ. თუ შესაკრებთა რიცხვი მცირე არ იქნება, შესაკრებთაგან ზოგი მეტობით იქნება აღებული და ზოგიც ნაკლებობით; ამიტომ შეკრების დროს მოხდება ცდომილებების ურთიერთგაბათილება.

ამ მოსაზრების ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი:

$$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}.$$

თითოეული შესაკრები აქ გადავაქციოთ ათწილადად და შევკრიბოთ:

$$0,33+0,14+0,11+0,09+0,08+0,07+0,06+0,05+$$
$$+0,05+0,04=1,02.$$

თუ თითოეულ შესაკრებს ოთხი ათობითი ნიშნით ავიღებთ, გვექნება:

$$0,3333+0,1429+0,1111+0,0909+0,0769+0,0667+$$
$$+0,0588+0,0526+0,0476+0,0435=1,0243.$$

ამგვარად, მიახლოებითი რიცხვების ჯამში, რომლებიც ორ-ორი ათობითი ნიშნითაა აღებული, სანდოა ორივე ათობითი ნიშანი 10,02.

მაშასადამე, ისეთ მიახლოებით რიცხვთა ჯამში, რომელთაც ერთი და იმავე რაოდენობის ათობითი ნიშნები აქვს, შეიძლება ყველა ათობითი ნიშანი სანდო იყოს.

განვიხილოთ სხვადასხვა ათობით ნიშნებიანი მიახლოებითი რიცხვების ჯამი (უკუგდებული ციფრები ?-ით შევცვალოთ):

$$\begin{array}{r} 25,1??? \\ +\ 16,27?? \\ 14,443? \\ 37,51?? \\ \hline 93,123? \approx 93,1\,. \end{array}$$

ცხადია, ჯამში 3 არ იმსახურებს ნდობას, რადგანაც ზოგიერთ შესაკრებში მეასედის ციფრი სავსებით უცნობია. ასევე არ იმსახურებს ნდობას მეათედების ციფრი 2-იც. ამის გამო ეს ციფრები უნდა უკუვაგდოთ. მივიღებთ 93,1, ე. ი. ჯამში იმდენი ათობითი ნიშანი დარჩა სანდო, რამდენიც იყო ერთ შესაკრებში—25,1.

მიახლოებით რიცხვთა ჯამში უნდა დავტოვოთ იმ შესაკრების ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა, რომელშიაც ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა უმცირესია.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი:

$$\begin{array}{r} 5{,}43 \\ +\ 6{,}156 \\ 7{,}2057 \\ 9{,}13442 \\ \hline 27{,}92\underline{612} \approx 27{,}93. \end{array}$$

აქ შეკრებაში ზედმეტს ვშრომობთ. ამ ზედმეტი შრომისაგან განვთავისუფლდებით, თუ მოცემულ რიცხვებს წინასწარ დავამრგვალებთ. პრაქტიკული მოსაზრებით მოცემულ რიცხვში ერთი ათობითი ნიშნით მეტს ვტოვებთ, ვიდრე მოსალოდნელ ჯამში იქნება:

$$\begin{array}{r} 5{,}43 \\ +\ 6{,}156 \\ 7{,}206 \\ 9{,}134 \\ \hline 27{,}92\underline{6} \approx 27{,}93. \end{array}$$

სრულიად ანალოგიურად მოვიქცევით მიახლოებით რიცხვთა გამოკლების შემთხვევაში:

მაგალითად:

$$\begin{array}{r} -\ 3{,}8??? \\ 1{,}237? \\ \hline 2{,}5\underline{63}? \approx 2{,}6. \end{array}$$

სხვაობაში მიღებული ციფრები 6 და 3 სანდო არ არის, ამიტომ ისინი უნდა უკუვაგდოთ დამრგვალების წესით. სხვაობაში გვექნება 2,6. მიახლოებით რიცხვთა გამოკლების შემთხვევაშიაც ზედმეტ შრომასთან გვაქვს საქმე. ამ ზედმეტი შრომისაგან განვთავისუფლდებით, თუ საკლების ან მაკლების სათანადო დამრგვალებას მოვახდენთ. მოცემულ რიცხვთა დამრგვალების დროს უნდა შევინარჩუნოთ ერთი სათადარიგო ციფრი. განხილული მაგალითისათვის გვექნება:

$$\begin{array}{r} -\ 3{,}8 \\ 1{,}24 \\ \hline 2{,}5\underline{6} \approx 2{,}6. \end{array}$$

ამგვარად, მიახლოებითი რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების შედეგში უნდა შევინარჩუნოთ იმ მოცემული რიცხვის ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა, რომელშიაც ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა უმცირესია.

§ 16. მიახლოებით რიცხვთა გამრავლება

ვთქვათ, გვინდა გავიგოთ მართკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებია 53,4 მ და 34,8 მ.

საძებნი ფართობი იქნება

$$53{,}4\cdot 34{,}8=1858{,}32\ (\text{მ}^2).$$

გავარჩიოთ, შედეგში რომელი ციფრია სანდო. ამისათვის უკუგდებული ციფრების ნაცვლად მოცემულ რიცხვებში ? ჩავსვათ და შევასრულოთ გამრავლება. გამოთვლების დროს ?-ის რაიმე რიცხვზე ნამრავლი კვლავ ?-ით შევცვალოთ.

$$\begin{array}{r} \times\ 53{,}4? \\ 34{,}8? \\ \hline ???\ ?? \\ 4272\ ? \\ +\ 2136? \\ 1602? \\ \hline 1858{,}32?? \approx 1860 \end{array}$$

აშკარა შესამჩნევია, რომ ნამრავლში სრულიად სანდო არ არის 8,3 და 2. ნამრავლში ამ ციფრების შენარჩუნებას აზრი არა აქვს. საძებნი ფართობი ≈ 1860 მ².

პირველ შესაკრებში ხუთი ? დავწერეთ. ეს იმიტომ, რომ რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე ნამრავლი უმეტესად ერთი ციფრით მეტს შეიცავს, ვიდრე მოცემულ რიცხვშია.

განხილული მაგალითიდან აშკარაა, რომ ნამრავლში სამი ნიშნადი ციფრია, ე. ი. იმდენი, რამდენი ნიშნადი ციფრითაცაა მოცემული რიცხვები.

ავიღოთ სხვადასხვა ნიშნადციფრებიანი მიახლოებითი რიცხვები და გადავამრავლოთ:

$$\begin{array}{r} \times\ 2{,}324? \\ 8{,}2??? \\ \hline ??\ ???? \\ ???\ ??? \\ +\ ????\ ?? \\ 4648\ ? \\ 18\ 592? \\ \hline 19{,}0568\ ???? \approx 19. \end{array}$$

ცხადია. ნამრავლში ორი ნიშნადი ციფრის მეტის შენარჩუნებას აზრი არა აქვს, დანარჩენი ციფრები არავითარ ნდობას არ იმსახურებს.

მოვიგონოთ ის, რომ, თუ რიცხვში ნაკლები რაოდენობის ნიშნადი ციფრია, მაშინ ეს რიცხვი ნაკლებად ზუსტია. ამის გამო მიახლოებითი რიცხვების ნამრავლში ნიშნად ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრის შესახებ გვექნება შემდეგი ხერხი:

მიახლოებით რიცხვთა ნამრავლში უნდა შევინარჩუნოთ იმდენი ნიშნადი ციფრი, რამდენიცაა უმცირესი სიზუსტის მამრავლში.

როგორც ადვილი შესამჩნევია, გამრავლების შესრულების შემთხვევაში ზედმეტ მოქმედებასთან გვაქვს საქმე. ამ ზედმეტი მოქმედებისაგან გათავისუფლებისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ: თუ უმცირესი სიზუსტის მქონე თანამამრავლში n ნიშნადი ციფრია, მაშინ მეორე თანამამრავლი დავამრგვალოთ $(n+2)$ ნიშნად ციფრამდე დამატებითი წესის გარეშე. სამრავლად $(n+2)$ ნიშნადციფრიანი რიცხვი ავიღოთ, ხოლო მამრავლად n ნიშნადციფრიანი რიცხვი. მიახლოებითი რიცხვების გამრავლება კიდევ უფრო გამარტივდება, თუ გამოვიყენებთ გამრავლებას მარცხნიდან მარჯვნივ. გამრავლების ეს ხერხი ვაჩვენოთ ზუსტ რიცხვზე (§ 4.1). მაგალითად,

$$\begin{array}{r l} \times\; 542 & \\ 32 & \\ \hline 1626 & = 542\cdot 3 \\ +\; 1084 & = 542\cdot 2 \\ \hline 17344 & \end{array}$$

ჯერ 542-ს ვამრავლებთ 3 ათეულზე, მივიღებთ 1626 ათეულს. შემდეგ 542-ს ვამრავლებთ 2 ერთეულზე, მივიღებთ 1084-ს, შემდეგ 1626 ათეულს უნდა მივუმატოთ 1084. ცხადია, ეს შეკრება ასე უნდა ჩავწეროთ:

$$\begin{array}{r} +\; 16260 \\ 1084 \end{array}$$

მაგრამ 0-ს პირველ შესაკრებში არ ვწერთ და ვგულისხმობთ, ხოლო მის ქვეშ მეორე შესაკრების ერთეულებს—4-ს ვწერთ.

ამგვარად, გამრავლება მარცხნიდან მარჯვნივ შემდეგნაირად სრულდება: სამრავლი მრავლდება მამრავლის უდიდესი თანრიგის ერთეულებზე, შემდეგ სამრავლი მრავლდება მომდევნო თანრიგის ერთეულებზე და მიეწერება წინა ნამრავლს ისე, რომ თანრიგითი ერთეულები წინა ნამრავლის თანრიგითი ერთეულების ქვეშ მოხვდეს. ამისათვის საკმარისია მეორე შუალედური ნამრავლი პირველი შუალედური ნამრავლიდან ერთი ციფრით გავწიოთ მარჯვნივ. შემდეგ სამრავლი უნდა გავამრავლოთ

მესამე მომდევნო რიცხვზე და ეს ნამრავლი მეორე შუალედური ნამრავლის ქვეშ დავწეროთ ერთი ციფრით მარჯვნივ და ა. შ.

მაგალითად,

$$
\begin{array}{r}
\times\ 527 \\
234 \\
\hline
1054 \\
+\ 1581 \\
2108 \\
\hline
123318
\end{array}
$$

გავამრავლოთ მიახლოებითი რიცხვები მარცხნიდან მარჯვნივ.

ვთქვათ, ერთ-ერთ მამრავლში n ნიშნადი ციფრია, მაშინ მეორე რიცხვი დავამრგვალოთ $(n+2)$ ნიშნად ციფრამდე და სამრავლად ავიღოთ, ხოლო მამრავლად n ნიშნადციფრიანი რიცხვი ავიღოთ.

მაგალითად,

$$
5,23425\cdot 2,3=5,234
$$

$$
\begin{array}{rl}
\times\ 2,3 & \\
\hline
+\ 10468 & =5234\cdot 2 \\
15702 & =5234\cdot 3 \\
\hline
12,0382 & \approx 12.
\end{array}
$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ მეორე შუალედურ ჯამში 2—ზედმეტია, იგი მაინც უნდა უკუვაგდოთ. იგი მიღებულია 4-ის 3-ზე გამრავლებით. ამიტომ 4-ს 3-ზე ნუ გავამრავლებთ. 4 უკუვაგდოთ. მამრავლში თუ მესამე ციფრი გვექნება, მაშინ ამ მესამე ციფრზეც ნუ გავამრავლებთ სამრავლის—3-ს. იგიც უკუვაგდოთ. მაგრამ ნამრავლში რომ ციფრთა რაოდენობა ზუსტად განვსაზღვროთ, შუალედურ ჯამებში უკუგდებული ციფრების მაგივრად 0-ები დავწეროთ. ამასთანავე სამრავლში რომ გამრავლებული ციფრები არ აგვერიოს, უკუგდებულ ციფრებზე მიმდევრობით დავსვათ წერტილები. ასევე იმ რიგით დავსვათ წერტილები მამრავლის ციფრებზე, რომელი რიგითაც გამრავლებაში მონაწილეობდნენ.

მაგალითად,

$$
\begin{array}{rl}
\times\ 3,1\dot{4}\dot{1}\dot{5}\dot{2} & \\
\dot{4},\dot{1}\dot{2}\dot{3} & \\
\hline
12\,56608 & =314152\cdot 4 \\
+\ 31415\underline{0} & =31415\cdot 1 \\
6282\underline{00} & =3141\cdot 2 \\
942\underline{\underline{000}} & =314\cdot 3 \\
\hline
12,95247\underline{000} & \approx 12,95.
\end{array}
$$

მაგალითად,

$$
\begin{array}{r}
52\dot{4}\dot{3}\dot{2} \\
\times\ \dot{3}\dot{4}\dot{6} \\
\hline
157296 \\
+\ 20972\underline{0} \\
3144\underline{00} \\
\hline
181412\underline{00}
\end{array}
\approx 18\,\underline{100\,000} = 181 \cdot 10^5.
$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ **ნამრავლში ციფრთა რაოდენობა ტოლია თანამამრავლთა ციფრთა ჯამის, ან ერთით ნაკლებია ციფრთა ჯამზე.**

თუ რიცხვთა უდიდესი თანრიგის ერთეულთა ნამრავლი ორნიშნაა, მაშინ ნამრავლში აუცილებლად ციფრთა რიცხვი თანამამრავლთა ციფრთა ჯამის ტოლია (§ 4.2).

მაგალითად, $3,4 \cdot 6 = 20,4$—სამნიშნაა,

$34 \cdot 210 = 7140$—ოთხნიშნაა;

თუ რაიმე საშუალებით დავადგენთ ციფრთა რაოდენობას ნამრავლში, მაშინ $\underline{0}$-ების ხმარება შუალედურ ჯამში არ დაგვჭირდება.

მაგალითად,

$$
\begin{array}{r}
9,27865 \\
\times\ 4,321 \\
\hline
3711460 \\
278358 \\
+\quad 18556 \\
927 \\
\hline
40,09301
\end{array}
\approx 40,09.
$$

ნამრავლში ციფრთა რაოდენობა ტოლია თანამამრავლთა ციფრთა რაოდენობის ჯამისა, რადგანაც ნამრავლი $9 \cdot 4$ $(=36)$ ორნიშნაა.

§ 19. მიახლოებითი რიცხვების გაყოფა

ჯერ განვიხილოთ ტოლნიშნადციფრიანი მიახლოებითი რიცხვების გაყოფა.

მაგ., $40,1:12,3$. უკუგდებული ციფრების ნაცვლად ?-ები დავსვათ. ასევე, ნაშთის წვრილ ერთეულებად გადაქცევა ?-ის მიწერით შევასრულოთ.

```
40,1 : 12,3 = 401  ?: 123? = 3,26.
             −369  ?
             ---------
               32 | ??
              −24 | 6?
             ---------
                7 | 4??
               −7 | 38?
             ---------
                  | 2?
```

უკანასკნელ ნაშთში მიღებული ციფრები არც ერთი სანდო არ არის, ამიტომ გაყოფის გაგრძელებას აზრი აღარა აქვს.

ამგვარად, გვექნება:

$$40,1:12,3 \approx 3,26,$$

ე. ი. სამი ნიშნადციფრიანი მიახლოებითი რიცხვების განაყოფი სამ სანდო ნიშნად ციფრს შეიცავს.

განვიხილოთ სხვადასხვა ნიშნადციფრიანი რიცხვების გაყოფა,

```
51,74 : 3,2 = 517,4 ? : 32? = 16,1
             −32?
             ---------
               19 | 7 4
              −19 | 2 ?
             ---------
                  | 5 4?
                  | 3,2?
             ---------
                  | 2,2?
```

გაყოფით მიღებული პირველ ნაშთში ციფრი 7—საეჭვოა, მეორე ნაშთში ციფრები 5 და 4—საეჭვოა, ამიტომ განაყოფში მხოლოდ ორი ციფრია სანდო, ე. ი.

$$51,74:3,2 \approx 16.$$

ამგვარად, *მიახლოებითი რიცხვების განაყოფში უნდა შევინარჩუნოთ იმდენი ნიშნადი ციფრი, რამდენი ნიშნადი ციფრიცაა მოცემული რიცხვებიდან უმცირესი სიზუსტის რიცხვში.*

განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, რომ ვიდრე გაყოფას დავიწყებდეთ, საჭიროა განვსაზღვროთ ნიშნად ციფრთა n რაოდენობა განაყოფში. გავყოთ ისე, რომ განაყოფში $(n+1)$ ნიშნადი ციფრი მივიღოთ და შემდეგ კი განაყოფი n ნიშნად ციფრამდე დავამრგვალოთ.

მაგალითად, 917,8 : 2,34; განაყოფში უნდა შევინარჩუნოთ სამი ნიშნადი ციფრი. ამიტომ გაყოფა ოთხ ნიშნად ციფრამდე შევასრულოთ.

$$
\begin{array}{r}
917{,}8:2{,}34=91780:234=392{,}2 \\
-\underline{702} \\
-\,2158 \\
\underline{2106} \\
-\,520 \\
\underline{468} \\
-\,520 \\
\underline{468} \\
52
\end{array}
$$

ე. ი. $917{,}8:2{,}34\approx 392.$

§ 20. ერთობლივი მოქმედებანი

თუ საჭიროა შესრულდეს მიმდევრობით რამდენიმე მოქმედება, მაშინ აუცილებელია, მოქმედებათა შედეგი გზადაგზა დავამრგვალოთ, მაგრამ მიმდევრობით დამრგვალებას შეუძლია გამოიწვიოს ცდომილებათა დაგროვება, რაც საბოლოო შედეგზე დიდ გავლენას მოახდენს, ამ დიდ ცდომილებას ავიცილებთ, თუ ყოველი მოქმედების შედეგში ერთი სათადარიგო ციფრით მეტს ავიღებთ, ვიდრე აღებული მოქმედებითაა აუცილებელი.

ამ მოსაზრების ნათელსაყოფად განვიხილოთ მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$x=\frac{2{,}56\cdot 0{,}032-0{,}624\cdot 0{,}837}{3{,}248\cdot 9{,}6-4{,}21\cdot 0{,}53194}.$$

მოცემული რიცხვებიდან უმცირესი სიზუსტის რიცხვი ორ ნიშნად ციფრს შეიცავს. ამიტომ პასუხში ორი ნიშნადი ციფრი უნდა შევინარჩუნოთ.

გამოთვლები შევასრულოთ მიმდევრობით სამი ნიშნადი ციფრით.

1) $2{,}56\cdot 0{,}032$;

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}2{,}56\\0{,}032\end{array} \\
\hline
+\begin{array}{r}768\\500\end{array} \\
\hline
0{,}08180\approx 0{,}0818
\end{array}
$$

2) $0{,}624\cdot 0{,}837$;

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}0{,}624\\0{,}837\end{array} \\
\hline
4992 \\
+\ 1860 \\
4200 \\
\hline
0{,}522000\approx 0{,}522.
\end{array}
$$

3) $0{,}0818-0{,}522$;

$0{,}082-0{,}522=-0{,}440.$

4) $3,248 \cdot 9,6;$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3,248 \\ 9,6 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 29232 \\ 19440 \end{array} \\ \hline 31,1760 \approx 31,2 \end{array}$$

5) $4,21 \cdot 0,53194;$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 0,53194 \\ 0,421 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 212776 \\ 106380 \\ 53100 \end{array} \\ \hline 2,2394500 \approx 2,24. \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 31,2 \\ 2,24 \end{array} \\ \hline 29,0 \end{array}$$

7) $0,440 : 29,0;$

$$\begin{array}{l} 0,44 : 29 = 0,0151 = 0,015 \\ \begin{array}{r} -\begin{array}{r} 0,44 \\ 29 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 150 \\ 145 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 50 \\ 29 \end{array} \\ \hline 21 \end{array} \end{array}$$

მაშასადამე,

$$x \approx -0,015.$$

ამ მაგალითით ძნელი წარმოსადგენი არ არის, რომ საძიებელი x-ის მნიშვნელობა შეგვეძლო ნებისმიერი რაოდენობის ათობითი ნიშნით მიგვეღო, მაგრამ აქედან სანდობი იქნებოდა მხოლოდ ორი ნიშნადი ციფრი. დანარჩენი ციფრების მოძებნაზე უშედეგოდ დავკარგავდით დროს. მხოლოდ და მხოლოდ მიახლოებითი გამოთვლების ელემენტარული საკითხების უცოდინარობით აიხსნება, როდესაც შედეგში უამრავ ნიშნად ციფრს ტოვებენ. თუ დიდი რაოდენობის ციფრები დავტოვეთ შედეგში, რომლებიც არავითარ ნდობას არ იმსახურებენ, მაშინ იმდენად იზრდება ცდომილება, რომ იგი დიდ გავლენას ახდენს შედეგზე. ამიტომ ზედმეტი ციფრები, რომლებიც სანდო არ არის, უნდა უკუვაგდოთ: ყოველი ზედმეტი ციფრი იძლევა შეცდომას. აძლევდა რა აკად. ა. ნ. კრილოვი გამოთვლებისათვის მიახლოებითი გამოთვლების ცოდნას დიდ მნიშვნელობას ამბობდა: „მე ადრე შევნიშნე, რომ ყველა ცნობარში, როგორც რუსულში, ისე უცხოურში, რეკომენდებული რიცხვითი გამოთვლების ხერხები შეიძლება იმის ნიმუშად გამოდგეს, თუ როგორ არ უნდა ვაწარმოოთ გამოთვლები··· მე ვაჩვენე მაგალითებზე, სადაც 90% იყო ზედმეტი ციფრი, რომელთა უკუგდება სიზუსტეს არ აზიანებდა“...

ზემოთ განხილული მაგალითებიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ შედეგის სიზუსტის ასამაღლებლად საჭიროა მონაცემების სიზუსტე ამაღლდეს, რაც პრაქტიკულად დიდ სიძნელესთან არის ხოლმე დაკავშირებული. ამის გამო იყო ის დიდი გაკვირვება, რომელიც გამოიწვია დ. ი. მენდე-

ლეევის[1] მიერ ორი წლის განმავლობაში გაწეულმა დიდმა შრომამ, როდესაც მან გამოაქვეყნა

$$1 \text{ არშინი} \approx 0{,}711200 \text{ მ.}$$

მიახლოებითი გამოთვლების ის ხერხები, რომლებიც აკად. ა. ნ. კრილოვის მიერ იყო განვითარებული, თავის დროს დიდ წინააღმდეგობას წააწყდა, ისე, როგორც ყოველი ახალი, პროგრესული ძველი დრომოჭმულისაგან განიცდის დევნას. მაგრამ მან დიდი შრომის და ბრძოლის შემდეგ პრაქტიკაში დანერგა მიახლოებითი გამოთვლების ახალი ხერხები.

§ 21. მიახლოებითი გამოთვლები წინასწარ დაშვებული ცდომილების სიდიდით

ზოგჯერ აუცილებელია ვიცოდეთ, თუ როგორი სიზუსტით ვაწარმოოთ გამოთვლა, რომ შედეგი წინასწარ განსაზღვრული n სანდო ნიშნადი ციფრით მივიღოთ. ცხადია, თუ მოცემული რიცხვები n-ზე მეტ ნიშნად ციფრს არ შეიცავს, მაშინ შედეგში n სანდო ნიშნად ციფრს ვერ მივიღებთ. ამის გამო რიცხვები მოცემული უნდა იყოს n-ზე მეტი სანდო ნიშნადი ციფრით. მაგრამ, თუ საკმარისად დიდი რაოდენობის ნიშნადი ციფრები ავიღეთ, მაშინ გამოთვლები მეტად შრომატევადი გახდება, სადაც შრომის გარკვეული ნაწილი უსარგებლოდ დაიკარგება. პრაქტიკული ცხოვრებისათვის მეტად დიდი რაოდენობის ნიშნადციფრებიანი რიცხვები საჭირო არ არის.

მოვიგონოთ ის, რომ შეკრებისა და გამოკლების შემთხვევებში სიზუსტეს ათობითი ნიშნების რაოდენობით ვაფასებთ, ხოლო გამრავლებისა და გაყოფის შემთხვევაში—ნიშნად ციფრთა რაოდენობით. ამიტომ შეკრება-გამოკლების შემთხვევაში შედეგის n ათობითი ნიშნით მიღებისათვის, აუცილებელია, რიცხვები მოცემული იყოს $(n+1)$ ათობითი ნიშნით, ხოლო გამრავლება-გაყოფით n ნიშნადი ციფრით შედეგის მიღებისათვის აუცილებელია, რიცხვები $(n+1)$ ან $(n+2)$ ნიშნადი ციფრით იყოს მოცემული.

თუ ორივე საფეხურის მოქმედებით გვინდა შედეგი n ნიშნადი ციფრით მივიღოთ, მაშინ რიცხვები იმდენი ათობითი ნიშნით უნდა ავიღოთ, რამდენიც უზრუნველყოფს შედეგში n ნიშნადი ციფრის მიღებას.

მაგ., რამდენი ნიშნადი ციფრით უნდა ავიღოთ $\frac{2}{3}$ და $\frac{5}{7}$, რომ ნამ-

---

[1] დიმიტრი ივანეს ძე მენდელეევი (1834—1907). დიდი რუსი მეცნიერი, ქიმიკოსი, წონისა და ზომის მთავარი პალატის დამაარსებელი.

რაველში ორი სანდო ციფრი მივიღოთ. ამისათვის საკმარისია მამრავლები სამ-სანი ნიშნადი ციფრით ავიღოთ:

$$\frac{2}{3} \approx 0,667; \qquad \frac{5}{7} \approx 0,714.$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \approx 0,667 \cdot 0,714;$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 0,667 \\ 0,714 \end{array} \\ \hline 4669 \\ + \quad 66 \\ 24 \\ \hline 0,4759 \approx 0,48\,. \end{array}$$

ზუსტი გამოთვლით მივიღებთ:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} = 10:21 \approx 0,476$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 100 \\ 84 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 160 \\ 147 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 130 \\ 126 \end{array} \\ \hline 4 \end{array}$$

ე. ი. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \approx 0,48$, რაც ზუსტად ემთხვევა ზემოთ შესრულებულ მიახლოებით გამოთვლას.

განვიხილოთ კიდევ მ ა გ ა ლ ი თ ი.

როგორი სიზუსტით უნდა ავიღოთ მოცემული გამოსახულების მდგენელები, რომ შედეგი სამი ნიშნადი ციფრით მივიღოთ:

$$x = \frac{0.(56) + 2,(4)}{0,(3) - 0,33(2)}.$$

აქ საბოლოო მოქმედება გაყოფაა. პასუხში რომ სამი ნიშნადი ციფრი მივიღოთ, საჭიროა მრიცხველი და მნიშვნელი იყოს მიღებული ოთხ-ოთხი ნიშნადი ციფრით.

მრიცხველში ნიშნადი ციფრი 0 მთელის შემდეგ იწყება, ე. ი. ნიშნად ციფრთა რაოდენობა და ათობით ნიშანთა რაოდენობა ტოლია. ამიტომ მრიცხველის შესაკრებები ასე უნდა ავიღოთ:

$$0,(56) \approx 0,5656; \qquad 0.2(4) \approx 0,2444,$$

მაშინ გვექნება:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 0,(56)\approx 0,5656 \\ 0,2(4)\approx 0,2444 \end{array} \\ \hline 0,8100 \end{array}$$

თუ მნიშვნელშიაც სიდიდეებს ოთხ-ოთხი ათობითი ციფრით ავიღებთ, გვექნება:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 0,(3)\approx 0,3333 \\ 0,33(2)\approx 0,3322 \end{array} \\ \hline 0,0011 \end{array}$$

ე. ი. მნიშვნელი ორი ნიშნადი ციფრით მივიღეთ. მაშასადამე, ოთხმა ათობითმა ნიშანმა ვერ უზრუნველყო სხვაობის მოცემა სასურველი რაოდენობის ნიშნადი ციფრებით. ადვილი შესამჩნევია, რომ სხვაობაში სამი ნიშნადი ციფრის მისაღებად, აუცილებელია მნიშვნელში სიდიდეები ექვს-ექვსი ათობითი ნიშნით ავიღოთ. გვექნება:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 0,(3)\approx 0,333333 \\ 0,33(2)\approx 0,332222 \end{array} \\ \hline 0,001111 \end{array}$$

ამგვარად,

$$x=\frac{0,8100}{0,001111}=\begin{array}{r|l} 8100 & 00:1111=729,07 \\ -7777 & \\ \hline 323 & 0 \\ -222 & 2 \\ \hline 100 & 80 \\ -99 & 99 \\ \hline & 8100 \\ & -7777 \\ \hline & 323 \end{array}$$

მაშასადამე,

$$x\approx 729.$$

უბრალო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ შედეგში მიღებული ციფრები ყველა სანდოა.

§ 22. მიახლოებითი რიცხვის ახარისხება

მიახლოებითი რიცხვის მთელი დადებითი მაჩვენებლით ახარისხება გამრავლების კერძო შემთხვევაა. ამის გამო ადვილი დასადგენია ახარისხების შემთხვევაში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა.

მაგალითად, $8,4^2=8,4\cdot 8,4.$

ამ შემთხვევაში, მიახლოებითი რიცხვის კვადრატი შეიცავს იმდენ ნიშნად ციფრს, რამდენსაც მოცემული რიცხვი.

კვადრატში ახარისხების დაწვრილებითი გარჩევა მიგვიყვანს იმ დასკვნამდე, რომ n-ნიშნად ციფრიანი რიცხვის კვადრატში n-ური ციფრი ყოველთვის სანდო არ არის (§ 42.2).

ცხადია, თუ ხარისხის მაჩვენებელი გაიზრდება, მაშინ მით უმეტეს ცდომილება გაიზრდება და ნიშნად ციფრთა რაოდენობა შემცირდება. ამის გამო ფრთხილად უნდა მოვეკიდოთ რიცხვის დიდ მაჩვენებელში ახარისხებას (ყოველთვის მოცემული რიცხვი ერთ სათადარიგო ციფრს მაინც უნდა შეიცავდეს).

§ 23. მიახლოებითი რიცხვიდან ფესვის ამოღება

თუ მიახლოებითი რიცხვის ახარისხების შემთხვევაში სიზუსტე მცირდება, ფესვის ამოღების შემთხვევაში კი ამას ადგილი არა აქვს. მაგალითად, ვთქვათ, მიახლოებითი რიცხვი 9,3 მიღებულია რიცხვთა დამრგვალებით. მაშინ, რიცხვის ზუსტი მნიშვნელობა x აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$9,26 \leqslant x \leqslant 9,34.$$

ამ უტოლობიდან მივიღებთ:

$$\sqrt{9,26} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{9,34},$$

საიდანაც

$$3,04 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3,06.$$

ე. ი. კვადრატული ფესვი ორნიშნად რიცხვიდან კვლავ ორ სანდო ნიშნად ციფრს შეიცავს.

ამგვარად, მიახლოებითი რიცხვიდან ფესვის ამოღებით მიღებული შედეგის სიზუსტე არ არის ნაკლები მოცემული რიცხვის სიზუსტეზე.

თავი IV

მიახლოებითი გამოთვლების წარმოება საზღვართა ხერხით

§ 24. ზოგადი შენიშვნები

ჩვენ პირველ თავში გავეცანით მიახლოებითი რიცხვის ჩაწერის კრილოვის პრინციპს, რომელიც ზუსტად ასე გამოითქმის:

ყოველგვარი გამოთვლისა და გაზომვის შედეგი ისე უნა ჩაიწეროს, რომ ამ ჩანაწერით ვიმსჯელოთ სიზუსტის ხარისხზე. ამისათვის საკმარისია შედეგში დავტოვოთ ყველა სანდო ნიშნადი ციფრი, გარდა ბოლო ციფრისა. ბოლო ციფრი შეიძლება შეიცავდეს შეცდომას, მაგრამ არა-უმეტეს ერთი ერთეულისა.

უკანასკნელი მოთხოვნა ყოველთვის არ შეგვიძლია შევასრულოთ, რადგანაც არ შეგვიძლია ვთქვათ, როგორი სიდიდისაა უკანასკნელ ციფრში ცდომილება იმ ხერხით, რომლებიც ზემოთ აღვწერეთ.

ცნობილია, რომ ცდომილებათა მცირე მნიშვნელობა მეტადაა მოსალოდნელი, ვიდრე დიდი მნიშვნელობა.

მართლაც, თუ რაიმე მონაკვეთის სიგრძე გავზომეთ და მივიღეთ სხვადასხვა მნიშვნელობა, მაშინ ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც მეტად განსხვავებულია სხვა მნიშვნელობისაგან, უნდა უკუვაგდოთ, მხედველობაში არ მივიღოთ. ასევე მოვიქცევით სხვა შემთხვევაშიაც. ასე რომ, გაზომვით მიღებულ სიდიდეებში ცდომილება მცირეა. ეს „მცირე ცდომილება“ იმას არ ნიშნავს, რომ იგი დატოვებული ბოლო ციფრის ერთეულზე ნაკლებია. იგი შეიძლება ერთეულზე მეტიც იყოს. მაგრამ ამოცანის ხასიათის გამო შეიძლება შევინარჩუნოთ.

ბევრ შემთხვევაში ცდომილების სიდიდის უცოდინარობა არ იწვევს არავითარ გაუგებრობას, მაგრამ არის შემთხვევები, როდესაც სასურველია ცდომილების სიდიდის შესახებ სრულიად გარკვეული წარმოდგენა გვქონდეს. თუ შეუძლებელია ცდომილება ზუსტად განვსაზღვროთ, მაშინ უნდა დავკმაყოფილდეთ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობით. ამისათვის უნდა ვიცოდეთ, რა შუალედშია საძებნი სიდიდე მოთავსებული, ე. ი. უნდა ვიცოდეთ ის საზღვრები, რომელთა შორისაცაა მოთავსებული საძებნი სიდიდე. ამასთან, ამ საზღვართა შორის სხვაობა რაც შეიძლება მცირე იყოს.

თუ საძებნი x სიდიდისათვის განსაზღვრულია ქვედა საზღვარი A და ზედა საზღვარი B, მაშინ x-ის მნიშვნელობად შეგვიძლია მივიღოთ A და B-ს საშუალო არითმეტიკული:

$$x=\frac{A+B}{2}.$$

ეს საშუალო არითმეტიკული ისე უნდა დავამრგვალოთ, რომ მხოლოდ უკანასკნელი ციფრი იყოს საეჭვო.

შემდეგ თავში დავამტკიცებთ, რომ შედეგთა საშუალო არითმეტიკული უფრო მეტ ნდობას იმსახურებს, ვიდრე თითოეული შედეგი ცალ-ცალკე.

იმ ხერხს, რომლის საშუალებითაც დადგინდება საძებნი სიდიდის საზღვრები, ეწოდება მიახლოებითი გამოთვლები საზღვართა ხერხით.

ზოგჯერ გაზომვით შეგვიძლია დავადგინოთ საძებნი სიდიდის საზღვრები. მაგალითად, ნახაზზე აღებული რაიმე მონაკვეთის გაზომვით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მისი სიგრძე ნაკლებია 125 მმ-ზე და მეტია 124 მმ-ზე. თუ ვისარგებლებთ განივი მასშტაბით, მაშინ საზღვრებს

შორის მანძილი შეგვიძლია შევამციროთ. ასევე, თუ სხეული ავწონეთ 5-გრამიანი სიზუსტის სასწორზე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სხეულის წონა ნაკლებია, მაგალითად, 250 გ-ზე და მეტია 245 გ-ზე.

თუ საჭიროა x სიდიდის ზედა და ქვედა საზღვრების დამრგვალება, მაშინ ქვედა საზღვარი უნდა დავამრგვალოთ ნაკლებობით, ხოლო ზედა საზღვარი მეტობით.

მაგალითად, დავამრგვალოთ x-ის საზღვრები სამ ნიშნად ციფრამდე:

$$25{,}68<x<25{,}73.$$

მივიღებთ:

$$25{,}6<x<25{,}8.$$

შემდეგში დაგვჭირდება უტოლობათა თვისებებით სარგებლობა:

1. თუ $a>b$ და $c>d$, მაშინ $a+c>b+d$.
2. თუ $a>b$ და $c\leqslant d$, მაშინ $a-c>b-d$.
3. თუ $a>b$ და $c\geqslant d$, მაშინ $ac>bd$. თუ $d>0$ და $ac<bd$, თუ $c<0$.
4. თუ $a>b$, $c\leqslant d$, მაშინ $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ $(c>0)$.
5. თუ $a>b$, მაშინ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.
6. თუ $a>b$, მაშინ $a^n>b^n$.
7. თუ $a>b$, მაშინ $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

§ 26. ჯამის საზღვრები

ვთქვათ, x და y სიდიდეები აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს:

$$A<x<B,\quad C<y<D, \tag{1}$$

მაშინ 1-ლი თვისების თანახმად მივიღებთ:

$$A+C<x+y<B+D. \tag{2}$$

ე. ი. **სიდიდეთა ჯამის ქვედა საზღვარი ტოლია შესაკრებთა ქვედა საზღვრების ჯამის, ხოლო ზედა საზღვარი—შესაკრებთა ზედა საზღვრების ჯამისა.**

მაგალითად,

$$2{,}56<x<2{,}5666,$$
$$5{,}1469<y<5{,}15.$$

მაშინ $x+y$-ის საზღვრების გასაგებად საჭიროა შევკრიბოთ სათანადო საზღვრები. წინასწარ საზღვრები დავამრგვალოთ, გვექნება

$$+\begin{array}{l}2{,}56<x<2{,}567,\\5{,}146<y<5{,}15.\end{array}$$

ჯამში მივიღებთ:

$$7{,}706 < x+y < 7{,}717,$$

საიდანაც გვექნება:

$$7{,}70 < x+y < 7{,}72.$$

§ 26. სხვაობის საზღვრები

(1) უტოლობანი ასე გადავწეროთ:

$$A < x < B,$$
$$-D < -y < -C.$$

აქედან შეკრებით მივიღებთ:

$$A-D < x-y < B-C. \qquad (3)$$

ე. ი. სიდიდეთა სხვაობის ქვედა საზღვარი ტოლია, საკლების ქვედა საზღვრისა და მაკლების ზედა საზღვრის სხვაობისა, ზედა საზღვარი კი—საკლების ზედა საზღვრისა და მაკლების ქვედა საზღვრის სხვაობისა.

მაგალითად,

$$2{,}48 < x < 2{,}52,$$
$$4{,}64 < y < 4{,}66.$$

(3) უტოლობათა საფუძველზე მივიღებთ:

$$2{,}48-4{,}66 < x-y < 2{,}52-4{,}64,$$

ანუ

$$-2{,}18 < x-y < -2{,}12.$$

§ 27. ნამრავლის საზღვრები

(1) სისტემიდან უტოლობათა მე-3 თვისებების საფუძველზე მივიღებთ:

$$AC < xy < BD. \qquad (4)$$

ე. ი. სიდიდეთა ნამრავლების ქვედა საზღვარი ტოლია მამრავლთა ქვედა საზღვრების ნამრავლისა, ხოლო ზედა საზღვარი—მამრავლთა ზედა საზღვრების ნამრავლისა.

მაგალითად,

$$14{,}8 < x < 14{,}9,$$
$$2{,}5 < y < 2{,}6,$$

მაშინ

$$14{,}8 \cdot 2{,}5 < xy < 14{,}9 \cdot 2{,}6,$$

საიდანაც სათანადოდ გადამრავლებისა და ნამრავლის ორ ნიშნად ციფრამდე დამრგვალებით მივიღებთ:

$$37 < xy < 39.$$

§ 28. განაყოფის საზღვრები

(1) უტოლობათა სისტემა უტოლობათა მე-5 თვისების საფუძველზე ასე გადავწეროთ:

$$A<x<B,$$

$$\frac{1}{D}<\frac{1}{y}<\frac{1}{C},$$

საიდანაც სათანადო გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\frac{A}{D}<\frac{x}{y}<\frac{B}{C}. \qquad (5)$$

ე. ი. სიდიდეთა განაყოფის ქვედა საზღვარი ტოლია გამყოფის ქვედა საზღვრის გასაყოფის ზედა საზღვარზე განაყოფისა, ხოლო ზედა საზღვარი—გამყოფის ზედა საზღვრის გასაყოფის ქვედა საზღვარზე განაყოფისა.

მაგალითად,

$$88{,}5<x<89{,}0,$$

$$2{,}80<y<2{,}85.$$

(5) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\frac{88{,}5}{2{,}85}<\frac{x}{y}<\frac{89{,}0}{2{,}80},$$

ამ უტოლობიდან გვექნება:

$$31{,}05<\frac{x}{y}<31{,}78.$$

საზღვართა სათანადო დამრგვალება მოგვცემს:

$$31{,}0<\frac{x}{y}<31{,}8.$$

§ 29. ხარისხისა და ფესვის საზღვრები

თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$A<x<B,$$

მაშინ უტოლობათა მე-6 თვისებით მივიღებთ:

$$A^n<x^n<B^n. \qquad (6)$$

ე. ი. რაიმე სიდიდის დადებითი მაჩვენებლით ხარისხის საზღვრები ტოლია იმავე სიდიდის საზღვრების ხარისხისა.

მაგალითად,

$$6{,}82<x<6{,}84,$$

მაშინ (6) ფორმულით x^3-ისათვის გვექნება უტოლობა:

$$6,82^3<x^3<6,84^3,$$

საიდანაც სათანადო ახარისხებით და მიღებული შედეგების სამ ნიშნად ციფრამდე დამრგვალებით გვექნება:

$$317<x^3<320.$$

უტოლობიდან

$$A<x<B,$$

მე-7 თვისების თანახმად მივიღებთ:

$$\sqrt[n]{A}<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{B}. \tag{7}$$

ე. ი. რაიმე სიდიდიდან მთელი დადებითი მაჩვენებლით ფესვის საზღვრები რომ მივიღოთ, საჭიროა მოცემული სიდიდის საზღვრებიდან სათანადო ხარისხის ფესვი ამოვიღოთ.

მაგალითად:

$$625<x<627,$$

მაშინ $\sqrt[3]{x}$-სათვის მივიღებთ უტოლობას:

$$8,55<\sqrt[3]{x}<8,56.$$

§ 30. გამოსახულების მნიშვნელობის გამოთვლა საზღვართა ხერხით

თუ გამოსახულებაში სხვადასხვა მოქმედება შედის, მაშინ საჭიროა მიმდევრობით გამოვთვალოთ საძებნი სიდიდის საზღვრები. განვიხილოთ მაგალითი:

$$x=\frac{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}}{(\eta+\varkappa)\theta},$$

სადაც

$$6,41<\alpha<6,43;\quad 4,22<\beta<4,24;\quad 1,23<\gamma<1,25;$$

$$2,66<\delta<2,68;\quad 3,20<\eta<3,22;\quad 4,26<\varkappa<4,28;$$

$$5,21<\theta<5,23.$$

1) $$\frac{6,41}{4,24}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{6,43}{4,22},$$

აქედან

$$1,511<\frac{\alpha}{\beta}<1,527.$$

2) $$\frac{1,23}{2,68}<\frac{\gamma}{\delta}<\frac{1,25}{2,66},$$

საიდანაც

$$0,4589<\frac{\gamma}{\delta}<0,4702.$$

3) $$1,511-0,4702<\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}<1,527-0,4589,$$

ანუ

$$1,041<\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}<1,068.$$

4) $$3,20+4,26<\eta+\varkappa<3,22+4,28,$$

აქედან მივიღებთ $7,46<\eta+\varkappa<7,50$.

5) $$7,46\cdot 5,21<(\eta+\varkappa)\theta<7,50\cdot 5,23.$$

სათანადო გამრავლებით მივიღებთ:

$$38,86<(\eta+\varkappa)\theta<39,23.$$

6) $$\frac{1,041}{39,23}<x<\frac{1,068}{38,86},$$

ანუ

$$0,0255<x<0,0275.$$

საიდანაც საზღვრების ორ ნიშნად ციფრამდე დამრგვალებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$0,025<x<0,028.$$

თავი V

ცდომილებათა ძირითადი ცნებანი

§ 81. აბსოლუტური ცდომილება

რიცხვი 7,123546 დავამრგვალოთ სამ ნიშნად ციფრამდე, მივიღებთ 7,12. დაშვებული ცდომილება ტოლია:

$$7,123546-7,12=0,003546.$$

ამ რიცხვს ეწოდება 7,12-ის აბსოლუტური ცდომილება.

საზოგადოდ, თუ რაიმე x სიდიდეს მიახლოებით მნიშვნელობად აქვს a რიცხვი, მაშინ $|x-a|$-ს ეწოდება **a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება.**

რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება აღინიშნება Δa-თი;

$$\Delta a=|x-a|.$$

განხილულ მაგალითში

$$\Delta a=0,003546.$$

უმეტეს შემთხვევაში აბსოლუტური ცდომილების ზუსტად განსაზღვრა შეუძლებელია. მისი განსაზღვრა შეიძლება მხოლოდ მიახლოებით. მაგალითად, თუ მონაკვეთი გავზომეთ სმ-იანი სახაზავით და მივიღეთ 14 სმ, ამ დროს არ შეგვიძლია ვთქვათ რას უდრის აბსოლუტური ცდომილება, რადგანაც არ ვიცით რას უდრის ნამდვილად მონაკვეთის სიგრძე. მაგრამ შეგვიძლია ვთქვათ, აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 0,5 სმ-ს.

აბსოლუტური ცდომილების დაუდგენლობის გამო, მისი შემოღება არ არის პრაქტიკული. მაგრამ ამა თუ იმ გაზომვის დროს შეგვიძლია წარმოდგენა ვიქონიოთ იმ რიცხვზე, რომელსაც არ აღემატება აბსოლუტური ცდომილება. ასეთ რიცხვს **ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება** ეწოდება.

ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება იმ შესაძლებლად მცირე რიცხვს, რომელსაც არ აღემატება მიახლოებითი რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება.

ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებას აღვნიშნავთ α ასოთი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\Delta a \leqslant \alpha. \tag{1}$$

ჩვენ მიერ განხილულ მაგალითში $\alpha=0,5$ სმ. შევნიშნოთ, რომ აბსოლუტური ცდომილება ყოველთვის სახელდებული რიცხვია.

(1) უტოლობიდან ცხადია:

$$-\alpha \leqslant x-a \leqslant \alpha,$$

საიდანაც

$$a-\alpha \leqslant x < a+\alpha. \tag{2}$$

უკანასკნელი ტოლობა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$x \approx a\ (\pm\alpha),$$

რომელიც შემდეგნაირად წაიკითხება: „x დაახლოებით ეტოლება a-ს ცდომილებით, რომელიც როგორც მეტობით, ისე ნაკლებობით, არ აღემატება α-ს“, ან მოკლედ: „x დაახლოებით ეტოლება a-ს α ცდომილებით“.

ცხადია, თუ x-ის ქვედა A და ზედა B საზღვრები ვიცით, მაშინ მის მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ ამ საზღვრების ნახევარი ჯამი:

$$a=\frac{A+B}{2}.$$

ადვილი შესამჩნევია:

$$\alpha=\frac{B-A}{2}.$$

მაგალითად, ვიცით, რომ P-სათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$3,13 < P < 3,15,$$

მაშინ a რიცხვი, რომელიც განისაზღვრება საშუალო არითმეტიკულით

$$a = \frac{3,13+3,15}{2} = 3,14,$$

იქნება P რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. 3,14-ის ზღვრული ცდომილება α განისაზღვრება ტოლობით:

$$\alpha = \frac{3,15-3,13}{2} = 0,01,$$

ამიტომ $P \approx 3,14\ (\pm 0,01)$.

რადგანაც პრაქტიკაში საქმე გვაქვს არა აბსოლუტურ ცდომილებასთან, არამედ ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებასთან, ვიხმართ გამოთქმას „აბსოლუტურ ცდომილებას" და ვიგულისხმებთ ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებას.

მაგალითად, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ აწონის შემთხვევაში 5 გ-ს, კუთხის გაზომვის შემთხვევაში 10″-ს, დროის გაზომვის შემთხვევაში 30 წმ-ს, ტემპერატურის გაზომვის შემთხვევაში 0,5°-ს, სიგრძის გაზომვის შემთხვევაში—0,5 სმ-ს, გვექნება: აბსოლუტური ცდომილებანი: 5 გ, 10″, 30 წმ, 0,5°, 0,5 სმ და სხვ.

§ 32. ფარდობითი ცდომილება

პირველ თავში ვახსენეთ, რომ აბსოლუტური ცდომილება კარგად ვერ ახასიათებს გაზომვის ხარისხს. მართლაც, რვეულის სიგანის გაზომვის დროს თუ 0,5 სმ მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინ, ცხადია, გაზომვა მეტად უპასუხისმგებლოდ გვიწარმოებია. ასევე, თუ 5 გ სხეულის აწონის დროს 1 გ-ს მხედველობაში არ მივიღეთ, მაშინაც, ცხადია, მეტად უხეშად გვიწარმოებია აწონა. ამგვარად, აბსოლუტური ცდომილება არ ახასიათებს გაზომვის ხარისხს. ამ გარემოებას უნდა დაემატოს ისიც, რომ აბსოლუტური ცდომილება სახელდებული რიცხვია, რის გამოც მისი მნიშვნელობა შეიცვლება, თუ ზომის ერთეული ვცვალეთ. ამ მიზეზთა გამო აუცილებელია შემოვიღოთ ცდომილების დამახასიათებლად სხვა სიდიდე. ეს სიდიდეა ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა.

x—ს ი დ ი დ ი ს მ ი ა ხ ლ ო ე ბ ი თ ი a რ ი ც ხ ვ ი ს ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ე წ ო დ ე ბ ა a ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ი ს შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა ს თ ვ ი თ a რ ი ც ხ ვ თ ა ნ:

$$\nabla a = \frac{\Delta a}{a}. \tag{3}$$

∇ იკითხება—ნაბლა.

მაგალითად, $\alpha \approx 40(\pm 1)$,

მაშინ
$$\nabla a = \frac{1}{40} = 0{,}025 = 2{,}5\,\%.$$

პრაქტიკაში ფარდობითი ცდომილება პროცენტებში ($1\,\% = 0{,}01$) ან პრომილებში ($1\,‰ = 0{,}001$) გამოისახება.

მაგალითად,
$$a = 25(\pm 3) \text{ გ},$$
მაშინ
$$\nabla a = \frac{3}{25} = 0{,}12 = 0{,}12\%.$$

ის, რაც აბსოლუტური ცდომილების მიმართ ითქვა, აქაც გავიმეოროთ: ფარდობითი ცდომილება ზუსტად არ განისაზღვრება, ამიტომ პრაქტიკაში განიხილება ზ ღ ვ რ უ ლ ი ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა.

ზ ღ ვ რ უ ლ ი ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ე წ ო დ ე ბ ა შ ე ს ა ძ ლ ე ბ ლ ა დ მ ც ი რ ე δ რ ი ც ხ ვ ს, რ ო მ ე ლ ს ა ც ა რ ა ღ ე მ ა ტ ე ბ ა მ ი ა ხ ლ ო ე ბ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ∇a,
$$\nabla a \leqslant \delta. \tag{4}$$
რადგანაც
$$\Delta a \leqslant \alpha,$$
ამიტომ
$$\frac{\Delta a}{a} \leqslant \frac{\alpha}{a},$$
ე. ი.
$$\delta = \frac{\alpha}{a}. \tag{5}$$
(2) ტოლობა უკანასკნელი ტოლობის საფუძველზე მოგვცემს:
$$a - a\delta \leqslant x \leqslant a + a\delta,$$
ანუ
$$a(1-\delta) \leqslant x \leqslant a(1+\delta). \tag{6}$$

ზოგიერთ შემთხვევაში ფარდობით ცდომილებას განიხილავენ შემდეგი სახით:
$$\nabla' a = \frac{\Delta a}{x}.$$
მაგრამ ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\nabla' a$ მცირე სიდიდით განსხვავდება ∇a-საგან.

მართლაც,
$$|\nabla' a - \nabla a| = \left| \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{x} \right|.$$

მაგრამ

$$\left|\frac{\triangle a}{a}-\frac{\triangle a}{x}\right|=\left|\frac{x\triangle a-a\triangle a}{ax}\right|=\left|\frac{(a+\triangle a)\triangle a-a\triangle a}{ax}\right|=\left|\frac{(\triangle a)^2}{ax}\right|\leqslant\delta^2.$$

ე. ი. სხვაობა

$$|\nabla' a-\nabla a|\leqslant\delta^2.$$

ეს კი მცირე სიდიდეა δ^2-თან ერთად.

პრაქტიკაში იხმარება ზღვრული ფარდობითი ცდომილება. ამიტომ სიტყვა „ზღვრულს" უკუვაგდებთ და ვიხმართ „ფარდობით ცდომილებას", მაგრამ ვიგულისხმებთ ზღვრულ ფარდობით ცდომილებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი ტვირთის 5 გ სიზუსტით აწონით მივიღეთ 2,35 კგ. გავიგოთ ფარდობითი ცდომილება.

მივიღებთ:

$$\delta=\frac{5}{2350}\approx0{,}0022=0{,}22\,\%=2{,}2‰.$$

§ 33. ფარდობით ცდომილებასა და ნიშნად ციფრთა შორის კავშირი

განვიხილოთ მაგალითი. დავამრგვალოთ რიცხვი $x=5{,}9672$ მეასედამდე. გვექნება: $a=5{,}97$. მაშინ აბსოლუტური ცდომილება იქნება:

$$\triangle a=|5{,}9672-5{,}97|=0{,}0028<0{,}005=\frac{1}{2}\cdot10^{-2}.$$

დავამრგვალოთ $x=56324$ ასეულამდე. მივიღებთ: $a=56300=563\cdot10^2$. მაშინ აბსოლუტური ცდომილება იქნება:

$$\triangle a=|563{,}24-563|\cdot10^2=0{,}24\cdot10^2<0.5\cdot10^2=\frac{1}{2}\cdot10^2.$$

ამგვარად, დ ა მ ა ტ ე ბ ი თ ი წ ე ს ი თ რ ი ც ხ ვ ი ს დ ა მ რ გ ვ ა ლ ე ბ ი თ გ ა მ ო წ ვ ე უ ლ ი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ა რ ა ღ ე მ ა ტ ე ბ ა ბ ო ლ ო დ ა ტ ო ვ ე ბ უ ლ ი ც ი ფ რ ი ს თ ა ნ რ ი გ ი ს ე რ თ ე უ ლ ი ს ნ ა ხ ე ვ ა რ ს. (ციფრების დათვლას მარცხნიდან ვიწყებთ).

განვიხილოთ კიდევ მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავამრგვალოთ რიცხვი $x=5{,}2798$ სამ ნიშნად ციფრამდე დამატებითი წესის გარეშე.

გვექნება:

$$a=5{,}27.$$

აქ უკუვაგდეთ 0,0098, რომელიც ნაკლებია 0,01-ზე, ე. ი. აბსოლუტური ცდომილება დატოვებული მესამე ციფრის თანრიგის ერთეულზე ნაკლებია.

ამგვარად, რ ი ც ხ ვ ი ს დ ა მ ა ტ ე ბ ი თ ი წ ე ს ი ს გ ა რ ე შ ე დ ა მ რ გ ვ ა ლ ე ბ ი თ გ ა მ ო წ ვ ე უ ლ ი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი ც დ ო-

მილება არ აღემატება ბოლო დატოვებული ციფრის თანრიგის ერთეულს.

მაგალითი. დავამრგვალოთ რიცხვი 52,536 ოთხ ნიშნად ციფრამდე. მივიღებთ:

$$52{,}536 \approx 52{,}54.$$

მაშინ აბსოლუტური ცდომილება ტოლი იქნება:

$$|53{,}536-52{,}54|=0{,}004<0{,}005,$$

ე. ი. ცდომილება დატოვებული მეოთხე ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება.

მაგალითი. დავამრგვალოთ 932863 ორ ნიშნად ციფრამდე. მივიღებთ

$$932863 \approx 93\underline{0000}=93 \cdot 10^{1},$$

მაშინ აბსოლუტური ცდომილება ტოლი იქნება:

$$|93{,}2863 \cdot 10^{4}-93 \cdot 10^{4}|=0{,}2863 \cdot 10^{4}<0{,}5 \cdot 10^{4}.$$

ცხადია, რომ a რიცხვი x სიდიდის მნიშვნელობაა n ნიშნადი ციფრით დამატებითი წესით, თუ a-ს აბსოლუტური ცდომილება n-ური ნიშნადი ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება. a რიცხვი x-ის მნიშვნელობაა n ნიშნადი ციფრით დამატებითი წესის გარეშე, თუ a-ს აბსოლუტური ცდომილება n-ური ნიშნადი ციფრის თანრიგის ერთეულზე ნაკლებია.

ვთქვათ, x რიცხვში 10-ის უდიდესი ხარისხი m-ია:

$$x=a_m 10^{m}+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_{m-n+1}10^{m-n+1}+ \\ +a_{m-n}10^{m-n}+\cdots+a_0, \tag{7}$$

სადაც $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_0$ ციფრებია.

დავამრგვალოთ x რიცხვი n ნიშნად ციფრამდე დამატებითი წესით, გვექნება:

$$a=a_m 10^{m}+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+\overline{a}_{m-n+1}10^{m-n+1}, \tag{8}$$

სადაც $\overline{a}_{m-n+1}$ მიღებულია a_{m-n+1}-დან შესწორებით. რადგანაც დამრგვალებით დატოვებულია $\overline{a}_{m-n+1}10^{m-n+1}$, ამიტომ a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება Δa არ აღემატება სიდიდეს:

$$\alpha=\frac{1}{2}\,10^{m-n+1}. \tag{9}$$

ხოლო, თუ დამრგვალებულია დამატებითი წესის გარეშე, მაშინ Δa არ აღემატება სიდიდეს

$$\alpha=10^{m-n+1}. \tag{10}$$

გამოვითვალოთ a—რიცხვის ფარდობითი ცდომილება. (8) ფორმულის საფუძველზე გვექნება, რომ a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება სიდიდეს:

$$\frac{\frac{1}{2}10^{m-n+1}}{a_m 10^m}=\frac{1}{2a_m 10^{n-1}},$$

ანუ

$$\delta\leqslant\frac{1}{2a_m 10^{n-1}}. \tag{11}$$

ამ ფორმულის მისაღებად გამოვიყენეთ აშკარა უტოლობა:

$$a=a_m 10^m+\cdots+\bar{a}_{m-n+1}10^{m-n+1}\geqslant a_m 10^m. \tag{12}$$

თუ დავამრგვალეთ დამატებითი წესის გარეშე, მაშინ (10) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\delta\leqslant\frac{1}{a_m 10^{n-1}}. \tag{13}$$

ამგვარად, თუ a რიცხვი x-ის მიახლოებითი მნიშვნელობაა n ნიშნადი ციფრით, მაშინ a-ს ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{2a_m 10^{n-1}}$-ს (დამატებითი წესით დამრგვალების შემთხვევაში) ან $\frac{1}{a_m 10^{n-1}}$-ს (დამრგვალების წესის გარეშე), სადაც a_m არის a-ს პირველი ნიშნადი ციფრი.

მაგალითად, თუ π-ს მნიშვნელობად მივიღებთ 3,14-ს, მაშინ ცხადია,

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 10^{3-1}}<0,0017,$$

ანუ

$$\delta<0,17\%.$$

ამგვარად, მიახლოებითი a რიცხვის პირველი ნიშნადი a_m ციფრით და ნიშნადი ციფრების რაოდენობით—n-ით შეგვიძლია (11) ფორმულის საშუალებით გამოვიანგარიშოთ სათანადო ფარდობითი ცდომილება. ცხადია, იმავე ფორმულით შეგვიძლია შევადგინოთ ცხრილი, საიდანაც მოცემული a_m-ითა და n-ით მზამზარეულად მივიღებთ ფარდობით ცდომილებას პროცენტებში. ამისათვის a_m-ს მივცეთ მნიშვნელობანი: 1, 2,...,9, ხოლო n-ს 1, 2, 3, 4, 5. a_m-ის მნიშვნელობანი დავწეროთ პირველ სვეტში, n-ის მნიშვნელობანი—პირველ სტრიქონში, ხოლო სათანადო ფარდობითი ცდომილება a_m-ის სტრიქონისა და n-ის სვეტის გადაკვეთაში.

მაგალითად, $n=3$, $a_m=1$, მაშინ ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება უტოლობით:

$$\delta<\frac{2}{2\cdot 1\cdot 10^{3-1}}=\frac{1}{200}=0{,}005=0{,}5\%.$$

რიცხვი 0,5% მოვათავსოთ პირველი სტრიქონისა და მესამე სვეტის გადაკვეთაში. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ a_m-ისა და n-ის დაშვებული მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ ცხრილს 1.

ცხრილი 1

a_m \ n	1	2	3	4	5
1	50	5,2	0,50	0,050	0,0050
2	25	2,5	0,25	0,025	0,0025
3	17	1,7	0,17	0,017	0,0017
4	12	1,2	0,12	0,012	0,0012
5	10	1,0	0,10	0.010	0,0010
6	8,3	0,83	0,083	0,0083	0,00083
7	7,1	0,71	0,071	0,0071	0,00071
8	6,3	0,63	0,063	0,0063	0,00063
9	5,6	0,56	0,056	0,0056	0,00056

§ 34. ფარდობითი ცდომილებით ნიშნად ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა

აქამდე მიახლოებითი a რიცხვის ფარდობით ცდომილებას განვსაზღვრავდით a რიცხვში n ნიშნადი ციფრითა და პირველი ნიშნადი a_m ციფრის საშუალებით. ახლა შევისწავლოთ ფარდობითი ცდომილების საშუალებით ნიშნად ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა.

წინასწარ შევამოწმოთ შემდეგი უტოლობის მართებულობა:

$$a_m 10^m \leqslant a < 10^m(a_m+1).$$

(8) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$a=a_m 10^m+10^m\left(\frac{a_{m-1}}{10}+\frac{a_{m-2}}{10^2}+\cdots+\frac{a_{m-n+1}}{10^{n-1}}\right). \tag{14}$$

მიღებული გამოსახულების ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდე წესიერი წილადია, რადგანაც

$$a_i<10 \quad (i=m-1,\quad m-2,\ldots),$$

ამიტომ გვექნება

$$\frac{a_{m-1}}{10}\leqslant\frac{9}{10},\qquad \frac{a_{m-2}}{10^2}\leqslant\frac{9}{100},\ldots$$

უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$\frac{a_{m-1}}{10}+\frac{a_{m-2}}{10^2}+\cdots+\frac{a_{m-n+1}}{10^{n-1}}\leqslant\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots=0,99\ldots9,$$

ე. ი.
$$\frac{a_{m-1}}{10}+\frac{a_{m-2}}{10^2}+\cdots+\frac{a_{m-n+1}}{10^{n-1}}<1.$$

ამ უტოლობის საფუძველზე (14) გამოსახულება მოგვცემს:

$$a<a_m 10^m+10^m.$$

ხოლო უკანასკნელი უტოლობა (12) უტოლობასთან ერთად მოგვცემს:

$$a_m 10^m\leqslant a<10^m(a_m+1). \qquad (15)$$

თუ a ითვლება რაიმე x სიდიდის მიახლოებით მნიშვნელობად δ ფარდობითი ცდომილებით, მაშინ

$$|x-a|\leqslant\alpha=a\delta.$$

ვისარგებლოთ (15) უტოლობით, მაშინ უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$|x-a|\leqslant10^m(a_m+1)\delta. \qquad (16)$$

თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$(a_m+1)\,\delta\leqslant10^{-s},$$

სადაც s რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ (16) უტოლობა მოგვცემს:

$$\alpha=10^{m-s}.$$

ამ უტოლობით (10) ტოლობასთან შედარება მოგვცემს:

$$-n+1=-s,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$n=s+1,$$

ე. ი. თუ s ისეთი მთელი დადებითი რიცხვია, რომ

$$(a_m+1)\delta\leqslant10^{-s}, \qquad (17)$$

მაშინ a იქნება x-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა $(s+1)$ ნიშნადი ციფრით მაინც.

მაგალითად, ვიპოვოთ მიახლოებით a რიცხვში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა, თუ $\delta=1\%$ და $a_m=1$.

(17) ფორმულით გვექნება:

$$(1+1)0,01=10^{-s},$$

ანუ

$$0,02=10^{-s},$$

საიდანაც

$$10^s=50.$$

უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$1 < s < 2,$$

ანუ

$$2 < n < 3,$$

ე. ი. a რიცხვი ორი ნიშნადი ციფრით მაინც უნდა იყოს მოცემული, რომ ზემოთ მოთხოვნილი პირობა შესრულდეს.

(17) გამოსახულების საფუძველზე შეგვიძლია შევადგინოთ ცხრილი, სადაც მოცემული a_m-ისა და δ-ს საშუალებით განისაზღვრება ნიშნად ციფრთა რაოდენობა მიახლოებით რიცხვში. ამისათვის პირველ სვეტში (ცხრილი 2) მოვათავსოთ a_m-ის მნიშვნელობანი, პირველ სტრიქონში δ-ს მნიშვნელობანი, ხოლო სათანადო სვეტისა და სტრიქონის გადაკვეთაში შესაბამისი ნიშნად ციფრთა რაოდენობა

ცხრილი 2

a_m \ δ	10%	5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
1	1	2	2	3	3	4
2	1	2	2	3	3	4
3	1	1	2	2	3	3
4	1	1	2	2	3	3
5	1	1	2	2	3	3
6	1	1	2	2	3	3
7	1	1	2	2	3	3
8	1	1	2	2	3	3
9	1	1	2	2	3	3

ჩვენ მიერ განხილულ მაგალითში $\delta = 1\%$, $a_m = 1$, $n = 2$. სწორედ 1-ის სტრიქონისა და 1%-ის სვეტის გადაკვეთაში წერია ციფრი 2.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. რამდენი ნიშნადი ციფრი უნდა ავიღოთ $\sqrt{5}$-ის მიახლოებით მნიშვნელობაში, რომ $\delta = 0{,}5\%$?

$\sqrt{5}$-ის პირველი ნიშნადი ციფრია 2. ნიშნად ციფრთა რაოდენობა n მოთავსებულია 2-ის სტრიქონის და 0,5%-ის სვეტის გადაკვეთაში: $n = 3$.

ამგვარად, $\sqrt{5}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ სამი ნიშნადი ციფრით, რომ ფარდობითი ცდომილება არ აღემატებოდეს 0,5%-ს.

§ 86. ჯამის ცდომილებანი

ქვემოთ დაგვჭირდება უტოლობების შემდეგი თვისებებით სარგებლობა:

$$1) \quad |x \pm y| \leqslant |x| + |y|, \tag{18}$$

$$2) \quad |xy| = |x| \cdot |y|, \tag{19}$$

$$3) \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}. \tag{20}$$

ვთქვათ, მოცემულია a_1-ისა და a_2-ის აბსოლუტური ცდომილებანი:

$$\triangle a_1=|x_1-a_1|\leqslant\alpha_1,$$
$$\triangle a_2=|x_2-a_2|\leqslant\alpha_2. \qquad (21)$$

გამოვთვალოთ (a_1+a_2)-ის აბსოლუტური ცდომილება:

$$\triangle(a_1+a_2)=|(x_1+x_2)-(a_1+a_2)|=|(x_1-a_1)+(x_2-a_2)|.$$

თუ ვისარგებლეთ (18) თვისებით, მივიღებთ

$$|(x_1+x_2)-(a_1+a_2)|\leqslant|x_1-a_1|+|x_2-a_2|,$$

საიდანაც (21) ტოლობის გამოყენებით გვექნება:

$$\triangle(a_1+a_2)\leqslant\triangle a_1+\triangle a_2. \qquad (22)$$

აქედან კი ვღებულობთ

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \qquad (23)$$

სადაც α ჯამის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებაა.

მაშასადამე, *ჯამის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება ტოლია შესაკრებთა ზღვრული აბსოლუტურ ცდომილებათა ჯამისა.*

ისე, როგორც პირველ თავში შევნიშნეთ, აქაც ყველგან ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებაზე გვექნება საუბარი, მაგრამ სიტყვა „ზღვრულს“ არ ვიხმარებთ.

მაგალითი. მოცემულია

$$a_1\approx5{,}7\ (\pm0{,}5),\qquad a_2\approx4{,}1\ (\pm0{,}05),$$

ვიპოვოთ

$$a_1+a_2.$$

ამოხსნა:

$$5{,}7+4{,}1=9{,}8;\ \ 0{,}05+0{,}05=0{,}1.$$

ამიტომ

$$a_1+a_2\approx9{,}8\ (\pm0{,}1).$$

გამოვთვალოთ ჯამის ფარდობითი ცდომილება.

(23) გამოსახულება მოგვცემს:

$$a\delta=a_1\delta_1+a_2\delta_2,$$

სადაც

$$a=a_1+a_2,\qquad \delta_1=\frac{\alpha_1}{a_1},\qquad \delta_2=\frac{\alpha_2}{a_2}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\delta=\frac{a_1}{a}\,\delta_1+\frac{a_2}{a}\,\delta_2,$$

ანუ

$$\delta=\frac{a_1}{a_1+a_2}\,\delta_1+\frac{a_2}{a_1+a_2}\,\delta_2. \qquad (24)$$

δ_1 და δ_2-დან უდიდესი აღვნიშნოთ δ_0-ით. მაშინ (24) მოგვცემს:

$$\delta \leqslant \left(\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_2} \right) \delta_0,$$

ანუ

$$\delta \leqslant \delta_0. \tag{25}$$

ე. ი. ჯამის ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება შესაკრებთა უდიდეს ფარდობით ცდომილებას.

(25)-დან ადვილი შესამჩნევია, რომ δ-ს სიდიდეზე გავლენას ახდენს $\frac{a_1}{a_1+a_2}$, $\frac{a_2}{a_1+a_2}$-დან უდიდესი. ამ რიცხვებიდან უდიდესი შეესაბამება უდიდეს შესაკრებს. მოვიგონოთ, რომ ფარდობითი ცდომილება განსაზღვრავს ნიშნად ციფრთა რაოდენობას. ამიტომ, თუ შესაკრებთა რაოდენობა არც თუ ისე დიდია, მაშინ ჯამში შეინარჩუნება უდიდესი შესაკრების ნიშნად ციფრთა რაოდენობა, თუ დანარჩენ შესაკრებთა სიზუსტე არ არის ნაკლები უდიდესი შესაკრების სიზუსტეზე.

ქვემოთ განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, თუ როგორ უნდა შევკრიბოთ მიახლოებითი რიცხვები.

$$+\begin{array}{r} 1{,}271 \\ 4{,}321 \\ 2{,}732 \\ 0{,}053 \\ \hline 8{,}377 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 1{,}273 \\ 4{,}321 \\ 2{,}735 \\ 0{,}054 \\ \hline 8{,}383 \end{array} \qquad +\begin{array}{l} 246{,}32 \\ \;\;42{,}562 \\ \;\;\;\;3{,}2463 \\ \;\;\;\;0{,}42124 \\ \hline 292{,}55 \end{array}$$

ამგვარად, მიახლოებით რიცხვთა ჯამში იქნება იმდენი სანდო ციფრი ან ერთით ნაკლები, რამდენიც უდიდეს შესაკრებშია, თუ დანარჩენი შესაკრების სიზუსტეარაა ნაკლები უდიდესი შესაკრების სიზუსტეზე.

§ 26. სხვაობის ცდომილებანი

გამოვთვალოთ (a_1-a_2)-ს აბსოლუტური ცდომილება.

$$\Delta(a_1-a_2) = |(x_1-x_2)-(a_1-a_2)| = |(x_1-a_1)-(x_2-a_2)|.$$

გამოვიყენოთ უტოლობათა (18) თვისება, გვექნება:

$$\Delta(a_1-a_2) \leqslant |x_1-a_1| + |x_2-a_2|,$$

ანუ

$$\Delta(a_1-a_2) \leqslant \Delta a_1 + \Delta a_2,$$

საიდანაც შეგვიძლია მივიღოთ:

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \tag{26}$$

სადაც α სხვაობის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებაა,

ე. ი. სხვაობის აბსოლუტური ცდომილება ტოლია საკლებისა და მაკლების ცდომილებათა ჯამისა.

მაგალითად, მოვნახოთ a_1-a_2, თუ $a_1\approx 15,26 \ (\pm 0,005)$, $a_2\approx 6,1 \ (\pm 0,05)$. გვექნება: $15,26-6,1=9,16$. $0,005+0,05=0,055$.

აქედან
$$a_1-a_2\approx 9,16 \ (\pm 0,055).$$

მაგრამ სხვაობაში ციფრი 6 სანდო არ არის, ამიტომ შედეგი უნდა დავამრგვალოთ. გვექნება:

$$a_1-a_2\approx 9,2 \ (\pm 0,1).$$

ახლა გამოვთვალოთ სხვაობის ფარდობითი ცდომილება:

(26)-დან გვექნება:

$$a\delta=\alpha_1+\alpha_2,$$

სადაც

$$a=a_1-a_2, \quad \delta=\frac{\alpha}{a_1-a_2}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\delta=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{a_1-a_2}.$$

ამ ტოლობიდან ცხადია, რომ, თუ საკლები და მაკლები ერთიმეორისაგან მცირედ განსხვავდებიან, მაშინ ფარდობითი ცდომილება დიდია. ამის გამო სხვაობაში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა მეტად მცირდება. მაგალითად:

$$a_1=3,1425, \quad \alpha_1=0,00005,$$

$$a_2=3,1413, \quad \alpha_2=0,00005,$$

მაშინ სხვაობის ფარდობითი ცდომილება იქნება:

$$\delta=\frac{0,00005+0,00005}{3,1425-3,1413}=\frac{0,0001}{0,0012}=\frac{1}{12}.$$

თუ ვისარგებლებთ (17) ფორმულით, გვექნება

$$(1+1)\frac{1}{12}=10^{-s},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{6}=10^{-s},$$

ანუ

$$10^s=6.$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$0<s<1,$$

საიდანაც

$$1<n<2.$$

ამგვარად, სხვაობაში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა არ აღემატება ორ ერთეულს, ე. ი. სხვაობაში სიზუსტე გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე მოცემულ რიცხვებში.

§ 87. ნამრავლის ცდომილებანი

ვთქვათ,

$$x_1 \approx a_1 \ (\pm \triangle a_1),$$
$$x_2 \approx a_2 \ (\pm \triangle a_2).$$

მაშინ სათანადო გადამრავლებით მივიღებთ:

$$x_1 \cdot x_2 = a_1 \cdot a_2 \pm a_1 \cdot \triangle a_2 \pm a_2 \cdot \triangle a_1 \pm \triangle a_1 \cdot \triangle a_2.$$

რადგანაც $\triangle a_1 \cdot \triangle a_2$ ძალიან მცირეა $\triangle a_1$ და $\triangle a_2$-თან შედარებით,ამიტომ იგი შეგვიძლია უკუვაგდოთ. მივიღებთ:

$$x_1 x_2 \approx a_1 a_2 \pm a_1 \triangle a_2 \pm a_2 \triangle a_1,$$

ანუ

$$x_1 x_2 \approx a_1 a_2 \pm (a_1 \triangle a_2 + a_2 \triangle a_1),$$

საიდანაც

$$\triangle (a_1 \cdot a_2) = a_1 \triangle a_2 + a_2 \triangle a_1, \qquad (28)$$

თუ უკანასკნელი გამოსახულების ორივე მხარეს გავყოფთ $a_1 a_2$-ზე, გვექნება:

$$\frac{\triangle (a_1 \cdot a_2)}{a_1 a_2} = \frac{\triangle a_2}{a_2} + \frac{\triangle a_1}{a_1},$$

ანუ

$$\delta (a_1 \cdot a_2) = \delta_1 + \delta_2.$$

ე. ი. ნამრავლის ფარდობითი ცდომილება ტოლია თანამამრავლების ფარდობითი ცდომილებების ჯამისა.

ცხადია, ეს შედეგი გავრცელდება სასრული რაოდენობის მიახლოებითი რიცხვების ნამრავლის მიმართ:

$$\delta (a_1 a_2 \cdots a_n) = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n.$$

§ 88. განაყოფის ცდომილებანი

განვიხილოთ სხვაობა:

$$\frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 \pm \triangle a_1}{a_2 \pm \triangle a_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2 (a_1 \pm \triangle a_1) - a_1 (a_2 \pm \triangle a_2)}{a_2 (a_2 \pm \triangle a_2)} =$$

$$= \frac{\pm a_2 \triangle a_1 \pm a_1 \triangle a_2}{a_2^2 \left(1 \pm \dfrac{\triangle a_2}{a_2}\right)}.$$

რადგანაც $\triangle a_2$ მცირეა, მაშინ $\frac{\triangle a_2}{a_2}$ უფრო მცირე იქნება, ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ:

$$1 \pm \frac{\triangle a_2}{a_2} \approx 1.$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} \approx \frac{a_2 \triangle a_1 + a_1 \triangle a_2}{a_2{}^2},$$

ანუ

$$\triangle\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{a_2 \triangle a_1 + a_1 \triangle a_2}{a_2{}^2}.$$

მიღებული ტოლობა გავყოთ $\frac{a_1}{a_2}$-ზე გვექნება:

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \delta_1 + \delta_2. \qquad (29)$$

ამგვარად, **განაყოფის ფარდობითი ცდომილება ტოლია გასაყოფისა და გამყოფის ფარდობითი ცდომილებების ჯამისა.**

§ 89. საზღვართა საშუალო არითმეტიკული და მისი ცდომილება

§ 24-ში ვახსენეთ: თუ რაიმე x სიდიდის ქვედა საზღვარი A და ზედა საზღვარი B განსაზღვრულია, მაშინ x-ის მიახლოებით მნიშვნელობად შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა $[A, B]$ შუალედის შიგნით. ამ მნიშვნელობათაგან ავიღოთ A და B რიცხვების საშუალო არითმეტიკული:

$$a = \frac{A+B}{2}.$$

ეს რიცხვი ისე უნდა დავამრგვალოთ, რომ საეჭვო იყოს მხოლოდ მისი ბოლო ციფრი. A და B-ს მიმართ მოვითხოვთ შემდეგი:

1) სხვაობა $A-B$ რაც შეიძლება მცირე იყოს;

2) ქვედა საზღვარი A დავამრგვალოთ მხოლოდ ნაკლებობით და ზედა საზღვარი B მხოლოდ მეტობით.

შემდეგში ვაჩვენებთ, რომ A და B რიცხვების საშუალო არითმეტიკული x-ის უკეთესი მიახლოებითი მნიშვნელობაა, ვიდრე სხვა მნიშვნელობა $[A, B]$ შუალედიდან (§ 43).

განვიხილოთ მაგალითი:

$$2,90 < x < 3,27.$$

სათანადო საშუალო არითმეტიკული ტოლი იქნება 3,085,

$$a=\frac{2,90+3,27}{2}=3,085,$$

ხოლო საშუალო არითმეტიკულის გადახრა ტოლი იქნება 0,185,

$$\alpha=\frac{3,27-2,90}{2}=0,185,$$

სწორედ α იქნება საშუალო არითმეტიკულის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება.

ამგვარად,

$$x\approx 3,085\ (\pm 0,185).$$

დავამრგვალოთ საშუალო არითმეტიკული ისე, რომ მასში დარჩეს ერთი საეჭვო ციფრი. ამისათვის ცდომილება დავამრგვალოთ მეტობით ერთ ნიშნად ციფრამდე:

$$\alpha\approx 0,2.$$

ცხადია, საშუალო არითმეტიკულშიც უნდა შევინარჩუნოთ მხოლოდ ერთი ათობითი ნიშანი. გვექნება:

$$3,085\approx 3,1.$$

ამგვარად საბოლოოდ გვექნება:

$$x\approx 3,1\ (\pm 0,2).$$

§ 40. გამოთვლების წარმოება ცდომილებათა საშუალებით

წინა პარაგრაფებში გავეცანით ცდომილებებზე არითმეტიკულ მოქმედებებს. გამოვიყენოთ მიღებული შედეგები მიახლოებითი გამოთვლების ჩასატარებლად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ორი სხვადასხვა ლითონის ნაჭრის წონა, თუ პირველის მოცულობა $V_1=35\ (\pm 1)$ სმ^3, ხვედრითი წონა $D_1=7,83\ (\pm 0,03)$, ხოლო მეორე სხეულის $V_2=17\ (\pm 0,5)$ სმ^3 და $D_2=8,1\ (\pm 0,05)$.

რადგანაც

$$P=VD,$$

ამიტომ

$$\delta P=\delta V+\delta D.$$

აქედან

$$\delta P\cdot VD=\delta V\cdot VD+\delta D\cdot DV,$$

ანუ

$$\alpha(V\cdot D)=\alpha(V)\cdot D+\alpha(D)\cdot V,$$

სადაც $\alpha(VD)$, $\alpha(v)$ და $\alpha(D)$ სათანადო ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებებია VD, V და D-სი.

გამოთვლები მოგვცემს:

$$\times\begin{array}{r}7{,}83\\35\\\hline 3915\\+2349\\\hline 274{,}05\approx 274\end{array}$$

$$\alpha(P_1)=7{,}83\cdot 1+35\cdot 0{,}03=7{,}83+1{,}05=8{,}88.$$

$$\alpha(P_2)=17\cdot 0{,}05+8{,}1\cdot 0{,}5=0{,}85+4{,}05=4{,}90.$$

ამგვარად, გვექნება:

$$P=274+138=412.$$

$$\times\begin{array}{r}17\\81\\\hline 17\\+136\\\hline 137{,}7\approx 138\end{array}$$

$$\alpha=8{,}88+4{,}90=13{,}78\approx 14.$$

$P=412\ (\pm 14)$ გ,

$P\approx 410\ (\pm 16)$ გ.

ამგვარად, შევისწავლეთ მიახლოებითი გამოთვლების ორი ხერხი. გამოთვლები *საზღვართა ხერხით* და გამოთვლები *ცდომილებათა ხერხით*. ორივე ამ ხერხს მიახლოებითი გამოთვლების წარმოების *მკაცრი ხერხი* ეწოდება. ამ ხერხების დაწვრილებითი შედარება მოგვცემს: საზღვართა ხერხი მარტივია, მაგრამ ცდომილებათა ხერხთან შედარებით მეტი გამოთვლები ესაჭიროება. თავისი სიმარტივის გამო საზღვართა ხერხი წარმატებით გამოიყენება სხვადასხვა გამოთვლითი სამუშაოს შესრულების დროს.

თავი VI

ცდომილებათა შეფასება დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით

§ 41. ფუნქციის ცდომილება

ზემოთ ჩამოთვლილი არითმეტიკულ მოქმედებათა ცდომილებანი, რომლებიც ელემენტარული მსჯელობით მივიღეთ, შეგვიძლია ფუნქციის დიფერენციალით განვსაზღვროთ.

განვიხილოთ x და y ცვლადის ფუნქცია z;

$$z=f(x,\ y). \tag{1}$$

ვთქვათ, x და y შეიცავს სათანადო ცდომილებებს Δx და Δy. ეს ცდომილებანი იმდენად მცირეა, რომ $(\Delta x)^2$ და $(\Delta y)^2$ შეგვიძლია უკუვაგდოთ. მოვნახოთ სხვაობა:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

ეს სხვაობა შედგება ორი ნაწილისაგან: პირველი—

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

და მეორე, მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირისაგან[1]. ეს მეორე ნაწილი უკუვაგდოთ. ამის გამო გვექნება:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta x,$$

საიდანაც

$$|f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y.$$

აქედან კი შეგვიძლია დავწეროთ მიახლოებითი ტოლობა:

$$\Delta f(x,\ y)=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y. \tag{2}$$

თუ გვექნებოდა მრავალცვლადის ფუნქცია:

$$z=f(x,\ y,\ldots,\ u),$$

მაშინ მივიღებდით შემდეგ მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta f(x,\ y,\ldots,\ u)=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\Delta u. \tag{3}$$

მაგალითად,

$$z=xy.$$

მაშინ

$$\Delta(xy)=y\Delta x+x\Delta y.$$

ეს ფორმულა ელემენტარული გზით ადრეც გვქონდა გამოყვანილი.

(3) ტოლობის ორივე მხარის $|f|$-ზე გაყოფით მივიღებთ ფარდობითი ცდომილების გამოსახულებას ფუნქციისათვის:

$$\delta f=\frac{\Delta f(x,\ y,\cdots,\ u)}{|f(x,\ y,\cdots,\ u)|}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\frac{\Delta x}{|f|}+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\frac{\Delta y}{|f|}+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\frac{\Delta u}{|f|}. \tag{4}$$

ავიღოთ წილადი:

$$z=\frac{x}{y}.$$

(4) ფორმულა მოგვცემს:

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\,\frac{\Delta x}{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y^2}\,\frac{\Delta y}{\frac{x}{y}},$$

ანუ

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}.$$

ეს ფორმულაც ადრე გვქონდა მიღებული.

---

[1] ი. ხარაძე, ე. ჭელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე—მათემატიკური ანალიზის კურსი; ტ. I. თბილისი, 1948, გვ. 381.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციის ფარდობითი ცდომილება:

$$z=\frac{a^3\sqrt[4]{b}}{(c+k)^5}.$$

გამოვთვალოთ სათანადო კერძო წარმოებულები და შეფარდებანი:

$$\frac{\partial z}{\partial a}:z=\frac{3a^2\sqrt[4]{b}}{(c+k)^5}:\frac{a^3\sqrt[4]{b}}{(c+k)^5}=\frac{3}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial b}:z=\frac{a^3\cdot\frac{1}{4}b^{-\frac{3}{4}}}{(c+k)^5}:\frac{a^3\sqrt[4]{b}}{(c+k)^5}=\frac{1}{4b},$$

$$\frac{\partial z}{\partial c}:z=-\frac{5a^3\sqrt[4]{b}}{(c+k)^6}:\frac{a^3\sqrt[4]{b}}{(c+k)^5}=-\frac{5}{c+k},\quad \frac{\partial z}{\partial k}:z=-\frac{5}{c+k}.$$

მიღებული გამოსახულებანი ჩავსვათ (4) ფორმულაში, გვექნება:

$$\delta z=\frac{3\Delta a}{|a|}+\frac{\Delta b}{4|b|}+\frac{5\Delta c}{|c+k|}+\frac{5\Delta k}{|c+k|}.$$

§ 42. სანდო ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა ზოგიერთ ელემენტარულ ფუნქციაში

1) გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა დ ა გ ა ყ ო ფ ა

განვიხილოთ მაგალითი, სადაც სრულდება გამრავლება და გაყოფა k-ჯერ. (4) ფორმულიდან ასეთი გამოსახულების ცდომილება განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k, \tag{5}$$

სადაც δ_i არის i-ური სიდიდის ფარდობითი ცდომილება.

ვთქვათ, თითოეულ მიახლოებით სიდიდეში n არის სანდო ციფრთა რაოდენობა, მაშინ i-ური სიდიდის ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება ტოლობით:

$$\delta_i=\frac{1}{a_i 10^{n-1}}\qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n), \tag{6}$$

სადაც a_i სათანადო რიცხვის პირველი ნიშნადი ციფრია.

უკანასკნელი გამოსახულების (5)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$\delta=\frac{1}{a_1}\ \frac{1}{10^{n-1}}+\frac{1}{a_2}\ \frac{1}{10^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_k}\ \frac{1}{10^{n-1}}.$$

ამ გამოსახულების (a_m+1)-ზე გამრავლება მოგვცემს.

$$(a_m+1)\delta=(a_m+1)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_k}\right)\frac{1}{10^{n-1}}, \tag{7}$$

სადაც a_m შედეგის პირველი ნიშნადი ციფრია.

ამ ფორმულით ადვილად განვსაზღვრავთ სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობას ნამრავლში და განაყოფში.

ვთქვათ, $k=10$, მაშინ (7)-ის მარჯვენა მხარეს უდიდესი მნიშვნელობა ექნება, თუ $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ და $a_m=9$,

ამ შემთხვევაში (7) გამოსახულება მოგვცემს:

$$(a_m+1)\delta\leqslant 10\cdot 10\cdot\frac{1}{10^{n-1}},$$

ანუ

$$(a_m+1)\delta\leqslant\frac{1}{10^{n-3}}.$$

თუ გამოვიყენებთ (17) ფორმულას (§ 34), მივიღებთ

$$s+1=n-2.$$

ე. ი. ნამრავლში $(n-2)$ სანდო ნიშნადი ციფრი მაინცაა, თუ მამრავლებში უმცირესი რაოდენობის n სანდო ნიშნადი ციფრია.

ცხადია, თუ $k<10$ და $a_1,\dots, a_n$ ერთზე მეტია, მაშინ (7)-ის მარჯვენა მხარე უფრო მცირე იქნება, ვიდრე განხილულ შემთხვევაში, ამიტომ ნაშნად ციფრთა რაოდენობა ნამრავლსა და განაყოფში $(n-1)$ იქნება.

ამგვარად, თუ მიმდევრობით სრულდება გამრავლება და გაყოფა, მაშინ შედეგში სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა ერთი ან ორი ერთეულით მცირეა, ვიდრე მოცემული რიცხვებიდან უმცირესი სიზუსტის რიცხვში.

ცხადია, თუ საჭიროა ნამრავლი ან განაყოფი n სანდო ნიშნადი ციფრით მივიღოთ, აუცილებელია თითოეული რიცხვი მოცემული იყოს $n+2$ ან $n+1$ სანდო ნიშნადი ციფრით.

ასეთი შედეგი მიღებული გვქონდა ელემენტარული გზით § 18 და § 19-ში.

2) ახარისხება და ფესვის ამოღება.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=x^p.$$

თუ გამოვიყენებთ (4) ფორმულას, გვექნება:

$$\delta x^p=p\delta x. \tag{8}$$

ე. ი. მიახლოებითი რიცხვის p—ხარისხის ფარდობითი ცდომილება p-ჯერ მეტია მოცემული რიცხვის ფარდობით ცდომილებაზე.

თუ $p=\frac{1}{r}$, მაშინ (8)-დან მივიღებთ:

$$\delta\sqrt[r]{x}=\frac{1}{r}\,\delta x. \tag{9}$$

ე. ი. r ხარისხის ფესვის ფარდობითი ცდომილება r-ჯერ ნაკლებია ფესქვეშა გამოსახულების ფარდობით ცდომილებაზე.

თუ x-ში ნიშნად ციფრთა რაოდენობაა n, მაშინ (7) ფორმულა (8)-ისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(a_m+1)\delta=(a_m+1)\frac{p}{a_1\cdot 10^{n-1}}, \qquad (10)$$

სადაც a_1 არის x-ის პირველი ნიშნადი ციფრი.

ამ გამოსახულებიდან ცხადია, თუ $p>10$-ზე, მაშინ x^p-ს სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა 2 ერთეულით მცირეა x-ის სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობაზე.

(9)-ისათვის (7) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(a_m+1)\delta=(a_m+1)\frac{1}{ra_1}\cdot\frac{1}{10^{n-1}}, \qquad (11)$$

სადაც a_1 ფესვქვეშა გამოსახულების პირველი ნიშნადი ციფრია, ხოლო a_m ფესვის პირველი ნიშნადი ციფრი.

თუ უხეშად შევაფასებთ: $a_m=9$, $r=2$, $a_1=1$, გვექნება

$$(a_m+1)\frac{1}{ra_1}\leqslant(9+1)\frac{1}{2\cdot 10}<10,$$

მაშინ (11) მოგვცემს:

$$(a_m+1)\delta\leqslant\frac{1}{10^{n-2}}.$$

ე. ი. ფესვის სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა $(n-1)$-ის ტოლი მაინც არის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვიანგარიშოთ $\sqrt[4]{0,3862}$.
სათანადო გამოთვლა მოგვცემს:

$$\sqrt[4]{0,3862}\approx 0,78832.$$

გამოვთვალოთ მიღებულ რიცხვში სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა.

$$\delta=\frac{1}{4}\cdot\frac{0,00005}{0,3862}=\frac{1}{4}\cdot 0,00013=0,000032.$$

სათანადო აბსოლუტური ცდომილება ტოლი იქნება:

$$0,78832\cdot 0,000032=0,000026.$$

ე. ი. 0,78832-ში ოთხი ნიშნადი ციფრია სანდო. ამიტომ

$$\sqrt[4]{0,3862}\approx 0,7883.$$

3) ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი.
(3) ფორმულიდან ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისათვის მივიღებთ:

$$\Delta \sin x=|\cos x|\Delta x,\ \ \Delta \cos x=|\sin x|\,\Delta x,\ \ \Delta \operatorname{tg} x=\frac{\Delta x}{\cos^2 x},$$

$$\Delta \operatorname{ctg} x=\frac{\Delta x}{\sin^2 x}. \tag{12}$$

რადგანაც

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,$$

ამიტომ გვექნება:

$$\Delta \sin x\leqslant \Delta x,\quad \Delta \cos x\leqslant \Delta x. \tag{13}$$

$y=\sin x$-ის ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\delta \sin x=\frac{|\cos x|\,\Delta x}{|\sin x|}=|x \operatorname{ctg} x|\,\frac{\Delta x}{|x|}=|x \operatorname{ctg} x|\,\delta x,$$

ანუ

$$\delta \sin x=|x \operatorname{ctg} x|\,\delta x. \tag{14}$$

ასევე განვსაზღვრავთ $y=\cos x$-ის ფარდობით ცდომილებას.

$$\delta \cos x=|x \operatorname{tg} x|\,\delta x. \tag{15}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვსაზღვროთ ცდომილება $y=\sin 25°18'$, თუ კუთხე გაზომილია $1'$-ის სიზუსტით.

რადგან $\Delta x=1'=0{,}0003$ რადიანს, მაშინ (13) ფორმულიდან გვექნება:

$$\Delta \sin 25°18'<0{,}0003.$$

ხოლო (14)-დან მივიღებთ:

$$\delta \sin 25°18'=\operatorname{ctg} 25°18'\cdot 0{,}0003=2{,}703\cdot 0{,}0003\approx 0{,}0008<10^{-3},$$

საიდანაც განვსაზღვრავთ, რომ სანდო ციფრთა რაოდენობა $\sin 25°18'$-ში იქნება 4,

$$s+1=3+1=4.$$

ამრიგად, სანდო ციფრთა რაოდენობა $\sin x$-ში ისეთივეა, რაც x-ში.

4) ლ ო გ ა რ ი თ მ ი დ ა ა ნ ტ ი ლ ო გ ა რ ი თ მ ი.

რადგანაც

$$y=\lg x=0{,}43429 \ln x,$$

ამიტომ გვექნება

$$\Delta y=0{,}43429\,\frac{\Delta x}{x}, \tag{16}$$

საიდანაც

$$\Delta y<\frac{1}{2}\,\frac{\Delta x}{x}.$$

ამგვარად, მიახლოებითი რიცხვის ათობითი ლოგარითმის აბსოლუტური ცდომილება ნაკლებია ამ რიცხვის ფარდობითი ცდომილების ნახევარზე:

(16)-დან მივიღებთ:

$$\Delta x = \frac{x\Delta y}{0{,}43429} \approx 2{,}3026\, x\Delta y. \qquad (17)$$

ამგვარად, ანტილოგარითმის აბსოლუტური ცდომილება 2,3-ჯერ მეტია ლოგარითმის აბსოლუტურ ცდომილებაზე.

გამოვარკვიოთ, როგორია ცდომილება ლოგარითმების სხვადასხვა ცხრილებით სარგებლობის დროს.

პრაქტიკაში ვსარგებლობთ სამ, ოთხ, ხუთ და შვიდნიშნა ლოგარითმების ცხრილებით.

ცნობილია, n-ნიშნა ლოგარითმების ცხრილში აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება n-ურ ადგილზე მყოფი ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს:

$$\Delta y \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^n}.$$

ამის გამო (16)-დან მივიღებთ:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{0{,}43429} \leqslant \frac{1}{2\cdot 10^n\cdot 0{,}43429}.$$

უკანასკნელი გამოსახულება დაახლოებით 10^{-n}-ის ტოლია. თუ ვისარგებლებთ მე-2 ცხრილით, დავასკვნით: $n=3$-თვის, რიცხვის ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება 10^{-3}, ე. ი. რიცხვში სამი სანდო ნიშნადი ციფრია.

ასევე, ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილისათვის რიცხვის ფარდობითი ცდომილებაა 10^{-4}, ე. ი. რიცხვი ოთხი სანდო ნიშნადი ციფრით განისაზღვრება.

ამგვარად, ლოგარითმების ცხრილებით გამოთვლების ჩატარების შემთხვევაში აუცილებელია ვისარგებლოთ იმდენნიშნა ლოგარითმების ცხრილით, რამდენი სანდო ნიშნადი ციფრიცაა მოცემული რიცხვში.

თუ ლოგარითმების ცხრილში არ არის მოცემული რიცხვის ლოგარითმი, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ ლოგარითმების თვისებით: თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე მეტია, მაშინ მეტ რიცხვს მეტი ლოგარითმი შეესაბამება.

ვთქვათ, ცხრილშია x და $(x+1)$-ის ლოგარითმები. ჩვენ გვინდა

$(x+h)$-ის ლოგარითმი. სადაც $h<1$. შევადგინოთ პროპორცია (partes proportionales).

$$\frac{\lg(x+h)-\lg x}{\lg(x+1)-\lg x} \approx \frac{(x+h)-x}{(x+1)-x},$$

ანუ

$$\frac{\lg(x+h)-\lg x}{\lg(x+1)-\lg x} \approx h, \tag{18}$$

საიდანაც

$$\lg(x+h)=\lg x+h[\lg(x+1)-\lg x]. \tag{19}$$

მაგალითად, ვიპოვოთ $\lg 243,2$ ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილის საშუალებით (არ ვისარგებლოთ დამატებითი ცხრილით, სადაც მეოთხე ნიშნის შესწორებაა). გვექნება $h=0,2$, $x=243$.

$$\lg 243,2=\lg 243+0,2\,(\lg 244-\lg 243)=2,3856+$$
$$+0,2(2,3874-2,3856)=2,3856+0,2\cdot 0,0018=$$
$$=2,3856+0,0004=9,3860.$$

მიღებული შედეგი ზუსტად ემთხვევა დამატებითი ცხრილით გამოთვლილ $\lg 243,2$-ის მნიშვნელობას.

ლოგარითმების საშუალებით გამოვთვალოთ:

$$z=\frac{\sin x}{\lg y},$$

თუ

$$x=18°18'\ (\pm 1'),\qquad x=527,6\ (\pm 0,1).$$

გამოთვლები შევასრულოთ ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილებით.

$$\lg z=\lg\sin 18°18'-\lg\lg 527,6=\overline{1},4969-0,4349=\overline{1},0620,$$

საიდანაც

$$z=0,1153.$$

გამოვთვალოთ ფარდობითი ცდომილება.

$$\delta z=\delta\sin x+\delta\lg y=\operatorname{ctg} x\cdot\Delta x+\frac{0,4343\cdot\Delta y}{y\lg y}.$$

ამ გამოსახულებაში შევიტანოთ მნიშვნელობანი:

$$\Delta x=1'=0,0003;\quad \Delta y=0,1;\quad \operatorname{ctg} 18°18'=3,024.$$

გვექნება:

$$\delta z=3,024\cdot 0,0003+\frac{0,4343\cdot 0,1}{527,6\cdot 2,7223}=a+b.$$

$$a=3,024\cdot 0,0003=0,0009072.$$

b შესაკრები გამოვთვალოთ ისევ ლოგარითმების საშუალებით:

$$+\begin{array}{l}\lg 527{,}6 \;=2{,}7223\\ \lg 2{,}7223=0{,}4349\\ \hline \quad\quad\quad\quad 3{,}1572.\end{array}\qquad \begin{array}{r}\lg 0{,}04343 = \bar{2}{,}6378\\ -\;3{,}1572\\ \hline \bar{5}{,}4806\,,\\ b=0{,}00003024.\end{array}$$

ამგვარად,

$$\begin{array}{r}\delta z = {}_{+}\begin{array}{l}0{,}0009072\\ 0{,}00003024\end{array}\\ \hline 0{,}00093744\approx 0{,}0009,\end{array}$$

საიდანაც $\Delta z=0{,}1153\cdot 0{,}0009=0{,}00010377\approx 0{,}0001$, ე. ი. 0,1153-ში მხოლოდ მეოთხე ნიშნადი ციფრია საეჭვო:

$$z=0{,}1153\ (\pm 0{,}0001).$$

§ 48. საშუალო არითმეტიკული

წინა პარაგრაფში სიდიდის მიახლოებით მნიშვნელობად გაზომვის შედეგების საშუალო არითმეტიკული მივიღეთ. ახლა შევისწავლოთ საშუალო არითმეტიკულის ზოგიერთი თვისება.

ვთქვათ, ვაწარმოეთ გაზომვა n-ჯერ და მივიღეთ მნიშვნელობანი:

$$x_1\ x_2,\cdots,\ x_n. \tag{20}$$

ამ მნიშვნელობათა მიმართ დავუშვათ:

1) მათ შორის მეტად განსხვავებული მნიშვნელობა არ არსებობს.

2) მათ შორის ერთი ნაწილი მეორეზე მეტია. მეტ მნიშვნელობათა და ნაკლებ მნიშვნელობათა რაოდენობა ტოლია.

3) მათ შორის ყველა ერთნაირადაა სანდო.

ეს მოთხოვნები ბუნებრივია: თუ რომელიმე x_1 სხვა მნიშვნელობისაგან მეტად განსხვავებულია, იგი უკუვაგდოთ; გაზომვა ერთი და იგივე გამომთვლელისაგან წარმოებს ერთი და იგივე იარაღით და ამიტომ ყველა x ერთნაირადაა მოსალოდნელი. თუ საკმარისად დიდი რაოდენობით ვაწარმოებთ გაზომვას, მაშინ მეტი და ნაკლები მნიშვნელობები თანაბარი რაოდენობითაა მოსალოდნელი.

დავსვათ საკითხი: როგორ შევადგინოთ (20) მიმდევრობიდან ისეთი სიდიდე, რომელიც ყველაზე უკეთესად იძლევა საძებნ სიდიდეს.

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა უმცირეს კვადრატთა ხერხი, რომლის თანახმადაც საძებნი სიდიდის ყველაზე უკეთეს მიახლოებას იძლევა ის რიცხვი, რომლისთვისაც ცდომილებათა კვადრატების ჯამი უმცირესია. ეს მოთხოვნა ბუნებრივია, რადგანაც ცდომილებანი ნამდვილი რიცხვებია, მათი კვადრატები დადებითია და, თუ ამ დადებით სიდიდეთა ჯამი მცირე იქნება, მაშინ თვით ცდომილებაც მცირე იქნება.

დავუშვათ, რომ არსებობს საუკეთესო მნიშვნელობა x, რომელიც შედგენილია (20) მიმდევრობისაგან, იგი, ცხადია, (20) მიმდევრობის ყველა წევრის ფუნქციაა: $x=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

ზემოხსენებულ მოთხოვნილ პირობათა საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ f ფუნქციის მიმართ შემდეგი პირობები სრულდება:

1) f—დამოუკიდებელია x_i-ს ათვლის წერტილის მდებარეობაზე, ე. ი.

$$f(x_1+h, x_2+h, \cdots, x_n+h)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)+h,$$

სადაც h ათვლის წერტილის გადაადგილების სიდიდეა.

2) f ფუნქცია სიმეტრიულია $x_1, x_2, \cdots, x_n$-ის მიმართ:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_5, x_3, x_8, \cdots, x_k),$$

3) f ფუნქცია უწყვეტია $x_1, x_2, \cdots, x_n$-ის მიმართ და აქვს უწყვეტი ცალსახა წარმოებულები:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

4) შეფარდება

$$\frac{f}{x_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

დამოუკიდებელია იმ ზომის ერთეულზე; რომლითაც f და x_i არის გაზომილი, ე. ი.

$$\frac{f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)}{x_i k}=\frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{x_i},$$

სადაც k ნებისმიერი რიცხვია.

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)=kf(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{21}$$

თუ $k=0$, მაშინ გვექნება:

$$f(0, 0, \ldots, 0)=0. \tag{22}$$

$f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)$-ის მიმართ გამოვიყენოთ სასრული ნაზრდის ფორმულა [1], გვექნება:

$$f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)=f(0, 0, \cdots, 0)+kx_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+$$
$$+kx_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+kx_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

---

1 იხ. ა. ხარაძე, ე. პელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარციევაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, 1948 წ. თბილისი, გვ. 399.

სადაც $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ არის f-ის კერძო წარმოებულის მნიშვნელობა საშუალო ξ_i $(i=1, 2,\dots, n)$, წერტილზე,

$$0<\xi_i<1.$$

თუ გამოვიყენებთ (21) და (22) ტოლობებს, უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$kf(x_1, x_2,\dots,x_n)=kx_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+kx_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+kx_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

თუ ამ გამოსახულებას k-ზე შევკვეცავთ, გვექნება:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n)=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}. \qquad (23)$$

თუ $k\to 0$, მაშინ მე-3 პირობის თანახმად

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\to A_i \qquad (i=1, 2,\dots, n),$$

სადაც A_i გარკვეული რიცხვია.

ამგვარად, (23)-დან გვექნება:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n)=x_1A_1+x_2A_2+\dots+x_nA_n. \qquad (24)$$

რადგანაც f სიმეტრიულია $x_1, x_2,\dots, x_n$-ის მიმართ, ამიტომ (24) მოგვცემს:

$$A_1=A_2=\dots A_n=A.$$

ამგვარად,

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n)=A(x_1+x_2+\dots+x_n). \qquad (25)$$

თუ ჩავსვამთ x_i-ის მაგივრად x_i+h, მაშინ (25)-დან მივიღებთ:

$$f(x_1+h, x_2+h_2,\dots,x_n+h)=A(x_1+h+x_2+h+\dots+x_n+h),$$

აქედან 1-ლი პირობის მიხედვით მივიღებთ:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n)+h=A(x_1+x_2+\dots+x_n)+Anh,$$

საიდანაც (25) ტოლობით გვექნება:

$$Anh=h.$$

მაშასადამე,

$$An=1,$$

საიდანაც

$$A=\frac{1}{n}.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n)=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}. \qquad (26)$$

შევამოწმოთ, რომ მიღებული საშუალო არითმეტიკულისათვის გამოსახულებას

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2$$

აქვს უმცირესი მნიშვნელობა.

მართლაც, თუ x-ის მაგივრად ავიღებთ $\bar{x}$-ს,

$$\bar{x}=x+h,$$

მაშინ საშუალო არითმეტიკულიდან x_i-ს ახალი გადახრები Δx_i $(i=1, 2,\cdots, h)$, ასე განისაზღვრება:

$$\Delta\bar{x}_i=\bar{x}-x_i=x+h-x_i=\Delta x_i+h.$$

მაშინ გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta\bar{x}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i h+\sum_{i=1}^{n}h^2. \quad (27)$$

რადგანაც 1-ლი პირობის საფუძველზე

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=0,$$

ამიტომ (27)-დან მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta\bar{x}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2+nh^2.$$

ეს გამოსახულება უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს, თუ $h=0$. გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta\bar{x}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2,$$

ამგვარად უმცირეს მნიშვნელობას აღწევს $\sum_{i=1}^{n}(\Delta\bar{x}_i)^2$ და ეს უმცირესი მნიშვნელობაა $\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2$.

საშუალო არითმეტიკულის ცდომილებად მიღებულია გამოსახულება

$$\bar{\Delta}=\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n(n-1)}}, \quad (28)$$

სადაც

$$\Delta x_i=x-x_i \ (i=1, 2,\cdots, n),$$

განვიხილოთ მ ა გ ა ლ ი თ ი, რომლის შესახებაც საუბარი იყო § 13-ში.

ვთქვათ, გაზომვის შედეგად მივიღეთ (მ-ით):

$$89{,}0;\quad 92{,}0;\quad 91{,}5;\quad 89{,}5;$$

სათანადო საშუალო არითმეტიკული იქნება:

$$\frac{89{,}0+92{,}0+91{,}5+89{,}5}{4}=90{,}5.$$

ამ რიცხვიდან საშუალო გადახრებია:

$$1{,}5;\quad -1{,}5;\quad +1;\quad -1.$$

საშუალო არითმეტიკულის ცდომილება იქნება:

$$\sqrt{\frac{2{,}25+2{,}25+1+1}{12}}\approx 0{,}61.$$

თ ა ვ ი VII

ზოგიერთი მიახლოებითი ფორმულა. მათემატიკური ცხრილები

§ 14. მიახლოებითი ფორმულები

მიახლოებით გამოთვლებში ფართოდ გამოიყენება ფორმულები, რომლებიც სიდიდის მნიშვნელობის მიახლოებით მნიშვნელობას იძლევა. ეს ფორმულები მიიღება იმის საშუალებით, რომ აბსოლუტური ცდომილების კვადრატი და კუბი მეტად მცირეა, თუ აბსოლუტური ცდომილება მცირეა.

მიახლოებითი ფორმულები მარტივად შეგვიძლია შევადგინოთ სათანადო ფუნქციების მწკრივად გაშლით. აქ გამოვიყვანთ მიახლოებით ფორმულებს მეტად ელემენტარული გზით.

1) $y=\dfrac{1}{1+x}$.

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}. \tag{1}$$

თუ x მცირეა, მაშინ $\dfrac{x^2}{1+x}$ მით უფრო მცირე იქნება, ამიტომ $\dfrac{x^2}{1+x}$ შეგვიძლია უკუვაგდოთ. მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ფორმულას:

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x. \tag{2}$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ $\frac{1}{1,1}$. ამისათვის მიახლოებით ფორმულაში (2) ჩავსვათ $x=0,1$. გვექნება:

$$\frac{1}{1+0,1}\approx 1-0,1=0,9.$$

გამოვთვალოთ სათანადო აბსოლუტური ცდომილება:

$$\frac{1}{1,1}-0,9\approx 0,909-0,9=0,009<0,01,$$

ამიტომ

$$\frac{1}{1,1}\approx 0,90.$$

უფრო მაღალი სიზუსტის ფორმულის მისაღებად (1) ასე გადავწეროთ:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2\frac{1}{1+x}=1-x+x^2\left(1-x+\frac{x^2}{1+x}\right)=$$

$$=1-x+x^2-x^3+\frac{x^4}{1+x}.$$

თუ ამ გამოსახულებაში ბოლო წევრს უკუვაგდებთ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2-x^3. \tag{3}$$

ეს ფორმულა უფრო უკეთეს მიახლოებას იძლევა, ვიდრე (2).

თუ x დადებითია, მაშინ

$$\frac{x^2}{1+x}<x^2, \quad \frac{x^4}{1+x}<x^4,$$

ამიტომ (2) და (3) ფორმულებში დაშვებული ცდომილება ნაკლებია, სათანადოდ, x^2-სა და x^4-ზე. ცხადია, თუ x მეტია მნიშვნელში დატოვებული ბოლო ციფრის 0,7-ზე, მაშინ (2) ფორმულის ცდომილება დიდია ($0,8^2=0,64$) და სათანადოდ ათწილად ნიშანთა რაოდენობა შემცირდება ერთი ციფრით ($0,64\approx 1$). ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ (3) ფორმულა.

2) $z=(1+x)(1+y)$.

განვიხილოთ ორი რიცხვის ნამრავლი:

$$(1+x)(1+y)=1+x+y+xy.$$

თუ x და y მცირე სიდიდეებია, მაშინ xy, მით უმეტეს, მცირე იქნება, ამიტომ xy-ის უკუგდებით მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ფორმულას:

$$(1+x)(1+y)\approx 1+x+y. \tag{4}$$

მაგალითად, ვიპოვოთ $1{,}01 \cdot 0{,}98$.

(4) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$1{,}01 \cdot 0{,}98 = (1+0{,}01)(1-0{,}02) \approx 1+0{,}01-0{,}02 = 0{,}99.$$

სათანადო ცდომილება ტოლი იქნება:

$$0{,}01 \cdot 0{,}02 = 0{,}0002.$$

ამიტომ $1{,}01 \cdot 0{,}98 \approx 0{,}9900$.

3) $y=(1+x)^2$.

განვიხილოთ ორი რიცხვის ჯამის კვადრატი:

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2.$$

თუ x მცირეა, x^2 მით უმეტეს მცირე იქნება, ამიტომ x^2-ის უკუგდებით მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ფორმულას:

$$(1+x)^2 \approx 1+2x. \tag{5}$$

4) $y=\sqrt{1+x}$.

(5) მიახლოებითი გამოსახულების ორივე მხრიდან ამოვიღოთ კვადრატული ფესვი, მივიღებთ:

$$\sqrt{1+2x} \approx 1+x.$$

აქ y შევცვალოთ $\frac{x}{2}$-ით. გვექნება კვადრატული ფესვისათვის შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა:

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}. \tag{6}$$

5) $y=(1+x)^3$.

ამისათვის $(1+x)$ ავახარისხოთ კუბში, მივიღებთ:

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3.$$

ამ გამოსახულებიდან $3x^2+x^3$ უკუვაგდოთ, როგორც მცირე სიდიდეები. მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ფორმულას:

$$(1+x)^3 \approx 1+3x. \tag{7}$$

6) $y=\sqrt[3]{1+x}$.

ამისათვის (7)-ის ორივე მხრიდან ამოვიღოთ კუბური ფესვი და x შევცვალოთ $\frac{x}{3}$-ით. გვექნება შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა:

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{x}{3}. \tag{8}$$

7) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

$y=\sin x$-ის მიახლოებითი გამოსახულების მისაღებად ვისარგებლოთ შემდეგი უტოლობით:

$$\operatorname{tg} x > x > \sin x.$$

ამ უტოლობის $\sin x$-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1.$$

$\frac{1}{\cos x}$ სათანადო სიზუსტის შემთხვევაში 1-ის ტოლად მივიღოთ. ამიტომ გვექნება:

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1,$$

ანუ

$$\sin x \approx x. \tag{9}$$

თუ ამ მიახლოებითი ტოლობის ორივე მხარეს $\cos x$-ზე გავყოფთ, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{x}{\cos x}.$$

თუ x მცირეა, მაშინ $\cos x$ შეგვიძლია ერთის ტოლად მივიღოთ. ამის გამო გვექნება შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა:

$$\operatorname{tg} x \approx x. \tag{10}$$

8) ლოგარითმული ფუნქცია.

დაუმტკიცებლად მივიღოთ შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა[1]:

$$\lg(1+x) \approx 0{,}43429\, x. \tag{11}$$

ამ ტოლობის დახმარებით გვექნება:

$$\lg\frac{1+x}{1-x} = \lg(1+x) - \lg(1-x) \approx 0{,}43429\, x - (-0{,}43429 x) = 0{,}86858\, x.$$

ამგვარად გვექნება შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა

$$\lg\frac{1+x}{1-x} \approx 0{,}86858\, x. \tag{12}$$

მიახლოებითი ფორმულები ბევრ კერძო შემთხვევაში მეტად ამარტივებს გამოთვლების წარმოებას. განსაკუთრებით კი მაშინ, როდესაც მოქმედებანი მიახლოებით რიცხვზე წარმოებს.

---

[1] ა. ხარაძე, ვ. კელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი. ტ. I, 1948, თბილისი, გვ. 170.

§ 46. მათემატიკური ცხრილები

მიახლოებით რიცხვებზე გამოთვლების წარმოება მეტად მარტივდება მათემატიკური ცხრილების საშუალებით. პრაქტიკაში გავრცელებულია ერთი ცვლადის ფუნქციის ცხრილები. ასეთია რიცხვთა ლოგარითმების მანტისების, ანტილოგარითმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლოგარითმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალურ მნიშვნელობათა, რიცხვთა კვადრატების, რიცხვთა კუბების, კვადრატული ფესვების, წრის ფართობის და წრეწირის სიგრძის, შებრუნებული რიცხვების, რიცხვთა გამრავლების და სხვა ცხრილები.

ცხრილების საშუალებით ვარჩევთ ორ საკითხს. პირველი, მოცემული არგუმენტის მიხედვით ვიპოვოთ სათანადო ფუნქციის მნიშვნელობა და, მეორე—მოცემული ფუნქციით ვიპოვოთ სათანადო არგუმენტის მნიშვნელობა.

განვიხილოთ ზოგიერთი ცხრილი.

1) ერთშესავლიანი ცხრილები

ცხრილში ზოგჯერ არგუმენტის მნიშვნელობანი ერთ მხარესაა მოთავსებული, ხოლო სათანადო ფუნქციის მნიშვნელობანი—მეორე მხარეს. მაგალითად, ასეთი სახისაა ლოგარითმული ფუნქციის

$$y=\log_2 x$$

შემდეგი ცხრილი:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

ამგვარად შედგენილ ცხრილებს ეწოდება *ცხრილები ერთი შესავლით*.

არგუმენტის ორ მომდევნო მნიშვნელობათა შორის სხვაობას ბიჯი ეწოდება, ხოლო ფუნქციის სათანადო ორ მომდევნო მნიშვნელობათა შორის სხვაობას—ცხრილის სხვაობა.

ზემოგანხილულ ცხრილში არც ბიჯი და არც ცხრილის სხვაობა მუდმივი არ არის.

ცხრილის სხვაობა მუდმივია, თუ ცხრილი წრფივი ფუნქციისათვისაა შედგენილი. ასეთია, მაგალითად, ხაზოვანი გაფართოების ცხრილი:

$$y=l_0\,(1+\alpha x),$$

არშინების მეტრებში გადაყვანის,

$$y=0{,}7112007\,x,$$

კუთხის გრადუსული ზომის რადიანებში გადაყვანის,

$$y=\frac{\pi}{180}\,x$$

და სხვ.

ერთშესავლიან ცხრილებს დიდი ადგილი ესაჭიროება, ამიტომ ადგენენ ორ ან სამშესავლიან ცხრილებს.

ბ) ორშესავლიანი ცხრილები

განვიხილოთ ორნიშნა რიცხვების კვადრატების ცხრილი. პირველ სტრიქონში მოვათავსოთ ერთეულების ციფრები, ხოლო პირველ სვეტში—ათეულების ციფრები. რიცხვთა კვადრატები მოვათავსოთ სათანადო სვეტებისა და სტრიქონების გადაკვეთაში, მივიღებთ ცხრილს 3-ს. ეს ცხრილი ზუსტია.

ც ხ რ ი ლ ი 3

ერთეულები / ათეულები	0		2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	226	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3196	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881

ზუსტ მნიშვნელობათა ცხრილებს წარმოადგენენ **გამრავლების ცხრილები**. მაგ. O' Рурк, Таблицы умножения, ГСИ, М. 1951. გავეცნოთ ამ ცხრილებს უფრო დაწვრილებით. გამრავლების ცხრილები წარმოადგენენ ორშესავლიან ცხრილთა ერთობლიობას. მასში მოთავსებულია 11-დან 1000-მდე რიცხვების ორნიშნა რიცხვებზე ნამრავლი. მამრავლი მოთავსებულია ყოველი ქვეცხრილის თავზე. ათეულები მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სტრიქონში, ხოლო ერთეულები ვერტიკალურ სვეტში.

ქვემოთ მაგალითისათვის მოყვანილია 347-ის ორნიშნა რიცხვებზე ნამრავლების ცხრილი.

347

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
0		3470	6940	10410	13880	17350	20820	24290	27760	31230	0
1	347	3817	7287	10757	14227	17697	21167	24637	28107	31577	1
2	694	4164	7634	11104	14574	18044	21514	24984	28454	31924	2
3	1041	4511	7981	11451	14921	18391	21861	25331	28801	32271	3
4	1388	4858	8328	11798	15268	18738	22208	25678	29148	32618	4
5	1735	5205	8675	12145	15615	19085	22555	26025	29495	32265	5
6	2082	5552	9022	12492	15962	19432	22902	26372	29842	33312	6
7	2429	5899	9369	12839	16309	19779	23249	26719	30189	33659	7
8	2776	6246	9716	13186	16656	20126	23596	27066	30536	34006	8
9	3123	6593	10063	13533	17003	20473	23943	27413	30883	34353	9

ამ ცხრილით შევასრულოთ რამდენიმე მოქმედება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ 347×49. ცხრილში, რომლის თავზე აწერია 347, მოვნახოთ ათეულები—40 და ერთეულები—9. სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაში მოთავსებულია 17003, ე. ი. $347\times 49=17003$.

გამრავლების ცხრილით შეგვიძლია ნებისმიერნიშნა რიცხვების ნამრავლი მოვძებნოთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ 347×64725. მეორე მამრავლი წარმოვადგინოთ ისეთ შესაკრებთა ჯამად, რომ შესაძლებელი იყოს 347-ის ცხრილით სარგებლობა.

$$347\times 64725=347\times(60000+4700+25);$$

$$\begin{array}{rrrr} & 347\times & 60000= & 20820000\\ + & 347\times & 4700= & 1630900\\ & 347\times & 25= & 8675\\ \hline & 347\times & 64725= & 22459575\end{array}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ 34769×2454. სამრავლი და მამრავლი ისეთ შესაკრებთა ჯამებად წარმოვადგინოთ, რომ შესაძლებელი იყოს ცხრილების ხმარება:

$$\begin{array}{rrrrl} & 34700\times & 2400= & 83280000 & \\ + & 34700\times & 54= & 1873800 & \\ & 69\times & 2400= & 165600 & \rule{0pt}{0pt}\smash{\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}\text{(69-ის ნამრავლის ცხრილით)}}\\ & 69\times & 54= & 3726 & \\ \hline & 34769\times & 2454= & 85323126 & \end{array}$$

გამრავლების ცხრილით შეგვიძლია შევასრულოთ გაყოფაც, თუ გამყოფი 1000-ს არ აღემატება. ცხადია, თუ გასაყოფი გამყოფის ჯერადი არაა, განაყოფი მიიღება მიახლოებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ 22459575 : 347.

ავიღოთ 347-ის ნამრავლების ცხრილი. ცხრილში უდიდესი ნამრავლი ხუთნიშნაა. გასაყოფიდან ავიღოთ ხუთნიშნა რიცხვი. თუ ამ რიცხვსა და ცხრილში მოთავსებულ ნაკლებ უახლოეს რიცხვს შორის სხვაობა მეტია 347-ზე, მაშინ ავიღოთ ოთხნიშნა რიცხვი. ცხრილში არის 22208. ამ რიცხვის 347-ზე განაყოფია 64. სათანადო სხვაობა არის 251. ჩამოვიტანოთ 57, მივიღებთ 25157. ამ რიცხვის უახლოესი რიცხვია 24984. განაყოფში მივიღებთ 72-ს, ხოლო სათანადო ნაშთი იქნება 25157—24984=173. ჩამოვიტანოთ ბოლო ციფრი 5. მივიღებთ 1735. ამ რიცხვის 347-ზე განაყოფია 5.

ამგვარად, გვექნება

```
_22459 575:347=64725
 22208
 ─────
  _25157
   24984
   ─────
    _1735
     1735
     ────
        0
```

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ 3499878 : 347. მოქმედება ასე შესრულდება:

```
_3499 878:347=1086,1037
 3470
 ────
  _29878
   29842
   ─────
    _3600
     3470
     ────
    _13000
     12839
     ─────
       161
```

მე-3 ცხრილში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა სხვადასხვაა. საერთოდ ცხრილებში შედეგები ერთი და იგივე რაოდენობის ნიშნადი ციფრებით უნდა იყოს მოცემული. ამის გამო შედეგები უნდა დამრგვალდეს შესწორების წესით. მაგალითად, ოთხნიშნა ცხრილებში შედეგები ოთხნიშნა რიცხვებამდეა დამრგვალებული.

ცხადია, ცხრილში დაშვებული ცდომილება დატოვებული ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარზე ნაკლებია.

განვიხილოთ კიდევ ლოგარითმების მანტისების ორნიშნა ცხრილი:

ცხრილი 4

ერთეულები / ათეულები	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	00	04	08	11	15	18	20	23	26	28
2	30	32	34	36	38	40	42	43	45	46
3	48	49	50	52	53	54	56	57	58	59
4	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
5	70	71	72	72	73	74	75	76	76	77
6	78	79	79	80	81	81	82	83	83	84
7	85	85	86	86	87	88	88	89	89	90
8	90	91	91	92	92	93	93	94	94	95
9	95	96	96	97	97	98	98	99	99	00

ეს ცხრილიც ორშესავლიანია: პირველ სტრიქონში მოთავსებულია ერთეულები, პირველ სვეტში—ათეულები. ორნიშნა რიცხვის ლოგარითმის მანტისა მოთავსებულია სათანადო სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაში. მაგალითად, lg 3,5-ის მანტისა მოთავსებულია მესამე სტრიქონისა და მეხუთე სვეტის გადაკვეთაში:

$$\lg 3{,}5=0{,}54.$$

3) სამშესავლიანი ცხრილები

განვიხილოთ ოთხნიშნა რიცხვთა კვადრატების ცხრილები.

ცხრილი შედგენილია 1,000-დან 9,999-ის კვადრატებისათვის (ცხრილი 5). რიცხვის ორი ციფრი მოთავსებულია პირველ სვეტში, მესამე ციფრი პირველ სტრიქონში, ხოლო მეოთხე ციფრი მოთავსებულია მარჯვნივ დამატებით ცხრილში (ცხრილი 5).

ცხრილი 5

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	12	13	16	19	22	24

მაგალითად, ვიპოვოთ $1{,}256^2$. ჯერ ვიპოვოთ $1{,}25^2$. ამისათვის ავიღოთ რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია 1,2-ის სტრიქონსა და 5-ის სვეტის გადაკვეთაში—1,563 და დავუმატოთ დამატებითი ცხრილიდან 6-ის ქვეშ

მყოფი რიცხვი, რომელიც 1,2-ის სტრიქონზეა მოთავსებული—0,015. გვექნება: $1,256^3=1,578.$

ცხადია, $1,256^2=(1,256\cdot 10^3)^2=1,256^2\cdot 10^6=1,578\cdot 10^6.$

პასუხი მივიღეთ ოთხი სანდო ნიშნადი ციფრით.

ამგვარად, აღნიშნული ცხრილით შეგვიძლია ყველა ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატის მოძებნა. შევისწავლოთ მე-5 ცხრილის შედგენის პრინციპი.

განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულების კვადრატი:

$$(n+0,01)^2=n^2+0,02n+0,0001.$$

ამგვარად, n-ის მომდევნო რიცხვის $(n+0,01)$-ის კვადრატი მოიძებნება n^2-ის საშუალებით. მაგალითად, ვიპოვოთ $1,01^2$.

$$1,01^2=1^2+2\cdot 0,01+0,0001=1,0201\approx 1,020,$$

ასე მიმდევრობით მოიძებნება ყველა სამნიშნა რიცხვის კვადრატი 1,00-დან 10,00-მდე.

შევისწავლოთ მეოთხე ციფრისათვის მარჯვნივ მდებარე ცხრილის შედგენა.

მაგალითად, ვიპოვოთ $1,011^2$.

ამისათვის $1,011^2$ ასე წარმოვიდგინოთ:

$$1,011^2=(1,01+0,001)^2=1,01^2+2\cdot 1,01\cdot 0,001+0,000001=$$
$$=1,0201+0,002021.$$

ამგვარად, $1,011^2$ ტოლია $1,01^2$-ისა და 0,002021-ის ჯამისა. მიღებულ 0,002021-ს შ ე ს წ ო რ ე ბ ა ეწოდება.

გამოვთვალოთ მიმდევრობით შესწორებანი, გვექნება:

$1,011^2$-ის შესწორება ტოლია	0,002021
$1,021^2$ „ „ „	0,002041
$1,031^2$ „ „ „	0,002061
$1,041^2$ „ „ „	0,002081
$1,051^2$ „ „ „	0,002101
$1,061^2$ „ „ „	0,002121
$1,071^2$ „ „ „	0,002141
$1,031^2$ „ „ „	0,002161
$1,091^2$ „ „ „	0,002181

ამგვარად. ყველა ჩამოთვლილი რიცხვის შესწორება დამრგვალებით ტოლია 0,002. ამიტომაა, რომ რიცხვი 2 წერია მარჯვენა მე-5 ცხრილში 1-ის ქვეშ 1,0-ის სტრიქონზე. ასევე მოიძებნება რიცხვის კვადრატის შესწორება მეოთხე ციფრის 2-სათვის: 0,004. რიცხვი 4 წერია მარჯვნივ ცხრილში 2-ის ქვეშ, 1,0-ის სტრიქონზე და ა. შ.

გავიგოთ ცხრილში ოთხნიშნა რიცხვების კვადრატების ცდომილება.

ცხრილში მოთავსებული სამნიშნა რიცხვის კვადრატი შეიცავს ცდომილებას, რომელიც დატოვებული ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება. ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატი შეიცავს მეორე ცდომილებას, რომელიც სათანადო მეოთხე ციფრის შესწორების დამრგვალებითაა გამოწვეული. ეს ცდომილებაც დატოვებული ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება. ამრიგად, ოთხნიშნა ცხრილში მოთავსებული ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატი შეიცავს ცდომილებას, რომელიც დატოვებული ციფრის თანრიგის ერთეულს არ აღემატება.

შესწორებანი ზოგჯერ უმჯობესია გამოვაკლოთ და არ მივუმატოთ. მაგალითად, $1,328^2$ რომ ვიპოვოთ, უნდა ვიპოვოთ $1,32^2$ და მივუმატოთ 8-ის შესწორება 0,022:

$$1,328^2 = 1,32^2 + 1,022 = 1,742 + 0,022 = 1,764;$$

$1,328^2$ უმჯობესია ასე მოვძებნოთ: ჯერ მოვძებნოთ $1,33^2$ და გამოვაკლოთ 2-ის შესწორება 0,005:

$$1,328^2 = 1,33^2 - 0,005 = 1,769 - 0,005 = 1,764.$$

ცხადია, განხილული ცხრილით შეგვიძლია ნებისმიერი ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატი მოვძებნოთ. ამისათვის საკმარისია მოცემული რიცხვი სათანადოდ წარმოვადგინოთ.

მაგალითად:

$$0,001234 = 1,234 \cdot 10^{-3}; \quad 1234578 \approx 1,235 \cdot 10^6,$$

მაშინ გვექნება:

$$0,001234^2 = 1,234^2 \cdot 10^{-6}; \quad 1234578^2 \approx 1,235^2 \cdot 10^{12}.$$

საზოგადოდ, ცხრილებს მწკრივების საფუძველზე ადგენენ, რომლებსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4}{2^4 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{2\cdot x^2}{3^2\cdot 2!}+\frac{2\cdot 5\cdot x^3}{3^3\cdot 3!}+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots$$

$$\lg(x+1)=\lg x+2M\left[\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^5+\cdots\right],$$

$$M=0{,}4342294482\cdots$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

და ა. შ. თითოეული მწკრივის კრებადობა მით უფრო სწრაფია, რაც უფრო მცირეა სათანადო არგუმენტი. ამისათვის ზოგჯერ საჭიროა გამოსახულების სათანადო გარდაქმნა ვაწარმოოთ.

მაგ. $\sqrt{260}=\sqrt{256+4}=\sqrt{16^2+4}=16\sqrt{1+\frac{1}{64}}=$

$$=16\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}-\frac{1}{2^3\cdot 2!}\cdot\frac{1}{64^2}+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}\,\frac{1}{64^3}-\cdots\right],$$

თუ ავიღებთ პირველ ორ წევრს, მივიღებთ:

$$\sqrt{260}\approx 16\left(1+\frac{1}{128}\right)=16+\frac{1}{8}=16{,}125.$$

ამ მაგალითში ცდომილება ნაკლებია 0,0005-ზე.

გამოვთვალოთ lg 2. გამოთვლების მსვლელობის გაგება არავითარ სიძნელეს არ შეადგენს.

$$\lg 2=\lg 1+2M\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\cdots\right).$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{3}=0{,}3333333 & \frac{1}{3}=0{,}3333333 \\[4pt]
\frac{1}{3^3}=0{,}0370370 & \frac{1}{3^3\cdot 3}=0{,}0123457 \\[4pt]
\frac{1}{3^5}=0{,}0041152 & \frac{1}{3^5\cdot 5}=0{,}0008230 \\[4pt]
\frac{1}{3^7}=0{,}0004572 & +\;\frac{1}{3^7\cdot 7}=0{,}0000653 \\[4pt]
\frac{1}{3^9}=0{,}0000508 & \frac{1}{3^9\cdot 9}=0{,}0000056 \\[4pt]
\frac{1}{3^{11}}\approx 0{,}0000056 & \frac{1}{3^{11}\cdot 11}=0{,}0000005 \\[4pt]
\frac{1}{3^{13}}=0{,}00000063 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
0{,}3465734 \\
\times\quad 2 \\
\hline
0{,}6931468 \\
\times\;0{,}4342945 \\
\hline
27725872 \\
2079441 \\
277260 \\
+\quad 13862 \\
6237 \\
276 \\
30 \\
\hline
0{,}30102978
\end{array}$$

უკუვაგდოთ ორი ციფრი (ნამრავლში ზუსტ ციფრთა რაოდენობა 2-ით მცირდება, § 42)

$$\lg 2\approx 0{,}30102978\approx 0{,}301030.$$

მიღებული შედეგი შეიცავს შეცდომას, რომელიც ნაკლებია 10^{-6}-ზე. მართლაც, გამოთვლის წარმოებიდან:

$$\frac{1}{3^{15}}\approx 7\cdot 10^{-8} \quad \text{და} \quad \frac{1}{3^{15}\cdot 15}\approx 0{,}5\cdot 10^{-8}.$$

მწკრივის ყოველ შემდეგ წევრში 10-ის ხარისხის მაჩვენებელი 2-ით მცირეა $\left(\text{მაგალითად, } \frac{1}{3^2\cdot 15}=\frac{1}{135}<\frac{1}{100}, \quad \frac{1}{3^2\cdot 17}<\frac{1}{100} \text{ და ა. შ.}\right)$.

ე. ი. 0,301030-ში ყველა ნიშნადი ციფრი სანდოა.

როგორც ვიცით, ცხრილში ფუნქციის მნიშვნელობანი დისკრეტულადაა მოცემული. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ ფუნქციის მნიშვნელობანი არგუმენტის იმ მნიშვნელობათათვის, რომლებიც ცხრილში არ არის მოცემული. ამ ამოცანას ინტერპოლირების ამოცანა ეწოდება[1].

თუ $y=f(x)$ ფუნქციას $[x_0, x_1]$ შუალედში შევცვლით

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \tag{13}$$

წრფის მონაკვეთით, სადაც $y_0=f(x_0)$, მაშინ ინტერპოლირებას ეწოდება წრფივი ინტერპოლირება.

(13)-დან გვექნება

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0), \tag{14}$$

ანუ

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta y_0,$$

სადაც h ცხრილის ბიჯია, ხოლო Δy_0—ცხრილის სხვაობა,

$$h=x_1-x_0, \qquad \Delta y_0=y_1-y_0.$$

გამოსახულებას

$$\gamma=\frac{x-x_0}{h}\Delta y_0$$

ეწოდება y_0-ის შესწორება.

განვიხილოთ მაგალითი: ვიპოვოთ $1,1145^2$.

ავიღოთ მე-5 ცხრილი (§ 45). ამ ცხრილში მოცემულია

$$y_0=1,11^2=1,232, \qquad y_1=1,12^2=1,254,$$

ამიტომ

$$h=0,01, \qquad \Delta y_0=1,254-1,232=0,022,$$

შესწორება იქნება:

$$\frac{x-x_0}{h}\Delta y_0=\frac{0,0045}{0,01}\cdot 0,022=0,45\cdot 0,022\approx 0,010.$$

მაშასადამე, საძიებელი მნიშვნელობა იქნება:

$$1,1145^2=1,11^2+0,010=1,232+0,010=1,242.$$

საძიებელი კვადრატის ზუსტი მნიშვნელობაა 1,24211025, წრფივი ინტერპოლირებით მიღებულ 1,242-ში ზუსტია ყველა ციფრი.

---

[1] შ. მიქელაძე, ინტერპოლების თეორია და პრაქტიკა, თბილისი, 1946.

ამგვარად, განხილულ მაგალითში წრფივმა ინტერპოლირებამ მეტად კარგი შედეგი მოგვცა.

გამოვარკვიოთ წრფივი ინტერპოლირების ცდომილება.

(14) ფორმულის თანახმად $y=f(x)$ ფუნქცია შეიცვალა

$$y=f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}[f(x_1)-f(x_0)]$$

წრფით, ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის ცდომილება ასე განისაზღვრება:

$$\Delta f(x)=f(x)-\left\{f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot[f(x_1)-f(x_0)]\right\}.$$

უკანასკნელი ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\Delta f(x)=-\frac{(x_1-x)(x-x_0)}{x_1-x_0}\left[\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}-\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\right]. \tag{15}$$

აქ მიღებულ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს $\varphi(t)$ ფუნქციის,

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$

სხვაობას $t=x_1$ და $t=x_0$-ისათვის. აღნიშნული სხვაობა ლაგრანჟის ფორმულით[1] მოგვცემს:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}-\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x_1}=\left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]'_{t=\tau}(x_1-x_0)=$$

$$=\frac{f'(\tau)(\tau-x)-[f(\tau)-f(x)]}{(\tau-x)^2}(x_1-x_0),\quad x_0<\tau<x_1.$$

ამიტომ (15)—ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\Delta f(x)=-(x_1-x)(x-x_0)\frac{f(x)-f(\tau)-(x-\tau)f'(\tau)}{(\tau-x)^2}. \tag{16}$$

$f(x)$ ფუნქცია τ-ს მახლობლობაში გავშალოთ ტეილორის ფორმულით:

$$f(x)=f(\tau)+(x-\tau)f'(\tau)+\frac{(x-\tau)^2}{2!}f''(\xi), \tag{17}$$

სადაც ξ მოთავსებულია (x, τ) შუალედში. (17)-ის საფუძველზე (16) ტოლობა მოგვცემს:

$$\Delta f(x)=-(x_1-x)(x-x_0)\frac{\frac{(x-\tau)^2}{2}f''(\xi)}{(x-\tau)^2},$$

[1] ა. ხარაძე, ვ. ჭელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, თბილისი, 1950.

ანუ

$$\Delta f(x) = -\frac{(x_1-x)(x-x_0)}{1} f''(\xi). \tag{18}$$

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$|\Delta f(x)| \leqslant \frac{|(x_1-x)(x-x_0)|}{2} M, \tag{19}$$

სადაც

$$|f''(\xi)| \leqslant M.$$

თუ წარმოვიდგენთ, რომ x_0 და x_1 დიამეტრის ბოლოწერტილებია, მაშინ დიამეტრის რაიმე x წერტილიდან ამ დიამეტრზე შემოწერილი წრეწირის გადაკვეთამდე აღმართული მართობი K საშუალო გეომეტრიულია $|x-x_0|$ და $|x_1-x|$-ს შორის, ანუ

$$K^2 = |(x_1-x)(x-x_0)|. \tag{20}$$

მაგრამ K არ აღემატება დიამეტრის ნახევარს, ამიტომ K-ს მაგივრად $\left|\frac{x_1-x_0}{2}\right|$-ის ჩასმა (20) ტოლობაში მოგვცემს:

$$|(x_1-x)(x-x_0)| \leqslant \left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}.$$

ამის გამო (19) უტოლობა ასე გადაიწერება:

$$|\Delta f(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} M. \tag{21}$$

ცხადია, როცა h მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ $\Delta f(x)$-იც მიისწრაფვის ნულისაკენ, თუ M სასრული რიცხვია.

გამოვარკვიოთ წრფივი ინტერპოლირების დაშვების პირობები.

როგორც ცნობილია, ცხრილში $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობის ცდომილება არ აღემატება ბოლო ციფრის ერთეულის ნახევარს, ამიტომ $f(x)$-ის წრფივი ინტერპოლირება მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა

$$\frac{Mh^2}{8} \leqslant \frac{10^{-m}}{2}, \tag{22}$$

სადაც n არის ცხრილში ათობით ნიშანთა რაოდენობა. (22) ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$Mh^2 \leqslant 10^{-n} \cdot 4$$

ამგვარად, წრფივი ინტერპოლირება შეიძლება მაშინ გამოვიყენოთ, როდესაც Mh^2 არ აღემატება ცხრილში ფუნქციის მნიშვნელობის ბოლო ციფრის 4 ერთეულს.

ზემოთ განხილულ მაგალითში

$$y=x^2, \qquad y''=2.$$

ამგვარად, $M=2$. მაშინ

$$\frac{Mh^2}{8}=\frac{h^2}{4}=\frac{0{,}01^2}{4}<\frac{10^{-4}}{2}.$$

ანიტომაც $1{,}1145^2 \approx 1{,}242$-ში ზუსტია ყველა ციფრი.

საზოგადოდ, M-ის განსაზღვრა ყოველთვის არ შეიძლება; ამიტომ, როცა აღმოჩნდება, რომ ცხრილის მეზობელი სხვაობების სხვაობა არ აღემატება ბოლო ციფრის 4 ერთეულს, მაშინ ფუნქციის წრფივი ინტერპოლირება დასაშვებია.

§ 47. შებრუნებული ინტერპოლირება

ვთქვათ მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ცხრილით მოცემულ ფუნქციის მნიშვნელობათა y_0 და y_1-ს შორის. მოვნახოთ x არგუმენტის ის მნიშვნელობა, რომელიც y მნიშვნელობას შეესაბამება. ამ ამოცანას ინტერპოლირების შებრუნებული ამოცანა ეწოდება. ეს ამოცანა შეიძლები გადაიჭრას სხვადასხვა ხერხით, ჩვენ აქ განვიხილავთ წრფივი ინტერპოლირების ხერხს.

46-ე პარაგრაფის (13) ფორმულაში x და y სიმეტრიულად შედის, ამიტომ გვექნება

$$x=x_0+\frac{y-y_0}{y_1-y_0}(x-x_0),$$

სადაც x_0, x_1 არის ცხრილში მოცემული არგუმენტის მნიშვნელობა, y_0, y_1—ცხრილით მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობანი, ხოლო y ფუნქციის ცნობილი მნიშვნელობა y_0 და y_1-ს შორის. ცხადია, x არგუმენტის მნიშვნელობის ცდომილება მიიღება 46-ე პარაგრაფის (18) ფორმულით,

$$\Delta x=-\frac{(y_1-y)(y-y_0)}{2}\varphi''(\xi), \tag{23}$$

სადაც $x=\varphi(y)$ არის $y=f(x)$-ის შებრუნებული ფუნქცია, ξ მოთავსებულია y_0 და y_1-ს შორის.

(23)-დან მივიღებთ

$$|\Delta x| \leqslant \frac{(y_1-y_0)^2}{8}N, \tag{24}$$

სადაც

$$N=|\varphi''(\xi)|_{\max}.$$

(24) ფორმულიდან ცხადია, რომ, რაც უფრო მცირეა ცხრილის სხვაობა, მით უფრო ზუსტად მიიღება არგუმენტის მნიშვნელობა.

განვიხილოთ მ ა გ ა ლ ი თ ი. $y_0=\lg 321,0=2,50651$, $y_1=\lg 324,2=$ $=2,51081$, $y=\lg x=2,50893$. ვიპოვოთ x.

(1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$x=321,0+\frac{2,50893-2,50651}{2,51081-2,50651}(324,2-321,0)=$$

$$=321,0+\frac{0,00242}{0,00430}3,2;$$

საიდანაც

$$x=322,6.$$

სათანადო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ $\lg 322,8=2,50893$. ე. ი. ბოლო ციფრი 6 შეიცავს ორ ერთეულ ცდომილებას.

გავარჩიოთ ც ხ რ ი ლ ი თ მ ო ც ე მ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი ს ს ი ზ უ ს ტ ე.

ხშირად აუცილებელია მოვნახოთ არგუმენტი ფუნქციის იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც ცხრილითაა მოცემული. ასეთია, მაგალითად, ვიცით ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა და ვეძებთ კუთხეს ან ვიცით რიცხვის ლოგარითმი და ვეძებთ რიცხვს. ცხადია, ფუნქციის მნიშვნელობა მიახლოებითია, ამიტომ არგუმენტის ის მნიშვნელობა, რომელიც ცხრილიდან მიიღება აუცილებლად ცდომილებას შეიცავს.

ავიღოთ მიახლოებითი ფორმულა $y=f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x,$$

საიდანაც

$$\Delta x=\frac{\Delta y}{f'(x)}. \tag{25}$$

აქ Δy არის ფუნქციის ცდომილება ცხრილის მიხედვით, Δx—არგუმენტის ცდომილება, (25) ფორმულით განვსაზღვროთ ზოგიერთი ფუნქციის არგუმენტის ცდომილების სიდიდე.

1. ლოგარითმული ფუნქცია $y=\ln x$.

რადგანაც $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ამიტომ გვექნება:

$$\Delta x=x\Delta y.$$

თუ ლოგარითმის ფუძედ 10-ია, გვექნება

$$\Delta x=\frac{x\Delta y}{M}=2,3026\cdot x\Delta y, \tag{26}$$

სადაც

$$M=0,43429.$$

2. ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი

1) $y = \sin x$, $y' = \cos x$.

ამიტომ გვექნება

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{\cos x} = \sec x \cdot \Delta y \text{ რადიანს} \tag{27}$$

ან

$$(\Delta x)'' = 206264{,}8 \sec x \cdot \Delta y \text{ წმ.}$$

2) $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

ამიტომ

$$\Delta x = \cos^2 x \cdot \Delta y \text{ რადიანს} \tag{28}$$

ან
$$(\Delta x)'' = 206264{,}8 \cos^2 x \cdot \Delta y \text{ წმ.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვსაზღვროთ $y = \lg \sin x$-ის არგუმენტის სიზუსტე. გვექნება:

$$y = \lg \sin x, \quad y' = M \frac{\cos x}{\sin x} = M \operatorname{ctg} x,$$

ამიტომ

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{M \operatorname{ctg} x} = 2{,}3026 \operatorname{tg} x \, \Delta y \text{ რადიანს}$$

ან
$$(\Delta x)'' = 475000 \operatorname{tg} x \cdot \Delta y \text{ წმ.}$$

3. მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა

$$y = e^x, \quad y' = e^x,$$

ამიტომ

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{e^x}.$$

როგორც (27) და (28) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, კუთხის განსაზღვრა მოცემული $\sin x$-ის მნიშვნელობით უფრო დიდ ცდომილებას მოგვცემს, ვიდრე $\operatorname{tg} x$-ით.

თ ა ვ ი VIII

ფუნქციონალური სკალები

§ 48. წრფივი ფუნქციის სკალა

ს კ ა ლ ა ე წ ო დ ე ბ ა ზ ე დ ა პ ი რ ზ ე განსაზღვრული მას- შ ტ ა ბ ი თ ა ღ ე ბ უ ლ ი ქ ღ ე ე ბ ი ს ა დ ა ა ღ ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი ს ე რ - თ ო ბ ლ ი ო ბ ა ს, რ ო მ ლ ე ბ ი ც ს ა თ ა ნ ა დ ო კ ა ნ ო ნ ი ს შ ე ს ა - ბ ა მ ი ს ა დ ა ა დ ა ლ ა გ ე ბ უ ლ ი.

სკალები სხვადასხვა სახისაა როგორც ფორმით, ისე შინაარსით. მაგალითად, თერმომეტრის, ბარომეტრის, ტრანსპორტირის სკალები სხვადასხვა ფორმისაა და სხვადასხვა სიდიდეებს განსაზღვრავენ.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი სკალა.

ავიღოთ რიცხვთა ღერძზე OA მონაკვეთი (ნახ. 18). ეს მონაკვეთი გავყოთ 10 ტოლ ნაწილად, მიღებული მეათედი მონაკვეთები კვლავ გავყოთ ათ-ათ ნაწილად. მივიღებთ მეასედ ნაწილებს. თითოეული მეასედი ნაწილი გავყოთ კიდევ ათ ნაწილად. მივიღებთ მეათასედ ნაწილებს.

ნახ. 18.

OA მონაკვეთზე გვექნება სამი კატეგორიის მონაკვეთები. პირველი კატეგორიის მონაკვეთების გამყოფ წერტილებზე გავატაროთ წრფის მონაკვეთები, რომელთაც ჭ დ ე ე ბ ი ვუწოდოთ. მეორე კატეგორიის მონაკვეთების გამყოფ წერტილებზე გავატაროთ შედარებით მოკლე მონაკვეთები, ვიდრე პირველი კატეგორიის მონაკვეთების გაყოფ წერტილებზე. ასევე, მესამე კატეგორიის მონაკვეთების გაყოფის წერტილებზე გავატაროთ უფრო მოკლე წრფის მონაკვეთები, ვიდრე მეორე კატეგორიის მონაკვეთების გაყოფის წერტილებზე გავატარეთ. ნახაზზე მესამე კატეგორიის მონაკვეთები ნაჩვენები არ არის. მეორე კატეგორიის მონაკვეთის ათ ნაწილად დაყოფა შეუძლებელია აღებული ზომის OA მონაკვეთისათვის.

თუ OA მონაკვეთი ერთ ერთეულს გამოსახავს, მაშინ, ცხადია, პირველი, მეორე და მესამე კატეგორიის მონაკვეთები სათანადოდ გამოსახავს 0,1; 0,01; 0,001-ს. ამიტომ პირველი კატეგორიის ჭდეებს შეესაბამება რიცხვები:

$$0;\quad 0{,}1;\quad 0{,}2;\quad 0{,}3;\cdots;\quad 0{,}9;\quad 1.$$

მეორე კატეგორიის ჭდეებს შეესაბამება

$$0;\quad 0{,}01;\quad 0{,}02;\ldots;\quad 0{,}09;\quad 0{,}1.$$

ხოლო მესამე კატორიის ჭდეებს შესაბამება რიცხვები:

$$0{,}001;\ 0{,}002;\cdots;\quad 0{,}009;\quad 0{,}01.$$

თუ OA მონაკვეთი 10 ერთეულს გამოსახავს, მაშინ თითოეული კატეგორიის მონაკვეთი სათანადოთ 10-ჯერ მეტ სიდიდეს მოგვცემს, ვიდრე წინა შემთხვევაში. ასევე, თუ OA მონაკვეთი 100 ერთეულს გამოსახავს, მაშინ თითოეული კატეგორიის მონაკვეთი სათანადოდ 100-ჯერ მეტ სიდიდეს მოგემს, ვიდრე პირველ შემთხვევაში.

ჩვეულებრივად რიცხვთა ღერძს მილიმეტრებად დაყოფილ ქაღალდზე (მილიმეტრულა) აგებენ, სადაც პირველი და მეორე კატეგორიის მონაკვეთებისათვის დაყოფა არ გვჭირდება. მაგალითად, თუ $OA=200$ მმ, მაშინ პირველი კატეგორიის მონაკვეთი 2 სმ-ის ტოლია, ხოლო მეორე კატეგორიის მონაკვეთი—2 მმ-ის ტოლია. მესამე კატეგორიის მონაკვეთების მისაღებად დაგვჭირდება 2 მმ-ის 10 ნაწილად დაყოფა. ამ მოქმედებას თვალდათვალ შევასრულებთ. ეს დაყოფა ნახაზზე შესრულებული არ არის, რადგანაც, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, სათანადო ჭდეები მთლიანად დაფარავს 2 მმ-ს. ამიტომ სათანადო მესამე კატეგორიის მონაკვეთის აგებას საჭიროების შემთხვევაში თვალდათვალ მოვახდენთ.

ცხადია, OA მონაკვეთის X წერტილსა და მის შესაბამის x რიცხვს შორის ასეთი დამოკიდებულება არსებობს:

$$OX=mx, \tag{1}$$

სადაც m პროპორციულობის კოეფიციენტია. ჩვეულებრივად m გამოისახება მმ-ში.

m-ს ე წ ო დ ე ბ ა x-ის მ ო დ უ ლ ი (მ ა ს შ ტ ა ბ ი).

იმისდა მიხედვით, თუ რას უდრის მოდული m, რიცხვთა ღერძი 20 სმ-იან მონაკვეთზე სხვადასხვა რიცხვთა სკალას მოგვცემს, მაგრამ არა-უმეტეს სამნიშნა რიცხვებისა.

მაგალითად, $m=200$ მმ, მაშინ OA მონაკვეთზე მივიღებთ შემდეგი რიცხვების სკალას:

$$0;\quad 0{,}001;\quad 0{,}002;\cdots;\quad 0{,}999;\quad 1.$$

თუ $m=2$ მმ, მაშინ იგივე OA მონაკვეთზე მივიღებთ შემდეგი რიცხვების სკალას:

$$0;\quad 0{,}1;\quad 0{,}2;\cdots;\quad 99{,}9;\quad 100.$$

პირველ კატეგორიის ჭდეებს მსხვილი ციფრები დავაწეროთ:

$$\mathbf{0,\quad 1,\cdots,\quad 9,\quad 10.}$$

მეორე კატეგორიის ჭდეებს უფრო მცირე ზომის ლუწი ციფრები დავაწეროთ, ვიდრე პირველი კატეგორიის ჭდეებს დავაწერეთ:

$$2,\quad 4,\quad 6,\quad 8.$$

თვალის ჰიგიენისათვის მეორე კატეგორიის ის ჭდეები, რომლებიც კენტ ციფრებს შეესაბამება მოკლეა, ვიდრე ის ჭდეები, რომლებიც ლუწ ციფრებს შეესაბამება. მესამე კატეგორიის ჭდეები ნახაზზე არ გვაქვს. მაგრამ დავიმახსოვროთ: მესამე კატეგორიის 5 მონაკვეთი ერთი მილიმეტრია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ 26,5-ის შესაბამისი წერტილი სკალაზე და გამოვიანგარიშოთ სათანადო მასშტაბი.

ციფრი 2 მოვძებნოთ პირველი კატეგორიის ციფრებში, შემდეგ, პირველი კატეგორიის ციფრებს 2 და 3-ს შორის მოვძებნოთ მეორე კატეგორიის ციფრი 6. ამ 6-სა და მის მეზობელ მეორე კატეგორიის 7-ს შორის ავიღოთ 1 მმ, რაც მესამე კატეგორიის 5 ერთეულს შეესაბამება. მივიღებთ X_1 წერტილს. ძნელი არ არის იმის მიხვედრა, რომ

$$OX_1 = 53 \text{ მმ},$$

ამიტომ (1) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$53 \text{ მმ} = m \; 26{,}5,$$

საიდანაც

$$m = \frac{53 \text{ მმ}}{26{,}5} = 2 \text{ მმ},$$

ე. ი. 2 მმ მასშტაბით X_1 წერტილი გამოსახავს 26,5-ს.

თუ გვექნება რიცხვი 2650, რომელსაც იგივე X_1 წერტილი შეესაბამება აღებულ სკალაზე; მაშინ მივიღებდით:

$$m = \frac{53}{2650} = 0{,}02 \text{ მმ},$$

ე. ი. რიცხვს 2650-ს შეესაბამება X_1 წერტილი, თუ მასშტაბი ტოლია 0,02 მმ-ის.

ნახაზზე აგებულ სკალაზე პირველი კატეგორიის ერთი მონაკვეთი გამოსახავს სათანადო თანრიგის ერთ ერთეულს, მაგალითად, ერთ ათასეულს, ამ შემთხვევაში ვიტყვით: პირველი კატეგორიის მონაკვეთის ფასია ათასი. ცხადია, მეორე და მესამე კატეგორიის მონაკვეთების ფასი იქნება პირველი კატეგორიის მონაკვეთის ფასზე სათანადოდ 10-ჯერ და 100-ჯერ ნაკლები. განხილულ მაგალითში მეორე კატეგორიის მონაკვეთის ფასია 100, ხოლო მესამე კატეგორიის მონაკვეთის ფასი—ხუთი.

აგებულ სკალაზე მესამე კატეგორიის მონაკვეთის მისაღებად 1 მმ უნდა გავყოთ ხუთ ნაწილად. თვალდათვალ მონაკვეთის ხუთ ნაწილად გაყოფა უფრო ძნელია, ვიდრე იგივე მონაკვეთის ოთხ ნაწილად გაყოფა, ამიტომ OA მონაკვეთი ისეთი სიგრძის ავიღოთ, რომ მესამე კატეგორიის მონაკვეთის მისაღებად 1 მმ-ის ოთხ ნაწილად გაყოფა დაგვჭირდეს, ე. ი.

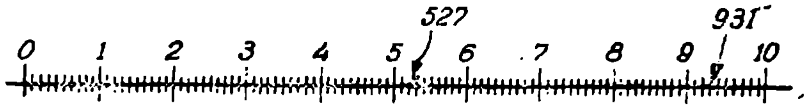
$$4 \cdot \frac{OA}{1000} = 1 \text{ მმ},$$

საიდანაც

$$50 \text{ მმ}.$$

ამ შემთხვევაში პირველი კატეგორიის მონაკვეთის სიგრძეა 25 მმ, მეორე კატეგორიის—2,5 მმ, მესამე კატეგორიისა—0,25 მმ. ასეთი სკალა წარმოდგენილია მე-19 ნახაზზე.

რადგანაც სკალაზე ვიღებთ მარტო ნიშნად ციფრებს (არა-უმეტეს სამი ნიშნადი ციფრისა) და მხედველობაში არ გვაქვს ამ ნიშნადი ციფრებით გამოსახული რიცხვი, სკალაზე წერტილს „ვკითხულობთ" ნიშნადი ციფრებით. მაგალითად, თუ წერტილს შეესაბამება ხუთი პირველი კა-



ნახ. 19.

ტეგორიის, ორი მეორე კატეგორიის და შვიდი მესამე კატეგორიის მონაკვეთი, მაშინ წერტილს ასე წავიკითხავთ:

ხ უ თ ი, ო რ ი დ ა შ ვ ი დ ი.

მაგრამ ამ ციფრებით შეიძლება ჩაიწეროს რიცხვები:

$$0{,}527; \quad 52700; \quad 0{,}00527; \dots$$

სადაც სათანადო მოდულები იქნება:

$$250; \quad 0{,}0025; \quad 25000; \dots$$

ახლა განვიხილოთ წრფივი ფუნქცია

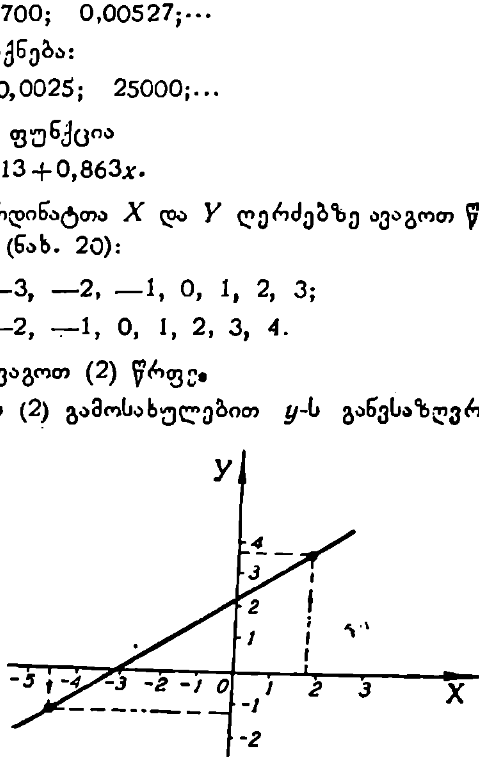
$$y = 2{,}13 + 0{,}863x. \tag{2}$$

წინასწარ მართკუთხა კოორდინატთა X და Y ღერძებზე ავაგოთ წერტილები მოდულით $m=25$ მმ (ნახ. 20):

$$\begin{aligned} OX &= 25 x, \quad x = -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3; \\ OY &= 25 y, \quad y = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned} \tag{3}$$

ამ კოორდინატთა სისტემაში ავაგოთ (2) წრფე.

ცხადია, მოცემული x-თვის (2) გამოსახულებით y-ს განვსაზღვრავთ ალგებრული მოქმედებით. სათანადო y-ს ნაკლები ენერგიის და დროის დახარჯვით განვსაზღვრავთ მე-20 ნახაზის საშუალებით (ადვილი შესამჩნევია, მოცემულიც და შედეგიც მხოლოდ სამი ნიშნადი ციფრით შეიძლება ავიღოთ). საკმარისია მოცემულ x-ზე გავატაროთ Y ღერძის პარალელური წრფე (2) წრფის გადაკვეთამდე, გადაკვეთით მიღებულ წერტილზე გავატაროთ X ღერძის პარალელური წრფე Y ღერ-



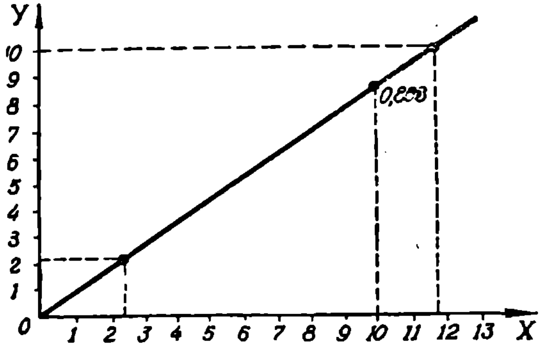
ნახ. 20.

ძის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილი Y ღერძზე მოგვცემს მოცემული x-ის შესაბამის y-ს.

ცხადია, ნახაზის სიდიდე არ იძლევა შესაძლებლობას x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის მოვნახოთ y. თუ x მოთავსებულია -3-სა და $+3$-ს შორის, მაშინ სათანადო y განისაზღვრება და ეს y მოთავსებული იქნება -2-სა და $+4$-ს შორის. x-ის ცვალებადობის არის გაზრდისათვის ასე მოვიქცეთ: ავიღოთ ფუნქცია

$$y=0{,}863\,x \tag{4}$$

და იმავე XY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ავაგოთ (ნახ. 21), სადაც X და Y ღერძებზე აგებულია სკალები:



ნახ. 21.

$$OX=250\,x,$$
$$OY=250\,y.$$

დავასახელოთ x,

$$x=0{,}246.$$

მოვძებნოთ Y ღერძზე სათანადო y. გვექნება:

ორი — ერთი — ორი.

რომ შევადგინოთ პასუხი, რიცხვები 0,863 და 0,246 დავამრგვალოთ ერთ ნიშნად ციფრამდე და გადავამრავლოთ, მივიღებთ

$$0{,}9\cdot 0{,}2=0{,}18,$$

ე. ი. პასუხში პირველი ნიშნადი ციფრი მეათედია, ამიტომ

$$y=0{,}212.$$

ასევე ნებისმიერი სამნიშნა რიცხვისათვის განვსაზღვრავთ y-ის მნიშვნელობას. თუ გვინდა y-ის მნიშვნელობა, რომელიც (2) ტოლობით განისაზღვრება, საკმარისია 21-ე ნახაზით განსაზღვრულ მნიშვნელობას მივუმატოთ 2,13. მაგალითად, $x=0{,}246$-ისათვის y ასე განისაზღვრება:

$$y=2{,}13+0{,}212=2{,}342.$$

აქ ოთხივე ნიშნადი ციფრი სანდოა, თუ 2,13 ზუსტია.

თუ (4) ტოლობიდან საჭიროა მოცემული y-სათვის x განვსაზღვროთ, დაგვჭირდება x-ის სკალა გავზარდოთ. მართლაც, როცა y იცვლება 0-სა და 1-ს შორის, მაშინ x იცვლება 0-სა და 1,16-ს შორის. ამის გამო X ღერძზე, იმ წერტილის შემდეგ, რომელსაც შეესაბამება 10, ავიღოთ ორი პირველი კატეგორიის მონაკვეთი, სადაც ჰდეებს დავაწეროთ

11, 12,

ხოლო მეორე კატეგორიის ჭდეებს ისევ—

2, 4, 6, 8.

თუ y სამი ნიშნადი ციფრითაა მოცემული, მაშინ x-მიც სამი ნიშნადი ციფრი უნდა შევინარჩუნოთ (თავი III).

მაგალითად,

$$y=9{,}59.$$

ამ მნიშვნელობას X ღერძზე შეესაბამება წერტილი, რომელიც ასე წაიკითხება:

თერთმეტი—ნული—ცხრა.

მოცემულ რიცხვებს თითო ნიშნად რიცხვებამდე თუ დავამრგვალებთ, მივიღებთ:

$$x=\frac{10}{0{,}9}=\frac{100}{9}\approx 11,$$

ე. ი. შედეგში ორი ნიშნადი ციფრი უნდა გვქონდეს.

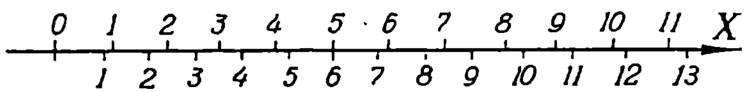
$$x=11{,}09.$$

მიუხედავად იმისა, რომ შედეგში ოთხი ნიშნადი ციფრია, სანდოა მხოლოდ სამი ნიშნადი ციფრი, ამიტომ

$$x\approx 11{,}1.$$

ნაცვლად (4) ფუნქციის გრაფიკისა ავაგოთ ამ ფუნქციის სკალა. ამისათვის y ღერძის მარჯვენა მხარეს ავაგოთ წერტილები (ნახ. 22):

$$OY=250\cdot 0{,}863x \quad (x=0,\ 1,\cdots,\ 10,\ 11,\ 12), \tag{5}$$



ნახ. 22.

სადაც, სათანადოდ, გვექნება მეორე კატეგორიის მონაკვეთები. აქ თითო ჭდეს გამოტოვებით დავაწეროთ: 2, 4, 6, 8.

Y ღერძის მარცხენა მხარეს დავტოვოთ სკალა:

$$OY=250y \quad (y=0,1,\cdots,\ 10).$$

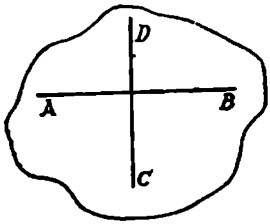
ცხადია, (5) სკალის აგება მე-20 ნახაზის საშუალებით შეიძლება. დაგვჭირდება მხოლოდ (4) წრფის იმ წერტილების დაგეგმილება ღერძზე, რომელთა აბსცისებია

$$X=0,\ 1,\cdots,\ 10,\ 11,\ 12.$$

დანარჩენი კატეგორიების ჭდეების მისაღებად საკმარისია, პირველი კატეგორიის მონაკვეთთა ათ-ათ ტოლ ნაწილად დაყოფა, ხოლო მესამე კატეგორიის ჭდეებს თვალდათვალ განვსაზღვრავთ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთი სკალა უფრო მცირე ზომისაა, ვიდრე 21-ე ნახაზი.

სათანადო გამოთვლების წარმოება ადვილია, თუ ავიღებთ გამჭვირვალე მასალისაგან გაკეთებულ ფირფიტას („მაჩვენებელი ოთხკუთხედი“), რომელზედაც გავატარებთ ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ AB და CD წრფეებს (ნახ. 23). AB-ს დავარქვათ მიმმართველი და CD-ს მაჩვენებელი წრფე. თუ ამ ფირფიტას სკალაზე ისე მოვათავსებთ, რომ მიმმართველი შეუთავსდეს სკალის ღერძს, მაჩვენებელ წრფეზე დალაგდება ურთიერთშესაბამისი x და y, რომლებიც (4) განტოლებას აკმაყოფილებენ.



ნახ. 23.

დავუბრუნდეთ (2) ტოლობას.

თუ გვინდა (2) ტოლობიდან y-ის შესაბამისი x-ის მნიშვნელობა განვსაზღვროთ, ჯერ უნდა ვიპოვოთ $y_1=y-2,13$ მნიშვნელობა, შემდეგ კი ამ მნიშვნელობით, 22-ე ნახაზის საშუალებით, განვსაზღვროთ x. ცხადია, x შეიძლება უარყოფითი იყოს, თუ $y-2,13$ უარყოფითია.

ამგვარად, ნებისმიერი x-ისათვის (სამნიშნა) შეგვიძლია 22-ე ნახაზის საშუალებით განვსაზღვროთ y და, პირიქით, ნებისმიერი y-ისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ x, რომლებიც (2) ტოლობას აკმაყოფილებენ.

განხილული სკალები ერთგვაროვანია, რადგანაც ყველგან ერთი და იგივე კატეგორიის მონაკვეთები ტოლია.

§ 49. არაერთგვაროვანი სკალები

ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია

$$y=f(x). \tag{6}$$

x-ს მივცეთ მნიშვნელობანი:

$$x_1, \ x_2, \cdots, \ x_n$$

და გამოვთვალოთ მნიშვნელობანი:

$$f(x_1), \ f(x_2), \cdots, \ f(x_n).$$

ავიღოთ Y ღერძი და ავაგოთ წერტილები:

$$OY_i=mf(x_i) \qquad (i=1, \ 2, \cdots, \ n). \tag{7}$$

მივიღებთ (6) ფუნქციის სკალას. საზოგადოდ, მიღებული სკალა იქნება არაერთგვაროვანი, რადგანაც სხვაობა

$$y_i-y_{i-1}=f(x_i)-f(x_{i-1})$$

არ იქნება მუდმივი ყოველი i-სათვის. ეს სხვაობა სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვაა.

1. დაწვრილებით გავარჩიოთ ფუნქცია

$$y=x^2. \qquad (8)$$

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე ავაგოთ სკალები:

$$\begin{aligned} OX&=25\,x \qquad (x=0,\ 1,\cdots,\ 10),\\ OY&=2{,}5\,y \qquad (y=0,\ 1,\cdots,\ 100). \end{aligned} \qquad (9)$$

ამ სისტემაში ავაგოთ (8) ფუნქცია (ნახ. 24). ცხადია, მოცემული ფუნქციის ყოველ წერტილს ვერ ავაგებთ, მაგრამ $x=0,\ 1,\cdots,\ 10$-სათვის ავაგოთ წერტილები და მიღებული წერტილები შევაერთოთ უწყვეტი, ოდნავ მრუდი. წირით. ეს წირი საშუალებას მოგვცემს სამნიშნა რიცხვების კვადრატები ვიპოვოთ. ნახაზზე ნაჩვენებია

$$2{,}56^2=6{,}60; \quad 8{,}20^2=67{,}2.$$

ცხადია, სხვა რიცხვების კვადრატებიც ასევე გამოითვლება:

$$0{,}256^2=(2{,}56\cdot10^{-1})^2=2{,}56^2\cdot10^{-2}=6{,}60\cdot10^{-2}=0{,}066;$$

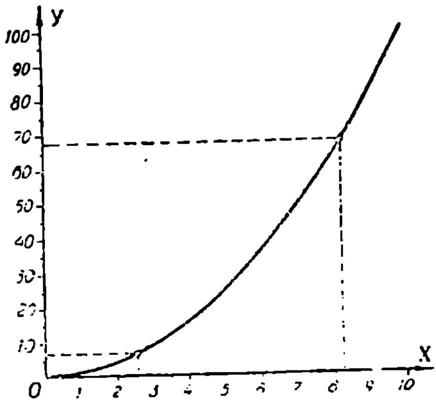
$$820^2=(8{,}20\cdot10^2)^2=8{,}20^2\cdot10^4=67{,}2\cdot10^4=672000.$$

უფრო მარტივად შესრულდება რიცხვის კვადრატში ახარისხება, თუ ვისარგებლებთ რიცხვის n რიგით.

რიცხვის რიგი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

625-ის	$n=3$,
6,25-ის	$n=1$,
0,625-ის	$n=0$,
0,0625-ის	$n=-1$,
0,00625-ის	$n=-2$,

და ა. შ.



ნახ. 24.

სკალა გავყოთ ორ ნაწილად: პირველი ნაწილი [0,10] და მეორე ნაწილი [10, 100]. ადვილი შესამოწმებელია, რომ, თუ რიცხვის კვადრატი მოთავსდა [0, 10] ნაწილში, მაშინ რიცხვის კვადრატის რიგი N ასე განისაზღვრება ტოლობით:

$$N=2n-1.$$

ხოლო, თუ რიცხვის კვადრატი მოთავსდა მეორე ნაწილში [10, 100], მაშინ

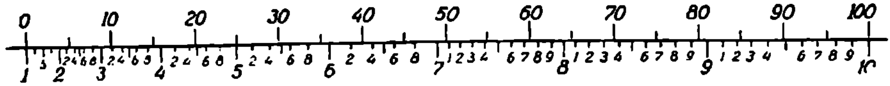
$$N=2n,$$

სადაც n ასახარისხებელი რიცხვის რიგია.

მაგალითად, $25{,}6^2=660$, $N=2\cdot 2-1=3$;

$8200^2=67\,200\,000$, $N=2\cdot 4=8$.

ამგვარად, რიცხვის კვადრატის ციფრები ამოვწეროთ y სკალიდან და შევადგინოთ რიცხვი $2n$ ან $2n-1$ რიგის იმისდა მიხედვით, თუ y სკალის რომელ ნაწილში მოხვდება რიცხვის კვადრატი.



ნახ. 25.

ნაცვლად 24-ე ნახაზისა შეგვიძლია ავაგოთ კვადრატული ფუნქციის სკალა. ამისათვის Y ღერძის ერთ მხარეს ავაგოთ სკალა (y სკალა, ნახ. 25):

$$OY=2{,}5\,y \quad (y=0,\ 10,\ 20,\dots,\ 100), \tag{10}$$

სადაც პირველი კატეგორიის ჰდეები დიდი ციფრებით აღვნიშნოთ

0, 10, 90,..., 100.

ხოლო Y ღერძის მეორე მხარეს ავაგოთ სკალა (x სკალა):

$$OX=2{,}5x^2 \quad (x=0,\ 1,\dots,\ 10), \tag{11}$$

სადაც პირველი კატეგორიის ჰდეები აღვნიშნოთ ციფრებით:

0, 1, 2,..., 9, 10.

მეორე კატეგორიის ჰდეები ისევ კენტი ციფრების გამოკლებით ავიღოთ:

2, 4, 6, 8.

ასეთი აღნიშვნები მოვახდინოთ მთელ (10) სკალაზე და (11) სკალის პირველი კატეგორიის ციფრამდე 7. ამის შემდეგ პირველი კატეგორიის მონაკვეთები 10-10 ნაწილად დავყოთ და დავწეროთ

1, 2, 3,..., 8, 9.

(11) სკალა არაერთგვაროვანია, რადგანაც სიდიდე

$$x^2_i-x^2_{i-1}$$

სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვაა.

ცხადია (11) სკალის აგება 24-ე ნახაზის საშუალებით შეგვიძლია, ამისათვის Y ღერძზე დავაგეგმილოთ წირის ის წერტილები, რომელთაც აბსცისებად სკალის

$$OX=25\,x \quad (x=0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\dots;\ 10)$$

ჰდეები აქვს.

გამოვთვალოთ 327^2 25-ე ნახაზის საშუალებით.

რიცხვი 327 ავიღოთ 25-ე ნახაზის x სკალაზე. 327^2 წავიკითხოთ y სკალაზე:

ერთი, ნული, რვა.

ამ ციფრებით რომ შევადგინოთ 327^2, ამისათვის საჭიროა 327^2-ის რიგის დადგენა.

წერტილი 1, 0, 7 მოთავსებულია y სკალის მეორე ნაწილში

[10, 100], ამიტომ 327^2-ის რიგი ტოლია 6-ის.

ამგვარად,

$$327^2 = 107\,000.$$

ასევე, ვიპოვოთ 220^2.

220^2-ის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია y სკალის პირველ [0,10] ნაწილში. ვკითხულობთ:

ნული, ოთხი, რვა.

220^2-ის რიგი ტოლია 5-ის. ამიტომ

$$220^2 = 48\,000.$$

აგებული სკალით შეგვიძლია მოვნახოთ მოცემული რიცხვიდან კვადრატული ფესვი.

მაგალითად, $\sqrt{1,24}$.

y სკალაზე პირველ ნაწილში მოვძებნოთ 1, 2, 4-ის შესაბამისი წერტილი. ამ წერტილის პირდაპირ x სკალაზე ვკითხულობთ:

1, 2, 0.

მაშასადამე,

$$\sqrt{1,24} = 1,2.$$

ავიღოთ $\sqrt{64}$.

y სკალაზე მეორე ნაწილში მოვძებნოთ წერტილი 6, 4, 0. ამ წერტილის პირდაპირ x სკალაზე ვკითხულობთ: 8, 0, 0.

მაშასადამე,

$$\sqrt{64} = 8.$$

ამგვარად, თუ კვადრატულ ფესქვეშ მოცემული რიცხვის რიგი 1-ია, მაშინ ეს რიცხვი უნდა მოვძებნოთ y სკალაზე პირველ ნაწილში. თუ რიგი 2-ია, მაშინ ეს რიცხვი უნდა მოვძებნოთ y სკალის მეორე ნაწილში. ორივე შემთხვევაში მოცემული რიცხვიდან კვადრატული ფესვის რიგი 1-ია.

ყველა სხვა შემთხვევა ამ ორ შემთხვევაზე დაიყვანება.

მაგალითად,

$$\sqrt{619} = 10\sqrt{6,19} = 10 \cdot 2,48 = 24,8.$$

$$\sqrt{6190} = 10\sqrt{61,9} = 10 \cdot 7,87 = 78,7.$$

$$\sqrt{61900} = 100\sqrt{6,19} = 100 \cdot 2,48 = 248.$$

$$\sqrt{0,619} = 10^{-1}\sqrt{61,9} = 10^{-1} \cdot 7,87 = 0,787.$$

$$\sqrt{0,0619} = 10^{-1}\sqrt{6,19} = 10^{-1} \cdot 2,48 = 0,248.$$

და ა. შ.

მაშასადამე, თუ კვადრატული ფესვის ქვეშ მთელ ნაწილში ერთი ნიშნადი ციფრია, მაშინ ფესქვეშა რიცხვი უნდა მოვძებნოთ y სკალის პირველ ნაწილში, ხოლო, თუ ფესქვეშა რიცხვის მთელ ნაწილში ორი ნიშნადი ციფრია, მაშინ იგი უნდა მოვძებნოთ y სკალის მეორე ნაწილში; ორივე შემთხვევაში კვადრატული ფესვის მთელ ნაწილში ერთი ნიშნადი ციფრია.

თვალის ჰიგიენისათვის y სკალა მილიმეტრულაზე დავამზადოთ, ხოლო x სკალა—სუფთა ქაღალდზე. შემდეგ ეს სკალები ერთიმეორის გვერდით ისე დავაკრათ, რომ საერთო ღერძი შეექმნათ. 25-ე ნახაზი სწორედ ასეა გაკეთებული.

2. კვადრატული სკალის ანალოგიურად ავაგოთ კუბური ფუნქციის

$$y = x^3 \tag{12}$$

სკალა.

ამისათვის Y ღერძის ერთ მხარეს ავაგოთ y სკალა:

$$OY = 0,25\,y \quad (y = 0,\ 1,\ 10,\ 100,\ 200, \cdots,\ 1000, \tag{13}$$

ხოლო მეორე მხარეზე—x სკალა (ნახ. 26):

$$OX = 0,25\,x^3 \quad (x = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ 10). \tag{14}$$

y-სკალა სამ ნაწილად გავყოთ: [0, 10], [10, 100], [100, 1000]. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მოცემული რიცხვის მესამე ხარისხის რიგი ტოლია $3n—2$, $3n—1$, $3n$-ის იმის მიხედვით, თუ y სკალის რომელ ნაწილში მოხვდება საძებნი რიცხვის შესაბამისი წერტილი, სადაც n მოცემული რიცხვის რიგია.

მაგ.

$0,2^3 = 0,008$ (პირველ ნაწილში, $N = 3 \cdot 2 — 2 = 0$).

$2,15^3 = 9,94$ (პირველ ნაწილში, $N = 3 \cdot 1 — 2 = 1$).

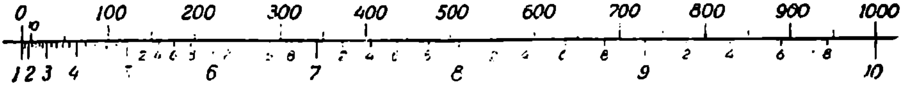
$0,03^3 = 0,000027$ (მეორე ნაწილში, $N = 3(-1) — 1 = —4$).

$0,005^3 = 0,000000125$ (მესამე ნაწილში, $N = 3(—2) = —6$).

იმავე ნახაზით შეგვიძლია კუბური ფესვის ამოღება მოცემული რიცხვიდან.

კუბური ფესვი ისე გარდავქმნათ, რომ ფესვქვეშ მთელი ნაწილი შეიცავდეს ერთ, ორ, ან სამნიშნა რიცხვს. მაშინ მოცემული რიცხვი მოვ-

ძებნოთ სათანადოდ y სკალის პირველ, მეორე ან მესამე ნაწილში. პასუხი წავიკითხოთ x სკალაზე, მაგრამ სამივე შემთხვევაში კუბური ფესვის მთელ ნაწილში მხოლოდ თითო ნიშნადი ციფრი იქნება.



ნახ. 26.

მაგ. $\sqrt[3]{736}=9{,}03$ (მესამე ნაწილში); $\sqrt[3]{93}=4{,}53$ (მეორე ნაწილში); $\sqrt[3]{8}=2$ (პირველ ნაწილში).

ყველა დანარჩენი შემთხვევა ამ სამ შემთხვევაზე დაიყვანება.

მაგალითად,

$$\sqrt[3]{0{,}64}=10^{-1}\sqrt[3]{640}=10^{-1}\cdot 8{,}6=0{,}86 \text{ (მესამე ნაწილში);}$$

$$\sqrt[3]{0{,}064}=10^{-1}\sqrt[3]{64}=10^{-1}\cdot 4=0{,}4 \text{ (მეორე ნაწილში);}$$

$$\sqrt[3]{6400}=10\sqrt[3]{6{,}4}=10\cdot 1{,}85=18{,}5 \text{ (პირველ ნაწილში) და ა. შ.}$$

§ 60. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=\sin x \qquad (15)$$

Y ღერძის ერთ მხარეზე ავაგოთ ერთგვაროვანი y სკალა (ნახ. 27):

$$OY=250\,y,\ (y=0;\ 0{,}1;\dots,\ 0{,}9;\ 1). \qquad (16)$$

ხოლო Y ღერძის მეორე მხარეზე — x სკალა:

$$OX=250\sin x\ (x=0^\circ,\ 10^\circ,\ 20^\circ,\dots,\ 80^\circ,\ 90^\circ). \qquad (17)$$

(17) სკალის აგება ადვილია, თუ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის პირველ მეოთხედში 250 მმ რადიუსით და ცენტრით სათავეში შემოვხაზავთ წრეს. წრის ეს ნაწილი დავყოთ ცხრა ნაწილად და წრეწირზე მიღებული წერტილები დავაგეგმილოთ Y ღერძზე. მიღებულ წერტილებს დავაწეროთ (პირველი კატეგორიის ჭდეები):

$$0^\circ,\ 10^\circ,\ 20^\circ,\dots,\ 80^\circ,\ 90^\circ.$$

მეორე კატეგორიის ჭდეებს 80°-მდე დავაწეროთ:

2, 4, 6, 8,

ხოლო 80°-დან 90°-მდე არ დავაწეროთ ციფრები (მონაკვეთი მცირე ზომისაა და ვერ შევძლებთ სათანადო დაყოფას).

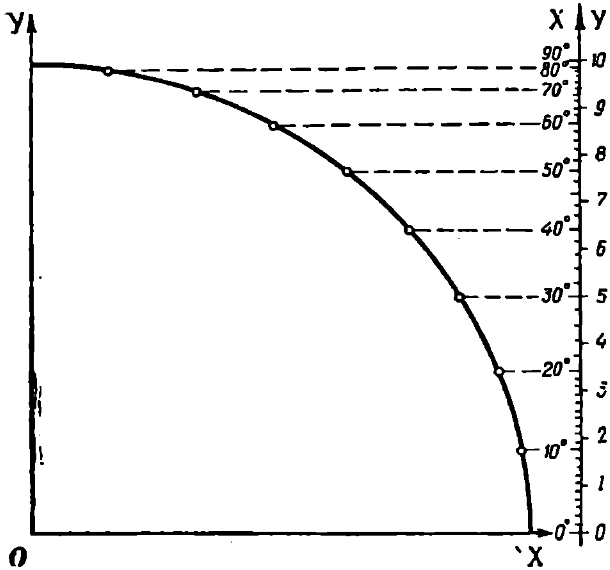
(17) სკალა გავყოთ ორ ნაწილად:

[0°, 5°44′], [5°44′, 90°].

სკალის პირველ ნაწილში $\sin x$-ის პირველი ნიშნადი ციფრის წინ ვწერთ 0,0.

მაგალითად, $\sin 3° = 0{,}0523$,

$\sin 2°20' = 0{,}0408$.



ნახ. 27.

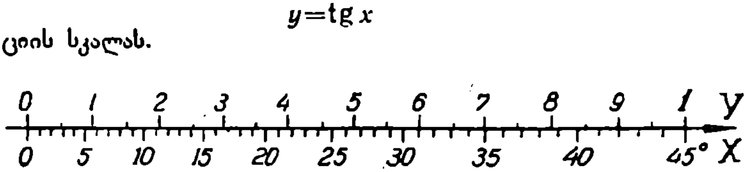
ხოლო მეორე ნაწილში $\sin x$-ის პირველი ნიშნადი ციფრის წინ ვწერთ 0, მაგალითად,

$$\sin 10°20' = 0{,}26; \quad \sin 36° = 0{,}588.$$

2. სრულიად ანალოგიურად (15)-ისა ავაგებთ

$$y = \operatorname{tg} x$$

ფუნქციის სკალას.



ნახ. 28.

Y ღერძის ერთ მხარეზე ავაგოთ ისევ (16) სკალა (ნახ. 28),

$$OY = 250\,y \quad (y = 0;\ 0{,}1; \cdots;\ 0{,}9;\ 1),$$

ხოლო მეორე მხარეზე:

$$OX = 250 \operatorname{tg} x \quad (x = 0°,\ 5°,\ 10°, \cdots,\ 45°).$$

ამ სკალის პირველი კატეგორიის ჰდეებზე მოთავსებული იქნება

$$0°,\ 5°,\ 10°, \cdots,\ 45°,$$

ხოლო მათ შორის

$$1°,\ 2°, \ldots,\ 44°.$$

ამ რიცხვებს დაწერა არ ესაჭიროება. თუ 1°-ის შესაბამ მონაკვეთს 3 და 6 ნაწილად გავყოფთ, შეგვიძლია მინუტები 5′-ის სიზუსტით ავიღოთ.

tg x-ის სკალაც 2 ნაწილად იყოფა:

$$[0°,\ 5°44'],\quad [5°44',\ 45°].$$

პირველ ნაწილში tg x-ის ნიშნად ციფრს წინ ეწერება 0,0⋯, ხოლო მეორე ნაწილში—0. ⋯.

ცხადია, $\sin x$ და $\operatorname{tg} x$ ფუნქციების გრაფიკებით შეგვიძლია $\sin x$ და $\operatorname{tg} x$-ის მოცემული მნიშვნელობებით ვიპოვოთ კუთხის მნიშვნელობანი. თუ მოცემული მნიშვნელობა იწყება 0,0-ით, მაშინ უნდა მოვძებნოთ y სკალაზე 0-დან 1-მდე, სხვა მნიშვნელობები კი 1-დან 10-მდე.

მაგალითად,

$$\sin x = 0{,}565; \qquad x = 34°24',$$

$$\sin x = 0{,}0523 \approx 0{,}052; \quad x = 2°55'.$$

§ 51. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

1. მაჩვენებლიანი ფუნქციის

$$y = 10^x \tag{18}$$

ასაგებად შუალედში

$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$

საჭიროა წინასწარ გამოვიანგარიშოთ 10-ის შემდეგი ხარისხები:

$$10^{\frac{1}{2}} = 3{,}162; \quad 10^{\frac{1}{4}} = 1{,}778; \quad 10^{\frac{1}{8}} = 1{,}334; \quad 10^{\frac{3}{8}} = 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} =$$

$$= 2{,}372: \quad 10^{\frac{5}{8}} = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} = 4{,}118; \quad 10^{\frac{6}{8}} = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{4}} = 5{,}622;$$

$$10^{\frac{7}{8}} = 10^{\frac{6}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} = 7{,}436.$$

ავიღოთ XY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და მის ღერძებზე სათანადო სკალები (ნახ. 29),

$$OX = 250x \quad (x = 0;\ 0{,}1; \ldots;\ 0{,}9;\ 1),$$

$$OY = 25y \quad (y = 0,\ 1, \ldots,\ 9,\ 10).$$

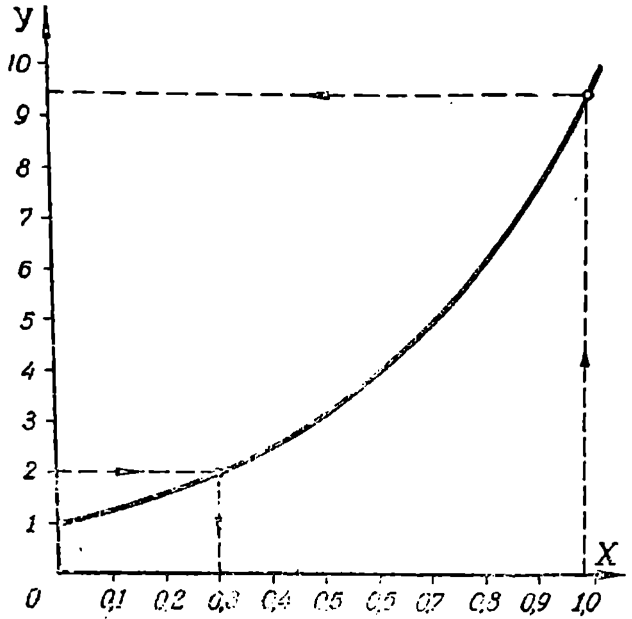
ამ სისტემაში ავაგოთ (18) ფუნქცია ზემოთ გამოთვლილი მნიშვნელობებით. მიღებული გრაფიკით შეგვიძლია გამოვთვალოთ 10^x, თუ x სამნიშნა რიცხვია; ცხადია, შედეგიც სამი ნიშნადი ციფრით მიიღება.

მაგალითად,

$$10^{0,301} = 2,00; \quad 10^{0,981} = 9,55; \quad 10^{0,543} = 3,49;$$

$$10^{5,301} = 10^{5} \cdot 10^{0,301} = 10^{5} \cdot 2,00; \quad 10^{-2,019} = 10^{-3+0,981} = 10^{-3} \cdot 9,55.$$

2. ცხადია, მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკით შეგვიძლია შებრუ-



ნახ. 29.

ნებული ამოცანაც ამოვხსნათ: მოცემულია მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობა და ვიპოვოთ ხარისხის მაჩვენებელი.

მაგალითად,

$$10^{x} = 2,00.$$

თუ Y ღერძზე ავიღებთ წერტილს 2,00, მაჩვენებლიანი ფუნქციის წირზე მისი შესაბამისი წერტილის აბსცისა იქნება 0,301, ე. ი.

$$x = 0,301.$$

ასევე შეგვიძლია მოვძებნოთ ყველა სამნიშნა რიცხვის შესაბამისი 10-ის ხარისხის მაჩვენებელი, მაგრამ შეიძლება დაგვჭირდეს მცირე გარდაქმნა.

მაგალითად,

$$10^{x} = 527.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $10^2 = 100$-ზე, გვექნება

$$10^{x-2} = 5,27.$$

გრაფიკით მივიღებთ

$$x-2=0,722,$$

საიდანაც

$$x=2,722.$$

ასევე, თუ

$$10^x=0,00527,$$

მაშინ ამ ტოლობის 10^3-ზე გამრავლება მოგვცემს:

$$10^{x+3}=5,27,$$

საიდანაც

$$x+3=0,722.$$

მაშასადამე,

$$x=-3+0,722=\bar{3},722.$$

თავი IX

ლოგარითმული სახაზავი

§ ნე. ძირითადი სკალები

წინა პარაგრაფში ნაწილობრივად შევისწავლეთ ლოგარითმული სახაზავი. ახლა მას გავეცნოთ უფრო დაწვრილებით.

1. საანგარიშო სახაზავი ან, ჩვეულებრივად, როგორც მას ეძახიან, ლოგარითმული სახაზავი (შიმშა) წარმოადგენს ორი ერთნაირი ლოგარითმული სკალის ერთობლიობას. ეს სკალები მიღებულია მაჩვენებლიანი ფუნქციის

$$y=10^x \tag{1}$$

დაგეგმილებით X ღერძზე. ასე რომ, X ღერძზე გვექნება ორი სკალა: პირველი

$$OX=250x \qquad (x=0;\ \ 0,1;\cdots;\ 0,9;\ 1)$$

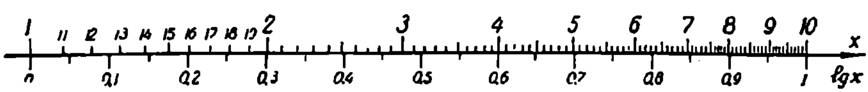
და მეორე

$$OX=250\lg y \qquad (y=1,\ 2,\ldots,\ 9,\ 10). \tag{2}$$

რადგანაც ჩვეულებრივად არგუმენტს x-ით აღვნიშნავთ, ხოლო ფუნქციას y-ით, ამის გამო მიღებული სკალები ასეთ სახეს მიიღებს (ნახ. 30):

$$OY=250y \qquad (y=0;\ 0,1;\ldots;\ 0,9;\ 1),$$

$$OX=250\lg x \qquad (x=1,\ 2,\cdots,\ 9,\ 10).$$



ნახ. 30.

ცხადია, ამ სკალებით შეგვიძლია ყველა სამნიშნა რიცხვის ლოგარითმის მოძებნა და, პირიქით, თუ ვიცით რაიმე x რიცხვის ლოგარითმი, შეგვიძლია მოვნახოთ x.

მაგალითად,

$$\lg 248 = \lg 2{,}48 + \lg 100 = 0{,}395 + 2 = 2{,}395.$$

$$\lg 0{,}0248 = \lg 2{,}48 - 100 = 0{,}395 - 2 = \bar{2}{,}395.$$

ვიპოვოთ x, თუ

$$\lg x = 0{,}542.$$

30-ე ნახაზიდან მივიღებთ

$$x = 3{,}48.$$

ვთქვათ, გვაქვს

$$\lg x = 4{,}542.$$

ეს უკანასკნელი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\lg \frac{x}{10^4} = 4{,}542 - 4 = 0{,}542,$$

საიდანაც

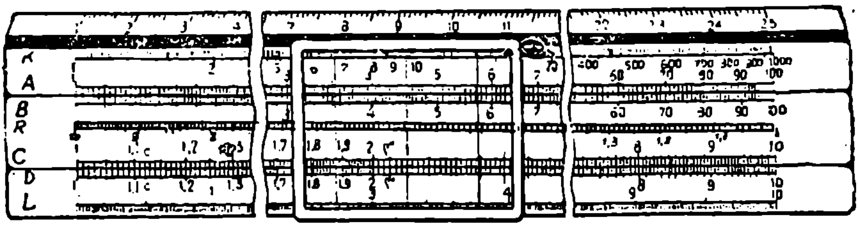
$$\frac{x}{10^4} = 3{,}48;$$

აქედან კი გვექნება

$$x = 3480.$$

2. ლოგარითმულ სახაზავს ეძახიან 25 სმ, 12,5 სმ, 50 სმ-იანს იმის მიხედვით, თუ რას უდრის ლოგარითმული სკალის მოდული.

ორი ლოგარითმული სკალიდან, რომელთაც ურთიერთისადმი მოძრაობა შეუძლიათ, ერთს ეწოდება მცოცი. მცოცი სახაზავის კილოებშია მოთავსებული, შეიძლება მისი ამოღებაც. ლოგარითმული სახაზავის წინა



ნახ. 31.

ნაწილზე მოთავსებულია სკალები: K, A, B, R, C, D, L (ნახ. 31). თითოეული სკალის მნიშვნელობას თანდათანობით გავეცნობით.

ჯერ გავეცნოთ C და D სკალებს. ეს ორივე სკალა ერთნაირია, ისინი წარმოადგენენ (2) სკალას:

$$OY = 250 \lg x.$$

ამ სკალაზე პირველი კატეგორიის ციფრებია:

$$1,\ 2, \dots,\ 9,\ 10.$$

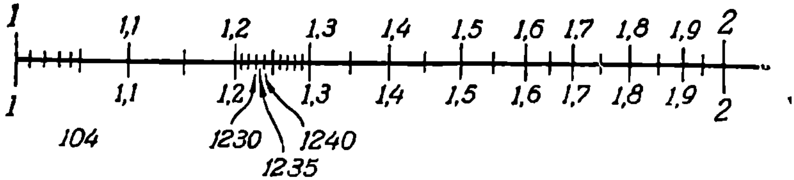
1-დან 2-მდე მეორე კატეგორიის დანაყოფებზე აწერია (ნახ. 32):

1,1; 1,2;...; 1,9.

ყოველ მეორე კატეგორიის დანაყოფებს შორის მოთავსებულია მესამე კატეგორიის 10 მონაკვეთი. მონაკვეთზე [1, 2] შეიძლება მოინახოს სამნიშნა რიცხვები:

100, 101, 102,..., 199, 200.

მაგალითად, 123-ის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია 12-ის შემდეგ მესამე ჭდეზე. ხოლო 1235 მოთავსებული იქნება 123-ისა და 124-ის შუაში. 5-ის შესაბამისი ჭდე თვალდათვალ უნდა მოვნახოთ.

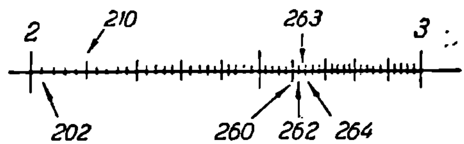


ნახ. 32.

ამგვარად, D სკალის 1-სა და 2-ს შორის ზუსტად მოიძებნება მხოლოდ სამნიშნა რიცხვი, რომელიც 1-ით იწყება. სკალაზე ვკითხულობთ ციფრებით. მაგალითად, 123,

ერთი—ორი—სამი.

სკალის [2, 3] და [3, 4] მონაკვეთები ერთნაირადაა დანუსხული. (ნახ. 33): თითოეულზე მეორე კატეგორიის 10 მონაკვეთია; ჭდეებზე ციფრები არ არის დაწერილი. მეორე კატეგორიის თითოეული მონაკვეთი დაყოფილია მესამე კატეგორიის 5 მონაკვეთად. ასე რომ, მესამე კატეგორიის მონაკვეთის ფასია 2.



ნახ. 33.

მაგალითად, ვიპოვოთ 2,62.

ამ რიცხვის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია 2-ის შემდეგ, 6—მეორე კატეგორიისა და 1—მესამე კატეგორიის ჭდეზე.

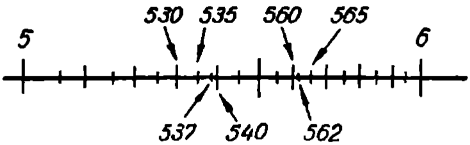
რიცხვი 263-ის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია 262-ისა და 264-ის ჭდეთა შუაზე. ეს წერტილი უნდა განვსაზღვროთ თვალდათვალ.

სკალის 4-დან 10-მდე ყველა მონაკვეთი ერთნაირადაა დანუსხული (ნახ. 34): პირველი კატეგორიის ყოველი მონაკვეთი დაყოფილია 10 მეორე კატეგორიის მონაკვეთად. მეორე კატეგორიის მონაკვეთები დაყოფილია ორ-ორ მესამე კატეგორიის მონაკვეთად, ე. ი. მესამე კატეგორიის მონაკვეთის ფასია 5.

მაგალითად, ვიპოვოთ 5,35.

ამ რიცხვის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია 5-ის შემდეგ, გადავთვალოთ სამი მეორე კატეგორიის მონაკვეთი 5-ის შემდეგ. 5,35 მოთავსებულია მესამე კატეგორიის მეოთხე მონაკვეთის შუაზე.

5,37-ის შესაბამისი წერტილი უნდა განვსაზღვროთ თვალდათვალ. 535-ის შესაბამისი ჭდის შემდეგ მოთავსებული მესამე კატეგორიის მონაკვეთი თვალდათვალ უნდა გავყოთ 5-ზე და ავიღოთ 2 მეხუთედი ნაწილი. ასევე მოიძებნება ნებისმიერი სამნიშნა რიცხვი, რომლის პირველი ციფრია 4, 5, 6, 7, 8, 9.



ნახ. 34.

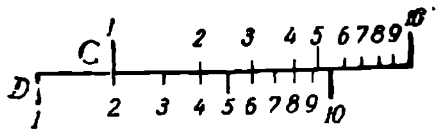
ლოგარითმულ სახაზავზე რიცხვის აღებაზე და წაკითხვაში დიდად გვეხმარება რბია (შუშა ლითონის ჩარჩოში), რომელზედაც გავლებულია სანიშნო (სათვალთვალო) ხაზი.

3. ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით რიცხვთა გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა სრულდება ლოგარითმის შემდეგი თვისების საფუძველზე:

$$\lg(ab)=\lg a+\lg b.$$

მაგალითად, $2\cdot 3$.

D სკალაზე ავიღოთ რიცხვი 2 (სანიშნო ხაზი მოვათავსოთ 2-ზე), (ნახ. 35), გავწიოთ მცოცი მარჯვნივ ისე, რომ C სკალის 1 შეუთავსდეს D სკალის 2-ს. მოვძებნოთ C სკალაზე 3. დავტოვოთ მცოცი უძრავად და სათვალთვალო ხაზი გადავიტანოთ C სკალის 3-ზე. 3-ის ქვეშ მოთავსებულია 6. ე. ი. $2\cdot 3=6$.



ნახ. 35.

მართლაც,

$$2=m\lg 2,\quad 3=m\lg 3.$$

შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$2+3=m\lg 2+m\lg 3=m(\lg 2+\lg 3)=m\lg(2\cdot 3)=m\lg 6=6.$$

ახლა ავიღოთ $243\cdot 32{,}5$.

D სკალაზე ვიპოვოთ წერტილი

ორი—ოთხი—სამი.

მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 1. C სკალაზე მოვძებნოთ წერტილი

სამი—ორი—ხუთი.

ამ წერტილის ქვეშ D სკალაზე ვკითხულობთ:

შვიდი—რვა—ნული.

მიღებული ციფრებიდან შეგვიძლია შევადგინოთ რიცხვები:

$$780,\ 0{,}780,\ 7800,\cdots$$

დაწერილი რიცხვებიდან რომელი გამოსახავს 243-ის 32,5-ზე ნამრავლს? ამისათვის მოვიგონოთ, რომ, თუ a რიცხვის რიგი არის n_1, მაშინ გვექნება

$$\lg a=(n_1-1),l_1,$$

სადაც l_1 არის a რიცხვის ლოგარითმის მანტისა. ასევე თუ b რიცხვის რიგია n_2 და ლოგარითმის მანტისა l_2, გვექნება:

$$\lg b=(n_2-1),l_2.$$

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\lg (ab)=\lg a+\lg b=(n_1+n_2-2),(l_1+l_2). \tag{3}$$

თუ $0,(l_1+l_2)$ არ არის 1-ზე მეტი, მაშინ ab რიცხვის რიგი N იქნება:

$$N=n_1+n_2-1.$$

სწორედ ასეთი შემთხვევა გვაქვს აღებულ მაგალითში:

$$N=3+2-1=4,$$

ამიტომ

$$243\cdot 32{,}5=780\underline{0}.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი:

$$0{,}0125\cdot 0{,}352.$$

სათანადოდ მივიღებთ წერტილს

ოთხი—სამი—ცხრა.

რადგანაც

$$N=(-1)+0-1=-2,$$

ამიტომ გვექნება

$$0{,}0125\cdot 0{,}352=0{,}00439.$$

გავარჩიოთ ნამრავლი $3\cdot 4$.

D სკალაზე ავიღოთ 3, ხოლო C სკალაზე—4. მცოცის 1-ს მოვათავსებთ D სკალის 3-ზე. მაშინ C სკალის 4 გამოდის D სკალის გარეთ. ცხადია, თუ D სკალა სიგრძით ორჯერ მეტი იქნებოდა, მაშინ მეორე ნაწილში მოთავსდებოდა 10-დან 100-მდე რიცხვების ლოგარითმები. ამის გამო ამ მეორე ნაწილში პირველი კატეგორიის ჭდეები ასეთი აღნიშვნით გვექნებოდა (ნახ. 36):

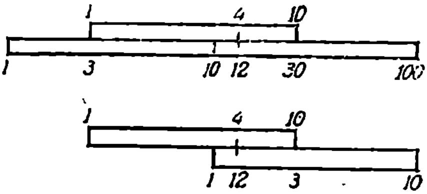
10, 11, 12,..., 99, 100.

ასეთ ლოგარითმულ სახაზავზე 3-ის 4-ზე ნამრავლს C სკალის 4-ის ქვეშ მყოფი წერტილი 12 მოგვცემდა.

ამგვარად, 3-ის 4-ზე ნამრავლი მოვძებნეთ ისეთ ლოგარითმულ სკალაზე, რომელიც ორი ნაწილისაგან შედგება:

$$[1,\ 10],\quad [10,\ 100].$$

თუ ასეთ ლოგარითმულ შიმშას მოვაცილებთ პირველ ნაწილს, მივიღებთ მცოცის ისეთ მდგომარეობას, რომელიც 36-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. აქ D სკალის 3-ის თავზე მოთავსებულია C სკალის 10, ხოლო C სკალის 4-ის ქვეშ მოთავსებულია 12; $3 \cdot 4 = 12$. აქ ნამრავლში ორი ციფრია, ე. ი. ნამრავლის რიგი ტოლია თანამამრავლთა რიგების ჯამისა. აქ ისეთი შემთხვევა გვაქვს, რომ (3) გამოსახულების $0,(l_1+l_2)$ ერთზე მეტია, ამის გამო $0,(l_1+l_2)$-დან მიღებული 1 მთელი დაემატება n_1+n_2-2-ს, რომელიც მოგვცემს n_1+n_2-1. ამიტომ ნამრავლის რიგია



ნახ. 36.

$$N = n_1 + n_2,$$

ე. ი. ნამრავლის რიგი თანამამრავლთა რიგების ჯამის ტოლია.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი: $625 \cdot 746$. ნამრავლის რიგი განისაზღვრება ტოლობით

$$N = 3 + 3 = 6,$$

ხოლო სათანადო ნამრავლი გვაძლევს:

ოთხი, ექვსი და ექვსი.

ამიტომ გვექნება:

$$625 \cdot 746 = 466000.$$

თუ დავაკვირდებით როგორც პირველ, ისე მეორე შემთხვევას, შევამჩნევთ ნამრავლის რიგის განსაზღვრის შემდეგ წესს: *ნამრავლის რიგი ტოლია თანამამრავლთა რიგების ჯამისა, თუ მცოცი გაწეულია მარცხნივ, და ტოლია თანამამრავლთა რიგების ჯამისა ერთის გამოკლებით, თუ მცოცი გაწეულია მარჯვნივ.*

4. *გაყოფა* გამრავლების შებრუნებული მოქმედებაა. ამის გამო D სკალაზე უნდა მოვძებნოთ გასაყოფი, მის თავზე მოვათავსოთ გამყოფი, ხოლო განაყოფი მოთავსდება C სკალის 1-ის ან 10-ის ქვეშ. განაყოფის რიგის განსაზღვრისათვის ასეთი წესი გვექნება: თუ განაყოფი მიიღება 10-ის ქვეშ, მაშინ განაყოფის რიგი ტოლია გასაყოფისა და გამყოფის რიგთა სხვაობისა, და განაყოფის რიგი ტოლია გასაყოფისა და გამყოფის რიგთა სხვაობისა ერთის მიმატებით, თუ განაყოფი მიიღება 1-ის ქვეშ.

მაგალითად,

$$625:3{,}26.$$

განაყოფში ვკითხულობთ

ერთი—ცხრა—ორი.

რიგი N ასე განისაზღვრება:

$$N=3-1+1=3.$$

ამიტომ

$$625:3{,}26=192.$$

ამგვარად, განაყოფის რიგი უდრის გასაყოფისა და გამყოფის რიგთა სხვაობას, თუ მცოცი მარცხნივაა გაწეული; და უდრის რიგთა სხვაობას, ერთის მიმატებით, თუ მცოცი მარჯვნივაა გაწეული.

ნამრავლისა და გამყოფის რიგთა დათვლის წესი შეიძლება გავაერთიანოთ.

თუ მოქმედება სრულდება მცოცის მარცხენა ნაპირით, მაშინ გამყოფის რიგი ტოლია ერთით გადიდებული მოცემული რიცხვების რიგთა სხვაობისა, ხოლო ნამრავლის რიგი ტოლია ერთით შემცირებული რიგთა ჯამისა. თუ მოქმედება სრულდება მცოცის მარჯვენა ნაპირზე, მაშინ შედეგის რიგი ტოლია რიგთა ჯამისა (გამრავლების დროს) ან რიგთა სხვაობისა (გაყოფის დროს).

ამის გამო ლოგარითმულ სახაზავზე მარცხნივ აწერია $Q+1$, ხოლო მარჯვნივ $P-1$.

5. ლოგარითმული შიმშით შეიძლება გამოითვალოს $\frac{ab}{c}$. ამისათვის ჯერ უნდა შევასრულოთ გაყოფა $\frac{a}{c}$ და შემდეგ მიღებული განაყოფი გავამრავლოთ b-ზე. რიგი უნდა გამოითვალოს თითოეული მოქმედების შემდეგ.

მაგალითად, $\frac{3\cdot 5}{2}$. ეს მოქმედება ასე შესრულდება: D სკალაზე ვიღებთ სანიშნო ხაზით 3-ს. C სკალას ისე ვამოძრავებთ, რომ C სკალის 2 მოხვდეს სანიშნო ხაზზე. 3-ის 2-ზე განაყოფი მოთავსებული იქნება C—სკალის 1-ის ქვეშ. ამ შედეგს არ ვკითხულობთ, მხოლოდ ვიმახსოვრებთ, რომ ამ განაყოფის რიგია 1. შემდეგ სანიშნო ხაზით C სკალაზე მოვძებნოთ 5; 5-ის ქვეშ ვკითხულობთ: შვიდი, ხუთი, ნული. 5-ზე გამრავლების შედეგად ნამრავლის რიგია 1. ამიტომ პასუხი იქნება 7,50.

თუ გვექნებოდა $\frac{abc}{de}$, მაშინ მოქმედებას ასეთი რიგით შევასრულებდით:

$$\frac{abc}{de}=\{[(a:d)\cdot b]:c\}\,c.$$

მოვიგონოთ ის, რომ განაყოფის რიგი ტოლია მოცემული რიცხვების რიგთა სხვაობისა ერთის მიმატებით, თუ მცოცი მარჯვნივ გავწიეთ, ხოლო ნამრავლში რიგი ტოლია რიგთა ჯამისა ერთის გამოკლებით. ამის გამო $\frac{ab}{c}$-ში, თუ მოქმედება მარცხნიდან მარჯვნივ გაწეული მცოცით სრულდება, რიგი უდრის მრიცხველში მყოფი რიცხვების რიგთა ჯამს, შემცირებულს მნიშვნელის რიგით. თუ მოქმედება შესრულდება მარტო მარცხნივ გაწეული მცოცით, მაშინაც კომბინირებული მოქმედების $\frac{ab}{c}$-ს რიგი უდრის მრიცხველში მყოფი რიცხვების რიგთა ჯამს, შემცირებულს მნიშვნელის რიგით. მაგრამ, თუ მოქმედება არ სრულდება ერთი მიმდევრობით, მაშინ დაგვჭირდება მცოცის მარცხნივ ან მარჯვნივ გადატანა (მცოცის გადასროლა). ამით მრიცხველისა და მნიშვნელის რიგების სხვაობას მოემატება ან მოაკლდება 1. და, კერძოდ, თუ მცოცის გადასროლა დაგვჭირდა მარცხნივ, მაშინ მიემატება 1 და, თუ გადასროლა დაგვჭირდა მარჯვნივ, მაშინ გამოაკლდება 1.

ამგვარად, $\frac{abcd}{efg}$ წილადის რიგი რომ მივიღოთ, ამისათვის ამ წილადის მრიცხველის თანამამრავლთა რიგების ჯამს გამოვაკლოთ მნიშვნელის თანამამრავლთა რიგების ჯამი მივუმატოთ იმდენი ერთეული, მცოცის რამდენი გადასროლაც დაგვჭირდა მარცხნივ, და გამოვაკლოთ იმდენი ერთეული, რამდენი გადასროლაც დაგვჭირდა მარჯვნივ.

მაგალითად, $$\frac{5,25\cdot 9,65\cdot 10,3}{4,26\cdot 12,7}.$$

ამ მაგალითის გამოთვლის დროს დაგვჭირდება მცოცის გადასროლა მარცხნივ 9,65-ზე გამრავლების დროს (+1) და გადასროლა მარჯვნივ 10,3-ზე გამრავლების დროს (—1), ამიტომ წილადის რიგი

$$N=(1+1+2)-(1+2)+1-1=1.$$

მოქმედების შედეგში ვკითხულობთ:

ცხრა, ექვსი და ხუთი.

მაშასადამე,
$$\frac{5,25\cdot 9,65\cdot 10,3}{4,26\cdot 12,7}=9,65.$$

6. მოქმედება $1:a$-ზე შეიძლება შესრულდეს, როგორც მარცხნივ გაწეული მცოცით, ისე მარჯვნივ გაწეული მცოცით. შევთანხმდეთ, რომ ეს მოქმედება შევასრულოთ მარცხნივ გაწეული მცოცით,

მაგალითად, $\frac{1}{6,21}=0,160 \qquad (N=1-1=0).$

7. განვიხილოთ ლოგარითმის მანტისების სკალა—L.

L სკალაზე პირველი კატეგორიის ჭდეებს აწერია

$$(0),\ 1,\ 2,\ldots,\ 9,\ (10).$$

პირველი კატეგორიის მონაკვეთები დაყოფილია ათ-ათ ნაწილად (მეორე კატეგორიის მონაკვეთები). მეორე კატეგორიის მონაკვეთები დაყოფილია ხუთ-ხუთ ნაწილად, ე. ი. მესამე კატეგორიის მონაკვეთის ფასი ორია. ასე რომ სკალაზე წერტილი სამი ნიშნადი ციფრით წაიკითხება.

L სკალით ასე უნდა ვისარგებლოთ: მოცემული a რიცხვი მოვნახოთ D სკალაზე სანიშნე ხაზის საშუალებით და L სკალაზე სანიშნე ხაზის ქვეშ მოთავსებული ჭდე მოგვცემს a რიცხვის ლოგარითმის მანტისას. მახასიათებელი კი, როგორც ცნობილია, მოცემული რიცხვის რიგით განისაზღვრება.

მაგალითად, ვიპოვოთ $\lg 5,27$.

მოვნახოთ D სკალაზე სანიშნე ხაზით ხუთი—ორი—შვიდი. L სკალაზე სანიშნე ხაზის ჭდეზე ვკითხულობთ:

შვიდი—ორი—ორი.

მახასიათებელი ტოლია ნულის.

ამგვარად,

$$\lg 5,27=0,722.$$

ცხადია, თუ მოცემული გვექნება რიცხვის ლოგარითმი, შეგვიძლია განვსაზღვროთ თვით რიცხვი. ამისათვის საკმარისია L სკალაზე მოვნახოთ ლოგარითმის მანტისა და სანიშნე ხაზით სათანადო წერტილი განვსაზღვროთ D სკალაზე. რიცხვის რიგი, როგორც ცნობილია, მახასიათებლის საშუალებით განისაზღვრება.

მაგალითად, ვიპოვოთ a, თუ

$$\lg a=\overline{2},155.$$

სკალაზე ვკითხულობთ:

ერთი, ოთხი, სამი.

მაშასადამე, გვექნება

$$a=0,0143.$$

8. ლოგარითმული სახაზავის ზედა ნაწილში მოთავსებულია რიცხვთა კვადრატების A და კუბების K სკალები. ამ სკალების შესახებ დაწვრილებით იყო მოთხრობილი 49-ე პარაგრაფში.

თუ რაიმე რიცხვს ავიღებთ D სკალაზე, მაშინ მისი კვადრატი მოთავსდება სანიშნე ხაზის ქვეშ A სკალაზე (შეგვიძლია ავიღოთ C და B

სკალა). A სკალა გაყოფილია ორ ნაწილად [1, 10], [10, 100]. პირველ ნაწილში a რიცხვის კვადრატის რიგი ტოლია $2n-1$, ხოლო მეორე ნაწილში კვადრატის რიგი ტოლია $2n$, სადაც n მოცემული a რიცხვის რიგია.

მაგალითად, ვიპოვოთ $25{,}6^2$.

D სკალის წერტილი: ორი, ხუთი და ექვსი A სკალაზე იძლევა წერტილს: ექვსი, ხუთი და ხუთი. რადგანაც A სკალაზე მიღებული წერტილი იმყოფება A სკალის პირველ ნაწილში, ამიტომ 25,6-ის რიგი ტოლია $2 \cdot 2 - 1 = 3$. ამიტომ გვექნება:

$$25{,}6^2 = 655.$$

ვიპოვოთ $0{,}0675^2$.

სკალაზე მეორე ნაწილში ვკითხულობთ: ოთხი, ხუთი, ექვსი. რიგი კი ტოლია $2 \cdot (-1) = -2$.

მაშასადამე, გვექნება:

$$0{,}0675^2 = 0{,}00456.$$

ცხადია, A და D სკალის საშუალებით შეგვიძლია რიცხვიდან კვადრატული ფესვი მოვნახოთ. მაგრამ შევთანხმდეთ, თუ რიცხვის რიგი ერთია, იგი ავიღოთ A სკალის პირველ ნაწილში, ხოლო, თუ ორია—ავიღოთ მეორე ნაწილში. ორივე შემთხვევაში კვადრატული ფესვის რიგი ერთის ტოლია. თუ კვადრატულ ფესვქვეშ რიცხვის რიგი 1-საგან ან 2-საგან განსხვავებულია, იგი მარტივი გარდაქმნით ამ შემთხვევებზე მიიყვანება.

მაგალითად, ვიპოვოთ $\sqrt{527}$. ეს მაგალითი ასე გადავწეროთ:

$$\sqrt{527} = 10\sqrt{52{,}7}.$$

ფესვქვეშ მყოფი რიცხვის რიგი 2-ის ტოლია, ამიტომ 52,7 ავიღოთ A სკალის მეორე ნაწილში. D სკალაზე სათანადოდ მივიღებთ: შვიდი, ორი და ექვსი. ამიტომ გვექნება.

$$\sqrt{527} = 10 \cdot 7{,}26 = 72{,}6.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი. ვიპოვოთ $\sqrt{0{,}0526}$. ეს მაგალითი ასე გარდავქმნათ:

$$\sqrt{0{,}0526} = 10^{-1}\sqrt{5{,}26}.$$

5,26—მოვძებნოთ A სკალის პირველ ნაწილში. D სკალაზე სათანადოდ მივიღებთ წერტილს: ორი—ორი—ცხრა.

გვექნება:

$$\sqrt{0{,}0526} = 10^{-1} \cdot 2{,}29 = 0{,}229.$$

განვიხილოთ რიცხვთა კუბების სკალა—K.

კუბების სკალა გაყოფილია სამ ნაწილად, [1, 10], [10, 100], [100, 1000]. D სკალაზე ავიღოთ მოცემული a რიცხვი, a^3 მოინახება

კუბების სკალაზე. თუ a^3K სკალის პირველ ნაწილში მივიღეთ, მაშინ მისი რიგი

$$N=3n-2,$$

თუ a^3 მეორე ნაწილში მივიღეთ, მაშინ

$$N=3n-1,$$

ხოლო, თუ მესამე ნაწილში—

$$N=3n,$$

სადაც n არის მოცემული a რიცხვის რიგი.

მაგალითად,

$19{,}8^3=776\cdot10,\qquad N=3\cdot2-2=4$ (პირველ ნაწილში);

$2{,}46^3=14{,}9,\qquad N=3\cdot1-1=2$ (მეორე ნაწილში):

$0{,}00685^3=0{,}321\cdot10^{-6},\quad N=3(-2)=-6$ (მესამე ნაწილში).

ცხადია, K და D სკალის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ კუბური ფესვი.

კუბური ფესვი ყოველთვის ისე შეგვიძლია გარდავქმნათ, რომ ფესვქვეშა რიცხვის რიგი იყოს 1, 2 ან 3. თუ ფესვქვეშა რიცხვის რიგი არის 1, მაშინ იგი მოვნახოთ K სკალის პირველ ნაწილში, თუ რიგი არის 2, მოვძებნოთ K სკალის მეორე ნაწილში, ხოლო თუ ფესვქვეშა რიცხვის რიგი არის 3, მაშინ მოვძებნოთ მესამე ნაწილში. სამივე შემთხვევაში კუბური ფესვის რიგი ერთის ტოლია.

მაგალითად, ვიპოვოთ: $\sqrt[3]{6750}$, $\sqrt[3]{0{,}0224}$, $\sqrt[3]{0{,}000415}$. გვექნება:

$\sqrt[3]{6750}=10\sqrt[3]{6{,}75}=10\cdot1{,}89=18{,}9$ (პირველ ნაწილში);

$\sqrt[3]{0{,}0224}=10^{-1}\cdot\sqrt[3]{22{,}4}=10^{-1}\cdot2{,}82=0{,}282$ (მეორე ნაწილში);

$\sqrt[3]{0{,}000415}=10^{-2}\sqrt[3]{415}=10^{-2}\cdot7{,}46=0{,}0747$ (მესამე ნაწილში).

9. C და D სკალები ნებისმიერად ერთმანეთს შევუთავსოთ. დავაკვირდეთ წერტილებს. შევამჩნევთ, რომ

$$\overline{c_1}\,\overline{c_2}=\overline{d_1}\,\overline{d_2},$$

ანუ

$$\overline{c_2}-\overline{c_1}=\overline{d_2}-\overline{d_1}.$$

ე. ი.

$$m\lg c_2-m\lg c_1=m\lg d_2-m\lg d_1,$$

საიდანაც გვექნება:

$$\frac{c_2}{c_1}=\frac{d_2}{d_1}.$$

ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\frac{d_1}{c_1}=\frac{d_2}{c_2}. \qquad (4)$$

აქედან ცხადია, თუ ამ ოთხი სიდიდიდან სამი ცნობილია, მეოთხე სიდიდე სახაზავის საშუალებით განისაზღვრება.

მაგალითად, ვიცით d_1, d_2, c_1, მაშინ c_2-ის განსასაზღვრავად ასე უნდა მოვიქცეთ: D სკალაზე სანიშნო ხაზი მოვათავსოთ d_1—წერტილზე, შემდეგ მცოცი ისე ვამოძრაოთ, რომ c_1 მოხვდეს სანიშნო ხაზზე. მცოცი უძრავად დავტოვოთ, ხოლო სანიშნო ხაზი გადავიტანოთ D სკალის d_2 წერტილზე. C სკალაზე, d_2 წერტილის თავზე მოთავსებული იქნება c_2.

თუ მცოცის გადასროლა არ დაგვჭირდა, მაშინ (4)-დან რიგის განსაზღვრისათვის გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$n_1-p_1=n_2-p_2,$$

სადაც n_1, n_2, p_1, p_2—სათანადოდ c_1, c_2, d_1; d_2-ის რიგია.

მაგალითად, ვიპოვოთ x, რომელიც შემდეგ პროპორციას აკმაყოფილებს:

$$\frac{252}{1{,}96}=\frac{31{,}5}{x}.$$

2,52 მოვნახოთ D სკალაზე, მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 1,96. შემდეგ D სკალაზე ვიპოვოთ 3,15. მაშინ 3,15-ის თავზე, C სკალაზე წავიკითხავთ:

ორი—ოთხი—ხუთი.

x-ის რიგისათვის გვექნება:

$$N_x-2=1-3;$$

საიდანაც

$$N_x=1-3+2=0.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$x=0{,}245.$$

ავიღოთ კიდევ მაგალითი:

$$\frac{2{,}15}{94{,}5}=\frac{348}{x}.$$

D სკალაზე მოვნახოთ 2,15. მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 94,5. D სკალაზე ავიღოთ 348. მიღებული წერტილის თავზე, C სკალაზე არ არის მცოცი. ამიტომ დავიმახსოვროთ მცოცის 10-ანის მდებარეობა სანიშნო ხაზით. გადავისროლოთ მცოცი მარჯვნივ, მაშინ D სკალას 348-ის თავზე მოთავსდება: ერთი, ხუთი და სამი. რადგანაც მცოცის ერთი გადასროლა იყო მარჯვნივ (—1), მაშინ x-ის რიგი ასე განისაზღვრება:

$$N_x-3-1=2-1,$$

საიდანაც

$$N_x=3+2-1+1=5.$$

ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$x=15\,\underline{300}.$$

განვიხილოთ კიდევ მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$\frac{465}{2,24}=\frac{1,63}{x}.$$

D სკალის 465-ის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 2,24. D—სკალის 1,63-ის თავზე C სკალა აღარ არის. ამიტომ მცოცი გადავისროლოთ მარცხნივ (+1). მაშინ x-ის რიგი ასეთ და მოკიდებულებას მოგვცემს:

$$N_x—1+1=1—3,$$

საიდანაც

$$N_x=—2.$$

მცოცის მარცხნივ გადასროლის შემდეგ 1,63-ის თავზე ვკითხულობთ შვიდი, რვა და ხუთი.

საბოლოოდ მივიღებთ

$$x=0,00785.$$

10. B და C სკალების შორის მოთავსებულია ე. წ. შებრუნებული სკალა R. ეს სკალა C სკალაა, მაგრამ მასზე C სკალა წარმოდგენილია შებრუნებული რიგით:

$$10,\ 9,\ 8,\cdots,\ 2,\ 1.$$

ძნელი ნიმუშის სახაზავებზე ეს სკალა არ არის. 1948 წლიდან გამოშვებულ ლოგარითმულ სახაზავებზე ეს სკალა წითელი ჰდეებითაა აღნიშნული, ამის გამო შებრუნებულ სკალას „წითელ" სკალასაც უწოდებენ.

შებრუნებული სკალით შეიძლება შესრულდეს გამრავლება.

D სკალაზე ავიღოთ a ჰდე და მის მოპირდაპირედ მდებარე ჰდე b—წითელ სკალაზე. თუ წარმოვიდგენთ, რომ b ჰდე გამოსახავს 10-დან b-მდე $\lg b$-ს, მაშინ 10-ის ქვემოთ D სკალაზე ჰდე P მოგვცემს ab ნამრავლს:

$$P=ab.$$

ნამრავლის რიგს ასე განვსაზღვრავთ.

თუ ნამრავლი C სკალის 10-ის ქვეშაა, ნამრავლის რიგი ტოლია თანამამრავლთა რიგების ჯამისა ერთის გამოკლებით. თუ ნამრავლი C სკალის 1-ის ქვეშაა, მაშინ ნამრავლის რიგი ტოლია თანამამრავლთა რიგების ჯამისა.

თუ დავაკვირდებით რიცხვებს, რომლებსაც R და A სკალებზე ურთიერთმოპირდაპირე მდებარეობა აქვთ, მივიღებთ, რომ მცოცის ნებისმიერ მდებარეობაში ადგილი აქვს ტოლობას:

$$r\sqrt{a}=d, \tag{5}$$

სადაც r, a, d სათანადოდ R, A და D—სკალაზე აღებული რიცხვებია.

ასევე, თუ შევადარებთ რიცხვებს, რომელთაც R და K სკალებზე ურთიერთმოპირდაპირე მდებარეობა აქვთ, მივიღებთ:

$$r\sqrt[3]{k}=d, \qquad (6)$$

სადაც r, k, d სათანადო რიცხვებია R, K და D—სკალებზე. ცხადია, მიღებული (5) და (6) ფორმულებით ისეთი ამოცანები ამოიხსნება, სადაც r, d, a, (r, d, k) სიდიდეებიდან ცნობილი იქნება, სათანადოდ, ორი სიდიდე.

§ 53. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სკალები

1. მცოცი უკანა მხარეზე მოთავსებულია ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სკალები: $\sin x$ (S), $\sin x \approx \operatorname{tg} x$ (ST) და $\operatorname{tg} x$ (T).

გადავაბრუნოთ მცოცი და მოვათავსოთ სახაზავის კილოებში (ნახ. 37).

ST სკალა დანუსხულია 0,35′, 40′, 50′, 1°, ..., 5°30′, 5°40′, 5°45′: S სკალაზე დანუსხვა იწყება 5°45′, 5°50′, 6°, ..., 90°-მდე, ხოლო T სკალაზე—5°45′, 5°50′, 6°, ..., 45°-მდე. ამ სკალებისა და D სკალის ურთიერთშესაბამისობა მოგვცემს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნატურალურ მნიშვნელობებს.

მაგალითად,

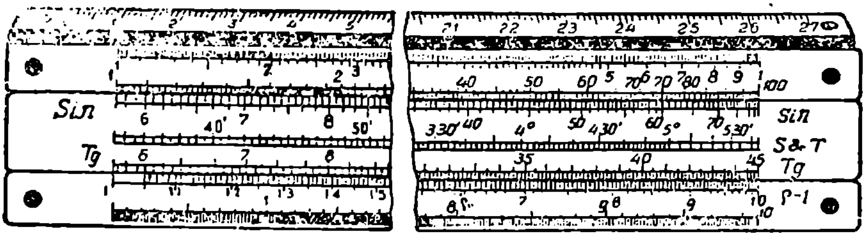
$$\sin 0°40' = 0{,}0116; \quad \sin 0°35' = 0{,}0102; \quad \sin 3°30' = 0{,}0610;$$

$$\sin 5°30' = 0{,}0963; \quad \sin 5°40' = 0{,}0992; \quad \sin 5°50' = 0{,}102.$$

ამგვარად, ST—სკალის საშუალებით მიღებულ ნიშნად ციფრებს წინ უნდა დაეწეროს 0,0.

ახლა განვიხილოთ $\sin x$-ის მნიშვნელობანი, როცა x მეტია 5°50′-ზე.

$$\sin 6° = 0{,}145; \quad \sin 12°30' = 0{,}216; \quad \sin 25°20 = 0{,}428 \text{ და ა. შ.}$$



ნახ. 37.

ამგვარად, S სკალით $\sin x$-ის მნიშვნელობის მისაღებად განსაზღვრულ ნიშნად ციფრებს წინ ეწერება 0, ასევე მივიღებთ $\operatorname{tg} x$-ის მნიშვნელობას T—სკალის საშუალებით:

$$\operatorname{tg} 10°20' = 0{,}182; \quad \operatorname{tg} 35°30' = 0{,}713. \quad \operatorname{tg} 43°30' = 0{,}949 \text{ და ა. შ.}$$

2. ცხადია, თუ გვეცოდინება $\sin x$ და $\operatorname{tg} x$-ის მნიშვნელობა, მაშინ S, T და ST სკალების საშუალებით განვსაზღვრავთ სათანადოდ x-ის

მნიშვნელობას. ამისათვის საკმარისია $\sin x$-ის მნიშვნელობა მოვნახოთ D სკალაზე და სათანადო x-ის მნიშვნელობა ავთვალოთ S—სკალაზე.

3. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სკალა ცვლის C სკალას, ამიტომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების სკალებით და D—სკალით შეგვიძლია ყველა ის მოქმედება ვაწარმოოთ, რაც C და D სკალებით ვაწარმოეთ.

მაგალითად, $\sin 3°30' \cdot 3{,}45 = 0{,}564$.

რადგანაც პასუხი მიიღება მარცხნივ გაწეული მცოცით, ამიტომ ნამრავლის რიგი

$$N=(-1)+1=0.$$

გამოვთვალოთ $\sin^2 31°20'$.

სკალაზე ვკითხულობთ: ორი, შვიდი და ნული. რადგანაც საძებნი რიცხვი მოხვდა A სკალის მეორე ნაწილში, ამიტომ $\sin^2 31°20'$-ის რიგი ტოლია $2 \cdot 0 = 0$. მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\sin^2 31°20' = 0{,}270.$$

გამოვთვალოთ $\lg \sin 55°40'$;

L სკალაზე $\sin 55°40'$-ის პირდაპირ ვკითხულობთ:

ცხრა—ერთი—შვიდი.

რადგანაც $\sin 55°40'$-ში ნიშნად ციფრამდე ერთი 0-ია, ამიტომ მახასიათებელი ტოლია $\overline{1}$-ის.

ამგვარად,

$$\lg \sin 55°40' = \overline{1}{,}917.$$

გამოვთვალოთ $\operatorname{tg} 35° \cdot \sin 38°$.

D სკალაზე დავიმახსოვროთ მაჩვენებელი ხაზით $\operatorname{tg} 35°$. შემდეგ გავწიოთ მცოცი ისე, რომ მაჩვენებელ ხაზზე მოხვდეს მცოცის ბოლო. მცოცი დავტოვოთ უძრავად და მასზე მოვძებნოთ მაჩვენებელი ხაზით $\sin 38°$. მაჩვენებელი ხაზის ქვეშ D სკალაზე ვკითხულობთ:

ოთხი—სამი—ერთი.

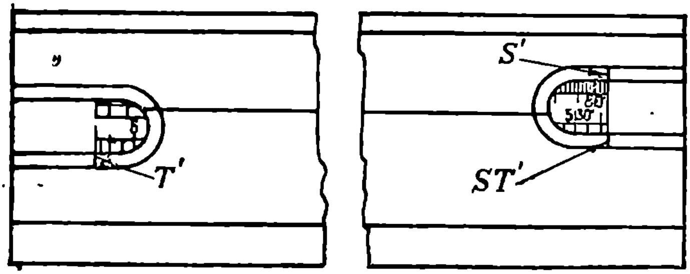
ნამრავლის $\operatorname{tg} 35° \cdot \sin 38°$-ის რიგი იქნება ნული, ამიტომ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} 35° \cdot \sin 38° = 0{,}431.$$

4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობანი შეიძლება განვსაზღვროთ მცოცის გადაბრუნების გარეშე. ამისათვის უნდა ვისარგებლოთ ლოგარითმული შიშის ზურგზე მოთავსებული ამონაჭრებით (ნახ. 38).

მარჯვენა ამონაჭერზე მოთავსებულია ორი ჭდე: ზედა ჭდე ეყრდნობა სინუსის (S) სკალას და ქვედა—სინუსისა და ტანგენსის (ST)—სკალას. მარცხენა ამონაჭერზე მოთავსებულია ერთი ჭდე, რომელიც ეყრდნობა ტანგენსის (T) სკალას. ეს ჭდეები აღვნიშნოთ S', ST', T'-ით.

ვისარგებლოთ ამ ჭდეებით. ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ $\sin 14°20'$-ის მნიშვნელობა. გადავაბრუნოთ ლოგარითმული სახაზავი და გამოვწიოთ მცოცი მარჯვნივ—მანამდე, ვიდრე S' ჭდე არ შეუთავსდება S სკალის



ნახ. 38.

14°20'-ს. შემოვაბრუნოთ ლოგარითმული შიმშა პირით ჩვენკენ და D სკალის 10-ის თავზე წავიკითხავთ:

ორი—ოთხი—რვა.

ამ ნაწილზე $\sin x$-ის რიგია 0, ამიტომ გვექნება:

$$\sin 14°20' = 0{,}248.$$

რატომ მივიღეთ ასეთი მოქმედებით $\sin 14°20'$-ის მნიშვნელობა? როგორც ვიცით, მახვილი კუთხის მნიშვნელობა x უნდა ავიღოთ S-ის სკალაზე, მაშინ კუთხის მნიშვნელობის პირდაპირ D სკალაზე მივიღებთ $\sin x$-ის მნიშვნელობას. მაგრამ D და C სკალები ერთი და იგივეა, ამის გამო $\sin x$-ის მნიშვნელობა იმყოფება S სკალის უკან C სკალაზე. სხვანაირად, მცოცი რომ გამჭვირვალე ყოფილიყო, მაშინ x-ის ქვეშ C სკალაზე წავიკითხავდით $\sin x$-ის მნიშვნელობას. რადგანაც S' ჭდე ემთხვევა D სკალის 10-ს, ამიტომ როცა კუთხის მნიშვნელობა მოთავსდება S'-ზე, მაშინ $\sin x$-ის მნიშვნელობას მივიღებთ C სკალაზე D სკალის 10-ის პირდაპირ. ზუსტად ასევე გვექნება ST სკალისათვის, მაგრამ მხედველობაში მივიღოთ, რომ ST-ზე $\sin x$ და $\operatorname{tg} x$-ის რიგია (—1).

$\operatorname{tg} x$-ის მნიშვნელობას მივიღებთ, თუ T'-ს მოვათავსებთ სათანადო x კუთხეზე და ნიშნად ციფრებს წავიკითხავთ C სკალაზე D სკალის სათავის წერტილის პირდაპირ. $\operatorname{tg} x$-ის რიგი არის 0.

მაგალითად, $\operatorname{tg} 30°30' = 0{,}589$.

§ 64. განსაკუთრებული აღნიშვნები ლოგარითმულ სახაზავზე

ტექნიკური ამოცანების ამოხსნების შემთხვევაში დიდი მნიშვნელობა აქვს ზოგიერთ მუდმივ სიდიდეს. ეს მუდმივი სიდიდეებია:

$$\pi = 3{,}14159;$$

$$M=\frac{1}{\pi}=0,31831;$$

$$c=\sqrt{\frac{4}{\pi}}=1.12838;$$

$$c_1=\sqrt{\frac{40}{\pi}}=3,56825;$$

$\rho^\circ=57,296$ რადიანი გრადუსებით;

$\rho'=3437,7$ „ წუთებით;

$\rho''=206265$ „ წამებით.

ეს სიდიდეები ლოგარითმული სახაზავის სკალებზე აღნიშნულია განსაკუთრებული ჰდეებით.

ამ განსაკუთრებული ჰდეებით ამოვხსნათ რამდენიმე ამოცანა.

1. წრის დიამეტრი $d=5,21$ მ. რას უდრის წრეწირის სიგრძე l და წრის ფართობი S?

როგორც ცნობილია,

$$l=\pi d.$$

π მოვნახოთ D სკალაზე: d მოვნახოთ C სკალაზე, l მიიღება D სკალაზე: ერთი, ექვსი, ოთხი, ექვსი. π-ის რიგია 1, d-ს რიგიც 1-ია, ამიტომ l-ის რიგი იქნება 2.

საბოლოოდ მივიღებთ $l=16,36$ მ.

ფართობის განსაზღვრისათვის უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$S=\pi R^2=\frac{(2R)^2}{\frac{4}{\pi}}=\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

D და C სკალების საშუალებით ვიპოვით $\frac{d}{c}$.

ამ შეფარდებას D სკალაზე წაკითხვა არ ესაჭიროება, მხოლოდ ვიცოდეთ, რომ $\frac{d}{c}$ მიიღება მცოცის მარცხენა ნაპირით, ამიტომ $\frac{d}{c}$-ს რიგი

$$N=1-1+10=1.$$

$\frac{d}{c}$-ს თავზე A სკალაზე მეორე ნაწილში ვკითხულობთ:

ორი, ერთი და სამი.

საბოლოოდ გვექნება:

$$S=21,3 \text{ მ}^2.$$

ლოგარითმულ სახაზავზე მყოფი ჰდე $C_1=\sqrt{\frac{40}{\pi}}$ იხმარება წრის ფართობის განსასაზღვრავად. მაგრამ ამ ჰდით ვსარგებლობთ მეტად იშვიათად.

ჰდე $M=\frac{1}{\pi}$ იხმარება ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართო-

ბის გამოსათვლელად ერთი დაყენებით. მართლაც, ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია

$$S=\pi dh=\frac{dh}{\frac{1}{\pi}}=\frac{dh}{M},$$

სადაც d ცილინდრის ფუძის დიამეტრია, ხოლო h—სიმაღლე.

S-ის გამოთვლა, როგორც ვიცით (§ 52, 5), ასე შესრულდება

$$S=(d:M)\cdot h.$$

მაგალითად, ვიპოვოთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიამეტრი 4,85 მ-ია და სიმაღლე—6,35 მ.

D—სკალაზე ვიპოვოთ $d=4,85$ მ. მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის M. დავტოვოთ უძრავად მცოცი (ამ მაგალითში მცოცის გადასროლა არ გვჭირდება) და C სკალაზე მოვნახოთ $h=6,35$. მის ქვეშ D სკალაზე ვკითხულობთ:

ცხრა—ექვსი—ექვსი.

ამ კომბინირებული მოქმედების რიგი იქნება

$$N=1+1-0=2.$$

ამგვარად, საბოლოოდ გვექნება:

$$S=96,6 \text{ მ}^2.$$

გრადუსის რადიანებში და, პირიქით, რადიანების გრადუსებში გადაყვანისათვის არსებობს ქდეები ρ°, ρ', ρ''

$$\rho^\circ=\frac{360^\circ}{2\pi}=57,296^\circ;$$

$$\rho'=\frac{360\cdot 60'}{2\pi}=3437,7';$$

$$\rho''=\frac{360\cdot 60\cdot 60''}{2\pi}=20626,5''.$$

ჯერ განვიხილოთ რადიანის გრადუსებში გადაყვანა.

მაგალითად, გამოვსახოთ 0,645 რადიანი გრადუსებში.

ამისათვის საკმარისია 0,645 ჩვეულებრივად გავამრავლოთ ρ°-ზე.

D სკალაზე ვკითხულობთ:

სამი—ექვსი—ნული.

ნამრავლის რიგი ტოლია. $0+2=2$. მაშასადამე, 0,645 რადიანი უდრის $36,9^\circ=36^\circ 54'$.

ცხადია, ასევე შესრულდება 0,645 რადიანის გამოსახვა წუთებში (ρ') და წამებში (ρ''). ამ რიცხვების რიგებია, სათანადოდ, 4 და 6.

ამოვხსნათ შებრუნებული ამოცანა. რამდენ რადიანს უდრის 10°15′20″?

აქ დაგვჭირდება შემდეგი განაყოფების გამოთვლა: $\frac{10°}{\rho°}$, $\frac{15'}{\rho'}$, $\frac{20''}{\rho''}$.

$\frac{10°}{\rho°}=0,1745$, $N=2-2=0$ (მცოცი მარცხნივაა),

$\frac{15'}{\rho'}=0,00438$, $N=2-4=-2$,

$\frac{20''}{\rho''}=0,000097$, $N=2-6=-4$.

სათანადო შეკრება მოგვცემს: 10°15′20″ ტოლია 0,1790 რადიანის.

§ 55. ლოგარითმული სახაზავით გამოწვეული ცდომილება

როგორც ვიცით, ლოგარითმული სკალის განტოლებაა (§ 52, 1.)

$$OY=m\lg x. \tag{7}$$

ვისარგებლოთ ცდომილების ფორმულით (§ 42, 4)

$$\Delta Y=m\frac{\Delta x}{x}\lg e, \tag{8}$$

საიდანაც მივიღებთ ($m=250$, $\lg e=0,4343$)

$$\Delta Y=250\cdot 0,4343\cdot\frac{\Delta x}{x}. \tag{9}$$

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ლოგარითმულ სკალაზე ცდომილება ათვლის დროს არ აღემატება 0,1 მმ-ს,

$$\Delta Y=0,1.$$

მაშინ (9)-იდან მივიღებთ:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{0,1}{250\cdot 0,4343}=0,00092<0,001,$$

ამგვარად, ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება 0,001-ს, ანუ

$$\frac{\Delta x}{x}=0,1\%.$$

ფარდობითი ცდომილება კომბინირებული გამოთვლის დროს ტოლია თითოეული რიცხვის ცდომილებათა ჯამისა. ამ ცდომილებას უნდა დაემატოს შედეგის ათვლის დროს დაშვებული ცდომილება. ამიტომ $\frac{ab}{c}$ გამოთვლის დროს ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება 0,4%-ს.

აქედან დავასკვნით, რომ ლოგარითმული სახაზავი ცვლის სამნიშნა ცხრილებს. ამასთანავე შედეგს იძლევა ძალიან მცირე დროის დახარჯვით. ამის გამო ლოგარითმულ სახაზავს დიდი მნიშვნელობა ენიჭება.

თავი X

გრაფიკული გამოთვლები. ნომოგრამები

§ 60. ზოგიერთი მიმდევრობისა და ჯამის აგება

1. ზოგიერთი ალგებრული გამოსახულებების აგება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით მეტად მარტივად სრულდება:

$$x=\frac{ab}{c}, \quad \frac{a^2}{c}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt{a^2 \pm b^2}$$

და სხვ. აქ საქმე გვაქვს უშუალო გაზომვათა და გეომეტრიული თვისებით შედეგის მიღებასთან. თუმცა, როგორც ვიცით, ნახაზით შედეგი მიიღება არა-უმეტეს სამი ნიშნადი ციფრით.

გრაფიკული გამოთვლები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მაშინ, როდესაც გამოთვლებს მასიური ხასიათი აქვს. ამავე დროს მცირე ზომის ნახაზი საკმარისად დიდ ცხრილს ცვლის.

ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ავაგოთ მიმდევრობა:

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{3}, \ldots, \quad \frac{a}{n}, \ldots \tag{1}$$

ამისათვის შემოვხაზოთ წრეწირი a რადიუსით. წრეწირზე მოვნახოთ წესიერი ექვსკუთხედის წვეროები A_1, $A_2, \ldots$, A_6 (ნახ. 39);

$$A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_6A_1=a.$$

გავატაროთ დიამეტრები: A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6. შევაერთოთ A_1 და A_3 წერტილები ქორდით. ეს ქორდა A_2A_5 დიამეტრს გადაკვეთს x_2 წერტილში. x_2 წერტილი შევაერთოთ A_4 წერტილთან წრფით. ეს წრფე A_3A_6 დიამეტრს გადაკვეთს x_3 წერტილში. x_3 შევაერთოთ A_5 წერტილთან და ა. შ.

გამოვარკვიოთ რას უდრის მონაკვეთები OX_2, $OX_3, \ldots$

მართკუთხა $\triangle OX_2A_1$-ში $\angle X_2OA_1=60°$, ამიტომ გვექნება:

$$OX_2=OA_1\cos 60°=\frac{OA_1}{2}=\frac{a}{2}. \tag{2}$$

ახლა განვსაზღვროთ Ox_3,

ამისათვის გამოვთვალოთ $\triangle A_4OX_2$-ის ფართობი:

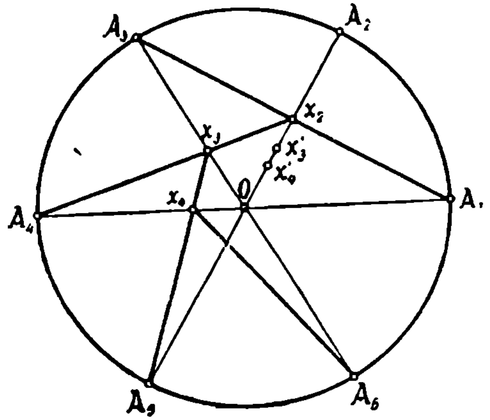
$$S_{A_4OX_2}=\frac{1}{2}OA_4\cdot OX_2\sin 120°=\frac{1}{2}\,a\,\frac{a}{2}\sin 60°=\frac{a^2}{4}\sin 60°. \tag{3}$$

მეორე მხრივ, $\triangle A_4OX_2$ შედგენილია ორი სამკუთხედისაგან: $\triangle A_4OX_3$ და $\triangle X_3OX_2$. თითოეული სამკუთხედის ფართობი ასე გამოითვლება:

$$S_{A_4OX_3}=\frac{1}{2}\cdot A_4O\cdot OX_3\cdot\sin 60^\circ=\frac{a\cdot OX_3}{2}\sin 60^\circ,$$

$$S_{X_3'OX_2}=\frac{1}{2}\cdot OX_3\cdot OX_2\cdot\sin 60^\circ=\frac{a\cdot OX_3}{4}\sin 60^\circ.$$

ამ სამკუთხედთა ფართობების შეკრებით მივიღებთ:



ნახ. 39.

$$S_{A_4OX_2}=\frac{a\cdot OX_3}{2}\sin 60^\circ+\frac{a\cdot OX_3}{4}\sin 60^\circ=\frac{3a}{4}OX_3\sin 60^\circ. \quad (4)$$

(3) და (4) ტოლობათა შედარება მოგვცემს

$$\frac{3a\cdot OX_3}{4}\sin 60^\circ=\frac{a^2}{4}\sin 60^\circ,$$

საიდანაც გვექნება

$$OX_3=\frac{a}{3}.$$

სრულიად ასევე ვაჩვენებთ, რომ:

$$OX_4=\frac{a}{4},\qquad OX_5=\frac{a}{5},\ldots,\qquad OX_n=\frac{a}{n},\cdots$$

ამგვარად, მონაკვეთების მიმდევრობა:

$$OX_2,\ OX_3,\cdots,\ OX_n,\cdots \quad (5)$$

იძლევა (1) მიმდევრობას.

2. ავაგოთ ჯამი:

$$\frac{a}{1\cdot 2}+\frac{a}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{a}{n(n+1)}+\cdots \quad (6)$$

ამისათვის მონაკვეთები (5) მოვზომოთ ფარგლით OA_2 რადიუსზე.

$$OX_2,\ OX_3',\ OX_4',\dots,\ OX_n',\dots$$

სადაც

$$OX_3'=OX_3,\ \ OX_4'=OX_4,\dots$$

განვიხილოთ სხვაობა OX_2-OX_3'

$$X_2X_3'=OX_2-OX_3'=\frac{a}{2}-\frac{a}{3}=\frac{a}{2\cdot 3}.$$

ამგვარად, მონაკვეთი

$$X_2X_3'=\frac{a}{2\cdot 3}.$$

ასევე, მონაკვეთი

$$X_3'X_4'=OX_3'-OX_4'=\frac{a}{3}-\frac{a}{4}=\frac{a}{3\cdot 4}$$

და ა. შ.

მაშასადამე გვექნება:

$$A_2X_2=\frac{a}{1\cdot 2},\ \ X_2X_3'=\frac{a}{2\cdot 3},\ \ X_3'X_4'=\frac{a}{3\cdot 4},$$

$$X_4'X_5'=\frac{a}{4\cdot 5}, \tag{7}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$A_2X_2+X_2X_3'+X_3'X_4'+\dots+X_nX_{n+1}'=$$
$$=\frac{a}{2\cdot 3}+\frac{a}{3\cdot 4}+\dots+\frac{a}{n(n+1)},$$

ანუ

$$A_2X'_{n+1}=\frac{a}{2\cdot 3}+\frac{a}{3\cdot 4}+\dots+\frac{a}{n(n+1)}.$$

აქედან ცხადია, თუ $n\to\infty$, მაშინ $A_2X'_{n+1}\to AO$, ე. ი. (6) მიმდევრობის ზღვარია a.

ამგვარად, გეომეტრიულად გამოვთვალეთ (6) მიმდევრობის n წევრის ჯამი და ამ მიმდევრობის ზღვარი.

ალგებრულად კი (6) მიმდევრობის ზღვარი ასე უნდა გამოგვეთვალა:

$$\frac{a}{1\cdot 2}=a-\frac{a}{2},$$

$$\frac{a}{2\cdot 3}=\frac{a}{2}-\frac{a}{3},$$

$$\frac{a}{n(n+1)}=\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1},$$

საიდანაც გვექნებოდა:

$$S_n=a-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{3}+\dots+\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1},$$

ანუ

$$S_n=a-\frac{a}{n+1}.$$

თუ $n\to\infty$, მაშინ $\frac{a}{n}\to 0$. ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან მი-
ვიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=a.$$

3. გამოვთვალოთ ჯამი

$$S=\frac{a}{1\cdot2\cdot3}+\frac{a}{2\cdot3\cdot4}+\dots+\frac{a}{n(n+1)(n+2)}+\dots \tag{8}$$

ამისათვის განვიხილოთ მონაკვეთი $\frac{1}{2}OX_3'$. (7) ტოლობათა საფუძველზე ადვილი შესამჩნევია:

$$\frac{1}{2}(OX_2-X_2X_3')=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1\cdot2}-\frac{a}{2\cdot3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{2\cdot3}=$$

$$=\frac{a}{2\cdot3}=\frac{a}{1\cdot2\cdot3}.$$

ასევე მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}(X_2X_3'-X_3X_4')=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2\cdot3}-\frac{a}{3\cdot4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3\cdot4}=\frac{a}{2\cdot3\cdot4},$$

$$\frac{1}{2}(X_3'X_4'-X_4'X_5')=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3\cdot4}-\frac{a}{4\cdot5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4\cdot5}\cdot\frac{5-3}{3\cdot5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{2}{3\cdot5}=\frac{a}{3\cdot4\cdot5},$$

. . . .

$$\frac{1}{2}(X'_nX'_{n+1}-X'_{n+1}X'_{n+2})=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n(n+1)}-\frac{a}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{a}{n(n+1)(n+2)}.$$

თუ მიღებულ ტოლობებს შევკრებთ, გვექნება:

$$\frac{1}{2}(OX_2-X_2X_3')+\frac{1}{2}(X_2X_3'-X_3'X_4')+\frac{1}{2}(X_3'X_4'-X_4'X_5')+$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}(X'_nX'_{n+1}-X'_{n+1}X'_{n+2})=$$

$$=\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{a}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{a}{n(n+1)(n+2)}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მყოფი გამოსახულება (8) მიმდევრობის n წევრის ჯამია, ხოლო მარცხენა მხარეში მყოფი გამოსახულება ფრჩხილების გახსნისა და შეკრების შემდეგ მოგვცემს:

$$\frac{1}{2}(OX_2-X_2X_3'+X_2X_3'-X_3'X_4'+X_3'X_4'+\cdots+X'_nX'_{n+1}-$$

$$-X'_{n+1}X'_{n+2}=\frac{1}{2}(OX_2-X'_nX'_{n+1}).$$

ამგვარად, გვექნება:

$$\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{a}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{a}{n(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}(OX_2-X'_{n+1}X'_{n+2}). \tag{9}$$

ცხადია, (9) გამოსახულების მონახვა OX_2 და $X'_{n+1}X'_{n+2}$ მონაკვეთებით არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. თუ $n\to\infty$, მაშინ $X'_{n+1}X'_{n+2}\to 0$, ამის გამო (9) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\lim_{n-\infty} S_n=\frac{1}{2}OX_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}.$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{a}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{a}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{3!}.$$

§ 67. მრავალწევრის აგება

1. ავაგოთ მრავალწევრი

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \tag{10}$$

სადაც $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ნამდვილი რიცხვებია.

ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. Y ღერძზე გადავზომოთ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ რიცხვების შესაბამისი მონაკვეთები (ნახ. 40) ისე, რომ

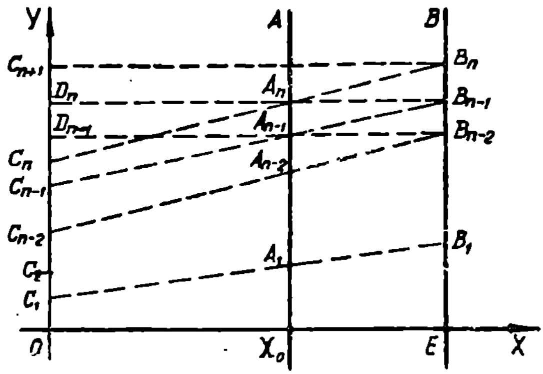
$$OC_1=ma_0,\ C_1C_2=ma_1,\cdots,\ C_{n-1}C_n=ma_{n-1},\ C_nC_{n+1}=ma_n. \tag{11}$$

X ღერძზე, O წერტილის მარჯვნივ, ავიღოთ X_0 და E წერტილები ისეთი პირობით, რომ x გამოისახებოდეს შეფარდებით:

$$x = \frac{OX_0}{OE}. \tag{12}$$

X_0 და E წერტილებზე გავატაროთ Y ღერძის პარალელური წრფეები: X_0A და EB.

ვიპოვოთ x-ის მნიშვნელობისათვის (10) ფუნქციის მნიშვნელობა. ამისათვის C_{n+1} წერტილზე გავატაროთ X ღერძის პარალელური წრფე,



ნახ. 40.

რომელიც EB წრფესთან მოგვცემს წერტილს B_n. ეს წერტილი შევაერთოთ C_n-თან წრფით. ამ წრფით X_0A წრფეზე გადაკვეთაში მივიღებთ წერტილს A_n. A_n წერტილზე გავატაროთ X ღერძის პარალელური წრფე. ეს წრფე EB წრფესთან გადაკვეთაში მოგვცემს წერტილს, რომელიც B_{n-1} აღვნიშნოთ. ცხადია, $\triangle D_nC_nA_n$ მსგავსია $\triangle C_{n+1}C_nB_n$, ამიტომ გვექნება:

$$\frac{C_nC_{n+1}}{C_nD_n} = \frac{C_{n+1}B_n}{D_nA_n},$$

საიდანაც

$$C_nD_n = C_nC_{n+1}\frac{D_nA_n}{C_{n+1}B_n}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ C_nC_{n+1}-ის მნიშვნელობას (11)-დან და $\dfrac{D_nA_n}{C_{n+1}B_n}$-ის მნიშვნელობას (12)-დან, მივიღებთ:

$$C_nD_n = a_nx.$$

ამგვარად,

$$C_{n-1}D_n=C_{n-1}C_n+C_nD_n=a_{n-1}+a_nx. \tag{13}$$

ახლა B_{n-1} წერტილი შევაერთოთ C_{n-1} წერტილთან. ეს წრფე X_0A-სთან გადაკვეთაში მოგვცემს წერტილს, რომელიც A_{n-1}-ით აღვნიშნოთ. ამ წერტილზე გავატაროთ X ღერძის პარალელური წრფე. Y ღერძზე და EB წრფეზე მიღებული წერტილები, სათანადოდ, D_{n-1} და B_{n-2}-ით აღვნიშნოთ.

ცხადია, $\triangle D_{n-1}C_{n-1}A_{n-1}$ მსგავსია $\triangle D_nC_{n-1}B_{n-1}$. აქედან გვექნება:

$$\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{C_{n-1}D_n}=\frac{D_{n-1}A_{n-1}}{D_nB_{n-1}}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (13) და (12) ტოლობას, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს:

$$C_{n-1}D_{n-1}=(a_{n-1}+a_nx)x=a_{n-1}x+a_nx^2.$$

ცხადია:

$$C_{n-2}D_{n-1}=a_{n-2}+a_{n-1}x+a_nx^2,$$

ე. ი.

$$X_0A_{n-1}=OD_{n-1}=OC_{n-2}+a_{n-2}+a_{n-1}x+a_nx^2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ:

$$OD_1=OC_1+C_1D_1=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

ე. ი.

$$X_0A_1=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

აქ აღებული $D_n, D_{n-1}, \cdots, D_1$ წერტილები მხოლოდ დამტკიცებაში დაგვჭირდა. A_i წერტილების განსაზღვრისათვის ისინი არ გვესაჭიროება. X_0A_1-ის განსასაზღვრავად გვესაჭიროება მარტო C_i და B_i წერტილების შეერთება წრფით ამ წრფით X_0A წრფეზე მიღებული გადაკვეთის A_i წერტილები და X ღერძის პარალელური წრფის გატარება EB წრფემდე. 41-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მეოთხე ხარისხის მრავალწევრის მნიშვნელობის აგება.

თუ x-ის სხვადასხვა მნიშვნელობას ავიღებთ, მაშინ A_1 წერტილის სხვადასხვა მდებარეობას მივიღებთ. ამ წერტილების შეერთებით მივიღებთ (10) ფუნქციის გრაფიკს.

თუ x-ის აღებული მნიშვნელობისათვის სათანადო ნახაზი დიდდება, მაშინ დავუშვათ, მაგალითად,

$$\frac{x}{10}=z.$$

ამისათვის (10) გამოსახულება ასე გადავწეროთ:

$$y=a_0+a_1\cdot10\cdot\frac{x}{10}+a_2\cdot10^2\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^2+\cdots+a_n\cdot10^n\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^n,$$

ანუ

$$y=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_nz^n,$$

სადაც

$$A_0=a_0,\ A_1=a_1\cdot 10,\cdots,A_n=a_n\cdot 10^n.$$

სიდიდეებს A_0, $A_1,\cdots,A_n$ გადავზომავთ ისეთი მასშტაბით, რომ ნახაზი დიდი არ გამოვიდეს, ხოლო x-ის მაგივრად z-ს ავიღებთ, რომელიც x-ის მნიშვნელობაზე 10-ჯერ მცირეა.

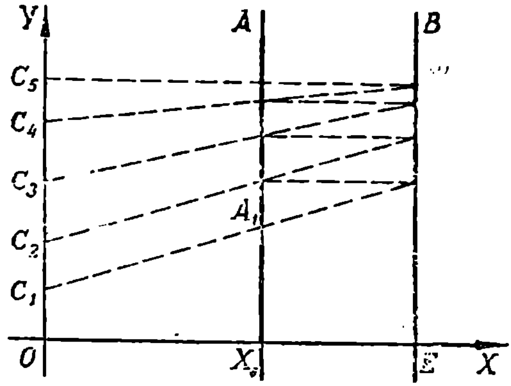
2. არსებობს აგრეთვე მრავალწევრის აგების მეორე მეთოდი. ეს მეთოდიც მეტად ელემენტარულია.

სიმარტივისათვის ავიღოთ მესამე ხარისხის მრავალწევრი:

$$y=a_0+a_1x+ +a_2x^2+a_3x^3 \quad (14)$$

(14) გამოსახულების ასაგებად ასე მოვიქცეთ. ავიღოთ წრფე, რომელზედაც გადავზომოთ a_0 (ნახ. 42),

$$C_0C_1=a_0.$$



ნახ. 41.

C_1 წერტილზე გავატაროთ C_0C_1—წრფის პერპენდიკულარული წრფე. ამ წრფეზე a_1-ის ნიშნის მიხედვით გადავზომოთ a_1 C_0C_1 წრფის მარცხნივ, თუ a_1 დადებითია და—მარჯვნივ, თუ a_1 უარყოფითია:

$$C_1C_2=a_1.$$

C_2 წერტილზედაც გავატაროთ C_1C_2-ის პერპენდიკულარული წრფე და ამ წრფეზე C_1C_2 წრფის მარცხნივ გადავზომოთ a_2, თუ იგი დადებითია და მარჯვნივ, თუ a_2 უარყოფითია,

$$C_2C_3=a_2.$$

ასევე ვიპოვოთ C_4 წერტილი:

$$C_3C_4\perp C_2C_3,$$
$$C_3C_4=a_3.$$

C_2C_3 წრფეზე ავიღოთ A წერტილი ისე, რომ

$$\frac{C_3A}{C_3C_4}=x. \quad (15)$$

თუ x დადებითია, A წერტილი ავიღოთ C_3C_4-ის მარცხნივ, C_2C_3-ის მიმართულებით.

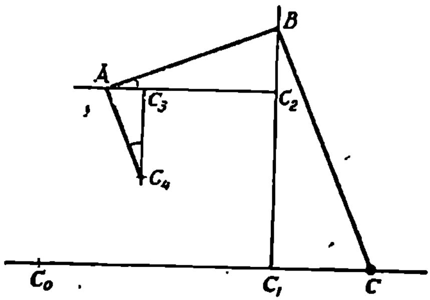
უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$C_3A=a_3x,$$

ხოლო C_2A ასეთი ტოლობით გამოისახება:

$$C_2A=C_2C_3+C_3A=a_2+a_3x. \tag{16}$$

მონაკვეთები C_2A და C_3A იქნებიან ერთი და იგივე ნიშნის ან ურთიერთსაწინააღმდეგო x-ის მნიშვნელობის მიხედვით.



ნახ. 42.

A წერტილზე გავატაროთ C_4A-ს პერპენდიკულარული წრფე C_1C_2—წრფის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის ეს წერტილი აღვნიშნოთ B-ასოთი. რადგანაც $\angle C_2AB$ და $\angle C_3C_4A$ ტოლია, ამიტომ გვექნება:

$$\frac{C_2B}{C_2A}=\frac{C_3A}{C_3C_4}.$$

აქედან (15) და (16) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ:

$$C_2B=C_2A\cdot x=(a_2+a_3x)x=a_2x+a_3x^2.$$

თუ ამ ტოლობას მხედველობაში მივიღებთ, მაშინ ადვილი შესამჩნევი იქნება

$$C_1B=C_1C_2+C_2B=a_1+a_2x+a_3x^2.$$

B წერტილიდან გავატაროთ AB წრფის პერპენდიკულარული წრფე C_0C_1 წრფის გადაკვეთამდე. გადაკვეთით მიღებული წერტილი აღვნიშნოთ C ასოთი. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$C_0C=C_0C_1+C_1C=a_0+(a_1+a_2x+a_3x^2)x,$$

ანუ

$$C_0C=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3.$$

ცხადია, კუბური მრავალწევრის მნიშვნელობის მონახვის ანალოგიურად შეგვიძლია მოვნახოთ n-ური ხარისხის მრავალწევრის მნიშვნელობა ნებისმიერი ნამდვილი x-სათვის.

3. მრავალწევრის აგების ზემოთ განხილული მეთოდი შეიძლება განზოგადდეს შემდეგი სახის მრავალწევრზე (სიმარტივისათვის ავიღოთ მესამე ხარისხის მრავალწევრი)

$$y=a_0+a_1(x-p)+a_2(x-p)(x-q)+a_3(x-p)(x-q)(x-r). \tag{17}$$

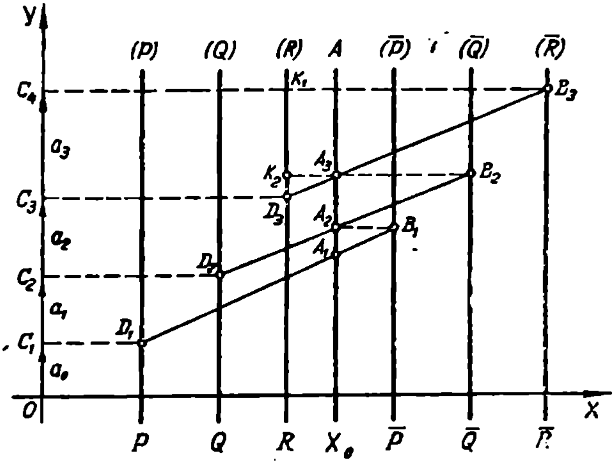
Y ღერძზე გადავზომოთ ისევ მონაკვეთები, რომლებიც სათანადო

მოდულით m გამოსახავენ კოეფიციენტებს: a_0, a_1, a_2, a_3. X ღერძზე მოვნახოთ P, Q, R, X_0 წერტილები (ნახ. 43).

$$\frac{OP}{p}=k, \quad \frac{OQ}{q}=k, \quad \frac{OR}{r}=k, \quad \frac{OX_0}{x}=k, \tag{18}$$

სადაც k ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა. იმავე X ღერძზე ვიპოვოთ ისეთი წერტილები $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$, რომ შესრულებული იყოს ტოლობანი:

$$O\bar{P}=OP+k, \quad O\bar{Q}=OQ+k, \quad O\bar{R}=OR+k.$$



ნახ. 43.

წერტილებზე P, Q, R, $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$, X_0 გავატაროთ Y ღერძის პარალელური წრფეები: $(P,)$ $(Q,)$ $(R,)$ $(\bar{P})$, $(\bar{Q})$, $(\bar{R})$ X_0A.

C_4 წერტილზე გავატაროთ X ღერძის პარალელური $(\bar{R})$ წრფის გადაკვეთამდე. გადაკვეთაში მიღებული წერტილი აღვნიშნოთ B_3-ით. წერტილზე C_3 გავატაროთ X ღერძის პარალელური წრფე (R) წრფემდე. გადაკვეთაში მიღებული D_3 წერტილი შევუერთოთ B_3 წერტილს. ამ წრფით X_0A წრფის თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ A_3-ით. A_3 წერტილზე გავატაროთ X ღერძის პარალელური წრფე (R) და $(\bar{Q})$ წრფეების გადაკვეთამდე. მიღებული წერტილები სათანადოდ აღვნიშნოთ K_2, B_2-ით. ცხადია, $\triangle K_2A_3D_3 \backsim \triangle K_1B_3D_3$. ამ სამკუთხედებიდან გვექნება:

$$\frac{K_2A_3}{K_1B_3}=\frac{D_3K_2}{D_3K_1}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (18)-ს და D_3K_1-ის მნიშვნელობას, უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{(x-r)k}{O\overline{R}-OR}=\frac{D_3K_2}{a_3},$$

საიდანაც

$$D_3K_2=a_3(x-r).$$

ამგვარად, A_3 წერტილი D_3 წერტილზე მაღლა იმყოფება $a_3(x-r)$ სიდიდით, ხოლო, C_2-ზე — $a_2+a_3(x-r)$ სიდიდით.

ანალოგიური აგება გვიჩვენებს, რომ A_2 წერტილი D_2 წერტილზე ზევითაა $[a_2+a_3(x-r)](x-q)$ სიდიდით, ხოლო C_1 წერტილზე ზევითაა $a_1+a_2(x-q)+a_3(x-q)(x-r)$ სიდიდით.

ასევე ვაჩვენებთ, რომ A_1 წერტილი იმყოფება D_1 წერტილზე ზევით შემდეგი სიდიდით:

$$[a_1+a_2(x-q)+a_3(x-q)(x-r)](x-p).$$

ამგვარად,

$$X_0A_1=a_0+a_1(x-p)+a_2(x-p)(x-q)+a_3(x-p)(x-q)(x-r).$$

თუ x, p, q, r—დიდი მნიშვნელობისაა, მაშინ (17) მრავალწევრი ასე წარმოვადგინოთ:

$$y=a_0+10a_1\left(\frac{x}{10}-\frac{p}{10}\right)+10^2a_2\left(\frac{x}{10}-\frac{p}{10}\right)\left(\frac{x}{10}-\frac{q}{10}\right)+$$
$$+10^3a_3\left(\frac{x}{10}-\frac{p}{10}\right)\left(\frac{x}{10}-\frac{q}{10}\right)\left(\frac{x}{10}-\frac{r}{10}\right).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{x}{10}=t,\quad \frac{p}{10}=l,\quad \frac{q}{10}=m,\quad \frac{r}{10}=n,$$

$$a_0=A_0,\ 10a_1=A_1,\ 10^2a_2=A_2,\ 10^3a_3=A_3,$$

მაშინ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს:

$$y=A_0+A_1(t-l)+A_2(t-l)(t-m)+A_3(t-l)(t-m)(t-n).$$

მიღებული A_0, A_1, A_2, A_3 სასურველი მასშტაბით შეგვიძლია გადავზომოთ t, l, m, n—კი მცირე სიდიდეებია x, p, q, r-თან შედარებით.

§ 58. მრავალცვლადის წრფივი ფუნქციის გრაფიკული გამოსახვა

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სამ ცვლადზე დამოკიდებული წრფივი ფუნქცია:

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3. \tag{19}$$

მართკუთხა კოორდინატთა XY სისტემში (ნახ. 44), X ღერძის უარ-ყოფით მხარეზე ავიღოთ P წერტილი,

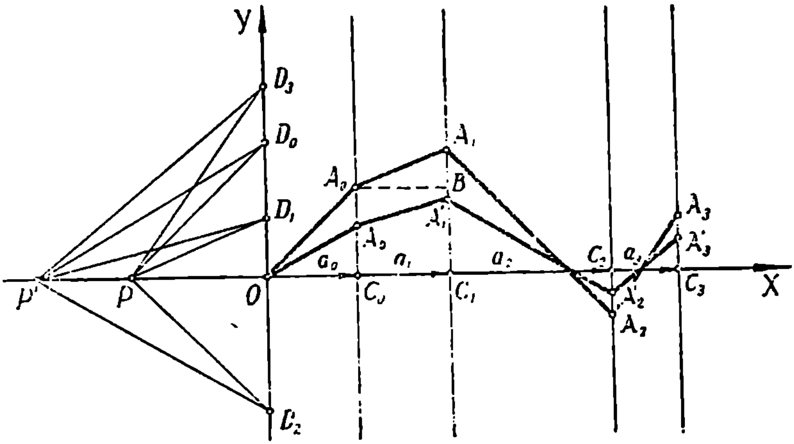
$$OP=m,$$

ხოლო Y ღერძზე D_0, D_1, D_2, D_3 წერტილები შემდეგი პირობით:

$$OD_0=m,\ OD_1=mx_1,\ OD_2=mx_2,\ OD_3=mx_3,$$

სადაც m—მასშტაბია.

D_1, D_2, D_3 წერტილები, სათანადოდ, x_1, x_2, x_3-ის ნიშნის მიხედ-ვით Y ღერძის დადებით ან უარყოფით მხარეზე აიგება. X ღერძზე O



ნახ. 44.

წერტილიდან მარჯვნივ ან მარცხნივ სათანადო ნიშნის მიხედვით გა-დავზომოთ a_0, a_1 a_2, a_3-ის შესაბამისი მონაკვეთები ნებისმიერი k მასშტაბით:

$$OC_0=ka_0,\ OC_1=k(a_0+a_1),\ OC_2=k(a_0+a_1+a_3),$$

$$OC_3=k(a_0+a_1+a_2+a_3).$$

მიღებული C_0, C_1, C_2, C_3 წერტილებზე გავატაროთ Y ღერძის პარალე-ლური წრფეები. წერტილები D_0, D_1, D_2, D_3 შევუერთოთ P წერ-ტილს. ადვილი შესამჩნევია, რომ x_1, x_2, x_3 სიდიდეები OD_i ($i=1, 2, 3$) და OP მონაკვეთებით შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\frac{OD_1}{OP}=x_1,\quad \frac{OD_2}{OP}=x_2,\quad \frac{OD_3}{OP}=x_3.$$

წრფივი ფუნქციის (19)-ის მნიშვნელობის გამოსათვლელად O წერტი-ლიდან გავატაროთ ტეხილი $OA_0A_1A_2A_3$, სადაც

$$OA_0 \parallel PD_0,\ A_0A_1 \parallel PD_1,$$

$$A_1A_2 \parallel PD_2,\ A_2A_3 \parallel PD_3.$$

გამოვიანგარიშოთ, რას გამოსახავს C_1A_1.

ამისათვის A_0 წერტილიდან გავატაროთ წრფე $A_0B \parallel OX$. ცხადია,

$$\triangle A_0BA_1 \backsim \triangle POD_1.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\frac{BA_1}{A_0B} = \frac{OD_1}{OP},$$

საიდანაც

$$BA_1 = a_1x_1.$$

მაგრამ $OA_0 \parallel PD_0$, $OP = OD_0$;
ამიტომ გვექნება

$$OC_0 = C_0A_0 = a_0.$$

ამგვარად, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$C_1A_1 = C_1B + BA_1 = a_0 + a_1x_1.$$

სრულიად ასევე ვაჩვენებთ, რომ

$$C_2A_2 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,$$

ხოლო

$$C_3A_3 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

თუ x_1, x_2, x_3 დიდი რიცხვებია, მაშინ შეგვიძლია პოლუსი P გადავაადგილოთ ისეთ P' წერტილში, რომ

$$OP' = k \cdot OP,$$

მაშინ

$$x_1' = \frac{OD_1}{OP'} = \frac{OD_1}{k \cdot OP} = \frac{x_1}{k}, \qquad x_2' = \frac{x_2}{k}, \quad x_3' = \frac{x_3}{k}.$$

ასეთი მნიშვნელობის აგებით მივიღებთ:

$$Y = \frac{a_0}{k} + a_1\frac{x_1}{k} + a_2\frac{x_2}{k} + a_3\frac{x_3}{k} = \frac{y}{k},$$

საიდანაც

$$y = kY.$$

ე. ი. მიღებული Y-ის მნიშვნელობა უნდა გავადიდოთ იმდენჯერ, რამდენჯერაც OP' მეტია OP-ზე.

ზემოთ განხილული ფუნქციების მნიშვნელობების გრაფიკული აგებიდან აშკარაა, რომ x-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ძირითადი სქემა უცვლელია, იცვლება მხოლოდ x, ამის გამო ერთი და იგივე ნახაზით შეიძლება შესრულდეს მასიური გამოთვლები.

§ 60. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის გრაფიკული გამოთვლა. ნომოგრამები

1. ავიღოთ სამი პარალელური x, z, y რიცხვთა ღერძი ისე, რომ შუა ღერძი ტოლად იყოს დაშორებული ორი დანარჩენიდან (ნახ. 45); ამ ღერძების საწყისი O_1, O_2, O_3 წერტილები მდებარეობდეს ერთ წრფეზე.

გავატაროთ რაიმე წრფე, რომელიც მოცემულ ღერძებს, სათანადოდ, სამ A, B, C წერტილში გადაკვეთს, ცხადია, O_1O_3CA ოთხკუთხედი ტრაპეციაა, რომლის შუა წრფეა O_2B, ამიტომ

$$O_2B=\frac{O_1A+O_3C}{2}. \tag{20}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ A, B, C წერტილების კოორდინატებს, უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება:

$$z=\frac{x+y}{2}. \tag{21}$$

ამგვარად, 45-ე ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფიკი საშუალებას იძლევა განისაზღვროს ორი მოცემული მნიშვნელობის საშუალო არითმეტიკული.

2. ვთქვათ, X და Y ღერძებზე, სათანადოდ, აგებულია სკალები:

$$OX=mx \quad (x=\cdots,\ 0,\ 1,\cdots),$$
$$OY=my \quad (y=\cdots,\ 0,\ 1,\cdots),$$

ხოლო z ღერძზე—სკალა

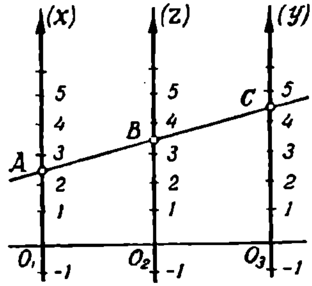
$$OZ=\frac{m}{2}z \quad (z=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\cdots),$$

მაშინ (20) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{m}{2}z=\frac{mx+my}{2},$$

ანუ

$$z=x+y. \tag{22}$$



ნახ. 45.

ამგვარად, თუ Z ღერძზე ორჯერ მცირე მოდულითაა აგებული სკალა, ვიდრე X და Y ღერძებზე, მაშინ 45-ე ნახაზით შეგვიძლია ორი მოცემული x და y რიცხვის ჯამი ვიპოვოთ. ამისათვის საკმარისია X და Y წერტილებზე სახაზავის ნაპირი მოვათავსოთ, მაშინ $x+y$ ჯამი მიიღება Z ღერძზე Z ღერძისა და X და Y წერტილებზე გამავალი წრფის გადაკვეთაში.

3. ვთქვათ,

$$x=\lg u,\ y=\lg v,\ z=\lg w,$$

მაშინ (22) ტოლობა მოგვცემს

$$\lg w=\lg u+\lg v,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$w=uv. \tag{23}$$

ამგვარად, თუ X და Y ღერძებზე აგებულია სკალები

$$OX=m\lg u \quad (u=1,\ 2,\cdots,\ 10),$$
$$OY=m\lg v \quad (v=1,\ 2,\cdots,\ 10),$$

ხოლო Z ღერძზე

$$OZ=\frac{m}{2}\lg w \qquad (w=1,\ 2,\cdots,\ 100),$$

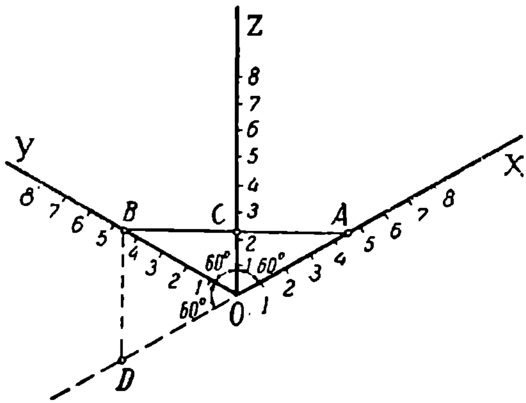
მაშინ 45-ე ნახაზის საშუალებით შეგვიძლია ორი მოცემული სიდიდის ნამრავლი ვიპოვოთ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ 45-ე ნახაზი შეცვლის რიცხვთა გამრავლების ცხრილს.

4. განვიხილოთ ასეთი დამოკიდებულება:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}. \tag{24}$$

ამ გამოსახულების გრაფიკულად აგებისათვის ავიღოთ რიცხვთა სამი ღერძი OX, OY, OZ ისე, რომ $\angle XOZ=\angle ZOY=60°$ (ნახ. 46). გავატაროთ ნებისმიერი წრფე, რომელიც სამივე ღერძს გადაკვეთს.



ნახ. 46.

ვთქვათ, გადაკვეთის წერტილებია A, B, C. წრფე OX გავაგრძელოთ. O წერტილიდან გადავზომოთ $OD=QB$. B და D წერტილები შევაერთოთ. $\triangle ADB$ და $\triangle AOC$ მსგავსია, რადგანაც საერთო აქვს $\angle BDA$ და $\angle COA=\angle BDA=60°$. სამკუთხედების მსგავსებიდან შევადგინოთ პროპორცია

$$\frac{AD}{AO}=\frac{DB}{CO},$$

რადგანაც $\triangle DBO$ ტოლგვერდაა, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{x+y}{x}=\frac{y}{z},$$

საიდანაც

$$xz+yz=xy.$$

მიღებული ტოლობის xyz-ზე გაყოფა მოგვცემს:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{z}.$$

ამგვარად A, B, C წერტილების კოორდინატები, რომლებიც იმყოფებიან ერთ წრფეზე, აკმაყოფილებენ (24) ტოლობას.

(24) ტოლობიდან ცხადია, თუ მოცემულია ორი სიდიდე, მესამე განისაზღვრება 46-ე ნახაზის საშუალებით, რისთვისაც საკმარისია მოცემულ წერტილებზე წრფის გატარება და მესამე ღერძზე მიღებული წერტილის წაკითხვა.

5. ვთქვათ, ნაცვლად (24)-ისა გვაქვს დამოკიდებულება:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}=\frac{1}{w}, \qquad (25)$$

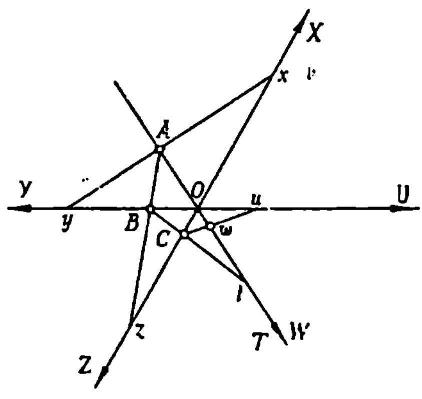
მაშინ ასეთი ჯამი თანდათანობით უნდა ვიპოვოთ:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{OA}.$$

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{z}=\frac{1}{OB}.$$

$$\frac{1}{OB}+\frac{1}{t}=\frac{1}{OC},$$

$$\frac{1}{OC}+\frac{1}{u}=\frac{1}{w}.$$



ნახ. 47.

მთელი პროცესი ნაჩვენებია 47-ე ნახაზზე. ცხადია, რამდენი შესაკრებიც უნდა იყოს (25) ჯამში, მაინც 47-ე ნახაზით შეიძლება მოიძებნოს. ასეთი საკითხები გვხვდება გამტარების პარალელური შეერთების დროს.

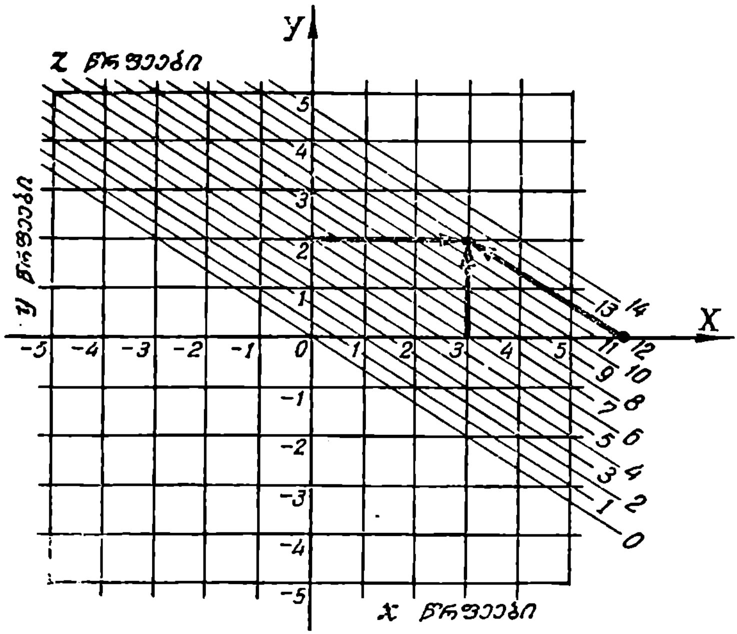
6. ამ პარაგრაფში განხილული ფუნქციები განისაზღვრებოდა ერთ წრფეზე მდებარე ჭდეებით; მაგ. 46-ე ნახაზზე x, y და z ჭდეები ერთ წრფეზე იყო მოთავსებული, 45-ე ნახაზზე ყველა სამივე შემთხვევაში პასუხს ერთ წრფეზე მდებარე ჭდეები იძლეოდა. ამიტომ ასეთ გრაფიკებს ერთ წრფეზე მდებარე ჭდეებიანი (ინდექსებიანი) ნომოგრამები ეწოდება.

ნომოგრაფია გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთი დარგია. იგი

სწავლობს ფუნქციონალურ დამოკიდებულებათათვის განსაკუთრებული ნახაზების—ნომოგრამების აგებას და ამ ნახაზებით რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლას. ყოველი ნომოგრამა გამოსახავს ამა თუ იმ ფუნქციას სრულიად განსაზღვრულ არეში. ნომოგრაფია წარმომდგარია ბერძნული სიტყვებისაგან: νόμος—კანონი γραφειν—წერა.

ნომოგრამის ერთ სახეს იძლევა XY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში $y=f(x)$ ფუნქციის წირი. ამ წირით x-ის მოცემული მნიშვნელობით განისაზღვრება y და პირიქით.

ნომოგრამები სხვადასხვა სახისაა: ორფა სკალა, ბადისებრი ნომოგრამა, ერთ წრფეზე, ურთიერთპერპენ-



ნახ. 48.

დიკულარულ წრფეებზე, პარალელურ წრფეებზე, წრეწირზე მდებარე ჭდეებიანი ნომოგრამები და სხვ. ნომოგრამების სახელწოდება იქიდან წარმოდგება, თუ ჭდეების როგორი განლაგება იძლევა პასუხს.

ორფა სკალები მივიღეთ 22-ე ნახაზზე წრფივი ფუნქციისათვის, 25-ე ნახაზზე კვადრატული ფუნქციისათვის, 26-ე ნახაზზე რიცხვთა კუბებისათვის, 27-ე ნახაზზე $y=\sin x$-სათვის და სხვ. საერთოდ კი ლოგარითმული სახაზავი ორფა სკალების ერთობლიობაა.

ორფა სკალა ნომოგრამის უმარტივესი სახეა. იგი გამოიყენება

$F(x, y)=0$ განტოლებისათვის. სკალები ისეთნაირადაა აგებული, რომ ამ სკალების წერტილები, რომელთა შესაბამისი მნიშვნელობანი განტოლებას აკმაყოფილებენ, ერთმანეთს ემთხვევა.

ბადისებრი ნომოგრამა $F(x, y, z)=0$ განტოლებისათვის შედგება წირთა სამი ოჯახისაგან. ოჯახთა წირები ისეა აგებული, რომ სამი წირი, რომელთა შესაბამისი მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ განტოლებას, იკვეთება ერთ წერტილში. მაგალითად, განტოლებისათვის

$$2x+3y=z$$

გვექნება 48-ე ნახაზი, სადაც აგებულია x წრფეთა ოჯახი $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ მნიშვნელობებისათვის, y წრფეთა ოჯახი $y=0, 1, 2, 3, 4$—მნიშვნელობებისათვის, ხოლო z წრფეთა ოჯახი $z=0, 1, \cdots, 12$ მნიშვნელობებისათვის. ნახაზზე ნაჩვენებია $x=3$, $y=2$, $z=12$.

§ 60. ურთიერთპერპენდიკულარულ წრფეებზე მდებარე სკალებიანი ნომოგრამა

1. განვიხილოთ ფუნქცია

$$z=\sqrt{xy}. \qquad (26)$$

ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, სადაც ორდინატათა ღერძზე აგებულია z სკალა, აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებაზე x სკალა, ხოლო უარყოფით მიმართულებაზე y სკალა (ნახ. 49),

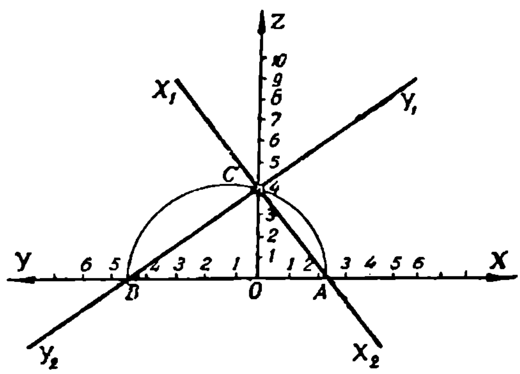
$$OZ=mz \quad (z=0, 1, \cdots),$$
$$OX=mx \quad (x=0, 1, \cdots),$$
$$OY=my \quad (y=0, 1, \cdots).$$

X ღერძზე ავიღოთ a, Y ღერძზე b მნიშვნელობანი (ნახ. 49)

$$OA=ma, \quad OB=mb,$$

მაშინ, როგორც ვიცით, სიდიდე

$$OC=\sqrt{OA\cdot OB} \qquad (27)$$



ნახ. 49.

მიიღება Z ღერძზე, AB დიამეტრზე შემოწერილი წრეწირით. ეს წრეწირი z სკალას C წერტილში გადაკვეთს. ან, რაც იგივეა, AB ჰიპოტენუზით ავაგოთ ისეთი მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის წვერო z სკალაზეა. C წერტილის პოვნას ადვილად შევძლებთ, თუ გამჭვირვალე მასალისაგან გაკეთებულ ფურცელზე ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ წრფეს გავატარებთ (§ 48, ნახ. 23).

ეს ფურცელი (ტრანსპარანტი) მანამ ვამოძრაოთ, ვიდრე წრფეები A და B წერტილზე არ გაივლის და გადაკვეთის წერტილი z სკალაზე არ მოთავსდება. მაშინ მართკუთხედის წვერო მოგვცემს C წერტილის მდებარეობას z სკალაზე. მართლაც, (27)-დან გვექნება:

$$mc=\sqrt{ma\cdot mb},$$

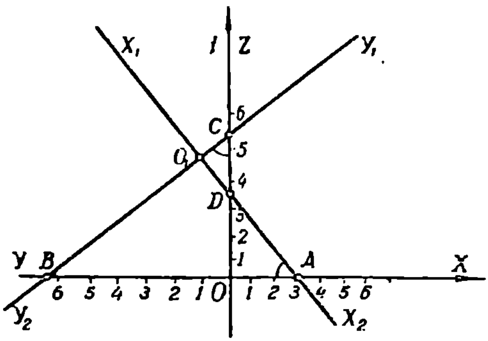
ანუ

$$c=\sqrt{ab}.$$

2. განვსაზღვროთ ნომოგრამით მეოთხე საშუალო პროპორციული. ავიღოთ დამოკიდებულება:

$$\frac{x}{z}=\frac{t}{y}.$$

ორდინატათა ღერძზე ავიღოთ z და t სკალები, აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებაზე — x სკალა, ხოლო უარყოფით მიმართულებაზე y სკალა (ნახ. 50). ამ კოორდინატთა სისტემაზე დავადვათ ტრანსპარანტი. გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ A, B, D, C ასოებით. ცხადია, $\triangle AOD\backsim\triangle COB$, რადგანაც ამ მართკუთხა სამკუთხედებს თითო მახვილი კუთხე აქვს ტოლი. შევადგინოთ პროპორცია:



ნახ. 50.

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB},$$

ანუ

$$\frac{mx}{mz}=\frac{mt}{my},$$

ე. ი.

$$\frac{x}{z}=\frac{t}{y}.$$

თუ მოცემულია x, z და y, მაშინ ტრანსპარანტის საშუალებით ორდინატათა ღერძზე t ადვილად განისაზღვრება. მართლაც, ტრანსპარანტის ერთი წრფე დავადვათ C და B წერტილებს. ტრანსპარანტი ისე გადავაადგილოთ CB მიმართულებით, რომ მეორე წრფე გავიდეს A წერტილზე. მაშინ ეს მეორე წრფე ორდინატათა ღერძზე გადაკვეთაში მოგვცემს t-ს მნიშვნელობას.

§ 61. წრეწირზე მდებარე ჭდეებიანი ნომოგრამა

წრეწირზე მდებარე ჭდეებიან ნომოგრამას იძლევა ერთუცნობიანი კვადრატული განტოლება. განტოლება ავიღოთ შემდეგი სახით:

$$x^2-2px-q^2=0. \qquad (28)$$

ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$(x-p)^2=p^2+q^2.$$

უკანასკნელი მიიღება წრეწირის განტოლებიდან.

$$(x-p)^2+y^2=p^2+q^2, \tag{29}$$

თუ მასში ჩავსვამთ $y=0$.

ამგვარად, კვადრატული (28) განტოლების ამოხსნა ტოლფასია (29) წრეწირის X ღერძთან გადაკვეთის წერტილების პოვნისა.

ავიღოთ XY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის ღერძებზე აგებულია ერთგვაროვანი სკალები (ნახ. 51):

$$OX=mx \qquad (x=\cdots,-1,\ 0,\ 1,\cdots),$$
$$OY=my \qquad (y=\cdots,-1,\ 0,\ 1,\cdots).$$

ამ სკალებით კვადრატული განტოლება შემდეგნაირად ამოიხსნება. Y ღერძზე მოვძებნოთ q, ხოლო X—ღერძზე P. P წერტილში მოვათავსოთ ფარგლის ერთი ფეხი—ნემსა, ხოლო მეორე ფეხი—q წერტილში. ასე გაშლილი ფარგლით შემოვწეროთ წრეწირი p ცენტრით. X ღერძზე გადაკვეთაში მივიღებთ x_1 და x_2 წერტილებს, რომლებიც მოგვცემს კვადრატული განტოლების x_1 და x_2 ამონახსენებს. მიღებული ნომოგრამით ამოიხსნება ისეთი კვადრატული განტოლება, რომლის თავისუფალი წევრი უარყოფითია. თუ განტოლებაში თავისუფალი წევრი უარყოფითი არ არის, დაგვჭირდება განტოლების სათანადოდ გარდაქმნა.

მაგალითად,

$$x^2+9x+7=0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x=z-3,$$

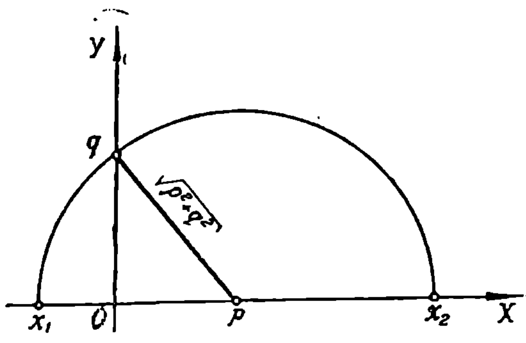
მაშინ მოცემული განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$z^2+3z-11=0.$$

მიღებული განტოლებისათვის

$$p=-\frac{3}{2},$$

$$q=\sqrt{11}=3{,}32.$$



ნახ. 51.

უკანასკნელი განტოლების ამონახსენიდან ადვილად ვიპოვით მოცემული განტოლების ამონახსენს.

§ 62. წრფეზე მდებარე ბდეებიანი ნომოგრამა

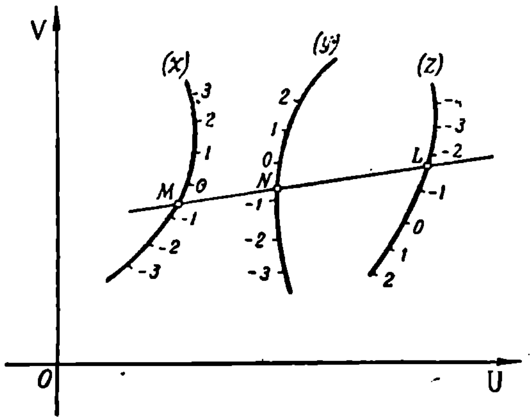
უფრო დაწვრილებით გავეცნოთ ერთ წრფეზე მდებარე ნიშნაკებიან ნომოგრამებს.

ვთქვათ, uv მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში პარამეტრული სახით მოცემულია წირი (ნახ. 52)

$$u=f_1(x), \quad v=\varphi_1(x). \tag{30}$$

ამ წირზე x-ის მნიშვნელობათა მიხედვით გავაკეთოთ ჭდეები:

$$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots$$



ნახ. 52.

ამგვარად მიღებულ (30) წირს დავარქვათ x—სკალა, ახევე ავაგოთ y და z სკალები:

$$u=f_2(y), \quad v=\varphi_2(y); \tag{31}$$

$$u=f_3(z), \quad v=\varphi_3(z). \tag{32}$$

x, y, z—წირებზე სათანადოდ ავიღოთ ნებისმიერი M, N, L წერტილები. ამ წერტილთა ერთ წრფეზე მდებარეობის პირობაა[1]

$$\begin{vmatrix} u_1, & v_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & 1 \\ u_3, & v_3, & 1 \end{vmatrix}=0;$$

ან რაც იგივეა:

$$\begin{vmatrix} f_1(x), & \varphi_1(x), & 1 \\ f_2(y), & \varphi_2(y), & 1 \\ f_3(z), & \varphi_3(z), & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{33}$$

ამგვარად, 52-ე ნახაზზე აგებულია ნომოგრამა, რომელიც (33) განტოლებას აკმაყოფილებს. ამ ნომოგრამით შეგვიძლია ვიპოვოთ x, y, z—

[1] აკად. ნ. მუსხელიშვილი, ანალიზური გეომეტრია, სახელგამი, თბილისი, 1950.

მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთი, როდესაც ორი მნიშვნელობა მოცემულია.

მაშასადამე, თუ სამი ცვლადის ფუნქცია წარმოდგება (33) სახით, მაშინ ამ ფუნქციისათვის შეიძლება ერთ წრფეზე მდებარე ნიშნაკებიანი ნომოგრამა აიგოს. ადვილი შესამჩნევია, ყოველი სამი ცვლადის ფუნქცია

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

არ შეიძლება (33)-სახით ჩაიწეროს.

(33) ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{f_1(x)-f_3(z)}{\varphi_1(x)-\varphi_3(z)}=\frac{f_2(y)-f_3(z)}{\varphi_2(y)-f_3(z)}. \tag{34}$$

45-ე ნახაზზე გვქონდა ნომოგრამა

$$z=\frac{x+y}{2}.$$

ადვილად წარმოვიდგენთ, რომ, თუ v პარალელურია მოცემული წრფეებისა და ემთხვევა, მაგალითად, x წრფეს, ხოლო u ემთხვევა O_1O_3 წრფეს, მაშინ x წრფის განტოლება იქნება: (შეგვიძლია მივიღოთ $O_1O_3= =a$),

$$v=x,\quad u=0,$$

ხოლო y და z წრფეების განტოლებანი იქნება:

$$v=y,\quad u=a;$$

$$v=z,\quad u=\frac{a}{2}.$$

ამ ტოლობათა საფუძველზე (34) მოგვცემს:

$$\frac{x-z}{0-\dfrac{a}{2}}=\frac{y-z}{a-\dfrac{a}{2}},$$

საიდანაც

$$x-z=-(y-z).$$

აქედან კი გვექნება:

$$z=\frac{x+y}{2}.$$

შევადგინოთ კვადრატული განტოლების ნომოგრამა:

$$x^2+px+q=0. \tag{35}$$

ეს განტოლება მიიყვანება (33) სახეზე, თუ

$$\begin{aligned} &u=0, \quad v=p; \\ &u=1, \quad v=q; \\ &v=-\frac{x^2}{1+x}, \quad u=-\frac{1}{1+x}. \end{aligned} \tag{36}$$

მართლაც, უშუალო ჩასმა (33) განტოლებაში, მოგვცემს

$$\begin{vmatrix} p, & 0, & 1 \\ q, & 1, & 1 \\ -\frac{x^2}{1+x}, & \frac{1}{1+x}, & 1 \end{vmatrix}=0,$$

საიდანაც გაშლით მივიღებთ:

$$p+\frac{q}{1+x}+\frac{x^2}{1+x}-\frac{p}{1+x}=0.$$

ამ გამოსახულების გამარტივებით გვექნება კვადრატული განტოლება (35).

მართკუთხა კოორდინატთა uv სისტემაში ავაგოთ (36) წირები:

$$\begin{aligned} &u=0, \quad v=10p \quad (p=-10, \ -9, \cdots, \ 10); \\ &u=100, \quad v=10q \quad (q=-10, \ -9, \cdots, \ 10); \\ &u=-\frac{100}{1+x}, \quad v=-\frac{10x^2}{1+x} \quad (x=0, \ 1, \cdots, \ 10, \ 11). \end{aligned}$$

ამგვარად აგებულ ნომოგრამას დასჭირდება მილიმეტრულა 200×100მ^2— ფართობისა. აქ 10, 100 სათანადო მოდულებია v და u ღერძებზე. v და u ღერძებზე რომ ერთი და იგივე მოდული აგველო, მაშინ დაგვჭირდებოდა მილიმეტრულა 200×10 მმ^2. ასეთი ზომის ნახაზი მეტად ვიწრო იქნებოდა და ათვლისათვის მეტად მოუხერხებელი. მთლიანად (35) განტოლების ნომოგრამა ნაჩვენებია 53-ე ნახაზზე.

თუ p და q-ს მნიშვნელობანი გამოდის (—10, 10)-ის გარეთ, მაშინ დაგვჭირდება მოცემული განტოლების სათანადო გარდაქმნა.

მაგალითად, განტოლებისათვის:

$$x^2-90x+80=0$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x=10X,$$

მაშინ მოცემული განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$100\,X^2-900X+80=0.$$

საიდანაც გვექნება

$$x^2-9X+0{,}8=0.$$

ასეთი განტოლება კი 53-ე ნახაზით ამოიხსნება.

თუ განტოლებას უარყოფითი ამონახსენი აქვს, მაშინ დაგვჭირდება ასეთი გარდაქმნა:

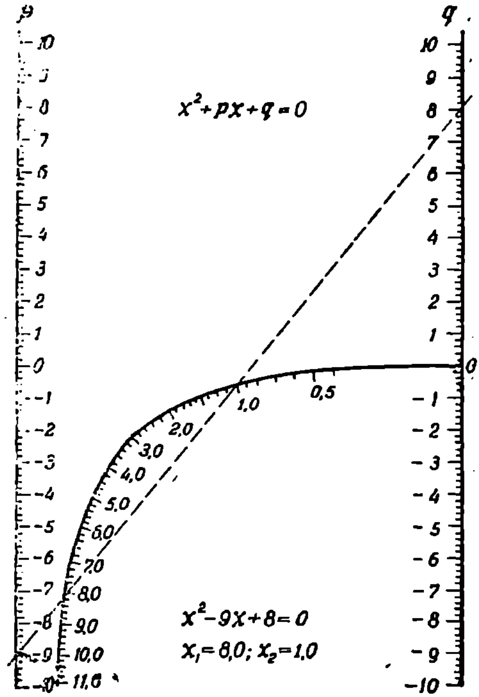
$$x = -X.$$

ამით განტოლება (35) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$X^2 - pX + q = 0.$$

ამ განტოლებას კი დადებითი ამონახსენი ექნება, რომელიც 53-ე ნახაზით მოინახება.

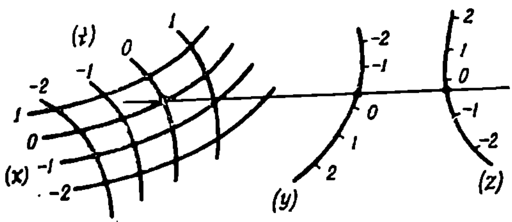
ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ, თუ (30), (31), (32) წირები ორ-ორი პარამეტრის ფუნქციებია, მაშინ (33) ან, რაც იგივეა, (34) განტოლება ექვს ცვლადზე იქნება დამოკიდებული. ამ შემთხვევაში ნაცვლად თითო წირისა გვექნება წირთა ბადეები პარამეტრთა მნიშვნელობებისათვის. ასეთ ნომოგრამას ეწოდება *ერთ წრფეზე მდებარე ნიშნაკებიანი ნომოგრამები ორფაველით.*



ნახ. 53.

მაგალითად, ვთქვათ, (30) წირის ნაცვლად გვაქვს

$$u = f_1(x,\ t),\quad v = \varphi(x,\ t);$$



ნახ. 54.

მაშინ (33) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{vmatrix} f_1(x,\ t), & \varphi_1(x,\ t), & 1 \\ f_2(y), & \varphi_2(y), & 1 \\ f_3(z), & \varphi_3(z), & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

სათანადო ნომოგრამა წარმოდგენილია 54-ე ნახაზზე.

საზოგადოდ, ყოველ ნომოგრამაზე არსებობს გ ა ს ა ღ ე ბ ი, რომელიც უთითებს იმ ხერხზე, რომლითაც მოცემული ნომოგრამით უნდა ვისარგებლოთ.

თ ა ვ ი XI

განტოლებათა ამოხსნის რიცხვითი და გრაფიკული მეთოდები

§ 63. განტოლებათა ამოხსნა. ამონახსენთა განცალება

იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლების ამონახსენის ფორმულები არ არსებობს, ანდა თუ არსებობს, მაგრამ რთულია გამოთვლებისათვის, მიმართავენ განტოლებათა ამოხსნის მიახლოებით ხერხებს.

განტოლებათა მიახლოებით ამოხსნისათვის აუცილებელია ამონახსენის პირველი მიახლოების ცოდნა, რომლებიც შემდეგ უნდა დაზუსტდეს. ალგებრულ განტოლებათა ამონახსენის პირველი მიახლოების დადგენაში დაგვეხმარება ამონახსენთა მოდულების ზედა საზღვარი[1]

$$M=1+\frac{A}{|a_0|}, \tag{1}$$

სადაც a_0 არის ალგებრული განტოლების პირველი კოეფიციენტი,

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0, \tag{2}$$

ხოლო A დანარჩენი კოეფიციენტებიდან მოდულის მაქსიმუმი. მაგრამ M, ჩვეულებრივად, მეტად შორსაა ამონახსენიდან. ნამდვილკოეფიციენტებიან ალგებრული განტოლების დადებით ამონახსნთა ზუსტი საზღვარი N შემდეგნაირად გამოისახება:

$$N=1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \tag{3}$$

სადაც B უარყოფითი კოეფიციენტების აბსოლუტურ მნიშვნელობებიდან უდიდესია, k პირველი უარყოფითი კოეფიციენტის რიგი, $a_0>0$.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $x>1$ და $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ კოეფიციენტებს შევცვლით ნულებით, ხოლო $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$-ს B რიცხვით, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა მხოლოდ შემცირდება:

$$f(x)\geqslant a_0x^n-B(x^{n-k}+\cdots+x+1)=a_0x^n-B\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1}.$$

---

[1] ა. გ. კუროში, უმაღლესი ალგებრა, გამომცემლობა „ცოდნა", თბილისი, 1962.

თუ ბოლო შესაკრებს უკუვაგდებთ, უტოლობა გაძლიერდება:

$$f(x)>a_0x^n-\frac{Bx^{n-k+1}}{x-1}=\frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0x^{k-1}(x-1)-B]. \tag{4}$$

თუ

$$x\geqslant 1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}},$$

ე. ი.

$$a_0(x-1)^k-B\geqslant 0, \tag{5}$$

მაშინ (4) მოგვცემს, რომ $f(x)$-ის მნიშვნელობა მკაცრად დადებითია. ამგვარად (5) უტოლობის დამაკმაყოფილებელი x-ის მნიშვნელობა არ იქნება $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენი. მაშასადამე, ნამდვილკოეფიციენტებიანი (2) განტოლების ამონახსენის ზედა საზღვარია

$$N=1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}.$$

ახლა ვაჩვენებთ, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი (2) განტოლების დადებით ამონახსენთა ქვედა საზღვარი არის $\frac{1}{N_1}$, სადაც N_1 არის

$$\varphi(x)\equiv f\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

განტოლების დადებით ამონახსენთა ზედა საზღვარი. მართლაც, თუ $\varphi(x)=0$ განტოლების α ამონახსენის ზედა საზღვარია N_1,

$$\alpha<N_1,$$

მაშინ $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ განტოლების ამონახსენი იქნება $\frac{1}{\alpha}$, რომელიც დააკმაყოფილებს უტოლობას

$$\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{N_1}.$$

ასევე ვაჩვენებთ უარყოფით ამონახსენთა საზღვრებს

$$-N_3<x<-\frac{1}{N_2},$$

სადაც N_3 არის

$$\varphi(x)\equiv f(-x)=0$$

განტოლების დადებით ამონახსენთა ზედა საზღვარი, ხოლო N_2

$$\varphi(x)\equiv f\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

განტოლების დადებით ამონახსენთა ზედა საზღვარი.

ჩვენ დავუშვებთ, რომ $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნები განცალებულია, ე. ი. მოძებნილია ისეთი შუალედი, სადაც განტოლებას ერთზე მეტი ფესვი არა აქვს. საზოგადოდ $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნთა განცალებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი თ ე ო რ ე მ ა:

თ უ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა უ წ ყ ვ ე ტ ი ა დ ა ხ უ რ უ ლ $[a, b]$ შ უ ა ლ ე დ შ ი დ ა შ უ ა ლ ე დ ი ს კ ი დ უ რ წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ზ ე ს ა წ ი ნ ა ა ღ მ დ ე გ ო ნ ი შ ნ ი ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს ი ღ ე ბ ს, მ ა შ ი ნ a და b წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ს შ ო რ ი ს ი ა რ ს ე ბ ე ბ ს ე რ თ ი მ ა ი ნ ც ი ს ე თ ი C წ ე რ ტ ი ლ ი, რ ო მ ე ლ ზ ე დ ა ც $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.

ამ თეორემის (დამტკიცება შეიძლება მოვნახოთ მათემატიკური ანალიზის ნებისმიერ სახელმძღვანელოში) მართებულობა ცხადია, რადგანაც $y=f(x)$ წირის წერტილები X ღერძის ორივე მხარეზე მდებარეობს, მაშინ წირმა X ღერძი ერთხელ მაინც უნდა გადაკვეთოს a-ს და b-ს შორის.

გადაკვეთის წერტილი C მოგვცემს საძიებელ ამონახსნს.

ამონახსნთა განცალება უნდა დავიწყოთ $f(x)$ ფუნქციის არსებობის (a, b) არის ბოლო წერტილებზე ფუნქციის ნიშნის განსაზღვრით. შემდეგ შუალედი გავყოთ შუაზე c წერტილით და გამოვარკვიოთ $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი c წერტილზე. თუ აღმოჩნდა a და c წერტილებზე $f(x)$ ფუნქციას სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ (a, c) შუალედში $f(x)=0$ განტოლების ერთი ამონახსენი მაინც არსებობს. შემდეგ (a, c) ინტერვალს კიდევ შუაზე გავყოფთ d წერტილით და აქაც შევამოწმებთ $f(x)$ ფუნქციის ნიშანს, თუ $f(a)$ და $f(d)$ სხვადასხვა ნიშნისაა, მაშინ აქ განტოლებას ერთი ამონახსენი მაინც აქვს და ა. შ. ასევე ავიღებთ მეორე ქვეშუალედს (c,b) და ჩავატარებთ იგივე მოქმედებას.

ცხადია, რაც უფრო გავაგრძელებთ შუალედის დაყოფას, მით უფრო ამონახსენის უკეთესი და უკეთესი მიახლოებითი მნიშვნელობა მიიღება. (a, b) ინტერვალის განსაზღვრა შეიძლება სინჯვით. ავიღებთ რაღაც a და b რიცხვებს. განვსაზღვრავთ $f(a)$ და $f(b)$-ს ნიშნებს. თუ a და b სასურველ შედეგს არ იძლევა, ავიღებთ სხვა რიცხვებს.

მაგალითად, განვაცალოთ

$$f(x)\equiv x^3-6x+2=0 \tag{6}$$

განტოლების ამონახსნები. (6) განტოლების ამონახსნთა რიცხვი სამზე მეტი არ არის. სათანადო ჩასმები მოგვცემს ც ხ რ ი ლ ს:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

მაშასადამე, (6) განტოლებას აქვს სამი ნამდვილი ამონახსენი, რომელიც მოთავსებულია შუალედებში: (—3, —1), (0, 1), (1, 3).

ამონახსენთა განცალების უფრო სრულყოფილი მეთოდია შტურმის მეთოდი, მიუხედავად იმისა, რომ იგი მეტად შრომატევადია.

რადგანაც $f(x)=0$ განტოლების ჯერადი ამონახსენები არის $f(x)=0$ და $f'(x)=0$ განტოლებათა საერთო ამონახსენები, ამიტომ შეგვიძლია $f(x)=0$ ისე გარდავქმნათ, რომ მიღებულ განტოლებას ჰქონდეს მხოლოდ მარტივი ამონახსენები.

რაიმე (a, b) ინტერვალში ამონახსენთა რაოდენობის განსაზღვრა შტურმის მეთოდით შემდეგში მდგომარეობს: შევადგინოთ მიმდევრობა

$$f(x),\ f'(x),\ R_1(x),\ R_2(x), \cdots,\ R_m(x), \tag{7}$$

სადაც $R_1(x)$ არის $f(x)$-ის $f'(x)$-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი შებრუნებული ნიშნით, $R_2(x)$ არის $f'(x)$-ის $R_1(x)$-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი შებრუნებული ნიშნით და ა. შ. $R_m(x)=R_m$ მუდმივია. გამოვთვალოთ მიმდევრობათა მნიშვნელობები:

$$f(a),\quad f'(a),\quad R_1(a),\quad R_2(a), \cdots,\quad R_m, \tag{8}$$

$$f(b),\quad f'(b),\quad R_1(b),\quad R_2(b), \cdots,\quad R_m. \tag{9}$$

დავთვალოთ ნიშანთა შეცვლის რაოდენობა (8) და (9) მიმდევრობაში — $S(a)$, $S(b)$. როგორც ალგებრიდანაა ცნობილი, თუ $a<b$, არც a და არც b არ არის $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენი, მაშინ $S(a)\geqslant S(b)$ და სხვაობა $W=S(a)-S(b)$ იძლევა (a, b) შუალედში ნამდვილ ამონახსენთა რიცხვს.

ცხადია, ნიშანთა ცვლა W არ შეიცვლება თუ მიმდევრობათა წევრებს დადებით მამრავლებზე გავამრავლებთ. ამ თვისებით სარგებლობა დიდად ამარტივებს გამოთვლებს.

განვიხილოთ მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$f(x)\equiv x^3+3x^2-1=0. \tag{10}$$

გვექნება

$$\frac{1}{3}f'(a)=x^2+2x,\quad R_1(x)=2x+1,\quad R_2=3.$$

გამოვთვალოთ (10) განტოლების ფესვთა საზღვრები. მივიღებთ შუალედს (—4, 1). შევადგინოთ ნიშანთა ც ხ რ ი ლ ი შემდეგი მიმდევრობისათვის: $f(x)$, $f'(x)$, $R_1(x)$, $R_2(x)$, $S(x)$. გვექნება:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$S(x)$
—4	—	+	—	+	3
1	+	+	+	+	0

ამგვარად, $(-4, 1)$ ინტერვალში სამი ნამდვილი ამონახსენია, რადგანაც $W=3$.

ცხადია, თუ $(-4, 1)$ ინტერვალს გავანაწილებთ: $(-4, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(0, 1)$ ინტერვალებად, აღმოჩნდება, რომ (10) განტოლების თითოეული ამონახსენი მოთავსდება შუალედებში: $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

განვიხილოთ მეთოდი, რომელსაც შეიძლება ც დ ი ს მ ე თ ო დ ი დაერქვათ. ამ მეთოდის შესახებ უკვე გვქონდა მსჯელობა. ვთქვათ, განვსაზღვრეთ შუალედი (a_0, b_0) რომლის შიგნით $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენია მოთავსებული. ვთქვათ, $f(a_0)>0$, $f(b_0)<0$. ავიღოთ (a_0, b_0) შუალედის შუა წერტილი და გავიგოთ $f(x)$-ის ნიშანი ამ წერტილზე, თუ $f(x)$ ამ წერტილზე უარყოფითია, მაშინ (a_0, b_0) შუალედის მარცხენა ნახევარი ავიღოთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში—მარჯვენა მხარე. ეს შუალედი (a_1, b_1)-ით აღვნიშნოთ. (a_1, b_1) შუალედი კვლავ გავყოთ შუაზე. გამოვარკვიოთ $f(x)$-ის მნიშვნელობის ნიშანი ამ შუა წერტილზე. თუ ეს ნიშანი $f(a_1)$-ის ნიშნის საწინააღმდეგოა, მაშინ ავიღოთ (a_1, b_1) შუალედის მარცხენა ნახევარი, წინააღმდეგ შემთხვევაში—მარჯვენა ნახევარი და ა. შ. მივიღებთ მიმდევრობას:

$$(a_0, b_0), \quad (a_1, b_1) \quad (a_2, b_2), \cdots, \quad (a_n, b_n), \cdots$$

თუ $|a_n-b_n|$ ნაკლებია წინასწარ აღებულ დადებით ε-ზე, მაშინ a_n ან b_n შეგვიძლია ავიღოთ $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენად ε-სიზუსტით.

აღწერილი მეთოდი გამოსადეგია, როგორც ალგებრული, ასევე ტრანსცენდენტული განტოლების ამოსახსნელად.

მიახლოებითი გამოთვლები საკმარისადაა დამუშავებული. ამონახსენის ამა თუ იმ მეთოდის ხელსაყრელობა დამოკიდებულია განტოლების სახეზე და გამომთვლელის საზრიანობაზე. ქვემოთ განხილული იქნება ზოგიერთი რიცხვითი და გრაფიკული მეთოდები.

§ 64. წრფივი ინტერპოლირების მეთოდი

წრფივი ინტერპოლირების მეთოდს, ქორდათა მეთოდს, ან ყალბი მდებარეობის (regula falsi) მეთოდსაც ეძახიან. ეს მეთოდი უძველესი მეთოდია.

ვთქვათ,

$$f(x)=0 \tag{11}$$

განტოლების ამონახსენი მოთავსებულია (a_1, b_1) შუალედში,

$$a_1<x<b_1.$$

(11) განტოლების ამონახსენის პირველ მიახლოებად მივიღოთ a_1. შემდეგი მიახლოებითის მისაღებად, წირი შევცვალოთ ქორდით (ნახ. 55). ქორდის განტოლება იქნება:

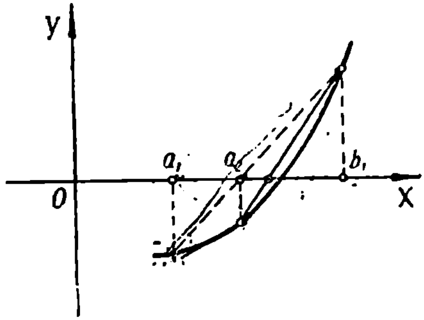
$$\frac{y-f(a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}=\frac{x-a_1}{b_1-a_1}. \qquad (12)$$

ქორდის X ღერძთან გადაკვეთის წერტილის მისაღებად (12) განტოლებაში ჩავსვათ $y=0$. მივიღებთ

$$\frac{-f(a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}=\frac{x-a_1}{b_1-a_1},$$

საიდანაც

$$x=a_1-\frac{f(a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}(b_1-a_1).$$



ნახ. 55.

x-ის ეს მნიშვნელობა მივიღოთ ამონახსენის მეორე მიახლოებით მნიშვნელობად—a_2,

$$a_2=a_1+\frac{-f(a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}(b_1-a_1).$$

თუ a_2-a_1-ს ავღნიშნავთ h_2-ით, მაშინ

$$a_2=a_1+h_2.$$

ცხადია,

$$h_2=-\frac{f(a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}(b_1-a_1).$$

გამოვთვალოთ $f(a_2)$. თუ $f(a_2)$ და $f(b_1)$-ს სხვადასხვა ნიშანი აქვს, ავიღებთ (a_2, b_1) შუალედს და გავიმეორებთ წინა პროცესს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღებთ (a_1, a_2) შუალედს. ვთქვათ, $f(a_2)$-ს და $f(b_1)$-ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, მაშინ a_2-ის ანალოგიურად განვსაზღვრავთ a_3-ს:

$$a_3=a_2+h_3,$$

სადაც

$$h_3=\frac{-f(a_2)}{f(b_2)-f(a_2)}(b_2-a_2),$$

$$b_2=b_1.$$

ადვილი შესამჩნევია, მიმდევრობით მივიღებთ

$$a_{i+1}=a_i+h_{i+1} \qquad (i=1, 2,\dots), \qquad (13)$$

სადაც

$$h_{i+1}=\frac{-f(a_i)}{f(b_i)-f(a_i)}(b_i-a_i). \qquad (14)$$

მაგალითად, ვიპოვოთ ამონახსენი შემდეგი განტოლებისა:

$$f(x) \equiv x-1-3\sin x=0. \tag{15}$$

ადვილი შესამოწმებელია $f(1)=-2{,}5245$; $f(2)=-1{,}7258$; $f(3)=1{,}5815$. ამგვარად, აღებული (15) განტოლების ამონახსენი მოთავსებულია ორსა და სამს შორის.

გამოთვლები შევასრულოთ (13) და (14) ფორმულებით.

$$a_1=2, \quad h_1=1, \quad h_2=\frac{-f(2)}{f(3)-f(2)}(3-2)=\frac{1{,}7258\cdot 1}{1{,}5815+1{,}7258}=$$

$$=\frac{1{,}7258}{3{,}3073}=0{,}5233.$$

ავიღოთ $a_2=2+0{,}5233=2{,}5233$ და გამოვთვალოთ $f(a_2)$. $f(2{,}5233)=$ $=-0{,}2197$.

შემდეგ შუალედად ავიღოთ (2,5233; 3).

$$h_3=\frac{0{,}2197}{1{,}5815+0{,}2197}(3-2{,}5233)=0{,}0588.$$

$$a_3=a_2+h_3=2{,}5233+0{,}0588=2{,}5821.$$

$$f(a_3)=2{,}5821-1-3\cdot\sin 2{,}5821=-0{,}0115.$$

შემდეგ შუალედად ავიღოთ (2,5821; 3).

$$h_4=\frac{-f(a_3)}{f(b)-f(a_3)}(b-a_3), \quad h_4=\frac{0{,}0115}{1{,}5815+0{,}0115}\cdot(3-2{,}5821)=0{,}0031.$$

უკანასკნელის შედეგად

$$a_4=a_3+h_4=2{,}5852.$$

$$f(a_4)=2{,}5852-1-3\cdot\sin 2{,}5852=0{,}0171.$$

ამგვარად, აღებული განტოლების ამონახსენი იმყოფება შუალედში

$$2{,}5821<x<2{,}5852.$$

პროცესის გაგრძელება უფრო ზუსტად მოგვცემს ამონახსენს. ჩვენ მიერ ჩატარებული გამოთვლებით $x=2{,}584$, ეს მნიშვნელობა ზუსტია სამი ციფრით, შეცდომას შეიცავს მეოთხე ციფრი.

ცხადია, თუ წრფივი ინტერპოლირების მეთოდთან ერთად გამოვიყენებთ ცდის მეთოდს, მაშინ განტოლების მიახლოებით ამონახსენს უფრო სწრაფად მივიღებთ.

§ 06. მხებთა მეთოდი

მხებთა მეთოდი პირველად განხილული იყო ნიუტონის მიერ. ამ მეთოდს ნიუტონის მეთოდი ეწოდება.

ვთქვათ, (a_1, b_1) ინტერვალში იმყოფება $f(x)=0$ განტოლების ერთი

მარტივი ამონახსენი, ამიტომ $f'(x) \neq 0$. ამ ამონახსენზე დავუშვათ, რომ $f''(x) \neq 0$.

გავატაროთ $y=f(x)$ წირის მხები $P_1(a_1, f(a_1))$ წერტილზე (ნახ. 56):

$$y-f(a_1)=f'(a_1)(x-a_1).$$

ამ წრფის X ღერძთან გადაკვეთა მოგვცემს:

$$x=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

ეს მნიშვნელობა მივიღოთ საძიებელი ამონახსენის მეორე მიახლოებად:

$$a_2=a_1+h_1,$$

სადაც

$$h_1=-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

თუ მხებს $P_2(a_2, f(a_2))$ წერტილზე გავატარებთ და ვიპოვით X ღერძთან გადაკვეთის წერტილს, მივიღებთ საძიებელი ამონახსენის მესამე მიახლოებას:

$$a_3=a_2+h_2,$$

სადაც

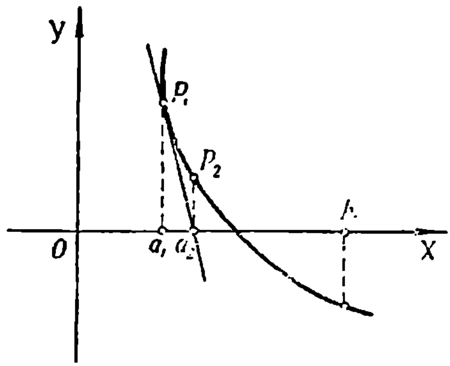
$$h_2=-\frac{f(a_2)}{f'(a_2)}.$$

ცხადია, ამ პროცესის გაგრძელებით გვექნება

$$a_{i+1}=a_i+h_i \quad (i=1, 2,\cdots), \quad (16)$$

სადაც

$$h_i=-\frac{f(a_i)}{f'(a_i)} \quad (i=1, 2,\cdots). \quad (17)$$



ნახ. 56.

გამოვარკვიოთ პროცესის კრებადობის ნიშანი.

ვთქვათ, h_i ისეთი შესწორებაა, რომ $a_i+h_i=\alpha$ იძლევა $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენს. გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა:

$$f(\alpha)=f(a_i+h_i)=f(a_i)+h_i f'(a_i)+\frac{h_i^2}{2}f''(a_i+\theta h_i)=0, \quad 0<\theta<1.$$

აქედან

$$h_i+\frac{f(a_i)}{f'(a_i)}=-\frac{h_i^2}{2}\frac{f''(a_i+\theta h_i)}{f'(a_i)}. \quad (18)$$

მხედველობაში მივიღოთ $h_i=\alpha-a_i$, მაშინ (18) მოგვცემს:

$$\alpha-\left(a_i-\frac{f(a_i)}{f'(a_i)}\right)=-\frac{h_i^2}{2}\frac{f''(a_i+\theta h_i)}{f'(a_i)}.$$

უკანასკნელი ტოლობა (16) ტოლობის საფუძველზე მოგვცემს:

$$\alpha - a_{i+1} = -\frac{h_i^2}{2}\frac{f''(a_i+\theta h_i)}{f'(a_i)},$$

ანუ

$$h_{i+1} = -\frac{h_i^2}{2}\frac{f''(a_i+\theta h_i)}{f(a_i)}. \qquad (19)$$

ზემოთ დავუშვით $f'(a)\neq 0$, $f''(a)\neq 0$; ახლა ვთქვათ, რომ საძიებელი α ამონახსენის მახლობლობაში

$$|f'(x)|\geqslant m \quad |f''(x)|\leqslant M,$$

მაშინ (19) მოგვცემს:

$$|h_{i+1}|\leqslant \frac{h_i^2}{2}\frac{M}{m}.$$

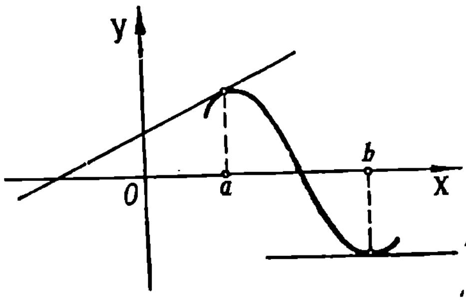
თუ ამ უტოლობაში ჩავსვამთ მიმდევრობით $i=1$, 2 და ა. შ., მივიღებთ

$$|h_{i+1}|<\left[(b-a)\frac{M}{2m}\right]^{2^{(i+1)}}\frac{2m}{M}, \qquad (20)$$

სადაც

$$h_1<b-a.$$

როგორც (20) უტოლობა გვიჩვენებს, პროცესის კრებადობისათვის უნდა შესრულდეს პირობა:



ნახ. 57.

$$C=(b-a)\frac{M}{2m}<1.$$

(20) უტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$|h_{i+1}|<C^{2^{i+1}}\frac{2m}{M}.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ მიმდევრობა h_n მით უფრო სწრაფად იკრიბება, რაც უფრო მცირეა M, რაც უფრო დიდია m და, ამასთანავე, რაც უფრო მოკლეა შუალედი (a, b).

$$|f'(x)|<|f''(x)|.$$

56-ე ნახაზიდან ცხადია, რომ ისე უნდა შევამციროთ შუალედი და შუალედის იმ ბოლო წერტილზე უნდა გავატაროთ მხები, რომლის ორდინატაც მცირეა; ამ შემთხვევაში მხების X ღერძთან გადაკვეთის წერტილი უფრო ახლოს იქნება წირის X ღერძთან გადაკვეთის წერტილთან.

თუ $f'(x)$ ან $f''(x)$ ხდება ნული აღებული შუალედის რაიმე წერტილზე, მაშინ $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენს შეიძლება ვერ მივუახლოვდეთ, როგორც ეს 57-ე ნახაზზეა ნაჩვენები.

განვიხილოთ მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$x-\cos x=0 \tag{21}$$

ადვილი წარმოსადგენია, ამ განტოლების ამონახსენი მოთავსებული იქნება $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში. შევამოწმოთ $f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$.

$$f'(x)=1+\sin x\neq 0,$$
$$f''(x)=\cos x\neq 0$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში.

მივიღოთ $a_1=0$, მაშინ

$$h_1=-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}; \qquad h_1=-\frac{0-\cos 0}{1+\sin 0}=1.$$

ამიტომ

$$a_2=a_1+h_1, \qquad a_2=1.$$

გამოვთვალოთ: h_2

$$h_2=-\frac{f(1)}{f'(1)}=-\frac{1-\cos 1}{1+\sin 1}=-\frac{1-0,5415}{1+0,8414}=$$
$$=-\frac{0,4585}{1,8414}=-0,2489;$$
$$a_3=a_2+h_2; \qquad a_2=1-0,2489=0,7511.$$
$$h_3=-\frac{f(0,7511)}{f'(0,7511)}=-\frac{0,7511-\cos 0,7511}{1+\sin 0,7511}=$$
$$=-\frac{0,7511-0,7307}{1+0,6828}=-\frac{0,0204}{1,06828}=-0,01909.$$
$$a_4=a_3+h_3, \qquad a_3=0,7511-0,0191=0,7320.$$
$$h_4=-\frac{f(0,7320)}{f'(0,7320)}=-\frac{0,7320-\cos 0,7320}{1+\sin 0,7320}=$$
$$=-\frac{0,7320-0,7438}{1+0,6683}=-\frac{-0,0118}{1,6683}=0,00707.$$
$$a_5=0,7320+0,0071=0,7391$$
$$h_5=-\frac{f(0,7391)}{f'(0,7391)}=-\frac{0,7391-\cos 0,7391}{1+\sin 0,6736}=$$
$$=-\frac{0,0001}{1,6736}=-0,00005\ldots$$

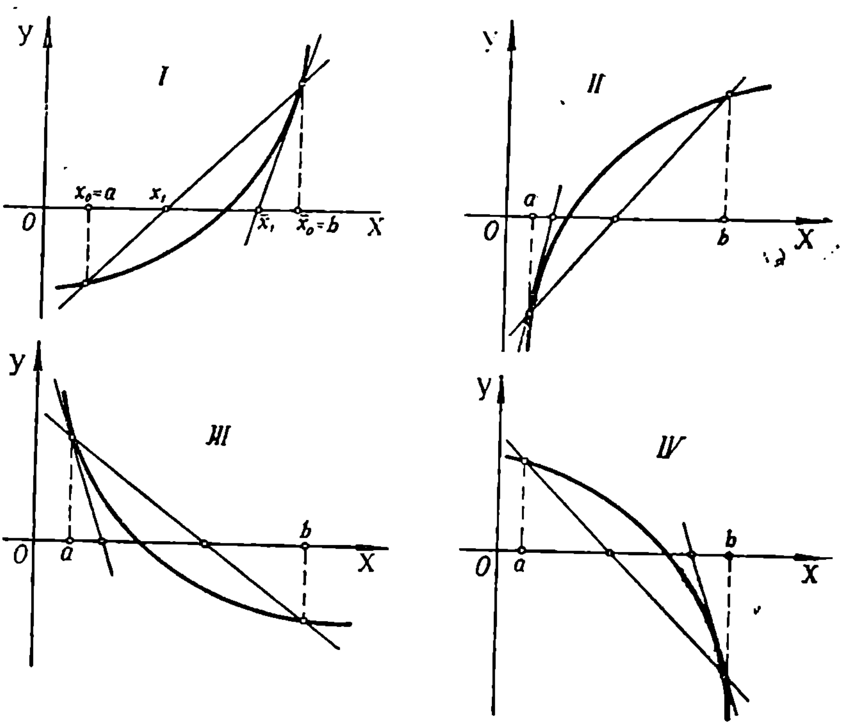
ამგვარად, (21) განტოლების ამონახსენია 0,7391. ეს ამონახსენი ზუსტია უკანასკნელ ციფრამდე.

შევნიშნოთ, რომ მეტად მიზანშეწონილია ვაწარმოოთ გამოთვლები ქორდათა და მხებთა მეთოდით ერთდროულად. ამ მეთოდს შ ე ე რ თ ე ბ უ ლ ი (კომბინირებული) მ ე თ ო დ ი ეწოდება. შეერთებული მეთოდით საშუალება გვაქვს შევადგინოთ ამონახსენის მიახლოებითი მნიშვნელობათა ორი მიმდევრობა. ერთი $\{x_n\}$ ნაკლებობით და მეორე $\{\bar{x}_n\}$ მეტობით.

ვთქვათ, (a, b) ინტერვალში მოთავსებულია $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენი. (a, b) ინტერვალი შეგვიძლია იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ ადგილი ექნეს ერთ-ერთ შემთხვევას ოთხი შესაძლებლობიდან (ნახ. 58).

$$f'(x)>0, \quad f''(x)>0; \qquad f'(x)>0, \quad f''(x)<0;$$

$$f'(x)<0, \quad f''(x)>0; \qquad f'(x)<0, \quad f''(x)<0.$$



ნახ. 58.

შევნიშნოთ, რომ ყველა ეს შემთხვევა შეიძლება მივიყვანოთ პირველ შემთხვევამდე, თუ $f(x)=0$ განტოლებას შევცვლით მისი ტოლფასი განტოლებებით: $-f(x)=0$, $\pm f(-x)=0$.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა:

$$f'(x)>0, \quad f''(x)>0.$$

შუალედის მარცხენა მხარიდან გამოვიყენოთ ქორდათა მეთოდი და განვსაზღვროთ x_1,

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a),$$

რაც სიმეტრიულობისათვის ასე ჩავწეროთ:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f(\bar{x}_0)-f(x_0)}(\bar{x}_0-x_0),$$

მარჯვენა მხარიდან გამოვიყენოთ მხებთა მეთოდი და განვსაზღვროთ $\bar{x}_1$

$$\bar{x}_1=\bar{x}_0-\frac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)}.$$

ცხადია, საძიებელი x მოთავსებული იქნება შუალედში.

$$x_1<x<\bar{x}_1.$$

ახლა ავიღოთ შუალედი $(x_1, \bar{x}_1)$ და ისევ მარცხნიდან გამოვიყენოთ ქორდათა მეთოდი, ხოლო მარჯვნიდან მხებთა მეთოდი. მივიღებთ:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(\bar{x}_1)-f(x_1)}(\bar{x}_1-x_1), \quad \bar{x}_2=\bar{x}_1-\frac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)}.$$

აქაც ადვილი შესამჩნევია, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$x_2<x<\bar{x}_2.$$

ასეთი პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ

$$x_{n+1}<x<\bar{x}_{n+1},$$

სადაც

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}(\bar{x}_n-x_n),$$

$$\bar{x}_{n+1}=x_n-\frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

თუ ამონახსენის აბსოლუტური ცდომილება ε დაშვებულია წინასწარ, მაშინ გამოთვლით პროცესს შევაჩერებთ იქ, სადაც

$$\bar{x}_n-x_n<\varepsilon$$

და ამონახსენის მნიშვნელობად ავიღოთ საშუალო არითმეტიკული,

$$x=\frac{x_n+\bar{x}_n}{2}.$$

§ იც. იტერაციის მეთოდი

როდესაც $f(x)=0$ განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით:

$$x=\varphi(x), \tag{22}$$

მაშინ ნამდვილი ამონახსენი შეიძლება მოძებნილ იქნეს იტერაციით (გამეორებით). ეს პროცესი შემდეგში მდგომარეობს:

ვთქვათ, რაიმე გზით ვიპოვეთ ამონახსენის მიახლოებითი მნიშვნელობა x_0, მაშინ შემდეგი მნიშვნელობა განისაზღვრება $\varphi(x_0)$-ით;

$$x_1=\varphi(x_0). \tag{23}$$

ამ მიახლოებითი მნიშვნელობიდან მეორე მიახლოება განისაზღვრება $\varphi(x_1)$-ით,

$$x_2=\varphi(x_1)$$

და ა. შ.

$$x_n=\varphi(x_{n-1}). \tag{24}$$

გამოვარკვიოთ კრებადობის პირობა.

ამონახსენის ნამდვილი მნიშვნელობა x აკმაყოფილებს (22) ტოლობას, მაშინ (22) და (23) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$x-x_1=\varphi(x)-\varphi(x_0),$$

საიდანაც ლაგრანჟის ფორმულით მივიღებთ:

$$x-x_1=(x-x_0)\,\varphi'(\xi), \quad x_0<\xi_0<x.$$

(22) და (24) ტოლობებიდან მივიღეთ:

$$x-x_2=(x-x_1)\varphi'(\xi_1), \quad x_1<\xi_1<x$$

და ა. შ.

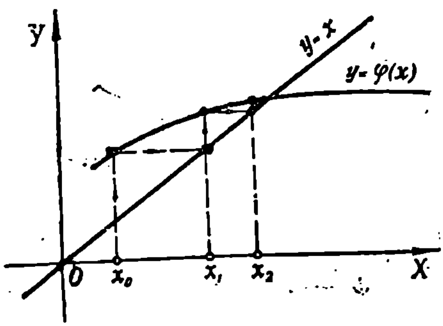
$$x-x_n=(x-x_{n-1})\varphi'(\xi_{n-1}), \quad x_{n-1}<\xi_{n-1}<x.$$

თუ მიღებულ ტოლობებს გადავამრავლებთ, მივიღებთ

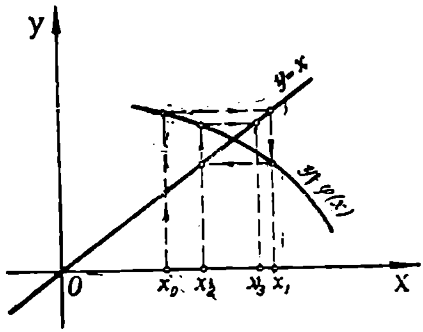
$$x-x_n=(x-x_0)\varphi'(\xi_0)\varphi'(\xi_1)\cdots\varphi'(\xi_{n-1}). \tag{25}$$

თუ $|\varphi'(x)|$-ის მაქსიმუმს აღვნიშნავთ M, მაშინ (25) მოგვცემს:

$$|x-x_n|\leqslant|x-x_0|M^n. \tag{26}$$



ნახ. 59.

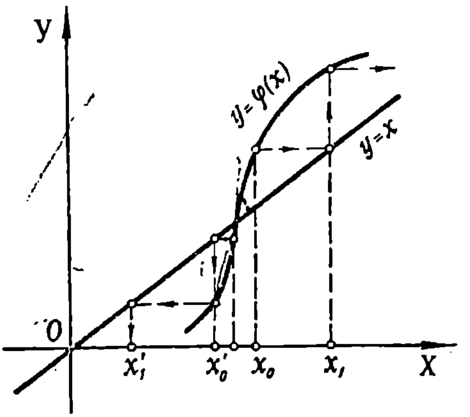


ნახ. 60

ამგვარად, თუ საძიებელი ამონახსენის მახლობლობაში $|\varphi'(x)| < 1$, მაშინ პროცესი კრებადია.

იტერაციის ხერხის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნაჩვენებია 59-ე და მე-60 ნახაზებზე.

პროცესი განშლადია, თუ $|\varphi'(x)| \geqslant 1$. ეს შემთხვევა ნაჩვენებია 61-ე ნახაზზე, სადაც ამონახსენის მიახლოებითი მნიშვნელობანი შორდებიან ამონახსენის ზუსტ მნიშვნელობას.



ნახ. 61.

განვიხილოთ მაგალითი: ამოვხსნათ განტოლება

$$x \lg x - 1,25 = 0.$$

უკანასკნელი ასე გადავწეროთ:

$$x = x(1 - \lg x) + 1,25. \qquad (27)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ მოცემული განტოლების ამონახსენი მოთავსებულია (2, 3) შუალედში. ამ შუალედში შევამოწმოთ კრებადობის პირობა:

$$\varphi(x) = x(1 - \lg x) + 1,25;$$

$$\varphi'(x) = 1 - \lg x - \lg e = 1 - \lg x - 0,4343 < 0,6 - \lg x.$$

პროცესის კრებადობისათვის საჭიროა:

$$|0,6 - \lg x| < 1.$$

ამ პირობას კი აკმაყოფილებს x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $0,6 < \lg x < 1,6$. ჩვენთვის საჭირო შუალედში (1, 3) ეს პირობა შესრულებულია.

(27) განტოლების ამონახსენის ნულოვან მიახლოებად მივიღოთ 1 და გამოთვლების (24) ფორმულით ჩატარება მოგვცემს:

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = 1(1 - \lg 1) + 1,25 = 2,25;$$

$$x_2 = 2,25(1 - \lg 2,25) + 1,25 = 2,25(1 - 0,3522) + 1,25 =$$
$$= 2,25 \cdot 0,6478 + 1,25 = 2,7076;$$

$$x_3 = 2,708(1 - \lg 2,708) + 1,25 = 2,708(1 - 0,4327) + 1,25 =$$
$$= 2,708 \cdot 0,5673 + 1,25 = 2,786;$$

$$x_4 = 2,786(1 - \lg 2,786) + 1,25 = 2,786(1 - 0,4449) + 1,25 =$$
$$= 2,786 \cdot 0,5551 + 1,25 = 2,797;$$

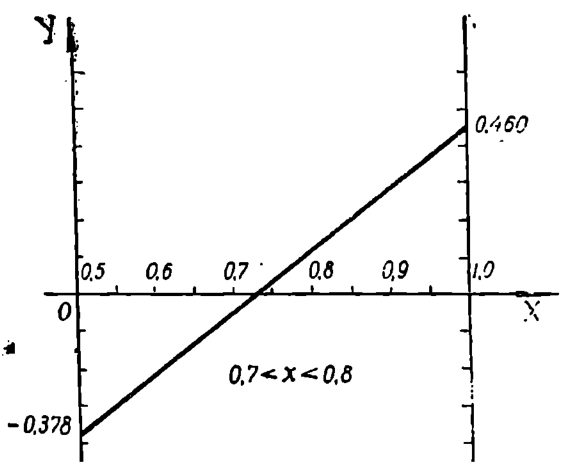
$$x_5=2,797(1-\lg 2797)+1,25=2,797(1-0,4467)+1,25=$$
$$=2,797\cdot 0,5533+1,25=2,798;$$
$$x_6=2,798(1-\lg 2,798)+1,25=2,798(1-0,4469)+1,25=$$
$$=2,798\cdot 0.5531+1,25=2,798;$$

ამგვარად, (27) განტოლების ამონახსენია 2,798 სიზუსტით უკანასკნელ ციფრამდე.

§ 67. განტოლებათა გრაფიკული ამოხსნა

1. არსებობს გრაფიკული მეთოდები, რომელთა საშუალებით შეიძლება მოინახოს განტოლებათა ამონახსნები ნებისმიერი სიზუსტით. მაგალითად, ასეთ მეთოდს ეკუთვნის მ ა ს შ ტ ა ბ ი ს გ ა მ ს ხ ვ ი ლ ე ბ ი ს მ ე თ ო დ ი. განვიხილოთ ეს მეთოდი.

ვთქვათ, $y=f(x)$ წირის X ღერძთან გადაკვეთის წერტილი მოვნახეთ 2 ნიშნადი ციფრით. ავაგოთ საძიებელი წერტილის მახლობლობაში $y=f(x)$ წირი უფრო დიდი მასშტაბით. მიღებულ ნახაზზე შეიძლება $f(x)=0$ განტოლების ამონახსენის მნიშვნელობა განისაზღვროს კიდევ ერთი დამატებითი ციფრით. შემდეგ კვლავ ავაგოთ ეს წირი მიღებული მნიშვნე-



ნახ. 62.

ლობის მახლობლობაში უფრო მსხვილი მასშტაბით. ამ წირით ამონახსენი შეგვიძლია მივიღოთ უფრო ზუსტად და ა. შ.

განვიხილოთ ეს ხერხი მაგალითზე

$$f(x)\equiv x-\cos x=0. \tag{28}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (28) განტოლების ამონახსენი მოთავსებულია 0,5-სა და 1-ს შორის. მართლაც,

$$f(0{,}5)=0{,}5-\cos 0{,}5=0{,}5-0{,}878=-0{,}378,$$

$$f(1)=1-\cos 1=1-0{,}540=0{,}460.$$

ავიღოთ შუალედი (0,5; 1). გავყოთ ეს შუალედი 5 ნაწილად: 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. ავაგოთ წერტილები (0,5; —0,378) და (1; 0,460). ამ წერტილთა შემაერთებელი წრფე X ღერძს გადაკვეთს 0,7 და 0,8-ს შორის (ნახ. 62).

ახლა ავიღოთ და გამოვთვალოთ $f(0{,}7)$ და $f(0{,}8)$.

$$f(0{,}7)=0{,}7-\cos 0{,}7=0{,}7-0{,}765=-0{,}065;$$

$$f(0{,}8)=0{,}8-\cos 0{,}8=0{,}8-0{,}697=0{,}103.$$

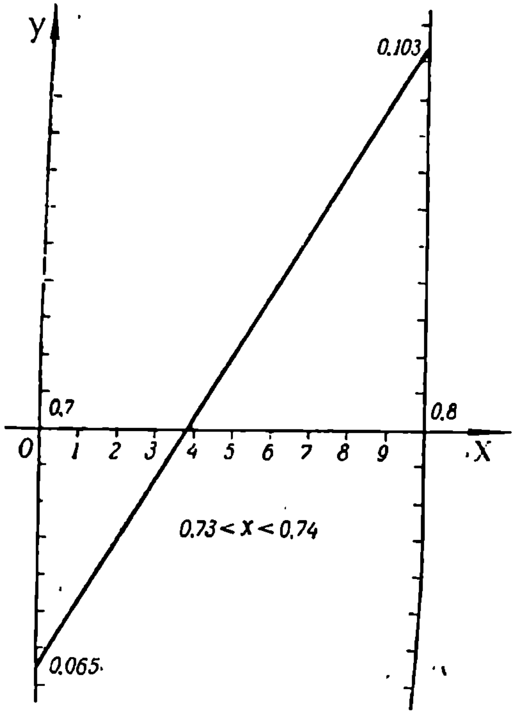
ავიღოთ შუალედი 0,7 და 0,8 წერტილებს შორის, ავაგოთ (0,7; —0,065) და (0,8; 0,103) წერტილები. მათი შემაერთებელი წრფე X ღერძს გადაკვეთს 0,73 და 0,74 წერტილებს შორის (ნახ. 63). ახლა ავიღოთ 0,73 და 0,74 შუალედი, გამოვთვალოთ:

$$f(0{,}73)=0{,}73-\cos 0{,}73=$$
$$=0{,}73-0{,}745=-0{,}015;$$

$$f(0{,}74)=0{,}74-\cos 0{,}74=$$
$$=0{,}74-0{,}739=0{,}001$$

და ავაგოთ ეს წერტილები. მათი შემაერთებელი წრფე X ღერძს გადაკვეთს 0,739 და 0,740-ს შორის (ნახ. 64). ამგვარად, (28) განტოლების ამონახსენი ვიპოვეთ სამი ნიშნადი ციფრით:

$$x\approx 0{,}739.$$



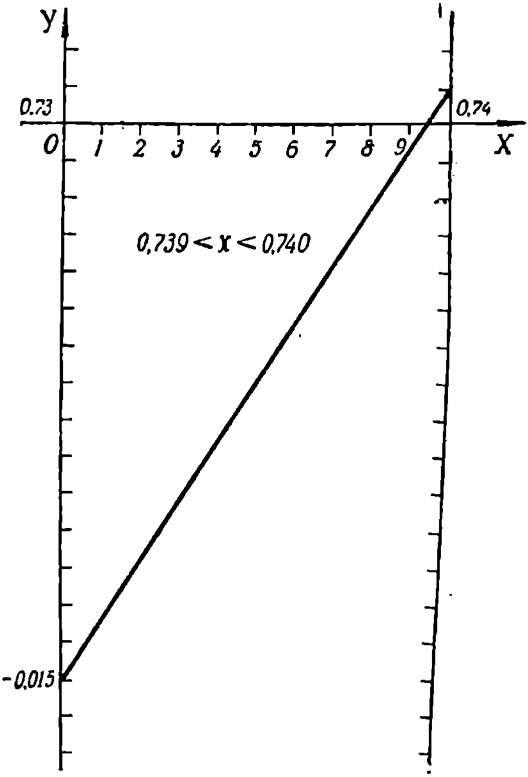
ნახ. 63.

თუ $y=f(x)$ წირი OX ღერძს გადაკვეთს მცირე კუთხით, მაშინ გადაკვეთის წერტილის განსაზღვრის დროს შეიძლება დიდი შეცდომა მოგვივიდეს. ამისათვის ნაცვლად $y=f(x)$ წირისა დავხაზოთ $y=kf(x)$ წირი, სადაც $k>1$. ეს უკანასკნელი ზრდის მასშტაბს Y ღერძის გასწვრივ. რი-

თაც წირის X ღერძისადმი გადაკვეთის წერტილში დახრის კუთხე იზრდება (ნახ. 65).

2. ლ ი ლ ი ს ხ ე რ ხ ი (ლილი — ფრანგი ინჟინერი). ამ ხერხით ნამდვილკოეფიციენტებიან ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნა მეტად მარტივად ხდება. განვიხილოთ, მაგალითად, მესამე ხარისხის განტოლება:

$$f(x)\equiv a_0+a_1x+ \\ +a_2x^2+a_3x^3=0. \tag{29}$$



ნახ. 64.

ასეთი მრავალწევრი აგებული იყო მეათე თავში (§ 57, 2). აქაც ისევ ავიღოთ $C_0C_1=a_0$ (ნახ. 66). C_0C_1-ისადმი პერპენდიკულარულად გადავზომოთ a_1, თუ $a_1>0$, C_0C_1-ისადმი მარცხნივ, ხოლო მარჯვნივ, თუ $a_1<0$, $C_1C_2=a_1$. ასევე C_1C_2-სადმი პერპენდიკულარულად გადავზომოთ a_2, $C_2C_3=a_2$. ასევე C_2C_3-სადმი პერპენდიკულარულად გადავზომოთ $C_3C_4=a_3$.

თუ x-ს განვსაზღვრავთ შეფარდებით:

$$\frac{C_3A}{C_3C_4}=\operatorname{tg}\vartheta=x$$

და A წერტილიდან გავატარებთ $AB\perp AC_4$. ასევე B წერტილიდან, $BC\perp AB$, მივიღებთ C_0C, რომელიც იძლევა $f(x)$-ის მნიშვნელობას (29) ტოლობიდან. რომ ვიპოვოთ (29) განტოლების ამონახსენი, საჭიროა ϑ ისე შევარჩიოთ, რომ C დაემთხვეს C_0 წერტილს. პრაქტიკულად ϑ-ს განსაზღვრა გაადვილდება, თუ ავიღებთ გამჭვირვალე მილიმეტრულას და დავადებთ $f(x)$-ის სქემას. მილიმეტრულას ხაზები შეუთავსდება C_3ABC ტეხილს. ვაბრუნოთ მილიმეტრულა მანამ, სანამ C არ დაემთხვევა C_0-ს.

4. განსაკუთრებით მარტივად ხდება აღნიშნული ხერხით ამოხსნა კვადრატული განტოლებისა:

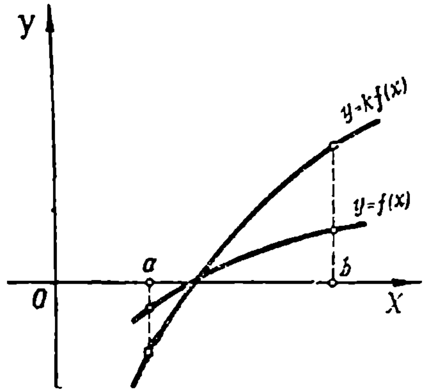
$$a_0+a_1x+a_2x^2=0. \tag{30}$$

წერტილები C_3 და C_0 შევაერთოთ (ნახ. 67) და ამასზე, როგორც დიამეტრზე ავაგოთ წრეწირი. თუ ეს წრეწირი გადაკვეთს C_2C_1 მონაკვეთს, მაშინ მივიღებთ (30) განტოლების ორ ამონახსენს:

$$x_1=\operatorname{tg}\vartheta_1=\operatorname{tg} A_1C_3C_2,$$

$$x_2=\operatorname{tg}\vartheta_2=\operatorname{tg} A_2C_3C_2.$$

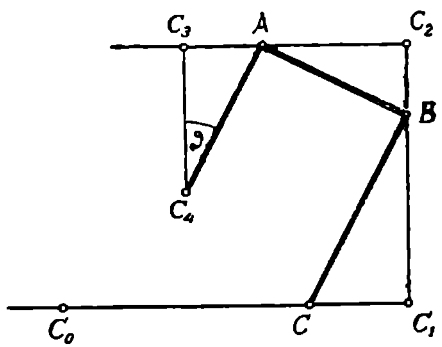
თუ C_2C_1 წრფეს წრეწირი შეეხება, მაშინ $x=\operatorname{tg}\vartheta$, გვექნება ჯერა-



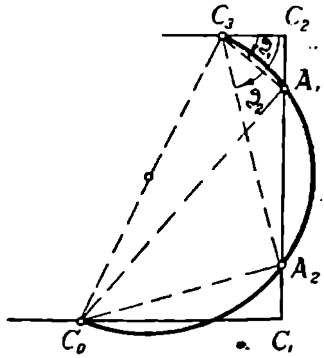
ნახ. 65.

დი ამონახსენი. თუ წრეწირი C_2C_1 წრფეს არ შეეხება, მაშინ კვადრატულ განტოლებას ექნება კომპლექსური ამონახსენი.

3. როდესაც საჭიროა ერთი და იგივე ტიპის განტოლებათა ამოხსნა, მაშინ წარმატებით გამოიყენება ნომოგრამები (§59—§ 62). მაგალითად, გვესაჭიროება



ნახ. 66.



ნახ. 67.

$$x^3+ax+b=0 \qquad (31)$$

განტოლების ამონახსენები სხვადასხვა a და b-სათვის. ამ განტოლებაში

x იყოს პარამეტრი და a და b ცვლადები. ცხადია, (31) განტოლება aob სისტემაში მოგვცემს წრფეთა ოჯახს. ავაგოთ

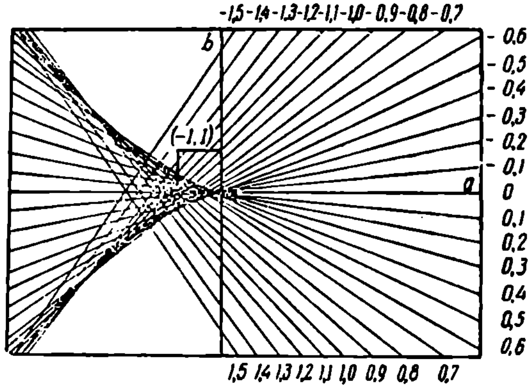
$$b=-ax-x^3$$

წრფე x-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის, $x=0;\ \pm 0,1;\ \pm 0,2;\cdots;\ \pm 1,5.$ a და b ღერძებზე ავიღოთ ჩვეულებრივი სკალა (ნახ. 68).

თუ გვინდა, მაგალითად,

$$x^3-x+1=0 \tag{32}$$

განტოლების ამონახსენის პოვნა, საჭიროა ვიპოვოთ წრფე, რომელიც



ნახ. 68.

გაივლის წერტილზე $a=-1$, $b=1$. აღებული წრფის შესაბამისი x-ის მნიშვნელობა მოგვცემს (32) განტოლების ნამდვილი ამონახსენის მიახლოებით მნიშვნელობას $x\approx-1,33$.

§ 68. კვადრატული, კუბური და მეოთხე ხარისხის განტოლებების ამოხსნა

ავიღოთ კვადრატული განტოლება

$$ax^2+bx+c=0. \tag{33}$$

ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$x^2=px+q,$$

სადაც

$$p=-\frac{b}{a},\quad q=-\frac{c}{a}.$$

ცხადია, საძიებელი ამონახსენი $y=x^2$ პარაბოლისა და $y=px+q$ წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა იქნება (ნახ. 69).

ადვილი შესამჩნევია, რომ $y=x^2$ წირი უცვლელია. იგი უნდა დაიხაზოს ცალკე გამჭვირვალე ქაღალდზე, რომელიც ადრე დახაზულ წრფეს $y=px+q$ გადაკვეთს. გადაკვეთის წერტილის მიხედვით ვიმსჯელებთ, თუ რამდენი ამონახსენი აქვს (33) განტოლებას.

იგივე ხერხით, რომლითაც კვადრატული განტოლება ამოვხსენით, ამოიხსნება კუბური განტოლება:

$$ax^3+bx+c=0. \qquad (34)$$

ამ განტოლებას ასეთი სახე მივცეთ:

$$x^3=px+q,$$

სადაც

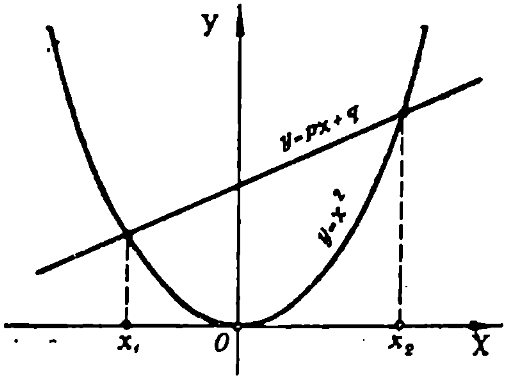
$$p=-\frac{b}{a}, \quad q=-\frac{c}{a}.$$

საკმარისია, წინასწარ აგებული გვქონდეს წირი

$$y=x^3. \qquad (35)$$

(35) წირისა და

$$y=px+q \qquad (36)$$



ნახ. 69.

წრფის გადაკვეთით მივიღებთ (34) განტოლების ამონახსენებს (ნახ. 70), თუ კუბურ განტოლებას აქვს სახე:

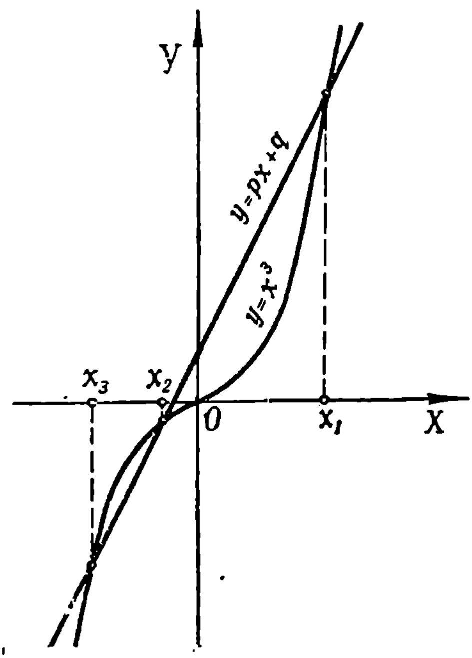
$$x^3+a_2x^3+a_1x+a_0=0,$$

მაშინ ეს განტოლება ჩასმით

$$x=t-\frac{a_2}{3}$$

მიიყვანება (34) სახეზე.

ცხადია, თუ (35) პარაბოლას (36) წრფესთან აქვს ერთი გადაკვეთის და მეორე შეხების წერტილი, მაშინ (34) განტოლებას ერთი ამონახსენი ექნება მარტივი და მეორე ორჯერადი. თუ საერთო აქვს მხოლოდ ერთი წერტილი, მაშინ განტოლებას ექნება ერთი ნამდვილი ფესვი.



ნახ. 70.

ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ, როგორი მდებარეობაც უნდა ჰქონდეს წრფეს, მას არ შეუძლია (35) პარაბოლა არ გადაკვეთოს, ამიტომ კუბურ განტოლებას ერთი ნამდვილი ამონახსენი მაინც აქვს. ეს შედეგი კარგადაა ცნობილი უმაღლესი ალგებრიდანაც.

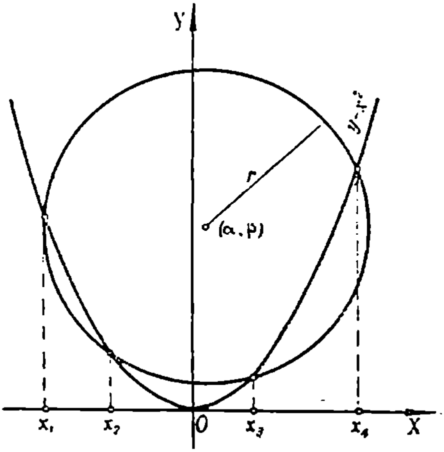
ავიღოთ მეოთხე ხარისხის განტოლება:

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{37}$$

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &x^2-y=0, \\ &(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

ამ სისტემის α, β, r ისე შევარჩიოთ, რომ იგი იძლეოდეს (37) განტოლებას. (38) სისტემის მეორე განტოლება მოგვცემს:



ნახ. 71.

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-$$
$$-2\beta y+\beta^2-r^2=0.$$

შევიტანოთ ამ განტოლებაში $y=x^2$. მივიღებთ:

$$x^4+(1+2\beta)x^2+(-2\alpha)x+$$
$$+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

თუ ამ განტოლებას შევადარებთ (37) განტოლებას, გვექნება

$$1+2\beta=a,$$
$$-2\alpha=b,$$
$$\alpha^2+\beta^2-r^2=c,$$

საიდანაც

$$\alpha=-\frac{b}{2}, \qquad \beta=\frac{1-a}{2}, \qquad r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c},$$

ამგვარად, (38) განტოლებათა სისტემა (37)-ის ტოლფასია. (38) სისტემის ამოსახსნელად საკმარისია ავიღოთ პარაბოლა

$$y=x^2$$

და წრეწირი

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$$

გადაკვეთის წერტილების აბსცისები მოგვცემს (37) განტოლების ამონახსნებს (ნახ. 71).

პარაბოლისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილების რაოდენობით უნდა ვიმსჯელოთ (37) განტოლების ნამდვილი ამონახსნების რაოდენობისა და ხასიათის შესახებ.

სისტემატური რიცხვები

§ 69. ნუმერაციის სხვადასხვა სისტემა

ცნობილია, რომ ადამიანს ძველი დროიდანვე უხდებოდა საგნების დათვლა. დროთა განმავლობაში ადამიანი თითებზე დათვლას დაეუფლა. იგი თვლას იწყებდა ნეკი თითიდან და გადათვლიდა ყველა თითს როგორც ერთ ხელზე, ისე მეორეზე; შემდეგ გადავიდოდა მაჯაზე, იდაყვზე, მხარზე და სხვ. თვლისათვის ადამიანი სარგებლობდა აგრეთვე სხვადასხვა მარტივი მოწყობილობით, მაგალითად: ჩხირების კონით, კენჭებით, მძივებით და სხვ. რაც, ცხადია, აუცილებელი იყო დიდი რიცხვების გამოსასახავად.

ადამიანი თვლის შედეგად რიცხვის ცნებამდე მივიდა. რასაკვირველია, წერითი და ზეპირი ნუმერაციის დაზუსტება ერთდროულად ხდებოდა, მაგრამ, წერითი ნუმერაციის საერთაშორისო ხასიათის გამო, თითქმის ყველა ენაზე არის შეუსაბამობა ზოგიერთი რიცხვის დამწერლობასა და წაკითხვას შორის.

წერითი ნუმერაციის წარმოშობასთან ერთად აუცილებელი გახდა ძირითადი რიცხვის შემოღება, რომელიც შედგებოდა რამდენიმე ერთეულისაგან. ეს ძირითადი რიცხვი წარმოადგენდა თვლის სისტემის ფუძეს ამ ფუძეს უმატებდნენ სათანადო ერთეულებს, ვიდრე არ მიიღებდნენ გაორკეცებულ ფუძეს და ა. შ. სხვადასხვა ქვეყანაში ძირითადი რიცხვები სხვადასხვა ნიშნით აღინიშნებოდა. მაგალითად, ეგვიპტეში ძირითადი რიცხვები იყო: ერთი — 𓏺, ათი — 𓎆, ასი — 𓍢, ათასი — 𓆼 და ა. შ. ეგვიპტური სისტემით 333 ასე ჩაიწერებოდა: 𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺. საბერძნეთში ძირითადი რიცხვები იყო: ერთი — I, ხუთი — Γ, ათი — Δ, ორმოცდაათი — 𐅄, ასი — H, ხუთასი — 𐅅, ათასი — X, ათი ათასი — M. რომში ძირითადი რიცხვები იყო: ერთი — I, ხუთი V, ათი — X, ორმოცდაათი — L, ასი — C, ხუთასი — D, ათასი — M.

რიცხვთა ჩაწერა ხდებოდა ანბანური წესითაც. ასეთი ჩაწერა იყო ბერძნული, სლავური, ებრაული, ქართული, სომხური და სხვ. ასო სათანადოდ იმ რიცხვს აღნიშნავდა, რომელი რიგიც ასოს ანბანში ეჭირა. მაგალითად, ბერძნული $\overline{\alpha}$ აღნიშნავდა 1, $\overline{\beta}$ — 2, ..., $\overline{\iota}$ — 10, $\overline{\kappa}$ — 20 $\overline{\lambda}$ — 30, $\overline{\mu}$ — 40, $\overline{\nu}$ — 50, $\overline{\xi}$ — 60, $\overline{o}$ — 70, $\overline{\pi}$ — 80, $\overline{ϟ}$ — 90, $\overline{\rho}$ — 100 და ა. შ.

სლავური $\overline{\text{а}}$ აღნიშნავდა 1, $\overline{\text{в}}$ — 2, $\overline{\text{г}}$ — 3, ..., $\overline{\text{і}}$ — 10 და ა. შ.

ქართული ანბანური ნუმერაცია იყო ა — 1, ბ — 2, გ — 3, დ — 4, ე — 5, ვ — 6, ზ — 7, ჱ — 8, თ — 9, ი — 10, კ — 20, ლ — 30, მ — 40, ნ — 50, ჲ — 60,

ო—70, პ—80, ჟ—90, რ—100, ს—200, ტ—300, ჳ—400, ფ—500, ქ—600, ღ—700, ყ—800, შ—900, ჩ—1000, ც—2000, ძ—3000, წ—4000, ჭ—5000, ხ—6000, ჴ—7000, ჯ—8000, ჰ—9000, ჵ—10000.

ყველა ჩამოთვლილი წერილობითი ნუმერაცია ეკუთვნის არაპოზიციურ სისტემას.

ნუმერაციის პოზიციურ სისტემას წარმოადგენს ათობითი სისტემა. ეს სისტემა წარმოიშვა არა უგვიანეს მეხუთე საუკუნისა ინდოეთში, მანამდე გავრცელებული თვლის სისტემის საფუძველზე. ინდოეთიდან თვლის ათობითი სისტემა გავრცელდა როგორც დასავლეთში, ისე აღმოსავლეთში. მე-9 საუკუნის პირველ ნახევარში გამოჩნდა ხელთნაწერი, სადაც აღწერილი იყო თვლის ათობითი პოზიციური სისტემა. ეს ხელთნაწერი დაწერილი იყო არაბულ ენაზე და ეკუთვნოდა ხორეზმელ სწავლულს მაგომედს.

ათობითი თვლის სისტემა ესპანეთში გავრცელდა დაახლოებით მე-12 საუკუნეში. ათობითმა სისტემამ მიიღო თვლის არაბული სისტემის სახელწოდება იმის გამო, რომ ევროპა ამ სისტემას გაეცნო არაბული ხელთნაწერის თარგმანიდან ლათინურ ენაზე.

მთლიანად ევროპაში თვლის ათობითი სისტემა გავრცელდა მე-16 საუკუნეში. რუსეთში თვლის ათობითი სისტემა გავრცელდა მე-17 საუკუნეში.

ათობითი სისტემით ნებისმიერი რიცხვი ათი ციფრის საშუალებით 0, 1,..., 9, გამოისახება. რიცხვებს ვკითხულობთ სახელწოდებებით: ერთი, ორი, ..., ათი, ოცი, ასი, ათასი, მილიონი, ბილიონი, მილიარდი, ტრილიონი და სხვ. რიცხვთა დანარჩენი სახელწოდება ამ ძირითადი სახელწოდებებისაგან მიიღება.

პირველი თანრიგის ერთეული ეწოდება ერთს. პირველი თანრიგის ათი ერთეული შეადგენს მეორე თანრიგის ერთეულს. მეორე თანრიგის ათი ერთეული, ანუ პირველი თანრიგის ასი ერთეული, მესამე თანრიგის ერთეულს შეადგენს და ა. შ. ამგვარად, რომელიმე თანრიგის ათი ერთეული მომდევნო თანრიგის ერთ ერთეულს შეადგენს. პირველი სამი თანრიგი ერთ კლასს შეადგენს, მას ერთეულების კლასი ეწოდება. მეორე სამი თანრიგის ერთეულს ათასეულების კლასი ეწოდება. შემდეგი სამი თანრიგი მილიონების კლასს შეადგენს. კლასები შემდეგნაირად განლაგდება:

$$\underbrace{\text{ასეული, ათეული, ერთეული}}_{\text{მილიონების კლასი}} \quad \underbrace{\text{ასეული, ათეული, ერთეული}}_{\text{ათასეულების კლასი}}$$

$$\underbrace{\text{ასეული, ათეული, ერთეული}}_{\text{ერთეულების კლასი}}$$

მაგალითად, რიცხვი 327 569 148 ასე წაიკითხება: სამას ოცდაშვიდი მილიონ ხუთას სამოცდაცხრა ათას ას ორმოცდარვა.

საზოგადოდ, იმ წესების ერთობლიობას, რომელთა საშუალებით შეიძლება რიცხვთა ჩაწერა და წაკითხვა, თვლის სისტემა (ნუმერაცია) ეწოდება.

§ 70. თვლის პოზიციური სისტემა

არქიმედის აქსიომა. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა ერთი შესანიშნავი თვისება: როგორიც უნდა იყოს a და b ნატურალური რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ ადგილი ექნება უტოლობას.

$$nb>a.$$

ამ თვისებას არქიმედის აქსიომა ეწოდება. ეს აქსიომა ზოგადად ასე გამოითქმის: თუ საკმარისად ბევრჯერ გავიმეორებთ უმცირეს მონაკვეთს ორი მონაკვეთიდან, ყოველთვის მივიღებთ მონაკვეთს, რომელიც უდიდეს მონაკვეთზე დიდი იქნება.

არქიმედის აქსიომის შემოწმება ნატურალური რიცხვებისათვის მეტად ადვილია.

მართლაც, ნატურალური რიცხვი n ავიღოთ $a+1$-ის ტოლად. მაშინ, ცხადია, $n>a$. ნატურალური რიცხვი $b\geqslant 1$, ამიტომ გვექნება $nb>a$.

გაყოფა ნაშთით. თუ a ნატურალური რიცხვი b ნატურალური რიცხვის ჯერადია, მაშინ a რიცხვის განაყოფი b რიცხვზე ეწოდება ისეთ c რიცხვს, რომელიც b-ზე გამრავლებული გვაძლევს a რიცხვს.

საზოგადოდ, a რიცხვი გავყოთ b რიცხვზე ნიშნავს, მოვძებნოთ წყვილი რიცხვებისა c და r, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$a=bc+r,$$

სადაც

$$o\leqslant r<b.$$

ნატურალურ რიცხვთა ასეთ გაყოფას ეწოდება გაყოფა ნაშთით.

დავამტკიცოთ თეორემა: როგორიც უნდა იყოს არაუარყოფითი მთელი რიცხვი a და ნატურალური რიცხვი b, ყოველთვის მოიძებნება ერთადერთი წყვილი მთელი არაუარყოფითი რიცხვებისა—c და r, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$a=bc+r,$$

სადაც

$$o\leqslant r<b.$$

დამტკიცება: არქიმედის აქსიომის თანახმად, შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $nb>a$. ავიღოთ b რიცხვის ჯერადი რიცხვები

$$1b,\ 2b,\ 3b, \cdots,\ nb.$$

ამ რიცხვებს შორის შეგვიძლია ისეთი cb რიცხვი მოვძებნოთ, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას

$$cb \leqslant a < (c+1)b.$$

თუ ამ უტოლობის ყველა წევრს გამოვაკლებთ cb-ს, მივიღებთ

$$o \leqslant a-cb < b.$$

სხვაობა $a-cb$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვია, რომელიც r ასოთი აღვნიშნოთ,

$$a-bc=r,$$

საიდანაც

$$a=bc+r.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ c და r ერთადერთი წყვილია, რომელიც ზემო ტოლობას აკმაყოფილებს.

მართლაც, თუ არსებობს მეორე წყვილი c_1 და r_1, მაშინ ადგილი ექნება ტოლობას

$$bc+r=bc_1+r_1.$$

ადვილი წარმოსადგენია, რომ, თუ $r=r_1$, მაშინ $c=c_1$ და, პირიქით, თუ $c=c_1$, მაშინ $r=r_1$.

ვთქვათ, $r>r_1$. მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$r-r_1=b(c_1-c).$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში b რიცხვზე ნაკლები რიცხვი გვაქვს, რადგანაც $r<b$ და $r_1<r$. მარჯვენა მხარეში მყოფი $b(c_1-c)$ რიცხვი კი b-ზე მეტია, რადგანაც b და სხვაობა c_1-c ნატურალური რიცხვებია. ამგვარად, დაშვებამ $r>r_1$ მიგვიყვანა წინააღმდეგობამდე, ამით თეორემა დამტკიცდა.

სისტემატური რიცხვები. განვმარტოთ თვლის პოზიციური სისტემა.

თვლის პოზიციური სისტემა ეწოდება წესებისა და განსაზღვრათა ერთობლიობას, რომლებიც შესაძლებლობას იძლევიან რამდენიმე ნიშნით ჩავწეროთ ნებისმიერი რიცხვი. ამ ნიშნებს ადგილის (პოზიციის) მიხედვით სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვთ.

ნებისმიერ g ნატურალურ რიცხვს ($g>1$) ეწოდება პოზიციური სისტემის ფუძე. თუ $g=2$, მაშინ თვლის სისტემას ორობითი ეწოდება, თუ $g=3$—სამობითი, $g=10$—ათობითი. ნიშნებს: 0, 1, 2, 3,..., $g-1$ ციფრები ეწოდება, ე. ი. პოზიციურ სისტემაში

ციფრების რაოდენობა g-ს ტოლია. მაგალითად, ათობით სისტემაში ათი ციფრია: 0, 1,..., 9. ათობით სისტემაში ას თერთმეტი ასე ჩაიწერება: 111. აქ მხოლოდ ერთიანია გამოყენებული, მაგრამ ადგილის მიხედვით ერთიანებს სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვთ. პირველი ერთიანი მარჯვნიდან ერთეულებს აღნიშნავს, მეორე—ათეულებს და მესამე—ასეულებს.

ავიღოთ სისტემატური რიცხვი g ფუძით.

$$a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0; \tag{1}$$

ეს რიცხვი ასე ჩაიწერება: $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$. აქ თავზე ხაზი ნახმარია იმისათვის, რომ ნამრავლი კი არ გვაქვს, არამედ—(1) ჯამი.

მაგალითად, $g=5$ სისტემაში

$$\overline{321} = (321)_5 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1.$$

ვაჩვენოთ, რომ როგორიც უნდა იყოს ფუძე g, $g>1$, ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი k ერთადერთი სისტემატური რიცხვით წარმოიდგინება.

მართლაც, თუ $k<g$, მაშინ k რიცხვი g სისტემაში ერთნიშნა რიცხვი იქნება. თუ $k>g$, მაშინ მოიძებნება ერთადერთი ისეთი წყვილი k_1 და a_0, რომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$k = k_1 g + a_0. \tag{2}$$

თუ $k_1 > g$, მაშინაც მოიძებნება ერთადერთი წყვილი k_2 და a_1 ისეთი, რომ

$$k_1 = k_2 g + a_1.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან k_1-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (2) ტოლობაში:

$$k = (k_2 g + a_1) g + a_0 = k_2 g^2 + a_1 g + a_0.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ:

$$k = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0. \tag{3}$$

ვთქვათ, k რიცხვი წარმოიდგინება მეორე სახითაც:

$$k = b_m g^m + b_{m-1} g^{m-1} + \cdots + b_1 g + b_0, \tag{4}$$

სადაც b_i ისევე განისაზღვრება როგორც a_i.

$$k = k'_1 g + b_0, \quad k'_1 = k'_2 g + b_1, \ldots, \ k_m = b_m g.$$

(4) ტოლობის (3)-თან შედარება მოგვცემს ტოლობას:

$$a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0 = b_m g^m + b_{m-1} g^{m-1} + \cdots + b_1 g + b_0. \tag{5}$$

განაყოფისა და ნაშთის ერთადერთობის გამო მივიღებთ:

$$a_0 = b_0, \quad k_1 = k'_1.$$

ამის გამო (5) ტოლობა მოგვცემს

$$a_n g^{n-1} + a_{n-1} g^{n-2} + \cdots + a_1 = b_m g^{m-1} + b_{m-1} g^{m-2} + \cdots + b_1,$$

საიდანაც ნაშთის ერთადერთობის გამო მივიღებთ:

$$a_1=b_1.$$

პროცესის ამგვარად გაგრძელებით მივიღებთ:

$$a_n=b_m.$$

ამგვარად, k ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სისტემატური რიცხვით წარმოიდგინება.

სისტემატური რიცხვების შეკრება. ავიღოთ ერთნიშნა რიცხვები და შევადგინოთ მათი ჯამის ცხრილი. ვთქვათ, $g=4$:

$$0+0=0,$$
$$0+1=1,\quad 1+1=2,\quad 2+2=10,\quad 3+3=12,$$
$$0+2=2,\quad 1+2=3,\quad 2+3=11,$$
$$0+3=3,\quad 1+3=10.$$

ამგვარად, ერთნიშნა რიცხვების ჯამი ერთნიშნა ან ორნიშნა რიცხვია.

$$a+b=a_1g+a_0,$$

სადაც a_1 ნულის ან ერთის ტოლია.

ახლა ავიღოთ მრავალნიშნა რიცხვები და შევკრიბოთ ჯამის კანონების საფუძველზე. მივიღებთ:

$$a+b=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}+\overline{b_nb_{n-1}\cdots b_1b_0}=$$
$$=a_ng^n+a_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a_1g+a_0+b_ng^n+b_{n-1}g^{n-1}+$$
$$+\cdots+b_1g+b_0=(a_n+b_n)g^n+(a_{n-1}+b_{n-1})g^{n-1}+$$
$$+\cdots+(a_1+b_1)g+(a_0+b_0). \tag{6}$$

თუ a_0+b_0 ერთნიშნა რიცხვია, მაშინ მას შევცვლით სათანადო ერთნიშნა რიცხვით:

$$a_0+b_0=c_0.$$

თუ ორნიშნაა,

$$a_0+b_0=g+c_0.$$

ამის გამო (6)-ის ბოლო ორი შესაკრები მოგვცემს:

$$(a_1+b_1)g+(a_0+b_0)=(a_1+b_1)g+g+c_0=$$
$$=(a_1+b_1+1)g+c_0.$$

თუ a_1+b_1+1 ერთნიშნაა, მაშინ ეს ჯამი სათანადო ერთნიშნა c_1 რიცხვით შეიცვლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში

$$a_1+b_1+1=g+c_1.$$

პროცესის ამგვარი გაგრძელებით მივიღებთ:

$$a+b=c_ng^n+c_{n-1}g^{n-1}+\cdots+c_1g+c_0,$$

სადაც c_n ერთნიშნა ან ორნიშნა რიცხვია.

შეკრების პროცესი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0} \\ \overline{b_n b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_1 b_0} \end{array} \\ \hline \overline{(a_n+b_n)(a_{n-1}+b_{n-1})+\cdots+(a_0+b_0)} = \overline{c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0}. \end{array}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ციფრთა რაოდენობის ტოლობა შესაკრებებში აუცილებელი არ არის. შეკრება მაინც ზემოთ აღწერილი ხერხით შესრულდება: $125+67=125+067$, ფაქტიურად მეორე შესაკრებში ნული არ უნდა დავწეროთ, არამედ უნდა ვიგულისხმოთ.

ამგვარად, ნატურალურ რიცხვთა ჯამის მოძებნა დაიყვანება ერთისა და იმავე თანრიგის ციფრთა შეკრებაზე. შეკრებას ვიწყებთ პირველი თანრიგის ციფრიდან და გადავდივართ მაღალი თანრიგის ციფრებზე.

მაგალითად,

$$g=10 \quad +\begin{array}{r}1272\\4589\\ \hline 5861\end{array}, \qquad g=4 \quad +\begin{array}{r}13012\\3221\\ \hline 22233\end{array}, \qquad g=5 \quad +\begin{array}{r}2341\\4232\\ \hline 12123\end{array}$$

გამოკლება. ერთნიშნა რიცხვების გამოკლება წარმოებს სათანადო ერთნიშნა რიცხვების შეკრების ცხრილის საფუძველზე:

განვიხილოთ მრავალნიშნა რიცხვების გამოკლება:

$$\begin{aligned} a-b=&(a_n g^n+a_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a_1 g+a_0)-\\ &-(b_n g^n+b_{n-1}g^{n-1}+\cdots+b_1 g+b_0)=\\ &=(a_n-b_n)g^n+(a_{n-1}-b_{n-1})g^{n-1}+\\ &+\cdots+(a_1-b_1)g+(a_0-b_0). \end{aligned} \tag{7}$$

თუ a_0-b_0 არსებობს, მაშინ ეს სხვაობა პირდაპირ მოიძებნება; მაგრამ, თუ არ არსებობს, მაშინ (1)-ის ორი უკანასკნელი შესაკრები ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} (a_1-b_1)g+(a_0-b_0)=&(a_1-b_1-\\ &-1)g+(g+a_0-b_0)=\\ &[(a_1-1)-b_1]g+[(g+a_0)-b_0]. \end{aligned} \tag{8}$$

თუ ამ გამოსახულების პირველი შესაკრები $(a_1-1)-b_1$ არსებობს, მაშინ (7)-ის ორი უკანასკნელი წევრის ჯამი მოგვცემს:

$$c_1 g+c_0.$$

თუ $(a_1-1)-b_1$ არ არსებობს, მაშინ ავიღებთ (7) გამოსახულების მესამე შესაკრებს და ასე გადავწერთ:

$$(a_2-b_2)g^2+(a_1-b_1)g+(a_0-b_0)=(a_2-1-b_2)g^2+$$
$$+(g+a_1-1-b_1)g+c_0,$$

რომლიდანაც იმავე გზით, როგორც (2)-დან გვქონდა, მივიღებთ:

$$c_2g^2+c_1g+c_0.$$

ამგვარად, მრავალნიშნა რიცხვების გამოკლება დაიყვანება ერთნიშნა რიცხვების გამოკლებამდე:

$$(a_i-b_i)g^i \qquad (i=0,\ 1,\ldots,n).$$

თუ ეს სხვაობა არ არსებობს, მაშინ სათანადოდ ერთ ერთეულს ავიღებთ წინა რიცხვიდან და დავშლით მომდევნო ციფრის ერთეულებად. ამ ერთეულებად დაშლილი g-სა და საკლები a_i-ს ჯამს გამოაკლდება მაკლები. მიღებული სხვაობა, რომელიც ერთნიშნა რიცხვია, დავწეროთ g^i-თან. სათანადო ციფრზე, რომლიდანაც აღებულია ერთეული (ვისესხეთ), დაისმება წერტილი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს ციფრი ერთი ერთეულით ნაკლებია. მაგალითად, $g=4$,

$$\begin{array}{r} \dot{3}\dot{2}\dot{1}02 \\ -\quad 2311 \\ \hline 23131. \end{array}$$

0—1 არ არსებობს. ამიტომ წინა თანრიგის ციფრიდან ვისესხეთ ერთეული, რომელიც მომდევნო თანრიგის ოთხ ერთეულს უდრის; ოთხს გამოვაკლოთ ერთი, მოგვცემს 3-ს. ასეთივე პროცესს გავაგრძელებთ შემდეგი თანრიგის ციფრებზე.

§ 71. სისტემატურ რიცხვთა გამრავლება

წინასწარ შევადგინოთ ერთნიშნა რიცხვების გამრავლების ცხრილი. მაგალითად, $g=6$:

$1\cdot1=1,$

$1\cdot2=2,\quad 2\cdot2=4,$

$1\cdot3=3,\quad 2\cdot3=10,\quad 3\cdot3=13,$

$1\cdot4=4,\quad 2\cdot4=12,\quad 3\cdot4=20,\quad 4\cdot4=24,$

$1\cdot5=5,\quad 2\cdot5=14,\quad 3\cdot5=23,\quad 4\cdot5=32,\quad 5\cdot5=41.$

გადანაცვლებადობის კანონის საფუძველზე ცხრილში არ არის აუცილებელი ყველა ნამრავლის დაწერა: $4\cdot5=5\cdot4=32$.

ცხრილიდან ადვილად შევამჩნევთ, რომ ერთნიშნა რიცხვების ნამრავლი ერთნიშნა ან ორნიშნა რიცხვია.

$$ab=\overline{c_1c_0},$$

სადაც c_1 ნული ან ერთნიშნა რიცხვია.

განვიხილოთ გამრავლების სხვადასხვა შემთხვევა:

1) მრავალნიშნა რიცხვის g^m-ზე გამრავლება.

ნამრავლი

$$a \cdot g^m = (a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_1 g + a_0) g^m$$

განრიგებადობის კანონის თანახმად მოგვცემს:

$$a \cdot g^m = a_n g^{n+m} + a_{n-1} g^{n+m-1} + \ldots + a_1 g^{1+m} + a_0 g^m =$$
$$= a_n g^{n+m} + a_{n-1} g^{n+m-1} + \ldots + a_1 g^{1+m} + a_0 g^m +$$
$$+ 0 \cdot g^{m-1} + \ldots + 0 \cdot g + 0 = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 0 \ldots} 0.$$

ამგვარად, a რიცხვის g^m-ზე გამრავლება ნიშნავს a-ს მივუწეროთ m ნული.

2) მრავალნიშნა რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე გამრავლება.

ვთქვათ, b_0 ერთნიშნა რიცხვია, მაშინ გვექნება:

$$a \cdot b_0 = (a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_1 g + a_0) b_0 =$$
$$= (a_n \cdot b_0) g^n + (a_{n-1} \cdot b_0) g^{n-1} + \ldots + (a_1 \cdot b_0) g + (a_0 \cdot b_0). \qquad (9)$$

აქ გამოვიყენეთ გამრავლების კანონები. თუ (9) გამოსახულების ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი ერთნიშნა რიცხვებია, მაშინ დავწერთ:

$$a \cdot b_0 = \overline{c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0}.$$

თუ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი ორნიშნა რიცხვებია, მაშინ დაბალი თანრიგის ერთეულებს წარმოვადგენთ მაღალი თანრიგის ერთეულებად; მაგალითად,

$$a_0 b_0 = d_1 g + c_0,$$

მაშინ

$$(a_1 \cdot b_1) g + (a_0 \cdot b_0) = (a_1 b_1 + d_1) g + c_0.$$

ასევე, თუ $a_1 b_1 + d_1$ ორნიშნა რიცხვია, მაშინ გვექნება:

$$a_1 b_1 + d_1 = d_2 g + c_1,$$

რომლის შედეგად მივიღებთ:

$$(a_2 \cdot b_2) g^2 + (a_1 b_1 + d_1) g = (a_2 b_2 + d_2) g^2 + c_1 g.$$

პროცესის ამგვარი გაგრძელებით (1) მოგვცემს:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} \cdot b_0 = \overline{c_{n+1} c_n \cdots c_1 c_0},$$

სადაც c_{n+1} ნული ან ერთნიშნა რიცხვია.

3) მრავალნიშნა რიცხვის მრავალნიშნა რიცხვზე გამრავლება დაიყვანება მრავალნიშნა რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე გამრავლებამდე. ვთქვათ, b მრავალნიშნა რიცხვია, მაშინ $a \cdot b$ ასე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a \cdot b = a \cdot \overline{b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0} = (a \cdot b_n) g^n + (a \cdot b_{n-1}) g^{n-1} +$$
$$+ \ldots + (a \cdot b_1) g + (a \cdot b_0).$$

ფრჩხილებში გვაქვს მრავალნიშნა a რიცხვის ერთნიშნა b_i რიცხვებზე ნამრავლი, რომელიც დაწვრილებით ზემოთ გავარჩიეთ. მიღებული ნამრავლები სათანადოდ უნდა გავამრავლოთ g^i-ზე.

ამგვარად, მრავალნიშნა a რიცხვის მრავალნიშნა b რიცხვზე გასამრავლებლად საჭიროა: a გავამრავლოთ b_0-ზე, შემდეგ a გავამრავლოთ b_1-ზე და ნამრავლს მივუწეროთ ნული; შემდეგ a გავამრავლოთ b_2-ზე და ნამრავლს მივუწეროთ ორი ნული და ა. შ. მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ, სინამდვილეში ნულებს არ ვწერთ. მაგალითად, $g=4$;

$$\begin{array}{r} 321 \cdot 123 = 2223 \\ + \begin{array}{r} 1302 \\ 321 \end{array} \\ \hline 120003. \end{array}$$

§ 72. სისტემატურ რიცხვთა გაყოფა

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა.

1) ერთნიშნა რიცხვების გაყოფა.

ერთნიშნა რიცხვების გაყოფისათვის საკმარისია ავიღოთ ერთნიშნა რიცხვების გამრავლების ცხრილი. გასაყოფი ვიპოვოთ ცხრილში. ერთ ნამრავლს სხვადასხვა მამრავლი შეესაბამება. ამ მამრავლებიდან ავარჩიოთ დასახელებული (გამყოფი), მაშინ მეორე მამრავლი იქნება განაყოფი. თუ გასაყოფი ცხრილში არ არის, მაშინ გაყოფა შევასრულოთ ფართო აზრით:

$$a:b=c(r) \text{ ანუ } a=bc+r.$$

2) ორნიშნა რიცხვის გაყოფა ერთნიშნაზე.

თუ ორნიშნა რიცხვის პირველი და მეორე ციფრი ცალ-ცალკე იყოფა მოცემულ რიცხვზე, მაშინ გაყოფას ერთნიშნა რიცხვების გაყოფის წესით შევასრულებთ. მაგალითად, $68:2=34$.

თუ გასაყოფის პირველი ციფრი არ იყოფა გამყოფზე, მაშინ პირველი ციფრის გაყოფა მოვახდინოთ ფართო აზრით. მთელი მოქმედების შესრულება განვიხილოთ მაგალითზე, სადაც მიმდევრობით გამოყენებული იქნება გაყოფის თვისებები:

$$72:3=(70+2):3=70:3+2:3=20+10:3+2:3=$$
$$=20+12:3=20+4=24.$$

საზოგადოდ,

$$a:b=(a_1g+a_0):b=a_1g:b+a_0:b. \tag{10}$$

ცალკე გამოვთვალოთ $a_1g:b$.

$$a_1g:b=(a_1:b)\cdot g=(c_1+r:b)g=c_1g+rg:b.$$

ამ ტოლობის შედეგად (10)-დან მივიღებთ:

$$(a_1g+a_0):b=c_1g+rg:b+a_0:b=c_1g+(rg+a_0):b=c_1g+c_0=\overline{c_1c_0},$$

სადაც $$(rg+a_0):b=c_0.$$

ე. ი. მიღებული ნაშთი r, რომელიც მეორე თანრიგისაა, დავშალეთ პირველი თანრიგის rg ერთეულებად და დავუმატეთ პირველი თანრიგის a_0 ერთეული, მიღებული ჯამი გავყავით b გამყოფზე.

3) მრავალნიშნა რიცხვის გაყოფა ერთნიშნა რიცხვზე.

მრავალნიშნა რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე გაყოფა იმ მიმდევრობით შესრულდება, როგორც ორნიშნა რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე გაყოფა. მაგალითად, $g=6$;

$$\begin{array}{l}
-\,12543_6 : 5=1443.\\
\underline{5}\\
-\,\underline{35}\\
\,\underline{32}\\
-\,34\\
\,\underline{32}\\
-\,23\\
\,\underline{23}\\
0
\end{array}$$

გაყოფა შემდეგნაირად შევასრულეთ:

$$12000 : 5=(12 : 5)\cdot 6^3=[(1\cdot 6+2) : 5]\,6^3=$$
$$=(1+3 : 5)6^3=1\cdot 6^3+3\cdot 6^3 : 5.$$

მიღებულ ნაშთს—$3\cdot 6^3$ მივუმატეთ $5\cdot 6^2$ (ჩამოვიტანეთ 5). მივიღეთ:

$$(3\cdot 6^3+5\cdot 6^2) : 5=(3\cdot 6\cdot 6^2+5\cdot 6^2) : 5=(3\cdot 6+5)\cdot 6^2 : 5=$$
$$=[(3\cdot 6+5) : 5]\cdot 6^2=(4+3 : 5)6^2=4\cdot 6^2+3\cdot 6^2 : 5.$$

მიღებულ ნაშთს $3\cdot 6^2$ მივუმატეთ $4\cdot 6$ (ჩამოვიტანეთ 4) და მოქმედება ისევე შევასრულეთ, როგორც წინა შემთხვევაში. საბოლოოდ მივიღეთ:

$$12543_6 : 5=1443_6.$$

4) მრავალნიშნა რიცხვის მრავალნიშნა რიცხვზე გაყოფა.

მრავალნიშნა რიცხვის მრავალნიშნა რიცხვზე გაყოფა სრულდება იმ ხერხით, რომლითაც მრავალნიშნა რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე გაყოფა შესრულდა. გასაყოფს ვყოფთ გამყოფის პირველ ციფრზე და მიღებულ რიცხვს ვამოწმებთ. შემოწმება შემდეგში მდგომარეობს: შესამოწმებელ რიცხვს ვამრავლებთ გამყოფზე და ვაკლებთ გასაყოფს. თუ გამოკლება შესაძლებელია და ნაშთში არ ვღებულობთ ისეთ რიცხვს, რომელიც არ იყოფა გამყოფზე, გადავალთ შემდეგი თანრიგის ციფრების გაყოფაზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში განაყოფში მიღებულ ციფრს ვზრდით მანამდე, ვიდრე აღნიშნულ პირობას არ შევასრულებთ. მრავალნიშნა რიცხვების გაყოფა განვიხილოთ შემდეგ მაგალითზე:

$$\begin{array}{l}
-\,4234_8 : 35=114.\\
\underline{35}\\
-\,53\\
\underline{35}\\
-\,164\\
\underline{164}\\
0
\end{array}$$

§ 73. თვლის ერთი სისტემიდან მეორე სისტემაზე გადასვლა

ვთქვათ, მოცემულია ნატურალური რიცხვი a ათობით სისტემაში და გვინდა გამოვსახოთ სხვა სისტემაში $g\neq 1$ ფუძით. ამისათვის მოცემული რიცხვი გავყოთ g-ზე. მივიღებთ a_1 და r_0 რიცხვების წყვილს

$$a=a_1g+r_0.$$

რიცხვი a_1 კვლავ გავყოთ g-ზე, მივიღებთ $(a_2,\ r_1)$ წყვილს

$$a_1=a_2g+r_1$$

და ასე შემდეგ. მიღებული მიმდევრობა (ნატურალური რიცხვები)

$$a_1,\ a_2,\dots$$

კლებადია; მას ექნება ზღვარი, რომელიც g-ზე ნაკლებია. ასე რომ, გაყოფის k-ჯერ ჩატარების შემდეგ მივიღებთ:

$$a_{k-1}=a_kg+r_{k-1},$$

სადაც $a_k<g$. ეს a_k აღვნიშნოთ r_k ასოთი. $a_1,\ a_2,\dots$ მნიშვნელობების მიმდევრობითი ჩასმა მოგვცემს:

$$\begin{aligned}a&=a_1g+r_0=(a_2g+r_1)g+r_0=a_2g^2+r_1g+r_0=\\&=(a_3g+r_2)g^2+r_1g+r_0=a_3g^3+r_2g^2+r_1g+r_0=\dots=\\&=r_kg^k+r_{k-1}g^{k-1}+\dots+r_1g+r_0;\end{aligned}$$

მაგალითად, 527 წარმოვადგინოთ 5-ობით სისტემაში;

$$\begin{array}{l}\underline{527}:5=105,\\ \underline{\ \ 27}\\ \quad\ 2\end{array}\qquad \begin{array}{l}\underline{105}:5=21,\\ \underline{\quad 5}\\ \quad 0\end{array}\qquad \begin{array}{l}\underline{21}:5=4,\\ \ \ 1\end{array}\quad 4<5.$$

$r_0=2$, $r_1=0$, $r_2=1$, $r_3=4$, ამიტომ გვექნება:

$$527_{10}=4102_5.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი: 6278 წარმოვადგინოთ 13-ობით სისტემაში.

შევასრულოთ მიმდევრობითი გაყოფა.

$$\begin{array}{r|l}6278 & 13\\ \underline{52} & 482\\ 107 & \\ \underline{104} & \\ 38 & \\ \underline{26} & \\ 12 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l}482 & 13\\ \underline{39} & 37\\ 92 & \\ \underline{91} & \\ 1 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l}37 & 13\\ \underline{26} & 2\\ 11 & \end{array}\quad 2<13,\ r_0=12,\ r_1=1,\ r_2=11,\ r_3=2.$$

აღვნიშნოთ

$$10=\alpha,\quad 11=\beta,\quad 12=\gamma.$$

მივიღებთ:

$$6278=2(11)1(12)=(2\beta1\gamma)_{13}.$$

სრულიად ანალოგიურად წარმოებს ნატურალური რიცხვის ნებისმიერი h სისტემიდან g სისტემაში გადაყვანა. მაგალითად, 5621_7 გადავიყვანოთ 6-ობით სისტემაში.

მიმდევრობითი გაყოფა მოგვცემს:

$$\begin{array}{llllll}
5621 & \vert\; 6 & & & & \\
-51 & \vert\,\overline{661} & \vert\; 6 & & & \\
\overline{52} & -6 & \vert\,\overline{110} & \vert\; 6 & & \\
-51 & \overline{6} & -6 & \vert\,\overline{12} & \vert\; 6 & \\
\overline{11} & -6 & \overline{20} & -6 & \vert\,\overline{1.} & \\
-6 & \overline{1} & -15 & \overline{3} & & \\
\overline{2} & & \overline{2} & & &
\end{array}$$

ამგვარად,

$$5621_7=13212_6.$$

ფაქტიურად აქ გაყოფას ვაწარმოებთ ათობითი სისტემის საშუალებით: ყოველ შედეგში მიღებულ რიცხვს ათობით სისტემაში გადავიყვანთ და ისე ვაწარმოებთ გაყოფას, ამიტომ უმჯობესია გადასაყვანი რიცხვი თავიდანვე გამოვსახოთ ათობით სისტემაში და შემდეგ გავყოთ მიმდევრობით.

თუ რიცხვი მოცემულია g ფუძით და გვინდა გადავიყვანოთ ათობით სისტემაში, მაშინ გაყოფის ნაცვლად გამოვიანგარიშოთ მისი მნიშვნელობა ათობით სისტემაში. მაგალითად,

$$527_8=5\cdot8^2+2\cdot8+7=5\cdot64+16+7=320+23=343_{10}.$$

§ 74. სისტემატური რიცხვების შედარება

ნებისმიერი ფუძით სისტემატური რიცხვების შედარება ისე ხდება, როგორც ათობითი ფუძით წარმოდგენილი სისტემატური რიცხვების შედარება. შედარებას ვიწყებთ მარცხნიდან, უმაღლესი თანრიგის ციფრებიდან. ორი რიცხვიდან მეტია ის, რომლის უდიდესი თანრიგის ციფრი მეტია.

თუ უდიდესი თანრიგის ციფრები ტოლია, შევადარებთ მომდევნო თანრიგის ციფრებს. აქაც, აღებული რიცხვებიდან მეტია ის, რომლის მომდევნო თანრიგის ციფრი მეტია და ა. შ.

ახლა შევადაროთ სისტემატური g ფუძით წარმოდგენილი რიცხვები.

პირველად ვაჩვენოთ, რომ

$$g^n>a_{n-1}g^{n-1}+\ldots+a_1g+a_0. \qquad (11)$$

მართლაც, არც ერთი ციფრი არ აღემატება $(g-1)$-ს, ამიტომ გვექნება:

$$a_0+a_1g+\ldots+a_{n-1}g^{n-1}\leqslant(g-1)+(g-1)g+\ldots+$$
$$+(g-1)g^{n-1}=(g-1)(1+g+\ldots+g^{n-1})=$$
$$=(g-1)\frac{g^{n-1}\cdot g-1}{g-1}=g^n-1.$$

მაგრამ, ცხადია,

$$g^n-1<g^n.$$

მაშასადამე,

$$a_0+a_1g+\dots+a_{n-1}g^{n-1}<g^n.$$

ახლა ავიღოთ ორი რიცხვი a და b:

$$a=a_ng^n+a_{n-1}g^{n-1}+\dots+a_1g+a_0, \quad (12)$$

$$b=b_mg^m+b_{m-1}g^{m-1}+\dots+b_1g+b_0. \quad (13)$$

თუ $n>m$, მაშინ $a>b$, რადგანაც, როგორც (11) უტოლობიდან ვიცით,

$$g^n>a_{n-1}g^{n-1}+\dots+a_1g+a_0$$

და მით უმეტეს

$$a_ng^n+a_{n-1}g^{n-1}+\dots+a_1g+a_0>b_mg^m+\dots+b_1g+b_0.$$

თუ $m=n$, მაშინ შევადაროთ a_n და b_m. თუ

$$a_n>b_m,$$

მაშინ

$$a_n-1\geqslant b_m,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$(a_n-1)g^n\geqslant b_mg^m. \quad (14)$$

a_ng^n ასე წარმოვადგინოთ:

$$a_ng^n=(a_n-1)g^n+g^n,$$

მაშინ (14) უტოლობის ძალით გვექნება:

$$a_ng^n\geqslant b_mg^m+g^n.$$

მაგრამ (11) უტოლობის გამო ($m=n$);

$$g^n>b_{m-1}g^{m-1}+\dots+b_1g+b_0,$$

ამიტომ გვექნება:

$$a_ng^n>b_mg^m+b_{m-1}g^{m-1}+\dots+b_1g+b_0.$$

მაშასადამე, თუ $m=n$ და a რიცხვის პირველი ციფრი მეტია b რიცხვის პირველ ციფრზე, მაშინ

$$a>b.$$

თუ $a_n=b_m$, ხოლო $a_{n-1}>b_{m-1}$, მაშინ სრულიად ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$a>b.$$

ამგვარად, ერთი და იმავე ფუძით წარმოდგენილი ორი სისტემატური რიცხვის შედარება უნდა დავიწყოთ უდიდესი თანრიგის ციფრიდან და ერთისა და იმავე თანრიგის ციფრები შევადაროთ. ის რიცხვი იქნება მეტი, რომლის სათანადო თანრიგის ციფრიც მეტია.

მაგალითად,

$$54231_6>54223_6,$$

რადგანაც პირველი რიცხვის მეორე თანრიგის ციფრი 3 მეტია მეორე რიცხვის მეორე თანრიგის ციფრ 2-ზე.

ასევე,

$$31231_5 > 4201_5,$$

რადგანაც პირველი რიცხვის მეხუთე თანრიგის ციფრი 3 მეტია მეორე რიცხვის მეხუთე თანრიგის ციფრ 0-ზე, მეორე რიცხვში მეხუთე თანრიგის ციფრი არ არის.

თავი XIII

მარტივი რიცხვები

§ 76. მარტივი რიცხვები. რიცხვთა კანონიკური დაშლა

ყოველ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც ერთზე მეტია, ორი გამყოფი მაინც აქვს—ერთი და თვით ეს რიცხვი. მაგრამ რიცხვს შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი გამყოფი. მაგალითად, 15-ს აქვს გამყოფები: 1, 3, 5, 15.

ისეთ ნატურალურ რიცხვს, რომელსაც მხოლოდ ორი გამყოფი აქვს, ეწოდება მარტივი რიცხვი, ხოლო ისეთ ნატურალურ რიცხვს, რომელსაც ორზე მეტი გამყოფი აქვს, ეწოდება შედგენილი რიცხვი.

მაგალითად, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 მარტივი რიცხვებია, ხოლო 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 20, 21 — შედგენილი რიცხვები.

დავამტკიცოთ რიცხვთა კანონიკური დაშლის ერთადერთობის თეორემა.

თეორემა. ყოველი შედგენილი რიცხვი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს მარტივ რიცხვთა მამრავლებად მხოლოდ ერთი სახით.

დამტკიცება. ავიღოთ ერთისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვი N და ვთქვათ, ამ რიცხვის უმცირესი გამყოფია p_1. ცხადია, p_1 არის მარტივი რიცხვი, წინააღმდეგ შემთხვევაში p_1-ის გამყოფი იქნებოდა N-ის უმცირესი გამყოფი.

მაშასადამე, გვექნება:

$$N = N_1 p_1. \qquad (1)$$

ცხადია $N_1 \neq 1$, რადგანაც, თუ $N_1 = 1$, მაშინ N იქნებოდა p_1-ის ტოლი, სადაც p_1 მარტივი რიცხვია. ეს კი ეწინააღმდეგება იმ დაშვებას, რომ N შედგენილი რიცხვია.

ამგვარად, N_1 მეტია ერთზე.

თუ N_1 მარტივი რიცხვია, მიშინ N ტოლია ორი მარტივი რიცხვის ნამრავლისა და N-ის დაშლა ამით დამთავრებულია. თუ N_1 შედგენილი რიცხვია, მაშინ, (1) ტოლობის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$N_1 = N_2 p_2, \tag{2}$$

სადაც p_2 მარტივი რიცხვია, და $N_2 > 1$.

თუ N_2 მარტივი რიცხვია, მაშინ (2) და (1) ტოლობებიდან მიიღება:

$$N = N_2 p_2 p_1. \tag{3}$$

მაშასადამე, N დაიშალა სამი მარტივი რიცხვის ნამრავლად და N რიცხვის დაშლის პროცესი დამთავრებულია. თუ N_2 შედგენილი რიცხვია, მაშინ N_2-საც მარტივ რიცხვთა ნამრავლად წარმოვადგენთ და ა. შ.

ამგვარად, მივიღებთ მიმდევრობას:

$$N,\ N_1,\ N_2, \ldots, \tag{4}$$

სადაც

$$N > N_1 > N_2 > \cdots$$

ამ რიცხვებიდან ყველა მეტია ერთზე. მაშასადამე, მიმდევრობის რიცხვებს შორის მოიძებნება ისეთი N_k, რომელიც ყველაზე ნაკლებია. N_k მარტივი რიცხვია, იგი აღვნიშნოთ p_k-თი.

ამგვარად, გვექნება

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k. \tag{5}$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

რიცხვის მარტივ რიცხვთა ნამრავლის სახით წარმოდგენას კანონიკური დაშლა ეწოდება.

თუ კანონიკურ დაშლაში ზოგიერთი მამრავლი ტოლი აღმოჩნდება, მაშინ ვისარგებლებთ ხარისხის მაჩვენებლით. ამიტომ ზოგადად N ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}, \tag{6}$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ნატურალური რიცხვები ან ნულებია.

დავამტკიცოთ ახლა კანონიკური დაშლის ერთადერთობა.

ვთქვათ, (6) დაშლის გარდა, არსებობს კიდევ სხვა დაშლა:

$$N = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_m^{\beta_m}. \tag{7}$$

მაშინ გვექნება:

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}. \tag{8}$$

რადგანაც N იყოფა p_k-ზე,

$$N \vdots p_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

ამიტომ

$$q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m} \vdots p_k.$$

მაგრამ $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ურთიერთმარტივი რიცხვებია, ასევე ურთიერთმარტივია $q_1^{\beta_1}, q_2^{\beta_2}, \ldots, q_m^{\beta_m}$ რიცხვებიც, ამიტომ p_k უნდა იყოს ტოლი ერთ-ერთი q_i მამრავლისა შემდეგი რიცხვებიდან:

$$q_1, q_2, \ldots, q_m.$$

მაშასადამე,

$$m \geqslant n.$$

ასევე ვაჩვენებთ, რომ q_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ ტოლი უნდა იყოს ერთ-ერთი რიცხვისა შემდეგი რიცხვებიდან:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

ამიტომ

$$n \geqslant m.$$

ამ ორი უტოლობის შედარება მოგვცემს:

$$m=n.$$

მაშასადამე, რიცხვები $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ემთხვევა $q_1, q_2, \ldots, q_m$ რიცხვებს. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$p_1=q_1, \ p_2=q_2, \ldots, \ p_n=q_m \quad (m=n).$$

საბოლოოდ მივიღებთ ტოლობას:

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}. \qquad (9)$$

ვაჩვენოთ ხარისხის მაჩვენებლების ტოლობაც:

$$\alpha_k=\beta_k \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

დავუშვათ,

$$\alpha_k > \beta_k.$$

რადგანაც

$$N \vdots p_k^{\alpha_k},$$

ამიტომ

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n} \vdots p_k^{\alpha_k}.$$

მაგრამ p_k მარტივი რიცხვია $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n$ რიცხვების მიმართ. ამიტომ

$$(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \ldots p_n^{\beta_n}, \ p_k^{\alpha_k})=1.$$

მაგრამ

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} p_k^{\beta_k} p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \ldots p_n^{\beta_n} \vdots p_k^{\alpha_k},$$

ამიტომ

$$p_k^{\beta_k} \vdots p_k^{\alpha_k}.$$

აქედან $p_k^{\beta_k}$-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$1 \vdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}.$$

მაგრამ

$$p_k>1,\ \alpha_k>\beta_k,$$

ამიტომ ერთის გაყოფა $p_k^{\alpha_k-\beta_k}$-ზე შეუძლებელია.

ამგვარად, დაშვება $\alpha_k>\beta_k$ მართებული არ არის.

ასევე ვაჩვენებთ, რომ შეუძლებელია $\beta_k>\alpha_k$.

მაშასადამე, გვექნება:

$$\alpha_k=\beta_k \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

ამით (6) კანონიკური დაშლის ერთადერთობა დამტკიცებულია.

ცხადია, თუ N მარტივი რიცხვია, მაშინ გვექნება:

$$N=p_1,$$

ე. ი. მამრავლთა რიცხვი $n=1$, $\alpha_1=1$ და მარტივი მამრავლი $p_1=N$.

§ 78. ნატურალური რიცხვის თანამამრავლებად დაშლა

ნატურალური რიცხვის კანონიკური დაშლისათვის საჭიროა წინასწარ შევადგინოთ მარტივი რიცხვების ცხრილი:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,

47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,...

მოცემული რიცხვის დაშლა უნდა ვაწარმოოთ შემოწმების საშუალებით: ჯერ შევამოწმოთ უმცირესი მარტივი რიცხვი 2. თუ მოცემული რიცხვი იყოფა 2-ზე, შევასრულოთ გაყოფა. მიღებული განაყოფი კვლავ გავყოთ 2-ზე, თუ შესაძლებელია. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავიდეთ 3-ზე. შევამოწმოთ მიღებული განაყოფი იყოფა თუ არა 3-ზე. თუ იყოფა, გამოვიანგარიშოთ სათანადო განაყოფი. მიღებული განაყოფი კვლავ შევამოწმოთ 3-ზე და ა. შ.

მაგალითად, დავშალოთ 108. მოქმედება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 180=2^2\cdot 3^3.$$

თუ ცნობილია მოცემული რიცხვების კანონიკური დაშლა, მაშინ ადვილია უდიდესი საერთო გამყოფისა და უმცირესი საერთო ჯერადის მოძებნა (დაწვრილებით იხ. § 80, § 83).

მაგალითად, თუ მოცემული რიცხვების საერთო მამრავლებს ამოვწერთ და გადავამრავლებთ, მივიღებთ უდიდეს საერთო გამყოფს. თუ ერთი რიცხვის მამრავლებს ამოვწერთ და შევავსებთ იმ მარტივი მამრავლებით, რომლებიც სხვა რიცხვებშია და პირველ რიცხვში არ არის და გადავამრავლებთ, მივიღებთ უმცირეს საერთო ჯერადს.

ვიპოვოთ 108 და 156 უდიდესი საერთო გამყოფი—(108, 156) და უმცირესი საერთო ჯერადი—[108, 156].

$$108=2^2\cdot 3^3.$$
$$156=2^2\cdot 3\cdot 13.$$
$$(108,\ 156)=2^2\cdot 3=12.$$
$$[108,\ 156]=2^2\cdot 3^3\cdot 13=1404.$$

§ 77. მარტივ რიცხვთა თვისებები

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოდ დიდია, ე. ი. უსასრულოდ დიდია მარტივ და შედგენილ რიცხვთა სიმრავლე. გამოვარკვიოთ როგორი სიმრავლეა მარტივ რიცხვთაგან შედგენილი სიმრავლე. ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა, რომელიც ევკლიდეს თეორემის სახელწოდებითაა ცნობილი.

თეორემა 1. მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

დამტკიცება. მართლაც, დავუშვათ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია, მაშინ უნდა არსებობდეს ისეთი მარტივი რიცხვი p_k, რომელიც ყველა მარტივ რიცხვზე მეტია, ხოლო p_k-ზე მეტი ყველა რიცხვი შედგენილია.

განვიხილოთ ყველა მარტივი რიცხვის ნამრავლი:

$$p_1 p_2 \cdots p_k = P.$$

შევადგინოთ $P+1$;

$$P+1=p_1 p_2 \cdots p_k+1.$$

პირობის თანახმად $P+1$ შედგენილი რიცხვი უნდა იყოს, ამიტომ მას ერთი მარტივი გამყოფი მაინც უნდა ჰქონდეს. P იყოფა ყველა მარტივ რიცხვზე, ხოლო 1 არც ერთ მარტივ რიცხვზე არ იყოფა. ამგვარად, $P+1$ არც ერთ მარტივ რიცხვზე არ იყოფა, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას—$P+1$ შედგენილი რიცხვია. მაშასადამე, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

მარტივი, ურთიერთმომდევნო რიცხვებია 2 და 3. სხვა ასეთი წყვილი არ არსებობს, რადგანაც, თუ ერთი რიცხვი კენტია, მისი მომდევნო რიცხვი ლუწი იქნება.

მარტივ რიცხვებს, რომელთა შორის სხვაობა ტოლია 2-ისა, ეწოდება „ტყუპი“ რიცხვები.

მაგალითად, ტყუპი რიცხვებია: 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19. ასეთი რიცხვები გვხვდება შემდეგშიაც, მაგალითად: 14867, 14869. მაგრამ ჯერჯერობით გამორკვეული არ არის სასრულია თუ უსასრულო ტყუპ რიცხვთა სიმრავლე.

როგორიც უნდა იყოს k რიცხვი, არსებობს ისეთი წყვილი მარტივი რიცხვებისა P_n, P_{n+1}, რომელთა შორის k ან k-ზე მეტი შედგენილი რიცხვია.

მართლაც, ავიღოთ p მარტივი რიცხვი, რომელიც k-ზე მეტია. მაშინ განვიხილოთ p-ზე ნაკლები ყველა მარტივი რიცხვის ნამრავლი:

$$P=2\cdot3\cdot5\cdot7\ldots p.$$

შევადგინოთ ჯამები $P+2$, $P+3, \ldots, P+p$.

ეს რიცხვები ყველა შედგენილი რიცხვია. თუ P_n არის უდიდესი მარტივი რიცხვი, რომელიც ნაკლებია $P+2$, მაშინ მისი მომდევნო მარტივი რიცხვი მეტი იქნება $P+p$-ზე. ასე რომ,

$$P_n\leqslant P+1,\ P_{n+1}\geqslant P+p+1.$$

ამ რიცხვებს შორის სხვაობა,

$$P_{n+1}-P_n\geqslant(P+p+1)-(P+1)=p,$$

მეტია p-ზე, მაგრამ $p>k$, ამიტომ $P_{n+1}-P_n>k$.

ამგვარად, შევადგინეთ ისეთი მარტივი რიცხვების წყვილი, რომელთა შორის k ან k-ზე მეტი შედგენილი რიცხვია.

მაგალითად, $k=5$. p ავიღოთ 7-ის ტოლი, მაშინ $P=2\cdot3\cdot5\cdot7=210$,

$$P+p=210+7+217.\quad P_n=211,\ P_{n+1}=218.$$

ამგვარად, 211-სა და 218-ს შორის არის 6 შედგენილი რიცხვი:

212, 213, 214, 215, 216, 217.

მარტივი რიცხვების შესახებ ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2. თუ $n>3$, მაშინ n და $2n-2$ შორის ერთი მაინც მარტივი რიცხვია.

მაგალითად, 4-სა და 6-ს შორის არის მარტივი რიცხვი 5. 5-სა და 8-ს შორის მარტივი რიცხვია 7. ეს თეორემა ეკუთვნის ფრანგ მათემატიკოსს ჟოზეფ ბერტრანს. იგი ცნობილია ბერტრანის პოსტულატის სახელწოდებით. პირველად ეს თეორემა დაამტკიცა დიდმა რუსმა მათემატიკოსმა ლ. პ. ჩებიშევმა (1821—1894).

§ 78. მარტივ რიცხვთა შედგენის ერატოსთენის ხერხი

ფიქრობენ, რომ ბერძენმა მათემატიკოსმა ერატოსთენმა (250 წელი ჩვ. წელთაღრიცხვამდე) პირველად შეადგინა მარტივ რიცხვთა ცხრილი. ცხრილის შედგენის პრინციპი შემდეგია. დავწეროთ რიცხვები:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21,...(10) პირველი მარტივი რიცხვია 2. მისი ჯერადი ყველა რიცხვი შედგენილია. ყველა ეს რიცხვი (10) მიმდევრობაში გადავხაზოთ. შემდეგ ავიღოთ მარტივი რიცხვი 3. გადავხაზოთ 3-ის ჯერადი რიცხვები და ა. შ.

ამგვარად, (10) მიმდევრობაში გადავხაზოთ მიმდევრობით 2-დან ყველა მეორე, 3-დან ყველა მესამე რიცხვი (აქედან ზოგიერთი უკვე გადახაზულია), შემდეგ 5-დან ყველა მეხუთე (მეორე და მესამე რიცხვების გადახაზვით ზოგიერთი მეხუთე რიცხვი გადახაზული იქნება) და ა. შ. მივიღებთ მარტივ რიცხვთა შემდეგ მიმდევრობას:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ldots$$

დიდი ხანია ცდილობენ მონახონ ფორმულა

$$P_x=f(x) \qquad (x=1,\ 2,\ldots),$$

რომელიც მოგვცემდა ყველა მარტივ რიცხვს. მაგრამ, არა თუ ყველა მარტივი რიცხვის ფორმულა, არამედ ზოგიერთი მარტივი რიცხვის ფორმულაც არ არსებობს ყველა ნატურალური რიცხვისათვის. მიუხედავად ამისა, შეიძლება მივუთითოთ ზოგიერთ ფორმულაზე მარტივი რიცხვებისათვის.

მაგალითად,

$$P_x=x^2+x+17, \qquad 0\leqslant x\leqslant 15,$$
$$P_x=x^2-79x+1601; \quad 0\leqslant x\leqslant 79.$$

უკანასკნელი, როცა $x=80$, იძლევა 1681, რომელიც შედგენილი რიცხვია.

თავი XIV

მთელი რიცხვების გაყოფადობა

§ 70. რიცხვთა გამყოფები

ზემოთ განვმარტეთ, რომ a მთელი რიცხვი იყოფა b ნატურალურ რიცხვზე, თუ მოიძებნება ისეთი მთელი რიცხვი c, რომ შესრულდება ტოლობა

$$a=bc.$$

მოქმედება a იყოფა b-ზე (და არა a გავყოთ b-ზე) ასე აღვნიშნეთ:

$$a\ \vdots\ b.$$

ადვილი საჩვენებელია შემდეგ თეორემათა მართებულობა.

თეორემა 1. თუ $a \vdots b$ და $b \vdots c$, მაშინ $a \vdots c$.

დამტკიცება. მართლაც, თუ $a \vdots b$, მაშინ

$$a=bd. \tag{1}$$

თუ $b \vdots c$, მაშინ

$$b=ce.$$

შევიტანოთ b-ს მნიშვნელობა წინა ტოლობაში, მივიღებთ:

$$a=cde=c(ed).$$

ამგვარად,

$$a \vdots c.$$

თეორემა 2. თუ $a_1 \vdots b$ და $a_2 \vdots b$, მაშინ $(a_1 \pm a_2) \vdots b$.

დამტკიცება. მართლაც, პირობის თანახმად გვექნება:

$$a_1=c_1b, \quad a_2=c_2b,$$

მაშინ

$$a_1 \pm a_2=c_1b \pm c_2b=(c_1 \pm c_2)b.$$

მაშასადამე,

$$(a_1 \pm a_2) \vdots b.$$

a_1-a_2 სხვაობის შემთხვევაში იგულისხმება $a_1>a_2$.

თეორემა 3. თუ $a_1 \vdots b$ და a_2 მთელი რიცხვია, მაშინ $a_1a_2 \vdots b$.

დამტკიცება. მართლაც,

$$a_1=cb,$$

მაშინ ტოლობის ორივე მხარის a_2-ზე გამრავლება მოგვცემს:

$$a_1a_2=b \cdot ca_2.$$

მაშასადამე,

$$a_1a_2 \vdots b.$$

ცხადია, მე-2 და მე-3 თეორემები განზოგადდება შემდეგი სახით: თუ $a_1 \vdots b$, $a_2 \vdots b, \ldots, a_n \vdots b$, მაშინ

$$(p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n) \vdots b,$$

სადაც $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ნებისმიერი მთელი რიცხვებია.

§ 80. ორი რიცხვის საერთო გამყოფები და უდიდესი საერთო გამყოფი

რადგანაც ნატურალური a რიცხვი იყოფა ერთზედაც და თვით a რიცხვზედაც, ამიტომ 1 და a რიცხვი a-ს გამყოფებია. გარდა ამისა, a რიცხვს შეიძლება ჰქონდეს სხვა გამყოფებიც. მაგალითად, 12-ს, 1-ისა და 12-ის გარდა, აქვს გამყოფები: 2, 3, 4, 6. რადგანაც a რიცხვის გამყოფები არ შეიძლება იყოს a რიცხვზე მეტი, ამიტომ ყველა გამყოფი მოთავსებულია 1-სა და a-ს შორის და, მაშასადამე, გამყოფთა რიცხვი სასრულია.

ორ სხვადასხვა რიცხვს, 1-ის გარდა, შეიძლება ჰქონდეს საერთო გამყოფები. მაგალითად, 6-სა და 9-ს აქვთ საერთო გამყოფი 3, გარდა 1-ისა. 24-სა და 36-ს, გარდა 1-ისა, აქვთ საერთო გამყოფები 2, 3, 4, 6, 12; ამ რიცხვებიდან 12 უდიდესია.

ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება გამყოფებიდან უდიდეს რიცხვს.

a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი აღინიშნება (a, b), (b, a) გამოსახულებით.

მაგალითად,

$$(24, 36)=12, \quad (6, 9)=3,$$

$$(8, 12)=4. \quad (15, 30)=15.$$

იმ რიცხვებს, რომელთაც, გარდა ერთისა, არა აქვთ საერთო გამყოფი, ეწოდება ურთიერთმარტივი რიცხვები, ე. ი. a და b ურთიერთმარტივი რიცხვებია, თუ $(a, b)=1$. მაგალითად, 3 და 5 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, $(3, 5)=1$.

ურთიერთმარტივ რიცხვთა განმარტების შემდეგ შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა. თუ $a \vdots b$, $a \vdots c$ და $(b, c)=1$, მაშინ

$$a \vdots bc.$$

დამტკიცება. მართლაც, პირობის თანახმად $a=bd_1$. მაგრამ $a \vdots c$, ამიტომ $bd_1 \vdots c$, რადგანაც b არ იყოფა c-ზე, ამიტომ d_1 უნდა გაიყოს c-ზე, ე. ი. $d_1=cd_2$. d_1-ის მიღებული მნიშვნელობის a-ს მნიშვნელობაში ჩასმის შემდეგ გვექნება:

$$a=bcd_2.$$

ამგვარად,

$$a \vdots bc.$$

უდიდესი საერთო გამყოფის განმარტებიდან გამომდინარეობს მისი მოძებნის ხერხი: მოცემული რიცხვები უნდა დავშალოთ მარტივ თანამამრავლებად, ამოვწეროთ საერთო მამრავლები და გადავამრავლოთ.

მაგალითად, ვიპოვოთ 72 და 108 უდიდესი საერთო გამყოფი.

მოცემული რიცხვები დავშალოთ მარტივ თანამამრავლებად;

$$72=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3,$$

$$108=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3.$$

საერთო მამრავლების ამოწერა მოგვცემს:

$$(72, 108)=2\cdot2\cdot3\cdot3=36.$$

§ 81. ევკლიდეს ალგორითმი

უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის ზემოხსენებული ხერხი შრომატევადია. განვიხილოთ მეორე ხერხი, რომელიც ევკლიდეს ალგორითმის სახელწოდებითაა ცნობილი.

ავიღოთ a და b ნატურალური რიცხვები. ვთქვათ, $a>b$. გავყოთ a რიცხვი b რიცხვზე. მივიღებთ:

$$a=bq_1+r_1, \tag{1}$$

სადაც $r_1<b$.

ახლა b გავყოთ r_1-ზე;

$$b=r_1q_2+r_2. \tag{2}$$

შემდეგ r_1 გავყოთ r_2-ზე:

$$r_1=r_2q_3+r_3 \tag{3}$$

და ა. შ. გავაგრძელოთ მანამდე, სანამ r_{k+1} არ გახდება ნულის ტოლი:

$$r_{k-1}=r_kq_{k+1}. \tag{4}$$

მაშინ r_k იქნება უდიდესი საერთო გამყოფი.

მართლაც, (4) გამოსახულების მიმდევრობითი ჩასმა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} r_{k-2}&=r_{k-1}q_k+r_k=r_kq_{k+1}q_k+r_k=r_k(q_{k+1}q_k+1), \\ r_{k-3}&=r_{k-2}q_{k-1}+r_{k-1}=r_k(q_kq_{k+1}+1)q_{k-1}+r_kq_{k+1}= \\ &=r_k(q_kq_{k+1}q_{k-1}+q_{k+1}+q_{k-1})=r_kp_{k-3}, \end{aligned}$$

სადაც p_{k-3} აღნიშნავს ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებას.

ასეთი ჩასმების გაგრძელებით მივიღებთ:

$$r_1=p_1r_k,$$

$$r_2=p_2r_k,$$

ხოლო b და a-სათვის გვექნება:

$$b=p_br_k,$$

$$a=p_br_kq_1+p_1r_k=p_ar_k.$$

ამგვარად, a და b-ს აქვს საერთო გამყოფი r_k.

შევამოწმოთ, რომ r_k არის უდიდესი საერთო გამყოფი. მართლაც,

$$(a,\ b)=(b,\ r_1)=(r_1,\ r_2)=\ldots=(r_{k-1},\ r_k)=r_k.$$

მაგალითი. ვიპოვოთ (108, 72).

$$\begin{array}{r|l} -\,108 & 72 \\ \underline{72} & \overline{1} \\ -\,72 & 36 \\ \underline{72} & \overline{2} \\ 0 & \end{array}$$

ამგვარად, (108, 72) = 36.

საზოგადოდ, გაყოფის პროცესი ასე დავალაგოთ:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} b & r_1 \\ \hline r_2 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} r_1 & r_2 \\ \hline r_3 & q_3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} r_2 & r_3 \\ \hline 0 & q_4 \end{array}$$

საიდანაც $(a,\ b)=r_3$.

დავამტკიცოთ ასეთი თეორემა.

თეორემა 1. ორი a და b ნატურალური რიცხვისათვის $\frac{a}{(a,\ b)}$ და $\frac{b}{(a,\ b)}$ ურთიერთმარტივი რიცხვებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(a,\ b)=d$, მაშინ

$$a=cd, \quad b=kd, \tag{5}$$

სადაც c და k ნატურალური რიცხვებია. c-სა და k-ს რომ საერთო მამრავლი $p\neq 1$ ჰქონდეს, მაშინ გვექნებოდა:

$$c=c_1p \text{ და } d=d_1p.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი (5)-ში. მივიღებთ:

$$a=c_1pd, \quad b=d_1pd.$$

ამ ტოლობებიდან დავასკვნით:

$$(a,\ b)=pd,$$

რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამით თეორემა დამტკიცდა.

1-ლი თეორემა აშკარაა $(a,\ b)$-ს განსაზღვრიდანაც: $(a,\ b)$ წარმოადგენს a და b რიცხვების საერთო მამრავლებს. ამიტომ $\frac{a}{(a,\ b)}$ არ შეიცავს მამრავლებს, რომლებიც b-შია და მით უმეტეს იმ მამრავლებს, რომლებიც $\frac{b}{(a,\ b)}$-შია.

შევამოწმოთ შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თეორემა 2. თუ $a=cd_1$, $b=cd_2$, სადაც d_1 და d_2 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, მაშინ

$$(a,\ b)=c.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$(a,\ b)=d\neq c.$$

ცხადია,

$$d\geqslant c,$$

მაშინ

$$a=k_1d, \quad b=k_2d.$$

თუ თეორემის პირობას მხედველობაში მივიღებთ, გვექნება:

$$cd_1=k_1d, \quad cd_2=k_2d. \tag{2}$$

მაგრამ, რადგანაც d უდიდესი საერთო გამყოფია, ხოლო c—საერთო გამყოფი, ამიტომ $d \vdots c$, ანუ

$$d=pc, \tag{3}$$

სადაც $p>1$ ნატურალური რიცხვია. (3)-ის (2) ტოლობებში შეტანა მოგვცემს:

$$cd_1=k_1pc, \quad cd_2=k_2pc,$$

ანუ

$$d_1=k_1p, \quad d_2=k_2p.$$

ამგვარად, d_1 და d_2 ურთიერთმარტივი რიცხვები არ არის, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 3. თუ $(a, b)=d$, $a \vdots \delta$, $b \vdots \delta$, მაშინ

$$\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)=\frac{d}{\delta}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა, ვთქვათ,

$$(a, b)=d.$$

რადგანაც $a \vdots \delta$, $b \vdots \delta$, ამიტომ a და b რიცხვების საერთო უდიდესი გამყოფიც იყოფა δ-ზე, ე. ი.

$$d=k\delta. \tag{6}$$

სადაც k ნატურალური რიცხვია.

(6) ტოლობის გამო გვექნება:

$$a=dd_1=k\delta d_1.$$
$$b=dd_2=k\delta d_2.$$

აქედან

$$\frac{a}{\delta}=d_1k,$$
$$\frac{b}{\delta}=d_2k. \tag{7}$$

d_1 და d_2 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, მაშინ 1-ლი თეორემის თანახმად (7) ტოლობებიდან გვექნება:

$$\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)=k.$$

მაგრამ (6) ტოლობიდან

$$k=\frac{d}{\delta}.$$

მაშასადამე,

$$\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)=\frac{d}{\delta}.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 4. თ უ $(a, b)=d$, მ ა შ ი ნ $(am, bm)=dm$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ,

$$(am, bm)=d'. \tag{8}$$

მაშინ წინა თეორემის გამოყენებით $\delta=m$-სათვის (8) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\left(\frac{am}{m}, \frac{bm}{m}\right)=\frac{d'}{m},$$

ანუ
$$(a, b)=\frac{d'}{m}.$$
უკანასკნელი ტოლობის შედარება თეორემის პირობასთან მოგვცემს,
$$\frac{d'}{m}=d,$$
საიდანაც
$$d'=md.$$
შევიტანოთ d'-ის მნიშვნელობა (6) ტოლობაში. მივიღებთ:
$$(am, bm)=dm.$$
ამით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 5. თუ $ab \vdots c$ და $(a, c)=1$, მაშინ $b \vdots c$.

დამტკიცება. მართლაც,
$$(a, c)=1.$$
მაშინ წინა თეორემის გამოყენებით ამ ტოლობიდან მივიღებთ:
$$(ab, cb)=b. \tag{9}$$
მაგრამ პირობის თანახმად $ab \vdots c$, ამიტომ ab და cb ორივე რიცხვი იყოფა c-ზე. ამგვარად, თუ (9) ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა c-ზე, მაშინ მარჯვენა მხარეც გაიყოფა c-ზე:
$$\left(\frac{ab}{c}, \frac{cb}{c}\right)=\frac{b}{c}.$$
ამით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 6. თუ $(a, c)=1$ და $(b, c)=1$, მაშინ $(ab, c)=1$.

დამტკიცება. ვთქვათ,
$$(ab, c)=d, \tag{10}$$
მაშინ
$$ab \vdots d, \quad c \vdots d. \tag{11}$$
მეორე მხრივ, ტოლობიდან
$$(b, c)=1$$
მივიღებთ:
$$(ab, ac)=a.$$
რადგანაც ამ ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა d-ზე, ამიტომ a-ც უნდა გაიყოს d-ზე. თუ ამ პირობას დავუმატებთ $c \vdots d$, მაშინ ტოლობიდან
$$(a, c)=1$$
მივიღებთ
$$1 \vdots d.$$
მაშასადამე,
$$d=1.$$

ამიტომ (10) ტოლობიდან გვექნება:

$$(ab, c)=1.$$

ამით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 7. თუ ნატურალურ რიცხვთა ორი მიმდევრობის

$$a_1, a_2, \dots, a_m,$$
$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

ყოველი წყვილის

$$(a_i, b_k)=1 \qquad (i=1, 2, \dots, m; \ k=1, 2, \dots, n),$$

მაშინ

$$(a_1 a_2 \cdots a_m, b_1 b_2 \cdots b_n)=1.$$

დამტკიცება. ეს თეორემა დავამტკიცოთ მიმდევრობით.

რადგანაც

$$(a_1, b_k)=1, \ (a_2, b_k)=1,$$

ამიტომ წინა თეორემის თანახმად, გვექნება:

$$(a_1 a_2, \ b_k)=1.$$

ასევე ვაჩვენებთ, რომ

$$(a_1 a_2 a_3, \ b_k)=1,$$

რადგანაც

$$(a_1 a_2, b_k)=1 \ \text{ და } \ (a_3, \ b_k)=1.$$

პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ:

$$(a_1 a_2 \cdots a_m, \ b_k)=1,$$

ანუ

$$(A, b_k)=1, \tag{12}$$

სადაც A აღნიშნავს ნამრავლს: $a_1 a_2 \cdots a_m$.

(12) ასე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(b_k, A)=1.$$

თუ ამ უკანასკნელში k-ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას და გავიმეორებთ იმავე მოქმედებას, რაც a_i-სათვის გავიმეორეთ, მივიღებთ:

$$(b_1 b_2 \cdots b_n, \ A)=1,$$

ანუ

$$(b_1 b_2 \cdots b_n, \ a_1 a_2 \cdots a_m)=1,$$

რითაც თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 8. თუ $c \,\vdots\, a$, $c \,\vdots\, b$ და $(a, b)=1$, მაშინ $c \,\vdots\, ab$.

დამტკიცება. მართლაც, პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი ნატურალური q_1 და q_2 რიცხვები, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$c=aq_1, \quad c=bq_2, \tag{13}$$

ანუ

$$aq_1=bq_2,$$

საიდანაც

$$q_1=\frac{bq_2}{a}.$$

რადგანაც q_1 მთელი რიცხვია და $(a, b)=1$, ამიტომ q_2 იყოფა a-ზე:

$$\frac{q_2}{a}=t$$

ანუ

$$q_2=at,$$

სადაც t არის ნატურალური რიცხვი.

შევიტანოთ q_2-ის მნიშვნელობა (13)-ში. გვექნება

$$c=bat,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის მართებულობა:

$$c \vdots ab.$$

ამგვარად, თუ ნატურალური რიცხვი იყოფა ორ ურთიერთმარტივ რიცხვზე, მაშინ იგი ამ მარტივ რიცხვთა ნამრავლზედაც გაიყოფა. მაგალითად, რიცხვი, რომელიც 2-ზე დ, 3-ზე იყოფა, იყოფა 6-ზედაც.

§ 83. რიცხვთა ჯერადები

თუ $a \vdots b$, მაშინ a-ს ეწოდება b-ს ჯ ე რ ა დ ი. მაგალითად, 6 არის 2-ის ჯერადი.

თუ $a \vdots b$ და $a \vdots c$, მაშინ a-ს ეწოდება b და c რიცხვების ს ა ე რ თ ო ჯ ე რ ა დ ი. ცხადია, b და c რიცხვების საერთო ჯერადი უსასრულო რაოდენობისა არსებობს. მაგალითად, bc არის b და c რიცხვების საერთო ჯერადი. ასევე, ყველა რიცხვი, რომელიც bc-ზე იყოფა, იქნება აგრეთვე b და c რიცხვების საერთო ჯერადი.

ო რ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ს ა ე რ თ ო ჯ ე რ ა დ ე ბ ი დ ა ნ უ მ ც ი რ ე ს ს ე წ ო დ ე ბ ა ა მ რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს უ მ ც ი რ ე ს ი ს ა ე რ თ ო ჯ ე რ ა დ ი.

a და b რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი აღინიშნება გამოსახულებით: $[a, b]$.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. a და b რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს ს ა ე რ თ ო ჯ ე რ ა დ ი ი ყ ო ფ ა უ მ ც ი რ ე ს ს ა ე რ თ ო ჯ ე რ ა დ ზ ე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, a, b რიცხვების საერთო ჯერადია s რიცხვი, ხოლო უმცირესი საერთო ჯერადია t. დავამტკიცოთ, რომ $s \vdots t$. დავუშვათ საწინააღმდეგო—s არ იყოფა t-ზე, მაშინ

$$s=qt+r, \qquad (14)$$

სადაც

$$r<t.$$

რადგანაც $s \vdots a$ და $t \vdots a$, ამიტომ (1) ტოლობიდან, ცხადია, r-იც იყოფა a-ზე:

$$r=s-qt.$$

ასევე ვაჩვენებთ, რომ $r \vdots b$, მაშასადამე, r არის a და b რიცხვების საერთო ჯერადი, რომელიც ნაკლებია უმცირეს საერთო ჯერად t-ზე. ეს კი შეუძლებელია. ამგვარად, a და b რიცხვების საერთო ჯერადი იყოფა ამავე რიცხვების უმცირეს საერთო ჯერადზე.

თეორემა 2. *a და b რიცხვების ჯერადი იყოფა* $\frac{ab}{(a,\ b)}$-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(a,\ b)=d$, მაშინ

$$a=ud, \quad b=vd, \tag{15}$$

სადაც

$$(u,\ v)=1. \tag{16}$$

a და b რიცხვების საერთო ჯერადი იყოს M, მაშინ

$$M=as=uds, \tag{17}$$

სადაც s ნატურალური რიცხვია. მაგრამ $M \vdots b$, ამიტომ $\frac{uds}{b}$ არის ნატურალური რიცხვი. შევიტანოთ ამ გამოსახულებაში b-ს მნიშვნელობა (15)-დან, მივიღებთ:

$$\frac{uds}{vd}=\frac{us}{v}.$$

ე. ი. $\frac{us}{v}$ ნატურალური რიცხვია. მაგრამ, (16) პირობის თანახმად, u არ იყოფა v-ზე, ამიტომ s უნდა იყოფოდეს v-ზე, ანუ

$$s=vk, \tag{18}$$

სადაც k ნატურალური რიცხვია. (18)-დან s-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (17)-ში, მივიღებთ:

$$M=udvk. \tag{19}$$

მაგრამ (15) პირობის თანახმად გვაქვს

$$dv=b, \quad u=\frac{a}{d}.$$

შევიტანოთ უკანასკნელი მნიშვნელობანი (19)-ში, მივიღებთ:

$$M=\frac{ab}{d}k=\frac{ab}{(a,\ b)}k. \tag{20}$$

ე. ი. a და b რიცხვების საერთო ჯერადი იყოფა $\frac{ab}{(a,\ b)}$-ზე. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. a და b რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი ტოლია $\frac{ab}{(a,\ b)}$.

დამტკიცება. წინა თეორემის დამტკიცების დროს ვაჩვენეთ (20) ტოლობის მართებულობა:

$$M=\frac{ab}{(a,\ b)}k,$$

სადაც k ნატურალური რიცხვია. თუ ამ გამოსახულებაში $k=1$, მაშინ a და b რიცხვების საერთო ჯერადი M უმცირესი იქნება, ე. ი.

$$[a,\ b]=\frac{ab}{(a,\ b)}. \tag{21}$$

ამ ტოლობით თეორემა დამტკიცდა.

უკანასკნელი თეორემა იძლევა უმცირესი საერთო ჯერადის განსაზღვრის ხერხს.

მაგალითად, ვიპოვოთ [72, 54].

ჯერ ვიპოვოთ (72, 54). ამისათვის შევასრულოთ მიმდევრობითი გაყოფა (ევკლიდეს ალგორითმი):

$$\begin{array}{r|l} -\,72 & 54 \\ 54 & \overline{1} \\ \hline -\,54 & 18 \\ 54 & \overline{3} \\ \hline 0 & \end{array}$$

მივიღეთ

$$(72,\ 54)=18.$$

ვისარგებლოთ (21) ტოლობით, გვექნება:

$$[72,\ 54]=\frac{72\cdot 54}{18}=216.$$

(21) ტოლობიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ a და b რიცხვები ურთიერთმარტივია,

$$(a,\ b)=1,$$

მაშინ უმცირესი საერთო ჯერადი მათი ნამრავლის ტოლია:

$$[a,\ b]=ab.$$

თეორემა 4. თუ $a \vdots \delta$ და $b \vdots \delta$, მაშინ

$$\left[\frac{a}{\delta},\ \frac{b}{\delta}\right]=\frac{[a,\ b]}{\delta}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მართლაც, (8) ტოლობის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\left[\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]=\frac{\frac{a}{\delta}\cdot\frac{b}{\delta}}{\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)}. \tag{22}$$

გამოვიყენოთ 82-ე პარაგრაფის მე-3 თეორემა, მაშინ (22) მოგვცემს

$$\left[\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]=\frac{\frac{ab}{\delta^2}}{\frac{(a, b)}{\delta}}=\frac{\frac{ab}{\delta}}{(a, b)}=\frac{1}{\delta}\frac{ab}{(a, b)}=\frac{[a, b]}{\delta}.$$

ამ ტოლობით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 5. $[am, bm]=[a, b]m$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მართლაც, (21) ტოლობის საფუძველზე მივიღებთ:

$$[am, bm]=\frac{am\cdot bm}{(am, bm)}. \tag{23}$$

82-ე პარაგრაფის მე-4 თეორემის გამოყენებით (23) ტოლობა მოგვცემს:

$$[am, bm]=\frac{abm^2}{(a, b)m}=\frac{ab}{(a, b)}m=[a, b]m.$$

ამით თეორემა დამტკიცდა.

რამდენიმე რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი ასე განიმარტება. რ ა მ დ ე ნ ი მ ე რ ი ც ხ ვ ი ს უ მ ც ი რ ე ს ი ს ა ე რ თ ო ჯ ე რ ა დ ი ე წ ო დ ე ბ ა ი მ უ მ ც ი რ ე ს რ ი ც ხ ვ ს, რ ო მ ე ლ ი ც ი ყ ო ფ ა ყ ვ ე ლ ა მ ო ც ე მ უ ლ რ ი ც ხ ვ ზ ე უ ნ ა შ თ ო დ.

რამდენიმე რიცხვის უმცირესი ჯერადი მოიძებნება მიმდევრობით: ჯერ მოიძებნება ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი, შემდეგ— მიღებული რიცხვისა და მესამე რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი და ა. შ.

მაგალითად, მოვძებნოთ უმცირესი საერთო ჯერადი 8, 12, 16-ისა.

$$[8, 12]=\frac{8\cdot 12}{(8, 12)}=\frac{8\cdot 12}{4}=24,$$

$$[24, 16]=\frac{24\cdot 16}{(24, 16)}=\frac{24\cdot 16}{8}=48.$$

მაშასადამე $[8, 12, 16]=48$.

ვთქვათ, გვაქვს კანონიკურად წარმოდგენილი ორი რიცხვი:

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n},$$

$$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}.$$

ცხადია, აქ პირდაპირ შეგვიძლია ვთქვათ, იყოფა თუ არა a რიცხვი b რიცხვზე. მართლაც, თუ b რიცხვის ყველა მარტივი მამრავლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება a რიცხვის სათანადო მარტივი მამრავლის ხარისხის მაჩვენებელს, მაშინ a რიცხვი გაიყოფა b რიცხვზე.

ეს ნიშანი გაყოფადობის ზოგად ნიშანს — წარმოადგენს.

მაგალითად.

$$a=2^3\cdot3^2\cdot5^3,$$

$$b=2^2\cdot3\cdot5^2.$$

ცხადია,

$$a\,\vdots\,b.$$

გამოვიყვანოთ კიდევ გაყოფადობის სხვა ზოგადი ნიშანი.

წინასწარ განვმარტოთ g რიცხვის ხარისხიანი ნაშთები d მოდულით.

ვთქვათ, გვაქვს სისტემატური რიცხვის ფუძე $g>1$. გავყოთ d რიცხვზე რიცხვები:

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ \dots,\ g^n,\dots$$

სათანადო ნაშთები აღვნიშნოთ:

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \dots$$

ამ რიცხვებს ეწოდება g რიცხვის ხარისხიანი ნაშთები. მიუხედავად იმისა, რომ g-ს ხარისხების სიმრავლე უსასრულოა, ერთიმეორისაგან განსხვავებული ნაშთები მხოლოდ d რაოდენობის იქნება.

მაგალითად, $g=10$, $d=2$. 10-ის ხარისხები იქნება:

$$10^0,\ 10^1,\ 10^2\dots,$$

ხოლო ნაშთები იქნება: $1,\ 0,\ 0,\ \dots$

ე. ი. ნაშთებია 1 და ნული, სულ ორი მნიშვნელობაა ერთიმეორისგან განსხვავებული.

$g=10$, $d=3$, მაშინ გვექნება:

$$10^0:3=0(1),\ \ 10^1:3=3(1),\ \ 10^2:3=33(1),\dots$$

ე. ი. ყველა ნაშთი 1-ის ტოლია.

$g=10$, $d=4$, მაშინ გვექნება:

$$10^0:4=0(1),\ \ 10^1:4=2(2),\ \ 10^2:4=25(0),$$

$$10^3:4=250(0),\dots$$

ამგვარად, ნაშთებია:

$$1,\ 2,\ 0,\ 0, \ldots$$

საერთოდ გვექნება:

$$g^n = q_n d + r_n, \tag{24}$$

სადაც q_n არის განაყოფი, ხოლო r_n—ნაშთი.

ავიღოთ სისტემატური რიცხვი a,

$$a = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0} = \sum_{n=0}^{k} a_n g^n.$$

თითოეული g^n შევცვალოთ (24) ტოლობიდან, მივიღებთ:

$$a = \sum_{n=0}^{k} a_n (q_n d + r_n) = \left(\sum_{n=0}^{k} a_n q_n \right) d + \sum_{n=0}^{k} a_n r_n.$$

ე. ი.

$$a = Qd + S, \tag{25}$$

სადაც

$$Q = \sum_{n=0}^{k} a_n g_n, \qquad S = \sum_{n=0}^{k} a_n r_n. \tag{26}$$

ამგვარად, ყოველი a ნატურალური რიცხვი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ d რიცხვის ჯერადისა—Qd და S რიცხვის ჯამით, სადაც S მიიღება a ნატურალური რიცხვიდან g_n ხარისხების r_n ნაშთებით შეცვლით.

(25) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $a \vdots d$, თუ $S \vdots d$. ამაში მდგომარეობს გაყოფადობის მეორე ზოგადი ნიშანი (რომელიც გაყოფადობის პასკალის ნიშნადაა ცნობილი): მოცემული სისტემატური a რიცხვი იყოფა d რიცხვზე მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა d-ზე იყოფა a რიცხვის g ფუძით ყველა ციფრისა და სათანადო ნაშთების ნამრავლების ჯამი. ნაშთები აღებულია g-ს ხარისხებისაგან d მოდულით.

გაყოფადობის პასკალის ზოგადი ნიშნიდან შეგვიძლია მივიღოთ გაყოფადობის კერძო ნიშანი. მაგალითად, რა რიცხვი გაიყოფა 2-ზე?

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები $g=10$, $r_0=1$, $r_1=r_2=\cdots=0$, ამიტომ

$$S = r_0 a_0 = a_0.$$

ე. ი.

$$S \vdots 2, \text{ თუ } a_0 \vdots 2.$$

მაშასადამე, 2-ზე გაიყოფა ყველა რიცხვი, რომლის ერთეულების ციფრი იყოფა 2-ზე.

რა რიცხვი გაიყოფა 3-ზე?

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ,

$$r_0 = r_1 = \cdots = 1,$$

ამიტომ

$$S = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$

მაშასადამე, 3-ზე იყოფა ის რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე.

რა რიცხვი იყოფა 4-ზე?

როგორც ვნახეთ

$$r_0=1,\ r_1=2,\ r_2=r_3=\ldots=0,$$

ამიტომ გვექნება:

$$S=a_1\cdot 2+a_0.$$

ეს უკანასკნელი ასე გარდავქმნათ:

$$S=2a_1+8a_1+a_0-8a_1=a_1\cdot 10+a_0-8a_1=\overline{a_1a_0}-8a_1.$$

ცხადია, $8a_1 \vdots 4$, ამიტომ S რომ გაიყოს 4-ზე საკმარისია, $\overline{a_1a_0} \vdots 4$.

ამგვარად, 4-ზე გაიყოფა ის რიცხვი, რომლის ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვი იყოფა 4-ზე.

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ 5-ზე გაიყოფა ის რიცხვი, რომლის ერთეულების ციფრი 0 ან 5-ია.

8-ზე გაიყოფა ის რიცხვი, რომლის სამი ბოლო ციფრისაგან შედგენილი რიცხვი იყოფა 8-ზე.

9-ზე იყოფა ის რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე.

რადგანაც

$$(2,\ 3)=1,\ (4,\ 3)=1,\ (5,\ 3)=1,\ (9,\ 2)=1,$$

ამიტომ გვექნება (§ 75, თეორემა 8):

$$a \vdots 6,\ \text{თუ}\ a \vdots 2\ \text{და}\ a \vdots 3:$$
$$a \vdots 12,\ \text{თუ}\ a \vdots 3\ \text{და}\ a \vdots 4;$$
$$a \vdots 15,\ \text{თუ}\ a \vdots 3\ \text{და}\ a \vdots 5;$$
$$a \vdots 18,\ \text{თუ}\ a \vdots 2\ \text{და}\ a \vdots 9\quad \text{და სხვ.}$$

თავი XV

სისტემატური წილადები

§ 85. მოკლე ცნობები სისტემატურ წილადებზე

ზემოთ ნატურალურ რიცხვთა ჩასაწერად შემოვიღეთ ფუძე g. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი ჩაიწერება g ციფრით: 0, 1, 2,..., $g-1$. პრაქტიკაში ღებულობენ $g=10$. მაგრამ სისტემატური რიცხვების თეორიის ჩამოსაყალიბებლად სრულიად არ არის აუცილებელი g იყოს 10-ის ტოლი. განვიხილოთ ჯამი:

$$a_ng^n+a_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a_0g^0+\frac{b_1}{g}+\frac{b_2}{g^2}+\cdots+\frac{b_m}{g^m}=$$
$$=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0,\ b_1\cdots b_m}.$$

ეს ჯამი წარმოადგენს გარკვეულ რიცხვს, რომელიც ჩაწერილია g ფუძით. აღებულ ჯამს ეწოდება სისტემატური წილადი g ფუძით. ე. ი. სისტემატური წილადი g ფუძით ეწოდება წილადს, რომლის მნიშვნელია g^i, სადაც i არის სათანადო ნატურალური რიცხვი ან ნული.

მთელი და წილადი ნაწილი ერთიმეორისაგან გამოყოფილია მძიმით —(,). მძიმის მარჯვენივ ციფრებს ათწილადის ნიშნები ეწოდება.

სისტემატურ წილადში ციფრს ადგილის მიხედვით აქვს მნიშვნელობა. არითმეტიკული მოქმედებანი სისტემატურ წილადებზე უფრო მარტივად წარმოებს, ვიდრე ჩვეულებრივ წილადზე.

ორი წილადის საერთო მნიშვნელამდე დაყვანა ხდება უბრალოდ ნულების მიწერით ისე, რომ ორივე ათწილადში ტოლი რაოდენობის ათწილადის ნიშნები იყოს. 3,142 და 25,6 საერთო მნიშვნელამდე ასე დაიყვანება:

$$3{,}142;\ 25{,}600.$$

ორივე ათწილადი მეათასედია. უმეტეს შემთხვევაში 0-ების მიწერა არ არის აუცილებელი. საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ სათანადო რაოდენობის ნულები უკვე აქვს მიწერილი.

სისტემატური წილადების შეკრება წარმოებს ისევე, როგორც სისტემატური ნატურალური რიცხვების შეკრება:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0,\ \ b_1 b_2\cdots b_m}+\overline{a'_n a'_{n-1}\cdots a'_0,\ \ b'_1 b'_2\cdots b'_m}=$$

$$=a_n g^n+a_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a_0 g^0+\frac{b_1}{g}+\frac{b_2}{g^2}+\cdots+\frac{b_m}{g^m}+$$

$$+a'_n g^n+a'_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a'_0 g^0+\frac{b'_1}{g}+\frac{b'_2}{g^2}+\cdots+\frac{b'_m}{g^m}=$$

$$=c_n g^n+c_{n-1}g^{n-1}+\cdots+c_0 g^0+\frac{d_1}{g}+\frac{d_2}{g^2}+\cdots+\frac{d_m}{g^m}=$$

$$=\overline{c_n c_{n-1}\cdots c_0,\ d_1 d_2\cdots d_m},$$

სადაც c_i ($i=0, 1, 2, \ldots, n$), d_j ($j=1, 2, \ldots, m$) შედგენილია სათანადო თანრიგის ციფრების შეკრებით.

ასევე შესრულდება სისტემატური რიცხვების გამოკლება, მაგალითად, $g=6$,

$$\begin{array}{r} -\ 24{,}321 \\ 15{,}25 \\ \hline 5{,}031 \end{array}$$

სისტემატური წილადების გამრავლება სისტემატური ნატურალური რიცხვების ანალოგიურად წარმოებს:

მაგალითად, 54,2·3,64.

$$54{,}2\cdot 3{,}64=\frac{542}{10}\cdot\frac{364}{100}=\frac{542\cdot 364}{10^3}=197{,}288.$$

ამგვარად, სისტემატური რიცხვების გამრავლებისათვის, საჭიროა მძიმეს ყურადღება არ მივაქციოთ და გადავამრავლოთ როგორც მთელი რიცხვები. მიღებულ ნამრავლში გამოვყოთ მარჯვნიდან მარცხნივ იმდენი ათწილადი ნიშანი, რამდენი ათწილადი ნიშანიცაა ორივე მამრავლში ერთად.

თანრიგის ერთეულებზე—10, 100,... გამრავლება წარმოებს მძიმის გადატანით მარჯვნივ იმდენი ციფრის შემდეგ რამდენი ნულიცაა მამრავლში.

მაგალითად,

$$5{,}2341\cdot 100=\frac{52341}{10^4}\cdot 100=\frac{52341}{10^2}=523{,}41.$$

სისტემატური წილადების ნატურალურ რიცხვზე გაყოფა ისე წარმოებს, როგორც ნატურალური რიცხვების გაყოფა;

$$32{,}64:8=\left(3\cdot 10+2+\frac{6}{10}+\frac{4}{10^2}\right):8=$$

$$=\left(24+6+2+\frac{56}{100}+\frac{4+4}{100}\right):8=$$

$$=3+1+\frac{7}{100}+\frac{1}{100}=4+\frac{8}{10^2}=4{,}08.$$

ე. ი.

$$\begin{array}{r|l} -\,32{,}64 & 8 \\ \underline{32} & \overline{4{,}08} \\ -\,64 & \\ \underline{64} & \\ 0 & \end{array}$$

სისტემატურ წილადზე გაყოფა დაიყვანება ნატურალურ რიცხვზე გაყოფამდე, რისთვისაც საკმარისია გასაყოფი და გამყოფი გავამრავლოთ ერთეულის ისეთ თანრიგზე, რომ გამყოფში მივიღოთ ნატურალური რიცხვი.

მაგალითად,

$$0{,}364:0{,}04.$$

გასაყოფისა და გამყოფის 100-ზე გამრავლება მოგვცემს:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,36{,}4 & 4 \\
\underline{36} & \overline{9{,}1} \\
-\,4 & \\
\underline{4} & \\
0 &
\end{array}
$$

§ XII. ჩვეულებრივი წილადის სისტემატურ წილადად წარმოდგენა

ერთი წილადის მეორეზე გაყოფა, თუ გასაყოფსა და გამყოფს ჩვეულებრივი წილადის სახით დავწერთ, ყოველთვის სრულდება. განაყოფი ჩვეულებრივი წილადის სახით მიიღება.

დავსვათ კითხვა: შეიძლება თუ არა განაყოფი გამოვსახოთ სასრული ათწილადით?

თუ შევნიშნავთ, რომ $10=2\cdot 5, 100=2^2\cdot 5^2, \ldots, 10^n=2^n\cdot 5^n$, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჩვეულებრივი წილადი, რომლის მნიშვნელი მხოლოდ 2-ებსა და 5-ებს შეიცავს, გამოისახება სასრული ათწილადის სახით.

მაგალითად,

$$\frac{3}{50}=\frac{3}{5\cdot 10}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2\cdot 10}=\frac{6}{10^2}=0{,}06,$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{5\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\;5\cdot 2\cdot 5}=0{,}125.$$

თუ $g=6$, მაშინ ამ სისტემაში ყველა წილადი, რომლის მნიშვნელი შეიცავს 2-ებსა და 3-ებს, ყოველთვის წარმოიდგინება ექვსობით სისტემაში. ამისათვის საკმარისია, მრიცხველი და მნიშვნელი $2^k 3^p$-ზე გავამრავლოთ, სადაც k და p მთელი რიცხვები სათანადოდ უნდა შეირჩეს.

თუ $g=15$, მაშინ ყველა წილადი, რომლის მნიშვნელი 3-ებისა და 5-ების ნამრავლს წარმოადგენს, წარმოიდგინება სასრული სისტემატური წილადის სახით.

პირიქით, ჩვეულებრივ წილადად სისტემატური წილადის წარმოდგენა ხდება განმარტების საფუძველზე:

$$\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0,\ b_1\cdots b_m}=\frac{\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0 b_1\cdots b_m}}{g^m}.$$

შემდეგ კი, თუ შესაძლებელია, წილადს გავამარტივებთ.

მაგალითად,

$$1{,}5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

ვაჩვენოთ შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თეორემა. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ჩვეულებრივი უკვეცი წილადი წარმოვადგინოთ ათწილადად, იმაში მდგომარეობს, რომ წილადის მნიშვნელის კანონიკური დაშლა შეიცავდეს მხოლოდ $2^{\alpha}5^{\beta}$, სადაც α და β შეიძლება იყოს 0, 1,...

დამტკიცება. პირობის საკმარისობა.

ვთქვათ, $\frac{a}{b}$ წილადის მნიშვნელი $b=2^{\alpha}5^{\beta}$, სადაც $\alpha>\beta$. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^{\alpha}5^{\beta}}=\frac{a}{2^{\beta}5^{\beta}\cdot2^{\alpha-\beta}}=\frac{a\cdot5^{\alpha-\beta}}{10^{\beta}\cdot2^{\alpha-\beta}\cdot5^{\alpha-\beta}}=$$

$$=\frac{a\cdot5^{\alpha-\beta}}{10^{\beta}\cdot10^{\alpha-\beta}}=\frac{a\cdot5^{\alpha-\beta}}{10^{\alpha}}.$$

ამით პირობის საკმარისობა დამტკიცდა.

დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა.

ვთქვათ, წილადი $\frac{a}{b}$ წარმოდგენილია ათწილადის სახით. ვაჩვენოთ, რომ მნიშვნელის კანონიკური დაშლა არ შეიცავს 2-ისა და 5-ის გარდა, სხვა მარტივ რიცხვს:

$$\frac{a}{b}=\overline{a_na_{n-1}\dots a_0,b_1\dots b_m}=\frac{\overline{a_na_{n-1}\dots a_0b_1\dots b_m}}{10^m}.$$

თუ წილადი $\frac{\overline{a_na_{n-1}\dots a_0b_1\dots b_m}}{10^m}$ უკვეცია, მაშინ

$$b=10^m=2^m\cdot5^m,$$

ხოლო თუ იკვეცება d-ზე, მაშინ

$$10^m=dv,\quad \overline{a_na_{n-1}\dots a_0b_1\dots b_m}=du.$$

ამ ტოლობათა შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{a}{b}=\frac{ud}{vd}=\frac{u}{v},$$

საიდანაც

$$b=v.$$

ვაჩვენოთ, რომ v არ შეიცავს, 2-ისა და 5-ის გარდა, სხვა მარტივ რიცხვს. ვთქვათ, v შეიცავს სხვა მარტივ რიცხვს p-ს, ე. ი. $v=pv'$, მაგრამ $10^m=dv=dpv'$, საიდანაც $10^m \vdots p$, რაც შეუძლებელია, რადგანაც 10^m არ იყოფა სხვა მარტივ რიცხვზე, გარდა 2-ისა და 5-ისა. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

§ 87. სისტემატური წილადების ტოლობა და უტოლობა

ვთქვათ, მოცემულია ორი სისტემატური წილადი. წინასწარ ეს წილადები გავაერთმნიშვნელიანოთ და შემდეგ ჩავწეროთ ჩვეულებრივ წილადებად. ცხადია, ამ წილადებიდან ის წილადი იქნება მეტი, რომლის მრიცხველიც მეტია.

მაგალითად, შევადაროთ 2,523 და 2,4, წინასწარ გავაერთმნიშვნელიანოთ და მერე გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად:

$$2{,}523=\frac{2\,523}{10^3}, \quad 2{,}400=\frac{2\,400}{10^3}.$$

რადგანაც

$$2\,523>2\,400,$$

ამიტომ

$$2{,}523>2{,}4.$$

თავი XVI

პერიოდული წილადები

§ 88. ჩვეულებრივი წილადი, რომელიც არ გადაიქცევა სასრულ ათწილადად

ავიღოთ წილადი $\frac{1}{3}$. მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ 10-ზე. მრიცხველში მიღებული 10 გავყოთ 3-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{1}{3}=\frac{10\cdot 1}{10\cdot 3}=\frac{\frac{10}{3}}{10}=\frac{3+\frac{1}{3}}{10}.$$

მრიცხველში მიღებულ $\frac{1}{3}$-ზე გავიმეოროთ წინა მოქმედება, გვექნება:

$$\frac{1}{3}=\frac{3+\frac{1\cdot 10}{3\cdot 10}}{10}=\frac{3+\frac{3+\frac{1}{3}}{10}}{10}=0{,}1\left[3+0{,}1\left(3+\frac{1}{3}\right)\right].$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ და გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ;

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}(3).$$

ახლა ავიღოთ ზოგადად წილადი $\frac{a}{b}$, რომლის მნიშვნელიც არ შეიცავს

მარტივ მამრავლებს 2-სა და 5-ს. გაყოფა მოვახდინოთ მიმდევრობით, ისე როგორც $\frac{1}{3}$-სათვის.

$$\frac{a}{b}=\frac{10a}{10b}=\frac{1}{10}\cdot\frac{10a}{b}=\frac{1}{10}\left(q_1+\frac{r_1}{b}\right)\quad (r_1<b), \tag{1}$$

$$\frac{r_1}{b}=\frac{10r_1}{10b}=\frac{1}{10}\cdot\frac{10r_1}{b}=\frac{1}{10}\left(q_2+\frac{r_2}{b}\right)\quad (r_2<b).$$

და ა. შ. მიმდევრობითი ჩასმით უკანასკნელი ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{10}q_1+\frac{1}{10^2}q_2+\frac{r_2}{b}.$$

პროცესის ამგვარად გაგრძელებით მივიღებთ:

$$\frac{a}{b}=\overline{0,q_1q_2\ldots q_k}+\frac{r_k}{10^kb}\quad (r_k<b).$$

ვაჩვენოთ, რომ $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ნაშთებს შორის არც ერთი არ უდრის ნულს. მართლაც, თუ რომელიმე $r_i=0$, მაშინ გვექნება:

$$\frac{a}{b}=\overline{0,q_1q_2\ldots q_i}.$$

ე. ი. $\frac{a}{b}$ წილადი გადაიქცევა სასრულ ათწილადად, რაც შეუძლებელია, რადგანაც b არ შეიცავს მარტივ მამრავლებს 2-სა და 5-ს. ამგვარად, $r_1, r_2, \ldots, r_k$-დან არც ერთი არ უდრის ნულს.

ცხადია, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ნაშთებიდან ყველა არ შეიძლება იყოს ერთიმეორისაგან განსხვავებული, რადგანაც ყველა r_i ნაკლებია b-ზე. მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება იყოს $b-1$.

ამგვარად, მიმდევრობიდან

$$r_1,\ r_2, \ldots,\ r_k,\ r_{k+1}, \ldots$$

r_k უნდა იყოს ერთ-ერთი ნაშთის ტოლი $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ ნაშთებიდან.

ვთქვათ, $r_k=r_i$, მაშინ ვაჩვენოთ, რომ

$$r_{k+1}=r_{i+1}, \ldots, r_{k+j}=r_{i+j},$$

სადაც j ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

რადგანაც $r_k=r_i$, ამიტომ შემდეგი გაყოფის დროს მივიღებთ:

$$\frac{r_k}{b}=\frac{10r_k}{10b}=\frac{1}{10}\frac{10r_k}{a}=\frac{1}{10}\left(q_{k+1}+\frac{r_{k+1}}{b}\right). \tag{2}$$

r_i-სათვის გვექნება:

$$\frac{r_i}{b}=\frac{10r_i}{10b}=\frac{1}{10}\ \frac{10r_i}{10}=\frac{1}{10}\left(q_{i+1}+\frac{r_{i+1}}{b}\right), \tag{3}$$

განაყოფისა და ნაშთის ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე (2) და (3) ტოლობებიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$q_{k+1}=q_{i+1},$$
$$r_{k+1}=r_{i+1}. \quad (4)$$

თუ გამოსავალ ტოლობად მივიღებთ (4) ტოლობას, მაშინ გვექნება:

$$r_{k+2}=r_{i+2},$$
$$q_{k+2}=q_{i+2}$$

და ასე შემდეგ:

$$r_{k+j}=r_{i+j},$$
$$q_{k+j}=q_{i+j}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $r_k=r_i$ ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$r_{k-1}=r_{i-1}.$$

თუ (2) და (3) ტოლობაში k-ს შევცვლით k—1-ით, ხოლო i-ს შევცვლით i—1-ით, გვექნება:

$$\frac{10r_{k-1}}{b}=q_k+\frac{r_k}{b},$$
$$\frac{10r_{i-1}}{b}=q_i+\frac{r_i}{b},$$

ანუ

$$10r_{k-1}=bq_k+r_k, \quad (5)$$
$$10r_{i-1}=bq_i+r_i. \quad (6)$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$10(r_{k-1}-r_{i-1})=b(q_k-q_i). \quad (7)$$

ვთქვათ, $r_{k-1}\neq r_{i-1}$, $r_{k-1}>r_{i-1}$, მაშინ (7)-დან მივიღებთ:

$$10(r_{k-1}-r_{i-1}) \vdots b.$$

მაგრამ 10 არ იყოფა b-ზე, ამიტომ გვექნება:

$$r_{k-1}-r_{i-1} \vdots b,$$

ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც $r_{k-1}<b$, $r_{i-1}<b$. მაშასადამე, r_{k-1} არ არის მეტი r_{i-1}-ზე.

თუ დავუშვებთ, რომ $r_{k-1}<r_{i-1}$ და (6) ტოლობას გამოვაკლებთ (5) ტოლობას, მივიღებთ:

$$(r_{i-1}-r_{k-1}) \vdots b,$$

ესეც შეუძლებელია. ამგვარად, მივიღებთ:

$$r_{k-1}=r_{i-1}.$$

პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ:

$$r_1=r_{i-k+1}.$$

თუ აღვნიშნავთ $i-k=t$, მაშინ გვექნება:

$$r_1=r_{t+1}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$r_t=a.$$

მართლაც, დავუშვათ, რომ $r_t>a$, მაშინ (1) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$10a=q_1b+r_1, \tag{8}$$

ხოლო r_t-სათვის გვექნება:

$$10r_t=q_{t+1}b+r_{t+1}. \tag{9}$$

(8) და (9) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$10(a-r_t)=(q_1-q_{t+1})b,$$

ე. ი.

$$10(a-r_t) \vdots b. \tag{10}$$

მაგრამ 10 არ იყოფა b-ზე, მაშასადამე, $(a-r_t) \vdots b$, რაც შეუძლებელია, რადგანაც $a<b$, $r_t<b$, მაშასადამე, a არ არის მეტი r_t.

თუ დავუშვებთ, რომ a ნაკლებია r_t-ზე, მაშინ იმავე მსჯელობით, რომლითაც (10) დამოკიდებულება მივიღეთ, გვექნება:

$$10(r_t-a) \vdots b,$$

საიდანაც

$$(r_t-a) \vdots b,$$

რაც აგრეთვე შეუძლებელია.

ამგვარად, ვღებულობთ:

$$a=r_t.$$

ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ

$$q_{k+j}=q_{i+j}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ q_i $(i=1, 2,\ldots)$ მთელი და 10-ზე ნაკლები რიცხვებია. q_i რომ მთელი რიცხვებია გამომდინარებს მათივე განსაზღვრიდან.

q_i-სათვის გვაქვს ტოლობა:

$$\frac{r_{i-1}}{b}=\frac{1}{10}\left(q_i+\frac{r_i}{b}\right),$$

ანუ

$$\frac{r_{i-1}}{b}=\frac{q_i}{10}+\frac{r_i}{10b}. \tag{11}$$

მაგრამ

$$r_{i-1}<b,\ r_i<b,$$

ამიტომ (11) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{q_i}{10}<1,$$

ანუ

$$q_i<10.$$

მაშასადამე, q_i ერთნიშნა რიცხვებია.

საბოლოოდ მივიღეთ რომ, თუ b არ შეიცავს არც 2-სა და არც 5-ს, მაშინ წილადი $\frac{a}{b}$ წარმოიდგინება ერთადერთი ათწილადის სახით:

$$\frac{a}{b}=\overline{0,q_1q_2\cdots q_tq_{t+1}\cdots q_{2t}q_{2t+1}\cdots}=\overline{0,(q_1q_2\cdots q_t)},$$

სადაც

$$q_1=q_{t+1}=q_{2t+1}=\cdots$$
$$q_2=q_{t+2}=q_{2t+2}=\cdots$$
$$r_1=r_{t+1}=r_{2t+1}=\cdots$$

და ა. შ.

იმ უმცირეს τ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$r_1=r_{\tau+1}$$

ან, რაც იგივეა,

$$q_1=q_{\tau+1},$$

ეწოდება მიმდევრობითი ნაშთების პერიოდის სიგრძე ან უბრალოდ პერიოდი.

მაგალითად, 0,33... პერიოდის სიგრძე უდრის 1-ს, 0,2525... პერიოდის სიგრძე—2-ს.

ამგვარად დავამტკიცეთ ასეთი

თეორემა. თუ $(b, 10)=1$, მაშინ წილადი $\frac{a}{b}$ წარმოიდგინება სისტემატური პერიოდული წილადით მხოლოდ ერთადერთი სახით:

$$\frac{a}{b}=\overline{0,(q_1q_2\cdots q_\tau)}.$$

§ 60. უსასრულო პერიოდული წილადები

განვიხილოთ მწკრივი

$$a_0+\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g^2}+\cdots \tag{12}$$

ამ მწკრივში a_0 მთელი რიცხვია, ხოლო $a_1, a_2, \ldots$ ციფრები $(0, 1, 2, \ldots, g-1)$. (12) მწკრივი, საერთო აღნიშვნის თანახმად, ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\overline{a_0,a_1a_2\ldots a_k\cdots}$$

თუ რაიმე a_i-დან დაწყებული

$$a_i=a_{i+1}=\ldots.=0,$$

მაშინ (12) მწკრივს ეწოდება სასრული სისტემატური მწკრივი:

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_i}{10^i}+\frac{0}{10^{i+1}}+\dots=\overline{a_0,a_1a_2\dots a_i}.$$

თუ არსებობს ისეთი უმცირესი τ რიცხვი, რომ დაწყებული რაიმე j რიგიდან ადგილი აქვს ტოლობებს

$$a_{j+i+k\tau}=a_{j+i}\qquad (i=1,\ 2,\dots,\ \tau),$$

სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ (12) მწკრივს ეწოდება პერიოდული მწკრივი, ხოლო შესაბამის წილადს — უსასრულო პერიოდული სისტემატური წილადი.

კერძოდ, თუ $g=10$, მაშინ წილადს პერიოდული ათწილადი ეწოდება.

მაგალითად,

$$\frac{1}{7}=0+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{8}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{7}{10^6}+$$
$$+\frac{1}{10^7}+\dots=0,(142857).$$

წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ, თუ $(b,\ 10)=1$, მაშინ უკვეცი წილადი $\frac{a}{b}$ იძლევა უსასრულო პერიოდულ ათწილადს

$$\overline{a_0,q_1q_2\dots q_\tau q_{\tau+1}\dots},$$

სადაც

$$q_1=q_{\tau+1},\quad q_2=q_{\tau+2},\dots,\quad q_\tau=q_{2\tau}=\dots$$

ასეთ პერიოდულ ათწილადს წმინდა პერიოდული ათწილადი ეწოდება.

მაშასადამე, თუ $(b,\ 10)=1$, მაშინ წილადი $\frac{a}{b}$ წარმოიდგინება წმინდა პერიოდულ ათწილადად.

თუ უსასრულო ათწილადში ციფრთა გამეორება იწყება რაიმე j ციფრის შემდეგ, მაშინ პერიოდულ ათწილადს შერეული პერიოდული ათწილადი ეწოდება.

მაგალითად,

$$2,5733\dots=9,57(3),$$
$$3,12525\dots=3,1(25)$$

შერეული პერიოდული ათწილადებია.

ვთქვათ, b და 10 ურთიერთმარტივი რიცხვები არ არის, მაშინ b-სათვის გვექნება კანონიკური დაშლა

$$b=2^m5^n\alpha.$$

ვთქვათ, $m>n$, მაშინ წილადი $\frac{a}{b}$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m 5^n \alpha}=\frac{a}{(2\cdot 5)^n 2^{m-n}\alpha}.$$

ამ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ 5^{m-n}-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot 5^{m-n}}{(2\cdot 5)^n 2^{m-n} 5^{m-n}\alpha}=\frac{a\cdot 5^{m-n}}{10^m\cdot\alpha}=\frac{a\cdot 5^{m-n}}{\alpha}\cdot\frac{1}{10^m}.$$

რადგანაც წილადი $\frac{a\cdot 5^{m-n}}{\alpha}$ სუფთა პერიოდულ წილადს იძლევა, მისი $\frac{1}{10^m}$-ზე გამრავლებისათვის ათწილადის ნიშანი უნდა გადავიტანოთ მარჯვნიდან მარცხნივ m ათწილად ნიშანზე. მაშინ მივიღებთ შერეულ პერიოდულ ათწილადს, რომელშიაც პერიოდამდე სწორედ m ათწილადი ნიშანი იქნება.

ამგვარად, დავამტკიცეთ ასეთი

თეორემა. თუ ჩვეულებრივი უკვეცი წილადის მნიშვნელს აქვს სახე $2^m 5^n \alpha$, სადაც m და n მთელი რიცხვებია, ხოლო α არის ერთისაგან განსხვავებული 10-ის მიმართ მარტივი რიცხვი, მაშინ ასეთი წილადი წარმოიდგინება შერეულ პერიოდულ ათწილადად, რომელშიაც პერიოდამდე ათწილად ნიშანთა რაოდენობა ტოლია m და n რიცხვებიდან უდიდესი რიცხვისა.

§ 90. პერიოდული წილადის გადაქცევა ჩვეულებრივ წილადად

ავიღოთ წმინდა პერიოდული წილადი $\overline{0,(d_1 d_2 \dots d_n)}$ და ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\overline{0,(d_1 d_2 \dots d_k)}=\frac{d_1 d_2 \dots d_k}{10^k-1}.$$

მართლაც, ავიღოთ წილადები $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$,... და გადავაქციოთ ათწილადებად:

$$\frac{1}{9}=0,(1),$$

$$\frac{1}{99}=0,(01),$$

$$\frac{1}{999}=0,(001) \text{ და ა. შ.}$$

ეს ტოლობანი ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\left.\begin{aligned} 0,(1)&=\frac{1}{10-1}, \\ 0,(01)&=\frac{1}{10^2-1}, \\ 0,(001)&=\frac{1}{10^3-1} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

და ა. შ.

ცხადია,

$$\overline{0,(d_1d_2\ldots d_k)}=\overline{d_1d_2\ldots d_k}\cdot\overbrace{\overline{0,(00\ldots01)}}^{k \text{ ნიშანი}}. \qquad (14)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (13), მაშინ (14) მოგვცემს:

$$\overline{0,(d_1d_2\ldots d_k)}=\overline{d_1d_2\ldots d_k}\cdot\frac{1}{10^k-1}.$$

ამგვარად

$$\overline{0,(d_1d_2\ldots d_k)}=\frac{\overline{d_1d_2\ldots d_k}}{10^k-1}. \qquad (15)$$

მაშასადამე, დავამტკიცეთ

თეორემა 1. ყოველი წმინდა პერიოდული ათწილადი $\overline{0,(d_1d_2\ldots d_k)}$ ტოლია ჩვეულებრივი წილადისა

$$\frac{\overline{d_1d_2\ldots d_k}}{10^k-1}.$$

ახლა ავიღოთ შერეული პერიოდული ათწილადი $\overline{0,z_1z_2\ldots z_i(d_1d_2\ldots d_k)}$ ან შემოკლებით $0,Z(D)$. ეს წილადი ასე წარმოიდგინება:

$$0,Z(D)=0,Z+\frac{1}{10^i}0,(D). \qquad (16)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (15), მაშინ (16) მოგვცემს:

$$0,Z(D)=0,Z+\frac{1}{10^i}\,\frac{D}{10^k-1}=\frac{Z}{10^i}+\frac{D}{10^i(10^k-1)}.$$

უკანასკნელიდან გაერთმნიშვნელიანებით მივიღებთ:

$$0,Z(D)=\frac{Z(10^k-1)+D}{10^i(10^k-1)}=\frac{(10^kZ+D)-Z}{10^i(10^k-1)}. \qquad (17)$$

ამგვარად დავამტკიცეთ ასეთი

თეორემა 2. *შერეული პერიოდული ათწილადი* $0,Z(D)$ *წარმოიდგინება შემდეგი სახის ჩვეულებრივ წილადად*

$$\frac{(10^kZ+D)-Z}{10^l(10^k-1)}.$$

მაგალითად,

$$0,(3)=\frac{3}{10-1}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};$$

$$0,21(3)=\frac{(10\cdot 21+3)-21}{10^2(10-1)}=\frac{192}{900}.$$

თუ დავაკვირდებით (15) ფორმულას მივიღებთ შემდეგს: *წმინდა პერიოდული წილადი რომ ჩვეულებრივ წილადად ვაქციოთ, საკმარისია მისი პერიოდი მრიცხველად დავწეროთ, ხოლო მნიშვნელში ციფრი 9 იმდენჯერ დავწეროთ, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში.*

(17) ტოლობიდან მივიღებთ:

შერეული პერიოდული წილადი რომ ჩვეულებრივ წილადად ვაქციოთ, საჭიროა მეორე პერიოდამდე დაწერილ რიცხვს 10^kZ+D *გამოვაკლოთ პირველ პერიოდამდე დაწერილი რიცხვი* Z *და მიღებული სხვაობა დავწეროთ მრიცხველად, მნიშვნელად კი იმდენი 9-იანი დავწეროთ, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში და იმდენი ნული მივუწეროთ რამდენი ციფრიცაა პერიოდამდე წილად ნაწილში.*

§ 91. პერიოდის სიგრძე

წილადის პერიოდის სიგრძის განსაზღვრისათვის დავამტკიცოთ

თეორემა 1. *თუ* t *ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომ* $r_j=r_{t+j}$, *მაშინ*

$$(10^t-1)\,\vdots\,b,$$

სადაც r_j სათანადო ნაშთია, j კი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი.

დამტკიცება. მართლაც, მიმდევრობითი გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{a}{b}=0,q_1q_2\cdots q_k+\frac{r_k}{10^kb},$$

საიდანაც

$$10^k a=\overline{q_1 q_2 \ldots q_k}\cdot b+r_k, \tag{18}$$

სადაც k სათანადო ნატურალური რიცხვია. როგორც წინა პარაგრაფში გვქონდა, $r_j=r_{j+t}$ ტოლობის საფუძველზე, $r_t=a$. მაშასადამე, თუ $t=k$, მაშინ (18) ტოლობა მოგვცემს:

$$10^t a-r_t=\overline{q_1 q_2 \ldots q_t}\cdot b,$$

ანუ

$$10^t a-a=\overline{q_1 q_2 \ldots q_t}\cdot b,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$(10^t-1)a=\overline{q_1 q_2 \ldots q_t}\cdot b.$$

რადგანაც $(a, b)=1$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$(10^t-1) \vdots b.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $t=\tau$ პერიოდის სიგრძეს, მაშინ

$$(10^\tau-1) \vdots b.$$

ვაჩვენოთ დამტკიცებული თეორემის შებრუნებული თეორემის მართებულობაც.

თეორემა 2. თ უ 10^t-1 ი ყ ო ფ ა b-ზ ე, მ ა შ ი ნ

$$r_j=r_{j+t}.$$

ე. ი. ი ს ნ ა შ თ ე ბ ი, რ ო მ ე ლ თ ა ნ ო მ რ ე ბ ს შ ო რ ი ს გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ ა t-ს ტ ო ლ ი ა, ე რ თ მ ა ნ ე თ ი ს ტ ო ლ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (18) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$10^t a=\overline{q_1 q_2 \ldots q_t}\cdot b+r_t. \tag{18'}$$

რადგანაც 10^t-1 იყოფა b-ზე, ამიტომ $10^t-1=bu$ (u ნატურალური რიცხვია), საიდანაც

$$10^t=bu+1.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის a-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$10^t a=abu+a.$$

უკანასკნელი ტოლობის (18′)-თან შედარება მოგვცემს:

$$\overline{q_1 q_2 \ldots q_t}\cdot b+r_t=abu+a. \tag{19}$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$r_t=a.$$

ვთქვათ, $a>r_t$. (19) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a-r_t=\overline{q_1 q_2 \ldots q_t}\cdot b-abu,$$

ანუ

$$a-r_t=b(\overline{q_1 q_2 \ldots q_t}-au).$$

ამ ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $a-r_t$ იყოფა b-ზე, რაც შეუძლებელია, რადგანაც $a<b$ და $r_t<b$.

ასევე ვაჩვენებთ, რომ $a<r_t$ შეუძლებელია. მაშასადამე, გვრჩება ერთი შესაძლებლობა:

$$a=r_t.$$

შევამოწმოთ ტოლობა

$$r_{t+1}=r_1.$$

ნაშთ r_t-სათვის გვაქვს

$$\frac{r_t}{b}=\frac{1}{10}q_{t+1}+\frac{r_{t+1}}{10b},$$

საიდანაც

$$10r_t=bq_{t+1}+r_{t+1},$$

ანუ

$$10a=bq_{t+1}+r_{t+1}. \tag{20}$$

მაგრამ, მეორე მხრივ, გვაქვს

$$10a=q_1b+r_1. \tag{21}$$

ნაშთისა და განაყოფის ერთადერთობის თანახმად, (20) და (21) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$r_{t+1}=r_1.$$

ასევე ვაჩვენებთ, რომ

$$r_{t+2}=r_2$$

და ა. შ.

ამგვარად, შებრუნებული თეორემაც დამტკიცებულია.

მაშასადამე, ვაჩვენეთ, რომ მიმდევრობითი განაყოფებისა და ნაშთების **პერიოდის სიგრძე** τ **ისეთი უმცირესი ნატურალური რიცხვია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:**

$$10^{\tau}-1 \;\vdots\; b. \tag{22}$$

ეს პირობა განსაზღვრავს წილადის პერიოდის სიგრძეს.

მაგალითად, რას უდრის $\frac{1}{9}$-ის პერიოდის სიგრძე?

ამისათვის უნდა მოვნახოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი τ, რომ $10^{\tau}-1$ გაიყოს 9-ზე, ასეთი რიცხვია 1:

$$10^1-1 \;\vdots\; 9.$$

მართლაც,

$$\frac{1}{9}=0,11\ldots=0,(1).$$

მაგალითად, განვსაზღვროთ $\frac{5}{7}$-ის პერიოდის სიგრძე.

შევამოწმოთ მიმდევრობით $10^{\tau}-1$ იყოფა თუ არა 7-ზე.

$$10^{\tau}-1=10\ldots0-1=\overbrace{99\ldots9}^{\tau\text{-ჯერ}},$$

9 არ იყოფა 7-ზე.

99 არ იყოფა 7-ზე.

$$\begin{array}{l} 999:7=142, \\ \;29 \\ \;\;19 \\ \;\;\;\;5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9999:7=1428, \\ \;29 \\ \;\;19 \\ \;\;\;59 \\ \;\;\;\;\;3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 99999:7=14285, \\ \;29 \\ \;\;19 \\ \;\;\;59 \\ \;\;\;\;39 \\ \;\;\;\;\;\;4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 999999:7=142857. \\ \;29 \\ \;\;19 \\ \;\;\;59 \\ \;\;\;\;39 \\ \;\;\;\;\;49 \\ \;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

მაშასადამე, 999999 იყოფა 7-ზე, ამიტომ პერიოდის სიგრძე 6.

განხილული მაგალითიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ τ განსაზღვრისათვის ცხრიანებით შედგენილი რიცხვი უნდა გავყოთ მოცემული წილადის მნიშვნელზე. ამიტომ ავიღოთ რიცხვი 9 და დავიწყოთ მისი გაყოფა b-ზე. თუ 9 არ გაიყოფა b-ზე, 9-ს მივუწეროთ 9 და მიღებული 99 გავყოთ b-ზე. თუ 99 არ გაიყოფა, მივუწეროთ კიდევ 9 და 999 გავყოთ b-ზე და ა. შ. ასეთი მოქმედება გავაგრძელოთ მანამდე, ვიდრე ცხრიანებით შედგენილი რიცხვი არ გაიყოფა b-ზე. ცხრიანების რაოდენობა მოგვცემს წილადის პერიოდის სიგრძეს τ-ს.

მაგალითად, გავიგოთ $\frac{7}{13}$-ის პერიოდის სიგრძე.

$$\begin{array}{r} 99:13=76923. \\ -\;91 \\ 89 \\ -\;78 \\ 119 \\ -\;117 \\ 29 \\ -\;26 \\ 39 \\ -\;39 \\ 0 \end{array}$$

მაშასადამე, $\frac{7}{13}$-ის პერიოდის სიგრძე 6-ის ტოლია.

ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ნატურალური რიცხვი t, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$r_j=r_{j+t},$$

$\frac{a}{b}$ წილადის τ პერიოდის ჯერადია.

დავუშვათ, რომ t არ იყოფა τ-ზე, მაშინ

$$t=q\tau+r \qquad (r<\tau).$$

მაგრამ 10^t-1 იყოფა b-ზე, ანუ

$$10^{q\tau+r}-1 \vdots b,$$

ე. ი.

$$10^{q\tau}10^r-1 \vdots b. \tag{23}$$

რადგანაც $10^{q\tau}-1$ იყოფა b-ზე, ამიტომ

$$10^{q\tau}-1=bu,$$

ანუ

$$10^{q\tau}=bu+1.$$

შევიტანოთ უკანასკნელი მნიშვნელობა (23) პირობაში, მივიღებთ:

$$(bu+1)10^r-1 \vdots b,$$

ანუ

$$10^r bu+10^r-1 \vdots b.$$

მაგრამ $10^r bu$ იყოფა b-ზე, ამიტომ b-ზე უნდა გაიყოს 10^r-1. ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც $r<\tau$ და τ ისეთი რიცხვია, რომ $10^\tau-1 \vdots b$.

ზემოთ განხილულ მაგალითებში τ-ს გასაგებად ვიღებდით $\tau=1, 2,\ldots$ და ვამოწმებდით პირობას: $10^\tau-1$ იყოფა თუ არა b-ზე. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ τ შეიძლება უსასრულოდ დიდი იყოს. τ-ს განსაზღვრისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი თეორემით (დაუმტკიცებლად).

თეორემა 8. $\frac{a}{b}$ წილადის პერიოდის სიგრძე τ არის b-ზე ნაკლები და b-ს მიმართ მარტივი რიცხვი, სადაც $(b, 10)=1$.

§ 92. მოქმედებანი პერიოდულ წილადებზე

ადვილი წარმოსადგენია, რომ ორი პერიოდული ათწილადის შეკრებისათვის საკმარისია, ორივე შესაკრები ისე დავწეროთ, რომ მათი პერიოდის სიგრძეები ტოლი იყოს. მაგალითად, თუ ერთი შესაკრების პერიოდშია 2 ციფრი და მეორე შესაკრების პერიოდში—3 ციფრი, მაშინ ავიღოთ შესაკრებები პერიოდში ექვს-ექვსი ციფრით. მაგალითად,

$$\begin{array}{r} 0,(25)+0,(312)=0,(252525) \\ +0,(312312) \\ \hline 0,(564837). \end{array}$$

თუ პერიოდის სიგრძეები სხვადასხვაა და პერიოდული წილადები შერეულია, მაშინ წილადები ისეთ შერეულ პერიოდულ წილადებად ჩავწეროთ, რომ პერიოდამდე ათწილადი ციფრების რაოდენობა ტოლი იყოს. მაგალითად,

$$0,34(256)+0,6(72)=0,34(256)+0,67(27)=$$
$$=0,34(256256)+0,67(272727)=1,01(528983).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ პერიოდული წილადების გამოკლება შემდეგნაირად შესრულდება $(1=0,(9))$:

1) $5,2(9)-3,6(92)=5,2(99)-3,6(92)=1,6(07).$

2) $3-1,(4)=2,(9)-1,(4)=1,(5).$

3) $6,(1)-2,(5)=4,(1)-0,(5)=3,(1)+0,(9)-0,(5)=$
$$=3,(1)+0,(4)=3(5).$$

სარჩევი