ე. კოჩეტკოვი
ე. კოჩეტკოვა

ალგებრა და ელემენტარული ფუნქციები

დამხმარე სახელმძღვანელო საშუალო სკოლის
X კლასისათვის

მეშვიდე გამოცემა

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1973

ეს წიგნი განკუთვნილია მე-10 კლასის მოსწავლეთათვის და წარმოადგენს სახელმძღვანელოს — „ალგებრა და ელემენტარული ფუნქციების“ მეორე ნაწილს.

ორივე წიგნში დაცულია თავების, პარაგრაფების, საკითხების და სავარჯიშოების ერთიანი ნუმერაცია.

მანძილი სიბრტყის ორ წერტილს შორის. კოორდინატთა სისტემები § 149

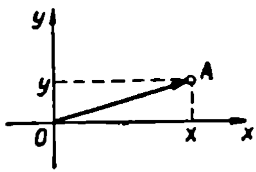
სიბრტყის ყოველი A წერტილი ხასიათდება თავისი (x, y) კოორდინატებით. ისინი ემთხვევიან O წერტილიდან — კოორდინატთა სათავიდან გამოსული $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის კოორდინატებს (ნახ. 216).

ვთქვათ, A და B სიბრტყის ნებისმიერი წერტილებია, შესაბამისად (x_1, y_1) და (x_2, y_2) კოორდინატებით (ნახ. 217). მაშინ, ცხადია, $\overrightarrow{AB}$ ვექტორს აქვს (x_2-x_1, y_2-y_1) კოორდინატები. ცნობილია, რომ ვექტორის სიგრძის კვადრატი უდრის მისი კოორდინატების კვადრატების ჯამს (იხ. ნაწ. I, § 92). ამიტომ A და B წერტილებს შორის მანძილი d, ანუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე, განისაზღვრება პირობიდან

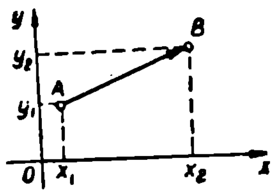
$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

აქედან

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



ნახ. 216.

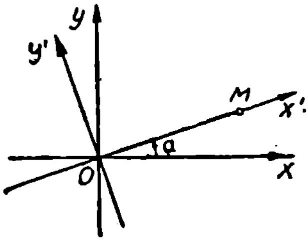


ნახ. 217.

მიღებული ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ მანძილი სიბრტყის ყოველ ორ წერტილს შორის, თუკი ცნობილია ამ წერტილების კოორდინატები.

ყოველთვის, როდესაც სიბრტყის ამა თუ იმ წერტილის კოორდინატებზე ვლაპარაკობთ, მხედველობაში გვაქვს სავსებით განსაზღვრული xOy კოორდინატთა სისტემა. საერთოდ კი, კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე სხვადასხვანაირად შეიძლება შეირჩეს. ხე, მაგალითად, xOy კოორდინატთა სისტემის მაგივრად შეიძლება განვიხილოთ კოორდინატთა

$x'Oy'$ სისტემა (ნახ. 218), რომელიც მიიღება საწყისი O წერტილის ირგვლივ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, კოორდინატთა ძველი ღერძების α კუთხით შემობრუნების შედეგად. თუ სიბრტყის რომელიმე წერტილს xOy კოორდინატთა სისტემაში ჰქონდა (x, y) კოორდინატები, მაშინ $x'Oy'$ კოორდინატთა ახალ სისტემაში მას ექნება უკვე სხვა (x', y') კოორდინატები.



ნახ. 218.

მაგალითისათვის განვიხილოთ M წერტილი, რომელიც მდებარეობს Ox' ღერძზე და O წერტილიდან დაშორებულია 1-ის ტოლი მანძილით (ნახ. 218). ცხადია, xOy კოორდინატთა სისტემაში ამ წერტილს აქვს $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ კოორდინატები, ხოლო $x'Oy'$ კოორდინატთა სისტემაში — (1, 0) კოორდინატები.

სიბრტყის ყოველი ორი A და B წერტილის კოორდინატები დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორაა ამ სიბრტყეში მოცემული კოორდინატთა სისტემა. ამ წერტილებს შორის მანძილი კი არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის მოცემის ხერხზე. ამ მნიშვნელოვან გარემოებას არსებითად გამოვიყენებთ შემდეგ პარაგრაფში.

სავარჯიშოები

1024. იპოვეთ მანძილები სიბრტყის წერტილებს შორის, რომელთა კოორდინატებია:

1) (3,5) და (3,4); 3) (0,5) და (5,0); 5) (—3,4) და (9, —17);
2) (2,1) და (—5, 1); 4) (0,7) და (3,3); 6) (8,21) და (1, —3).

1025. იპოვეთ იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის გვერდები მოცემულია განტოლებებით:

$$x+y-1=0, \qquad 2x-y-2=0 \text{ და } y=1.$$

1026. xOy კოორდინატთა სისტემაში M და N წერტილებს აქვს შესაბამისად (1, 0) და (0, 1) კოორდინატები. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები კოორდინატთა ახალ სისტემაში, რომელიც მიიღება საწყისი წერტილის ირგვლივ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ძველი ღერძების 30°-იანი კუთხით მობრუნების შედეგად.

1027. xOy კოორდინატთა სისტემაში M და N წერტილებს შესაბა-

მისად აქვს (2, 0) და $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ კოორდინატები. იპოვეთ ამ წერტილების კოორდინატები კოორდინატთა ახალ სისტემაში, რომელიც მიიღება საწყისი წერტილის ირგვლივ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, ძველი ღერძების 30°-იანი კუთხით მობრუნების შედეგად.

ამ პარაგრაფში დამტკიცებული იქნება შემდეგი ორი ფორმულა:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

ორი კუთხის ჯამის (სხვაობის) კოსინუსი უდრის ამ კუთხეების კოსინუსების ნამრავლს, მინუს (პლუს) ამავე კუთხეების სინუსების ნამრავლი

ჩვენთვის უფრო მოსახერხებელია დავიწყოთ (2) ფორმულის დამტკიცებით. გამოთქმის სიმარტივისათვის წინასწარ ვივარაუდოთ, რომ α და β კუთხეები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) თითოეული ამ კუთხეთაგანი დადებითია და აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია 2π-ზე: $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta<2\pi$,

2) $\alpha\geqslant\beta$.

ვთქვათ, Ox ღერძის დადებითი ნაწილი α და β კუთხეების საერთო საწყისი გვერდია (ნახ. 219). ამ კუთხეების ბოლო გვერდები აღვნიშნოთ შესაბამისად OA და OB-თი. ცხადია, $\alpha-\beta$ კუთხე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ისეთი კუთხე, რომელზედაც უნდა მოვაბრუნოთ OB სხივი O წერტილის ირგვლივ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რომ მისი მიმართულება დაემთხვეს OA სხივის მიმართულებას.

OA და OB სხივებზე აღვნიშნოთ M და N წერტილები, რომლებიც კოორდინატთა O სათავიდან დაშორებულია 1 ერთეული მანძილით, ასე რომ $OM=ON=1$. xOy კოორდინატთა სისტემაში M წერტილს აქვს $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ კოორდინატები, ხოლო N წერტილს — $(\cos\beta, \sin\beta)$ კოორდინატები. ამიტომ მათ შორის მანძილის კვადრატი უდრის:

$$d_1^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+$$
$$+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=2(1-\cos\alpha\cos\beta-$$
$$-\sin\alpha\sin\beta).$$

გამოთვლების დროს ვისარგებლეთ იგივეობით:

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1.$$

ახლა განვიხილოთ მეორე — BOC კოორდინატთა სისტემა, რომელიც მიიღება Ox და Oy ღერძების O წერტილის ირგვლივ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, β კუთხით შემობრუნების შედეგად. კოორდინატთა ამ სისტემაში M წერტილს აქვს $[\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta)]$ კოორდინატები, ხოლო N წერტილს — (1,0) კოორდინატები. ამიტომ მათ შორის მანძილის კვადრატი უდრის:

$$d_2^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2=\cos^2(\alpha-\beta)-$$

$$-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)=2[1-\cos(\alpha-\beta)].$$

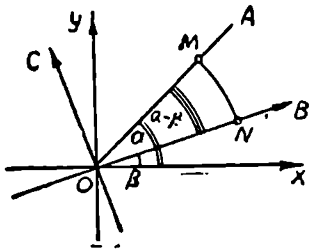
მაგრამ M და N წერტილებს შორის მანძილი არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ კოორდინატთა როგორი სისტემის მიმართ ვიხილავთ ამ წერტილებს. ამიტომ

$$d_1^2=d_2^2;$$

ანუ

$$2(1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$
$$=2[1-\cos(\alpha-\beta)].$$

აქედან გამომდინარეობს (2) ფორმულა.



ნახ. 219.

ახლა უნდა გავიხსენოთ ის ორი შეზღუდვა, რომლებიც გადმოცემის სიმარტივისათვის α და β კუთხეებს წავუყენეთ.

მოთხოვნა, რომ α და β კუთხეებიდან თითოეული იყოს არაუარყოფითი, მართლაც, არაარსებითია. თითოეულს ამ კუთხეთაგან ხომ შეიძლება მიემატოს 2π-ს ჯერადი კუთხე, რაც არავითარ გავლენას არ მოახდენს (2) ფორმულის მართებულობაზე. სწორედ ასევე, მოცემული კუთხეებიდან თითოეულს შეიძლება გამოვაკლოთ 2π-ს ჯერადი კუთხე. ამიტომ შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta<2\pi$.

არაარსებითი აღმოჩნდება $\alpha\geqslant\beta$ პირობაც. მართლაც, თუ $\alpha<\beta$, მაშინ $\beta>\alpha$; ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ $\cos x$-ის ლუწობას, მივიღებთ:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha,$$

რაც არსებითად ემთხვევა (2) ფორმულას.

ამრიგად,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ფორმულა მართებულია ნებისმიერი α და β კუთხეებისათვის. კერძოდ, თუ მასში β-ს შევცვლით — β-თი და გავითვალისწინებთ, რომ $\cos x$ ფუნქცია ლუწია, ხოლო $\sin x$ ფუნქცია — კენტი, მივიღებთ:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

რაც ამტკიცებს (1) ფორმულას.

ამრიგად, (1) და (2) ფორმულები დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1) $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 45^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

სავარჯიშოები

1028. გამოიანგარიშეთ ტრიგონომეტრიული ცხრილების გარეშე

ა) $\cos 17^\circ\cdot\cos 43^\circ-\sin 17^\circ\cdot\sin 43^\circ$;

ბ) $\sin 3^\circ\cdot\sin 42^\circ-\cos 3^\circ\cdot\cos 42^\circ$;

გ) $\cos 29^\circ\cdot\cos 74^\circ+\sin 29^\circ\cdot\sin 74^\circ$;

დ) $\sin 97^\circ\cdot\sin 37^\circ+\cos 37^\circ\cdot\cos 97^\circ$;

ე) $\cos\frac{3}{8}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3}{8}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{8}$;

ვ) $\sin\frac{3}{5}\pi\cdot\sin\frac{7}{5}\pi-\cos\frac{7}{5}\pi\cdot\cos\frac{3}{5}\pi$.

გაამარტივეთ გამოსახულებანი (№ 1029—1034).

1029. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1030. $\cos(36^\circ+\alpha)\cdot\cos(24^\circ-\alpha)+\sin(36^\circ+\alpha)\cdot\sin(\alpha-24^\circ)$.

1031. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1032. $\cos 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

1033. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

1034. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

1035. გამოიანგარიშეთ: ა) cos (α—β), თუ

$$\cos\alpha = -\frac{2}{5}, \quad \sin\beta = -\frac{5}{13};$$
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ, \qquad 180^\circ < \beta < 270^\circ.$$

ბ) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, თუ $\cos\alpha = 0{,}6$;

$$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi.$$

1036. იპოვეთ cos (α+β) და cos (α—β), თუ ცნობილია, რომ $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ და ორივე კუთხე (α და β) ბოლოვდება ერთსა და იმავე მეოთხედში.

გამოიანგარიშეთ:

1037. $\cos\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,cos}\frac{2}{3}\right)$.

1038. $\cos\left[\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{3} - \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

1039. $\cos\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}(-2)\right]$.

ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის სინუსი § 131

წინა პარაგრაფში cos (α±β)-სათვის მიღებული ფორმულები ახლა გამოვიყენოთ sin (α±β)-სათვის შესაბამისი ფორმულების გამოყვანისას. ამისათვის მოგვიხდება დაყვანის ფორმულებით (იხ. ნაწ. I, § 111) სარგებლობა.

sin (α+β) წარმოვადგინოთ

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right]$$

სახით. ამის შემდეგ შევნიშნავთ, რომ

$$\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta.$$

მაშასადამე,

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\cos\beta +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\sin\beta = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

ამრიგად,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha. \qquad (1)$$

ორი კუთხის ჯამის სინუსი უდრის პირველი კუთხის სინუსისა და მეორე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს, პლუს მეორე კუთხის სინუსისა და პირველი კუთხის კოსინუსის ნამრავლი.

მაგალითად,

$$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cdot\cos 60^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

(1) ფორმულა იგივობაა, ესე იგი ტოლობა, რომელიც მართებულია α და β-ს ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. კერძოდ, იგი მართებული უნდა იყოს, თუ β-ს შევცვლით — β-თი. ასეთი შეცვლით მივიღებთ

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cdot\cos\alpha=$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

ამრიგად,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

ორი კუთხის სხვაობის სინუსი უდრის პირველი კუთხის სინუსისა და მეორე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს, მინუს მეორე კუთხის სინუსისა და პირველი კუთხის კოსინუსის ნამრავლი.

მაგალითად,

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

სავარჯიშოები

1040. გამოიანგარიშეთ:

ა) $\sin 19^\circ\cdot\cos 26^\circ+\sin 26^\circ\cdot\cos 19^\circ$;

ბ) $\sin 46^\circ\cdot\cos 44^\circ+\cos 46^\circ\cdot\sin 44^\circ$;

გ) $\sin 61^\circ\cdot\cos 31^\circ-\cos 61^\circ\cdot\sin 31^\circ$;

დ) $\sin 53^\circ\cdot\cos 7^\circ-\cos 53^\circ\cdot\sin(-7^\circ)$;

ე) $\sin(-15^\circ)\cdot\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\cdot\sin 75^\circ$.

გაამარტივეთ გამოსახულებანი (№ 1041—1047):

1041. $\cos(25^\circ+\alpha)\cdot\sin(15^\circ-\alpha)+\sin(25^\circ+\alpha)\cdot\cos(15^\circ-\alpha)$.

1042. $\sin(96^\circ-\alpha)\cdot\cos(36^\circ+\alpha)-\cos(96^\circ-\alpha)\cdot\sin(36^\circ+\alpha)$.

1043. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$.

1044. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$.

1045. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$.

1046. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cdot\cos\beta}$.

1047. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$.

1048. იპოვეთ $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$, თუ $\sin\alpha=-0{,}8$.

1049. იპოვეთ $\sin(\alpha+\beta)$ და $\sin(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{13}}{4}$, ამასთან, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

1050. იპოვეთ $\sin(\alpha+\beta)$ და $\sin(\alpha-\beta)$, თუ ცნობილია, რომ $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$; $\sin\beta=-\dfrac{5}{13}$, ამასთან, ორივე α და β კუთხე ბოლოვდება სხვადასხვა მეოთხედში.

გამოთვალეთ

1051. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}+\arccos\dfrac{2}{3}\right)$.

1052. $\sin\left[\arcsin\dfrac{1}{2}+\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right]$.

1053. $\sin(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2)$.

1054. $\sin\left[\arcsin\left(-\dfrac{1}{7}\right)+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის ტანგენსი § 137

ფორმულები, რომლებიც გამოსახავენ ორი კუთხის ჯამის (სხვაობის) სინუსსა და კოსინუსს ამავე კუთხეების სინუსებითა და კოსინუსებით, საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ შესაბამისი ფორმულები ტანგენსისა და კოტანგენსისათვის.

მართლაც,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\cos\alpha$ და $\cos\beta$ განსხვავებულია ნულისაგან (ეს იმის ტოლფასია, რომ $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{tg}\beta$ განსაზღვრულია). მაშინ, თუ უკანასკნელი წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავყოფთ $\cos\alpha\cdot\cos\beta$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

ამრიგად, თუკი α, β და $\alpha+\beta$ კუთხეების ტანგენსები განსაზღვრულია, მაშინ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \tag{1}$$

ორი კუთხის ჯამის ტანგენსი უდრის ამავე კუთხეების ტანგენსების ჯამს, გაყოფილს ერთისა და ამავე კუთხეების ტანგენსების ნამრავლის სხვაობაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

თუ (1) ფორმულაში β-ს შევცვლით $(-\beta)$-თი და გავითვალისწინებთ, რომ $y=\operatorname{tg}x$ კენტი ფუნქციაა, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

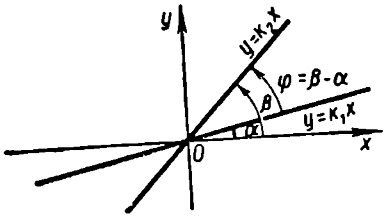
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

ორი კუთხის სხვაობის ტანგენსი უდრის ამავე კუთხეების ტანგენსების სხვაობას, გაყოფილს ერთისა და ამავე კუთხეების ტანგენსების ნამრავლის ჯამზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, $y=k_1x$ წრფე აბსცისების ღერძთან ქმნის α კუთხეს, ხოლო $y=k_2x$ წრფე — β კუთხეს (ნახ. 220), მაშინ ამ წრფეებს შორის φ კუთხე იქნება: $\varphi=\beta-\alpha$.



ნახ. 220.

ვიგულისხმოთ, რომ განსახილველი წრფეები ერთმანეთის მართობული არაა. მაშინ φ კუთხის ტანგენსი არსებობს და უდრის

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}.$$

მაგრამ $\operatorname{tg}\alpha=k_1$; $\operatorname{tg}\beta=k_2$. მაშასადამე,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}.$$

ასე, მაგალითად, კუთხე $y=\frac{x}{2}\left(k_1=\frac{1}{2}\right)$ და $y=3x$ $(k_2=3)$ წრფეებს შორის განისაზღვრება პირობიდან:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1, \text{ ამიტომ } \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის კოტანგენსის ფორმულები, მაგრამ პრაქტიკაში ეს ფორმულები ძალიან იშვიათად გამოიყენება და ამიტომ მათ არ მოვიყვანთ.

სავარჯიშოები

1055. იპოვეთ tg 105°, 105°-ის 60°+45° ჯამად წარმოდგენით.

1056. გამოიანგარიშეთ:

ა) $\frac{\operatorname{tg} 13^\circ+\operatorname{tg} 47^\circ}{1-\operatorname{tg}13^\circ\cdot\operatorname{tg}47^\circ}$; გ) $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ-\operatorname{tg} 46^\circ}{1+\operatorname{tg} 1^\circ\cdot\operatorname{tg} 46^\circ}$;

ბ) $\frac{1-\operatorname{tg} 27^\circ\cdot\operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ+\operatorname{tg} 33^\circ}$; დ) $\frac{1+\operatorname{tg} 4^\circ\cdot\operatorname{tg} 49^\circ}{\operatorname{tg} 49^\circ-\operatorname{tg} 4^\circ}$.

1057. იპოვეთ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ და $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\beta=-\frac{12}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;\ \pi<\beta<\frac{3}{2}\pi\right)$

1058. იპოვეთ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ და $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$; $\cos\beta=\frac{5}{13}$, ამასთან ორივე (α და β) კუთხე ბოლოვდება ერთსა და იმავე მეოთხედში.

გამოიანგარიშეთ (№ 1059—1061):

1059. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2+\operatorname{arc\,tg} 3)$.

1060. $\operatorname{tg}\left[\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right]$.

1061. $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right]$.

იპოვეთ კუთხე მოცემულ წრფეებს შორის (№ 1062, 1063):

1062. $y=x$ და $y=\frac{2}{3}x+6$.

1063. $3x-2y=6$ და $2x+3y-7=0$.

1064. დაამტკიცეთ, რომ $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფეები ურთიერთმართობულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $k_1k_2=-1$.

ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები § 153

ვთქვათ,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

ფორმულაში $\beta=\alpha$, მაშინ მივიღებთ:

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

ამრიგად,

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha. \tag{1}$$

ორმაგი კუთხის სინუსი უდრის მოცემული კუთხის სინუსისა და კოსინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს.

ანალოგიურად, ვთქვათ,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

ფორმულაში $\beta=\alpha$, მაშინ მივიღებთ:

$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

ამრიგად,

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (2)$$

ორმაგი კუთხის კოსინუსი უდრის მოცემული კუთხის კოსინუსის კვადრატს, მინუს იმავე კუთხის სინუსის კვადრატი.

ზუსტად ასევე, ვთქვათ,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

ფორმულაში $\beta=\alpha$, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

ორმაგი კუთხის ტანგენსი უდრის მოცემული კუთხის გაორკეცებულ ტანგენსს, გაყოფილს ერთს მინუს იმავე კუთხის ტანგენსის კვადრატზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) ვთქვათ, $\sin\alpha=0{,}6$, ამასთან, α კუთხე ბოლოვდება მეორე მეოთხედში. მაშინ

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8.$$

ამიტომ

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8)=-0{,}96.$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0{,}64-0{,}36=0{,}28.$$

2) ვთქვათ, $\operatorname{tg}\alpha=3$. მაშინ

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{6}{1-9}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ორმაგი კუთხე უეჭველად შეიცავს გრადუსების ან რადიანების ლუწ რიცხვს: 20°-ს; 60°-ს: 4. ^ რადიანს და ა. შ. ორმაგი კუთხე გვესმის როგორც ყოველნაირი კუთხე მაგალითად,

$$45^\circ = 2\cdot\left(\frac{45^\circ}{2}\right);\quad 75^\circ = 2\cdot\left(\frac{75^\circ}{2}\right);\quad 3 = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)$$ და ა. შ.

საერთოდ, $\alpha = 2\,\frac{\alpha}{2}$.

ამიტომ ზემოთ დამტკიცებული ფორმულები შესაძლებელია ასეთი სახით ჩაიწეროს:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

ეს ფორმულები გამოსახავს კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს ნახევარი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით.

სავარჯიშოები

1065. ცნობილია, რომ $\sin\alpha = 0{,}8$, ამასთან, α კუთხე მდებარეობს მე-2 მეოთხედში. იპოვეთ 2α კუთხის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

1066. იპოვეთ $\operatorname{tg} 2\alpha$ და $\cos 2\alpha$, თუ ცნობილია, რომ α კუთხე მდებარეობს არა პირველ მეოთხედში, და $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

1067. იპოვეთ $\cos\alpha$, თუ $\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}1$, და α კუთხე მდებარეობს მეოთხე მეოთხედში.

1068. რომელ მეოთხედში მდებარეობს α კუთხე, თუ:

ა) $\sin\alpha > 0$, $\sin 2\alpha > 0$; ბ) $\sin\alpha < 0$, $\sin 2\alpha > 0$;

გ) $\sin\alpha > 0$, $\sin 2\alpha < 0$; დ) $\sin\alpha < 0$, $\sin 2\alpha < 0$?

1069. გამოიანგარიშეთ:

ა) $\sin 22^\circ30' \cdot \cos 22^\circ30'$; ბ) $\cos^2 22^\circ30' - \sin^2 22^\circ30'$;

გ) $\dfrac{\operatorname{tg} 22^\circ30'}{1-\operatorname{tg}^2 22^\circ30'}$; დ) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$.

1070. დაამტკიცეთ იგივობანი:

ა) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$;

ბ) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

გ) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$.

1071. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი მახვილი α კუთხისათვის

$$\sin 2\alpha<2\sin\alpha.$$

1072. რა საზღვრებში შეიძლება იცვლებოდეს გამოსახულება

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha?$$

გაამარტივეთ გამოსახულებანი (№ 1073—1078):

1073. $\sin^2(\beta-45^\circ)-\cos^2(\beta-45^\circ)$.

1074. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1075. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

1076. $\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)$.

1077. $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)}$.

1078. $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.

დაამტკიცეთ ტოლობანი (№ 1079, 1080):

1079. $\sin 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ=\frac{1}{8}$.

1080. $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

1081. გამოსახეთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$:

ა) $\sin\frac{\alpha}{2}$ და $\cos\frac{\alpha}{2}$-ით;

ბ) $\sin\frac{\alpha}{2}$-ით;

გ) $\cos\frac{\alpha}{2}$-ით;

გაამარტივეთ გამოსახულებანი (№ 1082—1087):

1082. $\dfrac{\sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$.

1083. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$.

1084. $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$.

1085. $\sec\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sec\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1086. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

1087. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

გამოიანგარიშეთ (№ 1088—1091):

1088. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc}\operatorname{tg} 3)$.

1089. $\operatorname{tg}\left[2\operatorname{arc}\cos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$.

1090. $\cos\left(2\operatorname{arc}\sin\dfrac{1}{2}\right)$.

1091. $\sin[2\operatorname{arc}\operatorname{tg}(-2)]$.

1092. იპოვეთ იმ არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა, რომლისთვისაც: $a_1=\cos 2\varphi$; $a_2=\cos^2\varphi$.

1093. დაამტკიცეთ, რომ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესია, რომლისთვისაც $a_1=4\sin\varphi$, $a_2=\sin 2\varphi$, უსასრულოდ კლებადია და იპოვეთ მისი ჯამი.

sinα-სა და cosα-ს გამოსახვა ნახევარი კუთხის ტანგენსით § 154

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას სასარგებლოა შემდეგი ფორმულები:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

დავამტკიცოთ ისინი.

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}+1}.$$

ამით (1) ფორმულა დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება (2) ფორმულაც

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}.$$

(1) და (2) ფორმულები მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$ ან, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, როცა გამოსახულება $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ განსაზღვრულია.

მაგალითი. გამოთვალეთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=2$.

(1) და (2) ფორმულების მიხედვით გვაქვს:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{1+4} = 0{,}8;$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-4}{1+4} = -0{,}6.$$

სავარჯიშოები

1094. იპოვეთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=5$.

1095. იპოვეთ $\sin 2\alpha$ და $\cos 2\alpha$, თუ

ა) $\operatorname{tg}\alpha=-3$; ბ) $\operatorname{ctg}\alpha=3$.

1096. დაამტკიცეთ ტრიგონომეტრიულად უტოლობა

$$\left|\frac{2a}{1+a^2}\right| \leqslant 1$$

1097. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი α-სათვის $\sin 2\alpha$-სა და $\operatorname{tg}\alpha$-ს აქვს ერთი და იგივე ნიშანი (ორივე უარყოფითია, ორივე დადებითია ან ორივე ნულის ტოლია).

1098. ცნობილია, რომ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. იპოვეთ:

ა) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$; ბ) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

ᲗᲐᲜᲐᲤᲐᲠᲓᲝᲑᲐᲜᲘ ᲜᲐᲮᲔᲕᲐᲠᲘ ᲙᲣᲗᲮᲘᲡ ᲢᲠᲘᲒᲝᲜᲝᲛᲔᲢᲠᲘᲣᲚ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲔᲑᲡᲐ ᲓᲐ ᲛᲗᲔᲚᲘ ᲙᲣᲗᲮᲘᲡ ᲙᲝᲡᲘᲜᲣᲡᲡ ᲨᲝᲠᲘᲡ § 156

თუ წევრობრივ შევკრებთ და გამოვაკლებთ

$$1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

და

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ტოლობებს, მივიღებთ:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

ეს ორი ფორმულა ძალიან ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული გამოსახულების გარდაქმნისათვის.

ამას გარდა, ისინი საშუალებას გვაძლევენ ნახევარი კუთხის სინუსი და კოსინუსი გამოვსახოთ მთელი კუთხის კოსინუსით:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{3}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{4}$$

ამ უკანასკნელი ფორმულებიდან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{5}$$

იგივეობა.

ნიშნები (+ ან —) რადიკალების წინ (3), (4) და (5) ფორმულებში შეირჩევა იმისდა მიხედვით, რომელ მეოთხედში ბოლოვდება $\frac{\alpha}{2}$ კუთხე. თუ, მაგალითად, $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, მაშინ (4) ფორმულაში უნდა ავიღოთ პლუს ნიშანი, ხოლო (3) და (5) ფორმულებში — მინუს ნიშანი (მეორე მეოთხედში დაბოლოებული კუთხეების სინუსები დადებითია, ხოლო კოსინუსები და ტანგენსები — უარყოფითი).

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) ვიპოვოთ 22°30′-იანი კუთხის სინუსი და კოსინუსი.

(4) ფორმულის მიხედვით ვღებულობთ $\left(\frac{\alpha}{2}=22°30',\quad \alpha=45°\right)$:

$$\sin 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\approx 0{,}3827.$$

+ ნიშანი რადიკალის წინ იმიტომ შევარჩიეთ, რომ 22°30′-იანი კუთხის სინუსი დადებითია.

ანალოგიურად, თუ გამოვიყენებთ (3) ფორმულას, მივიღებთ:

$$\cos 22°30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\approx 0{,}9239.$$

2) ვიპოვოთ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

(5) ფორმულის მიხედვით ვღებულობთ $\left(\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{8};\ \ \alpha=\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{2}-1\approx 0{,}4142.$$

სავარჯიშოები

დაამტკიცეთ იგივეობანი (№ 1099—1102);

1099. $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$.

1100. $1-2\cos 3\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin^2\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos 3\alpha$.

1101. $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1102. $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1103. გაამარტივეთ $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ გამოსახულება.

1104. იპოვეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\cos 2\alpha=-0{,}6$.

1105. იპოვეთ $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, თუ ცნობილია, რომ $|\cos\alpha|=0{,}6$, ამასთან, α კუთხე ბოლოვდება II მეოთხედში.

1106. იპოვეთ $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$.

გამოიანგარიშეთ:

1107. $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos 0{,}8\right)$.

1108. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}6\right)$.

1109 $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}8)\right]$.

1110 $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-0{,}75)\right]$.

ნახევარი კუთხის ტანგენსი შეიძლება გამოისახოს მთელი კუთხის სინუსითა და კოსინუსით შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

მართლაც,

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

ამით (1) ფორმულა დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება (2) ფორმულაც. (1) და (2) ფორმულები უფრო მოხერხებულია 155-ე პარაგრაფში დამტკიცებული

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (3)$$

ფორმულებისათვის, ვინაიდან ისინი არ შეიცავენ რადიკალს და, მაშასადამე, არაა საჭირო გადაწყვეტა, თუ როგორი ნიშანი უნდა იდგეს რადიკალის წინ. მაგრამ (3) ფორმულით გამოთვლისას საკმარისია α კუთხის მხოლოდ კოსინუსის ცოდნა, ხოლო (1) და (2) ფორმულებით გამოთვლისას, კოსინუსის გარდა, საჭიროა ამ კუთხის სინუსის ცოდნაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}\approx 0,2679.$$

სავარჯიშოები

1111. იპოვეთ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, თუ ცნობილია, რომ $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ და α კუთხე ბოლოვდება არა პირველ მეოთხედში.

1112. იპოვეთ $\operatorname{tg}\alpha$, თუ ცნობილია, რომ $\sin 2\alpha = -0{,}8$ და 2α კუთხე ბოლოვდება არა მეოთხე მეოთხედში.

1113. დაამტკიცეთ, რომ თუ 2α კუთხის სინუსი და კოსინუსი რაციონალურია, მაშინ α კუთხის ტანგენსიც რაციონალურია.

მართებულია თუ არა შებრუნებული დებულება?

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის გარდაქმნა ჯამად § [illegible]

თუ წევრობრივ შევკრებთ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

და

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta,$$

საიდანაც

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \tag{1}$$

ერთი კუთხის სინუსის მეორე კუთხის კოსინუსზე ნამრავლი უდრის ამ კუთხეების ჯამის სინუსისა და სხვაობის სინუსის ნახევარჯამს.

მაგალითად,

$$\sin 15^\circ\cos 75^\circ=\frac{1}{2}[\sin(15^\circ+75^\circ)+\sin(15^\circ-75^\circ)]=$$

$$=\frac{1}{2}[\sin 90^\circ+\sin(-60^\circ)]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

თუ წევრობრივ შევკრებთ იგივეობებს

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

მივიღებთ

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

საიდანაც

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]. \tag{2}$$

ორი კუთხის კოსინუსების ნამრავლი უდრის ამავე კუთხეების ჯამის კოსინუსისა და სხვაობის კოსინუსის ნახევარჯამს.

მაგალითად,

$$\cos\frac{7}{12}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+0\right]=-\frac{1}{4}.$$

ანალოგიურად, თუ

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

იგივობიდან წევრობრივ გამოვაკლებთ

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

იგივობას, მივიღებთ:

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

საიდანაც

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (3)$$

ორი კუთხის სინუსების ნამრავლი უდრის ამავე კუთხეების სხვაობის კოსინუსისა და ჯამის კოსინუსის ნახევარსხვაობას.

სავარჯიშოები

გამოიანგარიშეთ ცხრილების გამოუყენებლად (№ 1114—1119);

1114. $2\sin 37°30'\cos 7°30'$.

1115. $\sin 52°30'\cos 7°30'$.

1116. $\cos 37°30'\cos 7°30'$.

1117. $\sin 52°30'\sin 7°30'$.

1118. $\cos 75°\cos 105°$.

1119. $\sin 45°\sin 15°$.

წარმოადგინეთ ჯამების სახით მოცემული ნამრავლები (№ 1120—1127):

1120. $\sin 3°\cdot\sin 5°$.

1121. $\sin 7°\cdot\cos 9°$.

1122. $\cos 17°\cdot\cos 3°$.

1123. $\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)$.

1124. $\sin(x+\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)$.

1125. $\cos(x+\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)$.

1126. $4\sin 20°\cdot\cos 50°\cdot\cos 80°$.

1127. $4\cos 15°\cdot\sin 20°\cdot\sin 40°$.

დაამტკიცეთ იგივობანი:

1128. $2\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$.

1129. $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right) = \frac{1}{2}$.

ორი კუთხის სინუსების ჯამის (სხვაობის) გარდაქმნა ნამრავლად § 159

წინა პარაგრაფში მივიღეთ ფორმულა:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \tag{1}$$

ეს ფორმულა სწორია α-სა და β-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვთქვათ, α და β ისეთია, რომ $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$. მაშინ α და β შეიძლება განვიხილოთ, როგორც

$$\begin{cases} \alpha+\beta = x, \\ \alpha-\beta = y \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსნი. ამ განტოლებათა წევრობრივ შეკრებით ვღებულობთ $2\alpha = x+y$. ამ განტოლებათა წევრობრივ გამოკლებით ვღებულობთ $2\beta = x-y$. ამიტომ

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \qquad \beta = \frac{x-y}{2}.$$

ასეთ შემთხვევაში (1) იგივობა შეიძლება ასეთი სახით ჩაიწეროს:

$$\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y),$$

საიდანაც

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}. \tag{2}$$

ორი კუთხის სინუსების ჯამი უდრის ამავე კუთხეების ნახევარჯამის სინუსისა და ნახევარსხვაობის კოსინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს.

თუ (2) ფორმულაში y-ს შევცვლით $-y$-ით და გავითვალისწინებთ, რომ $\sin(-y) = -\sin y$, მივიღებთ:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \tag{3}$$

ორი კუთხის სინუსების სხვაობა უდრის ამავე კუთხეების ნახევარსხვაობის სინუსისა და ნახევარჯამის კოსინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს.

მაგალითები. 1) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$ ჯამი ადვილად გამოითვლება ცხრილების გარეშე, თუ გამოვიყენებთ (2) ფორმულას:

$$\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=$$

$$=2\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

2) $\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}$ სხვაობა ადვილად გამოითვლება ცხრილების გარეშე, თუ გამოვიყენებთ (3) ფორმულას:

$$\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

სავარჯიშოები

გამოიანგარიშეთ (№№ 1130—1135) ცხრილების გარეშე ორი კუთხის სინუსების ჯამის (სხვაობის) ფორმულის გამოყენებით

1130. $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ$.

1131. $\sin 105^\circ-\sin 75^\circ$.

1132. $\sin\frac{11}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi$.

1133. $\sin\frac{11}{12}\pi-\sin\frac{5}{12}\pi$.

1134. $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{7}{12}\pi$.

1135. $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{7}{12}\pi$.

გაამარტივეთ მოცემული გამოსახულებანი (№ 1136, 1137).

1136. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1137. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1138. დაამტკიცეთ იგივეობანი:

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის სინუსების ფორმულების გამოყენებით წარმოადგინეთ ნამრავლთა სახით მოცემული გამოსახულებანი (№ 1139, 1140):

1139. $\frac{1}{2}+\sin\alpha$. **1140.** $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

1141. დაამტკიცეთ, რომ α და β კუთხეების სინუსები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\alpha=(-1)^n\beta+n\pi,$$

სადაც n რომელიმე მთელი რიცხვია.

ორი კუთხის კოსინუსების ჯამის (სხვაობის) გარდაქმნა ნამრავლად § 16

ორი კუთხის კოსინუსების ჯამისა და სხვაობისათვის მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (1)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}. \qquad (2)$$

ორი კუთხის კოსინუსების ჯამი უდრის ამავე კუთხეების ნახევარჯამის კოსინუსისა და ნახევარსხვაობის კოსინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს.

ორი კუთხის კოსინუსების სხვაობა უდრის ამავე კუთხეების ნახევარჯამის სინუსისა და ნახევარსხვაობის სინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს უარყოფითი ნიშნით.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $$\cos 75^\circ+\cos 15^\circ=2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=$$

$$=2\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

2) $$\cos\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{\pi}{12}=-2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=-2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(1) და (2) ფორმულები შეიძლება მრავალი ხერხით მივიღოთ. დავამტკიცოთ, მაგალითად, (1) ფორმულა.

პ ი რ ვ ე ლ ი ხ ე რ ხ ი. 157-ე პარაგრაფში დამტკიცებული იყო ფორმულა:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

თუ ამ ფორმულაში ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha+\beta=x$ და $\alpha-\beta=y$, მივიღებთ (1) ფორმულას. ეს ხერხი მსგავსია იმისა, რომლის საშუალებითაც წინა პარაგრაფში მიღებული იყო ორი კუთხის სინუსების ჯამის ფორმულა.

მ ე ო რ ე ხ ე რ ხ ი. წინა პარაგრაფში დამტკიცებული იყო ფორმულა:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

თუ ამ ფორმულაში ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha = x + \frac{\pi}{2}$, $\beta = y + \frac{\pi}{2}$, მივიღებთ:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

მაგრამ, დაყვანის ფორმულების მიხედვით,

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x; \quad \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos y;$$

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2},$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

(2) ფორმულის დამოუკიდებლად დამტკიცებას ვავალებთ მოსწავლეებს. სცადეთ, იპოვოთ დამტკიცების არა ნაკლებ ორი სხვადასხვა ხერხი!

სავარჯიშოები

ცხრილების გამოუყენებლად გამოიანგარიშეთ (№ 1142—1147) ორი კუთხის კოსინუსების ჯამისა და სხვაობის ფორმულის გამოყენებით:

1142. $\cos 105° + \cos 75°$;

1143. $\cos 105° - \cos 75°$.

1144. $\cos \frac{11}{12}\pi + \cos\frac{5}{12}\pi$.

1145. $\cos \frac{11}{12}\pi - \cos\frac{5}{12}\pi$.

1146. $\cos 15° - \sin 15°$.

1147. $\sin \frac{\pi}{12} + \cos\frac{11}{12}\pi$.

გაამარტივეთ მოცემული გამოსახულებანი (№ 1148, 1149):

1148. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1149. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1150. თითოეული იგივობათაგანი

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\,\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\,\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

დაამტკიცეთ ორი სხვადასხვა ხერხით.

წარმოადგინეთ ნამრავლთა სახით მოცემული გამოსახულებანი (№ 1151—1154):

1151. $\sqrt{2}+2\cos\alpha$.

1152. $\sqrt{3}-2\cos\alpha$.

1153. $\sin x+\cos y$.

1154. $\sin x-\sin y$.

1155. გაამარტივეთ გამოსახულება: $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)$.

დაშალეთ მამრავლებად მოცემული გამოსახულებანი (№ 1156—1159):

1156. $1+\sin\alpha-\cos\alpha$.

1157. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta$.

1158. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

1159. $1+\sin\alpha+\cos\alpha$.

დაამტკიცეთ მოცემული იგივობანი (№ 1160—1163):

1160. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$.

1161. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$.

1162. $$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

1163. $$\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

1164. დაამტკიცეთ, რომ α და β კუთხეების კოსინუსები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\alpha=\pm\beta+2n\pi,$$

სადაც n რომელიმე მთელი რიცხვია.

ორი კუთხის ტანგენსების ჯამის (სხვაობის) გარდაქმნა § 160

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას სასარგებლოა შემდეგი ფორმულები:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y};\qquad(1)$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}.\qquad(2)$$

ორი კუთხის ტანგენსების ჯამი უდრის ამ კუთხეების ჯამის სინუსს, გაყოფილს ამავე კუთხეების კოსინუსების ნამრავლზე.

ორი კუთხის ტანგენსების სხვაობა უდრის ამ კუთხეების სხვაობის სინუსს, გაყოფილს ამავე კუთხეების კოსინუსების ნამრავლზე.

დავამტკიცოთ, მაგალითად, პირველი ფორმულა. გვაქვს

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y};$$

მაგრამ

$$\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y=\sin(x+y),$$

ამიტომ

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$

ამით (1) ფორმულა დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება (2) ფორმულაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავამტკიცოთ, რომ $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ და $\beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ კუთხეების ტანგენსები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეს კუთხეები განსხვავდება ერთმანეთისაგან π-ს ჯერადი კუთხით.

ვთქვათ, α და β ერთმანეთისაგან განსხვავდება π-ს ჯერადი კუთხით; მაშინ $\alpha=\beta+n\pi$, სადაც n რომელიმე მთელი რიცხვია. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta+n\pi)=\operatorname{tg}\beta.$$

შებრუნებით, ვთქვათ, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=0$ და (2) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=0.$$

მაგრამ ეს შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა $\sin(\alpha-\beta)=0$. როგორც ცნობილია, სინუსი ნულად იქცევა მხოლოდ π-ს ჯერადი კუთხეებისათვის. ამიტომ

$$\alpha-\beta=n\pi,$$
$$\alpha=\beta+n\pi,$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

სავარჯიშოები

გამოიანგარიშეთ (№ 1165—1168) ტრიგონომეტრიული ცხრილების გამოუყენებლად:

1165. $\operatorname{tg}22^\circ30'+\operatorname{tg}67^\circ30'$.

1166. $\operatorname{tg}22^\circ30'-\operatorname{tg}67^\circ30'$.

1167. $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi+\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$.

1168. $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi-\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$.

1169. გაამარტივეთ $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$ გამოსახულება.

1170. წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით მოცემული გამოსახულებანი:

ა) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$; ბ) $1+\operatorname{tg}\alpha$.

1171. იპოვეთ პირობა, რომლის დროსაც α და β კუთხეების ტანგენსები ერთმანეთის ტოლი იქნება.

დაამტკიცეთ იგივეობანი:

1172. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2\operatorname{tg}\alpha$.

1173. $$\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha}{1-\operatorname{ctg}2\alpha}=\frac{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

მე-5 თავში (ნაწილი 1) ვაჩვენეთ, როგორ აიგება $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკები. ახლა განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ აიგება იმ ωx ჯერადი კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკები, სადაც ω რომელიმე დადებითი რიცხვია*.

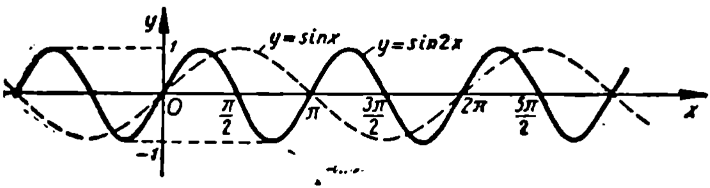
$y=\sin \omega x$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად შევადაროთ ეს ფუნქცია ჩვენ მიერ უკვე შესწავლილ $y=\sin x$ ფუნქციას. ვიგულისხმოთ, რომ, როცა $x=x_0$, $y=\sin x$ ფუნქცია ღებულობს y_0-ის ტოლ მნიშვნელობას, მაშინ $y_0=\sin x_0$. გარდავქმნათ ეს თანაფარდობა შემდეგნაირად:

$$y_0=\sin\left(\frac{\omega}{\omega}x_0\right)=\sin\left[\omega\left(\frac{x_0}{\omega}\right)\right].$$

ამრიგად,

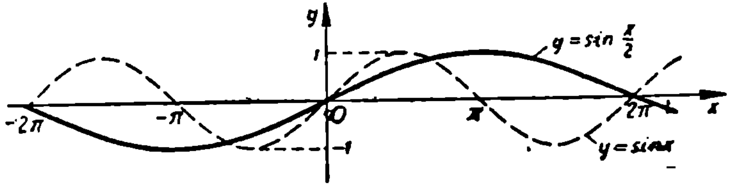
$$y_0=\sin\left[\omega\left(\frac{x_0}{\omega}\right)\right].$$

მაშასადამე, $y=\sin \omega x$ ფუნქცია, როცა $x=\frac{x_0}{\omega}$, ღებულობს იმავე y_0 მნიშვნელობას, რასაც $y=\sin x$ ფუნქცია, როცა $x=x_0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $y=\sin \omega x$ ფუნქცია ω-ჯერ უფრო ხშირად იმეორებს თავის



ნახ. 221.

მნიშვნელობებს, ვიდრე $y=\sin x$ ფუნქცია. ამიტომ $y=\sin \omega x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება x-თა ღერძის გასწვრივ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის ω-ჯერ „შეკუმშვით“.



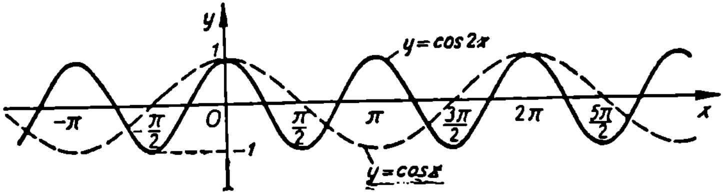
ნახ. 222.

* ω — ბერძნული ასოა, იკითხება: ომეგა.

მაგალითად, $y=\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ სინუსოიდის აბსცისების ღერძის გასწვრივ 2-ჯერ „შეკუმშვით“ (ნახ. 221). $y=\sin\dfrac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ სინუსოიდის x-თა ღერძის გასწვრივ ორჯერ „გაჭიმვით“$\left(\text{ან } \dfrac{1}{2}\text{-ჯერ „შეკუმშვით“, ნახ. 222}\right)$.

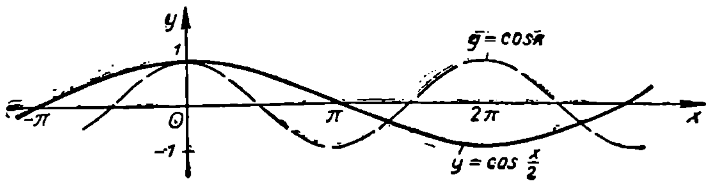
ვინაიდან $y=\sin \omega x$ ფუნქცია თავის მნიშვნელობებს იმეორებს ω-ჯერ უფრო ხშირად, ვიდრე $y=\sin x$ ფუნქცია, ამიტომ მისი პერიოდი ω-ჯერ ნაკლებია $y=\sin x$ ფუნქციის პერიოდზე. მაგალითად, $y=\sin 2x$ ფუნქციის პერიოდი უდრის $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$-ს, ხოლო $y=\sin\dfrac{x}{2}$ ფუნქციის პერიოდი უდრის $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

ანალოგიურად აიგება ჯერადი კუთხეების სხვა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკებიც. 223-ე ნახაზზე წარმოდგენილია $y=\cos 2x$

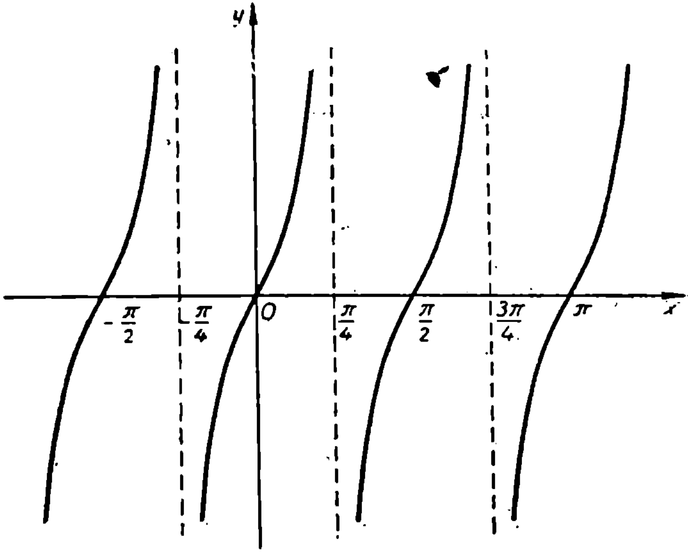


ნახ. 223.

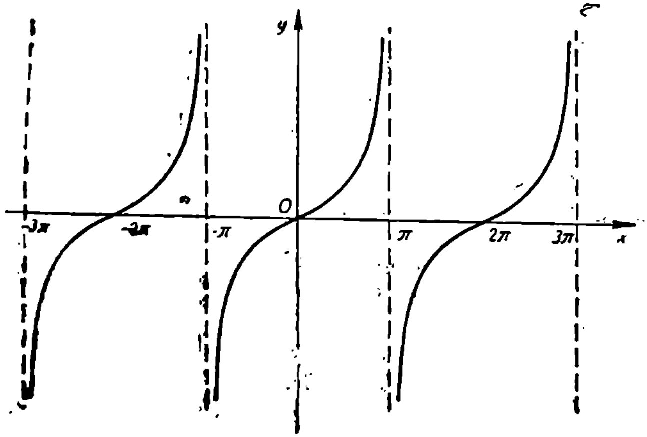
ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც მიიღება $y=\cos x$ კოსინუსოიდის აბსცისების ღერძის გასწვრივ ორჯერ „შეკუმშვით“. $y=\cos\dfrac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 224) მიიღება $y=\cos x$ კოსინუსოიდის x-თა ღერძის გასწვრივ ორჯერ „გაჭიმვით“.



ნახ. 224.


y
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
O
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
x

Сл. 225.


y
O
-3π
-2π
$-\pi$
π
2π
3π
x

Сл. 226.

225-ე ნახაზზე თქვენ ხედავთ $y=\operatorname{tg} 2x$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელიც მიღებულია $y=\operatorname{tg} x$ ტანგენსოიდის აბსცისების ღერძის გასწვრივ ორჯერ „შეკუმშვით“, ხოლო 226-ე ნახაზზე $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელიც მიღებულია $y=\operatorname{tg} x$ ტანგენსოიდის x-თა ღერძის გასწვრივ ორჯერ „გაჭიმვით“.

სავარჯიშოები

ააგეთ მოცემული ფუნქციების (№ 1174—1181) გრაფიკები და აჩვენეთ ამ გრაფიკების კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები. განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქციების პერიოდები.

1174. $y=\sin\frac{4}{3}x.$ **1178.** $y=\operatorname{ctg}\frac{5}{3}x.$

1175. $y=\cos\frac{5}{3}x.$ **1179.** $y=\sin\frac{2}{3}x.$

1176. $y=\operatorname{tg}\frac{4}{3}x.$ **1180.** $y=\cos\frac{2}{3}x.$

1177. $y=\operatorname{tg}\frac{5}{6}x.$ **1181.** $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{3}.$

1182. განსაზღვრეთ $y=\sin\pi x$ და $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ ფუნქციების პერიოდები.

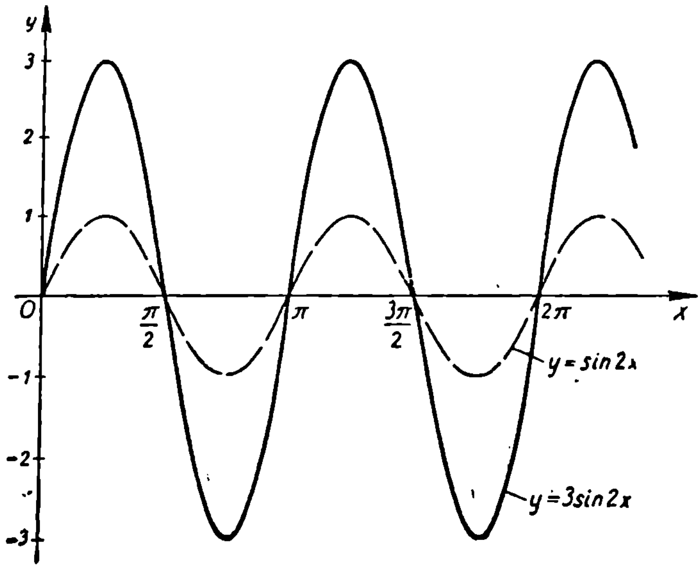
1183. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციების ორი მაგალითი, რომლებიც ღებულობენ ყველა მნიშვნელობას —1-დან +1-მდე (ამ ორი რიცხვის ჩათვლით) და იცვლებიან პერიოდულად 10-ის ტოლი პერიოდით.

1184*. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციების ორი მაგალითი, რომლებიც ღებულობენ ყველა მნიშვნელობას 0-დან 1-მდე (ამ ორი რიცხვის ჩათვლით) და იცვლებიან პერიოდულად $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი პერიოდით.

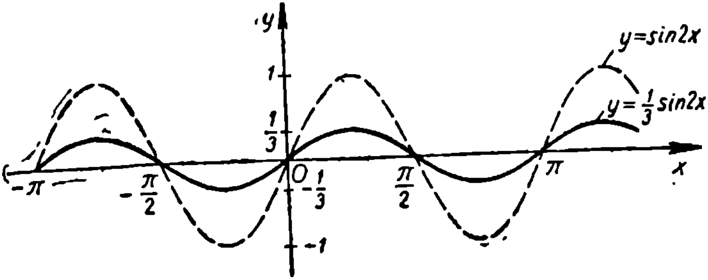
1185. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციების ორი მაგალითი, რომლებიც ღებულობენ ყველა ნამდვილ მნიშვნელობას და იცვლებიან პერიოდულად 1-ის ტოლი პერიოდით.

1186*. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციების ორი მაგალითი, რომლებიც ღებულობენ ყველა უარყოფით მნიშვნელობას და ნულს, მაგრამ არ ღებულობენ დადებით მნიშვნელობებს და იცვლებიან პერიოდულად 5-ის ტოლი პერიოდით.

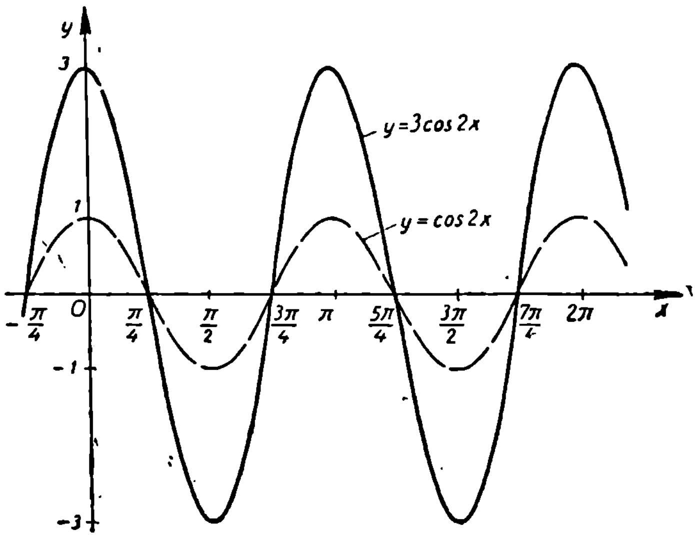
ვთქვათ, $A>0$, მაშინ, თუ $y=A\sin\omega l>0$, ამ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა A-ჯერ მეტი იქნება $y=\sin\omega l$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებზე. თუკი $y=A\sin\omega l<0$, მაშინ ამ ფუნქციის მნიშვნელობები A-ჯერ ნაკლები იქნება $y=\sin\omega l$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებზე. ამიტომ $y=A\sin\omega l$ მრუდი მიიღება $y=\sin\omega x$ მრუდისაგან ვერტიკალური მიმართულებით A-ჯერ „გაჭიმვით“.



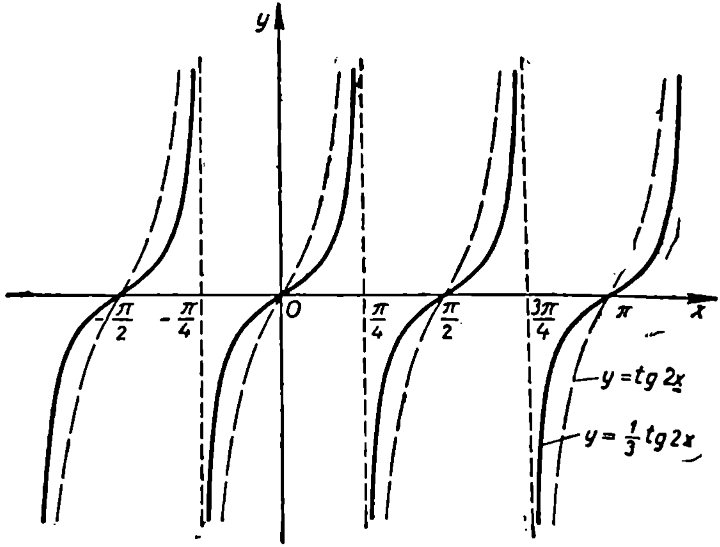
ნახ. 227.



ნახ. 228.

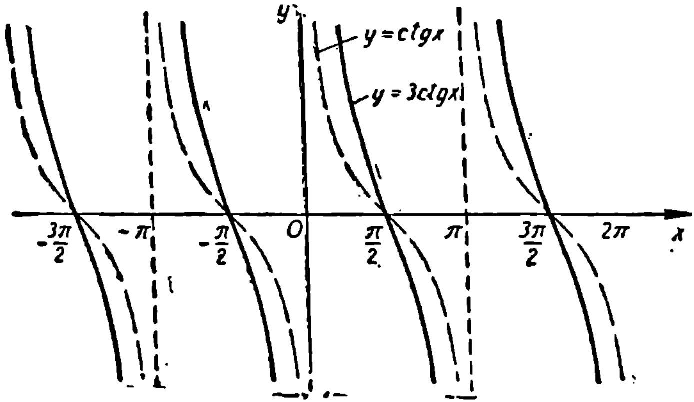


Gob. 229.

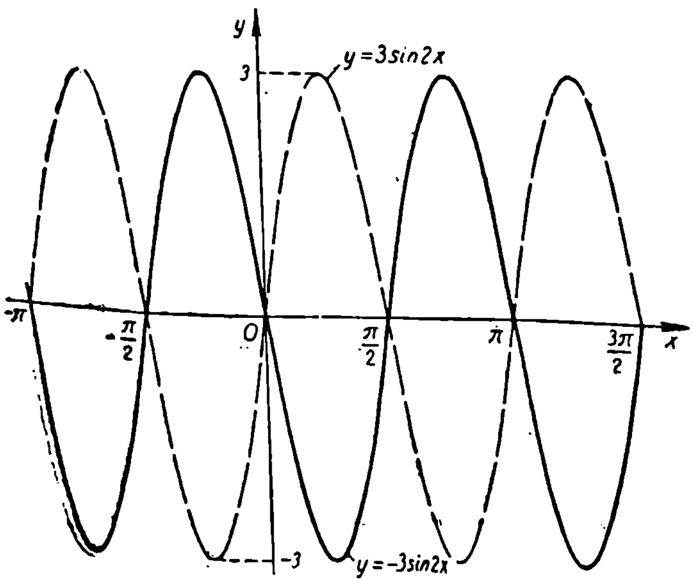


bob. 230.

მაგალითად, $y=3\sin 2x$ მრუდი (ნახ. 227) მიიღება $y=\sin 2x$ მრუდის ვერტიკალური მიმართულებით სამჯერ „გაჭიმვით“. ანალოგიურად, $y=\frac{1}{3}\sin 2x$ მრუდი (ნახ. 228) მიიღება $y=\sin 2x$ მრუდის ვერტიკალური მიმართულებით სამჯერ „შეკუმშვით“ $\left(\text{ან } \frac{1}{3}\text{-ჯერ „გაჭიმვით“}\right)$.



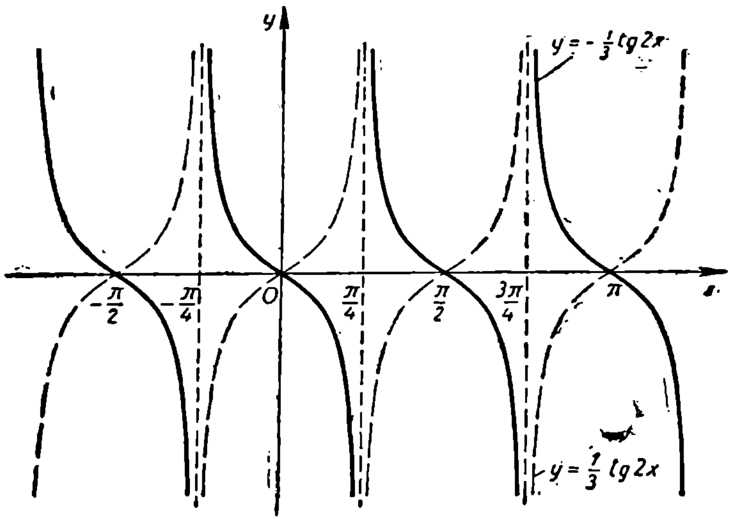
ნახ. 231.



ნახ. 232.

ანალოგიურად აიგება $y=A\cos\omega x$, $y=A\operatorname{tg}\omega x$, $g=A\operatorname{ctg}\omega x$ ფუნქციათა გრაფიკებიც. 229-ე ნახაზზე წარმოდგენილია $y=3\cos 2x$ ფუნქციის გრაფიკი, 230-ე ნახაზზე $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x$ ფუნქციის გრაფიკი, 231-ე ნახაზზე $y=3\operatorname{ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი.

თუ $A<0$, მაშინ $y=A\sin\omega x$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად წინასწარ უნდა აიგოს $y=|A|\sin\omega x$ ფუნქციის გრაფიკი და შემდეგ გარდაისახოს იგი სიმეტრიულად x-თა ღერძის მიმართ. 232-ე ნახაზზე, მაგალითად, ნაჩვენებია $y=-3\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება. ანალოგიურად აიგება $y=-\frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x$ ფუნქციის გრაფიკიც (ნახ. 233).



ნახ. 233.

შევნიშნოთ, რომ $g=A\sin\omega x$, $y=A\cos\omega x$, $g=A\operatorname{tg}\omega x$, $y=A\operatorname{ctg}\omega x (A\neq 0)$ ფუნქციათა პერიოდები არაა დამოკიდებული A-ზე.

სავარჯიშოები

ააგეთ მოცემული ფუნქციების (№ 1187—1196) გრაფიკები და აჩვენეთ ამ გრაფიკების კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები. განსაზღვრეთ მოცემულ ფუნქციათა პერიოდები

1187. $y=\sin 3x$.

1188. $y=-3\sin 2x$.

1189. $y=\frac{1}{2}\sin 3x$.

1190. $y=\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{x}{3}\right)$.

1191. $y=-\frac{1}{3}\cos 2x.$ 1194. $y=2\operatorname{tg}\frac{x}{3}.$

1192. $y=-2\cos\frac{x}{2}.$ 1195. $y=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x.$

1193. $y=-2\cos(-3x).$ 1196. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right).$

1197. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციების ორი მაგალითი, რომლებიც მიიღებენ ყველა მნიშვნელობას $-\frac{1}{2}$-დან $+\frac{1}{2}$-მდე, ამ ორი რიცხვის ჩათვლით, პერიოდულად $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი პერიოდით.

1198*. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციის მაგალითი, რომელიც მიიღებს ყველა მნიშვნელობას 5-ზე მეტი მოდულით და იცვლება პერიოდულად $\frac{1}{5}$-ის ტოლი პერიოდით.

$y=A\sin[\omega(x+a)]$, $y=A\cos[\omega(x+a)]$ და ა. შ. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკები § 168

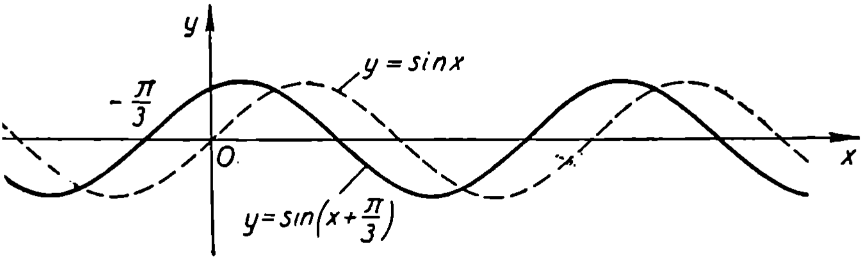
დავიწყოთ მარტივი მაგალითიდან. ვთქვათ, უნდა ავაგოთ $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი. ამისათვის მოცემული ფუნქცია შევადაროთ $y=\sin x$ ფუნქციას, რომლის გრაფიკის აგება უკვე ვიცით.

ვთქვათ, მოცემული $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქცია, როცა $x=x_0$, ღებულობს y_0-ის ტოლ რომელიმე მნიშვნელობას. მაშინ

$$y_0=\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right).$$

მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $y=\sin x$ ფუნქციამ უნდა მიიღოს იგივე y_0 მნიშვნელობა, როცა $x=x_0+\frac{\pi}{3}$. ამრიგად, ყველა მნიშვნელობას, რომლებსაც ღებულობს $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქცია, მიიღებს $y=\sin x$ ფუნქციაც. თუ x-ს განვმარტავთ როგორც დროს, შეიძლება ითქვას, რომ თითოეულ y_0 მნიშვნელობას $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქცია ღებულობს

დროის $\frac{\pi}{3}$ ერთეულით უფრო ადრე, ვიდრე $y=\sin x$ ფუნქცია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ სინუსოიდის გადაწევით აბსცისების ღერძზე მ ა რ ც ხ ნ ი ვ $\frac{\pi}{3}$ ერთეულზე (ნახ. 234).



ნახ. 234.

ანალოგიურად შეიძლებოდა აგვეგო ისეთი ფუნქციების გრაფიკებიც, როგორიცაა $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $y=\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ და ა. შ.

შევნიშნავთ, რომ მსგავსი ამოცანები ჩვენ უკვე გვხვდებოდა 120-ე პარაგრაფში (I ნაწ.)

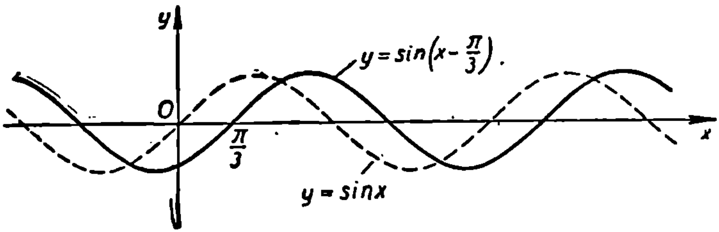
$$y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ფუნქციის გრაფიკის აგებისას.

თუ საჭირო იქნებოდა $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკის აგება, მაშინ ზემომოყვანილის ანალოგიური მსჯელობები მოგვცემდა იმავე შედეგს. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქცია მიიღებს იმავე მნიშვნელობებს, რასაც $y=\sin x$ ფუნქცია, მხოლოდ დროში $\frac{\pi}{3}$ ერთეულით დაგვიანებით (თუ x-ს განვმარტავთ როგორც დროს). ამიტომ $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ სინუსოიდის გადაწევით აბსცისების ღერძზე მ ა რ ჯ ვ ნ ი ვ $\frac{\pi}{3}$ ერთეულზე (ნახ. 235).

ანალოგიურად შეიძლებოდა აგვეგო ისეთ ფუნქციების გრაფიკებიც, როგორიცაა $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ და ა. შ.

ახლა განვიხილოთ უფრო რთული მაგალითები. ვთქვათ, საჭიროა ავგოს $y=A\sin[\omega(x+\alpha)]$ ფუნქციის გრაფიკი. ამისათვის მოცემული



ნახ 235.

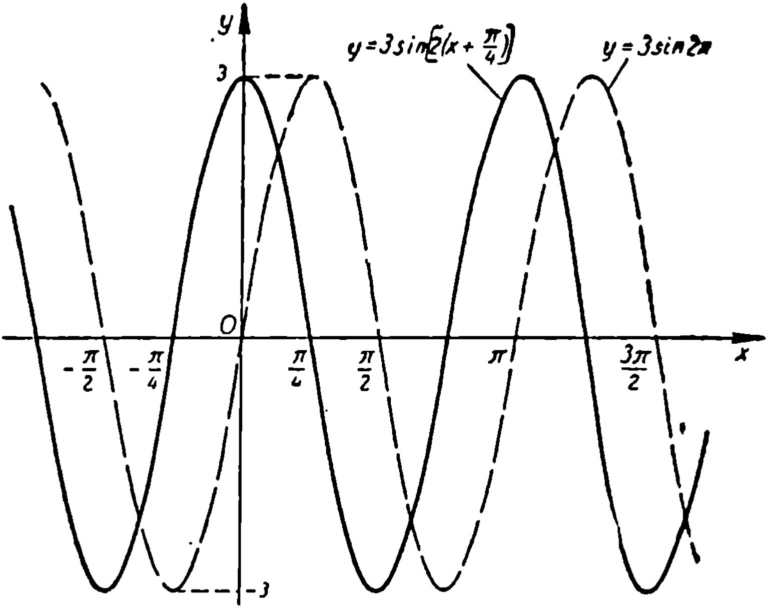
ფუნქცია შევადაროთ $y=A\sin\omega x$ ფუნქციას, რომლის გრაფიკის აგება უკვე ვიცით (იხ. § 162). ვთქვათ, $y=A\sin[\omega(x+\alpha)]$ ფუნქცია, როცა $x=x_0$, ღებულობს y_0-ის ტოლ რომელიმე მნიშვნელობას. მაშინ

$$y_0=A\sin[\omega(x_0+\alpha)].$$

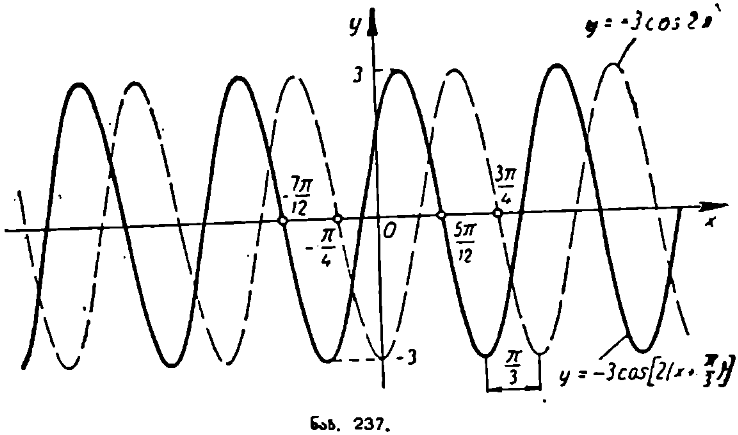
ეს თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ $y=A\sin\omega x$ ფუნქცია, როცა $x=x_0+\alpha$, ღებულობს იმავე y_0 მნიშვნელობას. ამიტომ ყველა მნიშვნელობას, რომელსაც ღებულობს $y=A\sin[\omega(x+\alpha)]$ ფუნქცია, მიიღებს $y=A\sin\omega x$ ფუნქციაც, ამასთანავე, თითოეულ მნიშვნელობას პირველი ფუნქცია მიიღებს დროის α ერთეულით (თუ x-ს განვმარტავთ როგორც დროს) უფრო ადრე, ვიდრე მეორე ფუნქცია. მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ $y=A\sin[\omega(x+\alpha)]$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=A\sin\omega x$ ფუნქციის გრაფიკისაგან აბსცისების ღერძზე მ ა რ ც ხ ნ ი ვ α ერთეულზე გადაწევით.

მაგალითად, $y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ მრუდი მიიღება $y=3\sin 2x$ მრუდის გადაწევით აბსცისების ღერძზე მარცხნივ $\frac{\pi}{4}$ ერთეულზე (ნახ. 236).

$y=-3\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$ მრუდი მიიღება $y=-3\cos 2x$ მრუდის გადაწევით აბსცისების ღერძზე მარცხნივ $\frac{\pi}{3}$ მანძილზე (ნახ. 237).



ნახ. 236.



ნახ. 237.

ანალოგიურად შეიძლება აიგოს ისეთი ფუნქციების გრაფიკებიც, როგორიცაა $y=A\sin[\omega(x-\alpha)]$, $y=A\cos[\omega(x-\alpha)]$ და ა. შ.

ისინი მიიღებიან შესაბამისად $y=A\sin\omega x$, $y=A\cos\omega x$ და ა. შ. ფუნქციათა გრაფიკების გადაწევით აბსცისების ღერძზე მარჯვნივ α მანძილზე.

238-ე ნახაზზე თქვენ ხედავთ $y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელიც მიღებულია $y=3\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაწევით აბსცისების ღერძზე მარჯვნივ $\frac{\pi}{4}$ მანძილზე. 239-ე ნახაზზე წარმოდგენილია $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც მიღებულია $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაწევით აბსცისების ღერძზე მარჯვნივ $\frac{\pi}{3}$ მანძილზე.

შევნიშნოთ, რომ $y=A\sin[\omega(x+\alpha)]$ ფუნქციის პერიოდი, ისე როგორც სხვა ანალოგიური ტრიგონომეტრიული ფუნქციის პერიოდები, არ არის დამოკიდებული α-ზე.

სავარჯიშოები

ააგეთ მოცემული ფუნქციების (№ 1199—1205) გრაფიკები და აჩვენეთ ამ გრაფიკების კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები. განსაზღვრეთ მოცემულ ფუნქციათა პერიოდები:

1199. ა) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. დ) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

ბ) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. ე) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

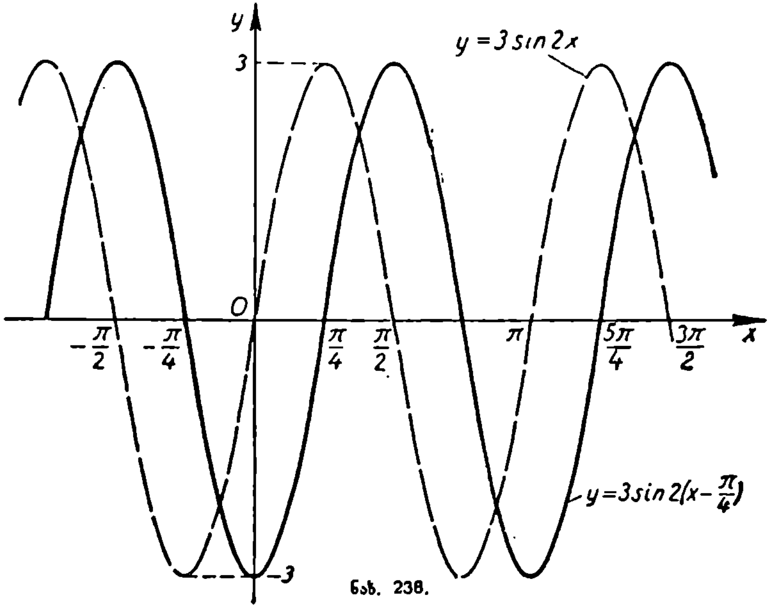
გ) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. ვ) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1200. $y=2\sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

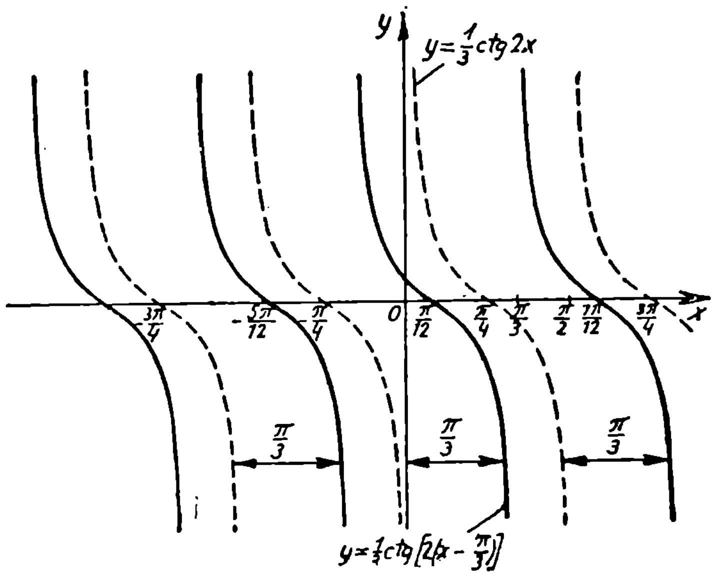
1201. $y=\frac{1}{2}\cos\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

1202. $y=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right.$.

1203. $y=\frac{1}{2}\sin\left[\frac{1}{3}(x-\pi)\right]$.


y
3
$y=3\sin 2x$
O
x
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
$y=3\sin 2(x-\frac{\pi}{4})$
-3

Sl. 238.


y
$y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x$
O
x
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{5\pi}{12}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{12}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{12}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}[2(x-\frac{\pi}{3})]$

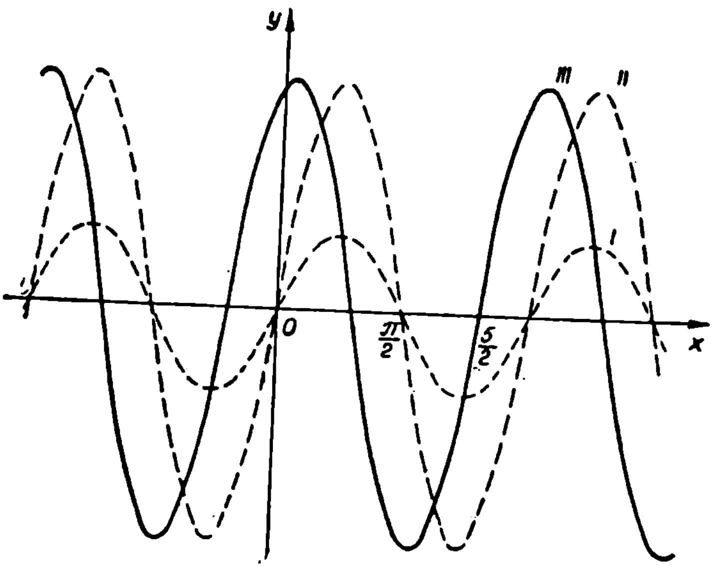
Sl. 239.

1204. $y=-2\cos\left[\frac{2}{3}(x-\pi)\right]$.

1205. $y=2\,\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

ვთქვათ, უნდა აიგოს $y=3\sin(2x-5)$ ფუნქციის გრაფიკი. ეს ფუნქცია წარმოვადგინოთ $y=3\sin\left[2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right]$ სახით. ამის შემდეგ ადვილი მისახვედრია, თუ როგორი თანმიმდევრობით უნდა აიგოს იგი.

1) თუ $y=\sin x$ სინუსოიდას „შევკუმშავთ" x-თა ღერძზე ორჯერ, მივიღებთ $y=\sin 2x$ მრუდს (ნახ. 240, მრუდი I).



ნახ. 240.

2) $y=\sin 2x$ მრუდის ვერტიკალური მიმართულებით 3-ჯერ „გაჭიმვით", მივიღებთ $y=3\sin 2x$ მრუდს (ნახ. 240, მრუდი II).

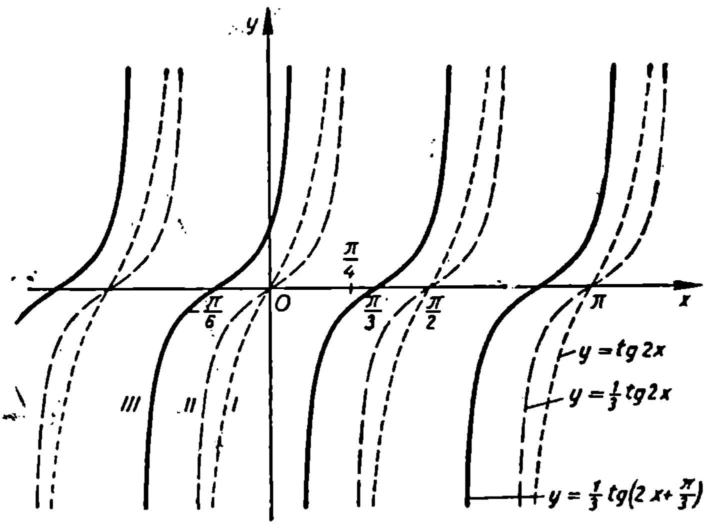
3) თუ $y=3\sin 2x$ მრუდს მარჯვნივ გადავწევთ მასშტაბის $\frac{5}{2}$ ერ-

თეულ მანძილზე, მივიღებთ $y=3\sin(2x-5)$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 240, მრუდი III).

ანალოგიურად აიგება $y=A\sin(\omega x+\alpha)$ ფუნქციის გრაფიკიც A, ω და α-ს ნებისმიერი სხვა მნიშვნელობებისათვის.

იმავე პრინციპზეა დამყარებული $y=A\cos(\omega x+\alpha)$, $y=A\,\mathrm{tg}(\omega x+\alpha)$, $y=A\,\mathrm{ctg}(\omega x+\alpha)$ ფუნქციების გრაფიკების აგება. მაგალითად, $y=\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად ჯერ მას წარმოვადგენთ $y=\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ სახით, რის შემდეგ:

1. თუ $y=\mathrm{tg}\,x$ ტანგენსოიდას „შევკუმშავთ" x-თა ღერძზე ორჯერ, მივიღებთ $y=\mathrm{tg}\,2x$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 241, მრუდი I);



ნახ. 241.

2. თუ $y=\mathrm{tg}\,2x$ მრუდს „შევკუმშავთ" ვერტიკალური მიმართულებით 3-ჯერ, მივიღებთ $y=\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,2x$ მრუდს (ნახ. 241, მრუდი II).

3. თუ $y=\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,2x$ მრუდს გადავწევთ მარცხნივ $\frac{\pi}{6}$ მანძილზე, მივიღებთ $y=\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 241, მრუდი III)

სავარჯიშოები

ააგეთ მოცემული ფუნქციების (№ 1206—1213) გრაფიკები და აჩვენეთ ამ გრაფიკების კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები. განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქციების პერიოდები. როგორია ამ ფუნქციათა ექსტრემალური (ე. ი. მინიმალური და მაქსიმალური) მნიშვნელობანი?

1206. $y=2\sin(3x-2)$.

1207. $y=\frac{1}{2}\sin(3x-3)$.

1208. $y=2\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

1209. $y=2\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)$.

1210. $y=-\frac{3}{2}\cos(3x+2)$.

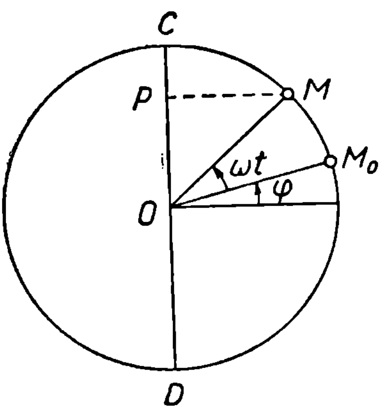
1211. $y=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

1212. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$.

1213. $y=3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$.

ჰარმონიული რხევა § 165

ვთქვათ, M წერტილი (ნახ. 242) მოძრაობს თანაბრად A-რადიუსიან წრეწირზე საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, წამში ω რადიანი მუდმივი კუთხური სიჩქარით. თუ დროის საწყის მომენტში ($t=0$) ამ წერტილს ეჭირა φ კუთხით განსაზღვრული M_0 მდებარეობა, t წამის შემდეგ იგი დაიჭერს $\omega t+\varphi$ კუთხით განსაზღვრულ რომელიმე M მდებარეობას.



ნახ. 242.

იმ დროს, როდესაც M წერტილი მოძრაობს წრეწირზე, მისი P გეგმილი ორდინატთა ღერძზე ასრულებს რხევას CD დიამეტრის გასწვრივ და აღწევს ხან უმაღლეს C მდებარეობას, ხან უდაბლეს D მდებარეობას. ეს რხევა რომ მათემატიკურად აღვწეროთ, გამოვსახოთ P წერტილის ორდინატი φ კუთხით, კუთხური ω სიჩქარითა და t შიმდი-

ნარე დროით. ამ y ორდინატის შეფარდება წრეწირის A რადიუსთან არის იმ კუთხის სინუსი, რომელსაც ქმნის $\overrightarrow{OM}$ ვექტორი x ღერძთან. მაგრამ ეს კუთხე დროის t მომენტში, როგორც ზემოთაა მითითებული, უდრის $\omega t+\varphi$-ს. ამიტომ $\frac{y}{A}=\sin(\omega t+\varphi)$, საიდანაც

$$y=A\sin(\omega t+\varphi). \tag{1}$$

(1) ფორმულა წარმოადგენს ორდინატთა ღერძზე M წერტილის გეგმილის რხევის კანონს. ასეთი სახის რხევებმა მიიღო **ჰარმონიული რხევების** სახელწოდება.

ჰარმონიული რხევის $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ ფორმულა განსაზღვრავს y-ს, როგორც t დროის ფუნქციას. ამ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ცხადია, უდრის A-ს, ხოლო მინიმალური $(-A)$-ს. მაშასადამე, ამ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა მოთავსებულია $(-A)$-სა და A-ს შორის. ამიტომ A-ს ეწოდება რხევის **ამპლიტუდა**.

ცვლად $\omega t+\varphi$ კუთხეს ეწოდება რხევის **ფაზა**. რხევის **საწყისი ფაზა** φ ყოველთვის დადებითია და ნაკლებია 2π-ზე. T დროს, რომლის განმავლობაში M წერტილი წრეწირზე აკეთებს ერთ სრულ ბრუნს, ეწოდება ჰარმონიული რხევის **პერიოდი**. ამ პერიოდში M წერტილის P გეგმილი ორჯერ გაივლის ყველა თავის შესაძლო მდებარეობას და დაბრუნდება საწყის მდებარეობაში. გამონაკლისია მხოლოდ ზღვრული C და D მდებარეობები (იხ. ნახ. 242), რომელთაგან თითოეულს წერტილი ერთხელ გაივლის.

გამოვსახოთ ჰარმონიული რხევის T პერიოდი A ამპლიტუდით, ω კუთხური სიჩქარითა და საწყისი φ ფაზით.

T დროში M წერტილი გაივლის ωT რადიან გზას. მაგრამ ეს გზა, ამასთან ერთად, უდრის წრეწირის სიგრძეს, ე. ი. 2π რადიანს. ამიტომ $\omega T=2\pi$, საიდანაც

$$T=\frac{2\pi}{\omega}. \tag{2}$$

ამრიგად, ჰარმონიული რხევის პერიოდი კუთხური სიჩქარის უკუპროპორციულია. იგი არაა დამოკიდებული რხევების არც ამპლიტუდაზე და არც საწყის ფაზაზე.

ჰარმონიული რხევის (1) პერიოდი არის $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ ფუნქციის პერიოდი. მართლაც,

$$A\sin[\omega(t+T)+\varphi]=A\sin\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=$$

$$=A\sin[\omega t+\varphi+2\pi]=A\sin(\omega t+\varphi).$$

ამას შეიძლება მივხვედრილიყავით, რასაკვირველია, შესრულებული გარდაქმნების გარეშეც. დროის $t+T$ მომენტში P წერტილი ხომ ბრუნდება იმავე მდებარეობაში, რომელიც მას ეჭირა დროის t მომენტში. $A\sin(\omega t+\varphi)$ ფუნქციის მნიშვნელობები კი P წერტილის ორდინატებია.

რხევის პერიოდის შებრუნებულ სიდიდეს უწოდებენ რხევის **სიხშირეს** და აღნიშნავენ ν* ასოთი. ჰარმონიული რხევის (1) სიხშირეა:

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}. \tag{3}$$

ეს სიდიდე გვიჩვენებს, თუ რამდენ რხევას ასრულებს წერტილი ერთ წამში.

ω კუთხური სიჩქარე რხევის ν სიხშირითა და T პერიოდით შემდეგნაირად გამოისახება (იხ. (3)):

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}.$$

ამიტომ ჰარმონიული რხევის განტოლება (1) ხშირად ჩაიწერება

$$y=A\sin(2\pi\nu t+\varphi)$$

სახით ან ასე:

$$y=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right).$$

სავარჯიშოები

1214. მოცემული ჰარმონიული რხევებიდან თითოეულისათვის განსაზღვრეთ A ამპლიტუდა, T პერიოდი, ν სიხშირე და საწყისი φ ფაზა:

ა) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$; გ) $y=3\cos 3t$;

ბ) $y=7\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ დ) $y=2\sin(3\pi t+1)$.

1215. როგორი რიცხვითი მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდამ, სიხშირემ და საწყისმა ფაზამ?

ააგეთ მოცემულ ჰარმონიულ რხევათა გრაფიკები (№ 1216, 1217):

1216. $y=3\sin\left(2t+\frac{4\pi}{3}\right)$.

---

* ν ბერძნული ასოა; იკითხება: ნიუ.

$$y=\frac{1}{2}\sin\left(3t+\frac{6\pi}{5}\right).$$

1218. როგორ გავლენას ახდენს ჰარმონიული რხევის გრაფიკზე ამ რხევის ამპლიტუდა და სიხშირე?

ელექტრული დენი, რომლითაც იკვებება ქალაქის განათების ქსელი, ცვლადი დენია. ასრულებს რა ჰარმონიულ რხევას, მისი I სიდიდე

$$I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \tag{1}$$

განუწყვეტლივ იცვლება. (1) ფორმულაში I_0 დენის მაქსიმალური მნიშვნელობაა, T — რხევის პერიოდი, φ — საწყისი ფაზა.

გამოვარკვიოთ, დროის რომელ მომენტებში აღწევს დენი ექსტრემალურ (ე. ი. მინიმალურ ან მაქსიმალურ) მნიშვნელობას და მისი სიდიდე როდის იქცევა ნულად.

როგორც ეს (1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, თავის მინიმალურ მნიშვნელობას დენის ძალა აღწევს მაშინ, როცა $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=-1$. ეს განტოლება გვაძლევს:

$$\frac{2\pi}{T}t+\varphi=\frac{3}{2}\pi+2n\pi,$$

საიდანაც

$$t=T\left(n+\frac{3}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\right). \tag{2}$$

თუ $\frac{3}{4}>\frac{\varphi}{2\pi}$ ან $\varphi<\frac{3}{2}\pi$, მაშინ მინიმუმის პირველი მომენტი შეიძლება მივიღოთ (2) ფორმულიდან, როცა $n=0$:

$$t_1=T\left(\frac{3}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

თუკი $\frac{3}{4}\leqslant\frac{\varphi}{2\pi}$ ან $\varphi\geqslant\frac{3}{2}\pi$, მაშინ მინიმუმის პირველ მომენტს მივიღებთ (2) ფორმულიდან, როცა $n=1$:

$$t_1=T\left(\frac{7}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

მინიმუმის ყოველი მომდევნო მომენტი დგება მინიმუმის წინა მომენტიდან T წამის შემდეგ (დაამტკიცეთ ეს!).

თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას I დენი აღწევს მაშინ, როცა შესრულებულია პირობა:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=1.$$

ეს განტოლება გვაძლევს:

$$\frac{2\pi}{T}t+\varphi=\frac{\pi}{2}+2n\pi.$$

საიდანაც

$$t=T\left(n+\frac{1}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\right). \tag{3}$$

თუ $\frac{1}{4}>\frac{\varphi}{2\pi}$ ან $\varphi<\frac{\pi}{2}$, მაშინ მაქსიმუმის პირველი მომენტი შეიძლება მივიღოთ (3) ფორმულიდან, როცა $n=0$:

$$t_1=T\left(\frac{1}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

თუკი $\frac{1}{4}\leqslant\frac{\varphi}{2\pi}$ ან $\varphi\geqslant\frac{\pi}{2}$, მაშინ მაქსიმუმის პირველ მომენტს მივიღებთ (3) ფორმულიდან, როცა $n=1$:

$$t_1=T\left(\frac{5}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

მაქსიმუმის ყოველი შემდეგი მომენტი დგება მაქსიმუმის წინა მომენტიდან T წამის შემდეგ (დაამტკიცეთ ეს!).

ახლა გამოვარკვიოთ, I დენის სიდიდე დროის რომელ მომენტებში იქცევა ნულად. ამისათვის უნდა ამოვხსნათ

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=0$$

განტოლება. იგი გვაძლევს:

$$\frac{2\pi}{T}t+\varphi=n\pi,$$

საიდანაც

$$t=\frac{T}{2}\left(n-\frac{\varphi}{\pi}\right). \tag{4}$$

ასე, მაგალითად, დენის სიდიდე პირველად გახდება ნულის ტოლი

$$t=\frac{T}{2}\left(1-\frac{\varphi}{\pi}\right)$$

დროის მომენტში, თუ $\varphi<\pi$, და

$$t=\frac{T}{2}\left(2-\frac{\varphi}{\pi}\right)$$

დროის მომენტში, თუ $\varphi\geqslant\pi$. თითოეული მომდევნო მომენტი დადგება წინა მომენტიდან $\frac{T}{2}$ წამის შემდეგ (დაამტკიცეთ ეს!).

სავარჯიშოები

1219. იცით თუ არა, როგორია დენის რხევის სიხშირე თქვენს განათების ქსელში?

1220. დროის რომელ მომენტებში ღებულობს y სიდიდე, რომელიც იცვლება

$$y=\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

კანონის მიხედვით, ექსტრემალურ (ე. ი. მინიმალურ და მაქსიმალურ) მნიშვნელობებს და როდის იქცევა იგი ნულად?

1221. იგივე, რაც 1220-ე ამოცანაშია, ოღონდ შემდეგ რხევათა კანონებისათვის:

$$\text{ა) } y=2\sin\left(3t+\frac{\pi}{5}\right).$$

$$\text{ბ) } y=7\sin\left(2t+\frac{5}{6}\pi\right).$$

$a\sin x+b\cos x$ გამოსახულების გარდაქმნა დამხმარე კუთხის შემოტანით § 107

ლ ე მ ა. **თუ ორი ნამდვილი რიცხვის კვადრატების ჯამი უდრის ერთს, მაშინ ამ რიცხვებიდან ერთი შეიძლება განვიხილოთ როგორც რომელიმე კუთხის კოსინუსი, ხოლო მეორე — როგორც სინუსი.**

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ $a^2+b^2=1$, მაშინ არსებობს ისეთი φ კუთხე, რომ $a=\cos\varphi$; $b=\sin\varphi$.

სანამ ამ ლემას დავამტკიცებდეთ, განვმარტოთ იგი შემდეგ მაგალითზე:

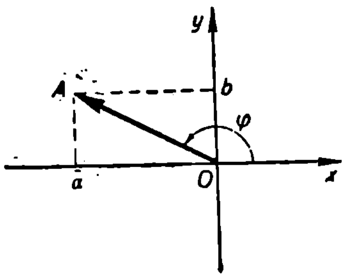
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

ამიტომ არსებობს ისეთი φ კუთხე, რომ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\varphi$; $\frac{1}{2}=\sin\varphi$. φ კუთხედ ამ შემთხვევაში შეიძლება ავიღოთ ყოველი კუთხე შემდეგი კუთხეებიდან: 30°, 30°±360°, 30°±2·360° და ა. შ.

ლ ე მ ი ს დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი (ნახ. 243), რომლის კოორდინატებია (a, b). ვინაიდან $a^2+b^2=1$, ამიტომ ამ ვექტორის სიგრძე უდრის 1-ს. მაგრამ ამ შემთხვევაში მისი კოორდინატები უნდა უდრიდეს $\cos\varphi$-სა და $\sin\varphi$-ს, სადაც φ მოცემული ვექტორის მიერ აბსცისების ღერძთან შედგენილი კუთხეა. ამრიგად,

$$a=\cos\varphi,\quad b=\sin\varphi,$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.



ნახ. 243.

დამტკიცებული ლემა საშუალებას გვაძლევს, რომ $a\sin x+b\cos x$ გამოსახულება გარდავქმნათ და მისი შესწავლის გაადვილების მიზნით უფრო მარტივი სახით წარმოვადგინოთ.

პირველ ყოვლისა, გამოვიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ $\sqrt{a^2+b^2}$ გამოსახულება:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

ვინაიდან $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, ამიტომ $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ და $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ რიცხვებიდან პირველი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც რომელიმე φ კუთხის კოსინუსი, ხოლო მეორე —როგორც იმავე φ კუთხის სინუსი: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

ამრიგად,

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

სადაც φ კუთხე განისაზღვრება

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ პირობებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1) $$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

მიღებული

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

ფორმულის დამახსოვრება სასარგებლოა.

2) თუ a და b რიცხვებიდან ერთი დადებითია, ხოლო მეორე —უარყოფითი, მაშინ $a\sin x+b\cos x$ გამოსახულება უნდა გარდავქმნათ არა სინუსების ჯამად, არამედ ორი კუთხის სინუსების სხვაობად. მაგალითად,

$$3\sin x-4\cos x=\sqrt{9+16}\left(\frac{3}{\sqrt{9+16}}\sin x-\frac{4}{\sqrt{9+16}}\cos x\right)=$$

$$=5\left(\sin x\cdot\frac{3}{5}-\cos x\cdot\frac{4}{5}\right)=5\sin(x-\varphi),$$

სადაც φ კუთხედ შეგვიძლება ვიგულისხმოთ ნებისმიერი კუთხე, განსაზღვრული პირობებით:

$$\cos\varphi=\frac{3}{5},\quad \sin\varphi=\frac{4}{5}.$$

სახელდობრ, შეიძლება ავიღოთ $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$, მაშინ მივიღებთ:

$$3\sin x-4\cos x=5\sin\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right).$$

სავარჯიშოები

დამხმარე კუთხის შემოტანით გარდაქმენით მოცემული გამოსახულებანი (№ 1222—1229):

1222. $\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

1223. $\sin x-\cos x$.

1224. $3\sin x+4\cos x$.

1225. $4\sin x-3\cos x$.

1226. $5\sin x-12\cos x$.

1227. $-7\sin 2x-24\cos 2x$.

1228. $3\sin 3x+2\sqrt{2}\cos 3x$.

1229. $\sin 5x+\cos 5x$.

1230. როგორი უდიდესი და როგორი უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს თითოეულმა შემდეგ გამოსახულებათაგან:

ა) $3 \sin x+4 \cos x$; დ) $5-7 \sin x-24 \cos x$;

ბ) $|3 \sin x-4 \cos x|$; ე) $\sqrt{\sin x-\cos x}$;

გ) $-5 \sin x+12 \cos x$; ვ) $\dfrac{1}{|\sin x+\cos x|}$?

1231. დაამტკიცეთ, რომ

$$\sqrt{99} \sin x-49 \cos x=51$$

განტოლებას არა აქვს ფესვები.

ააგეთ მოცემული ფუნქციების (№ 1232, 1233) გრაფიკები:

1232. $y=\sin x+\sqrt{3} \cos x$.

1233. $y=\sin 2x-\cos 2x$.

ერთნაირი სიხშირის ჰარმონიულ რხევათა შეკრება § 168

პრაქტიკაში (მაგალითად, ელექტროტექნიკაში) ხშირად საქმე გვაქვს ერთნაირი სიხშირის რხევებთან. ნებისმიერი ორი ასეთი რხევა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$y_1=A_1 \sin (\omega t+\varphi_1) \text{ და } y_2=A_2 \sin (\omega t+\varphi_2).$$

განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს შემთხვევა, როცა პირველი რხევის საწყისი ფაზა უდრის ნულს, ხოლო მეორე რხევის საწყისი ფაზა $\frac{\pi}{2}$-ს. მაშინ $y_1=A_1 \sin \omega t$; $y_2=A_2 \sin \left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=A_2 \cos \omega t$. ასეთი ჰარმონიული რხევების ჯამი უდრის:

$$A_1 \sin \omega t+A_2 \cos \omega t=\sqrt{A_1^2+A_2^2} \sin (\omega t+\varphi), \quad (1)$$

სადაც φ კუთხე განისაზღვრება პირობებიდან:

$$\sin \varphi=\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}; \quad \cos \varphi=\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}} \quad (2)$$

(1) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ, **თუ ორ ჰარმონიულ რხევას აქვს ერთნაირი სიხშირე და მათი ფაზებია 0 და $\frac{\pi}{2}$, მაშინ ამ რხევათა ჯამი იმავე სიხშირის ჰარმონიული რხევაა.**

შეჯამებული რხევის ამპლიტუდა A გამოისახება შესაკრებ რხევათა A_1 და A_2 ამპლიტუდებით

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$$

ფორმულის მიხედვით, ხოლო საწყისი φ ფაზა განისაზღვრება (2) პირობებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $y=\sin 5t-\sqrt{3}\cos 5t$ რხევის ამპლიტუდა, სიხშირე და საწყისი ფაზა.

გვაქვს: $\sin 5t-\sqrt{3}\cos 5t=\sqrt{1+3}\sin(5t+\varphi)=2\sin(5t+\varphi)$,

ამასთან, $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\varphi=\frac{1}{2}$. ამიტომ $\varphi=\frac{5\varphi}{3}$ და, მაშასადამე,

$$\sin 5t-\sqrt{3}\cos 5t=2\sin\left(5t+\frac{5\pi}{3}\right).$$

მოცემული რხევის ამპლიტუდა უდრის 2-ს, სიხშირეა $\frac{5}{2\pi}$, ხოლო საწყისი ფაზაა $\frac{5\pi}{3}$.

სავარჯიშოები

მოცემული ჰარმონიული რხევებიდან (№ 1234—1237) თითოეულისათვის იპოვეთ ამპლიტუდა, სიხშირე და საწყისი ფაზა. ააგეთ ამ რხევათა გრაფიკები.

1234. $y=\sin 2t-\cos 2t$.

1235. $y=\sqrt{3}\sin 3t+\cos 3t$.

1236. $y=4\sin \pi t+3\cos \pi t$.

1237. $y=7\sin x-24\cos x$.

1238. დაამტკიცეთ, რომ ერთნაირი სიხშირის ორი ჰარმონიული რხევის ჯამი არის იმავე სიხშირის ჰარმონიული რხევა. როგორ განისაზღვრება შეჯამებული რხევის ამპლიტუდა, სიხშირე და საწყისი ფაზა შესაკრებ რხევათა შესაბამისი მახასიათებლებით?

1239. სახელოსნოში დადგმულია ორი ძრავა. ერთი მათგანის ჩართვისას იატაკის თითოეული წერტილი იწყებს ჰარმონიულ რხევას 0,1 მმ ამპლიტუდითა და $1400\frac{1}{\text{წთ}}$ სიხშირით. მეორის ჩართვისას იატაკის თითოეული წერტილი იწყებს ჰარმონიულ რხევას იმავე ამპლიტუდითა და $1450\ \frac{1}{\text{წთ}}$ სიხშირით. როგორ დაიწყებს რხევას იატაკი ორივე ელექტროძრავას ჩართვისას?

ტრიგონომეტრიულ იგივობათა დამტკიცება § 169

არსებობს ტრიგონომეტრიულ იგივობათა დამტკიცების მრავალი სხვადასხვა ხერხი. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი კონკრეტულ მაგალითებზე.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ იგივობა:

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \tag{1}$$

პირველი ხერხი. ამ იგივობის მარცხენა ნაწილში მდგომი გამოსახულება გარდავქმნათ ისე, რომ იგი დავიყვანოთ $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ სახეზე. ამისათვის $\cos\alpha$ ჩავწეროთ როგორც $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. მაშინ, თუ გამოვიყენებთ ორი კუთხის სინუსების ჯამისა და სხვაობის ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\alpha = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

ამიტომ

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

მეორე ხერხი. მოცემული იგივობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ გამოსახულება გარდავქმნათ $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ გამოსახულებად. ამისათვის ვისარგებლოთ ორი კუთხის ჯამის ტანგენსის ფორმულით:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

მაგრამ აქ აუცილებელია ერთი პრინციპულად საყურადღებო შენიშვნის გაკეთება. როდესაც ვწერდით, რომ

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}},$$

მაშინ ფაქტიურად ვგულისხმობდით, რომ $\operatorname{tg}\alpha$ განსაზღვრულია, ე. ი. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$. სინამდვილეში კი ეს ვარაუდი შეიძლება არასწორი აღმოჩნდეს. ამიტომ შემთხვევა, როცა $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$, ცალკე უნდა განვიხილოთ. ამ შემთხვევაში $\cos\alpha=0$ და ამიტომ მოცემული იგივეობის მარცხენა ნაწილი მიიღებს

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{-\sin\alpha}=-1$$

სახეს. მოცემული იგივობის მარჯვენა ნაწილი კი, როცა $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$, მოგვცემს:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi+n\pi\right).$$

მაგრამ π არის ტანგენსის პერიოდი. მაშასადამე,

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi=-1.$$

ამრიგად, როცა $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$, მაშინაც (1) ტოლობა მართებულია.

ახლა კი მოცემული იგივობა შეიძლება ჩაითვალოს სავსებით დამტკიცებულად.

მ ე ს ა მ ე ხ ე რ ხ ი. მოცემული იგივობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში მდგომი გამოსახულებანი დავიყვანოთ ერთსა და იმავე სახეზე. ამისათვის $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ $\cos\alpha$-ზე, ოღონდ თავიდანვე ვიგულისხმოთ, რომ $\cos\alpha\neq0$. ამის შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

მოცემული იგივობის მარჯვენა ნაწილის გარდაქმნისათვის გამოვიყენოთ ორი კუთხის ჯამის ტანგენსის ფორმულა:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (3)$$

თუ (2) და (3) ტოლობებს შევადარებთ, მივიღებთ

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

შემთხვევა, როცა $\cos\alpha=0$, ცალკე უნდა განვიხილოთ, ისე როგორც ეს შევასრულეთ მე-2 ხერხის განხილვის დროს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დაამტკიცეთ იგივობა:

$$\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 2\alpha=\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha.$$

ვაჩვენოთ, რომ მოცემული იგივობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში მდგომ გამოსახულებათა შორის სხვაობა უდრის ნულს. მართლაც,

$$\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 2\alpha-\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha=$$
$$=(\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha)-\sin 2\alpha=$$
$$=\sin(5\alpha-3\alpha)-\sin 2\alpha=\sin 2\alpha-\sin 2\alpha=0.$$

ამით იგივობა დამტკიცებულია.

სავარჯიშოები

დაამტკიცეთ მოცემული იგივობანი:

1240. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta.$

1241. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha.$

1242. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}.$

1243. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\beta-(\sin\beta+\cos\beta)\sin\alpha}.$

1244. $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right).$

1245. $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$

1246. $\cos 4\alpha \cdot \cos 6\alpha - \cos 10\alpha = \sin 4\alpha \cdot \sin 6\alpha$.

1247. $-\frac{1}{4} \operatorname{tg} 2\alpha \sin 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

$\arcsin a$, $\arccos a$ და ა. შ. გამოსახულებათა შემცველი ტოლობანი § 170

ვთქვათ, უნდა დავამტკიცოთ ტოლობა:

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3}{4} \pi.$$

პირველად გამოვარკვიოთ, რა საზღვრებშია მოთავსებული $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg} 3$ კუთხე. თითოეული $\operatorname{arctg} 2$ და $\operatorname{arctg} 3$ კუთხეთაგანი 0-ზე მეტია და $\frac{\pi}{4}$-ზე ნაკლები. ამიტომ

$$0 < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi.$$

ანალოგიურ უტოლობას აკმაყოფილებს $\frac{3}{4}\pi$ კუთხეც:

$$0 < \frac{3}{4}\pi < \pi.$$

ამგვარად, $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$ და $\frac{3}{4}\pi$ კუთხეები იმყოფება 0-დან π-მდე შუალედში. მაგრამ ამ შემთხვევაში მათი ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ მათი ტანგენსების ტოლობა. გვაქვს:

$$\operatorname{tg} (\operatorname{arc tg} 2 + \operatorname{arc tg} 3) = \frac{\operatorname{tg} (\operatorname{arc tg} 2) + \operatorname{tg} (\operatorname{arc tg} 3)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) \cdot \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 3)} =$$

$$= \frac{2+3}{1 - 2 \cdot 3} = -1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi = -1.$$

ამით მოცემული ტოლობა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ იმ საზღვრების მონახვა, რომლებშიც მოთავსებულია $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arc tg} 3$ ჯამი, სავალდებულოა. არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\operatorname{arc tg} 2 + \operatorname{arc tg} 3 = \frac{3}{4} \pi$ მხოლოდ იმის საფუძველზე, რომ $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi$. ორი კუთხის ტანგენსების ტოლობიდან არ გამომდინარეობს, რომ თვით ეს კუთხეებიც ტოლია. მაგრამ, თუ კუ-

თხეები მოთავსებულია 0-დან π-მდე საზღვრებში, მაშინ მათი ტანგენსების ტოლობა უზრუნველყოფს თვით კუთხეების ტოლობასაც.

სავარჯიშოები

დაამტკიცეთ მოცემული ტოლობანი:

1248. $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$.

1249. $\operatorname{arc\,tg}5+\operatorname{arctg}\frac{1-5\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

1260. $\arcsin 0{,}6+\arcsin 0{,}8=\frac{\pi}{2}$.

1261. $\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{12}{13}=\arccos\frac{120}{169}$.

1262. $\arcsin 0{,}8+\arccos\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$.

1263. $\arcsin 0{,}8-\arccos 0{,}6=0$.

ტრიგონომეტრიული განტოლებანი § 171

ამ თავში მიღებული იყო რიგი მნიშვნელოვანი ტრიგონომეტრიული იგივობანი. ახლა კონკრეტულ მაგალითებზე ვაჩვენებთ, თუ როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ ეს იგივობანი ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოსახსნელად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2$$

განტოლება.

თუ გამოვიყენებთ ორი კუთხის ჯამის ტანგენსის ფორმულას, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}x}=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}.$$

ამიტომ მოცემული განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\operatorname{tg}x+\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=-2.$$

თუ $\operatorname{tg} x$-ს ავღნიშნავთ y-ით, მივიღებთ

$$y+\frac{1+y}{1-y}=-2$$

ალგებრულ განტოლებას, ანუ

$$y(1-y)+1+y=-2(1-y),$$

საიდანაც

$$y=\pm\sqrt{3}.$$

ამრიგად, ან $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ და მაშინ $x=\frac{\pi}{3}+n\pi$, ან $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ და მაშინ $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, სადაც n და k ნებისმიერი მთელი რიცხვებია. ამონახსნთა ეს ორი ჯგუფი შეიძლება წარმოვადგინოთ ერთი ფორმულით: $x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$.

პ ა ს უ ხ ი: $x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ

$$3\cos 2x=7\sin x$$

განტოლება.

$\cos 2x$ წარმოვადგინოთ $\cos^2x-\sin^2x$-ის სახით. მაშინ მოცემული განტოლება შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$3(\cos^2x-\sin^2x)=7\sin x.$$

$\cos^2x$ შევცვალოთ $(1-\sin^2x)$-ით, მივიღებთ:

$$3(1-2\sin^2x)=7\sin x.$$

თუ $\sin x$-ს ავღნიშნავთ y-ით, მივიღებთ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას: $-6y^2-7y+3=0$, საიდანაც $y_1=\frac{1}{3}$; $y_2=-\frac{3}{2}$. თუ გავიხსენებთ, რომ $y=\sin x$, მივიღებთ: ან $\sin x=\frac{1}{3}$, ან $\sin x=-\frac{3}{2}$. მაგრამ მეორე შეუძლებელია: არც ერთი კუთხის სინუსი აბსოლუტური სიდიდით 1-ს არ აღემატება. ამიტომ $\sin x=\frac{1}{3}$, საიდანაც $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+n\pi$, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ

$$2\sin^2x+\cos^2x=\frac{3}{2}\sin 2x$$

განტოლება.

$\sin 2x$ წარმოვადგინოთ $2\sin x\cdot\cos x$-ის სახით, რის შედეგადაც მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებას:

$$2\sin^2 x+\cos^2 x=3\sin x\cdot\cos x.$$

თუ ამ განტოლების ორივე ნაწილს გავყოფთ $\cos^2 x$-ზე, მივიღებთ:

$$2\,\mathrm{tg}^2 x+1=3\,\mathrm{tg}\,x.$$

აქედან

$$(\mathrm{tg}\,x)_1=1,\quad \text{ანუ}\quad x=\frac{\pi}{4}+n\pi;$$

$$(\mathrm{tg}\,x)_2=\frac{1}{2},\quad \text{ანუ}\quad x=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}+k\pi.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$, სადაც n და k ნებისმიერი მთელი რიცხვებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ამოვხსნათ

$$1+\cos x+\sin x=0$$

განტოლება.

წარმოვადგინოთ $1+\cos x$ როგორც $2\cos^2\frac{x}{2}$, ხოლო $\sin x$ — როგორც $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ მაშინ მოცემული განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს

$$2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0$$

სახით. ამიტომ

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

თუ $\cos\frac{x}{2}=0$, მაშინ $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi$ და, მაშასადამე, $x=\pi+2n\pi$.

თუ $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0$ (ერთგვაროვანი განტოლება), მაშინ $1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}=$ $=0$, საიდანაც $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=-1$; $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, მაშასადამე, $x=-\frac{\pi}{2}+$ $+2k\pi$.

პასუხი; $x=\pi+2n\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, სადაც n და k ნებისმიერი მთელი რიცხვებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ამოვხსნათ

$$\cos 2x = \cos 6x$$

განტოლება.

მოცემული განტოლება გადავწეროთ $\cos 2x - \cos 6x = 0$ სახით და გამოვიყენოთ ორი კუთხის კოსინუსების სხვაობის ფორმულა.
ამის შედეგად მივიღებთ:

$$-2\sin\frac{2x+6x}{2}\cdot\sin\frac{2x-6x}{2}=0,$$

ანუ

$$2\sin 4x \sin 2x = 0.$$

ასეთ შემთხვევაში ან $\sin 2x = 0$ და მაშინ $2x = m\pi$; $x = \frac{\pi}{2}m$, ან $\sin 4x = 0$ და მაშინ $4x = k\pi$; $x = \frac{k\pi}{4}$. ფესვების ორივე ჯგუფი შეიძლება წარმოვადგინოთ ერთი ფორმულით: $x = \frac{\pi}{4}k$.

პ ა ს უ ხ ი: $x = \frac{\pi}{4}k$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ამოვხსნათ

$$\cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 5x \cdot \cos x$$

განტოლება.

წარმოვადგინოთ $\cos 4x \cdot \cos 2x$ და $\cos 5x \cdot \cos x$ ნამრავლები ჯამების სახით (იხ. § 157):

$$\cos 4x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x);$$

$$\cos 5x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x).$$

მაშინ მოცემული განტოლება შეიძლება ასეთი სახით გადაიწეროს:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x).$$

აქედან

$$\cos 2x = \cos 4x;$$
$$\cos 2x - \cos 4x = 0;$$
$$-2\sin 3x \cdot \sin(-x) = 0;$$
$$2\sin 3x \cdot \sin x = 0.$$

ამიტომ, ან $\sin x = 0$ და მაშინ $x = n\pi$, ან $\sin 3x = 0$ და მაშინ $3x = k\pi$:

$x=\frac{\pi}{3}k$. ცხადია, ფესვების ორივე ჯგუფი შეიძლება ჩაიწეროს ერთი ფორმულით: $x=\frac{\pi}{3}m$.

პასუხი: $x=\frac{\pi}{3}m$.

მაგალითი 7. ამოვხსნათ $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=0$ განტოლება.

თუ გამოვიყენებთ ორი კუთხის ტანგენსების სხვაობის ფორმულას, მივიღებთ:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos x}=0,$$

საიდანაც $\sin 2x=0$, $2x=m\pi$; $x=\frac{\pi}{2}m$. x-ის ამ მნიშვნელობათაგან უნდა ჩამოვაშოროთ ისინი, რომელთათვისაც $\cos 3x$ და $\cos x$ გამოსახულებათაგან ერთ-ერთი მაინც იქცევა ნულად. გამოსახულება $\cos x$ იქცევა ნულად, როცა $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. ამიტომ წინათ მიღებულ $x=\frac{\pi}{2}m$ მნიშვნელობათაგან რჩება მხოლოდ $x=m\pi$ მნიშვნელობანი. გამოსახულება $\cos 3x$ იქცევა ნულად მაშინ, როცა $3x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, ანუ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. რიცხვი $(2k+1)$ კენტია, ხოლო რიცხვი 6 — ლუწი. ამიტომ რიცხვი $\frac{2k+1}{6}$ არ შეიძლება იყოს მთელი და, მაშასადამე, $x=\frac{2k+1}{6}\pi$ მნიშვნელობები არ იმყოფება $x=m\pi$ მნიშვნელობათა შორის. ამრიგად, $x=m\pi$ სახის ყველა რიცხვი მოცემული განტოლების ფესვია.

პასუხი. $x=m\pi$.

მაგალითი 8. ამოვხსნათ

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=1$$

განტოლება.

$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ იგივობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}; \quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

ამიტომ მოცემული განტოლება შეიძლება ასე გადმოიწეროს:

$$\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}=1,$$

საიდან აც

$$\cos 4x+\cos 2x=0.$$

ეს განტოლება ადვილად ამოიხსნება ორი კუთხის კოსინუსების ჯამის ფორმულით, საიდანაც ვღებულობთ:

$$2\cos 3x\cdot\cos x=0.$$

თუ $\cos x=0$, მაშინ $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$: თუკი $\cos 3x=0$, მაშინ $3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, საიდანაც $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$. ძნელი არაა იმის გაგება, რომ, როცა $k=3n+1$, ფესვების მეორე ჯგუფი $\left(x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right)$ შეიცავს პირველი ჯგუფის ყველა $\left(x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ ფესვს. ამიტომ მოცემული ამოცანის პასუხი შეიძლება გამოისახოს ერთი ფორმულით: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. ამოვხსნათ

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$$

განტოლება.

გარდავქმნათ $\sin x-\sqrt{3}\cos x$ გამოსახულება დამხმარე კუთხის შემოტანით (იხ. § 167):

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=$$

$$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\cos x\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

ახლა მოცემული განტოლება შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

საიდანაც

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

და, მაშასადამე,

$$x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,$$

$$x=\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,$$

პასუხი: $x=\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi.$

მაგალითი 10. ამოვხსნათ

$$5\sin x-\cos x=5$$

განტოლება.

ეს განტოლება პრინციპში შეიძლება ამოიხსნას იმავე ხერხით, რომლითაც წინა განტოლება:

$$\sqrt{26}\left(\frac{5}{26}\sin x-\frac{1}{\sqrt{26}}\cos x\right)=5,$$

$$\sqrt{26}\sin(x-\varphi)=5,$$

სადაც

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{26}},\qquad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{26}},$$

ანუ

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5},$$

ამიტომ

$$\sin\left(x-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{\sqrt{26}},$$

საიდანაც

$$x-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=(-1)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}+n\pi,$$

$$x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+(-1)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}+n\pi.$$

მაგრამ ამ შემთხვევაში უმჯობესია გამოვიყენოთ ამოხსნის სხვა მეთოდი, რომელიც უფრო მარტივ პასუხს იძლევა. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2y}{1+y^2};\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

მაშინ მოცემული განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\frac{10y}{1+y^2}-\frac{1-y^2}{1+y^2}=5,$$

საიდანაც

$$10y-1+y^2=5(1+y^2);$$
$$4y^2-10y+6=0;$$
$$y_1=1, \quad y_2=\frac{3}{2}.$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, მივიღებთ:

$$\left(\frac{x}{2}\right)_1=\frac{\pi}{4}+n\pi; \qquad \left(\frac{x}{2}\right)_2=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}+k\pi.$$

მაშასადამე, მოცემულ განტოლებას აქვს ფესვების ორი ჯგუფი:

$$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad \text{და} \quad x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}+2k\pi,$$

სადაც n და k ნებისმიერი მთელი რიცხვებია.

მსურველებს შეუძლიათ შეამოწმონ, რომ ორი სხვადასხვა ხერხით მიღებული პასუხები ერთსა და იმავე შედეგს გამოსახავს.

სავარჯიშოები

ამოხსენით განტოლებანი:

1254. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1.$

1255. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

1256. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-0,5\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$

1257. $\cos 2x\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\sin x.$

1258. $\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+x)=\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+x).$

1259. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0.$

1260. $\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}x=1.$

1261. $\sin 2x=2\sin x.$

1262. $\cos 2x=2\sin^2 x.$

1263. $\sin x\cdot\cos x=0,25.$

1264. $\sin x+\cos\frac{x}{2}=0.$

1265. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x.$

1266. $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0{,}5.$

1267. $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = 0{,}25.$

1268. $5 \cos 2x = \sqrt{56} \sin x.$

1269. $\cos 2x = 2\sin x - \frac{1}{2}.$

1270. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x.$

1271. $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x.$

1272. $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2.$

1273. $2 \sin^2 x = \sqrt{6} \sin 2x - 3 \cos^2 x.$

1274. $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x.$

1275. $\sin 2x + \sin x \cdot \cos x = 2 \cos 2x.$

1276. $\cos 7x \cdot \cos 3x = \cos 4x.$

1277. $\cos 3x \cdot \cos x = \cos 7x \cdot \cos 5x.$

1278. $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 6x.$

1279. $\sin x \cdot \sin 3x = \sin 2x \cdot \sin 4x.$

1280. $\sin 2x \cdot \cos 3x = \sin 3x \cdot \cos 2x.$

1281. $\cos (\alpha + x) \cdot \cos (\alpha - x) + \sin^2 x = 0{,}5.$

1282. $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x.$

1283. $1 - \cos x = \sin x.$

1284. $1 + \cos x + \cos 2x = 0.$

1285. $\cos 2x = 1 + \sin x.$

1286. $\frac{4(1 + \cos x)}{\cos \frac{x}{2}} = 3 \sin^2 \frac{x}{2}.$

1287. $\sin x + \sin 3x = 0.$

1288. $\sin x - \sin 3x = 0.$

1289. $\sin(30^\circ + x) - \sin(60^\circ - x) = 1.$

1290. $\cos 2x + \cos 6x = 0.$

1291. $\cos 2x - \cos 6x = 0.$

1292. $\cos (x - \alpha) - \cos (x - \beta) = \sin (\beta - \alpha).$

1293. $\sin 3x = \cos 2x.$

1294. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

1295. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$
1296. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0.$
1297. $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0.$
1298. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x.$
1299. $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 2x.$
1300. $\operatorname{tg}(\alpha + x) + \operatorname{tg}(\alpha - x) = 0.$
1301. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{3x}{2}.$
1302*. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 5x = 0.$
1303. $\cos^2 x + 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 2.$
1304. $\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{2} \cos 6x = 1.$
1305. $\cos^2 x + 2 \sin^2 5x = \frac{3 - \cos 10x}{2}.$
1306. $\sin^2 4x + 7 \cos^2 6x + \frac{1}{2} \cos 8x = 5.$
1307. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1.$
1308. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$
1309. $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x.$
1310*. $\sin x - \sqrt{7} \cos x = \sqrt{7}.$
1311. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2}.$
1312. $\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1.$
1313. $2 \sin x - 5 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 5.$
1314. $\sqrt{3} \sin x - \sqrt{5} \cos x = \sqrt{3}.$
1315. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1.$
1316. $\cos 4x + \operatorname{tg} 2x = 1.$
1317. $\cos x \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = -\frac{3}{2}.$

ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის გრაფიკული ხერხი § 172

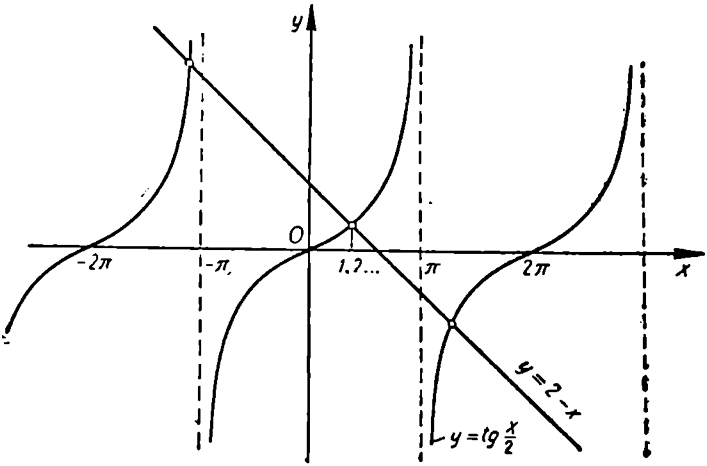
ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული განტოლების გრაფიკული ხერხით ამოხსნის შესახებ ჩვენ უკვე გვქონდა ლაპარაკი 125-ე პარაგრაფში (ნაწ. I). ახლა, როდესაც ვიცით ჯერადი კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკების აგება, შეგვიძლია ამ ხერხით გაცილებით მეტი განტოლება ამოვხსნათ, ვიდრე წინათ. მაგრამ ამოხსნის ძირითადი იდეა, ცხადია, იგივე რჩება.

მაგალითისათვის განვიხილოთ

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2-x$$

განტოლება.

$y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ და $y=2-x$ ფუნქციების გრაფიკები (ნახ. 244) იკვეთება უსასრულოდ ბევრ წერტილში. მაშასადამე, მოცემულ განტოლებას აქვს ფესვების უსასრულო სიმრავლე. ვიპოვოთ, მაგალითად, უმცირესი დადებითი x_0 ფესვი. ეს ფესვი არის გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისა. იგი დაახლოებით უდრის 1,2-ს.



ნახ. 244.

ეს ფესვი რომ უფრო ზუსტად ვიპოვოთ, ვისარგებლოთ ტანგენსების ცხრილებით (იხ. ვ. მ. ბრადისის ცხრილები, გვ. 56). ამოვიწეროთ $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ და $y=2-x$ ფუნქციების მნიშვნელობანი $x=1{,}2$ წერტილის მიდამოში.

x	1,2	1,3
$y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	0,6841	0,7602
$y=2-x$	0,8000	0,7000
$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-(2-x)$	$-0{,}1159$	0,0602

როგორც ამ ცხრილიდან ჩანს, როდესაც $x=1,2$ მნიშვნელობიდან $x=1,3$ მნიშვნელობაზე გადავდივართ, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}-(2-x)$ სხვაობა იცვლის ნიშანს მოპირდაპირე ნიშნით (— -იდან +-ზე). მაშასადამე, ეს სხვაობა ნულად იქცევა სადღაც 1,2 და 1,3 მნიშვნელობებს შორის. მაშასადამე, სიზუსტით 0,1-მდე $x_0\approx1,2$ (ნაკლებობით) და $x_0\approx1,3$ (მეტობით).

ტანგენსების ცხრილის გამოყენებით შეიძლება ვიპოვოთ ამ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით 0,01-მდეც. ამისათვის განვიხილოთ 1,2 და 1,3 რიცხვების საშუალო $x=1,25$ მნიშვნელობა. როცა $x=1,25$, მაშინ

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\approx0,7215,$$

$$2-x=0,7500.$$

ვინაიდან $\operatorname{tg}\frac{x}{2}<2-x$, ამიტომ $x_0>1,25$ (იხ. ნახ. 244). ამრიგად, $1,25<$
$<x_0<1,30$.

ახლა ვსინჯოთ $x=1,28$ მნიშვნელობა, რომელიც ახლოსაა 1,25 და 1,30 რიცხვების საშუალო მნიშვნელობასთან. როცა $x=1,28$, მაშინ

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\approx0,7445,$$

$$2-x=0,7200.$$

ახლა უკვე $\operatorname{tg}\frac{x}{2}>2-x$, მაშასადამე (იხ. ნახ. 244), $x_0<1,28$.

ანალოგიურად, თუ განვიხილავდით $x=1,26$ მნიშვნელობას, მივიღებდით $\operatorname{tg}\frac{x}{2}<2-x$ და ამიტომ $x_0>1,26$. მაშასადამე,

$$1,26<x_0<1,28.$$

ამიტომ სიზუსტით 0,01-მდე

$$x_0\approx1,27.$$

თუ საჭირო იქნებოდა იმის განსაზღვრა, როგორია ეს მიახლოებითი მნიშვნელობა (ნაკლებობით თუ ნამეტით), მაშინ უნდა შეგვედარებინა $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-ისა და $(2-x)$-ის მნიშვნელობანი $x=1,27$ წერტილში. ვავალებთ მოსწავლეებს შეასრულონ ეს დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოები

1318. იპოვეთ

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2-x^3$$

განტოლების უმცირესი დადებითი ფესვი 0,01-მდე სიზუსტით.

1319. იპოვეთ

$$\sin 2x=1-4x$$

განტოლების ფესვი 0,01-მდე სიზუსტით.

ამოცანები გამეორებისათვის

1320. რამდენი ნამდვილი ფესვი აქვს თითოეულს მოცემულ განტოლებათაგან:

ა) $\sin x=2x$;

ბ) $\sin x=\frac{x+1}{2}$

გ) $\operatorname{tg} ax=bx+c\,(b\neq 0)$;

დ) $\cos 2x=x$?

1321. შეიძლება თუ არა, რომ ორი კუთხის ჯამის ტანგენსი ამავე კუთხეების ტანგენსების ჯამის ტოლი იყოს? თუ შეიძლება, რა შემთხვევაში?

1322. გამოიანგარიშეთ $\sin(\alpha+\beta)$ და $\cos(\alpha-\beta)$, თუ ცნობილია, რომ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ამასთან, α და β კუთხეები ბოლოვდება ერთსა და იმავე მეოთხედში.

1323. გამოიანგარიშეთ $\sin 2\alpha$ და $\cos 2\alpha$, თუ $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ (ცნობილია, რომ $a>b>0$ და α კუთხე ბოლოვდება არა I მეოთხედში).

1324. იპოვეთ $\sin 4x$, თუ $\operatorname{tg} x=3$.

დაამტკიცეთ იგივეობანი (№ 1325—1327):

1325. $\sin 200^\circ\cdot\sin 310^\circ+\cos 340^\circ\cdot\cos 50^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1326. $16\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=1$.

1327. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3}{5}\pi=\frac{1}{2}$.

გაამარტივეთ გამოსახულებანი (№ 1328, 1329):

1328. $\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}$.

1329. $\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}$; როცა ა) $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

ბ) $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$

1330. დაშალეთ მამრავლებად

$$\cos^2 4\alpha+\cos^2 3\alpha-\sin^2 2\alpha-\sin^2\alpha.$$

დაამტკიცეთ იგივობანი (№ 1331—1334):

1331. $$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

1332. $$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha.$$

1333. $$\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\frac{3}{2}.$$

1334. $$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

1335. ელექტროგენერატორი გამოიმუშავებს სამფაზიან დენს:

$$I_1=I_0\sin(\omega t+\varphi),\quad I_2=I_0\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{2}{3}\pi\right),$$

$$I_3=I_0\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{4}{3}\pi\right).$$

დაამტკიცეთ, რომ დროის ნებისმიერ t მომენტში

$$I_1+I_2+I_3=0.$$

1336. როგორ არის ერთმანეთთან დაკავშირებული α და β კუთხეები, თუ $|\sin\alpha|=|\sin\beta|$?

1337. გაამარტივეთ

$$\sqrt{\sin^2\alpha+\cos 2\alpha}+1$$

გამოსახულება და შეამოწმეთ მიღებული შედეგების მართებულობა, როცა $\alpha=0$ და $\alpha=\pi$.

ამოხსენით განტოლებანი (№ 1338—1351):

1338. $2\sin x\cdot\sin 2x+\cos 3x=0.$

1339. $|\cos^2 x - \sin^2 x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1340. $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

1341. $5(\sin x + \cos x)^2 - 13(\sin x + \cos x) + 8 = 0$.

1342. $\cos 3x - \sin x = \cos x - \sin 3x$.

1343. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$.

1344. $\frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$.

1345. $\sin 2x + \cos 2x + \sin x \cdot \cos x + 1 = 0$.

1346. $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$.

1347. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

1348. $\cos 2x + \operatorname{tg} x = 1$.

1349. $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

1350. $\sin x \cdot \sin 3x = 0{,}5$.

1351. $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cdot \cos x = -1$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1352. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

1353. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

1354. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}. \end{cases}$

1355. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

1356. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2), \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

1357. $\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3}, \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

სიტყვა „ტრიგონომეტრია“ ბერძნული წარმოშობისაა და ნიშნავს „სამკუთხედების გაზომვას“. როგორც მათემატიკის ყველა სხვა ნაწილი რომლებიც უძველეს დროში ჩაისახა, ტრიგონომეტრიაც წარმოიშვა იმ ამოცანების გადაწყვეტის ცდების შედეგად, რომელთაც ადამიანი პრაქტიკაში ხვდებოდა. ასეთ ამოცანებს შორის, პირველ ყოვლისა, შეიძლება დავასახელოთ მიწათმზომლობისა და ასტრონომიის ამოცანები.

ტრიგონომეტრია რომ უძველეს მეცნიერებას მიეკუთვნება, ამაში გვარწმუნებს თუნდაც ასეთი ფაქტი. მზის ან მთვარის დაბნელების დაწყების მომენტის წინასწარმეტყველებისათვის აუცილებელია შევასრულოთ გამოთვლები, რომლებიც ტრიგონომეტრიის მოშველიებას მოითხოვს. დაბნელებებს მეტად ზუსტად წინასწარმეტყველებდნენ ძველი ბაბილონის სწავლულები. ეტყობა, მათ უკვე იცოდნენ ელემენტარული ტრიგონომეტრიული ცნებები.

პირველი ეტყუარად დამოწმებული ტრიგონომეტრიული ცხრილები შედგენილი იყო მეორე საუკუნეში ჩვენს წელთაღრიცხვამდე. მათი ავტორი იყო ბერძენი ასტრონომი ჰ ი პ ა რ ხ ი. ამ ცხრილებს ჩვენამდე არ მოუღწევია, მაგრამ სრულყოფილი სახით ისინი შესული იყო ალექსანდრიელი ასტრონომის პ ტ ო ლ ო მ ე ო ს ი ს „ალმაგესტში“ („დიდი აგება“). პტოლომეოსის ცხრილები მსგავსია 0°-დან 90°-მდე სინუსების ცხრილებისა, რომლებიც შედგენილია ყოველი მეოთხედი გრადუსის შემდეგ. „ალმაგესტში“, კერძოდ, არის ფორმულები ორი კუთხის ჯამის სინუსისა და კოსინუსისათვის, განხილულია აგრეთვე სფერული ტრიგონომეტრიის ელემენტებიც*.

შუა საუკუნეებში ტრიგონომეტრიის განვითარებაში უდიდეს წარმატებებს მიაღწიეს შუა აზიისა და ამიერკავკასიის სწავლულებმა. ამ დროს ტრიგონომეტრიას თვლიან დამოუკიდებელ მეცნიერებად და მას უკვე, როგორც წინათ, აღარ უკავშირებენ ასტრონომიას. დიდი ყურადღება ექცევა სამკუთხედების ამოხსნის ამოცანას. ამ პერიოდის ტრიგონომეტრიაში ერთ-ერთი ყველაზე შესანიშნავი თხზულებათაგანია ნ ა ს ი რ ე დ ი ნ ი ს (XIII საუკუნე) „ტრაქტატი ოთხკუთხედზე“. ამ ტრაქტატში შემოტანილია რიგი ახალი ტრიგონომეტრიული ცნებებისა. ახლებურადაა დამტკიცებული უკვე ცნობილი ზოგიერთი შედეგი. ძირითადი შრომები ტრიგონომეტრიაში თითქმის ორი საუკუნით გვიან შესრულდა ევროპაში. აქ, პირველ ყოვლისა, უნდა აღინიშნოს გერმანელი მეცნიერი რ ე გ ი ო მ ო ნ ტ ა ნ ი (XV საუკუნე). მისი მთავარი ნაწარმოები „ხუთი წიგნი სხვადასხვაგვარ სამკუთხედებზე“ შეიცავს ტრიგონომეტრიის საფუძვლების საკმაოდ სრულ გადმოცემას. ტრიგონომეტრიის ახლანდელი სახელმძღვანელოებისაგან ეს თხზულება განსხვავდება ძირითადად თანამედროვე მოხერხებული აღნიშვნების უქონლობით: ყველა თეორემა სიტყვიერადაა ჩამოყალიბებული. რეგიომონტანის „ხუთი წიგნის“ გამოჩენის შემდეგ ტრიგონომეტრია საბოლოოდ გამოიყო ასტრონომიისაგან დამოუკიდებელ მეცნიერებად. რეგიომონტანმა შეადგინა აგრეთვე საკმაოდ ვრცელი ტრიგონომეტრიული ცხრილები.

ალგებრული სიმბოლიკის განვითარებამ და მათემატიკაში უარყოფითი რიცხვების შემოტანამ უარყოფითი კუთხეების განხილვის საშუალება მოგვცა; შესაძლებელი გახდა რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განხილვა. მათემატიკის განვითარებამ საშუალება მოგვცა გამოვიანგარიშოთ ნებისმიერი რიცხვის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობანი წინასწარ მოცემული ნებისმიერი სიზუსტით.

* სფერული ტრიგონომეტრია განიხილავს კუთხეებსა და სხვა ნაკვეთებს არა სიბრტყეზე, არამედ სფეროზე.

არსებითი განძი ტრიგონომეტრიის განვითარებაში შეიტანა *ეილერმა*. მან მოგვცა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თანამედროვე განსაზღვრა და მიუთითა ამ ფუნქციების მაჩვენებლიან ფუნქციებთან მჭიდრო კავშირზე (იხ. თავი VIII).

დღეს ტრიგონომეტრიული ფუნქციები საფუძვლად უდევს სპეციალურ მათემატიკურ აპარატს, ეგრეთ წოდებულ *ჰარმონიულ ანალიზს*, რომლის საშუალებით შეისწავლება სხვადასხვაგვარი პერიოდული პროცესები: რხევითი მოძრაობები, ტალღების გავრცელება, ზოგიერთი ატმოსფერული მოვლენა და სხვ.

დადებითი რიცხვის დადებითი რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი § 174

IV თავში (I ნაწილი) მოცემული იყო რაციონალურმაჩვენებლიანი დადებითი a რიცხვის ხარისხის განსაზღვრა. მოგაგონებთ ამ განსაზღვრას.

თუ r რიცხვი ნატურალურია, მაშინ a^r არის r რიცხვთა ნამრავლი, რომელთაგან თითოეული უდრის a-ს:

$$a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{r}. \qquad (1)$$

თუ r რიცხვი წილადური და დადებითია, ე. ი. $r = \frac{m}{n}$, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია, მაშინ

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (2)$$

(1) და (2) ფორმულები განსაზღვრავს ყოველი დადებითი a რიცხვის ხარისხებს ნებისმიერი დადებითი რაციონალური r მაჩვენებლით. თუკი r მაჩვენებელი რაციონალური და უარყოფითია, მაშინ a^r გამოსახულება განისაზღვრება როგორც a^{-r} გამოსახულების შებრუნებული სიდიდე:

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}. \qquad (3)$$

აქ უკვე $(-r)$ რიცხვი დადებითია.

ბოლოს, თუ $r=0$, მაშინ a^r უდრის 1-ს:

$$a^0 = 1. \qquad (4)$$

(1), (2), (3) და (4) ფორმულები განსაზღვრავს დადებითი a რიცხვის ხარისხს ნებისმიერი რაციონალური r მაჩვენებლისათვის.

შემდგომისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ორი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 1. თუ a რიცხვი 1-ზე მეტია, მაშინ ამ რიცხვის ორი დადებითი რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხიდან ისაა მეტი, რომლის მაჩვენებელიც მეტია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $a>1$ და $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, სადაც m, n, p და q ნატურალური რიცხვებია. ვაჩვენოთ, რომ

$$a^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{p}{q}}$$

მართლაც,

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}; \qquad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

დავიყვანოთ ეს ფესვები ერთნაირმაჩვენებლიან ფესვებზე:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nq]{a^{mq}}; \qquad \sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{pn}}.$$

ვინაიდან $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, ამიტომ $mq>np$. რადგანაც $a>1$,

$a^{mq}>a^{np}$, ამის გამო $\sqrt[nq]{a^{mq}}>\sqrt[nq]{a^{np}}$, ანუ $a^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{p}{q}}$

ანალოგიურად, შეიძლება დამტკიცდეს მეორე თეორემაც.

თ ე ო რ ე მ ა 2. თუ a რიცხვი მეტია ნულზე, მაგრამ ნაკლებია 1-ზე, მაშინ ამ რიცხვის ორი დადებითი რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხიდან ისაა მეტი, რომლის მაჩვენებელიც ნაკლებია.

ამ თეორემის დამოუკიდებლად დამტკიცებას ვავალებთ მოსწავლეებს.

მაგალითები: 1) $1{,}4<1{,}5$, ამიტომ $3^{1,4}<3^{1,5}$;

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}>\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}$$

2) $0{,}51<0{,}52$, ამიტომ $\pi^{0,51}<\pi^{0,52}$,

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{0,51}>\left(\frac{\pi}{3}\right)^{0,52}.$$

სავარჯიშო

1868. რომელი რიცხვია მეტი:

ა) $5^{\frac{1}{2}}$ თუ $5^{\frac{2}{3}}$; გ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{6,5}$ თუ $\left(\frac{1}{3}\right)^{7}$

ბ) $\sqrt[7]{4^6}$ თუ $\sqrt[10]{4^9}$ დ) $\left(\frac{10}{11}\right)^{5}$ თუ $\sqrt[100]{\left(\frac{10}{11}\right)^{534}}$?

წინა პარაგრაფში მოგაგონეთ, როგორ განისაზღვრება ყოველი დადებითი a რიცხვის ნებისმიერი რაციონალური r მაჩვენებლიანი a^r ხარისხი. ახლა მოგვიხდება დადებითი a რიცხვის დადებითი ირაციონალური x მაჩვენებლიანი a^x ხარისხის განსაზღვრა. დავიწყოთ შემდეგი კერძო მაგალითის განხილვით: როგორ უნდა გვესმოდეს $3^{\sqrt{2}}$ გამოსახულება?

ამოვწეროთ $\sqrt{2}$ რიცხვის ათწილადი მიახლოებანი ნაკლებობით:

$$1; \quad 1,4; \quad 1,41; \quad 1,414; \ldots \tag{1}$$

მეტობით:

$$2; \quad 1,5; \quad 1,42; \quad 1,415; \ldots \tag{2}$$

ამ მიმდევრობათა ყველა წევრი რაციონალური რიცხვია, ხოლო დადებითი რიცხვის რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი უკვე განსაზღვრული გვაქვს. ამიტომ უფლება გვაქვს განვიხილოთ მიმდევრობანი:

$$3^1; \quad 3^{1,4}; \quad 3^{1,41}; \quad 3^{1,414}; \ldots \tag{3}$$

$$3^2; \quad 3^{1,5}; \quad 3^{1,42}; \quad 3^{1,415}; \ldots \tag{4}$$

როგორც ცნობილია,

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

ამიტომ, თუ მივიღებთ მხედველობაში წინა პარაგრაფის I თეორემას, ბუნებრივად შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ჩვენთვის საინტერესო $y = 3^{\sqrt{2}}$ რიცხვი აკმაყოფილებს უტოლობებს:

$$3^1 < y < 3^2$$

$$3^{1,4} < y < 3^{1,5}$$

$$3^{1,41} < y < 3^{1,42}$$

$$3^{1,414} < y < 3^{1,415}$$

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ არსებობს და მასთან მხოლოდ ერთი რიცხვი α, რომელიც აკმაყოფილებს თითოეულს ამ უტოლობათაგან*. განსაზღვრის თანახმად, ამ α რიცხვად მიღებულია $3^{\sqrt{2}}$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: როგორ უნდა გვესმოდეს $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ გამოსახულება?

პირველი მაგალითის ანალოგიურად განვიხილოთ მიმდევრობანი:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414} \tag{5}$$

და

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} \tag{6}$$

ბუნებრივად შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ჩვენთვის საინტერესო $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ რიცხვი აკმაყოფილებს უტოლობებს (იხ. წინა პარაგრაფის თეორემა 2):

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414}$$

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი რიცხვი β, რომელიც აკმაყოფილებს ამ უტოლობათაგან თითოეულს. განსაზღვრის თანახმად, ამ β რიცხვად მიღებულია $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

ორი წარმოდგენილი მაგალითის განხილვა გვაძლევს შემდეგ განსაზღვრას.

---

* ამ ფაქტის დამტკიცება სცილდება ჩვენი პროგრამის საზღვრებს და იგი აქ არ მოგვყავს.

განსაზღვრა. თუ $a>1$, მაშინ ამ რიცხვის დადებითი ირაციონალური x მაჩვენებლიანი ხარისხი ეწოდება რიცხვს, რომელიც მეტია a რიცხვის ყველა ხარისხზე, რომელთა მაჩვენებლები x რიცხვის ათწილად მიახლოებათა ტოლია ნაკლებობით, მაგრამ ნაკლებია a რიცხვის ყველა ხარისხზე, რომელთა მაჩვენებლები x რიცხვის ათწილად მიახლოებათა ტოლია მეტობით.

თუ $0<a<1$, მაშინ ამ რიცხვის დადებითი ირაციონალური x მაჩვენებლიანი ხარისხი ეწოდება რიცხვს, რომელიც მეტია a რიცხვის ყველა ხარისხზე, რომელთა მაჩვენებლები x რიცხვის ათწილად მიახლოებათა ტოლია მეტობით, მაგრამ, ნაკლებია a რიცხვის ყველა ხარისხზე, რომელთა მაჩვენებლები x რიცხვის ათწილად მიახლოებათა ტოლია ნაკლებობით.

ამას დავუმატოთ ისიც, რომ ნებისმიერი ირაციონალური x რიცხვისათვის

$$1^x=1$$

* დადებითი რიცხვის უარყოფითი ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი § 178

თუ $a>0$ და x დადებითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ, განსაზღვრის თანახმად,

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}. \tag{1}$$

მაგალითად,

$$3^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{3^{\sqrt{2}}}; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{7}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{7}}}.$$

შემოტანილი განსაზღვრა რომ მართებული იყოს, აუცილებელია ვაჩვენოთ, რომ (1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში $\frac{1}{a^x}$ წილადს აზრი აქვს ყოველი დადებითი a და x-სათვის; ამისათვის საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ

$$a^x\neq0.$$

მართლაც, იმ ხარისხის განსაზღვრის თანახმად, რომლის მაჩვენებელი არის დადებითი ირაციონალური რიცხვი, გვაქვს:

$$a^{x'} \leqslant a^{x} \leqslant a^{x''},$$

სადაც x' და x'' რიცხვებიდან ერთი არის x რიცხვის ათწილადი მიახლოება ნაკლებობით, ხოლო მეორე — ამ რიცხვის შესაბამისი ათწილადი მიახლოება მეტობით. რიცხვები x' და x'' რაციონალური და დადებითია. ამიტომ $a^{x'}>0$ და $a^{x''}>0$. მაგრამ ორ დადებით რიცხვს შორის მოთავსებული რიცხვი თვით უნდა იყოს დადებითი. ამიტომ $a^{x}>0$.

ამრიგად, განვსაზღვროთ დადებითი რიცხვის ნებისმიერი ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხი. უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი რიცხვის ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხი, საზოგადოდ, განუსაზღვრელია.

დადებითი რიცხვის ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხების ძირითადი თვისებანი § 177

დადებით რიცხვთა ხარისხებს აქვს შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1) $a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}$, 3) $(ab)^{x}=a^{x}b^{x}$, 5) $(a^{x})^{y}=a^{xy}$.

2) $\dfrac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$, 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}=\dfrac{a^{x}}{b^{x}}$,

ეს თვისებები ნაწილობრივ დავამტკიცეთ რაციონალური მაჩვენებლებისათვის IV თავში (I ნაწ.). სინამდვილეში ისინი სწორია ირაციონალური მაჩვენებლებისათვისაც. ამ ფაქტის დამტკიცებაზე არ შევჩერდებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}=(3^{-1})^{-\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}}$,

2) $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-\sqrt{8}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\sqrt{16}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}=(3^{-1})^{-4}=3^{4}=81;$

3) $\dfrac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}}=5^{\sqrt{8}-\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}}$.

სავარჯიშოები

დაამტკიცეთ იგივობანი (№ 1359, 1360):

1359. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}\cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 16^{\sqrt{3}}=\left(4^{\sqrt{3}}\right)^{-4}$.

1360. $\dfrac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}}\cdot\dfrac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}}=(6\cdot 2^{19})^{\sqrt{3}}$.

გაამარტივეთ გამოსახულებანი:

1361. $\left[(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}}\right]^{-2\sqrt{3}}$ **1362.** $\left[(\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$

მაჩვენებლიანი ფუნქცია და მისი გრაფიკი § 178

მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება

$$y=a^x$$

სახის ფუნქციას, სადაც a რომელიმე ფიქსირებული დადებითი რიცხვია.

მაჩვენებლიან ფუნქციათა მაგალითს წარმოადგენს ფუნქციები

$$y=2^x; \quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad y=(0,1)^x.$$

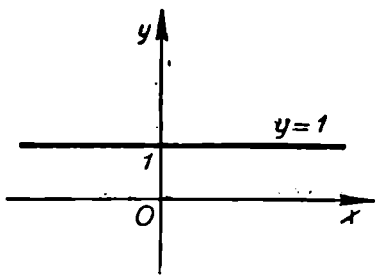
ბუნებაში შეიმჩნევა მთელი რიგი მოვლენები, რომლებიც შეიძლება მათემატიკურად გამოისახოს მაჩვენებლიანი ფუნქციებით; მაგალითად, რადიუმის დაშლა დაახლოებით შეიძლება გამოვსახოთ

$$m(t)=m(0)\cdot(0,9996)^t$$

თანაფარდობით, სადაც $m(0)$ არის რადიუმის პირვანდელი რაოდენობა გრამობით, ხოლო $m(t)$ არის რადიუმის ის რაოდენობა, რომელიც დარჩება დაშლის დაწყებიდან t წლის შემდეგ. მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით იცვლება ატმოსფერული წნევაც სიმაღლის ცვლასთან ერთად.

მაჩვენებლიანი $y=a^x$ ფუნქციის განსაზღვრაში მითითებულია, რომ a რიცხვი დადებითია. ეს იმით აიხსნება, რომ უარყოფითი რიცხვის ნებისმიერმაჩვენებლიანი ხარისხი, ზოგადად რომ ვთქვათ, არაა განსაზღვრული.

a რიცხვის ყველა დადებით მნიშვნელობას შორის განსაკუთრებით უნდა გამოიყოს $a=1$. ასეთი a რიცხვისათვის $y=a^x$ ფუნქცია იქცევა $y=1$ ფუნქციად (ნახ. 245). ასეთი ფუნქცია კი საინტერესო არაა, ამიტომ შემდგომში, როდესაც ლაპარაკი გვექნება $y=a^x$ მაჩვენებლიან ფუნქციაზე, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $a>0$ და $a\neq1$.



ნახ. 245.

გადავიდეთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის აგებაზე. მაგალითისათვის ერთ ნახაზზე ავაგოთ $y=2^x$ და $y=10^x$ ფუნქციების გრაფიკები,

ხოლო მეორეზე $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ და $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ ფუნქციების გრაფიკები. ამისათვის წინასწარ შევადგინოთ ამ ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილები. $y=2^x$ და $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქციებისათვის x-ის მნიშვნელობებად შევარჩიოთ შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2 \text{ და } 3.$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...

$y=10^x$ და $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ ფუნქციებისათვის მიზანშეწონილია შევარჩიოთ x-ის სხვა მნიშვნელობანი, ვინაიდან, როცა $x=\pm2$, ±3, მოცემული ფუნქციები ღებულობს ან მეტად დიდ, ან მეტად მცირე მნიშვნელობებს. მაგალითად, $10^3=1000$, $\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{1}{1000}$. y-ის ასეთ მნიშვნელობათა ჩანიშვნა გრაფიკზე ძნელია. ამიტომ ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია x-ის მნიშვნელობებად შევარჩიოთ, მაგალითად, ასეთი რიცხვები: $-1, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ და 1.

y-ის შესაბამისი მნიშვნელობანი შეიძლება გამოვიანგარიშოთ მიმდევრობით:

$10^0=1;$

$$10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}\approx\sqrt{3.1622}\approx 1{,}8;$$

$$10^{\frac{2}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}\approx 3{,}2;$$

$$10^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{10^3}=\sqrt{\sqrt{1000}}\approx\sqrt{31.6227}\approx 5{,}6;$$

$10^1=10;$

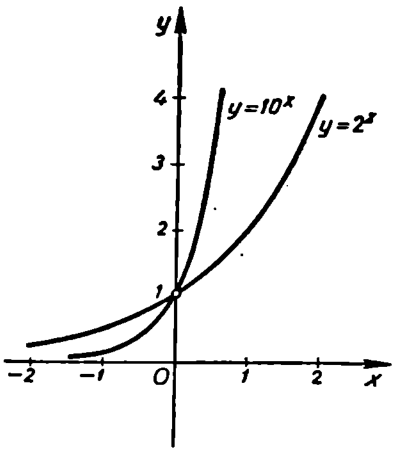
$$10^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{4}}}\approx\frac{1}{1{,}6}\approx 0{,}6$$

და ა. შ.

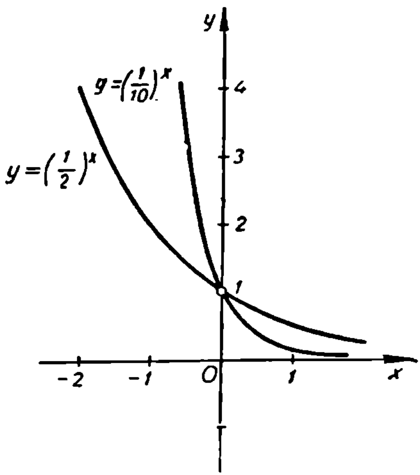
შემდეგში ვღებულობთ $y=10^x$ და $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ ფუნქციების მიახ-ლოებით მნიშვნელობათა შემდეგ ცხრილებს:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	
$y=10^x$	0,1	0,2	0,3	0,6	1,0	1,8	3,2	5,6	10	...
$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$	10	5,6	3,2	1,8	1,0	0,6	0,3	0,2	0,1	

თუ გამოვიყენებთ შედგენილ ცხრილებს, შეიძლება ზოგადად წარმოვიდგინოთ განსახილველი ფუნქციების ყოფაქცევა. $y=2^x$ და $y=10^x$ ფუნქციების ზუსტი გრაფიკები წარმოდგენილია 246-ე ნახაზზე, ხოლო $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ და $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ ფუნქციების გრაფიკები—247-ე ნახაზზე·



ნახ. 246.



ნახ. 247.

სავარჯიშოები

1868. გამოიყენეთ $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{4};\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

არგუმენტის რომელი მნიშვნელობებისათვის ღებულობს ფუნქცია 0,5; 0,9; 1,0; 1,8; 2,7-ის ტოლ მნიშვნელობებს?

1364. გამოიყენეთ $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ

$$\sqrt[5]{\frac{1}{10}};\quad 10^{-3};\quad \sqrt[5]{0,001};\quad \left(\frac{1}{10}\right)^{-0,7}$$

x-ის რომელი მნიშვნელობებისათვის იქცევა ეს ფუნქცია 0,5-ად, 0,9-ად, 1,0-ად, 3,0-ად, 5,0-ად?

1365. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=2^{x-1}$;   დ) $y=2^x-1$;

ბ) $y=2^{x+1}$;   ე) $y=2^x+1$;

გ) $y=2^{|x|}$;   ვ) $y=2^{-|x|}$.

1366. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ დ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$;

ბ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ ე) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$;

გ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;   ვ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$.

1367. ერთსა და იმავე ნახაზზე ააგეთ

$$y=3^x \text{ და } y=3^{-x}$$

ფუნქციათა გრაფიკები.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის ძირითადი თვისებანი § 170

ამ პარაგრაფში შევისწავლით

$$y=a^x \tag{1}$$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის ძირითად თვისებებს.

მოგაგონებთ, რომ (1) ფორმულაში a რიცხვად ვგულისხმობთ 1-ისაგან განსხვავებულ ყოველ ფიქსირებულ დადებით რიცხვს.

თ ვ ი ს ე ბ ა 1. **მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა.**

მართლაც, როცა a დადებითია, a^x გამოსახულება განსაზღვრულია ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის.

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს

მართლაც, თუ $x>0$, მაშინ, როგორც 176-ე პარაგრაფში იყო დამტკიცებული, $a^x>0$.

თუკი $x<0$, მაშინ

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}},$$

სადაც $-x$ უკვე მეტია ნულზე. ამიტომ $a^{-x}>0$. მაგრამ მაშინაც

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0 .$$

ბოლოს, როცა $x=0$,

$$a^x=1.$$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის მე-2 თვისებას აქვს მარტივი გრაფიკული ახსნა-განმარტება. იგი მდგომარეობს იმაში, რომ ამ ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 246 და 247) მთლიანად მდებარეობს აბსცისათა ღერძის ზემოთ.

თ ვ ი ს ე ბ ა 3. თუ $a>1$, მაშინ, როცა $x>0$, $a^x>1$, ხოლო, როცა $x<0$, $a^x<1$. თუკი $a<1$, მაშინ, პირიქით, როცა $x>0$, $a^x<1$, ხოლო, როცა $x<0$, $a^x>1$.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის ამ თვისებასაც აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. თუ $a>1$ (ნახ. 246), $y=a^x$ მრუდები განლაგდება $y=1$ წრფის ზემოთ, როცა $x>0$, და $y=1$ წრფის ქვემოთ, როცა $x<0$. თუკი $a<1$ (ნახ. 247), მაშინ, პირიქით, $y=a^x$ მრუდები განლაგდება $y=1$ წრფის ქვემოთ, როცა $x>0$, და ამ წრფის ზემოთ, როცა $x<0$.

მოვიყვანოთ მე-3 თვისების მკაცრი დამტკიცება. ვთქვათ, $a>1$ და x ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ $a^x>1$.

თუ x რიცხვი რაციონალურია $\left(x=\frac{m}{n}\right)$, მაშინ $a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

ვინაიდან $a>1$, ამიტომ $a^m>1$. მაგრამ ფესვი 1-ზე მეტი რიცხვიდან, ცხადია, აგრეთვე 1-ზე მეტია.

თუ x ირაციონალურია, მაშინ არსებობს დადებითი რაციონალური x' და x'' რიცხვები, რომლებიც x რიცხვის ათწილადი მიახლოებებია:

$$x'<x<x''$$

მაშინ ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის განსაზღვრის თანახმად,

$$a^{x'}<a^x<a^{x''}.$$

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, $a^{x'}$ რიცხვი 1-ზე მეტია, ამიტომ a^x რიცხვიც, რომელიც მეტია $a^{x'}$-ზე, მეტი უნდა იყოს 1-ზე.

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ, როცა $a>1$ და x ნებისმიერი დადებითია,

$$a^x>1.$$

x რიცხვი რომ უარყოფითი ყოფილიყო, მაშინ გვექნებოდა:

$$a^x=\frac{1}{a^{-x}},$$

სადაც რიცხვი $(-x)$ უკვე დადებითი იქნებოდა. ამიტომ $a^{-x}>1$. მაშასადამე,

$$a^x=\frac{1}{a^{-x}}<1.$$

ამრიგად, როცა $a>1$ და x ნებისმიერი უარყოფითია,

$$a^x<1.$$

შემთხვევა, როცა $0<a<1$, ადვილად დაიყვანება უკვე განხილულ შემთხვევაზე. მოსწავლეებს ევალებათ დამოუკიდებლად დარწმუნდნენ ამაში.

თ ვ ი ს ე ბ ა 4. **თუ $x=0$, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს a,**

$$a^x=1.$$

ეს გამომდინარეობს ნულოვანი ხარისხის განსაზღვრიდან: ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვის ნულოვანი ხარისხი უდრის 1-ს. გრაფიკულად ეს თვისება იმით გამოისახება, რომ ნებისმიერი a-სათვის $y=a^x$ მრუდი (იხ. ნახ. 246 და 247) ჰკვეთს y-თა ღერძს წერტილში, რომლის ორდინატია 1.

თ ვ ი ს ე ბ ა 5. **როცა $a>1$, მაჩვენებლიანი $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ხოლო, როცა $a<1$, —მონოტონურად კლებადი.**

ამ თვისებასაც აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

როცა $a>1$ (ნახ. 246), $y=a^x$ მრუდი x-ის ზრდასთან ერთად მიემართება სულ ზევით და ზევით, ხოლო, როცა $a<1$ (ნახ. 247), ეშვება სულ ქვევით და ქვევით.

მოვიყვანოთ მე-5 თვისების მკაცრი დამტკიცება.

ვთქვათ, $a>1$ და $x_2>x_1$. ვაჩვენოთ, რომ

$$a^{x_2}>a^{x_1}.$$

ვინაიდან $x_2>x_1$, ამიტომ $x_2=x_1+d$, სადაც d რომელიმე დადებითი რიცხვია. ამიტომ

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1+d}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^d-1).$$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის მე-2 თვისების თანახმად $a^{x_1}>0$. ვინაიდან $d>0$, ამიტომ მაჩვენებლიანი ფუნქციის მე-3 თვისების ძალით $a^d>1$. ორივე მამრავლი $a^{x_1}(a^d-1)$ ნამრავლში დადებითია, ამიტომ თვით ეს ნამრავლიც დადებითია. მაშ, $a^{x_2}-a^{x_1}>0$, ანუ $a^{x_2}>a^{x_1}$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამრიგად, თუ $a>1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ, როცა $a<1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონურად კლებადია.

შ ე დ ე გ ი. **თუ 1-ისაგან განსხვავებული ერთი და იმავე დადებითი რიცხვის ორი ხარისხი ტოლია, მაშინ მათი მაჩვენებელიც ტოლი იქნება.**

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ

$$a^b=a^c (a>0 \text{ და } a\neq 1),$$

მაშინ

$$b=c.$$

მართლაც, b და c რიცხვები რომ ტოლი არ ყოფილიყო, მაშინ $y=a^x$ ფუნქციის მონოტონურობის ძალით, როცა $a>1$, უდიდეს მათგანს შეესაბამებოდა ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო, როცა $a<1$.— უმცირესი მნიშვნელობა. ამრიგად, გვექნებოდა ან $a^b>a^c$, ან $a^b<a^c$. ერთიც და მეორეც ეწინააღმდეგება პირობას: $a^b=a^c$. დაგვრჩენია ვაღიაროთ, რომ $b=c$.

თ ვ ი ს ე ბ ა 6. **თუ $a>1$, მაშინ x არგუმენტის უსაზღვროდ ზრდასთან ერთად ($x\to\infty$) $y=a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობებიც უსაზღვროდ იზრდება ($y\to\infty$). x არგუმენტის უსაზღვროდ კლებასთან ერთად ($x\to-\infty$) ამ ფუნქციის მნიშვნელობები მიისწრაფვის ნულისაკენ და, ამასთან, რჩება დადებითი ($y\to 0$; $y>0$).**

თუ მივიღებთ მხედველობაში $y=a^x$ ფუნქციის ზემოთ დამტკიცებულ მონოტონურობას, შეიძლება ითქვას, რომ განსახილველ შემთხვევაში $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონურად იზრდება 0-დან ∞-მდე.

თუ $0<a<1$, მაშინ x არგუმენტის უსაზღვროდ ზრდასთან ერთად ($x\to\infty$) $y=a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობები, რჩება რა დადებითი, მიისწრაფვის ნულისაკენ ($y\to 0$, $y>0$). x არგუმენტის უსაზღვროდ კლებასთან ერთად ($x\to-\infty$) ამ ფუნქციის მნიშვნელობები უსაზღვროდ იზრდება ($y\to\infty$).

$y=a^x$ ფუნქციის მონოტონურობის ძალით შეიძლება ითქვას, რომ ამ შემთხვევაში $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონურად კლებულობს ∞-დან 0-მდე.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის მე-6 თვისება თვალსაჩინოდაა ასახული 246-ე და 247-ე ნახაზებზე. მის მკაცრ მტკიცებას არ დავიწყებთ.

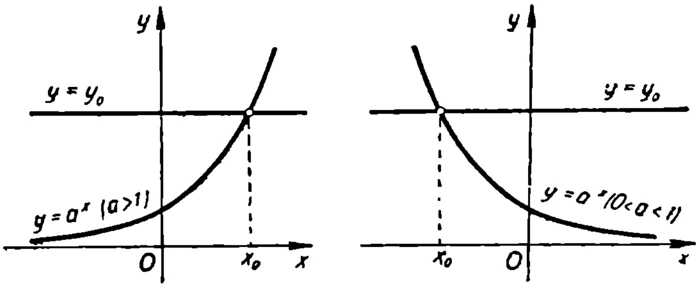
დაგვრჩა მხოლოდ $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$, მაჩვენებლიანი ფუნქციის ცვლილების არის დადგენა.

ზემოთ დავამტკიცეთ, რომ $y=a^x$ ფუნქცია ღებულობს მ ხ ო ლ ო დ დადებით მნიშვნელობებს და ან მონოტონურად იზრდება 0-დან ∞-მდე (როცა $a>1$), ან მონოტონურად კლებულობს ∞-დან 0-მდე (როცა $0<a<1$). მაგრამ გამოურკვეველი რჩება შემდეგი საკითხი: ხომ არ გამოტოვებს $y=a^x$ ფუნქცია თავისი ცვლილების დროს რაიმე ნახტომებს? ღებულობს თუ არა იგი ნებისმიერ დადებით მნიშვნელობას? ეს საკითხი დადებითად წყდება. თუ $a>0$ და $a\neq1$, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი y_0 რიცხვი, აუცილებლად მოინახება ისეთი x_0, რომ

$$a^{x_0}=y_0.$$

($y=a^x$ ფუნქციის მონოტონურობის ძალით მითითებული x_0 მნიშვნელობა, რასაკვირველია, ერთადერთი იქნება).

ამ ფაქტის დამტკიცება ჩვენი პროგრამის საზღვრებს სცილდება. მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი დადებითი y_0 მნიშვნელობისათვის $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკი აუცილებლად გადაიკვეთება $y=y_0$ წრფესთან და, ამასთან, მხოლოდ ერთ წერტილში (ნახ. 248).



ნახ. 248.

აქედან შეიძლება გაკეთდეს შემდეგი დასკვნა, რომელსაც მე-7 თვისების სახით ჩამოვაყალიბებთ.

თ ვ ი ს ე ბ ა 7. $y=a^x(a>0,\ a\neq1)$ **მაჩვენებლიანი ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე.**

სავარჯიშოები

1868. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები:

ა) $y=2^{\frac{1}{x}}$; ბ) $y=\left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{x-1}}$ გ) $y=\frac{1}{3x^2}$.

1869. მოცემული რიცხვებიდან რომელია 1-ზე მეტი და რომელი 1-ზე ნაკლები:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; 2) $(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$; 4) $\pi^{-\frac{2}{5}}$;

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$ 6) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{1,001}}$; 7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{1,001}}$;

8) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$; 9) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$?

1870. მაჩვენებლიანი ფუნქციის რომელი თვისების საფუძველზე შეიძლება მტკიცება, რომ:

ა) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2,6}<\left(\frac{5}{7}\right)^{2,5}$; ბ) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,3}>\left(\frac{4}{3}\right)^{1,2}$?

1871. რომელი რიცხვია მეტი:

ა) $\pi^{-\sqrt{3}}$ თუ $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$; ბ) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ თუ $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$;

გ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$ თუ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

დ) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ თუ $(\sqrt{3})^{\sqrt{5}-2}$?

1872. ტოლფასია თუ არა უტოლობანი:

ა) $a^x>a^4$ და $x>4$;

ბ) $5x^2<5^x$ და $x^2<x$;

გ) $\left(\frac{1}{16}\right)^x>\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ და $2x<x-1$?

1873. რა შეიძლება ითქვას x და y რიცხვებზე, თუ $a^x=a^y$, სადაც a მოცემული დადებითი რიცხვია?

1874. 1) შეიძლება თუ არა, $y=2^x$ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობას შორის გამოიყოს:

ა) უდიდესი მნიშვნელობა; ბ) უმცირესი მნიშვნელობა?

2) შეიძლება თუ არა, $y=2^{|x|}$ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობას შორის გამოიყოს:

ა) უდიდესი მნიშვნელობა, ბ) უმცირესი მნიშვნელობა?

ალგებრას ზოგჯერ „შვიდი მოქმედების არითმეტიკას" უწოდებენ, როცა უნდათ ხაზი გაუსვან, რომ ოთხი არითმეტიკული მოქმედების გარდა (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა), იგი განიხილავს ახარისხებას და მის ორ შებრუნებულ მოქმედებას.

აღვნიშნოთ ხარისხის ფუძე a ასოთი, მაჩვენებელი x-ით, ხოლო თვით ხარისხი b-თი. მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$b=a^x. \qquad (1)$$

„მეხუთე" ალგებრული მოქმედება — ახარისხება — მდგომარეობს ცნობილი a და x რიცხვების მიხედვით b რიცხვის პოვნაში. ეს მოქმედება დაწვრილებით შევისწავლეთ IV თავში (I ნაწ.), მასზე ლაპარაკი იყო აგრეთვე ამ თავის დასაწყისში.

„მეექვსე" ალგებრული მოქმედება ძდგომარეობს b და x-ის ცნობილი მნიშვნელობების მიხედვით a რიცხვის პოვნაში. თუ (1) ტოლობის ორივე ნაწილს ავახარისხებთ $\frac{1}{x}$ ხარისხში (თუკი $x \neq 0$), მივიღებთ

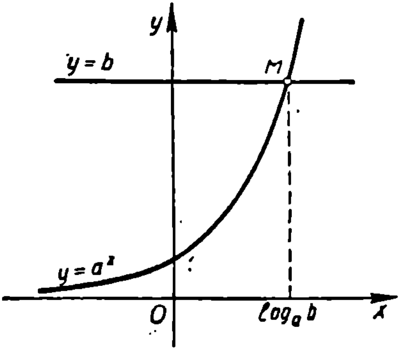
$$a=b^{\frac{1}{x}}.$$

ამიტომ „მეექვსე" ალგებრული მოქმედება ადვილად დაიყვანება „მეხუთეზე".

ახლა გადავდივართ „მეშვიდე" ალგებრული მოქმედების შესწავლაზე — ესაა b ხარისხისა და a ფუძის ცნობილ მნიშვნელობათა მიხედვით x მაჩვენებლის პოვნა. ეს ამოცანა არსებითად მდგომარეობს

$$a^x=b \qquad (2)$$

განტოლების ამოხსნაში, სადაც a და b რომელიმე მოცემული რიცხვებია, ხოლო x — უცნობი სიდიდე. ერთბაშად შეიძლება შევნიშნოთ, რომ მოცემული ამოცანა ყოველთვის როდი ამოიხსნება. თუ, მაგალითად, (2) განტოლებაში a რიცხვი დადებითია, ხოლო b რიცხვი — უარყოფითი, მაშინ ამ განტოლებას ფესვები არა აქვს. მაგრამ თუკი a და b დადებითია და $a \neq 1$, მაშინ მას უეჭველად აქვს ფესვი და მასთან მხოლოდ ერთი. მოვაგონებთ, რომ $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი უეჭველად გადაიკვეთება $y=b$



ნახ. 249.

წრფესთან და მასთან მხოლოდ ერთ წერტილში (იხ. ნახ. 249). გადაკვეთის წერტილის აბსცისა სწორედ (2) განტოლების ფესვია.

(2) განტოლების ფესვს აღნიშნავენ ასე: $\log_a b$ (იკითხება: b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით).

b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით არის ხარისხის მაჩვენებელი, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b რიცხვი:

$$a^{\log_a b}=b.$$

მაგალითები:

1) $2^4=16$, ამიტომ $\log_2 16=4$;

2) $2^{-3}=\frac{1}{8}$, ამიტომ $\log_2\frac{1}{8}=-3$;

3) $6^0=1$, ამიტომ $\log_6 1=0$.

ლოგარითმებს ვხვდებით ზოგიერთი გამოყენებითი ხასიათის ამოცანების ამოხსნისას. მაგალითის სახით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

როგორც ვიცით, რადიუმის დაშლა დაახლოებით გამოისახება

$$m(t)=m(0)\cdot(0{,}9996)^t$$

ფორმულით (იხ. § 178), სადაც $m(0)$ არის რადიუმის პირვანდელი რაოდენობა გრამობით, ხოლო $m(t)$ — რადიუმის რაოდენობა (აგრეთვე გრამობით) t წლის შემდეგ. გამოვარკვიოთ, როგორია რადიუმის ნახევარდაშლის პერიოდი, ე. ი. რამდენი წლის შემდეგ შემცირდება ორჯერ რადიუმის რაოდენობა?

საძებნი წლების რიცხვი t წარმოადგენს

$$m(0)\cdot(0{,}9996)^t=0{,}5m(0),$$

ანუ

$$(0{,}9996)^t=0{,}5$$

განტოლების ფესვს.

ამიტომ

$$t=\log_{0{,}9996}0{,}5.$$

შემდგომში შევისწავლით ასეთი ლოგარითმების სპეციალური ცხრილებით მოძებნას, ხოლო ჯერჯერობით დაუმტკიცებლად მივიღოთ, რომ

$$\log_{0{,}9996}0{,}5\approx1600.$$

ამრიგად, რადიუმის რაოდენობა ორჯერ შემცირდება დაახლოებით ყოველი 1600 წლის შემდეგ.

სავარჯიშოები

1875. მოცემული ტოლობები ჩაწერეთ ლოგარითმული ტოლობების სახით (მაგალითად, $3^2=9\to\log_3 9=2$):

ა) $2^2=4$; ბ) $3^3=27$; გ) $4^4=256$; დ) $5^3=125$;

ე) $2^{-2}=\frac{1}{4}$; ვ) $3^{-4}=\frac{1}{81}$; ზ) $7^{0}=1$; თ) $4^{\frac{1}{2}}=2$; ი) $8^{\frac{2}{3}}=4$;

კ) $\sqrt[3]{27}=3$; ლ) $8^{0}=1$; მ) $\sqrt[3]{8}=2$.

1876. შეამოწმეთ შემდეგ ტოლობათა მართებულობა:

ა) $\log_4 16=2$; ბ) $\log_3 243=5$; გ) $\log_5 125=3$;

დ) $\log_7 \frac{1}{49}=-2$; ე) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$; ვ) $\log_{10} 1=0$.

1877. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე 2-ია:

4; 16; 32; 1; 0,5; 0,125; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $2\sqrt{2}$.

1878. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე $\frac{1}{2}$-ია:

1; 2; 8; 32; 0,25; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$.

1879. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე 3-ია:

3; 1; 27; 81; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{243}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $3\sqrt{3}$.

1880. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე $\frac{1}{3}$-ია:

$\frac{1}{3}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; 3; 27; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{9\sqrt{3}}$.

1881. გამოიანგარიშეთ:

ა) $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; გ) $\log_3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$;

ბ) $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ დ) $\log_8\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$.

1882. დაამტკიცეთ იგივობა

$$\log_{a^n}(a^m)=\frac{m}{n}.$$

ამ იგივობის გამოყენებით გამოიანგარიშეთ:

ა) $\log_4 16$; ბ) $\log_2 2\sqrt{2}$; გ) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$; დ) $\log_{16} 64$; ე) $\log_9 27$;

ვ) $\log_{27} 243$; ზ) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; თ) $\log_4\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$; ი) $\log_9\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$.

1383. გამოიყენეთ ძირითადი ლოგარითმული იგივობა

$$a^{\log_a b}=b$$

და გამოიანგარიშეთ:

1) $2^{\log_2 8}$; 2) $3^{\log_3 9}$ 3) $2^{5\log_2 3}$; 4) $3^{2\log_3 9}$;

5) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$ 6) $2^{-4\log_2 1}$ 7) $3^{-\frac{1}{3}\log_3 8}$ 8) $4^{\log_2 7}$

9) $9^{\log_9 10}$ 10) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 11) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}$ 12) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$

1384. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი დადებითი a რიცხვისათვის, რომელიც $a\neq1$,

$$\log_a(\sin 1^\circ)\cdot\log_a(\sin 2^\circ)\ldots\log_a(\sin 89^\circ)\cdot\log_a(\sin 90^\circ)=0.$$

ლოგარითმული ფუნქცია და მისი გრაფიკი § 181

ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება $y=\log_a x$ სახის ფუნქციას, სადაც a 1-ისაგან განსხვავებული რომელიმე ფიქსირებული დადებითი რიცხვია.

$y=\log_a x$ ფორმულა იმავე გამოსახავს, რასაც

$$a^y=x \qquad (1)$$

ფორმულა. აქედან ადვილია კავშირის დამყარება ლოგარითმულ ფუნქციასა და მაჩვენებლიან

$$y=a^x \qquad (2)$$

ფუნქციას შორის.

თუ მაჩვენებლიანი (2) ფუნქცია აღწერს ხარისხის ცვლილებას მისი მაჩვენებლის ცვლილებაზე დამოკიდებულებით, მაშინ (1)-ის გამო ლოგარითმული ფუნქცია, პირიქით, აღწერს ხარისხის მაჩვენებლის ცვლილებას ხარისხის ცვლილებაზე დამოკიდებულებით. ამიტომ $y=\log_a x$ ლოგარითმულ ფუნქციას ეწოდება $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის **შექცეული** ფუნქცია.

(1) ფორმულა მიიღება (2) ფორმულიდან, თუ ამ უკანასკნელში x-ს და y-ს ადგილებს შევუცვლით. აქედან გამომდინარეობს, რომ $y=\log_a x$ ლოგარითმული ფუნქციის მნიშვნელობები ადვილად მიიღება $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობებიდან, თუ მას, რაც მაჩვენებლიანი ფუნქციისათვის იყო y, ლოგარითმული ფუნქციისათვის განვი-

ხილავთ, როგორც x-ს, ხოლო მას, რაც მაჩვენებლიანი ფუნქციისათვის იყო x, ლოგარითმული ფუნქციისათვის განვიხილავთ, როგორც y-ს.

$y=2^x$, $y=10^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ და $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილები ჩვენ მიერ შედგენილი იყო 178-ე პარაგრაფში. მათი გამოყენებით მივიღებთ $y=\log_2 x$, $y=\log_{10} x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ და $y=\log_{\frac{1}{10}} x$ ფუნქციების მიახლოებით მნიშვნელობათა შემდეგ ცხრილებს:

	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\log_{\frac{1}{2}} x$			1	0	-1	-2	-3	

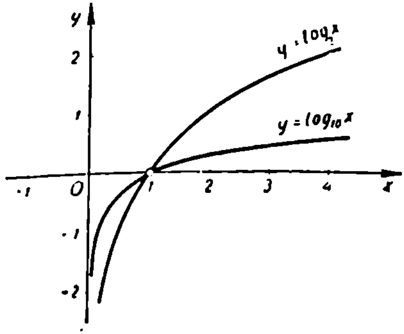
	0,1	0,2	0,3	0,6	1,0	1,8	3,2	5,6	10,0	
$\log_{10} x$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	
$\log_{\frac{1}{10}} x$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	

ეს ცხრილები იძლევა ერთგვარ (თუმცა მეტად შეზღუდულ) წარმოდგენას განსახილველი ფუნქციების ყოფაქცევაზე. კერძოდ, შეიძლება მათი გამოყენება ამ ფუნქციების გრაფიკების აგებისას.

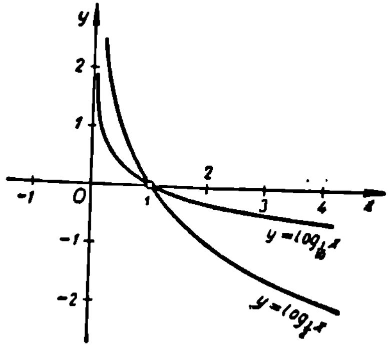
250-ე ნახაზზე თქვენ ხედავთ $y=\log_2 x$ და $y=\log_{10} x$ ფუნქციების გრაფიკებს, ხოლო 251-ე ნახაზზე $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ და $y=\log_{\frac{1}{10}} x$ ფუნქციების გრაფიკებს.

ყურადღება უნდა მიექცეს შემდეგ მნიშვნელოვან გარემოებას. როცა $x\to 0$, $y=\log_a x$ ლოგარითმული მრუდი შეუზღუდავად უახლოვდება ორდინატთა ღერძს, მაგრამ ამ ღერძს იგი ვერასოდეს ვერ აღწევს (იხ. ნახ. 250 და 251). ეს არ უნდა დავივიწყოთ ლოგარითმული მრუდების აგების დროს.

$y=\log_a x$ ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკის მისი შესაბამისი $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკთან შედარებისათვის უნდა მივმარ-

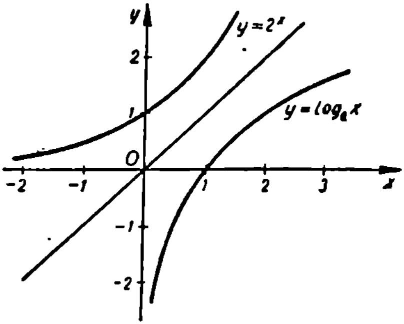


ნახ. 250.

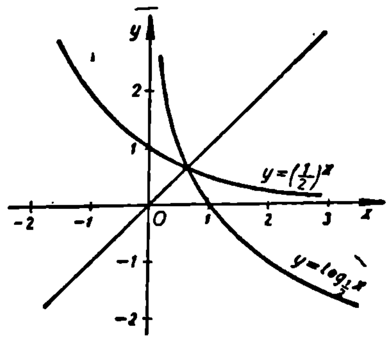


ნახ. 251.

თოთ 252-ე ($a=2$) და 253-ე $\left(a=\frac{1}{2}\right)$ ნახაზებს. როგორც ამ ნახაზებიდან ჩანს, ლოგარითმული ფუნქციისა და მისი შესაბამისი მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკები ერთმანეთის სიმეტრიულია პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების მიმართ. თუ, მაგალითად, 252-ე ნახაზს გადავკეცავთ ამ ბისექტრისაზე, მაშინ $y=2^x$ და $y=\log_2 x$ ფუნქციების გრაფიკები ერთმანეთს დაემთხვევა.



ნახ. 252.



ნახ. 253.

სავარჯიშოები

1886. გადაიკვეთება თუ არა $y=\log_a x$ ლოგარითმული მრუდი ა) x-თა ღერძით; ბ) y-თა ღერძით?

1386. გამოიყენეთ $y=\log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები ფუძით 2:

$$0,5;\quad 0,6;\quad 0,7;\quad 1,5;\quad 2,3;\quad 3,0$$

რომელი რიცხვების ლოგარითმები (ფუძით 2) უდრის:

0,7-ს; 0,8-ს; 0,9-ს; 1,0-ს; 1,5-ს?

1387. $y=\log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკის საფუძველზე ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=\log_2(x-1)$;
ბ) $y=\log_2(x+2)$;
გ) $y=-\log_2 x$;
დ) $y=\log_2|x|$;
ე) $y=|\log_2 x|$;
ვ) $y=\log_2(-x)$.

1388. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$;
ბ) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$;
გ) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$;
დ) $y=|\log_{\frac{1}{3}} x|$;
ე) $y=\log_{\frac{1}{3}}|x|$;
ვ) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$.

1389. ერთსა და იმავე ნახაზზე ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

$$y=\log_3 x \quad \text{და} \quad y=\log_{\frac{1}{3}} x.$$

ლოგარითმული ფუნქციის ძირითადი თვისებანი § 132

ამ პარაგრაფში შევისწავლით

$$y=\log_a x \tag{1}$$

ლოგარითმული ფუნქციის ძირითად თვისებებს.

მოგაგონებთ, რომ (1) ფორმულაში a რიცხვად შეიძლება ვიგულისხმოთ 1-ისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ფიქსირებული დადებითი რიცხვი.

თ ვ ი ს ე ბ ა 1. **ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე.**

მართლაც, ვთქვათ, b ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ $\log_a b$ გამოსახულება განსაზღვრულია. როგორც ვიცით, $\log_a b$ სხვა არა არის რა, თუ არა ფესვი

$$a^x=b \tag{2}$$

განტოლებისა. თუ a და b დადებითი რიცხვებია, ამასთან $a \neq 1$, მაშინ მაჩვენებლიანი ფუნქციის მე-2 და მე-5 თვისებათა ძალით (იხ. § 179), ასეთ განტოლებას ყოველთვის აქვს ფესვი, და, ამასთან, მხოლოდ ერთი. ეს ფესვი არის $\log_a b$. მაშასადამე, $\log_a b$ მოცემულ შემთხვევაში განსაზღვრულია.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ, თუ $b \leqslant 0$, მაშინ $\log_a b$ გამოსახულება არა განსაზღვრული.

მართლაც, ამ გამოსახულებას რომ აზრი ჰქონოდა, მაშინ იგი მოგვცემდა (2) განტოლების ფესვს; ამ შემთხვევაში უნდა შესრულებულიყო ტოლობა:

$$a^{\log_a b} = b.$$

ნამდვილად კი ეს ტოლობა არ სრულდება, ვინაიდან მისი მარცხენა ნაწილი დადებითი რიცხვია, ხოლო მარჯვენა — უარყოფითი რიცხვი ან ნული.

ამრიგად, $\log_a b (a>0,\ a \neq 1)$ გამოსახულება განსაზღვრულია b-ს ყველა დადებითი მნიშვნელობისათვის და არაა განსაზღვრული b-ს არც ერთი უარყოფითი მნიშვნელობისათვის, არც $b=0$-ისათვის. ეს კი ნიშნავს, რომ $y=\log_a x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე.

ლოგარითმული ფუნქციის პირველი თვისება დამტკიცებულია. ამ თვისების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია იმაში მდგომარეობს, რომ $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი მთლიანად მდებარეობს მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში, რომელიც შეესაბამება x-ის მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს (იხ. ნახ. 250 და 251).

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. **ლოგარითმული ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა რიცხვის სიმრავლე.**

ეს ნიშნავს, რომ $\log_a x$ გამოსახულებას x-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობა.

ვთქვათ, b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი რიცხვი x, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\log_a x = b. \tag{3}$$

სწორედ ამით დამტკიცებული იქნება მე-2 თვისება.

(3) თანაფარდობა იმასვე ნიშნავს, რასაც

$$a^b = x$$

თანაფარდობა. a რიცხვი დადებითია, ხოლო ყოველი დადებითი რიცხვის ნებისმიერმაჩვენებლიანი ხარისხი ყოველთვის განსაზღვრულია. ამიტომ, როდესაც x-ის საძებნ მნიშვნელობად a^b ავირჩიეთ, ამით დავაკმაყოფილეთ (3) პირობა.

თ ვ ი ს ე ბ ა 3. როცა $a>1$, ლოგარითმული ფუნქცია $y=\log_a x$ მონოტონურად ზრდადია, ხოლო, როცა $0<a<1$, — მონოტონურად კლებადი.

ვთქვათ, $a>1$ და $x_2>x_1$. დავამტკიცოთ, რომ

$$\log_a x_2>\log_a x_1.$$

დამტკიცებისათვის დავუშვათ საწინააღმდეგო: $\log_a x_2<\log_a x_1$ ან $\log_a x_2=\log_a x_1$. როცა $a>1$, $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია მონოტონურად იზრდება, ამიტომ $\log_a x_2<\log_a x_1$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $a^{\log_a x_2}<a^{\log_a x_1}$ მაგრამ $a^{\log_a x_2}=x_2$, $a^{\log_a x_1}=x_1$. მაშასადამე, $x_2<x_1$. ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რომლის თანახმად $x_2>x_1$. წინააღმდეგობამდე მივყავართ მეორე დაშვებასაც: $\log_a x_1=\log_a x_2$. ამ შემთხვევაში უნდა გვქონდეს: $a^{\log_a x_1}=a^{\log_a x_2}$, ანუ $x_1=x_2$. დაგვრჩენია ვაღიაროთ, რომ $\log_a x_2>\log_a x_1$. ამით დავამტკიცეთ, რომ, როცა $a>1$, $y=\log_a x$ ფუნქცია მონოტონურად ზ რდადია.

ვავალებთ მოსწავლეებს დამოუკიდებლად განიხილონ შემთხვევა, როცა $a<1$.

ლოგარითმული ფუნქციის მე-3 თვისებას აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. როცა $a>1$, $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი x-ის ზრდასთან ერთად მიემართება სულ ზევით და ზევით (იხ. ნახ. 250), ხოლო, როცა $a<1$, x-ის ზრდასთან ერთად იგი ეშვება სულ ქვევით და ქვევით (იხ. ნახ. 251).

შ ე დ ე გ ი. თუ ორი რიცხვის ლოგარითმები 1-ისაგან განსხვავებული ერთი და იმავე დადებითი ფუძით ტოლია, მაშინ თვით ეს რიცხვებიც ტოლი იქნება.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,

$$\log_a x=\log_a y\ (a>0,\ a\neq 1)$$

პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x=y.$$

მართლაც, x და y რიცხვებიდან ერთი რომ მეტი ყოფილიყო მეორეზე, მაშინ ლოგარითმული ფუნქციის მონოტონურობის გამო $\log_a x$ და $\log_a y$ რიცხვებიდან ერთი მეტი იქნებოდა მეორეზე. მაგრამ ეს ასე არ არის. მაშასადამე, $x=y$.

თ ვ ი ს ე ბ ა 4. როცა $x=1$, $y=\log_a x$ ლოგარითმული ფუნქცია ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობას.

გრაფიკულად ეს ნიშნავს, რომ a რიცხვისაგან დამოუკიდებლად $y=\log_a x$ მრუდი მკვეთს x-თა ღერძს წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=1$ (იხ. ნახ. 250 და 251).

მე-4 თვისების დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ყოველი დადებითი a რიცხვისათვის

$$a^0=1,$$

ამიტომ $\log_a 1=0$.

თ ვ ი ს ე ბ ა 5. **ვთქვათ, $a>1$. მაშინ, როცა $x>1$, $y=\log_a x$ ფუნქცია ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს, ხოლო, როცა $0<x<1$,— უარყოფით მნიშვნელობებს.**

თუკი $0<a<1$, მაშინ, პირიქით, როცა $x>1$, $y=\log_a x$ ფუნქცია ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობებს, ხოლო, როცა $0<x<1$, —დადებით მნიშვნელობებს.

ლოგარითმული ფუნქციის ამ თვისებასაც აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, მაგალითად, $a>1$. მაშინ $y=\log_a x$ მრუდის ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება $x>1$ მნიშვნელობებს, მოთავსდება x-თა ღერძის ზემოთ, ხოლო ამ მრუდის ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება $0<x<1$ მნიშვნელობებს, x-თა ღერძის ქვემოთაა (იხ. ნახ. 250). ანალოგიური ინტერპრეტაცია ექნება იმ შემთხვევას, როცა $a<1$ (ნახ. 251).

ლოგარითმული ფუნქციის მე-5 თვისება მე-3 და მე-4 თვისებების მარტივი შედეგია. გარკვეულობისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a>1$. მაშინ მე-3 თვისების ძალით $y=\log_a x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია. ამიტომ, თუ $x>1$, მაშინ $\log_a x>\log_a 1$. მაგრამ მე-4 თვისების ძალით $\log_a 1=0$. მაშასადამე, როცა $x>1$, მაშინ $\log_a x>0$. როცა $x<1$, მაშინ $\log_a x<\log_a 1$, ე. ი. $\log_a x<0$.

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a<1$. მოსწავლეებს ევალებათ გაარჩიონ იგი დამოუკიდებლად.

ლოგარითმული ფუნქციის განხილულ ხუთ თვისებას დაუმტკიცებლად დავუმატებთ კიდევ ერთ მნიშვნელოვან თვისებას, რომლის მართებულობაც თვალსაჩინოდაა ასახული 250-ე და 251-ე ნახაზებზე.

თ ვ ი ს ე ბ ა 6. **თუ $a>1$, მაშინ, როცა $x\to 0$, $y=\log_a x$ ფუნქციის მნიშვნელობები უსაზღვროდ კლებულობს ($y\to-\infty$). თუ $0<a<1$, მაშინ, როცა $x\to 0$, $y=\log_a x$ ფუნქციის მნიშვნელობები უსაზღვროდ იზრდება ($y\to\infty$).**

სავარჯიშოები

1890. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები:

ა) $y=\log_2(x+1)$;

ბ) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1)$;

გ) $y=\log_{10}(4+x^2)$;

დ) $y=\log_5(-x)$;

ე) $y=\log_7|x|$;

ვ) $y=\log_3(x^2+x-2)$;

ზ) $y=\log_{0,5}(5x-x^2-6)$;

თ) $y=\log_6(x^2+x+1)$.

1391. x-ის როგორი მნიშვნელობებისთვისაა განსაზღვრული $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ შუალედში გამოსახულებანი:

ა) $\log_2(\sin x)$; გ) $\log_4(\operatorname{tg} x)$;

ბ) $\log_3(\cos x)$; დ) $\log_5(\operatorname{ctg} x)$?

1392. რა შეგიძლიათ თქვათ შემდეგი ფუნქციების უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებზე:

ა) $y=\log_2 x$; ბ) $y=|\log_2 x|$?

1393. ლოგარითმული ფუნქციის რომელი თვისების საფუძველზე შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ

ა) $\log_{10}5>\log_{10}4$; ბ) $\log_{0,1}5<\log_{0,1}4$?

1394. რომელი რიცხვია მეტი:

ა) $\log_2 5$ თუ $\log_2 6$; ბ) $\log_6\frac{1}{2}$ თუ $\log_6\frac{1}{3}$;

გ) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ თუ $\log_{\frac{1}{3}} 4$; დ) $\log_{\frac{1}{7}}\frac{4}{5}$ თუ $\log_{\frac{1}{7}}\frac{5}{6}$?

1395. ამოხსენით x-ის მიმართ უტოლობანი:

ა) $\log_2 x>\log_2 3$. დ) $\log_{\frac{1}{2}}(3x)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}6$;

ბ) $\log_3 x^2>\log_3 4$; ე) $\log_{10}(x^2-1)\geqslant\log_{10}(4x+4)$;

გ) $\log_{\frac{1}{3}}x\geqslant\log_{\frac{1}{3}}2$; ვ) $\log_{0,1}(1-x^2)>\log_{0,1}(2x+2)$.

1396. რა შეიძლება ითქვას a რიცხვის შესახებ, თუ:

ა) $\log_a 7>\log_a 6$; გ) $\log_a\frac{1}{3}<\log_a\frac{1}{2}$;

ბ) $\log_a 5<\log_a 4$; დ) $\log_a 5>0$?

1397. რა შეიძლება ითქვას a რიცხვის შესახებ, თუ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის

$$\log_a(x^2+1)>\log_a x?$$

1398. რომელ მთელ მომდევნო რიცხვებს შორისაა მოთავსებული ლოგარითმები:

ა) $\log_2 5$; გ) $\log_{\frac{1}{8}} 7$;

ბ) $\log_3 8$; დ) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

1399. მოცემული რიცხვებიდან რომელია დადებითი და რომელი უარყოფითი:

ა) $\log_2 5$; ე) $\log_7 1$;

ბ) $\log_2\frac{1}{3}$; ვ) $\log_\pi 3$,

გ) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; ზ) $\log_{\frac{\pi}{3}} 4$;

დ) $\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{2}$; თ) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$?

თ ე ო რ ე მ ა 1. **ორი დადებითი რიცხვის ნამრავლის ლოგარითმი უდრის მათი ლოგარითმების ჯამს,** უფრო ზუსტად, თუ a, x და y რიცხვები დადებითია და $a \neq 1$, მაშინ

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y. \tag{1}$$

ამ იგივობის დასამტკიცებლად საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ

$$a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y} \tag{2}$$

(თუ 1-ისაგან განსხვავებული ერთი და იმავე დადებითი რიცხვის ხარისხები ტოლია, მაშინ ამ ხარისხების მაჩვენებლებიც ტოლია). (2) ფორმულის მართებულობის დადგენა მეტად მარტივია, თუ ვისარგებლებთ ლოგარითმის განსაზღვრით. გვაქვს:

$$a^{\log_a(xy)} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

აქედან გამომდინარეობს (2) ფორმულა და, მაშასადამე, (1) ფორმულაც·

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\log_3 15 = \log_3(3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5.$

2) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \cdot 5) = \log_{10} 10 = 1.$

თუ x და y უარყოფითია, მაშინ (1) ფორმულა კარგავს აზრს. მაგალითად, არ შეიძლება დაიწეროს:

$$\log_2[(-8) \cdot (-4)] = \log_2(-8) + \log_2(-4),$$

ვინაიდან $\log_2(-8)$ და $\log_2(-4)$ გამოსახულებები საერთოდ არაა განსაზღვრული ($y = \log_2 x$ ლოგარითმული ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის მხოლოდ დადებით მნიშვნელობათათვის).

თეორემა 1 მართებულია არა მხოლოდ ორი თანამამრავლისათვის, არამედ თანამამრავლთა ნებისმიერი რიცხვისათვის, ე. ი. ნებისმიერი ნატურალური k-სა და ნებისმიერი დადებითი $x_1, x_2, \ldots, x_k$ რიცხვებისათვის:

$$\log_a(x_1, x_2, x_3 \ldots x_k) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_k.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2. **ორი დადებითი რიცხვის განაყოფის ლოგარითმი უდრის გასაყოფისა და გამყოფის ლოგარითმების სხვაობას.**

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ a, x და y რიცხვები დადებითია და $a \neq 1$, მაშინ

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y. \tag{3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (3) ფორმულა, ცხადია, ტოლფასია შემდეგი ფორმულისა:

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y = \log_a x, \qquad (4)$$

რომელიც მიიღება (3)-დან, თუ $\log_a y$ გამოსახულებას გადავიტანთ მარჯვენა ნაწილიდან მარცხენაში. ამიტომ (3) ფორმულის დასამტკიცებლად საკმარისია დავადგინოთ (4) ფორმულა. ეს ფორმულა კი ცხადად გამომდინარეობს (1) ფორმულიდან:

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\log_3 \frac{25}{16} = \log_3 25 - \log_3 16;$

2) $\log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = 3.$

მე-2 თ ე ო რ ე მ ი ს შ ე დ ე გ ი. ვინაიდან $\log_a 1 = 0$, ამიტომ

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b.$$

ამრიგად,

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$$

ერთი და იმავე ფუძით აღებული ორი ურთიერთშებრუნებული რიცხვის ლოგარითმები ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

ა) $\log_3 9 = -\log_3 \frac{1}{9};$ ბ) $\log_5 \frac{1}{125} = -\log_5 125$ და ა. შ.

სავარჯიშოები

1400. გამოიანგარიშეთ:

1) $\log_6 2 + \log_6 3;$

2) $\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3};$

3) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27};$

4) $\log_{10} 40 + \log_{10} 25;$

5) $\log_{10} 0{,}18 - \log_{10} 180;$

6) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36;$

7) $\log_5 100 - \log_5 4;$

8) $\log_6 4 + \log_6 9;$

9) $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12};$

10) $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0{,}5.$

1401. ვთქვათ, ვიცით, რომ $\log_{10}2 \approx 0,3010$; $\log_{10}3 \approx 0,4771$; $\log_{10}5 \approx \approx 0,6990$. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე 10-ია:

$$6, \ 15; \ \frac{5}{6}; \quad 20; \ \frac{1}{30}$$

1402. იპოვეთ $\log_{10}2$ და $\log_{10}5$, თუ ცნობილია, რომ ამ ლოგარითმების ნამრავლი მიახლოებით უდრის 0,2104-ს.

1403. იპოვეთ $\log_2(\text{tg}\,\varphi)$ და $\log_2(\text{ctg}\,\varphi)$, თუ ცნობილია, რომ $\log_2(\sin\varphi) \approx 0,1919$ და $\log_2(\cos\varphi) \approx 0,1157$.

1404. x-ის როგორი მნიშვნელობებისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\log_3[(x+1)(x-1)] = \log_3(x+1) + \log_3(x-1)\,?$$

1405. x-ის როგორი მნიშვნელობებისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+2)\,?$$

1406. რამდენით მეტია $\log_2 100a$ $\log_2 \frac{a}{100}$-ზე?

1407. როგორ უნდა შეიცვალოს რიცხვი, რომ მისი ლოგარითმი მოპირდაპირე ნიშნით შეიცვალოს?

ხარისხისა და ფესვის ლოგარითმი § 184

თ ე ო რ ე მ ა 1. დადებითი რიცხვის ხარისხის ლოგარითმი უდრის ამ ხარისხის მაჩვენებლისა და მისი ფუძის ლოგარითმის ნამრავლს.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ a და x რიცხვები დადებითია და $a \neq 1$, მაშინ ნებისმიერი, ნამდვილი k რიცხვისათვის

$$\log_a x^k = k \log_a x. \tag{1}$$

ამ ფორმულის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$a^{\log_a x^k} = a^{k \log_a x} \tag{2}$$

გვაქვს:

$$a^{\log_a x^k} = x^k,$$

$$a^{k\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^k = x^k.$$

აქედან გამომდინარეობს (2) ფორმულის მართებულობა, და, მაშასადამე, (1)-ისაც.

შევნიშნავთ, რომ, თუ k რიცხვი ნატურალურია ($k=n$), მაშინ (1) ფორმულა წინა პარაგრაფში დამტკიცებული

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n)=\log_a x_1+\log_a x_2+\ldots+\log_a x_n$$

ფორმულის კერძო შემთხვევაა. მართლაც, თუ ამ ფორმულაში ჩავიჩნევთ, რომ

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=x,$$

მივიღებთ:

$$\log_a x^n=n \log_a x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\log_3 25=\log_3 5^2=2 \log_3 5;$

2) $\log_3 2^{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \log_3 2.$

როცა x-ის მნიშვნელობანი უარყოფითია, (1) ფორმულა კარგავს აზრს. მაგალითად, არ შეიძლება დაიწეროს

$$\log_2(-4)^2=2 \log_2(-4),$$

ვინაიდან $\log_2(-4)$ გამოსახულება არაა განსაზღვრული. შევნიშნოთ, რომ ამ ფორმულის მარცხენა ნაწილში მდგომ გამოსახულებას აქვს აზრი:

$$\log_2(-4)^2=\log_2 16=4.$$

საერთოდ, თუ x უარყოფითია, მაშინ $\log_a x^{2k}$ განსაზღვრულია, ვინაიდან $x^{2k}>0$. $\log_a x$ გამოსახულებას კი ამ შემთხვევაში აზრი არა აქვს. ამიტომ არ შეიძლება დაიწეროს

$$\log_a x^{2k}=2k \log_a x.$$

მაგრამ შეიძლება დაიწეროს:

$$\log_a x^{2k}=2k \log_a |x|. \quad (3)$$

ეს ფორმულა ადვილად მიიღება (1) ფორმულიდან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$x^{2k}=|x|^{2k}.$$

მაგალითად,

$$\log_3(-3)^4=4 \log_3|-3|=4 \log_3 3=4.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2. **დადებითი რიცხვიდან ფესვის ლოგარითმი უდრის ფესქვეშა გამოსახულების ლოგარითმს, გაყოფილს ფესვის მაჩვენებელზე.**

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ a და x რიცხვები დადებითია, $a \neq 1$ და n ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$\log_a \sqrt[n]{x}=\frac{1}{n} \log_a x.$$

მართლაც,

$$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}.$$

ამიტომ, 1-ლი თეორემის თანახმად,

$$\log_a\sqrt[n]{x}=\log_a x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log_a x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\log_3\sqrt{8}=\frac{1}{2}\log_3 8$; 2) $\log_2\sqrt[5]{27}=\frac{1}{5}\log_2 27$.

სავარჯიშოები

1408. როგორ შეიცვლება რიცხვის ლოგარითმი, თუ ფუძის შეუცვლელად:

ა) ავახარისხებთ რიცხვს კვადრატში;

ბ) ამოვიღებთ რიცხვიდან კვადრატულ ფესვს?

1409. როგორ შეიცვლება $\log_2 a-\log_2 b$ სხვაობა, თუ a და b რიცხვების მაგიერ შესაბამისად ავიღებთ:

• ა) a^3-სა და b^3-ს; ბ) $3a$-სა და $3b$-ს?

1410. ვთქვათ, ვიცით, რომ $\log_{10}2\approx0,3010$ და $\log_{10}3\approx0,4771$. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, რომელთა ფუძეა 10:

$$8;\ 9;\ \sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{6};\ \ 0,5;\ \ \frac{1}{9}.$$

1411. დაამტკიცეთ, რომ გეომეტრიული პროგრესიის მომდევნო წევრების ლოგარითმები შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას.

1412. განსხვავდება თუ არა ერთმანეთისაგან ფუნქციები:

$$y=\log_3 x^2 \text{ და } y=2\log_3 x?$$

ააგეთ ამ ფუნქციების გრაფიკები.

1413. იპოვეთ შეცდომა შემდეგ გარდაქმნებში:

$$\log_2\frac{1}{3}=\log_2\frac{1}{3};$$

$$2\log_2\frac{1}{3}>\log_2\frac{1}{3};$$

$$\log_2\left(\frac{1}{3}\right)^2>\log_2\frac{1}{3};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2>\frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{9}>\frac{1}{3}.$$

ზოგჯერ სასარგებლოა ერთი ფუძით (მაგალითად, a ფუძით) აღებული ლოგარითმებიდან სხვა ფუძით (მაგალითად, c ფუძით) აღებულ ლოგარითმებზე გადასვლა. ამ შემთხვევაში სარგებლობენ შემდეგი ფორმულით:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\,. \tag{1}$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ a, b და c დადებითი რიცხვებია და a და c 1-ისაგან განსხვავებულია.

ვთქვათ, მაგალითად, ცნობილია, რომ $\log_{10}2 \approx 0{,}3010$; $\log_{10}3 \approx 0{,}4771$. საჭიროა ვიპოვოთ $\log_2 3$. (1) ფორმულის თანახმად,

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} \approx 1{,}58.$$

(1) ფორმულის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ ძირითადი ლოგარითმული იგივობა:

$$a^{\log_a b} = b.$$

თუ დადებითი რიცხვები ტოლია, მაშინ, ცხადია, ტოლი იქნება მათი ერთი და იმავე ფუძით აღებული ლოგარითმებიც. ამიტომ

$$\log_c \left(a^{\log_a b}\right) = \log_c b.$$

მაგრამ ხარისხის ლოგარითმის შესახებ თეორემის თანახმად,

$$\log_c \left(a^{\log_a b} \right) = \log_a b \cdot \log_c a.$$

მაშასადამე,

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1) ფორმულა.

თუ (1) ფორმულაში c-ს მაგიერ ავიღებთ b-ს, გვექნება:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

ამრიგად,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\,. \tag{2}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

$$\log_{32}2=\frac{1}{\log_2 32}=\frac{1}{5};\qquad \log_{125}5=\frac{1}{\log_5 125}=\frac{1}{3}.$$

სავარჯიშოები

1414. ვთქვათ, ვიცით, რომ $\log_{10}2\approx0{,}3010$ და $\log_{10}3\approx0{,}4771$. იპოვეთ:

ა) $\log_3 2$; გ) $\log_3 12$;

ბ) $\log_3 8$; დ) $\log_{12} 3$.

1415. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{\log_2 x}{\log_3 x}\quad \text{და}\quad \frac{\log_x 2}{\log_x 3}$$

შეფარდებები არაა დამოკიდებული x-ზე.

1416. დაამტკიცეთ უტოლობანი:

ა) $\log_2 5+\log_5 2>2$;

ბ) $\log_{\frac{1}{3}}4+\log_4\frac{1}{3}<-2.$

1417. შეიცვლება თუ არა რიცხვის ლოგარითმი, თუ ამ რიცხვს და ლოგარითმების ფუძეს ერთსა და იმავე ხარისხში ავახარისხებთ?

გალოგარითმება და პოტენცირება § 186

თუ რომელიმე გამოსახულება შედგენილია დადებითი რიცხვებისაგან გამრავლების, გაყოფის, ახარისხებისა და ამოფესვის საშუალებით, მაშინ მთელი ამ გამოსახულების ლოგარითმი ადვილად შეიძლება გამოვსახოთ მასში შემავალი რიცხვების ლოგარითმებით.

ვთქვათ, მაგალითად,

$$x=\frac{13^2\sqrt[3]{140}}{\sqrt[5]{67\cdot 98}}.$$

მაშინ წილადის ლოგარითმის შესახებ თეორემის თანახმად,

$$\log_a x=\log_a(13^2\cdot\sqrt[3]{140})-\log_a\sqrt[5]{67\cdot 98}.$$

ნამრავლის ლოგარითმის შესახებ თეორემა გვაძლევს:

$$\log_a(13^2\cdot\sqrt[3]{140})=\log_a 13^2+\log_a\sqrt[3]{140};$$

$$\log_a \sqrt[5]{67\cdot 98} = \log_a \sqrt[5]{67} + \log_a \sqrt[5]{98}$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ ხარისხისა და ფესვის ლოგარითმების შესახებ თეორემებს, მივიღებთ:

$$\log_a 13^2 = 2\log_a 13;$$

$$\log_a \sqrt[3]{140} = \frac{1}{3}\log_a 140;$$

$$\log_a \sqrt[5]{67} = \frac{1}{5}\log_a 67;$$

$$\log_a \sqrt[5]{98} = \frac{1}{5}\log_a 98.$$

ამრიგად,

$$\log_a x = 2\log_a 13 + \frac{1}{3}\log_a 140 - \frac{1}{5}\log_a 67 - \frac{1}{5}\log_a 98.$$

გამოსახულებიდან მის ლოგარითმზე გადასვლას ამ გამოსახულების გ ა ლ ო გ ა რ ი თ მ ე ბ ა ეწოდება.

გალოგარითმების შებრუნებულ მოქმედებას პ ო ტ ე ნ ც ი რ ე ბ ა ეწოდება. იგი მდგომარეობს რომელიმე გამოსახულების ლოგარითმის მიხედვით თვით გამოსახულების აღდგენაში. განვმარტოთ ეს შემდეგ მაგალითზე. ვთქვათ,

$$\log_a x = 2\log_a 10 - \frac{1}{2}\log_a 7 - 3\log_a 3 + \frac{1}{3}\log_a 19.$$

პირველ ყოვლისა, თუ გამოვიყენებთ ხარისხისა და ფესვის ლოგარითმის შესახებ თეორემებს, შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$2\log_a 10 = \log_a 10^2 = \log_a 100,$$

$$\frac{1}{2}\log_a 7 = \log_a (7)^{\frac{1}{2}} = \log_a \sqrt{7},$$

$$3\log_a 3 = \log_a 3^3 = \log_a 27,$$

$$\frac{1}{3}\log_a 19 = \log_a (19)^{\frac{1}{3}} = \log \sqrt[3]{19}.$$

ამის შემდეგ $\log_a x$ შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით:

$$\log_a x = \log_a 100 - \log_a \sqrt{7} - \log_a 27 + \log_a \sqrt[3]{19}.$$

ახლა. თუ გამოვიყენებთ ნამრავლისა და განაყოფის შესახებ თეორემებს, მივიღებთ:

$$\log_a x = (\log_a 100 + \log_a \sqrt[3]{19}) - (\log_a \sqrt{7} + \log_a 27) =$$

$$= \log_a (100\sqrt[3]{19}) - \log_a \sqrt{7} \cdot 27) = \log_a \frac{100 \cdot \sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

ამრიგად,

$$\log_a x = \log_a \frac{100 \cdot \sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

მაგრამ, თუ ორი დადებითი რიცხვის ერთი და იმავე ფუძით აღებული ლოგარითმები ტოლია, მაშინ ტოლია თვით ეს რიცხვებიც. ამიტომ

$$x = \frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

სავარჯიშოები

გაალოგარითმეთ ფუძით 10 შემდეგი გამოსახულებანი (№ 1418—1422):

1418. ა) $x = 3a^7$; გ) $x = a^2\sqrt[7]{ab^5}$;

ბ) $x = 15a^3b^8c^7$; დ) $x = a\sqrt[3]{ab^2}$.

1419. ა) $x = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{b+b}}$; გ) $x = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^2}}$;

ბ) $x = \frac{a \sin\varphi}{2b^2c}\sqrt{b^2 \operatorname{tg}\varphi}$; დ) $x = \left(\sqrt{\frac{a}{2b}}\right)^3$.

1420. ა) $x = \left(\sqrt{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \operatorname{ctg}\varphi}\right)^3$;

ბ) $x = \left(\sqrt[4]{\frac{\sin 2\varphi}{\sin^3\varphi} \operatorname{ctg}\varphi}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1421. ა) $x = \left(\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{3ab}}\right)^4$; ბ) $x = \sqrt[4]{\frac{3}{a^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{b^2}}$;

გ) $x = \sqrt[6]{\frac{5m^3}{\left(\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}\right)^2}}$.

1422. ა) $x = \frac{3}{4}\sqrt{a\sqrt{a}}$ ბ) $x = \frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$;

გ) $x = \frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$.

№ 1423—1426 ამოცანებში მოცემული განტოლებებიდან იპოვეთ x:

1423. ა) $\log_a x=\log_a 2+\log_a 3$;

ბ) $\log_a x=\log_a 2-\log_a 4$;

გ) $\log_a x=2\log_a 8-4\log_a 2$;

დ) $\log_a x=3\log_a 2+2\log_a 2$.

1424. ა) $\log_3 x=\frac{1}{3}\log_3 8$;

ბ) $\log_3 x=\frac{2}{3}\log_3 8+\frac{1}{2}\log_3 16$;

გ) $\log_5 x=\frac{2\log_5 3}{5}-\frac{\log_5 7}{10}$.

1425. ა) $\log_2 x=\log_2 a+n\log_2(a+b)-\frac{1}{n}\log_2(a-b)$;

ბ) $$\log_3 x=-\frac{1}{2}\log_3 a+\frac{1}{4}\left[\log_3 b-\frac{2}{3}\log_3 a+\frac{2}{3}\log_3(a-b)-\frac{1}{2}\log_3(a+b)\right];$$

გ) $$\log_5 x=-\log_5(a+b)+\frac{2}{5}\left[2\log_5 a+\frac{1}{2}\log_5 b-\frac{1}{3}(\log_5 a-\log_5 b)-\log_5 a\right].$$

1426. ა) $\log_a x=\frac{2}{3}\log_a \sin\varphi+\frac{1}{3}\log_a \operatorname{tg}\varphi-\frac{2}{3}\log_a\cos\varphi$;

ბ) $$\log_2 x=1+\frac{1}{2}\log_2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2}\log_2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{1}{2}\log_2\cos\frac{\varphi}{2}.$$

რიცხვის მთელი და წილადური ნაწილები § 187

a რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც a-ს არ აღემატება.

a რიცხვის მთელი ნაწილი აღინიშნება ასე: $[a]$. მაგალითად, $[2,3]=2$; $[0,165]=0$; $[5]=5$. $-4,7$ რიცხვის მთელი ნაწილია -5. შეცდომა

იქნებოდა მიგვეჩნია, რომ $[-4,7]=-4$. განსაზღვრის თანახმად, a რიცხვის მთელი ნაწილი არ უნდა აღემატებოდეს a-ს, მაგრამ $-4>-4,7$.

ანალოგიურად,

$$[-5,79]=-6;$$

$$[-0,142]=-1;$$

$$[-\pi]=[-3,14\ldots]=-4.$$

a რიცხვსა და მის $[a]$ მთელ ნაწილს შორის სხვაობას ეწოდება ამ რიცხვის წილადური ნაწილი და აღინიშნება $\{a\}$:

$$\{a\}=a-[a].$$

მაგალითად,

$$\{2,3\}=2,3-2=0,3;$$

$$\{0,165\}=0,165-0=0,165;$$

$$\{-5,79\}=-5,79-(-6)=0,21.$$

$$\{-0,142\}=-0,142-(-1)=0,858.$$

ცხადია, a რიცხვის მთელი ნაწილი შეიძლება იყოს ნებისმიერი მთელი რიცხვი: დადებითი, უარყოფითი ან ნული. a რიცხვის წილადური ნაწილი კი ყოველთვის არაუარყოფითია და 1-ზე ნაკლები.

ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ მისი მთელი და წილადური ნაწილების ჯამის სახით:

$$a=[a]+\{a\}.$$

მაგალითად,

$$2,3=2+0,3;$$
$$0,165=0+0,165;$$
$$-5,79=-6+0,21;$$
$$-0,142=-1+0,858.$$

სავარჯიშოები

1427. მოცემული რიცხვები წარმოადგინეთ მათი მთელი და წილადური ნაწილების ჯამის სახით:

$2,01;\ \pi;\ 5;\ -2,37;\ -6,07;\ -7;\ -\pi.$

1428. ა) შეიცვლება თუ არა რიცხვის წილადური ნაწილი, მას რომ მთელი რიცხვი მივუმატოთ?

ბ) შეიცვლება თუ არა რიცხვის მთელი ნაწილი, მას რომ წესიერი წილადი მივუმატოთ?

ლოგარითმების ფუძედ ხშირად ღებულობენ რიცხვ 10-ს. რიცხვების ლოგარითმებს ფუძით 10 ეწოდება ა თ ო ბ ი თ ი ლოგარითმები. ათობითი ლოგარითმების აღსანიშნავად ხმარობენ ნიშანს lg-ს, და არა log; ამასთან რიცხვ 10-ს, რომელიც ფუძეს გამოსახავს, აღარ წერენ. მაგალითად, $\log_{10}105$-ის ნაცვლად წერენ lg 105; $\log_{10}2$-ის ნაცვლად — lg 2 და ა. შ.

ათობით ლოგარითმებს ახასიათებს ყველა ის თვისება, რომლებიც აქვს ლოგარითმებს 1-ზე მეტი ფუძით. მაგალითად, ათობითი ლოგარითმები განსაზღვრულია მხოლოდ დადებითი რიცხვებისათვის. 1-ზე მეტი რიცხვების ათობითი ლოგარითმები დადებითია, ხოლო 1-ზე ნაკლებისა — უარყოფითი. ორი დადებითი რიცხვიდან უდიდესს შეესაბამება უდიდესი ათობითი ლოგარითმი და ა. შ. მაგრამ, ამას გარდა, ათობით ლოგარითმებს აქვს ზოგიერთი სპეციფიკური თვისება, რომლებითაც აიხსნება, თუ ლოგარითმების ფუძედ რატომაა მოხერხებული სწორედ რიცხვი 10-ის არჩევა.

სანამ ამ თვისებებს განვიხილავდეთ, შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრა.

a რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ო ბ ი თ ი ლ ო გ ა რ ი თ მ ი ს მ თ ე ლ ნ ა წ ი ლ ს ე წ ო დ ე ბ ა მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი, ხ ო ლ ო ა მ ლ ო გ ა რ ი თ მ ი ს წ ი ლ ა დ უ რ ნ ა წ ი ლ ს — მ ა ნ ტ ი ს ა.

a რიცხვის ათობითი ლოგარითმის მახასიათებელი აღინიშნება, როგორც $[\lg a]$, ხოლო მანტისა — როგორც $\{\lg a\}$.

ცნობილია, მაგალითად, რომ $\lg 2 \approx 0,3010$. ამიტომ $[\lg 2]=0$; $\{\lg 2\} \approx 0,3010$.

ცნობილია* აგრეთვე, რომ $\lg 543,1 \approx 2,7349$. მაშასადამე,

$$[\lg 543,1]=2; \qquad \{\lg 543,1\} \approx 0,7349.$$

სწორედ ასევე $\lg 0,005 \approx -2,3010$ ტოლობიდან დავასკვნით, რომ

$$[\lg 0,005]=-3; \qquad [\lg 0,005] \approx 0,6990.$$

ახლა გადავიდეთ ათობითი ლოგარითმების თვისებების განხილვაზე.

თ ვ ი ს ე ბ ა. 1. **ერთიანითა და მისი მომდევნო ნულებით გამოსახული მთელი დადებითი რიცხვის ათობითი ლოგარითმი არის მთელი დადებითი რიცხვი, რომელიც უდრის ამ რიცხვის ჩანაწერში ნულების რაოდენობას.**

მაგალითად,

$$\lg 1000=3; \quad \lg 1000000=6.$$

* შემდგომში შევისწავლით დადებითი რიცხვების ათობითი ლოგარითმების ცხრილებით მოძებნას.

საერთოდ, თუ

$$a=\underbrace{1000...0}_{n},$$

მაშინ $a=10^n$ და ამიტომ

$$\lg a=\lg 10^n=n \lg 10=n.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. ერთიანითა და მისი წინამდებარე ნულებით გამოსახული დადებითი ათწილადის ათობითი ლოგარითმი უდრის $-n$-ს, სადაც n ამ რიცხვის ჩანაწერში ნულების რიცხვია, ნული მთელის ჩათვლით.

მაგალითად, $\lg 0{,}01=-2$, $\lg 0{,}00001=-5$.

საერთოდ, თუ

$$a=0{,}\underbrace{000...01}_{n},$$ მაშინ $a=10^{-n}$ და ამიტომ

$$\lg a=\lg 10^{-n}=-n \lg 10=-n.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა 3. 1-ზე მეტი დადებითი რიცხვის ათობითი ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის ციფრების რაოდენობას ამ რიცხვის მთელ ნაწილში, ერთის გამოკლებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\lg 75{,}631$ ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 1-ს. მართლაც, $10<75{,}631<100$. ამიტომ

$$\lg 10<\lg 75{,}631<\lg 100,$$

ანუ

$$1<\lg 75{,}631<2.$$

მაშ,

$$\lg 75{,}631=1+\alpha,$$

სადაც α რომელიმე წესიერი დადებითი წილადია. მაგრამ მაშინ

$$[\lg 75{,}531]=1,$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

2) $\lg 5673{,}1$ ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 3-ს.

მართლაც, $1000<5673{,}1<10\,000$.

ამიტომ

$$\lg 1000<\lg 5673{,}1<\lg 10000,$$

ანუ

$$3<\lg 5673{,}1<4.$$

მაშასადამე,

$$[\lg 5673{,}1]=3.$$

საერთოდ, თუ ერთზე მეტი დადებითი a რიცხვის მთელი ნაწილი შეიცავს n ციფრს, მაშინ

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^{n}.$$

ამიტომ

$$\lg 10^{n-1} \leqslant \lg a < \lg 10^{n},$$

ანუ

$$n-1 \leqslant \lg a < n.$$

მაშასადამე,

$$[\lg a] = n-1.$$

თ ე ო რ ე მ ა 4. **1-ზე ნაკლები დადებითი ათწილადის ათობითი ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის — n-ს, სადაც n არის ნულების რიცხვი მოცემულ ათწილადში პირველი ნიშნადი ციფრის წინ, ნული მთელის ჩათვლით.**

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\lg 0{,}0015$ ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის —3-ს. მართლაც,

$$0{,}001 < 0{,}0015 < 0{,}01.$$

ამიტომ

$$\lg 0{,}001 < \lg 0{,}0015 < \lg 0{,}01,$$

ანუ

$$-3 < \lg 0{,}0015 < -2.$$

მაშ, $\lg 0{,}0015 = -3 + \alpha$, სადაც α რომელიმე წესიერი დადებითი წილადია.

მაგრამ ამ შემთხვევაში

$$[\lg 0{,}0015] = -3.$$

2) $\lg 0{,}6$ ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის —1-ს.

მართლაც, $0{,}1 < 0{,}6 < 1$. ამიტომ

$$\lg 0{,}1 < \lg 0{,}6 < \lg 1,$$

ანუ

$$-1 < \lg 0{,}6 < 0.$$

მაშასადამე,

$$\lg 0{,}6 = -1 + \alpha,$$

სადაც α რომელიმე წესიერი დადებითი წილადია. მაგრამ ამ შემთხვევაში

$$[\lg 0{,}6] = -1.$$

საერთოდ, თუ წესიერ a ათწილადს პირველი ნიშნადი ციფრის წინ უძღვის n ნული (ნული მთელის ჩათვლით), მაშინ

$$\underbrace{0{,}000\cdots001}_{n} \leqslant a < \underbrace{0{,}00\cdots01}_{n-1}.$$

ამიტომ

$$\lg \underbrace{0{,}000\cdots001}_{n} \leqslant \lg a < \lg \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n-1},$$

ანუ

$$-n \leqslant \lg a < -(n-1).$$

მაშასადამე,

$$[\lg a] = -n.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა 5. **თუ რიცხვს 10^n-ზე გავამრავლებთ, მისი ათობითი ლოგარითმი n-ით გადიდდება.**

მართლაც, ნამრავლის ლოგარითმის შესახებ თეორემის თანახმად,

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n.$$

მაგალითად,

$$\lg (579{,}13 \cdot 100) = \lg 579{,}13 + 2;$$
$$\lg (16 \cdot 1000) = \lg 16 + 3.$$

დადებით ათწილადში მძიმის მარჯვნივ n ნიშანზე გადატანა ტოლფასია ამ წილადის 10^n-ზე გამრავლებისა. **ამიტომ დადებით ათწილადში მძიმის მარჯვნივ n ნიშანზე გადატანით ათობითი ლოგარითმი n-ით დიდდება.**

თ ვ ი ს ე ბ ა 6. **თუ რიცხვს 10^n-ზე გავყოფთ, მისი ათობითი ლოგარითმი n-ით შემცირდება.**

მაგალითად, $\lg \dfrac{1{,}57}{1000} = \lg 1{,}57 - 3;$

$$\lg \frac{0{,}63}{100} = \lg 0{,}63 - 2.$$

დადებით ათწილადში მძიმის მარცხნივ n ნიშანზე გადატანით ათობითი ლოგარითმი n-ით მცირდება.

მაგალითად, $\lg 0{,}3567 = \lg 35{,}67 - 2;$
$\lg 0{,}00054 = \lg 0{,}54 - 3.$

მოსწავლეებს ევალებათ ამ დებულებათა დამოუკიდებლად დამტკიცება.

აქამდე დამტკიცებული ათობითი ლოგარითმების ყველა თვისება ეხებოდა მათ მახასიათებელს. ახლა მივმართოთ ათობითი ლოგარითმების მანტისას.

თ ვ ი ს ე ბ ა 7. დადებითი რიცხვის ათობითი ლოგარითმის მანტისა არ შეიცვლება, თუ ამ რიცხვს გავამრავლებთ 10-ის ნებისმიერ მთელ მაჩვენებლიან ხარისხზე.

მართლაც, ყოველი (როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი) მთელი n-ისათვის

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n.$$

მაგრამ რიცხვის წილადური ნაწილი არ შეიცვლება, თუ მას მთელ რიცხვს მივუმატებთ.

დადებით ათწილადში მძიმის გადატანა მარჯვნივ და მარცხნივ ტოლფასია ამ რიცხვის 10-ის მთელმაჩვენებლიან (დადებით ან უარყოფით) ხარისხზე გამრავლებისა. **ამიტომ დადებით ათწილადში მძიმის მარცხნივ ან მარჯვნივ გადატანით ამ წილადის ათობითი ლოგარითმის მანტისა არ შეიცვლება**

მაგალითად,

$$\{\lg 0,0067\} = \{\lg 0,67\} = \{\lg 0,0000067\}.$$

სავარჯიშოები

1429. (ზ ე პ ი რ ა დ). იპოვეთ რიცხვების ათობითი ლოგარითმები:

$$1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ 10\,000;$$

$$0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001;\ 0,00001.$$

1430. (ზ ე პ ი რ ა დ). იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ათობითი ლოგარითმების მახასიათებლები:

$$2,00;\ 57,38,\ 632,70;\ 3\,402,99;$$

$$0,17;\ 0,99;\ 0,023;\ 0,0100;\ 0,0003.$$

1431. ცნობილია, რომ $\lg 2 \approx 0,3010$, $\lg 3 \approx 0,4771$.

იპოვეთ შემდეგი ლოგარითმების მახასიათებლები და მანტისები:

ა) $\lg 6$; ბ) $\lg 15$; გ) $\lg 32$; დ) $\lg 30$; ე) $\lg \frac{1}{12}$

ათობითი ლოგარითმების ცხრილები § 189

ათობითი ლოგარითმების მოსაძებნად შედგენილია სპეციალური მათემატიკური ცხრილები. ამ ცხრილების მიხედვით, თუ გვეცოდინება რიცხვი x, შეიძლება ამა თუ იმ სიზუსტით განვსაზღვროთ $\lg x$. ჩვენ ვისარგებლებთ ვ. მ. ბრადისის „ოთხნიშნა მათემატიკური ცხრილებით“.

ისინი შეიცავენ ათობითი ლოგარითმების მნიშვნელობებს 0,0001-მდე სიზუსტით.

188-ე პარაგრაფში ნაჩვენები იყო, რომ ათობითი ლოგარითმების მახასიათებლები ადვილად მოინახება ცხრილების გარეშე. ამიტომ ცხრილებში მოცემულია ლოგარითმების მხოლოდ მანტისები. განვიხილოთ ცხრილების საშუალებით რიცხვების ლოგარითმების მოძებნის რამდენიმე მაგალითი.

1) სამნიშნა მთელი რიცხვების ლოგარითმები

ვთქვათ, მაგალითად, უნდა მოინახოს lg 456. ამ ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 2-ს. XIII ცხრილში. გვ. 66—68, ვპოულობთ რიცხვს, რომელიც დგას ნიშნით 54 სტრიქონისა და ნიშნით 6 სვეტის გადაკვეთაში. ეს რიცხვია 6590. იგი გვიჩვენებს, რომ lg 456-ის მანტისა უდრის 0,6590-ს. მაშ, $\lg 456 \approx 2,6590$. ანალოგიურად ვპოულობთ $\lg 238 \approx 2,3766$, $\lg 850 \approx 2,9294$ და ა. შ.

2) ერთ-და ორნიშნა მთელი რიცხვების ლოგარითმები

ვთქვათ უნდა მოინახოს lg 5. თუ რიცხვს 100-ზე გავამრავლებთ, მისი ათობითი ლოგარითმის მანტისა არ შეიცვლება. ამიტომ ერთნიშნა რიცხვის 5-ის ლოგარითმის მანტისა უდრის სამნიშნა რიცხვის 500-ის მანტისას. ცხრილების მიხედვით ეს მანტისა უდრის 0,6990-ს. ვინაიდან lg 5-ის მახასიათებელი უდრის ნულს, ამიტომ $\lg 5 \approx 0,6990$. ანალოგიურად ვიპოვით: $\lg 3 \approx 0,4771$ და ა. შ.

თუ უნდა მოინახოს რიცხვი 13-ის ლოგარითმი, მისი მანტისის განსაზღვრისათვის საკმარისია რიცხვი 13 გამრავლდეს 10-ზე. lg 130-ის მანტისა უდრის 0,1139-ს. ვინაიდან lg 13-ის მახასიათებელი უდრის 1-ს, ამიტომ $\lg 13 \approx 1,1139$. ანალოგიურად ვიპოვით: $\lg 75 \approx 1,8751$; $\lg 64 \approx 1,8062$ და ა. შ.

3) ოთხნიშნა მთელი რიცხვების ლოგარითმები

თქვენ, ალბათ, უკვე მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ XIII ცხრილის მარჯვენა ნაწილში განლაგებულია რიცხვები, რომლებიც ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ცხრილების შესწორებებს მოგვაგონებს. ცხრილის ეს ნაწილი შეიცავს შესწორებებს მეოთხე ციფრზე, რაც შესაძლებლობას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ ოთხნიშნა რიცხვების ლოგარითმები. ვთქვათ, მაგალითად, უნდა ვიპოვოთ lg 2587. XIII ცხრილის მიხედვით ვიპოვით სამნიშნა რიცხვის 258-ის მანტისას და მას მივუმატებთ რიცხვ 7-ზე შესწორებას. ამის შედეგად მივიღებთ ოთხნიშნა რიცხვის 2587-ის ლოგარითმის მანტისას. lg 258-ის მანტისა მიახლოებით უდრის 0,4116-ს, ხოლო 7-ზე შესწორება უდრის 0,0012-ს (ცხრილში 0,0012-ს ნაცვლად წერენ 12-ს), ამიტომ რიცხვ 2587-ის ლოგარითმის მანტისა უდრის

$$\begin{array}{r} 0,4116 \\ +0,0012 \\ \hline 0,4128 \end{array}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამ ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 3-ს, საბოლოოდ მივიღებთ: $\lg 2587 \approx 3,4128$.
ანალოგიურად,

$$\begin{array}{r} \lg 9625 \approx 3,9832 \\ +0,0002 \\ \hline 3,9834 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \lg 7718 \approx 3,8871 \\ +0,0004 \\ \hline 3,8875 \end{array}$$

4) ოთხ ციფრზე მეტის შემცველი მთელი რიცხვების ლოგარითმები

თუ მთელი რიცხვი შეიცავს ოთხ ციფრზე მეტს, მაშინ მას ამრგვალებენ ისე, რომ ყველა ციფრი, დაწყებული მეხუთიდან, იყოს ნული. თუ ამასთან, მეხუთე ციფრი 5-ზე ნაკლებია, მაშინ პირველი ოთხი ციფრი არ იცვლება. თუკი მეხუთე ციფრი მეტია ან უდრის 5-ს, მაშინ მეოთხე ციფრს 1-ით ადიდებენ.

მაგალითად, $573\,528 \approx 573\,500$, $36289 \approx 36290$, $19\,998 \approx 20\,000$, $7425\,538 \approx 7\,426\,000$. პირვანდელი რიცხვების ლოგარითმები მიახლოებით უდრის დამრგვალების შედეგად მიღებული რიცხვების ლოგარითმებს. ამ რიცხვების ლოგარითმების მანტისები ადვილად მოინახება ცხრილებში. მაგალითად, 573 500-ის ლოგარითმის მანტისა უდრის 5 735-ის ლოგარითმის მანტისას (რიცხვის 100-ზე გაყოფისას მისი ათობითი ლოგარითმის მანტისა არ იცვლება). ამ მანტისას ვპოულობთ ცხრილებში: 0,7586. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lg 573\,528$-ის მახასიათებელია 5, მივიღებთ: $\lg 573\,528 \approx 5,7586$.

ანალოგიურად ვღებულობთ: 36290-ის ლოგარითმის მანტისა უდრის რიცხვ 3629-ის ლოგარითმის მანტისას, ე. ი. 0,5598-ს. ამიტომ $\lg 36\,289 \approx 4,5598$.

5) წილადური რიცხვების ლოგარითმები

ვთქვათ, მაგალითად, უნდა მოინახოს $\lg 803,24$. ამ ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 2-ს (რიცხვ 803,24-ის მთელი ნაწილი შეიცავს 3 ციფრს). ამ ლოგარითმის მანტისა უდრის რიცხვ 80 324-ის ლოგარითმის მანტისას ან მიახლოებითი რიცხვის 80 320-ის ლოგარითმის მანტისას. ცხრილებიდან ვპოულობთ ამ მანტისას: 0,9048. მაშ, $\lg 803,24 \approx \approx 2,9048$. ანალოგიურად, 0,0053-ის ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის — 3-ს (0,0053 წილადს პირველი ნიშნადი ციფრის წინ აქვს სამი ნული, ნული მთელის ჩათვლით). ამ რიცხვის ლოგარითმის მანტისა უდრის რიცხვ 530-ის ლოგარითმის მანტისას. ცხრილებიდან ვპოულობთ ამ მანტისას: 0,7243-ს. მაშასადამე, $\lg 0,0053 \approx -3+0,7243=-2,2757$.

სავარჯიშოები

1482. ისარგებლეთ ბრადისის ცხრილებით და იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ათობითი ლოგარითმები:

257; 301; 25; 99; 2; 3; 3796; 9999; 10 325; 267 398;

37 990 653; 263,56; 35,074; 2,9345; 0,002863; 0,000056.

1433. ვ. მ. ბრადისის ცხრილების გამოყენებით გამოიანგარიშეთ:

$$\log_3 5; \ \log_9 17; \ \log_{0,05} 0,004.$$

ანტილოგარითმების ცხრილები § 190

XIII ცხრილით შეიძლება მოინახოს რიცხვების არა მხოლოდ ლოგარითმები, არამედ მათი ლოგარითმების მიხედვით — თვით რიცხვებიც. მაგრამ ეს ამოცანა კიდევ უფრო მარტივად წყდება XIV ცხრილის საშუალებით (იხ. ვ. მ. ბრადისის ცხრილი, გვ. 69—70). განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

1) ვიპოვოთ რიცხვი, რომლის ლოგარითმი უდრის 2,345-ს. ნუ მივაქცევთ ყურადღებას ამ ლოგარითმის მახასიათებელს 2-ს და ვიპოვოთ რიცხვი, რომლის ლოგარითმის მანტისა უდრის 0,345-ს. ამისათვის XIV ცხრილში ვპოულობთ სტრიქონს ნიშნით 34 და სვეტს ნიშნით 5. მათ გადაკვეთაში დგას რიცხვი 2 213. ეს არის საძებნი რიცხვის ნიშნადი ნაწილი (მიახლოებით). ვინაიდან ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 2-ს; ამიტომ საძებნი რიცხვის მთელი ნაწილი შეიცავს სამ ციფრს. მაშ, საძებნი რიცხვი დაახლოებით უდრის 221,3-ს.

2) ამოვხსნათ განტოლება: $\lg x = 0,7823$. XIV ცხრილში ვპოულობთ რიცხვს, რომელიც დგას ნიშნით 78 სტრიქონისა და ნიშნით 2 სვეტის გადაკვეთაში. ამ რიცხვს, 6053-ს, ვუმატებთ 3-ის შესაბამის შესწორებას, ამ შემთხვევაში 4-ს. ამის შედეგად ვღებულობთ 6057-ს. ეს არის სწორედ რიცხვის ნიშნადი ნაწილი. ვინაიდან x რიცხვის ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 0-ს, ამიტომ x რიცხვის მთელი ნაწილი შეიცავს ერთ ციფრს. ამიტომ $x \approx 6,057$.

3) ვიპოვოთ რიცხვი, რომლის ლოგარითმი უდრის —3,0576-ს. პირველ ყოვლისა მოვნახოთ ამ ლოგარითმის მახასიათებელი და მანტისა. $-3,0576 = -4 + 0,9424$. მაშასადამე, მახასიათებელია —4, ხოლო მანტისა 0,9424. ასეთ ლოგარითმს წერენ $\overline{4},9424$-ის სახით. ხაზი ციფრ 4-ის თავზე მიუთითებს, რომ ლოგარითმის მახასიათებელია —4 და არა 4. ახლა ნუ მივაქცევთ ყურადღებას მახასიათებელს $\overline{4}$ და მოვნახოთ რიცხვი, რომელიც შეესაბამება მანტისას 0,9425-ს. ეს რიცხვია 8758. ვინაიდან საძებნი რიცხვის ლოგარითმის მახასიათებელია —4, ამიტომ საძებნი რიცხვი ჩაიწერება ათწილადის სახით, ოთხი ნულით პირველი ნიშნადი ციფრის წინ: 0,000 8758.

1484. ანტილოგარითმების ცხრილების გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებანი:

ა) $\lg x = 0{,}3625$;	დ) $\lg x = -2{,}5440$;
ბ) $\lg x = 4{,}0002$;	ე) $\lg x = -3{,}0257$;
გ) $\lg x = -0{,}3928$;	ვ) $\lg x = -1{,}9994$.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ათობითი ლოგარითმების ცხრილები § 101

მცირე კუთხეების (0°-დან 14°-მდე) სინუსების ლოგარითმები მოცემულია ვ. მ. ბრადისის მიერ XV ცხრილში (გვ. 72—73). მაგალითად, რომ ვიპოვოთ

$$\lg \sin 8°47',$$

ვეძებთ ამ ცხრილში სტრიქონს მარცხენა ნიშნით 8°40′ და სვეტს ზედა ნიშნით 7′. მათ გადაკვეთაში დგას რიცხვი $\bar{1}{,}1838$ (მახასიათებელი $\bar{1}$ ნაჩვენებია ზევით, სადაც იკვეთება სტრიქონი ნიშნით 8°00′ და სვეტი ნიშნით 0′). მაშასადამე,

$$\lg \sin 8°47' \approx \bar{1}{,}1838 \quad (\text{ანუ } -1+0{,}1838=-0{,}8162).$$

XV ცხრილით შეიძლება მოინახოს 76°-იდან 90°-მდე კუთხეების კოსინუსების ლოგარითმებიც. ვთქვათ, მაგალითად, უნდა მოინახოს $\lg \cos 77°34'$; მარჯვენა ნიშნით 77°30′ სტრიქონისა და ქვედა ნიშნით 4′ სვეტის გადაკვეთაში დგას რიცხვი $\bar{1}{,}3331$. მაშასადამე,

$$\lg \cos 77°34' \approx \bar{1}{,}3331 \quad (\text{ანუ } -0{,}6669).$$

რომ ვიპოვოთ 14°-დან 90°-მდე კუთხეების სინუსებისა და აგრეთვე 0°-დან 76°-მდე კუთხეების კოსინუსების ლოგარითმები, უნდა ვისარგებლოთ ვ. მ. ბრადისის XVI ცხრილით (გვ. 74—75). აქ კუთხეები მოცემულია ყოველი 6′-ის შემდეგ. ამიტომ ზოგჯერ უნდა გავითვალისწინოთ შესწორებები. შესწორებათა წესი ასეთია: **თუ მოცემული კუთხე მეტია ცხრილში მოყვანილ კუთხეზე, მაშინ სინუსისათვის შესწორება ემატება, ხოლო კოსინუსისათვის აკლდება; თუკი მოცემული კუთხე ნაკლებია ცხრილში მოყვანილ კუთხეზე, მაშინ, პირიქით, შესწორება ემატება კოსინუსისათვის და აკლდება სინუსისათვის.**

მაგალითები. 1) ვიპოვოთ $\lg \sin 43°36'$ XVI ცხრილში მარცხენა ნიშნით 43°. სტრიქონისა და ზედა ნიშნით 36′ სვეტის გადაკვეთაში დგას რიცხვი $\bar{1}{,}8386$. მაშ, $\lg \sin 43°36' \approx 1{,}8386$ (ანუ $-0{,}1614$).

2) ვიპოვით lg sin 65°32′ მარცხენა ნიშნით 65° სტრიქონისა და ზედა ნიშნით 30′ სვეტის (გვ. 75) გადაკვეთაში დგას რიცხვი $\overline{1}$,9590. ამ რიცხვს უნდა მივუმატოთ 2′-ის შესაბამისი შესწორება 1. ამის შედეგად მივიღებთ: lg sin 65°32′ ≈ $\overline{1}$,9591 (ანუ — 0,0409).

3) ვიპოვოთ lg cos 11°54′ მარჯვენა ნიშნით 11° სტრიქონისა და ქვედა ნიშნით 54′ სვეტის გადაკვეთაში დგას რიცხვი $\overline{1}$,9906. ამიტომ lgcos 11°54′ ≈ $\overline{1}$,9906 (ანუ — 0,0094).

4) ვიპოვოთ lg cos 51°20′. ჯერ მოვნახოთ lg cos 51°18′ და შემდეგ მას გამოვაკლოთ 2′-ის შესაბამისი შესწორება. lg cos 51°18′ ≈ $\overline{1}$,7960; 2′-ის შესწორება უდრის 3-ს. ამიტომ lg cos 51°20′ ≈ $\overline{1}$,7957 (ანუ —0,2043).

0°-დან 14°-მდე კუთხეების ტანგენსების (და აგრეთვე 76°-დან 90°-მდე კოტანგენსების) ლოგარითმები მოყვანილია XVII ცხრილში (გვ. 76—77). 14°-დან 76°-მდე კუთხეების ტანგენსებისა და კოტანგენსების ლოგარითმები მოინახება XVIII ცხრილში (გვ. 78—79). 76°-დან 90°-მდე კუთხეების ტანგენსებისა და 0°-იდან 14°-მდე კუთხეების კოტანგენსების ლოგარითმები მოცემულია XIX ცხრილში (გვ. 80—81). ეს სამი (XVII, XVIII, XIX) ცხრილი ზემოაღწერილი XV და XVI ცხრილების სრულიად ანალოგიურადაა შედგენილი. ამიტომ დაწვრილებით მათზე აღარ შევჩერდებით. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ შესწორებებს ვითვალისწინებთ კუთხეების ტანგენსების ლოგარითმებისათვის ისე, როგორც კუთხეების სინუსების ლოგარითმებისათვის, ხოლო კუთხეების კოტანგენსების ლოგარითმებისათვის ისე, როგორც კუთხეების კოსინუსების ლოგარითმებისათვის.

სავარჯიშოები

1485. ისარგებლეთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ლოგარითმების ცხრილებით და იპოვეთ შემდეგი სიდიდეებისათვის ათობითი ლოგარითმები:

ა) sin 12°17′; sin 3°29′; cos 77°47′; cos 88°19′;

ბ) sin 48°38′; sin 60° 46′; sin 85°57′;
cos 4°34′; cos 49°52′; cos 74°33′;

გ) tg 3°49′; tg 13°23′; ctg 80°29′; ctg 89°35′;

დ) tg 45°38′; tg 67°10′; tg 74°39′;
ctg 31°2′; ctg 56°46′; ctg 71°27′;

ე) tg 83°39′; tg 89°29′; ctg 0°17′; ctg 9°36′.

1486. დაასაბუთეთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ლოგარითმების ცხრილებით მოძებნისას შესწორებათა წესი.

ლოგარითმების შეკრებას განსაკუთრებული ახსნა-განმარტება არ ესაჭიროება. ამიტომ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ ორი მაგალითის მოყვანით:

$$\begin{array}{r} 3,0607 \\ +\,\bar{1},8701 \\ \bar{3},0056 \\ \hline \bar{1},9364 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,0380 \\ +\,\bar{5},9927 \\ 2,0449 \\ \hline \bar{6},0756 \end{array}$$

ლოგარითმების გამოკლება მიზანშეწონილია დავიყვანოთ შეკრებაზე. ამიტომ ლოგარითმებს, რომელთა წინ —ნიშანი დგას, ისე გარდაქმნიან, რომ ეს ნიშანი +ნიშნით შეიცვალოს. მაგალითად,

$$-7,5604 = -8 + 0,4396 = \bar{8},4396;$$

$$-\bar{5},2967 = 5 - 0,2967 = 4,7033.$$

ამრიგად, გამოსახულება $\bar{2},0073 - 7,5604 - \bar{5},2967$ გარდაიქმნება ჯამად:

$$\begin{array}{r} \bar{2},0073 \\ \bar{8},4396 \\ 4,7033 \\ \hline \bar{5},1502 \end{array}$$

ლოგარითმების გამრავლება რიცხვზე. ჯერ რიცხვზე ვამრავლებთ მახასიათებელს, შემდეგ — ლოგარითმის მანტისას, და მიღებულ შედეგებს ვკრებთ. მაგალითად,

$$\bar{5},6315 \cdot 4 = -20 + 2,5260 = \overline{18},5260;$$

$$\bar{2},0501 \cdot \frac{3}{2} \approx -3 + 0,0751 = \bar{3},0751;$$

$$\bar{3},7500 \cdot (-0,5) = 1,5 - 0,3750 = 1,1250.$$

ლოგარითმის გაყოფა რიცხვზე. თუ ლოგარითმის მახასიათებელი არაუარყოფითია, მაშინ მისი გაყოფა რიცხვზე სრულდება ჩვეულებრივი ხერხით. მაგალითად, $8,024 : 4 = 2,006$. თუ მახასიათებელი უარყოფითია, შესაძლოა ორი შემთხვევა.

1) უარყოფითი მახასიათებელი იყოფა გამყოფზე უნაშთოდ. ამ შემთხვევაში მახასიათებელსა და მანტისას ცალ-ცალკე ვყოფთ გამყოფზე. მაგალითად,

$$\overline{15},6305 : 5 = \bar{3},1261.$$

2) უარყოფითი მახასიათებელი არ იყოფა გამყოფზე უნაშთოდ, მაშინ მას ვუმატებთ იმდენ უარყოფით ერთეულს, რომ მიღებული რიცხვი გაიყოს გამყოფზე უნაშთოდ; მანტისას ვუმატებთ იმდენსავე დადებით ერთეულს. მაგალითად,

$$\bar{2},5608 \quad 4=(-4+2,5608):4=\bar{1},6402.$$

ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევები, როდესაც გამყოფი მთელი რიცხვია. თუ ეს ასე არაა, მაშინ წინასწარ ლოგარითმები უნდა წარმოვადგინოთ ჩვეულებრივი სახით. მაგალითად,

$$\bar{4},7102 : 2,3546=-3,2898 \quad 2,3546\approx-1,3971-\bar{2},6029.$$

ლოგარითმის უარყოფით რიცხვზე გაყოფა დაიყვანება დადებით რიცხვზე გაყოფაზე. მაგალითად,

$$3,6409 \quad (-4)\approx-(\bar{3},6409 \quad 4)\approx-(\bar{1},4102)=1-0,4102=0,5898.$$

სავარჯიშოები

შეასრულეთ მითითებული მოქმედებანი ლოგარითმებზე;

1487. ა) $\bar{1},4792+\bar{1},5706+\bar{3},0056$;

ბ) $\bar{5},0032+2,7368+\bar{3},9263$;

გ) $0,9329-\bar{1},2605-\bar{5},0060$;

დ) $\bar{2},4645-\bar{4},3839+\bar{6},0092-\bar{5},3973$;

ე) $\bar{1},2396-0,5974-\bar{2},9328$.

გამოიანგარიშეთ სიზუსტით 0,0001-მდე (№ 1438, 1439):

1438. ა) $\bar{2},0296\cdot 0,36$;

ბ) $\bar{3},1728\cdot 5$;

გ) $\bar{7},2894\cdot 9,8$;

დ) $\bar{1},0256\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$;

ე) $\bar{4},4437\cdot(-0,2)$.

1439. ა) $\bar{2},6302:7$;

ბ) $\bar{3},0280:\frac{2}{5}$;

გ) $\bar{5},2709:\left(-\frac{4}{3}\right)$.

მაგალითები გამოთანგარიშებაზე ლოგარითმების ცხრილების მეშვეობით § 198

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.

ვთქვათ, უნდა გამოვიანგარიშოთ:

$$x=\frac{(0,475)^2\cdot\sqrt[3]{\sin^2 38^\circ 22'}}{\operatorname{tg} 85^\circ 13' \sqrt[5]{239,3}}.$$

თუ გავალოგარითმებთ ამ გამოსახულებას, მივიღებთ:

$$\lg x = 2\lg 0{,}475 + \frac{2}{3}\lg\sin 38°22' - \lg\operatorname{tg} 85°13' - \frac{1}{5}\lg 239{,}3.$$

ლოგარითმების ცხრილებში ვპოულობთ:

$$\lg 0{,}475 \approx \overline{1}{,}6767;$$
$$\lg 239{,}2 \approx 2{,}3790;$$
$$\lg\sin 38°22' \approx \overline{1}{,}7929;$$
$$\lg\operatorname{tg} 85°13' \approx 1{,}0774.$$

ამიტომ

$$2\lg 0{,}475 \approx \overline{2} + 1{,}3534 = \overline{1}{,}3534;$$

$$-\frac{1}{5}\lg 239{,}3 \approx -0{,}4758 \approx \overline{1}{,}5242;$$

$$\frac{2}{3}\lg\sin 38°22' \approx \frac{2\cdot\overline{1}{,}7929}{3} = \frac{\overline{1}{,}5858}{3} \approx \overline{1}{,}8619$$

$$-\lg\operatorname{tg} 85°13' \approx -1{,}0774 = \overline{2}{,}9226.$$

მაშასადამე,

$$\begin{array}{r} \overline{1}{,}3534 \\ \overline{1}{,}5242 \\ \overline{1}{,}8619 \\ \overline{2}{,}9226 \\ \hline \lg x \approx \overline{3}{,}6621 \end{array}$$

ამრიგად, $\lg x \approx \overline{3}{,}6621$. აქედან, თუ ვისარგებლებთ ანტილოგარითმების ცხრილით, მივიღებთ: $x \approx 0{,}004593$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვიანგარიშოთ:

$$x = \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}}$$

უშუალო გალოგარითმება აქ შეუძლებელია, ვინაიდან მე-5 ხარისხის ფესვის ქვეშ სხვაობაა. მსგავს შემთხვევებში გამოანგარიშებას ასრულებენ ნაწილ-ნაწილად: ჯერ პოულობენ $\sqrt[4]{35}$-ს, შემდეგ $\sqrt[6]{30}$-ს, შემდეგ მათ სხვაობას და, ბოლოს, მე-5 ხარისხის ფესვს ამ სხვაობიდან.

$$\lg\sqrt[4]{35} = \frac{1}{4}\lg 35 \approx \frac{1}{4}\cdot 1{,}5441 \approx 0{,}3860,$$

$$\sqrt[4]{35} \approx 2{,}432,$$

$$\lg\sqrt[6]{30} = \frac{1}{6}\lg 30 \approx \frac{1}{6}\cdot 1{,}4771 \approx 0{,}2462,$$

$$\sqrt[6]{30} \approx 1{,}763.$$

$$\sqrt[4]{35}-\sqrt[6]{30}\approx 2,432-1,763=0,669\ ,$$

$$\lg\sqrt[5]{\sqrt[4]{35}-\sqrt[6]{30}}\approx \lg\sqrt[5]{0,669}=\frac{1}{5}\lg 0,669=\frac{1}{5}\cdot\bar{1},8254\approx\bar{1},9651\ ,$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{35}-\sqrt[6]{30}}\approx 0,9228\,.$$

სავარჯიშოები

გამოიანგარიშეთ ლოგარითმების ცხრილებით (№ 1440—1446);

1440. $\dfrac{12,48^3\cdot\sqrt[4]{5,76}}{\sqrt[3]{673,8}\cdot 1,842}\,.$

1441. $\sqrt[6]{\dfrac{2,591^4\cdot\sqrt[3]{0,0836}}{1,147^2}}$

1442. $\dfrac{3,89^{-2}\cdot\sqrt[3]{-0,1536}}{0,924^2}\,.$

1443. $\dfrac{\sqrt[3]{\sin 32^\circ 14'}\cdot 26,73^2}{\sqrt{13,65}\cdot\operatorname{ctg} 29^\circ 18'}\,.$

1444. $\dfrac{\cos 75^\circ 28'\cdot\sqrt[5]{0,5}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 70^\circ 16'}\cdot\sin\frac{\pi}{9}}\,.$

1445. $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{3}-2\sqrt[5]{5}}.$

1446. $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\cos 16^\circ 32'}+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{13}}}\,.$

1447. იპოვეთ ისეთი სამკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებიცაა: 67,28 სმ, 36,54 სმ და 59,02 სმ.

1448. იპოვეთ ისეთი სამკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებია 238,4 სმ და 79,3 სმ, ხოლო ამ გვერდებს შორის კუთხეა 37°23′.

ნატურალური ლოგარითმები § 104

ათობითი ლოგარითმები მეტად მოხერხებულია ჩვენი საჭიროებისათვის. მაგრამ უმაღლესი მათემატიკის შესწავლისას უფრო მოხერხებული გამოდგა ლოგარითმები, რომელთა ფუძე არის რიცხვი $e = 2,718281828\ldots$ (იხ. § 134, I ნაწ.). ამ ლოგარითმების გამოყენება საშუალებას გვაძლევს მნიშვნელოვნად გავამარტივოთ მათემატიკური ფორმულების დიდი რაოდენობა. ლოგარითმები e ფუძით მიიღება მრავალი ფიზიკური ამოცანის ამოხსნისას და ბუნებრივად შედის ზოგ-

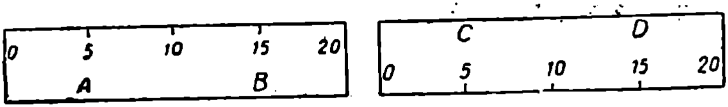
ფართო ქიმიური, ბიოლოგიური და სხვა პროცესების მათემატიკურ აღწერაში. ამით აიხსნება მათი სახელწოდება — „ნატურალური ლოგარითმები“.

a რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი აღინიშნება ln *a*-თი. ამჟამად არსებობს ნატურალური ლოგარითმების საკმაოდ სრული ცხრილები.

ლოგარითმულ სახაზავზე მოქმედებათა დასაბუთება § 106

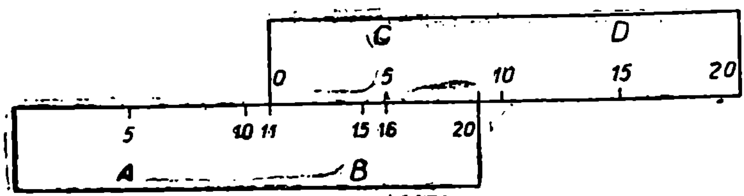
ჩვენთვის ცნობილი ლოგარითმების თვისებები საშუალებას გვაძლევს საკმაოდ მარტივად დავასაბუთოთ იმ მოქმედებათა წესები, რომლებიც სრულდება ლოგარითმული სახაზავის გამოყენებით. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ორ უმარტივეს მოქმედებას — გამრავლებასა და გაყოფას. წინასწარ ვაჩვენოთ, ორი მარტივი სახაზავით როგორ შეიძლება შევასრულოთ რიცხვების შეკრება და გამოკლება.

ორი ერთნაირი სიგრძის *AB* და *CD* სახაზავიდან თითოეულს დავყოფთ 20 ტოლ ნაწილად და აღვნიშნავთ ამ ნაწილებს *AB* სახაზავზე ზედა ნაპირთან, ხოლო *CD* სახაზავზე — ქვედა ნაპირთან (ნახ. 254).



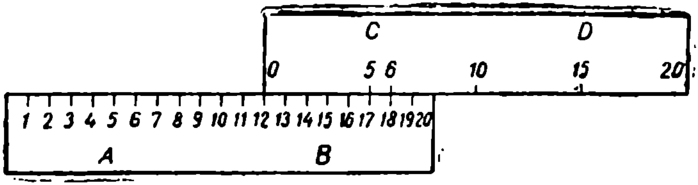
ნახ. 254.

ვთქვათ, რიცხვ 11-ს უნდა მივუმატოთ რიცხვი 5. *CD* სახაზავის ნიშანს 0-ს დავაყენებთ *AB* სახაზავის ნიშან 11-ზე (ნახ. 255). მაშინ *CD* სახაზავის ნიშან 5-ის ქვეშ აღმოჩნდება *AB* სკალის ნიშანი 16. ეს ნიშანი გვიჩვენებს რიცხვების 11-ისა და 5-ის ჯამს.



ნახ. 255.

ახლა, ვთქვათ, რომ 18-ს უნდა გამოვაკლოთ 6. *AB* სკალის ნიშან 18-ზე დავაყენებთ *CD* სკალის ნიშან 6-ს (ნახ. 256). მაშინ *CD* სკალის ნიშან 0-ის ქვეშ აღმოჩნდება *AB* სკალის ნიშანი 12. ეს ნიშანი გვიჩვენებს რიცხვების 18-ისა და 6-ის სხვაობას.



ნახ. 256.

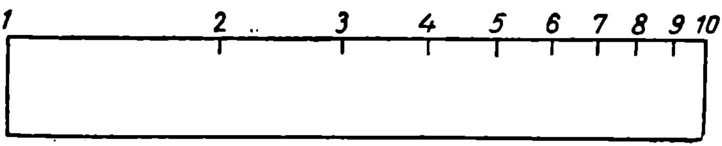
ამ მარტივ პრინციპზეა დამყარებული ლოგარითმული სახაზავის აგება. მხოლოდ აქ ნიშნები გამოსახავს არა რიცხვებს, არამედ მათ ლოგარითმებს. როგორც ცნობილია, ორი დადებითი რიცხვის ლოგარითმების ჯამი უდრის მათი ნამრავლის ლოგარითმს:

$$\lg a+\lg b=\lg (ab).$$

ხოლო ორი დადებითი რიცხვის ლოგარითმების სხვაობა უდრის მათი განაყოფის ლოგარითმს:

$$\lg a-\lg b=\lg \frac{a}{b}.$$

ამიტომ, თუ სახაზავებზე აღვნიშნავთ არა თვით რიცხვებს, არამედ მათ ლოგარითმებს, მაშინ ორი ასეთი სახაზავის (ანუ სკალის) დახმარებით შეგვიძლია ადვილად შევასრულოთ რიცხვების გამრავლება და გაყოფა.

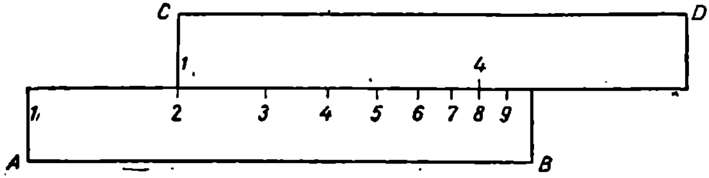


ნახ. 257.

მივიღოთ სახაზავის სიგრძე ერთეულად. ციფრით 1 აღვნიშნოთ მასზე წერტილი, რომელიც შეესაბამება რიცხვს $\lg 1=0$; ციფრით 2 — წერტილი, რომელიც შეესაბამება რიცხვს $\lg 2\approx 0,3010$; ციფრით 3 — წერტილი, რომელიც შეესაბამება რიცხვს $\lg 3\approx 0,4771$ და ა. შ. (ნახ. 257). მარჯვენა ბოლო წერტილი, ამასთან, აღინიშნება რიცხვით 10, რაც შეესაბამება რიცხვს $\lg 10=1$. ამის შედეგად მივიღებთ სკალას, რომელსაც ლ ო გ ა რ ი თ მ უ ლ ი ს კ ა ლ ა ეწოდება. ასეთი ორი სკალის

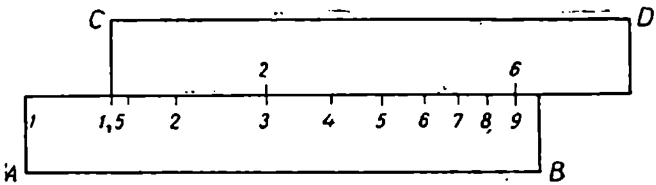
საშუალებით შეიძლება შევასრულოთ რიცხვების გამრავლება და გაყოფა.

ვთქვათ, მაგალითად, 2 უნდა გავამრავლოთ 4-ზე. *CD* სკალის ნიშანს 1-ს დავაყენებთ *AB* სკალის ნიშან 2-ზე (ნახ. 258). *CD* სკალის ნიშან 4-ის ქვეშ *AB* სკალაზე ვკითხულობთ ნიშან 8-ს. ეს ნიშანი კი გვიჩვენებს რიცხვების 2-ისა და 4-ის ნამრავლს.



ნახ. 258.

ანალოგიურად სრულდება გაყოფა. ვთქვათ, 9 უნდა გავყოთ 6-ზე. *CD* სკალის ნიშანს 6-ს ვაყენებთ *AB* სკალის ნიშან 9-ზე (ნახ. 259). *CD* სკალის ნიშან 1-ის ქვეშ დგას *AB* სკალაზე ნიშანი 1,5. ეს ნიშანი იძლევა შეფარდებას $\frac{9}{6}$.



ნახ. 259.

მაჩვენებლიან განტოლებათა ამოხსნის ძირითადი ხერხები § 196

მაჩვენებლიანი განტოლებები ეწოდება ისეთ განტოლებებს, რომლებიც ხარისხის მაჩვენებელში შეიცავენ უცნობ სიდიდეს.

ასეთს მიეკუთვნება, მაგალითად, განტოლებები: $3^x=2^{x-1}$; $5^{x^2-6}-1=0$ და სხვ.

მაჩვენებლიან განტოლებებს, ისე როგორც ტრიგონომეტრიულს, ალგებრულისაგან (მაგალითად, წრფივისაგან, კვადრატულისაგან) განსხვავებით, უწოდებენ ტრანსცენდენტულ განტოლებებს.

უმარტივესი მაჩვენებლიანი განტოლებაა

$$a^x=b \qquad (1),$$

განტოლება, სადაც a და b მოცემული დადებითი რიცხვებია ($a \neq 1$) ხოლო x უცნობი სიდიდეა. ასეთ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი $x=\log_a b$. უფრო რთული მაჩვენებლიანი განტოლებები დაიყვანება ან ალგებრულ განტოლებებზე, ან (1) სახის განტოლებებზე.

განვიხილოთ მაჩვენებლიან განტოლებათა ამოხსნის ძირითადი ხერხები კერძო მაგალითებზე.

I. ამოვხსნათ განტოლება:

$$5^{x-6}=5^{15-2x}.$$

მსგავსი განტოლებების ამოხსნა დამყარებულია ხარისხების შემდეგ თვისებაზე: თუ 1-ისაგან განსხვავებული ერთი და იმავე დადებითი რიცხვის ორი ხარისხი ტოლია, მაშინ ტოლია მათი მაჩვენებლებიც. მოცემულ შემთხვევაში ხარისხების ეს თვისება გვაძლევს:

$$x-6=15-2x,$$

საიდანაც $x=7$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. როცა $x=7$, მაშინ $5^{x-6}=5$; $5^{15-2x}=5$. მაშ, $x=7$ არის მოცემული განტოლების ფესვი.

პ ა ს უ ხ ი: $x=7$.

ანალოგიურად ამოიხსნება განტოლება:

$$49^x=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$$

მართლაც, $49^x=(7^2)^x=7^{2x}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}=(7^{-1})^{x^2}=7^{-x^2}$. ამიტომ $7^{2x}=7^{-x^2}$, საიდანაც $2x=-x^2$, ანუ $x_1=0$; $x_2=-2$. შემოწმება გვიჩვენებს, რომ x-ის ორივე ეს მნიშვნელობა აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

პ ა ს უ ხ ი: $x_1=0$; $x_2=-2$.

ამავე პრინციპის მიხედვით შეიძლება ამოიხსნას $a^x=b$ მაჩვენებლიანი განტოლებაც, თუკი b არის a რიცხვის მთელი ხარისხი. მაგალითად, თუ $3^x=27$, მაშინ 27-ს წარმოვადგენთ $27=3^3$ სახით და მივიღებთ: $3^x=3^3$, საიდანაც $x=3$.

II. ზოგჯერ ახალი უცნობი სიდიდის შემოტანის გზით მაჩვენებლიანი განტოლება დაიყვანება ალგებრულ განტოლებაზე. ვთქვათ, მაგალითად, უნდა ამოიხსნას განტოლება:

$$4^x+2^x-6=0.$$

აღვნიშნოთ 2^x y-ით. მაშინ $4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2=y^2$. ამიტომ მოცემული განტოლება დაიყვანება კვადრატულ განტოლებაზე:

$$y^2+y-6=0,$$

რომლიდანაც ვღებულობთ: $y_1=2$; $y_2=-3$. მაგრამ $y=2^x$, მაშასადამე, თუკი მოცემულ განტოლებას აქვს ფესვები, მათ უნდა დააკმაყოფილონ ან $2^x=2$ განტოლება, ან $2^x=-3$ განტოლება. ამ განტოლებათაგან პირველს აქვს ფესვი $x=1$, მეორეს კი ფესვები არა აქვს, ვინაიდან 2^x გამოსახულებას უარყოფით მნიშვნელობათა მიღება არ შეუძლია. ამრიგად, მივიღეთ: $x=1$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა: როცა $x=1$,

$$4^x+2^x-6=4^1+2^1-6=0.$$

მაშასადამე, $x=1$ არის მოცემული განტოლების ფესვი.

პ ა ს უ ხ ი: $x=1$.

III. ამოვხსნათ განტოლება: $2^x=3^x$.

მოცემული განტოლების ორივე წევრი გავყოთ 3^x-ზე (ასეთი გაყოფა შესაძლებელია, ვინაიდან ყოველი x-ისათვის $3^x>0$) და მივიღებთ $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$. მაგრამ $1=\left(\frac{2}{3}\right)^0$ ამიტომ $x=0$. შემოწმება გვიჩვენებს რომ ეს, მართლაც, მოცემული განტოლების ფესვია.

პ ა ს უ ხ ი: $x=0$.

ანალოგიურად ამოიხსნება განტოლება:

$$5^{2x}=7^{3x}.$$

მართლაც, $5^{2x}=(5^2)^x=25^x$, $7^{3x}=(7^3)^x=343^x$.

ამიტომ მოცემული განტოლება შეიძლება გადაიწეროს ასე:

$$25^x=343^x.$$

აქედან, ისე როგორც წინა შემთხვევაში, ვღებულობთ: $x=0$.

სავარჯიშოები

ამოხსენით განტოლებანი (№ 1449—1454):

1449. ა) $5^x=125$;
ბ) $4^x=64$;
გ) $3^x=\frac{1}{81}$;
დ) $25^x=\frac{1}{5}$;
ე) $2^{x+3}=32$;
ვ) $8^x=16$;
ზ) $9^{-x}=27$;
თ) $\sqrt{3^x}=\sqrt[3]{9}$;
ი) $\sqrt[3]{7^x}=\sqrt[4]{343}$;
კ) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^x}=36$.

1450. ა) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^4$; დ) $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$;

ბ) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^5$ ე) $a^{(x-3)(x-3)}=1$; $(a>0)$;

გ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; ვ) $5^2\cdot5^4\cdot5^6\ldots5^{2x}=0,04^{-28}$.

1451. ა) $3^x+3^{x+1}=108$; დ) $3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=13$;

ბ) $7^x-7^{x-1}=6$; ე) $7^{x+2}+4\cdot7^{x-1}=347$;

გ) $5^{x+1}-5^{x-1}=24$; ვ) $5^{x+1}+3\cdot5^{x-1}-6\cdot5^x+10=0$.

1452. ა) $2^{5-x}=2^{3x-3}$; ვ) $(0,25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}}$;

ბ) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ ზ) $\sqrt{27^{x-1}}=\sqrt[x]{9^{2-x}}$

გ) $5x\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{125}\right)^x$ თ) $\sqrt[4]{a^{x+1}}=\sqrt[5]{a^{x-2}}\ (a>0)$;

დ) $2^x\cdot5^x=0,1\cdot(10^{x-1})^5$; ი) $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot2^{\sqrt{x+1}}$

ე) $\sqrt[x]{\sqrt[3]{4^{x+1}}}=\sqrt[3]{\sqrt[x]{(0,5)^{2-4x}}}$; კ) $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$

1453. ა) $5^{2x}-5^x-600=0$; ე) $3^{2\sqrt{x}}-4\cdot3^{\sqrt{x}}+3=0$;

ბ) $9^x-3^x-6=0$; ვ) $4+\frac{2}{3^x-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$;

გ) $4^x+2^{x+1}=80$; ზ) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=1,2$;

დ) $3^x+9^{x-1}-810=0$; თ) $9^x+6^x=4^x$.

1454. ა) $11^x=17^x$; დ) $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot17+7^x\cdot17=0$;

ბ) $9x=\left(\frac{1}{243}\right)^{5x}$ ე) $3\cdot2^x=2\cdot3^x$;

ვ) $7\cdot2^x=5\cdot3^x$;

გ) $13^x=19^{-4x}$; ზ) $a^x=b^x(a>0;\ b>0)$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები

1455. $\begin{cases}3\cdot2^x+2\cdot3^y=\frac{11}{4},\\ 2^x-3^y=-\frac{3}{4}\end{cases}$ **1456.** $\begin{cases}2^x\cdot3^y=648,\\ 3^x\cdot2^y=432\cdot\end{cases}$

1457. $\begin{cases} 2^x+3^y=8\frac{1}{9}, \\ 2^x\cdot 3^y=\frac{8}{9}. \end{cases}$

1458. $\begin{cases} 5^x-5^y=100. \\ 5^{x-1}+5^{y-1}=20. \end{cases}$

1459. $\begin{cases} \sqrt[x-1]{49}=\sqrt[y-1]{343}, \\ 3^y=9^{2x-y} \end{cases}$

ლოგარითმულ განტოლებათა ამოხსნის ძირითადი ხერხები § 107

ლოგარითმული განტოლებები ეწოდება ისეთ განტოლებებს, რომლებიც ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიცავენ უცნობ სიდიდეებს.

ასეთს მიეკუთვნება, მაგალითად, განტოლებები:

$$\log_2 x=5; \qquad \log_x (x-1)=0.$$

ისე, როგორც მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული განტოლებებიც *ტრანსცენდენტულია.*

უმარტივესი ლოგარითმული განტოლებაა

$$\log_a x=b \tag{1}$$

განტოლება, სადაც a და b მოცემული რიცხვებია, ხოლო x — უცნობი სიდიდე. თუ a დადებითი და 1-ის არატოლი რიცხვია, მაშინ ასეთ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი:

$$x=a^b.$$

უფრო რთული ლოგარითმული განტოლებების ამოხსნა, როგორც წესი, დაიყვანება ან ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნაზე, ან (1) სახის განტოლებათა ამოხსნაზე. განვმარტოთ ეს რამდენიმე კერძო მაგალითზე.

I. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\log_x (x^2-3x+6)=2.$$

ლოგარითმის განსაზღვრის თანახმად, ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x^2=x^2-3x+6, \text{ საიდანაც } x=2.$$

შემოწმება. როცა $x=2$,

$$\log_x(x^2-3x+6)=\log_2(4-6+6)=\log_4 4=2.$$

მაშასადამე, $x=2$ არის მოცემული განტოლების ფესვი.

პასუხი: $x=2$.

II. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\lg(x^2-17)=\lg(x+3).$$

მსგავსი განტოლებების ამოხსნა დამყარებულია ლოგარითმების შემდეგ თვისებაზე: თუ ორი რიცხვის ლოგარითმები ერთი და იმავე ფუძით

ტოლია, მაშინ ტოლი იქნება თვით ეს რიცხვებიც. ლოგარითმების ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუკი მოცემულ განტოლებას ფესვები აქვს, მაშინ ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ

$$x^2-17=x+3$$

განტოლებას, საიდანაც

$$x_1=5, \quad x_2=-4.$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. როცა $x=5$,

$$\lg(x^2-17)=\lg 8; \quad \lg(x+3)=\lg 8.$$

მაშასადამე, $x=5$ არის მოცემული განტოლების ფესვი. როცა $x=-4$, მაშინ მოცემული განტოლების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები არაა განსაზღვრული, ვინაიდან $x^2-17=-1<0$ და $x+3=-1<0$. მაშასადამე, $x=-4$ არ არის მოცემული განტოლების ფესვი.

პ ა ს უ ხ ი. $x=5$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი განტოლება:

$$2\lg(x-1)=\frac{1}{2}\lg x^5-\lg\sqrt{x}\,. \tag{2}$$

შევასრულოთ შემდეგი გარდაქმნები:

$$2\lg(x-1)=\lg(x-1)^2,$$

$$\frac{1}{2}\lg x^5-\lg\sqrt{x}=\lg x^{\frac{5}{2}}-\lg x^{\frac{1}{2}}=\lg\frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lg x^2.$$

ამრიგად, (2) განტოლებიდან მივიღეთ

$$\lg(x-1)^2=\lg x^2. \tag{3}$$

ამ განტოლებიდან კი გამომდინარეობს, რომ $(x-1)^2=x^2$, ანუ $x=\frac{1}{2}$. მაგრამ, როცა $x=\frac{1}{2}$, მაშინ (2) განტოლების მარცხენა ნაწილი არაა განსაზღვრული $\left(x-1=-\frac{1}{2}<0\right)$, მაშასადამე, მოცემულ განტოლებას ფესვები არა აქვს.

მაგრამ შევნიშნოთ, რომ რიცხვი $\frac{1}{2}$ არის (3) განტოლების ფესვი. ამრიგად, (2) და (3) განტოლებები ერთმანეთის ეკვივალენტური არაა. ეს ერთხელ კიდევ ლაპარაკობს იმაზე, რომ ლოგარითმულ განტოლებათა ამოხსნისას აუცილებელია მიღებულ მნიშვნელობათა შემოწმება. მათ შორის ხშირად აღმოჩნდება ხოლმე „გარეშე“ ფესვები.

III. ზოგიერთი ლოგარითმული განტოლება დაიყვანება ალგებრულ განტოლებებზე ახალი უცნობი სიდიდის შემოტანით. თუ, მაგალითად,

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0$$

განტოლებაში $\log_3 x$-ს აღვნიშნავთ y-ით, მაშინ იგი დაიყვანება

$$y^2 - 3y - 10 = 0$$

კვადრატულ განტოლებაზე, საიდანაც $y_1 = -2$, $y_2 = 5$. თუ გავიხსენებთ, რომ $y = \log_3 x$, მივიღებთ: თუ $\log_3 x = -2$, მაშინ $x = \frac{1}{9}$; თუ $\log_3 x = 5$, მაშინ $x = 243$.

შემოწმებით ადვილად დავადგენთ, რომ x-ის ეს ორივე მნიშვნელობა აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

პ ა ს უ ხ ი: $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 243$.

IV. ზოგიერთი განტოლება ამოიხსნება წევრ-წევრად გალოგარითმების გზით. ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია

$$x^{\lg x - 1} = 100,$$

განტოლება. გავალოგარითმოთ ეს განტოლება წევრ-წევრად:

$$\lg\left(x^{\lg x - 1}\right) = \lg 100,$$

$$(\lg x - 1)\lg x = 2.$$

$\lg x$ აღვნიშნოთ y-ით, მივიღებთ

$$y^2 - y - 2 = 0$$

კვადრატულ განტოლებას, რომლის ფესვებიცაა $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. თუ გავიხსენებთ, რომ $y = \lg x$, მივიღებთ: ან $\lg x = -1$, და მაშინ $x = 0,1$; ან $\lg x = 2$, და მაშინ $x = 100$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. როცა $x = 0,1$,

$$x^{\lg x - 1} = 0,1^{-1-1} = 0,1^{-2} = \frac{1}{0,01} = 100.$$

მაშასადამე, $x = 0,1$ მოცემული განტოლების ფესვია.

როცა $x = 100$,

$$x^{\lg x - 1} = 100^{2-1} = 100,$$

ანე რომ, $x = 100$ აგრეთვე განტოლების ფესვია.

პ ა ს უ ხ ი: $x_1 = 0,1$; $x_2 = 100$.

V. ზოგიერთი ლოგარითმული განტოლების ამოსახსნელად სასარ-

გვბლოა ლოგარითმის ერთი ფუძიდან სხვა ფუძეზე გადასვლის ფორმულით სარგებლობა. ეს ფორმულაა:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

ამოვხსნათ, მაგალითად,

$$\log_2 x+\log_3 x=1$$

განტოლება. ამ შემთხვევაში ლოგარითმებიდან, რომელთა ფუძეებია 2 და 3, გადავიდეთ ლოგარითმებზე, რომელთა ფუძეა 10:

$$\log_2 x=\frac{\lg x}{\lg 2},\ \log_3 x=\frac{\lg x}{\lg 3}.$$

მაშინ მოცემული განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg x}{\lg 3}=1,$$

საიდანაც

$$\lg x=\frac{\lg 2\cdot\lg 3}{\lg 2+\lg 3}=\frac{\lg 2\cdot\lg 3}{\lg 6}.$$

ამიტომ

$$x=10^{\frac{\lg 2\cdot\lg 3}{\lg 6}}=(10^{\lg 2})^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}=2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}.$$

თუ აუცილებელია, x-ის ეს მნიშვნელობა შეიძლება განისაზღვროს ლოგარითმების ცხრილების საშუალებით.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. x-ის ნაპოვნი მნიშვნელობისათვის

$$\log_2 x=\frac{\lg x}{\lg 2}=\frac{1}{\lg 2}\cdot\lg\left(10^{\frac{\lg 2\cdot\lg 3}{\lg 6}}\right)=\frac{1}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 2\cdot\lg 3}{\lg 6}=\frac{\lg 3}{\lg 6}.$$

ანალოგიურად,

$$\log_3 x=\frac{\lg 2}{\lg 6},$$

ამიტომ

$$\log_2 x+\log_3 x=\frac{\lg 3}{\lg 6}+\frac{\lg 2}{\lg 6}=\frac{\lg 3+\lg 2}{\lg 6}=\frac{\lg 6}{\lg 6}=1.$$

მაშ, x-ის ნაპოვნი მნიშვნელობა არის მოცემული განტოლების ფესვი.

პ ა ს უ ხ ი: $x=2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი განტოლება:

$$\log_2 x+\log_x 2=2.$$

ვინაიდან $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$, ამიტომ, თუ $\log_2 x$-ს აღვნიშნავთ y-ით, მივიღებთ:

$$y+\frac{1}{y}=2.$$

საიდანაც $y=1$. მაშასადამე, $\log_2 x=1$ და $x=2$. შემოწმება გვიჩვენებს, რომ $x=2$ არის მოცემული განტოლების ფესვი.

პ ა ს უ ხ ი. $x=2$.

სავარჯიშოები

ამოხსენით მოცემული განტოლებანი (№ 1460—1465):

1460. ა) $\lg(\lg x)=0$; ე) $\lg x=3-\lg 5$;

ბ) $\log_2[\log_3(\log_4 x)]=0$; ვ) $\dfrac{\log x}{1-\lg 2}=2$;

გ) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$;

დ) $\log_x 2-\log_x 3=4$; ზ) $100^{\lg(x+20)}=10000$;

1461. ა) $\lg x=\lg 2$; ე) $2\lg x=-\lg(6-x^2)$;

ბ) $\lg x=-\lg 2$; ვ) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$;

გ) $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$; ზ) $2\log_3 x=\dfrac{7}{4}\log_3\dfrac{x}{5}$.

დ) $2\lg\sqrt{x}=\lg(15-2x)$;

1462. ა) $\lg(0,5+x)=\lg 2-\lg x$;

ბ) $0,5\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$;

გ) $\lg(x+6)-2=\dfrac{1}{2}\lg(2x-3)-\lg 25$.

1463. ა) $\dfrac{1}{12}\lg^2 x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\lg x$;

ბ) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$;

გ) $\dfrac{1}{5-4\lg(x+1)}+\dfrac{4}{1+\lg(x+1)}=3$.

დ) $0,1\lg^4 x-\lg^2 x+0,9=0$.

1464. ა) $x^x=x$; დ) $x^{\lg x+2}=1000$;

ბ) $x^{\lg 5x-2}=125$; ე) $x=10^{1-0,25\lg x}$;

გ) $5^{3\lg x}=12,5x$; ვ) $0,1x^{\lg x-2}=100$.

1465. ა) $\log_9 x+\log_{x^2}3=1$; დ) $\log_5 x+\log_x 5=2,5$;

ბ) $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_2 3$; ე) $\log_{3x}3=(\log_3 3x)^2$;

გ) $\log_3 x+\log_5 x=\log_3 15$; ვ) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№ 1466—1469):

1466. $\begin{cases}\lg x+2\lg y=-3,\\ \lg x^3-\lg y^2=9.\end{cases}$

1467. $\begin{cases}x+y=34,\\ \log_2 x+\log_2 y=6.\end{cases}$

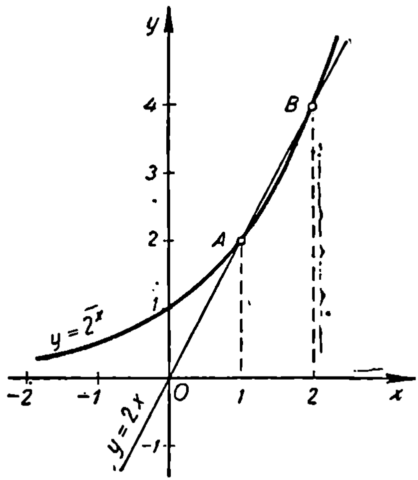
1468 $\begin{cases} 5^x-36y=0, \\ 6^x-25y=0. \end{cases}$ 1469. $\begin{cases} xy=40, \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$

მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ განტოლებათა გრაფიკული ამოხსნის მაგალითები § 198

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$2^x=2x.$$

ერთსა და იმავე ნახაზზე (ნახ. 260) აგებულია ორი ფუნქციის $y=2^x$ და $y=2x$ გრაფიკები. ეს გრაფიკები გადაიკვეთება ორ წერტილში: A-ში, რომლის აბსცისაა 1, და B-ში, რომლის აბსცისაა 2. ამიტომ მოცემულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი: $x=1$ და $x=2$.



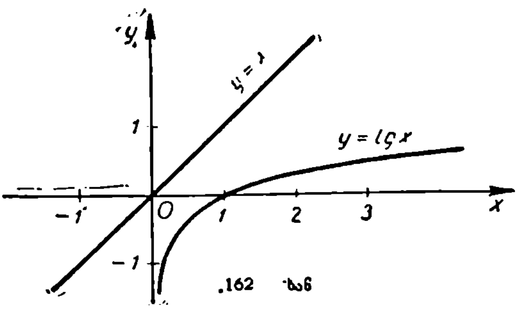
ნახ. 260.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ

$$\lg x=x$$

განტოლება. $y=\lg x$ და $y=x$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 261) ერთმანეთს არ კვეთს. ამიტომ მოცემულ განტოლებას ფესვები არა აქვს.

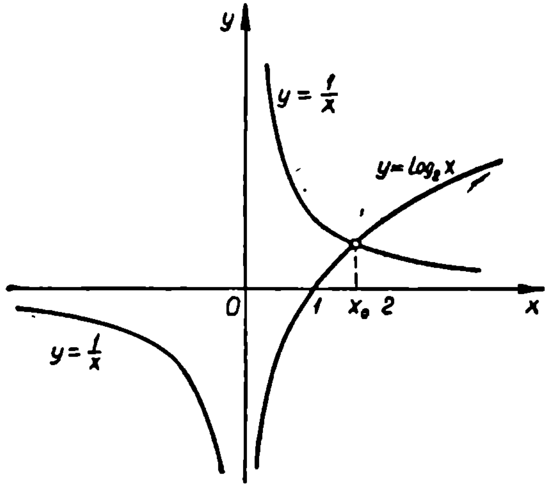
ჩვენ განვიხილეთ უმარტივესი მაგალითები. განტოლებები, რომლებიც მიიღება პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას, ჩვეულებრივ, მნიშვნელოვნად განსხვავდება ასეთი „სასწავლო“ ამოცანებისაგან. მათი ამოხსნისათვის, გრაფიკულ ილუსტრაციასთან ერთად, მიმართავენ ცხრილებსაც. განვიხილოთ, მაგალითად, ასეთი განტოლება



ნახ. 261.

$$\log_2 x = \frac{1}{x}.$$

$y=\log_2 x$ და $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციების გრაფიკები (ნახ. 262) იკვეთება ერთ წერტილში, რომლის აბსცისა მოთავსებულია 1-სა და 2-ს შორის. ამიტომ მოცემულ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი x_0, რომელიც 1-ზე მეტია, მაგრამ 2-ზე ნაკლები: $1<x_0<2$. ავიღოთ წერტილი $x=1{,}5$, რომელიც (1,2) შუალედის შუა წერტილია. ამ წერტილში:



ნახ. 262.

$$\log_2 x=\log_2\frac{3}{2}=\log_2 3-\log_2 2=\frac{\lg 3}{\lg 2}-1.$$

თუ გამოვიყენებთ ვ. მ. ბრადისის ცხრილებს, ვიპოვით, რომ

$$\log_2\frac{3}{2}\approx 0{,}58.$$

როცა $x=1{,}5$; მაშინ $\dfrac{1}{x}\approx 0{,}66.$

ვინაიდან $x=1{,}5$ წერტილში

$$\log_2 x<\frac{1}{x},$$

ამიტომ საძიებელი x_0 ფესვი მეტი უნდა იყოს 1,5-ზე (იხ. ნახ. 262).

ახლა დარწმუნებული ვართ, რომ

$$1,5<x_0<2.$$

„გავსინჯოთ“ $x=1,7$ წერტილი, როგორც (1,5; 2,0) შუალედის შუა წერტილის ერთი უახლოესთაგანი. როცა $x=1,7$, ვ. მ. ბრადისის ცხრილების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\log_2 x=\frac{\lg 1,7}{\lg 2}\approx 0,76; \qquad \frac{1}{x}\approx 0,58.$$

ვინაიდან $\log_2 1,7>\frac{1}{1,7}$, ამიტომ საძიებელი x_0 ფესვი ნაკლები უნდა იყოს 1,7-ზე (იხ. ნახ. 262). მაშასადამე,

$$1,5<x_0<1,7.$$

ამიტომ სიზუსტით 0,1-მდე

$$x_0\approx 1,6.$$

თუ განვიხილავდით (1,5; 1,7) შუალედის წერტილებს, მივიღებდით x_0 ფესვის უფრო ზუსტ მნიშვნელობასაც. სცადეთ, მაგალითად, x_0-ის მიახლოებითი მნიშვნელობის დამოუკიდებლად მიღება სიზუსტით 0,01 მდე.

სავარჯიშოები

1470. ამოხსენით გრაფიკულად განტოლებანი:

ა) $2^x=x+2$; დ) $\log_2 x=x-1$;

ბ) $3^x=x$; ე) $\log_2 x=\frac{x}{2}$;

გ) $2^x=x^2$; ვ) $\log_2(x+3)=3-x$.

1471. იპოვეთ

$$2^x=2-x$$

განტოლების ფესვი 0,1-მდე სიზუსტით.

1472. იპოვეთ

$$\log_2 x=\frac{1}{3}x$$

განტოლების უმცირესი ფესვი 0,01-მდე სიზუსტით.

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობანი § 99

მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ უტოლობათა ამოხსნა დამყარებულია იმაზე, რომ $y=a^x$ და $y=\log_a x$ ფუნქციები, როცა $a>1$, მონოტონურად ზრდადია, ხოლო როცა $0<a<1$, მონოტონურად კლებადია.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

1) ამოვხსნათ უტოლობა: $2^x>4$

4 წარმოვადგინოთ, როგორც 2^2 და მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ.

$$2^x>2^2.$$

$y=2^x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია. ამიტომ ამ ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას შეესაბამება არგუმენტის უდიდესი მნიშვნელობა. მაშასადამე, $x>2$.

2) ამოვხსნათ უტოლობა: $3^{x^2}\cdot 3x>\frac{1}{9}$.

$\frac{1}{9}$ წარმოვადგინოთ 3^{-2} სახით და მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$3^{x^2-3x}>3^{-2}.$$

აქედან $x^2-3x>-2$ ანუ $x^2-3x+2>0$. ეს უტოლობა (იხ. ნაწ. I, § 61) სრულდება, როცა $x<1$, და აგრეთვე, როცა $x>2$.

3) ამოვხსნათ უტოლობა: $\log_{\frac{1}{5}}(x-1)>-2$

-2 წარმოვადგინოთ, როგორც $\log_{\frac{1}{5}} 25$ და მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-1)>\log_{\frac{1}{5}} 25.$$

$y=\log_{\frac{1}{5}} x$ ფუნქცია მონოტონურად კლებადია. ამიტომ ამ ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას შეესაბამება არგუმენტის უმცირესი მნიშვნელობა, მაშასადამე, $x-1<25$. ამ უტოლობას აუცილებელია დაემატოს კიდევ $x-1>0$ უტოლობა, რომელიც გამოსახავს იმ ფაქტს, რომ ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიძლება იყოს მხოლოდ დადებითი სიდიდე. ამრიგად, მოცემული უტოლობა ორი წრფივი უტოლობის სისტემის ეკვივალენტურია:

$$\begin{cases} x-1<25 \\ x-1>0, \end{cases}$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$1<x<26.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ, თუ „დაგვავიწყდებოდა" $x-1>0$ პირობის გათვალისწინება, მივიღებდით არასწორ დასკვნას: $x<26$. კერძოდ, ამ ამონახსნში შევიდოდა $x=0$ მნიშვნელობაც, რომლისთვისაც მოცემული უტოლობის მარცხენა ნაწილს აზრი არ აქვს.

სავარჯიშოები

1478. ამოხსენით უტოლობანი:

ა) $3^x>\frac{1}{9}$; ბ) $3^x>27$; გ) $3^x>2$;

დ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2}>\left(\frac{1}{4}\right)^5$; ე) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}<\frac{1}{9}$.

1479. ამოხსენით უტოლობანი:

ა) $\lg(x+1)>\lg(5-x)$

ბ) $\log_{\frac{1}{2}}(x-7)>4$

გ) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-6)<\log_{\frac{1}{7}} x$.

1475 ამოხსენით გრაფიკულად მოცემული უტოლობანი:

ა) $2^x < 2x$; ბ) $\log x > x - 1$.

ლოგარითმების აღმოჩენის ისტორიიდან § 300

ლოგარითმების შემოტანის ძირითადი იდეა დამყარებულია

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{1}$$

ფორმულაზე და მდგომარეობს იმაში, რომ გამრავლება შეიძლება დავიყვანოთ უფრო მარტივ მოქმედებაზე — შეკრებაზე. ამ იდეას იცნობდნენ ჯერ კიდევ ძველი დროის მათემატიკოსები. გამრავლების (1) წესის ეკვივალენტური ზოგადი ფორმულირება მოცემულია, მაგალითად, ე ვ კ ლ ი დ ე ს ცნობილი „საწყისების" მეცხრე წიგნში, მაგრამ ლოგარითმებზე ძველ დროში ლაპარაკიც კი არ შეიძლებოდა. მაშინ კიდევ არ განიხილებოდა ხარისხები წილადური და უარყოფითი მაჩვენებლებით. და თვით უარყოფითი რიცხვებიც ბევრი მათემატიკოსისათვის არ იყო ცნობილი. პირველად წილადური მაჩვენებლები როგორც ჩანს. გამოუყენებია ფრანგ მათემატიკოსს ო რ ე ზ მ ს (XVI საუკუნის მეორე ნახევარი). მაგრამ ორეზმის იდეებმა მეტისმეტად გაუსწრო იმ დროის მათემატიკას და მისი ტრაქტატი მალე დავიწყებას მიეცა. ნულოვანი და უარყოფითი მაჩვენებლები გაძორჩნდა ფრანგი მათემატიკოსის შ უ კ ე ს შრომაში (XV საუკუნე). მათემატიკაში ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლის მქონე ხარისხების შემოტანამ მოამზადა ნიადაგი ლოგარითმების განსახილველად.

პირველი ლოგარითმული ცხრილები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეადგინეს შოტლანდიელმა ნ ე პ ე რ მ ა (1550—1617) და შვეიცარიელმა ბ ი უ რ გ ი მ (1552—1632). დამახასიათებელია ნეპერის შემდეგი გამოთქმა, რომელიც მას მოჰყავს თავისი ცხრილების წინასიტყვაობაში: „მე ყოველთვის ვცდილობდი, რამდენადაც ხელს მიწყობდა ჩემი ძალა და უნარი, თავიდან მეცილებინა იმ გამოთვლების სიძნელეები და მოწყენილობა, რომლებიც ბევრისთვის მომაბეზრებელი და დამაფრთხობელია მათემატიკის შესწავლის დროს"

ნეპერის ცხრილები რამდენადმე უფრო სრულყოფილი იყო, ვიდრე ბიურგის ცხრილები. მაგრამ ისინიც მოუხერხებელი იყო გამოთვლებისათვის. ნეპერის ლოგარითმები (Nep log x) განისაზღვრებოდა (ჩვენი აღნიშვნებით) შემდეგნაირად:

$$\text{Nep}\log x = 10^7 \log_e \frac{10^7}{x},$$

სადაც $e \approx 2{,}7$ (იხ. ნაწ I, § 134 კერძოდ

$$\text{Nep}\log 1 = 10^7 \log_e 10^7 \neq 0.$$

ასეთი ცხრილები თვით ნეპერსაც არ აკმაყოფილებდა. თავის თაყვანისმცემელ ბ რ ი გ ს თ ა ნ ერთად (1561—1631) ნეპერმა გადაწყვიტა შეედგინა უფრო მარტივი, ათობითი, ლოგარითმების ცხრილები. ეს ცხრილები ბრიგსმა გამოსცა 1624 წელს, უკვე ნეპერის სიკვდილის შემდეგ.

ლოგარითმებმა უდიდესი გავლენა მოახდინა ასტრონომიის განვითარებაზე.

ზღვაოსნობის წარმატებები შუა საუკუნეებში აპირობებდა დიდ მოთხოვნას ასტრონომიულ ცხრილებზე, რომელთა შედგენაც მეტად რთულ გამოთვლებს მოითხოვდა. ლოგარითმული ცხრილების გამოყენება მნიშვნელოვნად ადვილებდა ამ გამოთვლებს ფრანგი მათემატიკოსის ლაპლასის (1749—1827) ხატოვანი გამოთქმით — ლოგარითმების აღმოჩენამ შეამცირა ასტრონომის სამუშაო, რითაც გაახანგრძლივა მისი სიცოცხლე

ლოგარითმული ფუნქციის ზოგადი განსაზღვრა და მისი ფართო განზოგადება მოგვცა ლეონარდო ე ი ლ ე რ მ ა.

ამოცანები გამეორებისათვის

1476. ქალაქის მოსახლეობა წინა წლებთან შედარებით 3%-ით იზრდება ყოველწლიურად. რამდენი წლის შემდეგ გაიზრდება ამ ქალაქის მოსახლეობა 1,5-ჯერ?

1477. ერთი ბრიგადა თვეში 1,1-ჯერ ნაკლებ პროდუქციას უშვებს, ვიდრე მეორე ბრიგადა. ყოველთვიურად პირველი ბრიგადის შრომის ნაყოფიერება იზრდება 1%-ით, ხოლო მეორე ბრიგადისა — 0,7%-ით. რამდენი თვის შემდეგ დაეწევა პირველი ბრიგადა მეორე ბრიგადას ცვლაში პროდუქციის გამოშვებაში. ამ ბრიგადებიდან რომელი მეტ პროდუქციას იძლევა ნახევარ წელიწადში: პირველი თუ მეორე?

1478. გამოიანგარიშეთ:

ა) $2^{4\log_2 3-1}$; ბ) $2^{3\log_2 5+4}$;

გ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2-3}$ დ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 4+2}$.

1479. ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=|\log_2 x|$; ბ) $y=\log_2|x|$;

გ) $y=\log_2(-x)$.

1480. ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $(\sqrt{2})^{\sin 2x}=\sqrt[4]{2}$; ბ) $5^{\sin 2x}=\left(\frac{1}{25}\right)^{\operatorname{tg} x}$

1481. იპოვეთ

$$\log_2\log_2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

1482. $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$ კვადრატული განტოლების ამოუხსნელად დაამტკიცეთ, რომ მისი ფესვების ნამრავლი უდრის 32-ს.

1483. მოცემულ განტოლებათა ამოუხსნელად იპოვეთ მათი ფესვების ნამრავლი:

ა) $\lg^2 x+\lg x-2=0$;

ბ) $6\lg^2 x+\lg x-1=0$;

გ) $\lg^2 x-\lg x+1=0$.

1484. ამოხსენით განტოლება

$\log_x a=a\ (a>1)$.

1485. ათობითი ლოგარითმების ცხრილების გამოყენებით იპოვეთ:

ა) $\log_7 25$; ბ) $\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{2}$

1486. რომელია მეტი:

ა) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ თუ $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$; ბ) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{7}$ თუ $\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{5}$; გ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}$ თუ $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$?

1487. x-ის რომელი მნიშვნელობებისთვისაა განსაზღვრული $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ინტერვალში ფუნქციები:

ა) $y=\lg(\sin x)$; ბ) $y=\sin(\lg x)$?

1488. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lg \sin x = \sin x$$

განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვები.

1489. რამდენ ციფრს შეიცავს რიცხვები: 2^{100}, 5^{200}?

1490. დაამტკიცეთ, რომ $y=\lg(1+x)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ხოლო $y=\lg(1-x)$—მონოტონურად კლებადი.

ამოხსენით განტოლებანი (№ 1491—1499):

1491. $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-3}$.

1492. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x$.

1493. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

1494. $5^{7x} = 7^{5x}$

1495. $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$.

1496.* $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x - \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

1497. $\log_2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) = 9$.

1498. $5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1}$.

1499. $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots = \frac{1}{2}$.

1500. ლოგარითმების ცხრილის გამოყენების გარეშე იპოვეთ $\lg 2$ და $\lg 5$, თუ ცნობილია, რომ

$$\lg 2 - \lg 5 \approx -0,3980.$$

1501. დაამტკიცეთ იგივობანი:

ა) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$; ბ) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a$.

1502. რომელი რიცხვი მეტია, a თუ b, როცა:

ა) $\log_2 a = \log_3 b$; ბ) $\log_a 2 = \log_b 3$?

1503. $\log_{ab} x$ გამოსახეთ $\log_a x$-ისა და $\log_b x$-ის საშუალებით.

1504. დაამტკიცეთ იგივობა:

$$\log_a\left(b+\sqrt{b^2-1}\right) = -\log_a\left(b-\sqrt{b^2-1}\right).$$

ამოხსენით განტოლებანი (№ 1505—1507):

1505. $3\lg^2(x^3)-\lg x-1=0.$

1506. $2\lg^2(x^3)-3\lg x-1=0.$

1507. $4\log_3^2 5x-7\log_3 15x+7=0.$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№ 1508—1509):

1508. $\begin{cases} 3^{\sin x}\cdot 3^{\cos y}=3, \\ 3^{\sin x\cos y}=1. \end{cases}$

1509. $\begin{cases} \lg\sin x+\lg\sin y=\lg\dfrac{3}{2}, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

1510. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y, \\ y^{\sqrt{x}}=x^4. \end{cases}$$

1511. იპოვეთ ფუნქციათა ზრდისა და კლების ინტერვალები

ა) $y=2^{x^2+4x+8}$;

ბ) $y=\log_{\frac{1}{5}}(8+2x-x^2)$.

ამოხსენით უტოლობანი (№ 1512—1514):

1512. $\lg(x^2-3)>\lg(x+3).$

1513. $\lg x^2-2\lg x-8\leqslant 0.$

1514. $(0{,}25)^{x-4}\leqslant\left(\dfrac{1}{16}\right)^x.$

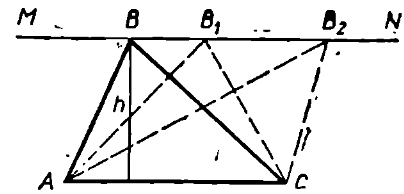
ფუნქციები და ზღვრები IX

მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები. ფუნქციის ცნება § [illegible]

ფუნქციის ცნებას არაერთხელ შევხვედრივართ. I ნაწილში განვიხილეთ წრფივი, კვადრატული, ხარისხოვანი და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. წინა თავი მიეძღვნა მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების შესწავლას. ახლა კი უნდა გავაკეთოთ იმის საერთო მიმოხილვა, რაც უკვე ვიცით ფუნქციებზე, და განვიხილოთ რამდენიმე ახალი საკითხი.

სხვადასხვა პროცესზე დაკვირვების დროს შეიძლება შევნიშნოთ, რომ მათში მონაწილე სიდიდეები სხვადასხვანაირად იქცევა: ზოგიერთი იცვლება, ზოგი კი მუდმივი რჩება.

თუ, მაგალითად, ABC სამკუთხედში B წვეროს გადავაადგილებთ AC ფუძის პარალელური MN წრფის გასწვრივ (ნახ. 263), მაშინ A, B და C კუთხეების სიდიდეები განუწყვეტლივ იცვლება, ხოლო მათი ჯამი, აგრეთვე სამკუთხედის სიმაღლე და ფართობი, უცვლელი რჩება.



ნახ. 263.

მეორე მაგალითი. თუ რომელიმე გაზს შევკუმშავთ მუდმივ ტემპერატურაზე, მისი მოცულობა (V) და წნევა (p) შეიცვლება: მოცულობა შემცირდება, ხოლო წნევა გაიზრდება, ამ სიდიდეთა ნამრავლი კი, როგორც ბოილ-მარიოტის კანონითაა დადგენილი, მუდმივი დარჩება:

$$Vp = c,$$

სადაც c რაღაც მუდმივი სიდიდეა.

ყველა სიდიდე შეიძლება დაიყოს **მ უ დ მ ი ვ ე ბ ა დ** და **ც ვ ლ ა დ ე ბ ა დ**. რაიმე პროცესში მონაწილე ცვლადი სიდიდეები ურთიერთდამოუკიდებლად კი არ იცვლება, არამედ ერთმანეთთან მჭიდრო

კავშირში. მაგალითად, გაზის შეკუმშვა (მუდმივ ტემპერატურაზე) იწვევს მისი მოცულობის შეცვლას, ხოლო ეს, თავის მხრივ, განაპირობებს გაზის წნევის შეცვლას. ცილინდრის ფუძის რადიუსის ცვლილება იწვევს ამ ფუძის ფართობის ცვლილებას; უკანასკნელი კი ცილინდრის მოცულობის ცვლილებას მოასწავებს. ამა თუ იმ პროცესის მათემატიკური შესწავლის მთავარი ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ დადგენილ იქნეს, როგორ გავლენას ახდენს ერთი ცვლადი სიდიდის ცვლილება მეორე ცვლადის ცვლილებაზე.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი. ბოილ-მარიოტის ზემოხსენებული კანონის თანახმად მუდმივ ტემპერატურაზე გაზის V მოცულობა იცვლება p წნევის უკუპროპორციულად:

$$V=\frac{c}{p}.$$

თუ ცნობილია წნევა, ამ ფორმულის მიხედვით შეიძლება გაზის მოცულობის გამოთვლა. ანალოგიურად, ფორმულა $S=\pi r^2$ განსაზღვრავს წრის S ფართობს, თუ ცნობილია მისი რადიუსი. $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ ფორმულის საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხე, თუ ცნობილია ამ სამკუთხედის მეორე მახვილი კუთხე და ა. შ.

ორი ცვლადი სიდიდის შედარების დროს უფრო მოხერხებულია ერთი მათგანი დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ცვლადად განვიხილოთ, ხოლო მეორე დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ცვლად სიდიდედ. მაგალითად, წრის r რადიუსი, ბუნებრივია, ჩავთვალოთ, დამოუკიდებელ ცვლადად, ხოლო წრის ფართობი $S=\pi r^2$—დამოკიდებულ ცვლად სიდიდედ. ანალოგიურად, გაზის p წნევა შეიძლება დამოუკიდებელ ცვლად სიდიდედ ჩავთვალოთ; მაშინ მისი მოცულობა $V=\frac{c}{p}$ დამოკიდებული ცვლადი სიდიდე იქნება.

ორ ცვლად სიდიდეს შორის რომელი ჩავთვალოთ დამოუკიდებლად და რომელი დამოკიდებულად? ეს საკითხი სხვადასხვანაირად წყდება დასმული მიზნის მიხედვით. თუ, მაგალითად, გვაინტერესებს, რას მოასწავებს გაზის წნევის ცვლილება მუდმივი ტემპერატურის პირობებში, ბუნებრივი იქნება წნევა დამოუკიდებლად მივიჩნიოთ, ხოლო მოცულობა —დამოკიდებულ ცვლად სიდიდედ. ამ შემთხვევაში დამოკიდებული ცვლადი სიდიდე V გამოისახება დამოუკიდებელი p სიდიდით ასე: $V=\frac{c}{p}$.

მაგრამ, თუ გვსურს გავარკვიოთ, რა შედეგი მოჰყვება გაზის შეკუმშვას,

მაშინ უკეთესია დამოუკიდებლად მოცულობა ჩავთვალოთ, ხოლო წნევა — დამოკიდებულ ცვლად სიდიდედ. ამ შემთხვევაში დამოკიდებული ცვლადი სიდიდე p გამოისახება დამოუკიდებელი V ცვლადი სიდიდით ასე: $p=\frac{c}{V}$.

ნებისმიერ ასეთ შემთხვევაში ორი სიდიდე ისეა ერთმანეთთან დაკავშირებული, რომ ერთი მათგანის ყოველ შესაძლო მნიშვნელობას მეორის სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა შეესაბამება.

თუ ერთი ცვლადი x სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას რაიმე წესით მეორე y სიდიდის სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა შეესაბამება, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია ფუნქცია. ამასთანავე, y სიდიდეს უწოდებენ დამოკიდებულ ცვლად სიდიდეს, ანუ ფუნქციას, ხოლო x სიდიდეს — დამოუკიდებელ ცვლად სიდიდეს, ანუ არგუმენტს.

იმის გამოსასახავად, რომ y არის x არგუმენტის ფუნქცია, ჩვეულებრივ იხმარება აღნიშვნები $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$ და ა. შ. (იკითხება: იგრეკი უდრის ეფ იქსს, იგრეკი უდრის ჟე იქსს, იგრეკი უდრის ფი იქსს და ა. შ.). რა თქმა უნდა, ფუნქციის აღსანიშნავი ასოს (f, g, φ) შერჩევა არსებითი არ არის. არსებითია მხოლოდ ის, თუ რა კავშირს გამოსახავს ეს ასო x და y სიდიდეებს შორის.

მნიშვნელობა, რომელსაც $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს, როცა $x=a$, აღინიშნება $f(a)$-თი. თუ, მაგალითად, $f(x)=x^2+1$, მაშინ

$$f(1)=1^2+1=2;$$
$$f(2)=2^2+1=5;$$
$$f(a+1)=(a+1)^2+1=a^2+2a+2;$$
$$f(2a)=(2a)^2+1=4a^2+1$$

და ა. შ.

სავარჯიშოები

1515. გაზი, რომელიც იმყოფება 2 ატმოსფეროს წნევის ქვეშ, იკუმშება. როგორ შეიცვლება ამ დროს: ა) გაზის მოცულობა; ბ) მისი წონა: გ) მისი წნევა?

1516. ელექტრულ წრედში გადის დენი. რეოსტატით ვცვლით წრედის წინაღობას. იცვლება თუ არა ამ დროს: ა) დენი წრედში; ბ) დენის ძაბვა?

1517. ABC სამკუთხედის B წვერო მოძრაობს წრეწირზე, რომლის დიამეტრი ამ სამკუთხედის AC ფუძეს ემთხვევა. ამ პროცესში რომელი სიდიდე რჩება მუდმივი და რომელი იცვლება?

1518. $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

ვიპოვოთ: ა) $f(0)$; ბ) $f(a^2)$; გ) $f\left(\frac{1}{a}\right)$; დ) $f(\sin a)$.

1519. $f(2a)$ გამოვსახოთ $f(a)$-ს საშუალებით შემდეგი ფუნქციებისათვის: ა) $f(x)=\sin x$; ბ) $f(x)=\operatorname{tg} x$; გ) $f(x)=x^2$.

ფუნქციის მოცემის ხერხები § 202

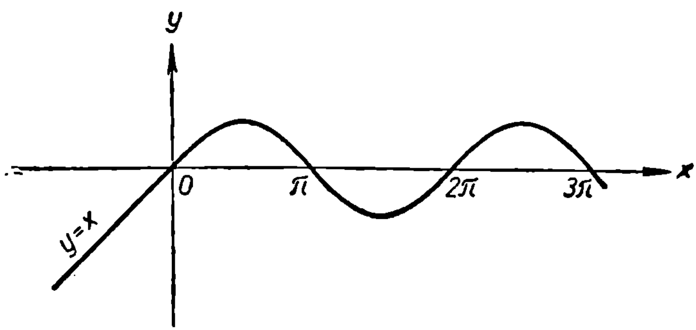
ფუნქცია მოცემულია — ეს ნიშნავს, დადგენილია წესი, რომლის ძალით არგუმენტის მნიშვნელობათა მიხედვით მოიძებნება ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობანი.

მათემატიკის სასკოლო კურსში მივეჩვიეთ ფუნქციის მოცემის ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ხერხს. ამ ხერხის მიხედვით მოიცემა ფორმულა, რომელიც აკავშირებს დამოკიდებულ ცვლადს (ფუნქციას) დამოუკიდებელ ცვლად სიდიდესთან (არგუმენტთან); მაგალითად, $y=\sqrt{x}$, $y=\lg x$; $S=\pi r^2$, $V=\frac{c}{p}$ და ა. შ. განვიხილოთ ანალიზურად განსაზღვრულ ფუნქციათა უფრო რთული მაგალითები.

ვთქვათ,

$$y=\begin{cases} x, & \text{თუ } x<0, \\ \sin x, & \text{თუ } x\geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა, ისე, რომ x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის y სიდიდე მოიძებნება $y=x$ ფორმულით, ხოლო x-ის არაუარყოფითი მნი-



ნახ. 264.

შვნელობისათვის $y=\sin x$ ფორმულით. თუ, მაგალითად, $x=-2$, მაშინ $y=x=-2$; თუ $x=\frac{\pi}{2}$, მაშინ $y=\sin\frac{\pi}{2}=1$ და ა. შ.

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ (1) ფორმულა განსაზღვრავს ორ ფუნქციას. საუბარია მხოლოდ ერთ y ფუნქციაზე, რომელიც x არგუმენტის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის წარმოადგენს $y=x$ წრფივ ფუნქციას, ხოლო x არგუმენტის არაუარყოფითი მნიშვნელობათათვის $y=\sin x$ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას. განსახილავი ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 264-ე ნახაზზე.

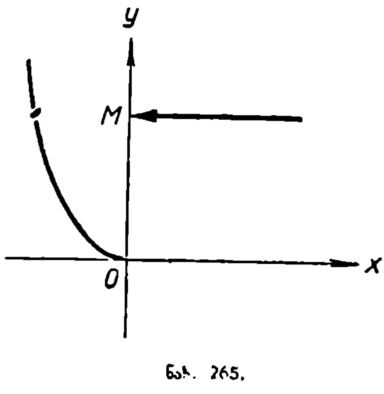
განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი:

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{თუ } x\leqslant 0, \\ 3, & \text{თუ } x>0. \end{cases} \tag{2}$$

x-ისა და y-ის მნიშვნელობათა შორის ეს თანაფარდობა ერთ ფუნქციას განსაზღვრავს. ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 265-ე ნახაზზე. ისარი წრფივ უბანზე აღნიშნავს, რომ M წერტილი არ ეკუთვნის მოცემული ფუნქციის გრაფიკს. (2) ფორმულის თანახმად, როცა $x=0$, y სიდიდე განისაზღვრება $y=x^2$ ფორმულით და არა $y=3$ ფორმულით. ამიტომ, როცა $x=0$, y-იც ნულის ტოლია.

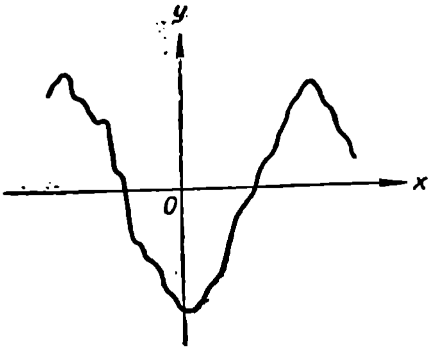
ვთქვათ, y ფუნქცია მოცემულია რაიმე $f(x)$ გამოსახულების საშუალებით, მაგალითად: $y=x^2$, $y=\operatorname{tg} x$ და ა. შ. თუ ამასთან, აღნიშნული არ არის x არგუმენტის მნიშვნელობათა ცვლილების საზღვრები, ჩავთვალოთ, რომ $f(x)$ გამოსახულება იძლევა ფუნქციას x-ის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომელთათვისაც იგი განსაზღვრულია, ასე, მაგალითად, ჩანაწერი $y=x^2$ ნიშნავს, რომ $y=x^2$-ს, x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის. ანალოგიურად, ჩანაწერი $y=\lg x$ ნიშნავს, რომ $y=\lg x$, x-ის ყველა დადებითი მნიშვნელობისათვის.

ანალიზური ხერხის გარდა, პრაქტიკაში ხშირად სარგებლობენ ფუნქციის მოცემის გრაფიკული ხერხით. ეს ხერხი მიზანშეწონილია, მაშინ, როცა ფუნქციის მოცემა ანალიზურად საკმაოდ ძნელია (იხ. მაგალითად, ნახ. 266). გარდა ამისა, მრავალი პროცესის შესწავლისას ვიყენებთ ხელსაწყოებს, რომლებიც ფორმულის ენით ვერ გველაპარაკებიან, მაგრამ ამ ხელსაწყოების მეშვეობით ვღებულობთ ისეთ მრუდებს, რომელთა მიხედვით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ რომელიმე სიდიდის ცვლილების ხასიათზე მეორე



ნახ. 265.

სიდიდის ცვლილებასთან დაკავშირებით. მედიცინაში, მაგალითად, ფართოდ გამოიყენება ელექტროკარდიოგრაფი. ამ ხელსაწყოთი შეიძლება მივიღოთ ელექტროკარდიოგრამები—მრუდები, რომლებიც გულის კუნთში წარმოშობილი ელექტრული იმპულსების ცვლილებას ასახავენ. ასეთი მრუდეები შესაძლებლობას იძლევა სწორი დასკვნა გავაკეთოთ გულის მუშაობის შესახებ.



ნახ. 266.

ფუნქციის განსაზღვრის გრაფიკული ხერხი ხშირად გამოიყენება მათემატიკაში, ფუნქციის ამა თუ იმ თვისების საილუსტრაციოდ.

ზოგიერთი პროცესის შესწავლისას სასარგებლოა აგრეთვე ფუნქციის მოცემის ც ხ რ ი ლ უ რ ი ხერხის გამოყენება. მაგალითად, მეტეოროლოგები ადგენენ დედამიწის სხვადასხვა წერტილში მოსული ნალექების ცხრილებს. დედამიწის ეს სხვადასხვა წერტილი ამ შემთხვევაში „არგუმენტის მნიშვნელობათა“ როლს ასრულებს, ხოლო ნალექების რაოდენობა — „ფუნქციის მნიშვნელობათა“ როლს.

სავარჯიშოები

1520. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ \sin x, & \text{თუ } x>0.\end{cases}$

იპოვეთ: ა) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; ბ) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; გ) $f(0)$; დ) $f(a^2)$.

1521. $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & \text{თუ } x<2,\\ \sin x, & \text{თუ } x\geqslant 2.\end{cases}$

იპოვეთ: ა) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; ბ) $f(\pi)$; გ) $f(2-a^2)$.

ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები (№ 1522—1525).

1522. $y=\begin{cases}-1, & \text{თუ } x<-1,\\ x, & \text{თუ } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & \text{თუ } x>1,\end{cases}$

1523. $y=\begin{cases}1{,}5\,x+3, & \text{თუ } x<0,\\ 3-2x, & \text{თუ } x\geqslant 0.\end{cases}$

1524. $y=\begin{cases} x+6, & \text{თუ } x<-2, \\ x^2-x-2, & \text{თუ } |x|\leqslant 2, \\ 0, & \text{თუ } x>2, \end{cases}$

1525. $y=\begin{cases} 2^x, & \text{თუ } x>0, \\ 1, & \text{თუ } x\leqslant 0. \end{cases}$

1526. როგორ უნდა აიგოს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით $y=f(x)+c$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც c რომელიმე მოცემული რიცხვია?

პასუხი განმარტეთ შემდეგ ფუნქციათა მაგალითზე:

ა) $y=\frac{1}{x}+2;$ გ) $y=2^x+1;$

ბ) $y=\frac{1}{x}-1;$ დ) $y=\lg x-2.$

1527. როგორ აიგოს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით $y=f(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც a რომელიმე მოცემული რიცხვია?

პასუხი განმარტეთ შემდეგ ფუნქციათა მაგალითზე:

1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right);$ 4) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right);$

2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);$ 5) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$

3) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right);$ 6) $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$

1528. როგორ უნდა აიგოს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით $y=Af(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც A რომელიმე მოცემული რიცხვია?

პასუხი განმარტეთ შემდეგი ფუნქციების მაგალითზე:

1) $y=2x^2;$ 4) $y=3\sin x;$

2) $y=-x^2;$ 5) $y=-2\cos x;$

3) $y=-2x^2;$ 6) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg} x.$

1529. როგორ უნდა აიგოს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით $y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი?

პასუხი განმარტეთ შემდეგი ფუნქციების მაგალითზე:

1) $y=|x^2-x-6|;$ 3) $y=|\cos x|;$

2) $y=|-6x^2+x+1|;$ 4) $y=|\sin x|.$

1530. როგორ უნდა აიგოს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით $y=f(\omega x)$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც ω რომელიმე მოცემული რიცხვია?

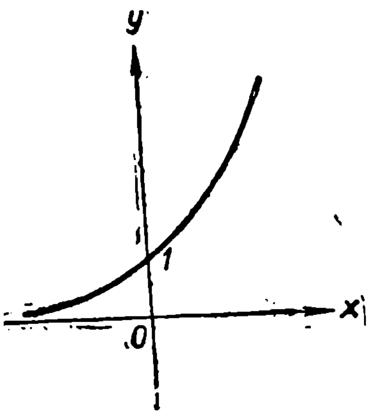
პასუხი განმარტეთ შემდეგ ფუნქციათა მაგალითზე:

1) $y=\sin 2x$; 3) $y=\cos 1{,}5\,x$;

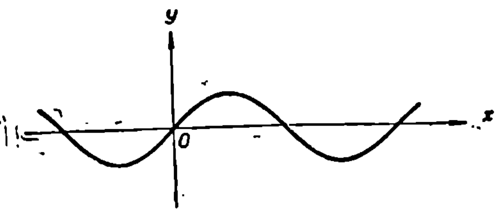
2) $y=\sin\frac{x}{2}$; 4) $y=\cos\frac{x}{3}$.

ფუნქციის განსაზღვრის არე და ცვლილების არე § 208

რა წესითაც არ უნდა იყოს მოცემული $y=f(x)$ ფუნქცია, მისი განხილვის დროს ყოველთვის ორ სიმრავლესთან გვაქვს საქმე: იმ მნიშვნელობათა სიმრავლესთან, რომლებიც შეიძლება მიიღოს x არგუმენტმა, და იმ მნიშვნელობათა სიმრავლესთან, რომლებიც შეიძლება მიიღოს y ფუნქციამ. ასე, მაგალითად, $y=2^x$ ფუნქციისათვის (ნახ. 267) ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთა მიღება შეუძლია x არგუმენტს, წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობას, ხო-



ნახ. 267.



ნახ. 268.

ლო იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთა მიღება შეუძლია y ფუნქციას, — ყველა დადებითი რიცხვის ერთობლიობას.

ყველა იმ მნიშვნელობის ერთობლიობას, რომელთა მიღება შეუძლია $y=f(x)$ ფუნქციის x არგუმენტს, ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება. ყველა იმ მნიშვნელობის ერთობლიობას, რომელთაც ღებულობს თვით y ფუნქცია, ამ ფუნქციის ცვლილების არე ეწოდება. მაგალითად, $y=\sin x$ ფუნქციისათვის (ნახ. 268) განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა, ხოლო ცვლილების არეს — ყველა იმ რიცხვის ერთობლიობა, რომელიც -1-სა და 1-ს შორისაა, ამ ორი რიცხვის ჩათვლით. $y=\lg x$ ფუნქციისათვის (იხ. ნახ. 269) განსაზღვრის

არეს წარმოადგენს ყველა დადებითი რიცხვის ერთობლიობა, ხოლ ცვლილების არე ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობაა და ა. შ.

წინათ ჩვენ ვსწავლობდით რიცხვთა მიმდევრობებს. რიცხვთა ნებისმიერი მიმდევრობის წევრები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც არგუმენტის ნატურალურ მნიშვნელობათათვის განსაზღვრული რომელიღაც ფუნქციის შესაძლებელი მნიშვნელობანი. მაგალითად,

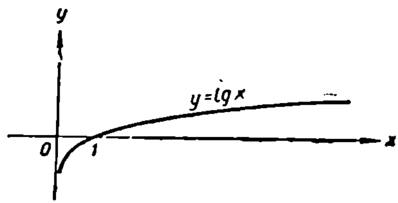
$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

მიმდევრობის წევრები წარმოადგენს $y=\frac{1}{n}$ ფუნქციის მნიშვნელობებს, ხოლო

$$1, -1; 1, -1, \dots$$

მიმდევრობის წევრები $y=(-1)^{n+1}$ ფუნქციის მნიშვნელობებს.

თითოეულს ამ ფუნქციათაგან განვიხილავთ როგორც ფუნქციას, განსაზღვრულს n არგუმენტის მხოლოდ ნატურალური მნიშვნელობისათვის. აი, რატომ ამბობენ ზოგჯერ, რომ *რიცხვთა მიმდევრობა არის ნატურალური არგუმენტის ფუნქცია.*



ნახ. 269.

ფუნქციის განსაზღვრის არის პოვნაზე განვიხილოთ რამდენიმე უფრო რთული მაგალითი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$y=\frac{x-1}{x^2+2x-3}$$

ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა იმ მნიშვნელობებისა, რომლებიც წილადის x^2+2x-3 მნიშვნელს ნულად აქცევენ. თუ ამოვხსნით $x^2+2x-3=0$ განტოლებას, ვიპოვით $x_1=1$, $x_2=-3$, ამიტომ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა, გარდა 1-ისა, და -3-ისა.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$y=\sqrt{\frac{2x-4}{3-6x}}$$

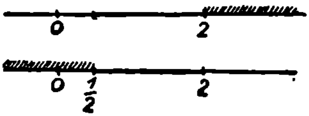
ფუნქციის განსაზღვრის არე.

კვადრატული ფესვი განსაზღვრულია მხოლოდ არაუარყოფითი რიცხვებისათვის. ამიტომ x-ის ყველა მნიშვნელობა მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არიდან უნდა აკმაყოფილებდეს

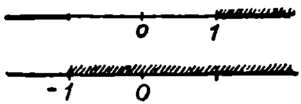
$$\frac{2x-4}{3-6x} \geqslant 0$$

უტოლობას.

თავდაპირველად გავარკვიოთ, წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი x არგუმენტის რომელი მნიშვნელობისთვისაა დადებითი და რომლისათვის უარყოფითი. თუ ამოვხსნით $2x-4>0$ უტოლობას, მივიღებთ $x>2$. ამრიგად, როცა $x>2$, მრიცხველი დადებითია; თუ $x<2$, ცხადია, იგი უარყოფითია. ეს აღნიშნულია 270-ე ნახაზზე. რიცხვითი წრფის ზედა



ნახ. 270.



ნახ. 271.

დაშტრიხული ნაწილი იმ არეს შეესაბამება, სადაც მრიცხველი დადებითია, ხოლო დაუშტრიხავი — იმ არეს, სადაც იგი უარყოფითია, ანალოგიურად გამოიკვლევა $3-6x$ მნიშვნელიც. გვაქვს:

$$3-6x>0,$$
$$3>6x,$$
$$6x<3,$$
$$x<\frac{1}{2}.$$

მეორე რიცხვითი წრფის დაშტრიხული ნაწილი 270-ე ნახაზზე იმ არეს შეესაბამება, სადაც $3-6x$ მნიშვნელი დადებითია, ხოლო დაუშტრიხავი — იმ არეს, სადაც იგი უარყოფითია.

270-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ ორივე გამოსახულებას (მრიცხველსა და მნიშვნელს) ერთნაირი ნიშანი აქვს, როცა $\frac{1}{2}<x<2$. ამიტომ ამ არეში $\frac{2x-4}{3-6x}$ წილადი დადებითია. გარდა ამისა, იგი ნულის ტოლი ხდება, როცა $x=2$. მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა იმ ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას:

$$\frac{1}{2} < x \leqslant 2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$y=\lg\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)$$

ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ათობითი ლოგარითმები განსაზღვრულია მხოლოდ დადებითი რიცხვებისათვის, ამიტომ x არგუმენტის ყველა მნიშვნელობა მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არიდან უნდა აკმაყოფილებდეს

$$\frac{2x}{x+1}-1>0$$

უტოლობას.

თუ ამ უტოლობის მარცხენა მხარეში შევასრულებთ გამოკლებას, მივიღებთ:

$$\frac{x-1}{x+1}>0.$$

ამ წილადის მრიცხველი დადებითია, როცა $x>1$, და უარყოფითია, როცა $x<1$, ხოლო მნიშვნელი დადებითია, როცა $x>-1$ და უარყოფითია, როცა $x<-1$ (იხ. ნახ. 271) მთლიანად წილადი დადებითია, როცა $x<-1$ და $x>1$. x-ის ყველა ეს მნიშვნელობა შეიძლება ჩაიწეროს $|x|>1$ ერთი უტოლობის სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}$$

ფუნქციის განსაზღვრის არე.

უპირველესად შევნიშნოთ, რომ $\operatorname{tg}x$ არ არის განსაზღვრული, როცა $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$. მეორე მხრივ, აღებული წილადი არ არის განსაზღვრული x-ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც მნიშვნელს ნულად აქცევენ. ეს მნიშვნელობანი მოიძებნება $\sin x-\cos x=0$ განტოლებიდან. ეს კი არის ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიული განტოლება. თუ გავყოფთ მის ორივე ნაწილს $\cos x$-ზე (დაამტკიცეთ, რომ ეს გაყოფა შესაძლებელია!), მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}x=1,$$

საიდანაც

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

მაშ, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა, გარდა $\frac{\pi}{2}+n\pi$-ისა და $\frac{\pi}{4}+k\pi$-ისა, სადაც n და k ნებისმიერი მთელი რიცხვებია.

ახლა განვიხილოთ ფუნქციის ცვლილების არის მოძებნის რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. როგორც ცნობილია $y=ax+b$ წრფივ. ფუნქციას, როცა $a\neq 0$, შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობა. ამიტომ ამ ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვიპოვოთ $y=x^2-4x+7$ ფუნქციის ცვლილების არე.

გარდავქმნათ x^2-4x+7 კვადრატული სამწევრი მისგან სრული კვადრატის გამოყოფით: $y=x^2-4x+4+3=(x-2)^2+3$. ცხადია, $(x-2)^2$ გამოსახულება ღებულობს ყველა არაუარყოფით მნიშვნელობას. ამიტომ მოცემული ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა იმ რიცხვის ერთობლიობა, რომელიც 3-ზე მეტი ან მისი ტოლია. ეს არე შეიძლება ჩაიწეროს $y\geqslant 3$ უტოლობის სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ

$$y=\sin x+\cos x$$

ფუნქციის ცვლილების არე.

თუ წარმოვიდგენთ ამ ფუნქციას $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ სახით (გაიხსენეთ, როგორ კეთდება ეს!), ძნელი არაა მიხვედრა, რომ მისი ცვლილების არე განისაზღვრება

$$-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}, \text{ ანუ } |y|\leqslant\sqrt{2}$$

უტოლობით.

სავარჯიშოები

ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები (№ 1531—1566):

1531. $y=\frac{3x+1}{3x-6}$.

1532 $y=\frac{x^2-9}{x+3}$.

1533. $y=\frac{5}{6x^2-x-1}$

1534. $y=\frac{3x-1}{x^2+x+1}$.

1535. $y=\sqrt{x-1}$.

1536. $y=\sqrt{5-10x}$.

1537. $y=\sqrt{1-\cos x}$.

1538. $y=\sqrt{\sin x-1}$.

1539. $y=2\sqrt{x-1}-\frac{5}{\sqrt{4-x}}$.

1540. $y=\sqrt{x^2+2x+4}$.

1541. $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

1542. $y=\sqrt{x^2-4x-12}$.

1543. $y=\sqrt{(1-x)(1+5x)}$.

1544. $y=\log_2(x^2-4x-5)$.

1545. $y=\log_{\frac{1}{3}}(-3x^2-7x-2)$

1546. $y=\sqrt{\frac{2x-4}{x+1}}$.

1547. $y=\sqrt{-\frac{x-4}{2-x}}$.

1548. $y=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$

1549. $y=\sqrt{2+\frac{x}{1-x}}$.

1550. $y=\lg\frac{x(x-3)}{2x-5}$.

1551. $y=\lg\frac{x-5}{2+x-x^2}$.

1552. $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

1553. $y=\operatorname{ctg}\pi x$.

1554 $y=(\sin\pi x)^{-1}$

1555. $y=\frac{\cos x}{\sqrt{3-2\sin x}}$.

1556. $y=\frac{1}{\sqrt{3}+2\cos x}$.

1557 $y=\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}$.

1558. $y=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$.

1559. $y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$.

1560. $y=\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{\sin x-\sqrt{3}\cos x}$.

1561. $y=\frac{1000}{\sqrt{2}\sin^2x-\cos x}$.

1562. $y=2^{-\sqrt{-x}}$

1563. $y=3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{-x}}$

1564. $y=\lg|6x-8|$.

1565. $y=\lg\cos x$.

1566. $y=\lg\operatorname{tg}x$.

1567. (ზ ე პ ი რ ა დ). იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ცვლილების არეები:

ა) $y=|\sin x|$;

ბ) $y=\cos^2x$;

გ) $y=\cos x-1$;

დ) $y=\operatorname{tg}^2x$;

ე) $y=\sin^2x+\cos^2x$;

ვ) $y=\cos x-\sin x$;

ზ) $y=3\sin x+4\cos x$;

თ) $y=12\sin x-5\cos x$;

ი) $y=\sin x\cdot\cos x$.

1568. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ცვლილების არეები:

ა) $y=(x-3)^2-1$;

ბ) $y=-(x+2)^2+5$;

გ) $y=2x^2-28x+96$;

დ) $y=5^{\sin x}$;

ე) $y=x-|x|$;

ვ) $y=\sin^4x+\cos^4x$.

1569. შეადარეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები:

ა) $y=x$ და $y=10^{\lg x}$;

ბ) $y=2\lg x$ და $y=\lg x^2$.

ააგეთ ამ ფუნქციების გრაფიკები.

$f(x)$ ფუნქციას $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედში მონოტონურად ზრდადი (ან, უბრალოდ, ზრდადი) ეწოდება, თუ $x_2>x_1$ პირობიდან გამომდინარეობს

$$f(x_2)>f(x_1).$$

ამასთანავე

$$a\leqslant x_1\leqslant b,\quad a\leqslant x_2\leqslant b.$$

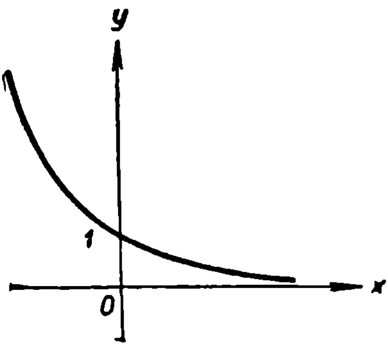
სხვანაირად, ფუნქციას რაიმე შუალედში მონოტონურად ზრდადი ეწოდება, თუ არგუმენტის ნებისმიერ ორ მნიშვნელობას შორის, რომლებიც ამ შუალედს ეკუთვნიან, უდიდესს ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა შეესაბამება.

მაგალითად, $y=\sin x$ ფუნქცია (ნახ. 268, გვ. 156) ზრდადია შუალედებში:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad \frac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}\pi;$$

$$\frac{7}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}\pi \text{ და ა. შ.}$$

$y=2^x$ ფუნქცია (ნახ. 267) ზრდადია მთელს რიცხვით წრფეზე. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქცია არსად ზრდადი არ არის (ნახ. 272).



ნახ. 272.

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედში, მაშინ მისი გრაფიკი ამ შუალედში x-ის ზრდის დროს სულ მაღლა და მაღლა მიიწევს. ეს, რასაკვირველია, არ ნიშნავს, რომ გრაფიკი „მიემართება" ზევითკენ ნებისმიერად მაღლა. მაგალითად, $y=-\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი x-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის (ნახ. 273) არგუმენტის ზრდასთან ერთად სულ ზევით და ზევით მიემართება. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, იგი ვერასოდეს ვერ გადალახავს აბსცისათა ღერძს და ვერც მიაღწევს მას.

$y=f(x)$ *ფუნქციას* $a\leqslant x\leqslant b$ *შუალედში მონოტონურად კლებადი* (*ან, უბრალოდ, კლებადი*) *ეწოდება, თუ* $x_2>x_1$ *პირობიდან გამომდინარეობს* $f(x_2)<f(x_1)$. *ამასთან,*

$$a\leqslant x_1\leqslant b,\ a\leqslant x_2\leqslant b.$$

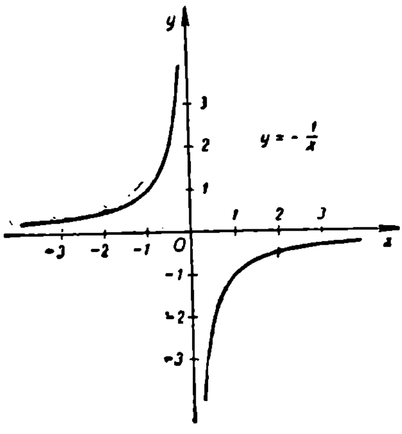
სხვანაირად, *ფუნქციას რაიმე შუალედში მონოტონურად კლებადი ეწოდება, თუ არგუმენტის ნებისმიერ ორ მნიშვნელობას შორის, რომლებიც ამ შუალედშია აღებული, უდიდესს ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა შეესაბამება.*

მაგალითად, ფუნქცია $y=\sin x$ მონოტონურად კლებადია შუალედებში:

$$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{5}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}\pi,\quad \frac{9}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{11}{2}\pi$$ და ა. შ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ფუნქცია კლებადია მთელს რიცხვით წრფეზე. $y=2^x$ ფუნქცია არსად კლებადი არ არის.

თუ $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურად კლებადია $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედში, მაშინ მისი გრაფიკი ამ შუალედში x-ის ზრდის დროს სულ დაბლა და დაბლა ეშვება. თუმცა ეს იმას არ ნიშნავს, რომ გრაფიკი ნებისმიერად შეიძლება „ეშვებოდეს“ ქვევითკენ. მოსწავლეებს ევალებათ დამოუკიდებლად ააგონ შესაბამისი ნახაზი.



ნახ. 273.

ფუნქციებს, რომლებიც $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედში მხოლოდ ზრდადია ან მხოლოდ კლებადი, უწოდებენ *მონოტონურს* ამ შუალედში.

აქამდე საუბარი გვქონდა $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედზე. ასეთი შუალედი მოიცავს $x=a$ და $x=b$ კიდურა წერტილებსაც. ამიტომ იგი *ჩაკეტილ* შუალედად იწოდება. მაგრამ ზოგ შემთხვევაში ჩაკეტილ შუალედზე ლაპარაკი არ შეიძლება. ასე, მაგალითად, უხერხულია ვილაპარაკოთ $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის ყოფაქცევაზე $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ შუალედში. ეს ფუნქცია ხომ სა-

ერთოდ განსაზღვრული არ არის, როცა $x=-\frac{\pi}{2}$ და $x=\frac{\pi}{2}$. ამიტომ $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ შუალედის ნაცვლად სჯობს ვილაპარაკოთ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ შუალედზე. ასეთი შუალედი არ მოიცავს $x=-\frac{\pi}{2}$ და $x=\frac{\pi}{2}$ კიდურა წერტილებს და ამიტომ მას ღ ი ა შუალედი ეწოდება.

შემდგომში საუბარი გვექნება როგორც ღია, ისე ჩაკეტილ შუალედებზე, ამავე დროს ყოველ ასეთ შემთხვევაში ცხადი იქნება, რომელ შუალედთან გვაქვს საქმე, ამიტომ საუბარი უბრალოდ შუალედებზე გვექნება. შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ ჩაკეტილი $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედი, ჩვეულებრივ, $[a, b]$ სახით ჩაიწერება, ხოლო ღია $a<x<b$ შუალედი—(a, b) სახით.

სავარჯიშოები

განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქციებისათვის ზრდადობისა და კლებადობის უბნები; ააგეთ ამ ფუნქციათა გრაფიკები (№ 1570—1585).

1570. $y=x^2+3x-108$.

1571. $y=-x^2+3x+4$.

1572. $y=|x^2+3x-10|$.

1573. $y=|-x^2+3x+4|$.

1574. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

1575. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

1576. $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

1577. $y=\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1578. $y=|\cos x|$.

1579. $y=\frac{x^2-4}{x-2}$.

1580. $y=\sin 2x$.

1581. $y=\cos\frac{x}{2}$.

1582. $y=\lg(1+x)$.

1583. $x=\lg(1-x)$.

1584. $y=\frac{5x+4}{x}$.

1585. $y=\frac{x+1}{x-1}$.

1586. განსაზღვრეთ ზრდადობისა და კლებადობის უბნები შემდეგი ფუნქციებისათვის:

ა) $y=2^{3-6x}$; ბ) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}$

1587. დაამტკიცეთ, რომ ორი მონოტონურად ზრდადი ფუნქციის ჯამი მონოტონურად ზრდადი ფუნქციაა.

1588. იქნება თუ არა ორი მონოტონურად ზრდადი ფუნქციის სხვაობა მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია?

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით $[a, b]$ შუალედში $y=f(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევის ზოგიერთ საკითხს. ამასთან, რა თქმა უნდა, ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ამ შუალედის ყოველ წერტილში.

უდიდესს ყველა იმ მნიშვნელობათაგან, რომელსაც ღებულობს $y=f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ შუალედში, უწოდებენ ფუნქციის აბსოლუტურ მაქსიმუმს, ხოლო უმცირესს — აბსოლუტურ მინიმუმს მოცემულ შუალედში.

მაგალითად, 274-ე ნახაზზე გრაფიკულად წარმოდგენილი $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტურ მინიმუმს $[0,7]$ შუალედში წარმოადგენს მნიშვნელობა $f(0)=1$, ხოლო აბსოლუტურ მაქსიმუმს — მნიშვნელობა $f(6)=5$.

აბსოლუტური მაქსიმუმისა და აბსოლუტური მინიმუმის გარდა, მათემატიკაში ხშირად საუბარია ლოკალურ (ე. ი. ადგილობრივ) მაქსიმუმებსა და მინიმუმებზე.

$[a, b]$ შუალედის შიგნით მდებარე $x=c$ წერტილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, თუ x-ის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც საკმაოდ ახლოსაა c-სთან,

$$f(x) \leqslant f(c). \tag{1}$$

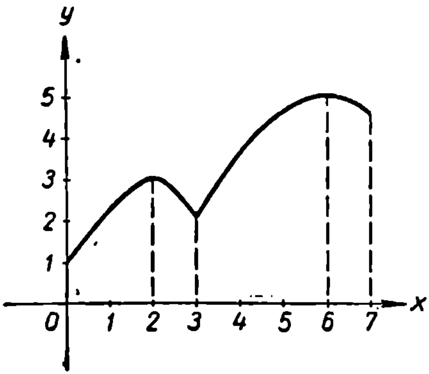
$y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს ლოკალური მაქსიმუმების წერტილებზე ამ ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმებს უწოდებენ. მაგალითად, 274-ე ნახაზზე გრაფიკულად წარმოდგენილია $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილები $x=2$ და $x=6$, ხოლო თვით ლოკალური მაქსიმუმებია $f(2)=3$ და $f(6)=5$ მნიშვნელობანი. $x=2$ და $x=6$ წერტილებში $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს უფრო დიდ მნიშვნელობებს, ვიდრე მათ საკმაოდ მახლობელ მეზობელ წერტილებში:

$$f(2)>f(x); \quad f(6)>f(x).$$

$y=f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც გრაფიკულად წარმოდგენილია 275-ე ნახაზზე, ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი იქნება, მაგალითად, $x=c$ წერტილი. c-სთან საკმაოდ მახლობელი ყველა x-ისათვის

$$f(x)=f(c),$$

ასე, რომ (1) პირობა სრულდება. $x=x_1$ წერტილიც ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია. x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელიც საკმაოდ ახლოსაა x_1-თან, $f(x)<f(x_1)$, თუ $x<x_1$, და $f(x)=f(x_1)$, თუ $x>x_2$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაშიც $f(x)\leqslant f(x_1)$; $x=x_2$ წერტილი კი უკვე აღარ იქნება ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი. მის მარცხნივ $f(x)=f(x_2)$, მაგრამ მარჯვნივ $f(x)>f(x_2)$. ამიტომ (1) პირობა არ სრულდება.



ნახ. 274.

$[a, b]$ შუალედის შიგნით მდებარე $x=c$ წერტილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, თუ x-ის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც საკმაოდ ახლოსაა c-სთან,

$$f(x)\geqslant f(c). \qquad (2)$$

ფუნქციის მნიშვნელობებს ლოკალური მინიმუმის წერტილზე ამ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი ეწოდება. მაგალითად, 274-ე ნახაზზე გრაფიკულად წარმოდგენილი $y=f(x)$ ფუნქციისათვის $x=3$ წერტილი არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, ხოლო თვით ლოკალურ მინიმუმს წარმოადგენს $f(3)=2$ მნიშვნელობა.

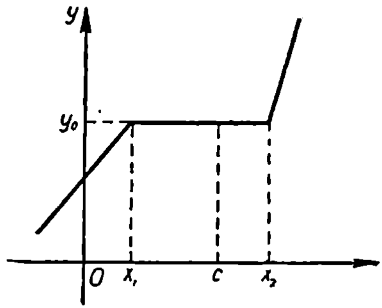
275-ე ნახაზზე გრაფიკულად წარმოდგენილი ფუნქციისათვის ლოკალური მინიმუმის წერტილი იქნება $x=x_2$ წერტილი. x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც საკმაოდ ახლოსაა x_2-სთან, $f(x)=f(x_2)$, თუ $x<x_2$ და $f(x)>f(x_2)$, თუ $x>x_2$. მაშასადამე, პირობა $f(x)\geqslant f(x_2)$ სრულდება. $x=c$ წერტილი, რომელიც ზემოთ აღვნიშნეთ, როგორც ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, ამავე დროს მინიმუმის წერტილიცაა, რადგან ყველა წერტილისათვის, რომლებიც საკმაოდ ახლოსაა მასთან, სრულდება პირობა:

$$f(x)=f(c)$$

და ამიტომ $f(x)\geqslant f(c)$ უტოლობა ფორმალურად სრულდება.

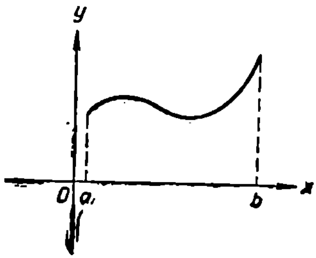
$f(x)$ ფუნქციის მინიმუმებისა და მაქსიმუმების წერტილებს ამ ფუნქციის ექსტრემუმების წერტილები ეწოდება. $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმების წერტილებში ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები ეწოდება.

274-ე ნახაზი გვიჩვენებს განსხვავებას აბსოლუტურ და ლოკალურ ექსტრემუმებს შორის. ამ ნახაზზე წარმოდგენილ $y=f(x)$ ფუნქციას $x=2$ წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, რომელიც (0;7) შუალედში აბსოლუტურ მაქსიმუმს არ წარმოადგენს. ზუსტად ასევე, $x=3$ წერტილში ამ ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი, რომელიც [0,7] შუალედში არ წარმოადგენს აბსოლუტურ მინიმუმს.



ნახ. 275.

თუ $[a, b]$ შუალედში $y=f(x)$ ფუნქცია აღწევს აბსოლუტურ მაქსიმუმს ამ შუალედის შიგა წერტილში, მაშინ ეს აბსოლუტური მაქსიმუმი, ცხადია, ლოკალური მაქსიმუმიც იქნება (იხ. მაგალითად, ნახ. 274, $x=6$ წერტილში). მაგრამ, შესაძლებელია მოხდეს, რომ ეს აბსოლუტური მაქსიმუმი მიღწეული იყოს შუალედის არა შიგა წერტილში, არამედ მის რომელიმე კიდურა წერტილში (ნახ. 276), მაშინ იგი არ იქნება ლოკალური მაქსიმუმი. აქედან გამომდინარეობს $[a, b]$ შუალედში $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმის მოძებნის შემდეგი წესი:



ნახ. 276.

1. ვპოულობთ $y=f(x)$ ფუნქციის ყველა ლოკალურ მაქსიმუმს მოცემულ შუალედში.

2. მიღებულ მნიშვნელობებს დავურთავთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობებს შუალედის კიდურა წერტილებში, ე. ი. $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობებს.

ყველა ამ მნიშვნელობათაგან უდიდესი მოგვცემს $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტურ მაქსიმუმს $[a, b]$ შუალედში.

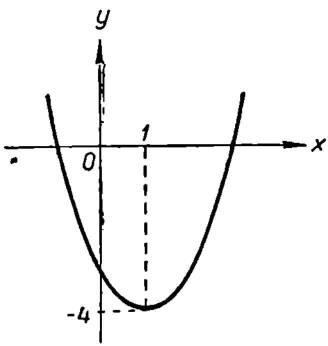
ანალოგიურად მოიძებნება $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი $[a, b]$ შუალედში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $y=x^2-2x-3$ ფუნქციის ყველა ლოკალური ექსტრემუმი. როგორია ამ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობანი [0,5] შუალედში?

გარდავქმნათ მოცემული ფუნქცია მისგან სრული კვადრატის გამოყოფით:

$$y=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4.$$

ახლა ადვილია მისი გრაფიკის აგება. ეს იქნება ზევითკენ მიმართული პარაბოლა წვეროთი (1,—4) წერტილში (ნახ. 277). ლოკალური ექსტრემუმის ერთადერთი წერტილია $x=1$ წერტილი. ამ წერტილში ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი, რომელიც —4-ის ტოლია. მოცემული ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები რომ ვიპოვოთ [0,5] შუალედში, შევნიშნოთ, რომ, როცა $x=0$, $y=-3$, ხოლო, თუ $x=5$, $y=12$. სამი მნიშვნელობიდან: —4, —3 და 12 უმცირესია —4, ხოლო უდიდესია 12. ამგვარად, მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა (აბსოლუტური (მინიმუმი) [0,5] შუალედში —4-ის ტოლია; იგი მიღწეული იქნება, როცა $x=1$. უდიდესი მნიშვნელობა აბსოლუტური მაქსიმუმი) უდრის 12-ს. იგი მიღწეული იქნება, როცა $x=5$.



ნახ. 277.

სავარჯიშოები

1589. თქვენთვის ცნობილ ფუნქციათა შორის რომელია ისეთი, რომელსაც მთელს რიცხვით ღერძზე:

ა) სრულიად არა აქვს ლოკალური ექსტრემუმი;

ბ) აქვს მხოლოდ ერთი ლოკალური ექსტრემუმი;

გ) აქვს ლოკალურ ექსტრემუმთა უსასრულო სიმრავლე.

№ 1590—1600 სავარჯიშოებში იპოვეთ მოცემულ ფუნქციათა ლოკალური ექსტრემუმების წერტილები და თვით ლოკალური ექსტრემუმები. გაარკვიეთ, როგორია ეს ექსტრემუმები (მაქსიმუმები, თუ მინიმუმები):

1590. $y=(x-1)^2+5$.

1591. $y=3-(x+2)^2$.

1592. $y=12x^2-x-1$.

1593. $y=(x-1)(x-3)$.

1594. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

1595. $y=\dfrac{1}{2-\cos x}$.

1596. $y=\sqrt{x^2-2x+8}$.

1597. $y=-x(x+2a)$

1598. $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1599. $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

1600. $y=\sin x+\cos x$.

ვიპოვოთ მოცემულ ფუნქციათა აბსოლუტური ექსტრემუმები მითითებულ შუალედებში (№ 1601—1603):

1601. $y=-2x^2-3x-1$ $|x|\leqslant 2$ შუალედში.

1602. $y=|x^2+5x+6|$ $[-5,\ 4]$ შუალედში.

1603. $y=\sin x-\cos x$ $\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right]$ შუალედში.

1604. ვიპოვოთ $y=(x-3)(x-5)$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმები შუალედებში:

ა) $[2,3]$; ბ) $[3,4]$; გ) $[4,5]$; დ) $[2,5]$.

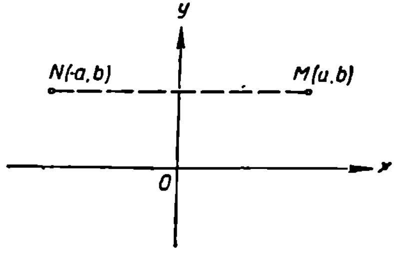
ლუწი და კენტი ფუნქციები § 206

$y=f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ე წ ო დ ე ბ ა ლ უ წ ი, თ უ x-ი ს ყ ვ ე ლ ა მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს ა მ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ი ს ა რ ი დ ა ნ

$$f(-x)=f(x).$$

ლუწი ფუნქციების მაგალითებად გამოდგება $y=x^2$, $y=\cos x$, $y=|x|$ და სხვ. ფუნქციები.

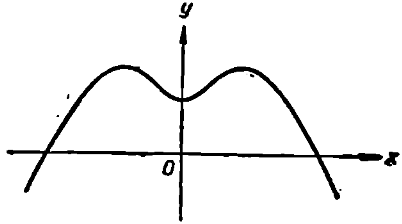
ვთქვათ, M წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(a,\ b)$, ეკუთვნის ლუწი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. მაშინ $b=f(a)$. რადგან $f(x)$ ლუწია, ამიტომ $f(-a)=f(a)=b$. მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ $M\ (a,\ b)$ წერტილთან ერთად, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს უნდა ეკუთვნოდეს N წერტილიც, კოორდინატებით $(-a,\ b)$. ეს ორი წერტილი y ღერძის მიმართ ურთიერთსიმეტრიულია (ნახ. 278).



ნახ. 278.

ამგვარად, რომელი წერტილიც არ უნდა ავიღოთ ლუწი ფუნქციის გრაფიკზე, მასზე უთუოდ მოიძებნება მეორე წერტილი, რომელიც პირველის სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ. აი, რის გამო-

წარმოადგენს **ლუწი ფუნქციის გრაფიკი ორდინატათა ღერძის მიმართ სიმეტრიულ წირს** (ერთი ასეთი გრაფიკთაგანი ნაჩვენებია 279-ე ნახაზზე).



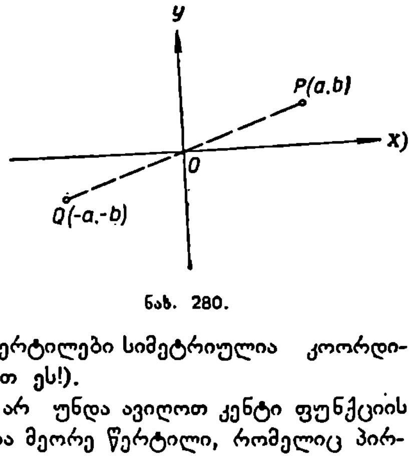
ნახ. 279.

$y=f(x)$ *ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან*

$$f(-x)=-f(x).$$

კენტ ფუნქციათა მაგალითებად გამოდგება $y=x$, $y=x^3$, $y=\sin x$ და ა. შ. ფუნქციები.

ვთქვათ, P წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(a,\ b)$, ეკუთვნის $y=f(x)$ კენტი ფუნქციის გრაფიკს; მაშინ $b=f(a)$. რადგან $f(x)$ ფუნქცია კენტია, $f(-a)=-f(a)$. ამის გამო, $f(-a)=-b$. უკანასკნელი ტოლობა აღნიშნავს, რომ Q წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(-a,\ -b)$, უნდა ეკუთვნოდეს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. მაშ, თუ P წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(a,\ b)$, ეკუთვნის $y=f(x)$ კენტი ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ ამ გრაფიკს უნდა ეკუთვნოდეს Q წერტილიც, კოორდინატებით $(-a,\ -b)$ (ნახ. 280). P და Q წერტილები სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ (დაამტკიცეთ ეს!).



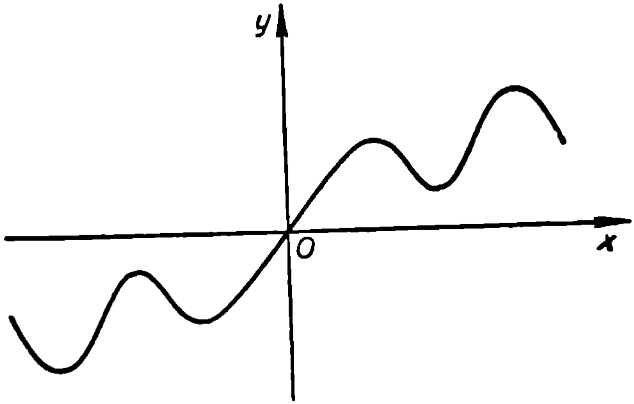
ნახ. 280.

ამგვარად, რომელი წერტილიც არ უნდა ავიღოთ კენტი ფუნქციის გრაფიკზე, მასზე უთუოდ მოიძებნება მეორე წერტილი, რომელიც პირველის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. აი რატომ არის, **რომ ნებისმიერი კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ** (ნახ. 281).

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ყოველი ფუნქცია ან ლუწი იქნება, ან კენტი. მრავალი ფუნქცია არსებობს, რომლებიც არც ლუწია და არც კენტი. ასე, მაგალითად, $f(x)=x+x^2$ ფუნქციისათვის გვექნება: $f(-x)=-x+x^2$. ორი ტოლობიდან: $f(-x)=f(x)$ და $f(-x)=-f(x)$ არც ერთს არა აქვს ადგილი. მაშასადამე, მოცემული ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

გარდა ამისა, ლაპარაკი იმაზე, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია ლუწია თუ

კენტი, შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ ფუნქცია განსაზღვრულია $x=a$-სათვის, იგი განსაზღვრული უნდა იყოს აგრეთვე $x=-a$-სათვის. წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(x)$ და $(f-x)$ გამოსახულებათა შედარებას აზრი არა აქვს. მაგალითად, $y=\lg x$ ფუნქცია განსაზღვრულია არგუმენტის მხოლოდ დადებითი



ნახ. 281.

მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ $\lg x$ და $\lg(-x)$ გამოსახულებათა შორის ერთ-ერთს ნამდვილად არა აქვს აზრი. მაშასადამე, ლოგარითმული ფუნქცია ლუწია თუ კენტი, ამაზე ლაპარაკს აზრი არა აქვს.

სავარჯიშოები

1605. (ზეპირად). მოცემულ ფუნქციათა შორის უჩვენეთ ლუწი და კენტი:

1) $y=x^{100}$;
2) $x=x^{-3}$;
3) $y=\sqrt{x}$
4) $y=\sqrt[3]{x}$;
5) $y=x^4-2x^3+3$,
6) $y=x^3-5x-1$;
7) $y=\sin(x^2)$;
8) $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$;
9) $y=\sin x+\operatorname{cosec} x$;
10) $y=x+\sin x$;
11) $y=2^x+2^{-x}$;
12) $y=\dfrac{\sin x}{x}$;
13) $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

1606. მოცემულ ფუნქციათა შორის რომელია ლუწი და რომელი კენტი:

1) $y=10^{-x}-10^{x}$; 4) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $y=\sin(-x)$; 5) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $y=\cos(-x)$; 6) $y=\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$?

1607. დაამტკიცეთ, რომ ორი ლუწი ფუნქციის ჯამი, სხვაობა, ნამრავლია და განაყოფი ლუწი ფუნქციაა.

1608. დაამტკიცეთ, რომ ორი კენტი ფუნქციის ნამრავლი და განაყოფი ლუწი ფუნქციაა.

1609. შეიძლება თუ არა, ფუნქცია ერთდროულად ლუწიც იყოს და კენტიც?

1610*. რას იტყვით $f(x)$ ფუნქციის ლუწობის შესახებ, თუ ცნობილია, რომ $|f(x)|$ ფუნქცია: ა) ლუწია; ბ) კენტია?

1611. ფუნქცია, რომელიც მონოტონურია მთელს რიცხვით წრფეზე, შეიძლება თუ არა იყოს: ა) ლუწი; ბ) კენტი?

1612. როგორ ავაგოთ $y=f(x)$ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი, თუ იგი მოცემულია მხოლოდ $x\geqslant 0$-სათვის?

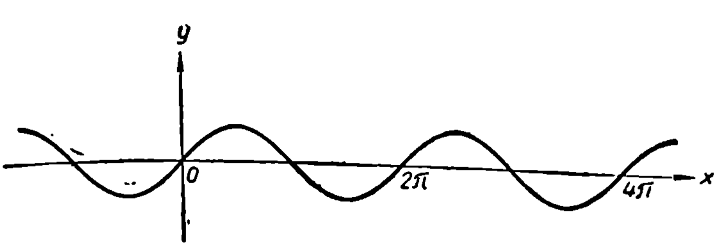
პერიოდული ფუნქციები § 207

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ისეთი რიცხვი $T\neq 0$, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან

$$f(x+T)=f(x).$$

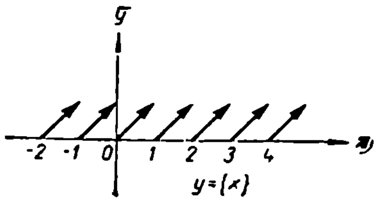
T რიცხვს ამ შემთხვევაში ფუნქციის პერიოდი ეწოდება.

პერიოდულია, მაგალითად, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y=\sin x$



ნახ. 282.

და $y=\cos x$. მათი პერიოდია 2π. პერიოდული არატრიგონომეტრიული ფუნქციის მაგალითია ფუნქცია $y=\{x\}$, რომელიც ყოველ x რიცხვს შეუსაბამებს მის წილადურ ნაწილს*. მაგალითად, $\{3,56\}=0,56$; $\{2,01\}=0,01$ და ა. შ. თუ ნებისმიერ x რიცხვს მივუმატებთ 1-ს, მაშინ ამ რიცხვის მხოლოდ მთელი ნაწილი შეიცვლება, ხოლო x რიცხვის წილადური ნაწილი უცვლელი დარჩება. მაშასადამე, $\{x+1\}=\{x\}$ და ამიტომ $y=\{x\}$ ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით 1.



ნახ. 283.

$f(x+T)=f(x)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა პერიოდულად მეორდება პერიოდით T. ეს გარემოება თავის ანარეკლს პოულობს პერიოდული ფუნქციის გრაფიკულ გამოსახულებაში. ასე, მაგალითად, $\{0,2\pi\}$ შუალედში სინუსოიდას ისეთივე ფორმა აქვს, როგორიც $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ და ა. შ. შუალედებში (ნახ. 282). 283-ე ნახაზზე წარმოდგენილია $y=\{x\}$ ფუნქციის გრაფიკი. $y=\{x\}$ ფუნქციის პერიოდულობა იმას გვიჩვენებს, რომ მის გრაფიკს $[0,1]$ შუალედში ისეთივე ფორმა აქვს, როგორიც $[1, 2]$, $[2, 3]$ და ა. შ. შუალედებში.

თუ T არის $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ $2T$, $3T$, $4T$ და ა. შ. აგრეთვე ამ ფუნქციის პერიოდები იქნება. მართლაც,

$$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x),$$
$$f(x+3T)=f[(x+2T)+T]=f(x+2T)=f(x)$$

და ა. შ. გარდა ამისა, $f(x)$ ფუნქციის პერიოდად შეიძლება ჩაითვალოს ნებისმიერი შემდეგ რიცხვთაგან: $-T$, $-2T$, $-3T$ და ა. შ.

მართლაც,

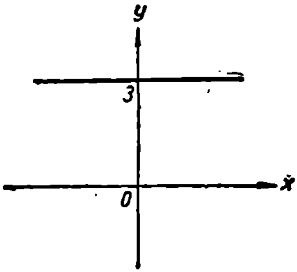
$$f(x-T)=f[(x-T)+T]=f(x),$$
$$f(x-2T)=f[(x-2T)+2T]=f(x).$$

და ა. შ. მაშ, თუ T რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს მთელი n, nT რიცხვიც ამ ფუნქციის პერიოდი იქნება. ამიტომ ყოველ პერიოდულ ფუნქციას პერიოდების უსასრულო სიმრავლე აქვს. მაგალითად, $y=\sin x$ ფუნქციის პერიოდად ჩაითვლება 2π, 4π, 6π, -2π, -4π,.... რიცხვებიდან ნებისმიერი რიცხვი, ხოლო $y=\{x\}$ ფუნქციის პერიოდად — ნებისმიერი რიცხვი 1, 2, 3, —1, —2, —3 და ა. შ. რიცხვებიდან.

---

* დაწვრილებით წილადური ნაწილის შესახებ იხ. VIII თავში, § 187

თუ ლაპარაკია $y=f(x)$ ფუნქციის პერიოდზე, ჩვეულებრივ, გულისხმობენ უმცირეს დადებით პერიოდს. ასე, მაგალითად, ვამბობთ, რომ $y=\sin x$ ფუნქციის პერიოდია 2π, $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის პერიოდია π. $\{x\}$ ფუნქციის პერიოდია 1 და ა. შ.



ნახ. 284.

თუმცა მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ისიც, რომ პერიოდულ ფუნქციას შეიძლება არც გააჩნდეს უმცირესი დადებითი პერიოდი. ასე, მაგალითად, $f(x)=3$ ფუნქციისათვის (ნახ. 284) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი პერიოდს წარმოადგენს, მაგრამ ნამდვილ დადებით რიცხვთა შორის არ არსებობს უმცირესი. ამიტომ $f(x)=3$ ფუნქციას არა აქვს უმცირესი დადებითი პერიოდი, მიუხედავად იმისა, რომ მას გააჩნია პერიოდების უსასრულო სიმრავლე.

სავარჯიშოები

მოცემული ფუნქციებიდან (№ 1613—1621) თითოეულისათვის იპოვეთ უმცირესი დადებითი პერიოდი:

1613. $y=\sin 2x$.

1614. $y=\cos\frac{x}{2}$.

1615. $y=\operatorname{tg} 3x$.

1616. $y=\cos(1-2x)$.

1617. $y=\sin x\cos x$.

1618. $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

1619. $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1620. $y=\sin^2 x$.

1621. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1622. დაამტკიცეთ, რომ ჯამი და ნამრავლი ორი პერიოდული ფუნქციისა, რომელთა პერიოდი ერთი და იგივე T რიცხვია, პერიოდული ფუნქციაა T პერიოდით.

1623*. დაამტკიცეთ, რომ $y=\sin x+\{x\}$ ფუნქცია, რომელიც ორი $y=\sin x$ და $y=\{x\}$ პერიოდული ფუნქციის ჯამია, თვით არ არის პერიოდული ფუნქცია. ხომ არ ეწინააღმდეგება ეს წინა ამოცანის შედეგს?

1624. როგორ დავასრულოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის აგება, თუ ფუნქცია პერიოდულია T პერიოდით და გრაფიკი მოცემულია მხოლოდ $[0, T)$ შუალედში?

$y=f(x)$ ტოლობა x ცვლადი სიდიდის ყოველ დასაშვებ მნიშვნელობას შეუსაბამებს y ცვლადი სიდიდის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობას. მაგრამ, ზოგ შემთხვევაში $y=f(x)$ თანაფარდობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ისეთი ტოლობა, რომელიც y ცვლადი სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას შეუსაბამებს x ცვლადი სიდიდის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობას. ეს გარემოება ნათელვყოთ კონკრეტულ მაგალითებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $y=2x-1$ ტოლობა y-ის ყოველ მნიშვნელობას შეუსაბამებს x-ის შემდეგ მნიშვნელობას:

$$x=\frac{y+1}{2}.$$

მაგალითად, თუ $y=1$, $x=1$; თუ $y=2$, $x=1{,}5$; თუ $y=3$, $x=2$ და ა. შ. ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ $y=2x-1$ ტოლობა განსაზღვრავს x-ს, როგორც y ცვლადი სიდიდის რაღაც ფუნქციას. ცხადი სახით ეს ფუნქცია ასე ჩაიწერება: $x=\frac{y+1}{2}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $y=2^x$ ტოლობა y-ის ყოველ დადებით მნიშვნელობას შეუსაბამებს x-ის შემდეგ მნიშვნელობას: $x=\log_2 y$. მაგალითად, თუ $y=1$, $x=\log_2 1=0$; თუ $y=2$, $x=\log_2 2=1$; თუ $y=3$, $x=\log_2 3$ და ა. შ. მაშასადამე, $y=2^x$ ტოლობა განსაზღვრავს x-ს, როგორც y ცვლადი სიდიდის რაღაც ფუნქციას. ცხადი სახით ეს ფუნქცია ასე ჩაიწერება:

$$x=\log_2 y.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. თუ $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, მაშინ $y=\sin x$ ტოლობა y-ის ყოველ მნიშვნელობას $[-1, 1]$ შუალედიდან შეუსაბამებს x რიცხვს რომელიც $\arcsin y$-ის ტოლია. მაგალითად, როცა $y=-1$, $x=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$; როცა $y=0$, $x=\arcsin 0=0$; როცა $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$ და შ. მაშასადამე, $y=\sin x$ ტოლობა $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ დამატებითი პირობისას განსაზღვრავს x-ს, როგორც y ცვლადი სიდიდის რაღაც ფუნქციას. ცხადი სახით ეს ფუნქცია შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$x=\arcsin y.$$

ზოგადად, ვთქვათ, რომ $y=f(x)$ ტოლობის მიხედვით y სიდიდის ყოველი დასაშვები მნიშვნელობისათვის შესაძლებელია x სიდიდის ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობის აღდგენა. მაშინ ეს ტოლობა განსაზღვრავს x-ს, როგორც y-ის რაღაც ფუნქციას. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია φ ასოთი:

$$x=\varphi(y).$$

ამ ფორმულაში y ასრულებს არგუმენტის როლს, ხოლო x— ფუნქციის როლს. ჩვეულებრივ, x ასოს იყენებენ არგუმენტის აღსანიშნავად, ხოლო y ასოს — ფუნქციის აღსანიშნავად. ამიტომ იმ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, რომელიც φ ასოთია აღნიშნული, ჩვენ ასე გადავწერთ:

$$y=\varphi(x).$$

ასეთნაირად განსაზღვრულ $y=\varphi(x)$ ფუნქციას $y=f(x)$ ფუნქციის მიმართ შექცეული ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითები. 1. $y=2x-1$ განტოლებიდან მივიღებთ $x=\frac{y+1}{2}$. ამიტომ $y=\frac{x+1}{2}$ ფუნქცია $y=2x-1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა.

2. $y=2^x$ განტოლებიდან მივიღებთ $x=\log_2 y$. ამიტომ $y=\log_2 x$ ფუნქცია $y=2^x$ ფუნქციის შექცეულია.

3. როცა $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $y=\sin x$ ტოლობიდან მივიღებთ: $x=\arcsin y$. ამიტომ $y=\arcsin x$ ფუნქცია $y=\sin x$ ფუნქციის შექცეულია $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ შუალედში.

შევნიშნავთ, რომ $y=f(x)$ ფუნქციისა და მისი შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის განსაზღვრისა და ცვლილების არეები, ასე ვთქვათ, როლებს იცვლიან. ის, რაც $f(x)$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არე იყო, შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციისათვის ცვლილების არედ იქცევა, ხოლო ის, რაც $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ცვლილების არე იყო, შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არედ იქცევა. ასე, მაგალითად, $y=2^x$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა, ხოლო ცვლილების არე — ყველა დადებითი რიცხვის ერთობლიობა. მისი შექცეული $y=\log_2 x$ ფუნქციისათვის, პირიქით, ყველა დადებითი რიცხვის ერთობლიობა წარმოადგენს განსაზღვრის არეს, ხოლო ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა — ცვლილების არეს.

არსებობს თუ არა ნებისმიერი $y=f(x)$ ფუნქციისათვის მისი შექცეული ფუნქცია $y=\varphi(x)$? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განვიხილოთ ორი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $y=x^2$ ფორმულის მიხედვით y-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება x-ის ორი მნიშვნელობა; მაგალითად, $y=1$ მნიშვნელობას შეესაბამება $x=+1$, $x=-1$ მნიშვნელობანი; $y=4$ მნიშვნელობას შეესაბამება $x=2$ და $x=-2$ მნიშვნელობანი და ა. შ. ამიტომ, თუ $y=x^2$ ფუნქციას განვიხილავთ მთელს რიცხვით წრფეზე (ანუ x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის), მას არ ექნება შექცეული ფუნქცია. მაგრამ, თუ ამ ფუნქციას განვიხილავთ x-ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის, მაშინ მისთვის შექცეული ფუნქცია იარსებებს. დ ა დ ე ბ ი თ ი რიცხვის კვადრატის მნიშვნელობის მიხედვით ეს რიცხვი ცალსახად აღსდგება. ამ შემთხვევაში შექცეული ფუნქცია შეიძლება $y=\sqrt{x}$ სახით ჩაიწეროს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. y სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც $[-1,\ 1]$ შუალედშია აღებული, $y=\sin x$ ფორმულის მიხედვით x-ის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე შეესაბამება, მაგალითად, თუ $y=0$, x-ის ასეთი მნიშვნელობებია 0, π, 2π, 3π და ა. შ.; თუ $y=1$, $x=\frac{\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{2},\quad \frac{9\pi}{2}$ და ა. შ. ამიტომ, თუ $y=\sin x$ ფუნქციას განვიხილავთ მთელს რიცხვით წრფეზე (ანუ x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის), მას არ ექნება შექცეული ფუნქცია. მაგრამ, თუ ამ ფუნქციას განვიხილავთ მხოლოდ $\left[-\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, მაშინ y-ის მნიშვნელობათა მიხედვით x-ის მნიშვნელობები ცალსახად აღდგება. მაშასადამე, როცა $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $y=\sin x$ ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია $y=\arcsin x$.

ძნელი არაა შევნიშნოთ ის საერთო, რასაც მოცემული ფუნქციების შექცეული ფუნქციების მოძებნისას ადგილი ჰქონდა ორსავე მაგალითში. თითოეული მოცემული ფუნქციისათვის გამოვყოფდით შუალედს, რომელშიც იგი მონოტონურია. შეიძლება დამტკიცდეს ზოგადი დებულება: **თუ $y=f(x)$ ფუნქცია მონოტონურია (a, b) შუალედში, მაშინ $a\leqslant x\leqslant b$ მნიშვნელობებისათვის არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია.**

სავარჯიშოები

№ 1625—1628 სავარჯიშოებში იპოვეთ მოცემული ფუნქციების შექცეული ფუნქციები. დაადგინეთ განსაზღვრის არეები და ცვლილების არეები როგორც მოცემული, ისე მათი შექცეული ფუნქციებისათვის.

1625. $y=x^3$. **1626.** $y=\log_{\frac{1}{}} x$. **1627.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

1628. $y=x^2 (x<0)$.

1629. დაამტკიცეთ, რომ $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ წრფივი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია არის წრფივი ფუნქცია.

1630. დაამტკიცეთ, რომ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ წილად-წრფივი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია თვით წილად-წრფივია.

1631. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს a, b, c და d რიცხვები, რომ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ წილად-წრფივი ფუნქცია იგივურად უდრიდეს მის შექცეულ ფუნქციას?

მოიყვანეთ რამდენიმე მაგალითი.

1632. არსებობს თუ არა $y=\cos x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია შუალედში

ა) $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; ბ) $0\leqslant x\leqslant\pi$; გ) $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$?

1633. არსებობს თუ არა $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია შუალედში:

ა) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; ბ) $0\leqslant x<\pi$; გ) $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$?

1634. არსებობს თუ არა $y=\{x\}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია შუალედში:

ა) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; ბ) $0\leqslant x\leqslant 1$; გ) $0\leqslant x<1$; დ) $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$?

პირდაპირი და შექცეული ფუნქციების გრაფიკთა ურთიერთგანლაგება § 109

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა და მისი შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ურთიერთგანლაგებას. ამისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ლემა.

ლ ე მ ა. **სიბრტყის წერტილები, რომელთა კოორდინატებია (a, b) და (b, a), ურთიერთსიმეტრიულია პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ.**

დამტკიცება. ვთქვათ, P წერტილს აქვს (a, b) კოორდინატები, ხოლო Q წერტილს — კოორდინატები (b, a) (ნახ. 285).

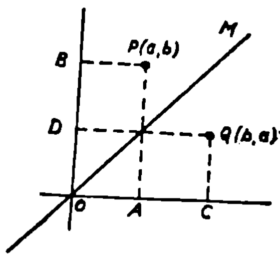
დავუშვათ ამ წერტილებიდან მართობები კოორდინატთა ღერძებზე: მივიღებთ:

$$OA=OD=a;\ OB=OC=b.$$

გადავკეცოთ ნახაზი OM წრფეზე, რომელიც წარმოადგენს პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისას. მაშინ y ღერძი გაჰყვება x ღერძს, რადგან $\angle MOB=\angle MOC$. B წერტილი შეუთავსდება C წერტილს, რადგან $OB=OC$, BP გაჰყვება CQ-ს, რადგან C წერტილზე შეიძლება x ღერძის მართობული მხოლოდ ერთი წრფის გავლება. ხოლო, რადგან $BP=CQ$, P წერტილი შეუთავსდება Q წერტილს.

ამრიგად, თუ ნახაზს OM წრფეზე გადავკეცავთ, მაშინ P და Q წერტილები შეთავსდებიან. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ისინი ურთიერთსიმეტრიული არიან OM ბისექტრისის მიმართ.

ლემა დამტკიცებულია.



ნახ. 285.

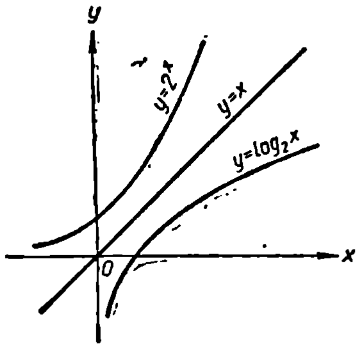
ვთქვათ, ახლა P წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(a,\ b)$, ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. მაშინ $y=b$ მნიშვნელობას $y=f(x)$ ტოლობა შეუსაბამებს $x=a$ მნიშვნელობას. ეს კი ნიშნავს, რომ Q წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(b,\ a)$, უნდა ეკუთვნოდეს შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკს.

ამგვარად, თუ P წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(a,\ b)$, ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ Q წერტილი, რომლის კოორდინატებია (b,a), უნდა ეკუთვნოდეს შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ეს წერტილები სიმეტრიულია. პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ.

მაშასადამე, რომელი P წერტილიც არ უნდა ავიღოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე, შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე უეჭველად მოიძებნება Q წერტილი, რომელიც P წერტილის სიმეტრიულია პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ. აი, რატომ არის, რომ **ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები ურთიერთსიმეტრიულია პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ** (იხ. მაგალითად, ნახ. 286, რომელზედაც წარმოდგენილია $y=2^x$ და $y=\log_2 x$ ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები).

სავარჯიშოები

ერთსა და იმავე ნახაზზე ააგეთ მოცემული და მათი შექცეული ფუნქციების გრაფიკები (№ 1635—1641):



ნახ. 286.

1635. $y=x^2(x\geqslant 0)$

1636. $y=\frac{1}{3}x+1$.

1637. $y=\begin{cases} x, & \text{თუ } x<0, \\ 2x, & \text{თუ } x\geqslant 0. \end{cases}$

1638. $y=\sqrt{1-x}$.

1639. $y=\begin{cases} 0{,}5x+2, & \text{თუ } x\geqslant 0, \\ 2x+2, & \text{თუ } x<0. \end{cases}$

1640. $y=\begin{cases} x^2, & \text{თუ } x\geqslant 0, \\ x^3, & \text{თუ } x<0. \end{cases}$

1641. $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1642. როგორია $y=f(x)$ ფუნქციის თავისებურებანი, თუ ეს ფუნქცია იგივურად უდრის მის შებრუნებულ ფუნქციას? პასუხი განმარტეთ მაგალითებზე (იხ., მაგალითად, ამოცანა № 1631).

წინათ შესწავლილი ფუნქციების თვისებათა და გრაფიკების მოკლე მიმოხილვა § 310

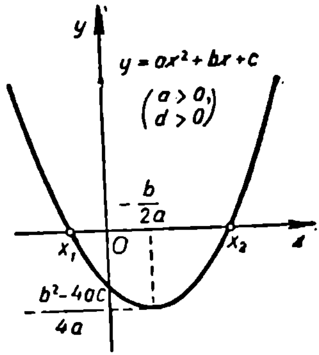
ამ პარაგრაფში მოცემული იქნება წინათ შესწავლილ ფუნქციათა თვისებებისა და გრაფიკების მოკლე მიმოხილვა. ამასთანავე, ჩვენ შემდეგ გეგმას გავყვებით: 1) ფუნქციის განსაზღვრის არე, 2) ფუნქციის ცვლილების არე, 3) ფუნქციის ლუწ-კენტობა, 4) ფუნქციის პერიოდულობა, 5) ნიშანმუდმივობის შუალედები, 6) ფუნქციის ნულები, ესე იგი არგუმენტის ის მნიშვნელობანი, რომელთათვის ფუნქცია ნულად იქცევა, 7) ფუნქციის მონოტონურობა, 8) ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები, 9) ფუნქციის ყოფაქცევა „განსაკუთრებული" წერტილების მახლობლობაში (მაგალითად, $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის ყოფაქცევა $x=0$ წერტილის მახლობლობაში).

ეს რიგი სავალდებულო არაა და საჭიროების შემთხვევაში შეიძლება შეიცვალოს. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ სასარგებლოა გეგმის თითოეული პუნქტის განხორციელებას ყოველთვის თან ახლდეს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია გამოსაკვლევი ფუნქციის გრაფიკზე.

1. კვადრატული ფუნქცია $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

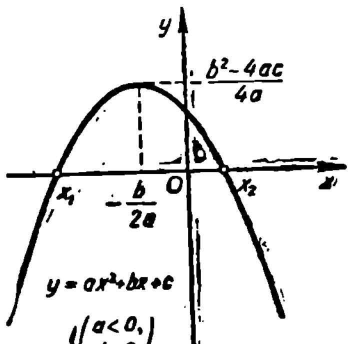
ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ასე რომ, მისი განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკია პარაბოლა, რომლის წვეროს კოორდინატებია $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

როცა $a>0$, პარაბოლა მიმართულია ზევით (ნახ. 287), ხოლო, როცა $a<0$, — ქვევით (ნახ. 288). თუ $a>0$, მაშინ მოცემული ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა იმ რიცხვის ერთობლიობა, რომლებიც მეტი ან ტოლია $-\frac{b^2-4ac}{4a}$-სი.



ნახ. 287.

თუკი $a<0$, მაშინ მისი ცვლილების არეა ყველა იმ რიცხვის ერთობლიობა, რომლებიც ნაკლები ან ტოლია $-\frac{b^2-4ac}{4a}$-სი.



ნახ. 288.

როცა $b\neq 0$, $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია არ იქნება არც ლუწი, არც კენტი, ვინაიდან

$$ax^2-bx+c=ax^2+bx+c,$$

$$[f(-x)=f(x)]$$

და

$$ax^2-bx+c=-(ax^2+bx+c),$$

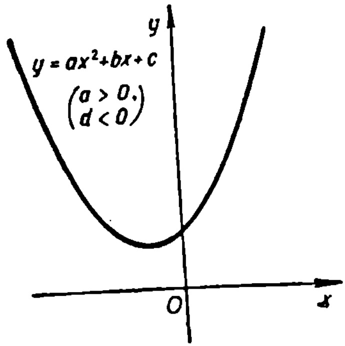
$$[f(-x)=-f(x)]$$

ტოლობებიდან იგივურად არც ერთი არ სრულდება. როცა $b=0$, მაშინ კვადრატული ფუნქცია ღებულობს $y=ax^2+c$ სახეს და ამიტომ ლუწი ფუნქციაა.

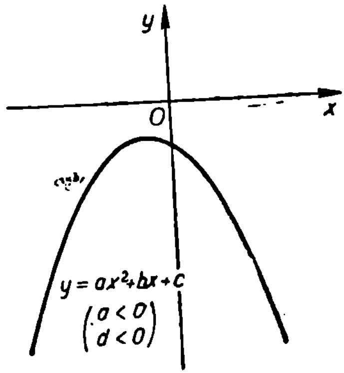
მოცემული ფუნქცია არაპერიოდულია. თუ

$$d=b^2-4ac$$

დისკრიმინანტი უარყოფითია, მაშინ ფუნქციას ნულები არა აქვს. ამ შემთხვევაში ყველა მის მნიშვნელობას აქვს ერთი და იგივე ნიშანი, კერ-



ნახ. 289.



ნახ. 290.

ძოდ, a კოეფიციენტის ნიშანი (იხ. ნახ. 289 $a>0$-სათვის და ნახ. 290 $a<0$-სათვის). თუ d დისკრიმინანტი დადებითია, მაშინ ფუნქციას აქვს ორი ნული:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{და} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

თუ, ამასთანავე, $a>0$, მაშინ ფუნქცია დადებითია, როცა $x<x_1$ და $x>x_2$, ხოლო უარყოფითია, როცა $x_1<x<x_2$ (იხ. ნახ. 287). თუ $d>0$, ხოლო $a<0$, მაშინ ფუნქცია დადებითია, როცა $x_1<x<x_2$, ხოლო უარყოფითია, როცა $x<x_1$, და $x>x_2$ (იხ. ნახ. 288).

ბოლოს, შესაძლოა შემთხვევაც, როცა $d=0$. მაშინ კვადრატულ ფუნქციას აქვს ერთადერთი ნული:

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

ყველა $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ მნიშვნელობისათვის იგი ინარჩუნებს ერთსა და იმავე ნიშანს, კერძოდ, a კოეფიციენტის ნიშანს.

იმ შემთხვევაში, როცა $a>0$, კვადრატული $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია მონოტონურად კლებულობს, თუ $x<-\dfrac{b}{2a}$, და მონოტონურად იზრდება, თუ $x>-\dfrac{b}{2a}$ (იხ. ნახ. 287 და ნახ. 289). იმ შემთხვევაში, როცა

$a<0$, იგი, პირიქით, მონოტონურად იზრდება, თუ $x<-\frac{b}{2a}$, და მონოტონურად კლებულობს, თუ $x>-\frac{b}{2a}$ (იხ. ნახ. 288 და ნახ. 290).

მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთადერთი ლოკალური ექსტრემუმი:

$$y_{\text{ექსტრ.}}=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

ამ ექსტრემუმს აღწევს ფუნქცია, როცა $x=-\frac{b}{2a}$ და იგი მინიმუმია, თუ $a>0$ (ნახ. 287 და ნახ. 289), და მაქსიმუმია, თუ $a<0$ (ნახ. 288 და ნახ. 290).

2. ხარისხოვანი ფუნქცია $y=x^r$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე დამოკიდებულია r-ზე. მაგალითად, თუ $r=1(y=x)$, განსაზღვრის არე იქნება ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, თუ $r=\frac{1}{2}(y=\sqrt{x})$ — არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე, ხოლო თუ $r=0(y=x^0)$ — ნულისგან განსხვავებული ყველა რიცხვის სიმრავლე, x-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის $y=x^2$ ფუნქცია ყოველთვის განსაზღვრულია, იმისდა მიუხედავად, თუ როგორია r.

$y=x^r$ ფუნქციის ცვლილების არე აგრეთვე დამოკიდებულია r-ზე. მაგალითად, $y=x(r=1)$ ფუნქციას შეუძლია მიიღოს ყველა ნამდვილი მნიშვნელობა, $y=x^2(r=2)$ ფუნქციას — მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობა, ხოლო $y=x^0(r=0)$ ფუნქციას — მხოლოდ 1-ის ტოლი მნიშვნელობა.

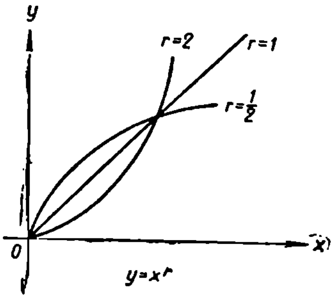
ხარისხოვან ფუნქციათა შორის არის ლუწიც და კენტიც. მაგალითად, $y=x^4$, $y=x^2$ ლუწი ფუნქციებია, ხოლო $y=x^3$, $y=x^{-3}$ — კენტი. ზოგიერთი ხარისხოვანი ფუნქცია (მაგალითად, $y=\sqrt{x}$) განსაზღვრულია არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის. მათთვის ლუწ-კენტობის საკითხის დასმას აზრი არა აქვს.

ხარისხოვანი ფუნქცია $y=x^r$ არაპერიოდულია.

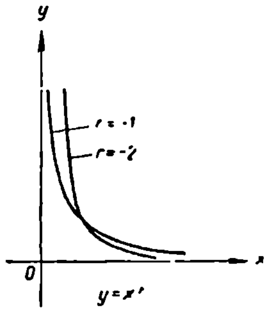
თუ $x>0$, ხარისხოვანი ფუნქცია $y=x^r$ დადებითია, იმისდა მიუხედავად, როგორია r.

ზოგიერთ ხარისხოვან ფუნქციას $\left(\text{მაგალითად, } y=\frac{1}{x}, \quad y=x^{-\frac{3}{2}}\right)$ ნულები არ გააჩნია, სხვას კი ნულად აქვს რიცხვი 0 (მაგალითად, ფუნქციებს $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ და ა. შ.).

თუ r დადებითი რიცხვია და $x>0$, ხარისხოვანი ფუნქცია $y=x^r$ მონოტონურად იზრდება (ნახ. 291); ხოლო, თუ r უარყოფითია და $x>0$, ფუნქცია $y=x^r$ მონოტონურად კლებულობს (ნახ. 292).



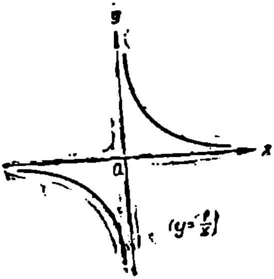
ნახ. 291.



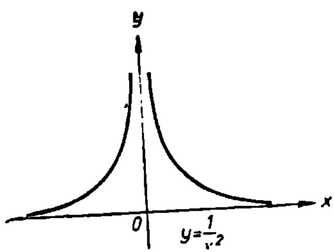
ნახ. 292.

ზოგიერთ ხარისხოვან ფუნქციას, მაგალითად, $y=x^2$, $y=x^4$ ლოკალური მინიმუმი გააჩნია $x=0$ წერტილში.

შევეხოთ კიდევ $y=\frac{1}{x}$ და $y=\frac{1}{x^2}$ ფუნქციების ყოფაქცევას $x=0$ წერტილის მახლობლობაში. როცა x ისე მიისწრაფვის ნულისაკენ, რომ იგი დადებითი რჩება, მაშინ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია უსაზღვროდ იზრდება; ხოლო,



ნახ. 293.



ნახ. 294.

როცა x ისე მიისწრაფვის ნულისაკენ, რომ იგი უარყოფითი რჩება, მაშინ ეს ფუნქცია უსაზღვროდ კლებულობს (ნახ. 293).

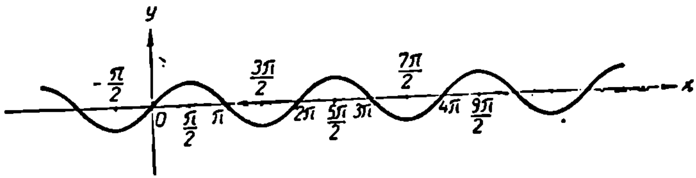
$y=\frac{1}{x^2}$ ფუნქცია x-ის ნულთან მიახლოებისას (როგორც მარჯვნიდან, ისე მარცხნიდან) უსაზღვროდ იზრდება (ნახ. 294).

8. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შორის განვიხილოთ მხოლოდ ორი ფუნქცია:

$$y=\sin x \text{ და } y=\operatorname{tg} x.$$

$y=\sin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა, ხოლო ცვლილების არე — ყველა იმ რიცხვის ერთობლიობა, რომლებიც $[-1, 1]$ შუალედშია მოთავსებული. ეს ფუნქცია კენტია და პერიოდული პერიოდით 2π. $2n\pi<x<\pi+2n\pi$ შუალედებში ეს ფუნქცია დადებითია, ხოლო $\pi+2n\pi<x<2\pi+2n\pi$ შუალედებში — უარყოფითი (ნახ. 295). როცა $x=n\pi$, ფუნქცია ნულის ტოლი ხდე-



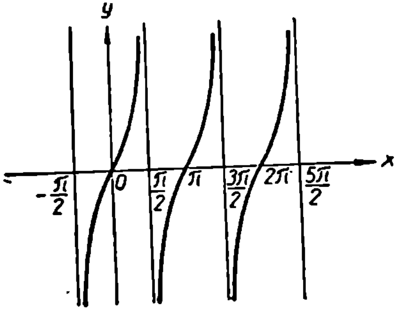
ნახ. 295.

ბა; $-\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$ შუალედებში იგი მონოტონურად იზრდება, ხოლო $\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2n\pi$ შუალედებში მონოტონურად კლებულობს.

$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ წერტილები $y=\sin x$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია. ამ წერტილებში ფუნქცია ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას, რომელიც 1-ის ტოლია. $x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ წერტილები ლოკალური მინიმუმის წერტილებია. ამ წერტილებში ფუნქცია ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობებს, რომლებიც —1-ის ტოლია.

$y=\operatorname{tg} x$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის გარდა $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$-ისა, მისი ცვლილების არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის

ერთობლიობა. ეს ფუნქცია კენტია და პერიოდული პერიოდით π (ნახ. 296). $n\pi<x<\frac{\pi}{2}+n\pi$ შუალედებში იგი დადებითია, ხოლო

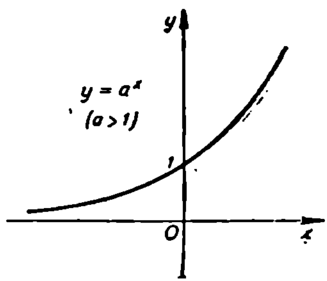


ნახ. 296.

$-\frac{\pi}{2}+n\pi<x<n\pi$ შუალედებში — უარყოფითი. როცა $x=n\pi$, ფუნქცია ნულის ტოლი ხდება. ყოველ შუალედში, რომელიც $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ წერტილებს არ მოიცავს, ეს ფუნქცია მონოტონურად იზრდება. ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმები არა აქვს. როცა x-ის მნიშვნელობა უსაზღვროდ უახლოვდება $\frac{\pi}{2}+n\pi$-ს და, ამასთან, $\frac{\pi}{2}+n\pi$-ზე ნაკლები რჩება, მაშინ $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის მნიშვნელობა უსაზღვროდ იზრდება. ხოლო, როცა x-ის მნიშვნელობა უსაზღვროდ უახლოვდება $\frac{\pi}{2}+n\pi$-ს, ისე, რომ ამ მნიშვნელობაზე მეტი რჩება, მაშინ $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქცია უსაზღვროდ კლებულობს.

4. მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y=a^x (a>0,\ a\neq 1)$

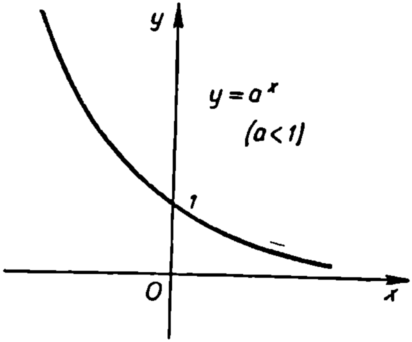
ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ხოლო ცვლილების არე — ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე. ეს ფუნქცია არც ლუწია, არც კენტი. იგი არც პერიოდულია. x არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის ეს ფუნქცია დადებითია. თუ $a>1$, მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y=a^x$ მონოტონურად ზრდადია (ნახ. 297), ხოლო თუ $a<1$ — მონოტონურად კლებადი (ნახ. 298). ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ფუნქციას არ გააჩნია.



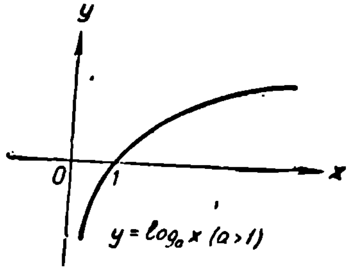
ნახ. 297.

ნ. ლოგარითმული ფუნქცია $y=\log_a x (a>0,\ a\neq 1)$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე, ხოლო ცვლილების არე — ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ფუნქცია არც ლუწია, არც კენტი. იგი არც პერიოდულია. თუ $a>1$, მაშინ ფუნქცია დადებითია, როცა $x>1$, ხოლო უარყოფითია, როცა $x<1$

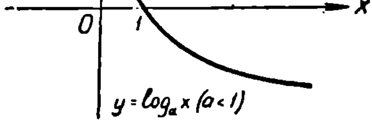


ნახ. 298.



ნახ. 299.

(ნახ. 299). თუ $a<1$, მაშინ პირიქით, როცა $x>1$, ფუნქცია უარყოფითია, ხოლო, როცა $x<1$, იგი დადებითია (ნახ. 300). ლოგარითმული ფუნქციის ერთადერთ ნულს წარმოადგენს წერტილი $x=1$. თუ $a>1$, ეს ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია (ნახ. 299), ხოლო, თუ $a<1$, მონოტონურად კლებადია (ნახ. 300). ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები არ გააჩნია, თუ $a>1$, მაშინ x-ის ნულთან მიახლოებისას ფუნქცია უსაზღვროდ კლებულობს; ხოლო, თუ $a<1$, მაშინ x-ის ნულთან მიახლოებისას ფუნქცია უსაზღვროდ იზრდება.



ნახ. 300.

სავარჯიშოები

ამ პარაგრაფში აღწერილი გეგმის მიხედვით გამოიკვლიეთ ფუნქციები (№ 1643—1652);

1643. $y=\sin^2 x$.

1644. $y=\sin 2x$.

1645. $y=-|\cos x|$.

1646. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1647. $y=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

1648. $y=x^2-4x+5.$

1649. $y=x^2+x-7.$

1650. $y=1+x-2x^2.$

1651. $y=x\sqrt{x}.$

1652. $y=\dfrac{1+x}{1-x}.$

ფუნქციის ზღვარი § 211

სანამ ფუნქციის ზღვრის ზოგად განმარტებას მოვიყვანდეთ, განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, $f(x)=x^2$. თუ x არგუმენტი გაირბენს რიგ მნიშვნელობებს, კრებადს 2 რიცხვისაკენ, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია გაირბენს რიგ მნიშვნელობებს, კრებადს 4 რიცხვისაკენ, ამას შევნიშნავთ, თუ განვიხილავთ $|x^2-4|$ ფუნქციის მიახლოებით მნიშვნელობათა შემდეგ ცხრილს:

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02
x^2 (მიახლოებით)	3,84	3,88	3,92	3,96	4,00	4,04	4,08
$\|x^2-4\|$ (მიახლოებით)	0,16	0,12	0,08	0,04	0	0,04	0,08

რაც უფრო ახლოა x არგუმენტის მნიშვნელობა 2-თან, იმდენად მცირეა x^2-4 სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა.

ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ მკაცრი მათემატიკური მსჯელობითაც, განხილული ცხრილის დახმარების გარეშეც. დავამტკიცოთ, რომ, რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, ყოველთვის შეიძლება $x=2$ წერტილის შემცველი ისეთი შუალედი გამოიყოს, რომ ამ შუალედის ყველა წერტილისათვის შესრულდეს უტოლობა

$$|x^2-4|<\varepsilon$$

მართლაც, $|x^2-4|<\varepsilon$ უტოლობა ტოლფასია ორმაგი უტოლობისა:

$$-\varepsilon<x^2-4<\varepsilon,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon.$$

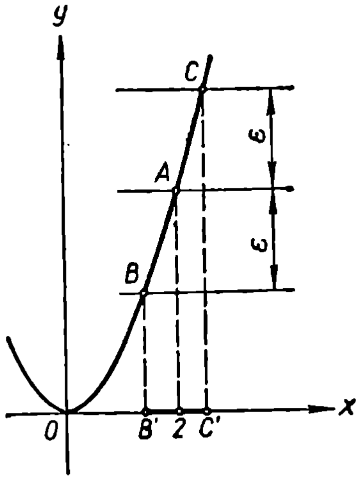
$$\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon}$$

(გავითვალისწინეთ x-ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობები, რამდენადაც $y=x^2$ ფუნქციის ყოფაქცევა ამ შემთხვევაში გვაინტერესებს მხოლოდ $x=2$ წერტილის მახლობლობაში).

ამგვარად, $|x^2-4|<\varepsilon$ უტოლობა სრულდება $\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon}$ შუალედში, რომელიც $x=2$ წერტილს მოიცავს.

მაგალითად, $|x^2-4|<0,1$ უტოლობა $\varepsilon=0,1$) სრულდება $\sqrt{3,9}<x<\sqrt{4,1}$ შუალედში, ანუ $1,98<x<2,02$. $|x^2-4|<0,01$ უტოლობა $\varepsilon=0,01$) სრულდება $\sqrt{3,99}<x<\sqrt{4,01}$ შუალედში, ანუ $1,998<x<2,002$.

$(\sqrt{4-\varepsilon},\ \sqrt{4+\varepsilon})$ შუალედი აიგება გეომეტრიულადაც. ვთქვათ, A არის $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი, რომლის აბსცისაა $x=2$ (ნახ. 301). ამ წერტილის ორივე მხარეს გავავლოთ ორი ჰორიზონტალური წრფე, რომლებიც A წერტილიდან დაშორებულია ε მანძილით. ეს წრფეები გადაკვეთენ $y=x^2$ პარაბოლის მარჯვენა ნაწილს B და C წერტილებში თუ ამათგან მართობებს დავუშვებთ აბსცისათა ღერძზე, მივიღებთ $B'C'$ მონაკვეთს. სწორედ ეს მონაკვეთი წარმოადგენს $(\sqrt{4-\varepsilon},\ \sqrt{4+\varepsilon})$ შუალედს, რომელიც ადრე მივიღეთ ალგებრული გზით.



ნახ. 301.

მაშ, თუ x არგუმენტისათვის 2-ის საკმაოდ ახლო მნიშვნელობებს შევარჩევთ, მაშინ $y=x^2$ ფუნქციის მნიშვნელობანი რაგინდ მცირედ იქნებიან განსხვავებული 4-ისაგან. მაგალითად, შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ შესრულდეს უტოლობანი:

$|x^2-4|<0{,}001$; $|x^2-4|<0{,}0001$ და ა. შ. ასეთ შემთხვევაში, ბუნებრივია, რიცხვ 4-ს ეწოდოს $y=x^2$ ფუნქციის ზღვარი, როცა x მიისწრაფვის 2-ისაკენ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი $x=3$ წერტილის მახლობლობაში.

x	2,94	2,96	2,98	3	3,02	3,04	3,06
$y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$	5,94	5,96	5,98	ფუნქცია განსაზღვრული არაა	6,02	6,04	6,06

$x=3$-ისათვის ჩვენი ფუნქცია განსაზღვრული არ არის; წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ნულად იქცევა. ამავე დროს, თუ x-ის მნიშვნელობანი საკმაოდ ახლოსაა 3-თან (მაგრამ 3-ის ტოლი არაა), მაშინ y-ის შესაბამისი მნიშვნელობანი რაგინდ ახლოს იქნება 6-თან.

დავამტკიცოთ ეს მკაცრი მათემატიკური მსჯელობით, ცხრილური ილუსტრაციის გარეშე; სახელდობრ, ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის, რაგინდ მცირე იყოს იგი, შეიძლება $x=3$ წერტილის შემცველი ისეთი შუალედი გამოიყოს, რომ ყველგან მის შიგნით, გარდა თვით $x=3$ წერტილისა, შესრულდეს უტოლობა:

$$|y-6|<\varepsilon. \qquad (1)$$

მართლაც, თუ $x\neq3$, მაშინ

$$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3\,.$$

ამის შემდეგ (1) უტოლობა ასეთ უტოლობამდე დაიყვანება:

$$|x+3-6|<\varepsilon,$$

ანუ

$$|x-3|<\varepsilon$$

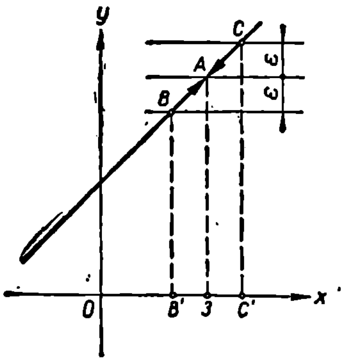
უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია შემდეგი ორმაგი უტოლობისა:

$$-\varepsilon<x-3<\varepsilon,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$3-\varepsilon<x<3+\varepsilon.$$

ამგვარად, (1) უტოლობა სრულდება x-ის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც მოთავსებულია $(3-\varepsilon,\ 3+\varepsilon)$ შუალედში, გარდა $x=3$ მნიშვნელობისა.



ნახ. 302.

თუ, მაგალითად, გვსურს, რომ y-ის მნიშვნელობა განსხვავდებოდეს 6-ისაგან უფრო მცირედ, ვიდრე 0,01 ($\varepsilon=0{,}01$), მაშინ x-ის მნიშვნელობანი უნდა განვიხილოთ $(3-0{,}01;\ 3+0{,}01)$ შუალედში, ე. ი. (2,99; 3,01) შუალედში, ანალოგიურად, თუ $\varepsilon=0{,}001$, მივიღებდით $(3-0{,}001;\ 3+0{,}001)$ შუალედს, ანუ (2,999; 3,001) და ა. შ.

$3-\varepsilon>x<3+\varepsilon$ შუალედი შესაძლებელია გეომეტრიულადაც აგებულიყო, ეს აგება სრულიად ანალოგიურია პირველ მაგალითში ჩატარებული აგებისა. ამიტომ აქ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ სათანადო ნახაზის მოყვანით (იხ. ნახ. 302), ხოლო მოსწავლეებს ვანდობთ თვითონ გაერკვნენ მასში.

მაშ, თუ x არგუმენტისათვის შევარჩევთ 3-თან საკმაოდ ახლო, მაგრამ 3-ისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი რაგინდ მცირედ განსხვავდებიან 6-ისაგან; შესაძლებელია, მაგალითად, მივაღწიოთ იმას, რომ $|y-6|$ ნაკლები გახდეს 0,1-ზე; 0,01-ზე, 0,001-ზე და ა. შ. მიუხედავად იმისა, რომ განსახილავი ფუნქცია განსაზღვრული არაა $x=3$-ისათვის, ბუნებრივია, ჩავთვალოთ, რომ როცა $x\to3$, მისი ზღვარი არსებობს და 6-ის ტოლია.

განხილული მაგალითების საფუძველზე შეგვიძლია ფუნქციის ზღვარი შემდეგნაირად განვმარტოთ: **b რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა x მიისწრაფვის a-საკენ, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს $x=a$ წერტილის შემცველი ისეთი ღია შუალედი, რომ ყველგან მის შიგნით, გარდა, შესაძლებელია, თვით $x=a$ წერტილისა, სრულდება უტოლობა:**

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი b-ს ტოლია, როცა x მიისწრაფვის a-საკენ, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

(იკითხება: $f(x)$-ის ზღვარი, როცა x მიისწრაფვის a-საკენ, b-ს ტოლია).

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4,$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

სავარჯიშოები

ზღვრის განმარტების საფუძველზე დაამტკიცეთ შემდეგ თანაფარდობათა მართებულობა (№ 1653—1658):

1653. $\lim_{x\to 8}(3x+5)=5.$

1654. $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2.$

1655. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x^2-0{,}25}{x-0{,}5}=1.$

1656. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2.$

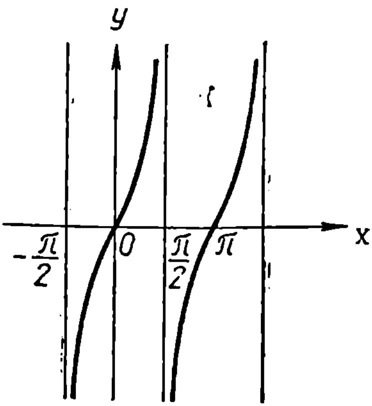
1657. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}=-5.$

1658.* $\lim_{x\to 0} 10^x=1.$

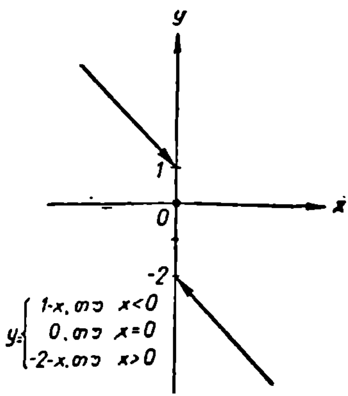
1659. ზოგიერთი წილადის ზღვრის გამოთვლისას (იხ. მაგალითად, № 1655—1657 სავარჯიშოები) რატომ არის შესაძლებელი ამ წილადების შეკვეცა? ხომ შეიძლება ნულად იქცეს ის გამოსახულება, რომელზედაც ხდება შეკვეცა?

ძირითადი თეორემები ფუნქციათა ზღვრების შესახებ § 212

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ყოველი $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ზღვარი $\lim_{x\to 0} f(x)$ არ არსებობს. ასე, მაგალითად, როცა $x \to \frac{\pi}{2}$, $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქცი-



ნახ. 303.



ნახ. 304.

ის მნიშვნელობანი (ნახ. 303) ან უსაზღვროდ იზრდება $\left(\text{თუ } x < \frac{\pi}{2}\right)$ ან უსაზღვროდ კლებულობს $\left(\text{თუ } x > \frac{\pi}{2}\right)$ ამიტომ, ვერ დავასახელებთ ვერც ერთ ისეთ b რიცხვს, რომლისკენაც ფუნქციის მნიშვნელობანი მიისწრაფოდეს.

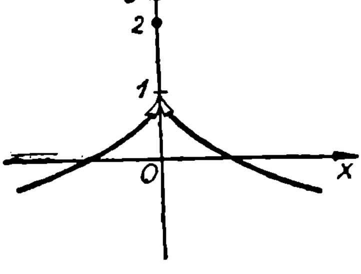
მეორე მაგალითი. ვთქვათ

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{თუ } x<0, \\ 0, & \text{თუ } x=0, \\ -2-x, & \text{თუ } x>0. \end{cases}$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 304-ე ნახაზზე. როცა x არგუმენტის მნიშვნელობანი 0-ს ისე უახლოვდება, რომ ამავე დროს უარყოფითი რჩება, ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობანი 1-ისაკენ მიისწრაფვიან, ხოლო, როცა x არგუმენტის მნიშვნელობანი ნულს ისე უახლოვდება, რომ დადებითი რჩება, მაშინ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობანი 2-ისაკენ მიისწრაფვიან. თვით $x=0$ წერტილზე ფუნქცია ნულის ტოლი ხდება. ცხადია, შეუძლებელია დავასახელოთ რომელიმე ერთი რიცხვი, რომლისკენაც მიისწრაფვის y-ის ყველა მნიშვნელობა, როცა x უახლოვდება ნულს. ამიტომ აღებულ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია, როცა $x \to 0$.

როდესაც შემდგომში ფუნქციის ზღვარზე ვილაპარაკებთ, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ეს ზღვარი არსებობს.

ვარაუდი $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ზღვრის არსებობის შესახებ კიდევ არ ნიშნავს, რომ ეს ზღვარი ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას $x=a$ წერტილში. მაგალითისათვის განვიხილოთ ფუნქცია, რომლის გრაფიკი წარმოდგენილია 305-ე ნახ-ზე. ცხადია, რომ $\lim\limits_{x \to 0} (x)$ ზღვარი არსებობს და უდრის 1-ს. $x=0$ წერტილში კი ფუნქცია ღებულობს 2-ის ტოლ მნიშვნელობას ამიტომ მოცემულ შემთხვევაში



ნახ. 305.

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

თუ $y=f(x)$ აკმაყოფილებს

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

პირობას, მაშინ მას ეწოდება **უწყვეტი** $x=a$ წერტილში. თუკი მითითებული პირობა არ სრულდება, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **წყვეტილი** $x=a$ **წერტილში**.

ყველა ელემენტარული ფუნქცია (მაგალითად, $y=x^n$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x$ და ა. შ.) უწყვეტია ყოველ წერტილში, რომელშიც იგია განსაზღვრული.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი** $[a, b]$ **შუალედში**, თუ იგი უწყვეტია ამ შუალედის ყოველ წერტილში. მაგალითად, $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქცია უწყვეტია $-\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში, $y=\sin x$ და $y=\cos x$ ფუნქციები უწყვეტია ნებისმიერ შუალედში და ა. შ.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ აქ ძირითად თეორემებს ფუნქციათა ზღვრების შესახებ. ეს თეორემები სავსებით ანალოგიურია იმ თეორემებისა. რომლებიც განხილული იყო ადრე (აგრეთვე დაუმტკიცებლად) რიცხვითი მიმდევრობების ზღვართა შესწავლის დროს.

1. მუდმივი სიდიდის ზღვარი თვით ამ მუდმივი სიდიდის ტოლია:

$$\lim_{x\to a} c=c.$$

2. მუდმივი მამრავლი შეიძლება ზღვრის ნიშნის გარეთ გამოვიტანოთ:

$$\lim_{x\to a} [kf(x)]=k\lim_{x\to a} f(x).$$

3. ფუნქციათა ჯამის (სხვაობის) ზღვარი ამ ფუნქციების ზღვართა ჯამის (სხვაობის) ტოლია:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x).$$

4. ფუნქციათა ნამრავლის ზღვარი ამ ფუნქციების ზღვართა ნამრავლის ტოლია:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)\cdot$$

5. ორი ფუნქციის შეფარდების ზღვარი ამ ფუნქციების ზღვართა შეფარდების ტოლია, თუ გამყოფის ზღვარი ნულის ტოლი არაა:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0).$$

განვიხილოთ რამდენიმე ტიპობრივი მაგალითი ფუნქციათა ზღვრების საპოვნელად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 5}\frac{7x-5}{10+2x}$.

ზღვრის თვისების ძალით გვექნება:

$$\lim_{x\to 5}\frac{7x-5}{10+2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 5}(7x-5)}{\lim\limits_{x\to 5}(10+2x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 4} 7x-\lim\limits_{x\to 5} 5}{\lim\limits_{x\to 5} 10+\lim\limits_{x\to 5} 2x}=$$

$$=\frac{7\lim\limits_{x\to 5} x-5}{10+2\lim\limits_{x\to 5} x}=\frac{7\cdot 5-5}{10+2\cdot 5}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}.$$

როცა $x\to 3$, მოცემული წილადის მრიცხველიც და მნიშვნელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის, ამიტომ განაყოფის ზღვრის შესახებ თეორემის უშუალო გამოყენება აქ არ შეიძლება. მაგრამ შესაძლებელია მოცემული წილადი შევკვეცოთ:

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}.$$

ამის შემდეგ ზღვარი ადვილად გამოითვლება:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2}=\frac{3+1}{3-2}=4.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}.$$

ეს ზღვარი ადვილად მოიძებნება, თუ მოცემულ წილადს წინასწარ $\sqrt{x}$-ზე შევკვეცავთ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

(ყურადღება მიაქციეთ განხილული მაგალითის შემდეგ მნიშვნელოვან თვისებას. როდესაც ვლაპარაკობთ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ზღვარზე, ჩვეულებრივ ვგულისხმობთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x=a$ წერტილის საკმაოდ ახლობელ ყ ვ ე ლ ა წერტილში. მაგრამ $\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის მხოლოდ დ ა დ ე ბ ი თ ი მნიშვნელობებისათვის. ამიტომ, როდესაც ვიხილავთ ამ ფუნქციის ზღვარს, ფაქტიურად ვგულისხმობთ, რომ $x\to 0$, რჩება რა ამასთან ყოველთვის დადებითი. მსგავს შემთხვევებში ლაპარაკობენ არა უბრალოდ ზღვარზე, არამედ ც ა ლ მ ხ რ ი ვ ზღვარზე. ანალოგიურ მაგალითებს კიდევ შევხვდებით ამ პარაგრაფის სავარჯიშოების შესრულებისას).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

ამ წილადის მნიშვნელი ნულად იქცევა, როცა $x \to 0$. ამიტომ შეფარდების ზღვრისათვის არსებული თეორემის უშუალო გამოყენება აქ შეუძლებელია. გარდა ამისა, მოცემული წილადის შეკვეცა არ შეიძლება, როგორც ამას ვაკეთებდით მე-2 და მე-3 მაგალითებში. ამ შემთხვევაში მრიცხველი და მნიშვნელი უნდა გავამრავლოთ $\sqrt{1+x}+1$ გამოსახულებაზე, რომელიც წილადის მნიშვნელის მეუღლებულია. შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}=\sqrt{1+x}+1.$$

ამის შემდეგ ზღვარი ადვილად გამოითვლება:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=1+1=2$$

(როდესაც ვიღებთ, რომ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1$, ამით ვიყენებთ $y=\sqrt{1+x}$ ფუნქციის უწყვეტობის თვისებას:

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}=\sqrt{1+0}=1)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

როცა $x\to 4$, მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ნულისაკენ მიისწრაფვის. ამიტომ თეორემას წილადის ზღვრის შესახებ აქ ვერ გამოვიყენებთ. გარდავქმნათ წილადი, რისთვისაც მნიშვნელი წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)\ (\sqrt{x}-2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ ზღვრები (№ 1660—1675):

1660 $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x-5)$. **1661.** $\lim\limits_{x\to 5}(3x-x^2)$.

1662. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

1663. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

1664. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4}$.

1665. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-6x-7}$.

1666. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$.

1667. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$.

1668. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$.

1669. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

1670. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$.

1671. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

1672. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$.

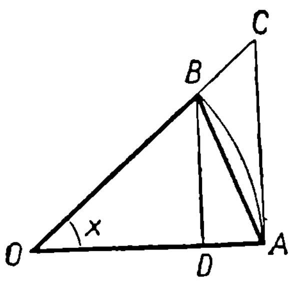
1673. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

1674. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

1675. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}}{x}$.

ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული უტოლობა და მათი გამოყენება ზღვრების გამოთვლისას § 219

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ ზოგიერთ ტრიგონომეტრიულ უტოლობას, რომელთაც დიდი მნიშვნელობა ექნებათ ფუნქციათა შემდგომი შესწავლისათვის.



ნახ. 306.

1. ნებისმიერი მახვილი x კუთხისათვის (რომელიც რადიანებითაა გამოსახული) $\sin x<x<\operatorname{tg} x$. (1)

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, 306-ე ნახაზზე $OA=OB=1$, $\angle AOB=x$ რადიანს, BD და AC მართობებია OA-სადმი. ცხადია, OAB სამკუთხედის ფართობი OAB წრიული სექტორის ფართობზე ნაკლებია, ხოლო OAB წრიული სექტორის ფართობი, თავის მხრივ, OAC სამკუთხედის ფართობზე ნაკლებია. მაგრამ

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}BD\cdot OA=\frac{1}{2}BD;\quad S_{\text{სექტ.}\,OAB}=\frac{\pi\cdot OA^2}{2\pi}\cdot x=\frac{x}{2}$$ და

$$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AC=\frac{1}{2}AC.$$

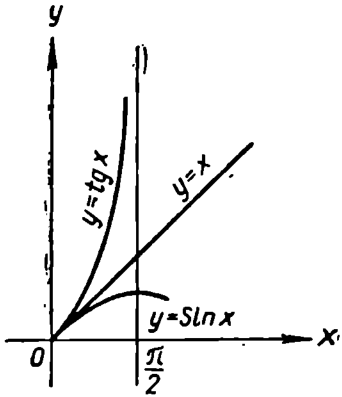
თუ გავითვალისწინებთ, რომ $BD=\sin x$, $AC=\operatorname{tg} x$, მივიღებთ, $\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, საიდანაც გამომდინარეობს (1) უტოლობა.

307-ე ნახაზი (1) უტოლობის გრაფიკული ილუსტრაციაა. $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში $y=x$ ფუნქციის გრაფიკი $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის ზ ე მ ო თ, ამავე დროს $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკის ქვემოთ მდებარეობს.

შევჩერდეთ $\sin x<x$ უტოლობაზე. უფრო დაწვრილებით ჩვენ იგი დავამტკიცეთ იმ დაშვებით, რომ $0<x<\frac{\pi}{2}$. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში x და $\sin x$ დადებითია. ამიტომ $x=|x|$, $\sin x=|\sin x|$, და $\sin x<x$ უტოლობა შეიძლება შემდეგი სახით გადაიწეროს:

$$|\sin x|<|x|. \qquad (2)$$

ეს უტოლობა მართებულია აგრეთვე x-ის უარყოფითი მნიშვნელობათათვის, რომლებიც $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ შუალედშია მოთავსებული, რადგან



ნახ. 307.

$$|\sin(-x)|=|-\sin x|=|\sin x|,$$
$$|-x|=|x|.$$

გადავწეროთ (2) უტოლობა შემდეგი სახით:

$$|\sin x-0|<|x|.$$

თუ x ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ, რამდენადაც $|\sin x-0|$ ნაკლებია $|x|$-ზე, იგიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. კერძოდ, $|\sin x-0|$ შეიძლება ნაკლები გახდეს, ვიდრე 0,1; 0,01; 0,001 და ა. შ. საზოგადოდ, რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, ყოველთვის შეიძლება იმას მივაღწიოთ, რომ შესრულდეს $|\sin x-0|<\varepsilon$ უტოლობა, ამისათვის საჭიროა x-ის შერჩევა $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ შუალედში, ეს ნიშნავს, რომ

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

სინუს x-ის ზღვარი, როცა $x\to 0$, ნულის ტოლია.

(რადგანაც $0=\sin 0$, ამიტომ მიღებული შედეგი არსებითად ნიშნავს, რომ $y=\sin x$ ფუნქცია უწყვეტია, როცა $x=0$.

2. **ნებისმიერი მახვილი x კუთხისათვის (რადიანებით გამოსახული)**

$$1-\cos x<x.$$

მართლაც, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. მაგრამ $0<\sin\frac{x}{2}<1$. ამიტომ

$$\sin^2\frac{x}{2}<\sin\frac{x}{2}.$$

ზემოთ დამტკიცებულის მიხედვით $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$. მაშასადამე,

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<2\frac{x}{2}=x,$$

რაც ამტკიცებს (3) ფორმულას.

თუ x კუთხე მახვილია, მაშინ x და $1-\cos x$ დადებითია, ამიტომ $x=|x|$, $1-\cos x=|1-\cos x|$. ამგვარად, (3) უტოლობა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$|1-\cos x|<|x|. \tag{4}$$

ეს უტოლობა, ცხადია, მართებულია მაშინაც, როცა $x<0$, ვინაიდან

$$|1-\cos(-x)|=|1-\cos x|;\quad |-x|=|x|.$$

(4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

კოსინუს x-ის ზღვარი, როცა $x\to 0$, ერთის ტოლია.

(ვინაიდან $1=\cos 0$, ამიტომ მიღებული შედეგი არსებითად ნიშნავს, რომ $y=\cos x$ ფუნქცია უწყვეტია, როცა $x=0$.

აქედან, თუ გამოვიყენებთ $y=\sin x$ ფუნქციის ზემოდამტკიცებულ უწყვეტობას ნულისათვის, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $y=\sin x$ და $y=\cos x$ ფუნქციები უწყვეტია ყ ო ვ ე ლ x წერტილში. სცადეთ ამის შესრულება).

სავარჯიშოები

იპოვეთ ზღვრები (№ 1676—1681):

1676. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x.$ **1677.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}.$

1678. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. 1679. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x$.

1680. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)$. 1681. $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

1682. დაამტკიცეთ იგივობანი:

ა) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x+\alpha)=\sin\alpha$; ბ) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x+\alpha)=\cos\alpha$.

1683. x-ის ყველა დადებითი მნიშვნელობისათვის მართებული იქნება თუ არა შემდეგი უტოლობანი:

ა) $\sin x<x$;

ბ) $x<\operatorname{tg} x$?

1684. დაამტკიცეთ, რომ $\sin x=x$ განტოლების ერთადერთი ფესვი იქნება $x=0$.

$\frac{\sin x}{x}$ შეფარდების ზღვარი, როცა $x\to 0$ § 214

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

ვთქვათ, x მიისწრაფვის ნულისაკენ და ამავე დროს დადებითი რჩება. მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $0<x<\frac{\pi}{2}$ და ამიტომ, როგორც ეს ნაჩვენები იყო 213-ე პარაგრაფში,

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x,$$

ამასთან, ამ უტოლობაში შემავალი ყველა გამოსახულება დადებითია.

განვიხილოთ სამი წილადი:

$$\frac{\sin x}{\sin x}, \quad \frac{\sin x}{x} \text{ და } \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}.$$

იმ წილადებს შორის, რომელთაც ერთნაირი მრიცხველი აქვთ, ის იქნება ნაკლები, რომლის მნიშვნელიც მეტია. ამიტომ

$$\frac{\sin x}{\sin x}>\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$

ანუ

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

გავამრავლოთ ეს უტოლობა წევრობრივ —1-ზე. მაშინ უტოლობის ნიშნები მოპირდაპირეთი შეიცვლება

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x.$$

თუ ამ უტოლობის თითოეულ ნაწილს მივუმატებთ 1-ს, მივიღებთ

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

მაგრამ

$$1 - \cos x < x \quad (\text{იხ. § 213}),$$

ამიტომ

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

რადგან $x > 0$ და $1 - \frac{\sin x}{x} > 0$, ამიტომ $1 - \frac{\sin x}{x}$ და x სიდიდეები უკანასკნელ უტოლობაში შეიძლება შევცვალოთ მათი აბსოლუტური მნიშვნელობებით. ამის შედეგად მივიღებთ:

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|,$$

რაც, ცხადია, შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|. \tag{2}$$

(2) უტოლობა მივიღეთ იმ პირობით, რომ $x > 0$, მაგრამ იგი მართებულია მაშინაც, როცა $x < 0$, რადგან $\frac{\sin x}{x}$ ფუნქცია ლუწია, და, მაშასადამე,

$$\left| \frac{\sin(-x)}{(-x)} - 1 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right|.$$

თუ x ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ, როგორც ეს (2)-დან ჩანს, $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right|$, რჩება რა $|x|$-ზე ნაკლები, მით უფრო მიისწრაფვის ნულისაკენ. რაგინდ მცირეც უნდა იყოს დადებითი ε რიცხვი, ყოველთვის შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ შესრულდეს უტოლობა:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

ამისათვის x უნდა შეირჩეს $(-\varepsilon, \varepsilon)$ შუალედში, მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

შ ე დ ე გ ი. რამდენადაც x-ის მცირე მნიშვნელობებისათვის $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right|$ მცირეა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \approx 0$ მიახლოებითი ტოლობა. აქედან $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ და, მაშასადამე, $\sin x \approx x$.

ამგვარად, x-ის მცირე მნიშვნელობებისათვის

$$\sin x \approx x.$$

ეს ერთხელ კიდევ ამტკიცებს იმ დასკვნის მართებულობას, რომელიც მივიღეთ V თავის 113-ე პარაგრაფში, როცა ვიხილავდით $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკს x-ის მცირე მნიშვნელობებისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

$$\sin(0,01) \approx 0,01,$$
$$\sin(0,04) \approx 0,04,$$
$$\sin(0,07) \approx 0,07,$$
$$\sin(-0,03) \approx -0,03.$$

შეადარეთ ეს მნიშვნელობანი იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც მოყვანილია ვ. მ. ბრადისის ცხრილებში.

ზღვრების გამოთვლის მაგალითები § 216

ამ პარაგრაფში ჩვენ გამოვთვლით რამდენიმე ზღვარს, შემდეგი თანაფარდობის გამოყენებით

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

თუ მოცემული წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ 3-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{3 \sin 3x}{3x}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $3x=y$. ცხადია, $x\to 0$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ აგრეთვე $y\to 0$. ამიტომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}\ (n\neq 0).$$

თუ გავამრავლებთ მოცემული წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს m-ზე და შემოვიღებთ ახალ $y=mx$ ცვლადს, მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m\sin mx}{n(mx)}=\lim_{y\to 0}\frac{m\sin y}{ny}=\frac{m}{n}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=$$

$$=\frac{m}{n}\cdot 1=\frac{m}{n}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

თუ გამოვიყენებთ $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ იგივობას, მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}.$$

შემოვიღოთ ახალი $y=\frac{x}{2}$ ცვლადი, მაშინ $x=2y$ და

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{(2y)^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

მაშ,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

აქედან, გამომდინარეობს, რომ x-ის მცირე მნიშვნელობათათვის გვექნება

$$\frac{1-\cos x}{x^2}\approx\frac{1}{2},$$

ანუ

$$1-\cos x \approx \frac{1}{2}x^2,$$

$$\cos x \approx 1-\frac{1}{2}x^2.$$

მაგალითად,

$$\cos(0{,}04) \approx 1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}0016 \approx 0{,}9992,$$

$$\cos(-0{,}08) \approx 1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}0064 \approx 0{,}9968.$$

შეადარეთ ეს მნიშვნელობანი ცხრილურს!

სავარჯიშოები

იპოვეთ ზღვრები:

1685. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$.

1686. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{6x}$.

1687. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin\frac{x}{3}}$.

1688. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$.

1689. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{4x+\pi}$.

1690. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

1691. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{bx}$

1692. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}$.

1693. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 4x}{x}$.

1694. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{x+\sin x}-\sqrt{x}}{\sin x}$

1695. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 12x}{10x}$.

1696. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin 7x}{\frac{x}{4}}$.

1697. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+\sin x}-\sqrt{5-\sin x}}{x}$.

1698. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{x^2}$.

1699. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 10x-\cos x}{4x^2}$

1700. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 11x-6x}{5x}$.

1701 $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{5}} \dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}+5\right)}{(5x+\pi)^2}$. 1702 $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$.

XVII საუკუნემდე მათემატიკა წარმოადგენდა მეცნიერებას მუდმივ სიდიდეთა შესახებ. ცვლად სიდიდეთა შემოღება დაკავშირებულია განთქმული ფრანგი მეცნიერის დეკარტის სახელთან. მისმა შრომებმა ფ. ენგელსის მაღალი შეფასება დაიმსახურა; ფ. ენგელსი წერდა: „შემობრუნების პუნქტი მათემატიკაში იყო დეკარტის ცვლადი სიდიდე. ამის გამო მათემატიკაში შემოვიდა მოძრაობა და დიალექტიკა".

ტერმინი "ფუნქცია" პირველად გამოჩნდა გერმანელი მეცნიერის ლაიბნიცის (1646—1716) ერთ-ერთ შრომაში.

ფუნქციის ცნებას XVII და XVIII საუკუნის მეცნიერები სხვადასხვა აზრს მიაკუთვნებდნენ. ზოგი ფუნქციას განსაზღვრავდა როგორც ერთგვარ „ანალიზურ გამოსახულებას". მეორენი ფუნქციის ცნებას უკავშირებდნენ „ნებისმიერ დახაზულ მრუდს". შესაბამისობის იდეას, როგორც ფუნქციის ცნების ერთადერთ საფუძველს, ხაზი გაუსვა გამოჩენილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა დირიხლემ (1805—1859). იგი ამბობდა: y არის x-ის ფუნქცია, თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა, იმისდა მიუხედავად, თუ სახელდობრ როგორი წესით არის ეს შესაბამისობა დამყარებული. შესაბამისობის იდეა, ჯერ კიდევ დირიხლეზე ადრე, გამოთქვა არაევკლიდური გეომეტრიის ფუძემდებელმა ნიკოლოზ ივანეს ძე ლობაჩევსკიმ (1792—1856), თუმცა დიდი ხნის განმავლობაში ეს შეუმჩნეველი რჩებოდა მათემატიკაში.

ფუნქციის ჩვეულებრივი აღნიშვნა $y=f(x)$ ეკუთვნის ეილერს.

ზღვარი პირველად განმარტეს XVII საუკუნეში. ზღვართა თეორიის ჩანასახი შეიძლება შევამჩნიოთ ინგლისელი ფიზიკოსისა და მათემატიკოსის ისააკ ნიუტონის (1642—1727) შრომებში. მაგრამ XVII და XVIII საუკუნის მათემატიკოსებს მიზნად არ დაუსახავთ აეგოთ ზღვართა მწყობრი თეორია. ეს ამოცანა დაისვა და გადაწყდა მხოლოდ XIX საუკუნეში. ამ საქმეში დიდი დამსახურება მიუძღვის ფრანგ მათემატიკოსს კოშის (1789—1857). მან განავითარა ზღვართა თეორია და საფუძვლად დაუდო იგი მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი დარგის — მათემატიკური ანალიზის — შექმნას.

ამოცანები გამეორებისათვის

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები (№№1703—1706)

1703. $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{2x-4}-1}$.

1704. $y=\lg\dfrac{x(2-x)}{x^2-2x-15}$.

1705. $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}$.

1706. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ცვლილების არეები (№ 1707—1709):

1707. $y=(-1)^x$.

1708. $y=5\sin x-10\cos x+1$.

1709. $y=10^{\cos x}$

1710. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები მთელს რიცხვით წრფეზე მონოტონურად ზრდადია. მათი ნამრავლი იქნება თუ არა მონოტონურად ზრდადი? პასუხის ნათელსაყოფად მოიყვანეთ მაგალითები.

1711. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით mT, ხოლო $g(x)$ ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით nT, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $f(x)+g(x)$ და $f(x)\cdot g(x)$ ფუნქციები პერიოდულია პერიოდით mnT.

1712. დაამტკიცეთ, რომ $y=a^x$ და $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) ფუნქციები არაა პერიოდული.

როგორ შეიძლება ამ შედეგის განზოგადება?

1713. გამოიყენეთ იგივობა (მოიფიქრეთ, როგორ მიიღება იგი):

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

და დაამტკიცეთ, რომ მთელს რიცხვით წრფეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით.

1714*. დაამტკიცეთ, რომ მთელს რიცხვით წრფეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება ერთადერთი ხერხით წარმოვადგინოთ ლუწი $\varphi(x)$ ფუნქციისა და კენტი $g(x)$ ფუნქციის ჯამის სახით:

$$f(x)=\varphi(x)+g(x).$$

1715. $y=2^x$ ფუნქცია წარმოადგინეთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით.

გამოიკვლიეთ ფუნქციები (№ 1716—1721):

1716. $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$;

1717. $y=|x^2-2x-3|$.

1718. $y=\dfrac{2x-1}{x}$

1719. $y=\sqrt{1-\cos x}$.

1720. $y=6x^2+x+1$.

1721. $y=\{x\}$.

იპოვეთ ზღვრები: (№ 1722—1737):

1722. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+3}$.

1724. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$.

1723. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}{2x}$.

1725. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

1726. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$.

1727. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 11x}{5x}$.

1728. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$.

1729. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

1730. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

1631. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$.

1732. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

1733. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax+\operatorname{tg} bx}{(a+b)\,x}$.

1734. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$

1735. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

1736. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

1737.* $y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1+\cos x}-1}$.

1738. დაამტკიცეთ იგივობა:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n},$$

სადაც m და n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია.

თანაბარი და ცვლადი მოძრაობა წრფეზე. მოძრაობის სიჩქარე და საშუალო სიჩქარე § 217

სხეულის მოძრაობათა შორის უმარტივესია თანაბარი მოძრაობა წრფეზე. ეს ისეთი მოძრაობაა, როცა სხეული მიმართულების შეუცვლელად დროის ნებისმიერ თანატოლ შუალედებში ერთნაირი სიგრძის გზას გაივლის. გზის გარკვეულ უბანზე თანაბრად მოძრაობს მატარებელი, მანქანა, თვითმფრინავი, გემი და ა. შ.

გზას, რომელსაც გაივლის სხეული დროის ერთეულში წრფეზე თანაბარი მოძრაობისას, ეწოდება ამ მოძრაობის სიჩქარე.

პრაქტიკაში ხშირად გვაქვს საქმე არათანაბარ მოძრაობასთან. სადგურიდან გამავალი მატარებელი ნელ-ნელა „ავითარებს სიჩქარეს". მოძრაობის მეორე წუთში იგი მეტ გზას გაივლის, ვიდრე პირველში, მესამე წუთში — უფრო მეტ გზას, ვიდრე მეორეში და ა. შ. განავითარებს რა გარკვეულ სიჩქარეს, შემდეგ იგი მიდის თანაბრად ისე, რომ ყოველ წუთში ერთნაირი სიგრძის გზას გაივლის. დანიშნულების ადგილთან მიახლოებისას მატარებელი უკლებს სიჩქარეს, ყოველ წუთში ნაკლებ გზას გაივლის, ვიდრე წინა წუთში. იგივე ითქმის ავტომანქანაზე, თვითმფრინავზე, გემზე და ა. შ.

სხეულს, რომელიც არათანაბრად მოძრაობს, შეუძლია დროის სხვადასხვა ერთეულში სხვადასხვა სიგრძის გზა გაიაროს. ამიტომ არათანაბარი მოძრაობა (თანაბრისაგან განსხვავებით) მთლიანად ვერ დახასიათდება დროის რომელიმე ერთეულში გავლილი გზის სიგრძით.

არათანაბარი მოძრაობა ხშირად ხასიათდება საშუალო სიჩქარით დროის გარკვეულ შუალედში.

მოძრაობის საშუალო სიჩქარე t დროის განმავლობაში ეწოდება ამ დროის განმავლობაში გავლილი გზის s სიგრძის შეფარდებას თვით ამ დროსთან:

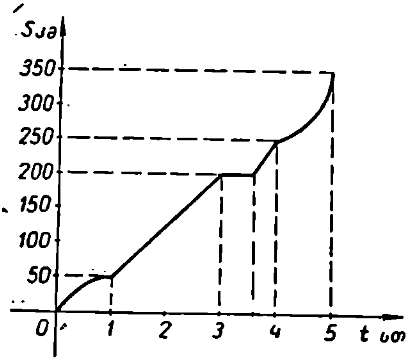
$$v_{\text{საშ.}}=\frac{s}{t}$$

თანაბარი მოძრაობის შემთხვევაში საშუალო სიჩქარე გზის ნებისმიერ უბანზე მოძრაობის სიჩქარის ტოლია. მატარებლის მოძრაობა, [illegible]-

ულებრივ, საშუალო სიჩქარით ხასიათდება. მაგალითად, ექსპრესი მოსკოვი — ლენინგრადი (მანძილი 650 კმ) გზაში 6 საათს იმყოფება და ამიტომ ვამბობთ, რომ მისი საშუალო სიჩქარე

$$v_{\text{საშ.}}=\frac{650}{6}\approx 108\left(\frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}\right)$$

მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ ექსპრესი ყოველ საათში 108 კილომეტრს გადის. მაგალითად, მოძრაობის პირველ საათში, როცა მატარებელი „სიჩქარეს ავითარებს", იგი გადის მხოლოდ 80—90 კმ საათში, მომდევნო საათში კი — დაახლოებით 130 კმ-ს. გარდა ამისა, სადგურ ბოლოგოეში ექსპრესი ჩერდება და ამიტომ იმ საათის განმავლობაში, რომელშიც გაჩერება ხდება, ექსპრესი 80—90 კმ-ზე ნაკლებ მანძილს გაივლის. ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ საშუალო სიჩქარე ვერ გამოდგება არათანაბარი მოძრაობის სრული დახასიათებისათვის.



ნახ. 308.

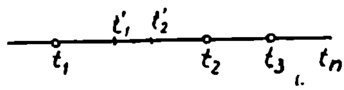
სავარჯიშოები

1739. 308-ე ნახაზზე წარმოდგენილია მატარებლის მოძრაობის გრაფიკი. რომელ უბანზე მიდიოდა მატარებელი თანაბრად და რომელზე არათანაბრად? როდის ჩერდებოდა და რამდენი წუთით? იპოვეთ მატარებლის საშუალო სიჩქარე პირველი ოთხი საათის განმავლობაში.

როგორი საშუალო სიჩქარით მიდიოდა მატარებელი მოძრაობის მეოთხე საათის განმავლობაში?

1740. დროის $(0,\ t_1)$ შუალედში მატარებელი მიდიოდა $v_1\frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}$ სიჩქარით, დროის $(t_1,\ t_2)$ შუალედში — $v_2\frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}$ სიჩქარით, დროის $(t_2,\ t_3)$ შუალედში — $v_3\frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}$ სიჩქარით და ა. შ., ბოლოს, დროის $(t_{n-1},\ t_n)$ შუალედში — $v_n\frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}$ სიჩქარით. რას უდრის მატარებლის საშუალო სიჩქარე დროის $(0,\ t_n)$ შუალედში?

მოძრაობის უფრო სრული დახასიათება შემდეგნაირად შეიძლება. სხეულის მოძრაობის დრო დავყოთ (t_1, t_2), (t_2, t_3) და ა. შ. რამდენიმე ცალკეულ შუალედად (არ არის აუცილებელი თანატოლად, იხ. ნახ. 309), და ყოველ ამ უბანზე განვიხილოთ საშუალო სიჩქარე. ესენი, რა თქმა უნდა, უფრო სრულად დაახასიათებენ მოძრაობას მთელს უბანზე, ვიდრე საშუალო სიჩქარე მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში. მაგრამ, ეს საშუალო სიჩქარეები ვერ გვიპასუხებს, მაგალითად, ასეთ კითხვაზე: დროის აღებულ შუალედში t_1-დან t_2-მდე (ნახ. 309), რომელ მომენტში უფრო ჩქარა მიდიოდა მატარებელი t'_1 მომენტში, თუ t_2' მომენტში?



ნახ. 309.

საშუალო სიჩქარე მით უფრო სრულად ახასიათებს მოძრაობას, რაც უფრო მოკლეა გზის უბნები, რომლებზეც განსაზღვრულია ეს სიჩქარე. ამიტომ ერთ-ერთი შესაძლებელი ხერხი არათანაბარი მოძრაობის სრული აღწერისათვის ითვალისწინებს ამ მოძრაობის საშუალო სიჩქარის ცოდნას გზის სულ უფრო და უფრო მცირე უბნებზე.

ვთქვათ, მოცემულია $s(t)$ ფუნქცია, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა გზას გადის სხეული წრფივი მოძრაობისას t დროის განმავლობაში, მოძრაობის დაწყებიდან. ეს ფუნქცია განსაზღვრავს **სხეულის მოძრაობის კანონს**. მაგალითად, თანაბარი მოძრაობა ხდება შემდეგი კანონის მიხედვით:

$$s(t)=vt,$$

სადაც v მოძრაობის სიჩქარეა. სხეულის თავისუფალი ვარდნა ხდება ასეთი კანონის მიხედვით:

$$s(t)=\frac{gt^2}{2},$$

სადაც g არის თავისუფლად ვარდნილი სხეულის აჩქარება, და ა. შ.

განვიხილოთ გზა, რომელიც გაიარა $s(t)$ კანონის მიხედვით მოძრავმა სხეულმა t მომენტიდან $t+\tau$-მდე. t დროისათვის სხეული გაივლის $s(t)$ გზას, ხოლო $t+\tau$-სათვის $s(t+\tau)$ გზას. ამიტომ t-დან $t+\tau$-მდე იგი გაივლის $s(t+\tau)-s(t)$ გზას. თუ ამ გზას გავყოფთ τ დროზე, რომლის განმავლობაში ხდებოდა მოძრაობა, მივიღებთ მოძრაობის საშუალო სიჩქარეს t მომენტიდან $t+\tau$-მდე:

$$v_{\text{სა}}=\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}.$$

ამ სიჩქარის ზღვარს, როცა $\tau \to 0$ (თუ იგი არსებობს), ეწოდება მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს მ ყ ი ს ი ს ი ჩ ქ ა რ ე დ რ ო ი ს t მ ო მ ე ნ ტ შ ი:

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{s(t+\tau) - s(t)}{\tau}. \tag{1}$$

მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს მ ყ ი ს ი ს ი ჩ ქ ა რ ე დ რ ო ი ს t მ ო მ ე ნ ტ-შ ი ე წ ო დ ე ბ ა t-დ ა ნ $t+\tau$ მ ო მ ე ნ ტ ა მ დ ე მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს ს ა შ უ ა ლ ო ს ი ჩ ქ ა რ ი ს ზ ღ ვ ა რ ს, რ ო ც ა τ მ ი ი ს წ-რ ა ფ ვ ი ს ნ უ ლ ი ს ა კ ე ნ.

განვიხილოთ ორი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. თანაბარი მოძრაობა წრფეზე.

ამ შემთხვევაში $s(t) = vt$, სადაც v მოძრაობის სიჩქარეა. ვიპოვოთ ამ მოძრაობის მყისი სიჩქარე. ამისათვის წინასწარ უნდა ვიპოვოთ საშუალო სიჩქარე დროის შუალედში t-დან $t+\tau$-მდე. მაგრამ, თანაბარი მოძრაობის დროს საშუალო სიჩქარე ნებისმიერ უბანზე მოძრაობის v სიჩქარის ტოლია. ამიტომ $v(t)$ მყისი სიჩქარე იქნება:

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} v = v.$$

ამგვარად, თანაბარი მოძრაობის შემთხვევაში მყისი სიჩქარე (როგორც საშუალო სიჩქარე გზის ნებისმიერ უბანზე) მოძრაობის სიჩქარის ტოლია.

იგივე შედეგი, რა თქმა უნდა, შეგვეძლო ფორმულითაც მიგვეღო, თუ გამოვიყენებდით (1) ტოლობას.

მართლაც,

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{s(t+\tau) - s(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{v(t+\tau) - vt}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{v\tau}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} v = v.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. თანაბარაჩქარებული მოძრაობა ნულოვანი საწყისი სიჩქარითა და a აჩქარებით.

ამ შემთხვევაში, როგორც ფიზიკიდან ცნობილია, სხეული მოძრაობს შემდეგი კანონის მიხედვით:

$$s(t) = \frac{at^2}{2}.$$

თანახმად (1) ფორმულისა მივიღებთ, რომ ასეთი მოძრაობის $v(t)$ მყისი სიჩქარე იქნება:

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{s(t+\tau) - s(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{a(t+\tau)^2 - at^2}{2}}{\tau} =$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{at^2+2at\,\tau+a\tau^2-at^2}{2\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{2at+a\tau^2}{2\tau}=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\left(at+\frac{a}{2}\tau\right)=\lim_{\tau\to 0}at+\lim_{\tau\to 0}\frac{a}{2}\tau.$$

რამდენადაც at არ არის დამოკიდებული τ-ზე, ამიტომ

$$\lim_{\tau\to 0}at=at.$$

გარდა ამისა,

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{a}{2}\tau=\frac{a}{2}\lim_{\tau\to 0}\tau=\frac{a}{2}\cdot 0=0.$$

ამის გამო

$$v(t)=at+0=at.$$

ამგვარად, თანაბარაჩქარებული მოძრაობის მყისი სიჩქარე t მომენტში აჩქარებისა და t დროის ნამრავლის ტოლია. თანაბარი მოძრაობისაგან განსხვავებით, თანაბარაჩქარებული მოძრაობის მყისი სიჩქარე დროის მონაკვეთში ცვლილებას განიცდის.

სავარჯიშოები

1741. წერტილი მოძრაობს შემდეგი კანონის მიხედვით: $s(t)=v_0t+\frac{at^2}{2}$ (s—გზა მეტრობით, t—დრო წუთობით). იპოვეთ ამ წერტილის მყისი სიჩქარე:

ა) მოძრაობის საწყის მომენტში,

ბ) დროის t_0 მომენტში.

1742. იპოვეთ წერტილის მყისი სიჩქარე, თუ იგი მოძრაობს ასეთი კანონის მიხედვით: $s(t)=t^2$ (s—გზა მეტრობით, t — დრო წუთობით):

ა) მოძრაობის საწყის მომენტში,

ბ) მოძრაობის დაწყებიდან 10 წამის შემდეგ;

გ) როცა $t=5$ წუთს.

1743. იპოვეთ სხეულის მყისი სიჩქარე დროის ნებისმიერ t მომენტში, თუ იგი მოძრაობს ასეთი კანონის მიხედვით:

$$s(t)=\sqrt{t}.$$

ფუნქციის წარმოებული § 219

ალგებრისა და ელემენტარული ფუნქციების სასკოლო კურსის მთელს მანძილზე ვაფართოებდით მათემატიკურ ცნებებს, ვაღრმავებდით მათ და უფრო ზოგადი და რთული ცნებები შემოგვქონდა. იგივე უნდა გავაკეთოთ ამ პარაგრაფშიც.

რას წარმოადგენს მოძრაობის მყისი სიჩქარე, რომელიც § 218-ში განვსაზღვრეთ?

მოცემულია რაღაც $s(t)$ ფუნქცია, რომელიც იძლევა სხეულის მიერ გავლილ გზას დროის შუალედში 0-დან t-მდე. t არგუმენტს ეძლევა რაღაც τ ნაზარდი, ე. ი. t მნიშვნელობის ნაცვლად განიხილება $t+\tau$. ამ არგუმენტის ნაზრდს შეესაბამება $s(t)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს შ ე მ დ ე გ ი ნ აზ რ დ ი:

$$s(t+\tau)-s(t).$$

ფუნქციის ეს ნაზრდი იყოფა არგუმენტის τ ნაზრდზე:

$$\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}$$

და აიღება ზღვარი, როცა $\tau \to 0$. გამოსახულება

$$\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}$$

შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც $s(t)$ ფუნქციის ცვლილების „საშუალო სიჩქარე“ შუალედში t-დან $t+\tau$-მდე, ხოლო ამ შეფარდების ზღვარი, როცა $\tau \to 0$, როგორც ამ ფუნქციის ცვლილების მყისი სიჩქარე t მომენტში.

ზემოთ მოყვანილ მსჯელობაში $s(t)$ ფუნქცია წარმოადგენდა სხეულის მიერ გავლილ გზას t დროის განმავლობაში. ეს გარემოება $s(t)$ ფუნქციას გარკვეულ შეზღუდვას ადებდა, კერძოდ, იგი განსაზღვრული უნდა ყოფილიყო t არგუმენტის მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის (t ხომ დროა), უნდა მიეღო მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობანი (s გზის სიგრძეა) და უნდა ყოფილიყო მონოტონურად ზრდადი (რაც უფრო მეტია დრო, მით უფრო მეტია გავლილი გზა). ახლა კი ჩვენ მიერ მიღებული შედეგები განვაზოგადოთ ნებისმიერი ფუნქციებისათვის, რომლებიც სხეულის მოძრაობასთან არ არიან დაკავშირებული.

ვთქვათ, $f(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა; როცა x არგუმენტის ფიქსირებული მნიშვნელობაა x_0, მაშინ ეს ფუნქცია ღებულობს $f(x_0)$-ის ტოლ მნიშვნელობას. მივცეთ x_0 მნიშვნელობას Δx_0 ნაზრდი*, ე. ი. x_0 მნიშვნელობის ნაცვლად განვიხილოთ $x_0+\Delta x_0$ მნიშვნელობა. მაშინ $f(x)$ ფუნქ-

* Δx_0 გამოსახულება იკითხება ასე: დელტა იქს ნული. ეს ერთი განუყოფელი გამოსახულებაა. იგი არ უნდა აგერიოთ $\Delta. x_0$ ნამრავლში.

ცია მიიღებს $f(x_0+\Delta x_0)$ მნიშვნელობას და, ამრიგად, მიიღებს Δy_0 ნაზრდს*:

$$\Delta y_0=f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0).$$

შეფარდება

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}$$

წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის x_0-დან $x_0+\Delta x_0$-მდე შუალედში ცვლილების *საშუალო სიჩქარეს*. ეს საშუალო სიჩქარე დამოკიდებულია, ცხადია, როგორც x_0-ზე, ისე Δx_0-ზე. ახლა Δx_0-ის ნულისაკენ მისწრაფებით მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების *მყის სიჩქარეს* $x=x_0$ წერტილში:

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}$$

(თუ, რასაკვირველია, აღნიშნული ზღვარი არსებობს). მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის ეს ზღვარი დამოკიდებულია x_0-ზე და ეწოდება *$f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $x=x_0$ წერტილში*. x_0-ის თითოეულ მნიშვნელობას შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების მყისი სიჩქარის თავისი მნიშვნელობა. ამიტომ ზღვარი (თუკი იგი არსებობს)

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

რომელიც წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების მყის სიჩქარეს ნებისმიერ x წერტილში, შეიძლება განვიხილოთ როგორც x არგუმენტის ახალი ფუნქცია. ამ ახალ ფუნქციას ეწოდება *მოცემული $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული*.

მათემატიკაში გამოიყენება ფუნქციის წარმოებულის რამდენიმე აღნიშვნა. ვისარგებლოთ y' და $f'(x)$ აღნიშვნებით:

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x)=c$ ფუნქციის წარმოებული, სადაც c რაღაც მუდმივი სიდიდეა (კონსტანტა).

გვაქვს:

$$f(x)=c,\quad f(x+\Delta x)=c.$$

---

* Δy_0-იც განუყოფელი გამოსახულებაა. იგი არ უნდა ავურიოთ $\Delta\cdot y_0$ ნამრავლში.

ამიტომ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$ და, მაშასადამე,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

ამ გვარად,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

მუდმივი სიდიდის წარმოებული ნულის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $f(x) = x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს: $f(x) = x$; $f(x+\Delta x) = x + \Delta x$.

ამიტომ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = \Delta x,$$

მაშასადამე,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

საიდან გამომდინარეობს, რომ

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

$f(x) = x$ ფუნქციის წარმოებული 1-ის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული.

გვაქვს:

$$f(x) = x^2, \quad f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2.$$

ამიტომ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

მაშ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

მაშასადამე,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 2x + 0 = 2x.$$

$f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული $2x$-ის ტოლია.

პირველი ორი მაგალითისაგან განსხვავებით, აქ წარმოებული x-ზეა დამოკიდებული.

$f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობას $x = a$-სათვის აღნიშნავენ $f'(a)$-თი. მაგალითად, თუ $f(x) = x^2$, მაშინ $f'(x) = 2x$ და ამიტომ

$$f'(0) = 2 \times 0 = 0;$$

$$f'(1) = 2 \times 1 = 2.$$

სავარჯიშოები

1744. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები:

ა) $y=x+1$; დ) $y=2\sqrt{x}$;

ბ) $y=2x^2$; ე) $y=1-x^2$;

გ) $y=(x+1)^2$; ვ) $y=x^3$.

1745. სხეულის გახურებისას მისი T ტემპერატურა იცვლება დროის მიხედვით $T=0{,}4t^2$ კანონით (T — ტემპერატურა გრადუსობით, t— დრო წამობით). იპოვეთ:

ა) სხეულის ტემპერატურის ცვლილების საშუალო სიჩქარე დროის შუალედში $t_1=4$ წამიდან $t_2=8$ წამამდე.

ბ) სხეულის ტემპერატურის ცვლილების მყისი სიჩქარე $t=5$ წამისათვის.

1746. I ამპერი დენი იცვლება t დროის განმავლობაში $I=0{,}5t^2$ კანონით, სადაც t წამების რიცხვია. იპოვეთ დენის ცვლილების სიჩქარე მეხუთე წამის დასასრულს.

წარმოებადი ფუნქციები § 220

$y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში განისაზღვრება როგორც ზღვარი

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

მაგრამ ზღვრები ყოველთვის არ არსებობს. სწორედ ასევე არც წარმოებულები არსებობს ყოველთვის. მაგალითის სახით განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$f(x)=|x|.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ფუნქციის წარმოებული $x=0$ წერტილში არაა განსაზღვრული. მართლაც, წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

თუ Δx ისე მიისწრაფვის ნულისაკენ, რომ რჩება დადებითი, მაშინ $|\Delta x|=$ $=\Delta x$ და

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1.$$

თუკი Δx ისე მიისწრაფვის ნულისაკენ, რომ რჩება უარყოფითი, მაშინ $|\Delta x| = -\Delta x$ და

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

(1) ფორმულაში თუ ზღვარი იარსებებდა, მაშინ იგი არ იქნებოდა დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ მიისწრაფვის Δx ნულისაკენ. სინამდვილეში კი ეს ასე არაა. მაგრამ აქედან შეიძლება გავაკეთოთ მხოლოდ ის დასკვნა, რომ (1) ფორმულაში ზღვარი არ არსებობს.

ამრიგად, $f(x) = |x|$ ფუნქციისათვის $x=0$ წერტილში წარმოებული არ არსებობს. ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყველა დანარჩენ წერტილში $f(x) = |x|$ ფუნქციის წარმოებული არსებობს და უდრის:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 0; \\ -1, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

ვავალებთ მოსწავლეებს, დამოუკიდებლად დარწმუნდნენ ამაში.

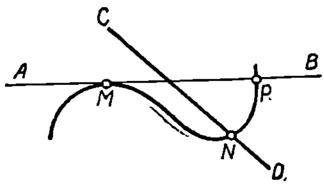
მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მოძებნის ოპერაციას ამ ფუნქციის **გაწარმოება** ეწოდება. ფუნქციას, რომელსაც $x=a$ წერტილში წარმოებული აქვს, ამ წერტილში **წარმოებადი** ეწოდება. თუ ფუნქცია წარმოებადია რომელიმე შუალედის თითოეულ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ იგი წარმოებადია მთელს ამ შუალედში. მაგალითად, $y = |x|$ ფუნქცია წარმოებადია ყოველ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს $x = 0$ წერტილს; $y = x$ ფუნქცია ყველგან წარმოებადია.

(შეიძლება დამტკიცდეს რომ ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია $x=a$ წერტილში (იხ. თავი IX, § 212), არ შეიძლება იყოს წარმოებადი ამ წერტილში. **ამრიგად წარმოებადი შეიძლება იყოს მხოლოდ უწყვეტი ფუნქციები.** მაგრამ არ უნდა ვიფიქროთ, რომ $x=a$ წერტილში ყოველი უწყვეტი ფუნქცია წარმოებადია ამ წერტილში. მაგალითად, $y = |x|$ ფუნქცია უწყვეტია $x=0$ წერტილში, მაგრამ, როგორც ნაჩვენები იყო ზემოთ, იგი არაა წარმოებადი ამ წერტილში. არსებობს მეტად დამაჯერებელი მაგალითებიც: ფუნქცია შესაძლოა ყველგან უწყვეტი იყოს, მაგრამ არსად არ იყოს წარმოებადი. ასეთი მაგალითების განხილვა ჩვენი პროგრამის საზღვრებს სცილდება).

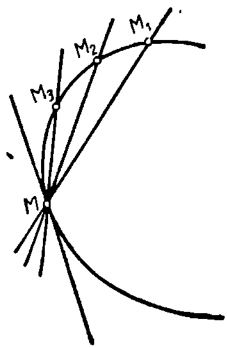
სავარჯიშო

1747. არის თუ არა $f(x) = |x|^2$ და $f(x) = |x|^3$ ფუნქციები წარმოებადი $x=0$ წერტილში?

აქამდე საქმე გვქონდა მხოლოდ წრეწირის მხებთან. მოცემულ M წერტილში წრეწირის მხებს ვუწოდებდით წრფეს, რომელსაც წრეწირთან ერთი და მხოლოდ ერთი საერთო M წერტილი ჰქონდა. ასეთი განსაზღვრა ყველა მრუდისათვის არ არის გამოსაყენებელი. მაგალითად, ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ AB წრფე შეეხება MNP მრუდს M წერტილში (ნახ. 310), თუმცა ამ მრუდთან მას აქვს არა ერთი, არამედ ორი საერთო M და P წერტილი. CD წრფეს, პირიქით, მხოლოდ ერთი ერთი წერტილი აქვს MNP მრუდთან — N წერტილი, მაგრამ სრულიადაც არ იქნება ბუნებრივი, რომ იგი მხებად ჩავთვალოთ MNP მრუდისადმი.



ნახ. 310.

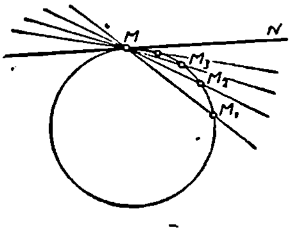


ნახ. 311.

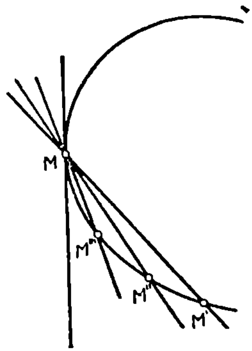
იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ნებისმიერი მრუდის მხები მის რომელიმე M წერტილში (ნახ. 311), ავიღოთ ამ მრუდზე კიდევ ერთი წერტილი M_1 და გავავლოთ მკვეთი MM_1. თუ M_1 წერტილს ვამოძრავებთ მოცემულ მრუდზე ისე, რომ იგი უსაზღვროდ მიუახლოვდეს M წერტილს, მაშინ მკვეთი იბრუნებს M წერტილის გარშემო და მიმდევრობით დაიკავებს MM_1, MM_2, MM_3 და ა. შ. მდებარეობებს. MN მკვეთის ზღვრული მდებარეობა მოგვცემს მრუდის მხებს M წერტილში.

მ რ უ დ ი ს მ ხ ე ბ ი M წ ე რ ტ ი ლ შ ი ე წ ო დ ე ბ ა MM_1 მ კ ვ ე თ ი ს ზ ღ ვ რ უ ლ მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ა ს, რ ო ც ა მ რ უ დ ზ ე მ ო ძ რ ა ვ ი M_1 წ ე რ ტ ი ლ ი უ ს ა ზ ღ ვ რ ო დ უ ა ხ ლ ო ვ დ ე ბ ა M წ ე რ ტ ი ლ ს.

ადვილი გასაგებია, რომ წრეწირისათვის ეს განსაზღვრა იმის ტოლფასია, რითაც ვსარგებლობდით აქამდე გეომეტრიაში (იხ. ნახ. 312). მრუდზე მოძრავი M_1 წერტილი შეიძლება უსაზღვროდ უახლოვდებოდეს M წერტილს სხვადასხვა მხრიდან. მაგალითად, 313-ე ნახაზზე M' წერტილი უახლოვდება M-ს არა ზემოდან, როგორც ეს 311-ნახაზზეა, არამედ ქვემოდან. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს სხვა მკვეთებთან: MM', MM'', MM''' და ა. შ., თუმცა მათი ზღვრული მდებარეობა იგივე MN მხებია.

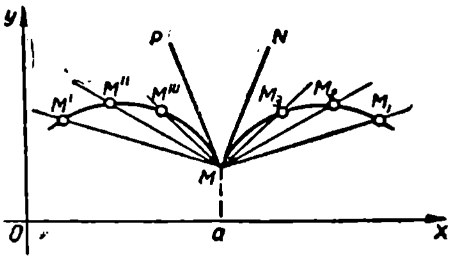


ნახ. 312.



ნახ. 313.

მაგრამ გამორიცხული არ არის, ისეთი შემთხვევაც როდესაც M_1 წერტილის M წერტილისაკენ მ ა რ ჯ ვ ნ ი დ ა ნ მიახლოებისას, MM_1, MM_2, MM_3 მკვეთები ისწრაფვიან დაიკავონ ერთი ზღვრული MN მდებარეობა, ხოლო M' წერტილის M წერტილისაკენ მ ა რ ც ხ ნ ი დ ა ნ მიახლოებისას, MM', MM'', MM''' მკვეთები ისწრაფვიან დაიკავონ მეორე ზღვრული MP მდებარეობა. ეს შემთხვევა იხ. 314-ე ნახაზზე. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მრუდს აღებულ წერტილზე მხები არ გააჩნია.



ნახ. 314.

სავარჯიშოები

1748. რა წარმოადგენს წრფისადმი მხებს მის ნებისმიერ წერტილში?

1749. აქვს თუ არა $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკს მხები იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა:

ა) —1; ბ) 0; გ) 1?

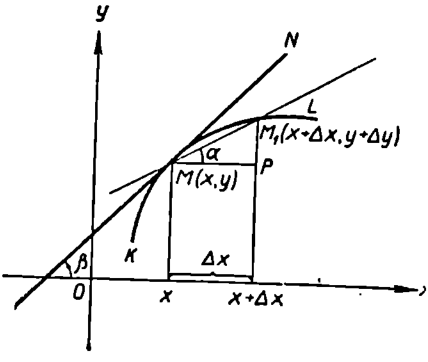
1750. არსებობს თუ არა $y=\sin|x|$ ფუნქციის გრაფიკის მხები $x=\pi$ წერტილში?

1751. კარგად ცნობილია, თუ როგორ განისაზღვრება კუთხე ორ წრფეს შორის. როგორ განსაზღვრავთ კუთხეს ორ ურთიერთგადამკვეთ მრუდს შორის მათი გადაკვეთის წერტილში (იხ. ნახ. 315)?

ნახ. 315.

წარმოებულის გეომეტრიული ახსნა-განმარტება § 222

ვთქვათ, 316-ე ნახაზზე წარმოდგენილი KL მრუდი არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. დავნიშნოთ მასზე ორი წერტილი: ერთი M, რომლის კოორდინატებია (x, y), მეორე M_1 — კოორდინატებით $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. გავავლოთ აბსცისათა ღერძის პარალელური MP მონაკვეთი. MM_1P სამკუთხედში $MP=\Delta x$, $M_1P=\Delta y$. ამიტომ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ იმ α კუთხის ტანგენსის ტოლია, რომელსაც MM_1 მკვეთი ადგენს აბსცისათა ღერძთან. როცა $\Delta x\to 0$, M წერტილი უძრავი რჩება, ხოლო M_1 მრუდის გასწვრივ უსაზღვროდ უახლოვდება M-ს. MM_1 მკვეთი ამასობაში იცვლის მიმართულებას. ამასთან ერთად იცვლება α კუთხეც და ადგილი აქვს ტოლობას



ნახ. 316.

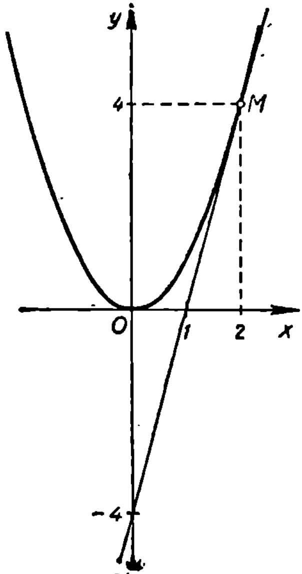
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha.$$

ზღვარზე გადასვლისას MM_1 ქორდა დაიკავებს MN მხების მდებარეობას, შეადგენს რა აბსცისათა ღერძთან რომელიღაც β კუთხეს. ცხადია, რომ ამ დროს $\beta=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha$ და $\operatorname{tg}\beta=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha$. მაგრამ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. მაშასადამე,

$$\operatorname{tg}\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'.$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში წარმოადგენს იმ მხების დახრილობის კუთხის ტანგენსს, რომელიც გავლებულია ფუნქციის გრაფიკისადმი x აბსცისის მქონე წერტილზე.

ნებისმიერ წერტილში ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობასა და ამავე წერტილში მხების საკუთხო კოეფიციენტს შორის ზემოაღნიშნული თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს მარტივად შევადგინოთ მხების განტოლება. ნათელვყოთ ეს მაგალითზე.



ნახ. 317.

ვთქვათ, საძიებელია $y=x^2$ პარაბოლის მხების განტოლება M წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=2$ (ნახ. 317). საძიებელი მხების განტოლებას აქვს ასეთი სახე: $y=kx+b$. კუთხური კოეფიციენტი k ტოლია $y=x^2$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობისა $x=2$ წერტილში. რადგან $y=x^2$, $y'=2x$. ამიტომ $k=4$. ამგვარად, მხების განტოლება იქნება: $y=4x+b$. უცნობი b კოეფიციენტი შეიძლება იმ პირობიდან განვსაზღვროთ, რომ მხები გადის $y=x^2$ პარაბოლის M წერტილზე, რომლის აბსცისაა $x=2$ (ე. ი. შეხების წერტილზე). ამ წერტილის ორდინატი 4-ის ტოლია. თუ ჩავსვამთ $y=4x+b$ განტოლებაში $x=2$ და $y=4$, მივიღებთ: $4=8+b$, საიდანაც $b=-4$. ამრიგად, საძიებელი მხების განტოლება იქნება: $y=4x-4$.

სავარჯიშოები

1752. დაწერეთ $y=x^2$ პარაბოლის მხების განტოლება წერტილისთვის, რომლის აბსცისაა:

ა) -1; ბ) 0; გ) $+1$.

1753. რა კუთხით გადაკვეთს $x=3$ წრფე $y=x^2$ პარაბოლას?

1754. რომელ წერტილებში გადაკვეთს $y=x$ წრფე $y=x^2$ პარაბოლას? რა კუთხეები მიიღება გადაკვეთის წერტილებში?

მუდმივი მამრავლის გამოტანა წარმოებულის ნიშნის გარეთ § 223

განვიხილოთ $g(x)=af(x)$ ფუნქცია, სადაც a რაიმე რიცხვია, ხოლო $f(x)$—ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქცია. ვაჩვენოთ, რომ $g(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და

$$g'(x)=af'(x)$$

მართლაც,

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x}=a\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, ამიტომ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x\to 0$, არსებობს და უდრის $f'(x)$-ს. ამიტომ

$$\lim_{\Delta x\to} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

აგრეთვე არსებობს და უდრის $af'(x)$-ს. (1) თანაფარდობა დამტკიცებულია.

მუდმივი მამრავლი შეიძლება წარმოებულის ნიშნის გარეთ გამოვიტანოთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

$$(3x)'=3(x)'=3\cdot 1=3;$$
$$(-5x^2)'=-5(x^2)'=-5\cdot 2x=-10x.$$

სავარჯიშო

1755. (ზ ე პ ი რ ა დ). იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

ა) $y=-x$; ე) $y=-\frac{x^2}{6}$;

ბ) $y=\frac{x}{2}$; ვ) $y=\frac{1}{2}x$;

გ) $y=-\frac{1}{3}x$; ზ) $y=-\sqrt{3}\,x^2$;

დ) $y=\sqrt{5x}$; თ) $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}x^2$.

ფუნქციათა ჯამის წარმოებული § 224

თ ე ო რ ე მ ა. თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები წარმოებადია, მაშინ მათი ჯამიც $w(x)=u(x)+v(x)$ წარმოებადი იქნება, ამასთან, შესრულდება ტოლობა:

$$w'(x)=u'(x)+v'(x)$$

(ორი ფუნქციის ჯამის წარმოებული ამ ფუნქციების წარმოებულთა ჯამის ტოლია).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს:

$$\Delta w(x)=w(x+\Delta x)-w(x)=[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-$$
$$-[u(x)+v(x)]=[u(x+\Delta x)-u(x)]+[v(x+\Delta x)-v(x)]$$

ამიტომ

$$\frac{\Delta w}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

ვინაიდან $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები წარმოებადია, ამიტომ არსებობს მათი ზღვრები:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=u'(x),$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=v'(x).$$

მაშასადამე, არსებობს ზღვარიც

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=w'(x).$$

ამრიგად, $w'(x)=u'(x)+v'(x)$.

მივიღეთ ორი ფუნქციის ჯამის წარმოებულის ფორმულა. ამგვარადვე ვღებულობთ ორი ფუნქციის სხვაობის წარმოებულის ფორმულას:

$$[u(x)-v(x)]'=u'(x)-v'(x);$$

თუმცა, იგი შეიძლება ჯამის წარმოებულის ფორმულაზე დავიყვანოთ, თუ $u(x)-v(x)$ გამოსახულებას განვიხილავთ როგორც ჯამს $u(x)+[-v(x)]$ და გამოვიყენებთ თეორემას მუდმივი მამრავლის წარმოებულის ნიშნის გარეთ გამოტანის შესახებ. მოსწავლეებს ვანდობთ თვითონ გაერკვნენ ამაში.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ დამტკიცებული თეორემა მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვისათვის:

$$(u_1+u_2+\ldots+u_n)'=u_1'+u_2'+\ldots+u_n'.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. ვთქვათ, $f(x)=x^2+2x-5$, მაშინ

$$f'(x)=(x^2)'+(2x)'-(5)'=2x+2-0=2x+2.$$

ანალოგიურად,

$$(-3x^2+5x+7)'=(-3x^2)'+(5x)'+(7)'=-3\cdot 2x+5\cdot 1+0=-6x+5.$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები:

1756. (ზ ე პ ი რ ა დ).

ა) $y=1-x$; ე) $y=6-3x^2$;

ბ) $y=x-x^2$; ვ) $y=x-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$;

გ) $y=2x+x^2-7$; ზ) $y=x(1-x)$;

დ) $y=1-3x+6x^2$; თ) $y=(x+1)(x-1)$.

1757. $y=(x-1)(x+2)$.

1758. $y=(x-1)^2$.

1759. $y=(2x-1)^2$.

1760. $y=(3-2x)(x-6)$.

1761. $y=3x-5(1-x)(1-2x)$.

1762. $y=(x-1)^2-(x+1)^2$.

ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოება § 226

ვთქვათ, $w(x)$ ფუნქცია ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციის ნამრავლია:

$$w(x)=u(x)\cdot v(x).$$

იგივე ჩავწეროთ უფრო მოკლედ:

$$w=u\cdot v.$$

ვთქვათ, u და v ფუნქციები წარმოებადი არიან. იქნება თუ არა წარმოებადი მათი ნამრავლი?

გვაქვს:

$$\Delta w=w(x+\Delta x)-w(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x).$$

მაგრამ

$$u(x+\Delta x)-u(x)=\Delta u,\quad v(x+\Delta x)-v(x)=\Delta v.$$

აქედან

$$u(x+\Delta x)=u+\Delta u;\qquad v(x+\Delta x)=v+\Delta v.$$

მაშასადამე,

$$\Delta w=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v-uv=$$
$$=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

ამის გამო

$$\frac{\Delta w}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\quad\Delta v\,.$$

როცა $\Delta x\to 0$, მივიღებთ:

ვაჩვენოთ, რომ, თუ $\Delta x \to 0$, მაშინ $\Delta v \to 0$. მართლაც,

$$\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot \Delta x \to v'\cdot 0 = 0.$$

ამგვარად,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = uv' + u'v + u'0 = uv' + u'v.$$

მაშასადამე, განსახილავ შემთხვევაში ნამრავლის წარმოებული არსებობს და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული უდრის პირველი ფუნქციის წარმოებულისა და მეორე ფუნქციის ნამრავლს, პლუს მეორე ფუნქციის წარმოებულისა და პირველი ფუნქციის ნამრავლი.

მაგალითები.

1. იპოვეთ $y=(x+a)(x+b)$ ფუნქციის წარმოებული.

ნამრავლის გაწარმოების წესის მიხედვით გვექნება:

$$y' = (x+a)'(x+b) + (x+a)(x+b)' =$$
$$= 1 \cdot (x+b) + (x+a) \cdot 1 = 2x+a+b.$$

2. იპოვეთ $y=(x+1)(x^2-3)$ ფუნქციის წარმოებული.

გვაქვს:

$$y' = (x+1)'(x^2-3) + (x+1)(x^2-3)' = (1+0)(x^2-3) + (x+1)(2x+0) =$$
$$= 3x^2+2x-3.$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები (№ 1763—1771):

1763. $y=(x^2+1)(3-5x^2)$.

1764. $y=5x^2(x-x^2)$.

1765. $y=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

1766. $y=(1-3x+7x^2)(-5x^2-1)$.

1767. $y=x^4$.

1768. $y=x^2(1-x^2)$.

1769. $y=(2x-3)^4$.

1770. $y=(x^2+ax)^3$.

1771. $y=(x^3-a)(x^3+b)$.

1772. დაამტკიცეთ, რომ თეორემა წარმოებულის ნიშნის გარეთ მუდმივი მამრავლის გატანის შესახებ (§ 223), ნამრავლის გაწარმოების შესახებ თეორემის კერძო შემთხვევაა.

1773. დაამტკიცეთ იგივობა:

$$(uvw)'=u'vw+v'uw+w'uv.$$

ამ იგივობის გამოყენებით იპოვეთ

$$y=(x+a)(x+b)(x+c)$$

ფუნქციის წარმოებული.

ვთქვათ, u და v არის x არგუმენტის რაიმე ფუნქციები და ცნობილია ამ ფუნქციების u' და v' წარმოებულები. ისმება კითხვა, შეიძლება თუ არა ვიპოვოთ $\frac{u}{v}$ შეფარდების წარმოებული იმ წერტილებში, სადაც v ნული არ ხდება?

ამ ამოცანის ამოსახსნელად შევასრულოთ შემდეგი გარდაქმნები:

$$\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\cdot\Delta v}.$$

ამის გამო

$$\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\frac{1}{v^2+v\Delta v}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right].$$

რამდენადაც u და v ფუნქციები წარმოებადი არიან, არსებობს ზღვრები

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'.$$

გარდა ამისა,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[v^2+v\Delta v]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v^2+v\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right]=v^2+vv'\cdot 0=v^2.$$

ამიტომ არსებობს ზღვარიც

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u}{v}}{\Delta x}=\left(\frac{u}{v}\right)',$$

რომელიც

$$\frac{u'v-uv'}{v^2}\text{-ის ტოლია.}$$

ამგვარად, თუ u და v ფუნქციები წარმოებადია, მაშინ იმ წერტილებში, სადაც v განსხვავდება ნულისაგან, $\frac{u}{v}$ შეფარდება აგრეთვე წარმოებადია და

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

მაგალითები.

$$1)\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2};$$

$$2)\ \left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{(1)'\cdot x-1\cdot(x)'}{x^2}=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}.$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები:

1774. $y=\frac{1-x}{1+x}$.

1775. $x=\frac{2x-3}{5-4x}$.

1776. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1777. $y=\frac{2x^2}{1-7x}$.

1778. $y=-\frac{5}{6x-4}$.

1779. $y=\frac{5}{6-x}$.

1780. $y=\frac{-7}{3-10x}$.

1781. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული § 227

წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ ზოგიერთი მაგალითი $y=x^n$ ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებულის მოძებნაზე ნატურალური n-ის შემთხვევაში. ასე, მაგალითად, დავამტკიცეთ, რომ $(x)'=1$, $(x^2)'=2x$. თუ გამოვიყენებთ თეორემას ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებულის შესახებ, ადვილად მივიღებთ x-ის ნებისმიერი სხვა ნატურალური ხარისხის წარმოებულს. მაგალითად,

$$(x^3)'=(x^2\cdot x)'=(x^2)'\cdot x+x^2\cdot(x)'=2x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2;$$

$$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)'\cdot x+x^3\cdot(x)'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=4x^3;$$

$$(x^5)'=(x^4\cdot x)'=(x^4)'\cdot x+x^4\cdot(x)'=4x^3\cdot x+x^4\cdot 1=5x^4$$

და ა. შ. ადვილი შესამჩნევია $y=xn$ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ზოგადი წესი ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $y=x^n$ ფუნქციის წარმოებული, საჭიროა n მაჩვენებელი კოეფიციენტად ავიღოთ, ხოლო x-ის მაჩვენებელი ერთით დავწიოთ, ე. ი.

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \qquad (1)$$

მაგალითად, $(x^{10})'=10x^9$; $(x^{45})'=45x^{44}$.

მსჯელობა, რომელიც აქ ჩავატარეთ (1) ფორმულის მართებულობის დასადასტურებლად, რა თქმა უნდა, არ ჩაითვლება ამ ფორმულის მკაცრ დასაბუთებად. (1) ფორმულას კიდევ დავუბრუნდებით § 262-ში, სადაც მის მკაცრ დამტკიცებას მოვიყვანთ.

ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებულის ჩვენ მიერ დადგენილი წესი მართებულია არა მხოლოდ ნატურალური, არამედ ნებისმიერი ნამდვილი α მაჩვენებლის შემთხვევაში:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x>0).$$

ამ ფორმულის დამტკიცება სასკოლო პროგრამის ფარგლებს სცილდება და ამიტომ აქ არ მოიყვანება.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) ვთქვათ, $y=\frac{1}{x}$, მაშინ

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2} \ (x\neq 0).$$

2) ვთქვათ, $y=\sqrt{x}$, მაშინ

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (x>0).$$

3) თუ $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, მაშინ

$$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \ (x>0).$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები (1782—1788);

1782. (ზ ე პ ი რ ა დ).

ა) $y=x^7$; ე $y=x\sqrt{x}$;

ბ) $y = \frac{1}{5}x^5$; ვ) $y = \frac{1}{x^2}$;

გ) $y = -2x^{\sqrt{2}}$; ზ) $y = \frac{1}{3x^3}$.

დ) $x = \frac{4}{x}$;

1783. $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$. 1786. $y=\frac{1}{x\sqrt{2x}}$.

1784. $y=\sqrt[6]{3x\sqrt{5x}}$. 1787. $x=\frac{5x^2-x-1}{x}$.

1785. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. 1788. $y=\frac{7-3x+x^2}{x\sqrt{x}}$.

1789. რატომაა, რომ, როდესაც წერენ ზოგად ფორმულას:

$$(x^a)' = a\cdot x^{a-1},$$

ჩვეულებრივ აპირობებენ, $x>0$?

მრავალწევრის წარმოებული § 228

n ხარისხის მრავალწევრს შემდეგი სახე აქვს:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

სადაც a_n თავისუფალი წევრია, ხოლო a_0, a_1 $a_2, \ldots,$ a_{n-1} შესაბამისად x^n, $x^{n-1}, \ldots,$ x-ის კოეფიციენტები, ამასთანავე $a_0\neq 0$, ასეთი გამოსახულება შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ჯამი $(n+1)$ ფუნქციისა: a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, $\ldots$, $a_{n-1}x$, a_n. ამიტომ მრავალწევრის წარმოებული ამ ფუნქციათა წარმოებულების ჯამის ტოლია:

$$P'_n(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+(a_2x^{n-2})'+\ldots+(a_{n-1}x)'+(a_n).$$

a_n-ის წარმოებული, როგორც მუდმივის წარმოებული, ნულის ტოლია. დანარჩენ წარმოებულთა მოძებნა ადვილია, თუ გამოვიყენებთ მუდმივი მამრავლის წარმოებულის ნიშნის გარეთ გამოტანის წესს და $(x^k)'=kx^{k-1}$ ფორმულას ნებისმიერი ნატურალური k-სათვის. ამგვარად, ვღებულობთ:

$$(a_0x^n)'=a_0(x^n)'=a_0nx^{n-1};$$

$$(a_1x^{n-1})'=a_1(x^{n-1})'=a_1(n-1)x^{n-2};$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(a_{n-1}x)'=a_{n-1}(x)'=a_{n-1};$$

$$(a_n)'=0.$$

იქედან

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)'=$$
$$=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1) $(3x^2-5x-7)'=3\cdot 2x-5=6x-5$;

2) $(10x^6-4x^3+x)'=10\cdot 6x^5-4\cdot 3x^2+1=60x^5-12x^2+1$.

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები:

1790. $y=2x^5-x.$

1791. $y=3x^7-6x^6-4x^3+5x^2+17.$

1792. $y=-x^3-3x^2+6x-100.$

1793. $y=5-6x+17x^4.$

1794. $y=(x^3-1-2x)(x^2-5).$

1795. $y=(x^7+x)^2.$

1796. $y=(2x^5-6x^6)^3.$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გაწარმოება § 229

თ ე ო რ ე მ ა. 1. **სინუსის წარმოებული კოსინუსის ტოლია:**

$$(\sin x)'=\cos x.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, x არგუმენტმა მიიღო Δx ნაზრდი. მაშინ $y=\sin x$ ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

თუ გამოვიყენებთ ორი კუთხის ჯამის სინუსის ფორმულას, მიღებული ნაზრდი ასე გარდაიქმნება:

$$\Delta y=\sin x\cos(\Delta x)+\cos x\sin(\Delta x)-\sin x=$$
$$=\cos x\sin(\Delta x)-\sin x\,(1-\cos\Delta x)].$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $1-\cos\Delta x=2\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$, მივიღებთ:

$$\Delta y=\cos x\sin\Delta x-2\sin x\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}-2\sin x\,\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

როგორც ვიცით (თ. IX, § 214), $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$. ამის საფუძველზე

ვიპოვით $\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$ გამოსახულების ზღვარს. მართლაც, თუ $\frac{\Delta x}{2}$-ს აღვნიშნავთ z-ით, მაშინ $\Delta x=2z$. ამიტომ

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin^2 z}{2z}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{2z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\sin z=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0.$$

ახლა უკვე (1)-დან ვღებულობთ:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}-2\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\cos x\cdot 1-2\cdot\sin x\cdot 0=\cos x.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 2. **კოსინუსის წარმოებული მოპირდაპირე ნიშნით აღებული სინუსის ტოლია.**

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ვთქვათ, x არგუმენტმა მიიღო Δx ნაზრდი, მაშინ $y=\cos x$ ფუნქცია მიიღებს სათანადო ნაზრდს:

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x.$$

თუ გამოვიყენებთ ორი კუთხის ჯამის კოსინუსის ფორმულას, მიღებული ნაზრდი ასე გარდაიქმნება:

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x=$$

$$=-\sin x\sin\Delta x-\cos x(1-\cos\Delta x)=$$

$$=-\sin x\sin\Delta x-2\cos x\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

იქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x\,\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} - 2\cos x\,\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

მაგრამ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1, \quad \text{ხოლო} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=0.$$

ამიტომ

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x\cdot 1 - 2\cos x\cdot 0 = -\sin x.$$

თეორემა დამტკიცებულია

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) ვიპოვოთ $y=a\sin x+b\cos x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$y'=(a\sin x+b\cos x)'=a(\sin x)'+b(\cos x)' = a\cos x-b\sin x.$$

2) ვიპოვოთ $y=x\sin x$ ფუნქციის წარმოებული. ორი ფუნქციის ნამრავლის გაწარმოების წესის მიხედვით მივიღებთ

$$y'=(x\sin x)'=x'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x.$$

თუ გამოვიყენებთ წილადის გაწარმოების წესს, ადვილად ვიპოვით $\operatorname{tg} x$ ფუნქციის წარმოებულს, თუ $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, და $\operatorname{ctg} x$ ფუნქციის წარმოებულს, თუ $x\neq n\pi$.

მართლაც,

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

მაშასადამე,

$$(\operatorname{tg} x)'=-\frac{1}{\cos^2 x}\left(x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right),$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}\quad(x\neq n\pi).$$

სავარჯიშოები

1797. $y=\sin x$ სინუსოიდაზე აღებულია წერტილები, რომელთა აბსცისებია: ა) $x=0$; ბ) $x=\frac{\pi}{2}$; გ) $x=\frac{3}{2}\pi$; დ) $x=\frac{\pi}{4}$; ე) $x=\pi$;

დაწერეთ ამ წერტილებზე გამავალ მხებთა განტოლებანი.

1798. $y=\cos x$ კოსინუსოიდაზე აღებულია წერტილები, რომელთა აბსცისებია:

ა) $x=0$; ბ) $x=\frac{\pi}{2}$; გ) $x=\frac{3}{2}\pi$; დ) $x=\frac{\pi}{4}$; ე) $x=\pi$.

დაწერეთ ამ წერტილებზე გამავალ მხებთა განტოლებანი.

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები:

1799. $y=3\sin x+2\cos x$.

1800. $y=4\sin x-5\cos x$.

1801. $y=-\sin x+7\cos x$.

1802. $y=-6\sin x-9\cos x$.

1803. $y=\sin^2 x$

1804. $y=\cos^2 x$.

1805. $y=\sin x\cos x$

1806. $y=x^2\sin x$.

1807. $y=x^2\cos x$.

1808.* $y=\cos^3\frac{x}{2}$.

1809. $y=(5x+\sin x)(x^2-\cos x)$.

1810. $y=(1-2\sin x)(1-3\cos x)$.

1811. $y=\sin 2x$.

1812. $y=\cos 2x$.

1813. $y=(a+bx)\sin x+(c+dx)\cos x$.

1814. $y=\frac{\sin x}{x}$.

1815. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

1816. $y=\sqrt{x}\sin x$

1817. $y=\frac{3\cos x}{\sqrt{x}}$

1818. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

1819. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$f(ax+b)$ ფუნქციის გარდაქმნა § [illegible]

მათემატიკაში ხშირად საქმე გვაქვს $f(ax+b)$ სახის გამოსახულებებთან, სადაც $f(x)$ რომელიმე მოცემული ფუნქციაა. ასე, მაგალითად, ჰარმონიული რხევების შესწავლისას განიხილება $\sin(\omega x+\varphi)$ ტიპის ფუ-

ნქციები. სხვადასხვა საკითხის გადაწყვეტის დროს ხშირად გვხვდება $\lg(ax+b)$, $(x+a)^n$ და ა. შ. სახის გამოსახულებანი. დიდ ინტერესს იწვევს მსგავსი ფუნქციების გაწარმოების საკითხი.

ვთქვათ, $f(x)$ რომელიმე ფუნქციაა, რომლისთვისაც შეგვიძლია ვიპოვოთ წარმოებული. როგორ ვიპოვოთ ასეთ შემთხვევაში იმ $\varphi(x)$ ფუნქციის წარმოებული, რომელიც $f(x)$-ის საშუალებით შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\varphi(x)=f(ax+b)\,?$$

წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად,

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[a(x+\Delta x)+b]-f(ax+b)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[(ax+b)+a\cdot\Delta x]=f(ax+b)}{\Delta x}.$$

თუ $ax+b$ გამოსახულებას აღვნიშნავთ y-ით, მივიღებთ

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(y+a\Delta x)-f(y)}{\Delta x}\,.$$

ამ გამოსახულების მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ a რიცხვზე

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(y+a\Delta x)-f(y)}{a\Delta x}\cdot a.$$

თუ $a\Delta x$-ს აღვნიშნავთ h-ით, მივიღებთ

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}\cdot a.$$

(რამდენადაც $\Delta x\to 0$, ამიტომ $h=a\Delta x\to 0$).

მაგრამ

$$\lim_{n\to 0}\left[\frac{f(y+h)-f(y)}{h}\right]=f'(y).$$

ამიტომ $\varphi'(x)=af'(y)$.

თუ გავიხსენებთ, რომ $y=ax+b$, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\varphi'(x)=af'(ax+b).$$

ამგვარად,

$$[f(ax+b)]'=af'(ax+b). \qquad (1)$$

a რიცხვი არის $ax+b$ ფუნქციის წარმოებული. ამიტომ (1) ტოლობა შეიძლება ასე გამოითქვას:

$f(ax+b)$ გამოსახულების წარმოებულის საპოვნელად საკმარისია გავაწარმოოთ იგი $f(x)$ გამოსახულების გაწარმოების წესის მიხედვით (ამასთან საბოლოო გამოსახულებაში x უნდა შევცვალოთ $ax+b$-თი) და შემდეგ გავამრავლოთ $ax+b$ გამოსახულების წარმოებულზე (ესე იგი a რიცხვზე).

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $[(2x+1)^{10}]'=10(2x+1)^9\cdot(2x+1)'=10(2x+1)^9\cdot 2=20(2x+1)^9$

2) $(\sin 3x)'=\cos 3x(3x)'=\cos 3x\cdot 3=3\cos 3x.$

3) $$\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\right]'=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)'=$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right).$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები (№ 1820—1834):

1820. $y=(2x+3)^5$.

1821. $y=(x+7)^6$.

1822. $y=(1-5x)^7$

1823. $y=\sin 4x$.

1824. $y=\sin\dfrac{x}{5}$.

1825. $y=\cos 6x$.

1826. $y=\sin(2x-3)$.

1827. $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

1828. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$.

1829. $y=A\cos(\varphi-\omega x)$.

1830. $y=3x\sin 2x$.

1831. $y=3(x-5)^3+2(1-x)^4$.

1832. $y=3x\sin 2x+2x\cos 3x$.

1833. $y=\sqrt{2x+1}$.

1834. $y=\sqrt[3]{1-x}$.

1835. დაამტკიცეთ, რომ

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\left(x\neq-\frac{d}{c}\right).$$

y ფ უ ნ ქ ც ი ი ს y' წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ს ამ ფუნქციის მეორე წარმოებული ეწოდება და y''-ით ან $f''(x)$-ით აღინიშნება:

$$y''=(y')'; \qquad f''(x)=[f'(x)]'.$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

1) ვთქვათ, $y=3x^3-6x^2+7x-1$. მრავალწევრის გაწარმოების წესის მიხედვით გვექნება:

$$y'=(3x^3-6x^2+7x-1)'=9x^2-12x+7;$$

$$y''=(y')'=(9x^2-12x+7)'=18x-12.$$

2) ვთქვათ $y=\sin x$, მაშინ $y'=\sin(x)'=\cos x$;

$$y''=(\cos x)'=-\sin x.$$

3) თუ $y=\frac{ax^2}{2}$, მაშინ

$$y'=\left(\frac{ax^2}{2}\right)'=\frac{a}{2}(x^2)'=\frac{a}{2}\cdot 2x=ax;$$

$$y''=(ax)'=a.$$

y ფუნქციის მეორე წარმოებულს y''-ს, ისე როგორც მის პირველ წარმოებულს y'-ს, შეიძლება მიეცეს უბრალო ფიზიკური ახსნა-განმარტება; რამდენადაც იგი არის პირველი წარმოებულის წარმოებული, ამიტომ იგი ახასიათებს ამ წარმოებულის ცვლილების სიჩქარეს. y' წარმოებული კი ახასიათებს y ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს. ამგვარად, y'' ახასიათებს y ფუნქციის „ცვლილების სიჩქარის ცვლილების სიჩქარეს". ამგვარ ცნებას ჩვენ უკვე ფიზიკაში ვხვდებით. თანაბარ აჩქარებული მოძრაობის შესწავლისას ჩვენ შემოვიტანეთ ა ჩ ქ ა რ ე ბ ი ს ცნება, როგორც მოძრაობის სიჩქარის ცვლილება დროის ერთეულში. სწორედ ეს ცნება ახასიათებს მოძრაობის სიჩქარის ცვლილების სიჩქარეს. ამიტომ, თუ გამოვიყენებთ მექანიკის ენას, შეიძლება ითქვას, რომ y ფუნქციის მეორე წარმოებული y'' არის აჩქარება, რომლითაც $y=f(x)$ ფუნქცია იცვლის თავის მნიშვნელობებს x არგუმენტის მნიშვნელობათა ცვლილებისას.

$y=f(x)$ ფუნქციის მესამე წარმოებული არის ამ ფუნქციის მეორე წარმოებულის წარმოებული, იგი ასე აღინიშნება:

$$y''' \text{ ან } f'''(x); \; y'''=(y'')'; \quad f'''(x)=[f''(x)]'$$

ანალოგიურად, $y=f(x)$ ფუნქციის მეოთხე წარმოებული (აღინიშნება y^{IV}-ით ან $f^{\text{IV}}(x)$-ით) არის მესამე რიგის წარმოებულის წარმოებული და ა. შ.

$f(x)$ ფუნქციის n-ურ წარმოებულს სხვანაირად n-ური რ ი გ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ეწოდება (აღინიშნება $f^{(n)}(x)$). მაგალითად, მესამე წარმოებულს სხვანაირად მესამე რიგის წარმოებული ეწოდება, მეოთხე წარმოებულს — მეოთხე რიგის წარმოებული და ა. შ.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $y=x^2+x+1$ ფუნქციისათვის გვექნება:

$$y'=2x+1; \; y''=2; \; y'''=0; \; y^{\text{IV}}=0.$$

ცხადია, რომ ამ ფუნქციის ყველა წარმოებული, დაწყებული მესამიდან, ნულის ტოლია.

2) $y=\sin x$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$y'=\cos x; \quad y''=-\sin x; \quad y'''=-\cos x;$$

$$y^{\text{IV}}=-(-\sin x)=\sin x; \quad y^{\text{V}}=\cos x \text{ და ა. შ.}$$

სავარჯიშოები

1836. იპოვეთ $s(t)=2t^3+5t^2+4t$ კანონის მიხედვით მოძრავი სხეულის აჩქარება (s—გზა მეტრობით, t—დრო წუთობით) დროის შემდეგ მომენტებში:

ა) $t=40$ წამს; ბ) $t=1$ საათს.

1837. იპოვეთ $s=\sqrt{t}$ კანონის მიხედვით მოძრავი სხეულის აჩქარება (s—გზა მეტრობით, t—დრო წუთობით) t დროის ნებისმიერ მომენტში.

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა ყველა რიგის წარმოებულები: (№ 1838—1843):

1838. $y=(x+2)^3$.

1839. $y=(2x-1)^3$.

1840. $y=x^2-x-1$.

1841. $y=x^5+4x^3-7x^2$.

1842. $y=\cos x$.

1843. $y=(1+x)^{100}$.

1844. დაამტკიცეთ, რომ $y=a\sin x+b\cos x$ ფუნქციისათვის მარ-თებულია თანაფარდობა $y^{IV}=y$.

1845. რამდენჯერ უნდა გავაწარმოოთ $y=(x^2+1)^{100}$ ფუნქცია, რომ შედეგად მივიღოთ 50-ე ხარისხის მრავალწევრი?

1846*. იპოვეთ $y=\sin x\cdot\cos^2 x$ ფუნქციის მე-100 რიგის წარმო-ბული.

მრავალწევრის კოეფიციენტთა გამოსახვა მისი წარმოებულების მნიშვნელობათა საშუალებით § 282

ვთქვათ,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n. \qquad (1)$$

მაშინ

$$P'(x)=1\cdot a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}; \qquad (2)$$

$$P''(x)=2\cdot 1\cdot a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}; \qquad (3)$$

$$P'''(x)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \qquad (4)$$

და ა. შ.

თუ (1), (2), (3) და (4) ფორმულებში ვიგულისხმებთ, რომ $x=0$, გვექნება:

$$P(0)=a_0,$$

$$P'(0)=1\cdot a_1,$$

$$P''(0)=1\cdot 2a_2,$$

$$P'''(0)=1\cdot 2\cdot 3a_3,$$

საიდანაც

$$a_0=P(0),$$

$$a_1=\frac{P'(0)}{1},$$

$$a_2=\frac{P''(0)}{1\cdot 2},$$

$$a_3=\frac{P'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

თუ განვაგრძობთ ამ პროცესს, მივიღებთ:

$$a_4=\frac{P^{\mathrm{IV}}(0)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

$$a_5=\frac{P^{\mathrm{V}}(0)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5},$$

და ა. შ. საზოგადოდ, ნებისმიერი ნატურალური k-სათვის

$$a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}. \tag{5}$$

სადაც $P^{(k)}(0)$ არის $P(x)$ მრავალწევრის k რიგის წარმოებულის მნიშვნელობა $x=0$-სათვის. ნამრავლი 1. 2. 3. ...k, ჩვეულებრივ აღინიშნება $k!$ სიმბოლოთი (იკითხება: კა ფაქტორიალი). ამიტომ (5) ფორმულა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \tag{6}$$

ეს ფორმულა სწორი იქნება მაშინაც, როცა $k=0$, თუ $P^{(0)}(x)$ ($P(x)$ ფუნქციის ნულოვანი წარმოებული) გამოსახულებად ვიგულისხმებთ უბრალოდ $P(x)$ ფუნქციას და მივიჩნევთ, რომ $0!=1$.

(6) ფორმულა გამოსახავს $P(x)$ მრავალწევრის x_k-სთან მდგომ კოეფიციენტს, ამ მრავალწევრის ნულ წერტილზე k რიგის წარმოებულის მნიშვნელობის საშუალებით.

ამ ფორმულის შინაარსი ნათელვყოთ ზოგიერთ მაგალითზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $(x+1)^{10}$ მრავალწევრის კოეფიციენტი, რომელიც x^3-თან დგას.

გვაქვს:

$$P(x)=(x+1)^{10};$$

$$P'(x)=10(x+1)^9;$$

$$P''(x)=10\cdot9(x+1)^8;$$

$$P'''(x)=10\cdot9\cdot8(x+1)^7$$

ამიტომ $P'''(0)=10\cdot9\cdot8\cdot1^7=720$. (6) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$\frac{P'''(0)}{3!}=\frac{720}{1\cdot2\cdot3}=120.$$

ამგვარად, $(x+1)^{10}$ მრავალწევრის კოეფიციენტი, რომელიც x^3-თან დგას, 120-ის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $(3x-1)^9$ მრავალწევრის ის კოეფიციენტი, რომელიც x^2-თან დგას.

გვაქვს:

$$P(x)=(3x-1)^9;$$

$$P'(x)=9(3x-1)^8\cdot 3=27(3x-1)^8;$$

$$P''(x)=27\cdot 8(3x-1)^7\cdot 3=648(3x-1)^7.$$

ამიტომ საძიებელი კოეფიციენტი იქნება:

$$\frac{P''(0)}{2!}=\frac{648\cdot(-1)^7}{1\cdot 2}=-324.$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ № 1847—1851 ამოცანებში მოცემული მრავალწევრების კოეფიციენტები, რომლებიც x-ის მითითებულ ხარისხებთან დგას:

1847. $P(x)=(x+2)^{10}$, x^3-თან.

1848. $P(x)=(1-x)^{40}$, x^2-თან.

1849. $P(x)=(2-x)^{25}$, x^3-თან.

1850. $P(x)=(x+a)^9$, x^4-სთან.

1851. $P(x)=(x+1)^n$, x^5-სთან.

1852. განსაზღვრეთ $P(x)=(x+2)^n$ მრავალწევრის n ხარისხი, თუ x^2-თან მდგომი მისი კოეფიციენტი 24-ის ტოლია.

ნიუტონის ბინომის ფორმულა § 282

აქამდე ჩვენთვის ცნობილი იყო ფორმულები $a+b$ ორწევრის მეორე და მესამე ხარისხისათვის:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

ამ პარაგრაფში მივიღებთ ფორმულას $(a+b)^n$ ხარისხისათვის ნებისმიერი ნატურალური n მაჩვენებლით. ამისათვის განვიხილოთ n ხარისხის მრავალწევრი

$$P(x)=(x+a)^n,$$

სადაც a რომელიმე მოცემული რიცხვია.

ამ მრავალწევრის თავისუფალი წევრია $P(0)=a^n$. x-ის ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების საპოვნელად ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფის

(6) ფორმულით. ამ ფორმულის თანახმად x^k-სთან მდგომი კოეფიციენ-
ტი იქნება $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$, სადაც $P^{(k)}(0)$ არის $P(x)$ მრავალწევრის k რიგის წარმოებულის მნიშვნელობა, როცა $x=0$. ვიპოვოთ ეს მნიშვნელობა. გვაქვს:

$$P(x)=(x+a)^n;$$

$$P'(x)=n(x+a)^{n-1};$$

$$P''(x)=n(n-1)(x+a)^{n-2};$$

$$P'''(x)=n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3}$$

და ა. შ. ცხადია, რომ $P(x)$ მრავალწევრის k რიგის წარმოებული იქნება

$$P^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(x+a)^{n-k}.$$

ამიტომ

$$P^{(k)}(0)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)a^{n-k}.$$

მაშასადამე, $P(x)$ მრავალწევრის x^k-სთან მდგომი კოეფიციენტი იქნება

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}.$$

გამოსახულება

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k\,!}$$

ჩვეულებრივ აღინიშნება C_n^k სიმბოლოთი (იკითხება: C n-იდან k-მდე). ამიტომ $P(x)$ მრავალწევრის x^k-სთან მდგომი კოეფიციენტი $C_n^k a^{n-k}$-ს ტოლია. მაგალითად, x-თან მდგომი კოეფიციენტი იქნება $C_n^1 a^{n-1}$, x^2-თან მდგომი — $C_n^2 a^{n-2}$ და ა. შ. მაშ, მოცემული მრავალწევრი შეიძლება ასეთი სახით წარმოვადგინოთ:

$$(x+a)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}x+C_n^2a^{n-2}x^2+\cdots+C_n^{n-1}ax^{n-1}+C_n^nx^n.$$

თუ ამ ფორმულაში $x=b$, მივიღებთ:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\quad+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n.\quad(1)$$

შევნიშნოთ, რომ $(a+b)^n$-ის გაშლაში $(k+1)$-ე შესაკრებს აქვს სახე:

$$C_n^ka^{n-k}b^k\quad(0\leqslant k\leqslant n).$$

(1) ფორმულას ნიუტონის ბინომის* ფორმულა ეწოდება, ხოლო მასში მონაწილე $1, C_n^1, C_n^2, C_n^3 \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$ კოეფიციენტებს — ბინომიალური კოეფიციენტები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$(a+b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4.$$

მაგრამ

$$C_4^1 = \frac{4}{1} = 4; \quad C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6; \quad C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4; \qquad C_4^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1,$$

ამიტომ

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

სავარჯიშოები

1853. გამოთვალეთ:

ა) C_5^2; ბ) C_6^3; გ) C_8^3; დ) C_7^6; ე) C_{10}^4; ვ) C_6^5.

1854. ნიუტონის ბინომის ფორმულაზე დაყრდნობით გამოიყვანეთ ფორმულები ორი რიცხვის ჯამისა და სხვაობის კუბებისათვის.

1855. ნიუტონის ბინომის ფორმულის მიხედვით გამოთვალეთ:

ა) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^4$;

ბ) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^4$;

გ) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^5$;

დ) $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^5$.

1856. განსაზღვრეთ $(3a-2)^n$ ბინომის ხარისხის მაჩვენებელი, თუ ცნობილია, რომ a^2-თან მდგომი კოეფიციენტი 216-ის ტოლია.

1857. დაამტკიცეთ შემდეგ ტოლობათა მართებულობა:

ა) $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$; ბ) $C_n^{n-2} = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

1858. დაამტკიცეთ იგივობა:

$$C_n^{k+1} = C_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

1859*. დაამტკიცეთ, რომ $11^{10}-1$ იყოფა 100-ზე.

---

* (1) ფორმულა მკაცრად დამტკიცებული იყო ჯერ კიდევ ნიუტონამდე იაკობ ბ ე რ ნ უ ლ ი ს მიერ (1654—1705) — შვეიცარიელ მეცნიერთა იმ ოჯახის ერთ-ერთი წევრის მიერ, რომელმაც მსოფლიოს მისცა 11 გამოჩენილი მათემატიკოსი. ნიუტონს ეკუთვნის იდეა, თუ როგორ შეიძლება (1) ფორმულის გავრცელება იმ შემთხვევაში, როცა n-ის მნიშვნელობანი წილადური და უარყოფითია. ეს იდეა ფართოდაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის მრავალი ამოცანის ამოხსნისას.

განსაზღვრის თანახმად,

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}. \qquad (1)$$

თუ ამ წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ

$(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$-ზე,

მივიღებთ

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ამგვარად,

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (2)$$

ეს ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n და k-სათვის, თუ $n>k$. კერძოდ, თუ მასში k-ს ნაცვლად $n-k$-ს შევიტანთ, მივიღებთ:

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad (3)$$

(2) და (3) ტოლობათა მარჯვენა მხარეები თანატოლია; ამიტომ მარცხენა მხარეებიც ტოლი იქნება:

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

(4) ფორმულა, გამოსახავს რა ბინომიალური კოეფიციენტების მნიშვნელოვან თვისებას, საგრძნობლად ამარტივებს მათ გამოთვლას. მაგალითად, $a+b$ ორწევრის მე-6 ხარისხში ახარისხებისას გამოსათვლელი იქნება C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6. განსაზღვრის თანახმად (იხ. ფორმულა (1):

$$C_6^1=\frac{6}{1}=6;$$

$$C_6^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15;$$

$$C_6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20.$$

C_6^4 და C_6^5-ის გამოსათვლელად ახლა აღარ არის აუცილებელი მათი წარმოდგენა (1) ფორმულის შესაბამისად. საკმარისია ვისარგებლოთ (4) ფორმულით და უკვე მიღებული მნიშვნელობებით:

$$C_6^4=C_6^{6-4}=C_6^2=15; \qquad C_6^5=C_6^{6-5}=C_6^1=6.$$

შევნიშნოთ აქვე, რომ $C_n^n=1$. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს C_n^n რიცხვის განსაზღვრის წესიდან:

$$C_n^n=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-2)(n-1)n}=1\,.$$

შევთანხმდეთ, რომ $C_n^0=1$. ასეთი შეთანხმების საფუძველზე (4) ფორმულა მართებული აღმოჩნდება არა მხოლოდ მაშინ, როცა $n>k$, არამედ მაშინაც, როცა $n=k$:

$$C_n^n=C_n^0=1.$$

სავარჯიშოები

1860. გამოთვალეთ:

ა) C_{10}^8; ბ) C_{15}^{12}; გ) C_{100}^{98}; დ) C_{36}^{34}.

1861. ცნობილია, რომ $C_n^x=C_n^y$. შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ $x=y$?

1862. ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $C_x^{x-2}+2x=9$;

ბ) $C_{x-1}^{x-2}=x^2-13$;

გ) $C_n^{n-2}=C_n^3$.

1863. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$ ბინომის გაშლაში როგორი იქნება a^8-სთან მდგომი კოეფიციენტი?

1864. როგორი იქნება a^4-სთან მდგომი კოეფიციენტი, თუ გავშლით $\left(2a-\frac{1}{3a}\right)^{10}$ ბინომს?

ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენება მიახლოებითი გამოთვლებისათვის § 285

თუ ნიუტონის ბინომის ფორმულაში:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

ჩავსვამთ $a=1$, $b=x$, მივიღებთ:

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n. \qquad (1)$$

თუ x-ის სიდიდე მცირეა, მაშინ x^2, $x^3,\ldots,x^n$ მით უმეტეს მცირენი იქნებიან. ამიტომ თუ (1) ფორმულაში უკუვაგდებთ x^2, $x^3,\ldots,x^n$-ის შემცველ წევრებს, მიღებული

$$(1+x)^n \approx 1+C_n^1 x \tag{2}$$

ფორმულა მიახლოებითი იქნება, ამასთან, ასეთი მიახლოების მცდარობა მცირე უნდა იყოს. რამდენადაც $C_n^1=n$, (2) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$(1+x)^n \approx 1+nx. \tag{3}$$

x-ის მცირე მნიშვნელობისათვის (3) ფორმულა პრაქტიკულად სავსებით დამაკმაყოფილებელ შედეგს იძლევა. ამის დადასტურებას, როცა $x=0{,}01$, გვაძლევს შემდეგი ცხრილი:

n \ $(1+x)^n$	(3) ფორმულის მიხედვით	მნიშვნელობა ოთხი ზუსტი ათწილადი ნიშნით
2	1,02	1,0201
3	1,03	1,0303
4	1,04	1,0406
10	1,10	1,1046

(3) ფორმულა მართებულია x-ის მცირე უარყოფითი მნიშვნელობისათვისაც. მაგალითად,

$$(1-0{,}02)^5 \approx 1-5\cdot 0{,}02=0{,}9;$$

$$(0{,}93)^2=(1-0{,}07)^2 \approx 1-2\cdot 0{,}07=0{,}86.$$

(3) ფორმულა მიღებული იყო ნატურალური n-სათვის, მაგრამ იგი გამოსადეგია n-ის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვისაც. მაგალითად,

$$\sqrt{1{,}003}=(1+0{,}003)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}003=1{,}0015;$$

$$\sqrt[3]{0{,}97}=(1-0{,}03)^{\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}03=0{,}99;$$

$$\frac{1}{0{,}98}=0{,}98^{-1}=(1-0{,}02)^{-1} \approx 1+(-1)(-0{,}02)=1{,}02;$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{0{,}96}}=0{,}96^{-\frac{1}{4}}=(1-0{,}04)^{-\frac{1}{4}} \approx 1+\frac{1}{4}\cdot 0{,}04=1{,}01.$$

იპოვეთ შემდეგ გამოსახულებათა მიახლოებითი მნიშვნელობანი

1865. $(1,04)^3$. **1873.** $\sqrt[3]{1,03}$.

1866. $(1,001)^{10}$. **1874.** $\sqrt[5]{0,99}$.

1867. $(1,03)^6$. **1875.** $\sqrt{2\sqrt{0,24}}$.

1868. $(0,99)^3$. **1876.** $\left(\sqrt[3]{0,98}\right)^4$.

1869. $(0,98)^4$. **1877.** $\frac{1}{\sqrt{0,98}}$.

1870. $(0,97)^5$. **1878.** $\frac{1}{1,02}$.

1871. $\sqrt{1,05}$. **1879.** $\frac{1}{0,97}$.

1872. $\sqrt{0,95}$. **1880.** $\frac{1}{\left(\sqrt[4]{0,99}\right)^6}$.

წარმოებულის გამოყენება ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის უბნების მოსაძებნად § 286

წარმოებულის საშუალებით ადვილია ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის უბნების მოძებნა. გვაქვს შემდეგი თეორემა.

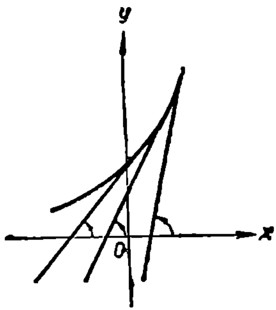
თ ე ო რ ე მ ა. თუ $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ **წარმოებული დადებითია $[a, b]$ შუალედში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია ამ შუალედში, ხოლო თუ წარმოებული უარყოფითია ამ შუალედში, მაშინ მასში $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურად კლებადია.**

ამ თეორემის დამტკიცება გამოდის სასკოლო პროგრამის ფარგლებს გარეთ, ამიტომ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ მისი გეომეტრიული დასურათებით.

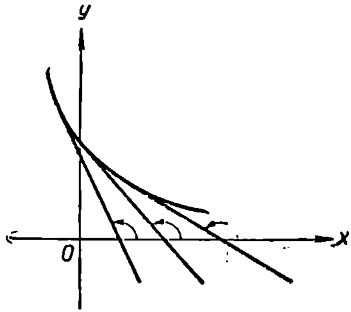
$y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, როცა $x=x_0$, იმ მხების კუთხური კოეფიციენტის ტოლია, რომელიც გავლებულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილზე, რომლის აბსცისა x_0-ია. პირობა $f'(x)>0$ აღნიშნავს, რომ განსახილველ შუალედში მხებთა კუთხური კოეფიციენტები დადებითია. მაგრამ ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მხებთა მიერ x ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეები მახ-

ვილია (ნახ. 318). მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი x-ის ზრდისას სულ მაღლა და მაღლა მიემართება. ეს კი ნიშნავს, რომ ფუნქცია $y=f(x)$ მონოტონურად იზრდება.

შემთხვევა, როცა $[a, b]$ შუალედში $f'(x)<0$, ანალოგიურად განიხილება. პირობა $f'(x)<0$ ნიშნავს, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებულ მხებთა კუთხური კოეფიციენტები უარყოფითია. მაგრამ ეს შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა მხებთა მიერ x ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეები ბლაგვია (ნა. 319). მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი x-ის ზრდისას სულ დაბლა და დაბლა ეშვება. ეს კი ნიშნავს, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია მონოტონურად კლებულობს.



ნახ. 318.



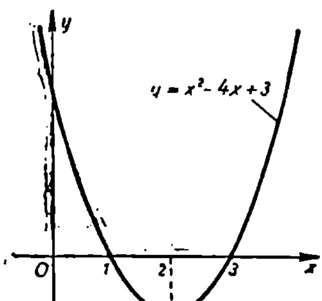
ნახ. 319.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვსაზღვროთ $f(x)=x^2-4x+3$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის უბნები.

გვაქვს:

$$f'(x)=2x-4.$$

როცა $x>2$, $f'(x)>0$, ხოლო, როცა $x<2$, $f'(x)<0$. მაშასადამე, $f(x)=x^2-4x+3$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x>2$, ხოლო კლებადია, როცა $x<2$ (იხ. ნახ. 320).



ნახ. 320.

იმავე შედეგს მივიღებდით, თუ მოცემულ ფუნქციას გამოეიკვლევდით სრული კვადრატის გამოყოფის გზით

$$f(x)=x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=$$
$$=(x-2)^2-1.$$

ამ შემთხვევაში წარმოებულის გამოყენება უფრო ადვილად და სწრაფად მიგვიყვანს ამოცანის ამოხსნასთან.

სავარჯიშოები

განსაზღვრეთ შემდეგ ფუნქციათა ზრდადობისა და კლებადობის უბნები:

1881. $y=3+4x-x^2$.

1882. $y=x^3-3x+1$.

1883. $y=x^4-2x^2-3$.

1884. $y=x^3+6x^2-15x+2$.

1885. $y=x^2-5-2x-8x^3$.

1886. $y=3x^2+x$.

1887. $y=\sqrt{x^3-3x}$.

1888. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

1889. $y=\sin x-\dfrac{1}{2}x$.

1890. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\cos x$.

დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ მოცემული ფუნქციები (№ 1891—1894) მთელს რიცხვით წრფეზე მონოტონურნი არიან. მათგან რომელია მონოტონურად ზრდადი და რომელი მონოტონურად კლებადი?

1891. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x-5$.

1892. $y=6-6x-2x^3+3x^2$.

1893. $y=\sqrt{2}\,x-\cos x$.

1894. $y=\sin x-\dfrac{\pi}{2}x$.

განსაზღვრეთ შემდეგ ფუნქციათა ზრდადობისა და კლებადობის უბნები:

1895. $x=\dfrac{x^2+1}{x}$.

1896. $y=\dfrac{x^2}{2}+\cos x$.

1897. $y=\sin^2x-x$.

წარმოებულის გამოყენება ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმების საპოვნელად § 287

ამ პარაგრაფში ვაჩვენებთ, რომ წარმოებულის საშუალებით შესაძლებელია ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის პოვნა.

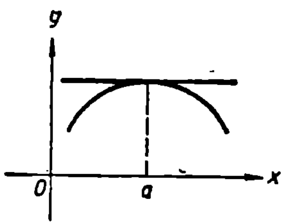
თ ე ო რ ე მ ა. **თუ $x=a$ წერტილი არის $y=f(x)$ წარმოებადი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ $f'(x)$ წარმოებული ამ წერტილში ხდება ნულის ტოლი: $f'(a)=0$.**

ამ თეორემის დამტკიცება სცილდება სასკოლო პროგრამის ფარგლებს და ამიტომ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ მისი გეომეტრიული დასურათებით.

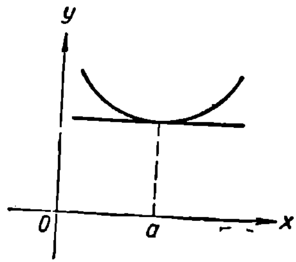
ვთქვათ, $x=a$ წერტილი არის $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი (ნახ. 321). მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილზე გავლებული მხები, რომლის აბსცისაა a, x ღერძის პარალელური იქნება. ამ მხების კუთხური კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაგრამ, როგორც ცნობილია, ეს კუთხური კოეფიციენტი $f'(a)$-ს ტოლი უნდა იყოს. მაშასადამე,

$$f'(a)=0.$$

ანალოგიური ახსნა აქვს იმ შემთხვევას, როცა $x=a$ წერტილი არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი (ნახ. 322).



ნახ. 321.



ნახ. 322.

ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ $f'(a)=0$ მიღებული პირობა შეეხება მხოლოდ $x=a$ წერტილში წარმოებად ფუნქციებს. საერთოდ კი, ფუნქციას $x=a$ წერტილში შეიძლება ჰქონდეს ლოკალური ექსტრემუმი და არ იყოს წარმოებადი ამ წერტილში. ერთხელ კიდევ შეხედეთ 274-ე ნახაზზე წარმოდგენილ მრუდს (გვ. 166). ეს მრუდი იმ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკია, რომლისთვისაც $x=3$ წერტილი არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი. მაგრამ ამ ფუნქციას $x=3$ წერტილზე არა აქვს წარმოებული (მრუდს იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა 3, არა აქვს მხები). ამიტომ $f'(3)=0$ არ სრულდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციას გააჩნია ერთადერთი ლოკალური ექსტრემუმი $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში. ამაში ჩვენ ვრწმუნდებით მოცემული კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფით: (იხ. ნაწ. I, § 49):

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f'\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$. მართლაც, ვინაიდან $f(x)=ax^2+bx+c$,

$$f'(x)=2ax+b$$

და ამიტომ

$$f'\left(-\frac{b}{2a}\right)=0 .$$

ბუნებრივად ისმის კითხვა: თუ ვიცით, რომ $x=a$ არის $f(x)$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, როგორ განვსაზღვროთ, რა სახის ექსტრემუმს იძლევა იგი — მაქსიმუმს თუ მინიმუმს?

ვთქვათ, $f'(x)<0$, როცა $x<a$, ხოლო $f'(x)>0$, როცა $x>a$. მაშინ $x=a$ წერტილის მახლობლობაში $f(x)$ ფუნქცია კლებადია a-ს მარცხნივ მდებარე წერტილებში, ხოლო ზრდადია a-ს მარჯვნივ მდებარე წერტილებში (ნახ. 322). ამ შემთხვევაში $x=a$ წერტილი არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი. თუ $f'(x)>0$, როცა $x<a$, და $f'(x)<0$, როცა $x>a$, მაშინ პირიქით, $f(x)$ ფუნქცია a-ს მარცხნივ ზრდადი იქნება, ხოლო a-ს მარჯვნივ — კლებადი. ამ შემთხვევაში $x=a$ წერტილი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი იქნება (ნახ. 321).

მაშ, თუ $f'(x)$ წარმოებული $x=a$ წერტილში ნულად იქცევა და, ამასთან, ამ წერტილზე გადასვლისას იგი ნიშანს იცვლის „—“-დან „+“-ზე, მაშინ a წერტილი ამ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი იქნება. თუ $f'(x)$ წარმოებული $x=a$ წერტილში ნულად იქცევა, ხოლო ამ წერტილზე გადასვლისას იგი ნიშანს იცვლის „+“-დან „—“-ზე, მაშინ a წერტილი $f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი იქნება.

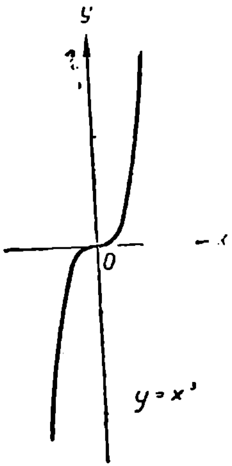
მაგალითად, $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)=2ax+b$ ნულად იქცევა, როცა $x=-\frac{b}{2a}$. ვთქვათ, $a>0$, მაშინ, თუ $x<-\frac{b}{2a}$, გვექნება: $2ax<-b$, $2ax+b<0$, ხოლო თუ $x>-\frac{b}{2a}$, მივიღებთ: $2ax>-b$, $2ax+b>0$.

ამგვარად, თუ $a>0$, მაშინ $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილზე გადასვლისას $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციის წარმოებული ნიშანს იცვლის „—“-ს „+“-ზე. ამიტომ $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილი ამ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის

წერტილია. იგივე შედეგი გვქონდა მიღებული ზემოთ, როცა ვიხილავდით $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ გამოსახულებას.

მოსწავლეებს ვანდობთ თვითონ განიხილონ შემთხვევა, როდესაც $a<0$ და წარმოებულის საშუალებით დარწმუნდნენ, რომ $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილი ამ შემთხვევაში არის ax^2+bx+c ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი.

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ თუ $f'(a)=0$, $x=a$ წერტილი უთუოდ ლოკალური ექსტრემუმის წერტილია. მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფუნქციისათვის გვექნება: $f'(x)=3x^2$ და ამიტომ $f'(0)=0$. მაგრამ, როგორც ეს ამ ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს (ნახ. 323), $x=0$ წერტილი არ არის არც ლოკალური მინიმუმის წერტილი და არც ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი. ეს იმით აიხსნება, რომ $x=0$ წერტილზე წარმოებული $f'(x)=3x^2$ ნულად იქცევა ისე, რომ ნიშანს არ იცვლის. როგორც $x<0$-ის, ისე $x>0$-ისათვის $f'(x)>0$.



ნახ. 223.

შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ თუ $f'(a)=0$, **ხოლო $x=a$ წერტილზე გადასვლისას $f'(x)$ წარმოებული ნიშანს არ იცვლის, მაშინ $x=a$ წერტილი არც ლოკალური მინიმუმის წერტილია და არც ლოკალური მაქსიმუმისა.**

წერტილებს, სადაც $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული ნულად იქცევა, *სტაციონარული წერტილები* ეწოდება, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებზე — ამ ფუნქციის *სტაციონარული მნიშვნელობები*.

სავარჯიშოები

მოცემულ ფუნქციათათვის (№ 1898—1909) იპოვეთ ყველა ლოკალური ექსტრემუმი, შეძლებისდაგვარად გამოარკვიეთ, რომელია მათგან ლოკალური მინიმუმი და რომელი ლოკალური მაქსიმუმი:

1898. $y=4x^2-6x-7$. **1904.** $y=3x^4-4x^3$.

1899. $y=-3x^2-12x+100$. **1905.** $y=\sin x+\cos x$.

1900. $y=(a-x)(a-2x)$. **1906.** $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

1901. $y=(1-ax)(1-2x)$. **1907.** $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

1902. $y=2x^3+6x^2-18x+120$. **1908.** $y=x^6$.

1903. $y=2x^3-6x^2-48x-17$. **1909.** $y=\sin^2 x-\cos^2 x$.

№ 1910—1913 ამოცანებში იპოვეთ მოცემულ ფუნქციათა სტაციონარული მნიშვნელობანი:

1910. $y=x-\sin x+\cos x$.

1911. $y=2x+\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

1912. $y=5\sin x+12\cos x-13x$.

1913. $y=\sin^2 x-\cos x$.

1914. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=|x|$ ფუნქციას $x=0$ წერტილზე აქვს ლოკალური მინიმუმი. გამოარკვიეთ, კმაყოფილდება თუ არა ამასთანავე პირობა $f'(0)=0$?

1915. კონუსში ჩახაზულია უდიდესი მოცულობის ცილინდრი. დაამტკიცეთ, რომ ამ ცილინდრის რადიუსი კონუსის ფუძის რადიუსის $\frac{2}{3}$-ია, ხოლო სიმაღლე — კონუსის სიმაღლის $\frac{1}{3}$,

ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობანი მოცემულ შუალედში § 228

IX თავში [§ 205] განვიხილეთ საკითხი, თუ როგორ მოიძებნება $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი და აბსოლუტური მაქსიმუმი $[a, b]$ შუალედში. ამისათვის $f(x)$ ფუნქციის ყველა ლოკალურ ექსტრემუმსა და $[a, b]$ შუალედის ბოლოებზე ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის უმცირესი და უდიდესი უნდა შევარჩიოთ. სწორედ ესენი მოგვცემენ აბსოლუტურ ექსტრემუმებს. მაგრამ IX თავში შესაძლებლობა არ გვქონდა გვეპოვნა ლოკალური ექსტრემუმები. ახლა კი შეგვიძლია ამ ამოცანის ამოხსნა.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ წარმოებადი $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი და აბსოლუტური მაქსიმუმი $[a, b]$ შუალედში, საჭიროა:

1. $f'(x)=0$ განტოლებიდან ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის ყველა სტაციონარული წერტილი და ამ ფუნქციის სტაციონარული მნიშვნელობანი. შემდეგ ამ წერტილთაგან უნდა შევარჩიოთ ისეთები, რომლებიც $[a, b]$ შუალედში მოხვდებიან, და განვიხილოთ ამ ფუნქციის სტაციონარული მნიშვნელობანი მოცემულ შუალედში.

2. $f(x)$ ფუნქციის ამ სტაციონარულ მნიშვნელობებს დავუმატოთ ამ ფუნქციის $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობანი, ე. ი. მნიშვნელობანი $[a, b]$ შუალედის ბოლოებზე. ყველა მიღებულ მნიშვნელობას შორის უნდა ავარჩიოთ უმცირესი და უდიდესი.

ხელახლა ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ მიღებული შედეგი შეეხება მხოლოდ ფუნქციებს, რომლებიც **წ ა რ მ ო ე ბ ა დ ი ა** განსახილველ $[a, b]$ შუალედში. თუ ამ შუალედში არის წერტილები, რომლებშიც გამოსაკვლევ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული, მაშინ ეს წერ-

ტილები ხაგანგებოდ უნდა განვიხილოთ; ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი და აბსოლუტური მაქსიმუმი $[a, b]$ შუალედში შეიძლება მიღწეულ იქნეს ერთ ასეთ წერტილშიც (იხ. ნახ. 274, გვ. 166, $[2, 6]$ შუალედში).

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $f(x)=x^3-3x^2$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა $[1, 3]$ შუალედში.

გვაქვს: $f(x)=x^3-3x^2$, $f'(x)=3x^2-6x$. $f'(x)=0$ ანუ $3x^2-6x=0$ განტოლებიდან ვპოულობთ $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარულ წერტილებს: $x_1=0$, $x_2=2$. $[1, 3]$ შუალედში მოხვდება მხოლოდ მეორე წერტილი. მასში ფუნქცია ღებულობს $f(2)=-4$ მნიშვნელობას. $[1, 3]$ შუალედის კიდურა წერტილებზე გვაქვს $f(1)=-2$, $f(3)=0$. სამი მნიშვნელობიდან: $f(2)=-4$, $f(1)=-2$, $f(3)=0$ უმცირესია -4, ხოლო უდიდესია 0.

ამიტომ $f(x)=x^3-3x^2$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა $[1, 3]$ შუალედში არის -4, ხოლო მაქსიმალური -0. ამ მნიშვნელობებს ფუნქცია აღწევს შესაბამისად $x=2$ და $x=3$ წერტილებში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $f(x)=\frac{3}{2}x+\sin x$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ შუალედში.

გვაქვს:

$$f'(x)=\frac{3}{2}+\cos x.$$

ფუნქცია $f'(x)$ დადებითია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. ამიტომ $f(x)$ მონოტონურად ზრდადია მთელს რიცხვით წრფეზე. ასეთ შემთხვევაში ამ ფუნქციამ შუალედის მარცხენა ბოლოზე $(x=a)$ უნდა მიიღოს უმცირესი $\frac{3}{2}a+\sin a$ მნიშვნელობა, ხოლო მარჯვენა ბოლოზე $(x=b)$— უდიდესი $\frac{3}{2}b+\sin b$ მნიშვნელობა.

სავარჯიშოები

1016. იპოვეთ $y=x^3-3x$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობანი შუალედებში: ა) $[-0,5; 0,5]$; ბ) $[-1,5; 2]$.

1017. იპოვეთ $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა შუალედებში:

ა) $[-\pi; 0]$; ბ) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1918. იპოვეთ $y=\frac{x^3}{2}-\frac{5}{2}x^2+6x+10$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა შუალედებში:

$$\text{ა) } [0;\ 1];\quad \text{ბ) } [0;\ 2{,}5];\quad \text{გ) } [0;\ 4].$$

იპოვეთ ქვემოთ მოცემულ ფუნქციათა უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობანი მითითებულ შუალედებში (№ 1919—1923):

1919. $y=\frac{1}{2}x-\sin x$ შუალედებში: ა) $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$;

$$\text{ბ) } \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right];\qquad \text{გ) } \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right].$$

1920. $y=x-\cos 2x$ შუალედებში: ა) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; ბ) $[-\pi;\ \pi]$; გ) $(-\pi,\ 0)$.

1921. $y=x^4-8x^2-9$ შუალედებში: ა) $[-1;\ 1]$; ბ) $[0;\ 3]$; გ) $[-3;\ 5]$.

1922. $y=3x^4-4x^3-72x^2+200$ შუალედებში: ა) $[-1;\ 1]$;

$$\text{ბ) } [-0{,}5;\ 3{,}5];\quad \text{გ) } [-2;\ 5].$$

1923. $y=1+36x+36x^2-2x^3$ შუალედებში: ა) $[-3;\ -1]$;

$$\text{ბ) } [-2;\ 2];\quad \text{გ) } [-10;\ 4].$$

წარმოებულთა გამოყენება წარმოებადი ფუნქციების გამოკვლევისა და მათი გრაფიკების აგებისათვის § 230

წარმოებულთა გამოყენება მნიშვნელოვნად აადვილებს წარმოებადი ფუნქციების გამოკვლევას და მათი გრაფიკების აგებას. წარმოებულთა საშუალებით შეიძლება დავადგინოთ ფუნქციათა ზრდადობისა და კლებადობის უბნები, ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები და ლოკალური ექსტრემუმები. ეს კი საშუალებას გვაძლევს უფრო ზუსტად ავაგოთ გამოსაკვლევი ფუნქციების გრაფიკები.

შემდგომში მივყვებით $y=f(x)$ ფუნქციის გამოკვლევის შემდეგ გეგმას *:

* ეს გეგმა მხოლოდ უმნიშვნელოდ განსხვავდება 210-ე პარაგრაფში აღწერილი გეგმისაგან.

1) ფუნქციის განსაზღვრის არე;

2) ფუნქციის ყოფაქცევა „განსაკუთრებული" წერტილების მახლობლობაში (მაგალითად, $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციისა $x=0$ წერტილის მახლობლობაში);

3) ფუნქციის ლუწობა;

4) ფუნქციის პერიოდულობა;

5) ფუნქციის სტაციონარული წერტილები და ლოკალური ექსტრემუმები;

6) ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;

7) ფუნქციის ნულები, ე. ი. $f(x)=0$ განტოლების ფესვები;

8) ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები;

9) ფუნქციის ყოფაქცევა არგუმენტის უსაზღვროდ ზრდისას ($x\to\infty$) და არგუმენტის უსაზღვროდ კლებისას ($x\to-\infty$);

10) ფუნქციის ცვლილების არე.

ამ გეგმის თითოეული პუნქტის განხორციელებას თან უნდა სდევდეს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, ე. ი. თანდათან უნდა სრულდებოდეს გამოსაკვლევი ფუნქციის გრაფიკის აგება.

მაგალითის სახით განვიხილოთ

$$y=x^4-10x^2+9$$

ფუნქცია.

1) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე.

2) „განსაკუთრებული" წერტილები ($x=0$ ტიპის წერტილი $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციისათვის) ამ ფუნქციას არა აქვს.

3) ფუნქცია ლუწია, ვინაიდან x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის

$$(-x)^4-10(-x)^2+9=x^4-10x^2+9.$$

ამან თავისი ასახვა უნდა ჰპოვოს ფუნქციის გრაფიკშიც. იგი უნდა იყოს ორდინატების ღერძის სიმეტრიული.

4) განსახილველი ფუნქცია, ცხადია, არაპერიოდულია.

საერთოდ, ამა თუ იმ ფუნქციის პერიოდულობა დგინდება ამ ფუნქციის პერიოდულ მდგენელებზე უბრალო მითითებით (მაგ: $\sin x$, $\cos x$ და ა. შ.). მოცემულ ფუნქციას მსგავსი მდგენელები არა აქვს. ცხადია, ეს არ შეიძლება წარმოადგენდეს განსახილველი ფუნქციის არაპერიოდუ-

ლობის მკაცრ დამტკიცებას, ამიტომ ამ საკითხს კიდევ დავუბრუნდებით მე-6 პუნქტის განხილვის დროს.

(თუმცა შესაძლებელია არაპერიოდულობის ასეთი დამტკიცებაც. ჩვენი ფუნქცია რომ პერიოდული ყოფილიყო $T>0$ პერიოდით, მაშინ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის შესრულდებოდა შემდეგი ტოლობა:

$$(x+T)^4-10(x+T)^2+9=x^4-10x^2+9$$

კერძოდ, როცა $x=0$, მივიღებდით:

$$T^4-10T^3+9=9.$$

საიდანაც $T=\sqrt{10}$. ამრიგად, პერიოდის სახით შეიძლება ავიღოთ მხოლოდ რიცხვი $\sqrt{10}$. მაგრამ, როგორც ვიცით, პერიოდულ ფუნქციებს აქვს უსასრულოდ ბევრი დადებითი პერიოდი. მიღებულია წინააღმდეგობა. მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის პერიოდულობის ვარაუდი არასწორია).

5) $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები მოიძებნება როგორც $f'(x)=0$ განტოლების ფესვები. მოცემულ შემთხვევაში $f'(x)=4x^3-20x$; ამიტომ უნდა ამოვხსნათ

$$4x^3-20x=0$$

განტოლება. მას აქვს სამი ფესვი:

$$x_1=0;$$

$$x_2=-\sqrt{5};$$

$$x_3=\sqrt{5}.$$

რომ გამოვარკვიოთ, ამ სამი სტაციონარული წერტილიდან რომელი იძლევა ლოკალურ ექსტრემუმებს და, სახელდობრ, რომელ ექსტრემუმებს (მინიმუმებს თუ მაქსიმუმებს), განვიხილოთ $f'(x)$ წარმოებულის ყოფაქცევა სტაციონარული წერტილების მახლობლობაში, გვაქვს:

$$f'(x)=4x^3-20x=4x(x^2-5).$$

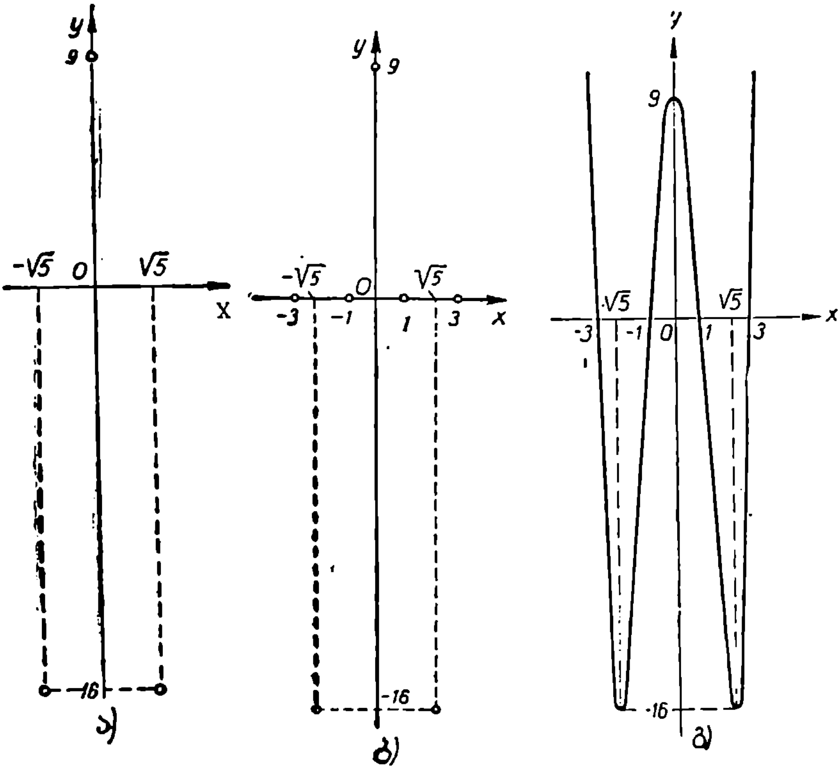
თუ x ახლოა ნულთან და $x<0$, მაშინ ორივე მამრავლი $4x$ და x^2-5 უარყოფითია. ამ შემთხვევაში $f'(x)>0$. თუკი x ახლოა ნულთან და $x>0$, მაშინ $4x$ მამრავლი იქნება დადებითი, ხოლო x^3-5 მამრავლი — უარყოფითი. ამ შემთხვევაში $f'(x)<0$.

$x=0$ წერტილზე გადასვლისას $f'(x)$ წარმოებული „+“ ნიშანს იცვლის „—“ ნიშანზე. ამიტომ $x=0$ წერტილი არის $y=x^4-10x^2+9$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი.

ანალოგიურად შეიძლება დავადგინოთ (შეასრულეთ ეს დამოუკიდებლად!), რომ $x=-\sqrt{5}$ და $x=\sqrt{5}$ წერტილები ლოკალური მინიმუმის წერტილებია.

ახლა შეიძლება ვიპოვოთ თვით ლოკალური ექსტრემუმებიც. როცა $x=0$, მაშინ $y=9$; როცა $x=\pm\sqrt{5}$, $y=-16$.

ამრიგად, $y=x^4-10x^2+9$ ფუნქციას აქვს ერთი ლოკალური მაქსიმუმი, რომელიც 9-ის ტოლია (მას ფუნქცია აღწევს, როცა $x=0$), და ორი ლოკალური მინიმუმი, რომელთაგან თითოეული -16-ის ტოლია (მათ ფუნქცია აღწევს, როცა $x=-\sqrt{5}$ და $x=\sqrt{5}$).



ნახ. 324.

ეს საშუალებას გვაძლევს აღვნიშნოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ჩვენი ფუნქციის გრაფიკის კიდევ სამი წერტილი. ეს იქნება წერტილები (0.9), $(-\sqrt{5}, -16)$ და$\sqrt{5}, -16)$ კოორდინატებით, ამასთან, პირველი

მათგანი არის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო ორი დანარჩენი — ლოკალური მინიმუმის წერტილებია (ნახ. 324, ა).

6) ვიპოვოთ განსახილველი ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის შუალედები. სტაციონარული წერტილების გამოკვლევის შემდეგ ადვილი გასაგებია, რომ, როცა $-\sqrt{5}<x<0$ და $x>\sqrt{5}$, ეს ფუნქცია იზრდება, ხოლო, როცა $x<-\sqrt{5}$ და $0<x<\sqrt{5}$, — კლებულობს (იხ. ნახ. 324, ა). მაგრამ ეს შეიძლება მკაცრადაც დამტკიცდეს, ისე რომ არ მივმართოთ გეომეტრიულ ინტუიციას.
მართლაც,

$$f'(x)=4x(x^2-5)$$

წარმოებული, როცა $-\sqrt{5}<x<0$ და $x>\sqrt{5}$, დადებითია, ხოლო, როცა $x<-\sqrt{5}$ და $0<x<\sqrt{5}$, — უარყოფითი. ეს კი წარმოადგენს იმის დამტკიცებას, რაც ზემოთ შევამჩნიეთ გეომეტრიულ მოსაზრებათა საფუძველზე.

მიღებული შედეგი, სხვათა შორის, ამტკიცებს (და ამასთან, სრულიად მკაცრად), რომ $y=x^4-10x^2+9$ ფუნქცია არაპერიოდულია. მართლაც, როცა $x>\sqrt{5}$, იგი მონოტონურად იზრდება და, მაშასადამე, მისი მნიშვნელობები არ შეიძლება პერიოდულად გამეორდეს.

7) მოცემული ფუნქციის ნულები მოინახება

$$x^4-10x^2+9=0.$$

განტოლებიდან. მას აქვს ოთხი ფესვი:

$$x_1=-3,\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=3.$$

(ამ ფესვების სიმეტრიულობა სავსებით გასაგებია: მოცემული ფუნქცია ხომ ლუწია).

ახლა შეგვიძლია კოორდინატთა სიბრტყეზე აღვნიშნოთ კიდევ ოთხი წერტილი, რომლებიც ჩვენი ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის. ეს x ღერძის წერტილებია აბსცისებით: -3, -1, 1 და 3 (იხ. ნახ. 324, ბ).

8) ცხადია, რომ ყოველ ორ მეზობელ ნულს შორის $f(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს თავის ნიშანს.* ასე, მაგალითად, როცა $-3<x<-1$, იგი ღებულობს ან მხოლოდ დადებითს, ან მხოლოდ უარყოფით მნიშვნელობებს. რომ გამოირკვეს, სახელდობრ, როგორ (ნიშნის მიხედვით) მნიშვნელობებს ღებულობს ჩვენი ფუნქცია, როცა $-3<x<-1$, საკმარისია განისაზღვროს ფუნქციის ნიშანი ამ შუალედის რომელიმე წერ-

* ეს „ცხადი“ დებულება შეიძლება სრულიად მკაცრადაც იქნეს დამტკიცებული, მაგრამ დამტკიცება ჩვენი პროგრამის ფარგლებს სცილდება.

ტილში. მოცემულ შემთხვევაში ხელსაყრელია შეირჩეს $x=-\sqrt{5}$ წერტილი — ლოკალური მინიმუმის წერტილი. მასში, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ფუნქცია ღებულობს —16-ის ტოლ მნიშვნელობას. ამიტომ ყველგან $-3<x<-1$ შუალედში ჩვენი ფუნქცია ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობებს.

ანალოგიურად შეიძლება დავადგინოთ (შეასრულეთ დამოუკიდებლად), რომ, როცა $-1<x<1$, ჩვენი ფუნქცია დადებითია, ხოლო, როცა $1<x<3$ — უარყოფითი. რაც შეეხება ფუნქციის მნიშვნელობებს, როცა $|x|>3$, მაშინ ყველა ეს მნიშვნელობა დადებითი იქნება.

9) x-ის უსაზღვროდ ზრდისას ($x\to\infty$) და უსაზღვროდ კლებისას ($x\to-\infty$), $y=x^4-10x^2+9$ ფუნქციის მნიშვნელობები უსაზღვროდ იზრდება ($y\to\infty$). ეს ფაქტი ცხადია, ვინაიდან x-ის ზრდასთან ერთად x^4 სიდიდე გაცილებით სწრაფად იზრდება, ვიდრე $10x^2$. შესაძლებელია ასეთი ახსნაც:

$$x^4-10x^2+9=(x^2-1)(x^2-9).$$

როცა $x\to\infty$, ან $x=\to-\infty$, მაშინ x^2-1 და x^2-9 თანამამრავლებიდან თითოეული უსაზღვროდ იზრდება. ამიტომ უსაზღვროდ იზრდება მათი ნამრავლიც.

10) ახლა ძნელი აღარაა გამოსაკვლევი ფუნქციის ცვლილების არის განსაზღვრა. —16-ის ტოლ მინიმალურ მნიშვნელობას ფუნქცია ღებულობს ორ წერტილში: $x=-\sqrt{5}$ და $x=\sqrt{5}$. მაქსიმალური მნიშვნელობა მას არა აქვს: x-ის (აბსოლუტური სიდიდით) უსაზღვროდ ზრდასთან ერთად ფუნქციის მნიშვნელობებიც უსაზღვროდ იზრდება. ამიტომ $y=x^4-10x^2+9$ ფუნქციის ცვლილების არე განისაზღვრება $y\geqslant-16$ უტოლობით.

$y=x^4-10x^2+9$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 324, გ ნახაზზე.

სავარჯიშოები

გამოიკვლიეთ მოცემული ფუნქციები (№ 1924—1930) და ააგეთ მათი გრაფიკები:

1924. $y=x^4-2x^2-3.$

1925. $y=\frac{1}{10}(x^4-13x^2+36).$

1926. $y=x^3-9x.$

1927. $y=x^3-3x^2+2.$

1928. $y=\frac{1}{2}x+\sin x.$

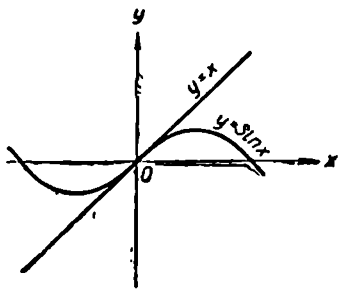
1929. $y=\sqrt{3}\cos x-2x.$

1930*. $y=\sin^2 x+2\cos x+\frac{1}{4}.$

განტოლებათა გრაფიკული ამოხსნისათვის წარმოებულის გამოყენების საკითხს ჩვენ განვიხილავთ $\sin x = x$ განტოლების მაგალითზე.

ამ განტოლების ამოსახსნელად ერთსა და იმავე ნახაზზე ავაგოთ $y = \sin x$ და $y = x$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 325). ეს გრაფიკები გადაიკვეთებიან წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=0$. ამიტომ $x=0$ მოცემული განტოლების ფესვია.

შეგვიძლია თუ არა დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ამ განტოლების სხვა ფესვი არ არსებობს? ვინ იცის, იქნებ $x=0$ წერტილის მახლობლობაში კიდევ არის გრაფიკების გადაკვეთის წერტილი, რომელსაც უბრალოდ ვერ ვამჩნევთ? მართლაცდა, 325-ე ნახაზზე მიღებული მასშტაბის მიხედვით, განა შეიძლება „გრაფიკულად" დავრწმუნდეთ, რომ, მაგალითად, 0,01 არ არის $\sin x = x$ განტოლების ფესვი? ამასთან, თუ ჩავიხედავთ ტრიგონომეტრიულ ცხრილებში, ვნახავთ, რომ $\sin 0{,}01 \approx 0{,}01$; $\sin 0{,}02 \approx 0{,}02$; $\sin 0{,}03 \approx 0{,}03 \ldots$ ასე რომ, არავითარი საფუძველი არ გვაქვს ვიფიქროთ, რომ $x=0$ არის $\sin x = x$ განტოლების ერთადერთი ფესვი.



ნახ. 325.

ამ საკითხში გარკვევისათვის შევნიშნოთ, რომ $(\sin x)' = \cos x$, ხოლო $(x)' = 1$. ნებისმიერი მახვილი x კუთხისათვის $\cos x < 1$. ამის გამო $0 < x < \frac{\pi}{2}$ უბანზე $y = x$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე მეტია, ვიდრე $y = \sin x$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე, მაგრამ, ასეთ შემთხვევაში, როცა $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y = x$ ფუნქცია მუდამ „გაუსწრებს" $y = \sin x$ ფუნქციას. მაშასადამე, არც ერთი რიცხვი $0 < x < \frac{\pi}{2}$ შუალედიდან ვერ გამოდგება $\sin x = x$ განტოლების ფესვად. მით უმეტეს განტოლების ფესვად ვერ გამოდგება $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, რადგან $\sin x \leqslant 1$. ამგვარად, განტოლებას დადებითი ფესვები არ გააჩნია.

ამ განტოლების უარყოფითი — a ფესვი რომ არსებულიყო, მაშინ გვექნებოდა $\sin(-a) = -a$, საიდანაც $\sin a = a$. ეს კი იმის ნიშანი იქნებოდა, რომ $\sin x = x$ განტოლებას აქვს დადებითი ფესვი $x = a$.

მიღებულია წინააღმდეგობა. ამგვარად, $\sin x = x$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს უარყოფითი ფესვი. მაშ, $x=0$ რიცხვი ამ განტოლების ერთადერთი ფესვი ყოფილა.

სავარჯიშოები

1981. დავამტკიცოთ, რომ $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ განტოლების ერთადერთი ფესვია $x = \frac{\pi}{2}$.

ამოხსენით გრაფიკულად განტოლებანი:

1982. $\sin x = -x - \pi$.

1983. $\cos x = x - \frac{3}{2}\pi$.

ისტორიული შენიშვნები § 241

მათემატიკის იმ დარგს, რომელიც სწავლობს ფუნქციათა წარმოებულებს და მათ გამოყენებას, დიფერენციალური აღრიცხვა ეწოდება. ეს აღრიცხვა აღმოცენდა ისეთი ამოცანების ამოხსნის ნიადაგზე, როგორიცაა მრუდებისადმი მხების გავლება, მოძრაობის სიჩქარის გამოთვლა, ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობათა მოძებნა.

უკვე დიდი ხანია, რაც დიფერენციალურ აღრიცხვაში მიღებულ იქნა ცალკეული შედეგები. მაგრამ XVII საუკუნის დამლევამდე ვერ იქნა და ვერ გამოიყო ის ძირითადი ცნებანი, რომლებიც საგნის საფუძველს შეადგენდნენ. ამიტომ, თუმცა ახალი აღრიცხვის შექმნას ნიადაგი მომზადებული ჰქონდა, მაგრამ თვით აღრიცხვა, როგორც ასეთი, ჯერ კიდევ ჩამოყალიბებული არ იყო.

დიფერენციალური აღრიცხვა სისტემატური სახით პირველად გადმოცემული იყო სხვადასხვანაირად და ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ნიუტონისა და ლაიბნიცის მიერ. ახალ აღრიცხვაზე თავისი შეხედულებანი ნიუტონმა გადმოსცა შრომაში „ფლუქსიათა და უსასრულო მწკრივთა მეთოდი". ეს ტრაქტატი შედგენილი იქნა დაახლოებით 1671 წელს, მაგრამ იგი გამოქვეყნდა მხოლოდ 1736 წელს—უკვე ავტორის გარდაცვალების შემდეგ. ლაიბნიცის პირველი შრომა დიფერენციალურ აღრიცხვაზე გამოქვეყნდა 1684 წელს

დიფერენციალური აღრიცხვის კურსის პირველი ავტორი იყო ლაიბნიცის სკოლის წარმომადგენელი ფრანგი მათემატიკოსი ლოპიტალი (1661—1704). ეს კურსი „უსასრულო მცირეთა ანალიზის" სახელწოდებით გამოქვეყნდა 1696 წელს.

დიფერენციალური აღრიცხვის თანამედროვე სახეს დასაბამი მისცა კოში მ.

ტერმინი „წარმოებული" შემოიღო ფრანგმა მათემატიკოსმა ლაგრანჟმა (1736—1813).

1934. იპოვეთ $y=\frac{1}{4}x^4-4x^3+16$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობანი $x=0$ და $x=2$ წერტილებში.

1935. იპოვეთ $y=(3x+5)(2x^2-1)$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობანი $x=-1$ და $x=0$ წერტილებში.

1936. იპოვეთ $y=5\sin x-3\cos x$ ფუნქციის მეორე წარმოებულის მნიშვნელობანი $x=\frac{\pi}{3}$ და $x=-\frac{\pi}{2}$ წერტილებში.

1937. წერტილი მოძრაობს $s(t)=t^3$ კანონის მიხედვით (s — მანძილი მეტრობით, t — დრო წამობით). მისი მყისი სიჩქარე დროის რომელ მომენტში უდრის მოძრაობის საშუალო სიჩქარეს შუალედში $t_1=13$ წამიდან $t_2=46$ წამამდე?

1938. წერტილი მოძრაობს $s(t)=15-(5-t)(3-t)$ კანონის მიხედვით მანამდე, სანამ მისი სიჩქარე ნულად არ იქცევა. რა მანძილს გაივლის წერტილი ამასობაში?

1939. ერთი წერტილი მოძრაობს $s_1(t)=13t+t^3$ კანონის მიხედვით, ხოლო მეორე — $s_2(t)=3t^2+t$ კანონის მიხედვით, სადაც s_1 და s_2 მანძილებია მეტრობით, ხოლო t — დრო წამობით. იპოვეთ წერტილთა მოძრაობის სიჩქარენი იმ მომენტში, როცა მათ მიერ გავლილი მანძილები ტოლია.

1940. იპოვეთ $y=3x^3+2x+5$ მრუდისადმი იმ მხების განტოლება, რომელიც ამ მრუდის ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილზეა გავლებული.

1941. იპოვეთ $y=8x^3-1$ მრუდისადმი იმ მხების განტოლება, რომელიც ამ მრუდის აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილზეა გავლებული.

1942. რა კუთხე შეიქმნება $x=\frac{5}{4}\pi$ წრფის და $y=\sin x$ სინუსოიდის გადაკვეთისას?

1943. რა კუთხეები წარმოიშობა $y=\frac{1}{2}$ წრფისა და $y=\cos x$ კოსინუსოიდის გადაკვეთისას?

1944. იპოვეთ შემდეგი ორი პარაბოლის წვეროების კოორდინატები:

ა) $y=3x^2-6x+7$;

ბ) $y=2x^2+8x-3$.

1945. $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{18}$ გაშლაში იპოვეთ ის წევრი, რომელიც x^4-ს შეიცავს.

1946. დაამტკიცეთ შემდეგი იგივობა $1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$. (მითითება: ნიუტონის ბინომის ფორმულაში ვიგულისხმოთ $a=b=1$).

1947. რამდენ რაციონალურ წევრს შეიცავს $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{100}$ გაშლა.

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები (№ 1948—1955) და ააგეთ მათი გრაფიკები;

1948. $y=\frac{1}{16}x^4-\frac{5}{2}x^2+9.$

1949. $y=2x^2-x^4-1$

1950. $y=x-x^3.$

1951. $y=x+\sin x.$

1952. $y=\sin^2\frac{x}{2}.$

1953*. $y=0{,}5x^2+\cos x.$

1954*. $y=\sin x(1+\cos x).$

1955. $y=4\cos^2 x-4\sqrt{3}\sin x+5.$

1956. ცნობილია, რომ მართკუთხა კვეთის მქონე ძელის სიმტკიცე კვეთის სიგანისა და მისი სიგრძის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. იპოვეთ უდიდესი სიმტკიცის იმ ძელის კვეთის განზომილებანი, რომელიც შეიძლება გამოიხერხოს d სანტიმეტრი დიამეტრის მქონე მრგვალი მორიდან.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები (№ 1957——1963):

1957. $y=\frac{1}{2x+5}.$

1958. $y=\sqrt{3-x}.$

1959. $y=(x-3)^2+\frac{1}{(x-3)^3}.$

1960. $y=\sin^2 2x+\cos\frac{x}{2}.$

1961. $y=(x^2+1)\cos x-(x^2-1)\sin x.$

1962. $y=\frac{1}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}.$

1963. $y=\sin^4 x+\cos^4 x.$

1964. დაამტკიცეთ, რომ $y=\cos^2 x+\sin 2x$ და $y=-5x^2+2x+1$ მრუდები ერთმანეთს ეხება $x=0$ წერტილში (რაიმე წერტილში მრუდების შეხება ნიშნავს, რომ მათ აქვთ საერთო მხები ამ წერტილში).

1965. r-რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია უდიდესი მოცულობის ცილინდრი. რას უდრის ეს მოცულობა?

1966*. დაამტკიცეთ, რომ ბინომიალური კოეფიციენტები მთელი რიცხვებია.

რიცხვის ცნებამ ისტორიული განვითარების გრძელი გზა განვლო. II თავში (იხ. ნაწ. I) ლაპარაკი გვქონდა იმაზე, თუ როგორ მივიდა ადამიანი უმარტივესი — ნატურალური რიცხვებიდან უფრო რთულ — ნამდვილ რიცხვებამდე. ახლა გვსურს დავუბრუნდეთ ამ საკითხის განხილვას. მაგრამ ამასთანავე მოგვიხდება რამდენადმე გვერდი ავუაროთ იმ რიგს, რომლითაც ისტორიულად ვითარდებოდა რიცხვის ცნება.

რიცხვით სიმრავლეთა შორის ერთ-ერთი უმარტივესია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots$$

მასში ყოველთვის შესრულდება ორი ძირითადი ალგებრული მოქმედება: შეკრება და გამრავლება. ეს ნიშნავს, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს ნატურალური m და n რიცხვები, მათი $m+n$ ჯამი და აგრეთვე $m\ n$ ნამრავლი უეჭველად ნატურალური რიცხვებია. ამასთან, სრულდება შემდეგი ხუთი კანონი:

1) შეკრების გადანაცვლებადობის კანონი

$$m+n=n+m;$$

2) შეკრების ჯუფთებადობის კანონი:

$$(m+n)+k=m+(n+k);$$

3) გამრავლების გადანაცვლებადობის კანონი:

$$m\ .\ n=n\ .\ m;$$

4) გამრავლების ჯუფთებადობის კანონი:

$$(mn)\ .\ k=m\ .\ (n\ .\ k);$$

5) გამრავლების განრიგებადობის კანონი შეკრების მიმართ:

$$(m+n)\ .\ k=m\ .\ k+n\ .\ k.$$

რაც შეეხება გამოკლებასა და გაყოფას, ეს ორი მოქმედება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის კი არ სრულდება. ასე, მაგალითად, 3—5 და 2—2 სხვაობებიდან და 3 : 5 და 7 : 4 განაყოფებიდან არავითარი ნატურალური რიცხვით არც ერთი არ შეიძლება გამოისახოს.

მოქმედება გამოკლება რომ ყოველთვის სრულდებოდეს, ნატურალური რიცხვების სიმრავლე უნდა გაფართოვდეს ამ სიმრავლისადმი ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვისა და ნულის მიერთებით. ასეთი გაფართოების შედეგად ვღებულობთ **ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლეს**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

რიცხვთა სიმრავლეს, რომელშიც ყოველთვის სრულდება ზემოხსენებულ ხუთ კანონს დაქვემდებარებული შეკრება და გამრავლება და აგრეთვე გამოკლება, ეწოდება რგოლი. ამრიგად, **ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე ქმნის რგოლს.**

ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლის ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლემდე გაფართოებით მივაღწიეთ იმას, რომ მოქმედება გამოკლების შესრულება ყოველთვის შესაძლებელი გახდა. მაგრამ გაყოფის შესრულება, საერთოდ რომ ვთქვათ, უწინდებურად შეუძლებელი დარჩა. ამ ხარვეზის თავიდან ასაცილებლად ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე აგრეთვე უნდა გაფართოვდეს. ეს შეიძლება შესრულდეს ამ სიმრავლისადმი ყველა ჩვეულებრივი წილადის, ე. ი. $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვების მიერთებით, სადაც m და n ნებისმიერი მთელი რიცხვებია და $n \neq 0$. ასეთი გაფართოების შედეგად ვღებულობთ **ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლეს.** როგორც მეორე თავში იყო ნაჩვენები, რიცხვით სიმრავლეში ყოველთვის შეიძლება შესრულდეს შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის (გარდა ნულზე გაყოფისა) მოქმედებები, ამასთან პირველი ორი მათგანი ექვემდებარება შეკრებისა და გამრავლების ხუთ ძირითად კანონს.

რიცხვთა სიმრავლეს, რომელშიც ყოველთვის სრულდება ხუთ ძირითად კანონს დაქვემდებარებული შეკრება და გამრავლება, აგრეთვე გამოკლება და გაყოფა (გარდა ნულზე გაყოფისა), ეწოდება ველი. **ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე უმარტივესი რიცხვითი ველია.**

მართებულია ახლავე შევნიშნოთ, რომ ყველა ირაციონალური რიცხვის სიმრავლე არ ქმნის ველს. მართლაც, ირაციონალურ რიცხვებზე

ოთხი მოქმედებიდან (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა) ნებისმიერს შეუძლია მოგვცეს რაციონალური რიცხვი. ასე, მაგალითად,

$$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0,$$
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$$

და ა. შ. ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე კი ქმნის ველს, როგორც მითითებული იყო მეორე თავში, ნამდვილი რიცხვების შეკრების, გამრავლების, გამოკლებისა და გაყოფის (გარდა ნულზე გაყოფისა) მოქმედებებს არ გამოვყევართ ნამდვილ რიცხვთა ფარგლებიდან, ამასთან, შეკრება და გამრავლება ექვემდებარება ხუთ ძირითად კანონს.

მოვიყვანოთ რიცხვითი ველის კიდევ ერთი, უფრო რთული მაგალითი. განვიხილოთ $r+s\sqrt{2}$ სახის ყველა ნამდვილი რიცხვი, სადაც r და s რაციონალური რიცხვებია. ვთქვათ, $a+b\sqrt{2}$ და $c+d\sqrt{2}$ განსახილველი სახის ორი ნებისმიერი რიცხვია. მაშინ

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2};$$

$$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd=$$

$$=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

ვთქვათ ახლა, რომ $c+d\sqrt{2}$ რიცხვი არ უდრის ნულს. მაშინ, ცხადია. მისი შეუღლებული $c-d\sqrt{2}$ რიცხვიც განსხვავებული იქნება ნულისაგან (დაამტკიცეთ ეს!). ამიტომ შეიძლება დავწეროთ:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}=$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

როგორც ვხედავთ, $r+s\sqrt{2}$ სახის რიცხვებზე ოთხი მოქმედებიდან თითოეული (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა) გვაძლევს იმავე სახის რიცხვს. ცხადია აგრეთვე, რომ ყველა ამ რიცხვის შეკრება და გამრავლება ექვემდებარება ზემოთ მითითებული ხუთი კანონიდან თითოეულს. ამიტომ $r+s\sqrt{2}$ სახის ყველა რიცხვის ერთობლიობა, სადაც r და s რაციონალური რიცხვებია. ქმნის რიცხვით ველს.

სავარჯიშოები

1067. ქმნის თუ არა რგოლს:

ა) ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლე;

ბ) ყველა კენტი რიცხვის სიმრავლე;

გ) ყველა იმ რიცხვის სიმრავლე, რომელიც რომელიმე p რიცხვის ჯერადია?

1968. ქმნის თუ არა ველს:

ა) ყველა იმ წილადის სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელია 3;

ბ) ყველა იმ წილადის სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელებია 3-ის მთელი ხარისხები?

1969. დაამტკიცეთ, რომ ყველა სასრული ათწილადის სიმრავლე ქმნის რგოლს, მაგრამ არ ქმნის ველს.

1970. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი რიცხვითი ველი ან ემთხვევა ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლეს, ან მოიცავს ამ სიმრავლეს, როგორც ნაწილს.

1971. დაამტკიცეთ, რომ $a+b\sqrt{3}$ სახის ყველა რიცხვის სიმრავლე, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია, არის ველი. მოიცავს თუ არა ეს ველი:

ა) ყველა რაციონალურ რიცხვს;

ბ) ყველა ირაციონალურ რიცხვს;

გ) ყველა ნამდვილ რიცხვს?

ნამდვილ რიცხვთა ველის გაფართოების ამოცანის დასმა. კომპლექსური რიცხვები § 248

მათემატიკის სხვადასხვა მოთხოვნილება უკვე დიდი ხანია მიუთითებდა ნამდვილ რიცხვთა ველის გაფართოების საჭიროებაზე. როგორც ვიცით, ამ ველში, გარდა შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფისა, სრულდება აგრეთვე ხარისხების მოქმედება, რომელიც სხვა არაფერია, თუ არა მრავალგზის გამრავლება. ამოფესვა კი, ე. ი. ახარისხების შექცეული მოქმედება, ყოველთვის არ სრულდება. მაგალითად, არ ვიცით, რა აზრი შეიძლება ჰქონდეს ასეთ გამოსახულებებს: $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$. ამიტომ ნამდვილ რიცხვთა ველში პირველი შეხედვით ისეთი მარტივი განტოლებანი, როგორიცაა $x^2+1=0$, $x^4+16=0$ და ა. შ. ამოუხსნადია. ამრიგად, წარმოიშვა აუცილებლობა **გაფართოვდეს ნამდვილ რიცხვთა ველი ახალი რიცხვების მიერთებით ისე, რომ გაფართოებული სიმრავლე წარმოადგენდეს რიცხვთა ველს, რომელშიც ყოველთვის სრულდება ფესვის ამოღება.**

ეს ამოცანა საბოლოოდ ამოიხსნა მხოლოდ XIX საუკუნეში.

ვნახოთ, როგორ ელემენტებს უნდა მოიცავდეს ახალი, გაფართოებული ველი.

უპირველეს ყოვლისა, იგი უნდა მოიცავდეს ყველა ნამდვილ რიცხვს. შემდეგ, მასში ამოხსნადი უნდა იყოს $x^2=-1$ განტოლება, რამდენადაც ამ ველში სრულდება ახარისხების შექცეული მოქმედება. მიღებულია,

რომ რიცხვი, რომლის კვადრატი —1-ის ტოლია, აღინიშნოს i ასოთი და ეწოდოს წარმოსახვითი ერთეული. მაშასადამე, i რიცხვის განსაზღვრის ძალით,

$$i^2=-1.$$

მოვითხოვთ, რომ რიცხვთა ახალი სიმრავლე წარმოადგენდეს ველს. ამიტომ, რამდენადაც ნამდვილი b რიცხვი და წარმოსახვითი ერთეული i ეკუთვნის ველს, მასვე უნდა ეკუთვნოდეს მათი ნამრავლიც bi. სრულიად ასევე, ნამდვილ a რიცხვთან და bi ნამრავლთან ერთად ახალ რიცხვთა ველს უნდა ეკუთვნოდეს მათი ჯამიც $a+bi$.

ამგვარად, ახალი სიმრავლე უნდა მოიცავდეს $a+bi$ სახის ყველა რიცხვს, სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i — წარმოსახვითი ერთეული. ამ რიცხვებს კომპლექსურ რიცხვებს ვუწოდებთ.

a რიცხვს უწოდებენ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს, bi გამოსახულებას — წარმოსახვით ნაწილს. b რიცხვს ეწოდება კოეფიციენტი წარმოსახვით ნაწილთან. მაგალითად, $2+3i$ კომპლექსური რიცხვისათვის ნამდვილი ნაწილია რიცხვი 2, ხოლო წარმოსახვითი — გამოსახულება $3i$; წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი 3-ის ტოლია. $0-3i$ რიცხვისათვის ნამდვილი ნაწილია რიცხვი 0, ხოლო წარმოსახვითი — გამოსახულება $3i$; წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი —3-ის ტოლია. $5+0\cdot i$ რიცხვისათვის ნამდვილი ნაწილია რიცხვი 5, ხოლო წარმოსახვითი — გამოსახულება $0\cdot i$; წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი 0-ის ტოლია.

ორი კომპლექსური რიცხვი ტოლად ითვლება, თუ ტოლია მათი ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვითი ნაწილების კოეფიციენტები. სხვანაირად რომ ვთქვათ,

$$a+bi=c+di$$

მხოლოდ მაშინ, როცა $a=c$, $b=d$.

როგორც ვიცით, ორი არატოლი ნამდვილი რიცხვისათვის განსაზღვრულია თანაფარდობანი „მეტი“ და „ნაკლები“. ასე, მაგალითად, $5>4$, $0<7$ და ა. შ. არატოლი კომპლექსური რიცხვებისათვის შეუძლებელია ასეთ თანაფარდობათა განსაზღვრა. მაგალითად, არ შეიძლება ითქვას, რომელია მეტი ორ რიცხვს შორის $2+3i$ თუ $5-7i$; $0+2i$ თუ $0+4i$ და ა. შ.

სავარჯიშოები

1972. რას ნიშნავს, რომ ორი კომპლექსური რიცხვი $a+bi$ და $c+di$:

ა) ტოლია, ბ) ტოლი არ არის?

1073. იპოვეთ x-ის და y-ის ნამდვილი მნიშვნელობანი შემდეგი განტოლებებიდან:

ა) $(x-y)+(3x+y)\, i=3-3i$:

ბ) $(x-5y)+(2x-y)\, i=6+3i$.

კომპლექსურ რიცხვთა შეკრება. მოპირდაპირე რიცხვები

განსაზღვრა. ო რ ი $a+bi$ და $c+di$ კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ჯ ა მ ი ე წ ო დ ე ბ ა კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ რ ი ც ხ ვ ს $(a+c)+(b+d)\, i$:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს შ ე კ რ ე ბ ი ს ა ს მ ა თ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ნ ა წ ი ლ ე ბ ი და წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ნ ა წ ი ლ ე ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ი კ რ ე ბ ე ბ ა.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $(1+i)+(2+3i)=(1+2)+(1+3)i=3+4i$;

2) $(5+6i)+(7-6i)=(5+7)+(6-6)i=12+0i$;

3) $(4+9i)+(-4+i)=(4-4)+(9+1)i=0+10i$;

4) $(3-7i)+(-3+7i)=(3-3)+(-7+7)i=0+0i$.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში იმყოფება რიცხვი 0, რომლის მიმატება ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვთან არ ცვლის ამ რიცხვს:

$$a+0=a.$$

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ანალოგიური რიცხვია $0+0i$. მართლაც, როგორიც უნდა იყოს $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი,

$$(a+bi)+(0+0i)=(a+0)+(b+0)i=a+bi.$$

ამიტომ $0+0i$ რიცხვს კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი ნ უ ლ ი ეწოდება.

როგორც ვიცით, ორ ნამდვილ a და $-a$ რიცხვს, რომელთა ჯამი ნულის ტოლია, მოპირდაპირე რიცხვები ეწოდება. ამის ანალოგიურად, ორ $a+bi$ და $-a-bi$ კომპლექსურ რიცხვს აგრეთვე მ ო პ ი რ დ ა პ ი რ ე რიცხვები ეწოდება.

სავარჯიშოები

1074. (ზ ე პ ი რ ა დ). დაასახელეთ მოცემული რიცხვების მოპირდაპირე კომპლექსური რიცხვები:

ა) $3+i$; ბ) $1-5i$; გ) $-2+0i$; დ) $0+4i$; ე) $0+0i$; ვ) $7+i$.

1975. იპოვეთ x-ისა და y-ის ნამდვილი მნიშვნელობანი შემდეგი განტოლებებიდან:

ა) $(5x+3yi)+(2y-xi)=3-i$;

ბ) $(2x-5i)+(7y+2xi)=-12+3yi$;

გ) $(x+3gi)+\left(\frac{3}{2}y+2xi\right)=4+8i$.

კომპლექსურ რიცხვთა გამოკლება § 245

განსაზღვრა. ო რ ი $z_1=a+bi$ და $z_2=c+di$ კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ს ხ ვ ა ო ბ ა ე წ ო დ ე ბ ა ი ს ე თ $z_3=x+yi$ კ ო მ პ-ლ ე ქ ს უ რ რ ი ც ხ ვ ს, რ ო მ ე ლ ი ც მ ი მ ა ტ ე ბ უ ლ ი z_2-ს თ ა ნ ი ძ ლ ე ვ ა z_1-ს.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, კომპლექსური რიცხვებისათვის, ისევე როგორც ნამდვილისათვის,

$$z_3=z_1-z_2.$$

ეს ტოლობა განსაზღვრის ძალით იმავეს აღნიშნავს, რასაც

$$z_3+z_2=z_1$$

ტოლობა.

ჩვენ მიერ შემოღებული განსაზღვრა თავისთავად არ უზრუნველყოფს იმას, რომ ყოველ კომპლექსურ რიცხვს შეიძლება გამოვაკლოთ ნებისმიერი სხვა კომპლექსური რიცხვი. ასეთი გამოკლების შესაძლებლობა და მისი ცალსახობა შემდეგი თეორემით დასტურდება.

თ ე ო რ ე მ ა. ნებისმიერი $z_1=a+bi$ და $z_2=c+di$ კომპლექსური რიცხვებისათვის სხვაობა $z_3=z_1-z_2$ განსაზღვრულია და, ამასთან, ცალსახად.

ფაქტიურად დასამტკიცებელი გვაქვს, რომ არსებობს, და ამასთან ერთადერთი, კომპლექსური $z_3=x+yi$ რიცხვი, რომლის ჯამი z_2-სთან გვაძლევს z_1-ს:

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi. \tag{1}$$

კომპლექსურ რიცხვთა ჯამის განსაზღვრის ძალით:

$$(c+di)+(x+yi)=(c+x)+(d+y)i.$$

ამიტომ (1) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$(c+x)+(d+y)i=a+bi.$$

ორი კომპლექსური რიცხვი მხოლოდ მაშინ არის ტოლი, როცა მათი

ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვითი ნაწილების კოეფიციენტები ტოლია. ამიტომ

$$\begin{cases} c+x=a, \\ d+y=b \end{cases}$$

განტოლებათა ამ სისტემას ყოველთვის აქვს ამოხსნა და, ამასთან, ერთადერთი:

$$x=a-c, \quad y=b-d.$$

ამის გამო არსებობს, და ამასთან ერთადერთი, წყვილი (x, y) ნამდვილი რიცხვებისა, რომელიც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

არსებითად დავამტკიცეთ, რომ

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

იმისათვის, რომ ერთ კომპლექსურ რიცხვს გამოვაკლოთ მეორე, საკმარისია ეს გამოკლება შევასრულოთ ცალ-ცალკე ამ რიცხვების ნამდვილ ნაწილებზე და წარმოსახვითი ნაწილების კოეფიციენტებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. $(5+6i)-(3+7i)=(5-3)+(6-7)i=2-i;$
2. $(2+i)-(9+i)=(2-9)+(1-1)i=-7+0i;$
3. $(3+4i)-(3-i)=(3-3)+(4+1)i=0+5i;$
4. $(7-i)-(7-i)=(7-7)+(-1+1)i=0+0i.$

სავარჯიშოები

1976. რას გამოსახავს თითოეული შემდეგი ფორმულებიდან — განსაზღვრას თუ თეორემას:

ა) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$

ბ) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i?$

1977. იპოვეთ x-ისა და y-ის ნამდვილი მნიშვნელობანი შემდეგი განტოლებებიდან:

ა) $(0+3xi)-(10x+2yi)=-5y+3i.$

ბ) $\left(-3y+\frac{1}{2}xi\right)-(-8x+5yi)=-2+12i.$

გ) $\left(\frac{3}{4}x-2yi\right)-\left(\frac{1}{3}y+6xi\right)=0+21i.$

ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ $a+bi$ და $c+di$ კომპლექსური რიცხვების გამრავლება ისეთნაირადვე შესრულდეს, როგორც ნამდვილკოეფიციენტებიან ორწევრთა გამრავლება, სახელდობრ:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+(ad+bc)i+bdi^2.$$

მაგრამ, i რიცხვის განსაზღვრის ძალით,

$$i^2=-1.$$

ამიტომ $bdi^2=-bd$ და, მაშასადამე,

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \qquad (1)$$

სწორედ ეს ფორმულა ედება საფუძვლად ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის განსაზღვრას.

განსაზღვრა. **ორი $a+bi$ და $c+di$ კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი ეწოდება კომპლექსურ რიცხვს** $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

იმისათვის, რომ შეგვეძლოს კომპლექსურ რიცხვთა ერთიმეორეზე გადამრავლება, სავალდებულო არ არის გვახსოვდეს (1) ფორმულა. მხოლოდ ის კი უნდა ვიცოდეთ, რომ იგი იძლევა იმავე შედეგს, რასაც $a+bi$ და $c+di$ ორწევრთა უბრალო გადამრავლება, რის შემდეგ i^2-ის ნაცვლად ჩაიწერება -1.

მაგალითები.

1. $(2+3i)(6-5i)=12-10i+18i-15i^2=(12+15)+(18-10)i=$
$=27+8i$.

2. $(4+i)(4-i)=16-4i+4i-i^2=(16+1)+(-4+4)i=17+0i$;

3. $(1+i)^2=(1+i)(1+i)=1+i+i+i^2=(1-1)+2i=0+2i$.

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ნულს ის თვისება აქვს, რომ მისი და ნებისმიერი სხვა ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი ნულის ტოლია:

$$a\cdot 0=0.$$

მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ თვითონ დარწმუნდნენ იმაში, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ანალოგიური თვისება აქვს $0+0i$ რიცხვს. ყოველი $a+bi$ კომპლექსური რიცხვისათვის სრულდება ტოლობა:

$$(a+bi)\,(0+0i)=0+0i.$$

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ: (№ 1978—1987):

1978. $(5+i)(-2+3i)$.

1979. $(3+4i)(6-5i)$.

1980. $(7-2i)(3,5-i)$.

1981. $(0,5+0,2i)(2+3i)$.

1982. $(7+4i)^2$.

1983. $(5+i)(15-3i)$.

1984. $(-6+2i)(11+5i)$.

1985. $(0,5+i)(1+2i)$.

1986. $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i)$.

1987. $(\sqrt{3}+5i)(4-\sqrt{3}i)$

1988. იპოვეთ z კომპლექსური რიცხვი $(2-3i)z=-1-5i$ განტოლებიდან.

კომპლექსურ რიცხვთა გაყოფა § 247

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში, ისევე როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში,

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}.$$

თანაფარდობა უნდა გვესმოდეს იმ აზრით, რომ $z_3 \cdot z_2=z_1$.

განსაზღვრა. z_1 კომპლექსური რიცხვის z_2 კომპლექსურ რიცხვზე გაყოფით მიღებული განაყოფი ეწოდება ისეთ z_3 კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც გამრავლებული z_2-ზე იძლევა z_1-ს.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში $\frac{a}{b}$ განაყოფი განსაზღვრულია a და b-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, თუკი $b\neq0$. ანალოგიური მდგომარეობაა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში.

თეორემა. $\frac{a+bi}{c+di}$ **განაყოფი განსაზღვრულია, და ამასთან ცალსახად, ყველა** $a+bi$ **და** $c+di$ **კომპლექსური რიცხვისათვის, თუკი** $c+di\neq0+0i$.

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ, თუ $c+di\neq0+0i$, **მაშინ** არსებობს, და ამასთან, ერთადერთი წყვილი (x, y) ნამდვილი რიცხვებისა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$(x+yi)(c+di)=a+bi \qquad (1)$$

განტოლებას, კომპლექსურ რიცხვთა გამრავლების წესის თანახმად,

$$(x+yi)(c+di)=(xc-yd)+(xd+yc)i.$$

ამიტომ (1) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$(xc-yd)+(xd+yc)i=a+bi.$$

ორი კომპლექსური რიცხვი მხოლოდ მაშინაა ტოლი, როცა ტოლია მათი ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვითი ნაწილების კოეფიციენტები. ამიტომ

$$\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases} \tag{2}$$

გამოვთვალოთ ამ სისტემის მთავარი დეტერმინანტი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}=c^2+d^2$$

ვინაიდან $c+di\neq 0+0i$, ამიტომ c და d რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. მაგრამ მაშინ $\Delta=c^2+d^2>0$. მაშასადამე, კრამერის წესის თანახმად (იხ. § 30, I ნაწ.), განტოლებათა (2) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}.$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{c^2+d^2}=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

ამგვარად,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

საჭირო არ არის გვახსოვდეს ეს ფორმულა. საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ, თუ როგორ მიიღება იგი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $\frac{9-7i}{2-3i}$ შეფარდება.

ვთქვათ,

$$\frac{9-7i}{2-3i}=x+yi.$$

მაშინ

$$(x+yi)(2-3i)=9-7i;$$

$$2x+2yi-3xi-3yi^2=9-7i;$$

$$(2x+3y)+(2y-3x)i=9-7i.$$

აქედან

$$\begin{cases} 2x+3y=9, \\ -3x+2y=-7. \end{cases}$$

თუ ამოვხსნით ამ სისტემას, მივიღებთ $x=3$, $y=1$. ამიტომ

$$\frac{9-7i}{2-3i}=3+i.$$

სავარჯიშოები

1989. რას გამოსახავს თითოეული შემდეგი ფორმულებიდან — განსაზღვრას თუ თეორემას:

ა) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

ბ) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$?

გამოთვალეთ (№ 1990—1992);

1990. $\dfrac{0+4i}{1+i}$. **1991.** $\dfrac{2+i}{2-i}$. **1992.** $\dfrac{5+0i}{-4+3i}$.

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობანი:

1993. $\dfrac{6-i}{3+4i}=\dfrac{13+41i}{-25+25i}$. **1994.** $\dfrac{2+i}{3-i}=\dfrac{13+4i}{17-9i}$.

კომპლექსურ რიცხვთა ველი § 248

კომპლექსურ რიცხვებს უკვე რამდენიმე პარაგრაფი მივუძღვენით. მაგრამ ჩვენი მსჯელობა ხშირად სიმკაცრეს იყო მოკლებული. ჩვენ დავუშვით (თუმცა შეგნებულად) ზოგი ლოგიკური შეცდომა, რომლებიც ახლა უნდა გამოვასწოროთ.

ამაში რომ გავერკვეთ, დავსვათ ჩვენს წინაშე ასეთი კითხვა: რას ნიშნავს ა ხ ა ლ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს შ ე მ ო ღ ე ბ ა? რა თქმა უნდა, ახალი რიცხვებისათვის რაღაც აღნიშვნები უნდა შევარჩიოთ. მაგალითად, კომპლექსურ რიცხვებს $a+bi$-თი აღვნიშნავთ, მაგრამ ეს არ არის მთავარი. მთავარი ის არის, რომ განსაზღვრული იყოს, თუ როგორ ხდება ამ რიცხვთა ურთიერთშედარება, როგორ სრულდება ამ რიცხვებზე ესა თუ ის მოქმედება (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა). სანამ ეს მოქმედება განსაზღვრული არ არის, უფლება არა გვაქვს ვიხმაროთ ისეთი გამოთქმები, როგორიცაა „ახალი რიცხვების ჯამი“ და „ახალი რიცხვების ნამრავლი“.

როგორ შემოგვაქვს კომპლექსური რიცხვები? უპირველეს ყოვლისა (იხ. §243) მოვითხოვეთ, რომ რიცხვთა ახალი სიმრავლე მოიცავდეს რიცხვს, რომლის კვადრატი (ე. ი. თავისთავზე ნ ა მ რ ა ვ ლ ი) — 1-ის ტოლი იქნება. ჩვენთვის უკვე ცნობილ ნამდვილ რიცხვთა შორის ასეთი რიცხვი არ არსებობს. თუ იგი არსებობს, მხოლოდ ახალ რიცხვთა შორის. მაგრამ ამ შემთხვევაში როგორღა შეგვიძლია ნამრავლზე ვილაპარაკოთ ახალი რიცხვების გამრავლება ჯერ ხომ არ ყოფილა განსაზღვრული? ამგვარად, უკვე წარ-

მოსახვითი ერთეულის განსაზღვრა იყო მათემატიკურად არამართებული. ახალ რიცხვთა გამრავლებაზე საუბარი გვქონდა მაშინაც, როცა მოვითხოვდით, რომ რიცხვთა ახალი სიმრავლე b რიცხვთან და წარმოსახვით ერთეულთან ერთად მოიცავდეს bi ნამრავლსაც. ამის შემდეგ ვლაპარაკობდით $a+bi$ ჯამზე, თუმცა ახალი რიცხვების შეკრება, ისე როგორც გამრავლება, ჯერ არ იყო განსაზღვრული.

აი რატომ არის, რომ ჩვენ მიერ გადმოცემული კომპლექსურ რიცხვთა თეორია არ შეიძლება მივიჩნიოთ მათემატიკური თვალსაზრისით დასაბუთებულად. მაშ, როგორღა შემოვიღოთ ხმარებაში კომპლექსური რიცხვები? ამ საკითხს ქვემოთ ეძლევა პასუხი.

კომპლექსური რიცხვები ეწოდება $a+bi$ სახით ჩაწერილ რიცხვებს, სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i რაღაც სიმბოლოა.

შემოვიღეთ რა აღნიშვნა $a+bi$, სრულიადაც არ ვაკავშირებთ მას რაიმე ჯამთან. ნიშანი „+" $a+bi$ გამოსახულებაში ჯერჯერობით არ წარმოადგენს შეჯამების მაჩვენებელს. ის შედის უბრალოდ როგორც ერთი მთლიანი განუყოფელი $a+bi$ გამოსახულების შემადგენელი ნაწილი. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ჩვენ არ მოვითხოვთ წინასწარ $i^2=-1$ თანაფარდობის შესრულებას. ჯერჯერობით i ხომ სიმბოლოა და არა რიცხვი.

განსაზღვრის თანახმად, $a+bi=c+di$ მხოლოდ მაშინ, როცა $a=c$, $b=d$.

ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი განისაზღვრება ფორმულით:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \tag{1}$$

ხოლო ნამრავლი — ფორმულით:

$$(a+bi)\,(c+bi)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i. \tag{2}$$

ორი $a+bi$ და $c+di$ კომპლექსური რიცხვის სხვაობა განისაზღვრება, როგორც ისეთი კომპლექსური რიცხვი, რომელიც შეჯამებული $c+di$-სთან იძლევა $a+bi$-ს. როგორც § 245-ში იყო დამტკიცებული, ეს რიცხვი არსებობს და $(a-c)+(b-d)i$-ს ტოლია, ე. ი.

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i. \tag{3}$$

$a+bi$ კომპლექსური რიცხვის $c+di$ კომპლექსურ რიცხვზე გაყოფით მიღებული განაყოფი ეწოდება ისეთ კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც $c+di$-ზე გამრავლების შედეგად იძლევა $a+bi$-ს. § 247-ში დამტკიცებული იყო, რომ, თუ $c+di\neq 0+0i$, მაშინ $a+bi$-ს $c+di$-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული განაყოფი არსებობს და შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

ზემოთ მოყვანილ ოთხ ფორმულათაგან ბუნებრივად მოჩანს მხოლოდ (1) და (3) ფორმულა. დანარჩენი ორი ფორმულა კი პირველი შეხედვით ძნელად გასაგებია. აი რატომ დავიწყეთ კომპლექსურ რიცხვთა თეორიის ისეთნაირი გადმოცემა, რომელიც, თუმცა მათემატიკურად არამკაცრია, მაგრამ იგი იმის გაგების შესაძლებლობას იძლევა, თუ როგორ შეიძლება (2) და (4) ფორმულებამდე მისვლა.

კომპლექსური რიცხვების შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა იძლევა ისევ კომპლექსურ რიცხვებს. ვნახოთ, სრულდება თუ არა

ამ დროს შეკრებისა და გამრავლების ის ძირითადი კანონები, რომლებიც ახასიათებდა ნამდვილ რიცხვებს:

$$z_1+z_2=z_2+z_1;$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3);$$

$$z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1;$$

$$(z_1 \cdot z_2)z_3=z_1(z_2 \cdot z_3);$$

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3.$$

თუ ვაჩვენებთ, რომ ეს კანონები სრულდება, ამით დამტკიცებული იქნება, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე შეადგენს ველს.

დავიწყოთ პირველი კანონით. ვთქვათ, $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. მაშინ

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$z_2+z_1=(c+di)+(a+bi)=(c+a)+(d+b)i.$$

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა მიმართ გადანაცვლებადობის კანონი სრულდება. მაშასადამე, $a+c=c+a$, $b+d=d+b$. ამიტომ z_1+ $+z_2$ და z_2+z_1 კომპლექსურ რიცხვებს ერთნაირი აქვს ნამდვილი ნაწილებიც და წარმოსახვითი ნაწილების კოეფიციენტებიც. ეს კი ნიშნავს, რომ $z_1+z_2=z_2+z_1$.

ახლა გადავიდეთ მეხუთე კანონზე. ვთქვათ, $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$, მაშინ $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$. მაშასადამე,

$$(z_1+z_2)z_3=[(a+c)+(b+d)i](e+fi)=$$

$$=[(a+c)e-(b+d)f]+(a+c)f+(b+d)e]i=$$

$$=[(ae-bf)+(ce-df)]+(af+be)+(cf+de)i.$$

მეორე მხრივ, $z_1z_3=(a+bi)(e+fi)=(ae-bf)+(af+be)i,$

$$z_2z_3=(c+di)(e+fi)=(ce-df)+(cf+de)i.$$

ამიტომ

$$z_1z_3+z_2z_3=[(ae-bf)+(ce-df)]+[(af+be)+(cf+de)]i.$$

თუ შევადარებთ $(z_1+z_2)z_3$ და $z_1z_3+z_2z_3$ რიცხვებს, შევნიშნავთ, რომ მათ აქვთ ერთნაირი ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვითი ნაწილების ერთნაირი კოეფიციენტები. ეს კი ნიშნავს ამ კომპლექსური რიცხვების ტოლობას: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

დაამტკიცეთ, რომ კომპლექსური რიცხვებისათვის სრულდება შეკრების გადანაცვლებადობის კანონი და გამრავლების გაჩრიგებადობის

კანონი შეკრების მიმართ. წინადადებას ვაძლევთ მოსწავლეებს თვითონ დარწმუნდნენ დამოუკიდებლად, რომ კომპლექსურ რიცხვებზე სრულდება შეკრებისა და გამრავლების დანარჩენი კანონებიც.

ამგვარად, **ყველა კომპლექსური რიცხვის სიმრავლე შეადგენს ველს.**

სავარჯიშოები

1906. შეადგენს თუ არა ველს შემდეგი სახის რიცხვთა ერთობლიობანი:

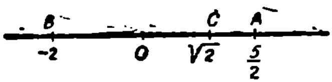
ა) $0+bi$, სადაც b ნამდვილი რიცხვია;

ბ) $a+ai$, სადაც a ნამდვილი რიცხვია;

გ) $a+bi$, სადაც a და b ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია?

კომპლექსურ რიცხვთა გეომეტრიული გამოსახვა § 249

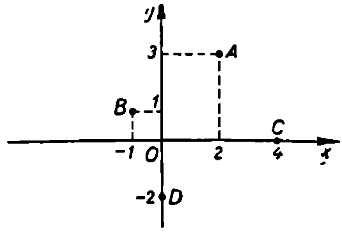
როგორც ცნობილია (იხ. ნაწ. I , § 44), ნამდვილი რიცხვები შეიძლება გამოისახოს წერტილებით რიცხვითს წრფეზე. ამასთან, თითოეულ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი რიცხვითს წრფეზე. მაგალითად, ნამდვილ რიცხვს $\frac{5}{2}$-ს შეესაბამება A წერტილი (ნახ. 326), რომელიც საწყისი წერტილის მარჯვნივაა სიგრძის $\frac{5}{2}$ ერთეულ მანძილზე; ნამდვილ რიცხვს —2-ს შეესაბამება B წერტილი, რომელიც იმყოფება O წერტილის მარცხნივ სიგრძის 2 ერთეულ მანძილზე; ნამდვილ რიცხვს $\sqrt{2}$-ს შეესაბამება C წერტილი, რომელიც მდებარეობს O-ს მარჯვნივ სიგრძის $\sqrt{2}$ ერთეულ მანძილზე. შებრუნებით, რიცხვითი წრფის თითოეულ წერტილს შეესაბამება სრულიად განსაზღვრული ნამდვილი რიცხვი. მაგალითად, A და B წერტილებს (ნახ. 326) შეესაბამება რაციონალური რიცხვები: $\frac{5}{2}$ და —2, ხოლო C წერტილს — ირაციონალური რიცხვი $\sqrt{2}$. ამგვარად, **ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ურთიერთცალსახა შესაბამისობაშია რიცხვითი წრფის ყველა წერტილის სიმრავლესთან.**



ნახ. 236.

როგორც ნამდვილი რიცხვები შეიძლება გამოვსახოთ რიცხვითი წრფის წერტილებით, ისევე შეიძლება კომპლექსური რიცხვები გეომეტრიულად წარმოვადგინოთ სიბრტყის წერტილების სახით.

ყოველ $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს შევუსაბამოთ სიბრტყის წერტილი კოორდინატებით (a, b). მაგალითად, $2+3i$ რიცხვს შევუსაბამოთ (ნახ. 327) A წერტილი კოორდინატებით $(2, 3)$, $-1+i$ რიცხვს B წერტილი კოორდინატებით $(-1, 1)$, $4+0i$ რიცხვს C წერტილი კოორდინატებით $(4, 0)$, $0-2i$ რიცხვს D წერტილი კოორდინატებით $(0, -2)$ და ა. შ.



ნახ. 327.

სიბრტყის ყოველ წერტილს გარკვეული კოორდინატები აქვს. ამიტომ მიღებული შესაბამისობის მიხედვით სიბრტყის ყოველ წერტილს პასუხობს რაიმე კომპლექსური რიცხვი. მაგალითად, A წერწერტილს, კოორდინატებით $(2, 3)$, ეთანადება $2+3i$ რიცხვი (ნახ. 327), B წერტილს, კოორდინატებით $(-1, 1)$, — რიცხვი — $1+i$, C წერტილს, კოორდინატებით $(4,0)$, — რიცხვი $4+0i$, ხოლო D წერტილს, კოორდინატებით $(0, -2)$, — რიცხვი $0-2i$. მაგრამ, ხომ არ შეიძლება მოხდეს ისე, რომ სიბრტყის ერთსა და იმავე წერტილს, მაგალითად, (α, β) წერტილს, შეესაბამებოდეს სხვადასხვა კომპლექსური რიცხვი, მაგალითად, a_1+b_1i და a_2+b_2i? ასე რომ ყოფილიყო, მაშინ გვექნებოდა:

$$\alpha=a_1, \quad \beta=b_1,$$

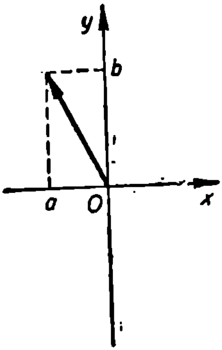
$$\alpha=a_2, \quad \beta=b_2,$$

აქედან $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. ასეთ შემთხვევაში კი a_1+b_1i და a_2+b_2i რიცხვები თანატოლი იქნებოდნენ.

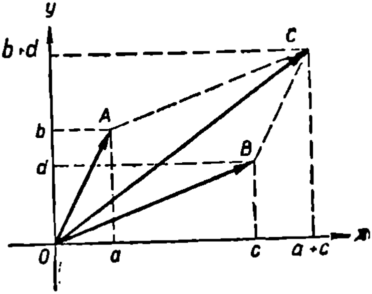
მაშ, ყოველ $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს სიბრტყის ერთი, სრულიად განსაზღვრული წერტილი შეესაბამება, სახელდობრ, წერტილი კოორდინატებით (a, b). პირიქით, სიბრტყის ყოველ (α, β) წერტილს ერთი, სრულიად განსაზღვრული კომპლექსური რიცხვი შეესაბამება, სახელდობრ, $\alpha+\beta i$ რიცხვი. ამგვარად, **ყველა კომპლექსური რიცხვის სიმრავლე და სიბრტყის ყველა წერტილის სიმრავლე ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში იმყოფება.**

სიბრტყის ყოველ A წერტილს შეიძლება დავუკავშიროთ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი, რომელიც გამოდის კოორდინატთა სათავიდან და მთავრდება A წერტილში (ნახ. 328). ამიტომ კომპლექსურ რიცხვებს შეიძლება მეორენაირი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (ახსნა-განმარტება) მიეცეს. ყოველი $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი გეომეტრიულად შეიძლება განვმარტოთ როგორც $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი, კოორდინატებით (a, b). ამასთან, $\overrightarrow{OA}$ ვექ-

ტორის კოორდინატები იგივე იქნება, რაც A წერტილის კოორდინატები, სახელდობრ, (a, b). ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთი შესაბამისობა ყველა კომპლექსურ რიცხვსა და სიბრტყის ყველა იმ ვექტორს შორის, რომლებიც კოორდინატთა სათავიდან გამოდიან, აგრეთვე ურთიერთცალსახაა.



ნახ. 328.



ნახ. 329.

გამოვიყენებთ რა კომპლექსურ რიცხვთა ვექტორულ ინტერპრეტაციას, ადვილად ავხსნით იმ განსაზღვრას, რომელიც მივიღეთ ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამისათვის:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

როგორც ცნობილია, ვექტორთა შეკრების დროს მათი შესაბამისი კოორდინატები იკრიბება. ამიტომ, თუ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორს (ნახ. 329) აქვს კოორდინატები (a, b), ხოლო $\overrightarrow{OB}$ ვექტორს — კოორდინატები (c, d), მაშინ მათ ჯამს — $\overrightarrow{OC}$ ვექტორს — ექნება $(a+c)$ $(b+d)$ კოორდინატები. ეს ვექტორი შეესაბამება სწორედ იმ $(a+c)+(b+d)i$ კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც $a+bi$ და $c+di$ კომპლექსური რიცხვების ჯამია.

სამწუხაროდ, ორი კომპლექსური რიცხვის

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

ნამრავლის განსაზღვრას ასეთი მარტივი ინტერპრეტაცია არ ეძლევა.

სავარჯიშოები

1096. მოცემული კომპლექსური რიცხვები გამოსახეთ სიბრტყის წერტილებით:

ა) $1+i$; ბ) $1-i$; გ) $-2+3i$; დ) $-3-2i$;
ე) $5+0i$; ვ) $-6+0i$; ზ) $0+5i$; თ) $0-4i$.

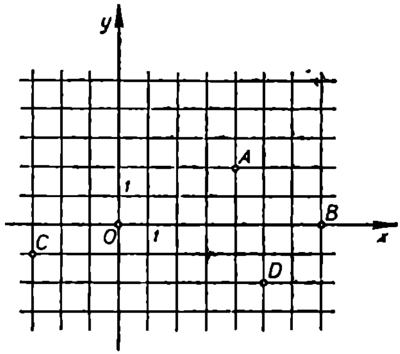
1997. რომელ კომპლექსურ რიცხვებს გამოსახავს 330-ე ნახაზზე წერტილები: A, B, C, D და O?

1998. მიეცით გეომეტრიული ინტერპრეტაცია შემდეგ ფორმულებს:

ა) $(1+2i)+(1-2i)=2+0i$;

ბ) $(3-4i)+(-1+2i)=$
$2-2i$.

1999. ვთქვათ, M წერტილი $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის გამოსახულებაა სიბრტყეზე. ააგეთ იმავე სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც გამოსახავენ კომპლექსურ რიცხვებს: ა) $a-bi$; ბ) $-a+bi$; გ) $-a-bi$; დ) $a+0i$; ე) $0+bi$; ვ) $-a+0i$; ზ) $0-bi$.



ნახ. 330.

2000. ვთქვათ, M წერტილი $a-bi$ კომპლექსური რიცხვის გამოსახულებაა სიბრტყეზე. სად იმყოფება იმავე სიბრტყეზე ის წერტილები, რომლებიც გამოსახავენ რიცხვებს:

ა) $3a+0i$; ბ) $-5a+0i$; გ) $0-bi$; დ) $0+2bi$; ე) $4a+3bi$?

ნამდვილი და წმინდა წარმოსახვითი რიცხვები § 260

ცალკე განვიხილოთ სიბრტყის ყველა ის წერტილი, რომლებიც აბსცისათა ღერძზეა მოთავსებული. მათი კოორდინატებია $(a, 0)$ და, მაშასადამე, ეს წერტილები $a+0i$ სახის კომპლექსურ რიცხვებს შეესაბამება. ვთქვათ, a_1+0i და a_2+0i ორი ასეთი რიცხვია. ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგ თანაფარდობათა მართებულობაში:

$$(a_1+0i)+(a_2+0i)=(a_1+a_2)+0i;$$

$$(a_1+0i)-(a_2+0i)=(a_1-a_2)+0i;$$

$$(a_1+0i)(a_2+0i)=a_1a_2+0i;$$

$$\frac{a_1+0i}{a_2+0i}=\frac{a_1}{a_2}+0i\,(a_2\neq 0).$$

ეს თანაფარდობანი უჩვენებენ, რომ $a+0i$ სახის კომპლექსურ რიცხვებზე, ე. ი. ყველა იმ რიცხვზე, რომელთა წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი ნულია, შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა ისევე

სრულდება, როგორც მათ შესაბამის ნამდვილ რიცხვებზე. ამ რიცხვების გეომეტრიული გამოსახულება აგრეთვე ემთხვევა შესაბამისი ნამდვილი რიცხვების გეომეტრიულ გამოსახულებას: როგორც ერთნი, ისე მეორენი წარმოიდგინებიან აბსცისათა ღერძის წერტილებით. ეს გარემოება საბაბს გვაძლევს აღარ გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან $a+0i$ კომპლექსური რიცხვი და ნამდვილი a რიცხვი. ამიტომ შემდეგში ყველგან $a+0i$-ს მაგიერ დავწერთ უბრალოდ a-ს. კერძოდ, $0+0i=0$. ამ მიზეზის გამო აბსცისათა ღერძს, რომელზეც განლაგებულია ნამდვილი რიცხვების, ანუ $a+0i$ სახის კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი წერტილები, ეწოდება **ნამდვილი ღერძი.**

ახლა ჩვენთვის ცხადია, რანაირად შედიან ნამდვილი რიცხვები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში.

ორდინატთა ღერძის წერტილთა კოორდინატებია $(0, b)$ და ამიტომ ისინი შეესაბამებიან $0+bi$ სახის რიცხვებს, ე. ი. კომპლექსურ რიცხვებს, რომელთა ნამდვილი ნაწილი ნულის ტოლია. ასეთი რიცხვები იმით ხასიათდება, რომ მათი კვადრატები ყოველთვის უარყოფითია, თუ $b\neq 0$. მართლაც,

$$(0+bi)^2=(0+bi)(0+bi)=0+0bi+b\cdot 0i-b^2=$$
$$=-b^2+0i=-b^2.$$

კერძოდ,

$$(0+i)^2=-1.$$

როცა კომპლექსური რიცხვები არ იყო შემოტანილი მათემატიკაში, ძნელი წარმოსადგენი იყო, რომ რიცხვის კვადრატი შეიძლება უარყოფითი ყოფილიყო. ამიტომ $0+bi$ სახის კომპლექსურმა რიცხვებმა მიიღეს **წმინდა წარმოსახვითი რიცხვების** სახელწოდება. შემდეგში ამ რიცხვებს $0+bi$-თი კი არ აღვნიშნავთ, არამედ უბრალოდ bi-თი. ორდინატთა ღერძს, რომელზეც განლაგებულია ყველა წმინდა წარმოსახვითი რიცხვი, **წარმოსახვითი ღერძი** ეწოდება.

შემდეგისათვის შევთანხმდეთ, რომ $0+i$ სახის რიცხვი უბრალოდ i-თი აღვნიშნოთ. ასეთნაირი შეთანხმების საფუძველზე შეგვიძლია ვილაპარაკოთ არა მხოლოდ რაღაც i სიმბოლოზე, არამედ როგორც კომპლექსურ i რიცხვზე, ვგულისხმობთ რა მას, როგორც $0+i$ რიცხვს. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, $(0+i)^2=-1$. ამიტომ

$$i^2=-1.$$

i რიცხვმა მიიღო **წარმოსახვითი ერთეულის** სახელწოდება. განვიხილოთ ნებისმიერი ნამდვილი b რიცხვისა და წარმოსახვითი i ერთეულის ნამრავლი:

$$b\cdot i=(b+0i)(0+i)=b\cdot 0+bi+0\cdot 0i+0\cdot i^2=0+bi.$$

მაშ,

$$b\cdot i=0+bi.$$

ამით გამართლებულია ზემოთ მიღებული შეთანხმება, აღინიშნოს $0+bi$ სახის რიცხვები უბრალოდ bi-თი.

§ 248-ში ვამბობდით, რომ განსაზღვრის თანახმად $a+bi$ არის უბრალო აღნიშვნა და არა a და bi რიცხვების ჯამის გამოსახულება. ეს გამოწვეული იყო იმით, რომ მაშინ არ ვიცოდით, რას წარმოადგენდა a და bi კომპლექსური რიცხვები და რას წარმოადგენდა ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი. ა ხ ლ ა ჩვენ ეს ვიცით. ამიტომ კანონიერია დაისვას კითხვა, ხომ არ შეიძლება $a+bi$ გამოსახულება განხილულ იქნეს როგორც ორი a და bi რიცხვის ჯამი. ამ საკითხის გადასაწყვეტად შევნიშნოთ, რომ

$$a=a+0i,$$
$$bi=0+bi.$$

ამიტომ a და bi რიცხვების ჯამი იქნება:

$$(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi$$

ეს იძლევა დადებით პასუხს დასმულ კითხვაზე. კომპლექსური რიცხვი $a+bi$ შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი: ნამდვილი a რიცხვისა და წმინდა წარმოსახვითი bi რიცხვისა.

სავარჯიშოები

2001. რას ნიშნავს თითოეული შემდეგი გამოთქმებიდან:

ა) $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლია?

ბ) $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლი არ არის?

2002. იპოვეთ ნამდვილი x და y რიცხვები შემდეგი განტოლებებიდან:

ა) $(x+y)+(x-y)i=2+4i$; ბ) $(x+y)+(x-y)i=4i$;

გ) $(x+y)+(x-y)i=2$; დ) $(y+2x)+(2y+4x)i=0$;

ე) $(x+1,5y)+(2x+3y)i=13i$.

2003. იპოვეთ წმინდა წარმოსახვითი u და v რიცხვები შემდეგი განტოლებებიდან:

ა) $u+iv=-3+2i$;

ბ) $5u-6iv=-24-5i$.

2004. რა ითქმის ორ კომპლექსურ რიცხვზე, თუ მათი ჯამი და სხვაობა ერთდროულად წარმოადგენს:

ა) ნამდვილ რიცხვებს;

ბ) წმინდა წარმოსახვით რიცხვებს?

2005. გამოთვალეთ:

ა) $[i(2-i)]^2$. ბ) $[2i(3-4i)]^2$.

2006. დაამტკიცეთ, რომ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის კვადრატი ნამდვილი რიცხვია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან $a=0$, ან $b=0$.

$a-bi$ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი. მაგალითად, $2-3i$ რიცხვი $2+3i$ რიცხვის შეუღლებულია, $5+4i$ რიცხვი $5-4i$ რიცხვის შეუღლებულია, $-6i(=0-6i)$ რიცხვი $6i(=0+6i)$ რიცხვის შეუღლებულია, და ა. შ.

ვთქვათ, a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$a=a+0i=a-0i.$$

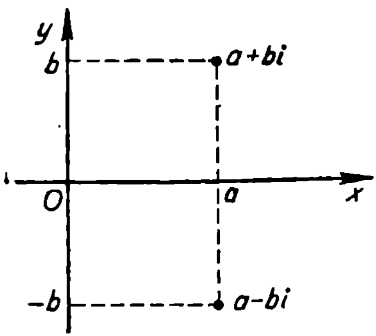
ამიტომ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი თავისი შეუღლებულის ტოლია. შებრუნებული დებულებაც მართებულია: თუ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი თავისი შეუღლებულის ტოლია, ე. ი.

$$a+bi=a-bi, \tag{1}$$

მაშინ ეს რიცხვი ნამდვილია. მართლაც, (1)-დან გამომდინარეობს, რომ $b=-b$, ანუ $b=0$. მაშასადამე, $a+bi=a+0i=a$, რისი დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

ამგვარად, **ყველა კომპლექსურ რიცხვს შორის მხოლოდ ნამდვილი რიცხვები (და მხოლოდ ისინი) არიან თავიანთი შეუღლებულების ტოლნი.**

$a-bi$ რიცხვი $a+bi$ რიცხვის შეუღლებულია. მაგრამ $a+bi$ რიცხვი, ცხადია, $a-bi$ რიცხვის შეუღლებული იქნება. ამგვარად, $a+bi$ და $a-bi$ რიცხვები ურთიერთშეუღლებულნი არიან. ამის გამო მათ უ რ თ ი ე რ თ შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი კომპლექსური რიცხვები ეწოდება. ცხადია, რომ ნებისმიერი ურთიერთშეუღლებული $a+bi$ და $a-bi$ კომპლექსური რიცხვები სიბრტყეზე ნამდვილი ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებით გამოისახება (იხ. ნახ. 331).



ნახ. 331.

ორი ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია.

მართლაც,

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2.$$

მაგრამ $i^2=-1$. ამიტომ

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

ურთიერთშეუღლებული რიცხვების შესახებ დამტკიცებული თვისება საშუალებას გვაძლევს საკმაოდ მარტივად შევასრულოთ კომპლექსური რიცხვების გაყოფა. ვთქვათ, საჭიროა ვიპოვოთ განაყოფი:

$$\frac{a+bi}{c+di}\ (c+di\neq 0).$$

ამ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ $c-di$ რიცხვზე, რომელიც მნიშვნელის შეუღლებულია. შედეგად მივიღებთ წილადს, რომლის მნიშვნელი ნამდვილი რიცხვი იქნება:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ შეკრების მიმართ გამრავლების განრიგებადობის კანონს, მივიღებთ:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{1}{c^2+d^2}[(ac+bd)+(bc-ad)i]=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

§ 247-ში ეს ფორმულა სხვა გზით იყო მიღებული.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\frac{7-i}{3+i}=\frac{(7-i)\,(3-i)}{(3+i)\,(3-i)}=\frac{21-7i-3i-1}{9+1}=\frac{20-10i}{10}=2-i$;

2) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i.$

სავარჯიშოები

2007. დაასახელეთ მოცემული კომპლექსური რიცხვების შეუღლებულნი. გამოსახეთ მოცემული და მათი შეუღლებული რიცხვები სიბრტყის წერტილებით:

ა) $1+i$; ბ) $2-3i$; გ) 5; დ) $4i$; ე) 0; ვ) $2i-1$.

გამოთვალეთ:

2008 $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

2009 $\frac{42+2i}{3+5i}$.

2010. $\frac{7-2i}{2+7i}$.

2011 $\frac{1}{i}$.

2012. $\frac{2-5i}{4+i}=\frac{6-7i}{4-i}$.

2013. $\frac{2+i}{3-5i}+\frac{i}{i-1}$

2014. $\frac{a-bi}{b+ai}-i\,\frac{b-ai}{a+bi}$.

განსაზღვრის თანახმად, i რიცხვის პირველი ხარისხია თვით რიცხვი i, ხოლო მეორე ხარისხი — რიცხვი -1:

$$i^1=i, \quad i^2=-1.$$

i რიცხვის უფრო მაღალი ხარისხები შემდეგნაირად მიიღება:

$$i^3=i^2 \cdot i=-1 \cdot i=-i;$$

$$i^4=i^3 \cdot i=-i^2=1;$$

$$i^5=i^4 \cdot i=i;$$

$$i^6=i^5 \cdot i=i^2=-1.$$

და ა. შ. ცხადია, ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$i^{4n}=1;$$

$$i^{4n+1}=i;$$

$$i^{4n+2}=-1.$$

$$i^{4n+3}=-i.$$

მაგალითად,

$$i^{125}-i^{26}=i^{124+1}-i^{24+2}=i-i^2=i+1;$$

$$i^{100}+i^{98}+i^{63}=i^{100}+i^{96+2}+i^{60+3}=1-1-i=-i.$$

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ: (№ 2015—2020).

2015. $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$.

2016. $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}+i^{53}$.

2017. $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^n (n>4)$.

2018. $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \ldots i^{100}$.

2019. $\dfrac{1}{i^3}$.

2020. $\dfrac{1}{i^{11}}-\dfrac{1}{i^{41}}+\dfrac{1}{i^{75}}-\dfrac{1}{i^{1023}}$.

2021. $3i^3-2ai^2+(1-a)i+5$ რიცხვი a-ს რომელი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის იქნება: ა) ნამდვილი; ბ) წმინდა წარმოსახვითი; გ) ნულის ტოლი?

როგორც ვიცით,

$$i^2=-1.$$

ამასთან,

$$(-i)^2=(-1\ .\ i)^2=(-1)^2\ .\ i^2=-1.$$

ამგვარად, არსებობს -1-დან კვადრატული ფესვის ორი მნიშვნელობა, სახელდობრ, i და $-i$. მაგრამ, იქნებ კიდევ არის რაიმე კომპლექსური რიცხვი, რომლის კვადრატი -1-ის ტოლია?

ამ საკითხის გამოსარკვევად დავუშვათ, რომ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის კვადრატი -1-ის ტოლია. მაშინ

$$(a+bi)^2=-1.$$

$$a^2+2abi-b^2=-1.$$

ორი კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ტოლია ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვითი ნაწილების კოეფიციენტები. ამიტომ

$$\begin{cases} a^2-b^2=-1. \\ ab=0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) სისტემის მეორე განტოლების თანახმად, a და b რიცხვთა შორის ერთი მაინც უნდა იყოს ნულის ტოლი. თუ $b=0$, მაშინ პირველი განტოლებიდან მიიღება $a^2=-1$. a რიცხვი ნამდვილია, ამიტომ $a^2\geqslant 0$. არაუარყოფითი რიცხვი არ შეიძლება უარყოფითი -1 რიცხვის ტოლი იყოს. ამიტომ ამ შემთხვევაში ტოლობა $b=0$ შეუძლებელია. დაგვრჩენია დავადასტუროთ, რომ $a=0$, მაგრამ მაშინ სისტემის პირველი განტოლებიდან ვღებულობთ: $-b^2=-1$, $b=\pm 1$.

მაშასადამე, მხოლოდ i და $-i$ წარმოადგენს იმ კომპლექსურ რიცხვებს, რომელთა კვადრატი -1-ის ტოლია. პირობითად ეს შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\sqrt{-1}=\pm i\ .$$

ანალოგიური მსჯელობით მოსწავლენი დარწმუნდებიან, რომ არსებობს მხოლოდ ორი რიცხვი, რომელთა კვადრატი უარყოფითი $-a$ რიცხვის ტოლია. ასეთი რიცხვებია $\sqrt{a}\,i$ და $-\sqrt{a}\,i$. პირობითად ეს ასე ჩაიწერება:

$$\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}$$

$\sqrt{a}$ სიმბოლო უნდა გვესმოდეს როგორც არითმეტიკული, ე. ი. დადებითი ფესვი; მაგალითად, $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$, ამიტომ

$$\sqrt{-4}=\pm 2i; \quad \sqrt{-9}=\pm 3i \text{ და ა. შ.}$$

თუ წინათ უარყოფით დისკრიმინანტიანი კვადრატული განტოლების განხილვისას ვამბობდით, რომ ასეთ განტოლებას ფესვები არა აქვს ახლა ამის თქმა აღარ შეიძლება. კვადრატულ განტოლებებს, რომელთა დისკრიმინანტი უარყოფითია, კომპლექსური ფესვები აქვს. ეს ფესვები მიიღება ჩვენთვის ცნობილი ფორმულებით. ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია $x^2+2x+5=0$ განტოლება, მაშინ

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm 2i.$$

ამგვარად, მოცემულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი: $x_1=-1+2i$, $x_2=-1-2i$. ეს ფესვები ურთიერთშეუღლებულია. საინტერესოა, რომ მათი ჯამი -2-ის ტოლია, ხოლო ნამრავლი 5-ის. ასე რომ, ვიეტას თეორემა სრულდება.

სავარჯიშოები

2022. (ზ ე პ ი რ ა დ). ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $x^2=-16$;

ბ) $x^2=-2$;

გ) $3x^2=-5$.

2023. იპოვეთ ყველა ის კომპლექსური რიცხვი, რომელთა კვადრატები შემდეგი რიცხვების ტოლია:

ა) i; ბ) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2024. ამოხსენით კვადრატული განტოლებანი:

ა) $x^2-2x+2=0$,

ბ) $4x^2+4x+5=0$,

გ) $x^2-14x+74=0$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№ 2025, 2026):

2025. $\begin{cases} x+y=6. \\ xy=45. \end{cases}$ **2026.** $\begin{cases} 2x-3y=1. \\ xy=1. \end{cases}$

2027. დაამტკიცეთ, რომ იმ კვადრატული განტოლების ფესვები, რომელსაც აქვს ნამდვილი კოეფიციენტები და უარყოფითი დისკრიმინანტი, ურთიერთშეუღლებულია.

2028. დაამტკიცეთ, რომ ვიეტას თეორემა მართებულია ყოველი კვადრატული განტოლებისათვის და არა მხოლოდ არაუარყოფითდისკრიმინანტიანი განტოლებებისათვის.

2029. შეადგინეთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებიცაა:

ა) $x_1=5-i$, $x_2=5+i$; ბ) $x_1=3i$, $x_2=-3i$.

2030. შეადგინეთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება, რომლის ერთ-ერთი ფესვი $(3-i)(2i-4)$-ის ტოლია.

2031. შეადგინეთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება, რომლის ერთ-ერთი ფესვია $\frac{32-1}{1-3i}$.

ნამდვილკოეფიციენტებიანი მე-3 ხარისხის ორწევრა განტოლებანი § 254

აქ ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას

$$ax^3=b,$$

სადაც a და b ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ასეთ განტოლებებს ამოვხსნით ზოგიერთ კერძო მაგალითზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^3=8.$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად: $x^3-8=0$; გამოვიყენოთ კუბების სხვაობის ფორმულა, მივიღებთ: $(x-2)(x^2+2x+4)=0$. თუ $x-2=0$, მაშინ $x=2$, ხოლო თუ $x^2+2x+4=0$, მაშინ $x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{-3}=-1\pm\sqrt{3}\,i$. ამგვარად, მოცემულ განტოლებას აქვს სამი ფესვი:

$$x_1=2,\ x_2=-1-\sqrt{3}\,i,\ x_3=-1+\sqrt{3}\,i.$$

მათ შორის ნამდვილია მხოლოდ ერთი ფესვი $x=2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$-\frac{1}{2}x^3=4.$$

თუ ამ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ -2-ზე, მივიღებთ $x^3=-8$ განტოლებას. ეს განტოლება პრინციპულად არ განსხვავდება

ზემოთ განხილული $x^3=8$ განტოლებისაგან. მისი ამოხსნა მოგვყავს განმარტებების გარეშე:

$$x^3+8=0,$$

$$(x+2)(x^2-2x+4)=0,$$

საიდანაც

$$x_1=-2;\ x_2=1-\sqrt{3}\,i;\ \ x_3=1+\sqrt{3}\,i.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{1}{3}x^3=-2.$$

გავამრავლოთ ამ განტოლების ორივე მხარე 3-ზე, მივიღებთ: $x^3=-6$, საიდანაც $x^3+6=0$. თუ განვიხილავთ 6-ს როგორც $\sqrt[3]{6}$ რიცხვის კუბს, მაშინ x^3+6 დაიშლება მამრავლებად:

$$(x^3+6)=(x+\sqrt[3]{6})[(x^2-\sqrt[3]{6}x+(\sqrt[3]{6})^2].$$

მაშასადამე,

$$\text{ან}\quad x+\sqrt[3]{6}=0 \text{ ან } x^2-\sqrt[3]{6}x+(\sqrt[3]{6})^2=0.$$

ამ განტოლებათაგან პირველს აქვს ფესვი $x_1=-\sqrt[3]{6}$, მეორე განტოლებიდან კი ვღებულობთ:

$$x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{6}\pm\sqrt{(\sqrt[3]{6})^2-4(\sqrt[3]{6})^2}}{2}=\frac{\sqrt[3]{6}\pm\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt{3}\,i}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm\sqrt{3}\,i).$$

მაშ. მოცემულ განტოლებას აქვს სამი ფესვი:

$$x_1=-\sqrt[3]{6};$$

$$x_2=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1+\sqrt{3}\,i).$$

$$x_3=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1-\sqrt{3}\,i).$$

ამ სამი ფესვიდან მხოლოდ ერთია ნამდვილი რიცხვი.

სავარჯიშოები

ამოხსენით განტოლებანი (№ 2032—2037):

2032. $3x^3=81.$

2033. $x^3=-27.$

2034. $x^3=3.$

2035. $x^3=-5.$

2036. $3x^3=2.$

2037. $-4x^3=\frac{1}{2}$,

2038. დაამტკიცეთ, რომ $x^3=-4$ განტოლების ყველა ფესვის ჯამი ნულის ტოლია.

2039. იპოვეთ $x^3=6$ განტოლების ყველა ფესვის ნამრავლი.

ნამდვილკოეფიციენტებიანი მე-4 ხარისხის ორწევრა განტოლებანი § 156

ასე ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$ax^4=b,$$

სადაც a და b ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ასეთ განტოლებათა ამოხსნას ჩვენ განვიხილავთ ზოგიერთ კერძო მაგალითზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^4=16.$$

გადავწეროთ მოცემული განტოლება შემდეგი სახით:

$$x^4-16=0.$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარე დავშალოთ მამრავლებად:

$$x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x+2)(x-2)(x^2+4).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x^4=16$ განტოლების ფესვებია:

$$x_1=-2,\ x_2=2;\ x_3=2i;\ x_4=-2i.$$

ამ ფესვთა შორის ნამდვილია მხოლოდ ორი ფესვი

$$x_1=-2,\ x_2=2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^4=-16.$$

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამ განტოლებას არ გააჩნია ფესვები, რადგან ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის ლუწი ხარისხი არაუარყოფითია; კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ამ განტოლებას, როგორც ახლავე ვაჩვენებთ, 4 სხვადასხვა ფესვი აქვს.

მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x^4+16=0.$$

x^4+16 გამოსახულება შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც x^2-ისა და 4-ის კვადრატების ჯამი. თუ ამ ჯამს შევავსებთ ზუსტ კვადრატამდე, მივიღებთ:

$$x^4+16=x^4+16+2\cdot 4x^2-2\cdot 4x^2=(x^2+4)^2-8x^2$$

ახლა გამოვიყენოთ ორი რიცხვის კვადრატების სხვაობის ფორმულა:

$$(x^2+4)^2-8x^2=(x^2+4+\sqrt{8x^2})(x^2+4-\sqrt{8x^2})=$$

$$=(x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4).$$

მაშ,

$$x^4+16=(x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4).$$

ამის გამო $x^4=-16$ განტოლება შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$(x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4)=0.$$

თუ $x^2+2\sqrt{2}x+4=0$, მაშინ $x_{1,2}=-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}$, ანუ

$$x_1=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i,$$

$$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i.$$

თუკი $x^2-2\sqrt{2x}+4=0$, მაშინ $x_{3,4}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}$, ანუ

$$x_3=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i.$$

$$x_4=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i.$$

მივიღეთ $x^4=-16$ განტოლების ოთხი ფესვი. მათ შორის ნამდვილი ფესვი არც ერთი არაა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$3x^4=-6.$$

არსებითად ეს განტოლება არ განსხვავდება წინა განტოლებისაგან. ამიტომ ამოვხსნით მას განმარტებების გარეშე:

$$x^4=-2.$$

$$x^4+2=x^4+(\sqrt{2})^2=x^4+(\sqrt{2})^2+2x^2\sqrt{2}-2x^2\sqrt{2}=$$

$$=(x^2+\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}x^2=(x^2+\sqrt{2})^2-(\sqrt[4]{8}x)^2=$$

$$=(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})$$

თუ $x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2}=0$, მაშინ

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt[4]{8}\pm\sqrt{(\sqrt[4]{8})^2-4\sqrt{2}}}{2}=\frac{-\sqrt[4]{8}\pm\sqrt{-2\sqrt{2}}}{2}=$$

$$=\frac{-\sqrt[4]{8}\pm\sqrt[4]{8}\,i}{2}.$$

თუკი $x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2}=0$, მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ:

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt[4]{8}\pm\sqrt[4]{8}\,i}{2}$$

ამგვარად, მოცემულ განტოლებას აქვს ოთხი სხვადასხვა ფესვი. მათ შორის ნამდვილი ფესვი არც ერთი არაა.

სავარჯიშოები

ამოხსენით განტოლებანი (№ 2040—2044):

2040. $x^4=81$.

2041. $x^4=-81$.

2042. $x^4=2$.

2043. $x^4=-3$.

2044. $3x^4=5$.

2045. იპოვეთ $x^4=4$ განტოლების ყველა ფესვის ჯამი.

2046. იპოვეთ $x^4=-7$ განტოლების ყველა ფესვის ნამრავლი.

კომპლექსურ რიცხვთა ტრიგონომეტრიული სახე § 258

ვთქვათ, $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი, კოორდინატებით (a, b) (ნახ. 332). აღვნიშნოთ ამ ვექტორის სიგრძე r-ით, ხოლო კუთხე, რომელსაც იგი შეადგენს x ღერძთან, φ-თი. სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრის თანახმად,

$$\frac{a}{r}=\cos\varphi,\quad \frac{b}{r}=\sin\varphi,$$

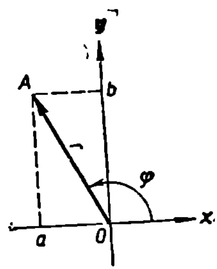
ამიტომ $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი ვექტორის სიგრძის კვადრატი მისი კოორდინატების კვადრატების ჯამის ტოლია. ამიტომ

$$r^2=a^2+b^2,$$

საიდანაც $r=\sqrt{a^2+b^2}$.



ნახ. 332.

მაშ, ნებისმიერი $a+bi$ **კომპლექსური რიცხვი შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:**

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\tag{1}$$

სადაც $r=\sqrt{a^2+b^2}$, ხოლო φ კუთხე განისაზღვრება შემდეგი პირობებიდან:

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

კომპლექსურ რიცხვთა ჩაწერის ასეთ სახეს ეწოდება ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი.

(1) ფორმულაში r რიცხვს $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის მ ო დ უ ლ ი ეწოდება, ხოლო φ კუთხეს — ამ რიცხვის ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი.

თუ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ მისი მოდული დადებითია; თუკი $a+bi=0$, მაშინ $a=b=0$ და $r=0$. ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვის მოდული ც ა ლ ს ა ხ ა დ განისაზღვრება.

თუ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ მისი არგუმენტი (2) ფორმულებით განისაზღვრება ცალსახად, სიზუსტით 2π-ს ჯერად კუთხემდე. თუკი $a+bi=0$, მაშინ $a=b=0$. ამ შემთხვევაში $r=0$. (1) ფორმულიდან ადვილი გასაგებია, რომ φ არგუმენტად ამ შემთხვევაში ნებისმიერი კუთხე შეგვიძლია ავირჩიოთ. მართლაც, ნებისმიერი φ-სათვის გვექნება:

$$0\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=0,$$

ამიტომ კომპლექსური ნულის არგუმენტი გ ა ნ უ ს ა ზ ღ ვ რ ე ლ ი ა.

z კომპლექსური რიცხვის მოდულს ზოგჯერ $|z|$-ით აღნიშნავენ, ხოლო არგუმენტს — $\arg z$-ით.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი კომპლექსურ რიცხვთა ტრიგონომეტრიული სახით წარმოდგენაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით $1+i$ კომპლექსური რიცხვი.

ვიპოვოთ ამ რიცხვის r მოდული და φ არგუმენტი:

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

მაშასადამე, $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, საიდანაც $\varphi=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$.

ამგვარად,

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)\right],$$

სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ჩვეულებრივ, კომპლექსური რიცხვის არგუმენტის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლიდან შეარჩე-

ვენ იმას, რომელიც 0-სა და 2π-ს შორის იმყოფება. განსახილველ შემთხვევაში ასეთ მნიშვნელობას წარმოადგენს $\frac{\pi}{4}$. ამიტომ

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით $\sqrt{3}-i$ კომპლექსური რიცხვი. გვაქვს:

$$r=\sqrt{3+1}=2,$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi=-\frac{1}{2}.$$

ამის გამო. $\varphi=\frac{11}{6}\pi$, 2π-ს ჯერადი კუთხის სიზუსტით. მაშასადამე,

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right).$$

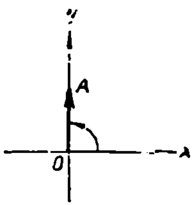
მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით i კომპლექსური რიცხვი.

i კომპლექსურ რიცხვს ეთანადება $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი, რომელიც თავდება y ღერძის A წერტილში, ორდინატით 1 (ნახ. 333). ასეთი ვექტორის სიგრძე უდრის 1-ს, ხოლო კუთხე, რომელსაც იგი აბსცისათა ღერძთან შეადგენს, $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლია. ამიტომ

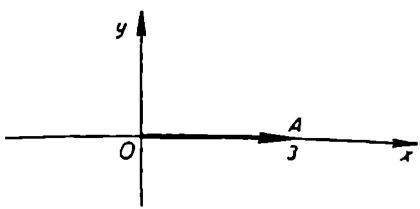
$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული სახით კომპლექსური რიცხვი 3.

კომპლექსურ რიცხვს 3-ს შეესაბამება $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი, დაბოლოებული x-თა ღერძის იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა 3 (ნახ. 334). ასეთი



ნახ. 333.



ნახ. 334.

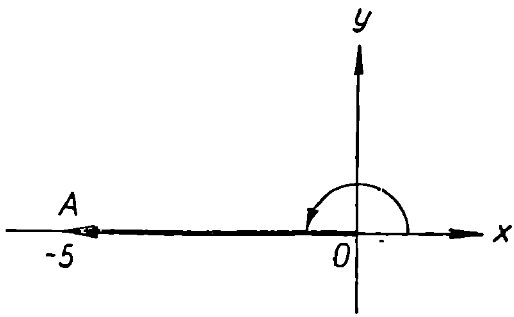
ვექტორის სიგრძე უდრის 3-ს, ხოლო კუთხე, რომელსაც იგი ადგენს აბსცისათა ღერძთან, ნულის ტოლია. ამიტომ

$$3=3(\cos 0+i\sin 0).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით კომპლექსური რიცხვი —5.

—5 კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი, რომელიც თავდება x ღერძის A წერტილში, აბსცისით —5 (ნახ. 335). ასეთი ვექტორის სიგრძე 5-ის ტოლია, ხოლო კუთხე, რომელსაც იგი აბსცისათა ღერძთან ადგენს, π-ს ტოლია. ამიტომ

$$-5=5(\cos\pi+i\sin\pi).$$



ნახ. 335.

სავარჯიშოები

2047. მოცემული კომპლექსური რიცხვები ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული სახით მას შემდეგ, რაც განსაზღვრავთ მათ მოდულებსა და არგუმენტებს:

1) $2+2\sqrt{3}i$. 4) $12i-5$. 7) $3i$.
2) $\sqrt{3}+i$. 5) 25. 8) $-2i$.
3) $6-6i$. 6) -4. 9) $3i-4$.

2048. უჩვენეთ სიბრტყეზე იმ კომპლექსური რიცხვების გამომსახველი წერტილების სიმრავლე, რომელთა r მოდულები და φ არგუმენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

1) $r=1,\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$; 4) $r<3$; 7) $0<\varphi<\frac{\pi}{6}$;
8) $0<\varphi<\pi$;
2) $r=2$; 5) $2<r<3$; 9) $1<r<2$,
3) $r\leqslant 3$; 6) $\psi=\frac{\pi}{3}$; $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$.

2049. შეიძლება თუ არა r და $-r$ რიცხვები ერთდროულად იყოს კომპლექსური რიცხვის მოდულები?

2050. შეიძლება თუ არა φ და $-\varphi$ ერთდროულად იყოს კომპლექსური რიცხვის არგუმენტები?

მოცემული კომპლექსური რიცხვები წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული სახით, მას შემდეგ, რაც განსაზღვრავთ მათ მოდულებსა და არგუმენტებს:

2051*. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

2052*. $\sin\varphi+i\cos\varphi$.

2053*. $-5(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)$.

2054*. $2(\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ)$.

2055*. $3(-\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)$.

ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვების გამრავლება და გაყოფა — § 257

კომპლექსურ რიცხვთა გამრავლება და გაყოფა უფრო მოხერხებულია, როცა ეს რიცხვები ტრიგონომეტრიული სახითაა მოცემული. ცნობილია შემდეგი თეორემები:

თ ე ო რ ე მ ა 1. ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის მოდული მათი მოდულების ნამრავლის ტოლია, ხოლო არგუმენტი — მათი არგუმენტების ჯამისა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ,

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \text{ ხოლო } z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

მაშინ

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)];$$

მაგრამ

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2),$$
$$\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

ამის გამო

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $z_1\cdot z_2$ ნამრავლის მოდული z_1 და z_2 რიცხვების მოდულების ნამრავლის ტოლია, ხოლო ნამრავლის არგუმენტი z_1 და z_2 რიცხვების არგუმენტების ჯამისა. თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1) $2(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)\cdot 3(\cos 230^\circ+i\sin 230^\circ)=6(\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ)=6$.

2) $5(\cos 47^\circ+i\sin 47^\circ)\cdot 4(\cos 13^\circ+i\sin 13^\circ)=20(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=$

$$=20\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=10+10\sqrt{3}\,i.$$

შევნიშნოთ, რომ დამტკიცებული თეორემა მართებულია თანამამრავლთა ნებისმიერი რიცხვისათვის, ე. ი. ნებისმიერი n-ისათვის:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ldots r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)=$$
$$=r_1r_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

კერძოდ, თუ ყველა თანამამრავლი ტოლია, მაშინ ვღებულობთ

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

ეს ფორმულა მუავრის* ფორმულის სახელწოდებას ატარებს. როცა $r=1$, იგი ასეთ სახეს ღებულობს:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

თ ე ო რ ე მ ა 2. ორი კომპლექსური რიცხვის განაყოფის მოდული გასაყოფის და გამყოფის მოდულთა განაყოფის ტოლია. ნულისაგან განსხვავებული ორი კომპლექსური რიცხვის განაყოფის არგუმენტი გასაყოფისა და გამყოფის არგუმენტების სხვაობის ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ კომპლექსური რიცხვის $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\neq0$ კომპლექსურ რიცხვზე გაყოფით მიღებული განაყოფი აღვნიშნოთ $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$-თი. მაშინ $z=\frac{z_1}{z_2}$, ანუ $zz_2=z_1$, ამიტომ

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1).$$

თუ შევასრულებთ გამრავლებას ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილში, მივიღებთ

$$rr_2[\cos(\varphi+\varphi_2)+i\sin(\varphi+\varphi_2)]=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1).$$

ნულისაგან განსხვავებული ორი ტოლი კომპლექსური რიცხვის მოდულები ტოლია, ხოლო არგუმენტები შეიძლება განსხვავდებოდნენ მხოლოდ 2π-ს ჯერადი კუთხით. ამის გამო უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$rr_2=r_1,\quad \varphi+\varphi_2-\varphi_1=2\pi n,$$

სადაც n რომელიმე მთელი რიცხვია. მაშასადამე

$$r=\frac{r_1}{r_2},\qquad \varphi=\varphi_1-\varphi_2+2n\pi.$$

ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი განსაზღვრულია მხოლოდ 2π-ს ჯერადი კუთხის სიზუსტით. ამის გამო შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ z კომპლექსური რიცხვის φ არგუმენტი $\varphi_1-\varphi_2$-ის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $$\frac{2(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)}{3(\cos105^\circ+i\sin105^\circ)}=\frac{2}{3}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}(1+i).$$

2) $$\frac{\cos70^\circ+i\sin70^\circ}{\cos100^\circ+i\sin100^\circ}=\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)=$$

$$=\cos30^\circ-i\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

---

* მუავრი (1667—1754) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

სავარჯიშოები

2056. შეასრულეთ აღნიშნული მოქმედებანი:

ა) $5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \cdot 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$;
ბ) $2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot 7(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$;

გ) $4\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) \cdot 6\left(\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi\right)$;

დ) $$7\left(\cos \frac{8}{15}\pi + \sin \frac{8}{15}\pi\right) \cdot 3\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \times 2\left(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi\right).$$

2057. გამოთვალეთ:

ა) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100}$; ბ) $(\sqrt{3} + i)^{50}$; გ) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}$.

2058. როგორ შეიცვლება კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი, თუ ამ რიცხვს ვამრავლებთ შემდეგ რიცხვებზე:

ა) i; ბ) $-i$; გ) $2i$; დ) $-3i$; ე) 4; ვ) 5?

2059. შეასრულეთ გაყოფა:

ა) $\dfrac{\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$; ბ)* $\dfrac{\cos 130^\circ - i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$;

გ)* $\dfrac{-\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}{\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ}$; დ) $\dfrac{2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)}$.

2060. როგორ შეიცვლება კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი, თუ ამ რიცხვს გავყოფთ შემდეგ რიცხვებზე: ა) i, ბ) $-i$?

კომპლექსური რიცხვებიდან ფესვის ამოღება § 258

ვთქვათ, ნულისაგან განსხვავებული $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვი არსებობს და $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$*-ს ტოლია, მაშინ

$$[\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

თუ გამოვიყენებთ მუავრის ფორმულას, მივიღებთ:

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

ნულისაგან განსხვავებული ორი ტოლი კომპლექსური რიცხვის მოდულები ტოლია, ხოლო არგუმენტები შეიძლება განსხვავდებოდნენ 2π-ს ჯერადი კუთხით. ამიტომ

$$\rho^n = r, \qquad n\theta = \varphi + 2\pi k.$$

---

* ρ და θ ბერძნული ასოებია; იკითხება შესაბამისად: რო და თეტა.

$$\rho=\sqrt[n]{r}, \qquad \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}.$$

სადაც k შეიძლება ნებისმიერი მთელი რიცხვი იყოს. კერძოდ

$$\text{როცა } k=0, \qquad \theta=\frac{\varphi}{n};$$

$$\text{როცა } k=1, \qquad \theta=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n};$$

$$\text{როცა } k=2, \qquad \theta=\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n};$$

$$\cdots$$

$$\text{როცა } k=n-1, \qquad \theta=\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

როცა $k=n$, $n+1$, $n+2$ და ა. შ., θ მიიღებს ისეთ მნიშვნელობებს, რომლებიც განსხვავდებიან ზემოთ დაწერილისაგან 2π-ს ჯერადი კუთხით. ამის გამო k-ს ეს მნიშვნელობანი არავითარ ახალ კომპლექსურ რიცხვს არ მოგვცემს.

ადვილი საჩვენებელია, რომ k-ს უარყოფითი მნიშვნელობებისთვისაც არავითარი ახალი კომპლექსური რიცხვი არ მიიღება.

მაშ, თუკი არსებობს $r(\cos\varphi+\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვი, მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ შემდეგი n მნიშვნელობანი:

$$a_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$a_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right);$$

$$a_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

მუავრის ფორმულის გამოყენებით ადვილი დასადგენია, რომ ყოველი ეს რიცხვი აკმაყოფილებს

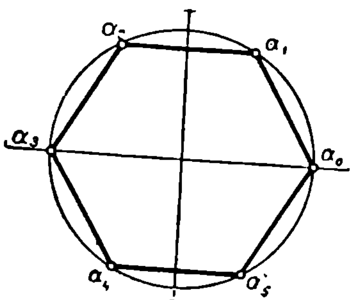
$$\alpha^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

თანაფარდობას და ამიტომ იგი n-ური ხარისხის ფესვია

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

კომპლექსური რიცხვიდან.

ამგვარად, ნულისაგან განსხვავებულ ყოველ კომპლექსურ რიცხვს n-ური ხარისხის n ფესვი აქვს.



ნახ. 336.

$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვის ყველა n მნიშვნელობა გეომეტრიულად გამოისახება იმ წრეწირის წერტილებით, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო რადიუსი $\sqrt[n]{r}$-ის ტოლია (იხ. მაგალითად, ნახ. 336, რომელზეც $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$

$=1$, $n=6$). თუ ყველა ამ წერტილს წრფივი მონაკვეთებით თანმიმდევრობით შევაერთებთ შედეგად წესიერ n-კუთხედს მივიღებთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ რიცხვიდან მე-4 ხარისხის ფესვის ყველა მნიშვნელობა. წარმოვიდგინოთ i ასეთი სახით: $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; აქედან ვიპოვით, რომ ყველა ფესვის მოდული $\sqrt[4]{1}=1$-ის ტოლია, ხოლო არგუმენტებია:

$$\frac{\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{8}+\frac{6\pi}{4} \quad \text{ანუ} \quad \frac{\pi}{8}, \quad \frac{5}{8}\pi, \quad \frac{9}{8}\pi, \quad \frac{13}{8}\pi.$$

ამიტომ i რიცხვიდან მე-4 ხარისხის ფესვებია შემდეგი რიცხვები:

$$\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8},$$

$$\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8},$$

$$\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8},$$

$$\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}.$$

თუ გამოვიყენებთ ტრიგონომეტრიულ ცხრილებს, ეს ფესვები შეიძლება უფრო ცხადი სახითაც ჩაიწეროს.

სავარჯიშოები

2061. იპოვეთ შემდეგი ფესვების ყველა მნიშვნელობა:

ა) $\sqrt[3]{3}$; ბ) $\sqrt[4]{1+i}$, გ) $\sqrt[4]{1}$;

დ) $\sqrt[4]{-1}$, ე) $\sqrt{\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}$.

2062. ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $x^3 + a$ (a ნამდვილი რიცხვია); ბ) $x^4 = i$.

2063. ამოხსენით განტოლება:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

2064. დაამტკიცეთ, რომ z კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ყველა ფესვი ისე შეიძლება განლაგდეს, რომ მივიღოთ გეომეტრიული პროგრესია. იპოვეთ პროგრესიის მნიშვნელი.

n-ური ხარისხის ალგებრული განტოლება — § 259

ელემენტარული მათემატიკა ყველაზე სრულყოფილად მხოლოდ პირველი და მეორე ხარისხის ალგებრულ განტოლებებს განიხილავს. ამ განტოლებებს ასეთი სახე აქვს:

$$ax + b = 0 \ (a \neq 0)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0).$$

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში პირველი ხარისხის ნებისმიერ ალგებრულ განტოლებას ზუსტად ერთი ფესვი აქვს, ხოლო მეორე ხარისხის ნებისმიერ ალგებრულ განტოლებას — ზუსტად ორი ფესვი. უმაღლეს ალგებრაში ნებისმიერი ხარისხის განტოლებას შეისწავლიან. n-ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{1}$$

სადაც x უცნობი სიდიდეა, ხოლო a_0, a_1, $a_2\ldots$, a_n — მოცემული კომპლექსური რიცხვები, ამასთან, $a_0\neq0$. ასეთი განტოლების ფესვთა არსებობისა და რაოდენობის საკითხი დიდხანს წარმოადგენდა ალგებრის ძირითად საკითხს. 1799 წელს გამოჩენილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა გ ა უ ს მ ა (1777—1855) დაამტკიცა შემდეგი თეორემა: **n-ური ხარისხის ნებისმიერ ალგებრულ განტოლებას ერთი კომპლექსური ფესვი მაინც აქვს.**

ეს დებულება მათემატიკაში შევიდა ა ლ გ ე ბ რ ი ს ძ ი რ ი თ ა დ ი თ ე ო რ ე მ ი ს სახელწოდებით*. გაუსის დამტკიცებას მოჰყვა ამ თეორემის დამტკიცების ბევრი სხვა ხერხი. თვით გაუსმა დამტკიცების კიდევ სამი ხერხი მოგვცა. ამ თეორემის დღემდე არსებული ყველა დამტკიცება საკმარისად რთულია და ამის გამო ჩვენს სახელმძღვანელოში შეუძლებელია მათი განხილვა.

განვიხილოთ

$$(x-1)^3(x-2)=0$$

განტოლება. ადვილი გასაგებია, რომ მას აქვს ზუსტად ორი ფესვი: 1 და 2, მაგრამ ეს ფესვები არ არიან თანაბარ უფლებაში. ფესვი 2-ის შესაბამისი $x-2$ მამრავლი განტოლების მარცხენა ნაწილში შედის პირველ ხარისხში, ხოლო ფესვი 1-ის შესაბამისი $x-1$ მამრავლი — მესამე ხარისხში. ფესვ 2-ს უწოდებენ განსახილავი განტოლების მარტივ ფესვს, ხოლო ფესვ 1-ს — ჯ ე რ ა დ ფესვს, უფრო ზუსტად, ს ა მ ჯ ე რ ა დ ფ ე ს ვ ს.

ალგებრის ძირითადი თეორემა უზრუნველყოფს ალგებრული განტოლების ერთი მაინც კომპლექსური ფესვის არსებობას. მაგრამ, ამაზე დაყრდნობით, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ **n-ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას ზუსტად n კომპლექსური ფესვი აქვს, თუ თითოეულ ფესვს ჩავთვლით იმდენჯერ, რამდენიცაა მისი ჯერადობა.** ამასთან, თუ (1) ალგებრული განტოლების ფესვებია x_1, x_2, ..., x_n, მაშინ ამ განტოლების მარცხენა მხარე ასეთი სახით წარმოიდგინება:

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

(შეადარეთ კვადრატულ განტოლებას!).

---

* ალგებრის განვითარებასთან ერთად მისი შინაარსიც იცვლებოდა. თანამედროვე ალგებრა მოიცავს იმდენად ფართო მასალას, რომ ახლა უკვე ზემოხსენებულ თეორემას ხშირად აღარ უწოდებენ ალგებრის ძირითად თეორემას.

პირველი და მეორე ხარისხის განტოლებებისათვის გამოყვანილია ზოგადი ფორმულები, რომელთა მიხედვით შეიძლება ამ განტოლებათა ფესვების პოვნა. ასე, მაგალითად, $ax^2+bx+c=0$ განტოლებისათვის ასეთი ფორმულაა:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ანალოგიური ფორმულებია მიღებული მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებებისათვის. მაგრამ ეს ფორმულები საკმაოდ რთულია და ამიტომ აქ არ მოგვყავს. უფრო მაღალი ხარისხის ნებისმიერი ალგებრული განტოლებებისათვის, როგორც ნორვეგიელმა მათემატიკოსმა ა ბ ე ლ მ ა (1802—1829) გვიჩვენა, ასეთი ფორმულების შედგენა, საზოგადოდ, არ შეიძლება. ამომწურავი პასუხი საკითხზე, თუ რა პირობებში შეიძლება განტოლება ამოიხსნას რადიკალებში, მოგვცა გამოჩენილმა ფრანგმა მათემატიკოსმა ე ვ ა რ ი ს ტ გ ა ლ უ ა მ (1811—1832).

ამრიგად, მეოთხეზე უფრო მაღალი ხარისხის ალგებრული განტოლების ზუსტი ამოხსნა ყოველთვის არ ხერხდება. მაგრამ, თანამედროვე მათემატიკას გააჩნია ასეთ განტოლებათა მ ი ა ხ ლ ო ე ბ ი თ ი ამოხსნის მეტად ეფექტური მეთოდები. ეს მეთოდები განიხილება შრომებში გამოთვლითი მათემატიკის შესახებ.

ისტორიული შენიშვნები § 260

„წარმოსახვითი“ რიცხვების პირველად ხსენება, როგორც უარყოფითი რიცხვებიდან კვადრატული ფესვებისა, ეკუთვნის ჯერ კიდევ XVI საუკუნეს. 1545 წელს იტალიელმა მეცნიერმა კ ა რ დ ა ნ ო მ (1501—1576) გამოაქვეყნა შრომა, რომელშიც ცდილობდა რა ამოეხსნა $x^3-12x+16=0$ განტოლება, მივიდა $\sqrt{-243}$ გამოსახულებამდე. ამ გამოსახულების საშუალებით წარმოიდგინებოდა განტოლების ნამდვილი ფესვები: $x_1=x_2=2$ $x_3=-4$. ამგვარად, კარდანოს შრომაში წარმოსახვითი რიცხვები გაჩნდნენ როგორც შუამავალი წევრები გამოთვლებში.

1629 წელს ჰოლანდიელმა მეცნიერმა ჟ ი რ ა რ მ ა (1595—1632) პირველად გამოთქვა დებულება, რომ n-ური ხარისხის ყოველ ალგებრულ განტოლებას ზუსტად n ფესვი აქვს. ამის მკაცრი დამტკიცება მან ვერ მოახერხა. როგორც ვიცით, ეს გააკეთა გ ა უ ს მ ა მხოლოდ 1799 წელს. მაგრამ, მნიშვნელოვანია ის, რომ, გამოთქვა რა მართებული ჰიპოთეზა, ჟირარმა ხაზი გაუსვა, რომ ნამდვილ ფესვთა გარდა საჭიროა ამასთანავე კომპლექსური ფესვების გათვალისწინებაც.

XVIII საუკუნის შუა წლებამდე კომპლექსური რიცხვები მხოლოდ ეპიზოდურად ჩნდებოდა ზოგიერთი მათემატიკოსის შრომებში. XVIII საუკუნის შუა წლებიდან დ ა ლ ა მ ბ ე რ ი, ე ი ლ ე რ ი და ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი წარმატებით იყენებენ კომპლექსური არგუმენტის ფუნქციებს ჰიდროდინამიკის ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა საშუალებით ამოიხსნებოდა როგორც წმინდა მათემატიკური ამოცანები, ისე ამოცანები გეოგრაფიული რუკების შედგენაზე; XVIII საუკუნის დასას-

რულისათვის შესწავლილ იქნა კომპლექსურ რიცხვთა ყველა ძირითადი თვისება. ეს რიცხვები მათემატიკის ერთ-ერთი უძლიერესი იარაღი ხდება.

მაგრამ XVIII საუკუნის მათემატიკოსებს ამომწურავად არ ესმოდათ კომპლექსურ რიცხვთა ბუნება; ისინი მათ მიაჩნდათ ყოველგვარ ობიექტურ შინაარსს მოკლებულ წარმოსახვით რიცხვებად.

მხოლოდ XVIII საუკუნის დასასრულს, როდესაც მათემატიკაში განმტკიცდა ვექტორის ცნება, შესაძლებელი გახდა კომპლექსური რიცხვებისათვის მიეცათ მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და აეხსნათ მათზე მოქმედების წესები. პირველად ეს გააკეთა დანიელმა მეცნიერმა ვ ე ს ე ლ მ ა (1745—1818). საინტერესოა აღინიშნოს, რომ ვესელი არ იყო სპეციალისტი-მათემატიკოსი. მისი გამოკვლევანი კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული წარმოდგენის შესახებ დიდხანს არ იყო ცნობილი; მათ ყურადღება მიიპყრეს მხოლოდ XIX საუკუნის მეორე ნახევარში.

კომპლექსური რიცხვი მათემატიკოსებმა აღიარეს მხოლოდ გ ა უ ს ი ს შრომების გამოქვეყნების შემდეგ.

XVIII და XIX საუკუნის მათემატიკოსთა ერთ-ერთ თვალსაჩინო მიღწევად უნდა ჩაითვალოს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის შექმნა. ამჟამად ეს თეორია ერთ-ერთ ძირითად როლს ასრულებს გამოყენებითი მათემატიკის დარგებში.

ამოცანები გამეორებისათვის

2065. შეიძლება თუ არა ორი რიცხვის კვადრატების ჯამი უარყოფითი იყოს? პასუხი ნათელყავით მაგალითებით.

2066. $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის კვადრატი რა პირობებშია წმინდა წარმოსახვითი რიცხვი?

2067. ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი და ნამრავლი რა შემთხვევაში წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვებს?

გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებანი (№ 2068—2073):

2068. $(1+i)^2+(1-i)^2$.

2069. $(1+i)^3+(1-i)^3$.

2070 $(1+i)^4+(1-i)^4$.

2071. $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$.

2072. $\dfrac{(1+i)^6}{(1-i)^4}+\dfrac{3+2i}{i(6-8i)}\cdot(1+i)^2$.

2073. $\dfrac{(1+i)^6}{0{,}4(1-i)^8}\left(\dfrac{2-i}{4+3i}-\dfrac{1+2i}{3+2i}\right)$.

დაამტკიცეთ შემდეგი იგივობანი (№ 2074, 2075):

2074. $(1+i)^{20}=-2^{10}$.

2075 $(1-i)^{30}=2^{15}i$.

2076 შეადგინეთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება, რომლის ერთ-ერთი ფესვი შემდეგი რიცხვების ტოლია:

ა) $(5+i)(i-3)$; ბ) $\dfrac{5+i}{i-3}$

2077. შეიძლება თუ არა ნამდვილკოეფიციენტებიან კვადრატულ განტოლებას ფესვებად ჰქონდეს რიცხვები $1+i$ და $1+2i$?

2078. იპოვეთ ნამდვილი x და y რიცხვები შემდეგი განტოლებებიდან:

ა) $\frac{3x-iy}{2y-5ix}=\frac{7+5i}{12-8i}$; ბ) $\frac{y-ix}{x+iy}=\frac{4+i}{4i-1}$.

2079. იპოვეთ წმინდა წარმოსახვითი u და v რიცხვები შემდეგი განტოლებებიდან:

ა) $5v-7ui=-7+5i$; ბ) $2u+3vi=12+6i$.

2080. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი კომპლექსური z_1 და z_2 რიცხვებისათვის

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

პარალელოგრამის დიაგონალთა შესახებ გეომეტრიიდან ცნობილ რომელ თეორემას გამოსახავს ეს თანაფარდობა?

2081. იპოვეთ

$$(5-12i)(3-4i)$$

კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი.

2082. გამოსახეთ კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი მისდამი შეუღლებული რიცხვის მოდულითა და არგუმენტით.

2083. წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული სახით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

ა) $1+i\operatorname{tg}\alpha$; ბ) $\frac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha}$.

2084. სიბრტყის A წერტილი გამოსახავს $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს. რა რიცხვს გამოსახავს B წერტილი, რომელიც A წერტილის სიმეტრიულია:

ა) ნამდვილი ღერძის მიმართ;

ბ) წარმოსახვითი ღერძის მიმართ;

გ) კოორდინატთა სათავის მიმართ?

2085*. სიბრტყეზე ცნობილია კომპლექსური z რიცხვის შესაბამისი წერტილის მდებარეობა. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით როგორ მოვძებნოთ იმავე სიბრტყეზე კომპლექსური $\frac{1}{z}$ რიცხვის შესაბამისი წერტილი?

2086. დაამტკიცეთ, რომ $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ყველა ფესვი გეომეტრიულად გამოისახება წესიერი n-კუთხედის წვეროებით. იპოვეთ ამ n-კუთხედის გვერდი.

2087. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ყველა ფესვის ჯამი ნულის ტოლია.

2088. გამოთვალეთ:

$$(\sqrt{3}+i)^{10}+(\sqrt{3}-i)^{10}.$$

2089. x_1, x_2, და x_3 არის $x^3-1=0$ განტოლების ფესვები. რას უდრის

$$\frac{1}{x_1^n\, x_2^n}+\frac{1}{x_2^n\, x_3^n}+\frac{1}{x_3^n\, x_1^n}$$

გამოსახულება?

ზოგადი და კერძო დებულებანი. დედუქცია და ინდუქცია § 261

ყველა დებულება შეიძლება დაიყოს **ზ ო გ ა დ** და **კ ე რ ძ ო** დებულებებად. ზოგადი დებულებების მაგალითებია:

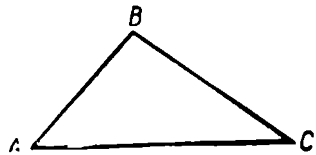
1) ნებისმიერ სამკუთხედში ორი გვერდის ჯამი მესამე გვერდზე მეტია;

2) ყველა რიცხვი, რომელიც ლუწი ციფრით თავდება, იყოფა 2-ზე და ა. შ.

კერძოა, მაგალითად, შემდეგი დებულებანი:

1) ABC სამკუთხედში (ნახ. 337) ორი AB და BC გვერდის ჯამი მესამე AC გვერდზე მეტია.

2) რიცხვი 136 იყოფა 2-ზე.



ნახ. 337.

ზოგადი დებულებებიდან კერძოზე გადასვლას **დ ე დ უ ქ ც ი ა** ეწოდება. დედუქცია ხშირად გამოიყენება მათემატიკაში. ყველა ზოგად თეორემას ვამტკიცებთ იმისათვის, რომ შემდგომ გამოვიყენოთ იგი სხვადასხვა კერძო ამოცანის ამოსახსნელად.

მაგრამ, ამასთან ერთად, მათემატიკაში ხშირად გვხვდება კერძო დებულებებიდან ზოგადზე გადასვლა. მაგალითად, როდესაც ვიხილავდით

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \dots, \ a_n \ , \dots$$

არითმეტიკულ პროგრესიას (იხ. ნაწ. I, § 142), შევნიშნეთ, რომ

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_1 + 3d.$$

ამ კერძო ფორმულებზე დაყრდნობით გავაკეთეთ დასკვნა, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d.$$

კერძო დებულებებიდან ზოგადზე გადასვლას **ი ნ დ უ ქ ც ი ა** ეწოდება.

დედუქციისაგან განსხვავებით ინდუქციამ შეიძლება მიგვიყვანოს როგორც მართებულ, ისე არამართებულ შედეგამდე. მაგალითად, თუ განვიხილავთ $f(n)=n^2+n+41$ კვადრატული სამწევრის მნიშვნელობებს სხვადასხვა ნატურალური n-ისათვის, შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ეს მნიშვნელობანი მარტივი რიცხვებით გამოისახებიან (ე. ი. რიცხვებით, რომლებიც უნაშთოდ იყოფიან მხოლოდ თავისთავზე და 1-ზე). მართლაც,

$$f(1)=43; \qquad f(3)=53;$$

$$f(2)=47; \qquad f(4)=61$$

და ა. შ. აქედან სავარაუდოა დასკვნა, რომ ყოველი ნატურალური n-ისათვის n^2+n+41 გამოსახულება მარტივი რიცხვია, მაგრამ ასეთი დასკვნა მართებული არ არის. მაგალითად, თუ $n=41$, მაშინ

$$n^2+n+41=41^2+41+41=41(41+1+1)=41\cdot 43.$$

ვთქვათ, რაიმე დებულება მართებულია რამდენიმე კერძო შემთხვევაში. ყველა დანარჩენი შემთხვევის განხილვა ან სრულიად შეუძლებელია, ან დიდი რაოდენობით გამოთვლებს მოითხოვს. როგორღა გავიგოთ, მართებულია თუ არა ეს დებულება საზოგადოდ? ამ საკითხის გადაწყვეტა ზოგჯერ ხერხდება მსჯელობის თავისებური მეთოდის გამოყენებით, რასაც მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი ეწოდება. ამ მეთოდს შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ.

მათემატიკაში ძველთაგანვე იყენებდნენ ინდუქციურ მეთოდს. იგი დამყარებულია იმაზე, რომ ესა თუ ის ზოგადი დებულება გამოჰყავთ მხოლოდ რამდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვის საფუძველზე. ისტორიამ, მაგალითად, შემოგვინახა ეილერის გამონათქვამი: „არავითარი სხვა დასკვნები დამტკიცებისათვის არა მაქვს, გარდა გრძელი ინდუქციისა, რომელშიც მე ისე შორს წაველი, რომ არასგზით არ შემიძლია ეჭვი შევიტანო კანონში, რომელიც ამ წევრების წარმოქმნას განაგებს... შეუძლებლად მეჩვენება, რომ კანონი, როგორც აღმოჩენილი იყო, სრულდებოდეს, მაგალითად, 20 წევრისათვის და არ შეინიშნებოდეს მომდევნოებისთვისაც“.

სჯეროდათ რა ინდუქციის შეუმცდარობა, მეცნიერები ზოგჯერ უხეშ შეცდომებს უშვებდნენ. მეჩვიდმეტე საუკუნის შუა წლებისათვის მათემატიკაში დაგროვდა არც თუ ისე ცოტა მცდარი დასკვნა. მეტად საჭირო გახდა შემუშავება მეცნიერულად დასაბუთებული ისეთი მეთოდისა, რომლის მიხედვით შესაძლებელი გახდებოდა ზოგადი დასკვნების გაკეთება რამდენიმე კერძო შემთხვევის განხილვის საფუძველზე. ასეთი მეთოდი, მართლაც, შემუშავდა. მთავარი დამსახურება ამაში ეკუთვნის ფრანგ მათემატიკოსებს პასკალსა (1623—1662) და დეკარტს, აგრეთვე შვეიცარიელ მათემატიკოსს იაკობ ბერნულის (1654—1705).

სავარჯიშოები

2090. მოცემულ დებულებათაგან რომელია ზოგადი და რომელი კერძო:

ა) რიცხვი 16 ლუწია;

ბ) ყოველი რიცხვი, რომელიც თავდება ციფრით 6, ლუწია;

გ) ნებისმიერი კუთხის სინუსი აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება 1-ს;

დ) 50° კუთხის სინუსი 1-ზე ნაკლებია;

ე) -2 რიცხვის ათობითი ლოგარითმი განსაზღვრული არაა;

ვ) უარყოფით რიცხვებს ათობითი ლოგარითმი არა აქვს.

2091. რიცხვები: 24, 64, 104 იყოფა 4-ზე. ამის საფუძველზე შეიძლება თუ არა ითქვას, რომ ნებისმიერი რიცხვი, რომელიც თავდება ციფრით 4, იყოფა 4-ზე?

2092. 45° და 60° კუთხის სინუსი ირაციონალურია $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ და }\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. შეიძლება თუ არა აქედან დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი კუთხის სინუსი ირაციონალურია?

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი § 262

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს საფუძვლად უდევს შემდეგი პრინციპი.

რაიმე დებულება მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის, თუ

1) იგი მართებულია, როცა $n=1$ და

2) ამ დებულების მართებულობიდან ნებისმიერი $n=k$ $(k\geqslant1)$ მნიშვნელობისათვის გამომდინარეობს, რომ იგი მართებულია აგრეთვე $n=k+1$-ისათვის.

მართლაც, როცა $n=1$, დებულება მართებულია 1)-ის ძალით. ამის შემდეგ, $2=1+1$, და ამიტომ 2)-ის ძალით წინადადება მართებულია $n=2$-ისათვის; $3=2+1$, ამიტომ 2)-ის ძალით წინადადება მართებულია $n=3$-სათვისაც. საზოგადოდ, ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი n შეიძლება მიღებულ იქნეს 1-დან ერთეულის თანმიმდევრობით დამატებით $n-1$-ჯერ. ყოველი ასეთი დამატებისას ვღებულობთ ნატურალურ რიცხვს, რომლისათვის განსახილველი დებულება მართებულია. ამიტომ იგი მართებული იქნება აგრეთვე ნატურალური n რიცხვისათვისაც.

ამ პრინციპის გამოყენებაზე დამყარებულ დამტკიცების მეთოდს **მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ი ნ დ უ ქ ც ი ი ს მ ე თ ო დ ი** ეწოდება.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ ჯამი

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

ჯერ ვიპოვოთ ერთი, ორი, სამი და ოთხი შესაკრების ჯამები. გვაქვს

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2};$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3};$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4};$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}.$$

თითოეულ ამ შემთხვევაში მიიღება წილადი, რომლის მრიცხველში დგას შესაკრებთა რიცხვი, ხოლო მნიშვნელში შესაკრებთა რიცხვზე ერთით მეტი რიცხვი. ეს საბაბს გვაძლევს გამოვთქვათ ჰიპოთეზა (ვარაუდი), რომ ნებისმიერ ნატურალური n-ისათვის

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად ვისარგებლოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით:

1) $n=1$-ისათვის ჰიპოთეზა მართებულია, რადგან $S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

2) ვთქვათ, ჰიპოთეზა მართებულია $n=k$-სათვის, ე. ი.

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

დავამტკიცოთ, რომ მაშინ ჰიპოთეზა მართებული იქნება $n=k+1$-სათვისაც, ე. ი.

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

მართლაც,

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

მაგრამ, პირობის თანახმად, $S_k=\dfrac{k}{k+1}$. ამიტომ

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)\,(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ, რომ, თუ ჰიპოთეზა $S_n=\dfrac{n}{n+1}$ მართებულია, როცა $n=k$-ს, იგი მართებული იქნება მაშინაც, როცა $n=k+1$. ამიტომ

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ, რომ არითმეტიკული პროგრესიის n-ური წევრი

$$a_n=a_1+(n-1)\,d, \tag{1}$$

სადაც a_1 პირველი წევრია, ხოლო d — ამ პროგრესიის სხვაობა.

ეს მაგალითი იმით განსხვავდება წინა მაგალითისაგან, რომ აქ ჰიპოთეზის დადგენა საჭირო არ არის; იგი მოცემულია. საჭიროა მხოლოდ დამტკიცება, რომ ეს ჰიპოთეზა მართებულია.

დამტკიცება შევასრულოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

1) $n=1$-ისათვის (1) ფორმულას აქვს ასეთი სახე:

$$a_1=a_1,$$

ასე რომ, როცა $n=1$, ეს ფორმულა მართებულია.

2) ვთქვათ, იგი მართებულია $n=k$-სათვის, ე. ი.

$$a_k=a_1+(k-1)\,d;$$

ვაჩვენოთ, რომ იგი მართებული იქნება $n=k+1$-ისათვისაც, ე. ი.

$$a_{k+1}=a_1+kd$$

მართლაც

$$a_{k+1}=a_k+d=[a_1+(k-1)d]+d=a_1+kd,$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამრიგად, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის ორივე პირობა შესრულებულია და ამიტომ (1) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ იგივობა:

$$(\cos \alpha+i \sin \alpha)^n=\cos n\alpha+i \sin n\alpha. \tag{2}$$

1) $n=1$-ისათვის (2) ფორმულის ორივე მხარეს ერთი და იგივე $\cos \alpha+$ $+i \sin \alpha$ სახე აქვს; ასე რომ, როცა $n=1$, ეს ფორმულა მართებულია.

2) ვთქვათ, იგი მართებულია $n=k$-სათვის, ე. ი.

$$(\cos \alpha+i \sin \alpha)^k=\cos k\alpha+i \sin k\alpha.$$

მაშინ

$$(\cos \alpha+i \sin \alpha)^{k+1}=(\cos \alpha+i \sin \alpha)^k \quad (\cos \alpha+i \sin \alpha)=$$

$$=(\cos k\alpha+i \sin k\alpha) \quad (\cos \alpha+i \sin \alpha) = (\cos k\alpha \cos \alpha-$$

$$-\sin k\alpha \sin \alpha)+i (\cos k\alpha \sin \alpha + \sin k\alpha \cos \alpha) =$$

$$=\cos (k \alpha+\alpha)+i \sin (k \alpha+\alpha)=\cos (k+1)\alpha+i \sin (k+1)\alpha.$$

მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ (2) ფორმულა მართებულია $n=k+1$-ისათვისაც.

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის ორივე პირობა სრულდება და ამიტომ (2) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n*-ისათვის

$$(x^n)'=nx^{n-1} \tag{3}$$

1. $n=1$-სათვის (1) ფორმულა ღებულობს ასეთ სახეს:

$$x'=1.$$

ეს თანაფარდობა, როგორც X თავში იყო დამტკიცებული, მართებულია. მაშასადამე, როცა $n=1$, (3) ფორმულა მართებულია.

2. ვთქვათ, იგი მართებულია, როცა $n=k$, ე. ი. $(x^k)'=kx^{k-1}$ და ამის საფუძველზე, დავამტკიცოთ, რომ იგი მართებული იქნება $n=k+1$-სათვისაც, ე. ი.

$$(x^{k+1})'=(k+1)x^k.$$

მართლაც, თუ წარმოვადგენთ x^{k+1}-ს როგორც $x^k \cdot x$, და გამოვიყენებთ ნამრავლის გაწარმოების წესს, მივიღებთ:

$$(x^{k+1})'=(x^k \cdot x)'=(x^k)' \cdot x+ x^k(x)'.$$

მაგრამ ჩვენი დაშვების თანახმად $(x^k)'=kx^{k-1}$; ამასთანავე $x'=1$.
ამიტომ

$$(x^{k+1})'=kx^{k-1} \cdot x+x^k. \ 1=(k+1)x^k.$$

ამრიგად, მათემატიკური ინდუქციის ორივე პირობა სრულდება და ამიტომ (3) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

---

* თუ $x\neq 0$, $x=0$ შემთხვევა ცალკე განიხილება

სავარჯიშოები

დაამტკიცეთ იგივობანი (№ 2093—2096):

2093 $$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

2094 $$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\dots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

2095. $$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2096. $$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2097. გამოიყვანეთ გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა.

2098. დაამტკიცეთ, რომ n^3+5n რიცხვი ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის უნაშთოდ იყოფა 6-ზე.

2099. რამდენ ნაწილად იყოფა სიბრტყე n სხვადასხვა წრფით, რომლებიც გადიან ამ სიბრტყეზე და ამავე სიბრტყეზე მდებარე ერთ წერტილზე?

2100. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ იგივობა:

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha\cdots\cos2^n\alpha=\frac{\sin2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

ამ იგივობის დამტკიცებისათვის კიდევ რა მეთოდი შეგიძლიათ გამოიყენოთ?

2101. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის და $a>-1$-ისათვის

$$(1+a)^n\geqslant1+na.$$

2102. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი n-ისათვის ფარგლისა და სახაზავის საშუალებითა და სიგრძის მოცემული ერთეულით შეიძლება ავაგოთ $\sqrt{n}$ სიგრძის მონაკვეთი.

2103. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნატურალური n-ისათვის

$$|\sin nx|\leqslant n|\sin x|.$$

2104. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნატურალური n-ისათვის

$$[f^n(x)]'=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x).$$

2105. გამოიყენეთ № 2104 ამოცანის ფორმულა და იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1) $y=\sin^6x+\cos^6x$ 2) $y=\sin^3 2x$; 3) $y=\left(\frac{x-1}{x}\right)^5$;

4) $y=(x^2-3x+5)^4$; 5) $y=\left(\frac{2x^3-1}{x^3}\right)^3$; 6) $y=(\sin x-\cos x)^4$;

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის მეორენაირი ვარიანტი § 263

ზოგიერთი დებულება მართებულია არა ყველა ნატურალური რიცხვისათვის, არამედ რომელიმე p რიცხვიდან დაწყებული ნატურალუ-

რი n-ისათვის. ასეთი დებულებები ზოგჯერ მტკიცდება 262-ე პარაგრაფ-ში აღწერილი მეთოდის ანალოგიური, თუმცა მისგან განსხვავებული მეთოდით. იგი შემდეგში მდგომარეობს:

დებულება მართებულია ყველა $n \geqslant p$ ნატურალური მნიშვნელობისათვის, თუ

1) **იგი მართებულია $n=p$-სათვის** (და არა $n=1$-ისათვის, როგორც ეს § 262-ში იყო);

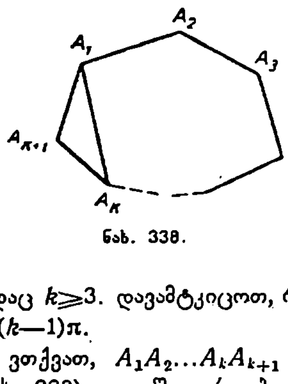
2) **ამ დებულების მართებულობიდან, როცა $n=k$, სადაც $k \geqslant p$** (და არა $k \geqslant 1$, როგორც § 262-ში), **გამომდინარეობს მისი მართებულობა $n=k+1$-სათვისაც.**

ნათელვყოთ ეს შემდეგი მაგალითით.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედის* შიგა კუთხეების S_n ჯამი $(n-2)\pi$-ის ტოლია, სადაც n ამ მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობაა:

$$S_n=(n-2)\pi. \tag{1}$$

ამ დებულებას აზრი აქვს არა ყველა ნატურალური n-ისათვის, არამედ მხოლოდ $n \geqslant 3$-ისათვის. ამიტომ § 262-ში აღწერილი მეთოდი აქ არ გამოიყენება. მაგრამ შეიძლება ინდუქციის მეორე ვარიანტის გამოყენება, რომელიც ზემოთ იყო აღწერილი.



ნახ. 338.

1) $n=3$-ისათვის დებულება ღებულობს ასეთ სახეს: $S_3=\pi$. მაგრამ ნებისმიერი სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი, მართლაც, π-ს ტოლია. ამიტომ, როცა $n=3$, (1) ფორმულა მართებულია.

2) ვთქვათ, ეს ფორმულა მართებულია, როცა $n=k$, ე. ი. $S_k=(k-2)\pi$, სადაც $k \geqslant 3$. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ გვაქვს ასეთი ფორმულა: $S_{k+1}=(k-1)\pi$.

ვთქვათ, $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ ნებისმიერი ამოზნექილი $(k+1)$-კუთხედია (ნახ. 338). თუ შევაერთებთ A_1 და A_k წერტილებს, მივიღებთ ამოზნექილ $A_1A_2\ldots A_{k-1}A_k$ k-კუთხედს. ცხადია, $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ $(k+1)$-კუთხედის კუთხეების ჯამი უდრის $A_1A_2\ldots A_k$ k-კუთხედის კუთხეების ჯამს პლუს $A_1A_kA_{k+1}$ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. მაგრამ $A_1A_2\ldots A_k$ k-კუთხედის კუთხეების ჯამი, პირობის თანახმად, $(k-2)\pi$-ის ტოლია, ხოლო $A_1A_kA_{k+1}$ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი π-ს ტოლია.

* ეს დებულება მართებულია არაამოზნექილი მრავალკუთხედებისათვისაც, თუ მათი გვერდები იკვეთება მხოლოდ წვეროებში. სიმარტივისათვის ვკმაყოფილდებით მხოლოდ ამოზნექილი მრავალკუთხედებით.

ამიტომ

$$S_{k+1}=S_k+\pi=(k-2)\pi+\pi=(k-1)\pi.$$

მაშ, მათემატიკური ინდუქციის ორივე პირობა სრულდება და ამის გამო (1) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი $n\geqslant3$-ისათვის.

სავარჯიშოები

2106. რამდენ სამკუთხედად შეიძლება დანაწილდეს ამოზნექილი n-კუთხედი თავისი არაგადამკვეთი დიაგონალებით?

2107. დაამტკიცეთ რომ, თუ $n\geqslant3$,

$$2^n\geqslant2n+1.$$

2108. n-ის რომელი ნატურალური მნიშვნელობებისათვისაა მართებული უტოლობა:

$$2^n<n^2?$$

შენიშვნა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის მიმართ §264

დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით ორი საფეხურისაგან შედგება.

პ ი რ ვ ე ლ ი ს ა ფ ე ხ უ რ ი. ვამოწმებთ, მართებულია თუ არა დებულება $n=1$-ისათვის (ან $n=p$-სათვის, თუ საუბარია § 263-ში აღწერილ მეთოდზე).

მ ე ო რ ე ს ა ფ ე ხ უ რ ი. დავუშვებთ, რომ წინადადება მართებულია, როცა $n=k$ და ამის მიხედვით ვამტკიცებთ, რომ იგი მართებულია მაშინაც, როცა $n=k+1$.

ამ საფეხურთაგან თითოეული თავისებურად მნიშვნელოვანია. § 261-ში, როცა განვიხილეთ $f(n)=n^2+n+41$ მაგალითი, დავრწმუნდით, რომ დებულება შეიძლება მართებული იყოს მთელ რიგ კერძო შემთხვევაში, მაგრამ საზოგადოდ არ იყოს მართებული. ეს მაგალითი გვარწმუნებს, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის მეორე საფეხური. თუ მას უგულებელვყოფთ, შეიძლება არამართებულ შედეგამდე მივიდეთ.

მაგრამ, არ უნდა ვიფიქროთ, რომ პირველი საფეხური ნაკლებად მნიშვნელოვანია, ვიდრე მეორე. ახლავე მოვიყვანთ მაგალითს, რომელიც უჩვენებს, თუ რა უაზრო დასკვნამდე შეიძლება მივიდეთ. თუ უგულებელვყოფთ პირველ საფეხურს.

„თ ე ო რ ე მ ა". ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის რიცხვი $2n+1$ ლუწია.

„დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა“. ვთქვათ, ეს თეორემა მართებულია $n=k$-სათვის, ე. ი. რიცხვი $2k+1$ ლუწია. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ ლუწი იქნება აგრეთვე რიცხვი $2(k+1)+1$.

მართლაც,

$$2\,(k+1)+1=(2k+1)+2.$$

პირობის თანახმად, $2k+1$ ლუწია და ამიტომ, თუ მას ლუწ რიცხვს 2-ს დავუმატებთ, ისევ ლუწ რიცხვს მივიღებთ. თეორემა, „დამტკიცებულია“.

რომ არ დაგვეწყებოდა შემოწმება — მართებულია თუ არა „თეორემა“, როცა $n=1$, მაშინ არ მივიდოდით ასეთ „შედეგამდე“.

ამოცანები ალგებრისა და ელემენტარული ფუნქციების მთელი კურსის გასამეორებლად

2109. ერთ საწყობში a ტონა ნახშირია, მეორეში — b ტონა. ყოველდღიურად ორივე საწყობში შემოდის c ტონა ნახშირი. რამდენი დღის შემდეგ იქნება პირველ საწყობში 2-ჯერ მეტი ნახშირი, ვიდრე მეორეში?

2110. ორი ერთდროულად მოქმედი ონკანი ჭურჭელს ავსებს 6 საათში. რა დროში აავსებს ჭურჭელს თითოეული ონკანი ცალ-ცალკე, თუ ცნობილია, რომ მარტო პირველი ონკანი ჭურჭელს ავსებს 5 საათით უფრო გვიან, ვიდრე მარტო მეორე?

2111. მატარებელმა 16 წუთით დაიგვიანა. 80-კილომეტრიან გადასარბენზე მან გამოასწორა დაგვიანება, რისთვისაც სიჩქარე გაადიდა ჩვეულებრივთან შედარებით 10 კმ/სთ-ით. იპოვეთ მატარებლის ჩვეულებრივი სიჩქარე.

2112. მინდვრის მოხვნას ერთი ტრაქტორისტი ანდომებს 1,2-ჯერ მეტ დროს, ვიდრე მეორე, ხოლო 3 საათით ნაკლებს, ვიდრე მესამე ტრაქტორისტი. ერთად მუშაობით სამივე ტრაქტორისტმა მინდორი მოხნა 4 საათში. რამდენ საათში შეიძლება მოხნას მინდორი თითოეულმა ტრაქტორისტმა?

2113. ველოსიპედისტმა იმგზავრა A—დან და B-საკენ და უკან. გზა წარმოადგენდა აღმართს, ჰორიზონტალურ უბანს და დაღმართს. ჰორიზონტალურ უბანზე იგი მიდიოდა 20 კმ/სთ სიჩქარით, დაღმართზე— 25 კმ/სთ-ით, ხოლო აღმართზე — 15 კმ/სთ-ით. A-დან B-საკენ ველოსიპედისტი მიდიოდა 2 საათსა და 22 წუთს, ხოლო B-დან A-საკენ — 2 საათსა და 14 წუთს. განსაზღვრეთ აღმართის სიგრძე და დაღმართის სიგრძე, თუ გზის ჰორიზონტალური უბანი 30 კმ-ია.

2114. ორი თვითმფრინავი ერთიმეორისაკენ ერთდროულად გამოფრინდა A და B ქალაქებიდან, რომელთა შორის მანძილი 1800 კმ-ის ტოლია. ისინი შეხვდნენ ერთმანეთს გამოფრენიდან ერთი საათის შემდეგ. პირველი თვითმფრინავი B ქალაქში 27 წუთით ადრე მივიდა, ვიდრე მეორე A ქალაქში. იპოვეთ თვითმფრინავების სიჩქარეები.

2115. ერთ შენადნობში ორი ლითონი შედის შეფარდებით $1:2$, ხოლო მეორეში — იგივე ორი ლითონი შეფარდებით $3:4$. თითოეული

შენადნობის რამდენი ნაწილი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ იმავე ლითონების 15 : 22 შეფარდებით შემცველი მესამე შენადნობი?

2116. ერთიმეორისაგან 10,2 კმ-ით დაშორებული ორი მგზავრი ერთდროულად გამოდის A და B პუნქტებიდან და მოძრაობენ AB წრფის მიმართულებით. ისინი ერთმანეთს შეხვდებიან 1 საათისა და 12 წუთის შემდეგ, თუ ივლიან ურთიერთშემხვედრი მიმართულებით, ხოლო 6 საათისა და 48 წუთის შემდეგ, თუ ივლიან ერთი მიმართულებით. იპოვეთ თითოეული მგზავრის სიჩქარე.

2117. საჭადრაკო ტურნირიდან ორი მონაწილე გამოითიშა, მას შემდეგ რაც თითოეულმა ითამაშა ხუთ-ხუთი პარტია. ამის გამო ტურნირში სულ გათამაშდა 38 პარტია. რამდენი მონაწილე იყო ტურნირის დასაწყისში? ითამაშეს თუ არა ერთმანეთთან ტურნირიდან გამოთიშულმა მოჭადრაკეებმა?

2118. გემი მიდის გორკიდან ასტრახანამდე 5 დღე-ღამის განმავლობაში, ასტრახანიდან გორკამდე კი — 7 დღე-ღამეს ანდომებს. რა დრო მოუნდება გორკიდან ასტრახანამდე ტივების ცურვას?

2119*. ორი მოციგურავე ერთდროულად გამორბის: პირველი A-დან B-ში, ხოლო მეორე B-დან A-ში და ხვდებიან ერთმანეთს A-დან 300 მ მანძილზე. AB გზის გავლის შემდეგ თითოეული მათგანი უკან ბრუნდება და მეორეს ხვდება B-დან 400 მ დაშორებით. იპოვეთ AB გზის სიგრძე.

2120. ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $a^2x-1=a+x$; ბ) $ax=b-x$;

გ) $$\frac{a(1-bx)}{a+b}+\frac{b+a^2x}{a-b}=\frac{ax(a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

2121. ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $|2x-3|=a$; ბ) $|4-5x|=|8-x|$.

გ)* $|x+1|+|x-1|+|x-3|=3+x$.

2122. (ზეპირად). რამდენი ამონახსნი აქვს თითოეულს მოცემულ სისტემათაგან:

ა) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 3x-y=1; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 4x+5y=3, \\ 2x-6y=0; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x-0,5y=3,5, \\ 2x-y=7; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} x-9y=0, \\ 0,5x-4,5y=2; \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 4y-6x=7? \end{cases}$

2123 ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases}(a-1)x-y=1,\\ x+ay=a;\end{cases}$ ბ) $\begin{cases}2x-ay=a+1,\\ ax-2y=1;\end{cases}$

გ) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1,\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=5a-3.\end{cases}$

2124. იპოვეთ განტოლებათა სისტემების ნამდვილი ამონახსნები:

ა) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{20},\\ xy=20;\end{cases}$ ბ) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=3,\\ x+y=2;\end{cases}$

გ) $\begin{cases}x^2-y^2=a,\\ x-y=b;\end{cases}$ დ) $\begin{cases}x+y=a,\\ xy=b.\end{cases}$

2125. დაამტკიცეთ უტოლობანი:

ა) $\dfrac{a+b}{1+a+b}<\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$ $(a>0,\ b>0)$;

ბ) $a+4b\geqslant 4\sqrt{ab}$ $(a>0,\ b>0)$;

გ) $\dfrac{\sqrt{a}}{b}+\dfrac{\sqrt{b}}{a}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$;

დ) $\dfrac{a+bx^4}{x^2}\geqslant 2\sqrt{ab}\,(a>0,\ b>0)$.

2126. გამყიდველს არაზუსტი სასწორი აქვს (სასწორის უღლის მხრებს სხვადასხვა სიგრძე აქვს), ამიტომ იგი თითოეულ მყიდველს სასწორის ერთ თეფშზე უწონის საქონლის ნახევარს, ხოლო მეორე თეფშზე —მეორე ნახევარს და ფიქრობს, რომ ამით ანაზღაურებს სასწორის უზუსტობას. მართალია თუ არა იგი?

2127*. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული P პერიმეტრის მქონე ყველა სამკუთხედიდან უდიდესი ფართობი აქვს ტოლგვერდა სამკუთხედს.

2128. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი მახვილი φ კუთხისათვის

$$\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi\geqslant 2.$$

2129. ამოხსენით უტოლობა:

$$1<\frac{x-6}{1-x}<3.$$

2130*. როგორ უნდა შეირჩეს a-ს მნიშვნელობა, რომ

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

უტოლობა დაკმაყოფილდეს x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის?

2131. ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $x-6=1+\sqrt{x-1}$; ბ) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$;

გ) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}=3$.

2132. როგორ უნდა შეირჩეს a-ს მნიშვნელობა, რომ

$$(a-3)x^2-4x-2a=0$$

განტოლებას ჰქონდეს:

ა) ნამდვილი ფესვები;
ბ) ერთნაირი ნიშნის ნამდვილი ფესვები;
გ) სხვადასხვა ნიშნის ნამდვილი ფესვები?

2133. ამოხსენით განტოლებანი:

ა) $\sqrt{(x-2)^2}=-(x-2)$; ბ) $\sqrt{(x^2-x+1)^2}=x^2-x+1$;

გ) $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2}=2$.

2134. ააგეთ

$$y=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}$$

ფუნქციის გრაფიკი.

2135. რომელი უფრო მეტია:

ა) 3^{600} თუ 6^{300};

ბ) $(2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ თუ $(3\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$,

გ) $(2\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}}$ თუ $(4\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$?

2136. მოსახლეობის ნამატის საშუალო წლიური პროცენტი წლიდან წლამდე მუდმივი რჩება. ის რომ k%-ით გაზრდილიყო, მაშინ n წლის შემდეგ მოსახლეობის რიცხვი ორჯერ მეტი იქნებოდა, ვიდრე ნორმალურ პირობებში. განსაზღვრეთ მოსახლეობის ნამატის წლიური პროცენტი.

2137. იპოვეთ φ კუთხის კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი, თუ

$$\sin\varphi=\frac{5}{13}.$$

2138. იპოვეთ φ კუთხის სინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი, თუ

$$\cos\varphi = -\frac{3}{5}.$$

2139. იპოვეთ φ კუთხის სინუსი, კოსინუსი და კოტანგენსი, თუ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}.$$

2140. იპოვეთ $\arcsin\frac{1}{3}$ კუთხის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

2141. იპოვეთ $\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)$ კუთხის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

2142. იპოვეთ $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ კუთხის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

დაამტკიცეთ იგივეობანი (№ 2143—2147):

2143. $$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 2|\operatorname{cosec}\alpha|.$$

2144. $$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2} = \cos 4\alpha.$$

2145. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$$

2146. $2\sin 5a \sin 3a + \cos 8a = \cos 2a.$

2147. $$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

გაამარტივეთ გამოსახულებანი (№ 2148—2150):

2148. $$\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}.$$

2149. $$\sqrt{1+\cos\varphi} - \sqrt{1-\cos\varphi}\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

2150. ა) $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \ldots \operatorname{tg}89^\circ$; ბ) $\lg \operatorname{tg}1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg}2^\circ \ldots \lg \operatorname{tg}89^\circ$

2151. როგორ უნდა შეირჩეს a-ს მნიშვნელობანი, რომ ქვემოთ მოცემულ განტოლებებს ჰქონდეთ ნამდვილი ფესვები:

ა) $\lg^2 x - \lg x + a = 0$,

ბ) $\cos^2 x + \cos x + a = 0$.

2152. α, β და γ რიცხვები შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის სხვაობა $\frac{\pi}{3}$ -ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \lg\gamma + \operatorname{tg}\gamma \quad \operatorname{tg}\alpha = -3.$$

2153. დაამტკიცეთ ტოლობები:

ა) $\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 80° = \sqrt{3}$,

ბ) $\sin 18° \cos 36° = 0{,}25$;

გ) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 15°}{1 + \operatorname{tg}^2 15°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2154. გამოთვალეთ:

ა)* $\sin\left[\frac{1}{2} \arccos(-0{,}8)\right]$; ბ) $\sin[\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,ctg}(-2)]$;

გ) $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2} \arcsin(-0{,}6)\right]$.

2155. შეამოწმეთ ტოლობანი:

ა) $\operatorname{arc\,tg} \frac{3}{15} + \operatorname{ars\,tg} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$; ბ) $\arcsin 0{,}8 - \arccos 0{,}6 = 0$.

ამოხსენით განტოლებანი (№ 2156—2179):

2156. $\sin x - \cos 2x = 2$.

2157. $\sin x \cos 3x = -1$.

2158. $\cos 2x = \sin x \cos 2x$.

2159. $2\cos^2 x - 7\sin x - 5 = 0$.

2160. $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 0$.

2161. $3\sin x - 2\cos x = 6$.

2162. $\sqrt{3}\cos x = -\sin x$.

2163. $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.

2164. $\cos(\cos x) = \sin(\sin x)$.

1265. $\sin x \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos^2 x$.

2166. $\cos x \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$.

2167. $\sin^4 x = 1 + \cos^2 x$.

2168. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1$.

2169. $3 \cos 4x = 7 \sin 2x$.

2170. $2 \cos^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{2} \sin 2x$.

2171. $\cos 3x \cos 5x = \cos x \cos 7x$.

2172. $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.

2173. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = -1$.

2174. $\sin x - 4 \cos x + \operatorname{tg} x = 4$.

2175. $\cos^2 x + 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 2$.

2176. $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3} (\cos 5x - \sin 7x)$.

2177. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x + \sin \frac{\pi}{3}$.

2178. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

2179. $(\operatorname{tg} x)^{\cos x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№ 2180—2183):

2180.* $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \sin x + \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

2181. $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1, \\ 9^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 3. \end{cases}$

2182. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

2183. $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = -\frac{3}{4}. \end{cases}$

2184. არის თუ არა $\cos \frac{1}{x} = 0$ განტოლების ყველა დადებითი ფესვის მიმდევრობა?

ა) სასრული; ბ) შემოსაზღვრული?

2185. არითმეტიკული პროგრესიის კიდურა წევრებია 5 და 25. იპოვეთ მათგან თანაბრად დაშორებული ის ორი წევრი, რომელთა ნამრავლი 189-ის ტოლია.

2186. იპოვეთ ოთხი რიცხვი, რომელთა შორის პირველი სამი გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენს, ხოლო უკანასკნელი სამი — არითმეტიკულს; კიდურა წევრების ჯამი 14-ის ტოლია, ხოლო შუა წევრების ჯამი — 12-ის.

2187. არითმეტიკულსა და ზრდად გეომეტრიულ პროგრესიებს 2-ის ტოლი პირველი წევრები აქვთ, ტოლია აგრეთვე მათი მესამე წევრებიც. არითმეტიკული პროგრესიის მეორე წევრი 4-ით მეტია გეომეტრიული პროგრესიის მეორე წევრზე. იპოვეთ ეს პროგრესიები.

2188. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხე, თუ ცნობილია, რომ მისი გვერდები შეადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას.

2189. მოცემულია წესიერი სამკუთხედი, რომლის გვერდი a-ს ტოლია. სამკუთხედში ჩახაზულია წრე, წრეში ხელახლა ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი, სამკუთხედში — ისევ წრე და ასე შემდეგ უსასრულოდ. განსაზღვრეთ ყველა წრის ფართობთა ჯამი და ყველა წრეწირის სიგრძეთა ჯამი.

2190. იპოვეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია, თუ მისი ჯამი 3-ია, ხოლო მისი წევრების კვადრატების ჯამია 4,5.

2191. x-ის რომელი მნიშვნელობებისათვის შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას რიცხვები: $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$ და $\lg(2^x+1)$?

2192. დაამტკიცეთ, რომ $\log_2 3$ ირაციონალური რიცხვია.

2193. გამოთვალეთ:

ა) $\log_{3\sqrt{3}} 27$; ბ) $\lg 1\frac{1}{2}-\lg 150$; გ) $\log_\pi \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

დ) $2^{4\log_2^{3}-1}-1$; ე) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25}^{2}-5}-5$; ვ) $2^{\log_2 \sqrt{2}^{15}}$.

ამოხსენით განტოლებანი (№ 2194—2208);

2194. $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{3x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$;

2195. $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$.

2196. $8^x+18^x-2\cdot 27^x=0$.

2197. $3^x-50\cdot 2^x=5\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

2198.* $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$.

2199. $\lg(x+a)=\lg x+\lg a.$

2200.* $x^{\lg x^2-6}=100.$

2201. $\lg(3x-4)=\lg(6x+2)-1.$

2202. $x^{\log_7 x^{12}+\log_7^2 x^{1}-4}=\frac{1}{x}.$

2203. $\log_3^2 4x-\log_3 12x=1.$

2204. $\lg^2 x^3-5\lg x^2+1=0.$

2205. $\sqrt{\lg\left(4^{\sqrt{x}}+2^{1+\sqrt{x}}+9992\right)}=2.$

2206. $2x-\lg(5^{2x}+4x-16)=\lg 4^x.$

2207. $\log_3\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1.$

2208. $\lg\sin x=\lg\cos x.$

2209. გამოთვალეთ

ა) $\log_7\log_7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}$; ბ) $10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}$.

გ) $\log_3 5\cdot\log_{25}27$; დ) $\log_{ab}b$, თუ $\log_{ab}a=4$.

2210. დაამტკიცეთ, რომ $\lg\cos x=\cos x$ განტოლებას ფესვები არა აქვს.

2211. რომელი უფრო მეტია

ა) $\log_3 2$ თუ $\log_2 3$; ბ) $\sqrt[3]{0,01}$ თუ $\sqrt[5]{0,001}$?

2212. იპოვეთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$$\lg\frac{x+3}{x+4}>\lg\frac{x+5}{x+2}.$$

2213. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases}\log_2(xy)=5,\\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{y}=1;\end{cases}$

ბ) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=5,\\ \log_2(x^2+y^2)=\log_2 10+3;\end{cases}$

გ) $\begin{cases}\lg x\cdot\lg(xy)=2,\\ \lg\frac{x}{y}=3.\end{cases}$

დ) $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[7]{128}, \\ \lg(x+y) = \lg 40 - \lg(x-y) \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

2214. პლასტმასის ფირფიტაში გავლისას სინათლის სხივი კარგავს თავისი ინტენსივობის $\frac{1}{3}$-ს. რამდენი ასეთი ფირფიტა შეიძლება დაიდგას სხივის გზაზე, რომ მათში გავლისას დაიკარგოს თავდაპირველი ინტენსივობის არა უმეტეს $\frac{211}{243}$-ისა?

2215. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y = |\log_2 x|$; ბ) $y = \log_2 |x|$; გ) $y = \log_3 |-x|$.

2216. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები:

ა) $y = \sqrt{-5x^2 + 8x + 4}$;

ბ) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$;

გ) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+1}{5-x}}$;

დ) $y = \frac{1}{2^{\frac{x}{3x-1}} - 1}$

ე) $y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x - 1}$;

ვ) $y = \lg(1,5 + \sin x + \cos x)$.

2217. დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = \frac{(1+2^x)^2}{2^x}$ ფუნქცია ლუწია, ხოლო $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$ ფუნქცია — კენტი.

2218. დირიხლეს ფუნქცია შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \\ 1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$$

ა) ლუწია თუ არა ეს ფუნქცია?

ბ) დაამტკიცეთ, რომ ეს ფუნქცია პერიოდულია, ამასთან, ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი მისი პერიოდია. გააჩნია თუ არა ამ ფუნქციას უმცირესი დადებითი პერიოდი?

გ) დაამტკიცეთ, რომ არც ერთი ირაციონალური რიცხვი არ არის მოცემული ფუნქციის პერიოდი.

2219. დაამტკიცეთ, რომ პერიოდული ფუნქციის წარმოებული პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს. მოიყვანეთ მაგალითები.

2220. დაამტკიცეთ, რომ ლუწი ფუნქციის წარმოებული კენტი ფუნქციაა, ხოლო კენტი ფუნქციის წარმოებული — ლუწი ფუნქცია. მოიყვანეთ მაგალითები.

2221. რომელ შუალედებში არსებობს ფუნქციები, რომლებიც მოცემულის შექცეულნი არიან:

ა) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; ბ) $y=\cos^2 x$?

2222. ერთსა და იმავე ნახაზზე ააგეთ მოცემული ფუნქციისა და მისი შექცეულის გრაფიკები:

ა) $y=2x-1$; ბ) $y=3^{x+1}$.

2223. იპოვეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x\sqrt{x}-3\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$;

ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{x^3+9}-3}$;

გ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}$

დ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+a)+\sin(x-a)}{x}$.

2224. გამოთვალეთ:

$$x^{25}-8x^{14}+5x^4-4x^2-10, \text{ როცა } x=i.$$

2225. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{1-i}{1+i}$ და $\frac{1+i}{1-i}$ მოპირდაპირე რიცხვებია.

2226. შეასრულეთ აღნიშნული მოქმედებანი:

ა) $\left(\frac{2i-1}{1+i}+\frac{5-2i}{4-i}\right)\cdot\frac{34}{1-i}$; ბ) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$

გ) $\frac{(2+i)(1-i)}{3-2i}$; დ) $(2+i\sqrt{2})^3+(2-i\sqrt{2})^3$.

2227. დაამტკიცეთ, რომ შეუღლებულ რიცხვთა კუბები შეუღლებული რიცხვებია.

2228. იპოვეთ ნამდვილი მნიშვნელობანი x და y შემდეგი განტოლებებიდან:

$$ა)\ (xi-y)^2=6-8i+(x+yi)^2;$$

$$ბ)\ \frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{1+i}=1-3i;$$

$$გ)\ \frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}.$$

2229. აჩვენეთ, რომ $x^3=1$ განტოლების ნებისმიერი ორი ფესვის ნამრავლი აგრეთვე ამ განტოლების ფესვია.

2230. გამოთვალეთ $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

(მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ მუავრის ფორმულით).

2231. აჩვენეთ, რომ თუ n 3-ის ჯერადია, მაშინ

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2.$$

2232. სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი, რომლებიც $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2$ კომპლექსურ რიცხვებს შეესაბამებიან. სად მდებარეობს წერტილი, რომელიც $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ რიცხვს შეესაბამება?

2233. $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5$ გამოსახულება გარდაქმენით ორნაირი ხერხით: მუავრის ფორმულით და ნიუტონის ბინომის ფორმულის მეშვეობით. შეადარეთ შედეგები და $\sin 5\varphi$ და $\cos 5\varphi$ გამოსახეთ $\sin\varphi$-სა და $\cos\varphi$-ს საშუალებით.

2234. სხეული მოძრაობს $s(t)=t^3$ კანონის მიხედვით (s მანძილია მეტრობით, t—დრო წამობით). რადგან τ წმ მომენტში მისი მყისი სიჩქარე საშუალო სიჩქარის ტოლია შუალედში t_1 წმ-დან t_2 წმ-მდე ($t>t_1$). დაამტკიცეთ, რომ $t_1<\tau<t_2$.

2235. დაწერეთ $y=\sqrt{x}$ მრუდისადმი იმ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება, რომლის აბსცისაა $x=4$.

2236. დაწერეთ $y=x^2$ და $y=(x-2)^2$ პარაბოლების მხებთა განტოლებანი მათი გადაკვეთის წერტილზე.

2237. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები:

ა) $\sin^4 x$; ბ) $\cos^3 2x$; გ) $\cos^3(x-1)$;

დ) $\cos^4(2-x)$; ე) $(x^2+1)^6$; ვ) $(3-2x)^3$.

2238. წერტილი ასრულებს ჰარმონიულ რხევას A ამპლიტუდით, ω სიხშირით და φ საწყისი ფაზით. იპოვეთ ამ წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.

2239. შეიძლება თუ არა ორ სხვადასხვა ფუნქციას ჰქონდეს ტოლი წარმოებულები? პასუხი ილუსტრირეთ მაგალითებით.

2240. გამოიკვლიეთ მოცემული ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

ა) $y=x-3x^3$; ბ) $y=x^3-4x$;

გ) $y=\cos^2\frac{x}{2}$; დ) $y=\cos x(1+\sin x)$.

2241. ვთქვათ $C_n^k=C_n^r$. დაამტკიცეთ, რომ $k=r$ ან $k=n-r$.

2242. დაამტკიცეთ, რომ $(2x+7)^{1000}$ და $(\sqrt{?}x^2+2)^{1000}$ ფუნქციების მე-1000 რიგის წარმოებულები ტოლია.

2243. ვთქვათ, $(x-2)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_{100}x^{100}$.

იპოვეთ:

ა) a_{97};

ბ) $a_0+a_1+a_2+\ldots a_{100}$;

გ) $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+100a_{100}$.

2244. დაამტკიცეთ, რომ n რიცხვის ჯამის კვადრატი უდრის ამ რიცხვთა კვადრატებისა და მათი ყოველნაირი წყვილების გაორკეცებული ნამრავლების ჯამს.

2245. დაამტკიცეთ, რომ თუ T $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის nT აგრეთვე ამ ფუნქციის პერიოდი იქნება.

2246. დაამტკიცეთ იგივეობა:

$$\lg(a_1a_2\ldots a_n)=\lg a_1+\lg a_2+\ldots+\lg a_n$$
$$(a_1>0,\ a_2>0,\ldots a_n>0).$$

2247. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის $\sin nx$ და $\cos nx$ რაციონალურად გამოისახება $\sin x$-ითა და $\cos x$-ით.

2248. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$|a_1+a_2+a_3\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

2249. დაამტკიცეთ იგივეობა

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ რადიკალი}}=$$
$$=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

2250. შეამოწმეთ

$$\sin^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\leqslant1$$

უტოლობის მართებულობა, სადაც n ნატურალური რიცხვია.

2251. დაამტკიცეთ, რომ როგორიც არ უნდა იყოს წარმოებად ფუნქციათა თანმიმდევრობა, მათი ჯამის წარმოებული ამ ფუნქციების წარმოებულთა ჯამის ტოლია.

1024. 1) 1; 2) 7; 3) $5\sqrt{2}$; 4) 5; 5) $3\sqrt{65}$; ი) 25. 1025. $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3}{2}$.

1026. $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $N\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 1027. $M(\sqrt{3};1)$; $N(1;0)$ 1028. ა) $\frac{1}{2}$;

ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\frac{1}{2}$; ე) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ვ) -1. 1029. $\cos\alpha$. 1030. $\frac{1}{2}$. 1031. 0. 1032. 1 $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$. 1033. 1. $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 1034. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

1035. ა) $\frac{24-5\sqrt{21}}{65}$; ბ) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$. 1036. $\frac{36}{325}$ და $\frac{204}{325}$ 1037. $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$.

1038 $\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$, 1039. $\frac{4}{5}$; 1040. ა) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) 1; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

1044. $1\ (\alpha\neq n\pi)$ 1045. $1\left(\alpha\neq n\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1046. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

1047 $\cos\alpha\cos\beta\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1048. $-0{,}4+0{,}3\sqrt{3}$, თუ $\pi+2n\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$; $-0{,}4-0{,}3\sqrt{3}$ თუ $\frac{3}{2}\pi+2k\pi<\alpha<2\pi+2k\pi$. 1049. 0 და $-\frac{\sqrt{39}}{8}$. 1050. $-\frac{56}{65}$ და $-\frac{16}{65}$. 1051. $\frac{2}{9}(1+\sqrt{10})$. 1052. $\frac{\sqrt{15}-2}{6}$. 1053. $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

1054 $\frac{13}{14}$. 1055. $-2-\sqrt{3}$ 1056. ბ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; დ) 1. 1057. $-\frac{16}{63}$; $-\frac{56}{33}$. 1058. $\frac{56}{33}$; $\frac{16}{63}$. 1059. -1. 1060: $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$. 1061. $-2\sqrt{2}$. 1062. $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{5}$. 1063. $\frac{\pi}{2}$.

1065. $\sin 2\alpha=-0{,}96$; $\cos 2\alpha=-0{,}28$. 1066. $-\frac{24}{7}$; $-\frac{7}{25}$. 1067. 0,98.

1068 ა) პირველში; ბ) მეორეში; გ) მესამეში; დ) მეოთხეში. 1069. გ) $\frac{1}{2}$;

დ) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1072. $-\frac{1}{2}$-დან $+\frac{1}{2}$-მდე, ამ ორი რიცხვის ჩათვლით.

1075. $\operatorname{tg}2\alpha$. 1077. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\alpha\ (\alpha\neq45^\circ+180^\circ n)$. 1078. $\frac{1}{4}\sin 2\alpha$. 1081. ბ)

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, თუ $\pi+4n\pi<\alpha<\pi+4n\pi$, $\sin\alpha=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$,

და $\pi+4n\pi<\alpha<3\pi+4k\pi$; $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 1082. $\frac{1}{2}\left(\alpha\neq\frac{n\pi}{2}\right)$. 1083. $2\left(\alpha\neq\frac{n\pi}{2}\right)$. 1086. $\cos 2\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$. 1087. $\cos\alpha-\sin\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{4}+n\pi\right)$. 1088. $-\frac{3}{4}$. 1089. $\frac{24}{7}$. 1090. $\frac{1}{2}$. 1091. $-\frac{4}{5}$. 1098. ა) $\frac{7}{25}$. ბ) $-\frac{84}{625}$. 1103. $\lg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$. 1105. $\sqrt{0,8}$, $\sqrt{0,2}$ და 2, და $\frac{\pi}{2}+4n\pi<\alpha<\pi+4n\pi$; $\sqrt{0,8}-\sqrt{0,2}$ და -2, და $\pi+4k\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi+4k\pi$ 1106. $3+2\sqrt{2}$ ან $3-2\sqrt{2}$. 1107. $\sqrt{0,1}$. 1108. $\sqrt{0,9}$. 1109. $-\frac{1}{2}$. 1110. $-\frac{1}{3}$ 1111. $\frac{3}{2}$. 1112. -2. 1114. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. 1115. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$. 1116. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$. 1117. $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$. 1118. $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$. 1119. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ 1120. $\frac{1}{2}-\sin 10^\circ-\cos 20^\circ+\sin 50^\circ$. 1127. $\cos 5^\circ-\cos 75^\circ+\cos 35^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1130. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 1131. 0. 1132. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 1133. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1134. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 1135. 0. 1139. $\frac{1}{2}+\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\alpha=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{22}\right)$. 1142. 0. 1143. $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 1144. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1145. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. 1146. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1147. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1151. $\sqrt{2}+2\cos\alpha=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{6}\right)$. 1155. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$. 1156. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. 1158. $4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos 2\alpha$. 1165. $2\sqrt{2}$. 1166. -2. 1169. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1170. ა) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$. 1184. $y=\frac{1}{3}(1+\sin 4x)$ — ერთ-ერთი მაგალითი; მეორე თვითონ მიუთითეთ. 1186. $y=-\left|\lg\frac{\pi x}{5}\right|$ — ერთი მაგალითია; მეორე თვითონ მიუთითეთ. 1215. $A>0$, $\omega>0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ (ან $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$) 1219. 50 ჰერცი. 1220. მინიმალური მნიშვნელობები, როცა $t=-\frac{5}{3}+4n$, მაქსიმალური, როცა $t=-\frac{1}{3}+4n$; ნულოვანი მნიშვნელობებია, როცა $t=\frac{4}{3}+2n$. 1221. ა) მინიმალური მნიშვნელობებია, როცა $t=\frac{13\pi}{30}+\frac{2n\pi}{3}$; მაქსიმალური, როცა $t=\frac{\pi}{10}+\frac{2n\pi}{3}$, ნულოვანი მნიშვნელობებია, როცა $t=-\frac{\pi}{15}+\frac{n\pi}{3}$.

1222. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 1223. $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. 1224. $5\sin\left(x+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)$. 1225. $5\sin\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right)$. 1226. $13\sin\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}\right)$. 1227. $25\sin\left(2x+\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{24}{7}\right)$. 1230. ა) -5; 5; ბ) $0{,}5$; გ) -13; 13; დ) -20; 30; ე) 0; $\sqrt[4]{2}$. ვ) მინიმალური მნიშვნელობა $\frac{1}{\sqrt{2}}$, მაქსიმალური არ არსებობს. 1234. $A=\sqrt{2}$, $\omega=2$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. 1235. $A=5$, $\omega=\pi$: $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$. 1254. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+n\pi$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+k\pi$. 1255. $2n\pi$. 1256. x ნებისმიერი რიცხვია. 1257. $\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3}$. 1258. $n\pi$. 1259. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$. 1260. $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$. 1261. $n\pi$. 1262. $\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$. 1263. $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$. 1264. $(2n+1)\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2k\pi$. 1265. $\frac{1}{2}[(-1)^n\arcsin(\sqrt{3}-1)+n\pi]$. 1266. $\pm\frac{2}{3}+2n\pi$. 1267. $\pm\arccos\frac{1}{4}+(2n+1)\pi$. 1268. $(-1)^n\arcsin\frac{8-\sqrt{14}}{20}+n\pi$. 1269. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$. 1270. $2n\pi$; $2k\pi-2\operatorname{arc\,tg}3$. 1271. $n\pi$, $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$. 1272. ფესვები არა აქვს. 1273. $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{6}}{2}+n\pi$. 1274. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+n\pi$. 1275. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+n\pi$, $-\operatorname{arc\,tg}2+k\pi$. 1276. $\frac{n\pi}{7}$; $\frac{k\pi}{3}$. 1277. $\frac{n\pi}{8}$. 1278. $\frac{n\pi}{3}$; $\frac{k\pi}{8}$. 1279. $\frac{n\pi}{5}$. 1280. $n\pi$. 1281. თუ $a=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$; მაშინ x ნებისმიერი რიცხვია, თუ $a\neq\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, მაშინ ფესვები არა აქვს. 1282. $(2n+1)\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4k\pi$. 1283. $2n\pi$: $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 1284. $\frac{\pi}{2}+n\pi$: $\mp\frac{2}{3}n+2k\pi$. 1285. $n\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$. 1286. $\pm2\arccos\frac{1}{3}+4n\pi$. 1287. $\frac{n\pi}{2}$. 1288. $n\pi$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. 1289. $60^\circ+360^\circ n$; $150^\circ+360^\circ n$. 1290 $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. 1291. $\frac{n\pi}{4}$. 1292. თუ $a=\beta+n\pi$, მაშინ ნებისმიერი რიცხვია, თუ $a\neq\beta=n\pi$, მაშინ $x=\frac{\pi}{2}+\alpha+2k\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+\beta+2m\pi$. 1293. $\frac{\pi}{10}+\frac{2n\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 1294. $\frac{2n\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $(2m+1)\pi$. 1295. $\frac{2n\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2m\pi$. 1296. $\frac{n\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. 1297. $\frac{n\pi}{8}$, სადაც $n\neq4(2k+1)$.

1798. $n\pi$. 1799. $\frac{n\pi}{2}$. 1800. თუ $a=\frac{n\pi}{2}$, მაშინ x ნებისმიერი რიცხვია, თუ $a\neq\frac{n\pi}{2}$, მაშინ ფესვები არა აქვს. 1801. $2n\pi$; $\mp\frac{2\pi}{2}+2k\pi$. 1803. $\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-3}{4}+2n\pi$. 1804. $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$. 1805. $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{k\pi}{4}$. 1806. $\pm\frac{1}{12}\arccos\frac{2}{7}+\frac{n\pi}{6}$. 1807. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$. 1808. $\frac{\pi}{12}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{12}+2k\pi$. 1809. $\frac{\pi}{6}+n\pi$, $\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}$. 1810. $2\operatorname{arctg}\sqrt{7}+2n\pi$; $(2k+1)\pi$. 1811. $\frac{\pi}{12}+2n\pi$, $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$. 1812. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $(2k+1)\pi$. 1813. $(2n+1)\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+k\pi$; 1814. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $-2\operatorname{arctg}(4+\sqrt{15})+2k\pi$. 1815. $\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$. 1816. $\frac{n\pi}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. 1817. $\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$. 1818. 0,94. 1819. 0,17. 1820. ა) 1; ბ) 1, გ) 1, თუ $a=0$; უსასრულო სიმრავლე, თუ $a\neq0$, დ) 3. 1821. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა კუთხეების ჯამი π-ს ჯერადია და თითოეული კუთხის ტანგენსი არსებობს. 1822. $-\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{6}}{4}$. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 1823. $-\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$; $-\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)^2}$. 1824. $-\frac{24}{25}$. 1828. $-\sin(\alpha+\beta)$ $(\beta\neq\alpha+n\pi)$. 1829. ა) $2\sin\frac{\varphi}{2}$; ბ) $-2\cos\frac{\varphi}{2}$. 1830. $2\cos\alpha\cos2\alpha\times\cos5\alpha$. 1838. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. 1839. $\pm\frac{\pi}{8}+n\pi$; $\pm\frac{3\pi}{8}+k\pi$. 1840. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2m\pi$; 28π; 1841. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $2k\pi$. 1842. $n\pi$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. 1843. $\frac{n\pi}{5}$. 1844. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$. 1845. $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+k\pi$. 1846. ფესვები არა აქვს. 1847. $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}$. 1848. $n\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$. 1849. $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$. 1851. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\pi+2m\pi$. 1852. $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$; $y=\frac{\pi}{6}-2n\pi$. 1853. $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$; $y=\frac{\pi}{4}-2n\pi$. 1854. $x=\frac{\pi}{2}+(n+m)\pi$, $y=-\frac{\pi}{12}+(n-m)\pi$; $x=-\frac{\pi}{12}+(r+s)\pi$, $y=\frac{\pi}{4}+(r-s)\pi$; $x=-\frac{\pi}{12}+(k+l)\pi$, $y=\frac{\pi}{4}+(k-l)\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}+(s+t)\pi$, $y=\frac{\pi}{12}+(s-t)\pi$. 1855. $x=\frac{\pi}{3}+(n+m)\pi$, $y=\frac{\pi}{3}+(n-m)\pi$; $x=-\frac{\pi}{3}+(k+l)\pi$, $y=-\frac{\pi}{3}+(k-l)\pi$. 1857. $\cos x-\frac{1}{2}$, $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ან $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; აქედან მიიღება ამონახსნთა 3 ჯგუფი.

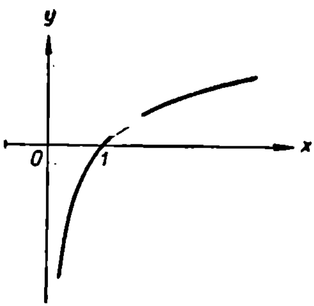
1358. ა) $5^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[10]{4^9}$; გ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$ დ) $\left(\frac{10}{11}\right)^{3-\frac{1}{4}}$. 1361. $\frac{1}{9}$. 1362. $2^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$. 1368. ა) $x\neq0$; ბ) $|x|>1$; გ) ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე. 1369. მეტია 1-ზე; 2), 5), 6), 7); ნაკლებია 1-ზე: 1), 3), 4), 8), 9). 1371. ა) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$ ბ) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$; გ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$ დ) $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}-2}$ 1378. თუ $a\neq1$, მაშინ $x=y$; თუ $a=1$, მაშინ x და y ნებისმიერი რიცხვებია. 1377. $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$; $\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$; $\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}$. 1380. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9\sqrt{3}}=\frac{5}{2}$. 1381. ა) -1; ბ) 0; გ) $\frac{1}{2}$; დ) 0. 1383. 3) 243; 4) 81; 5) 7; 6) 1; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 49; 9) 100; 10) $\frac{1}{6}$; 11) $\frac{1}{25}$; 12) 20736; 1390. ა) $x>-1$; ბ) ყველა რიცხვის სიმრავლე; დ) $x<0$; ე) $x\neq0$; ვ) $x<-2$; $x<1$; ზ) $2<x<3$; თ) ყველა რიცხვის სიმრავლე; 1391. ა) $0<x<\pi$; ბ) $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$; გ) $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$, დ) $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$; 1392. ა) ფუნქციას არა აქვს არც უდიდესი და არც უმცირესი მნიშვნელობა; ბ) ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა უდრის ნულს, (როცა $x=1$), უდიდესს კი არ აღწევს. 1395. ა) $x>3$; ბ) $|x|>2$; გ) $0<x\leqslant2$; დ) $x\geqslant2$; ე) $x\geqslant5$; ვ) $|x|<1$. 1396. ა) $a>1$; ბ) $a<1$; გ) $a>1$; დ) $a>1$. 1397. $a>1$. 1398. ა) 2 და 3; ბ) 1 და 2; გ) -2 და -1; დ) -4 და -3. 1400. 5) -3; 9) -3; 10) -2. 1403. 0,0762. $-0,0762$; 1404. $x>1$. 1405. $x<1$. $x>2$. 1406. $\log_2 10000$-ით. 1414. ა) 0,6309; ბ) 1,8927; ბ) 2,2618; დ) 0,4421. 1417. არა. 1418. ა) $\lg 3+7\lg a$; ბ) $\lg 15+3\lg a+2\lg b+7\lg c$; გ) $\frac{15}{7}\lg a+\frac{5}{7}\lg b$; დ) $\frac{4}{3}\lg a+\frac{2}{3}\lg b$. 1419. ა) $\frac{1}{2}[\lg(a+b)-\lg(a-b)]$; დ) $\frac{3}{5}(\lg a-\lg b-\lg 2)$. 1420. ა) $-\frac{3}{2}\lg\cos\varphi$; ბ) $\frac{1}{6}(\lg 2+2\lg\cos\varphi-3\lg\sin\varphi)$. 1421. ა) $\frac{2}{3}(\lg b-\lg a-3\lg 3)$; ბ) $\frac{1}{4}\lg 3+\frac{1}{3}\lg 4-\frac{3}{4}\lg a-\frac{2}{3}\lg b$; გ) $\frac{1}{18}(3\lg 5+7\lg m+4\lg n)$. 1422. გ) $\frac{5}{8}(\lg a-\lg b)$. 1423. ა) 6; ბ) 0,5; გ) 4; დ) 32. 1424. ა) 2; ბ) 16; გ) $\sqrt[10]{\frac{81}{7}}$. 1425. ა) $\frac{a(a+b)^n}{\sqrt{a-b}}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt[24]{\frac{b^6(a-b)^4}{a^4(a+b)^3}}$; გ) $\frac{\sqrt[15]{a^3b^5}}{a+b}$ 1426. ა) $\lg\varphi$.

ბ) $2\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}}$. 1427. $\pi=3+0,1415\ldots$; $-2,37=-3+0,63$; $-7=-7+0$; $-\pi+=-4+0,8584\ldots$ 1431. ა) $\lg 6\approx 0+0,7782$; ბ) $\lg 15\approx 1+0,1761$; გ) $\lg\frac{1}{12}\approx -2+0,9208$. 1433. $\approx 1,4651$; $\approx 1,2894$; $\approx 1,7686$. 1434. ა) $\approx 2,304$; ბ) ≈ 10000 გ) $\approx 0,4048$; დ) 0,002858; ე) $\approx 0,0009426$; ვ) $\approx 0,01001$. 1438. ა) $\bar{1},2907$; ბ) 15,8640; გ) 66,2361; დ) 0,6496; ე) 0,7112. 1440. $\approx 186,5$. 1441. $\approx 3,870$. 1442. $\approx -0,04146$. 1443. ≈ 88; 1444. $\approx 0,3224$ 1445. 1,617. 1446. $\approx 1,087$. 1447. ≈ 1076 სმ². 1448. ≈ 5738 სმ³. 1449. დ) $-\frac{1}{2}$; თ) $\frac{4}{3}$; ი) 4. 1450. ბ) -4; გ) 3; დ) 7; -1; ე) თუ $a=1$, მაშინ x ნებისმიერი რიცხვია, თუ $a\neq 1$, მაშინ $x_1=2$, $x_2=3$; ვ) 7. 1451. ა) 3; ბ) 1; გ) 2; 1452. ბ) 1; დ) $\frac{3}{2}$; ვ) 3; ზ) $\frac{17}{13}$; ი) 24. 1453. ა) 2; ბ) 1; გ) 3; დ) 4; ე) 0; 1; ვ) 1; $\log_3\frac{5}{4}$; ზ) 0; თ) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 1454. ა) 0; ბ) 0; გ) 0; დ) 0; ე) 1; ვ) $\frac{\lg 7-\lg 5}{\lg 3-\lg 2}$; ზ) თუ $a\neq b$, მაშინ $x=0$; თუ $a=b$, მაშინ x ნებისმიერია. 1455. $x=-2$, $y=0$. 1456. $x=3$, $y=4$. 1457. $x=3$, $y=-2$; $x=-\log_2 9$, $y=\log_9 8$. 1458. სისტემა არათავსებადია. 1459. $x=3$, $y=4$. 1460. ა) 10; ბ) 64; გ) 2; 4; დ) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; ე) 200; ვ) 25; ზ) 60. 1461. ა) 2; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) 5; დ) 5; ე) $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}-1$; ვ) 4; ზ) $\frac{1}{78125}$. 1462. ა) $\frac{\sqrt{33}-1}{4}$; ბ) 13; გ) 14; 6. 1463. ა) 10; 0,0001; ბ) 100; 1000; გ) 9; $\sqrt{10}-1$ დ) 0,001; 0,1; 10; 1000. 1464 ა) 1; -1 ბ) 0,2; 125; გ) 10; დ) 0,001; 10; ე) $\sqrt[5]{10000}$; ვ) 0,1; 1000. 1465. ა) 3; ბ) $\frac{1}{3}$; 3; გ) 5; დ) $\sqrt{5}$; 25; ე) 1; ვ) 16. 1466. $x=10\sqrt{10}$, $y=\frac{1}{100\sqrt[4]{10}}$. 1467. $x=2$, $y=32$; $x=32$; $y=2$. 1468. $x=-2$, $y=\frac{1}{900}$; 1469. $x=10$. $y=4$; $x=4$; $y=10$. 1471. 0,6. 1472. 1,40 1473. ა) $x>-2$; ბ) $x>3$; გ) $x>\log_3 2$; დ) $x<1$; $x>5$; ე) $x<-1$. $x>2$. 1474. ა) $2<x<5$; ბ) $7<x<7\frac{1}{16}$; გ) $x>6$. 1476. დაახლოებით 14 წლის შემდეგ. 1477. დაახლოებით 8 თვის შემდეგ; მეორე ბრიგადა. 1478. ა) $\frac{81}{2}$; ბ) 2000; გ) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$; დ) 0,02. 1480. ა) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$; ბ) $n\pi$. 1481. $\log_2 7-3$. 1483. ა) 0,1; ბ) $\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$; გ) განტოლებას ფესვი არა აქვს. 1484. $a^{\frac{1}{a}}$ 1485 ა) $\approx 1,6541$; ბ) $\approx 0,6309$. 1486. ა) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$; ბ) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{2}{7}$; გ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{2}{7}}=$

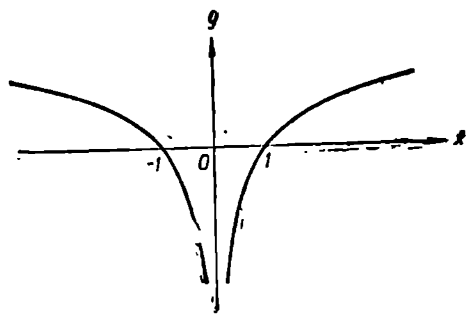
$= \left(\frac{1}{7}\right)^{\lg \frac{2}{5}}$ 1487. ა) $0 < x < \pi$; ბ) $x > 0$. 1489. 31; 140. 1491. ფესვები არა აქვს. 1492. $\frac{\lg 12}{\lg 5 - \lg 3}$. 1493. 0; 1. 1494. $\frac{\lg \lg 7 - \lg \lg 5}{\lg 7 - \lg 5}$. 1495. 4. 1496. $\frac{\lg 2}{\lg \sqrt{4 + \sqrt{15}}}$.
1497. 9. 1498. 100. 1499. 2. 1502. ა) b; ბ) b. 1503. $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$. 1505. $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; $\sqrt[3]{10}$; 1506. $\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$. $\sqrt[3]{10}$. 1507. $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}\sqrt[4]{27}$. 1508. $x = n\pi$, $y = 2k\pi$. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$. 1509. სისტემა არათავსებადია. 1510. $x = y = 1$. 1511. ა) იზრდება, როცა $x > -2$; კლებულობს, როცა $x < -2$; ბ) იზრდება, როცა $x > 1$; კლებულობს, როცა $x < 1$. 1512. $-3 < x < -2$; $x < 3$. 1513. $0{,}01 \leqslant x \leqslant 10000$.
1514. $x \leqslant -4$.

1518. გ) როცა $a = 0$ და $a = 1$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$ განუსაზღვრელია; როცა $a \neq 0$ და $a \neq 1$, $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a+1}{a-1}$. 1519. ა) თუ $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n ნებისმიერი მთელი რიცხვია), მაშინ $f(2a) = 2f(a)\sqrt{1 - f^2(a)}$; თუ $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, მაშინ $f(2a) = -2f(a)\sqrt{1 - f^2(a)}$; 1520. დ) 1, თუ $a = 0$ და, $\sin^2 a$, თუ $a \neq 0$. 1521. ა) $1 + \frac{\pi^2}{4}$; ბ) 0; გ) $\sin 2$, თუ $a = 0$, და $1 + (2 - a^2)^2$, თუ $a \neq 0$. 1534. ყველა ნამდვილი რიცხვის ერთობლიობა. 1538. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. 1539. $1 \leqslant x < 4$. 1542. $x \leqslant -2$; $x \geqslant 6$. 1543. $-\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1$. 1547. $x < 2$; $x > 4$. 1548. $0 < x \leqslant 1$. 1550. $0 < x < \frac{5}{2}$; $x > 3$. 1552. $x \neq 0$; $x \neq \frac{2}{(2n+1)\pi}$ 1553. $x \neq n$. 1557. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; $x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi$. 1563. $x \geq 0$. 1565. $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. 1568. გ) $y > -2$; ე) $y \leqslant 0$; ვ) $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$. 1569. ბ) იხ. ნახ. 1* და 2*. 1570. როცა $x < -\frac{3}{2}$, კლებულობს; როცა $x > -\frac{3}{2}$, იზრდება. 1572. კლებულობს, როცა $x \leqslant -5$ და $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$; იზრდება, როცა $-5 \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2}$ და $x \geqslant 2$. 1576. იზრდება, როცა $-\frac{5}{6}\pi + n\pi < x < \frac{1}{6}\pi + n\pi$. 1579. იზრდება ყოველ ინტერვალში, რომელიც არ შეიცავს $x = 2$

წერტილს. 1581. კლებულობს, როცა $n\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 4n\pi$; იზრდება, როცა $2\pi + 4k\pi \leqslant x \leqslant 4\pi + 4k\pi$. 1584. კლებულობს ყოველ ინტერვალში, რომელიც არ შეიცავს $x=0$ წერტილს. 1585. მითითება. $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. 1586. ა) ყველგან კლებულობს; ბ) ყველგან კლებულობს. 1588. საერთოდ რომ ვთქვათ, არა. 1590. $x_{min}=1$, $y_{min}=5$. 1593. $x_{min}=2$, $y_{min}=-1$. 1597. $x_{max}=-a$, $y_{max}=a^2$. 1598. $x_{min}=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $y_{min}=-1$; $x_{max}=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $y_{max}=1$. 1600. $x_{min}=-\frac{3}{4}\pi+2n\pi$, $y_{min}=-\sqrt{2}$; $x_{max}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y_{max}=\sqrt{2}$. 1601. -15; $\frac{1}{8}$. 1602. 0; 42. 1603. $-\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 1606. ლუწი ფუნქციებია 3) და 5); კენტი 1) და 2). დანარჩენი ფუნქციები არ მიეკუთვნება არც ლუწს და არც კენტს. 1609. ერთადერთი ასეთი ფუნქციაა $y=0$ ფუნქცია. 1610. ა) $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $f(-x)=\pm f(x)$ პირობას, ამასთან, x-ის ზოგ მნიშვნელობას შეესაბამება „+" (პლუსი) ნიშანი, ხოლო ზოგს „—" (მინუსი) ნიშანი. ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციის ლუწობის შესახებ, საერთოდ რომ ვთქვათ, არავითარი დასკვნის გაკეთება არ შეიძლება; ბ) $f(x)=0$. 1611. ა) არა; ბ) კი; მაგალითად, $y=x^3$. 1613. π. 1614. 4π. 1615. $\frac{\pi}{3}$. 1616. π. 1617. π.



ნახ. 1*.



ნახ. 2*.

1618. 3π. 1619. $\frac{2\pi}{3}$. 1620. π. 1621. $\frac{\pi}{2}$. 1625. $y=\sqrt[3]{x}$. 1626. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 1627. $y=\frac{1-x}{1+x}$ მოცემული და მისი შექცეული ფუნქციები ერთმანეთს ემთხვევა. ამ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები მოცემულია $x \neq -1$ უტოლობით, ხოლო ცვლილების არეები $y \neq -1$ უტოლობით. 1628. $-\sqrt{x}$. 1632. ა) არა; ბ) კი, გ) არა. 1633. ა) კი; ბ) კი; გ) კი. 1634. ა) კი; ბ) არა; გ) კი; დ) არა. 1660. 0. 1661. -10. 1662. 1. 1663. $\frac{1}{2}$. 1664. $\frac{7}{8}$. 1665. 0. 1666. -2. 1667. $\frac{2}{2\sqrt{a}}$. 1668. -2.

1669. $\frac{1}{4}$. 1670. $\frac{2}{3}$. 1671. 4. 1672. 4. 1673. $\frac{1}{4}$. 1674. 3. 1675. $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$.
1677. 1. მითითება. შემოიტანეთ ახალი ცვლადი $y=\frac{x}{2}$. 1678. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. მითითება. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$. 1685. 2. 1687. 9. 1688. 1. მითითება. შემოიტანეთ ახალი ცვლადი $y=x-\frac{\pi}{3}$. 1690. 1. 1692. -10. 1694. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. 1695. $-\frac{9}{10}$. 1696. 48. 1698. $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$. 1700. 1. 1701. 0,02. 1702. $\frac{\sin a\cos a}{a}$ თუ $a\neq 0$; 1, თუ $a=0$. 1703. $2<x\leqslant 7$. 1704. $-3<x<0$; $2<x<5$. 1705. $x\neq\frac{n\pi}{2}$.
1706. ყველა არამთელი დადებითი რიცხვის ერთობლიობა. 1708. $1-5\sqrt{5}\leqslant y\leqslant 1+5\sqrt{5}$. 1709. $0,1\leqslant y\leqslant 10$. 1710. საერთოდ რომ ვთქვათ, არა. 1715. $2^x=(2^{x-1}+2^{-x-1})+(2^{x-1}-2^{-x-1})$. 1722. 3. 1723. $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. 1724. $\frac{1}{\sqrt{a}}$. 1725. $\frac{2}{3}$. 1726. 0.
1727. 4. 1728. $-\frac{1}{2}$. 1729. 0. 1730. $\frac{a}{b}$. 1731. 1. 1732. 1. 1734. 1. 1735. 0.
1736. $\cos a\sqrt{\frac{a}{\sin a}}$. 1737. 0.

წარმოებული და მისი გამოყენება ფუნქციათა გამოსაკვლევად X

1741. ა) v_0; ბ) v_0+at_0. 1742. ა) 0 $\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$; ბ) $\frac{1}{12}$ $\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$; გ) 75 $\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$. 1743. $\frac{1}{2\sqrt{t}}$.
1744. ა) 1; ბ) $4x$; გ) $2(x+1)$; დ) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; ე) $-2x$; ვ) $3x^2$. 1745. ა) 4,8 $\frac{\text{გრად.}}{\text{წმ}}$; ბ) 4 $\frac{\text{გრად.}}{\text{წმ}}$. 1746. $\frac{\text{ამპერი}}{\text{წმ}}$. 1747. ორივე ფუნქცია წარმოებადია $x=0$ წერტილში.
1748. იგივე წრფე. 1749. ა) აქვს, $y=-x$; ბ) არა; გ) აქვს, $y=x$. 1751. მრუდებისადმი მხებთა შორის კუთხე ამ მხებთა გადაკვეთის წერტილში (იხ. ნახ. 3*) 1752. ა) $2x+y+1=0$; ბ) $y=0$; გ) $2x-y-1=0$. 1753. $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} 6$. 1754. (0, 0) წერტილში. $\frac{\pi}{4}$ კუთხით და (1, 1) წერტილში $\operatorname{arc\,tg}2-\frac{\pi}{4}$ კუთხით. 1757. $2x+1$. 1758. $2x-2$. 1759. $8x-4$.

ნახ. 3*.

1760. $-4x+15$. 1761. $18-20x$. 1762. -4. 1763. $-20x^3-4x$. 1764. $5x^4(3-4x)$. 1765. $4x^3+2x$. 1766. $-140x^6+45x^2-24x+3$. 1767. $4x^3$. 1768. $2x(1-2x^2)$.
1769. $8(2x-3)^3$. 1770. $2(x^2+ax)(2x+a)$. 1771. $3x^2(2x^3-b+a)$. 1774. $-\frac{2}{(1+x)^2}$.
1775. $-\frac{2}{(5-4x)^2}$. 1776. $-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$. 1777. $\frac{4x-14x^3}{(1-7x)^2}$. 1778. $-\frac{15}{2(3x-2)^2}$.

1779. $\frac{5}{(6-x)^2}$. 1780. $-\frac{70}{(3-10x)^3}$. 1781. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ 1783. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$. 1784. $\frac{\sqrt[6]{45}}{2\sqrt{x}}$. 1785. $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ 1786. $-\frac{3}{2\sqrt{2}\,x^2\sqrt{x}}$. 1787. $5+\frac{1}{x^2}$. 1789. $\frac{-21+3x+5x^4}{2x^2\sqrt{x}}$ 1790. $10x^4-1$. 1791. $21x^6-36x^5-12x^2+10x$. 1792. $-3x^2-6x+6$. 1793. $-6+68x^3$. 1794. $5x^4-21x^2-2x+10$. 1795. $2x(x^6+1)(7x^6+1)$. 1796. $24x^2(1-3x^4)^2(1-15x^4)$. 1797. ა) $y=x$; ბ) $y=1$; გ) $y=-1$; დ) $4x-4\sqrt{2}y+(4-\pi)=0$; ე) $x+y-\pi=0$. 1803. $\sin 2x$. 1804. $-\sin 2x$. 1805. $\cos 2x$. 1806. $2x\sin x+x^2\cos x$. 1809. $(5+\cos x)(x^3-\cos x)+(5x+\sin x)(2x+\sin x)$. 1812. $-2\sin 2x$. 1815. 0. 1816. $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sin x+2x\cos x)$.

1818. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 1820. $10(2x+3)^4$. 1821. $6(x+7)^5$. 1822. $-35(1-5x)^6$. 1823. $4\cos 4x$. 1824. $\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$. 1828. $A\omega\cos(\omega x+\varphi)$. 1829. $A\omega\sin(\varphi-\omega x)$. 1833. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. 1834. $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$. 1836. ა) $18\frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}$; ბ) $730\frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}$. 1837. $-\frac{1}{4t\sqrt{t}}$. 1838. $y'=3(x+2)^2$; $y''=6(x+2)$; $y'''=6$; $y^{IV}=y^{V}=\ldots=0$. 1839. $y'=6(2x-1)^2$; $y''=24(2x-1)$; $y'''=48$. $y^{IV}=y^{V}=\ldots=0$. 1842. $y'=-\sin x$; $y''=\cos x$; $y'''=\sin x$: $y^{IV}=\cos x$ და შემდეგ ყველაფერი მეორდება. 1845. 150-ჯერ. 1846. $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}\cos x+\frac{3^{100}}{4}\sin 3x$. 1847. 15360. 1848. 780. 1849. $-2300\cdot 2^{22}$. 1851. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$. 1852. 4. 1853. ა) 10; დ) 7; ვ) 6.

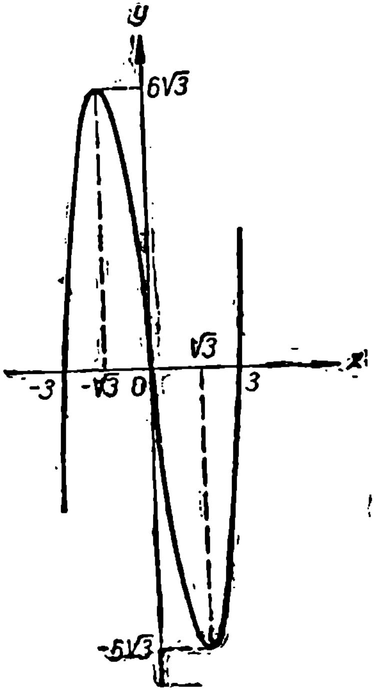
1855. ა) $89-28\sqrt{10}$; ბ) $112+64\sqrt{3}$; გ) $176\sqrt{6}-304\sqrt{2}$. 1856. 4. 1859. მ ი თ ი თ ე ბ ა $11^{10}-1=(10+1)^{10}-1$; $(10+1)^{10}$ დაშალეთ ნიუტონის ბინომის ფორმულის მიხედვით, ამოცანის სრული ამოხსნისათვის უნდა დამტკიცდეს, რომ ბინომიალური კოეფიციენტები მთელი რიცხვებია. 1860. ა) 45; დ) 630 1862. ა) 3; ბ) 4; გ) 5.

1863. 66. 1864. $-\frac{5120}{9}$. 1865. 1,12. 1868. 0,97. 1871. 1,025. 1875. 0,99. 1877. 1,01.

1878. 0,98. 1881. როცა $x<2$, იზრდება, როცა $x>2$, კლებულობს. 1882. როცა $|x|<1$. კლებულობს; როცა $|x|>1$, იზრდება. 1883. როცა $-1<x<0$ და $x>1$, იზრდება, ხოლო როცა $x<-1$ და $0<x<1$, კლებულობს. 1884. როცა $x<-5$ და $x>1$ იზრდება: როცა $-5<x<1$ კლებულობს. 1885. ყველგან კლებულობს. 1889. როცა $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi$, იზრდება; როცა $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$, კლებულობს.

1890. როცა $\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{3}{4}\pi+2n\pi$, კლებულობს, როცა $\frac{3}{4}\pi+2k\pi<x<\frac{9}{4}\pi+2k\pi$, იზრდება. 1891. იზრდება. 1892. კლებულობს. 1893. იზრდება. 1894. ლებუ-

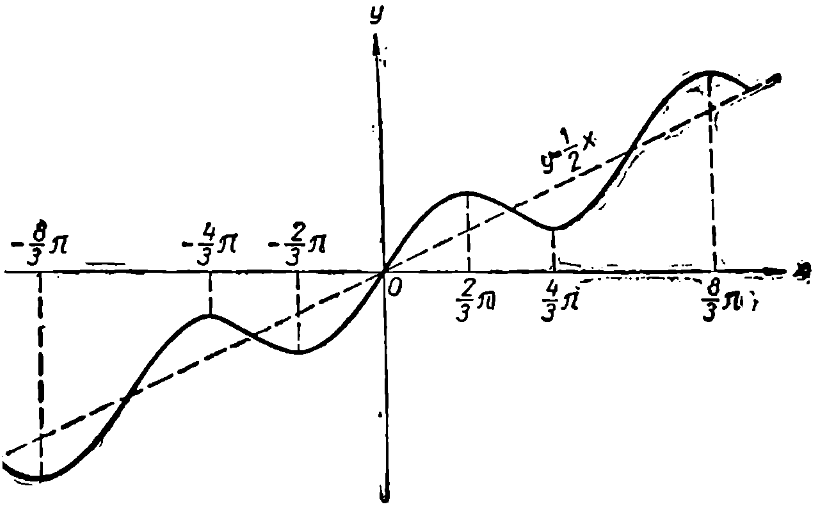
ლობს. 1895. როცა $-1<x<0$ და $0<x<1$, კლებულობს; როცა $|x|>1$. იზრდება. 1896. როცა $x<0$, კლებულობს; ხოლო, როცა $x>0$, იზრდება. 1897. ყველგან კლებულობს. 1898. $-\frac{37}{4}$ (მინიმუმი). 1900. $-\frac{a^2}{8}$ (მინიმუმი). 1902. მინიმუმი 110, მაქსიმუმი 174. 1903. მინიმუმი -177, მაქსიმუმი -39. 1904. მინიმუმი -1. 1905. მინიმუმი $-\sqrt{2}$, მაქსიმუმი $\sqrt{2}$. 1906. მინიმუმი -2, მაქსიმუმი 2. 1908. ლოკალური ექსტრემუმები არა აქვს. 1910. $2n\pi+1$ და $\frac{\pi}{2}+2k\pi-1$. 1916. ა) $-1{,}375$; $1{,}375$; ბ) -2; 2. 1917. ა) -2; $\sqrt{3}$; ბ) $-\sqrt{3}$; 1. 1919. ა) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0; ბ) $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, გ) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1920. იხ. ნახ. 4*. 1928. იხ. ნახ. 5*. 1937. $t=31$ წმ. 1939. 25. მ/წმ და 37 მ/წმ. 1940. $2x-y+5=0$. 1941. $6x-y-3=0$. 1942. $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1943. $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1944. ა) $(1,\ 4)$; ბ) $(-2,\ -11)$. 1945. $\frac{55}{9}x^4$. 1947. 51. 1956. სიგანე უნდა უდრიდეს $\frac{d}{\sqrt{3}}$-ს. 1957. $-\frac{2}{(2x+5)^2}$. 1958. $-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. 1959. $3(x-3)^2-\frac{3}{(x-3)^4}$. 1960. $2\sin 4x-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ 1961. $(1-2x-x^2)\cos x-(x+1)^2\sin x$ 1963. $-\sin 4x$.



ნახ. 4*.

კომპლექსური რიცხვები XI

1967. ა) კი; ბ) არა; გ) კი. 1968. ა) არა. ბ) არა. 1972. ა) $a=c$, $b=d$; ბ) ან $a\neq c$, ან $b\neq d$; შესაძლებელია, რასაკვირველია, რომ არც a უდრიდეს c-ს და არც b უდრიდეს d-ს. 1973. ა) $x=0$, $y=-3$; ბ) $x=1$, $y=-1$. 1975. ა) $x=\frac{11}{17}$, $x=-\frac{2}{17}$; გ) $x=t$, $y=\frac{2}{3}(4-t)$, სადაც t ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. 1977. ა) $x=-3$, $y=-6$; ბ) $x=-\frac{52}{77}$, $y=-\frac{194}{77}$; გ) $x=-2$, $y=-\frac{9}{2}$. 1979. $-13+13i$. 1982. $33+56i$. 1983. $1-i$.



ნახ. 5*

1989. ა) განსაზღვრა; ბ) თეორემა. **1990.** $2+2i$. **1991.** $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$. **1993.** მითითება. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. პროპორციის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ b და d რიცხვები განსხვავდება ნულისაგან და $ad=bc$. **1998.** ა) არა; ბ) არა; გ) კი. **2001.** ა) $a=b=0$; ბ) a და b რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. **2002.** ა) $x=3$, $y=-1$; ბ) $x=2$, $y=-2$; გ) $x=y=1$; დ) $x=t$, $y=-2t$, სადაც t ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია; ე) ტოლობა არ სრულდება x-ისა და y-ის არც ერთი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის. **2004.** ა) ნამდვილი რიცხვები; ბ) წმინდა წარმოსახვითი რიცხვები. **2008.** $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$. **2011.** $-i$. **2014.** $-1-i$. **2015.** 0. **2016.** 0. **2017.** 0, თუ $n=4k$; i, თუ $n=4k+1$; $i-1$, თუ $n=4k+2$; -1, თუ $n=4k+3$. **2018.** -1. **2019.** i. **2020.** ა) $\pm\frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)$; ბ) $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$. **2024.** ა) $1\pm i$. **2029.** ა) $a(x^2-10x+26)=0$. **2030.** $a(x^2+20x+200)=0$. **2031.** $a(2x^2-14x+205)=0$. **2032.** 3; $-\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. **2033.** -3; $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. **2035.** $-\sqrt[3]{5}$; $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. **2039.** $x_1x_2x_3=6$. **2042.** $\pm\sqrt[4]{2}$; $\pm\sqrt[4]{2}i$; **2043.** $-\frac{\sqrt[4]{12}(1\pm i)}{2}$, $\frac{\sqrt[4]{12}(1\pm i)}{2}$. **2045.** 0. **2046.** 7. **2047.** 1) $4\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; 2) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$. 4) $13[\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi)]$, სადაც $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}$; 5) $25(\cos 0+i\sin 0)$; 6) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$; 7) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. 8) $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; 9) $5[\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi)$, სადაც $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$.

2048. 2) წრეწირზე, რომლის რადიუსი არის 2 და ცენტრი — კოორდინატთა სათავე; 3) წრეში, რომლის რადიუსია 3 და ცენტრი — კოორდინატთა სათავე; 5) რგოლში კონცენტრულ წრეწირებს შორის, რომელთა რადიუსებია 2 და 3 და ცენტრი — კოორდინატთა სათავე თვით წრეწირების გამორიცხვით. 6) სხივზე, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან გამოდის და ქმნის x-თა ღერძთან $\frac{\pi}{3}$ კუთხეს. **2049.** მხოლოდ, როცა $r=0$. **2050.** შეუძლიათ, როცა $\varphi=n\pi$. **2051.** $2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2}+i\sin\frac{a}{2}\right)$, თუ $-\pi+2k\pi<a<\pi+2k\pi$; $-2\cos\frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{a}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{a}{2}+\pi\right)\right]$, თუ $\pi+2k\pi<a<3\pi+2k\pi$. **2054.** $2(\cos 340^\circ+i\sin 340^\circ)$. **2055.** $3(\cos 195^\circ+i\sin 195^\circ)$. **2056.** ა) $15i$; ბ) $-7+7\sqrt{3}i$; გ) -24; დ) 42. **2057.** ა) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; ბ) $2^{49}(1+\sqrt{3}i)$; გ) 1. **2059.** ა) i; ბ) $\cos 190^\circ+i\sin 190^\circ$. **2062.** ა) $\sqrt[5]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; ბ) $\cos\left(\frac{1}{10}\pi+\frac{2}{5}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{10}\pi+\frac{2}{5}k\pi\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$. **2066.** როცა $|a|=|b|\neq 0$. **2069.** -4. **2070.** -8. **2071.** 0. **2073.** $-2i$. **2076.** ა) $a(x^2+32x+260)=0$; ბ) $a(5x^2+14x+13)=0$. **2077.** არა. **2078.** ა) $x=2t$; $y=t$, სადაც t ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ბ) x და y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად არ უდრის ნულს. **2088.** ბ) $\cos(-2a)+i\sin(-2a)$. **2088.** 1024.

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი XII

2099. $2n$ ნაწილი. **2101.** როცა $n=1$, დებულება მართებულია. ვთქვათ, იგი მართებულია, როცა $n=k$, მაშინ $(1+a)^{k+1}=(1+a)^k\cdot(1+a)\geq(1+ka)(1+a)=1+ka+a+ka^2=1+(k+1)a+ka^2>1+(k+1)a$.

ამოცანები ალგებრისა და ელემენტარული ფუნქციების მთელი კურსის გასამეორებლად

2109. თუ $a>2b$, მაშინ $\frac{a-2b}{c}$ ღირს შემდეგ; თუ $a\leqslant b$, მაშინ პირველ საწყობში არასოდეს არ იქნება ორჯერ მეტი ნახშირი, ვიდრე მეორეში. **2110.** 15 სთ და 10 სთ.

2111. 50 კმ/სთ, 2112. 12, 10 და 15 სთ. 2113. 10 კმ და 5 კმ. 2114. 1000 კმ/სთ და 800 კმ/სთ. 2115. 9; 28. 2116. 5 კმ/სთ და 3,5 კმ/სთ. 2117. 10 კაცი. 2118. 35 დღე-ღამე. 2119. 500 მ. 2120. ა) თუ $a\neq\pm1$, მაშინ $x=\frac{1}{a-1}$. თუ $a=-1$ მაშინ x ნებისმიერი რიცხვია. თუ $a=1$, მაშინ ფესვები არა აქვს; გ) ფესვები არა აქვს. 2121. ა) თუ $a<0$, მაშინ ფესვები არა აქვს, თუ $a\geqslant0$, მაშინ $x=\frac{3\pm a}{2}$; ბ) -1, 2. 2122. ა) $x=\frac{2a}{a^2-a+1}$, $y=\frac{a^2-a-1}{a^2-a+1}$; ბ) თუ $a\neq\pm2$, მაშინ $x=\frac{1}{2-a}$, $y=\frac{1-a}{a-2}$; თუ $a=2$, მაშინ ამონახსნები არა აქვს; თუ $a=-2$, მაშინ $x=t$, $y=-\frac{1+2t}{2}$, სადაც t ნებისმიერი რიცხვია; გ) როცა $a=0$ და $a=1$, ამონახსნები არა აქვს; როცა $a\neq0$ და $a\neq1$, მაშინ $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{1-a}$. 2124. ა) $x=5$, $y=4$ და $x=-4$; $y=-5$. ბ) $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$ და $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{2}{3}$; გ) თუ $b\neq0$, მაშინ $x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+b\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-b\right)$; თუ $b=0$, $a\neq0$, ამონახსნები არა აქვს; თუ $a=b=0$, მაშინ $x=y=t$, სადაც t ნებისმიერი რიცხვია. 2129. $\frac{9}{4}<x<\frac{7}{2}$. 2130. $-1<a<2$. 2131. ა) 10; ბ) 1; გ) 5.

2132. ა) $a<1$; $a>2$; ბ) $0<a<1$; $2<a<3$; გ) $a<0$; $a>3$. 2133. ა) $x\leqslant2$; ბ) x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია; გ) $2\leqslant x\leqslant4$. 2135. ა) $3^{600}>6^{300}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. $3^{600}=(3^2)^{300}=9^{300}$. 2136. თუ $k>100\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$, მაშინ მოსახლეობის ყოველწლიური ნამატია $\frac{k-100(\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{2}-1}$ პროცენტი, როცა $k\leqslant100\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$, მაშინ ამოცანის პირობები ერთმანეთის საწინააღმდეგოა. 2137. თუ φ კუთხე ბოლოვდება I მეოთხედში, მაშინ $\cos\varphi=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{5}{12}$; თუ φ კუთხე ბოლოვდება II მეოთხედში, მაშინ $\cos\varphi=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{5}{12}$. 2138. თუ φ კუთხე ბოლოვდება II მეოთხედში, მაშინ $\sin\varphi=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{4}{3}$; თუ φ კუთხე ბოლოვდება III მეოთხედში, მაშინ $\sin\varphi=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}$. 2140. $\frac{1}{3}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $2\sqrt{2}$. 2141. $\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{13}$, $-\frac{5}{12}$, $-\frac{12}{5}$. 2142. $-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\frac{3}{\sqrt{13}}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$. 2148. $\frac{3}{2}\left(\alpha\neq\frac{n\pi}{2}\right)$. 2149. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$. 2150. ა) 1; ბ) 0. 2151. $a\leqslant\frac{1}{4}$; ა) ბ) $-2\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$. 2154. ა) $\sqrt{0,9}$; ბ) $-\frac{3}{5}$; გ) $-\frac{1}{3}$. 2156. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$. 2157. ფესვები არა აქვს. 2158.

$\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **2159.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi$. **2160.** $\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$. **2161.** ფესვები არა აქვს. **2162.** $-\frac{\pi}{3}+n\pi$. **2163.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\operatorname{arc\,tg} 2+k\pi$. **2164.** ფესვები არა აქვს. **2166.** $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\frac{\pi}{6}+k\pi$. **2167.** $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **2168.** $n\pi$; $-\operatorname{arc\,tg} 3+k\pi$. **2169.** $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{n\pi}{2}$, **2170.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\operatorname{arc\,tg} 2+k\pi$. **2171.** $\frac{n\pi}{4}$. **2172.** $\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3}$. **2173.** $\frac{\pi}{6}+2n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **2174.** $(2n+1)\pi$; $\operatorname{arc\,tg} 4+k\pi$, **2175.** $\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-3}{4}+2n\pi$. **2176.** $\frac{\pi}{12}+n\pi$; $\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6}$. **2177.** $2n\pi$; $-\frac{\pi}{3}+$ $+2k\pi$; **2178.** $n\pi$; $-\frac{\pi}{6}+k\pi$. **2179.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$. **2180.** $x=\frac{\pi}{3}+2n\pi$, $y=\frac{\pi}{3}-$ $-2n\pi$ $x=2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}+2)+2n\pi$; $y=\frac{2\pi}{3}-2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}+2)-2n\pi$. **2181.** $x=$ $=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$, $y=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, **2182.** $x=1(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; $y=\pm\frac{5}{6}\pi+2k\pi$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+n\pi$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **2183.** $x=\frac{\pi}{3}+(n+k)\pi$, $y=\frac{\pi}{3}+(n-k)\pi$; $x=-\frac{\pi}{3}+(n+k)\pi$, $y=-\frac{\pi}{3}+$ $+(n-k)\pi$. **2185.** 9 და 21. **2186.** 2, 4, 8, 12 ან $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. **2187.** 2, 10, 18 და 2, 6, 18. **2188.** $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. **2189.** $\frac{\pi a^2}{9}$; $\frac{2\pi a}{\sqrt{3}}$. **2190.** 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$

2194. 1. **2195.** $\frac{3}{2}$. **2196.** 0. **2197.** $\frac{2}{\lg 3-\lg 2}$. **2198.** 2; -2, **2199.** თუ $a>1$, მაშინ $x=\frac{a}{a-1}$; თუ $a\leqslant 1$, ფესვები არა აქვს. **2200.** 100; $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. **2202.** 1; $\frac{1}{2}$; $\sqrt[16]{8}$. **2203.** $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{12}$ **2204.** 10; $\sqrt[9]{10}$. **2205.** 1. **2206.** 4. **2207.** 1; 3; $\frac{1}{3}$. **2208.** $\frac{\pi}{4}+2n\pi$. **2212.** $x<-5$. **2213.** ა) $x=4$, $y=8$; $x=-4$; $y=-8$; ბ) $x=8$, $y=4$; $x=4$; $y=8$; დ) $x=7$, $y=3$; $x=-7$, $y=-3$; ე) $x=2, y=32$, $x=32$, $y=2$. **2214.** არაუმეტეს 5 ფირფიტისა. **2216.** გ) $2\leqslant x<5$; $x\neq 0$ და $x\neq\frac{1}{3}$; ე) ყველა დადებითი რიცხვის ერთობლიობა, გარდა $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ და $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

2223. ა) 9; ბ) 6; გ) $\frac{2}{3}$; დ) $2\cos a$. **2226.** ა) $8+53i$; დ) -8. **2228.** ა) $x=1$,

$y=2$; $x=-1$, $y=-2$; ბ) $x=0$, $y=7$; $x=\frac{9}{2}$, $y=18$. **2230.** $\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$. **2233.** $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$; $\sin 5\varphi = \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi\cos^2\varphi + 5\sin\varphi\cos^4\varphi$. **2235.** $x-4y+4=0$. **2236.** $2x-y-1=0$; $2x+y-3=0$. **2237.** ა) $4\sin^3 x\cos x$; ბ) $6\sin^2 2x\cos 2x$; გ) $-5\cos^4(x-1)\sin(x-1)$; დ) $4\cos^3(2-x)\sin(2-x)$; ე) $10x(x^2+1)^4$; ვ) $-6(3-2x)^2$. **2238.** $A\omega\cos(\omega t+\varphi)$; $-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$. **2239.** შეუძლიათ, მაგალითად, x და $x+1$. **2240.** ა) -1293600; ბ) 1; გ) -100.

შეკრების ტრიგონომეტრიული თეორემები VII

ფუნქციები და ზღვრები IX

წარმოებული და მისი გამოყენება ფუნქციათა გამოსაკვლევად — X

კომპლექსური რიცხვები XI

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი XII

მთარგმნელები: ა. ხარაძე, ტ. ტყემალაძე
რედაქტორი შ. მირცხულავა
მხატვრული რედაქტორი მ. ასათიანი
ტექრედაქტორი ნ. ჭყოიძე
კორექტორი მ. კებულაძე
გამომშვები მ. ყულოშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20/ V-72 წ., ქაღალდის ზომა 60×94. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 22,88.
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 19,97.

ტირაჟი 30000 შეკვ. № 669.

ფასი 84 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, კამოს ქ. 18.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Камо № 18.

1973

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოს ბეჭდვითი სიტყვის სახელმწიფო კომიტეტის მთავარპოლიგრაფმრეწველობის ბეჭდვითი სიტყვის კომბინატი.
თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.

Комбинат печати Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров
Грузинской ССР по печати
Тбилиси, ул. Марджанишвили № 5.