საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია

ნ. მუსხელიშვილი

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები

ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანები და მათი ზოგიერთი გამოყენება მათემატიკურ ფიზიკაში

გამომცემლობა „მეცნიერება"
თბილისი
1982

წიგნში გადმოცემულია კოშის ტიპის ინტეგრალებისა და სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების მათემატიკური აპარატი, რომლის დამუშავებაში აქტიურად მონაწილეობდნენ ავტორი და მისი მოწაფეები. ეს აპარატი ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ეფექტურ საშუალებას წარმოადგენს. წიგნის მნიშვნელოვანი ნაწილი პოტენციალთა თეორიის, დრეკადობის თეორიისა და მათემატიკური ფიზიკის სხვა ამოცანათა ამოსახსნელად ამ აპარატის გამოყენებას ეძღვნება.

წიგნის ქართულ გამოცემას დაემატა მესამე რუსული გამოცემის შემდეგ გამოქვეყნებული მონოგრაფიული ხასიათის შრომების ბიბლიოგრაფია.

რედაქტორები: საქ. სსრ მეცნ. აკად. წევრ-კორ. ბ. ხ ვ ე დ ე ლ ი ძ ე
ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტ., პროფ. გ. მ ა ნ ჯ ა ვ ი ძ ე

მ $\frac{20203}{\text{М } 607(06) - 82}$ 4 — 81

მესამე გამოცემის წინასიტყვაობა

ეს გამოცემა წინასაგან უმთავრესად იმით განსხვავდება, რომ დაემატა მითითებები უკანასკნელ ხანებში გამოქვეყნებულ ბევრ შრომაზე, რომლებიც მჭიდროდაა დაკავშირებული ამ წიგნში გადმოცემულ შედეგებთან. ასეთი შრომების სიმრავლის გამო ამას თავს ვერ გავართმევდი იმ მეტად მნიშვნელოვანი დახმარების გარეშე, რაც გამიწია ბ. ხვედელიძემ, რომელმაც გულმოდგინედ შეისწავლა სათანადო ლიტერატურა. დიდ მადლობას ვუხდი მას ამ დახმარებისათვის, რომელმაც ბევრი დრო და ბეჯითი შრომა მოანდომა. გულითად მადლობას ვუხდი აგრეთვე გ. მანჯავიძესა და თ. გეგელიას მნიშვნელოვანი შენიშვნებისათვის, რომლებიც მოსაზღვრე დარგების ლიტერატურას შეეხება.

სასიამოვნო მოვალეობად მიმაჩნია დიდი მადლობით მოვიხსენიო პროფესორები ლ. ბერგი (L. Berg) და ჰ. შუბერტი (H. Schubert) — ამ წიგნის ახლახან გამოსული გერმანული თარგმანის (გერმანიის მეცნიერებათა აკადემიის გამოცემა, ბერლინი, 1965 წ.) რედაქტორები, აგრეთვე მთარგმნელები დოქტორი ი. ჰირხე (I. Hirche) და დოქტორი რ. რიდელი (R. Riedel) რუსულ დედანში გაპარულ რიგ ბეჭდვით შეცდომასა და უზუსტობაზე მითითებისათვის.

წიგნის ბოლოს VI დამატების სახით მოთავსებულია პროფესორ ბ. ბოიარსკის ჯერ კიდევ გამოუქვეყნებელი სტატია, რომელიც ამ მიზნით თავაზიანად გადმომცა ავტორმა.

დასასრულ, უნდა აღვნიშნო, რომ წიგნის ტექსტში არ მოხერხდა საკმაოდ ბევრი ისეთი შრომის მოხსენიება, რომლებიც ყურადღებას იმსახურებენ.

არც ის არის გამორიცხული, რომ ზოგიერთი მეტად მნიშვნელოვანი შრომა ყურადღების გარეშე დაგვრჩა, რისთვისაც ბ. ხვედელიძე და მე წინასწარ ბოდიშს ვუხდით მათ ავტორებს.

ნ. მუსხელიშვილი

თბილისი, 1967 წლის ივლისი

მეორე გამოცემის წინასიტყვაობა

ამ გამოცემაში პირველი გამოცემის (1946 წ.) ტექსტი არსებითად გადამუშავდა, მაგრამ წიგნის საერთო ხასიათი ადრინდელი დარჩა. წიგნის უდიდესი ნაწილი ფაქტიურად ხელახლა დაიწერა.

I თავის § 26-ში გადმოცემულმა შედეგებმა, რომლებიც თითქმის უშუალოდ გამომდინარეობს §§ 22—25-ის შედეგებიდან, რომელთა მთავარი ნაწილი პირველ გამოცემაშიაც იყო მოყვანილი, საშუალება მოგვცეს გადმოცემის საგრძნობი გართულების გარეშე IV და V თავების შედეგებისათვის მეტი ზოგადობა და მთლიანობა მიგვენიჭებინა. წიგნის შინაარსის უფრო მეტად გამთლიანების მიზნით ასევე განზოგადდა ბევრი სხვა შედეგიც.

არსებითად გადამუშავდა VI თავი, რომელშიც სრულიად შეცვლილია ფუნქციათა სისტემისათვის შეუღლების სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის მეთოდი, რომელიც ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას ეყრდნობოდა. აქ კი გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაზე დაფუძნებული მეთოდი, რომელსაც გაცილებით მარტივად მივყავართ მიზნამდე.

ახლანდელი გამოცემიდან ამოღებულია ზოგიერთი გამოყენება დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში (პირველი გამოცემის IV თავის IV კარი), რომლებიც მიზანშეწონილად ვცანი გადამეტანა ჩემი მეორე წიგნის „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანა“ მესამე გამოცემაში (1949 წ., მეოთხე გამოცემა გამოვიდა 1954 წ.), მაგრამ სამაგიეროდ მოყვანილია (V თავის IV კარში) ზოგიერთი სხვა, ნაკლებად ელემენტარული ხასიათის გამოყენება დრეკადობის თეორიაში.

ამ წიგნის პირველი გამოცემისა და ი. რადოკისეული ინგლისური თარგმანის (გრონინგენი, 1953 წ.) გამოსვლის შემდეგ გამოქვეყნდა მრავალი ნაშრომი, რომელნიც მჭიდროდ არიან დაკავშირებული ამ წიგნში გადმოცემულ შედეგებთან. მიუხედავად იმისა, რომ ბევრი ამ ნაშრომთაგანი მნიშვნელოვან ინტერესს იწვევს, მათ, იშვიათი გამონაკლისის გარდა, ამ წიგნის შინაარსზე გავლენა არ მოუხდენიათ, ვინაიდან სათანადო შედეგების გადმოცემა წიგნის განზრახული ჩარჩოებიდან შორს გაგვიყვანდა და მის შედარებით ელემენტარულ ხასიათს დაარღვევდა.

მე მაინც შევეცადე მოკლედ მიმეთითებინა სხვა ავტორთა მიერ მიღებულ ყველა მეტ-ნაკლებად მნიშვნელოვან ახალ შედეგზე. ამ მხრივ ფასდაუდებელი დახმარება გამიწიეს ჩემმა კოლეგებმა ნ. ვეკუამ, გ. მანჯავიძემ და ბ. ხვედელიძემ, განსაკუთრებით კი ამ უკანასკნელმა, რომელმაც, ამასთანავე, მთლიანად წაიკითხა ხელნაწერი და მთელი რიგი მნიშვნელოვანი შენიშვნა მომცა. აღნიშნულ პირებს უღრმეს მადლობას მოვახსენებ.

ნ. მუსხელიშვილი

თბილისი, 1960 წლის აპრილი

პირველი გამოცემის წინასიტყვაობიდან

ეს წიგნი გათვალისწინებულია მკითხველთა საკმაოდ ფართო წრისათვის, კერძოდ, მათთვის, ვინც დაინტერესებულია გამოყენებებით დრეკადობის თეორიაში, ჰიდრომექანიკასა და მათემატიკური ფიზიკის სხვა დარგებში. წიგნი მისაწვდომია იმათთვის, ვინც იცნობს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის საფუძვლებს. წიგნის კითხვის გასაადვილებლად ცალკე გამოყავი ფორმულირებები იმ დებულებებისა, რომელთა დამტკიცების მსვლელობა თავისთავად იმდენად ღირებული არ არის, რომ დამტკიცების გამოტოვებას ხელი შეეშალა საქმის არსის გაგებისათვის. გარდა ამისა, ის თავები და ნაწილები, რომლებიც სხვადასხვა გამოყენებას ეძღვნება, სადაც ეს შესაძლებელი იყო, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. იმედი მაქვს, რომ ამ წიგნში გადმოცემული მეთოდები შესაძლებელია ეფექტურად იქნეს მომარჯვებული გამოყენებითი ხასიათის ბევრი ამოცანის ამოსახსნელად. ზოგიერთი უმარტივესი გამოყენება პოტენციალთა თეორიაში, დრეკადობის თეორიასა და ჰიდრომექანიკაში თვით წიგნშია მოცემული.

წიგნის დაწერას ბიძგი მისცა ჩემმა მოხსენებებმა თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარზე 1940—1942 წლებში. სემინარის მონაწილეთა მიერ მიღებული შედეგებისა და უმთავრესად ი. ვეკუას ბრწყინვალე ნაშრომების გავლენით საკითხების წრე, რომელთა განხილვასაც ვვარაუდობდი, არსებითად შეიცვალა; ამიტომ მე დიდი და სავსებით გასაგები კმაყოფილებით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამ წიგნის შინაარსის უმეტესი ნაწილი ი. ვეკუასა და ჩემთან ერთად საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის ახალგაზრდა თანამშრომლების კოლექტიური შრომის შედეგად უნდა იქნეს მიჩნეული.

ნ. მუსხელიშვილი

თბილისი, 1944 წლის შემოდგომა

შესავალი

1°. უკანასკნელ წლებში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია სულ უფრო მეტ მნიშვნელობას იძენს გამოყენებით საკითხებში. ამ წიგნში ვიხილავთ მხოლოდ ერთგანზომილებიან[1] სინგულარულ განტოლებებს, რომლებშიც მონაწილე ინტეგრალები კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრითაა[2] განხილული.

ასეთი განტოლებების თეორიას საფუძველი ჩაეყარა ა. პუანკარესა და დ. ჰილბერტის შრომებში, უშუალოდ ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა კლასიკური თეორიის ჩამოყალიბების კვალდაკვალ, მაგრამ სინგულარულ-ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას მათემატიკოსთა ჯეროვანი ყურადღება დიდხანს არ ექცეოდა.

მაგრამ უკანასკნელ ხანებში ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიამ მნიშვნელოვნად წაიწია წინ და მას ახლა შეიძლება სავსებით დასრულებული სახე მიეცეს.

ეს თეორია განსაკუთრებით ეფექტური გახდება, თუ მოვიშველიებთ გარკვეული სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას. ამ ამოცანას, ჩვეულებრივ, რიმანის ან კიდევ ჰილბერტის ამოცანას უწოდებენ; ჩვენ მას შეუღლების ამოცანას ვუწოდებთ.

ამიტომ ჩვენს გადმოცემაში სინგულარულ განტოლებათა თეორია მჭიდროდ არის დაკავშირებული აღნიშნულ სასაზღვრო ამოცანასთან.

მათემატიკური ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნის ინტერესების გათვალისწინებით, ჩვენ რამდენადმე ვზღუდავთ შესასწავლ ინტეგრალურ განტოლებებსა და ამოცანების სასაზღვრო პირობებში მონაწილე საძიებელ და ცნობილ ფუნქციებს, რაც საგრძნობლად ამარტივებს მსჯელობებს, მაგრამ ასე აგებული თეორიის სისრულეზე გავლენას არ ახდენს.

გამოკვლევისა და ამოხსნის ძირითად აპარატს წარმოადგენს კოშის ტიპის ინტეგრალი, რომლის ელემენტარული თეორია გადმოცემულია I თავში. ეს თავი, ამას გარდა, მთელ რიგ უშუალო უმარტივეს გამოყენებას შეიცავს.

მკითხველის განსაკუთრებულ ყურადღებას მივაპყრობთ I თავის §§ 22—26-ის შედეგებს. მათ დამტკიცებაზე დახარჯული გულმოდგინე შრომა იმით

---

1 ამის ქვეშ ვგულისხმობთ, რომ ინტეგრების არე ერთგანზომილებიანია (წირია).

2 ზოგიერთი ავტორი გვთავაზობს ტერმინ „სინგულარულის" „განსაკუთრებულით" შეცვლას. მე ვტოვებ პირველ, საკმაოდ დამკვიდრებულ ტერმინს, კოშის გულიან ინტეგრალურ განტოლებათა (მხოლოდ ასეთებია ამ წიგნში განხილული) აღსანიშნავად; ტერმინი „განსაკუთრებული" კი, ვფიქრობ, მიზანშეწონილი იქნებოდა, ფრედჰოლმის ტიპის განტოლებისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ტიპის განტოლების აღსანიშნავად ყოფილიყო გამოყენებული.

ანაზღაურდება, რომ ისინი საგრძნობლად გააადვილებენ გამოყენების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანი მთელი რიგი ახალი შედეგების მიღებას, ამასთან პირდაპირი გზით.

§§ 22—26-ის შედეგებს ჩვენ ძირითადად მხოლოდ IV და V თავებში ვიყენებთ, II, III, VI თავებში კი ამ შედეგებით არ ვსარგებლობთ, თუ არ ჩავთვლით ზოგიერთ ადგილს, რომლის გამოტოვება შეიძლება ისე, რომ დანარჩენის გაგება არ შეფერხდეს. მკითხველს, რომელიც პირველად ეცნობა საკითხს, შეიძლება ვურჩიოთ, გამოტოვოს აღნიშნული პარაგრაფები, ჯერ გაეცნოს II, III და VI თავების შედეგებს, რომლებიც საკმაოდ დამოუკიდებელი ნაწილებია, შემდეგ კი გამოტოვებულ ადგილებს დაუბრუნდეს.

2°. წიგნის მოცულობის მეტისმეტად გაზრდის თავიდან ასაცილებლად სრულად არ არის წარმოდგენილი რიგი მნიშვნელოვანი საკითხებისა, რომლებიც სათაურის მიხედვით მასში უნდა შესულიყო.

უპირველეს ყოვლისა, ჩვენ აქ არ ვეხებით მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას, თუმცა კი ამ ბოლო დროს ამ თეორიამ მნიშვნელოვნად წაიწია წინ[3]. არ განვიხილავთ აგრეთვე არაწრფივ განტოლებებს, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის არაწრფივ სასაზღვრო ამოცანებს, რომლებსაც ასევე უკანასკნელ ხანებში არც თუ ისე მცირე რაოდენობის მნიშვნელოვანი ნაშრომი მიეძღვნა, სხვაობიან გულიან ინტეგრალურ განტოლებებს, მიუხედავად მათ მიმართ არსებული დიდი პრაქტიკული და თეორიული ინტერესისა[4].

ბოლო დროს საგრძნობ მნიშვნელობას იძენს ეგრეთ წოდებული განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციებთან დაკავშირებული სასაზღვრო ამოცანები. ამ საკითხებს წინამდებარე წიგნში აგრეთვე არ ვეხებით და ვიფარგლებით ანალიზურ ფუნქციათა კლასიკური თეორიით. განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიით და მისი გამოყენებებით დაინტერესებულ მკითხველებს ვურჩევთ მიმართონ ი. ვეკუას მონოგრაფიას [13], სადაც შეუძლიათ ნახონ აგრეთვე მითითებანი სათანადო, უკვე საკმაოდ ვრცელ ლიტერატურაზე.

ამ წიგნში ციტირებული ლიტერატურის სია (ავტორების ანბანთრიგზე) მოცემულია ცალკე, წიგნის ბოლოს. ტექსტში მითითებისას დასახელებული ავტორის ნაშრომის ნომერი მოთავსებულია კვადრატულ ფრჩხილებში.

რიგ შემთხვევებში წიგნში გადმოცემული შედეგების ამა თუ იმ გამოყენების გაკვრით ხსენებისას მითითებულია მათი ავტორების არა ადრინდელი სტატიები, არამედ უფრო მოგვიანებით გამოქვეყნებული მონოგრაფია ან შემაჯამებელი სტატიები. ამასთანავე, ზოგიერთი საყურადღებო შედეგი სრულიად არაა მოხსენებული, თუ ის გადმოცემულია ჩვენ მიერ ციტირებულ საკმაოდ გავრცელებულ წიგნებში ან შემაჯამებელ სტატიებში.

3°. ბოლო დროს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას იმ სახით, როგორც ეს ამ წიგნშია გადმოცემული, სულ უფრო ხშირად იყენე-

---

3 მოკლე ცნობები ამ საკითხზე არსებული ლიტერატურის შესახებ მოცემულია წიგნის ბოლოს § 138-ში.

4 ამ საკითხების შესახებ იხ. მ. კრეინის შრომა [1], რომელშიც დასახელებულია სათანადო ლიტერატურაც. იხ. აგრეთვე ვ. სმირნოვის წიგნი [4], ტ. IV.

ბენ თეორიული ფიზიკის, კერძოდ, ველის კვანტური თეორიის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას. სამწუხაროდ, ფიზიკურ ჟურნალებში გამოქვეყნებული ნაშრომები სულ უკანასკნელ დრომდე ჩემი თვალსაწიერის გარეთ აღმოჩნდა. ამიტომ შემოვიფარგლები ნ. ბოგოლიუბოვის, ბ. მედვედევის, ა. თავხელიძის [1] სტატიაზე მითითებით, რომელშიც მოკლედაა მიმოხილული ამ წიგნში გადმოცემულ მეთოდებთან დაკავშირებული ზოგიერთი ნაშრომი ველის კვანტურ თეორიაში.

4°. წიგნის ძირითადი ტექსტის გასაგებად საკმარისია მკითხველი იცნობდეს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა ელემენტარულ თეორიას და ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის საწყისებს.

ნათქვამი არ შეეხება ცალკეულ პარაგრაფებს, რომლებშიაც გამოყენებულია ფუნქციონალური ანალიზის (მართალია, ელემენტარული) ცნებები, აგრეთვე სპეციალურ პარაგრაფებს, რომლებშიაც მოცემულია მოკლე ცნობები სხვადასხვა ავტორის ზოგიერთი შედეგის შესახებ. ამ პარაგრაფების გამოტოვება წიგნის დანარჩენი ნაწილის გაგებას ხელს არ შეუშლის.

თავი პირველი

კოშის ტიპის ინტეგრალების ძირითადი თვისებები

I. ზოგიერთი განსაზღვრა და დამხმარე დებულება

ამ განყოფილებაში მოცემულია ზოგიერთი ცნების განსაზღვრა და დამტკიცებულია მარტივი დებულებები, რომლებსაც ჩვენ შემდგომში ხშირად გამოვიყენებთ.

§ 1. გლუვი და უბან-უბან გლუვი წირები. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ წირებს, რომლებიც განლაგებულია სიბრტყეზე. ამ სიბრტყეზე Oxy საკოორდინატო სისტემად ყოველთვის ვიგულისხმებთ წრფივ, მართკუთხა სისტემას, რომელიც ისეა ორიენტირებული, რომ დამკვირვებლისათვის, როცა ის იხედება Ox ღერძის გასწვრივ, Oy ღერძი მარცხნივაა მიმართული.

ამის შესაბამისად სიბრტყეზე კუთხეების ათვლის დადებით მიმართულებად ჩაითვლება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება; თუ ვილაპარაკებთ მოცემული მიმართულებიდან ათვლილ კუთხეებზე, ყოველთვის შესაბამისი ნიშნით აღჭურვილი კუთხეები გვექნება მხედველობაში.

შემდგომში, როცა საუბარი გვექნება გლუვ წირებზე, ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ ეს წირები მარტივია, ე. ი. თავის თავს არ კვეთენ[5].

1°. *გახსნილ გლუვ რკალს ან გახსნილ გლუვ კონტურს*[6] ვუწოდებთ წირს, რომელიც პარამეტრულად შემდეგი სახით შეიძლება იქნეს წარმოდგენილი:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leqslant s \leqslant s_b, \tag{1,1}$$

სადაც s_a და s_b რაიმე სასრული მუდმივებია, ხოლო $x(s)$ და $y(s)$ აღნიშნულ ინტერვალში უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

I. მათ (s_a, s_b) ინტერვალში, ბოლოების ჩათვლით, უწყვეტი $x'(s)$, $y'(s)$ წარმოებულები აქვთ, რომლებიც ერთდროულად ნული არ ხდება, ამასთან ინტერვალის ბოლოებზე $x'(s)$ და $y'(s)$-ის მნიშვნელობებად უნდა მივიჩნიოთ $x'(s_a+0)$, $y'(s_a+0)$ და $x'(s_b-0)$, $y'(s_b-0)$.

II. აღნიშნულ ინტერვალში s პარამეტრის განსხვავებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება განსხვავებული (x, y) წერტილები.

პირველი პირობა გამოხატავს იმ ფაქტს, რომ განსახილველი რკალი, რომელსაც ჩვენ L-ით აღვნიშნავთ, *გლუვია*, ე. ი. მისი მხების მიმართულება იცვლება უწყვეტად (იხ. ქვემოთ); მეორე პირობა გამოხატავს იმას, რომ L რკალი მარტივი და გახსნილია.

---

[5] ამ ტერმინის ზუსტი მნიშვნელობა ქვემოთ იქნება მითითებული

[6] სიტყვები „რკალი“ და „კონტური“ ჩვენთან სინონიმებია; თუმცა პირველს ხშირად გამოვიყენებთ გახსნილი წირებისათვის, ხოლო მეორეს—შეკრულისათვის.

a და b წერტილები, რომლებიც შეესაბამება s_a და s_b მნიშვნელობებს, წარმოადგენენ რკალის ბოლოებს. (1,1)-ის თანახმად, a და b ბოლოები მიეკუთვნება L რკალს; თუ საჭიროა ამის ცხადად აღნიშვნა, ვიტყვით, რომ L ჩაკეტილი რკალია. თუ ბოლოები რკალს არ მიეკუთვნება (ეს შემთხვევა ყოველთვის საგანგებოდ იქნება აღნიშნული), მაშინ ვიტყვით, რომ რკალი ღიაა.

თითოეულ განსახილავ გლუვ წირზე ავირჩევთ გარკვეულ *დადებით* მიმართულებას, სახელდობრ იმას, რომელიც შეესაბამება s პარამეტრის ზრდას. a და b ბოლოების მქონე რკალს ხშირად აღვნიშნავთ ab-თი, ამასთან, ასოების რიგს ავირჩევთ ისე, რომ დადებით მიმართულებას მივყავდეთ a-დან b-კენ. a და b წერტილებს ზოგჯერ შესაბამისად რკალის საწყის და ბოლო წერტილებს ვუწოდებთ.

გლუვი L რკალი, ცხადია, წრფევადია; ამიტომ s პარამეტრად შეგვიძლია ავიღოთ L რკალის რომელიმე ფიქსირებული წერტილიდან ათვლილი რკალის სიგრძე, რომელიც აღჭურვილია გარკვეული ნიშნით ათვლის მიმართულების გათვალისწინებით. *შემდგომში ასეც მოვიქცევით*. შესაბამისად გვექნება:

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1. \tag{1,2}$$

ამ შემთხვევაში s პარამეტრს L რკალის შესაბამისი წერტილის *რკალურ აბსცისს* ვუწოდებთ.

s რკალური აბსცისის შესაბამის წერტილს აღვნიშნავთ $t(s)$-ით ან, უბრალოდ, t-თი, ხოლო s_0, s_1, s_2 და ა. შ. რკალური აბსცისების შესაბამის წერტილებს — $t(s_0)$, $t(s_1)$, $t(s_2)$ და ა. შ. ან კიდევ t_0, t_1, t_2 და ა. შ.

L წირის მხების ქვეშ ყოველთვის ვგულისხმობთ დადებით მხებს, რომელიც გავლებულია s-ის ზრდის მხარეს. თუ θ აღნიშნავს კუთხეს, ათვლილს Ox ღერძიდან, რომელსაც t წერტილში მხები ქმნის Ox ღერძთან, მაშინ

$$\cos\theta = x'(s), \quad \sin\theta = y'(s). \tag{1,3}$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ კუთხე, რომელსაც მხები ქმნის რომელიმე მუდმივ მიმართულებასთან, იცვლება უწყვეტად[7] s-თან ერთად. აშკარაა, რომ, პირიქით, თუ θ იცვლება უწყვეტად s-თან ერთად, მაშინ $x'(s)$ და $y'(s)$ წარმოადგენენ s-ის უწყვეტ ფუნქციებს.

შემდგომში t წერტილის აფიქსს, ჩვეულებრივ, იმავე t ასოთი აღვნიშნავთ, ამის შესაბამისად, თუ x და y წერტილის კოორდინატებია, დავწერთ: $t=x+iy$. თუ s წარმოადგენს $t=t(s)$ წერტილის რკალურ აბსცისს, მაშინ

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\,\frac{dy}{ds} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \tag{1,4}$$

სადაც θ აღნიშნავს იმავეს, რასაც ზემოთ. ცხადია, რომ

$$|t'| = \left|\frac{dt}{ds}\right| = 1. \tag{1,5}$$

[7] θ კუთხე განსაზღვრულია $2k\pi$ შესაკრების სიზუსტით, სადაც k მთელი რიცხვია. მაგრამ სავსებით აშკარაა, რა გვაქვს მხედველობაში, როდესაც ამ კუთხის უწყვეტ ცვლილებაზე ვლაპარაკობთ.

2°. *შეკრულ გლუვ კონტურს* ან *შეკრულ გლუვ რკალს* ვუწოდებთ L წირს, ისევე განსაზღვრულს როგორც გახსნილ გლუვ რკალს, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ (1,1)-ში s პარამეტრის განსხვავებულ მნიშვნელობებს $s=s_a$ და $s=s_b$-ს გარდა შეესაბამება განსხვავებული (x, y) წერტილები. პარამეტრის $s=s_a$ და $s=s_b$ მნიშვნელობებს კი შეესაბამება ერთი და იგივე წერტილი, ასე რომ $x(s_b)=x(s_a)$, $y(s_b)=y(s_a)$, ამასთან $x'(s_b-0)=x'(s_a+0)$, $y'(s_b-0)=y'(s_a+0)$. ტოლობების პირველი წყვილი გამოხატავს, რომ L მრუდი შეკრულია, ხოლო მეორე — რომ მისი მხების მიმართულება აგრეთვე უწყვეტად იცვლება შეხების წერტილის s_a, s_b რკალური აბსცისის მქონე წერტილზე გადასვლისას. ამ უკანასკნელ წერტილს შეიძლება ეწოდოს რკალური აბსცისის ნახტომის წერტილი; იგი L კონტურის სხვა წერტილებისაგან განსხვავდება არა არსებითად, არამედ მხოლოდ არჩეული პარამეტრული წარმოდგენის გამო და, ცხადია, შეიძლება მოთავსდეს L კონტურის ნებისმიერ წერტილში. ასე მაგალითად, თუ განვიხილავთ რაიმე ab რკალს, რომელიც მოცემულ შეკრულ კონტურს ეკუთვნის, ვიგულისხმებთ (ხშირად ამის განსაკუთრებული აღნიშვნის გარეშე), რომ ეს წერტილი ab რკალის გარეთ ან მის რომელიმე ბოლოშია მოთავსებული.

3°. *გლუვ წირს* (იგულისხმება *მარტივი*) ვუწოდებთ სასრული რაოდენობის შეკრული ან გახსნილი გლუვი კონტურების (რკალების) ერთობლიობას, რომელთაც საერთო წერტილები (მათ შორის ბოლოებიც) არ მოეპოვებათ.

ამრიგად, ჩვენი განსაზღვრის თანახმად, *წირი* (გლუვიც კი) *შეიძლება შედგებოდეს რამდენიმე ცალ-ცალკე მდებარე უწყვეტი ნაწილისაგან.*

4°. *მარტივ უბან-უბან გლუვ რკალს* (ან *მარტივ უბან-უბან გლუვ კონტურს*) ვუწოდებთ წირს, რომელიც შედგება სასრული რაოდენობის გლუვი გახსნილი a_1a_2, $a_2a_3, \ldots, a_{n-1}a_n$ რკალებისაგან, რომლებიც ისეა განლაგებული, რომ თითოეული რკალის ბოლო წერტილი ემთხვევა მომდევნოს საწყის წერტილს; იგულისხმება, რომ ამ რკალებს არ გააჩნიათ სხვა საერთო წერტილი, გარდა ხსენებულისა და, შესაძლოა, პირველი რკალის საწყისი a_1 წერტილისა და უკანასკნელი რკალის ბოლო a_n წერტილისა. თუ a_n წერტილი არ ემთხვევა a_1-ს, მაშინ უბან-უბან გლუვი რკალი *გახსნილია*; წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი *შეკრულია*.

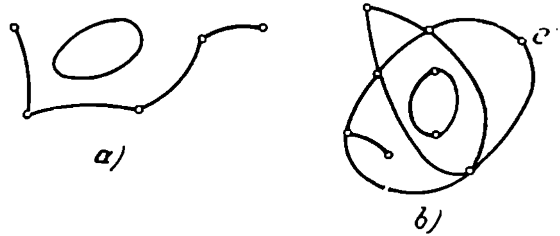
მარტივ უბან-უბან გლუვ წირს ვუწოდებთ სასრული რაოდენობის მარტივი უბან-უბან გლუვი რკალების (კონტურების) ერთობლიობას, რომელთაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ (ნახ. 1, a). ასეთი წირი გლუვი წირისაგან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ მას შეიძლება ჰქონდეს (სასრული რაოდენობის) კუთხური წერტილები.

დასასრულ, *უბან-უბან გლუვ წირს* (სიტყვა „მარტივის" გარეშე) ვუწოდებთ სასრული რაოდენობის უბან-უბან გლუვი რკალების (კონტურების) ერთობლიობას, რომელთაც შესაძლებელია ჰქონდეთ სასრული რაოდენობის საერთო წერტილები.

5°. შეგვიძლია ყოველთვის ჩავთვალოთ, რომ მოცემული გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირი (ახლახან მოცემული განსაზღვრის აზრით) შედგება მხოლოდ (მარტივი) გლუვი გახსნილი რკალებისაგან, რომლებსაც საერთო წერტილები, გარდა, შესაძლოა, ბოლოებისა, არ გააჩნიათ. ამისათვის საკმარისია, საჭიროების შემთხვევაში, L-ის შემადგენლობაში შემავალი ზოგიერთი შეკრული კონტური ან გახსნილი რკალი რამდენიმე ნაწილად დავყოთ (ნახ. 1, b).

შემდგომში ყველგან, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ვიგულისხმებთ, რომ უბან-უბან გლუვი წირი სწორედ ამგვარად არის წარმოდგენილი. გამონაკლისს, ჩვეულებრივ, დავუშვებთ გლუვი წირების შემთხვევაში, ე. ი. წირებისათვის, რომლებიც შედგებიან მარტივი შეკრული ან გახსნილი კონტურებისაგან, რომელთაც საერთო წერტილები არ მოეპოვებათ.

6°. წერტილებს, რომლებიც უბან-უბან გლუვ L წირში შემავალი ერთი ან რამდენიმე გლუვი რკალის ბოლოებს წარმოადგენენ, L წირის კვანძებს ვუწოდებთ. თუ მოცემული წერტილი მხოლოდ ერთი რკალის ბოლოს წარმოადგენს, მაშინ ასეთ წერტილს L წირის ბოლოს ვუწოდებთ; ამრიგად, L წირის ბოლოები, ჩვენი განსაზღ-



ნახ. 1

ვრის თანახმად, წარმოადგენს კვანძების კერძო შემთხვევას. კვანძების კერძო შემთხვევაა აგრეთვე კუთხური წერტილები, სადაც ორ-ორი გლუვი რკალი ერთდება.

ჩვენი სურვილით, საჭიროების შემთხვევაში, კვანძებს შეგვიძლია მივაკუთვნოთ L წირის ნებისმიერი სხვა წერტილიც, ე. ი. წერტილები, რომლებიც მის გლუვ ნაწილებზეა მოთავსებული. ასე რომ, წირი შეიძლება გლუვიც იყოს მოცემული კვანძის მიდამოში (c წერტილი ნახ. 1, b-ზე). ასეთი დამატებითი კვანძების შემოყვანა ძალიან ხშირად ხელს უწყობს გადმოცემის გამარტივებას.

კვანძისაგან განსხვავებულ L წირის წერტილებს ვუწოდებთ ჩვეულებრივ წერტილებს.

7°. გავიხსენოთ, რომ ზემოთ მიღებული პირობის (3.1°) თანახმად, თითოეულ გლუვ წირზე (გლუვ კონტურზე) შერჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულება. ეს დადებითი მიმართულებანი L წირის შემადგენელ ცალკეულ რკალებზე განსაზღვრავენ L-ზე დადებით მიმართულებას.

8°. დასასრულ, შევთანხმდეთ, რომ L წირის ნაწილად ყოველთვის ვიგულისხმებთ იმ ნაწილს, რომელიც შედგება სასრული რაოდენობის რკალებისაგან და არა L წირის წერტილების რაიმე სხვა სიმრავლისაგან.

§ 2. გლუვ წირთა ზოგიერთი თვისება. შემდგომში ყოველთვის საქმე გვექნება მხოლოდ გლუვ ან უბან-უბან გლუვ წირებთან და მოგვიხდება. ვისარგებლოთ ასეთ წირთა შემდეგი თვისებით[8].

ვთქვათ, L მოცემული გლუვი წირია, ხოლო α_0 — ნებისმიერად მოცემული ნულისაგან განსხვავებული მახვილი კუთხე $\left(\text{ე. ი. } 0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}\right)$. არსებობს დადებითი რიცხვი $R_0 = R_0(\alpha_0)$, რომელიც დამოკიდებულია α_0-ზე, მაგრამ დამოუკიდებელია L-ზე t წერტილის მდებარეობაზე, რომელსაც შემდეგი თვისებები მოეპოვება:

[8] I და II თვისებების დამტკიცება მოცემულია I დამატებაში წიგნის ბოლოს.

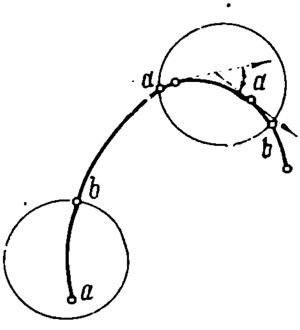
I. L-ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია ნებისმიერ $R \leqslant R_0$ რადიუსიან Γ წრეში, ცენტრით L წირის ნებისმიერ t წერტილში, შედგება ერთადერთი გახსნილი ab რკალისაგან (ნახ. 2).

II. ab რკალის ნებისმიერ ორ წერტილზე მხებებს შორის არაბლაგვი α კუთხე (ნახ. 2) არ აღემატება α_0-ს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს აგრეთვე შემდეგი თვისებები:

III. ab რკალის ნებისმიერი ორი წერტილის მომჭიმავ ქორდასა და ამავე რკალის ნებისმიერ წერტილზე გამავალ მხებს შორის არაბლაგვი კუთხე არ აღემატება α_0-ს. მართლაც, ab რკალზე ყოველთვის მოიძებნება წერტილი, რომელზედაც მხები პარალელურია ხსენებული ქორდისა, და ჩვენი მტკიცება გამომდინარეობს II თვისებიდან.

IV. ვთქვათ, β_0 ნებისმიერი კუთხეა, ისეთი, რომ $\alpha_0 < \beta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ და Δ_a და Δ_b a და b წერტილებზე გატარებული ორი პარალელური წრფეა, რომლებიც ab რკალის რომელიმე t წერტილზე გამავალ მხებთან ქმნიან არაბლაგვ $\beta \geqslant \beta_0$ კუთხეს. მაშინ Δ_a, Δ_b წრფეების პარალელური და მათ შორის მოთავსებული ყოველი Δ წრფე ab რკალს გადაკვეთს ზუსტად ერთ წერტილში (ნახ. 3).



ნახ. 2

მართლაც, ის, რომ Δ გადაკვეთს ab-ს ერთ წერტილში მაინც, ცხადია; ის, რომ Δ არ გადაკვეთს ab-ს არცერთ სხვა წერტილში, გამომდინარეობს III თვისებიდან და $\beta \geqslant \beta_0 > \alpha_0$ პირობიდან.

V. ვთქვათ, Δ ab-ს ნებისმიერ t წერტილზე გატარებული წრფეა, რომელიც t წერტილზე გამავალ მხებთან ქმნის არაბლაგვ კუთხეს, არანაკლებს β_0-ზე ($\beta_0 > \alpha_0$), და, ვთქვათ, t' არის ab-ს ნებისმიერი სხვა წერტილი. მაშინ არაბლაგვი კუთხე Δ-სა და t და t' წერტილების მომჭიმავ ქორდას შორის არანაკლებია, ვიდრე $\omega_0 = \beta_0 - \alpha_0 > 0$[1].

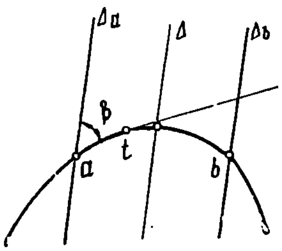
სიმოკლისათვის $R_0 = R_0(\alpha_0)$-ს ვუწოდებთ მოცემულ α_0 კუთხის შესაბამის სტანდარტულ *რადიუსს*, R_0 რადიუსიან Γ_0 წრეს — *სტანდარტულ წრეს*, ხოლო ab რკალს, რომელიც ამოიკვეთება L წირიდან Γ_0 წრით, რომლის ცენტრი L წირის რომელიმე წერტილშია — *სტანდარტულ რკალს*.

ვთქვათ, $L = ab$ რაიმე სტანდარტული რკალია, t_0 — მისი რომელიმე მუდმივი წერტილი (რომელიც შეიძლება დაემთხვეს a-ს ან b-ს), t — მისი ცვლადი წერტილი, ხოლო r არის t_0 და t წერტილების მომჭიმავი ქორდის სიგრძე. გვაქვს:

$$\frac{dr}{ds} = \pm \cos \alpha, \tag{2,1}$$

[1] თუ ω არის არაბლაგვი კუთხე Δ-სა და ქორდას შორის, α — არაბლაგვი კუთხე t წერტილში მხებსა და ქორდას შორის, β — არაბლაგვი კუთხე t წერტილში მხებსა და Δ-ს შორის, მაშინ ან $\omega = \beta - \alpha \geqslant \beta_0 - \alpha_0$, ან $\omega = \beta + \alpha$ $\left(\text{ეს შეიძლება მოხდეს, როცა } \beta + \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ და მაშინ $\omega \geqslant \beta_0 > \beta_0 - \alpha_0$ ან $\omega = \pi - \beta - \alpha$ $\left(\text{ეს შეიძლება მოხდეს, როცა } \beta + \alpha \geqslant \frac{\pi}{2}\right)$ და მაშინ $\omega \geqslant \frac{\pi}{\alpha} - \alpha \geqslant \beta_0 - \alpha_0$

სადაც s არის t წერტილის რკალური აბსცისა, ხოლო α—მახვილი კუთხე აღნიშნულ ქორდასა და t წერტილზე მხებს შორის; ზედა ნიშანი აიღება t_0b ნაწილისათვის, ხოლო ქვედა—at_0 ნაწილისათვის. ვინაიდან, ზემოთქმულის ძალით, $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0<\frac{\pi}{2}$, წინა ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თითოეულ at_0, t_0b ნაწილზე r წარმოადგენს s რკალური აბსცისის მონოტონურ ფუნქციას (კლებადს პირველ ნაწილზე და ზრდადს მეორეზე) და, მაშასადამე, t წერტილის მდებარეობა თითოეულ ამ ნაწილზე ცალსახად განისაზღვრება r-ის მოცემით.



ნახ. 3

(2.1)-დან გამომდინარეობს უტოლობა, რომელსაც ხშირად გამოვიყენებთ:

$$|ds|\leqslant K\,|dr|, \tag{2,2}$$

სადაც K დადებითი მუდმივია, დამოუკიდებელი ab-ზე t_0-ის მდებარეობისაგან.

თუ განვიხილავთ ერთ-ერთ at_0, t_0b რკალს, (2,1)-ის ორივე ნაწილს ვაინტეგრებთ s_1, s_2 საზღვრებში და გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას, at_0 ან t_0b-ზე მდებარე წერტილთა ნებისმიერი t_1, t_2 წყვილისათვის, მივიღებთ

$$|r_2-r_1|=k\,|s_2-s_1|,\quad 0<k_0\leqslant k\leqslant 1, \tag{2,3}$$

სადაც k_0 მუდმივია, ხოლო r_1 და r_2 წარმოადგენს მანძილებს t_1 და t_2 წერტილებიდან t_0 წერტილამდე.

თუ t_1-ად ავიღებთ t_0-ს, მივიღებთ

$$r_{12}=k\,\sigma_{12}, \tag{2,4}$$

სადაც r_{12} არის მანძილი t_1 და t_2 წერტილებს შორის, ხოლო $\sigma_{12}=|s_2-s_1|$—t_1 და t_2-ს შორის მოთავსებული L-ის ნაწილის სიგრძე.

ადვილი დასანახავია, რომ (2,4) სახის თანაფარდობა გვაქვს იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც L ნებისმიერი გახსნილი ან შეკრული გლუვი კონტურია, თუ შეკრული კონტურის შემთხვევაში t_1 და t_2-ს შორის მოთავსებული L-ის ნაწილად ვგულისხმებთ იმ ნაწილს, რომელიც ნაკლები სიგრძისაა.

§ 3. H პირობა (ჰოლდერის პირობა). 1^0. ვთქვათ, $\varphi(\zeta)$ წარმოადგენს ζ (საზოგადოდ კომპლექსური) ცვლადის ფუნქციას, მოცემულს ამ ცვლადის მნიშვნელობათა რაიმე Z სიმრავლეზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\varphi(\zeta)$ აკმაყოფილებს H პირობას ამ სიმრავლეზე, თუ ζ ცვლადის ნებისმიერი ორი ζ', ζ'' მნიშვნელობისათვის ამ სიმრავლიდან

$$|\varphi(\zeta'')-\varphi(\zeta')|\leqslant A\,|\zeta''-\zeta'|^{\mu}, \tag{3,1}$$

სადაც A და μ დადებითი მუდმივებია. A მუდმივს ვუწოდებთ H პირობის *კოეფიციენტს*, ხოლო μ-ს—*მაჩვენებელს*. თუ საჭიროა μ მაჩვენებლის ცხადად აღნიშვნა, მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(\zeta)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას; A მუდმივის მნიშვნელობა, ჩვეულებრივ, არ გვაინტერესებს.

ცხადია, რომ, თუ $\varphi(\zeta)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ იმავე პირობას დააკმაყოფილებს $|\varphi(\zeta)|$.

ცხადია აგრეთვე, რომ თუ Z სიმრავლე შემოსაზღვრულია და თუ $\varphi(\zeta)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ ის დააკმაყოფილებს აგრეთვე $H(\nu)$ პირობას, როგორიც არ უნდა იყოს $\nu \leqslant \mu$.

H პირობის ცნება ბუნებრივად ზოგადდება რამდენიმე ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაზე. სახელდობრ, ვთქვათ, $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ წარმოადგენს $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ცვლადების ფუნქციას, მოცემულს ამ ცვლადების მნიშვნელობათა რაიმე Z სიმრავლეზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ აკმაყოფილებს H პირობას ან, უფრო ზუსტად, $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ პირობას ამ სიმრავლეზე, თუ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერი ორი $\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n'$ და $\zeta_1'', \zeta_2'', \ldots, \zeta_n''$ ერთობლიობისათვის ამ სიმრავლიდან

$$|\varphi(\zeta_1'', \zeta_2'', \ldots, \zeta_n'') - \varphi(\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n')| \leqslant A_1 |\zeta_1'' - \zeta_1'|^{\mu_1} + \cdots + \\ + A_n |\zeta_n'' - \zeta_n'|^{\mu_n}, \tag{3,2}$$

სადაც $A_1, \ldots, A_n, \mu_1, \ldots, \mu_n$ დადებითი მუდმივებია.

თუ Z სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ (3,2) პირობიდან გამომდინარეობს უფრო მარტივი სახის პირობა:

$$|\varphi(\zeta_1'', \zeta_2'', \ldots, \zeta_n'') - \varphi(\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n')| \leqslant A\{|\zeta_1'' - \zeta_1'|^{\mu} + \cdots + |\zeta_n'' - \zeta_n'|^{\mu}\}, \tag{3,3}$$

რომელსაც მივიღებთ, თუ (3,2)-ში $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ მაჩვენებლებს უმცირესი მათგანით შევცვლით, ხოლო $A_1, A_2, \ldots, A_n$ კოეფიციენტებს—საკმაოდ დიდი A მუდმივით. ამ შემთხვევაში $H(\mu, \mu, \ldots, \mu)$-ს ნაცვლად დავწერთ $H(\mu)$.

2^0. თუ $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ პირობას, მაშინ, კერძოდ

$$|\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \zeta_k'', \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n) - \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}, \zeta_k', \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)| \leqslant \\ \leqslant A_k |\zeta_k'' - \zeta_k'|^{\mu_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ე. ი. $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ აკმაყოფილებს H პირობას ცალკე თითოეული ცვლადის მიმართ, სახელდობრ, $H(\mu_k)$ პირობას $\zeta_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ ცვლადის მიმართ, ამასთან, თანაბრად დანარჩენი ცვლადების მიმართ; ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ $H(\mu_k)$ პირობის კოეფიციენტი და მაჩვენებელი არ არის დამოკიდებული ამ ცვლადების მნიშვნელობებზე. ცხადია პირუკუ, თუ $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას ცალკე თითოეული ცვლადის მიმართ, სახელდობრ, $H(\mu_k)$ პირობას ζ_k ცვლადის მიმართ, თანაბრად დანარჩენი ცვლადების მიმართ, მაშინ ის დააკმაყოფილებს H პირობას, სახელდობრ, $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ პირობას, ცვლადთა ერთობლიობის მიმართ, ე. ი. (3,2) პირობას.

შემდგომში, როცა ვიტყვით, რომ რამდენიმე ცვლადის ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას ცალკე თითოეული ცვლადის მიმართ, ვიგულისხმებთ, რომ ეს პირობა კმაყოფილდება თანაბრად დანარჩენი ცვლადების მიმართ, ე. ი. ფუნქცია H პირობას აკმაყოფილებს ცვლადთა ერთობლიობის მიმართ.

შენიშვნა 1. აღვნიშნოთ შემდეგი, თითქმის აშკარა დებულება. ვთქვათ, რაიმე Z სიმრავლეზე მოცემული $u = u(\zeta)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას,

და ვთქვათ, $u=u(\zeta)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეზე მოცემული $f(u)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\nu)$ პირობას u ცვლადის მიმართ, მაშინ ფუნქცია $F(\zeta)=f(u(\zeta))$ დააკმაყოფილებს $H(\mu\cdot\nu)$ პირობას ζ ცვლადის მიმართ. კერძოდ, თუ $\nu=1$, მაშინ $F(\zeta)$ დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას. თუ, მაგალითად, $u(\zeta)$ ღებულობს ნამდვილ მნიშვნელობებს და $f(u)$-ს აქვს შემოსაზღვრული წარმოებული u-თი, მაშინ $F(\zeta)=f(u(\zeta))$ დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ჩვენ მიერ H პირობად წოდებულ პირობას ხშირად უწოდებენ ჰ ო ლ დ ე რ ი ს პ ი რ ო ბ ა ს (O. Hölder). კერძო შემთხვევაში, როცა $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n=1$, ეს პირობა გადაიქცევა ლ ი ფ შ ი ც ი ს პ ი რ ო ბ ა დ; ზოგჯერ ამ უკანასკნელ სახელწოდებას ავრცელებენ ჰოლდერის პირობაზეც.

$H(1)$ პირობის, ე. ი. ლიფშიცის პირობის დამაკმაყოფილებელი ფუნქციის ერთ-ერთ უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია, რომელსაც შემოსაზღვრული წარმოებული აქვს.

§ 4. H კლასის ფუნქციები გლუვ წირზე. 1°. შემდგომში უმთავრესად მოგვიხდება H პირობის ცნების გამოყენება მოცემული გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის t წერტილის ფუნქციის მიმართ.

t-თი აქ და შემდგომში, როგორც ზემოთ იყო თქმული, აღვნიშნავთ როგორც თვით $t(x, y)$ წერტილს, ასევე მის აფიქსსაც, ე. ი. $t=x+iy$ კომპლექსურ რიცხვს.

2°. სიმარტივისათვის დავიწყებთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა მოცემული L წირი (მარტივი) გლუვი რკალია, გახსნილი ან შეკრული[10].

ვთქვათ, $\varphi(t)$ L წირის t წერტილის ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, ე. ი. ისეთია, რომ ნებისმიერი ორი t_1 და t_2 წერტილისათვის L-ზე:

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\,|t_2-t_1|^{\mu}, \tag{4,1}$$

სადაც A და μ დადებითი მუდმივებია.

ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს H პირობას L რკალზე, ცხადია, უწყვეტია L-ზე, ადვილი დასანახავია, რომ თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (4,1) პირობას t_1, t_2 წერტილთა ნებისმიერი წყვილისათვის, რომელთა შორის მანძილი r_{12} არ აღემატება რაიმე დადებით δ მუდმივს, მაშინ ის დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას მთელ L რკალზეც. მართლაც, თუ (4,1) უტოლობა მართებულია, როცა $r_{12}\leqslant\delta$, მაშინ მთელ L რკალზე გვექნება

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A'\,r_{12}^{\mu},$$

სადაც A' უდიდესია A და $2M/\delta^{\mu}$-ს შორის, ხოლო M არის $|\varphi(t)|$-ს ზედა საზღვარი L-ზე.

(2,4)-ის საფუძველზე ვღებულობთ, რომ $H(\mu)$ პირობა ეკვივალენტურია შემდეგი პირობისა:

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\,\sigma_{12}^{\mu}, \tag{4,2}$$

სადაც $\sigma_{12}=|s_2-s_1|$ აღნიშნავს t_1 და t_2 წერტილებს შორის მოთავსებული L რკალის ნაწილის სიგრძეს (იმ შემთხვევაში, როცა L შეკრული კონტურია, L-ის ორი ნაწილიდან ვიღებთ იმას, რომელსაც ნაკლები სიგრძე აქვს).

[10] უბან-უბან გლუვი წირის შემთხვევაზე ლაპარაკი გვექნება § 8-ის 2° პუნქტში.

ნათქვამიდან (2,3)-ის საფუძველზე გამომდინარეობს, რომ $H(\mu)$ პირობა ეკვივალენტურია მოთხოვნისა, რომ L-ის ყოველ სტანდარტულ ab რკალზე

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\,|r_2-r_1|^{\mu}, \tag{4,3}$$

სადაც

$$r_1=|t_1-a|,\quad r_2=|t_2-a|.$$

(4,2), (4,3) უტოლობებში, ისევე როგორც (4,1)-ში, A აღნიშნავს რაიმე დადებით მუდმივს; ხსენებულ სამივე უტოლობაში A მუდმივად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ერთი და იგივე სიდიდე, თუ, საჭიროების შემთხვევაში, ზოგიერთ ამ უტოლობაში A მუდმივს უფრო დიდი სიდიდით შევცვლით.

შევნიშნოთ, რომ, როცა $\mu>1$, (4,2)-დან გამომდინარეობს, რომ რკალის ყოველ წერტილზე $\frac{d\varphi}{ds}=0$ და, მაშასადამე, $\varphi=\text{const}$. ვინაიდან ეს შემთხვევა საინტერესო არ არის, *ყოველთვის* ვიგულისხმებთ, რომ

$$0<\mu\leqslant 1. \tag{4,4}$$

გავიხსენოთ, რომ თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ ის დააკმაყოფილებს $H(\nu)$ პირობასაც, როგორიც არ უნდა იყოს $\nu\leqslant\mu$.

3°. ყველაფერი, რაც ზემოთ იყო ნათქვამი, ბუნებრივად ვრცელდება იმ შემთხვევაზე, როცა $\varphi(t)$ ფუნქცია მოცემულია ნებისმიერ გლუვ წირზე, რომელიც შეიძლება, შედგებოდეს რამდენიმე ცალ-ცალკე მდებარე ნაწილისაგან. ეს განზოგადება ცხადია და მასზე არ შევჩერდებით.

4°. L გლუვ წირზე მოცემული $H(\mu)$ პირობის დამაკმაყოფილებელი $\varphi(t)$ ფუნქციის შესახებ ვიტყვით, რომ იგი ეკუთვნის $H(\mu)$ კლასს L-ზე, ან კიდევ, თუ საჭირო არ არის μ-ს მნიშვნელობის აღნიშვნა, — H კლასს.

თუკი $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას მოცემული c ბოლოს საკმაოდ მცირე მიდამოში (ამ ბოლოს ჩათვლით), ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ *ეკუთვნის* H კლასს c წერტილის მიდამოში.

5°. H კლასის ცნება ბუნებრივად ზოგადდება L გლუვი წირის რამდენიმე $t_1, t_2, \ldots, t_n$ წერტილის $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ფუნქციაზე. სახელდობრ, ვიტყვით, რომ $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ფუნქცია ეკუთვნის $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ კლასს L-ზე, თუ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ პირობას; თუ არ არის საჭირო $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ მაჩვენებელთა მნიშვნელობების აღნიშვნა, მაშინ უბრალოდ ვიტყვით, რომ $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ეკუთვნის H კლასს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=\mu$, ნაცვლად $H(\mu, \mu, \ldots, \mu)$-სა, დავწერთ $H(\mu)$-ს. იმავე მიზეზით, რაც ზემოთ იყო აღნიშნული ყოველთვის ჩავთვლით, რომ

$$0<\mu_j\leqslant 1,\quad j=1, 2, \ldots, n,\quad 0<\mu\leqslant 1.$$

§ 6. გლუვ წირზე მოცემული ფუნქციების H კლასისადმი მიკუთვნების უმარტივესი ნიშნები. ამ პარაგრაფსა და მომდევნო ორ პარაგრაფში მივუთითებთ რამდენიმე უმარტივეს ნიშანს, რომლებიც ხშირად საშუალებას მოგვცემს მაშინვე დავადგინოთ, გლუვ L წირზე მოცემული განსახილველი ფუნქცია ეკუთვნის თუ არა H კლასს ან, რაც იგივეა, განსახილველი ფუნქცია აკმაყოფილებს თუ არა H პირობას.

ამ პარაგრაფში და, აგრეთვე, ორ მომდევნოში L-ის ქვეშ იგულისხმება გახსნილი გლუვი წირი, ვინაიდან მოყვანილი შედეგების გავრცელება ნებისმიერი გლუვი წირის შემთხვევაზე არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ქვემოთ მოგვიხდება ორი ცნობილი უტოლობის გამოყენება, რომლებსაც აქ შეგახსენებთ. ვთქვათ, σ_1 და σ_2 ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია და, ვთქვათ, $0\leqslant\mu\leqslant1$. მაშინ

$$\frac{\sigma_1^\mu+\sigma_2^\mu}{(\sigma_1+\sigma_2)^\mu}\leqslant 2^{1-\mu}, \tag{5,1}$$

$$\frac{|\sigma_1^\mu-\sigma_2^\mu|}{|\sigma_1-\sigma_2|^\mu}\leqslant 1 \quad (\sigma_1\neq\sigma_2). \tag{5,2}$$

ამ უტოლობების დასამტკიცებლად, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\sigma_1\geqslant\sigma_2$; თუ დავუშვებთ $\sigma=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, მაშინ წინა უტოლობები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1+\sigma^\mu}{(1+\sigma)^\mu}\leqslant 2^{1-\mu}\quad (0\leqslant\sigma\leqslant1),\qquad \frac{1-\sigma^\mu}{(1-\sigma)^\mu}\leqslant 1\quad (0\leqslant\sigma<1).$$

ეს უტოლობები სავსებით ელემენტარულად დადგინდება, მარცხენა მხარეში მდგომი ფუნქციების მაქსიმუმების მოძებნის გზით.

ახლა ჩვენთვის საინტერესო ნიშნების დადგენაზე გადავდივართ.

1°. ვთქვათ, გახსნილი $L=ab$ რკალი t_0 წერტილით დაყოფილია ორ ნაწილად: at_0 და t_0b. თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტია L-ზე და აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას თითოეულ at_0 და t_0b ნაწილზე ცალ-ცალკე, მაშინ ის დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას მთელ L რკალზე.

მართლაც, ვთქვათ, t_1 და t_2 L რკალის ორი წერტილია. თუ t_1 და t_2 t_0-ის ერთსა და იმავე მხარეზე მდებარეობენ, მაშინ (4,2) უტოლობა შესრულებულია პირობის თანახმად. თუკი t_1 და t_2 t_0-ის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ, მაშინ, t_1t_0 და t_0t_2 რკალების სიგრძეების σ_1 და σ_2-ით აღნიშვნით და (5,1)-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant|\varphi(t_2)-\varphi(t_0)|+|\varphi(t_1)-\varphi(t_0)|\leqslant A(\sigma_1^\mu+\sigma_2^\mu)\leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-\mu}A\,|\sigma_1+\sigma_2|^\mu=2^{1-\mu}A\,\sigma_{12}^\mu,$$

და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

2°. თუ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ L-ზე შესაბამისად აკმაყოფილებენ $H(\mu)$ და $H(\nu)$ პირობებს, მაშინ $\varphi(t)+\psi(t)$, $\varphi(t)\,\psi(t)$ ფუნქციებიც აკმაყოფილებენ L-ზე $H(\lambda)$ პირობას, სადაც λ უმცირესი რიცხვია μ და ν-ს შორის. მაგალითად, $\varphi(t)\,\psi(t)$ ნამრავლისათვის გვაქვს:

$$|\varphi(t_2)\,\psi(t_2)-\varphi(t_1)\,\psi(t_1)|\leqslant|\varphi(t_2)\,\psi(t_2)-\varphi(t_2)\,\psi(t_1)|+$$
$$+|\varphi(t_2)\,\psi(t_1)-\varphi(t_1)\,\psi(t_1)|\leqslant M\,|\psi(t_2)-\psi(t_1)|+N\,|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|,$$

სადაც M და N L-ზე $|\varphi(t)|$ და $|\psi(t)|$-ს ზედა საზღვრებია. ახლა ჩვენი დებულება აშკარაა.

3^0. თუ $\varphi(t)$ L-ზე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას და $\varphi(t) \neq 0$ ყველგან L-ზე, მაშინ $1/\varphi(t)$ დააკმაყოფილებს L-ზე $H(\mu)$ პირობას. დამტკიცება წინამავალის ანალოგიურია.

4^0. ვთქვათ, t და t_0 შესაბამისად ცვლადი და ფიქსირებული წერტილია L-ზე. t-ს ფუნქცია

$$r^\mu = |t - t_0|^\mu, \quad 0 < \mu \leqslant 1$$

L-ზე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას. მართლაც, (5,2)-ის ძალით,

$$|r_2^\mu - r_1^\mu| \leqslant |r_2 - r_1|^\mu.$$

იგივე გამეორდება, თუ t ფიქსირებულია და t_0 ცვლადია. მაშასადამე, ორი t და t_0 ცვლადის ფუნქცია $|t - t_0|^\mu$ L-ზე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

5^0. ვთქვათ $\varphi(t)$ L-ზე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას და, ვთქვათ, $0 \leqslant \lambda < \mu \leqslant 1$. მაშინ t-ს ფუნქცია

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\lambda},$$

სადაც t_0 L-ზე ფიქსირებული წერტილია[11], L-ზე აკმაყოფილებს $H(\mu - \lambda)$ პირობას.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ცხადია, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ t ძევს ab სტანდარტულ რკალზე, რომელიც ამოჭრილია L-იდან t_0 ცენტრის მქონე სტანდარტული წრით; გარდა ამისა, 1^0 პუნქტის საფუძველზე შეიძლება შემოვისაზღვროთ შემთხვევით, როცა t ძევს, მაგალითად, $t_0 b$ ნაწილზე. t-ს მდებარეობა $t_0 b$-ზე $r = |t - t_0|$ სიდიდით განვსაზღვროთ (იხ. § 2). ზოგჯერ $\varphi(t)$, $\psi(t)$-ს ნაცვლად დავწეროთ $\varphi(r)$, $\psi(r)$. თუ ჩავთვლით, რომ $h > 0$ (რაც ზოგადობას არ არღვევს) და, გარდა ამისა, დავუშვებთ, რომ $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \omega(r)$, გვექნება:

$$|\psi(r+h) - \psi(r)| = \left| \frac{\omega(r+h)}{(r+h)^\lambda} - \frac{\omega(r)}{r^\lambda} \right| =$$

$$= \left| \frac{\omega(r+h) - \omega(r)}{(r+h)^\lambda} + \omega(r) \left\{ \frac{1}{(r+h)^\lambda} - \frac{1}{r^\lambda} \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\omega(r+h) - \omega(r)|}{(r+h)^\lambda} + |\omega(r)| \, \frac{(r+h)^\lambda - r^\lambda}{r^\lambda (r+h)^\lambda}.$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ

$$|\omega(r+h) - \omega(r)| \leqslant A h^\mu, \quad |\omega(r)| = |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leqslant A r^\mu,$$

მივიღებთ:

$$|\psi(r+h) - \psi(r)| \leqslant \Delta_1 + \Delta_2,$$

სადაც

$$\Delta_1 = \frac{A h^\mu}{(r+h)^\lambda}, \quad \Delta_2 = A r^{\mu-\lambda} \frac{(r+h)^\lambda - r^\lambda}{(r+h)^\lambda}.$$

გვაქვს

$$\Delta_1 = A \left[\frac{h}{r+h} \right]^\lambda \cdot h^{\mu-\lambda} \leqslant A h^{\mu-\lambda},$$

[11] იგულისხმება, რომ $\psi(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = 0$.

ასე რომ, Δ_1 აკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობას.

Δ_2-ის შესაფასებლად განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა: $r \leqslant h$ და $r > h$. პირველ შემთხვევაში ($r \leqslant h$)

$$(r + h)^{\lambda} - r^{\lambda} \leqslant h^{\lambda}$$

შეფასების გამოყენებით (იხ. პ. 4°) ვღებულობთ

$$\Delta_2 \leqslant A\,\frac{h^{\mu}}{(r+h)^{\mu}} = A\left[\frac{h}{r+h}\right]^{\lambda} h^{\mu-\lambda} \leqslant A h^{\mu-\lambda}.$$

მეორე შემთხვევაში ($r > h$)

$$(r+h)^{\lambda} - r^{\lambda} = r^{\lambda}\left[\left(1+\frac{h}{r}\right)^{\lambda} - 1\right] \leqslant \lambda h r^{\lambda-1}$$

შეფასების გამოყენებით[12] ვრწმუნდებით, რომ

$$\Delta_2 \leqslant A\lambda\, h r^{\mu-\lambda-1} = A\lambda\left(\frac{h}{r}\right)^{1-\mu+\lambda} h^{\mu-\lambda} \leqslant A\lambda h^{\mu-\lambda},$$

რაც დებულებას ამტკიცებს.

6°. ახლახან მოყვანილი შეფასებები, აშკარაა, L-ზე t_0-ის მდებარეობისაგან დამოუკიდებლად სრულდება; გარდა ამისა, t და t_0-ს შეიძლება შევუცვალოთ როლები, ამიტომ შეგვიძლია დამტკიცებულად ჩავთვალოთ, რომ ორი t და t_0 ცვლადის ფუნქცია

$$\psi(t_0, t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^{\lambda}}$$

L-ზე აკმაყოფილებს $H(\mu-\lambda)$ პირობას, თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას და თუ $0 \leqslant \lambda < \mu$.

7°. დასასრულ, განვიხილოთ ფუნქცია $\varphi(t, \tau)$, სადაც t L-ის წერტილია, ხოლო τ პარამეტრია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა T. ვთქვათ, $\varphi(t, \tau)$ ორივე t და τ ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, როცა $t \in L$, $\tau \in T$. ვაჩვენოთ, რომ ამ პირობებში ფუნქცია

$$\psi(t_0, t, \tau) = \frac{\varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)}{|t - t_0|^{\lambda}}, \quad 0 \leqslant \lambda < \mu,$$

სადაც t_0, ისევე როგორც t, L-ზე ძევს, აკმაყოფილებს $H(\mu - \lambda)$ პირობას სამივე ცვლადის მიმართ. t და t_0-ს მიმართ ეს უკვე დამტკიცებულია. τ-ს მიმართ ამის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ

$$\Delta = \psi(t_0, t, \tau+h) - \psi(t_0, t, \tau) = \frac{\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau+h)}{|t-t_0|^{\lambda}} -$$

$$-\frac{\varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^{\lambda}} = \frac{\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t, \tau)}{|t-t_0|^{\lambda}} - \frac{\varphi(t_0, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^{\lambda}}.$$

[12] როცა $0 < \mu < 1$ და $x \geqslant 0$

$$(1 + x)^{\mu} - 1 < \mu x;$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ $f(x) = (1 + x)^{\mu} - \mu x - 1$, გვექნება

$$f(0) = 0, \quad f'(x) < 0.$$

როცა $|t-t_0| \leqslant |h|$ განსახილველი სხვაობის პირველი გამოსახულებიდან ვღებულობთ

$$|\Delta| \leqslant 2A|t-t_0|^{\mu-\lambda} \leqslant 2A|h|^{\mu-\lambda}.$$

როცა $|t-t_0| \geqslant |h|$ მეორე გამოსახულებიდან ვღებულობთ

$$|\Delta| \leqslant \frac{2A|h|^{\mu}}{|t-t_0|^{\lambda}} \leqslant 2A|h|^{\mu-\lambda},$$

და ჩვენი მტკიცება დასრულებულია.

ცხადია, რომ ეს დებულება უშუალოდ ვრცელდება იმ შემთხვევაზე, როცა ერთი τ პარამეტრის ნაცვლად გვაქვს რამდენიმე პარამეტრი.

აშკარაა აგრეთვე, რომ დებულება ძალაში დარჩება, თუ დავუშვებთ $\tau = t_0$.

ზემოთქმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს კიდევ შემდეგი დებულება: ვთქვათ, L-ზე t და t_0 ორი ცვლადის $\varphi(t_0, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ორივე ცვლადის მიმართ, და ვთქვათ, $\varphi(t_0, t_0)=0$ ყოველი t_0-თვის L-ზე. მაშინ ფუნქცია

$$\psi(t_0, t) = \frac{\varphi(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}}, \quad 0 \leqslant \lambda < \mu$$

აკმაყოფილებს $H(\mu-\lambda)$ პირობას ორივე ცვლადის მიმართ. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$\varphi(t_0, t) = \varphi(t_0, t) - \varphi(t_0, t_0).$$

§ 6. გაგრძელება. ახლა დავამტკიცოთ დებულება, რომელიც ხშირად გამოგვადგება.

ვთქვათ, $\varphi(t)$ გლუვ L წირზე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, და ვთქვათ, $\omega(t)$ L-ზე შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რომელსაც აქვს წარმოებული t-თი[13] (გარდა, შესაძლებელია $t=t_0$ მნიშვნელობისა), ისეთი, რომ

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right| < \frac{C}{|t-t_0|} \quad (t \neq t_0), \tag{6,1}$$

სადაც C მუდმივაა, ხოლო t_0 L-ზე რაიმე (ფიქსირებული) წერტილია.

მაშინ

$$\psi(t) = [\varphi(t) - \varphi(t_0)]\,\omega(t)$$

აგრეთვე დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ზე.

---

[13] $\dfrac{d\omega}{dt}$ ჩვენ გვესმის, როგორც ზღვარი

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\omega(t_1) - \omega(t)}{t_1 - t} \quad (t_1 \text{ და } t \ L\text{-ის წერტილებია}).$$

ცხადია, რომ (იხ. § 1, პ. 1°)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{ds} : \frac{dt}{ds} = \frac{d\omega}{ds} e^{-i\theta},$$

სადაც θ წარმოადგენს L-ის t წერტილში მხების მიერ Ox ღერძთან შედგენილ კუთხეს, და ამიტომ

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right| = \left|\frac{d\omega}{ds}\right|.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ t ძევს სტანდარტულ რკალზე, რომელსაც ერთ ბოლოდ t_0 წერტილი აქვს. მაშინ (6,1) პირობა შემდეგის ეკვივალენტურია:

$$\left|\frac{d\omega}{ds}\right| < \frac{C_0}{|s-s_0|}, \tag{6,1ა}$$

სადაც C_0 მუდმივია, ხოლო s და s_0 t და t_0-ის რკალურ აბსცისებს წარმოადგენს. გარდა ამისა, შეგვიძლია მივიჩნიოთ, რომ $\omega(t)$ მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს იღებს (ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებზე ცალ-ცალკე შეგვეძლო გვემსჯელა). თუ $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$-ს აღვნიშნავთ $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\omega(s)$-ით, გვექნება:

$$\psi(s+h)-\psi(s)=[\varphi(s+h)-\varphi(s_0)]\,\omega(s+h)-[\varphi(s)-\varphi(s_0)]\,\omega(s)=$$
$$=[\varphi(s+h)-\varphi(s)]\,\omega(s+h)+[\varphi(s)-\varphi(s_0)]\,[\omega(s+h)-\omega(s)].$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $s-s_0\geqslant 0$, $h\geqslant 0$. $\omega(s)$-ის შემოსაზღვრულობის გამო უკანასკნელი სტრიქონის პირველი შესაკრები მოდულით არ აღემატება C_1h^{μ}-ს, სადაც C_1 მუდმივია. ცხადია, იგივე გვექნება მეორე შესაკრებისთვისაც, როცა $s-s_0\leqslant h$. როცა $s-s_0\geqslant h$, გვაქვს $(0<\theta<1)$:

$$|\varphi(s)-\varphi(s_0)|\cdot|\omega(s+h)-\omega(s)|\leqslant|\varphi(s)-\varphi(s_0)|\cdot\frac{C_0h}{s-s_0+\theta h}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{AC_0(s-s_0)^{\mu}h}{s-s_0+\theta h}\leqslant AC_0\left(\frac{h}{s-s_0}\right)^{1-\mu}h^{\mu}\leqslant AC_0h^{\mu}$$

და დებულებაც დამტკიცებულია.

ეს დებულება გამოვიყენოთ მარტივ მაგალითებში.

2^0. ვთქვათ, t არის ცვლადი, ხოლო t_0 — ფიქსირებული წერტილები L-ზე. მაშინ

$$\psi(t)=|t-t_0|^{\mu}\ln|t-t_0|,\quad 0<\mu\leqslant 1$$

აკმაყოფილებს $H(\mu-\varepsilon)$ პირობას L-ზე, სადაც ε არის μ-ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. მართლაც $\psi(t)$-ს მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ ზემოთ დამტკიცებული დებულება, თუკი დავუშვებთ, რომ

$$\varphi(t)=|t-t_0|^{\mu-\varepsilon},\quad \omega(t)=|t-t_0|^{\varepsilon}\ln|t-t_0|.$$

აშკარაა, რომ t და t_0-ს შეიძლება როლები შევუცვალოთ და რომ $|t-t_0|^{\mu}\ln|t-t_0|$ აკმაყოფილებს $H(\mu-\varepsilon)$ პირობას ორივე t და t_0 ცვლადის მიმართ.

უფრო ზოგადად, თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ზე, მაშინ

$$\psi(t)=[\varphi(t)-\varphi(t_0)]\ln|t-t_0|$$

დააკმაყოფილებს $H(\mu-\varepsilon)$ პირობას, სადაც ε არის μ-ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი რიცხვი, ვინაიდან

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^{\varepsilon}}\,|t-t_0|^{\varepsilon}\ln|t-t_0|.$$

3^0. ვთქვათ, t არის ცვლადი, ხოლო t_0 — ფიქსირებული წერტილები L-ზე.

ϑ-თი აღვნიშნოთ $\overrightarrow{t_0 t}$ ვექტორის მიერ რაიმე ფიქსირებულ მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე, ათვლილი აღნიშნული მიმართულებიდან:

$$\vartheta = \vartheta(t_0,\ t) = \arg(t - t_0) + \text{const}.$$

ეს კუთხე განსაზღვრულია $2k\pi$ შესაკრების სიზუსტით, სადაც k მთელი რიცხვია. შევთანხმდეთ, $\vartheta(t_0,\ t)$ ვცვალოთ უწყვეტად, როცა t იცვლება L-ზე t_0 წერტილზე გადასვლამდე. t-ს t_0-ზე გადასვლისას (თუ t_0 არ წარმოადგენს L რკალის ბოლოს) ეს კუთხე იცვლება π-ს კენტი ჯერადის ტოლი ნახტომით.

ადვილი დასანახავია, რომ შემოსაზღვრული $\omega(t)=\vartheta(t_0,\ t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (6,1) პირობას ან (6,1ა) პირობას. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ $\omega(t)$ წარმოადგენს $\ln(t-t_0)$ ფუნქციის წარმოსახვით ნაწილს და რომ

$$\frac{d\ln(t-t_0)}{dt} = \frac{1}{t-t_0}, \qquad \left|\frac{d\ln(t-t_0)}{dt}\right| = \frac{1}{|t-t_0|}.$$

(6,1) პირობას აკმაყოფილებს აგრეთვე ყოველი $f(\vartheta)$ ფუნქცია, რომელსაც მოეპოვება შემოსაზღვრული წარმოებული $f'(\vartheta)$. კერძოდ, ამ პირობას აკმაყოფილებს $e^{\gamma\vartheta}$ ფუნქცია, სადაც γ ნებისმიერი (საზოგადოდ, კომპლექსური) მუდმივია.

ამიტომ, თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ ფუნქცია

$$\psi(t) = [\varphi(t) - \varphi(t_0)]\, e^{\gamma\vartheta}, \quad \gamma \text{ ნებისმიერი მუდმივია,}$$

აგრეთვე დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

მაგალითად, ფუნქცია

$$\psi(t) = (t-t_0)^{\mu} = |t-t_0|\, e^{i\mu\vartheta}, \quad 0<\mu\leqslant 1,$$

სადაც $\vartheta=\vartheta(t_0,\ t)=\arg(t-t_0)$, აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ზე, ვინაიდან $\varphi(t) = |t-t_0|^{\mu}$ ფუნქცია ამ პირობას აკმაყოფილებს და $\varphi(t_0)=0$.

სავსებით ასევე, ფუნქცია

$$\psi(t) = |t-t_0|^{\mu} e^{\gamma\vartheta}, \quad 0<\mu\leqslant 1, \quad \gamma \text{ ნებისმიერი მუდმივია,}$$

აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

ვთქვათ, $\gamma=\alpha+i\beta$, სადაც α და β ნამდვილი მუდმივებია. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\psi(t) = (t-t_0)^{\gamma} = \exp\{\gamma(\ln|t-t_0| + i\vartheta)\} = |t-t_0|^{\alpha} \exp\{i\beta\ln|t-t_0| + i\gamma\vartheta\}.$$

ადვილი დასანახავია, რომ ფუნქცია $\exp\{i\beta\ln|t-t_0|+i\gamma\vartheta\}$ შემოსაზღვრულია და აკმაყოფილებს (6,1) პირობას. ამიტომ, თუ $0<\alpha\leqslant 1$, მაშინ $\psi(t)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს $H(\alpha)$ პირობას; როცა $\alpha\geqslant 1$, ის აკმაყოფილებს $H(1)$ პირობას. როცა $\alpha=0$, $\beta\neq 0$, ეს ფუნქცია, ე. ი. ფუნქცია

$$\psi(t) = (t-t_0)^{i\beta} = \exp\{i\beta\ln|t-t_0| - \beta\vartheta\} =$$
$$= e^{-\beta\vartheta}\{\cos(\beta\ln|t-t_0|) + i\sin(\beta\ln|t-t_0|)\},$$

ცხადია, t_0 წერტილის მიდამოში H პირობას არ აკმაყოფილებს: ის უწყვეტიც კი არ არის. მაგრამ ფუნქცია

$$\psi(t) = |t-t_0|^{\mu} (t-t_0)^{i\beta}, \quad 0<\mu\leqslant 1,$$

აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

ცხადია, რომ, ისევე როგორც ზემოთ, ყველა წინა მაგალითში t-სა და t_0-ს შეიძლება შევუცვალოთ როლები.

ისევე როგორც ზემოთ, ადვილად შევამოწმებთ, რომ, თუ L-ზე t და t_0 ცვლადების $\varphi(t_0, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ზე, და თუ $\varphi(t_0, t_0)=0$, მაშინ ფუნქცია (იხ. § 5, პ. 7°)

$$\psi(t_0, t)=\frac{\varphi(t_0, t)}{(t-t_0)^{\gamma}}, \quad \gamma=\alpha+i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha<\mu,$$

დააკმაყოფილებს $H(\mu-\alpha)$ პირობას.

4°. ვთქვათ, t ცვლადი, ხოლო t_0 ფიქსირებული წერტილებია L-ზე. t_0 წერტილის მახლობლობაში განვიხილოთ შეფარდება

$$\omega(t)=\frac{t-t_0}{s-s_0}.$$

უშუალოდ ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\omega(t)$ და $1/\omega(t)$ აკმაყოფილებს (6,1) პირობას ან, რაც იგივეა, (6,1a) პირობას.

ამიტომ, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ, მაგალითად,

$$|t-t_0|^{\varepsilon} \frac{t-t_0}{s-s_0}, \quad |s-s_0|^{\varepsilon} \frac{s-s_0}{t-t_0}, \quad 0<\varepsilon \leqslant 1,$$

აკმაყოფილებს $H(\varepsilon)$ პირობას. სავსებით ასევე ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$|t-t_0|^{\varepsilon} \frac{|t-t_0|^{\mu}}{|s-s_0|^{\mu}}, \quad |s-s_0|^{\varepsilon} \frac{|s-s_0|^{\mu}}{|t-t_0|^{\mu}}, \quad 0<\varepsilon \leqslant 1$$

სადაც μ ნებისმიერი მუდმივაა, აკმაყოფილებს $H(\varepsilon)$ პირობას.

აქაც, რასაკვირველია, t-სა და t_0-ს შეიძლება შევუცვალოთ როლები.

§ 7. გაგრძელება. 1°. დასასრულ, მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მარტივი დებულება. ვთქვათ, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ ინტერვალში მოცემული ნამდვილი s ცვლადის $f(s)$ ფუნქციას ამ ინტერვალში აქვს n-ური რიგის უწყვეტი წარმოებული $f^{(n)}(s)$. დავუშვათ,

$$F(s_0, s)=\frac{f(s)-f(s_0)}{s-s_0}, \quad s_1 \leqslant s, s_0 \leqslant s_2, \tag{7,1}$$

ვგულისხმობთ, რომ

$$F(s, s)=\frac{df(s)}{ds}.$$

მაშინ არსებობს $(n-1)$ რიგის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial^{n-1} F(s_0, s)}{\partial s^k\, \partial s_0^l}, \quad k+l=n-1,$$

და ეს წარმოებულები უწყვეტია, როცა $s_1 \leqslant s, s_0 \leqslant s_2$. თუ, გარდა ამისა, $f^{(n)}(s)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ ხსენებული კერძო წარმოებულები დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ორივე s, s_0 ცვლადის მიმართ.

ყველაფერი ეს გამომდინარეობს ფორმულიდან:

$$f(s)-f(s_0)=\int_{s_0}^{s} f'(\sigma)\,d\sigma=(s-s_0)\int_0^1 f'[s_0+u(s-s_0)]\,du, \tag{7,2}$$

საიდანაც

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0,\ s)}{\partial s^k\,\partial s_0^l}=\int_0^1 u^k(1-u)^l f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]\,du. \tag{7,3}$$

2⁰.

$$\frac{\partial^n F(s_0,\ s)}{\partial s^k\,\partial s_0^l},\quad k+l=n,$$

n-ური რიგის კერძო წარმოებულების შემთხვევაში შეიძლება ვაჩვენოთ აგრეთვე შემდეგი: თუ $f^{(n)}(s)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ n-ური რიგის კერძო წარმოებულები შემდეგი სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$\frac{K(s_0,\ s)}{|s-s_0|^{\lambda}}, \tag{7,4}$$

სადაც $1-\mu<\lambda=\text{const}<1$, ხოლო $K(s_0,\ s)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე ცვლადის მიმართ. ამასთან, λ ნებისმიერად შეიძლება შეირჩეს აღნიშნულ შუალედში.

ამის დასამტკიცებლად ვისარგებლებთ ფორმულებით, რომლებიც სხვაცვლილ (7,3) ფორმულებს[14] წარმოადგენენ და მიიღებიან შემდეგნაირად: ჩავთვალოთ, რომ $k\geqslant 1$, (7,3) ფორმულაში k-ს ნაცვლად დავწეროთ $k-1$, და დავუბრუნდეთ ინტეგრების ძველ $\sigma=s_0+u(s-s_0)$ ცვლადს. ასე მივიღებთ ფორმულას:

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0,\ s)}{\partial s^{k-1}\,\partial s_0^l}=\frac{1}{(s-s_0)^n}\int_{s_0}^{s}(\sigma-s_0)^{k-1}(s-\sigma)^l f^{(n)}(\sigma)\,d\sigma,\quad k+l=n.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $l\geqslant 1$, ორივე ნაწილის s-ით გაწარმოებით და ხელახლა ინტეგრების u ცვლადზე გადასვლით, ადვილად მივიღებთ:

$$\frac{\partial^n F(s_0,\ s)}{\partial s^k\,\partial s_0^l}=\frac{1}{s-s_0}\int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{l-1}(nu-k)\,f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]\,du. \tag{7,5}$$

იმავე გზით ადვილად მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულებს იმ შემთხვევებისათვის, როცა k ან l რიცხვებიდან ერთ-ერთი ნულის ტოლია.
სახელდობრ, როცა $k=n,\ l=0$

$$\frac{\partial^n F(s_0,\ s)}{\partial s^n}=\frac{1}{s-s_0}\left\{f^{(n)}(s)-n\int_0^1 u^{n-1}f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]\,du\right\}; \tag{7,5ა}$$

---

[14] ჩვენ უშუალოდ ვერ ვისარგებლებთ ფორმულით, რომელიც მიიღება (7,3)-დან n-ის $(n+1)$-ით შეცვლით, ვინაიდან არავითარი დაშვება არ ხდება $f^{(n+1)}(s)$ წარმოებულის არსებობის შესახებ.

ფორმულა $k=0$, $l=n$ შემთხვევისათვის წინა ფორმულიდან მხოლოდ აღნიშვნებით განსხვავდება. თუ ამ ფორმულების მარჯვენა მხარეებში $1/(s-s_0)$-ის მამრავლს $\varphi(s_0, s)$-ით აღვნიშნავთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $f^{(n)}(s)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ $\varphi(s_0, s)$ ფუნქციაც დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ორივე ცვლადის მიმართ და რომ $\varphi(s_0, s_0)=0$[15]. მაშასადამე, § 5-ში (პ. 7°) ნათქვამის საფუძველზე, ამ მარჯვენა მხარეებს, რომლებიც ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$\frac{\varphi(s_0, s)}{s-s_0} = \pm \frac{\varphi(s_0, s)}{|s-s_0|^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{|s-s_0|^{\lambda}}, \quad 1-\mu < \lambda < 1,$$

აქვთ (7,4) სახე და ჩვენი მტკიცებაც დასრულებულია.

3°. წინა შედეგები გამოვიყენოთ ზოგიერთ მარტივ, მაგრამ მნიშვნელოვან მაგალითებში.

ვთქვათ, $L=ab$ გლუვი რკალია. დავუშვათ, გარდა ამისა, რომ L-ის $t=x+iy$ წერტილზე მხების მიერ რომელიმე მუდმივ მიმართულებასთან შედგენილი $\theta(t)$ კუთხე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

ამ თვისების მქონე წირები ხშირად გვხვდება გამოყენებებში. მათ უწოდებენ *წირებს, რომლებიც ლიაპუნოვის პირობას აკმაყოფილებენ*, ან, მოკლედ — *ლიაპუნოვის წირებს* (რკალებს, კონტურებს).

ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ θ ათვლილია Ox ღერძის მიმართულებიდან. მაშინ ცხადია, რომ $x=x(s)$, $y=y(s)$ კოორდინატების წარმოებულები s რკალური აბსცისით

$$x'(s) = \cos\theta, \quad y'(s) = \sin\theta$$

აგრეთვე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას. ცხადია, ამავე პირობას აკმაყოფილებს

$$\frac{dt(s)}{ds} = e^{i\theta}$$

წარმოებულიც.

განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{t-t_0}{s-s_0} = \frac{t(s)-t(s_0)}{s-s_0},$$

სადაც $t_0=t(s_0)$ წერტილი აგრეთვე ეკუთვნის L რკალს. 1° პუნქტის შედეგის საფუძველზე ($n=1$-ის შემთხვევისათვის), წინა შეფარდება ორივე s, s_0 ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

განვიხილოთ ახლა L-ის ორი t, t_0 წერტილის ფუნქცია

$$\vartheta(t_0, t) = \arg(t-t_0) + \text{const},$$

რომელიც წარმოადგენს $\overrightarrow{t_0 t}$ ვექტორის მიერ რაიმე მუდმივ მიმართულებასთან შედგენილ კუთხეს, რომელიც ათვლილია ამ უკანასკნელიდან, ისევე როგორც წინა პარაგრაფის 3° პუნქტის მაგალითში. ისე როგორც ზემოხსენებულ მაგალითში, შევთანხმდეთ, $\vartheta(t_0, t)$ ვცვალოთ უწყვეტად, ვიდრე t და t_0 წერტილები ერთმანეთს არ შეხვდებიან.

[15] შევნიშნოთ, რომ (7,5) ფორმულაში

$$u^{k-1}(1-u)^{l-1}(nu-k)\,du = -d\,[u^k(1-u)^l].$$

თუკი ეს წერტილები ერთმანეთზე გადადიან, მაშინ $\vartheta(t_0, t)$ იცვლება π-ს კენტი ჯერადის ნახტომით.

ვაჩვენოთ, რომ აღნიშნულ პირობებში $\vartheta(t_0, t)$ ფუნქცია ფიქსირებულ t_0 და ცვლადი t-თვის აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ცალ-ცალკე თითოეულ at_0, t_0b რკალზე და ანალოგიური შედეგი გვაქვს ფიქსირებული t-სა და ცვლადი t_0-თვის.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ცხადია, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $L=ab$ სტანდარტული რკალია. თუ Ox ღერძს მივმართავთ ამ რკალის რომელიმე წერტილზე მხების პარალელურად, გვექნება $x'(s) \neq 0$ და $x(s) - x(s_0) \neq 0$, თუ $s \neq s_0$.

დავუშვათ,

$$X(s_0, s) = \frac{x(s) - x(s_0)}{s - s_0}, \quad Y(s_0, s) = \frac{y(s) - y(s_0)}{s - s_0}.$$

1^0 პუნქტში დამტკიცებული დებულების საფუძველზე, $X(s_0, s)$ და $Y(s_0, s)$ ფუნქციები უწყვეტია L-ზე და აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას; გარდა ამისა, $X(s_0, s) \neq 0$.

$$\operatorname{arctg} \frac{Y(s_0, s)}{X(s_0, s)}$$

ფუნქციის მნიშვნელობად მივიჩნიოთ მისი რომელიმე შტო, რომელიც უწყვეტად იცვლება L-ზე. მაშინ გვექნება

$$\vartheta(t_0, t) = \operatorname{arctg} \frac{Y(s_0, s)}{X(s_0, s)} + C, \tag{7,6}$$

სადაც C ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, ვიდრე t და t_0 წერტილები ერთმანეთს არ შეხვდებიან, და იცვლება (π-ს კენტი ჯერადის ტოლი) ნახტომით მხოლოდ მაშინ, როცა ეს წერტილები ერთმანეთზე გადადიან.

ვინაიდან (7,6) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები, ცხადია, აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, ჩვენი დებულების დამტკიცება დასრულებულია.

(7,6) ტოლობის ორივე ნაწილის s ან s_0-ით გაწარმოებით და $X(s_0, s)$ და $Y(s_0, s)$ ფუნქციების კერძო წარმოებულების მიმართ 2^0 პუნქტის შედეგის გამოყენებით ადვილად დავასკვნით, რომ $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ კერძო წარმოებულები წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\frac{K^*(t_0, t)}{|s - s_0|^\lambda},$$

სადაც λ რაიმე ერთზე ნაკლები ნამდვილი რიცხვია, ხოლო $K^*(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე ცვლადის მიმართ. თუკი მივიღებთ მხედველობაში $\frac{t - t_0}{s - s_0}$ შეფარდების თვისებას, რომელიც აღნიშნულია ამ პუნქტის დასაწყისში, მივალთ დასკვნამდე, რომ $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ და $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ კერძო წარმოებულები წარმოიდგინება აგრეთვე შემდეგი სახითაც:

$$\frac{K(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad \lambda < 1,$$

სადაც $K(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე ცვლადის მიმართ.

მოვიყვანოთ $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ და $\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}$-ის ცხადი გამოსახულებანი. სახელდობრ, თუ წერის გამარტივების მიზნით ჩავთვლით, რომ θ და ϑ კუთხეები Ox ღერძიდან აითვლება,

$$\ln (t-t_0) = \ln r + i\vartheta, \quad r = |t-t_0|$$

და ტოლობის ორივე ნაწილს გავაწარმოებთ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s} + i\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{1}{t-t_0}\frac{dt}{ds} = \frac{e^{i\theta}}{re^{i\vartheta}} = \frac{e^{i(\theta-\vartheta)}}{r},$$

საიდანაც წარმოსახვითი ნაწილების შედარებით ვღებულობთ:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{\sin(\theta-\vartheta)}{r} = \frac{\sin \alpha(t_0, t)}{r}, \tag{7,7}$$

სადაც $\alpha(t_0, t)$ აღნიშნავს t წერტილში (დადებითი) მხების მიერ $\overrightarrow{t_0 t}$ ვექტორთან შედგენილ კუთხეს, ათვლილს ამ უკანასკნელიდან. ანალოგიურად,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} = -\frac{\sin(\theta_0-\vartheta)}{r} = \frac{\sin \alpha(t, t_0)}{r}, \tag{7,8}$$

სადაც θ_0 არის კუთხე, რომელსაც t_0 წერტილში (დადებითი) მხები ადგენს Ox ღერძთან, ხოლო $\alpha(t_0, t)$ — ამ მხების მიერ $\overrightarrow{t_0 t}$ ვექტორთან შედგენილი კუთხე, ათვლილი ამ უკანასკნელიდან[16].

ზემოაღნიშნულის საფუძვლით ანალოგიურად და ისევე მარტივად მტკიცდება შემდეგი ზოგადი შედეგი:

ვთქვათ, $\theta(t)$ კუთხეს აქვს n-ური რიგის უწყვეტი წარმოებული $\frac{d^n\theta}{ds^n}$ ან, რაც იგივეა, ვთქვათ, $x(s)$, $y(s)$ კოორდინატებს აქვთ $(n+1)$ რიგის უწყვეტი წარმოებულები, მაშინ n-ური რიგის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial^n \vartheta(t_0, t)}{\partial s^k \, \partial s_0^l}, \quad k + l = n, \tag{7,9}$$

უწყვეტია[17]. გარდა ამისა, თუ $\frac{d^n\theta}{ds^n}$ წარმოებული აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ n-ური რიგის (7,9) კერძო წარმოებულებიც აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ორივე ცვლადის მიმართ, ხოლო $(n+1)$ რიგის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial^{n+1} \vartheta(t_0, t)}{\partial s^k \, \partial s_0^l}, \quad k + l = n+1, \tag{7,10}$$

წარმოიდგინება

$$\frac{K(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}} \tag{7,11}$$

სახით, სადაც λ ერთზე ნაკლები ნამდვილი მუდმივია, ხოლო $K(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე ცვლადის მიმართ.

---

[16] (7,8) ფორმულა მაშინვე შეიძლება დაიწეროს (7,7) ფორმულის საფუძველზე: საკმარისია t_0-ს და t-ს შევუცვალოთ როლები, და გავითვალისწინოთ, რომ $\vartheta(t_0, t)$ ფუნქციის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს $\vartheta(t, t_0) = \vartheta(t_0, t) + \mathrm{const}$, სადაც const აღნიშნავს π-ს კენტ ჯერადს.

[17] იხ. პარაგრაფის ბოლოს შენიშვნა I.

კერძოდ, თუ პირველი რიგის წარმოებული $\frac{d\theta}{ds}$ უწყვეტია, ე. ი. თუ L წირს აქვს უწყვეტი სიმრუდე

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

სადაც ρ სიმრუდის რადიუსია, გარკვეული ნიშნით განხილული, მაშინ $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტია. თუკი სიმრუდე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, მაშინ ეს კერძო წარმოებულები აგრეთვე დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოთ, ზოგიერთ შემთხვევაში, ვლაპარაკობდით $t=t_0$ წერტილზე წყვეტილი $\vartheta(t_0, t)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულების უწყვეტობის (და, მაშასადამე, არსებობის) შესახებ. ამ შემთხვევებში იგულისხმებოდა, რომ განსახილველი წარმოებულები არსებობენ, როცა $t \neq t_0$ და მიისწრაფვიან სავსებით გარკვეული ზღვრებისაკენ, როცა t და t_0 მიისწრაფვიან ერთსა და იმავე მნიშვნელობისაკენ.

§ 8. უბან-უბან გლუვ წირებზე მოცემული H, H_0, H^*, H_c^* კლასის ფუნქციები. განვიხილოთ ახლა ნებისმიერ უბან-უბან გლუვ წირზე მოცემული ფუნქციები და შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება, რომლებითაც შემდგომში ვისარგებლებთ.

1^0. ვთქვათ, L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია § 1-ში (პ. 4) მოცემული განსაზღვრის აზრით.

L წირის კვანძებს (მათ რიცხვში ბოლოებსაც) აღვნიშნავთ c_k-თი ($k=1, 2, \ldots, n$) ან უბრალოდ c-თი, თუ მნიშვნელობა არა აქვს რომელ კვანძზეა ლაპარაკი. L-ის შემადგენელ მარტივ გლუვ რკალებს აღვნიშნავთ L_k-თი ($k=1, 2, \ldots, p$). L წირის წერტილებს, რომლებიც კვანძებისაგან განსხვავებულია, წინანდებურად ჩვეულებრივ წერტილებს ვუწოდებთ.

2^0. ვთქვათ $\varphi(t)$ L წირზე t წერტილის რაიმე ფუნქციაა, რომელიც ცალსახადაა განსაზღვრული როგორც ჩვეულებრივ წერტილებზე, აგრეთვე კვანძებზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ე კ უ თ ვ ნ ი ს H კ ლ ა ს ს L-ზ ე ანუ, უფრო ზუსტად, $H(\mu)$-ს, თუ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ის შემადგენელ თითოეულ L_k (ჩაკეტილ[18]) რკალზე.

თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და ეკუთვნის $H(\mu)$ კლასს არა მთელს L წირზე, არამედ მხოლოდ მის ნაწილზე, რომელიც c კვანძის საკმაოდ მცირე მიდამოშია მოთავსებული, მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H კლასს ანუ, უფრო ზუსტად, $H(\mu)$-ს, c წერტილის მიდამოში[10].

---

[18] გავიხსენოთ, რომ გახსნილ რკალს ეწოდება ჩაკეტილი, თუ ბოლოები რკალს მიეკუთვნება.

[10] განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის $H(\mu)$ კლასს c კვანძის მიდამოში, აკმაყოფილებს შემდეგი სახის პირობას:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^{\mu}, \quad A = \text{const}, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

სადაც t_1, t_2 ორი ნებისმიერი წერტილია, აღებული c-ს მახლობლად ერთ-ერთ L_k რკალზე, რომელსაც ბოლოდ აქვს c წერტილი (შემთხვევა, როცა ერთ-ერთი t_1 ან t_2 წერტილი ემთხვევა c-ს, არ არის გამორიცხული).

ადვილი დასანახავია, რომ წინა სახის უტოლობა გვექნება იმ შემთხვევაშიაც, როცა t_1, t_2 წერტილები მდებარეობენ სხვადასხვა რკალზე, რომლებსაც ბოლოდ აქვს c წერტილი, ოღონდ თუ ეს რკალები კი არ ეხებიან ერთმანეთს c წერტილში, არამედ არანულოვან კუთხეს adგენენ; შეად. დამატება II (პ I°) წიგნის ბოლოს.

3°. წინა შემთხვევაზე უფრო ხშირად შეგვხვდება შემდეგი შემთხვევა: ვთქვათ, $\varphi_k(t)$ შესაბამისად L წირის შემადგენელ (ჩაკეტილ) $L_k (k=1, 2, \ldots, p)$ რკალებზე ცალსახად განსაზღვრული ფუნქციებია, და ვთქვათ, $\varphi(t)$ განსაზღვრული ფუნქციაა L-ზე შემდეგნაირად:

$$\varphi(t) = \varphi_k(t), \text{ როცა } t \in L_k, \ k=1, 2, \ldots, p. \tag{8,1}$$

ამრიგად, $\varphi(t)$ ფუნქცია ცალსახადაა განსაზღვრული L წირის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილზე და აგრეთვე ამ წირის ბოლოებზე. კვანძებში კი, სადაც რამდენიმე რკალი ერთდება, ჩვეულებრივ შეგვიძლია $\varphi(t)$ ფუნქცია განუსაზღვრელი დავტოვოთ. ამით ჩვენთვის საინტერესო შედეგები არ შეიცვლება, მაგრამ შემდეგში, როცა ვილაპარაკებთ $\varphi(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობაზე რომელიმე c კვანძში, საწინააღმდეგო აზრი თუ არ იქნა ხაზგასმული, ჩავთვლით, რომ მას ერთ-ერთი მნიშვნელობათაგანი მიეწერება:

$$\varphi(c) = \varphi_k(c), \quad k = k_1, k_2, \ldots, \tag{8,2}$$

სადაც $k_1, k_2, \ldots$, იმ L_k რკალების ნომრებია, რომლებიც c კვანძში თავს იყრიან. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თუ ვილაპარაკებთ $\varphi(c)$-ს მნიშვნელობაზე, ჩავთვლით, რომ c-ს ვაკუთვნებთ რომელიმე L_k რკალს, რომელსაც ბოლოდ აქვს c.

მაგალითად, თუ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია განსხვავებულია ნულისაგან ყველგან L-ზე, ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(t) \neq 0$ ყოველ ჩვეულებრივ წერტილზე, ხოლო კვანძებში — $\varphi_k(c) \neq 0$, $k = k_1, k_2, \ldots$.

თუ ყველა $\varphi_k(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას შესაბამის (ჩაკეტილ) L_k რკალზე, მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს L-ზე. თუ $\varphi_k(t)$ ფუნქციები განსაზღვრულია და აკმაყოფილებს H პირობას მხოლოდ L_k რკალების ნაწილებზე, რომლებიც c კვანძის საკმაოდ მცირე მიდამოშია, მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს c კვანძის მიდამოში.

4°. თუ L-ზე მოცემული $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას L წირის ყოველ ჩაკეტილ ნაწილზე, რომელიც არ შეიცავს კვანძებს, ხოლო ნებისმიერ c კვანძის მახლობლად წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{|t-c|^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1, \tag{8,3}$$

სადაც $\varphi^*(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს c-ს მიდამოში[20], მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს L-ზე. თუ (8.3) წარმოდგენა მხოლოდ მოცემული c კვანძის მიდამოში გვაქვს, მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს c-ს მიდამოში.

5°. დასასრულ, თუ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს c კვანძის მიდამოში ყოველი ნებისმიერად მცირე α-თვის, ე. ი. თუ $|t-c|^\varepsilon \varphi(t)$ ეკუთვნის H კლასს ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H_ε^* კლასს c-ს მიდამოში.

თუკი აღნიშნული პირობა დაცულია ყველა კვანძისათვის და $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას ყველგან, გარდა, შესაძლოა, კვანძების მიდამოებისა, მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H_ε^* კლასს L-ზე.

---

[20] α რიცხვის (ნებისმიერად მცირედ) გაზრდით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\varphi^*(t)$ ეკუთვნის H კლასს (უფრო მეტიც, ნული ხდება კვანძებში).

მაგალითად (§ 6, პ. 3⁰), $(t-c)^{i\beta}$ ფუნქცია, სადაც β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, c-ს მიდამოში ეკუთვნის H_ε^* კლასს; ეს არის H_ε^* კლასის შემოსაზღვრული ფუნქციის მაგალითი; H_ε^* კლასის შემოუსაზღვრელი ფუნქციის მაგალითს წარმოადგენს $\ln(t-c)$.

6⁰. ზემოთ შემოყვანილი განსაზღვრები ბუნებრივად ვრცელდება მოცემული უბან-უბან გლუვი L წირის რამდენიმე ცვლადი წერტილის ფუნქციების შემთხვევებზე.

მაგალითად, ვიტყვით, რომ L წირის t_1 და t_2 წერტილების ფუნქცია $\varphi(t_1, t_2)$ ეკუთვნის H_0 კლასს, თუ იგი ეკუთვნის H_0 კლასს t_1 ცვლადის მიმართ t_2-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის და აგრეთვე t_2 ცვლადის მიმართ t_1-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის. უფრო ზუსტად, თუ $L_1, L_2, \ldots, L_p$ L წირის შემადგენელ გლუვ წირებს წარმოადგენენ, მაშინ განსაზღვრის ძალით $\varphi(t_1, t_2) = \varphi_{ij}(t_1, t_2)$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$, სადაც $\varphi_{ij}(t_1, t_2)$ t_1 და t_2 წერტილების ფუნქციებია, რომლებიც შესაბამისად L_i და L_j ჩაკეტილ რკალებს ეკუთვნიან და აკმაყოფილებენ H პირობას ორივე t_1 და t_2 ცვლადის მიმართ.

იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთი t_1 ან t_2 წერტილი ემთხვევა რომელიმე კვანძს, $\varphi(t_1, t_2)$ განისაზღვრება მოცემული კვანძიდან გამომავალი იმ L_k რკალის მითითებით, რომელსაც ვაკუთვნებთ მოცემულ წერტილს. ანალოგიური მდგომარეობაა იმ შემთხვევაშიც, როცა t_1, t_2 ემთხვევა სხვადასხვა კვანძს. თუ t_1, t_2 წერტილები ერთსა და იმავე კვანძს ემთხვევა, მაშინ პ. 3⁰-ში ნათქვამის ანალოგიურად $\varphi(t_1, t_2)$ გამოსახულებას შეიძლება მივაწეროთ რამდენიმე მნიშვნელობა ან დავტოვოთ იგი განუსაზღვრელი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. უფრო ზოგად ვითარებასთან არ გვექნება საქმე, თუ დავუშვებთ, რომ განსახილველ ფუნქციებს აქვთ ზემოთ აღნიშნული ტიპის განსაკუთრებული წერტილები არა მარტო კვანძებში, არამედ L-ზე მოცემულ სხვა ნებისმიერ სასრული რაოდენობის წერტილებში. მართლაც, ეს უკანასკნელი წერტილები შეგვიძლია კვანძებს მივაკუთვნოთ. შემდგომში ასეც მოვიქცევით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ცხადია, რომ H, H_0 და H_ε^* წარმოადგენენ H^* კლასის ქვეკლასებს; მაგალითად, თუ (8,3)-ში $\alpha=0$, მაშინ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს.

§ 9. უწყვეტი ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობების შესახებ. 1⁰. ვთქვათ, L უბან-უბან გლუვი წირია (§ 1). ყოველი t_0 წერტილის გარშემო, რომელიც ეკუთვნის L-ს და არ ემთხვევა კვანძებს (რომელთა რიცხვს მიეკუთვნება L წირის ბოლოებიც), შეიძლება, როგორც ადვილი დასანახავია (იხ. § 2), შემოვწეროთ იმდენად მცირე რადიუსიანი წრე, რომ ის L წირით გაიყოს ორ ნაწილად, რომლებიც L-ზე შერჩეული დადებითი მიმართულების მიმართ შესაბამისად L-ის მარცხნივ და მარჯვნივ იქნებიან მოთავსებული. ამის შესაბამისად შეიძლება განვიხილოთ t_0 წერტილის მ ა რ ც ხ ე ნ ა დ ა მ ა რ ჯ ვ ე ნ ა მ ი დ ა მ ო. ცხადია აგრეთვე, როგორ უნდა გავიგოთ მარცხენა და მარჯვენა მიდამო L-ის ნებისმიერი ნაწილისა, რომელიც კვანძებს არ შეიცავს.

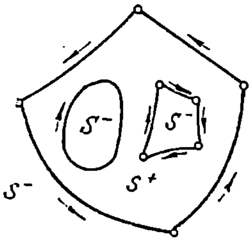
მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს, აგრეთვე ამა თუ იმ სიმბოლოს, რომელიც მარცხენა და მარჯვენა მიდამოებს შეესაბამება, შესაბამისად $+$ და $-$ ზედა ნიშნაკებით აღვნიშნავთ.

თუ L მარტივი გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირია, რომელიც სიბრტყის რაიმე ბმული ნაწილის, ე. ი. სიბრტყეზე რაიმე არის[21] შემოსაზღვრული შეკრული კონტუ-

[21] ტერმინს „არე“ გამოვიყენებთ მხოლოდ სიბრტყის ბმული ნაწილებისათვის.

რებისაგან შედგება, მაშინ, ჩვეულებრივ, L-ზე დადებით მიმართულებას შევარჩევთ ისე, რომ L-ზე მოძრაობისას ეს არე ყოველთვის მარცხნივ ან ყოველთვის მარჯვნივ რჩებოდეს (ნახ. 4); ამ შემთხვევაში სიბრტყის ნაწილს, რომელიც მარცხნივ რჩება, ყოველთვის S^+-ით აღვნიშნავთ, ხოლო სიბრტყის ნაწილს, რომელიც მარჯვნივ რჩება — S^--ით.

2^0. ვთქვათ, $\Phi(z)$ არის სიბრტყის $z=x+iy$ წერტილის ფუნქცია[22], რომელიც მოცემულია და უწყვეტია L წირის მიდამოში, გარდა, შესაძლოა, თვით L წირის წერტილებისა. ვთქვათ, t არის L წირის წერტილი, რომელიც მის კვანძებს არ ემთხვევა.



ნახ. 4

ჩვენ ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია t წერტილზე მარცხნიდან [ან მარჯვნიდან], თუ $\Phi(z)$ მიისწრაფვის გარკვეული $\Phi^+(t)$ [ან $\Phi^-(t)$] ზღვრისაკენ, როცა z მიისწრაფვის t-საკენ ნებისმიერი გზით, ოღონდ ისე, რომ რჩება L-ის მარცხნივ [ან მარჯვნივ][23].

ამ და მხოლოდ ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია t წერტილზე ღებულობს სასაზღვრო მნიშვნელობას მარცხნიდან [ან სასაზღვრო მნიშვნელობას მარჯვნიდან][24].

თუ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან [მარჯვნიდან] L წირის L' ნაწილის ყოველ t წერტილზე, მაშინ ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ უწყვეტად გაგრძელებადია L'-ზე მარცხნიდან [მარჯვნიდან]. ამ შემთხვევაში $\Phi^+(t)$ ფუნქცია [$\Phi^-(t)$ ფუნქცია] აუცილებლად უწყვეტია L'-ზე. მართლაც, პირობის თანახმად, ყოველი წინასწარ მოცემული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ (მოცემული t-სთვის) დამოკიდებული მხოლოდ ε-ზე, რომ

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t)| < \varepsilon, \tag{*}$$

თუკი $|z-t| < \delta$ და z მდებარეობს L-ის მარცხნივ. ვთქვათ, ახლა t' მეორე წერტილია L'-ზე, ისეთი, რომ $|t'-t| < \delta$. თუ z მიისწრაფვის t'-საკენ ისე, რომ რჩება L-ის მარცხნივ და აკმაყოფილებს პირობას $|z-t| < \delta$, მაშინ $\Phi(z)$ მიისწრაფვის $\Phi^+(t')$-საკენ, რის გამოც (*)-დან გამომდინარეობს, რომ

[22] ეს ნიშნავს, რომ

$$\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

სადაც $U(x, y)$ და $V(x, y)$ x და y ცვლადების რაიმე ნამდვილი ფუნქციებია.

[23] სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელსაც z ღებულობს t-კენ მისწრაფებისას, არაფრით არ არის შეზღუდული, გარდა პირობისა, რომ z იმყოფება L-ის მარცხნივ [მარჯვნივ]

[24] ტექსტში მოცემული განსაზღვრა შემდეგის ეკვივალენტურია: $\Phi(z)$ ფუნქცია t წერტილზე მარცხნიდან $\Phi^+(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობას იღებს, თუ ყოველი რაგინდ მცირე ε დადებითი რიცხვისათვის შეიძლება შეირჩეს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ ყოველი z-თვის, რომელიც L-ის მარცხნივ მდებარეობს და აკმაყოფილებს $|z-t| < \delta$ პირობას, გვექნება $|\Phi(z) - \Phi^+(t)| < \varepsilon$. ანალოგიურად გვექნება მარჯვნიდან სასაზღვრო მნიშვნელობისათვის.

$$|\Phi^+(t') - \Phi^+(t)| \leqslant \varepsilon,$$

მაგრამ ეს ამტკიცებს ჩვენს დებულებას [ანალოგიურად $\Phi^-(t)$-თვის][25].

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $S^+[S^-]$ აღნიშნავს L' წირის მარცხენა [მარჯვენა] მიდამოს, და თუ $\Phi(z)$ ფუნქციას მივაწერთ $\Phi^+(t)$ $[\Phi^-(t)]$ მნიშვნელობას L'-ზე, მაშინ $\Phi(z)$ ფუნქცია იქნება უწყვეტი $(S^+ + L')$-ში $[(S^- + L')$-ში$]$.

3°. აღვნიშნოთ კიდევ შემდეგი, თითქმის ცხადი გარემოება, რომლითაც ხშირად ვისარგებლებთ.

ვთქვათ ab სტანდარტული რკალია L-ზე. განვიხილოთ Π კონა პარალელურ წრფეებისა, რომლებიც ab-ს მხებებთან ადგენენ არაბლაგვ კუთხეს, არანაკლებს, ვიდრე მუდმივი კუთხე $\beta_0 > \alpha_0$, სადაც α_0 სტანდარტული რკალის განსაზღვრაში მონაწილე მახვილი კუთხეა (§ 2); მაშინ, როგორც ვიცით, (§ 2) Π კონის თითოეული Δ წრფე, რომელიც მოთავსებულია კონის a და b წერტილზე გამავალ Δ_a და Δ_b წრფეთა შორის, ab რკალს კვეთს ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილში. დავუშვათ, რომ $\Phi(z)$ თანაბრად მიისწრაფვის $\Phi^+(t)$-სკენ $[\Phi^-(t)$-სკენ$]$, როცა $z \to t$ Π კონის Δ წრფის გასწვრივ ისე, რომ რჩება ab-ს მარცხნივ [მარჯვნივ]. მაშინ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან [მარჯვნიდან] ab რკალის ნებისმიერ ნაწილზე, რომელიც არ შეიცავს მის ბოლოებს.

მართლაც, ზღვრისაკენ მისწრაფების თანაბრობიდან, უპირველეს ყოვლისა, გამომდინარეობს, რომ $\Phi^+(t)$ $[\Phi^-(t)]$ უწყვეტია ab-ზე. ვთქვათ, ახლა z მიისწრაფვის ab რკალის t წერტილისაკენ, რომელიც მის ბოლოებს არ ემთხვევა, ნებისმიერი გზით ისე, რომ რჩება, ვთქვათ, ab-ს მარცხნივ. თუ $|z - t|$ საკმაოდ მცირეა, z-ზე გამავალი Π კონის წრფე ab-ს გადაკვეთს რაიმე t' წერტილში. ამასთან, $|z - t'|$ და $|t' - t|$ სიდიდეები რაგინდ მცირე იქნება[26].

მაშასადამე,

$$\Phi(z) - \Phi^+(t) = [\Phi(z) - \Phi^+(t')] + [\Phi^+(t') - \Phi^+(t)]$$

სხვაობაც იქნება რაგინდ მცირე, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

4°. სასაზღვრო მნიშვნელობათა განხილვისას აქამდე გამოვრიცხავდით L წირის კვანძებს. ვთქვათ, ახლა $t = c$ ერთ-ერთი კვანძია (კერძოდ, ერთ-ერთი ბოლოა).

L წირის შემადგენელი გლუვი წირები, რომლებიც c კვანძში ხვდებიან ერთმანეთს, ამ წერტილის მიდამოს ჰყოფენ საერთო c წვეროს მქონე სასრული რაოდენობის $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ სექტორებად (ნახ. 5, a). ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია c კვანძზე σ_k სექტორიდან, თუ $\Phi(z)$ მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა z მიისწრაფვის c წერტილისაკენ ნებისმიერი გზით ისე, რომ რჩება σ_k სექტორის შიგნით. ამ ზღვარს ვუწოდებთ $\Phi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას c წერტილში σ_k სექტორიდან.

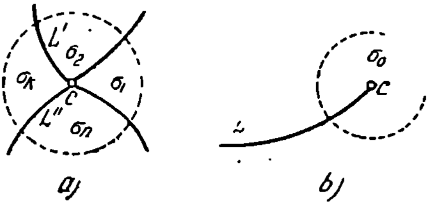
---

[25] როგორც ეს თვით მტკიცებიდან ჩანს, დებულება $\Phi^+(t)$ ან $\Phi^-(t)$-ს უწყვეტობის შესახებ მართებულია იმ შემთხვევაშიაც კი, თუ $\Phi(z)$-ს არ ჩავთვლით უწყვეტად, მაგრამ მოვითხოვთ მხოლოდ მის უწყვეტად გაგრძელებადობას L' ნაწილის ყოველ t წერტილზე მარცხნიდან ან მარჯვნიდან. ეს დებულება ეკუთვნის პენლევეს (P. Painlevé); იხ. მაგ. W. F. Osgood [I], გვ. 53.

[26] ეს გამომდინარეობს ztt' სამკუთხედის განხილვიდან. იმის გამო, რომ $t't$ ქორდასა და $t'z$ მონაკვეთს შორის არაბლაგვი კუთხე არაა ნაკლები რაიმე $\omega_0 > 0$ კუთხეზე (§ 2), ცხადია, გვექნება:

$$|t' - t| < \frac{|t - z|}{\sin \omega} \leqslant \frac{|t - z|}{\sin \omega_0}, \quad |z - t'| < \frac{|t - z|}{\sin \omega} \leqslant \frac{|t - z|}{\sin \omega_0}.$$

ვთქვათ, L' და L'' გლუვი წირებია, რომლებიც შემოსაზღვრავენ σ_k სექტორს (და გააჩნიათ საერთო ბოლოდ c კვანძი), და ვთქვათ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია σ_k სექტორიდან[27] L', L'' წირების ყველა t წერტილზე, რომლებიც კვანძის მიდამოში მდებარეობენ, და აგრეთვე c კვანძზე. t წერტილზე (შემთხვევა, როდესაც $t=c$, არ გამოირიცხება) $\Phi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ $\Phi(t)$-თი. მაშინ, როგორც ადვილი დასანახავია, $L'+L''$ წირის t წერტილის $\Phi(t)$ ფუნქცია იქნება უწყვეტი c წერტილის მიდამოში (c-ს ჩათვლით); დამტკიცება არაფრით არ განსხვავდება 2^0 პუნქტის ანალოგიური დებულების დამტკიცებისაგან. თუ ახლა $\Phi(z)$ ფუნქციას მივაწერთ $\Phi(t)$ მნიშვნელობას $(L'+L'')$-ზე (c-ს მიდამოში c-ს ჩათვლით), მაშინ $\Phi(z)$ ფუნქცია იქნება უწყვეტი ჩაკეტილ არეში, რომელიც c ცენტრის მქონე საკმაოდ მცირე წრეში მოთავსებული σ_k სექტორის და $L'+L''$ წირის წერტილებისაგან შედგება.



ნახ. 5

5^0. კერძო შემთხვევაში, როდესაც c კვანძი L წირის ბოლოა (ნახ. 5, b), გვაქვს მხოლოდ ერთი „სექტორი“ σ_0, რომელიც L წირის გასწვრივ გაჭრილი c წერტილის მიდამოსაგან შედგება.

ადვილი დასანახავია, თუ როგორ უნდა გამოვიყენოთ ზემოთქმული ამ კერძო შემთხვევაში. $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია c ბოლოზე, თუ ის მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა z მიისწრაფვის c-კენ ნებისმიერი გზით, რომელიც არ იკვეთება L-თან. ეს ზღვარი, თუკი იგი არსებობს, არის $\Phi(z)$-ის სასაზღვრო მნიშვნელობა c წერტილზე; ჩვენ მას უბრალოდ $\Phi(c)$-თი აღვნიშნავთ. თუ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L წირის ყველა t წერტილზე, რომლებიც c ბოლოს მიდამოში მდებარეობენ და აგრეთვე c ბოლოზე, მაშინ $\Phi^+(t)$ და $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები უწყვეტი იქნება c-ს მიდამოში L-ზე, ამასთან,

$$\lim_{t \to c} \Phi^+(t) = \lim_{t \to c} \Phi^-(t) = \Phi(c).$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. შემდგომში, ყველგან ამ წიგნის ძირითად ტექსტში, როცა ვილაპარაკებთ რაიმე $\Phi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობების შესახებ და გამოვიყენებთ აღნიშვნებს $\Phi^+(t)$-ს ან $\Phi^-(t)$-ს, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ეს ზღვრები მიიღწევა შესაბამისად L-ის მარცხნივ ან მარჯვნივ მოთავსებული ნებისმიერი გზით;

---

[27] ამ გამოთქმის მნიშვნელობა ცხადია: L' (ან L'') წირის t წერტილზე ფუნქციის გაგრძელებადობა σ_k სექტორიდან არის გაგრძელებადობა მარცხნიდან ან მარჯვნიდან იმისდა მიხედვით, L'-ის (ან L''-ის) რომელ მხარეს მდებარეობს σ_k სექტორი.

ამასთან, იგულისხმება, რომ t წერტილი არ ემთხვევა კვანძებს. საზოგადოდ, როცა ლაპარაკია t წერტილზე სასაზღვრო მნიშვნელობის შესახებ მარცხნიდან ან მარჯვნიდან, ყოველთვის იგულისხმება, თუ საწინააღმდეგო არ არის თქმული, რომ t წერტილი განსხვავებულია კვანძებისაგან.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ბევრ შემთხვევაში საინტერესოა განხილვა $\Phi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებისა, რომლებიც მიიღწევა არამხები გზებით, ან, უფრო ზუსტად, $\Phi(z)$-ის ზღვრების განხილვა, როცა z მიისწრაფვის t-კენ L-ის მარცხნიდან ან მარჯვნიდან, ისე, რომ არაბლაგვი კუთხე tz მონაკვეთსა და t წერტილში L-ის მხებს შორის ნაკლები არ არის რაიმე ფიქსირებულ (რაგინდ მცირე) მახვილ კუთხეზე. ასეთი სასაზღვრო მნიშვნელობები ზოგჯერ კ უ თ ხ უ რ ა დ იწოდება. ისინი შეიძლება არსებობდნენ მაშინაც, როდესაც არ არსებობენ სასაზღვრო მნიშვნელობანი ნებისმიერი გზით.

§ 10. უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციები. 1°. ვთქვათ L აღნიშნავს იმავეს, რასაც წინა პარაგრაფში, ხოლო $\Phi(z)$ — ფუნქციას, ჰოლომორფულს z სიბრტყის ყოველ სასრულ არეში, რომელიც L წირის წერტილებს არ შეიცავს. ვთქვათ, $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან, ხოლო კვანძების მახლობლად აკმაყოფილებს პირობას

$$|\Phi(z)| < \frac{C}{|z-c|^{\alpha}}, \tag{10,1}$$

სადაც c შესაბამისი კვანძია, C და α რაიმე დადებითი მუდმივებია, ამასთან $\alpha < 1$, რაც მეტად ა რ ს ე ბ ი თ ი ა. ასეთ ფუნქციას ვუწოდებთ უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას ნახტომის L წირით; ნახტომის წირს ზოგჯერ აგრეთვე ვუწოდებთ ს ა ს ა ზ ღ ვ რ ო წ ი რ ს.

ახალ (უფრო ზოგად) ვითარებასთან არ გვექნება საქმე, თუ უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის ცნების განსაზღვრისას დავუშვებთ, რომ იგი შესაძლებელია არ იყოს უწყვეტად გაგრძელებადი აგრეთვე რაიმე სასრული რაოდენობის მოცემულ c წერტილებზეც, რომლებიც მოთავსებულია L წირის შემადგენელ გლუვ რკალებზე და რომელთა მიდამოშიც ადგილი აქვს (10,1) პირობას; მართლაც (შეად. შენიშვნა 1 § 8-ის ბოლოში), ეს წერტილები შეგვიძლია კვანძით წერტილებად ჩავთვალოთ.

თუ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში $\Phi(z)$ ფუნქციის დაშლაში

$$\Phi(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j z^j \tag{10,2}$$

z-ის დადებითი ხარისხის შემცველი წევრების მხოლოდ სასრული რაოდენობაა, მაშინ ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$-ს გააჩნია სასრული რიგი უსასრულობაში.

თუ (10,2) დაშლაში a_k უკანასკნელი ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტია (ჩვენ ახლა გამოვრიცხავთ შემთხვევას, როცა ყველა $a_j=0$, ე. ი. როცა $\Phi(z)=0$, $z=\infty$ წერტილის რაიმე მიდამოში), მაშინ ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ ფუნქციის რიგი უსასრულობაში k-ს ტოლია. როცა $k>0$ წერტილი $z=\infty$ არის $\Phi(z)$ ფუნქციის k რიგის პოლუსი, ხოლო, როცა $k<0$ — $-k$ რიგის (ანუ ჯერადობის) ნული (ანუ ფესვი). როცა $k=0$, ე. ი. $\Phi(\infty)=a_0$ არის ნულისაგან განსხვავებული გარკვეული სასრული სიდიდე, იმისდა მიხედვით, თუ რა უფრო მოხერხებულია, ვიტყვით, რომ $z=\infty$

წერტილში $\Phi(z)$-ს აქვს ნული რიგის პოლუსი ან ნული. დასასრულ, როცა $k \leqslant 0$, ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ უბან-უბან ჰოლომორფულია უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით.

თუ $\Phi(z)$-ს უსასრულობაში აქვს $k \geqslant 0$ რიგი, მაშინ საკმაოდ დიდი $|z|$-თვის გვექნება[23]:

$$\Phi(z) = P_k(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{10,2ა}$$

სადაც $P_k(z)$ k რიგის პოლინომია. ჩვენ მას $\Phi(z)$ ფუნქციის პოლუსის მთავარ ნაწილს ვუწოდებთ უსასრულობაში.

2°. ახლა გავიხსენოთ ანალიზურ ფუნქციათა ერთი ცნობილი თვისება, რომლითაც ხშირად ვისარგებლებთ.

ვთქვათ, S_1 და S_2 სიბრტყის ორი ბმული ნაწილია, რომლებსაც შიგა საერთო წერტილები არ გააჩნიათ, მაგრამ ერთმანეთს ესაზღვრებიან რაიმე გლუვი L რკალის გასწვრივ, რომელიც მათი საზღვრების საერთო ნაწილს წარმოადგენს; L-ის ბოლოებს ჩვენ არ ვაკუთვნებთ L-ს. ვთქვათ, $\Phi_1(z)$ და $\Phi_2(z)$ შესაბამისად S_1-ში და S_2-ში ჰოლომორფული და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქციებია და ვთქვათ, L-ის გასწვრივ მათი სასაზღვრო მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია:

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t); \tag{10,3}$$

t-თი აღნიშნულია წერტილი L-ზე, ხოლო $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$-თი $\Phi_1(z)$ და $\Phi_2(z)$ ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობები. მაშინ ასე განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\Phi(z)=\Phi_1(z), \text{ როცა } z \in S_1, \quad \Phi(z)=\Phi_2(z), \text{ როცა } z \in S_2,$$
$$\Phi(t)=\Phi_1(t)=\Phi_2(t), \text{ როცა } t \in L, \tag{10,4}$$

ჰოლომორფულია S_1+S_2+L არეში.

დასამტკიცებლად, ცხადია, საკმარისია დავადგინოთ, რომ ზემოთ განსაზღვრული $\Phi(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია L რკალის ნებისმიერ t_0 წერტილის მიდამოში, რომელიც ბოლოებს არ ემთხვევა. შემოვწეროთ t_0 ცენტრის მქონე იმდენად მცირე რადიუსიანი γ წრეწირი, რომ მან L გადაკვეთოს ზუსტად ორ a და b წერტილში. ვთქვათ, σ არის γ-თი შემოსაზღვრული წრე, ხოლო σ_1, σ_2 ამ წრის ნაწილები მოთავსებული შესაბამისად S_1 და S_2-ში. ვთქვათ, γ_1 და γ_2 ამ ნაწილების დადებითი მიმართულებით შემოწერილი საზღვრებია; γ_1 და γ_2-ს გააჩნიათ საწინააღმდეგო მიმართულების მქონე საერთო ab ნაწილი.

უშუალოდ კოშის თეორემის საფუძველზე ადვილი შესამოწმებელია, რომ σ_1 ან σ_2 არის შიგნით მდებარე ყოველი z წერტილისათვის გვაქვს

[23] გავიხსენოთ, რომ თუ ξ აღნიშნავს საზოგადოდ კომპლექსურ ცვლადს, რომლის მნიშვნელობები ეკუთვნის რაიმე M სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს რაგინდ დიდი [რაგინდ მცირე] მოდულის მქონე მნიშვნელობებს, მაშინ $O(\xi)$ აღნიშნავს ისეთ სიდიდეს, რომ შეფარდება $\frac{O(\xi)}{\xi}$ რჩება მოდულით შემოსაზღვრული ξ-ის ყველა საკმაოდ დიდი [საკმაოდ მცირე] მოდულის მქონე მნიშვნელობებისათვის M-დან.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\Phi_1(t)\, dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\Phi_2(t)\, dt}{t - z},$$

ვინაიდან პირველი ინტეგრალი ტოლია $\Phi_1(z)$-ისა როცა $z \in \sigma_1$, და ნულისა, როცა $z \in \sigma_2$, ხოლო მეორე ტოლია $\Phi_2(z)$-ისა, როცა $z \in \sigma_2$, და ნულისა, როცა $z \in \sigma_1$. მაგრამ წინა ორი ინტეგრალის ჯამი დაიყვანება γ-ზე აღებულ ერთ ინტეგრალზე, ვინაიდან (10,3) პირობის გამო, რომელსაც ადგილი აქვს L-ზე, ab რკალზე აღებული ნაწილები ბათილდებიან. ამიტომ წინა ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(t)\, dt}{t - z},$$

რის შემდეგ ჩვენი დებულება აშკარა ხდება, ვინაიდან ცხადია, რომ წინა ფორმულის მარჯვენა მხარე γ-ს შიგნით ჰოლომორფულ ფუნქციას წარმოადგენს.

3^0. ნათქვამიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა, რომლითაც ხშირად ვისარგებლებთ.

ვთქვათ, როგორც 1^0 პუნქტში, L აღნიშნავს ნებისმიერ უბან-უბან გლუვ წირს, ხოლო $\Phi(z)$ — L ნახტომის წირის მქონე უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას. დავუშვათ, რომ L წირის რაიმე L' ნაწილზე გვაქვს $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, სადაც t აღნიშნავს L' ნაწილის კვანძებისაგან (მათ შორის ბოლოებისაგან) განსხვავებულ ნებისმიერ წერტილს. მაშინ L წირის L' ნაწილი შეიძლება მოვაცილოთ და $\Phi(z)$ იქნება $L - L'$ ნახტომის წირის მქონე უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია, თუ მას სათანადო მნიშვნელობებს მივაწერთ მოცილებული L' ნაწილის წერტილებზე. ეს გამომდინარეობს § 2^0-ის შედეგიდან. ეჭვი შეიძლება გამოიწვიოს მხოლოდ $\Phi(z)$ ფუნქციის ყოფაქცევამ იმ წერტილების მიდამოში, რომლებიც მოცილებული ნაწილის კვანძებს ეკუთვნიან. მაგრამ ეს ეჭვიც გაიფანტება, თუ შევნიშნავთ, რომ (10,1)-ის ძალით ამ წერტილებში $\Phi(z)$-ს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ აცილებადი განსაკუთრებულობა[20], ე. ი. იგი იქნება ჰოლომორფული ამ წერტილების მიდამოში, თუ მას სათანადო მნიშვნელობებს მივაწერთ აღნიშნულ წერტილებზე.

4^0. წინა შედეგს მივყავართ აგრეთვე შემდეგ დასკვნამდე: ვთქვათ, $\Phi(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციაა სიბრტყის რაიმე ბმულ S ნაწილზე (არეზე), რომლის საზღვარი შეიცავს (რაგინდ მცირე) გლუვ l რკალს, და ვთქვათ, $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია l-ზე, ამასთან, მისი სასაზღვრო მნიშვნელობანი l-ზე ნულის ტოლია; მაშინ $\Phi(z) = 0$ მთელს S არეში. მართლაც, S არეს მივუერთოთ რაიმე S' არე, რომელიც l-ს ესაზღვრება მეორე მხრიდან; მაშინ, თუ დავუშვებთ $\Phi(z) = 0$ S'-ში და l-ზე, მივიღებთ $\Phi(z)$ ფუნქციას, ჰოლომორფულს $S + S' + l$-ში და ნულის ტოლს S'-ში, მაგრამ ასეთი ფუნქცია აუცილებლად ნულის ტოლია მთელს $S + S' + l$ არეში, საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

---

[20] იხ., მაგალითად, ი. პრივალოვი [6], გვ 221—222. კვანძითი c წერტილის მიდამოში $\Phi(z)$ ფუნქციის ლორანის გაშლა არ შეიძლება შეიცავდეს $(z-c)$-ს უარყოფითი ხარისხებს (10,1) პირობის გამო, სადაც, შეგახსენებთ $\alpha < 1$.

II. კოშის ტიპის ინტეგრალები

ამ კარში კოშის ტიპის ინტეგრალების უმთავრეს თვისებებს ვსწავლობთ. ამ ინტეგრალების განსაზღვრა შემდეგ პარაგრაფშია მოცემული.

ამ კარში მოცემული შედეგებით მუდმივად ვისარგებლებთ შემდეგში.

§ 11. კოშის ტიპის ინტეგრალის განსაზღვრა. 1°. ვთქვათ, L უბან-უბან გლუვ წირს აღნიშნავს და ვთქვათ, $\varphi(t)$ ფუნქცია მოცემულია L-ზე, გარდა, შესაძლოა, სასრული რაოდენობის წერტილებისა. ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(t)$ შემოსაზღვრულია ყველგან L-ზე, გარდა, შესაძლოა, ზემოთ დასახელებული წერტილების ნებისმიერად მცირე მიდამოებისა.

L-ის შემადგენელ ყოველ გლუვ $L_k (k=1, 2, \ldots, p)$ რკალზე $\varphi(t)$ ფუნქცია ამავე დროს შესაბამისი S რკალური აბსცისის ფუნქციას წარმოადგენს. შემდგომში ყველგან, სადაც ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა, ვიგულისხმებთ, რომ არსებობს ინტეგრალები

$$\int_{L_k} \varphi(t)\, ds, \quad k=1, 2, \ldots, p, \tag{*}$$

რიმანის აზრით, თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია L_k-ზე, ან „არასაკუთრივი ინტეგრალის“ აზრით, როცა ეს ფუნქცია შესაძლებელია შემოუსაზღვრელი იყოს[30]. ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადია L-ზე, თუ ის ინტეგრებადია და თუ, გარდა ამისა, არსებობს ინტეგრალები

$$\int_{L_k} |\varphi(t)|\, ds, \quad k=1, 2, \ldots, p, \tag{**}$$

ახლახან აღნიშნული აზრით. თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაშინ მისი ინტეგრებადობიდან, როგორც ცნობილია, გამომდინარეობს აბსოლუტური ინტეგრებადობა. თუკი $\varphi(t)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია, მაშინ ის შესაძლებელია იყოს ინტეგრებადი, მაგრამ არ იყოს აბსოლუტურად ინტეგრებადი.

გავიხსენოთ, რომ თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია, ხოლო $\psi(t)$ აღნიშნავს შემოსაზღვრულ ინტეგრებად ფუნქციას, მაშინ $\varphi(t)\,\psi(t)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია s-ით, მაშინ ის აბსოლუტურად ინტეგრებადია t ცვლადითაც, ე. ი. არსებობს ინტეგრალები

$$\int_{L_k} \varphi(t)\, dt = \int_{L_k} \varphi(t)\, \frac{dt}{ds}\, ds,$$

და აგრეთვე ინტეგრალები

---

30 ჩვენ აქ მხედველობაში გვაქვს „არასაკუთრივი ინტეგრალის“ განსაზღვრა, რომელსაც ჩვეულებრივად იძლევიან ანალიზის კურსებში; იხ., მაგ., გ. ფიხტენჰოლცი [2], ტ. 2.

$$\int_{L'_k} |\varphi(t)|\,|dt|,$$

ე. ი. იგივე, რაც (**)-ში, ინტეგრალები

$$\int_{L'_k} |\varphi(t)| \left|\frac{dt}{ds}\right| ds = \int_{L'_k} |\varphi(t)|\, ds.$$

პირიქით, t-თი აბსოლუტური ინტეგრებადობიდან გამომდინარეობს s-ით აბსოლუტური ინტეგრებადობა.

რა თქმა უნდა L-ზე ინტეგრალი განისაზღვრება როგორც L_k-ზე ინტეგრალების ჯამი, ე. ი.

$$\int_L \varphi(t)\, ds = \sum_{k=1}^{p} \int_{L'_k} \varphi(t)\, ds, \qquad \int_L \varphi(t)\, dt = \sum_{k=1}^{p} \int_{L'_k} \varphi(t)\, dt.$$

2°. ვთქვათ, ისევე როგორც წინა პუნქტში, L აღნიშნავს უბან-უბან გლუვ წირს, ხოლო $\varphi(t)$ — აბსოლუტურად ინტეგრებად ფუნქციას, მოცემულს L-ზე, გარდა, შესაძლოა, სასრული რაოდენობის წერტილებისა.

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z}, \tag{11,1}$$

სადაც z სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია; ამ ინტეგრალს კ ო შ ი ს ტ ი პ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ეწოდება. $\varphi(t)$ ფუნქციას ზოგჯერ სიმკვრივეს ვუწოდებთ.

ქვემოთ (§ 13) ამ ინტეგრალს გარკვეულ შემთხვევებში სავსებით განსაზღვრული აზრი მიეწერება მაშინაც, როცა z თვით L წირზე მდებარეობს; ჯერჯერობით კი ჩავთვლით, რომ z წერტილი არ მდებარეობს L-ზე.

ცხადია, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია ყოველ არეში, რომელიც არ შეიცავს L წირის წერტილებს, ამასთან, $\Phi(\infty)=0$; უფრო ზუსტად, დიდი $|z|$-სთვის გვაქვს

$$\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{11,2}$$

ვინაიდან L-ს სასრული სიგრძე გააჩნია.

თუ შევნიშნავთ, რომ საკმაოდ დიდი $|z|$-სთვის

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} - \frac{t}{z^2} - \frac{t^2}{z^3} - \cdots$$

იმავე $|z|$-სთვის გვექნება დაშლა:

$$\Phi(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \cdots, \tag{11,2ა}$$

სადაც

$$A_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_L t^{k-1}\varphi(t)\,dt, \quad k=1,\ 2, \ldots. \qquad (11,2ბ)$$

მაგალითისათვის განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა $L = ab$ მარტივი უბან-უბან გლუვი გახსნილი რკალია, ხოლო $\varphi(t)=1$. მაშინ, ცხადია,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z} = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}, \qquad (11,3)$$

სადაც

$$\ln\frac{z-b}{z-a} = \ln\frac{b-z}{a-z}$$

აღნიშნავს შტოს, რომელიც ჰოლომორფულია ab რკალის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე და ქრობადია უსასრულობაში (როგორც იყო ნათქვამი ყოველთვის $\Phi(\infty)=0$); სახელდობრ, საკმაოდ დიდი $|z|$-სთვის

$$\ln\frac{z-b}{z-a} = \frac{a-b}{z} + \frac{a^2-b^2}{2z^2} + \frac{a^3-b^3}{3z^3} + \cdots.$$

§ 12. **ლოგარითმულ პოტენციალთან კავშირი.** კოშის ტიპის ინტეგრალის ცნება მჭიდრო კავშირშია L წირზე განაწილებული მარტივი და ორმაგი ფენის ლოგარითმული პოტენციალის ცნებასთან. ამ კავშირის შესახებ რამდენიმე სიტყვას ვიტყვით.

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ L გლუვი წირია. აგრეთვე ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)$ ნამდვილი ფუნქციაა, ვინაიდან ზოგადი შემთხვევა უშუალოდ ამაზე დაიყვანება.

ვიგულისხმოთ, რომ z არ მდებარეობს L-ზე და დავუშვათ,

$$\Phi(z) = U(x,\ y) + iV(x,\ y) = \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \qquad (12,1)$$

სადაც U და V ნამდვილი ფუნქციებია. შემდეგ, დავუშვათ,

$$t - z = re^{i\vartheta}, \qquad (12,2)$$

სადაც $r = |t-z|$, $\vartheta = \vartheta(z,\ t) = \arg(t-z)$. წინა ტოლობის გალოგარითმებით და t-თი გაწარმოებით (მუდმივი z-თვის), მივიღებთ:

$$\frac{dt}{t-z} = d\ln r + i d\vartheta = \frac{dr}{r} + i d\vartheta; \qquad (12,3)$$

თუ ამ გამოსახულებას (12,1)-ში ჩავსვამთ და გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ ფორმულებს

$$U(x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int_L\varphi d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_L\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial s}ds = -\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi\frac{\partial\ln r}{\partial n}ds =$$

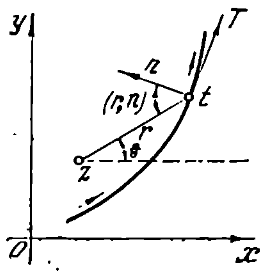
$$= \frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\varphi\cos(r,\ n)\,ds}{r}, \qquad (12,4)$$

$$V(x,\ y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \varphi d\ln r = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \varphi\frac{dr}{r}, \qquad (12,5)$$

სადაც s არის t წერტილის რკალური აბსცისი, n ნორმალია ამ წერტილში, მიმართული L-ის მარცხნივ, $(r,\ n)$ კუთხეა $\overrightarrow{tz}$ ვექტორსა და n-ს შორის (ნახ. 6). (12,4)-ში გარდაქმნისას ვისარგებლეთ დამოკიდებულებით

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = -\frac{\partial \ln r}{\partial n}, \qquad (12,6)$$

რომელიც წარმოადგენს კოში—რიმანის დამოკიდებულებას, გამოყენებულს ანალიზური $\ln(t-z) = \ln r + i\vartheta$ ფუნქციისათვის (მუდმივი z და ცვლადი t-თის) იმ სისტემის მიმართ, რომელიც შედგება დადებითი T მხებისა და n ნორმალისაგან (ეს სისტემა ორიენტირებულია ისევე, როგორც Ox, Oy სისტემა, ე. ი. n ღერძი მიმართულია T-ს მარცხნივ)[31].



ნახ. 6

(12,4)-დან გამომდინარეობს, რომ $U(x,\ y)$ წარმოადგენს ორმაგი ფენის პოტენციალს $\frac{\varphi}{2\pi}$ სიმკვრივით.

(12,5) ფორმულა კი, ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით (ახლა სიმარტივისათვის ვგულისხმობთ, რომ φ-ს გააჩნია ინტეგრებადი წარმოებული s რკალური აბსცისით[32]), ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$V(x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{d\varphi}{ds}\ln r ds + \frac{1}{2\pi}\sum \pm \varphi(c_k)\ln r_k, \qquad (12,7)$$

სადაც c_k აღნიშნავს L წირის ბოლოებს (თუ იგი შეიცავს გახსნილ რკალებს), ხოლო r_k მანძილია $(x,\ y)$ წერტილიდან c_k წერტილამდე. თუ L წირი შედგება მხოლოდ შეკრული კონტურებისაგან, მაშინ

$$V(x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{d\varphi}{ds}\ln r ds. \qquad (12,7ა)$$

უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ შეკრული კონტურების შემთხვევაში $V(x,\ y)$ წარმოადგენს მარტივი ფენის პოტენციალს.

---

31 საზოგადოდ, თუ $f(z) = u + iv$ ანალიზური ფუნქციაა, მაშინ კოში—რიმანის დამოკიდებულების საფუძველზე,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}.$$

32 ეს დაშვება შეიძლება უფრო ზოგადით შეიცვალოს (მაგალითად, φ ფუნქცია ჩაითვალოს მხოლოდ უწყვეტად), თუ ვისარგებლებთ სტილტესის ინტეგრალებით.

$$V(x,\ y) = \int\limits_L \mu(s) \ln \frac{1}{r}\, ds = - \int\limits_L \mu(s) \ln r\, ds, \tag{12,8}$$

$$\mu(s) = - \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{ds}$$

სიმკვრივით.

იმ შემთხვევაში, როცა L შეიცავს გახსნილ რკალებს, (12,7) ფორმულის თანახმად, (12,7a) პოტენციალს ემატება კიდევ c_k წერტილებში *თავმოყრილი* წერტილოვანი მასების პოტენციალები. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ მართალია ერთი მხრივ (12,5) ფორმულით განსაზღვრული $V(x,\ y)$ ფუნქცია წარმოადგენს მარტივი ფენის პოტენციალის გარკვეულ განზოგადებას (ვინაიდან ხსენებულ ფორმულაში არ მოითხოვება $\varphi(t)$-ს წარმოებადობა), იგი $\varphi(t)$-ს წარმოებადობის შემთხვევაშიც კი არ იძლევა მარტივი ფენის ჩვეულებრივი პოტენციალის ზოგად სახეს. სახელდობრ, (12,5) ფორმულით განსაზღვრული პოტენციალი მარტივი ფენის ჩვეულებრივი პოტენციალის იმ შემთხვევას შეესაბამება, როცა L წირის შემადგენლობაში შემავალ ცალკეულ შეკრულ კონტურებზე განაწილებული „მასები"

$$m_k = \int\limits_{L_k} \mu(s)\, ds$$

ნულის ტოლია. ეს ცხადია (12,9)-დან. ამიტომ შემდგომში (12,5) სახის გამოსახულებას ვუწოდებთ *მარტივი ფენის სახეცვლილ პოტენციალს*.

ზემოთქმულის თანახმად ცხადია, რომ კოშის ტიპის ინტეგრალების შესწავლა შეიძლება დაყვანილ იქნას ორმაგი და მარტივი ფენების ლოგარითმული პოტენციალების განხილვაზე.

სწორედ ამ თვალსაზრისითაა ჩატარებული ა. ჰარნაკის (A. Harnack [1]) გამოკვლევა, რომელიც კოშის ტიპის ინტეგრალებისადმი მიძღვნილ ერთ-ერთ პირველ მნიშვნელოვან შრომას წარმოადგენს (1885 წ.).

მაგრამ ამ ინტეგრალების უშუალო შესწავლა უფრო ზოგად და თვალსაჩინო შედეგებს გვაძლევს, რაც გამოყენების თვალსაზრისით მეტად მნიშვნელოვანია.

ამ მიმართულებით პირველი არსებითი გამოკვლევა, რომელმაც, თუმცა, სათანადო ყურადღება არ მიიქცია, მორერას ეკუთვნის (G. Morera [1], 1889 წ.).

შემდგომში სწორედ ამ უკანასკნელ გზას გავყვებით და კოშის ტიპის ინტეგრალების პოტენციალებთან კავშირს არ დავეყრდნობით. ქვემოთ იქნება მოცემული სათანადო ლიტერატურის მითითებანი.

§ 13. კოშის ტიპის ინტეგრალის მნიშვნელობა ინტეგრების წირზე. დავუბრუნდეთ კოშის ტიპის ინტეგრალის უშუალო შესწავლას და განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (11,1) ფორმულაში z წერტილი, რომელსაც ახლა t_0-ით აღვნიშნავთ, L-ზე მდებარეობს. ჯერ დავწეროთ მხოლოდ ფორმალურად:

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - t_0}. \tag{13,1}$$

საზოგადოდ, მარჯვენა მხარეში მდგომ ინტეგრალს, ჩვეულებრივი გაგებით, აზრი არა აქვს. მაგრამ $\varphi(t)$ ფუნქციათა ფართო და მნიშვნელოვან კლასისათვის ამ ინტეგ-

რალს შეიძლება მიეცეს აზრი, თუ შემოვიყვანთ ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის ცნებას კოშის აზრით. იგი შემდეგში მდგომარეობს:

ვთქვათ, t_0 არ ემთხვევა L წირის არც ერთ კვანძს (მათ შორის ბოლოებს). შემოვწეროთ t_0 ცენტრის მქონე იმდენად მცირე ε რადიუსიანი წრეწირი, რომ მან L წირი გადაკვეთოს ზუსტად ორ t' და t'' წერტილში და განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{13,2}$$

სადაც l აღნიშნავს $t't''$ რკალს. თუ (13,2) ინტეგრალი მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $\varepsilon\to 0$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა კოშის აზრით. ცხადია, თუ (13,1) ინტეგრალი არსებობს ჩვეულებრივი (რიმანის) აზრით[33], მაშინ არსებობს მთავარი მნიშვნელობაც (შებრუნებული დებულება არაა მართალი). ამიტომ ინტეგრალის მთავარ მნიშვნელობას აღვნიშნავთ იმავე სიმბოლოთი, რითაც ჩვეულებრივ ინტეგრალს[34], და ვიგულისხმებთ, რომ თუ ინტეგრალს ჩვეულებრივი აზრი არა აქვს, მაშინ განიხილება მისი მთავარი მნიშვნელობა.

ჩვენ არ დავიწყებთ რაც შეიძლება ზოგადი პირობების გამორკვევას, რომლებიც უზრუნველყოფენ მთავარი მნიშვნელობის არსებობას, და შემოვისაზღვრებით ერთი მნიშვნელოვანი საკმარისი პირობის მითითებით, როცა არსებობა ნამდვილად უზრუნველყოფილია.

სახელდობრ, ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია t_0 წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს H პირობას. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში მთავარი მნიშვნელობა არსებობს და, ამასთან, ვიპოვოთ მისი გამოსახულება ჩვეულებრივი აზრის მქონე ინტეგრალით.

რა თქმა უნდა, შეგვიძლია შემოვისაზღვროთ შემთხვევით, როცა L შედგება ერთადერთი გლუვი რკალისაგან. ჯერ დავუშვათ, რომ $L=ab$ რკალი გახსნილია. გვაქვს

$$\int\limits_{L-l}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\int\limits_{L-l}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt+\varphi(t_0)\int\limits_{L-l}\frac{dt}{t-t_0}. \tag{13,3}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოითვლება ცხადად. იმისათვის, რომ ზუსტად განვსაზღვროთ ლოგარითმული წევრების მნიშვნელობა, რომლებიც ამ გამოთვლებისას წარმოიშობა, შემდეგნაირად მოვიქცეთ: შემოვწეროთ t_0 ცენტრის მქონე ε რადიუსიანი წრეწირის $t'ct''$ რკალი, რომელიც t' და t'' წერტილებზე გადის და მდებარეობს L-ის მარჯვნივ (ნახ. 7). მაშინ

---

[33] (13,1) ინტეგრალი არსებობს ჩვეულებრივი აზრით, თუ (13,2) ინტეგრალი მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როგორიც არ უნდა იყოს t_0-ის გარშემო ამოჭრილი l რკალი, ოღონდ კი ამ რკალის სიგრძე მიისწრაფვოდეს ნულისაკენ; მთავარი მნიშვნელობის განსაზღვრაში არსებითი არის ის, რომ l რკალის t' და t'' ბოლოები t_0 წერტილიდან ტოლ მანძილზეა; იხ., აგრეთვე, შენიშვნა 2 პარაგრაფის ბოლოს.

[34] ბევრი ავტორი კი, პირიქით, ინტეგრალის მთავარ მნიშვნელობას აღნიშნავს განსაკუთრებული ნიშნით, მაგ., ინტეგრალის ნიშანთან წერენ შტრიხს (′) ან მის წინ წერენ ასოებს VP („Valeur principale“).

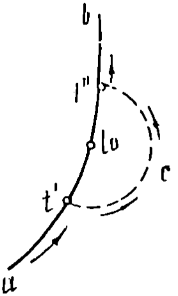
$$\int_{L-l} \frac{dt}{t-t_0} = \int_{L^*} \frac{dt}{t-t_0} - \int_{\gamma} \frac{dt}{t-t_0},$$

სადაც L^* აღნიშნავს მარტივ $at'ct''b$ რკალს, ხოლო γ—წრეწირის $t'ct''$ რკალს.

მაგრამ (11,3)-ის თანახმად

$$\int_{L^*} \frac{dt}{t-t_0} = \ln\frac{t_0-b}{t_0-a},$$

სადაც მარჯვენა მხარეში იგულისხმება $\ln\frac{z-b}{z-a}$ ფუნქციის ის შტო, რომელიც ჰოლომორფულია L^*-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე და ქრება უსასრულობაში ან, რაც იმავეზე დაიყვანება, მნიშვნელობა, რომელსაც ღებულობს L-ის მარცხნიდან t_0 წერტილში ის შტო, რომელიც ჰოლომორფულია L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეში და ქრება უსასრულობაში.



ნახ. 7

ცხადია, რომ[35]

$$\int_{\gamma} \frac{dt}{t-t_0} = [\ln(t-t_0)]_{t'}^{t''} = \ln\frac{|t''-t_0|}{|t'-t_0|} + i\Theta = i\Theta,$$

სადაც Θ აღნიშნავს $(t-t_0)$-ის არგუმენტის ცვლილებას t წერტილის γ რკალის გასწვრივ t' მდებარეობიდან t'' მდებარეობაში გადაადგილებისას. ცხადია, რომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Theta = \pi.$$

იმის გამო, რომ t_0-ის მიდამოში

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)| \leqslant A|t-t_0|^{\mu}, \quad A = \text{const}, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

(13,3)-ის მარჯვენა მხარეს პირველი ინტეგრალის ზღვარი არსებობს და ტოლია ინტეგრალისა ჩვეულებრივი აზრით

$$\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\, dt.$$

ამრიგად, ვხედავთ, რომ (13,3)-ის მარჯვენა მხარეს ორივე შესაკრები მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $\varepsilon \to 0$.

აქედან გამომდინარეობს (13,1) ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის არსებობა; ეს მთავარი მნიშვნელობა ზემოთქმულის თანახმად მოცემულია ფორმულით:

$$\Phi(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\cdot\ln\frac{t_0-b}{t_0-a} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\, dt; \qquad (13,4)$$

შევახსენებთ, რომ

[35] გავიხსენოთ, რომ $|t''-t_0| = |t'-t_0|$.

$$\ln \frac{t_0-b}{t_0-a} = \ln \frac{b-t_0}{a-t_0}$$

აღნიშნავს მნიშვნელობას, რომელსაც L-ის მარცხნიდან ღებულობს $L=ab$-ს გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია

$$\ln \frac{z-b}{z-a} = \ln \frac{b-z}{a-z}.$$

კერძოდ, როცა $\varphi(t)=1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab} \frac{dt}{t-t_0} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b-t_0}{a-t_0} - \frac{1}{2}. \tag{13,4ა}$$

(13,4) ფორმულის გამოყვანისას ვგულისხმობდით, რომ L გახსნილი გლუვი წირია. იმ შემთხვევაში, როდესაც L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია, ცხადია, (13,4) ფორმულას, საზოგადოდ, არ აქვს ადგილი, მაგრამ ძირითადი შედეგი ძალაში რჩება. სახელდობრ, მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე, კვანძებისაგან განსხვავებულ t_0 წერტილის მიდამოში, მაშინ არსებობს ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა $\Phi(t_0)$.

შენიშვნა 1. ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის განსაზღვრის საფუძველზე ცხადია, რომ თუ ინტეგრების (უბან-უბან გლუვ) L წირს დავყოფთ რამდენიმე (აგრეთვე უბან-უბან გლუვ) $L', L'', \ldots, L^{(k)}$ წირად ისე, რომ t_0 არ ემთხვეოდეს ამ უკანასკნელთა არც ერთ კვანძს, მაშინ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^{(k)}} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

იმ პირობით, თუ არსებობს ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა.

შენიშვნა 2. განვიხილოთ L წირზე აღებული რომელიმე საკმაოდ მცირე t_1t_2 რკალი, რომელიც შეიცავს t_0 წერტილს. (13.4ა) ფორმულის საფუძველზე ამ ფორმულაში მიღებული ლოგარითმის მნიშვნელობისათვის

$$I = \int\limits_{t_1t_2} \frac{dt}{t-t_0} = \ln \frac{t_2-t_0}{t_1-t_0} - \pi i = \ln \frac{|t_2-t_0|}{|t_1-t_0|} + \omega i,$$

სადაც ω $(-\pi<\omega<\pi)$ არის კუთხე, რომელსაც t_0t_2 მიმართულება ქმნის t_1t_0 მიმართულებასთან და ათვლილია ამ უკანასკნელიდან (ნახ. 8); ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია დავაკვირდეთ

$$\Theta = \arg \frac{z-t_2}{z-t_1} = \arg \frac{t_2-z}{t_1-z}$$

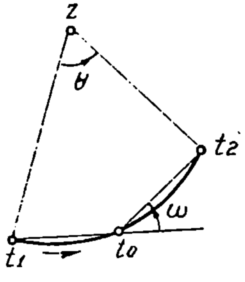
კუთხის ცვლილებას, როდესაც z უსასრულოდ დაშორებული წერტილიდან (ამ წერტილში $\Theta=0$) უახლოვდება t_0 წერტილს t_1t_2 რკალის მარცხნიდან; მაშინ, ცხადია, Θ უახლოვდება $(\pi+\omega)$-ს.

თუ ახლა t_2 და $t_1 \to t_0$, მაშინ, ცხადია, $\omega \to 0$; თუ, გარდა ამისა, $|t_2 - t_0|$ და $|t_1 - t_0|$ ეკვივალენტური უსასრულო მცირეებია, ე. ი. თუ

$$\frac{|t_2 - t_0|}{|t_1 - t_0|} \to 1, \tag{*}$$

მაშინ $I \to 0$. ცხადია, როცა (*)-ში ზღვარზე მისწრაფება თანაბრად ხდება (t_0-ის მდებარეობის მიმართ), მაშინ $I \to 0$ თანაბრად.

შენიშვნა 3. წინასწარებურად ჩავთვალოთ, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას t_0 წერტილის მიდამოში. წინა შენიშვნებიდან გამომდინარეობს, რომ (13.1) ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის, როგორც (13,2) ინტეგრალის ზღვრის გამოთვლისას არ არის აუცილებელი, ჩავთვალოთ, რომ ინტეგრების გზის გამოყოფილი ნაწილი, რომელიც ზემოთ $l = t't''$-ით არის აღნიშნული, ზუსტად აკმაყოფილებს $|t'' - t_0| = |t' - t_0|$ პირობას. საკმარისია, შეფარდება



ნახ. 8

$$\frac{|t'' - t_0|}{|t' - t_0|} \to 1; \tag{**}$$

კერძოდ, შეიძლება t' და t'' წერტილები ავიღოთ ისე, რომ $t't_0$ და t_0t'' რკალების სიგრძეები ერთმანეთის ტოლი იყოს.

ზემოთქმულის თანახმად ცხადია, რომ თუ (**)-ში ზღვრისაკენ მისწრაფება თანაბრად წარმოებს (t_0-ის მიმართ), მაშინ, როცა $|t'' - t_0| \to 0$, $|t' - t_0| \to 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L-l} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}$$

აგრეთვე თანაბრად მიისწრაფვის ინტეგრალის

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}$$

მთავარი მნიშვნელობისაკენ; მაგალითად, ასე იქნება, როცა $|t' - t_0| = |t'' - t^0|$ ან როცა $t't_0$ და t_0t'' რკალის სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია. რა თქმა უნდა, ამ დასკვნების გაკეთება შეიძლებოდა უშუალოდაც, თუ ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის არსებობის დასამტკიცებლად ჩატარებულ მსჯელობებში $|t' - t_0| = |t'' - t_0|$ პირობას (**) პირობით შევცვლიდით.

შენიშვნა 4. (13,1) ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის არსებობისათვის და (13,4) ფორმულის მართებულობისათვის, ცხადია, არ არის აუცილებელი, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებდეს H პირობას t_0 წერტილის მიდამოში. საკმარისია დავუშვათ, რომ t_0-ის მოცემული ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის გვაქვს შემდეგი სახის უტოლობა

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leqslant A\,|t - t_0|^{\mu}, \quad A = \text{const}, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

რომელიც შესაძლოა არ სრულდება t_0-ის სხვა მნიშვნელობებისათვის. ამ შემთხვევაში შეიძლება ითქვას, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას მოცემულ t_0 წერტილზე.

შენიშვნა 5. ზოგჯერ მიზანშეწონილია ინტეგრების L წირი შევცვალოთ ინტეგრების სხვა Λ წირით, ვთქვათ, Λ ისეთი უბან-უბან გლუვი წირია სიბრტყეზე, რომ L წირის შემადგენელი მარტივი გლუვი წირების t წერტილებსა და Λ წირის შემადგენელი მარტივი გლუვი წირების τ წერტილებს შორის შესაძლებელია დამყარდეს ურთიერთცალსახა თანადობა

$$t = t(\tau)$$

ისეთი, რომ არსებობდეს ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული

$$t'(\tau) = \frac{dt}{d\tau},$$

და იგი ეკუთვნოდეს H_0 კლასს Λ-ზე. ვთქვათ, (13,1) ფორმულაში $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას (კვანძებისაგან განსხვავებულ) t_0 წერტილის მიდამოში. მაშინ ზემოთქმულის თანახმად, როგორც ადვილი დასანახავია, L წირზე კოშის ტიპის ინტეგრალი (13,1) შეიძლება წარმოვადგინოთ Λ წირზე კოშის ტიპის ინტეგრალის სახით, რომელიც მიიღება (13,1)-ში უშუალოდ $t=t(\tau)$ ჩასმით,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau-\tau_0},$$

სადაც τ_0 არის Λ წირის წერტილი, რომელიც L წირის t_0 წერტილს შეესაბამება, ხოლო

$$\psi(\tau) = \frac{(\tau-\tau_0)\,t'(\tau)}{t(\tau)-t(\tau_0)}\,\varphi\left(t(\tau)\right). \tag{13,5}$$

§ 7-ში (პ. 1^0), ნათქვამის საფუძველზე, $\psi(\tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას τ_0 წერტილის მიდამოში[36].

შენიშვნა 6. (13,1) სახის ინტეგრალი, როცა ის არსებობს ზემოთ აღნიშნული აზრით, შეიძლება წარმოვადგინოთ ისეთი სახით, რომელიც ზოგჯერ სასარგებლოა. დავუშვათ (შდრ. წინა პარაგრაფს),

$$t - t_0 = re^{i\vartheta},$$

სადაც $r=r(t_0, t)=|t-t_0|$, $\vartheta=\vartheta(t_0, t)=\arg(t-t_0)$. გალოგარითმებითა და დიფერენცირებით, როცა t ცვლადია და t_0 მუდმივია, მივიღებთ

$$\frac{dt}{t-t_0} = \frac{dr}{r} + i\,d\vartheta,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

---

36 იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ § 7-ში (პ. 1^0) დამტკიცებული დებულება, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{\tau-\tau_0}{t(\tau)-t(\tau_0)} = \frac{\tau-\tau_0}{\sigma-\sigma_0} : \frac{t(\tau)-t(\tau_0)}{\sigma-\sigma_0},$$

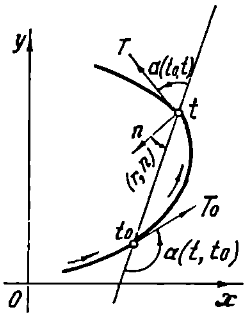
სადაც σ რკალური აბსცისაა Λ-ზე. შევნიშნოთ, რომ $t=t(\tau)$ ჩასმას L-ზე ან Λ-ზე H_0 კლასის ყოველი ფუნქცია გადაჰყავს Λ-ზე ან L-ზე იმავე კლასის ფუნქციაში.

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(t)\,d\vartheta+\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(t)\,\frac{dr}{r}. \qquad (13,6)$$

თუ L წირის შემადგენელ თითოეულ L_k გლუვ რკალზე საინტეგრაციო ცვლადად აკიღებთ s რკალურ აბსცისს და შევნიშნავთ, რომ[37]

$$\frac{\partial r}{\partial s}=\cos\alpha\,(t_0,\ t),\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{\sin\alpha\,(t_0,\ t)}{r\,(t_0,\ t)}=\frac{\cos\,(r,\ n)}{r\,(t_0,\ t)}, \qquad (13,7)$$

სადაც $\alpha(t_0,\ t)$ აღნიშნავს კუთხეს, რომელსაც t წერტილში L წირის (დადებითი) T მხები ქმნის $\overrightarrow{t_0t}$ ვექტორთან და რომელიც ათვლილია ამ უკანასკნელიდან (დადებითი მიმართულებით); $(r,\ n)$ კი $\overrightarrow{tt_0}$ ვექტორის მიერ t წერტილში მარცხნივ მიმართულ n ნორმალთან შექმნილი კუთხეა (ნახ. 9)[38], გვექნება წარმოდგენა:



ნახ 9

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(t)\,\frac{\sin\alpha(t_0,t)}{r(t_0,\ t)}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(t)\,\frac{\cos\alpha\,(t_0,\ t)}{r\,(t_0,\ t)}\,ds. \qquad (13,8)$$

მარჯვენა მხარეს პირველი ინტეგრალი შეიძლება გავიგოთ ჩ ვ ე უ ლ ე ბ რ ი ვ ი ა ზ რ ი თ, თუ L წირი t_0 წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას, ვინაიდან ამ შემთხვევაში (§ 7, პ. 3^0)

$$\frac{\sin\alpha\,(t_0,\ t)}{r\,(t_0,\ t)}=\frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{K(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\lambda}},\quad \lambda=\text{const}<1,$$

სადაც $K(t_0,t)$ t_0-ის მიდამოში უწყვეტი ფუნქციაა (H პირობასაც კი აკმაყოფილებს); მეორე ინტეგრალი კი უნდა გავიგოთ კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

§ 14. მარტივი ფენის პოტენციალის მხებით წარმოებული[39]. კოშის აზრით ინტეგრალის ცნების გამოყენების ერთ-ერთ უმარტივეს მაგალითად მოვიყვანთ მარტივი ფენის ლოგარითმული პოტენციალის მხებით წარმოებულის ფორმულას. ეს ფორმულა საინტერესოა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის განვითარების ისტორიის თვალსაზრისით, ვინაიდან სწორედ მან მიიყვანა ა. პუანკარე ასეთი განტოლებების განხილვამდე[40].

---

[37] იხ. (7,7) ფორმულა და მისი წინა ფორმულა. შდრ. აგრეთვე წინა პარაგრაფი.

[38] ეს კუთხეები ალარაა განსაზღვრული t წერტილებისათვის, რომლებიც კვანძებს ემთხვევა, მაგრამ მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როდესაც t მიისწრაფვის მოცემული კვანძისაკენ ამ კვანძში თავმოყრილი რკალებიდან ერთ-ერთის გასწვრივ (იგულისხმება, რომ t_0 წერტილი განსხვავებულია კვანძისაგან).

[39] ამ პარაგრაფის გამოტოვება არ შეუშლის ხელს დანარჩენის გაგებას.

[40] H. Poincaré [I], გვ. 252; თვით პუანკარე არ იძლევა ქვემოთ მიღებული (14,3) ფორმულის დასაბუთებას.

ვთქვათ, ჯერ $L=ab$ გლუვი რკალია. გარდა ამისა, ჩავთვალოთ, რომ L აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას (§ 7, პ. 3°).

ვთქვათ, $\varphi(t)$ L-ზე მოცემული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს H პირობას. განვიხილოთ მარტივი ფენის პოტენციალი

$$V(x,\ y)=\int\limits_L \varphi(t)\ln r ds, \tag{14,1}$$

სადაც $r=|z-t|$ არის $z=x+iy$ წერტილიდან $t(s)$ წერტილამდე მანძილი. როგორც ცნობილია, $V(x,\ y)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან (სიბრტყის სასრულ ნაწილზე), L წირის ჩათვლით; მისი $V(t_0)$ მნიშვნელობა L-ის t_0 წერტილზე უშუალოდ მიიღება (14,1) ფორმულაში z-ის ნაცვლად t_0-ის ჩასმით. ასე რომ,

$$V(t_0)=\int\limits_L \varphi(t)\ln r ds=\int\limits_L \varphi(t)\ln|t-t_0|ds. \tag{14,2}$$

ვაჩვენოთ, რომ ჩვენ მიერ მიღებულ პირობებში არსებობს $\dfrac{dV}{ds_0}$ წარმოებული ყოველი $t(s_0)$ წერტილისათვის, რომელიც არ ემთხვევა a და b ბოლოებს, და რომ ეს წარმოებული გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{dV}{ds_0}=\int\limits_L \varphi(t)\frac{\cos\alpha(t,\ t_0)}{r}ds=\int\limits_L \varphi(t)\frac{\partial\ln r}{\partial s_0}ds; \tag{14,3}$$

ფორმულა მიიღება (14,2) ტოლობის ფორმალური გაწარმოებით. ამ ფორმულაში $\alpha(t,\ t_0)$ აღნიშნავს t_0 წერტილში (დადებითი) T_0 მხების მიერ $\overrightarrow{tt_0}$ ვექტორთან შექმნილ კუთხეს (იხ. წინა პარაგრაფში ნახ. 9), ხოლო ინტეგრალები გაგებულია კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

მართლაც, ვთქვათ $a'b'$ რაიმე ფიქსირებული რკალია, რომელიც წარმოადგენს ab რკალის ნაწილს და მასთან საერთო ბოლოები არ გააჩნია. ჩავთვალოთ, რომ t_0 ყოველთვის $a'b'$-ზე ძევს. გადავზომოთ L-ზე t_0 წერტილის ორივე მხარეს საკმაოდ მცირე ε სიგრძის მქონე $t't_0$ და t_0t'' რკალები და l-ით აღვნიშნოთ $t't''$ რკალი, რომლის შუა წერტილი t_0-ს ემთხვევა. დავუშვათ,

$$V_\varepsilon(t_0)=\int\limits_{L-l}\varphi(t)\ln r ds=\int\limits_{s_a}^{s_0-\varepsilon}\varphi(t)\ln r ds+\int\limits_{s_0+\varepsilon}^{s_b}\varphi(t)\ln r ds, \tag{14,4}$$

სადაც s_a და s_b არის a და b წერტილების რკალური აბსცისები.

ცხადია, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}V_\varepsilon(t_0)=V(t_0).$$

(14,4)-ის ორივე მხარის s_0-ით გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{dV_\varepsilon}{ds_0} = \int\limits_{L-l} \varphi(t) \frac{\partial \ln r}{\partial s_0}\, ds + \varphi(t') \ln r' - \varphi(t'') \ln r'', \tag{14,5}$$

სადაც $r' = |t' - t_0|$, $r'' = |t'' - t_0|$.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სხვაობა

$$\varphi(t'') \ln r'' - \varphi(t') \ln r' = [\varphi(t'') - \varphi(t')] \ln r'' + \varphi(t') \ln \frac{r''}{r'},$$

თანაბრად მისწრაფვის (t_0-ის მიმართ) ნულისაკენ, როცა $\varepsilon \to 0$.

განვიხილოთ ახლა (14,5)-ის მარჯვნივ მონაწილე ინტეგრალი. ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} = \frac{\cos \alpha(t, t_0)}{r}; \tag{14,6}$$

მაგრამ იმისათვის, რომ ინტეგრალს წინა პარაგრაფში შესწავლილი სახე მივცეთ, გავითვალისწინოთ, რომ

$$r = (t - t_0)\, e^{-i\vartheta},$$

სადაც ϑ არის $t - t_0$ სხვაობის არგუმენტი. გალოგარითმებით და s_0-ით გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} = -\frac{1}{t - t_0} \frac{dt_0}{ds_0} - i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} = -\frac{e^{i\Theta(t_0)}}{t - t_0} - i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_0},$$

სადაც $\Theta(t_0)$ აღნიშნავს t_0 წერტილში L-ის მხების Ox ღერძთან შექმნილ კუთხეს.

ნაგულისხმები პირობების ძალით (იხ. § 7, პ. 3^0),

$$\left| \frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} \right| < \frac{\mathrm{const}}{r^\lambda}, \quad \lambda < 1$$

და ამიტომ ინტეგრალი

$$\int\limits_{L-l} \varphi(t) \frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\, ds,$$

როცა $\varepsilon \to 0$ თანაბრად მისწრაფვის ინტეგრალისაკენ

$$\int\limits_{L} \varphi(t) \frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\, ds.$$

წინა პარაგრაფის მესამე შენიშვნის საფუძველზე, ინტეგრალი

$$\int\limits_{L-l} \frac{\varphi(t)\, e^{i\Theta(t_0)}}{t - t_0}\, ds = \int\limits_{L-l} \frac{\varphi(t)\, e^{i[\Theta(t_0) - \Theta(t)]}}{t - t_0}\, dt,$$

როცა $\varepsilon \to 0$ აგრეთვე თანაბრად მისწრაფვის ინტეგრალისაკენ

$$\int\limits_{L} \frac{\varphi(t) e^{i[\Theta(t_0) - \Theta(t)]}}{t - t_0}\, dt = \int\limits_{L} \frac{\varphi(t)\, e^{i\Theta(t_0)}}{t - t_0}\, ds,$$

სადაც ამჯერად ინტეგრალი გაგებულია მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

ამრიგად, ვხედავთ, რომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{dV_\varepsilon}{ds_0} = \int_L \varphi(t) \frac{\partial \ln r}{\partial s_0} ds,$$

ამასთან ზღვრისაკენ მისწრაფება თანაბრად წარმოებს.

აქედან, ანალიზის ცნობილი თეორემის საფუძველზე, ვასკვნით, რომ არსებობს $\frac{dV}{ds_0}$ წარმოებული და რომ

$$\frac{dV}{ds_0} = \int_L \varphi(t) \frac{\partial \ln r}{\partial s_0} ds,$$

საიდანაც (14,6)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს სასურველი (14,3) შედეგი.

ცხადია, რომ მიღებული შედეგი ძალაში დარჩება, თუ L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია, რომელიც კვანძებისაგან განსხვავებულ t_0 წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას, ხოლო $\varphi(t)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადი ფუნქციაა, რომელიც იმავე მიდამოში აკმაყოფილებს H პირობას.

(14,3) ფორმულა დამტკიცებული იყო გ. ბერტრანის (G. Bertrand [2]) მიერ ნაკლებად ზოგად პირობებში, გაცილებით უფრო რთული გზით. ბერტრანის დამტკიცება გადმოცემულია ე. პიკარის (É. Picard [1]) მიერ. აქ მოყვანილი მეტისმეტად მარტივი დამტკიცება, რომელიც გამოყენებულია ამ წიგნის პირველ გამოცემაში, მაცნობა ა. ბიწაძემ.

განზოგადებანი სხვადასხვა მიმართულებით მოცემულია ლ. მაღნარაძის [6], ს. მიხლინის [7], ი. გერონიმუსის [1], [5], რ. ისახანოვის [4] და ი. კრიკუნოვის [4] შრომებში.

იმ შემთხვევაში, როცა L არის ღერძის მონაკვეთი, ზოგიერთი ანალოგიური ფორმულა მიღებული იყო ჯერ კიდევ გ. ჰარდის (G. Hardy [3]) მიერ. ამ ავტორის შრომების შესახებ იხ. შენიშვნა 1 § 28-ის ბოლოში.

§ 15. კოშის ტიპის ინტეგრალის სასაზღვრო მნიშვნელობანი. გადავიდეთ ჩვენთვის ყველაზე არსებითი საკითხის — კოშის ტიპის ინტეგრალის

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} \qquad (15,1)$$

ყოფაქცევის შესწავლაზე საინტეგრაციო L წირის მახლობლად, რომელსაც, როგორც ყოველთვის, უბან-უბან გლუვად ვთვლით.

შემდეგი მარტივი შენიშვნა ხელს შეუწყობს მსჯელობების გამარტივებას.

ვთქვათ, საჭიროა $\Phi(z)$ ინტეგრალის ყოფაქცევის შესწავლა L წირის რაიმე L_0 ნაწილის მახლობლად. თუ $\Phi(z)$ ინტეგრალს დავყოფთ ორი — $\Phi_1(z)$ და $\Phi_2(z)$ ინტეგრალის ჯამად, რომელთაგან ერთი აღებულია L წირის L_0-ის შემცველ L_1 ნაწილზე, ხოლო მეორე — L წირის დანარჩენ L_2 ნაწილზე, და თუ ეს უკანასკნელი L_2 ნაწილი ძევს ჩვენთვის საინტერესო L_0 ნაწილიდან სასრულ მანძილზე, მაშინ $\Phi_2(z)$ ჰოლომორფული იქნება L_0 ნაწილის მიდამოში თვით ამ ნაწილის ჩათვლით და საკითხი დაიყვანება $\Phi_1(z)$ ფუნქციის შესწავლაზე.

ძირითად შედეგს, რომელიც ამ პარაგრაფში დამტკიცდება, ჩვენ ასე ჩამოვაყალიბებთ:

თეორემა. თუ სიმკვრივე $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L წირის რაიმე გლუვ ნაწილზე, მაშინ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია ამ ნაწილზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან, გარდა, შესაძლოა, მისი ბოლოებისა (თუ ასეთი ბოლოები არსებობს).

თუ აღნიშნულ შენიშვნას მივიღებთ მხედველობაში, ცხადი გახდება, რომ დამტკიცების დროს საკმარისია იმ შემთხვევით შემოვისაზღვროთ, როცა L გლუვი გახსნილი რკალია და $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე, ბოლოების ჩათვლით.

ჯერ გამოვიკვლიოთ

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt \tag{15,2}$$

ინტეგრალის ყოფაქცევა, როცა $z\to t_0$, სადაც t_0 არის L-ის ნებისმიერი წერტილი; შემთხვევა, როდესაც t_0 ემთხვევა L-ის ერთ-ერთ ბოლოს, არ გამოირიცხება. დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლემა. ვთქვათ, β_0 ნებისმიერი არაბლაგვი კუთხეა $\left(\text{ე. ი. } 0<\beta_0<\frac{\pi}{2}\right)$, და ვთქვათ, z უახლოვდება t_0-ს ისე, რომ t_0z მონაკვეთსა და L-ის t_0 წერტილზე მხებს შორის არაბლაგვი β კუთხე β_0-ზე ნაკლები არაა. მაშინ $\Psi(z)$ თანაბრად (t_0-ის L-ზე მდებარეობის მიმართ) მიისწრაფვის

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt \tag{15,3}$$

ზღვრისაკენ (იმისდა მიუხედავად, z t_0-ს მხების მარცხნიდან უახლოვდება თუ მარჯვნიდან).

ცხადია, ჩვენი ლემის დამტკიცება საკმარისია

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt$$

ინტეგრალისათვის, სადაც l არის t_0 წერტილის შემცველი (შიგნით ან მის ერთ-ერთ ბოლოზე) სტანდარტული რკალი, რომელიც $R(\alpha_0)$ სტანდარტულ რადიუსს შეესაბამება, სადაც $0<\alpha_0<\beta_0$ (იხ. გვ. 13).

განვიხილოთ სხვაობა

$$\psi(z)-\psi(t_0)=\frac{h}{2\pi i}\int\limits_l \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)\,(t-z)}\,dt,$$

სადაც $h=z-t_0$. შემოვწეროთ ρ რადიუსიანი γ წრეწირი ცენტრით t_0 წერტილში; საკმაოდ მცირე ρ-თვის ეს წრეწირი l რკალს გადაკვეთს ერთ ან ორ წერტილში, რა-

საც ქვემოთ ვიგულისხმებთ. γ-ს შიგნით მოთავსებული l-ის ნაწილი აღვნიშნოთ t_1t_2-ით, ხოლო დანარჩენი ნაწილი— $(l-t_1t_2)$-ით.

მაშინ

$$\psi(z)-\psi(t_0)=I_1+I_2,$$

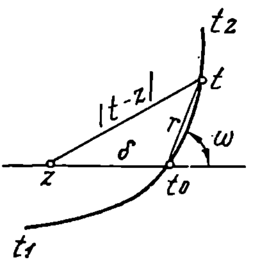
სადაც

$$I_1=\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{t_1t_2}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)\,(t-z)}\,dt,$$

$$I_2=\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{l-t_1t_2}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)\,(t-z)}\,dt.$$

ჯერ განვიხილოთ I_1. თუ t_1t_2-ზე $\varphi(t)$ ფუნქციისათვის გამოვიყენებთ H პირობას, ე. ი. უტოლობას[41]

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A\,|t-t_0|^{\mu},$$



ნახ 10

შემოვიღებთ აღნიშვნას $r=|t-t_0|$, ამასთანავე გავითვალისწინებთ, რომ, (2,2)-ის ძალით, $|dt|=|ds|\leqslant K|dr|$, მივიღებთ

$$|I_1|\leqslant\frac{\delta\cdot AK}{2\pi}\int\limits_{t_1t_2}\frac{r^{\mu-1}\,|dr|}{|t-z|},$$

სადაც $\delta=|h|$. მაგრამ თუ ω არაბლაგვი კუთხეა t_0z და t_0t მონაკვეთებს შორის (ნახ. 10), მაშინ, ცხადია,

$$|t-z|\geqslant\delta\sin\omega\geqslant\delta\sin\omega_0$$

სადაც ω_0 რაიმე მუდმივია, $0<\omega_0<\frac{\pi}{2}$ (§ 2). ამიტომ

$$|I_1|\leqslant\frac{AK}{2\pi\sin\omega_0}\int\limits_{t_1t_2}r^{\mu-1}\,|dr|\leqslant\frac{AK}{\pi\sin\omega_0}\int\limits_0^{\rho}r^{\mu-1}dr=\frac{AK\rho^{\mu}}{\pi\mu\sin\omega_0}.$$

ρ შევარჩიოთ იმდენად მცირე, რომ $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$, სადაც ε ნებისმიერად მოცემული დადებითი რიცხვია; ρ-ს შერჩევა, ცხადია, შეიძლება t_0-ის l-ზე მდებარეობისა და z-ის მდებარეობისაგან დამოუკიდებლად.

ავიღოთ $\delta\leqslant\frac{\rho}{2}$. მაშინ, როცა t არის $(l-t_1t_2)$-ზე, ე. ი. γ წრის გარეთ, გვექნება $|t-t_0|\geqslant\rho$, $|t-z|\geqslant\frac{\rho}{2}$, ამიტომ

$$|I_2|\leqslant\frac{\delta}{\pi\rho^2}\int\limits_{l-t_1t_2}|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\,ds\leqslant\frac{\delta\cdot M}{\pi\rho^2},$$

[41] ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ H პირობით ვსარგებლობთ მხოლოდ l-ის რაგინდ მცირე ნაწილისათვის, რომელიც t_0-ს შეიცავს

სადაც M მუდმივია, რომელიც არც t_0-ის და არც z-ის მდებარეობაზე დამოკიდებული არ არის. ამიტომ საკმაოდ მცირე δ-თვის გვექნება $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ და ლემა დამტკიცებულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

ახლა გადავიდეთ ამ პარაგრაფის დასაწყისში გამოთქმული თეორემის დამტკიცებაზე და $\Phi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობების მოძებნაზე.

როგორც ვთქვით, საკმარისია შემოვისაზღვროთ შემთხვევით, როცა $L=ab$ გახსნილი გლუვი კონტურია, ხოლო $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე (ბოლოების ჩათვლით).

გვაქვს

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{dt}{t-z}$$

ან, (15,2) და (11,3) ფორმულების საფუძველზე,

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \ln \frac{z-b}{z-a}, \tag{15,4}$$

სადაც $\ln \frac{z-b}{z-a}$ აღნიშნავს $L=ab$ რკალის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე ჰოლომორფულ და უსასრულობაში ქრობად შტოს. დამტკიცებული ლემის საფუძველზე $\Psi(z)$ თანაბრად მიისწრაფვის გარკვეული $\Psi(t_0)$ ზღვრისაკენ მაშინ, როცა z მიისწრაფვის t_0-კენ ისე, როგორც ეს აღნიშნულია ლემის ფორმულირებაში. ცხადია, (15,4)-ის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრებიც თანაბრად მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრებისაკენ, როცა z მარცხნიდან ან მარჯვნიდან მიისწრაფვის L-ის ნებისმიერ t_0 წერტილისაკენ, რომელიც ბოლოებიდან სასრულ მანძილზეა. მაგრამ ზღვრებისაკენ თანაბარი მისწრაფებიდან გამომდინარეობს (§ 9), რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L-ის ნებისმიერ, ბოლოებისაგან განსხვავებულ, t_0 წერტილზე.

ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია[12]. თუ (15,4)-ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $z \to t_0$ მარცხნიდან ან მარჯვნიდან, შესაბამისად მივიღებთ:

$$\Phi^+(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \ln \frac{t_0-b}{t_0-a}, \tag{15,5}$$

$$\Phi^-(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \ln \frac{t_0-b}{t_0-a} - \varphi(t_0),$$

---

[12] მე მიჭირს მივაწერო ეს თეორემა გარკვეულ ავტორს, ვინაიდან იგი ამა თუ იმ ფორმით და დამტკიცებით სხვადასხვა ხარისხით გვხვდება გასულ საუკუნეში გამოქვეყნებულ რიგ შრომებში (ი. სოხოცკი [1], გ. მორერა G. Morera [1], ა. ჰარნაკი A. Harnack [1]). ფორმულები, რომლებიც მიიღება (15,5)-დან თუ ჩავთვლით, რომ L შეკრული კონტურია (ე. ი. რომ $b=a$), მოცემული იყო G. Morera [1] ნაშრომში.

თეორემის მკაცრი დამტკიცება, რომელიც ანალიზის თანამედროვე მდგომარეობის გამო არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს, მოგვიანებით მოცემული იყო რამდენიმე ავტორის მიერ.

სადაც $\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}$ აღნიშნავს იმავეს, რასაც § 13-ში. (15,5)-ის პირველი ფორმულის მართებულობა ცხადია, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ შეთანხმების საფუძველზე (§ 13) აღნიშნული გამოსახულება $\ln\frac{z-b}{z-a}$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას წარმოადგენს L-ის მარცხნიდან. (15,5)-ის მეორე ფორმულის მართებულობაც ცხადი გახდება, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\ln\frac{z-b}{z-a}$ გამოსახულების სასაზღვრო მნიშვნელობა L-ის მარჯვნიდან ტოლია

$$\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}-2\pi i,$$

ვინაიდან, თუ z L-ის მარცხენა მხარიდან გადადის მარჯვენა მხარეზე, მაგალითად, a ბოლოს შემოვლით, მაშინ $\ln(z-a)$ ღებულობს $2\pi i$ ნაზრდს, ხოლო $\ln(z-b)$ უბრუნდება პირვანდელ მნიშვნელობას.

2°. დავუმატოთ ნათქვამს შემდეგი. თუ $\varphi(t)=0$ a ბოლოზე [ან b ბოლოზე], მაშინ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია a [ან b] ბოლოზეც. დასარწმუნებლად საკმარისია $L=ab$ რკალი რამდენადმე განვაგრძოთ a ბოლოდან (ან b ბოლოდან), მაგალითად, სათანადო ბოლოში მხების მონაკვეთით, ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)=0$ დამატებულ ნაწილზე და გამოვიყენოთ წინა შედეგები ამრიგად მიღებული ახალი რკალისათვის, რომლისთვისაც a წერტილი [ან b წერტილი] უკვე აღარ წარმოადგენს ბოლოს. (15,5) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ t_0 იმყოფება დამატებულ ნაწილზე, a ბოლოს [ან b ბოლოს] ჩათვლით, მაშინ

$$\Phi^+(t_0)=\Phi^-(t_0)=\Phi(t_0);$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს ჩვენი დებულება. თუ c-თი აღვნიშნავთ ნებისმიერს a და b ბოლოებიდან, რომელზედაც $\varphi(t)=0$, მაშინ (15,5) ფორმულის საფუძველზე $\Phi(z)$ ფუნქციის $\Phi(c)$ სასაზღვრო მნიშვნელობისათვის, როცა $z\to c$, ნებისმიერი გზით მივიღებთ

$$\Phi(c)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-c}. \tag{15,6}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi(c)\neq 0$, სადაც c, ისევე როგორც ზემოთ, აღნიშნავს ერთ-ერთს a, b ბოლოებიდან, $\Phi(z)$-ის ყოფაქცევა ამ ბოლოს მახლობლად აგრეთვე ადვილი გამოსარკვევია; ამასთან, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას მხოლოდ c წერტილის მიდამოში L-ზე ამ წერტილის ჩათვლით. (15,4) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a},$$

სადაც

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(t)\,dt}{t-z},\quad \psi(t)=\varphi(t)-\varphi(c),$$

ხოლო

$$\ln \frac{z-b}{z-a} = \ln (z-b) - \ln (z-a),$$

როგორც ზემოთ, აღნიშნავს L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე ჰოლომორფულ და უსასრულობაში ქრობად შტოს.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $c=a$. ვთქვათ, $\ln (z-a)$ აღნიშნავს a წერტილის მიდამოში L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე ნებისმიერ ჰოლომორფულ შტოს; მაშინ $\ln (z-b)$ ფუნქცია აგრეთვე მიიღებს გარკვეულ მნიშვნელობას a წერტილის მიდამოში და იქნება ჰოლომორფული ამ მიდამოში უკვე გაუჭრელ სიბრტყეზე. ვინაიდან, $\psi(a)=0$, $\Psi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადი იქნება L-ის მარცხნიდან და მარჯვნიდან a წერტილის მიდამოში და აგრეთვე a წერტილზე. მაშასადამე, a წერტილის მახლობლად გვექნება

$$\Phi(z) = -\frac{\varphi(a)}{2\pi i} \ln (z-a) + \Phi_0(z), \tag{15,7}$$

სადაც $\Phi_0(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია a-ს მახლობლად გაჭრილ სიბრტყეზე და უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან a-ს მახლობლად, და აგრეთვე a წერტილზე.

სავსებით ანალოგიურად b ბოლოს მახლობლად გვექნება

$$\Phi(z) = +\frac{\varphi(b)}{2\pi i} \ln (z-b) + \Phi_0(z), \tag{15,8}$$

სადაც $\Phi_0(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე b-ს მახლობლად და უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L-ზე b-ს მახლობლად და აგრეთვე b წერტილზე.

ამრიგად, ვხედავთ, რომ თუ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H კლასს $L=ab$ რკალზე, მაშინ $\Phi(z)$ წარმოადგენს უსასრულობაში ქრობად უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას L ნახტომის წირით. კოშის ტიპის ინტეგრალს ეს თვისება გააჩნია L წირისა და $\varphi(t)$ ფუნქციის მიმართ უფრო ზოგად მოთხოვნებში. ამის შესახებ ვიტყვით შემდგომ (§ 22, პ. 2° და § 26 პ. 4°).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თუ შევკრებთ (15,5) ფორმულებს და შევადარებთ (13,4)-ს, მივიღებთ

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2} [\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)]. \tag{15,9}$$

ზოგადი შემთხვევისათვის ეს მნიშვნელოვანი ფორმულა დამტკიცებული იქნება შემდეგ პარაგრაფში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ ჩავთვლით, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია H პირობას აკმაყოფილებს არა (ბოლოებისაგან განსხვავებულ) t_0 წერტილის მიდამოში, არამედ მხოლოდ თვით ამ წერტილში (§ 13, შენიშვნა 4), მაშინ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობებიდან გამომდინარეობს, რომ ამ შემთხვევაშიაც $\Phi(z)$ მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრებისაკენ, როცა z მიისწრაფვის t_0-კენ მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ა რ ა მ ხ ე ბ ი გ ზ ე ბ ი თ, ე. ი., უფრო ზუსტად, როცა არაბლაგვი კუთხე t_0z მონაკვეთსა და t_0 წერტილზე მხებს

შორის ყოველთვის მეტი რჩება რაიმე დადებით მუდმივზე (რაგინდ მცირეზე; შდრ. § 9-ის ბოლოს შენიშვნა 2).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. დავამტკიცოთ ერთი მარტივი შეფასება, რომელიც ზოგჯერ სასარგებლოა. ვთქვათ, $\varphi(t)$ ეკუთვნის H კლასს ab გლუვ წირზე, და ვთქვათ, c', c'' ამ რკალის ორი მომდევნო წერტილია, რომლებიც, კერძოდ, შეიძლება დაემთხვეს შესაბამისად a-ს ან b-ს. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'c''} \frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{15,10}$$

და ვაჩვენოთ, რომ სიბრტყის სასრულ მანძილზე მდებარე ყველა z წერტილისათვის, L რკალის წერტილების ჩათვლით (გარდა თვით c', c'' წერტილებისა, რომლებზედაც ინტეგრალი, საზოგადოდ, აზრს კარგავს),

$$|\Omega(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c'|^{\varepsilon'}\,|z-c''|^{\varepsilon''}}, \tag{15,11}$$

სადაც ε', ε'' ნებისმიერი (რაგინდ მცირე) დადებითი მუდმივებია; თუ ჩავთვლით, რომ $\varepsilon'+\varepsilon'' \leqslant 1$, მაშინ წინა უტოლობა, ცხადია, მართებულია უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოსათვისაც.

დამტკიცებისათვის შეიძლება, მაგალითად, ასე მოვიქცეთ. განვაგრძოთ ab რკალი ორივე მხარეს, მაგალითად, a და b წერტილებზე მხებების $a'a$ და $b'b$ მონაკვეთებით, ისე, რომ ab რკალი გახდეს გლუვი $a'b'$ რკალის ნაწილი. განვსაზღვროთ ფუნქცია $\varphi_0(t)$ ასე: $\varphi_0(t)=\varphi(c')$ $a'c'$ რკალზე, $\varphi_0(t)=\varphi(t)$ $c'c''$ რკალზე, $\varphi_0(t)=\varphi(c'')$ $c''b'$ რკალზე. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a'b'} \frac{\varphi_0(t)\,dt}{t-z}$$

და ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ z წერტილი $a'b'$ რკალზე არ მდებარეობს.

ვინაიდან, $\varphi_0(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H კლასს $a'b'$ რკალზე, ზემოთქმულის თანახმად, $\Omega_0(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია ab რკალზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან და, მაშასადამე, შემოსაზღვრულია ამ რკალზე. მეორე მხრივ, გვაქვს:

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{a'c'} \frac{\varphi(c')\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c''b'} \frac{\varphi(c'')\,dt}{t-z} =$$

$$= \Omega_0(z) - \frac{\varphi(c')}{2\pi i} \ln \frac{z-c'}{z-a'} - \frac{\varphi(c'')}{2\pi i} \ln \frac{z-b'}{z-c''}$$

(ლოგარითმის გარკვეულად შერჩევისას), საიდანაც თუ შევნიშნავთ, რომ a' და b' წერტილები ab რკალიდან სასრულ მანძილზეა, L რკალთან საკმაოდ ახლომდებარე z წერტილებისათვის ადვილად მივიღებთ შეფასებას

$$|\Omega(z)| < A + B\,[\,|\ln(z-c')| + |\ln(z-c'')|\,], \tag{15,12}$$

სადაც A და B გარკვეული დადებითი მუდმივებია. (15,12)-დან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი (რამდენადმე უფრო უხეში) შეფასება (15,11). მიღებული შეფასება,

როგორც ეს (15,9) ფორმულიდან გამომდინარეობს, ძალაში რჩება თვით $a'b'$ რკალზე (ab რკალის მიდამოში ან თვით მასზე) მდებარე წერტილებისთვისაც.

§ 16. სოხოცკი—პლემელის ფორმულები. (15,5) ფორმულები, რომლებიც გვაძლევენ კოშის ტიპის ინტეგრალის სასაზღვრო მნიშვნელობებს, მოუხერხებელია იმის გამო, რომ ისინი უშუალოდ მხოლოდ გახსნილი გლუვი L რკალის შემთხვევაში გამოიყენებიან.

თუ შემოვიყვანთ ინტეგრალის მთავარ მნიშვნელობას კოშის აზრით, მაშინ ეს ფორმულები მიიღებს მეტად მარტივ სახეს და ამასთან, გამოდგება ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი საინტეგრაციო წირისათვის. სახელდობრ, თუ მხედველობაში მივიღებთ (13,4) ფორმულას, აშკარაა, რომ (15,5) ფორმულები, რომლებიც იძლევიან

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{16,1}$$

ინტეგრალის სასაზღვრო მნიშვნელობებს, შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \Phi(t_0) = \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \\ \Phi^-(t_0) &= -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \Phi(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \end{aligned} \tag{16,2}$$

სადაც, მარჯვენა ნაწილებში მონაწილეობენ ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობანი.

ახლა ადვილი დასანახავია, რომ (16,2) **ფორმულები მართებულია იმ შემთხვევაში, როცა L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია იმ პირობით, რომ t_0 წერტილი განსხვავებულია კვანძებისაგან მათ შორის ბოლოებისაგან)**[13], **ხოლო $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას t_0-ის მიდამოში.**

მართლაც, ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია $\Phi(z)$ ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ორი ინტეგრალის ჯამად $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$, რომელთაგან პირველი აღებულია t_0-ის შემცველ რაიმე გლუვ წირზე, ხოლო მეორე—L-ის დანარჩენ ნაწილზე. პირველი ინტეგრალის მიმართ გამოვიყენოთ (16,2) ფორმულები, როცა $L = ab$, ხოლო მეორის მიმართ შევნიშნოთ, რომ $\Phi_2^+(t_0) = \Phi_2^-(t_0) = \Phi_2(t_0)$, ვინაიდან t_0 წერტილი არ მდებარეობს მეორე ინტეგრალის საინტეგრაციო წირზე.

(16.2) ფორმულების ეკვივალენტური ფორმულები პირველად მოგვცა ი. სოხოცკიმ[14] [1] 1873 წ. ი. სოხოცკი, სხვათა შორის, დამტკიცებისას შემოისაზღვრა იმ შემთხვევით, როცა L წრეხის მონაკვეთია, ხოლო z მიისწრაფვის t_0-კენ L-ის ნორმალის გასწვრივ. დიდი ხნის შემდეგ (16,2) ფორმულებს ხელახლა მიაკვლია პლემელიმ (J. Plemelj [1]), რომელმაც დაამტკიცა თითქმის იმავე პირობებში, რაც ჩვენ მიერ არის აქ მიღებული.

---

[13] (16,2) ფორმულები ადვილად ზოგადდება იმ შემთხვევისათვის, როცა t_0 ემთხვევა L წირის კუთხურ წერტილს. იხ. წიგნის ბოლოში დამატება II.

[14] სახელდობრ, ი. სოხოცკიმ მოგვცა პირველი (16,2) ფორმულებიდან და ქვემოთ მოყვანილი (16,3) ფორმულა.

(16,2) ფორმულების ზემოთ გადმოცემული დამტკიცება იდეით არ განსხვავდება ი. პლემელის დამტკიცებისაგან. აქ მხოლოდ ზოგიერთი რამ არის გამარტივებული და დაზუსტებული.

(16,2) ფორმულებს ვუწოდებთ სოხოცკი—პლემელის ფორმულებს[45].

აღვნიშნოთ კიდევ ორი ფორმულა, რომლებიც (16,2) ფორმულების ეკვივალენტურია და რომლებითაც ხშირად ვისარგებლებთ:

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0), \tag{16,3}$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}. \tag{16,4}$$

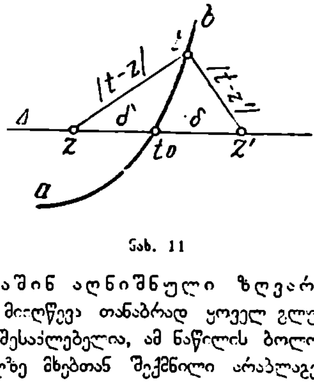
§ 17. სასაზღვრო მნიშვნელობათა სხვაობის ფორმულის განზოგადება. (16,3) ფორმულა

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0) \tag{17,1}$$

მიღებული იყო იმ დაშვებით, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებდა H პირობას ყოველ შემთხვევაში (კვანძისაგან, მათ შორის ბოლოებისაგან, განსხვავებულ) t_0 წერტილის მიდამოში. მაგრამ ამ ფორმულას შეიძლება მიეწეროს გარკვეული აზრი მაშინაც, როდესაც $\varphi(t)$ ფუნქცია მხოლოდ უწყვეტია.

ავიღოთ (ნახ. 11) t_0 წერტილზე გამავალ და t_0 წერტილზე L-ის არამხებ Δ წრფეზე t_0-დან ტოლი მანძილებით დაცილებული ორი z და z' წერტილი, შესაბამისად L-ის მარცხნივ და მარჯვნივ და შევთანხმდეთ, რომ $\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)$ სხვაობის მნიშვნელობად მივიჩნიოთ ზღვარი

$$\lim\,[\Phi(z)-\Phi(z')], \text{ როცა } z,\ z'\to t_0. \tag{17,2}$$



ნახ. 11

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტია t_0 წერტილის მიდამოში, მაშინ აღნიშნული ზღვარი არსებობს და ტოლია $\varphi(t_0)$-ის. ეს ზღვარი მიიღწევა თანაბრად ყოველ გლუვ ნაწილზე, რომელზედაც $\varphi(t)$ უწყვეტია, გარდა, შესაძლებელია, ამ ნაწილის ბოლოების მიდამოებისა, თუ Δ წრფის მიერ t_0 წერტილზე მხებთან შექმნილი არაპლაგვი β კუთხე არაა ნაკლები (ნებისმიერად ფიქსირებულ, მაგრამ ნულისაგან განსხვავებულ) მუდმივ β_0 კუთხეზე.

დამტკიცებისას, ცხადია, შეგვიძლია შემოვისაზღვროთ შემთხვევით, როდესაც L გლუვი შეკრული ან გახსნილი რკალია.

ვთქვათ,

$$z=t_0+h, \quad z'=t_0-h,$$

მაშინ

$$\Phi(z)-\Phi(z') = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \varphi(t)\left\{\frac{1}{t-t_0-h} - \frac{1}{t-t_0+h}\right\}dt = \frac{h}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-t_0)^2-h^2}$$

[45] ი. სოხოცკის [1] ნაშრომი დიდხანს რჩებოდა უცნობი მათემატიკოსებისათვის (ისევე როგორც მისი სხვა ნაშრომები, რომლებიც შეიცავენ პირველხარისხოვან შედეგებს). სამწუხაროდ, ამ ნაშრომს მეც არ ვიცნობდი ამ წიგნის პირველი გამოცემის გამოქვეყნებისას და ამის გამო (16,2) ფორმულებს ვუწოდე პლემელის ფორმულები. ი. სოხოცკის პრიორიტეტი აღდგენილ იქნა ა. მარკუშევიჩის [4] მიერ.

ან

$$\Phi(z)-\Phi(z')=\frac{h}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)^2-h^2}\,dt+\frac{h\varphi(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{dt}{(t-t_0)^2-h^2}. \qquad (*)$$

უკანასკნელი ინტეგრალი ელემენტარულად გამოითვლება, მაგრამ უფრო მეტად რომ გავამარტივოთ მისი გამოსახულება, L წირი ჩავთვალოთ შეკრულ კონტურად. ეს, ცხადია, ზოგადობაზე გავლენას არ მოახდენს. თუ დავუშვებთ, რომ L-ზე დადებითი მიმართულება ისეა შერჩეული, რომ L-ით შემოსაზღვრული სიბრტყის სასრული ნაწილი რჩება მარცხნივ, და შევნიშნავთ, რომ $t_0+h=z$ წერტილი მოთავსებულია ამ ნაწილში, ხოლო $t_0-h=z'$ წერტილი — მის გარეთ, და გამოვიყენებთ ნაშთების შესახებ თეორემას, დავასკვნით, რომ (*)-ში მეორე შესაკრები $\varphi(t_0)$-ის ტოლია და, მაშასადამე,

$$\Phi(z)-\Phi(z')=\varphi(t_0)+I,$$

სადაც

$$I=\frac{h}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)^2-h^2}\,dt.$$

დაგვრჩა ვაჩვენოთ, რომ $I\to 0$, როცა $h\to 0$. შემოვწეროთ საკმაოდ მცირე ρ-რადიუსიანი γ წრეწირი ცენტრით t_0-ში, რომელიც L-ს გადაკვეთს ორ a და b წერტილში. ρ იმდენად მცირე ვიგულისხმოთ, რომ $|\varphi(t)-\varphi(t_0)|<\eta$ ყოველი წერტილისათვის ab-ზე, სადაც η მოცემული დადებითი სიდიდეა. დავუშვათ, $I=I_1+I_2$, სადაც I_1 აიღება ab-ზე, ხოლო I_2 — $(L-ab)$-ზე.

გვაქვს:

$$|I_1|\leqslant\frac{\delta\eta}{\pi}\int\limits_{ab}\frac{ds}{|t-z|\cdot|t-z'|},$$

სადაც $\delta=|h|$. დავუშვათ, $|t-t_0|=r$, მაშინ (2,2)-ის საფუძველზე გვექნება $ds\leqslant K|dr|$, თუკი $\rho\leqslant R_0(\alpha_0)$, სადაც α_0 არის β_0-ზე ნაკლები ნებისმიერი დადებითი სიდიდე, ხოლო $R(\alpha_0)$ შესაბამისი სტანდარტული წრის რადიუსია.

თუ ϑ არის $\vec{t_0z}$ და $\vec{t_0t}$ ვექტორებს შორის კუთხე, ხოლო $\omega=\vartheta$, როცა $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, $\omega=\pi-\vartheta$, როცა $\vartheta>\frac{\pi}{2}$, გვექნება:

$$|t-z|^2=r^2+\delta^2-2r\delta\cos\vartheta\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega_0,$$

სადაც $\omega_0=\beta_0-\alpha_0>0$ ფიქსირებული მახვილი კუთხეა[40]; ანალოგიურად,

$$|t-z'|^2\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega_0.$$

მაშასადამე,

$$|t-z|\cdot|t-z'|\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega_0=(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0,$$

$$|I_1|\leqslant\frac{2K\delta\eta}{\pi}\int\limits_0^{\rho}\frac{dr}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}=$$

---

[40] ის. § 2, თვისება V.

$$= \frac{2K\eta}{\pi \sin \omega_0} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{r}{\delta \sin \omega_0} - \operatorname{ctg} \omega_0 \right) \right]_{r=0}^{r=\rho} \leqslant \frac{2K\eta}{\sin \omega_0},$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ საკმაოდ მცირე ρ-თვის გვექნება $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, სადაც ε ნებისმიერად მცირე დადებითი სიდიდეა.

ცხადია, (როცა ρ ფიქსირებულია) δ-ს საკმაოდ მცირეს თუ შევარჩევთ, გვექნება $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, საიდანაც გამომდინარეობს გამოთქმული დებულება.

აღვნიშნოთ დამტკიცებული დებულების ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი, თითქმის ცხადი, თუ მხედველობაში მივიღებთ § 9-ის 3⁰ პუნქტში ნათქვამს.

ვთქვათ, $\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტია L წირის რაიმე გლუვ L' ნაწილზე (L' შეიძლება L-ს ემთხვეოდეს) და ვთქვათ, $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია L'-ზე მარცხნიდან [მარჯვნიდან], მაშინ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადი იქნება L'-ზე აგრეთვე მარჯვნიდანაც [მარცხნიდანაც] გარდა, შესაძლოა, L'-ის ბოლოებისა.

ამ პარაგრაფის დასაწყისში გამოთქმული დებულების არსებითი ნაწილი (არა სავსებით მკაფიო ფორმულირებით) გვაქვს ი. სოხოცკის [1] ზემოხსენებულ ნაშრომში.

ამ პარაგრაფში გადმოცემული შედეგები, დაახლოებით ისეთი სახით, როგორც აქ არის ფორმულირებული, ი. პლემელს (J. Plemelj [1]) ეკუთვნის. აქ მოყვანილი დამტკიცება მისი დამტკიცების დეტალიზაციას წარმოადგენს (იხ. აგრეთვე E. Picard [1]).

§ 18. სასაზღვრო მნიშვნელობების უწყვეტობის ხასიათი. 1⁰. ვთქვათ, L აღნიშნავს უბან-უბან გლუვ წირს და ვთქვათ, $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L წირის რაიმე გლუვ L' ნაწილზე.

ჩვენ ვნახეთ, რომ ამ პირობებში

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{18,1}$$

ფუნქცია მარცხნიდან და მარჯვნიდან უწყვეტად გაგრძელებადია L' ნაწილზე, გარდა, შესაძლებელია, მისი ბოლოებისა. ამიტომ (§ 9, პ. 2⁰) $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობანი L'-ზე t წერტილის უწყვეტ ფუნქციებს წარმოადგენენ ყველგან, გარდა, შესაძლებელია, L'-ის ბოლოებისა. ამ სასაზღვრო მნიშვნელობების შესახებ უფრო მეტის დამტკიცება შეიძლება, სახელდობრ, ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემას:

პლემელი — პრივალოვის თეორემა. თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L'-ზე, მაშინ $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები L'-ზე, გარდა, შესაძლოა, L'-ის ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოებისა, აკმაყოფილებენ $H(\mu)$ პირობას, როცა $\mu < 1$, და $H(\mu - \varepsilon)$ პირობას, როცა $\mu = 1$, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი მუდმივია[40ა].

[40ა] უფრო ზუსტად, თუ $\mu = 1$, მაშინ ნებისმიერი ორი საკმაოდ ახლო t_0, t_1 წერტილისათვის L'-ზე გვაქვს:

$$|\Phi^{\pm}(t_1) - \Phi^{\pm}(t_0)| \leqslant \text{const} \cdot |t_1 - t_0| \cdot \ln \frac{1}{|t_1 - t_0|}.$$

დამტკიცებისას, ცხადია, შეიძლება შემოვისაზღვროთ შემთხვევით, როცა L შედგება ერთადერთი გახსნილი გლუვი ab რკალისაგან, ხოლო L' ემთხვევა L-ს.

ვთქვათ, $L''=a''b''$ არის $L'=L=ab$ რკალის ნებისმიერი ნაწილი, რომლის ბოლოები L რკალის a და b ბოლოებიდან სასრულ მანძილზეა. უნდა დავამტკიცოთ, რომ L'' რკალის წერტილთა ნებისმიერი t_0, t_1 წყვილისათვის

$$\begin{aligned} |\Phi^+(t_1)-\Phi^+(t_0)| &\leqslant C|t_1-t_0|^\nu, \\ |\Phi^-(t_1)-\Phi^-(t_0)| &\leqslant C|t_1-t_0|^\nu, \end{aligned} \tag{18,2}$$

სადაც C რაღაც მუდმივაა, ხოლო $\nu=\mu$, თუ $\mu<1$ და $\nu=1-\varepsilon$, თუ $\mu=1$; ε აღნიშნავს რაგინდ მცირე დადებით მუდმივს.

(16,2) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს:

$$\Phi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{dt}{t-t_0}, \tag{18,3}$$

სადაც ერთდროულად აიღება ზედა ან ქვედა ნიშანი. ვინაიდან (18,3)-ის მარჯვენა მხარეში პირველი და მესამე შესაკრებები, აშკარაა, აკმაყოფილებენ $H(\mu)$ პირობას L''-ზე[17], გვრჩება ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt \tag{18,4}$$

აკმაყოფილებს

$$|\Psi(t_1)-\Psi(t_0)|\leqslant C|t_1-t_0|^\nu \tag{18,5}$$

პირობას L''-ზე t_0, t_1 წერტილთა ნებისმიერი წყვილისათვის, სადაც C რაღაც მუდმივაა, ხოლო ν არის იგივე, რაც ზემოთ.

როგორც ყოველთვის, s, s_0, s_1-ით აღვნიშნავთ t, t_0, t_1 წერტილების შესაბამის რკალურ აბსცისებს და, გარდა ამისა, შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$t_1-t_0=h, \quad s_1-s_0=\sigma;$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, ცხადია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\sigma>0$ და, რომ 2σ არ აღემატება მანძილებს a'', b'' წერტილებიდან a, b წერტილებამდე.

გვაქვს:

$$\Psi(t_1)-\Psi(t_0)=\Psi(t_0+h)-\Psi(t_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0+h)}{t-t_0-h}-\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right\}dt. \tag{18,6}$$

L-ის გასწვრივ t_0-ის ორივე მხარეს გადავზომოთ 2σ სიგრძის ტოლი $t't_0$ და t_0t'' რკალები და ამ ორი რკალის ერთობლიობა აღვნიშნოთ $l=t't''$-ით; L-ის დანარჩენი ნაწილი აღვნიშნოთ $(L-l)$-ით.

---

17 იხ. (13,4ა) ფორმულა.

ამის შესაბამისად წინა ინტეგრალი დაიყოფა ორი ინტეგრალის ჯამად:

$$\Psi(t_0+h)-\Psi(t_0)=I_0+I,$$

სადაც I_0 აღებულია l-ზე, ხოლო $I-(L-l)$-ზე.

$\varphi(t)$-სთვის $H(\mu)$ პირობიდან, ე. ი.

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\,|t_2-t_1|^{\mu}$$

პირობიდან, სადაც t_1, t_2 ნებისმიერი ორი წერტილია L-ზე, გამომდინარეობს, რომ

$$|I_0|\leqslant\frac{A}{2\pi}\int\limits_{l}|t-t_0-h|^{\mu-1}\,ds+\frac{A}{2\pi}\int\limits_{l}|t-t_0|^{\mu-1}\,ds. \qquad (18,7)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ ნებისმიერი ორი t_1, t_2 წერტილისათვის L-ზე

$$0<k_0\leqslant\frac{|t_2-t_1|}{|s_2-s_1|}\leqslant 1, \qquad (18,8)$$

სადაც k_0 მუდმივია, (18,7)-დან ელემენტარული გამოთვლებით მივიღებთ

$$|I_0|\leqslant A_0\left\{\int\limits_{s_0-2\sigma}^{s_0+2\sigma}|s-s_0-\sigma|^{\mu-1}\,ds+\int\limits_{s_0-2\sigma}^{s_0+2\sigma}|s-s_0|^{\mu-1}\,ds\right\}\leqslant B_0\sigma^{\mu}\leqslant C_0|h|^{\mu},$$

სადაც A_0, B_0, C_0 გარკვეული მუდმივებია.

შევისწავლოთ I ინტეგრალი, რომელიც ახლა ასე გადავწეროთ

$$I=I_1+I_2,$$

სადაც

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{\varphi(t_0)-\varphi(t_0+h)}{t-t_0}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\,[\varphi(t_0)-\varphi(t_0+h)]\left\{\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}-\ln\frac{t''-t_0}{t'-t_0}\right\}$$

(შდრ. გვ. 44)

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}[\varphi(t)-\varphi(t_0+h)]\left\{\frac{1}{t-t_0-h}-\frac{1}{t-t_0}\right\}dt=$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0+h)}{(t-t_0-h)\,(t-t_0)}\,dt.$$

I_1-ის გამოსახულებაში ფიგურულ ფრჩხილებში მამრავლი ცხადია შემოსაზღვრულია, როცა t_0 არის $a''b''$-ზე. ამიტომ

$$|I_1|\leqslant C_1|h|^{\mu},$$

სადაც C_1 მუდმივია. გვრჩება I_2-ის განხილვა. თუ მივიღებთ მხედველობაში (18,8)-ს და შევნიშნავთ, რომ $\tau=\dfrac{\sigma}{s-s_0}$ სიდიდე აბსოლუტური სიდიდით $\dfrac{1}{2}$-ს არ აღემატება, მივიღებთ:

$$|I_2| \leqslant A_2|h| \int\limits_{L-l} \frac{ds}{|s-s_0|\cdot|s-s_0-\sigma|^{1-\mu}} = A_2|h| \int\limits_{L-l} \frac{ds}{|s-s_0|^{2-\mu}(1-\tau)^{1-\mu}} \leqslant$$

$$\leqslant B_2|h| \int\limits_{L-l} \frac{ds}{|s-s_0|^{2-\mu}} = B_2|h| \left\{ \int\limits_{s_a}^{s_0-2\sigma} \frac{ds}{(s_0-s)^{2-\mu}} + \int\limits_{s_0+2\sigma}^{s_b} \frac{ds}{(s-s_0)^{2-\mu}} \right\},$$

სადაც s_a და s_b $L=ab$ რკალის a და b ბოლოების შესაბამისი რკალური აბსცისებია, ხოლო A_2, B_2 მუდმივებია. ინტეგრალების გამოთვლით ადვილად ვღებულობთ:

$$|I_2| \leqslant C_2|h|^{\mu}, \text{ როცა } \mu<1, \quad |I_2| \leqslant C_2|h|\ln\frac{1}{|h|}, \quad \text{როცა } \mu=1,$$

სადაც C_2 მუდმივია. უკანასკნელ უტოლობაში, რასაკვირველია, იგულისხმება, რომ $|h|$ საკმაოდ მცირე სიდიდეა. მიღებული უტოლობები ამტკიცებენ გამოთქმულ თეორემას.

ეს თეორემა ადვილად შეიძლება განზოგადდეს იმ შემთხვევაზე, როცა L ნებისმიერი მარტივი უბან-უბან გლუვი წირია, რომელსაც შესაძლებელია აგრეთვე ჰქონდეს უკუქცევის წერტილები (იხ. წიგნის ბოლოს დამატება II).

დამტკიცებული თეორემა ი. პლემელის (J. Plemelj [1]) ეკუთვნის. ეს ავტორი არამკაფიოდ აყალიბებს პირობებს, რომელსაც მოითხოვს საინტეგრაციო წირისაგან; თუ ვიმსჯელებთ კონტექსტის მიხედვით, მას მხედველობაში აქვს გლუვი წირი. გარდა ამისა, პლემელი არ გამოჰყოფს იმ შემთხვევას, როცა $\mu=1$, ალბათ გულისხმობს, რომ $\mu<1$. 1916 წელს ი. პრივალოვმა [1] პლემელისაგან დამოუკიდებლად ეს თეორემა დაამტკიცა იმ შემთხვევისათვის, როცა L წრეწირია[48]. შემდეგ შრომაში [4] მან მოგვცა დამტკიცება ნებისმიერი მარტივი უბან-უბან გლუვი წირისათვის, რომელსაც უკუქცევის წერტილები არ გააჩნია. ჩვენ მიერ მოყვანილი დამტკიცება, არსებითად, ი. პლემელის მიერ მოხაზულ დამტკიცებას წარმოადგენს; აქ მხოლოდ ზოგიერთი რამ არის დაზუსტებული; (შდრ. აგრეთვე ი. პრივალოვი [6], [7]).

აღვნიშნოთ აგრეთვე ერთი, თითქმის ცხადი, მნიშვნელოვანი გარემოება. ვთქვათ, სიმარტივისათვის, L გლუვი გახსნილი რკალია, და ვთქვათ, $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობის ამ რკალის c ბოლოს მიდამოში ამ ბოლოს ჩათვლით, ამასთან, $\varphi(c)=0$. მაშინ $\Phi^+(t)$ და $\Phi^-(t)$ დააკმაყოფილებენ $H(\nu)$ პირობას აგრეთვე c ბოლოს მიდამოში c-ს ჩათვლით, თუ $\Phi^+(c)=\Phi^-(c)$ მნიშვნელობად ვიგულისხმებთ $\Phi(c)$-ს; ν-თი აღნიშნულია მუდმივი, რომელიც μ-ს ტოლია, როცა $\mu<1$ და $(1-\varepsilon)$-ის, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი მუდმივია, როცა $\mu=1$. ეს დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს ზემოთქმულიდან, თუ L რკალს განვაგრძობთ განსახილავი ბოლოს იქით (მაგალითად, მხების მონაკვეთით) და ვიგულისხმებთ, რომ დამატებულ ნაწილზე $\varphi(t)=0$.

2°. პლემელი—პრივალოვის თეორემიდან (16,2) ფორმულის საფუძველზე ან

[48] იხ. აგრეთვე ი. პრივალოვი [2]. შევნიშნოთ, რომ ჯერ კიდევ 1906 წ. ფატუმ (P. Fatou [1]) იმ შემთხვევისათვის, როცა L წრეწირია, დაამტკიცა, რომ თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ზე, მაშინ $\Phi(t)$ დააკმაყოფილებს $H\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)$ პირობას.

კიდევ მტკიცებისას გამოყენებული მსჯელობის საფუძველზე, გამომდინარეობს, რომ თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L წირის გლუვ L' ნაწილზე, მაშინ ფუნქცია

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \tag{18,9}$$

L'-ზე, გარდა, შესაძლებელია, მისი ბოლოების მიდამოებისა, აგრეთვე დააკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, როცა $\mu < 1$ და $H(\mu-\varepsilon)$ — პირობას, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი მუდმივაა, როცა $\mu = 1$.

3°. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სიმკვრივე დამოკიდებულია კიდევ რაიმე τ პარამეტრზე. სახელდობრ, განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Phi(t_0, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t, \tau)dt}{t-t_0} \tag{18,10}$$

და დავუშვათ, რომ $\varphi(t, \tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას t და τ-თი, როცა t იმყოფება L წირის რაიმე გლუვ L' ნაწილზე, ხოლო τ ეკუთვნის რაიმე T სიმრავლეს და L-ზე t-ს დანარჩენი მნიშვნელობებისათვის

$$|\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t, \tau)| \leqslant A(t)|h|^\nu, \quad \nu = \mathrm{const} > 0, \quad \tau \in T, \ \tau+h \in T, \tag{18,11}$$

სადაც $A(t)$ დადებითი, L-ზე ინტეგრებადი ფუნქციაა[49]. ვთქვათ L'' არის L'-ის ნაწილი, რომელსაც L'-თან საერთო ბოლოები არ გააჩნია.

დავამტკიცოთ, რომ ამ პირობებში $\Phi(t_0, \tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე t_0, τ ცვლადის მიმართ, როცა $t_0 \in L''$, $\tau \in T$.

ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ, $\Phi(t_0, \tau)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას τ ცვლადით, ვინაიდან უკვე ვიცით, რომ $\Phi(t_0, \tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას, როცა τ ფიქსირებულია და $t_0 \in L''$.

(18,11) პირობის დამტკიცებისას, საკმარისია ჩავთვალოთ, რომ L გახსნილი გლუვი წირია და რომ L' ემთხვევა L-ს.

ამ პირობებში გვაქვს:

$$\Phi(t_0, \tau+h) - \Phi(t_0, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t, \tau)}{t-t_0}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{[\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau+h)] - [\varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)]}{t-t_0}\, dt +$$

$$+ [\varphi(t_0, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau)] \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{dt}{t-t_0}.$$

მეორე შესაკრები, ცხადია, მოდულით არ აღემატება $B|h|^\nu$-ს, სადაც ν არის H პირობის მაჩვენებელი $\varphi(t, \tau)$ ფუნქციისათვის τ ცვლადით, ხოლო B მუდმივაა. დაგვრჩენია განვიხილოთ ინტეგრალი

[49] ჩვენ არ ვამბობთ, რომ $\varphi(t, \tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას τ ცვლადით ყოველი t-თვის L-ზე, ვინაიდან მაშინ § 3-ში (პ. 2°) მიღებული პირობის თანახმად, უნდა ჩაგვეთვალა, რომ (18,11) სახის პირობას ადგილი აქვს შემოსაზღვრული $A(t)$ კოეფიციენტისათვის, რასაც ჩვენ აქ არ ვგულისხმობთ.

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{[\varphi(t,\ \tau+h)-\varphi(t_0,\ \tau+h)]-[\varphi(t,\ \tau)-\varphi(t_0,\ \tau)]}{t-t_0}\,dt.$$

ვთქვათ, l არის $\sigma=|h|$ სიგრძის ტოლი რკალი, t_0 შუა წერტილით. $|h|$ იმდენად მცირეა, რომ l მთლიანად თავსდება L-ზე. დავყოთ I ინტეგრალი ორი ინტეგრალის ჯამად:

$$I=I_1+I_2,$$

სადაც I_1 აღებულია l-ზე, ხოლო I_2—$(L-l)$-ზე. ცხადია, გვაქვს

$$|I_1|\leqslant A_1\int\limits_{l}\frac{ds}{|s-s_0|^{1-\mu}}\leqslant B_1\sigma^{\mu},$$

სადაც μ არის $\varphi(t,\ \tau)$ ფუნქციის H პირობის მაჩვენებელი t ცვლადით, ხოლო A_1, B_1 მუდმივებია. შემდეგ,

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{\varphi(t,\ \tau+h)-\varphi(t,\ \tau)}{t-t_0}\,dt-[\varphi(t_0,\ \tau+h)-\varphi(t_0,\ \tau)]\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{dt}{t-t_0}.$$

მეორე შესაკრები მოდულით არ აღემატება $B'\sigma^{\nu}$-ს, სადაც B' მუდმივია. პირველი შესაკრები კი საკმაოდ მცირე σ-თვის მოდულით არ აღემატება სიდიდეს

$$A_2|h|^{\nu}\int\limits_{L-l}\frac{ds}{|s-s_0|}\leqslant B_2\sigma^{\nu}|\ln\sigma|,$$

სადაც A_2, B_2 მუდმივებია. ამგვარად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ მიღებული შედეგი ვრცელდება იმ შემთხვევაზეც, როცა ერთი τ პარამეტრის ნაცვლად რამდენიმე პარამეტრი გვაქვს.

განვიხილოთ, კერძოდ, ინტეგრალი

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t,\ t_0)\,dt}{t-t_0},$$

სადაც L უბან-უბან გლუვი წირია და $\varphi(t,\ t_0)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე ცვლადის მიმართ, როცა $t\in L'$, $t_0\in L'$, ხოლო L-ზე t-ს დანარჩენი მნიშვნელობებისათვის—შემდეგი სახის პირობას:

$$|\varphi(t,\ t_0+h)-\varphi(t,\ t_0)|\leqslant A(t)|h|^{\nu},\ \nu=\text{const}>0,\ t_0\in L',\ t_0+h\in L',$$

სადაც $A(t)$ არის L-ზე ინტეგრებადი დადებითი ფუნქცია[30]; L', ისევე როგორც ზემოთ, L წირის რაიმე გლუვ ნაწილს აღნიშნავს.

ზემოთქმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\Phi(t_0)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ის ნებისმიერ ნაწილზე, რომელიც L'-ს ეკუთვნის და L'-თან არ გააჩნია საერთო ბოლოები.

---

[30] $\varphi(t,\ t_0)$ ფუნქციის მიმართ ზოგიერთ სხვა დაშვებაში $\Phi(t_0)$ ფუნქციის თვისებები შესწავლილია შრომებში А. И. Гусейнов [1] და W. Pogorzelski [2].

§ 19. კოშის ტიპის ინტეგრალის შესახებ უსასრულო წრფეზე. მთელ ამ წიგნში, მცირეოდენი გამონაკლისით, რაც ყოველთვის იქნება აღნიშნული, საქმე გვექნება შემთხვევასთან, როცა, ისევე როგორც ყველა წინა პარაგრაფში, სასაზღვრო წირი ან საინტეგრაციო წირი მთლიანად მოთავსებულია სიბრტყის სასრულ ნაწილში. აქ კი რამდენიმე შენიშვნას გავაკეთებთ იმ შემთხვევის შესახებ, როცა საინტეგრაციო წირი ან სასაზღვრო წირი უსასრულობამდეა გაჭიმული.

1°. ზემოთ მოყვანილი ცნებებისა და სათანადო დებულებების ახლახან ხსენებულ შემთხვევაზე გავრცელება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მაგალითად, ამ შემთხვევაზე სავსებით ბუნებრივად ვრცელდება უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის ცნება: განსაზღვრა ძველი რჩება იმ განსხვავებით, რომ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის (რომელიც ახლა ეკუთვნის საზღვრის წირს) მიდამოში ფუნქციის ყოფაქცევას უნდა დაედოს ესა თუ ის პირობა იმის მიხედვით, თუ რა სახის საკითხს ვსწავლობთ.

განსახილავ შემთხვევაზე ასევე ბუნებრივად გადაიტანება კოშის ტიპის ინტეგრალის ცნება, სოხოცკი—პლემელის ფორმულები, პლემელი—პრივალოვის თეორემა და სხვ.

ერთადერთი, რაც დამატებით მოგვეთხოვება, ეს არის უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში (იმ მოცემული ან საძიებელი) ფუნქციების ყოფაქცევის განხილვა, რომლებზედაც მოგვიხდება ოპერაციების ჩატარება, იმ მიზნით, რომ გამოვიკვლიოთ უსასრულო წირზე გავრცელებული ინტეგრალის კრებადობის პირობები და იმ მიზნით, რომ შევინარჩუნოთ ძირითადი დებულებები, მიღებული სასრული წირების შემთხვევაში. ასეთი განხილვის ყველაზე ბუნებრივ და მარტივ ხერხს წარმოადგენს უსასრულო წირის შემთხვევის დაყვანა სასრული წირის შემთხვევაზე კომპლექსური სიბრტყის წილად-წრფივი გადასახვით, რაც უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოს რაიმე სასრული წერტილის მიდამოში გადაიყვანს. ასეთი გარდაქმნის მაგალითი მოყვანილი იქნება ქვემოთ 3° პუნქტში.

2°. ზემოთ მოყვანილი განზოგადებები იმდენად ცხადია, რომ აქ შემოვისაზღვრებით უმარტივესი (მაგრამ პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვანი) შემთხვევის განხილვით, როცა საინტეგრაციო წირი, რომელსაც ჩვენ ახლა D-თი აღვნიშნავთ, უსასრულო წრფეა.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ვიგულისხმოთ, რომ D არსი ღერძია და განვიხილოთ კოშის ტიპის ინტეგრალი

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}; \qquad (19,1)$$

ამ შემთხვევაში t ნამდვილი ცვლადია, რომელიც ღებულობს ყველა ნამდვილ მნიშვნელობას, ხოლო $\varphi(t)$ ნამდვილი t ცვლადის, საზოგადოდ, კომპლექსური ფუნქციაა, მოცემული მთელს D წრფეზე, გარდა, შესაძლოა, მისი სასრული რაოდენობის წერტილებისა. ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ყველგან, გარდა, შესაძლოა, ხსენებული წერტილების რაგინდ მცირე მიდამოებისა, და რომ ის აბსოლუტურად ინტეგრებადია D წრფის ყოველ სასრულ მონაკვეთზე (შეად. § 11, პ. 1°).

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ z წერტილი არ მდებარეობს D-ზე. (19, 1) ინტეგ-

რალი აუცილებლად იქნება კრებადი, თუ $|t|$-ს საკმაოდ დიდი მნიშვნელობებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\varphi(t)| < \frac{B}{|t|^{\mu}}, \tag{19,2}$$

სადაც B და μ დადებითი მუდმივებია[61]. მაგრამ შემდეგში ჩვენ საქმე გვექნება უფრო ზოგად შემთხვევასთან, როდესაც $\varphi(t)$ მიისწრაფვის სასრული c ზღვრისაკენ, თუ $|t| \to \infty$. ცხადია c იქნება $\varphi(t)$-ს ზღვარი, როცა $t \to +\infty$ და $t \to -\infty$; ეს ზღვარი აღვნიშნოთ $\varphi(\infty)$ სიმბოლოთი.

ვიგულისხმოთ, რომ საკმაოდ დიდი $|t|$-სთვის გვაქვს:

$$\varphi(t) = c + O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right) = \varphi(\infty) + O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right), \quad \mu = \text{const} > 0. \tag{19,3}$$

ამ შემთხვევაში, როცა $c \neq 0$, (19,1) ინტეგრალი განშლადი იქნება, ე. ი. გამოსახულება

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z}$$

არ მიისწრაფვის ზღვრისაკენ, როცა N' და N'' ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მიისწრაფვიან შესაბამისად $-\infty$ და $+\infty$-კენ. მართლაც, გვაქვს:

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z} = \int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t) - c}{t - z}\,dt + c \int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t - z}. \tag{*}$$

ელემენტარული განხილვა გვიჩვენებს, რომ

$$\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t - z} = \pm \alpha i + \ln \frac{r''}{r'},$$

სადაც $\alpha\,(0 < \alpha < \pi)$ არის კუთხე z წერტილის x ღერძის $t = N'$ და $t = N''$ წერტილებთან შემაერთებელ წრფევ მონაკვეთებს შორის, ხოლო r', r'' მანძილებია z წერტილიდან შესაბამისად N' და N'' წერტილებამდე; ამასთან ნიშანი „პლუსი“ აიღება, როცა z ზედა ნახევარსიბრტყეშია, ხოლო „მინუსი“, როცა z ქვედა ნახევარსიბრტყეშია. თუ N' და N'' ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მიისწრაფვიან შესაბამისად $-\infty$ და $+\infty$-კენ, მაშინ α მიისწრაფვის π-კენ, მაგრამ $\ln \frac{r''}{r'}$ არავითარ ზღვრისაკენ არ მიისწრაფვის. მაშასადამე, ინტეგრალიც არავითარი ზღვრისაკენ არ მიისწრაფვის, იგივე შეიძლება ითქვას (*)-ის მარცხენა მხარის მიმართაც, ვინაიდან მარჯვენა მხარეში პირველი ინტეგრალი, (19,3) პირობის საფუძველზე, კრებადია.

მაგრამ თუ $-N'$ და N'' გავზრდით არა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, არამედ ვიგულისხმებთ, რომ ყოველთვის $-N' = N''$, მაშინ $\ln \frac{r''}{r'}$ მიისწრაფვის ნულისაკენ და ზემოხსენებულის თანახმად გვექნება

[61] ეს პირობა საკმარისია, მაგრამ, ცხადია, აუცილებელი არ არის.

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-c}{t-z}\,dt\pm\pi ic. \qquad (19,4)$$

მარცხნივ მდგომ გამოსახულებას, კოშის მიხედვით, ეწოდება უსასრულო საზღვრებს შორის აღებული

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\ \text{ან}\ \int_{D}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}$$

ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა. შემდეგში, როცა გამოვიყენებთ უსასრულო საზღვრების მქონე ინტეგრალს, თუ ჩვეულებრივი აზრით ინტეგრალი არ არსებობს, ჩვენ ვიგულისხმებთ მის მთავარ მნიშვნელობას.

როგორც ვნახეთ, თუ შესრულებულია (19,3) პირობა, მთავარი მნიშვნელობა არსებობს[52], ამასთან

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-z}\,dt\pm\frac{1}{2}\,\varphi(\infty), \qquad (19,5)$$

სადაც მარცხნივ მონაწილეობს მთავარი მნიშვნელობა, ხოლო მარჯვნივ — ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით; ნიშანი „პლუსი" აიღება, თუ z ზედა ნახევარსიბრტყეშია, ხოლო ნიშანი „მინუსი" — თუ z ქვედა ნახევარსიბრტყეშია.

ამრიგად, ტერმინს „მთავარი მნიშვნელობა" ორი განსხვავებული, მაგრამ ანალოგიური აზრით ვიყენებთ: როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია რაიმე წერტილში უსასრულობა ხდება (როგორც წინა პარაგრაფში) და როცა ინტეგრების საზღვრები უსასრულოა.

ვთქვათ ახლა, წერტილი $z=t_0$ ინტეგრების წირზე, ე. ი. ნამდვილ ღერძზე მდებარეობს. მაშინ

$$\int_{D}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

ინტეგრალად მივიჩნევთ მთავარ მნიშვნელობას ორივე აღნიშნული აზრით, ე. ი. მთავარ მნიშვნელობას ასე განვსაზღვრავთ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{-N}^{t_0-\varepsilon}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\int_{t_0+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}\right\}, \qquad (19,6)$$

თუ აღნიშნული ზღვარი არსებობს. კერძოდ, ადვილი დასანახავია, რომ

---

[52] მთავარი მნიშვნელობის განსაზღვრისას არ არის აუცილებელი ჩავთვალოთ, რომ ზუსტად $N'=-N''$; საკმარისია ვიგულისხმოთ:

$$\lim\frac{-N'}{N''}=1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t-t_0} = 0. \tag{**}$$

ცხადია, (19,6) მთავარი მნიშვნელობა ნამდვილად არსებობს, თუ შესრულებულია (19,3) პირობა და თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას t_0 წერტილის მიდამოში.

(**)-ის საფუძველზე ადვილი დასანახავია, რომ მთავარი მნიშვნელობა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-t_0}\, dt, \tag{19,6ა}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\, dt, \tag{19,6ბ}$$

სადაც მარჯვენა მხარეებში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ მთავარი მნიშვნელობა ზემოთ აღნიშნულიდან მხოლოდ ერთი აზრით.

ვთქვათ, $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს (19,3) პირობას და, რა თქმა უნდა, თავიდან წამოყენებულ პირობებს. მაშინ (19,1) ფორმულით განსაზღვრული $\Phi(z)$ ფუნქცია, ცხადია, ჰოლომორფული იქნება როგორც ზედა, აგრეთვე ქვედა ნახევარსიბრტყეებში, რომლებსაც, შესაბამისად, S^+ და S^--ით აღვნიშნავთ. საზღვარი D არ მიეკუთვნება არც S^+-ს და არც S^--ს.

წინა პარაგრაფებში დამტკიცებული სოხოცკი—პლემელის ფორმულები და თეორემები სასაზღვრო მნიშვნელობათა შესახებ ადვილად გავრცელდება აქ განხილულ შემთხვევაზე. სახელდობრ, თუ t_0 სასრულ მანძილზე მდებარე D-ს წერტილია, ხოლო $\varphi(t)$ ამ წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს H პირობას, მაშინ

$$\Phi^+(t_0) = \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \tag{19,7}$$

$$\Phi^-(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}. \tag{19,8}$$

თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას D წრფის რაიმე მონაკვეთზე, მაშინ $\Phi^+(t_0)$ და $\Phi^-(t_0)$ დააკმაყოფილებს H პირობას ამ მონაკვეთზე, გარდა, შესაძლოა, მისი ბოლოებისა. § 17-ში ნათქვამი აგრეთვე მართებული იქნება ჩვენს შემთხვევაშიც.

3°. აქამდე, როდესაც ვლაპარაკობდით $\Phi(z)$ ფუნქციის ყოფაქცევაზე D საზღვრის წერტილების მახლობლად და მის სასაზღვრო მნიშვნელობებზე, მხედველობაში გვქონდა სასრულ მანძილზე მდებარე წერტილები.

ახლა შევისწავლოთ $\Phi(z)$ ფუნქციის და მისი სასაზღვრო მნიშვნელობების ყოფაქცევა უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში საზღვრის ერთ-ერთ წერტილს წარმოადგენს. ამისი გაკეთება შეიძლებოდა

უშუალოდ, მაგრამ ვამჯობინებთ 1° პუნქტის ბოლოში ხსენებულ ხერხს, სახელდობრ, სასრული საზღვრის შემთხვევაზე დაყვანას.

ამ მიზნით მოვახდინოთ ცვლადის შემდეგი გარდაქმნა:

$$z+i=\frac{-1}{\zeta+i}, \tag{19,9}$$

ე. ი.

$$z=\frac{-i\zeta}{\zeta+i}, \quad \zeta=\frac{-iz}{z+i}. \tag{19,9ა}$$

რასაკვირველია, შესაძლებელი იყო გვესარგებლა ნებისმიერი სხვა წილად-წრფივი გარდაქმნით, რომელსაც D წრფე წრეწირში გადაჰყავს, მაგრამ ჩვენ შევჩერდით (19,9) გარდაქმნაზე, როგორც ერთ-ერთ უმარტივესსა და სიმეტრიულზე.

ამ გარდაქმნით z სიბრტყის ნამდვილი D წრფე გადადის ζ სიბრტყის L წრეწირში, რომელიც ნამდვილ ღერძს $\zeta=0$ წერტილში ეხება და გადის $\zeta=-i$ წერტილზე. როდესაც z სიბრტყის t წერტილი აღწერს D წრფეს დადებითი მიმართულებით (ისე, რომ ზედა ნახევარსიბრტყე მარცხნივ რჩება) ζ სიბრტყის შესაბამისი

$$\tau=\frac{-it}{t+i} \tag{19,10}$$

წერტილი აღწერს წრეწირს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით (მის მიერ შემოსაზღვრული წრე რჩება მარცხნივ).

(19,9) დამოკიდებულება იძლევა z სიბრტყის ზედა ნახევარსიბრტყის კონფორმულ გადასახვას ζ სიბრტყის L წრეწირით შემოსაზღვრულ წრეზე და ერთდროულად z სიბრტყის ქვედა ნახევარსიბრტყის კონფორმულად გადასახვას L წრეწირის გარეთ მდებარე ζ სიბრტყის ნაწილზე. ამასთან, z სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი L წრეწირის $\zeta=-i$ წერტილში გადადის.

თუ (19,1) ფორმულაში მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას (19,9), (19,10) ფორმულებით და შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\Phi(z)=\Phi\left(\frac{-i\zeta}{\zeta+i}\right)=\Phi^*(\zeta), \quad \varphi(t)=\varphi\left(\frac{-i\tau}{\tau+i}\right)=\varphi^*(\tau),$$

მივიღებთ:

$$\Phi(z)=\Phi^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\zeta+i}{\tau+i}\,\frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} \tag{19,11}$$

ან მარტივი გარდაქმნების შემდეგ

$$\Phi(z)=\Phi^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau+i}. \tag{19,12}$$

ინტეგრალები, რომლებიც ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მნიშვნელში $(\tau+i)$-ს შეიცავენ, საჭიროა გავიგოთ მათი მთავარი მნიშვნელობების აზრით. (19,3) პირობის

გამო, ადვილი დასანახავია, რომ ეს მთავარი მნიშვნელობები არსებობს[63].

უკანასკნელი ფორმულის მარჯვენა მხარეში მეორე ინტეგრალი მუდმივი სიდიდეა და ამიტომ $\Phi(z)$ ფუნქციის შესწავლა $z=\infty$ წერტილის მიდამოში დაიყვანება ჩვენთვის ცნობილ საკითხზე მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალის ყოფაქცევის შესახებ საზღვრის $\tau=-i$ წერტილის მახლობლად.

უკვე ცნობილი შედეგების უშუალოდ გამოსაყენებლად $\varphi(t)$ ფუნქციას მოვთხოვოთ ისეთი პირობა, რომ $\varphi^*(\tau)$ ფუნქცია $\tau=-i$ წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებდეს H პირობას, ე. ი. პირობას

$$|\varphi^*(\tau_2)-\varphi^*(\tau_1)| \leqslant A|\tau_2-\tau_1|^\mu, \quad A=\text{const}>0, \quad \mu=\text{const}>0;$$

ამას მივყავართ t-ს მიმართ შემდეგ პირობამდე

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant A\left|\frac{it_1}{t_1+i}-\frac{it_2}{t_2+i}\right|^\mu = A\left|\frac{1}{t_2+i}-\frac{1}{t_1+i}\right|^\mu,$$

საკმაოდ დიდი $|t_1|$ და $|t_2|$-სთვის, ან, ცხადია, ტოლფას პირობამდე—

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant A\left|\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right|^\mu, \quad A=\text{const}>0, \quad \mu=\text{const}>0, \qquad (19,13)$$

საკმაოდ დიდი $|t_1|$ და $|t_2|$-სთვის.

(19,13) პირობას ვუწოდებთ H პ ი რ ო ბ ა ს ან უფრო ზუსტად $H(\mu)$ პირობას უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოსათვის[64].

ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს ამ პირობას და ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\Phi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობები, როცა z მიდის უსასრულობაში ნებისმიერი გზით, ოღონდ ისე, რომ ყოველთვის რჩება ზედა ან ქვედა ნახევარსიბრტყეში. ამ სასაზღვრო მნიშვნელობებს შესაბამისად აღვნიშნავთ $\Phi^+(\infty)$ და $\Phi^-(\infty)$ სიმბოლოებით. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ მათი არსებობა და გამოვთვალოთ მათი მნიშვნელობანი, მივმართოთ (19,12) ფორმულებს.

როცა $z\to\infty$ ისე, რომ რჩება ზედა ან ქვედა ნახევარსიბრტყეში, მაშინ $\zeta\to -i$ ისე, რომ რჩება შესაბამისად L-ის შიგნით ან გარეთ, ამიტომ თუ (19,12) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ სოხოცკი—პლემელის ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\Phi^+(\infty)=\Phi^{*+}(-i)=\frac{1}{2}\varphi^*(-i)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau+i}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau+i},$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს პირველი შემდეგი ფორმულებიდან:

$$\Phi^+(\infty)=\frac{1}{2}\varphi(\infty), \quad \Phi^-(\infty)=-\frac{1}{2}\varphi(\infty); \qquad (19,14)$$

მეორე ფორმულა სავსებით ანალოგიურად მტკიცდება.

---

[63] (19,3) პირობის გამო, როგორც ადვილი დასანახავია, $\tau=-i$ წერტილის მახლობლად L-ზე, გვექნება

$$|\varphi(\tau)-\varphi^*(-i)| < \text{const}\cdot|\tau+i|^\mu,$$

ე. ი. $\varphi^*(\tau)$ დააკმაყოფილებს H პირობას L-ის $\tau=-i$ წერტილზე (იხ § 13, შენიშვნა 4).

[64] ამის შესაბამისად (19,3) პირობას შეიძლება ეწოდოს H პირობა $t=\infty$ წერტილისათვის.

4⁰. აქვე აღვნიშნოთ ფორმულები, რომლებიც L წრეწირზე აღებულ კოშის ტიპის ინტეგრალს გამოსახავენ D წრფის გასწვრივ აღებული ინტეგრალებით; ამ ფორმულებით შემდეგში ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას ვისარგებლებთ.

ვთქვათ,

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}, \tag{19,15}$$

მაშინ ცვლადების (19,9) და (19,10) ფორმულებით შეცვლით გვექნება

$$\Phi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{z+i}{t+i}\,\frac{\varphi^*(t)\,dt}{t-z} \tag{19,16}$$

ან კიდევ

$$\Phi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi^*(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi^*(t)\,dt}{t+i}, \tag{19,17}$$

სადაც

$$\Phi^*(z)=\Phi\left(\frac{-iz}{z+i}\right),\quad \varphi^*(t)=\varphi\left(\frac{-it}{t+i}\right).$$

(19,17) ფორმულას აქვს აზრი და გამომდინარეობს (19,16) ფორმულიდან, თუ ჩავთვლით, რომ (19,17)-ის მარჯვენა მხარეში მეორე ინტეგრალი არსებობს კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით, რისთვისაც საკმარისია, მაგალითად, დავუშვათ, რომ $\varphi^*(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას $t=\infty$ წერტილში, ე. ი. $\varphi(\tau)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას $\tau=-i$ წერტილში. თუკი ასე არ არის, მაშინ (19,16) ფორმულით უნდა ვისარგებლოთ.

აღნიშნული მიზეზით ხშირად ხელსაყრელია უსასრულო D წრფის გასწვრივ აღებული

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)dt}{t-z}$$

კოშის ტიპის ინტეგრალის განხილვა შეიცვალოს

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{z+i}{t+i}\,\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\frac{z+i}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+i)\,(t-z)}$$

ინტეგრალის განხილვით, რომელიც იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს (19,3) პირობას წინასაგან მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდება.

§ 20. კოშის ტიპის ინტეგრალის წარმოებულის ყოფაქცევა საინტეგრაციო წირის მახლობლად. შემდეგში დაგვჭირდება კოშის ტიპის ინტეგრალის წარმოებულის მოდულის ერთი მარტივი შეფასება საინტეგრაციო წირის მახლობლად. ამას დამოუკიდებელი ინტერესიც აქვს.

აქ ჩვენთვის საკმარისია ჩავთვალოთ, რომ საინტეგრაციო წირი გლუვი შეკრული ან გახსნილი რკალია. გარდა ამისა, ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(t)$ L-ზე აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

განვიხილოთ კოშის ტიპის ინტეგრალის წარმოებული

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2}. \tag{20,1}$$

ვთქვათ, t_0 L-ის ნებისმიერი წერტილია, მაგრამ ისეთი, რომ t_0-დან L-ის უახლოეს ბოლომდე მანძილი, თუ L გახსნილი რკალია, ნაკლები არ არის ნებისმიერად დაფიქსირებულ R რიცხვზე.

აღვნიშნოთ $R_0=R_0(\alpha_0)$-ით L წირისათვის სტანდარტული რადიუსი, რომელიც ნებისმიერად ფიქსირებულ რაიმე α_0 მახვილ კუთხეს შეესაბამება, და ბოლოს, ვთქვათ, ρ ნებისმიერი დადებითი მუდმივაა, ისეთი, რომ

$$\rho < R_0, \quad \rho < R. \tag{*}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც L შეკრული კონტურია, მეორე პირობა აღარ გვექნება.

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ z წერტილიდან t_0-მდე მანძილი δ არ აღემატება ρ-ს:

$$\delta = |z-t_0| \leqslant \rho \tag{**}$$

და რომ არაბლაგვი კუთხე $t_0 z$ მონაკვეთსა და L-ის t_0 წერტილზე მხებს შორის ნაკლები არ არის რაიმე ფიქსირებულ $\beta_0 > \alpha_0$ სიდიდეზე.

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$|\Phi'(z)| < C\delta^{\mu-1}, \text{ როცა } \mu < 1, \quad |\Phi'(z)| < C\,|\ln\delta|, \text{ როცა } \mu = 1, \tag{20,2}$$

სადაც C მუდმივაა[55].

მართლაც, შემოვწეროთ R_0 რადიუსის მქონე Γ_0 წრეწირი ცენტრით t_0-ში და $l = ab$-თი აღვნიშნოთ Γ_0-ის შიგნით მოთავსებული L-ის ნაწილი; ამის შესაბამისად (20,1) ინტეგრალი დავყოთ ორად:

$$\Phi'(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z),$$

რომელთაგან ერთი l-ის გასწვრივ არის აღებული, ხოლო მეორე—$(L-l)$-ის გასწვრივ. ვინაიდან (**) პირობის ძალით z-ის განსახილავ მნიშვნელობებისათვის $\Psi_2(z)$, ცხადია, შემოსაზღვრულია, საკმარისია განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-z)^2}\,dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right\}. \tag{20,3}$$

ვინაიდან მარჯვენა მხარეს მეორე წევრი შემოსაზღვრულია (z-ის მდებარეობის მიმართ მიღებული პირობის გამო), დაგვრჩენია განვიხილოთ პირველი წევრი. დავუშვათ $|t-t_0| = r$ და გავიხსენოთ, რომ

$$|ds| \leqslant K\,|dr|, \quad |\varphi(t)-\varphi(t_0)| \leqslant A\,|t-t_0|^{\mu},$$

$$|t-z|^2 \geqslant (r-\delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2\sin^2\omega_0,$$

სადაც $\omega_0 = \beta_0 - \alpha_0$ (იხ. გვ. 60); შემოვიღოთ აღნიშვნა

[55] ცხადია, შეფასებაში $\mu = 1$ შემთხვევისათვის იგულისხმება, რომ δ საკმარისად მცირე სიდიდეა.

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-z)^2}\,dt,$$

გვექნება:

$$|I| \leqslant \frac{AK}{2\pi}\int_{ab}\frac{r^{\mu}\,|dr|}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0} \leqslant \frac{AK}{\pi}\int_{0}^{R_0}\frac{r^{\mu}\,dr}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}.$$

როცა $\mu < 1$, $r = \delta\cdot u$ ჩასმით ვღებულობთ:

$$|I| < \frac{AK}{\pi}\,\delta^{\mu-1}\int_{0}^{\infty}\frac{u^{\mu}\,du}{(u-\cos\omega_0)^2+\sin^2\omega_0} = C\delta^{\mu-1},$$

სადაც C მუდმივაა. როცა $\mu = 1$, მარჯვენა მხარის ინტეგრალი გამოითვლება ცხადად, საიდანაც ვღებულობთ შეფასებას: $|I| \leqslant C\,|\ln\delta|$. ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

თუ L გახსნილი რკალია და იგულისხმება, რომ t_0 წერტილი ბოლოებიდან სასრულ მანძილზეა, რის გამოც უარი უნდა ვთქვათ (*) პირობიდან მეორეზე, მაშინ z-ის მდებარეობის მიმართ დანარჩენი პირობების შენარჩუნებისას, (20,3) ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ:

$$|\Phi'(z)| < C\delta^{-1}, \tag{20,4}$$

სადაც C მუდმივაა.

თუ დავუბრუნდებით (20,2)-ს, კიდევ შემდეგი დასკვნის გაკეთება შეგვიძლია: ვთქვათ, z_1 და z_2 წრფის ორი წერტილია, რომელიც t_0 წერტილზე გადის და t_0 წერტილზე მხებთან ადგენს β_0-ზე არანაკლებ არაბლაგვ კუთხეს. ვთქვათ, რომ z_1 და z_2 მდებარეობს L-ის ერთი და იმავე მხარეს, მაშინ

$$\Phi(z_2)-\Phi(z_1) = \int_{z_1}^{z_2}\Phi'(z)\,dz,$$

სადაც შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ინტეგრალი აღებულია წრფის $z_1 z_2$ მონაკვეთის გასწვრივ. ახლა თუ გამოვიყენებთ (20,2) შეფასებას და ჯერ ვიგულისხმებთ, რომ $\mu < 1$, მივიღებთ:

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)| \leqslant \frac{C}{\mu}\,|\delta_2^{\mu}-\delta_1^{\mu}| \leqslant C_0\,|\delta_2-\delta_1|^{\mu} = C_0\,|z_2-z_1|^{\mu}, \tag{20,5}$$

სადაც δ_1 და δ_2 აღნიშნავენ z_1, z_2 წერტილებიდან t_0 წერტილამდე მანძილებს, ხოლო C_0 მუდმივაა.

როცა $\mu = 1$, ანალოგიურად ვღებულობთ:

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)| \leqslant C_0\,|\delta_2-\delta_1|^{1-\varepsilon} = C_0\,|z_2-z_1|^{1-\varepsilon}, \tag{20,6}$$

სადაც ε ნებისმიერად დაფიქსირებული დადებითი რიცხვია. ახლა, თუ აღვნიშნავთ z_2-ს z-ით, δ_2-ს δ-თი, დავუშვებთ, რომ z მდებარეობს L-ის მარცხნივ და $z_1 \to t_0$, მივიღებთ:

$$|\Phi(z)-\Phi^{+}(t_0)| \leqslant C_0\delta^{\mu}, \text{ თუ } \mu < 1, \tag{20,7}$$

$$|\Phi(z)-\Phi^{+}(t_0)| \leqslant C_0\delta^{1-\varepsilon}, \text{ თუ } \mu = 1. \tag{20,8}$$

სავსებით ანალოგიური შეფასებები მართებულია L-ის მარჯვნივ მდებარე z წერტილისათვის.

§ 21. კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევა საინტეგრაციო წირის მახლობლად. გადავიდეთ ახლა კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევის უფრო დაწვრილებით შესწავლაზე L საინტეგრაციო წირის მახლობლად, სახელდობრ დავამტკიცოთ თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ, L გლუვი შეკრული კონტურია და ვთქვათ, $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ზე; ვთქვათ, S^+ და S^- წარმოადგენს L-ით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილებს. მაშინ თითოეულ $S^+ + L$, $S^- + L$ არეში ფუნქცია

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{21,1}$$

აკმაყოფილებს პირობას

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant C|z_2 - z_1|^{\mu}, \text{ როცა } \mu < 1 \tag{21,2}$$

ან

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant C|z_2 - z_1|^{1-\varepsilon}, \text{ როცა } \mu = 1; \tag{21,2ა}$$

ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, C მუდმივია, ამასთან, როცა $z \in L$ $\Phi(z)$-ის მნიშვნელობად უნდა გავიგოთ შესაბამისი სასაზღვრო მნიშვნელობა (Φ^+ ან Φ^-).

დამტკიცებისას ვიგულისხმებთ, რომ $\mu < 1$, ვინაიდან $\mu = 1$ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(1)$ პირობას, მაშინ ის, მითუმეტეს, დააკმაყოფილებს $H(1-\varepsilon)$ პირობას. S^+-ად ჩავთვლით სიბრტყის სასრულ ნაწილს, ხოლო S^--ად — უსასრულო ნაწილს და ვიგულისხმებთ, რომ დადებითი მიმართულება L-ზე სათანადოდ არის შერჩეული.

ვთქვათ t_0 არის L კონტურის რაიმე წერტილი, ხოლო z კი S^+-ის ცვლადი წერტილია. განვიხილოთ

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi^+(t_0)}{(z-t)^{\nu}}, \quad 0 \leqslant \nu < \mu, \tag{21,3}$$

ფუნქციის ნებისმიერი შტო, რომელიც ცალსახაა S^+-ში. ამ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა

$$\Psi^+(t) = \frac{\Phi^+(t) - \Phi^+(t_0)}{(t-t_0)^{\nu}} \tag{21,4}$$

პლემელი — პრივალოვის თეორემისა და § 6-ის 3° პუნქტში ნათქვამის ძალით აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე. იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ თეორემა მოდულის მაქსიმუმის შესახებ, საჭიროა კიდევ დავრწმუნდეთ, რომ $\Psi(z)$ ფუნქცია უწყვეტია $(S^+ + L)$-ში. უკანასკნელი შემდეგი მოსაზრებიდან გამომდინარეობს: S^+ არეს ჩამოვაცილოთ უსასრულოდ მცირე σ ნაწილი, მოთავსებული t_0 ცენტრის მქონე უსასრულოდ მცირე წრეში. მაშინ $S^+ - \sigma$ არეში $\Psi(z)$ ფუნქცია წარმოდგენადია კოშის ტიპის ინტეგრალით

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \frac{\Psi^+(t)\, dt}{t - z},$$

სადაც L' $S^+ - \sigma$ არის საზღვარია. მაგრამ t_0-ის მახლობლად

$$\Psi(z) = O\left(\frac{1}{|z - t_0|^\nu}\right), \quad \nu < 1,$$

ამიტომ t_0 ცენტრის მქონე წრეწირის უსასრულოდ მცირე რკალის გასწვრივ ინტეგრალი ნულისაკენ მიისწრაფვის და, მაშასადამე, მთელს S^+ არეში

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{\Psi^+(t)\, dt}{t - z}.$$

მაგრამ მაშინ, § 15-ში დამტკიცებული თეორემის ძალით, $\Psi(z)$ ფუნქცია უწყვეტია $(S^+ + L)$-ში, თუ მას L-ზე $\Psi^+(t)$ მნიშვნელობას მივაწერთ, ამგვარად

$$\frac{|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)|}{|z - t_0|^\nu} = \Psi(z) \leqslant \max|\Psi^+(t)| \leqslant C,$$

სადაც C არ არის დამოკიდებული არც t_0-ის L-ზე მდებარეობაზე და არც $\nu < \mu$ სიდიდეზე[56]. ამიტომ წინა უტოლობა ძალაში რჩება, როცა $\nu = \mu$ და გვექნება:

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)| \leqslant C|z - t_0|^\mu. \tag{21,5}$$

ანალოგიურად დგინდება ასეთივე უტოლობა S^--ში მდებარე z წერტილებისათვის[57].

ამრიგად, (21,2) უტოლობა დადგენილია იმ შემთხვევაში, როდესაც z_1, z_2 წერტილებიდან ერთ-ერთი მაინც L-ზე ძევს. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც z_1, z_2 წერტილი S^+-შია. როგორც ადვილი დასანახავია, შეგვიძლია შემოვისაზღვროთ შემთხვევით, როდესაც ამ წერტილთა შორის ერთ-ერთი მაინც, ვთქვათ, z_1 საზღვრიდან დაცილებულია რაიმე ρ მუდმივზე, $\rho < R_0$, ნაკლები მანძილით, სადაც R_0 რაღაც სტანდარტული რადიუსია[58]. დროებით z_1 აღვნიშნოთ z_0-ით, ხოლო z_2—z-ით. ვთქვათ, t_0 არის L კონტურის ისეთი წერტილი, რომელიც უმცირესი მანძილითაა დაშორებული z_0 წერტილიდან.

გავჭრათ S^+ არე $t_0 z_0$ მონაკვეთის გასწვრივ ($t_0 z_0$ მონაკვეთი, ცხადია, L-ის ნორმალურია t_0 წერტილზე) და განვიხილოთ გაჭრილ არეში ჰოლომორფული და მის მთელ საზღვარზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქცია

$$\Psi_0(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{(z - z_0)^\mu}. \tag{21,6}$$

---

[56] ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi^+(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას.

[57] $\Psi(z)$ ფუნქცია არ არის ცალსახა S^--ში. მაგრამ იმის გამო, რომ ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ t_0-ის მახლობლად მდებარე z წერტილები, შეგვიძლია შემოვისაზღვროთ S^--ის ისეთი სასრული ნაწილის განხილვით, რომელიც t_0-ის შემცველი L-ის რაიმე ნაწილის რომელიმე გლუვ შეკრულ კონტურამდე შევსებით მიღებული წირით არის შემოსაზღვრული. მაშინ განსახილავი შემთხვევა წინაზე დაიყვანება.

[58] თუ ორივე წერტილიდან საზღვრამდე მანძილი $\geqslant \rho$-ზე, სადაც ρ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია, მაშინ (21,2) უტოლობა შესრულდება $\Phi(z)$ ფუნქციის ჰოლომორფულობის გამო.

(21,5)-ის ძალით ამ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა L-ზე აკმაყოფილებს პირობას $|\Psi_0'(t)| \leqslant C$. $z_0 t_0$ ჰრილის ნებისმიერი მხარიდან $\Psi_0'(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა ასეთსავე პირობას აკმაყოფილებს, ამჯერად (20,5)-ის ძალით. ამიტომ მოდულის მაქსიმუმის შესახებ თეორემის თანახმად გვექნება $|\Psi_0(z)| \leqslant C$ ყველგან S^+-ში. სავსებით ანალოგიურად დადგინდება ასეთივე უტოლობა S^--თვის. ამრიგად ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. წინა თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა. ვთქვათ, $\Phi(z)$ რაიმე ფუნქციაა, ჰოლომორფული S^+-ში, [ან S^--ში, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით] და უწყვეტად გაგრძელებადი L-ზე, და ვთქვათ, მარცხნიდან [მარჯვნიდან] სასაზღვრო მნიშვნელობა, რომელსაც ჩვენ $\Phi(t)$-თი აღვნიშნავთ, აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას L-ზე, $0 < \mu < 1$.

მაშინ $S^+ + L\,[S^- + L]$ არის ნებისმიერი ორი z_1 და z_2 წერტილისათვის

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant C\,|z_2 - z_1|^{\mu},$$

სადაც C მუდმივაა[59].

მართლაც, აღნიშნული შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს წინა თეორემიდან, თუ $\Phi(z)$ ფუნქციას S^+ არეში წარმოვადგენთ კოშის ტიპის ინტეგრალით

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z};$$

ანალოგიურ მდგომარეობასთან გვაქვს საქმე S^- არისათვის.

პირუკუ, ამ შედეგიდან შეიძლება მივიღოთ ზემოთ დამტკიცებული თეორემა, თუ ვისარგებლებთ აგრეთვე პლემელი—პრივალოვის თეორემით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. წინა შედეგებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს კიდევ შემდეგი: ვთქვათ, (21,1) ფორმულაში L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირაა და ვთქვათ, $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას რაიმე გლუვ L' რკალზე, რომელიც L-ს ეკუთვნის და მის კვანძებს არ შეიცავს. მაშინ L' რკალის ნებისმიერ მარცხენა [მარჯვენა] მიდამოში, რომელიც სასრულ მანძილზეა მისი ბოლოებიდან და აგრეთვე L წირის წერტილებიდან, რომელიც L'-ს არ ეკუთვნის, ადგილი აქვს (21,2) უტოლობას.

---

[59]. ეს შედეგი წარმოადგენს I. L. Walsh and W. E. Sewell [1] შრომაში დამტკიცებული თეორემის კერძო შემთხვევას (იხ. აგრეთვე W. E. Sewell [1]), რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

ვთქვათ, L ჟორდანის შეკრული წირია და, ვთქვათ, S ამ წირით შემოსაზღვრული სასრული არეა; ვთქვათ, შემდეგ, $f(z)$ არის S-ში ჰოლომორფული და $(S+L)$-ში უწყვეტი ფუნქცია. ვთქვათ, μ მუდმივია, $0 < \mu < 1$ და ყველა z, z_0-თვის L-ზე

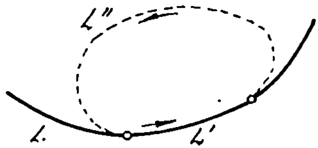
$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|^{\mu}} \leqslant K = \text{const};$$

მაშინ ეს უტოლობა მართებული იქნება ყველა z, z_0-თვის $(S+L)$-ში.

ეს თეორემა წარმოადგენს ს. ვარშავსკის (S. Warschawski [2]) მიერ მიღებული შედეგის განზოგადებას. ს. ვარშავსკი შემოისაზღვრა შემთხვევით, როდესაც ერთ-ერთი z ან z_0 წერტილი L-ზე ძევს.

ხსენებული ავტორების მტკიცება გაცილებით უფრო რთულია, ვიდრე აქ მოყვანილი, რაც იმით აიხსნება, რომ ჩვენ შემოვისაზღვრეთ გლუვი L კონტურის შემთხვევით. ჩვენი ელემენტარული დამტკიცება ადვილად ვრცელდება იმ შემთხვევაზეც, როცა L მარტივი უბან-უბან გლუვი კონტურია; იხ. წიგნის ბოლოს დამატება II.

დამტკიცებისათვის საკმარისია (21,1) ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ორი ინტეგრალის ჯამის სახით, რომლებიც შესაბამისად აღებულია L'-ზე და L-ის დანარჩენ ნაწილზე და L'-ზე ინტეგრალის ნაცვლად განვიხილოთ $L' + L''$ გლუვი შეკრული კონტურის გასწვრივ ინტეგრალი, სადაც L'' რაიმე გლუვი რკალია, რომელიც L'-ს ავსებს მთლიანად განსახილავ მიდამოში მდებარე გლუვ შეკრულ კონტურამდე (ნახ. 12); ამასთან $\varphi(t)$-დ L''-ზე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნებისმიერი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებდეს H პირობას მთელ $L' + L''$ კონტურზე.



ნახ. 12

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. ზემოხსენებულის ანალოგიურად, თუ $\Phi(z)$ არის ფუნქცია ჰოლომორფული L' რკალის (იხ. წინა შენიშვნა) მარცხენა [მარჯვენა] მიდამოში, უწყვეტად გაგრძელებადი L'-ზე და თუ $\Phi^{+}(t)$ [$\Phi^{-}(t)$] აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე, მაშინ ადგილი აქვს (21,2) უტოლობას აღნიშნული მიდამოს წერტილებისათვის, რომლებიც სასრულ მანძილზე მდებარეობენ L'-ის ბოლოებიდან და აგრეთვე L-ის წერტილებიდან, რომლებიც L'-ს არ ეკუთვნიან.

§ 22. კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევა საინტეგრაციო წირის ბოლოების მიდამოში[00]. წინა პარაგრაფებში შევისწავლეთ კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევა საინტეგრაციო წირზე და მის მიდამოში იმ პირობით, რომ, ყოველ შემთხვევაში, ამ წირის განსახილავი ნაწილი მაინც გლუვია, ხოლო $\varphi(t)$ ამ ნაწილზე ეკუთვნის H კლასს. მაგრამ გამოყენებებში (უმარტივესშიაც კი) ასეთმა შეზღუდვამ ზოგჯერ შეიძლება არსებითი შედეგების დაკარგვა გამოიწვიოს.

მეორე მხრივ, გამოყენებებში უმეტეს შემთხვევაში საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ L წირი უბან-უბან გლუვია და რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^{*} კლასს L-ზე (§ 8, პ. 4⁰). ახლა ამ შემთხვევის განხილვას შევუდგებით.

არსებითი საკითხების გასარკვევად საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საინტეგრაციო წირი მარტივი გახსნილი რკალია, ხოლო $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^{*} კლასს ერთ-ერთი მისი ბოლოს მიდამოში და შევისწავლოთ კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევა ამ ბოლოს მახლობლად; განზოგადება ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირის შემთხვევისათვის სიძნელეს არ წარმოადგენს (§ 26).

1⁰. ამრიგად, ვიგულისხმოთ, რომ $L = ab$ ინტეგრების წირი გახსნილი გლუვი რკალია და $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^{*} კლასს ერთ-ერთი a ან b ბოლოს მიდამოში, რომელ-

[0)] §§ 22—26-ში გადმოცემული შედეგები დაგვჭირდება მხოლოდ IV და V თავებში, თუ არ ჩავთვლით ამ თავის ზოგიერთ პარაგრაფს, რომლებშიაც შეიძლება გვერდი ავუაროთ ამ შედეგებს (როგორც ეს აღნიშნული იქნება სათანადო ადგილებში), თუ შემოვისაზღვრებით იმ უფრო კერძო შემთხვევების განხილვით, რომლებიც დაგვჭირდება II, III და VI თავებში.

§§ 22—25-ის შედეგები მიღებული იყო ავტორის მიერ და გადმოცემულია (უმთავრესად დაუმტკიცებლად) ნ. მუსხელიშვილის [6], ნ მუსხელიშვილისა და დ. კვესელავას [1] სტატიებში. დამტკიცებები გამოქვეყნებული იყო ამ წიგნის პირველ გამოცემაში (1946 წ.), ფ. ტრიკომიმ (F. Tricomi [3]), რომელიც, ცხადია, ამ შედეგებს არ იცნობდა, 1951 წელს გამოაქვეყნა მის მიერ საკმაოდ რთული გზით მიღებული ფორმულები — [ჩვენი] — (22,7) და (22,8) ფორმულების კერძო შემთხვევები. შდრ: აგრეთვე უფრო ადრინდელი ნაშრომი H. Söhngen [2]. აქ ჩვენთვის საინტერესო საკითხებს ეხება ე. პოგოჟელსკის მთელი რიგი ახლახან გამოქვეყნებული შრომები; ამის შესახებ იხ. სქოლიო § 26-ის დასაწყისში.

სადაც c-თი აღვნიშნავთ; როგორც ყოველთვის, ვიგულისხმებთ, რომ L-ზე დადებით მიმართულებას მივყავართ a-დან b-კენ.

იმისათვის, რომ მივიღოთ ფორმულები, რომლებიც დაახასიათებენ კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევას განსახილავი c ბოლოს მახლობლად, იმ სახით, როგორც ეს დაგვჭირდება შემდეგში, $\varphi(t)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით[61]:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{22,1}$$

სადაც α და β ნამდვილი მუდმივებია, ხოლო $\varphi^*(t)$ არის ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის H კლასს L-ზე c ბოლოს მ-დამოში. ამ გამოსახულებაში $(t-c)^\gamma$ აღნიშნავს ნებისმიერად არჩეულ შტოს, რომელიც უწყვეტად იცვლება L-ზე (გარდა c წერტილისა, როცა $\alpha=0$, $\beta\neq 0$).

შევნიშნოთ, რომ (22,1)-დან გამომდინარეობს

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^{**}(t)}{|t-c|^\alpha}, \tag{22,1ა}$$

სადაც $\varphi^{**}(t)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რომელიც ეკუთვნის H_ε^* კლასს c-ს მიდამოში; ეს უკანასკნელი ნიშნავს (§ 8, პ. 5[0]), რომ $|t-c|^\varepsilon \varphi^{**}(t)$ ნამრავლი c-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს, როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon > 0$[62]; ცხადია, რომ ეს ნამრავლი ნულად იქცევა, როცა $t=c$.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ იგივე (22,1) პირობა გვაძლევს

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_*(t)}{(t-c)^\mu}, \quad \varphi(t) = \frac{\varphi_{**}(t)}{|t-c|^\nu}, \tag{22,2}$$

სადაც μ და ν ნებისმიერი დადებითი მუდმივებია, რომლებიც α-ს რაგინდ მცირე სიდიდით აღემატებიან, ხოლო $\varphi_*(t)$ და $\varphi_{**}(t)$ ეკუთვნიან H კლასს c-ს მიდამოში (და ნულის ტოლი ხდებიან, როცა $t=c$). ცხადია, აგრეთვე, რომ თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს (22,2)-ის მეორე პირობას, სადაც $\varphi_{**}(t)$ ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში (მაგრამ არაა აუცილებელი, რომ იგი ამ წერტილში ნულის ტოლი იყოს), მაშინ $\varphi(t)$ დააკმაყოფილებს (22,2)-ის პირველ პირობასაც ყოველი μ-თვის, რომელიც ნებისმიერად მცირე სიდიდით მეტია ν-ზე.

2[0]. განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{22,3}$$

სადაც $\varphi(t)$ (22,1) ფორმულითაა განსაზღვრული.

---

[61] ის რომ ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის H^* კლასს c მიდამოში, ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ (22,1) სახით, გამომდინარეობს ქვემოთ ნათქვამიდან, სახელდობრ, (22,2) ფორმულიდან და უშუალოდ მის შემდეგ ნათქვამიდან.

[62] გვაქვს

$$\varphi^{**}(t) = \varphi^*(t)\, e^{-i\alpha\theta}\,(t-c)^{-i\beta},$$

სადაც $\theta = \arg(t-c)$; აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ § 6-ის 3[0] პუნქტში ნათქვამს, გამომდინარეობს ტექსტში გამოთქმული მტკიცება.

აღნიშნულ პირობებში, z წერტილებისათვის, რომლებიც საკმაოდ ახლოსაა c-თან, მაგრამ L-ზე არ მდებარეობენ, მართებულია შემდეგი დებულებები.

დებულება I. თუ $\gamma=0$ (მაშინ $\varphi^*(t)=\varphi(t)$), მაშინ

$$\Phi(z) = \mp \frac{\varphi(c)}{2\pi i} \ln (z-c) + \Phi_0(z) \tag{22,4}$$

სადაც ზედა ნიშანი აიღება, როცა $c=a$, ქვედა—როცა $c=b$. $\ln(z-c)$ აღნიშნავს ნებისმიერ შტოს, რომელიც ჰოლომორფულია L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე c წერტილის მიდამოში; $\Phi_0(z)$ აღნიშნავს ფუნქციას, ჰოლომორფულს c წერტილის მიდამოში გაჭრილ სიბრტყეზე, რომელიც მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $z \to c$ ნებისმიერი გზით.

დებულება II. თუ $\gamma=\alpha+i\beta \neq 0$, მაშინ

$$\Phi(z) = \pm \frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i \sin\gamma\pi} \cdot \frac{\varphi^*(c)}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0(z), \tag{22,5}$$

სადაც ნიშნები შეირჩევა ისე, როგორც I დებულებაში; $(z-c)^{\gamma}$ აღნიშნავს შტოს, რომელიც ჰოლომორფულია L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე c-ს მიდამოში და ღებულობს $(t-c)^{\gamma}$ მნიშვნელობას L-ის მარცხენა მხარეს[63], ხოლო $\Phi_0(z)$ არის ფუნქცია, ჰოლომორფული c წერტილის მიდამოში გაჭრილ სიბრტყეზე შემდეგი თვისებებით: თუ $\alpha=0$, ის მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $z \to c$ ნებისმიერი გზით; თუკი $\alpha>0$, მაშინ

$$|\Phi_0(z)| < \frac{C}{|z-c|^{\alpha_0}}, \tag{22,6}$$

სადაც C და α_0 დადებითი მუდმივებია, ამასთან $\alpha_0<\alpha$.

I და II დებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს L-ზე, მაშინ $\Phi(z)$ წარმოადგენს უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას[64] L ნახტომის წირით (§ 10-ში მოცემული განსაზღვრის აზრით). L-ზე მდებარე t_0 წერტილებისათვის მართებულია შემდეგი დებულებები.

დებულება III. თუ $\gamma=0$, მაშინ

$$\Phi(t_0) = \mp \frac{\varphi(c)}{2\pi i} \ln (t_0-c) + \Phi^*(t_0), \tag{22,7}$$

სადაც $\Phi^*(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში, ნიშნები შეირჩევა ისე, როგორც I დებულებაში; $\ln(t_0-c)$ აღნიშნავს ნებისმიერ მნიშვნელობას, რომელიც უწყვეტად იცვლება L-ზე (ცხადია, გარდა c ბოლოსი).

---

[63] $(t-c)^{\gamma}$ აღნიშნავს შტოს, რომელიც მონაწილეობს (22,1) ფორმულაში.

[64] ამასთან, პირობა, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნოდეს H^* კლასს (ან რომელიმე ანალოგიური პირობა) მეტად არსებითია. ი. ქარცივაძემ [1] აჩვენა, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია შეიძლება იყოს ნებისმიერად სწრაფად ზრდადი, როცა $z \to c$, იმ შემთხვევაშიაც კი, როდესაც სიმკვრივე $\varphi(t)$ უწყვეტია ყველგან L-ზე და გააჩნია წარმოებული, აგრეთვე უწყვეტი ყველგან L-ზე, გარდა c ბოლოსი.

დებულება IV. თუ $\gamma = \alpha + i\beta \neq 0$, მაშინ

$$\Phi(t_0) = \pm \frac{\operatorname{ctg} \gamma\pi}{2i} \cdot \frac{\varphi^*(c)}{(t_0 - c)^{\gamma}} + \Phi^*(t_0), \tag{22,8}$$

amასთან, თუ $\alpha = 0$, მაშინ $\Phi^*(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში; თუკი $\alpha > 0$, მაშინ

$$\Phi^*(t_0) = \frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0 - c|^{\alpha_0}}, \tag{22,9}$$

სადაც $\Phi^{**}(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში; $\alpha_0 = \mathrm{const} < \alpha$; ნიშნები შეირჩევა ისე, როგორც I დებულებაში.

დებულება I უკვე დამტკიცებულია § 15-ში [(15,7), (15,8) ფორმულები]. დებულება III მტკიცდება მსგავსად § 18-ში (პ. 1°-ის ბოლო) ჩატარებული მსჯელობისა, თუ გამოვიყენებთ ფორმულას

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ab} \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - t_0}\, dt + \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \int\limits_{ab} \frac{dt}{t - t_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ab} \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - t_0}\, dt + \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \ln \frac{t_0 - b}{t_0 - a} + \mathrm{const}^{65} \tag{22,10}$$

და b ბოლოს შესაბამის ანალოგიურ ფორმულას. II და IV დებულებები დამტკიცებული იქნება §§ 23—25-ში[66].

3°. ვიგულისხმოთ, რომ ხსენებული დებულებები დამტკიცებულია, და აღვნიშნოთ (22,4), (22,5) ფორმულების მარჯვენა მხარეში მონაწილე $\Phi_0(z)$ ფუნქციების ზოგიერთი თვისება. ცხადია, ეს ფუნქციები მჭიდრო კავშირშია (22,7), (22,8) ფორმულებში მონაწილე $\Phi^*(t)$ ფუნქციებთან.

დავიწყოთ (22,4) ფორმულიდან. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $c = a$. თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $z \to t_0$ L-ის მარცხნიდან, სადაც t_0 აღნიშნავს L რკალის წერტილს, რომელიც საკმაოდ ახლოსაა a ბოლოსთან, მაგრამ მას არ ემთხვევა და მარცხენა მხარის მიმართ გამოვიყენებთ სოხოცკი—პლემელის ფორმულას, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \Phi(t_0) = -\frac{1}{2\pi i} \varphi(a) \ln (t_0 - a) + \Phi_0^+(t_0),$$

სადაც $\ln (t_0 - a)$ აღნიშნავს $\ln (z - a)$ ფუნქციის a-ს მახლობლად შერჩეული შტოს მნიშვნელობას L-ის მარცხენა მხარიდან. ანალოგიურად თუ გადავალთ ზღვარზე L-ის მარჯვნიდან, მივიღებთ:

---

[65] ეს მუდმივი დამოკიდებულია ლოგარითმული შტოს შერჩევაზე. მაგალითად, თუ ეს შტო შერჩეულია ისე, როგორც (13,4) ფორმულაში, მაშინ ის $-\frac{1}{2}\varphi(a)$-ს ტოლია.

[66] შევნიშნოთ, რომ ეს დებულებები განზოგადებული იყო ი. მელნიკის [1]—[3] მიერ იმ შემთხვევისათვის, როცა (22,1)-ის ნაცვლად გვაქვს $\varphi(t) = \varphi^*(t)\,(t-c)^{-\gamma} \ln^p (t-c)$, სადაც p მთელი დადებითი რიცხვია, ან $\varphi(t) = \varphi^*(t)\,(t-c)^{-\gamma} \ln \ln (t-c)$.

$$-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\left[\ln(t_0-a)+2\pi i\right]+\Phi_0^-(t_0),$$

სადაც $\ln(t_0-a)$ აღნიშნავს იმავეს, რასაც ზემოთ. ამრიგად, ვღებულობთ:

$$\Phi_0^+(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0),$$

$$\Phi_0^-(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\varphi(a)-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0),$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ (22,7) ფორმულას და თუ ამ უკანასკნელში $\ln(t_0-c)=\ln(t_0-a)$-ს ქვეშ ვიგულისხმებთ იმავე მნიშვნელობას, რასაც აქ მივიღებთ:

$$\Phi_0^+(t_0)=\Phi^*(t_0)+\frac{1}{2}\varphi(t_0),$$

$$\Phi_0^-(t_0)=\Phi^*(t_0)+\varphi(a)-\frac{1}{2}\varphi(t_0).$$

ვინაიდან III დებულების საფუძველზე $\Phi^*(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს a-ს მიდამოში, $\Phi_0^+(t_0)$, $\Phi_0^-(t_0)$ სასაზღვრო მნიშვნელობებიც H კლასს ეკუთვნიან ამ მიდამოში, თუ მათ a წერტილში მივაწერთ სათანადო მნიშვნელობებს, რომლებიც მიიღება $t_0\to a$ ზღვარზე გადასვლით. წინა ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ეს ზღვრული მნიშვნელობანი ერთნაირია:

$$\lim_{t_0\to a}\Phi_0^+(t_0)=\lim_{t_0\to a}\Phi_0^-(t_0)=\Phi^*(a)+\frac{1}{2}\varphi(a),$$

ეს მოსალოდნელი იყო იმის გამო, რომ $\Phi_0(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია a წერტილზე.

ყველა ამ დასკვნის გაკეთება შეგვეძლო, თუ უშუალოდ ვისარგებლებდით (15,7) და (22,10) ფორმულებით. ზემოთ ელემენტარული მსჯელობა მხოლოდ იმიტომ მოვიყვანეთ, რომ სავსებით ანალოგიური მსჯელობა შეიძლება გამოვიყენოთ (22,5), (22,8) ფორმულების მიმართაც. ამ მარტივი მსჯელობის ჩატარებას მკითხველს მივანდობთ და აქ მოვიყვანთ საბოლოო შედეგის ფორმულირებას შემდეგი სახით:

$\alpha=0$ შემთხვევაში (ე. ი., როცა $\gamma=\alpha+i\beta=0$ ან $\gamma=i\beta$) (22,4), (22,5) ფორმულებში მონაწილე $\Phi_0(z)$ ფუნქციები უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან c ბოლოს მახლობლად და, აგრეთვე, ამ ბოლოზე; ამ ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობანი $\Phi_0^+(t_0)$, $\Phi_0^-(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე c-ს მიდამოში, თუ $\Phi_0^+(c)$, $\Phi_0^-(c)$-დ ვიგულისხმებთ $\Phi_0(z)$ ფუნქციის $\Phi_0(c)$ სასაზღვრო მნიშვნელობას, როცა $z\to c$

იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha>0$,

$$\Omega_0(z)=(z-c)^{\gamma}\,\Phi_0(z)$$

ფუნქცია, სადაც $\Phi_0(z)$ აღნიშნავს იმავეს, რასაც (22,5) ფორმულაში, უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან c ბოლოს მახლობლად, და აგრეთვე ამ ბოლოზე, ამასთან, $\Omega_0(c)=0$;

$\Omega_0^+(t_0)$, $\Omega_0^-(t_0)$ სასაზღვრო მნიშვნელობანი ეკუთვნის H კლასს L-ზე c-ს მიდამოში, თუ შევთანხმდებით, რომ ჩავთვალოთ $\Omega_0^+(c) = \Omega_0^-(c) = 0$.

4⁰. გამოყენებებში ხშირად შეიძლება შემოვისაზღვროთ $\alpha > 0$ შემთხვევის განხილვით, ვინაიდან თუ $\varphi(t)$-ს აქვს (22,1) სახე საჭიროების შემთხვევაში α-ს ცოტა უფრო დიდი სიდიდით შეცვლით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $0 < \alpha < 1$.

თუ ეს პირობა გვაქვს მაშინ II და IV დებულების ნაცვლად შეიძლება ვისარგებლოთ მათი შედეგით, რომლის ფორმულირებას მოვიყვანთ ცალკე დებულების სახით.

დებულება V. z წერტილებისათვის, რომლებიც c-თან საკმაოდ ახლოსაა, მაგრამ არ მდებარეობენ L-ზე, L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე c-ს მიდამოში ჰოლომორფული

$$\Omega(z) = (z - c)^{\gamma}\, \Phi(z) \tag{22,11}$$

ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან c ბოლოს მიდამოში და აგრეთვე c ბოლოზე; ამასთან, თუ A აღნიშნავს $\Omega(z)$ ფუნქციის ზღვარს, როცა $z \to c$, მაშინ c-ს მახლობლად

$$|\Omega(z) - A| \leqslant \mathrm{const} \cdot |z - c|^{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \mathrm{const} > 0. \tag{22,12}$$

L-ზე მოთავსებულ t_0 წერტილისათვის კი ფუნქცია

$$\Omega(t_0) = (t_0 - c)^{\gamma}\, \Phi(t_0)$$

ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში, თუ მას მივაწერთ სათანადო A_0 მნიშვნელობას c წერტილზე.

ეს დებულება II და IV დებულებათა ერთობლიობის ეკვივალენტურია (როცა $\alpha > 0$), თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ იმას, რომ ეს დებულებები A და A_0-თვის ცხად გამოსახულებებს იძლევიან.

დავამატოთ კიდევ, რომ ზემოთქმულის ძალით, $\Omega^+(t_0)$, $\Omega^-(t_0)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ L-ზე c-ს მიდამოში H პირობას, თუ მათ მივაწერთ $A = \Omega(c)$ მნიშვნელობას c წერტილში.

5⁰. დასასრულ, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სიმკვრივე დამოკიდებულია რაიმე პარამეტრზე. სახელდობრ, ვიგულისხმოთ, ისევე როგორც ზემოთ, რომ $L = ab$ გახსნილი გლუვი წირია, და განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Phi(t_0, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t, \tau)\, dt}{t - t_0}, \tag{22,13}$$

რომელშიც

$$\varphi(t, \tau) = \frac{\varphi^*(t, \tau)}{(t - c)^{\gamma}}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 < \alpha < 1, \quad c = a \text{ ან } c = b, \tag{22,14}$$

სადაც α და β ნამდვილი მუდმივებია, რომელთაგან პირველი აკმაყოფილებს აღნიშნულ უტოლობას, ხოლო $\varphi^*(t, \tau)$ აღნიშნავს L-ის t წერტილისა და τ პარამეტრის (რომელიც რაიმე T სიმრავლეს ეკუთვნის) ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს H პირობას ორივე t, τ ცვლადით, როცა $t \in L$, $\tau \in T$. ამ დაშვებებში მართებულია

დებულება VI. ფუნქცია

$$\Omega(t_0, \tau) = (t_0 - c)^{\gamma}\, \Phi(t_0, \tau) \qquad (22{,}15)$$

აკმაყოფილებს H პირობას t_0 და τ-თი, როცა $t_0 \in L'$, $\tau \in T$, სადაც L' აღნიშნავს L რკალის ნებისმიერ ნაწილს, რომლის ერთი ბოლო c-ს ემთხვევა და L-ის მეორე ბოლოდან სასრულ მანძილზე იმყოფება.

t_0 ცვლადის მიმართ ეს გამომდინარეობს დებულება IV-დან (ან დებულება V-დან); τ-ს მიმართ კი ეს იქნება დამტკიცებული § 25-ში (პ. 2°).

§ 23. გაგრძელება. ზოგიერთი დამხმარე შეფასება. წინა პარაგრაფში გამოთქმული დებულებების დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ზოგიერთი დამხმარე შეფასება, რომელიც (22,3) ინტეგრალს ეხება. ახლა გადავდივართ მათ დამტკიცებაზე.

ზოგიერთი ფორმულირების და მსჯელობის (სხვათაშორის, უმნიშვნელო) გამარტივების მიზნით ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი $\varphi^*(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას არა მარტო c ბოლოს მიდამოში, არამედ აგრეთვე მთელ $L = ab$ რკალზე; ეს, ცხადია, არ მოახდენს გავლენას ზოგადობაზე, რადგან ჩვენ გვაინტერესებს ინტეგრალის ყოფაქცევა მხოლოდ c წერტილის მიდამოში.

1°. ამრიგად, წინა პარაგრაფის აღნიშვნებში განვიხილოთ (22,3) ინტეგრალი

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ab} \frac{\varphi^*(t)\, dt}{(t - c)^{\gamma}(t - z)}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad c = a \text{ ან } b, \qquad (23{,}1)$$

და იმ დაშვებით, რომ z მდებარეობს c ბოლოს მიდამოში, დავამტკიცოთ შემდეგი შეფასების (ცოტა უფრო უხეშის, ვიდრე საჭიროა საბოლოოდ) მართებულობა:

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c|^{\nu}}, \qquad (23{,}2)$$

სადაც ν ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია ისეთი, რომ $\alpha < \nu < 1$.

თუ $\varphi^{**}(t)$-თი აღვნიშნავთ იმავეს, რაც (22,1ა) ფორმულაშია, გვექნება

$$|z - c|^{\nu}\, \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ab} \frac{|z - c|^{\nu} - |t - c|^{\nu}}{|t - c|^{\alpha}\,(t - z)}\, \varphi^{**}(t)\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ab} \frac{|t - c|^{\nu - \alpha} \varphi^{**}(t) dt}{t - z}.$$

ვინაიდან $|t - c|^{\nu - \alpha}\, \varphi^{**}(t)$ ფუნქცია c-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს და ნულის ტოლია, როცა $t = c$, მარჯვენა მხარის მეორე ინტეგრალი შემოსაზღვრული იქნება c-ს მახლობლად.

განვიხილოთ ახლა მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი, რომელიც I-თი აღვნიშნოთ. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\big|\, |z - c|^{\nu} - |t - c|^{\nu} \,\big| \leqslant |z - t|^{\nu},$$

გვექნება:

$$|I| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{ab} \frac{|\varphi^{**}(t)|\, ds}{|t - c|^{\alpha}\, |t - z|^{1 - \nu}}.$$

თუ დავუშვებთ, $|t-c| = r$, $|z-c| = \delta$, შევნიშნავთ, რომ $|t-z| \geqslant |r-\delta|$ და ab-ს ჩავთვლით სტანდარტულ რკალად (რაც, რასაკვირველია, არ ზღუდავს ზოგადობას), (2,2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$|I| \leqslant \text{const} \cdot \int_0^R \frac{dr}{r^{\alpha} |r-\delta|^{1-\nu}},$$

სადაც $R = |b-a|$. რადგან $1 + \alpha - \nu < 1$, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ინტეგრალი მარჯვენა მხარეში შემოსაზღვრული სიდიდეა[67]. ამრიგად (23,2) უტოლობა დამტკიცებულია.

2⁰. განვიხილოთ ახლა (23,1) ინტეგრალის ერთი კერძო სახე, სახელდობრ, ინტეგრალი

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{dt}{(t-c)^{\gamma} (t-z)}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad \gamma \neq 0, \quad (23,3)$$

სადაც $c = a$ ან b.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $c = a$. პლემელი—სოხოცკის ფორმულების საფუძველზე (§ 16) $L = ab$-ს ნებისმიერი, ბოლოებისაგან განსხვავებული, t_0 წერტილისათვის გვაქვს

$$\Omega^{+}(t_0) - \Omega^{-}(t_0) = (t_0 - a)^{-\gamma}.$$

$L = ab$-ს გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე a-ს მახლობლად ცალსახა $(z-a)^{-\gamma}$ ფუნქციისათვის, რომელიც L-ის მარცხენა მხარეს $(t_0-a)^{-\gamma}$ მნიშვნელობას ღებულობს, ცხადია, გვაქვს

$$[(t_0 - a)^{-\gamma}]^{+} - [(t_0 - a)^{-\gamma}]^{-} = (1 - e^{-2\pi i\gamma})(t_0 - a)^{-\gamma}.$$

მაშასადამე, თუ დავუშვებთ, რომ

$$\omega(z) = \frac{(z-a)^{-\gamma}}{1 - e^{-2\pi i\gamma}} = \frac{e^{i\gamma\pi}}{2i \sin \gamma\pi} (z-a)^{-\gamma},$$

მაშინ L-ზე a-ს მახლობლად

$$[\Omega - \omega]^{+} = [\Omega - \omega]^{-}.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ (23,2) შეფასებას $\Omega(z)$ ფუნქციის მიმართ და გავითვალისწინებთ $\omega(z)$ ფუნქციის სახეს, გვექნება:

$$|\Omega(z) - \omega(z)| < \frac{\text{const}}{|z-a|^{\nu}}, \quad \nu < 1.$$

---

[67] ამისათვის საკმარისია ინტეგრების შუალედი დავყოთ სამ ნაწილად:

$$\left(0, \frac{\delta}{2}\right), \quad \left(\frac{\delta}{2}, \delta\right), \quad (\delta, R)$$

და თითოეულ ამ შუალედში $r^{\alpha} |r-\delta|^{1-\nu}$ შევცვალოთ უფრო მცირე

$$r^{1+\alpha-\nu}, \quad (\delta - r)^{1+\alpha-\nu}, \quad (r-\delta)^{1+\alpha-\nu}$$

შესაბამისი სიდიდეებით. ამ გზით მიღებული ინტეგრალები მარტივად გამოითვლებიან და შემოსაზღვრული აღმოჩნდებიან

ზემოხსენებულიდან, § 10-ის 3^0 პუნქტში ნათქვამის საფუძველზე, გამომდინარეობს, რომ $\Omega(z)-\omega(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფული იქნება a წერტილის მიდამოში, თუ მას მივაწერთ სათანადო მნიშვნელობას L-ზე, ე. ი. ამ მიდამოში

$$\Omega(z)=\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots \tag{23,4}$$

L-ზე მდებარე $z=t_0$-თვის გვაქვს:

$$2\Omega(t_0)=\Omega^{+}(t_0)+\Omega^{-}(t_0),$$

საიდანაც, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, L-ზე a წერტილის მიდამოსათვის ვღებულობთ

$$\Omega(t_0)=\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\gamma\pi\cdot(t_0-a)^{-\gamma}+A_0+A_1(t_0-a)+A_2(t_0-a)^2+\cdots \tag{23,5}$$

როცა $c=b$, ანალოგიურად, b წერტილის მიდამოსათვის გვექნება:

$$\Omega(z)=-\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot(z-b)^{-\gamma}+B_0+B_1(z-b)+B_2(z-b)^2+\cdots, \tag{23,6}$$

$$\Omega(t_0)=-\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\gamma\pi\cdot(t_0-b)^{-\gamma}+B_0+B_1(t_0-b)+B_2(t_0-b)^2+\cdots \tag{23,7}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: აღვნიშნოთ კიდევ ერთი მარტივი შეფასება § 15-ის მე-3 შენიშვნის ანალოგიური. ვიგულისხმოთ, როგორც შეთანხმებული ვიყავით, რომ $\varphi^*(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას მთელ $L=ab$ რკალზე, ავილოთ ამ რკალზე ორი c' და c'' წერტილი და განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{\varphi^{**}(t)\,dt}{|t-c|^{\alpha}(t-z)}, \tag{23,8}$$

$$\gamma=\alpha+i\beta,\quad 0\leqslant\alpha<1,$$

რომელიც (23,1) ინტეგრალიდან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ ინტეგრება გავრცელებულია არა მთელ L რკალზე, არამედ მის $c'c''$ ნაწილზე; შემთხვევა, როდესაც c' ან c'' ემთხვევა a-ს ან b-ს, არ არის გამორიცხული. დავამტკიცოთ, რომ აღნიშნულ პირობებში L რკალის მიდამოში მოთავსებული ყველა z წერტილისათვის

$$|\Psi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^{\nu}\,|z-c'|^{\varepsilon'}\,|z-c''|^{\varepsilon''}}, \tag{23,9}$$

სადაც ν არის α-ზე მეტი ნებისმიერი დადებითი მუდმივი, ხოლო ε', ε'' ნებისმიერი (რაგინდ მცირე) დადებითი მუდმივებია.

მართლაც, 1^0 პუნქტის ანალოგიურად გვაქვს:

$$|z-c|^{\nu}\,\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{|z-c|^{\nu}-|t-c|^{\nu}}{|t-c|^{\alpha}(t-z)}\varphi^{**}(t)dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{|t-c|^{\nu-\alpha}\varphi^{**}(t)\,dt}{t-z}.$$

მარჯვენა მხარეს პირველი ინტეგრალი ისევე შეფასდება, როგორც I ინტეგრალი 1^0 პუნქტში და იგი შემოსაზღვრული აღმოჩნდება. მეორის მიმართ კი გამოიყენება (15,11) შეფასება, რასაც (23,9) შეფასებამდე მივყავართ.

(23,9) შეფასება, ცხადია, გამოდგება L-ზე მდებარე $z=t_0$ წერტილებისათვი-საც, ისე რომ

$$|\Psi(t_0)| < \frac{\text{const}}{|t_0-c|^{\nu}\,|t_0-c'|^{\varepsilon'}\,|t_0-c''|^{\varepsilon''}}. \tag{23.9ა}$$

თუ $\varphi^*(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას არა მთელ ab რკალზე, არამედ მხოლოდ მის რაიმე ნაწილზე, რომლის ერთი ბოლოა c, მაშინ წინა შეფასებები, ცხადია, გამოდგება იმ შემთხვევისათვისაც, როცა c' და c'' საკმაოდ ახლოსაა c-თან და როცა z მდებარეობს L რკალის იმ ნაწილის მიდამოში, რომლის ერთი ბოლოა c და რომელიც შეიცავს $c'c''$ რკალს.

§ 24. გაგრძელება. II დებულების დამტკიცება. § 22-ის აღნიშვნებში გვაქვს

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab} \frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}, \tag{24,1}$$

სადაც $\varphi^*(t)$ ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში (c აღნიშნავს a-ს ან b-ს).

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\alpha=0$, $\gamma=i\beta\neq 0$, წინა ფორმულა ასე გადავწეროთ:

$$\Phi(z) = \frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)]\,(t-c)^{-i\beta}}{t-z}\,dt. \tag{24,2}$$

ვინაიდან $[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)]\,(t-c)^{-i\beta}$ ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში[68] და ნულად იქცევა, როცა $t=c$, მარჯვენა მხარეს მეორე ინტეგრალი c-ს მახლობლად შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რომელიც მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $z\to c$, პირველი ინტეგრალის ყოფაქცევა კი წინა პარაგრაფის (23,4) და (23,6) ფორმულებით განისაზღვრება, საიდანაც გამომდინარეობს (22,5) ფორმულა $\alpha=0$ შემთხვევისათვის.

გადავიდეთ $\alpha>0$ შემთხვევის განხილვაზე (ამასთან, გავიხსენოთ, $\alpha<1$) და $\Phi(z)$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\Phi(z) = \frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\varphi^*(t)-\varphi^*(c)}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}\,dt.$$

პირველი ინტეგრალის ყოფაქცევა c-ს მახლობლად (23,4), (23,6) ფორმულე-ბით განისაზღვრება. მეორე შესაკრებში ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)]\,(t-c)^{-\varepsilon}}{(t-c)^{\gamma-\varepsilon}(t-z)},$$

სადაც ε ისეთი საკმაოდ მცირე დადებითი რიცხვია, რომ მრიცხველი კვლავ აკმაყოფილებს H პირობას c-ს მიდამოში. თუ ახლა განსახილველი მეორე შესაკრების მიმართ გამოვიყენებთ (23.2) პირობას და $\nu=\alpha_0$ რიცხვად ავიღებთ ნებისმიერ რიცხვს, ისეთს, რომ $\alpha-\varepsilon<\nu<\alpha$, მაშინ $\alpha>0$ შემთხვევისათვის დავრწმუნდებით (22,5) ფორმულის მართებულობაში. ამრიგად, დებულება II დამტკიცებულია.

---

[68] იხ. § 6.

§ 25. გაგრძელება. IV და VI დებულებების დამტკიცება. ჩვენ გვრჩება § 22-დან IV და VI დებულებების დამტკიცება.

I°. დავამტკიცოთ დებულება IV. $\alpha = 0$-ის შემთხვევაში ის უშუალოდ გამომდინარეობს ფორმულიდან

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)\,(t-c)^{-i\beta}\,dt}{t-t_0} = \frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{(t-c)^{-i\beta}\,dt}{t-t_0} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)]\,(t-c)^{-i\beta}\,dt}{t-t_0}, \qquad (25,1)$$

ვინაიდან მარჯვენა მხარეს პირველი შესაკრების ყოფაქცევა c-ს მახლობლად (23,5) ან (23,7) ფორმულით განისაზღვრება, ხოლო მეორე შესაკრების ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მრიცხველი c-ს მიდამოში აკმაყოფილებს H პირობას და ნულად იქცევა, როცა $t = c$.

გვრჩება $\alpha > 0$ შემთხვევის განხილვა. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $c = a$ ($c = b$ შემთხვევა ანალოგიურად განიხილება) და დავუშვათ:

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)} = \frac{\varphi^*(a)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)} + \Psi^*(t_0), \qquad (25,2)$$

სადაც

$$\Psi^*(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)\,dt}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)}, \qquad (25,3)$$

$$\psi(t) = \varphi^*(t) - \varphi^*(a). \qquad (25,4)$$

(23,5) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ (25,2)-ის მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებს აქვს დასამტკიცებელი (22,8) ფორმულის მარჯვენა მხარის სახე. იმის გამო, რომ $\psi(a)=0$ (22,5), (22,6) ფორმულებიდან, რომლებშიაც $\Phi(z)$, $\varphi^*(t)$-ს ნაცვლად ავიღებთ $\Psi^*(z)$, $\psi(t)$-ს, გამომდინარეობს $(t_0-a)^{\gamma}\,\Psi^*(t_0)\to 0$, როცა $t_0\to a$[69]. ამიტომ (22,8) ფორმულა იქნება დამტკიცებული, თუ დავამტკიცებთ, რომ ფუნქცია

$$\Psi(t_0) = (t_0-a)^{\gamma}\,\Psi^*(t_0) = \frac{(t_0-a)^{\gamma}}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)\,dt}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)} \qquad (25,5)$$

a წერტილის მიდამოში ეკუთვნის H კლასს, თუ შევთანხმდებით ჩავთვალოთ $\Psi(a)=0$. მართლაც, მაშინ გვექნება:

$$\Psi^*(t_0) = \frac{\Psi(t_0)}{(t_0-a)^{\gamma}} = \frac{\Psi(t_0)-\Psi(a)}{(t-t_0)^{\gamma}},$$

და ამიტომ $\Psi^*(t_0)$ ფუნქციას ექნება დასამტკიცებელი (22,8) ფორმულის მარჯვენა მხარეს მონაწილე $\Phi^*(t_0)$ ფუნქციის სახე.

[69] იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს (22,5) ფორმულის გამოყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც $z=t_0$ წერტილი ab რკალზე მდებარეობს, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2}\,[\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)].$$

ამ პუნქტის დანარჩენი ნაწილი ეძღვნება იმის დამტკიცებას, რომ $\Psi(t_0)$ ფუნქცია a-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს. ზოგადობის შეუზღუდავად, ვგულისხმებთ, რომ ab სტანდარტული რკალია და $\psi(t)$ ეკუთვნის H კლასს მთელ ab რკალზე.

გვაქვს:

$$\Psi(t_0)=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt+\frac{\psi(t_0)\,(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

უკანასკნელი შესაკრები, როგორც ეს (23,5) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, a-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს.

განვიხილოთ პირველი შესაკრები:

$$\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0)]\,[(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}.$$

მაგრამ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{\psi(t_0)}{2\pi i}\left\{\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}+\text{const}\right\}$$

a-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს, ვინაიდან $\psi(a)=0$. გვრჩება

$$\Omega(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0)]\,[(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}$$

ინტეგრალის განხილვა.

გვაქვს:

$$\Omega(t_0+h)-\Omega(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\left\{\frac{[(t_0+h-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]\,[\psi(t)-\psi(t_0+h)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)}-\right.$$

$$\left.-\frac{[(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]\,[(\psi(t)-\psi(t_0)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\right\}dt. \qquad (25,6)$$

t წერტილის მდებარეობა ab რკალზე განვსაზღვროთ a წერტილიდან ათვლილი s რკალური აბსცისით. ვთქვათ, b წერტილს შეესაბამება $s=s_b$ აბსცისა, t_0 და t_0+h წერტილებს კი — შესაბამისად s_0 და $s_0+\sigma$ აბსცისა; ზოგადობის შეუზღუდავად, ცხადია, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\sigma>0$ და, გარდა ამისა (ვინაიდან ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ a წერტილის მიდამო),

$$2\sigma<s_b-s_0.$$

აღვნიშნოთ t_2-ით $s_2=s_0+2\sigma$-ს შესაბამისი წერტილი, ხოლო t_1-ით $s_1=s_0-2\sigma$-ს შესაბამისი წერტილი, თუ $s_0-2\sigma>0$, ან a წერტილი, თუ $s_0-2\sigma\leqslant 0$.

(25,6) ინტეგრალი დავყოთ ორი ინტეგრალის ჯამად: I_0, აღებული $l=t_1t_2$ ნაწილზე, და I, აღებული დანარჩენი $ab-t_1t_2=l'$ ნაწილზე, ასე რომ,

$$\Omega(t_0+h)-\Omega(t_0)=I_0+I. \tag{25,7}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $(t-a)^\gamma=(t-a)^{\alpha+i\beta}$ აკმაყოფილებს $H(\alpha)$ პირობას (§ 6, პ. 3°), გვექნება:

$$|(t-a)^\gamma-(t_0-a)^\gamma|\leqslant \text{const}\cdot|t-t_0|^\alpha. \tag{25,8}$$

ამიტომ, თუ λ არის $\psi(t)$ ფუნქციის H პირობის მაჩვენებელი, მაშინ

$$|I_0|\leqslant \text{const}\cdot\left\{\int_l \frac{ds}{|t-a|^\alpha|t-t_0-h|^{1-\alpha-\lambda}}+\int_l \frac{ds}{|t-a|^\alpha|t-t_0|^{1-\alpha-\lambda}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\left\{\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0-\sigma|^{1-\alpha-\lambda}}+\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\alpha-\lambda}}\right\};$$

გავიხსენოთ, რომ $s_1=s_0-2\sigma$ ან 0-ს, $s_2=s_0+2\sigma$.

თუ ჩავსვამთ $s=s_0+\sigma\cdot\rho$, სადაც ρ ინტეგრების ახალი ცვლადია, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$|I_0|\leqslant \text{const}\cdot\sigma^\lambda. \tag{25,9}$$

განვიხილოთ $l'=ab-t_1t_2$-ზე აღებული ინტეგრალი, რომელიც ახლა ასე გადავწეროთ:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}\left\{\frac{(t_0+h-a)^\gamma-(t-a)^\gamma}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)}-\frac{(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\right\}[\psi(t)-\psi(t_0+h)]\,dt+$$

$$+\frac{\psi(t_0)-\psi(t_0+h)}{2\pi i}\int_{l'}\frac{(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt. \tag{25,10}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი ადვილად შეფასდება; სახელდობრ, (25,8)-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$\left|\int_{l'}\frac{(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt\right|\leqslant \text{const}\cdot\int_{l'}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\alpha}}=$$

$$=\text{const}\cdot\left\{\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0-s)^{1-\alpha}}+\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0)^{1-\alpha}}\right\}; \tag{25,11}$$

თუ $s_0-2\sigma\leqslant 0$, მაშინ მარჯვენა მხარეს პირველი ინტეგრალი არ გვექნება. როცა $s_1=s_0-2\sigma>0$, $s=s_0\rho$ ჩასმით, ვღებულობთ:

$$\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0-s)^{1-\alpha}}=\int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{1-\alpha}}\leqslant\int_0^1\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{1-\alpha}}=\text{const}.$$

(25,11)-ის მარჯვენა მხარის მეორე ინტეგრალში $s=s_0+2\sigma\rho$ ცვლადის შეცვლა საკმაოდ მცირე σ-თვის გვაძლევს:

$$\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0)^{1-\alpha}}=\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^\alpha\rho^{1-\alpha}}\leqslant\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\rho}=\ln\frac{s_b-s_0}{2\sigma}<\text{const}\cdot|\ln\sigma|.$$

ამრიგად, (25,10)-ის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები არ აღემატება $\text{const}\cdot\sigma^\lambda|\ln\sigma|$-ს და, მითუმეტეს, $\text{const}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon}$, სადაც ε ნებისმიერად ფიქსირებული დადებითი რიცხვია.

შევაფასოთ ახლა (25,10)-ის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები, რომელიც წარმოვადგინოთ I_1+I_2 ჯამის სახით, სადაც

$$I_1=\frac{(t_0+h-a)^\gamma-(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{l'}\frac{\psi(t)-\psi(t_0+h)}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)}\,dt,$$

$$I_2=\frac{h}{2\pi i}\int_{l'}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0+h)]\,[(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)(t-t_0)}.$$

გვაქვს:

$$|I_1|\leqslant\text{const}\cdot\sigma^\alpha\left\{\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}}+\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}}\right\},$$

ამასთან პირველი ინტეგრალი არ გვექნება, თუ $s_0-2\sigma\leqslant 0$.

თუ $\lambda\geqslant\alpha$, მაშინ სავსებით ისევე, როგორც (25,11)-ის მარჯვენა მხარის შეფასებისას, ადვილად დავადგენთ, რომ ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება შემოსაზღვრულია, როცა $\lambda>\alpha$, და არ აღემატება $\text{const}\cdot|\ln\sigma|$, როცა $\lambda=\alpha$; ამიტომ, როცა $\lambda\geqslant\alpha$

$$|I_1|\leqslant\text{const}\cdot\sigma^{\alpha-\varepsilon},$$

სადაც ε ნებისმიერად დაფიქსირებული დადებითი მუდმივია (როცა $\lambda>\alpha$ შეგვიძლია ავიღოთ $\varepsilon=0$).

თუ $\lambda<\alpha$, მაშინ (25,11) გამოსახულების შეფასებისას გამოყენებული ხასმით მივიღებთ (პირველი ინტეგრალისათვის იმ შემთხვევაში, როცა $s_0>2\sigma$, ვინაიდან, თუ $s_0\leqslant 2\sigma$, იგი ქრება):

$$\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}}=\frac{1}{s_0^{\alpha-\lambda}}\int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha\left(1+\frac{\sigma}{s_0}-\rho\right)^{1-\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{s_0^{\alpha-\lambda}}\int_0^1\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{1-\lambda}}<\text{const}\cdot\sigma^{\lambda-\alpha},$$

$$\int_{s_2}^{s_b} \frac{ds}{s^{\alpha}(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}} = \frac{1}{(2\sigma)^{\alpha-\lambda}} \int_{1}^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}} \frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^{\alpha}\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}} <$$

$$< \frac{1}{(2\sigma)^{\alpha-\lambda}} \int_{1}^{\infty} \frac{d\rho}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1+\alpha-\lambda}} = \mathrm{const}\cdot\sigma^{\lambda-\alpha}.$$

ამრიგად, როცა $\lambda < \alpha$, გვექნება:

$$|I_1| \leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\lambda}.$$

დასასრულ, გადავდივართ I_2 ინტეგრალის შეფასებაზე. გვაქვს:

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma \left\{ \int_{0}^{s_1} \frac{ds}{s^{\alpha}(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s_0-s)^{1-\alpha}} + \int_{s_2}^{s_b} \frac{ds}{s^{\alpha}(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}} \right\};$$

პირველი ინტეგრალი არ გვექნება, როცა $s_0 \leqslant 2\sigma$.

წინა შემთხვევაში გამოყენებული ჩასმით მივიღებთ:

$$\int_{0}^{s_1} \frac{ds}{s^{\alpha}(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s_0-s)^{1-\alpha}} = \frac{1}{s_0^{1-\lambda}} \int_{0}^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}\left(1+\frac{\sigma}{s_0}-\rho\right)^{1-\lambda}(1-\rho)^{1-\alpha}}.$$

გავიხსენოთ, რომ აქ უნდა ჩავთვალოთ $\frac{\sigma}{s_0} < \frac{1}{2}$, და განვიხილოთ ორი შემთხვევა: $\frac{\sigma}{s_0} > \frac{1}{4}$ და $\frac{\sigma}{s_0} \leqslant \frac{1}{4}$.

პირველ შემთხვევაში უკანასკნელი ინტეგრალი არ აღემატება ინტეგრალს

$$\int_{0}^{1/2} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} = \mathrm{const};$$

მეორე შემთხვევაში კი იგი არ აღემატება ინტეგრალს

$$\int_{0}^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} \leqslant \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} + 2^{\alpha}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}};$$

მარჯვენა მხარეს პირველი ინტეგრალი სასრული სიდიდეა, ხოლო მეორე მაშინვე გამოითვლება და, როგორც ადვილი დასანახავია, არ აღემატება სიდიდეს

$$\mathrm{const}\cdot\left(\frac{\sigma}{s_0}\right)^{\lambda+\alpha-1}, \quad \text{როცა } \lambda+\alpha<1, \quad \mathrm{const}\cdot\left|\ln\frac{\sigma}{s_0}\right|, \quad \text{როცა } \lambda+\alpha=1$$

და რჩება შემოსაზღვრული, როცა $\lambda+\alpha>1$.

წინა უტოლობების გათვალისწინებით, ადვილად დავასკვნით, რომ ყველა შემთხვევაში

$$\sigma\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^{\alpha}(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s_0-s)^{1-\alpha}}\leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon},$$

სადაც ε ნებისმიერად ფიქსირებული დადებითი მუდმივაა.

გვაქვს:

$$\sigma\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^{\alpha}(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{\sigma^{\lambda}}{2^{1-\lambda}}\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^{\alpha}\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}\rho^{1-\alpha}}\leqslant\frac{\sigma^{\lambda}}{2^{1-\lambda}}\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{2-\lambda}};$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლით ვრწმუნდებით, რომ

$$\sigma\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^{\alpha}(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}}\leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon},$$

სადაც ε ნებისმიერად ფიქსირებული დადებითი მუდმივაა (როცა $\lambda<1$, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\varepsilon=0$).

ზემოთ მოყვანილი შეფასებების შეპირისპირების საფუძველზე მივიღებთ:

$$|I|\leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\mu-\varepsilon},\tag{25,12}$$

სადაც μ არის უმცირესი α, λ რიცხვებს შორის, ხოლო ε (რაგინდ მცირე) დადებითი მუდმივაა.

(25,9) და (25,12) უტოლობები ამტკიცებს საჭირო დებულებას.

2°. გადავიდეთ § 22-ის VI დებულების დამტკიცებაზე. ეს დებულება შეიძლება დამტკიცდეს იმავე ხერხით, რომელიც გამოყენებული იყო ანალოგიური დებულების დამტკიცებისას § 18-ის 3° პუნქტში.

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, $c=a$, ასე რომ, L'-ად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნებისმიერი ab' რკალი, რომელიც წარმოადგენს ab-ს ნაწილს იმ პირობით, რომ b' არ ემთხვევა b-ს. გარდა ამისა, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ab სტანდარტულ რკალად ჩავთვალოთ. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\Omega(t_0,\tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას τ ცვლადით.

გვაქვს:

$$\Omega(t_0,\tau+h)-\Omega(t_0,\tau)=\frac{(t_0-a)^{\nu}}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t,\tau+h)-\varphi(t,\tau)}{t-t_0}\,dt=$$

$$= \frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab} \frac{[\varphi^*(t,\ \tau+h)-\varphi^*(t_0,\ \tau+h)]-[\varphi^*(t,\ \tau)-\varphi^*(t_0,\ \tau)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt +$$

$$+[\varphi^*(t_0,\ \tau+h)-\varphi^*(t_0,\ \tau)]\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}. \qquad (25,13)$$

მარჯვენა მხარის უკანასკნელი შესაკრები (23,5)-ის საფუძველზე მოდულით არ აღემატება const $\cdot|h|^\nu$-ს, სადაც ν არის $\varphi^*(t,\ \tau)$ ფუნქციის τ ცვლადის მიმართ H პირობის მაჩვენებელი. გვრჩება მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრების

$$I=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{[\varphi^*(t,\tau+h)-\varphi^*(t_0,\tau+h)]-[\varphi^*(t,\tau)-\varphi^*(t_0,\tau)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt \qquad (25,14)$$

განხილვა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $|h|=\sigma$ და ab რკალზე t, t_0 წერტილების მდებარეობა განვსაზღვროთ a წერტილიდან ათვლილი მათი s, s_0 რკალური აბსცისებით. განვიხილოთ ცალ-ცალკე ორი შემთხვევა: $s_0 \leqslant 2\sigma$ და $s_0 > 2\sigma$.

პირველ შემთხვევაში ($s_0 \leqslant 2\sigma$) ვისარგებლოთ იმით, რომ $\varphi^*(t,\ \tau)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას t ცვლადის მიმართ. თუ λ-თი აღვნიშნავთ შესაბამის მაჩვენებელს, გვექნება (გავიხსენოთ, რომ $\gamma=\alpha+i\beta$, $0<\alpha<1$):

$$|I|\leqslant \text{const}\cdot s_0^\alpha\int\limits_0^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\lambda}},$$

სადაც s_b აღნიშნავს b წერტილის რკალურ აბსცისას. $s=s_0\rho$ ჩასმით ადვილად ვრწმუნდებით (შეად. § 51), რომ

$$|I|\leqslant \text{const}\cdot\sigma^{\mu-\varepsilon}=\text{const}\,|h|^{\mu-\varepsilon},$$

სადაც μ არის უმცირესი α, λ რიცხვებს შორის, ხოლო ε რაგინდ მცირე დადებითი მუდმივა.

გვრჩება $s_0>2\sigma$ შემთხვევის განხილვა. ამ შემთხვევაში (25,14)-ის მარჯვენა მხარის ინტეგრალი წარმოვადგინოთ სამი ინტეგრალის ჯამის სახით: 0-დან $(s_0-\sigma)$-მდე, $(s_0-\sigma)$-დან $(s_0+\sigma)$-მდე და $(s_0+\sigma)$-დან s_b-მდე. ამის შესაბამისად დავწეროთ:

$$I=I_1+I_2+I_3.$$

b_1-ით აღვნიშნოთ წერტილი, რომლის რკალური აბსცისა არის $s_0-\sigma$, გვაქვს:

$$I_1=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab_1}\frac{\varphi^*(t,\ \tau+h)-\varphi^*(t,\ \tau)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt-$$

$$-[\varphi^*(t_0,\ \tau+h)-\varphi^*(t_0,\ \tau)]\cdot\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab_1}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

(23,9ა)-ს საფუძველზე, როგორც ადვილი დასანახავია[70], მეორე შესაკრები მოდულით არ აღემატება const $\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}$-ს, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი მუდმივაა. პირველი შესაკრები აღვნიშნოთ I_1'-ით; გვექნება:

[70] (23,9ა) ფორმულაში ჩვენს შემთხვევაში $c'=c=a$, $c''=b$.

$$|I_1'| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\nu} s_0^{\alpha} \int\limits_0^{s_0-\sigma} \frac{ds}{s^{\alpha}(s_0-s)}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $s_0 > 2\sigma$ ჩასმით $s = s_0\rho$ მივიღებთ:

$$|I_1'| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\nu} \int\limits_0^{1-\frac{\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)} = \mathrm{const}\cdot|h|^{\nu} \left\{ \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)} \right\},$$

საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ $|I_1'| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}$, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი მუდმივია და, მაშასადამე,

$$|I_1| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}.$$

სავსებით ასევე შეფასდება I_3. გვრჩება I_2-ის შეფასება. გვაქვს:

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const}\cdot s_0^{\alpha} \int\limits_{s_0-\sigma}^{s_0+\sigma} \frac{ds}{s^{\alpha}|s-s_0|^{1-\lambda}}.$$

$s = s_0 + \sigma\rho$-ს ჩასმით ვღებულობთ:

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\lambda} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\rho}{\left(1+\frac{\sigma\rho}{s_0}\right)^{\alpha}|\rho|^{1-\lambda}},$$

საიდანაც, თუ შევნიშნავთ, რომ $\dfrac{\sigma}{s_0} < \dfrac{1}{2}$, ადვილად დავასკვნით:

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\lambda}.$$

მიღებული შეფასებების საფუძველზე მივდივართ საჭირო დასკვნამდე.

§ 26. კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევის შესახებ უბან-უბან გლუვი საინტეგრაციო წირის კვანძების მახლობლად[71]. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{26,1}$$

---

[71] ახლახან გამოქვეყნდა ვ. პოგოჟელსკის მთელი რიგი საინტერესო სტატია, რომელთაგან დავასახელებთ W. Pogorzelski [2]—[7] (უკანასკნელი ორი გამოქვეყნდა ამ წიგნის ხელნაწერის გამომცემლობაში ჩაბარების შემდეგ), სადაც აგრეთვე განიხილება კოშის ტიპის ინტეგრალების ყოფაქცევა გლუვი გახსნილი და უბან-უბან გლუვი (ჩვენი ტერმინოლოგიით) საინტეგრაციო წირების შემთხვევაში. ავტორს შემოჰყავს L-ზე ფუნქციების გარკვეული კლასები, რომლებიც წარმოადგენენ H^* კლასის (ჩვენი აღნიშვნებით) ქვეკლასებს და ერთობლიობაში ამოწურავენ H^*-კლასს, და ამის შესაბამისად, საინტეგრაციო წირზე და მის მახლობლად კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევის გარკვეული აზრით რამდენადმე უფრო დაზუსტებულ დახასიათებას იძლევა. სხვა მხრივ ვ. პოგოჟელსკის შედეგები ძირითადად ამ პარაგრაფში გადმოცემული შედეგების ანალოგიურია; ეს უკანასკნელი შედეგები ჩემ მიერ მიღებული იყო რამდენიმე წლის წინათ, მაგრამ პირველად აქ ქვეყნდება. ისინი თითქმის უშუალოდ მიიღება წინა პარაგრაფში გადმოცემული შედეგებიდან, რომლებიც ამ წიგნის პირველ გამოცემაში იყო გამოქვეყნებული. (შენიშვნა მეორე რუსული გამოცემიდან).

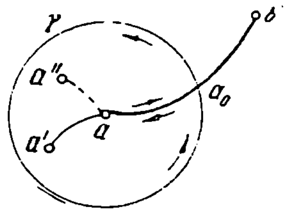
კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევის საკითხს საინტეგრაციო L წირის (რომელსაც ჩვენ ახლა უბან-უბან გლუვად ჩავთვლით), კვანძების მიდამოში. კვანძებად ჩვენ ჩავთვლით იმ წერტილებსაც, რომლებიც გეომეტრიულად არ წარმოადგენენ კვანძებს, მაგრამ რომლებზედაც $\varphi(t)$ სიმკვრივე არ არის უწყვეტი; ასეთი წერტილების რაოდენობას ყოველთვის სასრულად ჩავთვლით. ამრიგად, ქვემოთ მოყვანილი შედეგები მოიცავს იმ შემთხვევასაც, როცა L წირი გეომეტრიულად გლუვია, მაგრამ $\varphi(t)$-ს გააჩნია სასრული რაოდენობის გარკვეული სახის წყვეტები.

კვანძების მახლობლად ყოფაქცევის შესწავლას წავუმძღვარებთ ზოგიერთ შენიშვნას, რომლებიც გარკვეული მიმართულებით ავსებენ § 22-ის შედეგებს.

1^0. დავიწყოთ § 21-ის თეორემასთან მჭიდრო კავშირში მყოფი შემდეგი დამხმარე დებულების დამტკიცებით.

ვთქვათ $L=ab$ გლუვი გახსნილი რკალია, $\omega(z)$ a წერტილის რაიმე მიდამოში ჰოლომორფული ფუნქციაა L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე, L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი მარცხნიდან და მარჯვნიდან ამ მიდამოში, და აგრეთვე a წერტილზე, და ვთქვათ, $\omega^+(t)$, $\omega^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, $0<\mu<1$[72], ამ მიდამოში მოთავსებულ L რკალის ნაწილზე.

ვთქვათ, ab რკალი რამდენადმე გაგრძელებულია a ბოლოს იქით გლუვი $a'a$ რკალით (მაგალითად, მხების მონაკვეთით) ისე, რომ მიღებული $L'=a'ab$ რკალი, რომელიც შეიცავს $L=ab$ რკალს, გლუვია (ნახ. 13).



ნახ. 13

აღნიშნულ პირობებში $\omega(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადი იქნება L'-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან a წერტილის მიდამოში და $\omega^+(t)$, $\omega^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობანი დააკმაყოფილებენ $H(\mu)$ პირობას L'-ზე (და არა მხოლოდ L-ზე) ამ მიდამოში.

მართლაც, შემოვწეროთ იმდენად მცირე რადიუსიანი წრეწირი γ ცენტრით a წერტილში, რომ იგი მთლიანად მოთავსდეს განსახილველ მიდამოში და გადაკვეთოს L რკალი ზუსტად ერთ a_0 წერტილში. თუ გამოვიყენებთ კოშის ფორმულას γ წრეწირით შემოსაზღვრული წრისათვის, რომელიც გაჭრილია aa_0 რკალის გასწვრივ γ წრეწირის შიგნით მოთავსებული z წერტილებისათვის, რომლებიც aa_0 რკალზე არ მდებარეობენ, გვექნება:

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z},$$

სადაც Γ-თი აღნიშნულია განსახილველი გაჭრილი წრის საზღვარი, რომელიც შემოიწერება დადებითი მიმართულებით. ეს საზღვარი (ნახ. 13) შედგება ჭრილის მარცხენა მხარისაგან, რომელიც aa_0 მიმართულებით შემოიწერება, γ წრეწირისაგან, რომელიც საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით შემოიწერება და ჭრილის მარჯვენა მხარისაგან, რომელიც a_0a მიმართულებით შემოიწერება. $\omega(t)$-თი აღნიშნულია $\omega(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა, რომელსაც იგი Γ-ზე ღებულობს;

[72] ვგულისხმობთ, რომ $\mu<1$, რათა $\mu=1$ შემთხვევაზე ცალკე საუბარი არ მოგვიხდეს.

კერძოდ, aa_0 ჭრილის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს $\omega(t)$-ს ქვეშ საჭიროა, შესაბამისად, $\omega^+(t)$, $\omega^-(t)$ ვიგულისხმოთ. ამრიგად,

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{aa_0} \frac{\omega^+(t)-\omega^-(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}.$$

ვინაიდან მარჯვენა მხარეს მეორე ინტეგრალი წარმოადგენს a წერტილის მიდამოში ჰოლომორფულ ფუნქციას, განსახილველი გვრჩება ინტეგრალი

$$\omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{aa_0} \frac{\omega^+(t)-\omega^-(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a'aa_0} \frac{\psi(t)dt}{t-z},$$

სადაც $\psi(t)=\omega^+(t)-\omega^-(t)$ aa_0 რკალზე და $\psi(t)=0$ დამატებულ $a'a$ რკალზე. იმის გამო, რომ $\omega^+(t)-\omega^-(t)\to 0$, როცა L-ზე $t\to a$, რაც გამომდინარეობს $\omega(z)$ ფუნქციის a წერტილზე უწყვეტად გაგრძელებადობიდან, და იმის გამო, რომ პირობით $\omega^+(t)$ და $\omega^-(t)$ ეკუთვნის $H(\mu)$ კლასს L-ზე a წერტილის მიდამოში, $\psi(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $H(\mu)$ კლასს L'-ზე, აქედან კი, პლემელი—პრივალოვის თეორემის საფუძველზე, გამომდინარეობს გამოთქმული დებულება.

ახლახან დამტკიცებული დებულებიდან, § 21-ის შენიშვნა 2-ის საფუძველზე, გამომდინარეობს, რომ აღნიშნულ პირობებში ნებისმიერი ორი z_1, z_2 წერტილისათვის, რომლებიც ერთდროულად იმყოფებიან $L'=a'ab$ რკალის მარცხნივ ან მარჯვნივ a წერტილის მიდამოში, გვექნება უტოლობა:

$$|\,\omega(z_2)-\omega(z_1)\,| \leqslant \mathrm{const}\cdot|\,z_2-z_1|^{\mu}. \qquad (26,2)$$

ეს უტოლობა, ცხადია, მართებულია მაშინაც, როდესაც z_1, z_2 წერტილები (ორივე ერთდროულად ან ერთ-ერთი მათგანი) მოთავსებულია L-ზე, თუ $\omega(z)$-ის ქვეშ ვიგულისხმებთ სასაზღვრო მნიშვნელობას სათანადო მხრიდან, როცა z არის L-ზე.

წინა უტოლობა კერძოდ გვიჩვენებს, რომ $\omega(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას a წერტილის მიდამოში ყოველ aa'' გლუვ რკალზე, რომელიც გავლებულია L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე, ისე, როგორც ნახ. 13-ზეა ნაჩვენები. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ aa'' რკალს მთლიანად $L'=a'ab$ რკალის მარცხენა ან მარჯვენა მიდამოში მოთავსებულად წარმოვადგენთ. ამისი მიღწევა კი ყოველთვის შეიძლება $a'a$ რკალის სათანადოდ შერჩევით.

ცხადია, ყველაფერი, რაც ითქვა, ძალაშია იმ შემთხვევაშიაც, თუ a ბოლოს ნაცვლად განიხილება b ბოლო.

2°. ახლა დავუბრუნდეთ § 22-ის დებულებებს და ვიგულისხმოთ, რომ (26,1) ინტეგრალში $L=ab$ გახსნილი გლუვი რკალია და რომ § 22-ში შემოღებული აღნიშვნით

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \quad \gamma=\alpha+i\beta, \quad 0\leqslant\alpha<1, \quad c=a \text{ ან } b. \qquad (26,3)$$

გავიხსენოთ, რომ (26,1) ინტეგრალის ყოფაქცევა L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე c-ს მახლობლად განისაზღვრება (22,4), (22,5) ფორმულებით:

$$\Phi(z) = \mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(z-c)+\Phi_0(z), \text{ როცა } \gamma=0 \qquad (26,4)$$

და

$$\Phi(z) = \pm \frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\,\frac{\varphi^*(c)}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0(z), \ \text{როცა} \ \gamma\neq 0. \qquad (26,5)$$

ზედა ნიშნები აიღება, როცა $c=a$, ქვედა — როცა $c=b$, ამასთან $\ln(z-c)$ არის ნებისმიერი შტო, რომელიც ჰოლომორფულია L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე c ბოლოს მახლობლად; $(z-c)^\gamma$ — შტო, რომელიც ჰოლომორფულია ასეთსავე არეში და L-ის მარცხენა მხარეს ღებულობს (26,3) ფორმულაში მონაწილე $(t-c)^\gamma$ მნიშვნელობას[73]. (26,4) ფორმულის მარჯვენა მხარეში $\Phi_0(z)$ აღნიშნავს გაჭრილ სიბრტყეზე c-ს მახლობლად ჰოლომორფულ ფუნქციას, უწყვეტად გაგრძელებადს მარცხნიდან და მარჯვნიდან L-ზე c-ს მახლობლად, და აგრეთვე c წერტილზე: $\Phi_0^+(t)$, $\Phi_0^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები c-ს მიდამოში L-ზე ეკუთვნის H კლასს (§ 22, პ. 3°). ასეთივე თვისებები გააჩნია აგრეთვე (26,5) ფორმულის მარჯვენა მხარეს $\Phi_0(z)$ ფუნქციას, როცა $\alpha=0$ და $(z-c)^\gamma\,\Phi_0(z)=\Omega_0(z)$ ნამრავლს, თუ $\alpha>0$, ამასთან $\Omega_0(c)=0$.

ამ პარაგრაფის 1° პუნქტიდან გამომდინარეობს, რომ (26,4) ფორმულის ან (26,5) ფორმულის, როცა $\alpha=0$, მარჯვენა მხარეს მდგომი $\Phi_0(z)$ ფუნქცია ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში ყოველ გლუვ cc' რკალზე, რომელიც გავლებულია c წერტილიდან L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე. ასეთივე თვისებები გააჩნია $(z-c)^\gamma\Phi_0(z)=\Omega_0(z)$ ფუნქციას, როცა $\alpha>0$. ვინაიდან ამ უკანასკნელ შემთხვევაში $\Omega_0(c)=0$, ცხადია, გვექნება:

$$\Phi_0(z) = \frac{\Omega(z)-\Omega_0(c)}{(z-c)^\gamma} = \frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \qquad (26,6)$$

სადაც α_0 რაიმე დადებითი, α-ზე ნაკლები მუდმივაა, ხოლო $\Phi_{00}(z)$ არის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს H პირობას c-ს მიდამოში L-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე c-დან გავლებულ ნებისმიერ გლუვ cc' რკალზე.

დაბოლოს, გავიხსენოთ, რომ (26,1) ინტეგრალის ყოფაქცევა ინტეგრების $L=ab$ წირზე c ბოლოს მიდამოში განისაზღვრება (22,7), (22,8) ფორმულებით:

$$\Phi(t_0) = \mp \frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(t_0-c) + \Phi^*(t_0), \ \text{როცა} \ \gamma=0 \qquad (26,7)$$

და

$$\Phi(t_0) = \pm \frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\cdot\frac{\varphi^*(c)}{(t_0-c)^\gamma} + \Phi^*(t_0), \ \text{როცა} \ \gamma\neq 0, \qquad (26,8)$$

სადაც ზედა ნიშნები აიღება, როცა $c=a$, ხოლო ქვედა — როცა $c=b$; (26,7) ფორმულაში და აგრეთვე (26,8) ფორმულაში, როცა $\alpha=0$, $\Phi^*(t_0)$ ფუნქცია ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში; როცა $\alpha>0$,

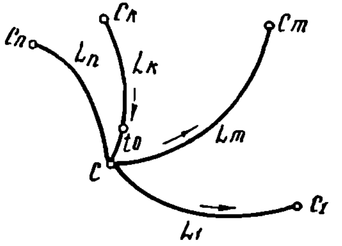
$$\Phi^*(t_0) = \frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \qquad (26,9)$$

სადაც $\alpha_0=\text{const}<\alpha$, ხოლო $\Phi^{**}(t_0)$ L-ზე c-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს.

[73] გავიხსენოთ, რომ (26.3) ფორმულაში L-ზე $(t-c)^\gamma$ მნიშვნელობა ნებისმიერადაა ფიქსირებული, მაგრამ ცხადია, იმ პირობით, რომ უწყვეტად იცვლებოდეს L-ზე (გარდა c წერტილისა, როცა $\alpha=0$, $\beta\neq 0$).

წინა პარაგრაფში ნათქვამის შემდეგ არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს (26,1) ფორმულით განსაზღვრული $\Phi(z)$ ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლა, რომელიმე ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი L წირის კვანძების მიდამოში. ახლა ამ შემთხვევაზე გადავდივართ.

ამრიგად, ვთქვათ (26,1) ფორმულაში L აღნიშნავს ნებისმიერ უბან-უბან გლუვ წირს (§ 1, პ. 4°, 5°), c კი მისი ერთ-ერთი კვანძია (ნახ. 14). ვთქვათ ამ წერტილში შეერთებულია $L_1, L_2, \ldots, L_n$ გახსნილი რკალების ბოლოები, ამასთან ამ რკალებზე დადებითი მიმართულება შეიძლება გამოდიოდეს c-დან (მაშინ c წერტილი რკალის საწყის წერტილს წარმოადგენს) ან მიდიოდეს c-კენ (მაშინ c რკალის ბოლო წერტილია). პირველ შემთხვევაში შესაბამის რკალებს გამომავალს ვუწოდებთ, ხოლო მეორე შემთხვევაში — შემავალს.



ნახ. 14

c-ს მახლობლად $\Phi(z)$-ის ყოფაქცევის შესასწავლად, საკმარისია ჩავთვალოთ, რომ (26,1) ფორმულაში L შედგება $L_1 = cc_1$, $L_2 = cc_2, \ldots, L_n = cc_n$[74] რკალების ერთობლიობისაგან. ჩვენ სწორედ ამას ვგულისხმობთ.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, რომელიც ხშირად გვხვდება გამოყენებებში, როდესაც (26,1) ფორმულაში $\varphi(t)$ ფუნქცია c-ს მიდამოში ეკუთვნის H_0 კლასს, ე. ი. როდესაც

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) \quad L_k\text{-ზე}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{26,10}$$

სადაც $\varphi_k(t)$ აღნიშნავს L_k-ზე მოცემულ ფუნქციას, რომელიც L_k-ზე c-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს.

ამრიგად, ჩვენს შემთხვევაში

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\varphi_k(t)\,dt}{t - z}. \tag{26,11}$$

თუ მარჯვენა მხარის თითოეული შესაკრების მიმართ გამოვიყენებთ წინა პუნქტში გადმოცემულ შედეგებს, ადვილად მივალთ შემდეგ დასკვნამდე.

c კვანძის მიდამოში L-ზე არამდებარე z წერტილებისათვის

$$\Phi(z) = A \ln(z - c) + \Phi_0(z), \tag{26,12}$$

სადაც A მუდმივაა, განსაზღვრული ფორმულით:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mp \varphi_k(c)}{2\pi i}. \tag{26,13}$$

$\varphi_k(c)$-ს წინ ზედა ნიშანი აიღება გამომავალი რკალების შესაბამისი k-თვის, ქვედა ნიშანი კი — შემავალი რკალების შესაბამისი k-თვის, ხოლო $\Phi_0(z)$ აღნიშნავს ფუნქ-

[74] აქ დროებით გადავუხვევთ წესს, რომლის თანახმადაც პირველ ადგილზე იწერება რკალის საწყისი წერტილის აღმნიშვნელი ასო.

ციას, ჰოლომორფულს, c კვანძის მიდამოს L_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ რკალებით დაყოფით მიღებულ თითოეულ სექტორში და უწყვეტად გაგრძელებადს თითოეული სექტორიდან მის საზღვარზე c წერტილის მიდამოში (და თვით c წერტილზე); ამასთან $\Phi_0(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობანი ეკუთვნიან H კლასს სექტორის საზღვარზე c წერტილის მიდამოში. მოცემულ სექტორში $\ln(z-c)$ გამოსახულების ქვეშ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნებისმიერი შტო, რომელიც უწყვეტად იცვლება (გარდა თვით c წერტილისა).

c კვანძის მახლობლად L-ზე მდებარე $z=t_0$ წერტილებისათვის გვექნება სავსებით ანალოგიური ფორმულა

$$\Phi(t_0) = A \ln (t_0-c) + \Phi^*(t_0), \tag{26,14}$$

სადაც $\Phi^*(t_0)$ არის L-ზე t_0 წერტილის ფუნქცია, რომელიც c-ს მიდამოში ეკუთვნის H_0 კლასს, ე. ი.

$$\Phi^*(t_0) = \Phi_k^*(t_0) \quad L_k\text{-ზე}, \ k=1, 2, \ldots, n, \tag{26,15}$$

ამასთან, $\Phi_k^*(t_0)$ აკმაყოფილებს H პირობას L_k-ზე c ბოლოს მიდამოში; როცა t_0 L_k-ზეა $\ln(t_0-c)$ გამოსახულების ქვეშ იგულისხმება ლოგარითმის ნებისმიერი შტო, რომელიც უწყვეტად იცვლება L_k-ზე (გარდა c წერტილისა), ხოლო A-ს მნიშვნელობად — (26,13) ფორმულით განსაზღვრული მუდმივი.

განსაკუთრებით აღვნიშნოთ ერთი კერძო შემთხვევა. სახელდობრ, დავუშვათ, რომ $\varphi(t)$ c-ს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს (და არა მხოლოდ H_0-ს) და $\varphi(c)=0$. მაშინ, ზემოხსენებულის თანახმად, $\Phi(z)$ მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $z \to c$ ნებისმიერი გზით, ხოლო $\Phi(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე c-ს მიდამოში.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც (26,1) ფორმულაში, ისევე როგორც ზემოთ, L აღნიშნავს უბან-უბან გლუვ წირს, ხოლო $\varphi^*(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H^* კლასს მოცემული c კვანძის მახლობლად. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ c-ს მიდამოში ეს ფუნქცია წარმოდგენილია შემდეგი სახით (შეად. § 22):

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^\gamma}, \quad \gamma=\alpha+i\beta \neq 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{26,16}$$

სადაც $(t-c)^\gamma$-ს მნიშვნელობებად ცალკეულ $L_1, L_2, \ldots, L_n$ რკალებზე, რომლებიც იყრიან თავს c კვანძში, იგულისხმება ამ რკალებზე უწყვეტი (გარდა, შესაძლებელია, c წერტილისა, როცა $\alpha=0$) ნებისმიერი მნიშვნელობანი, ხოლო $\varphi^*(t)$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც c-ს მიდამოში ეკუთვნის H_0 კლასს. ამრიგად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) = \frac{\varphi_k^*(t)}{(t-c)^\gamma} \quad L_k\text{-ზე}, \quad k=1, 2, \ldots, n, \tag{26,17}$$

სადაც $\varphi_k^*(t)$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც მოცემულია L_k-ზე და L_k რკალის c ბოლოს მიდამოში ეკუთვნის H კლასს.

ზემოხსენებულის ანალოგიურად, თუ $\Phi(z)$ ფუნქციას წარმოვადგენთ (26,11) ჯამის სახით და თითოეული შესაკრების მიმართ გამოვიყენებთ 2^0 პუნქტში დადგენილ შედეგებს, ადვილად მივალთ შემდეგ დასკვნამდე. c კვანძის მიდამოში მდებარე z წერტილისათვის, რომელიც L-ს არ ეკუთვნის,

$$\Phi(z) = \frac{K}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0(z), \tag{26,18}$$

სადაც K მუდმივია, რომელსაც c კვანძის მიდამოს L წირით დაყოფილ სხვადასხვა სექტორში შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვა მნიშვნელობა, ხოლო $\Phi_0(z)$ არის ფუნქცია, ჰოლომორფული თითოეულ ამ სექტორში; როცა $\alpha=0$, იგი უწყვეტად გაგრძელებადია შესაბამისი სექტორის საზღვარზე c წერტილის მიდამოში (თვით ამ წერტილის ჩათვლით); როცა $\alpha>0$

$$\Phi_0(z) = \frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \text{const} < \alpha, \tag{26,19}$$

სადაც $\Phi_{00}(z)$ არის c-ს მახლობლად შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია შესაბამისი სექტორის საზღვარზე; ამასთან, ამ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობები ეკუთვნის H კლასს სექტორის საზღვარზე c წერტილის მიდამოში.

c კვანძის მახლობლად L-ზე მდებარე $z=t_0$ წერტილებისათვის

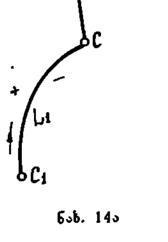
$$\Phi(t_0) = \frac{K_0}{(t_0-c)^{\gamma}} + \Phi^*(t_0), \tag{26,20}$$

სადაც K_0 მუდმივია, რომელსაც შესაძლებელია ჰქონდეს სხვადასხვა მნიშვნელობა სხვადასხვა L_k რკალისათვის, ხოლო $\Phi^*(t_0)$ აღნიშნავს L-ზე t_0 წერტილის ფუნქციას, რომელსაც შემდეგი თვისებები გააჩნია: როცა $\alpha=0$, $\Phi^*(t_0)$ ეკუთვნის H_0 კლასს c-ს მიდამოში; როცა $\alpha>0$,

$$\Phi^*(t_0) = \frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t-t_0|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \text{const} < \alpha, \tag{26,21}$$

სადაც $\Phi^{**}(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს c-ს მიდამოში.

ადვილად შეიძლება ამოიწეროს (26,18), (26,20) ფორმულებში მონაწილე K და K_0 მუდმივებისათვის ცხადი გამოსახულებანი, მაგრამ ზოგადი შემთხვევისათვის ამას არ გავაკეთებთ, ვინაიდან ხსენებული გამოსახულებანი არ დაგვჭირდება, და შემოვისაზღვრებით ერთი ტიპური მაგალითით, რომელიც შემდეგ პუნქტში იქნება განხილული.



ნახ. 14ა

4°. ზემოხსენებულის ნათელსაყოფად განვიხილოთ შემდეგი კერძო შემთხვევა: ვთქვათ, c კვანძში თავს იყრის მხოლოდ ორი გლუვი რკალი $L_1=c_1c$ და $L_2=cc_2$, ასე, რომ, ჩვენს შემთხვევაში კვანძი წარმოადგენს $L=L_1+L_2=c_1cc_2$ (ნახ. 14ა)[75] წირის ჩვეულებრივ კუთხურ წერტილს; $L_1 = c_1c$ და $L_2=cc_2$-ზე დადებით მიმართულებებს ჩავთვლით შერჩეულად მოყვანილი აღნიშვნების შესაბამისად. განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ძველ აღნიშვნებში

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \quad \gamma=\alpha+i\beta \neq 0,$$

[75] კერძოდ L_1 და L_2 რკალებს შეუძლიათ ერთმანეთი გლუვად გააგრძელონ, ასე რომ L რკალი შეიძლება იყოს გლუვი.

ამასთან,

$$\varphi^*(t)=\varphi_1^*(t) \quad L_1\text{-ზე}, \quad \varphi^*(t)=\varphi_2^*(t) \quad L_2\text{-ზე},$$

სადაც $\varphi_1^*(t)$ და $\varphi_2^*(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას შესაბამისად L_1-ზე და L_2-ზე c-ს მიდამოში. ამის გათვალისწინებით

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

სადაც

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}.$$

L წირი c წერტილის მიდამოს ჰყოფს ორ სექტორად, რომლებსაც σ^+ და σ^--ით აღვნიშნავთ და ვუწოდებთ შესაბამისად L-ის მარცხენა და მარჯვენა მიდამოებს (c-ს მახლობლად) იმის მიხედვით, თუ როგორი მდებარეობა უკავიათ მათ L-ზე შერჩეული დადებითი მიმართულების მიმართ.

იმისათვის, რომ $\Phi_1(z)$ და $\Phi_2(z)$-ის მიმართ გამოვიყენოთ 2° პუნქტში მოყვანილი ფორმულები, გარკვეული სახით უნდა დავაფიქსიროთ ამ ფორმულებში შემავალი მრავალსახა ფუნქციების შტოები. ყოველთვის მხედველობაში ვიქონიებთ c წერტილის მიდამოს და შემდეგნაირად მოვიქცევით:

$(t-c)^{\gamma}$-ში L_2-ზე ვიგულისხმებთ ნებისმიერად შერჩეულ მნიშვნელობას, რომელიც უწყვეტად იცვლება L_2-ზე (გარდა c წერტილისა, როცა $\alpha=0$). $(z-c)^{\gamma}$-თი, როგორც σ^+ სექტორში, ისევე σ^- სექტორში, აღვნიშნავთ L_2-ის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე ჰოლომორფულ შტოს, რომელიც L_2-ის მარცხენა მხარეს $(t-c)^{\gamma}$ მნიშვნელობას ღებულობს. $(t-c)^{\gamma}$-დ L_1-ზე ვიგულისხმებთ მნიშვნელობას, რომელსაც ღებულობს L_1-ზე ახლახან აღნიშნული $(z-c)^{\gamma}$ შტო. დროებით დაგვჭირდება კიდევ ამ უკანასკნელი ფუნქციის სხვა შტო, სახელდობრ, შტო, რომელიც ჰოლომორფულია L_1-ის გასწვრივ (და არა L_2-ის გასწვრივ) გაჭრილ სიბრტყეზე, და რომელიც L_1-ის მარცხენა მხარეს ღებულობს ზემოთ აღნიშნულ $(t-c)^{\gamma}$ მნიშვნელობას. ამ შტოს $[(z-c)^{\gamma}]^*$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. ადვილი დასანახავია, რომ

$$[(z-c)^{\gamma}]^* = (z-c)^{\gamma} \qquad \sigma^+ \text{ სექტორში},$$

$$[(z-c)^{\gamma}]^* = e^{-2\pi i\gamma}(z-c)^{\gamma} \quad \sigma^- \text{ სექტორში}.$$

ამის შემდეგ ადვილი დასაწერია საჭირო ფორმულები. სახელდობრ, (26,5) ფორმულის საფუძველზე გვექნება (აღნიშვნები გასაგებია):

$$\Phi_2(z) = \frac{e^{\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_2^*(c)}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0^{(2)}(z) \quad \sigma^+ \text{ და } \sigma^-\text{-ში},$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{[(z-c)^{\gamma}]^*} + \Phi_0^{(1)}(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0^{(1)}(z) \quad \sigma^+\text{-ში},$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{[(z-c)^{\gamma}]^*} + \Phi_0^{(1)}(z) = -\frac{e^{+\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0^{(1)}(z) \quad \sigma^-\text{-ში}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს ფორმულები

$$\Phi(z) = \frac{e^{\gamma\pi i}\varphi_2^*(c) - e^{-\gamma\pi i}\varphi_1^*(c)}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{1}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0(z) \quad L\text{-ის მარცხნივ}, \qquad (26,22)$$

$$\Phi(z) = \frac{e^{\gamma\pi i}\varphi_2^*(c) - e^{\gamma\pi i}\varphi_1^*(c)}{2i \sin \gamma\pi} \cdot \frac{1}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0(z) \quad L\text{-ის მარჯვნივ}, \tag{26,22}$$

სადაც $\Phi_0(z)$-ს შემდეგი თვისებები აქვს: როცა $\alpha = 0$, იგი უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L-ზე c-ს მიდამოში და მისი სასაზღვრო მნიშვნელობები ეკუთვნის H კლასს L-ზე ამ მიდამოში; როცა $\alpha > 0$

$$\Phi_0(z) = \frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \mathrm{const} < \alpha, \tag{26,23}$$

სადაც $\Phi_{00}(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L-ზე c-ს მიდამოში და მისი სასაზღვრო მნიშვნელობები ეკუთვნის H კლასს L-ზე ამ მიდამოში.

როცა t_0 L-ზეა, $\Phi(t_0)$-თვის ფორმულები ანალოგიური გზით შეიძლება მივიღოთ (26,8) ფორმულების საფუძველზე. მათი მიღება უფრო იოლად შეიძლება (26,22) ფორმულებიდან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2}\left[\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)\right].$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $[(t_0-c)^{\gamma}]^+ = [(t_0-c)^{\gamma}]^- = (t_0-c)^{\gamma}$ L_1-ზე, $[(t_0-c)^{\gamma}]^+ = (t_0-c)^{\gamma}$, $[(t_0-c)^{\gamma}]^- = e^{2\pi i\gamma}(t_0-c)^{\gamma}$ L_2-ზე, ადვილად მივიღებთ:

$$\Phi(t_0) = \left\{\frac{e^{\gamma\pi i}}{2i \sin \gamma\pi}\varphi_2^*(c) - \frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi_1^*(c)\right\}\frac{1}{(t_0-c)^{\gamma}} + \Phi^*(t_0) \quad L_1\text{-ზე},$$

$$\Phi(t_0) = \left\{\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi_2^*(c) - \frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i \sin \gamma\pi}\varphi_1^*(c)\right\}\frac{1}{(t_0-c)^{\gamma}} + \Phi^*(t_0) \quad L_2\text{-ზე}, \tag{26,24}$$

სადაც $\Phi^*(t_0)$ ეკუთვნის H_0 კლასს L-ზე c-ს მიდამოში, როცა $\alpha = 0$, ხოლო, როცა $\alpha > 0$

$$\Phi^*(t_0) = \frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \mathrm{const} < \alpha; \tag{26,25}$$

$\Phi^{**}(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე იმავე მიდამოში[78].

5°. ზემოხსენებული შედეგებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი დასკვნები.

ვთქვათ კოშის ტიპის ინტეგრალში

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},$$

სადაც L უბან-უბან გლუვი წირია, $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს L-ზე. მაშინ $\Phi(z)$ წარმოადგენს უსასრულობაში ქრობად უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას.

თუ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს L-ზე, მაშინ $\Phi(t_0)$-იც, როცა t_0 L-ზეა, ეკუთვნის იმავე კლასს. სხვანაირად, L-ზე მოცემული H^* ფუნქციათა კლასი ინვარიანტულია

[78] (26,22) და (26,24) ფორმულები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L_1 და L_2 რკალები ერთმანეთს გლუვად აგრძელებს (რაც არსებითი არ არის და გავლენას არ ახდენს ფორმულების სახეზე) მოცემული იყო დ. კვესელავას [1] შრომაში. ისინი გადმოცემულია ამ წიგნის პირველ რუსულ გამოცემაში. მეორე გამოცემაში შევსო დამტკიცებაში არსებული ხარვეზი.

$$\int_L \frac{(\ )\,dt}{t-t_0}$$

ოპერაციის მიმართ.

6°. დასასრულ, განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც სიმკვრივე დამოკიდებულია კიდევ რაიმე τ პარამეტრზე, რომელიც რაიმე T სიმრავლეზე იცვლება. სახელდობრ, განვიხილოთ კოშის ტიპის ინტეგრალი

$$\Phi(z,\ \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t,\ \tau)\,dt}{t-z}, \tag{26,26}$$

სადაც L აღნიშნავს უბან-უბან გლუვ წირს, ხოლო $\varphi(t,\ \tau)$ ფუნქცია, როცა $t\in L$, $\tau\in T$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: მოცემული c კვანძის მიდამოს t წერტილისათვის

$$\varphi(t,\ \tau)=\frac{\varphi^*(t,\ \tau)}{(t-c)^\gamma},\qquad \gamma=\alpha+i\beta, \tag{26,27}$$

სადაც α და β არის მუდმივებია, $0<\alpha<1$, ხოლო $\varphi^*(t,\ \tau)$ t ცვლადის მიმართ c-ს მიდამოში ეკუთვნის H_0 კლასს და აკმაყოფილებს H პირობას τ ცვლადის მიმართ; t-ს დანარჩენი მნიშვნელობებისათვის კი გვაქვს უტოლობა

$$|\varphi(t,\ \tau+h)-\varphi(t,\ \tau)|\leqslant A(t)\,|h|^\mu,\quad \mu=\text{const}>0, \tag{26,28}$$

სადაც $A(t)$ არის გარკვეული დადებითი L-ზე ინტეგრებადი ფუნქცია.

მაშინ c-სთან საკმაოდ ახლო მდებარე t_0 წერტილებისათვის L-ზე $\Omega(t_0,\ \tau)=(t_0-c)^\gamma\,\Phi(t_0,\ \tau)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს t_0 ცვლადის მიმართ და აკმაყოფილებს H პირობას τ ცვლადის მიმართ.

t_0 ცვლადის მიმართ ეს დებულება შეიძლება დამტკიცებულად ჩავთვალოთ 3° პუნქტის შედეგების საფუძველზე.

გვრჩება დავამტკიცოთ დებულების მართებულობა τ პარამეტრის მიმართ. ამ ნაწილშიაც დებულება დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L შედგება ერთადერთი გლუვი ab რკალისაგან (§ 25, პ. 2°). აღნიშნულ კერძო შემთხვევის მიმართ § 25-ში ნათქვამს დავამატოთ შემდეგი შენიშვნა. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $c=a$-ს და რომ $\varphi^*(t,\ \tau)$ t ცვლადის მიმართ ეკუთვნის H კლასს მთელ ab რკალზე, და

$$\Omega(z,\ \tau)=(z-a)^\gamma\,\Phi(z,\ \tau)$$

ფუნქციასთან ერთად განვიხილოთ

$$\Psi(z,\ \tau)=(z-b)^{1-\gamma}(z-a)^\gamma\,\Phi(z,\ \tau)$$

ფუნქცია; $(z-b)^{1-\gamma}$ მამრავლი იმისათვის შემოგვაქვს, რომ საქმე გვქონდეს ცალსახა ფუნქციებთან ab-ს გასწვრივ გაჭრილ მთელ სიბრტყეზე; ვინაიდან ეს მამრავლი a წერტილის მიდამოში ჰოლომორფულ და ნულისაგან განსხვავებულ ფუნქციას წარმოადგენს, ამიტომ იგი, ჩვენთვის საინტერესო თვალსაზრისით, განსახილავ ფუნქციათა ყოფაქცევაზე არავითარ გავლენას არ მოახდენს. თუ შევნიშნავთ, რომ $1-\alpha>0$, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\Psi(z,\ \tau)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან ab რკალის ყველა წერტილზე და აგრეთვე მის ბოლოებზე.

შემდეგ VI დებულების (§ 22, პ. 5^0) საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ, როცა t_0 L-ზეა და $\tau,\ \tau+h \in T$,

$$|\Psi^{\pm}(t_0, \tau+h)-\Psi^{\pm}(t_0, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu}, \quad \mu=\text{const}>0,$$

ამასთან, ერთდროულად აიღება ზედა ან ქვედა ნიშანი და $t_0=a$ ან $t_0=b$ შემთხვევა არ გამოირიცხება; ამ შემთხვევაში $\Psi^{\pm}(a, \tau)$-ში საჭიროა ვიგულისხმოთ $\Psi(a, \tau)$ (ანალოგიურად სხვა სიმბოლოებისათვის). ახლა, თუ Γ აღნიშნავს რომელიმე მარტივ შეკრულ კონტურს, რომელიც ab-ს მოიცავს და მისგან დადებით მანძილზეა, მაშინ, ცხადია, ამ კონტურის t_0 წერტილებისათვის გვექნება

$$|\Psi(t_0, \tau+h)-\Psi(t_0, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu},$$

ამასთან შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ უკანასკნელ ორივე უტოლობაში μ ერთსა და იგივეს აღნიშნავს. თუ ახლა Γ კონტურით შემოსაზღვრულ და ab რკალის გასწვრივ გაჭრილ არისათვის გამოვიყენებთ თეორემას მოდულის მაქსიმუმის შესახებ, ადვილად დავრწმუნდებით

$$|\Psi(z, \tau+h)-\Psi(z, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu}$$

უტოლობის მართებულობაში ამ არის ყველა z წერტილისათვის, კერძოდ ყველა z წერტილისათვის, რომლებიც a წერტილის მიდამოს ეკუთვნის. აქედან, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ ყველა z წერტილისათვის, რომლებიც a ბოლოს მიდამოს ეკუთვნიან, გვექნება:

$$|\Omega(z, \tau+h)-\Omega(z, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu}, \quad \tau \in T,\ \tau+h \in T,\ \mu=\text{const}>0,$$

კერძოდ, ab-ს გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეზე a-დან გავლებული ნებისმიერი გლუვი aa' რკალის ყველა წერტილისათვის, რომლებიც საკმაოდ ახლოსაა a-თან.

ამ შენიშვნის შემდეგ ჩვენთვის საინტერესო დებულების დამტკიცება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. აქაც, როგორც 3^0 პუნქტში, საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა L შედგება გლუვი $L_1, L_2, \ldots, L_n$ რკალებისაგან, რომლებიც c კვანძში იყრიან თავს. თუ $\Phi(z, \tau)$ ინტეგრალს შესაბამისად $L_1\ L_2, \ldots, L_n$ რკალების გასწვრივ აღებული ინტეგრალების ჯამად წარმოვადგენთ და თითოეული შესაკრების მიმართ გამოვიყენებთ ზემოთ აღნიშნულ შედეგებს, მივალთ საჭირო დასკვნამდე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ გამოვრიცხეთ შემთხვევა, როდესაც (26,27) ფორმულაში $\alpha=0$. თუ $\alpha=0$ (კერძოდ, თუ $\gamma=0$), მაშინ, როგორც ადვილი დასანახავია, ზემოთქმულის საფუძველზე, $|t_0-c|^{\varepsilon}\,\Phi(t_0, \tau)$ ფუნქცია, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი სიდიდეა, c-თან საკმარისად ახლოს მდებარე t_0-თვის, ეკუთვნის H კლასს t_0 ცვლადის მიმართ და აკმაყოფილებს H პირობას τ ცვლადის მიმართ.

კერძოდ, თუ $\varphi^*(t, \tau)$ ეკუთვნის H კლასს t ცვლადის მიმართ c-ს მიდამოში და თუ, გარდა ამისა, $\varphi^*(c, \tau)=0$ ყოველი $\tau \in T$, მაშინ $\Phi(t_0, \tau)$ ეკუთვნის H კლასს t_0 ცვლადის მიმართ c-ს მიდამოში და აკმაყოფილებს H პირობას $\tau \in T$ ცვლადის მიმართ. ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია ჩავატაროთ იგივე მსჯელობები, რაც $\alpha>0$ შემთხვევისათვის, ოღონდ $\Psi(z, \tau)$ ფუნქციის ნაცვლად განვიხილოთ $(z-c)\times$ $\times\Phi(z, \tau)$ ფუნქცია.

§ 27. მოკლე ცნობები ზოგიერთი განზოგადების შესახებ.

ამ წიგნში კოშის ტიპის ინტეგრალებს განვიხილავთ მხოლოდ იმ დაშვებით, რომ საინტეგრაციო წირი გლუვი ან უბან-უბან გლუვია, ხოლო $\varphi(t)$ სიმკვრივე ეკუთვნის H კლასს ან უფრო ზოგად შემთხვევაში H^* კლასს.

მაგრამ მაინც აქ მოვიყვანთ ზოგიერთ მოკლე ცნობას, რომელიც ეხება კოშის ტიპის ინტეგრალებს სხვაგვარ დაშვებებში.

წინა პარაგრაფებში გადმოცემული შედეგები შეიძლება განზოგადდეს შემდეგი ორი ძირითადი მიმართულებით.

ჯერ ერთი, $\varphi(t)$ სიმკვრივის ნაცვლად, რომელიც ეკუთვნის H^* კლასს L-ზე, შეიძლება განვიხილოთ სიმკვრივე, რომელიც აკმაყოფილებს ანალოგიურს, მაგრამ უფრო ზოგად პირობას, ოღონდ ისეთს, რომ ამ უფრო ზოგადი პირობისათვის შენარჩუნებული იყოს უცვლელად ან თითქმის უცვლელად ზემოთ დამტკიცებული უმარტივესი ძირითადი დებულებანი.

მეორე მხრივ, შეიძლება ნაწილობრივ უარი ვთქვათ ზემოთ ხსენებულ დებულებების უცვლელად შენარჩუნებაზე და შევისწავლოთ კოშის ტიპის ინტეგრალი რაც შეიძლება ზოგად დაშვებებში საინტეგრაციო L წირისა და $\varphi(t)$ სიმკვრივის მიმართ.

ცხადია, მიმართულებათა ასეთი დაყოფა მხოლოდ პირობითია და ბევრი შედეგი შეიძლება მიეკუთვნოს შუალედურ მიმართულებებს.

ზოგიერთი ქვემოთ მოყვანილი შედეგი მათი ავტორების მიერ მიღებულია ფურიეს მწკრივთა თეორიასთან დაკავშირებით და შეეხება

$$\Psi(\vartheta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta \tag{27,1}$$

სახის ინტეგრალებს, სადაც ϑ, ϑ_0 ნამდვილი ცვლადებია, რომლებიც $[0,2\pi]$ ინტერვალს მიეკუთვნებიან, ხოლო ინტეგრალი გაგებულია კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით; $\psi(\vartheta)$ ითვლება უწყვეტად, თუ იგი უწყვეტია ამ ინტერვალში და გარდა ამისა, $\psi(2\pi)=\psi(0)$. ადვილი დასანახავია, რომ $\Psi(\vartheta_0)$ ინტეგრალი მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდება

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{27,2}$$

კოშის ტიპის ინტეგრალისაგან, იმ შემთხვევაში, როდესაც L ერთეულრადიუსიანი წრეწირია ცენტრით 0-ში და $z=t_0$ L-ზეა; ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია დავუშვათ $t=e^{i\vartheta}$, $t_0=e^{i\vartheta_0}$, $\varphi(t)=\psi(\vartheta)$ (იხ. ქვემოთ, § 33-ის დასაწყისი).

იმ ნაშრომთა შორის, რომლებიც შეიძლება მივაკუთვნოთ ზემოთ აღნიშნულიდან პირველ მიმართულებას, საჭიროა დავასახელოთ ა. ზიგმუნდის (A. Zygmund [1]) შრომა, რომელშიაც განხილულია (27,1) სახის ინტეგრალები. ავტორს შემოჰყავს ფუნქციათა ზოგიერთი კლასი, რამდენადმე უფრო ზოგადი, ვიდრე კლასი ფუნქციებისა, რომლებიც H პირობას აკმაყოფილებენ, და ამტკიცებს, რომ თუ $\psi(\vartheta)$ ეკუთვნის ამ კლასთაგან ერთ-ერთს, მაშინ ადგილი აქვს § 18, პ. 2°-ში დამტკიცებული დებულების ანალოგიურ დებულებას.

ეს შედეგები განზოგადებული იყო ლ. მაღნარაძის [4], [8][77] მიერ (27,2) სახის ინტეგრალისათვის იმ დაშვებით, რომ L არის გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირი, რომელიც გარკვეულ პირობებს ექვემდებარება. გარდა ამისა, მან შემოიყვანა (27,2) ინტეგრალში მონაწილე $\varphi(t)$ ფუნქციათა გარკვეული ახალი კლასები, რომლებსაც

[77] იხ. აგრეთვე ი. გერონიმუსი [2].

ზემოთ აღნიშნული თვისებების ანალოგიური თვისებები გააჩნიათ. ამან მას საშუალება მისცა რამდენადმე განეზოგადებინა §§ 16, 18, 21-ში მიღებული შედეგები.

ამ შედეგების განვითარება მოცემულია ა. ბაბაევის [1]—[3], ა. ბაბაევისა და ვ. სალაევის [1], უ-სიუ-მოუს [1], ლ. მაღნარაძის [9] შრომებში.

§§ 16 და 18-ში მოყვანილი შედეგების ზოგიერთი განზოგადება მოცემულია ნ. დავიდოვის [1] მიერ.

მ. გაკუამ [1] და ი. გერონიმუსმა [3], [4] რამდენადმე განაზოგადეს § 21-ში მიღებული შედეგები.

იმ შემთხვევაში, როდესაც L წარმოადგენს გლუვ კონტურთა თვლად რაოდენობას, (27,2) ინტეგრალის მთელი რიგი თვისებებისა დადგენილია ი. ქარცივაძისა და ბ. ხვედელიძის [2] შრომაში.

იმ შედეგების გადმოსაცემად, რომლებიც შეიძლება მეორე მიმართულებას მივაკუთვნოთ, ჯერ შევთანხმდეთ შემდეგში:

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე E სიმრავლეზე, ზომადია ამ სიმრავლეზე და $|f(x)|^p$ ჯამებადია, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}_p(E)$ კლასს. თუკი $|f(x)|^p$-ს ნაცვლად L-ზე ჯამებადია $\rho(x)|f(x)|^p$ ფუნქცია, სადაც $\rho(x)$ E-ზე განსაზღვრული რაიმე არაუარყოფითი ფუნქციაა, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}_p(\rho; E)$ კლასს. ამასთან $\mathbf{L}_1(E)$ და $\mathbf{L}_1(\rho; E)$ კლასებს უბრალოდ $\mathbf{L}(E)$ და $\mathbf{L}(\rho; E)$-თი აღვნიშნავთ.

ნ. ლუზინმა [1] აჩვენა, რომ, თუ (27,1) ფორმულაში $\psi(\vartheta)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}_2([0,2\pi])$ კლასს, მაშინ $\Psi(\vartheta)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}_2([0,2\pi])$ კლასს. მ. რისმა (M. Riesz [1]) მოგვცა ამ შედეგის მნიშვნელოვანი განზოგადება. მან დაამტკიცა, თუ $\psi(\vartheta)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}_p([0,2\pi])$ კლასს, სადაც $p=\text{const}>1$, მაშინ $\Psi(\vartheta)$ აგრეთვე ეკუთვნის იმავე $\mathbf{L}_p([0,2\pi])$ კლასს. ეს შედეგები ადვილად გადაიტანება (27,2) სახის ინტეგრალების შემთხვევისათვის, როცა საინტეგრაციო L წირი ეკუთვნის გლუვ წირთა ზოგიერთ ქვეკლასებს (იხ. ს. მიხლინი [7], ბ. ხვედელიძე [18]). ანალოგიური შედეგები ზოგიერთი არაგლუვი წირებისათვის მიღებულია ა. ჯვარშეიშვილის [1] ნაშრომში.

მ. რისის ზემოთ აღნიშნული შედეგი ზოგადდება p ხარისხში რაიმე წონით ჯამებად ფუნქციებისათვის (იხ. G. Hardy and I. Littlewood [1], ნ. ახიეზერი [1], კ. ბაბენკო [1], K. Nickel [1], ბ. ხვედელიძე [18], ვ. გაპოშკინი [1], ი. სიმონენკო [5]). ამ შედეგებიდან აქ მოვიყვანთ იმას, რომლის ხსენებაც არაერთხელ მოგვიხდება.

ვთქვათ (27,2) ფორმულაში ინტეგრების L გზა არის სასრული სიგრძის ლიაპუნოვის[78] შეკრული ან გახსნილი წირი. ვთქვათ, გარდა ამისა,

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{m_1}|t-c_k|^{\alpha_k(p-1)}\prod_{k=m_1+1}^{m}|t-c_k|^{-\alpha_k}, \tag{27,3}$$

სადაც $0\leqslant m_1\leqslant m$, $0\leqslant\alpha_k<1$, $c_k\in L$, $k=1, 2, \ldots, m$, $p=\text{const}>1$. მაშინ თუ (27,2) ფორმულაში $\varphi(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $\mathbf{L}_p(\rho; L)$ კლასს, $\Phi(t_0)$ ფუნქციაც, სადაც $t_0\in L$, აგრეთვე ეკუთვნის $\mathbf{L}_p(\rho; L)$ კლასს (იხ. ბ. ხვედელიძე [18]).

თუ (27,1) ფორმულაში $\psi(\vartheta)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}([0,2\pi])$ კლასს, მაშინ $\Psi(\vartheta_0)$ ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრული იქნება (ი. პრივალოვი [2]), მაგრამ შეიძლება არ

[78] იხ. § 7, პ. 30.

იყოს ჯამებადი (ნ. ლუზინი [1]). ა. კოლმოგოროვმა [1] აჩვენა, რომ ამ შემთხვევაში $\Psi(t_0)$ ეკუთვნის $L_p([0,2\pi])$ კლასს ყველა p-თვის, $0<p<1$. ა. კოლმოგოროვმა აჩვენა აგრეთვე, რომ თუ $\psi(\vartheta)$ ეკუთვნის $L([0,2\pi])$ კლასს, მაშინ $\Psi(\vartheta_0)$ ინტეგრებადია დანჟუას B ინტეგრალის აზრით[79]. ე. ტიტჩმარშმა (E. Titchmarsh [1]) აჩვენა, რომ თუ $\psi(\vartheta)$ ეკუთვნის $L([0,2\pi])$ კლასს, მაშინ $\Psi(\vartheta_0)$ წარმოადგენს A-ინტეგრებადს[80]. ამ უკანასკნელი ინტეგრალის ცნება პ. ულიანოვმა [1]—[4] წარმატებით გამოიყენა კოშის და კოშის ტიპის ინტეგრალებთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხის შესასწავლად. ასე, მაგალითად, მის მიერ დამტკიცებულია (პ. ულიანოვი [3]), რომ თუ ფუნქცია წარმოდგენადია ჯამებადი სიმკვრივის მქონე კოშის ტიპის ინტეგრალით, იგი წარმოდგენადია აგრეთვე კოშის A-ინტეგრალით.

ამ შედეგების შემდგომი განვითარება შეიძლება ნახოთ ა. ჯვარშეიშვილის [1], [3] და გ. ხუსკივაძის [1]—[4] ნაშრომებში.

ე. გოლუბევს [1] ეკუთვნის § 17-ში გადმოცემული შედეგის განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L წირი წრფევადია, ხოლო $\varphi(t)$ ეკუთვნის $L(L)$ კლასს.

ი. პრივალოვმა [2], [7] დაამტკიცა, რომ თუ (27,2) ფორმულაში ინტეგრების L გზა მარტივი წრფევადი წირია, რომელიც შედგება სასრული რაოდენობის გარკვეული ამოზნექილობის მქონე წირებისაგან და $\varphi(t)$ ეკუთვნის $L(L)$ კლასს, მაშინ თითქმის ყველგან ადგილი აქვს სოხოცკი—პლემელის (16,2) ფორმულებს, როცა z მიისწრაფვის L-ის t_0 წერტილისაკენ ნებისმიერი არამხები გზით. ეს შედეგი ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიაც, როცა L ლიაპუნოვის წირია (იხ. ბ. ხვედელიძე [18]) და აგრეთვე რამდენადმე უფრო ზოგადი წირებისათვის (იხ. ა. ჯვარშეიშვილი [1], გ. ხუსკივაძე [4], ვ. ხავინი [1], გ. ტუმარკინი [2], ე. გორდაძე [1]).

ვ. სმირნოვმა [1], [2], [3] დაადგინა მთელი რიგი მნიშვნელოვანი თვისება კოშის ტიპის ინტეგრალებისა, რომელთა სიმკვრივეები ეკუთვნის ჯამებად ფუნქციათა სხვადასხვა კლასს. ამ შედეგების ნაწილი გადმოცემულია ი. პრივალოვის [7] წიგნში. ამ წიგნში შეკრებილია ძირითადი ცნობილი შედეგები, რომლებიც ეხებიან ჯამებადი სიმკვრივიან კოშის ტიპის ინტეგრალებს (ასე, მაგალითად, გარდა ზემოთ ხსენებული ავტორების შედეგებისა, ამ წიგნში გადმოცემულია პ. ფატუს, ფ. და მ. რისების, ფ. და რ. ნევანლინების, მ. კელდიშისა და მ. ლავრენტიევის [1], მ. ლავრენტიევის [1], [3], გ. ფიხტენგოლცის [1], გ. გოლუზინის და ვ. კრილოვის [1], ა. მარკუშევიჩის [2] და სხვათა სათანადო შედეგები).

ბ. ხვედელიძემ [18] შეისწავლა ზოგიერთი თვისება კოშის ტიპის ინტეგრალებისა, რომელთა სიმკვრივე ეკუთვნის $L_p(\rho; L)$ კლასს, სადაც $p>1$, ხოლო $\rho(t)$ არის (27,3) სახის ფუნქცია. ამ თვისებებიდან აღვნიშნოთ შემდეგი: თუ $\Phi_1(z)$ და $\Phi_2(z)$ კოშის ტიპის ინტეგრალებია, რომელთა სიმკვრივეები შესაბამისად $L_p(\rho; L)$ და $L_q(\rho^{1-q}; L)$ კლასებს ეკუთვნის, სადაც $p>1$, $q=p/p-1$, მაშინ $\Phi_1(z)\,\Phi_2(z)$ ნამრავლი ჯამებად სიმკვრივიანი კოშის ტიპის ინტეგრალითაა წარმოდგენადი.

ი. პრივალოვის [5], [7] მიერ შესწავლილია კოში—სტილტესის ტიპის ინტეგრალის სასაზღვრო თვისებები. ანალიზური ფუნქციის კოში—სტილტესის ინტეგრალით წარმოდგენადობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მიღებულია გ. ტუმარკინის [1] მიერ.

[79] დანჟუას B ინტეგრალის განსაზღვრა იხ., მაგალითად, A. Zigmund [2], ტ. I, რუსული გამოცემის გვ. 417.

[80] A-ინტეგრებადობის განსაზღვრა იხ., მაგალითად, ნ. ბარი [1], გვ. 585.

დასასრულ, შევნიშნოთ, რომ თ. გეგელიამ [1], [2] შეისწავლა კოშის ტიპის ინტეგრალების ძირითადი თვისებები საკმაოდ ზოგადი სახის არაგლუვი წირებისათვის. იხ., აგრეთვე, ა. ალექსეევი [1], [2], ა. ბაბაევი [1]—[3], ა. ბაბაევი და ვ. სალაევი [1].

III. ზოგიერთი უშუალო გამოყენება

ამ კარში გადმოვცემთ სხვადასხვა შედეგს, რომლებიც თითქმის უშუალოდ გამომდინარეობს ზემოხსენებულიდან და, რომლებითაც (§ 33-ის შედეგების გამოკლებით) შემდეგში ვისარგებლებთ.

§ 28. პუანკარე—ბერტრანის გადასმის ფორმულა[81]. 1^0. ვთქვათ L უბან-უბან გლუვი წირია $c_1, c_2, \ldots, c_n$ კვანძებით და, ვთქვათ $\varphi(t, t_1)$ ამ წირის ორი t, t_1 წერტილის ფუნქციაა, რომელიც შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$\varphi(t, t_1) = \frac{\varphi^*(t, t_1)}{\Pi(t, t_1)}, \tag{*}$$

სადაც $\varphi^*(t, t_1)$ აღნიშნავს H_0 კლასის ფუნქციას L-ზე, ხოლო

$$\Pi(t, t_1) = \prod_{k=1}^{n} |t - c_k|^{\alpha_k} |t_1 - c_k|^{\beta_k}, \tag{**}$$

ამასთან α_k, β_k აღნიშნავენ არაუარყოფით მუდმივებს, რომლებიც ექვემდებარებიან პირობას

$$\alpha_k + \beta_k < 1. \tag{***}$$

ვთქვათ t_0 კ ვ ა ნ ძ ე ბ ი ს ა გ ა ნ გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი ფიქსირებული წერტილია L-ზე. განვიხილოთ განმეორებითი ინტეგრალები

$$A = \int_L \frac{dt}{t - t_0} \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt_1}{t_1 - t}, \quad B = \int_L dt_1 \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{(t - t_0)(t_1 - t)}, \tag{28,1}$$

რომლებიც მხოლოდ ინტეგრების რიგით განსხვავდებიან. ორივე ინტეგრალს აზრი აქვს. მართლაც, ფუნქცია

$$\chi(t) = \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt_1}{t_1 - t} \tag{28,2}$$

აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე, გარდა შესაძლოა, კვანძების მიდამოებისა (§ 18, პ. 4^0); კვანძების მიდამოებში კი, როგორც ადვილი შესამოწმებელია § 26-ის 3^0 პუნქტის საფუძველზე, $\varphi(t, t_1)$-ის მიმართ მოთხოვნილ პირობებში გვექნება

---

[81] ამ ფორმულით ჩვენ ვისარგებლებთ მხოლოდ II და VI თავებში იმ შემთხვევისათვის, როცა L შედგება გლუვი შეკრული კონტურებისაგან და, თუ არ ჩავთვლით ზოგიერთ ადგილს, რომელთა გამოტოვება ხელს არ შეუშლის დანარჩენის გაგებას, როცა $\varphi(t, t_1)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე ცვლადის მიმართ L-ზე. ამიტომ მკითხველს შეუძლია დამტკიცება ჩაატაროს აღნიშნულ დაშვებებში (ამ შემთხვევაში $\Pi(t, t_1) = 1$); მაშინ საჭირო არ იქნება § § 22—26 შედეგებით სარგებლობა.

$$|\chi(t)| < \frac{\text{const}}{|t-c|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1$$[82].

ამიტომ ინტეგრალს

$$A = \int_L \frac{\chi(t)\, dt}{t - t_0} \tag{28,3}$$

აქვს სავსებით გარკვეული აზრი (ვინაიდან t_0 განსხვავებულია კვანძებისაგან). გვაქვს

$$B = \int_L \frac{dt_1}{t_1 - t_0} \int_L \left\{ \frac{1}{t - t_0} - \frac{1}{t - t_1} \right\} \varphi(t, t_1) dt = \int_L \frac{\omega(t_0, t_1) - \omega(t_1, t_1)}{t_1 - t_0} dt_1, \tag{28,4}$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა

$$\omega(t_0, t_1) = \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{t - t_0}, \quad \omega(t_1, t_1) = \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{t - t_1}. \tag{28,5}$$

შეფარდება

$$\frac{\omega(t_0, t_1) - \omega(t_1, t_1)}{t_1 - t_0} = \Omega(t_0, t_1), \tag{28,6}$$

განხილული როგორც t_1 წერტილის ფუნქცია, არაა უწყვეტი მხოლოდ t_0 წერტილის მიდამოში და c კვანძების მიდამოში.

t_0 წერტილის მიდამოში გვექნება:

$$|\Omega(t_0, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - t_0|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1,$$

ვინაიდან ამ მიდამოში $\omega(t_0, t_1)$ და $\omega(t_1, t_1)$ აკმაყოფილებს H პირობას და მათი სხვაობა ნულად იქცევა, როცა $t_1 = t_0$.

c კვანძების მიდამოებში კი, როგორც ადვილი შესამოწმებელია § 26-ის შედეგების საფუძველზე, $\varphi(t, t_1)$-ის მიმართ მოთხოვნილი პირობების გამო გვექნება

$$|\omega(t_0, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - c|^{\nu}}, \quad |\omega(t_1, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - c|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1$$[83],

და, მაშასადამე, c კვანძების მიდამოებში (ნუ დავივიწყებთ, რომ t_0 წერტილი განსხვავებულია კვანძებისაგან)

$$|\Omega(t_0, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - c|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1.$$

ამიტომ B ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრითაც კი არსებობს.

მაგრამ, საზოგადოდ, A და B ინტეგრალები არ არის ერთმანეთის ტოლი, სახელდობრ, ადგილი აქვს პუანკარე—ბერტრანის შემდეგ მეტად მნიშვნელოვან ფორმულას:

---

[82] სახელდობრ. $c = c_k$-თვის შეიძლება ჩავთვალოთ $\nu = \alpha_k + \beta_h + \varepsilon$, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი მუდმივია.

[83] შდრ. წინა სქოლიო.

$$\int\limits_L \frac{dt}{t-t_0} \int\limits_L \frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt_1}{t_1-t} = -\pi^2\varphi(t_0,\ t_0) + \int\limits_L dt_1 \int\limits_L \frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt}{(t-t_0)\,(t_1-t)}. \qquad (28,7)$$

მოვიყვანოთ ამ ფორმულის შემდეგი მარტივი დამტკიცება. დავუშვათ

$$\Phi(z) = \int\limits_L \frac{dt}{t-z} \int\limits_L \frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt_1}{t_1-t}, \quad \Psi(z) = \int\limits_L dt_1 \int\limits_L \frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt}{(t-z)\,(t_1-t)}, \qquad (28,8)$$

სადაც z სიბრტყის წერტილია, რომელიც L-ზე არ ძევს.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ განმეორებით ინტეგრალებში ინტეგრების რიგის შეცვლა უკვე დასაშვებია იმის გამო, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ერთ-ერთი განსაკუთრებულობა (სახელდობრ, როცა $t = t_0$) აცილებულია. ეს ჯერ დაუმტკიცებლად მივიღოთ[84], ასე რომ ჩავთვლით

$$\Phi(z) = \Psi(z), \qquad (28,9)$$

$\Phi(z)$ და $\Psi(z)$ ფუნქციები დაკავშირებულია A და B ინტეგრალებთან. სახელდობრ, სოხოცკი—პლემელის (16,4) ფორმულების საფუძველზე

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = 2\int\limits_L \frac{dt}{t-t_0} \int\limits_L \frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt_1}{t_1-t}. \qquad (28,10)$$

გვაქვს

$$\Psi(z) = \int\limits_L \frac{\psi(t_1,\ z)\,dt_1}{t_1-z}, \qquad (28,11)$$

სადაც

$$\psi(t_1,\ z) = \int\limits_L \left\{\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-t_1}\right\} \varphi(t,\ t_1)\,dt. \qquad (28,12)$$

$\psi(t_1,\ z)$ ფუნქციის ზღვრები, როცა $z \to t_0$ L-ის მარცხნიდან და მარჯვნიდან აღვნიშნოთ $\psi^+(t_1, t_0)$, $\psi^-(t_1, t_0)$-ით. სოხოცკი—პლემელის (16,3), (16,4) ფორმულების თანახმად გვაქვს:

$$\psi^+(t_1,\ t_0) - \psi^-(t_1,\ t_0) = 2\pi i\varphi(t_0,\ t_1),$$

$$\psi^+(t_1,\ t_0) + \psi^-(t_1,\ t_0) = 2\int\limits_L \left\{\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-t_1}\right\} \varphi(t,\ t_1)\,dt =$$

$$= 2(t_1-t_0)\int\limits_L \frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt}{(t-t_0)\,(t_1-t)}. \qquad (28,13)$$

გარდა ამისა,

$$\left.\begin{aligned} \psi(t_1,\ z) &= \psi^+(t_1,\ t_0) + \varepsilon^+ \ (\text{თუ } z\ L\text{-ის მარცხნივაა}), \\ \psi(t_1,\ z) &= \psi^-(t_1,\ t_0) + \varepsilon^- \ (\text{თუ } z\ L\text{-ის მარჯვნივაა}), \end{aligned}\right\} \qquad (28,14)$$

სადაც $\varepsilon^+ \to 0$, $\varepsilon^- \to 0$, როცა $z \to t_0$. ქვემოთ დავამტკიცებთ (3^0 პუნქტში), რომ

[84] დამტკიცება მოცემული იქნება ქვემოთ, 2^0 პუნქტში.

$$\int\limits_L \frac{\varepsilon^+ dt_1}{t_1 - z} \to 0, \qquad \int\limits_L \frac{\varepsilon^- dt_1}{t_1 - z} \to 0 \tag{28,15}$$

როცა $z \to t_0$ წირის გასწვრივ, რომელიც t_0-ზე მხებთან ადგენს არანულოვან კუთხეს. თუ (28,11)-ში $\psi(t_1, z)$-ს შევცვლით (28,14) გამოსახულებებით, მივიღებთ მხედველობაში (28,15)-ს და გამოვიყენებთ სოხოცკი—პლემელის ფორმულებს, გვექნება:

$$\Psi^+(t_0) = \pi i \psi^+(t_0, t_0) + \int\limits_L \frac{\psi^+(t_1, t_0)\, dt_1}{t_1 - t_0},$$

$$\Psi^-(t_0) = -\pi i \psi^-(t_0, t_0) + \int\limits_L \frac{\psi^-(t_1, t_0)\, dt_1}{t_1 - t_0},$$

საიდანაც, თუ მივიღებთ მხედველობაში (28,13)-ს,

$$\Psi^+(t_0) + \Psi^-(t_0) = -2\pi^2 \varphi(t_0, t_0) + 2 \int\limits_L dt_1 \int\limits_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{(t - t_0)(t_1 - t)}. \tag{28,16}$$

მაგრამ (28,9)-ის გამო (28,10) და (28,16)-ში მარცხენა მხარეები ტოლია. თუკი შევადარებთ მარჯვენა მხარეებს, მივიღებთ საჭირო (28,7) ფორმულას.

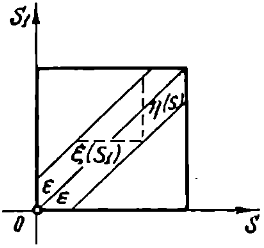
2°. ახლა დავამტკიცოთ მართებულობა (28,9) ტოლობის, რომლითაც ზემოთ ვისარგებლეთ. იმისათვის, რომ არ გავართულოთ აღნიშვნები, დამტკიცებას ჩავატარებთ იმ დაშვებით, რომ $L = ab$ მარტივი გლუვი რკალია, ხოლო შემდეგ მივუთითებთ, თუ როგორ განზოგადდება ეს დამტკიცება ნებისმიერ უბან-უბან გლუვი წირის შემთხვევისათვის.

მეტი თვალსაჩინოებისათვის t, t_1 წერტილების მდებარეობას L-ზე განვსაზღვრავთ a წერტილიდან ათვლილ s, s_1 რკალური აბსცისებით, ისე რომ, $0 \leqslant s \leqslant l$, $0 \leqslant s_1 \leqslant l$, სადაც l არის ab რკალის სიგრძე და s და s_1-ს განვიხილავთ როგორც მართკუთხა კოორდინატებს დამხმარე Oss_1 სიბრტყეზე. ამ სიბრტყეზე (s, s_1) წერტილის ცვლილების არეა Q კვადრატი, რომლის გვერდი l-ის ტოლია (ნახ. 15).

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების

$$\frac{\varphi(t, t_1)}{(t - z)(t_1 - t)} \tag{28,17}$$

განსაკუთრებულობანი, 1° პუნქტის (*), (**) ფორმულების თანახმად (ამ ფორმულებში ახლა $n = 2$, $c_1 = a$, $c_2 = b$), Q კვადრატის $s = s_1$ დიაგონალზე და აგრეთვე მის გვერდებზეა თავმოყრილი.



ნახ. 15

Q-დან ამოვჭრათ q ზოლი $s_1 = s \pm \varepsilon$ წრფეებით, სადაც ε საკმაოდ მცირე დადებითი სიდიდეა (ნახ. 15). ადვილი სანახავია, რომ

$$\Phi(z) = I_0 + I_1, \quad \Psi(z) = I_0 + I_2,$$

სადაც

$$I_0 = \iint\limits_{Q-q} \frac{\varphi(t, t_1)\,dt\,dt_1}{(t-z)(t_1-t)} = \iint\limits_{Q-q} \frac{\varphi(t, t_1)}{(t-z)(t_1-t)} \frac{dt}{ds} \frac{dt_1}{ds_1} ds\,ds_1,$$

$$I_1 = \int\limits_L \frac{dt(s)}{t-z} \int\limits_{\eta(s)} \frac{\varphi(t, t_1)\,dt_1(s_1)}{t_1-t}, \qquad I_2 = \int\limits_L dt_1(s_1) \int\limits_{\xi(s_1)} \frac{\varphi(t, t_1)\,dt(s)}{(t-z)(t_1-t)}.$$

$\eta(s)$ აღნიშნავს q ზოლში მოთავსებულ მონაკვეთს, რომელიც Os_1 ღერძის პარალელურია და მისგან s მანძილზეა, ხოლო $\xi(s_1)$—იმავე ზოლში მოთავსებულ მონაკვეთს, რომელიც Os ღერძის პარალელურია და მისგან s_1 მანძილზეა.

ჩვენი დებულება დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ

$$I_1 \to 0, \quad I_2 \to 0, \quad \text{როცა } \varepsilon \to 0.$$

წერის შესამოკლებლად დავუშვათ

$$\Omega(t) = \Omega(t(s)) = \int\limits_{\eta(s)} \frac{\varphi(t, t_1)\,dt_1}{t_1-t}$$

და I_1 ინტეგრალი წარმოვადგინოთ სამი ინტეგრალის ჯამის სახით:

$$I_1 = \int\limits_{ab} \frac{\Omega(t)dt}{t-z} = \int\limits_{aa'} \frac{\Omega(t)dt}{t-z} + \int\limits_{a'b'} \frac{\Omega(t)dt}{t-z} + \int\limits_{b'b} \frac{\Omega(t)dt}{t-z}, \tag{28,18}$$

სადაც a', b' აღნიშნავს $L=ab$ რკალის წერტილებს, რომლებიც შესაბამისად a და b ბოლოების მიდამოებშია აღებული. თუ მხედველობაში მივიღებთ (*)—(***) ფორმულებს და $\Omega(t)$ ინტეგრალის მიმართ გამოვიყენებთ § 23-ის ბოლოს შენიშვნაში მოცემულ შეფასებას[85], ადვილად შევამოწმებთ, რომ, როცა a' და b' წერტილები საკმაოდ ახლოსაა შესაბამისად a და b-თან, (28,18)-ის მარჯვენა მხარეს პირველი და მესამე ინტეგრალები მოდულით რაგინდ მცირეა ε-ის მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად. შემდეგ, თუ a', b' წერტილებს დავაფიქსირებთ, შეიძლება, როგორც ადვილი დასანახავია, ε მუდმივი ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ

$$\Omega(t) = \int\limits_{\eta(s)} \frac{\varphi(t, t_1)-\varphi(t, t)}{t_1-t}\,dt_1 + \varphi(t, t) \int\limits_{\eta(s)} \frac{dt_1}{t_1-t}$$

ფუნქციის მნიშვნელობანი მოდულით რაგინდ მცირე გახდეს, როცა t წერტილი $a'b'$ რკალზეა მოთავსებული. ამიტომ მოდულით რაგინდ მცირე იქნება (28,18)-ის მარჯვენა ნაწილში მეორე ინტეგრალიც.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $I_1 \to 0$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $I_2 \to 0$.

ამრიგად (28,9) ტოლობა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L შედგება ერთი გლუვი რკალისაგან[86].

ზოგად შემთხვევაში დამტკიცება სავსებით ანალოგიურად შეიძლება ჩატარდეს. ამ შემთხვევაშიაც t წერტილის მდებარეობა L-ზე ერთი ნამდვილი s პარამეტრის

[85] (23.9a) ფორმულა.

[86] ჩატარებული დამტკიცება ცხადია ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიაც, თუ b წერტილი ემთხვევა a-ს, ე. ი. როდესაც L შეკრული კონტურია, რომელსაც შესაძლოა ჰქონდეს კუთხური წერტილი.

საშუალებით შემდეგნაირად შეიძლება განისაზღვროს. ვთქვათ $L_k = a_k b_k$ ($k = 1, 2, \ldots, p$) გლუვი გახსნილი რკალებია, რომლებიც L-ს შეადგენენ (§ 1, პ. 5^0) და ვთქვათ l_k არის L_k რკალის სიგრძე. L_k-ზე მდებარე t წერტილისათვის დავუშვათ

$$s = l_1 + l_2 + \cdots + l_{k-1} + s^{(k)},$$

სადაც $s^{(k)}$ არის a_k წერტილიდან L_k-ს გასწვრივ ათვლილი t წერტილის რკალური აბსცისა. ცხადია, რომ L-ზე ყოველ t წერტილს, რომელიც კვანძებს არ ემთხვევა, შეესაბამება გარკვეული s მნიშვნელობა, ხოლო ყოველ s მნიშვნელობას, განსხვავებულს $s=0$, $s=l_1$, $s=l_1+l_2, \ldots, s=l_1+l_2+\cdots+l_p$ მნიშვნელობებისაგან, შეესაბამება კვანძებისაგან განსხვავებული სავსებით გარკვეული t წერტილი. კვანძებისათვის და s პარამეტრის ახლახან აღნიშნული მნიშვნელობებისათვის შესაბამისობის ცალსახობა, საზოგადოდ, ირღვევა, მაგრამ ეს დამტკიცების სისწორისათვის არსებითი არ არის.

თუ t და t_1 ორი ცვლადი წერტილია L-ზე, ხოლო s და s_1 პარამეტრის შესაბამისი მნიშვნელობებია, მაშინ ამ წერტილებს შეესაბამება (s, s_1) წერტილი დამხმარე Oss_1 სიბრტყეზე; შესაბამისობა უკვე აღარაა ცალსახა მხოლოდ მაშინ, როცა t, t_1 წერტილები ემთხვევა კვანძებს, ხოლო პარამეტრის s, s_1 მნიშვნელობები — 0, l_1, l_1+l_2 და ა. შ. მნიშვნელობებს. (s, s_1) წერტილის ცვლილების არე წარმოადგენს Q კვადრატს, რომლის გვერდია $l_1+l_2+\cdots+l_p$. ინტეგრალქვეშა (28,17) ფუნქციის განსაკუთრებულობანი თავმოყრილი არიან კვადრატის $s=s_1$ დიაგონალზე და $s, s_1 = 0, l_1, l_1+l_2, \ldots, l_1+l_2+\cdots+l_p$ წრფეებზე. ეს უკანასკნელი განსაკუთრებულობანი არაარსებითია და უფრო დეტალური განხილვა მოითხოვება მხოლოდ $s=s_1$ დიაგონალთან ახლო მდებარე წერტილებისათვის.

ნათქვამის შემდეგ ცხადი ხდება, თუ როგორ უნდა განზოგადდეს $p=1$ შემთხვევაში ჩვენ მიერ ჩატარებული დამტკიცება ნებისმიერი p-თვის. ამიტომ ჩვენ ამ დამტკიცებაზე არ შევჩერდებით.

3^0. გადავიდეთ (28,15) ფორმულების დამტკიცებაზე. ცხადია, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალები

$$I' = \int_l \frac{\varepsilon^+ \, dt_1}{t_1 - z}, \qquad I'' = \int_l \frac{\varepsilon^- \, dt_1}{t_1 - z},$$

სადაც l აღნიშნავს t_0 ცენტრის მქონე საკმაოდ მცირე R_0 რადიუსიანი წრეწირით L-დან ამოჭრილ რკალს, ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც z მიისწრაფვის t_0-კენ შესაბამისად L-ის მარცხნიდან ან მარჯვნიდან წრფეების გასწვრივ, რომლებიც t_0 წერტილზე L-ის მხებთან არანულოვან კუთხეს ადგენენ. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $R_0 = R_0(\alpha_0)$ არის სტანდარტული რადიუსი იმ გლუვი რკალისათვის, რომელზედაც მოთავსებულია t_0 წერტილი, და რომ z მიისწრაფვის t_0-კენ წრფის გასწვრივ, რომელიც მხებთან ადგენს არაბლაგვ კუთხეს $\vartheta_0 > \alpha_0$.

(20,7) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს:

$$|\varepsilon^+| = |\psi(t_1, z) - \psi^+(t_1, t_0)| \leqslant C\delta^{\mu},$$

სადაც C მუდმივია, $\delta = |z - t_0|$, ხოლო μ არის $\varphi(t, t_1)$ ფუნქციის t ცვლადის მიმართ H პირობის მაჩვენებელი იმ პირობით, რომ t და t_1 მდებარეობენ t_0 წერ-

ტილის მიდამოში; ვგულისხმობთ, რომ $\mu < 1$, რაც, რასაკვირველია, ზოგადობას არ ზღუდავს. შემდეგ (შდრ. გვ. 60).

$$|t_1 - z|^2 \geqslant (r - \delta \cos \omega_0)^2 + \delta^2 \sin^2 \omega_0,$$

სადაც $r = |t_1 - t_0|$, $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$, ამიტომ

$$|I'| \leqslant B\delta^{\mu} \int_0^{R_0} \frac{dr}{\sqrt{(r - \delta \cos \omega_0)^2 + \delta^2 \sin^2 \omega_0}} =$$

$$= B\delta^{\mu} \left[\ln \left\{r - \delta \cos \omega_0 + \sqrt{(r - \delta \cos \omega_0)^2 + \delta^2 \sin^2 \omega_0}\right\}\right]_0^{R_0},$$

სადაც B გარკვეული მუდმივია. მაშასადამე, $I' \to 0$, როცა $\delta \to 0$.

ასევე დავამტკიცებთ, რომ $I'' \to 0$. ამრიგად, გადასმის (28,7) ფორმულა დამტკიცებულია.

4^0. ეს ფორმულა პირველად ა. პუანკარეს (H. Poincaré [1]) მიერ არის მოცემული $\varphi(t, t_1)$ ფუნქციისა და L წირის მიმართ მეტად შემზღუდავ დაშვებებში და შეცდომით ნიშანში. უფრო ზოგად (მაგრამ ნაკლებად ზოგად, ვიდრე აქ) პირობებში ეს ფორმულა დამტკიცებული იყო გ. ბერტრანისა (G. Bertrand [1], [3]) და, რამდენადმე სხვა სახით, ფ. ტრიკომის (F. Tricomi [1], [2])[87] მიერ. მკაცრი დამტკიცება, რამდენადმე ნაკლებად ზოგად დაშვებებში, ვიდრე აქ, მოცემულია ჟ. ჟიროს (G. Giraud [1])[88] მიერ.

აქ მოყვანილი დამტკიცება ავტორის მიერ მოცემული იყო ამ წიგნის პირველ რუსულ გამოცემაში იმ დაშვებით, რომ L გლუვი წირია, ხოლო $\varphi(t, t_1)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე[89].

ჩვენ მიერ აქ მოყვანილი დამტკიცება უფრო ზოგადი პირობებისათვის მოცემული იყო ავტორის მიერ მეორე რუსულ გამოცემაში.

შენიშვნა 1. საჭიროა აღინიშნოს, რომ სინამდვილეში პუანკარეზე და ბერტრანზე ადრე გადასმის ფორმულა რამდენადმე სხვა სახით მიღებული იყო გ. ჰარდის (G. Hardy [3], [4]) მიერ. ეს, სამწუხაროდ, ჩემთვის იმის შემდეგ გახდა მხოლოდ ცნობილი, როცა დასაბეჭდად გადავეცი ამ წიგნის მეორე რუსული გამოცემა. გ. ჰარდის შრომის მოხსენიება მოვასწარი მხოლოდ დამატებაში. საზოგადოდ, ამ ავტორის შრომები (G. Hardy [1]—[4]), რომლებიც მიძღვნილია კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით ინტეგრალებისადმი, შეიცავს მთელ რიგ საყურადღებო შედეგს. მაგრამ ამჟამად ეს შედეგები უმთავრესად კოშის ტიპის ინტეგრალების თეორიის განვითარების ისტორიის თვალსაზრისით არის საინტერესო[90].

---

[87] შდრ. აგრეთვე ვ. კუპრაძე [5].

[88] ჟ. ჟირო იხილავს მრავალგანზომილებიან ინტეგრების არეებს, ერთგანზომილებიანი არისათვის ფორმულა მიიღება როგორც კერძო შემთხვევა.

[89] (28,7) ფორმულის მართებულობისათვის საკმარისი პირობების სხვადასხვა მიმართულებით განზოგადება მოყვანილია შრომებში: ლ. მაღნარაძე [8], ბ. ხვედელიძე [5], [18], ს. მიხლინი [7], F. Tricomi [3], [5], [6], გ. ხუსკივაძე [4], ე. გორდაძე [1], ა. ალექსეევი [3], ვ. პაატაშვილი [3], W. Zakowski [1].

[90] ის გარემოება, რომ გ. ჰარდის ეს შრომები, ისევე როგორც სხვა ავტორთა მთელი რიგი დიდი ხნის წინათ გამოქვეყნებული შრომები (მაგალითად, ი. სოხოცკის და ი. პლემელის), რომლებიც კოშის ტიპის ინტეგრალებს შეეხებოდნენ, თავის დროზე არ იქცევდნენ სათანადო ყურადღებას, ეს აიხსნება იმით, რომ ამ დარგის შრომებისადმი მნიშვნელოვანი ინტერესი უკანასკნელ წლებში სასაზღვრო ამოცანებში მათ გამოყენებასთან დაკავშირებით წარმოიშვა.

ნათქვამის მიუხედავად, მე მაინც გადავწყვიტე დამეტოვებინა ტერმინი „პუანკარე—ბერტრანის გადასმის ფორმულა", ვინაიდან მხოლოდ ამ ავტორების მიერაა მოცემული ფორმულა იმ სახით, როგორც ის იხმარება მრავალ გამოყენებაში (გ. ჰარდი ნამდვილი ცვლადის არით იაზღვრება).

შენიშვნა 2. აღვნიშნოთ გადასმის (28,7) ფორმულის ერთი მარტივი შედეგი. ვთქვათ L-ზე მოცემულია $K(t, t_1)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგი სახით წარმოდგინება:

$$K(t, t_1) = \frac{\psi(t, t_1)}{|t_1 - t|^{\lambda}}, \quad \lambda = \text{const} < 1, \tag{28,19}$$

სადაც $\psi(t, t_1)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ისეთსავე პირობებს, რასაც 1^0 პუნქტში $\varphi(t, t_1)$ ფუნქცია. მაშინ

$$\int_L \frac{dt}{t - t_0} \int_L K(t, t_1)\, dt_1 = \int_L dt_1 \int_L \frac{K(t, t_1)\, dt}{t - t_0},$$

სადაც t_0 კვანძებისაგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილია L-ზე.

ამრიგად, ინტეგრების რიგის გადასმა განხილულ შემთხვევაში დასაშვებია.

ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (28,7) ფორმულიდან, თუ შევნიშნავთ, რომ (28,19) პირობის ძალით

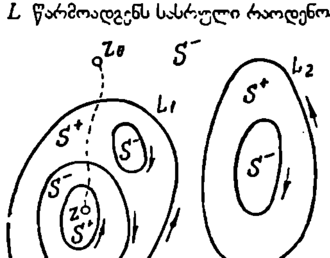
$$K(t, t_1) = \frac{\varphi(t, t_1)}{t_1 - t},$$

სადაც ფუნქცია

$$\varphi(t, t_1) = \psi(t, t_1) \cdot |t - t_1|^{1-\lambda} e^{i\vartheta}, \quad \vartheta = \arg(t_1 - t)$$

აკმაყოფილებს 1^0 პუნქტში აღნიშნულ პირობებს, ამასთან $\varphi(t, t) = 0$. მიღებული შედეგი უშუალოდაც ადვილი დასამტკიცებელია[91].

§ 29. შეკრულ კონტურთა ერთობლიობაზე მოცემული ფუნქციის ანალიზურად გავრცელებადობის პირობა. 1^0. ვთქვათ, L წარმოადგენს სასრული რაოდენობის გლუვი შეკრული $L_1, L_2, \ldots, L_p$ კონტურების ერთობლიობას, რომლებსაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ (ნახ. 16). L წირი სიბრტყეს ჰყოფს რამდენიმე (სასრულ) ბმულ ნაწილად. ამ ნაწილებიდან ჩვენ შევადგინოთ სიბრტყის ორი ნაწილი S^+ და S^-, რომლებსაც შემდეგი თვისებები გააჩნიათ.



ნახ. 16

S^+ და S^- ნაწილების საერთო საზღვარია L წირი (რომელიც არ მიეკუთვნება არც S^+-ს და არც S^--ს); S^+ და S^- ნაწილები L-თან ერთად შეადგენს მთელ სიბრტყეს; S^+-ის ბმულ ნაწილებს არ გააჩნია ურთიერთშორის საერთო საზღვრითი წერტილები; იგივე გვაქვს S^--ის შემადგენელი ბმული ნაწილების მიმართ.

[91] გადასმის ფორმულის დამტკიცება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ერთ-ერთი ინტეგრალი განიხილება კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით, სხვადასხვა დაშვებებში მოცემულია აგრეთვე შრომებში: G. Hardy [3], ს. მიხლინი [7], ი. ქარცივაძე [2], ბ. ხვედელიძე [4], [18], K. Nickel [1], E. Love [1], ა. ჯვარშეიშვილი [1], [3], [5], გ. ხუსკივაძე [4], ე. გორდაძე [1].

წინა პირობები სავსებით განსაზღვრავს S^+ და S^- ნაწილებს (თუ არ ჩავთვლით იმას, რომ S^+ შეიძლება S^--ით აღვნიშნოთ და პირუკუ). ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია შემდეგი შევნიშნოთ. S^- ნაწილს მივაკუთვნოთ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის შემცველი ბმული ნაწილი (ნახ. 16-ზე ეს არის ნაწილი, რომელიც შედგება L_1 და L_2 კონტურების გარეთ მდებარე წერტილებისაგან). ვთქვათ, z რაიმე L-ზე არამდებარე წერტილია. თუ k-თი აღვნიშნავთ იმ შეკრულ კონტურთა რაოდენობას, რომელთა შიგნითაც მოთავსებულია z (ნახ. 16-ზე გამოსახულ შემთხვევაში $k=3$), მაშინ უნდა ჩავთვალოთ, რომ $z \in S^+$ თუ k კენტია, და $z \in S^-$, თუ k ლუწია (ან ნულია). მართლაც, ვთქვათ, z_0 რაიმე წერტილია, რომელიც L-ის შემადგენელ ყველა შეკრული კონტურის გარეთ მდებარეობს, და, მაშასადამე, ეკუთვნის S^--ს. ჩვენ შეგვიძლია z_0 წერტილიდან z წერტილში გადავიდეთ ისე, რომ z-ის მომცველ k კონტურთაგან თითოეული გადავკვეთოთ ზუსტად თითოჯერ (ნახ. 16, პუნქტირი); მაგრამ ყოველი ასეთი გადაკვეთისას ჩვენ S^- ნაწილიდან S^+ ნაწილში გადავდივართ და პირუკუ, ვინაიდან პირობის თანახმად, S^+ ნაწილს საერთო საზღვარი შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ S^- ნაწილთან.

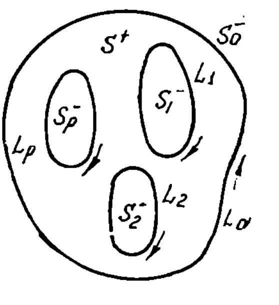
ამრიგად, სიბრტყის ყველა წერტილი, რომელიც L-ს არ ეკუთვნის, ცალსახად იყოფა S^+ და S^- ნაწილებად და ადვილი შესამოწმებელია, რომ, ამასთან, შესრულებულია ამ ნაწილების მიმართ დასმული ყველა პირობა.

L-ზე დადებითი მიმართულების შესახებ ერთხელ და სამუდამოდ შევთანხმდეთ შემდეგში: თუ სიბრტყე აღნიშნული სახით დაყოფილია S^+ და S^- ნაწილებად, მაშინ L-ზე დადებით მიმართულებად ითვლება ის, რომლის გასწვრივ მოძრაობისას S^+ ნაწილი მარცხნივ რჩება (ნახ. 16).

ცხადია, ჩვენ შეგვიძლია S^+-ით აღვნიშნოთ ის, რაც იყო აღნიშნული S^--ით და პირუკუ; ამ შემთხვევაში უსასრულოდ დაშორებული წერტილი მიეკუთვნება S^+ ნაწილს, ხოლო L-ზე დადებითი მიმართულება საწინააღმდეგოზე შეიცვლება.

2°. გამოყენებებში უფრო ხშირად გვხვდება შემთხვევა, როდესაც S^+ და S^- ნაწილებიდან ერთ-ერთი არის ბმული. ვთქვათ ეს იყოს S^+.

აქ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ორ შემთხვევას: როდესაც S^+ არე სასრულია და როდესაც ის უსასრულოა.



ნახ. 17

პირველ შემთხვევაში S^+ არე შემოსაზღვრულია შეკრული კონტურებით, რომლებსაც $L_0, L_1, \ldots, L_p$-თი აღვნიშნავთ, მათ შორის ერთ-ერთი—ეს იყოს L_0—მოიცავს ყველა სხვას, ხოლო დანარჩენი კონტურები არ მოიცავს ურთიერთს (ნახ. 17). ამ შემთხვევაში S^- შედგება $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$ ბმული ნაწილებისაგან, სადაც S_0^- L_0-ის გარეთ მოთავსებული წერტილებისაგან შედგენილი უსასრულო ნაწილია, ხოლო S_k^- ($k=1, 2, \ldots, p$) — L_k-ს შიგნით მდებარე წერტილებისაგან.

მეორე შემთხვევაში, როდესაც S^+ ნაწილი უსასრულოა, გვაქვს კონტურების ისეთივე განლაგება, იმ განსხვავებით, რომ L_0 კონტური არ არსებობს (შეიძლება ითქვას, უსასრულობაში მიდის) და არ არსებობს

აგრეთვე S_0^- ნაწილი.

3°. დავუბრუნდეთ 1° პუნქტში განხილულ ზოგად შემთხვევას. ვთქვათ $\varphi(t)$ აღნიშნავს L-ზე მოცემულ უწყვეტ ფუნქციას.

დავსვათ შემდეგი კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $\varphi(t)$ ფუნქცია იმისათვის, რომ ის იყოს სიბრტყის S^+ ნაწილში ჰოლომორფული $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა [ანალოგიური კითხვა, ცხადია, შეიძლება დაისვას S^- ნაწილის მიმართ]?

S^+-ში [ან S^--ში] ჰოლომორფულ ფუნქციად აქ იგულისხმება ფუნქცია, რომელიც ჰოლომორფულია S^+-ის [ან S^--ის] შემადგენელ ცალკეულ ნაწილებში.

თუ $\varphi(t)$ წარმოადგენს S^+-ში [ან S^--ში] ჰოლომორფული $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას, მაშინ ვიტყვით, რომ L-ზე მოცემული $\varphi(t)$ ფუნქცია ანალიზურად ვრცელდება S^+-ზე [S^--ზე].

ზემოთ დასმული საკითხი მარტივად წყდება. თუ $\varphi(t)=\varphi^+(t)$ ფუნქცია არის S^+-ში ჰოლომორფული $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა და იმ შემთხვევაში, როდესაც S^+ ნაწილი უსასრულოა, ნულად იქცევა უსასრულობაში, მაშინ, ცხადია, კოშის თეორემის[92] თანახმად

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=0 \text{ ყოველი } z\in S^-. \tag{29,1}$$

პირუკუც, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ ადგილი აქვს (29,1)-ს, მაშინ $\varphi(t)$ არის

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad \text{როცა } z\in S^+$$

ფორმულით განსაზღვრული, S^+-ში ჰოლომორფული და S^+-დან L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა.

მართლაც, დავუშვათ:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{29,2}$$

(29,1)-ის საფუძველზე $\Phi(z)=0$ ყველგან S^--ში; ამიტომ $\Phi(z)$ L-ის მარჯვნივ ღებულობს $\Phi^-(t)=0$ სასაზღვრო მნიშვნელობას. მაშასადამე, § 17-ში ნათქვამის თანახმად, $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე აგრეთვე მარცხნიდან, ამასთან

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\Phi^+(t),$$

ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

ამრიგად, (29,1) პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ L-ზე მოცემული უწყვეტი $\varphi(t)$ ფუნქცია იყოს S^+-ში ჰოლომორფული, და იმ შემთხვევაში, როდესაც S^+ ნაწილი უსასრულოა, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა.

[92] გავიხსენოთ, რომ L შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც სიბრტყის S^+ ნაწილის შემადგენელი ბმული ნაწილების საზღვართა ერთობლიობა [და აგრეთვე, როგორც S^--ის შემადგენელი ბმული ნაწილების საზღვართა ერთობლიობა].

თუ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე, ამ პირობას შეიძლება კიდევ მიეცეს შემდეგი სახე. სახელდობრ, თუ (29,1)-ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $z \to t_0$, სადაც t_0 ნებისმიერი წერტილია L-ზე, მივიღებთ:

$$-\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = 0 \quad \text{ყოველი } t_0 \in L. \tag{29,3}$$

ცხადია, რომ, პირუკუ, (29,3)-დან გამომდინარეობს (29,1)[93], ისე, რომ (29,3) წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისათვის, რომ L-ზე მოცემული უწყვეტი $\varphi(t)$ ფუნქცია იყოს S^+-ში ჰოლომორფული და იმ შემთხვევაში, როდესაც S^+ ნაწილი უსასრულოა, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა.

სავსებით ანალოგიურად ვღებულობთ აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისათვის, რომ L-ზე მოცემული უწყვეტი $\varphi(t)$ ფუნქცია იყოს S^--ში ჰოლომორფული და იმ შემთხვევაში, როდესაც S^- ნაწილი უსასრულოა, უსასრულობაში ქრობადი $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა. ეს პირობა შემდეგში მდგომარეობს

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = 0 \quad \text{ყოველი } z \in S^+. \tag{29,4}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას, ზემოხსენებული პირობა შემდეგის ეკვივალენტურია:

$$\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = 0 \quad \text{ყოველი } t_0 \in L. \tag{29,5}$$

მოძებნილი პირობები ადვილად ზოგადდება იმ შემთხვევაზე, როდესაც $\varphi(z)$-ს არ მოეთხოვება უსასრულობაში ნულს გაუტოლდეს. ვთქვათ, მაგალითად, S^- ნაწილი უსასრულოა და, მაშასადამე, S^+ ნაწილი სასრულია (როგორც ნახ. 16-ზე), და ვთქვათ, საჭიროა მოიძებნოს აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ L-ზე უწყვეტი $\varphi(t)$ ფუნქცია იყოს S^--ში ჰოლომორფული, უსასრულობაში მოცემული მთავარი ნაწილით პოლუსის მქონე $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა, ე. ი. რომელსაც დიდი $|z|$-თვის ჰქონდეს სახე

$$\varphi(z) = \gamma(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{29,6}$$

სადაც $\gamma(z)$ მოცემული პოლინომია („მთავარი ნაწილი"), კერძოდ, მუდმივია[94].

განსახილავ შემთხვევაში (29,4) პირობა, ცხადია, შემდეგით შეიცვლება:

---

[93] მართლაც (29,3)-დან გამომდინარეობს, რომ (29,2) ფორმულით განსაზღვრული S^--ში ჰოლომორფული და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი $\Phi(z)$ ფუნქცია L-ზე ღებულობს $\Phi^-(t) = 0$ მნიშვნელობებს; მაშასადამე $\Phi(z) = 0$ S^--ში.

[94] ამ შემთხვევაში პოლუსის შესახებ ჩვენ პირობითად ვლაპარაკობთ („ნული რიგის პოლუსი").

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\gamma(t)}{t-z}\,dt=0 \quad \text{ყოველი } z\in S^+$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\gamma(z) \quad \text{ყოველი } z\in S^+. \tag{29,7}$$

ამის შესაბამისად (29,5) პირობა შემდეგით შეიცვლება:

$$\frac{1}{2}\,\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\gamma(t_0) \quad \text{ყოველი } t_0\in L. \tag{29,8}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც L მარტივი შეკრული კონტურია, (29,3) და (29,8) პირობები მითითებული იყო ი. პლემელის (I. Plemelj [1]) მიერ (კერძო დაშვებისას, როცა $\gamma(z)=\mathrm{const}$). პლემელზე გაცილებით ადრე ფ. კაზორატიმ (F. Casorati [1]), ისევ ერთი შეკრული კონტურის და სასრული არის შემთხვევაში, სათანადო დასაბუთების გარეშე მოგვცა (29,3) პირობის ეკვივალენტური პირობა:

$$\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt=0 \quad \text{ყოველი } t_0\in L.$$

მოგვიანებით გ. მორერამ (G. Morera [1]) მოგვცა ამ პირობის უფრო მკაცრი დასაბუთება და აგრეთვე აღნიშნა სხვა პირობა

$$\int\limits_L \varphi(t)\ln(t-t_0)\,dt=0 \quad \text{ყოველი } t_0\in L,$$

რომელიც ზოგიერთ დამატებით დაშვებაში წინა პირობის ეკვივალენტურია.

უფრო ზოგადი თვალსაზრისით, აქ ჩვენთვის საჭირო პირობა, ერთი შეკრული კონტურის შემთხვევისათვის, შესწავლილი იყო ვ. გოლუბევის [1] და ი. პრივალოვის [2] მიერ; იხ. აგრეთვე ი. პრივალოვი [7].

4°. ციტირების გაადვილების მიზნით ამოვიწეროთ შემდეგი ცნობილი (ან ცნობილიდან უშუალოდ გამომდინარე) ფორმულები, რომლებითაც შემდგომში ხშირად ვისარგებლებთ (და რომლებითაც ჩვენ ფაქტიურად ზემოთ ვისარგებლეთ).

სახელდობრ, ვთქვათ L, S^+, S^- აღნიშნავენ იმავეს, რასაც ზემოთ, და ვთქვათ, მაგალითად, S^+ აღნიშნავს სასრულ, ხოლო S^- — უსასრულო ნაწილს.

ჯერ, ვთქვათ, $\varphi(t)$ აღნიშნავს S^+-ში ჰოლომორფული $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას, მაშინ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\varphi(z), & \text{როცა } z\in S^+,\\ 0, & \text{როცა } z\in S^-.\end{cases} \tag{29,9}$$

ვთქვათ ახლა $\varphi(t)$ აღნიშნავს S^--ში ჰოლომორფული და უსასრულობაში $\gamma(z)$ მთავარი ნაწილით პოლუსის მქონე $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას. მაშინ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\gamma(z), & \text{როცა } z\in S^+,\\ -\varphi(z)+\gamma(z), & \text{როცა } z\in S^-.\end{cases} \tag{29,10}$$

უკანასკნელი ფორმულები უშუალოდ გამომდინარეობს კოშის ფორმულიდან და თეორემიდან, თუ მათ გამოვიყენებთ S^--ში, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით, ჰოლომორფულ და უსასრულობაში ქრობად $\varphi(z)-\gamma(z)$ ფუნქციისათვის. უკანასკნელ ფორმულაში $\varphi(z)$-ის წინ ნიშანი მინუსი ჩნდება იმის გამო, რომ L-ზე დადებითი მიმართულება S^- არეს ტოვებს მარჯვნივ და არა მარცხნივ.

შენიშვნა. ადვილი დასანახავია, რომ (29,9), (29,10) ფორმულები ძალაში დარჩება, თუ ჩავთვლით, რომ L-ის შემადგენელი მარტივი შეკრული კონტურები გლუვი კი არა, მხოლოდ უბან-ბან გლუვია, და რომ $\varphi(z)$ ფუნქცია $\varphi(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობას ღებულობს ყველგან L-ზე, გარდა, შესაძლოა, კვანძებისა, კვანძების მახლობლად კი აკმაყოფილებს პირობას

$$|\varphi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \qquad \alpha = \text{const} < 1,$$

სადაც c სათანადო კვანძია (ეს პირობა საკმარისია, მაგრამ, რა თქმა უნდა, აუცილებელი არ არის).

§ 30. ჰარნაკის განზოგადებული თეორემა. ზემოხსენებულიდან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი დებულება, რომელიც მთელ რიგ საკითხებში პოულობს გამოყენებას.

ვთქვათ L, S^+, S^- აღნიშნავენ იმავეს, რასაც წინა პარაგრაფის 1^0 პუნქტში, ვთქვათ $\varphi(t)$ L-ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, და ვთქვათ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}; \tag{30,1}$$

მაშინ თუ $\Phi(z)=0$ ყველა $z \in S^+$, $\varphi(t)$-ს ექნება მუდმივი მნიშვნელობები L-ის შემადგენელ ცალკეულ (შეკრულ) კონტურებზე, ამასთან, იმ კონტურებზე, რომლებიც შემოსაზღვრავენ S^--ში შემავალ ერთი და იმავე ბმულ ნაწილს, ეს მნიშვნელობები ერთნაირია; კერძოდ, თუ S^- შეიცავს უსასრულო ბმულ ნაწილს, მაშინ $\varphi(t)=0$ ამ ნაწილის საზღვარზე. შებრუნებული დებულება აგრეთვე მართებულია.

შებრუნებული დებულების მართებულობა ადვილად შემოწმდება უშუალოდ. დავამტკიცოთ პირდაპირი დებულება.

თუ $\Phi(z)=0$ სიბრტყის S^+ ნაწილზე, მაშინ წინა პარაგრაფის 3^0 პუნქტში ნათქვამის თანახმად $\varphi(t)$ წარმოადგენს $\varphi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას, რომელიც ჰოლომორფულია S^--ში და უსასრულობაში ქრობადია, თუ S^- შეიცავს $z=\infty$ წერტილს. მაგრამ, ვინაიდან $\varphi(t)$ ნამდვილი ფუნქციაა, $\operatorname{Im}\varphi(z)$[95] L-ზე ღებულობს ნულის ტოლ სასაზღვრო მნიშვნელობას. ამიტომ $\operatorname{Im}\varphi(z)=0$ ყველგან S^--ში. მაშასადამე, $\varphi(z)$ ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას S^--ის შემადგენელ ყოველ ბმულ ნაწილში, კერძოდ, ნულის ტოლია იმ ბმულ ნაწილში (თუ ასეთი არსებობს), რომელიც $z=\infty$ წერტილს შეიცავს. აქედან გამომდინარეობს გამოთქმული დებულება.

[95] $\operatorname{Re}\Phi$ და $\operatorname{Im}\Phi$ სიმბოლოებით აღინიშნება Φ კომპლექსური სიდიდის შესაბამისად ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილი.

ცხადია, რომ დამტკიცებული დებულების ფორმულირებაში შეგვიძლია S^+ შევცვალოთ S^--ით და პირუკუ, ვინაიდან განსხვავება აქ მხოლოდ აღნიშვნებშია.

ეს დებულება წარმოადგენს ა. ჰარნაკის (A. Harnack) [1]) ერთი დებულების განზოგადებას, რომელიც მის მიერ არ იყო ზუსტად ფორმულირებული.

იმ შემთხვევაში, როდესაც L შედგება ერთი შეკრული კონტურისაგან, ეს დებულება შემდეგზე დაიყვანება: თუ $\Phi(z)=0$ ყველა z-თვის L-ის შიგნით, მაშინ $\varphi(t)=0$ L-ზე; თუკი $\Phi(z)=0$ ყველა z-თვის L-ის გარეთ, მაშინ $\varphi(t)=\text{const}$ L-ზე.

შენიშვნა 1. დამტკიცებული დებულება ძალაში დარჩება, თუ მის ფორმულირებაში პირობას $\Phi(z)=0$ S^+-ში შევცვლით პირობით $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ S^+-ში.

მართლაც, ვთქვათ $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ S^+-ში, მაშინ $\Phi(z)$ ინარჩუნებს მუდმივ წმინდა წარმოსახვით მნიშვნელობებს S^+-ის შემადგენელ ბმულ ნაწილებში; ამიტომ $\Phi^+(t)$ შეინარჩუნებს მუდმივ, წმინდა წარმოსახვით მნიშვნელობებს L-ის შემადგენელ ცალკეულ კონტურებზე. მაშასადამე $\Phi^-(t)=\Phi^+(t)-\varphi(t)$ ფუნქციის წარმოსახვითი ნაწილიც შეინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობებს ამ კონტურებზე და, კერძოდ, კონტურებზე, რომლებიც S^--ის შემადგენელ ბმულ ნაწილებს შემოსაზღვრავენ. მაგრამ მაშინ $\Phi(z)$ ფუნქცია შეინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობებს თითოეულ ამ ნაწილში[96]; კერძოდ ამ ნაწილებს შორის (თუ ასეთი არსებობს), რომელიც შეიცავს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს, $\Phi(z)=0$. თითოეული ბმული ნაწილის საზღვარზე $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$ და ვინაიდან $\Phi^+(t)$ წმინდა წარმოსახვითი სიდიდეა, ხოლო $\varphi(t)$, პირობის თანახმად, ნამდვილი ფუნქციაა, $\varphi(t)=-\operatorname{Re}\Phi^-(t)$ შეინარჩუნებს ერთსა და იმავე მუდმივ მნიშვნელობას ნებისმიერი ბმული ნაწილის მთელ საზღვარზე; ეს მნიშვნელობა ნულის ტოლი იქნება იმ ნაწილის (თუ ასეთი არსებობს) საზღვარზე, რომელიც შეიცავს $z=\infty$ წერტილს. ამრიგად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2. ზემოხსენებულის ანალოგიურად, ადვილად მტკიცდება, რომ თუ წინანდელ აღნიშვნებში $\operatorname{Im}\Phi(z)=0$ S^+-ში, მაშინ $\varphi(t)$ ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობებს L-ის შემადგენელ შეკრულ კონტურებზე. შებრუნებულს აგრეთვე აქვს ადგილი[97].

§ 31. უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის განსაზღვრა მოცემული ნახტომით. ვთქვათ L აღნიშნავს უბან-უბან გლუვ წირს (§ 1) და ვთქვათ $\varphi(t)$ L-ზე მოცემული H^* კლასის ფუნქციაა[98].

საჭიროა მოიძებნოს უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია სასაზღვრო პირობით

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \quad L\text{-ზე, კვანძების გარდა.} \tag{31,1}$$

ამოცანა მარტივად იხსნება სოხოცკი—პლემელის ფორმულების მოშველიებით. სახელდობრ, ამოცანას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი, რომელიც წარმოიდგინება ფორმულით

[96] ეს გამომდინარეობს პოტენციალთა თეორიის ცნობილი დებულებიდან (იხ. ქვემოთ. § 60).

[97] ამჯერად $\varphi(t)$-ს მიერ ცალკეულ კონტურებზე მიღებული (ნამდვილი) მუდმივი მნიშვნელობები არაფრით არ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული.

[98] IV და V თავების გარდა, ქვემოთ მოყვანილი შედეგებით ვსარგებლობთ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც L შედგება გლუვი შეკრული კონტურებისაგან, ხოლო $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე. თუ მხედველობაში გვექნება ეს შემთხვევა, მაშინ არ იქნება საჭირო ქვემოთ მოყვანილ მსჯელობებში დავეყრდნოთ § 26-ის შედეგებს; საკმარისია გამოვიყენოთ § 16-ის შედეგები.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \tag{31,2}$$

მართლაც, ამ ფორმულით განსაზღვრული $\Phi(z)$ ფუნქცია უბან-უბან ჰოლომორფულია (§ 26, პ. 5^0) და სოხოცკი—პლემელის (16,3) ფორმულის ძალით აკმაყოფილებს (31,1) პირობას. გვრჩება დავამტკიცოთ, რომ ამოცანას სხვა ამონახსნები არ გააჩნია.

დავუშვათ, რომ ამოცანას აქვს კიდევ ერთი ამონახსნი, და ვთქვათ $\Psi(z)$ აღნიშნავს ამ ორი ამონახსნის სხვაობას. მაშინ (31,1) პირობის ძალით უნდა გვქონდეს

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = 0 \quad L\text{-ზე, კვანძების გარდა.}$$

მაგრამ მაშინ § 10-ის პ. 3^0-ში ნათქვამის საფუძველზე $\Psi(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეზე (თუ მას L-ზე მივაწერთ სათანადო მნიშვნელობას), და ვინაიდან იგი უსასრულობაში ქრობადია, ლიუვილის თეორემის ძალით, $\Psi(z)=0$ მთელ სიბრტყეზე. ამიტომ ჩვენი ორი ამონახსნი ერთმანეთს ემთხვევა.

ახლახან განხილული ამოცანა დასმული და ამოხსნილი იყო ი. სოხოცკის [1] მიერ, მაგრამ პირობის მკაფიო ფორმულირებისა და შედეგის საკმარისი დასაბუთების გარეშე.

მოგვიანებით ეს ამოცანა, ამა თუ იმ დასმით, მრავალმა ავტორმა განიხილა[99].

თუ $\Phi(\infty)=0$ მოთხოვნას შევცვლით უფრო ზოგადი მოთხოვნით, სახელდობრ, რომ $\Phi(z)$-ის რიგი უსასრულობაში არ აღემატებოდეს მოცემულ მთელ $k \geqslant -1$[100] რიცხვს, მაშინ, როგორც გვიჩვენებს ზემოთ ჩატარებულის სავსებით ანალოგიური მსჯელობა[101], ყველაზე ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} + P_k(z), \tag{31,3}$$

სადაც $P_k(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი k-ს არ აღემატება; თუ $k = -1$, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $P_k(z)=0$.

სავსებით ცხადია, როგორ ამოიხსნება რამდენადმე უფრო ზოგადი ამოცანა, სახელდობრ, როცა $\Phi(z)$-ს შეიძლება ჰქონდეს სასრული რაოდენობის პოლუსები მოცემულ წერტილებში (და არა მხოლოდ ერთი პოლუსი უსასრულობაში).

2^0. ზემოთ განხილული ამოცანა შეიძლება კიდევ ასე ამოვხსნათ. (31,1) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{dt}{t-z}\text{-ზე,}$$

სადაც z სიბრტყის ნებისმიერი, L-ის გარეთ მდებარე წერტილია, და ვაინტეგროთ L-ზე. მაშინ, ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ კოშის ფორმულის გამოყენე-

[99] (31,1) ამოცანის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როდესაც L თვლადი რაოდენობის შეკრულ კონტურთა ერთობლიობას წარმოადგენს, გარკვეულ დამატებით პირობებში, მოცემულია ი. ქარციგაძის და ბ. ხვედელიძის [2] და ვ. პაატაშვილის [3] შრომებში. თვლადი რაოდენობის მონაკვეთების ერთობლიობის შემთხვევა განხილულია ს. ფრეიდკინის [5] შრომაში.

[100] $k < -1$ —შემთხვევის შესახებ იხ. ქვემოთ, პ. 3^0.

[101] ამასთან საჭიროა გამოვიყენოთ ლიუვილის განზოგადებული თეორემა.

ბით[102] და იმის გათვალისწინებით, რომ $\Phi(z)$-ს უსასრულობაში შეიძლება ჰქონდეს k-ზე არაუმეტესი რიგის პოლუსი, კვლავ მივიღებთ (31,3) ფორმულას.

ეს დებულება თითქმის ცხადია, მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როცა L მარტივი შეკრული ან გახსნილი უბან-უბან გლუვი კონტურია. ზოგად შემთხვევაში დამტკიცება მოყვანილია წიგნის ბოლოს დამატება III-ში.

ამრიგად, მივდივართ დასკვნამდე, რომ *თუ ამონახსნი არსებობს, მაშინ მას აქვს* (31,3) *სახე; ეს დასკვნა მართებულია, თუ* $\varphi(t)$ *ფუნქცია მხოლოდ უწყვეტია* L-*ზე, გარდა, შესაძლოა, კვანძებისა და აბსოლუტურად ინტეგრებადია* L-*ზე*. იმ შემთხვევაში კი, როდესაც $\varphi(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს, (31,3) ფორმულა მართლაც იძლევა ამონახსნს.

3°. თუ მოვითხოვთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქციას უსასრულობაში უნდა ჰქონდეს არაუმეტესი $k<-1$ რიგი (ე. ი. უსასრულობაში ჰქონდეს არანაკლებ $-k>1$ რიგის ნული), მაშინ (11,2ა), (11,2ბ) ფორმულების საფუძველზე, როგორც ადვილი დასანახავია, ამოცანას ექნება ამონახსნი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ

$$\int_L t^j\varphi(t)\,dt=0,\quad j=0,\ 1,\ldots,\ -k-2; \qquad (31,4)$$

თუ ეს პირობები დაცულია ამონახსნი (31,2) ფორმულით მოიცემა.

4°. ზემოთ მიღებული შედეგების გავრცელება იმ შემთხვევაზე, როდესაც ნახტომის წირი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილზე გაივლის არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს (შდრ. § 19, პ. 1°).

აქ შემოვისაზღვრებით შემთხვევით, როდესაც ნახტომის წირი წრფეა. ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ეს წრფე ნამდვილი ღერძია, რომელსაც, ისევე როგორც § 19-ში, D-თი აღვნიშნავთ.

ამოცანას ახლა ჩვენ ასე დავსვამთ: *მოიძებნოს ყველგან შემოსაზღვრული უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია პირობით*

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)\quad D\text{-ზე}, \qquad (31,5)$$

სადაც $\varphi(t)$ D-*ზე მოცემული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს* H *პირობას ყველგან* D-*ზე, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით* (იხ. § 19, პ. 3°).

როგორც ადვილი დასანახავია, ამოცანის ყველა ამონახსნი (შეად. 1° პუნქტი) წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)dt}{t-z}+C_0, \qquad (31,6)$$

სადაც C_0 ნებისმიერი მუდმივია.

ამოცანა შეიძლება გავხადოთ განსაზღვრული, თუ, მაგალითად, მოვითხოვთ, რომ $\Phi^+(\infty)=0$. მაშინ (19,14) ფორმულის საფუძველზე

[102] კოშის ფორმულის გამოყენება უზრუნველყოფილია იმით, რომ პირობით $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია (მარცხნიდან და მარჯვნიდან) L წირის ყველა, კვანძებისაგან განსხვავებულ წერტილზე, ხოლო კვანძების მახლობლად

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^\alpha},\quad \alpha=\text{const}<1.$$

$$C_0 = -\frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

თუ $\Phi(z)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის მოთხოვნას შევცვლით მოთხოვნით, რომ $\Phi(z)$-ს D-ს გარეთ მდებარე a_0 წერტილზე შესაძლოა ჰქონდეს პოლუსი არა-უმეტეს მოცემული k რიგისა და იყოს შემოსაზღვრული ყველგან, გარდა a_0 წერტილის მიდამოსი, მაშინ ამოცანის ზოგადი ამონახსნი, ცხადია, წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + C_0 + \frac{C_1}{z-a_0} + \cdots + \frac{C_k}{(z-a_0)^k}, \qquad (31,7)$$

სადაც $C_0, C_1, \ldots, C_k$ ნებისმიერი მუდმივებია.

2° პუნქტში ნათქვამი ადვილად გავრცელდება აქ განხილულ შემთხვევაზე. ანალოგიურ მდგომარეობას აქვს ადგილი 3° პუნქტის შედეგებისათვის; ჩვენს შემთხვევაში უსასრულოდ დაშორებული წერტილი (რომელიც ახლა ნახტომის D წირზე მდებარეობს) უნდა შეიცვალოს რომელიმე ფიქსირებული, D-ს გარეთ მდებარე წერტილით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოაღნიშნული შედეგები, ცხადია, უცვლელი დარჩება, თუ დავუშვებთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული წრფის სასრულ მანძილზე მდებარე $c_1, c_2, \ldots, c_k$ წერტილების მიდამოებში, ოღონდ ექვემდებარებოდეს პირობას

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_k|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

როგორც ყოველი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია.

§ 32. კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნება. შეკრული კონტურების შემთხვევაში. ვთქვათ, L აღნიშნავს სასრული რაოდენობის შეკრული გლუვი კონტურების ერთობლიობას, რომლებსაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ და, ვთქვათ, დადებითი მიმართულება L-ზე ისეა შერჩეული, როგორც § 29-ის 1° პუნქტში.

განვიხილოთ ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \psi(t_0), \qquad (32,1)$$

სადაც t_0 არის L-ზე ნებისმიერი წერტილი, $\psi(t)$ L-ზე მოცემული H კლასის ფუნქციაა, ხოლო $\varphi(t)$ საძიებელი ფუნქციაა, რომელსაც აგრეთვე დავუქვემდებარებთ H პირობას.

(32,1) წარმოადგენს ერთ-ერთ უმარტივეს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას; მისი ამოხსნა შეიძლება ზოგადი შემთხვევისათვის შემდეგ თავში გამოყვანილი ფორმულების საშუალებით. მაგრამ იმის გამო, რომ (32,1) განტოლება თავისთავად საკმაოდ საინტერესოა, ჩვენ აქ მოვიყვანთ მისი ამოხსნის სამ ხერხს; ამასთან ვისარგებლებთ § 29, პ. 1°-ის აღნიშვნებით, კერძოდ აღნიშვნებით S^+ და S^-.

პ ი რ ვ ე ლ ი ხ ე რ ხ ი. განვიხილოთ უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \tag{32,2}$$

მაშინ სოხოცკი—პლემელის (16,4) ფორმულის საფუძველზე (32,1) განტოლება შემდეგი სახით გადაიწერება:

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\psi(t_0) \quad L\text{-ზე}. \tag{32,3}$$

განვიხილოთ შემდეგი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$\Psi(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{როცა } z\in S^+,\\ -\Phi(z), & \text{როცა } z\in S^-.\end{cases} \tag{32,4}$$

მაშინ (32,3) პირობა ასე გადაიწერება:

$$\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0)=\psi(t_0) \quad L\text{-ზე},$$

საიდანაც, წინა პარაგრაფის შედეგის თანახმად,

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)dt}{t-z}. \tag{32,5}$$

მეორე მხრივ (16,3), (32,2) და (32,4)-ის საფუძველზე

$$\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0),$$

საიდანაც, საბოლოოდ (32,5) და (16,4)-ის გათვალისწინებით

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)dt}{t-t_0}. \tag{32,6}$$

ამრიგად, (32,1)-დან გამომდინარეობს (32,6). მაგრამ ზუსტად ასეთივე გზით (32,6)-დან გამომდინარეობს (32,1). ამრიგად (32,6) წარმოადგენს (32,1)-ის (ერთადერთ) ამონახსნს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\psi(t_0), \qquad \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)dt}{t-t_0}=\varphi(t_0) \tag{A}$$

დამოკიდებულებებიდან თითოეული არის მეორის შედეგი, ე. ი. ეს დამოკიდებულებანი ერთმანეთის შებრუნებას წარმოადგენს.

მეორე ხერხი. შებრუნების (A) ფორმულები გამომდინარეობენ შემდეგი მარტივი მსჯელობიდან. ვთქვათ $\omega(t)$ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც L-ზე აკმაყოფილებს H პირობას. S^+-ში ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია

$$\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)dt}{t-z}$$

იქნება უწყვეტი (S^++L)-ში, თუ მას L-ზე მივაწერთ მნიშვნელობას

$$\Omega^+(t)=\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}. \tag{*}$$

ამის გამო

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\Omega^+(t)\,dt}{t-z}=0 \quad \text{ყოველი } z\in S^-;$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $z\to t_0$ მარჯვნიდან, მივიღებთ[103]:

$$-\Omega^+(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\Omega^+(t)\,dt}{t-t_0}=0.$$

თუ აქ (*)-დან ჩავსვამთ $\Omega^+(t)$-ს მნიშვნელობას, გვექნება:

$$-\omega(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{dt}{t-t_0}\left\{\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right\}=0,$$

საიდანაც, ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{dt}{t-t_0}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}=\omega(t_0), \tag{B}$$

მართებულს ყოველი $\omega(t)$ ფუნქციისათვის, რომელიც L-ზე აკმაყოფილებს H პირობას. (B) ფორმულა გამოსახავს იმავეს, რასაც შებრუნების (A) ფორმულები, ე. ი. (A) თანაფარდობიდან თითოეული არის მეორის შედეგი.

მ ე ს ა მ ე ხ ე რ ხ ი. თუ (32,1)-ს შემდეგი სახით გადავწერთ

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1-t},$$

ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $\dfrac{1}{\pi i}\,\dfrac{dt}{t-t_0}$-ზე, ვაინტეგრებთ t-თი L-ის გასწვრივ და გამოვიყენებთ პუანკარე—ბერტრანის გადასმის ფორმულას (§ 28), მივიღებთ:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)dt}{t-t_0}=-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_L \frac{dt}{t-t_0}\int\limits_L \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1-t}=$$

$$=\varphi(t_0)-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_L \varphi(t_1)\,dt_1\int\limits_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)}. \tag{**}$$

მაგრამ, როგორც უშუალოდ ადვილი შესამოწმებელია,

$$\int\limits_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)}=\frac{1}{t_1-t_0}\int\limits_L\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-t_1}\right\}dt=0.$$

ამიტომ (**)-ში მეორე შესაკრები ნულია და ჩვენ ვღებულობთ (32,6) ფორმულას. იმავე გზით (32,6)-დან მივიღებთ (32,1)-ს.

---

[103] ეს დამოკიდებულება ჩვენ მაშინვე შეგვეძლო დაგვეწერა (29,3)-ის საფუძველზე.

როგორც ვხედავთ, შებრუნების (A) ფორმულები წარმოადგენს სოხოცკი — პლემელის ფორმულის და აგრეთვე პუანკარე—ბერტრანის ფორმულის თითქმის ტრივიალურ შედეგს. კერძო შემთხვევებისათვის (უსასრულო წრფე, წრეწირი)[104] გამოყენებული ეს ფორმულები ამა თუ იმ ეკვივალენტური (ან თითქმის ეკვივალენტური) სახით ხშირად გვხვდება ლიტერატურაში ჰილბერტის ფორმულების სახელწოდებით. მე მიჭირს დავასახელო ავტორი, რომელმაც მოგვცა ეს ფორმულები ნებისმიერი გლუვი კონტურისათვის. ერთი შეკრული კონტურის შემთხვევაში ეს ფორმულები ი. ვეკუამ [1] მიიღო როგორც კერძო შემთხვევა ერთი კლასის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლების ამოხსნისას. მანვე მაცნობა მათი გამოყვანის ის ხერხი, რომელიც ზემოთ იყო მოყვანილი მეორე ხერხის სახელწოდებით[105].

§ 33. შებრუნების ჰილბერტის ფორმულები. მიღებული შედეგი გამოვიყენოთ კერძოდ იმ შემთხვევისათვის, როცა L არის ერთეულრადიუსიანი წრეწირი ცენტრით სათავეში. დავუშვათ

$$t = e^{i\vartheta}, \quad t_0 = e^{i\vartheta_0}. \tag{33,1}$$

მაშინ

$$\frac{dt}{t-t_0} = \frac{ie^{i\vartheta}\,d\vartheta}{e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}} = \frac{i\exp\left\{i\,\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right\}d\vartheta}{\exp\left\{i\,\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right\} - \exp\left\{-i\,\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2} + i\sin\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + \frac{i}{2}\,d\vartheta. \tag{33,2}$$

ახლა $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ აღვნიშნოთ $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$-თი (ამასთან ჩავთვალოთ, რომ $\varphi(\vartheta+2k\pi)=\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta+2k\pi)=\psi(\vartheta)$ მთელი k-თვის) და გარდა ამისა $\psi(\vartheta)$ შევცვალოთ $\frac{1}{i}\psi(\vartheta)$-თი. მაშინ წინა პარაგრაფის (A) ფორმულები შესაბამისად შემდეგ სახეს მიიღებს[106]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta = \psi(\vartheta_0), \tag{33,3}$$

---

[104] წრეწირის შემთხვევა იხ. შემდეგ პარაგრაფში.

[105] ი. ქარციძემ და ბ. ხვედელიძემ [1], [2] შებრუნების ფორმულები გაავრცელეს იმ შემთხვევაზე, როდესაც საინტეგრაციო წირი წარმოადგენს შეკრულ კონტურთა თვლად რაოდენობას გარკვეული დამატებითი პირობებით.

ახლახან პ. ულიანოვმა [4] დაადგინა (32,6) შებრუნების ფორმულის მართებულობა მოცემული და საძიებელი ფუნქციების მიმართ მეტად ზოგად დაშვებებში, იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L კონტური აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას.

[106] $\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}$-ის შემცველი ინტეგრალები, რასაკვირველია, უნდა გავიგოთ კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)d\vartheta=-\varphi(\vartheta_0). \tag{33,4}$$

ამ უკანასკნელი ფორმულებიდან ადვილად მიიღება ჰილბერტის ცნობილი შებრუნების ფორმულები, რომლებიც მის მიერ მიღებული იყო სხვა (ნაკლებად პირდაპირი) გზით.

განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta=\psi(\vartheta_0), \tag{33,5}$$

სადაც $\varphi(\vartheta)$—საძიებელი, ხოლო $\psi(\vartheta)$ მოცემული ფუნქციაა, რომლებიც H პირობას აკმაყოფილებენ. ადვილი დასანახია, რომ ამ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ამონახსნი მხოლოდ

$$\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\,d\vartheta=0 \tag{33,6}$$

პირობის შესრულებისას, რომელიც მიიღება თუ (33,5)-ის ორივე მხარეს ვაინტეგრებთ ϑ_0-ით 0-დან 2π-მდე და მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta_0=0. \tag{*}$$

ვთქვათ, რომ (33,6) პირობა შესრულებულია და ვეძიოთ (33,5) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს დამატებით პირობას

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta=0. \tag{33,7}$$

მაგრამ ამ პირობით (33,5) განტოლება ემთხვევა (33,3) განტოლებას, რომლის ამონახსნი (33,4) ფორმულით მოიცემა, ე. ი. თუ მივიღებთ მხედველობაში (33,6)-ს,

$$\varphi(\vartheta_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta. \tag{33,8}$$

(33,5) და (33,8) ფორმულები (33,6) და (33,7) პირობებთან ერთად წარმოადგენს ჰ ი ლ ბ ე რ ტ ი ს შ ე ბ რ უ ნ ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ს[107].

ჩვენ ვიპოვეთ (33,5) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (33,7) დამატებით პირობას. ვაჩვენოთ, რომ ყველა სხვა ამონახსნი მიიღება ნაპოვნიდან ნებისმიერი მუდმივის დამატებით[108]. უპირველეს ყოვლისა, ცხადია, რომ $\varphi(\vartheta)+\text{const}$

[107] იხ. D. Hilbert [2], თავი IX, გვ. 75.

[108] ცხადია, იგულისხმება, რომ (33,6) პირობა შესრულებულია.

აგრეთვე არის ამონახსნი; ეს გამომდინარეობს (*)-დან. ვთქვათ ახლა $\varphi_1(\vartheta)$ (33,5) განტოლების რაიმე ამონახსნია, დავუშვათ

$$\varphi^*(\vartheta) = \varphi_1(\vartheta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(\vartheta)\, d\vartheta.$$

მაშინ, ცხადია, $\varphi^*(\vartheta)$ არის ამონახსნი, რომელიც (33,7) დამატებით პირობას აკმაყოფილებს; მაგრამ ასეთი ამონახსნი ერთადერთია და, მაშასადამე, ემთხვევა უკვე ნაპოვნ (33,8) ამონახსნს. აქედან გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

ნათქვამიდან ადვილად გამომდინარეობს შებრუნების შემდეგი ფორმულები[100]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\, d\vartheta = \psi(\vartheta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{33,9}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\, d\vartheta = \varphi(\vartheta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{33,10}$$

რომლებიც ასე უნდა გავიგოთ: თუ $\varphi(\vartheta)$ და $\psi(\vartheta)$ ფუნქციები H პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ თითოეული (33,9), (33,10) ტოლობებიდან მისდევს მეორე. ამის გამოყვანას ჩვენ მკითხველს მივანდობთ (შდრ. შემდეგი ფორმულების გამოყვანას) და დავამტკიცებთ რამდენიმე სხვა სახის შებრუნების ფორმულებს[110]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = \psi(\vartheta_0), \tag{33,11}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\, d\vartheta = \varphi(\vartheta_0), \tag{33,12}$$

რომლებიც იმავე აზრით უნდა გავიგოთ, როგორც წინა ფორმულები.

დავუშვათ, მაგალითად, რომ ადგილი აქვს (31,11)-ს. თუ (33,11)-ის ორივე მხარეს $d\vartheta_0$-ზე გავამრავლებთ და ვაინტეგრებთ 0-დან 2π-მდე, (*)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

რის გამოც (33,11) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\, d\vartheta = \psi(\vartheta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\, d\vartheta = \psi_0(\vartheta_0).$$

---

[100] O. D. Kellogg [1] (ჰილბერტის ლექციების მიხედვით).

[110] ეს ფორმულები, შეცდომით ნიშანში, მოყვანილია წიგნში E. Hellinger und O. Teoplitz [1], გვ 1454. ავტორები უთითებენ სტატიას O. D. Kellogg [1], მაგრამ უკანასკნელში არის მხოლოდ (33,9), (33,10) ფორმულები.

ვინაიდან $\psi_0(\vartheta)$ აკმაყოფილებს (33,6) პირობას, ზემოთ ნათქვამის საფუძველზე გვექნება:

$$\varphi(\vartheta_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_0(\vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\, d\vartheta + \text{const} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\, d\vartheta + C,$$

სადაც C გარკვეული მუდმივაა. თუ წინა ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $d\vartheta_0$-ზე და ვაინტეგრებთ 0-დან 2π-მდე, მივიღებთ:

$$2\pi C = \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\, d\vartheta.$$

თუ C-ს ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ წინა ფორმულაში, მივიღებთ სასურველ (33,12) ფორმულას. სავსებით ასეთივე გზით (33,12)-დან მიიღება (33,11).

თავი მეორე

შეუღლების ამოცანა და სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები გლუვი შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევაში

კოშის ტიპის ინტეგრალის შემცველ წრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის[1] გადმოცემის ჩვენ მიერ არჩეული გზისათვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს ერთ სასაზღვრო ამოცანას, რომელსაც წრფივი შეუღლების ამოცანას ვუწოდებთ. წინამდებარე თავის I კარი ეძღვნება ამ ამოცანის ამოხსნას გარკვეულ კერძო პირობებში, რომლებიც განზოგადებული იქნება IV თავში.

II კარში ამოხსნილი იქნება სასაზღვრო ამოცანა, რომელსაც რიმან—ჰილბერტის ამოცანას ვუწოდებთ. მიუხედავად იმისა, რომ ეს ამოცანა ზოგადი თეორიისათვის არ გვჭირდება, მაინც მოგვყავს მისი ამოხსნა, რადგან იგი უშუალოდ გამომდინარეობს წრფივი შეუღლების ამოცანის ამოხსნიდან. გარდა ამისა, ეს ამოცანა თავისთავად საინტერესოა და მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ზოგიერთ გამოყენებაში.

III კარი ეძღვნება ზემოთ აღნიშნული სახის სინგულარულ განტოლებათა თეორიის გადმოცემას გარკვეულ დაშვებებში, რომლებიც განზოგადებული იქნებიან V თავში.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, წრფივი შეუღლების ამოცანის ამოხსნა და კოშის ტიპის ინტეგრალის შემცველ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია ერთმანეთთან მჭიდრო კავშირშია. უნდა ითქვას, რომ ასეთი სახის სინგულარულ განტოლებათა თეორია გარკვეულ ეტაპამდე შეიძლება აიგოს შეუღლების (ან ანალოგიური) ამოცანის მოშველიების გარეშეც, მაგრამ ამ ამოცანის გამოყენება თეორიას განსაკუთრებით მარტივსა და თვალსაჩინოს ხდის.

ზემოთ აღნიშნული კერძო პირობები ძირითადად იმაში მდგომარეობს, რომ ამ თავში (და, აგრეთვე, მომდევნო თავში, სადაც მოყვანილია ზოგიერთი გამოყენება) შეისწავლება შემთხვევა, როცა განსახილველი წირები წარმოადგენს სასრული რაოდენობის გლუვი შეკრული კონტურების გაერთიანებას, ხოლო მასზე განსაზღვრული ფუნქციები H კლასს ეკუთვნის.

როგორც ითქვა, IV და V თავებში განხილული იქნება უფრო ზოგადი დაშვებები. ჩვენთვის საინტერესო საკითხების გადმოცემა შეგვეძლო თავიდანვე ამ დაშვებებში დაგვეწყო, მაგრამ ვამჯობინეთ აქ მიღებული თანამიმდევრობა, რადგან ხშირად გამოყენებისათვის საკმარისია სწორედ ის პირობები, რაც ამ თავშია მიღებული; ამასთან, ისინი მნიშვნელოვნად ამარტივებენ თეორიას და არ უკარგავენ მას დამოუკიდებლობასა და სისრულეს[2].

[1] როგორც შესავალში უკვე აღვნიშნეთ, ამ წიგნში მხოლოდ ასეთი განტოლებები იქნება განხილული.

[2] ეს მხოლოდ ნაწილობრივ ეხება შეუღლების ამოცანას, რომელიც ზოგად შემთხვევაშიაც თითქმის ისევე მარტივად იხსნება, როგორც ამ თავში განხილულ პირობებში; ძირითადი განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ ზოგად შემთხვევაში დაყრდნობა გვიხდება წირთა კვანძების მიდამოში კოშის ტიპის ინტეგრალთა ყოფაქცევის შესახებ §§ 22—26-ში გადმოცემულ შედეგებზე.

I. შეუღლების ამოცანა გლუვი შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტის შემთხვევაში

§ 34. შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა. 1°. L-ით აღვნიშნოთ სასრული რაოდენობის არათანამკვეთ[3] გლუვ შეკრულ $L_1, L_2, \ldots, L_p$ კონტურთა გაერთიანება ($L = L_1 + L_2 + \cdots + L_p$).

წრფივი შეუღლების ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას (ან, მოკლედ, შეუღლების ერთგვაროვან ამოცანას) ვუწოდებთ შემდეგ ამოცანას[4]:

ვიპოვოთ უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია (L სასაზღვრო წირით), რომელსაც უსასრულობაში სასრული რიგი აქვს და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t), \quad t \in L, \tag{34,1}$$

სადაც $G(t)$ L-ზე განსაზღვრული H კლასის ფუნქციაა და არსად მასზე არ ხდება ნულის ტოლი.

გავიხსენოთ, რომ $\Phi^+(t)$ და $\Phi^-(t)$ აღნიშნავს სასაზღვრო მნიშვნელობებს სათანადოდ მარცხნიდან და მარჯვნიდან.

$G(t)$ ფუნქციას, რომელიც L წირთან ერთად განსაზღვრავს მოცემულ ამოცანას, ვუწოდებთ მოცემული სასაზღვრო ამოცანის კოეფიციენტს.

აქვე შევნიშნოთ შემდეგი: თუ L წირის შემადგენელ კონტურთაგან ზოგიერთზე დადებით მიმართულებას საწინააღმდეგოთი შევცვლით, მაშინ ამოცანის პირობათა შენარჩუნებისათვის საჭიროა ამ კონტურებისათვის $\Phi^+(t)$ შეიცვალოს $\Phi^-(t)$-თი და პირიქით, რაც გამოიწვევს (34,1) პირობაში $G(t)$-ს შეცვლას $[G(t)]^{-1}$-ით.

როგორც დავინახავთ, ამოცანის ამოხსნისას არსებით როლს ასრულებს მთელი რიცხვი $\varkappa$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\, [\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}\, [\arg G(t)]_L, \tag{34,2}$$

სადაც სიმბოლო $[\ ]_L$ აღნიშნავს დადებითი მიმართულებით L წირის ერთხელ შემოვლისას ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულების ნაზრდს, ე. ი. L_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) წირთა ერთხელ შემოვლისას მიღებულ ნაზრდთა ჯამს. როცა t ეკუთვნის L_k-ს, მაშინ $\ln G(t)$-ს ქვეშ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ამ მრავალსახა გამოსახულების ნებისმიერი მნიშვნელობა იმ პირობით, რომ t-ს გადაადგილებისას L_k-ზე იგი იცვლებოდეს უწყვეტად.

$\varkappa$ რიცხვს ვუწოდებთ L-ზე განსაზღვრულ $G(t)$ ფუნქციის ინდექსს ან კიდევ შ ე უ ღ ლ ე ბ ი ს ა მ ო ც ა ნ ი ს ი ნ დ ე ქ ს ს.

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ L_k კონტურებზე შევცვლით დადებით მიმართულებას ისე, რომ არ შეიცვალოს ამოცანის პირობები, მაშინ $\varkappa$ არ შეიცვლის თავის მნიშვნელობას, ე. ი. $\varkappa$ რიცხვი ამოცანის ინვარიანტია. მართლაც, თუ რომელიმე L_k წირზე დადებით მიმართულებას შევცვლით საწინააღმდეგოთი, მაშინ ამოცანის სახის შესანარჩუნებლად საჭიროა $G(t)$-ს მნიშვნელობა L_k-ზე შეიცვალოს $[G(t)]^{-1}$-ით; ამი-

---

[3] განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, როცა ამ კონტურებს თანაკვეთა აქვს, არაა რთული; იხ. მე-3 შენიშვნა § 25-ის ბოლოში.

[4] უფრო ზოგადი დასმა იხ. IV თავში.

ტომ $\ln G(t)$ შეიცვლება $[-\ln G(t)]$-თი, რის გამოც L_k-ზე დადებითი მიმართულებით შემოვლისას $\ln G(t)$-ს ნაზრდი უცვლელი დარჩება.

2°. მოყვანილი ამოცანის დასმის, ამოხსნისა და სახელწოდებასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ შემდეგი:

როცა L მარტივი შეკრული კონტურია (ე. ი. $p=1$) და $G(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციაა (ე. ი. ფუნქციაა, რომელიც წირის ზოგიერთ წერტილზე გადასვლისას ნახტომისებურად იცვლება), მაშინ ამოცანა გადაიქცევა რიმანის მიერ დასმული ერთი ამოცანის კერძო შემთხვევად (ამ ამოცანის თაობაზე ნათქვამი იქნება VI თავში). ამის გამო ზემოთ დასმულ ამოცანას, რომელსაც „შეუღლების ამოცანა"[5] ვუწოდეთ, ჩვეულებრივ „რიმანის ამოცანას" უწოდებენ. ეს ამოცანა, დაახლოებით იმ სახით, როგორც იგი ზემოთ იყო ჩამოყალიბებული, პირველად განიხილა დ. ჰილბერტმა[6] (Golting. Nachrihten 1905; გამეორებულია წიგნში D. Hilbert [2]). უნდა აღინიშნოს, რომ ჰილბერტი ამოცანას იხილავს ნაკლებად ზოგად პირობებში: იგი თვლის, რომ L შედგება ერთი ანალიზური წირისაგან და $G(t)$ რკალის მიმართ ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა. საკმაოდ რთული გზით მას ამოცანა მიჰყავს ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებამდე, რომლის შესადგენად საჭიროა გრინის ფუნქციის მოძებნა იმ არეებისათვის, რომლებადაც L წირი ჰყოფს სიბრტყეს (ლაპარაკია ნეიმანის ამოცანის გრინის ფუნქციაზე); მიღებული განტოლების სრულ გამოკვლევას ჰილბერტი არ იძლევა. დასმული ამოცანის სრული ამოხსნა სავსებით ელემენტარულად ხერხდება კოშის ტიპის ინტეგრალების საშუალებით. ასეთი გზით ამოხსნის იდეა მოცემულია I. Plemelj-ს [1] სტატიის ბოლოში. ი. პლემელი განიხილავს იმ კერძო შემთხვევას, როცა L შედგება ერთი შეკრული წირისაგან და ინდექსი (ჩვენ მიერ მიღებული ტერმინოლოგიით; თვით პლემელს ინდექსის ცნება არ შემოაქვს) ტოლია ნულის. ამ კერძო შემთხვევიდან იოლად შეიძლება ამოხსნის მიღება ზოგად შემთხვევაშიც[7].

პირველად სრული, მასთან, სავსებით ეფექტური ამოხსნა მოგვცა გახოვმა [1], [2]; ეს ამოხსნა, ზოგიერთი გამარტივებებით, გადმოცემულია მომდევნო პარაგრაფის 2° პუნქტში. თ. გახოვმა თავდაპირველად განიხილა მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც L შედგება ერთი შეკრული კონტურისაგან. ბ. ხვედელიძემ [2] ამოცანა ამოხსნა იმ შემთხვევისათვის, როცა L შედგება რამოდენიმე კონტურისაგან და შემოსაზღვრავს სიბრტყის ბმულ არეს. ეს ამოხსნა მოყვანილია მომდევნო პარაგრაფის 3° პუნქტში. დაბოლოს, როცა L-ის შემადგენელი $L_1, L_2, \ldots, L_p$ კონტურები ნებისმიერადაა განლაგებული, ამოცანის ამოხსნა მითითებულია W. Trjitzinsky-ის სტატიაში [1], რო-

[5] ეს სახელწოდება იყო მიღებული ავტორის წიგნის [9] მესამე გამოცემაში (1949 წ.).

[6] ამის გამო ამ წიგნის პირველ რუსულ გამოცემაში მას ვუწოდე ჰილბერტის ამოცანა. ეს სახელწოდება მიღებულ იქნა რიგი ავტორის მიერ. ზოგიერთი ავტორი ხმარობს სახელწოდებას „რიმან—ჰილბერტის ამოცანა"; ამ სახელწოდებას ვხმარობ სხვა (დასმულთან ახლო) ამოცანისათვის, რომელიც განხილული იქნება ამ თავის II კარში. გვხვდება აგრეთვე ამოცანის სხვა სახელწოდებებიც.

[7] ჩვენთვის საინტერესო ამოცანა განიხილა აგრეთვე ე. პიკარმა (E Picard [1]). ამოცანის ამოსახსნელად იგი თავდაპირველად ადგენს ორ ინტეგრალურ განტოლებას, რომელთაგან ერთი ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლებაა, ხოლო მეორე—სინგულარული. იგი არ იკვლევს ამ განტოლებებს; პლემელის ნაშრომის დაუმოწმებლად მას მოჰყავს ამოცანის ელემენტარული ამონახსნი, რომელიც არაა დაკავშირებული განტოლებებთან და, რომელიც ემთხვევა პლემელის ამონახსნს (იმავე კერძო შემთხვევაში).

მელშიც განხილულია უფრო ზოგადი შემთხვევაც; ეს ამოხსნა მოყვანილია შემდეგი პარაგრაფის 4° პუნქტში.

§ 35. შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნა. 1°. შემდგომში დავრწმუნდებით, რომ ამოცანის ზოგადი ამოხსნის აგების საკითხი მიიყვანება მისი ისეთი კერძო ამონახსნის მოძებნაზე, რომელიც *არსად სიბრტყის სასრულ ნაწილში ნული არ ხდება*; იგულისხმება აგრეთვე, რომ ამონახსნის სასაზღვრო მნიშვნელობანი არსად L-ზე არ ხდება ნული. ასეთ ამონახსნს, რომლის არსებობა ქვემოთ იქნება დამტკიცებული, ვუწოდებთ *კანონიკურს*. ნაჩვენები იქნება აგრეთვე (პ. 6°), რომ კანონიკური ამონახსნი სავსებით განისაზღვრება მისი ზემოაღნიშნული თვისებებით, თუ არ ჩავთვლით ნებისმიერ, ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივ მამრავლს.

2°. თავდაპირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა L შედგება ერთი მარტივი შეკრული კონტურისაგან (ე. ი. $p=1$). იმისდა მიხედვით, თუ როგორ ავირჩევთ L-ზე დადებით მიმართულებას, გვექნება ორი შესაძლო შემთხვევა: L-ზე დადებითი მიმართულებით მოძრაობისას მის მარცხნივ დარჩენილი S^+ არე სასრულია და, როცა S^+ უსასრულოა. ამ ორ შემთხვევას[8] ჩვენ შესაბამისად აღვნიშნავთ ა და ბ-თი. $S^+ + L$ სიმრავლის სრულ სიბრტყემდე შემავსებელი არე აღვნიშნოთ S^--ით.

(34,1) თანაფარდობის გალოგარითმებით ვღებულობთ

$$[\ln \Phi(t)]^+ - [\ln \Phi(t)]^- = \ln G(t). \tag{*}$$

ეს თანაფარდობა საშუალებას მოგვცემდა § 31-ში მითითებული გზით განგვესაზღვრა $\ln \Phi(z)$ ფუნქცია, თუ ის ჰოლომორფული და, მაშასადამე, ცალსახა იქნებოდა S^+ და S^- არეებში. მაგრამ მაშინ L-ზე ცალსახა იქნებოდა $\ln G(t)$-ც[9]. ეს საზოგადოდ ასე არ არის, რის გამოც საჭირო ხდება დამატებითი გამოკვლევა.

დავიწყოთ $\ln G(t)$-ს განხილვით. როდესაც t ერთხელ შემოივლის L კონტურს დადებითი მიმართულებით, $\ln G(t)$ მიიღებს ნაზრდს $2\varkappa\pi i$, სადაც მთელი რიცხვი

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)\,]_L = \frac{1}{2\pi}\,[\arg G(t)\,]_L \tag{35,1}$$

არის ჩვენი კერძო შემთხვევის ინდექსი (იხ. წინა პარაგრაფის პუნქტი 1°).

ვთქვათ a L-ის შიგნით მოთავსებული ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია (ასე, რომ ა შემთხვევაში $a \in S^+$, ხოლო ბ შემთხვევაში $a \in S^-$). შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$G_0(t) = (t-a)^{-\varkappa}\, G(t) \quad \text{ა შემთხვევაში} \tag{35,2 ა}$$

და

$$G_0(t) = (t-a)^{\varkappa}\, G(t) \quad \text{ბ შემთხვევაში.} \tag{35,2 ბ}$$

ცხადია, რომ L კონტურის დადებითი მიმართულებით შემოვლისას $\ln G_0(t)$ უბრუნდება თავის თავდაპირველ მნიშვნელობას. ამიტომ, თუ ავირჩევთ ნებისმიერად რომელიმე წერტილში $\ln G_0(t)$-ს გარკვეულ მნიშვნელობას და მოვითხოვთ ამ ფუნქციის

[8] ეს შემთხვევები უშუალოდ მიიყვანება ერთიმეორეზე. მოხერხებულობისათვის ქვემოთ მოგვყავს კანონიკური ამონახსნები ორივე შემთხვევისათვის, რადგან ისინი ხშირად გვხვდება გამოყენებისას.

[9] სწორედ ასეთნაირად (მითითებულ კერძო შემთხვევაში) იძლევა ამოცანის ამოხსნას პლემელი (იხ. წინა პარაგრაფი).

L-ზე უწყვეტად ცვლილებას, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ L-ზე განსაზღვრულია სავსებით გარკვეული ფუნქცია $\ln G_0(t)$; ცხადია, ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას.

შემოვიღოთ ახალი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \text{როცა } z \in S^+ \\ (z-a)^{\varkappa}\,\Phi(z), & \text{როცა } z \in S^- \end{cases} \quad \text{ა შემთხვევაში} \qquad (35,3\text{ ა})$$

და

$$\Psi(z) = \begin{cases} (z-a)^{\varkappa}\,\Phi(z), & \text{როცა } z \in S^+ \\ \Phi(z), & \text{როცა } z \in S^- \end{cases} \quad \text{ბ შემთხვევაში.} \qquad (35,3\text{ ბ})$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (34,1) პირობა ღებულობს სახეს

$$\Psi^+(t) = G_0(t)\,\Psi^-(t). \qquad (35,4)$$

1^0 პუნქტში აღნიშნული კანონიკური ამოხსნის მოსაძებნად, ჯერჯერობით ფორმალურად, დავწეროთ:

$$\ln\Psi^+(t) - \ln\Psi^-(t) = \ln G_0(t),$$

საიდანაც, თუ ჩავთვლით, რომ $\ln\Psi(z)$ ცალსახა უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქციაა და § 31-ში ნათქვამის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\ln\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G_0(t)}{t-z}\,dt, \quad \Psi(z) = e^{\Gamma(z)},$$

სადაც

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G_0(t)}{t-z}\,dt. \qquad (35,5)$$

ცხადია, რომ ნაპოვნი $\Psi(z)$ ფუნქცია უბან-უბან ჰოლომორფულია, უსასრულობაში ხდება ერთის ტოლი და ყველგან განსხვავდება ნულისაგან. უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ იგი წარმოადგენს (35,4) ამოცანის ამონახსნს (კერძოს). მართლაც, (35,5)-იდან გამომდინარეობს, რომ $\Gamma^+(t_0) - \Gamma^-(t_0) = \ln G_0(t_0)$, სადაც t_0 არის L-ის ნებისმიერი წერტილი, აქედან ვღებულობთ ტოლობას

$$\frac{\Psi^+(t_0)}{\Psi^-(t_0)} = \exp\{\ln G_0(t_0)\} = G_0(t_0),$$

ანუ (35,4)-ს. (35,4)-ის მოძებნილი კერძო ამონახსნიდან (35,3) ფორმულებით მაშინვე ვღებულობთ საწყისი (34,1) ამოცანის კერძო ამონახსნს

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^+ \\ (z-a)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^- \end{cases} \quad \text{ა შემთხვევაში,} \qquad (35,6\text{ ა})$$

$$X(z) = \begin{cases} (z-a)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^+ \\ e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^- \end{cases} \quad \text{ბ შემთხვევაში.} \qquad (35,6\text{ ბ})$$

შემდგომში ხშირად გვექნება საქმე $X(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებთან $X^+(t)$, $X^-(t)$. ეს მნიშვნელობები ადვილად გამოითვლება სოხოცკი—პლემელის ფორმულების საშუალებით, რომლებიც გვაძლევენ

$$\Gamma^+(t) = \frac{1}{2} \ln G_0(t) + \Gamma(t), \quad \Gamma^-(t) = -\frac{1}{2} \ln G_0(t) + \Gamma(t),$$

საიდანაც, (35,6 ა)-სა და (35,6 ბ) ტოლობებზე დაყრდნობით, ვღებულობთ

$$X^+(t) = \exp\left\{\frac{1}{2} \ln G_0(t)\right\} e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = (t-a)^{-\varkappa} \exp\left\{-\frac{1}{2} \ln G_0(t)\right\} e^{\Gamma(t)}$$

ა შემთხვევაში, (35,7 ა)

$$X^+(t) = (t-a)^{-\varkappa} \exp\left\{\frac{1}{2} \ln G_0(t)\right\} e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \ln G_0(t)\right\} e^{\Gamma(t)}$$

ბ შემთხვევაში. (35,7 ბ)

(35,2ა)-სა და (35,2ბ)-ს მიხედვით, ეს ფორმულები როგორც ა, ისე ბ შემთხვევაში შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$X^+(t) = (t-a)^{-\varkappa/2} [G(t)]^{1/2} e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = (t-a)^{-\varkappa/2} [G(t)]^{-1/2} e^{\Gamma(t)}. \qquad (35,8)$$

ამ ფორმულების მარჯვენა მხარეში მდგომ ორსახა გამოსახულებათა მნიშვნელობებიდან რომელიმეს არჩევას, ჩვენს შემთხვევაში, მნიშვნელობა არ ენიჭება იმ პირობით, რომ მარჯვენა მხარეები უწყვეტად უნდა იცვლებოდეს და ყოველთვის გვქონდეს $\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = G(t)$, ვინაიდან X-ის შეცვლა $-X$-ით აქ არსებითად არაფერს არ ცვლის. თუ რომელიმე საკითხის შესწავლისას საჭიროა, რომ (35,8) იძლეოდეს (35,6 ა) ან (35,6 ბ) ფორმულით განსაზღვრული $X(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებს, უნდა მივმართოთ (35,7 ა) და (35,7 ბ) ფორმულებს.

შევნიშნოთ, რომ სასაზღვრო მნიშვნელობანი $X^+(t)$ და $X^-(t)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე.

$X(z)$ კერძო ამონახსნი ან ნებისმიერი სხვა, რომელიც მისგან განსხვავდება მუდმივი (ნულისაგან განსხვავებული) მამრავლით, არის სწორედ საძიებელი კანონიკური ამონახსნი (პ. 1°), რადგან იგი არსად (გარდა, შესაძლოა, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა), L წირის წერტილთა ჩათვლით, ნულის ტოლი არ ხდება[10]; ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ ყველგან L-ზე

$$X^+(t) \neq 0, \quad X^-(t) \neq 0.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $X(z)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული L-ზე $\ln G_0(t)$-ს მნიშვნელობათა არჩევაზე, თუ ეს მნიშვნელობანი უწყვეტად იცვლებიან L-ზე. მართლაც, $\ln G_0(t)$-ს ნებისმიერი სხვა მნიშვნელობა არჩეულისაგან განსხვავდება $2\pi ik$-ს ტოლი შესაკრებით, სადაც k მთელი რიცხვია. ამიტომ (35,5) ფორმულით მოცემული $\Gamma(z)$ შეიძლება შეიცვალოს მხოლოდ შემდეგი სახის შესაკრებით:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2k\pi i\,dt}{t-z} = \begin{cases} 0, & \text{როცა } z \ L\text{-ის გარეთაა,} \quad S^+ \\ \pm 2k\pi i, & \text{როცა } z \ L\text{-ის შიგნითაა,} \quad S^- \end{cases}$$

[10] როცა $\varkappa > 0$, $X(\infty) = 0$.

ასე რომ $e^{\Gamma(z)}$ დარჩება უცვლელი.

უშუალო შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით აგრეთვე, რომ $X(z)$ არ არის ფაქტიურად დამოკიდებული L-ის შიგნით a წერტილის არჩევაზე (იხ. შენიშვნა 1 პარაგრაფის ბოლოში).

დაბოლოს, შევნიშნოთ, რომ $X(z)$-ის რიგი უსასრულობაში არის ზუსტად $(-\varkappa)$.

თუ ვიცით კანონიკური ამონახსნი, ადვილია ზოგადი ამონახსნის მოძებნაც, მაგრამ ჩვენ ვამჯობინებთ მის ამოწერას ერთბაშად ზოგადი შემთხვევისათვის (იხ. ქვემოთ პ. 5^0).

3^0. აგებულ კანონიკურ ამონახსნზე დაყრდნობით ადვილია ასეთივე ამონახსნის აგება ყველაზე ზოგადი შემთხვევისათვის (იხ. ქვემოთ პ. 4^0), მაგრამ ჩვენ ვამჯობინებთ მოვძებნოთ კანონიკური ამონახსნი კიდევ ერთი კერძო შემთხვევისათვის[11], რადგან იგი ხშირად გვხვდება გამოყენებებში.

დავუშვათ, რომ L შედგება $L_0, L_1, \ldots, L_p$ შეკრული კონტურებისაგან, რომელნიც შემოსაზღვრავენ სიბრტყის ბმულ ნაწილს (არეს) — S^+-ს, ამასთან L_0 კონტური (ისევე, როგორც § 29-ის პ. 2^0 პუნქტში) შეიცავს თავის შიგნით ყველა დანარჩენს (ნახ. 17, გვ. 118). ისევე, როგორც აღნიშნულ პარაგრაფში, S^--ით აღვნიშნოთ $S^+ + L$-ის დამატება მთელ სიბრტყემდე და ჩავთვალოთ, რომ დადებითი მიმართულება L-ზე S^+ არეს ტოვებს მარცხნივ.

ამ შემთხვევაში კანონიკური ამონახსნი აიგება ისევე, როგორც ზემოთ. სახელდობრ, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\varkappa$-ით აღვნიშნოთ მთელი რიცხვები, რომლებიც განისაზღვრებიან ფორმულებით

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_{L_k} = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{L_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, p, \tag{35,9}$$

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_p. \tag{35,10}$$

ვთქვათ, ახლა a_0 S^+-დან აღებული ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ნებისმიერი წერტილებია, აღებული სათანადოდ $L_1, L_2, \ldots, L_p$ წირების შიგნით. დავუშვათ, აგრეთვე

$$\Pi(z) = (z - a_1)^{\lambda_1} (z - a_2)^{\lambda_2} \cdots (z - a_p)^{\lambda_p},$$

$$G_0(t) = (t - a_0)^{-\varkappa}\, \Pi(t)\, G(t); \tag{35,11}$$

ცხადია, რომ $G_0(t)$ ფუნქციის არგუმენტი უბრუნდება თავის საწყის მნიშვნელობას, როცა t აღწერს თითოეულს $L_0, L_1, \ldots, L_p$ კონტურებიდან. და, ბოლოს, შემოვიღოთ

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G_0(t)\, dt}{t - z}. \tag{35,12}$$

მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ (შდრ. პ. 2^0) უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Pi(z)}\, e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^+, \\ (z - a_0)^{-\varkappa}\, e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^- \end{cases} \tag{35,13}$$

[11] ეს ამონახსნი აიგო ბ. ხვედელიძემ [2].

წარმოადგენს (34,1) ამოცანის ისეთ კერძო ამონახსნს, რომელიც არსად სასრულ სიბრტყეში ნულის ტოლი არ ხდება, ისევე, როგორც L-ზე მისი სასაზღვრო მნიშვნელობანი $X^+(t)$ და $X^-(t)$. ამრიგად, $X(z)$ ამონახსნი ანდა ნებისმიერი სხვა, რომელიც მისგან განსხვავდება მუდმივი (ნულის არა ტოლი) მამრავლით, არის კანონიკური.

სასაზღვრო მნიშვნელობანი $X^+(t)$ და $X^-(t)$ ეკუთვნიან H კლასს L-ზე. მათი გამოსახულებანი ანალოგიურია (55,7 ა)-სა და (35,8)-ის და ადვილია მათი ამოწერა.

ადვილია უშუალოდ შემოწმება, რომ აგებული $X(z)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული (35,12)-ში $\ln G(t)$-ს მნიშვნელობათა არჩევაზე (შდრ. პ. 2). ასევე. უშუალოდ შემოწმდება, რომ $X(z)$ ფაქტიურად დამოკიდებული არ არის სათანადო არეებში $a_0, a_1, \ldots, a_p$ წერტილების არჩევაზე (იხ. შენიშვნა 1 პარაგრაფის ბოლოში). $X(z)$ ფუნქციის რიგი უსასრულობაში არის ზუსტად $(-\varkappa)$.

ამ პუნქტში მიღებული ყველა ფორმულა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა არა გვაქვს L_0 კონტური (და ე. ი. S^+ არე უსასრულოა); ოღონდ უნდა დავუშვათ, რომ ამ დროს $\lambda_0=0$.

4°. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა L შედგება ნებისმიერად განლაგებული (მარტივი, შეკრული, გლუვი და არათანამკვეთი) $L_1, L_2, \ldots, L_p$ კონტურებისაგან, რომლებზეც არჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულებანი. ამ შემთხვევისათვის ამოცანას ამოვხსნით 2°-ში ერთი კონტურისათვის მიღებულ ამოხსნაზე დაყრდნობით (შდრ. W. Trjitzinsky [1]).

სახელდობრ, აღვნიშნოთ $X_k(z)$-ით შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის კანონიკური ამონახსნი, აგებული იმ დაშვებით, რომ L-ის შემადგენელი კონტურებიდან დატოვებულია მხოლოდ ერთი — L_k. სათანადო ინდექსი აღვნიშნოთ λ_k-თი.

ადვილია ჩვენება, რომ $L=L_1+L_2+\cdots+L_p$ წირისათვის ფუნქცია

$$X(z) = X_1(z)\, X_2(z) \cdots X_p(z) \tag{35,14}$$

არის § 34-ში დასმული (34,1) ამოცანის ამონახსნი. მართლაც, $X_j(t)$ ფუნქციის განსაზღვრის ძალით L_k-ზე მდებარე t წერტილებისათვის, გვექნება

$$X_k^+(t) = G(t)\, X_k^-(t), \quad X_l^+(t) = X_l^-(t), \quad k \neq l,$$

რადგან L_k კონტური არ არის $X_l(z)$ ფუნქციის ნახტომის წირი. მაშასადამე, $X^+(t)= =G(t)\, X^-(t)$ L-ის შემადგენელ ყოველ L_k-კონტურზე, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

(35,14)-ით მოცემული კერძო ამონახსნი (ან ნებისმიერი, მისგან მუდმივი მამრავლით განსხვავებული) არის (34,1) ამოცანის კანონიკური ამონახსნი, რადგან იგი არსად სასრულ სიბრტყეში არ ხდება ნულის ტოლი, ისევე, როგორც L-ზე მისი სასაზღვრო მნიშვნელობები $X^+(t)$ და $X^-(t)$.

ამ ამონახსნის რიგი უსასრულობაში არის ზუსტად $(-\varkappa)$, სადაც $\varkappa$ კვლავინდებურად აღნიშნავს L-ზე განსაზღვრული $G(t)$ ფუნქციის ინდექსს ანუ

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{p} [\ln G(t)]_{L_k} = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L . \tag{35,15}$$

$X^+(t)$ და $X^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობათა გამოსათვლელად შევნიშნოთ შემდეგი. თუ $t \in L_k$, მაშინ $X_1(z), \ldots, X_{k-1}(z), X_{k+1}(z), \ldots, X_p(z)$ ფუნქციათა სასა-

ზღვრო მნიშვნელობებს t წერტილში მივიღებთ ამ ფუნქციებში z-ის ნაცვლად t-ს ჩასმით, ვინაიდან L_k არ არის მათი ნახტომის წირი. ამიტომ

$$X^{\pm}(t) = X_1(t)\cdots X_{k-1}(t)\, X_k^{\pm}(t)\, X_{k+1}(t)\cdots X_p(t), \quad \text{როცა } t \in L_k; \tag{35,16}$$

$X_k^+(t)$-სა და $X_k^-(t)$-ს გამოსათვლელი ფორმულები მოყვანილი გვქონდა 2⁰ პუნქტში.

ცხადია, რომ $X^+(t)$, $X^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ H პირობას L-ზე.

5⁰. ვაჩვენოთ ახლა, რომ თუ $X(z)$ არის კანონიკური ამონახსნი, მაშინ ერთგვაროვანი ამოცანის ყველა ამონახსნი (ჩვენ მხედველობაში გვაქვს მხოლოდ ის ამონახსნები, რომელთაც სასრული რიგი აქვთ უსასრულობაში) მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = X(z)\, P(z), \tag{35,17}$$

სადაც $P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია.

მართლაც, ვთქვათ, $\Phi(z)$ რომელიმე ამონახსნია. პირობის ძალით

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t), \quad X^+(t) = G(t)\, X^-(t),$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $X^+(t) \neq 0$, $X^-(t) \neq 0$, მივიღებთ

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

ამრიგად, ფუნქცია $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეზე; მაგრამ მას აქვს სასრული რიგი უსასრულობაში, მაშასადამე, ეს ფუნქცია პოლინომია და ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი გარემოება. რადგან სასაზღვრო მნიშვნელობანი $X^+(t)$ და $X^-(t)$ ეკუთვნიან H კლასს L-ზე, (35,17)-დან გამომდინარეობს, რომ ჩვენი ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნის სასაზღვრო მნიშვნელობანი $\Phi^+(t)$ და $\Phi^-(t)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე; ცხადია ეს არის შედეგი იმისა, რომ მოცემული $G(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას.

6⁰. (35,17) ფორმულიდან ადვილად დავასკვნით, რომ ყველა კანონიკური ამონახსნი (1⁰ პუნქტში მოცემული განსაზღვრის აზრით) მიიღება ერთ-ერთი მათგანის გამრავლებით ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ მუდმივზე. მართლაც, $\Phi(z)$ რომ კანონიკური ამონახსნი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ (35,17) ფორმულაში $P(z)$ პოლინომი გადაიქცეს მუდმივად, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\Phi(z)$ მიიღებდა ნულის ტოლ მნიშვნელობას რომელიმე სასრულ წერტილში.

აღვნიშნოთ კიდევ შემდეგი. თუ (35,17) ფორმულაში $P(z)$ პოლინომის რიგია k, მაშინ $\Phi(z)$-ის რიგი უსასრულობაში ზუსტად ტოლია $(-\varkappa + k)$-სი. ამიტომ ამ შემთხვევაში ეს რიგი $X(z)$ ამონახსნის $(-\varkappa)$ რიგზე მცირე არაა; $\Phi(z)$-ის რიგი ტოლია $X(z)$-ის რიგისა მხოლოდ მაშინ, როცა $k = 0$, ე. ი., როცა $P(z) = \text{const} \neq 0$.

აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ კანონიკურ ამონახსნს, თუ არ ჩავთვლით ნებისმიერ მუდმივ მამრავლს, განსაზღვრავს თითოეული შემდეგი სამი პირობიდან:

I. იგი არსად სასრულ სიბრტყეში არ ხდება ნული.

II. მას აქვს უმცირესი შესაძლო რიგი უსასრულობაში ($(-\varkappa)$-ს ტოლი).

III. ერთგვაროვანი ამოცანის ყოველი ამონახსნი მოიცემა (35,17) ფორმულით.

I და II-ის შესაბამისი დებულებანი ახლახან იყო დამტკიცებული; III-ის შესაბამისი დებულება—ცხადია, ზემოთქმულის საფუძველზე.

7°. გამოყენების თვალსაზრისით განსაკუთრებით საინტერესოა ერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები. მოვიყვანოთ ზემოთქმულიდან უშუალოდ გამომდინარე ერთი დებულება:

თუ $\varkappa \leqslant 0$, ერთგვაროვან ამოცანას არა აქვს უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები (გარდა ტრივიალური ამონახსნისა $\Phi(z)=0$), თუ $\varkappa > 0$, მაშინ მას აქვს უსასრულობაში ქრობადი $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი

$$X(z), \quad zX(z), \quad z^2X(z), \ldots, \; z^{\varkappa-1}X(z). \tag{35,18}$$

მართლაც, უსასრულობაში ქრობადი ყოველი ამონახსნი მოიცემა (35,17) ფორმულით, რომელშიც $P(z)$-ის რიგი არ აღემატება $(\varkappa-1)$-ს. მაშასადამე, უსასრულობაში ქრობადი ყველა ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$\Phi(z)=X(z)\,P_{\varkappa-1}(z),$$

სადაც

$$P_{\varkappa-1}(z)=c_0z^{\varkappa-1}+c_1z^{\varkappa-2}+\cdots+c_{\varkappa-1},$$

ხოლო $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa-1}$ ნებისმიერი მუდმივებია.

8°. ზოგჯერ საჭიროა მოიძებნოს უსასრულობაში შემოსაზღვრული (არა მაინცდამაინც ქრობადი) ამონახსნები. წინა შემთხვევის ანალოგიურად, ადვილია იმისი ჩვენება, რომ თუ $\varkappa \leqslant -1$, ერთგვაროვან ამოცანას არ აქვს უსასრულობაში შემოსაზღვრული ამონახსნები; თუ $\varkappa > -1$, მაშინ მას აქვს წრფივად დამოუკიდებელი $(\varkappa+1)$ ასეთი ამონახსნი

$$X(z), \; zX(z), \ldots, \; z^{\varkappa}X(z).$$

ზოგად ამონახსნს იძლევა წინა პუნქტის ფორმულები, რომლებშიაც ახლა $(\varkappa-1)$-ის ნაცვლად უნდა დავწეროთ $\varkappa$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. 2° პუნქტში $X(z)$ კანონიკური ამონახსნის გამოსახულებაში მონაწილეობდა L-ის შიგნით მდებარე ნებისმიერი წერტილი a. ახლა ადვილია ვაჩვენოთ, რომ $X(z)$ ფაქტიურად არ არის დამოკიდებული a-ზე. მართლაც, როგორც ვაჩვენეთ, კანონიკური ამონახსნი განისაზღვრება მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით. იგი სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ მას დავუქვემდებარებთ რაიმე დამატებით პირობას, მაგალითად, მოვითხოვთ, რომ

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa}X(z)=1.$$

ამ პირობას აკმაყოფილებს 2° პუნქტში აგებული $X(z)$ ფუნქცია. აქედან ჩანს, რომ თუ $X(z)$-ის გამოსახულებაში a წერტილს შევცვლით L-ის შიგნით მდებარე ნებისმიერი b წერტილით, კვლავ მივიღებთ იგივე ფუნქციას.

აღნიშნული ფაქტი ადვილად შეიძლება შემოწმდეს უშუალო გამოთვლებითაც. მართლაც, ვთქვათ $X_a(z)$-ით აღნიშნულია ფუნქცია, რომელიც 2° პუნქტში აღვნიშნეთ $X(z)$-ით, ხოლო $X_b(z)$ იყოს ფუნქცია, რომელიც აიგება ისევე, როგორც $X_a(z)$, ოღონდ a წერტილი ჩანაცვლებულია L-ის შიგნით მდებარე b წერტილით. გარკვეულობისათვის განვიხილოთ შემთხვევა ა (პ. 2°); (35,6 ა), (35,5), (35,2 ა)-ს საფუძველზე ვღებულობთ:

$$\frac{X_b(z)}{X_a(z)} = \begin{cases} \exp\left[\Gamma_b(z) - \Gamma_a(z)\right], & \text{როცა } z \in S^+, \\ \left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^{\varkappa} \exp\left[\Gamma_b(z) - \Gamma_a(z)\right], & \text{როცა } z \in S^-, \end{cases}$$

სადაც

$$\Gamma_a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\left[(t-a)^{-\varkappa} G(t)\right]}{t-z}\,dt, \quad \Gamma_b(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\left[(t-b)^{-\varkappa} G(t)\right]}{t-z}\,dt$$

და, მაშასადამე,

$$\Gamma_b(z) - \Gamma_a(z) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \ln\left(\frac{t-a}{t-b}\right)\frac{dt}{t-z}.$$

აქ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\ln\left(\dfrac{t-a}{t-b}\right)$ არის მნიშვნელობა, რომელსაც L-ზე ღებულობს L-ის გარეთ ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია $\ln\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$.

მაშინ, კოშის თეორემის ძალით,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln\left(\frac{t-a}{t-b}\right)\frac{dt}{t-z} = \begin{cases} 0, & \text{როცა } z \in S^+, \\ -\ln\dfrac{z-a}{z-b}, & \text{როცა } z \in S^-. \end{cases}$$

წინა ფორმულებში ამ მნიშვნელობათა შეტანით გვექნება

$$\frac{X_b(z)}{X_a(z)} = 1,$$

და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. კანონიკური ამონახსნისათვის 2^0 პუნქტში მოცემულ ფორმულებს (იმ შემთხვევისათვის, როცა L შედგება ერთი კონტურისაგან) შეიძლება მიეცეს შედარებით განსხვავებული სახე, სადაც L-ის შიგნით აღებული a წერტილის ნაცვლად მონაწილეობს L-ზე მდებარე (ნებისმიერად არჩეული) c წერტილი. ამისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. შევჩერდეთ გარკვეულობისათვის ა შემთხვევაზე (3. 2^0). ავირჩიოთ L კონტურზე ნებისმიერი c წერტილი და შევაერთოთ იგი a წერტილთან მთლიანად S^+-ში მდებარე რაიმე მარტივი უწყვეტი l რკალით. $\ln G(t)$-თი აღვნიშნოთ ამ ფუნქციის რომელიმე მნიშვნელობა, რომელიც უწყვეტია c-ზე გაჭრილ L კონტურზე, ხოლო $\ln(t-a)$-თი — მნიშვნელობა, რომელსაც L კონტურზე ღებულობს l-ის გასწვრივ გაჭრილ S^+ არეში ანალიზური ფუნქციის $\ln(z-a)$-ს რომელიმე შტო. მაშინ (35,5) შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(t)\,dt}{t-z} - \frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln(t-a)\,dt}{t-z}.$$

ახლა მხედველობაში მივიღოთ, რომ 2^0 პუნქტში აგებული $X(z)$ არ არის დამოკიდებული a-ს მდებარეობაზე, მივუახლოვოთ იგი c წერტილს და უწყვეტად ვამციროთ $l = ac$ რკალი, მაშინ (35,6 ა)-ს საფუძველზე ადვილად მივიღებთ

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^+,\\ (z-c)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^-,\end{cases}$$

სადაც ამჯერად

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln(t-c)\,dt}{t-z},$$

ამასთან $\ln(t-c)$ არის ის მნიშვნელობა, რომელსაც ღებულობს L-ზე S^+-ში ჰოლომორფული $\ln(z-c)$ ფუნქციის რომელიმე შტო. ამ უკანასკნელი გარემოების გათვალისწინებით, კოშის თეორემის ძალით, მივიღებთ[12]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln(t-c)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\ln(z-c), & \text{როცა } z\in S^+,\\ 0, & \text{როცა } z\in S^-,\end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$X(z)=(z-c)^{-\varkappa}e^{\gamma(z)}, \tag{35,19}$$

რომელშიაც

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}. \tag{35,20}$$

ეს ფორმულები, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, სამართლიანია L-ზე დადებითი მიმართულების ნებისმიერად არჩევისას (ე. ი. 2^0 პუნქტში განხილულ ორივე ა და ბ შემთხვევაში).

ცხადია, რომ $X(z)$ ფუნქციას, მიუხედავად უკანასკნელი ფორმულის გარეგანი სახისა, c წერტილში არავითარი განსაკუთრებულობა არ აქვს; ამის შემოწმება უშუალოდაც ადვილია[13].

ანალოგიური ფორმულის მიღება შეიძლება 3^0-ში განხილულ და, აგრეთვე, ზოგად შემთხვევაშიაც.

ყველა ეს ფორმულა წარმოადგენს კერძო შემთხვევას ფორმულებისა, რომლებიც მიღებული იქნება IV თავში.

შენიშვნა 3[14]. ადვილია მიღებული შედეგების გავრცელება იმ შემთხვევაზეც, როცა L წირის შემადგენელ $L_1, L_2, \ldots, L_p$ კონტურებს საერთო წერტილები აქვს (ე. ი. თანაიკვეთება და ეხება ერთმანეთს), იმ პირობით, რომ მათი რაოდენობა სასრულია. სიმოკლისათვის აღნიშნული სახის წერტილებს c წერტილებს ვუწოდებთ.

აქ დროებით გადავუხვევთ იმ შეთანხმებიდან (§ 1), რომლის თანახმადაც, L-ის შემადგენელი შეკრული კონტურები უნდა დაგვენაწილებინა ისეთ რკალებად, რომელთაც, ბოლოების გარდა, საერთო წერტილები არა აქვთ. ჩვენს შემთხვევაში უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციად ჩავთვლით ფუნქციას, რომელიც L წირით შემოსაზღვრულ ყოველ ბმულ არეში ჰოლომორფულია, გარდა, შესაძლოა, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა და, რომელიც უწყვეტად გრძელდება მარცხნიდან და მარჯვნიდან L-ის

---

[12] ის გარემოება, რომ $\ln(z-c)$ უსასრულო ხდება $z=c$ წერტილში, აქ ხელს არ გვიშლის.

[13] (35,19) სახის ფორმულები რამდენადმე განსხვავებული გზით მიღებული იყო თ. გახოვის მიერ [10], პირველი გამოცემა, § 44.2.

[14] იხ. W. Trjitzinsky [1].

ყოველ წერტილზე, გარდა, შესაძლოა, c წერტილებისა, რომელთა მიდამოშიც იგი შემოსაზღვრული უნდა იყოს.

ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის ფორმულირებისას ახლა ჩავთვლით, რომ $G(t)$ განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $G(t) = G_k(t)$ L_k-ზე, გარდა c წერტილებისა, სადაც $G_k(t)$ $L_k (k=1, 2, \ldots, p)$ კონტურებზე განსაზღვრული H კლასის ფუნქციებია; c წერტილებში $G(t)$ განსაზღვრული არ არის. (34,1) პირობის შესრულებას, ერთგვაროვანი ამოცანის ფორმულირებისას, მოვითხოვთ ყველგან L-ზე გარდა c წერტილებისა.

ამ პირობებში წინამდებარე პარაგრაფში მოყვანილი მსჯელობანი ძალაში რჩება. კანონიკური ამონახსნი $X(z)$ აიგება ისევე, როგორც ზემოთ. იგი არსად ნული არ ხდება ისევე, როგორც $X^+(t)$ და $X^-(t)$, სადაც ახლა ვგულისხმობთ, რომ t არ ემთხვევა c წერტილს. ამ წერტილების მახლობლობაში კი $X(z)$ აკმაყოფილებს $|X(z)| > \text{const} > 0$ პირობას და შემოსაზღვრულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4. ბევრ შემთხვევაში, რომლებიც პრაქტიკაში გვხვდება, კანონიკური ფუნქციის ცხადი სახით აგება მარტივად შეიძლება.

ვთქვათ, მაგალითად, L მარტივი შეკრული კონტურია და $G(t)$ t-ს რაციონალური ფუნქციაა. თუ S^+-ით და S^--ით აღვნიშნავთ არეებს, რომლებსაც შემოსაზღვრავს L კონტური (ამასთან, როგორც ყოველთვის S^+ ეკვრის L-ს მარცხნივ), მაშინ, ცხადია, ფუნქცია

$$X_0(z) = \begin{cases} G(z), & \text{როცა } z \in S^+, \\ 1, & \text{როცა } z \in S^- \end{cases}$$

აკმაყოფილებს საჭირო სასაზღვრო პირობას $X_0^+(t) = G(t)\, X_0^-(t)$.

თუ $G(z)$-ს არ აქვს ნულები და პოლუსები S^+-ში სასრულ მანძილზე, ცხადია, $X_0(z)$ იქნება საძიებელი კანონიკური ამონახსნი, ხოლო, თუ $G(z)$-ს S^+-ში აქვს ნულები და პოლუსები, კანონიკურ $X(z)$ ამონახსნს მივიღებთ, თუ მას ასე განვსაზღვრავთ:

$$X(z) = \frac{X_0(z)}{R(z)},$$

სადაც $R(z)$ არის რაციონალური ფუნქცია, რომელსაც აქვს ზუსტად ის ნულები და პოლუსები (იგივე ჯერადობისა), რაც აქვს $G(z)$-ს S^+-ის სასრულ ნაწილში[15].

ეს მარტივი შედეგი, რა თქმა უნდა, შეიძლება მიღებულ იქნეს ზოგადი ფორმულებიდანაც, თუ ვიპოვით მათში შემავალ $\Gamma(z)$ ინტეგრალის მნიშვნელობას, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ადვილად გამოითვლება.

რადგან L-ზე განსაზღვრულ ყოველ უწყვეტ ფუნქციას შეგვიძლია ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ რაციონალური ფუნქციებით, ზემოთ მოყვანილი მსჯელობით შეგვიძლია ვისარგებლოთ ამოცანის მიახლოებით ამოსახსნელად.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა L შედგება შეკრული კონტურებისაგან $L_1, L_2, \ldots, L_p$ და

$$G(t) = G_k(t), \quad t \in L_k, \quad k=1, 2, \ldots, p,$$

[15] შევნიშნოთ, რომ მსჯელობანი და ფორმულები უცვლელი დარჩება უფრო ზოგად შემთხვევაშიაც, სახელდობრ, როცა L, S^+, S^- აღნიშნავს იგივეს, რასაც § 29-ის პ. 1-ში, კერძოდ, იმასაც რაც ამ პარაგრაფის პ. 3-ში.

სადაც $G_k(t)$ რაციონალური ფუნქციებია, კანონიკური ამონახსნის აგებას მოვახერხებთ ახლახან აღწერილი ხერხისა და წინამდებარე პარაგრაფის პ. 4⁰-ში აღნიშნული ხერხის გაერთიანებით.

§ 36. შეულლების ერთგვაროვანი მიკავშირებული ამოცანები. შეულლების ერთგვაროვან ამოცანებს, რომლებიც შეესაბამებიან სასაზღვრო პირობებს

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad \Psi^+(t) = [G(t)]^{-1}\,\Psi(t), \quad t \in L, \tag{36,1}$$

ვუწოდებთ მიკავშირებულ ამოცანებს.

წინა პარაგრაფიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $\varkappa$ არის ერთ-ერთი ამ ამოცანის ინდექსი, მაშინ მეორისა იქნება $(-\varkappa)$ და თუ $X(z)$ ერთ-ერთის კანონიკური ამონახსნია, $[X(z)]^{-1}$ იქნება მეორის კანონიკური ამონახსნი.

კერძოდ, წინა პარაგრაფის 7⁰ საფუძველზე ვასკვნით, რომ თუ მოცემული ერთგვაროვანი ამოცანის ინდექსი $\varkappa$ უარყოფითია, მაშინ მის მიკავშირებულ ერთგვაროვან ამოცანას აქვს უსასრულობაში ქრობადი $(-\varkappa)$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი

$$\frac{1}{X(z)}, \quad \frac{z}{X(z)}, \ldots, \frac{z^{\varkappa-1}}{X(z)}, \tag{36,2}$$

სადაც $X(z)$ მოცემული ერთგვაროვანი ამოცანის კანონიკური ამონახსნია.

§ 37. შეულლების არაერთგვაროვანი ამოცანა. 1⁰. სასაზღვრო მნიშვნელობათა შეულლების არაერთგვაროვან ამოცანას, ან მოკლედ, შეულლების არაერთგვაროვან ამოცანას ვუწოდებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას:

ვიპოვოთ L სასაზღვრო წირის მქონე უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელსაც უსასრულობაში სასრული რიგი აქვს და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{37,1}$$

სადაც $G(t)$ და $g(t)$ L-ზე მოცემული H კლასის ფუნქციებია, ამასთან $G(t) \neq 0$ ყველგან L-ზე (დანარჩენი აღნიშვნები იგივეა, რაც § 34-ში).

ეს ამოცანები, რომელიც შეულლების ერთგვაროვანი ამოცანის ბუნებრივ განზოგადებას წარმოადგენს (რამდენადმე განსხვავებული დასმით), პირველად განიხილა ი. პრივალოვმა [3][16]; მაგრამ მან ვერ შეძლო რამდენადმე დასრულებული ამოხსნის აგება[17]. ამოცანის ასეთი ამონახსნი პირველად ააგო თ. გახოვმა [1], [2]. ეს ამოხსნა (გარკვეული განზოგადებით) მოგვყავს ამ პარაგრაფში[18].

უნდა აღინიშნოს, რომ ი. პრივალოვსა და თ. გახოვზე ადრე ტ. კარლემანმა (T. Carleman [1]) ამოხსნა დასმული ამოცანის ანალოგიური ამოცანა ერთ კერძო შემთხვევაში[19], ამოცანის ამოხსნის თ. გახოვის ხერხი არსებითად ანალოგიურია ტ. კარლემანის ხერხისა.

---

[16] ი. პრივალოვი განიხილავს შემთხვევას, როცა L გაწრფევადი შეკრული კონტურია, ხოლო $G(t)$ და $g(t)$ ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციებია, ამასთან, $0 < m \leqslant |G(t)| \leqslant M$, სადაც m და M მუდმივებია. $\Phi(z)$-ისაგან მოითხოვება, რომ მას ჰქონდეს კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობანი.

[17] ი. პრივალოვი იყენებს იგივე მეთოდს, რომლითაც ე. პუანკარე ცდილობდა ერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნას; ჩვენ მხედველობაში გვაქვს 135 გვ-ზე სქოლიოში მითითებულ მეთოდთაგან პირველი.

[18] მითითებულ სტატიებში თ. გახოვი განიხილავს შემთხვევას, როცა L შედგება ერთი შეკრული კონტურისაგან

[19] ამის შესახებ იხ. IV თავში.

დასმული ამოცანის ამოხსნა ადვილად მიიღება წინა პარაგრაფებში მოყვანილ შედეგებზე დაყრდნობით.

სახელდობრ, ვთქვათ $X(z)$ არის იმ ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის კანონიკური ამონახსნი, რომელიც მიიღება (37,1)-დან, როცა $g(t)=0$. მაშინ $X^+(t)=$ $=G(t)\,X^-(t)$ ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)}.$$

$G(t)$-ს ამ მნიშვნელობის შეტანით (37,1)-ში მივიღებთ:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}=\frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

$\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ ფუნქციას უსასრულობაში სასრული რიგი აქვს. ამიტომ § 31-დან გამომდინარეობს:

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}+P(z),$$

სადაც $P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია. აქედან

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}+P(z)\,X(z). \tag{37,2}$$

ეს არის სწორედ არაერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი. $X(z)$ ფუნქციას — კანონიკურ ამონახსნს იმ ერთგვაროვანი ამოცანისა, რომელიც მიიღება არაერთგვაროვანიდან, როცა $g(t)=0$, ვუწოდებთ მოცემული არაერთგვაროვანი ამოცანის შესაბამის კანონიკურ ფუნქციას; ამ ამოცანის ინდექსს ვუწოდებთ სათანადო ერთგვაროვანი ამოცანის ინდექსს.

2°. გამოყენების თვალსაზრისით საინტერესოა არაერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები.

გამოვიკვლიოთ ასეთი ამონახსნების არსებობის საკითხი და მოვძებნოთ ისინი. რადგან $X(z)$ ფუნქციას უსასრულობაში აქვს ზუსტად $(-\varkappa)$ რიგი, დავასკვნით, რომ თუ $\varkappa\geqslant 0$ (37,2)-ით განსაზღვრული ამონახსნი უსასრულობაში ქრობადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P(z)$ პოლინომის რიგი არ აღემატება $(\varkappa-1)$-ს, ამასთან როცა $\varkappa=0$, უნდა ავიღოთ $P(z)=0$.

როდესაც $\varkappa<0$, ცხადია, უნდა ავიღოთ $P(z)=0$ და ამის გარდა მოვითხოვოთ, რომ მწკრივში

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}=-\frac{z^{-1}}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(t)dt}{X^+(t)}-\frac{z^{-2}}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\,t\,dt-\cdots$$

z^{-1}, z^{-2}, ..., $z^{-\varkappa}$-სთან მდგომი კოეფიციენტები იყოს ნულის ტოლი. ამრიგად მივიღეთ, რომ:

თუ $\varkappa\geqslant 0$, მაშინ (37,1) არაერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ყველა ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}+X(z)\,P_{\varkappa-1}(z), \qquad (37,3)$$

სადაც $P_{\varkappa-1}(z)$ არის $\varkappa-1$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომი [$P_{\varkappa-1}(z)=0$, როცა $\varkappa=0$].

თუ $\varkappa<0$, მაშინ უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს პირობები

$$\int_L \frac{t^k\,g(t)\,dt}{X^+(t)}=0, \quad k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa-1, \qquad (37,4)$$

და, თუ ეს პირობები დაცულია, ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}\,. \qquad (37,5)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\varkappa=0$, მაშინ არსებობს უსასრულობაში ქრობადი მხოლოდ ერთი ამონახსნი; როცა $\varkappa<0$, მაშინ უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი ერთადერთია, თუკი ასეთი ამონახსნი არსებობს; როცა $\varkappa>0$, მაშინ არსებობს უსასრულო რაოდენობის ამონახსნები (სახელდობრ: ზოგადი ამონახსნი შეიცავს $\varkappa$ ნებისმიერ მუდმივს).

3°. ზოგჯერ საჭიროა ისეთი ამონახსნების მოძებნა, რომლებიც შემოსაზღვრულია უსასრულობაში (და, მაშასადამე მთელს სიბრტყეში). ამ შემთხვევაში, ცხადია, მართებულია შემდეგი დებულება:

როცა $\varkappa\geqslant-1$ შემოსაზღვრულ ამონახსნათა სიმრავლე მოიცემა (37,3) ფორმულით, რომელშიაც $P_{\varkappa-1}(z)$ უნდა შეიცვალოს $P_{\varkappa}(z)$-ით, მასთან, $P_{\varkappa}(z)=0$, თუ $\varkappa=-1$. როცა $\varkappa<-1$, მაშინ შემოსაზღვრული ამონახსნების არსებობისათვის აუცილებელია (37,4) პირობების შესრულება, სადაც ამჯერად $k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa-2$. ამონახსნი წარმოიდგინება (37,5) ფორმულით. როცა $\varkappa=-1$, ამოცანას აქვს ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი.

4°. შეუღლების ორ ამოცანას მიკავშირებულს ვუწოდებთ, თუ მიკავშირებულია მათი შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანები (იხ. § 36).

თუ განვიხილავთ მოცემული (37,1) სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი მიკავშირებული ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნებს, მაშინ (37,4) პირობები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\int_L \Psi_k^+(t)\,g(t)\,dt=0, \quad k=1,\ 2,\dots,\ (-\varkappa), \qquad (37,6)$$

სადაც $\Psi_k^+(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობებია იმ $\Psi_k(z)$ ფუნქციებისა, რომლებიც ქმნიან მიკავშირებული ერთგვაროვანი ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრულ სისტემას.

ეს დასკვნა უშუალოდ გამომდინარეობს (37,4) და (36,2) ფორმულებიდან.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. როგორც ერთგვაროვანი, ისე არაერთგვაროვანი ამოცანის დასმისას, გამოვყავით უსასრულოდ დაშორებული წერტილი და ვგულისხმობდით, რომ ამონახსნს ამ წერტილში შეიძლება ჰქონდეს განსაკუთრებულობა, სახელდობრ, პო-

ლუსი. ასეთი დაშვება, როგორც უკვე ვნახეთ (ეს შემდგომშიაც დადასტურდება), მოხერხებულია როგორც დასკვნების გასაკეთებლად, ისე გამოყენებებისათვის. თუმცა არსებითი არაა, გამოვყოფთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს თუ L-ის გარეთ მდებარე სხვა წერტილს, რომელშიაც დასაშვებად ჩავთვლით, ამოხსნას ჰქონდეს პოლუსი. შესაძლოა გამოიყოს რამოდენიმე ასეთი წერტილიც. ჩვენ შევჩერდით უსასრულოდ დაშორებულ წერტილზე, ვინაიდან ეს შემთხვევა უფრო მოხერხებულია დადგენილი შედეგის გამოყენებისას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. წინამდებარე პარაგრაფის შედეგების განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, როცა L წირის შემადგენელ კონტურებს აქვს სასრული რაოდენობის თანაკვეთის წერტილები არავითარ სირთულეს არ აწყდება (შდრ. შენიშვნა 3 § 35-ის ბოლოში).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. ნ. გოვოროვის [1], [2] და პ. იუროვის [1] შრომებში ამოცანა შესწავლილია ზოგიერთ ისეთ შემთხვევაში, როცა $G(t)$ ფუნქციის ინდექსი უსასრულოა (რაც, ცხადია, არ შეიძლება მოხდეს ჩვენ მიერ მიღებულ პირობებში).

§ 38. წრფივი შეუღლების ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა სასაზღვრო წირი წრფეა. 1°. ყველგან ამ წიგნში, გარდა მცირე გამონაკლისისა, ცალკე არ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა სასაზღვრო წირი გადის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილზე, რადგან მარტივი წილად-წრფივი გარდაქმნის საშუალებით იგი დადის სასრული სასაზღვრო წირის შემთხვევაზე. ცხადია, ამ დროს თავდაპირველი წირისაგან მოითხოვება, რომ მისი გარდაქმნით მიღებული წირი აკმაყოფილებდეს ყველა იმ პირობას, რომელთაც ვითხოვთ ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნისას.

2°. უმარტივესი, მაგრამ პრაქტიკულად მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როცა სასაზღვრო წირი არის D წრფე. აღნიშვნათა გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ D ემთხვევა ნამდვილ ღერძს. S^+-ითა და S^--ით აღვნიშნოთ, სათანადოდ, ზედა და ქვედა ნახევარსიბრტყეები.

შეუღლების ამოცანას ამ შემთხვევაში ასე ვაყალიბებთ:

ვიპოვოთ ისეთი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია $\Phi(z)$ (D ნაჭრომის წირით), რომელიც შემოსაზღვრულია მთელ სიბრტყეზე, გარდა, შესაძლოა, მოცემული a_0 წერტილის მიდამოსი, $a_0 \overline{\in} D$, რომელშიაც მას შეიძლება ჰქონდეს პოლუსი[20], და რომელიც აკმაყოფილებდეს სასაზღვრო პირობას:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in D, \tag{38,1}$$

სადაც $G(t)$ და $g(t)$ D-ზე განსაზღვრული H კლასის ფუნქციებია, ამასთან $G(t) \neq 0$; უსასრულოდ დაშორებული წერტილი მიეკუთვნება D-ს.

ამოცანის ან $G(t)$ ფუნქციის ინდექსს ვუწოდებთ რიცხვს

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)]_D = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)]_{-\infty}^{\infty}, \tag{38,2}$$

სადაც $[\ln G(t)]_{-\infty}^{\infty}$ აღნიშნავს $\ln G(t)$-ს ნაზრდს, როცა t წერტილი გაირბენს D წრფეს $t = -\infty$-დან $t = +\infty$-მდე. გავიხსენოთ, რომ $G(t)$-ს მიმართ მიღებული პირობების[21] საფუძველზე $G(+\infty) = G(-\infty) \neq 0$.

[20] იხ. შენიშვნა 1 წინა პარაგრაფის ბოლოში. ჩვენ აქ არ ვიღებთ ასეთ წერტილად $z = \infty$ წერტილს, რადგან, ამ შემთხვევაში ეს უკანასკნელი მდებარეობს სასაზღვრო წირზე.

[21] კერძოდ, პირობიდან, რომ $G(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში.

3°. დასმული ამოცანის სასრული სასაზღვრო წირის შემთხვევაზე მისაყვანად გამოვიყენოთ, მაგალითად, შემდეგი წილად-წრფივი გარდაქმნა

$$z+i=-\frac{1}{\zeta+i} \quad \text{ანუ} \quad z=-\frac{i\zeta}{\zeta+i} \tag{38,3}$$

(იხ. § 19, პ. 3). გავიხსენოთ, რომ ასეთი გარდაქმნით z სიბრტყის D წრფე გადადის ζ სიბრტყის იმ წრეწირში, რომელიც ეხება ნამდვილ ღერძს $\zeta=0$ წერტილში და რომლის ცენტრია $\zeta=-\frac{i}{2}$ წერტილი. როცა t წერტილი დადებითი მიმართულებით აღწერს z სიბრტყის D წრფეს, მაშინ ζ სიბრტყეში მისი შესაბამისი τ წერტილი, რომელიც განისაზღვრება ტოლობიდან

$$\tau+i=-\frac{1}{t+i} \tag{38,3ა}$$

აღწერს L წრეწირს ისეთი მიმართულებით, რომ L-ით შემოსაზღვრული წრე რჩება მარცხნივ. ამ მიმართულებას მივიღებთ დადებითად. აღვნიშნოთ ეს წრე Σ^+-ით, ხოლო L-ის გარე არე — Σ^--ით.

(38,3) გარდაქმნა S^+ არეს კონფორმულად ასახავს Σ^+-ზე და S^--ს Σ^--ზე, ამასთან $z=\infty$ წერტილს შეესაბამება $\zeta=-i$ წერტილი, ხოლო $\zeta=\infty$-ს — $z=-i$ წერტილი.

სიმარტივისათვის ფუნქციას

$$\Phi(z)=\Phi\left(\frac{-i\zeta}{\zeta+i}\right)$$

აღვნიშნავთ $\Phi(\zeta)$-თი; ასევე მოვიქცევით $G(t)$-ს, $g(t)$-სა და, აგრეთვე, ყველა იმ ფუნქციის მიმართ, რომლებიც შემდგომში შეგვხვდება.

ამ აღნიშვნებში (38,1) სასაზღვრო პირობა ღებულობს სახეს

$$\Phi^+(\tau)=G(\tau)\,\Phi^-(\tau)+g(\tau), \quad \tau\in L. \tag{38,4}$$

$z=a_0$ წერტილად, რომელშიც $\Phi(z)$-ს შეიძლება პოლუსი ჰქონდეს, მოხერხებულია ავირჩიოთ წერტილი $a_0=-i$, რომელიც შეესაბამება $\zeta=\infty$ წერტილს; ეს, რა თქმა უნდა, არ დაარღვევს ზოგადობას.

ასეთი არჩევისას სასაზღვრო ამოცანა $\Phi(\zeta)$-სათვის ზუსტად ემთხვევა წრფივი შეუღლების ამოცანის წინა პარაგრაფებში განხილულ ერთ კერძო შემთხვევას, სახელდობრ, შემთხვევას, როცა სასაზღვრო წირი მარტივი შეკრული კონტურია (ჩვენს შემთხვევაში—წრეწირი). ამის გამო შეგვიძლია ვისარგებლოთ სათანადო ფორმულებით. თუ არ ჩავთვლით ნებისმიერ, ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივ მამრავლს, მაშინ $X(z)$ კანონიკური ამონახსნი წარმოიდგინება (35,6 ა) და (35,5), (35,2 ა) ფორმულებით. სახელდობრ, თუ (35,2 ა)-ში a წერტილად ავიღებთ L წრეწირის ცენტრს, ე. ი. წერტილს $a=-\frac{i}{2}$, მივიღებთ

$$X(\zeta)=\begin{cases} e^{\Gamma(\zeta)}, & \text{როცა } \zeta\in\Sigma^+,\\ \left(\zeta+\frac{i}{2}\right)^{-\varkappa} e^{\Gamma(\zeta)}, & \text{როცა } \zeta\in\Sigma^-, \end{cases} \tag{38,5}$$

სადაც

$$\Gamma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln G_0(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta},\quad G_0(\tau)=\left(\tau+\frac{i}{2}\right)^{-\varkappa}G(\tau). \tag{38,6}$$

ერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე ყველა ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(\zeta)=X(\zeta)\,P(\zeta), \tag{38,7}$$

სადაც $P(\zeta)$ ნებისმიერი პოლინომია. იმ ფორმულათა გარკვეული გამარტივებისათვის, რომლებიც შემდგომში მიიღება, მიზანშეწონილია ჩავთვალოთ, რომ $P(\zeta)$-ს აქვს სახე:

$$P(\zeta)=A_0+A_1\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)+\cdots+A_n\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)^n. \tag{38,8}$$

არაერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე ყველა ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით (§ 37)

$$\Phi(\zeta)=\frac{X(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)\,(\tau-\zeta)}+X(\zeta)\,P(\zeta). \tag{38,9}$$

ამრიგად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ამოცანა ამოხსნილია, რადგან, თუ ცნობილია $\Phi(\zeta)$, (38,3)-ის საშუალებით z ცვლადზე გადასვლით ვიპოვით $\Phi(z)$-საც.

4°. ახლა გამოვიკვლიოთ გამოყენებისათვის საჭირო შემოსაზღვრული ამონახსნების არსებობის საკითხი.

(38,9) ფორმულებისა და $X(\zeta)$-ს გამოსახულებიდან ადვილად დავასკვნით (შდრ. § 37, პ. 3°):

თუ $\varkappa\geqslant-1$, მაშინ არსებობს შემოსაზღვრული ამონახსნები; ისინი წარმოიდგინება (38,9) ფორმულით, სადაც $P(\zeta)$ არის (38,8) სახის ნებისმიერი პოლინომი, რომელშიაც $n=\varkappa$, ამასთან $P(\zeta)=0$, თუ $\varkappa=-1$. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში ამოცანას აქვს ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი.

თუ $\varkappa<-1$ შემოსაზღვრული ამონახსნი არსებობს მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი პირობები

$$\int\limits_L\left(\tau+\frac{i}{2}\right)^k\frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)}=0,\quad k=0,\ 1,\ldots,\ -\varkappa-2. \tag{38,10}$$

ამ შემთხვევაში ამოცანას აქვს ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი და იგი წარმოიდგინება (38,9) ფორმულით, სადაც $P(\zeta)=0$.

(38,10) პირობები მიიღება § 37-ში მიღებული პირობების ანალოგიურად. ოღონდ, ამჯერად (38,9) ფორმულის ინტეგრალს გავშლით არა ζ-ს, არამედ $(\zeta+i/2)$-ის ხარისხებად. რა თქმა უნდა, შეიძლება ამონახსნის არსებობის ისეთი პირობების მოყვანა, რომლებიც ზუსტად ისეთივეა, როგორიც § 37-ის 3° პუნქტში, მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში ეს ნაკლებად მოხერხებულია.

5°. გამოვსახოთ ახლა მოძებნილი ამონახსნი დამხმარე ζ ცვლადის გარეშე. ეს გარკვეული აზრით საინტერესოა, თუმცა პრაქტიკული თვალსაზრისით ზოგჯერ უფრო მიზანშეწონილია ამონახსნი გვქონდეს იმ სახით, რომელიც ზემოთ ამოვწერეთ.

z ცვლადზე გადასვლას ადვილად მოვახერხებთ, თუ გავიხსენებთ (19,16) და (19,17) ფორმულებს, რომელთაც ახლა ასე ჩავწერთ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{z+i}{t+i}\cdot\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}+A, \tag{38,11}$$

სადაც

$$A=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\varphi(t)dt}{t+i}; \tag{38,11 ა}$$

აქ, ისევე როგორც ზევით, ჩვენ $\varphi\left(\frac{-it}{t+i}\right)$-ს ნაცვლად ვწერთ $\varphi(t)$-ს.

გამოვსახოთ (38,5) და (38,6) ფორმულები z ცვლადით. გვაქვს

$$\zeta+\frac{i}{2}=-\frac{i}{2}\,\frac{z-i}{z+i},\quad \tau+\frac{i}{2}=-\frac{i}{2}\,\frac{t-i}{t+i}.$$

ცხადია, თუ აღნიშნულ ფორმულებში $\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)$-ს და $\left(\tau+\frac{i}{2}\right)$-ს შევცვლით გამოსახულებებით

$$2i\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)=\frac{z-i}{z+i},\quad 2i\left(\tau+\frac{i}{2}\right)=\frac{t-i}{t+i},$$

მაშინ შედეგები არ შეიცვლება, რადგან ასეთი შეცვლისას $X(\zeta)$ გამრავლდება ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივზე.

გამოვიყენოთ ახლა (38,11) ფორმულები, ამასთან, $\Gamma(z)$-ის გამოსახულებაში ჩამოვიცილოთ მუდმივი შესაკრები, რაც კვლავ გამოიწვევს $X(z)$-ის მუდმივზე გამრავლებას. მივიღებთ

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^+,\\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^-,\end{cases} \tag{38,12}$$

სადაც

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z},\quad G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}G(t). \tag{38,13}$$

ახლა (38,8) ფორმულა (38,11)-ის მოშველიებით მოგვცემს ზოგად ფორმულას იმ ამონახსნებისა, რომელთაც $z=-i$ წერტილში შეიძლება ჰქონდეთ პოლუსი:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}-\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t+i)}+X(z)\,Q(z), \tag{38,14}$$

სადაც $Q(z)$ არის $\frac{z-i}{z+i}$ -ის მიმართ ნებისმიერი პოლინომი,

$$Q(z)=c_0+c_1\frac{z-i}{z+i}+\cdots+c_n\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n; \tag{38,15}$$

აქ $c_0, c_1, \ldots, c_n$ აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივებს.

რა თქმა უნდა, c_0-ის ნებისმიერობის გამო (38,14) ფორმულის მარჯვენა მხარიდან შეგვიძლია მეორე შესაკრების ამოშლა, მაგრამ შემოსაზღვრულ ამონახსნთა შესახებ დებულების ჩამოყალიბებისათვის მოხერხებულია მისი დატოვება.

6°. დაბოლოს, ყველგან შემოსაზღვრულ ამონახსნთა შესახებ პ. 4°-ში მიღებული შედეგი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

თუ $\varkappa \geqslant -1$, მაშინ ყველგან შემოსაზღვრული ამონახსნები არსებობს და ისინი წარმოიდგინებიან (38,14) ფორმულით, რომელშიც $Q(z)$ არის (38,15) სახის გამოსახულება, სადაც $n=\varkappa$ და $c_0, c_1, \ldots, c_\varkappa$ ნებისმიერი მუდმივებია, ამასთან $Q(z)=0$, როცა $\varkappa=-1$. როცა $\varkappa \geqslant 0$, (38,14)-ში შეგვიძლია ამოვშალოთ მეორე შესაკრები.

თუ $\varkappa < -1$, შემოსაზღვრული ამონახსნები არსებობს მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი პირობები (ისინი (38,10)-დან გამომდინარეობენ):

$$\int\limits_D \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t+i)^2}=0, \quad k=0,\ 1, \ldots, -\varkappa-2; \qquad (38,16)$$

ამ შემთხვევაში ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი წარმოიდგინება (38,14)-ით, სადაც $Q(z)=0$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. დასმული ამოცანის ამონახსნის მიღება შეიძლება უშუალოდაც, ζ ცვლადზე გადაუსვლელად. ამ გზით ამოცანა ამოხსნილია თ. გახოვის მიერ (იხ. თ. გახოვი [10]; პირველი გამოცემის § 14.7). შემოსაზღვრული ამონახსნების არსებობის პირობებს, მოხსენიებულ ავტორთან, რამდენადმე განსხვავებული სახე აქვს, მაგრამ ადვილია იმისი შემოწმება, რომ ისინი (38,16) პირობების ეკვივალენტურია.

II. რიმან — ჰილბერტის ამოცანა

ამ კარში ზემოთ მიღებული შედეგების უშუალო გამოყენებით, მოვიყვანთ პრაქტიკული თვალსაზრისით მნიშვნელოვან ერთი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას. აქ გადმოცემული შედეგები შემდგომში მხოლოდ ცალკეულ კონკრეტულ ამოცანათა ამოხსნისას გამოიყენება, ამიტომ წიგნის ძირითადი ტექსტის გასაგებად მათი გაცნობა სავალდებულო არაა.

§ 39. წრეზე ან ნახევარსიბრტყეზე განსაზღვრულ ანალიზურ ფუნქციათა მთელ სიბრტყეზე გავრცელების შესახებ. ჩვენ მიერ განხილულ შეუღლების ამოცანაში საძიებელი $\Phi(z)$ ფუნქცია უბან-უბან ჰოლომორფული იყო მთელ სიბრტყეში, ხოლო სასაზღვრო პირობაში მონაწილეობდნენ ამ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობანი საზღვრის ორივე მხრიდან.

ბევრ მნიშვნელოვან ამოცანაში საქმე გვაქვს ისეთ საძიებელ ფუნქციებთან, რომლებიც ჰოლომორფული არიან სიბრტყის მხოლოდ გარკვეულ ნაწილში, ხოლო სასაზღვრო პირობაში მონაწილეობენ როგორც საძიებელი ფუნქციების, ასევე მათთან კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქციების მნიშვნელობანი.

ხშირად ხერხდება ასეთი სახის ამოცანათა დაყვანა ზემოთ განხილული სახის ამოცანებამდე, საძიებელ ჰოლომორფულ ფუნქციათა მთელ სიბრტყეზე (გარდა საზღვრისა) უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციებამდე გავრცელების გზით.

მოცემულ არეში ჰოლომორფული და საზღვრამდე უწყვეტი ფუნქციის მთელ სიბრტყეზე უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციამდე გავრცელება შეიძლება სხვადასხვა გზით (მაგალითად, შეიძლება მივანიჭოთ მას მნიშვნელობა 0 სიბრტყის დამატებით ნაწილში). მაგრამ განსაკუთრებით სასარგებლოა შევსების ან მთელ სიბრტყეზე გავრცელების ის ხერხები, რომლებსაც ახლა მოვიყვანთ[22]. ეს ხერხები ეხება წრეზე, მის გარე არეზე ან ნახევარსიბრტყეზე განსაზღვრულ ანალიზურ ფუნქციებს.

1°. ნახევარსიბრტყეზე განსაზღვრული ანალიზური ფუნქციები.

ვთქვათ, S^+ აღნიშნავს ზედა (ქვედა) ნახევარსიბრტყეს $y > 0$ ($y < 0$) და D მისი საზღვარია (ე. ი. Ox ღერძი); S^-—ქვედა (ზედა) ნახევარსიბრტყე.

ვთქვათ, $\Phi(z)$ არის S^+-ზე განსაზღვრული ანალიზური ფუნქცია. დავუკავშიროთ $\Phi(z)$ ფუნქციას S^--ში განსაზღვრული $\Phi_*(z)$ ფუნქცია შემდეგი თანაფარდობის საშუალებით:

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}. \tag{39,1}$$

ამრიგად, განმარტების თანახმად, $\Phi(z)$ და $\Phi_*(z)$ კომპლექსურად შეუღლებულ მნიშვნელობებს ღებულობენ Ox ღერძის მიმართ შეუღლებულ წერტილებში (ე. ი. წერტილებში $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$; თითოეული ამათგანი წარმოადგენს მეორის სარკისებურ ანასახს Ox ღერძის მიმართ). (39,1) ფორმულა ჩავწეროთ კიდევ შემდეგი სახით:

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}(z), \tag{39,2}$$

სადაც $\overline{\Phi}(z)$-ში იგულისხმება ფუნქცია

$$\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}; \tag{39,3}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ $\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, მაშინ

$$\overline{\Phi}(z) = U(x, -y) - iV(x, -y). \tag{39,3ა}$$

ცხადია, რომ $\Phi(z)$-ის ჰოლომორფულობას ან მერომორფულობას S^+ ნახევარსიბრტყეში მოსდევს $\Phi_*(z) = \overline{\Phi}(z)$ ფუნქციის ჰოლომორფულობა ან მერომორფულობა S^- ნახევარსიბრტყეში[23] და რომ (39,1) თანაფარდობაში Φ_* და Φ ფუნქციები სიმეტრიულად მონაწილეობენ:

$$\Phi(z) = \overline{\Phi_*(\bar{z})}, \quad [\Phi_*(z)]_* = \Phi(z). \tag{39,4}$$

სასარგებლოა შევნიშნოთ, რომ თუ $\Phi(z)$ რაციონალური ფუნქციაა

---

[22] გარკვეული კონკრეტული ამოცანებისათვის მისადაგებული ზოგიერთი სხვა ხერხი გავრცელებისა მითითებულია ავტორის წიგნში [9]; ამ წიგნში და, აგრეთვე, ავტორის [1] წიგნში შეიძლება ვნახოთ მთელ სიბრტყეზე ფუნქციის გავრცელების გამოყენებათა მაგალითები.

[23] საზოგადოდ, თუ $\Phi(z)$ ჰოლომორფულია რაიმე σ^+ არეში, მაშინ $\Phi^-(z)$ ჰოლომორფულია Ox ღერძის მიმართ მისდამი სიმეტრიულ σ^- არეში. ეს იმის შედეგია, რომ თუ $U(x, y)$, $V(x, y)$ აკმაყოფილებს კოში—რიმანის თანაფარდობებს

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

მაშინ ეს თანაფარდობები ძალაში რჩება $U(x, y)$-ისა და $V(x, y)$-ის, $U(x, -y)$-ითა და $V(x, -y)$-ით შეცვლისას.

$$\Phi(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n},$$

მაშინ $\Phi_*(z) = \overline{\Phi}(z)$ ფუნქცია მიიღება მისგან კოეფიციენტთა კომპლექსურად შეუღლებული რიცხვებით შეცვლის საშუალებით.

დავუშვათ ახლა, რომ $\Phi(z)$ ღებულობს გარკვეულ სასაზღვრო $\Phi^+(t)$ მნიშვნელობას, როცა z S^+-დან მიისწრაფვის Ox ღერძის t წერტილისაკენ (ანუ ნამდვილი რიცხვისაკენ). ასეთ შემთხვევაში არსებობს $\Phi_*^-(t)$-ც და

$$\Phi_*^-(t) = \overline{\Phi}^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}. \tag{39,5}$$

მართლაც, როცა $z \to t$, $z \in S^-$, მაშინ $\bar{z}$ მიისწრაფვის t-სკენ S^+-დან და, მაშასადამე, $\Phi_*(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$ მიისწრაფვის $\overline{\Phi^+(t)}$-სკენ.

ახლა სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $\Phi(z)$ ჰოლომორფულია S^+-ში და უწყვეტად გრძელდება D-ზე, გარდა, შესაძლოა, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა.

განვსაზღვროთ უბან-უბან ჰოლომორფული $\Omega(z)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \text{როცა } z \in S^+, \\ \Phi_*(z), & \text{როცა } z \in S^-. \end{cases} \tag{39,6}$$

ახლა (39,5)-ის საფუძველზე ცხადია, რომ

$$\Omega^-(t) = \overline{\Omega^+(t)}, \quad \Omega^+(t) = \overline{\Omega^-(t)}. \tag{39,7}$$

ეს თანაფარდობანი საშუალებას გვაძლევენ სასაზღვრო პირობები (რაიმე ამოცანისა), რომლებშიაც მონაწილეობენ $\Phi^+(t)$ და $\overline{\Phi^+(t)}$ [ან $\Phi^-(t)$ და $\overline{\Phi^-(t)}$], მივიყვანოთ ისეთ სასაზღვრო პირობამდე, სადაც მონაწილეობენ $\Omega^+(t)$ და $\Omega^-(t)$.

აღვნიშნოთ $\Phi(z)$ ფუნქციის გავრცელების ამ ხერხის ერთი მნიშვნელოვანი თვისება. თუ $\Phi^+(t)$ ფუნქციის წარმოსახვითი ნაწილი ნულის ტოლი ხდება Ox ღერძის მონაკვეთზე, მაშინ $\Phi_*(z)$ წარმოადგენს $\Phi(z)$-ის ანალიზურ გავრცელებას ამ მონაკვეთიდან. ეს თვისება იგივეა, რაც შვარცის ცნობილი „არეკვლის პრინციპი", იგი უშუალოდ გამომდინარეობს § 10-ის ბოლოში დამტკიცებული დებულებიდან, რადგან ჩვენს შემთხვევაში, აღნიშნულ მონაკვეთზე, (39,5) ფორმულის საფუძველზე $\Phi_*^-(t) = \Phi^+(t)$.

მოყვანილი აღნიშვნების გამოყენება შეიძლება არა მარტო ნახევარსიბრტყეში განსაზღვრული ფუნქციებისათვის. ვთქვათ $\Psi(z)$ უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციაა D (Ox ღერძი) ნახტომის წირით, მაშინ $\Psi_*(z)$-ით აღვნიშნავთ შემდეგი ტოლობით განსაზღვრულ უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას:

$$\Psi_*(z) = \overline{\Psi(\bar{z})} = \overline{\Psi}(z), \quad z \overline{\in} D;$$

ცხადია, გვექნება

$$\Psi(z) = \overline{\Psi_*(\bar{z})} = \overline{\Psi}_*(z).$$

კერძოდ, (39,6) ტოლობით განსაზღვრულ $\Omega(z)$ ფუნქციას აქვს თვისება

$$\Omega_*(z) = \Omega(z); \tag{39,8}$$

ნებისმიერი უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციისათვის ამ ტოლობას, საზოგადოდ, ადგილი არა აქვს.

(39.5)-ის ანალოგიურად ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\Psi_*^-(t) = \overline{\Psi^+(t)}, \quad \Psi_*^+(t) = \overline{\Psi^-(t)}. \tag{39,5a}$$

დასასრულ, მოვიყვანოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულა. ვთქვათ, უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია წარმოიდგინება კოშის ტიპის ინტეგრალით

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad (D \text{ ნამდვილი ღერძია}), \tag{39,9}$$

სადაც უსასრულო შუალედზე აღებული ინტეგრალი გვესმის კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით (§ 19).

ვიპოვოთ $\Psi_*(z)$-ის გამოსახულება. განმარტებით გვაქვს: $\Psi_*(z) = \overline{\Psi(\bar{z})}$, მაგრამ

$$\Psi(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-\bar{z}}$$

და, მაშასადამე,

$$\Psi_*(z) = \overline{\Psi(\bar{z})} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z}. \tag{39,10}$$

2⁰. **წრეზე ან წრიული ხვრელის მქონე სიბრტყეზე განსაზღვრული ფუნქციები.** ვთქვათ ახლა S^+ აღნიშნავს $|z|<1$ არეს (ან არეს $|z|>1$), S^- — კი $|z|>1$ არეს (ან შესაბამისად, $|z|<1$), L იყოს ამ არეთა საერთო საზღვარი ანუ წრეწირი $|z|=1$.

ვთქვათ ახლა $\Phi(z)$ S^+-ში განსაზღვრული ფუნქციაა. ამ ფუნქციას შევუსაბამოთ $\Phi_*(z)$ ფუნქცია, სავსებით ანალოგიურად იმისა, როგორც ეს გავაკეთეთ ნახევარსიბრტყის შემთხვევაში, იმ განსხვავებით, რომ შეუღლებულ წერტილებად ახლა ჩავთვლით L-ის მიმართ შეუღლებულ წერტილებს ანუ z-ს და $1/\bar{z}$-ს. ამის შესაბამისად $\Phi_*(z)$-ს განვმარტავთ შემდეგნაირად:

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \tag{39,11}$$

ან, თუ ვისარგებლებთ ზემოთ მიღებული აღნიშვნით,

$$\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})},$$

მაშინ

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{39,12}$$

(39,11) თანაფარდობა სიმეტრიულია, ე. ი. მისგან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi(z) = \overline{\Phi_*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad [\Phi_*(z)]_* = \Phi(z). \tag{39,13}$$

თუ $\Phi(z)$ ჰოლომორფული ან მერომორფულია S^+-ში, მაშინ $\Phi_*(z)$ ჰოლომორფულია ან მერომორფულია S^--ში. კერძოდ, თუ

$$\Phi(z)=\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n},$$

მაშინ

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\bar a_0z^{-m}+\bar a_1z^{-m+1}+\cdots+\bar a_m}{\bar b_0z^{-n}+\bar b_1z^{-n+1}+\cdots+\bar b_n}.$$

ასევე, თუ

$$\Phi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_k z^k,\quad z\in S^+,$$

მაშინ

$$\Phi_*(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\bar a_k z^{-k},\quad z\in S^-.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $\Phi(z)$-ს აქვს k რიგის პოლუსი (ნული), როცა $z=0$ ($z=\infty$), მაშინ $\Phi_*(z)$-ს აქვს იგივე რიგის პოლუსი (ნული), როცა $z=\infty$ ($z=0$).

დავუშვათ ახლა, რომ $\Phi(z)$ ღებულობს $\Phi^+(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობას, როცა z მიისწრაფვის S^+-იდან t წერტილისკენ ($t\in L$). მაშინ არსებობს $\Phi_*^-(t)$, ამასთან

$$\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi}^-\left(\frac{1}{t}\right)=\overline{\Phi^+(t)},\tag{39,14}$$

თუ z მიისწრაფვის t-სკენ S^--დან, მაშინ $\frac{1}{\bar z}$ აგრეთვე მიისწრაფვის t-კენ, მაგრამ უკვე S^+-დან, და ამიტომ

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$$

მიისწრაფვის $\overline{\Phi^+(t)}$-კენ.

სიმარტივისათვის მივიღოთ, რომ $\Phi(z)$ ჰოლომორფულია S^+-ში (გარდა, შესაძლოა, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა) და უწყვეტად გრძელდება L-ზე.

ადრინდელის ანალოგიურად შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{როცა } z\in S^+,\\ \Phi_*(z), & \text{როცა } z\in S^-.\end{cases}\tag{39,15}$$

მაშინ, ისევე როგორც 1° პუნქტში, გვექნება

$$\Omega^-(t)=\overline{\Omega^+(t)},\quad \Omega^+(t)=\overline{\Omega^-(t)}.\tag{39,16}$$

ახლა ისევე, როგორც ნახევარსიბრტყის შემთხვევაში, ვღებულობთ: თუ $\Phi^+(t)$-ს წარმოსახვითი ნაწილი ნულად იქცევა L წრეწირის რაიმე რკალზე, მაშინ $\Phi(z)$ ანალიზურად ვრცელდება ამ რკალიდან (არეკვლის შვარცის პრინციპი).

ისევე როგორც 1° პუნქტში, აღნიშვნა $\Psi_*(z)$ შეიძლება გავრცელდეს ნებისმიერ უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციაზე შემდეგი ფორმულით:

$$\Psi_*(z) = \overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right);$$

მაშინ, ცხადია, გვექნება

$$\Psi(z) = \overline{\Psi_*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{\Psi}_*\left(\frac{1}{z}\right).$$

ზემოთ შემოღებულ $\Omega(z)$ ფუნქციას აქვს თვისება

$$\Omega_*(z) = \Omega(z). \tag{39,8ა}$$

(39,14)-ის ანალოგიურად ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\Psi_*^-(t) = \overline{\Psi^+(t)}, \quad \Psi_*^+(t) = \overline{\Psi^-(t)}. \tag{39,14ა}$$

დასასრულ, დავუშვათ, რომ $\Psi(z)$ წარმოიდგინება კოშის ტიპის ინტეგრალით

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad (L \text{ წარმოადგენს წრეწირს } |z|=1), \tag{39,17}$$

მაშინ

$$\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-\frac{1}{\bar{z}}},$$

$$\Psi_*(z) = \overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{dt}}{\bar{t}-\frac{1}{z}}.$$

რადგან L წრეწირზე

$$t = e^{i\theta}, \quad \bar{t} = e^{-i\theta} = \frac{1}{t}, \quad \overline{dt} = -ie^{-i\theta}\,d\theta = -\frac{dt}{t^2}.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\Psi_*(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi}(t)\,\frac{dt}{t}. \tag{39,18}$$

§ 40. **რიმან—ჰილბერტის ამოცანა.** 1°. ზემოთ მიღებული შედეგების გამოყენების მაგალითად განვიხილოთ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ერთი სასაზღვრო ამოცანა, რომელიც რიმანის მიერ დასმული ფრიად ზოგადი ამოცანის[24] კერძო შემთხვევაა. ამოცანა, რომელიც გვაინტერესებს, პირველად ჰილბერტმა განიხილა[25], ამიტომ მას რიმან—ჰილბერტის ამოცანას ვუწოდებთ.

ეს ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ, S^+ ერთი გლუვი L კონტურით შემოსაზღვრული სასრული ან უსასრულო არეა.

---

[24] ლაპარაკია ანალიზური ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილთა სასაზღვრო მნიშვნელობებს შორის თანაფარდობის საშუალებით თვით ანალიზური ფუნქციის მოძებნაზე. ბ. რიმანმა ეს ამოცანა დასვა თავის ცნობილ დისერტაციაში [1] (1851 წ.).

[25] D. Hilbert [1], [2].

უნდა ვიპოვოთ S^+-ში ჰოლომორფული და საზღვრამდე უწყვეტად გაგრძელებადი ისეთი ფუნქცია $\Phi(z) = U + iV$, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\operatorname{Re}(a + ib)\,\Phi^+ \equiv aU^+ - bV^+ = C \quad L\text{-ზე}, \tag{40,1}$$

სადაც a, b, c L-ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციებია.

თავდაპირველად ჰილბერტმა (D. Hilbert [1]) ეს ამოცანა მიიყვანა ქვემოთ (§ 44) მითითებული სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე იმ მიზნით, რომ ეჩვენებინა ასეთი სახის განტოლების გამოყენების მაგალითი. შემდეგ აღმოჩნდა (D. Hilbert [2]), რომ განსახილველი ამოცანა მარტივად მიიყვანება დირიხლეს ორი ამოცანის თანამიმდევრულ ამოხსნაზე[26]. ამ გზით ამოცანის სრული გამოკვლევა გადმოცემულია ი. ვეკუას სტატიაში [8]. აქ მოვიყვანთ ამოხსნას, რომელიც გამომდინარეობს შეუღლების ამოცანის ზემოთ მოყვანილი ამოხსნიდან, თუ ვისარგებლებთ S^+ არეში საძიებელი ჰოლომორფული ფუნქციის უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციამდე გავრცელების წინა პარაგრაფში მითითებული გზით[27]. ასეთი გზით ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ნახევარსიბრტყისა და წრიული არის შემთხვევაში. მაგრამ თითოეულ ამ შემთხვევაზე კონფორმული ასახვის საშუალებით შეიძლება ნებისმიერი (ცალადბმული არის) შემთხვევის დაყვანა. ამიტომ დავიწყოთ ამოცანის ამოხსნა წრისათვის.

2°. წინასწარ გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა. ვთქვათ

$$\Phi_1(z) = U_1 + iV_1, \quad \Phi_2(z) = U_2 + iV_2, \ldots, \ \Phi_k(z) = U_k + iV_k$$

ფუნქციები შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნებია

$$aU^+ - bU^+ = 0 \quad L\text{-ზე}. \tag{40,2}$$

მაშინ, ცხადია, მისი ამონახსნი იქნება ნებისმიერი წრფივი კომბინაციაც

$$\Phi(z) = c_1\Phi_1(z) + c_2\Phi_2(z) + \cdots + c_k\Phi_k(z) \tag{40,3}$$

ნამდვილი, მუდმივი $c_1, \ldots, c_k$ კოეფიციენტებით.

ამის გამო შემდგომ პარაგრაფებში (§ 43-ის ჩათვლით) წრფივი კომბინაციის ქვეშ ვიგულისხმებთ ნამდვილ (მუდმივ) კოეფიციენტებიან წრფივ კომბინაციას. ამის შესაბამისად, როცა ვიტყვით $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z), \ldots, \Phi_k(z)$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია, ვიგულისხმებთ, რომ მათი ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი კომბინაცია იგივურად ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა კოეფიციენტი ნულია.

§ 41. რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნა წრისათვის. ვთქვათ S^+ არის წრე $|z| < 1$, ხოლო L მისი საზღვარი—$|z| = 1$. რიმან—ჰილბერტის ამოცანის (40,1) სასაზღვრო პირობა, ცხადია, ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$2\operatorname{Re}(a + ib)\,\Phi^+(t) = (a + ib)\,\Phi^+(t) + (a - ib)\,\overline{\Phi^+(t)} = 2c \quad L\text{-ზე}, \tag{41,1}$$

სადაც $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ L-ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციებია. ამას გარდა, ვიგულისხმებთ, რომ ეს ფუნქციები აკმაყოფილებს H პირობას და ყველგან L-ზე

[26] შემდგომში ფ. ნეტერმა (F. Noether [1]) ეს ამოხსნა გამოიყენა საპირისპირო მიზნით: ზემოთ ხსენებული ინტეგრალური განტოლების გამოსაკვლევად.

[27] ასეთი გზით ამოხსნის იდეა მოყვანილია ავტორის მონოგრაფიაში [1] (1922 წ.). ქვემოთ მოყვანილი ამოხსნა პირველად გამოქვეყნდა ამ წიგნის პირველ რუსულ გამოცემაში.

$$a^2 + b^2 \neq 0.$$

გავავრცელოთ S^+-ში საძიებელი $\Phi(z)$ ფუნქცია $\Phi_*(z)$-ფუნქციით ისე, როგორც § 39-ში:

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) \quad S^-\text{-ში},$$

და უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც S^+-ში ემთხვევა $\Phi(z)$-ს, S^-ში კი $\Phi_*(z)$-ს, აღვნიშნოთ კვლავ $\Phi(z)$[28]-ით. ასე განსაზღვრულ $\Phi(z)$ ფუნქციას აქვს თვისება (იხ. 39,8 ა)

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi(z), \quad \text{როცა } |z| \neq 1. \tag{41,2}$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ იგი შემოსაზღვრულია უსასრულობაში.

ამ აღნიშვნებში (41,1) სასაზღვრო პირობა, (39,16) ფორმულის ძალით, შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$(a + ib)\,\Phi^+(t) + (a - ib)\,\Phi^-(t) = 2c \tag{41,3}$$

ან კიდევ

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{41,4}$$

სადაც

$$G(t) = -\frac{a - ib}{a + ib}, \quad g(t) = \frac{2c}{a + ib}. \tag{41,5}$$

ამრიგად, მივედით წინა პარაგრაფებში (§§ 34—37) განხილულ შეუღლების ამოცანაზე. უნდა ვეძებოთ ამ ამოცანის უსასრულობაში შემოსაზღვრული ამონახსნები. ვთქვათ, ახლა $\Phi(z)$ (41,3) ამოცანის ერთ-ერთი ასეთი ამონახსნია. ეს ფუნქცია არ იქნება საწყისი ამოცანის ამონახსნი, თუ მისთვის არაა შესრულებული (41,2) პირობა. მიუხედავად ამისა, $\Phi(z)$-ის საშუალებით შესაძლოა თავიდან მოცემული ამოცანის ამონახსნის აგება. მართლაც, (41,3) ტოლობაში შეუღლებულ სიდიდეებზე გადასვლისა და (39,14 ა)-ს მოშველიებით ვრწმუნდებით, რომ თუ $\Phi(z)$ აკმაყოფილებს (41,3)-ს, მაშინ $\Phi_*(z)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$(a - ib)\,\Phi_*^-(t) + (a + ib)\,\Phi_*^+(t) = 2c,$$

ანუ $\Phi_*(z)$-იც არის შეუღლების იგივე (41,3) ამოცანის ამონახსნი. ამიტომ ფუნქცია

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \Phi_*(z)\right] \tag{41,6}$$

იქნება საწყისი (41,1) ამოცანის ამონახსნი, რადგან მისთვის დაცულია (41,2) პირობა. პირიქით, ცხადია, რომ გამოსავალი ამოცანის ყოველი ამონახსნი შეიძლება მიღებულ იქნეს ასეთი გზით[29]. რაკი ვიცით წრფივი შეუღლების ამოცანის ზოგადი ამო-

[28] § 39-ში ეს ფუნქცია აღნიშნული იყო $\Omega(z)$-ით.

[29] მართლაც, თუ გამოსავალი ამოცანის ნებისმიერ $\Phi(z)$ ამონახსნს გავავრცელებთ ზემოთ აღწერილი გზით უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციამდე, იგი აღმოჩნდება (41,3) ამოცანის ამონახსნი და ამასთან,

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \Phi_*(z)\right].$$

ნახსნის აგება, ამიტომ შეგვიძლია რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ყველა ამონახსნის სიმრავლის პოვნაც.

ამონახსნთა ამ სიმრავლის უფრო ღრმად შესწავლის მიზნით განვიხილოთ დაწვრილებით რიმან—ჰილბერტის (41,1) ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანა.

აღვნიშნოთ $G(t)$ ფუნქციის ინდექსი $\varkappa$-თი, ე. ი.

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\right]_L = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L. \qquad (41,7)$$

ცხადია, ამ ფორმულის ჩაწერა ასეც შეიძლება

$$\varkappa = \frac{1}{\pi i}\left[\ln(a-ib)\right]_L = \frac{1}{\pi}\left[\arg(a-ib)\right]_L. \qquad (41,8)$$

აქედან ჩანს, რომ $\varkappa$ — ლუწი რიცხვია[30], დადებითი, უარყოფითი ან ნული. ამ რიცხვს ვუწოდებთ რიმან—ჰილბერტის სათანადო ამოცანის ინდექსს.

ვთქვათ, $X(z)$ შეუღლების (41,4) ამოცანის შესაბამისი კანონიკური ფუნქციაა. იგი მოიცემა ფორმულით[31]

$$X(z) = ce^{\Gamma(z)}, \quad \text{როცა } |z|<1, \quad X(z) = cz^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, \quad \text{როცა } |z|>1, \qquad (41,9)$$

სადაც $c \neq 0$ ნებისმიერი მუდმივია და

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\left[t^{-\varkappa}G(t)\right]}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}, \qquad (41,10)$$

ხოლო

$$\Theta(t) = \arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right] \qquad (41,11)$$

L-ზე უწყვეტი ნამდვილი ფუნქციაა. (39,18)-ის საფუძველზე გვაქვს

$$\Gamma_*(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t-z} - i\alpha = \Gamma(z) - i\alpha, \qquad (41,12)$$

სადაც

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Theta(t)\,d\vartheta \quad (t = e^{i\vartheta}) \qquad (41,13)$$

ნამდვილი მუდმივია. ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$X_*(z) = \bar{c}e^{\Gamma_*(z)} = \bar{c}e^{-i\alpha}e^{\Gamma(z)}, \quad \text{როცა } |z|>1,$$
$$X_*(z) = \bar{c}e^{-i\alpha}z^{\varkappa}e^{\Gamma(z)}, \quad \text{როცა } |z|<1,$$

---

30 წყვეტილი კოეფიციენტების შემთხვევაში, რომელიც განხილული იქნება IV თავში (§ 93), (41,8) ფორმულა ყოველთვის სამართლიანი არაა და $\varkappa$ ინდექსს შეუძლია კენტი მნიშვნელობების მიღებაც.

31 $X(z)$ კანონიკური ფუნქცია არის

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t).$$

ერთგვაროვანი ამოცანის კანონიკური ამონახსნი. იგი მოიცემა § 35-ის პ. 2°-ის (35,2), (35,5), (35,6) ფორმულებით. ამ ფორმულებში a-თი აღნიშნულ წერტილად ახლა მივიღოთ კოორდინატთა სათავე.

ე. ი. L-ის გარეთ მდებარე ყოველი z წერტილისათვის

$$X_*(z) = \frac{\bar{c}}{c} e^{-i\alpha} z^{\varkappa} X(z).$$

თუ აღვნიშნავთ

$$c = \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right), \tag{41,14}$$

მივიღებთ $X(z)$ კანონიკურ ფუნქციას, რომლისთვისაც

$$X_*(z) = z^{\varkappa} X(z). \tag{41,15}$$

განვიხილოთ ახლა შესაძლო შემთხვევები: $\varkappa \geqslant 0$ და $\varkappa \leqslant -2$. თუ $\varkappa \geqslant 0$ (41,3) შეუღლების ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას აქვს უსასრულობაში შემოსაზღვრული, ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. ყველა ასეთი ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z) = P(z)\, X(z), \tag{41,16}$$

სადაც

$$P(z) = c_0 z^{\varkappa} + c_1 z^{\varkappa-1} + \cdots + c_{\varkappa} \tag{41,17}$$

ნებისმიერი პოლინომია არაუმეტეს $\varkappa$ ხარისხისა. იმისათვის, რომ (41,16) იძლეოდეს რიმან—ჰილბერტის გამოსავალი ამოცანის ამონახსნს, აუცილებელი და საკმარისია გვქონდეს ტოლობა $\Phi_*(z) = \Phi(z)$, ე. ი. $X_*(z)\, P_*(z) = X(z)\, P(z)$. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $P_*(z) = \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ და $X_*(z) = z^{\varkappa} X(z)$, ეს პირობა მიიღებს სახეს

$$z^{\varkappa}\, \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 z + \cdots + \bar{c}_{\varkappa} z^{\varkappa} = c_0 z^{\varkappa} + c_1 z^{\varkappa-1} + \cdots + c_{\varkappa} = P(z), \tag{41,18}$$

ე. ი.

$$c_k = \bar{c}_{\varkappa-k}, \quad k = 0,\ 1, \ldots, \varkappa. \tag{41,18ა}$$

ამრიგად, თუ დავუშვებთ, რომ

$$c_k = A_k + iB_k, \quad k = 0,\ 1, \ldots, \frac{\varkappa}{2},$$

სადაც A_k, B_k ნამდვილი რიცხვებია (ამასთან $B_{\varkappa/2} = 0$), მაშინ

$$c_k = A_{\varkappa-k} - iB_{\varkappa-k}, \quad k = \frac{\varkappa}{2} + 1, \ldots, \varkappa.$$

სულ გვექნება $\varkappa + 1$ რაოდენობის ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივი. თუ ამ მუდმივებს (რაიმე რიგით) $D_0, D_1, \ldots, D_{\varkappa}$ აღვნიშნავთ, დავასკვნით, რომ, როცა $\varkappa \geqslant 0$, რიმან—ჰილბერტის ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$\Phi(z) = D_0 \Phi_0(z) + D_1 \Phi_1(z) + \cdots + D_{\varkappa} \Phi_{\varkappa}(z), \tag{41,19}$$

სადაც $D_0, \ldots, D_{\varkappa}$ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, ხოლო $\Phi_0(z), \Phi_1(z), \ldots, \Phi_{\varkappa}(z)$ — ამავე ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები (ამასთან, წრფივად დამოუკიდებლობა გვესმის წინა პარაგრაფის ბოლოში (3.2^0) მითითებული აზრით).

თუ $\varkappa \leqslant -2$, მაშინ (41,3)-ის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას არ აქვს უსასრულობაში შემოსაზღვრული ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. ამიტომ, ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები არ ექნება რიმან—ჰილბერტის ამოცანასაც.

ამრიგად, რიმან—ჰილბერტის ერთგვაროვანი ამოცანისათვის მართებულია შემდეგი შედეგები:

თუ $\varkappa \geqslant 0$, რიმან—ჰილბერტის ამოცანას აქვს $(\varkappa+1)$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. ყველა ამონახსნის ერთობლიობა მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = X(z)\,(c_0 z^{\varkappa} + c_1 z^{\varkappa-1} + \cdots + c_{\varkappa}),$$

სადაც $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa}$ ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ (41,18ა) თანაფარდობას; $X(z)$ შეუღლების (41,3) ამოცანის ისეთი კანონიკური ფუნქციაა, რომლისთვისაც შესრულებულია (41,15) პირობა. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილი მუდმივი მამრავლის სიზუსტით და შეიძლება აიგოს (41,9)—(41,11), (41,13), (41,14) ფორმულების საშუალებით.

თუ $\varkappa \leqslant -2$, რიმან—ჰილბერტის ერთგვაროვან ამოცანას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი არა აქვს.

დავუბრუნდეთ არაერთგვაროვან (41,1) ამოცანას. მისი ზოგადი ამონახსნის ასაგებად საკმარისია მოიძებნოს ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი, რადგან ზოგად ამონახსნს მაშინ მივიღებთ, თუ მას მივუმატებთ ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგად ამონახსნს. (41,1) ამოცანის კერძო ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია აიგოს წრფივი შეუღლების (41,3) ამოცანის უსასრულობაში შემოსაზღვრული კერძო ამონახსნი, ვინაიდან, მაშინ (41,6) ფორმულით მივიღებთ რიმან—ჰილბერტის (41,1) ამოცანის კერძო ამონახსნს. მაგრამ, თუ რიმან—ჰილბერტის გამოსავალ ამოცანას აქვს უსასრულობაში შემოსაზღვრული ამონახსნი, მაშინ შეუღლების სათანადო ამოცანასაც აქვს ასეთივე ამონახსნი. ამიტომ არაერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნადობის გამოსაკვლევად შეგვიძლია უშუალოდ ვისარგებლოთ § 37-ში მიღებული შედეგებით.

ამ გზით ვრწმუნდებით, რომ: თუ $\varkappa \geqslant 0$, რიმან—ჰილბერტის არაერთგვაროვანი ამოცანა ამოხსნადია და მისი ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია $\varkappa+1$ ნებისმიერ ნამდვილ მუდმივზე.

თუ $\varkappa \leqslant -2$, ამოცანა ამოხსნადია მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება ქვემოთ მითითებული (41,21) ან, რაც იგივეა, (41,23) პირობები. როდესაც ეს პირობები დაცულია ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ამოხსნადობის ხსენებული პირობები (37,4) ტოლობებით განისაზღვრება, სადაც $k=0, 1, \ldots, -\varkappa-2$ (§ 37, პ. 3°). ამრიგად ამ პირობებს აქვს სახე

$$\int_L \frac{t^k g(t)\,dt}{X^+(t)} = 0$$

ანუ

$$\int_L \frac{t^k c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa-2. \qquad (41,20)$$

გარდავქმნათ ეს პირობები. (41,10)-ის საფუძველზე

$$\Gamma^+(t_0) = \frac{i}{2}\Theta(t_0) + \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t-t_0}.$$

ანუ თუ დავუშვებთ $t=e^{i\vartheta}$, $t_0=e^{i\vartheta_0}$ მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\Gamma^+(t_0)=\frac{i}{2}\Theta(t_0)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta+\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\,d\vartheta.$$

შევნიშნოთ, რომ (41,13)-ის თანახმად ბოლო შესაკრები ტოლია $\frac{i\alpha}{2}$-ისა. ამას გარდა

$$X(z)=e^{-i\alpha/2}e^{\Gamma(z)},\quad \text{როცა } |z|<1 \text{ და}$$

$$e^{i\theta(t_0)}=-t_0^{-\varkappa}\frac{a(t_0)-ib(t_0)}{a(t_0)+ib(t_0)},$$

ამიტომ

$$X^+(t_0)=\pm\, t_0^{-\varkappa/2}\sqrt{-\frac{a(t_0)-ib(t_0)}{a(t_0)+ib(t_0)}}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta\right\}.$$

ამ გამოსახულების (41,20) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$\int_0^{2\pi}e^{i(\varkappa/2+k)\vartheta}\,\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\,d\vartheta=0,\qquad k=1,\,2,\dots,\,-\varkappa-1,\tag{41,21}$$

სადაც

$$\Omega(\vartheta)=\frac{1}{\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(\vartheta_1)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta_1-\vartheta}{2}\,d\vartheta_1\right\},\tag{41,22}$$

ხოლო $a(\vartheta)$, $b(\vartheta)$, $c(\vartheta)$, $\Theta(\vartheta)$-თი აღნიშნულია სათანადოდ $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ და $\Theta(t)$.

ეს პირობები ეკვივალენტურია ნამდვილ სიდიდეებში ჩაწერილი $(-\varkappa-1)$ პირობისა:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta=0,\quad k=0,\,1,\dots,\,-\frac{\varkappa}{2}-1,\\&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta=0,\quad k=1,\dots,\,-\frac{\varkappa}{2}-1.\end{aligned}\tag{41,23}$$

ამოსაწერი დაგვრჩა რიმან—ჰილბერტის არაერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნათა ფორმულები (როცა ამონახსნები არსებობს).

თუ $\varkappa\leqslant-2$ და დაცულია (41,20) პირობები, მაშინ შეუღლების (41,3) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\Phi(z)$, რომელსაც, (41,5)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ (37,5) ფორმულიდან

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c(t)\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)}.\tag{41,24}$$

ამონახსნის ერთადერთობის გამო $\Phi(z)$ იქნება აგრეთვე (41,1) ამოცანის ამონახსნიც[32]. ამრიგად:

თუ $\varkappa \leqslant -2$ და დაცულია ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი (41,21) ან ეკვივალენტური (41,23) პირობები, რიმან—ჰილბერტის (41,1) ამოცანის ამონახსნი (ერთადერთი) მოიცემა (41,24) ფორმულით.

თუ $\varkappa \geqslant 0$, მაშინ ფუნქცია

$$\Psi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int\limits_L \frac{c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)} \tag{*}$$

არის (41,3) ამოცანის ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი. (41,6) ფორმულის ძალით განსახილველი ამოცანის ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი იქნება

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\,[\Psi(z) + \Psi_*(z)]. \tag{**}$$

გამოვთვალოთ $\Psi_*(z)$. რადგან

$$X_*(z) = z^{\varkappa} X(z), \quad \overline{X^+(t)} = X_*^-(t) = t^{\varkappa} X^-(t),$$

ხოლო $X(z)$-ის განსაზღვრის ძალით—

$$(a-ib)\,X^-(t) = -(a+ib)\,X^+(t),$$

ამიტომ

$$\Psi_*(z) = X_*(z)\left\{-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{c\,dt}{(a-ib)\,\overline{X^+(t)}\,(t-z)} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{c\,dt}{(a-ib)\,\overline{X^+(t)}\,t}\right\} =$$

$$= z^{\varkappa} X(z)\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{t^{-\varkappa}\,c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)} - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,t}\right\}.$$

ამ გამოსახულების (**)-ში შეტანით[33] მივიღებთ რიმან—ჰილბერტის (41,1) ამოცანის კერძო ამონახსნს, როცა $\varkappa \geqslant 0$,

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\left\{\int\limits_L \frac{c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)} + z^{\varkappa}\int\limits_L \frac{t^{-\varkappa}\,c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)}\right\} -$$

$$- \frac{z^{\varkappa}\,X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{t^{-\varkappa}\,c}{(a+ib)\,X^+(t)}\cdot\frac{dt}{t}. \tag{41,25}$$

თუ $\varkappa = 0$ ეს ფორმულა რამდენადმე მარტივდება:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_L \frac{c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)} - \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{c}{(a+ib)\,X^+(t)}\,\frac{dt}{t}. \tag{41,26}$$

---

[32] თუ დაცულია (41,20), გვექნება $\Phi_*(z) = \Phi(z)$. ამის შემოწმება ადვილად შეიძლება აგრეთვე უშუალოდაც (იხ. $\Psi_*(z)$-ისათვის ქვემოთ მოყვანილი გამოსახულება).

[33] უშუალო შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\Phi_*(z)$-ის გამოსახულებაში $X(z)$-თან მდგომი მამრავლი და $\Psi(z)$-ის გამოსახულებაში $X(z)$-თან მდგომი მამრავლი განსხვავდებიან (41,17) სახის შესაკრებით.

მაგალითი: დირიხლეს ამოცანა წრისათვის. როგორც უმარტივესი მაგალითი განვიხილოთ დირიხლეს ამოცანა წრისათვის S^+ ($|z|<1$) ანუ — S^+-ში ჰარმონიული და ($S^+ + L$)-ში უწყვეტი ისეთი u ფუნქციის განსაზღვრის ამოცანა, რომლისთვისაც

$$u = f(t), \quad t \in L, \tag{41,27}$$

სადაც $f(t)$ L-ზე მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა[34].

ეს ამოცანა არის რიმან — ჰილბერტის ამოცანის კერძო შემთხვევა იმ დაშვებით, რომ

$$a=1,\ b=0,\ c=f(t).$$

ამ შემთხვევაში შეუღლების სათანადო ერთგვაროვანი ამოცანა[35] იქნება

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0. \tag{41,28}$$

ცხადია, რომ ამოცანის კანონიკური ამონახსნია $X(z) = A$ ფუნქცია, როცა $|z|<1$, $X(z) = -A$, როცა $|z|>1$, სადაც A ნებისმიერი მუდმივაა. ინდექსი $\varkappa=0$. (41,15) პირობის დასაკმაყოფილებლად, ე. ი. ჩვენს შემთხვევაში $X_*(z)=X(z)$, საკმარისია ავიღოთ $A=i$, ასე, რომ $X(z)=i$, როცა $|z|<1$, $X(z)=-i$, როცა $|z|>1$. ამის შესაბამისად რიმან — ჰილბერტის ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი იქნება Ci, სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივაა. არაერთგვაროვანი ამოცანის ზოგად ამონახსნს მივიღებთ (41,26) ფორმულით — მისი მარჯვენა მხარისათვის ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნის Ci-ის მიმატებით. ამრიგად,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(t)\frac{dt}{t} + iC = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t} + iC. \tag{41,29}$$

მივიღეთ შვარცის ცნობილი ფორმულა.

§ 42. რიმან — ჰილბერტის ამოცანა ნახევარსიბრტყისათვის. ეს ამოცანა უშუალოდ დაიყვანება წინა ამოცანაზე, მაგალითად, გარდაქმნით $z+i = -(\zeta+i)^{-1}$ (ისევე როგორც შეუღლების ამოცანისათვის § 38-ში).

განსახილველი ამოცანის დიდი მნიშვნელობის გამო მოვიყვანთ მისი ამოხსნების გამოსახულებას z ცვლადის მიმართ (როგორც ეს გავაკეთეთ § 38-ში).

ვთქვათ, ისევე როგორც § 38-ში, S^+ და S^--ით შესაბამისად აღვნიშნავთ ზედა და ქვედა ნახევარსიბრტყეს, ხოლო D ნამდვილი ღერძია.

(40,1) სასაზღვრო პირობა ახლა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$(a+ib)\,\Phi^+(t) + (a-ib)\,\overline{\Phi^-(t)} = 2c \quad D\text{-ზე}. \tag{42.1}$$

ჩვენ აქაც ვგულისხმებთ, რომ საძიებელი ამონახსნი $\Phi(z)=U+iV$ შემოსაზღვრულია S^+-ში და უწყვეტად გრძელდება D-ზე (უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით). ვგულისხმოთ აგრეთვე, რომ D-ზე მოცემული ნამდვილი ფუნქციები $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას (უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით) და რომ $a^2+b^2 \neq 0$ (ასევე უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით).

---

[34] იმისათვის, რომ უშუალოდ გამოვიყენოთ ზემოთქმული, საჭიროა $f(t)$ აკმაყოფილებდეს აგრეთვე H პირობას. მაგრამ ამ მოთხოვნის გარეშეც საბოლოო შედეგი სამართლიანია.

[35] ე. ი. ამოცანა $(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\Phi^-(t)=0$, რომელიც მიიღება (41,3)-დან, როცა $c=0$.

გავავრცელოთ S^+-ში საძიებელი $\Phi(z)$ ფუნქცია უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციამდე, ამჯერად ტოლობით: $\Phi(z)=\overline{\Phi}(z)$, როცა $z\in S^-$. მაშინ D-ს გარეთ მდებარე სიბრტყის ყოველი წერტილისათვის

$$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z) \tag{42,2}$$

და, ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, სასაზღვრო პირობა მიიღებს სახეს

$$(a+ib)\,\Phi^+(t)+(a-ib)\,\Phi^-(t)=2c. \tag{42,3}$$

აქაც მივიღეთ შეუღლების ამოცანა

$$\Phi^+(t)=G(t)\cdot\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in D, \tag{42,4}$$

სადაც

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib},\qquad g(t)=\frac{2c}{a+ib}, \tag{42,5}$$

ოღონდ ამჯერად სასაზღვრო წირი წრფეა (§ 38). ამ ამოცანის ინდექსი $\varkappa$ გამოითვლება ფორმულით

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\,[\arg\,(a-ib)]_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\,[\arg\,(a+ib)]_{-\infty}^{+\infty}, \tag{42,6}$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\varkappa$ ლუწი რიცხვია.

ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ § 38-ის 4^0, 5^0 პუნქტებში მიღებული შედეგები.

(38,13) ფორმულის შესაბამისად შემოვიღოთ:

$$G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}G(t)=-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}, \tag{42,7}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\frac{\Theta(t)dt}{t-z}, \tag{42,8}$$

სადაც

$$\Theta(t)=\arg\left\{-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right\} \tag{42,9}$$

ნამდვილი ფუნქციაა.

(38,12) ფორმულის თანახმად, კანონიკური ამონახსნი $X(z)$ წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^+,\\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^-. \end{cases} \tag{42,10}$$

რადგან, ცხადია, რომ

$$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z),$$

ამიტომ $X(z)$-ს აქვს თვისება

$$\overline{X}(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa} X(z). \tag{42,11}$$

თუ $\varkappa \geqslant 0$, (42,3)-ის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას (ანუ ამოცანას, როცა (42,3)-ში $c=0$) აქვს ნულისაგან განსხვავებული, შემოსაზღვრული ამონახსნი. ასეთ ამონახსნთა ერთობლიობა წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z)=X(z)\left\{c_0+c_1\frac{z-i}{z+i}+c_2\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\cdots+c_{\varkappa}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa}\right\}, \tag{42,12}$$

სადაც $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa}$ ნებისმიერი მუდმივებია.

იმისათვის, რომ ეს ფუნქცია იყოს იმავე დროს რიმან—ჰილბერტის სათანადო ერთგვაროვანი ამოცანის (ე. ი. ამოცანისა, როცა (42,1)-ში $c=0$) ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი გვქონდეს $\overline{\Phi}(z)=\Phi(z)$, რაც, (42,11)-ის ძალით, ტოლფასია პირობებისა

$$\bar{c}_k = c_{\varkappa-k}, \quad k=0,\ 1, \ldots,\ \varkappa. \tag{42,13}$$

ამრიგად (შდრ. წინა პარაგრაფს), თუ $\varkappa \geqslant 0$, რიმან—ჰილბერტის ერთგვაროვან ამოცანას აქვს $\varkappa+1$ წრფივად დამოუკიდებელი (§ 40-ის 2⁰ პუნქტის მიხედვით) ამონახსნი.

თუ $\varkappa < 0$ (ე. ი. თუ $\varkappa \leqslant -2$), ერთგვაროვან ამოცანას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები არა აქვს.

შეუღლების არაერთგვაროვანი ამოცანის ერთ-ერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი, როცა $\varkappa \geqslant 0$, წარმოიდგინება ფორმულით (იხ. § 38, პ. 6⁰):.

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_D \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)} = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_D \frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)\,(t-z)}. \tag{42,14}$$

განსახილველი ამოცანის ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი იქნება

$$\frac{1}{2}\,[\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)];$$

ზოგად ამონახსნს კი მივიღებთ, თუ მას (42,12) სახის ფუნქციას მივუმატებთ, სადაც უნდა დავუშვათ, რომ c_k კოეფიციენტები აკმაყოფილებს (42,13) პირობებს.

თუ $\varkappa < 0$ ($\varkappa \leqslant -2$), რიმან—ჰილბერტის არაერთგვაროვან ამოცანას ამონახსნი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულდება პირობები (ფორმულა (38,16)):

$$\int\limits_D \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \frac{g(t)\,dt}{(t+i)^2\,X^+(t)} = 0, \quad k=0,\ 1, \ldots, -\varkappa-2$$

ანუ

$$\int\limits_D \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \frac{c(t)\,dt}{(t+i)^2\,[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)} = 0, \tag{42,15}$$

$$k = 0,\ 1, \ldots, -\varkappa-2.$$

თუ ეს პირობები დაცულია, ამონახსნი ერთადერთია და იგი განისაზღვრება ფორმულით

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{D}\frac{c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^{+}(t)\,(t-z)}-\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{D}\frac{c(t)\,dt}{(t+i)\,X^{+}(t)\,[a(t)+ib(t)]}. \tag{42,16}$$

(42,15) პირობები შეიძლება შეიცვალოს ნამდვილი სახით ჩაწერილი იმავე რაოდენობის პირობებით. სახელდობრ, თუ (42,15)-ში შევიტანთ $X^{+}(t)=\exp\Gamma^{+}(t)$ მნიშვნელობას, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\int\limits_{D} e^{-(\varkappa+2+2k)i\vartheta}\,\Omega(t)\,c(t)\,dt=0,\quad k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa-2,$$

სადაც

$$\Omega(t)=\frac{1}{(1+t^{2})\sqrt{a^{2}(t)+b^{2}(t)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D}\frac{\Theta(t_{1})\,dt_{1}}{t_{1}-t}\right\}, \tag{42,17}$$

$$\vartheta=\arg(t+i)=-\arg(t-i);$$

ასე რომ, $t+i=\sqrt{1+t^{2}}\,e^{i\vartheta}$, ხოლო $\Theta(t)$ განისაზღვრება (42,9) ფორმულით.

ამგვარად, როცა $\varkappa<0$ (ე. ი. $\varkappa\leqslant-2$), რიმან—ჰილბერტის არაერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნადობის პირობები ნამდვილი სახით შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{D}\Omega(t)\,c(t)\cos 2k\vartheta\,dt=0,\quad k=0,\ 1,\dots,\ -\frac{\varkappa}{2}-1,\\&\int\limits_{D}\Omega(t)\,c(t)\sin 2k\vartheta\,dt=0,\quad k=1,\ 2,\dots,\ -\frac{\varkappa}{2}-1\end{aligned}\right\}. \tag{42,18}$$

ცალკე აღვნიშნოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა $\varkappa=0$[36]. ამ შემთხვევაში შეუღლების ამოცანის კერძო ამონახსნი

$$\Phi_{0}(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{D}\frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^{+}(t)\,(t-z)}$$

არის აგრეთვე რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამონახსნიც. მართლაც, თუ $\varkappa=0$, გვექნება $\overline{X}(z)=X(z)$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\overline{X}^{+}(t)=\overline{X}^{-}(t)=X^{-}(t),$$

ხოლო $X(z)$-ის განსაზღვრის შედეგად

$$(a+ib)\,X^{+}(t)=-(a-ib)\,X^{-}(t),$$

გვექნება:

$$\overline{\Phi}_{0}(z)=\Phi_{0}(z).$$

---

[36] ამ წიგნის პირველ რუსულ გამოცემაში ფორმულები მოყვანილი იყო მხოლოდ ამ შემთხვევისათვის. ფორმულები ზოგადი შემთხვევისათვის პირველად გამოქვეყნდა ამ წიგნის მეორე რუსულ გამოცემაში.

რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ზოგად ამონახსნს მივიღებთ, თუ Φ_0 კერძო ამონახსნს მივუმატებთ ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგად ამონახსნს ანუ $CX(z)$-ს (სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია).

ამრიგად, თუ $\varkappa = 0$, ზოგადი ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int\limits_D \frac{c(t)\, dt}{[a(t) + ib(t)]\, X^+(t)\, (t-z)} + CX(z), \tag{42,19}$$

სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია, ხოლო

$$X(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_D \frac{\Theta(t)dt}{t-z}, \quad \Theta(t) = \arg \left\{ - \frac{a-ib}{a+ib} \right\}. \tag{42,20}$$

S^+ ნახევარსიბრტყისათვის დირიხლეს ამოცანის შემთხვევაში გვექნება $a=1$, $b=0$, $c=f(t)$, $X(z)=i$, როცა $z \in S^+$, $X(z) = -i$, როცა $z \in S^-$ და უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_D \frac{f(t)\, dt}{t-z} + Ci,$$

სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია.

§ 43. ზოგადი შემთხვევის დაყვანა წრიული არის შემთხვევაზე.

1^0. განვიხილოთ ახლა მარტივი შეკრული L-კონტურით შემოსაზღვრული (სასრული ან უსასრულო) S^+ არის შემთხვევა.

ვიგულისხმოთ, რომ L კონტური არა მარტო გლუვია, არამედ აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის[37] პირობასაც (§ 7, პ. 3^0).

ვთქვათ, $\zeta = \chi(z)$ არის z სიბრტყის S^+ არის ζ სიბრტყის ერთეულოვან წრეზე კონფორმულად ამსახველი ფუნქცია, ხოლო $z = \omega(\zeta)$ მისი შებრუნებული ფუნქციაა. წრეწირი $|\zeta| = 1$ აღვნიშნოთ γ-თი. კონფორმულ ასახვათა თეორიიდან ცნობილია, რომ ჩვენ მიერ მიღებულ პირობებში როგორც $\omega(\zeta)$ და $\chi(z)$, ისე მათი წარმოებულებიც $\omega'(\zeta)$ და $\chi'(z)$ უწყვეტად ვრცელდება შესაბამისად γ-სა და L-ზე; ხოლო თუ σ და s-ით აღნიშნავენ γ-სა და L-ის ერთმანეთის შესაბამ წერტილთა რკალურ აბსცისებს, მაშინ არსებობს აგრეთვე $\dfrac{d\sigma}{ds}$ და $\dfrac{ds}{d\sigma}$ წარმოებულები[38].

ამის გამო, ცხადია, თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე t-ს მიმართ, მაშინ γ კონტურის სათანადო τ წერტილით გამოსახული იგივე ფუნქცია ანუ ფუნქცია $\psi(\tau) = \varphi(\omega(\tau))$ დააკმაყოფილებს H პირობას γ-ზე (იმავე მაჩვენებლით); იგივე მართებულია, თუ L-სა და γ-ს შევუცვლით როლებს.

ამიტომ, თუ გვინდა S^+ არისათვის რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნა სასაზღვრო პირობით

---

[37] შევნიშნოთ, რომ შესაძლოა ამ შეზღუდვის მნიშვნელოვანი შესუსტება ისე, რომ არ შეიცვალოს ძირითადი შედეგები.

[38] $\omega'(\zeta)$-სა და $\chi'(z)$-ს უწყვეტად გაგრძელებადობის შესახებ მოყვანილი დებულება ეკუთვნის კელლოგს (O. D. Kellog, [2]), რომელმაც, აღნიშნულის გარდა, დაამტკიცა აგრეთვე, რომ $\omega'(\zeta)$ და $\chi'(z)$ აკმაყოფილებს H პირობას იხ. აგრეთვე S. Warschawski [1], [2].

$$\operatorname{Re}(a+ib)\Phi^+ \equiv au^+ - bv^+ = c, \tag{43,1}$$

სადაც $a=a(t)$, $b=b(t)$, $c=c(t)$ L-ზე განსაზღვრული H კლასის ფუნქციებია, მაშინ S^+ არის $|\zeta|<1$ წრეზე კონფორმული ასახვით მივიღებთ ზუსტად ასეთივე სახის ამოცანას, მაგრამ უკვე წრისათვის. სასაზღვრო პირობა გამოისახება იგივე (43,1) ფორმულით, რომელშიაც ამჯერად a, b და c აღნიშნავს γ-ზე განსაზღვრულ $a(\omega(\tau))$, $b(\omega(\tau))$, $c(\omega(\tau))$ ფუნქციებს.

ამის გამო წრიული არისათვის დადგენილი შედეგები შეგვიძლია უშუალოდ გადავიტანოთ ზემოთ მითითებული არეებისათვის. ამონახსნსა და ამოხსნადობის პირობებს S^+ არისათვის მივიღებთ წრისათვის დადგენილი სათანადო ფორმულებიდან z ცვლადზე გადასვლით $\zeta=\chi(z)$ ფორმულის საშუალებით.

კერძოდ, ცხადია, ინდექსი $\varkappa$ შეიძლება განისაზღვროს უშუალოდ $a(t)$ და $b(t)$ ფუნქციების საშუალებით ისეთივე ფორმულით, როგორიც გვქონდა წრისათვის

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L \tag{43,2}$$

ანუ

$$\varkappa = \frac{1}{\pi i}\,[\ln(a-ib)]_L = \frac{1}{\pi}\,[\arg(a-ib)]_L. \tag{43,3}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. ვთქვათ $\Phi(z)$ რიმან—ჰილბერტის (43,1) ამოცანის რომელიმე ამონახსნია. ადვილია ჩვენება, რომ L კონტურისა და $a(t)$, $b(t)$ და $c(t)$ ფუნქციების მიმართ ნაგულისხმებ პირობებში $\Phi(z)$-ის სასაზღვრო მნიშვნელობა $\Phi^+(t)$ დააკმაყოფილებს H პირობას. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამონახსნი წრის შემთხვევაში აკმაყოფილებს H პირობას, თუკი ამ პირობას აკმაყოფილებს a, b და c ფუნქციები; ხოლო, როგორც აღვნიშნეთ, კონფორმული ასახვისას L-ზე H კლასის ფუნქციები გადადის γ-ზე H კლასის ფუნქციებში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. შემთხვევა, როდესაც L უსასრულოდ დაშორებულ წერტილზე გამავალი წირია, განხილული შემთხვევისაგან არსებითად არ განსხვავდება. ამ შემთხვევაშიც, ცხადია, შეგვიძლია კონფორმული ასახვით წრიულ არეზე გადასვლა.

უსასრულოდ დაშორებულ წერტილზე გამავალი უმარტივესი წირის შემთხვევა განხილული იყო წინა პარაგრაფში.

2°. რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნის მოყვანილი გზა ეყრდნობოდა მოცემული არის წრიულ არეზე კონფორმული ასახვის შესაძლებლობას. ამიტომ პირობა, რომ მოცემული არე ცალადბმულია, არსებითია (შეუღლების ამოცანისაგან განსხვავებით). მრავლადბმულ არისათვის რიმან—ჰილბერტის ამოცანა განხილულია დ. კვესელავას [2], ი. ვეკუას [11], დუნ-გუან-ჩანის [1], ბ. ბოიარსკის [2], თ. გახოვის და ხასაბოვის [1], ე. ზვეროვიჩის [1] ნაშრომებში.

3°. რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნის ზემოთ გადმოცემული ხერხი რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევისათვის გაავრცელა ნ. ვეკუამ [16], ხოლო იმ შემთხვევისათვის, როცა ამონახსნისაგან მოითხოვება მხოლოდ კოშის ტიპის ინტეგრალით წარმოდგენადობა—ბ. ხვედელიძემ [18] და ა. დრაჩინსკიმ [4].

რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნა და გამოკვლევა ფრიად ზოგად დაშვებებში მოცემულია ი. ვეკუას მონოგრაფიის ([13]) მესამე თავში. ამ მონოგრაფიაში, ისევე როგორც ამავე ავტორის [11] სტატიაში, რიმან—ჰილბერტის ამოცანა განხილულია

განზოგადებული ანალიზური ფუნქციებისათვის, რომლებიც, როგორც კერძო შემთხვევა, ჩვეულებრივ ანალიზურ ფუნქციებს მოიცავენ. იქვე განხილულია რიმან—ჰილბერტის ამოცანის კორექტულად დასმის საკითხი.

რიმან—ჰილბერტის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი განხილულია ლ. კლაბუკოვას [1], [2] და მ. ალექსიძის [1] შრომებში.

III. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები გლუვი შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევაში

§ 44. სინგულარული ოპერატორები და სინგულარული განტოლებები. მთელ ამ კარში ვიგულისხმებთ, რომ L არის $L_1, L_2, \ldots, L_p$ არათანამკვეთ გლუვ შეკრულ კონტურთა სასრული გაერთიანება. *სინგულარულ ოპერატორს* (კოშის ტიპის გულით) ამ კარში ვუწოდებთ ოპერატორს

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{44,1}$$

სადაც t, t_0 — L კონტურის წერტილებია, ხოლო $A(t_0)$, $K(t_0,\ t)$ L-ზე მოცემული H კლასის ფუნქციებია.

$\mathbf{K}$ სინგულარული ოპერატორის სიმბოლოა. სინგულარულ ოპერატორებს აღვნიშნავთ მუქი შრიფტით.

ზოგჯერ მოხერხებულია (44,1) ფორმულის შემდეგი სახით ჩაწერა:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L K(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{44,2}$$

სადაც

$$B(t_0) = K(t_0,\ t_0), \quad k(t_0,\ t) = \frac{K(t_0,\ t) - K(t_0,\ t_0)}{t-t_0}. \tag{44,3}$$

ოპერატორს

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \tag{44,4}$$

ვუწოდებთ $\mathbf{K}$ ოპერატორის *მახასიათებელ ნაწილს*, ხოლო $A(t)$-სა და $B(t)$-ს — *მახასიათებელი ნაწილის კოეფიციენტებს*. ფუნქციას $\dfrac{K(t_0,\ t)}{t-t_0}$ ვუწოდებთ $\mathbf{K}$ ოპერატორის *გულს*.

შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ფუნქციები

$$S(t) = A(t) + B(t), \quad D(t) = A(t) - B(t) \tag{44,5}$$

განსხვავებული არის ნულისაგან ყველგან L-ზე. ამ პირობის მნიშვნელობა ქვემოთ გამოირკვევა[39]; ოპერატორებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ პირობას, ვუწოდებთ *ნორმალური ტიპის ოპერატორებს*.

---

[39] S და D ფუნქციები უფრო მნიშვნელოვან როლს ასრულებს, ვიდრე A და B; აღნიშვნების დამახსოვრება იოლია (Summa და Differentia).

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ნაგულისხმებ პირობებში §§ 5 და 6-ის შედეგების გამოყენებით ადვილად ვღებულობთ

$$k(t_0, t)=\frac{k^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda = \text{const} < 1, \tag{44,6}$$

სადაც $k^*(t_0, t)$ ეკუთვნის H კლასს L-ზე.

სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას (კოშის ტიპის გულით) ვუწოდებთ შემდეგი სახის განტოლებას

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \tag{44,7}$$

სადაც $\mathbf{K}$ — სინგულარული ოპერატორია, რომელიც აკმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობებს, $\varphi(t)$ — საძიებელი, ხოლო $f(t)$ — მოცემული ფუნქციაა; ამ უკანასკნელს ვუწოდებთ თავისუფალ წევრს ან მარჯვენა მხარეს. თუ $\mathbf{K}$ ოპერატორი ნორმალური ტიპისაა, მაშინ ვიტყვით, რომ (44,7) განტოლება ნორმალური ტიპისაა.

ამ თავში ვიგულისხმებთ, რომ $f(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას და საძიებელი $\varphi(t)$ ფუნქციისაგან მოვითხოვთ ამავე პირობის შესრულებას.

(44,2)-ის გათვალისწინებით (44,7) განტოლება შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{44,8}$$

განტოლებას

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0) \tag{44,9}$$

ვუწოდებთ მახასიათებელ განტოლებას, ხოლო $A(t_0)$-სა და $B(t_0)$-ს — მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტებს.

(44,7) სახის სინგულარულ განტოლებათა თეორიის დამუშავება დაიწყო ფრედჰოლმის განტოლებათა თეორიის აგების პარალელურად. პირველი გამოკვლევები ეკუთვნით ა. პუანკარესა[10] და დ. ჰილბერტს[11]. ასეთი სახის განტოლებებთან ისინი მივიდნენ სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას: ჰილბერტი — ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანის განხილვისას, ხოლო პუანკარე — მიმოქცევათა ზოგადი თეორიის დამუშავებისას.

რიგ ავტორთა შრომების წყალობით თეორიამ შემდგომში საგრძნობლად წაიწია წინ. ამის შესახებ ქვემოთ გვექნება საუბარი სათანადო ადგილებში.

შენიშვნა 1. ნაცვლად (44,8) სახისა ზოგჯერ მოხერხებულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რამდენადმე განსხვავებული სახით ჩაწერა:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{44,10}$$

[10] H. Poincaré [1].
[11] D. Hilbert [1], [2].

სადაც $B(t)$ იგივეა რაც ზემოთ, ხოლო

$$k_1(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t, t)}{t - t_0}. \tag{44,11}$$

შენიშვნა 2. ადვილია ჩვენება, რომ L წირის შემადგენელ $L_1, L_2, \ldots, L_p$ კონტურთა ფორმასა და განლაგებას არ აქვს პრინციპული მნიშვნელობა[42], თუ ისინი გლუვია და არ კვეთენ ერთმანეთს[43].

მართლაც, L წირთან ერთად განვიხილოთ იმავე რაოდენობის გლუვ, შეკრულ, არათანამკვეთ $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ კონტურებისაგან შემდგარი Λ წირი. აღვნიშნოთ τ-თი Λ-ს წერტილები (და მათი აფიქსებიც) და დავამყაროთ ურთიერთცალსახა უწყვეტი თანადობა L-ისა და Λ-ის წერტილებს შორის ტოლობით

$$t = t(\tau). \tag{44,12}$$

ამის მიღწევა ყოველთვის შეიძლება, ამასთან ისე, რომ ფუნქცია $t'(\tau) = \dfrac{dt}{d\tau}$ განსხვავდებოდეს ნულისაგან და უწყვეტი იყოს L-ზე[44]. ამასთანავე, ვიგულისხმებთ, რომ $t'(\tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას. ამის მიღწევა, მაგალითად, შეიძლება, მაშინ, როცა L და Λ ლიაპუნოვის წირებია[45]. მაგრამ ასეთი თანადობის დამყარება შესაძლოა მაშინაც მოხერხდეს, როცა L და Λ გლუვი წირებია; ამისი უმარტივესი მაგალითია შემთხვევა, როცა L-ისა და Λ-ის შემადგენელი L_k და Λ_k კონტურები ერთმანეთისაგან მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდებიან ან ერთმანეთის მსგავსნი არიან.

თუ (44,7) განტოლებაში t ცვლადის ნაცვლად შემოვიღებთ τ ცვლადს, მივიღებთ

$$A(\tau_0)\,\varphi(\tau_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Lambda} \frac{K^*(\tau_0, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - \tau_0} = f(\tau_0), \tag{44,13}$$

სადაც მიღებულია აღნიშვნები

$$A(\tau) = A(t(\tau)), \quad \varphi(\tau) = \varphi(t(\tau)), \quad f(\tau) = f(t(\tau))$$

და

$$K^*(\tau_0, \tau) = \frac{(\tau - \tau_0)\,t'(\tau)}{t(\tau) - t(\tau_0)}\,K(t(\tau_0), t(\tau)). \tag{44,14}$$

§ 7-ის საფუძველზე ადვილად შემოწმდება, რომ $K^*(\tau_0, \tau)$ აკმაყოფილებს H პირობას Λ-ზე (შდრ. § 13, შენიშვნა 5).

ამრიგად, მივიღეთ თავდაპირველი სახის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება, ოღონდ ამჯერად საინტეგრო წირი არის Λ.

---

[42] სხვაგვარი მდგომარეობა გვაქვს პრაქტიკული თვალსაზრისით. გამოყენებებში საინტეგრო წირი მჭიდროდაა დაკავშირებული განსახილველ ამოცანასთან და $K\varphi = f$ განტოლებაში შემავალ ელემენტებს აქვთ მეტ-ნაკლებად მარტივი გეომეტრიული აზრი, რაც აადვილებს ამოცანის გამოკვლევას. L წირიდან სხვა წირზე გადასვლისას ეს უპირატესობა იკარგება.

[43] შევნიშნოთ, რომ ადვილია ამ შეზღუდვის მოხსნაც.

[44] ამისათვის საკმარისია, მაგალითად, შევუთანადოთ ერთმანეთს L_k და Λ_k წირთა ის წერტილები, რომელთაც პროპორციული რკალური აბსცისები აქვთ.

[45] ამისათვის საკმარისია დავამყაროთ ისეთივე თანადობა, რომელიც წინა შენიშვნაში მივუთითეთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. (44,7) განტოლების ჩაწერა შეიძლება ისეთი სახითაც, რომელშიც ცვლადები ნამდვილია. ამის გაკეთება შეიძლება სხვადასხვა გზით; მოვიყვანოთ ერთ-ერთი უმარტივესი.

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ L აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას და შედგება მხოლოდ ერთი კონტურისაგან. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ამ კონტურის სიგრძეა 2π. ამის შესაბამისად, L-ის პარამეტრული განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

სადაც s რკალური აბსცისაა. ნაგულისხმებ პირობათა ძალით $x'(s)$, $y'(s)$ აკმაყოფილებს H პირობას და

$$x(2\pi)=x(0), \quad y(2\pi)=y(0), \quad x'(2\pi-0)=x'(+0), \quad y'(2\pi-0)=y'(+0).$$

ადვილად დავრწმუნდებით აგრეთვე (იხ. § 7), რომ შეფარდებანი

$$\frac{e^{is}-e^{is_0}}{t-t_0}=\omega(t_0,\ t), \qquad \frac{t-t_0}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{1}{\omega(t_0,\ t)}$$

აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე[46].

შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{\omega(t_0,\ t)\,t'(s)\,ds}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{\omega(t_0,\ t)\,t'(s)\,e^{-is_0}\exp\left\{-i\,\frac{s-s_0}{2}\right\}ds}{\exp\left\{i\,\frac{s-s_0}{2}\right\}-\exp\left\{-i\,\frac{s-s_0}{2}\right\}}=$$

$$=\frac{\omega(t_0,\ t)\,t'(s)\,e^{-is_0}}{2i}\left\{\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}-i\right\}ds \qquad (44,15)$$

და შევიტანოთ ეს (44,7) გამოსახულებაში. მარტივი გარდაქმნებით, მსგავსად იმისა, როგორც (44,7)-დან მიღებული იქნა (44,8), მივიღებთ

$$a(s_0)\,\psi(s_0)+\frac{b(s_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\,\psi(s)\,ds+\int_0^{2\pi}l(s_0,\ s)\,\psi(s)\,ds=g(s_0), \qquad (44,16)$$

სადაც $a(s)$, $b(s)$, $g(s)$ 2π პერიოდის H კლასის მოცემული ფუნქციებია; $l(s_0,\ s)$ აგრეთვე მოცემული ფუნქციაა, რომელსაც აქვს სახე

$$l(s_0,\ s)=l^*(s_0,\ s)\left|\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\right|^{\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \qquad (44,17)$$

სადაც $l^*(s_0,\ s)$ ორივე ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული ფუნქციაა და აკმაყოფილებს H პირობას. $\psi(s)$-ით აღნიშნულია s-ცვლადის მიმართ ჩაწერილი საძიებელი $\varphi(t)$ ფუნქცია.

---

[46] თუ $(e^{is}-e^{is_0})$-ის ნაცვლად ავიღებთ, მაგალითად, $(s-s_0)$-ს, მაშინ შეფარდება $\frac{s-s_0}{t-t_0}$ შემოუსაზღვრელი იქნებოდა, როცა $s\to 2\pi$, $s_0\to 0$, ამიტომ ავირჩიეთ 2π-პერიოდიანი გამოსახულება $e^{is}-e^{is_0}$, რომელიც ნული ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $s=s_0+2k\pi$, სადაც k მთელი რიცხვია.

ცხადია აგრეთვე, რომ (44,16) სახით ჩაწერილი განტოლებიდან შეგვიძლია გადავიდეთ (44,7) სახის განტოლებაზე. ამასთან L წირად შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერი წირი, რომლისთვისაც დაცულია სიგლუვის ზემოთ აღნიშნული პირობები.

თუ მოცემულია (44,16) სახის განტოლება, უფრო მოხერხებულია ჩავთვალოთ, რომ ინტეგრება ხდება ერთეულრადიუსიან წრეწირზე ცენტრით საკოორდინატო სისტემის სათავეში, ხოლო s არის წირის წერტილის არგუმენტი, მაშინ $t=e^{is}$, $dt=$ $=ie^{is}\,ds$.

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{ie^{is}\,ds}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\,ds+\frac{i}{2}\,ds, \tag{44,18}$$

საიდანაც, თუ შევნიშნავთ, რომ $ids=\dfrac{dt}{t}$, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\,ds=\frac{dt}{t-t_0}-\frac{1}{2}\,\frac{dt}{t}.$$

თუ ds-ისა და ამ გამოსახულებას შევიტანთ (44,16)-ში, მივიღებთ (44,8) ან, რაც იგივეა, (44,7) სახის განტოლებას.

§ 45. სინგულარულ ოპერატორთა ძირითადი თვისებები. შევისწავლოთ უფრო დაწვრილებით წინა პარაგრაფში განმარტებული სინგულარული ოპერატორები.

1^0. თავდაპირველად შევთანხმდეთ აღნიშვნების თაობაზე. (44,1) ფორმულით განსაზღვრული $\mathbf{K}$ სინგულარულ ოპერატორს H კლასის ყოველი $\varphi(t)$ ფუნქცია გადაჰყავს ახალ $\psi(t)$ ფუნქციაში ფორმულით

$$\psi(t_0)=A(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{K(t_0,\,t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}.$$

$\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციათა შორის თანაფარდობას ჩვეულებრივ ჩავწერთ ასე

$$\psi=\mathbf{K}\varphi, \tag{*}$$

მაგრამ ზოგჯერ გამოვიყენებთ, მაგალითად, ჩანაწერს

$$\psi(t_0)=\mathbf{K}\,\varphi(t_0)\ \text{ან}\ \psi(t)=\mathbf{K}\,\varphi(t),$$

და ამით ხაზს გავუსვამთ იმ გარემოებას, რომ φ-დან $\mathbf{K}$ ოპერატორის გამოყენებით მიღებული ψ ფუნქციის არგუმენტს აქვს t_0 ან t მნიშვნელობა.

ამრიგად, სიმბოლო $\mathbf{K}\varphi(\ )$ უნდა გვესმოდეს როგორც ერთიანი სიმბოლო $\psi(\ )$ ფუნქციისა.

საზოგადოდ, ჩანაწერის გამარტივების მიზნით ხშირად ჩავტოვებთ არგუმენტებს ფუნქციათა გამოსახულებებში და ნაცვლად $\varphi(t)$ და $\psi(t)$-ს ან $\varphi(t_0)$, $\psi(t_0)$-ისა დავწერთ φ-ს, ψ-ს და ა. შ. ასე მოვიქცევით, როცა გაუგებრობა მოსალოდნელი არაა, როგორც, მაგალითად, (*) ფორმულაში ან გამოსახულებებში

$$\int\limits_L\varphi\psi\,dt,\qquad\int\limits_L\varphi\psi\,dt_0,$$

სადაც ნათელია, რომ პირველ შემთხვევაში φ და ψ აღნიშნავს $\varphi(t)$-სა და $\psi(t)$-ს, მეორეში კი — $\varphi(t_0)$-სა და $\psi(t_0)$-ს.

2^0. ამ თითქმის ცხადი შენიშვნების შემდეგ გადავიდეთ სინგულარულ ოპერატორთა ჩვენთვის უმნიშვნელოვანეს თვისებათა განხილვაზე. გავიხსენოთ წინა პარაგრაფში შემოღებული აღნიშვნები

$$\mathbf{K}\varphi = A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{45,1}$$

$$B(t) = K(t,\ t), \tag{45,2}$$

$$S(t) = A(t) + B(t), \quad D(t) = A(t) - B(t), \tag{45,3}$$

აგრეთვე, ისიც, რომ ჩვენ შევთანხმდით მხოლოდ ნორმალური ტიპის ოპერატორების განხილვაზე, ე. ი. ოპერატორებისა, რომელთათვის $S(t)$ და $D(t)$ ყველგან L-ზე ნულისაგან განსხვავებული ფუნქციებია. **K** ოპერატორით ვიმოქმედებთ მხოლოდ H კლასის ფუნქციებზე.

პირველ რიგში მივუთითოთ § 18-ის 4^0 პუნქტიდან უშუალოდ გამომდინარე **K** ოპერატორის შემდეგ მნიშვნელოვან თვისებაზე:

სინგულარული **K** ოპერატორი H კლასის ყოველ ფუნქციას გადაიყვანს იმავე კლასის ფუნქციაში.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი ცნება, რომელიც შემდეგში მნიშვნელოვან როლს შეასრულებს. სახელდობრ, **K** ოპერატორის ან $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების ინდექსი ვუწოდოთ მთელ რიცხვს

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{A-B}{A+B}\right]_L = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{D}{S}\right]_L, \tag{45,4}$$

სადაც, როგორც ყოველთვის, სიმბოლო $[\ ]_L$ აღნიშნავს ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულების ნაზრდს დადებითი მიმართულებით L-ის ერთჯერადი შემოვლისას.

განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ინდექსი დამოკიდებულია **K** ოპერატორის მხოლოდ მახასიათებელ ნაწილზე.

ამას გარდა, ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ L-ს შევცვლით რომელიმე სხვა Λ წირით ისე, როგორც წინა პარაგრაფის მე-2 პუნქტში, მაშინ $\varkappa$ ინდექსი არ შეიცვლება. მართლაც, ამ დროს, როგორც (44,13) და (44,14) ფორმულებიდან ჩანს, A და B კოეფიციენტთა მნიშვნელობა არ იცვლება, ე. ი. L და Λ წირის ერთმანეთის შესაბამ წერტილებში მათ ტოლი მნიშვნელობა აქვთ.

თუ $B(t)=0$ და, მაშასადამე, $A(t)\neq 0$ ყველგან L-ზე (იმ პირობის ძალით, რომ S და $D\neq 0$ L-ზე), მაშინ განტოლება $\mathbf{K}\varphi=f$ იქნება ფრედჰოლმის (მეორე გვარის) განტოლება. ამიტომ, როცა $B=0$, ე. ი. $S=D$, **K** ოპერატორს ვუწოდებთ ფრედჰოლმის (მეორე გვარის)[47] ოპერატორს. (45,4) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ფრედჰოლმის ოპერატორის ინდექსი ნულის ტოლია.

3^0. გადავიდეთ ახლა ორი სინგულარული ოპერატორის კომპოზიციის საკითხზე. თუ $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ შემდეგი ფორმულებით მოცემული სინგულარული ოპერატორებია

[47] შემდგომში, როცა საუბარი იქნება ფრედჰოლმის ოპერატორზე, მხედველობაში გვექნება ფრედჰოლმის მეორე გვარის ოპერატორი.

$$\mathrm{K}_1\varphi \equiv A_1(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_1(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{45,5}$$

$$\mathrm{K}_2\psi \equiv A_2(t_0)\,\psi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_2(t_0,\ t)\,\psi(t)dt}{t-t_0}. \tag{45,6}$$

მაშინ ვიტყვით, რომ ოპერატორი

$$\mathrm{K}^* = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2, \tag{45,7}$$

რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\mathrm{K}^*\psi = \mathrm{K}_1(\mathrm{K}_2\psi), \tag{45,8}$$

მიიღება K_1-ისა და K_2-ის (მოცემული რიგით) კომპოზიციის შედეგად (ოპერატორები $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$ და $\mathrm{K}_2\mathrm{K}_1$ საზოგადოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან).

ვიპოვოთ $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$-ის გამოსახულება. თუ ჩავატარებთ (45,8)-ში მითითებულ ოპერაციებს და გამოვიყენებთ პუანკარე—ბერტრანის ფორმულას (§ 28), მივიღებთ

$$\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\psi \equiv [A_1(t_0)A_2(t_0)+B_1(t_0)B_2(t_0)]\psi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{A_1(t_0)K_2(t_0,t)+K_1(t_0,t)A_2(t)}{t-t_0}\times$$

$$\times\psi(t)\,dt + \frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_L\left[\int\limits_L \frac{K_1(t_0,\ t_1)\,K_2(t_1,\ t)\,dt}{(t_1-t_0)\,(t-t_1)}\right]\psi(t)\,dt, \tag{45,9}$$

სადაც

$$B_1(t) = K_1(t,\ t),\quad B_2(t) = K_2(t,\ t).$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int\limits_L \frac{K_1(t_0,\ t_1)\,K_2(t_1,\ t)}{(t_1-t_0)\,(t-t_1)}\,dt_1 = \frac{k_{12}(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\lambda}, \tag{45,10}$$

სადაც $0 \leqslant \lambda < 1$, ხოლო k_{12} ეკუთვნის H კლასს. მართლაც, ფუნქცია $F(t_0, t, t_1) = K_1(t_0,\ t_1)K_2(t_1,\ t)$ აკმაყოფილებს H პირობას. შემდეგ გვაქვს

$$\int\limits_L \frac{F(t_0,\ t,\ t_1)\,dt_1}{(t_1-t_0)\,(t-t_1)} = \frac{1}{t-t_0}\left\{\int\limits_L \frac{F(t_0,\ t,\ t_1)\,dt_1}{t_1-t_0} - \int\limits_L \frac{F(t_0,\ t,\ t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right\} =$$

$$= \frac{\omega_0(t_0,\ t)-\omega(t_0,\ t)}{t-t_0}, \tag{45,11}$$

სადაც

$$\omega_0(t_0,\ t) = \int\limits_L \frac{F(t_0,\ t,\ t_1)dt_1}{t_1-t_0},\quad \omega(t_0,\ t) = \int\limits_L \frac{F(t_0,\ t,\ t_1)dt_1}{t_1-t}.$$

რადგან $\omega(t_0,\ t)$ და $\omega_0(t_0,\ t)$ აკმაყოფილებს H პირობას (§ 18, 4^0 და 3^0 პუნქტები) და ამას გარდა $\omega(t_0,\ t_0) = \omega_0(t_0,\ t_0)$, ამიტომ (45,11)-ის მარჯვენა მხარე წარმოგვიდგება $\dfrac{k_{12}(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\lambda}$ სახით, რითაც დამტკიცებულია გამოთქმული დებულება.

ამრიგად, ვხედავთ, რომ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილი განისაზღვრება (45,9) ფორმულის მხოლოდ პირველი ორი შესაკრებით.

თუ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილის კოეფიციენტებს აღვნიშნავთ $A^*(t)$-თი და $B^*(t)$-თი, (45,9)-დან მივიღებთ

$$A^* = A_1A_2 + B_1B_2, \quad B^* = A_1B_2 + B_1A_2. \tag{45,12}$$

აქედან, თუ დავუშვებთ, რომ $S_j = A_j + B_j$, $D_j = A_j - B_j$ $(j = 1,\ 2)$

$$S^* = A^* + B^*, \quad D^* = A^* - B^*,$$

მივიღებთ

$$S^* = S_1S_2, \quad D^* = D_1D_2. \tag{45,13}$$

ამ ფორმულებიდან (45,4)-ის საფუძველზე გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის $\varkappa^*$ ინდექსი არის $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ოპერატორების $\varkappa_1$ და $\varkappa_2$ ინდექსთა ჯამი: $\varkappa^* = \varkappa_1 + \varkappa_2$.

თუ $\mathbf{K}_1$ ოპერატორი ისეთია, რომ $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ ფრედჰოლმის ოპერატორია, მაშინ $\mathbf{K}_1$-ს ვუწოდებთ $\mathbf{K}_2$-ის *მარეგულირებელ ოპერატორს* ან *რეგულარიზატორს*. იმისათვის, რომ $\mathbf{K}^*$ იყოს ფრედჰოლმის ოპერატორი, აუცილებელია და საკმარისი გვქონდეს $B^* = 0$ ან, რაც იგივეა, $S^* = D^*$. ამრიგად, თუ $\mathbf{K}_1$ არის $\mathbf{K}_2$-ის რეგულარიზატორი, მაშინ

$$A_1B_2 + B_1A_2 = 0 \tag{45,14}$$

ან

$$S_1S_2 = D_1D_2 \tag{45,15}$$

და პირიქით. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული $\mathbf{K}_2$ ოპერატორისათვის შეიძლება უსასრულო რაოდენობის $\mathbf{K}_1$ რეგულარიზატორთა აგება. მაგალითად, თუ მოცემულია ნებისმიერი $S^* = D^* \neq 0$ ფუნქცია, მაშინ S_1 და D_1 განისაზღვრება ფორმულებით

$$S_1 = \frac{S^*}{S_2}, \quad D_1 = \frac{S^*}{D_2}; \tag{45,16}$$

კერძოდ, შეგვიძლია ავიღოთ $S^* = D^* = 1$. ჩვეულებრივ, (45,14)-ის დასაკმაყოფილებლად ყველაზე მოხერხებულია ავიღოთ

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = -B_2. \tag{45,17}$$

როგორც ვხედავთ, რეგულარიზატორთა შერჩევისას მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ *ოპერატორთა მახასიათებელ ნაწილებს*.

ცხადია აგრეთვე, რომ თუ $\mathbf{K}_1$ არის $\mathbf{K}_2$-ის რეგულარიზატორი, მაშინ $\mathbf{K}_2$ არის $\mathbf{K}_1$-ის რეგულარიზატორი[48].

რადგან ფრედჰოლმის ოპერატორის ინდექსი ნულის ტოლია, ამიტომ *ერთმანეთის მარეგულირებელ $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ოპერატორთა ინდექსები აბსოლუტური სიდიდით ტოლი და ნიშნით განსხვავებული რიცხვებია*.

---

[48] აქვე შევნიშნოთ, რომ ასეთი დასკვნა სამართლიანი არ არის განტოლებათა სისტემებთან დაკავშირებული ოპერატორებისათვის (VI თავი).

ორიოდე სიტყვით შევჩერდეთ ნებისმიერი რაოდენობის ოპერატორთა კომპოზიციაზე. ადვილად შევამოწმებთ, რომ თუ $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ სინგულარული ოპერატორებია, მაშინ

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3) = (\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_3, \tag{45,18}$$

ე. ი. სინგულარულ ოპერატორთა კომპოზიციას აქვს ასოციაციურობის თვისება; ამიტომ $\mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3)$-ის ან $(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_3$-ის ნაცვლად შეგვიძლია ვწეროთ $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3$. ასეთივე მდგომარეობა გვაქვს ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ოპერატორთა შემთხვევაშიც.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განვიხილოთ შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული $\mathbf{k}$ ოპერატორი

$$\mathbf{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{45,19}$$

სადაც

$$k(t_0, t) = \frac{k_0(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{45,20}$$

ამასთან, $k_0(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას. ასეთ ოპერატორს შეიძლება ვუწოდოთ ფ რ ე დ ჰ ო ლ მ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი გ ვ ა რ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ი.

თუ $\mathbf{K}$ რაიმე სინგულარული ოპერატორია, მაშინ $\mathbf{Kk}$ და $\mathbf{kK}$ იქნება ფრედჰოლმის პირველი გვარის ოპერატორები.

ეს გამომდინარეობს, ერთი მხრივ, (45,12) ფორმულებიდან, რადგან ფრედჰოლმის პირველი გვარის ოპერატორი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სინგულარული ოპერატორის კერძო შემთხვევა (მაგრამ უკვე არა ნორმალური ტიპისა), რომელშიაც მახასიათებელი ნაწილის A და B კოეფიციენტები იგივურად ნულის ტოლია.

მეორე მხრივ, გამოთქმული დებულება ადვილად მოწმდება უშუალოდაც. თუ

$$\mathbf{K}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0, t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0},$$

მაშინ, როგორც უშუალო ჩასმა $\psi = \mathbf{k}\varphi$ გვიჩვენებს[49]

$$\mathbf{Kk}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

სადაც

$$n(t_0, t) = A(t_0, t)\,k(t_0, t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0, t_1)\,k(t_1, t)\,dt_1}{t_1 - t}$$

და ადვილად შევამოწმებთ, რომ $n(t_0, t)$ აკმაყოფილებს ისეთივე (45,20) პირობას, როგორსაც $k(t_0, t)$[50]. ასეთივე მდგომარეობა გვაქვს $\mathbf{kK}$ ოპერატორისათვის.

---

[49] ინტეგრების რიგის შეცვლის მართებულობა გამომდინარეობს § 28-დან (შენიშვნა).

[50] ეს შეიძლება უშუალოდ შემოწმდეს და, აგრეთვე გამომდინარეობს (45,10) ფორმულიდან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ (45,20)-ის საფუძველზე

$$k(t_0, t) = \frac{k^*(t_0, t)}{t - t_0},$$

სადაც $k^*(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას (შდრ. § 28, მე-2 შენიშვნის ბოლო).

§ 46. მიკავშირებული ოპერატორები და მიკავშირებული განტოლებები. 1°. ოპერატორებს

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0,\, t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{46,1}$$

და

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\, t_0)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{46,2}$$

რომლებიც მიიღებიან ერთმანეთისაგან $\frac{K(t_0,\, t)}{t-t_0}$-ში t-სა და t_0-ის გადასმით, ვუწოდებთ მ ი კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ოპერატორებს. კერძოდ, თუ $\mathbf{K}^0$ არის მახასიათებელი ოპერატორი

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \tag{46,3}$$

მაშინ, მისი მიკავშირებულია ოპერატორი

$$\mathbf{K}^{0'}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{46,4}$$

ყურადღება უნდა მიექცეს იმ გარემოებას, რომ $\mathbf{K}^0$-ის მიკავშირებული ოპერატორი $\mathbf{K}^{0'}$, საზოგადოდ, განსხვავდება $\mathbf{K}'$ ოპერატორის $\mathbf{K}'^{0}$ მახასიათებელი ნაწილისაგან, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$\mathbf{K}'^{0}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)dt}{t-t_0}. \tag{46,5}$$

ამრიგად, უნდა განვასხვაოთ აღნიშვნები $\mathbf{K}^{0'}$ და $\mathbf{K}'^{0}$.

2°. დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას და აღვნიშნოთ მიკავშირებულ ოპერატორთა შემდეგი ძირითადი თვისებები:

I. მიკავშირებულ ოპერატორთა ინდექსები აბსოლუტური სიდიდით ტოლი და ნიშნით მოპირდაპირე რიცხვებია.

II. ყოველი ორი ოპერატორისათვის გვაქვს

$$(\mathbf{K}_1\,\mathbf{K}_2)' = \mathbf{K}_2'\,\mathbf{K}_1'; \tag{46,6}$$

საზოგადოდ,

$$(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\cdots\mathbf{K}_n)' = \mathbf{K}_n'\,\mathbf{K}_{n-1}'\cdots\mathbf{K}_2'\,\mathbf{K}_1'. \tag{46,6a}$$

III. ყოველი ორი φ და ψ ფუნქციისათვის

$$\int_L \psi\,\mathbf{K}\,\varphi dt = \int_L \varphi\,\mathbf{K}'\,\psi dt. \tag{46,7}$$

ეს თვისებები უშუალოდ მოწმდება. ადვილია ჩვენება (ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით), რომ III თვისება არის მიკავშირებულ ოპერატორთა ცნების დამახასიათებე-

ლი თვისება, ე. ი. თუ რომელიმე $\mathbf{K}$ და $\mathbf{K}'$ ოპერატორებისა და ნებისმიერი φ და ψ ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს (46,7) ტოლობას, მაშინ $\mathbf{K}$ და $\mathbf{K}'$ ოპერატორები მიკავშირებული არის თავდაპირველად მოყვანილი განსაზღვრის მიხედვით.

3°. განტოლებებს

$$\mathbf{K}\varphi = f, \quad \mathbf{K}'\psi = g \tag{46,8}$$

ვუწოდებთ მ ი კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ს, როგორიც არ უნდა იყოს f და g ფუნქციები.

(46,7)-დან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება:

თუ $\mathbf{K}\varphi = f$ განტოლებას აქვს ამონახსნი, მაშინ

$$\int_L f\psi\, dt = 0, \tag{46,9}$$

სადაც ψ არის მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{K}'\psi = 0$ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი[51].

მართლაც, თუ φ არის $\mathbf{K}\varphi = f$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$\int_L f\psi dt = \int_L \psi\, \mathbf{K}\,\varphi dt = \int_L \varphi \mathbf{K}'\psi dt = 0.$$

სამართლიანია აგრეთვე შებრუნებული დებულებაც; იგი დამტკიცებული იქნება § 53-ში.

§ 47. **მახასიათებელი განტოლების ამოხსნა.** იმ სინგულარულ განტოლებათა ზოგადი თეორიისათვის, რომელსაც ჩვენ შევისწავლით, დიდი მნიშვნელობა აქვს

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0} = f(t_0). \tag{47,1}$$

მახასიათებელი განტოლების ამოხსნას. ამ განტოლების ზოგადი და ამასთანავე ელემენტარული გზით ამოხსნა სასრული სახით მოცემული იყო ი. ვეკუას [1] მიერ. აქ სწორედ ეს შედეგია გადმოცემული[52].

გავიხსენოთ, რომ $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ აღნიშნავს H კლასის ფუნქციებს და საძიებელი ფუნქციიდანაც მოვითხოვთ H პირობის შესრულებას.

შემოვიღოთ უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t - z}. \tag{47,2}$$

თუ გავიხსენებთ სოხოცკი—პლემელის ფორმულებს

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0} = \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0), \tag{47,3}$$

---

51 გავიხსენოთ, რომ „ამონახსნს" ვუწოდებთ H კლასის ამონახსნს.

52 გადმოცემული მეთოდის იდეა გვხვდება ტ. კარლემანის ნაშრომში (T. Carleman [1]), რომელმაც განიხილა სხვა და, ამასთან, კერძო შემთხვევა (ამის შესახებ იხ. § 99). იგივე იდეა გამოყენებული იყო ს. მიხლინის [3] მიერ, რომელმაც (47,1) ამოხსნა მხოლოდ $\varkappa = 0$ შემთხვევაში (ამის გარდა იგი თვლის, რომ $A(t) = 1$ და L არის H კლასის სიმრუდის მქონე წირი). როცა $\varkappa \neq 0$ ს. მიხლინი გულისხმობს, რომ L წრეწირია, ხოლო განტოლებას აქვს სახე $\mathbf{K}^0\varphi = 0$.

მაშინ (47,1)-ის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია არის

$$(A+B)\,\Phi^{+}(t)-(A-B)\,\Phi^{-}(t)=f \tag{47,4}$$

შეუღლების ამოცანის ამონახსნი, რომელიც უსასრულობაში ნულის ტოლია.

პირიქითაც, ვთქვათ უსასრულობაში ნულის ტოლი უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია არის (47,4)-ის ამონახსნი. განვსაზღვროთ $\varphi(t_0)$ ფუნქცია (47,3)-ის პირველი ფორმულიდან. მაშინ (§ 31) $\Phi(z)$ წარმოიდგინება (47,2) ტოლობით, რის გამოც ადგილი ექნება (47,3)-ის მეორე ფორმულასაც. ეს გვიჩვენებს, რომ $\varphi(t)$ არის განსახილველი (47,1) განტოლების ამონახსნი. (47,4) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა ჩვენთვის ცნობილია. დადგენილ ფორმულათა უშუალო გამოყენების მიზნით (47,4) ასე გადავწეროთ:

$$\Phi^{+}(t_0)=G(t_0)\,\Phi^{-}(t_0)+\frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{47,5}$$

სადაც

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}. \tag{47,6}$$

აქედან ჩანს, რომ (47,1) ინტეგრალური განტოლების ინდექსად წოდებული $\varkappa$ რიცხვი (§ 45) არის შეუღლების სათანადო (47,5) ამოცანის ინდექსი.

ვთქვათ, $X(z)$ არის (47,5) ამოცანის შესაბამისი კანონიკური ფუნქცია (§ 37).

მაშინ (§ 37) (47,5) ამოცანის უსასრულობაში ნულის ტოლი ამონახსნი, როცა $\varkappa\geqslant 0$, წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]\,X^{+}(t)\,(t-z)}+X(z)\,Q_{\varkappa-1}(z), \tag{47,7}$$

სადაც $Q_{\varkappa-1}(z)$ არის არაუმეტეს $\varkappa-1$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომი, ამასთან $Q_{\varkappa-1}(z)=0$, როცა $\varkappa=0$. თუ $\varkappa<0$, ამოხსნა არსებობს მხოლოდ იმ პირობით, რომ

$$\int\limits_{L}\frac{t^{k}f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]\,X^{+}(t)}=0,\quad k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa-1; \tag{47,8}$$

და თუ ეს პირობები დაცულია, მაშინ ამონახსნი (ერთადერთი) წარმოიდგინება (47,7) ფორმულით, რომელშიაც $Q_{\varkappa-1}(z)=0$.

გამოსავალი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს მივიღებთ ფორმულით $\varphi(t_0)=\Phi^{+}(t_0)-\Phi^{-}(t_0)$, რომლიდანაც (47,7) და სოხოცკი—პლემელის ფორმულების ძალით, ვღებულობთ:

$$\varphi(t_0)=\frac{X^{+}(t_0)+X^{-}(t_0)}{2[A(t_0)+B(t_0)]\,X^{+}(t_0)}\,f(t_0)+ \tag{47,9}$$

$$+\frac{X^{+}(t_0)-X^{-}(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t)dt}{[A(t)+B(t)]\,X^{+}(t)\,(t-t_0)}+[X^{+}(t_0)-X^{-}(t_0)]\,Q_{\varkappa-1}(t_0).$$

თუ გავიხსენებთ $X(z)$-ის განმარტებას, გვექნება:

$$\frac{X^+(t_0)}{X^-(t_0)}=G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)},$$

რის გამოც (47,9) შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\varphi(t_0)=\mathrm{K}^*f+B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{47,10}$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები

$$\mathrm{K}^*f\equiv A^*(t_0)\,f(t_0)-\frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{f(t)dt}{Z(t)\,(t-t_0)}, \tag{47,11}$$

$$Z(t_0)=[A(t_0)+B(t_0)]\,X^+(t_0)=[A(t_0)-B(t_0)]\,X^-(t_0), \tag{47,12}$$

$$A^*(t_0)=\frac{A(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)},\quad B_*(t_0)=\frac{B(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}, \tag{47,13}$$

ხოლო $P_{\varkappa-1}(t_0)$ აღნიშნავს $\varkappa-1$ ხარისხის ნებისმიერ პოლინომს.

ამ ფორმულაში მონაწილე $Z(t)$ ფუნქცია ადვილად გამოითვლება § 35-ის ფორმულებით.

მაგალითად, თუ L შედგება ნებისმიერად არჩეული დადებითი მიმართულების მქონე ერთი შეკრული კონტურისაგან, (35,8) ფორმულით ადვილად მივიღებთ:

$$Z(t)=(t-a)^{-\varkappa/2}\sqrt{A^2(t)-B^2(t)}\,e^{\Gamma(t)}, \tag{47,14}$$

სადაც a არის L წირის შიგნით მდებარე ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილი, ხოლო $\Gamma(t)$ განისაზღვრება ფორმულით:

$$\Gamma(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln\left[(t-a)^{\mp\varkappa}\,G(t)\right]dt}{t-t_0}, \tag{47,15}$$

სადაც $G(t)$ განსაზღვრულია (47,6) ფორმულით. ზედა ნიშანი $\varkappa$-ს წინ აიღება იმ შემთხვევაში, როცა L-ზე დადებითი მიმართულებით მოძრაობისას L-ით შემოსაზღვრული სასრული არე მარცხნივ რჩება, ქვედა ნიშანი კი საწინააღმდეგო შემთხვევაში. (47,14)-ის მარჯვენა მხარის ორი შესაძლო მნიშვნელობიდან შეიძლება რომელიმე წერტილში ერთ-ერთის ნებისმიერად არჩევა და შემდეგ ამ მნიშვნელობის უწყვეტად გაგრძელება.

(47,10) ფორმულა იძლევა (47,1) ინტეგრალური განტოლების ზოგად ამონახსნს, როცა $\varkappa\geqslant 0$. იგივე ფორმულა ამონახსნს იძლევა იმ შემთხვევაშიც, როცა $\varkappa<0$, თუ დავუშვებთ, რომ $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$, ხოლო თავისუფალი $f(t)$ წევრი აკმაყოფილებს (აუცილებელ და საკმარის) (47,8) პირობებს, რომლებიც ახლა (47,12)-ის საფუძველზე შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\int\limits_L\frac{t^k f(t)}{Z(t)}\,dt=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1. \tag{47,16}$$

(47,9) — (47,16) ფორმულების ეკვივალენტური ფორმულები მოცემულია ი. ვეკუას მიერ [1][53].

[53] არსებითად ი. ვეკუამ ფორმულები მიიღო იმ პირობით, რომ L შედგება ერთი შეკრული კონტურისაგან. მას შემდეგ, რაც ამოხსნილია შეუღლების სათანადო ამოცანა, განზოგადება რამდენიმე კონტურისათვის პრინციპულ სირთულეს არ შეიცავს.

როდესაც $f(t)=0$, ე. ი. ერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევაში, წინა შედეგები გვიჩვენებს, რომ, თუ $\varkappa \leqslant 0$, ერთგვაროვან განტოლებას არა აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები, ხოლო თუ $\varkappa > 0$, მას გააჩნია ზუსტად $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომელთა ერთობლიობა მოიცემა ფორმულით:

$$\varphi(t) = B^*(t)\, Z(t)\, P_{\varkappa-1}(t), \qquad (47,17)$$

სადაც $P_{\varkappa-1}(t)$ არის არგუმენტის $\varkappa-1$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომი.

$Z(t)$ ფუნქციას ვუწოდებთ (47,1) განტოლების შესაბამის კანონიკურ ფუნქციას.

შევაჯამოთ მიღებული შედეგები:

I. თუ $\varkappa>0$, ერთგვაროვან განტოლებას $K^0\varphi=0$ აქვს ზუსტად $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

II. თუ $\varkappa \leqslant 0$, ამ განტოლებას არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი.

III. თუ $\varkappa \geqslant 0$, არაერთგვაროვანი განტოლება $K^0\varphi=f$ ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

IV. თუ $\varkappa<0$, მაშინ ეს განტოლება ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მარჯვენა მხარე f აკმაყოფილებს შემდეგ $(-\varkappa)$ პირობას

$$\int_L f\psi_k dt = 0, \quad k=0,\ 1, \ldots, -\varkappa-1, \qquad (47,18)$$

სადაც ψ_k გარკვეული წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია (იხ. (47,16)). ამ პირობების შესრულებისას განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

როდესაც $\varkappa>0$, ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ერთობლიობა წარმოიდგინება (47,17) ფორმულით; როცა $\varkappa \geqslant 0$, არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოიდგინება (47,10) ფორმულით; როცა $\varkappa<0$, არაერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნადობის პირობები გამოისახება (47,16) ფორმულით, ამონახსნი კი — (47,10)-ით, რომელშიაც $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$.

შენიშვნა 1. პრაქტიკულად ხშირად მოხერხებულია უშუალოდ (47,9) ფორმულით სარგებლობა; იხ., მაგალითად, შემდეგი შენიშვნა.

შენიშვნა 2. თუ (47,1) მახასიათებელ განტოლებაში $A(t_0)=0$ და ე. ი. ყველგან L-ზე $B(t_0)\neq 0$, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $B(t_0)=1$; მაშინ განტოლება ღებულობს სახეს

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0). \qquad (47,19)$$

ვიგულისხმოთ, რომ L-ზე დადებითი მიმართულება არჩეულია ისე, როგორც § 29-ის 1° პუნქტში და, ვთქვათ, S^+ და S^- იგივეა, რაც ხსენებულ ადგილას (იხ. ნახ. 16).

ჩვენს შემთხვევაში $G(t)=-1$. ადვილად შევნიშნავთ, რომ (შდრ. § 35, შენიშვნა 4) $X(z)$ კანონიკური ფუნქცია განისაზღვრება (მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით) ფორმულით

$$X(z)=\begin{cases}-1, & \text{როცა } z\in S^+,\\ +1, & \text{როცა } z\in S^-.\end{cases} \qquad (47,20)$$

ამრიგად, $X^+(t)=-1$, $X^-(t)=1$ და (47,9) გვაძლევს:

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{t - t_0}. \qquad (47,21)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, მივიღეთ შებრუნების ფორმულა, რომელიც § 32-ში სხვა გზით იყო დადგენილი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L-ის შემადგენელ კონტურებს შესაძლოა ჰქონდეს სასრული რაოდენობის საერთო წერტილები, სირთულეებს არ აწყდება (შდრ. § 35, შენიშვნა 3).

§ 48. მახასიათებელი განტოლების მიკავშირებული განტოლების ამოხსნა. განვიხილოთ ახლა $\mathbf{K}^0\varphi = f$ განტოლების მიკავშირებული განტოლება

$$K^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0} = g(t_0). \qquad (48,1)$$

ამ განტოლების ინდექსი $\varkappa'$ არის $(-\varkappa)$, თუ $\varkappa$ კვლავინდებურად აღნიშნავს $\mathbf{K}^0$ ოპერატორის ინდექსს.

(48,1) განტოლება შეიძლება მივიყვანოთ შეუღლების ამოცანაზე შემდეგი მარტივი ხერხით[54]. განვიხილოთ უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t - z}. \qquad (48,2)$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში ფორმულებს

$$B(t_0)\psi(t_0) = \Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0), \quad \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)}{t - t_0} = \Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0),$$

დავასკვნით, რომ (48,1) ეკვივალენტურია შემდეგი ამოცანისა:

საჭიროა ვიპოვოთ H კლასის ფუნქცია $\psi(t)$ და უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი $\Psi(z)$ ფუნქცია ისე, რომ გვქონდეს

$$\begin{aligned} A(t_0)\,\psi(t_0) &= \Psi^+(t_0) + \Psi^-(t_0) + g(t_0), \\ B(t_0)\,\psi(t_0) &= \Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0). \end{aligned} \qquad (48,3)$$

ეს პირობები თავის მხრივ ეკვივალენტურია შემდეგისა:

$$(A + B)\,\psi = 2\Psi^+ + g, \quad (A - B)\,\psi = 2\Psi^- + g$$

ან კიდევ

$$\psi = \frac{2\Psi^+}{A + B} + \frac{g}{A + B}, \quad \psi = \frac{2\Psi^-}{A - B} + \frac{g}{A - B}. \qquad (48,4)$$

მარჯვენა მხარეთა შედარებას მივყავართ ამოცანამდე—

[54] ეს ხერხი მითითებული იყო ავტორის მიერ (უფრო ზოგად შემთხვევაში—სინგულარულ განტოლებათა სისტემისათვის) და გადმოცემულია ნ. მუსხელიშვილისა და ნ. ვეკუას სტატიაში [1]. განსახილველი განტოლება ზოგჯერ მიჰყავთ მახასიათებელ განტოლებაზე ჩასმით $B(t)\,\psi(t) = \varphi(t)$, მაგრამ ასეთი ჩასმა არ შეიძლება კორექტულად მივიჩნიოთ დამატებითი გამოკვლევის გარეშე, ყოველ შემთხვევაში, მაშინ, როცა $B(t)$ ნულის ტოლი ხდება L-ზე.

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\,\Psi^-(t_0)+\frac{B(t_0)\,g(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \qquad (48,5)$$

სადაც $G(t_0)$ აღნიშნავს იგივეს, რასაც წინა პარაგრაფში

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \qquad (48,6)$$

ამასთან უნდა განისაზღვროს უსასრულობაში ნულის ტოლი ამონახსნი. ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ (48,1) განტოლების ამონახსნებს ავაგებთ (48,4) ფორმულებიდან ერთ-ერთის გამოყენებით.

შევნიშნოთ, რომ შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\,\Psi^-(t_0), \qquad (48,7)$$

რომელიც მიიღება (48,5)-იდან, როცა $g=0$, არის შეუღლების იმ ერთგვაროვანი ამოცანის მიკავშირებული (§ 36), რომელიც მიიღება (47,5)-დან, როცა $f=0$. ამიტომ, თუ $X(z)$ და $\varkappa$ აღნიშნავს ამ ამოცანის კანონიკურ ამონახსნს და ინდექსს, მაშინ $[X(z)]^{-1}$ და $\varkappa'=-\varkappa$ იქნება (48,7) ამოცანის კანონიკური ამონახსნი და ინდექსი. ამის შესაბამისად (48,5) ამოცანის უსასრულობაში ნულის ტოლი ზოგადი ამონახსნი, როცა $\varkappa'\geqslant 0$ (ანუ, როცა $\varkappa<0$), იქნება

$$\Psi(z)=\frac{[X(z)]^{-1}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{X^+(t)\,B(t)\,g(t)\,dt}{[A(t)-B(t)]\,(t-z)}+[X(z)]^{-1}\,Q_{\varkappa'-1}(z), \qquad (48,8)$$

სადაც $Q_{\varkappa'-1}$ არის არაუმეტეს $\varkappa'-1$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომი ($Q_{\varkappa'-1}(z)=0$, თუ $\varkappa'=0$).

როცა $\varkappa'<0$ (ე. ი. $\varkappa>0$) და დაცულია ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

$$\int\limits_L \frac{X^+(t)\,B(t)\,g(t)\,t^k}{A(t)-B(t)}\,dt=0,\ k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa'-1, \qquad (48,9)$$

ამონახსნი მოიცემა იმავე (48,8) ფორმულით, რომელშიც უნდა დავუშვათ $Q_{\varkappa'-1}(z)=0$. (48,4) ფორმულათაგან ერთ-ერთი რომელიმეს გამოყენებით, (48,8)-დან მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\psi(t_0)=\mathbf{K}^{*\prime}g+\frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}. \qquad (48,10)$$

სადაც $\mathbf{K}^{*\prime}$ აღნიშნავს წინა პარაგრაფის $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის მიკავშირებულს ანუ

$$\mathbf{K}^{*\prime}g\equiv A^*(t_0)\,g(t_0)+\frac{1}{\pi i\,Z(t_0)}\int\limits_L \frac{Z(t)\,B^*(t)\,g(t)\,dt}{t-t_0}, \qquad (48,11)$$

ამასთან, $A^*(t)$, $B^*(t)$, $Z(t)$ აღნიშნავს იგივეს, რასაც წინა პარაგრაფში ((47,12), (47,13) ფორმულები).

(48,9) პირობები კი შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\int\limits_L t^k Z(t)\, B^*(t)\, g(t)\, dt = 0, \quad k = 0,\ 1, \ldots, -\varkappa' - 1. \tag{48,12}$$

ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როცა $\varkappa' > 0$, წარმოიდგინება ფორმულით

$$\psi(t) = \frac{P_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)}, \tag{48,13}$$

სადაც $P_{\varkappa'-1}(t)$ არის არაუმეტეს $\varkappa' - 1$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომი. მაშასადამე, როცა $\varkappa' > 0$, ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ზუსტად $\varkappa'$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, როცა $\varkappa' < 0$, ერთგვაროვან განტოლებას არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი.

ამრიგად, განტოლებას $\mathbf{K}^{0'}\psi = g$ აქვს იგივე თვისებები, რაც განტოლებას $\mathbf{K}^0\varphi = f$; ამაში ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\mathbf{K}^{0'}\psi = g$ განტოლებისათვის სამართლიანია წინა პარაგრაფის I — IV დებულებანი, თუ მათში $\mathbf{K}^0$-ს შევცვლით $\mathbf{K}^{0'}$-ით, ხოლო $\varkappa$-ს $\varkappa'$-ით ($\varkappa' = -\varkappa$).

ახლა ვხედავთ, რომ $\mathbf{K}^0\varphi = f$ განტოლების ამოხსნადობის (47,18) პირობებში მონაწილე ψ_k ფუნქციები შეადგენს მასთან მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{K}^{0'}\psi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრულ სისტემას; ზუსტად ასევე $\mathbf{K}^{0'}\psi = g$ განტოლების ამოხსნადობის (48,12) პირობები შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\int\limits_L g\, \varphi_k\, gt = 0, \tag{48,14}$$

სადაც $\varphi_k (k = 1,\ 2, \ldots, \varkappa)$ არის ამ განტოლების მიკავშირებული $\mathbf{K}^0\varphi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა. ეს დებულებები კერძო შემთხვევაა მნიშვნელოვანი თეორემისა, რომელიც დამტკიცებული იქნება 53-ე პარაგრაფში.

აღვნიშნოთ კიდევ ერთი ფაქტი, რომელიც აგრეთვე ერთი ზოგადი თეორემის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (ისიც დამტკიცებული იქნება § 53-ში): $\mathbf{K}^0\varphi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა k რიცხვისა და $\mathbf{K}^{0'}\psi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნათა k' რიცხვის სხვაობა $\mathbf{K}^0$ ოპერატორის ინდექსის ტოლია

$$k - k' = \varkappa. \tag{48,15}$$

მართლაც, თუ $\varkappa \geqslant 0$, მაშინ $k = \varkappa$, $k' = 0$, ხოლო თუ $\varkappa \leqslant 0$ — $k = 0$, $k' = -\varkappa$.

§ 49. ზოგადი ხასიათის რამდენიმე შენიშვნა[55]. ვიდრე გამოკვლევას გავაგრძელებდეთ, შევჩერდეთ ზოგადი ხასიათის რამდენიმე შენიშვნაზე. როგორც ცნობილია, ფრედჰოლმის მეორე გვარის

---

[55] ამ პარაგრაფში ვსარგებლობთ ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთი ზოგადი ცნებით: შესაბამისი ადგილები კითხვისას შეიძლება გამოტოვებულ იქნეს, რადგან იგი გავლენას არ მოახდენს შემდგომი მასალის გადმოცემაზე, გარდა ერთი პარაგრაფისა (§ 133), რომელიც თავის მხრივ ასეთივე ხასიათისაა. ვისაც აინტერესებს ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდების სინგულარულ განტოლებათა თეორიაში გამოყენების საკითხები, მივუთითებთ შემდეგ შრომებს: ფ. ატკინსონი [1], ნ. ახიეზერი [1], ფ. ბერკოვიჩი [1], ი. გოხბერგი [1]—[6], ი. გოხბერგი და მ. კრეინი [1], [2], ი. გოხბერგი და

$$N\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \int\limits_L n(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{49,1}$$

განტოლებას[56] (აქ ყველგან L-ზე $A(t_0) \neq 0$) და ფრედჰოლმის პირველი გვარის

$$\int\limits_L n(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{49,2}$$

განტოლებას შორის (რომელიც მიიღება (49,1)-დან, როცა $A(t) = 0$) განსხვავება არსებითი ხასიათისაა. ასეთი არსებითი განსხვავება არ არის

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{49,3}$$

და

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{49,4}$$

სინგულარულ განტოლებებს შორის.

(49,3) და (49,4) სინგულარულ განტოლებებს, ჩვეულებრივ, უწოდებენ პირველი და მეორე გვარის განტოლებებს (ზოგჯერ ჩვენც ასე მოვიქცევით), მაგრამ ასეთი დაყოფა ნაკლებ გამართლებულია, ვიდრე ფრედჰოლმის განტოლებების შემთხვევაში. როგორც ვნახავთ შემდგომში და, როგორც უკვე ვნახეთ მარტივ მაგალითზე (§ 47, შენიშვნა 2), (49,4) არის უბრალოდ (49,3) განტოლების კერძო შემთხვევა. ამის მიზეზი შემდეგში მდგომარეობს:

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $n(t_0,\ t)$ გული, აგრეთვე $A(t_0)$ კოეფიციენტი და (49,1), (49,2) განტოლებათა თავისუფალი წევრები უწყვეტი ფუნქციებია. $\varphi(t)$ ამონახსნი ვეძებოთ უწყვეტ ფუნქციათა C სივრცეში, რომელშიც ნორმა განსაზღვრულია როგორც $\max|\varphi(t)|$, ხოლო მანძილი $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$-ს შორის — როგორც $\max|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ L-ზე.

აღვნიშნოთ $\mathbf{E}$-თი ერთეულოვანი ოპერატორი ანუ $\mathbf{E}\varphi \equiv \varphi$, ხოლო $\mathbf{n}$-ით—შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული ოპერატორი

$$\mathbf{n}\varphi \equiv \int\limits_L n(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{49,5}$$

ახლა (49,1) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$A\mathbf{E}\varphi + \mathbf{n}\varphi = f.$$

მ. ზამბიცკი [1], ი. გუსეინოვი [2], ხ. კოჯანი [1], ა. კოსულინი [2], [3], მ. კრეინი [1], ს. მიხლინი [1]—[7], ბ. პლამენევსკი [1], ზ. პრესდორფი [1]—[5], ს. სამკო [1], ი. სიმონენკო [6], ს. ფრეიდკინი [2]—[4], ს. ფრეიდკინი და მ. პროკოპეცი [1], ზ. ხალილოვი [3], დ. ხარაზოვი და ბ. ხვედელიძე [1], ბ. ხვედელიძე [18], ი. ჩერსკი [1], J. Elliott [1]. [2], G. Fichera [1]. W Koppelman [1]—[3], W. Koppelman and Pincus [1], D. Przeworska-Rolewicz [1]—[3], C. R. Putnam [1], H Schaefer [1], J Schwartz [1], M. Shinbrot [1].

[56] $A(t_0)$ კოეფიციენტი შემოგვყავს სინგულარულ განტოლებასთან შედარების გასამარტივებლად, (49,1)-ში შეგვეძლო მიგვეღო $A(t_0) = 1$.

წრფივი ოპერატორი $\mathbf{n}$ არის სავსებით უწყვეტი ოპერატორი, ე. ი. $\varphi(t)$ ფუნქციათა ყოველი შემოსაზღვრული (მოდულით) სიმრავლე გადაჰყავს კომპაქტურ სიმრავლეში, მაშინ, როცა $\mathbf{E}$ უბრალოდ უწყვეტი ოპერატორია. ამიტომ $A\mathbf{E}+\mathbf{n}$ ოპერატორში $A\mathbf{E}$ და $\mathbf{n}$ შესაკრებები არსებითად განსხვავებული თვისებების მქონეა.

დავუბრუნდეთ ახლა (49,3) სინგულარულ განტოლებას და იგი ასე ჩავწეროთ

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A\mathbf{E}\varphi + B\mathbf{I}\varphi + \mathbf{k}\varphi = f, \tag{49,3ა}$$

სადაც $\mathbf{I}$ და $\mathbf{K}$ ოპერატორები განისაზღვრება ფორმულებით

$$\mathbf{I}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \qquad \mathbf{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{49,6}$$

სიმარტივისათვის მივიღოთ, რომ $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k(t_0,\ t)$-ზე აკმაყოფილებს $H(\nu)$ პირობას და μ რაიმე ფიქსირებული დადებითი რიცხვია ისეთი, რომ $\mu \leqslant \nu$, $\mu < 1$[57].

განვიხილოთ იმ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელნიც L-ზე აკმაყოფილებენ $H(\mu)$ პირობას და განვსაზღვროთ მასზე ნორმა $\|\varphi(t)\|$ შემდეგნაირად

$$\|\varphi(t)\| = M + M_0,$$

სადაც

$$M = \max|\varphi(t)|, \quad M_0 = \sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\mu}\ L\text{-ზე},$$

(უკანასკნელ ტოლობაში sup აღნიშნავს ზუსტ ზედა საზღვარს); ამის შესაბამისად $\varphi_1(t)$-სა და $\varphi_2(t)$-ს შორის მანძილი განვმარტოთ როგორც $\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\|$. ადვილად შესამოწმებელია, რომ შესრულებულია სამკუთხედის აქსიომა (და აგრეთვე ნორმისა და მანძილისათვის დამახასიათებელი დანარჩენი აქსიომებიც) და, რომ ფუნქციათა ეს სიმრავლე ქმნის წრფივ სრულ ნორმირებულ სივრცეს. ამ სივრცეს აღვნიშნავთ H^μ-თი[58].

[57] პირობა $\mu < 1$ შემოვიღეთ მხოლოდ იმის გამო, რომ მხედველობაში გვაქვს კოშის ტიპის ინტეგრალებში გამოყენება. H^μ ნორმირებული სივრცის განმარტებისას (იხ. ქვემოთ), ისევე როგორც მისი სისრულის დამტკიცებისას, როცა $\nu=1$, შეგვეძლო ჩაგვეთვალა, რომ $\mu<1$; ეს შეეხება აგრეთვე k ოპერატორის სავსებით უწყვეტობის დამტკიცებასაც (იხ. ქვემოთ).

[58] დავამტკიცოთ ამ სივრცის სისრულე. ვთქვათ φ_1, φ_2, .. ამ სივრცის რომელიმე ფუნდამენტური მიმდევრობაა, ასე რომ ნებისმიერი $p>0$-თვის

$$\|\varphi_{n+p}-\varphi_n\| < \varepsilon_n, \tag{*}$$

სადაც ε_n არაა დამტკიცებული p-ზე და $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. (*)-დან ჩანს, რომ φ_1, $\varphi_2,\ldots$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია C სივრცეშიც, ასე რომ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$ იმ აზრით, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\max|\varphi-\varphi_n|=0$. შემდგომ (*)-დან გამომდინარეობს:

$$\sup\left|\frac{\varphi_{n+p}(t_2)-\varphi_{n+p}(t_1)}{|t_2-t_1|^\mu}-\frac{\varphi_n(t_2)-\varphi_n(t_1)}{|t_2-t_1|^\mu}\right| < \varepsilon_n,$$

საიდანაც იმის გამო, რომ ε_n არაა დამოკიდებული p-ზე ვღებულობთ

$$\sup\left|\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{|t_2-t_1|^\mu}-\frac{\varphi_n(t_2)-\varphi_n(t_1)}{|t_2-t_1|^\mu}\right| < \varepsilon_n.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\dfrac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{|t_2-t_1|^\mu}$ შემოსაზღვრული სიდიდეა და ამიტომ φ ეკუთვნის H^μ სივრცეს; ცხადია, აგრეთვე, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi-\varphi_n\|=0$, რაც ამტკიცებს H^μ სივრცის სისრულეს.

ადვილი სანახავია, რომ H^μ სივრცეში $\mathbf{I}$ ოპერატორი, ისევე როგორც $\mathbf{E}$, უწყვეტი (მაგრამ არა სავსებით უწყვეტი) ოპერატორია და ე. ი. ასეთივე თვისება აქვს $A\mathbf{E}+B\mathbf{I}$ ოპერატორს. ამიტომ, საზოგადოდ მიზანშეწონილია $\mathbf{K}$ ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილის როგორც ერთიანი ნაწილის განხილვა.

რაც შეეხება $\mathbf{k}$ ოპერატორს იგი არსებითად განსხვავდება $\mathbf{E}$ და $\mathbf{I}$ ოპერატორებისაგან, რადგან იგი H^μ სივრცეში სავსებით უწყვეტი ოპერატორია ანუ φ ფუნქციათა ყოველი შემოსაზღვრული სიმრავლე გადაჰყავს კომპაქტურ სიმრავლეში (H^μ სივრცის მეტრიკით). დავამტკიცოთ ეს. ვთქვათ, $\{\varphi\}$ H^μ სივრცის ისეთი სიმრავლეა, რომ $\|\varphi\| \leqslant R$, სადაც R მუდმივია. ნორმის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ φ ფუნქციები თანაბრად შემოსაზღვრული და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი არიან[59]. ამიტომ, არჩელას თეორემის თანახმად, ამ სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლიდან შეიძლება თანაბრად კრებადი $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ მიმდევრობის გამოყოფა. აღვნიშნოთ მისი ზღვარი (ჩვეულებრივი აზრით ანუ C-ს მეტრიკით) φ-თი. ვთქვათ, $\psi_n = \mathbf{k}\varphi_n$, $\psi = \mathbf{k}\varphi$. ჩვენი დებულება დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ψ_n მიისწრაფვის ψ-სკენ H^μ-ის მეტრიკით, ე. ი., რომ $\|\omega_n\| \to 0$, სადაც $\omega_n = \psi - \psi_n$. ეს კი უშუალოდ გამომდინარეობს იქიდან, რომ ჯერ ერთი, $\max|\omega_n| \to 0$ და მეორეც,

$$\omega_n(t_2)-\omega_n(t_1) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L [k(t_2, t) - k(t_1, t)]\, \rho_n(t)\, dt,$$

აქედან

$$\frac{|\omega_n(t_2)-\omega_n(t_1)|}{|t_2-t_1|^\mu} \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{|k(t_2, t)-k(t_1, t)|}{|t_2-t_1|^\mu}\, |\rho_n(t)|\,|dt|,$$

სადაც $\rho_n = \varphi - \varphi_n$ და, მაშასადამე,

$$\sup \frac{|\omega_n(t_2)-\omega_n(t_1)|}{|t_2-t_1|^\mu} \to 0.$$

ამით გამოთქმული დებულება დამტკიცებულია.

ნათქვამიდან ცხადია, რომ $\mathbf{K}$ სინგულარულ ოპერატორში მისი მახასიათებელი $A\mathbf{E}+B\mathbf{I}$ ნაწილი იგივე როლს უნდა ასრულებდეს, როგორსაც $A\mathbf{E}$ ნაწილი ასრულებს ფრედჰოლმის $\mathbf{N}$ ოპერატორში. მაგრამ ამასთან ერთად მხედველობაში უნდა გვქონდეს ერთი არსებითი განსხვავებაც: $A\mathbf{E}$ ოპერატორი შებრუნებადია, ე. ი. განტოლება $A\mathbf{E}\varphi = f$ ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია, მაშინ როდესაც ოპერატორი $A\mathbf{E}+B\mathbf{I}$ ყოველთვის შებრუნებადი არაა[60]. მართლაც, როგორც ვნახეთ, განტოლება

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A\mathbf{E}\varphi + \mathbf{I}\varphi = f$$

ნებისმიერი მარჯვენა მხარისთვის ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varkappa \geqslant 0$, ხოლო ყოველი f-ისათვის ცალსახად ამოხსნადია მხოლოდ მაშინ, როცა $\varkappa = 0$. ქვემოთ ვნახავთ, რომ $\varkappa = 0$ ინდექსის მქონე სინგულარული ინტეგრალური განტოლება ბევრ რამეში ანალოგიურია ფრედჰოლმის (მეორე გვარის) განტოლებისა.

---

[59] რადგანაც $|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| < M_0|t_2-t_1|^\mu < R\,|t_2-t_1|^\mu$.

[60] სწორედ ამითაა გაპირობებული (იხ. ს. ნიკოლსკი [1]) სინგულარულ განტოლებათა ძირითადი თეორემებისა და ფრედჰოლმის თეორემათა განსხვავება.

შენიშვნა. ის გარემოება, რომ (49,3ა)-ს მარცხენა მხარეში $A\mathbf{E}\varphi$ და $B\mathbf{I}\varphi$ წევრები ცნობილი აზრით თანაბარუფლებიანი არის, შეიძლება ვაჩვენოთ შემდეგნაირადაც. მოვახდინოთ ჩასმა $\psi = \mathbf{I}\varphi$, სადაც ψ ახალი საძიებელი ფუნქციაა. მაშინ შებრუნების ფორმულის (§ 32) ძალით $\varphi = \mathbf{I}\psi$ და (49,3ა) განტოლება მიიღებს სახეს

$$B\mathbf{E}\psi + A\mathbf{I}\psi + \mathbf{k}_1\psi = f,$$

სადაც, როგორც ადვილი სანახავია, $\mathbf{k}_1$ ოპერატორს აქვს იგივე სახე, რაც $\mathbf{k}$-ს; ამრიგად A და B კოეფიციენტმა ადგილები შეცვალეს.

§ 50. სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რეგულარიზაციის შესახებ. სინგულარული განტოლების გამოკვლევის ჩვეულებრივი ხერხი მდგომარეობს მის რეგულარიზაციაში, ე. ი. ფრედჰოლმის განტოლებაზე დაყვანაში. ახლა ჩვენ მოვიყვანთ რეგულარიზაციის ერთ-ერთ ხერხს[61].

ვთქვათ მოცემულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\mathbf{K}\varphi = f \tag{50,1}$$

და ვთქვათ, $\mathbf{M}$ არის $\mathbf{K}$-ს რომელიმე რეგულარიზატორი. თუ ავიღებთ $\mathbf{M}$ ოპერაციას წინა განტოლების ორივე მხარიდან, მივიღებთ ფრედჰოლმის განტოლებას

$$\mathbf{N}\varphi \equiv \mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f. \tag{50,2}$$

ცხადია, რომ მოცემული განტოლების ყოველი ამონახსნი იქნება ფრედჰოლმის (50,2) განტოლების ამონახსნიც; შებრუნებული დებულება კი, საზოგადოდ, სამართლიანი არაა[62]. ამიტომ (50,1) და (50,2) განტოლებები საზოგადოდ ეკვივალენტური არ არის. ადვილია დარწმუნება, რომ თუ გვეცოდინება (50,2) განტოლების ყველა ამონახსნის აგება, მაშინ შესაძლოა (50,1) განტოლების ყველა ამონახსნის აგებაც. ამის შესახებ დაწვრილებით ქვემოთ იქნება ნათქვამი (§ 53); ჯერჯერობით კი მოვიყვანოთ ზემოთქმულიდან გამომდინარე ერთი უშუალო შედეგი:

$$\mathbf{K}\varphi = 0 \tag{50,3}$$

ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი სასრულია.

მართლაც, ამ განტოლების ყოველი ამონახსნი წარმოადგენს ფრედჰოლმის $\mathbf{MK}\varphi = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს; ამ უკანასკნელის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი კი, როგორც ცნობილია, სასრულია.

აღვნიშნოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება. ფრედჰოლმის (50,2) განტოლებას აქვს სახე[63]

$$\mathbf{N}\varphi \equiv a(t_0)\,\varphi(t_0) + \int\limits_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = g(t_0), \tag{50,4}$$

სადაც, როგორც ადვილად შევამოწმებთ § 45-ის საფუძველზე, $a(t_0) \neq 0$ ყველგან L-ზე და ეკუთვნის H კლასს, მარჯვენა მხარე $g(t_0) = \mathbf{M}f(t_0)$ აგრეთვე ეკუთვნის H კლასს, ხოლო $n(t_0, t)$ გულს აქვს სახე

[61] ეს ხერხი ბოლო დრომდე ყველაზე ხშირად გამოიყენება; იგი მითითებული იყო (სხვადასხვა კერძო შემთხვევაში) სინგულარულ განტოლებათა თეორიის ფუძემდებელთა—პუანკარეს და ჰილბერტის მიერ. ზოგადი სახით იგი გვხვდება ფ. ნეტერთან (F. Noether [1]).

[62] ამის შესახებ დაწვრილებით იქნება საუბარი ქვემოთ (იხ. § 53).

[63] ჩვენ, როგორც ყოველთვის, ვგულისხმობთ, რომ განიხილება სინგულარული ოპერატორები, რომელთათვისაც დაცულია § 44-ში მითითებული პირობები. ამას გარდა, როგორც ყოველთვის ვგულისხმობთ, რომ (50,1) განტოლების მარჯვენა მხარე $f(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს, იგივე მოითხოვება საძიებელი $\varphi(t)$ ფუნქციისაგან.

$$n(t_0, t) = \frac{n^*(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{50,5}$$

სადაც $n^*(t_0, t)$ ეკუთვნის H კლასს.

ფრედჰოლმის განტოლების ამონახსნს ჩვეულებრივ ეძებენ უწყვეტ ფუნქციათა კლასში; ჩვენი მიზნებისათვის კი მნიშვნელოვანია H კლასის ამონახსნთა მოძებნა. მაგრამ აუცილებელი არაა ფრედჰოლმის (50,4) განტოლების ამონახსნისაგან ამ პირობის წინასწარი მოთხოვნა, რადგან იგი თავისთავად იქნება შესრულებული. სახელდობრ, ადვილია იმისი ჩვენება, რომ მიღებულ პირობებში (50,4)-ის ყოველი უწყვეტი (და აგრეთვე შემოსაზღვრული ინტეგრებადი) ამოხსნა აუცილებლად ეკუთვნის H კლასს. ეს დამტკიცებული იქნება მომდევნო პარაგრაფში.

§ 51. ფრედჰოლმის განტოლების ამონახსნის უწყვეტობის ხასიათის შესახებ. 1°. წინა პარაგრაფის ბოლოში გამოთქმული დებულების დასამტკიცებლად განვიხილოთ ფრედჰოლმის განტოლება

$$a(t_0)\,\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = g(t_0). \tag{51,1}$$

ვიგულისხმებთ, რომ $a(t_0)$ H კლასის მოცემული ფუნქციაა და არსად L-ზე არ ხდება ნული[64], ხოლო $n(t_0, t)$ გულს აქვს სახე

$$n(t_0, t) = \frac{n^*(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad 0 < \lambda = \text{const} < 1, \tag{51,2}$$

სადაც $n(t_0, t)$ ორივე ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს H პირობას.

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ თუ $g(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს, მაშინ (51,1) განტოლების ნებისმიერი შემოსაზღვრული ინტეგრებადი $\varphi(t)$ ამონახსნი აგრეთვე ეკუთვნის H კლასს.

(51,1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(t_0) = -\frac{\omega(t_0)}{a(t_0)} + \frac{g(t_0)}{a(t_0)}, \tag{51,1ა}$$

სადაც

$$\omega(t_0) = \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = \int_L \frac{n^*(t_0, t)\,\varphi(t)dt}{|t - t_0|^\lambda}. \tag{51,3}$$

დებულება დამტკიცებული იქნება, თუ დავასაბუთებთ, რომ $\omega(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს როგორიც არ უნდა იყოს შემოსაზღვრული ინტეგრებადი $\varphi(t)$ ფუნქცია. ამისათვის, თავის მხრივ, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია

$$\omega(t_0, t_1) = \int_L \frac{n^*(t_1, t)\,\varphi(t)dt}{|t - t_0|^\lambda}$$

აკმაყოფილებს H პირობას t_0-ისა და t_1-ის მიმართ (t_1, ისევე როგორც t_0, L-ზე მდებარე ნებისმიერი წერტილია). ეს დებულება t_1-ის მიმართ თითქმის აშკარაა. თუ $n^*(t_1, t)$ t_1-ის მიმართ H პირობას აკმაყოფილებს μ მაჩვენებლით, გვექნება

[64] ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $a(t_0) = 1$.

$$|\omega(t_0, t_1+h)-\omega(t_0, t_1)| \leqslant \int_L \frac{|n^*(t_1+h, t)-n^*(t_1, t)|\,|\varphi(t)|\,ds}{|t-t_0|^\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant B|h|^\mu \int_L \frac{ds}{|t-t_0|^\lambda} \leqslant B_0|h|^\mu, \tag{51,4}$$

სადაც B და B_0 მუდმივებია.

დავამტკიცოთ ახლა დებულება t_0-ის მიმართ. გვაქვს

$$\omega(t_0+h, t_1)-\omega(t_0, t_1) = \int_L \frac{|t-t_0|^\lambda-|t-t_0-h|^\lambda}{|t-t_0|^\lambda\,|t-t_0-h|^\lambda}\, n^*(t_1, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

საიდანაც, თუ გავიხსენებთ, რომ $|t-t_0|^\lambda$ აკმაყოფილებს $H(\lambda)$ პირობას, ვღებულობთ

$$|\omega(t_0+h, t_1)-\omega(t_0, t_1)| \leqslant c|h|^\lambda \int_L \frac{ds}{|t-t_0|^\lambda\,|t-t_0-h|^\lambda} = c|h|^\lambda I,$$

სადაც c მუდმივია. წარმოვადგინოთ I ინტეგრალი ორი შესაკრების ჯამად: $I = I_1 + I_2$ სადაც I_1 აიღება t_0 ცენტრითა და R სტანდარტული რადიუსით გავლებული წრეწირით L წირიდან ამოჭრილ სტანდარტულ l რკალზე, ხოლო I_2 კი—$L-l$ წირზე. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $|h|<\frac{R}{2}$. მაშინ ცხადია $|I_2|<c_2$, სადაც c_2 მუდმივია. ახლა თუ შემოვიღებთ ცვლადს $r=|t-t_0|$, გვექნება

$$|I_1| < c_1 \int_0^R \frac{dr}{r^\lambda\,|r-\delta|^\lambda},$$

სადაც c_1 მუდმივია, ხოლო $\delta=|h|$. შემოვიღოთ ინტეგრების ახალი ცვლადი $r=\delta\rho$ დამოკიდებულებით, მაშინ

$$|I_1| < c_1\delta^{1-2\lambda} \int_0^{R/\delta} \frac{d\rho}{\rho^\lambda\,|1-\rho|^\lambda}.$$

თუ ახლა $\lambda>\frac{1}{2}$, გვექნება

$$\int_0^{R/\delta} \frac{d\rho}{\rho^\lambda\,|1-\rho|^\lambda} < \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^\lambda\,|1-\rho|^\lambda} = \text{const}$$

(ბოლო ინტეგრალი კრებადია) და დებულება შეიძლება დამტკიცებულად ჩაითვალოს, რადგან ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (51,2) ფორმულაში $\lambda>\frac{1}{2}$ $\left(\text{თუ } \lambda\leqslant\frac{1}{2}\text{ აგრეთვე ადვილად შეიძლება უშუალო შეფასების ჩატარება}\right)$.

2°. შეიძლება მიღებული შედეგის რამდენადმე განზოგადება. სახელდობრ, ვთქვათ, $\varphi(t)$ ინტეგრებადია L-ზე და შემოსაზღვრულია ყველგან, გარდა, შესაძლოა, L-ზე მდებარე სასრული რაოდენობის წერტილთა (რაგინდ მცირე) მიდამოებისა, სადაც იგი შეიძლება შემოუსაზღვრელი იყოს, მაგრამ ისე, რომ

$$|\varphi(t)| < \frac{\text{const}}{|t-c|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1; \tag{51,5}$$

დავუშვათ აგრეთვე, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს (51,1) განტოლებას ყველგან, გარდა, შესაძლოა, $t=c$ წერტილისა. მაშინ, როგორც ახლა ვაჩვენებთ, $\varphi(t)$ დააკმაყოფილებს H პირობას, თუ მას სათანადოდ განვსაზღვრავთ c წერტილში.

დამტკიცებისას შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ გვაქვს მხოლოდ ერთი c წერტილი. ჩვენი დებულება დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ (51,3) ტოლობით განსაზღვრული $\omega(t_0)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, რადგან მაშინ ვისარგებლებთ წინა პუნქტის შედეგით.

გვაქვს

$$|\omega(t_0)| \leqslant k \int\limits_L \frac{ds}{|t-c|^{\alpha}\,|t-t_0|^{\lambda}},$$

სადაც k რაიმე მუდმივია. $|\omega(t_0)|$-ის ჩვენი მიზნებისათვის საჭირო შეფასების მისაღებად საკმარისია შევაფასოთ ინტეგრალი

$$I_0(t_0) = \int\limits_l \frac{ds}{|t-c|^{\alpha}\,|t-t_0|^{\lambda}},$$

სადაც l აღნიშნავს c ცენტრითა და R სტანდარტული რადიუსით გავლებული წრეწირის მიერ L-იდან ამოჭრილ რკალს, ხოლო t_0 c-საგან განსხვავებული l რკალის წერტილია. დავუშვათ $r = |t-c|$, $r_0 = |t_0 - c|$, მაშინ

$$I_0(t_0) \leqslant k' \int\limits_0^R \frac{dr}{r^{\alpha}\,|r-r_0|^{\lambda}} = k' I'(t_0),$$

სადაც k' მუდმივია.

თუ $\alpha + \lambda < 1$, მაშინ ინტეგრალი

$$I'(t_0) = \int\limits_0^R \frac{dr}{r^{\alpha}\,|r-r_0|^{\lambda}}$$

შემოსაზღვრულია[65] და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. α (ან λ) რიცხვის გარკვეული (რაგინდ მცირე) გადიდებით შეგვიძლია გამოვრიცხოთ შემთხვევა $\alpha+\lambda=1$.

განვიხილოთ შემთხვევა $\alpha + \lambda > 1$. $r = r_0\rho$ ჩასმით ვღებულობთ

$$I'(t_0) = \frac{1}{r_0^{\alpha+\lambda-1}} \int\limits_0^{R/r_0} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}\,|1-\rho|^{\lambda}} < \frac{1}{r_0^{\alpha+\lambda-1}} \int\limits_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha}\,|1-\rho|^{\lambda}},$$

[65] შდრ. გვ. 86.

სადაც ბოლო ინტეგრალი კრებადია.

ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს ანალოგიური შეფასება $\omega(t_0)$-ისათვის:

$$|\omega(t_0)| < \frac{\text{const}}{|t_0-c|^{\alpha+\lambda-1}};$$

(51,1ა) ტოლობის საფუძველზე გვექნება $\varphi(t)$-ს ახალი შეფასება:

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{\text{const}}{|t-c|^{\alpha'}},$$

სადაც $\alpha'=\alpha+\lambda-1<\alpha$. თუ $\alpha'+\lambda<1$, მივდივართ წინა შემთხვევასთან. ხოლო თუ $\alpha'+\lambda>1$ ($\alpha'+\lambda=1$ შემთხვევა შეგვიძლია გამოვრიცხოთ ისე, როგორც ზემოთ), კვლავ შეგვიძლია გავიმეოროთ ჩატარებული მსჯელობა და, ცხადია, რამდენიმე საფეხურის შემდეგ მივალთ შემთხვევასთან, როცა ახალ აღნიშვნებში გვექნება $\alpha+\lambda<1$. ამრიგად ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

§ 52. ფრედჰოლმის განტოლების რეზოლვენტის შესახებ. გავიხსენოთ

$$\mathbf{N}\varphi \equiv a(t_0)\,\varphi(t_0) + \int_L n(t_0,\, t)\,\varphi(t)\,dt = g(t_0) \tag{52,1}$$

ფრედჰოლმის განტოლების თეორიის ზოგიერთი შედეგი.

ამ განტოლებაში შემავალ ელემენტთა მიმართ ჯერჯერობით ვიგულისხმოთ პირობები, რომლებიც, ადრე მიღებულ პირობებთან შედარებით, რამდენადმე უფრო ზოგადია, სახელდობრ, ვიგულისხმოთ, რომ $a(t)$ ნულისაგან განსხვავებული[68] უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო

$$n(t_0,\, t) = \frac{n^*(t_0,\, t)}{|t-t_0|^{\lambda}}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{52,2}$$

სადაც $n^*(t_0,\, t)$ L-ზე უწყვეტი ფუნქციაა. $g(t)$-ს აგრეთვე ჩავთვლით უწყვეტ ფუნქციად.

ფრედჰოლმის განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ თუ ერთგვაროვან განტოლებას

$$\mathbf{N}\varphi = 0 \tag{52,3}$$

არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, მაშინ (52,1) განტოლებას ნებისმიერი მარჯვენა $g(t)$ მხარისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი და იგი წარმოიდგინება ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \mathbf{\Gamma} g \equiv \alpha(t_0)\, g(t_0) + \int_L \gamma(t_0,\, t)\, g(t)\, dt, \tag{52,4}$$

სადაც $\alpha(t_0) = \frac{1}{a(t_0)}$, ხოლო $\gamma(t_0,\, t)$ შემდეგი სახის სავსებით განსაზღვრული ფუნქციაა

$$\gamma(t_0,\, t) = \frac{\gamma^*(t_0,\, t)}{|t-t_0|^{\lambda}}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1,$$

[68] ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, როგორც ამას ჩვეულებრივ უშვებენ, რომ $a(t)=1$.

ამასთან $\gamma^*(t_0, t)$ უწყვეტი ფუნქციაა. $\gamma(t_0, t)$ ფუნქციას ეწოდება ფ რ ე დ ჰ ო ლ მ ი ს რ ე ზ ო ლ ვ ე ნ ტ ა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (52,3) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა და ამდენივე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი ექნება მის მიკავშირებულ განტოლებას

$$\mathbf{N}'\psi = 0. \tag{52,5}$$

აღვნიშნოთ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ და $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$-ით, სათანადოდ. (52,3) და (52,5) განტოლებათა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების სრული სისტემები.

(52,1) არაერთგვაროვან განტოლებას აქვს ამონახსნები მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int_L g(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{52,6}$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ამ შემთხვევაშიც არსებობს ისეთი $\mathbf{\Gamma}$ ოპერატორი, რომელიც იმავე სახისაა, როგორც (52,4)-ში და აქვს თვისება: თუ დაცულია (52,6) პირობები, მაშინ ფუნქცია

$$\varphi(t_0) = \mathbf{\Gamma} g \equiv \alpha(t_0)\,g(t_0) + \int_L \gamma(t_0, t)\,g(t)\,dt$$

წარმოადგენს (52,1)-ის ამონახსნს (უფრო ზუსტად, ერთ-ერთ ამონახსნს); $\gamma(t_0, t)$ ფუნქციას ამ შემთხვევაში შეიძლება ეწოდოს ფ რ ე დ ჰ ო ლ მ ი ს გ ა ნ ზ ო გ ა დ ე ბ უ ლ ი რ ე ზ ო ლ ვ ე ნ ტ ა[67].

ჩვენ გამოვიყენებთ ხერხს[68], რომლითაც საკითხის განხილვა დაიყვანება იმ შემთხვევაზე, როცა ერთგვაროვან განტოლებას არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები.

ამ მიზნით შემოვიღოთ $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ და $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ ფუნქციებთან შემდეგი თანაფარდობებით დაკავშირებული H კლასის[69] $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ და $\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ ფუნქციები

$$\int_L \varphi_i \xi_j\,dt = \delta_{ij}, \quad \int_L \psi_i \eta_j\,dt = \delta_{ij}, \tag{52,7}$$

სადაც

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{როცა } i = j, \\ 0, & \text{როცა } i \neq j. \end{cases}$$

[67] ასეთ რეზოლვენტას განიხილავდა ჯერ კიდევ ფრედჰოლმი. განზოგადებული რეზოლვენტის ფრიად მარტივი თეორია მოცემულია ვ. ჰურვიცის (W. A. Hurwitz [1]) შრომაში; იგი მას ფსევდორეზოლვენტას უწოდებს. განზოგადებული რეზოლვენტის აგების ტექსტში გადმოცემული ხერხი გადმოღებულია ამ ავტორისაგან.

[68] იხ. წინა შენიშვნა.

[69] ამ პირობას ვითხოვთ სინგულარულ განტოლებებში გამოყენების მიზნით; ჰურვიცს ეს პირობა არ შემოაქვს, იგი იხილავს უწყვეტ ფუნქციებს (ნამდვილ არეში).

ასეთი ξ_i და η_i ყოველთვის შეიძლება აიგოს, მასთან უამრავი სხვადასხვა გზით. ეს დამტკიცებულია წიგნის IV დამატებაში.

(52,1) განტოლებასთან ერთად განვიხილოთ ფრედჰოლმის ახალი განტოლება

$$a(t_0)\,\varphi(t_0) + \int\limits_L \left\{ n(t_0, t) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t_0)\,\xi_i(t) \right\} \varphi(t)\,dt = g(t_0) \qquad (52,8)$$

და ვაჩვენოთ, რომ თუ დაცულია (52,6) პირობები, მაშინ მისი ყოველი ამონახსნი იქნება აგრეთვე (52,1) განტოლების ამონახსნიც. მართლაც, ვთქვათ, $\varphi(t)$ არის (52,8) განტოლების რომელიმე ამონახსნი (თუ ასეთი არსებობს). მაშინ

$$\mathbf{N}\,\varphi(t_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i\,\eta_i(t_0) = g(t_0), \qquad (52,9)$$

სადაც a_i მუდმივებია:

$$a_i = \int\limits_L \varphi(t)\,\xi_i(t)\,dt. \qquad (52,10)$$

გავამრავლოთ (52,9)-ის ორივე მხარე $\psi_k(t_0)\,dt_0$-ზე და ვაინტეგროთ L-ზე t_0-ით. თუ გავითვალისწინებთ (52,6) და (52,7) ტოლობებს და, იმას, რომ (§ 46)

$$\int\limits_L \psi_k \mathbf{N}\,\varphi\,dt_0 = \int\limits_L \varphi\,\mathbf{N}'\,\psi_k\,dt_0 = 0 \qquad (52,11)$$

(რადგან $\mathbf{N}'\psi_k = 0$), მივიღებთ $a_k = 0$. მაშასადამე, (52,9) ტოლობაში ყველა $a_i = 0$, ე. ი. $\mathbf{N}\varphi = g(t_0)$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

დაბოლოს, ვაჩვენოთ, რომ (52,8)-ის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას (რომელიც მიიღება, როცა $g = 0$) არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. მართლაც, როგორც ახლახან ვნახეთ, ამ განტოლების ყოველი ამონახსნი იქნება აგრეთვე $\mathbf{N}\,\varphi = 0$[70] განტოლების ამონახსნიც მასთან ისეთი, რომ ყველა a_i მუდმივი ნულის ტოლია. ამიტომ, ერთი მხრივ, $\varphi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \cdots + b_n\varphi_n$, სადაც $b_1, b_2, \ldots, b_n$ მუდმივებია, მეორე მხრივ, რაკი ყველა $a_i = 0$, (52,10) და (52,7) ფორმულების თანახმად, ვღებულობთ, რომ ყველა $b_j = 0$ და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ არაერთგვაროვანი (52,8) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $g(t)$ მარჯვენა მხარისათვის და მისი ამონახსნი წარმოიდგინება $\varphi = \mathbf{\Gamma} g$ სახით, სადაც $\mathbf{\Gamma}$ ზემოთ მითითებული სახის ოპერატორია. ამას გარდა, თუ დაცულია (52,6) პირობები, როგორც ვნახეთ, $\mathbf{\Gamma} g$ იქნება (52,1) განტოლების ერთ-ერთი ამოხსნა. ამით დამტკიცებულია განზოგადებული რეზოლვენტის არსებობა.

თუ დაცულია (52,6) პირობები, მაშინ (52,1) განტოლების ზოგად ამონახსნს, ცხადია, ექნება სახე

$$\varphi = \mathbf{\Gamma} g + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n. \qquad (52,12)$$

[70] როცა $g = 0$, ცხადია, შესრულებულია (52,6) პირობები.

ადვილი სანახავია, რომ Γ-ს მიკავშირებული Γ' ოპერატორი $N'\omega = g$ (N' არის N-ის მიკავშირებული) განტოლებისათვის ასრულებს იმავე როლს, როგორსაც Γ ასრულებს $N\varphi = g$ განტოლებისათვის.

დასასრულ, აღვნიშნოთ შემდეგი გარემოება. დავუშვათ, რომ (52,1) განტოლებაში $a(t_0)$ კოეფიციენტი ეკუთვნის H კლასს და $h(t_0, t)$ გულს აქვს (52,2) სახე, სადაც $n^*(t_0, t)$ აგრეთვე ეკუთვნის H კლასს. ვთქვათ $g(t_0)$ H კლასის ნებისმიერი ფუნქციაა. რადგან $\varphi(t_0) = \Gamma g(t_0)$ არის (52,8) განტოლების ამონახსნი, წინა პარაგრაფის მიხედვით დავასკვნით, რომ $\Gamma g(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს. ცხადია, იგივე ითქმის $\Gamma' g(t_0)$-ც.

§ 53. ძირითადი თეორემები. წინა პარაგრაფებში მიღებული შედეგების და ფრედჰოლმის განტოლების თეორიის ძირითადი დებულების შედარებას ადვილად მივყავართ

$$K\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt}{t - t_0} = f(t_0) \tag{53,1}$$

სახის განტოლების[71] ზოგად თეორიასთან.

ზოგადი თეორია ძირითადად პირველად ფ. ნეტერმა ააგო (F. Noether [1]). ამ თეორიამ ფრიად მარტივი სახე მიიღო ი. ვეკუას შრომებში, განსაკუთრებით მის შრომაში [7]. ი. ვეკუას შედეგები გადმოცემული იქნება მომდევნო პარაგრაფებში.

ამ პარაგრაფში ზოგიერთი გამარტივებითა და დაზუსტებით, ძირითადად გავყვებით ფ. ნეტერის მეთოდს[72].

ვთქვათ, M ოპერატორი არის K-ს რომელიმე რეგულარიზატორი (იხ. § 45). ისევე როგორც § 50-ში, (53,1)-დან ვღებულობთ ფრედჰოლმის განტოლებას

$$N\varphi \equiv MK\varphi = Mf, \tag{53,2}$$

რომლის ამონახსნთა შორის არის (53,1) განტოლების ყველა ამონახსნი.

მიზნად დავისახოთ (53,1) განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოძებნა იმ პირობით, რომ ცნობილია ფრედჰოლმის (53,2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ჯერ დავწეროთ (53,2)-ის ამოხსნადობის პირობები, რომელთაც აქვთ სახე

$$\int_L \omega_j M f\,dt_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{53,3}$$

სადაც $\omega_j(t_0)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა (53,2)-ის მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლებისა

$$N'\psi \equiv K'M'\psi = 0. \tag{53,4}$$

(46,7)-ის საფუძველზე (53,3) პირობები შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\int_L f M' \omega_j\,dt_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{53,5}$$

---

71 აქ ჩვენ, ისევე როგორც მთელ კარში, ვგულისხმობთ, რომ შესრულებულია § 44-ში მიღებული პირობები.

72 ფ. ნეტერი იხილავს § 44-ის მე-3 შენიშვნაში მოყვანილი სახის სინგულარულ განტოლებას, მაგრამ მისი მსჯელობა პრინციპული ხასიათის ცვლილების გარეშე გადაიტანება აქ განხილულ შემთხვევაზე. ასეთი გადატანა ზოგიერთი გამარტივებით (იხ. სქოლიო § 55-ის ბოლოში) განხორციელებულია ვ. კუპრაძის შრომებში [3].

ვიგულისხმოთ, რომ ეს პირობები შესრულებულია. მაშინ (53,2)-ის ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახით ჩაიწერება (იხ. წინა პარაგრაფი)

$$\varphi(t_0) = \Gamma M f(t_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i(t_0), \tag{53,6}$$

სადაც Γ წინა პარაგრაფში მითითებული სავსებით გარკვეული ოპერატორია, χ_i ($i=1, 2, \dots, n$) $MK\varphi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა, ხოლო c_i — ნებისმიერი მუდმივები.

მაგრამ (53,2)-ის ეს ამონახსნი შეიძლება არ იყოს (53,1)-ის ამონახსნი. მართლაც, ვთქვათ, φ არის ამონახსნი (53,2) განტოლებისა, რომელიც შესაძლოა შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$M(K\varphi - f) = 0,$$

მაშინ, ცხადია

$$K\varphi - f = \sum_{i=1}^{m} a_i \xi_i, \tag{53,7}$$

სადაც $\xi_1, \dots, \xi_m$ არის $M\xi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა, ხოლო $a_1, \dots, a_m$ რაიმე მუდმივებია. ეს მუდმივები სავსებით განსაზღვრულია, თუ φ მოცემული ფუნქციაა, ე. ი. თუ (53,6)-ში მოცემულია $c_1, \dots, c_n$ მუდმივები.

იმისათვის, რომ (53,2) განტოლების (53,6)-ით მოცემული ამონახსნი იყოს (53,1)-ის ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა $a_i=0$. გამოვსახოთ ეს პირობები f ფუნქციისა და c_i მუდმივების საშუალებით, რისთვისაც ამ სიდიდეებით გამოვსახოთ (53,7) ფორმულის a_i მუდმივები. ამისათვის ასე მოვიქცეთ: ვთქვათ $\xi_1^*, \dots, \xi_m^*$ L-ზე განსაზღვრული H კლასის ისეთი ფუნქციებია, რომ

$$\int_L \xi_i(t_0)\, \xi_j^*(t_0)\, dt_0 = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij}=1, \text{ როცა } i=j, \ \delta_{ij}=0, \text{ როცა } i \neq j);$$

ასეთი ფუნქციების შერჩევა ყოველთვის შეიძლება[73]. ახლა (53,7) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $\xi_j^*(t_0)\, dt_0$-ზე და ვაინტეგროთ L-ზე, მივიღებთ

$$a_j = \int_L \xi_j^* (K\varphi - f)\, dt_0.$$

თუ აქ შევიტანთ $\varphi(t_0)$-ის გამოსახულებას, (53,6)-დან მარტივი გარდაქმნებით[74] მივიღებთ ფორმულებს

$$a_j = f_j + \sum_{i=1}^{n} A_{ij} c_i, \tag{53,8}$$

[73] იხ. დანართი IV წიგნის ბოლოს.

[74] კერძოდ, ასეთი გარდაქმნით (იხ. § 46):

$$\int_L \xi_j^* K \Gamma M f dt_0 = \int_L f M' \Gamma' K' \xi_j^* dt_0.$$

სადაც f_j მუდმივები f-ის საშუალებით ასე გამოისახება

$$f_j = \int_L f_j^*(t_0)\, f(t_0)\, dt_0. \qquad (53,9)$$

აქ $f_j^*(t_0)$ აღნიშნავს H კლასის სავსებით გარკვეულ ფუნქციებს, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული არც f და არც c_i მუდმივებზე, ხოლო A_{ji} ასევე გარკვეული მუდმივებია, აგრეთვე დამოუკიდებელი f და c_i სიდიდეებისაგან. მაშასადამე, იმისათვის, რომ (53,6) ტოლობით განსაზღვრული φ ფუნქცია წარმოადგენდეს (53,1) განტოლების ამონახსნს, აუცილებელია და საკმარისი, c_i მუდმივები აკმაყოფილებდეს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji}\, c_i + f_j = 0, \quad j = 1,\ 2, \ldots,\ m. \qquad (53,10)$$

თუ ამ სისტემას აქვს ამონახსნები, მაშინ ამონახსნები ექნება ჩვენს ინტეგრალურ განტოლებასაც და პირიქით. (53,10) სისტემის ამოხსნადობის პირობები, როგორც ცნობილია, გამოისახება გარკვეული რაოდენობის (მათი რიცხვი ჯერჯერობით ჩვენთვის განურჩეველია) შემდეგი სახის თანაფარდობებით:

$$\sum_{j=1}^{m} B_{ij}\, f_j = 0,$$

სადაც B_{ij} გარკვეული მუდმივებია. გავიხსენოთ, რომ f_j მუდმივებს აქვს (53,9) სახე, მაშინ წინა პირობები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int_L f(t)\, \psi_j^*(t)\, dt = 0, \qquad (53,11)$$

სადაც ψ_j^* H კლასის სავსებით გარკვეული ფუნქციებია f-ისაგან დამოუკიდებელი. ახლა იმის გათვალისწინებით, რომ (53,5) პირობებსაც აქვს (53,11) სახე, მივდივართ შემდეგ მნიშვნელოვან დასკვნამდე:

გამოსავალი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები გამოიხატება სასრული რაოდენობის (53,11) სახის პირობებით, სადაც $\psi_j^*(t)$ H კლასის გარკვეული ფუნქციებია.

ახლა ადვილია ფ. ნეტერის თეორემების დამტკიცება. ეს თეორემები (53,1) სახის სინგულარულ განტოლებათა თეორიაში იგივე როლს ასრულებს, რასაც ფრედჰოლმის ცნობილი თეორემები ფრედჰოლმის განტოლებათა თეორიისათვის. აი ეს თეორემები

თეორემა I. *იმისათვის, რომ*

$$\mathbf{K}\varphi = f \qquad (53,1)$$

განტოლება ამოხსნადი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ტოლობები:

$$\int\limits_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0, \quad j = 1, \ldots, k', \tag{53,12}$$

სადაც $\psi_1(t), \ldots, \psi_{k'}(t)$ არის მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathrm{K}'\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა.

თეორემა II. $\mathrm{K}\varphi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა k რიცხვისა და $\mathrm{K}'\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა k' რიცხვის სხვაობა დამოკიდებულია მხოლოდ K ოპერატორის მახასიათებელ ნაწილზე.

თეორემა III. წინა თეორემაში ნახსენები სხვაობა K ოპერატორის ინდექსის ტოლია, ე. ი.

$$k - k' = \varkappa. \tag{53,13}$$

ცხადია, თეორემა II თეორემა III შედეგს წარმოადგენს, რადგან $\varkappa$ ინდექსი, განმარტების ძალით, დამოკიდებულია მხოლოდ K ოპერატორის მახასიათებელ ნაწილზე. მაგრამ ჩვენ მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ თეორემა II ცალკე ჩამოყალიბება, ვინაიდან შეიძლება მისი და, აგრეთვე, თეორემა I დამტკიცებაც შეუღლების ამოცანაზე დაუყრდნობლად. ეს კი საშუალებას იძლევა გავავრცელოთ ეს თეორემები ისეთი სახის რიგი სინგულარული განტოლებისათვის, რომელთათვისაც შეუღლების ან მისი ანალოგიური ამოცანების გამოყენება შეუძლებელია ან სირთულეებთან[75] არის დაკავშირებული. გადავიდეთ თეორემების დამტკიცებაზე.

თეორემა I დამტკიცება. აუცილებლობა უშუალოდ გამომდინარეობს § 46-ის ბოლო ნათქვამიდან. საკმარისობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (53,11) პირობები (რომლებიც, როგორც ვიცით, უზრუნველყოფენ (53,1)-ის ამოხსნადობას), გამომდინარეობს (53,12) პირობებიდან. შემდეგ მარტივ ხერხს (ფ. ნეტერისა) ადვილად მივყავართ მიზანთან. ვთქვათ $g(t)$ H კლასის ნებისმიერი ფუნქციაა. განტოლება

$$\mathrm{K}\varphi = \mathrm{K}g$$

ამოხსნადია, რადგან მის ერთ-ერთ ამონახსნს წარმოადგენს $\varphi = g$. ამიტომ, (53,11) პირობების აუცილებლობის ძალით

$$\int\limits_L \psi_j^*(t)\,\mathrm{K}\,g\,dt = \int\limits_L g\,\mathrm{K}'\,\psi_j^*\,dt = 0.$$

რაკი ამ ტოლობას ადგილი აქვს ყოველი g ფუნქციისათვის, ცხადია, უნდა გვქონდეს $\mathrm{K}'\psi_j^* = 0$, ე. ი. ψ_j^* არის $\mathrm{K}'\psi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. ამიტომ ψ_j^* წარმოადგენს ψ_j ფუნქციათა წრფივ კომბინაციას. მაშასადამე, (53,11) პირობები წარმოადგენს (53,12)-ის შედეგს, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

II და III თეორემების დამტკიცება. ვთქვათ, **M** არის K-ს ნებისმიერი რეგულარიზატორი. განვიხილოთ ერთმანეთის მიკავშირებული ფრედჰოლმის განტოლებები

[75] ამავე მიზეზის გამო ჩვენ მიზანშეწონილად არ ჩავთვალეთ ხელი აგვეღო თეორემა I-ისა და II-ის ფ. ნეტერის მეთოდით დამტკიცებაზე. თუმცა ი. ვეკუას მეთოდი [7], რომელიც თავიდანვე ეყრდნობა შეუღლების ამოცანას, გაცილებით მარტივია.

$$\mathbf{MK}\varphi = 0, \quad \mathbf{K'M'}\psi = 0. \tag{53,14}$$

ამ განტოლებებს ერთი და იმავე რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები აქვს. ამონახსნთა რიცხვს ორი სხვადასხვა გზით დავითვლით. მიღებული შედეგების შედარება დაამტკიცებს II თეორემას[76]. ვთქვათ

$$\varphi_j (j=1, \ldots, k), \quad \psi_j (j=1, \ldots, k'), \quad \chi_j (j=1, \ldots, m), \quad \omega_j (j=1, \ldots, m')$$

შესაბამისად წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემებია შემდეგი განტოლებებისა:

$$\mathbf{K}\varphi=0, \quad \mathbf{K'}\psi=0, \quad \mathbf{M}\chi=0, \quad \mathbf{M'}\omega=0.$$

$\mathbf{MK}\varphi=0$ განტოლების ამონახსნები აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\mathbf{K}\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_j, \tag{53,15}$$

სადაც a_j მუდმივები ისე უნდა შეირჩეს, რომ ეს განტოლება ამოხსნადი იყოს. I თეორემის გათვალისწინებით, ამ პირობიდან გამომდინარეობს

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} a_j = 0 \quad (i=1, \ldots, k'), \tag{53,16}$$

სადაც

$$A_{ij} = \int_L \psi_i \chi_j \, dt \quad (i=1, 2, \ldots, k', \quad j=1, 2, \ldots, m). \tag{53,17}$$

ვთქვათ $\|A_{ij}\|$ მატრიცის რანგი არის r, მაშინ, როგორც ცნობილია, (53,16)-ის $a_1, \ldots, a_m$ ამონახსნებიდან $m-r$ იქნება ნებისმიერი, ხოლო დანარჩენი r მათ წრფივ კომბინაციებს წარმოადგენს. აღვნიშნოთ ნებისმიერი მუდმივები $b_1, \ldots, b_{m-r}$-ით. თუ (53,15)-ის მარჯვენა მხარეში a_j-ების ნაცვლად შევიტანთ b_j-ებით გამოსახულ მათ მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$\mathbf{K}\varphi = \sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i,$$

სადაც ξ_i χ_j ფუნქციათა გარკვეული წრფივი კომბინაციებია, ადვილად შემოწმდება, რომ ξ_i ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია[77].

[76] თეორემა II-ის დამტკიცება, რომელიც აქ მოგვყავს, იდეით ფ. ნეტერის დამტკიცებას ემთხვევა, მაგრამ გაცილებით გამარტივებულია. ეს დამტკიცება მიუთითა ი. ვეკუამ და გამოქვეყნდა ჩემს სტატიაში [8].

[77] მართლაც, თუ b_i მუდმივების რაიმე მნიშვნელობებისათვის

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i = 0,$$

მაშინ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i$$

ჯამიც, რომლისგანაც იქნა მიღებული წინა ჯამი (a_i-ს ნაცვლად b_i-ებით გამოსახული მათი მნიშვნელობების შეტანით), აგრეთვე ნულის ტოლი იქნება. χ_i ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობის გამო ყველა $a_i=0$. მაგრამ b_j რიცხვები ნაწილია a_i რიცხვთა სიმრავლისა, ამიტომ ყველა $b_j=0$.

ბოლო განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი b_i-ისათვის. მისი ამოხსნით ვღებულობთ

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m-r} b_i \eta_i + \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j,$$

სადაც c_j ისევე, როგორც b_i, ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო η_i $\mathbf{K}\varphi = \xi_i (i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-r)$ განტოლებათა რაიმე ამონახსნებია.

ადვილია შემოწმება, რომ η_i, φ_j ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია[78]. მაშასადამე (53,14) განტოლებათაგან პირველს აქვს $m-r-k$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

სავსებით ასეთივე შედეგს მივიღებთ (53,14)-ის მეორე განტოლებისათვის — ამისათვის საჭიროა მსჯელობებში $\mathbf{M}$ და $\mathbf{K}$ შევცვალოთ $\mathbf{K}'$ და $\mathbf{M}'$-ით და, შესაბამისად, χ_i და φ_i შევცვალოთ ψ_i და ω_i ფუნქციებით. ამის გამო A_{ij} მუდმივების ნაცვლად მივიღებთ მუდმივებს

$$A'_{ij} = \int\limits_L \chi_i \psi_j \, dt = A_{ji},$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\| A'_{ij} \|$ მატრიცის რანგი ემთხვევა $\| A_{ij} \|$ მატრიცის რანგს r-ს. ამრიგად, (53,14) განტოლებებიდან მეორის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი იქნება $k'-r+m'$. წინა შედეგთან ამ უკანასკნელის შედარებით ვღებულობთ

$$m'-r+k' = m-r+k,$$

საიდანაც

$$k-k' = m'-m. \tag{53,18}$$

ეს ტოლობა ამტკიცებს II თეორემას, რადგან $\mathbf{K}\varphi = 0$ სახის ყველა ისეთი განტოლებისათვის, რომელთაც ერთი და იგივე მახასიათებელი ნაწილი აქვთ, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ აგრეთვე ერთი და იგივე მარეგულირებელი $\mathbf{M}$ ოპერატორი და ცხადია, $m'-m$ რიცხვიც ერთი და იგივე იქნება.

III თეორემის დასამტკიცებლად, წინა თეორემის საფუძველზე, საკმარისია $k-k'$ სხვაობის გამოსათვლელად $\mathbf{K}$ ოპერატორში დავტოვოთ მხოლოდ მისი მახასიათებელი ნაწილი. მაშინ $\mathbf{K}\varphi = 0$ განტოლება ერთგვაროვანი მახასიათებელი

[78] მართლაც, თუ b_i, c_j რიცხვების რაიმე მნიშვნელობებისათვის

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \eta_i + \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j = 0,$$

მაშინ ამ ტოლობის ორივე მხრიდან $\mathbf{K}$ ოპერაციის აღებით მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ყველა $b_i = 0$. მაგრამ მაშინ

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j = 0$$

და ე. ი. ყველა $c_j = 0$.

განტოლება იქნება და II თეორემის ჭეშმარიტება დადგინდება § 48-დან (ფორმულა (48,15))[79].

შენიშვნა 1. აღვნიშნოთ III თეორემის ერთი უშუალო შედეგი.

თუ ინდექსი $\varkappa > 0$, მაშინ ერთგვაროვან $K\varphi = 0$ განტოლებას ყოველ შემთხვევაში $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნა მაინც აქვს, რადგან $k = \varkappa + k'$ და $k' \geqslant 0$.

შენიშვნა 2. წინა შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ თუ

$$K\varphi = f \tag{*}$$

განტოლების ინდექსი უარყოფითია, მაშინ არ შეიძლება ისეთი მარეგულირებელი M ოპერატორის მოძებნა, რომ ყველა f-ისათვის წინა განტოლება ეკვივალენტური იყოს ფრედჰოლმის განტოლებისა[80]

$$MK\varphi = Mf. \tag{**}$$

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ, მარეგულირებელი ოპერატორის ინდექსი უნდა იყოს $-\varkappa > 0$. დავუშვათ, (*) და (**) განტოლებები ეკვივალენტურია ყველა f-ისათვის. ავიღოთ H კლასის ნებისმიერი φ ფუნქცია და დავუშვათ, $f = K\varphi + \chi$, სადაც χ არის $M\chi = 0$ განტოლების ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი (ასეთი ამონახსნი არსებობს, რადგან M ოპერატორის ინდექსი დადებითია). ახლა გვაქვს $MK\varphi = Mf$ და, მაშასადამე, (*) და (**) განტოლებათა დაშვებულ ეკვივალენტურობის ძალით უნდა გვქონდეს $K\varphi = f$, საიდანაც $\chi = 0$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

შენიშვნა 3. აღვნიშნოთ კიდევ შემდეგი გარემოება. ავიღოთ L წირზე სასრული რაოდენობის წერტილები $c_1, \ldots, c_n$ და (53,1) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ არა H, არამედ უფრო ფართო H^* კლასში, ამასთან „კვანძებად" ჩავთვალოთ $c_1, \ldots, c_n$ წერტილები. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ საძიებელ ამონახსნთა მიმართ ასეთი უფრო ზოგადი დაშვების დროსაც, მივიღებთ იგივე ამონახსნებს, რაც უკვე გვქონდა; სხვა სიტყვებით, H^* კლასის ამონახსნი აუცილებლად H კლასს ეკუთვნის. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ H^* კლასის ყოველი ამონახსნი აუცილებლად აკმაყოფილებს ფრედჰოლმის (53,2) განტოლებას, ამ უკანასკნელის H^* კლასის ამონახსნები კი აგრეთვე H კლასს ეკუთვნის (51, პ. 2°).

§ 54. ნამდვილი განტოლების შემთხვევა. შეიძლება მოხდეს, რომ განტოლება $K\varphi = f$, რომელსაც დროებით ასე ჩავწერთ

$$K\varphi = A(t_0)\,\varphi(t_0) + \int\limits_L N(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{54,1}$$

სადაც

$$N(t_0, t) = \frac{1}{\pi i}\,\frac{K(t_0, t)}{t - t_0}, \tag{54,2}$$

ფაქტიურად ნამდვილ განტოლებას წარმოადგენს, ანუ იქცევა ნამდვილ განტოლებად, თუ მასში t ცვლადს სათანადოდ შერჩეული ნამდვილი s ცვლადით შევცვლით.

[79] $k - k'$ სხვაობის გამოსათვლელად ფ. ნეტერი სარგებლობს არა შეუღლების, არამედ რიმან—ჰილბერტის ამოცანით, რომლის არამკაცრ ამოხსნას იძლევა იგი თავის ზემოთ დასახელებულ ნაშრომში.

[80] ეს გარემოება მიუთითა ს. მიხლინმა [3].

ვთქვათ, t და s ცვლადები დაკავშირებულია დამოკიდებულებით $t=t(s)$ ისე, რომ, როდესაც s გაირბენს გარკვეულ $l_1, \ldots, l_p$ შუალედებს, t აღწერს (ერთხელ და მხოლოდ ერთხელ) L-ის შემადგენელ $L_1, \ldots, L_p$ კონტურებს. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $\frac{dt}{ds}=t'(s)$ ყველგან განსხვავდება ნულისაგან და ეკუთვნის H კლასს. პირობები, რომელიც უნდა მივიღოთ l_l შუალედების ბოლოების მიმართ—ნათელია. თუ, სიმარტივისათვის, s-ით გამოსახულ t-ს ფუნქციებს, კვლავ იგივე სიმბოლოებით აღვნიშნავთ, მაშინ (54,1) მიიღებს სახეს

$$\mathrm{N}\varphi \equiv A(s_0)\,\varphi(s_0) + \int\limits_L N(s_0,\ s)\,t'(s)\,\varphi(s)\,ds = f(s_0). \tag{54,3}$$

პირობის თანახმად $A(s)$, $N(s_0, s)$, $t'(s)$ და $f(s)$ — ნამდვილი ფუნქციებია. s-ცვლადით გამოსახული K ოპერატორი ჩვენ აქ აღვნიშნეთ სხვა სიმბოლოთი (სახელდობრ N-ით). ამის მიზეზი შემდგომში გამოირკვევა.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \int\limits_L N(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{54,4}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\mathrm{N}\varphi \equiv A(s_0)\,\varphi(s_0) + \int\limits_L N(s_0,\ s)\,t'(s)\,\varphi(s)\,ds = 0, \tag{54,5}$$

რომელიც შეესაბამება (54,1) განტოლებას ან (54,3)-ს.

ცხადია, თუ განსახილველ შემთხვევაში რომელიმე ფუნქცია $\varphi(s)=\xi(s)+i\eta(s)$, სადაც $\xi(s)$ და $\eta(s)$ ნამდვილი ფუნქციებია, არის (54,4) განტოლების ან (54,5)-ის ამონახსნი, მაშინ $\xi(s)$ და $\eta(s)$ ფუნქციებიც ამონახსნები იქნება.

ვთქვათ $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_k(s)$ წარმოადგენს (54,4) ან (54,5) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ნამდვილ ამონახსნთა სრულ სისტემას. მაშინ განტოლების ყოველი ნამდვილი ამონახსნი წარმოიდგინება

$$\varphi(s) = c_1\,\varphi_1(s) + \cdots + c_k\,\varphi_k(s) \tag{54,6}$$

წრფივი კომბინაციის სახით, სადაც $c_1, \ldots, c_k$ მუდმივები ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობს.

ზემოთქმულის საფუძველზე ცხადია, რომ (54,4) ან (54,5) განტოლების ყოველი კომპლექსური ამონახსნიც იგივე (54,6) ფორმულით წარმოიდგინება, რომელშიც ამჯერად $c_1, \ldots, c_k$ ნებისმიერი კომპლექსური მუდმივებია.

ამრიგად, (54,5) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი ერთი და იგივეა, მიუხედავად იმისა, ვიხილავთ მას ნამდვილ თუ კომპლექსურ არეში. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ პირველ შემთხვევაში წრფივი კომბინაციის ქვეშ იგულისხმება წრფივი კომბინაცია ნამდვილი კოეფიციენტებით, ხოლო მეორეში —კომპლექსური კოეფიციენტებით.

ახლა განვიხილოთ (54,4)-ის მიკავშირებული განტოლება:

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) + \int\limits_L N(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt = 0. \tag{54,7}$$

თუ შევადგენთ (54,5)-ის მიკავშირებულ განტოლებას (ვგულისხმობთ ნამდვილ განტოლებას, რომელიც (54,5)-დან მიიღება გულში s_0-ისა და s-ის ადგილების შეცვლით), მივიღებთ

$$\mathbf{N}'\omega \equiv A(s_0)\,\omega(s_0) + t'(s_0)\int\limits_L N(s,\ s_0)\,\omega(s)\,ds = 0. \tag{54,8}$$

იგი არ ემთხვევა (54,7)-ს, რადგანაც ეს უკანასკნელი s ცვლადის შემოღების შემდეგ ღებულობს სახეს

$$A(s_0)\,\psi(s_0) + \int\limits_L N(s,\ s_0)\,t'(s)\,\psi(s)\,ds = 0. \tag{54,9}$$

(სწორედ ამიტომ ავირჩიეთ სხვადასხვა აღნიშვნები $\mathbf{K}\varphi = f$ და $\mathbf{N}\varphi = f$ განტოლებათა მარცხენა მხარეს მდგომი ოპერატორებისათვის).

მაგრამ (54,8) და (54,9) განტოლებებს შორის განსხვავება არაა არსებითი: თუ (54,9) განტოლებაში $\psi(s)$-ის ნაცვლად შემოვიღებთ ახალ უცნობ $\omega(s)$ ფუნქციას თანაფარდობით

$$\psi(s) = [t'(s)]^{-1}\,\omega(s),$$

მაშინ ეს განტოლება $t'(s_0)$-ზე გამრავლების შემდეგ იქცევა (54,8) განტოლებად.

ვთქვათ, $\omega_j(s)$ $(j = 1, \ldots, k')$ $\mathbf{N}'(\omega) = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა. ზემოთ თქმულის საფუძველზე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\psi_j(s) = [t'(s)]^{-1}\,\omega_j(s)$ ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს $\mathbf{K}'\varphi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (კომპლექსურ არეში) ამონახსნთა სრულ სისტემას. (54,1) განტოლების ამოხსნადობის პირობებს, როგორც ვიცით, აქვთ სახე:

$$\int\limits_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, \ldots, k'). \tag{54,10}$$

თუ აქ ψ_j-ს ნაცვლად შევიტანთ მათ მნიშვნელობებს — $[t']^{-1}\omega_j$, მივიღებთ ნამდვილი ფორმით ჩაწერილ ამოხსნადობის პირობებს

$$\int\limits_L f(s)\,\omega_j(s)\,ds = 0 \quad (j = 1, \ldots, k'). \tag{54,11}$$

ზემოთ გადმოცემულის შეჯერებით მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე: *წინა პარაგრაფში ჩამოყალიბებული ძირითადი თეორემები ძალაში რჩება ნამდვილი განტოლებისათვისაც, თუ შევიზღუდებით ნამდვილი ამონახსნებით, ხოლო* $\mathbf{N}\varphi = 0$ *განტოლების მიკავშირებულად ჩავთვლით აგრეთვე ნამდვილ განტოლებას* $\mathbf{N}'\omega = 0$.

§ 55. 1. ვეკუას ეკვივალენტურობის თეორემა და ძირითად თეორემათა ახალი დამტკიცება. § 50-ში მოყვანილ რეგულარიზაციის მეთოდს, რომლითაც ვისარ-

გებლეთ ძირითადი თეორემების დამტკიცებისას, ის არსებითი ნაკლი აქვს, რომ რეგულარიზაციით მიღებული ფრედჰოლმის განტოლება ყოველთვის არ არის გამოსავალი განტოლების ეკვივალენტური. ისიც კი ვნახეთ (§ 53, შენიშვნა 2), რომ თუ $\varkappa < 0$, ასეთი გზით, საზოგადოდ, შეუძლებელია ეკვივალენტობის მიღწევა. მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, რომ შეუძლებელია მოცემული სინგულარული განტოლების რაიმე სხვა გზით ფრედჰოლმის ეკვივალენტურ განტოლებაზე მიყვანა. პირიქით, სამართლიანია შემდეგი

ეკვივალენტობის თეორემა (ი. ვეკუა). *სინგულარული განტოლება*

$$\mathbf{K}\varphi = f \tag{55,1}$$

ეკვივალენტურია (ქვემოთ მითითებული აზრით) *გარკვეული სახის ფრედჰოლმის განტოლებისა, რომელიც მისგან მიიღება მხოლოდ კვადრატურების საშუალებით*[81].

მართლაც, აღვნიშნოთ $\varkappa$-თი განსახილველი განტოლების ინდექსი და განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

I. $\varkappa \geqslant 0$. მაშინ არსებობს $\mathbf{K}$-ს მარეგულირებელი ისეთი $\mathbf{M}$ ოპერატორი, რომ $\mathbf{M}\omega = 0$ განტოლებას არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. ასეთ ოპერატორად შეგვიძლია ავიღოთ, მაგალითად, ოპერატორი $\mathbf{K}^{0'}$ (ე. ი. $\mathbf{K}$-ს მახასიათებელი ნაწილის მიკავშირებული ოპერატორი) ან ოპერატორი $\mathbf{K}'^{0}$ (ე. ი. $\mathbf{K}$-ს მიკავშირებული ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილი). ორივე ამ ოპერატორის ინდექსია $-\varkappa \leqslant 0$ და ამიტომ $\mathbf{M}$-ის ასეთი არჩევისას $\mathbf{M}\omega = 0$ განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი $\omega = 0$[82]. ის, რომ $\mathbf{M}$ ამ დროს მართლა წარმოადგენს რეგულარიზატორს, გამომდინარეობს (45,14), (46,4) და (46,5) ფორმულებიდან.

ვთქვათ, $\mathbf{M}$ აღნიშნული თვისების მქონე რომელიმე ოპერატორია; მაშინ ფრედჰოლმის განტოლება

$$\mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f \tag{55,2}$$

გამოსავალი განტოლების ეკვივალენტურია. მართლაც, ცხადია $\mathbf{K}\varphi = f$ განტოლების ამონახსნები აკმაყოფილებს $\mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f$ განტოლებას და პირიქით — ამ განტოლების ყოველი ამონახსნი იქნება აგრეთვე გამოსავალი განტოლების ამონახსნიც, რადგან უკანასკნელი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{M}(\mathbf{K}\varphi - f) = 0$ და, მაშასადამე, $\mathbf{K}\varphi - f = 0$[83].

II. $\varkappa < 0$. მაშინ არსებობს ისეთი $\mathbf{M}$ ოპერატორი, რომ $\mathbf{K}$ ოპერატორი $\mathbf{M}$-ის რეგულარიზატორია და, ამას გარდა, განტოლება

$$\mathbf{M}\psi = g \tag{55,3}$$

ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის (H კლასიდან). $\mathbf{M}$ ოპერატორის მაგალითად, ისევე, როგორც ზემოთ, შეიძლება ავიღოთ $\mathbf{K}^{0'}$ ან $\mathbf{K}'^{0}$ ოპერატორი.

---

[81] ი. ვეკუა [7].

[82] იხ. §§ 47, 48.

[83] ის გარემოება, რომ დადებითი ინდექსის შემთხვევაში $K\varphi = f$ განტოლება შეიძლება მიყვანილ იქნეს ფრედჰოლმის ეკვივალენტურ $MK\varphi = Mf$ განტოლებაზე, მიუთითა ს. მიხლინმა [3]. ის განიხილავს შემთხვევას, როცა $A(t) = 1$ და L შედგება ერთი შეკრული კონტურისაგან; მან აჩვენა, რომ თუ L წრეწირია, მაშინ M ოპერატორად გამოდგება (ჩვენს აღნიშვნებში) ოპერატორი K'^{0}.

ამჯერად მათი ინდექსი $-\varkappa > 0$, ამიტომ მათ აქვთ ჩვენთვის საჭირო თვისება; ასეთ არჩევას ის უპირატესობაც აქვს, რომ მაშინ (55,3) განტოლების ψ ამონახსნი მიიღება კვადრატურებში (§§ 47 და 48).

მოვახდინოთ ახლა ჩასმა

$$\varphi = M\psi, \tag{55,4}$$

სადაც ψ ახალი უცნობი ფუნქციაა, მაშინ (55,1) განტოლება მიდის

$$MK\psi = f \tag{55,5}$$

ფრედჰოლმის განტოლებაზე, რომელიც გამოსავალი განტოლების ეკვივალენტურია შემდეგი აზრით: (55,1) და (55,5) განტოლებები ერთდროულად ამოხსნადი ან არაამოხსნადია და ამოხსნადობის შემთხვევაში ერთ-ერთის ამონახსნიდან უშუალოდ მოიძებნება მეორის ამონახსნი. ამასთან ერთად, თუ M ოპერატორად ავიღებთ K'^0 ან $K^{0\prime}$ ოპერატორს, მაშინ ერთ-ერთის ამონახსნიდან მეორის ამონახსნებზე გადასვლა მოხდება კვადრატურების საშუალებით.

მართლაც, (55,5) განტოლების ყოველ ψ ამონახსნს შეესაბამება (55,1) განტოლების φ ამონახსნი (ერთი), ხოლო (55,1)-ის ყოველ φ ამონახსნს შეესაბამება (55,5) განტოლების ψ ამონახსნი (ყოველ შემთხვევაში ერთი მაინც), რომელსაც მივიღებთ (55,4)-ის ψ-ის მიმართ ამოხსნის საშუალებით. ამრიგად, (55,1) და (55,5) განტოლებები ერთდროულად ამოხსნადია ან არ არის ამოხსნადი. ვთქვათ, ახლა ეს განტოლებები ამოხსნადია. ფრედჰოლმის (55,5) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i, \tag{55,6}$$

სადაც ψ_0 მისი რომელიმე კერძო ამონახსნია, $\psi_i (i = 1, \ldots, m)$ $MK\psi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა, ხოლო a_i ნებისმიერი მუდმივებია. ახლა ცხადია, რომ გამოსავალი განტოლების ყველა ამონახსნთა სიმრავლე მოიცემა ფორმულით[84]

$$\varphi = M\psi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i M \psi_i; \tag{55,7}$$

ასეთივე მდგომარეობა გვექნება (55,1) განტოლების ამონახსნების საშუალებით (55,5) განტოლების ამონახსნთა აგების შემთხვევაშიც (ჩვენთვის იგი საინტერესო არაა).

დამტკიცებული თეორემა საშუალებას იძლევა მოვიყვანოთ § 53-ის ძირითად თეორემათა განსაკუთრებით მარტივი დამტკიცება. ჩვენ მოგვყავს აღნიშნულ თეორემათა ახალი დამტკიცება.

I თეორემის დამტკიცება (ი. ვეკუა [7]). (53,12) პირობათა აუცილებლობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომელიც აღვნიშნეთ § 46-ის ბოლოს.

[84] (55,7) ფორმულიდან არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ $K\varphi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი არის m, რადგან $M\psi_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ ფუნქციებს შორის შეიძლება აღმოჩნდნენ წრფივად დამოკიდებული, მიუხედავად იმისა, რომ ψ_i ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

დავამტკიცოთ მათი საკმარისობა. ამისათვის ჩავთვალოთ, რომ შესრულებულია (53,12) პირობები და ვაჩვენოთ $K\varphi=f$ განტოლების ამოხსნადობა.

ა) დავუშვათ თავდაპირველად, რომ $\varkappa \geqslant 0$, მაშინ (55,1) განტოლება ფრედჰოლმის (55,2) განტოლების ეკვივალენტურია და ფრედჰოლმის თეორემის თანახმად იგი ამოხსნადია, თუ

$$\int_L \omega_j M f dt = 0, \quad j=1, \ldots, n, \tag{55,8}$$

სადაც $\omega_j (j=1, \ldots, n)$ არის (55,1)-ის მიკავშირებული $K'M'\omega=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა. წინა პირობები შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\int_L f M' \omega_j dt = 0, \tag{55,9}$$

მაგრამ, რადგანაც $K'M'\omega_j=0$, $M'\omega_j$ ფუნქცია არის $K'\psi=0$ განტოლების ამონახსნი, ამიტომ (53,12) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ შესრულებულია (55,9) პირობები და, მაშასადამე, $K\varphi=f$ განტოლება ამოხსნადია.

ბ) ვთქვათ, ახლა $\varkappa<0$. მაშინ (55,1) განტოლება ამოხსნადია, თუ ამოხსნადია ფრედჰოლმის (55,5) განტოლება. ამ უკანასკნელის ამოხსნადობის პირობებს აქვთ სახე

$$\int_L f \chi_j dt = 0, \tag{55,10}$$

სადაც χ_j არის (55,5)-ის მიკავშირებული $M'K'\chi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა. მაგრამ $M'\omega=0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. მართლაც, პირობის ძალით, (55,3) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, რაც შეუძლებელი იქნებოდა $M'\omega=0$ განტოლებას რომ არანულოვანი ამონახსნები გააჩნდეს. მაშასადამე, $K'\chi_j=0$ და (55,10) პირობები დაკმაყოფილებულია (53,12) პირობათა ძალით. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

II და III *თეორემათა დამტკიცება* შეიძლება ჩავატაროთ იმ დაშვებით, რომ $\varkappa \geqslant 0$, რადგან როცა $\varkappa<0$, იგივე მსჯელობათა ჩატარება შეგვიძლია $(-\varkappa)$ ინდექსის მქონე $K'\psi=0$ განტოლების მიმართ.

მარეგულირებელ M ოპერატორად ავიღოთ ერთ-ერთი $K^{0'}$ და K'^{0} ოპერატორებიდან. მაშინ $M\varphi=0$ განტოლებას არა აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები, ხოლო $M'\psi=0$ განტოლებას აქვს ზუსტად $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. ფრედჰოლმის განტოლება $MK\varphi=0$ ეკვივალენტურია $K\varphi=0$ განტოლებისა და ამ განტოლებებს ამონახსნთა ერთი და იგივე k რიცხვი აქვს. იგივე k რაოდენობის ამონახსნი ექნება $K'M'\psi=0$ განტოლებასაც. მაგრამ ამ უკანასკნელის ამონახსნები იმავე დროს

$$M'\psi = c_1\psi_1 + \cdots + c_{k'}\psi_{k'} \tag{55,11}$$

განტოლების ამონახსნებია, რომელშიაც $\psi_1, \ldots, \psi_{k'}$ წარმოადგენს $K'\psi=0$ განტოლების ამონახსნთა სრულ სისტემას, ხოლო $c_1, \ldots, c_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, მაგ-

რამ (55,11) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია და, როგორც ადვილი დასანახავია, მისი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობა მიიღება (55,11)-ის მარჯვენა მხარეში მდგომ ψ_j ამონახსნთა k' რიცხვისა და $\mathbf{M}'\psi=0$ განტოლების ამონახსნთა $\varkappa$ რიცხვის შეკრებით. მაშასადამე, $k=k'+\varkappa$ და II და III თეორემები დამტკიცებულია[63].

§ 56. ფრედჰოლმისა და სინგულარულ განტოლებათა შედარება. კვაზიფრედჰოლმური სინგულარული განტოლება. კანონიკურ სახეზე მიყვანა. 1°. ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა გამოყენებებში, როგორც ცნობილია, მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ქვემოაღნიშნული თეორემები.

ვთქვათ მოცემულია ფრედჰოლმის განტოლება $\mathbf{F}\varphi=f$, სადაც $\mathbf{F}$ ფრედჰოლმის ოპერატორია. მაშინ:

I. ერთგვაროვან განტოლებას $\mathbf{F}\varphi=0$ აქვს მხოლოდ სასრული რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისა.

II. მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებებს $\mathbf{F}\varphi=0$ და $\mathbf{F}'\psi=0$ აქვს წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა ერთი და იგივე რაოდენობა.

III. არაერთგვაროვანი განტოლება $\mathbf{F}\varphi=f$ ნებისმიერი f მარჯვენა მხარისათვის ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებას $\mathbf{F}'\psi=0$ (ანუ, რაც იგივეა, ერთგვაროვან განტოლებას $\mathbf{F}\varphi=0$) აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი.

IV. არაერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია გვქონდეს

$$\int_L f(t)\,\psi_k(t)\,dt=0,$$

სადაც $\psi_k(t)$ არის მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{F}'\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა.

თუ ამ დებულებებს შევადარებთ $\mathbf{K}\varphi=f$ სინგულარულ განტოლებებისათვის წინა პარაგრაფებში დამტკიცებულ დებულებებს, დავრწმუნდებით, რომ მათთვის ძალაში რჩება I — IV ყველა ის დებულება, რომელიც დაყოფით არ არის დაბეჭდილი. ფრედჰოლმისა და სინგულარულ განტოლებათა ძირითადი განსხვავება იმაში მდგომარეობს, რომ II დებულება უნდა შეიცვალოს შემდეგით (წინა პარაგრაფების აღნიშვნებში):

$$k'-k=\varkappa.$$

სინგულარულ განტოლებათა შორის შეგვიძლია გამოვყოთ ისეთ განტოლებათა კლასი, რომელთათვისაც უცვლელივ სამართლიანია I — IV დებულებები. ეს არის კლასი განტოლებებისა, რომელთათვისაც $\varkappa$ ინდექსი ნულის ტოლია. ამ შემთხვევაში $k=k'$ და არაერთგვაროვანი $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლება ამოხსნადია H კლასის ყოველი მარჯვენა მხარისათვის, თუ $\mathbf{K}\varphi=0$ განტოლებას არა აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები (რადგან ასეთ შემთხვევაში $\mathbf{K}'\psi=0$ განტოლებასაც იგივე თვისება აქვს).

[63] II და III თეორემათა მოყვანილი დამტკიცება ემთხვევა ვ. კუპრაძის [3] მიერ მოცემულ დამტკიცებას; იხ., აგრეთვე, ი. ვეკუა [7].

ასეთ სინგულარულ განტოლებებს შეიძლება ეწოდოს კ ვ ა ზ ი ფ რ ე დ ჰ ო ლ მ უ რ ი, ხოლო სათანადო ოპერატორებს (ე. ი. ნული ინდექსის მქონე ოპერატორებს) — კ ვ ა ზ ი ფ რ ე დ ჰ ო ლ მ უ რ ი ო პ ე რ ა ტ ო რ ე ბ ი[86].

2°. დავუბრუნდეთ ზოგადი სახის სინგულარულ განტოლებას. გავიხსენოთ, რომ ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლებები ხშირ შემთხვევაში გამოიყენება ამოცანის მხოლოდ თვისობრივი გამოკვლევისათვის და არა მათი რიცხვითი ამოხსნისათვის. ამიტომ ცხადია, რომ მას შემდეგ, რაც დადგენილია ზოგადი სახის სინგულარული განტოლებების თვისებები, ეს განტოლებები ანალოგიური მიზნით შეგვიძლია ისეთივე წარმატებით გამოვიყენოთ, როგორც ფრედჰოლმის განტოლებები. მაშასადამე, მიზანშეწონილი არ არის სინგულარული განტოლებების ყველა შემთხვევაში ფრედჰოლმის განტოლებებზე დაყვანა: ამ შუალედურ საფეხურს ხშირად შეიძლება გამოკვლევის გართულება მოჰყვეს.

ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივად ისმება კითხვა: როგორ ეკვივალენტურ (სინგულარულ), რაც შეიძლება მარტივ, განტოლებაზე შეიძლება დაყვანილ იქნეს მოცემული სინგულარული განტოლება? ცხადია, რომ ეს კითხვა არაა ცალსახად განსაზღვრული.

ი. ვეკუამ [7] მიუთითა ერთი მარტივი სახის განტოლება, რომელზედაც ეკვივალენტობის დაურღვევლად შეიძლება მიყვანილ იქნეს ყველა სხვა სინგულარული განტოლება[87]. სახელდობრ, ვთქვათ მოცემულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t,\ t_0)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0). \quad (56,1)$$

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ L-ზე დადებითი მიმართულება ისეა არჩეული, როგორც § 29-ის 1 პუნქტში. S^- და S^+-ად ვიგულისხმოთ ივივე, რაც აღნიშნულ პარაგრაფში, ამასთან ჩავთვალოთ, რომ S^--ით აღნიშნულია უსასრულოდ დაშორებული წერტილის შემცველი სიბრტყის ნაწილი და რომ საკოორდინატო სისტემის სათავე მდებარეობს S^+-ში.

აღვნიშნოთ (56,1) განტოლების ინდექსი $\varkappa$-თი და განვიხილოთ შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული $\mathbf{M}$ ოპერატორი

$$\mathrm{M}\psi \equiv a(t_0)\,\psi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)}{t-t_0}\,dt, \quad (56,2)$$

სადაც

$$2a(t) = \frac{1}{A(t)+B(t)} + \frac{t^{\varkappa}}{A(t)-B(t)},$$
$$2b(t) = \frac{1}{A(t)+B(t)} - \frac{t^{\varkappa}}{A(t)-B(t)}, \quad (56,3)$$

---

[86] ი. ვეკუა ასეთ შემთხვევაში ხმარობს ტერმინს „ფსევდორეგულარული". შევნიშნოთ, რომ დღეისათვის ფუნქციონალურ ანალიზში ისეთ ფუნქციონალურ განტოლებებს, რომელთათვისაც დაცულია I—IV დებულებები, ხშირად ფრედჰოლმის განტოლებებს უწოდებენ.

[87] ი. ვეკუა იხილავს შემთხვევას, როცა L შემოსაზღვრავს სიბრტყის ბმულ არეს. სათანადო აღნიშვნების გამოყენებით აქ უფრო ზოგად შემთხვევას განვიხილავთ.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ M კვაზიფრედჰოლმური ოპერატორია, ე. ი. მისი ინდექსი ნულის ტოლია. მართლაც, ეს ინდექსია

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-b}{a+b}\right]_L=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\left\{\frac{A+B}{A-B}\,t^{\varkappa}\right\}\right]_L=-\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{A-B}{A+B}\right]_L+$$

$$+\frac{\varkappa}{2\pi i}\,[\ln t]_L=-\varkappa+\frac{\varkappa}{2\pi i}\,[\ln t]_L=0,$$

რადგან $[\ln t]_L=2\pi i$; ამ უკანასკნელი ტოლობის მართებულობაში დასარწმუნებლად საკმარისია იმის გათვალისწინება, რომ L შეგვიძლია ჩავთვალოთ იმ არის საზღვრად, რომელიც შეიცავს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს და არ შეიცავს საკოორდინატო სისტემის სათავეს[88].

რადგან M ნულ ინდექსის მქონე მახასიათებელი ოპერატორია, $M\psi=0$ განტოლებას არანულოვანი ამონახსნები არა აქვს.

ამის გამო (56,1) განტოლება ეკვივალენტურია განტოლებისა

$$N\varphi\equiv MK\varphi=Mf. \tag{56,4}$$

ამასთან N ოპერატორის მახასიათებელ N^0 ოპერატორს მეტად მარტივი სახე აქვს[89]

$$N^0\varphi\equiv\frac{1}{2}\,(1+t_0^{\varkappa})\,\varphi(t_0)+\frac{1}{2}\,(1-t_0^{\varkappa})\,\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}. \tag{56,5}$$

ასეთი N^0 მახასიათებელი ნაწილის მქონე სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$N\varphi=f \tag{56,6}$$

შეიძლება ეწოდოს სინგულარული განტოლების კანონიკური სახე.

მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ აგრეთვე მეტად მარტივი სახე აქვს

$$N^0\varphi=f \tag{56,7}$$

მახასიათებელი განტოლების ზოგად ამონახსნს იმ დაშვებით, რომ უარყოფითი ინდექსის შემთხვევაში დაცულია ამოხსნადობის პირობები[90]

$$\varphi(t_0)=N^*f+(1-t_0^{-\varkappa})\,P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{56,8}$$

სადაც $P_{\varkappa-1}$ არაუმეტეს $(\varkappa-1)$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომია (ნული ტოლი, თუ $\varkappa<0$) და

$$N^*f\equiv\frac{1}{2}\,(1+t_0^{-\varkappa})\,f(t_0)+\frac{1}{2}\,(1-t_0^{-\varkappa})\,\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}\,dt. \tag{56,9}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა უშუალოდ მიიღება (47,9) ფორმულიდან, თუ შევნიშნავთ, რომ $N^0\varphi=f$ განტოლების შესაბამისი კანონიკური ფუნქციაა

$$X(z)=\begin{cases}1, & \text{როცა } z\in S^+,\\ z^{-\varkappa}, & \text{როცა } z\in S^-.\end{cases} \tag{56,10}$$

---

88 $[\ln t]_L$-ის გამოთვლისას საკმარისია დავკმაყოფილდეთ იმ შეკრულ წირთა შემოვლით, რომლებიც ეკუთვნიან S^--ში შემავალ z-ის შემცველ ბმული არის საზღვარს, რადგან დანარჩენ კონტურთა შემოვლისას $[\ln t]_L$ ნაზრდი ნულის ტოლია.

89 აქ საჭიროა ვისარგებლოთ (45,12) ან (45,13) ფორმულებით.

90 ეს პირობები მოყვანილია ქვემოთ (ფორმულა (56,11)).

მართლაც, $N^0\varphi=0$ განტოლების შესაბამისი შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის სასაზღვრო პირობას აქვს სახე

$$\Phi^+(t) = t^\varkappa \Phi^-(t),$$

და, ცხადია (შდრ. § 35, შენიშვნა 4), (56,10) ფორმულებით განსაზღვრული $X(z)$ ფუნქცია წარმოადგენს ამ ამოცანის კანონიკურ ამონახსნს.

როდესაც $\varkappa < 0$ (47,8) და (56,10)-დან უშუალოდ ვღებულობთ (56,7) განტოლების ამოხსნადობის პირობებს

$$\int_L t^k f(t)\, dt = 0, \quad k=0,\ 1, \ldots, -\varkappa-1. \tag{56,11}$$

§ 57. რეგულარიზაციის ტ. კარლემან—ი. ვეკუას მეთოდი. წინა პარაგრაფებში გავეცანით სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რეგულარიზაციის ორ მეთოდს[01]. მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მეთოდი, რომელიც ერთ კერძო შემთხვევაში მითითებული იყო ტ. კარლემანის მიერ (T. Carleman [1]) და განვითარებულ იქნა ი. ვეკუას ნაშრომებში [1]—[4], [7]. რიგ შემთხვევებში ეს მეთოდი უფრო მოხერხებულია, ვიდრე ზემოთ მითითებული მეთოდები.

ვთქვათ, მოცემულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$K\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\ t_0)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{57,1}$$

ან, მოკლედ,

$$K\varphi \equiv K^0\varphi + k\varphi = f, \tag{57,2}$$

სადაც K^0 არის K ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილი, ე. ი.

$$K^0\varphi = A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \tag{57,3}$$

და

$$k\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{57,4}$$

ამასთან $k(t_0,\ t)$-ს აქვს § 44-ში მითითებული სახე (იხ. ფორმულა (44,6)).

გადავწეროთ (57,2) შემდეგნაირად

$$K^0\varphi = f - k\varphi \tag{57,5}$$

და ამოვხსნათ ისე, რომ მოცემულ თავისუფალ წევრად მივიჩნიოთ მისი მარჯვენა მხარე. ჯერჯერობით ნუ მივაქცევთ ყურადღებას ამოხსნადობის პირობებს, რაც თავს იჩენს $\varkappa<0$ შემთხვევაში[02]. § 47-ის ძალით ვღებულობთ

$$\varphi(t_0) = K^*f - Kk^*\varphi + B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P_{\varkappa-1}(t_0)$$

ანუ

---

[01] რეგულარიზაციის პირველი ხერხი ეს არის $K\varphi=f$ განტოლების შეცვლა $MK\varphi = Mf$ განტოლებით, სადაც M მარეგულირებელი ოპერატორია; მეორე ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ ვიყენებთ ჩასმას $\varphi=M\psi$.

[02] ეს პირობები გათვალისწინებული იქნება ქვემოთ (ფორმულა (57,11)).

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = \mathbf{K}^*f + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{57,6}$$

სადაც

$$\mathbf{K}^*f \equiv A^*(t_0)\, f(t_0) - \frac{B^*(t_0)\, Z(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\, dt}{Z(t)\,(t - t_0)}, \tag{57,7}$$

ამასთან, $Z(t)$, $A^*(t)$, $B^*(t)$ განისაზღვრება (47,12), (47,13) ფორმულებით, ხოლო $P_{\varkappa-1}(t_0)$ არაუმეტეს $\varkappa - 1$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომია ($P_{\varkappa-1}=0$, თუ $\varkappa \leqslant 0$).

§ 45-ში ნათქვამის საფუძველზე (შენიშვნა) $\mathbf{K}^*\mathbf{k}$ არის ფრედჰოლმის პირველი გვარის ოპერატორი

$$\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_L N(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{57,8}$$

სადაც

$$N(t_0, t) = \mathbf{K}^*\mathbf{k}\,(t_0, t), \tag{57,9}$$

ამასთან, $k(t_0, t)$-ს მიმართ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის გამოყენებისას ცვლადად ითვლება t_0, ხოლო t ითვლება პარამეტრად, ასე რომ

$$N(t_0, t) = A^*(t_0)\, k(t_0, t) - \frac{B^*(t_0)\, Z(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{k(t_1, t)\, dt_1}{Z(t_1)(t_1 - t_0)}. \tag{57,10}$$

§ 47-ის შედეგების საფუძველზე (57,6) განტოლება ეკვივალენტურია გამოსავალი (57,1) განტოლებისა, თუ $\varkappa \geqslant 0$, ხოლო თუ $\varkappa < 0$, მაშინ (57,6)-ს უნდა დაემატოს (47,16) პირობებიდან გამომდინარე განტოლებები

$$\int\limits_L \frac{t^k \mathbf{k}\, \varphi(t)\, dt}{Z(t)} = \int\limits_L \frac{t^k f(t)}{Z(t)}\, dt, \quad k=0, 1, \ldots, -\varkappa-1, \tag{57,11}$$

და მაშინ (57,1) განტოლება ეკვივალენტურია (57,6) განტოლებისა და (57,11) განტოლებათა ერთობლიობისა.

(57,6) განტოლება არის ფრედჰოლმის განტოლება (მეორე გვარისა), გავიხსენოთ, რომ § 45-ის შენიშვნის მიხედვით

$$N(t_0, t) = \frac{N^*(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{57,12}$$

სადაც $N^*(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას.

ამრიგად, მივაღწიეთ გამოსავალი განტოლების რეგულარიზაციას და, რაც მეტად მნიშვნელოვანია, უზრუნველყოფილია ეკვივალენტობა. თუმცა $\varkappa < 0$ შემთხვევაში ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლების გარდა დამატებით ვღებულობთ (57,11) განტოლებებს, მაგრამ ეს არაარსებითია, რადგან საკითხი ძირითადად ფრედჰოლმის (57,6) განტოლების ამოხსნაზე დაიყვანება.

სინგულარულ განტოლებათა რეგულარიზაციისას § 47-ის ფორმულების ნაცვლად შეგვიძლია ვისარგებლოთ § 48-ის ფორმულებით. სახელდობრ, ვთქვათ, მოცემულია განტოლება[93]

[93] თავისთავად ცხადია, რომ $\mathbf{K}'\varphi = f$ განტოლება შეიძლება განეიხილოთ იმის გათვალისწინებით, რომ იგი არის $\mathbf{K}\varphi = f$ განტოლების მიკავშირებული, რადგან ყოველი $\mathbf{K}'$ სინგულარული ოპერატორი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე: $\mathbf{K} + \mathbf{k}'$.

$$\mathbf{K}'\psi \equiv \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = f(t_0), \tag{57,13}$$

სადაც

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{57,14}$$

$$\mathbf{k}'\psi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt. \tag{57,15}$$

§ 48-ის შედეგების გამოყენებით, ზემოთ აღნიშნულის ანალოგიურად, მივიღებთ, რომ, როცა $\varkappa' \geqslant 0$ (57,13) განტოლება ($\varkappa'$ აღნიშნავს მის ინდექსს) ეკვივალენტურია ფრედჰოლმის განტოლებისა (მეორე გვარის)

$$\psi + \mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi = \mathbf{K}^{*\prime}f + \frac{Q_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{57,16}$$

სადაც $Q_{\varkappa'-1}(t_0)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa' - 1$ ($Q_{\varkappa'-1}=0$, როცა $\varkappa'=0$).

თუ $\varkappa' < 0$ განტოლება (57,13) ეკვივალენტურია (57,16) განტოლებისა, რომელშიაც $Q_{\varkappa'-1}(t_0)=0$ და (48,12)-დან გამომდინარე დამატებითი განტოლებებისა

$$\int\limits_L t^k Z(t)\,B^*(t)\,\mathbf{k}'\varphi(t)\,dt = \int\limits_L t^k Z(t)\,B^*(t)\,f(t)\,dt. \tag{57,17}$$

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაშიც კი, როცა $\mathbf{K}'$ არის $\mathbf{K}$-ს მიკავშირებული ოპერატორი, (57,6) და (57,16) ოპერატორები არ იქნება მიკავშირებული, რადგან $(\mathbf{K}^*\mathbf{k})' = \mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}$ და არა $\mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'$-ს.

რეგულარიზაციის მოყვანილ მეთოდზე დაყრდნობით შეიძლება წინა პარაგრაფში გადმოცემული ყველა ძირითადი თეორემის დამტკიცება[94]. ეს გაკეთებულია ი. ვეკუას [2] და [4] ნაშრომებში (იგი სარგებლობს ამ პარაგრაფში მითითებული პირველი ხერხით). გარდა ამისა, ამ გზით შეიძლება ზოგიერთი ახალი შედეგის მიღება, მაგალითად, შედეგისა, რომელიც გადმოცემულია შემდეგ პარაგრაფში.

§ 58. λ პარამეტრის შემოღება. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაში, ისევე, როგორც ფრედჰოლმის განტოლების შემთხვევაში, შეიძლება რაიმე λ პარამეტრის შემოყვანა. ამასთან, მარტივი და ფრედჰოლმის კლასიკურ თეორიასთან ახლობელი შედეგები მიიღება, თუ პარამეტრს დავუსვამთ (57,2) განტოლებაში მონაწილე $\mathbf{k}$ ოპერატორს ან (57,13)-ის[95] $\mathbf{k}'$ ოპერატორს, ისე, როგორც ეს გაკეთებულია ი. ვეკუას [7] შრომაში.

აღნიშნულის შესაბამისად განვიხილოთ სინგულარული განტოლება

$$\mathbf{K}\varphi \equiv \mathbf{K}^0\varphi + \lambda\mathbf{k}\varphi = f(t_0), \tag{58,1}$$

სადაც λ ნებისმიერი პარამეტრია (საზოგადოდ—კომპლექსური).

---

[94] ამ მეთოდით იქნება დამტკიცებული ქვემოთ, § 102-ში, ძირითადი თეორემები უფრო ზოგად შემთხვევაში.

[95] ეს შეესაბამება იმას, რომ ფრედჰოლმის განტოლებაში პარამეტრი ჩვეულებრივ შემოაქვთ ფრედჰოლმის ოპერატორის სავსებით უწყვეტი ნაწილის თანამამრავლის სახით (§ 49); პარამეტრის სხვანაირი შემოყვანისას თეორია გაცილებით რთულდება.

წინა პარაგრაფში განხილული რეგულარიზაციის პირველი ხერხის გამოყენებით, როცა $\varkappa \geqslant 0$, დავასკვნით, რომ განტოლება ეკვივალენტურია ფრედჰოლმის განტოლებისა

$$\varphi + \lambda K^* k\varphi = f^*(t_0), \tag{58,2}$$

სადაც

$$f^*(t_0) = K^* f + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0). \tag{58,3}$$

$P_{\varkappa-1}(t_0)$ აქ აღნიშნავს ნებისმიერ პოლინომს, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa-1$. მიღებული განტოლების მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლებაა

$$\psi + \lambda (K^* k)' \psi \equiv \psi + \lambda k' K^{*\prime} \psi = 0. \tag{58,4}$$

ფრედჰოლმის განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებებს $\varphi + \lambda K^* k\varphi = 0$ და $\psi + \lambda k' K^{*\prime} \psi = 0$ ერთდროულად აქვს ან არა აქვს არანულოვანი ამონახსნი (ამასთან, ამ განტოლებათა წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობა ერთი და იგივეა); ასეთი ამონახსნები არსებობს მხოლოდ მაშინ, როცა λ ღებულობს რომელიმე მნიშვნელობას „მახასიათებელ"

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \tag{58,5}$$

რიცხვთა სასრული ან ისეთი უსასრულო მიმდევრობიდან, რომელსაც სასრული დაგროვების წერტილი არა აქვს. თუ λ განსხვავებულია (58,5) მნიშვნელობებიდან, მაშინ (58,2) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის და ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$\varphi(t_0) = f^*(t_0) + \int\limits_L \Gamma(t_0,\ t;\ \lambda)\, f^*(t)\, dt, \tag{58,6}$$

სადაც $\Gamma(t_0,\ t;\ \lambda)$ ფრედჰოლმის რეზოლვენტაა. იგი λ-ს მიმართ მერომორფული ფუნქციაა პოლუსებით (58,5) წერტილებში.

როცა $f = 0$, ე. ი. გამოსავალი განტოლება ერთგვაროვანია,

$$f^*(t_0) = B^*(t_0)\, Z(t_0)\, (c_0 t_0^{\varkappa-1} + c_1 t_0^{\varkappa-2} + \cdots + c_{\varkappa-1}) \tag{58,7}$$

(c_j ნებისმიერი მუდმივებია) და (58,5) მახასიათებელ მნიშვნელობათაგან განსხვავებული λ-თვის, (58,2) განტოლებას აქვს ზუსტად $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომლებიც მიიღება ფრედჰოლმის შემდეგ განტოლებათა ამოხსნით:

$$\varphi + \lambda K^* k\varphi = B^*(t_0)\, Z(t_0)\, t_0^k, \quad k = 0,\ 1, \ldots,\ \varkappa - 1. \tag{58,8}$$

ამრიგად, მიღებულია შემდეგი დებულება:

თუ $\varkappa \geqslant 0$, მაშინ $K\varphi = f$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს λ-ს მიმართ მერომორფულ ფუნქციას და შეიცავს (წრფივად) $\varkappa$ ნებისმიერ მუდმივს. λ პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა, შესაძლოა, დისკრეტული მახასიათებელი $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ მნიშვნელობებისა, $K\varphi = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომლებიც აგრეთვე წარმოადგენენ λ-ს მერომორფულ ფუნქციებს (ყველა შემთხვევაში, როგორც § 53-დან ვიცით (შენიშვნა 1), ერთგვაროვან განტოლებას აქვს არა ნაკლებ $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნისა).

ი. ვეკუას [7] მიერ მითითებულ ამ შედეგს დავუმატოთ შემდეგი: ვთქვათ, ახლა $\varkappa<0$. მაშინ გამოსავალი (58,1) განტოლება ეკვივალენტურია (58,2) განტოლებისა, რომელშიაც $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$, და წინა პარაგრაფის (57,11)-ით მოცემული დამატებითი პირობებისა. ამ უკანასკნელ გამოსახულებებში φ-ს ნაცვლად (58,6) გამოსახულების შეტანით ადვილად ვღებულობთ ამოხსნადობის $(-\varkappa)$ პირობას

$$\int\limits_L \omega_j(t,\lambda)\, f(t)\, dt = 0, \quad j=1,\ 2, \dots,\ -\varkappa, \tag{58,9}$$

სადაც $\omega_j(t,\lambda)$ λ-ს მიმართ გარკვეული მერომორფული ფუნქციებია პოლუსებით (58,5) წერტილებში. თუ λ განსხვავდება (58,5) მნიშვნელობებისაგან, (58,9) ტოლობები წარმოადგენს (58,1)-ის ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ამოხსნადია ფრედჰოლმის (58,2) განტოლება. ჩავთვალოთ, რომ λ განსხვავდება (58,5) მნიშვნელობებისაგან და (58,9) პირობები გამოვსახოთ სხვაგვარად. სახელდობრ, განვიხილოთ $\mathbf{K}\varphi=0$ განტოლების მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathbf{K}'\psi = \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \lambda\, \mathbf{k}'\psi = 0. \tag{58,10}$$

ვთქვათ, $\psi_1, \dots, \psi_{k'}$ $(k' \geqslant \varkappa' = -\varkappa)$ ამ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, მაშინ (58,9) პირობები ეკვივალენტური უნდა იყოს პირობებისა

$$\int\limits_L \psi_j(t)\, f(t)\, dt = 0, \quad j = 1,\ 2, \dots,\ k', \tag{58,11}$$

რადგან ეს უკანასკნელი აუცილებელია და საკმარისი (58,1) განტოლების ამოხსნადობისათვის.

აქედან ადვილად დავასკვნით[98], რომ $\omega_j(t,\lambda)$ ფუნქციები წარმოადგენს $\psi_j(t_0)$ ფუნქციათა წრფივ კომბინაციებს და პირიქით. მაშასადამე, როცა λ განსხვავდება (58,5) მნიშვნელობებისაგან, $\omega_j(t,\lambda)$ $(j=1, \dots, \varkappa')$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია და $k'=\varkappa'=-\varkappa$.

ამრიგად, მიღებულია შემდეგი დებულება:

თუ $\varkappa=-\varkappa'<0$, მაშინ (58,5) მახასიათებელ მნიშვნელობათაგან განსხვავებული ყოველი λ-სთვის, $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების ამოხსნადობის პირობები მოიცემა (58,9) სახის $\varkappa'=-\varkappa$ რაოდენობის თანაფარდობებით, სადაც $\omega_j(t,\lambda)$ წრფივად დამოუკიდებელი, λ-ს მიმართ მერომორფული ფუნქციებია, პოლუსებით (58,5) წერტილებში; თუ f აკმაყოფილებს ამ პირობებს, ამონახსნები მოიცემა (58,6) ფორმულით.

როცა $\varkappa=0$, ე. ი. კვაზიფრედჰოლმური განტოლებისათვის, ამ პარაგრაფის შედეგები ემთხვევა ფრედჰოლმის განტოლებისათვის ცნობილ შედეგებს.

§ 59. მოკლე მითითებანი ზოგიერთ სხვა შედეგზე. IV—VI თავებში სხვადასხვა მიმართულებით განზოგადებული იქნება ამ თავში მიღებული შედეგები. ამ პარაგრაფში კი მოვიყვანთ მოკლე ცნობებს გადმოცემულ მასალასთან მჭიდროდ დაკავშირებული ზოგიერთი შედეგის შესახებ. მიუხედავად იმისა, რომ ეს შედეგები

[98] იხ. IV დამატების ბოლოში მოყვანილი დებულება.

მეტად საინტერესოა, ჩვენ, წიგნის დასახულ ჩარჩოებში, მათზე დაწვრილებით ვერ შევჩერდებით.

116, 117 პარაგრაფებში და, აგრეთვე, წიგნის ბოლოს V დამატებაში მოყვანილი იქნება მოკლე მითითებანი ამ ბოლო დროს მიღებულ სხვა მნიშვნელოვანი შედეგების შესახებ.

1°. ვთქვათ, **K** აღნიშნავს ზემოთ განხილული სახის სინგულარულ ოპერატორს. § 55-ში გადმოცემული იყო $\mathbf{K}\varphi=f$ სახის სინგულარული განტოლების ფრედჰოლმის განტოლებაზე დაყვანის ხერხი, რომელიც ი. ვეკუამ მიუთითა. მანვე, უფრო ადრე, მიუთითა სხვა, აგრეთვე საინტერესო ხერხზე, რომელიც დამყარებულია § 57-ში მოყვანილ რეგულარიზაციის მეთოდზე. თუ $\varkappa \geqslant 0$, ჩვენ ვნახეთ, რომ განტოლება $\mathbf{K}\varphi=f$ ამ მეთოდით უშუალოდ მიიყვანება ფრედჰოლმის ეკვივალენტურ განტოლებაზე. ი. ვეკუამ [3], [4] აჩვენა, რომ $\varkappa<0$ შემთხვევაშიც, მოცემული სინგლარული განტოლება მარტივი გარდაქმნების საშუალებით შეიძლება მივიყვანოთ ფრედჰოლმის განტოლებაზე და ამოხსნადობის შემდეგი სახის პირობებზე

$$\int\limits_L \omega_j(t)\, f(t)\, dt = 0; \tag{*}$$

აღნიშნული ფრედჰოლმის განტოლება და $\omega_j(t)$ ფუნქციები აიგება მარტივი კვადრატურების საშუალებით.

2°. აღვნიშნოთ **T**-თი შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული ოპერატორი

$$\mathbf{T}\,\varphi(t) \equiv \frac{dt(s)}{ds}\cdot\varphi(t),$$

სადაც, როგორც ყოველთვის, t არის L კონტურის წერტილის აფიქსი, s—შესაბამისი რკალური აბსცისი; ამ პუნქტში ვიგულისხმებთ, რომ L აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას, ე. ი. $\frac{dt}{ds}$ ეკუთვნის H კლასს. ოპერატორის სიმბოლოს თავზე გასმული ხაზით აღვნიშნოთ კომპლექსურად შეუღლებულ ოპერატორზე გადასვლა, ე. ი. განსაზღვრის ძალით

$$\overline{\mathbf{K}}\,\overline{\varphi} = \overline{\mathbf{K}\varphi}.$$

განვიხილოთ ოპერატორები

$$\overline{\mathbf{K}'}\,\mathbf{T}\mathbf{K},\quad \mathbf{U}=[\overline{\mathbf{K}'}\,\mathbf{T}\mathbf{K}]^0,\quad \mathbf{M}=\mathbf{U}'\,\overline{\mathbf{K}'}\,\mathbf{T},$$

სადაც ზემოთა ნიშნაკი ^{0} მიუთითებს ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილის აღებას.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\overline{\mathbf{K}'}\mathbf{T}\mathbf{K}$ და **U** კვაზიფრედჰოლმური ოპერატორებია, ხოლო **MK** ფრედჰოლმის ოპერატორია. ასე, რომ **M** არის **K**-ს რეგულარიზატორი. სამართლიანია თეორემა: *ფრედჰოლმის განტოლება*

$$\mathbf{M}\mathbf{K}\,\varphi=\mathbf{M}f$$

ამოხსნადია ნებისმიერი f ფუნქციისათვის და ეკვივალენტურია $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლებისა, თუ ეს უკანასკნელი ამოხსნადია.

M ოპერატორი, რომელიც, როგორც ვნახეთ, სავსებით ელემენტარულად აიგება და აქვს ახლახან აღნიშნული თვისება, მითითებული იყო ი. ვეკუას [7] მიერ (თეორემის დამტკიცებაც იხ. იქვე).

უფრო ადრე ვ. კუპრაძემ [3] აჩვენა, რომ $\mathbf{L}\varphi=f$ სახის ნამდვილი (44,16) განტოლებისათვის ასეთი თვისება აქვს L-ის მიკავშირებულ $\mathbf{L}'$ ოპერატორს. ვ. კუპრაძემ [4]ააგო ასეთი თვისების მქონე ოპერატორი $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლებისათვის, მაგრამ ამ უკანასკნელი ოპერატორის ასაგებად საჭიროა მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{K}'\psi=0$ განტოლების ყველა ამონახსნის პოვნა.

3⁰. რიგ საინტერესო შედეგს შეიცავს ლ. ბერგის შრომები (L. Berg [1] — [3]). განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს აგება „სინგულარული რეზოლვენტის" — ფუნქციისა, რომელიც სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის ფრედჰოლმის რეზოლვენტის ანალოგიურ როლს ასრულებს. იგი აკმაყოფილებს ორ ფუნქციონალურ განტოლებას, ანალოგიურს იმ ცნობილი ფუნქციონალური განტოლებებისა, რომელთაც აკმაყოფილებს ფრედჰოლმის რეზოლვენტა.

4⁰. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებს ეძღვნება ჟ. ჟიროს მრავალრიცხოვანი შრომა, რომელთა ნუსხა შეიძლება ვნახოთ მის ერთ-ერთ ბოლო შრომაში: G. Giraud [2]; იხ. აგრეთვე ვ. კუპრაძე [1], ს. მიხლინი [7].

ერთგანზომილებიანი სინგულარული განტოლებების შემთხვევაში, ე. ი. განტოლებებისათვის, რომელთაც ჩვენ განვიხილავთ, ჟ. ჟიროს გამოკვლევები[97], ვფიქრობ, ზედმეტად რთული და არც თუ სავსებით სრულია. ასე მაგალითად, მასთან არ გვხვდება ამ თეორიისათვის ფუნდამენტური მნიშვნელობის მქონე ინდექსის ცნება, თუმცა ეს უკანასკნელი გაცილებით ადრე იყო შემოღებული. ჟ. ჟიროს თეორია ინტეგრალური განტოლების λ პარამეტრზე დამოკიდებულების საკითხის გამოკვლევაზეა აგებული, ამასთან ეს პარამეტრი შემოღებულია არა ისე, როგორც მითითებული იყო წინა პარაგრაფში: სახელდობრ, იგი განიხილავს განტოლებას (ჩვენს აღნიშვნებში)

$$A(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{\lambda B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\lambda\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0), \qquad (59,1)$$

რომელშიაც λ პარამეტრი შედის მახასიათებელ ნაწილშიც. ეს არღვევს ანალოგიას ფრედჰოლმის კლასიკური თეორიის განტოლებებთან (შდრ. § 58-ის დასაწყისი) და მნიშვნელოვნად ართულებს გამოკვლევას. (59,1) სახის განტოლებათა თეორია არ არის მარტივი, ყოველ შემთხვევაში ჟ. ჟიროს მიერ მიღებული შედეგების ნაწილში, ვიდრე თეორია უფრო ზოგადი სახის განტოლებისა

$$A(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0,\ t;\ \lambda)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \qquad (59,2)$$

სადაც $K(t_0,\ t;\ \lambda)$ აკმაყოფილებს H პირობას t და t_0-ის მიმართ, ხოლო λ-ს მიმართ მერომორფულია გარკვეულ არეში[98].

თუ ამ უკანასკნელის მიმართ გამოვიყენებთ ზემოთ გადმოცემულ მეთოდებს, შეიძლება ჟიროს შედეგების გაცილებით მარტივად მიღება, ვიდრე ეს თვითონ

[97] ამ მიმართულებით მის მიერ მიღებული შედეგები ყველაზე დასრულებული სახით გადმოცემულია ნაშრომში G. Giraud [2].

[98] (59,2) განტოლება წარმოადგენს ფრედჰოლმის ისეთი განტოლების ანალოგს, რომლის გული λ-ს მიმართ მერომორფული ფუნქციაა და რომელიც შესწავლილი იყო ი. ტამარკინის მიერ (J. D. Tamarkin [1]).

ავტორმა გააკეთა. ამას გარდა, შეიძლება უფრო ზოგადი შედეგების მიღებაც. ეს გაკეთებულია დ. ხარაზოვის [1] მიერ[99].

5°. დიდ ინტერესს იწვევს გადმოცემული შედეგების გავრცელება მოცემულ და, განსაკუთრებით, საძიებელ ფუნქციათა კლასის გაფართოების თვალსაზრისით. საინტერესოა აგრეთვე გლუვ საინტეგრო წირთა შეცვლა სხვა უფრო ზოგადი სახის წირებით. უმარტივესი განზოგადებანი ამ მიმართულებით მოცემული იქნება IV და V თავებში. ერთი განზოგადება ანალოგიური მიმართულებით მოცემულია L. Berg-ის [3] შრომაში. სხვა განზოგადებებზე, რომლებიც მოითხოვენ ლებეგის ინტეგრალის ცნების გამოყენებას, მითითებული იქნება § 116-ში.

აქ აღვნიშნოთ მხოლოდ, რომ ზემოთ გადმოცემული შედეგები ადვილად ვრცელდება იმ შემთხვევებზე, როცა H კლასი შეცვლილია უწყვეტ ფუნქციათა რამდენადმე უფრო ზოგადი კლასით, რომელიც მოხსენებული იყო § 27-ში. ასეთი გავრცელება მოცემულია ლ. მაღნარაძის შრომებში [5], [7], [8].

6°. შეუღლების ამოცანის ამოხსნის მდგრადობის საკითხს ეძღვნება ლ. ჩიკინის [2] შრომა, ხოლო მიახლოებით ამოხსნას—გ. მანჯავიძის [4], [6], ა. ბატირევის [1], [3] და ვ. ივანოვის [5] შრომები.

[99] შემდგომში ზოგიერთი ამ შედეგებიდან ი. გოხბერგმა [2] გადაიტანა წრფივი განტოლებებისათვის ბანახის სივრცეში.

თავი მესამე

გამოყენებანი ზოგიერთ სასაზღვრო ამოცანაში

წინა თავებში გადმოცემული შედეგები ფრიად სასარგებლოა ანალიზურ ფუნქციათა თეორიისა და მათემატიკური ფიზიკის მრავალი მნიშვნელოვანი ამოცანის ამოხსნისას. უკანასკნელ დროს ამ გზით მეტად საინტერესო შედეგები მიიღეს; ამ თავში გადმოცემული იქნება ზოგიერთი მათგანი.

ჩვენ დავიწყებთ განსახილველი ტიპის ამოცანათაგან ერთ-ერთი უმარტივესით — დირიხლეს ამოცანით. ამ ამოცანის ამოხსნას, დაფუძნებულს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა გამოყენებაზე (§ § 64, 65), წავუმძღვარებთ მის ფრედჰოლმისეულ კლასიკურ ამოხსნას ზოგიერთი ცვლილებით, რომელიც ამ ამოხსნას წინამდებარე თავში განხილულ საკითხთან აახლოებს[1].

1. დირიხლეს ამოცანა

§ 60. დირიხლეს ამოცანის დასმა და დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანა. ერთადერთობის თეორემები. ვთქვათ S^+ აღნიშნავს (ბმულ) არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია მარტივი, შეკრული, არაგადამკვეთი $L_0, L_1, \dots, L_p$ გლუვი კონტურებით, რომელთაგან პირველი მოიცავს დანარჩენებს. L-ით აღვნიშნოთ ამ კონტურთა ერთობლიობა; დადებით მიმართულებად L-ზე ავირჩიოთ ის მიმართულება, რომელიც S^+ არეს მარცხნივ ტოვებს. კონტური L_0 შეიძლება არც გვქონდეს, მაშინ S^+ არე უსასრულო იქნება. S^--ით აღვნიშნოთ შესაბამისად $L_1, L_2, \dots, L_p$ კონტურთა შიგნით მოთავსებულ სასრულ არეთა $S_1^-, S_2^-, \dots, S_p^-$ და L_0 კონტურის გარეთ (როდესაც იგი სახეზეა) მდებარე წერტილთაგან შედგენილი უსასრულო S_0^- არის ერთობლიობა.

$L_0, L_1, \dots, L_p$ კონტურები კიდევ შევზღუდოთ შემდეგი პირობით: L_j-ს მხების მიერ რაიმე მუდმივ მიმართულებასთან შექმნილი კუთხე აკმაყოფილებს H პირობას. სხვა სიტყვებით, ვგულისხმობთ, რომ L აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას.

დირიხლეს კლასიკურ ამოცანას S^+ არისათვის შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბებთ:

---

[1] თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ ზოგიერთ დამატებით გარემოებას, რომლებიც წარმოიშობა მრავლადბმული არის შემთხვევაში, დირიხლეს ამოცანა წარმოადგენს რიმან—ჰილბერტის ამოცანის კერძო შემთხვევას, როდესაც (40,1) სასაზღვრო პირობაში a, b კოეფიციენტთაგან ერთ-ერთი იგივურად ნულის ტოლია.

მაგრამ რიმან—ჰილბერტის ამოცანის განხილვისას გამოვიყენეთ მოცემული S^+ არის კონფორმული ასახვა წრეზე, რაც დირიხლეს ერთი კერძო ამოცანის ამოხსნის ეკვივალენტურია. ამის გამო აქ დამოუკიდებლად განვიხილავთ დირიხლეს ამოცანას, მით უმეტეს, რომ ეს ამოხსნა მოცემული იქნება კონტურთა ნებისმიერი რიცხვით შემოსაზღვრული არეებისათვის.

A. **დირიხლეს ამოცანა.** ვიპოვოთ S^+ არეში ჰარმონიული და $S^+ + L$-ში უწყვეტი (ნამდვილი) ფუნქცია $u(x, y)$ სასაზღვრო პირობით

$$u = f(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{60,1}$$

სადაც $f(t)$ L-ზე მოცემული უწყვეტი (ნამდვილი) ფუნქციაა. უსასრულო არის შემთხვევაში $u(x, y)$ ფუნქციას დამატებით მოეთხოვება, რომ იგი უსასრულობაში შემოსაზღვრული იყოს.

u ფუნქციის უსასრულობაში შემოსაზღვრულობის პირობა ტოლფასია მოთხოვნისა, რომ u მიისწრაფოდეს გარკვეული ზღვრისაკენ, როდესაც z უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის[2].

ზოგიერთი გამოყენებისათვის არანაკლებ საინტერესოა შემდეგი ამოცანაც, რომელსაც „დირიხლეს სახეცვლილ ამოცანას" ვუწოდებთ[3].

B. **დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანა.** ვიპოვოთ S^+ არეში ჰარმონიული და $S^+ + L$-ში უწყვეტი ფუნქცია $u(x, y)$ შემდეგი პირობით: I) $u(x, y)$ წარმოადგენს S^+-ში ჰოლომორფული ფუნქციის ნამდვილ ნაწილს: II) იგი აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$u = f(t) + a(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{60,2}$$

სადაც $f(t)$ L-ზე მოცემული (ნამდვილი) ფუნქციაა,

$$a(t) = a_j \;\; L_j\text{-ზე}, \;\; j = 0, 1, 2, \ldots, p, \tag{60,3}$$

a_j (ნამდვილი) მუდმივებია, რომლებიც წინასწარ არ მოიცემა. უსასრულო არის შემთხვევაში პირობა $u = f(t) + a_0$ L_0-ზე შეიცვლება $u(x, y)$ ფუნქციის უსასრულობაში შემოსაზღვრულობის მოთხოვნით.

ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ a_j მუდმივები სავსებით განისაზღვრება ამოცანის პირობით, თუ (ნებისმიერად) დავაფიქსირებთ ერთ-ერთ მათგანს. მომავალში, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩავთვლით, რომ $a_0 = 0$ (თუ L_0 კონტური არ გვაქვს, ეს მოთხოვნა შეიცვლება უსასრულობაში $u = 0$ პირობით).

განსაკუთრებით გამოვყოთ ის შემთხვევა, როდესაც L შედგება ერთადერთი, შეკრული კონტურისაგან. აქ უნდა განვასხვაოთ ორი შემთხვევა:

a) $p = 0$, მაშინ S^+ წარმოადგენს სიბრტყის სასრულ ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია L კონტურით.

b) $p = 1$. ხოლო L_0 კონტური არა გვაქვს. მაშინ S^+ არე წარმოადგენს სიბრტყის უსასრულო ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია L_1 კონტურით.

---

[2] გავიხსენოთ, რომ $|z| < R_0$ წრის გარეთ ჰარმონიული და უსასრულობაში შემოსაზღვრული ფუნქცია $u(x, y)$, როცა $|z| > R_0$ იშლება მწკრივად

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) \qquad (z = re^{i\vartheta}),$$

რომელიც თანაბრად და აბსოლუტურად იკრიბება ნებისმიერი R-რადიუსიანი ($R > R_0$) წრის გარეთ. ამიტომ $u \to a_0$, როდესაც $r \to \infty$.

[3] ეს ტერმინი შემოტანილი იყო ნ. მუსხელიშვილისა და დ. ავაზაშვილის ნაშრომში [1].

ადვილი დასანახავია, რომ a) შემთხვევაში A და B ამოცანები ერთმანეთს ემთხვევა (თუ ჩავთვლით, რომ $a_0 = 0$). b) შემთხვევაში კი ეს ამოცანები უშუალოდ დაიყვანება ერთი მეორეზე. მაგალითად, თუ $u(x, y)$ არის B ამოცანის (უსასრულობაში ქრობადი) ამონახსნი, მაშინ $u(x, y) - a_1$ იქნება A ამოცანის ამონახსნი.

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას ნებისმიერი p-სათვის. განსხვავება A და B ამოცანებს შორის, ე. ი. დირიხლეს კლასიკურ და სახეცვლილ ამოცანებს შორის, შემდეგში მდგომარეობს.

თუ $u(x, y)$ არის A ამოცანის ამონახსნი, u ფუნქციის შეუღლებული ფუნქცია v შეიძლება იყოს (და საზოგადოდ იქნება) მრავალსახა. ამოცანის I) პირობა გამორიცხავს ამ შესაძლებლობას და ამრიგად ზღუდავს საძიებელ ჰარმონიულ ფუნქციათა კლასს; მაგრამ სამაგიეროდ II) პირობა მოითხოვს მხოლოდ, რომ L_j კონტურებზე u ფუნქცია იღებდეს მოცემულ მნიშვნელობებს ზუსტად კი არა, არამედ მუდმივ შესაკრებამდე სიზუსტით.

A და B ამოცანათაგან თითოეულს არ შეიძლება ჰქონდეს ერთ ამონახსნზე მეტი (თუ, როგორც შევთანხმდით, B ამოცანაში ვგულისხმობთ, რომ $a_0 = 0$[4]).

A ამოცანის შემთხვევაში ეს დებულება დაიყვანება იმ ფაქტზე, რომ S^+ არეში ჰარმონიული და $S^+ + L$-ში უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც ნული ხდება ყველგან L-ზე, იგივურად ნულის ტოლია მთელ არეში. ეს უკანასკნელი კი გამომდინარეობს კარგად ცნობილი დებულებიდან იმის შესახებ, რომ მუდმივისაგან განსხვავებული ჰარმონიული ფუნქცია მაქსიმუმსა და მინიმუმს აღწევს მხოლოდ არის საზღვარზე[5].

ახლა გადავიდეთ ჩვენი დებულების დამტკიცებაზე B ამოცანისათვის. ამ შემთხვევაში იგი დაიყვანება შემდეგ დებულებაზე:

თუ S^+ არეში ჰარმონიული და $S^+ + L$-ში უწყვეტი ფუნქცია $u(x, y)$ S^+-ში ჰოლომორფული $\Phi(z) = u + iv$ ფუნქციის ნამდვილ ნაწილს წარმოადგენს და თუ $u(x, y)$ ფუნქცია L_j კონტურებზე ღებულობს მუდმივ a_j ($a_0 = 0$) მნიშვნელობებს, მაშინ აუცილებლად $u = 0$ და $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ (უსასრულო არის შემთხვევაში $a_0 = 0$ პირობა შეიცვლება პირობით $u = 0$ უსასრულობაში)[6].

---

[4] $a_0 = 0$ პირობის ნაცვლად შეიძლებოდა აგვეღო $a_k = 0$, სადაც a_k არის ერთ-ერთი $a_1, a_2, \ldots, a_p$ მუდმივთაგანი.

[5] უსასრულო არის შემთხვევა (ე. ი. როდესაც L_0 კონტური არა გვაქვს) ინვერსიის გამოყენებით სასრული არის შემთხვევაზე დაიყვანება.

[6] ტექსტში მოყვანილი დამტკიცების იდეა ნასესხებია J. Plemelj-ის წიგნიდან [3]. მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მარტივი დამტკიცება. ცნობილი თეორემის თანახმად (S^+ არეს ჯერჯერობით სასრულ არედ ვთვლით)

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{S^+} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy,$$

სადაც n გარე ნორმალია. მაგრამ ამ ტოლობის მარცხენა მხარე ნულის ტოლია

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L u \frac{\partial v}{\partial s} ds = \sum_{j=0}^{p} a_j \int_{L_j} dv = 0,$$

ვინაიდან პირობის თანახმად v ცალსახა ფუნქციაა, მაშასადამე, მოყვანილი ორი ფორმულიდან პირველის საფუძველზე $u \equiv \text{const}$ S^+-ში. მაგრამ $u = 0$ L_0-ზე და, მაშასადამე, $u = 0$ S^+-ში. ანალო-

$a_0, a_1, \ldots, a_p$ მუდმივთაგან ან, თუ არე უსასრულოა, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ მუდმივთაგან უმცირესი მნიშვნელობის მქონე აღვნიშნოთ a_m-ით (თუ ასეთი მუდმივი რამდენიმეა, ვირჩევთ მათგან ნებისმიერს). ვთქვათ $u(x, y)$ არ არის იგივურად მუდმივი S^+-ში. რადგანაც $u = a_m$ L_m-ზე a_m ყოფილა u-ს მინიმალური მნიშვნელობა $S^+ + L$-ში. მაშასადამე, S^+-ში $u > a_m$, ვინაიდან, დაშვების თანახმად, u განსხვავებულია მუდმივისაგან. ამიტომ, როგორც ადვილი დასანახავია, S^+ არეში შესაძლებელია L_m კონტურის მახლობელი ორი კონტურის L'_m-ის და L''_m-ის ისე აგება, რომ ამ კონტურებზე $u(x, y)$ ფუნქცია ღებულობდეს მუდმივ მნიშვნელობებს $a_m + \varepsilon'$ და $a_m + \varepsilon''$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon''$ [7].

აღვნიშნოთ Σ-თი რგოლისებური არე მოთავსებული L'_m-სა და L''_m-ს შორის, ხოლო Λ-თი ($\Lambda = L'_m + L''_m$) ამ არის საზღვარი და გამოვიყენოთ ცნობილი ფორმულა

გიურად იქნება უსასრულო არის შემთხვევაშიც. ეს დამტკიცება არაა სრული, რადგანაც $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ და $\dfrac{\partial v}{\partial s}$ სიდიდეების არსებობა და $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial s}$ ტოლობა (თუმცა ჩვენ მიერ განხილულ პირობებში მას მართლაც აქვს ადგილი) თავის მხრივ დასაბუთებას მოითხოვს.

[7] L_m კონტურის t წერტილზე გავლებულ ნორმალზე, რომელიც S^+ არის შიგნით იქნება მიმართული, ავიღოთ იმდენად მცირე მუდმივი δ სიგრძის მონაკვეთი tM, რომ იგი მთლიანად S^+-ში მოთავსდეს t-ს ნებისმიერი მდებარეობისათვის L_m-ზე. როდესაც t წერტილი აღწერს L_m კონტურს, წერტილი M აღწერს უწყვეტ შეკრულ წირს (იგი შეიძლება ჰკვეთდეს თავის თავს — ამას არა აქვს მნიშვნელობა). ცხადია, რომ ამ წირზე $u \geqslant a_m + \varepsilon_0$, სადაც ε_0 რაღაც დადებითი მუდმივია. თუ ავიღებთ რიცხვებს ε_1 და ε_2 ისე, რომ $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, მაშინ tM მონაკვეთზე მოიძებნება წერტილები t_1 და t_2, რომლებშიც $u(x, y)$ $a_m + \varepsilon_1$ და $a_m + \varepsilon_2$ მნიშვნელობას ღებულობს. t წერტილის მოძრაობისას L_m წირზე t_1 და t_2 წერტილები აღწერენ უწყვეტ შეკრულ წირებს $L_m^{(1)}$ და $L_m^{(2)}$-ს. ამ წირებს არა აქვთ საერთო წერტილები (ვინაიდან ამ წირებზე u სხვადასხვა მნიშვნელობებს ღებულობს). გარდა ამისა, ეს წირები არ ჰკვეთენ თავის თავს, რადგანაც, მაგალითად, $L_m^{(1)}$ წირს მარყუჟი რომ შეექმნა, u ჰარმონიულ ფუნქციას მუდმივი $a_m + \varepsilon_1$ მნიშვნელობა ექნებოდა ამ მარყუჟზე, იგივურად მუდმივი იქნებოდა ამ მარყუჟით შემოსაზღვრულ არეში და, მაშასადამე, მთელ S^+-ში. $L_m^{(1)}$ და $L_m^{(2)}$ წირებს, რომელთა განტოლებებს აქვთ სახე $u(x, y) = \text{const}$ შეიძლება ჰქონდეთ მხოლოდ სასრული რაოდენობა განსაკუთრებული წერტილებისა, ე. ი. ისეთი წერტილებისა, სადაც $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. მართლაც, ამ წერტილებში $\Phi'(z) = 0$, ხოლო, რადგანაც $\Phi'(z)$ იგივურად ნული არ არის, ამიტომ $\Phi'(z)$ ფუნქციის S^+ არეში მდებარე ნულების რაოდენობა, რომლებიც S^+ არის საზღვრიდან სასრული მანძილით არის დაშორებული, სასრულია (წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა $\Phi(z) = \text{const}$ S^+-ში). მაშასადამე, $L_m^{(1)}$ და $L_m^{(2)}$ წირები შედგება ანალიზურ რკალთა სასრულო რიცხვისაგან, რადგანაც $u(x, y)$ ანალიზური ფუნქციაა. $L_m^{(1)}$ და $L_m^{(2)}$ კონტურები შემოსაზღვრავენ რგოლისებურ Σ არეს, რომელიც მთლიანად S^+-შია მოთავსებული. Σ არეში მდებარე ისეთ z_j წერტილთა რიცხვი, სადაც $\Phi'(z) = 0$ სასრულია. მეორე მხრივ, იმავე გზით, როგორც $L_m^{(1)}$ და $L_m^{(2)}$ კონტურები იყო აგებული, ნებისმიერი ε რიცხვისათვის $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ შეიძლება აიგოს კონტური $L_m^{(0)}$, რომელიც მთლიანად Σ არეში იქნება მოთავსებული და რომელზედაც $u = a_m + \varepsilon$. ვინაიდან z_j წერტილთა რიცხვი სასრულია, ამიტომ იმ ε რიცხვთა სიმრავლე, რომელთა შესაბამისი $L_m^{(0)}$ კონტურები არ გადიან z_j წერტილებზე უსასრულოა და, მაშასადამე, ეს კონტურები წარმოადგენენ ანალიზურ (და მითუმეტეს გლუვ) კონტურებს, რომელთაც განსაკუთრებული წერტილები არ გააჩნიათ. თუ მივცემთ ε-ს ორ მნიშვნელობას ε' და ε'', რომლებიც ამ უკანასკნელ პირობას აკმაყოფილებს, მივიღებთ საძიებელ კონტურებს L'_m და L''_m.

$$\int_{\Lambda} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy, \tag{*}$$

სადაც n Λ-ს ნორმალია, მიმართული Σ არის გარეთ. მაგრამ

$$\int_{L_m'} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{L_m'} u \frac{\partial v}{\partial s} ds = (a_m + \varepsilon') \int_{L_m'} dv = 0;$$

ანალოგიური გარემოება გვაქვს L_m''-ის გასწვრივ აღებული ინტეგრალისათვის. ამის გამო, (*) ფორმულის მარცხენა მხარე ნულის ტოლია, მაშასადამე, $u = \text{const}$ Σ-ში და მთელ S^+ არეშიც. მაგრამ, რადგანაც $u = a_0 = 0$ L_0-ზე, ან უსასრულო არის შემთხვევაში $u = 0$ უსასრულობაში, ამიტომ $u = 0$ S^+-ში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. დავუშვათ, რომ წინანდებურად $L = a_j$ L_j-ზე, მაგრამ პირობა $a_0 = 0$ უკუგდებულია. მაშინ ცხადია, რომ

$$u = \text{const} = a_0 = a_1 = \cdots = a_p.$$

ამის გამო $a_0 = 0$ პირობის უკუგდებისას B ამოცანის ორი ამონახსნი შეიძლება განსხვავდებოდეს მუდმივი შესაკრებით.

§ 61. დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნა ორმაგი ფენის პოტენციალის საშუალებით. დავიწყოთ დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნით. შევინარჩუნოთ წინა პარაგრაფის პირობები და აღნიშვნები და მოვითხოვოთ დამატებით, რომ $f(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებდეს H პირობას[8]. ვეძებოთ $\Phi(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ფუნქცია შემდეგი სახით

$$u(x, y) + i v(x, y) = \Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - z}, \tag{61,1}$$

სადაც $\mu(t)$ საძიებელი ნამდვილი ფუნქციაა H კლასიდან.

თუ $t - z = r e^{i\vartheta}$, ნამდვილი ნაწილის გამოყოფით მივიღებთ (იხ. § 12):

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t)\, d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t) \frac{\cos(r, n)}{r} ds, \tag{61,2}$$

სადაც n წირის ნორმალია, რომელიც t წერტილიდან L წირის მარცხნივ არის მიმართული, ხოლო (r, n) კუთხეა n-სა და $\overrightarrow{tz}$ ვექტორს შორის.

ამგვარად $u(x, y)$ წარმოდგენილია ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით.

თუ (61,1)-ში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $z \to t_0$ და შემდეგ გამოვყოფთ ნამდვილ ნაწილს, $u(x, y)$-ის სასაზღვრო მნიშვნელობისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას[9]

---

[8] ამ მოთხოვნისაგან ადვილად შეგვიძლია განვთავისუფლდეთ. (იხ. შენიშვნა 1 ამ პარაგრაფის ბოლოს).

[9] ჩვენ ვიყენებთ სოხოცკი—პლემელის ფორმულას ((16,2)-ის პირველი ფორმულა; იხ. აგრეთვე § 16, (13,6) და მომდევნო ფორმულები).

$$u = \operatorname{Re} \Phi^{+}(t_0) = \mu(t_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - t_0} = \mu(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t)\, d\vartheta =$$

$$= \mu(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t) \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds, \tag{61,3}$$

სადაც, ამჯერად, $\vartheta = \vartheta(t_0, t)$ აღნიშნავს $\overrightarrow{t_0 t}$ ვექტორის მიერ Ox ღერძთან შედგენილ კუთხეს, $r = |t - t_0|$, ხოლო (r, n) კუთხეა $\overrightarrow{t t_0}$ ვექტორსა და n-ს შორის (ნახ. 9, გვ. 48).

ამგვარად (60,2) პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t)\, d\vartheta = f(t_0) + a(t_0) \tag{61,4}$$

ანუ

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t) \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds = f(t_0) + a(t_0), \tag{61,4ა}$$

სადაც $a(t_0) = a_j = \text{const}$ L-ზე.

წინა ტოლობა, ყურადღებას თუ არ მივაქცევთ მის მარჯვენა მხარეს მდგომ (წინასწარ უცნობ) $a(t_0)$ სიდიდეს, წარმოადგენს ფრედჰოლმის განტოლებას[10], რომლის გულია

$$K(t_0, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(r, n)}{r},$$

რაც, მიღებულ პირობათა საფუძველზე, შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$K(t_0, t) = \frac{K_0(t_0, t)}{|t - t_0|^{\alpha}} = \frac{K_0(t_0, t)}{r^{\alpha}}, \tag{61,5}$$

აქ $0 \leqslant \alpha < 1$, ხოლო $K_0(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე ცვლადის მიმართ.

მაშასადამე, (61,4) განტოლების ყოველი უწყვეტი ამონახსნი H პირობასაც დააკმაყოფილებს (§ 51), ვინაიდან მოცემული $f(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ამ პირობას[11].

განვიხილოთ (61,4) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t)\, d\vartheta = 0. \tag{61,6}$$

---

[10] თუ უგულებელვყოფთ $a(t_0)$ შესაკრებს, ეს იგივე განტოლებაა, რომელიც ჩვეულებრივ გამოიყენება დირიხლეს ამოცანის ამოსახსნელად.

[11] ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $\mu(t)$ იმავე მაჩვენებლით აკმაყოფილებს H პირობას, რომლითაც $f(t)$ ფუნქცია. იხ. J. Schauder [1], გვ. 633.

უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ ამ განტოლებას აქვს შემდეგი ამონახსნი[12]

$$\mu(t) = C_k \ L_k\text{-ზე} \ (k = 1, 2, \ldots, p), \quad \mu(t) = 0 \ \ L_0\text{-ზე}, \tag{61,7}$$

სადაც C_k ნებისმიერი მუდმივებია. სხვა ამონახსნი (61,6) განტოლებას არ გააჩნია. მართლაც, ვთქვათ $\mu(t)$ ამ განტოლების სხვა რომელიმე ამონახსნია. მაშინ S^+ არეში ჰოლომორფული

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - z}$$

ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი L-ზე ნულოვან მნიშვნელობებს ღებულობს და, მაშასადამე, $\operatorname{Re}\Phi(z) = 0$ S^+-ში, რაც ჩვენი დებულების სამართლიანობას ამტკიცებს (§ 30, შენიშვნა 1).

(61,7) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს $\mu_1(t), \ldots$ $\ldots, \mu_p(t)$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა წრფივ კომბინაციას, სადაც

$$\mu_j(t) = \begin{cases} 1 & L_j\text{-ზე} \ \ (j = 1, 2, \ldots, p), \\ 0 & \text{დანარჩენ კონტურებზე.} \end{cases} \tag{61,8}$$

ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა ზოგადი თეორიის თანახმად (61,4) არაერთგვაროვანი განტოლება ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს p რაოდენობის ცნობილ ინტეგრალურ პირობას. ამოცანის ამოსახსნელად a_j მუდმივები ისე უნდა შეირჩეს, რომ ეს პირობები შესრულდეს.

მაგრამ ხსენებული პირობების ცხადი სახით დაწერა, პრაქტიკულად მაინც, საკმარისად ძნელია: ამისათვის საჭიროა (61,6) განტოლების მიკავშირებული განტოლების ყველა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნის პოვნა, ამას გარდა, (61,6) განტოლების არანულოვან ამონახსნთა არსებობა მნიშვნელოვნად ართულებს საწყისი (61,4) განტოლების ამოხსნას მაშინაც კი, როდესაც a_j მუდმივები სათანადოდაა შერჩეული.

ყველა ეს სიძნელე შეიძლება გადაილახოს ერთი ხერხის გამოყენებით, რაც გულისხმობს (61,4) განტოლების შეცვლას ისეთი ეკვივალენტური განტოლებით, რომელიც აღარ შეიცავს a_j მუდმივებს და, რომლის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. კერძოდ, (61,4) განტოლების ნაცვლად განვიხილოთ ფრედჰოლმის შემდეგი განტოლება:

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi} \int\limits_L \mu(t)\, d\vartheta - \int\limits_L k(t_0, t)\, \mu(t)\, ds = f(t_0). \tag{61,9}$$

სადაც s t წერტილის რკალური აბსცისაა, ხოლო (ნამდვილი) ფუნქცია $k(t_0, t)$ შემდეგნაირადაა L-ზე განსაზღვრული

$$k(t_0, t) = \begin{cases} \rho_j(t), & \text{როცა } \ t_0, t \ \ L_j\text{-ზეა} \ \ (j = 1, \ldots, p), \\ 0 & \text{დანარჩენ შემთხვევებში.} \end{cases} \tag{61,10}$$

[12] უსასრულო არის შემთხვევაში (61,7) ტოლობათაგან უკანასკნელი არ გვექნება.

აქ $\rho_j(t)$ აღნიშნავს L_j $(j=1,\dots,p)$ კონტურზე განსაზღვრულ ნამდვილ უწყვეტ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\int_{L_j} \rho_j(t)\,ds \neq 0, \tag{61,11}$$

ხოლო სხვა მხრივ ნებისმიერია. მაგალითად, შეგვიძლია ავიღოთ

$$\rho_j(t)=1, \quad j=1,\dots,p.$$

(61,9) განტოლების მარცხენა მხარეში მონაწილე გამოსახულება

$$\int_L k(t_0,t)\,\mu(t)\,ds$$

ყოველ L_j კონტურზე მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს

$$\int_L k(t_0,t)\,\mu(t)\,ds=c_j, \quad \text{როდესაც} \quad t_0\in L_j, \quad j=0,1,\dots,p, \tag{61,12}$$

სადაც c_j მუდმივებია[13], $c_0=0$[14].

დავამტკიცოთ, რომ (61,9) განტოლებას გააჩნია საჭირო თვისება, კერძოდ, ერთგვაროვან განტოლებას

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta-\int_L k(t_0,t)\,\mu(t)\,ds=0 \tag{61,13}$$

არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები.

მართლაც, ვთქვათ, $\mu(t)$ ამ განტოლების რაიმე ამონახსნია. (61,12)-სა და (61,13)-ის ძალით S^+ არეში ჰოლომორფული

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} \tag{*}$$

ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი L_j კონტურებზე მუდმივ c_j მნიშვნელობებს ღებულობს, სადაც $c_0=0$. მაშასადამე, წინა პარაგრაფში დამტკიცებულის საფუძველზე $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ S^+-ში. ამიტომ (§ 30, შენიშვნა 1) $\mu(t)=b_j$ L_j-ზე, სადაც b_j მუდმივებია და $b_0=0$. $\mu(t)$-ს ამ მნიშვნელობათა (61,13)-ში შეტანით მივიღებთ

---

[13] სახელდობრ,

$$c=\int_{L_j}\rho_j\,\mu\,ds.$$

[14] უსასრულო არის შემთხვევაში უკანასკნელი ტოლობა არ გვაქვს, ხოლო (61,12)-ში უნდა ავიღოთ $j=1,\dots,p$.

$$b_j \int\limits_{L_j} \rho_j \, ds = 0, \quad j = 1, \ldots, p,$$

ანუ (61,11)-ის საფუძველზე $b_j = 0$. ამგვარად დებულება დამტკიცებულია.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ (61,9) განტოლებას ყოველთვის აქვს (ერთადერთი) ამონახსნი.

(61,9) განტოლების ამონახსნი $\mu(t)$ გვაძლევს საწყის (61,4) განტოლების ამონახსნს, რადგანაც (61,12)-ის ძალით გვაქვს

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{L} \mu(t) \, d\vartheta = f(t_0) + c_j \quad L_j\text{-ზე}.$$

ამასთან (61,4)-ში მონაწილე მუდმივები a_j სავსებით განსაზღვრულ მნიშვნელობებს ღებულობს

$$a_j = c_j = \int\limits_{L_j} \rho_j \mu \, ds. \tag{61,14}$$

ამრიგად, ამოცანა ბოლომდე ამოხსნილი[15].

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. საძიებელი $\mu(t)$ ფუნქცია დავუქვემდებარეთ H პირობას მხოლოდ იმისათვის, რომ გვესარგებლა სოხოცკი—პლემელის ფორმულებით (61,1) ფორმულაში $z \to t_0$ ზღვარზე გადასვლისას. მაგრამ ჩვენ რომ (61,1)-ში ზღვარზე გადასვლამდე გამოგვეყო ნამდვილი ნაწილი და გვესარგებლა ორმაგი ფენის პოტენციალის ცნობილი თვისებებით, $\mu(t)$ ფუნქციისაგან მხოლოდ უწყვეტობის მოთხოვნის პირობებშიც იმავე (61,3) შედეგს მივიღებდით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. $k(t_0, t)$ დამხმარე გულის არჩევა, ცხადია, გავლენას ახდენს (61,9) განტოლების $\mu(t)$ ამონახსნზე. მაგრამ ადვილი დასანახავია, რომ $k(t_0, t)$ გულის შეცვლა გამოიწვევს $\mu(t)$-ს შეცვლას $\mu(t) + \alpha(t)$-თი, სადაც $\alpha(t)$ ცალკეულ L_j კონტურებზე მუდმივ მნიშვნელობებს ინარჩუნებს და L_0-ზე $\alpha(t) = 0$. მართლაც, ვთქვათ, $\mu_1(t)$ და $\mu_2(t)$, $k_1(t_0, t)$ და $k_2(t_0, t)$ დამხმარე გულების შესაბამისი ამონახსნებია, მაშინ $\mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t)$ სხვაობა დააკმაყოფილებს (61,4) სახის განტოლებას, სადაც $f(t_0) = 0$, საიდანაც, ისევე როგორც ზემოთ, დავასკვნით, რომ $\operatorname{Re} \Phi(z) = 0$ S^+-ში, სადაც $\Phi(z)$ აღნიშნავს $\mu(t)$-თან (*) ფორმულით დაკავშირებულ ფუნქციას და, მაშასადამე, ისევე, როგორც ზემოთ, $\mu(t) = \alpha_j = \text{const}$ L_j-ზე და $\alpha_0 = 0$.

---

[15] აქ აღწერილი მეთოდი ავტორს მითითებული ჰქონდა ნაშრომში [2]; ზოგიერთი მომდევნო შედეგი იხ. ავტორის შრომაში [3]. გავრცელება ერთი შერეული ამოცანისათვის მოცემულია ავტორის შრომაში [5]. გავრცელება სამ განზომილებიანი სივრცისათვის იხ. ავტორის შრომაში [4]; (შდრ. აგრეთვე დ. შერმანი [4]; ე. კუპრაძე [2], ნ. ვეკუა [13]).

ტექსტში გადმოცემული ანალოგიური მეთოდი, ადრე გამოყენებული ჰქონდა კ. იაკობს (C. Jacob [3] — [5]). სამწუხაროდ, ამ შრომებს მხოლოდ ახლახან გავეცანი და ამიტომ წინა გამოცემებში ისინი არ მოვიხსენიე. ეს ხარვეზი შევსო ამ წიგნის გერმანულ თარგმანში ბეჭდისას (Berlin, 1965).

წინა პარაგრაფში დამტკიცებული დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე ცხადია, რომ (61,14) ფორმულაში მონაწილე მუდმივები a_j დამოუკიდებელია $k(t_0, t)$ გულის არჩევისაგან.

§ 62. **ზოგიერთი შედეგი.** ვთქვათ $\Psi(z)$ S^+ არეში ჰოლომორფული ფუნქციაა, რომლის ნამდვილი ნაწილი $\operatorname{Re}\Psi(z)$ უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე; მაშინ, როგორც ვიცით, (§ 9) $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ ფუნქცია უწყვეტია L-ზე. ჩავთვალოთ ჯერჯერობით, რომ L_0 კონტურიც გვაქვს. თუ დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის სასაზღვრო პირობაში (60,2) $f(t)$ ფუნქციად $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$-ს ვიგულისხმებთ, მაშინ $\operatorname{Re}\Psi(z)$ ფუნქცია, ცხადია, იქნება ამ ამოცანის ამონახსნი და $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ (პირობის თანახმად $a_0 = 0$). ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე სხვა ამონახსნი ამოცანას არ ექნება.

მეორე მხრივ, ამოცანის ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულით[16]

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - z},$$

სადაც $\mu(t)$ ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, განსაზღვრული (61,9) განტოლებით, რომელშიც აღებულია $f(t) = [\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$.

მაშასადამე, გვექნება:

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - z} + C i. \tag{62,1}$$

სადაც C ნამდვილი მუდმივია. ამგვარად, ვღებულობთ შემდეგ დებულებას:

S^+ არეში ყოველი ჰოლომორფული ფუნქცია $\Psi(z)$, რომლის ნამდვილი ნაწილი უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე, წარმოიდგინება (62,1) სახით, სადაც $\mu(t)$ ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო C — ნამდვილი მუდმივი.

ჩვენი მსჯელობიდან (ან უშუალოდ § 30-ში მოყვანილი დებულებიდან) ცხადია, რომ მოცემული $\Psi(z)$ ფუნქციისათვის $\mu(t)$ ფუნქცია კონტურზე ცალსახად, ხოლო $L_1, \ldots, L_p$ შიგა კონტურებზე მუდმივი შესაკრებების სიზუსტით არის განსაზღვრული, C სავსებით განსაზღვრული მუდმივია.

უსასრულო S^+ არის შემთხვევაში, ე. ი. მაშინ, როდესაც L_0 კონტური არ გვაქვს, $\Psi(z)$ ფუნქციაზე იმავე შეზღუდვებში, ადვილი დასადგენია შემდეგი წარმოდგენა

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - z} + \Psi(\infty), \tag{62,1ა}$$

სადაც $\mu(t)$ L_j კონტურებზე მუდმივ შესაკრებამდე სიზუსტით განსაზღვრული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა.

---

[16] აქ ვიყენებთ წინა პარაგრაფის ბოლოში მოყვანილ შენიშვნას 1. თუ ხსენებული პარაგრაფის ძირითად ტექსტში თქმულით შემოვიფარგლებით, მაშინ საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ $[\operatorname{Re}\Psi(z)]^+$ H პირობას აკმაყოფილებდეს.

დავუშვათ ახლა, რომ $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ ფუნქცია L-ზე H კლასს ეკუთვნის. მაშინ წინა პარაგრაფის შედეგების საფუძველზე $\mu(t)$ ფუნქციაც, განსაზღვრული (61,9) განტოლების საშუალებით, სადაც $f(t) = [\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$, აგრეთვე დააკმაყოფილებს H პირობას.

მაშასადამე, §§ 15 და 18-ს შედეგების საფუძველზე არსებობს სასაზღვრო მნიშვნელობა $\Psi^+(t)$[17] და იგი H კლასს ეკუთვნის. ამგვარად, გვაქვს შემდეგი დებულება (ი. პრივალოვის თეორემა)[18].

თუ S^+ არეში $\Psi(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი L-ზე გარკვეულ სასაზღვრო მნიშვნელობას ღებულობს, რომელიც H კლასს ეკუთვნის, მაშინ $\Psi(z)$ ფუნქციის წარმოსახვით ნაწილსაც იგივე თვისება აქვს[19].

§ 63. დირიხლეს ამოცანის ამოხსნა. დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნის შემდეგ დირიხლეს კლასიკური ამოცანის ამოხსნა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს: იგი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება დავიყვანოთ წინა ამოცანაზე (სასრული ცალადბმული არისათვის ორივე ამოცანა ერთმანეთს ემთხვევა). მოვიყვანოთ ასეთი დაყვანის ერთი უმარტივესი ხერხი. $z_1, z_2, \ldots, z_p$ იყოს ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილები შესაბამისად $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$ არეებში; საძიებელი ჰარმონიული ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$u(x, y) = U(x, y) + \sum_{k=1}^{p} A_k \ln|z - z_k|, \tag{63,1}$$

სადაც $U(x, y)$ ახალი საძიებელი ჰარმონიული ფუნქციაა, ხოლო A_k ჯერჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივებია. თუ L_0 კონტური არ გვაქვს, ჩავთვალოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{p} A_k = 0. \tag{63,2}$$

ეს პირობა უზრუნველყოფს იმას, რომ გამოსახულება $\sum A_k \ln|z - z_k|$ უსასრულობაში ნულის ტოლი გახდება[20].

---

[17] შევახსენებთ, რომ $\Psi^+(t)$ აღნიშვნას მხოლოდ იმ შემთხვევაში ვხმარობთ, როდესაც ზღვარი მიიღწევა ნებისმიერი გზის გასწვრივ, რომელიც S^+-შია მოთავსებული.

[18] ი. პრივალოვი [2]; მითითებულ შრომაში თეორემა დამტკიცებულია წრისათვის; მაგრამ მისი განზოგადება ნებისმიერ ჩვენ მიერ განხილული სახის არეზე შეიძლება უშუალოდ მივიღოთ კონფორმულიასახვის საშუალებით.

[19] ადვილი საჩვენებელია, რომ (იხ. სქოლიო[11] 227 გვ.), თუ $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ აკმაყოფილებს $H(\alpha)$ პირობას, მაშინ $[\operatorname{Im}\Psi(t)]^+$ აკმაყოფილებს $H(\alpha)$ პირობას, თუ $\alpha < 1$ ან $H(1-\varepsilon)$ პირობას, სადაც ε ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია, თუ $\alpha = 1$.

[20] $|z|$-ის დიდი მნიშვნელობებისათვის

$$\ln|z - z_k| = \ln|z| + \ln\left|1 - \frac{z_k}{z}\right| = \ln|z| + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\sum_{k=1}^{p} A_k \ln|z - z_k| = \ln|z| \cdot \sum_{k=1}^{p} A_k + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

(60,1)-ის საფუძველზე U ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი სასაზღვრო პირობა:

$$U = f(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k \ln|t - z_k| \quad L\text{-ზე}. \qquad (63,3)$$

თუ A_k მუდმივებს ნებისმიერად დავაფიქსირებთ, ხოლო U ფუნქციას მოვთხოვთ, რომ იგი იყოს S^+ არეში ჰოლომორფული ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი და უსასრულო არის შემთხვევაში ქრებოდეს უსასრულობაში, მაშინ, საზოგადოდ, (63,3) ამოცანა ამოხსნადი არ იქნება. მაგრამ სამაგიეროდ ამოხსნადი იქნება დირიხლეს შემდეგი სახეცვლილი ამოცანა:

$$U = f(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k \ln|t - z_k| + a_j \quad L\text{-ზე} \qquad (63,4)$$

$$j = 0, 1, \dots, p; \quad a_0 = 0\,[21].$$

ამ უკანასკნელი ამოცანის ამოხსნა მოგვცემს როგორც $U(x, y)$ ფუნქციას, ასევე $a_1, \dots, a_p$ მუდმივების მნიშვნელობებს, რომლებიც, როგორც ადვილი დასადგენია, ტოლია შემდეგი გამოსახულებებისა:

$$a_j = f_j + \sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k, \qquad (63,5)$$

სადაც γ_{jk} $f(t)$ ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი, სავსებით განსაზღვრული მუდმივებია, f_j კი $f(t)$ ფუნქციაზე დამოკიდებული მუდმივებია, რომლებიც ნულის ტოლი ხდება, როდესაც $f(t) \equiv 0$.

იმისათვის, რომ (63,1) ფორმულით განსაზღვრული U ფუნქცია იყოს დირიხლეს ამოცანის ამონახსნი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $a_j = 0$ $(j = 1, 2, \dots, p)$ ანუ, რაც იგივეა, A_k მუდმივებმა უნდა დააკმაყოფილოს წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k + f_j = 0, \quad j = 1, \dots, p. \qquad (63,6)$$

განვიხილოთ ჯერ სასრული არის შემთხვევა. γ_{jk} მუდმივებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. მართლაც, ეს დეტერმინანტი ნულის ტოლი რომ იყოს, მაშინ ერთგვაროვან სისტემას, რომელიც (63,6) სისტემიდან მიიღება, როდესაც $f(t) \equiv 0$ (ამ შემთხვევაში ყველა $f_j = 0$, $j = 1, \dots, p$), ექნებოდა

[21] თუ L_0 კონტური არა გვაქვს, არც $a_0 = 0$ პირობა გვექნება და $j = 1, 2, \dots, p$.

არანულოვანი ამონახსნი $A_1, \ldots, A_p$. მაგრამ მაშინ გვექნებოდა S^+ არეში იგივური ნულისაგან განსხვავებული ჰარმონიული ფუნქცია[22]

$$u = U + \sum_{k=1}^{p} A_k \ln|z - z_k|,$$

რომელიც L-ზე ყველგან ნულის ტოლია, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, (63,6) სისტემა ყოველთვის ამოხსნადია. ვიპოვით A_k მნიშვნელობებს და მივიღებთ საწყისი ამოცანის ამონახსნს.

უსასრულო არის შემთხვევაში (63,6) სისტემას უნდა დაერთოს (63,2) განტოლება. მიღებული სისტემა, საზოგადოდ, უთავსებადია. ეს გასაგებიცაა, რადგანაც (63,2) პირობების შესრულებისას (63,1) სახით წარმოდგენილი u ფუნქცია ქრობადი იქნება უსასრულობაში, დირიხლეს ამოცანას კი, საზოგადოდ, ასეთი ამონახსნი არ გააჩნია[23].

ჯერ შევეცადოთ სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილებას მხოლოდ მუდმივ შესაკრებამდე სიზუსტით, რომელიც საერთო იყოს ყველა L_j-სათვის, ე. ი. პირობა $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ შევცვალოთ პირობით $a_1 = A$, $a_2 = A, \ldots, a_p = A$, სადაც A რაღაც მუდმივაა. მაშინ (63,6) სისტემის ნაცვლად მივიღებთ $p + 1$ განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k - A + f_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, p), \qquad \sum_{k=1}^{p} A_k = 0 \tag{63,7}$$

$A, A_1, \ldots, A_p$ უცნობების მიმართ. ზემოთ გადმოცემულის ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ ამ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, რის გამოც სისტემა ყოველთვის ამოხსნადია. ამგვარად ვიპოვით უსასრულობაში ქრობად ჰარმონიულ ფუნქციას u, რომელიც L-ზე $f(t) + A$ მნიშვნელობებს ღებულობს. მაშასადამე, ფუნქცია

$$u - A \tag{63,8}$$

იქნება საწყისი ამოცანის ამონახსნი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. სხვა მეთოდების გამოყენებით შეიძლება ნაჩვენები იქნეს, რომ ზემოთ მოყვანილი შედეგები, რომლებიც შეეხება ამონახსნის არსებობას, მაგრამ არა მის წარმოდგენას ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით[24], ძალაში რჩება არის საზღვრის მიმართ გაცილებით უფრო ზოგად მოთხოვნებში. მაგალითად, საკმარისია

---

[22] თუ რომელიმე A_k განსხვავებულია ნულისაგან, ჯამი $U + \Sigma A_k \ln|z - z_k|$ არ შეიძლება იგივურად ნულის ტოლი იყოს S^+-ში, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში $U + iV + \Sigma A_k \ln(z - z_k)$ ფუნქცია, სადაც V U-ს შეუღლებული ფუნქციაა, მუდმივი იქნებოდა, ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც $U + iV$ პირობის მიხედვით ცალსახა ფუნქციაა.

[23] გავიხსენოთ, რომ დირიხლეს ამოცანის ჩამოყალიბებისას მოვითხოვეთ საძიებელი ფუნქციის მხოლოდ შემოსაზღვრულობა უსასრულობაში.

[24] ამ მიმართულებით შესაძლებელია შედეგების მნიშვნელოვანი განზოგადება, როგორც ეს, მაგალითად, გაკეთებულია რადონის მიერ (J. Radon [1]).

მოვითხოვოთ, რომ არის საზღვრის შემადგენელი კონტურები ჟორდანის წირები იყოს[25] (ასე რომ, წრფევადობის მოთხოვნაც კი არ არის საჭირო).

§ 64. დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნა მარტივი ფენის სახეცვლილი პოტენციალის საშუალებით. § 61-ში დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანა ამოვხსენით ორმაგი ფენის პოტენციალის საშუალებით, მაგრამ ზოგიერთი გამოყენებისათვის მნიშვნელოვან შემთხვევაში საჭიროა ამონახსნის წარმოდგენა მარტივი ფენის სახეცვლილი პოტენციალის სახით. ამ საკითხზე შეჩერებისას მხედველობაში გვექნება მისი ერთი უმარტივესი და უშუალო გამოყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში.

დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანა § 60-შია ჩამოყალიბებული; უკუვაგდოთ ახლა წინა პარაგრაფებში მიღებული პირობა $a_0 = 0$ ანუ ჩავთვალოთ, რომ ამოცანის პირობებში მონაწილე $a_0, a_1, \dots, a_p$ მუდმივთაგან არცერთი არ არის წინასწარ მოცემული.

ვეძებოთ ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z), \tag{64,1}$$

სადაც ამჯერად

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - z} = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{i \mu(t)\, dt}{t - z}, \tag{64,2}$$

აქაც საძიებელი $\mu(t)$ H კლასის ნამდვილი ფუნქციაა.

ამგვარად, $u(x, y)$-ს ვეძებთ შემდეგი სახით (იხ. § 12):

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_L \mu(t) \frac{dr}{r(z, t)}, \tag{64,3}$$

სადაც $r(z, t) = |z - t|$ მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალი წარმოადგენს მარტივი ფენის სახეცვლილ პოტენციალს (§ 12).

ადვილი დასანახავია, რომ ჩვენს ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს (64,1), (64,2) სახით წარმოდგენილი ორი განსხვავებული ამონახსნი. მართლაც, როგორც § 60-ში იყო ნაჩვენები (იხ. შენიშვნა § 60-ის ბოლოს), თუ $[\operatorname{Re} \Phi]^+ = a_j$ L_j-ზე $(j = 0, 1, \dots, p)$, სადაც a_j მუდმივებია, მაშინ $u = \text{const} = a_0 = a_1 = \cdots = a_p$, მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში სოხოცკი—პლემელის ფორმულების ძალით $[\operatorname{Re} \Phi]^+ = [\operatorname{Re} \Phi]^-$, აქედან ვასკვნით, რომ $\operatorname{Re} \Phi = \text{const} = a_0 = a_1 = \cdots = a_p$ S^- არეშიც. მაგრამ $\Phi(\infty) = 0$ და, მაშასადამე, $a_0 = a_1 = \cdots = a_p = 0$, $\operatorname{Re} \Phi(z) = 0$[26].

თუ (64,3)-ს ჩავსვამთ (60,2) სასაზღვრო პირობაში და შევნიშნავთ, რომ

$$\operatorname{Re} \Phi^+(t) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\mu(t)\, dr}{r(t_0, t)},$$

[25] ასეთი არე ყოველთვის შეიძლება კონფორმულად და საზღვრამდე უწყვეტად აისახოს არეზე, რომელიც შემოსაზღვრული იქნება, მაგალითად, ანალიზური წირებით (თუნდაც წრეწირებით, იხ. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ნებისმიერი დაწვრილებითი კურსი).

[26] ეს მსჯელობა მაშინაც სამართლიანია, როცა L_0 კონტური არ გვაქვს. ამ შემთხვევაში უნდა ავიღოთ $j = 1, 2, \dots, p$.

მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,\frac{dr}{r(t_0,t)} = f(t_0) + a(t_0), \tag{64,4}$$

აქ, ისევე, როგორც § 61-ში, $f(t_0)$ H კლასის მოცემული ნამდვილი ფუნქციაა; ხოლო $a(t_0) = a_j = \mathrm{const}$ L_j-ზე, სადაც $j = 0, 1, \ldots, p$, თუ L_0 გვაქვს, და $j = 1, 2, \ldots, p$, თუ L_0 არ გვაქვს. როგორც უკვე ვთქვით, § 61-გან განსხვავებით, არ ვგულისხმობთ, რომ $a_0 = 0$.

(64,4) ტოლობის მარცხენა მხარეს მდგომი გამოსახულება

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0,t)} = \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,\frac{\cos\alpha(t_0,t)}{r(t_0,t)}\,ds, \tag{64,5}$$

სადაც $\alpha(t_0, t)$ — t წერტილზე გამავალი დადებითი მხების მიერ $\overrightarrow{t_0 t}$ ვექტორის მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე (იხ. ნახ. 9 გვ. 47) — წარმოადგენს კოშის ტიპის სინგულარულ ოპერატორს. მართლაც; თუ აღვნიშნავთ

$$\vartheta = \vartheta(t_0, t) = \arg(t - t_0),$$

გვექნება

$$\ln r = \ln(t - t_0) - i\,\vartheta,$$

საიდანაც დაფიქსირებული t_0-სათვის გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\frac{dr}{r(t_0,t)} = \frac{dt}{t - t_0} - i\,d\vartheta,$$

რის გამოც

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,\frac{dr}{r(t_0,t)} = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \mu(t)\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\,ds. \tag{64,6}$$

ჩვენ ვიცით, რომ (§ 7, პუნქტი 3°)

$$\frac{\partial\vartheta}{ds} = \frac{\sin\alpha(t_0,t)}{r} = \frac{\cos(r,n)}{r} = \frac{K_0(t_0,t)}{r^{\lambda}}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1,$$

სადაც $K_0(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას. ამის გამო (64,6) ტოლობის მარჯვენა მხარეში პირველი შესაკრები წარმოადგენს ოპერატორის მახასიათებელ ნაწილს. ამგვარად, ვხედავთ, რომ (64,4) განტოლების ინდექსი ნულის ტოლია, ე. ი. ეს განტოლება კვაზიფრედჰოლმურია (§ 56). ეს გარემოება მნიშვნელოვნად აადვილებს გამოკვლევას[27].

ჩვენი სინგულარული განტოლება ნამდვილ განტოლებას წარმოადგენს და ამიტომ მისი გამოკვლევისას ნამდვილი $\mu(t)$ ფუნქციების განხილვით შეგვიძლია შემო-

---

[27] კერძოდ, (64,4) განტოლება ადვილად დაიყვანება ფრედჰოლმის ეკვივალენტურ განტოლებაზე წინა თავში მითითებული ნებისმიერი ხერხის გამოყენებით.

ვიფარგლოთ (იხ. § 54). ადვილი დასანახავია, რომ (64,4) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0,t)}=0 \tag{64,7}$$

აქვს შემდეგი ამონახსნი:

$$\mu(t)=C_j\ L_j\text{-ზე},\quad \begin{array}{ll} j=0,1,\ldots,p & (\text{როდესაც } L_0 \text{ გვაქვს}),\\ j=1,2,\ldots,p & (\text{როდესაც } L_0 \text{ არ გვაქვს}),\end{array} \tag{64,8}$$

სადაც C_j ნებისმიერი (ნამდვილი) მუდმივებია. სხვა ამონახსნი ამ განტოლებას არ აქვს. მართლაც, აღვნიშნოთ $\mu(t)$-თი (64,7) განტოლების რაიმე ამონახსნი. მაშინ $0=\operatorname{Re}\Phi^+(t)=\operatorname{Im}\Psi^+(t)$, სადაც

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{i}\Phi(z),$$

რის გამო (§ 30, შენიშვნა 2), $\mu=C_j\ L_j$-ზე, რაც ასაბუთებს ჩვენს დებულებას[28].

იმის ანალოგიურად, როგორც მოვიქეცით § 61-ში ფრედჰოლმის განტოლების მიმართ, შევცვალოთ ჩვენი განტოლება შემდეგი განტოლებით:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\mu(t)\,\frac{dr}{r(t_0,t)}-\int\limits_{L}k(t_0,t)\,\mu(t)\,ds=f(t_0), \tag{64,9}$$

სადაც $k(t_0,t)$ შემდეგნაირადაა განსაზღვრული[29]:

$$k(t_0,t)=\begin{cases}\rho_j(t), & \text{როდესაც } t_0 \text{ და } t\ L_j\text{-ზე ძევს},\\ 0 & \text{ყველა სხვა შემთხვევაში},\end{cases} \tag{64,10}$$

$\rho_j(t)$ კი ნებისმიერი უწყვეტი (ნამდვილი) ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ ერთადერთ პირობას

$$\int\limits_{L_j}\rho_j\,ds\neq 0, \tag{64,11}$$

ხოლო $j=0,1,\ldots,p$, როდესაც L_0 გვაქვს, და $j=1,\ldots,p$, როდესაც L_0 არ გვაქვს.

ახლა თუ § 61-ში ჩატარებულ მსჯელობას გავიმეორებთ, დავასკვნით, რომ (64,9) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. მაშასადამე, ასევე არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამო-

---

[28] სხვათა შორის, შევნიშნოთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში $\operatorname{Im}\Psi^+=\operatorname{Im}\Psi^-$, რის გამოც $\operatorname{Im}\Psi(z)=0$, როგორც S^+, ასევე S^--ში.

[29] § 61-საგან განსხვავება იმაში გამოიხატება, რომ აქ $k(t_0,t)$ს ნულის ტოლად არ ვთვლით, როდესაც t_0 და t L_0-ზე ძევს. შეგვეძლო § 61-ის ანალოგიურად მოვქცეულიყავით, რაც მიგვიყვანდა რამდენადმე უფრო ზოგად ინტეგრალურ განტოლებამდე, რომელსაც თავისი უპირატესობანი გააჩნია, იხ. ნ. მუსხელიშვილი [3] და [4].

ნახსნები მის მიკავშირებულ განტოლებას (რადგანაც ჩვენს შემთხვევაში ინდექსი ნულის ტოლია) და (64,9) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია.

თუ ამოვხსნით (64,9) განტოლებას, მივიღებთ გარკვეულ $\mu(t)$ ფუნქციას, ხოლო a_j მუდმივები შემდეგი ფორმულებით განისაზღვრება:

$$a_j = \int\limits_{L_j} p_j \mu \, ds, \quad \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, p & (\text{როდესაც } L_0 \text{ გვაქვს}), \\ j = 1, \ldots, p & (\text{როდესაც } L_0 \text{ არ გვაქვს}). \end{matrix} \tag{64,12}$$

ამგვარად, ამოცანა ამოხსნილია. ცხადია, რომ უსასრულო არის შემთხვევაში ამონახსნი ქრება უსასრულობაში. თუ გვინდა, რომ სასრული არის შემთხვევაში u ფუნქცია L_0-ზე ზუსტად f-ის ტოლი იყოს, საკმარისია u-ს ნაცვლად ავიღოთ $u - a_0$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. იმის ანალოგიურად, როგორც ეს § 61-ში იყო ნაჩვენები, ადვილად დავადგენთ, რომ $k(t_0, t)$ დამხმარე გულის არჩევა მოქმედებს ინტეგრალური განტოლების $\mu(t)$ ამონახსნზე, მაგრამ ამ გულის შეცვლამ $\mu(t)$ ფუნქცია შეიძლება შეცვალოს მხოლოდ შესაკრებით, რომელიც ყოველ L_j კონტურზე მუდმივია.

a_j მუდმივები დამოუკიდებელია დამატებითი გულის არჩევისაგან. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ამ პარაგრაფის დასაწყისში დამტკიცებული ერთადერთობის თეორემიდან.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. § 62-ში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ S^+-ში ჰოლომორფული $\Psi(z)$ ფუნქცია ისეთია, რომ $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ არსებობს და H კლასს ეკუთვნის, მაშინ

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_L \frac{\nu(t)\,dt}{t - z} + C + iC'.$$

სადაც $\nu(t)$ H კლასის ნამდვილი ფუნქციაა, C და C' კი ნამდვილი მუდმივებია. C მუდმივი სავსებით განსაზღვრულია, ხოლო $\nu(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყოველ L_j კონტურზე მუდმივი შესაკრების სიზუსტით.

სასრული S^+ არის შემთხვევაში, თუ L_0 კონტურზე $\nu(t)$ ფუნქციას შესაფერისად შერჩეულ მუდმივს დავუმატებთ, შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ $C' = 0$ და მაშინ

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_L \frac{\nu(t)\,dt}{t - z} + C. \tag{64,13}$$

უსასრულო არის შემთხვევაში, ცხადია, გვექნება $C + iC' = \Psi(\infty)$ და ამიტომ

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_L \frac{\nu(t)\,dt}{t - z} + \Psi(\infty), \tag{64,14}$$

ამასთან $\nu(t)$ L_j კონტურებზე მუდმივ შესაკრებამდე სიზუსტითაა განსაზღვრული.

ეს შედეგები (რამდენადმე უფრო ზოგადი ფორმითაც კი) უშუალოდ მიიღება § 62-ის შედეგებიდან Ψ ფუნქციის $i\Psi$ ფუნქციით შეცვლით.

§ 65. დირიხლეს ამოცანის ამოხსნა მარტივი ფენის პოტენციალით. ელექტროსტატიკის ძირითადი ამოცანა. 1°. დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნიდან, რომელიც წინა პარაგრაფში იყო მიღებული, § 63-ში გამოყენებული მეთოდის ანალოგიური მეთოდით ადვილად მივიღებთ დირიხლეს კლასიკური ამოცანის ამოხსნას. გამეორების თავიდან ასაცილებლად ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით და მოვიყვანთ დირიხლეს ამოცანის უშუალო ამოხსნის ორ ხერხს: მარტივი ფენის სახეცვლილი პოტენციალის საშუალებით და მარტივი ფენის ჩვეულებრივი პოტენციალის საშუალებით; გზად მიღებული იქნება ელექტროსტატიკის ეგრეთ წოდებული ძირითადი ამოცანის ამოხსნა.

ვინაიდან მხედველობაში გვაქვს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენების მარტივი და თვალსაჩინო მაგალითის მოყვანა, განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, *როდესაც L შედგება ერთადერთი შეკრული კონტურისაგან, რომელიც სასრულ S^+ არეს შემოსაზღვრავს.*

ისევე როგორც ზემოთ, ვგულისხმობთ, რომ L აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას.

საძიებელია S^+-ში ჰარმონიული და $S^+ + L$-ში უწყვეტი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც L-ზე

$$u = f(t) \tag{65,1}$$

სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს, სადაც $f(t)$ L-ზე მოცემული ნამდვილი ფუნქციაა. წინანდებურად ვგულისხმობთ, რომ $f(t)$ H პირობას აკმაყოფილებს.

2°. *მარტივი ფენის სახეცვლილი პოტენციალის საშუალებით ამოხსნა.* ვეძებოთ ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t-z}, \tag{65,2}$$

სადაც $\mu(t)$ საძიებელი ნამდვილი ფუნქციაა, რომელიც H კლასს ეკუთვნის.

ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, (65,2)-ის (65,1)-ში ჩასმით ვღებულობთ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\, dr}{r(t_0, t)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\, ds = f(t_0). \tag{65,3}$$

ეს განტოლება (იხ. წინა პარაგრაფი) ნამდვილი სინგულარული განტოლებაა, რომლის ინდექსი ნულის ტოლია. გამოკვლევას ვაწარმოებთ ნამდვილ ფუნქციათა არეში (იხ. § 54). ცხადია, რომ ფუნქცია $\mu(t) = C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, წარმოადგენს (65,3)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\, ds = 0 \tag{65,4}$$

ამონახსნს. სხვა ამონახსნები ამ განტოლებას არ აქვს (იხ. წინა პარაგრაფი). მაშასადამე, მის მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებასაც

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(t)\,\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t, t_0)}\,ds = 0 \tag{65,5}$$

აქვს ერთადერთი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი (რადგანაც ინდექსი $\varkappa = 0$). ასე რომ, თუ $\nu_0(t)$ უკანასკნელი განტოლების იგივური ნულისაგან განსხვავებული რაიმე ამონახსნია, მაშინ სხვა ყველა ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $\nu(t) = C\nu_0(t)$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია[30].

სინგულარულ განტოლებათა ზოგადი თეორიის საფუძველზე[31] საწყის (65,3) განტოლებას მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ ექნება ამონახსნი, როდესაც

$$\int\limits_L \nu_0(t) f(t)\,ds = 0. \tag{65,6}$$

ამ პირობის შესრულებისას (65,3)-ის ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს:

$$\mu(t) = \mu_0(t) + C, \tag{65,7}$$

სადაც $\mu_0(t)$ რაიმე კერძო ამონახსნია, ხოლო C ნებისმიერი მუდმივია.

შევისწავლოთ უფრო დაწვრილებით (65,6) პირობა. § 14-ის შედეგის საფუძველზე (65,6) განტოლება შემდეგი განტოლების ეკვივალენტურია:

$$\frac{d}{d s_0}\int\limits_L \nu(t)\ln r(t_0, t)\,ds = 0$$

ან კიდევ

$$\int\limits_L \nu(t)\ln r(t_0, t)\,ds = \text{const}. \tag{65,8}$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$m_0 = \int\limits_L \nu_0(t)\,ds \neq 0. \tag{65,9}$$

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მარტივი ფენის პოტენციალი

$$U(x, y) = -\int\limits_L \nu_0(t)\ln|t - z|\,ds = \int\limits_L \nu_0(t)\ln\frac{1}{r(t, z)}\,ds \tag{65,10}$$

ჰარმონიული ფუნქცია იქნებოდა S^- არეში უსასრულოდ შორეული წერტილის ჩათვლით (ამით ჩვენ იმის თქმა გვინდა, რომ უსასრულობაში $U(x, y)$ გარკვეულ სასრულ მნიშვნელობას ღებულობს, ჩვენს შემთხვევაში ეს მნიშვნელობა ნულის ტოლია[32]).

---

[30] ჩვენ აქაც ნამდვილი ფუნქციებით შემოვიფარგლებით.

[31] იხ. § 54.

[32] დიდი $|z|$-სათვის გვაქვს

$$U(x, y) = -\int\limits_L \nu_0(t)\ln|t - z|\,ds = -\ln|z|\int\limits_L \nu_0(t)\,ds - \int\limits_L \nu_0(t)\ln\left|1 - \frac{t}{z}\right|ds =$$

$$= -\ln|z|\int\limits_L \nu_0(t)\,ds + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

გარდა ამისა, რადგანაც[33] (65,5)-ის საფუძველზე $U^- = U^+ = U = \text{const}$ L-ზე, გვექნებოდა, რომ $U(x, y) = \text{const}$, როგორც S^+-ში, ასევე S^--ში, მაგრამ პოტენციალის თეორიის ცნობილი ფორმულის თანახმად[34],

$$-2\pi\nu_0(t_0) = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^-, \tag{65,11}$$

სადაც n აღნიშნავს L კონტურის t_0 წერტილში მოდებულ მარცხნივ მიმართულ ნორმალს. მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში გვექნებოდა $\nu_0(t) = 0$ L-ზე, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

(65,9)-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველთვის შეიძლება ისეთი a_0 მუდმივის შერჩევა, რომ

$$\int_L (f + a_0)\nu_0\, ds = \int_L f\nu_0\, ds + a_0\int_L \nu_0\, ds = 0, \tag{65,12}$$

რაც

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\, ds = f(t_0) + a_0 \tag{65,13}$$

განტოლების ამოხსნადობის პირობას წარმოადგენს. თუ $\mu(t)$ ამ განტოლების რაიმე ამონახსნია (ყველა დანარჩენი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $\mu + \text{const}$), მაშინ ფუნქცია

$$U(x, y) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t-z} - a_0 = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\, dr}{r(z, t)} - a_0 \tag{65,14}$$

წარმოადგენს დირიხლეს საწყისი განტოლების ამონახსნს.

3°. *ელექტროსტატიკის ძირითადი ამოცანა.* გზად ამოვხსენით ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის შემდეგი ამოცანა:

S^+ არის L საზღვარზე ვიპოვოთ მასის ისეთი განაწილების $\nu(t)$ სიმკვრივე, რომ შესაბამისი პოტენციალი

$$U(x, y) = \int_L \nu(t)\ln\frac{1}{r}\, ds \tag{65,15}$$

მუდმივ მნიშვნელობას ღებულობდეს S^+-ში; აქ $r = r(t, z) = |t-z|$.

დასმული ამოცანა წარმოადგენს ორგანზომილებიან ანალოგს ელექტროსტატიკის ძირითადი ამოცანისა S^+ გამტარის L საზღვარზე ელექტრობის განაწილების შესახებ. ამ ამოცანას ჩვენს (ორგანზომილებიან) შემთხვევაშიც გააჩნია ფიზიკური შინაარსი. ეს ამოცანა მიახლოებით შეესაბამება ელექტრობის განაწილებას გრძელ ცილინდრულ გამტარზე, რომლის კვეთაა S^+.

---

[33] აქ ვსარგებლობთ მარტივი ფენის პოტენციალის ცნობილი თვისებით, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ იგი უწყვეტი რჩება L წირის გადაკვეთისას (ამისათვის საკმარისია, რომ $\nu_0(t)$ სიმკვრივე შემოსაზღვრული და ინტეგრებადი იყოს).

[34] (65,11) ფორმულის სამართლიანობისათვის საკმარისია, რომ $\nu_0(t)$ უწყვეტი იყოს.

თუ $U = \text{const}$ S^+-ში, მაშინ $U = \text{const}$ L-ზე და პირიქით. მაშასადამე, ამოცანა დაიყვანება ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებაზე

$$\int_L \nu(t) \ln r(t_0, t)\, ds = \text{const},$$

საიდანაც s_0-ით გაწარმოებით ვღებულობთ (65,5) განტოლებას.

ჩვენ ვნახეთ, რომ მას გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები და თუ $\nu_0(t)$ ერთ-ერთი მათგანია, ყველა სხვა მიიღება $\nu(t) = C\nu_0(t)$ ფორმულით. შესაბამისი პოტენციალი მოიცემა ფორმულით

$$U(x, y) = C\, U_0(x, y), \tag{65,16}$$

სადაც

$$U_0(x, y) = \int_L \nu_0(t) \ln \frac{1}{r}\, ds. \tag{65,17}$$

$U_0(x, y)$ პოტენციალი $S^+ + L$-ში მუდმივ მნიშვნელობას ღებულობს, რომელსაც k_0-ით აღვნიშნავთ

$$U_0(x, y) = k_0 \quad S^+ + L\text{-ში}. \tag{65,18}$$

შეიძლება მოხდეს, რომ $k_0 = 0$; ამ შემთხვევას განსაკუთრებული ვუწოდოთ.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩვენი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი (65,16) შეიცავს C მუდმივს. ამოცანა განსაზღვრული გახდება, თუ დამატებით მოცემულია L-ზე განაწილებული „მასის" ან „მუხტის" სიდიდე m

$$m = \int_L \nu(t)\, ds = C \int_L \nu_0\, ds = C\, m_0. \tag{65,19}$$

ეს თანადობა განსაზღვრავს C-ს, რადგანაც (65,9)-ის ძალით $m_0 \neq 0$.

m მასის ნაცვლად შეიძლება მოცემული იყოს $S^+ + L$-ზე $U(x, y)$ პოტენციალის მნიშვნელობა k. მაშინ C-ს განსაზღვრისათვის გვექნება თანაფარდობა $k = k_0 C$, რომელიც C-ს განსაზღვრავს ყოველთვის, გარდა განსაკუთრებული შემთხვევისა, როდესაც $k_0 = 0$ და, მაშასადამე, მაშინ, როდესაც $U(x, y) = 0$ $S^+ + L$-ზე ყველა C-სათვის. ამ განსაკუთრებულ შემთხვევას არ აქვს ანალოგი სამგანზომილებიან სივრცეში, ე. ი. ნიუტონის პოტენციალისათვის.

4°. დირიხლეს ამოცანის ამოხსნა მარტივი ფენის პოტენციალით. წინა ამოცანის უშუალო განზოგადებას წარმოადგენს მარტივი ფენის (65,15) პოტენციალის პოვნა L-ზე მოცემული $U = f(t)$ პირობით. ეს დირიხლეს ამოცანაა, ამასთან მოითხოვება ამონახსნის პოვნა მარტივი ფენის პოტენციალის საშუალებით. ამოცანა დაიყვანება ფრედჰოლმის პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$-\int_L \nu(t) \ln r(t_0, t)\, ds = f(t_0). \tag{65,20}$$

თუ გვსურს, რომ საძიებელმა $\nu(t)$ ამონახსნმა H პირობა დააკმაყოფილოს, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $f(t)$-ს აქვს s_0-ით წარმოებული, რომელიც H პირობას აკმაყოფილებს, რადგანაც, როგორც ადვილი შესამჩნევია, ეს თვისება აქვს (65,20)-ის მარცხენა მხარეს.

(65,20)-ის ორივე მხარის s_0-ით გაწარმოებით ვღებულობთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$-\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t,t_0)}{r(t,t_0)}\,ds=\frac{df}{ds_0}. \tag{65,21}$$

ეს განტოლება იმ (65,3) განტოლების მიკავშირებული განტოლებაა, რომელიც მივიღეთ დირიხლეს ამოცანის მარტივი ფენის სახეცვლილი პოტენციალით ამოხსნისას.

(65,21) განტოლების მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება იქნება (65,4) განტოლება, რომელსაც, როგორც ვიცით, გააჩნია ერთადერთი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი $\mu_0(t)=1$.

(65,21) განტოლების ამოხსნადობის პირობა ყოველთვის დაკმაყოფილებულია, ვინაიდან

$$\int_L \mu_0(t)\frac{df}{ds}\,ds=\int_L \frac{df}{ds}\,ds=0. \tag{65,22}$$

მაშასადამე, (65,21) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია. მის ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს:

$$\nu(t)=\nu^*(t)+C\nu_0(t), \tag{65,23}$$

სადაც $\nu^*(t)$ რაიმე კერძო ამონახსნია, $\nu_0(t)$ — შესაბამისი (65,5) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, C კი ნებისმიერი მუდმივია.

აღვნიშნოთ $\nu(t)$-თი (55.21) განტოლების რაიმე ამონახსნი. მაშინ (65,15) ფორმულით განსაზღვრული პოტენციალი დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$U=f(t_0)-k \quad L\text{-ზე}, \tag{65,24}$$

სადაც k გარკვეული მუდმივია. ამგვარად, ფუნქცია

$$u(x,y)=U(x,y)+k \tag{65,25}$$

არის დირიხლეს (65,1) ამოცანის ამონახსნი, წარმოდგენილი მარტივი ფენის პოტენციალისა და მუდმივის ჯამის სახით. მაგრამ თუკი მხოლოდ მარტივი ფენის პოტენციალით წარმოდგენილი ამონახსნის აგება გვინდა, მაშინ ისეთი მარტივი ფენის პოტენციალი უნდა ვიპოვოთ, რომელსაც L-ზე და, მაშასადამე, $S^+ + L$-ზეც მუდმივი k მნიშვნელობა ექნება. ეს კი, როგორც ვნახეთ, ყოველთვის ხერხდება, გარდა იმ განსაკუთრებული შემთხვევისა, როდესაც (65,18)-ში $k_0=0$.

(65,21) ინტეგრალური განტოლება მოცემული იყო გ. ბერტრანის მიერ (G. Bertrand [2]). მან ეს განტოლება დაიყვანა ფრედჰოლმის განტოლებაზე რეგულარიზაციის მეთოდით, რომელიც § 50-ში გადმოცემული მეთოდის ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას წარმოადგენს. მაგრამ, მიუხედავად ბევრი გამოთვლისა და $f(t)$

ფუნქციაზე და L კონტურზე დადებული მნიშვნელოვანი შეზღუდვებისა, ავტორმა (რომელსაც ხელთ არ ჰქონდა სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა ზოგადი თეორია) ვერ შეძლო განტოლების რამდენადმე სრულად ამოხსნა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 4° პუნქტის შედეგიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ იმ შემთხვევის გარდა, რომელსაც განსაკუთრებული ვუწოდეთ ($k_0 = 0$), S^+-ში ჰარმონიული ნებისმიერი ფუნქცია U, რომლის L-ზე სასაზღვრო მნიშვნელობის s-ით წარმოებული H პირობას აკმაყოფილებს, შემდეგი სახით წარმოიდგინება

$$U(x, y) = \int_L \nu(t) \ln \frac{1}{r(t, z)}\, ds, \tag{65,26}$$

სადაც $\nu(t)$ H კლასის ნამდვილი ფუნქციაა. ადვილი დასანახავია, რომ ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $U(x, y) = 0$ S^+-ში და, მაშასადამე, L-ზეც, მაშინ უსათუოდ $\nu(t) = 0$.

განსაკუთრებულ შემთხვევაში კი, როგორც ადვილი დასანახავია, ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$U(x, y) = \int_L \nu(t) \ln \frac{a}{r(t, z)}\, ds, \tag{65,27}$$

სადაც a ნებისმიერად დაფიქსირებული 1-საგან განსხვავებული დადებითი მუდმივია. ფიქსირებული a-სათვის ეს წარმოდგენა სავსებით განსაზღვრავს $\nu(t)$-ს, თუ $U(x, y)$ ფუნქცია მოცემულია.

გარდა ამისა, ადვილი დასანახავია, რომ ყ ვ ე ლ ა შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქცია, რომელიც ზემოთ ჩამოთვლილ პირობებს აკმაყოფილებს, (65,27) სახით წარმოდგენადია, თუ a სიდიდედ ავიღებთ ნებისმიერ დადებით ფიქსირებულ მუდმივს ისე, რომ

$$\int_L \nu_0(t) \ln \frac{a}{r(t_0, t)}\, ds = m_0 \ln a + k_0 \neq 0, \tag{65,28}$$

სადაც m_0 და k_0 შესაბამისად (65,9) და (65,18) ფორმულებიდან[35] განისაზღვრება.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ შემთხვევა, რომელსაც განსაკუთრებული ვუწოდეთ, არსებითად არავითარ გამონაკლისს არ წარმოადგენს. მას ადვილად შეიძლება დავაღწიოთ თავი სიგრძის ერთეულის შეცვლით.

ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ თუ S^+-ში ჰოლომორფული $\Psi(z)$ ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი $U(x, y)$ აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს, მაშინ $\Psi(z)$ წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$\Psi(z) = \int_L \nu(t) \ln \frac{a}{t - z}\, ds + iC, \tag{65,29}$$

---

[35] ამგვარად, a-ს არჩევა დამოკიდებულია მხოლოდ S^+ არეზე და არა წარმოსადგენ ჰარმონიულ ფუნქციაზე.

სადაც $\nu(t)$ H კლასის ნამდვილი ფუნქციაა, a დადებითი მუდმივაა, რომელიც (65,28) პირობას აკმაყოფილებს და, რომელიც S^+ არისათვის ერთხელ და სამუდამოდ შეიძლება დავაფიქსიროთ; C ნამდვილი მუდმივაა (რომელიც წარმოსადგენ ფუნქციაზეა დამოკიდებული). ვგულისხმობთ, რა თქმა უნდა, რომ ლოგარითმის მნიშვნელობები სათანადოდაა ფიქსირებული; იმის გარკვევას, თუ როგორ უნდა გაკეთდეს ეს, მკითხველს ვანდობთ (შდრ. ქვემოთ ფორმულა (69,2), როდესაც $m = 1$).

ფიქსირებული a-სათვის და ლოგარითმის გარკვეული შერჩევისას $\Psi(z)$ ფუნქცია სავსებით განსაზღვრავს $\nu(t)$ ფუნქციასა და C მუდმივს.

II. ჰოლომორფულ ფუნქციათა სხვადასხვა წარმოდგენები კოშის ტიპისა და მისი ანალოგიური ინტეგრალებით

ჰოლომორფული ფუნქციისათვის ამა თუ იმ სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთი ბუნებრივი ხერხი საძიებელი ფუნქციის კოშის ტიპის ან მისი ანალოგიური ინტეგრალით წარმოდგენაში მდგომარეობს. სასაზღვრო პირობაში ჩასმულ ამ წარმოდგენას ინტეგრალურ განტოლებამდე მივყავართ. სწორედ ამ მეთოდით ვსარგებლობდით ჩვენ წინა პარაგრაფებში დირიხლეს კლასიკური და სახეცვლილი ამოცანების ამოხსნისას.

რა თქმა უნდა, მეტად მნიშვნელოვანია საძიებელი ფუნქციის ამა თუ იმ წარმოდგენის მიზანშეწონილად ისე შერჩევა, რომ იგი მოხერხებული იყოს მოცემული ამოცანის ამოსახსნელად.

ამ განყოფილებაში მოვიყვანთ მოცემულ არეში ჰოლომორფულ ფუნქციათა ზოგიერთ უმარტივეს წარმოდგენას კოშის ტიპისა და მისი ანალოგიური ინტეგრალებით.

§ 66. ზოგადი შენიშვნები. ვთქვათ, S^+ (ბრტყელი) არეა, შემოსაზღვრული $L_0, L_1, \ldots, L_p$ გლუვ წირთა სასრული ერთობლიობით, რომელთაგან L_0 მოიცავს დანარჩენებს. L_0 წირი შეიძლება არ გვქონდეს და, მაშინ, S^+ არე უსასრულო იქნება. L-ით წინანდებურად აღვნიშნავთ $L_0, L_1, \ldots, L_p$ კონტურთა ერთობლიობას და, როგორც ყოველთვის, ვიგულისხმებთ, რომ L-ზე დადებითი მიმართულება S^+ არეს მარცხნივ ტოვებს, S^--ით კვლავ აღვნიშნავთ სიბრტყის იმ ნაწილს, რომელიც $S^+ + L$-ს სრულ სიბრტყემდე ავსებს. S^- შედგება შესაბამისად $L_1, \ldots, L_p$ კონტურებით შემოსაზღვრული $S_1^-, \ldots, S_p^-$ სასრული არეებისაგან და L_0 კონტურით შემოსაზღვრული უსასრულო S_0^- არისაგან. თუ L_0 კონტური არა გვაქვს, მაშინ არც S_0^- არე გვექნება.

ვთქვათ, $\Phi(z)$ S^+-ში ჰოლომორფული და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქციაა და ვთქვათ, უსასრულო არის შემთხვევაში $\Phi(\infty) = 0$. ეს ფუნქცია ყოველთვის წარმოდგენადია კოშის ინტეგრალით

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\Phi^+(t)\, dt}{t - z}, \qquad (66,1)$$

რომელიც კოშის ტიპის ინტეგრალის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს.

ბუნებრივად ისმის საკითხი იმავე $\Phi(z)$ ფუნქციის კოშის ტიპის ინტეგრალით ისეთი წარმოდგენის შესაძლებლობის შესახებ, სადაც $\Phi^+(t)$ ფუნქციის ნაცვლად მონაწილეობას მიიღებს საზღვრის წერტილის რაიმე სხვა ფუნქცია. ეს საკითხი დაიყვანება შემდეგზე: *როგორია იმის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომ*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-z}, \tag{66,2}$$

ინტეგრალები, სადაც $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ კონტურის წერტილის უწყვეტი ფუნქციებია, წარმოადგენს S^+ არეში ერთსა და იმავე ჰოლომორფულ ფუნქციას?

ამ კითხვაზე ადვილია პასუხის გაცემა. სახელდობრ, პირობის თანახმად, უნდა გვქონდეს

$$\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-z}\,dt = 0$$

ყველა z-სათვის S^+-ში. მაშინ, § 29-ში თქმულის საფუძველზე

$$\varphi(t)-\psi(t) = \Omega^-(t), \tag{66,3}$$

სადაც $\Omega^-(t)$ S^--ში ჰოლომორფული, L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი და, თუ L_0 კონტური გვაქვს, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობაა. ცხადია, რომ, თუ, პირიქით, ადგილი აქვს (66,3)-ს, მაშინ $\Phi(z) = \Psi(z)$ S^+-ში.

არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ $\Omega(z)$ წარმოადგენს შესაბამისად $S_1^-, \ldots, S_p^-$-ში ჰოლომორფული $\Omega_1(z), \ldots, \Omega_p(z)$ ფუნქციებისა და S^--ში (როცა L_0 კონტური გვაქვს) ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი $\Omega_0(z)$ ფუნქციის ერთობლიობას.

თუ უსასრულო არის შემთხვევაში $\Phi(\infty) \neq 0$, მაშინ (66,1) წარმოდგენის ნაცვლად გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z} + \Phi(\infty), \tag{66,1ა}$$

და, მაშასადამე, ასეთი ფუნქცია უამრავი ხერხით შეიძლება წარმოვადგინოთ კოშის ტიპის ინტეგრალით მუდმივი შესაკრების სიზუსტით.

სავსებით ანალოგიურ შედეგებს მივიღებთ, თუ S^+-ს და S^--ს როლებს შევუცვლით.

§ 67. ნამდვილ ან წმინდა წარმოსახვით სიმკვრივიანი კოშის ტიპის ინტეგრალით წარმოდგენა. თუ ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფის $\Omega(z)$ ფუნქციის ნებისმიერობით, შევძლებთ მოცემული ჰოლომორფული ფუნქციის წარმომდგენ კოშის ტიპის ინტეგრალს მივცეთ სხვადასხვა, ამა თუ იმ თვალსაზრისით, მოხერხებული სახე.

§ § 62 და 64-ში უკვე შევხვდით მოცემულ არეში ჰოლომორფული ფუნქციების უმარტივეს წარმოდგენებს კოშის ტიპის ინტეგრალით. ამ პარაგრაფში დავუბრუნდებით ხსენებულ წარმოდგენებს წინა პარაგრაფის მასალასთან დაკავშირების მიზნით.

L-ის, S^+-ის და S^--ის ქვეშ იგივე გვესმის, რაც წინა პარაგრაფში, მაგრამ, ამას გარდა, ვგულისხმობთ, რომ L აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას, ე. ი. L-ის მხების მიერ რაიმე მუდმივ მიმართულებასთან შექმნილი კუთხე H პირობას აკმაყოფილებს.

1. დავუშვათ ჯერ, რომ S^+ სასრული არეა, ე. ი. L_0 კონტური გვაქვს და ვთქვათ $\Phi^+(z)$ S^+ არეში ჰოლომორფული და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქციაა.

§ 62-ში ვნახეთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია წარმოდგენადია შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + Ci = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)+Ci}{t-z}\,dt, \tag{67,1}$$

სადაც $\mu(t)$ ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო C ნამდვილი მუდმივია[38].

მეორე მხრივ $\Phi(z)$ წარმოდგენადია კოშის ინტეგრალით

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}. \tag{67,2}$$

მაშასადამე, წინა პარაგრაფში თქმულის საფუძველზე, არსებობს S^- არეში ჰოლომორფული, L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი, უსასრულობაში ქრობადი ისეთი $\Omega(z)$ ფუნქცია, რომ

$$\Phi^+(t) = \mu(t) + Ci + \Omega^-(t). \tag{67,3}$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\Phi(z) = U(x,y) + iV(x,y), \quad \Omega(z) + Ci = u(x,y) + iv(x,y), \tag{67,4}$$

(67,3)-ის საფუძველზე გვექნება

$$v^- = V^+ \quad L\text{-ზე}. \tag{67,5}$$

რადგანაც $\Phi(z)$ ფუნქცია მოცემულია S^+-ში, ამიტომ V^+-ის მნიშვნელობები L-ზე შეგვიძლია მოცემულად ჩავთვალოთ. მაშასადამე, v ფუნქციას $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$ არეებში ვიპოვით ამ არეებისათვის დირიხლეს ამოცანის ამოხსნით, რის შემდეგაც შეგვიძლია $\Omega(z)$ ფუნქციის $\Omega_0(z), \Omega_1(z), \ldots, \Omega_p(z)$ მნიშვნელობების განსაზღვრა ამ არეებში. ცხადია, რომ $\Omega_0(z)$-ის მნიშვნელობა სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ გავითვალისწინებთ $\Omega(\infty) = 0$ პირობას. ასევე განისაზღვრება C მუდმივის მნიშვნელობაც, რომელიც, ცხადია, v ფუნქციის უსასრულობაში მნიშვნელობის ტოლია. $\Omega_1(z), \Omega_2(z), \ldots \Omega_p(z)$ მნიშვნელობები განისაზღვრება მუდმივი შესაკრებების სიზუსტით.

ამის შემდეგ (67,3) ფორმულის საფუძველზე, $\mu(t)$-ს მნიშვნელობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\mu(t) = U^+ - u^-. \tag{67,6}$$

ერთხელ კიდევ დავინახეთ, რომ $\mu(t)$ L_0-ზე სავსებით ჭარის განსაზღვრული, ხოლო $L_1, \ldots, L_p$ კონტურებზე — მუდმივი (ნამდვილი) შესაკრებების სიზუსტით.

---

[38] როგორც § 62-ში ვნახეთ (67,1) წარმოდგენას მხოლოდ მაშინ კი არა აქვს ადგილი, როდესაც $\Phi(z)$ უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე, არამედ მაშინაც, როდესაც მხოლოდ $\mathrm{Re}\,\Phi(z)$-ს აქვს ეს თვისება.

§ 62-ში $\mu(t)$ ფუნქციის განსაზღვრა დაკავშირებული იყო ინტეგრალური განტოლების ამოხსნასთან, რაც თავის მხრივ უკავშირდებოდა მრავლადბმული S^+ არისათვის (როცა $p > 0$) დირიხლეს ამოცანის ამოხსნას. აქ კი $\mu(t)$ განისაზღვრება ცალადბმული $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$ არეებისათვის დირიხლეს ამოცანის ამოხსნით. მაგრამ § 62-ში $\Phi(z)$ ფუნქცია უფრო ზოგადი პირობებით შევზღუდეთ, ვიდრე ახლა: იქ მხოლოდ იმას მოვითხოვდით, რომ $\Phi(z)$-ის ნამდვილი ნაწილი უწყვეტად გაგრძელებადი ყოფილიყო კონტურზე, აქ კი მოვითხოვთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქციის როგორც ნამდვილი, ასევე წარმოსახვითი ნაწილი უწყვეტად გაგრძელებადი იყოს კონტურზე.

2°. თუ S^+ არე უსასრულოა, ე. ი. L_0 კონტური არ გვაქვს, მაშინ როგორც § 62-ში იყო ნაჩვენები, ყოველი S^+ არეში ჰოლომორფული და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქცია $\Phi(z)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + \Phi(\infty), \tag{67,7}$$

სადაც $\mu(t)$ ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა[37]. აქაც, ზემოთქმულის ანალოგიურად, $\mu(t)$-ს პოვნა შეიძლება დავიყვანოთ დირიხლეს ამოცანის ამოხსნაზე. სასრული ცალადბმული $S_1^-, \ldots, S_p^-$ არეებისათვის $\mu(t)$ ფუნქცია $L_1, \ldots, L_p$ კონტურებზე მუდმივი შესაკრების სიზუსტითაა განსაზღვრული.

3°. თუ $\Phi(z)$-ს შევცვლით $i\Phi(z)$-ით, მაშინ, როგორც § 64-ის შენიშვნა 2-ში იყო მითითებული, S^+-ში ჰოლომორფული და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი $\Phi(z)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენას:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{t-z} + C, \tag{67,8}$$

თუ S^+ სასრული არეა და

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{t-z} + \Phi(\infty), \tag{67,9}$$

თუ S^+ უსასრულო არეა. ამ ფორმულებში $\nu(t)$ ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, C კი მუდმივია. $\nu(t)$ ცალსახადაა განსაზღვრული L_0 კონტურზე, ხოლო $L_1, \ldots, L_p$ კონტურებზე — მუდმივი შესაკრების სიზუსტით. C მუდმივი სავსებით განსაზღვრულია[38].

$\nu(t)$-ს განსაზღვრა სავსებით ანალოგიურია $\mu(t)$-ს განსაზღვრისა ზემოთ განხილულ შემთხვევებში.

§ 68. $(a+ib)\mu$ სახის სიმკვრივიანი კოშის ტიპის ინტეგრალით წარმოდგენა. წინა პარაგრაფში მოყვანილი წარმოდგენები კერძო შემთხვევებია შემდეგი სახის წარმოდგენისა:

---

[37] (67,7) წარმოდგენას მაშინაც აქვს ადგილი, როდესაც მხოლოდ $\mathrm{Re}\,\Phi(z)$ არის L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი.

[38] (67,8) და (67,9) წარმოდგენებს მაშინაც აქვს ადგილი, როდესაც მხოლოდ $\mathrm{Im}\,\Phi(z)$ არის L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი. ეს გამომდინარეობს § 62-ის შედეგებიდან.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(a + ib)\,\mu(t)\,dt}{t - z} + C, \tag{68,1}$$

სადაც $a = a(t)$, $b = b(t)$ მოცემული (Φ-გან დამოუკიდებელი) ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციებია, ისეთი, რომ $a^2 + b^2 \neq 0$ L-ზე, $\mu(t)$ ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც, ისევე როგორც C მუდმივი, Φ-ს შესაბამისად უნდა იქნეს შერჩეული. როცა $a = 1$, $b = 0$ და C სათანადოდ არის შერჩეული, ვღებულობთ წინა პარაგრაფის (67,1) და (67,7) წარმოდგენებს; ხოლო $a = 0$, $b = 1$ და შესატყვისი C-სათვის — (67,8) და (67,9) წარმოდგენებს.

ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, ვიგულისხმოთ, რომ L წირის მხების მიერ რაიმე მუდმივ მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე H პირობას აკმაყოფილებს. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ H პირობას აკმაყოფილებს მოცემული $a(t)$ და $b(t)$ ფუნქციებიც.

ვიგულისხმოთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე და $\Phi^+(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას.

დავიწყოთ იმ შემთხვევით, როდესაც S^+ სასრული არე, ე. ი. L_0 კონტური გვაქვს.

მაშინ (68,1) ფორმულა შემდეგნაირად შეიძლება გადავწეროთ:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(a + ib)\,\mu(t) + C}{t - z}\,dt. \tag{*}$$

§ 66-ის ნათქვამის საფუძველზე, იმისათვის, რომ (*) წარმოდგენა მივიღოთ, საჭიროა S^--ში ჰოლომორფული L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი და უსასრულობაში ქრობადი ისეთი $\Omega(z)$ ფუნქცია ვიპოვოთ, რომ

$$\Phi^+(t) = (a + ib)\,\mu(t) + C + \Omega^-(t) \quad L\text{-ზე}. \tag{68,2}$$

თუ აღვნიშნავთ

$$iC + i\,\Omega(z) = \omega(z), \tag{68,3}$$

მივიღებთ

$$\mathrm{Re}\,\frac{\omega^-(t)}{a + ib} = \mathrm{Re}\,\frac{i\,\Phi^+(t)}{a + ib}$$

ან კიდევ

$$\mathrm{Re}\,(a - ib)\,\omega^-(t) = \mathrm{Re}\,i\,(a - ib)\,\Phi^+(t). \tag{68,4}$$

ამგვარად, რადგანაც (68,4)-ის მარჯვენა მხარე L-ზე მოცემული ფუნქციაა, თუკი $\Phi(z)$ მოცემულია S^+-ში, ამიტომ $\omega(z)$-ისა და, მაშასადამე, $\Omega(z)$-ის განსაზღვრა დაიყვანება $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$ (ცალადბმული) არეებისათვის რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნაზე.

ავიღოთ S_j^- არეთაგან რომელიმე. ამ არისათვის რიმან—ჰილბერტის ამოცანა

ყოველთვის ამოხსნადი იქნება, თუ შესაბამისი ინდექსი $\varkappa$ არაუარყოფითია. ეს ინდექსი მოიცემა შემდეგი ფორმულით (იხ. § 43-ის ბოლოს[39]):

$$\varkappa_j = \frac{1}{\pi}\left[\arg(a - i b)\right]_{L_j}. \tag{68,5}$$

ამგვარად, (68,1) წარმოდგენა ყოველთვის შესაძლებელია, თუ ყველა $\varkappa_j \geqslant 0$. იმ შემთხვევაში, როდესაც ზოგიერთი $\varkappa_j$ უარყოფითია, ასეთი წარმოდგენა მხოლოდ მაშინ იქნება შესაძლებელი, როდესაც $\Phi(z)$ დააკმაყოფილებს გარკვეულ დამატებით პირობებს, რომლებზეც არ შევჩერდებით.

უსასრულო S^+ არის შემთხვევაში ადგილი აქვს სავსებით ანალოგიურ შედეგებს. ამ შემთხვევაში C მუდმივი თავიდანვე განისაზღვრება

$$C = \Phi(\infty). \tag{68,6}$$

თუ $\Phi(z) - \Phi(\infty)$ ფუნქციისათვის ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურ მსჯელობას ჩავატარებთ, მივალთ (68,4) რიმან—ჰილბერტის ამოცანებზე $S_1^-, \ldots; S_p^-$ სასრული ცალადბმული არეებისათვის.

ეს ამოცანები ყოველთვის ამოხსნადია, თუ ყველა $\varkappa_j \geqslant 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში წარმოდგენა მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როდესაც $\Phi(z)$ აკმაყოფილებს გარკვეულ დამატებით პირობებს.

შემდეგ პარაგრაფში გზადაგზა დაწვრილებით განვიხილავთ (68,1) სახის ერთ წარმოდგენას.

§ 69. ი. ვეკუასეული ინტეგრალური წარმოდგენები. მრავალი მნიშვნელოვანი ამოცანის სასაზღვრო პირობაში მონაწილეობენ არა მარტო საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობანი, არამედ მნიშვნელობანიც მისი წარმოებულებისა რომელიმე რიგამდე. ამის გამო საჭირო ხდება ხელთ გვქონდეს ისეთი ფორმულები, რომლებიც აღებული ჰოლომორფული ან უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის წარმოებულების ინტეგრალურ წარმოდგენას მოგვცემდა. მრავალრიცხოვანი გამოყენებისათვის ფრიად სასარგებლო ერთ-ერთი ასეთი წარმოდგენა, რომელსაც ქვემოთ მოვიყვანთ, ი. ვეკუას ეკუთვნის[40].

1°. ვთქვათ, ჯერ, S^+ ლიაპუნოვის L კონტურით შემოსაზღვრული სასრული ცალადბმული არეა. S^--ით აღვნიშნოთ არე, რომელიც $S^+ + L$-ს ავსებს სრულ სიბრტყემდე.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება (ი. ვეკუა):

---

[39] (43,3) ფორმულის გამოყენებისას უნდა გვახსოვდეს, რომ ჯერ ერთი, მასში b უნდა შევცვალოთ $-b$-თი; ამას გარდა, ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში L_j კონტურის დადებითი მიმართულება განსახილველ S_j^- არეს მარჯვნივ ტოვებს, ამიტომ ხსენებული ფორმულის მარჯვენა მხარეში ნიშანი უნდა შევცვალოთ. ამიტომ გვექნება

$$\varkappa_j = -\frac{1}{\pi}\left[\arg(a+ib)\right]_{L_j} = +\frac{1}{\pi}\left[\arg(a - i b)\right]_{L_j},$$

ე. ი. ვღებულობთ ფორმულას, რომელიც გარეგნულად ემთხვევა (43,3)-ს.

[40] შემდგომში დ. შერმანმა [5], ი. კრაკუნოვმა [1] — [3], მ. განინმა [3], რ. ისახანოვმა [1], [2], ე. ხასაბოვმა [1] და ვ. როგოჟინმა [2] მოგვცეს სხვა ანალოგიური წარმოდგენები.

თეორემა. ვთქვათ S^+ არეში ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქციის m-ური რიგის წარმოებული L-ზე H კლასის მნიშვნელობებს ღებულობს. მაშინ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატთა სათავე S^+-ში ძევს, ადგილი ექნება $\Phi(z)$ ფუნქციის შემდეგ ინტეგრალურ წარმოდგენას; როდესაც $m=0$

$$\Phi(z) = \int\limits_L \frac{\mu(t)\,ds}{1-\dfrac{z}{t}} + iC; \tag{69,1}$$

როდესაც $m \geqslant 1$

$$\Phi(z) = \int\limits_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right) ds + \int\limits_L \mu(t)\,ds + iC, \tag{69,2}$$

სადაც $\mu(t)$ H კლასის ნამდვილი ფუნქციაა, C კი — ნამდვილი მუდმივი. $\mu(t)$ და C ცალსახად განისაზღვრება $\Phi(z)$-ის საშუალებით[41].

აღებული t-სათვის $\ln\left(1-\dfrac{z}{t}\right)$-ს ქვეშ იგულისხმება შტო, რომელიც ნულის ტოლი ხდება, როდესაც $z=0$. s აღნიშნავს რკალურ აბსცისს.

თეორემის დამტკიცება დავიწყოთ $m=0$ შემთხვევის განხილვით. თუ შევნიშნავთ, რომ

$$ds = t'^{-1}dt = \bar{t}'\,dt,$$

სადაც

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}, \quad \bar{t}' = \frac{dx}{ds} - i\frac{dy}{ds} = t'^{-1}, \tag{69,3}$$

ფორმულა (69,1) შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\pi i\,\mu(t)\,t\,\bar{t}'\,dt}{t-z} + iC = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\pi i\,\mu\,t\,\bar{t}' + iC}{t-z}\,dt.$$

აქედან, წინა პარაგრაფში თქმულის საფუძველზე, ვადგენთ, რომ ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ ტოლობას:

$$2\pi i\,t\,\bar{t}'\,\mu(t) = \Phi^+(t) - \Omega^-(t) - iC, \tag{69,4}$$

სადაც $\Omega^-(t)$ S^--ში ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობაა. აღვნიშნოთ $\Omega_0(z) = \Omega(z) + iC$. $\Omega_0(z)$ ფუნქცია უსასრულობაში წმინდა წარმოსახვით მნიშვნელობას უნდა ღებულობდეს და შემდეგ L-ზე სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებდეს:

$$\operatorname{Re}\frac{\Omega_0^-(t)}{t\,\bar{t}'} = \operatorname{Re}\frac{\Phi^+(t)}{t\,\bar{t}'}.$$

---

[41] ბ. ხვედელიძემ [18] ეს თეორემა გაავრცელა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $\Phi(z)$ ფუნქციის m-ური რიგის წარმოებული S^+ არეში წარმოდგენადია კოშის ტიპის ინტეგრალით, რომლის სიმკვრივე $L_p(\rho; L)$, $p>1$ კლასს ეკუთვნის (იხ. § 27-ის აღნიშვნები), ხოლო $\rho(t)$ (27,3) სახის ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში $\mu(t)$-ც $L_p(\rho; L)$ კლასს ეკუთვნის.

ამგვარად, S^- არისათვის გვაქვს რიმან—ჰილბერტის ამოცანა

$$\operatorname{Re}(a - i\,b)\,\Omega_0^-(t) = c, \tag{69,5}$$

სადაც

$$a - i\,b = a(t) - i\,b(t) = \frac{1}{t\,\bar{t}'} = \frac{t'}{t}, \quad c = c(t) = \operatorname{Re}\frac{\Phi^+(t)}{t\,\bar{t}'};$$

ჩვენს პირობებში $a(t)$, $b(t)$ და $c(t)$, ცხადია, აკმაყოფილებს H პირობას.

ადვილი დასანახავია, რომ შესაბამისი ინდექსი ნულის ტოლია, რის გამოც § § 41 და 43-ის საფუძველზე (69,5) ამოცანას ყოველთვის აქვს ამონახსნი, რომელიც შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$\Omega_0(z) = \omega(z) + A\,\chi(z),$$

სადაც $\omega(z)$ (69,5) ამოცანის გარკვეული კერძო ამონახსნია, $\chi(z)$ ფუნქცია

$$\operatorname{Re}\frac{t'}{t}\,\chi^-(t) = 0 \tag{69,6}$$

სასაზღვრო პირობით განსაზღვრული ერთგვაროვანი ამოცანის კერძო ამონახსნია, ხოლო A ნამდვილი მუდმივია.

დაგვრჩა შევარჩიოთ A მუდმივი ისე, რომ $\operatorname{Re}\Omega_0(\infty) = 0$, ე. ი. $\operatorname{Re}[\omega(\infty) + A\chi(\infty)] = 0$. ეს ყოველთვის შესაძლებელია, ვინაიდან $\chi(\infty)$ ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი სიდიდეა. მართლაც, $\chi(\infty) \neq 0$, რადგანაც ნულოვანინდექსიანი რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამონახსნი ყველგან განსხვავებულია ნულისაგან[42]. დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ $\operatorname{Im}\chi(\infty) = 0$, ეს გამომდინარეობს (69,6) ფორმულიდან, რომელიც გვაძლევს

$$0 = \operatorname{Re}\int_L \frac{\chi^-(t)\,t'\,ds}{t} = \operatorname{Re}\int_L \frac{\chi^-(t)\,dt}{t} = \operatorname{Re}[2\pi i\,\chi(\infty)].$$

ამრიგად, A მუდმივა სავსებით განისაზღვრა. გარდა ამისა, რადგანაც $\Omega_0^-(t)$ H პირობას აკმაყოფილებს[43], (69,4) ფორმულით განსაზღვრული $\mu(t)$ ფუნქციაც დააკმაყოფილებს ამ პირობას.

ამგვარად, $m = 0$ შემთხვევაში[44] თეორემა დამტკიცებულია. ჩვენი მსჯელობის მსვლელობიდან ცხადია, რომ $\mu(t)$ და C ცალსახად განისაზღვრება $\Phi(z)$-ით. (69,1) წარმოდგენის ერთადერთობა შეიძლება უშუალოდაც ადვილად დამტკიცდეს, ამასთან, საკმარისია დავუშვათ, რომ $\mu(t)$ უწყვეტი (ნამდვილი) ფუნქციაა (იხ. ქვემოთ).

გადავიდეთ თეორემის დამტკიცებაზე $m \geqslant 1$ შემთხვევაში. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ (69,2) ფორმულის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს S^+ არეში

---

[42] მართლაც, წრიული არისათვის ეს უშუალოდ გამომდინარეობს § 41-ის ფორმულებიდან. ნებისმიერი არისათვის ეს თვისება, ცხადია, ძალაში რჩება, რადგანაც კონფორმული ასახვა მასზე გავლენას არ ახდენს.

[43] იხ. § 43 შენიშვნა 1.

[44] ტექსტში მოყვანილი დამტკიცება განსხვავდება ი. ვეკუასეულ დამტკიცებისაგან. მომდევნო მსჯელობა ($m \geqslant 1$ შემთხვევაში) მიჰყვება ი. ვეკუას დამტკიცებას [8].

ჰოლომორფულ ფუნქციას, რომლის m-ური რიგის წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობები H პირობას აკმაყოფილებს, როდესაც $\mu(t)$ აკმაყოფილებს ამ პირობას. მართლაც, m-ჯერ გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\Phi^{m}(z) = (-1)^{m}(m-1)!\int_{L}\frac{\mu(t)\,ds}{t^{m-1}(t-z)} = (-1)^{m}(m-1)!\int_{L}\frac{\mu(t)\bar{t}'\,dt}{t^{m-1}(t-z)},$$

საიდანაც § 18 თეორემის საფუძველზე გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ, თუ (69,2) წარმოდგენას ადგილი აქვს, მაშინ $\mu(t)$ ფუნქცია და C მუდმივი ცალსახად განისაზღვრება $\Phi(z)$ ფუნქციით. ეს შემდეგ დებულებაზე დაიყვანება, თუ

$$\int_{L}\mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds + \int_{L}\mu(t)\,ds + iC = 0 \qquad (69,7)$$

ყველა z-სათვის S^{+}-ში, მაშინ აუცილებლად $\mu(t)=0$ (და, მაშასადამე, $C=0$). ვაჩვენოთ ამ უკანასკნელი დებულების სამართლიანობა. დამტკიცებისას საკმარისია ჩავთვალოთ, რომ $\mu(t)$ უწყვეტი (ნამდვილი) ფუნქციაა.

თუ (69,7)-ის მარცხენა მხარეს გავშლით მწკრივად $z=0$ წერტილის მიდამოში z-ის ხარისხებად, მივიღებთ

$$0 = \int_{L}\mu(t)\,t^{-k}\,ds = \int_{L}\mu(t)\,\bar{t}'\,t^{-k}\,dt, \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (69,8)$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ კოშის ტიპის ინტეგრალი

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\mu(t)\,\bar{t}'\,dt}{t-z}$$

ნულის ტოლია ყველა z-სათვის S^{+}-ში. ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია გავშალოთ $\omega(z)$ $z=0$ წერტილის მიდამოში z-ის ხარისხების მიხედვით და გავითვალისწინოთ (69,8). მაშასადამე, $\omega^{+}(t)=0$ და ე. ი.

$$\mu(t)\,\bar{t}' = -\omega^{-}(t). \qquad (69,9)$$

თუ (69,8)-ში $k=0$, მივიღებთ, რომ უსასრულოდ შორეული წერტილის მიდამოში ადგილი აქვს შემდეგი სახის გაშლას:

$$\omega(z) = \frac{a_{-2}}{z^{2}} + \frac{a_{-3}}{z^{3}} + \cdots,$$

და, მაშასადამე, ფუნქცია

$$\omega_0(z) = \int_{z_0}^{z}\omega(z)\,dz,$$

სადაც z_0 $S^{-}+L$-ს არეში ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილია, ხოლო ინტეგრალი აიღება ამ არეში ნებისმიერი გზის გასწვრივ, წარმოადგენს ჰოლომორფულ

ფუნქციას S^- არეში $z = \infty$ წერტილის ჩათვლით. თუ z_0 წერტილს ავიღებთ L-ზე (69,9)-დან მივიღებთ

$$\omega_0^-(t) = \int\limits_{z_0}^{t} \omega^-(t)\,dt = -\int\limits_{0}^{s} \mu(t)\,ds$$

(ვგულისხმობთ, რომ რკალური აბსცისა z_0-დან არის ათვლილი); აქედან გამომდინარეობს, რომ $\operatorname{Im}\omega_0^-(t) = 0$ L-ზე და ამიტომ $\omega_0(z) = \mathrm{const}$ S^--ში, $\omega(z) = \omega_0'(z) = 0$ S^--ში და, მაშასადამე, $\mu(t) = 0$, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას (69,2) წარმოდგენის ერთადერთობის შესახებ. ზუსტად ასეთივე დამტკიცება გამოდგება (69,1) წარმოდგენისათვის.

სანამ განვაგრძობდეთ, შევთანხმდეთ შემდეგში: *მთელ ამ პარაგრაფში რაიმე (ნამდვილი ან კომპლექსური) ფუნქციების წრფივი კომბინაციის ქვეშ ყოველთვის ვიგულისხმებთ ნამდვილ-(მუდმივ) კოეფიციენტებიან წრფივ კომბინაციას და მის შესაბამისად განვსაზღვრავთ ფუნქციათა წრფივ დამოკიდებულებას თუ დამოუკიდებლობას.*

ამ შეთანხმების შემდეგ $\Phi(z)$ ფუნქციის (69,1) ან (69,2) სახით წარმოდგენის ახლახან დამტკიცებული ერთადერთობის თვისების საფუძველზე შეგვიძლია უშუალოდ ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულება:

ვთქვათ $\mu_j(t)$ რაიმე უწყვეტი ნამდვილი ფუნქციებია. ვიგულისხმოთ, რომ $z \in S^+$ და ავიღოთ

$$\Phi_j(z) = \int\limits_L \frac{\mu_j(t)\,ds}{1 - \dfrac{z}{t}} \tag{69,1ა}$$

ან

$$\Phi_j(z) = \int\limits_L \mu_j(t)\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int\limits_L \mu_j(t)\,ds \quad (m \geqslant 1) \tag{69,2ა}$$

(მომდევნო ტექსტში იგულისხმება ამ ფორმულებიდან ერთ-ერთი).

მაშინ $\mu_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ფუნქციების წრფივი დამოკიდებულებიდან ან დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს $\Phi_j(z)$ ფუნქციების წრფივი დამოკიდებულება ან დამოუკიდებლობა (და პირიქით).

ამ წინასწარი შენიშვნების შემდეგ შევუდგეთ (69,2) წარმოდგენის შესაძლებლობის დამტკიცებას. ვთქვათ, პირობის თანახმად, $\Phi(z)$ მოცემული, S^+ არეში ჰოლომორფული ისეთი ფუნქციაა, რომ $[\Phi^{(m)}(t)]^+$ არსებობს და აკმაყოფილებს H პირობას. თუ (69,2) წარმოდგენას ადგილი აქვს, მაშინ მისი m-ჯერ გაწარმოებით და ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $z \to t_0$ (S^+-დან), მივიღებთ

$$\Phi^{(m)}(t_0) = (-1)^m (m-1)!\,\pi i\, t_0^{1-m}\,\bar{t}_0'\,\mu(t_0) + (-1)^m (m-1)! \int\limits_L \frac{\mu(t)\,ds}{t^{m-1}(t - t_0)},$$

სადაც $\Phi^m(t)$-თი აღნიშნულია $[\Phi^m(t)]^+$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $(-1)^m (m-1)!\,\pi i\,\bar{t}_0'\,t_0^{1-m}$-ზე და გავითვალისწინებთ, რომ $t'\bar{t}' = 1$, მივიღებთ

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{t_0^{m-1} t_0' \mu(t)\, ds}{t^{m-1}(t-t_0)} = \frac{t_0^{m-1} t_0' \Phi^m(t_0)}{(-1)^m (m-1)!\,\pi i}, \tag{69,10}$$

საიდანაც ნამდვილი ნაწილების შედარებით ვღებულობთ

$$\mu(t_0) + \int\limits_L \operatorname{Re}\frac{t_0^{m-1} t_0'}{\pi i\, t^{m-1}(t-t_0)}\,\mu(t)\, ds = \operatorname{Re}\frac{t_0^{m-1} t_0' \Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m (m-1)!\,\pi i}. \tag{69,11}$$

ეს უკანასკნელი, როგორც ადვილი დასანახავია, წარმოადგენს ფრედჰოლმის ნამდვილ განტოლებას, რომლის გულს შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{K^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{*}$$

სადაც $K^*(t_0, t)$ H პირობას აკმაყოფილებს[45].

ამ განტოლების მარჯვენა მხარე აგრეთვე აკმაყოფილებს H პირობას. ამიტომ განტოლების ნებისმიერი უწყვეტი ამონახსნი H კლასს მიეკუთვნება (§ 51).

ვაჩვენოთ (69,11) ფრედჰოლმის განტოლების ამოხსნადობა. ამისათვის განვიხილოთ მისი მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება

$$\nu(t_0) + \int\limits_L \operatorname{Re}\left[\frac{t^{m-1} t'}{\pi i\, t_0^{m-1}(t_0-t)}\right]\nu(t)\, ds = 0, \tag{69,12}$$

რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება იქნეს ჩაწერილი:

$$\operatorname{Re}\left\{\nu(t_0) - \frac{t_0^{1-m}}{\pi i}\int\limits_L \frac{t^{m-1}\nu(t)\, dt}{t-t_0}\right\} = 0. \tag{69,13}$$

ამასთან, აქაც და შემდგომშიც იგულისხმება, რომ $\nu(t)$ ნამდვილი ფუნქციაა.

ვთქვათ $\nu(t)$ (62,12) განტოლების რაიმე უწყვეტი ამონახსნია. მაშინ იგი აკმაყოფილებს H პირობას. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Omega(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{t^{m-1}\nu(t)\, dt}{t-z};$$

---

[45] გვაქვს

$$\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0^{m-1} t_0'}{t^{m-1}(t-t_0)} = \frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0^{m-1} - t^{m-1}}{t-t_0}\,\frac{t_0'}{t^{m-1}} + \frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0'}{t-t_0}.$$

პირველი წევრი, ცხადია, აკმაყოფილებს H პირობას, მეორე წევრი კი შეიძლება შემდეგნაირად გადაიწეროს:

$$\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0'}{t-t_0} = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial s_0}\ln(t-t_0) = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} - \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial \vartheta(s_0, s)}{\partial s_0},$$

სადაც $r = |t-t_0|$, $\vartheta(s_0, s) = \arg(t-t_0)$. მაშასადამე,

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0'}{t-t_0} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial \vartheta(s_0, s)}{\partial s_0}.$$

უკანასკნელ გამოსახულებას კი (*) სახე აქვს (იხ. § 7).

იგი ჰოლომორფულია S^--ში, უსასრულობაში ნული ხდება როგორც z^{-m} და, (69,13)-ის ძალით,

$$\operatorname{Re}\Omega^-(t) = 0 \quad L\text{-ზე}.$$

მაშასადამე, $\Omega(z) = 0$ S^--ში. ამიტომ (§ 29)

$$t^{m-1}\nu(t) = \omega^+(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{69,14}$$

სადაც $\omega(z)$ S^+-ში ჰოლომორფული ფუნქციაა. წინა ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\operatorname{Re}[i\,t^{1-m}\omega^+(t)] = 0 \quad L\text{-ზე}.$$

მაშასადამე, $\omega(z)$ წარმოადგენს $\operatorname{Re}(a+ib)\omega^+=0$ რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამონახსნს S^+ არისათვის, როცა $a+ib=i\,t^{1-m}$. ამოცანის ინდექსი ტოლია $2m-2 \geqslant 0$. ამიტომ (§ 42 და 43) ამ ამოცანას აქვს $2m-1$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. მაშასადამე, (69,12) ფრედჰოლმის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს $2m-1$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი და ამდენივე ამონახსნი აქვს (69,11) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას.

მიუხედავად ამისა, (69,11) არაერთგვაროვანი განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია. მართლაც, ფრედჰოლმის ცნობილი თეორემის თანახმად, (69,11) განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებდეს პირობას

$$\int\limits_L \nu(t)\operatorname{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'\Phi^{m}(t)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]ds = \operatorname{Re}\int\limits_L \frac{\nu(t)\,t^{m-1}t'\,\Phi^{(m)}(t)\,ds}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i} = 0,$$

სადაც $\nu(t)$ (69,13) განტოლების ნებისმიერი (ნამდვილი) ამონახსნია. მაგრამ (69,14)-ის საფუძველზე $\nu(t) = t^{1-m}\omega^+(t)$ და წინა პირობა შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \omega^+(t)\,\Phi^{(m)}(t)\,dt = 0.$$

ეს პირობა კი ყოველთვის დაკმაყოფილებულია, ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია S^+ არეში ჰოლომორფული $\omega(z)\,\Phi^{(m)}(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას წარმოადგენს.

ამგვარად, (69,11) განტოლების ამოხსნადობა დამტკიცებულია. მის ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს:

$$\mu(t) = \mu_0(t) + c_1\mu_1(t) + \cdots + c_{2m-1}\mu_{2m-1}(t), \tag{69,15}$$

სადაც $\mu_1(t), \ldots, \mu_{2m-1}(t)$ (69,11) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა, ხოლო $\mu_0(t)$ (69,11) განტოლების კერძო ამონახსნია, რომელიც ისეა შერჩეული, რომ $\mu_0(t) = 0$, როდესაც განტოლების მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია, $c_1, \ldots, c_{2m-1}$ ნამდვილ მუდმივებს აღნიშნავენ.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ (69,11) განტოლების აგებული ამონახსნი აკმაყოფილებს (69,10) განტოლებასაც, რომლის ნამდვილი ნაწილის გამოყოფითაც იქნა მიღებული (69,11) განტოლება. მართლაც, ავიღოთ ($z \in S^+$)

$$\Psi(z) = \int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds + \int_L \mu(t)\,ds + iC, \qquad (69,16)$$

სადაც $\mu(t)$ (69,15) ფორმულითაა განსაზღვრული, C კი ნამდვილი მუდმივია. თუ აღვნიშნავთ $\Psi(z)-\Phi(z)=X(z)$ და შევნიშნავთ, რომ (69,11) განტოლების ძალით

$$\mathrm{Re}\left[\frac{t_0^{m-1}t_0'\Psi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]^+ = \mathrm{Re}\left[\frac{t_0^{m-1}t_0'\Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]^+, \qquad (69,11ა)$$

დავინახავთ, რომ $X(z)$ აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\mathrm{Re}\left[i\, t_0^{m-1} t_0' X^{(m)}(t_0)\right] = 0 \quad L\text{-ზე},$$

სადაც $[X^{(m)}(t_0)]^+$-ის ნაცვლად დაწერილია $X^{(m)}(t_0)$. მაგრამ წინა პირობა წარმოადგენს რიმან—ჰილბერტის ამოცანას $X^{(m)}$-სათვის. ამასთან, ამოცანის ინდექსი $-2m$ ტოლია, ე. ი. უარყოფითია. ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას, ვინაიდან (69,10) განტოლება ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$[\Psi^{(m)}(t_0)]^+ = [\Phi^{(m)}(t_0)]^+. \qquad (69,10ა)$$

შევნიშნოთ კიდევ, რომ

$$\Psi(z) = \Phi(z) + Q(z), \qquad (69,17)$$

სადაც $Q(z)$ პოლინომია, რომლის ხარისხი $m-1$-ს არ აღემატება.

ზემოთ თქმულიდან, კერძოდ გამომდინარეობს, რომ (69,11) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნები $\mu_1(t)\cdots\mu_{2m-1}(t)$ ამავე დროს (69,10) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებია. $\Psi_j(z)$-ით აღვნიშნოთ ფუნქციები, რომლებიც $\mu_j(t)$ ფუნქციებთან ($j=1, 2, \ldots, 2m-1$) დაკავშირებულია (69,2ა) ფორმულებით, სადაც $\Phi_j(z)$-ის ნაცვლად $\Psi_j(z)$ არის ნაგულისხმევი, რადგანაც ახლა $\mu_j(t)$ აღნიშნავს (69,10) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებს, ე. ი. განტოლებისა, რომელიც (69,10)-დან მიიღება, როდესაც $\Phi(z)=0$. ამიტომ, (69,17)-ის საფუძველზე დავასკვნით, რომ $\Psi_j(z)$ პოლინომებია, რომელთა ხარისხები არ აღემატება $m-1$-ს.

ამიტომ, თუ (69,16)-ში შევიტანთ $\mu(t)$-ს მნიშვნელობას, განსაზღვრულს (69,15) ფორმულიდან, მივიღებთ

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + iC + c_1\Psi_1(z) + \cdots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z), \qquad (69,18)$$

სადაც $\Psi_j(z)$ ($j=0, \ldots, 2m-1$) განსაზღვრულია (69,2a) ფორმულებით, რომლებშიც $\Phi_j(z)$-ის ნაცვლად უნდა ვიგულისხმოთ $\Psi_j(z)$. ჩვენ ახლახან ვნახეთ, რომ $j \geqslant 1$-სათვის $\Psi_j(z)$ წარმოადგენს პოლინომებს, რომელთა ხარისხი $(m-1)$-ს არ აღემატება.

შევნიშნოთ, რომ, როგორც ადვილი დასანახავია, (69,2ა) ფორმულის საფუძველზე, $\Psi_j(0)$ სიდიდეები ნამდვილი რიცხვებია.

$\mu_1(t), \ldots, \mu_{2m-1}(t)$ ფუნქციები განსაზღვრის ძალით წრფივად დამოუკიდებელია.

მაშასადამე, ზემოთ თქმულის საფუძველზე (69,2ა) ფორმულის შემდეგ, $\Psi_1(z), \ldots, \Psi_{2m-1}(z)$ პოლინომები აგრეთვე წრფივად დამოუკიდებელია. ადვილი დასანახავია, რომ

$$i, \Psi_1(z), \Psi_2(z), \ldots, \Psi_{2m-1}(z) \tag{69,19}$$

პოლინომებიც წრფივად დამოუკიდებელია; მართლაც, ვთქვათ $Ci + c_1\Psi_1(z) + \cdots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z) = 0$, სადაც $C, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ ნამდვილი მუდმივებია, მაშინ, თუ ავიღებთ $z = 0$ და გავითვალისწინებთ, რომ $\Psi_j(0)$ ნამდვილი რიცხვებია, მივიღებთ $C = 0$; მაგრამ $\Psi_1(z), \ldots, \Psi_{2m-1}(z)$ ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობის საფუძველზე ვღებულობთ, რომ $c_1 = c_2 = \cdots c_{2m-1} = 0$, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ ნებისმიერი პოლინომი, რომლის ხარისხი $(m-1)$-ს არ აღემატება, (69,19) პოლინომების წრფივ კომბინაციას[46] წარმოადგენს.

თუ ახლა (69,17) ფორმულას გამოვიყენებთ $\Psi_0(z)$ ფუნქციისათვის, დავასკვნით, რომ

$$\Phi(z) - \Psi_0(z) = Q_0(z),$$

სადაც $Q_0(z)$ გარკვეული პოლინომია, რომლის ხარისხი $(m-1)$-ს არ აღემატება. მაშასადამე, თუ გვინდა, რომ მოცემული $\Phi(z)$ ფუნქცია $\Psi(z)$-ის ტოლი იყოს, $C, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ მუდმივები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ

$$Q_0(z) = iC + c_1\Psi_1(z) + \cdots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

ეს კი, როგორც ახლახან ნათქვამიდან გამომდინარეობს, ყოველთვის შესაძლებელია და ამასთან ერთადერთი გზით.

აქედან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი თეორემის სამართლიანობა $m \geqslant 1$ შემთხვევაში ($m = 0$ შემთხვევაში იგი უკვე დამტკიცებული იყო).

2°. იმავე პირობებში, რაც 1° პუნქტში გვქონდა, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ S^+ აღნიშნავს L-ით შემოსაზღვრულ უსასრულო არეს, $\Phi(z)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმულებით, რომლებიც (69,1) და (96,2) ფორმულებიდან მხოლოდ იმით განსხვავდებიან, რომ $\frac{z}{t}$ შეცვლილია $\frac{t}{z}$-ით; გარდა ამისა ვგულისხმობთ, რომ ამჯერად კოორდინატთა სათავე S^+ არის გარეთ ძევს და $\ln\left(1 - \frac{t}{z}\right)$ არის

[46] მართლაც, ვთქვათ $P(z)$ პოლინომია, რომლის ხარისხი $(m-1)$-ს არ აღემატება. ვაჩვენოთ, რომ იგი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს (ეს წარმოდგენა ერთადერთია)

$$P(z) = iC + c_1\Psi_1(z) + \cdots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z)$$

სახით, სადაც $C, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ ნამდვილი მუდმივებია. თუ გავუტოლებთ z-ის ტოლ ხარისხებთან მდგომ კოეფიციენტებს და გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ $2m$ ნამდვილ წრფივ განტოლებას $C, c_1, \ldots, c_{2m-1}$-ის მიმართ. ამ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში შესაძლებელი იქნებოდა $C, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ მუდმივების ისე შერჩევა, რომ ერთი მათგანი მაინც განსხვავებული ყოფილიყო ნულისაგან, ხოლო $P(z) \equiv 0$, ეს კი შეუძლებელია (69,19) ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო.

შტო, რომელიც ნულის ტოლია $z = \infty$ წერტილში. იგულისხმება, რომ $\Phi(z)$ ჰოლომორფულია უსასრულოდ შორეული წერტილის ჩათვლით.

ეს შედეგი შეიძლება მივიღოთ ან წინა მსჯელობის გამეორებით (სათანადო უმნიშვნელო ცვლილებებით) ან $z = \dfrac{1}{\zeta}$, $t = \dfrac{1}{\tau}$ ჩასმის გამოყენებით სასრული არის შემთხვევაზე დაყვანით.

თუ, ამას გარდა, $\Phi(\infty) = 0$, შესაბამის ფორმულებში iC შესაკრები არ გვექნება.

3°. ვთქვათ S^+ იმავე სახის მრავლადბმული არეა, როგორიც § 66-ში გვქონდა, ვისარგებლებთ ხსენებული პარაგრაფის აღნიშვნებით. ვთქვათ, $\Phi(z)$ S^+-ში ჰოლომორფული და L-ზე უწყვეტად გაგრძელებადი ფუნქციაა. მაშინ იგი წარმოდგენადია კოშის ინტეგრალით

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z} = \sum_{j=0}^{p} \Phi_j(z), \tag{69,20}$$

სადაც

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}, \qquad j = 0, 1, \ldots, p;$$

თუ L_0 კონტური არ გვაქვს, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $\Phi_0(z) \equiv 0$, ხოლო (69,20)-ის მარჯვენა მხარეს დავუმატოთ შესაკრები $\Phi(\infty)$.

მაშასადამე, $\Phi(z)$ ფუნქცია წარმოადგენს L_0 კონტურით შემოსაზღვრულ სასრულ ცალადბმულ არეში ჰოლომორფული $\Phi_0(z)$ ფუნქციისა და შესაბამისად L_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ კონტურებით შემოსაზღვრულ უსასრულო ცალადბმულ არეებში ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი $\Phi_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ ფუნქციების ჯამს. თუ L_0 კონტური არ გვაქვს, მაშინ $\Phi_0(z)$ ფუნქციის ნაცვლად უნდა ავიღოთ მუდმივი $\Phi(\infty)$.

თუ, ამას გარდა, სასაზღვრო მნიშვნელობა $[\Phi^{m}(t)]^+$ L-ზე H პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ $\Phi_0(z)$ ფუნქციისათვის 1° პუნქტის, ხოლო $\Phi_j(z)$ $(j \geqslant 1)$ ფუნქციებისათვის 2° პუნქტის წარმოდგენების გამოყენებით მივიღებთ $\Phi(z)$ ფუნქციის წარმოდგენას. ამასთან, რა თქმა უნდა, კოორდინატთა სათავე სათანადოდ უნდა შეირჩეს.

მრავლადბმული არეებისათვის (69,1) და (69,2) ფორმულების განზოგადების შესახებ იხ., აგრეთვე, ი. ვეკუა [5].

III. რიმან—ჰილბერტ—პუანკარეს განზოგადებული ამოცანის ამოხსნა

სასაზღვრო ამოცანათა იმ მრავალრიცხოვანი ერთობლიობიდან, რომლებიც ზემოთ გადმოცემული შედეგების საშუალებით შეიძლება იქნეს ამოხსნილი, ამ კარში განვიხილავთ ერთ მათგანს, რომელიც მნიშვნელოვან ინტერესს წარმოადგენს როგორც თავისთავად, ასევე გამოყენებების თვალსაზრისითაც[47]. ეს

[47] ყველაფერი, რაც კი არსებითია ამ განყოფილებაშია (§ 71 — 75) ნასესხებია (ხანდახან თითქმის სიტყვა-სიტყვით) ი. ვეკუას ნაშრომიდან [8].

ამოცანა წარმოადგენს როგორც ჩვენ მიერ რიმან—ჰილბერტის ამოცანად წოდებულის ასევე პუანკარეს ამოცანის სახელით ცნობილი ამოცანის განზოგადებას (იხ. მომდევნო პარაგრაფი).

§ 70. წინასწარი შენიშვნები. § § 41 და 43-ში დაწვრილებით განვიხილეთ რიმან—ჰილბერტის ამოცანა. ამ ამოცანასთან ახლოს დგას ამოცანა, რომელიც პუანკარეს წინაშე წამოიჭრა მოქცევათა მათემატიკური თეორიის დამუშავებასთან დაკავშირებით (H. Poincaré [1]). ეს ამოცანა, რომელსაც *პუანკარეს ამოცანას* ვუწოდებთ, მდგომარეობს შემდეგში: ვიპოვოთ რაიმე S^+ არეში ჰარმონიული ფუნქცია არის L საზღვარზე მოცემული პირობით

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n}+B(s)\frac{\partial u}{\partial s}+c(s)\,u=f(s), \tag{70,1}$$

სადაც $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$ და $f(s)$ L-ზე მოცემული ნამდვილი ფუნქციებია, s რკალური აბსცისაა, ხოლო n L-ის ნორმალი.

სწორედ ამ ამოცანასთან დაკავშირებით შემოიტანა პუანკარემ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები, გამოიყვანა სინგულარულ ინტეგრალთა გადასმის ფორმულა და მიუთითა სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რეგულარიზაციის ერთი მეთოდი. თვით პუანკარემ მოგვცა ამ ამოცანის (არასრული) ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როდესაც $A(s)=1$, $c(s)=0$ და $B(s)$, $f(s)$ ფუნქციები და L კონტური ანალიზურია.

(70,1) ამოცანის არც თუ სავსებით სრული ამოხსნა ამ ცოტა ხნის წინათ მოგვცა ვ. პოგოჟელსკიმ (W. Pogorzelski [1]) შემდეგი დაშვებებით: $A(s)=1$, $B(s)$, $c(s)$ და $f(s)$ ანალიზური ფუნქციებია, L ანალიზური კონტურია.

დასახელებულ ავტორთა მიერ მოცემულ ამოხსნათა ნაკლი (კონტურსა და მოცემულ ფუნქციებზე დადებულ მეტად შემზღუდველ პირობებზე რომ არაფერი ვთქვათ) იმაში მდგომარეობს, რომ გაურკვეველი რჩება მიღებული ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა (რომლებიც თავის მხრივ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რეგულარიზაციით არის მიღებული) და საწყისი სასაზღვრო ამოცანის ეკვივალენტობის საკითხი; ამიტომ ამონახსნის არსებობის საკითხიც კი ღიად რჩება.

(70,1) ამოცანის პირველი სრული ამოხსნა მოგვცა ბ. ხვედელიძემ [1], [2] შემდეგი დაშვებებით: S^+ არე შემოსაზღვრულია ლიაპუნოვის წირთა სასრული ერთობლიობით, $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$ და $f(s)$ ფუნქციები კი H პირობას აკმაყოფილებს.

ქვემოთ (§ 74-ში) მოვიყვანთ პუანკარეს ამოცანის ამოხსნას, რომელიც მიიღება როგორც კერძო შემთხვევა გაცილებით უფრო ზოგადი ამოცანის ამოხსნისა. ამ ამოცანას შემდეგ პარაგრაფში ჩამოვაყალიბებთ.

§ 71. რიმან—ჰილბერტ—პუანკარეს განზოგადებული ამოცანა (V ამოცანა). ინტეგრალურ განტოლებაზე დაყვანა. ვთქვათ S^+ ლიაპუნოვის მარტივი შეკრული L კონტურით შემოსაზღვრული სასრული არეა. პარაგრაფის სათაურში ნახსენები ამოცანის ქვეშ ვგულისხმობთ შემდეგ ამოცანას (V ამოცანა):

ვიპოვოთ S^+-ში ჰოლომორფული ფუნქცია $\Phi(z)$ შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=f(t_0)\quad L\text{-ზე} \tag{V}$$

(Re ნამდვილი ნაწილია), სადაც L შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორია (s რკალური აბსცისაა)

$$\mathbf{L}\Phi \equiv \sum_{j=0}^{m} \left\{ a_j(t_0)\,\Phi^{(j)}(t_0) + \int_L h_j(t_0, t)\,\Phi^{(j)}(t)\,ds \right\}. \tag{71,1}$$

სადაც $a_0(t), \ldots, a_m(t)$ L-ზე განსაზღვრული H კლასის, საზოგადოდ, კომპლექსური ფუნქციებია; $f(t)$ H კლასის მოცემული ნამდვილი ფუნქციაა; და ბოლოს $h_j(t_0, t)$ L-ზე მოცემული, საზოგადოდ, კომპლექსური ფუნქციებია, რომელთაც შემდეგი სახე აქვთ:

$$h_j(t_0, t) = \frac{h_j^0(t_0, t)}{|t - t_0|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

სადაც $h_j^0(t_0, t)$ ორივე ცვლადის მიმართ H კლასს ეკუთვნის.

$\Phi^{(j)}(t_0)$-ის ქვეშ იგულისხმება $\Phi(z)$ ფუნქციის j-ური წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობა $[\Phi^{(j)}(t_0)]^+$. ამგვარად, ვგულისხმობთ ამ სასაზღვრო მნიშვნელობათა არსებობას $j = m$ რიგამდე ჩათვლით. გარდა ამისა ვთვლით, რომ $\Phi^{(m)}(z)$ L-ზე H პირობას აკმაყოფილებს (მაშასადამე, ამ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა $\Phi^{(j)}(t_0)$ $j \leqslant m$).

თუ, კერძოდ, ავიღებთ $m = 0$, $h_j(t_0, t) = 0$, მივიღებთ რიმან—ჰილბერტის ამოცანას. პუანკარეს ამოცანაც ჩამოყალიბებული ამოცანის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (იხ. § 74).

V ამოცანაზე დაიყვანება მრავალი მნიშვნელოვანი სასაზღვრო ამოცანა, კერძოდ, ელიფსური ტიპის კერძო წარმოებულიან განტოლებებთან დაკავშირებული სასაზღვრო ამოცანები (ამის თაობაზე იხ. § 76, პუნქტები 3°, 4°).

ზემოთ მოყვანილი ზოგადი სახით ჩამოყალიბებული ამოცანა დასვა[48] და მეტად გონებამახვილურად ამოხსნა (ამაში ვგულისხმობ § 69-ში გადმოცემულ ჰოლომორფული ფუნქციების ზოგად წარმოდგენასაც) ი. ვეკუამ უკვე ციტირებულ ნაშრომში [8][49]). ჩვენც ამ ნაშრომს გავყვებით.

შევნიშნოთ ჯერ V ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანის, ე. ი. $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ ამოცანის, შემდეგი თვისება: თუ $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_k(z)$ ამ ამოცანის კერძო ამონახსნებია, მათი ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია $C_1\Phi_1 + \cdots + C_k\Phi_k$ ნამდვილი კოეფიციენტებით აგრეთვე ამონახსნია.

მთელ ამ განყოფილებაში (თავის ბოლომდე) წრფივი კომბინაციის ქვეშ ვიგულისხმებთ წრფივ კომბინაციას ნამდვილი

---

48 შემთხვევა, როდესაც ყველა $h_j(t_0, t)$ ნულის ტოლია, უფრო ადრე განხილული იყო თ. გახოვის მიერ [2]. ავტორს, ჰილბერტის მიერ ერთ კერძო შემთხვევაში გამოყენებული მეთოდის საშუალებით, დაჰყავს ამოცანა მეტად რთულ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის გული შეიცავს გრინის ფუნქციას. ამიტომ ამ მეთოდით ამოცანის შესწავლა ძნელია. ამას გარდა, ავტორი საძიებელ ფუნქციას ადებს დამატებით შეზღუდვებს, რომლებიც არ გამომდინარეობენ ამოცანის არსიდან.

49 ანალოგიური ამოცანის სხვაგვარი ამოხსნა მოცვცა დ. შერმანმა [5], რომელსაც განხილული აქვს აგრეთვე მრავლადბმული არის შემთხვევა.

(მუდმივი) კოეფიციენტებით და ისევე, როგორც § 41, 43-ში რიმან—ჰილბერტის ამოცანის შესწავლისას და აგრეთვე § 69-ში, შესაბამისად გამოვიყენებთ წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის ცნებას.

ამოხსნის მეთოდი, რომელსაც ჩვენ გამოვიყენებთ, მდგომარეობს ამოცანის დაყვანაში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე (რომელიც, კერძოდ, შეიძლება ფრედჰოლმისა აღმოჩნდეს).

განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა $m \geqslant 1$. ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სათავე S^+-შია და წარმოვადგინოთ საძიებელი ფუნქცია შემდეგი სახით (§ 69):

$$\Phi(z) = \int\limits_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds + \int\limits_L \mu(t)\,ds + iC, \quad (71,2)$$

სადაც $\mu(t)$ საძიებელი ნამდვილი ფუნქციაა, რომელიც H პირობას აკმაყოფილებს, ხოლო C საძიებელი ნამდვილი მუდმივია. განვიხილოთ ელემენტარული ფუნქციები

$$N_0(z, t) = \left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right) + 1, \quad (71,3)$$

$$N_l(z, t) = \frac{d^l}{dz^l}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right] =$$

$$= (-1)^l\,\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-l)}{t^l}\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-l-1}\times$$

$$\times\left\{\ln\left(1-\frac{z}{t}\right) + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \cdots + \frac{1}{m-l}\right\} \quad (l=1, 2, \ldots, m-1), \quad (71,4)$$

$$N_m(z, t) = \frac{d^m}{dz^m}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right] = \frac{(-1)^m(m-1)!}{t^{m-1}(t-z)}, \quad (71,5)$$

სადაც t L-ის ნებისმიერი წერტილია, z კი — S^+ არის წერტილი. ისევე, როგორც § 69-ში $\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)$-ს ქვეშ იგულისხმება ის შტო, რომელიც (ფიქსირებული t-სათვის) ნული ხდება $z=0$ წერტილში. $N_l(t, z)$ ფუნქციები ჰოლომორფულია (z-ის მიმართ) S^+ არეში. თუ ნებისმიერად დავაფიქსირებთ t-ს და გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $z \to t_0$, სადაც t_0, ისევე, როგორც t, L-ის წერტილია, მივიღებთ L-ზე ცალსახად განსაზღვრულ $N_l(t_0, t)$ ფუნქციებს, რომლებიც $N_{m-1}(t_0, t)$-სა და $N_m(t_0, t)$-ს გარდა L-ზე H პირობას აკმაყოფილებენ ორივე ცვლადის მიმართ. $t = t_0$ მნიშვნელობისათვის $N_{m-1}(t_0, t)$-ს აქვს ლოგარითმული ტიპის განსაკუთრებულობა, ხოლო $N_m(t_0, t)$ ფუნქციას $(t-t_0)^{-1}$ — ტიპის განსაკუთრებულობა.

ახლა ადვილი დასანახავია, რომ $\Phi(z)$ ფუნქციისა და მისი $(m-1)$ რიგამდე წარმოებულების სასაზღვრო მნიშვნელობანი შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

$$
\begin{aligned}
\Phi(t_0) &= \int_L N_0(t_0, t)\,\mu(t)\,ds + iC, \\
\Phi^{(l)}(t_0) &= \int_L N_l(t_0, t)\,\mu(t)\,ds \quad (l = 1, 2, \ldots, m-1).
\end{aligned} \tag{71,6}
$$

m-ური რიგის წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობებისათვის კი სოხოცკი—პლემელის ფორმულების თანახმად გვექნება

$$
\Phi^{(m)}(t_0) = (-1)^m (m-1)!\,\pi i t_0^{1-m}\,t_0'\,\mu(t_0) + \int_L N_m(t_0, t)\,\mu(t)\,ds. \tag{71,7}
$$

ამიტომ (V) სასაზღვრო პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$
\mathrm{N}\mu \equiv A(t_0)\,\mu(t_0) + \int_L N(t_0, t)\,\mu(t)\,ds = f(t_0) - C\,\sigma(t_0), \tag{71,8}
$$

სადაც

$$
A(t_0) = \operatorname{Re}\{(-1)^m (m-1)!\,\pi i\, t_0^{1-m}\, t_0'\, a_m(t_0)\}, \tag{71,9}
$$

$$
\sigma(t_0) = \operatorname{Re}\left\{ i\,a_0(t_0) + i \int_L h_0(t_0, t)\,ds \right\}, \tag{71,10}
$$

$$
\begin{aligned}
N(t_0, t) = {} & \sum_{l=0}^{m} \operatorname{Re}\left\{ a_l(t_0)\,N_l(t_0, t) + \int_L h_l(t_0, t_1)\,N_l(t_1, t)\,ds_1 \right\} + \\
& + \operatorname{Re}\{(-1)^m (m-1)!\,\pi i\,h_m(t_0, t)\,t^{1-m} t'\}.
\end{aligned} \tag{71,11}
$$

ამგვარად, $\mu(t)$-ს განსასაზღვრავად მივიღეთ ნამდვილი სინგულარული განტოლება, რომლის გულს, როგორც ადვილი დასანახავია, შემდეგი სახე აქვს:

$$
N(t_0, t) = \frac{K(t_0, t)}{t - t_0}, \tag{71,12}
$$

სადაც $K(t_0, t)$ H პირობას აკმაყოფილებს. $A(t_0)$ და $\sigma(t_0)$ ფუნქციები აგრეთვე აკმაყოფილებს H პირობას.

მიღებული ინტეგრალური განტოლების გამოყვანის ხერხიდან ჩანს, რომ იგი საწყისი ამოცანის ეკვივალენტურია.

ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევა $m \geqslant 1$. $m = 0$ შემთხვევაში (V) სასაზღვრო პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$
\operatorname{Re}\left\{ a_0(t_0)\,\Phi(t_0) + \int_L h_0(t_0, t)\,\Phi(t)\,dt \right\} = f(t_0); \tag{71,13}
$$

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვისარგებლებთ (69,1) წარმოდგენით

$$\Phi(z)=\int\limits_L \frac{\mu(t)\,ds}{1-\dfrac{z}{t}}+iC \tag{71,14}$$

და ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად მივიღებთ საწყისი ამოცანის ეკვივალენტურ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას. მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ ეს ინტეგრალური განტოლება იმავე (71,8) ფორმულით მოიცემა. ამასთან, $A(t)$, $\sigma(t)$ და $N(t_0, t)$ მოიცემა შესაბამისად (71,9), (71,10) და (71,11) ფორმულებით, რომლებშიც იგულისხმება, რომ $m=0$, $(-1)^m(m-1)!=1$; ამასთან $N(t_0, t)$-ს ქვეშ უნდა გვესმოდეს არა (71,3) გამოსახულება, არამედ (71,5) გამოსახულება $m=0$-სათვის, ე. ი. ჩვენს შემთხვევაში

$$N_0(t_0, t)=\frac{t}{t-t_0}\,. \tag{71,15}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შემდგომი გამოყენებებისათვის აღვნიშნოთ განხილული ამოცანის შემდეგი სახეცვლილება: **L** ოპერატორის ნაცვლად განვიხილოთ $\mathbf{L}^*$ ოპერატორი, მოცემული შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{L}^*\Phi\equiv\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\Phi^{(j)}(t_0)+\int\limits_0^{t_0} h_j^*(t_0,\, t)\,\Phi^{(j)}(t)\,dt\right\}, \tag{71,16}$$

სადაც ამჯერად $h_j^{(*)}(t_0, t)$ ფუნქციები შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს: $h_m^*(t_0, t)=0$[60], დანარჩენი ფუნქციები კი განსაზღვრულია ყველა t_0-სათვის L-ზე და ყველა t-სათვის S^++L-ში. t ცვლადის მიმართ ეს ფუნქციები ჰოლომორფულია S^+-ში და უწყვეტია S^++L-ში. როდესაც t_0 და t ერთდროულად ძევს L-ზე ეს ფუნქციები H პირობას აკმაყოფილებს. (71,16)-ში ინტეგრალი აიღება ნებისმიერი გზის გასწვრივ, რომელიც $t=0$ წერტილს L-ზე აღებულ t_0 წერტილთან აერთებს ისე, რომ არ გამოდის S^+-დან (მიღებული პირობების ძალით ინტეგრალები გზისაგან დამოუკიდებელია); $t=0$-ის ნაცვლად, ცხადია, შეგვიძლია S^+ არის ნებისმიერი სხვა წერტილის აღება.

ყველა წინა ფორმულა, აგრეთვე მომდევნო პარაგრაფის ფორმულები, ძალაში დარჩება, თუ ყველა ინტეგრალში, სადაც $h_j(t_0, t)\,ds$ გამოსახულებები მონაწილეობს, მათ $h_j^*(t_0, t)\,dt=h_j^*(t_0, t)\,t'\,ds$ გამოსახულებებით შევცვლით, ხოლო შესაბამის ინტეგრალს ავიღებთ არა L-ის გასწვრივ, არამედ 0-დან t_0-მდე. განსახილველ შემთხვევაშიც მივიღებთ (71,8) სახის ინტეგრალურ განტოლებას, სადაც ამჯერად

$$\sigma(t_0)=\operatorname{Re}\left\{i\,a_0(t_0)+i\int\limits_0^{t_0} h_0^*(t_0, t)\,dt\right\}, \tag{71,17}$$

---

60 ეს დაშვება მხოლოდ რამდენადმე ამარტივებს ფორმულებს; მისგან ადვილად შეიძლება განთავისუფლება, თუ $h_m^*(t_0, t)$-ს იმავე პირობებს წავუყენებთ, რასაც დანარჩენი $h_j^*(t_0, t)$ დავუქვემდებარეთ.

$$N(t_0, t) = \sum_{l=0}^{m} \operatorname{Re}\left\{a_l(t_0) N_l(t_0, t) + \int_0^{t_0} h_l^*(t_0, t_1) N_l(t_1, t)\, dt_1\right\} . \qquad (71,18)$$

§ 72. V ამოცანის ამოხსნადობის საკითხის გამოკვლევა. შევუდგეთ წინა პარაგრაფის (71,8) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ანუ

$$\mathrm{N}\mu \equiv A(t_0)\mu(t_0) + \int_L N(t_0, t)\mu(t)\, ds = f(t_0) - C\sigma(t_0) \qquad (72,1)$$

განტოლების გამოკვლევას. ეს განტოლება ნამდვილი განტოლებაა. შემდგომში ყველგან ამ განტოლებისა და მისი მიკავშირებული განტოლების ამონახსნების ქვეშ ვიგულისხმებთ ნამდვილ ამონახსნებს, რომლებიც H პირობას აკმაყოფილებენ.

1°. უპირველესად განვსაზღვროთ ჩვენი განტოლების ინდექსი, რისთვისაც გამოვყოთ $\mathrm{N}\mu$ გამოსახულების მახასიათებელი ნაწილი

$$\mathrm{N}^0\mu \equiv A(t_0)\mu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - t_0} .$$

ჩვენს შემთხვევაში $A(t_0)$ მოცემულია (71,9) ფორმულით, რომელიც შემდეგნაირადაც შეიძლება გადავწეროთ:

$$A(t_0) = \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)!\, \pi i\, [t_0^{1-m}\, \bar{t}_0'\, a_m(t_0) - \bar{t}_0^{1-m}\, t_0'\, \overline{a_m(t_0)}] .$$

$B(t_0)$ კოეფიციენტი კი, ცხადია, განისაზღვრება (71,8) ფორმულაში $N(t_0, t)\, ds$-ის გამოსახულებაში შემავალი შემდეგი შესაკრებით:

$$\operatorname{Re}\{a_m(t_0) N_m(t_0, t)\, ds\} = \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)!\left\{\frac{t^{1-m}\, a_m(t_0)}{t - t_0} + \frac{\bar{t}^{1-m}\, \overline{a_m(t_0)}}{\bar{t} - \bar{t}_0}\right\} ds.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\frac{ds}{t - t_0} = \frac{\bar{t}'\, dt}{t - t_0} ,$$

$$\frac{ds}{\bar{t} - \bar{t}_0} = \frac{t'\, \overline{dt}}{\bar{t} - \bar{t}_0} = t'\, d\ln(\bar{t} - \bar{t}_0) = t'\, d\ln(t - t_0) + t'\, d\ln\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} =$$

$$= \frac{t'\, dt}{t - t_0} + t'\, d\ln\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}$$

და გავითვალისწინებთ, რომ უკანასკნელი შესაკრები გავლენას არ ახდენს ინტეგრალური განტოლების მახასიათებელ ნაწილზე, დავინახავთ, რომ $B(t_0)$ განისაზღვრება $N(t_0, t)\, ds$ გამოსახულების შემდეგი შესაკრებით:

$$\frac{1}{2}(-1)^m (m-1)!\left\{\frac{t^{1-m}\, \bar{t}'\, a_m(t)}{t - t_0} + \frac{\bar{t}^{1-m}\, t'\, \overline{a_m(t_0)}}{t - t_0}\right\} dt,$$

საიდანაც უშუალოდ ვღებულობთ

$$B(t_0)=\frac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\,\pi i\,[t_0^{1-m}\,\bar{t}_0'\,a_m(t_0)+\bar{t}_0^{1-m}\,t_0'\,\overline{a_m(t_0)}].$$

ამგვარად

$$A(t_0)+B(t_0)=(-1)^m(m-1)!\,\pi i\,t_0^{1-m}\,\bar{t}_0'\,a_m(t_0),$$

$$A(t_0)-B(t_0)=(-1)^{m+1}(m-1)!\,\pi i\,\bar{t}_0^{1-m}\,t_0'\,\overline{a_m(t_0)}.$$

იმისათვის, რომ ჩვენი განტოლება ნორმალური ტიპის იყოს (§ 44) აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$a_m(t_0)\neq 0 \quad \text{ყველგან } L\text{-ზე}.$$

შემდგომში ჩავთვლით, რომ ეს პირობა შესრულებულია და ამის შესაბამისად ვიტყვით, რომ V ამოცანა ნორმალური ტიპისაა.

(72,1) განტოლების ინდექსი $\varkappa$, რომელსაც აგრეთვე V ამოცანის ინდექსაც ვუწოდებთ, მოიცემა ფორმულით

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{t^{m-1}\,t'\,\overline{a_m(t)}}{\bar{t}^{m-1}\,\bar{t}'\,a_m(t)}\right]_L=2(m+n), \tag{72,2}$$

სადაც

$$n=\frac{1}{2\pi}[\arg\overline{a_m(t)}]_L. \tag{72,3}$$

(72,1) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნადობის გამოსაკვლევად საჭიროა განვიხილოთ ამ განტოლების მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathrm{N}'\nu\equiv A(t_0)\nu(t_0)+\int\limits_L N(t,t_0)\nu(t)\,ds=0. \tag{72,4}$$

შევახსენებთ, რომ (§ 53, თეორემა III)

$$k-k'=\varkappa, \tag{72,5}$$

სადაც k და k' $\mathrm{N}\mu=0$ და $\mathrm{N}'\nu=0$ ერთგვაროვან განტოლებათა წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვებია.

2°. განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს ის შემთხვევა, როდესაც V ამოცანა ამოხსნადია ნებისმიერი $f(t)$ მარჯვენა მხარისათვის. ამ საკითხს წყვეტს შემდეგი ძირითადი თეორემა.

თეორემა. იმისათვის, რომ V ამოცანა ამოხსნადი იყოს ნებისმიერი $f(t_0)$ მარჯვენა მხარისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $k'=0$ ან $k'=1$, ამასთან უკანასკნელ შემთხვევაში $\mathrm{N}'\nu=0$ განტოლების ამონახსნი[51] ν უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$\int\limits_L \nu(t)\,\sigma(t)\,ds\neq 0; \tag{72,6}$$

[51] ამონახსნი მუდმივ მამრავლის სიზუსტითაა განსაზღვრული, რადგანაც $k'=1$.

ორივე შემთხვევაში $\varkappa \geqslant 0$ და $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ ერთგვაროვან ამოცანას აქვს $\varkappa + 1$ ამონახსნი.

დავამტკიცოთ ჯერ თეორემაში მოცემული პირობების საკმარისობა და თეორემის ის ნაწილი, რომელიც $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვს ეხება.

თუ $k' = 0$, მაშინ § 53-ის 1 თეორემის საფუძველზე (72,1) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, ე. ი. ნებისმიერი $f(t)$ ფუნქციისა და ნებისმიერი C მუდმივისათვის. (72,5)-ის ძალით კი $\mathbf{N}\mu = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს $k = \varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი; რადგანაც $k \geqslant 0$, ამიტომ $\varkappa \geqslant 0$. მაშასადამე, ნებისმიერი C-სათვის (72,1) განტოლების ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს:

$$\mu(t) = \mu^*(t) + C\mu_0(t) + C_1\mu_1(t) + \cdots + C_\varkappa \mu_\varkappa(t), \tag{72,7}$$

სადაც $C, C_1, \ldots, C_\varkappa$ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, $\mu_0(t), \mu_1(t), \ldots, \mu_\varkappa(t)$ ერთგვაროვანი $\mathbf{N}\mu = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ხოლო $\mu^*(t)$ და $\mu_0(t)$ შესაბამისად $\mathbf{N}\mu = f(t_0)$ და $\mathbf{N}\mu = -\sigma(t_0)$ განტოლებების რაიმე კერძო ამონახსნებია.

თუ (72,7)-ს ჩავსვამთ (71,2)-ში ან, როცა $m = 0$, (71,14)-ში, მივიღებთ V ამოცანის ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + C(i + \Phi_0(z)) + C_1\Phi_1(z) + \cdots + C_\varkappa \Phi_\varkappa(z), \tag{72,8}$$

სადაც $C, C_1, \ldots, C_\varkappa$ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია; $\Phi_0(z), \Phi_1(z), \ldots, \Phi_\varkappa(z)$-ით აღნიშნულია S^+-ში ჰოლომორფული ფუნქციები, რომლებიც $\mu_0(t), \mu_1(t), \ldots, \mu_\varkappa(t)$ ფუნქციებთან (69,2 ა) ან (69,1 ა) ფორმულებით არის დაკავშირებული, ხოლო $\Phi^*(z)$ S^+-ში ჰოლომორფული ფუნქციაა, რომელიც ასეთივე წესით უკავშირდება $\mu^*(t)$-ს.

$\mu_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო მათი შესაბამისი $\Phi(z)$ ფუნქციებიც წრფივად დამოუკიდებელია. გარდა ამისა $\Phi_j(0)$ $(j = 0, 1, \ldots, \varkappa)$ ნამდვილი სიდიდეებია, საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს $i + \Phi_0(z)$, $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_\varkappa(z)$ ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობა (შდრ. 258 გვერდის დასაწყისი).

ზემოთქმულის შესატყვისად $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ ერთგვაროვან ამოცანას $\varkappa + 1$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი აქვს.

ვთქვათ ახლა $k' = 1$ და (72,6) პირობა შესრულებულია. (71,1) განტოლება ამოხსნადი იქნება, თუ შესრულებულია

$$\int_L \nu(t)\,[f(t) - C\sigma(t)]\,ds = 0$$

პირობა, რომელიც ცალსახად განსაზღვრავს C მუდმივს, ვინაიდან, დაშვების თანახმად, შესრულებულია (72,6) პირობა.

თუ C-ს მოძებნილ მნიშვნელობას მივანიჭებთ, მივიღებთ (72,1) განტოლების ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$\mu(t) = \mu^*(t) + C_1\mu_1(t) + \cdots + C_{\varkappa+1}\mu_{\varkappa+1}(t), \qquad (72,9$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_{\varkappa+1}$ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{\varkappa+1}(t)$ კი $N\mu = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. ამ ამონახსნთა რიცხვი (72,5)-ის საფუძველზე $\varkappa + 1$-ს ტოლია. რადგანაც $\varkappa + 1 \geqslant 0$ და $\varkappa$ ლუწია, ამიტომ აუცილებლად $\varkappa \geqslant 0$.

ამის შესატყვისად საწყისი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + C_1 \Phi_1(z) + \cdots + C_{\varkappa+1} \Phi_{\varkappa+1}(z), \tag{72,10}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_{\varkappa+1}$ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, ხოლო $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots$ $\ldots, \Phi_{\varkappa+1}(z)$ S^+-ში ჰოლომორფული წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია. გარდა ამისა, ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ $\mathrm{Re}\{L\Phi\} = 0$ ამოცანას ზუსტად $\varkappa + 1$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი აქვს.

გადავიდეთ თეორემაში მოყვანილი პირობის აუცილებლობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ $\nu_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, k')$ $N'\nu = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა. ვიგულისხმოთ, რომ იგი ორთოგონალიზებულია და ნორმირებული, ასე რომ

$$\int\limits_L \nu_i \nu_j \, ds = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 1, \quad \text{როდესაც} \quad i = j, \quad \delta_{ij} = 0, \quad \text{როდესაც} \quad i \neq j). \tag{72,11}$$

დავუშვათ, რომ V ამოცანა ამოხსნადია ნებისმიერი $f(t_0)$ მარჯვენა მხარისათვის. მაშინ (72,1) ინტეგრალური განტოლებაც ამოხსნადი უნდა იყოს ნებისმიერი $f(t_0)$ ფუნქციისა და სათანადოდ შერჩეული C მუდმივისათვის. მაშასადამე, ნებისმიერი $f(t)$ ფუნქციისათვის უნდა გვქონდეს

$$\int\limits_L \nu_j(t) \left[f(t) - C\sigma(t) \right] ds = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k', \tag{72,12}$$

თუ კი C მუდმივი სათანადოდ არის შერჩეული. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ მაშინ ან $k' = 0$, ან $k' = 1$ და ამასთან, უკანასკნელ შემთხვევაში აუცილებლად ადგილი უნდა ჰქონდეს (72,6)-ს.

განვიხილოთ ცალ-ცალკე ორი შემთხვევა

a) $$\int\limits_L \sigma(t) \nu_j(t) \, ds = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k'; \tag{72,13}$$

b) ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ვთქვათ,

$$\int\limits_L \sigma(t) \nu_1(t) \, ds \neq 0. \tag{72,14}$$

პირველი შემთხვევა შეუძლებელია თუ $k' \geqslant 1$, ვინაიდან მაშინ (72,12) პირობა ვერ შესრულდება ნებისმიერი $f(t)$-სათვის. მეორე შემთხვევაში, როცა $k' \geqslant 2$, თუ $f(t)$-ს მივანიჭებთ $\nu_2(t)$-ს მნიშვნელობას, (72,12)-ში $j = 1, 2$ მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ, რომ

$$C = 0, \quad \int\limits_L [\nu_2(t)]^2 \, ds = 0,$$

ეს კი შეუძლებელია. მაშასადამე, აუცილებელია, რომ $k' \leqslant 1$ და რომ $k' = 1$ შემთხვევაში ადგილი ჰქონდეს (72,6)-ს.

ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $\sigma(t) = 0$ V ამოცანა ამოხსნადია ნებისმიერი $f(t_0)$ მარჯვენა მხარისათვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k'=0$; ამ შემთხვევაში $Re\{L\Phi\}=0$ ერთგვაროვან ამოცანას აქვს ზუსტად $\varkappa + 1$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

3°. გადავიდეთ ახლა იმ შემთხვევის განხილვაზე, როდესაც ახლახან დამტკიცებული თეორემის პირობები არ არის შესრულებული (რასაც ადგილი აქვს, მაგალითად, ყოველთვის, როდესაც $\varkappa < 0$). ამ შემთხვევაში V ამოცანა ამოხსნადია არანებისმიერი $f(t_0)$ მარჯვენა მხარისათვის. ამონახსნი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სათანადოდ შერჩეული C-სათვის შესრულებულია (72,12) პირობები.

განვიხილოთ აქაც ორი შესაძლო a) და b) დაშვება, რომლებიც ზემოთ იყო მოყვანილი.

a) დაშვებისას, ე. ი. როდესაც (72,13)-ს აქვს ადგილი. V არაერთგვაროვანი ამოცანა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ამოხსნადი, როდესაც

$$\int_L \nu_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k', \tag{72,15}$$

ხოლო $Re\{L\Phi\} = 0$ ერთგვაროვანი ამოცანის შესაბამისი ინტეგრალური განტოლება $N\mu = -C\sigma(t_0)$ (72,13)-ის გამო ამოხსნადია ნებისმიერი C-სათვის. ამ უკანასკნელი ინტეგრალური განტოლების ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს: $\mu(t) = C\mu_0(t) + C_1\mu_1(t) + \cdots + C_k\mu_k(t)$, სადაც $\mu_0(t)$ ისევ $N\mu = -\sigma(t_0)$ განტოლების კერძო ამონახსნია, ხოლო $\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t)$ $\mu = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. ამის შესაბამისად ერთგვაროვან ამოცანას აქვს ზუსტად $k + 1 = \varkappa + k' + 1$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

b) შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ $k' > 1$, რადგანაც $k' \leqslant 1$ დაშვებისას შესრულებული იქნებოდა ზემოთ დამტკიცებული თეორემის პირობები. (72,12) თანაფარდობათაგან პირველი ცალსახად განსაზღვრავს C-ს:

$$C = \frac{\int_L \nu_1(t) f(t)\, ds}{\int_L \nu_1(t)\sigma(t)\, ds}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას (72,12)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ V ამოცანის ამოხსნადობის პირობებს შემდეგი სახით:

$$\int_L \nu_j^*(t) f(t)\, ds = 0, \tag{72,16}$$

სადაც

$$\nu_j^*(t) = \nu_{j+1}(t) - \nu_1(t)\frac{\int\limits_L \sigma\nu_{j+1}\,ds}{\int\limits_L \sigma\nu_1\,ds}, \quad j = 1, 2, \ldots, k'-1. \tag{72,17}$$

ერთგვაროვანი $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ ამოცანის შემთხვევაში ზემოთ ნათქვამის შესაბამისად უნდა ავიღოთ $C = 0$. ამიტომ განსახილველ შემთხვევაში $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ ერთგვაროვან ამოცანას აქვს ზუსტად $k = \varkappa + k'$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს კერძოდ, რომ $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ ერთგვაროვან ამოცანას მხოლოდ b) შემთხვევაში არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები და ისიც მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k = k + k' = 0$.

§ 73. V ამოცანის ამოხსნადობის ნიშნები. როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, V ამოცანის ამოხსნადობის საკითხს წყვეტს $\mathbf{N}'\nu = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა k' რიცხვი. ამიტომაც დიდი მნიშვნელობა აქვს k' რიცხვის განსაზღვრას ამ განტოლების ამოუხსნელად. ამ მიმართულებით მეტად საინტერესო შედეგები აქვს მიღებული ი. ვეკუას ზემოთ ციტირებულ ნაშრომებში.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Omega^*(t_0, z) = \sum_{j=0}^{m} \left\{a_j(t_0)\,N_j(t_0, z) + \int\limits_L h_j(t_0, t)\,N_j(t, z)\,ds\right\}, \tag{73,1}$$

სადაც $N_j(t_0, z)$ § 71-ში შემოყვანილი, (71,3) — (71,5) ფორმულებით განსაზღვრული ელემენტარული ფუნქციებია; ოღონდ აქ პირველი არგუმენტი t_0 აღნიშნავს L-ის ნებისმიერ წერტილს, ხოლო z — სიბრტყის ნებისმიერ წერტილს. შემდგომში დაგვჭირდება $\Omega^*(t_0, z)$ ფუნქციის განხილვა მხოლოდ $z \in S^-$-სათვის. ამ შემთხვევაში $N_j(t_0, z)$-ში შემავალი $\ln\left(1 - \frac{t_0}{z}\right)$ გამოსახულების ქვეშ ვიგულისხმებთ შტოს, რომელიც ჰოლომორფულია z-ის მიმართ S^--ში და ქრება $z = \infty$-ში. ამ პირობებში $\Omega^*(t_0, z)$ იქნება z-ის მიმართ ჰოლომორფული ფუნქცია S^- არეში უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით და, როგორც ადვილი დასანახავია,

$$\Omega^*(t_0, \infty) = a_0(t_0) + \int\limits_L h_0(t_0, t)\,ds. \tag{73,2}$$

$\Omega^*(t_0, z)$ ფუნქციის საშუალებით $\mathbf{N}'\nu = 0$ განტოლება, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\mathrm{Re}\,\Psi^-(t_0) = 0, \tag{73,3}$$

სადაც

$$\Psi(z) = \int\limits_L \nu(t)\,\Omega^*(t, z)\,ds. \tag{73,4}$$

(73,3)-დან გამოგვყავს, რომ, როდესაც $z \in S^-$

$$\Psi(z) = iC, \tag{73,5}$$

სადაც C ნამდვილი მუდმივია, რომელიც შემდეგი ფორმულითაა განსაზღვრული:

$$C = \int_L \nu(t) \operatorname{Im} \Omega^*(t, \infty)\, ds. \tag{73,6}$$

შემოვიყვანოთ ახლა ფუნქცია

$$\Omega(t_0, z) = \Omega^*(t_0, z) - i \operatorname{Im} \Omega^*(t_0, \infty). \tag{73,7}$$

მაშინ (73,4)-ს, (73,6)-სა და (75,5)-ის საფუძველზე უშუალოდ დავასკვნით, რომ $\mathbf{N}'\nu = 0$ განტოლება ეკვივალენტურია ფუნქციონალური განტოლებისა

$$\int_L \nu(t)\, \Omega(t, z)\, ds = 0 \quad \text{ყველა} \quad z \in S^-, \tag{A}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი z-სათვის S^--დან $\nu(t)$ ფუნქცია მოცემული $\Omega(t, z)$ ფუნქციის ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ა. $\Omega(t, z)$ ფუნქციას მომავალში ზოგჯერ „გულს" ვუწოდებთ.

ანალიზურ ფუნქციათა ერთადერთობის ცნობილი თეორემების გამოყენებით შეგვიძლია (A) განტოლება შევცვალოთ მრავალი სხვა მისი ეკვივალენტური თანაფარდობით, რომლებიც მოსახერხებელია ამა თუ იმ კონკრეტულ შემთხვევაში. ჩვენ, ი. ვეკუასთან ერთად, შევჩერდებით შემდეგ თანაფარდობებზე, რომლებიც (A)-ს ეკვივალენტურია:

$$\int_L \nu(t)\, \omega_j(t)\, ds = 0, \tag{B}$$

სადაც $\omega_j(t)$-ს ($j = 0, 1, 2, \ldots$) ქვეშ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნებისმიერი ქვემოთმოყვანილი ფუნქციათა სისტემათაგანი:

I. $$\omega_j(t) = \Omega(t, z_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{B_1}$$

სადაც $z_0, z_1, \ldots, S^-$ არის წერტილების ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომელსაც S^--ში ერთი მაინც დაგროვების წერტილი აქვს. კერძოდ, ეს წერტილი შეიძლება $z = \infty$ იყოს.

II. $$\omega_j(t) = \Omega_j(t, z_0) = \left[\frac{d^j \Omega(t, z)}{dz^j}\right]_{z=z_0}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{B_2}$$

სადაც z_0 S^- არის ნებისმიერად დაფიქსირებული წერტილია.

III. $$\omega_j(t) = \chi_j(t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{B_3}$$

სადაც

$$\chi_0(t_0) = \operatorname{Re}\left\{a_0(t_0) + \int_L h_0(t_0, t)\, ds\right\},$$

$$\chi_k(t_0) = \mathbf{L}\psi, \quad \psi = t^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

ხოლო L წინანდებურად აღნიშნავს ოპერატორს, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით

$$L\psi = \sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\psi^{(j)}(t_0) + \int_L h_j(t_0, t)\,\psi^{(j)}(t)\,ds\right\}.$$

$\chi_j(t)$ ფუნქციები მხოლოდ მუდმივი, ნულისაგან განსხვავებული მამრავლებით განსხვავდებიან $\Omega(t, z)$ ფუნქციის $z=\infty$ წერტილის მიდამოში z-ის კლებადი ხარისხების მწკრივად გაშლის კოეფიციენტებისაგან. ამაში ადვილად ვრწმუნდებით (73,7), (73,1) და (71,3)—(71,5) ფორმულების საფუძველზე.

(B) თანაფარდობის გამოსახატავად ვიტყვით, რომ $\nu(t)$ ფუნქცია $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის ყველა ელემენტის ორთოგონალურია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც არ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი $\nu(t)$ ფუნქცია[62], რომელიც $\Omega(t, z)$-ს ორთოგონალურია ყოველი $z \in S^-$, ვიტყვით, რომ $\Omega(t, z)$ გული სრულია. თუ იმ წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა რიცხვი, რომლებიც $\Omega(t, z)$ ფუნქციის ორთოგონალურია, სასრულია, ვიტყვით, რომ $\Omega(t, z)$ გული თითქმის სრულია.

ანალოგიურად, თუ არ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი $\nu(t)$ ფუნქცია, რომელიც $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის ყოველი ელემენტების ორთოგონალურია, ვიტყვით, რომ ეს მიმდევრობა სრულია. ვიტყვით, რომ ეს მიმდევრობა თითქმის სრულია, თუ იმ წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა რიცხვი, რომლებიც $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის ყველა წევრის ორთოგონალურია, სასრულია.

ვთქვათ, k' არის $\Omega(t, z)$ გულის ან $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის ყველა ელემენტის ორთოგონალურ წრფივად დამოუკიდებელ (ნამდვილ) $\nu_j(t)$ $(j=1, 2, \ldots, k')$ ფუნქციათა მაქსიმალური რიცხვი. ამ k' რიცხვს ვუწოდოთ $\Omega(t, z)$ გულის ან $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის დეფექტი. ცხადია, რომ, თუ $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობას დავუმატებთ $\nu_1(t), \nu_2(t), \ldots, \nu_{k'}(t)$ ფუნქციებს, მივიღებთ სრულ მიმდევრობას. ამიტომ $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის დეფექტი შეიძლება განისაზღვროს როგორც იმ წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა რიცხვი, რომლებიც ყველა $\{\omega_j(t)\}$ ფუნქციის ორთოგონალურია და რომლებითაც უნდა შეივსოს $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობა სრული მიმდევრობის მისაღებად.

ჩვენს შემთხვევაში იმ წრფივად დამოუკიდებელ $\nu(t)$ ფუნქციათა რიცხვი, რომლებიც ორთოგონალურია $\Omega(t, z)$ გულისა ან $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის ელემენტებისა, სადაც $\omega_j(t)$-ს ქვეშ იგულისხმება (B_1), (B_2) ან (B_3) ფუნქციები, სასრულია. იგი $N'\nu = 0$ ინტეგრალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნათა k' რიცხვის ტოლია.

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში $\Omega(t, z)$ გული და $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობები თითქმის სრულია.

ჩვენ მიერ მიღებული ტერმინებით წინა პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემა შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს:

იმისათვის, რომ V ამოცანას ამონახსნი ჰქონდეს $f(t)$ ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, აუცილებელი და საკმარი-

---

[62] $\nu(t)$-ს ქვეშ ყოველთვის იგულისხმება H კლასის ნამდვილი ფუნქცია.

სია, რომ $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის [ან $\Omega(t, z)$ გულის] დეფექტი 0-ს ან 1-ის ტოლი იყოს. ამასთან მეორე შემთხვევაში $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობის ყველა ელემენტის [ან $\Omega(t, z)$ გულის] ორთოგონალური $y(t)$ ფუნქცია $\sigma(t)$ ფუნქციის ორთოგონალური არ უნდა იყოს.

§ 74. პუანკარეს ამოცანა (*P* ამოცანა). დავუბრუნდეთ პუანკარეს ამოცანას (§ 70) და S^+-სა და L-ის ქვეშ იგივე ვიგულისხმოთ, რაც § 71-ში.

ამოცანის სასაზღვრო პირობაა

$$A(s)\frac{du}{dn} + B(s)\frac{du}{ds} + c(s)u = f(s), \tag{74,1}$$

სადაც $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$ და $f(s)$ L-ზე მოცემული ფუნქციებია, u საძიებელი S^+-ში ჰარმონიული ფუნქციაა, n L-დან მარცხნივ მიმართული ნორმალია, მოდებული წერტილში, რომლის რკალური აბსცისა s-ია. ეს სასაზღვრო პირობა შეიძლება რამდენადმე სხვა სახით წარმოვადგინოთ, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი თანაფარდობებით

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\vartheta, \tag{74,2}$$

სადაც ϑ L-ის დადებითი მხების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხეა. მაშინ (74,1) სასაზღვრო პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t)\frac{\partial u}{\partial y} + c(t)u = f(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{74,3}$$

სადაც $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ L-ზე მოცემული ფუნქციებია. შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ ეს ფუნქციები H კლასს ეკუთვნის. ამას გარდა მივიღოთ, რომ $a(t)$ და $b(t)$ ერთდროულად ნული არ ხდება. ასე რომ,

$$a(t) + i\,b(t) \neq 0 \quad \text{ყველგან } L\text{-ზე}. \tag{74,4}$$

საძიებელი ფუნქციისაგან მოვითხოვთ, რომ მისი კერძო წარმოებულების $\frac{\partial u}{\partial x}$-ს და $\frac{\partial u}{\partial y}$-ს მიერ L-ზე მიღებული სასაზღვრო მნიშვნელობები H პირობას აკმაყოფილებდეს (მითუმეტეს ამას ადგილი ექნება საძიებელი u ფუნქციისათვისაც).

(74,3) ამოცანას შემოკლებით P ამოცანას ვუწოდებთ. (74.3) პირობა შეიძლება კიდევ ასე გადაიწეროს (ახლა t-ს ნაცვლად t_0-ს ვწერთ)

$$\operatorname{Re}\{(a + i\,b)\Phi'(t_0) + c\,\Phi(t_0)\} = f(t_0) \quad L\text{-ზე}, \tag{P}$$

სადაც, ისევე, როგორც ზემოთ, შემოკლებით $\Phi^+(t_0)$-სა და $\Phi'^+(t_0)$-ს ნაცვლად ვწერთ $\Phi(t_0)$-სა და $\Phi'(t_0)$-ს, და სადაც

$$\Phi(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) \tag{74,5}$$

აღნიშნავს S^+-ში ჰოლომორფულ ფუნქციას, ისეთს, რომ $\operatorname{Re}\Phi(z) = u(x, y)$.

(P) პირობა წარმოადგენს (V) პირობის კერძო შემთხვევას, როდესაც ამ უკანასკნელში

$$m = 1,\quad h_0 = h_1 = 0,\quad a_1(t) = a(t) + i\,b(t),\quad a_0(t) = c(t).$$

გამოვიყენოთ P ამოცანისათვის წინა პარაგრაფებში გადმოცემული მეთოდი და წარმოვადგინოთ საძიებელი $\Phi(z)$ ფუნქცია (71,2) ფორმულით, როდესაც $m = 1$

$$\Phi(z) = \int_L \mu(t) \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int_L \mu(t)\, ds + i\,C, \tag{74,6}$$

სადაც $\mu(t)$ საძიებელი ნამდვილი ფუნქციაა, რომელიც H პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს, ხოლო C ნამდვილი მუდმივია.

განსახილველ შემთხვევაში (71,10) ფორმულით განსაზღვრული $\sigma(t)$ ფუნქცია იგივურად ნულის ტოლია და (71,8) ინტეგრალურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$N\mu \equiv \operatorname{Re}\{-\pi i\, t_0' [a(t_0) + i\,b(t_0)]\}\, \mu(t_0) +$$
$$+ \int_L \mu(t) \operatorname{Re}\left\{c(t_0) \ln e\left(1 - \frac{t_0}{t}\right) - \frac{a(t_0) + i\,b(t_0)}{t - t_0}\right\} ds = f(t_0). \tag{74,7}$$

(72,2) ფორმულის თანახმად, ამ განტოლების ინდექსია

$$\varkappa = 2(n+1),\quad n = \frac{1}{2\pi}[\arg(a - ib)]_L. \tag{74,8}$$

(74,7) განტოლების მიკავშირებული განტოლება არის

$$N'\nu \equiv \operatorname{Re}\{-\pi i\, t_0' [a(t_0) + i\,b(t_0)]\}\, \nu(t_0) +$$
$$+ \int_L \nu(t) \operatorname{Re}\left\{c(t) \ln e\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) + \frac{a(t) + i\,b(t)}{t - t_0}\right\} ds = 0. \tag{74.9}$$

იგი ეკვივალენტურია შემდეგი ფუნქციონალური განტოლებისა (იხ. წინა პარაგრაფი):

$$\int_L \nu(t)\, \Omega(t, z)\, ds = 0 \quad \text{ყველა} \quad z \in S^-, \tag{A}$$

სადაც ჩვენს შემთხვევაში

$$\Omega(t, z) = \frac{a(t) + i\,b(t)}{t - z} + c(t) \ln e\left(1 - \frac{t}{z}\right). \tag{74,10}$$

ვიდრე აქედან უშუალოდ გამომდინარე შედეგს ჩამოვაყალიბებდით, შევნიშნოთ შემდეგი: თუ $\Phi(z)$ P ამოცანის რაიმე ამონახსნია, მაშინ ცხადია, $\Phi(z) + i\,C$, სადაც C ნამდვილი მუდმივია, არის აგრეთვე ამოცანის ამონახსნი. ამის შესაბამისად, ერთგვაროვან ამოცანას, რომელიც P ამოცანისაგან მიიღება, როდესაც $f(t) = 0$, აქვს ამონახსნი $i\,C$. ვინაიდან $\Phi(z)$-სათვის $i\,C$-ს დამატება $u(x, y)$ ფუნ-

ქციას არ ცვლის, არამედ მხოლოდ $\Phi(z)$ ფუნქციის წარმოსახვით ნაწილს $v(x, y)$-ს, ამიტომ შევთანხმდეთ, არ განვასხვაოთ P ამოცანის ის ამონახსნები, რომლებიც iC სახის შესაკრებით განსხვავდებიან. სხვა სიტყვებით, P ამოცანის ორი ამონახსნი $\Phi_1(z)$ და $\Phi_2(z)$ განვასხვაოთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც განსხვავდებიან მათი ნამდვილი ნაწილები $u_1(x, y)$ და $u_2(x, y)$.

თუ გავიხსენებთ ახლა, რომ ჩვენს შემთხვევაში $\sigma(t) = 0$ და გამოვიყენებთ § 72-ის თეორემის შედეგს, მოთითებულს 269 გვერდზე, მივალთ შემდეგ ძირითად დებულებამდე (ი. ვეკუა, loc. cit.):

თეორემა. იმისათვის, რომ P ამოცანა ამოხსნადი იყოს ნებისმიერი $f(t)$ მარჯვენა მხარისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ (74,9) განტოლებას არ ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები ან, რაც იგივეა, $\Omega(t, z)$ გული იყოს სრული. ამ პირობის შესრულებისას P ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას აქვს ზუსტად $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი (როგორც უკვე ვთქვით iC სახის ტრივიალურ ამონახსნს არ ვთვლით).

დავუშვათ ახლა, რომ (74,9) განტოლებას ან, რაც იგივეა, (A) ფუნქციონალურ განტოლებას აქვს k' წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი $\nu_j(t)$ $(j=1,\ldots,k')$. მაშინ P ამოცანა ამოხსნადია, თუ შესრულებულია შემდეგი აუცილებელი და საკმარისი პირობები:

$$\int\limits_L \nu_j(t) f(t)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k'). \tag{74,11}$$

P ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას კი აქვს ზუსტად $k = \varkappa + k'$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი (iC სახის ამონახსნს არ ვთვლით). თუ, კერძოდ, $\varkappa + k' = 0$, მაშინ P ამოცანას (74,11) პირობების შესრულებისას აქვს მხოლოდ და მხოლოდ ერთი ამონახსნი.

როგორც წინა პარაგრაფში ვთქვით, (A) განტოლება ეკვივალენტურია

$$\int\limits_L \nu(t)\, \omega_j(t)\, ds = 0, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{B}$$

პირობებისა, თუ $\omega_j(t)$ ფუნქციების სისტემის ქვეშ ვიგულისხმებთ ნებისმიერს შემდეგ სისტემათაგან:

$$\text{I.}\quad \omega_j(t) = \Omega(t, z_j) = \frac{a(t) + i\,b(t)}{t - z_j} + c(t) \ln e\left(1 - \frac{t}{z_j}\right), \ j = 0, 1, \ldots, \tag{B_1}$$

სადაც $z_0, z, \ldots$ რაიმე მიმდევრობაა S^--ის წერტილებისა, რომელსაც S^- არეში ერთი მაინც დაგროვების წერტილი აქვს.

$$\text{II.}\qquad \omega_j(t) = \Omega_j(t, z_0), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

სადაც

$$\Omega_0(t, z_0) = \Omega(t, z_0) = \frac{a(t) + i\,b(t)}{t - z_0} + c(t) \ln e\left(1 - \frac{t}{z_0}\right),$$

$$\Omega_k(t, z_0) = \left[\frac{d^k \Omega(t, z)}{dz^k}\right]_{z=z_0} = k!\,\frac{a(t) + i\,b(t)}{(t - z_0)^{k+1}} -$$

$$-(k-1)!\,c(t)\left\{\frac{1}{(t-z_0)^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{z_0^k}\right\}, \qquad (B_2)$$

$k = 1, 2, \ldots$, ხოლო z_0 რაიმე ფიქსირებული წერტილია S^--ში.

III. $\omega_j(t) = \chi_j(t) = j\,[a(t) + i\,b(t)]\,t^{j-1} + c(t)\,t^j, \quad j = 0, 1, \ldots . \qquad (B_3)$

შევახსენებთ, რომ I—III სისტემათაგან ერთ-ერთის სისრულე წარმოადგენს P ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას ნებისმიერი $f(t)$ მარჯვენა მხარისათვის.

მოვიყვანოთ მიღებული დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარე ერთი შედეგი. თუ P ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები და მისი ინდექსი $\varkappa = 0$, მაშინ P ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის. მართლაც, როგორც ვნახეთ, ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნთა რიცხვია $k = \varkappa + k'$. ამიტომ, თუ $k = \varkappa = 0$, მაშინ $k' = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

ხშირად შეიძლება ადვილად დადგინდეს, რომ ერთგვაროვან ამოცანას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. ასეთ შემთხვევათაგან ერთ-ერთზე ბ. ხვედელიძემ მიუთითა [1], [2].

ვთქვათ, სასაზღვრო პირობა (74,1) სახით არის მოცემული და $A(s) \equiv 1$. დავუშვათ, გარდა ამისა, რომ $B(s)$-ს აქვს ინტეგრებადი წარმოებული, $c(s) \not\equiv 0$ და

$$\frac{1}{2}\,\frac{dB}{ds} - c(s) \geqslant 0. \qquad (74,12)$$

მაშინ ერთგვაროვან ამოცანას

$$\frac{\partial u}{\partial n} + B(s)\,\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)\,u = 0 \qquad (^*)$$

არ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები.

მართლაც, თუ ცნობილ ფორმულაში

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int\limits_L u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

ჩავსვამთ $\dfrac{\partial u}{\partial n}$-ის მნიშვნელობას (*) ფორმულიდან, ნაწილობრივი ინტეგრების საშუალებით მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int\limits_L \left[\frac{1}{2}\,\frac{dB}{ds} - c(s)\right] u^2 ds \leqslant 0,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, ე. ი. $u = \text{const}$. მაგრამ მაშინ (*). ტოლობიდან და $c(s) \not\equiv 0$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $u = 0$.

ცხადია, რომ მითითებული კრიტერიუმი იმისა, რომ ერთგვაროვან ამოცანას არ ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნები, ძალაში რჩება აგრეთვე სასრულო მრავლადბმული არის შემთხვევაშიც.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ P ამოცანის სასაზღვრო პირობა (74.1) სახითაა მოცემული, მაშინ ინდექსის გამოსათვლელად გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} [\arg (A + iB)]_L; \tag{74,13}$$

ეს გამომდინარეობს (74,8)-დან, რადგანაც, როგორც ადვილი დასანახავია, (74,2) ფორმულის საფუძველზე

$$A + iB = i (a - ib) e^{i\theta}.$$

§ 75. მაგალითები. წინა პარაგრაფებში (§§ 71—74)[53] გადმოცემულის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ რამდენიმე მარტივი მაგალითი. შევნიშნოთ, რომ V ამოცანის (ან, კერძოდ, P ამოცანის) კავშირი $\{\omega_j(t)\}$ ფუნქციათა მიმდევრობასთან ორგვარად შეიძლება გამოვიყენოთ: თუ ამ მიმდევრობების სისრულის საკითხის გადაწყვეტა უშუალოდ არის შესაძლებელი, მივიღებთ პასუხს კითხვაზე V ამოცანის ამოხსნადობის შესახებ და პირიქით, თუ რაიმე ხერხით გამორკვეულია V ამოცანის ამოხსნადობის საკითხი, საშუალება გვეძლევა დავადგინოთ $\{\omega_j(t)\}$ მიმდევრობების სისრულე ან არასრულობა.

1°. დ ი რ ი ხ ლ ე ს ა მ ო ც ა ნ ა

$$u = f \quad L\text{-ზე} \tag{75,1}$$

არის V ამოცანის კერძო შემთხვევა, როდესაც $m = 0$, $a_0(t) = 1$, $h_0(t_0, t) = 0$ მისი შესაბამისი (72,1) ინტეგრალური განტოლების ინდექსი $\varkappa$, (72,2) ფორმულის თანახმად, ნულის ტოლია. $\sigma(t) \equiv 0$, $\{\chi_j(t)\}$ ფუნქციათა სისტემა დადის შემდეგ სისტემაზე (§ 73, (B_3) ფორმულა[54]):

$$1, \ t, \ t^2, \ldots \tag{75,2}$$

წინა მასალიდან ვიცით, რომ დირიხლეს ამოცანა ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის. აქედან დავასკვნით, რომ (75,2) სისტემა სრულია, ე. ი. თუ

$$\int\limits_L t^k \nu(t)\, ds = 0, \quad k = 0, \ 1, \ 2, \ldots \tag{75,3}$$

მაშინ $\nu(t) = 0$, $\nu(t)$-ს ქვეშ, როგორც ყოველთვის, იგულისხმება H კლასის ნამდვილი ფუნქცია[55].

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $t = re^{i\varphi}$ და განვაცალკევებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, დავასკვნით, რომ L-ზე განსაზღვრულ ნამდვილ ფუნქციათა სისტემა

$$1, \ r\cos\varphi, \quad r\sin\varphi, \quad r^2\cos 2\varphi, \quad r^2\sin 2\varphi \tag{75,4}$$

სადაც $r = |t|$, $\varphi = \arg t$, L-ზე სრულია.

---

[53] შეგახსენებთ, რომ ამ პარაგრაფებში S^+ აღნიშნავს სასრულ ცალადბმულ არეს, ხოლო $z = 0$ მდებარეობს S^+-ში.

[54] ჩვენს შემთხვევაში $\mathbf{L}\psi \equiv \psi$.

[55] ადვილი დასანახავია, რომ დასკვნა (75,2) სისტემის შესახებ მაშინაც რჩება ძალაში, როდესაც $\nu(t)$ მხოლოდ უწყვეტია.

თუ L წრეწირია ცენტრით 0-ში, ვღებულობთ ცნობილ თეორემას

$$1,\quad \cos\varphi,\quad \sin\varphi,\quad \cos 2\varphi,\quad \sin 2\varphi,\ldots \qquad (75,5)$$

სისტემის სისრულის შესახებ.

2⁰. ნეიმანის ამოცანა

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \quad L\text{-ზე}, \qquad (75,6)$$

სადაც n აღნიშნავს L-დან მარჯვნივ, ე. ი. S^+ არის შიგნით მიმართულ ნორმალს, წარმოადგენს წინა პარაგრაფის P ამოცანის კერძო შემთხვევას, როდესაც

$$a(t) = \cos(n,\ x) = -\sin\vartheta,\quad b(t) = \sin(n,\ x) = \cos\vartheta,\quad c(t) = 0, \qquad (75,7)$$

სადაც ϑ L-ის მხების მიერ Ox ღერძთან შექმნილი კუთხეა. ამგვარად

$$a + ib = ie^{i\vartheta} = it',\quad a - ib = -ie^{-i\vartheta} = -i\bar{t}'. \qquad (75,8)$$

(74,8) ფორმულის თანახმად ამ ამოცანის შესაბამისი $N\mu = f(t_0)$ განტოლების ინდექსი ნულის ტოლია (ამას გარდა, ადვილად დავადგენთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში ეს განტოლება ფრედჰოლმისაა). (74,10) ფორმულის თანახმად, ჩვენს შემთხვევაში

$$\Omega(t,\ z) = \frac{it'}{t-z}. \qquad (75,9)$$

ეს გული არ არის სრული, რადგანაც § 74-ის (A) ფუნქციონალურ განტოლებას

$$\int_L \nu(t)\,\Omega(t,\ z)\,ds \equiv i\int_L \frac{\nu(t)\,t'ds}{t-z} \equiv i\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{t-z} = 0,\qquad z\in S^-$$

აქვს ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი ამონახსნი $\nu(t) = 1$; სხვა (მისგან წრფივად დამოუკიდებელი) ამონახსნი არ არსებობს (§ 30). ამიტომ დეფექტი 1-ის ტოლია.

მაშასადამე, ამოცანა (75,6) ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\int_L \nu(t)\,f(t)\,ds = 0,\quad \text{ე. ი.}\ \int_L f(t)\,ds = 0.$$

ეს კარგად ცნობილი შედეგია.

§ 73-ის ან § 74-ის ($B_{\text{ე}}$) ფორმულის თანახმად $\{\chi_k(t)\}$ ფუნქციების სისტემა ჩვენს შემთხვევაში ასეთია[58]

$$\chi_k(t) = kit'\,t^{k-1},\quad k = 1,\ 2,\ldots \qquad (75,10)$$

ეს სისტემა, ზემოთქმულის თანახმად, არასრულია და მისი დეფექტი 1-ის ტოლია. მაგრამ თუ ამ სისტემას დავუმატებთ ფუნქციას $\nu(t) = 1$, მივიღებთ სისტემას (ik მამრავლებს უკუვაგდებთ)

$$1,\ t',\ t't,\ t't^2,\ldots$$

3⁰. განვიხილოთ რამდენადმე უფრო ზოგადი ამოცანა

$$\frac{\partial u}{\partial n} + c(t)\,u = f(t), \qquad (75,11)$$

[58] ჩვენს შემთხვევაში $\mathbf{L}\psi \equiv (a+ib)\,\psi' \equiv ie^{i\vartheta}\,\psi' = it_0'\,\psi'(t_0)$.

რომელიც P ამოცანიდან მიიღება, თუ დავუშვებთ, რომ a და b (75,8) ფორმულითაა მოცემული. აქაც შესაბამისი $N\mu^1 = f$ ინტეგრალური განტოლების ინდექსი ნულის ტოლია. ჩვენს შემთხვევაში § 73-ის ან § 74-ის (B_3) ფორმულის თანახმად[57]

$$\chi_k(t) = it't^{k-1} + c(t)\,t^k, \quad k=0,\ 1,\ldots \tag{75,12}$$

თუ $\{\chi_k(t)\}$ ფუნქციების სისტემა სრულია, მაშინ (75,11) ამოცანას ნებისმიერი $f(t)$ მარჯვენა მხარისათვის აქვს ამონახსნი და პირუკუ.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც L ერთეული რადიუსიანი წრეწირია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში; ვთქვათ $c(t)=c$ მუდმივია. მაშინ $t'=it$ და

$$\chi_k(t) = (c-k)\,t^k, \quad k=0,\ 1,\ldots \tag{75,13}$$

ან თუ აღვნიშნავთ $t=e^{i\varphi}$

$$\chi_k(t) = (c-k)\,(\cos k\varphi + i\sin k\varphi). \tag{75,13ა}$$

თუ c არ არის მთელი დადებითი რიცხვი ან ნული, მაშინ წინა სისტემა, ცხადია, სრულია და ამიტომ ამოცანას ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის ერთადერთი ამოხსნა აქვს.

ვთქვათ, ახლა, $c=m$, სადაც m მთელი არაუარყოფითი რიცხვია. მაშინ (75,13) სისტემა არასრულია. $m=0$ შემთხვევაში იგი სრული გახდება, თუ მას $\nu(t)=1$ ფუნქციას დავუმატებთ; $m\geqslant 1$ შემთხვევაში იგი სრული გახდება თუ მას ორ წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციას: $\nu_1(t)=\cos m\varphi$ და $\nu_2(t)=\sin m\varphi$ დავუმატებთ. მაშასადამე, $m=0$ შემთხვევაში დეფექტი 1-ის ტოლია, $m\geqslant 1$ შემთხვევაში კი დეფექტი 2-ის ტოლია. ამიტომ (75,11) ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას $m=0$ შემთხვევაში ერთი ამონახსნი აქვს და $m\geqslant 1$ შემთხვევაში—ორი. არაერთგვაროვანი ამოცანა კი ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,d\varphi = 0, \quad \text{როცა } m=0, \tag{75,14}$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos m\varphi\,d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(t)\sin m\varphi\,d\varphi = 0, \quad \text{როცა } m\geqslant 1. \tag{75,15}$$

4°. **დახრილი წარმოებულის ამოცანა.** და ბოლოს განვიხილოთ P ამოცანის კერძო შემთხვევა, როდესაც $c(t)=0$. ასე, რომ სასაზღვრო პირობას შემდეგი სახე აქვს:

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t)\frac{\partial u}{\partial y} = f(t) \quad L\text{-ზე}. \tag{75,16}$$

ამ სასაზღვრო პირობით $u(x, y)$ ჰარმონიული ფუნქციის პოვნის ამოცანას ზოგჯერ „დახრილი წარმოებულის ამოცანას" უწოდებენ (problème de la dérivée oblique), რადგანაც (75,16) სასაზღვრო პირობა შემდეგნაირად შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\partial u}{\partial l} = f(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{75,17}$$

[57] ჩვენს შემთხვევაში $L\psi \equiv it_0'\,\psi'(t_0) + c(t_0)\,\psi(t_0)$.

სადაც l არის (a, b) ვექტორის მიმართულება, რომელიც საზოგადოდ დახრილია ნორმალისა ან მხების მიმართ. ამ ამოცანას, კერძოდ, მიეძღვნა, არც თუ დიდი ხნის წინათ გამოსული A. Lienard-ისა [1] და C. Jacob-ის [1] ნაშრომები. ეს ამოცანა შეიძლება წინა პარაგრაფში გადმოცემული მეთოდის საშუალებით ამოიხსნას; მაგრამ გადმოცემის ჩვენ მიერ არჩეული სისტემის შესატყვისად, უფრო ბუნებრივია ამ ამოცანის უშუალოდ დაყვანა რიმან—ჰილბერტის ამოცანაზე, რაც ადვილი მისაღწევია.

სახელდობრ, ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, დავუშვათ, $u(x, y) = \operatorname{Re}\Phi(z)$, და, ამას გარდა, შემოვიყვანოთ S^+-ში ჰოლომორფული ფუნქცია

$$U + iV = \Psi(z) = \Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

მაშინ (75,16) შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$a(t)U - b(t)V = f(t),$$

ანუ

$$\operatorname{Re}(a + ib)\,\Psi^+(t) = f(t),$$

ასე რომ, ჩვენი ამოცანა უშუალოდ დავიდა რიმან—ჰილბერტის ამოცანაზე, რომელიც უკვე ამოხსნილი გვაქვს §§ 41—43-ში (ცალადბმული არისათვის)[58].

§ 76. ზოგიერთი განზოგადება და გამოყენება. წინა პარაგრაფებში გადმოცემული მეთოდები და შედეგები შეიძლება ეფექტურად გამოვიყენოთ მრავალი მნიშვნელოვანი საკითხის გადასაწყვეტად. ჩვენ შემოვიფარგლებით ზოგიერთი განზოგადებისა და გამოყენების მითითებით[59].

1°. *P ამოცანის ამოხსნა მრავლადბმული არისათვის* მოცემული იყო ბ. ხვედელიძის ნაშრომში [2], რომელშიც ისევე, როგორც ცალადბმული არისათვის მიძღვნილ ნაშრომში [1], ავტორი, პუანკარეს მსგავსად, საძიებელ ფუნქციას მარტივი ფენის პოტენციალის სახით წარმოადგენს. შემდგომ ნაშრომში [3] ბ. ხვედელიძე უკვე ი. ვეკუასეული წარმოდგენების საშუალებით იძლევა უფრო ზოგადი ამოცანის ამოხსნას (იხ. ქვემოთ პუნქტი 3°).

2°. *რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნა მრავლადბმული არის შემთხვევაში* (§§ 41—43-ში ჩვენ ეს ამოცანა ცალადბმულ არისათვის ამოვხსენით) შეიძლება მივიღოთ, თუ რიმან—ჰილბერტის ამოცანას განვიხილავთ როგორც V ამოცანის კერძო შემთხვევას და გამოვიყენებთ §§ 71—73-ში გადმოცემულ, მრავლადბმული არისათვის სათანადოდ განზოგადებულ მეთოდს.

3°. *პუანკარეს ამოცანა ელიფსური ტიპის განტოლებებისათვის.* ამოცანა, რომელსაც ზემოთ P ამოცანა (პუანკარეს ამოცანა) ვუწოდეთ და, რომელიც მოქცევათა მათემატიკურ თეორიასთან დაკავშირებით წარმოიშვა, არ წარმოადგენს ამ თეორიისათვის დამოუკიდებელ ამოცანას.

მოქცევათა თეორიას უშუალოდ მივყავართ რაიმე S არეში

$$\Delta u + X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + Z(x, y)\,u = F(x, y) \tag{76,1}$$

[58] მრავლადბმული არის შემთხვევაში ამოხსნის შესახებ იხ. მომდევნო პარაგრაფი, პუნქტი 2°.

[59] განზოგადებანი წყვეტილი სასაზღვრო მონაცემებისა და რამდენიმე ფუნქციის შემთხვევისათვის მოყვანილი იქნება შესაბამისად V და VI თავებში.

ელიფსური დიფერენციალური განტოლების რეგულარული ამონახსნებისა ან უფრო ზოგადი დაშვებებისას

$$\Delta u + X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + Z(x, y)u +$$

$$+ \iint\limits_{S} K(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = F(x, y) \tag{76,2}$$

სახის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების მოძებნის ამოცანამდე, რომლებმაც არის L საზღვარზე სასაზღვრო პირობა

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial s} + B(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u = f(s) \tag{76,3}$$

(n — ნორმალია, s — რკალური აბსცისა) უნდა დააკმაყოფილონ; აქ Δ ლაპლასის ოპერატორია, $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$, $F(x, y)$, $K(x, y, \xi, \eta)$ S-ში მოცემული ფუნქციებია, ხოლო $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ S არის L საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც რეგულარობის გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ. ამ პირობებზე ჩვენ არ შევჩერდებით.

პუანკარემ (H. Poincaré [1]) განიხილა (76,1) განტოლების შემთხვევა, თუ დავუშვებთ, რომ სასაზღვრო პირობაში $A(s)=1$, $c(s)=0$. (76,2) განტოლების შემთხვევა განხილული იყო გ. ბერტრანის (G. Bertrand [3]) ვრცელ ნაშრომში აგრეთვე $A(s)=1$, $c(s)=0$ დაშვებებით. იმავე განტოლების შემთხვევა $A(s)=1$ დაშვებით განიხილა ვ. პოგოჟელსკიმ (W. Pogorzelski [1]). ყველა ეს ავტორი გულისხმობს, რომ S არის L საზღვარი ანალიზური კონტურია და სასაზღვრო პირობაში შემავალი ფუნქციებიც ანალიზურია.

ამოცანა, რომელსაც P ამოცანა ვუწოდეთ, ე. ი. იგივე სასაზღვრო ამოცანა, რაც ამ პუნქტში, ოღონდ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც (76,1) და (76,2) განტოლებებს აქვს უმარტივესი სახე $\Delta u=0$, ხსენებულ ავტორებს ესაჭიროებათ (76,3) სახის სასაზღვრო პირობის შესაბამისი გრინის ფუნქციის ასაგებად; შემდეგ ამ ფუნქციის საშუალებით ისინი კარგად ცნობილი ხერხით ადგენენ ფრედჰოლმის განტოლებას საწყისი ამოცანის ამოსახსნელად.

შუალედური სტადია — P ამოცანის ამოხსნა, როგორც უკვე ზემოთ ნაწილობრივ იყო თქმული, ამ ავტორთაგან არც ერთს არ აქვს სათანადო სისრულით გამოკვლეული, რადგანაც მათ მიერ მიღებულ ფრედჰოლმის განტოლებათა (რომლებიც, თავის მხრივ, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რეგულარიზაციით არის მიღებული) ეკვივალენტობის საკითხი ღიად რჩება (სინამდვილეში ეკვივალენტობას საზოგადოდ არ აქვს ადგილი). არაფერს ვამბობთ იმაზე, რომ (გრინის ფუნქციის მეშვეობით) საბოლოოდ მიღებულ ინტეგრალურ განტოლებათა (ინტეგრების S არით) სტრუქტურა მეტად რთულია.

(76,1) სახის განტოლებათა ერთი საკმაოდ ფართო და მნიშვნელოვანი კლასისათვის განსახილველი ამოცანა შეიძლება უშუალოდ დავიყვანოთ ზემოთ (§§ 71—72) ამოხსნილ ამოცანაზე.

სახელდობრ, განვიხილოთ ელიფსური ტიპის ერთგვაროვანი განტოლება

$$\Delta u + X(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + Z(x,\ y)\,u = 0, \tag{76,4}$$

სადაც $X(x,\ y)$, $Y(x,\ y)$, $Z(x,\ y)$ თავისი არგუმენტების მთელი ანალიზური ფუნქციებია[60], რომლებიც ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობენ, როცა x და y ნამდვილია (ერთგვაროვანი განტოლებით შემოფარგვლა ფაქტიურად არ ზღუდავს ზოგადობას; იხ. ქვემოთ).

ვეძებოთ რაიმე S არეში, რომელსაც სიმარტივისათვის ცალადბმულად ვთვლით, (76,4) განტოლების რეგულარული, ე. ი. მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით უწყვეტი ამონახსნი.

ი. ვეკუამ[61] აჩვენა, რომ ყოველი ასეთი ამოხსნა შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ (ვგულისხმობთ, რომ $z=0$ ეკუთვნის S-ს)

$$u(x,\ y) = \mathrm{Re}\left\{\alpha(z,\ \bar{z})\varphi(z) + \int\limits_0^z \beta(z,\ \bar{z};\ \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right\}, \tag{76,5}$$

სადაც $\alpha(z,\ \bar{z})$ და $\beta(z,\ \bar{z};\ \zeta)$ აღნიშნავს სავსებით განსაზღვრულ, მხოლოდ (76,4) განტოლების კოეფიციენტებზე დამოკიდებულ, თავისი არგუმენტების მთელ ანალიზურ ფუნქციებს, რომელთაგან პირველი ელემენტარულად (კვადრატურების საშუალებით) გამოითვლება, მეორე კი მიიღება მიმდევრობითი მიახლოებების ყოველთვის კრებადი ალგორითმის საშუალებით[62]. $\varphi(z)$-ით აღნიშნულია S-ში ჰოლომორფული ფუნქცია; როგორიც არ უნდა იყოს ჰოლომორფული $\varphi(z)$ ფუნქცია, მისი შესაბამისი $u(x,\ y)$ ფუნქცია განსაზღვრული (76,5) ფორმულით, იქნება (76,4) განტოლების რეგულარული ამოხსნა და, პირიქით, ყოველ რეგულარულ ამოხსნას შეესაბამება ჰოლომორფული ფუნქცია $\varphi(z)$, რომელიც სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ მას შევზღუდავთ $\mathrm{Im}\,\varphi(0)=0$ პირობით.

თუ (76,4) ერთგვაროვანი განტოლების ნაცვლად გვაქვს არაერთგვაროვანი განტოლება (ე. ი. (76,1) სახის განტოლება), მაშინ (76,5) ფორმულის მარჯვენა მხარეს დაემატება კიდევ ერთი წევრი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ $F(x,\ y)$ თავისუფალ წევრზე და განტოლების კოეფიციენტებზე; ეს წევრი ამოხსნის მეთოდზე არსებით გავლენას არ ახდენს.

როგორც ვთქვით, $\alpha(z,\ \bar{z})$ ფუნქცია ელემენტარულად გამოითვლება. ზოგიერთ მნიშვნელოვან შემთხვევაში $\beta(z,\ \bar{z};\ \zeta)$ ფუნქციასაც მეტად მარტივი სახე აქვს.

მაგალითად,

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0$$

განტოლების შემთხვევაში, სადაც λ^2 ნამდვილი მუდმივია ($\lambda^2 > 0$ შემთხვევაში ეს განტოლება არის მემბრანის რხევის განტოლება), $\alpha(z,\ \bar{z}) = 1$, ხოლო

[60] ეს პირობები შეიძლება მნიშვნელოვნად შევასუსტოთ, თუ ჩავთვლით, რომ X, Y, Z რეგულარული ანალიზური ფუნქციებია მხოლოდ რაიმე სასრულ S_0 არეში. მაგრამ მაშინ იძულებული ვხდებით გარკვეული დამატებითი პირობებით შევზღუდოთ S არე. იგულისხმება, რომ S_0 შეიცავს S-ს.

[61] იხ. ი. ვეკუას მონოგრაფია [10].

[62] მე-60 სქოლიოში მითითებულ შემთხვევაში ეს ფუნქციები წარმოადგენს x-სა და y-ის რეგულარულ ანალიზურ ფუნქციებს S არის შემცველ რაღაც არეში.

$$\beta(z, \overline{z}; \zeta) = -\frac{\partial}{\partial\zeta} I_0(\lambda\sqrt{\overline{z}(z-\zeta)}),$$

სადაც $I_0(z)$ ბესელის ნულოვანი რიგის ფუნქციაა.

დავუბრუნდეთ ჩვენს სასაზღვრო ამოცანას (76,4) განტოლებისათვის. თუ (76,3) სასაზღვრო პირობებში (76,5) გამოსახულებას შევიტანთ, ეს პირობა, როგორც მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\mathrm{Re}\left\{a_1(t_0)\,\varphi'(t_0)+a_0(t_0)\,\varphi(t_0)+\int_0^{t_0} h_*^*(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt\right\} = f(t_0) \ L\text{-ზე},$$

სადაც $a_1(t_0)$, $a_0(t_0)$, $h^*(t_0, t)$, $f(t_0)$ მოცემული ფუნქციებია, რომელთაც სასაზღვრო პირობის კოეფიციენტებზე რეგულარობის გარკვეული პირობების მოთხოვნისას § 71-ში და მის შენიშვნაში მითითებული თვისებები აქვთ (ჩვენს შემთხვევაში $m=1$). ამიტომ შეიძლება § 72-ში გადმოცემული მეთოდის გამოყენება. ეს ამოცანა არსებითად ამ გზით ამოხსნა ბ. ხვედელიძემ [3], რომელმაც ეს მეთოდი მრავლადბმულ არეებზედაც გაავრცელა[83].

შემდგომში ბ. ხვედელიძემ [18] ძალაში დატოვა ძველი მოთხოვნები (76,4) განტოლების კოეფიციენტების მიმართ და არსებითად გააფართოვა თავისი შედეგები (76,3) თანაფარდობის კოეფიციენტებსა და თავისუფალ წევრზე, და, აგრეთვე, საძიებელ ფუნქციაზე დადებულ პირობათა განზოგადების მიმართულებით.

4⁰. პუანკარეს ამოცანის ამოხსნა ფრიად ზოგადი დაშვებებით, როგორც (76,3) სასაზღვრო პირობის კოეფიციენტებსა და თავისუფალ წევრზე, ასევე (76,1) განტოლების კოეფიციენტებსა და თავისუფალ წევრზე აგებულია ი. ვეკუას ნაშრომში [12] და გადმოცემულია, არსებითი დამატებებით მის მონოგრაფიაში [13].

5⁰. ელიფსური ტიპის განტოლებებთან დაკავშირებული სასაზღვრო ამოცანები. 3⁰ პუნქტში გადმოცემული მეთოდი შეიძლება გავავრცელოთ ელიფსური ტიპის ზოგიერთი სხვა სახის დიფერენციალურ განტოლებებზედაც (მათ შორის 2-ზე მეტი რიგის განტოლებებზედაც). წრფივი სასაზღვრო ამოცანები, რომლებიც ჩვეულებრივ განიხილება (76,5) წარმოდგენის ანალოგიური წარმოდგენების არსებობისას, შეიძლება დავიყვანოთ V ამოცანაზე, მსგავსად იმისა, როგორც ეს 3⁰ პუნქტშია გადმოცემული.

ი. ვეკუასა და სხვა ავტორთა მიერ ამ მიმართულებით მიღებული რიგი მნიშვნელოვანი შედეგები გადმოცემულია ი. ვეკუას მონოგრაფიაში [10].

აღვნიშნოთ კიდევ ა. კალანდიას შრომები [1], [2], რომლებიც ამ მონოგრაფიის გამოსვლის შემდეგ გამოქვეყნდა.

---

[83] ამისათვის ის იყენებს მრავლადბმული არისათვის (76,5) სახის წარმოდგენის განზოგადებას, რომელიც აგრეთვე ი. ვეკუას მიერ იყო მოცემული, იხ. [10].

თავი მეოთხე

შეუღლების ამოცანა ზოგად შემთხვევაში. ზოგიერთი გამოყენება

ამ თავში ამოვხსნით შეუღლების ამოცანას ზოგად შემთხვევაში და მოვიყვანთ მიღებული ამოხსნის ზოგიერთ გამოყენებას[1].

ტერმინი „ზოგადი შემთხვევა" აქ ნახმარი იქნება იმ აზრით, რომ სასაზღვრო L წირი შეიძლება იყოს ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირი (პირველ პარაგრაფში მოცემული განსაზღვრის აზრით), ხოლო L წირზე მოცემულ და საძიებელ ფუნქციებს შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული სახის წყვეტები, რის შესახებაც ქვემოთ ვიტყვით.

მოკლე ცნობები სხვადასხვა ავტორების იმ ნაშრომების შესახებ, რომლებიც შეეხება შეუღლების ამოცანის ამოხსნას და არ იყო მოხსენიებული II თავში, მოცემული იქნება § 81-ში.

I. შეუღლების ამოცანა ზოგად შემთხვევაში

§ 77. ტერმინები და აღნიშვნები. ამ თავში გამოვიყენებთ აღნიშვნებსა და ტერმინებს, რომელთა უმრავლესობა უკვე იყო შემოღებული.

1^0. L წირის ქვეშ ვიგულისხმებთ უბან-უბან გლუვ წირს, § 1-ში მიღებული განსაზღვრის აზრით. ვიგულისხმებთ აგრეთვე, რომ (§ 1, მე-5 პუნქტი) L შედგება ისეთი გახსნილი გლუვი L_k, $k=1, 2, \ldots, p$, რკალებისაგან, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები, გარდა ბოლოებისა. L წირის კვანძებს (მათ შორის მის ბოლოებსაც) აღვნიშნავთ c_k-თი, $k=1, 2, \ldots, n$ ან უბრალოდ c-თი. L წირის კვანძებისაგან განსხვავებულ წერტილებს კვლავ ჩვეულებრივ წერტილებს ვუწოდებთ.

[1] დრეკადობის ბრტყელ სტატიკურ თეორიაში ზოგიერთი გამოყენება მკითხველს შეუძლია ნახოს ავტორის [9] წიგნში, აგრეთვე ამ წიგნის V თავში. აქვე აღვნიშნოთ, რომ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანები, აგრეთვე სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის რიგი გამოყენებანი როგორც თეორიულ, ისე გამოყენებით ამოცანებში მკითხველმა შეიძლება ნახოს შემდეგ წიგნებში: ა. ბიწაძე [6], [7]; ი. ვეკუა [10], [13]; ნ. ვეკუა [16]; თ. გახოვი [10]; მ. ლავრენტიევი და ბ. შაბატი [1]; ს. მიხლინი [9]; ლ. სედოვი [1]; ი. შტაერმანი [1]; C Jacob [2]; B. Noble [1]; L. C. Woods [1].

მივუთითებთ აგრეთვე შემდეგ ნაშრომებს, რომლებიც მეტწილად მოხსენიებული არ არის ზემოთ დასახელებულ წიგნებში: რ. ბანცური და გ. ჯანაშია [1]; ფ. ბერკოვიჩი [1]; ა. ბიწაძე [2] — [5]; ბ. ბოიარსკი [1]; ი. ვეკუა [9]; ნ. ვეკუა და რ. ისახანოვა [1]; თ. გახოვი [11], [12]; თ. გახოვი და ლ. ჩიბრიკოვა [2], [3]; ვ. კაკიჩევი [1], [2]; ვ. კაკიჩევი და ვ. როგოჟინი [1]; ა. კალანდია [1]; ტ. კერიმოვი [1]; ლ. მაღნარაძე [1]; გ. მანჯავიძე [7]; გ. მიხაილოვი და გ. პიხტეევი [1]; ს. მიხლინი [8]; გ. პიხტეევი [1], [2]; ვ. როგოჟინი [1]; მ. სმირნოვი [1]; ი. ფელდი [1]; მ. ფრიდმანი [1], [2]; ი. ხაჩრულინი [1]; ი. ჩერსკი [2], [4] — [6], [8]; ლ. ჩიბრიკოვა [3]; დ. შერმანი [8], [10]; ს. იურჩენკო [1]; L. Dragoş [1]; G. Fichera [1], [2]; S. Gellerstedt [1]; G. M. L. Gladwell [1], [2]; P. Leehey [1]; R. C. MacCamy [1]; W. Piechocki and H. Zorski [1]; H. Schmidt [1]; K. Schröder [2]; H. Schubert [1]; H. Söhngen [3]; G. W. Veltkamp [1]; L. Wolfersdorf [1] — [3]; H. Zorski [1] — [4].

L წირზე გაჭრილ სიბრტყეს აღვნიშნავთ S-ით; L წირის წერტილებს S-ს არ მივაკუთვნებთ.

ამ და მომდევნო თავებში ხშირად საქმე გვექნება იმ კერძო, მაგრამ გამოყენების თვალსაზრისით მნიშვნელოვან შემთხვევასთან, როცა L წირი შედგება გახსნილი გლუვი $L_k=a_kb_k$, $k=1, 2, \ldots, p$ რკალებისაგან, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები (მათ შორის ბოლოებიც). ასეთ წირს ზოგჯერ ვუწოდებთ ნაწყვეტ გლუვ წირს. ამ შემთხვევაში S წარმოადგენს (ბმულ) არეს (სიბრტყეს ხვრელებით).

2°. § 10-ში მიღებული ტერმინოლოგიის შესაბამისად, S-ში ($z=\infty$ წერტილის გამოკლებით) ჰოლომორფულ, L წირის ყველა ჩვეულებრივ წერტილზე, როგორც მარცხნიდან ისე მარჯვნიდან უწყვეტად გაგრძელებად $\Phi(z)$ ფუნქციას, რომელიც c კვანძების მახლობლობაში აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1 \tag{77,1}$$

ვუწოდებთ უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას ნახტომის ან სასაზღვრო L წირით.

მოგაგონებთ, რომ თუ უსასრულობის მახლობლობაში $\Phi(z)$ ფუნქციის z-ის ხარისხების მწკრივად წარმოდგენა შეიცავს დადებითმაჩვენებლიან წევრთა სასრულ რაოდენობას, ე. ი. თუ დიდი $|z|$-ებისათვის

$$\Phi(z) = A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \cdots, \; A_k \neq 0,$$

მაშინ, ვამბობთ, რომ $\Phi(z)$-ს უსასრულობაში აქვს სასრული k-რიგი; იმ შემთხვევაში, როცა $k>0$ $z=\infty$ არის k-რიგის პოლუსი, ხოლო თუ $k<0$ — $(-k)$-რიგის ნული.

3°. შემდგომში ხშირად გვექნება საქმე S-ზე განსაზღვრულ ისეთ $\Phi(z)$ ფუნქციებთან, რომელთათვის $|z-c|^{\varepsilon}\Phi(z) \to 0$, როცა $z \to c$, სადაც c მოცემული კვანძია, ხოლო ε ნებისმიერი დადებითი მუდმივია. ასეთ ფუნქციებს ვუწოდებთ c კვანძის მახლობლობაში თითქმის შემოსაზღვრულ ფუნქციებს. c კვანძის მახლობლობაში თითქმის შემოსაზღვრული ფუნქციის მაგალითს წარმოადგენს $\ln(z-c)$.

4°. H, H_0, H^*, H_ε^* კლასების ცნებები მუდამ იქნება გამოყენებული ქვემოთ; მათ განსაზღვრას აქ აღარ მოვიყვანთ (იხ. § 8).

5°. შემდგომში ყოველთვის, როცა ვიტყვით, რომ რაიმე სასაზღვრო პირობა სრულდება L-ზე, ვიგულისხმებთ (თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი), რომ კვანძები არ ეკუთვნის L-ს.

§ 78. შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა ზოგად შემთხვევაში. 1°. ვთქვათ L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია (§ 1). ამ ზოგადი შემთხვევისათვის შეუღლების ერთგვაროვან ამოცანას ასე ჩამოვაყალიბებთ:

ვიპოვოთ უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე ისეთი უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია L ნახტომის წირით, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \tag{78,1}$$

სადაც $G(t)$ არის L-ზე მოცემული, ყველგან ნულისაგან განსხვავებული H_0 კლასის ფუნქცია.

$G(t)$ ფუნქციას ჩვენ კვლავ ვუწოდებთ შეუღლების (78,1) ამოცანის კოეფიციენტს.

მოვაგონებთ, რომ ზემოთ მიღებული პირობის გამო (§ 77, პ. 5°) (78,1) ტოლობა შესრულებული უნდა იყოს L წირის ყველა ჩვეულებრივ წერტილში. ის, თუ როგორ უნდა გვესმოდეს პირობა, რომლის მიხედვითაც $G(t)$ ნულად არ იქცევა არსად L-ზე, განმარტებული იყო მე-8 პარაგრაფის მე-3 პუნქტში.

შევნიშნოთ, რომ ამოცანის ზემოთ მოყვანილი დასმა შეიცავს იმ შემთხვევას, როცა $G(t)$ კოეფიციენტს L წირის გლუვ ნაწილებზე შეიძლება ჰქონდეს სასრული რაოდენობის პირველი გვარის წყვეტის წერტილები. რადგანაც წყვეტის წერტილები შეიძლება კვანძების რიცხვში ჩავრთოთ. მომავალში ასეც მოვიქცევით.

2°. ისევე როგორც გლუვი შეკრული კონტურების შემთხვევაში (§ 35), ამჯერადაც მთავარი მნიშვნელობა ენიჭება კანონიკური ამონახსნის ცნებას, რომელსაც შემდეგნაირად განვსაზღვრავთ.

შეუღლების ერთგვაროვანი (78,1) ამოცანის $X(z)$ ამონახსნს კანონიკური ეწოდება, თუ არა მარტო $X(z)$, არამედ $\frac{1}{X(z)}$ ფუნქციაც უბან-უბან ჰოლომორფულია.

მოვაგონებთ, რომ უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის განმარტების თანახმად c კვანძის მახლობლობაში უნდა გვქონდეს:

$$|X(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1, \tag{78,2}$$

$$\frac{1}{|X(z)|} < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1. \tag{78,3}$$

ამგვარად, კანონიკური ამონახსნი ხასიათდება შემდეგი პირობებით: ის S-ში არსად, გარდა, შესაძლებელია, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა, არ იქცევა ნულად; ასევე ნულისაგან განსხვავებულია მისი სასაზღვრო მნიშვნელობები მარჯვნიდან და მარცხნიდან ნახტომის წირის ყველა ჩვეულებრივ წერტილში[2]; ხოლო c კვანძების მახლობლად ამონახსნი აკმაყოფილებს (78,2) და (78,3) პირობებს, რომელთაც, განმარტების თანახმად, უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია.

ჩვენ ახლა ვნახავთ, რომ განსახილველ პირობებში კანონიკური ამონახსნები ყოველთვის არსებობს.

3°. კანონიკური ამონახსნების აგების დროს, $\ln G(t)$-ს ქვეშ ვიგულისხმებთ მის რომელიმე გარკვეულ მნიშვნელობას, რომელიც უწყვეტად იცვლება ყოველ $L_1, \ldots, L_p$ რკალზე. რადგანაც, პირობის თანახმად, $G(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს და L-ზე არსად ნული არ ხდება, ამიტომ $\ln G(t)$ ეკუთვნის H_0-ს.

ვთქვათ, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ L წირის ყველა კვანძია. როცა t წერტილი უახლოვდება c_k კვანძს რომელიმე L_j რკალის გასწვრივ, რომლის ბოლოც არის c_k,

---

[2] თუ ზემოხსენებული პირობები არ არის შესრულებული, მაშინ $\frac{1}{X(z)}$ ფუნქცია არ იქნება უბან-უბან ჰოლომორფული.

$\ln G(t)$ ფუნქციას აქვს გარკვეული ზღვარი, რომელსაც აღვნიშნავთ $\ln G_j(t_k)$-თი. ამგვარად, განსაზღვრის თანახმად,

$$\ln G_j(c_k) = \lim \ln G(t), \text{ როცა } t \to c_k \ L_j\text{-ს გასწვრივ}. \qquad (78,4)$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)\, dt}{t-z}. \qquad (78,5)$$

სოხოცკი—პლემელის ფორმულების საშუალებით შეიძლება შემოწმდეს, რომ $e^{\gamma(z)}$ ჩვეულებრივ წერტილებში აკმაყოფილებს (78,1) სასაზღვრო პირობას. გამოსაკვლევი რჩება მისი ყოფაქცევა კვანძების მახლობლად.

§ 26-ის მე-3⁰ პუნქტში მიღებული შედეგის საფუძველზე c_k, $k=1, 2, \dots, n$, კვანძის მახლობლად გვექნება

$$\gamma(z) = (\alpha_k + i\beta_k) \ln (z - c_k) + \gamma_0(z),$$

სადაც $\gamma_0(z)$—ჰოლომორფულია ყოველ სექტორში, რომლებადაც დაიყოფა c_k წერტილის მიდამო L წირით და მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $z \to c_k$ ნებისმიერი ისეთი გზით, რომელიც არ გამოდის მოცემული სექტორიდან, ხოლო

$$\alpha_k + i\beta_k = \sum_j \frac{\pm \ln G_j(c_k)}{2\pi i}, \qquad (78,6)$$

სადაც ჯამი აიღება ყველა იმ j-ების მიმართ, რომელთა შესაბამისი L_j რკალები თავს იყრიან c_k წერტილში. ამასთან, ზედა ნიშნები შეესაბამება გამომავალ რკალებს, ხოლო ქვედა — შემავალს.

ამგვარად, c_k კვანძების მახლობლად გვაქვს:

$$e^{\gamma(z)} = (z - c_k)^{\alpha_k + i\beta_k}\, \Omega(z), \qquad (78,7)$$

სადაც $\Omega(z)$ ჰოლომორფულია c_k-ს მახლობლად ყველა ზემოთ ხსენებულ სექტორში და მიისწრაფვის ნულისგან განსხვავებული გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $z \to c_k$, ნებისმიერი გზის გასწვრივ, რომელიც არ გამოდის მოცემული სექტორიდან.

ვთქვათ, ახლა $\Pi(z)$ აღნიშნავს რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - c_k)^{\lambda_k}, \qquad (78,8)$$

სადაც λ_k აღნიშნავს *მთელ რიცხვებს*, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$-1 < \alpha_k + \lambda_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \qquad (78,9)$$

ახლა ადვილი საჩვენებელია, რომ ფუნქცია

$$X(z) = \Pi(z)\, e^{\gamma(z)} = e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{n} (z - c_k)^{\lambda_k} \qquad (78,10)$$

წარმოადგენს კანონიკურ ამონახსნს, ან უფრო ზუსტად, ერთ-ერთ კანონიკურ ამონახსნს. მართლაც, ცხადია, რომ S-ში $X(z)$ არსად ნული არ ხდება და (78,9) უტოლობის თანახმად აკმაყოფილებს (78,2), (78,3) პირობებს; ცხადია აგრეთვე, რომ სასაზღვრო მნიშვნელობები $X^+(t)$, $X^-(t)$, რომელთა გამოსახულებებიც მოყვანილია ქვემოთ, არც ერთ ჩვეულებრივ წერტილში ნულის ტოლი არ ხდება.

$X(z)$ ამონახსნი, საზოგადოდ, არაა სავსებით განსაზღვრული (78,9) პირობებით. სახელდობრ, c_k კვანძის შესაბამისი λ_k რიცხვი ცალსახად განისაზღვრება მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როცა α_k მთელი რიცხვია; ამ შემთხვევაში $\lambda_k = -\alpha_k$.

c_k *კვანძებს, რომელთა შესაბამისი* α_k *მთელი რიცხვებია, ჩვენ ვუწოდებთ განსაკუთრებულს, ხოლო დანარჩენ კვანძებს — არაგანსაკუთრებულს.*

არაგანსაკუთრებული კვანძებისთვის λ_k რიცხვები განისაზღვრება ± 1 შესაკრების სიზუსტით; სახელდობრ, λ_k შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ $\alpha_k+\lambda_k<0$ ან $\alpha_k+\lambda_k>0$.

ზემოთქმულის თანახმად, არ გამოირიცხება (78,1)-ის ისეთი ამონახსნები, რომლებიც შემოსაზღვრული არ არის კვანძების მახლობლად.

ზოგჯერ მიზანშეწონილია მოვითხოვოთ, რომ საძებნი ამონახსნი შემოსაზღვრული იყოს წინასწარ დასახელებული არაგანსაკუთრებული $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძების მახლობლად[3].

$\Phi(z)$ ამონახსნებს, რომლებიც ამ პირობებს აკმაყოფილებენ, ჩვენ ვუწოდებთ $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნებს. კლასს, რომელიც შეესაბამება $q=0$-ს, აღვნიშნავთ $h(0)$ ან h_0-ით. თუ m არაგანსაკუთრებული კვანძების რაოდენობაა, ხოლო $c_1, \ldots, c_m$ ყველა ეს კვანძია, მაშინ $h(c_1, \ldots, c_m)$ კლასს ჩვენ ზოგჯერ აღვნიშნავთ h_m-ით. h_0 კლასი შეიცავს ყველა დანარჩენ კლასს და h_m შედის ყველა დანარჩენ კლასში.

ამის შესაბამისად, შევთანხმდეთ, ამონახსნთა ყოველ კლასს შევუსაბამოთ მუდმივი მამრავლის სიზუსტით განსაზღვრული კანონიკური ამონახსნი.

სახელდობრ, თუ $c_1, \ldots, c_q$ მოცემული არაგანსაკუთრებული კვანძებია, მაშინ $h(c_1, \ldots, c_q)$ *კლასის კანონიკური ამონახსნი* ეწოდება (78,10) ფორმულით განსაზღვრულ $X(z)$ ამონახსნს, სადაც λ_k მთელი რიცხვები ისეა შერჩეული, რომ $\alpha_k+\lambda_k>0$ $c_1, \ldots, c_q$ კვანძებისათვის და $\alpha_k+\lambda_k<0$ დანარჩენი არაგანსაკუთრებული კვანძებისათვის[4] ან ყოველ ამონახსნს, რომელიც $X(z)$-საგან ნულის არატოლი მამრავლით განსხვავდება.

მთელ $\varkappa$ რიცხვს, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \qquad (78,11)$$

ვუწოდებთ *მოცემული* $h(c_1, \ldots, c_q)$ *კლასის ინდექსს.*

3 შემდეგომში ჩვენ ვნახავთ, რომ განსაკუთრებული კვანძების მახლობლად ყველა ამონახსნი აუცილებლად შემოსაზღვრულია.

4 მოგაგონებთ, რომ განსაკუთრებული კვანძებისათვის $\alpha_k + \lambda_k = 0$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\varkappa$ რიცხვი არ არის დამოკიდებული $\ln G(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობების არჩევაზე, ეს მნიშვნელობები უწყვეტად უნდა იცვლებოდეს L წირის შემადგენელ L_k რკალებზე[5].

(78,10) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $X(z)$-ს უსასრულობაში აქვს $(-\varkappa)$ რიგი, ე. ი. $\varkappa$ რიგის ნული, როცა $\varkappa > 0$ და $(-\varkappa)$ რიგის პოლუსი, როცა $\varkappa < 0$; როცა $\varkappa = 0$, გვაქვს $X(\infty) = 1$. ყველა შემთხვევაში

$$\lim_{z \to \infty} z^{\varkappa} X(z) = 1. \tag{78,12}$$

4°. ვიპოვოთ $X(z)$ კანონიკური ამონახსნის სასაზღვრო მნიშვნელობები. (78,5) ინტეგრალისათვის სოხოცკი—პლემელის ფორმულების გამოყენება გვაძლევს

$$X^+(t_0) = \exp\left\{\frac{1}{2} \ln G(t_0)\right\} \Pi(t_0)\, e^{\gamma(t_0)}, \quad X^-(t_0) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \ln G(t_0)\right\} \Pi(t_0)\, e^{\gamma(t_0)}$$

ანუ

$$X^+(t_0) = \sqrt{G(t_0)}\; X(t_0), \qquad X^-(t_0) = \frac{X(t_0)}{\sqrt{G(t_0)}}, \tag{78,13}$$

სადაც

$$X(t_0) = \Pi(t_0)\, e^{\gamma(t_0)}, \tag{78,14}$$

ხოლო ფესვის შტო, რომელიც გვაქვს (78,13) ფორმულაში, დაფიქსირდება ფორმულით

$$\sqrt{G(t_0)} = \exp\left\{\frac{1}{2} \ln G(t_0)\right\}. \tag{78,15}$$

(28,14) ფორმულის საფუძველზე ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$X(t_0) = \omega(t_0) \prod_{k=1}^{n} (t_0 - c_k)^{\gamma_k}, \tag{78,16}$$

სადაც $\omega(t)$ H_0 კლასის ისეთი ფუნქციაა, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია L-ზე, ხოლო

$$\gamma_k = \sigma_k + \lambda_k + i\beta_k. \tag{78,17}$$

ამგვარად, $X(t_0)$ ფუნქცია L-ზე ეკუთვნის H^* კლასს; იგი ეკუთვნის H კლასს $c_1, c_2, \ldots, c_n$ კვანძების მახლობლობაში. იგი შემოსაზღვრულია და მიეკუთვნება H_ε^* კლასს განსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში. იგივე მართებულია $X^+(t_0)$ და $X^-(t_0)$ ფუნქციებისათვის.

5°. ვთქვათ, $X(z)$ მოცემული $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ამონახსნია, ცხადია, რომ ფუნქცია

$$\Phi(z) = X(z) \cdot P(z), \tag{78,18}$$

[5] თუ L-ში შემავალ რომელიმე L_j რკალზე $\ln G(t)$-ს მნიშვნელობას შევცვლით $\ln G(t) + 2l\pi i$-ით, სადაც l მთელი რიცხვია, მაშინ (78,6) ფორმულის თანახმად, იმ კვანძის შესაბამის α_k მნიშვნელობას, საიდანაც გამოდის L_j, დაემატება $(-l)$, ხოლო იმ კვანძის შესაბამისი მნიშვნელობა, სადაც შედის L_j ემატება $(+l)$. ამის შედეგად (78,11) ჯამში ერთ-ერთი λ_k რიცხვთაგანი შეიცვლება $\lambda_k + l$-ით, ხოლო მეორე — $(\lambda_k - l)$-ით და ჯამი დარჩება უცვლელი.

სადაც $P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, წარმოადგენს მოცემული კლასის ამონახსნს[*].

დავამტკიცოთ, რომ, პირიქით, $P(z)$ პოლინომის სათანადო შერჩევის შემდეგ (78,18) ფორმულა იძლევა მოცემული კლასის ყოველ ამონახსნს.

მართლაც, ტოლობებიდან

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\ \Phi^{-}(t), \quad X^{+}(t)=G(t)\ X^{-}(t),$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}=\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} \quad L\text{-ზე.}$$

ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ ფუნქცია, თუ მას L წირის ჩვეულებრივ წერტილებში სათანადო მნიშვნელობებს მივაწერთ, ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეზე, გარდა კვანძებისა და უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა. კვანძების მახლობლობაში იგი შეიძლება გახდეს 1-ზე ნაკლები რიგის უსასრულობა, მაშასადამე, კვანძები აცილებადი განსაკუთრებული წერტილებია. რადგანაც $\Phi(z)$-ს უსასრულობაში აქვს სასრული რიგი, ამიტომ $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ პოლინომია და ჩვენი დებულება ამით დამტკიცებულია.

6°. აღვნიშნოთ რამდენიმე შედეგი, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობს (78,18)-დან. ცხადია, რომ ერთგვაროვანი (78,1) ამოცანის ყოველი $\Phi(z)$ ამონახსნი შემოსაზღვრული რჩება ყველა განსაკუთრებული კვანძის მახლობლობაში, ვინაიდან ასეთი თვისებისაა $X(z)$; ეს უკანასკნელი გამომდინარეობს (78,7), (78,10) ფორმულებიდან და $\alpha_k+\lambda_k=0$ პირობიდან.

თუ ამონახსნი შემოსაზღვრული რჩება მოცემული არაგანსაკუთრებული კვანძის მახლობლობაში, მაშინ იგი ამ კვანძში აუცილებლად ნულად იქცევა. ეს ისე უნდა გვესმოდეს, რომ ამონახსნი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა z უახლოვდება კვანძს ნებისმიერი გზით. მართლაც, თუ c ერთ-ერთი იმ არაგანსაკუთრებული კვანძთაგანია, რომელიც განსაზღვრავს კანონიკური $X(z)$ ამონახსნის კლასს, მაშინ, თვით $X(z)$ ფუნქციის აგების თანახმად, იგი ნული ხდება, როცა $z=c$. თუ c სხვა არაგანსაკუთრებული კვანძია, მაშინ c-ს მახლობლობაში $\Phi(z)$ ამონახსნის შემოსაზღვრულობისათვის, ცხადია, აუცილებელია, რომ $P(z)$ პოლინომი შეიცავდეს $(z-c)$ მამრავლს და, ამიტომ, $\Phi(z)=0$, როცა $z=c$.

(78,18)-დან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ $\Phi(z)$-ის რიგი უსასრულობაში $-\varkappa+k$-ს ტოლია ($\varkappa$ განსახილავი კლასის ინდექსია, ხოლო k — პოლინომის ხარისხი). ამგვარად, მოცემული კლასის ამონახსნები, რომელთაც უსასრულობაში უმცირესი შესაძლო რიგი აქვთ, მიიღება, თუ დავუშვებთ, რომ $P(z)=C=\text{const}\neq 0$. ამგვარად, მოცემული კლასის ამონახსნის უმცირესი შესაძლო რიგი უსასრულობაში

---

[*] შევნიშნოთ, რომ მოცემული კლასის ამონახსნის განსაზღვრის თანახმად, $\Phi(z)$ ამონახსნის მიკუთვნება $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასისათვის არ გამორიცხავს მის მიკუთვნებას უფრო ვიწრო $h(c_1, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots)$ კლასისათვის, იმის საწინააღმდეგოდ რაც ჩვენ გვაქვს მოცემული კლასის კანონიკური ამონახსნისათვის: თვით განსაზღვრის თანახმად, $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ამონახსნი აუცილებლად შემოუსაზღვრულია $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძებისაგან განსხვავებული არაგანსაკუთრებული $c_{q+1}, \ldots,$ კვანძების მახლობლად.

უდრის $(-\varkappa)$-ს; ამ კლასის ყველა ამონახსნი, რომელსაც ეს რიგი აქვს, მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = cX(z),$$

ე. ი. წარმოადგენს მოცემული კლასის კანონიკურ ამონახსნს.

ამგვარად, მოცემული კლასის კანონიკური ამონახსნი შეიძლება განვმარტოთ, როგორც უსასრულობაში უმცირესი შესაძლო რიგის მქონე მოცემული კლასის ამონახსნი.

ზემოთქმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ მოცემული $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ამონახსნი შეიძლება განისაზღვროს როგორც ამონახსნი, რომელიც არსად არ ხდება ნული, გარდა $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძებისა, სადაც მას აქვს ერთზე დაბალი რიგის ნული, და გარდა, შესაძლოა, $z=\infty$ წერტილისა.

ვთქვათ, კვლავ m არის ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძების რიცხვი, ხოლო $c_1, c_2, \ldots, c_m$ თვით ეს კვანძებია. ამონახსნების უზოგადესი კლასი, ე. ი. ამონახსნების კლასი, რომელიც არავითარი დამატებითი პირობებით არ იზღუდება, ზემოთ აღვნიშნეთ h_0-ით; შესაბამისი კანონიკური ამონახსნი აღვნიშნეთ $X_0(z)$-ით; $X_0(z)$ ფუნქციას მივიღებთ, თუ ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძისათვის ავიღებთ $\alpha_k + \lambda_k < 0$. ასეთი $X_0(z)$ ფუნქცია არსად სიბრტყის სასრულ ნაწილზე (კვანძების ჩათვლით) ნული არ ხდება.

h_0 კლასის $\varkappa_0$ ინდექსი, ცხადია, აღემატება ყველა სხვა კლასის ინდექსს. ცხადია, აგრეთვე რომ $X(z)$ კანონიკური ამონახსნი და ყოველი $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის $\varkappa$ ინდექსი დაკავშირებულია $X_0(z)$ და $\varkappa_0$-თან შემდეგი პირობებით:

$$X(z) = C(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_q)\,X_0(z), \quad C=\text{const}\neq 0,$$

$$\varkappa_m = \varkappa_0 - q. \tag{78,19}$$

$h(c_1, \ldots, c_m)$ კლასს, რომელიც ყველა სხვა კლასის ქვეკლასს წარმოადგენს, ისევე როგორც ზემოთ, h_m-ით აღვნიშნავთ. შესაბამის კანონიკურ ამონახსნს და ინდექსს $X_m(z)$-ითა და $\varkappa_m$-ით აღვნიშნავთ. ზემოხსენებულიდან ცხადია, რომ

$$X_m(z)=C\,(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_m)\,X_0(z), \quad C=\text{const}\neq 0,$$

$$\varkappa_m = \varkappa_0 - m. \tag{78,20}$$

შენიშვნა: ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ ყველა კლასის რაოდენობა. გვაქვს ერთი h_0 კლასი, m რაოდენობის $h(c_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ კლასი, $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} - h(c_j;\, c_k)$ კლასი და ა. შ. სულ

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{m}{1}+1=2^m$$

კლასი.

§ 79. შეუღლების ერთგვაროვანი მიკავშირებული ამოცანები. მიკავშირებული კლასები. წინა პარაგრაფის (78,1) ამოცანის პარალელურად განვიხილოთ ამოცანა

$$\psi^+(t) = [G(t)]^{-1}\,\psi^-(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{79,1}$$

რომელსაც (78,1) ამოცანის *მიკავშირებულ ამოცანას* ვუწოდებთ. მიკავშირებულ ამოცანათა ამონახსნებს შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი, რომელიც განსაკუთრებით მარტივ სახეს ღებულობს, თუ შემოვიღებთ ამონახსნების *მიკავშირებული კლასების* ცნებას.

განსაკუთრებული და არაგანსაკუთრებული კვანძების თვით განსაზღვრის საფუძველზე, ადვილი შესამჩნევია, რომ მოცემული ამოცანის განსაკუთრებული (არაგანსაკუთრებული) კვანძები წარმოადგენს აგრეთვე განსაკუთრებულ (არაგანსაკუთრებულ) კვანძებს მიკავშირებული ამოცანისათვის.

ვთქვათ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ კვლავ (მიკავშირებული ამოცანების) არაგანსაკუთრებული კვანძებია. *მიკავშირებული კლასები* ვუწოდოთ კლასებს[7]:

$$h=h(c_1,\ c_2, \ldots,\ c_q) \text{ და } h'=(c_{q+1}, \ldots,\ c_m).$$

მოცემული კლასის კანონიკური ამონახსნისა და ინდექსის განსაზღვრებიდან ადვილად ჩანს, რომ მიკავშირებული ამოცანების მიკავშირებული კლასების კანონიკური $X(z)$ და $X'(z)$ ამონახსნები დაკავშირებულია პირობებით

$$X'(z) = C\,[X(z)]^{-1}, \tag{79,2}$$

ხოლო შესაბამისი h და h' კლასების $\varkappa$ და $\varkappa'$ ინდექსები—პირობით

$$\varkappa' = -\varkappa. \tag{79,3}$$

C აღნიშნავს ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ მუდმივს, რომელიც ყოველთვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ ერთის ტოლად.

§ 80. **შეუღლების არაერთგვაროვანი ამოცანა ზოგად შემთხვევაში.** 1°. ვიგულისხმოთ, რომ L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია და ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად.

ვიპოვოთ უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია L სასაზღვრო წირით შემდეგი სასაზღვრო პირობით[8]:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \tag{80,1}$$

L-ზე, სადაც $G(t)$ და $g(t)$ L-ზე მოცემული H_0 კლასის ფუნქციებია, ამავე დროს $G(t) \neq 0$ ყველგან L-ზე.

$G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციებს კვლავ შესაბამისად კოეფიციენტს და თავისუფალ წევრს ვუწოდებთ.

განსაკუთრებულ და *არაგანსაკუთრებულ* კვანძებს ვუწოდებთ (78,1) ერთგვაროვანი ამოცანის შესაბამის განსაკუთრებულ და არაგანსაკუთრებულ კვანძებს. წინა პარაგრაფის მსგავსად, (80,1) ამოცანის ყველა შესაძლო ამონახსნები დავყოთ $h(c_1,\ c_2, \ldots,\ c_q)$ კლასებად იმ არაგანსაკუთრებული $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძების მიხედვით, რომელთა მახლობლობაში ამონახსნები შემოსაზღვრული უნდა იყოს, ისე, რომ არაფრით არ შევზღუდოთ ამონახსნის ყოფაქცევა სხვა არაგანსაკუთრებული და განსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში (თუ მხედველობაში არ მივი-

[7] $c_1, c_2, \ldots, c_q$-თი აღნიშნულია ზოგიერთი არაგანსაკუთრებული კვანძი, ხოლო $c_{q+1}, \ldots, c_m$-ით—ყველა დანარჩენი არაგანსაკუთრებული კვანძი.

[8] იგულისხმება, რომ ეს პირობა შესრულებული უნდა იქნეს L წირის ყველა ჩვეულებრივ წერტილში.

ღებთ ჩვენი განმარტების მიხედვით ყოველ უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციაზე დადებულ პირობებს).

ვეძებოთ (80,1) არაერთგვაროვანი ამოცანის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნები. ვთქვათ, $X(z)$ არის (78,1) ერთგვაროვანი ამოცანის ხსენებული კლასის კანონიკური ამონახსნი. ამ ფუნქციას ვუწოდებთ (80,1) ამოცანის მოცემული კლასის *კანონიკურ ფუნქციას*.

შევნიშნოთ, რომ

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$$

და გადავწეროთ (80,1) პირობა შემდეგი სახით:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}. \tag{80,2}$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\Phi(z)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია იმ $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძების მახლობლობაში, სადაც $X(z)$ ნულად იქცევა, ამიტომ ამ კვანძების მახლობლობაში გვაქვს

$$\left|\frac{\Phi(z)}{X(z)}\right| < \frac{\text{const}}{|z-c_j|^{\alpha}}, \quad \alpha < 1;$$

მაშასადამე, $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ ფუნქცია უბან-უბან ჰოლომორფულია. ამას გარდა, მას უსასრულობაში სასრული რიგი აქვს.

ამიტომ, § 31-ის საფუძველზე, ვასკვნით, რომ

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)\,P(z), \tag{80,3}$$

სადაც $P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია. ეს არის სწორედ (80,1) არაერთგვაროვანი ამოცანის *მოცემული კლასის ზოგადი ამონახსნი*. მეორე შესაკრები წარმოადგენს შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანის მოცემული კლასის ზოგად ამონახსნს, ხოლო პირველი — გამოსავალი არაერთგვაროვანი ამოცანის რაიმე კერძო ამონახსნს.

§ 26-ის მე-3 პუნქტში ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ (80,3) ამონახსნი ნამდვილად შემოსაზღვრულია $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძების მახლობლობაში.

§ 26-დან ადვილად ჩანს აგრეთვე, რომ განსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში ამონახსნი შემოსაზღვრულია, გარდა, შესაძლებელია, იმ განსაკუთრებული წერტილების მახლობლობისა, რომელთათვისაც (78,6) ფორმულაში მონაწილე β_k რიცხვები ნულის ტოლია; ამ განსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში ამონახსნები შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელი, მაგრამ აუცილებლად იქნება *თითქმის შემოსაზღვრული* (ლოგარითმული ტიპის)[9].

---

[9] როდესაც α_k მთელი რიცხვია (რაც ახასიათებს განსაკუთრებულ კვანძს) და როდესაც $\beta_k=0$, $X^+(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს c_k-ს მიდამოში.

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ, ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევისაგან განსხვავებით, ჩვენს შემთხვევაში რომელიმე არაგანსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში შემოსაზღვრული ამონახსნები ამ კვანძებში, საზოგადოდ, არ უდრის ნულს.

2°. გამოყენების თვალსაზრისით განსაკუთრებით საინტერესოა არაერთგვაროვანი (80,1) ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების მოძებნა.

შევნიშნოთ, რომ უსასრულობაში $X(z)$ ფუნქციის რიგი ზუსტად $(-\varkappa)$-ს ტოლია, ე. ი. $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსის ტოლია შებრუნებული ნიშნით. ამიტომ (80,3)-დან ადვილად დავასკვნით, რომ:

როცა $\varkappa \geqslant 0$, მაშინ მოცემული კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)\, dt}{X^+(t)\,(t-z)} + X(z)\, P_{\varkappa-1}(z), \tag{80,4}$$

სადაც $P_{\varkappa-1}$—ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa-1$-ს ($P_{\varkappa-1}=0$, როცა $\varkappa=0$).

როცა $\varkappa<0$, მოცემული კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია პირობები:

$$\int\limits_L \frac{t^j g(t)\, dt}{X^+(t)} = 0, \quad j = 0,\ 1, \ldots,\ -\varkappa-1, \tag{80,5}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\Phi(\infty)=0$. ამ პირობებში (ერთადერთი) ამონახსნი მოიცემა იმავე (80,4) ფორმულით, რომელშიც უნდა ავიღოთ $P_{\varkappa-1}=0$.

3°. (80,4) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ, როცა $\varkappa>0$, (80,1) ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას აქვს მოცემული h კლასის უსასრულობაში ქრობადი $\varkappa$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი:

$$X(z), \quad zX(z), \ldots, z^{\varkappa-1} X(z); \tag{80,6}$$

როცა $\varkappa \leqslant 0$, ამ ამოცანას არა აქვს მოცემული კლასის ნულისაგან განსხვავებული უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები.

ისევე როგორც II თავში, შეუღლების ორ ამოცანას მიკავშირებული ვუწოდოთ, თუ მიკავშირებულია მათი შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანები.

ზემოხსენებულისა და § 79-ის საფუძველზე, მოცემული (80,1) ამოცანის მიკავშირებულ ერთგვაროვან ამოცანას, როცა $\varkappa<0$, აქვს h' (h-ის მიკავშირებული) კლასის უსასრულობაში ქრობადი, $-\varkappa$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი:

$$\frac{1}{X(z)}, \quad \frac{z}{X(z)}, \ldots, \frac{z^{-\varkappa-1}}{X(z)}. \tag{80,7}$$

თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებებს შევადარებთ (80,5) ფორმულას, შეგვიძლია უკანასკნელი შევცვალოთ შემდეგი პირობით:

$$\int\limits_L \psi_k^+(t) g(t)\, dt = 0, \quad k = 1,\ 2, \ldots, -\varkappa, \tag{80,8}$$

სადაც $\psi_k^+(t)$ აღნიშნავს $\psi_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, -\varkappa)$ ფუნქციების მარცხნიდან სასაზღვრო მნიშვნელობებს. $\psi_k(z)$ შეადგენს მოცემული (80,1) ამოცანის მიკავშირებული ერთგვაროვანი ამოცანის h' კლასის უსასრულობაში ქრობად წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრულ სისტემას.

4°. მოცემული $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ზოგადი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ (80,3) ფორმულისაგან რამდენადმე განსხვავებული ფორმულით. ვთქვათ, $X_1(z)$ არის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ნებისმიერი $h(c_1, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$ ქვეკლასის კანონიკური ფუნქცია, მაშინ

$$\Phi_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)\, dt}{X_1^+(t)\,(t-z)}$$

ფუნქცია წარმოადგენს $h(c_1, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$ კლასის კერძო ამონახსნს და ამავე დროს იქნება $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კერძო ამონახსნიც. მეორე მხრივ, ცხადია, რომ ერთგვაროვანი ამოცანის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ზოგადი $\Phi(z)$ ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Psi(z),$$

სადაც $\Phi_1(z)$ არის არაერთგვაროვანი ამოცანის მოცემული კლასის რომელიმე კერძო ამონახსნი, ხოლო $\Psi(z)$—ერთგვაროვანი ამოცანის იმავე კლასის ზოგადი ამონახსნი. ამგვარად, **არაერთგვაროვანი ამოცანის** $h(c_1, \ldots, c_q)$ **კლასის ზოგადი ამონახსნი** შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)\, dt}{X_1^+(t)\,(t-z)} + X(z)\, P(z), \tag{80,3ა}$$

სადაც $P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, $X(z)$ ერთგვაროვანი ამოცანის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ამონახსნია, ხოლო $X_1(z)$ იმავე ერთგვაროვანი ამოცანის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ნებისმიერი $h(c_1, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$ ქვეკლასის ამონახსნია. კერძოდ, $X_1(z)$-ად შეგვიძლია ავიღოთ $h(c_1, \ldots, c_m)$ კლასის $X_m(z)$ კანონიკური ამონახსნი.

5°. ის გარემოება, რომ არაერთგვაროვანი ამოცანის ჩამოყალიბებისას ვუშვებთ $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციების წყვეტას მხოლოდ კვანძებში[10], არ ზღუდავს ზოგადობას, რადგანაც ამ ფუნქციების წყვეტის წერტილები, ერთგვაროვანი ამოცანის ანალოგიურად, შეიძლება მივაკუთვნოთ კვანძებს.

მაგრამ თუ $g(t)$ ფუნქციას აქვს წყვეტის წერტილები იმ წერტილებშიც, სადაც $G(t)$-ს არ აქვს წყვეტა, მაშინ მიზანშეწონილია, კვანძებს მივაკუთვნოთ მხოლოდ $G(t)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები. მართლაც, L წირის გლუვ ნაწილებზე მდებარე ის „კვანძები", სადაც $G(t)$ უწყვეტია, არავითარ გავლენას არ ახდენენ კანონიკურ ფუნქციაზე. ამავე დროს ამოცანის ამოხსნის არსებითი თვისებები განისაზღვრება კანონიკური ფუნქციით, რომელიც თავის მხრივ განისაზღვრება L წირით და ამოცანის $G(t)$ კოეფიციენტით[11].

[10] ლაპარაკია მუდამ პირველი გვარის წყვეტის წერტილებზე.

[11] ამასთან დაკავშირებულია ის გარემოებაც, რომ მათემატიკური ფიზიკის უმეტეს ამოცანებში, რომელთაც მივყავართ შეუღლების ამოცანამდე, ამოცანის ტიპი დაკავშირებულია L წირისა და $G(t)$ ფუნქციის სახესთან, ხოლო $g(t)$ ფუნქცია დამოკიდებულია ამა თუ იმ კონკრეტულ კერძო მონაცემზე.

ამიტომ უმჯობესია, რომ როცა $g(t)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები არ ემთხვევა კვანძებს, რომლებიც განისაზღვრებიან თვით წირით და $G(t)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებით, ჩავთვალოთ ისე, თითქოს $g(t)$-ს წყვეტა არ ჰქონია. ამის შედეგად, როგორც ზემოთ გვქონდა, მივიღებთ იმავე ფორმულებით წარმოდგენილ ამონახსნებს, განსხვავება მხოლოდ იმაში იქნება, რომ $g(t)$ ფუნქციის იმ წყვეტის წერტილების მახლობლობაში, რომლებიც არ ემთხვევიან კვანძებს, ამონახსნები იქნება H^*_ε კლასის შემოუსაზღვრული ფუნქციები, სახელდობრ, ლოგარითმული ტიპის, როგორც ამას გვიჩვენებს, მაგალითად, (80,3) ფორმულა.

§ 81. შეულლების ამოცანასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ნაშრომის შესახებ. **1°.** წინა პარაგრაფში რაიმე პრინციპული ცვლილებების გარეშე გადმოცემული იყო ავტორის მიერ [6] სტატიაში მიღებული ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი ამოცანების ამოხსნა, ნ. მუსხელიშვილისა და დ. კვესელავას მიერ [1] სტატიაში მოცემული არსებითი დამატებებით.

ხსენებულ სტატიებში განიხილება მხოლოდ ის შემთხვევები, როცა წირი შედგება გლუვი გახსნილი რკალებისაგან (იხ. § 8-ის 1-ლი პუნქტი), რომლებსაც საერთო წერტილები არა აქვთ, მაგრამ ამ სტატიების მსჯელობები და შედეგები თითქმის სიტყვა-სიტყვით გადაიტანება განხილული შემთხვევისათვის[12], რაც გაკეთებული იყო წინა პარაგრაფებში.

ზემოხსენებულ მეორე სტატიაში მოცემული არსებითი დამატება მდგომარეობს ამონახსნების $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასების, აგრეთვე h და h' მიკავშირებული კლასების შემოყვანაში, რაც უაღრესად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებებში (იხ. შემდეგი თავი).

ავტორის მიერ [6] სტატიაში მოყვანილი მეთოდი წარმოადგენს ტ. კარლემანის (T. Carleman [1]) ერთ კერძო შემთხვევაში მითითებული ხერხის განზოგადებას. სახელდობრ, კარლემანის ნაშრომში L წირი წარმოადგენს ნამდვილი ღერძის მონაკვეთს, გარდა ამისა, ავტორი იფარგლება იმ შემთხვევით, რომელიც ჩვენს აღნიშვნებში შეესაბამება $\varkappa_0 = 1$ მნიშვნელობას. ინდექსისა და, ცხადია, ამონახსნთა კლასების ცნების განსაზღვრა კარლემანს არ შემოჰყავს.

შეულლების ამოცანის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა L მარტივი შეკრული გლუვი წირია, ხოლო $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციებს L წირზე აქვს პირველი გვარის წყვეტის წერტილები (შდრ. § 83-ის მე-2 პუნქტს) თ. გახოვმა [3] მიიღო სხვა გზით, სახელდობრ, იმ შემთხვევაზე მიყვანის გზით, როცა $G(t)$ და $g(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია[13]. თავისი პირვანდელი ამოხსნა, რომელიც არ შეიცავდა, ზემოთ მოყვანილის აზრით, კლასებად დაყოფასა და (მიკავშირებული) კლასების ცნებებს, თ. გახოვმა მიიღო ნ. მუსხელიშვილის [6]. ნ. მუსხელიშვილისა და დ. კვესელავას

[12] ერთადერთი, მეტნაკლებად, არსებითი განსხვავება იმაში მდგომარეობს, რომ ბოლოების მახლობლობაში კოშის ტიპის ინტეგრალების ყოფაქცევის შესახებ § 22-ში მოყვანილი შედეგების ნაცვლად ჩვენ ვიყენებთ რამდენადმე უფრო ზოგად შედეგებს კვანძების მახლობლობაში კოშის ტიპის ინტეგრალების ყოფაქცევის შესახებ, რომელიც გადმოცემული იყო § 26-ში.

[13] უწყვეტი $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციების შემთხვევაზე მიყვანის თ. გახოვის მიერ გამოყენებული გზა წარმოადგენს დ. ჰილბერტის (D. Hilbert [2], გვ. 93) მიერ ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაში მითითებული ხერხის გამარტივებას. ანალოგიური მიდგომა აქვს ი. პლემელსაც (J. Plemelj [2]), უბან-უბან მუდმივი კოეფიციენტებიანი შეულლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნისათვის; იხ. VI თავი.

[1] ნაშრომებისაგან დამოუკიდებლად. შემდეგ თ. გახოკიძემ გამოიყენა ხსენებული ნაშრომებიდან მეორე და შეავსო თავისი ამოხსნა.

შემდგომში ნ. მუსხელიშვილის [6], ნ. მუსხელიშვილისა და დ. კვესელავას [1] შედეგები განაზოგადეს W. J. Tritzinsky-მ [1] (ავტორი იცნობდა მხოლოდ პირველს ზემოთ ხსენებულ ნაშრომებიდან) და დ. კვესელავამ [7] იმ შემთხვევისათვის, როცა L შედგება შეკრული და გახსნილი გლუვი წირებისაგან, რომლებსაც შეუძლიათ გადაკვეთონ ერთმანეთი სასრული რაოდენობის წერტილებში. მაგრამ ამ ავტორების შედეგები (განსაკუთრებით პირველისა, რომელიც სარგებლობდა საკმაოდ რთული ხერხით) არის ნაკლებად ზოგადი და ნაკლებად მარტივი ზემოთ მოყვანილთან შედარებით.

დ. კვესელავას აღნიშნული შედეგების ზოგიერთი გამარტივება მოყვანილია თ. გახოკიძისა და ლ. ჩიბრიკოვას [1] ნაშრომში.

რამდენადმე სხვა გზით, ვიდრე ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, გადამკვეთი (არა მაინცდამაინც გლუვი) კონტურების შემთხვევა განხილულია თ. გეგელიას [2] ნაშრომში. ამ ავტორთან გადაკვეთის წერტილების სიმრავლე შეიძლება თვლადიც კი იყოს.

შეუღლების ამოცანა ზოგიერთი არაგლუვი კონტურების შემთხვევაში განხილული იყო აგრეთვე ა. ალექსეევისა [1], [2] და ა. ბაბაევის [3] მიერ.

2°. შეუღლების ამოცანა თითქმის ისეთივე დასმით, როგორც აქ არის მოცემული, განხილულია აგრეთვე ვ. პოგოჟელსკის (W. Pogorzelski [4], [5]) ნაშრომებში. ამ ნაშრომებში მოცემულია ამოხსნა, რომლის ხასიათიც გარკვეული აზრით რამდენადმე უფრო დაზუსტებულია, ვიდრე ჩვენთან[14].

როცა L წირი ლიაპუნოვის პირობას აკმაყოფილებს, თავისუფალი $g(t)$ წევრისა და საძებნი $\Phi(z)$ ამონახსნისათვის დასაშვები კლასების გაფართოების თვალსაზრისით არსებითი შედეგები მიღებულია ბ. ხვედელიძის [6], [8], [12] — [14], [18] — [21] ნაშრომებში. ძირითადი შედეგი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ L არის სასრული რაოდენობის ლიაპუნოვის შეკრული ან გახსნილი წირების ერთობლიობა, რომელთაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ $G(t)$ კოეფიციენტი აკმაყოფილებს ზემოთ მოთხოვნილ პირობებს და (80,1)-ში თავისუფალი $g(t)$ წევრი ეკუთვნის $\mathbf{L}_p(\rho, L)$[15] კლასს, სადაც $p > 1$, ხოლო $\rho(t)$ (27,3) სახის მქონე რაიმე ფუნქციაა. მოვითხოვოთ, რომ საძებნი $\Phi(z)$ ფუნქცია წარმოიდგინება კოშის ტიპის ინტეგრალით $\mathbf{L}_p(\rho; L)$ კლასის სიმკვრივით. ამ პირობებში შეუღლების ამოცანის ყველა ამონახსნი (რომელთაც აქვთ სასრული რიგი უსასრულობაში) მოიცემა (80,3) ფორმულით. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს დასკვნა, რომ თუ შეუღლების (80,1) ამოცანაში $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები ეკუთვნის H_0 კლასს, მაშინ ამ ამოცანის ყოველი ამონახსნი, წარმოდგენადი კოშის ტიპის ინტეგრალით $\mathbf{L}_p(\rho; L)$ კლასის სიმკვრივით, უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციაა. შემდგომში ეს შედეგი განზოგადებულ იქნა სხვადასხვა მიმართულებით. გ. ხუსკივაძის [4] და ა. დრაჩინსკის [1], [2] ნაშრომებში ნაჩვენებია, რომ მთელ რიგ შემთხვევებში $\mathbf{L}_p(p > 1)$ კლასი შეიძლება შეიცვალოს $\mathbf{L}_1$ კლასით. გარდა ამისა,

[14] შეადარეთ § 26-ს (სქოლიო პარაგრაფის დასაწყისში). უნდა შევნიშნოთ, რომ ვ. პოგოჟელსკის ნაშრომებში განიხილება აგრეთვე საკმარისად ზოგადი შეუღლების არაწრფივი ამოცანა.

[15] იხ. § 27.

განხილულია ზოგიერთი შემთხვევა, როცა $g(t)$ და საძებნი ინტეგრალის სიმკვრივე არაჯამებადია. ე. გორდაძის [2] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ L შეიძლება იყოს უბან-უბან გლუვი წირი იმ პირობით, რომ L-ის შემადგენელ გლუვ რკალებზე ლიაპუნოვის პირობაა შესრულებული.

ზოგიერთი სხვა შემთხვევები განხილულია ა. ალექსეევის [3], ვ. პაატაშვილისა [3] და ს. ფრეიდკინის [5] ნაშრომებში.

3°. უკანასკნელ ხანს გამოქვეყნებულ ნაშრომებში მოცემულია შეუღლების ამოცანის ამოხსნის განზოგადება სასაზღვრო პირობაში მონაწილე $G(t)$ ფუნქციების შეზღუდვების შესუსტების აზრით. ამ მიმართულებით თ. გახოვმა თავის პირველ ნაშრომებში [1], [2] განიხილა ის შემთხვევა, როცა $G(t)$ ხდება ნული ან უსასრულობა, როგორც ხარისხოვანი ფუნქცია წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე. შემდგომში ეს შემთხვევა უფრო სრულად, ერთმანეთისაგან განსხვავებული მეთოდებით, შესწავლილი იყო ლ. ჩიკინის [1], ბ. ხვედელიძის [18] და ი. მელნიკის [1] — [3] მიერ. ბ. ხვედელიძისა[16] და ი. მელნიკის ნაშრომებში განხილულია აგრეთვე შემთხვევა, როცა $G(t)$ კოეფიციენტს აქვს ლოგარითმული სახის განსაკუთრებულობა. უფრო ადრე (მაგრამ თ. გახოვის შემდეგ) ის შემთხვევა, როცა $G(t)$ შეიძლება გახდეს ნული ან ერთზე დაბალი რიგის უსასრულობა, შესწავლილი იყო ნ. ვეკუას [18] მიერ.

ვ. ივანოვის [4], ი. სიმონენკოს [1], გ. მანჯავიძის და ბ. ხვედელიძის [1], [2] და ბ. ხვედელიძის [19], [12] ნაშრომებში $G(t)$ კოეფიციენტისაგან H პირობის შესრულების მოთხოვნა შეცვლილია მხოლოდ უწყვეტობის მოთხოვნით.

შემდეგი არსებითი ნაბიჯები $G(t)$ კოეფიციენტების დასაშვები კლასის გაფართოების თვალსაზრისით გადადგმულია ი. დანილიუკის [1], [2], ი. სიმონენკოს [2], [4], ჰ. უიდომის [1] ნაშრომებში. შემდგომში ზოგიერთი ანალოგიური შედეგი მიიღო აგრეთვე ვ. პაატაშვილმა [1], [2].

4°. უკანასკნელ ხანს გამოქვეყნებულ მთელ რიგ ნაშრომებში შეუღლების ამოცანა შეისწავლება განზოგადებულ ფუნქციებში (ძირითად ფუნქციონალებში რაიმე სივრცეზე). დავასახელოთ შემდეგი ნაშრომები: ო. პარასიუკი [1], ი. ჩერსკი [1], [3], [7], ვ. როგოჟინი [3]—[6], ფ. ბერკოვიჩი [1], [2], ც. დიბინი [1], ვ. დიბინი და ნ. კარაპეტიანცი [1], გ. ჯანაშია [1], A. H. Lauwerier [1].

5°. შეუღლების ამოცანის განზოგადება შეიძლება აგრეთვე, თუ ავიღებთ უფრო ზოგად სასაზღვრო პირობებს. ასე მაგალითად, სასაზღვრო პირობა შეიძლება შეიცავდეს არა მარტო უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციების, არამედ მათი წარმოებულების სასაზღვრო მნიშვნელობებსაც. დღეისათვის შესწავლილია შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

ვიპოვოთ უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[A_k(t_0)\overset{(k)}{\Phi^+}(t_0)+B_k(t_0)\overline{\overset{(k)}{\Phi^+}(t_0)}+\int_L M_k(t_0,\ t)\overset{(k)}{\Phi^+}(t)\,dt+$$

[16] იხ. აგრეთვე ა დრახინსკი [1] — [4].

$$+\int_L N_k(t_0,\ t)\overline{\overset{(k)}{\Phi}{}^+(t)}\,dt] + \sum_{k=0}^{n}\Big[C_k(t_0)\overset{(k)}{\Phi}{}^-(t_0) + D_k(t_0)\overline{\overset{(k)}{\Phi}{}^-(t_0)} +$$

$$+\int_L R_k(t_0,\ t)\overset{(k)}{\Phi}{}^-(t)\,dt + \int_L S_k(t_0,\ t)\overline{\overset{(k)}{\Phi}{}^-(t)}\,dt\Big] = g(t_0) \quad L\text{-ზე}, \qquad (81.1)$$

სადაც L მარტივი შეკრული გლუვი კონტურია, $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $g(t)$ მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ H პირობას; $M_k(t_0, t)$, $N_k(t_0, t)$, $R_k(t_0, t)$, $S_k(t_0, t)$ შემდეგი სახის ფუნქციებია:

$$\frac{h(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1,$$

სადაც $h(t_0, t)$ აკმაყოფილებს H პირობას. ზემოდან ხაზი ნიშნავს გადასვლას კომპლექსურად შეუღლებულ მნიშვნელობებზე, ხოლო $\overset{(k)}{\Phi}{}^+(t_0)$, $\overset{(k)}{\Phi}{}^-(t_0)$-ით აღნიშნულია საძიებნი $\Phi(z)$ ფუნქციის k-რიგის წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობები.

ეს ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა $M_k(t_0, t) = N_k(t_0, t) = R_k(t_0, t) = S_k(t_0, t) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, პირველად განიხილა ლ. მაღნარაძემ [2].

შემდგომში ი. კრიკუნოვმა [1]—[3] და მერე რ. ისახანოვმა [2], [3], [6], [7] აჩვენეს, რომ (81,1) ამოცანა შეიძლება შესწავლილ იქნეს V ამოცანისათვის ი. ვეკუას მიერ გამოყენებული მეთოდის სათანადო განზოგადებით, რომელიც მოყვანილია ამ წიგნის III თავში.

6°. განზოგადების სხვა მიმართულება მდგომარეობს იმაში, რომ საძიებნი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის (აგრეთვე, უფრო ზოგად შემთხვევაში, მისი წარმოებულების) სასაზღვრო პირობები შეუღლებულია საზღვრის არა ერთსა და იმავე წერტილში, არამედ ორ სხვადასხვა წერტილში, რომლებიც ერთმანეთთან გარკვეული პირობით არიან დაკავშირებული. ასეთი განზოგადებების შესახებ იხილეთ V დამატება წიგნის ბოლოში.

7°. შეუღლების ამოცანა შესწავლილია აგრეთვე რიმანის ზედაპირებზე. პირველი ნაშრომები ამ მიმართულებით ეკუთვნის ა. მესისს [1] — [3]. დღეისათვის შეუღლების ამოცანის, აგრეთვე რიმან—ჰილბერტის ამოცანის შესწავლა რიმანის ზედაპირებზე წინ წაიწია ლ. ჩიბრიკოვას [2], [4] — [9], ი. როდინის [1]— [6], რ. აბდულაევის [1]—[7], ა. სერბინის [1]—[3], ე. პოკაზეევის [1]—[3], ე. ზვეროვიჩის [3], ვ. კოპელმანის (W. Koppelman [1]) და სხვათა ნაშრომებში.

8°. ზოგიერთ ნაშრომებში შეისწავლება სასაზღვრო ამოცანები, რომლებიც წარმოადგენენ შეუღლების ამოცანისა და რიმან—ჰილბერტის ამოცანების კომბინაციებს. დავასახელებთ ე. ობოლაშვილისა [1], [2] და ი. როგოჟინის [1], [2] ნაშრომებს.

§ 82. L-ზე მოცემულ ფუნქციათა h კლასის ცნება. ზოგიერთი განზოგადება. 1°. წინა პარაგრაფებში შეუღლების ამოცანის $\Phi(z)$ ამონახსნისათვის შემოვიღეთ $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ცნება. შემდგომისათვის მნიშვნელოვანია ანალოგიური ცნების შემოღება L-ზე მოცემული $\varphi(t)$ ფუნქციებისათვის.

ვთქვათ, კვლავინდებურად $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \leqslant n)$ აღნიშნავს ყველა არაგანსაკუთრებულ კვანძებს, რომლებიც შეესაბამებიან შეუღლების მოცემულ ამოცანას, ე. ი. (78,1) ან (80,1) ამოცანებს; ეს კვანძები სავსებით განისაზღვრება L-ზე $G(t)$ ფუნქციის მოცემით.

ვთქვათ $\varphi(t)$ L-ზე მოცემული H^* კლასის ფუნქციაა. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$, $q \leqslant m$ კლასს, თუ ის $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძების მახლობლობაში ეკუთვნის H_0 კლასს, ხოლო დანარჩენი (განსაკუთრებული ან არაგანსაკუთრებული) კვანძების მიდამოებში იგი არ ემორჩილება რაიმე დამატებით პირობას.

$h(c_1, \ldots, c_q)$ და $h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ კლასებს ვუწოდებთ მიკავშირებულ კლასებს. $q=0$-ის შესაბამისს კლასს აღვნიშნავთ h_0-ით, ხოლო $h(c_1, \ldots, c_m)$ კლასს— h_m-ით. ამგვარად, ერთი და იმავე აღნიშვნებს გამოვიყენებთ უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქციებისათვის, რომლებიც შეუღლების ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენენ და აგრეთვე L-ზე H^* კლასის $\varphi(t)$ ფუნქციებისათვის. ამ გარემოებამ არ უნდა გამოიწვიოს აღრევა.

2^0. ჩვენ ვნახეთ, რომ შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ყველაზე ზოგადი ამონახსნი, რომელიც შეიცავს ყველა კლასის ამონახსნს, წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = X_0(z)\, P(z), \tag{82,1}$$

სადაც $X_0(z)$ h_0 კლასის კანონიკური ამონახსნია, ხოლო $P(z)$ პოლინომია. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ერთგვაროვანი ამოცანის ყოველი ისეთი ამონახსნი, რომელიც თითქმის შემოსაზღვრულია რომელიმე c კვანძის მიდამოში (§ 77, პუნქტი 3^0), აუცილებლად შემოსაზღვრული იქნება ამ კვანძის მახლობლობაში.

თუ c კვანძი არაგანსაკუთრებულია, მაშინ მის მახლობლობაში თითქმის შემოსაზღვრული ამონახსნი აუცილებლად ნული ხდება c წერტილში.

§ 80-ის მე-4 პუნქტში ნათქვამის საფუძველზე შეუღლების არაერთგვაროვანი ამოცანის ყოველი ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\Phi(z) = \frac{X_m(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\, dt}{X_m^+(t)\,(t-z)} + X_0(z)\, P(z), \tag{82,2}$$

სადაც, როგორც ყოველთვის, $X_m(z)$ $h(c_1, \ldots, c_m)$ კლასის კანონიკური ფუნქციაა, ხოლო $X_0(z)$—h_0 კლასის კანონიკური ფუნქცია.

პირველი შესაკრები, როგორც ეს გამომდინარეობს § 26-დან, შემოსაზღვრულია ყოველი არაგანსაკუთრებული კვანძის მახლობლობაში. აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ არაერთგვაროვანი ამოცანის ყოველი ამონახსნი, რომელიც თითქმის შემოსაზღვრულია რაიმე არაგანსაკუთრებული c კვანძის მახლობლობაში, აუცილებლად შემოსაზღვრული იქნება მის მახლობლობაში[17].

ამგვარად, შეუღლების ამოცანის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნების განსაზღვრისას, $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძების მახლობლობაში შემოსაზღვრულობის მოთხოვნა

---

[17] მართლაც, თუ c კვანძია და ამონახსნი თითქმის შემოსაზღვრულია c წერტილის მახლობლობაში, მაშინ აუცილებლად $P(c)=0$ და, მაშასადამე, $P(z)$ შეიცავს $(z-c)$ მამრავლს.

შედეგის შეუცვლელად შეიძლება შევცვალოთ თითქმის შემოსაზღვრულობის მოთხოვნით. ეს შენიშვნა ჩვენთვის სასარგებლოა, რადგანაც იგი საშუალებას მოგვცემს ერთიანი თვალთახედვით გადმოვცეთ ზოგიერთი ფორმულირება.

3°. ჩვენ აქამდე ვთვლიდით, რომ არაერთგვაროვანი ამოცანის სასაზღვრო (80,1) პირობაში თავისუფალი $g(t)$ წევრი ეკუთვნის H_0 კლასს. ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $g(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს, სადაც $c_1, c_2, \ldots, c_q$ მოცემული არაგანსაკუთრებული კვანძებია (იხ. პუნქტი 1°). ადვილი შესამჩნევია, რომ (80,1) ამოცანის $\Phi(z)$ ამონახსნები, რომლებიც მიეკუთვნება ერთსახელა $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს, მოიცემა იმავე ფორმულებით, როგორც იმ შემთხვევაში, როცა $g(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს, ე. ი. ზოგადი ამონახსნებისათვის (80,3) ფორმულით და უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნებისათვის (80,4) ფორმულით. $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები მოიცემა იმავე (80,5) ფორმულებით.

შევნიშნოთ, რომ განსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში ამონახსნები ახლა უკვე შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელი 1-ზე ნაკლები ნებისმიერი რიგით ამ კვანძების მახლობლობაში $g(t)$ ფუნქციის ყოფაქცევის მიხედვით; მაგრამ თუ, კერძოდ, $g(t)$ ეკუთვნის H_ε^* კლასს მოცემული განსაკუთრებული კვანძის მახლობლობაში, მაშინ ამონახსნები თითქმის შემოსაზღვრული იქნება ამ კვანძის მახლობლობაში.

§ 83. უმნიშვნელოვანესი კერძო შემთხვევები. უსასრულო სწორხაზოვანი საზღვრის შემთხვევა. გამოყენებებში უფრო ხშირად გვხვდება შემდეგი კერძო შემთხვევები: როცა წირი შედგება ისეთი გლუვი გახსნილი რკალებისაგან, რომელთაც არა აქვთ არც შიგა და არც ბოლო საერთო წერტილები, ე. ი. როცა L წარმოადგენს ნაწყვეტ გლუვ წირს და შედგენილია ურთიერთარაგადამკვეთი მარტივი შეკრული კონტურებისაგან. წინა პარაგრაფებში შემოღებული ზოგადი ფორმულები, რასაკვირველია, უშუალოდ გამოიყენება ამ შემთხვევისათვისაც. ჩვენ აქ გავაკეთებთ რამდენიმე დამატებით შენიშვნას, რომლებიც შეეხება აგებულ კანონიკურ ფუნქციებს და ხელახლა მოვიყვანთ ზოგიერთ ფორმულას.

1°. ნაწყვეტი გლუვი წირის შემთხვევა. ვთქვათ $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_p$ შედგება ისეთი მარტივი გლუვი გახსნილი $L_k = a_k b_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$ რკალებისაგან, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები (მათ შორის საერთო ბოლოებიც); ასეთ წირს ვუწოდეთ (§ 77) წყვეტილი გლუვი წირი.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები ეკუთვნის H კლასს L-ზე, ე. ი. აკმაყოფილებს H პირობას ყოველ (ჩაკეტილ) L_k რკალზე.

ისევე როგორც ზოგად შემთხვევაში, განსაკუთრებული და არაგანსაკუთრებული კვანძები (ჩვენს შემთხვევაში ბოლოები) განისაზღვრება $G(t)$ ფუნქციის მოცემით. ჩვენს შემთხვევაში $\alpha_k + i\beta_k$ რიცხვები გადმოიცემა ფორმულით

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{\mp \ln G(c_k)}{2\pi i}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2p, \qquad (83,1)$$

სადაც ზედა ნიშანი აიღება, როცა $c_k = a_j$; ქვედა —, როცა $c_k = b_j$. c_k ბოლო განსაკუთრებულია, როცა α_k მთელი რიცხვია (ან ნულია), ე. ი. როცა $G(c_k)$ ნამდვილი დადებითი სიდიდეა, წინააღმდეგ შემთხვევაში ის არაგანსაკუთრებული ბოლოა.

ვთქვათ $c_1, c_2, \ldots, c_m (m \leqslant 2p)$ ყველა არაგანსაკუთრებული ბოლოა. $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია $X(z)$ მოიცემა ფორმულით:

$$X(z)=e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{2p} (z-c_k)^{\lambda_k}, \tag{83,2}$$

სადაც λ_k ისეთი მთელი რიცხვებია, რომ

$$\begin{aligned} 0<\alpha_k+\lambda_k<1, &\quad \text{როცა } k=1,\ 2, \ldots, q, \\ -1<\alpha_k+\lambda_k<0, &\quad \text{როცა } k=q+1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{83,3}$$

ხოლო $\gamma(z)$ განისაზღვრება (78,5) ფორმულით

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)}{t-z}\, dt. \tag{83,4}$$

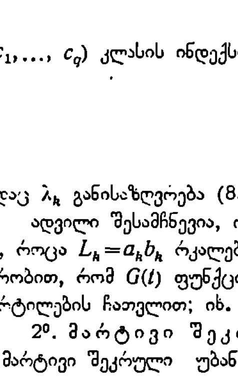
$h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსი $\varkappa$ მოიცემა ფორმულით

$$\varkappa=-\sum_{k=1}^{2p} \lambda_k, \tag{83,5}$$

სადაც λ_k განისაზღვრება (83,3) ფორმულის შესაბამისად.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მოყვანილი ფორმულები გამოდგება იმ შემთხვევაში, როცა $L_k=a_k b_k$ რკალები მარტივი უბან-უბან გლუვი გახსნილი რკალებია, იმ პირობით, რომ $G(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H კლასს ყოველ L_k რკალზე (კუთხური წერტილების ჩათვლით; იხ. აგრეთვე შენიშვნა პ. 2°-ის ბოლოში).

2°. მარტივი შეკრული კონტურის შემთხვევა[18]. ვთქვათ ახლა L მარტივი შეკრული უბან-უბან გლუვი კონტურია (ნახ. 18). L წირის „კვანძები" მისი კუთხური წერტილები და აგრეთვე ის წერტილები, სადაც $G(t)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას (პირველი გვარის, რადგანაც სხვაგვარს ჩვენ გამოვრიცხავთ). ამას გარდა, საჭიროების შემთხვევაში შეგვიძლია კვანძებს მივაკუთვნოთ ნებისმიერი სხვა წერტილები (სასრული რაოდენობის).



ნახ. 18

ისევე, როგორც ზოგად შემთხვევაში (§§ 78 და 80), ვიგულისხმებთ, რომ $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები L წირზე ეკუთვნის H_0 კლასს.

L-ზე დადებითი მიმართულება ისე ავირჩიოთ, რომ ყოველი იმ ორი არიდან, რომლებადაც L წირი ჰყოფს სიბრტყეს, იგი ყოველთვის რჩებოდეს ერთსა და იმავე მხარეს (მარცხნივ ან მარჯვნივ).

ვთქვათ, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ნებისმიერად გადანომრილი ყველა კვანძია. (78,6) ფორმულის თანახმად, ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს

[18] განზოგადება რამდენიმე შეკრული კონტურის შემთხვევაში არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(c_k - 0) - \ln G(c_k + 0)\right] = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, \quad (83{,}6)$$

სადაც $G(c_k-0)$ და $G(c_k+0)$ პირობითად აღნიშნავს $G(t)$ ფუნქციის ზღვარს, როცა t წერტილი მიისწრაფვის c_k-კენ, L-ის გასწვრივ შესაბამისად დადებითი და უარყოფითი მიმართულებით მოძრაობისას, ამგვარად

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, \quad \beta_k = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|G(c_k-0)|}{|G(c_k+0)|}; \quad (83{,}7)$$

ჩვენ ჩავთვლით, რომ

$$\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} = \arg G(c_k-0) - \arg G(c_k+0),$$

ამასთანავე $\arg G(t)$ წარმოადგენს $\ln G(t)$ ფუნქციის არჩეული მნიშვნელობის წარმოსახვით ნაწილს.

ჩვენს შემთხვევაში განსაკუთრებული კვანძები (ე. ი. კვანძები, რომელთათვისაც α_k მთელი რიცხვებია) იქნება ის კვანძები, რომელთათვისაც შეფარდება

$$\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} \quad (83{,}8)$$

ნამდვილი დადებითი რიცხვია.

კერძოდ, განსაკუთრებული კვანძები იქნება ის კვანძები (მათ შორის კუთხური წერტილებიც), სადაც $G(t)$ უწყვეტია, ე. ი. $G(c_k+0)=G(c_k-0)$; ამ შემთხვევაში, გარდა ამისა, $\beta_k=0$.

ვთქვათ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \leqslant n)$ ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძია. $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, $q \leqslant m$ კლასის კანონიკური $X(z)$ ფუნქცია გადმოიცემა (78,10) ფორმულით λ_k რიცხვების სათანადო შერჩევის შემდეგ. ჩვენს შემთხვევაში ეს ფორმულა შეიძლება საგრძნობლად გამარტივდეს, თუ L წირის ცალკეულ უბნებზე $\ln G(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს სათანადოდ შევარჩევთ, სახელდობრ. შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ ყველა λ_k რიცხვი, გარდა ერთისა, ნულის ტოლი იყოს.

მართლაც, ვთქვათ, c რაიმე ისეთი წერტილია L წირზე, რომელშიც $G(t)$ უწყვეტია (თუ კვანძებს შორის არის ასეთი წერტილები, მაშინ c წერტილად შეგვიძლია ავიღოთ ერთ-ერთი მათგანი). c წერტილი მივაკუთვნოთ L წირის კვანძებს.

$\ln G(c+0)$-ს მივანიჭოთ რაიმე გარკვეულ მნიშვნელობა, ვამოძრაოთ t წერტილი c წერტილიდან დადებითი მიმართულებით, ვცვალოთ $\ln G(t)$ უწყვეტად, ვიდრე არ მივაღწევთ პირველ c_k კვანძს; აქ მივიღებთ $\ln G(c_k-0)$-ის გარკვეულ მნიშვნელობას. c_k წერტილში დავაფიქსიროთ $\ln G(c_k+0)$ შემდეგი წესის მიხედვით:

$$0 < \alpha_k = \frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} < 1, \quad \text{როცა } k = 1, 2, \ldots, q,$$

$$-1 < \alpha_k = \frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} < 0 \quad \text{დანარჩენი არაგანსაკუთრებული კვანძებისთვის}, \quad (83{,}9)$$

$$\alpha_k = \arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} = 0 \quad \text{განსაკუთრებული კვანძებისთვის}.$$

გავაგრძელოთ დადებითი მიმართულებით L წირის გასწვრივ შემდგომი მოძრაობა და ყოველ შემხვედრ კვანძზე გავლისას მითითებული წესის მიხედვით ავარჩიოთ $\ln G(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი. c წერტილში დაბრუნებისას მივიღებთ ამ ფუნქციისათვის სავსებით გარკვეულ მნიშვნელობებს L წირის ყოველ იმ უბანზე, რომლებადაც მას ჰყოფენ c_k და c წერტილები.

დაბოლოს დავუშვათ, რომ

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\,[\ln G(c-0)-\ln G(c+0)] = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}\,[\arg G(t)]_L, \qquad (83,10)$$

სადაც $[\ ]_L$ სიმბოლო გამოხატავს ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების ნაზრდს კონტურზე დადებითი მიმართულებით შემოვლისას ზემოთ მოყვანილი (83,9) წესების დაცვით. ცხადია, რომ $\varkappa$ მთელი რიცხვია.

$h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური $X(z)$ ფუნქციის მისაღებად გამოვიყენოთ (78,10) ფორმულა, რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში გადავწერთ შემდეგნაირად:

$$X(z) = (z-c)^{\lambda}\,(z-c_1)^{\lambda_1}\cdots(z-c_n)^{\lambda_n}\,e^{\gamma(z)},$$

რადგანაც c ჩავრთეთ კვანძის წერტილთა რიცხვში; λ-თი აღნიშნულია c კვანძის შესაბამისი მთელი რიცხვი, ისევე, როგორც λ_k რიცხვები შეესაბამებიან c_k კვანძებს.

ცხადია, რომ α_k რიცხვების შერჩევის (83,9) წესის თანახმად უნდა დავუშვათ, რომ $\lambda_k=0$, $k=1, 2, \ldots, n$. c კვანძის შესაბამისი α რიცხვი (ისევე, როგორც α_k რიცხვები შეესაბამება c_k კვანძებს) მოიცემა ფორმულით

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\,[\arg G(c-0)-\arg G(c+0)];$$

ამიტომ $\lambda = -\varkappa$.

ამგვარად, $X(z)$-ისათვის გვექნება შემდეგი მარტივი ფორმულა:

$$X(z) = (z-c)^{-\varkappa}\,e^{\gamma(z)}, \qquad (83,11)$$

სადაც (78,5) ფორმულის თანახმად,

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}, \qquad (83,12)$$

ამასთანავე, $\ln G(t)$-ს მნიშვნელობა შეირჩევა ზემოთ აღწერილი წესის მიხედვით.

ზემოთ მოყვანილი $\varkappa$ მთელი რიცხვი, ცხადია, წარმოადგენს $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსს.

თუ, კერძოდ, $G(t)$ ფუნქცია L-ზე ეკუთვნის H კლასს (და არა მხოლოდ H_0-ს), მაშინ ყველა „კვანძი“ (მათ შორის კუთხური წერტილიც) იქნება განსაკუთრებული. $\ln G(t)$ ფუნქციად ამ შემთხვევაში უნდა გვესმოდეს მისი ნებისმიერი მნიშვნელობა, რომელიც უწყვეტია მთელ L კონტურზე, საიდანაც გამორიცხულია c წერტილი.

§ 35-ში (შენიშვნა 2) ჩვენ გამოვიყვანეთ (35,19) ფორმულა იმ შემთხვევისათვის, როცა L მარტივი შეკრული, გლუვი კონტურია, ხოლო $G(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე; ეს ფორმულა სავსებით ემთხვევა (83,11) ფორმულას და, მაშასადამე, შედეგი იგივე რჩება, როცა წირს აქვს კუთხური წერტილები.

(35,19) ფორმულა (35,6 A) ან (35,6 B) ფორმულის ეკვივალენტურია L-ზე დადებითი მიმართულების არჩევის შესაბამისად.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (83,11) ფორმულა შეიძლება შევცვალოთ მისი ანალოგიური (35,6 A) ან (35,6 B) ფორმულით იმის შესაბამისად, თუ როგორ არის არჩეული L-ზე დადებითი მიმართულება. სახელდობრ, თუ ისევე, როგორც § 35-ის 2⁰ პუნქტში, S^+ და S^--ით აღვნიშნავთ სიბრტყის იმ ნაწილებს, რომლებიც შესაბამისად მარცხნივ ან მარჯვნივ რჩება L-ზე დადებითი მიმართულებით მოძრაობისას და დავარქმევთ მას A შემთხვევას, როცა S^+ სასრულია, ხოლო უსასრულო S^+-ისათვის—B შემთხვევას, მაშინ მოცემული $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური $X(z)$ ამონახსნისათვის გვექნება გამოსახულებები

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^+ \\ (z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^- \end{cases} \quad \text{შემთხვევა } A, \qquad (83,13A)$$

$$X(z)=\begin{cases} (z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^+ \\ e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^- \end{cases} \quad \text{შემთხვევა } B, \qquad (83,13B)$$

სადაც a L-ის შიგნით ნებისმიერად დაფიქსირებული წერტილია, ხოლო

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}, \qquad (83,14)$$

ამასთანავე,

$$\begin{aligned} G_0(t) &= (t-a)^{-\varkappa}G(t) \quad A \text{ შემთხვევაში}, \\ G_0(t) &= (t-a)^{\varkappa}G(t) \quad B \text{ შემთხვევაში}. \end{aligned} \qquad (83,15)$$

ამ ფორმულებს ზუსტად ისეთივე სახე აქვს, როგორც 35-ის 2⁰ პუნქტში გამოყვანილ ფორმულებს. არსებითია მხოლოდ $\ln G_0(t)$-ს მნიშვნელობის არჩევა. სახელდობრ, ჩვენს შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ

$$\ln G_0(t)=\mp\varkappa\ln(t-a)+\ln G(t), \qquad (83,16)$$

სადაც $\ln G(t)$ განისაზღვრება (83,9) ფორმულებით ზემოთ მოყვანილი წესის მიხედვით. ამასთან, c წერტილად შეიძლება ავიღოთ L წირის ნებისმიერი ჩვეულებრივი წერტილი, ხოლო $\ln(t-a)$-ად მიღებულია მისი ნებისმიერი მნიშვნელობა, რომელიც უწყვეტად იცვლება L კონტურზე, საიდანაც ამოგდებულია c წერტილი; ზედა ნიშანი შეესაბამება A შემთხვევას, ქვედა—B-ს.

მოყვანილი ფორმულების მართებულობაში დავრწმუნდებით, თუ ამ ფორმულებიდან გადავალთ (83,11) ფორმულებზე ზუსტად ისევე, როგორც § 35-ში (შენიშვნა 2), (35,6 A), (35,6 B) ფორმულებიდან — (35,19) ფორმულაზე. (83,13 A), (83,13 B) ფორმულების გამოყვანა შეიძლება უშუალოდაც, თუ გავყვებით § 35-ის მე-2 პუნქტში მითითებულ გზას[10], რასაც თვით მკითხველს ვანდობთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1.

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t) \qquad (*)$$

---

[10] ასეთი დამტკიცება მოყვანილი იყო ამ წიგნის პირველ გამოცემაში (§ 85). აქ კი (83,11) ფორმულის გამოყვანას მხოლოდ იმ მიზნით მივმართეთ, რომ იგი უშუალოდ გამომდინარეობს ზოგადი შემთხვევის შესაბამისი ფორმულიდან.

შეუღლების ამოცანის დასმისას არ მოვითხოვდით, რომ ეს სასაზღვრო პირობა შესრულებული ყოფილიყო კვანძებშიც; ასეთ მოთხოვნას ზოგად შემთხვევაში აზრიც არ ექნებოდა, ვინაიდან $\Phi^+(c)$, $\Phi^-(c)$ სასაზღვრო მნიშვნელობებს მარცხნიდან და მარჯვნიდან აზრი არა აქვს, როცა c ზოგადი სახის კვანძია.

მიუხედავად ამისა, თუ მოცემული კვანძი წარმოადგენს კუთხურ წერტილს, ე. ი. ამ კვანძში თავს იყრის მხოლოდ ორი გლუვი რკალის ბოლო, მაშინ ამ კვანძში მარცხენა და მარჯვენა სასაზღვრო მნიშვნელობების ცნება სრულიად ბუნებრივად განიმარტება ისევე, როგორც გლუვი წირის შემთხვევაში. საჭიროა მხოლოდ ვიგულისხმოთ, რომ იმ რკალების დადებითი მიმართულებანი, რომელთათვისაც მოცემული წერტილი საერთო წერტილია, ისეა არჩეული, რომ ერთ-ერთი რკალი წარმოადგენს შემავალს, ხოლო მეორე—გამომავალს.

ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს სოხოცკი—პლემელის ფორმულების ანალოგიურ ფორმულებს; ეს ფორმულები მოცემულია წიგნის ბოლოს II დანართში. თუ ვისარგებლებთ ამ ფორმულებით, მაშინ ადვილია იმის ჩვენება, რომ შეუღლების ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი ამოცანების ჩვენ მიერ ზემოთ აგებული ამოხსნები აკმაყოფილებს (*) სასაზღვრო პირობას კუთხურ წერტილებშიც, თუ ამ წერტილების მახლობლობაში $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები H კლასს მიეკუთვნება და თუ, როგორც ყოველთვის, $G(t) \neq 0$.

ამ ფაქტის (მეტად მარტივ) დამტკიცებაზე აღარ შევჩერდებით, რადგანაც აღნიშნული დებულებით მომავალში არ ვისარგებლებთ.

3°. მოყვანილი შედეგების გადატანა იმ შემთხვევისთვის, როცა სასაზღვრო წირი D წრფეა, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. ყველაზე მარტივად ამის გაკეთება შეიძლება იმ შემთხვევაზე მიყვანით, როცა სასაზღვრო L წირი წრეწირია, ისევე, როგორც § 38-ში. აქ ხსენებული პარაგრაფის აღნიშვნებს ვიყენებთ.

არ დაგვჭირდება არავითარი ახალი განსაზღვრა, გარდა იმისა, რომელიც ამ შემთხვევაში ბუნებრივად გადაიტანება $(z+i) = -(\zeta+i)^{-1}$ გარდაქმნით. კერძოდ, თუ D წრფის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს მივაკუთვნებთ კვანძების რიცხვს, მაშინ პირობა, რომელიც მოვითხოვეთ უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქციისაგან კვანძების მახლობლობაში, უსასრულოდ დაშორებული კვანძისათვის გადავა შემდეგ პირობაში:

$$|\Phi(z)| < \text{const}\,|z|^{\alpha}, \quad \alpha = \text{const} < 1, \tag{83,17}$$

დიდი $|z|$-ებისათვის.

განსაკუთრებული და არაგანსაკუთრებული კვანძების (მათ შორის ახლა უსასრულოდ დაშორებული წერტილიც შეიძლება იყოს) ცნებებისა და სასაზღვრო წირზე მოცემულ ფუნქციათა კლასების ცნებების (იხ. § 82) გადატანა ჩვენი შემთხვევისათვის იმდენად ცხადია, რომ ამაზე არ შევჩერდებით.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ (38,11) ფორმულის გამოყენებისას ვისარგებლებთ ამ ფორმულის პირველი ტოლობით, ე. ი. ჩავწერთ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{z+i}{2\pi}\int\limits_D \frac{f(t)}{t+i}\,\frac{dt}{t-z}, \tag{83,18}$$

რადგან ჩვენს შემთხვევაში საქმე გვექნება ისეთ $f(t)$ ფუნქციებთან, რომელ-

თაც შეიძლება ჰქონდეთ წყვეტა, როცა $t=\pm\infty$, რის გამოც (38,11) ფორმულაში შემავალმა ინტეგრალებმა შეიძლება დაკარგოს აზრი (მთავარი მნიშვნელობითაც კი).

§ 38-ში და ამ პარაგრაფის წინა პუნქტში ნათქვამთან სრული ანალოგიის გამო დავკმაყოფილდებით საბოლოო ფორმულების მოყვანით და ზოგიერთი შენიშვნით.

ვიგულისხმოთ, რომ $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები ეკუთვნის H_0 კლასს D-ზე კვანძებით $c_1, \ldots, c_n$ წერტილებში (მათ შორის შეიძლება უსასრულოდ დაშორებული წერტილიც კი იყოს) და $G(t)$ ნული არ ხდება არსად D-ზე.

ვთქვათ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძია. (83,9) ფორმულის შესაბამისად ავირჩიოთ $\ln G(t)$-ს მნიშვნელობა შემდეგნაირად: ავიღოთ D წირზე საწყის წერტილად კვანძისაგან განსხვავებული რაიმე c წერტილი და შემოვიაროთ c-დან $+\infty$-მდე, ხოლო შემდგომ $-\infty$-დან c-მდე[20].

თუ უსასრულოდ დაშორებული წერტილი კვანძია, მაშინ ამ წერტილისათვის $G(c_h-0)$ და $G(c_h+0)$-ად უნდა მივიღოთ შესაბამისად $G(+\infty)$ და $G(-\infty)$. $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსი განისაზღვრება ფორმულით

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\right]_D, \tag{83,19}$$

სადაც $[\ln G(t)]_D$ წარმოადგენს $\ln G(t)$-ს ნაზრდს ზემოთ მითითებული შემოვლისას D წრფეზე[21].

ამ პირობებში $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია განისაზღვრება (ნულისაგან განსხვავებული მამრავლის სიზუსტით) შემდეგი ფორმულით:

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^+,\\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z\in S^-, \end{cases} \tag{83,20}$$

სადაც

$$\Gamma(z)=\frac{z+i}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\ln G_0(t)\,dt}{(t+i)\,(t-z)},\quad G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} G(t), \tag{83,21}$$

ამასთანავე

$$\ln G_0(t)=\varkappa \ln\frac{t+i}{t-i}+\ln G(t)$$

არის ის მნიშვნელობა, რომელსაც მივიღებთ, თუ $\ln G(t)$-ს მნიშვნელობას განვსაზღვრავთ ზემოთ აღნიშნული პირობების თანახმად, ხოლო $\ln\dfrac{t+i}{t-i}$ იქნება შტო, რომელიც უწყვეტად იცვლება D-ზე (უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით), გარდა c წერტილისა.

შეუღლების ამოცანის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

[20] იხ. შენიშვნა პარაგრაფის ბოლოში.

[21] იხ. შენიშვნა პარაგრაფის ბოლოში.

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{z+i}{t+i}\,\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t-z)}+X(z)\,Q(z), \tag{83,22}$$

სადაც $Q(z)$ შემდეგი სახის პოლინომია:

$$Q(z)=C_0+C_1\frac{z-i}{z+i}+\cdots+C_l\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^l, \tag{83,23}$$

$c_0, c_1, \ldots, c_e$ ნებისმიერი მუდმივებია.

როცა $\varkappa\geqslant-1$, ყოველთვის არსებობს ყველგან შემოსაზღვრული ამონახსნები, გარდა შესაძლებელია $c_{q+1},\ldots,c_m$ კვანძებისა და განსაკუთრებული[22] კვანძების მიდამოებისა. ეს ამონახსნები მოიცემა (83,22) ფორმულებით, როცა $l=\varkappa$; თუ $\varkappa=-1$ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $Q(z)=0$.

როცა $\varkappa<-1$, ასეთი ამონახსნები არსებობს მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია პირობები:

$$\int\limits_{D}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)\,(t+i)^2}=0,\quad k=0,\ 1,\ldots,\ -\varkappa-2; \tag{83,24}$$

ამ პირობების შესრულების შემთხვევაში (ერთადერთი) ამონახსნი მოიცემა (83,22) ფორმულით, სადაც $Q(z)=0$.

შენიშვნა 2. თუ უსასრულოდ დაშორებული წერტილი არ წარმოადგენს წყვეტის წერტილს, ე. ი. როცა $G(-\infty)=G(+\infty)$, $g(-\infty)=g(+\infty)$, ზემოთ მოყვანილ ფორმულებს შეიძლება მივცეთ ისეთივე გარეგნული სახე, როგორც უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევაში გვაქვს (§ 38).

მართლაც, თუ უსასრულოდ დაშორებული წერტილი არ წარმოადგენს კვანძს, მაშინ იგი შეგვიძლია ავიღოთ D წირზე შემოვლის საწყის წერტილად, $t=-\infty$-დან $t=+\infty$-მდე მოძრაობისას. მაშინ გვექნება:

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)]_{-\infty}^{\infty}, \tag{83,19ა}$$

ამასთანავე, $\ln G(t)$-ს მნიშვნელობები ზემოთ მითითებული წესის შესაბამისად უნდა იყოს არჩეული.

$\ln G_0(t)$ ფუნქცია უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში დააკმაყოფილებს H პირობას, რის შედეგადაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Gamma(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t+i},$$

ვინაიდან უკანასკნელი ორი ინტეგრალი (კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით) არსებობს. თუ უკუვაგდებთ უკანასკნელ (მუდმივ) შესაკრებს, შეგვიძლია (83,20) ფორმულაში ჩავთვალოთ, რომ

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}; \tag{83,21ა}$$

[22] განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში ყველა ამონახსნი თითქმის შემოსაზღვრულია.

ეს $X(z)$-ს შეცვლის მხოლოდ ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი მამრავლით.

ამგვარად, მივიღეთ ფორმულები, რომელთაც აქვთ ზუსტად ისეთივე სახე, როგორც (38,2), (38,12), (38,13) ფორმულებს.

ანალოგიურად, ჩვენს შემთხვევაში (83,22) ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ ისეთივე სახით, როგორც (38,14) ფორმულა.

ყოველივე ზემოთქმული, გარდა უკანასკნელი აბზაცისა, ცხადია, ძალაში რჩება, თუ $g(t)$ ფუნქციას უსასრულობაში აქვს წყვეტა, ე. ი. $g(-\infty)\neq g(+\infty)$.

§ 84. ერთი ხერხი, რომელიც ამარტივებს კანონიკური ფუნქციის აგებას.

1°. ზოგჯერ კანონიკური ფუნქციის გამოთვლა შეიძლება საგრძნობლად გამარტივდეს, თუ ვისარგებლებთ § 35-ში იმ კერძო შემთხვევისათვის გამოყენებული მოსაზრებით[23], როცა L შედგებოდა შეკრული მარტივი კონტურებისაგან.

სახელდობრ, ვთქვათ უბან-უბან გლუვი L წირი დაყოფილია რამდენიმე უბან-უბან გლუვ $L_1, L_2, \ldots, L_p$ წირად, რომელთაც საერთო კვანძები არ გააჩნიათ (კვანძებს მიეკუთვნება აგრეთვე $G(t)$ ფუნქციის წყვეტის ყველა წერტილი). ვთქვათ, $X_k(z)$ გარკვეული კლასის კანონიკური ფუნქციაა იმ პირობით, რომ სასაზღვრო წირი შედგება ერთი L_k წირისაგან.

მაშინ, როგორც ადვილი შესამჩნევია (შდრ. § 35, მე-4 პუნქტის), ფუნქცია

$$X(z) = X_1(z)\cdot X_2(z)\cdots X_p(z) \tag{84,1}$$

წარმოადგენს გარკვეული კლასის კანონიკურ ფუნქციას L სასაზღვრო წირისათვის.

ცხადია, აგრეთვე, თუ როგორ უნდა შეირჩეს $X_1(z), \ldots, X_p(z)$ კანონიკურ ფუნქციათა კლასები იმისათვის, რომ მივიღოთ მოცემული კლასის კანონიკური ფუნქცია.

თუ ვისარგებლებთ ზემოთ მითითებული გარემოებით, ადვილად ავაგებთ კანონიკურ ფუნქციას მაგალითად იმ შემთხვევაში, როცა L შედგება სასრული რაოდენობის მარტივი შეკრული უბან-უბან გლუვი კონტურებისაგან, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები. ამის გაკეთება შეიძლება წინა პარაგრაფის მე-2 პუნქტში მოცემული ამოხსნის საშუალებით, როცა L მარტივი უბან-უბან გლუვი კონტურია.

იმავე გზით ადვილია კანონიკური ფუნქციის აგება იმ შემთხვევაში, როცა L შედგება სასრული რაოდენობის შეკრული კონტურებისაგან და ღია რკალებისაგან, რომელთაც საერთო წერტილები არა აქვთ. ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის 1° და 2° პუნქტებში მოცემული ფორმულები.

2°. თუ მიღებული პირობის საწინააღმდეგოდ, უბან-უბან გლუვ $L_1, L_2, \ldots, L_p$ ნაწილებს, რომლებადაც დავყავით L წირი, საერთო კვანძები აქვს, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ (84,1) ფორმულით აგებული $X(z)$ ფუნქცია ზოგიერთი $c_1, \ldots, c_l$ კვანძის მახლობლობაში აღარ აკმაყოფილებს (78,2) და (78,3) პირობებს, ამიტომ აღარ წარმოადგენს კანონიკურ ფუნქციას. თუმცა, ცხადია, ყოველთვის შეიძლება ისეთი $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ რიცხვების შერჩევა, რომ ფუნქცია

$$(z-c_1)^{\lambda_1}\cdots(z-c_l)^{\lambda_l}\, X(z)$$

კანონიკური იყოს.

ამგვარად, ზემოთ აღწერილი ხერხი შეგვიძლია გამოვიყენოთ მაშინაც, როცა $L_1, \ldots, L_p$ წირებისათვის ზოგიერთი კვანძი საერთოა.

---

[23] შეადარეთ W. J. Trjitzinsky [1].

II. კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნების ამოცანა ზოგად შემთხვევაში

ამ კარში ზემოთ მიღებული შედეგების გამოყენების უმარტივეს მაგალითად განხილულია კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნების ამოცანის ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში, როცა ინტეგრების გზა არის ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირი. ქვემოთ მოყვანილი შედეგები, ერთი მხრივ, წარმოადგენს იმ ცნობილი შედეგების განზოგადებას, რომლებიც ეხება კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნებას, როცა ინტეგრების გზა ნამდვილი ღერძის მონაკვეთია, ანუ

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\varphi(x)\, dx}{x - x_0} = f(x_0)$$

ინტეგრალური განტოლების ამოხსნას, სადაც $f(x)$ მოცემული, ხოლო $\varphi(x)$ ნამდვილი ცვლადის საძიებელი ფუნქციაა.

ეს განტოლება უმარტივეს სინგულარულ განტოლებას წარმოადგენს, იგი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს თვითმფრინავის თხელი ფრთის თეორიაში და ამიტომაც მას ბევრი ავტორი[24] განიხილავდა.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა ინტეგრების წირი რაცვლად წრფის ერთი მონაკვეთისა[25] შედგება (სასრული რაოდენობის) გლუვი გახსნილი რკალებისაგან, ე. ი. წყვეტილ გლუვ წირს წარმოადგენს, ამოცანის ამოხსნა მიიღო ავტორმა მე-[6] სტატიაში. ეს ამოხსნა მოცემული იქნება ქვემოთ § 86—88-ში.

როცა ინტეგრების წირი თავისთავს ჰკვეთს და გააჩნია კუთხური წერტილები, ამოცანის ამოხსნა მიღებული იყო მოგვიანებით W. J. Trjitzinsky-ს მიერ [1] ნაშრომში, მაგრამ ამ ამონახსნებს მეტისმეტად რთული და დაუმთავრებელი სახე ჰქონდათ, მაშინ როცა წინა კარში მიღებული შედეგების გამოყენება საშუალებას იძლევა იოლად მივიღოთ სავსებით დასრულებული და მეტად მარტივი ამოხსნა.

როგორც ქვემოთ დავინახავთ, შებრუნების ამოცანა დაიყვანება შეუღლების ერთ უმარტივეს ამოცანაზე. მეტი თვალსაჩინოებისათვის თავდაპირველად განვიხილავთ შემთხვევას, როცა ინტეგრების გზა წარმოადგენს ნაწყვეტ გლუვ წირს, შემდეგ კი გადავალთ ზოგად შემთხვევაზე.

§ 85. $\Phi^+ + \Phi^- = g$ ამოცანის ამოხსნა ნაწყვეტი გლუვი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში. ამოცანა, რომელზედაც ეს-ეს არის ვილაპარაკეთ და რომლის ამოხსნაც საშუალებას მოგვცემს ერთბაშად ამოვხსნათ კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუ-

---

[24] იხ., მაგალითად, ლ. სედოვი [2], მ. კელდიში და მ. ლავრენტიევი [2], K. Schröder [1], H. Söhngen [1], [2], J. Weissinger [1], F. Tricomi [3], [6], K. Nickel [2], J. Elliott [1].

[25] H. Söhngen [1] იძლევა აგრეთვე ამოხსნას (მეტად რთული ხერხით) ნამდვილი ღერძის ორი მონაკვეთის შემთხვევაში. სხვა ამოხსნა, როცა ინტეგრების გზა შედგება ნამდვილი ღერძის მონაკვეთების სასრული ერთობლიობისაგან, მოცემულია სტატიაში K. Nickel [2].

ზოგადი თვალსაზრისით კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნების საკითხი, როცა ინტეგრების გზა წარმოადგენს ნამდვილი ღერძის მონაკვეთების სასრულ ან თვლად სიმრავლეს, განხილულია ნ. ახიეზერის [1] სტატიაში. მონაკვეთთა თვლადი სიმრავლის შემთხვევა განხილულია აგრეთვე ს. ფრეიდკინის მიერ [1].

ნების ამოცანა, წარმოადგენს შეუღლების ამოცანის კერძო შემთხვევას, სახელდობრ, იმ შემთხვევას, როცა $G(t) = -1$.

ამგვარად, ჩვენს ამოცანას შეადგენს განვსაზღვროთ უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია სასაზღვრო პირობით

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \tag{85,1}$$

სადაც $g(t)$ L-ზე მოცემული ფუნქციაა. აქ და შემდეგ პარაგრაფებშიც (§ 88-ის ჩათვლით) ვიგულისხმებთ, რომ L გლუვი ნაწყვეტი წირია, ე. ი. L შედგება ისეთი გახსნილი გლუვი $L_k = a_k b_k$ რკალებისაგან, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები; ჩვენ ჩავთვლით, რომ L_k-ზე დადებითი მიმართულებით მოძრაობას შივყავართ a_k-დან b_k-საკენ.

შემდგომში $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$-თი აღვნიშნავთ a_k, b_k ბოლოებს, გადანომრილს რაიმე თანამიმდევრობით.

L წირის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეს აღვნიშნავთ S-ით. მოცემული კლასის კანონიკური ფუნქციის, ანუ ერთგვაროვანი შეუღლების ამოცანის

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0, \quad t \in L \tag{85.2}$$

მოცემული კლასის კანონიკური ამონახსნების ერთბაშად მიღება შეიძლება § 78-ის ან § 83-ის 1°-ის ზოგადი ფორმულებით; შესაბამისი (სრულიად ელემენტარული) გამოთვლების ჩატარებას მკითხველს ვანდობთ (ასეთ გამოთვლებს ჩავატარებთ § 89-ში ზოგად შემთხვევაში). როგორც უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკურ ფუნქციას იძლევა შემდეგი ფორმულა:

$$X(z) = C\,\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = C\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{85.3}$$

სადაც C ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერად ფიქსირებული მუდმივია,

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{q}(z - c_k), \quad R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2p}(z - c_k), \tag{85,4}$$

ხოლო

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \tag{*}$$

არის S-ში, ე. ი. L-ზე გაჭრილ სიბრტყეში ჰოლომორფული ფუნქციის რომელიმე შტო.

ვინაიდან ჩვენ ხშირად გვექნება საქმე ასეთ ფესვთან, ამიტომ შევთანხმდეთ, რომ (*) ფესვი აღნიშნავს S-ში ჰოლომორფულ იმ შტოს, რომლის გაშლას z-ის კლებადი ხარისხების მიხედვით უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აქვს სახე

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} = z^{q-p} + A_1 z^{q-p-1} + A_2 z^{q-p-2} + \cdots \tag{85,5}$$

ფესვები $\sqrt{R_1(z)}$ და $\sqrt{R_2(z)}$ მომავალში შეგვხვდება მხოლოდ შემდეგ შეფარდებებში:

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}, \qquad \sqrt{\frac{R_2(z)}{R_1(z)}}. \qquad (**)$$

პირველი წილადი იგივეა რაც (*), ხოლო მეორე — (*) ფესვის შებრუნებული სიდიდე. დაბოლოს, (*) ფესვის სასაზღვრო მნიშვნელობას L-ზე მარცხნიდან აღვნიშნავთ

$$\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}} \text{ ან } \frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}\text{-ით}.$$

ამგვარად, განმარტების ძალით,

$$\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^+ = \left[\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}\right]^+ = \sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}} = \frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}; \qquad (85,6)$$

ცხადია, რომ

$$\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^- = -\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^+ = -\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}. \qquad (85,7)$$

$h(c_1, c_2, \ldots, c_a)$ კლასის კანონიკური ამონახსნის (85,3) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ ამ კლასის ინდექსი

$$\varkappa = p - q, \qquad (85,8)$$

ვინაიდან $X(z)$-ის რიგი უსასრულობაში არის $q - p$. ცხადია, აგრეთვე, რომ ყველა კვანძი (ამ შემთხვევაში ბოლოები) არაგანსაკუთრებულია.

ყველაზე ფართო h_0 კლასის კანონიკური ფუნქცია $X_0(z)$, ცხადია, იქნება ($q=0$):

$$X_0(z) = \frac{C}{\sqrt{R(z)}}, \qquad (85,9)$$

სადაც C მუდმივია, ხოლო

$$R(z) = \prod_{k=1}^{2p} (z - c_k) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)(z - b_j). \qquad (85,10)$$

h_0 კლასის ინდექსი

$$\varkappa_0 = p. \qquad (85,11)$$

ყველაზე ვიწრო $h_{2p} = h(c_1, \ldots, c_{2p})$ კლასის კანონიკური ამონახსნია

$$X_{2p}(z) = C\sqrt{R(z)}, \qquad (85,12)$$

ხოლო შესაბამისი ინდექსი

$$\varkappa_{2p} = -p. \qquad (85,13)$$

როცა $q=p$, მაშინ შესაბამისი კლასის ინდექსი ნულია. ნულინდექსიანი კანონიკური ფუნქციის მაგალითს წარმოადგენს $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ კლასის ამონახსნი

$$X_a(z) = C\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}, \qquad (85,14)$$

სადაც C მუდმივია,

$$R_a(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - a_k), \quad R_b(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - b_k). \tag{85,15}$$

2°. ზემოთქმულის შესაბამისად, § 80-ის საფუძველზე არაერთგვაროვანი (85,1) ამოცანის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ისეთი ამონახსნი, რომელსაც უსასრულობაში აქვს სასრული რიგი, მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i \sqrt{R_2(z)}} \int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, g(t)dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)} + \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\, Q(z), \tag{85,16}$$

სადაც $Q(z)$ ნებისმიერი პოლინომია.

$h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნისათვის ვიღებთ შემდეგ შედეგს:

$h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები ყოველთვის არსებობს, როცა $\varkappa = p - q \geqslant 0$ და მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i \sqrt{R_2(z)}} \int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, g(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)} + \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\, Q_{p-q-1}(z), \tag{85,17}$$

სადაც $Q_{p-q-1}(z)$ ნებისმიერი ისეთი პოლინომია, რომლის ხარისხიც არ აღემატება $p-q-1$-ს ($Q_{p-q-1}(z)=0$, როცა $p=q$); როცა $\varkappa=p-q<0$, მაშინ უსასრულობაში ქრობადი $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნები არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $g(t)$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^k g(t)dt}{\sqrt{R_1(t)}} = 0, \quad k=0,\ 1, \ldots,\ q-p-1, \tag{85,18}$$

ის ერთადერთია და მოიცემა (85,17) ფორმულით, სადაც $Q_{q-p-1}(z)=0$.

შენიშვნა 1. მოცემული კლასის ამონახსნები § 80-ის 4° პუნქტის შესაბამისად შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმულებით, რომლებიც რამდენადმე განსხვავდება (85,16)-საგან. მაგალითად, h_0 კლასის, უსასრულობაში ქრობადი, ამონახსნები, ცხადია, შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ასეთი სახით

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i \sqrt{R_2(z)}} \int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}} \frac{g(t)dt}{(t-z)} + \frac{Q_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \tag{85,19}$$

სადაც $R_1(z)$, $R_2(z)$ და $R(z)$ აღნიშნავს იმასვე, რასაც (85,4), (85,10) ფორმულებში. ამასთანავე, იმისათვის, რომ უზრუნველყოფილი იყოს $\Phi(\infty)=0$ პირობის შესრულება, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $q \leqslant p$.

შენიშვნა 2. ადვილი შესამჩნევია (იხ. შენიშვნა § 83-ის მე-2 პუნქტის ბოლოს), რომ ზემოთ მოყვანილი შედეგები და ფორმულები ძალაში დარჩება, თუ ჩავთვლით, რომ L-ის შემადგენელ $L_k=a_kb_k$ რკალებს აქვს კუთხური წერტილები,

ე. ი. ისინი წარმოადგენენ მარტივ, უბან-უბან გლუვ გახსნილ რკალებს, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები (მათ შორის ბოლოებიც).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. ადვილი შესამჩნევია (იხ. § 82), რომ მიღებული შედეგები ძალაში დარჩება მაშინაც, როცა მოცემული $g(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს.

§ 86. კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნება ინტეგრების ნაწყვეტი გლუვი წირის შემთხვევაში. 1^0. ჩვენი მიზანია ამოვხსნათ შემდეგი სინგულარული ინტეგრალური განტოლება:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \qquad t_0\in L, \tag{86,1}$$

სადაც $L=L_1+\cdots+L_p$ არის ერთობლიობა გლუვი გახსნილი რკალებისა, რომელთაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ, ისევე როგორც § 85-ში; $f(t)$ L-ის t წერტილის მოცემული, ხოლო $\varphi(t)$ საძიებელი ფუნქციაა. ვიგულისხმოთ, რომ $f(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H კლასს, ხოლო საძიებელი $\varphi(t)$ ფუნქცია—H^* კლასს.

იგულისხმება, რომ (86,1) პირობა შესრულებული უნდა იყოს ყველა t_0-სათვის L-ზე, გარდა, შესაძლებელია, ბოლოებისა.

(86,1) განტოლება იმ სინგულარული ინტეგრალური განტოლების კერძო შემთხვევაა, რომელიც დაწვრილებით იქნება შესწავლილი შემდეგ თავში. ჩვენ მას ცალკე განვიხილავთ, რადგანაც იგი თავისთავად საინტერესოა (იხ. ამ კარის შესავალი), ხოლო ამ განტოლების თეორია ზოგადზე მარტივია.

განვიხილოთ უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{86,2}$$

ცხადია,

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{86,3}$$

და, მაშასადამე, (86,1) ეკვივალენტურია ამოცანის

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=f(t), \quad t\in L \tag{86,4}$$

იმ პირობით, რომ $\Phi(\infty)=0$.

$\Phi(z)$-ის პოვნის შემდეგ ავაგებთ $\varphi(t)$ ფუნქციას შემდეგი ფორმულით:

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t). \tag{86,5}$$

(86,4) ამოცანა წინა პარაგრაფში ამოვხსენით; მისი უსასრულობაში ქრობადი ყველაზე ზოგადი ამონახსნი (ე. ი. h_0 კლასის ამონახსნი) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით (§ 85, შენიშვნა 1):

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\,f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{Q_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \tag{86,6}$$

სადაც

$$R_1(z)=\prod_{k=1}^{q}(z-c_k),\quad R_2(z)=\prod_{k=q+1}^{2p}(z-c_k),\tag{86,7}$$

$$R(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k)=R_1(z)\,R_2(z),$$

ამასთან, $q\leqslant p$.

გამოსავალი ინტეგრალური განტოლების ზოგად $\varphi(t)$ ამონახსნს (86,5) ფორმულით მივიღებთ. თუ გავიხსენებთ (85,7) ფორმულას და გამოვიყენებთ სოხოცკი—პლემელის (26,4) ფორმულებს, გვექნება:

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int\limits_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,f(t)}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}dt+\frac{P_{p-1}(t_0)}{\sqrt{R(t_0)}}.\tag{86,8}$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს (86,1) განტოლების შემდეგი თვისება: თუ (81,6) ინტეგრალური განტოლების H^* კლასის რომელიმე ამონახსნი შემოსაზღვრულია c_j ბოლოს რაიმე მახლობლობაში, მაშინ იგი აუცილებლად ნული ხდება ამ წერტილში, ხოლო მის მიდამოში მიეკუთვნება H კლასს.

მართლაც, ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $(z-c_j)$ შედის $R_1(z)$-ში თანამამრავლად. მაგრამ მაშინ § 22-ში ნათქვამის საფუძველზე მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები c_j წერტილის მახლობლობაში ეკუთვნის H კლასს და ნული ხდება[26], როცა $t_0=c_j$. შემდეგ, რადგანაც, პირობის თანახმად, $\varphi(t_0)$ შემოსაზღვრულია c_j წერტილის მახლობლად, ამიტომ $P_{p-1}(t_0)$ პოლინომი იყოფა (t_0-c_j)-ზე. ამის შემდეგ დებულება ცხადია.

მეულლების ამოცანის ამონახსნების მსგავსად, (86,1) განტოლების ამონახსნებიც შეგვიძლია დავყოთ კლასებად; $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს მივაკუთვნოთ ყველა ამონახსნი, შემოსაზღვრული $c_1, c_2, \ldots, c_q$ ბოლოების მახლობლად. როგორც უკვე ვნახეთ, $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნები მიეკუთვნება H კლასს ამ ბოლოების მახლობლობაში (და ამ წერტილებში ნულის ტოლი ხდებიან), ამიტომ $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ჩვენი განმარტება სავსებით ეთანხმება § 82-ის განმარტებას.

მიზნად დავისახოთ ვიპოვოთ (86,1) განტოლების ყველა ამონახსნი, რომელიც ეკუთვნის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს. ზემოთ ნათქვამიდან ცხადია, რომ ამ კლასის ყოველ $\varphi(t)$ ამონახსნს (86,2) ფორმულით შეესაბამება (86,4) სასაზღვრო ამოცანის იმავე კლასის $\Phi(z)$ ამონახსნი და პირიქით, (86,4) სასაზღვრო ამოცანის ყოველ $\Phi(z)$ ამონახსნს — $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასიდან (86,5) ფორმულით (86,1) განტოლების იმავე კლასის ამონახსნი.

§ 85 შედეგების გამოყენებით ადვილად მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე:

როცა $\varkappa=p-q\geqslant 0$, მაშინ (86,1) განტოლების ამონახსნები ყოველთვის არსებობს $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასში და მოიცემა ფორმულით

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int\limits_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}+\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}}\,P_{p-q-1}(t_0)\tag{86,9}$$

[26] ეს გამომდინარეობს (22,8) ფორმულიდან, როცა $\gamma=1/2$.

სადაც $P_{p-q-1}(t_0)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხიც არ აღემატება $p-q-1$-ს (როცა $p=q$, იგი ნულის ტოლია).

თუ $\varkappa=p-q<0$, მაშინ $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის (ერთადერთი) ამონახსნი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^k f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}=0, \quad k=0,\ 1, \ldots,\ q-p-1; \tag{86,10}$$

ამ პირობებში ამონახსნები მოიცემა იმავე (86,9) ფორმულით, როცა $P_{p-q-1}(t_0)=0$.

მიღებულ (86,9) შედეგს შეიძლება ვუწოდოთ (86,1) ფორმულის მარცხენა მხარეში დაწერილი ინტეგრალის შებრუნების ფორმულა.

განსაკუთრებით აღვნიშნოთ $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ კლასის შესაბამისი შებრუნების ფორმულა; ამ შემთხვევაში § 85-ის აღნიშვნების საშუალებით ((85,15) ფორმულა) მივიღებთ:

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_b(t_0)}}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}\, f(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-t_0)}. \tag{86,11}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ზემოხსენებული ყველა შედეგი ძალაში დარჩება, თუ ჩავთვლით, რომ $f(t)$ ფუნქცია H კლასის ნაცვლად ეკუთვნის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს და ამონახსნებსაც ვეძებთ იმავე კლასში.

დამატებით აღვნიშნოთ, რომ ვ. პოგოჟელსკის ბოლო დროს გამოქვეყნებულ (W. Pogorzelski [3]) ნაშრომში ზემოხსენებული ფორმულები დამტკიცებულია რამდენადმე უფრო ზოგადი დაშვებებით.

2°. უკანასკნელ ხანს გამოქვეყნებულ მთელ რიგ ნაშრომებში K. Nickel [2], F. Tricomi [3], H. Söngen [2], აგრეთვე, ზოგიერთ უფრო ადრინდელ ნაშრომში, (86,8) ფორმულა მიღებულია ჯამებად ფუნქციათა ზოგიერთი ქვეკლასებისათვის L წირის შესახებ მიღებული ზოგიერთი კერძო დაშვებით. ამ მიმართულებით უკანასკნელ ხანს უზოგადესი შედეგები მიიღო ბ. ხვედელიძემ [11], [12] ნაშრომებში იმ შემთხვევისათვის, როცა L ნაწყვეტი ლიაპუნოვის წირია. ამ ავტორის შედეგებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ (86,1) განტოლების მარჯვენა მხარე $f(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს, მაშინ ამ განტოლების ყველა ამონახსნი, უწყვეტი L-ის ყოველ ჩაკეტილ ნაწილში, რომელიც ბოლოებს არ შეიცავს და ჯამებადია მთელ L-ზე რომელიმე p ხარისხში ($p>1$) ეკუთვნის H^* კლასს.

§ 87. შებრუნების ამოცანის ზოგიერთი სახეცვლილება ინტეგრების გლუვი ნაწყვეტი წირის შემთხვევაში[27]. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ, საზოგადოდ, არ არსებობს (81,6) განტოლების ისეთი ამოხსნები, რომლებიც შემოსაზღვრულია ყველა ბოლოს მახლობლობაში. თუმცა ძნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ განტოლებას

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+P(t_0), \quad t_0\in L, \tag{87,1}$$

[27] ამ პარაგრაფის შედეგების განზოგადება ფუნქციათა უფრო ფართო კლასებისათვის მოცემულია ბ. ხვედელიძის ნაშრომში [18].

სადაც $f(t_0)$ H კლასის მოცემული ფუნქციაა, ხოლო $P(t_0)$ — პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $(p-1)$-ს და წინასწარ არ არის დაფიქსირებული, ყოველთვის გააჩნია ერთი და მხოლოდ ერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი. ამასთანავე $P(t_0)$ პოლინომი სავსებით განისაზღვრება.

წინა პარაგრაფში უკვე აღნიშნული იყო, რომ ყველგან შემოსაზღვრული ამონახსნი ეკუთვნის H კლასს.

თავდაპირველად დავამტკიცოთ, რომ თუ ამონახსნი არსებობს, მაშინ ის ერთადერთია. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = P(t_0) \tag{87,2}$$

სადაც $\varphi(t)$ არის H კლასის ფუნქცია, ხოლო $P(t)$ პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $(p-1)$-ს, მაშინ აუცილებლად $\varphi(t)=0$, $P(t)=0$.

დავამტკიცოთ ეს დებულება. თუ არსებობს (87,2) განტოლების H კლასის ამონახსნი, მაშინ ის აუცილებლად მოიცემა, მაგალითად, (86,11) ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_b(t_0)}}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\,\frac{P(t)\,dt}{(t-t_0)}, \tag{87,3}$$

ვინაიდან ეს ფორმულა გვაძლევს არა მარტო H კლასის ყველა ამონახსნს, არამედ H^* კლასის ყველა ისეთ ამონახსნს, რომლებიც შემოსაზღვრულია a_j ბოლოებში. ინტეგრალი

$$J(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-t_0)}$$

ადვილად გამოითვლება. მართლაც, ვთქვათ

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-z)},$$

სადაც z აღნიშნავს L წირზე არამდებარე წერტილს. მაშინ, ცხადია,

$$J(t_0) = \Omega^+(t_0) + \Omega^-(t_0).$$

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ

$$\Omega(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_\Lambda \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-z)},$$

სადაც Λ აღნიშნავს ერთობლიობას იმ p რაოდენობის შეკრულ მარტივ Λ_k კონტურებისა, რომლებიც მოიცავენ L_k რკალებს, შემოივლიან მათ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და იმდენად ახლოს არიან მათთან, რომ z წერტილი თითოეული Λ_k კონტურის გარეთ მდებარეობს (იხ. ნახ. 19).

თუ გამოვიყენებთ კოშის თეორემას[28] ნაშთების შესახებ, მივიღებთ

$$\Omega(z)=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}\,P(z)+\frac{1}{2}\,P^*(z),$$

სადაც $P^*(z)$ $p-1$ ხარისხის რაიმე პოლინომია[29]. აქედან

$$J(t_0)=\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0)=P^*(t_0)$$

და, მაშასადამე, (87,3) ფორმულის თანახმად,

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\sqrt{R_b(t_0)}}\,P^*(t_0).$$

რადგანაც, პირობის თანახმად, $\varphi(t)$ უნდა იყოს შემოსაზღვრული აგრეთვე b_k ბოლოებში, ამიტომ $P^*(b_k)=0$, $k=1,2,\ldots,p$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $P^*(t_0)=0$ და, მაშასადამე, $\varphi(t_0)=0$.

ნახ. 19

ახლა (87,1) ფორმულაში უშუალო ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (87,1) განტოლების (ერთადერთი) H კლასის ამონახსნი, მოიცემა ფორმულით

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i}\int\limits_L\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)},\quad (87,4)$$

სადაც კვლავ

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j),\quad \sqrt{R(t)}=[\sqrt{R(t)}]^+.$$

ამასთანავე ვიპოვით $P(t)$ პოლინომის გარკვეულ მნიშვნელობას.

ამ მიზნით დავუშვათ,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},\quad (87,5)$$

სადაც იგულისხმება, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (87,4) ფორმულით, მაშინ შესამოწმებელი (87,1) ფორმულა მიიღებს სახეს

[28] ჩვენ ვსარგებლობთ მარტივი ფორმულით, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს კოშის თეორემიდან ნაშთების შესახებ: თუ $f(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია Λ_k კონტურის გარეთ მდებარე წერტილებისაგან შექმნილ არეში, უწყვეტია ამ კონტურების ჩათვლით და თუ, აგრეთვე, დიდი $|z|$-ებისათვის $f(z)=P(z)+O(|z|^{-1})$, სადაც $P(z)$ პოლინომია, მაშინ Λ_k კონტურების გარეთ მდებარე z წერტილებისათვის გვაქვს

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=f(z)-P(z).$$

[29] ეს პოლინომი განისაზღვრება იმ პირობით, რომ დიდი $|z|$-ებისთვის

$$\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}\,P(z)+P^*(z)=O\left(\frac{1}{z}\right).$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = f(t_0) + P(t_0), \tag{87,6}$$

სადაც $P(t_0)$ რაიმე პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $p-1$-ს. $\Phi(z)$-ის გამოსათვლელად აგრეთვე დავუშვათ, რომ

$$\Psi(z) = \frac{\sqrt{R(z)}}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{(t-z)\ \sqrt{R(t)}}. \tag{87,7}$$

(87,7) და (87,4)-ის თანახმად, ცხადია, გვექნება

$$\varphi(t) = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

და ამიტომ, როგორც ადვილი შესამჩნევია,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{\Psi(t)dt}{t-z},$$

სადაც Λ აღნიშნავს იგივეს, რასაც ზემოთ. $\Psi(t)$-ს ნაცვლად თუ აქ ჩავსვამთ (87,7)-დან მიღებულ მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{(t-z)}\ \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_L \frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\ (t_1-t)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}}\ \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{(t-z)\,(t_1-t)}. \tag{87,8}$$

თუ შიგა ინტეგრალის მიმართ გამოვიყენებთ კოშის თეორემას ნაშთების შესახებ, მაშინ უშუალოდ მივიღებთ[30]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{\sqrt{R(t)}\ dt}{(t-z)\,(t_1-t)} = \frac{\sqrt{R(z)}}{t_1-z} + Q(z,\ t_1), \tag{87,9}$$

სადაც $Q(z,\ t_1)$ აღნიშნავს $(p-1)$ რიგის პოლინომს, რომელიც განისაზღვრება იმ პირობით, რომ დიდი $|z|$-ებისათვის

$$\frac{\sqrt{R(z)}}{z-t} = Q(z,\ t) + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

$Q(z,\ t)$ პოლინომი შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად: ვთქვათ $Q(z)$ აღნიშნავს p რიგის პოლინომს, რომელიც იმ პირობით განისაზღვრება, რომ დიდი $|z|$-ებისათვის

$$\sqrt{R(z)} = Q(z) + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{87,10}$$

მაშინ, ცხადია,

$$Q(z,\ t) = \frac{Q(z)-Q(t)}{z-t}. \tag{87,11}$$

---

[30] შეადარეთ წინა გვერდის პირველი სქოლიოს: გავიხსენოთ, რომ z წერტილი მდებარეობს Λ_k-კონტურებს გარეთ, ხოლო t_1—ერთ-ერთი მათგანის შიგნით.

დაბოლოს, (87,9)-ის ჩასმით (87,8)-ში მივიღებთ

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\,(t_1-z)}+\frac{1}{2}P(z),$$

სადაც $P(z)$ აღნიშნავს გარკვეულ პოლინომს, რომლის რიგი არ აღემატება $p-1$-ს, სახელდობრ,

$$P(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t)\,Q(z,\ t)}{\sqrt{R(t)}}\,dt. \tag{87,12}$$

$\Phi(z)$-ის ზემოთ მოყვანილი გამოსახულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ (87,6) პირობა შესრულებულია.

ამგვარად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია; ამასთანავე მივიღეთ $P(z)$ პოლინომის სრულიად გარკვეული (87,12) გამოსახულება.

ეს გამოსახულება საშუალებას იძლევა დავადგინოთ (სხვა გზით, და არა ისე, როგორც § 86-ში, უფრო ზოგად შემთხვევაში)

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0)$$

განტოლების ყველა ბოლოზე შემოსაზღვრული ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. კვლავ ვგულისხმობთ, რომ $f(t)$ ეკუთვნის H კლასს.

ცხადია, ეს პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ

$$\int\limits_{L}\frac{f(t)\,Q(z,\ t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\equiv 0, \tag{87,13}$$

სადაც

$$Q(z,\ t)=Q_0(t)\,z^{p-1}+Q_1(t)\,z^{p-2}+\cdots+Q_{p-1}(t),$$

ხოლო $Q_k(t)$ გარკვეული პოლინომებია, რომლებიც ადვილად გამოითვლება (87,10) და (87,11) ფორმულების საფუძველზე. კერძოდ, ცხადია, რომ $Q_0(t)=1$ და, საზოგადოდ, $Q_k(t)$ პოლინომის უფროსი წევრი t^k-ს ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციათა $Q_0(t)$, $Q_1(t),\ldots,\ Q_{p-1}(t)$ სისტემა $1,\ t,\ t^2,\ldots$ სისტემის ეკვივალენტურია იმ აზრით, რომ თითოეული ამ სისტემის ნებისმიერი ფუნქცია მეორე სისტემის ფუნქციათა წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს.

(87,13) პირობა, ცხადია, ეკვივალენტურია p პირობისა

$$\int\limits_{L}\frac{Q_k(t)\,f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ p-1,$$

ან, ზემოთქმულის საფუძველზე, უფრო მარტივი სახის p პირობისა

$$\int\limits_{L}\frac{t^k f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=0,\quad k=0,\ 1,\ldots,\ p-1. \tag{87,14}$$

როგორც უკვე ზემოთ იყო აღნიშნული, ეს შედეგი წარმოადგენს § 86-ში სხვა გზით მიღებული შედეგის კერძო შემთხვევას.

განსაკუთრებით აღვნიშნოთ შემთხვევა, როცა $p=1$. ამ შემთხვევაში $P(t)$ პოლინომი გადაიქცევა მუდმივად. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი შედეგი.

ვთქვათ, ab გახსნილ რკალზე ვეძებთ H კლასის $\varphi(t)$ ფუნქციას და ისეთ C მუდმივს, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0)+C, \tag{87,15}$$

სადაც $f(t)$ ab რკალზე მოცემული ფუნქციაა H კლასიდან.

(ერთადერთი) ამონახსნი მოიცემა ფორმულებით

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}}{\pi i}\int_{ab} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}\,(t-t_0)}, \tag{87,16}$$

$$C = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}. \tag{87,17}$$

§ 88. გაგრძელება. წინა პარაგრაფის (87,15) ამოცანა წარმოადგენს იმავე პარაგრაფის (87,1) ამოცანის კერძო შემთხვევას. პირველი ამოცანა შეიძლება განზოგადდეს სხვა მიმართულებითაც, სახელდობრ, ამოიხსნას შემდეგი ამოცანა.

მოვძებნოთ H კლასის $\varphi(t)$ ფუნქცია და c_k მუდმივები პირობით

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0)+c_k, \quad \text{როცა } t_0\in L_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ p, \tag{88,1}$$

სადაც $f(t)$ H-კლასის მოცემული ფუნქციაა.

თავდაპირველად დავამტკიცოთ, რომ ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ამოხსნა, ე. ი. თუ

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = c_k, \quad \text{როცა } t_0\in L_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ p, \tag{88,2}$$

მაშინ აუცილებლად $\varphi(t)=0$, $c_k=0$. მართლაც, ვთქვათ, $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს (88,2) პირობას, დავუშვათ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \tag{88,3}$$

(88,2)-ის თანახმად, L_k-ზე გვაქვს

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0) = c_k,$$

ე. ი.

$$\Phi^+(t_0)-\frac{c_k}{2} = -\left[\Phi^-(t_0)-\frac{c_k}{2}\right],$$

საიდანაც, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ

$$\Psi(z) = \sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}\left[\Phi(z) - \frac{c_k}{2}\right]$$

ფუნქცია ჰოლომორფულია L_k რკალის რაიმე მახლობლობაში (ამ რკალის ჩათვლით) და ნულის ტოლია a_k, b_k წერტილებში. ამიტომ

$$\Psi(z) = (z-a_k)(z-b_k)\Psi_0(z),$$

სადაც $\Psi_0(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია L_k რკალის მახლობლობაში. ამგვარად, L_k რკალის მახლობლად

$$\Phi(z) - c_k = \sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}\,\Psi_0(z)$$

და, მაშასადამე,

$$\Phi'(z) = \frac{\Omega(z)}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}},$$

სადაც $\Omega(z)$ ჰოლომორფულია L_k რკალის მიდამოში. ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi'(z)\sqrt{R(z)} = P(z)$$

ფუნქცია ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეზე. რადგანაც $P(z) = O(|z|^{p-2})$ დიდი $|z|$-ებისათვის, ამიტომ $P(z)$ არის პოლინომი, რომლის რიგი არ აღემატება $p-2$-ს. ამგვარად, $\Phi(z)$-ისათვის ვღებულობთ გამოსახულებას

$$\Phi(z) = \int\limits_{\infty}^{z} \frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}, \tag{88,4}$$

სადაც ინტეგრება ხდება ნებისმიერი წირის გასწვრივ, რომელიც არ გადაჰკვეთს L-ს. გარდა ამისა, ვიცით, რომ $\Phi(z)$ ჰოლომორფულია (და, მაშასადამე, ცალსახაა) L-ზე გაჭრილ მთელ სიბრტყეში. აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\Phi(z)=0$.

მართლაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ $\Phi(z)$ ფუნქციის ცალსახობას გაჭრილ სიბრტყეში, (88,4) წარმოდგენიდან ადვილად მივიღებთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია a_k და b_k ბოლოებზე იღებს სავსებით განსაზღვრულ სასრულ $\Phi(a_k)$, $\Phi(b_k)$ მნიშვნელობებს და თუ Λ_k აღნიშნავს შეკრულ კონტურს, რომელიც მოიცავს L_k რკალს, უსასრულოდ ახლოს არის მასთან და შემოუვლის მას საათის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ

$$0 = \int\limits_{\Lambda_k} \frac{P(t)}{\sqrt{R(t)}}\,dt = 2\int\limits_{L_k} \frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = 2\left[\Phi(b_k) - \Phi(a_k)\right],$$

ასე რომ, თუ ვიგულისხმებთ

$$\Phi(z) = u + iv,$$

მაშინ $u(a_k) = u(b_k)$, $v(a_k) = v(b_k)$. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$J = \int\limits_{\Lambda} u\,dv,$$

სადაც Λ ერთობლიობაა Λ_k კონტურების. ცხადია, რომ

$$J = \int_L (u^+ dv^+ - u^- dv^-).$$

მაგრამ თანაფარდობიდან $\Phi^+ + \Phi^- = c_k = \alpha_k + i\beta_k$ გამომდინარეობს

$$u^+ + u^- = \alpha_k, \quad dv^- = -dv^+$$

და ამიტომ

$$J = \int_L (u^+ + u^-)\, dv^+ = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int_{L_k} dv^+ = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [v(b_k) - v(a_k)] = 0.$$

მეორე მხრივ,

$$J = \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy,$$

სადაც ორჯერადი ინტეგრალი აღებულია მთელ გაჭრილ სიბრტყეზე. აქედან დავასკვნით, რომ $\Phi(z) = u + iv = 0$. მაშასადამე, აუცილებელია $\varphi(t) = 0$, რისი ჩვენებაც იყო საჭირო.

გადავიდეთ ახლა (88,1) ამოცანის ამოხსნაზე. წინა პარაგრაფის (87,14) ფორმულა გამოსახავს აუცილებელ და საკმარის პირობას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს c_k მუდმივები, რომ (88,1) განტოლებას ჰქონდეს H კლასის ამონახსნი. ეს პირობა ასე წარმოიდგინება

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k + A_j = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, p-1), \tag{88,5}$$

სადაც

$$a_{jk} = \int_{L_k} \frac{t^j dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad A_j = \int_L \frac{t^j f(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}. \tag{88,6}$$

$\| a_{jk} \|$ მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან, რადგანაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, (88,5)-დან მიღებულ ერთგვაროვან სისტემას, როცა $f(t) = 0$, ექნებოდა არანულოვანი ამონახსნი $c_1, c_2, \dots, c_n$ და, მაშასადამე, (88,2) ამოცანას ექნებოდა არანულოვანი ამონახსნი, რაც შეუძლებელია.

ამიტომ (88,5) სისტემას აქვს ყოველთვის განსაზღვრული ამონახსნი. ამ ამონახსნს, ცხადია, აქვს შემდეგი სახე:

$$c_k = \int_L \frac{\omega_k(t) f(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}, \tag{88,7}$$

სადაც $\omega_k(t)$ განსაზღვრული პოლინომებია, რომელთა რიგი არ აღემატება $(p-1)$

და რომელთა კოეფიციენტები დამოკიდებულია მხოლოდ L წირზე[31]. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\omega_k(t)$ პოლინომები წრფივად დამოუკიდებელია.

მას შემდეგ, რაც c_k მუდმივები განვსაზღვრეთ, შეგვიძლია წინა პარაგრაფის (87,4) ფორმულის საშუალებით მოვძებნოთ $\varphi(t)$ ფუნქცია. ეს ფორმულა ჩვენს შემთხვევაში გვაძლევს

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)} + \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \sum_{k=1}^{p} c_k \int\limits_{L_k} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)}, \quad (88,8)$$

სადაც c_k მოიცემა (88,7) ფორმულით.

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (88,8)-ში, მივიღებთ შებრუნების ფორმულას[32]

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)}{\sqrt{R(t)}} \left\{\frac{1}{t-t_0} + \sum_{k=1}^{p} \omega_k(t) \int\limits_{L_k} \frac{d\tau}{\sqrt{R(t)}(\tau - t_0)}\right\} dt. \quad (88,9)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, $\varphi(t)$ ფუნქცია ყველა ბოლოში ნულად იქცევა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ როცა $p=1$ წინა პარაგრაფის (87,16) და (87,17) ფორმულებს ვღებულობთ.

§ 89. $\Phi^+ + \Phi^- = g$ ამოცანის ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში. 1^0 გადავდივართ § 85 და § 86-ში მიღებული შედეგების განზოგადებაზე იმ შემთხვევაში, როცა L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია და ვიწყებთ შეუღლების ამოცანის ამოხსნით იმ შემთხვევაში, როცა $G(t) = -1$, ე. ი. ამოცანით:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \quad (89,1)$$

სადაც $g(t)$ H_0-კლასის მოცემული ფუნქციაა.

დროებით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები (ისინი დაგვჭირდება მხოლოდ გამოყვანის დროს, საბოლოო ფორმულებში კი მონაწილეობას არ მიიღებენ). მარტივი გახსნილი რკალები საერთო წერტილების გარეშე, რომლებითაც შედგენილია უბან-უბან გლუვი L წირი, ასე აღვნიშნოთ:

$$L_k = a_k b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

რაიმე თანმიმდევრობით აღებული L წირის კვანძები აღინიშნოს $c_1, c_2, \ldots, c_n$-ით. a_k, b_l წერტილთაგან თითოეული ემთხვევა ერთ-ერთ c_j წერტილს, ამასთან, ერთი და იგივე c_j წერტილს შეიძლება დაემთხვეს რამდენიმე a_k, b_l წერტილი.

c_j კვანძებს, სადაც თავს იყრის ლუწი რაოდენობის რკალები, ვუწოდებთ ლუწს, ხოლო სადაც თავს იყრის კენტი რაოდენობის კვანძები—კენტს. შემდგომში ვნახავთ, რომ კენტი კვანძები არაგანსაკუთრებულია (ჩვენი ამოცანისათვის), ხოლო

[31] უფრო ზუსტად, მხოლოდ a_k, b_k ბოლოების მდებარეობისაგან და L_k რკალების ურთიერთმდებარეობისაგან ტოპოლოგიური აზრით; სხვანაირად რომ ვთქვათ, პოლინომები უცვლელი რჩება L_k რკალების ნებისმიერი ისეთი უწყვეტი დეფორმაციისას, როცა რკალის ბოლოები უძრავი რჩება და რკალები არ გადაკვეთს ერთმანეთს.

[32] ფორმულა, რომელიც არსებითად ემთხვევა (88,9) ფორმულას, დამოუკიდებლად მიიღო ნ. ვეკუამ [1].

ლუწი—განსაკუთრებული. ცხადია, რომ კენტი კვანძების რიცხვი ლუწია; აღვნიშნოთ იგი $2p$-თი[33], ხოლო

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2p} \tag{89,2}$$

აღნიშნავდეს ყველა კენტ კვანძს.

2°. კანონიკური $X(z)$ ფუნქციის ასაგებად ვისარგებლოთ (78,,10) ფორმულით

$$X(z)=e^{\gamma(z)}\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k}, \tag{*}$$

სადაც λ_k მთელი რიცხვებია, რომლებიც უნდა შეირჩეს გარკვეული სახით, ხოლო $\gamma(z)$ მოიცემა (78,5) ფორმულით. რადგანაც ჩვენს შემთხვევაში $G(t)=-1$, ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $\ln G(t)=\pi i$, და მაშინ

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\pi i\,dt}{t-z}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{a_jb_j}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\ln\frac{z-b_j}{z-a_j},$$

საიდანაც

$$e^{\gamma(z)}=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{1/2}$$

აქ $\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{1/2}$ გამოსახულებაში ვგულისხმობთ $L_j=a_jb_j$ რკალზე გაჭრილ სიბრტყეში ისეთ ჰოლომორფულ შტოს, რომელიც $z=\infty$-ში ტოლია ერთის; განსაზღვრების ძალით, ვთვლით, რომ

$$\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{1/2}=\exp\frac{1}{2}\int_{a_jb_j}\frac{dt}{t-z}.$$

ამგვარად,

$$X(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{1/2}, \tag{**}$$

სადაც λ_k მთელი რიცხვები უნდა შეირჩეს.

სანამ ზემოთ მოყვანილი გამოსახულების გამარტივებას შევუდგებოდეთ, შევნიშნოთ, რომ ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარე ნებისმიერი მთელი λ_k რიცხვებისათვის წარმოადგენს ჰოლომორფულ ფუნქციას L წირზე გაჭრილ სიბრტყეში[34], გარდა, შესაძლებელია, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა (სადაც მას შეიძლება ჰქონდეს პოლუსი); ამასთან, იგი ნიშანს იცვლის ყოველთვის, როცა z წერ-

[33] თუ m_k აღნიშნავს რაოდენობას იმ a_j, b_j ბოლოებისა, რომლებიც ემთხვევიან c_k კვანძებს ($k=1, 2, \ldots, n$), მაშინ ყველა a_j, b_j ბოლოების რიცხვი ტოლია $2N=m_1+m_2+\cdots+m_n$; რადგანაც ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში გვაქვს ლუწი რიცხვი, ამიტომ მარჯვენა მხარის შესაკრებებში შეიძლება გვქონდეს მხოლოდ კენტების ლუწი რიცხვი.

[34] ე. ი. ჰოლომორფულ ფუნქციას (გარდა, შესაძლებელია, $z=\infty$ წერტილისა) ყოველ ბმულ ნაწილში, რომლებადაც L წირი ჰყოფს სიბრტყეს.

ტილი გადაკვეთს L წირს; ამის ქვეშ ვგულისხმობთ, რომ $X^{+}(t)=-X^{-}(t)$ წირის ყველა ჩვეულებრივ წერტილში[35].

გავაერთიანოთ (**)-ის მარჯვენა მხარეში ის მამრავლები, რომელთათვისაც c_k, a_j ან b_j-ს აქვს ერთნაირი მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$X(z)=\pm\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\alpha_k}, \qquad (***)$$

სადაც α_k მთელი რიცხვია, თუ c_k ლუწი კვანძია, და, ამასთანავე,

$$\alpha_k=\mu_k\pm\frac{1}{2}, \qquad (****)$$

სადაც μ_k მთელი რიცხვია, ხოლო c_k—კენტი კვანძი; წინა ფორმულაში μ_k შერჩევის ხარჯზე ზედა და ქვედა ნიშანი შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერად. მიუხედავად ორმაგი ნიშნისა (***) ფორმულის მარჯვენა მხარეში, იგი წარმოადგენს სავსებით განსაზღვრულ ფუნქციას L-ზე გაჭრილ მთელ სიბრტყეში: ეს გამომდინარეობს ზემოთქმულიდან და შემდგომში კიდევ იქნება განმარტებული.

ახლა უკვე ვხედავთ, რომ ყველა ლუწი კვანძი განსაკუთრებულია; მათი შესაბამისი α_k რიცხვები ნულის ტოლად უნდა ჩავთვალოთ (λ_k რიცხვების შერჩევის ხარჯზე). ყველა კენტი კვანძი კი არაგანსაკუთრებულია და, ცხადია, თუ (****) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $\mu_k=0$, ზედა ნიშნებს ავიღებთ როცა $k=1,2,\ldots,q$, ხოლო ქვედას—თუ $k=q+1,\ldots,2p$, მაშინ მივიღებთ $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკურ ამოხსნას.

ამგვარად, საბოლოოდ, $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია $X(z)$ მოიცემა ფორმულით

$$X(z)=\pm\prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)^{\pm 1/2}, \qquad (89,3)$$

სადაც $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ ყველა კენტი კვანძებია და ხარისხის მაჩვენებლებში ზედა ნიშნები აიღება თუ $k=1, 2, \ldots, p$ და ქვედა—როცა $k=q+1, \ldots, 2p$.

მოცემული კლასის ყველა სხვა კანონიკური ფუნქცია მოიცემა ნებისმიერ მუდმივ მამრავლზე გამრავლებით.

იმ შემთხვევაში, როცა ყველა კვანძი ლუწია, (89,3) ფორმულის მარჯვენა მხარე ± 1 ტოლად უნდა ჩავთვალოთ; ამგვარად, ამ შემთხვევაში

$$X(z)=\pm 1. \qquad (89,4)$$

ნიშანი მარჯვენა მხარეს რჩება უცვლელად, სანამ z მდებარეობს L წირით გაყოფილ სიბრტყის ერთ-ერთ ბმულ ნაწილში და უნდა იცვლებოდეს საპირისპიროთი, როცა z გადაკვეთს L წირს რაიმე ჩვეულებრივ წერტილში. ეს სავსებით განსაზღვრავს $X(z)$ ფუნქციას, თუ (ნებისმიერად) დავაფიქსირებთ მის ნიშანს ერთ-ერთ ამ ნაწილში, მაგალითად, ჩავთვლით, რომ $X(z)=+1$ იმ ნაწილში, რომელიც შეიცავს წერტილს $z=\infty$. ამ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ (*) ფორმულიდან გამომდინარე

[35] მოგაგონებთ, რომ $X(z)$ წარმოადგენს ერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნას, რომელიც მიიღება (89,1)-იდან, როცა $g(t)=0$.

მნიშვნელობას, წინააღმდეგ შემთხვევაში — ხსენებულ მნიშვნელობას შებრუნებული ნიშნით[36].

როცა $p \neq 0$, მაშინ (89,3) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ აგრეთვე ასე (შდრ. § 85-ს):

$$X(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{89,5}$$

სადაც

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{q} (z - c_k), \quad R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2p} (z - c_k).$$

შემდგომში

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} = \prod_{k=1}^{2p} (z - c_k)^{\pm 1/2}$$

გამოსახულებაში ვგულისხმებთ ფუნქციას, რომელიც ჰოლომორფულია L წირით გაყოფილი სიბრტყის ყველა ბმულ ნაწილში (გარდა, შესაძლებელია, $z=\infty$-სა). ამასთანავე, ეს ფუნქცია ნიშანს იცვლის (იმ აზრით, როგორც ეს ზემოთ იყო ახსნილი) z წერტილით L-წირის (ჩვეულებრივ წერტილში) ყოველი გადაკვეთისას. იმისათვის, რომ მივიღოთ ის ფუნქცია, რომელიც (*) ფორმულით განისაზღვრება, უნდა ჩავთვალოთ, რომ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის შემცველ ნაწილში დიდი $|z|$-ებისათვის (შდრ. § 85-ს)

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} = z^{q-p} + A_1 z^{q-p-1} + \cdots \tag{89,6}$$

ცხადია, რომ $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსი მოიცემა ფორმულით

$$\varkappa = p - q. \tag{89,7}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $L_k = a_k b_k$ რკალებს არ გააჩნია საერთო ბოლო წერტილები, ყველა კვანძი (ბოლო) კენტი და, მაშასადამე, არაგანსაკუთრებულია. ამგვარად, კვლავ მივდივართ § 85-ში ამ კერძო შემთხვევისათვის მიღებულ შედეგებამდე და ფორმულებამდე.

ზემოთ განხილულ მეორე განსაკუთრებულ შემთხვევაში, როცა ყველა კვანძი ლუწია, როგორც უკვე ვნახეთ, $X(z) = \pm 1$. კერძოდ, თუ L შედგება მარტივი შეკრული კონტურებისაგან, რომელთაც არ გააჩნიათ საერთო წერტილები, მაშინ კენტი კვანძები არ გვაქვს და L წირზე მიმართულების შესაფერისად შერჩევით მივიღებთ (47,20)-ს.

აღვნიშნავთ აგრეთვე, რომ ფორმულები, რომლებიც შეესაბამება შემთხვევას, როცა ყველა კვანძი ლუწია, შეიძლება შემდგომში ჩაიწეროს იმავე სახით, როგორც კენტი კვანძების შემთხვევისათვის, თუ ჩავთვლით, რომ $p = q = 0$ და

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \tag{89,8}$$

[36] ის ფაქტი, რომ სიბრტყის ერთი ნაწილიდან მეორეში სხვადასხვა გზით გადასვლა წინააღმდეგობამდე არ მიგვიყვანს, გამომდინარეობს $X(z)$ ფუნქციის არსებობიდან, რაც ჩვენ მიერ იყო დამტკიცებული.

ფესვების ქვეშ ვიგულისხმებთ $+1$ ან -1 რიცხვებს ნიშნების არჩევის ზემოთ აღნიშნული წესის მიხედვით.

3⁰. დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას და დავწეროთ (89,1) არაერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი. ისევე როგორც § 25-ის პ. 2⁰-ში, $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ კლასის არაერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i \sqrt{R_2(z)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}} \frac{g(t)dt}{(t-z)} + \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} Q(z), \tag{89,9}$$

სადაც $Q(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, ხოლო $\dfrac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}$ არის

$$\frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}} = 1 : \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}$$

ფუნქციის მიერ L-ის მარცხენა მხარეზე მიღებული მნიშვნელობა.

$h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნისათვის (ზუსტად ისევე, როგორც § 85-ში)[37] გვაქვს შემდეგი შედეგი: როცა $\varkappa = p-q \geqslant 0$, მაშინ $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები ყოველთვის არსებობს; ყველა ეს ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i \sqrt{R_2(z)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\, (t-z)} + \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} Q_{p-q-1}(z), \tag{89,10}$$

სადაც Q_{p-q-1} ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $p-q-1$-ს (იგივურად ნულის ტოლია, როცა $p=q$);

როცა $\varkappa = p-q < 0$, $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $g(t)$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^k g(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q-p-1; \tag{89,11}$$

იგი ერთადერთია და მოიცემა (89,10) ფორმულით, სადაც $Q_{p-q-1}(z) = 0$.

§ 90. კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნება ზოგად შემთხვევაში.

1⁰. გადავიდეთ ახლა კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნების ამოცანის ანუ

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t-t_0} = f(t_0), \quad t_0 \in L, \tag{90,1}$$

განტოლების ამოხსნაზე, სადაც L ახლა უკვე ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია. ვიგულისხმებთ, რომ L წირზე მოცემული $f(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს და ვეძებთ $\varphi(t)$ ამონახსნებს H^* კლასში.

---

[37] არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში $c_1, c_3, \dots, c_{2p}$ აღნიშნავს მხოლოდ კენტ კვანძებს (როგორიცაა ყველა კვანძი § 85-ში).

§ 86-ში მოყვანილის თითქმის სრული ანალოგიის გამო, შემოვიფარგლებით შედეგის ფორმულირებით და მოკლე მითითებებით.

§ 86-ის ანალოგიურად ყველა საძიებელი $\varphi(t)$ ამოხსნა შეიძლება დავყოთ კლასებად, მივაკუთვნოთ $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს ამონახსნები, რომლებიც რჩებიან შემოსაზღვრული $c_1, c_2, \ldots, c_{2q}$ კვანძების მიდამოებში; ეს უკანასკნელი კვანძები ნებისმიერად არის ამორჩეული ყველა კენტი $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ კვანძიდან, რომლებიც წარმოადგენენ შეუღლების (89,1) ამოცანის არაგანსაკუთრებულ კვანძებს; ამ პარაგრაფში გამოვიყენებთ იმ აღნიშვნებს, რომლებიც წინა პარაგრაფში მივიღეთ.

როცა $\varkappa = p - q \geqslant 0$, მაშინ (90.1) განტოლების $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნები ყოველთვის არსებობს და მოიცემა ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)} + \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}}\, P_{p-q-1}(t_0), \qquad (90,2)$$

სადაც $P_{p-q-1}(t_0)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხიც არ აღემატება $p-q-1$-ს (ნულის ტოლია, როცა $p=q$).

თუ $\varkappa = p - q < 0$, $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის (ერთადერთი) ამონახსნი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(t)$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^k f(t)}{\sqrt{R_1(t)}}\, dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, q-p-1; \qquad (90,3)$$

ამ პირობის შესრულების შემთხვევაში ამონახსნი მოიცემა (90,2) ფორმულით, სადაც $P_{p-q-1} = 0$.

ლუწი კვანძების მახლობლობაში ყველა $\varphi(t_0)$ ამონახსნი H_0 კლასს ეკუთვნის. იმ კენტი კვანძების მახლობლობაში, სადაც პირობის თანახმად, მოცემული კლასის ამონახსნი შემოსაზღვრული უნდა იყოს, იგი H_0 კლასს ეკუთვნის, მაგრამ აუცილებლად ნულის ტოლი არ ხდება; იგი (ისევე როგორც § 86-ში) ნულად იქცევა, თუ ეს კვანძი L წირის ბოლოა.

როცა L წირს გააჩნია მხოლოდ ლუწი კვანძები ($p=0$), მაშინ ამონახსნი ყოველთვის არსებობს და ერთადერთია. იგი მოიცემა ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i\, \delta(t_0)} \int\limits_L \frac{\delta(t)\, f(t)}{t - t_0}\, dt,$$

სადაც $\delta(t)$-წირის t წერტილის ისეთი ფუნქციაა, რომელიც მის სხვადასხვა უბანზე იღებს ± 1 მნიშვნელობას. ამ მნიშვნელობების შერჩევა ხდება შემდეგი წესის მიხედვით [იხ. წინა პარაგრაფში (89,4) ფორმულის შემდგომ ნათქვამი]: ვთქვათ, $\delta(z)$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც ღებულობს მხოლოდ $+1$ ან -1 მნიშვნელობას სხვადასხვა ბმულ ნაწილებში, რომლებადაც L წირი ჰყოფს სიბრტყეს, ამასთან, $\delta(z)$ იცვლის ნიშანს L წირის გადაკვეთისას, მაშინ $\delta(t)$-ად შეიძლება ავიღოთ $\delta(z)$-ის მიერ L-ის მარცხენა მხარეზე მიღებული მნიშვნელობა. ე. ი.

$$\delta(t) = \delta^{+}(t).$$

ამგვარად, როცა ყველა კვანძი ლუწია, გვაქვს შებრუნების შემდეგი ფორმულები:

$$f(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \qquad \varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i\,\delta(t_0)}\int_L \frac{\delta(t)\,f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{90,4}$$

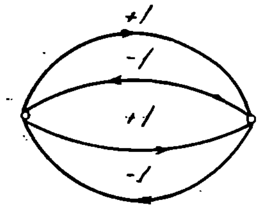
თუ აღნიშვნებს ოდნავ შევცვლით, ეს ფორმულები შეიძლება გავამარტივოთ. სახელდობრ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\delta(t)\,\varphi(t) = \psi(t)$$

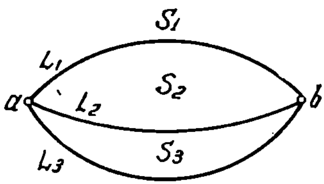
და შევცვლით დადებით მიმართულებას საწინააღმდეგოთი იმ L_k რკალებზე, სადაც $\delta(t) = -1$, მივიღებთ შებრუნების შემდეგ ფორმულებს:

$$f(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \qquad \psi(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{90,5}$$

ეს ფორმულები ისეთივეა, როგორიც ერთი მარტივი კონტურის შემთხვევაში.



ნახ. 20



ნახ. 21

2°. ნათქვამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანთ ორ მარტივ მაგალითს.

ვთქვათ, ჯერ L-ს აქვს მე-20 ნახაზზე მოცემული სახე. ამ შემთხვევაში ყველა კვანძი ლუწია. $\delta(z)$-ის მნიშვნელობები შეიძლება ავიღოთ ისე, როგორც არის მითითებული ნახაზზე. თუ L-ზე დადებითი მიმართულება ისეა არჩეული, როგორც ეს მითითებულია ნახაზზე, მაშინ ყველგან L-ზე გვექნება $\delta(t) = +1$ და (90,4) ფორმულის თანახმად

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0},$$

ისევე როგორც მარტივი შეკრული კონტურის შემთხვევაში.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა L-ს აქვს 21-ე ნახაზზე მითითებული სახე. ამ შემთხვევაში გვაქვს ორი კვანძი a და b. ორივე კენტია. ვეძებთ უფართოესი კლასის. ე. ი. h_0 კლასის ამონახსნები. ამ კლასის ინდექსი $\varkappa = 1$ (ჩვენს შემთხვევაში $p=1,\ q=0$).

ზემოთქმულის თანახმად, ყველა ასეთი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}}\int_L \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}\,f(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{c}{\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}},$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო ფესვის მნიშვნელობა განისაზღვრება, მაგალითად, შემდეგნაირად. ვთქვათ

$$\chi(z) = [(z-a)(z-b)]^{1/2},$$

სადაც მარჯვენა მხარეს იგულისხმება ფუნქცია, რომელიც ჰოლომორფულია a და b წერტილების შემაერთებელ L_1, L_2, L_3 რკალებიდან ერთ-ერთზე გაჭრილ სიბრტყეში; მაგალითად იმ L_2 რკალზე, რომელიც მოთავსებულია ორ დანარჩენს შორის. $\chi(z)$-ის მნიშვნელობა შეიძლება დავაფიქსიროთ პირობით

$$\lim \frac{\chi(z)}{z} = +1, \quad \text{როცა } z \to \infty.$$

შემდგომში დავუშვათ, რომ (აღნიშვნები მოცემულია ნახაზზე),

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = \begin{cases} +\chi(z), & z \in S_1, \\ -\chi(z), & z \in S_2, \end{cases}$$

მაშინ

$$\sqrt{(t-a)(t-b)} \text{ და } \sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}\text{-ის ქვეშ}$$

შეიძლება ვიგულისხმოთ $\chi(z)$-ის მიერ მიღებული მნიშვნელობები L-ის მარცხენა მხარეს (როგორიც არ უნდა იყოს L-ზე არჩეული დადებითი მიმართულება).

III. ჰარმონიულ ფუნქციათა თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ეფექტური ამოხსნა ზოგიერთი არეებისათვის

ამ კარში მოცემული იქნება პირველ კარში მიღებული შედეგების გამოყენება ჰარმონიულ ფუნქციათა თეორიის იმ ძირითად ამოცანათა ეფექტური ამოხსნებისათვის კერძო სახის არეების შემთხვევაში, რომლებიც გვხვდებიან ჰიდრომექანიკაში, დრეკადობის თეორიასა და მათემატიკური ფიზიკის სხვა დარგებში.

§ 91. დირიხლეს ამოცანა და მისი ანალოგიური ამოცანები სიბრტყისათვის წრფის გასწვრივ განლაგებული ჭრილებით. ვთქვათ, S აღნიშნავს სიბრტყეს, გაჭრილს ox ნამდვილი ღერძის ასეთი $L_j = a_j b_j$ მონაკვეთების გასწვრივ, რომელთაც საერთო წერტილები არა აქვთ. იგულისხმება, რომ $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots$ ამ მონაკვეთების ერთობლიობა აღვნიშნოთ ასე

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_p.$$

S არისათვის ამოვხსნით სამ ამოცანას, რომელთაგან უკანასკნელი (C ამოცანა) არის დირიხლეს ჩვეულებრივი ამოცანა, ხოლო პირველი ორი მისი ზოგიერთი სახეცვლილება, რომლებიც დამოუკიდებელ ინტერესს წარმოადგენენ და აგრეთვე გვეხმარებიან დირიხლეს ამოცანის ამოხსნაში.

A ამოცანა. ვიპოვოთ S-ში ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი $\Phi(z) = u + iv$ ფუნქცია სასაზღვრო პირობით

$$u^+ = f^+(t), \qquad u^- = f^-(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{91,1}$$

სადაც $f^+(t)$, $f^-(t)$ L-ზე მოცემული ნამდვილი ფუნქციებია H კლასიდან, მოითხოვება, რომ საძიებელი $\Phi(z)$ ფუნქცია L წირის c ბოლოების მახლობლად აკმაყოფილებდეს პირობას

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, საძიებელი $\Phi(z)$ ფუნქცია უბან-უბან ჰოლომორფულია L ნახტომის წირით.

გამოვიყენოთ § 39-ის პ. 1-ის აღნიშვნები და ვთქვათ:

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}}{2}, \quad \Omega(z) = \frac{\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}}{2}. \tag{91,2}$$

უბან-უბან ჰოლომორფული $\Psi(z)$ და $\Omega(z)$ ფუნქციები ცხადია უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს

$$\overline{\Psi}(z) = \Psi(z), \quad \overline{\Omega}(z) = -\Omega(z). \tag{91,3}$$

როგორც ადვილი შესამჩნევია, სასაზღვრო (91,1) პირობები გვაძლევს[38]:

$$\Psi^+(t) + \Psi^-(t) = 2f(t) \quad (91,4\ \text{ა})$$
$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = 2g(t), \quad L\text{-ზე} \quad (91.4\ \text{ბ})$$

სადაც

$$2f(t) = f^+(t) + f^-(t), \quad 2g(t) = f^+(t) - f^-(t). \tag{91,5}$$

$\Omega(z)$ ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება (91,4 ბ) პირობით (§ 31):

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}. \tag{91,6}$$

(39.10) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ (91,3)-ის მეორე პირობა დაკმაყოფილებულია. ჩვენ ვხედავთ, რომ $\Omega(z)$ ფუნქცია თითქმის შემოსაზღვრულია (399, პ. 3°) ყველა ბოლოს მახლობლობაში[39]; ის, გარდა ამისა, შემოსაზღვრული იქნება იმ c ბოლოების მახლობლობაში, სადაც $f^+(c) = f^-(c)$.

$\Psi(z)$ ფუნქციის განსაზღვრა დაიყვანება შეუღლების ამოცანის ერთ-ერთ უმარტივეს შემთხვევამდე, რომელიც უკვე განვიხილეთ § 85-ში; ოღონდ აქ მხედველობაში უნდა მივიღოთ დამატებითი პირობა

$$\overline{\Psi}(z) = \Psi(z).$$

აღვნიშნოთ $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$-თი რაიმე თანმიმდევრობით აღებული a_j, b_j წერტილები. $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკურ ფუნქციას, ე. ი. შეუღლების ერთგვაროვანი

$$\Psi^+(t) + \Psi^-(t) = 0, \quad t \in L \tag{91,7}$$

---

[38] გვაქვს:

$$u^+(t) = \operatorname{Re} \Phi^+(t) = \frac{1}{2}\left[\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)}\right],$$

$$u^-(t) = \operatorname{Re} \Phi^-(t) = \frac{1}{2}\left[\Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)}\right],$$

მაგრამ (იხ. (39,5) $\overline{\Phi^+}(t) = \overline{\Phi^-}(t)$, $\overline{\Phi^-}(t) = \overline{\Phi^+}(t)$, საიდანაც გამომდინარეობს (91,4 ა) და (91,4 ბ)).

[39] (91.4 ბ) ამოცანისათვის ყველა კვანძი (ჩვენს შემთხვევაში — ბოლოები) a_j, b_j განსაკუთრებულია.

ამოცანის ხსენებული კლასის კანონიკურ ამონახსნს, (85,3) ფორმულის თანახმად, აქვს შემდეგი სახე:

$$X(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{91,8}$$

სადაც, როგორც § 85-ში,

$$R_1(z)=\prod_{j=1}^{q}(z-c_j),\qquad R_2(z)=\prod_{j=q+1}^{2p}(z-c_j). \tag{91,9}$$

ამასთან, ფესვების მნიშვნელობები აირჩევა ისე, როგორც აღნიშნულ პარაგრაფში იყო მიღებული.

როგორც § 85-ში ვთქვით, (91,4 ა) ამოცანისათვის ყველა a_k, b_k ბოლოები არაგანსაკუთრებულია. როცა $p \geqslant q$, ამ ამოცანის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის უსასრულობაში ქრობად ამონახსნს აქვს სახე:

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\int\limits_{L}\frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}P_{p-q-1}(z), \tag{91,10}$$

სადაც $P_{p-q-1}(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხიც არ აღემატება $p-q-1$-ს ($P_{p-q-1}(z)=0$, როცა $p=q$), ხოლო ფესვები გვესმის ისევე, როგორც § 85-ში.

თუ $p<q$, მაშინ (91,4 ა) ამოცანის ზემოთ ხსენებული კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი არსებობს მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია ქვემოთ მოყვანილი (91,12) პირობები და მოიცემა იმავე (91,10) ფორმულით, სადაც $P_{p-q-1}(z)=0$.

იმისათვის, რომ (91,4 ა) ამოცანის მიღებული ამონახსნი აკმაყოფილებდეს ყველა მოთხოვნილ პირობას, (91,3)-ის თანახმად საჭიროა, რომ $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$. შევამოწმოთ, შესრულებულია თუ არა ეს პირობა.

უწინარეს ყოვლისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\overline{X}(z)=X(z). \tag{91,11}$$

თუ გამოვიყენებთ (39,10)[40] ფორმულას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (91,10)-ის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები აკმაყოფილებს $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$ პირობას. ამიტომ (91,10)-ის მთელი მარჯვენა მხარეც დააკმაყოფილებს ამ პირობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P_{p-q-1}(z)$ პოლინომის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია.

(91,4 ა) ამოცანის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების არსებობის ზემოხსენებულ პირობებს, როცა $p<q$, აქვს შემდეგი სახე (§ 85):

$$\int\limits_{L}\frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}\,t^k f(t)\,dt=0,\qquad k=0,\,1,\,2,\ldots,q-p-1. \tag{91,12}$$

[40] ამასთანავე მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ (39,5), (91,11) და (91,17)-ის თანახმად ჩვენს შემთხვევაში

$$\overline{X}^+(t)=\overline{X}^-(t)=X^-(t)=-X^+(t)\quad L\text{-ზე}.$$

გამოსავალი A ამოცანის $\Phi(z)$ ამონახსნებს $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნებს ვუწოდებთ, თუ ისინი თითქმის, შემოსაზღვრულია $c_1, c_2, \ldots, c_q$ ბოლოების მახლობლად. მაშინ ყველა ზემოთქმულის საფუძველზე დავასკვნით, რომ:

A ამოცანის $h(c_1, c_2, \ldots c_q)$ კლასის ამონახსნი, როცა $p \geqslant q$, მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \Omega(z) = \tag{91,13}$$

$$= \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}} \frac{f(t)dt}{t-z} + \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)dt}{t-z} + \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} P_{p-q-1}(z),$$

სადაც $P_{p-q-1}(z)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხიც არ აღემატება $p-q-1$-ს ($P_{p-q-1}(z)=0$, როცა $p=q$); თუ $p<q$, ამონახსნი (ერთადერთი) არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია (91,12) პირობები. იგი მოიცემა (91,13) ფორმულით, სადაც $P_{p-q-1}(z)=0$.

მიღებული შედეგი (ამონახსნების კლასებად დაყოფისა და ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენის თვალსაზრისით) გარკვეულად განაზოგადებს მ. კელდიშისა და ლ. სედოვის [1] მეტად მნიშვნელოვან შედეგს.

შენიშვნა 1. ადვილი შესამჩნევია (იხ. § 82), რომ ყველა ზემოთ მოყვანილი შედეგი და ფორმულა ძალაში დარჩება, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული $f^+(t)$ და $f^-(t)$ ფუნქციები ნაცვლად H კლასისა ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს L-ზე. კერძოდ, თუ $f^+(t)$ და $f^-(t)$ h_0 კლასის (ე. ი. H^*) ნებისმიერი ფუნქციებია, მაშინ h_0 კლასის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა (91,13) ფორმულით, როცა $q=0$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{R(z)}} \int\limits_L \frac{\sqrt{R(t)}\, f(t)\, dt}{t-z} + \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)dt}{t-z} + \frac{P_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \tag{91,13ა}$$

სადაც კვლავ

$$R(z) = \prod_{j=1}^{p} (z-a_j)(z-b_j). \tag{91,9ა}$$

შენიშვნა 2. ძნელი არ არის ანალოგიური გზით ისეთი ამოცანის ამოხსნა, რომელიც A ამოცანისაგან იმით განსხვავდება, რომ u^+-ისა და v^--ის მნიშვნელობები მოიცემა L-ზე. ეს ამოცანა ამოხსნილი იყო დ. შერმანის [1] მიერ. შერმანის ამოხსნა შეიძლება რამდენადმე გამარტივდეს, თუ ამოცანას მავიყვანთ არა სინგულარულ განტოლებებამდე, არამედ უშუალოდ შეუღლების ზოგიერთ (ძალიან მარტივ) ამოცანამდე.

B ამოცანა. ვიპოვოთ უსასრულობაში ქრობადი და ყველა ბოლოს მახლობლობაში თითქმის შემოსაზღვრული ჰოლომორფული ფუნქცია $\Phi(z) = u + iv$ საზღვრის პირობით

$$u^+ = f^+(t) + c_k, \quad u^- = f^-(t) + c_k \quad L_k\text{-ზე}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{91,14}$$

სადაც $f^+(t)$ და $f^-(t)$ H კლასის მოცემული ნამდვილი ფუნქციებია,

ხოლო c_k ნამდვილი მუდმივებია, რომლებიც წინასწარ არ მოიცემა.

ეს ამოცანა არსებითად ემთხვევა იმ ამოცანას, რომელსაც § 60-ში დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანა[41] დავარქვით; ამიტომ აქ შევინარჩუნებთ ამ სახელწოდებას.

თუ (91,2) ფორმულებით შემოვიღებთ $\Psi(z)$ და $\Phi(z)$ ფუნქციებს, მივალთ შეუღლების შემდეგ ორ ამოცანამდე:

$$\Psi^+(t) + \Psi^-(t) = 2f(t) + 2c_k \quad L_k\text{-ზე}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{91,15ა}$$

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = 2g(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{91,15ბ}$$

სადაც $f(t)$ და $g(t)$ განისაზღვრება (91,5) ფორმულებით.

მეორე ამოცანა ამოიხსნება ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში; ამონახსნი იქნება თითქმის შემოსაზღვრული ყველა ბოლოს მახლობლობაში (შემოსაზღვრულიც კი იმ ბოლოების მახლობლობაში, სადაც $f^+(t)$ და $f^-(t)$ იღებს ერთნაირ მნიშვნელობებს).

ახლა ვიპოვოთ (91,15 ა)-ს თითქმის შემოსაზღვრული და, მაშასადამე, შემოსაზღვრული[42], ე. ი. h_{2p} კლასის, ამონახსნი. ამ კლასის კანონიკური ფუნქცია იქნება

$$X_{2p}(z) = \sqrt{R(z)}, \quad R(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - a_k)(z - b_k) \tag{91,16}$$

(იხ. (85,12) ფორმულა; აქ ჩავთვალეთ, რომ $c = 1$).

(91,15 ა) ამოცანის h_{2p} კლასის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების არსებობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს აქვს სახე[43]:

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{t^k [f(t) + c(t)]}{\sqrt{R(t)}} \, dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

სადაც $c(t) = c_j$ L_j-ზე. ეს პირობები c_j-ს განსასაზღვრავად იძლევა p წრფივ განტოლებას

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{kj} c_j + \gamma_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{91,17}$$

სადაც

$$\gamma_{kj} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L_j} \frac{t^k \, dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \gamma_k = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{t^k f(t) \, dt}{\sqrt{R(t)}}. \tag{91,18}$$

---

[41] მთავარი განსხვაება დირიხლეს იმ სახეცვლილი ამოცანისაგან, რომელიც ჩამოყალიბებული იყო § 60-ში, იმაში მდგომარეობს რომ იქ მოითხოვებოდა $u(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტი გაგრძელება საზღვრის ყველა წერტილზე, აქ კი გამონაკლისს ვუშვებთ იმ ბოლოებისათვის, სადაც $u(x, y)$ ფუნქცია უნდა იყოს მხოლოდ თითქმის შემოსაზღვრული. თუმცა, ვნახავთ, რომ აქ მოთხოვნილ პირობებში $u(x, y)$ ფუნქცია აღმოჩნდება შემოსაზღვრული ბოლოების მახლობლობაში და უწყვეტად გაგრძელებადიც კი იმ c ბოლოებში, სადაც $f^+(c) = f^-(c)$, ცხადია, რომ თუ უკანასკნელი პირობა არ არის შესრულებული, მაშინ უწყვეტად გაგრძელებადობა c-ზე შეუძლებელია.

[42] რადგანაც (91,15 ა) ამოცანისათვის ყველა ბოლო არაგანსაკუთრებულია, ამიტომ ყველა თითქმის შემოსაზღვრული ამოხსნა აგრეთვე შემოსაზღვრულიც იქნება (§ 82, პ. 2).

[43] ეს არის $q = 2p$-ს შემთხვევაში გამოყენებული (85.18) პირობები.

ადვილი შესამჩნევია, რომ γ_{kj} და γ_k ნამდვილი სიდიდეებია.

თუ (91,17) სისტემას გააჩნია (ნამდვილი) ამონახსნი, მაშინ (91,15)-ს საძებნი ამონახსნი მოცემული იქნება ფორმულით

$$\Psi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)+c(t)}{\sqrt{R(t)}\,(t-z)}\,dt, \tag{91,19}$$

სადაც $c(t)=c_j$ L_j-ზე და $c_j (j=1,\,2,\ldots,p)$ აკმაყოფილებს (91,17) სისტემას. ამასთან, $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (91,17) სისტემის დეტერმინანტი, ე. ი. $\|\gamma_{ij}\|$ მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. მართლაც, ის რომ ნულის ტოლი იყოს, მაშინ (91,17)-დან მიღებულ ერთგვაროვან სისტემას, როცა $f(t)=0$, ექნება ნულისაგან განსხვავებული $c_1,\,c_2,\ldots,c_p$ ამონახსნი. ამ ამონახსნის შესაბამისი ფუნქცია

$$\Psi_0(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int\limits_L \frac{c(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-z)}$$

იქნება უსასრულობაში ქრობადი, უწყვეტად გაგრძელებადი ყველა მონაკვეთზე ბოლოების ჩათვლით, ამასთანავე $[\operatorname{Re}\Psi_0(t)]^+=[\operatorname{Re}\Psi_0(t)]^-=c_j$ L_j-ზე. მაშინ § 60-ში დამტკიცებული დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობის გამო (ადვილი მისახვედრია, რომ დამტკიცება გამოდგება ჩვენი შემთხვევისათვისაც) აუცილებლად $c_1=c_2=\cdots=c_p=0$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ამგვარად (91,17) სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან და სისტემა ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია.

ამგვარად, დასმულ ამოცანას ყოველთვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი, იგი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Omega(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)+c(t)}{\sqrt{R(t)}}\,dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \tag{91,20}$$

სადაც $c(t)=c_j$ L_j-ზე, ამასვე c_j მუდმივები განისაზღვრება (91,17) სისტემით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. ადვილი შესამჩნევია, რ ო მ ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი $u=\operatorname{Re}\Phi(z)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ქ ნ ე ბ ა ა რ ა მ ა რ ტ ო თ ი თ ქ მ ი ს შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი, ა რ ა მ ე დ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ც ყ ვ ე ლ ა ბ ო ლ ო ს მ ა ხ ლ ო ბ ლ ო ბ ა შ ი. ეს ცხადია (91,20)-ის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრებისათვის. მეორე შესაკრები ნებისმიერი c ბოლოს მახლობლობაში წარმოდგინება შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}=\mp\frac{g(c)}{\pi i}\ln(z-c)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)-g(c)}{t-z}\,dt,$$

სადაც ზედა ნიშანი აიღება a_j ბოლოებისათვის, ხოლო ქვედა — b_j ბოლოებისათვის. ამგვარად, c-ს მახლობლობაში

$$u=\operatorname{Re}\Phi(z)=\mp g(c)\,\frac{\vartheta}{\pi}+u_0,$$

სადაც u_0 უწყვეტია c წერტილში, ხოლო $\vartheta=\arg(z-c)$.

ცხადია, რომ თუ $g(c)=f^+(c)-f^-(c)$, მაშინ u უწყვეტად გაგრძელებადია c-ზე.

C **ამოცანა (დირიხლეს ამოცანა).** ვიპოვოთ S-ში ყველგან შემოსაზღვრული ჰარმონიული $u(x, y)$ ფუნქცია შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$U^+=f^+(t),\quad U^-=f^-(t)\quad L\text{-ზე}, \tag{91,21}$$

სადაც $f^+(t)$ და $f^-(t)$ მოცემული ნამდვილი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ H პირობას.

ჩვენ მივუთითებთ ამ ამოცანის ამოხსნის ორ ხერხს. პირველ ხერხს ეს ამოცანა მიჰყავს B ამოცანამდე, ხოლო მეორეს — A ამოცანამდე.

პირველი ხერხი. C ამოცანა შეიძლება მივიყვანოთ B ამოცანამდე სხვადასხვა ხერხით. ჩვენ მივუთითებთ ერთ-ერთ უმარტივეს გზას. აღვნიშნოთ $\omega_j(x, y)$-ით ან $\omega_j(z)$-ით შემდეგი ელემენტარული ჰარმონიული ფუნქციები:

$$\omega_j(z)=\operatorname{Re}\frac{(z-b_j)\ln(z-b_j)-(z-a_j)\ln(z-a_j)}{b_j-a_j},\quad j=1,\ldots,p, \tag{91,22}$$

სადაც $\omega_j(z)$ არის L_j-ზე გაჭრილ სიბრტყეში ისეთი ცალსახა შტო, რომ დიდი $|z|$-ებისათვის

$$\omega_j(z)=-\ln|z|-1+O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{91,22 ა}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\omega_j(z)$ იღებს ერთნაირ მნიშვნელობებს a_jb_j მონაკვეთებზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან; ეს მნიშვნელობები აღვნიშნოთ $\omega_j(t)$-ით.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$U(x, y)=u(x, y)+\alpha_0+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\omega_j(z). \tag{91,23}$$

სადაც $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — ნამდვილი მუდმივებია, რომელთაგან უკანასკნელი p მუდმივი შებმულია პირობით

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=0, \tag{91,24}$$

რაც უზრუნველყოფს იმას, რომ

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\,\omega_j(z)$$

უსასრულობაში იქნება ნულის ტოლი; $u(x, y)$ ახალი საძებნი ჰარმონიული, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქციაა.

(91,21)-დან u ფუნქციისათვის ვიღებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$u^+=f^+(t)-\omega(t),\quad u^-=f^-(t)-\omega(t)\quad L\text{-ზე}, \tag{91,25}$$

სადაც სიმოკლისათვის აღნიშნულია

$$\omega(t)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\omega_j(t). \tag{91,26}$$

(91,25) ამოცანის ნაცვლად ამოვხსნათ B ამოცანა

$$u^+(t)=f^+(t)-\omega(t)+C_j, \quad u^-(t)=f(t)-\omega(t)+C_j \ L_j\text{-ზე}, \tag{91,27}$$

სადაც $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ მუდმივები ფიქსირებულია და ვთვლით, რომ როგორც ამას B ამოცანის პირობა მოითხოვს, $u(x, y)$ არის უსასრულობაში ქრობადი, ყველა ბოლოს მახლობლობაში თითქმის შემოსაზღვრული ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი.

ჩვენ ვიცით (იხ. ზემოთ B ამოცანის ამოხსნა), რომ ამ დროს C_j მუდმივები სავსებით განისაზღვრება და, ცხადია, რომ ისინი გამოისახებიან $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ მუდმივების წრფივი კომბინაციებით:

$$C_j=\sum_{k=0}^{p}\gamma_{jk}\alpha_k+\gamma_j, \tag{91,28}$$

სადაც γ_{jk} $f^+(t)$ და $f^-(t)$ ფუნქციების არჩევისაგან დამოუკიდებელი გარკვეული მუდმივებია, ხოლო γ_j მუდმივებია, რომლებიც ნულის ტოლია, როცა $f^+(t)= =f^-(t)=0$.

შევარჩიოთ ახლა $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ მუდმივები ისე, რომ $C_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, p)$ და დაკმაყოფილებული იყოს (91,24) პირობა.

ამგვარად, α_k მუდმივების განსაზღვრისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_{k=0}^{p}\gamma_{jk}+\gamma_j=0, \quad j=1, 2, \ldots, p,$$

$$\sum_{k=0}^{p}\alpha_k=0. \tag{91,29}$$

ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ ეს სისტემა ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია. თუ α_k მუდმივები შერჩეულია (91,29)-ის შესაბამისად, მაშინ გამოსავალი C ამოცანის ამონახსნი მოცემული იქნება (91,23) ფორმულით, სადაც $u(x, y)$-ად (91.27) ამოცანის ამონახსნი[44] უნდა მივიჩნიოთ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (91,29) სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, იგი ნულის ტოლია. მაშინ, როცა $f^+(t)=f^-(t)=0$, (91,29)-დან მიღებულ ერთგვაროვან სისტემას აქვს არანულოვანი $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ამონახსნი. მუდმივების ამ მნიშვნელობებისათვის $u(x, y)$ ფუნქცია, განსაზღვრული (91.23) ფორმულით, იქნება დირიხლეს (91,21) ამოცანის ამოხსნა, როცა $f^+=f^-=0$. მაგრამ მაშინ, როგორც ცნობილია, $u=0$. ხოლო თუ $u=0$, მაშინ აუცილებლად $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_p=0$. მართლაც, $\alpha_0=0$, რადგან

[44] ზემოთქმულის თანახმად (შენიშვნა B ამოცანის მიმართ) $u(x, y)$ ფუნქცია იქნება არამცთუ თითქმის შემოსაზღვრული, არამედ შემოსაზღვრულიც კი ყველა ბოლოს მახლობლობაში.

(91,23)-ის მარჯვენა ნაწილში α_0-გან განსხვავებული ორივე შესაკრები უსასრულობაში ქრობადია[45].

ვთქვათ, $\alpha_k \neq 0$ $(k \geqslant 1)$. თუ z შემოუვლის მხოლოდ $a_k b_k$ მონაკვეთს, მაშინ $u(x, y)$ ფუნქციის შეუღლებული დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მნიშვნელობას, ისევე როგორც $\omega_j(z)$ $(j \neq k)$ ფუნქციის შეუღლებული, ხოლო $\omega_k(z)$ ფუნქციის შეუღლებული ფუნქცია, როგორც ადვილი შესამჩნევია, მიიღებს ნულისაგან განსხვავებულ ნაზრდს. მაშასადამე, თუ $\alpha_k \neq 0$, მაშინ (91,23)-ის მარჯვენა მხარის შეუღლებული ფუნქცია მიიღებს ნულისაგან განსხვავებულ ნაზრდს, რაც არ შეიძლება, რადგან მარცხენა მხარე $u = 0$.

ამგვარად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია და C ამოცანა შეიძლება ამოხსნილად ჩაითვალოს.

C ამოცანის ამოხსნის მეორე მეთოდი, რომელიც მითითებულია მ. კელდიშის და ლ. სედოვის [1] მიერ, მდგომარეობს A ამოცანაზე დაყვანაში; ეს მეთოდი რამდენადმე ნაკლებად ზოგადია, ვიდრე ზემოთ მოყვანილი, რადგან მოითხოვს მოცემული $f^+(t)$ და $f^-(t)$ ფუნქციების წარმოებადობას, მაგრამ პრაქტიკულად ზოგჯერ უფრო მარტივ შედეგებამდე მივყავართ.

გადმოვცემთ ამ მეთოდს ზოგიერთი (არარსებითი) ცვლილებითა და გამარტივებით.

ანალიზური ფუნქცია, რომლის ნამდვილ ნაწილს წარმოადგენს საძებნი $U(x, y)$ ჰარმონიული ფუნქცია, აღვნიშნოთ

$$\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y). \tag{91,30}$$

$U(x, y)$ ფუნქციის შეუღლებული $V(x, y)$ ფუნქცია, საზოგადოდ, იქნება მრავალსახა, ამიტომ მრავალსახა იქნება აგრეთვე $\Phi(z)$ ფუნქციაც. მაგრამ, როგორც ცნობილია,

$$\Phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial V}{\partial x}$$

ფუნქცია იქნება ცალსახა[46] (U ფუნქციის ცალსახობის გამო), ამავე დროს U-ს შემოსაზღვრულობის გამო

$$\Phi'(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{91,31}$$

დიდი $|z|$-ებისათვის[47].

[45] $u(x, y)$ არის ნამდვილი ნაწილი B ამოცანის იმ ამოხსნისა, რომელიც (ამოცანის პირობის თანახმად) უსასრულობაში ქრება.

[46] ჰარმონული $V(x, y)$ ფუნქცია იღებს შემოვლის გზისაგან დამოუკიდებელ მუდმივ ნაზრდს ნებისმიერი ისეთი შეკრული გზის გასწვრივ, რომელიც მოიცავს მხოლოდ $a_k b_k$ მონაკვეთს. ამიტომ, ცხადია, რომ $\Phi'(z)$ ფუნქცია ასეთი გზით შემოვლისას დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მნიშვნელობას.

[47] ცალსახა და უსასრულობის მახლობლობაში შემოსაზღვრული ჰარმონიული ფუნქცია საკმარისად დიდი $|z|$-ებისათვის დაიშლება შემდეგი სახის მწკრივად

$$U(x, y) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta) r^{-k} \quad (z = re^{i\theta})$$

და ამიტომ საკმარისად დიდი $|z|$-ებისათვის გვაქვს

$$\Phi(z) = u + iv = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k)\, z^{-k}, \quad \Phi'(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

დავუშვათ, რომ ყველა ბოლოზე, ე. ი. როცა $t=a_k, b_k: f^+(t)=f^-(t)$ (ეს ნიშნავს საძებნი U ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობების უწყვეტობას) და შემოვიღოთ (91,5) ფორმულებით განსაზღვრული $f(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები. მაშინ დაშვებული პირობის თანახმად გვექნება

$$f(a_k)=f^+(a_k)=f^-(a_k), \quad f(b_k)=f^+(b_k)=f^-(b_k),$$
$$g(a_k)=g(b_k)=0, \quad k=1, 2, \dots, p. \tag{91,32}$$

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $f^+(t)$, $f^-(t)$ და, მაშასადამე, $f(t)$, $g(t)$ ფორმულებს აქვს H^* კლასის წარმოებულები. $\Phi'(z)$ ფუნქციიდან მოვითხოვთ, რომ იგი იყოს უბან-უბან ჰოლომორფული[48].

ამგვარად, მივდივართ A ამოცანამდე $\Phi'(z)$ ფუნქციისათვის, ამასთანავე $f(t)$, $g(t)$ ფუნქციების როლს თამაშობს $f'(t)$, $g'(t)$.

(91,13ა) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\Phi'(z)=\frac{1}{\pi i\sqrt{R(z)}}\int_L \frac{\sqrt{R(t)}\,f'(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g'(t)\,dt}{t-z}+\frac{C_1 z^{p-2}+\cdots+C_{p-1}}{\sqrt{R(z)}}, \tag{91,33}$$

სადაც $R(z)$ განისაზღვრება (91,9ა) ფორმულით და ფესვები უნდა გვესმოდეს § 85-ის შესაბამისად; $C_1, \dots, C_{p-1}$ აღნიშნავს ნამდვილ მუდმივებს. (91,33)-ის უკანასკნელი შესაკრების მრიცხველში ჩვენ ავიღეთ $(p-2)$ რიგის პოლინომი ნაცვლად $(p-1)$ რიგის პოლინომისა, რათა დაკმაყოფილებულიყო (91,31) პირობა, ვინაიდან, ადვილი მისახვედრია, პირველი ორი შესაკრები ამ პირობას აკმაყოფილებს. პირველი შესაკრებისათვის ეს ცხადია. რაც შეეხება მეორე შესაკრებს, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში მის მწკრივად გაშლაში z-ის კლებად ხარისხებად z^{-1}-ის კოეფიციენტი უდრის

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L g'(t)\,dt=-\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{p}\left[g(b_k)-g(a_k)\right]$$

და, მაშასადამე, (91,32)-ის ძალით ნულის ტოლია. რადგან ვიპოვეთ $\Phi'(z)$, ახლა $\Phi(z)$-ს აღვადგენთ ფორმულით

$$\Phi(z)=\int_0^z \Phi'(z)\,dz+C,$$

სადაც C შეიძლება ჩავთვალოთ ნამდვილ მუდმივად.

$C_1, \dots, C_{p-1}$ მუდმივების განსაზღვრისათვის გვაქვს p რაოდენობის შემდეგი ცხადი პირობა[49]:

---

[48] ეს დაშვება გამართლებულია a posteriori, რადგანაც ვნახავთ, რომ ასეთი სახის ამონახსნი არსებობს; ის ფაქტი, რომ არ დავკარგავთ არცერთ სხვა ამონახსნს, გამომდინარეობს დირიხლეს ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობიდან.

[49] არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ $f^+(a_k)=f^-(a_k)=f(a_k)$.

$$\mathrm{Re}\int_{0}^{a_k} \Phi'(z)\,dz + C = f(a_k). \tag{91,34}$$

ინტეგრება შეიძლება ნებისმიერი გზით, რომელსაც მივყავართ 0-დან a_k-მდე (L-ის გადაკვეთის გარეშე), მაგალითად, Ox ღერძის მარცხენა მხარის გასწვრივ (მაშინ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ უნდა ავიღოთ $\Phi'^{+}(t)\,dt$).

ადვილი შესამჩნევია, რომ (91,34) პირობები $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$, C მუდმივების მიმართ p რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემას წარმოადგენს. დავამტკიცოთ, რომ ეს სისტემა ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია. ამისი დამტკიცება შეიძლება დირიხლეს ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობის თეორემაზე დაყრდნობით, მაგრამ ჩვენ მოვიყვანთ ერთ მარტივ უშუალო დამტკიცებას, რომელიც აგრეთვე მ. კელდიშისა და ლ. სედოვის [1] მიერ იყო მითითებული.

განვიხილოთ (91,34) სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა; იგი მიიღება, თუ დავუშვებთ, რომ $f(t)=g(t)=0$. ამ ერთგვაროვან სისტემას აქვს სახე

$$\mathrm{Re}\int_{0}^{a_k} \frac{C_1 t^{p-2}+\cdots+C_{p-1}}{\sqrt{R(t)}}\,dt + C = 0, \quad k=1,\ 2,\ldots,p, \tag{91,35}$$

საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{C_1 t^{p-2}+\cdots+C_{p-1}}{\sqrt{R(t)}}\,dt = 0, \quad k=1,\ 2,\ldots,\ p-1. \tag{91,36}$$

ამგვარად, ყოველ $b_k a_{k+1}$ მონაკვეთზე (ამ მონაკვეთების რიცხვი $p-1$-ის ტოლია) $C_1 z^{p-2}+\cdots+C_{p-1}$ პოლინომი აუცილებლად ერთხელ მაინც იცვლის ნიშანს, ისე რომ მას უნდა ჰქონდეს არანაკლებ $p-1$ ფესვისა; მაგრამ ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $C_1=\cdots=C_{p-1}=0$, ამის შემდეგ ცხადია, რომ $C=0$.

ამგვარად, (91,34)-ის შესაბამის ერთგვაროვან სისტემას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. ამგვარად, მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან და (91,34) სისტემა ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია.

§ 92. დირიხლეს ამოცანა და ანალოგიური ამოცანები სიბრტყისათვის წრეწირის გასწვრივ განლაგებული ჭრილებით. სრულიად ანალოგიურად შეიძლება ამოიხსნას წინა პარაგრაფის A. B და C ამოცანები ისეთი S არის შემთხვევაში, რომელიც რაიმე წრეწირის სასრული რაოდენობის რკალების გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეს წარმოადგენს. ეს შემთხვევა შეიძლება მარტივი ინვერსიით მივიყვანოთ წინა პარაგრაფის შემთხვევაზე, მაგრამ წინა პარაგრაფში მოყვანილი ამოხსნის ანალოგიურ გზას უფრო სწრაფად მივყავართ მიზნამდე. შესაბამისი ფორმულების გამოყვანას, რომლებიც წინა პარაგრაფის ფორმულების ანალოგიურია, ვანდობთ მკითხველს (იხ. ანალოგიური გარდაქმნები შემდეგ პარაგრაფში).

§ 93. რიმან—ჰილბერტის ამოცანა წყვეტილი კოეფიციენტებით. 1°. გამოყე-

ნების თვალსაზრისით[50] ფრიად მნიშვნელოვან ამოცანას ასე ჩამოვაყალიბებთ (შდრ. § 40):

ვთქვათ, L შეკრული გლუვი კონტურია, S^+—L კონტურით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილი (სასრული ან უსასრულო). ვეძებოთ S^+-ში ჰოლომორფული $\Phi(z)=u+iv$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია L კონტურის ყველა წერტილზე, გარდა, შესაძლებელია, ამ კონტურის მოცემული $c_1, c_2, \ldots, c_n$ წერტილებისა, რომელთა მახლობლობაშიც

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_j|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1, \tag{93,1}$$

ისე, რომ დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობა

$$a(t)\, u^+ - b(t)\, v^+ = c(t), \tag{93,2}$$

სადაც $a(t), b(t), c(t)$ L-ზე მოცემული H_0 კლასის ნამდვილი ფუნქციებია $c_1, \ldots, c_n$ კვანძებით, ამასთან, $a^2(t)+b^2(t) \neq 0$ ყველგან L-ზე[51].

ვგულისხმებთ, რომ L კონტური აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას.

კონფორმული გადასახვის გზით ეს ამოცანა, ისევე, როგორც § 43-ში, შეიძლება მივიყვანოთ იმ შემთხვევაზე, როცა S^+ წრეა[52]. სწორედ ამ შემთხვევას განვიხილავთ ახლა.

2°. ამგვარად, ვთქვათ, L არის $|z|=1$ წრეწირი, ხოლო S^+—$|z|<1$ წრე; S^--ით აღვნიშნოთ $|z|>1$ არე.

მას შემდეგ, რაც ნათქვამი იყო §§ 41, 43 და 83-ის მე-2 პუნქტში, დასმული ამოცანის ამოხსნა ცხადი ხდება. ამიტომ ჩვენ შემოვიფარგლებით მოკლე მითითებებით[53].

ისევე, როგორც § 41-ში, S^+-ში საძიებელ $\Phi(z)$ ფუნქციას გავაგრძელებთ S^- არეშიც ისე, რომ

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi(z) \tag{93,3}$$

ყველა z-ისათვის S^+ და S^- არეებში.

ამას, ისევე, როგორც § 41-ში, მივყავართ შეუღლების ამოცანამდე, რომელიც შეესაბამება რიმან—ჰილბერტის (93,2) ამოცანას:

---

[50] უახლესი გამოყენებებიდან მივუთითებთ გამოყენებებს გარსების უმომენტო თეორიაში; იხ. ა. გოლდენვეიზერის [1] სტატია. ა. ბიწაძის [3] შრომაში მოცემულია გამოყენება შერეული ტიპის კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების თეორიის ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანისათვის.

[51] წყვეტის წერტილების მიმართ ეს პირობა, როგორც ყოველთვის, უნდა გავიგოთ, როგორც

$$a^2(c_j \pm 0) + b^2(c_j \pm 0) \neq 0.$$

[52] § 43-ის დასაწყისში ნათქვამის თანახმად ადვილი შესამჩნევია, რომ განსახილველი ფუნქციების მოთხოვნილი თვისებების შენარჩუნებას წრეზე კონფორმული გადასახვისას L წირზე დადებული პირობები უზრუნველყოფენ.

[53] რამდენადაც ჩემთვის ცნობილია, ტექსტში მოყვანილი ამოცანის სრული ამოხსნა ადრე არ ყოფილა მითითებული. ერთი კერძო შემთხვევა განხილულია F. Noether-ის [1] სტატიაში, მაგრამ დასრულებული ამოხსნა ავტორს ამ კერძო შემთხვევაშიც კი არ მიუღია. სხვა კერძო შემთხვევაში დასრულებული სახის ამოხსნას იძლევა ს. სობოლევი [1] აქ მოცემული მეთოდისაგან განსხვავებული გზით (მოჰყავს სქოლიო წიგნის პირველი გამოცემიდან).

$$(a+ib)\,\Phi^+(t)+(a-ib)\,\Phi^-(t)=2c \tag{93,4}$$

ან

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t), \tag{93,5}$$

სადაც

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib},\qquad g(t)=\frac{2c}{a+ib}. \tag{93,6}$$

§ 80-ის ანალოგიურად (იხ. აგრეთვე § 83) განსახილველი რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ყველა ამონახსნი დავყოთ კლასებად; $h(c_1,\dots,c_q)$ კლასს მივაკუთვნოთ მოცემული არაგანსაკუთრებული $c_1, c_2, \dots, c_q$ კვანძების მახლობლობაში შემოსაზღვრული ყველა ამონახსნი.

მოცემული კლასის $\varkappa$ ინდექსი განისაზღვრება ფორმულით

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}\,[\arg G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right], \tag{93,7}$$

$G(t)$ ფუნქციის არგუმენტის ნახტომებს c_j წერტილებზე გადასვლისას ამონახსნთა განსახილავი კლასის შესაბამად ავირჩევთ, ისე, როგორც ეს მითითებული იყო § 83-ში (იხ. (83,9) ფორმულა). $\frac{a-ib}{a+ib}=-G(t)$ შეფარდების არგუმენტის ნახტომებს ყოველთვის მივიღებთ $G(t)$-ს არგუმენტის ნახტომების ტოლად.

უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევისაგან განსხვავებით $\varkappa$ რიცხვი ახლა შეიძლება იყოს როგორც კენტი, ისე ლუწი[54].

ვთქვათ, $X(z)$ აღნიშნავს (93,5) ამოცანის მოცემული $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ კლასის კანონიკურ ფუნქციას, რომელიც დამატებით აკმაყოფილებს პირობას

$$X_*(z)=\overline{X}\left(\frac{1}{z}\right)=z^{\varkappa}X(z); \tag{93,8}$$

$X(z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილი მუდმივი მამრავლის სიზუსტით და შეიძლება გამოითვალოს (41,9)—(41,11), (41,13) (41,14) ფორმულების საშუალებით, თუ

$$\ln[t^{-\varkappa}G(t)]=i\arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right]=i\Theta(t) \tag{93,9}$$

გამოსახულებას გავიგებთ ისე, როგორც მითითებული იყო § 83-ში (83,16)[55] ფორმულის შემდეგ.

რიმან—ჰილბერტის ერთგვაროვანი ამოცანის მოცემული კლასის ზოგადი ამონახსნი, რომელიც მიიღება (93,2)-დან, როცა $c(t)=0$, $\varkappa\geqslant 0$ შემთხვევაში მოიცემა ფორმულით

---

[54] ახლა არ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ $\frac{a-ib}{a+ib}$ შეფარდების არგუმენტის ცვლილება უდრის $a-ib$ გამოსახულების არგუმენტის გაორკეცებულ ცვლილებას თუნდაც იმიტომ, რომ ამ არგუმენტის ნახტომი c_j წერტილზე გადასვლისას ჩვენ მიერ ცალკე არ არის დაფიქსირებული.

[55] ჩვენს შემთხვევაში (83,16) ფორმულაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ $a=0$ და ავიღოთ ზედა ნიშანი.

$$\Phi(z) = X(z)\left(C_0 z^{\varkappa} + C_1 z^{\varkappa-1} + \cdots + C_{\varkappa}\right), \tag{93,10}$$

სადაც $C_0, C_1, \ldots C_{\varkappa}$ მუდმივები შებმული არის პირობებით

$$C_k = \overline{C}_{\varkappa-k}, \tag{93,11}$$

სხვა მხრივ კი ნებისმიერი შეიძლება იყოს, სავსებით ისევე, როგორც § 41-ში (იმ განსხვავებით, რომ $\varkappa$ კენტი რიცხვიც შეიძლება იყოს).

ამის შესაბამისად, როცა $\varkappa \geqslant 0$, ერთგვაროვან ამოცანას აქვს მოცემული კლასი ზუსტად $\varkappa + 1$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, ისევე როგორც § 41-ში (წრფივად დამოუკიდებლობა გვესმის იმავე აზრით, როგორც § 40-ის მე-2 პუნქტში); როცა $\varkappa \leqslant -1$, მაშინ ერთგვაროვან ამოცანას არ აქვს მოცემული კლასის ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი.

არაერთგვაროვანი (93,2) ამოცანა, როცა $\varkappa \geqslant -1$. ამოხსნადია (მოცემულ კლასში) ნებისმიერი $c(t)$ მარჯვენა მხარისათვის; კერძოდ როცა $\varkappa = -1$, იგი ცალსახად ამოხსნადია.

როცა $\varkappa \leqslant -2$ ამ ამოცანას აქვს მოცემული კლასის (ერთადერთი) ამონახსნი, მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი პირობები (მათი რიცხვი $-\varkappa - 1$-ის ტოლია):

ლუწი $\varkappa$-სათვის[56]:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \Omega(\vartheta)\, c(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\frac{\varkappa}{2} - 1, \\
&\int_0^{2\pi} \Omega(\vartheta)\, c(\vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\frac{\varkappa}{2} - 1;
\end{aligned} \tag{93,12}$$

კენტი $\varkappa$-სათვის:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \Omega(\vartheta)\, c(\vartheta) \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\vartheta \, d\vartheta = 0, \\
&\int_0^{2\pi} \Omega(\vartheta)\, c(\vartheta) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\vartheta \, d\vartheta = 0.
\end{aligned}\right. \quad k = 0, 1, \ldots, -\frac{\varkappa+1}{2} - 1. \tag{93,13}$$

აქ $\Omega(\vartheta)$ აღნიშნავს ნამდვილ ფუნქციას, განსაზღვრულს ისევე, როგორც § 41-ში ((41,22) ფორმულა),

$$\Omega(\vartheta) = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2(\vartheta) + b^2(\vartheta)}} \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \theta(\vartheta_1) \operatorname{ctg}\frac{\vartheta_1 - \vartheta}{2}\, d\vartheta_1\right\} \tag{93,14}$$

შემდეგი დამატებით: § 41-ში $\sqrt{a^2 + b^2}$-ის წინ ნიშნის აღებას მნიშვნელობა არ ჰქონდა, რადგან ეს გამოსახულება L-ზე უწყვეტად ცვლილებისას ერთსა და იმავე

[56] ამ შემთხვევაში გვაქვს იგივე ფორმულები, რაც გვქონდა § 41-ში.

ნიშანს ინარჩუნებს. განსახილავ შემთხვევაში კი ამას არ აქვს ადგილი. ამიტომ ახლა მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ

$$\pm\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}=(a+ib)\sqrt{\frac{a-ib}{a+ib}}=(a+ib)\,e^{\frac{i\omega}{2}},$$

სადაც

$$\omega=\arg\frac{a-ib}{a+ib}.$$

ამასთან c_j წერტილზე გადასვლისას ω არგუმენტი ისე უნდა იცვლებოდეს, როგორც ზემოთ, (93,7) ფორმულის შემდეგ, იყო მითითებული.

ამოვწეროთ აგრეთვე (93,2) არაერთგვაროვანი ამოცანის მოცემული $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნების ფორმულები. ამ ფორმულებს აქვს ისეთივე სახე, როგორიც § 41-ში.

როცა $\varkappa \geqslant 0$, (93,8) ამოცანის ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\left\{\int\limits_L\frac{c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)}+z^{\varkappa}\int\limits_L\frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)\,(t-z)}\right\}-$$
$$-\frac{z^{\varkappa}X(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{t^{-\varkappa}c}{(a+ib)\,X^+(t)}\,\frac{dt}{t}; \qquad (93,15)$$

როცა $\varkappa \leqslant -1$ (ერთადერთი) ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)}, \qquad (93,16)$$

ოღონდ, $\varkappa \leqslant -2$ დროს დაცული უნდა იყოს (93,12) ან (93,13) არსებობის პირობები.

ცალკე აღვნიშნოთ ფორმულა, რომელიც $\varkappa=0$ შემთხვევაში იძლევა კერძო ამონახსნს:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_L\frac{c\,dt}{(a+ib)\,X^+(t)\,(t-z)}-\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{c}{(a+ib)\,X^+(t)}\,\frac{dt}{t}. \qquad (93,17)$$

3°. დასასრულ, მოვიყვანოთ რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ამოხსნა ნახევარსიბრტყისათვის. აქ გამოვიყენებთ აღნიშვნებს, რომლებიც მიღებული იყო § 42. § 83-ის მე-3 პუნქტში. ზემოთ მოყვანილთან სრული ანალოგიის გამო შემოვიფარგლებით საბოლოო ფორმულებისა და მარტივი შენიშვნების მოყვანით.

რიმან—ჰილბერტის ამოცანა ნახევარსიბრტყისათვის სავსებით ისევე ყალიბდება, როგორც 1 პუნქტში. თუ D საზღვრის (ნამდვილი ღერძის) უსასრულოდ დაშორებული წერტილი კვანძებს მიეკუთვნება, მაშინ (93,1) პირობა ამ წერტილისათვის ასე უნდა გვესმოდეს:

$$|\Phi(z)| < \text{const}\, |z|^\alpha, \quad \alpha = \text{const} < 1, \text{ დიდი } |z|\text{-ებისათვის.}$$

ისევე, როგორც § 42-ში, ჩვენთვის საინტერესო ამოცანა მიდის (93,4) შეუღლების ამოცანის ამოხსნამდე ან, რაც იგივეა, (93,5) ამოცანამდე, სადაც ამჯერად საზღვარი არის D წრფე, ხოლო ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$\overline{\Phi}(z) = \Phi(z)$$

და შემოსაზღვრული უნდა იყოს ყველგან, გარდა, შესაძლებელია, ზოგიერთი კვანძის მიდამოსი.

მოცემული $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსი განისაზღვრება ფორმულით

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)\,]_D, \tag{93,18}$$

სადაც კვლავ

$$G(t) = -\frac{a-ib}{a+ib},$$

ხოლო $\ln G(t)$-ს მნიშვნელობები ისეა შერჩეული, როგორც § 83-ის მე-3 პუნქტში. თუ როგორ უნდა გვესმოდეს (93,18) ფორმულა იხ. იმავე § 83-ის მე-3 პუნქტში, აგრეთვე ხსენებული პარაგრაფის ბოლოში. $\varkappa$ მთელი რიცხვი შეიძლება იყოს როგორც კენტი, ისე ლუწიც.

შეუღლების ამოცანის მოცემული $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფორმულით (იხ. (83,20), (83,21))

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^+, \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)}, & \text{როცა } z \in S^-, \end{cases} \tag{93,19}$$

სადაც ამჯერად

$$\Gamma(z) = \frac{z+i}{2\pi i}\int_D \frac{\ln G_0(t)\, dt}{(t+i)(t-z)} + \gamma = \frac{z+i}{2\pi i}\int_D \frac{\Theta(t)\, dt}{(t+i)(t-z)} + \gamma,$$

$$G_0(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} G(t) = -\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}, \tag{93,20}$$

$$\Theta(t) = \arg G_0(t) = \arg\left\{-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right\}. \tag{93,21}$$

ამასთან, უკანასკნელ ფორმულაში არგუმენტი უნდა შეირჩეს § 83-ის მე-3 პუნქტში მიღებული პირობის მიხედვით, განსახილავი კლასის ამონახსნების შესაბამისად. γ-თ აღნიშნულია ჯერჯერობით ნებისმიერი მუდმივი, რომელიც შემდგომი ფორმულების რამდენადმე გასამარტივებლად შემოვიტანეთ. სახელდობრ, ამ მუდმივს ისე ავარჩევთ, რომ $\overline{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$. ამისათვის, როგორც ადვილი შესამჩნევია, საკმარისია ავიღოთ

$$\gamma = -\frac{i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{1+t^2},$$

ასე რომ, საბოლოოდ

$$\Gamma(z)=\frac{z+i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{(t+i)(t-z)}-\frac{i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)dt}{1+t^2}=\frac{1}{4\pi}\int_D\left[\frac{z+i}{t+i}+\frac{z-i}{t-i}\right]\frac{\Theta(t)dt}{t-z}. \tag{93,22}$$

$\Gamma(z)$-ის არჩევა, ისევე როგორც უწყვეტი კოეფიციენტის შემთხვევაში (იხ. § 42), გვაძლევს

$$\overline{X}(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa} X(z). \tag{93.23}$$

რიმან—ჰილბერტის ერთგვაროვანი ამოცანის მოცემული კლასის ზოგადი ამონახსნი მაშინ, როცა $\varkappa \geqslant 0$, განისაზღვრება ფორმულით

$$\Phi(z)=X(z)\left\{C_0+C_1\frac{z-i}{z+i}+\cdots+C_\varkappa\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa}\right\},$$

სადაც $C_0,\ldots,C_\varkappa$ მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\overline{C}_k=C_{\varkappa-k}, \tag{93,24}$$

სხვა მხრივ კი ნებისმიერნი არიან. როცა $\varkappa \leqslant -1$, მაშინ ერთგვაროვან ამოცანას მოცემული კლასის ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები არ გააჩნია.

როცა $\varkappa \geqslant -1$, რიმან—ჰილბერტის არაერთგვაროვანი ამოცანა მოცემულ კლასში ამოხსნადია ნებისმიერი $c(t)$ მარჯვენა მხარისათვის, კერძოდ, როცა $\varkappa=-1$ იგი ცალსახად ამოხსნადია, თუ $\varkappa \leqslant -2$, მაშინ ამ ამოცანას აქვს მოცემული კლასის (ერთადერთი) ამონახსნი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია (86,24) პირობებიდან ზოგიერთი მარტივი გარდაქმნებით გამომდინარე შემდეგი პირობები:

$$\left.\begin{aligned}&\int_D \Omega(t)\,c(t)\cos 2k\vartheta\,dt=0, \quad k=0,\,1,\ldots,-\frac{\varkappa}{2}-1\\&\int_D \Omega(t)\,c(t)\sin 2k\vartheta\,dt=0, \quad k=1,\,2,\ldots,-\frac{\varkappa}{2}-1\end{aligned}\right\} \tag{93,25}$$

ლუწი $\varkappa$-სათვის და

$$\left.\begin{aligned}&\int_D \Omega(t)\,c(t)\cos(2k+1)\vartheta\,dt=0\\&\int_D \Omega(t)\,c(t)\sin(2k+1)\vartheta\,dt=0\end{aligned}\quad k=0,\,1,\ldots,-\frac{\varkappa+1}{2}-1\right\} \tag{93,26}$$

კენტი $\varkappa$-სათვის; ამ ფორმულებში $\vartheta=\arg(t+i)=-\arg(t-i)$, ხოლო $\Omega(t)$ აღნიშნავს ნამდვილ ფუნქციას

$$\Omega(t)=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}\,(1+t^2)}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int\limits_D\left[\frac{t+i}{t_1+i}-\frac{t-i}{t_1-i}\right]\frac{\Theta(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right\}. \tag{93,27}$$

უკანასკნელ ფორმულაში ფესვის წინ ნიშნის არჩევის შესახებ იხ. წინა პარაგრაფში (93,14) ფორმულის შემდეგ მოყვანილი მსჯელობა.

შეუღლების არაერთგვაროვანი ამოცანის ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება განსახილავ რიმან—ჰილბერტის ამოცანას, განისაზღვრება ფორმულით (იხ. 83,22)

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_D\frac{z+i}{t+i}\,\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}, \tag{93,28}$$

როცა $\varkappa=-1$, ეს ამონახსნი იქნება აგრეთვე რიმან—ჰილბერტის მოცემული კლასის (ერთადერთი) ამონახსნი. იმ შემთხვევაში, როცა $\varkappa\geqslant 0$, რიმან—ჰილბერტის ამოცანის ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი იქნება

$$\frac{1}{2}\,[\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)],$$

ზოგადი ამონახსნი კი მიიღება ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნის დამატებით.

როცა $\varkappa\leqslant-2$, რიმან—ჰილბერტის ამოცანის (ერთადერთი) ამონახსნი მოიცემა (93,28) ფორმულით იმ პირობით, თუ დაცულია (93.25) ან (93,26) აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

შენიშვნა. თუ უსასრულოდ დაშორებული წერტილი წყვეტის წერტილს არ წარმოადგენს, მაშინ ზემოთ მოყვანილი ფორმულები შეიძლება გამარტივდეს იმის მსგავსად, როგორც ეს მითითებული იყო § 83-ის ბოლოში. ანალოგიურად მოვიქცევით იმ შემთხვევაშიც, როცა $G(-\infty)=G(+\infty)$, მაგრამ $g(-\infty)\neq g(+\infty)$.

§ 94. კერძო შემთხვევა: ჰარმონიულ ფუნქციათა თეორიის შერეული ამოცანა. ვთქვათ, ლიაპუნოვის შეკრულ L კონტურზე მოცემულია ერთმანეთისაგან განცალკევებით მდებარე $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_pb_p$ რკალები ($a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ წერტილები ერთმანეთს მისდევენ L-ზე დადებით მიმართულებით) და ვთქვათ ვეძებთ S^+-ში ჰოლომორფულ $\Phi(z)=u+iv$ ფუნქციას სასაზღვრო პირობებით

$$u^+=f(t)\quad L'\text{-ზე},\qquad v^+=g(t)\quad L''\text{-ზე}, \tag{94,1}$$

სადაც $f(t)$, $g(t)$ სათანადოდ L' და L'' მოცემული H კლასის ფუნქციებია. ამასთან, L' აღნიშნავს $a_jb_j\,(j=1,\ldots,p)$ რკალების ერთობლიობას, ხოლო L''—L-ის დარჩენილ ნაწილს, ე. ი. b_ja_{j+1} $(j=1, 2,\ldots,p)$ რკალების ერთობლიობას; a_{p+1}-ის ქვეშ ვგულისხმობთ a_1-ს; ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, ვგულისხმობთ, რომ $\Phi(z)$ უწყვეტად გაგრძელებადია ყველგან L-ზე, გარდა, შესაძლებელია, a_j, b_j წერტილებისა, რომელთა მახლობლობაშიც შესაბამისად

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-a_j|^{\alpha}},\qquad |\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-b_j|^{\alpha}},\quad \alpha=\text{const}<1. \tag{94,2}$$

ეს ამოცანა ზემოთ განხილული

$$a(t)\,u^+ + b(t)\,v^+ = c(t) \tag{94.3}$$

ამოცანის კერძო შემთხვევაა, თუ ჩავთვლით, რომ:

$$\begin{aligned} &a(t)=1, \quad b(t)=0, \qquad c(t)=f(t) \quad L'\text{-ზე},\\ &a(t)=0, \quad b(t)=-1, \quad c(t)=g(t) \quad L''\text{-ზე}. \end{aligned} \tag{94,4}$$

კონფორმული გადასახვით ეს ამოცანა, წინა პარაგრაფის ანალოგიურად, შეიძლება მივიყვანოთ წრის შემთხვევაზე. ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ L $|z|=1$ წრეწირია, ხოლო S^+ — $|z|<1$ წრე.

წინა პარაგრაფში მითითებული ზოგადი მეთოდის თანახმად, უპირველეს ყოვლისა, უნდა მოვძებნოთ ერთგვაროვანი შეუღლების ამოცანის

$$(a+ib)\,\Phi^+ + (a-ib)\,\Phi^- = 0 \quad L\text{-ზე}$$

მოცემული კლასის ისეთი კანონიკური $X(z)$ ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს დამატებით

$$X_*(z) = z^{\varkappa} X(z) \tag{94,5}$$

პირობას.

ჩვენს შემთხვევაში ამ უკანასკნელ ამოცანას აქვს სახე

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) + \Phi^-(t) &= 0 \quad L'\text{-ზე},\\ \Phi^+(t) - \Phi^-(t) &= 0 \quad L''\text{-ზე}. \end{aligned} \tag{94,6}$$

(94,6)-ის მეორე პირობა უჩვენებს, რომ L'' $\Phi(z)$ ფუნქციისათვის ნახტომების წირს არ წარმოადგენს, ამიტომ წინა ამოცანა მიიყვანება ისეთი უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქციის განსაზღვრის ამოცანაზე, რომლისთვისაც $L' = a_1b_1 + \cdots + a_pb_p$ ნახტომის წირია და აკმაყოფილებს (94,6) პირობებიდან პირველს, ე. ი. მიიყვანება

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0, \quad t \in L', \tag{94,7}$$

ამოცანაზე.

ეს ამოცანა უკვე ამოხსნილია ჩვენ მიერ § 85-ში.

გარკვეულობისათვის მოვძებნოთ ყველაზე ფართო, h_0 კლასის ამონახსნი. (94,7) ამოცანის შესაბამისი კანონიკური ამონახსნი არის

$$X(z) = \frac{C}{\sqrt{R(z)}},$$

სადაც C ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მუდმივაა, ხოლო

$$R(z) = \prod_{j=1}^{p} (z-a_j)\,(z-b_j); \tag{94,8}$$

§ 85-ში მიღებული პირობის თანახმად, ჩავთვლით, რომ დიდი $|z|$-ებისათვის

$$\sqrt{R(z)} = z^p + \alpha_1 z^{p-1} + \cdots \tag{94,9}$$

ამის შესაბამისად

$$\sqrt{R(0)} = \left\{ \prod_{j=1}^{p} a_j b_j \right\}^{1/2} \tag{94,10}$$

გამოსახულების ქვეშ გვესმის $\sqrt{R(z)}$-ის მითითებული შტოს მნიშვნელობა, როცა $z=0$. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\bar{a}_j=a_j^{-1}$, $\bar{b}_j=b_j^{-1}$, გვექნება:

$$R_*(z) = \overline{R}\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a_j}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b_j}\right) = \frac{R(z)}{z^{2p}R(0)},$$

სადაც ფესვები ზემოთქმულის აზრით გვესმის და, მაშასადამე,

$$X_*(z) = \frac{\overline{C}}{[R(z)]_*} = \frac{\overline{C}\sqrt{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}z^p = \frac{\overline{C}}{C}\sqrt{R(0)}\,z^p X(z). \tag{94,11}$$

რადგანაც ჩვენს შემთხვევაში ინდექსი

$$\varkappa = \varkappa_0 = p$$

(ვინაიდან როგორც ვიცით, $X(z)$-ის რიგი უსასრულობაში ტოლია $-\varkappa$-სი), ამიტომ (94,5) ტოლობა შესრულდება, თუ ჩავთვლით, რომ

$$\frac{\overline{C}}{C}\sqrt{R(0)} = 1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sqrt{R(0)} = \left\{\prod_{j=1}^{p} a_j b_j\right\}^{1/2} = e^{i\alpha}, \tag{94,13}$$

სადაც α ნამდვილი რიცხვია. მაშინ, ცხადია, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$C = e^{\frac{i\alpha}{2}}\sqrt{R(0)}. \tag{94,14}$$

ამგვარად, (94,7) შეუღლების ამოცანის ისეთი კანონიკური ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (94,5) პირობას, მოიცემა ფორმულით

$$X(z) = \frac{\sqrt{R(0)}}{\sqrt{R(z)}} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{R(z)}}; \tag{94,15}$$

ეს ფუნქცია ამავე დროს (94,6) ერთგვაროვანი შეუღლების ამოცანის მოთხოვნილი სახის კანონიკურ ამონახსნს წარმოადგენს.

ამგვარად, წინა პარაგრაფში ნათქვამის საფუძველზე, (94,1)-დან (როცა $f(t)=0$, $g(t)=0$) მიღებული ერთგვაროვანი შერეული ამოცანის h_0 კლასის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi_0(z) = \frac{\sqrt{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}(C_0 z^p + C_1 z^{p-1} + \cdots + C_p), \tag{94,16}$$

სადაც $C_0, C_1, \ldots, C_p$ (საზოგადოდ კომპლექსური) მუდმივებია, დაკავშირებული პირობებით

$$C_{p-j} = \overline{C}_j, \quad j=0,\ 1, \ldots, p, \qquad (94,17)$$

სხვა მხრივ კი ეს მუდმივები ნებისმიერია.

რაკი გვაქვს $X(z)$ ფუნქცია და (94,16) ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი, წინა პარაგრაფის (93,15) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ გამოსავალი არაერთგვაროვანი ამოცანის h_0 კლასის ზოგადი ამონახსნი, სახელდობრ, აღნიშნული ფორმულა გვაძლევს არაერთგვაროვანი ამოცანის რომელიმე კერძო ამონახსნს; ამ უკანასკნელს თუ მივუმატებთ (94,16) ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგად ამონახსნს გამოსავალი ამოცანის h_0 კლასის ზოგად ამონახსნს მივიღებთ.

ზოგადი ამონახსნის უფრო მარტივი გამოსახულების მისაღებად საკმარისია კერძო ამონახსნად მივიღოთ ერთ-ერთი იმ კლასის ამონახსნი, რომელსაც შეესაბამება ნულოვანი ინდექსი.

ასეთ კლასად გამოდგება, მაგალითად, $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ კლასი, ე. ი. იმ ამოხსნების კლასი, რომელიც შემოსაზღვრულია $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ბოლოებში და შეიძლება შემოუსაზღვრელი იყოს $b_1, \ldots, b_p$ ბოლოებში. შეუღლების ერთგვაროვანი (94,7) ამოცანის შესაბამისი კანონიკური ამონახსნი ცხადია იქნება

$$Z(z) = C\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}},$$

სადაც

$$R_a(z) = \prod_{j=1}^{p} (z-a_j), \quad R_b(z) = \prod_{j=1}^{p} (z-b_j). \qquad (94,18)$$

§ 85-ში მიღებული შეთანხმების თანახმად, ფესვად იგულისხმება ისეთი შტო, რომლისთვისაც

$$\left[\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}\right]_{z=\infty} = 1. \qquad (94,19)$$

ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად დავუშვათ, რომ

$$\sqrt{\frac{R_a(0)}{R_b(0)}} = \left\{\prod_{j=1}^{p} \frac{a_j}{b_j}\right\}^{1/2} = e^{i\beta} \qquad (94,20)$$

და

$$C = e^{-\frac{i\beta}{2}} = \left\{\prod_{j=1}^{p} \frac{b_j}{a_j}\right\}^{1/4}.$$

მაშინ $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია

$$Z(z) = e^{-\frac{i\beta}{2}}\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}} \qquad (94,21)$$

დააკმაყოფილებს პირობას

$$Z_*(z) = Z(z).$$

ამის შესაბამისად, გამოსავალი არაერთგვაროვანი ამოცანის ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი, წინა პარაგრაფის (93,17) ფორმულის შესაბამისად, იქნება

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int\limits_L\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{h(t)dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int\limits_L\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{h(t)}{t}\,dt, \tag{94,22}$$

სადაც

$$h(t)=\begin{cases} f(t), & t\in L'\\ ig(t), & t\in L'',\end{cases} \tag{94,23}$$

ხოლო $\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}=\sqrt{\frac{R_b(t)}{R_a(t)}}$ არის $\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}=1:\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}$-ის მიერ მიღებული მნიშვნელობა L-ის მარცხენა მხარიდან (ე. ი. L-ის შიგნიდან).

გამოსავალი ამოცანის h_0 კლასის ზოგად ამონახსნს მივიღებთ ფორმულით

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Phi_0(z), \tag{94,24}$$

$\Psi(z)$ მოიცემა (94,22) ფორმულით, ხოლო $\Phi_0(z)$ განისაზღვრება (94,16) და (94,17) ფორმულებით.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $h(a_1,\ldots,a_p)$ კლასის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z)=\Psi(z)+ce^{-\frac{i\beta}{z}}\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}, \tag{94,25}$$

სადაც c ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივაა.

§ 95. შერეული ამოცანა ნახევარსიბრტყისათვის. მ. კელდიშისა და ლ. სედოვის ფორმულები. ვთქვათ, ნამდვილ Ox ღერძზე მოცემულია ერთმანეთისაგან განცალკევებით მდებარე სასრული მონაკვეთები a_jb_j, $j=1, 2, \ldots, p$ (ნაგულისხმევია, რომ $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots$), D'-ით აღვნიშნოთ ამ მონაკვეთების ერთობლიობა, ხოლო D''-ით — ნამდვილი ღერძის დარჩენილი ნაწილი, ასე რომ, D'' შედგება სასრული b_ja_{j+1} მონაკვეთებისაგან $(j=1, 2, \ldots, p-1)$ და უსასრულო b_pa_1 „მონაკვეთისაგან", რომელსაც შეადგენს ორი ნახევარწრფე $b_p<x<\infty$ და $-\infty<x<a_1$. ჩვენს შემთხვევაში შერეულ ამოცანას ასე ჩამოვაყალიბებთ:

ვიპოვოთ ზედა ნახევარსიბრტყეში ჰოლომორფული, უსასრულობაში შემოსაზღვრული ფუნქცია შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$u^+=f(t)\ \ D'\text{-ზე და}\ \ v^+=g(t)\ \ D''\text{-ზე}; \tag{95,1}$$

ჩვენ ვთვლით, რომ D-ს ($D=D'+D''$-ით აღვნიშნავთ მთელ ნამდვილ ღერძს) მახლობლობაში საძებნი $\Phi(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ისეთივე პირობებს, როგორსაც წინა პარაგრაფში $\Phi(z)$ ფუნქცია, და რომ მოცემული $f(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს H პირობას შესაბამისად D' და D''-ში, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით (§ 19).

ამ ამოცანის ამონახსნი ერთბაშად შეიძლება მივიღოთ წინა პარაგრაფის ფორმულების მარტივი გარდაქმნებით წილად-წრფივი $z+i=-(k+i)^{-1}$ ჩასმის საშუალებით, რომლითაც ხშირად ვსარგებლობდით.

უფრო მარტივ შედეგს მივიღებთ რამდენადმე განსხვავებული ხერხით, რომელიც წინა პარაგრაფში გამოყენებული ხერხის ანალოგიურია. ამ ანალოგიის გამო მოკლე შენიშვნებით შემოვიფარგლებით[67].

ჩვენი ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას აქვს სახე

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0 \quad D'\text{-ზე}, \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0 \quad D''\text{-ზე}, \tag{95.2}$$

ამასთანავე მოითხოვება მოიძებნოს ისეთი ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\Phi}(z) = \Phi(z).$$

ამ ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნად, რომელიც ამავე დროს h_0 კლასის კანონიკური ამონახსნის როლსაც ასრულებს, ავიღებთ

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \tag{95,3}$$

ფუნქციას, სადაც

$$R(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)(z - b_j); \tag{95,4}$$

აქ $\sqrt{R(z)}$ არის D'-ზე გაჭრილ სიბრტყეში ის ჰოლომორფული შტო, რომელსაც $z = \infty$-ის მახლობლობაში აქვს სახე

$$\sqrt{R(z)} = z^p + \alpha_1 z^{p-1} + \cdots \tag{95,5}$$

ეს იმის ტოლფასია, რომ $\sqrt{R(z)}$ Ox-ზე იღებს დადებით მნიშვნელობებს, როცა $x > b_p$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $X_*(z) = \overline{X}(z) = X(z)$. მას კანონიკურ ამონახსნს არ ვუწოდებთ, ვინაიდან D-ს საზღვარზე აქვს 1-ზე მეტი რიგის ნული (როცა $z = \infty$); თუმცა იგი აქ სავსებით ისევე შეგვიძლია გამოვიყენოთ, როგორც კანონიკურ ამონახსნს ვიყენებდით. სახელდობრ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, ერთგვაროვანი ამოცანის h_0 კლასის ზოგადი ამონახსნი, რომელიც მიიღება (95,1)-დან, როცა $f(t) = g(t) = 0$, მოიცემა ფორმულით

$$\Phi_0(z) = \frac{c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + \cdots + c_p}{\sqrt{R(z)}}, \tag{95,6}$$

სადაც $c_0, \ldots, c_p$ ნებისმიერი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი მუდმივებია.

ახლა, როგორც წინა პარაგრაფში, ვიპოვოთ (95,2) ამოცანის $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ კლასის კანონიკური $X(z)$ ამონახსნი. ასეთი ამონახსნი, ცხადია, მუდმივი მამრავლის სიზუსტით იქნება ფუნქცია

$$Z(z) = \sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}, \tag{95,7}$$

სადაც

$$R_a(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j), \quad R_b(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - b_j), \tag{95,8}$$

---

67 შეადარეთ აგრეთვე თ. გახოკის მიერ მოცემულ რამდენადმე ნაკლებად ზოგადი ამოცანის ამოხსნას [3], [4].

ხოლო $\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}} = \frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}$ ფუნქციად ნაგულისხმევია D'-ზე გაჭრილ სიბრტყეში ჰოლომორფული შტო, რომელიც უსასრულობაში ერთის ტოლ მნიშვნელობას იღებს. ამ შემთხვევაში $Z_*(z) = \overline{Z}(z) = Z(z)$.

(95,1) ამოცანის ერთ-ერთი კერძო $\Psi(z)$ ამონახსნი მოიცემა ფორმულით (შდრ. (42,19))

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}} \int\limits_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}} \frac{h(t)\,dt}{t-z}, \tag{95,9}$$

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & D'\text{-ზე} \\ ig(t) & D''\text{-ზე}, \end{cases} \tag{95,10}$$

ხოლო $\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}$ ფუნქციად მიღებულია $\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}$-ის მიერ მიღებული მნიშვნელობები, როცა $z \to t$ ზედა ნახევარსიბრტყიდან. თავის მხრივ $\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}$-ად მიღებულია $\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}$ სიდიდის შებრუნებული მნიშვნელობა.

ამგვარად, (95,1) ამოცანის h_0 კლასის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \Phi_0(z), \tag{95,11}$$

სადაც $\Phi_0(z)$ და $\Psi(z)$ (95.6) და (95,9) ფორმულებით განისაზღვრება.

ამავე ამოცანის $h(a_1, \ldots, a_p)$ კლასის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z) = \Psi(z) + c\,\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}},$$

სადაც c ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივაა.

ამ პარაგრაფში მიღებული ფორმულები მ. კელდიშისა და ლ. სედოვის[58] ფორმულებს წარმოადგენს.

[58] მ. კელდიში და ლ. სედოვი [1]; ლ. სედოვი [1]; შდრ. აგრეთვე A. Signorini [1].

თავი მეხუთე

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი ზოგად შემთხვევაში. ზოგიერთი გამოყენება

ამ თავის I კარში გადმოცემულია კოშის ტიპის ინტეგრალებიანი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ინტეგრების გზა ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია, ხოლო შესაბამის მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტებს (იხ. § 96) შეიძლება ჰქონდეს წყვეტა, მაგრამ H_0 კლასს მაინც უნდა ეკუთვნოდეს. ამ შემთხვევას პირობითად ზოგადს ვუწოდებთ.

ეს თეორია ისეთი სახით, როგორც აქ არის ჩამოყალიბებული, მოცემულია ავტორის სტატიაში [6] და არსებითად შევსებულია ნ. მუსხელიშვილის და დ. კვესელავას სტატიაში [1]. ბოლო სტატიაში პირველადაა შემოტანილი ამონახსნთა მიკავშირებული კლასების ცნება და დამტკიცებულია § 102-ში მოყვანილი ძირითადი თეორემები.

საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ ჩამოთვლილ შრომებში თეორია ჩამოყალიბებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა ინტეგრების გზა ნაწყვეტი გლუვი წირია[1], მაგრამ ზემოთ დასახელებული სტატიების შედარება ქვემოთ ჩამოყალიბებულ დებულებებთან მოწმობს[2], რომ უკლებლივ ყველა შედეგი და აგრეთვე მათი მტკიცებანი თითქმის სიტყვა-სიტყვით გადაიტანება ჩვენთვის აქ საინტერესო ზოგად შემთხვევაზე; ძირითადი განსხვავება მხოლოდ ის არის, რომ § 22-ში მოყვანილი დებულებების ნაცვლად ვსარგებლობთ § 26-ში მოყვანილი უფრო ზოგადი დებულებებით.

ავტორის ზემოთ დასახელებულ სტატიაში [6] მოყვანილი შედეგების განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, როცა ინტეგრების წირი არის ერთობლიობა შეკრული და გახსნილი კონტურებისა, რომლებსაც შეიძლება ჰქონდეთ საერთო წერტილების სასრული რიცხვი, მოცემულია სტატიაში W. J. Trjitzinsky [1].

შემდგომში დ. კვესელავამ [7] მნიშვნელოვნად გაამარტივა ამ ავტორის შედეგები და აღნიშნული შემთხვევისათვის განაზოგადა აგრეთვე ნ. მუსხელიშვილის და დ. კვესელავას [1] სტატიის შედეგები.

ქვემოთ ჩამოყალიბებული შედეგები უფრო ზოგადია, ვიდრე დასახელებულ ავტორთა შედეგები და მე მგონია, უფრო ბუნებრივი და პირდაპირი გზით არის მიღებული. ეს ეხება ძირითადად შეუღლების ამოცანის ამოხსნას ზოგადი შემთხვევისათვის (IV თავი, I კარი), რომელსაც არსებითად ეყრდნობა ქვემოთ ჩამოყალიბებული თეორია.

II კარში მოცემულია I კარში გადმოცემული თეორიის ზოგიერთი მარტივი გამოყენება. III კარში განიხილება ერთი სახის სინგულარული ინტეგრალური განტო-

---

[1] სხვა კერძო შემთხვევის შესახებ, როცა ინტეგრების წირი არის ერთობლიობა გლუვი შეკრული კონტურებისა, რომლებსაც არ გააჩნიათ საერთო წერტილები, მაგრამ მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტებს აქვს წყვეტა (პირველი გვარის), ნათქვამი იქნება § 103, პ. 2°.

[2] მათი შინაარსი გადმოცემულია ამ წიგნის პირველ გამოცემაში.

ლება, რომელიც განსხვავდება ადრე განხილულისაგან, ხოლო IV კარში მოცემულია მისი გამოყენება დრეკადობის თეორიის ორ მნიშვნელოვან შერეულ ამოცანაში, დაბოლოს, V კარში მოგვყავს მოკლე ცნობები ზოგიერთი სხვა შედეგებისა და განზოგადებების შესახებ.

I. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი ზოგად შემთხვევაში

§ 96. განსაზღვრებები, აღნიშვნები და ტერმინები. 1°. მთელ ამ კარში, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება აღნიშნული, L აღნიშნავს უბან-უბან გლუვ წირს (§ 1). L წირის შემადგენელი გლუვი რკალები აღინიშნება L_k-თ, $k=1,2,\ldots,p$, ხოლო L წირის კვანძები — (მათ შორის ბოლოებიც) c_k-თი, $k=1,2,\ldots,p$. t_0, t_1, $t_2\ldots$ აღნიშნავს L წირის წერტილებს.

2°. ამ კარში შევისწავლით $\mathbf{K}\varphi=f$ სახის განტოლებებს, სადაც $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{K(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{I}$$

ფორმულით განსაზღვრული ოპერატორია. აქ $A(t)$ და $K(t_0,\ t)$ აღნიშნავს ფუნქციებს, რომლებიც ექვემდებარებიან ქვემოთ მითითებულ გარკვეულ პირობებს.

სახელდობრ, იმისათვის, რომ საშუალება გვქონდეს გარკვეული გართულების გარეშე გამოვიყენოთ II თავში გამოყენებული მეთოდების ანალოგიური მეთოდები, ჩავთვალოთ, რომ $\mathbf{K}$ ოპერატორი წარმოიდგინება ერთ-ერთი სახით შემდეგი ორიდან:

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}k(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt \tag{a}$$

ან

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{B(t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}k'(t_0,t)\varphi(t)\,dt, \tag{b}$$

სადაც $A(t)$, $B(t)$, $k(t_0,\ t)$, $k'(t_0,\ t)$ H_0 კლასის ფუნქციებია L-ზე; ბოლო ორ ფუნქციაზე დადებული პირობების მნიშვნელოვნად შესუსტება შეიძლება ისე, რომ შედეგი არ შეიცვალოს, მაგრამ ამაზე აღარ შევჩერდებით.

$\mathbf{K}$ ოპერატორის (I) ფორმულით წარმოდგენიდან შეგვეიძლია გადავიდეთ (a) ან (b) ფორმულაზე, თუ დავუშვებთ, რომ

$$B(t)=K(t,\ t),$$

$$k(t_0,\ t)=\frac{K(t_0,\ t)-B(t_0)}{t-t_0},\qquad k'(t_0\ t)=\frac{K(t_0,\ t)-B(t)}{t-t_0},$$

და მოვითხოვთ, რომ ფუნქციები $B(t)$, $k(t_0,\ t)$ ან $k'(t_0,\ t)$ აკმაყოფილებდეს ზემოთ მითითებულ პირობებს.

კერძოდ, თუ ორივე ფუნქცია $k(t_0, t)$ და $k'(t_0, t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს (ორივე ცვლადის მიმართ), მაშინ (I) ოპერატორი შეიძლება მივიყვანოთ როგორც (*a*), ისე (*b*) სახემდე, მაგრამ ამ დაშვებას არ გავაკეთებთ. რადგან მას არავითარი არსებითი გამარტივება არ შემოაქვს და მხოლოდ ამცირებს ზოგადობას.

ამრიგად, ჩვენს დაშვებებში (*a*) და (*b*) ტიპის ოპერატორები, საზოგადოდ, ერთმანეთზე არ დაიყვანება. მაგალითად, თუ შევეცდებით (*b*) ტიპის დაყვანას (*a*) სახემდე იმავე გზით, რომლითაც მივიყვანეთ (I) ტიპის ოპერატორი (*a*)-მდე, მივიღებთ

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k'(t_0, t)\varphi(t)\,dt =$$

$$= A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \left\{\frac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0} + k'(t_0, t)\right\}\varphi(t)\,dt;$$

მაგრამ $\dfrac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0}$ შეფარდებას c_k კვანძის მიდამოში, საზოგადოდ, $(t-t_0)^{-1}$ სახის განსაკუთრებულობა აქვს, როდესაც t_0 და t c_k კვანძში შემავალ სხვადასხვა L_j რკალზე მდებარეობს.

3°. შემდეგში ყოველთვის სინგულარული ოპერატორების ქვეშ ვგულისხმობთ (*a*) ან (*b*) სახის ოპერატორებიდან ერთ-ერთს, ე. ი. **K**, **K′** ოპერატორებს, განსაზღვრულს ფორმულებით

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt \qquad (96,1)$$

და

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t, t_0)\psi(t)\,dt, \quad (96,2)$$

სადაც $A(t)$, $B(t)$, $k(t, t_0)$ ეკუთვნის H_0 კლასს L-ზე.

ჩვენ აქ მეორე ოპერატორი, ანუ (*b*) სახის ოპერატორი, ცოტა სხვა სახით ჩავწერეთ, ვიდრე ზემოთ, ამ შეცვლის მიზეზს ახლავე ვაჩვენებთ.

(96,1) და (96,2) ოპერატორებს ურთიერთმიკავშირებულს ვუწოდებთ. ამ შემთხვევაში შენარჩუნებულია (I) სახის ოპერატორის მიკავშირებული ოპერატორის § 46-ში მოცემული განსაზღვრა. აქაც, ისევე როგორც მეორე თავში, მიკავშირებული ოპერატორები და მათი შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი ერთიმეორესთან მჭიდროდ არიან დაკავშირებული. აღნიშვნები და ტერმინები რომ არ გავამრავლოთ, (*b*) სახის ოპერატორები შევისწავლოთ არა დამოუკიდებლად, არამედ როგორც (*a*) სახის ოპერატორის მიკავშირებული. ეს, რა თქმა უნდა, სრულებით არ ზღუდავს ზოგადობას და უფრო მიზანშეწონილი იქნება, რადგან მიკავშირებული ოპერატორების ერთდროული განხილვა გარდაუვალი ხდება.

4°. ჩვენ ვიტყვით, რომ **K** და **K′** ოპერატორები ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი ტ ი პ ი ს ა ა, თუ

$$A(t) + B(t) \neq 0, \qquad A(t) - B(t) \neq 0 \qquad (96,3)$$

ყველგან L-ზე; როდესაც $t=c_j$ ამ უტოლობის ქვეშ, როგორც ყოველთვის, იგულისხმება, რომ შესაბამისი გამოსახულებების ზღვარი განსხვავდება ნულისაგან, როდესაც $t\to c_j$ ნებისმიერი იმ L_k რკალის გასწვრივ, რომელთა ბოლოა c_j. შემდეგში ყოველთვის ჩავთვლით, რომ განსახილველი ოპერატორები ნორმალური ტიპისაა.

$$5^\circ.\quad \mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{96,4}$$

ფორმულით განსაზღვრულ ოპერატორს ვუწოდებთ $\mathbf{K}$ ოპერატორის მახასიათებელ ნაწილს, ხოლო $A(t)$, $B(t)$ — მახასიათებელი ნაწილის კოეფიციენტებს.

თუ აღვნიშნავთ $\mathbf{K}$-თი ფრედჰოლმის პირველი გვარის ოპერატორს

$$\mathbf{k}\,\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{96,5}$$

მაშინ $\mathbf{K}$ ოპერატორი წარმოიდგინება $\mathbf{K}^0$ და $\mathbf{k}$ ოპერატორების ჯამის სახით, ე. ი.

$$\mathbf{K}\varphi=\mathbf{K}^0\varphi+\mathbf{k}\,\varphi. \tag{96,6}$$

$\mathbf{K}^0$ ოპერატორის მიკავშირებული ოპერატორი იქნება $\mathbf{K}^{0\prime}$, განსაზღვრული ფორმულით

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{96,7}$$

ამის შესაბამისად,

$$\mathbf{K}'\psi=\mathbf{K}^{0\prime}\psi+\mathbf{k}'\psi, \tag{96,8}$$

სადაც $\mathbf{k}'$ $\mathbf{k}$ ოპერატორის მიკავშირებული ფრედჰოლმის პირველი გვარის ოპერატორია

$$\mathbf{k}'\psi\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt. \tag{96,9}$$

6°. $\mathbf{K}$ და $\mathbf{K}'$ ოპერატორებით ვიმოქმედებთ L-ზე მოცემული H^* კლასის ფუნქციებზე. § 26-ის შედეგების საფუძველზე ადვილად ჩანს, რომ ამ ოპერატორებს H^* კლასის ფუნქციები გადაჰყავს იმავე კლასის ფუნქციებში. კერძოდ, ამ ოპერატორებს H_0 კლასის ფუნქციები გადაჰყავს H_ε^* კლასის ფუნქციებში, ხოლო H_ε^* კლასისა — იმავე კლასის ფუნქციებში.

7°. § 46-ში გავეცანით მნიშვნელოვან ფორმულას

$$\int\limits_L\psi\,\mathbf{K}\varphi\,dt=\int\limits_L\varphi\mathbf{K}'\psi\,dt, \tag{96,10}$$

სადაც L წარმოადგენს გლუვი შეკრული კონტურების ერთობლიობას, ხოლო φ, ψ H კლასის ნებისმიერი ფუნქციებია.

ადვილად ჩანს, რომ ეს ფორმულა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია. მაგრამ ჩვენ ამ ფორმულის გამოყენება მოგვიხდება უფრო ფართო კლასის φ, ψ ფუნქციებისათვის, სახელდობრ, H^* კლასის ფუნქციებისათვის. თუ φ და ψ H^* კლასის ნებისმიერი ფუნქციებია, მაშინ (96,10) ფორმულაში ინტეგრალები შეიძლება განშლადი აღმოჩნდეს. მაგრამ შემდეგში (96,10) ფორმულას მხოლოდ იმ შემთხვევაში გამოვიყენებთ, როდესაც ყოველი კვანძის მიდამოში φ, ψ ფუნქციებიდან ერთ-ერთი ეკუთვნის H_ε^* კლასს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ შემთხვევაში (96, 10) ფორმულა ძალაში რჩება.

8°. შემდეგი ორი სახის განტოლებას:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \quad (96,11)$$

და

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, t_0)\psi(t)dt = g(t_0), \quad (96,12)$$

სადაც $f(t)$ და $g(t)$-ს L-ზე მოცემული H^* კლასის ფუნქციებია, სინგულარულ-ინტეგრალურ. განტოლებებს ვუწოდებთ; ამ განტოლებების ამონახსნებს ყოველთვის H^* კლასში ვეძებთ.

შემდგომში აღარ მოვითხოვთ, რომ (96,11) ან (96,12) დაკმაყოფილდეს იმ წერტილებში, რომლებიც L წირის კვანძებს ემთხვევა.

ჩვენ ყოველთვის დავუშვებთ, რომ ეს განტოლებები ნორმალური ტიპისაა, ე. ი. $\mathbf{K}$ და $\mathbf{K}'$ ნორმალური ტიპის ოპერატორებია.

$\mathbf{K}\varphi = f$ და $\mathbf{K}'\psi = g$ განტოლებებს ვუწოდებთ მიკავშირებულებს, როგორიც არ უნდა იყოს მათი მარჯვენა f და g მხარეები.

$\mathbf{K}'\psi = g$ ტიპის განტოლებას ჩვეულებრივ დამოუკიდებლად კი არ განვიხილავთ (იხ. პ. 3), არამედ როგორც $\mathbf{K}\varphi = f$ განტოლების მიკავშირებულს მხოლოდ იმ მიზნით, რომ ტერმინები და აღნიშვნები არ გავამრავლოთ; ეს სრულებით არ გვზღუდავს.

9°. უმარტივესი სახის განტოლებას

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0) \quad (96,13)$$

მახასიათებელ განტოლებას ვუწოდებთ, ხოლო $A(t_0)$, $B(t_0)$ ფუნქციებს — მის კოეფიციენტებს.

ხოლო განტოლებას

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} = g(t_0) \quad (96,14)$$

მახასიათებელი განტოლების მიკავშირებულს ვუწოდებთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: L წირის კვანძებად ვგულისხმობთ არა მარტო კვანძებს გეომეტრიული აზრით, არამედ ამ წირის სხვა წერტილებსაც, რომლებშიც დასაშვებია განსახილველი ფუნქციების წყვეტა (იხ. § 78).

ჩვენ ვნახავთ, რომ მთავარ როლს ასრულებს $A(t)$, $B(t)$ ფუნქციების წყვეტის წერტილები და არა L წირის გეომეტრიული თვისებები (ე. ი. კუთხური წერტილები და სხვ.).

§ 97. მახასიათებელი განტოლების ამოხსნა. 1°. ისევე როგორც II თავში, დავიწყებთ მახასიათებელი განტოლების ამოხსნით

$$\mathbf{K}^0 \varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0). \tag{97,1}$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ჩავთვლით, რომ

$$A^2(t) - B^2(t) \neq 0 \text{ ყველგან } L\text{-ზე}. \tag{97,2}$$

გარდა ამისა, ჯერჯერობით ჩავთვალოთ, რომ $f(t)$ ე კ უ თ ვ ნ ი ს H_0 კ ლ ა ს ს; ხ ო ლ ო (97,1) გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს $\varphi(t)$ ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ს, როგორც შევთანხმდით, H^* კ ლ ა ს შ ი მ ო ვ ძ ე ბ ნ ი თ.

შემოვიყვანოთ განსახილველად უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{97,3}$$

მაშინ

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \quad \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0), \tag{97,4}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია უნდა იყოს უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი შეუღლების ამოცანისა

$$(A+B)\Phi^+ - (A-B)\Phi^- = f \tag{97,5}$$

ან

$$\Phi^+(t_0) = G(t_0)\Phi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{97,6}$$

სადაც

$$G(t_0) = \frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}. \tag{97,7}$$

ეს ამოცანა დაწვრილებით იყო შესწავლილი წინა თავში (I კარი).

ამ ამოცანის განსაკუთრებულ და არაგანსაკუთრებულ კვანძებს (§ 81) ახლა ვუწოდოთ $\mathbf{K}^0$ ო პ ე რ ა ტ ო რ ი ს ან $\mathbf{K}^0\varphi = f$ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ი გ ა ნ ს ა კ უ თ რ ე ბ უ ლ ი და ა რ ა გ ა ნ ს ა კ უ თ რ ე ბ უ ლ ი კ ვ ა ნ ძ ე ბ ი.

არაგანსაკუთრებულ კვანძებს წინანდებურად შემდეგშიც $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \leqslant n)$ აღვნიშნავთ.

(96,6) განტოლების ყველაზე ზოგადი ამონახსნი (H^* კლასის), რომელსაც უსასრულობაში აქვს სასრული რიგი, შეიძლება წარმოვადგინოთ, მაგალითად, შემდეგი სახით (§ 80, პუნქტი 4°):

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,ds}{[A(t)+B(t)]X^+(t)(t-z)}\,X_0(z)\,Q(z), \qquad (97,8)$$

სადაც $X(z)$ არის (97,6) ამოცანის რომელიმე $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია, $X_0(z)$ — ამავე ამოცანის h_0 კლასის კანონიკური ფუნქცია, ხოლო $Q(z)$ რაიმე პოლინომია.

ამოცანის $\Phi(z)$ ამონახსნი კიდევ უნდა აკმაყოფილებდეს $\Phi(\infty)=0$ პირობას; ამ პირობას ქვემოთ დავუბრუნდებით, ახლა კი გამოვიტანოთ ზოგიერთი დასკვნა იმ ფაქტიდან, რომ თუ არსებობს (97,1) განტოლების ამონახსნები, მაშინ ყველა ისინი აუცილებლად გვეძლევა ფორმულით $\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)$, რომელშიც $\Phi(z)$-ს აქვს (97,8) სახე.

გამოვითვალოთ $\varphi(t_0)$. ამ მიზნისათვის შემოვიყვანოთ აღნიშვნა

$$Z(t_0)=[A(t_0)+B(t_0)]X^+(t_0)=[A(t_0)-B(t_0)]X^-(t); \qquad (97,9)$$

ფუნქციები $X^+(t_0)$ და $X^-(t_0)$ განსაზღვრულია (78,13) ფორმულებით. $Z(t)$ ფუნქციას ვუწოდებთ $\mathbf{K}^0\varphi=f$ განტოლების ანუ $\mathbf{K}^0$ ოპერატორის შესაბამის, მოცემული $h(c_1, \dots, c_q)$ კლასის, კანონიკურ ფუნქციას. კერძოდ. $h_0=h(0)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია $Z_0(t)$, რომელიც შეესაბამება $q=0$ შემთხვევას, განისაზღვრება ფორმულებით

$$Z_0(t_0)=[A(t_0)+B(t_0)]\,X_0^+(t_0)=[A(t_0)-B(t_0)]\,X_0^-(t_0). \qquad (97,9a)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A^*(t_0)=\frac{A(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}, \qquad B^*(t_0)=\frac{B(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}. \qquad (97,10)$$

მაშინ, სოხოცკი—პლემელის ფორმულების გამოყენებით, ადვილად მივიღებთ (შდრ. § 47):

$$\varphi(t_0)=\mathbf{K}^*f+B^*(t_0)\,Z_0(t_0)\,P(t_0), \qquad (97,11)$$

სადაც

$$\mathbf{K}^*f\equiv A^*(t_0)f(t_0)-\frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,(t-t_0)}, \qquad (97,12)$$

ხოლო $P(t_0)$ აღნიშნავს პოლინომს.

(97,9) ტოლობის საფუძველზე $Z(t_0)$ ფუნქციის განსაზღვრისა და (78,13) და (78,14) ფორმულების ძალით ცხადია, რომ

$$Z(t_0)=\omega_0(t_0)\prod_{k=1}^{n}(t_0-c_k)^{\gamma_k}, \qquad (97,13)$$

სადაც $\omega_0(t_0)$ H_0 კლასის ნულისაგან განსხვავებული ფუნქციაა, ხოლო

$$0 < \operatorname{Re}\gamma_k < 1 \quad (k=1,2,\ldots,q); \quad -1 < \operatorname{Re}\gamma_k < 0 \quad (k=i+1,\ldots,m);$$
$$\operatorname{Re}\gamma_k = 0 \qquad (k=m+1,\ldots,n). \tag{97,14}$$

ასეთსავე ფორმულებს ადგილი აქვს $Z_0(t_0)$-თვის, ოღონდაც უნდა ჩავთვალოთ, რომ $q=0$.

2°. ნათქვამიდან გამომდინარე მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე:

ყველა განსაკუთრებული $c_k\ (k=m+1,\ldots,n)$ კვანძის მიდამოში $\varphi(t)$ ამონახსნი ეკუთვნის H_ε^* კლასს. გარდა ამისა, იგი შემოსაზღვრულია იმ განსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში, რომლისთვისაც $\gamma_k \neq 0$. იმ c_k კვანძების მიდამოში კი, რომლისათვისაც $\gamma_k=0$, იგი შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელი, როგორც $\ln(t-c_k)$. ყოველივე ეს § 26-ის შედეგებიდან გამომდინარეობს.

თუ რომელიმე არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში $\varphi(t)$ ამონახსნი შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი ამ მიდამოში ეკუთვნის H_0 კლასს.

მართლაც, დავუშვათ c_k არაგანსაკუთრებული კვანძია, რომლის მახლობლობაში $\varphi(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია. (97,11) და (97,12) ფორმულებში ავიღოთ ისეთი $Z(t)$ კანონიკური ფუნქცია, რომელიც ნული ხდება c_k-ში, მაშინ (97,11) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები c_k კვანძის მიდამოში H_0 კლასს ეკუთვნის (§ 26), ამიტომ $\varphi(t)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობისათვის აუცილებელია, რომ c_k იყოს $P(t_0)$ პოლინომის ფესვი, ამით ჩვენი დებულება ცხადი ხდება.

3°. ახლა განსახილველი $\mathrm{K}^0 f=\varphi$ ინტეგრალური განტოლების ყველა შესაძლო ამონახსნი დავყოთ კლასებად. ყველა $\varphi(t)$ ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია არაგანსაკუთრებულ $c_1, c_2, \ldots, c_q$ კვანძების მიდამოში, მივაკუთვნოთ $h(c_1,\ldots,c_q)$ კლასს, $0 \leqslant q \leqslant m$, ჩვენ ვნახეთ, რომ ასეთი ამონახსნები $c_1, \ldots, c_q$ კვანძების მიდამოში H_0 კლასს მიეკუთვნება. ამიტომ აქ მოცემულ ამონახსნთა კლასის განსაზღვრება ეთანხმება § 82-ში მიღებულ $\varphi(t)$ ფუნქციათა კლასის განსაზღვრებას. ადვილად ჩანს, რომ (97,1) ინტეგრალური განტოლების $h(c_1,\ldots,c_q)$ კლასის ამონახსნებს (97,3) ფორმულით შეესაბამება (97,6)[3] შეუღლების ამოცანის იმავე კლასის ამონახსნები. ამიტომ (97,1) განტოლების მოცემული კლასის ყველა ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია მოვძებნოთ (97,6) შეუღლების ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი (იმავე კლასის) ყველა ამონახსნი.

იქიდან გამომდინარე, რაც ვიცით შეუღლების ამ ამოცანის ამონახსნთა შესახებ (§ 80), ადვილად მივალთ შემდეგ დასკვნამდე.

$\mathrm{K}^0\varphi=f$ განტოლების ანუ K^0 ოპერატორის მოცემული $h(c_1\ c_2,\ldots,c_q)$ კლასის ინდექსი ვუწოდოთ (97,6) შეუღლების ამოცანის ამავე კლასის ინდექსს. თუ $h(c_1,\ldots,c_q)$ კლასის კანონიკურ ფუნქციას $Z(t)$-თი აღვნიშნავთ, გვექნება: როცა

[3] თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია მოცემული არაგანსაკუთრებული c კვანძის მიდამოში, და მაშასადამე, ეკუთვნის H_0 კლასს იმავე კვანძის მიდამოში, მაშინ (97,3) ფორმულით განსაზღვრული $\Phi(z)$ ფუნქცია c-ს მიდამოში თითქმის შემოსაზღვრული იქნება. მაშინ, როგორც ვიცით (§ 82), იგი აუცილებლად შემოსაზღვრული იქნება c წერტილის მიდამოში.

$\varkappa \geq 0$, მაშინ $K^0\varphi = f$ განტოლების $h = h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ყველა ამონახსნი მოიცემა იგივე

$$\varphi(t_0) = K^* f + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{97,15}$$

ფორმულით, სადაც $P_{\varkappa-1}(t_0)$ აღნიშნავს ნებისმიერ პოლინომს, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa-1$, რომელშიც $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$, როცა $\varkappa=0$.

როცა $\varkappa<0$, არსებობს ამონახსნი (ერთადერთი), თუ დაცულია (აუცილებელი და საკმარისი) პირობები

$$\int_L \frac{t^k f(t)\,dt}{Z(t)} = 0, \qquad k=0,1,\ldots,-\varkappa-1. \tag{97,16}$$

ზემოთ ნათქვამიდან აგრეთვე გამომდინარეობს შემდეგი: როცა $\varkappa \leq 0$ $K^0\varphi=0$ ერთგვაროვან განტოლებას არ გააჩნია h კლასის ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი; როდესაც $\varkappa>0$, მას აქვს h კლასის $\varkappa$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები, რომელთა ერთობლიობა გვეძლევა

$$\varphi(t) = B^*(t)\, Z(t)\, P_{\varkappa-1}(t) \tag{97,17}$$

ფორმულით, სადაც $P_{\varkappa-1}(t)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $(\varkappa-1)$.

ადვილი დასანახავია, რომ ზემოთ მიღებული შედეგები ძალაში რჩება, როდესაც $f(t)$, ნაცვლად იმისა, რომ H_0 კლასს ეკუთვნოდეს, ეკუთვნის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს. ოღონდ ამ შემთხვევაში ამონახსნები შესაძლოა არ იყოს შემოსაზღვრული ამ განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში, რომელთათვისაც $\gamma_k \neq 0$, თუ $f(t)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია ამ კვანძების მიდამოში.

შენიშვნა: განვიხილოთ განტოლება

$$K_1\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0), \tag{97,18}$$

რომელიც მიიღება (97,1)-დან, $B(t_0)$ შევცვალოთ $-B(t_0)$-ით. ეს განტოლება არ იქნება (97,1) განტოლების მიკავშირებული გარდა იმ შემთხვევისა, როცა $B(t_0)=\text{const}$ (მიკავშირებულ განტოლებას შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ). (97,18) განტოლების შესაბამისი შეუღლების ამოცანა მიიღება (97,6) ამოცანიდან. თუ $B(t_0)$-ს შევცვლით $-B(t_0)$-ით, მას აქვს სახე

$$\Psi^+(t_0) = [G(t_0)]^{-1}\,\Psi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \tag{97,19}$$

რადგანაც შეცვლის შედეგად $G(t)$ შეიცვალა $[G(t)]^{-1}$-ით.

შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანები, რომელიც (97,6) და (97,19) ამოცანებს შეესაბამება, მიკავშირებული არიან. ამიტომ, § 79-ში ნათქვამის საფუძველზე, თუ $X(z)$ და $\varkappa$ (97,6) ამოცანის h კლასის კანონიკური ფუნქცია და ინდექსია, მაშინ $[X(z)]^{-1}$ და $-\varkappa$ იქნება (97,18) ამოცანის შესაბამისი h კლასის შეუღლებული h' კლასის კანონიკური ფუნქცია და ინდექსი.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (97,9) ფორმულებს, რომლებიც განსაზღვრავენ (97,1) განტოლების შესაბამის კანონიკურ $Z(t)$ ფუნქციასა და ასეთივე ფორმულებს, რომლებიც (97,19) განტოლებისათვის არის შედგენილი, მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე.

ამ პარაგრაფის ყველა ფორმულა და შედეგი ძალაში რჩება, თუ $B(t)$, $Z(t)$, $\varkappa$, h-ს შესაბამისად შევცვლით $-B(t)$, $\dfrac{A^2-B^2}{Z(t)}$, $-\varkappa$, h'-ით, სადაც h' აღნიშნავს h-ის მიკავშირებულ კლასს.

§ 98. მახასიათებელი განტოლების მიკავშირებული განტოლების ამოხსნა. განვიხილოთ $\mathbf{K}^0\varphi=f$ განტოლების მიკავშირებული განტოლება

$$\mathbf{K}^0\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}=g(t_0). \tag{98,1}$$

ჩვენ ჩავთვლით, რომ $g(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს და ამონახსნს, როგორც ყოველთვის, მოვძებნით H^* კლასში.

შემოვიღოთ უბან-უბან ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}&B(t_0)\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0),\\&\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0),\end{aligned} \tag{98,2}$$

§ 48-ის ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ (98,1) განტოლების ამოხსნა შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის ეკვივალენტურია: მოიძებნოს H^* კლასის $\varphi(t)$ ფუნქცია და უბან-უბან ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი $\Psi(z)$ ფუნქცია შემდეგი პირობებით:

$$\begin{aligned}A(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)+g(t_0),\\B(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0).\end{aligned} \tag{98,3}$$

ეს უკანასკნელი, თავის მხრივ, ეკვივალენტურია შემდეგი პირობებისა:

$$(A+B)\psi=2\Psi^++g,\qquad (A-B)\psi=2\Psi^-+g,$$

ან კიდევ

$$\psi=\frac{2\Psi^+}{A+B}+\frac{g}{A+B},\qquad \psi=\frac{2\Psi^-}{A-B}+\frac{g}{A-B}. \tag{98,4}$$

მარჯვენა მხარეთა შედარებას მივყავართ წრფივი შეუღლების ამოცანამდე

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+\frac{B(t_0)\,g(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \tag{98,5}$$

სადაც, როგორც წინა პარაგრაფში,

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{98,6}$$

ამასთან, ვეძებთ უსასრულობაში ქრობად $\Psi(z)$ ამონახსნს. ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ (98,4)-ის ნებისმიერი ფორმულით $\psi(t)$-ს ვიპოვით.

შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0) \tag{98,7}$$

წარმოადგენს მიკავშირებულ ამოცანას ერთგვაროვანი ამოცანისა

$$\Phi^+(t_0)=G(t_0)\Phi^-(t_0), \tag{98,8}$$

რომელიც შეესაბამება წინა პარაგრაფის (97,6) ამოცანას (იხ. § 79; შეადარეთ აგრეთვე წინა პარაგრაფის შენიშვნას). ამიტომ, თუ $X(z)$ არის ამ ბოლო ამოცანის $h=h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ამონახსნი, მაშინ $[X(z)]^{-1}$ (98,7) ამოცანის მიკავშირებული $h'=h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ კლასის კანონიკური ამონახსნი იქნება. ეს გამომდინარეობს § 79-ში ნათქვამიდან. ამიტომ, როგორც ეს ადვილად ჩანს, (98,5) ამოცანის უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე ზოგადი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Psi(z)=\frac{[X(z)]^{-1}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{X^+(t)\,B(t)\,g(t)\,dt}{[A(t)-B(t)](t-z)}+[X_m(z)]^{-1}Q(z), \tag{98,9}$$

სადაც $Q(z)$ პოლინომია, ხოლო $X_m(z)$ აღნიშნავს (98,8) ერთგვაროვანი ამოცანის $h_m=h(c_1, \ldots, c_m)$ კლასის კანონიკურ ამონახსნს და, მაშასადამე, $[X_m(z)]^{-1}$ (98,7) ამოცანის h_0 კლასის კანონიკური ამონახსნი იქნება.

ჩვენ კიდევ უნდა გავითვალისწინოთ პირობა $\Psi(\infty)=0$. ამ პირობას ჯერჯერობით ყურადღებას ნუ მივაქცევთ და, წინა პარაგრაფის საკვებით ანალოგიურად, გამოვიყვანოთ ზოგიერთი შედეგი იმ ფაქტიდან, რომ (98,1) ინტეგრალური განტოლების ყველა ამონახსნი აუცილებლად გვეძლევა (98,4) ფორმულებით, სადაც $\Psi(z)$ აღნიშნავს (98,9) სახის გამოსახულებას. თუ გამოვთვლით $\psi(t_0)$ (98.4)-ის ერთ-ერთი ფორმულით, წინა პარაგრაფის გამოთვლების ანალოგიური მარტივი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ

$$\psi(t_0)=\mathrm{K}^{*\prime}g+\frac{P(t_0)}{Z_m(t_0)}, \tag{98,10}$$

სადაც $P(t)$ რაიმე პოლინომია, $Z_m(t_0)$ კი წინა პარაგრაფის (97,1) განტოლების შესაბამისი $h_m=h(c_1, \ldots, c_m)$ კლასის კანონიკური ფუნქციაა და

$$\mathrm{K}^{*\prime}g=\mathrm{A}^*(t_0)\,g(t_0)+\frac{1}{\pi i Z(t_0)}\int\limits_L \frac{Z(t)B^*(t)g(t)dt}{t-t_0}, \tag{98,11}$$

ასე რომ, $\mathrm{K}^{*\prime}$ ოპერატორი წინა პარაგრაფის K^* ოპერატორის მიკავშირებულია.

2°. $\mathrm{K}^{0\prime}$ ოპერატორის ან $\mathrm{K}^{0\prime}\psi=g$ განტოლების შესაბამის განსაკუთრებულ და არაგანსაკუთრებულ კვანძებს ვუწოდებთ (98,7) ამოცანის შესაბამის განსაკუთრებულ და არაგანსაკუთრებულ კვანძებს; ეს იგივეა, რაც ამ ამოცანასთან მიკავშირებული (98,8) ამოცანის ანუ K^0 ოპერატორის მიკავშირებული K^{0*} ოპერატორის განსაკუთრებული და არაგანსაკუთრებული კვანძები.

ადვილად ჩანს (შეადარეთ წინა პარაგრაფს), რომ ყველა განსაკუთრებული კვანძის მიდამოში ყოველი $\varphi(t)$ ამონახსნი ეკუთვნის H_ε^* კლასს; ის შემოსაზღვრულია იმ განსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში, რომელთათვისაც $\gamma_k \neq 0$ და შეიძლება როგორც $\ln(t-c_k)$ შემოუსაზღვრელი გახდეს იმ კვანძების მიდამოში, რომელთათვისაც $\gamma_k=0$.

ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, თუ ამონახსნი შემოსაზღვრულია რომელიმე არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში, მაშინ ის ამ კვანძის მიდამოში აუცილებლად ეკუთვნის H_0 კლასს.

3°. ზუსტად ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, (98,1) განტოლების ყველა შესაძლო ამონახსნი დავყოთ კლასებად.

(98,1) განტოლების ან $K^{0\prime}$ ოპერატორის მოცემული კლასის *ინდექსს* ვუწოდებთ (98,7) შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ერთსახელა კლასის შესაბამის ინდექსს.

თუ $X(z)$ არის (98,8) ამოცანის $h=h(c_1,\dots,c_q)$ კლასის კანონიკური ამონახსნი, მაშინ, როგორც იყო ნათქვამი, $[X(z)]^{-1}$ იქნება (98,7) ამოცანის $h'=h(c_{q+1},\dots,c_m)$ მიკავშირებული კლასის კანონიკური ამონახსნი. მაშასადამე, (97,1) და (98,1) მიკავშირებული განტოლებათა მიკავშირებული h და h' კლასების *ინდექსები* $\varkappa$ და $\varkappa'$ *სიდიდით ტოლი და საწინააღმდეგო ნიშნისა იქნება:*

$$\varkappa=-\varkappa'.$$

გადმოცემულის საფუძველზე ადვილად დავადგენთ შემდეგ დებულებებს:

თუ $\varkappa'=-\varkappa\geqslant 0$, *მაშინ* (98,1) *განტოლების* $h'=h(c_{q+1},\dots,c_m)$ *კლასის ყველა ამონახსნი მოიცემა ფორმულით*

$$\psi(t_0)=K^{*\prime}g+\frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \qquad (98,12)$$

სადაც $P_{\varkappa'-1}$ *პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება* $(\varkappa'-1)$-ს ($P_{\varkappa'-1}(t_0)\equiv 0$, *როცა* $\varkappa'=0$), *ხოლო* $Z(t_0)$ *არის* (97,1) *მიკავშირებული განტოლების შესაბამისი* h'-*ის მიკავშირებული* h *კლასის კანონიკური ფუნქცია.*

თუ $\varkappa'=-\varkappa<0$, *მაშინ* h' *კლასის ამონახსნი არსებობს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დაცულია პირობები*

$$\int_L Z(t)B^*(t)t^j g(t)\,dt=0, \qquad j=0,\ 1,\dots,-\varkappa'-1; \qquad (98,13)$$

ამ პირობების დაცვისას ამონახსნი (ერთადერთი) მოიცემა იმავე (98,12) *ფორმულით, რომელშიდაც* $P_{\varkappa'-1}=0$.

(98,12) ფორმულა ზუსტად ისევე მიიღება, როგორც მივიღეთ (98,10) ფორმულა; ოღონდ საჭიროა დამატებით გავითვალისწინოთ პირობა $\Psi(\infty)=0$, რომელიც სწორედ იმას გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი პოლინომის ხარისხი არ უნდა აღემატებოდეს $\varkappa'$-ს, და როდესაც $\varkappa'<0$, დაცული უნდა იყოს (98,13) პირობები.

ზემოთ ნათქვამიდან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ, თუ $\varkappa'\leqslant 0$, ერთგვაროვან განტოლებას $K^{0\prime}\varphi=0$ არ გააჩნია h' კლასის ნულისაგან განსხვავებული ამო-

ნახსნები, თუკი $\varkappa' > 0$ მას აქვს $\varkappa'$ რაოდენობის h' კლასის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომელთა ერთობლიობა გვეძლევა ფორმულით

$$\psi(t) = \frac{P_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)}. \qquad (98,14)$$

4°. თუ $g(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის h' კლასს (და არა აუცილებლად H_0 კლასს) წინა შედეგები ძალაში რჩება, ოღონდ ამ შემთხვევაში ამონახსნები შეიძლება შემოუსაზღვრელი იყოს იმ განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში, რომელთათვისაც $\gamma_n \neq 0$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $K^0\varphi = f$ და $K^{0\prime}\psi = g$ მიკავშირებული განტოლებების ამოხსნადობის პირობების შეპირისპირებით ადვილად მივალთ შემდეგ შედეგამდე: $K^0\varphi = f$ განტოლების ამოხსნადობისათვის მოცემულ h კლასში აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს პირობები

$$\int_L f\psi_j\,dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \varkappa',$$

სადაც $\varphi_j\,(j=1,\ldots,\varkappa')$ $K^{0\prime}\psi = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების h' კლასის ამონახსნთა წრფივად დამოუკიდებელ სრულ სისტემას წარმოადგენს. ანალოგიურად, $K^{0\prime}\psi = g$ განტოლების h' კლასში ამოხსნადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\int_L g\varphi_j\,dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \varkappa,$$

სადაც $\psi_j\,(j=1,\ldots,\varkappa)$ $K^0\varphi = 0$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლების h' კლასის მიკავშირებული h კლასის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა.

კიდევ შევნიშნოთ, რომ თუ k და k' აღნიშნავს $K^0\varphi = 0$ და $K^{0\prime}\varphi = 0$ ერთგვაროვანი განტოლებების h და h' კლასის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვს, მაშინ

$$k - k' = \varkappa,$$

სადაც $\varkappa$ K^0 ოპერატორის h კლასის ინდექსია.

ზემოთ მოყვანილი შედეგები წარმოადგენს კერძო შემთხვევებს იმ მნიშვნელოვანი თეორემების, რომლებიც იქნება დამტკიცებული § 102-ში.

§ 99. $K\varphi = f$ სინგულარული განტოლების რეგულარიზაცია. § 97-ში მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს $K\varphi = f$ სინგულარული ინტეგრალური განტოლება ადვილად მივიყვანოთ ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებაზე, მსგავსად იმისა, როგორც ეს გავაკეთეთ § 57-ში.

ამ პარაგრაფში ფრედჰოლმის განტოლებაზე დაყვანის ხერხი წარმოადგენს კარლემანის (T. Carleman [1][4]) მიერ დასახული იდეის განვითარებას, იმავე მიმარ-

[4] ამ სტატიაში ტ. კარლემანმა დასახა რეგულარიზაციის კიდევ ერთი (სტატიის პირველი მეთოდი) მეტად გონებამახვილური, მაგრამ ხელოვნური მეთოდი.

ამ მეთოდმა ვერ ჰპოვა გავრცელება იმის გამო, რომ ყველა შედეგი, რომელიც მისი გამოყენებით მიიღება, შეიძლება უფრო მარტივად და სრული სახით მივიღოთ ტექსტში ხსენებული მეთოდის დახმარებით. იმ შრომებიდან, რომლებიც პირველი მეთოდის გამოყენებას ეძღვნება, ჩემთვის ცნობილია მხოლოდ ვ. კუპრაძის შრომები [6], [7].

თულებით, როგორც ეს მოცემული იყო ი. ვეკუას მიერ შეკრული კონტურების შემთხვევაში (იხ. § 57).

თვითონ კარლემანი განიხილავს შემთხვევას, როდესაც L ნამდვილი ღერძის მონაკვეთია და, ამას გარდა, $\varkappa_0=1$ (თუ გამოვიყენებთ ჩვენს აღნიშვნას).

1°. $\mathrm{K}\varphi=f$ განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$\mathrm{K}\varphi \equiv \mathrm{K}^0\varphi+\mathrm{k}\varphi=f, \tag{99,1}$$

სადაც წინანდებურად

$$\mathrm{K}^0\varphi \equiv \mathrm{A}(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{\mathrm{B}(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{99,2}$$

და

$$\mathrm{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{99,3}$$

K ოპერატორის ანუ $\mathrm{K}\varphi=f$ განტოლების შესაბამის განსაკუთრებულ და არაგანსაკუთრებულ კვანძებს ვუწოდებთ K^0 ოპერატორის შესაბამის განსაკუთრებულ და არაგანსაკუთრებულ კვანძებს.

შევნიშნოთ, რომ თუ, ჩვენი დაშვების მიხედვით, $k(t_0,\ t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს, ხოლო $\varphi(t)$ ფუნქცია — H^* კლასს, მაშინ, როგორც ადვილად ჩანს, $k\varphi$ H_0 კლასის ფუნქციას წარმოადგენს.

სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ $f(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს.

(99,1) განტოლება გადავწეროთ კიდევ ასე:

$$\mathrm{K}^0\varphi=f-k\varphi. \tag{99,4}$$

მარჯვენა მხარე (რომელიც ეკუთვნის H_0 კლასს) დროებით განვიხილოთ როგორც ცნობილი ფუნქცია.

აქედან გამომდინარე, აქ შეგვიძლია გავიმეოროთ ის, რაც 97-ის 2° პუნქტშია ნათქვამი განსახილველი განტოლების ამონახსნთა ყოფაქცევის შესახებ კვანძების მიდამოში. კერძოდ, ყველა $\varphi(t)$ ამონახსნი, რომლებიც შემოსაზღვრულია მოცემული არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში, აუცილებლად ეკუთვნის H_0 კლასს ამ მიდამოში. ზუსტად ისევე, როგორც § 97-ში, ჩვენი განტოლების ყველა შესაძლო ამონახსნი შეგვიძლია დავყოთ $h=h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასებად. K ოპერატორის ანუ (99,1) განტოლების h კლასის $\varkappa$ ინდექსი და $Z(t)$ კანონიკური ფუნქცია ვუწოდოთ შესაბამისი (იმავე კლასის) $\mathrm{K}^0\varphi=f$ განტოლების ანუ K^0 ოპერატორის ინდექსს და კანონიკურ ფუნქციას.

2°. როგორც § 97-ში, K^*-ში აღვნიშნოთ შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული ოპერატორი:

$$\mathrm{K}^*f \equiv A(t_0)\,f(t)-\frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,(t-t_0)}, \tag{99,5}$$

აღნიშვნები იგივეა, რაც § 97-ში.

თუ (99,4)-ისათვის გამოვიყენებთ § 97-ში ნათქვამს, ადვილად მივალთ შემდეგ შედეგამდე:

ვთქვათ, საჭიროა (99,1) განტოლების $h=h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ყველა ამონახსნის მოძებნა და, ვთქვათ, $Z(t)$ და $\varkappa$ აღნიშნავს შესაბამის კანონიკურ ფუნქციას და ინდექსს, მაშინ:

როცა $\varkappa \geqslant 0$ (99,1) განტოლება ეკვივალენტურია (h კლასის ამონახსნების მოძებნის აზრით) ფრედჰოლმის განტოლებისა

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^* k\varphi = f^*(t_0), \tag{99,6}$$

სადაც

$$f^*(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0); \tag{99,7}$$

ამასთან, $P_{\varkappa-1}(t_0)$ აღნიშნავს ნებისმიერ პოლინომს, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa-1$ ($P_{\varkappa-1}(t_0) \equiv 0$).

როცა $\varkappa < 0$, (99,1) განტოლება ეკვივალენტურია (იმავე აზრით) (99.6) ფრედჰოლმის განტოლებისა (ამასთან, $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$) და დამატებითი პირობების შემდეგ ერთობლიობისა

$$\int\limits_L \frac{t^j k\,\varphi(t)\, dt}{Z(t)} = \int\limits_L \frac{t^j f(t)\, dt}{Z(t)}, \quad j = 0, 1, \dots, \varkappa - 1. \tag{99,8}$$

(97,16) პირობებიდან წარმოშობილი უკანასკნელი პირობები, ცხადია, შეიძლება, კიდევ ასე გადავწეროთ:

$$\int\limits_L \rho_j(t)\varphi(t)\, dt = \int\limits_L \frac{t^j f(t)\, dt}{Z(t)}, \qquad j = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1, \tag{99,8ა}$$

სადაც

$$\rho_j(t) = \mathbf{k}' \left[\frac{t^j}{Z(t)}\right] = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{k(t_1, t)\, t_1^j\, dt_1}{Z(t)} \tag{99,9}$$

სავსებით განსაზღვრული ფუნქციებია, რომლებიც, როგორც ადვილად ჩანს, H_0 კლასს ეკუთვნიან.

აღვნიშნოთ, რომ (99,7) ფორმულით განსაზღვრული $f^*(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $h(c_1, \dots, c_q)$ კლასს, გარდა ამისა, განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში იგი ეკუთვნის H_ε^* კლასს და ამასთან შემოსაზღვრულია იმ კვანძების მიდამოში, რომელთათვის $\gamma_k \neq 0$; c_k განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში, რომელთათვის $\gamma_k = 0$, ის შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელი, როგორც $\ln(t - c_k)$. ეს გამომდინარეობს იმ პირობიდან, რომ $f(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს.

§ 100. $\mathbf{K}'\psi = g$ სინგულარული განტოლების რეგულარიზაცია. წინა პარაგრაფში მითითებული რეგულარიზაციის მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ აგრეთვე განტოლებისათვის

$$\mathbf{K}'\psi \equiv \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = g. \tag{100,1}$$

ამ განტოლების ანუ $\mathbf{K}'$ ოპერატორის შესაბამისი განსაკუთრებული და არაგანსაკუთრებული კვანძები ვუწოდოთ $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = g$ ანუ $\mathbf{K}^{0\prime}$ ოპერატორის შესაბამის განსაკუთრებულ და არაგანსაკუთრებულ კვანძებს, ეს კი იგივეა, რაც $\mathbf{K}$ ოპერატორის შესაბამისი განსაკუთრებული და არაგანსაკუთრებული კვანძები.

$\mathbf{K}'$ ოპერატორის ანუ $\mathbf{K}'\psi = g$ განტოლების მოცემული $h' = h(c_{q+1}, \dots, c_m)$ კლასის $\varkappa'$ ინდექსი ვუწოდოთ $\mathbf{K}^{0\prime}$ ოპერატორის ანუ $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = g$ განტოლების მოცემული კლასის ინდექსს.

სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ $g(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს და მივმართოთ წინა პარაგრაფში გამოყენებული მეთოდის ანალოგიურ მეთოდს; § 98-ის შედეგებზე დაყრდნობით შეგვიძლია დავასკვნათ:

როცა $\varkappa' \geqslant 0$, (100,1) განტოლება, $h(c_{q+1},\ldots,c_m)=h'$ კლასის ამონახსნების მოძებნის აზრით, ეკვივალენტურია ფრედჰოლმის განტოლებისა

$$\psi(t_0)+\mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi=g^*(t_0), \qquad (100,2)$$

სადაც

$$g^*(t_0)=\mathbf{K}^{*\prime}g+\frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \qquad (100,3)$$

$P_{\varkappa'-1}(t_0)$ აღნიშნავს ნებისმიერ პოლინომს, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa'-1$ ($P_{-1}(t_0)=0$), ხოლო $Z(t_0)$ h'-ის მიკავშირებული $h=h(c_1,\ldots,c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქციაა $\mathbf{K}\varphi=0$ მიკავშირებული განტოლებისათვის.

როცა $\varkappa'<0$ (100,1) განტოლება ეკვივალენტურია (იმავე აზრით) (100,2) ფრედჰოლმის განტოლებისა (ამასთან უნდა ჩავთვალოთ, რომ $P_{\varkappa'-1}=0$) და შემდეგი დამატებითი პირობების ერთობლიობისა:

$$\int_L \sigma_j(t)\,\psi(t)\,dt=\int_L Z(t)\,B^*(t)\,t^j g(t)\,dt,\quad j=0,1,\ldots,-\varkappa'-1, \qquad (100,4)$$

სადაც

$$\sigma_j(t)=\mathbf{k}\,[Z(t)\,B^*(t)t^j]=\frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\,t_1)\,Z(t_1)\,B^*(t_1)\,t_1^j\,dt_1 \qquad (100,5)$$

H_0 კლასის სავსებით განსაზღვრული ფუნქციებია.

აქაც $\mathbf{K}^{*\prime}$-ით აღვნიშნავთ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის მიკავშირებულს, რომელიც იგივეა, რაც წინა პარაგრაფში (ფორმულა (98,11)); $B^*(t)$ განისაზღვრება (97,10) ფორმულით.

შევნიშნოთ, რომ (100,2) განტოლება, საზოგადოდ, არ წარმოადგენს (99,6) განტოლების მიკავშირებულს, რადგან $\mathbf{K}^*\,\mathbf{k}$-ს მიკავშირებული ოპერატორი არის $\mathbf{k}'\,\mathbf{K}^{*\prime}$ და არა $\mathbf{K}^{*\prime}\,\mathbf{k}'$.

დაბოლოს აღვნიშნავთ, რომ $g^*(t_0)$ ფუნქცია ეკუთვნის $h(c_{q+1},\ldots,c_m)$ კლასს, ამას გარდა, იგი ეკუთვნის H_ε^* კლასს განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში და შემოსაზღვრულია იმ კვანძების მიდამოში, რომელთათვისაც $\gamma_k\neq0$. იმ განსაკუთრებული c_k კვანძების მიდამოში, რომელთათვის $\gamma_k=0$, იგი შეიძლება გახდეს შემოუსაზღვრელი, როგორც $\ln(t_0-c_k)$. ეს გამომდინარეობს პირობიდან, როცა $g(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს.

§ 101. რეგულარიზაციის შედეგად მიღებული განტოლების გამოკვლევა. 1°. წინა ორ პარაგრაფში მიღებული განტოლებების გამოკვლევას წავუმძღვაროთ რამდენიმე შენიშვნა, რომელიც ეხება ფრედჰოლმის განტოლების რეზოლვენტას

რამდენადმე განსხვავებულ პირობებში, ვიდრე § 52-ში. სახელდობრ, განვიხილოთ ფრედჰოლმის შემდეგი განტოლება:

$$\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{A}$$

და მისი მიკავშირებული განტოლება

$$\psi(t_0) + \int_L n(t, t_0)\,\psi(t)\,dt = g(t_0), \tag{A'}$$

სადაც L უბან-უბან გლუვი წირია, ხოლო $n(t_0, t)$ გული შემოსაზღვრული ფუნქციაა, უწყვეტი t_0, t-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა, შესაძლოა, იმ მნიშვნელობებისა, რომლებიც კვანძებს შეესაბამება. $f(t_0)$, $g(t_0)$-ით აღვნიშნავთ L-ზე მოცემულ შემოსაზღვრულ ფუნქციებს, რომლებიც უწყვეტია ყველგან, გარდა, შესაძლებელია, კვანძებისა; ასეთივე პირობები ედება საძიებელ $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ფუნქციებს.

განსახილველი ფუნქციები (როგორც მოცემული, ისევე საძიებელიც) შეიძლება L წირის კვანძებში საერთოდ არ იყოს განსაზღვრული. ამის შესაბამისად არ მოვითხოვთ, რომ (A) ან (A') განტოლება დაკმაყოფილდეს კვანძების შესაბამისი t_0 მნიშვნელობებისათვის.

თუ გავიმეორებთ სიტყვა-სიტყვით § 52-ში ჩატარებულ მსჯელობას, დავასკვნით:

თუ (A)-ს შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ν წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი (ამდენივე ამონახსნი აქვს მის მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებასაც), განტოლების $n(t_0, t)$ გული ყოველთვის შეიძლება შევცვალოთ სხვა გულით

$$m(t_0, t) = n(t_0, t) + \sum_{i=1}^{\nu} \eta_i(t_0)\,\xi_i(t). \tag{*}$$

სადაც $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ L-ზე მოცემული H კლასის ფუნქციებია, რომლებსაც ახასიათებთ შემდეგი თვისებები:

$$\varphi(t_0) + \int_L m(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{B}$$

და

$$\psi(t_0) + \int_L m(t, t_0)\,\psi(t)\,dt = g(t_0) \tag{B'}$$

განტოლებების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებებს არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, ამიტომ არაერთგვაროვანი (B), (B') განტოლებები ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია.

(B) განტოლების ამონახსნი ამავე დროს (A) განტოლების ამონახსნს (უფრო ზუსტად ერთ-ერთ ამონახსნს) წარმოადგენს, თუ ეს (A) განტოლება ამოხსნადია, ე. ი. თუ მისი მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int_L \psi_i(t)\,f(t)\,dt = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{C}$$

სადაც $\psi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, \nu$ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ყველა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნია; ანალოგიური დებულება მართებულია (B') და (A') განტოლებებისათვის.

ვთქვათ, $\gamma(t_0, t)$ (B) განტოლების რეზოლვენტაა, ე. ი. ფუნქცია, რომელსაც აქვს ის თვისება, რომ (B) განტოლების ამოხსნი (ერთადერთი) მოიცემა

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma(t_0, t) f(t)\, dt; \qquad (**)$$

ფორმულით, მაშინ $\gamma(t, t_0)$ (B') განტოლების რეზოლვენტა იქნება. ფრედჰოლმის განტოლების ზოგადი თეორიიდან გამომდინარეობს, რომ $\gamma(t_0, t)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რომელიც ინტეგრებადია ორივე t_0, t ცვლადის მიმართ. ფრედჰოლმის განტოლებათა თეორიიდან ცნობილი თანაფარდობანი[5]

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L m(t_0, t_1)\, \gamma(t_1, t)\, dt_1 \qquad (D)$$

და

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L \gamma(t_0, t_1)\, m(t_1, t)\, dt_1 \qquad (D')$$

გვიჩვენებს, რომ $\gamma(t_0, t)$ ფუნქციას ახასიათებს უწყვეტობის იგივე თვისება, რაც $m(t_0, t)$ ფუნქციას, ე. ი. იგი უწყვეტია t_0, t-ს ყველა მნიშვნელობისათვის გარდა, შესაძლებელია, იმ მნიშვნელობებისა, რომლებიც კვანძებს შეესაბამება. (A) განტოლების ყველა ამონახსნი, როდესაც იგი ამოხსნადია, ე. ი. როცა დაცულია (C) პირობა, გვეძლევა ფორმულით

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma(t_0, t) f(t)\, dt+\sum_{i=1}^{\nu} C_i\, \varphi_i(t_0), \qquad (E)$$

სადაც $\varphi_i(t)$ (A) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ხოლო C_i — ნებისმიერი მუდმივები. ანალოგიურად, (A') განტოლების ყველა ამონახსნი, როდესაც იგი ამოხსნადია, გვეძლევა ფორმულით

$$\psi(t_0)=g(t_0)+\int_L \gamma(t, t_0)\, g(t)\, dt+\sum_{i=1}^{\nu} C_i\, \psi_i(t_0), \qquad (E')$$

სადაც $\psi_i(t)$ (A')-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ხოლო C_i — ნებისმიერი მუდმივები.

$\gamma(t_0, t)$ ფუნქცია (A) განტოლებისათვის ფრედჰოლმის განზოგადებულ რეზოლვენტას წარმოადგენს, ანალოგიურად, $\gamma(t, t_0)$ ფუნქცია — (A') განტოლებისათვის.

შენიშვნა. (D) და (D') თანაფარდობანი, მაგალითად, შეიძლება ასე მივიღოთ. (B) განტოლების მარცხენა მხარეში ჩავსვათ (**) ფორმულით განსაზღვრუ-

[5] იხ. ამ პუნქტის ბოლო შენიშვნა.

ლი $\varphi(t)$-ს გამოსახულება. მიღებული ტოლობა სამართლიანი უნდა იყოს ნებისმიერად არჩეული $f(t)$ ფუნქციისათვის; ამ მოთხოვნის საფუძველზე მივიღებთ (D) თანაფარდობას. ანალოგიურად (**) ტოლობის მარჯვენა მხარეში (B) ფორმულით განსაზღვრული $f(t)$ გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ (D') თანაფარდობას.

2°. გადავიდეთ § 99-ში მიღებული (99,6) განტოლების გამოკვლევაზე, რომელსაც ახლა ასე ჩავწერთ:

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\,\varphi\equiv\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L N(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f^*(t_0), \tag{101,1}$$

(99,7) ფორმულის თანახმად $f^*(t_0)$ $h(c_1,\ c_2,\dots,c_q)$ კლასის ფუნქციაა. იგი H_ε^* კლასს მიეკუთვნება განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში (შემოსაზღვრულია ამ კვანძთაგან იმათ მიდამოში, რომელთათვისაც $\gamma_k\neq 0$) და შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელი, როგორც $\ln(t_0-c_k)$, იმ განსაკუთრებული c_k კვანძების მიდამოში, რომელთათვისაც $\gamma_k=0$;

$$N(t_0,\ t)=A^*(t_0)k(t_0,\ t)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{k(t_1,\ t)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1-t_0)}. \tag{101,2}$$

ამ განტოლებასთან ერთად განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\,\varphi=0 \tag{101,3}$$

და მასთან მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება

$$\psi(t_0)+\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\psi\equiv\psi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L N(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt=0, \tag{101,4}$$

სადაც, (101,2)-ის საფუძველზე,

$$N(t,\ t_0)=A^*(t)\,k(t,\ t_0)-\frac{B^*(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{k(t_1,\ t_0)\,dt_1}{Z(t_1)\,(t_1-t)}. \tag{101,5}$$

(101,1) განტოლებას § 99-ში ჩვენ ფრედჰოლმის განტოლება ვუწოდეთ, თუმცა მისი $N(t_0,\ t)$ გული არ ეკუთვნის იმ ტიპის გულებს, რომლებსაც ჩვეულებრივად რეგულარულს უწოდებენ.

მიუხედავად ამისა, (101,1) განტოლებას შეიძლება მივუყენოთ ფრედჰოლმის ყველა ძირითადი თეორემა, თუ მათ სათანადო სახით ჩამოვაყალიბებთ. ჩვენ ამას ვაჩვენებთ (101,1) განტოლების დაყვანით შემოსაზღვრულგულიან ფრედჰოლმის განტოლებაზე[6].

(97.13) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$Z(t)=\omega_0(t)\prod_{j=1}^{n}(t-c_j)^{\gamma_j}, \tag{101,6}$$

[6] (101,1) სახის განტოლების გამოკვლევა შეიძლება უშუალოდ; შდრ. E. Goursat [1], n°. 561.

სადაც $\omega_0(t)$ H_0 კლასის განსაზღვრული ფუნქციაა, რომელიც არსად L-ზე ნული არ ხდება,

$$
\begin{aligned}
&0 < \operatorname{Re}\gamma_j < 1, && j=1,2,\ldots,q,\\
&-1 < \operatorname{Re}\gamma_j < 0, && j=q+1,\ldots,m,\\
&\operatorname{Re}\gamma_j = 0, && j=m+1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{101,7}
$$

$c_{l+1},\ldots c_n$ $(l\geqslant m)$ აღვნიშნოთ ის განსაკუთრებული კვანძები, რომელთათვისაც $\gamma_j=0$, და ვთქვათ

$$T(t) = \prod_{j=q+1}^{m}(t-c_j)^{\gamma_j}\prod_{j=l+1}^{n}[\ln(t-c_j)+c_j^0], \tag{101,8}$$

სადაც c_j^0 მუდმივები ისეა შერჩეული, რომ $\ln(t-c_j)+c_j^0$ გამოსახულება არსად L-ზე არ გახდეს ნული, ხოლო სხვა მხრივ ისინი ნებისმიერია. თუ ჩავსვამთ

$$\varphi(t)=T(t)\,\varphi_0(t), \tag{101,9}$$

მაშინ (101,1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\varphi_0(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\,T(t)\,\varphi_0(t)\,dt=f_0(t_0), \tag{101,10}$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები

$$f_0(t)=\frac{f^*(t)}{T(t)}, \tag{101,9ა}$$

$$\pi i n(t_0,t)=\frac{N(t_0,\ t)}{T(t_0)}=\frac{A^*(t_0)\,k(t_0,\ t)}{T(t_0)}-\frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i\,T(t_0)}\int_L\frac{k(t_1,\ t)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1-t_0)}. \tag{101,11}$$

§ 26 3° პუნქტის შედეგების საფუძველზე ადვილი შესამჩნევია, რომ $n(t_0,t)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა. იმავე პარაგრაფის (პუნქტი 6°) შედეგების საფუძველზე $n(t_0,\ t)$ ფუნქცია t_0 ცვლადის მიმართ t ცვლადის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის ეკუთვნის H_ε^* კლასს, ამასთანავე მიეკუთვნება H_0 კლასს ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში. იგივეს აქვს ადგილი t ცვლადის მიმართ t_0-ს ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის.

როცა ვამბობთ $n(t_0,\ t)$ ეკუთვნის t_0 ცვლადის მიმართ H_0 კლასს ფიქსირებული t-სათვის, ვგულისხმობთ, რომ t არ ემთხვევა კვანძებს, მაგრამ შეიძლება მდებარეობდეს მათთან ახლოს, და რომ ამასთან $n(t_0,\ t)$ ფუნქციის t_0 ცვლადის მიმართ H პირობის კოეფიციენტი და მაჩვენებელი შეიძლება არჩეულ იქნეს t-ს მდებარეობისაგან დამოუკიდებლად; ანალოგიური მდგომარეობაა H_ε^* კლასის მიკუთვნების მიმართაც. ივივე ითქმის იმ შემთხვევაზეც, როცა t_0 ცვლადი ფიქსირებულია, ხოლო t იცვლება. მოვახდინოთ კიდევ (101,10) განტოლებაში ინტეგრების ცვლადის გარდაქმნა, დავუშვათ

$$T(t)\,dt=d\tau \tag{101,12}$$

ან გარკვეულობისათვის

$$\tau = \int_c^t T(t)\,dt \qquad L_k\text{-ზე}, \quad k=1,2,\ldots,p. \qquad (101,12\text{ა})$$

სადაც c L_k რკალების ერთ-ერთი ბოლოა. როდესაც t წერტილი აღწერს L_k რკალს, მისი შესაბამისი τ წერტილი აღწერს რომელიღაც Λ_k რკალს. Λ_k რკალების ერთობლიობა აღვნიშნოთ Λ_k-ით.

Λ_k რკალებმა შეიძლება გადაკვეთოს ერთმანეთი და აგრეთვე თავისი თავიც, მაგრამ ამას მნიშვნელობა არა აქვს. ოღონდ საჭიროა შევთანხმდეთ, რომ Λ_k რკალზე მდებარე τ წერტილები დავახასიათოთ მათი არა გეომეტრიული მდებარეობით, ე. ი. არა τ-ს მნიშვნელობებით, არამედ t-ს მნიშვნელობებით, რომელთაც ისინი შეესაბამებიან; სხვა სიტყვებით, საჭიროა ჩავთვალოთ, რომ Λ_k რკალი წარმოდგენილია პარამეტრული სახით t (კომპლექსური) პარამეტრის საშუალებით[7].

შემდგომში კვანძებზე საუბრის დროს ჩვენ მხედველობაში გვექნება L წირის კვანძები ან მათი შესაბამისი წერტილები Λ წირზე და არა სხვა კვანძები (გეომეტრიული აზრით), რომლებიც შეიძლება ჰქონდეს Λ წირს.

ნათქვამის თანახმად, ფუნქციები, რომლებიც ქვემოთ აღნიშნულია $\psi_0(\tau)$ ან $n(\tau_0, \tau)$-ით და ა. შ., საჭიროა განვიხილოთ როგორც t ან t_0, t ცვალადების ფუნქციები. ამიტომ ზოგჯერ $\varphi_0(t)$, $n(t_0, t)$ და ა. შ. ნაცვლად დავწერთ $\varphi_0(\tau)$, $n(\tau_0, \tau)$ და ა. შ. როდესაც ვამბობთ, რომ ფუნქციები $\varphi_0(\tau)$, $n(\tau_0, \tau)$ და ა. შ. ეკუთვნის H, H_0, H^*, H_ε^* კლასს, ვგულისხმობთ, რომ ამას ადგილი აქვს L წირზე, t, t_0 ცვლადების მიმართ.

თუ ახლა, ზემოთ თქმულის თანახმად, $\varphi_0(t)$-ს ნაცვლად დავწერთ $\varphi_0(\tau)$ და $n(t_0, t)$ ნაცვლად $n(\tau_0, \tau)$ (101,10) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\varphi_0(\tau_0) + \int_\Lambda n(\tau_0, \tau)\,\varphi_0(\tau)\,d\tau = f_0(\tau_0). \qquad (101.13)$$

$n(\tau_0, \tau)$ გული შემოსაზღვრულია და აქვს (101,11) ფორმულის შემდეგ აღნიშნული თვისებები. მარჯვენა მხარე $f_0(\tau_0)$ აგრეთვე შემოსაზღვრულია და ეკუთვნის H_ε^* კლასს, ამასთან ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში ეკუთვნის H_0 კლასს; ეს გამომდინარეობს (99,7) და (101,9ა) ფორმულებიდან და § 26-ის შედეგებიდან.

ჩვენი მიზნებისათვის (101,1) განტოლების ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $h(c_1,\ldots,c_q)$ კლასში. მაგრამ შემდგომში (101,11) *განტოლების ამონახსნის ქვეშ ვიგულისხმებთ ნებისმიერ აბსოლუტურად ინტეგრებად ამონახსნს*, რადგან, როგორც ადვილად ჩანს, ყველა ასეთი ამონახსნი აუცილებლად

---

[7] შეიძლება აგრეთვე ჩავთვალოთ, რომ Λ_k რკალები განლაგებულია შესაბამის რიმანის ზედაპირზე ან, უფრო მარტივად, ისინი შეიძლება წარმოვიდგინოთ სივრცეში მოთავსებული ძაფების სახით (რომელთა წერტილები ცალსახად შეესაბამება L_k რკალის წერტილებს), რომლებიც შეიძლება გადადიოდნენ ერთმანეთზე და ქმნიდნენ მარყუჟებს.

ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს. მართლაც, ვთქვათ საძიებელი ფუქცია $\varphi(t)$ არის აბსოლუტურად ინტეგრებადი[8], მაშინ $\varphi_0(\tau)$ ფუნქციასაც აქვს ეს თვისება[9]. მეორე მხრივ (101,13) განტოლებიდან ადვილად ჩანს, რომ ყველა მისი აბსოლუტურად ინტეგრებადი ამონახსნი იქნება H_ε^* კლასის შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც, ამას გარდა, ეკუთვნის H_0 კლასს ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში; ყველა ამონახსნი (101,9) ფორმულით გვაძლევს (101,1) განტოლების $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ამონახსნს, ეს კი ამტკიცებს ჩვენ დებულებას.

ამრიგად, (101,1) განტოლების ამოხსნა $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასში ეკვივალენტურია ამავე განტოლების ამოხსნისა აბსოლუტურად ინტეგრებად ფუნქციათა კლასში და აგრეთვე ფრედჰოლმის (109,13) განტოლების ამოხსნისა ჩვეულებრივი აზრით, ე. ი. მისი ამონახსნების მოძებნისა შემოსაზღვრულ (და, რა თქმა უნდა, ინტეგრებად) ფუნქციათა კლასში.

ახლა გადავიდეთ (101,1) განტოლების მიკავშირებული (101,4) ერთგვაროვანი განტოლების განხილვაზე. თუ მოვახდენთ ამ განტოლებაში ცვლადთა გარდაქმნას (101,12) ფორმულით, მაშინ იგი მიიღებს სახეს (ადრინდელი აღნიშვნებით)

$$\psi(\tau_0) + \int_{\Lambda} n(\tau, \tau_0)\, \psi(\tau)\, d\tau = 0, \tag{101,14}$$

ე. ი. გადაიქცევა შემოსაზღვრულგულიან ფრედჰოლმის განტოლებად, რომელიც (101,13) განტოლების მიკავშირებულია. $n(\tau, \tau_0)$ ფუნქციის მიმართ, ზემოთ ნათქვამის საფუძველზე, ადვილი შესამჩნევია, რომ (101,14) განტოლების ყველა აბსოლუტურად ინტეგრებადი ამონახსნი შემოსაზღვრულია და ეკუთვნის H_ε^* კლასს, ამასთან იგი მიეკუთვნება H_0 კლასს ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში. აქედან გამომდინარე, (101,4) განტოლების ამონახსნებზე ლაპარაკის დროს მხედველობაში გვექნება შემოსაზღვრული ამონახსნები.

ახლა მივმართოთ ფრედჰოლმის ძირითად თეორემებს, რომლებიც ეხებიან მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლებების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვების ტოლობისა და არაერთგვაროვანი განტოლებების ამოხსნადობას.

ამ თეორემათაგან პირველი უშუალოდ გამოიყენება (101,13) შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების და მისი მიკავშირებული (101,14) განტოლებისათვის, რადგან ამ განტოლებათა გულები შემოსაზღვრულია. (101,3) და (101,4) განტოლებებისათვის ეს თეორემა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^* \mathbf{k}\varphi = 0$$

ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (აბსოლუტურად ინტეგრებად) ამონახსნთა რიცხვი (ეს ამონახსნები აუცილებ-

[8] ადვილად ჩანს, რომ (101,1) განტოლების მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალი ამ დაშვებებში ჩვეულებრივი აზრით არსებობს; როგორც ყოველთვის, იგულისხმება, რომ ამ ტოლობაში t_0 წერტილი განსხვავდება კვანძებისაგან.

[9] მართლაც, (101,9) და (101,12)-ის ძალით

$$\varphi_0(\tau)\, d\tau = \varphi(t)\, dt.$$

ლად ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს და, ამას გარდა, განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში — H_ε^* კლასს) სასრულია და ტოლია მისი მიკავშირებული ერთგვაროვანი

$$\psi(t_0) + k' K^{*\prime} \psi = 0$$

განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (შემოსაზღვრულ) ამონახსნთა (ეს ამონახსნები აუცილებლად ეკუთვნის H_ε^* კლასს და, გარდა ამისა, არაგანსაკუთრებული კვანძების მიდამოში—H_μ კლასს) რიცხვისა.

გადავიდეთ მეორე თეორემაზე. თუ მას გამოვიყენებთ (101,13) და (101,14) განტოლებებისათვის, იგი ასე ჩამოყალიბდება: (101,13) განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ

$$\int_{\Lambda} f_0(\tau)\,\omega_j(\tau)\,d\tau = 0, \qquad j=1,2,\ldots,\nu, \tag{101,15}$$

სადაც $\omega_j(\tau)$ (101,14) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა. თუ დავუბრუნდებით ძველ t ცვლადს, ზემოხსენებული პირობა მიიღებს სახეს

$$\int_{L} f^*(t)\,\omega_j(t)\,dt = 0, \qquad j=1,2,\ldots,\nu. \tag{101,16}$$

ამრიგად, (101,1) და (101,14) განტოლებათათვის ამ თეორემის უშუალოდ გამოყენებისას იგი ასე ჩამოყალიბდება:

იმისათვის, რომ განტოლება

$$\varphi(t_0) + K^* k\,\varphi = f^*(t_0) \tag{101,1}$$

ამოხსნადი იყოს (აბსოლუტურად ინტეგრებად ფუნქციათა კლასში) აუცილებელი და საკმარისია მისი მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებდეს (101,16) პირობებს, სადაც $\omega_j(t)$ მიკავშირებული (101,4) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (შემოსაზღვრულ) ამონახსნთა სრული სისტემაა. (101,1) განტოლების ყველა (აბსოლუტურად ინტეგრებადი) ამონახსნი აუცილებლად ეკუთვნის $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს და, გარდა ამისა, H_ε^* კლასს განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში.

გავიხსენოთ, რომ $f^*(t)$ არის $h(c_1, \cdots c_q)$ კლასის ფუნქცია, და, გარდა ამისა, ეკუთვნის H_ε^* კლასს განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში.

თუ შესრულებულია (101,13) ფრედჰოლმის განტოლებისათვის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, მაშინ, 1° პუნქტში ნათქვამის თანახმად, მისი ზოგადი ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\varphi_0(\tau_0) = f_0(\tau_0) + \int_{\Lambda} \gamma(\tau_0, \tau)\, f_0(\tau)\,d\tau + \sum_{j=1}^{\nu} C_j\, \chi_{0j}(\tau_0), \tag{101,17}$$

სადაც $\gamma(\tau_0, \tau)$ არის განზოგადებული რეზოლვენტა, $\chi_{0j}(\tau_0)$, $j = 1, \ldots, \nu$, შესაბამის ერთგვაროვან განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნთა სრული სისტემაა, ხოლო C_j ნებისმიერი მუდმივებია.

1° პუნქტში მოყვანილი (D) და (D') ფუნქციონალური განტოლებებიდან ადვილად დავასკვნით, რომ $\gamma(\tau_0, \tau)$ რეზოლვენტის კვანძების მიდამოში იგივე თვისება აქვს, რაც $n(\tau_0, \tau)$ გულს, ე. ი. H_ε^* კლასის შემოსაზღვრულ ფუნქციას იგი წარმოადგენს თითოეული ცვლადის მიმართ და ამის გარდა იგი ეკუთვნის H_0 კლასს ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში.

თუ ახლა (101,9) და (101,12) ფორმულების დახმარებით დავუბრუნდებით ძველ საძიებელ $\varphi(t)$ ფუნქციას და ძველ t ცვლადს, მივიღებთ (101,1) განტოლების ზოგად (აბსოლუტურად ინტეგრებად) ამონახსნს (ეს ამონახსნი კი, როგორც ვიცით, მიეკუთვნება $h(c_1, c_2, \ldots c_q)$ კლასს) ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \Gamma f^* + \sum_{j=1}^{\nu} C_j \chi_j(t_0), \tag{101,18}$$

სადაც $\chi_j(t)$, $j = 1, \ldots, \nu$, (101,3) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (აბსოლუტურად ინტეგრებად) ამონახსნთა სრული სისტემაა, რომელიც, როგორც ვიცით, $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ კლასს ეკუთვნის; Γ-თი აღნიშნულია

$$\Gamma f \equiv f(t_0) + \int_L \Gamma(t_0, t) f(t)\, dt \tag{101,19}$$

ფორმულით განსაზღვრული ოპერატორი, სადაც

$$\Gamma(t_0, t) = T(t_0)\gamma(t_0, t). \tag{101,19a}$$

$\gamma(t_0, t)$ ფუნქციის ზემოთ ნაჩვენები თვისების საფუძველზე, ადვილად დავასკვნით, რომ Γ ოპერატორს $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ფუნქციები გადაჰყავს იმავე კლასის ფუნქციებში, ხოლო მის მიკავშირებულ Γ' ოპერატორს, განსაზღვრულს ფორმულით —

$$\Gamma' g \equiv g(t_0) + \int_L \Gamma(t, t_0) g(t)\, dt, \tag{101,20}$$

სადაც, (101,19ა) ფორმულის თანახმად,

$$\Gamma(t, t_0) = T(t)\gamma(t, t_0), \tag{101,20a}$$

$h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ კლასის ყველა $g(t)$ ფუნქცია გადაჰყავს იმავე კლასის ფუნქციაში.

3. სავსებით ანალოგიურად შეისწავლება წინა პარაგრაფში $\mathbf{K}'\psi = g$ განტოლების რეგულარიზაციის შედეგად მიღებული განტოლება

$$\psi(t_0) + \mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi = g^*(t_0) \tag{101,21}$$

და მისი მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება

$$\omega(t_0) + \mathrm{k}\,\mathrm{K}^*\omega = 0, \tag{101,22}$$

სრული ანალოგიის გამო ამაზე აღარ შევჩერდებით.

§ 102. $\mathrm{K}\varphi = f$ და $\mathrm{K}'\psi = g$ განტოლებების ამოხსნა. ძირითადი თეორემები. განვიხილოთ ახლა

$$\mathrm{K}\varphi \equiv \mathrm{K}^0\varphi + \mathrm{k}\varphi = f \tag{102,1}$$

სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის საკითხზე მოცემულ $h(c_1, \dots, c_q)$ კლასში. § 99-ში ნაჩვენები ხერხით, წინა განტოლების რეგულარიზაციით, მივიღებთ

$$\varphi + \mathrm{K}^*\mathrm{k}\,\varphi = f^*(t_0) \tag{102,2}$$

ფრედჰოლმის განტოლებას და დამატებით პირობებს

$$\int_L \rho_j\,\varphi(t)\,dt = \int_L \frac{t^j f(t)\,dt}{Z(t)}, \quad j = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1. \tag{102,3}$$

განსახილველი სინგულარული განტოლება, $h(c_1, \dots, c_q)$ კლასში ამონახსნთა მოძებნის აზრით, (102,2) განტოლებისა და (102,3) პირობათა ერთობლიობის ეკვივალენტურია.

აქ ვიყენებთ § 99-ის აღნიშვნებს. კერძოდ, $\rho_j(t)$ ფუნქციები განისაზღვრება (99,9) ფორმულით, ხოლო

$$f^*(t_0) = \mathrm{K}^* f + B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{102,4}$$

აქ $P_{\varkappa-1}(t_0)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa - 1$ და რომელსაც ჩვენ ასე წარმოვადგენთ:

$$P_{\varkappa-1}(t_0) = A_1 t_0^{k_1} + A_2 t_0^{k_2} + \cdots + A_\varkappa t_0^{k_\varkappa}; \tag{102,5}$$

ამ გამოსახულებაში $k_1, k_2, \dots, k_\varkappa$ აღნიშნავს $0, 1, \dots, \varkappa - 1$ რიცხვებს, აღებულს რაიმე თანმიმდევრობით, ხოლო $A_1, A_2, \dots, A_\varkappa$ ნებისმიერი მუდმივებია.

$\varkappa \geqslant 0$ შემთხვევაში (102,3) დამატებითი პირობები მოიხსნება; იმ შემთხვევაში კი, როცა $\varkappa \leqslant 0$, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $P_{\varkappa-1}(t_0) \equiv 0$.

(102,1) განტოლების ამოხსნადობის საკითხის განხილვა დავიწყოთ, როცა $\varkappa \geqslant 0$. ამ შემთხვევაში (102,1) განტოლება, ამონახსნთა $h(c_1, \dots, c_q)$ კლასში მოძებნის აზრით, (102,2) განტოლების ეკვივალენტურია. ამ განტოლების ამოხსნადობის პირობებს აქვს სახე (იხ. წინა პარაგრაფი)

$$\int_L \omega_j(t)\,f^*(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu, \tag{102,6}$$

სადაც $\omega_j(t)$, $j = 1, \dots, \nu$, (102,2)-ის მიკავშირებული,

$$\omega + \mathrm{k}'\,\mathrm{K}^{*\prime}\omega = 0 \tag{102,7}$$

ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრულ სისტემას წარმოადგენს. ჩვენ ვიცით, რომ $\omega_i(t)$ ფუნქციები ეკუთვნის H_ε^* კლასს, ამას გარდა არაგანსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში ისინი ეკუთვნიან H_0 კლასს.

თუ (102,6)-ში შევიტანთ $f^*(t)$ ფუნქციის (102,4) გამოსახულებას და შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\delta_i = \int\limits_L \omega_i(t)\, \mathrm{K}^* f(t)\, dt, \tag{102,8}$$

დავრწმუნდებით, რომ (102,6) პირობა მიიღებს სახეს

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \gamma_{ij} A_j = \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{102,9}$$

სადაც γ_{ij} სავსებით განსაზღვრული მუდმივებია, $f(t)$ ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი. δ_i მუდმივები შეიძლება კიდევ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\delta_i = \int\limits_L \omega_i^*(t) f(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{102,10}$$

სადაც შემოკლებით აღნიშნულია

$$\omega_i^*(t) = \mathrm{K}^{*\prime} \omega_i(t). \tag{102,11}$$

$\omega_i^*(t)$ ფუნქცია $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის მიკავშირებულ $h(c_{q+1}, \ldots, c_m) = h'$ კლასს ეკუთვნის. ეს გამომდინარეობს (98,11) ფორმულით განსაზღვრული K^* ოპერატორის სახიდან და აგრეთვე იქიდან, რომ $\omega_i(t)$ ფუნქცია არაგანსაკუთრებული კვანძების მიდამოში H_0 კლასს ეკუთვნის. ადვილად ჩანს, რომ $\omega_i^*(t)$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებულია: (102,7) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს $\omega_i + \mathrm{k}' \mathrm{K}^{*\prime} \omega_i = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\omega_i = -\mathrm{k}' \omega_i^*$; ამიტომ, თუ ω_i^* ფუნქციები წრფივად დამოკიდებული იქნებოდა, ასევე წრფივად დამოკიდებული იქნებოდა ω_i ფუნქციებიც, რაც ეწინააღმდეგება მათ განსაზღვრას.

ვთქვათ, $\|\gamma_{ij}\|$ მატრიცის რანგი ტოლია ρ ($\rho \leqslant \nu$, $\rho \leqslant \varkappa$). ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$\|\gamma_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, \ldots, \rho$$

მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისგან. მაშინ, როგორც ცნობილია, (102,9) $A_1, A_2, \ldots, A_\varkappa$-ს მიმართ სისტემის ამოხსნადობის პირობები იმაში მდგომარეობს, რომ

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1\rho} & \delta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & & \gamma_{2\rho} & \delta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{\rho 1} & \gamma_{\rho 2} & & \gamma_{\rho\rho} & \delta_\rho \\ \gamma_{\rho+j,1} & \gamma_{\rho+j,2} & \cdots & \gamma_{\rho+j,\rho} & \delta_{\rho+j} \end{vmatrix} = 0, \tag{102,12}$$

როცა $j = 1, 2, \dots, \nu - \rho$, ან გაშლილი სახით

$$\delta_{\rho+j} + \sum_{j=1}^{\rho} a_{ji}\delta_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu-\rho, \tag{102,13}$$

სადაც a_{ji}, $f(t)$ ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი, სავსებით განსაზღვრული მუდმივებია.

თუ წინა ტოლობაში δ_j-ს ნაცვლად შევიტანთ (102,10) გამოსახულებას, დავრწმუნდებით, რომ (102,2) განტოლების ამოხსნადობის პირობებს აქვს სახე:

$$\int_L \lambda_j(t) f(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu-\rho. \tag{102,14}$$

სადაც $\lambda_j(t)$ სავსებით განსაზღვრული $h' = h(c_{q+1}, \dots, c_m)$ კლასის წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, სახელდობრ,

$$\lambda_j(t) = \omega^*_{\rho+j}(t) + \sum_{i=1}^{\rho} a_{ji}\omega^*_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, \nu-\rho. \tag{102,15}$$

თუ დავუშვებთ, რომ (102,14) პირობები შესრულებულია, მაშინ (102,2) განტოლება ამოხსნადია. ავაგოთ მისი ზოგადი ამონახსნი. რადგანაც დაშვების თანახმად (102,14) და (102,13) პირობები შესრულებულია, ამიტომ (102,9) სისტემა $A_1, A_2, \dots, A_\rho$ მიმართ ამოხსნადია; მის ზოგად ამონახსნს ჩვენ ვიპოვით, თუ $A_{\rho+1}, \dots, A_\varkappa$ მუდმივებს ნებისმიერად ჩავთვლით და ამოვხსნით (102,9) სისტემის პირველ ρ განტოლებას $A_1, \dots, A_\rho$ მიმართ. (102,9) სისტემის ზოგად ამონახსნს ამიტომ აქვს სახე

$$A_j = B_{j,\rho+1}A_{\rho+1} + \dots + B_{j\varkappa}A_\varkappa + \Gamma_{j1}\delta_1 + \dots + \Gamma_{j\rho}\delta_\rho, \quad j = 1, 2, \dots, \rho, \tag{102,16}$$

სადაც B_{ji}, Γ_{ji} $f(t)$ ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი, სავსებით განსაზღვრული მუდმივებია.

ახლა, თუ (102,2) განტოლების მარჯვენა მხარეში შევიტანთ $A_1, A_2, \dots, A_\rho$ მუდმივების წინა მნიშვნელობებს, მაშინ მიღებული ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადი იქნება $A_{\rho+1}, \dots, A_\varkappa$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. თუ ამ განტოლებას ამოვხსნით (101,13) ფორმულის დახმარებით და მხედველობაში მივიღებთ (102,4) და (102,8) ფორმულებს, ადვილად დავასკვნით, რომ (102,2) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$\varphi(t_0) = \Gamma^* K^* f + C_1\chi_1 + C_2\chi_2 + \dots + C_\nu\chi_\nu + C_{\nu+1}\chi_{\nu+1} + \dots + C_{\varkappa+\nu-\rho}\chi_{\varkappa+\nu-\rho}, \tag{102,17}$$

სადაც $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\nu$ და $C_1, C_2, \dots, C_\nu$ იგივეს აღნიშნავს, რასაც (101,18) ფორმულაში; ერთფეროვნებისათვის $C_{\nu+1}, \dots, C_{\varkappa+\nu-\rho}$-თი აღნიშნულია $A_{\rho+1}, \dots, A_\varkappa$ ნებისმიერი მუდმივები, ხოლო $\chi_{\nu+1}, \dots, \chi_{\varkappa+\nu-\rho}$ $f(t)$ ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი, სავსებით განსაზღვრული ფუნქციებია, რომლებიც, ისევე, როგორც $\chi_1, \dots, \chi_\nu$

ფუნქციები, მიეკუთვნებიან $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს; ამ ფუნქციების შესახებ ქვემოთ კიდევ იქნება ნათქვამი. დაბოლოს, Γ^*-ით აღნიშნულია შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული ოპერატორი:

$$\Gamma^* f \equiv f(t_0) + \int_L \Gamma^*(t_0, t) f(t)\, dt, \tag{102,18}$$

სადაც $\Gamma^*(t_0, t)$ ფუნქცია განსხვავდება (101,14) ფორმულით განსაზღვრული $\Gamma(t_0, t)$ ფუნქციისაგან გარკვეული შესაკრებით, რომლის ამოწერა ცხადი სახით ადვილია; თუ მოვახდენთ ამ მარტივ გამოთვლებს, აშკარა გახდება, რომ Γ^* ოპერატორს აქვს Γ ოპერატორის წინა პარაგრაფის ბოლოში მითითებული თვისებები, სახელდობრ, Γ^* ოპერატორს $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ფუნქციები გადაჰყავს იმავე კლასის ფუნქციებში, ხოლო მიკავშირებულ ოპერატორს $\Gamma^{*\prime}$ $h(c_{q+1}, \ldots, c_m) = h'$ კლასის ფუნქციები — იმავე კლასის ფუნქციებში.

კერძოდ, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ამოსავალი (102,1) სინგულარული განტოლება ერთგვაროვანია, ე. ი. როდესაც $f(t) = 0$. ამ შემთხვევაში (102,1) განტოლება ეკვივალენტურია შემდეგი (საზოგადოდ არაერთგვაროვანი) განტოლებისა:

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = B^*(t_0) Z(t_0) P_{\varkappa-1}(t_0). \tag{102,19}$$

ჩვენს შემთხვევაში ყველა $\delta_i = 0$ და (102,9) სისტემის ამოხსნადობის (102,13) პირობა დაკმაყოფილებულია, ხოლო (102,16) თანაფარდობა მიიღებს სახეს

$$A_j = B_{j,\rho+1} A_{\rho+1} + \cdots + B_{j\varkappa} A_\varkappa, \quad j = 1, 2, \ldots, \rho. \tag{102,19a}$$

თუ ამ გამოსახულებებს $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$-სათვის შევიტანთ (102,14) განტოლების მარჯვენა მხარეში, მაშინ იგი წარმოდგება ასეთი სახით:

$$\varphi + \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = C_{\nu+1} \sigma_{\nu+1} + \cdots + C_{\varkappa+\nu-\rho} \sigma_{\varkappa+\nu-\rho}; \tag{102,20}$$

$A_{\rho+1}, \ldots, A_\varkappa$-ს ნაცვლად კვლავ დავწერეთ $C_{\nu+1}, \ldots, C_{\nu+\varkappa-\rho}$; $\sigma_{\nu+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa+\nu-\rho}$-თი აღვნიშნეთ $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის წრფივად დამოუკიდებელი გარკვეული ფუნქციები, რომელთა გამოსახულება ადვილი ამოსაწერია.

$\mathbf{K}\varphi = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს (ეს განტოლება ეკვივალენტურია (102,20) განტოლებისა ნებისმიერი $C_{\nu+1}, \ldots, C_{\nu+\varkappa-\rho}$ მუდმივებისათვის) (102,17) ფორმულის თანახმად აქვს სახე

$$\varphi(t_0) = C_1 \chi_1(t_0) + \cdots + C_\nu \chi_\nu(t_0) + C_{\nu+1} \chi_{\nu+1}(t_0) + \cdots + C_{\varkappa+\nu-\rho} \chi_{\varkappa+\nu-\rho}(t_0), \tag{102,21}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_{\varkappa+\nu-\rho}$ ნებისმიერი მუდმივებია. ამრიგად, $\chi_j(t)$ ფუნქციები $\mathbf{K}\varphi = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებია; ამავე დროს პირველი ν ამონახსნი $\varphi + \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. $\chi_j(t)$ ფუნქციები, როცა $j > \nu$, ცხადია,

$$\varphi + \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = \sigma_j, \; j = \nu + 1, \ldots, \varkappa + \nu - \rho, \tag{102,22}$$

განტოლების ამონახსნებს წარმოადგენს. ეს განტოლება მიიღება (102,20)-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $C_j = 1$, ყველა დანარჩენი $C_l = 0$.

ახლა ადვილად ვრწმუნდებით, რომ ყველა $\chi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, \varkappa + \nu - \rho$ ფუნქცია წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, ვთქვათ (102,21) ფორმულით განსაზღვრული $\varphi(t)$ ფუნქცია, C_j მუდმივების ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის იგივურად ნულის ტოლია. მაშინ, ცხადია,

$$0 = \varphi + \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1} + \cdots + C_{\varkappa+\nu-\rho}\sigma_{\varkappa+\nu-\rho},$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $C_{\nu+1} = \cdots = C_{\varkappa+\nu-\rho} = 0$, ვინაიდან σ_j ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია. (102,21)-დან, როცა $\varphi = 0$, გამომდინარეობს, რომ $C_1 = C_2 = \cdots = C_\nu = 0$.

ამრიგად, $\mathbf{K}\varphi = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასში აქვს ზუსტად $\varkappa + \nu - \rho$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

ვინაიდან $\nu \geqslant \rho$, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ, როდესაც $\varkappa \geqslant 0$, $\mathbf{K}\varphi = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასში აქვს სულ მცირე $\varkappa$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

ახლა გადავიდეთ შემთხვევაზე, როცა $\varkappa$ უარყოფითია. ამ შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ (102,2) განტოლებაში $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$; ამ განტოლების ამოხსნადობის (102,6) პირობები დაიყვანება $\mathfrak{d}_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ პირობებზე, ე. ი. კვლავ

$$\int\limits_L \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{102,23}$$

სახის პირობებზე, სადაც $\lambda_j(t)$ $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ კლასის გარკვეული სახის წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

თუ დაკმაყოფილებულია (102,23) პირობები, მაშინ (102,2) განტოლება ამოხსნადია, მაგრამ ეს კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ განსახილველი (102,1) განტოლებაც ამოხსნადია $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასში, რადგან ამ შემთხვევაში $(\varkappa < 0)$ კიდევ (102,3) დამატებითი $(-\varkappa)$ პირობის შესრულება მოითხოვება. (102,17) ზოგადი ამონახსნი შევიტანოთ (102,3) თანაფარდობათა მარცხენა მხარეებში. რასაკვირველია, (102,17)-ში უნდა ჩავთვალოთ, რომ $C_{\nu+1} = \cdots = C_{\nu+\varkappa-\rho} = 0$. ამგვარად, $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$-ს განსასაზღვრავად მივიღებთ (102,9) სისტემის ანალოგიურ, $(-\varkappa)$ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნადობის პირობებს ხელ ახლა მივყევართ შემდეგი სახის პირობებზე:

$$\int\limits_L \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0; \quad j = \nu + 1, \ldots, \nu + \sigma, \tag{102,24}$$

სადაც $\sigma \leqslant -\varkappa$. თუ ჩავატარებთ შესაბამის სავსებით ელემენტარულ გამოთვლებს, მხედველობაში მივიღებთ ფორმულას

$$\int\limits_L \rho_j \Gamma^* \mathbf{K}^* f\, dt = \int\limits_L f \mathbf{K}^{*\prime} \Gamma^{*\prime} \rho_j\, dt, \tag{102,25}$$

და აგრეთვე $\Gamma_j^*(t)$ ოპერატორის ზემოთ ნაჩვენებ თვისებას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\lambda_j(t)$, $j=\nu+1,\dots,\nu+\sigma$ ფუნქციები ისევე, როგორც $\lambda_j(t)$ ფუნქციები (102,23) ფორმულაში ეკუთვნის $h'=h(c_{q+1},\dots,c_m)$ კლასს. (102,23) პირობა (102,24) პირობასთან ერთად იძლევა (102,1) განტოლების $h(c_1,\dots,c_q)$ კლასში ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობათა სისტემას.

2°. სრულიად ანალოგიურად ამოიხსნება (102,1) განტოლების მიკავშირებული

$$\mathbf{K}'\psi \equiv K^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = g \tag{102,1'}$$

განტოლება, თუ მისთვის გამოვიყენებთ § 100-ში ნაჩვენებ რეგულარიზაციის ხერხს. თითქმის სრული ანალოგიის გამო ამაზე არ შევჩერდებით.

3°. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{K}\varphi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნთა რიცხვი (ნებისმიერი კლასისა) სასრულია. ანალოგიური მდგომარეობაა $\mathbf{K}'\psi=0$ განტოლების შემთხვევაშიც.

4°. ახლა გადავიდეთ § 55 თეორემების ანალოგიურ თეორემათა დამტკიცებაზე, სახელდობრ[10]:

თეორემა I. მოცემულ $h(c_1,\dots,c_q)$ კლასში $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ

$$\int_L f\psi_j\,dt=0,\qquad j=1,2,\dots,k', \tag{102,26}$$

სადაც ψ_j $(j=1,2,\dots,k')$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლების მიკავშირებული $h'=h(c_{q+1},\dots,c_m)$ კლასის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნთა სრული სისტემაა.

თეორემა II. თუ k $\mathbf{K}\varphi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების h კლასის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვია, $\varkappa$ ამ კლასის ინდექსია, ხოლო k' — $\mathbf{K}'\psi=0$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლების მიკავშირებული h' კლასის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი, მაშინ

$$k-k'=\varkappa. \tag{102,27}$$

ეს თეორემა ძალაში რჩება, თუ როლებს შევუცვლით $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$ ოპერატორებს, h, h' კლასებს და $\varkappa, \varkappa'$ ინდექსებს.

I თეორემის დამტკიცება. (102,26) პირობების აუცილებლობა ცხადია (96,10) ფორმულის საფუძველზე, რომელიც, აშკარად, ჩვენს შემთხვევაში სამართლიანია. დავამტკიცოთ მათი საკმარისობა. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების h კლასში ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს აქვს სახე

[10] ქვემოთ მოყვანილი ზოგად თეორემათა დამტკიცებანი წარმოადგენენ ი. ვეკუას [4] მიერ შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევაში დამტკიცებული თეორემების განზოგადებას.

$$\int_L \lambda_j(t) f(t) \, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{102,28}$$

სადაც $\lambda_j(t)$ h-ის მიკავშირებული h' კლასის განსაზღვრული ფუნქციებია, ხოლო N რაიმე დადებითი მთელი რიცხვი ან ნულია. ცხადია, I თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ შევძლებთ ვაჩვენოთ, რომ (102,28) პირობა წარმოადგენს (102,26) პირობის შედეგს.

ვთქვათ, $g(t)$ H კლასის ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც ნული ხდება ყველა კვანძზე, ასე რომ, Kg ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს. $\mathbf{K}\varphi = \mathbf{K}g$ განტოლება ამოხსნადია h კლასში (და H კლასშიც კი), რადგანაც მას აქვს ამონახსნი $\varphi = g$. მაშასადამე, აუცილებელია, რომ

$$\int_L \lambda_j \mathbf{K} g \, dt = \int_L g \mathbf{K}' \lambda_j \, dt = 0.$$

$g(t)$ ფუნქციის ნებისმიერობის გამო ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{K}'\lambda_j = 0$. ამრიგად λ_j $\mathbf{K}'\psi = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების h' კლასის ამონახსნებია და, მაშასადამე, $\psi_1, \ldots, \psi_k$ ფუნქციათა წრფივ კომბინაციებს წარმოადგენს, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (102,28) პირობები (102,26) პირობების შედეგია და თეორემა I დამტკიცებულია. სავსებით ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა, რომელსაც მივიღებთ თუ როლებს შევუცვლით $\mathbf{K}$ და $\mathbf{K}'$, h და h'.

თეორემა II დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა $\varkappa \geqslant 0$. ამ შემთხვევაში h კლასში ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას აქვს (102,14) სახე, სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-\rho}$ h' კლასის წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია. მეორე მხრივ, როგორც ახლახანს ვაჩვენეთ, ამოხსნადობის (იმავე კლასში) აუცილებელ და საკმარის პირობებს წარმოადგენს (102,26) პირობები. ამრიგად, თუ H_0 კლასის რაიმე ფუნქცია აკმაყოფილებს (102,14) პირობას, მაშინ ის დააკმაყოფილებს (102,26) პირობასაც და პირიქით. აქედან გამომდინარეობს (იხ. IV დანართი წიგნის ბოლოში), რომ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-\rho}$ ფუნქციები $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k'$ ფუნქციების წრფივი კომბინაციებია და პირიქით. მაშასადამე,

$$k' = \nu - \rho.$$

ამას გარდა, h კლასში $\mathbf{K}\varphi = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი (102,21)-ის საფუძველზე, როგორც უკვე იყო ნათქვამი, $\varkappa + \nu - \rho$ ტოლია. ასე რომ,

$$k = \varkappa + \nu - \rho.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს (102,27) ტოლობა.

გადავიდეთ შემთხვევაზე $\varkappa < 0$. ეს შემთხვევა დაიყვანება წინაზე, თუ $\mathbf{K}$ და $\mathbf{K}'$ ოპერატორებსა და h და h' კლასებს როლებს შევუცვლით.

თუ ვიმსჯელებთ ისე, როგორც ზემოთ, მივალთ თანაფარდობამდე; $k' - k = \varkappa'$, სადაც $\varkappa'$ $\mathbf{K}'$ ოპერატორის h' კლასის ინდექსია; ჩვენ ვიცით, რომ $\varkappa' = -\varkappa$, ამიტომ ამ შემთხვევაშიც ვღებულობთ (102,27) ტოლობას.

ამრიგად II თეორემა დამტკიცებულია. ასევე დამტკიცდება თეორემა, რომელიც მიიღება K და K′, h და h'-ის როლების შეცვლით.

შენიშვნა 1. აშკარაა, რომ I და II თეორემები და სხვა შედეგები ძალაში რჩება, თუ $f(t)$ ფუნქცია H_0 კლასის ნაცვლად ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს და, ამასთანავე, განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში მიეკუთვნება H_ε^* კლასს. არსებითად არაფერი შეიცვლება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $f(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს და, ამავე დროს, განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში ეკუთვნის H_ε^* კლასს; კერძოდ, წინა თეორემები იმ შემთხვევაშიც ძალაშია.

ანალოგიური შენიშვნა ეხება K-ს K′-ით, h-ის h'-ით შეცვლით მიღებულ თეორემებსაც.

შენიშვნა 2. თუ კი სათანადო სახით შერჩეული ნამდვილი ცვლადის (მაგ. რკალური აბსცისი) შემოყვანის შემდეგ განსახილველი სინგულარული განტოლება გახდება ნამდვილი განტოლება, მაშინ ზემოთ დამტკიცებული ძირითადი თეორემები ძალას ინარჩუნებს ამ შემთხვევაშიც, თუ § 54-ში ნათქვამის თავსებით ანალოგიურად შემოვიფარგლებით ნამდვილი ამონახსნებით. ამასთან, მოცემული განტოლების მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებად, ვგულისხმობთ ნამდვილ განტოლებას, რომელიც წარმოადგენს განსახილველი განტოლების ნამდვილ სახეზე მიყვანილის მიკავშირებულს (შდრ. § 54).

§ 103. მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევები. წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ შემდეგი სახის განტოლებები:

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \qquad (103{,}1)$$

და

$$\mathrm{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t, t_0)\psi(t)\,dt = g(t_0) \quad (103{,}2)$$

იმ დაშვებით, რომ L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია.

ახლა ისევე, როგორც § 83-ში, განვიხილოთ ორი მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა: როდესაც L გლუვი ნაწყვეტი წირია და როდესაც L უბან-უბან გლუვი მარტივი შეკრული კონტურია.

როგორც ადრე, ვისარგებლებთ აღნიშვნით

$$G(t) = \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)}\,. \qquad (103{,}3)$$

1°. ნაწყვეტი გლუვი წირის შემთხვევა[11]. ამ შემთხვევაში L შედგება ცალ-ცალკე მდებარე გახსნილი გლუვი $L_k = a_k b_k$, $k = 1, \ldots, p$ რკალებისაგან. $a_k\, b_k$ ბოლოები ჩვენს შემთხვევაში L წირის კვანძებს წარმოადგენს.

---

[11] ეს შემთხვევა უშუალოდ იყო შესწავლილი სტატიებში: ნ. მუსხელიშვილი [6] და ნ. მუსხელიშვილი, დ. კვესელავა [1]. იხ. ამ თავის შესავალი.

კვანძების სიმრავლისათვის შეგვეძლო მიგვეკუთვნებინა ზოგიერთი სხვა წერტილიც, მაგრამ ამას ჩვენ აქ არ გავაკეთებთ. რაიმე მიმდევრობით აღებულ a_k, b_k ბოლოებს აღვნიშნავთ c_k-თი, $k = 1, 2, \dots, 2p$.

ზემოთ მიღებული პირობების თანახმად, ვგულისხმობთ, რომ $A(t)$, $B(t)$ ფუნქციები L-ზე ეკუთვნის H კლასს და, აგრეთვე $k(t_0, t)$ ფუნქციაც ორივე t_0, t ცვლადის მიმართ L-ზე H კლასს ეკუთვნის (ჩვენს შემთხვევაში H კლასი იგივეა, რაც H_0 კლასი).

$\ln G(t)$-ს ქვეშ L_j-ზე ვგულისხმებთ ნებისმიერ მნიშვნელობას, რომელიც უწყვეტად იცვლება L_j-ზე. c_k ბოლოების შესაბამისი γ_k რიცხვი გვეძლევა ფორმულით

$$\gamma_k = \alpha_k + \lambda_k + i\beta_k, \tag{103,4}$$

სადაც

$$\alpha_k + i\beta_k = \mp \frac{1}{2\pi i} \ln G(c_k). \tag{103.5}$$

ამასთან ზედა ნიშანი აიღება, როცა $c_k = a_j$, ქვედა — როცა $c_k = b_j$, ხოლო მთელი რიცხვი λ_k შეირჩევა პირობით

$$-1 < \alpha_k + \lambda_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, 2p. \tag{103,6}$$

განსაკუთრებული c_k ბოლოები (ჩვენს შემთხვევაში კვანძები ემთხვევა ბოლოებს), ე. ი. ბოლოები, რომელთათვისაც $\operatorname{Re}\gamma_k = 0$, ჩვენს შემთხვევაში ხასიათდება პირობით, რომ $G(c_k)$ ნამდვილი დადებითი რიცხვია (რადგან მხოლოდ ამ შემთხვევაშია α_k მთელი რიცხვი).

განსაკუთრებული c_k ბოლოები, რომელთათვისაც არა მარტო $\operatorname{Re}\gamma_k = 0$, არამედ $\gamma_k = 0$, ხასიათდება პირობით $G(c_k) = 1$, ე. ი. $B(c_k) = 0$.

$K^0\varphi = f$ მახასიათებელი განტოლების ამონახსნების შესახებ § 97-ის 2° პუნქტში ნათქვამს (იგულისხმება, რომ f ეკუთვნის H კლასს) ჩვენს შემთხვევაში შეიძლება ისიც დავუმატოთ, რომ ეს ამონახსნები შემოსაზღვრული რჩება აგრეთვე იმ განსაკუთრებული c_k ბოლოების მიდამოშიც, რომელთათვისაც $\gamma_k = 0$ და, უფრო მეტიც, ეკუთვნის H კლასს; ეს გამომდინარეობს (97,11) და (97,12) ფორმულებიდან, რადგან ამ შემთხვევაში, როცა $\gamma_k = 0$, გვაქვს $B^*(c_k) = B(c_k) = 0$.

თუ რომელიმე არაგანსაკუთრებული c_k ბოლოს მიდამოში $K^0\varphi = f$ განტოლების $\varphi(t)$ ამონახსნი შემოსაზღვრულია, მაშინ ის ამ ბოლოს მიდამოში აუცილებლად ეკუთვნის H კლასს და მასზე ნულად იქცევა[12]. ამონახსნის H კლასისათვის მიკუთვნება მტკიცდება § 97-ის 2° პუნქტის ანალოგიურად. თუ $\varphi(c_k) \neq 0$, მაშინ (103,1) ტოლობაში მარჯვენა მხარის მეორე წევრი c_k ბოლოს მახლობლობაში შემოუსაზღვრელი იქნება როგორც $\ln(t_0 - c_k)$, რაც შეუძლებელია, რადგანაც ტოლობის დანარჩენი წევრები c_k-ს მახლობლად შემოსაზღვრულია. ის, რომ $\varphi(c_k) = 0$, უშუალოდაც შეიძლება დამტკიცდეს.

[12] c_k ბოლოზე $\varphi(t)$ ამონახსნის $\varphi(c_k)$ მნიშვნელობას ქვეშ იგულისხმება ზღვარი, რომლისკენაც მიისწრაფვის $\varphi(t)$, როცა $t \to c_k$.

გარდა ამისა, უნდა აღვნიშნოთ, რომ (101,2) ფორმულით განსაზღვრული $N(t_0, t)$ გული შემოსაზღვრული იქნება ჩვენს შემთხვევაში ყველა განსაკუთრებული ბოლო წერტილის მახლობლობაში და ამიტომ § 101-ის (101,8) ფორმულით შემოყვანილი $T(t)$ ფუნქცია შეიძლება შეიცვალოს უფრო მარტივი

$$T(t) = \prod_{j=q+1}^{m} (t - c_j)^{\gamma_j} \qquad (103,7)$$

ფუნქციით.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ თუ $B(c_k) = 0$ ყველა ბოლო წერტილში, მაშინ (103,1), (103,2) განტოლებების თეორია არაფრით არ განსხვავდება II თავში მოცემული თეორიისაგან იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L შედგება გლუვი შეკრული კონტურებისაგან, ხოლო $A(t)$, $B(t)$ ფუნქციები უწყვეტია L-ზე (მიეკუთვნება H კლასს).

მართლაც, თუ $B(c_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2p$, მაშინ $\gamma_k = 0$, $k = 1, \ldots, 2p$ და ყველა ბოლო განსაკუთრებულია. ამიტომ ამონახსნთა კლასებად დაყოფის ცნება მოხსნილია.

(103,1) ან (103,2) განტოლებების ყველა ამონახსნი იქნება H კლასში, მაშინაც, თუ მათ მოძებნას დავეწყებთ H^* კლასში. ჩვენ აქ ვუშვებთ, რომ ისევე, როგორც $k(t_0, t)$ ფუნქცია, $f(t)$ და $g(t)$ მიეკუთვნება H კლასს.

არავითარი არსებითი ცვლილება არ გვექნება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ყველა ბოლოსათვის $\mathrm{Re}\,\gamma_k = 0$, ე. ი. როცა ყველა ბოლოზე $G(C_k)$ ნამდვილი დადებითი რიცხვია.

2°. მარტივი შეკრული კონტურის შემთხვევა[13]. ახლა დავუშვათ, რომ L მარტივი შეკრული გლუვი ან უბან-უბან გლუვი კონტურია (შემთხვევა, როდესაც L შედგება რამდენიმე ასეთი კონტურისაგან, სავსებით ანალოგიურად განიხილება). აქ იგივე აღნიშვნებს გამოვიყენებთ, რაც § 83-ის 2° პუნქტში გვქონდა. კერძოდ, $c_1, c_2, \ldots, c_n$-ით აღვნიშნავთ L წირის კვანძებს; ჩვენს შემთხვევაში ესენი კუთხური წერტილებია და ზოგიერთი სხვა წერტილიც, რომლებიც განლაგებულია L წირის გლუვ ნაწილზე.

აქ, ისე როგორც მთელ ამ კარში, ჩავთვლით, რომ $A(t)$, $B(t)$, $K(t_0, t)$ H_0 კლასის ფუნქციებია L-ზე.

თუ დავუშვებთ, რომ $A(t)$, $B(t)$ ფუნქციები და, მაშასადამე, $G(t)$ ეკუთვნის H კლასს (და არა მხოლოდ H_0-ს), მაშინ, § 83, პ. 2° აღნიშვნების თანახმად, ყველა „კვანძისათვის" გვექნება

$$G(c_k - 0) = G(c_k + 0), \qquad (103,8)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ყველა რიცხვი $\gamma_k = 0$ (იხ. (83.7) ფორმულა). ასე რომ, ყველა კვანძი განსაკუთრებულია. ადვილი დასანახავია, რომ განსახილველ შემთხვევაში (103,1), (103,2) განტოლებათა თეორია არსებითად არაფრით არ განსხვავდება II თავში მოცემული თეორიისაგან, იმ შემთხვევისათვის,

[13] ეს შემთხვევა (უფრო კერძო შემთხვევაში, როცა L გლუვი კონტურია) განხილული იყო თ. გახოვის მიერ [3] [4], რომელიც სარგებლობდა ნ. მუსხელიშვილისა და დ. კვესელავას [1] სტატიის შედეგებით.

როდესაც L გლუვი შეკრული კონტურია (ან ასეთ კონტურთა სასრული რაოდენობის ერთობლიობა); ერთადერთი განსხვავება ის არის, რომ წინა პარაგრაფში მითითებული ზოგადი ხერხით აგებული $\varphi(t)$ ან, შესაბამისად, $\psi(t)$ შეიძლება არ აკმაყოფილებდეს (103,1), ან, შესაბამისად, (103,2) განტოლებას, როცა t ემთხვევა კუთხურ წერტილებს[14].

არსებითი ცვლილება არ გვექნება იმ შემთხვევაშიც, როცა $A(t)$ და $B(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს და c_k წერტილებში

$$\arg G(c_k-0)=\arg G(c_k+0) \tag{103,9}$$

(2π-ს მთელი ჯერადის სიზუსტით). ამ შემთხვევაშიც ყველა კვანძი იქნება განსაკუთრებული და ამონახსნთა კლასებად დაყოფა არაა საჭირო.

პირიქით, თუ ადგილი არ აქვს (103,8) ან (103,9) სახის ტოლობებს, მაშინ იმ შემთხვევაშიც კი, როცა L გლუვი კონტურია, არავითარ არსებით გამარტივებას არ მივიღებთ მაშინაც კი, როდესაც L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია.

უნდა აღვნიშნოთ ერთი გარემოება, რომელსაც ზოგჯერ არსებითი მნიშვნელობა აქვს. კერძოდ, ვაჩვენოთ, რომ თუ (103,1) განტოლების $\varphi(t)$ ამონახსნი შემოსაზღვრული რჩება მოცემული არაგანსაკუთრებული კვანძის მიდამოში, მაშინ ის ამ კვანძის მიდამოში აუცილებლად ეკუთვნის H კლასს (და არა მხოლოდ H_0). მართლაც, თუ c ხსენებული კვანძია და თუ $\varphi(c-0)\neq\varphi(c+0)$, მაშინ (103,1)-ის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრები იქნება შემოუსაზღვრელი, როგორც

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}\left[\varphi(c-0)-\varphi(c+0)\right]\ln(t_0-c),$$

რაც შეუძლებელია, რადგანაც მარცხენა მხარის დანარჩენი შესაკრებები და, აგრეთვე, მარჯვენა მხარე c-ს მახლობლობაში შემოსაზღვრულია. იგივეს აქვს ადგილი (103,2) განტოლებისათვისაც.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მათემატიკური ფიზიკის სასაზღვრო ამოცანებში (მაგალითად, პოტენციალთა თეორიის ამოცანებში), რომლებიც მიიყვანება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, საზღვრის კუთხიანი წერტილების არსებობა საგრძნობლად ართულებს ამოხსნას.

ეს არ ეწინააღმდეგება ზემოთ ნათქვამს. ხსენებულ ამოცანებში კუთხიანი წერტილის არსებობა ჩვეულებრივ გავლენას ახდენს $K(t_0,t)$ ფუნქციაზე, რომელმაც შეიძლება დაკარგოს ზემოთ გადმოცემული თეორიის გამოყენებადობისათვის რეგულარობის აუცილებელი თვისებები.

§ 104. გამოყენება პირველი გვარის მახასიათებელი განტოლებისათვის. § 86 და, უფრო ზოგადი დაშვებისათვის, § 90-ში ამოხსნილი იყო განტოლება

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0). \tag{104,1}$$

---

14 ამის შესახებ იხ. დ. კვესელავა [7].

რომელსაც ახლა შეიძლება ვუწოდოთ პირველი გვარის მახასიათებელი განტოლება, ის მიიღება § 47-ში განხილული $\mathbf{K}^0\varphi = f$ განტოლებიდან, როდესაც $A(t_0) = 0$, $B(t_0) = 1$.

სიმარტივისათვის ჩვენ აქ შემოვიფარგლებით შემთხვევით, როდესაც L გლუვი ნაწყვეტი წირია (როგორც § 86); ზოგადი შემთხვევაც აგრეთვე არ წარმოადგენს სირთულეს (იხ. § 90).

(104,1) განტოლების შესაბამისი (97,6) შეუღლების ამოცანის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია გვეძლევა ფორმულით (§ § 85 და 86)

$$\chi(z) = C\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}, \tag{104,2}$$

სადაც C ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მუდმივაა, ხოლო

$$R_1(z) = \prod_{j=1}^{q}(z - c_j), \quad R_2(z) = \prod_{j=q+1}^{2p}(z - c_j) \tag{104,3}$$

რადიკალები გაიგება ისე, როგორც § 85-ში, სახელდობრ

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \quad \frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}} = 1 : \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}. \tag{104,4}$$

ამასთან, მარჯვენა მხარეში რადიკალის ქვეშ გვესმის L წირის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეში ჰოლომორფული შტო; გარკვეულობისათვის, ისევე, როგორც § 85-ში, უნდა ჩავთვალოთ, რომ დიდი $|z|$-სათვის

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} = z^{p-q} + \alpha_1 z^{q-p-1} + \cdots \tag{104,5}$$

ჩვენს შემთხვევაში ყველა ბოლო არაგანსაკუთრებულია. ვინაიდან $X(z)$ ფუნქციის რიგი უსასრულობაში $q - p$ ტოლია. ამიტომ $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსი

$$\varkappa = p - q, \tag{104,6}$$

(104,1) განტოლების $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსი გვეძლევა (97,9) ფორმულით, როდესაც $A = 0$, $B = 1$, ასე რომ

$$Z(t) = \chi^+(t) = -\chi^-(t) = C\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}} = C\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}, \tag{104,7}$$

სადაც ბოლო რადიკალის ქვეშ გვესმის მნიშვნელობა, რომელსაც მიიღებს $\sqrt{\dfrac{R_1(z)}{R_2(z)}}$ ფუნქცია L-ზე მ ა რ ც ხ ნ ი დ ა ნ.

ამის შესაბამისად, (97,12) ფორმულის თანახმად,

$$\mathbf{K}^* f \equiv \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t - t_0)}. \tag{104,8}$$

§ 97-ის ზოგადი ფორმულების ძალით (104,1) განტოლების $h(c_1, \dots, c_q)$ კლასის ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}} \frac{f(t)\, dt}{(t-t_0)} + \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}} P_{p-q-1}(t_0), \quad (104,9)$$

სადაც $P_{p-q-1}(t_0)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $p-q-1$ ($P_{p-q-1} \equiv 0$, როდესაც $p \leqslant q$), ამასთანავე, როდესაც $p < q$, ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}} t^j f(t)\, dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, q-p-1. \quad (104,10)$$

ამრიგად, ხელახლა მივიღეთ § 86-ის შედეგი. კიდევ შევნიშნოთ, რომ (104,1) განტოლება ემთხვევა თავისსავე მიკავშირებულს და ამოხსნადობის (104,10) პირობა სხვას არაფერს გამოხატავს, თუ არა ჩვენი კერძო შემთხვევისათვის გამოყენებულ § 102-ის 1 თეორემას.

§ 105. პირველი გვარის განტოლების რეგულარიზაცია და ამოხსნა. განვიხილოთ ახლა ზოგადი სახის პირველი გვარის განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)\, dt}{t-t_0} = f(t_0). \quad (105,1)$$

ისევე როგორც წინა პარაგრაფში სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ L გლუვი ნაწყვეტი წირია და გამოვიყენოთ იგივე აღნიშვნები.

ეს განტოლება გადავწეროთ ასე

$$\frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\varphi(t)\, dt = f(t_0), \quad (105,2)$$

სადაც

$$B(t_0) = K(t_0, t_0) \qquad k(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t_0, t_0)}{t-t_0}. \quad (105,3)$$

ჩვენ, როგორც ყოველთვის, ვიგულისხმებთ, რომ განსახილველი განტოლება ნორმალური ტიპისაა; ჩვენს შემთხვევაში ეს დაიყვანება პირობაზე, რომ $B(t) \neq 0$ ყველგან L-ზე. ამიტომ ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ:

$$B(t) = 1. \quad (105,4)$$

ამის შესაბამისად განსახილველი განტოლება მიიღებს სახეს

$$\mathrm{K}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\varphi(t)\, dt = f(t_0). \quad (105,5)$$

წინანდებურად ჩავთვლით, რომ t_0 და t ცვლადების მიმართ $k(t_0, t)$ ეკუთვნის H კლასს; ამას გარდა, ჯერჯერობით ვუშვებთ, რომ $f(t)$-ც H კლასს ეკუთვნის.

(105,1) განტოლება (96,11) განტოლების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს, ამიტომ მისთვის ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფებში მიღებული ყველა შედეგი. იგივე შედეგებისა და ფორმულების მიღება შეიძლება, თუ (105,1) განტოლებისათვის უშუალოდ გამოვიყენებთ § 99-ში მითითებულ რეგულარიზაციის ხერხს და თუ ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფში მითითებული (104,1) დამახასიათებელი განტოლების ამოხსნით. ჩვენ მოკლედ გავიხსენებთ ზოგიერთს ამ შედეგებიდან.

(105,6) განტოლების შესაბამისი $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის კანონიკური ფუნქცია გვეძლევა ფორმულით

$$Z(t) = C\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}, \tag{105,6}$$

სადაც C ნებისმიერი, ნულისაგან განსხვავებული, მუდმივია; $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასის ინდექსი

$$\varkappa = p - q. \tag{105,7}$$

როდესაც $\varkappa = p - q > 0$, (105,5) განტოლება, ამონახსნთა $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასში მოძებნის აზრით, ეკვივალენტურია ფრედჰოლმის შემდეგი განტოლებისა:

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\,\varphi = \mathbf{K}^* f + \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}} P_{p-q-1}(t_0), \tag{105,8}$$

სადაც $P_{p-q-1}(t_0)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $p-q-1$ ($P_{p-q-1}(t_0) = 0$, როცა $p = q$).

როცა $\varkappa = p - q < 0$, (105,5) განტოლება ეკვივალენტურია (იმავე აზრით)

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\,\varphi = \mathbf{K}^* f \tag{105,9}$$

ფრედჰოლმის განტოლებისა და

$$\int_L \rho_j \varphi\, dt = \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^j f(t)}{\sqrt{R_1(t)}}\, dt, \quad j = 0, 1, \cdots, q - p - 1 \tag{105,10}$$

დამატებითი პირობების ერთობლიობისა.

წინა ფორმულებში

$$\mathbf{K}^* f \equiv \frac{\sqrt{R_1(t)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t - t_0)}, \qquad \mathbf{k}\,\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{105,11}$$

რის შესაბამისად

$$\mathbf{K}^*\mathbf{k}\,\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_L N(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{105,12}$$

სადაც

$$N(t_0, t) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t_1)}\, \mathbf{k}(t_1, t)\, dt_1}{\sqrt{R_1(t_1)}\,(t_1 - t_0)} \tag{105,13}$$

და

$$\rho_l(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t_1)}\, t_1^l K(t_1, t)\, dt_1}{\sqrt{R_1(t_1)}} . \tag{105.14}$$

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ (105,5) განტოლების ყველა ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული c ბოლოს მახლობლობაში, აუცილებლად ნული ხდება მასზე.

ამონახსნთა ეს თვისება უკვე იყო აღნიშნული § 86-ში (104,1) სახის განტოლების ერთი კერძო შემთხვევისათვის. ზოგადი შემთხვევა კი დაიყვანება მითითებულ კერძო შემთხვევაზე, რადგანაც (105,5) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - t_0} = f(t_0) - \mathbf{k}\varphi;$$

თუ φ ამონახსნი შემოსაზღვრულია c ბოლოს მახლობლობაში, მაშინ $k\varphi$ ეკუთვნის H კლასს, ისევე როგორც f, ამ ბოლოს მიდამოში. აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ ყველა წინა ფორმულა და შედეგი ძალაში დარჩება, თუ ჩავთვლით, რომ $f(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის $h(c_1, \ldots, c_q)$ კლასს და არა აუცილებლად H კლასს.

§ 106. სინგულარული განტოლების გამოკვლევის სხვა ხერხის შესახებ. § 55-ში ჩვენ გავეცანით სინგულარული განტოლების გამოკვლევის ეფექტურ ხერხს, როდესაც ინტეგრების წირი შედგება გლუვი შეკრული კონტურებისაგან, ხოლო დამახასიათებელი ნაწილის კოეფიციენტები უწყვეტია, ეს ხერხი მითითებული იყო ი. ვეკუას მიერ[15]. ანალოგიურ ხერხს გამოვიყენებთ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ინტეგრების გზა ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირია და როცა განსახილველი განტოლებანი § 96-ში მითითებულ ერთ-ერთ ტიპს განეკუთვნება. ამ შემთხვევაში საქმე რამდენადმე რთულდება, ვინაიდან მარეგულირებელი ოპერატორის შერჩევისას იმაზე უნდა ვიზრუნოთ, რომ რეგულარიზაციის შედეგად მიღებული გამოსავალი სინგულარული განტოლების ეკვივალენტური ფრედჰოლმის განტოლების გულის ბოლოების მახლობლობაში საკმაოდ მარტივი იყოს.

ასეთი მარეგულირებელი ოპერატორების მოძებნა ადვილად შეიძლება, თუ შემდეგ მოსაზრებებს გავითვალისწინებთ.

ჩვენ ვიცით, რომ § 97-ის აღნიშვნების გამოყენებით

$$\mathbf{K}^0 \varphi = f$$

16 აქ მხედველობაში გვაქვს ი. ვეკუას სტატიაში [7] მითითებული მეთოდი, განსხვავებული იმ მეთოდისაგან, რომელიც იმავე ავტორის მიერ იყო მითითებული [4] სტატიაში.

მახასიათებელი განტოლების მოცემული h კლასის ამონახსნი, როცა $\varkappa \geqslant 0$, მოიცემა ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0) Z(t_0) P_{-1}(t_0),$$

სადაც $P_{\varkappa-1}(t_0)$ ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa - 1$-ს. ამრიგად, როცა, $\varkappa \geqslant 0$, გვაქვს იგივეობა

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{K}^* f \equiv f,$$

ასე რომ $\mathbf{K}^0 \mathbf{K}^* = \mathbf{E}$, სადაც $\mathbf{E}$ ერთეულოვანი ოპერატორია. როგორც ვხედავთ, $\mathbf{K}^0$ ოპერატორი ჩვენს შემთხვევაში $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის მარეგულარებელია. ამასთან, რეგულარიზაციის შედეგი აღმოჩნდება საკმაოდ მარტივი.

ამიტომ ადვილი მისახვედრია, რომ ანალოგიურ ვითარებას ადგილი აქვს მაშინაც, როცა $\varkappa < 0$, თუ $\mathbf{K}^0$ და $\mathbf{K}^*$ როლებს შევუცვლით.

მართლაც, მარტივი მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება დავადგინოთ, რომ

$$\mathbf{K}^* \mathbf{K}^0 \varphi = \varphi(t_0) + \frac{B^*(t_0) Z(t_0)}{\pi i} \int_L P_{\varkappa-1}(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{K}^* \varphi = \varphi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{Q_{\varkappa'-1}(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt}{Z(t)},$$

სადაც $\varphi(t)$ H კლასის ნებისმიერი ფუნქციაა, ხოლო $P_{\varkappa-1}(t_0, t)$ და $Q_{\varkappa'-1}(t_0, t)$ სავსებით განსაზღვრული პოლინომებია, რომელთა ხარისხი არ აღემატება შესაბამისად $\varkappa - 1$ და $\varkappa' - 1$ $(\varkappa' = -\varkappa)$. ამასთან $P_{\varkappa-1}(t_0, t) = 0$, როცა $\varkappa \leqslant 0$, $Q_{\varkappa'-1}(t_0, t) = 0$, როცა $\varkappa' \leqslant 0$. კერძოდ, თუ $\varkappa = \varkappa' = 0$, მაშინ $\mathbf{K}^* \mathbf{K}^0 = \mathbf{K}^0 \mathbf{K}^* = \mathbf{E}$, ასე რომ $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{K}^0$ ოპერატორები ურთიერთშებრუნებულს წარმოადგენს.

ზოგად შემთხვევაში $\varkappa \neq 0$, ეს ოპერატორები თუმცა ურთიერთშებრუნებული არ არის, მაგრამ ასეთი ოპერატორების არსებითი თვისებები ახასიათებს. ამას გარდა, ადვილად მტკიცდება $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის შემდეგი თვისება; როცა $\varkappa \geqslant 0$, $\mathbf{K}^* \omega = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას h კლასში არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი.

როცა $\varkappa \leqslant 0$, $\mathbf{K}^* \omega = f$ განტოლება ამოხსნადია h კლასში ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, რომელიც h კლასს მიეკუთვნება. შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას ზუსტად $\varkappa' = -\varkappa$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი აქვს.

ამიტომ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორს შეუძლია შეასრულოს იგივე როლი, რასაც $\mathbf{M}$ ოპერატორი ასრულებს ი. ვეკუას ეკვივალენტობის თეორემაში, რომელიც § 55-ია დამტკიცებული. ამგვარად, ჩვენს შემთხვევაშიც მივიღებთ § 55-ის თეორემის ანალოგიურ ეკვივალენტობის თეორემას. ამ თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ ძირითადი თეორემები, რომლებიც სხვა გზით დამტკიცებულია § 102-ში; ჩვენს შემთხვევაში მსჯელობა § 55-ის მსჯელობასთან შედარებით რამდენადმე რთულია, რადგანაც ამ შემთხვევაში დამატებით მოგვიწევს ამოხსნის ყოფაქცევის გამოკვლევა კვანძების მახლობლად.

ამ პარაგრაფში მითითებული კვლევის მეთოდი ეკუთვნის დ. კვესელავას [1]; ამ სტატიაში მკითხველმა შეიძლება ნახოს აქ ჩამოყალიბებული დებულებების დამტკიცება[16].

ამ მეთოდის გამოყენებით შეიძლება მივიღოთ ახალი შედეგები, რომლებიც II თავის § 55, 59-ში მითითებული შედეგების ანალოგიურია (რაც ნაწილობრივ გააკეთა თვით დ. კვესელავამ).

II. გამოყენება დირიხლეს ამოცანაში და მის ანალოგიურ ამოცანებში[17]

წინა კარში გადმოცემული შედეგები შეიძლება წარმატებით გამოვიყენოთ მათემატიკური ფიზიკის მრავალი მნიშვნელოვანი ამოცანის ამოხსნისათვის.

ამ კარში ჩვენ ვძლევით ერთ უმარტივეს და, ამასთან, ტიპურ გამოყენებას, სახელდობრ, გამოყენებას დირიხლეს ამოცანაში სიბრტყისათვის, რომელიც გაჭრილია ნებისმიერი ფორმის სასრული რაოდენობის რკალების გასწვრივ და ამ ამოცანის ზოგიერთი სახეცვლილებებისათვის, რომლებიც დიდ როლს ასრულებენ აეროდინამიკაში (მაგალითად თვითმფრინავის ფრთის თეორიაში).

§ 107. დირიხლეს ამოცანა და მისი ანალოგიური ამოცანები ნებისმიერი ფორმის რკალის გასწვრივ გაჭრილი სიბრტყისათვის. 1°. ვთქვათ, $L = ab$ აღნიშნავს მარტივ გახსნილ გლუვ რკალს. ამას გარდა, ჩავთვალოთ, რომ L-ის სიმრუდე აკმაყოფილებს H პირობას[18]. ვთქვათ, S აღნიშნავს რკალის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეს. დავსვათ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა A. ვიპოვოთ S-ში ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი $\Phi(z)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L წირის ყველა ჩვეულებრივ წერტილში, ხოლო ბოლოებში აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha = \mathrm{const} < 1 \quad (c = a \text{ ან } b)$$ [19]

შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\operatorname{Re} \Phi^{+}(t_0) = \operatorname{Re} \Phi^{-}(t_0) = f(t_0) \qquad L\text{-ზე}, \tag{107,1}$$

---

[16] დ. კვესელავამ განიხილა კერძო შემთხვევა, სახელდობრ შემთხვევა, როცა ინტეგრების წირი შეკრული გლუვი კონტურია, მაგრამ მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტებს შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტა, როგორც § 103, პ. 2°. მაგრამ ეს მეთოდი ადვილად გადაიტანება ზოგად შემთხვევაზეც.

[17] ამ განტოლებაში გადმოცემული შედეგების ის ნაწილი, რომელიც ეხება ერთ კონტურს (§§ 107, 108), მიღებული იყო ჩემს სტატიაში [6], რომელშიც ამოხსნილია მხოლოდ A_1 ამოცანა, § 107. განზოგადება ნებისმიერი რაოდენობის კონტურებისათვის (§ 109) მოცემული იყო ნ. ვეკუას [1] მიერ; იხ. აგრეთვე ჩემი სტატია [6].

[18] ეს ნიშნავს, რომ L წირის t წერტილის x და y კოორდინატებს აქვთ მეორე რიგის წარმოებული რკალური აბსცისით და ისინი აკმაყოფილებენ H პირობას.

[19] სხვა სიტყვებით, $\Phi(z)$ ფუნქცია უნდა იყოს უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია L ნახტომის წირით.

სადაც $f(t_0)$, L-ზე მოცემული H კლასის ნამდვილი ფუნქციაა.

A ამოცანა შეიძლება დაიყოს შემდეგ შემთხვევებად:

A_1 ამოცანა. დამატებით მოითხოვება, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული ორივე a, b ბოლოს მახლობლობაში.

A_2 ამოცანა. დამატებით მოითხოვება, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული a, b ბოლოებიდან ერთ-ერთის მახლობლობაში.

A_3 ამოცანა. $\Phi(z)$ ფუნქცია შეიძლება იყოს შემოუსაზღვრელი ორივე a, b ბოლოს მახლობლობაში.

2°. წინასწარ გავარკვიოთ საკითხი A ამოცანის შესაბამი ერთგვაროვანი ამოცანის $f(t)=0$ ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნის არსებობის შესახებ. ამ ერთგვაროვან ამოცანას ვუწოდებთ A^0 ამოცანას, ხოლო A_1, A_2, A_3 ამოცანების შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანებს — შესაბამისად A_1^0, A_2^0, A_3^0. A^0 ამოცანისათვის (107,1) სასაზღვრო პირობა მიიღებს სახეს

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t_0)=\operatorname{Re}\Phi^-(t_0)=0 \quad L\text{-ზე}. \tag{*}$$

ჯერ განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $L=ab$ წარმოადგენს ნამდვილი ღერძის მონაკვეთს, და პირობა $\Phi(\infty)=0$ შევცვალოთ უფრო ზოგადით $\Phi(z_0)=0$, სადაც z_0 რომელიმე ფიქსირებული წერტილია, რომელიც L-ზე არ მდებარეობს (კერძოდ შეიძლება ავიღოთ $z_0=\infty$); ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია უსასრულობაში.

განსახილველად შემოვიყვანოთ უბან-უბან ჰოლომორფული (L ნახტომის წირით), უსასრულობაში შემოსაზღვრული ფუნქცია

$$\Omega(z)=\Phi(z)-\overline{\Phi}(z),$$

ჩვენ აქ ვიყენებთ § 39, პ. 1°-ის აღნიშვნებს, ე. ი. $\overline{\Phi}(z)$-ის ქვეშ ვგულისხმობთ

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})}$$

ფორმულით განსაზღვრულ ფუნქციას.

გავიხსენოთ, რომ

$$\overline{\Phi}^+(t)=\overline{\Phi^-(t)}, \quad \overline{\Phi}^-(t)=\overline{\Phi^+(t)} \qquad L\text{-ზე}. \tag{**}$$

(*) და (**) ტოლობების საფუძველზე, ადვილი დასანახავია, რომ $\Omega^+(t)-\Omega^-(t)=0$-ზე, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\Omega(z)=\mathrm{const}=2c$; ამრიგად, $\overline{\Phi}(z)=\Phi(z)-2C$, სადაც C მუდმივია, ამიტომ, როგორც ადვილად ჩანს, (*) და (**) საფუძველზე,

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=2C \qquad L\text{-ზე}.$$

ამრიგად, $\Phi(z)$-ის განსასაზღვრავად ჩვენ გვაქვს შეუღლების ამოცანის ერთ-ერთი მარტივი შემთხვევა. ამ ამოცანის უსასრულობაში შემოსაზღვრული ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$\Phi(z)=C+\frac{Az+B}{\sqrt{(z-a)(b-z)}}, \tag{***}$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია.

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს A^0 ამოცანის (*) სასაზღვრო პირობას, ადვილად დავასკვნით, რომ A, B, C მუდმივები წმინდა წარმოსახვითი უნდა იყოს. თუ მხედველობაში მივიღებთ A_1^0 და A_3^0 ამოცანებში მოთხოვნილ დამატებით პირობებს, აგრეთვე $\Phi(z_0)=0$ პირობას, სრულიად ელემენტარული გამოთვლებით მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე:

A_1^0 და A_3^0 ამოცანებს არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. A_2^0 ამოცანის ყველაზე ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$\Phi(z)=k\omega(z),$$

სადაც k ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია, ხოლო $\omega(z)$ სავსებით განსაზღვრული უსასრულობაში შემოსაზღვრული უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციაა.

კიდევ აღვნიშნოთ შემდეგი გარემოება. თუ A_1^0 ამოცანაში მოვხსნით პირობას $\Phi(z_0)=0$, მაშინ, როგორც ადვილად დავასკვნით, ამავე (***) ფორმულის საფუძველზე, ამ ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი იქნება $\Phi(z)=ki$, სადაც k ნამდვილი მუდმივია. ასე რომ, $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$.

ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევა, როდესაც $L=ab$ წრფის მონაკვეთია. ზოგადი შემთხვევა კი წინაზე დაიყვანება S არის კონფორმული გადასახვის საშუალებით Σ არეზე, რომელიც ნამდვილი ღერძის რაიმე $\alpha\beta$ მონაკვეთის გასწვრივ გაჭრილ ζ სიბრტყეს წარმოადგენს; იგულისხმება, რომ a და b ბოლოები შესაბამისად α და β[20] ბოლოებში გადადის. ამრიგად, ზემოთ მიღებული დასკვნები A^0 ამოცანის მიმართ ძალაში რჩება ზოგად შემთხვევაშიც.

3°. ახლა შევუდგეთ A ამოცანის ამოხსნას. ეს ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით (შდრ. § 65):

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{107.2}$$

სადაც $\mu(t)$ საძიებელი ნამდვილი ფუნქციაა H^* კლასიდან; შემდგომში A ამოცანის (შესაბამისად A_1, A_2, A_3) ამონახსნის ქვეშ, ჩვენ ჯერჯერობით ვიგულისხმებთ ამონახსნს, წარმოდგენილს (107,2)[21] სახით.

(107.1) სასაზღვრო პირობას მივყავართ პირველი გვარის ნამდვილ სინგულარულ განტოლებამდე

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\mu(t)\,\frac{dr}{r(t_0,t)}\equiv\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\mu(t)\,\frac{\cos\alpha(t_0,\,t)}{r(t_0,\,t)}\,ds=f(t_0). \tag{107,3}$$

---

[20] კონფორმული გარდასახვის ცნობილი თვისების საფუძველზე (იხ., მაგალითად S. Warschawski [1]) ადვილად ჩანს, რომ L-ის მიმართ ჩვენ მიერ მიღებულ პირობებში $\Phi(z)$ ფუნქცია, რომელიც c ბოლოს მახლობლობაში აკმაყოფილებს პირობას

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^{\mu}}, \qquad 0<\mu<1,$$

კონფორმული გარდასახვით გარდაიქმნება ფუნქციად, რომელიც ζ სიბრტყეზე აკმაყოფილებს ასეთსავე პირობას შესაბამისი ბოლოს მახლობლობაში.

[21] ეს შეზღუდვა მოხსნილი იქნება ქვემოთ (პ. 7°).

სადაც, როგორც § 64-ში, $r(t_0, t)=|t-t_0|$, ხოლო $\alpha(t_0, t)$ აღნიშნავს t-ში გატარებული დადებითი მხების მიერ $\overrightarrow{t_0 t}$ ვექტორის მიმართულებასთან შედგენილ კუთხეს. წინა განტოლება შეიძლება გადავწეროთ კიდევ ასე (შდრ. § 64):

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \mu(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\,ds=f(t_0), \tag{107,4}$$

სადაც $\vartheta=\arg(t-t_0)$ L-ის მიმართ. ჩვენ მიერ მიღებულ პირობებში ეს განტოლება ეკუთვნის § 105-ში განხილულს[22].

რადგან (107,3) განტოლება ნამდვილია, ამიტომ გამოკვლევას ნამდვილ არეში ვაწარმოებთ (იხ. შენიშვნა 2 § 102-ის ბოლოში).

$$\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r(t_0, t)}\,ds=0 \tag{107,5}$$

ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მარტივი ფიზიკური აზრი. სახელდობრ, ვთქვათ, უნდა მოვძებნოთ მარტივი ფენის პოტენციალის L-ზე განაწილებული სიმკვრივე $\nu(t)$, რომლისთვისაც პოტენციალი L-ზე იღებს მუდმივ მნიშვნელობას; ასე რომ,

$$\int_L \nu(t)\ln\frac{1}{r(t_0, t)}\,ds=\text{const}, \tag{107,6}$$

(L გამტარზე „ელექტრობის განაწილების ამოცანა"). წინა განტოლების ორივე მხარის s_0-ით გაწარმოებით, მივიღებთ ზუსტად (107,5) განტოლებას.

ახლა განვიხილოთ A_1, A_2, A_3 ამოცანები ცალ-ცალკე.

4°. ცხადია, A_1 ამოცანის ამოხსნისათვის, უნდა ვიპოვოთ (107,3) განტოლების $h(a, b)$ კლასის, ე. ი ორივე a და b ბოლოზე შემოსაზღვრული[23] ამონახსნი.

§ 105-ში ნათქვამის საფუძველზე ამ კლასის ინდექსი $\varkappa$ ტოლია -1[24].

(107,3) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი $h(a, b)$ კლასში; ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ A_1^0 ამოცანას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი არ გააჩნია. მაშასადამე, (107,5) მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებას $h(a, b)$-ს მიკავშირებულ h_0 კლასში აქვს ერთი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $\nu_0(t)$-თი.

ადვილი დასანახავია, რომ

$$\int_L \nu_0(t)\,ds\neq 0. \tag{107,7}$$

---

22 მართლაც, § 7-ის ბოლოში ნათქვამის საფუძველზე, $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}$ აკმაყოფილებს H პირობას ორივე t და t_0 ცვლადით.

23 § 105 (2.4)-ში ნათქვამის საფუძველზე ასეთი ამონახსნი აუცილებლად ნულია ბოლოებზე.

24 ჩვენს შემთხვევაში $p=1$, $q=2$.

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში

$$U(x,\ y)=\int\limits_L \nu_0(t)\ln\frac{1}{r(t_0,\ t)}\,ds$$

ფუნქცია იქნებოდა S-ში ჰარმონიული, უწყვეტად გაგრძელებადი L-ზე ბოლოების ჩათვლით, L-ზე მუდმივი და უსასრულობაში ქრობადი. მაშასადამე, $U(x,\ y)=0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\nu_0(t)=0$[25] L-ზე.

(107,3) განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\int\limits_L f(t)\,\nu_0(t)\,ds=0, \tag{107,8}$$

თუ ეს პირობა არ სრულდება, მაშინ ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი C მუდმივი, რომ

$$\int\limits_L [f(t)+C]\,\nu_0(t)\,ds=0. \tag{107,9}$$

ეს გამომდინარეობს (107,7)-დან. ამიტომ, თუ ამოვხსნით ამოცანას

$$\mathrm{Re}\,\Phi^+(t_0)=\mathrm{Re}\,\Phi(t^0)=f(t_0)+C \tag{107,10}$$

და დავუშვებთ

$$U=\mathrm{Re}\,\Phi(z)-C, \tag{107,11}$$

ჩვენ მივიღებთ დირიხლეს ჩვეულებრივი ამოცანის

$$U^+=U^-=f(t_0) \tag{107,12}$$

უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ამონახსნს, სახელდობრ, ამონახსნს, რომელიც უსასრულობაში იღებს C მნიშვნელობას.

5°. A_2 ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (107,3) განტოლების $h(a)$ კლასის ამონახსნი; გარკვეულობისათვის ჩავთვალეთ, რომ ამონახსნი a ბოლოზე შემოსაზღვრული უნდა იყოს. $h(a)$ კლასის ინდექსი $\varkappa$ ტოლია 0[26]. (107,3) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას $h(a)$ კლასში არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, ვინაიდან A_2^0 ამოცანას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. მაშასადამე, მიკავშირებულ (107,5) განტოლებასაც მიკავშირებულ $h(b)$ კლასში ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი არ გააჩნია. ამრიგად, (107,3) განტოლებას ყოველთვის აქვს $h(a)$ კლასის ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი და A_2 ამოცანა ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია.

6°. A_3 ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (107,3) განტოლების h_0 კლასის ამონახსნი. ამ კლასის ინდექსი $\varkappa$ 1-ის ტოლია[27]. მიკავშირებულ ერთგვაროვან (107,5) განტოლებას მიკავშირებულ $h(a,\ b)$ კლასში არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. რადგან წინა პუნქტის საფუძველზე მას არ მოეპოვება ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი უფრო ფართო $h(b)$ კლასში.

---

[25] იხ. § 65, ფორმულა (65,11).

[26] § 105, ჩვენს შემთხვევაში $p=1$, $q=1$.

[27] § 105; ჩვენს შემთხვევაში $p=1$, $q=0$.

მაშასადამე, (107,3) ყოველთვის ამოხსნადია და ამოხსნა წრფივი სახით შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივს (ვინაიდან შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ერთი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი).

ამრიგად, A_3 ამოცანა ყოველთვის ამოხსნადია, და მისი ზოგადი ამონახსნი წრფივი სახით შეიცავს ერთ ნებისმიერ (ნამდვილ) მუდმივს.

7°. აქამდე A ამოცანის ამონახსნის ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობდით ამონახსნს, რომელიც წარმოდგენილია (107,2). ისღა დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ ჩვენ მიერ ამოცანის ამოხსნის პროცესში დამატებით დადებული ხსენებული პირობები არ ზღუდავს მიღებული შედეგების ზოგადობას.

A_2 ამოცანის შემთხვევაში ეს ცხადია, რადგან ვაჩვენეთ, რომ ყოველთვის არსებობს (107,2) სახით წარმოდგენადი ამონახსნი; სხვა ამონახსნი A_2 ამოცანას არა აქვს, რადგანაც A_2^0 ამოცანას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი.

A_1 ამოცანის შემთხვევაში შეიძლება წარმოიშვას მხოლოდ შემდეგი ეჭვი: დარჩება თუ არა (107,8) პირობა აუცილებელი ამოხსნადობისათვის იმ შემთხვევაშიც, თუ უარს ვიტყვით ამონახსნის (107,2) სახით წარმოდგენაზე. ადვილი საჩვენებელია, რომ (107,8) პირობა აუცილებელია ამ შემთხვევაშიც. მართლაც, ვთქვათ

$$\int_L f(t)\,\nu_0(t)\,ds \neq 0$$

და ვთქვათ, ამის მიუხედავად, A_1 ამოცანას აქვს უსასრულობაში ქრობადი $\Phi_1(z)$ ამონახსნი. ახლა შევარჩიოთ ნამდვილი მუდმივი C ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს (107,9) პირობას და შევადგინოთ, როგორც ეს იყო ნაჩვენები 4° პუნქტში,

$$\operatorname{Re}\Phi_2^+(t_0)=\operatorname{Re}\Phi_2^-(t_0)=f(t_0)$$

ამოცანის ისეთი ამონახსნი, რომ $\operatorname{Re}\Phi(\infty)=-C\neq 0$. მაგრამ, მაშინ ყველგან შემოსაზღვრული ფუნქცია $\Phi(z)=\Phi_2(z)-\Phi_1(z)$ დააკმაყოფილებს $\operatorname{Re}\Phi^+(t_0)=\operatorname{Re}\Phi^-(t_0)=0$. მაშასადამე, ზემოთ ნათქვამის მიხედვით (პუნქტი 2°) $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ ყველგან, ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ $\operatorname{Re}\Phi(\infty)=\operatorname{Re}\Phi_2(\infty)-\operatorname{Re}\Phi_1(\infty)=-C\neq 0$.

A_3 ამოცანის შემთხვევაში ეჭვი შეიძლება შეგვეპაროს მხოლოდ იმაში, რომ ამონახსნის (107,2) სახით მოძებნისას ვერ მივიღებთ ყველაზე ზოგად ამონახსნს. მაგრამ ამ ეჭვის უგულებელყოფა შეიძლება, თუ 6° პუნქტში A_3^0 ერთგვაროვანი ამოცანისათვის მიღებულ შედეგს 3.2° მითითებულ შედეგთან შევაპირისპირებთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (107,3) განტოლების მიკავშირებული არაერთგვაროვანი განტოლების

$$\frac{1}{\pi}\int_L \nu(t)\,\frac{\cos\alpha(t,\,t_0)}{r(t,\,t_0)}\,ds=g(t_0) \qquad (107,13)$$

გამოკვლევა იწარმოებს (107,3) განტოლების გამოკვლევის სავსებით ანალოგიურად: (107,13) განტოლების გამოკვლევის დროს საკმარისია მხოლოდ როლები შევუცვალოთ (107,3) და (107,13) განტოლებებს.

(107,13) განტოლებაზე მიიყვანება ჰიდროდინამიკის ერთი მეტად მნიშვნელოვანი ამოცანა, სახელდობრ, მოცემული ფორმის რკალის გარსდენის დროს. ნაკადის მოძებნის ამოცანა. გამოყენების თვალსაზრისით დიდი მნიშვნელობა აქვს $h(a)$ ან $h(b)$ კლასის ამონახსნის მოძებნას[28]. ამ საკითხს მიუძღვნა მ. ლავრენტიევმა (1932 წ.) თავისი შრომა, რომელსაც ხელთ არ ჰქონდა სინგულარული განტოლებების ზოგადი თეორია. მან მოგვცა რიგი მეტად საინტერესო შედეგები და, კერძოდ, მიუთითა მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი. ამ და სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის ანალოგიური მეთოდების შემდგომი დამუშავება, როგორც მე მეჩვენება, არის ერთ-ერთი მორიგი მნიშვნელოვანი ამოცანა ამ განტოლებათა თეორიაში.

§ 108. ფრედჰოლმის განტოლებაზე მიყვანა. მაგალითები. წინა პარაგრაფში მიღებული (107,4) სინგულარული განტოლება შეიძლება გადავწეროთ კიდევ ერთი სახით

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sin\alpha(t_0,t)\,e^{-i\alpha(t_0,t)}\mu(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0). \tag{108,1}$$

იმისდა მიხედვით, რომელ h კლასში ვეძებთ ამონახსნს, ე. ი. რომელი ამოცანა უნდა ამოიხსნას, A_1, A_2 თუ A_3. ეს განტოლება, § 105 მითითებული ხერხით, შეიძლება მივიყვანოთ ფრედჰოლმის ამა თუ იმ განტოლებაზე. ამასთან, რასაკვირველია, შესაძლებელია და სასურველიცაა ამ მეთოდის სახეცვლილება ჩვენთვის საინტერესო კონკრეტულ შემთხვევის შესაბამისად.

გარკვეულობისათვის შევჩერდეთ A_1 ამოცანაზე ანუ შემთხვევაზე. როცა მოითხოვება ვიპოვოთ (108,1) განტოლების $h(a, b)$ კლასის ამონახსნი. თუ ჩვენ ზუსტად გავყვებით § 105-ში მითითებულ წესს, მაშინ ჩვენს შემთხვევაში, როცა ინდექსი $\varkappa=-1$, რეგულარიზაციის შედეგად მივიღებთ ფრედჰოლმის ერთ განტოლებას და ერთი (105,10) სახის დამატებით პირობას.

ვთქვათ, გვაინტერესებს დირიხლეს ამოცანის ამოხსნა ჩვეულებრივი დასმით, ე. ი. S-ში ჰარმონიული, ყველგან შემოსაზღვრული $U(x, y)$ ფუნქციის განსაზღვრა სასაზღვრო პირობით

$$U^{+}=U^{-}=f(t_0) \qquad L\text{-ზე}. \tag{108,2}$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$U=\operatorname{Re}\Phi(z)-C, \tag{108.3}$$

სადაც $\Phi(z)$ აღნიშნავს უსასრულობაში ქრობად (107,2) ინტეგრალს, ხოლო C ჯერჯერობით უცნობი მუდმივაა, მივალთ ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომელსაც მივიღებთ (108,1) განტოლებიდან მასში $f(t_0)$-ს $f(t_0)+C$-თი შეცვლით, ე. ი. განტოლებაზე

---

[28] ეს დაკავშირებულია ეგრეთ წოდებულ ს. ჩაპლიგინის პოსტულატთან. იხ. მ. ლავრენტიევი [2].

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0,\ t)} \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\sin\alpha(t_0,\ t)\,e^{-i\alpha(t_0,\,t)}\,\mu(t,\ dt)}{t-t_0}=$$

$$=f(t_0)+C. \tag{108,1 ა}$$

ახლა გავიხსენოთ, რომ, § 87-ის ბოლოს ნათქვამის საფუძველზე

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}=g(t_0)+C \tag{108,4}$$

განტოლების (სადაც C ჯერჯერობით უცნობი მუდმივია) $h(a,\ b)$ კლასის, ე. ი. H კლასის, (ერთადერთ) ამონახსნს აქვს სახე

$$\mu(t_0)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-t_0)}. \tag{108,5}$$

ამასთან მუდმივი C სავსებით განისაზღვრება:

$$C=-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}. \tag{108,6}$$

ჩვენ აქ გამოვიყენეთ რამდენადმე სახეშეცვლილი (87,16) და (87,17) ფორმულები, სახელდობრ, $\sqrt{(t-a)(t-b)}$ რადიკალის ნაცვლად შემოვიყვანეთ რადიკალი $\sqrt{(t-a)(b-t)}$ და ჩავთვალეთ, რომ

$$\sqrt{(t-a)(t-b)}=i\sqrt{(t-a)(b-t)}; \tag{108,7}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $L=ab$ ნამდვილი ღერძის მონაკვეთია, $\sqrt{(t-a)(b-t)}$ L-ზე ღებულობს ნამდვილ მნიშვნელობებს.

ახლა, თუ (108,1ა) ფორმულის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებს გადავიტანთ მარჯვენა მხარეს და მიღებულ განტოლებას ამოვხსნით წინა ფორმულების გამოყენებით ისე, თითქოს მარჯვენა მხარე იყოს მოცემული ფუნქცია (მუდმივამდე სიზუსტით), ე. ი. სავსებით იმის ანალოგიურად, როგორც ვიქცეოდით სინგულარული განტოლების რეგულარიზაციისას ზოგად შემთხვევაში, მივიღებთ ფრედჰოლმის განტოლებას

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L N(t_0,\ t_1)\,\mu(t_1)\,dt_1=f_0(t_0). \tag{108,8}$$

მიღებული განტოლება გამოსავალი (108,1) განტოლების ეკვივალენტურია H კლასის ამონახსნთა მოძებნის აზრით და უკვე არავითარ განუსაზღვრელ მუდმივს აღარ შეიცავს; ჩვენ შემოვიტანეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$N(t_0,\ t_1)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int\limits_L \frac{\sin\alpha(t,\ t_1)\,e^{-i\alpha(t,\,t_1)}\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t_1-t)(t-t_0)}, \tag{108,9}$$

$$f_0(t_0) = -\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-t_0)}. \tag{108,10}$$

ადვილი დასანახავია, რომ ჩვენ მიერ მიღებულ პირობებში (108,8) განტოლება წარმოადგენს ფრედჰოლმის ჩვეულებრივ რეგულარულ განტოლებას და რომ მისი ყველა (უწყვეტი) ამონახსნი ეკუთვნის H კლასს და ნული ხდება ბოლოებზე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ (108,8) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას $h(a, b)$ კლასში არ შეიძლება ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. მართლაც, ვთქვათ ამ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია $\mu(t)$, მაშინ, (108,10)-ს ძალით,

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0,\,t)} = \text{const}. \tag{*}$$

$\mu(t)$ შეგვიძლია ჩავთვალოთ ნამდვილ ფუნქციად, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ შეგვეძლებოდა ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილის ცალ-ცალკე განხილვა. წინა განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ უსასრულობაში ქრობადი $\Phi(z)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $\mu(t)$-თი (107,2) ფორმულის საშუალებით[29], ღებულობს ნულოვან სასაზღვრო მნიშვნელობას მარჯვნიდან და მარცხნიდან U-ზე და, აგრეთვე, a, b ბოლოებზე, მაგრამ ასეთი ფუნქცია აუცილებლად ნულის ტოლია და ამიტომ $\mu(t)=0$.

ამგვარად ადვილი საჩვენებელია, რომ (108,8) განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ნამდვილი ამონახსნები; ჩვენ, რასაკვირველია, ვუშვებთ, რომ $f(t)$ ნამდვილი ფუნქციაა. მართლაც, ამონახსნის წარმოსახვითი ნაწილი, როგორც ადვილი დასანახავია, აკმაყოფილებს (*) განტოლებას და ამიტომ აუცილებლად ისპობა.

რადგანაც (108,8) ფრედჰოლმის განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი არ გააჩნია, ამიტომ (108,8) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია. ამონახსნი $\mu(t)$ ნამდვილი ფუნქციაა და ამ ამონახსნის შესაბამისი $U = \operatorname{Re}\Phi(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას $U^+ = U^- = f(t_0) + \text{const}$ და ჩვენი ამოცანა ამოიხსნა ფრედჰოლმის განტოლების დახმარებით.

გარკვეულ უხერხულობას წარმოადგენს ის გარემოება, რომ (108,8) განტოლებას აქვს კომპლექსური სახე იმ დროს, როცა დირიხლეს ამოცანა განიხილება ნამდვილი ფუნქციებისათვის.

მაგრამ ამ უხერხულობასაც ადვილად ავიცილებთ თავიდან. მართლაც, თუ (108,8)-ში გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს ($\mu(t)$-ს ნამდვილად ვთვლით), მივალთ ფრედჰოლმის ორ ნამდვილ, შესაბამისად მეორე და პირველი გვარის განტოლებამდე

$$\mu(s_0) + \int_L M(s_0,\, s_1)\,\mu(s_1)\,ds_1 = F(s_0), \tag{108,11}$$

[29] ეს ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან, და აგრეთვე ბოლოებზე, რადგან $\mu(t)$ ნული ხდება ამ ბოლოებზე.

$$\int_L M_1(s_0, s_1)\,\mu(s_1)\,ds_1 = F_1(s_0), \tag{108,12}$$

სადაც s_0, s_1 t_0 და t_1 წერტილების რკალური აბსცისაა,

$$(M + iM_1)\,ds_1 = \frac{1}{\pi i} N(t_0, t_1)\,dt_1, \quad F + iF_1 = f_0(t_0).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (108,11) განტოლებას ყველა (ნამდვილი) ამონახსნი აგრეთვე იქნება (108,8) განტოლების ამონახსნიც, ე. ი. (108,12) განტოლება წარმოადგენს (108,11) განტოლების შედეგს, ამრიგად გამოსავალი ამოცანა მიიყვანება ფრედჰოლმის ნამდვილი (103,12) განტოლების ამოხსნაზე.

მართლაც, ვთქვათ, μ' (108,11) განტოლების რაიმე ნამდვილი ამონახსნია, μ კი — წინანდებურად (108,8) განტოლების ამონახსნი (აუცილებლად ნამდვილი). მაშინ, ცხადია, $\mu'' = \mu - \mu'$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებას

$$\mu''(s_0) + \int_L M(s_0, s_1)\,\mu''(s_1)\,ds_1 = 0; \tag{**}$$

ადვილი დასანახავია, რომ μ'' ეკუთვნის H კლასს და ისპობა ბოლოებზე.

დავუშვათ ახლა

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu''(t)\,\frac{dr}{r(t_0, t)} = \chi(t_0). \tag{***}$$

თუ წინა ტოლობას რეგულარიზაციის იგივე პროცესს მივუყენებთ, რომლის დახმარებითაც ჩვენ (108,1ა) განტოლებიდან გადავედით (108,8) განტოლებაზე, და მხედველობაში მივიღებთ (**) ტოლობას, მივიღებთ

$$\chi_0(t_0) \equiv -\frac{\sqrt{(t_0 - a)(b - t_0)}}{\pi}\int_L \frac{\chi(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t - t_0)} = i\nu(t_0),$$

სადაც $\nu(t_0)$ H კლასის რაიმე ნამდვილი ფუნქციაა. აქედან (108,4), (108,5) ტოლობების ეკვივალენტობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ

$$\chi(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{i\nu(t)\,dt}{t - t_0} + \text{const};$$

თუ ინტეგრალში გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\chi(t)$ ნამდვილი ფუნქციაა, გვექნება

$$\int_L \nu(t)\,\frac{dr}{r(t_0, t)} = \text{const},$$

საიდანაც გამოდის, რომ $\nu(t) = 0$. მაშასადამე, $\chi(t) = \text{const}$ და, ბოლოს, (***) ტოლობის საფუძველზე $\mu''(t) = 0$, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

მაგალითები. 1. ვთქვათ, ab *წრფის მონაკვეთია*. მაშინ

$$\sin \alpha(t, t_1) = 0, \quad N(t_0, t_1) = 0$$

და, მაშასადამე, (108,8) და (108,10) ტოლობების საფუძველზე

$$\mu(t_0) = -\frac{\sqrt{(t_0 - a)(b - t_0)}}{\pi} \int\limits_L \frac{f(t)\, dt}{\sqrt{(t - a)(b - t)}\,(t - t_0)}. \tag{108,13}$$

2. ვთქვათ, $L = ab$ *წრეწირის რკალია* ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ შემთხვევაში $N(t_0, t_1) = 0$ და ამიტომ $\mu(t)$ *მოიცემა ზუსტად იგივე* (108,13) *ფორმულით, როგორც წრფის მონაკვეთის შემთხვევაში.*

§ 109. დირიხლეს ამოცანა სასრული რაოდენობის ნებისმიერი ფორმის რკალების გასწვრივ გაჭრილი სიბრტყისათვის. § 107-ში განხილული A ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ადვილად განზოგადდეს იმ შემთხვევაზეც, როდესაც L შედგება ნებისმიერი (სასრული) რაოდენობის $L_j = a_j b_j$ რკალისაგან, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილები.

$$L = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p = L_1 + L_2 + \cdots + L_p;$$

ისევე, როგორც § 107-ში, ჩვენ ვთვლით, რომ L_j რკალებს აქვს სიმრუდე, რომელიც აკმაყოფილებს H პირობას, L-წირის გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეს ჩვენ აღვნიშნავთ S-ით.

გარკვეულობისათვის შევჩერდებით დირიხლეს ამოცანაზე ჩვეულებრივი დასმით, ე. ი. შემთხვევაზე, როცა უნდა მოიძებნოს S-ში ჰარმონიული და უსასრულობაში შემოსაზღვრული U ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარჯვნიდან და მარცხნიდან, აგრეთვე ბოლოებზე და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას:

$$U^+ = U^- = f(t_0) \qquad L\text{-ზე}, \tag{109,1}$$

აქ $f(t_0)$ H კლასის მოცემული ნამდვილი ფუნქციაა.

შეკრული კონტურების შემთხვევის ანალოგიურად, დავიწყოთ *დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის* ამოხსნით, ე. ი. უნდა მოიძებნოს S-ში ჰოლომორფული და უსასრულობაში ქრობადი $\Phi(z)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან, ბოლოების ჩათვლით და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\operatorname{Re} \Phi^+(t_0) = \operatorname{Re} \Phi^-(t_0) = f(t_0) + C_k \quad L_k\text{-ზე}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{109,2}$$

სადაც $f(t_0)$ H კლასის მოცემული ფუნქციაა, ხოლო C_k ნამდვილი მუდმივებია, რომლებიც წინასწარ არ არიან მოცემული და აგრეთვე უნდა განისაზღვრონ.

ამ ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ამონახსნი (ადვილი დასანახავია, რომ § 60-ში მოყვანილი დამტკიცება ამ შემთხვევაშიც შეიძლება გამოვიყენოთ). ისევე, როგორც § 107-ში, $\Phi(z)$ ფუნქცია უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z},\tag{109,3}$$

სადაც $\mu(t)$ H კლასის საძიებელი ნამდვილი ფუნქციაა. (109,2) სასაზღვრო პირობებს მივყევართ ინტეგრალურ განტოლებამდე (შდრ. წინა პარაგრაფებს)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\sin(t_0,\,t)\,e^{-i\alpha(t_0,\,t)}\,\mu(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+C_j,\tag{109,4}$$

$$\text{როცა }\ t_0\in L_j,\quad j=1,\ 2,\ldots,\ p,$$

რომელიც შეიცავს C_j განუსაზღვრელ მუდმივებს.

ახლა გავიხსენოთ, რომ § 86-ში ნათქვამის საფუძველზე ამონახსნი ინტეგრალური განტოლებისა

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+C_j,\quad\text{როცა}\quad t_0\in L_j,\ j=1,\ldots,\ p,\tag{109,5}$$

სადაც C_j მუდმივებია, რომლებიც წინასწარ არ არიან ცნობილი, გვეძლევა ფორმულით[30]:

$$\mu(t_0)=-\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi}\int\limits_L\frac{f(t)}{\sqrt{R(t)}}\left\{\frac{1}{t-t_0}+\sum_{j=1}^{p}\omega_j(t)\int\limits_L\frac{dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\,(t_1-t_0)}\right\}dt,\tag{109,6}$$

სადაც $\omega_j(t)$ გარკვეული სახის პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება $p-1$,

$$R(t)=\prod_{j=1}^{p}(t-a_j)\,(t-b_j);\tag{109,7}$$

თუ როგორ უნდა გვესმოდეს რადიკალი $\sqrt{R(t)}$, ამის შესახებ რამდენჯერმე იყო ნათქვამი.

შებრუნების (109,6) ფორმულის დახმარებით, შეგვიძლია, § 108-ის საფუძვლებით ანალოგიურად (109,8) განტოლება მივიყვანოთ ეკვივალენტურ (ამონახსნთა H კლასში მოძებნის აზრით) ფრედჰოლმის განტოლებამდე (რომელიც უკვე არ შეიცავს განუსაზღვრელ C_j მუდმივებს), რომლის ამოწერა ჩვენ ზედმეტად მიგვაჩნია. ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, ადვილი საჩვენებელია, რომ ამგვარად მიღებული ფრედჰოლმის განტოლებას ყოველთვის აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი, რომელიც აუცილებლად ეკუთვნის H კლასს და ბოლოებზე ნული ხდება. ამრიგად დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანა შეიძლება ამოხსნილად ჩაითვალოს.

---

[30] იხ. ფორმულა (88,9).

ამის შემდეგ ადვილად შეიძლება მივიღოთ დირიხლეს (109,1) ამოცანის $U(x, y)$ ამონახსნიც. ამასთან, რა თქმა უნდა, საკმარისია ვიპოვოთ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$U^+ = U^- = f(t_0) + C, \tag{109,1ა}$$

სადაც C რაიმე მუდმივია, რომელიც წინასწარ არ გვეძლევა. ამისათვის შეიძლება, მაგალითად, ასე მოვიქცეთ. დავუშვათ

$$U = u + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j, \tag{109.8}$$

აქ u აღნიშნავს ჰარმონიულ ფუნქციას, წარმოდგენილს შემდეგი სახით:

$$u = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{109,9}$$

ამასთან $\mu(t)$ H კლასის საძიებელი ნამდვილი ფუნქციაა, α_j—ჯერ განუზღვრელი მუდმივები, ხოლო u_j — L_j-ზე განაწილებული მარტივი ფენის პოტენციალები

$$u_j = \int_{L_j} \sigma_j(t) \ln \frac{1}{r}\, ds, \tag{109,10}$$

ამასთან $\sigma_j(t)$-ს ქვეშ იგულისხმება ნებისმიერად შერჩეული ისეთი ნამდვილი ფუნქციები, რომ u_j-ს მნიშვნელობა L-ზე აკმაყოფილებდეს H პირობას[31] და რომ

$$e_j = \int_{L_j} \sigma_j\, ds \neq 0. \tag{109,11}$$

იმისათვის, რომ U ფუნქცია იყოს უსასრულობაში შემოსაზღვრული, α_j მუდმივები უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j = 0 \tag{109,12}$$

მაშინ, ცხადია, U იქნება უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია).

ახლა u განვსაზღვროთ როგორც ამონახსნი დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის სასაზღვრო პირობით

$$u^+ = u^- = f(t) - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j(t) + C_j \quad L\text{-ზე}, \quad j = 1, \ldots, p \tag{109,13}$$

ნებისმიერად ფიქსირებული α_j-სათვის.

---

[31] ამისათვის, როგორც ადვილად ჩანს, საკმარისია, რომ $\sigma_j(t)$ იყოს უწყვეტი; მაგალითად, შეიძლება, ავიღოთ $\sigma_j = 1$. ჩემს სტატიაში [6] არასწორი ხერხით იყო შერჩეული ფუნქციები u_j, რომლებიც ω_j-თი იყო აღნიშნული; ამორჩევის ეს ხერხი ვარგისია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა L შედგება წრფის მონაკვეთებისაგან.

ამ უკანასკნელი ამოცანის ამოხსნისას მივიღებთ C_j მუდმივების განსაზღვრულ მნიშვნელობებს. ისინი, როგორც ადვილად ჩანს, α_j მუდმივების წრფივი ფუნქციები იქნებიან.

ახლა შევარჩიოთ α_j მუდმივები ისე, რომ დაკმაყოფილდეს პირობები

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n$$

და, აგრეთვე, (109,12) პირობა; ეს ყოველთვის შეიძლება გაკეთდეს და ამასთან, ერთადერთი სახით, ვინაიდან (109,12), (109,14) პირობები წარმოადგენს p წრფივ განტოლებათა სისტემას α_j-ს მიმართ, რომელიც, როგორც ადვილი საჩვენებელია, ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია. α_j მუდმივების მითითებული მნიშვნელობებისათვის დირიხლეს ამოცანის ამონახსნი გვეძლევა (109,8) ფორმულით.

III. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები მასში შემავალი კომპლექსურად შეუღლებული უცნობებით

ზემოთ გადმოცემული მეთოდების ანალოგიური მეთოდები შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მიმართაც.

ამ კარში განვიხილავთ ასეთი განტოლებების ერთ-ერთ ტიპს, სახელდობრ, განტოლებებს, რომლებიც უცნობ $\varphi(t)$ ფუნქციასთან ერთად შეიცავენ მის კომპლექსურად შეუღლებულ $\overline{\varphi(t)}$ ფუნქციას. ასეთი განტოლებები უშუალოდ შეიძლება დავიყვანოთ φ, $\overline{\varphi}$ უცნობი ფუნქციების მიმართ ორი სინგულარული განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემაზე, თუ მოცემულ განტოლებას მივუერთებთ მეორე განტოლებას, რომელიც მიიღება მოცემული განტოლებიდან შეუღლებულზე გადასვლით.

მაგრამ არის შემთხვევები, როცა ხსენებული ტიპის განტოლებათა ამონახსნისას გამოიყენება (სათანადოდ სახეშეცვლილი) ზემოთ გადმოცემული ხერხები და საჭირო აღარ არის მოცემული განტოლების მიყვანა სინგულარულ განტოლებათა სისტემაზე. ერთ-ერთი ასეთი შემთხვევა მეტად საინტერესოა გამოყენების თვალსაზრისით და განხილული იქნება ამ კარში.

ჩვენ მაინც მოგვიწევს ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის თეორიაზე დაყრდნობა, მაგრამ ეს იქნება არა სინგულარული განტოლებები, არამედ კარგად ცნობილი ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემები. ასეთი სისტემების ჩვენთვის აუცილებელ თვისებებს ჩვეულებრივი გადმოცემისაგან ცოტა განსხვავებულად მოვიყვანთ § 110-ში.

ამ კარის დანარჩენ პარაგრაფებში (§§ 111 — 114) გადმოცემული შედეგები ძირითადად ეკუთვნის გ. მანჯავიძეს [1]—[3].

§ 110. ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემის შესახებ. ამ პარაგრაფში ჩვენ გავიხსენებთ ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემების თეორიიდან შედეგებს, რომლებიც დაგვჭირდება შემდეგ პარაგრაფებში და აგრეთვე (რამდენადმე სხვა სახით) VI თავში. აქ შემოვიფარგლებით ორი უცნობი ფუნქციის შემცველი ორი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემით, მაგრამ ეს შეზღუდვა არსებითი არ არის.

1°. შევთანხმდეთ ზოგიერთი აღნიშვნებისა და ტერმინების შესახებ, რომლებსაც გამოვიყენებთ უახლოეს პარაგრაფებში.

ჩვენ მოგვიხდება რაიმე t ცვლადის გარკვეული რიგით აღებულ (საზოგადოდ კომპლექსურ) ფუნქციათა წყვილების განხილვა. თუ $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ ასეთი წყვილია, მაშინ მას ვუწოდებთ ვ ე ქ ტ ო რ ს φ_1 და φ_2 კ ო მ პ ო ნ ე ნ ტ ე ბ ი თ: ამ ვექტორს აღვნიშნავთ φ ან $\varphi(t)$-თი და ვწერთ

$$\varphi(t)=(\varphi_1, \varphi_2).$$

$\varphi(t)$ ვექტორი წარმოადგენს t ცვლადის ფუნქციას. ვექტორისაგან განსხვავებით, ჩვეულებრივ ფუნქციას, მაგალითად, φ_1 და φ_2 ჩვენ ხშირად სკალარულ ფუნქციას ან სკალარს ვუწოდებთ. ორი ვექტორი ითვლება ტოლად, თუ მათი კომპონენტები შესაბამისად ტოლია: ორი ვექტორის $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$ და $\psi=(\psi_1, \psi_2)$ $\varphi\psi$ ნამრავლის ქვეშ გვესმის სკალარული ფუნქცია, განსაზღვრული ფორმულით

$$\varphi\psi=\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2,$$

(ასეთ ნამრავლს ხშირად შიგა ნამრავლს უწოდებენ).

ჩვენ ვხედავთ, რომ $\varphi\psi=\psi\varphi$. ვექტორებთან დაკავშირებულ სხვა ელემენტარულ ოპერაციებზე და ცნებებზე (ვექტორების ჯამი, ვექტორის სკალარზე გამრავლება) აღარ შევჩერდებით, რადგან ისინი ცნობილად მიგვაჩნია.

ზოგჯერ მოგვიხდება ისეთი ვექტორების განხილვა, რომლებიც დამოკიდებულია არა ერთ, არამედ ორ ცვლადზე, მაგრამ ეს, რა თქმა უნდა, არაფერს არ ცვლის.

ვთქვათ, ახლა A მეორე რიგის მატრიცაა A_{ij} $(i, j=1, 2)$ კომპონენტებით:

$$A=\|A_{ij}\|=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{Vmatrix}.$$

ჩვენთვის საინტერესოა ის შემთხვევა, როდესაც კომპონენტები ორი t_0, t ცვლადის (სკალარული) ფუნქციებია. ასე რომ, $A_{ij}=A_{ij}(t_0, t)$; ამ შესაბამისობას ზოგჯერ ასე ვწერთ $A=A(t_0, t)$. ჩვენ ცნობილად ვთვლით მატრიცების ელემენტარულ თვისებებს და მასთან დაკავშირებულ ცნებებს. მივუთითებთ მხოლოდ, რომ ორი მატრიცის AB ნამრავლის ქვეშ, როგორც წესი, ვგულისხმობთ მატრიცას $C=\|C_{ij}\|$ $(i, j=1, 2)$ კომპონენტებით $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{2} A_{ik}B_{kj}$, რომლებიც მიიღებიან A მატრიცის სტრიქონების B მატრიცის სვეტებზე გამრავლებით, მატრიცის ტრანსპონირებით მიღებულ მატრიცას აღვნიშნავთ A'-ით, ასე რომ, $A'=\|A'_{ij}\|$, სადაც $A'_{ij}=A_{ji}$.

განვიხილოთ A მატრიცით განსაზღვრული წრფივი ჩასმა:

$$\psi_1=A_{11}\varphi_1+A_{12}\varphi_2,\qquad \psi_2=A_{21}\varphi_1+A_{22}\varphi_2,$$

$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$ ვექტორი გარდაიქმნა $\psi=(\psi_1, \psi_2)$ ვექტორად; ამ ჩასმას ჩვენ ჩავწერთ ასე:

$$\psi=A\varphi.$$

თუ თავის მხრივ $\varphi=B\omega$, სადაც ω რაიმე ვექტორია, ხოლო B — მატრიცი, მაშინ $\psi=C\omega$, სადაც $C=AB$, ასე რომ, $\psi=AB\omega$.

ვთქვათ, ახლა φ და ϕ რაიმე ვექტორებია, ხოლო A და B რაიმე მატრიცები. ψ და $A\varphi$ ვექტორების ნამრავლს ჩვენ ჩავწერთ ასე: $\psi A\varphi$. ადვილად შემოწმდება, რომ

$$\psi A\varphi=\varphi A'\psi,$$

სადაც A' ტრანსპონირებულია A მატრიცის მიმართ. დაბოლოს, რამდენიმე ვექტორის

$$\varphi^1=(\varphi_1^1,\ \varphi_2^1),\quad \varphi^2=(\varphi_1^2,\ \varphi_2^2),\dots,\quad \varphi^\nu=(\varphi_1^\nu,\ \varphi_2^\nu)$$

(ზედა ნიშნით აღვნიშნავთ ვექტორის ნომერს განსხვავებით ქვედა ნიშნისაგან 1, 2, რომელიც აღნიშნავს მოცემული ვექტორის კომპონენტების ნომერს) წრფივი კომბინაციის ქვეშ გვესმის ვექტორი

$$\psi=\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha\varphi^\alpha=C_1\varphi^1+C_2\varphi^2+\cdots+C_\nu\varphi^\nu,$$

სადაც C_α საზოგადოდ კომპლექსური მუდმივებია, ე. ი., ვექტორი $\psi=(\psi_1,\ \psi_2)$

$$\psi_1=\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha\varphi_1^\alpha,\qquad \psi_2=\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha\varphi_2^\alpha\ \text{ კომპონენტებით.}$$

ამის შესაბამისად განიმარტება ვექტორების წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა. სახელდობრ, განსახილველი ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, თუ არსებობს C_α მუდმივები, რომელთაგან ყველა არ არის ნული და რომელთათვისაც სრულდება პირობა

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha\varphi^\alpha=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha\varphi_1^\alpha=0,\qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha\varphi_2^\alpha=0$$

ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელზედაც დამოკიდებულია განსახილველი ვექტორები. წინააღმდეგ შემთხვევაში φ^α ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

2°. გამეორებების თავიდან ასაცილებლად შევთანხმდეთ, რომ აქ მოგვიწევს ისეთი ფუნქციების განხილვა, რომლებიც დამოკიდებულია ერთ ან ორ ცვლადზე, ვთქვათ, t_0, t-ზე, ამასთან t_0, t აღნიშნავს უბან-უბან გლუვი L წირის წერტილებს. ჩვენ ვუშვებთ, რომ აქ განსახილველი ყველა ფუნქცია შემოსაზღვრულია და, ამის გარდა, უწყვეტია t_0, t ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა, შესაძლებელია, იმ მნიშვნელობებისა, რომლებიც შეესაბამებიან L წირის კვანძებს; განსახილველი ფუნქციები კვანძებში შეიძლება საერთოდ არ იყოს განსაზღვრული.

იგივე ითქმის ვექტორებისა და მატრიცების მიმართაც. ვიტყვით, რომ ვექტორი ან მატრიცი შემოსაზღვრულია, უწყვეტია და ა. შ. თუ მათი კომპონენტები შემოსაზღვრულია, უწყვეტია და ა. შ.

3°. განვიხილოთ ორი განტოლებისაგან შედგენილი ორი უცნობი ფუნქციის შემცველი ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლებათა ნორმალური სისტემა

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t_0)+\int_L n_{11}(t_0,\ t)\,\varphi_1(t)\,dt+\int_L n_{12}(t_0,\ t)\,\varphi_2(t)\,dt=f_1(t_0),\\ &\varphi_2(t_0)+\int_L n_{21}(t_0,\ t)\,\varphi_1(t)\,dt+\int_L n_{22}(t_0,\ t)\,\varphi_2(t)\,dt=f_2(t_0), \end{aligned} \tag{110,1}$$

სადაც L მოცემული უბან-უბან გლუვი წირია, t_0, t ამ წირის წერტილებია, $n_{ij}(t_0,\ t)$ და $f_1(t_0)$, $f_2(t_0)$ მოცემული ფუნქციებია; განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს t_0-ის ყველა მნიშვნელობებისათვის, გარდა შესაძლებელია, შესაბამისი კვანძებისა.

1°. პუნქტში მითითებული აღნიშვნების გამოყენებით (110,1) სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\varphi(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{110,2}$$

სადაც $\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2)$ — უცნობი, ხოლო $f(t)=(f_1,\ f_2)$ მოცემული ვექტორებია, $n(t_0,\ t)$ აღნიშნავს მოცემულ მატრიცს

$$n(t_0,\ t)=\|n_{ij}(t_0,\ t)\|=\begin{Vmatrix} n_{11}(t_0,\ t) & n_{12}(t_0,\ t)\\ n_{21}(t_0,\ t) & n_{22}(t_0,\ t)\end{Vmatrix}, \tag{110,3}$$

რომელსაც ვუწოდებთ (110, 2) განტოლების ან (110,1) სისტემის გულს. როგორც ვხედავთ, ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ ერთი განტოლების სახით, რომელსაც ვექტორულს ვუწოდებთ (რადგანაც ამ განტოლების ორივე მხარე ვექტორს წარმოადგენს); ეს განტოლება გარეგნული სახით არ განსხვავდება ფრედჰოლმის ჩვეულებრივი განტოლებისაგან ერთი უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში, რომელსაც ჩვენ ახლა სკალარულს ვუწოდებთ. ეს მსგავსება მხოლოდ გარეგნული არ არის: (110,2) განტოლების მიმართ, რომელიც ცვლის (110,1) სისტემას, შეიძლება თითქმის უცვლელად გავიმეოროთ, ყველაფერი ის, რაც კი ცნობილია ფრედჰოლმის ჩვეულებრივი (სკალარული) განტოლების შესახებ. ამიტომ (110,2) სახის ვექტორულ განტოლებებს აგრეთვე ფრედჰოლმის განტოლებებს ვუწოდებთ.

აქ გავიხსენებთ იმ ძირითად დებულებებს, რომლებითაც უნდა ვისარგებლოთ შემდგომში.

ვთქვათ, $\mathbf{N}$ ოპერატორია, განსაზღვრული ფორმულით:

$$\mathbf{N}\varphi\equiv\varphi(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{110,4}$$

მაშინ (110,2) განტოლება ჩაიწერება ასეთი სახით $N\varphi = f(t_0)$.

$$N'\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L n'(t, t_0)\,\psi(t)\,dt \tag{110,5}$$

ფორმულით განსაზღვრულ ოპერატორს N ოპერატორის მ ი კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ს ვუწოდებთ. ეს ოპერატორი მიიღება N ოპერატორიდან $n(t_0, t)$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცით შეცვლით და t_0 და t ცვლადების გადანაცვლებით. $N'\psi = g(t_0)$ განტოლებას ვუწოდებთ $N\varphi = f(t_0)$ განტოლების მ ი კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ს, როგორიც არ უნდა იყოს მათი მარჯვენა მხარეები $f(t_0)$ და $g(t_0)$; გაგახსენებთ, რომ მარჯვენა მხარეები ისევე, როგორც მარცხენა მხარეები, ვექტორებია. $N'\psi = g$ ვექტორული განტოლების შესაბამის განტოლებათა სისტემას[32] (110,1) სისტემის მიკავშირებული ეწოდება.

ადვილად შემოწმდება, რომ თუ $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ორი ნებისმიერი ვექტორია, რომლებიც t ცვლადის ფუნქციებს წარმოადგენენ, მაშინ

$$\int_L \psi(t)\,N\varphi(t)\,dt = \int_L \varphi(t)\,N'\psi(t)\,dt. \tag{110,6}$$

ამ შემთხვევაშიც ადგილი აქვს დებულებებს, რომლებიც სავსებით ანალოგიურია ფრედჰოლმის ერთი სკალარული განტოლების შემთხვევაში მოყვანილი დებულებისა: $N\varphi = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა მხოლოდ სასრული რიცხვი, და ამდენივე ამონახსნი აქვს $N'\psi = 0$ მიკავშირებულ განტოლებასაც.

თუ ერთგვაროვან $N\varphi = 0$ განტოლებას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, მაშინ $N\varphi = f$ განტოლება ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი f მარჯვენა მხარისათვის. თუკი ერთგვაროვან $N\varphi = 0$ განტოლებას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები, მაშინ $N\varphi = f$ განტოლება ამოხსნადია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დაცულია პირობები

$$\int_L f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{110,7}$$

სადაც $\psi^{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$ $N'\psi = 0$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა. გავიხსენოთ, რომ $f(t)\,\psi^{\alpha}(t)$ არის $f(t) = (f_1, f_2)$ და $\psi^{\alpha}(t) = (\psi_1^{\alpha}, \psi_2^{\alpha})$ ვექტორების ნამრავლი, ასე რომ, $f(t)\,\psi^{\alpha}(t) = f_1(t)\,\psi_1^{\alpha}(t) + f_2(t)\,\psi_2^{\alpha}(t)$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\nu = 0$, ე. ი. როცა ერთგვაროვან განტოლებას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები არ გააჩნია, არსებობს მატრიცი

$$\gamma(t_0, t) = \|\gamma_{ij}(t_0, t)\| = \begin{Vmatrix} \gamma_{11}(t_0, t) & \gamma_{12}(t_0, t) \\ \gamma_{21}(t_0, t) & \gamma_{22}(t_0, t) \end{Vmatrix}, \tag{110,8}$$

---

[32] იგივე აზრით, როგორც (110,1) სისტემა შეესაბამება (110,2) განტოლებას.

რომელსაც ეწოდება (110,2) განტოლების ან (110,1) სისტემის რ ე ზ ო ლ ვ ე ნ ტ ა, რომლითაც ამ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი გამოისახება ასე:

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma(t_0,\ t)\, f(t)\, dt \tag{110,9}$$

ან, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2)$, $f(t)=(f_1,\ f_2)$, გაშლილი სახით

$$\varphi_1(t_0)=f_1(t_0)+\int_L \gamma_{11}(t_0,\ t)\, f_1(t)\, dt+\int_L \gamma_{12}(t_0,\ t)\, f_2(t)\, dt,$$

(110,9 ა)

$$\varphi_2(t_0)=f_2(t_0)+\int_L \gamma_{21}(t_0,\ t)\, f_1(t)\, dt+\int_L \gamma_{22}(t_0,\ t)\, f_2(t)\, dt,$$

$\gamma'(t,\ t_0)$ მატრიცა, რომელიც მიიღება $\gamma(t_0,t)$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიციდან t_0, t ცვლადების გადანაცვლებით, მიკავშირებული $N'\psi=g$ განტოლების რეზოლვენტას წარმოადგენს. ასე რომ, ამ განტოლების ამონახსნი გვეძლევა ფორმულით

$$\psi(t_0)=g(t_0)+\int_L \gamma'(t,\ t_0)\, g(t)\, dt. \tag{110,10}$$

ამ დებულებების დამტკიცება შეიძლება მივიღოთ, მაგალითად, თვით ფრედჰოლმის მიერ ნაჩვენები მარტივი ხერხის დახმარებით, რომლითაც განსახილველი (110,1) სისტემა მიიყვანება ერთ ჩვეულებრივ (სკალარულ) განტოლებაზე (ინტეგრების წირით, რომელიც შედგება L წირის ორი ეგზემპლარისაგან); ეს ხერხი კარგად ცნობილია[33] და ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით.

4°. როცა $\nu>0$, ე. ი. $N\varphi=0$ და $N'\psi=0$ ერთგვაროვან განტოლებებს არანულოვანი ამონახსნები აქვს, ისევე როგორც ანალოგიურ შემთხვევაში ფრედჰოლმის ერთი განტოლებისათვის (შდრ. § 52 და § 101, პ. 1°), არსებობს განზოგადებული რეზოლვენტა, რომელსაც ჩვენ ისევ $\gamma(t_0,t)$-თი აღვნიშნავთ. $\gamma(t_0,t)$-ს აქვს ის თვისება, რომ (110,9) ფორმულით განსაზღვრული $\varphi(t_0)$ ვექტორი წარმოადგენს (110,2) განტოლების ამონახსნს (უფრო სწორად ერთ-ერთ ამონახსნს) მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია (110,7) პირობა. ეს განზოგადებული რეზოლვენტა შეიძლება აიგოს ერთი განტოლების შემთხვევაში განზოგადებული რეზოლვენტის აგების ანალოგიურად (§ 52, და § 101, პ. 1°).

მართლაც, ვთქვათ

$$\varphi^\alpha(t)=(\varphi_1^\alpha,\ \varphi_2^\alpha) \text{ და } \psi^\alpha(t)=(\psi_1^\alpha,\ \psi_2^\alpha),\ \alpha=1,\dots,\nu \tag{110,11}$$

წარმოადგენს $N\varphi=0$ და $N^0\psi=0$ განტოლებათა ამონახსნების წრფივად დამოუკიდებელ სრულ სისტემებს. ვთქვათ,

$$\xi^\alpha(t)=(\xi_1^\alpha,\ \xi_2^\alpha) \text{ და } \eta^\alpha(t)=(\eta_1^\alpha,\ \eta_2^\alpha),\ \alpha=1,2,\dots,\nu \tag{110,12}$$

[33] იხ., მაგალითად, ვ. სმირნოვი [4], ტ. IV, § 14; É. Goursat [1], n°. 562.

ვექტორთა ორი სისტემა (t ცვლადის ფუნქციები) ისეთი, რომ

$$\int_L \varphi^\alpha(t)\, \xi^\beta(t)\, dt = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \int_L \psi^\alpha(t)\, \eta^\beta(t)\, dt = \delta_{\alpha\beta}, \tag{110,13}$$

სადაც $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$, როცა $\alpha \neq \beta$. ვექტორთა ასეთი ორი სისტემა ყოველთვის შეგვიძლია ავაგოთ, ამასთან, უამრავი ხერხით; კერძოდ შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ ამ ვექტორების კომპონენტები ეკუთვნოდეს H კლასს L-ზე[34].

შემდეგ შევადგინოთ მატრიცები

$$n^\alpha(t_0, t) = \|\eta_i^\alpha(t_0)\, \xi_i^\alpha(t)\| = \begin{Vmatrix} \eta_1^\alpha(t_0)\, \xi_1^\alpha(t), & \eta_1^\alpha(t_0)\, \xi_2^\alpha(t) \\ \eta_2^\alpha(t_0)\, \xi_1^\alpha(t); & \eta_2^\alpha(t_0)\, \xi_2^\alpha(t) \end{Vmatrix} \tag{110,14}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$$

თუ $\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2)$ რაიმე ვექტორია, მაშინ $n^\alpha(t_0, t)\, \varphi(t)$ აგრეთვე ვექტორია $\eta_1^\alpha(t_0)[\xi_1^\alpha(t)\, \varphi_1(t) + \xi_2^\alpha(t)\, \varphi_2(t)]$ და $\eta_2^\alpha(t_0)\, [\xi_1^\alpha(t)\, \varphi_1(t) + \xi_2^\alpha(t)\, \varphi_2(t)]$ კომპონენტებით, ე. ი. ვექტორი, რომელიც მიიღება $\eta^\alpha(t_0) = (\eta_1^\alpha, \eta_2^\alpha)$ ვექტორის $\xi^\alpha \varphi(t)$ სკალარულ ფუნქციაზე გამრავლებით. ამგვარად,

$$n^\alpha(t_0, t)\, \varphi(t) = [\xi^\alpha(t)\, \varphi(t)]\, \eta^\alpha(t_0). \tag{110,15}$$

ახლა, (110,2) ინტეგრალური განტოლების ნაცვლად, განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალური განტოლება:

$$M\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int_L m(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt = f(t_0), \tag{110,16}$$

რომელიც (110,2) განტოლებისაგან იმით განსხვავდება, რომ გული შეცვლილია

$$m(t_0, t) = n(t_0, t) + \sum_{\alpha=1}^{n} n^\alpha(t_0, t) \tag{110,17}$$

გულით. წინას საფუძველზე, ადვილად ვხედავთ, რომ

$$M\varphi(t_0) = N\varphi(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha\, \eta^\alpha(t_0),$$

სადაც

$$a_\alpha = \int_L \xi^\alpha(t)\, \varphi(t)\, dt, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu.$$

ამის შედეგად ანალოგია § 52-ში განხილულ შემთხვევასთან იმდენად მთლიანი ხდება, რომ შეიძლება დამტკიცებაზე აღარ შევჩერდეთ, რაც § 52-ში ნათქვამის სიტყვა-სიტყვით განმეორება იქნებოდა, და ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი საბოლოო შედეგები.

[34] იხილეთ წიგნის ბოლოში III დანართი, სადაც ლაპარაკია არა ვექტორებზე, არამედ სკალარულ ფუნქციებზე, მაგრამ შედეგი და მსჯელობები ყოველგვარი ცვლილების გარეშე შეიძლება გადავიტანოთ ჩვენს შემთხვევაზე.

(110,10) განტოლების შესაბამის $M\varphi=0$ ერთგვაროვან განტოლებას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი; ამიტომ (110,16) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია ყოველი მარჯვენა $f(t)$ მხარისათვის, (110,16) განტოლების ამონახსნი ამავე დროს წარმოადგენს (110,2) განტოლების ამონახსნს (უფრო ზუსტად, ერთ-ერთ ამონახსნს). თუ $f(t)$ აკმაყოფილებს (110,2) განტოლების ამოხსნადობის (110,7) (აუცილებელ და საკმარის) პირობებს.

(110,2) განტოლების ზოგად ამონახსნს მივიღებთ, თუ ზემოთ ხსენებულ ამონახსნს დავუმატებთ (110,2) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების φ^{α}, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$ ამონახსნების წრფივ კომბინაციას.

(110,16) განტოლების რეზოლვენტა $\gamma(t_0, t)$ წარმოადგენს განზოგადებულ რეზოლვენტას (110,2) განტოლებისათვის.

ისევე, როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში, (110,16) განტოლების რეზოლვენტა აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობებს (ამ შემთხვევაში მატრიცულს), რომლებიც სავსებით ანალოგიურია § 101, პ. 1°-ის (D) და (D') თანაფარდობებისა:

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L m(t_0, t_1)\,\gamma(t_1, t)\,dt_1,$$

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L \gamma(t_0, t_1)\,m(t_1, t)\,dt_1. \qquad (110,18)$$

ჩვენს შემთხვევაში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი თანამამრავლების რიგის შეცვლა არ შეიძლება.

$\gamma'(t_0, t)$ მატრიცი წარმოადგენს (110,16) განტოლების მიკავშირებული განტოლების რეზოლვენტას და (110,2) განტოლების მიკავშირებული განტოლების განზოგადებულ რეზოლვენტას. (110.18) თანაფარდობის ანალოგიური თანაფარდობა, შედგენილი $\gamma'(t, t_0)$ რეზოლვენტისათვის, ახალს არაფერს გვაძლევს: ისინი მიიღებიან (110,18) თანაფარდობებიდან ტრანსპონირებულზე გადასვლით.

§ 111. ფრედჰოლმის ტიპის ერთი ინტეგრალური განტოლების შესახებ. ახლა განვიხილოთ შემდეგი (სკალარული) განტოლება:

$$\mathrm{N}\varphi \equiv \varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{n_2(t_0, t)}\;\overline{\varphi(t)}\;\overline{dt}=f(t_0), \qquad (111,1)$$

სადაც L უბან-უბან გლუვი წირია, $n_1(t_0, t)$, $n_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ L წირის t_0, t წერტილის მოცემული ფუნქციებია, $\varphi(t)$ კი საძიებელი ფუნქციაა[35].

ამ პარაგრაფში განსახილველი ფუნქციების მიმართ იგივე პირობებს ვდებთ, რასაც წინა პარაგრაფში (პ. 2°).

(111,1) განტოლებას ჩვენ ფრედჰოლმის ტიპის განტოლებებს მივაკუთვნებთ, რადგანაც, როგორც ახლა ვაჩვენებთ, მისი თეორია უშუალოდ დაიყვანება ამ უკანასკნელთა თეორიაზე.

[35] (111,1) ფორმულაში N ოპერატორი იგივე არ არის, რაც წინა პარაგრაფში განხილული N ოპერატორი.

აქვე ამოვიწეროთ წინას შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება, რადგანაც ხშირად მოგვიხდება მასზე მითითება:

$$\mathrm{N}\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int_L n_1(t_0, t)\varphi(t)\,dt + \int_L \overline{n_2(t_0, t)\varphi(t)\,dt} = 0. \qquad (111,1^\circ)$$

აღვნიშნოთ, რომ წინა ფორმულის მეორე ინტეგრალში

$$\overline{dt} = \frac{dt}{t'^2} = \overline{t}'^2\,dt,$$

სადაც $t' = \frac{dt}{ds}$; როგორც ყოველთვის, s-ით აღნიშნულია L წირის რკალური აბსცისა [36].

(111,1) განტოლების *მიკავშირებულ განტოლებას* ვუწოდებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\mathrm{N}'\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L n_1(t, t_0)\psi(t)\,dt + \int_L n_2(t, t_0)\overline{\psi(t)\,dt} = 0, \qquad (111,2)$$

სადაც $\psi(t)$ და $g(t)$ საძიებელი და მოცემული ფუნქციებია. აქვე ამოვწეროთ (111,2) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathrm{N}' \equiv \psi(t_0) + \int_L n_1(t, t_0)\psi(t)\,dt + \int_L n_2(t, t_0)\overline{\psi(t)\,dt} = 0. \qquad (111,2^\circ)$$

N და N′ ოპერატორებს ჩვენ მიკავშირებულს ვუწოდებთ. მიკავშირებული ოპერატორების ასეთი განმარტების მიზანშეწონილობა ცხადი ხდება შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$\mathrm{Re}\int_L \psi(t)\,\mathrm{N}\varphi(t)\,dt = \mathrm{Re}\int_L \varphi(t)\,\mathrm{N}'\psi(t)\,dt. \qquad (111,3)$$

ნებისმიერი ორი $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ფუნქციისათვის ამ ტოლობის სამართლიანობის უშუალოდ შემოწმება ადვილია [37].

---

[36] აღნიშვნების შეცვლის საშუალებით შეგვიძლია (111,1) და (111,1°) ფორმულებში მეორე ინტეგრალი დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int_L n_2(t_0, t)\overline{\varphi(t)}\,dt,$$

მაგრამ ტექსტში მიღებულ აღნიშვნებს, აღებულს გ. მანჯავიძის ნაშრომიდან [3], უფრო სიმეტრიულ ფორმულებამდე მივყავართ.

[37] იმ შემთხვევაში, როცა $n_2(t_0, t) = 0$, ე. ი. როდესაც საქმე გვაქვს ფრედჰოლმის ჩვეულებრივ განტოლებასთან, (111,3) ფორმულა ეკვივალენტურია ცნობილი ფორმულისა

$$\int_L \psi(t)\,\mathrm{N}\varphi(t)\,dt = \int_L \varphi(t)\,\mathrm{N}'\psi(t)\,dt. \qquad (*)$$

მართლაც, განსახილველ შემთხვევაში $\mathrm{N}\,i\varphi = i\mathrm{N}\varphi$, ამიტომ თუ (111,3) ფორმულაში $\varphi(t)$ შევცვლით $i\varphi(t)$ და მიღებულს შევადარებთ (111,3) ფორმულას, მივიღებთ (*) ფორმულას.

ახლა (111.1) განტოლებას მივუერთოთ შეუღლებულ მნიშვნელობებზე გადასვლით მიღებული მეორე განტოლება და ორივე განტოლებაში $\overline{\varphi(t)}$-ს მაგივრად დავწეროთ $\varphi^*(t)$. მივიღებთ ორგანტოლებიან სისტემას

$$\varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0, t)\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_2(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt=f(t_0),$$

$$\varphi^*(t_0)+\int_L n_2(t_0, t)\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_1(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt=\overline{f(t_0)}. \qquad (111.4)$$

წინა სისტემა, ცხადია, (111,1) განტოლების ეკვივალენტური იქნება, თუ მოვითხოვთ დამატებით პირობას იმის შესახებ, φ და φ^* საძიებელი ფუნქციები კომპლექსურად შეუღლებული იყვნენ, ე. ი.

$$\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}. \qquad (111,5)$$

მაგრამ ჯერჯერობით ჩვენ ამ პირობას არ დავსვამთ. $\varphi(t)$ და $\varphi^*(t)$ განვიხილავთ როგორც ორ დამოუკიდებელ უცნობ ფუნქციას, რომლებიც აკმაყოფილებენ (111,4) განტოლებათა სისტემას, მაშინ ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ჩვეულებრივ ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიძლება ერთი ვექტორული განტოლების სახით ჩაიწეროს (იხ. წინა პარაგრაფი)

$$\Phi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\,\Phi(t)\,dt=F(t_0), \qquad (111,6)$$

სადაც

$$\Phi(t)=(\varphi, \varphi^*), \quad F(t)=(f, \overline{f})$$

შესაბამისად საძიებელი და მოცემული ვექტორებია, ხოლო

$$n(t_0, t)=\begin{Vmatrix} n_1(t_0, t) & \overline{t'^2 n_2(t_0, t)} \\ n_2(t_0, t) & \overline{t'^2 n_1(t_0, t)} \end{Vmatrix} \qquad (111,7)$$

მოცემული მატრიცა (111,6 განტოლების გული).

(111,4) სისტემასთან ან (111,6) განტოლებასთან ერთად ჩვენ მოგვიწევს განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა

$$\varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0, t)\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_2(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt=0,$$

$$\varphi^*(t_0)+\int_L n_2(t_0, t)\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_1(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt=0 \qquad (111.4^\circ)$$

ან განტოლება

$$\Phi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\,\Phi(t)\,dt=0. \qquad (111,6^\circ)$$

(111,1) განტოლების (ან 111,6° განტოლების) მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება იქნება (იხ. წინა პარაგრაფი)

$$\chi(t_0) + \int\limits_L n'(t, t_0)\,\chi(t)\,dt = 0, \tag{111,8}$$

სადაც $\chi(t)$ საძიებელი ვექტორია, ხოლო

$$n'(t, t_0) = \left\| \frac{n_1(t, t_0)}{t_0'^2\, n_2(t, t_0)} \quad \frac{n_2(t, t_0)}{t_0'^2\, n_1(t, t_0)} \right\|; \tag{111,9}$$

t_0' არის $t' = \frac{dt}{ds}$-ის მნიშვნელობა, როცა $t = t_0$.

$\chi(t)$ ვექტორის კომპონენტები შესაბამისად აღვნიშნოთ $\psi(t)$ და $\overline{t'^2}\,\psi^*(t)$-ით; ასე რომ,

$$\chi(t) = (\psi,\ \overline{t'^2}\,\psi^*) \tag{111,10}$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Psi(t) = (\psi,\ \psi^*). \tag{111,11}$$

მაშინ, როგორც ადვილად ჩანს, (111,8) განტოლება დაიყვანება შემდეგ განტოლებაზე:

$$\Psi(t_0) + \int\limits_L n_0'(t_0, t)\,\Psi(t)\,dt = 0, \tag{111,12}$$

სადაც

$$n_0'(t, t_0) = \left\| \begin{matrix} n_1(t, t_0) & \overline{t'^2}\, n_2(t, t_0) \\ \overline{n_2(t, t_0)} & \overline{t'^2\, n_1(t, t_0)} \end{matrix} \right\|. \tag{111,13}$$

(111,12) განტოლება ზუსტად ისევეა დაკავშირებული (111,1) განტოლების მიკავშირებულ (111,2°) განტოლებასთან, როგორც (111,6°) განტოლება (111,1°) განტოლებასთან.

2°. დავუბრუნდეთ (111,1) განტოლებას და მის შესაბამის (111,4) სისტემას და ვაჩვენოთ, რომ (111,1) განტოლების ამონახსნებიდან შეიძლება (111,4) სისტემის ამონახსნების უშუალოდ მიღება და, პირიქით.

დავიწყოთ იქიდან, რომ აღვნიშნოთ (111,1) განტოლებას და (111,4) სისტემის ან, რაც იგივეა, (111,6) ვექტორული განტოლების (რომელზედაც მიიყვანება აღნიშნული განტოლება) ამონახსნთა ზოგიერთი, თითქმის ცხადი, თვისება. სახელდობრ, ცხადია, რომ თუ $\varphi(t)$ (111,1) განტოლების ამონახსნია, $\Phi(t) = (\varphi, \overline{\varphi})$ ვექტორი იქნება (111,6) განტოლების ამონახსნი. შემდეგ, თუ $\Phi(t) = (\varphi, \varphi^*)$ ვექტორი არის (111,6) განტოლების ამონახსნი, მაშინ $\widetilde{\Phi} = (\overline{\varphi^*}, \overline{\varphi})$ ვექტორიც აგრეთვე ამავე განტოლების ამონახსნი იქნება, და ასევე, ვექტორი

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}\,[\Phi(t) + \widetilde{\Phi}(t)] = (\omega,\ \overline{\omega}),$$

სადაც

$$\omega = \omega(t) = \frac{1}{2}\,[\varphi(t) + \overline{\varphi^*(t)}].$$

რადგანაც $\Omega=(\omega, \bar{\omega})$ ვექტორის კომპონენტები კომპლექსურად შეუღლებულია, ამიტომ $\omega=\omega(t)$ ფუნქცია (111,1) განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს.

3°. ახლა განვიხილოთ (111,1°) ერთგვაროვანი განტოლება და მისი შესაბამისი (111,4°) სისტემა ან, რაც იგივეა, (111,6°) განტოლება.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ შემდეგი. თუ $\varphi(t)$ არის (111,1°) განტოლების ამონახსნი, მაშინ $C\varphi(t)$, სადაც C ნამდვილი მუდმივაა, ასევე არის ამონახსნი; როცა C კომპლექსურია, ამას, საერთოდ, არა აქვს ადგილი.

ამიტომ შემდეგში (111,1°) განტოლების ამონახსნთა წრფივი კომბინაციის ქვეშ ვიგულისხმებთ წრფივ კომბინაციას ნამდვილი კოეფიციენტებით; ამის შესაბამისად გავიგებთ ამონახსნთა წრფივად დამოკიდებულებასა და დამოუკიდებლობას.

გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად, ამ შემთხვევაში ზოგჯერ ლაპარაკი გვექნება წრფივი კომბინაციისა და წრფივად დამოკიდებულების ან დამოუკიდებლობის შესახებ ვიწრო გაგებით.

(111,6°) განტოლების ამონახსნებთან დაკავშირებით კი წრფივი კომბინაცია, წინანდებურად, ჩვეულებრივი აზრით, გვესმის (ე. ი. დასაშვებია კომპლექსური კოეფიციენტები) და ამის შესაბამისად გვესმის წრფივად დამოკიდებულება ან დამოუკიდებლობაც.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ (111,1°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა რიცხვი (111,6°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ჩვეულებრივი აზრით) ამონახსნთა რიცხვის ტოლია.

ვთქვათ, (111,1°) განტოლებას აქვს ν წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი φ^{α} $(\alpha=1,\ldots,\nu)$, მაშინ (111,6) განტოლებასაც აქვს ამონახსნი $\Phi^{\alpha}=(\varphi^{\alpha}, \bar{\varphi}^{\alpha})$; ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია ჩვეულებრივი აზრით. მართლაც, თუ

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_{\alpha} \Phi^{\alpha}(t)=0,$$

სადაც C_{α} კომპლექსური მუდმივებია, ე. ი. თუ

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_{\alpha} \varphi^{\alpha}(t)=0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_{\alpha} \overline{\varphi^{\alpha}(t)}=0,$$

მაშინ, მეორე ტოლობაში კომპლექსურად შეუღლებულ მნიშვნელობებზე გადასვლით და პირველთან შეკრებით, მივიღებთ, რომ ნამდვილი სიდიდეები $C_{\alpha}+\bar{C}_{\alpha}$, $\varphi^{\alpha}(t)$ ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობის ძალით (ვიწრო გაგებით) ნულის ტოლია; ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $C_{\alpha}-\bar{C}_{\alpha}=0$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ყველა C_{α} ნულის ტოლია. მაშასადამე, თუ (111,6°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ჩვეულებრივი აზრით) ამონახსნთა რიცხვი არის μ, მაშინ $\nu \leqslant \mu$.

ვთქვათ, ახლა

$$\Phi^{\alpha}(t)=(\varphi^{\alpha},\ \varphi^{*\alpha}),\quad \alpha=1,\ 2,\ldots,\ \mu,$$

(111,6°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი (ჩვეულებრივი აზრით) ამონახსნებია. ვაჩვენოთ, რომ ამ ამონახსნების საშუალებით შეიძლება შევადგინოთ (111,1°) განტოლების ამდენივე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი (ვიწრო გაგებით).

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ

$$\tilde{\Phi}^{\alpha}(t) = (\overline{\varphi^{*\alpha}},\ \overline{\varphi^{\alpha}}),\quad \alpha=1,\ 2,\ldots,\ \mu$$

ვექტორი აგრეთვე (111,6°) განტოლების ამონახსნებია. ამიტომ ისინი წარმოადგენენ $\Phi^{\alpha}(t)$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას, ე. ი.

$$\tilde{\Phi}^{\alpha}(t)=\sum_{\beta=1}^{\mu} C_{\alpha\beta}\,\Phi^{\beta}(t),\quad \alpha=1,\ 2,\ldots,\ \mu. \tag{*}$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ ვექტორები კომპლექსურად შეუღლებული კომპონენტებით

$$\Omega^{\alpha}(t)=k\tilde{\Phi}^{\alpha}(t)+\bar{k}\Phi^{\alpha}(t)=(\omega^{\alpha},\ \overline{\omega^{\alpha}}), \tag{**}$$

სადაც k ნებისმიერი, ნულისაგან განსხვავებული, მუდმივია, ხოლო

$$\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}(t)=k\overline{\varphi^{*\alpha}}+\bar{k}\varphi^{\alpha},\quad \alpha=1,\ 2,\ldots,\ \mu,$$

აგრეთვე წარმოადგენს (111,6°) განტოლების ამონახსნებს. ამიტომ ω^{α} ფუნქციები (111,1°) განტოლების ამონახსნებია. k მუდმივი ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისე, რომ ω^{α} ფუნქციები იყოს წრფივად დამოუკიდებელი (ვიწრო აზრით). მართლაც, თუ ω^{α}, $\alpha=1,\ 2,\ldots,\ \mu$ ფუნქციები შებმული არის ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი თანაფარდობით, რომელთაგან ყველა არ უდრის ნულს, მაშინ ასეთივე თანაფარდობით (იგივე კოეფიციენტებით) არის შებმული $\overline{\omega^{\alpha}(t)}$ ფუნქციებიც, ასე რომ, ამ შემთხვევაში Ω^{α} ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ დეტერმინანტი წრფივი გარდაქმნისა, რომელიც აკავშირებს Ω^{α} ვექტორებს Φ^{α} ვექტორებთან და რომელიც (*) და (**) ფორმულების ძალით ტოლია

$$\begin{vmatrix} kC_{11}+\bar{k} & kC_{12} & \cdots kC_{1\mu} \\ kC_{21} & kC_{22}+\bar{k} & \cdots kC_{2\mu} \\ \cdot & & \\ kC_{\mu 1} & kC_{\mu 2} & \cdots kC_{\mu\mu}+\bar{k} \end{vmatrix} = k^{\mu} \begin{vmatrix} C_{11}+\varepsilon, & C_{12} & \cdots C_{1\mu} \\ C_{21} & C_{22}+\varepsilon & \cdots C_{2\mu} \\ & & \\ C_{\mu 1} & C_{\mu 2} & \cdots C_{\mu\mu}+\varepsilon \end{vmatrix},$$

სადაც $\varepsilon=\dfrac{\bar{k}}{k}$, ტოლი უნდა იყოს ნულისა. მაგრამ, ცხადია, ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ k ისე, რომ ეს დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებული იყოს. k-ს ასეთი მნიშვნელობებისათვის $\omega^{\alpha}(t)$, $\alpha=1,\ 2,\ldots,\ \mu$, ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია (ვიწრო აზრით), აქედან გამომდინარეობს, რომ, კერძოდ, $\mu\leqslant\nu$,

ეს კი ზემოთ მიღებულ უტოლობასთან ერთად გვიჩვენებს, რომ $\mu=\nu$, და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია[38].

ამასთან ერთად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ, თუ მოძებნილია (111,6°) ფრედჰოლმის ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ჩვეულებრივი აზრით) ამონახსნთა რაიმე სრული სისტემა $(\varphi^{\alpha}, \varphi^{*\alpha})$, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$, ჩვენ შეგვიძლია მაშინვე ავაგოთ ამავე განტოლების ამონახსნთა ისეთი სრული სისტემა, რომელშიც $\overline{\varphi^{*\alpha}}=\varphi^{\alpha}$, ე. ი. $(\varphi^{\alpha}, \overline{\varphi^{\alpha}})$, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$, სახის სისტემა და ვიპოვოთ (111,1°) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა სრული სისტემა φ^{α}, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$. პირიქით, თუ გვაქვს $N\varphi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა φ^{α} სრული სისტემა, გვექნება (111,6°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ჩვეულებრივი აზრით) ამონახსნთა $(\varphi^{\alpha}, \overline{\varphi^{\alpha}})$ სრული სისტემა.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ შევძლებთ (111,6) ფრედჰოლმის განტოლების ან, რაც იგივეა, (111,4) სისტემის ამოხსნა, მაშინ შეგვიძლია (111,1) განტოლების ამოხსნაც და, პირიქით.

დავუბრუნდეთ ერთგვაროვანი განტოლებების შემთხვევას. თუ გამოვიყენებთ ზემოთ აღნიშნულ შედეგებს (111,1°) განტოლების მიკავშირებული (111,2°) განტოლებისათვის და მისი შესაბამისი (111,12) განტოლებისათვის და ასევე თუ გავითვალისწინებთ ამ ბოლო განტოლების ამონახსნთა კავშირს (111,6) განტოლების მიკავშირებული (111,8) განტოლების ამონახსნებთან, რომლებიც (111,10) ფორმულით არის განსაზღვრული, მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე.

თუ ψ^{α}, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$, (111,2°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა სრული სისტემაა, მაშინ $(\psi^{\alpha}, \overline{\psi^{\alpha}})$ ვექტორები წარმოადგენს (111,12) განტოლების ამონახსნთა წრფივად დამოუკიდებელი (ჩვეულებრივი აზრით) სრულ სისტემას, ხოლო $(\psi^{\alpha}, \overline{t'^2\psi^{\alpha}})$ ვექტორები (111,6°) განტოლების მიკავშირებული (111,8) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა.

ფრედჰოლმის განტოლების ცნობილი თვისებების თანახმად, მიკავშირებულ (111,6°) და (111,8) განტოლებებს წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა ერთი და

---

[38] იმ შემთხვევაში, როცა $n_2(t_0, t)=0$ (111,1°) განტოლება გადაიქცევა ფრედჰოლმის ჩვეულებრივ განტოლებად

$$\varphi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt=0$$

(ჩვენ n_1-ის ნაცვლად დავწერეთ n). ამ შემთხვევაში ვიწრო გაგებით წრფივი კომბინაციის ცნების შემოღება მიზანშეწონილი არ არის; მიუხედავად ამისა ტექსტში ნათქვამი ამ შემთხვევაშიც გამოსაყენებელია. თუ φ^{α}, $\alpha=1, 2, \ldots, \mu$, წინა განტოლების ამონახსნთა წრფივად დამოუკიდებელი (ჩვეულებრივი აზრით) სრული სისტემაა, მაშინ ვიწრო გაგებით წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა იქნება $\varphi^1, \ldots, \varphi^{\mu}$, $i\varphi^1, \ldots, i\varphi^{\mu}$. ამდენივე წრფივად დამოუკიდებელი (ჩვეულებრივი აზრით) ამონახსნი აქვს სისტემას, რომელიც მიიღება (111,4°) სისტემიდან, როცა $n_2(t_0, t)=0$; ამონახსნთა სრული სისტემა იქნება, მაგალითად,

$$(\varphi^1, \overline{\varphi^1}),\quad (\varphi^2, \overline{\varphi^2}), \ldots, (\varphi^{\mu}, \overline{\varphi^{\mu}}),\ (i\varphi^1, -\overline{i\varphi^1}), \ldots, (i\varphi^{\mu}, -\overline{i\varphi^{\mu}})$$

ჩვენ შემთხვევაში ტექსტში აღნიშნული რიცხვი ν ტოლია 2μ.

იგივე რიცხვი აქვს. ამიტომ (111,1°) და (111,2°) მიკავშირებულ განტოლებებსაც წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა ერთი და იგივე რიცხვი აქვს. ეს რიცხვი ორივე შემთხვევაში აღნიშნული იყო ν-თი.

4°. ჩვენ დავადგინეთ (111,1) განტოლების ამონახსნის ამოცანის სრული ეკვივალენტობა (111,4) ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემის ანუ, რაც იგივეა, ფრედჰოლმის (111,6) ვექტორული განტოლების ამოხსნის ამოცანასთან. მაგრამ შეიძლება (111,1) განტოლებისათვის დამახასიათებელი ძირითადი დებულებების ჩამოყალიბება ისე, რომ ამ ჩამოყალიბებაში ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემა არ მონაწილეობდეს.

აი ფრედჰოლმის თეორემების ანალოგიური დებულებანი, რომლებიც ნაწილობრივ უკვე დავამტკიცეთ ზემოთ.

I. ერთგვაროვანი (111,1°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა რიცხვი სასრულია და მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (იგივე აზრით) ამონახსნთა რიცხვის ტოლია.

II. თუ ერთგვაროვან (111,1°) განტოლებას ან, რაც იგივეა, (111,2°) განტოლებას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი არ გააჩნია, მაშინ (111,1) არაერთგვაროვანი განტოლება ცალსახად ამოხსნადია ყოველი მარჯვენა მხარისათვის.

III. თუ ერთგვაროვან (111,1°) განტოლებას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი და, მაშასადამე, მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებასაც აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, მაშინ არაერთგვაროვანი (111,1) განტოლება ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა დაცულია პირობები

$$\operatorname{Re} \int_L f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{111,14}$$

სადაც $\psi^{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი (111,2°) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა სრული სისტემაა.

I დებულება უკვე დავამტკიცეთ 3° პუნქტში. II დებულება აგრეთვე შეიძლება ჩაითვალოს დამტკიცებულად, რადგან თუ ერთგვაროვან (111,1°) განტოლებას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები, მაშინ არც (111,4) სისტემის შესაბამის ერთგვაროვან სისტემას ექნება ასეთი ამონახსნი. ამიტომ (111,4) სისტემა ცალსახად ამოხსნადია ყოველი $f(t_0)$ ფუნქციისათვის. თუ (φ, φ^*) არის ამ სისტემის ამონახსნი, მაშინ $(\overline{\varphi^*}, \overline{\varphi})$-ც აგრეთვე ამონახსნია. ამონახსნის ერთადერთობის ძალით უნდა შესრულდეს პირობა $\varphi^* = \overline{\varphi}$; მაშასადამე, $\varphi = \varphi(t)$ იქნება $\mathbf{N}\varphi = f$ განტოლების ამონახსნი (ერთადერთი).

გადავიდეთ III დებულებაზე. იმისათვის, რომ (111,1) განტოლება ამოხსნადი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (111,4) სისტემა ან, რაც იგივეა, (111,6) განტოლება (ვექტორული) იყოს ამოხსნადი. ამ უკანასკნელის ამოხსნადობის პირობები (აუცილებელი და საკმარისი) გამოიხატება წინა პარაგრაფის (110,7) ტოლობებიდან გამომდინარე ტოლობებით

$$\int F(t)\,\chi^{\alpha}(t)\,dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{111,15}$$

სადაც $\chi^{\alpha}(t)$, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$, (111,6) განტოლების მიკავშირებული (111,8) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ჩვეულებრივი აზრით) ამონახსნთა სრული სისტემაა. მაგრამ $F(t)=(f, \overline{f})$, ხოლო წინა პუნქტის ბოლოში ნათქვამის საფუძველზე, შეგვიძლია ავიღოთ $\chi^{\alpha}(t)=(\psi^{\alpha}, \overline{t'^2\psi^{\alpha}})$ ვექტორები, სადაც $\psi^{\alpha}=\psi^{\alpha}(t)$, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$, $(111,2^0)$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა სრული სისტემაა. რადგან

$$F(t)\,\chi^{\alpha}(t)=f(t)\,\psi^{\alpha}(t)+\overline{f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,t'^2},$$

ამიტომ

$$\int\limits_L F(t)\,\chi^{\alpha}(t)\,dt=\int\limits_L f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt+\int\limits_L \overline{f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt}=2\,\mathrm{Re}\int\limits_L f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt.$$

აქედან კი გამომდინარეობს (111,14) და (111,15) პირობების ეკვივალენტობა; ამრიგად, III თეორემა დამტკიცებულია.

5°. ისევე როგორც ფრედჰოლმის განტოლების შემთხვევაში, (111,1) განტოლების ამონახსნიც შეიძლება წარმოვადგინოთ რეზოლვენტის ან განზოგადებული რეზოლვენტის საშუალებით, თუ შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი [39]. განვიხილოთ ერთბაშად ზოგადი შემთხვევა, როდესაც ერთგვაროვან განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. ვთქვათ, $\varphi^{\alpha}(t)$ და $\psi^{\alpha}(t)$, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$ $(111,1^0)$ და $(111,2^0)$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლებების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა სრული სისტემებია. შევადგინოთ ფუნქციათა ორი სისტემა $\xi^{\alpha}(t)$, $\eta^{\alpha}(t)$, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$, რომლებიც ეკუთვნიან H კლასს [40], და ისეთები, რომ

$$\mathrm{Re}\int\limits_L \varphi^{\alpha}(t)\,\xi^{\beta}(t)\,dt=\delta_{\alpha\beta}, \qquad \mathrm{Re}\int\limits_L \psi^{\alpha}(t)\,\eta^{\beta}(t)\,dt=\delta_{\alpha\beta},$$

სადაც $\delta_{\alpha\alpha}=1$, $\delta_{\alpha\beta}=0$, როცა $\alpha\neq\beta$, და განვიხილოთ (111,1) განტოლებასთან ერთად შემდეგი განტოლება:

$$\varphi(t_0)+\int\limits_L m_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt+\int\limits_L \overline{m_2(t_0, t)}\,\overline{\varphi(t)}\,\overline{dt}=f(t_0), \qquad (111,16)$$

სადაც

$$\begin{aligned} m_1(t_0, t)&=n_1(t_0, t)+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta^{\alpha}(t_0)\,\xi^{\alpha}(t),\\ m_2(t_0, t)&=n_2(t_0, t)+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\overline{\eta^{\alpha}(t_0)}\,\xi^{\alpha}(t). \end{aligned} \qquad (111,17)$$

---

[39] განზოგადებული რეზოლვენტის ასაგებად აქ გამოყენებული ხერხი წინა პარაგრაფის პ. 4°-ში, ფრედჰოლმის განტოლების სისტემისათვის მითითებული ხერხის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს.

[40] განზოგადებული რეზოლვენტის ასაგებად ეს პირობა აუცილებელი არ არის, მაგრამ ის გამოყენებული იქნება შემდგომი მსჯელობისათვის.

ზუსტად იმის ანალოგიურად, როგორც § 52-ში გაკეთდა (შდრ. § 101, პ. 1°), ადვილად ვარწმუნებთ, რომ (111,1°) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, მაშასადამე, (111,16) განტოლება, ნებისმიერი მარჯვენა $f(t)$ მხარისათვის ცალსახად ამოხსნადია; (111,16) განტოლების ამონახსნი ამავე დროს იქნება გამოსავალი (111,4) განტოლების ამონახსნი, თუ დაცულია ამ განტოლების ამოხსნადობის (111,14) პირობა (აუცილებელი და საკმარისი). დამტკიცებას მკითხველს მივანდობთ.

ახლა შევადგინოთ ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემა, რომელიც (111,16) განტოლებასთან ისეა დაკავშირებული, როგორც (111,4) სისტემა არის დაკავშირებული (111.1) განტოლებასთან, ანუ, რაც იგივეა, (111,6) განტოლების ანალოგიური ფრედჰოლმის ვექტორული განტოლება

$$\Phi(t_0)+\int_L m(t_0, t)\,\Phi(t)\,dt=F(t), \tag{111,18}$$

სადაც $\Phi(t)=(\varphi, \varphi^*)$, $F(t)=(f, \overline{f})$ და

$$m(t_0, t)=\begin{Vmatrix} m_1(t_0, t) & \overline{t'^2 m_2(t_0, t)} \\ m_2(t_0, t) & \overline{t'^2 m_1(t_0, t)} \end{Vmatrix}. \tag{111,19}$$

ვთქვათ, $\gamma(t_0, t)=\|\gamma_{ij}(t_0, t)\|_{i,j=1,2}$ (111,18) განტოლების რეზოლვენტაა, ასე რომ, ამ განტოლების (ერთადერთი) ამონახსნი მიიღება ფორმულით

$$\Phi(t_0)=F(t_0)+\int_L \gamma(t_0, t)\,F(t)\,dt$$

ან სკალარული სახით

$$\varphi(t)=f(t_0)+\int_L \gamma_{11}(t_0, t)\,f(t)\,dt+\int_L \gamma_{12}(t_0, t)\,\overline{f(t)}\,dt,$$

$$\varphi^*(t_0)=\overline{f(t_0)}+\int_L \gamma_{21}(t_0, t)\,f(t)\,dt+\int_L \gamma_{22}(t_0, t)\,\overline{f(t)}\,dt.$$

რადგანაც (111,18) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ამიტომ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, $\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}$; ამასთან $\varphi(t)$ წარმოადგენს ამავე დროს (111,16) განტოლების ამონახსნს. თუ შევნიშნავთ, რომ წინა ორი ტოლობის მარჯვენა მხარეებს ნებისმიერად არჩეული $f(t)$-სათვის უნდა ჰქონდეს კომპლექსურად შეუღლებული მნიშვნელობები, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\gamma_{21}(t_0, t)=\overline{\gamma_{12}(t_0, t)\,t'^2}, \quad \gamma_{22}(t_0, t)=\overline{\gamma_{11}(t_0, t)\,t'^2}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\gamma_{11}(t^0, t)=\gamma_1(t_0, t), \quad \gamma_{12}(t_0, t)=\overline{\gamma_2(t_0, t)\,t'^2}.$$

მაშინ $\gamma(t_0, t)$ მატრიცი წარმოდგინება შემდეგი სახით:

$$\gamma(t_0, t) = \left\| \begin{matrix} \gamma_1(t_0, t) & \overline{t'^2 \gamma_2(t_0, t)} \\ \gamma_2(t_0, t) & \overline{t'^2 \gamma_1(t_0, t)} \end{matrix} \right\|, \qquad (111.20)$$

რომელსაც $m(t_0, t)$ მატრიცის ანალოგიური სახე აქვს.

ამის შესაბამისად (111,1) განტოლების ამონახსნი (უფრო ზუსტად ერთ-ერთი ამონახსნი, თუ $\nu > 0$), რომელსაც დაცულია (111,14) პირობა, გვეძლევა ფორმულით

$$\varphi(t_0) = f(t_0) + \int_L \gamma_1(t_0, t) f(t)\, dt + \int_L \overline{\gamma_2(t_0, t) f(t)\, dt}. \qquad (111.21)$$

$\gamma_1(t_0, t)$ და $\gamma_2(t_0, t)$ ფუნქციების წყვილს შეიძლება ვუწოდოთ შესაბამისად (111.16) განტოლების რეზოლვენტა და (111.1) განტოლების განზოგადებული რეზოლვენტა.

თუ გამოვიყენებთ წინა შედეგებს (111,16) განტოლების მიკავშირებული

$$\psi(t_0) + \int_L m_1(t_0, t)\psi(t)\, dt + \int_L m_2(t, t_0)\overline{\psi(t)}\,\overline{dt} = g(t_0) \qquad (111.22)$$

განტოლებისათვის, და თუ მხედველობაში მივიღებთ კავშირს, რომელიც არსებობს ფრედჰოლმის მიკავშირებულ განტოლებათა სისტემების ან მიკავშირებული ვექტორული განტოლებების (მატრიცულ) რეზოლვენტებს შორის (იხ. წინა პარაგრაფის ბოლო), ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (111,20) განტოლების (ერთადერთი) ამონახსნი გვეძლევა ფორმულით

$$\psi(t_0) = g(t_0) + \int_L \gamma_1(t, t_0) g(t)\, dt + \int_L \gamma_2(t, t_0)\overline{g(t)\, dt}, \qquad (111.23)$$

ეს ამონახსნი ამავე დროს წარმოადგენს (111,1) განტოლების მიკავშირებული განტოლების (ერთ-ერთ) ამონახსნს, თუ დაცულია ამოხსნადობის შემდეგი (აუცილებელი და საკმარისი) პირობები:

$$\mathrm{Re} \int_L g(t)\, \varphi^\alpha(t)\, dt = 0. \qquad (111.24)$$

სადაც $\varphi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$ წარმოადგენს (111.1°) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა სრულ სისტემას.

$m_1(t_0, t)$, $m_2(t_0, t)$ ფუნქციებს შორის არსებობს თანაფარდობა, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს წინა პარაგრაფის (110.18) თანაფარდობიდან

$$\gamma(t_0, t) + m(t_0, t) = -\int_L m(t_0, t_1)\, \gamma(t_1, t)\, dt_1.$$

$$\gamma(t_0, t) + m(t_0, t) = -\int_L \gamma(t_0, t)\, m(t_1, t)\, dt_1,$$

სადაც ამჯერად $\gamma(t_0, t)$ და $m(t_0, t)$ აღნიშნავს მატრიცებს, რომლებიც განსაზღვრულია (111,19) და (111,20) ფორმულებით. ყოველი წინა ორი მატრიცული დამოკიდებულება გვაძლევს ოთხ სკალარულ დამოკიდებულებას. მაგრამ ამ ოთხიდან მხოლოდ ორია დამოუკიდებელი; დანარჩენი ორი მიიღება შეუღლებულ მნიშვნელობებზე გადასვლით. მათ ამოწერაზე არ შევჩერდებით.

§ 112. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი, რომლებიც შეიცავენ საძიებელ ფუნქციასთან ერთად მის კომპლექსურად შეუღლებულს მახასიათებელი ნაწილის გარეთ.

1°. გადავიდეთ ახლა ამ კარის შესავალში მოხსენებული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების განხილვაზე

$$K\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - t_0} + \int_L k_1(t_0, t)\varphi(t)\, dt +$$

$$+ \int_L \overline{k_2(t_0, t)\varphi(t)\, dt} = f(t_0), \tag{112,1}$$

სადაც L უბან-უბან გლუვი წირია, $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k_1(t_0, t)$, $k_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ L-ზე მოცემული H_0 კლასის ფუნქციებია, ხოლო $\varphi(t)$ საძიებელი ფუნქციაა L წირზე.

ასეთ განტოლებაზე დაიყვანება დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი ამოცანა, რომელთაგან ორზე ქვემოთ იქნება ნათქვამი.

ეს განტოლება გ. მანჯავიძის მიერ [1], [3] გამოკვლეული იყო ამ თავის I კარში გადმოცემული (სათანადოდ სახეშეცვლილი) მეთოდის გამოყენებით. მიღებული შედეგები ხსენებულ განტოლებაში მიღებული შედეგების ანალოგიურია და მათ განზოგადებას წარმოადგენს[41]. ამიტომ იქ, სადაც ეს გართულებებს არ გამოიწვევს, დეტალურ დამტკიცებებს არ მოვიყვანთ.

(112,1) განტოლების მიკავშირებულ განტოლებას ჩვენ ვუწოდებთ

$$K'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\, dt}{t - t_0} + \int_L k_1(t, t_0)\psi(t)\, dt +$$

$$+ \int_L k_2(t, t_0)\overline{\psi(t)\, dt} = g(t_0) \tag{112,2}$$

განტოლებას, სადაც $g(t_0)$ H_0 კლასის მოცემული ფუნქციაა. **K** და **K′** ოპერატო-

[41] გ. მანჯავიძემ განიხილა მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა L შედგება გლუვი შეკრული კონტურებისაგან, რომლებსაც არა აქვთ საერთო წერტილები (ამ შემთხვევაში „კვანძებს" წარმოადგენენ მოცემული ფუნქციის წყვეტის წერტილები); მაგრამ შედეგები, თითქმის ყოველგვარი ცვლილების გარეშე, ვრცელდება ტექსტში განხილულ შემთხვევაზეც.

რებს ჩვენ ვუწოდებთ *მიკავშირებულ ოპერატორებს*[12]. შემდგომში ჩავთვლით, რომ წარმოებული $l' = \frac{dl}{ds}$, სადაც s რკალური აბსცისაა, ეკუთვნის H_0 კლასს, ე. ი. L შედგება ლიაპუნოვის რკალებისაგან.

(112,1) და (112,2) განტოლებების $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ამონახსნებს ჩვენ მოვძებნით H^* კლასში.

K^0 ოპერატორს, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით

$$\mathrm{K}^0 \varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{112.3}$$

ჩვენ ვუწოდებთ K ოპერატორის *მახასიათებელ ნაწილს*. K^0 ოპერატორის მიკავშირებულ ოპერატორს წარმოადგენს $\mathrm{K}^{0'}$ ოპერატორი (ამ შემთხვევაში მიკავშირებული ოპერატორების განმარტება ემთხვევა წინას), განსაზღვრული წინა ფორმულით

$$\mathrm{K}^{0'}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{112,4}$$

უშუალო შემოწმებით ადვილად დადგინდება, რომ თუ φ და ψ L-ზე ნებისმიერი ფუნქციებია H^* კლასიდან და თუ ყოველი კვანძის მიდამოში ერთ-ერთი მათგანი ეკუთვნის H_ε^* კლასს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mathrm{Re}\int_L \psi\,\mathrm{K}\varphi\,dt = \mathrm{Re}\int_L \varphi\,\mathrm{K}'\psi\,dt. \tag{112.5}$$

ეს ფორმულა, როგორც ადვილად ჩანს, დაიყვანება (95.10) ფორმულაზე იმ შემთხვევაში, როცა $k_2(t_0, t)=0$, ე. ი., როდესაც განსახილველი სინგულარული განტოლება დაიყვანება I კარში განხილულ განტოლებაზე[13].

ჩავთვალოთ, რომ K^0 და $\mathrm{K}^{0'}$ ოპერატორები ნორმალური ტიპისაა, და ამის შესაბამისად ვიტყვით, რომ $\mathrm{K}\varphi=f$ და $\mathrm{K}'\psi=g$ განტოლებები ან K და K' ოპერატორები ნორმალური ტიპისაა.

2°. $\mathrm{K}\varphi=0$ განტოლების ამონახსნების ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია ნამდვილი (მუდმივი) კოეფიციენტებით კვლავ წარმოადგენს ამონახსნს, მაგრამ ამას, საზოგადოდ, არა აქვს ადგილი კომპლექსური კოეფიციენტების შემთხვევაში. ანალოგიური ვითარება გვაქვს $\mathrm{K}'\psi=0$ განტოლებისათვისაც.

აქედან გამომდინარე, ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში განხილულ ანალოგიურ შემთხვევებში, ამ პარაგრაფშიც *წრფივი კომბინაციის ქვეშ ვიგულისხმებთ წრფივ კომბინაციას ნამდვილი* (მუდმივი) *კოეფიციენტებით* (ე. ი. წრფივ კომბინაციას ვიწრო აზრით) და ამის შესაბამისად გავიგებთ წრფივად დამოკიდებულებას ან წრფივად დამოუკიდებლობას.

---

[12] ასეთი განსაზღვრის მიზანშეწონილობასთან დაკავშირებით იხ. წინა პარაგრაფში ნათქვამი.

[13] იხ. სქოლიო 416 გვერდზე.

3°. $K\varphi=f$ და $K'\psi=g$ განტოლებების ამოსახსნელად და გამოსაკვლევად შეგვიძლია მივმართოთ I კარში (96,1) და (96,2) განტოლების ამოსახსნელად გამოყენებული მეთოდის ზუსტად ანალოგიურ მეთოდს.

მართლაც, $K\varphi=f$ და $K'\psi=g$ განტოლებები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$K^0\varphi=f-k\varphi \qquad (112,6)$$

და შესაბამისად

$$K^{0\prime}\psi=g-k'\psi. \qquad (112,7)$$

სადაც

$$k\varphi\equiv\int_L k_1(t_0,t)\,\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{k_2(t_0,t)}\;\overline{\varphi(t)dt} \qquad (112,8)$$

და

$$k'\psi\equiv\int_L k_1(t,t_0)\,\psi(t)\,dt+\int_L k_2(t,t_0)\,\overline{\psi(t)\,dt}\,. \qquad (112,9)$$

ჯერჯერობით (111.6) და (112.7) განტოლებების მარჯვენა მხარეები განვიხილოთ როგორც ცნობილი ფუნქციები.

ზუსტად ისევე, როგორც I კარში (§§ 99, 100) შეიძლება შემოვიღოთ $K\varphi=f$ და $K'\psi=g$ განტოლებების ამონახსნთა კლასებად დაყოფა და განვმარტოთ მ ი კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ი $h(c_1,\ldots,c_q)$ და $h'=h(c_{q+1},\ldots,c_m)$ კ ლ ა ს ე ბ ი. $K\varphi=f$ განტოლების ანუ K ოპერატორის ი ნ დ ე ქ ს ს ჩვენ ვუწოდებთ K^0 ოპერატორის ინდექსს; ანალოგიურად $K'\psi=g$ განტოლების ანუ K' ოპერატორის ინდექსს ვუწოდებთ $K^{0\prime}$ ოპერატორის ინდექსს. მიკავშირებული განტოლებების მიკავშირებული კლასის ინდექსები $\varkappa$ და $\varkappa'$ დაკავშირებულია დამოკიდებულებით

$$\varkappa'=-\varkappa.$$

K ოპერატორის ან $K\varphi=f$ განტოლების მოცემული h კლასის $Z(t)$ კანონიკურ ფუნქციას ვუწოდებთ K^0 ოპერატორის ანუ $K^0\varphi=f$ განტოლების h კლასის კანონიკურ ფუნქციას.

4°. თუ ამოვხსნით (112,6) განტოლებას § 97-ის ფორმულებით ისე, თითქოს მარჯვენა მხარე იყოს მოცემული ფუნქცია, მივალთ § 99-ის შედეგის ანალოგიურ შედეგამდე: როცა $\varkappa\geqslant 0$ (112.1) განტოლება, მოცემულ $h(c_1,\ldots,c_q)$ კლასში ამონახსნების მოძებნის აზრით, ეკვივალენტურია ფრედჰოლმის ტიპის განტოლების

$$N\varphi\equiv\varphi(t_0)+\int_L N_1(t_0,t)\,\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{N_2(t_0,t)\,\varphi(t)\,dt}=f^*(t_0), \qquad (112,10)$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} N_1(t_0,t)&=A^*(t_0)\,k_1(t_0,t)-\frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{k_1(t_1,t)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1-t_0)},\\ N_2(t_0,t)&=\overline{A^*(t_0)}\,k_2(t_0,t)+\frac{\overline{B^*(t_0)\,Z(t_0)}}{\pi i}\int_L \frac{k_2(t_1,t)\,\overline{dt_1}}{\overline{Z(t_1)}\,(\overline{t_1}-\overline{t_0})},\end{aligned}\right\} \qquad (112,11)$$

$$f^*(t_0) = \mathrm{K}^* f(t_0) + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0) \tag{112,12}$$

და სადაც, როგორც § 97-ში,

$$A^*(t) = \frac{A(t)}{A^2(t) - B^2(t)}, \quad B^*(t) = -\frac{B(t)}{A^2(t) - B^2(t)}, \tag{112.13}$$

$$\mathrm{K}^* f(t_0) \equiv A^*(t_0) f(t_0) - \frac{B^*(t_0)\, Z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{f(t)\, dt}{Z(t)\,(t-t_0)}; \tag{112,14}$$

$P_{\varkappa-1}(t_0)$ აღნიშნავს კომპლექსურკოეფიციენტებიან პოლინომს, რომლის ხარისხი არ აღემატება $\varkappa-1$; როცა $\varkappa=0$, $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$.

როცა $\varkappa<0$ (112,1) განტოლება ეკვივალენტურია (იმავე აზრით) (112,10) განტოლებისა, რომლის მარჯვენა მხარეში უნდა ჩავთვალოთ, რომ $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$, და შემდეგი დამატებითი პირობების ერთობლიობისა

$$\int_L a_j(t)\,\varphi(t)\, dt + \int_L b_j(t)\,\overline{\varphi(t)}\, dt = \int_L \frac{t^j f(t)\, dt}{Z(t)}, \tag{112,15}$$

$$j = 0,\ 1, \ldots, -x-1,$$

სადაც

$$a_j(t) = \int_L \frac{k_1(t_1,\, t)\, t_1^j}{Z(t_1)}\, dt_1, \quad b_j(t) = \overline{t'^2} \int_L \overline{\frac{k_2(t_1,\, t)\, t_1^j}{Z(t_1)}}\, dt_1. \tag{112.16}$$

თუ ანალოგიურად მოვიქცევით (112,2) განტოლების მიკავშირებული განტოლებისათვის, სახელდობრ, თუ ამოვხსნით (112,7) განტოლებას § 98-ის ფორმულით, ისე, თითქოს მარჯვენა მხარე იყოს მოცემული, ადვილად მივიღებთ წინა შედეგების ანალოგიურსა და § 100-ში მიღებული შედეგების მსგავს. (ამას მკითხველს ვანდობთ).

5°. თუ პოლინომს მოცემულად ჩავთვლით, (112,10) განტოლება ეკუთვნის § 111-ში განხილულ ტიპს, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ $N_1(t_0,\, t)$, $N_2(t_0,\, t)$ ფუნქციებს, ასევე $f^*(t_0)$ ფუნქციას შეუძლია იყოს შემოუსაზღვრელი ზოგიერთი კვანძის მიდამოში. მაგრამ ზუსტად იმის ანალოგიურად, როგორც § 161-ში მოვიქეცით, ეს განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ სახეზე, სადაც $N_1(t_0,\, t)$, $N_2(t_0,\, t)$, $f^*(t_0)$-ის მაგივრად მონაწილეობს შემოსაზღვრული ფუნქციები, ისევე როგორც § 111-ის (111,1) განტოლებაში $n_1(t_0,\, t)$, $n_2(t_0,\, t)$, $f(t_0)$ ფუნქციები.

(112,10) განტოლებასთან ერთად მოგვიწევს განვიხილოთ მასთან მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება $\mathrm{N}'\psi=0$, სადაც N-ის მიკავშირებული N' ოპერატორი განისაზღვრება ფორმულით (იხ. § 111)

$$N'\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L N_1(t,\, t_0)\,\psi(t)\, dt + \int_L N_2(t,\, t_0)\,\overline{\psi(t)\, dt}\,. \tag{112,17}$$

ამ განტოლების განხილვა აგრეთვე შეიძლება მივიყვანოთ განტოლების განხილვაზე, სადაც N_1 და N_2 მაგივრად გვექნება შემოსაზღვრული ფუნქციები n_1 და n_2, მსგავსად იმისა, როგორც ეს გაკეთდა § 101-ში.

თუ ჩავატარებთ § 101-ის მსჯელობის ანალოგიურს და ვისარგებლებთ ამ შემთხვევაში § 111-ის შედეგებით, მივალთ შემდეგ დასკვნამდე.

ერთგვაროვანი $\mathbf{N}\varphi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ[44] (აბსოლუტურად ინტეგრებად) ამონახსნთა (ეს ამონახსნები ეკუთვნის h კლასს და, გარდა ამისა, H_ε^* კლასს განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში) ν რიცხვი სასრულია და ტოლია მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{N}'\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (შემოსაზღვრულ) ამონახსნთა რიცხვისა (ეს ამონახსნები ეკუთვნის H_ε^* კლასს და ამავე დროს ეკუთვნის H_0 კლასს ყველა არაგანსაკუთრებული კვანძების მიდამოში).

ვთქვათ, $f^*(t)$ აღნიშნავს h კლასის ფუნქციას, რომელიც, გარდა ამისა, H_ε^* კლასს ეკუთვნის ყველა განსაკუთრებული კვანძის მიდამოში.

$\mathbf{N}\varphi=f^*$ განტოლების (აბსოლუტურად ინტეგრებად ფუნქციათა კლასში) ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ

$$\operatorname{Re}\int_L f^*(t)\,\psi_j(t)\,dt=0, \qquad j=1,\ 2,\ldots,\ \nu, \tag{112,18}$$

სადაც $\psi_j(t)$ $\mathbf{N}'\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ (შემოსაზღვრულ) ამონახსნთა სრული სისტემაა.

$\mathbf{N}\varphi=f^*$ განტოლების ყველა (აბსოლუტურად ინტეგრებადი) ამონახსნი ეკუთვნის h კლასს და, გარდა ამისა, H_ε^* კლასს განსაკუთრებული კვანძების მიდამოში.

ანალოგიური შედეგები ადვილად მიიღება $\mathbf{N}\varphi=f^*$ განტოლების მიკავშირებული $\mathbf{N}'\psi=g^*$ განტოლებისათვის.

6°. § 111-ის პ. 5°-ის შედეგების საფუძველზე, ანალოგიურად იმისა, როგორც § 101-ში გაკეთდა, ადვილად დადგინდება $\Gamma_1(t_0,\ t)$ და $\Gamma_2(t_0,\ t)$ ფუნქციების არსებობა, რომელთაც აქვთ შემდეგი თვისებები:

$$\Gamma f^*\equiv f^*(t_0)+\int_L \Gamma_1(t_0,\ t)\,f^*(t)\,dt+\int_L \overline{\Gamma_2(t_0,\ t)\,f^*(t)\,dt} \tag{112,19}$$

ფორმულით განსაზღვრულ ოპერატორს h კლასის ყველა f^* ფუნქცია გადაჰყავს იმავე კლასის ფუნქციაში, ხოლო

$$\Gamma' g^*\equiv g^*(t_0)+\int_L \Gamma_1(t_1,\ t_0)\,g^*(t)\,dt+\int_L \Gamma_2(t,\ t_0)\,\overline{g^*(t)\,dt} \tag{112,20}$$

ფორმულით განსაზღვრულ Γ ოპერატორის მიკავშირებულ Γ' ოპერატორს h' კლასის (h-ის მიკავშირებული) ყველა g^* ფუნქცია გადაჰყავს იმავე კლასის ფუნქციაში.

შემდეგ, თუ (112,18) პირობა დაცულია (112,10) განტოლების ამონახსნი (უფრო ზუსტად ერთ-ერთი ამონახსნი) გვეძლევა ფორმულით

$$\varphi(t_0)=\Gamma f^*(t_0). \tag{112,21}$$

[44] როგორც შეთანხმებული ვიყავით, წრფივად დამოუკიდებლობა გვესმის ვიწრო აზრით.

ანალოგიურ შედეგს აქვს ადგილი $N'\psi=g^*$ განტოლებისათვისაც.

7°. ჩვენ დავინახეთ, როცა $\varkappa \geqslant 0$, (112,1) განტოლება (ამონახსნთა h კლასში მოძებნის აზრით) ეკვივალენტურია (112,10) განტოლებისა, რომელიც მარჯვენა მხარეში შეიცავს ნებისმიერ კომპლექსურკოეფიციენტებიან $P_{\varkappa-1}(t)$ პოლინომს. ეს პოლინომი ახლა წარმოვადგინოთ t_0^j და it_0^j, $j=0, 1, \dots, \varkappa-1$ ფუნქციების ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი კომბინაციით

$$P_{\varkappa-1}(t_0)=A_1\alpha_1(t_0)+A_2\alpha_2(t_0)+\dots+A_{2\varkappa}\alpha_{2\varkappa}(t_0). \qquad (112,22)$$

სადაც $\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0), \dots, \alpha_{2\varkappa}(t_0)$ აღნიშნავს გარკვეული რიგით აღებულ t_0^j, it_0^j, $j=0, 1, \dots, \varkappa-1$, ფუნქციებს, ხოლო $A_1, A_2, \dots, A_{2\varkappa}$ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია. ამის შემდეგ შემოვიყვანოთ აღნიშვნა

$$\delta_j=\operatorname{Re}\int_L \psi_j(t)\, K^* f(t)\, dt, \quad j=1, 2, \dots, \nu, \qquad (112,23)$$

სადაც K^*f განსაზღვრულია (112,13) ფორმულით, ხოლო $\psi_j(t)$, $j=1, 2, \dots, \nu$ $N'\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნთა სრული სისტემაა. ამ აღნიშვნებით (112,10) განტოლების ამოხსნადობის (112,11) პირობა წარმოდგინება შემდეგი სახით:

$$\sum_{j=1}^{2\varkappa}\gamma_{kj}A_j=\delta_k, \quad k=1, \dots, \nu, \qquad (112,24)$$

სადაც γ_{kj} $f(t)$ ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი განსაზღვრული ნამდვილი მუდმივებია: $\|\gamma_{kj}\|$ მატრიცის რანგს ჩვენ აღვნიშნავთ ρ-თი.

თუ ვიმსჯელებთ ისე, როგორც § 102-ში, დავრწმუნდებით, რომ (112,24) სისტემის ამოხსნადობის პირობას და, მაშასადამე, $K\varphi=f$ განტოლების h კლასში ამოხსნადობის პირობას აქვს სახე

$$\operatorname{Re}\int_L \lambda_j(t) f(t)\, dt=0, \quad j=1, 2, \dots, \nu-\rho, \qquad (112,25)$$

სადაც $\lambda_j(t)$ გარკვეული სახის წრფივად დამოუკიდებელი h' კლასის ფუნქციებია და რომ ერთგვაროვანი $K\varphi=0$ განტოლების h კლასის ამ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნთა l რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით

$$l=2\varkappa+\nu-\rho. \qquad (112,26)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\varkappa<0$, $K\varphi=f$ განტოლების h კლასში ამოხსნადობის პირობა აგრეთვე დაიყვანება (112,25) სახის პირობაზე, მაგრამ ამ შემთხვევისათვის უნდა ავიღოთ $j=1, 2, \dots, \nu, \nu+1, \dots, \nu+\sigma$, სადაც $0\leqslant\sigma\leqslant-2\varkappa$.

ანალოგიურ შედეგს აქვს ადგილი $K\varphi=f$ განტოლების მიკავშირებული $K'\psi=g$ განტოლებისათვის.

კერძოდ, აღვნიშნოთ, რომ წინა მსჯელობის საფუძველზე $K\varphi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი სასრულია. იგივეს აქვს ადგილი მიკავშირებული ერთგვაროვანი $K'\psi=0$ განტოლებისათვის.

8°. ახლა ადვილი დასამტკიცებელია ძირითადი თეორემები, რომლებიც ეხება $\mathbf{K}\varphi=f$ და $\mathbf{K}'\psi=g$ განტოლებებს და რომლებიც ჩვენს შემთხვევაში ცვლის § 102-ის თეორემებს.

თეორემა I. $\mathbf{K}\varphi=f$ *განტოლების მოცემულ h კლასში ამოხსნადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ*

$$\mathrm{Re}\int_L \psi_j(t) f(t)\, dt=0, \qquad j=1,\ 2,\ldots,\ l', \tag{112,27}$$

სადაც ψ_j, $j=1,\ 2,\ldots,\ l'$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{K}'\psi=0$ განტოლების, h-ის მიკავშირებული h' კლასის, წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა.

თეორემა II. *მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{K}\varphi=0$ და $\mathbf{K}'\psi=0$ განტოლებების მიკავშირებული h და h' კლასების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნთა l და l' რიცხვების სხვაობა $\mathbf{K}\varphi=0$ განტოლების h კლასის გაორკეცებული $\varkappa$ ინდექსის ტოლია:*

$$l-l'=2\varkappa. \tag{112,28}$$

იგივე დასკვნას აქვს ადგილი, თუ $\mathbf{K}\varphi=f$ და $\mathbf{K}'\psi=g$ განტოლებებს როლებს შევუცვლით.

ჯერ დავამტკიცოთ I თეორემა. (112,27) პირობის აუცილებლობა უშუალოდ გამომდინარეობს (112.5) ფორმულიდან, რომლის საფუძველზეც $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების h კლასის $\varphi(t)$ ამონახსნისათვის

$$\mathrm{Re}\int_L f(t)\psi_j(t)\, dt=\mathrm{Re}\int_L \psi_j(t)\,\mathbf{K}\varphi(t)dt=\mathrm{Re}\int_L \varphi(t)\,\mathbf{K}'\psi_j(t)\, dt=0.$$

დავამტკიცოთ ამ პირობის საკმარისობა. როგორც პ. 7°-ში ვაჩვენეთ, $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების h კლასში ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა დაიყვანება შემდეგი სახის დამოკიდებულებაზე:

$$\mathrm{Re}\int_L \lambda_j(t) f(t)\, dt=0, \qquad j=1,\ 2,\ldots,\ k, \tag{112,29}$$

სადაც $\lambda_j(t)$ h' კლასის რაიმე ფუნქციებია. (112,27) პირობის საკმარისობა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ (112,29) პირობა წარმოადგენს (112,27) პირობის შედეგს. ამ მიზნისათვის ვისარგებლებთ მრავალჯერ გამოყენებული ხერხით. სახელდობრ, ვთქვათ $g(t)$ H კლასის ნებისმიერი ფუნქციაა. $\mathbf{K}\varphi=\mathbf{K}g$ განტოლება ამოხსნადია h კლასში (H კლასშიც კი). მაშასადამე, აუცილებელია, რომ

$$0=\mathrm{Re}\int_L \lambda_j(t)\,\mathbf{K}g(t)\, dt=\mathrm{Re}\int_L g(t)\,\mathbf{K}'\lambda_j(t)\, dt.$$

იმის გამო, რომ $g(t)$ ნებისმიერი ფუნქციაა. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{K}'\lambda_j(t)=0$. მაშასადამე, $\lambda_j(t)$ ფუნქციები წარმოადგენს $\psi_j(t)$ ფუნქციების წრფივ კომბინაციას, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

გადავიდეთ II თეორემის დამტკიცებაზე და პირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\varkappa \geqslant 0$. ამ შემთხვევაში $K\varphi = f$ განტოლების h კლასში ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას აქვს (112,25) სახე, სადაც $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_{\nu-\rho}(t)$ h' კლასის წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია. მეორე მხრივ, h კლასში ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს (112,27) პირობა. ამრიგად, თუ H_0 კლასის რაიმე $f(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (112,25) პირობებს, მაშინ ის დააკმაყოფილებს (112,27) პირობებსაც და პირიქით. აქედან ადვილად დავასკვნით[45], რომ $h_1, h_2, \ldots, h_{\nu-\rho}$ წარმოადგენს $\psi_1 \psi_2, \ldots, \psi_{l'}$ ფუნქციების წრფივ კომბინაციას (ნამდვილი კოეფიციენტებით), და პირიქით. ამრიგად, $l' = \nu - \rho$. ეს ტოლობა ადრე დამტკიცებულ (112,27) ტოლობასთან ერთად მიგვიყვანს საჭირო (112,28) ტოლობასთან.

იმ შემთხვევაში, როცა $\varkappa < 0$, შეგვიძლია ჩავატაროთ ანალოგიური მსჯელობა $K\varphi = 0$ განტოლების მიკავშირებული $K'\psi = 0$ განტოლების მიმართ, რომლის ინდექსი $\varkappa' = -\varkappa$ დადებითია, რაც მიგვიყვანს საჭირო შედეგამდე. ამრიგად, II თეორემა დამტკიცებულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. კერძო შემთხვევაში, როცა $k_2(t_0, t)$ ფუნქცია იგივურად ნულის ტოლია, ეს შედეგები, რა თქმა უნდა, ემთხვევა § 102-ის შედეგებს, თუმცა გარეგნული სახით ცოტა განსხვავდება იმათგან. გარეგნულ განსხვებას ის ქმნის, რომ აქ წრფივად დამოკიდებულება გაგებულია სხვაგვარად, ვიდრე § 102-ში, სახელდობრ, ვიწრო გაგებით.

მართლაც[46], ვთქვათ, $k_2(t_0, t) = 0$ და $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, $K\varphi = 0$ განტოლების h კლასის ჩვეულებრივი აზრით წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. მაშინ, ამ კლასის ვიწრო გაგებით წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები, ცხადია, იქნება $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, i\varphi_1, \ldots, i\varphi_k$, ასე, რომ მათი რიცხვი $l = 2k$.

ანალოგიურად, თუ $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$, $K'\psi = 0$ განტოლების h' კლასის ჩვეულებრივი აზრით წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, მაშინ ამ კლასის, ვიწრო გაგებით, წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები იქნება $\psi_1, \ldots, \psi_{k'}, i\psi_1, \ldots, i\psi_{k'}$, ასე, რომ მათი რიცხვი $l' = 2k'$.

ამის შესაბამისად, (112,27) პირობა ეკვივალენტურია შემდეგის:

$$\int_L \psi_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k',$$

ხოლო (112,28) ტოლობა გადადის $k - k' = \varkappa$ ტოლობაში.

IV. გამოყენებანი დრეკადობის თეორიის ზოგიერთ შერეულ ამოცანაში

წინა კარში გადმოცემული შედეგების გამოყენების მაგალითად §§ 113, 114-ში მოგვყავს დრეკადობის თეორიის ორი მნიშვნელოვანი შერეული ამოცანის ამოხსნა, რისთვისაც ძირითადად გამოვიყენეთ გ. მანჯავიძის ნაშრომი [3].

[45] იხ. დანართი IV, შენიშვნა 2.

[46] იხ სქოლიო 369 გვერდზე.

გადმოცემის მთლიანობა რომ არ დაირღვეს §§ 113, 114-ში, აღარ შევჩერდებით ზოგიერთი იმ დებულების დაწვრილებით დასაბუთებაზე, რომლებიც დაკავშირებულია განსახილველი ფუნქციების ყოფაქცევასთან საზღვრის მახლობლობაში. § 115-ში მოვიყვანთ შეფასებებს, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს მკაცრად დავასაბუთოთ ყველა ეს დებულება.

§ 113. დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნა. 1°. მკითხველს რომ საქმე გავუადვილოთ, გავიხსენოთ დრეკადობის ბრტყელი სტატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ფორმულა და დებულება. სიმარტივისათვის შემოვიფარგლოთ შემთხვევით, როცა დრეკად სხეულს $z=x+iy$ სიბრტყეზე[47] უკავია გლუვი მარტივი შეკრული L კონტურით შემოსაზღვრული სასრული არე.

როდესაც მოცულობითი ძალები ნულის ტოლია (რასაც ჩვენ ვიგულისხმებთ) დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ძირითადი განტოლებები დაიყვანება შემდეგზე:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0,$$

$$X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{113,1}$$

$$X_y=Y_x=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

სადაც X_x, Y_y, $X_y=Y_x$ ძაბვის კომპონენტებია, u, v გადაადგილების კომპონენტებია, $\lambda>0$, $\mu>0$ ლამეს მუდმივებია და სადაც დაშვებულია

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{113,2}$$

ძირითადი (113,1) განტოლებების ზოგადი (რეგულარული) ამონახსნი შეიძლება გამოისახოს S არეში ორი ნებისმიერი ჰოლომორფული $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ფუნქციის საშუალებით შემდეგი სახით:

$$X_x+Y_y=4\operatorname{Re}\varphi'(z), \quad Y_y-X_x+2iX_y=2\left[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)\right], \tag{113,3}$$

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \tag{113,4}$$

სადაც

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=3-4\sigma>1; \tag{113,4 ა}$$

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},$$

σ-თი აღნიშნულია პუასონის კოეფიციენტი $\left(0<\sigma<\frac{1}{2}\right)$.

---

[47] იმის შესახებ თუ როგორ გავიგოთ გამოთქმა, რომ სხეულს უკავია ბრტყელი არე და ა. შ., იხ., მაგალითად, ავტორის წიგნი [9]. იქვე შეიძლება ნახოთ ამ პუნქტში მოყვანილი ყველა დებულებისა და ფორმულის დამტკიცება.

გავიხსენოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ფორმულა, რომლითაც შეიძლება შეიცვალოს (113,3) ფორმულები,

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_{z_0}^{z}(X_n+iY_n)\,ds+\text{const}, \tag{113,5}$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია ნებისმიერ გლუვ რკალზე, რომელიც არ გამოდის S არიდან და აერთებს S არის ნებისმიერ z_0 ფიქსირებულ წერტილს z ცვლად წერტილთან; X_n და Y_n აღნიშნავს l რკალზე დადებითი ნორმალის მხრიდან მოქმედი ძაბვის მდგენელებს, იგულისხმება ნორმალი, მიმართული მარჯვნივ, თუ ვიხედებით l-ის დადებითი მიმართულების გასწვრივ (რომელსაც მივყავართ z_0-დან z-საკენ).

როგორც ცნობილია

$$\begin{aligned} X_n&=X_x\cos(n,\ x)+X_y\cos(n,\ y),\\ Y_n&=Y_x\cos(n,\ x)+Y_y\cos(n,\ y). \end{aligned} \tag{113,6}$$

მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალი დამოკიდებული არ არის ინტეგრების გზაზე, რომელიც z_0 და z წერტილებს აერთებს. ეს ადვილად შემოწმდება უშუალოდ და აშკარაა მექანიკური თვალსაზრისითაც[48].

ზემოთ ნათქვამს დავუმატოთ კიდევ ერთი შენიშვნა, რომელიც მნიშვნელოვანია შემდგომისათვის.

მოცემული ძაბვებისათვის $\varphi(z)$ ფუნქცია განისაზღვრება $Ciz+\gamma$ გამოსახულების სიზუსტით, სადაც C ნამდვილი, ხოლო γ კომპლექსური, ნებისმიერი მუდმივებია; $\psi(z)$ ფუნქცია კი განისაზღვრება ნებისმიერი კომპლექსური γ' მუდმივის სიზუსტით, ასე რომ ძაბვების შეუცვლელად შეიძლება შევცვალოთ

$$\varphi(z) — \varphi(z)+Ciz+\gamma\text{-თი}, \quad \psi(z) — \psi(z)+\gamma'\text{-ით};$$

და მხოლოდ ასეთი შეცვლით არ იცვლება ძაბვები. კერძოდ, თუ ძაბვები ნულის ტოლია, მაშინ $\varphi(z)=iCz+\gamma$, $\psi(z)=\gamma'$. ეს ბოლო ფორმულები გამოსახავს სხეულის, როგორც მთლიანის, ხისტ (უსასრულოდ მცირე) გადაადგილებას, რაც ძაბვებზე გავლენას არ ახდენს, როგორც ამას გვიჩვენებს (118,3) ფორმულები.

თუ მოცემულია გადაადგილებანი (ამ დროს მოცემულია ძაბვებიც), მაშინ

$$C=0, \quad \varkappa\gamma-\overline{\gamma}'=0.$$

თუ მოცემულია ძაბვები და, გარდა ამისა, (113,5) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი მუდმივი დავაფიქსირეთ, მაშინ ნამდვილი C მუდმივი დარჩება ნებისმიერი, ხოლო γ და γ' დაკავშირებულია დამოკიდებულებით $\gamma+\overline{\gamma}'=0$.

დაბოლოს, თუ მოცემულია გადაადგილებანი და, აგრეთვე, (113,5)-ის მარჯვენა მხარეში მუდმივი დაფიქსირებულია, მაშინ $C=\gamma=\gamma'=0$.

2°. დრეკადობის სტატიკური თეორიის (ჩვენს შემთხვევაში — ბრტყელი) *ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების* ქვეშ გულისხმობენ სხეულის დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრის ამოცანებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებით.

---

[48] ნებისმიერ შეკრულ კონტურზე აღებული ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია იმის შედეგად, რომ წონასწორობაში მყოფი სხეულის კონტურზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია.

პირველ ძირითად ამოცანაში გვეძლევა ძაბვები, რომლებიც მოდებულია საზღვარზე. მეორე ძირითად ამოცანაში მოცემულია საზღვრის წერტილების გადაადგილებები. დაბოლოს, ძირითად შერეულ ამოცანაში საზღვრის ერთ ნაწილზე მოცემულია გარე ძაბვები, ხოლო მეორეზე — გადაადგილებები.

ყველა ამ ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა გამომდინარეობს ცნობილი ფორმულიდან, რომელიც ადვილად გამოიყვანება ოსტროგრადსკი — გრინის ფორმულის დახმარებით

$$\int_L (X_n u + Y_n v)\, ds = \iint_S [\lambda(e_{xx}+e_{yy})^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + e_{y}^2 + 2e_{xy}^2)]\, dx dy, \qquad (113,7)$$

სადაც

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

დეფორმაციის კომპონენტებია.

ჩვეულებრივ ამ ფორმულის ელემენტარულად მიღებისას იგულისხმება, რომ გადაადგილებისა და ძაბვის კომპონენტები უწყვეტად გაგრძელებადია S არის L საზღვრის ყველა წერტილზე. ამ ფორმულის გამოყენების შესახებ, უფრო ზოგადი პირობების შემთხვევაში, რომლებთანაც ჩვენ გვექნება საქმე, იხ. შენიშვნა 2 ამ პარაგრაფის ბოლოს.

სამივე ძირითად ამოცანაში ორი შესაძლო ამონახსნის სხვაობისათვის საზღვარზე გვექნება

$$X_n u + Y_n v = 0.$$

იმის გამო, რომ მარჯვენა მხარეში ორჯერადი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი e_{xx}, e_{xy}, e_{yy} ცვლადების კვადრატული ფორმა დადებითია, ორი ამონახსნის სხვაობისათვის უნდა გვქონდეს $e_{xx} = e_{yy} = e_{xy} = 0$, საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს, რომ

$$u = -\varepsilon y + \alpha, \quad v = \varepsilon x + \beta,$$

აქ ε, α, β (ნამდვილი) მუდმივებია; ბოლო ფორმულები გამოხატავს სხეულის, როგორც მთლიანის (უსასრულოდ მცირე) ხისტ გადაადგილებას. პირველი ძირითადი ამოცანის შემთხვევაში ეს მუდმივები ნებისმიერი რჩება, რადგანაც ხისტი გადაადგილებით განსხვავებული ამონახსნები არ ჩაითვლება სხვადასხვა ამონახსნებად.

მეორე და ძირითად შერეულ ამოცანებში $\varepsilon = \alpha = \beta = 0$; ეს ჩანს სასაზღვრო პირობებში უშუალოდ ჩასმით და აშკარაა მექანიკური თვალსაზრისითაც, რადგან თუ საზღვრის ერთ ნაწილზე მაინც გადაადგილება ნულის ტოლია, ხისტი გადაადგილება გამორიცხულია.

შენიშვნა 1. თუ მხედველობაში მივიღებთ (113,4) და (113,5) ფორმულებს, (113,7) ფორმულა ჩვენ შეგვიძლია ასე დავწეროთ

$$-(2\mu)^{-1}\, \mathrm{Im} \int_L [\varkappa\varphi(t) - t\,\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\, d[\overline{\varphi(t)} + \overline{t}\,\varphi'(t) + \psi(t)] =$$

$$
=(2\mu)^{-1}\operatorname{Im}\int\limits_L\left[\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\,\varphi'(t)+\psi(t)\right]d\left[\varkappa\varphi(t)-t\,\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}\right]=
$$

$$
=\iint\limits_S\left[(\lambda+2\mu)\,e_{xx}^2+2\lambda\,e_{xx}e_{yy}+(\lambda+2\mu)\,e_{yy}^2+4\mu\,e_{xy}^2\right]dxdy. \tag{113,8}
$$

(მეორე ინტეგრალი პირველი ინტეგრალიდან ნაწილობითი ინტეგრებით მიიღება), შევახსენებთ, რომ აქ u, v აღნიშნავს ნამდვილ ფუნქციებს. რომლებიც $\varphi(z)$. $\psi(z)$ ფუნქციებთან დაკავშირებულია შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$
2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\,\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},
$$

და სადაც

$$
e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).
$$

იმ მსჯელობათა საფუძველზე, რომლებმაც მიგვიყვანეს ამ ფორმულამდე, ადვილი შესამჩნევია, რომ ფორმულა სამართლიანია S-ში ჰოლომორფული ნებისმიერი ორი $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციისათვის, თუ ისინი საკმაოდ რეგულარულია საზღვრის მახლობლობაში, ოღონდ ისე, რომ λ, μ, $\varkappa$ მუდმივები დაკავშირებული იყო დამოკიდებულებით

$$
\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=1+\frac{2\mu}{\lambda+\mu};
$$

(113,8) ფორმულის სამართლიანობა ადვილად და უშუალოდ შემოწმდება დრეკადობის თეორიის ფორმულების გამოყენების გარეშეც.

შემდეგ ადვილი შესამჩნევია, რომ (113,8) ფორმულა სამართლიანია შეკრული გლუვი კონტურებით შემოსაზღვრული სასრული ან უსასრულო მრავლადბმული S არისათვის, ოღონდაც $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციები ჰოლომორფული იყოს მასში და თუ არე უსასრულოა, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლითაც. (113,8) ფორმულის სამართლიანობა უსასრულო არისათვის ადვილი შესამოწმებელია, თუ მას ჯერ გამოვიყენებთ $|z|=R$ წრეწირით შემოსაზღვრული სასრული არისათვის საკმარისად დიდი R-ისათვის და გადავალთ ზღვარზე, როცა $R\to\infty$. როგორც ადვილი შესამჩნევია, მარცხენა მხარეში ამ წრეწირზე აღებული ინტეგრალი მიისწრაფვის ნულისაკენ[49].

შევნიშნოთ კიდევ შემდეგი: კვადრატული ფორმა, რომელიც გვაქვს ორჯერადი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, დადებითი იქნება იმ შემთხვევაშიც, როცა $\lambda<0$, მხოლოდ ისე, რომ $\lambda+\mu>0$, სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $\mu>0$, $\varkappa>1$. მართ-

---

[49] რადგანაც პირობის თანახმად, $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ჰოლომორფული არის უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში, ამიტომ ამ მიდამოში

$$
\varphi(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots\qquad\qquad \psi(z)=b_0+\frac{b_1}{z}+\cdots
$$

$$
\varphi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right),\qquad\qquad \psi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right).
$$

ლაც კვადრატული ფორმა $(\lambda+2\mu)e_{xx}^2+2\lambda e_{xx}e_{yy}+(\lambda+2\mu)e_{yy}^2$ ამ შემთხვევაში დადებითია, რადგან $\lambda+2\mu>0$ და დისკრიმინანტი $\lambda^2-(\lambda+2\mu)^2=-4\mu(\lambda+\mu)$ უარყოფითია. შემთხვევა $\lambda<0$ ფიზიკურად შეუძლებელია. თუ λ-ს განვიხილავთ როგორც ლამეს მუდმივს დრეკადობის თეორიაში. მაგრამ შემდეგ პარაგრაფში (113.8) ფორმულის გამოყენება მოგვიწევს სხვა შემთხვევაში.

შენიშვნა 2°. (113,7) ან (113,8) ფორმულიდან გამომდინარე ერთადერთობის თეორემებზე დაყრდნობა მოგვიხდება იმ შემთხვევაშიც, როცა ამ ფორმულების ელემენტარული მიღებისათვის საკმარისი პირობები, რომლებიც მითითებულია (113.7) ფორმულის შემდეგ, არ სრულდება. მაგრამ ყველა იმ შემთხვევაში, რომელთანაც ჩვენ შემდეგში გვექნება საქმე, ასეთ გარემოებას შევხვდებით. აღნიშნული პირობები შესრულებული იქნება S' არისათვის, რომელიც მიიღება S-დან უსასრულოდ მცირე ნაწილების მოცილებით, რომლებიც ამოკვეთილია უსასრულოდ მცირე რადიუსიანი სასრული რაოდენობის წრეწირებით, რომელთა ცენტრები L წირზე მდებარეობს. ამიტომ შეგვიძლია (113,7) ან (113,8) ფორმულა გამოვიყენოთ S' არისათვის და შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც ზემოთ ხსენებული წრეწირების რადიუსები მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამასთან, ყველა შემთხვევაში, რომელთანაც კი ჩვენ შეიძლება საქმე გვქონდეს, ამ ფორმულების მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალები, გავრცელებული წრეწირების იმ რკალებზე, რომლებიც მოქცეულია S-ში, უნდა მიისწრაფვოდნენ ნულისაკენ[50] და ჩვენი ფორმულები სამართლიანი აღმოჩნდება S არისათვის.

3°. პირველი და მეორე ამოცანის ამოხსნა კარგადაა ცნობილი; კერძოდ, ისინი გადმოცემულია ავტორის წიგნში [9]. ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნა აღნიშნულ წიგნში გადმოცემულია მხოლოდ ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის, როდესაც შესაძლებელია ეფექტური ამოხსნების მიღება შედარებით ელემენტარული ხერხით.

აქ კი მივუთითებთ ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნას ზოგად შემთხვევაში, თუმცა სიმარტივისათვის შემოვისაზღვრებით მხოლოდ სასრული მარტივადბმული აზრით.

მრავლადბმული (სასრული ან უსასრულო) არისათვის ამოხსნის გზა იგივეა, მაგრამ ამ შემთხვევაში მოითხოვება ზოგიერთი დამატებითი განხილვა[51].

ამრიგად, ვთქვათ სხეულს უკავია მარტივი შეკრული კონტურით შემოსაზღვრული S არე. ჩვენ ახლა ვუშვებთ, რომ L კონტური არა მარტო გლუვია, არამედ მას აქვს სიმრუდე, რომელიც აკმაყოფილებს $H(1)$ პირობას, ე. ი. ლიფშიცის პირობას[52].

---

[50] სახელდობრ, იმ შემთხვევაში, რომელთანაც ჩვენ გვექნება საქმე, c წერტილში ცენტრის მქონე წრეწირის რკალებზე გავრცელებულ ინტეგრალში $F ds$ ინტეგრალქვეშა გამოსახულებისათვის გვექნება შეფასება $|F|<\text{const}\,|t-c|^{-\alpha}$, $\alpha=\text{const}<1$.

[51] იხ. დ. შერმანი [3], გ. მანჯავიძე [3].

[52] ეს ნიშნავს, რომ L წირის x და y კოორდინატებს აქვს მეორე რიგის $H(1)$ კლასის წარმოებული. მსჯელობის უმნიშვნელოდ გართულებით შეიძლება $H(1)$ პირობის შეცვლა $H(\alpha)$, $\alpha>\frac{1}{2}$ პირობით, როგორც ამას აკეთებს გ. მანჯავიძე.

ვთქვათ, L-ზე აღებულია საერთო ბოლოების არმქონე $L'_j=a_j b_j$, $j=1, 2, \dots, p$ რკალები, რომელთა დადებითი მიმართულება თანხვდება L-ის დადებით მიმართულებას, რომლის დროსაც S არე რჩება მარცხნივ, და აღნიშნული რკალები მიჰყვება ერთმანეთს ამ მიმართულებით. $b_j a_{j+1}$, $j=1, 2, \dots, p$ (a_{p+1} ქვეშ იგულისხმება a_1) რკალებს აღვნიშნავთ L''_j. L'_j-თი, რკალების ერთობლიობას აღვნიშნავთ L'-ით, ხოლო L'' რკალებისას — L''-ით.

ძირითადი შერეული ამოცანა, რომლის ამოხსნაზედაც ახლა გადავდივართ, მდგომარეობს შემდეგში: მოითხოვება განისაზღვროს სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ საზღვრის L' ნაწილზე მოცემულია გარე ძაბვები, ხოლო დარჩენილ L''-ზე — გადაადგილებები.

(113,4) და (113,5) ფორმულების თანახმად ცხადია, რომ ეს ამოცანა მიიყვანება S არეში ორი $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციის მოძებნაზე შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}&=f(t)+C(t), \quad \text{როცა} \quad t\in L', \\ -\varkappa\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}&=f(t), \quad \text{როცა} \quad t\in L''. \end{aligned}\right\} \tag{113,9}$$

ამ ფორმულებში $f(t)$ L-ზე მოცემული ფუნქციაა, სახელდობრ,

$$\begin{aligned} f(t)&=i\int_{a_j}^{t}(X_n+iY_n)\,ds, \quad \text{როცა} \quad t\in L'_j, \\ f(t)&=-2\mu(g_1+ig_2), \quad \text{როცა} \quad t\in L'', \end{aligned} \tag{113,10}$$

სადაც X_n, Y_n L'-ზე მოცემული გარე ძაბვების მდგენელებია; ინტეგრალები აღებულია $L'_j=a_j b_j$ რკალების გასწვრივ; s აღნიშნავს რკალურ აბსცისს და ბოლოს $C(t)$ აღნიშნავს L'-ზე უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, ე. ი. $C(t)=C_j$, როცა $t\in L'_j$, სადაც C_j აღნიშნავს მუდმივებს, რომლებიც წინასწარ არ გვეძლევა.

ჩვენ ვუშვებთ, რომ $f(t)$ ეკუთვნის H_0 კლასს, ხოლო $f'=\dfrac{df}{dt}$ — H^* კლასს, a_j, b_j კვანძებია.

ახლაც და შემდგომშიც იქ, სადაც გაუგებრობას არ გამოიწვევს ჩვენ $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$, $\psi^+(t)$-ის ნაცვლად დავწერთ φ, φ', ψ.

დ. შერმანის [2], [3] თანახმად ამონახსნს მოვძებნით შემდეგი სახით[53]:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z},$$

$$\psi(z)=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,d\bar t}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\,\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}. \tag{113,11}$$

[53] იმ მოსაზრებათა შესახებ, რომელთაც მივყავართ საძიებელ ამონახსნის ამა თუ იმ წარმოდგენამდე, შდრ. ავტორის წიგნის [9] § 101-ში ნათქვამს.

სადაც $\omega(t)$ საზღვრის t წერტილის ფუნქციაა, რომელიც უნდა განისაზღვროს[54].

თუ ჩავთვლით, რომ $\omega(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა და აქვს ინტეგრებადი წარმოებული $\omega'(t)$, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით ბოლო ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ კიდევ ასე

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)\,dt}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\,\omega'(t)\,dt}{t-z}\,. \qquad (113,11\text{ა})$$

ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია $\varphi'(z)$ წარმოებული წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega'(t)\,dt}{t-z}\,. \qquad (113,11\text{ბ})$$

გამოვითვალოთ ახლა სასაზღვრო მნიშვნელობები $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$, $\psi^+(t)$, ვიგულისხმოთ, რომ სოხოცკი — პლემელის ფორმულების გამოყენება შეიძლება (113,11)-ის პირველი ფორმულის და (113,11ა) და (113,11ბ) ფორმულების მარჯვენა მხარეებისათვის, მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ (113,9) სასაზღვრო პირობებში. ამ უკანასკნელში $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ ქვეშ ვგულისხმობთ შესაბამისად $\varphi^+(t)$, $\varphi^{+\prime}(t)$, $\psi^+(t)$. ამას მივყავართ $\omega(t)$-ს მიმართ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებამდე:

$$\mathrm{K}\omega \equiv A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} + \int\limits_L k_1(t_0,t)\,\omega(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_L \overline{k_2(t_0,t)}\;\overline{\omega(t)\,dt} = f(t_0) + C(t_0)\,. \qquad (113,12)$$

სადაც

$$A(t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\varkappa) & L'\text{-ზე}, \\ -\varkappa & L''\text{-ზე}, \end{cases} \qquad B(t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\varkappa) & L'\text{-ზე}, \\ 0 & L''\text{-ზე}, \end{cases} \qquad (113,13)$$

$$k_1(t_0,t) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}\,, \quad k_2(t_0,t) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} \qquad (113,14)$$

და ბოლოს

$$C(t) = \begin{cases} C_j & L_j'\text{-ზე}, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \\ 0 & L''. \end{cases} \qquad (113,15)$$

---

[54] მრავლადბმული არის შემთხვევაში (113,11)-ის მარჯვენა მხარეებს დაემატება გარკვეულმარტივი გამოსახულებები. იხ. დ. შერმანი [3], გ. მანჯავიძე [3], შეადარეთ აგრეთვე ნ. მუსხელიშვილი [9] § 102.

C_j მუდმივები, როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი, წინასწარ არ გვეძლნვა, ისინი განისაზღვრებიან ამოცანის ამოხსნის დროს; ეს ქვემოთ იქნება ნაჩვენები. ჯერჯერობით კი $C(t)$ ფუნქციას ჩვენ განვიხილავთ როგორც მოცემულს.

(113,14) ფორმულაში t-თი კერძო წარმოებულის ქვეშ გვესმის t-თი წარმოებული იმ დაშვებით, რომ t_0 წერტილი მუდმივაა; $\bar{t}$ სიდიდე განიხილება როგორც t-ს ფუნქცია, ასე, რომ

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{d\bar{t}}{ds} : \frac{dt}{ds},$$

სადაც s რკალური აბსცისაა.

(113,12) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი მახასიათებელი განტოლება იქნება განტოლება:

$$A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t - t_0} = 0. \tag{113,16}$$

ამ განტოლების შესაბამისი წრფივი შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t),$$

სადაც

$$G(t) = \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)} = \begin{cases} -\varkappa, & \text{როცა } t \ \ L'\text{-ზე}, \\ 1, & \text{როცა } t \ \ L''\text{-ზე}; \end{cases} \tag{113.17}$$

ამოიხსნება ძალიან ადვილად. სახელდობრ, როგორც ადვილად შემოწმდება უშუალოდ[55] ან § 83-ის პ. 2°-ის ზოგადი ფორმულების საფუძველზე, ყველა კვანძი a_k, b_k არაგანსაკუთრებულია და ყველაზე ვიწრო h_{2p} კლასის კანონიკურ ამონახსნს იძლევა ფორმულა (ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი მამრავლის სიზუსტით)

$$\chi(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{\frac{1}{2} + i\beta} (z - b_j)^{\frac{1}{2} - i\beta}, \tag{113.18}$$

სადაც

$$\beta = \frac{\ln \varkappa}{2\pi}. \tag{113,19}$$

$$(z - a_j)^{\frac{1}{2} + i\beta} (z - b_j)^{\frac{1}{2} - i\beta} = \sqrt{(z - a_j)(z - b_j)} \left[\frac{z - a_j}{z - b_j}\right]^{i\beta}$$

მამრავლების ქვეშ გვესმის $a_j b_j$ რკალების გასწვრივ გაჭრილ სიბრტყეში ჰოლომორფული შტოები, მაგალითად, შტოები, რომელთა გაშლას უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში z-ის კლებადი ხარისხების მიხედვით, პირველი

[55] ჩვენ არსებითად საქმე გვაქვს შეუღლების ერთგვაროვან ამოცანასთან ნაწყვეტი სასაზღვრო წირით, რადგან L''-ზე ჩვენ გვაქვს $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, ე. ი. L'' არ წარმოადგენს $\Phi(z)$ ფუნქციისათვის ნახტომის წირს. ასეთი ამოცანა კერძო შემთხვევაში $\varkappa = 1$ $(\beta = 0)$ განხილულია § 85-ში.

წევრი აქვს z. ყველა სხვა კლასის კანონიკური ამონახსნები მიიღება $\chi(z)$-ის გამრავლებით $(z-a_k)^{-1}$ და $(z-b_k)^{-1}$ სახის მამრავლზე. ჩვენ საქმე გვექნება მხოლოდ $\chi(z)$ ფუნქციასთან.

(113,18)-დან გამომდინარეობს, რომ ჩვენი შეუღლების ამოცანის h_{2p} კლასის ინდექსი ტოლია $(-p)$, რადგან $\chi(z)$ ფუნქციის რიგი უსასრულობაში ტოლია p-სი. მაშასადამე, განსაზღვრის თანახმად, $-p$ არის $\mathbf{K}$ ოპერატორის ინდექსი.

(113,12) განტოლების ამონახსნს $\omega(t)$-ს ჩვენ მოვძებნით h_{2p} კლასში[56].

შეიძლება ვაჩვენოთ (იხ. § 115), რომ მაშინ $\omega(t)$ ეკუთვნის H კლასს, ხოლო წარმოებული $\omega'(t)$ — H^* კლასს.

რადგან k ოპერატორის h_{2p} კლასის ინდექსი ტოლია $(-p)$, ამიტომ § 112-ის II თეორემის ძალით

$$\nu - \nu' = -2p, \tag{113,20}$$

სადაც ν $\mathbf{K}\omega = 0$ ერთგვაროვანი განტოლების h_{2p} კლასის წრფივად დამოუკიდებელ (ვიწრო აზრით) ამონახსნთა რიცხვია, ხოლო ν' — მიკავშირებული ერთგვაროვანი $\mathbf{K}'\sigma = 0$ განტოლების $h_0 = h'_{2p}$ კლასის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი.

ვაჩვენოთ, რომ $\nu = 0$[57] და, მაშასადამე, $\nu' = 2p$. მართლაც, ვთქვათ, $\omega_0(t)$ $\mathbf{K}\omega = 0$ განტოლების h_{2p} კლასის რაიმე ამონახსნია, ხოლო $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — ფუნქციები, რომლებიც განისაზღვრებიან (113,11) ფორმულებით, თუ მათში $\omega(t)$ ნაცვლად აღებულია $\omega_0(t)$.

მაშინ

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} &= 0 \quad L'\text{-ზე}, \\ -\varkappa\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} &= 0 \quad L''\text{-ზე}. \end{aligned} \tag{113,21}$$

ერთადერთობის თეორემისა (იხ. ამ პარაგრაფის პ. 2°) და პ. 1° ბოლოს ნათქვამის საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\varphi_0(z) = 0, \quad \psi_0(z) = 0$$

მთელ S არეში. მაშინ (113,11) ფორმულების საფუძველზე (იხ. აგრეთვე (113,11ა), ჩვენ უნდა გვქონდეს

---

[56] აქ საჭიროა გავაკეთოთ შემდეგი ზოგადი შენიშვნა. ამა თუ იმ ფიზიკური ამოცანის ამოხსნისას მათემატიკური დასმით გვიხდება (ისევე როგორც ყველა სხვა შემთხვევაში) საძიებელ ფუნქციებს წინასწარ დავადოთ ზოგიერთი შეზღუდვა. ამ დროს ჩვეულებრივად გვიხდება ვიხელმძღვანელოთ როგორც ფიზიკური მოსაზრებებით, ასევე ძალაუნებურად გამოსაყენებელ მეთოდებთან დაკავშირებულ მოსაზრებებითაც. ამა თუ იმ შეზღუდვის მართებულობის კრიტერიუმს (ამოცანის დასმის კორექტულობის კრიტერიუმს) წარმოადგენს იმ პირობის შესრულება, რომ ამოცანამ დაუშვას მიღებულ შეზღუდვებს დაქვემდებარებული ამონახსნი და ამასთან ერთადერთი, თუ ამოხსნის ერთადერთობა გამომდინარეობს ფიზიკური მოსაზრებიდან.

ჩვენს შემთხვევაში მითითებული პირობა, როგორც ჩვენ ვნახავთ, დაცულია. ჩვენ მიერ ω-ზე დადებული შეზღუდვის მიზანია უზრუნველყოს (113,11) ფორმულით განსაზღვრული ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობების არსებობა (გარდა კვანძებისა) და, აგრეთვე, ერთადერთობის გამოყენება დრეკადობის ბრტყელი თეორიის სასაზღვრო ამოცანებში, რომლებზედაც მივუთითებთ ტექსტში.

[57] დამტკიცების ხერხი ეკუთვნის დ. შერმანს [2].

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z}=0,\quad \frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\,\omega_0'(t)\,dt}{t-z}=0$$

ყველა $z\in S$.

აქედან, § 29-ში დამტკიცებული დებულების საფუძველზე, დავასკვნით, რომ

$$i\,\varphi^*(t)=\omega_0(t),\quad -i\,\psi^*(t)=\varkappa\,\overline{\omega_0(t)}+\bar{t}\,\omega_0'(t) \tag{113,22}$$

ტოლობებით განსაზღვრული $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$ ფუნქციები[58] წარმოადგენს სასაზღვრო მნიშვნელობებს $\varphi^*(z)$ და $\psi^*(z)$ ფუნქციებისა, რომლებიც ჰოლომორფულია S^- არეში, რომელიც $S+L$-ის დამატებაა მთელ სიბრტყემდე, ამასთან $\varphi^*(\infty)=$ $=\psi^*(\infty)=0$. გამოვრიცხავთ რა $\omega_0(t)$-ს (113,22) ტოლობებიდან, მივიღებთ

$$\varkappa\,\varphi^*(t)-\bar{t}\,\varphi^{*\prime}(t)-\psi^*(\bar{t})=0\quad L\text{-ზე}. \tag{113,23}$$

ეს სასაზღვრო პირობა შეესაბამება მეორე ძირითად ამოცანას (პ. 2°) სხეულისათვის, რომელსაც უკავია S^- არე, როდესაც გადაადგილებები საზღვარზე ნულის ტოლია. აქედან ერთადერთობის თეორემისა და $\varphi^*(\infty)=\psi^*(\infty)=0$ პირობის საფუძველზე ვასკვნით, რომ $\varphi^*(z)=\psi^*(z)=0$. მაგრამ მაშინ (113,22) ფორმულების საფუძველზე $\omega_0(t)=0$. ამრიგად, ჩვენი დებულება იმის შესახებ, რომ $\nu=0$ და, მაშასადამე, $\nu'=2p$ დამტკიცებულია.

(113,12) განტოლების (h_{2p} კლასში) ამოხსნადობის პირობას § 112-ის I თეორემის ძალით აქვს სახე

$$\operatorname{Re}\int\limits_L [f(t)+C(t)]\,\sigma_j(t)\,dt)=0,\quad j=1,2,\ldots,2p, \tag{113,24}$$

სადაც $\sigma_j(t)$, $j=1,2,\ldots,2p$, $\mathrm{K}'\sigma=0$ განტოლების $h_0=h_{2p}'$ კლასის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა.

აღვნიშნოთ $C_k=\gamma_k+i\,\gamma_{k+p}$, $k=1,2,\ldots,p$, სადაც γ_j ნამდვილი მუდმივებია; γ_k, $k=1,2,\ldots,2p$ მუდმივების განსასაზღვრავად მივიღებთ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სახის (ნამდვილ) სისტემას:

$$\sum_{k=1}^{2p} A_{jk}\,\gamma_k=B_j,\quad j=1,2,\ldots,2p, \tag{113,25}$$

სადაც A_{jk} $f(t)$-საგან დამოუკიდებელი, გარკვეული მუდმივებია, ხოლო B_j აგრეთვე მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია $f(t)$-ზე:

$$B_j=\operatorname{Re}\int\limits_L f(t)\,\sigma_j(t)\,dt\,.$$

---

[58] მამრავლები i და $-i$ შემოგვყავს იმისათვის, რომ მივიღოთ (113,23) ფორმულა იმ სახით, როგორითაც ის დაწერილია.

დავამტკიცოთ, რომ (113,25) სისტემის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია. მართლაც, ვთქვათ, $f(t)=0$, მაშინ (113,25) სისტემაში ყველა $B_j=0$ და ის გადაიქცევა ერთგვაროვან სისტემად. თუ ამ სისტემის დეტერმინანტი ტოლია ნულის, მაშინ ის უშვებს ნულისაგან განსხვავებულ ამონახსნს. ვთქვათ, γ_k^0, $k=1,2,\ldots,2p$, ერთ-ერთი მათგანია. მაშინ (113,12 განტოლება) ამოხსნადი იქნება (h_{2p} კლასში), თუ $f(t)=0$. $C_k=C_k^0=\gamma_k^0+i\gamma_{k+p}^0$. ვთქვათ, $\omega_0(t)$ მისი ამონახსნია, ხოლო $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — შესაბამისი $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციები. მაშინ

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=c_k^0 \quad L_k'\text{-ზე}, \quad k=1,2,\ldots,p,$$

$$-\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=0 \quad L''\text{-ზე}.$$

აქედან შერეული ამოცანის ერთადერთობის თეორემის ძალით ადვილად დავასკვნით, რომ $\varphi_0(z)=\delta$, $\psi_0(z)=\varkappa\bar{\delta}$, სადაც δ რაიმე მუდმივაა.

ამიტომ გვექნება

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z}=\delta,$$

$$\psi_0(z)=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{t}'\,\omega_0'(t)\,dt}{t-z}=\varkappa\bar{\delta} \qquad (113,26)$$

ყველა $z\in S$. შემოვიღებთ რა ხელახლა (113,22) აღნიშვნებს, § 29-ში დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე, მივალთ დასკვნამდე, რომ ფუნქციები $\varphi^*(t)$ და $\psi^*(t)$ წარმოადგენს S^- (უსასრულო) არეში ჰოლომორფული $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობებს, ამასთან ეს სასაზღვრო მნიშვნელობები დაკავშირებული არის ერთმანეთთან (113,23) დამოკიდებულებით; ამჯერად $\varphi^*(\infty)=-i\delta$, $\psi^*(\infty)=-i\varkappa\bar{\delta}$. მეორე ძირითადი ამოცანისათვის ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე მივდივართ დასკვნამდე, რომ $\varphi^*(z)=\mathrm{const}=-i\delta$, $\psi^*(z)=\mathrm{const}=-i\varkappa\bar{\delta}$. თუ ჩავსვამთ ამ გამოსახულებებს (113,23)-ში, მივიღებთ, რომ $\delta=0$, აქედან (113,22)-ის ძალით $\omega_0(t)=0$. მაგრამ მაშინ $\varphi_0(z)=\psi_0(z)=0$ S-ში და, მაშასადამე, $C_k^0=\gamma_k^0+i\gamma_{k+p}^0=0$, $k=1,2,\ldots,p$, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ამრიგად, (113,25) სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ის ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია γ_k, $k=1,2,\ldots,p$ მუდმივების მიმართ. მაშასადამე, C_j, $j=1,2,\ldots,p$, სავსებით განისაზღვრება[59]. მუდმივების ამ მნიშვნელობებისათვის, განტოლება (113,12) ცალსახად ამოხსნადია h_0 კლასში და მის ამოხსნას მივყავართ გამოსავალი ამოცანის ამოხსნამდე.

---

[59] ადვილად ჩანს, რომ (113,9) ფორმულებით განსაზღვრული გამოსავალი სასაზღვრო ამოცანა უშვებს ამონახსნებს, რომელშიც C_j მუდმივებიდან ერთ-ერთი რჩება ნებისმიერი (რაც ძაბვებზე და გადაადგილებებზე გავლენას არ ახდენს). ეს ნებისმიერობა აცილებულია ამონახსნის (113,11) ფორმით.

4°. იმ შემთხვევაში, როდესაც L წრეწირია, (113,12) განტოლება მიიღებს ძალიან მარტივ სახეს. ამ შემთხვევაში ის, არსებითად, მახასიათებელ განტოლებაზე დაიყვანება, რომლის $A(t)$, $B(t)$ კოეფიციენტები (113,13) ფორმულითაა განსაზღვრული, ამას კი მივყავართ წრფივი შეუღლების ამოცანამდე $G(t)$ კოეფიციენტით, რომელიც განსაზღვრულია (113,17) ფორმულით, ხოლო თავისუფალი წევრი შეიცავს გარკვეული რაოდენობის მუდმივებს, რომლებიც წინასწარ არ გვეძლევა და, რომლებიც ცალსახად განისაზღვრებიან ამოცანის ამოხსნის მსვლელობაში წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემიდან. მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში ამოხსნა შეიძლება უფრო მარტივად მივიღოთ წრფივი შეუღლების ამოცანაზე უშუალო დაყვანით ინტეგრალური განტოლების გარეშე. იხ ავტორის წიგნი [9].

§ 114. ფირფიტის ღუნვის ერთი ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნა. 1°. დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში გამოყენებული მეთოდები (კერძოდ, კომპლექსური ცვლადის მეთოდი) შეიძლება წარმატებით გადატანილ იქნეს, შესაბამისი ცვლილებებით, ბრტყელი დრეკადი ფირფიტის ღუნვის (მიახლოებითი) თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად, როდესაც ფირფიტა დატვირთულია ფირფიტის სიბრტყის ნორმალური ძალებით. ეს ხდება იმის გამო, რომ ორივე შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვაქვს სასაზღვრო ამოცანებთან, რომლებიც დაკავშირებულია ბიჰარმონიულ განტოლებასთან.

ფირფიტის ღუნვის (მიახლოებითი) თეორიის *ძირითად სასაზღვრო ამოცანებს წარმოადგენს* ამოცანები, რომლებიც შეესაბამებიან შემთხვევებს: როცა ფირფიტის ნაპირი ჩამაგრებულია, როცა ის დაყრდნობილია და როცა ის თავისუფალია. გარდა ამისა, ძირითად ამოცანად შეიძლება ჩაითვალოს, როცა ფირფიტის ნაპირების სხვადასხვა ნაწილები იმყოფება სხვადასხვა პირობებში, რომლებიც შეესაბამებიან ზემოთ ჩამოთვლილ სამ შემთხვევას.

ჩამაგრებული ნაპირის შემთხვევას მივყავართ დრეკადობის ბრტყელი თეორიის პირველი ძირითადი ამოცანის (§ 113 პ. 2) ანალოგიურ ამოცანამდე[60]; როგორც აჩვენეს ს. ლეხნიცკიმ [1] და ი. ვეკუამ [6], *თავისუფალნაპირიანი ამოცანა* დაიყვანება დრეკადობის ბრტყელი თეორიის მეორე ძირითად ამოცანაზე[61].

ჩვენ აქ მოვიყვანთ *შერეული ამოცანის* ამოხსნას, როცა სასრული მარტივადბმული ფირფიტის საზღვრის ერთი ნაწილი ჩამაგრებულია, ხოლო დანარჩენი ნაწილი თავისუფალია; ეს ამოხსნა მოცემულია გ. მანჯავიძის [3] შრომაში[62].

ამგვარად, განვიხილოთ ნორმალური დატვირთვის ქვეშ მყოფი თხელი დრეკადი ფირფიტა, რომლის შუა ზედაპირს დატვირთვამდე უკავია $z = x + iy$

---

[60] მათემატიკური თვალსაზრისით ეს ამოცანები უბრალოდ ემთხვევა ერთმანეთს სასრული მარტივადბმული არისათვის. უსასრულო და მრავლადბმულ (სასრული ან უსასრულო) არისათვის წარმოიშვება ზოგიერთი განსხვავება.

[61] აქაც შეიძლება იგივე გავიმეოროთ, რაც ვთქვით წინა სქოლიოში.

[62] შემდგომში შერეული ამოცანები სასაზღვრო მონაცემების სხვა კომბინაციებისათვის, მათ შორის შემთხვევაში, როცა მონაწილეობს ყველა სამი სახის ნახსენები პირობა (საზღვრის ერთი ნაწილი თავისუფალია, მეორე — დაყრდნობილი, მესამე — ჩამაგრებული), ამოხსნილია ა. კალანდიას მიერ [3], [4].

სიბრტყის სასრული მარტივადბმული S არე, რომელიც შემოსაზღვრულია მარტივი, შეკრული L კონტურით. ჩვენ დავუშვებთ, რომ L წირის სიმრუდეს აქვს $H(1)$ კლასის წარმოებული რკალური აბსცისით[63].

ვთქვათ, წინა პარაგრაფის აღნიშვნებისას (გვ. 439) L-ზე აღებულია რკალები $L'_j = a_j b_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$; რკალები $a_{j+1} b_j$ $(a_{p+1} \equiv a_1)$ აღვნიშნოთ ძველებურად L''_j, L'_j რკალების ერთობლიობა — L'-ით, ხოლო L''_j რკალების ერთობლიობა — L''-ით. ჩავთვალოთ, რომ ფირფიტის საზღვრის L' ნაწილი ჩამაგრებულია, ხოლო L'' ნაწილი — თავისუფალი.

აღვნიშნოთ ჩაღუნვა $w(x, y)$-ით, ხოლო (ნორმალური) დატვირთვის ინტენსივობა — $q(x, y)$-ით. ფირფიტის ღუნვის მიახლოებითი თეორიის თანახმად $w(x, y)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D} \tag{114,1}$$

და სასაზღვრო პირობებს

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \text{როცა} \quad t \in L',$$

$$Mw \equiv \sigma\Delta w + (1 - \sigma)\left[\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] = 0,$$

$$Nw \equiv \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\cos 2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] = 0, \quad t \in L'', \tag{114,2}$$

სადაც n L-ის გარე ნორმალია, θ არის n-ის მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხე, σ პუასონის კოეფიციენტია. $D = \mathrm{const} > 0$ (ფირფიტის „ცილინდრული სიხისტე").

(114,1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + W(x, y), \tag{114,3}$$

სადაც w_0 რაიმე კერძო ამონახსნია, ხოლო W ბიჰარმონული ფუნქციაა S არეში, ე. ი. ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ბიჰარმონიულ განტოლებას

$$\Delta\Delta W = 0;$$

რაც შეეხება კერძო ამონახსნს — $w_0(x, y)$, ასეთი ამოხსნები შეიძლება უამრავი ავაგოთ. ერთ-ერთ მათგანს წარმოადგენს კარგად ცნობილი ამონახსნი

[63] ასე, რომ L წირის წერტილის (x, y) კოორდინატებს აქვს მესამე რიგის წარმოებული რკალური აბსცისით, რომელიც ეკუთვნის $H(1)$ კლასს. მსჯელობის გართულების გარეშე შეიძლება $H(1)$ კლასი შევცვალოთ $H(\alpha)$ კლასით, როცა $\alpha > \frac{1}{2}$, როგორც ამას აკეთებს გ. მანჯავიძე.

$$
\begin{gathered}
w_0(x, y) = \frac{1}{2\pi D} \iint\limits_S q(\xi, \eta)\, r^2 \ln r \, d\xi \, d\eta, \\
r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.
\end{gathered} \tag{114.4}
$$

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ, თუ $q(x, y)$ შემოსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ $w_0(x, y)$ ფუნქცია, განსაზღვრული წინა ფორმულით, და მისი კერძო წარმოებულები მესამე რიგის ჩათვლით, უწყვეტია $S+L$-ში. საკმარისი პირობა იმისა, რომ w_0 ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (114,1) განტოლებას, მდგომარეობს იმაში, რომ $q(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებდეს H პირობას $S+L$ დახურულ არეში[64].

ქვემოთ $w_0(x, y)$ ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ (114,11) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნს, რომელიც უწყვეტია მესამე რიგის წარმოებულებებთან ერთად $S+L$ არეში და იგივურად ნულია, როცა $q(x, y) = 0$. ვგულისხმობთ, რომ ასეთი კერძო ამონახსნი არსებობს; ამისათვის საკმარისი პირობა ახლახანს იყო მითითებული.

თუ w-ს ნაცვლად ჩავსვამთ (114,3) გამოსახულებას (114.2) სასაზღვრო პირობებში და w_0 კერძო ამონახსნზე (რომელსაც ჩვენ ვთვლით ამორჩეულად და ცნობილად) დამოკიდებულ წევრებს გადავიტანთ მარჯვენა მხარეებში, ჩვენს სასაზღვრო ამოცანას არაერთგვაროვანი (114,1) განტოლებისათვის ერთგვაროვანი (114,2) სასაზღვრო პირობებით მივიყვანთ სასაზღვრო ამოცანაზე ერთგვაროვანი $\Delta\Delta W = 0$ ბიჰარმონიული განტოლებისათვის არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით, რომლებიც ქვემოთ (პ. 3°) იქნება ამოწერილი გარდაქმნილი სახით.

2°. სანამ შემდეგზე გადავიდოდეთ, მოვიყვანოთ ზოგიერთი ფორმულა (მათი უმრავლესობა კარგადაა ცნობილი) დაკავშირებული ბიჰარმონიულ ფუნქციებთან (იხ., მაგალითად ავტორის წიგნი [9]). S არეში ბიჰარმონიული ყოველი ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი სახით (გურსას ფორმულა):

$$
W(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}], \tag{114.5}
$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\chi(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციებია S-ში[65]. წინა ფორმულა შეიძლება შეიცვალოს ჩვენი მიზნებისათვის უფრო მოსახერხებელი ფორმულით, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს წინა ფორმულიდან (და პირიქით)

$$
\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{114,6}
$$

სადაც მიღებულია, რომ

$$
\psi(z) = \chi'(z). \tag{114.6ა}
$$

[64] იხ. მაგალითად O. D. Kellogg [3].

[65] გავიხსენოთ, რომ ჩვენ ვთვლით S არეს სასრულად და მარტივადბმულად. მრავლადბმული არისათვის $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ფუნქციები შეიძლება იყოს მრავალსახა, მიუხედავად $W(x, y)$ ფუნქციის ცალსახობისა.

(114,5)-დან ან (114,6)-დან ადვილად გამოგვყავს

$$\Delta W = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z). \tag{114,7}$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $P(x, y) = \Delta W$, ($P(x, y)$ ჰარმონიული ფუნქციაა), ხოლო $Q(x, y)$-ით აღვნიშნავთ $P(x, y)$ ფუნქციის შეუღლებულ ჰარმონიულ ფუნქციას (განსაზღვრულია ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივის სიზუსტით), მაშინ გვექნება

$$4\varphi'(z) = P(x, y) + iQ(x, y) + Ci, \tag{114,7ა}$$

სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია; იგულისხმება, რომ $Q(x, y)$-ისათვის არჩეულია გარკვეული მნიშვნელობა. წინა ფორმულა გვიჩვენებს, რომ, თუ ბიჰარმონიული ფუნქცია $W(x, y)$ მოცემულია, მაშინ $\varphi(z)$ ფუნქცია განისაზღვრება ნებისმიერი წმინდა წარმოსახვითი მუდმივის სიზუსტით, ხოლო აქედან გამომდინარე $\varphi(z)$ ფუნქცია $-Ciz + \gamma$ გამოსახულების სიზუსტით, სადაც C ნამდვილი, ხოლო γ კომპლექსური ნებისმიერი მუდმივებია.

კერძოდ, თუ $W(x, y) = 0$. მაშინ აუცილებლად $\varphi(z) = Ciz + \gamma$ და (114,6) ფორმულის საფუძველზე $\psi(z) = -\overline{\gamma}$.

ბოლოს გავიხსენოთ შემდეგი ცნობილი ფორმულა[66]:

$$\iint\limits_S \left\{(\Delta W)^2 - (1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy + \\ + \int\limits_L \left[W N W - \frac{\partial W}{\partial n} M W\right] ds = 0, \tag{114,8}$$

იგი სამართლიანია ნებისმიერი ბიჰარმონიული $W(x, y)$ ფუნქციისათვის, რომელიც S არის L საზღვრის მახლობლობაში აკმაყოფილებს რეგულარობის გარკვეულ პირობებს; $\mathbf{M}$ და $\mathbf{N}$ (114,2) ფორმულით განსაზღვრული ოპერატორებია.

რადგანაც გამოსახულება

$$(\Delta W)^2 - (1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] = \\ = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + (1+\sigma)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}\right)^2,$$

ცხადია, წარმოადგენს დადებით კვადრატულ ფორმას $W(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულების მიმართ[67], ამიტომ (114,8) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ საზღვრის ერთ ნაწილზე $W = \frac{\partial W}{\partial n} = 0$, ხოლო დანარჩენ ნაწილზე

[66] იხ. მაგალითად ლ. კანტოროვიჩი და ვ. კრილოვი [1].

[67] შევახსენებთ, რომ $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

$MW = NW = 0$, მაშინ $W(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის ყველა კერძო წარმოებული ნულის ტოლია, ეს კი ნიშნავს, რომ $W(x, y)$ x, y კოორდინატების წრფივი ფუნქციაა, მაგრამ, რაკი საზღვრის ზოგიერთ ნაწილზე $W = \frac{\partial W}{\partial n} = 0$, ამიტომ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, $W = 0$ ყველგან S-ში. ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ ერთადერთობის თეორემა 1° პუნქტში დასმული შერეული ამოცანისათვის.

3°. დავუბრუნდეთ ამ ამოცანის ამოხსნას. როგორც უკვე იყო ნათქვამი, მოვახდინოთ რა ჩასმას $w(x, y) = w_0(x, y) + W(x, y)$, სადაც $W(x, y)$ ბიჰარმონიული ფუნქციაა, ხოლო $w_0(x, y)$ — (114,1) არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი, (114,2) სასაზღვრო პირობას მივიყვანთ არაერთგვაროვან სახემდე, სახელდობრ

$$
\begin{aligned}
W &= -w_0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{\partial w_0}{\partial n}, \qquad \text{როცა} \quad t \in L', \\
MW &= -M w_0, \quad NW = -N w_0, \quad \text{როცა} \quad t \in L''.
\end{aligned}
\tag{114.1ა}
$$

ეს პირობები კიდევ გარდავქმნათ იმ მიზნით, რომ ამოცანა მივიყვანოთ დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ძირითადი შერეული ამოცანის ანალოგიურ ამოცანამდე.

სახელდობრ, (114,1ა) პირობის პირველი წყვილი შევცვალოთ შემდეგით:

$$
\frac{\partial W}{\partial x} + i\,\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i\,\frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \text{როცა} \quad t \in L'.
$$

ცხადია, თუ შესრულებულია ეს ბოლო პირობა, მაშინ პირობა $\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{\partial w_0}{\partial n}$ L'-ზე შესრულებული იქნება ზუსტად, ხოლო პირობა $W = -w_0$ შესრულდება L'_k რკალზე რაიმე მუდმივის სიზუსტით.

მივმართოთ (114.1ა) პირობის მეორე წყვილს. უშუალო შემოწმებით ადვილად დავადგენთ, რომ თუ z იცვლება და აღწერს S-ში მოთავსებულ რაიმე l რკალს და თუ s აღნიშნავს რკალურ აბსცისას l-ზე, მაშინ[68]

$$
\left\{ MW + i \int NW\, ds \right\} dz = (1-\sigma)\, d\left\{ \varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right\}, \tag{114,9}
$$

სადაც

$$
\varkappa = \frac{\sigma + 3}{1 - \sigma}\,; \tag{114,10}
$$

---

[68] ს. ლეხნიცკი [1], ი. ვეკუა [6]. (114,9) ფორმულა სავსებით მარტივად შემოწმდება, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ l რკალის გასწვრივ გვაქვს $d\bar{z} = e^{-2i\vartheta}\,dz = e^{-2i\theta}\,dz$, სადაც ϑ კუთხეა, შედგენილი l რკალის დადებითი მხების მიერ Ox ღერძთან, ხოლო $\theta = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ მარჯვნივ მიმართული ნორმალის მიერ შედგენილი კუთხეა იმავე ღერძთან, და თუ გავიხსენებთ, რომ $\frac{\partial \Delta W}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial s}$ [იხ. ფორმულა (114,7)].

ეს მუდმივი განსხვავდება იმ მუდმივისაგან, რომელიც წინა პარაგრაფში იმავე ასოთი იყო აღნიშნული; მთავარია ის, რომ ორივე შემთხვევაში $\varkappa > 1$.

მივიღებთ რა მხედველობაში (114,9) და (114,6) ფორმულებს, ამოცანის სასაზღვრო პირობა შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t), && \text{როცა } t \in L', \\ &-\varkappa\,\varphi(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + i\,t\,C(t) + \alpha(t), && \text{როცა } t \in L''. \end{aligned} \qquad (114,11)$$

ამ ფორმულებში $f(t)$ აღნიშნავს მოცემულ ფუნქციას

$$\begin{aligned} &f(t) = -\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + i\,\frac{\partial w_0}{\sigma y}\right), && \text{როცა } t \in L', \\ &f(t) = \frac{1}{1-\sigma}\int\limits_{b_j}^{t}\left[\mathrm{M}\,w_0 + \int\limits_{b_j}^{s_\tau} i\,\mathrm{N}\,w_0\,ds\right]d\tau, && \text{როცა } t \in L_j'', \end{aligned} \qquad (114,12)$$

სადაც τ ცვლადი წერტილია $L_j'' = b_j a_{j+1}$-ზე. s_τ შესაბამისი რკალური აბსცისაა, ათვლილი b_j წერტილიდან. $C(t)$-თი აღნიშნულია უბან-უბან მუდმივი ფუნქცია L''-ზე. კერძოდ, $C(t) = C_k$ L_k''-ზე, სადაც C_k ნამდვილი მუდმივებია, რომლებიც წინასწარ არ გვეძლევა; $\alpha(t)$ აგრეთვე აღნიშნავს L''-ზე უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, ე. ი. $\alpha(t) = \alpha_k$ L_k''-ზე, სადაც ამ შემთხვევაში α_k კომპლექსური მუდმივებია, რომლებიც აგრეთვე წინასწარ არ გვეძლევა.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $f(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს, $f'(t)$ — H^* კლასს (a_j, b_j კვანძებით). ეს საკმარისია (114,11) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისათვის; ხოლო, რაც შეეხება ამოსავალ (114,2) ამოცანას, მისი ამოხსნა შეიძლება მივიღოთ (114,11) ამოცანის ამოხსნის საშუალებით. თუ $q(x, y)$ ფუნქცია საკმაოდ რეგულარულია, მაგალითად, აკმაყოფილებს პირობებს, რომლებიც მითითებულია (114,4) ფორმულის შემდეგ.

C_j, α_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ მუდმივები უნდა განვსაზღვროთ ისე, რომ $w(x, y) = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z)\right] + w_0(x, y)$ იყოს უწყვეტად გაგრძელებადი, პირველ წარმოებულებთან ერთად, L საზღვრის ყველა წერტილზე[69] და არა მხოლოდ იღებდეს მუდმივ მნიშვნელობებს L_j' რკალებზე, როგორც ამას მოითხოვს პირველი პირობა (114,11) პირობებიდან, არამედ ნულიც ხდებოდეს L'-ზე.

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ ფუნქციები ვეძებოთ იმავე სახით, როგორც წინა პარაგრაფში, სახელდობრ, შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}, \\ \psi(z) &= -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)}\,d\bar{t}}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\,\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}. \end{aligned} \qquad (114,13)$$

[69] ამ პირობას ჩვენ დავაკმაყოფილებთ, თუ ქვემოთ შემოყვანილ $\omega(t)$ ფუნქციას დავუქვემდებარებთ პირობას, რომ ის ეკუთვნოდეს h_{2p} კლასს.

$\omega(t)$-სათვის მივიღებთ განტოლებას

$$\mathbf{K}\,\omega \equiv A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} + \int_L k_1(t_0, t)\,\omega(t)\,dt +$$

$$+\int_L \overline{k_2(t_0, t)\,\omega(t)\,dt} = f(t_0) + i\,t_0\,C(t_0) + \alpha(t_0), \tag{114,14}$$

სადაც $\mathbf{K}$ ოპერატორი იგივეა, რაც წინა პარაგრაფში, სახელდობრ $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k_1(t_0, t)$; $k_2(t_0, t)$ განისაზღვრება (113.13), (113.14) ფორმულებით.

მარჯვენა მხარე კი, ამჯერად,

$$C(t_0) = \begin{cases} 0 & L'\text{-ზე} \\ C_j & L_j''\text{-ზე}, \end{cases} \qquad \alpha(t_0) = \begin{cases} 0 & L'\text{-ზე}, \\ \alpha_j & L_j''\text{-ზე}, \end{cases} \tag{114,15}$$

სადაც C_j ნამდვილი, ხოლო α_j საზოგადოდ კომპლექსური მუდმივებია, რომლებიც უნდა განისაზღვრონ.

ჯერჯერობით ნებისმიერად ვაფიქსირებთ მუდმივებს C_j, $j = 1, 2, \ldots, p$; ვეძებოთ (114,14) განტოლების h_{2p} კლასის ამონახსნი.

ამოხსნადობის პირობას აქვს ასეთი სახე (§ 112)

$$\mathrm{Re}\int_L [f(t) + itC(t) + \alpha(t)]\,\sigma_j(t)\,dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2p, \tag{114,16}$$

სადაც $\sigma_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, 2p$, $\mathbf{K}'\sigma = 0$ განტოლების $h_0 = h'_{2p}$ კლასის ამონახსნთა წრფივად დამოუკიდებელი სრული სისტემაა ვიწრო გაგებით.

შემოვიტანოთ რა აღნიშვნებს $\alpha_k = \gamma_k + i\gamma_{k+p}$, სადაც γ_k, γ_{k+p} ნამდვილი მუდმივებია, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა (ნამდვილ) სისტემას γ_k $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$ მუდმივების მიმართ:

$$\sum_{k=1}^{2p} A_{jk}\,\gamma_k = B_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2p, \tag{114,17}$$

რომელშიც A_{jk} კოეფიციენტები არ არის დამოკიდებული არც $f(t)$-ზე და არც C_k-ზე, ხოლო

$$B_j = -\mathrm{Re}\left[\int_L f(t)\,\sigma_j(t)\,dt + i\sum_{k=1}^{2p} C_k \int_{L_k''} t\,\sigma_j(t)\,dt\right], \qquad j = 1, 2, \ldots, 2p.$$

ვაჩვენოთ, რომ (114,17) სისტემის დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან. მართლაც, ვთქვათ, $f(t) = 0$ და ყველა $C_k = 0$. მაშინ (114,17) სისტემაში $B_j = 0$. ვთქვათ, γ_k^0, $k = 1, 2, \ldots, 2p$ ამ სისტემის რაიმე ამონახსნია. მაშინ (114,14) განტოლება ამოხსნადია h_{2p} კლასში, როცა $f(t) = 0$, $C_k = 0$, $\alpha_k = \alpha_k^0 = \gamma_k^0 + \gamma_{k+p}^0$,

$k=1, 2, \dots, 2p$. ვთქვათ, $\omega_0(t)$ არის მისი ამონახსნი, ხოლო $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ შესაბამისი ფუნქციებია, განსაზღვრული (114,13) ფორმულებით. მაშინ გვექნება

$$\begin{gathered}\varphi_0(t)+t\,\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=0, \text{ როცა } t\in L',\\ -\varkappa\varphi_0(t)+t\,\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=\alpha_k^0, \text{ როცა } t\in L_k',\ k=1, 2, \dots, p.\end{gathered} \tag{114,18}$$

თუ ჩავთვლით დროებით

$$\varkappa\varphi_0(z)-z\,\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}=2\mu(u_0+iv_0),$$

სადაც μ რაიმე დადებითი მუდმივია[70] და, თუ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფის ფორმულას[71], ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}=0$$

მთელ S არეში, აქედან გამომდინარეობს, რომ[72]

$$-\varkappa\varphi_0(z)+z\,\overline{\varphi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}=i\varepsilon z+\delta,$$

სადაც ε ნამდვილი, ხოლო δ საზოგადოდ კომპლექსური მუდმივებია, მაშინ (114,18) მეორე ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\varepsilon=0$ და, რომ

$$\alpha_1^0=\alpha_2^0=\dots=\alpha_p^0=\delta=-(1+\varkappa)\beta;$$

მომდევნო ფორმულების რამდენადმე გამარტივების მიზნით ჩვენ შემოვიყვანეთ δ-ს ნაცვლად ახალი მუდმივი β.

(114,18) სასაზღვრო ამოცანას შეიძლება ოდნავ შევუცვალოთ სახე (გარეგნულად), თუ $\psi_0(z)$ ფუნქციის ნაცვლად შემოვიყვანთ ფუნქციას $\psi_*(z)=\psi_0(z)-\overline{\delta}$. მაშინ ჩვენ მივალთ ამოცანამდე

$$\begin{gathered}\varphi_0(t)+t\,\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_*(t)}=-\delta \quad L\text{-ზე},\\ -\varkappa\varphi_0(t)+t\,\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_*(t)}=0 \quad L''\text{-ზე}.\end{gathered}$$

ე. ი. დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ძირითადი შერეული ამოცანის კერძო შემთხვევამდე (იხ. წინა პარაგრაფი) საზღვრის ერთ ნაწილზე ნულოვანი ძაბვების,

70 ჩვენ შემოვიყვანეთ მამრავლი 2μ იმისათვის, რომ დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ანალოგიისათვის გაგვესვა ხაზი. მაგალითად, შეიძლება ავიღოთ $2\mu=1$, როგორც ამას ფაქტიურად აკეთებდა გ. მანჯავიძე [3].

71 ამ ფორმულაში λ-ს შეიძლება მივანიჭოთ ისეთი მნიშვნელობები, რომ

$$\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=\varkappa, \quad \text{ე. ი.} \quad \lambda=\frac{3-\varkappa}{\varkappa-1}\mu;$$

გავიხსენოთ, რომ $\varkappa-1>0$.

72 შეადარეთ დრეკადობის ბრტყელი თეორიის იმ შემთხვევასთან, როცა დეფორმაციის კომპონენტები (და, მაშასადამე, ძაბვებიც) ნულის ტოლია.

ხოლო მეორე ნაწილზე ნულოვანი გადაადგილების შემთხვევაში (იმას, რომ $\varkappa$ სხვა სიდიდეა, არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს). ერთადერთობის თეორემისა და (114,18) სახის სასაზღვრო პირობების საფუძველზე ადვილად დავადგენთ, რომ $\varphi_0(z) = \beta$, $\psi_0(z) = -\overline{\beta}$ და, მაშასადამე, (114,13) ფორმულების საფუძველზე

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z},$$

$$-\overline{\beta} = -\frac{\varkappa}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\bar t\,\omega_0'(t)\,dt}{t-z}.$$

აქედან ზუსტად იმგვარად, როგორც ვიმსჯელეთ წინა პარაგრაფში (113,26) ფორმულების მიმართ, გამოვიყვანთ, რომ $\beta = 0$, ე. ი. ყველა $\gamma_k^0 = 0$.

ამგვარად, ნაჩვენებია, რომ (114,17) სისტემის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია. მაშასადამე, ყოველთვის შეიძლება α_k მუდმივების შერჩევა ისე, რომ (114,14) განტოლება ამოხსნადი იყოს h_{2p} კლასში.

ვიპოვით რა ამ ამონახსნს $\omega(t)$-ს, რომელიც წრფივადაა დამოკიდებული ჯერჯერობით ნებისმიერად ფიქსირებულ ნამდვილ C_k მუდმივებზე, შევადგენთ ფუნქციას

$$w_*(x, y) = \mathrm{Re}\,[\bar z\,\varphi(z) + \chi(z)] + w_0(x, y), \quad \chi(z) = \int \psi(z)\,dz,$$

სადაც $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ფუნქციები განისაზღვრება (114,13) ფორმულებით. ამ სახით აგებული $w_*(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (114,1) განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს

$$\mathbf{M}w_* = \mathbf{N}w_* = 0 \quad L''\text{-ზე}, \quad \frac{\partial w_*}{\partial n} = 0, \; w_* = \rho_k \quad L_k'\text{-ზე}, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

სადაც ρ_k რაღაცა ნამდვილი მუდმივებია.

შევარჩიოთ ახლა C_k მუდმივები ისე, რომ

$$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_p, \quad \mathrm{Im}\,\varphi'(z_0) = 0, \tag{114,19}$$

სადაც z_0 S არის ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილია; ბოლო პირობა (114,19) პირობებიდან არ არის არსებითი[73]; ის ჩვენ იმისათვის შემოვიტანეთ, რომ თავიდან აგვეცილებინა ზედმეტი ნებისმიერობა მუდმივების არჩევაში.

თუ ჩვენ შევძელით (114,19) პირობების დაკმაყოფილება, მაშინ დასმული ამოცანის ამონახსნი იქნება ფუნქცია $w = w_* - \rho$, სადაც ρ არის ρ_k მუდმივების საერთო მნიშვნელობა.

(114,19) პირობა დაიყვანება, როგორც ადვილად ჩანს, C_k მუდმივების მიმართ შემდეგი სახის (ნამდვილ) წრფივ განტოლებათა სისტემაზე:

$$\sum_{k=1}^{p} A_{jk}^0 C_k = B_j^0, \quad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{114,20}$$

[73] $\varphi(z)$-ის შეცვლა $\varphi(z) + iCz$-ით, სადაც C ნამდვილი მუდმივია, $w_*(x, y)$ ფუნქციაზე გავლენას არ ახდენს.

რომელშიც A^0_{jk} კოეფიციენტები $q(x, y)$ ფუნქციისაგან დამოუკიდებელია, ხოლო თავისუფალი წევრი B^0_j დამოკიდებულია მხოლოდ ამ ფუნქციაზე და ნულად იქცევა, როცა $q(x, y) = 0$[74].

ვაჩვენოთ, რომ (114.20) სისტემა ყოველთვის ამოხსნადია, ე. ი. მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

მართლაც. ვთქვათ $q(x, y) = 0$. მაშინ ამ სისტემაში ყველა $B^0_j = 0$ და სისტემა გადაიქცევა ერთგვაროვნად. ვთქვათ, C^0_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ მისი რაიმე ამონახსნია და ვთქვათ: $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ არის ამ ამონახსნის შესაბამისი $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ფუნქციების მნიშვნელობები. პ. 2°-ში დამტკიცებულ ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე, ვიღებთ რა მხედველობაში პირობას $\operatorname{Im} \rho'(z_0) = 0$, დავასკვნით, რომ $\varphi^0(z) = \mathrm{const}$, $\psi^0(z) = \mathrm{const}$. მეორე მხრივ, L''_j-ზე ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$-\varkappa \varphi_0(t) + t\,\overline{\psi'_0(t)} + \overline{\psi_0(t)} = itC^0_k + \alpha^0_k.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ყველა $C^0_k = 0$. მაშასადამე, (114,20) სისტემის შესაბამის ერთგვაროვან სისტემას არ გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. ამიტომ (114,20) სისტემა ცალსახად ამოხსნადია და მის ამოხსნას მივყავართ ამოსავალი ამოცანის ამოხსნამდე.

§ 115. ზოგიერთი შეფასება[75]. წინა პარაგრაფში რომ არ დაგვერღვია მსჯელობის მთლიანობა, ჩვენ გამოვტოვეთ ზოგიერთი ფორმულის გამოსაყენებლობის დეტალური დასაბუთება, მაგალითად, (113,7), (113,8), (114,8), (113,11ა), (113,11ბ) და ზოგიერთი სხვა ფორმულისა. ახლა მოვიყვანთ ზოგიერთ შეფასებას, რომლებიც საკმარისია ასეთი დასაბუთებისათვის; უფრო დაწვრილებით შევჩერდებით § 113-ში განხილულ ამოცანაზე, ხოლო § 114-ში განხილულ ამოცანის შესახებ მოკლე მითითებებს გავაკეთებთ.

განვიხილოთ ოპერატორი

$$\mathbf{k}\omega \equiv \int\limits_L k_1(t_0, t)\, \omega(t)\, dt + \int\limits_L \overline{k_2(t_0, t)}\; \overline{\omega(t)}\, dt, \qquad (115,1)$$

რომელიც მონაწილეობს (113.12) და (114.14) განტოლებებში, სადაც

$$k_1(t_0, t) = \frac{\varkappa}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0}, \qquad k_2(t_0, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0}. \qquad (115,2)$$

ჩავთვალოთ, რომ L წირის t წერტილის x, y კოორდინატებს აქვს წარმოებულები m რიგამდე, რომლებიც აკმაყოფილებენ H (1) პირობას, ანუ ლიფშიცის პირობას (§ 113-ში $m = 2$, ხოლო § 114-ში $m = 3$). დროებით შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$F(t_0, t) = \frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0}.$$

---

[74] ჩვენ ვთვლით, როგორც ვიყავით შეთანხმებული, რომ კერძო ამონახსნი $\omega_0(x, y)$ შევარჩიოთ ისე, რომ $\omega_0(x, y) = 0$, როცა $q(x, y) = 0$. ასეთია, მაგალითად (114,4).

[75] ვ. მანჯავიძე [3].

§ 7-ის შედეგების საფუძველზე, $F(t_0, t)$ ფუნქციას აქვს m რიგის წარმოებულები, რომელთაც აქვთ შემდეგი სახე:

$$\frac{a(t_0, t)}{|t - t_0|^{\lambda}},$$

სადაც λ ნებისმიერი რიცხვია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $0 < \lambda < 1$, ხოლო $a(t_0, t)$ ეკუთვნის H კლასს.

ახლა ვთქვათ, $\omega(t)$ H^* კლასის რაიმე ფუნქციაა. დავუშვათ, რომ

$$\eta(t_0) = \int_L \frac{\partial F(t_0, t)}{\partial t} \omega(t)\, dt;$$

$\eta(t_0)$ ფუნქციას აქვს $(m-1)$ რიგის წარმოებული

$$\eta^{(m-1)}(t_0) = \int_L \frac{\partial^m F(t_0, t)}{\partial t\, \partial t_0^{m-1}} \omega(t)\, dt,$$

რომელიც, როგორც ადვილად დავრწმუნდებით § 51-ის ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე, ეკუთვნის H კლასს. თუ, გარდა ამისა, $\omega(t)$ ფუნქცია უწყვეტია და აქვს $\omega'(t)$ წარმოებული, რომელიც ეკუთვნის H^* კლასს, მაშინ, როგორც გვიჩვენებს ნაწილობითი ინტეგრებით მიღებული ფორმულა

$$\eta^{(m-1)}(t_0) = -\int_L \frac{\partial^{m-1} F(t_0, t)}{\partial t_0^{m-1}} \omega'(t)\, dt,$$

არსებობს წარმოებულიც $\eta^{(m)}(t_0)$, რომელიც აგრეთვე ეკუთვნის H კლასს.

ნათქვამიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ ფუნქცია $\omega(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს, მაშინ $\mathbf{k}\omega$ ფუნქციას აქვს $m-1$ რიგის წარმოებული, რომელიც ეკუთვნის H კლასს, ხოლო თუ ფუნქცია $\omega(t)$ უწყვეტია და აქვს $\omega'(t)$ წარმოებული, რომელიც ეკუთვნის H^* კლასს, მაშინ $\mathbf{k}\omega$ აქვს m რიგის წარმოებული, რომელიც ეკუთვნის H კლასს.

ჯერ განვიხილოთ § 113-ის შემთხვევა (შევახსენებთ, რომ ამ შემთხვევაში $m = 2$). ვთქვათ, $\omega(t)$ (113,12) განტოლების h_{2p} კლასის ამონახსნია, ე. ი. შემდეგი განტოლებისა:

$$\mathbf{K}\omega \equiv \mathbf{K}^0\omega + \mathbf{k}\omega = f(t_0) + C(t_0), \tag{115,3}$$

სადაც $C(t) = C_k$ L_k'-ზე, $C(t) = 0$ L''-ზე. $\omega(t)$ ფუნქცია ამავე დროს წარმოადგენს შემდეგი განტოლების h_{2p} კლასის ამონახსნს:

$$\mathbf{K}_0\omega = A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\, dt}{t - t_0} = f_0(t_0). \tag{115,4}$$

ჩვენ ამ განტოლების მარჯვენა მხარეს

$$f_0(t_0) = f(t_0) + C(t_0) - \mathbf{k}\omega \tag{115,5}$$

განვიხილავთ როგორც მოცემულს. ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული $f(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H_0 კლასს, ხოლო $f'(t)$ — H^* კლასს a_k, b_k კვანძებით.

მაშინ, შესაბამისად, იმავე კლასებს მიეკუთვნება $f_0(t)$ და $f_0'(t)$ ფუნქციები. უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}$$

შეუღლების ამოცანის

$$\varphi^+(t) = G(t)\,\varphi^-(t) + g(t) \tag{115,6}$$

h_{2p} კლასის ამონახსნია, სადაც

$$G(t) = \frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)} = \begin{cases} -\varkappa & \text{როცა} \quad t \in L', \\ 1, & \text{როცა} \quad t \in L'' \end{cases} \tag{115,6ა}$$

და

$$g(t) = \frac{f_0(t)}{A(t)+B(t)} = \begin{cases} f_0(t), & \text{როცა} \quad t \in L', \\ -\dfrac{f_0(t)}{\varkappa}, & \text{როცა} \quad t \in L''. \end{cases} \tag{115,6ბ}$$

ამგვარად, გამოვიყენებთ რა ფორმულებს შეუღლების ამოცანის ამოხსნისათვის, ვექნება:

$$\varphi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\,dt}{\chi^+(t)\,(t-z)}, \tag{115,7}$$

სადაც წინანდებურად

$$\chi(z) = \prod_{k=1}^{p} (z-a_k)^{\frac{1}{2}+i\beta} (z-b_k)^{\frac{1}{2}-i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}. \tag{115,8}$$

§ 26-ის შედეგების საფუძველზე $\varphi^+(t)$ და $\varphi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები არსებობს L წირის ყველა t წერტილისათვის და მიეკუთვნება H კლასს და, მაშასადამე, $\omega(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$ ფუნქციაც ეკუთვნის იმავე კლასს[78].

ახლა განსახილველად შემოვიტანოთ ფუნქცია

$$\varphi_k(z) = (z-c_k)\,\varphi(z), \tag{115,9}$$

სადაც c_k $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$ ერთ-ერთი წერტილთაგანია a_j, b_j-დან. ფუნქცია $\varphi_k(t)$ უსასრულობაში შემოსაზღვრულია და წარმოადგენს სასაზღვრო ამოცანის

$$\varphi_k^+(t) = G(t)\,\varphi_k^-(t) + (t-c_k)\,g(t) \tag{115,10}$$

h_{2p} კლასის ამონახსნს.

---

[78] § 26-ის შედეგებიდან, რომლებიც შეეხებიან ზოგად შემთხვევას, უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\varphi^+(t)$ და $\varphi^-(t)$ მიეკუთვნება H_0 კლასს, მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში, როცა კვანძებში თავს იყრის ორ-ორი რკალი, შეიძლება გამოყენებულ იქნეს (26,24) ფორმულები, რომლებიც მარტივი გამოთვლების შემდეგ გვიჩვენებენ, რომ $\varphi^+(t)$ და $\varphi^-(t)$ ეკუთვნის H კლასს. თუმცა § 103, პ. 2⁰-ის ბოლოს ნათქვამიდან, უფრო ადვილად დავასკვნით, რომ $\omega(t)$ მიეკუთვნება H კლასს

ამიტომ

$$\varphi_k(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(t-c_k)\,g(t)\,dt}{\chi^+(t)(t-z)}. \tag{115.11}$$

აღვნიშნოთ $\sigma_k = \alpha_k\beta_k$ L წირის რაიმე რკალი, რომელიც შეიცავს c_k წერტილს და არ შეიცავს სხვა კვანძებს.

წინამდებარე გამოსახულების გაწარმოებით ზოგიერთი ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\varphi_k'(z) - \varphi(z) = (z-c_k)\,\varphi(z)\sum_{r=1}^{2p}{}' \frac{\frac{1}{2}+i\nu_r}{z-c_r} +$$

$$+\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{L-\sigma_k}\frac{\left(i\nu_k-\frac{1}{2}\right)g(t)\,dt}{\chi^+(t)(t-z)} - \frac{\chi(z)}{2\pi i}\left[\frac{(t-c_k)\,g(t)}{\chi^+(t)(t-z)}\right]_{t=\alpha_k}^{t=\beta_k} +$$

$$+\frac{\chi(z)}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int\limits_{L-\sigma_k}\frac{(t-c_k)\,g(t)\,dt}{\chi^+(t)(t-z)} +$$

$$+\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_k}\frac{t-c_k}{\chi^+(t)}\left[-\sum_{r=1}^{2p}{}'\frac{\frac{1}{2}+i\nu_r}{t-c_r}g(t)+g'(t)\right]_t\frac{dt}{t-z}. \tag{115.12}$$

სადაც $\nu_r = \pm\beta$ და ჯამის ნიშანთან შტრიხი აღნიშნავს, რომ $r=k$ ნომრის შესაკრები გამოტოვებულია.

(115.12) ფორმულის მარჯვენა მხარეში პირველი ოთხი წევრი, როგორც ეს ადვილი შესამჩნევია, უწყვეტად გაგრძელებადია σ_k-ზე ყველგან, c_k წერტილების ჩათვლით, L-დან ორივე მხარეზე; ამ წევრთა სასაზღვრო მნიშვნელობები აკმაყოფილებს H პირობას σ_k-ზე, ამასთან, c_k წერტილში ისინი ნულის ტოლი არიან; § 26-ის შედეგების საფუძველზე იგივე შეიძლება ითქვას უკანასკნელ წევრზეც. ამიტომ (115,12) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\varphi_k'^+(t)$, $\varphi_k'^-(t)$ აკმაყოფილებს L-ზე H პირობებს, და, გარდა ამისა,

$$\varphi_k'^+(c_k) = \varphi^+(c_k), \quad \varphi_k'^-(c_k) = \varphi^-(c_k).$$

ტოლობიდან

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi_k(z)-\varphi(z)}{z-c_k}$$

დავასკვნით, რომ $\varphi'^+(t)$, $\varphi'^-(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს σ_k-ზე (წყვეტის წერტილს წარმოადგენს c_k).

ვინაიდან c_k-ს ქვეშ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნებისმიერი a_k, b_k წერტილებიდან, ცხადია, რომ $\varphi'^+(t)$ და $\varphi'^-(t)$ წარმოადგენს H^* კლასის ფუნქციებს L-ზე (a_k, b_k კვანძებით, $k = 1, 2, \ldots, p$). შემდეგ, აშკარაა, რომ ფუნქცია $\varphi'(z)$ თანაბ-

რად მიისწრაფვის თავისი $\varphi'^{+}(t)$ და $\varphi'^{-}(t)$ ზღვრებისაკენ, როცა z წერტილი უახლოვდება L-ის t წერტილს მარცხნიდან ან მარჯვნიდან, თუ ჩავთვლით, რომ ეს წერტილი არ იმყოფება იმ რკალებზე, რომლებიც ამოჭრილია L-დან რაგინდ მცირე რადიუსიანი წრეწირებით, ცენტრით a_k, b_k წერტილებში. ამიტომ ადვილი შესამჩნევია, რომ a_k, b_k-საგან განსხვავებულ წერტილებში $\varphi'^{+}(t) = \varphi^{+\prime}(t) = \dfrac{d\varphi^{+}}{dt}$, $\varphi'^{-}(t) = \varphi^{-\prime}(t) = \dfrac{d\varphi^{-}}{dt}$ და, რომ $\varphi^{+\prime}(t)$ და $\varphi^{-\prime}(t)$ L-ზე ეკუთვნის H^* კლასს და, მაშასადამე, $\omega'(t) = \varphi^{+\prime}(t) - \varphi^{-\prime}(t)$ ფუნქციაც ეკუთვნის L-ზე H^* კლასს.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ (113,11)-ის მეორე ფორმულით განსაზღვრული $\psi(z)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ (113,11ა) სახით. აქედან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ კვანძებისაგან განსხვავებული ყველა t წერტილისათვის არსებობს $\psi^{+}(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობა და იგი ეკუთვნის H^* კლასს. $\omega(t)$ ფუნქციის ზემოთ დამტკიცებული თვისებებიდან აგრეთვე გამომდინარეობს (113,11ბ) ფორმულის სამართლიანობა.

გადავალთ რა გამოსახულებებზე

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \qquad -\varkappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{115,13}$$

რომელთა სასაზღვრო მნიშვნელობები მონაწილეობს (113,9) პირობებში, ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ უფრო მეტიც, სახელდობრ ის, რომ ეს გამოსახულებები უწყვეტად გაგრძელებადია საზღვრის ყველა წერტილზე და, რომ სასაზღვრო მნიშვნელობები ეკუთვნის H კლასს. მართლაც, ეს უკვე ნაჩვენებიც იყო პირველი შესაკრებისათვის, რომელიც შეიცავს $\varphi(z)$. ახლა განვიხილოთ ჯამი $z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ ანუ, რაც იგივეა, მასთან შეუღლებული გამოსახულება $\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)$. (113,11ა), (113,11ბ) ფორმულების საფუძველზე გვაქვს:

$$\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(\bar{z}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z}.$$

მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებს აქვს საჭირო თვისება. თუ a_k, b_k წერტილებიდან რომელიმეს აღვნიშნავთ c-თი, გვექნება:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(\bar{z}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z} = \frac{\bar{z}-\bar{c}}{2\pi i}\int_L \frac{\omega'(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(\bar{c}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z},$$

რის შემდეგაც ჩვენი მტკიცებანი ცხადი ხდება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\omega'(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს.

ამგვარად, თუ $\omega(t)$ წარმოადგენს (113,12) განტოლების h_{2p} კლასის ამონახსნს C_k მუდმივების სათანადოდ შერჩევისას, მაშინ (115,13) გამოსახულებანი უწყვეტად გაგრძელებადია საზღვრის ყველა წერტილზე და ამ გამოსახულებათა სასაზღვრო მნიშვნელობები აკმაყოფილებს (113,9) პირობებს, ამგვარად, $\varphi(z)$, $\psi(z)$

ფუნქციები, განსაზღვრული (113,11) ფორმულებით $\omega(t)$ საშუალებით, გვაძლევს ამოცანის ამოხსნას[77].

მაგრამ, $\omega(t)$ ამონახსნის არსებობის დამტკიცების პროცესში მუდმივების სათანადოდ შერჩევისას და თვით ასეთი შერჩევის შესაძლებლობის დამტკიცებისას ჩვენ ვსარგებლობდით ერთადერთობის თეორემებით, რომლებიც დაფუძნებულია (113,8) ინტეგრალური ფორმულების გამოყენებაზე.

ახლა საჭიროა დავამტკიცოთ ამ ფორმულების გამოსაყენებლობა ყველა იმ პირობისათვის, რომლებიც ჩვენ მივიღეთ.

ამ მიზნისათვის აუცილებელია გამოვიკვლიოთ ყოფაქცევა $\varphi''(z)$ ფუნქციისა და, აგრეთვე, გამოსახულებისა $d[\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)]$ საზღვრის მახლობლად, როცა $f(t)=0$, რადგანაც ჩვენ (113,8) ფორმულა გამოვიყენეთ მხოლოდ ამ დაშვებისათვის.

ამგვარად, ჩვენ ჩავთვლით, რომ $f(t)=0$. მაშინ ამ პარაგრაფის დასაწყისში ნათქვამისა და იმის ძალით, რომ $\omega'(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს, $g(t)$, $g'(t)$ და $g''(t)$ ფუნქციები ეკუთვნის H_0 კლასს.

მაშინ (115,12) ფორმულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$|\varphi'(z)| = \left|\frac{\varphi_k'(z)-\varphi(z)}{z-c_k}\right| < \frac{\text{const}}{|z-c_k|^{1/2}}$$

c_k წერტილების მიდამოში, აქედან, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ

$$|\varphi'(z)| < \frac{\text{const}}{|\Pi(z)|^{1/2}} \tag{115.14}$$

ყველა კვანძის მიდამოში, სადაც მიღებულია

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k). \tag{115,15}$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi_1(z) = \frac{d}{dz}\left[\Pi(z)\varphi(z)\right]. \tag{115,16}$$

ზემოხსენებულის საფუძველზე, ცხადია, რომ $\varphi_1(z)$ წარმოადგენს

$$\varphi_1^+(t) = G(t)\varphi_1^-(t) + g_1(t) \tag{115.17}$$

სასაზღვრო ამოცანის h_{2p} კლასის ამონახსნს, სადაც

$$g_1(t) = \frac{d}{dt}\left[\Pi(t)g(t)\right]. \tag{115,18}$$

[77] შერეული ამოცანის ამოხსნის დროს ჩვენ გარე ძაბვების X_n Y_n მოცემა L-ზე შევცვალეთ (113,5) გამოსახულების სასაზღვრო მნიშვნელობების მოცემით (მუდმივ შესაკრებამდე სიზუსტით). ეს სავსებით გამართლებულია მექანიკური მოსაზრებით.

ამგვარად, $\varphi_1(z)$ წარმოადგენს ისეთივე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს, როგორიც გვქონდა $\varphi(z)$-სათვის, ისეთივე პირობებით თავისუფალი წევრის მიმართ. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ $\varphi_1(z)$ შეიძლება უსასრულობაში ჰქონდეს $2p-1$ რიგი, მაგრამ ეს, როგორც ადვილად დავინახავთ, არ მოქმედებს შედეგზე. ამიტომ, კერძოდ, ჩვენ გვექნება შეფასება

$$|\varphi_1'(z)| < \frac{\text{const}}{|\Pi(z)|^{1/2}},$$

საიდანაც შეიძლება მივიღოთ შეფასება $\varphi''(z)$-სათვის. სახელდობრ, გვექნება

$$\Pi(z)\,\varphi''(z) = \varphi_1'(z) - 2\,\varphi'(z)\,\Pi'(z) - \varphi(z)\,\Pi''(z).$$

საიდანაც გამომდინარეობს შეფასება

$$|\varphi''(z)| < \frac{\text{const}}{|\Pi(z)|^{3/2}}.$$

ეს და ანალოგიური შეფასებები, რომელთა გამოყვანასაც მკითხველს ვანდობთ, ნებას გვაძლევს მკაცრად დავადგინოთ § 113 ყველა დასკვნა.

ანალოგიური შეფასებები შეიძლება მივიღოთ § 114-ში განხილული ამოცანისათვის. ამ შემთხვევაში წირის t წერტილის x, y კოორდინატებს პირობის თანახმად აქვს $H(1)$ კლასის მესამე რიგის წარმოებული. წინას მსგავსი მსჯელობის საშუალებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევისათვის გვაქვს შეფასება

$$|\varphi'''(z)| < \frac{\text{const}}{|\Pi(z)|^{5/2}}$$

და სხვა ანალოგიური შეფასებები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ მკაცრად დავადგინოთ ყველა დასკვნა, რასაც ჩვენ მკითხველს ვანდობთ.

V. მოკლე ცნობები ზოგიერთი სხვა შედეგის შესახებ

ამ კარში ჩვენ ვიძლევით მოკლე მითითებებს რიგ მნიშვნელოვან შედეგებზე, რომლებიც მჭიდრო კავშირშია ამ თავში გადმოცემულ შედეგებთან და, რომლებზედაც არ გვაქვს საშუალება უფრო დაწვრილებით შევჩერდეთ, რომ არ გამოვიდეთ წიგნის დასახული ჩარჩოებიდან.

ეს შედეგები, პირველ რიგში ეხება როგორც მოცემული, ასევე საძიებელი დასაშვები ფუნქციების კლასთა გაფართოებას (§ 116); მეორე რიგში კი, გარკვეული სახის წრფივ სინგულარულ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებს (§ 117).

სამწუხაროდ, არ გვაქვს საშუალება, თუნდაც მოკლედ შევეხოთ ისეთ მნიშვნელოვან საკითხს, როგორიცაა მიახლოებითი ამოხსნების მეთოდები და ამიტომ ამ მიმართულებით შემოვიფარგლებით ზოგიერთ შრომაზე მითითებით: მ. ლავრენტიევი [2], ა. კალანდია [5, 6], ვ. ივანოვი [1 — 5], ი. სოფრონოვი [1, 2], L. Berg [1], R. C. MacCamy [1].

სინგულარული ინტეგრალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნების მეთოდებზე შრომების მიმოხილვა მკითხველმა შეიძლება ნახოს ვ. ივანოვის სტატიაში [6].

§ 116. დასაშვებ ფუნქციათა კლასების გაფართოების შესახებ. 1°. ამ წიგნში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა ამოხსნებს ვეძებთ H^* კლასში. შევახსენებთ, რომ $\varphi(t)$ ფუნქციას, რომელიც ამ კლასს ეკუთვნის, ახასიათებს შემდეგი თვისებები: ა) c წერტილების (კვანძების) სასრული სიმრავლის მიდამოში მას აქვს სახე: $\varphi(t) = \varphi_*(t)(t-c)^{-\gamma}$, სადაც $\varphi_*(t)$ c წერტილის მიდამოში ეკუთვნის H_0 კლასს, ხოლო $\gamma = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\gamma < 1$; ბ) L-ის ყველა ჩაკეტილ ნაწილზე, რომელიც არ შეიცავს კვანძებს, ის აკმაყოფილებს H პირობას. ჩვენ ამ კლასის ფუნქციებზე იმიტომ შევჩერდით, რომ ჯერ ერთი გამოყენებითი ხასიათის ამოცანების უმრავლესობაში სავსებით საკმარისია შემოვიფარგლოთ ამ კლასის ფუნქციებით; მეორეც, H^* კლასით შემოფარგვლისას ხერხდება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მთელი თეორიის აგება ლებეგის ინტეგრალის გარეშეც.

გარკვეულ ინტერესს იწვევს განსახილველ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა კლასისა და განსაკუთრებით კი საძიებელ ამონახსნთა კლასის გაფართოება. ამ მიმართულებით რიგ საინტერესო შედეგებს შეიცავს ს. მიხლინის შრომები [1] — [7], რომლებშიც განხილულია ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების შემდეგი კლასი:

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + V\varphi = f(t_0), \tag{116,1}$$

სადაც თავისუფალი წევრი $f(t)$ და ამონახსნი $\varphi(t)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}_2(L)$ ფუნქციონალურ სივრცეს, V სავსებით უწყვეტი ოპერატორია $\mathbf{L}_2(L)$-ში, L შეკრული კონტურია, რომელსაც აქვს შემოსაზღვრული სიმრუდე. განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს, რომ [6] შრომაში ს. მიხლინმა ააგო (116,1) სახის სინგულარული განტოლების ზოგადი თეორია იმ შემთხვევაში, როცა $A(t)$, $B(t)$ კოეფიციენტებისაგან მოითხოვება მხოლოდ უწყვეტობა.

ცხადია, რომ H^* კლასი არ წარმოადგენს $\mathbf{L}_2(L)$-ის ქვეკლასს, რადგანაც თუ ფუნქცია ეკუთვნის ამ უკანასკნელ კლასს, მაშინ მას შეუძლია კვანძებში გახდეს უსასრულობა მხოლოდ ნახევარზე დაბალი რიგით[78]. მაშასადამე, თუ H^* კლასს შევცვლით $\mathbf{L}_2(L)$ კლასით, ამით არსებითად ფართოვდება H^* კლასის ბ) თვისება (იხილეთ ამ პუნქტის დასაწყისი), მაგრამ სამაგიეროდ ასევე არსებითად ვიწროვდება, გარკვეული აზრით, ა) თვისება. ეს უკანასკნელი გარემოება ზოგ შემთხვევაში შესამჩნევად აქვეითებს ამოხსნის ზოგადობას. მაგალითად, გახსნილი კონტურების შემთხვევაში კვადრატით ჯამებადი ამონახსნების დაშვება გვაიძულებს განტოლების კოეფიციენტები შევზღუდოთ ხელოვნური პირობებით. გარდა ამისა, თუ შემოვიფარგლებით $\mathbf{L}_2(L)$ კლასის ფუნქციებით, მაშინ რიგ გამოყენებითი ხასიათის ამოცანებშიც კი (მაგ. დრეკადობის თეორიის ამოცანებში) ზოგჯერ შეიძლება დაიკარგოს მეტად არსებითი ამონახსნები.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენ გვსურს მივიღოთ ამ წიგნში გადმოცემული შედეგების ეფექტური გაფართოება დასაშვებ ამოხსნათა კლასის გაფართოების აზრით, საჭიროა ამონახსნთა ისეთი კლასი მაინც ავიღოთ, რომელიც

---

[78] არა ერთზე დაბალი, როგორც ეს დასაშვებია H^* კლასის ფუნქციისათვის.

მოიცავს H^* კლასს. ასეთი ტიპის საკმაოდ ზოგად კლასს წარმოადგენს, მაგალითად, p ხარისხში ჯამებად ფუნქციათა კლასი, სადაც $p > 1$, ან, რაც ჩვენს შემთხვევაში უფრო მიზანშეწონილია, $\mathbf{L}_p(\rho, L)$ კლასი (იხ. § 27). ამ კლასში სინგულარული ინტეგრალური განტოლება შესწავლილია ბ. ხვედელიძის მიერ [5]—[7], [9]—[11], [15], [18]. დასახელებულ შრომებში, კერძოდ, დამტკიცებულია ნეტერის განზოგადებული თეორემები ((116,1) განტოლებისათვის) საკმაოდ ზოგად დაშვებებში, როგორც მოცემული, ისევე საძიებელი ფუნქციების მიმართ. მოვიყვანოთ ამ შედეგის ფორმულირება. ვთქვათ L შეკრული ან გახსნილი ლიაპუნოვის მარტივი ურთიერთარაგადამკვეთი რკალების ერთობლიობაა. ვთქვათ $A(t)$, $B(t)$ ფუნქციები ყველგან უწყვეტია L-ზე, შესაძლებელია, წერტილების სასრული სიმრავლის გარდა, რომლებშიც ამ ფუნქციებს შეიძლება ჰქონდეთ პირველი გვარის წყვეტა, ამასთან, $A^2(t) - B^2(t) \neq 0$ ყველგან L-ზე. ვთქვათ,

$$G(t) = \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)}$$

და ვთქვათ, $c_1, \ldots, c_m$ L წირის ყველა ბოლო წერტილი და $G(t)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებია. შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\alpha_k = n_k - \frac{1}{2\pi} \arg \frac{G(c_k - 0)}{G(c_k + 0)}, \tag{116.2}$$

სადაც

$$n_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \arg \dfrac{G(c_k - 0)}{G(c_k + 0)}, & \text{თუ } \dfrac{G(c_k - 0)}{C(c_k + 0)} \text{ დადებითი სიდიდეა,} \\ \left[\dfrac{1}{2\pi} \arg \dfrac{G(c_k - 0)}{G(c_k + 0)}\right] + 1 & \text{დანარჩენ შემთხვევებში}^{79}. \end{cases} \tag{116,3}$$

თუ c_k L წირის ერთ-ერთი ბოლო წერტილია, მაშინ (116,2) და (116,3)-ში საწყისი წერტილის შემთხვევაში უნდა ავიღოთ $G(c_k - 0) = 1$, ხოლო ბოლო წერტილის შემთხვევაში $G(c_k + 0) = 1$. ცხადია, რომ $0 \leqslant \alpha_k < 1$. დაბოლოს, ვთქვათ,

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} |t - c_k|^{\alpha_k(p-1)}. \tag{116.4}$$

ახლა განვიხილოთ (116,1) განტოლება, რომლის კოეფიციენტები $A(t)$, $B(t)$ აკმაყოფილებს ზემოთ მითითებულ პირობებს, თავისუფალი წევრი $f(t)$ ეკუთვნის $\mathbf{L}_p(\rho; L)$ კლასს, სადაც $p > 1$. $\rho(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (116,4) ტოლობით, V სავსებით უწყვეტი ოპერატორია $\mathbf{L}_p(\rho; L)$-ში, ხოლო $\varphi(t)$ ამონახსნს მოვძებნით იმავე $\mathbf{L}_p(\rho, L)$ კლასში. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას (იხ. ბ. ხვედელიძე [18]): I) (116,1) განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ

$$\int_L f(t)\, \psi_j(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k',$$

[79] სიმბოლო $[x]$ აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს.

სადაც $\psi_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, k')$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა შეულლებული ერთგვაროვანი განტოლებისა[80]

$$A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)}{t-t_0}\,dt + V^*\varphi = 0 \tag{116,5}$$

$\mathbf{L}_q(\rho^{1-q}; L)$ კლასში, სადაც $q = p(p-1)^{-1}$. თუ k (116,1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვია $\mathbf{L}_p(\rho; L)$ კლასში, ხოლო k' — (116,1) შეულლებული ერთგვაროვანი განტოლების $\mathbf{L}_q(\rho^{1-q}; L)$ კლასის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი, მაშინ

$$k - k' = \sum_{j=1}^{m} n_j.$$

სადაც n_j მთელი რიცხვია, განსაზღვრული (116,3) ფორმულით.

დასაშვებ ფუნქციათა კლასის შემდგომი გაფართოება $A(t)$, $B(t)$ კოეფიციენტებისათვის, ზემოთ მითითებული თეორემების დამტკიცება სერიოზულ წინააღმდეგობებს აწყდება (იხ. მაგალითად, ი. ქარციეაძე [3]).

ბოლოს აღვნიშნოთ კიდევ ერთი შედეგთაგანი, რომელიც ძალზე საინტერესოა წიგნში განხილულ საკითხებთან დაკავშირებით. ბ. ხვედელიძემ აჩვენა, რომ ამ თავში განხილულ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებს (ე. ი. (96.11), (96.12) განტოლებებს) აქვთ ერთი და იგივე ამონახსნები როგორც H^* კლასში, ასევე $\mathbf{L}_p(\rho, L)$ კლასში. საქმე იმაშია, რომ საძიებელი ფუნქციისათვის წინასწარ ამა თუ იმ პირობების დაწესებისას დამატებითი გამოკვლევების გარეშე ვერ ჩავთვლით, რომ არ დავკარგეთ მოცემული საკითხისათვის საინტერესო ამონახსნები. ამიტომ ყოველთვის სასურველია, რომ პირობები საძიებელ ამონახსნებზე იყოს ნაკლებად შემზღუდველი. გარდა ამისა ბ. ხვედელიძის ზემოთ ნახსენები შედეგი გვიჩვენებს, რომ H^* კლასი წარმოადგენს ამ წიგნში განხილული სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების საძიებელი ამონახსნებისათვის მიზანშეწონილად შერჩეულ კლასს.

2°. ზოგადი თეორიის აგებისას ჩვენ განვიხილეთ მხოლოდ ნორმალური ტიპის სინგულარული განტოლებანი, ანუ ისეთები, რომ $S(t) = A(t) + B(t)$ და $D(t) = A(t) - B(t)$ ფუნქციები L-ზე არსად არ იქცევა ნულად. ისეთი განტოლებების თვისებები, რომლებიც არ ეკუთვნიან ნორმალურ ტიპს, არსებითად განსხვავდებიან ნორმალური ტიპის განტოლებების თვისებებისაგან და ჯერჯერობით ჩვენ არ გაგვაჩნია ასეთი განტოლებების მეტ-ნაკლებად დასრულებული თეორია. მაგრამ ამ მიმართულებით უკვე გვაქვს რიგი საინტერესო შედეგებისა. შრომებიდან, რომლებიც შეიცავენ ასეთ შედეგებს, უნდა დავასახელოთ დ. შერმანის შრომები [6], [7], [9]. ამ შრომებში განხილულია რეგულარიზაციის ერთი ახალი მეთოდი (როცა L მარტივი შეკრული გლუვი კონტურია), რომელიც გამოსადეგია ზოგიერთი დამატებითი დაშვების შემთხვევაში, მაშინაც, როდესაც ორ $S(t)$ და $D(t)$ ფუნქციისაგან

[80] V^* ოპერატორი შეულლებულია V ოპერატორთან; ბ. ხვედელიძეს [18] შრომაში შეულლებული განმარტებულია ისე, რომ ის ემთხვევა ამ წიგნში განხილულ შემთხვევებში მიკავშირებულ ოპერატორს.

მხოლოდ ერთი განსხვავდება ნულისაგან ყველგან L-ზე, ხოლო მეორეს აქვს ნულები წერტილების სასრულ სიმრავლეზე[81].

ამასთან დაკავშირებით საინტერესოა აგრეთვე ი. გოხბერგის შრომა [3], რომელშიც ნაჩვენებია, რომ პირობა $D(t)\cdot S(t)\neq 0$ L-ზე აუცილებელი და საკმარისია იმისათვის, რომ სინგულარულმა ინტეგრალურმა განტოლებამ დაუშვას რეგულარიზაცია შემოსაზღვრული წრფივი ოპერატორის საშუალებით ჰილბერტის ფუნქციონალურ სივრცეში.

ამას წინათ გამოქვეყნდა თ. გახოვის ნაშრომი [13], რომელშიც განიხილება შემთხვევა, როცა $A(t)\pm B(t)\equiv 0$.

3°. როცა L წარმოადგენს ურთიერთ არაგადამკვეთ მარტივ შეკრულ ან გახსნილ ლიაპუნოვის რკალთა სასრულ ერთობლიობას, ბ. ხვედელიძემ [18], [19] ამ წიგნში გამოყენებული მეთოდების განვითარების გზით აჩვენა, რომ §§ 97, 98-ში ჩამოყალიბებული შედეგების სამართლიანობა შეიძლება დასაბუთდეს იმ შემთხვევაშიც, როცა $A(t)$, $B(t)$ ფუნქციები (97,1), (98,1) განტოლებებში უბან-უბან უწყვეტია, $A(t)+B(t)$, $A(t)-B(t)$ განსხვავდება ნულისაგან L-ზე ყველგან, ხოლო მარჯვენა მხარე და საძიებელი ამონახსნი ეკუთვნის $\mathbf{L}_p(\rho, L)$ კლასს, სადაც $p>1$, ხოლო $\rho(t)$ (27,3) სახის გარკვეული ფუნქციაა.

ანალოგიური, მაგრამ უფრო კერძო შედეგი, სხვა მეთოდით აგრეთვე მიღებულია შრომაში F. Tricomi [4].

შემთხვევა, როცა $A(t)+B(t)$ ან $A(t)-B(t)$ ფუნქციებს L-წირზე აქვთ პირველ რიგზე დაბალი რიგის ნულები, განხილულია ნ. ვეკუას [8], ბ. ხვედელიძის [18] და ა. დრაჩინსკის [1] მიერ, ხოლო მთელი რიგის ნულებისათვის,— ლ. ჩიკინის [1] და თ. გახოვის [10] მიერ.

§§ 97, 98-ში გადმოცემული შედეგების განზოგადება არაგლუვი წირების საკმაოდ ზოგადი კლასის შემთხვევაში მოცემულია თ. გეგელიას შრომებში [1], [2].

ბოლო დროს გამოსულ რიგ შრომებში განხილულია ზოგიერთი ისეთი განტოლება, რომლებიც განსხვავებულია დამახასიათებელი სინგულარული განტოლებებისაგან და, რომლებიც ამოიხსნებიან ჩაკეტილი სახით (კვადრატურებში). ეს შედეგები გადმოცემულია თ. გახოვის წიგნში [10], მეორე გამოცემის VII თავში.

§ 117. ზოგიერთი სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების შესახებ. ბევრი ამოცანა, რომელთაც აქვთ დიდი გამოყენებითი მნიშვნელობა, დაიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებაზე:

$$\sum_{r=0}^{m}\left[a_r(t_0)\,\varphi^{(r)}(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_r(t_0,t)\,\varphi^{(r)}(t)\,dt}{t-t_0}\right]=f(t_0), \qquad (117,1)$$

სადაც $a_r(t)$, $K_r(t_0,t)$ მოცემული ფუნქციებია, $\varphi^{(r)}(t)$ აღნიშნავს საძიებელი $\varphi(t)$ ფუნქციის r რიგის წარმოებულს, ამასთან, $\varphi^{(0)}(t)=\varphi(t)$.

81 ამ შედეგის განზოგადება მოცემულია ა. კოსულინის [1] და ზ. პრესდორფის [2] სტატიებში

ამ განტოლების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს პრანდტლის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება (თვითმფრინავის ფრთის თეორიის განტოლება), რომლის გამოკვლევასა და შესწავლას მიეძღვნა მრავალი შრომა. კერძოდ ი. ვეკუას [9] და ლ. მაღნარაძის [1] შრომები, რომლებიც მჭიდროდაა დაკავშირებული ამ წიგნში გადმოცემულ მეთოდებთან. (117,1) სახის განტოლება პირველად განიხილა ლ. მაღნარაძემ [2], [3].

იმ შემთხვევაში, როცა $a_r(t)$, $f(t)$ $K_r(t_0, t)$ ფუნქციები გარკვეულ რიგამდე წარმოებადია, ხოლო L მარტივი შეკრული, საკმაოდ რეგულარული კონტურია, ლ. მაღნარაძეს (117,1) განტოლება დაჰყავს ეკვივალენტურ სინგულარულ ან რეგულარულ ინტეგრალურ განტოლებამდე.

(117,1) სახის განტოლება, როცა L შეკრული გლუვი კონტურია, ხოლო $a_r(t)$, $f(t)$, $K_r(t_0, t)$ — H კლასის ფუნქციები, განხილულია ი. კრიკუნოვის მიერ [1], [2], [3]. უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის შემოყვანით

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z}$$

(117,1) განტოლება დაიყვანება (81,1) სახის ამოცანაზე. იმის გამო, რომ ი. კრიკუნოვი ამოცანის განხილვის დროს სარგებლობს ინტეგრალური წარმოდგენებით, რომლებიც შეიცავენ საძიებელი ფუნქციის და მისი წარმოებულის მნიშვნელობებს $z = 0$ წერტილში (იგულისხმება, რომ ეს წერტილი L წირის შიგნითაა), ის ეძებს განტოლების ისეთ ამონახსნებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\int_L \varphi(t)\, t^{-k-1}\, dt = r_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{117,2}$$

სადაც r_k მოცემული მუდმივებია. ავტორი გვიჩვენებს, რომ (117,1) განტოლების ამონახსნების მოძებნა ტოლფასია გარკვეული სინგულარული განტოლების ამოხსნისა, რომელიც მარჯვენა მხარეში შეიცავს r_k მუდმივებს.

ნ. ვეკუამ [28] მიუთითა (117,1) განტოლების სინგულარულ განტოლებაზე დაყვანის ერთ მარტივ ხერხზე. ეს ხერხი მდგომარეობს შემდეგში.

ჯერჯერობით დავუშვათ, რომ $L = ab$ გლუვი გახსნილი კონტურია. შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\varphi^{(m)}(t) = \mu(t);$$

გვექნება

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_L \omega_{m-k-1}(t, t_1)\, \mu(t_1)\, dt_1 + \frac{C_1 t^{m-k-1}}{(m-k-1)!} + \cdots + C_{m-k}, \tag{117,3}$$

სადაც

$$\omega_0(t, t_1) = 1, \quad \text{თუ} \quad t_1 \in at,$$
$$\omega_0(t, t_1) = 0, \quad \text{თუ} \quad t_1 \overline{\in} at,$$
$$\omega_{k-1}(t, t_1) = \int_L \omega_0(t, t_2)\, \omega_{k-2}(t_2, t_1)\, dt_2, \quad k = 2, 3, \ldots, m,$$

$C_1, C_2, \dots, C_m$ ნებისმიერი მუდმივებია.

ჩავსვამთ რა ამ მნიშვნელობებს (117,1) განტოლებაში, $\mu(t)$ მიმართ მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებას

$$K\mu \equiv a_m(t_0)\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_m(t_0, t)\mu(t)\,dt}{t-t_0} + \int\limits_L k(t_0, t)\mu(t)\,dt =$$

$$= f(t_0) - \sum_{k=1}^{m} C_k \chi_k(t_0), \tag{117,4}$$

$$k(t_0, t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t_0)\,\omega_{m-k-1}(t_0, t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_k(t_0, \tau)\,\omega_{m-k-1}(\tau, t)}{\tau - t_0}\,d\tau,$$

სადაც $\chi_k(t_0)$, $k = 1, 2, \dots, m$ გარკვეული ფუნქციებია, რომელთა მნიშვნელობები ადვილად ამოიწერება. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

თუ C_k, $k = 1, 2, \dots, m$, მუდმივების რაიმე მნიშვნელობებისათვის $\mu(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს (117,4) განტოლების ამონახსნს, მაშინ (117,3) ფორმულით განსაზღვრული $\varphi(t)$ ფუნქცია მოგვცემს (117,1) ამოსავალი განტოლების ამონახსნს. ცხადია, რომ პირუკუ, თუ $\varphi(t)$ (117,1) განტოლების ამონახსნია, მაშინ $\varphi^{(m)}(t) = \mu(t)$ იძლევა (117,4) განტოლების ამონახსნს (რა თქმა უნდა $C_1, \dots, C_m$ მუდმივების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის).

ზემოთ მოყვანილი შედეგების გამოყენებით ნ. ვეკუა [31] გვაძლევს (117,1) სახის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნას.

ეს მეთოდი ცხადია, შეიძლება გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა შეკრული გლუვი კონტურია. მაგრამ ამ შემთხვევაში საჭიროა ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ $\varphi^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) ფუნქციები განსაზღვრული (117,3) ფორმულით $\mu(t) = \varphi^{(m)}(t)$ ფუნქციის საშუალებით საზოგადოდ შეიძლება იყოს მრავალსახა; ამიტომ (117,4) განტოლების ამონახსნის საშუალებით შეიძლება მივიღოთ (117,1) განტოლების ისეთი ამონახსნებიც, რომლებიც დაუშვებენ პირველი გვარის წყვეტას, მაგრამ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, (117,4) განტოლების ამონახსნების დახმარებით, ყოველთვის შევძლებთ მივიღოთ (117,1) განტოლების ცალსახა და უწყვეტი ამონახსნები, თუ ასეთები არსებობენ.

ანალოგიურ შედეგს აქვს ადგილი შემდეგი სახის განტოლების მიმართ:

$$\sum_{r=0}^{m}\left\{ a_r(t_0)\varphi^{(r)}(t_0) + b_r(t_0)\overline{\varphi^{(r)}(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_r(t_0, t)\varphi^{(r)}(t)\,dt}{t-t_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{M_r(t_0, t)\overline{\varphi^{(r)}(t)\,dt}}{t-t_0}\right\} = f(t_0),$$

სადაც $\overline{\varphi^{(k)}(t)}$ არის $\varphi^{(k)}(t)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული.

რ. ისახანოვს [1] განხილული აქვს (117,1) განტოლება შეკრული კონტურის შემთხვევაში[82]. ისევე როგორც ი. კრიკუნოვს, მასაც ეს განტოლება დაჰყავს (81,1) სახის ამოცანაზე, მაგრამ აღნიშნული ავტორისაგან განსხვავებით იგი დამატებით (117,2) პირობებს არ ადებს (117,1) განტოლების ამონახსნებს. რ. ისახანოვმა გვიჩვენა, რომ (117,1) განტოლების ყოველი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმულით

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L Q(t_0, t)\,\mu(t)\,dt, \tag{117,5}$$

სადაც $Q(t_0, t)$ გარკვეული ფუნქციაა, ხოლო $\mu(t)$ ამონახსნია შემდეგი სახის სინგულარული განტოლებისა:

$$K\mu \equiv \frac{a_m(t_0)}{t_0^m}\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_m(t_0, t)\,\mu(t)\,dt}{t^m(t-t_0)} + \int_L k(t_0, t)\,\mu(t)\,dt = f(t_0).$$

რ. ისახანოვმა [4] აგრეთვე აჩვენა, რომ თუ ფუნქციები

$$\frac{d^r a_r(t)}{dt^r}, \quad \frac{\partial^r K_r(t_0, t)}{\partial t_0^k\,\partial t^{r-k}}, \quad r = 0, 1, \ldots, m, \quad k = 0, 1, \ldots, r,$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[\frac{K_m(t_0, t) - K_m(t_0, t_0)}{t - t_0}\right]$$

აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე, მაშინ (117,1) განტოლებისათვის ადგილი აქვს ნეტერის თეორემების ანალოგიურ თეორემებს, რომლებშიც (117,1) განტოლების მიკავშირებულ განტოლების როლში გამოდის განტოლება

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\left\{[a_r(t_0)\,\psi(t_0)]^r + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^r K_r(t_0, t)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0}\right\} = 0.$$

ნ. ვეკუას [34] და კ. კვანტალიანის [1] ნაშრომებში შესწავლილია მცირე პარამეტრზე დამოკიდებულ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგიერთი განტოლება.

ნ. ვეკუამ [31] განიხილა აგრეთვე წრფივი შეუღლების დიფერენციალური სასაზღვრო ამოცანა, რომელიც შეიცავს მცირე პარამეტრს უმაღლესი რიგის წარმოებულებთან.

---

[82] ზოგიერთი შედეგის შესახებ იმ შემთხვევაში, როცა კოეფიციენტები წყვეტილია, ანდა L წირი გახსნილი კონტურების ერთობლიობაა, იხ. რ. ისახანოვი [2], [3].

თავი მეექვსე

სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემები და შეუღლების ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის

ეს თავი ეძღვნება კოშის ტიპის გულიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისა და შეუღლების ამოცანისათვის მიღებული შედეგების განზოგადებას რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევაზე. ამასთან განვიხილავთ მხოლოდ შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევას, უფრო ზოგადი შემთხვევების მიმართ კი შემოვიფარგლებით ლიტერატურაზე მითითებით.

თუ დავკმაყოფილდებით სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ინდექსის იმ განსაზღვრით, რომ იგი არის მოცემული ერთგვაროვანი სისტემისა და მიკავშირებული სისტემის ამონახსნების რაოდენობათა შორის სხვაობა, მაშინ ერთი სინგულარული განტოლებისათვის ცნობილი ძირითადი თეორემები შეიძლება თითქმის ავტომატურად გადატანილ იქნეს სისტემაზე, თუ შემოვიღებთ საამისოდ მიზანშეწონილ აღნიშვნებს, რაც ფაქტიურად გაკეთებულიცაა ქვემოთ ამ თავის I კარში.

საკითხი სხვაგვარად დგება, როცა საქმე ეხება იმ ფორმულის დადგენას, რომელიც იძლევა ინდექსის ცხად გამოსახულებას. ეს ფორმულა, ისევე როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში, დაკავშირებულია შესაბამისი შეუღლების ამოცანის ამოხსნასთან.

შეუღლების ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის, ერთი უცნობი ფუნქციის შემთხვევის საპირისპიროდ, ცხადად არ იხსნება, თუ, რა თქმა უნდა, ვიგულისხმებთ ზოგად შემთხვევას.

რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის შეუღლების ამოცანის ამოხსნას ეძღვნება ამ თავის II კარი. ამისათვის არსებითად გამოიყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემისათვის I კარში მიღებული შედეგები. ბოლოს, III კარში შეუღლების ამოცანისათვის მიღებული შედეგები, თავის მხრივ, გამოიყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის უფრო დეტალური შესწავლისათვის [1].

---

[1] ამ წიგნის პირველ რუსულ გამოცემაში გადმოცემის მეთოდი და თანმიმდევრობა სხვაგვარი იყო. სახელდობრ, თავდაპირველად ამოვხსენით შეუღლების ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების თეორიისაგან დამოუკიდებლად, ამოცანის ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემებზე დაყვანის გზით, როგორც ამას აკეთებს ი. პლემელი (იხილეთ ამის შესახებ § 122), და ამის შემდეგ იყო გადმოცემული სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების თეორია.

II რუსულ გამოცემაში მნიშვნელოვნად უფრო მარტივი ხერხი იყო გამოყენებული, რომელიც ყოველგვარი ცვლილების გარეშე გადმოტანილი ამ გამოცემაში.

I. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემები

როგორც უკვე ითქვა, ერთი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის ცნობილი ძირითადი თეორემების (მხედველობაში გვაქვს II თავში დამტკიცებული თეორემები) განზოგადება ასეთ განტოლებათა სისტემების შემთხვევაზე შეიძლება სავსებით მარტივად განხორციელდეს.

ეს განზოგადება მოცემულია §§ 119, 120 და წარმოადგენს ჩემი სტატიის [7] განმეორებას, რაიმე არსებითი შესწორების გარეშე, [8]-ის გათვალისწინებით.

იმ ნაშრომებიდან, რომლებიც წინ უსწრებდა ხსენებულ ჩემს სტატიას, პირველ რიგში უნდა აღინიშნოს ნ. ვეკუას მიერ შესრულებული ნაშრომი, რომელზეც საუბარი იქნება ქვემოთ (§ 136), და ჟ. ჟიროს (G. Giraud [2]) სტატია, რომელშიც ავტორი აგებს მარეგულირებელ ოპერატორს; იგი ფაქტიურად ემთხვევა ქვემოთ, § 119-ში, მითითებულ ოპერატორს [2], მაგრამ რამდენადმე ნაკლებად ზოგადია. იმავე სტატიაში დამტკიცებულია თეორემა, რომელიც ემთხვევა თეორემა I-ს § 120-დან [3].

§ 118. ზოგიერთი აღნიშვნა და ტერმინი [4]. 1°. შემდგომში საქმე გვექნება რაიმე წირებზე ან რაიმე არეებში მოცემულ n ფუნქციათა ერთობლიობებთან $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$. ფუნქციათა ასეთ ერთობლიობას ვუწოდებთ ვექტორს და აღვნიშნავთ ერთი ასოთი, მაგალითად, Φ; დავწერთ

$$\Phi=(\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots,\ \Phi_n) \tag{118,1}$$

და $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$-ს ვუწოდებთ Φ ვექტორის კ ო მ პ ო ნ ე ნ ტ ე ბ ს.

განვიხილოთ წრფივი ჩასმა

$$\begin{aligned}
\Psi_1&=A_{11}\Phi_n+A_{12}\Phi_2+\cdots+A_{1n}\Phi_n,\\
\Psi_2&=A_{21}\Phi_1+A_{22}\Phi_2+\cdots+A_{2n}\Phi_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Psi_n&=A_{n1}\Phi_1+A_{n2}\Phi_2+\cdots+A_{nn}\Phi_n
\end{aligned}$$

ანუ შემოკლებით

$$\Psi_\alpha=\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}\Phi_\beta, \quad \alpha=1,\ 2, \ldots,\ n, \tag{118,2}$$

[2] ეს ოპერატორი, რომელიც განისაზღვრება (119,20), (119,21) ფორმულებით და რომელიც წარმოადგენს მარეგულირებელი ოპერატორის უზოგადეს სახეს, მითითებული იყო ჩემს სტატიაში [7].

[3] ჟ. ჟიროს ციტირებულ ნაშრომში არის, აგრეთვე, რიგი სხვა შედეგები, რომლებიც ერთნაირად ეხება როგორც ერთი განტოლების, ისე სისტემის შემთხვევებს. ეს შედეგები, ძირითადად ეხება ამონახსნთა პარამეტრზე დამოკიდებულებას. მათ შესახებ ნათქვამი იყო § 59-ის 4° პუნქტში.

[4] ამ პარაგრაფში ნაწილობრივ ვიმეორებთ ზოგიერთ განსაზღვრებას, რომელიც მოცემული იყო § 110-ში (კერძო შემთხვევისათვის $n=2$, რაც, თუმცა, არაარსებითია).

სადაც $A_{\alpha\beta}$ იმავე წირებზე და იმავე არეებში მოცემული ფუნქციებია, რომელშიაც მოცემულია Φ.

(118,2) ჩასმას შემოკლებით ჩვეულებრივ ასე ჩავწერთ

$$\Psi = A\Phi, \tag{118,3}$$

სადაც $\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ და $\Psi=(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$ აღნიშნავს ვექტორებს, ხოლო A — მატრიცს

$$A = \|A_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots A_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots A_{nn} \end{Vmatrix} \tag{118,4}$$

$A_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ კომპონენტებით. A მატრიცის დეტერმინანტს აღვნიშნავთ ასე: $\det A = \det \|A_{\alpha\beta}\|$. თუ $\det A \neq 0$, მაშინ A მატრიცს ვუწოდებთ არაგადაგვარებულს.

Φ და Ψ ორი ვექტორის ნამრავლს ვუწოდებთ შემდეგ ჯამს $\Phi_1\Psi_1 + \cdots + \Phi_n\Psi_n$; ამ ნამრავლს, რომელსაც ზოგჯერ შიდა ნამრავლს უწოდებენ, აღვნიშნავთ $\Phi\Psi$ ან $\Psi\Phi$-ით, ასე რომ

$$\Phi\Psi = \Psi\Phi = \Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \cdots + \Phi_n\Psi_n. \tag{118,5}$$

A და B ორი მატრიცის ნამრავლს $C = AB$, როგორც ჩვეულებრივაა მიღებული, ვუწოდებთ $C = \|C_{\alpha\beta}\|$ მატრიცს, სადაც

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

მატრიცს, რომელიც მიიღება A მატრიცის სტრიქონების სვეტებით შეცვლით და, პირუკუ, ვუწოდებთ ტრანსპონირებულს და აღვნიშნავთ ასე: $A' = \|A'_{\alpha\beta}\|$, ასე რომ $A'_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი ორი Φ და Ψ ვექტორისათვის გვაქვს

$$\Psi A\Phi = \Phi A'\Psi. \tag{118,6}$$

სადაც $\Psi A\Phi$ აღნიშნავს Ψ და $A\Phi$ ვექტორების ნამრავლს (ანალოგიურად მარჯვენა მხარისათვის).

გავიხსენოთ აგრეთვე ცნობილი თანაფარდობანი:

$$(AB)' = B'A', \tag{118,7}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})' = (A')^{-1}; \tag{118,8}$$

(118,8) ფორმულებში იგულისხმება, რომ A და B არაგადაგვარებული მატრიცებია, ე. ი. მათი დეტერმინანტები განსხვავდება ნულისაგან; $(A')^{-1}$-ის ნაცვლად ხშირად დავწერთ A'^{-1}-ს.

2°. როცა ვამბობთ, რომ რომელიმე მატრიცი უწყვეტია, ეკუთვნის H კლასს, უბან-უბან ჰოლომორფულია, იღებს გარკვეულ სასაზღვრო მნიშვნელობებს, აქვს სასრული რიგი უსასრულობაში და ა. შ., ვგულისხმობთ, ზოგჯერ განსაკუთ-

რებული ახსნა-განმარტების გარეშე, რომ ყველა მისი კომპონენტი აკმაყოფილებს დასახელებულ პირობებს, ანალოგიურად ვექტორების შემთხვევაშიც.

3°. შემდგომში (თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული) ვიგულისხმებთ, რომ L არის გლუვ, შეკრულ, არათანამკვეთ კონტურთა სასრული რაოდენობის ერთობლიობა, რომლებზეც არჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულებანი.

§ 119. ძირითადი განსაზღვრებანი და დამხმარე დებულებანი[5]. 1°. შემდგომში, როცა ვიხმართ ტერმინს *სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას*, ვიგულისხმებთ, რომ საქმე გვაქვს შემდეგი სახის განტოლებათა სისტემასთან:

$$\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(t_0)\varphi_\beta(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \sum_{\beta=1}^{n}\frac{K_{\alpha\beta}(t_0, t)\,\varphi_\beta(t)\,dt}{t-t_0}=f_\alpha(t_0),$$

$$\alpha=1,\ 2,\dots,\ n, \tag{119,1}$$

სადაც t_0, t L-ის წერტილების აფიქსებია, $A_{\alpha\beta}(t)$, $K_{\alpha\beta}(t_0, t)$, $f_\alpha(t)$ — L-ზე მოცემული, H კლასის ფუნქციები; $\varphi_\alpha(t)$ საძიებელი ფუნქციებია და მათგან მოვითხოვთ, რომ ეკუთვნოდნენ H კლასს.

აღვნიშნოთ $\varphi(t)$ და $f(t)$-თი შესაბამისად $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ და $f_1(t)$, $f_2(t),\dots, f_n(t)$ კომპონენტებიანი ვექტორები:

$$\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2,\dots,\ \varphi_n),\quad f(t)=(f_1,\ f_2,\dots,\ f_n). \tag{119,2}$$

$A(t)$ და $K(t_0, t)$-თი აღვნიშნოთ, შესაბამისად, $A_{\alpha\beta}(t)$ და $K_{\alpha\beta}(t_0, t)$ კომპონენტებიანი მატრიცები; გარდა ამისა, განვიხილოთ მატრიცი $B(t)=K(t, t)$; ასე, რომ განსაზღვრის ძალით

$$A(t)=\|A_{\alpha\beta}(t)\|,\quad K(t_0,\ t)=\|K_{\alpha\beta}(t_0,\ t)\|,\quad B(t)=\|B_{\alpha\beta}(t)\|. \tag{119,3}$$

ამასთან ერთად

$$B_{\alpha\beta}(t)=K_{\alpha\beta}(t,\ t). \tag{119,4}$$

მითითებული აღნიშვნებით (119,1) სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$\mathbf{K}\varphi=A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \tag{119,5}$$

ან კიდევ ასე:

$$\mathbf{K}\varphi=\mathbf{K}^0\varphi+\mathbf{k}\varphi=f(t_0), \tag{119,6}$$

სადაც

$$\mathbf{K}^0\varphi=A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$$

და

$$\mathbf{k}\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{119,7}$$

[5] შდრ. §§ 45, 46.

ამასთან ერთად:

$$k(t_0,\ t)=\frac{K(t_0,\ t)-K(t_0,\ t_0)}{t-t_0}=\frac{K(t_0,\ t)-B(t_0)}{t-t_0}. \tag{119,8}$$

ადვილად შესამჩნევია, რომ

$$k(t_0,\ t)=\frac{k^*(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\alpha}}, \qquad 0\leqslant\alpha<1, \tag{119,9}$$

სადაც $k^*(t_0,\ t)$ მატრიცი H კლასს ეკუთვნის (ე. ი. ისეთი მატრიცაა, რომლის კომპონენტები აკმაყოფილებს H პირობას).

K ოპერატორს ვუწოდებთ *კოშის ტიპის გულიან სინგულარულ ოპერატორს* ან, შემოკლებით, *სინგულარულ ოპერატორს*. ამ ოპერატორს H კლასის ყოველი $\varphi(t)$ ვექტორი გადაჰყავს $\mathbf{K}\varphi$ ვექტორში, რომელიც აგრეთვე H კლასს ეკუთვნის.

$\mathbf{K}^0$ ოპერატორს ვუწოდებთ **K** ოპერატორის *მახასიათებელ ნაწილს*.

$\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლებას ვუწოდებთ *სინგულარულ განტოლებას*; ეს განტოლება იმასვე გამოსახავს, რასაც (119,1) სისტემა და შემდგომში ტერმინები „განტოლება" და „განტოლებათა სისტემა" სინონიმები იქნება ჩვენთვის.

$\mathbf{K}^0\varphi=f$ განტოლებას ვუწოდებთ $\mathbf{K}\varphi=f$ *განტოლების შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას*.

ზოგჯერ $\mathbf{K}^0\varphi=f$ განტოლებას განვიხილავთ დამოუკიდებლად და ვუწოდებთ მას უბრალოდ *მახასიათებელ განტოლებას* ან *მახასიათებელ განტოლებათა სისტემას*.

K და $\mathbf{K}^0$ ოპერატორებისა და, აგრეთვე, $\mathbf{K}\varphi=f$ და $\mathbf{K}^0\varphi=f$ განტოლებების *ძირითად მატრიცებს* ვუწოდებთ შემდეგ მატრიცებს:

$$S=A+B,\quad D=A-B. \tag{119.10}$$

თუ ყველგან L-ზე

$$\det S\neq 0,\quad \det D\neq 0, \tag{119,11}$$

მაშინ ვიტყვით, რომ **K** ოპერატორი და $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლება *ნორმალური ტიპისაა*. შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ ნორმალური ტიპის ოპერატორებს.

თუ, კერძოდ, $B(t)=0$ და, აქედან გამომდინარე $S=P$, მაშინ $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლება წარმოადგენს ფრედჰოლმის (მეორე გვარის) ჩვეულებრივ (კვაზირეგულარულ) განტოლებათა სისტემას. ამიტომ, $S=D$ შემთხვევაში **K** ოპერატორს ვუწოდებთ *ფრედჰოლმისეულს*.

2°. **K** ოპერატორს და $\mathbf{K}'$ ოპერატორს, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathbf{K}'\psi=A'(t_0)\,\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K'(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{119,12}$$

ვუწოდებთ *მიკავშირებულებს*; (119.12) ფორმულაში $A'(t_0)$ აღნიშნავს $A(t_0)$ მატრიცის ელემენტების ტრანსპონირებით მიღებულ მატრიცს, ხოლო $K'(t_0,\ t)$ — მატრიცს, რომელიც მიიღება $K(t_0,\ t)$-საგან ელემენტებისა და $t_0,\ t$ ცვლადების ერთდროული ტრანსპოზიციით; ასე რომ, თუ მივიღებთ

$$A'(t_0) = \| A'_{\alpha\beta}(t_0) \|, \quad K'(t, t_0) = \| K'_{\alpha\beta}(t, t_0) \|.$$

მაშინ

$$A'_{\alpha\beta}(t) = A_{\beta\alpha}(t), \quad K'_{\alpha\beta}(t, t_0) = K_{\beta\alpha}(t, t_0).$$

ისევე, როგორც § 46-ში, ადვილად დავადგენთ ზოგად ფორმულას

$$\int_L \psi \mathbf{K} \varphi \, dt = \int_L \varphi \mathbf{K}' \psi \, dt, \tag{119.13}$$

სადაც $\varphi = \varphi(t)$ და $\psi = \psi(t)$ ნებისმიერი H კლასის ვექტორებია.

3°. გადავიდეთ ორი სინგულარული ოპერატორის კ ო მ პ ო ზ ი ც ი ი ს საკითხზე. ვთქვათ,

$$\mathbf{K}_1 \varphi = A_1(t_0) \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{K_1(t_0, t) \varphi(t) \, dt}{t - t_0}$$

და (119.14)

$$\mathbf{K}_2 \psi = A_2(t_0) \psi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K_2(t_0, t) \psi(t) \, dt}{t - t_0}.$$

თუ აღვნიშნავთ B_1, B_2, S_1, S_2, D_1, D_2-ით მატრიცებს, რომლებიც დაკავშირებულია $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ოპერატორებთან ისევე, როგორც B, S, D მატრიცები — K ოპერატორთან, მაშინ § 45-ის ანალოგიურად ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\mathbf{K}_1[\mathbf{K}_2 \psi] = \mathbf{K}^* \psi,$$

სადაც $\mathbf{K}^*$ ისეთივე ტიპის სინგულარული ოპერატორია, როგორიც არის $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ოპერატორები; სახელდობრ

$$\mathbf{K}^* \psi = [A_1(t_0) A_2(t_0) + B_1(t_0) B_2(t_0)] \psi(t_0) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{A_1(t_0) K_2(t_0, t) + K_1(t_0, t) A_2(t)] \psi(t) \, dt}{t - t_0} +$$
$$+ \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 \int_L \left[\int_L \frac{K_1(t_0, t_1) K_2(t_1, t) \, dt_1}{(t_1 - t_0)(t - t_1)} \right] \psi(t) \, dt. \tag{119.15}$$

§ 45-ში მოყვანილ ფორმულასთან შედარებით განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ აქ A_1, B_1, K_1, A_2, B_2, K_2 აღნიშნავს მატრიცებს და ამიტომ მამრავლთა თანმიმდევრობა წინა ფორმულაში არ არის უგულვებელსაყოფელი.

$\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ოპერატორების კ ო მ პ ო ზ ი ც ი ი თ (მითითებული თანმიმდევრობით) მიღებულ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორს აღვნიშნავთ $\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2$-ით:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2. \tag{119.16}$$

თუ აღვნიშნავთ S^* და D^*-თი $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის ძირითად მატრიცებს, მაშინ ზუსტად ისევე, როგორც § 45-ში, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$S^* = S_1 S_2, \quad D^* = D_1 D_2. \tag{119.17}$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{K}^*$ ოპერატორი ნორმალური ტიპისაა, თუ, როგორც ჩვენ ვგულისხმობთ, $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ნორმალური ტიპის ოპერატორებია; $\mathbf{K}^*$ ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილი სავსებით განისაზღვრება $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ოპერატორების მახასიათებელი ნაწილების მიხედვით.

ამავე ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}^*$ სამი ოპერატორიდან მოცემულია რომელიმე ორის მახასიათებელი ნაწილი, მაშინ მესამისა ცალსახად განისაზღვრება. მაგალითად, თუ მოცემულია $\mathbf{K}_2$ და $\mathbf{K}^*$ ოპერატორების მახასიათებელი ნაწილები, მაშინ $\mathbf{K}_1$ ოპერატორის მატრიცებისათვის გვექნება:

$$S_1 = S^* S_2^{-1}, \quad D_1 = D^* D_2^{-1}, \tag{119,18}$$

ხოლო შესაბამისი A_1 და B_1 მატრიცები გვეძლევა ფორმულებით:

$$A_1 = \frac{1}{2}\,[S^* S_2^{-1} + D^* D_2^{-1}], \qquad B_1 = \frac{1}{2}\,[S^* S_2^{-1} - D^* D_2^{-1}]. \tag{119,19}$$

კერძოდ, მოცემული $\mathbf{K}_2$ ოპერატორისათვის უამრავი ხერხით შეიძლება ისეთი $\mathbf{K}_1$ ოპერატორის შერჩევა, რომ $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}^*$ იყოს ფრედჰოლმისებური. მართლაც, ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $S^* = D^*$; და, მაშასადამე,

$$S_1 = S^* S_2^{-1}, \quad D_1 = D^* D_2^{-1}, \tag{119,20}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\,S^*[S_2^{-1} + D_2^{-1}], \qquad B_1 = \frac{1}{2}\,S^*[S_2^{-1} - D_2^{-1}], \tag{119.21}$$

სადაც S^* ნებისმიერი მატრიცაა, რომელიც L-ზე H პირობას აკმაყოფილებს და ყველგან L-ზე $\det S^* \neq 0$. სახელდობრ, შეიძლება მივიღოთ $S^* = D^* = E$, სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა და მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ ორივე $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ და $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ ოპერატორი ფრედჰოლმისებური იქნება.

სინგულარული $\mathbf{K}$ ოპერატორის ან $\mathbf{K}\varphi = f$ განტოლების ინდექსს ვუწოდებთ შემდეგ მთელ რიცხვს:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln \det S^{-1} D]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{\det (A-B)}{\det (B+A)}\right]_L. \tag{119,22}$$

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ინდექსი $\mathbf{K}$ ოპერატორის მხოლოდ მახასიათებელ ნაწილზეა დამოკიდებული, ასე რომ $\mathbf{K}^0$ ოპერატორის ინდექსი ამავე დროს $\mathbf{K}$ ოპერატორის ინდექსიცაა.

(19 17) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\varkappa'$ და $\varkappa''$ $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ ოპერატორების ინდექსებია, მაშინ $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ ოპერატორის ინდექსი $\varkappa'$ და $\varkappa''$-ის ჯამის ტოლია

$$\varkappa^* = \varkappa' + \varkappa''. \tag{119.23}$$

ფრედჰოლმისებური ოპერატორის ინდექსი, ცხადია, ნულს უდრის.

§ 120. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის რეგულარიზაცია. ძირითადი თეორემები. ვთქვათ, მოცემულია (119,1) სინგულარულ განტოლებათა სისტემა, რომელსაც, ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, წარმოვადგენთ ერთი განტოლების სახით

$$\mathbf{K}\varphi = f. \tag{120,1}$$

წინა პარაგრაფიდან ვიცით, რომ ყოველთვის შეიძლება ისეთი სინგულარული **M** ოპერატორის შერჩევა, თანაც უამრავი სხვადასხვა წესით, რომ **MK** იყოს ფრედჰოლმისებური ოპერატორი. ასეთი თვისების მქონე **M** ოპერატორს ვუწოდებთ **K** ოპერატორის მარეგულირებელს. ამასთან სულაც არ არის აუცილებელი, რომ **KM** იყოს ფრედჰოლმისებური ოპერატორი[6] (როგორც ეს წინა პარაგრაფში იყო აღნიშნული, შეიძლება **M** ისე შეირჩეს, რომ ორივე ოპერატორი იყოს ფრედჰოლმისებური; მაგრამ ქვემოთ გადმოცემული შედეგებისათვის ეს არაარსებითია).

ვთქვათ, **M** რაიმე მარეგულირებელი ოპერატორია. მაშინ (120.1) განტოლების ამონახსნი ამავე დროს იქნება

$$\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f \tag{120,2}$$

ფრედჰოლმის განტოლების ამონახსნიც.

შებრუნებული დასკვნა ყოველთვის არ არის ჭეშმარიტი და ამიტომ (120.2) ფრედჰოლმის განტოლება ყოველთვის არ არის ამოსავალი სინგულარული განტოლების ეკვივალენტური. თუმცა, თუ გვეცოდინება (120,2) განტოლების ამოხსნა, ყოველთვის შეიძლება ამოსავალი (120,1) განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნაც, ზუსტად ისევე, როგორც ეს ნაჩვენებია § 53-ში.

ზემოთქმულიდან, კერძოდ, უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{K}\varphi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობა სასრულია.

ერთი განტოლების შემთხვევისათვის § 53-ში მოყვანილი მსჯელობის სიტყვასიტყვით განმეორებით მივდივართ შემდეგ ძირითად თეორემებამდე[7].

თეორემა I. $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ

$$\int_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt=0, \tag{120.3}$$

სადაც $\psi^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2,\ldots, k'$, მოცემულთან მიკავშირებული, ერთგვაროვანი $\mathbf{K}'\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა.

გავიხსენოთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში

$$f=(f_1, f_2,\ldots, f_n), \quad \psi^\alpha=(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha,\ldots, \psi_n^\alpha)$$

ვექტორებია და

$$f\psi^\alpha=f_1\psi_1^\alpha+f_2\psi_2^\alpha+\cdots+f_n\psi_n^\alpha. \tag{120,4}$$

თეორემა II. $\mathbf{K}\varphi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა k რაოდენობასა და $\mathbf{K}'\psi=0$ მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ

[6] ერთი სინგულარული განტოლების შემთხვევაში (§ 45), თუ **MK** ფრედჰოლმისებური ოპერატორია, მაშინ **KM** ოპერატორსაც ექნება ეს თვისება; ჩვენს შემთხვევაში (როცა, ფაქტიურად, საქმე გვაქვს განტოლებათა სისტემასთან) ყოველთვის ასე არ არის; ამიტომ შეიძლება განვასხვავოთ მოცემული ოპერატორის მარცხნიდან და მარჯვნიდან მარეგულირებელი ოპერატორები.

[7] ამასთან ერთად, მხედველობაში უნდა გვქონდეს ნათქვამი § 110-ში ფრედჰოლმის განტოლებათა სისტემის შესახებ.

ამონახსნთა k' რაოდენობას შორის სხვაობა დამოკიდებულია მხოლოდ K ოპერატორის მახასიათებელ ნაწილზე.

შემდეგ, შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა III. II თეორემაში ნახსენები სხვაობა უდრის K ოპერატორის ინდექსს, ე. ი.

$$k - k' = \varkappa. \tag{120,5}$$

გავიხსენოთ, რომ (119,22) ფორმულის მიხედვით

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln \det (A - B) - \ln \det (A + B)\right]_L =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\arg \det (A - B) - \arg \det (A + B)\right]_L. \tag{120,6}$$

ამ თეორემას დავამტკიცებთ ქვემოთ, § 135-ში; დამტკიცებისას არსებითად გამოვიყენებთ მომდევნო კარში გადმოცემულ შედეგებს რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის შეუღლების ამოცანის შესახებ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზუსტად ისევე, როგორც აღნიშნული იყო § 53-ის მე-3 შენიშვნაში, იმ გარემოებიდან, რომ (120,1) სინგულარული განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი ამავე დროს (120,2) ფრედჰოლმის განტოლების ამონახსნსაც წარმოადგენს, გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა: თუ L წირზე ავიღებთ სასრული რაოდენობის წერტილებს $c_1, c_2, \ldots, c_n$ და განვიხილავთ მათ როგორც კვანძებს და (120,1) განტოლების ამონახსნებს მოვძებნით H კლასში კი არა, არამედ უფრო ფართო H^* კლასში, ეს არ გააფართოებს ამონახსნთა კლასს: ნებისმიერი H^* კლასის ამონახსნი აუცილებლად ეკუთვნის H კლასს.

II. შეუღლების ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის

§ 121. დამხმარე დებულებანი. 1°. ვთქვათ, L უწინდელივით აღნიშნავს წირს, რომელიც შედგება სასრული რაოდენობის არათანამკვეთი გლუვი კონტურებისაგან; როგორც ყოველთვის, იგულისხმება, რომ L-ზე არჩეულია გარკვეული დადებითი მიმართულება.

ტერმინი — უბან-უბან ჰოლომორფული ვექტორი

$$\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

L ნახტომის წირით — გვესმის ასე: $\Phi(z)$ ვექტორის კომპონენტები

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(z), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

წარმოადგენს უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციებს L ნახტომის წირით.

ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ ვექტორს აქვს სასრული რიგი უსასრულობაში, თუ ყველა ამ ფუნქციას სასრული რიგი აქვს უსასრულობაში. ასეთი ვექტორის რიგს უსასრულობაში ვუწოდებთ Φ_α კომპონენტების რიგებიდან უდიდესს, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

თუ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში

$$\Phi_\alpha(z) = \gamma_\alpha(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

სადაც $\gamma_a(z)=\gamma_a$ პოლინომებია, მაშინ

$$\gamma(z)=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

ვექტორს ვუწოდებთ $\Phi(z)$ ვექტორის მ თ ა ვ ა რ ნ ა წ ი ლ ს უსასრულობაში.

სოხოცკი — პლემელის ფორმულების (§ 16) და § 31-ის შედეგების გავრცელება იმ შემთხვევაზე, როდესაც საქმე გვაქვს არა ჩვეულებრივ ფუნქციებთან, არამედ ვექტორებთან, თუმცა სავსებით ნათელია, მაგრამ დამოწმების გასაიოლებლად ზოგიერთს ამ ფორმულებიდან და შედეგებიდან მაინც მოვიყვანთ.

2°. ვთქვათ, $\varphi(t)$ L-ზე მოცემული H კლასის ვექტორია და $\Phi(z)$-კი — შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული, უბან-უბან ჰოლომორფული ვექტორი:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{121,1}$$

მაშინ სოხოცკი — პლემელის ფორმულების საფუძველზე გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\\ \Phi^-(t_0)&=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \end{aligned} \tag{121,2}$$

სადაც ამჯერად Φ და φ აღნიშნავს ვექტორებს. ამ შემთხვევაშიც (121.2) ფორმულებს ვუწოდებთ სოხოცკი — პლემელის ფორმულებს.

3°. ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის ვექტორი $\Phi(z)$, შემდეგი პირობის მიხედვით:

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{121,3}$$

სადაც $\varphi(t)$, L-ზე მოცემული, H კლასის ვექტორია.

ამონახსნი გვეძლევა შემდეგი ფორმულით:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z), \tag{121,4}$$

სადაც $\gamma(z)=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ ვექტორია, რომლის კომპონენტები $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ნებისმიერი პოლინომებია. $\gamma(z)$ ვექტორი $\Phi(z)$ ვექტორის მთავარ ნაწილს წარმოადგენს და, მაშასადამე, სრულიად გარკვეული ვექტორია, თუ ეს მთავარი ნაწილი მოცემულია. კერძოდ, თუ პირობით $\Phi(\infty)=0$, მაშინ $\gamma(z)=0$.

4°. წინა პუნქტის შედეგი ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც L წირი უბან-უბან გლუვია, ხოლო $\varphi(t)$ ვექტორი ეკუთვნის H^* კლასს; ამ შემთხვევაში, ცხადია, ვგულისხმობთ, რომ (121.3) პირობა დაცულია კვანძებისაგან განსხვავებულ წერტილებში. კერძოდ, ზემოთქმული იმ შემთხვევასაც ეხება, როდესაც L წირი გლუვი, შეკრული კონტურებისაგან შედგება, ხოლო $\varphi(t)$ ვექტორი განიცდის წყვეტას სასრული რაოდენობის წერტილებში; ამ წერტილებს განვიხილავთ როგორც კვანძებს.

5°. ვთქვათ. (121,3) პირობაში $\varphi(t)$ ვექტორი მხოლოდ უწყვეტია და არ ეკუთვნის H კლასს. მაშინ შეიძლება ითქვას შემდეგი (შდრ. § 31, 2° პუნქტს): თუ არსებობს უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ვექტორი, რომელსაც უსასრულობაში სასრული რიგი აქვს და რომელიც (121,3) პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ ის წარმოიდგინება (121,4) ფორმულით.

§ 122. შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა. ვთქვათ, L უწინდელივით აღნიშნავს წირს, რომელიც შედგება სასრული რაოდენობის გლუვი, შეკრული, არათანამკვეთი კონტურებისაგან.

წრფივი *შეუღლების ერთგვაროვან ამოცანას*, ანუ, შემოკლებით, *შეუღლების ერთგვაროვან ამოცანას* ჩამოვაყალიბებთ ასე:

ვიპოვოთ უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის $\Phi(z)$ ვექტორი, ნახტომის L წირით, შემდეგი სასაზღვრო პირობის მიხედვით L-ზე:

$$\Phi_\alpha^+(t) = G_{\alpha 1}(t)\,\Phi_1^-(t) + G_{\alpha 2}\,\Phi_2^-(t) + \cdots + G_{\alpha n}(t)\,\Phi_n^-(t)$$

$$(\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

ანუ შემოკლებით

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \tag{122,1}$$

სადაც

$$G(t) = \| G_{\alpha\beta}(t) \|$$

L-ზე მოცემული H კლასის მატრიცაა, რომელიც ყველგან L-ზე არაგანსაკუთრებულია, ე. ი. ისეთია, რომ მისი დეტერმინანტი $\det G \neq 0$, ყველგან L-ზე [8].

შემდგომში, როცა საუბარი იქნება (122.1) ამოცანის ამონახსნებზე, ყოველთვის მხედველობაში გვექნება $\Phi(z) = 0$ ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამონახსნები.

სანამ შევუდგებოდეთ ამ ამოცანის ამოხსნას, რამდენიმე სიტყვით შევეხებით უფრო ზოგად ამოცანას, როდესაც $G_{\alpha\beta}$ ფუნქციებს შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტა სასრული რაოდენობის წერტილებში.

ასეთი ამოცანის ერთ კერძო შემთხვევაზე, სახელდობრ, შემთხვევაზე, როცა $G_{\alpha\beta}(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია დაიყვანება წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ანალიზური თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანა — წინასწარ დასახელებული მონოდრომიის ჯგუფის მიხედვით რაციონალურ კოეფიციენტებიანი და რეგულარული განსაკუთრებული წერტილების მქონე წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის აგების ამოცანა.

შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა (როგორც ჩვენ ამას ვუწოდებთ) პირველად ბ. რიმანმა ჩამოაყალიბა მითითებული კერძო შემთხვევისათვის, ე. ი. როდესაც $G_{\alpha\beta}(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია და სწორედ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების თეორიის ნახსენებ ამოცანასთან დაკავშირებით, მაგრამ ამოცანის ამოხსნის რაიმე ხერხი მას არ მოუცია (ამოცანა ჩამოყალიბებულია ავტორის გარდაცვალების შემდეგ გამოსულ ფრაგმენტში B. Riemann [2]).

---

[8] $\det G(t) \neq 0$ პირობის დარღვევის ზოგიერთი შემთხვევა განხილულია თ. გახოვის [9], ე. ზვეროვიჩისა და გ. ლიტვინჩუკის [1] ნაშრომებში.

შემდეგ რიმანის მიერ დასმული ამოცანა (მხედველობაში გვაქვს როგორც შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა, ისე შესაბამისი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ამოცანა) რიგი ავტორების მრავალრიცხოვან მნიშვნელოვან გამოკვლევათა საგანი იყო.

მაგრამ ჩვენი მიზნებისათვის, ე. ი. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში გამოყენებისათვის, საჭიროა ისეთნაირად დასმული შეუღლების ამოცანის ამოხსნა, როგორც ეს ამ პარაგრაფის დასაწყისშია.

არსებითად ასეთი სახითაა ამოცანა დასმული (მაგრამ მნიშვნელოვნად უფრო შეზღუდულ პირობებში) და ნაწილობრივ ამოხსნილიც დ. ჰილბერტის მიერ (Götting. Nachrichten, 1905; გამეორებულია წიგნში D. Hilbert [2], გვ. 94—102). დ. ჰილბერტის მიერ მოცემული ამოხსნა, რომელსაც ამოცანა დაჰყავს ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებებამდე, მეტად რთულია და შეუძლებელია ვცნოთ დასრულებულად.

მალე ამის შემდეგ, დასრულებული (თუ არ ჩავთვლით ზოგიერთ ადვილად გამოსასწორებელ ხარვეზს) და ამავე დროს მეტად გონებამახვილური ამოხსნა მოგვცა ი. პლემელმა[9] (I. Plemelj [2]). ისევე, როგორც დ. ჰილბერტი, ეს ავტორი იყენებს ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებებს, მაგრამ სრულიად განსხვავებულს იმათგან, რომლებსაც აგებდა დ. ჰილბერტი; თავისი განტოლებების აგებისას ი. პლემელი არსებითად ემყარება კოშის ტიპის ინტეგრალის თვისებებს.

ი. პლემელის ძირითადი შედეგია ამონახსნთა გარკვეული კერძო სისტემის აგება, რომელსაც ჩვენ კანონიკურ სისტემას ვუწოდებთ[10] და რომლის საშუალებითაც უშუალოდ გამოისახება ამოცანის ზოგადი ამონახსნი[11] (იხ. § 126).

ი. პლემელთან შედარებით, შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ქვემოთ მოყვანილი ამოხსნა მნიშვნელოვნად უფრო მარტივია. გამარტივება მიღწეულია იმის ხარჯზე, რომ ამოცანა დაგვყავს არა ფრედჰოლმის განტოლებებზე, როგორც აკეთებს ამას ი. პლემელი, არამედ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე; ეს საშუალებას გვაძლევს ძალიან მარტივად დავადგინოთ ამონახსნთა ისეთი ერთობლიობის არსებობა, რომელსაც ვუწოდებთ ფუნდამენტურს (იხ. § 25).

---

[9] ი. პლემელი ამოცანას ხსნის უფრო ზოგად წანამძღვრებში, ვიდრე დ. ჰილბერტი. მაგრამ ეს წანამძღვრები რამდენადმე ნაკლებად ზოგადია, ვიდრე ჩვენ მიერ მიღებული.

[10] ამ სისტემას ი. პლემელი ფუნდამენტურს უწოდებს; უკანასკნელ ტერმინს ჩვენ ცოტა სხვა აზრით ვიყენებთ (იხ. § 125).

[11] აგრეთვე უნდა აღინიშნოს ჯ. ბირკჰოფის ნაშრომები (G. D. Birkhoff [1], [2] და ზოგიერთი სხვა). ამ ავტორის ნაშრომები, თუმცა ისინი გამოქვეყნებულია ი. პლემელის ნაშრომზე გვიან (მაგრამ შესრულებულია დამოუკიდებლად) და იძლევა ნაკლებად სრულ ამოხსნას (L წირზე და $G(t)$ მატრიცზე დადებული მნიშვნელოვანი შეზღუდვების გამო), მაინც საინტერესოა იმით, რომ შეიცავს რიგ შედეგს, რომელიც გადმოცემის გამარტივების საშუალებას იძლევა. ეს ნაშრომები, განსაკუთრებით [2], რომელშიც ავტორი ამოცანას ხსნის მიმდევრობითი მიახლოების ხერხით, საინტერესოა მეთოდის მხრივაც; ამ მეთოდმა, შესაფერისი განზოგადებისა და სახეცვლის შემდეგ, შეიძლება მიგვიყვანოს საკმაოდ დასრულებულ შედეგებამდე. ასეთი განზოგადება და სახეცვლა მინიშნებულია R. Garnier [1] სტატიაში.

შეუღლების ამოცანის საკმაოდ სრული ამოხსნა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით, მაგრამ ბირკჰოფის მეთოდისაგან სრულიად განსხვავებულით, მოცემულია გ. მანჯავიძის [5], [6], გ. მანჯავიძის და ბ. ხვედელიძის [1] ნაშრომებში; იხ. § 133.

ასევე, პლემელთან შედარებით, უფრო მარტივია ამონახსნთა კანონიკური სისტემის აგებაც მას შემდეგ, რაც ნაპოვნია ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა (§ 126).

§ 123. სინგულარულ განტოლებათა სისტემაზე დაყვანა. წინა პარაგრაფში დასმული შეუღლების ერთგვაროვანი (122.1) ამოცანა ადვილად დაიყვანება ძალზე მარტივ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე შემდეგნაირად.

ვთქვათ,

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \qquad L\text{-ზე};$$

მაშინ უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე საძიებელი $\Phi(z)$ ვექტორი შემდეგნაირად წარმოდგინება (§ 121,5° მუხლი):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z), \tag{123,1}$$

სადაც

$$\gamma(z)=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

ვექტორია, რომლის კომპონენტები — $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — რაიმე პოლინომებია და წარმოადგენს $\Phi(z)$ ვექტორის მთავარ ნაწილს უსასრულობაში. ამრიგად, ამოცანა დაიყვანება $\varphi(t)$ და $\gamma(t)$ ვექტორების განსაზღვრაზე.

თვით ამოცანის დასმიდან გამოდის, რომ

$$\varphi(t)=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

ვექტორი უწყვეტი უნდა იყოს L-ზე[12], ე. ი. მისი კომპონენტები — $\varphi_1=\varphi_1(t)$, $\varphi_2=\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n=\varphi_n(t)$ უნდა იყოს t-ს უწყვეტი ფუნქციები L-ზე. ჩვენ კი წინასწარ ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(t)$ ეკუთვნის H კლასს; ქვემოთ ნაჩვენები იქნება (§ 128), რომ ჩვენი ამოცანის ყოველი ამონახსნი აუცილებლად დააკმაყოფილებს ამ პირობასაც[13].

(123,1) ფორმულებიდან გამომდინარე, თუ გამოვთვლით $\Phi^+(t_0)$, $\Phi^-(t_0)$ სასაზღვრო მნიშვნელობებს სოხოცკი — პლემელის ფორმულების მიხედვით (§ 121,2°) და შევიტანთ (122,1) თანაფარდობაში, დავწერთ რა t_0-ს t-ს ნაცვლად, ადვილად მივიღებთ:

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \tag{123,2}$$

სადაც ჩაწერის შემოკლებისათვის მიღებულია აღნიშვნები:

$$A(t_0)=E+G(t_0), \quad B(t_0)=E-G(t_0), \tag{123,3}$$

$$f(t_0)=[G(t_0)-E]\,\gamma(t_0), \tag{123,4}$$

E აღნიშნავს ერთეულოვან მატრიცს.

---

12 ამოცანის დასმა გულისხმობს $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობების არსებობას L-ის ყოველი წერტილისათვის; ამიტომ $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ აუცილებლად უწყვეტია; იხ. § 9.

13 იგულისხმება, როგორც შევთანხმდით, რომ $G(t)$ მატრიცი H კლასს ეკუთვნის.

(123,2) განტოლება წარმოადგენს უმარტივეს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას φ ვექტორის $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ კომპონენტების მიმართ, სახელდობრ, მახასიათებელ სისტემას, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მარჯვენა მხარე მოცემულია, ე. ი. მოცემულია $f(t_0)$ ვექტორი.

ეს სისტემა ნორმალური ტიპისაა, რადგან ძირითადი მატრიცების — $S=A+B=2E$ და $D=A-B=2G$ — დეტერმინანტები L-ზე არსად არ ხდება ნულის ტოლი; გავიხსენოთ, რომ პირობის თანახმად $\det G(t) \neq 0$ L-ზე.

$f(t_0)$ ვექტორი წინასწარ განუსაზღვრელ $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)$ პოლინომებს შეიცავს. ამ პოლინომების არჩევა შეიძლება ნებისმიერად, მხოლოდ ერთი პირობით: (123,2) სისტემა თავსებადი უნდა იყოს.

(123,2) სისტემის თავსებადობის პირობა კი, როგორც ვიცით (§ 120), მდგომარეობს შემდეგში:

$$\int_L f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt=0, \quad \alpha=1, 2, \ldots, k'. \tag{123,5}$$

სადაც $\psi^{\alpha}(t)$, $\alpha=1, 2, \ldots, k'$, (122,2) სისტემასთან მიკავშირებული ერთგვაროვანი სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემაა.

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ პოლინომების ნებისმიერობის გამო, ცხადია, ეს პირობები შეიძლება დაკმაყოფილდეს უამრავი ხერხით, და ამიტომ ამოცანას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

§ 124. შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნთა ზოგიერთი თვისება. სანამ გადავიდოდეთ შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნის აგებაზე, აღვნიშნოთ ამ ამოცანის ამონახსნთა ზოგიერთი თვისება, რომელიც თითქმის უშუალოდ გამომდინარეობს თვით ამოცანის დასმიდან და წინა პარაგრაფის შედეგებიდან.

1°. უწინარეს ყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ თუ ვექტორი

$$\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

შეუღლების ერთგვაროვანი (123,1) ამოცანის რაიმე ამონახსნია და $P=P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, მაშინ ვექტორი

$$\Phi(z)\,P(z)=(\Phi_1 P, \Phi_2 P, \ldots, \Phi_n P)$$

აგრეთვე ამონახსნი იქნება. უფრო ზოგადად, თუ $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^m(z)$ ვექტორები რაიმე ამონახსნებია[14], ხოლო $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_m(z)$ — რაიმე პოლინომები, მაშინ

$$\Phi^1(z)\,P_1(z)+\Phi^2(z)\,P_2(z)+\cdots+\Phi^m(z)\,P_m(z)$$

ვექტორიც იქნება ამონახსნი.

ყველაფერი ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (122,1) სასაზღვრო ამოცანის სახიდან.

[14] ამონახსნთა (ვექტორების) ნომრებს ჩვეულებრივ აღვნიშნავთ ზედა ინდექსებით, ქვედა ინდექსებით კი — მოცემული ამონახსნის კომპონენტების ნომრებს, ასე რომ, მაგალითად

$$\Phi^{\beta}=(\Phi_1^{\beta}, \Phi_2^{\beta}, \ldots, \Phi_n^{\beta}).$$

2°. ვთქვათ, $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის რომელიმე ამონახსნია და, ვთქვათ, $\Phi(c)=0$ სიბრტყის რომელიღაც, L-ზე არამდებარე, c წერტილში, ე. ი. $\Phi_1(c)=\Phi_2(c)=\cdots=\Phi_n(c)=0$; მაშინ შეფარდება

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)}{z-c}=\left(\frac{\Phi_1(z)}{z-c}, \quad \frac{\Phi_2(z)}{z-c}, \ldots, \frac{\Phi_n(z)}{z-c}\right) \tag{124,1}$$

ცხადია, აგრეთვე, ამონახსნი იქნება.

ვთქვათ, ახლა c წერტილი მდებარეობს L-ზე. ამ შემთხვევაში, თუ ვიტყვით, რომ $\Phi(z)$ ნული ხდება c წერტილში, ანუ $\Phi(c)=0$, ვგულისხმებთ, რომ $\Phi^+(c)=0$, $\Phi^-(c)=0$. შევნიშნოთ, რომ ერთ-ერთი ამ ტოლობიდან იწვევს მეორეს, $\Phi^+(c)=G(c)\Phi^-(c)$ თანაფარდობის გამო და $\det G(t)\neq 0$ პირობის ძალით.

ვთქვათ, ახლა $\Phi(z)$ რაიმე ამონახსნია, ისეთი, რომ $\Phi^+(t)$ და $\Phi^-(t)$ H კლასს ეკუთვნის[15] და, ვთქვათ, L წირის რაიმე c წერტილისათვის $\Phi(c)=0$ სწორედ ახლახან აღნიშნული აზრით. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც $\Psi(z)$ ვექტორი ამონახსნია და $\Psi^+(t)$ და $\Psi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობანი H კლასს ეკუთვნის L-ზე, c წერტილის ჩათვლით.

ჩვენი დებულება, ცხადია, დამტკიცდება, თუ მოვახერხეთ ამ უკანასკნელი გარემოების დასაბუთება.

უწინარეს ყოვლისა, § 21-ში თქმულის საფუძველზე, ადვილად მივიღებთ, რომ $\Psi(z)$ უბან-უბან ჰოლომორფული ვექტორია (ნახტომებას L წირით), ამასთან c წერტილს განვიხილავთ როგორც კვანძს. შემდეგ, § 113-ის მსგავსად, თუ მივიღებთ, რომ $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)$, მაშინ L-ის ყველა, c-სგან განსხვავებული, წერტილისათვის გვექნება

$$\psi(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=\frac{\varphi(t)}{t-c}.$$

მაგრამ, რადგანაც $\Phi^+(c)=\Phi^-(c)=0$, ამიტომ $\varphi(c)=0$; შემდეგ, ვინაიდან $\varphi(t)$ ფუნქცია H კლასს ეკუთვნის, ამიტომ, ცხადია, $\psi(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის H^* კლასს. ამის გამო, ისევე, როგორც § 123-ში (იხ. § 121, 4° პუნქტი),

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z),$$

სადაც $\gamma(z)$ პოლინომურ კომპონენტებიანი რაიმე ვექტორია.

აქედან გამომდინარეობს, ისევე, როგორც § 123-ში, რომ $\psi(t)$ აკმაყოფილებს (123,2) განტოლებას, შესაძლებელია c წერტილის გარდა. ამიტომ (იხ. შენიშვნა § 120-ის ბოლოს) $\psi(t)$ ფუნქცია H კლასს ეკუთვნის L-ზე, თუ შესაფერის მნიშვნელობას მივაწერთ c წერტილში. მაგრამ, მაშინ წინა ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $\Psi(z)$ ვექტორი შეიძლება უწყვეტად გაგრძელდეს L წირის ყველა წერტილზე (c წერტილის ჩათვლით) მარცხნიდან თუ მარჯვნიდან და რომ მისი სასაზღვრო მნიშვნელობანი H კლასს ეკუთვნის, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

[15] ქვემოთ (§ 128) ნაჩვენები იქნება, რომ ყოველ ამონახსნს აქვს აღნიშნული თვისება; მაგრამ ამ გარემოებით ახლა არ ვისარგებლებთ, რადგან ის ჯერ არ დაგვიმტკიცებია.

3°. დაბოლოს, დავამტკიცოთ შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნის ერთი თვისება (ვგულისხმობთ ისეთ ამონახსნებს, რომელთა სასაზღვრო მნიშვნელობანი H კლასისაა[16]): *ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნის რიგი უსასრულობაში არ არის გარკვეულ რიცხვზე ნაკლები.*

სახელდობრ, ადვილი შესამჩნევია, რომ ჩვენი ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნის რიგი შეუძლებელია უფრო ნაკლები იყოს, ვიდრე $m=-k$, სადაც k (123.2) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობაა.

მართლაც, $\Phi(z)$ ამონახსნის რიგი უსასრულობაში უფრო ნაკლები რომ იყოს, ვიდრე $(-k)$, მაშინ

$$\Phi(z),\ z\Phi(z),\dots,\ z^k\Phi(z)$$

ვექტორები იქნებოდა შეუღლების ერთგვაროვანი (122,1) განტოლების უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები. მაგრამ, მაშინ

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\quad t\varphi(t),\ t^2\varphi(t),\dots,\ t^k\varphi(t)$$

ვექტორები შეადგენდა (123,2)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $k+1$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებისაგან შედგენილ ერთობლიობას[17]. ეს კი შეუძლებელია, რადგან ამ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობა k-ს უდრის.

§ 125. ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. 1°. შემდგომში ხშირად გვექნება საქმე შეუღლების ერთგვაროვანი (122.1) ამოცანის n რაოდენობის ამონახსნისაგან შედგენილ სისტემებთან, რომელთაც განვასხვავებთ ზედა ინდექსების საშუალებით:

$$\begin{aligned} \Phi^1(z)&=(\Phi_1^1,\ \Phi_2^1,\dots,\ \Phi_n^1),\\ \Phi^2(z)&=(\Phi_1^2,\ \Phi_2^2,\dots,\ \Phi_n^2),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \Phi^n(z)&=(\Phi_1^n,\ \Phi_2^n,\dots,\ \Phi_n^n). \end{aligned} \tag{125,1}$$

მატრიცს

$$\|\Phi_\alpha^\beta\|=\left\|\begin{matrix} \Phi_1^1(z) & \Phi_1^2(z) & \cdots & \Phi_1^n(z)\\ \Phi_2^1(z) & \Phi_2^2(z) & \cdots & \Phi_2^n(z)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \Phi_n^1(z) & \Phi_n^2(z) & \cdots & \Phi_n^n(z) \end{matrix}\right\|, \tag{125,2}$$

რომლის *სვეტებს* წარმოადგენს $\Phi^1(z),\ \Phi^2(z),\dots,\ \Phi^n(z)$ ვექტორები (ამონახსნები), ვუწოდებთ *ამონახსნთა მოცემული სისტემის მატრიცს*.

ცხადია, რომ (122,1) სასაზღვრო პირობის ძალით ადგილი აქვს შემდეგ მატრიცულ თანაფარდობას:

---

[16] შდრ. წინა სქოლიოს.

[17] უსასრულობაში ქრობადი $\Phi(z)$ ამონახსნის შესაბამისი $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს იმ ერთგვაროვან განტოლებას, რომელიც მიიღება (123,2)-გან, როცა $f(t_0)=0$, რადგან $\Phi(z)$ ვექტორის მთავარი ნაწილი უსასრულობაში $\Upsilon(z)=0$ და, მაშასადამე, (123,4)-ის ძალით $f(t)=0$.

$$\| \Phi_\alpha^\beta (t_0) \|^+ = G(t_0) \| \Phi_\alpha^\beta (t) \|^-, \tag{125,3}$$

სადაც (+) და (-) ნიშნაკების საშუალებით აღნიშნულია $\| \Phi_\alpha^\beta (z) \|$ მატრიცის შესაბამისი სასაზღვრო მნიშვნელობები.

ცხადია, რომ პირუკუც, თუ $\| \Phi_\alpha^\beta (z) \|$ მატრიცის ელემენტები $\Phi_\alpha^\beta (z)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$, უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციებია და ეს მატრიცი აკმაყოფილებს (125,3) თანაფარდობას, მაშინ ამ მატრიცის თითოეული სვეტი, როგორც ვექტორი, წარმოადგენს შეუღლების ერთგვაროვანი (122,1) ამოცანის ამონახსნს.

2°. შემდგომისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნთა ისეთი სისტემის შედგენას, რომლის მატრიცის დეტერმინანტი იგივეურად არ უდრის ნულს. ამონახსნთა ასეთ სისტემას ვუწოდებთ **ფუნდამენტურს**, ხოლო ამ სისტემის მატრიცს — **ფუნდამენტურ მატრიცს**.

როგორც დავინახავთ, ასეთი სისტემების უსასრულო სიმრავლე არსებობს, მაგრამ, როგორც ნაჩვენები იქნება ქვემოთ, ამოცანის ზოგადი ამონახსნის მისაღებად საკმარისია შევადგინოთ რომელიმე ერთი მათგანი.

ამონახსნთა ერთ-ერთი ფუნდამენტური სისტემა შეიძლება შევადგინოთ, მაგალითად, შემდეგნაირად.

ავიღოთ (123,1) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მონაწილე $\gamma(z)$ ვექტორი შემდეგი სახით:

$$\gamma^\beta (z) = (0, 0, \ldots, \gamma_\beta^\beta, 0, \ldots, 0),$$

$\gamma^\beta (z)$-ის კომპონენტები β ნომრიანის გარდა ნულებია, ხოლო ნულისაგან განსხვავებული $\gamma_\beta^\beta = \gamma_\beta^\beta (z)$ კომპონენტი წარმოადგენს განუსაზღვრელ კოეფიციენტებიან პოლინომს. ამ კოეფიციენტებს ისე შევარჩევთ, რომ შესაბამისი (123,2) სისტემა თავსებადი იყოს, ე. ი. შესრულდეს (123,5) ფორმულით მოცემული პირობები:

$$\int_L f^\beta (t) \psi^\alpha (t)\, dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k', \tag{125,4}$$

სადაც (123,4) ფორმულის თანახმად:

$$f^\beta (t) = [G(t) - E]\, \gamma^\beta (t).$$

(125,4)-ში γ_β^β-ს მაგიერ განუსაზღვრელკოეფიციენტებიანი პოლინომის ჩასმით ცხადია, მივიღებთ, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას ამ განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მიმართ. მიღებულ სისტემას ყოველთვის აქვს არანულოვანი ამონახსნები, თუ $\gamma_\beta^\beta (z)$ პოლინომი აღებულია არანაკლებ k' ხარისხისა, რადგან მაშინ უცნობთა რიცხვი აღნიშნულ სისტემაში არის არანაკლებ $(k'+1)$. თუ ავარჩევთ ამ სისტემის რომელიმე გარკვეულ ამონახსნს, მივიღებთ გარკვეულ გამოსახულებებს $\gamma_\beta^\beta (z)$ პოლინომისათვის და, მაშასადამე, $\gamma^\beta (z)$ ვექტორისათვისაც. ამ მნიშვნელობების (123,2) ფორმულის მარჯვენა მხარეში ჩასმით მივიღებთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თავსებად სისტემას. ვთქვათ, $\varphi(t)$ ამ სისტემის ამონახსნია (ან რომელიმე გარკვეული ამონახსნია, თუ სისტემას რამდენიმე ამონახსნი აქვს), მაშინ $\gamma(z) = \gamma^\beta (z)$ ვექტორის არჩეული მნიშვნელობისათვის (123,1) სისტემა მოგვცემს შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის გარკვეულ $\Phi^\beta (z)$

ამონახსნს. β-ს თუ მივცემთ მნიშვნელობებს 1, 2,..., n მივიღებთ ამონახსნთა სისტემას

$$\Phi^1(z)=(\Phi_1^1,\ \Phi_2^1,\dots,\ \Phi_n^1),\dots,\ \Phi^n(z)=(\Phi_1^n,\ \Phi_2^n,\dots,\ \Phi_n^n). \qquad (125,5)$$

შევნიშნოთ, რომ, რადგან (123.2) განტოლების ამონახსნებად ვგულისხმობთ მხოლოდ H კლასის ამონახსნებს, ამიტომ $\Phi^\beta(z)$, $\beta=1,\ 2,\dots,\ n$, ამონახსნების სასაზღვრო მნიშვნელობები L-ზე H კლასს ეკუთვნის.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამონახსნთა ნაპოვნი სისტემის $\|\Phi_\alpha^\beta\|$ მატრიცის დეტერმინანტი არ უდრის იგივურად ნულს. მართლაც, ეს დეტერმინანტი უეჭველად განსხვავდება ნულისაგან უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში, რადგან, როცა $z\to\infty$ ამ დეტერმინანტის ყველა ელემენტი, გარდა დიაგონალურისა, მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო დიაგონალური ელემენტების მთავარი ნაწილებია $\gamma_\beta^\beta(z)$ პოლინომები, რომლებიც ნულისაგან განსხვავდება[18].

ამგვარად, ამონახსნთა (125,5) სისტემა ფუნდამენტურია.

§ 126. ამონახსნთა ნორმალური და კანონიკური სისტემები. 1°. შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის *ამონახსნთა ნორმალური სისტემა* ვუწოდოთ ისეთ ფუნდამენტურ $\Psi^1,\ \Psi^2,\dots,\ \Psi^n$ სისტემას, რომლის მატრიცის დეტერმინანტი, ე. ი. $\det\|\Psi_\alpha^\beta(z)\|$ სასრულ სიბრტყეში, L წირის წერტილების ჩათვლით, არსად არ უტოლდება ნულს. როცა ვამბობთ, რომ დეტერმინანტი L წირზე ნული არ ხდება, ვგულისხმობთ, რომ დეტერმინანტის სასაზღვრო მნიშვნელობანი მარცხნიდან და მარჯვნიდან არ ხდება ნული, ე. ი.

$$\det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^+\neq 0,\quad \det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^-\neq 0.$$

ამ უტოლობებიდან ერთი იწვევს მეორეს, (125,3)-დან გამომდინარე შემდეგი თანაფარდობის გამო

$$\det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^+=\det G(t)\det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^-. \qquad (126,1)$$

ამონახსნთა ნორმალური სისტემის მატრიცს ვუწოდებთ *ნორმალურ მატრიცს*.

თუ გვექნება ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, ან, რაც იგივეა, ფუნდამენტური მატრიცი, ადვილად შევადგენთ ნორმალურ სისტემასაც, როგორც ამას ახლა ვაჩვენებთ. ამ პარაგრაფში ამონახსნი გვესმის როგორც ისეთი ამონახსნი, რომლის სასაზღვრო მნიშვნელობები H კლასს ეკუთვნის.

ვთქვათ, c არის სიბრტყის რაიმე წერტილი (უსასრულოდ დაშორებული წერტილისაგან განსხვავებული) და, ვთქვათ, $\det\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|$ ნული ხდება ამ წერტილში; ჯერჯერობით ვგულისხმობთ, რომ c წერტილი არ მდებარეობს L-ზე.

[18] შევნიშნოთ, რომ ერთი რომელიმე ბმულ ნაწილში იგივურად ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი იგივურად ნულისაგან განსხვავდება სხვა ბმულ ნაწილებშიც, რომლებადაც სიბრტყეს ჰყოფს L წირი. მართლაც, თუ $\Phi(z)$ ამონახსნი ნულს უდრის ამ ნაწილებიდან ერთში, მაშინ $\Phi(z)$-ის სასაზღვრო მნიშვნელობანი, როცა z მიისწრაფვის ამ ნაწილის საზღვრისაკენ შიგნიდან, უდრის ნულს. მაგრამ მაშინ, (122,1)-ის ძალით, $\Phi(z)$-ის სასაზღვრო მნიშვნელობანი, როცა z მიისწრაფვის საზღვრისაკენ მიმდებარე ნაწილიდან, აგრეთვე ნულს უდრის. ამიტომ $\Phi(z)=0$ ყველა ბმულ ნაწილში, რომელსაც საერთო საზღვარი აქვს განხილულთან; აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება. ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ამონახსნი, რომელიც იგივურად ნულს უდრის სიბრტყის რაგინდ მცირე არეში, იგივურად ნულს უდრის მთელ სიბრტყეში.

პირობის თანახმად:

$$\begin{vmatrix} \Phi_1^1(c) & \Phi_1^2(c) \cdots \Phi_1^n(c) \\ \Phi_2^1(c) & \Phi_2^2(c) \cdots \Phi_2^n(c) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Phi_n^1(c) & \Phi_n^2(c) \cdots \Phi_n^n(c) \end{vmatrix} = 0. \tag{126,2}$$

ამიტომ, ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს რიცხვები $a_1, a_2, \ldots, a_n$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ისეთი, რომ

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_\beta \Phi_\alpha^\beta(c) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{126,3}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$a_1 \Phi^1(c) + a_2 \Phi^2(c) + \cdots + a_n \Phi^n(c) = 0. \tag{126,4}$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ამონახსნი:

$$\Phi(z) = a_1 \Phi^1(z) + a_2 \Phi^2(z) + \cdots + a_n \Phi^n(z).$$

(126.4)-ის ძალით $\Phi(c) = 0$. ამიტომ, § 124-ის 2° პუნქტში თქმულის საფუძველზე შეფარდება

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)}{z - c} \tag{126,5}$$

აგრეთვე ამონახსნი იქნება.

ვთქვათ, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ აღნიშნავს შესაბამისად $\Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^n$ ამონახსნების რიგებს უსასრულობაში. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. a_m-ით აღვნიშნოთ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვებიდან ნულისაგან განსხვავებული ბოლო რიცხვი.

ამონახსნთა ფუნდამენტურ $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^n(z)$ სისტემაში $\Phi^m(z)$ ამონახსნი შევცვალოთ (126,5) ფორმულით განსაზღვრული $\Psi(z)$ ამონახსნით; ცხადია მივიღებთ ამონახსნთა ახალ ფუნდამენტურ სისტემას[19], ამასთან ერთად ძველი სისტემის ერთი ამონახსნი, სახელდობრ, $\Phi^m(z)$, შეიცვალა უსასრულობაში ერთით ნაკლები რიგის ამონახსნით.

§ 124-ის 2° პუნქტში თქმულის საფუძველზე შეიძლება ანალოგიურად მოვიქცეთ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც c წერტილი მდებარეობს L წირზე. ამასთან ერთად (124,1)-ში $\Phi^1(c), \Phi^2(c), \ldots, \Phi^n(c)$ უნდა ვიგულისხმოთ $\Phi^{1+}(c), \Phi^{2+}(c), \ldots, \Phi^{n+}(c)$ ან $\Phi^{1-}(c), \Phi^{2-}(c), \ldots, \Phi^{n-}(c)$ სასაზღვრო მნიშვნელობების ტოლად. ორივე შემთხვევაში, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვების განსასაზღვრავად ვიღებთ ეკვივალენტურ განტოლებებს, $\Phi^+(c) = G(c)\,\Phi^-(c)$ თანაფარდობის გამო.

---

[19] ახალი სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი, ცხადია, უდრის

$$\frac{a_m}{z - c} \det \| \Phi_\alpha^\beta(z) \|\text{-ს}$$

და, მაშასადამე, იგივურად არ უდრის ნულს.

ამრიგად, ყველა შემთხვევაში, როცა ფუნდამენტური მატრიცის დეტერმინანტი ნულს უტოლდება სიბრტყის რაიმე წერტილში, ამონახსნთა მოცემული ფუნდამენტური სისტემა შეიძლება შევცვალოთ მეორეთი, ამასთან, ერთ-ერთი ამონახსნის რიგი უსასრულობაში ერთით დაიწევს.

ასეთნაირად მიღებული მატრიცის დეტერმინანტი თუ უტოლდება ნულს სიბრტყის რაიმე c წერტილში, მაშინ შეიძლება გავიმეოროთ ზემოაღნიშნული ხერხი და ა. შ. ყოველ ასეთ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ახლით შეცვლა ერთით ამცირებს ცალკეულ ამონახსნთა რიგების ჯამს უსასრულობაში. მაგრამ. ვიცით, რომ ნებისმიერი ამონახსნის რიგი უსასრულობაში შეუძლებელია ნაკლები იყოს გარკვეულ რიცხვზე (§ 124,3° პუნქტი).

მაშასადამე, სასრული რაოდენობის ზემოთ აღნიშნული სახის ოპერაციის შემდეგ მივიღებთ ამონახსნთა ისეთ ფუნდამენტურ სისტემას, რომლის მატრიცის დეტერმინანტი სასრულ სიბრტყეზე არსად ნული არ ხდება.

ამრიგად, მივიღებთ ნორმალურ სისტემას[20], რომლის მატრიცს აღვნიშნავთ $\Psi_a^0(z)$].

2°. ამონახსნთა ნორმალური სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი, თვით ასეთი სისტემის განსაზღვრის მიხედვით, განსხვავდება ნულისაგან სიბრტყის ყველა სასრულ წერტილში და ჰოლომორფულ ფუნქციას წარმოადგენს ყოველ სასრულ არეში, რომელიც L წირის წერტილებს არ შეიცავს. უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ეს დეტერმინანტი შეიძლება იყოს სასრული (მაგრამ შეიძლება გახდეს ნული) ან ჰქონდეს პოლუსი. ამ ორი უკანასკნელი შესაძლებლობის თავიდან აცილება, როგორც ამას დავინახავთ შემდეგომში, საზოგადოდ, არ შეიძლება; ირკვევა, რომ ნორმალური სისტემის მატრიცის დეტერმინანტის რიგი უსასრულობაში ამ სისტემის არჩევაზე არ არის დამოკიდებული.

შესაძლებელია ნორმალურ სისტემას მივცეთ ისეთი სახე, რომელიც მოხერხებულია უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში ამონახსნთა ყოფაქცევის განხილვისათვის.

---

[20] ფუნდამენტური სისტემის მიხედვით ნორმალური სისტემის აგების ტექსტში გამოყენებული ხერხი მითითებულია G. D. Birkhoff [2] სტატიაში; შდრ. აგრეთვე მის [1] სტატიას. იმ ფაქტს, რომ (126,5) წარმოადგენს ამონახსნს, როცა c წერტილი L-ზე მდებარეობს. ეს ავტორი ასაბუთებს მეტად ვიწრო შემთხვევაში, სახელდობრ, როცა L ანალიზური კონტურია, ხოლო $G(t)$ მატრიცის ელემენტები კი ანალიზურია L წირის მახლობლობაში, L წირზე სასრული რაოდენობის წერტილების გამოკლებით, რომელთა მახლობლობაში უსასრულოდ წარმოებადია.

ანალოგიური ხერხი გამოიყენა თ. გახოვმა [5], [9] (რომელიც, ეტყობა, არ იცნობდა ბირკჰოფის ნაშრომს) რამდენადმე სხვა, მაგრამ მაინც მახლობელ საკითხთან დაკავშირებით; ამასთან ერთად, ის შემთხვევა. როცა c წერტილი L-ზე მდებარეობს, წინასწარ გამორიცხულია.

ფუნდამენტური სისტემის მიხედვით ნორმალური სისტემის სხვანაირი, მნიშვნელოვნად უფრო რთული, აგება (თან ერთბაშად მიიღება არა მხოლოდ ნორმალური, არამედ კანონიკური სისტემაც, რომლის შესახებ საუბარი იქნება მომდევნო პუნქტში) მოცემულია ი. პლემელის (I. Plemelj [2]) მიერ; ჩვენ მიერ განხილული შესაბამისი შემთხვევა, როცა c წერტილი L-ზე მდებარეობს, ამ ავტორს არასაკმარისად აქვს გამოკვლეული. ი. პლემელის მეთოდის მკაცრი დაფუძნება მოცემულია ნ. მუსხელიშვილისა და ნ. ვეკუას [1] სტატიაში და მოყვანილია წინამდებარე წიგნის პირველ რუსულ გამოცემაში. იხ. აგრეთვე ნ. ვეკუა [8], [16].

სახელდობრ, აღვნიშნოთ

$$-\varkappa_1,\ -\varkappa_2, \ldots, \ \varkappa_n\text{-ით}$$

ნორმალური სისტემის შემადგენელ

$$\Psi^1(z),\ \Psi^2(z), \ldots,\ \Psi^n(z)$$

ამონახსნთა რიგები უსასრულობაში. ამ ამონახსნთა სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\det\|\Psi_\alpha^\beta(z)\| = z^{-\varkappa_1-\varkappa_2-\cdots-\varkappa_n}\cdot\det\|z^{\varkappa_\beta}\cdot\Psi_\alpha^\beta\|.$$

ამ დეტერმინანტის ელემენტები $z^{\varkappa_\beta}\Psi_\alpha^\beta(z)$ მიისწრაფვის გარკვეული სასრული მნიშვნელობებისაკენ, როცა $z\to\infty$; მაშასადამე,

$$\Delta(z) = \det\|z^{\varkappa_\beta}\Psi_\alpha^\beta(z)\| \tag{126,6}$$

დეტერმინანტი მიისწრაფვის გარკვეული სასრული მნიშვნელობისაკენ, როცა $z\to\infty$ და წარმოადგენს ჰოლომორფულ ფუნქციას $z=\infty$ წერტილის მიდამოში.

ამონახსნთა ნორმალურ სისტემას $\Psi^1(z),\ \Psi^2(z), \ldots,\ \Psi^n(z)$ ვუწოდოთ კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი, თუ (126.6) დეტერმინანტი ნულს არ უდრის, როცა $z=\infty$ (და, მაშასადამე, ნულისაგან განსხვავდება უსასრულოდ დაშორებული წერტილის რაიმე მიდამოში).

ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ნორმალური სისტემა შეიძლება გარდაიქმნას კანონიკურ სისტემად ისე, რომ არ შეიცვალოს მისი მატრიცის დეტერმინანტი.

მართლაც, თუ $\Delta(\infty)\neq 0$, მაშინ მიზანი მიღწეულია. ვთქვათ, ახლა $\Delta(\infty)=0$. როდესაც $|z|$ საკმაოდ დიდია $\|\Psi_\alpha^\beta(z)\|$ მატრიცის ელემენტებისათვის გვექნება შემდეგნაირი გაშლა:

$$\Psi_\alpha^\beta(z) = z^{-\varkappa_\beta}\left\{a_\alpha^\beta + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\},\qquad a_\alpha^\beta = \text{const},$$

ასე რომ

$$0=\Delta(\infty)=\det\|a_\alpha^\beta\|.$$

მაგრამ, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ რიცხვები, რომელთაგანაც ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ისეთი, რომ

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_\alpha^\beta a_\beta = 0,\qquad \alpha=1,\ 2, \ldots\ n.$$

თუ გადავანაცვლებთ საჭიროების შემთხვევაში $\|\Psi_\alpha^\beta(z)\|$ მატრიცის სვეტებს (ეს დაიყვანება ამონახსნთა ხელახლა გადანომრვაზე და შეიძლება შეცვალოს მხოლოდ დეტერმინანტის ნიშანი). შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $-\varkappa_1\leqslant-\varkappa_2\leqslant\cdots\leqslant-\varkappa_n$. ვთქვათ, a_m არის ნულისაგან განსხვავებული უკანასკნელი რიცხვი $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ რიცხვებს შორის. $\Psi^1(z),\ \Psi^2(z), \ldots,\ \Psi^n(z)$ ამონახსნთა ნორმალურ სისტემაში $\Psi^m(z)$ ამონახსნი შევცვალოთ $a_1 z^{\varkappa_1-\varkappa_m}\Psi^1(z) + a_2 z^{\varkappa_1-\varkappa_m}\Psi^2(z)+\cdots+a_m\Psi^m(z)$ ამონახსნით; მივიღებთ, ცხადია, ამონახსნთა ახალ ნორმალურ სისტემას, ამასთან

ძველი სისტემის ერთ-ერთი ამონახსნი იცვლება ისეთი ამონახსნით, რომლის რიგი უსასრულობაში ერთით მაინც ნაკლებია (სხვა ამონახსნების რიგები უცვლელია); ახალი სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი ძველის დეტერმინანტისაგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივი, ნულისაგან განსხვავებული, მამრავლით. ეს მამრავლი შეიძლება მივიჩნიოთ ერთის ტოლად ახალი ერთობლიობის ერთ-ერთი სვეტის არანულოვან მუდმივზე გამრავლების ხარჯზე. ამრიგად, შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ ძველი და ახალი მატრიცების დეტერმინანტები ტოლია.

თუ ამონახსნთა ახალი სისტემა კანონიკური აღმოჩნდება, მაშინ მიზანი მიღწეულია; წინააღმდეგ შემთხვევაში, შეიძლება მოვახდინოთ წინას ანალოგიური გარდაქმნა. ასეთი გარდაქმნები არ შეიძლება გაგრძელდეს უსასრულოდ, რადგან ნებისმიერი არანულოვანი ამონახსნის რიგი უსასრულობაში არ არის ნაკლები გარკვეულ რიცხვზე (§ 124,3° პუნქტი).

მაშასადამე, სასრული რაოდენობის ზემოთ აღნიშნული ოპერაციის შემდეგ მივალთ ამონახსნთა კანონიკურ სისტემამდე, რომლის მატრიცის დეტერმინანტი ამოსავალი ფუნდამენტური მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია[21].

3°. კანონიკური სისტემის შემადგენელ ამონახსნებს, ჩვეულებრივ, ასე აღვნიშნავთ

$$
\begin{aligned}
\chi^1(z) &= (\chi_1^1,\ \chi_2^1,\ \dots,\ \chi_n^1),\\
\chi^2(z) &= (\chi_1^2,\ \chi_2^2,\ \dots,\ \chi_n^2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\chi^n(z) &= (\chi_1^n,\ \chi_2^n,\ \dots,\ \chi_n^n),
\end{aligned}
\tag{126,7}
$$

ხოლო მის მატრიცს, რომელსაც კანონიკურ მატრიცს ვუწოდებთ, აღვნიშნავთ $X(z)$-ით, ასე, რომ

$$
X(z) = \|\chi_\alpha^\beta(z)\| = \begin{Vmatrix} \chi_1^1(z), & \chi_1^2(z), & \cdots & \chi_1^n(z) \\ \chi_2^1(z), & \chi_2^2(z), & \cdots & \chi_2^n(z) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \chi_n^1(z), & \chi_n^2(z), & \cdots & \chi_n^n(z) \end{Vmatrix}.
\tag{126,8}
$$

გავიხსენოთ, $\chi^1(z)$, $\chi^2(z)$, ..., $\chi^n(z)$ *ამონახსნთა კანონიკური სისტემის დამახასიათებელი თვისებები*, სახელდობრ:

თვისება 1. კანონიკური მატრიცი $X(z)$, ე. ი. $\chi^\beta(z)$, $\beta=1, 2,\dots, n$, ამოხსნათა სისტემის მატრიცი, ნორმალურია, ე. ი. ამ მატრიცის

$$
\Delta(z) = \det X(z) = \det\|\chi_\alpha^\beta(z)\|
\tag{126,9}
$$

დეტერმინანტი არსად არ უდრის ნულს სიბრტყის სასრულ ნაწილში.

თვისება 2. ვთქვათ, $(-\varkappa_\beta)$ აღნიშნავს χ^β ამონახსნის რიგს უსასრულობაში, მაშინ:

$$
\Delta^0(z) = \det\|z^{\varkappa_\beta}\chi_\alpha^\beta(z)\| = z^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n}\Delta(z)
\tag{126,10}
$$

დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან, როცა $z=\infty$.

---

[21] შდრ. G. D. Birkhoff [1], [2], აგრეთვე ნ. ვეკუა [8], [16], თ. გახოვი [5], [9].

ცხადია, უკანასკნელი თვისება შეიძლება ასეც გამოვთქვათ: $\det\|\chi_\alpha^\beta\|$ დეტერმინანტის რიგი უსასრულობაში უდრის $\|\chi_\alpha^\beta(z)\|$ მატრიცის სვეტების რიგების ჯამს; სვეტის რიგად იგულისხმება მისი ელემენტების უმაღლესი რიგი; გავიხსენოთ, რომ β ნომრიანი სვეტის ელემენტების ერთობლიობა, თუ მას განვიხილავთ როგორც ვექტორს, არის $\chi^\beta(z)$ ამონახსნი.

4°. ამონახსნთა კანონიკური სისტემის ერთ-ერთი უმთავრესი უპირატესობა, ნორმალურ სისტემასთან შედარებით, მდგომარეობს იმაში, რომ მას აქვს ქვემოთ მოყვანილი თვისება.

განვიხილოთ $\chi(z)$ ამონახსნი, რომელიც კანონიკური სისტემის ამონახსნთა წრფივი კომბინაციაა პოლინომური კოეფიციენტებით:

$$\chi(z)=\chi^1(z)P_1(z)+\chi^2(z)P_2(z)+\cdots+\chi^n(z)P_n(z), \qquad (126,11)$$

სადაც $P_1(z), P_2(z),\ldots, P_n(z)$ არის შესაბამისად $m_1, m_2,\ldots, m_n$ ხარისხის პოლინომები; ცხადია, ეს ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს ასეც (§ 118,1° პუნქტი):

$$\chi(z)=X(z)P(z), \qquad (126,12)$$

სადაც $P(z)$ აღნიშნავს $P_1(z), P_2(z),\ldots, P_n(z)$ კომპონენტებიან ვექტორს, ე. ი.

$$P(z)=(P_1, P_2,\ldots, P_n).$$

(126,11)-ის მარჯვენა მხარის ცალკეულ შესაკრებთა რიგები უსასრულობაში შესაბამისად $m_1-\varkappa_1$, $m_2-\varkappa_2,\ldots$, $(m_n-\varkappa_n)$-ის ტოლია.

იმ გარემოებიდან, რომ $\Delta^\circ(\infty)\neq 0$, ე. ი. კანონიკური მატრიცის მეორე თვისებიდან, გამომდის, რომ $\chi(z)$ რიგი უსასრულობაში ზუსტად უდრის $m_1-\varkappa_1$, $m_2-\varkappa_2,\ldots$, $m_n-\varkappa_n$ რიცხვებს შორის უდიდესს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, (126,11)-ში *უმაღლესი რიგის წევრები შეუძლებელია შეიკვეცოს*. პირუკუ, ადვილად მივიღებთ, რომ ამ თვისებებიდან გამოდის თვისება 2.

§ 127. შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ინდექსები. 1°. $\varkappa_1, \varkappa_2,\ldots, \varkappa_n$ მთელ რიცხვებს, ე. ი. კანონიკური სისტემის ამონახსნთა რიგებს უსასრულობაში, აღებული მოპირდაპირე ნიშნით, ვუწოდებთ განსახილველი შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის *კერძო ინდექსებს*, ხოლო მათ ჯამს — ჯამ-ინდექსს ან, უბრალოდ, ინდექსს.

ქვემოთ (§ 130-ში) ვაჩვენებთ, რომ კერძო ინდექსები არ არის კანონიკური სისტემის არჩევაზე დამოკიდებული (თუ უგულებელვყოფთ ამონახსნთა დანომვრით მიღებულ თანმიმდევრობას), ე. ი. ამოცანის ინვარიანტებია.

ჯამ-ინდექსის ინვარიანტულობა კი, რასაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს, გამომდინარეობს იქიდან, რომ ის შეიძლება უშუალოდ გამოისახოს შეუღლების მოცემული ერთგვაროვანი ამოცანის დამახასიათებელი $G(t)$ მატრიცის საშუალებით, რაშიც ახლავე დავრწმუნდებით.

2°. ვთქვათ, უწინდებურად $\Delta(z)$ აღნიშნავს კანონიკური მატრიცის დეტერმინანტს. ისევე, როგორც ნებისმიერი n ამონახსნის სისტემის დეტერმინანტისათვის, გვაქვს:

$$\Delta^+(t)=\det G(t)\cdot\Delta^-(t) \qquad L\text{-ზე},$$

საიდანაც გამოდის:

$$[\ln \Delta^{+}(t)]_L = [\ln \det G(t)]_L + [\ln \Delta^{-}(t)]_L, \tag{127,1}$$

სადაც $[\quad]_L$ სიმბოლო, როგორც ყოველთვის, აღნიშნავს ფრჩხილებში მოქცეული ფუნქციის ნაზრდს L-ის ერთხელ შემოვლისას დადებითი მიმართულებით.

იმ ბმული ნაწილებით, რომლებადაც იყოფა სიბრტყე L წირის მიერ, შევადგინოთ სიბრტყის ორი ნაწილი — S^{+} და S^{-}, როგორც ეს § 29-ის 1° პუნქტშია; და დროებით ვიგულისხმოთ, რომ დადებითი მიმართულება L წირზე არჩეულია ისევე, როგორც ხსენებულ პარაგრაფშია აღნიშნული[22]. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ S^{-}-ით აღნიშნული ნაწილი შეიცავს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს.

რადგან $\Delta(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია S^{+} ნაწილში და არ იქცევა ნულად, ამიტომ

$$[\ln \Delta^{+}(t)]_L = 0.$$

შემდეგ, L'-ით აღვნიშნოთ იმ შეკრული კონტურების ერთობლიობა, რომლებიც შედის L-ში და შემოსაზღვრავს S^{-}-ის შემადგენლობაში შემავალ და უსასრულოდ დაშორებული წერტილის შემცველ სიბრტყის ბმულ ნაწილს, ხოლო L''-ით — დანარჩენი კონტურების ერთობლიობა, მაშინ, წინას ანალოგიურად,

$$[\ln \Delta^{-}(t)]_{L''} = 0.$$

ახლა გამოვთვალოთ $\ln \Delta^{-}(t)$ ფუნქციის ნაზრდი L წირის ნაწილის L'-ის შემოვლისას. ცხადია, რომ

$$[\ln \Delta^{-}(t)]_{L'} = [\ln \Delta^{-}(z)]_{\Gamma},$$

სადაც Γ აღნიშნავს საკმარისად დიდი რადიუსის წრეწირს, ამასთან ერთად Γ-ზე დადებითად მივიჩნიოთ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება.

მაგრამ (126,10) ფორმულის საფუძველზე,

$$\Delta(z) = \frac{\Delta^{0}(z)}{z^{\varkappa}},$$

სადაც $\Delta^{0}(z)$ არის უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც ამ მიდამოში ნულს არ უდრის. ამიტომ, როცა Γ წრეწირის რადიუსი საკმარისად დიდია, გვექნება $[\ln \Delta^{0}(z)]_{\Gamma} = 0$, და ამგვარად

$$[\ln \Delta^{-}(z)]_{\Gamma} = [-\varkappa \ln z]_{\Gamma} = -2\pi i \varkappa.$$

ამრიგად, (127,1)-ის საფუძველზე

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln \det G(z)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(z)]_L. \tag{127,2}$$

სწორედ ეს არის საჭირო ფორმულა[23]. ის სამართლიანია L წირზე დადებითი მიმართულების ნებისმიერი არჩევისას.

---

[22] სახელდობრ, ისე, რომ L წირის მარცხენა მიდამო S^{+} ნაწილს ეკუთვნის, მარჯვენა კი S^{-} ნაწილს.

[23] ის მოცემულია ნ. მუსხელიშვილის [7] სტატიაში რამდენადმე უფრო კერძო შემთხვევისათვის, სახელდობრ, როცა L წირი შემოსაზღვრავს სიბრტყის რაიმე ბმულ ნაწილს (არეს).

მართლაც, თუ რომელიმე L_k წირზე, რომელიც შეადგენს L-ის ნაწილს, დადებითი მიმართულება არ ემთხვევა იმას, რომელიც იგულისხმებოდა ფორმულის გამოყვანისას, მაშინ შეგვიძლია ამ კონტურზე მიმართულება საწინააღმდეგოთი შევცვალოთ, ერთდროულად ამავე კონტურზე $G(t)$ მატრიცა უნდა შევცვალოთ $[G(t)]^{-1}$ მატრიცით იმისათვის, რომ ამოცანის პირობები არ დაირღვეს. ამ დროს შესაბამისი შესაკრებები

$$[\ln \det G(t)]_L = \sum_k [\ln \det G(t)]_{L_k}$$

ფორმულის მარჯვენა მხარეში არ შეიცვლება. აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

§ 128. ზეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი. 1°. იმის შემდეგ, რაც შედგენილია

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \tag{128,1}$$

შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნთა კანონიკური სისტემა, მისი ზოგადი ამონახსნის პოვნა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ვთქვათ,

$$\chi^\beta(z) = (\chi_1^\beta, \chi_2^\beta, \ldots, \chi_n^\beta), \quad \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

არის ამონახსნთა რაიმე კანონიკური სისტემა, ხოლო $X(z)$ — შესაბამისი კანონიკური მატრიცა,

$X(z) = \| \chi_\alpha^\beta(z) \|$ (β სვეტის ნომერია, α — სტრიქონის ნომერი). მაშინ

$$X^+(t) = G(t)\,X^-(t),$$

აქედან კი გამომდინარეობს

$$G(t) = X^+(t) \cdot [X^-(t)]^{-1} \tag{128,2}$$

ფორმულა, რომლითაც ჩვენ ხშირად ვისარგებლებთ.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ **შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ყველა ამონახსნს** (იგულისხმება უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის ამონახსნები) **მივიღებთ შემდეგი ფორმულით:**

$$\Phi(z) = \chi^1(z)\,P_1(z) + \chi(z)\,P_2(z) + \cdots + \chi^n(z)\,P_n(z), \tag{128,3}$$

სადაც $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$ **ნებისმიერი პოლინომებია, ანუ, რაც იგივეა,**

$$\Phi(z) = X(z)\,P(z), \tag{128,4}$$

სადაც $P(z)$ **აღნიშნავს ვექტორს, რომლის კომპონენტები ნებისმიერი პოლინომებია,**

$$P(z) = (P_1, P_2, \ldots, P_n). \tag{128,5}$$

მართლაც (128,1)-ში $G(t)$-ს მაგიერ (128,2) გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ, რომ

$$[X^+(t)]^{-1}\,\Phi^+(t) = [X^-(t)]^{-1}\,\Phi^-(t).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $[X(z)]^{-1}\,\Phi(z)$ ვექტორი ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეში; რადგან პირობის მიხედვით $\Phi(z)$-ს სასრული რიგი აქვს უსას-

რულობაში, ამიტომ $[X(z)]^{-1}\Phi(z)$-საც სასრული რიგი აქვს უსასრულობაში. და ამრიგად,

$$[X(z)]^{-1}\Phi(z)=P(z),$$

სადაც $P(z)$ არის $P_1(z), P_2(z),\ldots, P_n(z)$ პოლინომურ კომპონენტებიანი ვექტორი. აქედან კი გამომდინარეობს (128,4) ფორმულა. ანუ, რაც იგივეა—(128,3) ფორმულა.

ცხადია, რომ პირუკუ: (128,3) ფორმულა ანუ, რაც იგივეა, (128,4) ფორმულა გვაძლევს ამოცანის ამონახსნს როგორც არ უნდა ავარჩიოთ $P_1(z), P_2(z),\ldots$ $\ldots, P_n(z)$ და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

2°. აღვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ამონახსნის (128,3), ანუ (128,4) სახით წარმოდგენადობის დასადგენად საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ $X(z)$ მატრიცი ნორმალურია[21].

მაგრამ კანონიკური მატრიცის გამოყენება აადვილებს $P_1(z), P_2(z),\ldots, P_n(z)$ პოლინომების შერჩევას, როდესაც საჭიროა მოიძებნოს უსასრულობაში მოცემული რიგის ამონახსნი.

მართლაც, § 126-ის 4° პუნქტის საფუძველზე ცხადია, რომ ყოველ $\Phi(z)$ ამონახსნს, რომლის რიგი უსასრულობაში მთელ k რიცხვს არ აღემატება, მივიღებთ შემდეგი ფორმულით:

$$\Phi(z)=\chi^1(z)P_{k+\varkappa_1}+\chi^2(z)P_{k+\varkappa_2}+\cdots+\chi^n(z)P_{k+\varkappa_n}, \qquad (128,6)$$

სადაც $P_{k+\varkappa_j}$ აღნიშნავს არაუმეტეს $k+\varkappa_j$ ხარისხის პოლინომს, როცა $k+\varkappa_j<0$, მაშინ $P_{k+\varkappa_j}(z)=0$.

$\Phi(z)$ ამონახსნს ექნება ზუსტად k-ს ტოლი რიგი, თუ $P_{k+\varkappa_j}(z)$ პოლინომებს შორის ერთის ხარისხი მაინც აღწევს $(k+\varkappa_j)$-ს.

თუ ყველა $k+\varkappa_j<0$, მაშინ ამოცანას არა აქვს ისეთი (არატრივიალური) ამონახსნები, რომელთა რიგი არ აღემატება k-ს.

3°. (128,3) ფორმულიდან, რომელიც იძლევა შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგად ამონახსნს, გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\Phi(z)$ ამონახსნისათვის $\Phi^+(t)$ და $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები H კლასს ეკუთვნის. თუ, რა თქმა უნდა, $G(t)$ მატრიცი აკმაყოფილებს ზემოთ (§ 122) მიღებულ პირობებს.

მართლაც, ვნახეთ (§ 126), რომ ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ ნორმალური მატრიცი $X(z)$, რომლის სასაზღვრო მნიშვნელობები H კლასს ეკუთვნის. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $X(z)$ სწორედ ასეთი მატრიცია, მაშინ ცხადია, რომ (128,3) ფორმულის მარჯვენა მხარე ყოველთვის ეკუთვნის H კლასს.

კერძოდ, ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი კანონიკური მატრიცის შემადგენელი ელემენტების სასაზღვრო მნიშვნელობებს აქვს ეს თვისება.

---

[21] რამდენადმე სხვაგვარადაა საქმე, როცა $X(z)$ მხოლოდ ფუნდამენტური მატრიცაა; ამ შემთხვევაში, ადვილად მივიღებთ, რომ ყველა ამონახსნის მისაღებად (128,3) ფორმულაში ნაგულისხმევი უნდა იყოს, რომ $P_1(z), P_2(z),\ldots, P_n(z)$ რაციონალური ფუნქციებია (და არა მხოლოდ პოლინომები), ამასთანავე ისე შერჩეული, რომ ამონახსნს არ ჰქონდეს პოლუსი სასრულ მანძილზე.

§ 129. ზოგიერთი დამატებითი შენიშვნა შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნის შესახებ. 1°. ვნახეთ, რომ მას შემდეგ, რაც შედგენილია ამონახსნთა ნორმალური სისტემა (ერთი რომელიმე) — შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი ცხადი სახით მიიღება სრულიად უბრალოდ. ასევეა, როგორც ვნახავთ, შეუღლების არაერთგვაროვანი ამოცანისათვისაც; ის ამოცანა ჩამოყალიბებულია და ამოხსნილია § 132-ში.

ამ პარაგრაფის შენიშვნებს მთელ რიგ შემთხვევებში შეუძლია გააადვილოს ამონახსნთა ნორმალური (და, მაშასადამე, კანონიკური) მატრიცის აგება.

2°. უპირველეს ყოვლისა, აღვნიშნოთ შემდეგი გარემოება: ვთქვათ, $L_1, L_2, \ldots, L_p$ აღნიშნავს L-ის შემადგენელ შეკრულ კონტურებს. ვაჩვენოთ, რომ შეუღლების ამოცანის ამონახსნთა ნორმალური სისტემის შედგენა, როცა სასაზღვრო წირია L, დაიყვანება შეუღლების ამოცანების ამონახსნთა ნორმალური სისტემების მიმდევრობით შედგენაზე, როცა სასაზღვრო წირებია $L_1, L_2, \ldots, L_p$ თითოეული ცალ-ცალკე აღებული.

მართლაც, ვთქვათ $X(z)$ აღნიშნავს

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \qquad L\text{-ზე} \tag{129,1}$$

შეუღლების ამოცანის ნორმალურ მატრიცს.

$X(z)$ ვეძებოთ ნამრავლის სახით,

$$X(z) = X_1(z)\,X_2(z)\cdots X_p(z), \tag{129,2}$$

სადაც $X_k(z)$, $k=1, 2, \ldots, p$ აღნიშნავს უბან-უბან ჰოლომორფულ, უსასრულობაში სასრული რიგის მატრიცს, რომლის ნახტომის წირია L_k. მაშინ L_k-ზე უნდა გვქონდეს:

$$X_1(t)\,X_2(t)\cdots X_{k-1}(t)\,X_k^+(t)\,X_{k+1}(t)\cdots X_p(t) =$$
$$= G(t)\,X_1(t)\cdots X_{k-1}(t)\,X_k^-(t)\,X_{k+1}(t)\cdots X_p(t),$$

რადგან L_k-ზე გვაქვს $X_j^+(t) = X_j^-(t) = X_j(t)$, როცა $j \neq k$. წინა ტოლობის მარცხნიდან $[X_1(t)\cdots X_{k-1}(t)]^{-1}$-ზე და მარჯვნიდან $[X_{k+1}(t)\cdots X_p(t)]^{-1}$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$X_k^+ = G_k(t)\,X_k^-(t) \qquad L_k\text{-ზე}, \tag{129,3}$$

სადაც მიღებულია აღნიშვნა

$$G_k(t) = [X_1(t)\cdots X_{k-1}(t)]^{-1}\,G(t)\,[X_1(t)\cdots X_{k-1}(t)] \quad L_k\text{-ზე}, \tag{129,4}$$
$$k = 1, 2, \ldots, p;$$

როცა $k=1$ წინა ტოლობა უნდა გავიგოთ ასე:

$$G_1(t) = G(t) \qquad L_1\text{-ზე}.$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $X_1(z), \ldots, X_p(z)$ შესაბამისად (129,3) ამოცანების ნორმალური მატრიცებია, როდესაც $k=1, 2, \ldots, p$; მაშინ ცხადია, რომ (129,2) ფორმულით განსაზღვრული $X(z)$ მატრიცი ნორმალური მატრიცი იქნება (129,1) ამოცანისათვის. $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_p(z)$ მატრიცები კი შეიძლება ავაგოთ მიმდევრობით, დავიწყებთ რა $X_1(z)$-ით. მართლაც, $G_1(t)$ მატრიცი L_1-ზე მოცემულია;

ვიპოვით რა $X_1(z)$-ს, შეგვიძლია L_2-ზე განვსაზღვროთ $G_2(t)$, $G_2(t)=[X_1(t)]^{-1}\times \times G(t)\, X_1(t)$ ფორმულის მიხედვით, და ა. შ.

აქ აღნიშნული ხერხი წარმოადგენს § 35-ის 4° პუნქტში მოყვანილის განზოგადებას; განსხვავებას ის ქმნის, რომ აქ $X_1(z), X_2(z),\dots, X_p(z)$ თანამამრავლები მატრიცებია და ამიტომ, საზოგადოდ, არ არის კომუტატიური.

ეს ხერხი ცოტა უფრო რთული სახით, იმასთან შედარებით, ვიდრე აქაა, მითითებულია ნ. ვეკუას [17] სტატიაში.

3°. ზოგჯერ მიზანშეწონილია განვიხილოთ შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის რამდენადმე უფრო ზოგადი ამონახსნები, სახელდობრ, **უბან-უბან მერომორფული** ამონახსნები. ამასთან, იგულისხმება, რომ ეს ამონახსნები უწყვეტად გაგრძელებადია L-ზე მარჯვნიდან და მარცხნიდან და ცალკეულ ბმულ არეებში, რომლებადაც იყოფა სიბრტყე L წირით, ჰოლომორფულია სასრული რაოდენობის პოლუსებს გარდა (მათ შორის, შესაძლებელი პოლუსისა უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში); სხვა განსაკუთრებულობა არ განიხილება.

ცხადია, რომ ნებისმიერი უბან-უბან მერომორფული ამონახსნისაგან შესაფერის პოლინომზე გამრავლებით შეიძლება მივიღოთ ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე ამონახსნი.

უბან-უბან მერომორფული ამონახსნის ერთობლიობას, თუ მისი დეტერმინანტი იგივურად ნულს არ უდრის, ვუწოდებთ **უბან-უბან მერომორფულ ფუნდამენტურ სისტემას**, ხოლო მის მატრიცს—**ფუნდამენტურ უბან-უბან მერომორფულ მატრიცს**.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამონახსნთა ერთი რომელიმე უბან-უბან მერომორფული ფუნდამენტური მატრიცის პოვნის შემდეგ შეიძლება მაშინვე მოვძებნოთ ამონახსნთა უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე სისტემა. ამისათვის საკმარისია უბან-უბან მერომორფული სისტემის ამონახსნები შესაფერის პოლინომებზე გავამრავლოთ, რაც შესაბამისი უბან-უბან მერომორფული მატრიცის სვეტების ამ პოლინომებზე გამრავლებას შეესაბამება.

უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნდამენტური მატრიცის აგების შემდეგ, § 126-ის მსგავსად, შეიძლება ნორმალური და კანონიკური მატრიცების შედგენა.

4°. ერთ-ერთი უმარტივესი კერძო შემთხვევა, როდესაც ადვილად აიგება ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, არის შემდეგი[23].

ვთქვათ, L წირი შედგება ერთი მარტივი შეკრული კონტურისაგან, ხოლო $G(t)$ მატრიცის ელემენტები რაციონალური ფუნქციებია. მაშინ, ცხადია, რომ მატრიცი

$$X(z)=\begin{cases} G(z), & \text{როცა } z\in S^+ \\ E, & \text{როცა } z\in S^-, \end{cases}$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა, S^+ და S^- კი—ის არეები, რომლებადაც იყოფა სიბრტყე L წირით (ამასთან, S^+ მდებარეობს L-ისაგან მარცხნივ), წარმოადგენს უბან-უბან მერომორფულ ფუნდამენტურ მატრიცს.

ზემოთქმული ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც L შედგება რამდენიმე შეკრული კონტურისაგან, თუ ვიგულისხმებთ, რომ S^+, S^- იგივეა, რაც

[23] შდრ. ნ. ვეკუა [8].

§ 29-ის 1° პუნქტში და დადებითი მიმართულება L-ზე არჩეულია შესაფერისად (ე. ი. ისევე, როგორც § 29-ში).

5°. ახლახან განხილულთან შედარებით რამდენადმე უფრო ზოგადია ის შემთხვევა, როდესაც L შედგება სასრული რაოდენობის მარტივი შეკრული $L_1, L_2, \ldots, L_p$ კონტურებისაგან, რომლებზეც დადებითი მიმართულება არჩეულია ნებისმიერად, ხოლო

$$G(t) = G^{(k)}(t) \quad L_k\text{-ზე}, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

სადაც $G^{(k)}(t)$ წარმოადგენს მატრიცს, რომლის ელემენტები რაციონალური ფუნქციებია (შესაძლებელია სხვადასხვა — სხვადასხვა კონტურებისათვის). მაშინ, ცხადია, შეიძლება შევადგინოთ ფუნდამენტური $X(z)$ მატრიცი შემდეგი გზით (შდრ. 2° და 4° პუნქტებში თქმულს).

აღვნიშნოთ S_k^+ და S_k^--ით სიბრტყის ის ნაწილები, რომლებადაც იყოფა სიბრტყე L_k წირით; აღნიშვნები ისე შევარჩიოთ, რომ L_k წირის დადებითი მიმართულებით შემოვლისას S_k^+ არე რჩებოდეს მარცხნივ და. ვთქვათ, $G_1(t) = G^{(1)}(t)$, როცა $t \in L_1$; შემდეგ, იმის გათვალისწინებით, რომ $G_1(t)$-ს ელემენტები რაციონალური ფუნქციებია, მივიღოთ

$$X_1(z) = \begin{cases} G_1(z), & \text{როცა} \quad z \in S_1^+, \\ E, & \text{როცა} \quad z \in S_1^-. \end{cases}$$

შემდეგ, მივიღოთ $G_2(t) = [X_1(t)]^{-1} G^{(2)}(t) X_1(t)$, როცა $t \in L_2$; ამის შემდეგ, მხედველობაში ვიქონიებთ რა, რომ $G_2(t)$ მატრიცის ელემენტები რაციონალური ფუნქციებია, დავწეროთ

$$X_2(z) = \begin{cases} G_2(z), & \text{როცა} \quad z \in S_2^+, \\ E, & \text{როცა} \quad z \in S_2^-, \end{cases}$$

და ა. შ.

ცხადია, რომ $X_1(z) X_2(z) \cdots X_p(z)$ იქნება ფუნდამენტური უბან-უბან მერომორფული მატრიცი ამოსავალი ამოცანისათვის.

6° ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ შეუღლების ერთგვაროვანი (129,1) ამოცანა, ცხადია, ეკვივალენტურია შემდეგი ამოცანისა: $G(t)$ მატრიცი წარმოდგენილ იქნას

$$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}$$

ნამრავლის სახით, სადაც $X^+(t)$, $X^-(t)$ ისეთი უბან-უბან ჰოლომორფული $X(z)$ მატრიცის სასაზღვრო მნიშვნელობებია, რომლისთვისაც $\det X(z)$ სასრულ მანძილზე არსად არ ხდება ნულის ტოლი.

მართლაც, თუ ადგილი აქვს წინა წარმოდგენას, მაშინ ცხადია, რომ $X(z)$ მატრიცი იქნება (129,1) ამოცანის ნორმალური მატრიცი.

კერძოდ[26], შეუღლების (129,1) ამოცანა შეიძლება ამოხსნილად მივიჩნიოთ, თუ S^+, S^- იგივეს აღნიშნავს, რასაც § 129-ის 1 პუნქტში, ხოლო მიმართულება L-ზე არჩეულია შესაფერისად და თუ რამენაირად მოხერხდება $G(t)$-ს წარმოდგენა

$$G(t) = \Omega^+(t)\,\Omega^-(t) \qquad L\text{-ზე},$$

---

[26] შდრ. თ. გახოვი [6]; ავტორი განიხილავს ისეთ შემთხვევას, როდესაც L შემოსაზღვრავს სიბრტყის რაიმე ბმულ ნაწილს და როდესაც $\Omega(z)$ (იხ. ქვემოთ) უბან-უბან ჰოლომორფული მატრიცია.

ნამრავლის სახით, სადაც $\Omega^+(t)$, $\Omega^-(t)$ ისეთი უბან-უბან მერომორფული რაიმე $\Omega(t)$ მატრიცის სასაზღვრო მნიშვნელობებია, რომლისთვისაც $\det \Omega(z)$ იგივურად ნულს არ უდრის. მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$X(z)=\begin{cases} \Omega(z), & \text{როცა} \quad z\in S^+, \\ [\Omega(z)]^{-1}, & \text{როცა} \quad z\in S^-, \end{cases}$$

მატრიცი, ცხადია, წარმოადგენს ფუნდამენტურ უბან-უბან მერომორფულ მატრიცს (129,1) ამოცანისათვის; ამ მატრიცის მიხედვით კი შეგვიძლია ავაგოთ ნორმალური და კანონიკური მატრიცები.

§ 130. კანონიკურ სისტემებს შორის კავშირი. კერძო ინდექსების ინვარიანტულობა. ახლა, გადავდივართ რა ერთსა და იმავე შეუღლების ამოცანის ამონახსნთა ორ სხვადასხვა კანონიკურ სისტემას შორის კავშირის შესწავლაზე, ვიწყებთ იმის დამტკიცებით, რომ კერძო ინდექსები, ე. ი. $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ რიცხვები (§ 127, 1° პუნქტი), ერთნაირია ყველა კანონიკური სისტემისათვის (თუ უგულვებელვყოფთ ამონახსნთა თანმიმდევრობას კანონიკურ სისტემაში).

ვთქვათ,

$$\chi^1(z),\ \chi^2(z), \ldots,\ \chi^n(z) \tag{130,1}$$

და

$$\zeta^1(z),\ \zeta^2(z), \ldots,\ \zeta^n(z) \tag{130,2}$$

ორი რაიმე კანონიკური სისტემაა და, ვთქვათ, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ და $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ შესაბამისი კერძო ინდექსებია; ასე, რომ $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_n$ და $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$ წარმოადგენს (130,1) და (130,2) ამონახსნთა რიგებს უსასრულობაში.

ვიგულისხმოთ, რომ ეს ამონახსნები გადანომრილია ისე, რომ $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ და $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\lambda_1=\varkappa_1$, $\lambda_2=\varkappa_2, \ldots, \lambda_n=\varkappa_n$.

კანონიკური სისტემების ძირითადი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ (130,2) ამონახსნები შეიძლება გამოისახოს (130,1) ამონახსნების საშუალებით შემდეგი სახის ფორმულებით:

$$\zeta^\alpha=\chi^1 P_{\alpha 1}+\chi^2 P_{\alpha 2}+\cdots+\chi^n P_{\alpha n}, \quad \alpha=1,\ 2, \ldots,\ n, \tag{130,3}$$

სადაც $P_{\alpha\beta}$ პოლინომებია; ანალოგიური ფორმულების საშუალებით (130,1) ამონახსნები გამოისახება (130,2) ამონახსნების მიხედვით.

ზოგადობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ

$$\varkappa_1=\varkappa_2=\cdots=\varkappa_k>\varkappa_{k+1}, \quad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_l>\lambda_{l+1},$$

და დავამტკიცოთ, რომ $\varkappa_1=\lambda_1$ და $k=l$. მართლაც, (130,3) ფორმულების გამოყენება (130,2)-დან პირველი l ამონახსნისათვის, თუ შევადარებთ მარჯვენა და მარცხენა მხარეთა რიგებს, გვიჩვენებს, რომ $-\lambda_1 \geqslant -\varkappa_1$, რადგან (130,3)-ის მარჯვენა მხარის რიგი უსასრულობაში შეუძლებელია ნაკლები იყოს $(-\varkappa_1)$-ზე. (130,1) და (130,2) სისტემებს როლებს თუ შევუცვლით, ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $-\varkappa_1 \geqslant -\lambda_1$, საიდანაც ვასკვნით, რომ $\varkappa_1=\lambda_1$.

(130,3) ფორმულის მარჯვენა და მარცხენა მხარეების რიგების იმავე შედარების

გამოყენება (130,2)-დან პირველი l ამონახსნის მიმართ გვიჩვენებს, რომ მარჯვენა მხარეები შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ პირველ k შესაკრებს[27], ე. ი. როცა $\alpha=1, 2, \ldots, l$

$$\zeta^{\alpha}=\chi^1 P_{\alpha 1}+\chi^2 P_{\alpha 2}+\cdots+\chi^k P_{\alpha k}. \tag{130,4}$$

თუ ახლა $l>k$, მაშინ (130,4) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას:

$$\zeta^1 Q_1+\zeta^2 Q_2+\cdots+\zeta^l Q_l=0,$$

სადაც Q_j პოლინომებია[28], რომლებიც ერთდროულად ნულები არ არიან, რაც შეუძლებელია კანონიკური სისტემის ამონახსნებისათვის[29]. ზუსტად ასევე, (130,1)-ისა და (130,2)-ის როლების შეცვლით დავამტკიცებთ, რომ შეუძლებელია ადგილი ჰქონდეს შებრუნებულ უტოლობას; მაშასადამე, $l=k$.

ამრიგად, გვაქვს $\varkappa_1=\lambda_1, \ldots, \varkappa_h=\lambda_h$, $\varkappa_h>\varkappa_{h+1}$, $\lambda_h>\lambda_{h+1}$. ვთქვათ, ახლა $\varkappa_{h+1}=\cdots=\varkappa_{h+r}>\varkappa_{h+r+1}$; $\lambda_{h+1}=\cdots=\lambda_{h+s}>\lambda_{h+s+1}$. ვაჩვენოთ, რომ $\varkappa_{h+1}=\lambda_{h+1}$, $r=s$. გამოვიყენებთ რა (130,3) ფორმულებს

$$\zeta^{k+1}, \ldots, \zeta^{k+s}$$

ამონახსნების მიმართ, უწინარეს ყოვლისა, დავასკვნით, რომ ამ ფორმულების მარჯვენა მხარეები შეუძლებელია შეიცავდეს მხოლოდ პირველ k შესაკრებს, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, გვექნებოდა (130,4) სახის თანაფარდობანი, როცა $\alpha=1, 2, \ldots, k+s$, და მაშინ ადგილი ექნებოდა

$$\zeta^1 Q_1+\zeta^2 Q_2+\cdots+\zeta^k Q_k+\zeta^{k+1} Q_{k+1}+\cdots+\zeta^{k+s} Q_{k+s}=0 \tag{130,5}$$

სახის ერთ თანაფარდობას მაინც, სადაც Q_j პოლინომებია, რომლებიც ერთდროულად ნულები არ არიან, რაც შეუძლებელია.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ აუცილებლად $-\lambda_{h+1} \geqslant -\varkappa_{h+1}$. ანალოგიურად ვასკვნით, რომ $-\varkappa_{h+1} \geqslant -\lambda_{h+1}$ და, მაშასადამე, $\varkappa_{h+1}=\lambda_{h+1}$. ახლა გამოვიყენებთ რა (130,3) ფორმულებს (130,2) ამონახსნების პირველი $k+s$ ამონახსნის მიმართ, ცხადია, გვექნება შემდეგი სახის ფორმულები[30]:

$$\zeta^{\alpha}=\chi_1 P_{\alpha 1}+\chi^2 P_{\alpha 2}+\cdots+\chi^{k+r} P_{\alpha, k+r}, \quad \alpha=1, 2, \ldots, k+s.$$

თუ $s>r$, წინა თანაფარდობიდან გამოვა (130,5) სახის ერთი თანაფარდობა მაინც, რაც შეუძლებელია. ანალოგიურად ვასკვნით, რომ შეუძლებელია ადგილი ჰქონდეს შებრუნებულ უტოლობასაც. მაშასადამე, $r=s$.

მსჯელობის შემდგომი პროცესი ნათელია და შეგვიძლია ჩვენი დებულება დამტკიცებულად მივიჩნიოთ.

---

[27] ჩვენს შემთხვევაში, ცხადია, $P_{\alpha 1}, P_{\alpha 2}, \ldots, P_{\alpha k}$ მუდმივებია, მაგრამ ერთნაირობისათვის (მხედველობაში გვაქვს შემდგომი მსჯელობა) მათ განვიხილავთ როგორც პოლინომების კერძო შემთხვევას.

[28] შდრ. წინა სქოლიოს.

[29] მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ცხადია, გვექნებოდა $\det \|\zeta_{\alpha}^{\beta}\|=0$.

[30] ამ ფორმულებიდან პირველი k ემთხვევა (130,4) ფორმულებს, მაგრამ ამას არა აქვს მნიშვნელობა.

წინა მსჯელობის საფუძველზე ადვილია მივუთითოთ ყველა კანონიკური სისტემის შედგენის გზა, მას შემდეგ რაც ცნობილია ერთ-ერთი მათგანი, მაგრამ ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით; იხ. ნ. ვეკუას წიგნი [16], § 5.

§ 131. შეუღლების მიკავშირებული ერთგვაროვანი ამოცანები. 1°. შეუღლების ერთგვაროვან ამოცანებს, რომლებიც შეესაბამებიან შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t) \quad L\text{-ზე} \tag{I}$$

და

$$\Psi^+(t)=[G'(t)]^{-1}\,\Psi^-(t) \quad L\text{-ზე}. \tag{I'}$$

ვუწოდებთ *მიკავშირებულებს*; როგორც ყოველთვის, შტრიხით აღნიშნულია ტრანსპონირებულ მატრიცზე გადასვლა.

მიკავშირებული ამოცანების ამონახსნებს შორის მჭიდრო კავშირი არსებობს. სახელდობრ, ადვილად მივიღებთ, რომ, თუ

$$X(z)=\|\chi_\alpha^\beta(z)\|$$

არის (I) ამოცანის ნორმალური ან კანონიკური მატრიცი, მაშინ

$$Z(z)=\|\zeta_\alpha^\beta(z)\|=[X'(z)]^{-1}$$

იქნება მიკავშირებული (I′) ამოცანის შესაბამისად ნორმალური ან კანონიკური მატრიცი.

მართლაც, თუ $X(z)$ არის (I) ამოცანის ნორმალური მატრიცი, მაშინ, ნორმალური მატრიცის განსაზღვრის ძალით,

$$\Delta(z)=\det X(z)$$

დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება ყველგან, სასრულ მანძილზე. ამიტომ $[X'(z)]^{-1}$ მატრიცის ζ_α^β ელემენტები, რომლებიც განისაზღვრებიან

$$\zeta_\alpha^\beta=\frac{\Delta_\alpha^\beta(z)}{\Delta(z)} \tag{131,1}$$

ფორმულით, სადაც $\Delta_\alpha^\beta(z)$ არის χ_α^β ელემენტის ალგებრული დამატება $\Delta(z)$ დეტერმინანტში, წარმოადგენს ჰოლომორფულ, უსასრულობაში სასრული რიგის ფუნქციებს.

შემდეგ,

$$X^+(t)=G(t)\,X^-(t)$$

თანაფარდობიდან, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ

$$[X'^+(t)]^{-1}=[G'(t)]^{-1}\,[X'^-(t)]^{-1};$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $[X'(z)]^{-1}$ მატრიცი არის (I′) ამოცანის ამონახსნთა რომელიღაც სისტემის მატრიცი. ეს სისტემა ნორმალურია, რადგან მისი დეტერმინანტი

$$\det Z(z)=\det[X'^-(z)]^{-1}=\frac{1}{\Delta(z)}$$

სასრულ მანძილზე არსად ნულად არ იქცევა. ამგვარად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $X(z)$ ნორმალური მატრიცია.

დავუშვათ ახლა, რომ $X(z)$ არის (I) ამოცანის კანონიკური მატრიცი. ვთქვათ, უწინდელივით $(-\varkappa_\beta)$ აღნიშნავს $\chi^\beta(z)=(\chi_1^\beta, \chi_2^\beta, \ldots, \chi_n^\beta)$ ამონახსნის რიგს უსასრულობაში, მაშინ, კანონიკური მატრიცის განსაზღვრის ძალით,

$$\Delta^0(z)=\det\| z^{\varkappa_\beta}\chi_\alpha^\beta(z)\|=\det\|\chi_\alpha^{0\beta}(z)\|$$

დეტერმინანტი, სადაც აღნიშნულია $\chi_\alpha^{0\beta}(z)=z^{\varkappa_\beta}\chi_\alpha^\beta(z)$, ნულისაგან განსხვავდება, როცა $z=\infty$. მაგრამ, მაშინ, (131,1)-ის საფუძველზე, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\zeta_\alpha^\beta(z)=\frac{\Delta_\alpha^{0\beta}(z)}{\Delta^0(z)}\, z^{\varkappa_\beta}, \tag{131,2}$$

სადაც $\Delta_\alpha^{0\beta}(z)$ აღნიშნავს $\chi_\alpha^{0\beta}(z)$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას $\Delta^0(z)$ დეტერმინანტში. ამ უკანასკნელი ფორმულიდან გამოდის, რომ, ჯერ ერთი, $\zeta^\beta(z)=(\zeta_1^\beta, \zeta_2^\beta, \ldots, \zeta_n^\beta)$ ამონახსნის რიგი უსასრულობაში ზუსტად $\varkappa_\beta$-ს ტოლია და, რომ

$$\det\| z^{-\varkappa_\beta}\zeta_\alpha^\beta(z)\|=\frac{1}{\Delta^0(z)}$$

დეტერმინანტი არ ხდება ნული უსასრულობაში. ეს კი ამტკიცებს იმას, რომ $Z(z)=[X'(z)]^{-1}$ არის (I′) ამოცანის კანონიკური მატრიცი.

ზემოთქმულიდან გამოდის აგრეთვე, რომ, თუ $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ (I) ამოცანის კერძო ინდექსებია, მაშინ $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_n$ იქნება მიკავშირებული (I′) ამოცანის კერძო ინდექსები. ამიტომ მიკავშირებული ამოცანების ჯამ-ინდექსებიც სიდიდით ერთმანეთის ტოლია და ნიშნით საპირისპირო.

2°. კერძოდ, განვიხილოთ საკითხი (I) და (I′) მიკავშირებული ამოცანების უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების შესახებ.

ვთქვათ, უწინდელივით, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ აღნიშნავს (I) ამოცანის კერძო ინდექსებს და ვთქვათ,

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\varkappa_{m+2}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n. \tag{131,3}$$

(თუ ყველა $\varkappa_j$ არ არის უარყოფითი, მაშინ $m=n$; თუ ყველა უარყოფითია, $m=0$).

შემდეგ, აღვნიშნოთ

$$\lambda=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_m, \quad -\mu=\varkappa_{m+1}+\varkappa_{m+2}+\cdots+\varkappa_n; \tag{131,4}$$

ასე, რომ

$$\lambda-\mu=\varkappa. \tag{131,5}$$

(128,6) ფორმულის საფუძველზე, (I) ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი, ზოგადი ამონახსნი (ე. ი. ისეთი, რომლის რიგი უსასრულობაში არ აღემატება $k=-1$-ს) გვეძლევა ასეთი ფორმულით:

$$\Phi(z)=\chi^1(z)\,P_{\varkappa_1-1}(z)+\cdots+\chi^n(z)\,P_{\varkappa_n-1}(z), \tag{131,6}$$

სადაც $P_{\varkappa_j-1}$ არის არაუმეტეს $\varkappa_j-1$ ხარისხის ნებისმიერ კოეფიციენტებიანი პოლინომი ($P_{\varkappa_j-1}=0$, როცა $\varkappa_j\leqslant 0$), ანუ

$$\Phi(z)=X(z)\,P(z), \tag{131,7}$$

სადაც $P(z)$ არის $P_{\varkappa_1-1}(z), P_{\varkappa_2-1}(z), \dots, P_{\varkappa_n-1}(z)$ კომპონენტებიანი ვექტორი:

$$P(z)=(P_{\varkappa_1-1}, P_{\varkappa_2-1}, \dots, P_{\varkappa_n-1}). \tag{131,8}$$

თუ აღვნიშნავთ $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$-თი $P_{\varkappa_1-1}(z), P_{\varkappa_2-1}(z), \dots, P_{\varkappa_n-1}(z)$ პოლინომების რაიმე მიმდევრობით აღებულ კოეფიციენტებს[31], მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ $P(z)$ შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$P(z)=C_1 P^1(z)+C_2 P^2(z)+\dots+C_\lambda P^\lambda(z), \tag{131,9}$$

სადაც $P^j(z)$ აღნიშნავს გარკვეულ ვექტორს, რომლის ყველა კომპონენტი, ერთის გარდა, უდრის ნულს, ხოლო არანულოვანი კომპონენტი წარმოადგენს z-ის მთელ, არაუარყოფით ხარისხს. ცხადია, რომ $P^1(z), P^2(z), \dots, P^\lambda(z)$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია.

მაშასადამე, (131,7)-ის საფუძველზე,

$$\Phi(z)=C_1 \Phi^1(z)+C_2 \Phi^2(z)+\dots+C_\lambda \Phi^\lambda(z), \tag{131,10}$$

სადაც $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \dots, \Phi^\lambda(z)$ ვექტორები (I) ამოცანის

$$\Phi^j(z)=X(z)P^j(z), \quad j=1, 2, \dots, \lambda \tag{131,11}$$

ფორმულით განსაზღვრული, უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნებია, ხოლო $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$ — ნებისმიერი მუდმივები.

ადვილად დავინახავთ, რომ $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \dots, \Phi^\lambda(z)$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია. მართლაც, თუ (131,10) ფორმულით განსაზღვრული $\Phi(z)$ ვექტორი იგივურად ნულს უდრის, ე. ი. თუ

$$\Phi(z)=X(z)P(z)=0,$$

მაშინ აუცილებლად $P(z)=0$, რადგან $\det X(z)\neq 0$. მაგრამ, მაშინ, (131,9)-ის საფუძველზე $C_1=C_2=\dots=C_\lambda=0$, ვინაიდან $P^1(z), P^2(z), \dots, P^\lambda(z)$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია.

ამგვარად, (I) ამოცანას აქვს ზუსტად λ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი, უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი

$$\Phi^1(z), \Phi^2(z), \dots, \Phi^\lambda(z). \tag{131,12}$$

ამ ამონახსნთა ერთობლიობა გვეძლევა (131,6) ფორმულით, რომელიც იგივეა, რაც (131,7).

თუ მივიღებთ მხედველობაში იმას, რომ $[X'(z)]^{-1}$ არის (I′) ამოცანის კანონიკური მატრიცი და, რომ $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \dots, -\varkappa_n$ ამავე ამოცანის კერძო ინდექსებს წარმოადგენს, მაშინ სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ ასეთ შედეგს:

(I′) ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები გვეძლევა

$$\Psi(z)=[X'(z)]^{-1}Q(z) \tag{131,13}$$

ფორმულით, სადაც

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1}, Q_{-\varkappa_1-1}, \dots, Q_{-\varkappa_n-1}); \tag{131,14}$$

[31] $P_{\varkappa_j-1}(z)$ პოლინომში (ნებისმიერი) კოეფიციენტების რაოდენობა უდრის $\varkappa_j$-ს, როცა $\varkappa_j>0$, და უდრის ნულს, როცა $\varkappa_j<0$. ამიტომ (131,3) და (131,4)-ის ძალით ყველა ნებისმიერი კოეფიციენტის რიცხვი უდრის

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\dots+\varkappa_m=\lambda.$$

ამასთან, $Q_{-\varkappa_j-1}=Q_{-\varkappa_j-1}(z)$ აღნიშნავს არაუმეტეს $-\varkappa_j-1$ ხარისხის ნებისმიერ პოლინომს ($Q_{-\varkappa_j-1}=0$, როცა $\varkappa_j\geqslant 0$).

(131,9) ფორმულის ანალოგიურად გვექნება, რომ

$$Q(z)=D_1 Q^1(z)+D_2 Q^2(z)+\cdots+D_\mu Q^\mu(z), \tag{131,15}$$

სადაც $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $Q^j(z)$ აღნიშნავს გარკვეულ, წრფივად დამოუკიდებელ, პოლინომურ კომპონენტებიან ვექტორებს. ამ აღნიშვნებში (131,13) ფორმულა ასე წარმოდგინება:

$$\Psi'(z)=D_1 \Psi^1(z)+D_2 \Psi^2(z)+\cdots+D_\mu \Psi^\mu(z), \tag{131,16}$$

სადაც

$$\Psi^j(z)=[X'(z)]^{-1} Q^j(z). \tag{131,17}$$

$$\Psi^1(z),\ \Psi^2(z),\ldots,\ \Psi^\mu(z)$$

ვექტორები არის (I′) ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელი, უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები.

ამგვარად, (I′) ამოცანას აქვს ზუსტად μ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი, უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი.

შევადარებთ რა წინა შედეგებს და გავითვალისწინებთ რა (131,5)-ს, ვასკვნით, რომ *(I) და (I′) ამოცანების წრფივად დამოუკიდებელ, უსასრულობაში ქრობად ამონახსნთა რაოდენობების სხვაობა უდრის (I) ამოცანის ინდექსს (ჯამ-ინდექსს).*

§ 132. შეუღლების არაერთგვაროვანი ამოცანა[32]. 1°. შეუღლების არაერთგვაროვან ამოცანას რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის ასე ჩამოვაყალიბებთ:

მოიძებნოს უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის ვექტორი $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$, რომლის ნახტომის წირია L, შემდეგი სასაზღვრო პირობის მიხედვით L-ზე

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t), \tag{132,1}$$

სადაც $G(t)$ არის L-ზე მოცემული, H კლასის, არაგადაგვარებული მატრიცი, ხოლო $g(t)$ — L-ზე მოცემული, H კლასის ვექტორი.

ეს ამოცანა ადვილად ამოიხსნება შემდეგი გზით.

ვთქვათ, უწინდელივით, $X(z)$ არის შეუღლების იმ ერთგვაროვანი ამოცანის კანონიკური მატრიცი, რომელიც მიიღება (132,1)-ისაგან, როცა $g(t)=0$. მაშინ (128,2) ფორმულის მიხედვით

$$G(t)=X^+(t)\,[X^-(t)]^{-1}.$$

---

[32] როგორც ადრე აღინიშნა, ამ ამოცანის სრული და ამავე დროს სრულიად ელემენტარული ამოხსნა ერთი უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში მოგვცა თ. გახოვმა. ნაშრომში [2] თ. გახოვი განიხილავს, აგრეთვე, არაერთგვაროვან ამოცანასაც რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში და უშუალოდ აგებს ამ შემთხვევისათვის ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც ი. პლემელის (I. Plemelj [2]) მიერ ერთგვაროვანი ამოცანისათვის აგებული სისტემის ანალოგიურია. მაგრამ ამ გზით თ. გახოვი ვერ ახერხებს რამდენადმე სრული შედეგის მიღებას. ამ დროს კი, როგორც ამავე პარაგრაფში ვაჩვენებთ, შეუღლების არაერთგვაროვანი ამოცანა ადვილად დაიყვანება შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანაზე, თან იმ ხერხის ანალოგიური ხერხით, რომლითაც სარგებლობს თვითონ თ. გახოვი ერთი უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში. აქ მოყვანილი ამოხსნა მოცემულია ნ. მუსხელიშვილისა და ნ. ვეკუას [1] სტატიაში.

ამ გამოსახულების (132,1)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$[X^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)-[X^-(t)]^{-1}\Phi^-(t)=[X^+(t)]^{-1}g(t).$$

საიდანაც, § 121-ის 3° პუნქტში თქმულის საფუძველზე, გამომდინარეობს, რომ განსახილველი ამოცანის ყველა ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს დასმულ პირობებს, გვეძლევა შემდეგი ფორმულით:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{[X^+(t)]^{-1}g(t)\,dt}{t-z}+X(z)P(z), \tag{132.2}$$

სადაც $P(z)$ ვექტორია,

$$P(z)=(P_1,\ P_2,\dots,\ P_n);$$

ამასთან $P_\alpha=P_\alpha(z)$ ნებისმიერი პოლინომებია.

მოცემულის შესაბამისი შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის კერძო ინდექსებს და ჯამ-ინდექსს ვუწოდებთ შესაბამისად მოცემული ამოცანის კერძო ინდექსებს და ჯამ-ინდექსს. ამ უკანასკნელს ხანდახან უბრალოდ ინდექსს ვუწოდებთ.

2°. შემდგომში გამოყენების თვალსაზრისით განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს უსასრულობაში ქრობად ამონახსნთა მოძებნა.

ვთქვათ, ისევე, როგორც წინა პარაგრაფის 2° პუნქტშია,

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n, \tag{132,3}$$

$$\lambda=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_m,\quad \mu=-\varkappa_{m+1}-\varkappa_{m+2}-\cdots-\varkappa_n. \tag{132,4}$$

დროებით შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$[X^+(t)]^{-1}g(t)=h(t)=(h_1,\ h_2,\dots,\ h_n); \tag{132,5}$$

მაშინ, ცხადია, (132,2) ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\Phi(z)=\chi^1(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h_1(t)\,dt}{t-z}+P_1(z)\right\}+\cdots+$$

$$+\chi^n(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h_n(t)\,dt}{t-z}+P_n(z)\right\}; \tag{132,6}$$

თუ შევნიშნავთ, რომ საკმარისად დიდი $|z|$-ისათვის

$$\int_L \frac{h_\alpha(t)\,dt}{t-z}=-z^{-1}\int_L h_\alpha(t)\,dt-z^{-2}\int_L th_\alpha(t)\,dt-z^{-3}\int_L t^2h_\alpha(t)\,dt-\cdots \tag{132,7}$$

და თუ შევაფასებთ (132,6) ფორმულის მარჯვენა მხარის სხვადასხვა შესაკრებთა რიგებს უსასრულობაში, ადვილად დავასკვნით, რომ უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი μ პირობა $g(t)$ თავისუფალი წევრის მიმართ:

$$\int_L t^j h_\alpha(t)\,dt=0,\quad j=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa_\alpha-1,\quad \alpha=m+1,\quad m+2,\dots,\ n, \tag{132,8}$$

თუ ეს პირობები დაცულია, მაშინ საჭირო სახის ზოგადი ამონახსნი გვეძლევა (132,2) ფორმულით, სადაც უნდა ვიგულისხმოთ, რომ

$$P(z)=(P_{\varkappa_1-1},\ P_{\varkappa_2-1},\ldots,\ P_{\varkappa_m-1},\ 0,\ 0,\ldots,\ 0);$$

$P_{\varkappa_j-1}=P_{\varkappa_j-1}(z)$ აღნიშნავს ნებისმიერ პოლინომს, რომლის ხარისხი $\varkappa_j-1$ არ აღემატება ($P_{\varkappa_j-1}=0$, თუ $\varkappa_j=0$).

(132,8) პირობათა ერთობლიობა შეიძლება ერთი პირობის სახით ჩავწეროთ: სახელდობრ, (132,8) ტოლობების ნებისმიერ მუდმივებზე გამრავლებით და შემდეგ მათი შეკრებით მივიღებთ:

$$\int_L Q(t)\,h(t)\,dt=0, \qquad (132,9)$$

სადაც $Q(t)$ არის

$$Q(t)=(0,\ 0,\ldots,\ 0,\ Q_{-\varkappa_m-1},\ldots,\ Q_{-\varkappa_n-1})$$

ფორმულით განსაზღვრული ვექტორი, ამასთან, $Q_{-\varkappa_j-1}=Q_{-\varkappa_j-1}(z)$ აღნიშნავს არაუმეტეს $-\varkappa_j-1$ რიგის ნებისმიერ პოლინომს.

ამის შემდეგ, ერთგვარობის დასაცავად, დავწერთ წინა პარაგრაფის მსგავსად

$$P(z)=(P_{\varkappa_1-1},\ P_{\varkappa_2-1},\ldots,\ P_{\varkappa_n-1}), \qquad (132,10)$$

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1},\ Q_{-\varkappa_1-1},\ldots,\ Q_{-\varkappa_n-1}), \qquad (132,11)$$

და შევთანხმდებით, რომ $P_\alpha=P_\alpha(z)$, $Q_\alpha=Q_\alpha(z)$ ნებისმიერი პოლინომებია არაუმეტეს α ხარისხისა, ამასთან $P_\alpha=0$, $Q_\alpha=0$, როცა $\alpha<0$.

მიღებული შედეგი ამ აღნიშვნებში, (132,5) ფორმულის გათვალისწინებით, შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ:

(132,1) ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ თავისუფალი წევრი $g(t)$ აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:

$$\int_L Q(t)[X^+(t)]^{-1}\,g(t)=0, \qquad (132,12)$$

სადაც $Q(t)$ არის (132,11) სახის ნებისმიერი ვექტორი; როცა ეს პირობა დაცულია, მაშინ საძიებელი სახის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა (132,2) ფორმულით, სადაც $P(z)$ არის (132,10) სახის ნებისმიერი ვექტორი.

ჩვენს შემთხვევაში (132,2) ფორმულის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები წარმოადგენს იმ ერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობად, ზოგად ამონახსნს, რომელიც მიიღება (131,1)-ისაგან, როცა $g(t)=0$; ეს შესაკრები წარმოადგენს აღნიშნული ერთგვაროვანი ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელი, უსასრულობაში ქრობადი

$$\Phi^1(z),\ \Phi^2(z),\ldots,\ \Phi^\lambda(z) \qquad (132.13)$$

ამონახსნების წრფივ კომბინაციას ნებისმიერი მუდმივი კოეფიციენტებით.

$$\int\limits_L Q(t)\,[X^+(t)]^{-1}\,g(t)dt=\int\limits_L g(t)[X'^+(t)]^{-1}Q(t)\,dt$$

ფორმულის [33] გათვალისწინებით (132,12) პირობა ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\int\limits_L \Psi^+(t)\,g(t)\,dt=0, \tag{132,14}$$

სადაც $\Psi'^+(z)$ აღნიშნავს (132,1) ამოცანასთან მიკავშირებული ერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი, ზოგადი $\Psi(z)$ ამონახსნის სასაზღვრო მნიშვნელობას (მარცხნიდან); ეს პირობა შემდეგი μ რაოდენობის პირობის ტოლფასია:

$$\int\limits_L \Psi^{j+}(t)\,g(t)\,dt=0, \quad j=1,\ 2,\ldots,\ \mu. \tag{132.15}$$

სადაც

$$\Psi^{1+}(t),\ \Psi^{2+}(t),\ldots\ \Psi^{\mu+}(t) \tag{132.16}$$

არის (132,1) ამოცანასთან მიკავშირებული ერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი $\Psi^1(z)$, $\Psi^2(z),\ldots$ $\Psi^\mu(z)$ ამონახსნების სასაზღვრო მნიშვნელობანი (§ 131,2° პუნქტი). რადგან უკანასკნელი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ ადვილად მივიღებთ, რომ ასეთივეა (132.16) ვექტორებიც.

§ 133. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით შეუღლების ამოცანის ამოხსნის შესახებ. როგორც ვნახეთ, შეუღლების როგორც ერთგვაროვანი, ისე არაერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნა ფაქტიურად დაიყვანება ამონახსნთა ფუნდამენტური მატრიცის აგებაზე, რომლის მიხედვითაც შეიძლება ავაგოთ ნორმალური და კანონიკური მატრიცები. ფუნდამენტური მატრიცის ასაგებად გამოვიყენეთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაზე დამყარებული მეთოდი. § 122-ში ვახსენეთ ი. პლემელის მეთოდი, რომელიც ემყარება ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა გამოყენებას.

ახლახან გ. მანჯაველიძემ [5], [6] გამოიყენა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი[34] და ფრიად მარტივად აგო ფუნდამენტური მატრიცი. აქ მოკლედ გადმოცემულია ამ ხერხის შინაარსი.

ამასთანავე მოგვიწევს დავეყრდნოთ ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთ ელემენტარულ ცნებასა და დებულებას, რომლებიც ნაწილობრივ უკვე გადმოცემულია § 49-ში.

სანამ მეთოდის არსის გადმოცემას შევუდგებოდეთ, აღვნიშნოთ § 49-ში შემოყვანილი ნორმის ზოგიერთი თვისება, რომლებსაც ხშირად გამოვიყენებთ ამ პარაგრაფში.

სიმარტივისათვის ვგულისხმოთ, რომ L არის მარტივი, შეკრული, გლუვი კონ-

---

[33] იხ. § 118-ის (118,6) ფორმულა.

[34] ეს მეთოდი, რომელიც ნახსენებია § 122-ში (სქოლიო [11] 479 გვ.), სრულიად განსხვავდება იქვე ნახსენები ბირკჰოფის მეთოდისაგან.

ტური[35]. S^+ და S^--ით აღვნიშნოთ L-ით შემოსაზღვრული, შესაბამისად, სასრული და უსასრულო არეები; მივიჩნიოთ, რომ დადებითი მიმართულება L-ზე S^+ არეს მარცხნივ იტოვებს.

განვიხილოთ L წირზე მოცემულ იმ $f(t)$ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $H(\alpha)$ პირობას, $0<\alpha\leqslant 1$. § 49-ში ნათქვამის თანახმად ეს სიმრავლე შეადგენს წრფივ, ნორმირებულ სავსე სივრცეს, თუ ნორმას განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$\|f\|=\max|f(t)|+\sup\frac{|f(t_2)-f(t_1)|}{|t_2-t_1|^{\alpha}}.$$

$(t,\ t_1,\ t_2\in L)$. ამ ნორმას აღვნიშნავთ $\|f\|_\alpha$-თი, ცხადად ვუთითებთ α მაჩვენებელს.

თუ $F(t)$ მატრიცია, რომლის $f_{ik}(t)$ ელემენტები აკმაყოფილებს $H(\alpha)$ პირობას, მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ $\|F\|_\alpha$ უდრის $\max\|f_{ik}\|_\alpha$, ხოლო $M(F)$ აღნიშნავს $\max|f_{ik}(t)|$, $t\in L$ სიდიდეებს შორის უდიდესს.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $f_1(t)$ და $f_2(t)$ არის $H(\alpha)$ კლასის ფუნქციები, მაშინ

$$\|f_1f_2\|_\alpha\leqslant\max|f_2(t)|\,\|f_2\|_\alpha+\max|f_2(t)|\cdot\|f_1\|_\alpha \tag{133,1}$$

და

$$\|f_1f_2\|_\alpha\leqslant\|f_1\|_\alpha\cdot\|f_2\|_\alpha. \tag{133,2}$$

n-ური რიგის კვადრატული $F_1(t)$, $F_2(t)$ მატრიცების ნამრავლის ნორმისათვის გვექნება ანალოგიური უტოლობები:

$$\|F_1F_2\|_\alpha\leqslant n\{M(F_1)\cdot\|F_2\|_\alpha+M(F_2)\cdot\|F_1\|_\alpha\} \tag{133,1 ა}$$

და

$$\|F_1F_2\|_\alpha\leqslant n\|F_1\|_\alpha\cdot\|F_2\|_\alpha. \tag{133,2 ა}$$

§ 18-ში ნათქვამის საფუძველზე, თუ მივყვებით მსჯელობის მსვლელობას, ადვილად დავადგენთ, რომ თუ $H(\alpha)$ კლასის $(\alpha<1)$ ფუნქციები $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ დაკავშირებულია ერთმანეთთან

$$\psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt$$

ტოლობით, მაშინ ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\sup\frac{|\psi(t_2)-\psi(t_1)|}{|t_2-t_1|^{\alpha}}\leqslant C_\alpha\sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^{\alpha}},$$

სადაც C_α მუდმივი არ არის $\varphi(t)$ ფუნქციაზე დამოკიდებული.

გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$|\psi(t_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{ds}{|t-t_0|^{1-\alpha}}\cdot\sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^{\alpha}};$$

---

[35] ვიცით, რომ თუ ფუნდამენტურ მატრიცს ავაგებთ მარტივი შეკრული კონტურების შემთხვევისათვის, მაშინ შეიძლება ფუნდამენტური მატრიცი ავიგოთ ასეთი კონტურების ერთობლიობისათვისაც (§ 129,2° პუნქტი).

ამ უტოლობათა შეკრებით ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\|\psi\|_\alpha \leqslant A_\alpha \sup \frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha} \leqslant A_\alpha |\varphi|_\alpha, \tag{133.3}$$

სადაც A_α მუდმივი არ არის $\varphi(t)$-ზე დამოკიდებული.

თუკი $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$\psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}+\frac{1}{2}\varphi(t_0),$$

მაშინ, ცხადია, ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\|\psi\|_\alpha \leqslant B_\alpha \|\varphi\|_\alpha, \tag{133,3 ა}$$

სადაც B_α მუდმივი არ არის $\varphi(t)$ ფუნქციაზე დამოკიდებული. ასეთივე უტოლობანი გვექნება მატრიცებისათვისაც.

(133,3 ა) უტოლობა გამოსახავს რისის ცნობილი თეორემის ანალოგს[36].

ახლა განვიხილოთ წინა პარაგრაფის სასაზღვრო ამოცანა

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t) \quad L\text{-ზე}; \tag{133,4}$$

აქ ვგულისხმობთ, რომ $g(t)$ (ისევე, როგორც $G(t)$) კვადრატული მატრიცაა, ხოლო $\Phi(z)$—საძიებელი, უბან-უბან ჰოლომორფული, n რიგის კვადრატული მატრიცი (ამოცანის ასეთი დასმა ხელსაყრელია მომდევნო მსჯელობისათვის).

ვგულისხმობთ, რომ $G(t)$ და $g(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე რაიმე $\mu\leqslant 1$ მაჩვენებლით. ვინარჩუნებთ წინა პარაგრაფის სხვა შეზღუდვებსა და აღნიშვნებსაც.

განვიხილოთ $R(z)$ მატრიცი, რომლის ელემენტები რაციონალური ფუნქციებია L წირზე არამდებარე პოლუსებით და, რომელიც ისეთია, რომ

$$\|G-R\|_\nu < \varepsilon,$$

სადაც ε რაიმე დადებითი რიცხვია, ხოლო $\nu<\mu$[37]. თუ ε რიცხვი საკმაოდ მცირეა, მაშინ, ცხადია, $\det R(t)\neq 0$ L-ზე, ამასთან, $\|G^{-1}-R^{-1}\|_\nu$ აგრეთვე რა გინდ მცირე სიდიდეა (ε-ის რიგის), ხოლო $\|R^{-1}\|_\nu$ შემოსაზღვრულია:

$$\|G^{-1}-R^{-1}\|_\nu \leqslant C\varepsilon, \quad \|R^{-1}\|_\nu \leqslant C_1,$$

სადაც C, C_1 მუდმივებია.

---

36 იხ. M. Riesz [1].

37 ძნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ მოცემულ $f(t)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს H პირობას μ მაჩვენებლით, შეიძლება მივუახლოვდეთ რაციონალური ფუნქციებით H^ν სივრცეში ($\nu<\mu$; საზოგადოდ, არ შეიძლება ავიღოთ $\mu=\nu$): ჯერ დამტკიცდება, რომ $f(t)$ ფუნქციას შეიძლება მივუახლოვდეთ უბან-უბან წრფივი ფუნქციებით, ე. ი. ისეთი ფუნქციებით, რომლებსაც $\alpha_k\beta_k$ რკალებზე ექნება a_kt+b_k სახე, $\Sigma\alpha_k\beta_k=L$, a_k და b_k მუდმივებია; შემდეგ დამტკიცდება, რომ უბან-უბან წრფივ ფუნქციას შეიძლება მივუახლოვდეთ ისეთი ფუნქციებით, რომლებსაც აქვთ უწყვეტი წარმოებული t-ს მიმართ; ბოლოს ადვილად მიიღება, რომ ასეთ ფუნქციებს შეიძლება მივუახლოვდეთ რაციონალური ფუნქციებით.

შემოვიღებთ რა აღნიშვნებს

$$\varphi(z)=\Phi(z), \quad \text{როცა} \quad z\in S^{+}; \quad \varphi(z)=R(z)\Phi(z), \quad \text{როცა} \quad z\in S^{-},$$

(133,4) სასაზღვრო პირობა ასე გადავწეროთ:

$$\varphi^{+}(t)-\varphi^{-}(t)=G_0(t)\,\varphi^{-}(t)+g(t). \tag{133,5}$$

სადაც

$$G_0=(G-R)\,R^{-1};$$

(133,2ა)-ს ძალით

$$\| G_0 \|_{\nu} \leqslant n\, \| G-R \|_{\nu}\cdot \| R^{-1} \|_{\nu} \leqslant n\,C_1\varepsilon. \tag{133,5ა}$$

განვიხილოთ უბან-უბან ჰოლომორფულ მატრიცთა მიმდევრობა

$$\varphi_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G_0(t)\,\varphi_{m-1}^{-}(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad m=1,\ 2,\ldots, \tag{133,6}$$

სადაც $\varphi_0^{-}(t)=0$. ცხადია, რომ $\varphi_m^{+}(t)$, $\varphi_m^{-}(t)$ აკმაყოფილებს $H(\nu)$ პირობას.

(133,6)-დან გამოდის, რომ

$$\varphi_{m+1}(z)-\varphi_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G_0(t)[\varphi_m^{-}(t)-\varphi_{m-1}^{-}(t)]\,dt}{t-z};$$

სოხოცკი—პლემელის ფორმულების გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\varphi_{m+1}^{-}(t_0)-\varphi_m^{-}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G_0(t)[\varphi_m^{-}(t)-\varphi_{m-1}^{-}(t)]-G_0(t_0)\,[\varphi_m^{-}(t_0)-\varphi_{m-1}^{-}(t_0)]dt}{t-t_0}. \tag{133.7}$$

ამგვარად, (133,3) უტოლობის ძალით

$$\| \varphi_{m+1}^{-}-\varphi_m^{-} \|_{\nu} \leqslant A_{\nu} \| G_0\,(\varphi_m^{-}-\varphi_{m-1}^{-}) \|_{\nu} \leqslant$$
$$\leqslant nA_{\nu} \| G_0 \|_{\nu}\cdot \| \varphi_m^{-}-\varphi_{m-1}^{-} \|_{\nu} \leqslant A_{\nu}'\varepsilon \| \varphi_m^{-}-\varphi_{m-1}^{-} \|_{\nu}, \tag{133,8}$$

სადაც $A_{\nu}'=n^2C_1A_{\nu}$.

(133,8) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\| \varphi_{m+1}^{-}-\varphi_m^{-} \|_{\nu} \leqslant (A_{\nu}'\varepsilon)^m \| \varphi_1^{-} \|_{\nu}, \quad m=1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{133,9}$$

ამრიგად, თუ $A_{\nu}'\varepsilon<1$, მაშინ მწკრივი

$$\sum_{m=0}^{\infty} \| \varphi_{m+1}^{-}-\varphi_m^{-} \|_{\nu}$$

კრებადია.

ამგვარად, $\varphi_m^{-}(t)$ მიმდევრობა H^{ν} სივრცის ნორმით იკრიბება $\varphi^{-}(t)$ მატრიცისაკენ. ანალოგიურად, $\varphi_m^{+}(t)$ იკრიბება $\varphi^{+}(t)$ მატრიცისაკენ. $\varphi^{+}(t)$ და $\varphi^{-}(t)$ მატრიცები L წირზე აკმაყოფილებს $H(\nu)$ პირობას და წარმოადგენს უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი $\varphi(z)$ მატრიცის სასაზღვრო მნიშვნელობებს; ამასთან ერთად დაცულია (133,5) სასაზღვრო პირობა.

ახლა ავიღოთ $g(t)$ $G(t)R^{-1}(t)$-ს ტოლი. მაშინ (133,5) სასაზღვრო პირობიდან:

$$\varphi^+(t)=G(t)R^{-1}(t)[\varphi^-(t)+E]. \qquad (133,10)$$

ახლა, ზემოთ მოყვანილ მსჯელობაში $G(t)$ მატრიცის $G^{-1}(t)$ მატრიცით შეცვლით (მაშინ, ცხადია, R შეიძლება შეიცვალოს R^{-1}-ით) ავაგოთ უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი $\psi(z)$ მატრიცი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\psi^+(t)=G^{-1}(t)R(t)[\psi^-(t)+E]. \qquad (133,11)$$

(133,10) და (133,11)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\det\varphi^+(t)\det\psi^+(t)=\det(\varphi^-(t)+E)\det(\psi^-(t)+E).$$

ამიტომ შემდეგი ფუნქცია

$$\lambda(z)=\begin{cases}\det\varphi(z)\det\psi(z), & \text{როცა} \quad z\in S^+,\\ \det[\varphi(z)+E]\det[\psi(z)+E], & \text{როცა} \quad z\in S^-,\end{cases}$$

ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეში; რადგან ის ერთის ტოლია უსასრულობაში, ამიტომ $\lambda(z)\equiv1$; აქედან გამომდინარეობს, რომ $\det\varphi(z)\neq0$ (S^++L)-ში, $\det[\varphi(z)+E]\neq0$ (S^-+L)-ში. მაშასადამე,

$$\Phi(z)=\begin{cases}\varphi(z), & \text{როცა} \quad z\in S^+,\\ R^{-1}(z)[\varphi(z)+E], & \text{როცა} \quad z\in S^-\end{cases}$$

მატრიცი წარმოადგენს

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)$$

ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნთა უბან-უბან მერომორფულ, ფუნდამენტურ მატრიცს. ამ ამოხსნიდან გამომდინარე, შეგვიძლია, როგორც ეს უკვე ვნახეთ, ავაგოთ ნორმალური და კანონიკური მატრიცები. მაშასადამე, ამოცანა ამოხსნილია.

წინა მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა $G(t)$ და $g(t)$ მატრიცები H_0 კლასს ეკუთვნის (გ. მანჯავიძე [6]), და, მეტნაკლებად, იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $G(t)$ მატრიცი მხოლოდ უწყვეტია, ხოლო $g(t)$ ეკუთვნის L_p კლასს, როცა $p>1$ (გ. მანჯავიძე და ბ. ხვედელიძე [1]).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ თუ $G(t)$ და $g(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას μ მაჩვენებლით, მაშინ (133,4) ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნის სასაზღვრო მნიშვნელობა აკმაყოფილებს H პირობას $\mu-\eta$ მაჩვენებლით, სადაც η რა გინდ მცირე დადებითი რიცხვია. დამატებითი მსჯელობის ჩატარებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ როცა $\mu<1$, ამონახსნთა სასაზღვრო მნიშვნელობები აკმაყოფილებს H პირობას μ მაჩვენებლით.

მართლაც, (133,7) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\|\varphi^-_{m+1}-\varphi^-_m\|_\mu\leqslant A_\mu\|G_0(\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1})\|_\mu;$$

(133,3 ა)-ს ძალით კი

$$\|G_0(\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1})\|_\mu\leqslant n\{M(G_0)\|\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1}\|_\mu+M(\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1})\|G_0\|_\mu\}.$$

მაგრამ

$$M(G_0) \leqslant \| G_0 \|_\nu < nC_1 \varepsilon,$$

$$M(\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-) \leqslant \| \varphi_m^- - \varphi_{m-1}^- \|_\nu \leqslant (A_\nu' \varepsilon)^{m-1} \| \varphi_1 \|_\nu;$$

ბოლო უტოლობა დაწერილია (133,9)-ის ძალით. ამგვარად,

$$\| \varphi_{m+1}^- - \varphi_m^- \|_\mu \leqslant D_1 \varepsilon \| \varphi_m^- - \varphi_{m-1}^- \|_\mu + D_2 (A_\nu' \varepsilon)^{m-1}, \qquad (133,12)$$

სადაც

$$D_1 = n^2 C_1 A_\mu, \quad D_2 = n A_\mu \| G_0 \|_\mu \cdot \| \varphi_1^- \|_\nu.$$

(133,12) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{m=1}^{N} \| \varphi_{m+1}^- - \varphi_m^- \|_\mu \leqslant D_1 \varepsilon \sum_{m=1}^{N+1} \| \varphi_m^- - \varphi_{m-1}^- \|_\mu + D_2 \sum_{m=1}^{N} (A_\nu' \varepsilon)^{m-1},$$

ანუ

$$(1 - D_1 \varepsilon) \sum_{m=1}^{N} \| \varphi_{m+1}^- - \varphi_m^- \|_\mu \leqslant D_1 \varepsilon \| \varphi_1^- \|_\mu + D_2 \sum_{m=1}^{N} (A_\nu' \varepsilon)^{m-1}.$$

მაშასადამე, თუ ε საკმარისად მცირეა, სახელდობრ, თუ $D_1 \varepsilon < 1$, $A_\nu' \varepsilon < 1$, მაშინ $\sum_{m=1}^{\infty} \| \varphi_{m+1}^- - \varphi_m^- \|_\mu$ მწკრივი კრებადია, ე. ი. $\varphi_m^-(t)$ მიმდევრობა კრებადია H^μ სივრცის ნორმით და ამიტომ ზღვრული მატრიცი L-ზე აკმაყოფილებს H პირობას μ მაჩვენებლით.

III. გამოყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების გამოკვლევაში

წინა კარში გადმოცემული შედეგები, რომლებიც მიღებულია I კარის შედეგების გამოყენებით, თავის მხრივ, საშუალებას გვაძლევს არსებითად შევავსოთ სინგულარულ განტოლებათა I კარში გადმოცემული თეორია.

§ 134. გამოყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მახასიათებელი სისტემის გამოკვლევაში. განვიხილოთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა, რომელსაც § 11-ში ვუწოდეთ მახასიათებელი:

$$\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(t_0) \varphi_\alpha(t_0) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{B_{\alpha\beta}(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_\beta(t) dt}{t - t_0} = f_\alpha(t_0), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \qquad (134,1)$$

ანუ მატრიცული ფორმით

$$\mathrm{K}^0 \varphi = A(t_0) \varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - t_0} = f(t_0), \qquad (134,2)$$

სადაც

$$A(t_0) = \| A_{\alpha\beta}(t_0) \|, \quad B(t_0) = \| B_{\alpha\beta}(t_0) \|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$$

არის L-ზე მოცემული H კლასის მატრიცები,

$$f(t_0)=(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

და

$$\varphi(t_0) = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n),$$

შესაბამისად, მოცემული და საძიებელი, H კლასის ვექტორებია.

ვიგულისხმებთ, რომ (134, 1) სისტემა (რომელიც იგივეა, რაც (134.2) განტოლება) ნორმალურია; ე. ი. რომ ძირითადი მატრიცები,

$$S(t)=A(t)+B(t), \quad D(t)=A(t)-B(t) \tag{134.3}$$

L-ზე არსად არ არის გადაგვარებული, ე. ი. $\det S\neq 0$, $\det D\neq 0$ ყველგან L-ზე.

(134,1) სისტემის ამოხსნა მარტივად დაიყვანება შეუღლების ამოცანის ამოხსნაზე, რომელთანაც ის მჭიდროდ არის დაკავშირებული (ეს კავშირი საპირისპირო მიზნით უკვე გამოვიყენეთ § 123-ში).

სახელდობრ, განვიხილოთ შემდეგი უბან-უბან ჰოლომორფული ვექტორი:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\,i\pi}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}; \tag{134,4}$$

მაშინ სოხოცკი—პლემელის ფორმულების საფუძველზე

$$\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0); \quad \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0). \tag{134,5}$$

ამ მნიშვნელობების (134,2)-ში შეტანით და (134.3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ (t_0-ის ნაცვლად დავწეროთ t):

$$S(t)\,\Phi^+(t)=D(t)\,\Phi^-(t) + f(t)$$

ანუ

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{134,6}$$

სადაც მიღებულია აღნიშვნები

$$G(t)=[S(t)]^{-1}\cdot D(t), \quad g(t)=[S(t)]^{-1} f(t). \tag{134,7}$$

ამგვარად, (134,2) განტოლება დავიყვანეთ შეუღლების არაერთგვაროვან (134,6) ამოცანაზე იმ აზრით, რომ (134,2) განტოლების ნებისმიერ ამონახსნს (134,4) ფორმულით შეესაბამება (134,6) ამოცანის გარკვეული, უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი და, პირუკუ, (134,6) ამოცანის ასეთ ამონახსნს (134.5) ფორმულებიდან პირველის მიხედვით შეესაბამება (134,2) განტოლების გარკვეული ამონახსნი.

§ 132-ის 2° პუნქტში მიღებული შედეგის საფუძველზე, (134,6) ამოცანას აქვს უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც დაცულია (132,12) პირობა და ამ შემთხვევაში ამონახსნი გვეძლევა (132,2) ფორმულით, სადაც $P(z)$-ს აქვს (132,10) სახე.

სოხოცკი—პლემელის ფორმულის საფუძველზე, (132,2) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ[38]

$$\Phi^{+}(t_0)=X^{+}(t_0)\left\{\frac{1}{2}[X^{+}(t_0)]^{-1}g(t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[X^{+}(t)]^{-1}g(t)\,dt}{t-t_0}\right\}-\frac{1}{2}X^{+}(t_0)P(t_0),$$

$$\Phi^{-}(t_0)=X^{-}(t_0)\left\{-\frac{1}{2}[X^{+}(t_0)]^{-1}g(t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{X^{+}(t)\,g(t)\,dt}{t-t_0}\right\}-\frac{1}{2}X^{-}(t_0)P(t_0), \tag{134.8}$$

საიდანაც, $\varphi(t_0)=\Phi^{+}(t_0)-\Phi^{-}(t_0)$ ფორმულის თანახმად, შეიძლება მივიღოთ გამოსახულება საძიებელი $\varphi(t)$ ამონახსნისათვის. ამ უკანასკნელი გამოსახულების გასამარტივებლად შემოვიღოთ კიდევ შემდეგი აღნიშვნები[39]:

$$Z(t)=S(t)X^{+}(t)=D(t)X^{-}(t), \tag{134,9}$$

$$A^{*}(t)=\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+D^{-1}(t)],\quad B^{*}(t)=\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-D^{-1}(t)], \tag{134.10}$$

მივიღებთ:

$$\varphi(t_0)=A^{*}(t_0)f(t_0)-\frac{B^{*}(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{[Z(t)]^{-1}f(t)\,dt}{t-t_0}+B^{*}(t_0)Z(t_0)P(t_0). \tag{134,11}$$

როგორც ადვილად დავრწმუნდებით, ამ აღნიშვნებში (132,12) აუცილებელი და საკმარისი პირობა ასე ჩაიწერება:

$$\int_L f(t)[Z'(t)]^{-1}Q(t)\,dt=0. \tag{134,12}$$

გავიხსენოთ, რომ (134,11) და (134,12) ფორმულებში

$$P(t)=(P_{\varkappa_1-1},\ P_{\varkappa_2-1},\ \cdots,\ P_{\varkappa_n-1}), \tag{134,13}$$

$$Q(t)=(Q_{-\varkappa_1-1},\ Q_{-\varkappa_2-1},\ \cdots,\ Q_{-\varkappa_n-1}),$$

სადაც $P_\alpha=P_\alpha(t)$, $Q_\alpha=Q_\alpha(t)$ აღნიშნავს ნებისმიერ პოლინომებს არაუმაღლეს α ხარისხისა, ამასთან, $P_\alpha=0$, $Q_\alpha=0$, როცა $\alpha<0$.

ვთქვათ, უწინდელივით

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n. \tag{134,14}$$

$$\lambda=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_m,\quad \mu=-\varkappa_{m+1}-\varkappa_{m+2}-\cdots-\varkappa_n.$$

---

[38] ახლა P-ს ნაცვლად ვწერთ $-\frac{P}{2}$-ს, რასაც, რა თქმა უნდა, არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს.

[39] (134,9)-ში და (134,10)-ის გამოყვანის დროს ვსარგებლობთ შემდეგი თანაფარდობით: $X^{+}=GX^{-}$, $G=S^{-1}D$.

$P(t)$ ვექტორი, (134,11) ფორმულის მარჯვენა მხარეში, შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ (§ 131, 2° პუნქტი):

$$P(t)=C_1P^1(t)+C_2P^2(t)+\cdots+C_\lambda P^\lambda(t), \qquad (134,15)$$

სადაც $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $P^1(t), P^2(t), \cdots, P^\lambda(t)$— სავსებით გარკვეული, წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები, რომელთა კომპონენტები პოლინომებია.

ამის შესაბამისად (134,11) ფორმულაში

$$B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P(t_0)=C_1\gamma^1(t_0)+C_2\gamma^2(t_0)+\cdots+C_\lambda\gamma^\lambda(t_0), \qquad (134,16)$$

სადაც

$$\gamma^\alpha(t_0)=B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P^\alpha(t_0), \quad \alpha=1,2,\cdots,\lambda, \qquad (134,17)$$

H კლასის გარკვეული ვექტორებია; ადვილი შესამჩნევია, რომ ისინი წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, თუ $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ მუდმივების რომელიღაც მნიშვნელობისათვის (134,16) ფორმულის მარჯვენა მხარე იგივურად უდრის ნულს, მაშინ

$$B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P(t_0)=-\frac{1}{2}\,[X^+(t_0)-X^-(t_0)]\,P(t_0)=0,$$

საიდანაც გამოდის, რომ $X(z)\,P(z)$ ვექტორი ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეში; რადგან ის უსასრულობაში ქრობადია, ამიტომ აუცილებლად $X(z)\,P(z)=0$, საიდანაც $P(z)=0$, და, მაშასადამე, $C_1=C_2=\cdots=C_\lambda=0$; ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

(134,12) პირობაში $Q(t)$ ვექტორი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ (§ 131, 2° პუნქტი);

$$Q(t)=D_1Q^1(t)+D_2Q^2(t)+\cdots+D_\mu Q^\mu(t), \qquad (134,18)$$

სადაც $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$ ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $Q^1(t), Q^2(t), \cdots, Q^\mu(t)$— გარკვეული, წრფივად დამოუკიდებელი, პოლინომურკომპონენტებიანი ვექტორები, ამიტომ (134,12) პირობა შემდეგი μ პირობის ტოლფასია:

$$\int_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt=0, \quad \alpha=1,2,\cdots,\mu, \qquad (134,19)$$

სადაც

$$\psi^\alpha(t)=[Z'(t)]^{-1}\,Q^\alpha(t), \quad \alpha=1,2,\cdots,\mu, \qquad (134,20)$$

$\psi^\alpha(t)$ ვექტორები H კლასს ეკუთვნის. ისინი, როგორც ადვილად შესამჩნევია, წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, თუ $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$ მუდმივების რაიმე მნიშვნელობისათვის

$$D_1\psi^1(t)+D_2\psi^2(t)+\cdots+D_\mu\psi^\mu(t)=0,$$

მაშინ $[Z'(t)]^{-1}\,Q(t)=0$, სადაც $Q(t)$ (134,18) ფორმულით განისაზღვრება, მაგრამ მაშინ $Q(t)=0$, რადგან, ცხადია, $\det\,[Z'(t)]^{-1}$ არ უდრის ნულს, და $Q^\alpha(t)$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო

$$D_1=D_2=\cdots=D_\mu=0.$$

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი დებულება:

(134,1) სისტემის (ანუ (134,2) განტოლების) თავსებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს (134,12) პირობა, რაც თავის მხრივ μ რაოდენობის (134,19) თანაფარდობების ეკვივალენტურია. როცა ეს პირობები დაცულია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი წარმოიდგინება (134,11) ფორმულით, რომელიც წრფივად შეიცავს λ რაოდენობის ნებისმიერ მუდმივს.

$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ და $\varkappa$ რიცხვებს ახლა ვუწოდებთ (134,1) სისტემის (ან (134,2) განტოლების) კერძო ინდექსებს და ჯამ-ინდექსს. ჯამ-ინდექსს ზოგჯერ უბრალოდ ვუწოდებთ ინდექსს.

აღვნიშნოთ, რომ, თუ ყველა კერძო ინდექსი არაუარყოფითია, მაშინ თავსებადობის პირობები ყოველთვის დაცულია და ამონახსნი შეიცავს $\varkappa$ ნებისმიერ მუდმივს.

ახლა განვიხილოთ ის ერთგვაროვანი ამოცანა, რომელიც მიიღება (134,2)-დან, როცა $f=0$. თავსებადობის (134,12) პირობა ამ შემთხვევაში დაცულია და გვაქვს შემდეგი შედეგი:

ერთგვაროვან

$$\mathbf{K}^{\circ}\varphi=0$$

განტოლებას აქვს ზუსტად λ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. კერძოდ, თუ $\lambda=0$, ე. ი. ყველა კერძო ინდექსი არადადებითია, მაშინ ერთგვაროვან განტოლებას არა აქვს არანულოვანი ამონახსნი.

§ 135. მახასიათებელ სისტემასთან მიკავშირებული სისტემის გამოკვლევა.

1°. ახლა განვიხილოთ (134,1) მახასიათებელ სისტემასთან მიკავშირებული სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა, ე. ი. სისტემა, რომელიც მატრიცულად ასე გამოისახება:

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi=A'(t_0)\,\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{B'(t_0)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}=g(t_0), \tag{135,1}$$

სადაც $A'(t_0)$, $B'(t_0)$ წინა პარაგრაფში განხილული $A(t_0)$, $B(t_0)$ მატრიცების ტრანსპონირებით მიიღება, ხოლო $g(t_0)$ მოცემული H კლასის ვექტორია, $\psi(t)$ — საძიებელი, H კლასის ვექტორი.

(135,1) განტოლება შეიძლება, რა თქმა უნდა, განვიხილოთ ცალკე, მაგრამ უფრო ხელსაყრელია ის დავუკავშიროთ (134,1) სისტემას, ან, რაც იგივეა, (134,2) განტოლებას; ეს, რასაკვირველია, არ არღვევს ზოგადობას.

(135,1) განტოლებაც ასევე მარტივად, მაგრამ ცოტა სხვა გზით, დაიყვანება შეუღლების ამოცანაზე.

ამ მიზნით შემოვიღოთ უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი ვექტორი:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{B'(t)\,\psi(t)\,dt}{t-z}; \tag{135,2}$$

ვინაიდან

$$B'(t_0)\,\psi(t_0)=\frac{1}{2}\,[\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0)],$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{B'(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2}\,[\Psi(t_0)+\Psi(t_0)],$$

დავასკვნით, რომ (135,1) განტოლება შემდეგი ამოცანის ტოლფასია: მოიძებნოს L-ზე განსაზღვრული, H კლასის $\psi(t)$ ვექტორი და უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი $\Psi(z)$ ვექტორი შემდეგი პირობების მიხედვით:

$$2A'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)+2g(t_0),$$

$$2B'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0).$$

ეს უკანასკნელი პირობები კი, თავის მხრივ, შემდეგი პირობების ტოლფასია (წინა პირობებისაგან მიიღება შეკრებითა და გამოკლებით):

$$S'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)+g(t_0),\quad D'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^-(t_0)+g(t_0), \tag{135,3}$$

სადაც

$$S'(t_0)=A'(t_0)+B'(t_0),\quad D'(t_0)=A'(t_0)-B'(t_0);$$

ანუ

$$\begin{aligned}\psi(t_0)&=[S'(t_0)]^{-1}\Psi^+(t_0)+[S'(t_0)]^{-1}g(t_0),\\ \psi(t_0)&=[D'(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+[D'(t_0)]^{-1}g(t_0)\end{aligned}\quad L\text{-ზე}. \tag{135,4}$$

წინა ფორმულების მარჯვენა მხარეების შედარებით მივიღებთ შემდეგ შეუღლების ამოცანას (t_0-ის ნაცვლად t-ს ვწერთ):

$$\Psi^+(t)=[G'(t)]^{-1}\Psi^-(t)+\{[G'(t)]^{-1}-E\}\,g(t), \tag{135,5}$$

სადაც $G'(t)$, ჩვეულებისამებრ, აღნიშნავს

$$G(t)=[S(t)]^{-1}\cdot D(t) \tag{135,6}$$

მატრიცის ტრანსპონირებით მიღებულ მატრიცს, ხოლო E ერთეულოვანი მატრიცაა; ამასთან საჭიროა მოიძებნოს უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი. $\psi(t)$ განისაზღვრება ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ, (135,4) ფორმულებიდან ერთ-ერთის მიხედვით.

ამგვარად, (134,1) სისტემასთან მიკავშირებული (135,1) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება წინა პარაგრაფის (134,6) ამოცანასთან მიკავშირებული შეუღლების (135,5) ამოცანის ამოხსნაზე, უსასრულობაში ყოფაქცევის ერთი და იმავე პირობებით.

ვიცით, რომ თუ $X(z)$ არის (134,6)-ის შესაბამისი შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნთა კანონიკური მატრიცი, მაშინ $[X'(z)]^{-1}$ იქნება (135,5)-ის შესაბამისი შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნთა კანონიკური მატრიცი.

ვინაიდან შეუღლების ერთგვაროვანი ან არაერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნისას მთავარ სიძნელეს კანონიკური მატრიცის აგება წარმოადგენს, ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ (134,1) და (135,1) სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მიკავშირებული სისტემების, ე. ი.

$$K^0\varphi=f,\quad K^{0\prime}\psi=g$$

განტოლებების, ამოხსნა ეკვივალენტური ამოცანებია.

2°. კერძოდ, განვიხილოთ

$$K^0\,\varphi=0$$

განტოლებასთან მიკავშირებული

$$K^{0\prime}\psi=0$$

ერთგვაროვანი განტოლება (განტოლებათა სისტემა).

შესაბამისი შეუღლების (135,5) ამოცანა გადაიქცევა ერთგვაროვან ამოცანად

$$\Psi^{+}(t)=[G'(t)]^{-1}\,\Psi^{-}(t).$$

ამ ამოცანის უსასრულობაში ქრობად ყველა ამონახსნს გვაძლევს ფორმულა (§ 131, 2° პუნქტი):

$$\Psi(z)=[X'(z)]^{-1}\,Q(z), \tag{135,7}$$

რომელშიც § 131-ის 2° პუნქტის აღნიშვნების მიხედვით:

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1},\ \ Q_{-\varkappa_2-1},\ \cdots,\ Q_{-\varkappa_n-1}), \tag{135,8}$$

ამასთან, $Q_\alpha=Q_\alpha(z)$ აღნიშნავს ნებისმიერ პოლინომს არაუმაღლეს α ხარისხისა ($Q_\alpha(z)=0$, როცა $\alpha<0$).

$K^{0\prime}\psi=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი აიგება (135,4) ფორმულებიდან რომელიმე მათგანის გამოყენებით; ამისათვის ამ ფორმულებში $g(t_0)$ უნდა გავუტოლოთ ნულს. თუ ვისარგებლებთ (134,9) აღნიშვნებით, საძიებელი ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$\Psi(t)=[Z'(t)]^{-1}\,Q(t) \tag{135,9}$$

ანუ, თუ გავიხსენებთ, რომ (131,15) ფორმულის თანახმად

$$Q(t)=D_1Q^1(t)+D_2Q^2(t)+\cdots+D_\mu Q^\mu(t), \tag{135,10}$$

სადაც $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$ ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $Q^1(t), Q^2(t), \cdots, Q^\mu(t)$ გარკვეული, წრფივად დამოუკიდებელი, პოლინომურკოეფიციენტებიანი ვექტორები,

$$\psi(t)=D_1\,\psi^1(t)+D_2\,\psi^2(t)+\cdots+D_\mu\psi^\mu(t), \tag{135,11}$$

სადაც

$$\psi^\alpha(t)=[Z'(t)]^{-1}\,Q^\alpha(t),\quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu, \tag{135,12}$$

წარმოადგენს $K^{0\prime}\psi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს.

როგორც ვხედავთ, $\psi^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2, \cdots, \mu$, ვექტორები, რომლებიც მონაწილეობენ $K^0\varphi=f$ განტოლების თავსებადობის (134, 19) პირობებში და, რომლებიც (134,20) ფორმულით (ეს ფორმულა (134,12)-ს ემთხვევა) განისაზღვრებიან, $K^{0\prime}\psi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრულ სისტემას წარმოადგენს. ეს ასეც იყო მოსალოდნელი § 120-ის ზოგადი თეორემის (თეორემა I) საფუძველზე.

3°. წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ $K^0\varphi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობა λ-ს უდრის; ახლახან დავრწმუნდით, რომ მიკავშირებული $K^{0\prime}\psi=0$ ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობა უდრის μ-ს. გავიხსენებთ რა, რომ $\lambda-\mu=\varkappa$, მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე:

$K^0\varphi=0$ და $K^{0\prime}\psi=0$ *მიკავშირებული ერთგვაროვან განტოლებათა წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობებს შორის სხვაობა უდრის* K^0 *ოპერატორის (ჯამ) ინდექსს.*

თუ შევადარებთ ამ შედეგს § 120-ის II თეორემასთან და თუ გავიხსენებთ,

რომ განსაზღვრის მიხედვით ინდექსი K ოპერატორისა, რომლის მახასიათებელი ნაწილიცაა K^0 ოპერატორი, ემთხვევა ამ უკანასკნელის ინდექსს. დავრწმუნდებით § 120-ის III თეორემის მართებულობაში, იქ დაუმტკიცებლადაა მოყვანილი.

§ 136. შეუღლების ამოცანის ამოხსნის გამოყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების რეგულარიზაციისათვის. 1°. სინგულარულ განტოლებათა მახასიათებელი და მახასიათებელთან მიკავშირებული სისტემების ამოხსნის შემდეგ, რაც მივიღეთ § 134 და § 135-ში, ადვილად ხერხდება სინგულარულ განტოლებათა რეგულარიზაცია, იგი ზუსტად ისევე განხორციელდება, როგორც ერთი განტოლების შემთხვევისათვის § 57-ში.

კერძოდ, ამ გზით შეიძლება დამტკიცდეს § 120-ის ძირითადი თეორემები. სახელდობრ, ამ გზით პირველად ეს თეორემები დაამტკიცა (თუ არ ჩავთვლით I თეორემას, რომელიც პირველად ჟ. ჟირომ დაამტკიცა) ნ. ვეკუამ, რომელიც ისარგებლა ჩემი მხოლოდ ზოგადი მითითებებით. ეს შედეგები გამოქვეყნებულია ჩემი და ნ. ვეკუას [1] ერთობლივ სტატიაში, სადაც ჩემი შედეგებიც არის (ამათგან ყველაზე არსებითია $\varkappa$ ინდექსის ცხადი და ეფექტური გამოსახვა); აღნიშნული სტატიის ნაწილი არსებითადაა გამოყენებული VI თავის II კარში.

§ 120-ში მითითებულთან შედარებით, რეგულარიზაციის ახლახან ნახსენები მეთოდი ზოგად შემთხვევაში ნაკლებად ეფექტურია. რადგან იგი დაკავშირებულია შეუღლების ამოცანის ამოხსნასთან რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის, რომელიც, საზოგადოდ, ერთი უცნობი ფუნქციის შემთხვევის საპირისპიროდ არ იხსნება ეფექტურად (იხ. აგრეთვე 2° პუნქტი).

თუმცა, პრაქტიკული თვალსაზრისით რიგ საინტერესო ცალკეულ შემთხვევაში განსახილველი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი შეუღლების ამოცანა შესაძლებელია ამოიხსნას ეფექტურად და მაშინ ზემოხსენებული რეგულარიზაციის მეთოდი მეტად სასარგებლო იქნება პრაქტიკული თვალსაზრისითაც.

ამას ადგილი აქვს, მაგალითად, როცა $A(t)$, $B(t)$ მატრიცებისა და, მაშასადამე, $G(t)=[A(t)+B(t)]^{-1}[A(t)-B(t)]$ მატრიცის ელემენტები რაციონალური ფუნქციებია (§ 129), და ზოგიერთ სხვა შემთხვევაშიც[40].

2°. § 55-ში გადმოცემული, ი. ვეკუას ეკვივალენტობის თეორემაზე დამყარებული, სინგულარული განტოლების შემოკლების მეთოდი შეიძლება განზოგადდეს სინგულარულ განტოლებათა სისტემისათვისაც. ეს განზოგადება მკითხველს შეუძლია იხილოს ნ. ვეკუას [2] საინტერესო სტატიაში.

განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს ის ფაქტი, რომ სინგულარულ განტოლებათა სისტემის დაყვანა ფრედჰოლმის განტოლებათა ეკვივალენტურ სისტემაზე ფაქტიურად ხორციელდება შესაბამისი შეუღლების ამოცანის ამოხსნის გარეშე, რის გამოც რეგულარიზაციის ეს მეთოდი მეტად ეფექტურია.

§ 59-ის 1° პუნქტში მითითებული ი. ვეკუას შედეგის განზოგადება განტოლებათა სისტემის შემთხვევაზე მოცემულია ნ. ვეკუას [10] სტატიაში.

---

40 ნ. ვეკუა და დ. კვესელავა [1], [2], ნ. ჩებოტარიოვი და ფ. გახოვი [1], ფ. გახოვი [5], დ. შერმანი [7], გ. ჩებოტარიოვი [1], [2]; იხ. აგრეთვე ამ წიგნის § 129.

§ 137. მოკლე მითითებანი სხვა განზოგადებებისა და გამოყენებათა შესახებ. 1°. წინამდებარე თავში გადმოცემული შედეგების უმნიშვნელოვანეს განზოგადებათა შორის, რომელთაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს მთელ რიგ საკითხებში გამოყენებისათვის, პირველ რიგში უნდა აღვნიშნოთ შეუღლების ამოცანის ამოხსნა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის და სინგულარულ განტოლებათა სისტემების თეორია წყვეტილი კოეფიციენტების შემთხვევაში.

შეუღლების ერთგვაროვანი წყვეტილკოეფიციენტებიანი ამოცანის ამოხსნა ერთი კერძო შემთხვევისათვის, სახელდობრ, როცა კოეფიციენტები უბან-უბან მუდმივია (ე. ი. იმ შემთხვევაში, რომელიც რიმანის ამოცანის თავდაპირველ დასმას შეესაბამება). მოგვცა ი. პლემელმა მის არაერთგზის ციტირებულ ნაშრომში I. Plemelj [2].

შეუღლების ამოცანისა და სინგულარულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა H_0 კლასის კოეფიციენტების შემთხვევაში მოცემულია ნ. ვეკუას [3], [4] ნაშრომებში. ამ ნაშრომებში განიხილება სისტემები, რომლებიც მიიღება (96,11), (96,12) განტოლებებში საძიებელი φ, ψ ფუნქციებისა და f, g მარჯვენა მხარეების ვექტორებით, ხოლო $k(t_0, t)$—ფუნქციის მატრიცით შეცვლის შედეგად. ნ. ვეკუას [6] ნაშრომში წინა შედეგები გამოყენება სინგულარული $\mathbf{K}\varphi=f$ განტოლების ამოსახსნელად, სადაც $\mathbf{K}$ ოპერატორი განსაზღვრულია § 96-ის 1 ფორმულით, რომელშიც $K(t_0, t)$ არის H_0 კლასის ფუნქცია; ოპერატორისაგან უკვე აღარ მოითხოვება, რომ ის დაიყვანებოდეს იმავე პარაგრაფის a) ან b) სახეზე. ნ. ვეკუას [7] ნაშრომში შესწავლილია ანალოგიური საკითხი სინგულარულ განტოლებათა სისტემებისათვის. აღნიშნული საკითხები გადმოცემულია ნ. ვეკუას [16] მონოგრაფიაში.

შეუღლების წყვეტილკოეფიციენტებიანი ამოცანის ამოხსნის რამდენიმე განსხვავებული ხერხი მითითებულია თ. გახოვის [6] სტატიაში. ერთი განზოგადება მოცემულია ლ. მაღნარაძის [7] სტატიაში. ზოგიერთი შემთხვევა, როდესაც $\det G(t)$ შესაძლებელია ნულს გაუტოლდეს, განხილულია თ. გახოვის [7], [8] ნაშრომებში.

ზემოთ დასახელებულ შრომებში განიხილება ის შემთხვევა, როდესაც L შედგება გლუვი კონტურებისაგან. უბან-უბან გლუვი, მარტივი, შეკრული კონტურების შემთხვევა განხილულია ნ. ვეკუას [14] სტატიაში; იხ. აგრეთვე მისი მონოგრაფია [16].

§ § 110, 111-ში გადმოცემული შედეგების განზოგადება განტოლებათა სისტემის შემთხვევისათვის მოცემულია გ. მანჯავიძის [2] ნაშრომში.

2°. მ. განინის [1] სტატიაში აგებულია ისეთი თვისების სინგულარული $\mathbf{R}$ ოპერატორი, რომ თავსებადობის შემთხვევაში $\mathbf{K}\varphi=f$ (განტოლებათა სისტემის შემოკლებული ჩაწერა) განტოლება ფრედჰოლმის $\mathbf{RK}\varphi=\mathbf{R}f$ განტოლების (განტოლებათა სისტემის) ტოლფასია; ამ სტატიაში გამოყენებულია ი. ვეკუას ერთი იდეა [7]. მ. განინის [2] სტატიაში აგებულია იმავე თვისების მეორე ოპერატორი, რომელიც ვ. კუპრაძის [4] მიერ აგებულის განზოგადებას წარმოადგენს; ამ აგებას, როგორც თვით ავტორმა შენიშნა, ის ნაკლი აქვს, რომ საჭიროებს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა ორი სისტემის ყველა ამონახსნის პოვნას.

3°. აღვნიშნოთ რეგულარიზაციის კიდევ ერთი ახალი, დ. შერმანის [7], [9] მიერ მითითებული ხერხი, რომელიც გამოდგება ზოგიერთი ისეთი სისტემისათვის, რომელიც ნორმალურ ტიპს არ მიეკუთვნება.

4°. ბ. ხვედელიძის [17], [18] ნაშრომებში ნაჩვენებია, რომ რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის შეუღლების ამოცანის შესახებ ამ თავში მიღებული შედეგების უმთავრესი ნაწილი ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც (132,1) სასაზღვრო პირობაში არაგადაგვარებული $G(t)$ მატრიცი H კლასს ეკუთვნის, $g(t)$ ვექტორი—L_p კლასს ($p>1$), L ლიაპუნოვის წირია, საძიებელი $\Phi(z)$ ვექტორი კი შეიძლება წარმოვადგინოთ კოშის ტიპის ინტეგრალით, რომლისთვისაც L არის ნახტომის წირი, ხოლო სიმკვრივე ეკუთვნის L_p კლასს. შემდგომში, ეს შედეგები არსებითად შეივსო გ. მანჯავიძისა და ბ. ხვედელიძის [1] ნაშრომში. სახელდობრ, დასახელებულმა ავტორებმა აჩვენეს, რომ არაგადაგვარებული $G(t)$ მატრიცისაგან საკმარისია მხოლოდ უწყვეტობის მოთხოვნა.

ნეტერის თეორემების სამართლიანობა სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემისათვის დასაბუთებულია ბ. ხვედელიძის [17], [18] შრომებში იმ შემთხვევისათვის, როდესაც (119,6) განტოლებაში $A(t_0)$, $B(t_0)$ მატრიცები მხოლოდ უწყვეტი ან უბან-უბან უწყვეტია, ყველგან L-ზე სრულდება (19,11) პირობა, ცნობილი და საძიებელი $f(t)$ და $\varphi(t)$ ვექტორები კი $L_p(\rho;\, L)$ კლასს ეკუთვნის, სადაც $p>1$, $\rho(t)$ არის (116,4) ტიპის ფუნქცია, ხოლო $\mathbf{k}$ სავსებით უწყვეტი ოპერატორია.

უნდა აღინიშნოს აგრეთვე, რომ ბ. ხვედელიძის [18] ნაშრომში აგებულია რეგულარიზატორი გახსნილი კონტურების შემთხვევაში ან იმ შემთხვევაში, როდესაც კოეფიციენტებს პირველი გვარის წყვეტა აქვს, შეუღლების სასაზღვრო ამოცანის გამოუყენებლად, § 120-ის ანალოგიურად.

5°. ჩვენ მიერ V ამოცანად წოდებულის განზოგადებით მიღებული ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის ამოხსნილია ბ. ხვედელიძის [4] ნაშრომში (იხ. §§ 70, 71).

6°. 5° პუნქტის ამოცანის ამოხსნა წყვეტილი კოეფიციენტებისათვის მოცემულია ნ. ვეკუას [5] ნაშრომში[41].

7°. § 76-ის 3° პუნქტში მითითებული იყო ელიფსური ტიპის განტოლებისათვის პუანკარეს ამოცანისა და მისი ამოხსნის შესახებ, რომელიც მოგვცა ბ. ხვედელიძემ.

განზოგადება ელიფსური ტიპის შემდეგი სახის განტოლებათა სისტემისათვის

$$\Delta u_j + \sum_{k=1}^{n}\left[A_{jk}(x,\, y)\,\frac{\partial u_k}{\partial x} + B_{jk}(x,\, y)\,\frac{\partial u_k}{\partial y} + C_{jk}(x,\, y)\,u_k\right] = 0,$$

რომელშიც $A_{jk}(x,\, y)$, $B_{jk}(x,\, y)$, $C_{jk}(x,\, y)$ თავიანთი არგუმენტების მთელი ფუნქციებია, მოცემულია ა. ბიწაძის საკანდიდატო დისერტაციაში, რომლის შემოკლებული ნაწილი გამოქვეყნებულია მისავე [1] სტატიაში.

ანალოგიური მეთოდი გამოიყენა ზ. ხალილოვმა [1] განზოგადებულ პოლიჰარმონიულ განტოლებათა სისტემისათვის (იხ. აგრეთვე ზ. ხალილოვი [2]).

8°. § 117-ში მითითებული შედეგების განზოგადება რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევისათვის მოცემულია ლ. მაღნარაძის [2], ნ. ვეკუას [28], რ. ისახანოვის [4] და სხვათა ნაშრომებში.

[41] შემდგომში ეს შედეგი განაზოგადა ბ. ხვედელიძემ [18].

9°. § 81-ის 4° პუნქტში ნახსენები ამოცანის რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევაზე განზოგადებით მიღებული ამოცანის ამოხსნა და მისი გამოყენება ერთი განზოგადებული ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემისათვის მოცემულია ნ. ვეკუას [9], [11], [12], [15], [19], [20] ნაშრომებში; პირველი ოთხი ნაშრომის შინაარსი გადმოცემულია, აგრეთვე, იმავე ავტორის მონოგრაფიაში [16].

სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა აღნიშნული ტიპის სისტემის გამოკვლევის სხვა ხერხი მოცემულია მ. განინის [4] სტატიაში. მანვე დასვა და სინგულარულ ინტეგრალურ სისტემაზე დაიყვანა საკმაოდ ზოგადი ამოცანა, რომელიც აღნიშნული ამოცანებიდან ერთ-ერთის განზოგადებას წარმოადგენს (იხ. [3]). დასახელებულ ნაშრომში ავტორს არა აქვს გამოკვლეული მიღებული სისტემა.

10°. ა. მესისის [3] სტატიაში განხილულია შეუღლების ერთგვაროვანი ამოცანა, რომლის კოეფიციენტები გარკვეულ პირობებს დაქვემდებარებული ალგებრული ფუნქციებია.

11°. შეუღლების ამოცანის კერძო ინდექსებს ეძღვნება გ. ჩებოტარიოვისა [3] და ი. შმულიანის [1], [2] ნაშრომები.

შეუღლების ამოცანის კერძო ინდექსების მდგრადობის საკითხი $G(t)$ მატრიცის მცირე შეშფოთებისას განიხილება ბ. ბოიარსკის [3—5], ი. გოხბერგისა და მ. კრეინის [2], გ. მანჯავიძის [4] ნაშრომებში. უკანასკნელ ნაშრომში გამოთქმული დებულება კერძო ინდექსების მდგრადობის შესახებ აღმოჩნდა მცდარი.

12°. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემები ნახევარღერძზე განხილულია ი. გოხბერგისა და მ. კრეინის [2], მ. კრეინის [1] ზემოთ ხსენებულ ნაშრომებში, სადაც შეიძლება უფრო ადრინდელ ნაშრომებზე მითითებების ნახვა.

13°. რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის შეუღლების ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი განხილულია გ. მანჯავიძისა [4—6] და ვ. ივანოვის [5] ნაშრომებში.

14°. ამ თავში შესწავლილი შეუღლების ამოცანის განზოგადებაა შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

მოიძებნოს უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ ვექტორი შემდეგი სასაზღვრო პირობის მიხედვით:

$$\Phi^+(t)=A(t)\Phi^-(t)+B(t)\overline{\Phi^-(t)}+g(t) \tag{137,1}$$

სადაც $A(t)$, $B(t)$ მოცემული H კლასის მატრიცებია, $g(t)$ კი მოცემული ვექტორია, რომელიც აგრეთვე აკმაყოფილებს H პირობას.

ერთი საძიებელი ფუნქციისათვის ეს ამოცანა დასვა ა. მარკუშევიჩმა [1].

(137,1) ამოცანა გამოიკვლია ნ. ვეკუამ [21]. იგივე (137,1) ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში ასევე პირველადაა გამოკვლეული ნ. ვეკუას [21] ნაშრომში. შემდგომში ნ. ვეკუას შედეგები განავითარეს ერთი უცნობი ფუნქციის შემთხვევისათვის ბ. ბოიარსკიმ [6] და ლ. მიხაილოვმა [1—3].

§ 138. მოკლე ცნობები მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის ზოგიერთი შედეგის შესახებ. თუმცა წიგნში არ არის გადმოცემული მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ინტეგრალისა და ინტეგრა-

ლურ განტოლებათა საკითხები, მაინც მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ზოგიერთი ცნობის მოწოდება ამ სფეროდანაც.

ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა ჩვენ მიერ გადმოცემულ თეორიაში მეტად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ანალიზურ ფუნქციათა წრფივი შეუღლების ამოცანა, თუმცა, როგორც ვიცით, ამ თეორიის ბევრი შედეგი შეიძლება მივიღოთ შეუღლების ამოცანის გამოყენების გარეშე, უშუალო რეგულარიზაციის მეთოდით. უკანასკნელი მეთოდი შეიძლება განზოგადდეს მრავალ განზომილებიან შემთხვევაზე და ხშირად გამოიყენება ასეთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში.

მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიისათვის, ბუნებრივია, მნიშვნელოვანია მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორების თვისებების შესწავლა ამ მიმართულებით. პირველი ნაშრომი ეკუთვნის ფ. ტრიკომის (F. Tricomi [2]), რომელმაც დაადგინა ორგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალებში გადასმის ფორმულა, რომელიც მან გამოიყენა ერთი კლასის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა შესასწავლად.

საკმაოდ დაწვრილებით არის შესწავლილი მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ოპერატორების თვისებები ფუნქციათა სხვადასხვა კლასებში. H^{α} კლასში ისინი დაადგინა ჟ. ჟირომ (G. Giraud [1]); უწყვეტ ფუნქციათა ზოგიერთ ქვეკლასში ჟ. ჟიროს შედეგები განაზოგადა თ. გეგელიამ [6].

ს. მიხლინის ნაშრომთა ერთი ციკლი ეძღვნება მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორების გამოკვლევას L_2 სივრცეში; ეს შედეგები თავმოყრილია მისსავე მონოგრაფიაში [10].

უკანასკნელ დროში ბევრი ნაშრომი მიეძღვნა მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ოპერატორების გამოკვლევას L_p ($p\geqslant 1$) სივრცეებში. ამ მიმართულებით მთელი რიგი ნაშრომები აქვთ ა. კალდერონსა და ა. ზიგმუნდს; ამ ავტორთა ძირითადი შედეგები გადმოცემულია მათ ერთობლივ ნაშრომებში A. P. Calderon and A. Zigmund [1], [2].

მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ოპერატორები წონიან სივრცეებში შესწავლილია ნაშრომებში: A. P. Calderon and A. Zigmund [1], თ. გეგელია [4], ორლიჩის სივრცეებში — ნაშრომში S. T. Koizumi [1], წარმოებად ფუნქციათა სივრცეებში — ნაშრომებში: A. P. Calderon and A. Zigmund [2], თ. გეგელია [3]. განზოგადებულ ფუნქციათა სივრცეებში სინგულარული ოპერატორები შესწავლილია ნაშრომებში: I. Horvath [1], L. Hörmander [1], B. Malgrange [1].

მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში ფრიად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ს. მიხლინის მიერ შემოტანილი სინგულარული ოპერატორის სიმბოლოს ცნება; ერთგანზომილებიან შემთხვევაში სიმბოლო შეიძლება გავაიგივოთ მატრიც-ფუნქციათა წყვილთან, სადაც $S=A+B$, $D=A-B$ (იხ. VI დანართი). ისევე, როგორც ერთგანზომილებიან განტოლებათა შემთხვევაში, ძირითადად განიხილება ისეთი განტოლებები, რომელთა სიმბოლო ნულისაგან განსხვავდება ყველგან.

მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რეგულარიზაციის ამოცანა L_2-ში ამოხსნილია ს. მიხლინის მიერ; იგივე ამოცანა L_p და

წონიან L_p სივრცეებში შესწავლილია I. I. Kohn [1], თ. გეგელიას [5], R. T. Seely-ს [2] ნაშრომებში.

მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის ძირითადი საკითხია ინდექსის პრობლემა. ამ მიმართულებით ერთ-ერთი პირველი ნაშრომი ეკუთვნის ჟ. ჟიროს (G. Giraud [3]).

ორგანზომილებიანი სინგულარული ოპერატორისათვის ინდექსის ზოგადი ფორმულა დადგენილია ა. ვოლპერტის [1], [2] ნაშრომებში; მისი შედეგები განზოგადებულია შემდეგ ნაშრომებში: ნ. ბერიკაშვილი [1], ბ. ბოიარსკი [6], R. T. Seely [2].

ნაშრომებში M. F. Atiyah and I. M. Singer [1], M. F. Atiyah and R. Bott [1] გადაწყვეტილია ინდექსის პრობლემა ფართო კლასის ოპერატორებისათვის, რომლებიც მოიცავენ სინგულარულ ოპერატორებს.

ა. ბიწაძის [8—10] ნაშრომებში მოცემულია ერთი კლასის ორგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების შექცევის ფორმულები, შესწავლილია კოშის ტიპის ინტეგრალისა და შეუღლების სასაზღვრო ამოცანის მრავალგანზომილებიანი ანალოგები.

მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის სხვადასხვა ასპექტებს ეძღვნება შემდეგი ნაშრომები: ა. ბიწაძე [1], მ. ვიშიკი და გ. ესკინი [1], [2], ი. გოხბერგი [7], ა. დინინი [1], მ. აგრანოვიჩი, ლ. ვოლევიჩი და ა. დინინი [1], L. Loomis [1], E. M. Stein and G. Weiss [1], E. M. Stein [2], W. J. Trjitzinsky [2]. უფრო დაწვრილებითი მითითებები შესაბამის ლიტერატურაზე შეიძლება იხილოთ ს. მიხლინის [10] წიგნში, მიმოხილვით სტატიებში: ვ. კუპრაძე [1], A. P. Calderon [2], C. Miranda [1], და ა. ზიგმუნდის ლექციების კურსში — A. Zigmund [3], [4].

დანართი I

გლუვი და უბან-უბან გლუვი წირების შესახებ

1^0. გლუვი L რკალისა და გლუვი L კონტურის (გახსნილის ან შეკრულის) განსაზღვრება მოცემულია § 1-ში; ჩვენ დავეყრდნობით ხსენებული პარაგრაფის აღნიშვნებს. სახელდობრ, L რკალის პარამეტრულ წარმოდგენას ასე გამოვსახავთ:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad s_a \leqslant s \leqslant s_b, \tag{1}$$

სადაც s არის რკალური აბსცისა. L რკალის სიგრძეს ახლა აღვნიშნავთ l-ით, ასე რომ

$$l = s_b - s_a. \tag{2}$$

ვთქვათ, t_1 და t_2 რაიმე ორი წერტილია L-ზე. $\sigma(t_1, t_2) = \sigma$ საშუალებით აღვნიშნოთ L წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც t_1 და t_2 წერტილებს შორისაა მოქცეული. ამასთან, თუ L შეკრული კონტურია, მაშინ ორი შესაძლებლიდან ის რკალი გვექნება მხედველობაში, რომელსაც ნაკლები სიგრძე აქვს. ამგვარად, შეკრული კონტურის შემთხვევაში $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{l}{2}$, ხოლო გახსნილი კონტურის შემთხვევაში $0 \leqslant \sigma \leqslant l$. შემდეგ, აღვნიშნოთ $r(t_1, t_2) = r$ საშუალებით t_1 და t_2 წერტილებს შორის მანძილი. ცხადია, რომ r არის t_1 და t_2 წერტილების s_1 და s_2 აბსცისების უწყვეტი ფუნქცია. განვიხილოთ t_1, t_2 წერტილების ყველა ისეთი წყვილი, რომ

$$\sigma(t_1, t_2) \geqslant \lambda, \quad 0 < \lambda < \frac{l}{2}, \tag{*}$$

სადაც λ ნებისმიერი ფიქსირებული რიცხვია აღნიშნულ შუალედში და აღვნიშნოთ

$$\rho = \rho(\lambda) = \min r(t_1, t_2), \tag{**}$$

თან ვიგულისხმოთ, რომ დაცულია (*). ეს მინიმუმი მიიღწევა წერტილების ერთი წყვილისათვის მაინც. ცხადია, რომ $\rho(\lambda) > 0$. მართლაც, თუ $\rho(\lambda) = 0$, მაშინ L რკალი თავისთავს გადაკვეთს, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ამგვარად, ყოველ λ რიცხვს, $0 < \lambda < \frac{l}{2}$, შეესაბამება $\rho = \rho(\lambda) > 0$ რიცხვი, რომელსაც შემდეგი თვისება აქვს: თუ L-ის ნებისმიერი t_0 წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვწერთ $\rho_0 < \rho$ რადიუსიან წრეწირს, მაშინ L კონტურის ყველა ის წერტილი, რომლისთვისაც $\sigma(t_0, t) \geqslant \lambda$, ამ წრეწირის გარეთ აღმოჩნდება.

2^0. ვთქვათ, α_0 არის ნებისმიერად მოცემული მახვილი კუთხე — $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. L კონტურის მხების მიმართულების ცვლილების უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს მხოლოდ α_0-ზე დამოკიდებული რიცხვი $\sigma_0 = \sigma_0(\alpha_0) > 0$ ისეთი,

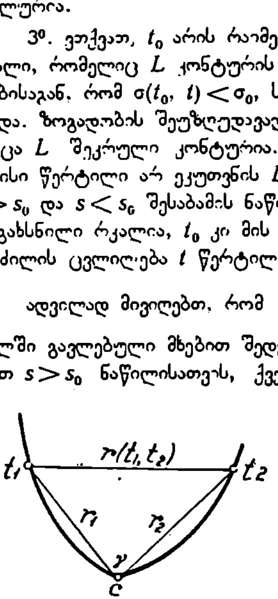
რომ თუ $\sigma(t_1, t_2) < \sigma_0$, მაშინ t_1 და t_2 წერტილებში L კონტურის მხებთა შორის კუთხე არ აღემატება α_0-ს. შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $\sigma_0 < \dfrac{l}{2}$.

განვიხილოთ L კონტურის t_1t_2 რკალი, რომლის სიგრძე არ აღემატება σ_0-ს. ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ t_1t_2 რკალის ნებისმიერი ორი τ_1, τ_2 წერტილის შემაერთებელ ქორდასა და t_1 (ან t_2) წერტილში გავლებულ მხებს შორის მახვილი კუთხე არ აღემატება α_0-ს; მართლაც, $\tau_1\tau_2$ რკალზე ყოველთვის მოიძებნება ისეთი წერტილი, რომელზეც გავლებული მხები განსახილველი ქორდის პარალელურია.

3°. ვთქვათ, t_0 არის რაიმე ფიქსირებული წერტილი L-ზე. განვიხილოთ L_0 რკალი, რომელიც L კონტურის ნაწილია და, რომელიც შედგება ისეთი t წერტილებისაგან, რომ $\sigma(t_0, t) < \sigma_0$, სადაც σ_0 იმავეს აღნიშნავს, რასაც ზემოთ აღნიშნავდა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა L შეკრული კონტურია, პარამეტრის $s = s_a$ ან $s = s_b$ მნიშვნელობის შესაბამისი წერტილი არ ეკუთვნის L_0 რკალს. t_0 წერტილი L_0 რკალს ჰყოფს ორ — $s > s_0$ და $s < s_0$ შესაბამის ნაწილად; გამონაკლისი იმ შემთხვევაში გვაქვს, როცა L გახსნილი რკალია, t_0 კი მის ერთ-ერთ ბოლოს ემთხვევა. განვიხილოთ $r = r(t_0, t)$ მანძილის ცვლილება t წერტილის L-ზე მოძრაობის დროს.

ადვილად მივიღებთ, რომ $\dfrac{dr}{ds} = \pm \cos\alpha$, სადაც α t_0t ქორდითა და t წერტილში გავლებული მხებით შედგენილი მახვილი კუთხეა; ზედა ნიშანი უნდა ავიღოთ $s > s_0$ ნაწილისათვის, ქვედა კი $s < s_0$ ნაწილისათვის. ამრიგად, ვხედავთ, რომ r s-ის მონოტონური ფუნქციაა თითოეულ ნაწილში, ვინაიდან $\cos\alpha \geqslant \cos\alpha_0 > k_0$, $0 < k_0 < 1$. ორივე ნაწილში გვექნება:

$$0 < k_0|s - s_0| \leqslant r(t_0, t) \leqslant |s - s_0|. \qquad (***)$$



ნახ. 22

ახლა, t_0 წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვწეროთ $R < R_0$ რადიუსის Γ წრეწირი, სადაც R_0 აღნიშნავს $\rho(\sigma_0)$ და $k_0\sigma_0$ რიცხვებს შორის უმცირესს. ვგულისხმობთ, რომ $\rho(\sigma_0)$ იგივეა, რაც $\rho(\lambda)$ 1° პუნქტში, როცა $\lambda = \sigma_0$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ Γ წრეწირი L-ს ჰკვეთს ზუსტად ორ წერტილში, იმ შემთხვევის გამოკლებით. როცა L გახსნილი რკალია და t_0 წერტილიდან უახლოეს ბოლომდე მანძილი R-ზე ნაკლებია; მაშინ L წირი Γ წრეწირს ჰკვეთს ზუსტად ერთ წერტილში.

მართლაც ჯერ დავუშვათ, რომ L შეკრული კონტურია. s-ის ზრდისას s_0 მნიშვნელობიდან $s_0 + \sigma_0$ მნიშვნელობამდე $r(t_0, t)$ მანძილი იზრდება ნულოვანი მნიშვნელობიდან $r_1 \geqslant k_0\sigma_0 \geqslant R_0$ მნიშვნელობამდე; მაშასადამე, t წერტილი Γ წრეწირს მხოლოდ ერთხელ შეხვდება, ანალოგიურად მოხდება s-ის s_0-დან შემცირებისას $(s_0 - \sigma_0)$-მდე. 1° პუნქტში ნათქვამის საფუძველზე. L-ისა და Γ-ს გადაკვეთის სხვა წერტილი არ არსებობს.

სრულიად ანალოგიურად განიხილება გახსნილი კონტურის შემთხვევა.

აღვნიშნოთ, რომ (***) უტოლობიდან, რომელსაც ადგილი აქვს საკმარისად მცირე $\sigma(t_0, t)$-სათვის, გამომდინარეობს უტოლობა

$$k_0\sigma(t_1, t_2) \leqslant r(t_1, t_2) \leqslant \sigma(t_1, t_2), \quad 0 < k_0 < 1, \tag{3}$$

რომელსაც ადგილი აქვს L კონტურის წერტილთა ნებისმიერი წყვილისათვის; k_0-ით აღნიშნულია მუდმივი, რომელიც დამოუკიდებელია t_1 და t_2 წერტილების მდებარეობისაგან L-ზე.

4°. ახლა განვიხილოთ მარტივი, უბან-უბან გლუვი რკალი § 1-ის 4° პუნქტში მოცემული განსაზღვრის მიხედვით.

ცხადია, მარტივი უბან-უბან გლუვი რკალიც შეიძლება წარმოვიდგინოთ (1) სახით, მაგრამ $\varphi'(s)$ და $\psi'(s)$ წარმოებულებს ექნება პირველი გვარის წყვეტა ცალკეულ გლუვ რკალთა შეერთების წერტილებში, ე. ი. კუთხურ წერტილებში. თუ კუთხურ წერტილზე გადასვლისას მხების მიმართულება იცვლება საპირისპიროთი, მაშინ ეს წერტილი უკუქცევის წერტილია.

შევნიშნოთ, რომ (3) უტოლობა ძალაში რჩება უკუქცევის წერტილებისაგან განსხვავებული კუთხური წერტილის მიდამოშიც. მართლაც, საკმარისია შევამოწმოთ მისი სამართლიანობა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც t_1 და t_2 იმყოფება კუთხური c წერტილის მიდამოში, c-გან სხვადასხვა მხარეს. ct_1t_2 სამკუთხედის განხილვა (ნახ. 22) გვიჩვენებს, რომ თუ r_1 და r_2 არის მანძილი c წერტილიდან შესაბამისად t_1 და t_2 წერტილებამდე, მაშინ

$$(r_1 + r_2)\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant r(t_1, t_2) \leqslant r_1 + r_2,$$

სადაც γ არის კუთხე c წვეროსთან. c წერტილის მახლობელი t_1t_2 წერტილებისათვის გვექნება:

$$\sin\frac{\gamma}{2} \geqslant k_0',$$

სადაც k_0' დადებითი მუდმივაა.

გარდა ამისა, ct_1 და ct_2 გლუვი რკალებისათვის (3) უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $k_0''(\sigma_1 + \sigma_2) \leqslant r_1 + r_2 \leqslant \sigma_1 + \sigma_2$, სადაც σ_1 და σ_2 არის ct_1 და ct_2 რკალების სიგრძე, ასე რომ $\sigma(t_1, t_2) = \sigma_1 + \sigma_2$, ხოლო k_0'' ისეთი მუდმივაა, რომ $0 < k_0'' < 1$. აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

დანართი II

კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევის შესახებ კუთხური წერტილების მახლობლობაში

ამ დანართში განვიხილავთ კოშის ტიპის ინტეგრალის ყოფაქცევას მარტივი, უბან-უბან გლუვი ინტეგრების წირის კუთხური წერტილების მახლობლობაში. ეს საკითხი § 26-ში განხილულის კერძო შემთხვევაა, მაგრამ აქ მას განვიხილავთ უშუალოდ ისე, რომ არ დავეყრდნობით § 26-ში მიღებულ შედეგებს. ამასთან, მივიღებთ ზოგიერთ საინტერესო ფორმულას, რომლებიც წიგნის ძირითად ტექსტში არ მიგვიღია. მოხერხებულობისათვის გავიმეორებთ წიგნის ტექსტში მოყვანილ ზოგიერთ მსჯელობას, ოღონდ ცოტა განსხვავებული სახით.

1^0. ვთქვათ, L მარტივი, უბან-უბან გლუვი რკალია, შეკრული ან გახსნილი და, ვთქვათ, $\varphi(t)$ არის t წერტილის ფუნქცია, $t \in L$. $\varphi(t)$ ფუნქცია, ამავე დროს, არის კონტურზე s რკალური აბსცისის ფუნქცია.

როცა ვამბობთ, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას წირის რაიმე ნაწილზე, უნდა განვასხვავოთ: $\varphi(t)$-ს განვიხილავთ როგორც t-ს ფუნქციას, თუ როგორც s-ის ფუნქციას.

პირველ შემთხვევაში $H(\mu)$ პირობა გამოისახება უტოლობით:

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant \text{const}\cdot r_{12}^{\mu} = \text{const}\cdot|t_1-t_2|^{\mu}, \tag{1}$$

მეორე შემთხვევაში კი შემდეგი უტოლობით:

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant \text{const}\ \sigma_{12}^{\mu}; \tag{2}$$

ამ ფორმულებში μ დადებითი მუდმივია, $0<\mu\leqslant 1$; t_1, t_2 არის ორი ნებისმიერი წერტილი განსახილველი ნაწილიდან, $r_{12}=|t_2-t_1|$, ხოლო σ_{12} იმ რკალის სიგრძეა, რომელიც t_1 და t_2 წერტილებს შორისაა მოქცეული და განსახილველ ნაწილს ეკუთვნის.

ვიცით, რომ L წირის ნებისმიერ გლუვ ნაწილზე განლაგებული t_1, t_2 წერტილებისათვის (1) და (2) პირობები ეკვივალენტურია. ასევეა უკუქცევის წერტილისაგან განსხვავებული კუთხური წერტილის მიდამოშიც, ეს გამომდინარეობს წინა დანართის 4^0 პუნქტში ნათქვამიდან.

უკუქცევის წერტილის მიდამოში $\frac{r_{12}}{\sigma_{12}}$ შეფარდება შეიძლება იყოს ნებისმიერად მცირე და ამიტომ (2)-დან არ გამომდინარეობს (1). პირუკუ, ცხადია, რომ (1)-დან გამოდის (2).

წინა მსჯელობის შესაბამისად ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ძლიერი ფორმით, თუ ადგილი აქვს (1) უტოლობას და $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას სუსტი ფორმით, თუ ადგილი აქვს (2) უტოლობას. იმ ფუნქციათა კლასი, რომლებიც აკმაყოფილებენ $H(\mu)$ პირობას სუსტი ფორმით, ის

კლასია, რომელსაც წიგნის ტექსტში ჩვენ ვუწოდეთ H კლასი. შემდგომში, თუ საწინააღმდეგოს არ აღვნიშნავთ, ვიგულისხმებთ, რომ H პირობა აღნიშნავს H პირობას სუსტი ფორმით, ე. ი. (2) უტოლობის აზრით.

2^0. § 13-ში გამოყვანილია (13,4) ფორმულა

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt \quad (3)$$

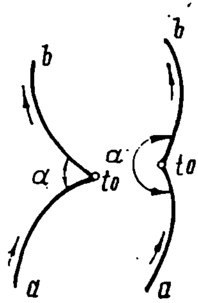
იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $L=ab$ გლუვი რკალია. ეს ფორმულა, ცხადია, ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც L უბან-უბან გლუვი რკალია და t_0 წერტილი განსხვავდება კუთხური წერტილებისაგან (ბოლოებისაგანაც). თუ ვიმსჯელებთ ისევე, როგორც § 13-ში, ადვილად დავასკვნით, რომ, როცა t_0 კუთხური წერტილია, მაშინ (3)-ის ნაცვლად გვექნება:

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = -\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t_0) +$$

$$+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt, \quad (4)$$

სადაც α აღნიშნავს იმ არაუარყოფით კუთხეს, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, რომელსაც შემოწერს უსასრულოდ მცირე t_0t ვექტორი იმ დროს, როდესაც t წერტილი t_0 წერტილის გარშემო ბრუნვით t_0b ნაწილიდან გადადის at_0 ნაწილში, ამასთან, t წერტილი რჩება L წირის მარცხნივ (ნახ. 23). ჩვეულებრივი წერტილის შემთხვევაში $\alpha = \pi$ და ისევ ვიღებთ (3) ფორმულას.

3^0. § 15-ში გამოყვანილია (15,5) ფორმულები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $L=ab$ გლუვი რკალია. ცხადია, რომ ეს ფორმულები ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც L არის მარტივი, უბან-უბან გლუვი რკალი და t_0 წერტილი არ ემთხვევა კუთხურ წერტილს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ფორმულები და აგრეთვე დასკვნა იმის შესახებ, რომ t_0 წერტილზე $\Phi(z)$ ფუნქცია მარჯვნიდან და მარცხნიდან უწყვეტად გაგრძელებადია, ძალაში რჩება იმ შემთხვევისათვისაც, როდესაც t_0 კუთხური წერტილია, კერძოდ, როცა t_0 არის უკუქცევის წერტილი. ისევე, როგორც § 15-ში ((15,4) ფორმულა), გვაქვს:



ნახ. 23

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt + \frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a};$$

ინტეგრალი ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $z \to c$ წირის მარჯვნიდან თუ მარცხნიდან; ამაში ადვილად დავრწმუნდე-

ბით. თუ ინტეგრალს დავშლით ორად, ერთი ინტეგრალი აღებულია ac რკალზე, მეორე კი — cb რკალზე და შევნიშნავთ, რომ $\varphi(t)-\varphi(c)$ სიმკვრივე ნულს უდრის, როცა $t=c$. ისევე, როგორც § 15-ში, ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ საჭირო ფორმულებს.

4⁰. წინა ორი პუნქტის შედეგების საფუძველზე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სოხოცკი — პლემელის ფორმულებს კუთხური t_0 წერტილისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi^+(t_0)=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \tag{5}$$

$$\Phi^-(t_0)=-\frac{\alpha}{\pi}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \tag{6}$$

სადაც L არის ნებისმიერი, მარტივი, უბან-უბან გლუვი წირი, ხოლო α — კუთხე, რომელიც ისევე განისაზღვრება, როგორც ზემოთ (2^0 პუნქტი).

5⁰. § 18-ში დამტკიცებულია პლემელი — პრივალოვის თეორემა გლუვი L წირისათვის. ადვილი შესამჩნევია, რომ უკუქცევას წერტილისაგან განსხვავებული კუთხური წერტილის მიდამო გამონაკლისს არ წარმოადგენს არც აღნიშნული თეორემისათვის და არც § 18-ში მოყვანილი დამტკიცებისათვის[12].

განსახილველი გვრჩება უკუქცევას წერტილების მიდამოები. ვაჩვენებთ, რომ თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი მარტივი, უბან-უბან გლუვი L წირის შემთხვევაში (შესაძლოა წირს ჰქონდეს უკუქცევას წერტილებიც), ამასთან $H(\mu)$ პირობაში შეიძლება ვიგულისხმოთ მისი როგორც ძლიერი, ისე სუსტი ფორმა.

ერთდროულად § 21-ის თეორემასაც გავავრცელებთ უბან-უბან გლუვი წირით შემოსაზღვრული არეების მიმართაც.

ამ უკანასკნელ თეორემასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ შემდეგი: ვთქვათ, ab არის გლუვი, გახსნილი რკალი და, ვთქვათ, $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$, $\mu<1$ პირობას ab რკალზე, ამასთან $\varphi(a)=0$. გავაგრძელოთ ab რკალი a ბოლოს იქით a წერტილზე გავლებული მხების aa' მონაკვეთით და ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)=0$ aa' მონაკვეთზე; განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a'b}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \tag{7}$$

§ 21-ში ნათქვამის საფუძველზე (შენიშვნა 2) ab რკალის მიდამოში (შესაძლებელია, b წერტილის მიდამოს გარდა), $a'b$ რკალის მარცხნივ (მარჯვნივ) $\Phi(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

---

[12] აქაც მივალთ შემდეგი ინტეგრალის გამოკვლევამდე:

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt,$$

რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით (15,5) ფორმულებით. $\Psi(t_0)$ ინტეგრალის გამოკვლევა კი შეიძლება § 18-ის ანალოგიურად.

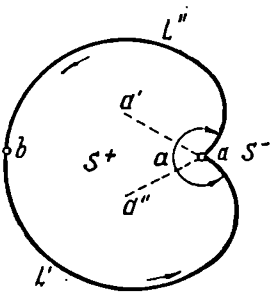
$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C|z_2-z_1|^{\mu}. \tag{8}$$

ამ უტოლობას ადგილი აქვს $a'b$ რკალზე მდებარე წერტილებისათვის (შესაძლოა, b წერტილის მიდამოს გარდა), თუ $\Phi(z)$ ფუნქციად $a'b$ რკალზე მივიღებთ მარჯვენა ან მარცხენა სასაზღვრო მნიშვნელობებს.

ახლა, ვთქვათ, L ნებისმიერი, მარტივი, უბან-უბან გლუვი კონტურია. რადგან ცხადია, რომ საკითხი დაიყვანება

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{9}$$

ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლაზე კუთხური წერტილების საკმარისად მცირე მიდამოებში, ამიტომ, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ L არის მარტივი, შეკრული კონტური ერთადერთი კუთხური a წერტილით. გარდა ამისა, ისევ ზოგადობის შეუზღუდავად, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ a წერტილში გვაქვს შ ე მ ა ვ ა ლ ი კ უ თ ხ ე, ე. ი. ისეთი კუთხე, რომელიც π-ს აღემატება (ნახ. 24); როცა $\alpha=2\pi$, მაშინ გვაქვს უკუქცევის წერტილი.



ნახ. 24

ვთქვათ, L კონტურზე $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას სუსტი ფორმით. ზოგადობის დაურღვევლად, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(a)=0$; წინააღმდეგ შემთხვევაში $\Phi(z)$ ინტეგრალის განხილვა შეიძლება შევცვალოთ შემდეგი ინტეგრალის განხილვით:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-z}\,dt=\begin{cases}\Phi(z)-\varphi(a) & S^{+}\text{-ში},\\ \Phi(z) & S^{-}\text{-ში}.\end{cases} \tag{10}$$

ახლა, a წერტილითა და რაიმე b წერტილით L კონტური დავყოთ ორ გლუვ L' და L'' რკალად; შესაბამისად, $\Phi(z)$ ინტეგრალი წარმოიდგინება ორი შესაკრების ჯამის სახით

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z), \tag{11}$$

ეს შესაკრებები, შესაბამისად, L' და L'' რკალებზე აღებული ინტეგრალებია.

თუ გამოვიყენებთ (7) ინტეგრალის ყოფაქცევის შესახებ ზემოთქმულს, ადვილად დავასკვნით, რომ (8) შეფასებას ადგილი აქვს S^{-}-ში, a წერტილის მახლობლობაში და, მაშასადამე, მთლიანად S^{-}-შიც; ეს რომ ცხადი გახდეს, საკმარისია a წერტილში შემავალი გლუვი რკალები გავაგრძელოთ aa' და aa'' მხებების მონაკვეთებით (უკუქცევის წერტილის შემთხვევაში ეს მონაკვეთები ერთმანეთს ემთხვევა) და შევნიშნოთ, რომ a წერტილის მიმდებარე S^{-}-ის მიდამო მდებარეობს როგორც baa' რკალის, ისე $a''ab$ რკალის ცალ მხარეს.

სახელდობრ, თუ (8) ფორმულის z_1 და z_2 წერტილებს მივუახლოებთ საზღვრის t_1, t_2 წერტილებს, დავრწმუნდებით, რომ $\Phi(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობა, ე. ი.

სასაზღვრო მნიშვნელობა „ღრმულიდან“, აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ძლიერი ფორმით, თუნდაც $\varphi(t)$ აკმაყოფილებდეს $H(\mu)$ პირობას სუსტი ფორმით[43].

განსახილველი დაგვრჩა $\Phi(z)$-ის ყოფაქცევა S^+ არეში, ე. ი. „შვერილის“ მხრიდან. გვაქვს:

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + \varphi(t).$$

რადგან $\varphi(t)$ და $\Phi^-(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას, იგივეს ექნება ადგილი $\Phi^+(t)$ ფუნქციისათვის.

ამგვარად, პლემელი — პრივალოვის თეორემა ვრცელდება ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი წირისათვის, გამონაკლისს არ წარმოადგენს უკუქცევის წერტილებიც.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ძლიერი ფორმით, მაშინ იმავეს ექნება ადგილი $\Phi^+(t)$-სათვის, რადგან, ზემოთქმულის საფუძველზე, $\Phi^-(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ძლიერი ფორმით.

6⁰. წინა პუნქტში, გზადაგზა, § 21-ის თეორემა გავავრცელეთ იმ შემთხვევაზე, როდესაც z_1, z_2 წერტილები იმყოფება საზღვრის კუთხური a წერტილის მიდამოში „ღრმულის“ მხარეს. განსახილველი გვრჩება ის შემთხვევა, როდესაც z_1, z_2 წერტილები იმყოფება „შვერილის“ მხარეს, ე. ი. S^+ არეში, თუ ვისარგებლებთ 5⁰ პუნქტის აღნიშვნით.

ადვილად შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში არ არის საკმარისი $\varphi(t)$-ს მიერ $H(\mu)$ პირობის სუსტი ფორმით დაკმაყოფილება. ამიტომ ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს $H(\mu)$ პირობას ძლიერი ფორმით. მაშინ, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, $\Phi^+(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობა იმავე პირობას აკმაყოფილებს. ამის შემდეგ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ § 21-ში მოყვანილი მსჯელობა შეიძლება გამოვიყენოთ ჩვენს შემთხვევაშიც რაიმე არსებითი ცვლილების გარეშე. მხოლოდ (21,6) შეფარდების განხილვისას მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ შემდეგი: ჯერ ერთი S^+ არეში a წერტილის მახლობელი ნებისმიერი წერტილი შეიძლება სწორხაზოვანი მონაკვეთით შევაერთოთ ან a წერტილთან, ან a წერტილის მახლობელ, L-ზე მდებარე წერტილთან ისე, რომ ამ მონაკვეთმა არ გადაკვეთოს L. ორივე შემთხვევაში აღნიშნულ მონაკვეთზე მდებარე ნებისმიერი z წერტილისათვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას: $|\Phi(z) - \Phi(z_0)| \leqslant C|z - z_0|^\mu$. ეს გამომდინარეობს $\Phi(z)$-ის (11) წარმოდგენიდან და (8) ფორმულიდან.

---

[43] გავიხსენოთ, რომ $H(\mu)$ პირობის სუსტი და ძლიერი ფორმები განსხვავდება მხოლოდ უკუქცევის წერტილის მიდამოში.

მოცემული ნახტომის მიხედვით უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის განსაზღვრის ამოცანის შესახებ

დასამტკიცებელი დაგვრჩა § 31-ის 2^0 პუნქტში გამოთქმული დებულება, რაც შემდეგში მდგომარეობს.

ვთქვათ, § 31-ის აღნიშვნებში, უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის $\Phi(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს L წირზე, საკვანძო წერტილების გამოკლებით, შემდეგ პირობას:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{1}$$

სადაც $\varphi(t)$ მოცემული ფუნქციაა L-ზე; ვიგულისხმებთ, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტია[44] L-ზე, შესაძლებელია კვანძების გამოკლებით და, რომ L-ზე ეს ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია.

მაშინ (1) ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავამრავლებთ

$$\frac{dt}{t-z}$$

გამოსახულებაზე, სადაც z სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია, რომელიც L-ზე არ მდებარეობს და ვაინტეგრებთ L-ზე, მივიღებთ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} + P(z), \tag{2}$$

სადაც $P(z)$ პოლინომია, რომელიც $\Phi(z)$ ფუნქციის უსასრულობაში პოლუსის მთავარი ნაწილია.

ამ დებულების სამართლიანობის დამტკიცებისათვის, ცხადია, საკმარისია შემდეგი ტოლობის დამტკიცება:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{t-z}\,dt = \Phi(z) - P(z), \tag{3}$$

სადაც z ნებისმიერი წერტილია, რომელიც L-ზე არ მდებარეობს.

ეს ტოლობა თითქმის ცხადია, მაგალითად, იმ შემთხვევისათვის, როდესაც L მარტივი, შეკრული, გლუვი ან უბან-უბან გლუვი კონტურია. მართლაც, ვთქვათ, ჩვენს ჩვეულ აღნიშვნებში S^+ და S^- ის არეებია, რომლებადაც სიბრტყე იყოფა L წირით. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ S^+ აღნიშნავს სასრულ არეს, ხოლო S^-—უსასრულოს.

---

[44] უწყვეტობის (კვანძების გამოკლებით) მოთხოვნა აუცილებელია, რადგან $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობანი უწყვეტია, შესაძლებელია საკვანძო წერტილების გამოკლებით (იხ. § 9-ის 2^0 პუნქტი).

მაშინ ცხადია (იხ. § 29-ის 4° პუნქტი), რომ

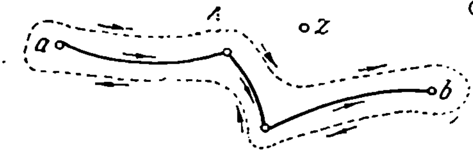
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\Phi^{+}(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\Phi(z), & \text{როცა } z\in S^{+},\\ 0\;, & \text{როცა } z\in S^{-},\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\Phi^{-}(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}P(z), & \text{როცა } z\in S^{+},\\ -\Phi(z)+P(z), & \text{როცა } z\in S^{-},\end{cases}$$

და მივიღებთ (3) ფორმულას.

სავსებით ანალოგიურად განიხილება ის შემთხვევა, როდესაც წირი შედგება რამდენიმე მარტივი, შეკრული კონტურისაგან, რომლებსაც საერთო წერტილები არა აქვთ.

ასევე მარტივად მტკიცდება (3) ფორმულის სამართლიანობა იმ შემთხვევაში, როდესაც $L=ab$ მარტივი, გახსნილი, უბან-უბან გლუვი რკალია (ნახ. 25). მაშინ ცხადია, რომ



ნახ. 25

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{\Phi(t)\,dt}{t-z},$$

სადაც Λ აღნიშნავს შეკრულ კონტურს, რომელიც შიგნით მოიცავს L წირს, როგორც ეს ნაჩვენებია 25-ე ნახაზზე, და, რომელიც იმდენად ახლოსაა L წირთან, რომ z წერტილი ამ კონტურის გარეთ მდებარეობს. უფრო მარტივია L წარმოვიდგინოთ როგორც სიბრტყის ჭრილი და ვიგულისხმოთ, რომ Λ შედგება ჭრილის ორი მხარისაგან, რომლებიც შემოიწერება საპირისპირო მიმართულებებით ისე, რომ ჭრილის გარემომცველი არე რჩება მარცხნივ.

ცხადია, რომ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{\Phi(t)\,dt}{t-z}=\Phi(z)-P(z)$$

და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

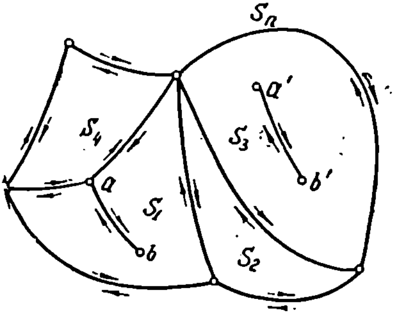
სავსებით ანალოგიურად განიხილება რამდენიმე, ცალ-ცალკე განლაგებული, უბან-უბან გლუვი რკალების შემთხვევა.

გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე (ნახ. 26), ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ L ნებისმიერი, უბან-უბან გლუვი წირია, ე. ი. სასრული რაოდენობის მარტივი, გახსნილი რკალებისაგან შედგენილი წირია, ამ რკალებს შეიძლება საერთო ჰქონდეს მხოლოდ ბოლოები, როგორც ეს მითითებულია § 1-ში.

ცხადია, რომ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)}{t-z}\,dt=\int\limits_{\Lambda}\frac{\Phi^{*}(t)\,dt}{t-z}.$$

სადაც Λ აღნიშნავს წირს, რომელიც L წირზე საპირისპირო მიმართულებით ორჯერ შემოვლით შემოიწერება, ხოლო $\Phi^*(t)$ აღნიშნავს $\Phi(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას მარცხნიდან. ინტეგრების წირის მიმართულების მიმართ.



ნახ. 26

ადვილი მისახვედრია, რომ ინტეგრების Λ წირი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც სიბრტყის ბმული $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ნაწილების $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ საზღვრების ერთობლიობა; ამ ბმულ ნაწილებად სიბრტყე იყოფა L წირის მიერ; ერთ-ერთი ამ ნაწილებიდან, ვთქვათ S_n, შეიცავს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს. დადებითი მიმართულება Λ_k-ზე ($k=1, 2, \ldots, n$) შეირჩევა ისე, რომ S_k არე რჩება მარცხნივ. ამასთანავე, ის რკალები, რომლებიც S_k არეებიდან რომელიმე ორის საერთო საზღვრის ნაწილს არ წარმოადგენს (მაგ.: ab და $a'b'$ რკალები ნახ. 26) უნდა განვიხილოთ როგორც ჭრილები, რომელთა მოპირდაპირე მხარეები (ნაპირები) შემოიწერება საპირისპირო მიმართულებებით და ისე, რომ ჭრილის გარემომცველი სიბრტყის ნაწილი რჩება მარცხნივ.

ახლა, ვთქვათ, z წერტილი მდებარეობს ერთ-ერთში $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ სასრული არეებიდან, ვთქვათ S_k-ში, მაშინ ცხადია,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_k}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\Phi(z),\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_n}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=-P(z);$$

სხვა Λ_j წირებზე ინტეგრალები კი ნულს უდრის.

თუ z წერტილი მდებარეობს უსასრულო S_n ნაწილში, მაშინ ცხადია,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_n}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\Phi(z)-P(z),$$

სხვა Λ_j წირებზე კი ინტეგრალები ნულს უდრის.

მაშასადამე, ყველა შემთხვევაში

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_k}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\Phi(z)-P(z).$$

ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

დანართი IV

ერთი ელემენტარული დებულება ფუნქციათა ბიორთოგონალური სისტემების შესახებ

ვთქვათ, L უბან-უბან გლუვი წირია $z=x+iy$ კომპლექსური ცვლადის სიბრტყეში და, ვთქვათ,

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$$

$t=x+iy$ წერტილის უწყვეტ ფუნქციათა რაიმე წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა L-ზე.

მაშინ ყოველთვის შეიძლება n რაოდენობის ფუნქციისგან შედგენილი $\omega_1(t)$, $\omega_2(t), \ldots, \omega_n(t)$ სისტემის შერჩევა (უამრავი ხერხით) ისე, რომ ეს ფუნქციები L-ზე H კლასს ეკუთვნოდეს და $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ სისტემასთან ბიორთოგონალური იყოს შემდეგი აზრით,

$$(\varphi_i,\ \omega_j) = \int\limits_L \varphi_i(t)\, \omega_j(t)\, dt = \delta_{ij}, \tag{1}$$

სადაც $\delta_{ij}=1$, როცა $i=j$; $\delta_{ij}=0$, როცა $i \neq j$.

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ არსებობს φ_i ფუნქციების ისეთი წრფივი კომბინაციები $\psi_j (j=1, 2, \ldots, n)$, რომლებისთვისაც შეიძლება შეირჩეს H კლასის χ_j ფუნქციები ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს $(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}$ ტოლობებს[45].

ვიგულისხმებთ, რომ ქვემოთ ω_j, χ_j, χ_j' სიმბოლოებით აღნიშნული ფუნქციები H კლასს ეკუთვნის.

φ_1 აღვნიშნოთ ψ_1-ით და ავიღოთ ნებისმიერი ისეთი χ_1 ფუნქცია, რომ $(\psi_1, \chi_1) \neq 0$[46]. ცხადია, არსებობს უამრავი ასეთი ფუნქცია. გავამრავლებთ რა χ_1-ს შესაფერის მამრავლზე, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $(\psi_1, \chi_1)=1$. φ_2 ფუნქცია შევცვალოთ $\psi_2=\varphi_2 - c\psi_1$ ფუნქციით, c ისე შევარჩიოთ, რომ $(\psi_2, \chi_1)=(\varphi_2, \chi_1)-$

---

[45] თუ არ მოვითხოვთ, რომ χ_j ეკუთვნოდეს H კლასს, მაშინ ψ_i და χ_j სისტემები შეიძლება ასე ავაგოთ: ჩვეულებრივი გზით ვაქცევთ ორთოგონალურ სისტემად φ_i ფუნქციებს s რკალური აბსცისის მიმართ, ე. ი. შევადგენთ მათ წრფივ ψ_j კომბინაციებს ისე, რომ

$$\int\limits_L \psi_i \overline{\psi}_j\, ds = \delta_{ij};$$

მაშინ ψ_i და $\chi_j = \overline{\psi}_j : \frac{dt}{ds}$ აკმაყოფილებს $(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}$ პირობებს.

შევნიშნოთ, რომ მითითებული ხერხი ჩვენი მიზნისათვის გამოდგება იმ შემთხვევაში, როცა L წირის შემადგენელი გლუვი რკალები აკმაყოფილებს ლიაპუნოვის პირობას. მართლაც, ამ შემთხვევაში χ_j ფუნქციები H კლასს ეკუთვნის.

[46] $\psi_1=\varphi_1$ ფუნქცია უწყვეტია და იგივურად ნულს არ უდრის, რადგან $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

$-c(\psi_1, \chi_1)=(\varphi_2, \chi_1)-c=0$. გვექნება: $(\psi_1, \chi_1)=1$, $(\psi_2, \chi_1)=0$. ვთქვათ, χ_2' ნებისმიერი ისეთი ფუნქციაა, რომ $(\psi_2, \chi_2')=1$[47]. შევცვალოთ χ_2' ფუნქცია $\chi_2=\chi_2'-c\chi_1$ ფუნქციით, c მუდმივა ისე შევარჩიოთ, რომ $(\psi_1, \chi_2)=(\psi_1, \chi_2')-c(\psi_1, \chi_1)=(\psi_1, \chi_2')-c=0$. ახლა გვექნება $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ ისეთი ფუნქციები, რომ $(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2)$, ამასთან, $\psi_1, \psi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

შემდეგ φ_3 ფუნქცია შევცვალოთ $\psi_3=\varphi_3-c_1\psi_1-c_2\psi_2$ ფუნქციით, c_1, c_2 ისე შევარჩიოთ, რომ $(\psi_3, \chi_1)=0$, $(\psi_3, \chi_2)=0$, ე. ი. ისე, რომ $(\varphi_3, \chi_1)-c_1=0$, $(\varphi_3, \chi_2)-c_2=0$. χ_3' ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ $(\psi_3, \chi_3')=1$ და χ_3' შევცვალოთ $\chi_3=\chi_3'-c_1\chi_1-c_2\chi_2$ ფუნქციით ისე, რომ $(\psi_1, \chi_3)=0$, $(\psi_2, \chi_3)=0$.

ახლა გვაქვს $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ ისეთი ფუნქციები, რომ $(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$. პროცესის გაგრძელების გზა ნათელია.

თუ ასე გავაგრძელებთ, მივიღებთ n რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელ ψ_i ფუნქციებს, რომლებიც φ_i ფუნქციების წრფივი კომბინაციებია, და ისეთ χ_j ფუნქციებს, რომ

$$(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}. \tag{2}$$

ვინაიდან ψ_i — φ_i ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებელი კომბინაციებია, ამიტომ პირუკუ

$$\varphi_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\psi_k,$$

სადაც a_{ik} ისეთი მუდმივებია, რომ $A=\|a_{ij}\|$ მატრიცის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავდება.

ახლა b_{ij} მუდმივები შევარჩიოთ ისე, რომ

$$\omega_j=\sum_{l=1}^{n} b_{lj}\chi_l$$

ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (1) პირობას. ამ პირობის გამოსახვით მივიღებთ:

$$\delta_{ij}=(\varphi_i, \omega_j)=\sum_{k}\sum_{l} a_{ik}b_{lj}(\psi_k, \chi_l)=\sum_{k}\sum_{l} a_{ik}b_{lj}\delta_{kl}=\sum_{k} a_{ik}b_{kj}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$AB=E,$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო $B=\|b_{ij}\|$, ამგვარად, საჭირო b_{ij} სიდიდეები არსებობს, სახელდობრ, $B=A^{-1}$. ამრიგად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

აღვნიშნოთ ახლა დამტკიცებული დებულების ერთი უშუალო შედეგი: ვთქვათ, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ მოცემული, წრფივად დამოუკიდებელი, t-ს უწყვეტი ფუნქციებია და, ვთქვათ, ცნობილია, რომ ნებისმიერი $\omega(t)$ ფუნქციისათვის, რომელიც L-ზე H კლასს ეკუთვნის,

---

[47] რადგან $\psi_1, \psi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ სისტემის ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ ψ_2 არ უდრის იგივურად ნულს.

$$(\varphi_i,\ \omega) = 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

თანაფარდობებიდან გამოდის $(\varphi_0,\ \omega) = 0$ თანაფარდობა, სადაც $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ L-ზე განსაზღვრული რაიმე უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ φ_0 ფუნქცია φ_i ფუნქციების წრფივი კომბინაციაა.

მართლაც, φ_0 ფუნქცია $\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_n$ ფუნქციებისაგან წრფივად დამოუკიდებელი რომ იყოს, მაშინ იარსებებდა $\omega_0,\ \omega_1, \ldots,\ \omega_n$ ისეთი ფუნქციები, რომ $(\varphi_i,\ \omega_j) = \delta_{ij}$ $(i,\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n)$; კერძოდ, გვექნებოდა

$$(\varphi_1,\ \omega_0) = 0, \quad (\varphi_2,\ \omega_0) = 0, \ldots,\ (\varphi_n,\ \omega_0) = 0, \quad (\varphi_0,\ \omega_0) = 1,$$

რაც დებულების პირობას ეწინააღმდეგება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. ამ დანართის დასაწყისში გამოთქმული დებულება შეიძლება მნიშვნელოვნად განზოგადდეს, თუ გავაფართოებთ φ_i ფუნქციების კლასს და, პირუკუ, შევავიწროვებთ ω_j ფუნქციების კლასს.

მაგალითად, ცხადია, დებულება ძალაში რჩება მაშინაც კი, როდესაც φ_i ფუნქციებს აქვს სასრული რაოდენობის წყვეტა და აბსოლუტურად ინტეგრებადია; ამასთან, ის ფუნქციები, რომლებიც მხოლოდ წყვეტის წერტილებში განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, იდენტურად უნდა ჩავთვალოთ[18].

გარდა ამისა ადვილად დამტკიცდება, რომ ω_j ფუნქციებად შეიძლება ავიღოთ, მაგალითად, რაციონალური ფუნქციები; თუ L წირი გახსნილი რკალებისაგან შედგება, მაშინ შეიძლება ავიღოთ პოლინომებიც კი[19]. ამაზე ჩვენ არ შევჩერდებით, რადგან ამ ფაქტით არ ვისარგებლებთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ ვიგულისხმებთ, რომ წრფივი კომბინაციები (მუდმივი) ნ ა მ დ ვ ი ლ ი კოეფიციენტებით განიხილება და, შესაბამისად, გავიგებთ L-ზე მოცემული ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობას და დამოკიდებულებას, სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ აღნიშნულ ტერმინებს „ვიწრო აზრით" ვიხმართ, როგორც ამას ვაკეთებდით ზოგჯერ წიგნის ძირითად ტექსტში, მაშინ ზემოთ მოყვანილი შედეგები აღარ დარჩება ძალაში, თუმცა ადგილი ექნება ანალოგიურ შედეგებს, რომლებსაც ახლა მოვიყვანთ.

ვთქვათ, $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots,\ \varphi_n(t)$ არის L-ზე მოცემული უწყვეტი, წრფივად დამოუკიდებელი (ვიწრო აზრით) ფუნქციები. მაშინ ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ (უამრავი ხერხით) $\omega_1(t),\ \omega_2(t), \ldots,\ \omega_n(t)$ ფუნქციები ისე, რომ

$$\operatorname{Re}(\varphi_i,\ \omega_j) = \operatorname{Re}\int_L \varphi_i(t)\,\omega_j(t)\,dt = \delta_{ij}, \quad i,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

დამტკიცება ზემოთ მოყვანილის ანალოგიური იქნება: საკმარისია $(\varphi,\ \psi)$ სახის ინტეგრალების ნაცვლად ყველგან ჩავსვათ $\operatorname{Re}(\varphi,\ \psi)$ ნამდვილი ნაწილები, ხოლო განსახილველ წრფივ კომბინაციებში—ნამდვილი კოეფიციენტები.

[18] ეს ბოლო პირობა არსებითია წრფივად დამოუკიდებლობის ცნების განსაზღვრისას; ამ პირობის ძალით $\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_n$ ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულად ითვლება, თუ არსებობს ისეთი $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n$ მუდმივები (რომელთა შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან), რომ ყველგან L-ზე $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n = 0$, შესაძლებელია, წყვეტის წერტილების გარდა.

[19] ცხადია, რომ შეკრული კონტურების შემთხვევაში მხოლოდ პოლინომები არ კმარა; თუ, მაგალითად, თვით φ_i ფუნქციები პოლინომებია, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს ω_j პოლინომები, $(\varphi_i,\ \omega_j) = 0$; კერძოდ, $(\varphi_i,\ \omega_i) = 0$ და არ ეძლის მოთხოვნისამებრ 1-ს.

წინას ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი დებულებაც: ვთქვათ, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ L-ზე მოცემული, უწყვეტი, წრფივად დამოუკიდებელი (ვიწრო აზრით) ფუნქციებია და, ვთქვათ, ცნობილია, რომ L-ზე H კლასის ნებისმიერი $\omega(t)$ ფუნქციისათვის, $\operatorname{Re}(\varphi_i, \omega)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, თანაფარდობებიდან გამომდის $\operatorname{Re}(\varphi_0, \omega)=0$ დამოკიდებულება, სადაც $\varphi_0=\varphi_0(t)$ რაიმე გარკვეული უწყვეტი ფუნქციაა L-ზე. მაშინ $\varphi_0(t)$ არის $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ ფუნქციების წრფივი (ვიწრო აზრით) კომბინაცია.

1 შენიშვნაში ნათქვამი მთლიანად ეხება აქ განხილულ შემთხვევასაც.

დანართი V

შეუღლების გადაადგილებიანი სასაზღვრო ამოცანების შესახებ

ამ დანართში მოკლედ გადმოცემულია თეორია ერთი სახის შეუღლების ამოცანებისა, რომლებიც ამ წიგნში განხილული ამოცანების განზოგადებას წარმოადგენს და რომლებსაც მე ვუწოდე *შეუღლების გადაადგილებიანი ამოცანები*, რადგან ამ ამოცანებში სასაზღვრო მნიშვნელობები ერთმანეთის მიმართ გადაადგილებულ წერტილებში უღლდება. საკმაოდ დაწვრილებით (დამტკიცებებითურთ) განვიხილავთ მხოლოდ ერთ ტიპურ ამოცანას, რომელიც 1^0 პუნქტშია ჩამოყალიბებული. სხვათა შესახებ მხოლოდ მოკლედ მივუთითებთ.

1^0. ვთქვათ, S^+ არის მარტივი, შეკრული, ლიაპუნოვის კონტურით შემოსაზღვრული არე, ხოლო S^- — უსასრულო არე, რომელიც $(S^+ + L)$-ს ავსებს სრულ სიბრტყემდე. როგორც ყოველთვის, ვიგულისხმებთ, რომ L-ზე დადებითი მიმართულება S^+-ს ტოვებს მარცხნივ.

ვთქვათ, $\alpha(t)$ აღნიშნავს L-ზე მოცემულ რაიმე უწყვეტ ფუნქციას. როდესაც t წერტილი L-ს შემოწერს, მაშინ $\tau = \alpha(t)$ წერტილი შემოწერს რომელიღაც Λ წირს; ამის შესაბამისად ვიტყვით, რომ $\alpha(t)$ ფუნქცია გარდაქმნის L წირს Λ წირში, ან კიდევ, რომ $\alpha(t)$ ფუნქციას L წირი გადაჰყავს Λ წირში.

ახლა ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha(t)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

a) $\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha}{dt}$ წარმოებული განსხვავდება ნულისგან ყველგან, L წირზე, და ეკუთვნის H კლასს.

b) $\alpha(t)$-ს ურთიერთცალსახად გადაჰყავს L კონტური თავის თავში *შემოვლის მიმართულების შენარჩუნებით*.

შეუღლების გადაადგილებიან სასაზღვრო *ამოცანას* ჩვენ ვუწოდებთ შემდეგ ამოცანას:

ვიპოვოთ უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე $\Phi(z)$ *ფუნქცია, რომლის ნახტომის წირია* L, *შემდეგი სასაზღვრო პირობის მიხედვით*:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad L\text{-ზე}, \tag{1}$$

სადაც $G(t)$ *და* $g(t)$ L-*ზე მოცემული*, H *კლასის ფუნქციებია და* $G(t) \neq 0$ *ყველგან* L-*ზე*.

ეს ამოცანა ბუნებრივი განზოგადებაა ჩვენ მიერ II თავში განხილული შეუღლების ამოცანისა, რომელიც შეესაბამება შემთხვევას $\alpha(t) = t$.

(1) სახის ერთგვაროვანი ამოცანა, რომელიც მიიღება, როცა $g(t) = 0$, პირველად განიხილა კ. ჰაზემანმა (C. Haseman [1]), მაგრამ ვერ შეძლო რამდენადმე დასრულებული ამოხსნის მიღება.

(1) ამოცანის დასრულებული ამოხსნა პირველად მოგვცა დ. კვესელავამ [3], [6], კ. ჰაზემანის მეთოდისაგან სრულიად განსხვავებული მეთოდით. აქ მოგვყავს ეს ამოხსნა.

2^0. (1) სასაზღვრო ამოცანის ამოსახსნელად არსებითია შემდეგი

ლემა. თუ უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი $\Phi(z)$ ფუნქცია L-ზე აკმაყოფილებს

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = \Phi^{-}(t) \tag{2}$$

სასაზღვრო პირობას, მაშინ ის იგივურად ნულს უდრის.

დავუშვათ, $\Phi(z)$ აკმაყოფილებს (2) სასაზღვრო პირობას და, ვთქვათ, $\Phi(\infty)=0$; მაშინ შემდეგი ფუნქციები:

$$\Phi(z), \quad [\Phi(z)]^2, \quad [\Phi(z)]^3, \ldots \tag{*}$$

აგრეთვე აკმაყოფილებს (2) პირობას და უსასრულობაში ქრობადი არის. ცხადია, (*) ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია, თუ $\Phi(z)$ ფუნქცია იგივურად ნულს არ უდრის.

მაშასადამე, თუ კი არსებობს არანულოვანი ერთი ფუნქცია მაინც, რომელიც აკმაყოფილებს ლემის პირობებს, მაშინ არსებობს ასეთი წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებისაგან შედგენილი თვლადი სისტემა. ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (2) სასაზღვრო პირობას შეიძლება აკმაყოფილებდეს მხოლოდ სასრული რაოდენობის, წრფივად დამოუკიდებელი, უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი ფუნქცია.

დავუშვათ, $\Phi(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლემის პირობებს, მაშინ თვით ჩვენ მიერ მიღებული სასაზღვრო მნიშვნელობების ცნების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi^{+}(t)$ და $\Phi^{-}(t)$ ფუნქციები უწყვეტი არის L-ზე. გარდა ამისა, ისინი რომ H პირობას აკმაყოფილებდნენ, მაშინ კოშის ფორმულისა და სოხოცკი — პლემელის ფორმულების საფუძველზე გვექნებოდა:

$$\frac{1}{2}\,\Phi^{+}(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\Phi^{+}(t)\,dt}{t-t_0} = 0, \quad \frac{1}{2}\,\Phi^{-}(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\Phi^{-}(t)\,dt}{t-t_0} = 0 \tag{**}$$

ყველა t_0-ისათვის L-ზე.

მაგრამ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ფორმულები განსახილველი შემთხვევის პირობებშიც ძალაში რჩება[50].

თუ ვისარგებლებთ (2) თანაფარდობით და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\alpha(t)$-ს L კონტური თავისთავში გადაჰყავს მიმართულების შენარჩუნებით[51], ადვილად მივიღებთ, რომ (**) ფორმულებიდან პირველი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{1}{2}\,\Phi^{-}(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\Phi^{-}(t)\,\alpha'(t)\,dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} = 0;$$

---

[50] სოხოცკი—პლემელის ფორმულების შესახებ, როცა სიმკვრივე მხოლოდ უწყვეტია (და უფრო ზოგად შემთხვევებისათვისაც), იხილეთ ი. პრივალოვი [7].

[51] მიმართულება საპირისპიროთი რომ იცვლებოდეს, მაშინ მოყვანილ ფორმულაში ინტეგრალის წინ ნიშანი შეიცვლებოდა მოპირდაპირე ნიშნით და ჩვენი დასკვნები აღარ იქნებოდა სამართლიანი.

ამ ტოლობისა და (**) ტოლობებიდან მეორის შეკრებით მივიღებთ, რომ

$$\Phi^-(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L K(t_0, t)\, \Phi^-(t)\, dt = 0, \tag{3}$$

სადაც

$$K(t_0, t) = \frac{1}{t - t_0} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}. \tag{4}$$

$\alpha(t)$-სა და L კონტურისათვის შემოღებული პირობების ძალით ადვილად შემოწმდება, რომ

$$K(t_0, t) = \frac{K_0(t_0, t)}{|t - t_0|^{\gamma}}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1, \tag{4ა}$$

სადაც $K_0(t_0, t)$ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც L-ზე H პირობას აკმაყოფილებს.

ამგვარად, ნებისმიერი უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი $\Phi(z)$ ფუნქციის $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობა არის ფრედჰოლმის (3) განტოლების ამონახსნი, თუკი $\Phi(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (2) პირობას. მაშასადამე, შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ სასრული რაოდენობის ასეთი წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქცია. აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

3°. (1) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა დავიწყოთ იმ შემთხვევიდან, როცა $G(t) = 1$. გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობა:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \Phi^-(t) + g(t) \quad L\text{-ზე}. \tag{5}$$

ვეძებოთ ამ ამოცანის $\Phi(z)$ ამონახსნი უსასრულობაში მოცემული მთავარი ნაწილით, ე. ი. ამონახსნი, რომელსაც უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში აქვს ასეთი სახე

$$\Phi(z) = P(z) + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

სადაც $P(z)$ მოცემული პოლინომია („მთავარი ნაწილი“).

ზემოთქმულის საფუძველზე ადვილი მისახვედრია, რომ ამოცანას შეუძლებელია ჰქონდეს ორი განსხვავებული ამონახსნი ერთი და იმავე მთავარი ნაწილით, ვინაიდან ასეთი ამონახსნების სხვაობა, ცხადია, შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნია, ასეთი ამონახსნი კი, დამტკიცებული ლემის ძალით, ნულოვანია.

ახლა (5) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi[\beta(t)]\, dt}{t - z}, \quad \text{როცა } z \in S^+, \\ \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z} + P(z), \quad \text{როცა } z \in S^-, \end{aligned} \tag{6}$$

სადაც $\varphi(t)$ არის საძიებელი ფუნქცია H კლასისა, $\beta(t)$ — $\alpha(t)$-ს შექცეული ფუნქცია[52], ხოლო

[52] ცხადია, $\beta(t)$ ფუნქციას L კონტური თავისთავში გადაჰყავს მიმართულების შენარჩუნებით და აქვს ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული, რომელიც H კლასს ეკუთვნის.

$$P(z) = C_0 + C_1 z + \cdots + C_n z^n$$

ნებისმიერი მოცემული პოლინომია.

სოხოცკი — პლემელის ფორმულებით (6) ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\Phi^+[\alpha(t_0)] = \frac{1}{2}\,\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\alpha'(t)\,\varphi(t)\,dt}{\alpha(t) - \alpha(t_0)},$$

$$\Phi^-(t_0) = -\frac{1}{2}\,\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + P(t_0).$$

ამ გამოსახულებების (5) სასაზღვრო პირობაში ჩასმით მივიღებთ, რომ

$$\mathbf{K}\varphi = \varphi(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = g(t_0) + P(t_0), \tag{7}$$

სადაც $K(t_0, t)$ განისაზღვრება (4) ფორმულით.

წინა პუნქტში ნათქვამის საფუძველზე, (7) განტოლება წარმოადგენს ფრედჰოლმის (4a) სახის გულიან ინტეგრალურ განტოლებას. ამ განტოლების ყოველი ინტეგრებადი შემოსაზღვრული ამონახსნი აკმაყოფილებს H პირობას (იხ. § 51) და ყოველ ასეთ ამონახსნს (6) ფორმულა შეუთანადებს უბან-უბან ჰოლომორფულ $\Phi(z)$ ფუნქციას, რომელიც (5) სასაზღვრო ამოცანის რომელიღაც ამონახსნია.

$\mathbf{K}\varphi = 0$ ერთგვაროვან განტოლებას არა აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. მართლაც, ვთქვათ, $\varphi(t)$ ამ განტოლების რაიმე ამონახსნია, მაშინ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi[\beta(t)]\,dt}{t - z}, \quad \text{როცა } z \in S^+,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z}, \quad \text{როცა } z \in S^-,$$

უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია აკმაყოფილებს ზემოთ დამტკიცებული ლემის პირობებს. მაშასადამე,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi[\beta(t)]\,dt}{t - z} = 0, \quad \text{როცა } z \in S^+,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z} = 0, \quad \text{როცა } z \in S^-.$$

ამ ორი ტოლობიდან გამოდის, რომ $\varphi(t) = \Psi^+(t)$, $\varphi[\beta(t)] = \Psi^-(t)$, სადაც $\Psi(z)$ არის უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში ქრობადი რაიმე ფუნქცია. $\Psi(z)$ ფუნქცია, ცხადია, L-ზე აკმაყოფილებს

$$\Psi^+[\beta(t)] = \Psi^-(t)$$

სასაზღვრო პირობას.

ამიტომ. ისევ იმავე ლემის ძალით, $\Psi(z)=0$. ამგვარად $\varphi(t)=\Psi^+(t)=0$ და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

წინა მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ (7) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია $\varphi(t)$-ს მიმართ.

ყველა ზემოთ ნათქვამის შეპირისპირებით მივიღებთ შემდეგ შედეგს:

(5) სასაზღვრო ამოცანის უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის, ნებისმიერი ამონახსნი გვეძლევა (6) ფორმულით, სადაც $P(t)$ ნებისმიერი პოლინომია, ხოლო $\varphi(t)$— (7) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ (5) სასაზღვრო ამოცანას აქვს უსასრულობაში ქრობადი ერთადერთი ამონახსნი; ეს ამონახსნი გვეძლევა (6) ფორმულით, რომელშიც უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $P(z)=0$ და $\varphi(t)$ არის (7) განტოლების ამონახსნი, როდესაც $P(t_0)=0$.

4^0. ახლა განვიხილოთ ამოცანა:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t) \quad L\text{-ზე} \tag{8}$$

ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით.

ვთქვათ, როგორც ჩვეულებრივ აღვნიშნავდით,

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\,[\arg G(t)]_L$$

არის $G(t)$ ფუნქციის ინდექსი. დავუშვათ, რომ $z=0$ წერტილი S^+ არეში მდებარეობს. მაშინ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ

$$g^*(t) = \ln\,[t^{-\varkappa}\,G(t)]$$

სავსებით გარკვეული, ცალსახა, H კლასის ფუნქციაა L-ზე. უშუალო შემოწმებით ცხადი ხდება, რომ

$$X(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\chi[\beta(t)]\,dt}{t-z}\right\}, \quad \text{როცა } z\in S^+,$$

$$X(z)=z^{-\varkappa}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\chi(t)\,dt}{t-z}\right\}, \quad \text{როცა } z\in S^-,$$

ფუნქცია, სადაც $\chi(t)$ არის $\mathrm{K}\chi = g^*$ ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, წარმოადგენს (8) სასაზღვრო ამოცანის (კერძო) ამონახსნს. ამ ფუნქციას ჩვენ ვუწოდებთ (8) ერთგვაროვანი ამოცანის კანონიკურ ამონახსნს. კანონიკური ამონახსნი არსად სასრულ სიბრტყეში ნულს არ უდრის, ხოლო მისი რიგი უსასრულობაში $(-\varkappa)$-ს ტოლია.

გადავწერთ რა (8) სასაზღვრო პირობას L-ზე შემდეგი სახით

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}$$

და გამოვიყენებთ წინა პუნქტის შედეგებს. ადვილად დავასკვნით:

(8) ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის, ნებისმიერი ამონახსნი გვეძლევა ფორმულით:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\rho[\beta(t)]\,dt}{t-z}, \quad \text{როცა} \quad z \in S^+,$$

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t-z} + X(z)\,P(z), \quad \text{როცა} \quad z \in S^-,$$

სადაც $P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, $X(z)$ კანონიკური ამონახსნია და $\rho(t)$ არის $K\rho = P(t)$ ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი.

როცა $\varkappa \leqslant 0$, მაშინ (8) ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას არა აქვს (არატრივიალური) უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი; როცა $\varkappa > 0$, მაშინ მას აქვს ზუსტად $\varkappa$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი, უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი.

5°. ახლა ამოვხსნათ (1) არაერთგვაროვანი ამოცანა. ვთქვათ, $X(z)$ არის ამ ერთგვაროვანი ამოცანის კანონიკური ამონახსნი, რომელიც მიიღება (2)-ისგან, როცა $g(t) = 0$. მაშინ (1) სასაზღვრო პირობა ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]},$$

საიდანაც 3° პუნქტში ნათქვამის საფუძველზე ადვილად დავასკვნით:

(1) არაერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის, ნებისმიერი ამონახსნი გვეძლევა ფორმულით:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\beta(t)]\,dt}{t-z}, \quad \text{როცა} \quad z \in S^+, \\ \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + X(z)\,P(z), \quad \text{როცა} \quad z \in S^-, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

რომელშიც $P(z)$ ნებისმიერი პოლინომია, $X(z)$ — შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანის კანონიკური ამონახსნი და $\varphi(t)$ არის

$$K\varphi = P(t) + \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]} \tag{10}$$

ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი.

უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნებისათვის ადვილად მივიღებთ შემდეგ შედეგს:

როცა $\varkappa \geqslant 0$, მაშინ (1) არაერთგვაროვანი ამოცანის უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები გვეძლევა (9) ფორმულით, რომელშიც უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $P(z) = P_{\varkappa-1}(z)$ ნებისმიერი პოლინომია არაუმეტეს $\varkappa - 1$ ხარისხისა ($P_{\varkappa-1}(z) = 0$, როცა $\varkappa = 0$).

როცა $\varkappa < 0$, მაშინ უსასრულობაში ქრობად (ერთადერთ) ამონახსნს მივიღებთ იმავე (9) ფორმულით, თუ დავუშვებთ, რომ $P(z)=0$, ამასთან, დაცული უნდა იყოს უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები:

$$\int_L h_k(t)\, g(t)\, dt = 0, \quad k = 1,\ 2, \ldots, -\varkappa, \tag{11}$$

სადაც $h_k(t)$ გარკვეული, წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, $g(t)$-გან დამოუკიდებელი.

აღვნიშნოთ, რომ, როცა $\varkappa = 0$, მაშინ ყოველთვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი, უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი. როცა $\varkappa > 0$, მაშინ ზოგადი ამონახსნი შეიცავს $\varkappa$ რაოდენობის ნებისმიერ კომპლექსურ მუდმივს.

(9)-იდან გამომდინარეობს, რომ (1) ამოცანის ნებისმიერი უბან-უბან ჰოლომორფული უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნის $\Phi^+(t)$ და $\Phi^-(t)$ სასაზღვრო მნიშვნელობები H პირობას აკმაყოფილებს; ეს, რა თქმა უნდა, იმის შედეგია, რომ $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები H პირობას დავუმორჩილეთ.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ბ. ხვედელიძის [20], ი. სიმონენკოს [3] და ა. დრაჩინსკის [2] ნაშრომებში (1) ამოცანა შესწავლილია კოშის ტიპის ინტეგრალით წარმოდგენად ფუნქციათა კლასში.

6°. აქამდე ვგულისხმობდით, რომ $\alpha(t)$ ინარჩუნებს L-ზე შემოვლის მიმართულებას. ის შემთხვევა, როდესაც $\alpha(t)$ ცვლის შემოვლის მიმართულებას საპირისპიროთი, მნიშვნელოვნად განსხვავდება განხილულისაგან[53].

ამის საპირისპიროდ, აღნიშნულ შემთხვევაში საკმაოდ სრულადაა გამოკვლეული ზემოთ განხილულის ანალოგიური ამოცანა, სახელდობრ, ამოცანა შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \tag{12}$$

სადაც $\overline{\Phi^-(t)}$ აღნიშნავს $\Phi^-(t)$-ს კომპლექსურად შეუღლებულს.

ეს სასაზღვრო ამოცანა პირველად დასვა და გამოიკვლია დ. კვესელავამ [4], [6], $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციებისათვის (1) ამოცანის ჩამოყალიბების დროს აღნიშნულ პირობებში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\alpha(t)$ ცვლის L-ზე შემოვლის მიმართულებას საპირისპიროთი და სრულდება დამატებითი პირობა

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{13}$$

ტ. კარლემანმა (T. Carleman [2]) განიხილა შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანა:

მოიძებნოს S^+ არეში ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ფუნქცია, შესაძლო პოლუსებით ამავე არეში, უწყვეტად გაგრძელებადი L-ზე,

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^+(t) + g(t) \tag{14}$$

[53] კერძოდ, როგორც ეს ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ მარტივი მაგალითებით, ამ შემთხვევაში ერთგვაროვან ამოცანას შეიძლება ჰქონდეს უსასრულოდ ბევრი უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნი.

სასაზღვრო პირობის მიხედვით, სადაც $G(t)$ და $g(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას და $G(t) \neq 0$ ყველგან L-ზე.

ტ. კარლემანმა შეადგინა, მაგრამ არ გამოუკვლევია, ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს $\Phi^{-}(t)$. იგივე პირობებში დ. კვესელავამ [5], [6] მიიღო აღნიშნული სასაზღვრო ამოცანის დასრულებული ამოხსნა, ტ. კარლემანისაგან რამდენადმე განსხვავებული მეთოდით.

7^0. შეუღლების გადაადგილებიანი სასაზღვრო ამოცანები შეიძლება განვიხილოთ რამდენადმე უფრო ზოგად პირობებში $\alpha(t)$ ფუნქციის მიმართ, სახელდობრ, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha(t)$-ს კონტური გადაჰყავს იმავე თვისებების მქონე სხვა კონტურში. როგორც აჩვენეს ლ. ჩიბრიკოვამ და ვ. როგოჟინმა [1], ზემოთ მოყვანილი დ. კვესელავას მეთოდი ამ შემთხვევაშიც გამოდგება. გარდა ამისა, კონფორმული ასახვის საშუალებით ეს შემთხვევა ადვილად დაიყვანება იმ შემთხვევაზე, როდესაც $\alpha(t)$-ს L კონტური თავისთავში გადაჰყავს.

ზემოთ ნახსენები ამოცანის ამოხსნა გახსნილი კონტურის შემთხვევაში მოცემულია ლ. ჩიბრიკოვას [1] ნაშრომში. მასვე ეკუთვნის ამავე ამოცანის გამოკვლევა იმ შემთხვევაში, როდესაც $G(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები გარკვეული სახით ნულისა და უსასრულობის ტოლ მნიშვნელობებს იღებს და, აგრეთვე, შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტა კონტურის სასრული რაოდენობის წერტილებზე.

8^0. შეუღლების გადაადგილებიანი სასაზღვრო ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

მოიძებნოს უბან-უბან ჰოლომორფული, უსასრულობაში სასრული რიგის მქონე $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ ვექტორი

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\, \Phi^{-}(t) + g(t) \tag{15}$$

პირობის მიხედვით L-ზე, სადაც $G(t)=\| G_{kj} \|$, $k, j=1, 2, \ldots, n$, მოცემული მატრიცაა, რომელიც აკმაყოფილებს H პირობას და არსად არ არის გადაგვარებული, $g(t)=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ვექტორი აგრეთვე აკმაყოფილებს H პირობას, ხოლო $\alpha(t)$ ფუნქციას აქვს 1^0 პუნქტის თვისებები.

ამ ამოცანის დასრულებული ამოხსნა პირველად მიიღო ნ. ვეკუამ[54] [9], [12], იხ. აგრეთვე ნ. ვეკუას [16] წიგნი, IV თავი.

ნ. ვეკუას აღნიშნულ წიგნში ამოხსნილია უფრო ზოგადი ამოცანაც, რომელიც შემდეგ სასაზღვრო პირობებს შეესაბამება:

$$\Phi_k^{+}[\alpha_k(t)] = \sum_{j=1}^{n} G_{kj}(t)\, \Phi_j^{-}(t) + g(t), \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

სადაც $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)$ ფუნქციები მოცემულია L-ზე და აქვს 1^0 პუნქტის a), b) თვისებები.

(15) სასაზღვრო ამოცანა იმ შემთხვევაში, როდესაც $G(t)$ მატრიცის ელემენტებს აქვს პირველი გვარის წყვეტა L კონტურის სასრული რაოდენობის წერტილებზე, განხილულია ლ. ჩიბრიკოვას [1] ზემოთ აღნიშნულ ნაშრომში.

გ. მანჯავიძისა და ბ. ხვედელიძის [1] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ (15) სასაზღვროს ამოცანის დაყვანა შეიძლება შეუღლების ჩვეულებრივ ამოცანაზე.

54 ამ ამოცანას ნ. ვეკუა უწოდებს ჰილბერტის განზოგადებულ ამოცანას რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის.

9⁰. ნ. ვეკუას [22], [24] ნაშრომებში დასმულია და ამოხსნილი § 137-ში ნახსენები (137,1) ტიპის განზოგადებული, გადაადგილებიანი სასაზღვრო ამოცანები რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში. [24] ნაშრომში ამოხსნილია ასეთი სახის უზოგადესი ამოცანა

$$\Phi_j^+ [\alpha_j(t_0)] = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t_0)\, \Phi_k^-(t_0) + \sum_{k=1}^{n} B_{jk}(t_0)\, \overline{\Phi_k^-(t_0)} + g_j(t_0),$$

$$j=1,\ 2, \ldots, n$$

სასაზღვრო პირობით, სადაც $A_{jk}(t)$, $B_{jk}(t)$, j, $k=1, 2, \ldots, n$ მოცემული H კლასის ფუნქციებია, $\alpha_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, n$, ფუნქციები აკმაყოფილებს 1⁰ პუნქტის a), b) პირობებს, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$ საძიებელი უბან-უბან ჰოლომორფული $\Phi(z)$ ვექტორის კომპონენტებია.

ნ. ვეკუა აგებს განსახილველი ამოცანების ეკვივალენტურ ინტეგრალურ განტოლებებს და მათი გამოკვლევის საფუძველზე იძლევა მათ ამოხსნას.

კარლემანის სასაზღვრო ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის და აგრეთვე ზოგიერთი სხვა ამოცანა განხილულია ნ. ვეკუას [19], [20], [23], [25 — 27] ნაშრომებში. ამ ნაშრომებიდან განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს [23] ნაშრომი, სადაც მოცემულია კარლემანის ამოცანის ამოხსნა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც (13) პირობა შეცვლილია უფრო ზოგადი

$$\alpha^m(t) = t$$

პირობით, სადაც m არის ნებისმიერი ლუწი, დადებითი რიცხვი[55].

შეუღლების გადაადგილებიანი ამოცანის ზოგიერთი სხვა განზოგადება განხილულია გ. ალექსანდრიას [1], [2]; ს. ჩაკვეტაძის [1], ე. ხასაბოვის [1], მ. ბედოევას [2] ნაშრომებში, ხოლო ზოგიერთი უფრო ზოგადი ანალოგიური ამოცანა — ი. მელნიკის [4], გ. ლიტვინჩუკის [1—3], გ. ლიტვინჩუკისა და ე. ხასაბოვას [1—3], ლ. მიხაილოვის [3], ე. ზვეროვიჩის [2], გ. მანჯავიძის [8] ნაშრომებში.

10⁰. (81,1) ტიპის, მაგრამ გადაადგილებიანი ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის მრავლადბმულ არეში განიხილება მ. განინის [3] ნაშრომში.

ნ. ვეკუამ [28 — 30] განიხილა ისეთი გადაადგილებიანი ამოცანები, რომელთა სასაზღვრო პირობები საძიებელ ფუნქციასთან ერთად შეიცავს მათ წარმოებულებს და აგრეთვე შეუღლებულ მნიშვნელობებს. იყენებს რა გარკვეულ ინტეგრალურ წარმოდგენებს ამონახსნებისათვის, ნ. ვეკუას ეს ამოცანები დაჰყავს სინგულარულ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებზე, რომლებიც მასვე აქვს შესწავლილი [28] სტატიაში.

(81,1) ტიპის, მაგრამ გადაადგილებიანი ამოცანა განიხილება რ. ისახანოვის [2] ნაშრომშიც.

11⁰. მეტად საინტერესოა ეგრეთ წოდებული სინგულარული ინტეგრალური გადაადგილებიანი განტოლებების შესწავლა. ასეთი განტოლებებისათვის მიძღვნილ შრომებს შორის უნდა აღინიშნოს ნ. ვეკუას [12], რ. ისახანოვის [4], რ. კორძაძის [1—3], გ. ლიტვინჩუკის [2], ტ. კერიმოვის [2] ნაშრომები.

---

[55] აქ მიღებულია

$$\alpha^k(t) \equiv \alpha\,(\alpha^{k-1}(t)), \quad k=2, \ldots, m,$$

აღნიშვნა, $\alpha^1(t) \equiv \alpha(t)$.

დ ა ნ ა რ თ ი VI

ბ. ბოიარსკი

პირდაპირი მიდგომა სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების თეორიისადმი[66]

ამ უკანასკნელ ხანებში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია მნიშვნელოვნად განვითარდა, განსაკუთრებით მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისადმი მიძღვნილ ნაწილში. ეს პროგრესი დაკავშირებულია ახალ თვალსაზრისთან. ასეთ განტოლებათა თეორიის საკითხებზე მიზანშეწონილი აღმოჩნდა ყურადღველო ზოგიერთი ჰომოტოპიური მოსაზრება, რომლებმაც კლასიკურ თეორიაშიც მიიპყრო ყურადღება სინგულარულ განტოლებათა სისტემის ინდექსის ფორმულასთან დაკავშირებით. აღმოჩნდა, რომ ჰომოტოპიური საკითხები აგრეთვე მნიშვნელოვანია შეუღლების ამოცანის კერძო ინდექსების თეორიაში რამდენიმე უცნობი ფუნქციის შემთხვევაში (იხ. ბ. ბოიარსკი [4]).

ჩვენი აზრით ჰომოტოპიური მიდგომა საშუალებას იძლევა უკეთ გავიგოთ სინგულარულ განტოლებათა სისტემებისა და შეუღლების ამოცანათა თეორიების ცალკეულ ნაწილთა ხვედრითი წონა და აგრეთვე ამ თეორიათა ურთიერთდამოკიდებულება.

ქვემოთ, კერძოდ, ნაჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება მივიღოთ სინგულარულ განტოლებათა ინდექსის ფორმულა ისე, რომ არ გამოვიყენოთ შეუღლების ამოცანის ბოლომდე გამოკვლევა. ამასთან, განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა III თეორემის დამტკიცებას (იხ. § 53 და § 120). I, II თეორემების III თეორემისაგან გამოყოფის მიზანშეწონილობა ნათლად ჩანს განტოლებათა სისტემების თეორიაში, რაც გამოკვეთილადაა ნაჩვენები წინამდებარე მონოგრაფიაში (§ 53). ამ დანართში გადმოცემული ფაქტები ახალი არ არის. ყველაფერი ეს ცნობილია ალბათ ყველასათვის, ვისაც კი უფიქრია ინდექსის პრობლემაზე ჰომოტოპიურ ტერმინებში. უნდა აღინიშნოს, რომ ქვემოთ წარმოდგენილ მიდგომას დიდი მნიშვნელობა აქვს მრავალგანზომილებიანი ამოცანისათვის (იხ. ა. ვოლპერტი [1], ბ. ბოიარსკი [6], R. T. Seeley [2]).

ეს დანართი შეძლებისამებრ ისეა გადმოცემული, რომ მჭიდროდ უახლოვდება წინამდებარე მონოგრაფიაში შემუშავებულ მეთოდებსა და ცნებებს. სახელ-

---

[66] წინამდებარე დანართი წარმოადგენს პროფ. ბ. ბოიარსკის მოხსენების ტექსტს, რომელიც მან წაიკითხა 1966 წლის მაისში მათემატიკური ინსტიტუტის მოწვევით თბილისში ყოფნისას. ჩემი თხოვნით, ეს ტექსტი მაშინვე გადმომცა ავტორმა ამ წიგნის III რუსული გამოცემის დამატების სახით გამოსაქვეყნებლად (მაშინ ვფიქრობდი, რომ გამოცემის მომზადებას მოვახერხებდი გაცილებით ადრე). ცოტა ხნის შემდეგ გამოქვეყნდა ს. მიხლინის [11] სტატია, რომელიც შეიცავდა ავტორის მიერ დამოუკიდებლად მიღებულ ანალოგიურ შედეგებს.

დობრ, როგორც წესი, თავს ვარიდებთ ისეთი ცნებების გამოყენებას, რომლებიც ძირითად ტექსტში არ გვხვდება, იქნება ეს თეორიულ-ფუნქციონალური თუ ალგებრული და ტოპოლოგიური ცნებები.

ამიტომ მოვიყვანეთ, შეძლებისამებრ, ელემენტარული დამტკიცება ატკინსონის თეორემისა[67] სინგულარულ ოპერატორთა კომპოზიციის ინდექსის შესახებ; გარდა ამისა, იმისათვის, რომ თავიდან აგვეცილებინა სხვა ლიტერატურაზე მითითება არაგადაგვარებული კომპლექსური მატრიცების ჯგუფის ჰომოტოპიური თვისებების შესახებ, აქვე გადმოვეცით საჭირო ფაქტები 4, 5, 6 ელემენტარული ლემების სახით.

შევნიშნავთ, რომ თეორიულ-ფუნქციონალურ ნაწილში თავს ვარიდებთ შეუღლებული სივრცეებისა და ოპერატორების შემოყვანას და ამ მონოგრაფიის სტილში ვიყენებთ მხოლოდ მიკავშირებულ განტოლებათა სისტემის ცნებას. უნდა ითქვას, რომ მონოგრაფიაში წარმოდგენილ მიდგომას გარკვეული უპირატესობა აქვს იმასთან შედარებით, რაც ჩვეულებრივ მიღებულია ფუნქციონალური ანალიზის სახელმძღვანელოებში; ასე განთავისუფლებული ვართ შეუღლებულ სივრცეთა სტრუქტურის შესწავლის აუცილებლობისაგან, რაც ზოგჯერ არც თუ ისე ადვილ ამოცანას წარმოადგენს, განსაკუთრებით არარეფლექსურ სივრცეთა შემთხვევაში. ყველა მსჯელობა მიმდინარეობს H^μ კლასისათვის. თუმცა, რაიმე არსებითი ცვლილების გარეშე, უფრო მარტივადაც კი, შეიძლება განვიხილოთ სისტემები უწყვეტი მახასიათებელი ნაწილით L_p სივრცეში (მანჯავიძე—ხვედელიძის შრომები). ეს მიდგომა წყვეტილი კოეფიციენტების შემთხვევაშიც გამოდგება. მაშინ ამ მონოგრაფიაში შემოყვანილი $h(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ კლასები ბუნებრივად ჩნდება როგორც (7) სახის ოპერატორების სავსებით უწყვეტობის კლასები.

გადმოცემის გასამარტივებლად ვიგულისხმებთ, რომ ინტეგრების L წირი შედგება სასრული რაოდენობის, მარტივი, შეკრული ლიაპუნოვის კონტურებისაგან, რომელთაც საერთო წერტილები არა აქვთ და შემოსაზღვრავენ სიბრტყის რაიმე ბმულ ნაწილს (ნახ. 17 § 29-ში).

შემდგომში გამოვიყენებთ H^μ კლასის ვექტორულ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ ფუნქციათა წრფივ ნორმირებულ სივრცეს (იხ. § 49 და § 133).

სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას ასე გამოვსახავთ:

$$\mathbf{K}\varphi = A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \mathbf{k}\varphi = f(t_0) \tag{1}$$

(იხ. § 119), ხოლო $\mathbf{K}'\varphi = 0$ აღნიშნავს შესაბამის მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებას.

მოსახერხებელია (1) სისტემის მარცხენა მხარის ასეთი გამოსახვა:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A\mathbf{E}\varphi + B\mathbf{I}\varphi + \mathbf{k}\varphi, \tag{2}$$

სადაც

$$\mathbf{E}\varphi = \varphi \text{ და } \mathbf{I}\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{3}$$

---

[67] ფ. ატკინსონი [1].

გავიხსენოთ, რომ, სოხოცკი—პლემელისა (§ 16) და შექცევის (§ 32) ფორმულების ძალით, $I\varphi$ ოპერატორი აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობას:

$$\mathbf{I}^2\varphi = E\varphi. \tag{4}$$

(2) ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილი $\mathbf{K}^0$ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{K}^0\varphi = A\mathbf{E}\varphi + B\mathbf{I}\varphi. \tag{5}$$

§ § 45 და 119-ში ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე $\mathbf{K}_1$ და $\mathbf{K}_2$ სინგულარული ოპერატორების კომპოზიციის მახასიათებელი ნაწილი მთლიანად განისაზღვრება $\mathbf{K}_1^0$ და $\mathbf{K}_2^0$ მახასიათებელი ნაწილებით. მოსახერხებელია, § § 45 და 119-ის შედეგები ასე გამოვსახოთ:

მატრიცულ ფუნქციათა $(S(t), D(t))$ წყვილს, სადაც

$$S(t) = A(t) + B(t) \quad \text{და} \quad D(t) = A(t) - B(t), \tag{6}$$

ვუწოდოთ (2) ოპერატორის σ სიმბოლო: $\sigma(K) = (S, D)$; (S', D') და (S'', D'') სიმბოლოების ნამრავლი ვუწოდოთ $(S'S'', D'D'')$ სიმბოლოს. მაშინ (119, 17) ფორმულა იმას ნიშნავს, რომ სამართლიანია შემდეგი

ლემა 1. *სინგულარულ ოპერატორთა ნამრავლის (კომპოზიციის) სიმბოლო უდრის ამ ოპერატორთა სიმბოლოების ნამრავლს.*

ლემის სხვაგვარი დამტკიცება შეიძლება მივიღოთ, თუ შევნიშნავთ, რომ

$$A\mathbf{I}\varphi - \mathbf{I}A\varphi \tag{7}$$

სახის ოპერატორის მახასიათებელი ნაწილი ნულოვანია ნებისმიერი $A \in H^\mu$ მატრიცისათვის [სხვანაირად რომ ვთქვათ, (7) სახის ოპერატორი სავსებით უწყვეტია, შდრ. § § 49, 119] და გამოვიყენებთ (4) ფორმულას.

ნორმალურობის პირობა

$$\det S(t) \neq 0, \quad \det D(t) \neq 0 \tag{8}$$

ნიშნავს, რომ (6) სიმბოლოს აქვს მისი შებრუნებული H^μ კლასის მატრიცულ ფუნქციებში.

ცხადია, რომ ნორმალური ტიპის განტოლებათა (1) სისტემა ყოველთვის ეკვივალენტურია განტოლებათა ისეთი სისტემისა, რომლისთვისაც

$$S(t) = E, \tag{9}$$

სადაც E აღნიშნავს ერთეულოვან მატრიცს.

მაშინ სიმბოლო რედუცირდება $D(t)$ მატრიცზე. თუ, აგრეთვე, $D(t) = E$, მაშინ გვექნება

$$\varphi + \mathbf{k}\varphi = f \tag{10}$$

განტოლებათა სისტემა; ეს კი ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლებათა სისტემაა.

H^μ კლასის მატრიცულ $D(t)$, $t \in L$ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც (8) პირობას აკმაყოფილებენ, აღვნიშნოთ $\Omega^\mu(L; n)$-ით.

ცხადია, რომ

$$\mathbf{K}_0(D) = \frac{E + D(t_0)}{2}\varphi(t_0) + \frac{E - D(t_0)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} \tag{11}$$

ოპერატორი ნორმალური ტიპისაა და

$$\sigma(\mathrm{K}_0(D)) = (E, D). \qquad (12)$$

ამგვარად, $\Omega^u(L; n)$ კლასის ნებისმიერი ელემენტი განსაზღვრავს რომელიღაც სინგულარულ ოპერატორს. ამ ოპერატორთა კლასში, რომლებისთვისაც $S(t) = E$, $\mathrm{K}_0(D)$ ოპერატორი ცალსახად განისაზღვრება სავსებით უწყვეტი ოპერატორის სიზუსტით.

ამ შენიშვნიდან და 1 ლემიდან გამომდინარეობს, რომ (8) პირობა საკმარისია იმისათვის, რომ შეიძლებოდეს (1) განტოლებათა სისტემის რეგულარიზაცია. § § 45, 120-ის მსჯელობის შესაბამისად, (1) განტოლებათა სისტემის რეგულარიზატორია ნებისმიერი ოპერატორი, რომლის სიმბოლო არის $(S^{-1}(t)\ D^{-1}(t))$.

ვთქვათ, α და β აღნიშნავს, შესაბამისად, $\mathrm{K}\varphi=0$ და $\mathrm{K}'\varphi=0$ განტოლებათა სისტემების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვებს. ესენი სასრული რიცხვებია (იხ. § § 45, 50, 120).

$\varkappa(\mathrm{K}) = \alpha-\beta$ სხვაობას ვუწოდოთ (1) **სისტემის ანალიზური ინდექსი.** გავიხსენოთ, რომ ძირითადი ტექსტის აღნიშვნების მიხედვით $\alpha = k$ და $\beta=k'$; შემდგომში α და β-ს ნაცვლად ზოგჯერ დავწერთ $\alpha(\mathrm{K})$ და $\beta(\mathrm{K})$-ს, რაც აშკარად მიუთითებს ამ რიცხვების კავშირზე K ოპერატორთან.

მოსახერხებელია სასრული რანგის ოპერატორის ცნების შემოყვანა. m ოპერატორს ეწოდება სასრული რანგის ოპერატორი, თუ m-ს მთელი H^μ სივრცე გადაჰყავს სასრულგანზომილებიან ქვესივრცეში. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ნებისმიერი სასრული რანგის ოპერატორი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\mathrm{m}\varphi = \sum_{i=1}^{N} f_i \mathrm{m}_i \varphi,$$

სადაც $\mathrm{m}_i\varphi$ რაიმე ფუნქციონალებია H^μ სივრცეში, ხოლო $f_i \in H^\mu$. ცხადია, რომ § 120-ის 11 თეორემა შეიცავს შემდეგ თეორემასაც:

თეორემა 1. ნებისმიერი სასრული რანგის m ოპერატორისათვის K და $\mathrm{K}+\mathrm{m}$ ოპერატორები ერთდროულადაა ნორმალური ტიპის ოპერატორები და

$$\varkappa(\mathrm{K}) = \varkappa(\mathrm{K}+\mathrm{m}). \qquad (13)$$

შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ β რიცხვი არაერთგვაროვანი (1) სისტემის ამოხსნადობის წრფივად დამოუკიდებელ პირობათა რიცხვია. ვინაიდან $(\mathrm{K}')'=\mathrm{K}$, ამიტომ § 120-ის 1 თეორემასთან ერთად ეს იმას ნიშნავს, რომ K და K' ოპერატორების ანალიზური ინდექსები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულით:

$$\varkappa(\mathrm{K}') = -\varkappa(\mathrm{K}).$$

ხელსაყრელია შემდეგი ლემის გამოყენება:

ლემა 2. თუ $\varkappa(\mathrm{K})\geqslant 0$, მაშინ არსებობს სასრული რანგის ისეთი m ოპერატორი, რომ $\beta(\mathrm{K}+\mathrm{m})=0$ და, მაშასადამე, $\alpha(\mathrm{K}+\mathrm{m})=\varkappa(\mathrm{K})$.

თუ $\varkappa(\mathrm{K})<0$, მაშინ არსებობს სასრული რანგის ისეთი m ოპერატორი, რომ $\alpha(\mathrm{K}+\mathrm{m})=0$ და, შესაბამისად, $\varkappa(\mathrm{K})=-\beta(\mathrm{K}+\mathrm{m})$.

დამტკიცება (შდრ. § 52):

ნებისმიერი H^{μ} კლასის (ვექტორული) ფუნქციებისათვის მივიღოთ (როგორც ეს წიგნის ტექსტშია) შემდეგი აღნიშვნა:

$$(f,\ \varphi)=\int\limits_{L} f(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

ვთქვათ, $\widehat{g_i}$, $i=1, 2, \dots, \alpha$ არის H^{μ} კლასის ისეთი (ვექტორული) ფუნქციები, რომ $(\varphi_i,\ \widehat{g_j})=\delta_{ij}$, სადაც φ_i, $i=1, 2, \dots, \alpha$ არის $K\varphi=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა (შდრ. IV დანართს, აგრეთვე § 110-ს).

მივიღოთ, აგრეთვე შემდეგი აღნიშვნა[58]:

$$[\varphi,\ \psi]=\int\limits_{L}\overline{\varphi}\psi\,ds=(\overline{\varphi}\,\overline{t'},\ \psi),\quad t'=\frac{dt}{ds}.$$

$K'\varphi=0$ სისტემის ამონახსნთა სივრცეში შევარჩიოთ $g_1, g_2, \dots, g_\beta$ ბაზისი, $[g_i,\ g_j]$-ის მიმართ ორთონორმირებული, ე. ი. ისეთი, რომ

$$[g_i,\ g_j]=(\overline{g_i}\,\overline{t'},\ g_j)=\delta_{ij}.$$

დავუშვათ, რომ

$$\mathfrak{m}\varphi=\sum_{i=1}^{\beta}(\varphi,\ \widehat{g_i})\ \overline{g_i}\,\overline{t'},$$

გვექნება

$$\mathfrak{m}\varphi_j=\overline{g_j}\,\overline{t'}=\psi_j.$$

განტოლებათა სისტემა

$$K\varphi+\mathfrak{m}\varphi=f$$

ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის; მართლაც, თუ

$$\widehat{f}=f-\sum_{k=1}^{\beta}(f,\ g_k)\,\psi_k,$$

მაშინ

$$(\widehat{f},\ g_j)=(f,\ g_j)-\sum_{k=1}^{\beta}(f,\ g_k)(\psi_k,\ g_j)=(f,\ g_j)-\sum_{k=1}^{\beta}(f,\ g_k)\,\delta_{kj}=0$$

და

$$K\varphi=\widehat{f}$$

სისტემას აქვს ამონახსნი φ_0. ეს ამონახსნი ისე შეიძლება შეირჩეს, რომ

$$\mathfrak{m}\varphi_0=0,$$

[58] $\overline{\varphi}$-ით აღნიშნულია ვექტორი, რომლის კომპონენტები φ ვექტორის კომპონენტებთან კომპლექსურად შეუღლებულია.

რადგან ის განსაზღვრულია

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i \varphi_i \qquad (\alpha \geqslant \beta)$$

წრფივი კომბინაციის სიზუსტით. დავუშვათ

$$\mu_i = (f, g_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \beta$$

და განვიხილოთ ასეთი ვექტორი:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{\beta} \mu_i \varphi_i.$$

მაშინ

$$K\varphi + m\varphi = K\varphi_0 + m\varphi_0 + K\left(\sum_{i=1}^{\beta} \mu_i \varphi_i\right) + \sum_{i=1}^{\beta} \mu_i m\varphi_i =$$

$$= f - \sum_{k=1}^{\beta} (f, g_k)\psi_k + \sum_{i=1}^{\beta} \mu_i \psi_i = f.$$

ანალოგიურად განვიხილავთ უარყოფითი ინდექსის შემთხვევას. 2 ლემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა:

თეორემა 2.

$$\varkappa(K_1K_2) = \varkappa(K_1) + \varkappa(K_2). \tag{14}$$

დამტკიცება. თუ $\alpha(K_1) = \varkappa(K_1)$ და $\alpha(K_2) = \varkappa(K_2)$, მაშინ, ცხადია, $\beta(K_1K_2) = 0$, რადგან $K_1K_2\varphi = f$ განტოლებათა სისტემა ყოველთვის ამოხსნადია. მართლაც, ჯერ შეიძლება ამოვხსნათ $K_1\widehat{\varphi} = f$ განტოლება, შემდეგ კი $K_2\varphi = \widehat{\varphi}$ განტოლება. ამის შემდეგ ადვილად მივიღებთ, რომ $\alpha(K_1K_2) = \alpha(K_1) + \alpha(K_2)$. აქედან და მე-2 ლემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ (14) ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი K_1 და K_2 ოპერატორებისათვის, რომლებისთვისაც $\varkappa(K_i) \geqslant 0$.

მართლაც, მაშინ მე-2 ლემის ძალით არსებობს ისეთი m_1 და m_2 ოპერატორები, რომ

$$\beta(K_i + m_i) = 0, \quad i = 1, 2;$$

მაშინ

$$\varkappa((K_1+m_1)(K_2+m_2)) = \varkappa(K_1+m_1) + \varkappa(K_2+m_2) = \varkappa(K_1) + \varkappa(K_2)$$

და

$$(K_1+m_1)(K_2+m_2) = K_1K_2 + m_1K_2 + K_1m_2 + m_1m_2 = K_1K_2 + m,$$

სადაც m ოპერატორი არის სასრული რანგისა.

ანალოგიურად განიხილება $\varkappa(K_i) \leqslant 0$ შემთხვევა. თუმცა, ეს უკანასკნელი წინა შემთხვევაზე დაიყვანება მიკავშირებულ განტოლებებზე გადასვლით.

დაგვრჩა შემთხვევა, როცა $\varkappa(K_1) \geqslant 0$ და $\varkappa(K_2) < 0$. მე-2 ლემის ძალით შეგვიძლია მხოლოდ ის შემთხვევა განვიხილოთ, როდესაც $\beta(K_1) = 0$ და $\alpha(K_2) = 0$. უნდა გამოვითვალოთ $\alpha(K_1K_2)$ და $\beta(K_1K_2)$ რიცხვები. $K_1K_2\varphi = 0$ განტოლების ამონახსნები არის ამავე დროს ამონახსნები შემდეგი განტოლებისა:

$$K_2\varphi = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \lambda_i\varphi_i \quad (\alpha_1=\alpha(K_1). \quad \lambda_i \text{ მუდმივებია}), \tag{15}$$

სადაც $\{\varphi_i\}$ წარმოადგენს $K_1\varphi = 0$ განტოლების ამონახსნთა სრულ სისტემას. (15) სისტემა ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sum_{i=1}^{\alpha_1} \lambda_i(\varphi_i, g_k)=0. \quad k=1, 2, \ldots, \beta_2 \quad (\beta_2=\beta(K_2)); \tag{16}$$

$\{g_k\}$ არის $K_2'g=0$ განტოლების ამონახსნთა სრული სისტემა. ვთქვათ, $\|(\varphi_i, g_k)\|$ მატრიცის რანგია p. მაშინ (15) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობა იქნება

$$\alpha(K_1K_2) = \alpha(K_1)-p.$$

განვიხილოთ $K_2'K_1'\varphi=0$ ერთგვაროვანი სისტემა, რომელიც $K_1K_2\varphi = f$ სისტემის მიკავშირებულია. მისი ამონახსნები ამონახსნებია შემდეგი განტოლებისა:

$$K_1'\varphi = \sum_{k=1}^{\beta_2} \mu_k g_k,$$

სადაც μ_k მუდმივებია; მაგრამ ეს განტოლება ამოხსნადია მხოლოდ მაშინ, როცა დაცულია შემდეგი α_1 რაოდენობის პირობა:

$$\sum_{k=1}^{\beta_2} \mu_k(g_k, \varphi_j)=0. \quad j=1, 2, \ldots \alpha_1. \tag{17}$$

ეს გვაძლევს $K_2'K_1'\varphi = 0$ სისტემის β_2-p რაოდენობის ამონახსნს. აქედან

$$\beta(K_1K_2)=\beta_2-p.$$

საბოლოოდ

$$\varkappa(K_1K_2)=\alpha(K_1K_2)-\beta(K_1K_2)=\alpha_1-\beta_2=\varkappa(K_1)+\varkappa(K_2),$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

შემდეგი თეორემა უშუალოდაა დაკავშირებული § 133-ის მსჯელობასთან. კერძოდ, ვისარგებლებთ იქ შემოყვანილი აღნიშვნით მატრიცული ფუნქციის ნორმისათვის

$$\| D\|_\mu = \max \| d_{ik}\|_\mu.$$

თეორემა 8. ვთქვათ, K_1 არის ნორმალური ტიპის სინგულარული ოპერატორი (E, D_1) სიმბოლოთი და K_2 სხვა სინგულარული ოპერატორია, ისეთი, რომ $\sigma(K_2)=(E, D_2)$; ამასთან:

$$\| D_1-D_2\|_\mu < \varepsilon. \tag{18}$$

მაშინ საკმაოდ მცირე ε-ისათვის K_2 ოპერატორი ნორმალური ტიპისაა და $\varkappa(K_2)=\varkappa(K_1)$.

დამტკიცება. K_2-ის ნორმალურობა საკმაოდ მცირე ε-ისათვის უშუალოდ გამომდინარეობს (18)-დან. განვიხილოთ K_3 ოპერატორი $(E, D_2D_1^{-1})$ სიმბოლოთი. (18)-ის ძალით

$$\| D_2D_1^{-1}-E \|_\mu = \| (D_2-D_1) D_1^{-1} \|_\mu \leqslant n\varepsilon \| D_1^{-1} \|_\mu;$$

ამიტომ K_3 ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$K_3\varphi = \frac{1}{2} (E+D_2D_1^{-1}) \varphi + \frac{1}{2} (E-D_2D_1^{-1}) I\varphi + k\varphi = E\varphi + A\varphi + k\varphi,$$

სადაც k სავსებით უწყვეტი ოპერატორია და A კი ისეთი ოპერატორია, რომ $\| A \|_\mu < 1$ საკმაოდ მცირე ε-ისათვის.

ამიტომ არსებობს ისეთი R ოპერატორი, რომ

$$(E+A) R\varphi = R(E+A) \varphi = \varphi.$$

სახელდობრ, შეიძლება ავიღოთ:

$$R\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \varphi;$$

$R\varphi$-ის განმსაზღვრელი მწკრივი კრებადია H^μ ნორმირებულ სივრცეში.

განტოლება

$$K_3\varphi = E\varphi + A\varphi + k\varphi = f$$

ეკვივალენტურია

$$\varphi + Rk\varphi = Rf$$

განტოლებისა, რომელიც წარმოადგენს ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლებას. ამიტომ

$$\varkappa(K_3) = 0.$$

შემდეგ გვაქვს

$$\sigma(K_3K_1) = (E, D_2) \quad \text{ანუ} \quad K_3K_1 = K_2 + v,$$

სადაც v სავსებით უწყვეტი ოპერატორია.

1 და 2 თეორემების ძალით

$$\varkappa(K_2) = \varkappa(K_2+v) = \varkappa(K_3K_1) = \varkappa(K_3) + \varkappa(K_1) = \varkappa(K_1),$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა აუცილებელია $\Omega^\mu(L, n)$ სიმრავლის ზოგიერთი თვისების შესწავლა. ამ მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა:

$\Omega^\mu(L, n)$ სიმრავლის D_1 და D_2 ორ ელემენტს ვუწოდოთ ჰომოტოპიური: $D_1 \sim D_2$, თუ არსებობს $(L \times I)$-ზე განსაზღვრული მატრიცული $D(t, \lambda)$ ფუნქცია (I აღნიშნავს მონაკვეთს, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$), რომელიც ეკუთვნის H^μ კლასს t და λ-ს მიმართ, $\det D(t, \lambda) \neq 0$ და

$$D(t; 0) \equiv D_1(t), \quad D(t, 1) \equiv D_2(t).$$

ჰომოტოპიის მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება. სახელდობრ, ჰომოტოპიის არსებითი თვისებაა მისი რიგრიგობით გამოყენების შესაძლებლობა.

ლემა 3. ვთქვათ, L არის მარტივი შეკრული წირი, მაშინ ყოველი ფუნქცია $\Omega^{\mu}(L;\ 1)$-დან $t^{\varkappa}$ ფუნქციის ჰომოტოპიურია, სადაც $\varkappa$ მთელი რიცხვია (სიმარტივისათვის ვგულისხმობთ, რომ კოორდინატთა სათავე მდებარეობს L წირით შემოსაზღვრული სასრული არის შიგნით).

დამტკიცება. ვთქვათ, $a(t) \in \Omega^{\mu}(L;\ 1)$ და, ვთქვათ,

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} [\arg a(t)]_L.$$

მაშინ L-ზე არსებობს $a(t)\, t^{-\varkappa}$ ფუნქციის ლოგარითმის ცალსახა შტო. $a(t)\, t^{-\varkappa} = e^{h(t)}$, $h(t)$ აკმაყოფილებს H პირობას L-ზე; ამიტომ

$$a(t,\ \lambda) = t^{\varkappa} e^{\lambda h(t)},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\quad t \in L,$$

ფუნქცია ახორციელებს საჭირო ჰომოტოპიას.

თუკი L წირი შედგება რამდენიმე მარტივი $L_0, L_1, \ldots, L_m$ კონტურებისაგან, რომლებიც ერთად შემოსაზღვრავენ სიბრტყის ბმულ G ნაწილს, ამასთან, L_k, $k \geqslant 1$ კონტურები განლაგებულია L_0 კონტურის შიგნით, მაშინ, ცხადია, სამართლიანია

ლემა 4. ნებისმიერი $a(t)$ ფუნქცია $\Omega^{\mu}(L;\ 1)$-დან ჰომოტოპიურია შემდეგი ფუნქციისა:

$$(t-t_0)^{\varkappa_0-\varkappa_1-\cdots-\varkappa_m} (t-t_1)^{\varkappa_1} \ldots (t-t_m)^{\varkappa_m},$$

სადაც

$$\varkappa_i = \frac{1}{2} [\arg a(t)]_{L_i}, \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ m;$$

ამასთან $t_0 \in G$, ხოლო t_i, $i \geqslant 1$, წერტილები არჩეულია L_i-ის შიგნით.

$\Omega^{\mu}(L;\ n)$-ის ელემენტების ჰომოტოპიური კლასიფიკაცია უშუალოდ დაიყვანება $n=1$ შემთხვევაზე. სახელდობრ, ადგილი აქვს შემდეგ ლემას:

ლემა 5. ნებისმიერი მატრიცული $D(t)$ ფუნქცია ჰომოტოპიურია შემდეგი მატრიცული ფუნქციისა:

$$D^*_{ij} = \| d_{ij}(t) \|,$$

სადაც

$$d_{ij}=0,\quad i \neq j,\quad d_{ii}=1,\ \text{როცა}\ \ i \geqslant 2.\quad d_{11} \in \Omega^{\mu}(L;\ 1).$$

დამტკიცება. ქვემოთ აღწერილია $D(t)$ მატრიცის საჭირო ჰომოტოპიური დეფორმაციის რამდენიმე საფეხური. თუ პირველი სტრიქონის რომელიმე ელემენტი, მაგალითად, $d_{11}(t) \neq 0$ L-ზე, მაშინ, ცხადია, რომ მატრიცული ფუნქცია

$$D(t,\ \lambda) = \left\| \begin{matrix} d_{11}\ \ d_{12}-\lambda \dfrac{d_{12}}{d_{11}}\, d_{11}\ \ d_{13}-\lambda \dfrac{d_{13}}{d_{11}}\, d_{11} \ldots d_{1n}-\lambda \dfrac{d_{1n}}{d_{11}}\, d_{11} \\ \cdot \\ d_{n1}\ \ d_{n2}-\lambda \dfrac{d_{12}}{d_{11}}\, d_{n1}\ \ d_{n3}-\lambda \dfrac{d_{13}}{d_{11}}\, d_{n1} \ldots d_{nn}-\lambda \dfrac{d_{1n}}{d_{11}}\, d_{n1} \end{matrix} \right\|$$

ახორციელებს D-ს ჰომოტოპიას შემდეგი სახის მატრიცულ ფუნქციაში

$$\left\|\begin{matrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

შემდეგ ჰომოტოპია ხორციელდება

$$D(t, \lambda) = \left\|\begin{matrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ (1-\lambda)\, d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \\ (1-\lambda)\, d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{matrix}\right\|$$

ფორმულით.

თუ $d_{11}(t)$ (და აგრეთვე, არც ერთი სხვა ელემენტი პირველი სტრიქონისა) არ აკმაყოფილებს $d_{11}(t) \neq 0$ პირობას L-ზე, მაშინ მას შეიძლება მიუახლოვდეთ თანაბრად $\widetilde{d}_{11}(t)$ ფუნქციით,

$$|d_{11}(t) - \widetilde{d}_{11}(t)| < \varepsilon$$

და $d_{11}(t)$ შევცვალოთ ამ ფუნქციით, რომელიც უკვე აკმაყოფილებს სასურველ პირობას. საკმაოდ მცირე ε-სათვის, ცხადია, რომ $\widetilde{D} = \|\widetilde{d}_{ik}\|$, $\widetilde{d}_{ik} = d_{ik}$, $(i, k) \neq (1, 1)$, მატრიცი ეკუთვნის $\Omega^{\mu}(L; n)$ სიმრავლეს და, აგრეთვე, $D(t, \lambda) = D(t) + \lambda(\widetilde{D}(t) - D(t)) \in \Omega^{\mu}(L; n)$.

სასრული რაოდენობის აღწერილი სახის ოპერაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ მოცემულის ჰომოტოპიურ დიაგონალურ მატრიცს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მეორე რიგის ნებისმიერი დიაგონალური მატრიცი $D = \left\|\begin{matrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{matrix}\right\|$ ჰომოტოპიურია შემდეგი სახის მატრიცისა: $\left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$.

თავდაპირველად ვიგულისხმოთ, რომ $d_{11} = \bar{d}_{22}$, $|d_{11}| = 1$; მაშინ მატრიცი

$$D(t, \lambda) = \left\|\begin{matrix} (1-\lambda)\, d_{11} & i\lambda \\ i\lambda & (1-\lambda)\, d_{22} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1-\lambda & -i\lambda \\ -i\lambda & 1-\lambda \end{matrix}\right\|, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

$$\det[D(t, \lambda)] = [(1-\lambda)^2 + \lambda^2]^2 \geqslant \frac{1}{4},$$

ეკუთვნის $\Omega^{\mu}(L; 2)$-ს და $D(t, 0) = D$; $D(t, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ზოგად შემთხვევაში

$$\left\|\begin{matrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} d_{22} & 0 \\ 0 & \bar{d}_{22} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} d_{11}d_{22} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|, \tag{19}$$

რადგან მე-3 ლემის ძალით შეიძლება მივიღოთ, რომ $|d_{ii}| = 1$.

თუ გამოვიყენებთ მატრიცულ ფუნქციათა ჰომოტოპიური გარდაქმნის ამ მეთოდს, ცხადია, სასრული რაოდენობის საფეხურის გავლის შემდეგ მივიღებთ ისეთ მატრიცს, რომელშიც $d_{ij} = \delta_{ij}$, როცა $(i, j) \neq (1, 1)$, რასაც მოითხოვდა მე-5 ლემა.

4 და 5 ლემებიდან მიიღება შემდეგი ლემა:

ლემა 6. $\Omega^{\mu}(L; n)$-ის ნებისმიერი ელემენტი ჰომოტოპიურია შემდეგი სახის ელემენტისა:

$$\left\| \begin{matrix} (t-t_0)^{\varkappa_0-\varkappa_1-\varkappa_2-\cdots-\varkappa_m}(t-t_1)^{\varkappa_1}\dots(t-t_m)^{\varkappa_m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{20}$$

ცხადია, რომ, თუ $a(t)$ არის (20) სახის მატრიცის ჰომოტოპიური, მაშინ

$$\varkappa_i = \frac{1}{2\pi}\,[\arg\det a(t)]_{L_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots m. \tag{21}$$

დავუშვათ:

$$\nu(D(t)) = \frac{1}{2\pi}\,[\arg\det D(t)]_{L_0} - \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}[\arg\det D(t)]_{L_i} =$$

$$= \varkappa_0 - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_m). \tag{22}$$

ნათელია, რომ, თუ $D_1 \sim D_2$, მაშინ

$$\nu(D_1) = \nu(D_2). \tag{23}$$

შებრუნებული დასკვნა სამართლიანია მხოლოდ $m=0$ შემთხვევისათვის, ე. ი. ერთი კონტურისათვის. თუმცა ამ ფაქტით არ ვისარგებლებთ.

ცხადია, რომ

$$\nu(D_1 D_2) = \nu(D_1) + \nu(D_2). \tag{24}$$

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ ნებისმიერი ნატურალური p რიცხვისათვის არსებობს ისეთი D_p მატრიცი, რომ

$$\nu(D_p) = p; \tag{25}$$

შეიძლება ავიღოთ

$$D_p = D_1^p. \tag{26}$$

საკმარისია მივიღოთ, რომ

$$D_1 = \left\| \begin{matrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\| \quad (t_0 = 0). \tag{27}$$

განვიხილოთ, აგრეთვე, ჰომოტოპიის კლასების შემდეგი ასახვა მთელ რიცხვთა ჯგუფში:

$$f(D)=\varkappa(\mathbf{K}_D), \tag{28}$$

სადაც $\mathbf{K}_D$ ნებისმიერი ოპერატორია, ოღონდ

$$\sigma(\mathbf{K}_D) = (E,\ D).$$

ეს განსაზღვრა კორექტულია.

ცხადია, რომ (28) არის ჰომოტოპიის კლასების ასახვა მთელ რიცხვებში: თუ $D_1 \sim D_2$, მაშინ $f(D_1)=f(D_2)$; ეს გამომდინარეობს მე-3 თეორემიდან.

მე-2 თეორემა გვაძლევს, რომ

$$f(D_1D_2) = f(D_1) + f(D_2). \tag{29}$$

ახლა დავამტკიცოთ ძირითადი ლემა:

ლემა 7. თუ $\nu(D)=0$, მაშინ $f(D)=0$.

დამტკიცება. განტოლებათა სისტემას, რომლის სიმბოლოა $(E,\ D)$, აქვს იგივე ანალიზური $f(D)$ ინდექსი, რაც იმ სისტემას, რომლის მახასიათებელი ნაწილიც განისაზღვრება შემდეგი მატრიცით:

$$d_{11}=(t-t_1)^{\varkappa_1}(t-t_2)^{\varkappa_2}\ \dots\ (t-t_m)^{\varkappa_m}\cdot t^{\nu(D)},\ d_{ik}=\delta_{ik},\quad (i,\ k)\neq(1,\ 1).$$

მაშინ შესაბამის არაერთგვაროვან სისტემას, ცხადია, აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{1+d_{11}}{2}\varphi_1+\frac{1-d_{11}}{2}\,\mathbf{I}\varphi_1=f_1, \tag{30}$$

$$\varphi_i=f_i,\qquad i=2,\ 3,\ \dots,\ n.$$

ეს სისტემა ცალსახად ამოხსნადია, როგორიც არ უნდა იყოს მისი მარჯვენა მხარე. შეიძლებოდა მისი ამონახსნი ამოგვეწერა ცხადად, მაგრამ საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (30) სისტემა შეესაბამება შემდეგ წრფივ შეუღლების ამოცანას:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1^+&=d_{11}\varphi_1^-+f_1,\\ \varphi_i^+&=\varphi_i^-+f_i,\quad i\geqslant 2,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

რომელიც ჩასმით

$$\psi_i(z)=\frac{\varphi_i(z)}{d_{ii}(z)},\quad z\in G^+,\quad \psi_i(z)=\varphi_i(z),\quad z\in G^-\quad (d_{ii}(z)\equiv 1,\quad i>2;\ \nu=0) \tag{32}$$

დაიყვანება ეკვივალენტურ $\psi_i^+=\psi_i^-+f_i$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$ ამოცანაზე, რომელიც ყოველთვის ამოხსნადია და აქვს ერთადერთი ამონახსნი; მაშასადამე, $\varkappa=f(D)=0$.

ახლა დავუშვათ

$$c = f(D_1), \tag{33}$$

სადაც D_1 მატრიცი განისაზღვრება (27) ფორმულით; c მთელი რიცხვია.

(24) და (26)-ის ძალით, ნებისმიერი $D\in\Omega^{\mu}(L;\ n)$ მატრიცისათვის გვექნება:

$$\nu(DD_1^{-\nu(D)})=\nu(D)-\nu(D)\,\nu(D_1)=0.$$

ლემა 7-ის თანახმად

$$f(DD_1^{-\nu(D)}) = 0,$$

ანუ, (29)-ის ძალით,

$$f(D)=f(D_1)\,\nu(D)=c\nu(D).$$

ახლა გამოვითვალოთ c მუდმივი. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ $\alpha-\beta$ სხვაობა (30) სისტემისათვის. ეს სისტემა ეთანადება (31) შეუღლების ამოცანას, სადაც

$$d_{11}(t)=t(t-t_1)^{\varkappa_1}\cdots(t-t_m)^{\varkappa_m}.$$

(32) ჩასმით ვიღებთ შემდეგ შეუღლების ამოცანას:

$$\psi_1^+ = t\psi_1^- + f_1,$$
$$\psi_i^+ = \psi_i^- + f_i, \quad i \geqslant 2,$$

რომლის ინდექსი, ცხადია, უდრის $+1$-ს. ამიტომ $c=+1$.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ ნ. მუსხელიშვილის ფორმულა: სინგულარულ-ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემისათვის

$$\varkappa(\mathrm{K}) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(A-B)}{\det(A+B)}\right]_L.$$

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ ზემოთ აღწერილი მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ უფრო ზოგად შემთხვევებშიც, რომელნიც წიგნშია განხილული, და აგრეთვე წყვეტილ ამოცანებშიც.

ციტირებული ლიტერატურა

Абдулаев Р. Н. [1] Неоднородная задача Римана с разрывными коэффициентами, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 1, 1962, стр. 81—86.

[2] Краевые задачи для аналитических функций на конечных римановых поверхностях, Уч. зап. Перм. ун-та, т. 22, вып. 2, 1962, стр. 3—9.

[3] Об условии разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 152, № 6, 1963, стр. 1279—1281.

[4] К условиям разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXIII, № 3, 1964, стр. 519—522.

[5] Однородная задача Римана на замкнутых римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 160, № 5, 1965, стр. 983—985.

[6] Задача Сохоцкого на открытых римановых поверхностях, Уч. зап. Перм. ун-та, № 103, 1963, 3—6.

[7] Задача Римана на открытых римановых поверхностях, Уч. зап. Перм. ун-та, № 103, 1963, стр. 143—146.

Агранович М. С., Волевич Л. Р. и Дынин А. С. [1] Разрешимость общих граничных задач для эллиптических систем в многомерных областях, Совместный Советско-Американский симпозиум по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.

Александрия Г. Н. [1] Обобщенная задача Газемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 12, № 10, 1951, стр. 585—590.

[2] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 14, № 2, 1953, стр. 65—70.

Алексеев А. Д. [1] Особое интегральное уравнение на контуре из класса *R*, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVII, 1960, стр. 275—291.

[2] Об особом интегральном уравнении на контуре из класса *R*, Докл. АН СССР, т. 136, № 3, 1961, стр. 525—528.

[3] Об одном случае разрывной задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 167, № 2, 1966, стр. 255—258.

Алексидзе М. А. [1] О приближенном решении задачи Римана — Гильберта, Тр. Вычисл. центра АН ГрузССР, т. 6, № 3, 1965, стр. 103—122.

Аткинсон Ф. В. (F. V. Atkinson). [1] Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб., т. 28 (70), № 1, 1951, стр. 3—14.

Ахиезер Н. И. [1] О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 4, 1945, стр. 275—290.

Бабаев А. А. [1] Об одном обобщении теоремы Племеля — Привалова и его применения, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. н., № 4, 1963, стр. 3—10.

[2] Об особом интеграле с непрерывной плотностью, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-мат. н., № 5, 1965, стр. 11—28.

[3] Некоторые свойства особого интеграла с непрерывной плотностью и его приложения, Докл. АН СССР, т. 166, № 2, 1966, стр. 255—258.

Бабаев А. А. и Салаев В. В. [1] Об одном аналоге теоремы Племеля — Привалова в случае негладких кривых и ее приложениях, Докл. АН СССР, т. 161, № 2, 1965, стр. 267—269.

Бабенко К. И. [1] О сопряженных функциях, Докл. АН СССР, т. 62, № 2, 1948, стр. 157—160.

Банцури Р. Д. и Джанашия Г. А. [1] Об уравнениях типа свертки для полуоси, Докл. АН СССР, т. 155, № 2, 1964, стр. 251—253.

Бари Н. К. [1] Тригонометрические ряды, М., 1961.

Батырев А. В. [1] Приближенное решение задачи Римана — Привалова, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 5, 1956, стр. 71—76.

Бедоева М. Г. [1] Об одном виде граничной задачи линейного сопряжения при заданных смещениях, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXVIII, № 3, 1962, стр. 257—264.

Берикашвили Н. А. [1] Об индексе систем сингулярных интегральных уравнений на двумерных многообразиях, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 2, 1964, стр. 257—264.

Беркович Ф. Д. [1] О решении одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений в классе растущих последовательностей, Докл. АН СССР, т. 149, № 3, 1963, стр. 485—498.

Бицадзе А. В. [1] Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 8, 1944, стр. 761—770 (на груз. яз.).

[2] Об одной системе функций, Успехи матем. наук, т. 5, вып. 4, 1950, стр. 154—155.

[3] К общей задаче смешанного типа, Докл. АН СССР, т. 78, № 4, 1951, стр. 621—624.

[4] К проблеме уравнений смешанного типа, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 61, 1953, стр. 1—60.

[5] Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений, Успехи матем. наук, т. 12, вып. 5, 1957, стр. 185—190.

[6] Уравнения смешанного типа, изд-во АН СССР, М., 1959.

[7] Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.

[8] Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 93, № 4, 1953, стр. 595—597.

[9] Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения, Докл. АН СССР, т. 93, № 3, 1953, стр. 389—392.

[10] О двумерных интегралах типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI, 1955, стр. 177—184.

[11] Об одном классе многомерных сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 159, № 5, 1964, стр. 955—957.

Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Тавхелидзе А. Н. [1] Применение методов Н. И. Мусхелишвили для решения сингулярных интегральных уравнений в квантовой теории поля, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 45—59.

Боярский Б. (B. Bojarski) [1] Об одной граничной задаче теории функций, Докл. АН СССР, т. 119, № 2, 1958, стр. 199—202.

[2] Об особом случае задачи Римана — Гильберта, Докл. АН СССР, т. 119, № 3, 1958, стр. 411—414.

[3] Классы гомотопии матричных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 3, 1958, стр. 263—269.

[4] Об устойчивости задачи Гильберта для голоморфного вектора, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 4, 1958, стр. 391—397.

[5] Задачи Римана — Гильберта для голоморфного вектора, Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959, стр. 695—698.

[6] On the index problem for systems of singular integral equations, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. XI, № 10, 1963, p. 653 — 655; vol. XIII, № 9, 1965, p. 627 — 631, 633 — 637.

Векуа Илья Н. [1] О сингулярных линейных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши, Докл. АН СССР, т. XXVI, № 4, 1940, стр. 335—338.

[2] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 7, 1941, стр. 579—586.

[3] О приведении сингулярных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 8, 1941, стр. 697—700.

[4] Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 45—72.

[5] Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложения, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 6, 1941, стр. 477—484; Дополнения к работе «Об одном новом интегральном представлении...», там же, № 8, 1941, стр. 701—706.

[6] Об изгибе пластинки со свободным краем, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 7, 1942, стр. 641—648.

[7] К теории сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 9, 1942, стр. 869—876.

[8] Об одной линейной граничной задаче Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XI, 1942, стр. 109—139.

[9] Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля, Прикл. матем. и мех., т. 9, № 2, 1945, стр. 143—150.

[10] Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948.

[11] Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, Матем. сб., т. 31, № 2, 1952, стр. 217—314.

[12] Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа, Докл. АН СССР, т. XCII, № 6, 1953, стр. 1113—1116.

[13] Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

Векуа Николай П. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений и некоторые краевые задачи теории потенциала, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 73—92 (на груз. яз.).

[2] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 3, 1943, стр. 207—214.

[3] Задача Римана с разрывными коэффициентами для нескольких неизвестных функций. Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 1, 1944, стр. 1—10 (на груз. яз.).

[4] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 2, 1944, стр. 125—134 (на груз. яз.).

[5] Об одной линейной граничной задаче Римана с разрывными коэффициентами для системы аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 5, 1944, стр. 473—482 (на груз. яз.).

[6] Сингулярное интегральное уравнение общего вида с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 1, 1945, стр. 3—10 (на груз. яз.).

[7] Система сингулярных интегральных уравнений общего вида с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 3, 1945, стр. 185—194 (на груз. яз.).

[8] Краевая задача Гильберта с рациональными коэффициентами для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VII, № 9—10, 1946, стр. 595—600.

[9] Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9—10, 1947, стр. 577—584.

[10] Одно замечание о системе сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXXa, 1947, стр. 31—38 (на груз. яз.).

[11] Об одной обобщенной системе сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. IX, № 3, 1948, стр. 153—160.

[12] Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVI, 1948, стр. 81—102 (на груз. яз.).

[13] О некоторых краевых задачах теории логарифмического потенциала, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXXIV, 1948, стр. 311—327 (на груз. яз. с русск. резюме).

[14] Граничная задача Гильберта и системы сингулярных интегральных уравнений в случае кусочно-гладких контуров, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 31—40 (на груз. яз.).

[15] Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 41—46.

[16] Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.—Л., 1950.

[17] Граничная задача Гильберта для нескольких неизвестных функций в случае несвязных областей, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 9, 1950, стр. 533—538.

[18] Об одной задаче Гильберта с разрывными коэффициентами и ее применении к сингулярным интегральным уравнениям, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVIII, 1951, стр. 307—313.

[19] Граничная задача Карлемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 1, 1952, стр. 9—14.

[20] Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного для нескольких неизвестных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, № 2, 1952, стр. 157—180.

[21] Об одной задаче теории функций комплексного переменного, Докл. АН СССР, т. LXXXVI, № 3, 1952, стр. 457—460.

[22] Об одной обобщенной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 52 1954, стр. 1—9 (на груз. яз.).

[23] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Докл. АН СССР, т. XCIX, № 2, 1954, стр. 173—176.

[24] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 56, 1955, стр. 75—80.

[25] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций с заданными смещениями, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXI, 1955, стр. 169—189.

[26] Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 3, 1956, стр. 377—384.

[27] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIV, 1957, стр. 126—134.

[28] Об одной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее приложениях в граничных задачах линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР т. XXIV, 1957, стр. 135—147.

[29] Об одной дифференциальной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций в случае разомкнутых контуров, Сообщ. АН ГССР, т. XXI, № 5, 1958, стр. 513—518.

[30] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXII, № 1, 1959, стр. 3—8.

[31] Задача Коши для сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXII, № 6, 1959, стр. 641—648.

[32] Замечание к моей статье «Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций», Сообщ. АН ГрузССР, т. XXIV, № 1, 1960, стр. 3—6.

[33] Общая граничная задача линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций с заданными смещениями, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 84, 1961, стр. 23—34.

[34] Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малыми параметрами при старших производных, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 92—100.

[35] Об одной дифференциальной граничной задаче линейного сопряжения с малым параметром, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVI, № 2, 1964, стр. 257—260.

Векуа Н. П. и Исаханов Р. С. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых эффективно, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXIII, № 3, 1959, стр. 257—264.

Векуа Н. П. и Квеселава Д. А. [1] Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 3, 1941, стр. 233—240.

[2] Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного и ее применении к решению системы сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. IX, 1941, стр. 38—48.

Вишик М. И. и Эскин Г. И. [1] Краевые задачи для общих сингулярных уравнений в ограниченной области, Докл. АН СССР, т. 155, № 1, 1964, стр. 24—27.

[2] Уравнения в свертках в ограниченной области в пространствах с весовыми нормами, Матем. сб., т. 69, № 1, 1966, стр. 65—110.

Вольперт А. И. [1] Об индексе системы двумерных сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 142, № 4, 1962, стр. 776—777.

[2] Эллиптические системы на сфере и двумерные сингулярные интегральные уравнения, Матем. сб., т. 59, 1962, стр. 195—214.

Гагуа М. Б. [1] О поведении аналитических функций и их производных в замкнутых областях, Сообщ. АН ГрузССР, т. X, № 8, 1949, стр. 451—456.

Ганин М. П. [1] Эквивалентно-регуляризирующий оператор для системы сингулярных уравнений. Докл. АН СССР, т. LXXIX, № 3, 1951, стр. 385—387.

[2] Эквивалентная регуляризация системы сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 9, 1951, стр. 517—523.

[3] Об одной общей краевой задаче для аналитических функций, Докл. АН СССР, т. LXXIX, № 6, 1951, стр. 921—924.

[4] Об обобщенной системе сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 10, 1951, стр. 591—596.

Гапошкин В. Ф. [1] Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях, Матем. сб., т. 46, № 3, 1958, стр. 359—372.

Гахов Ф. Д. [1] О краевой задаче Римана, Матем. сб., т. 2 (44), № 4, 1937, стр. 673—683.

[2] Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного, Изв. Казанск. физ.-матем. о-ва и Научно-исслед. ин-та матем. и мех. при Казанск. ун-те, 3 сер., т. X, 1938, стр. 39—79.

[3] Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Диссертация на соискание степени доктора физ.-матем. наук (защищена 26.10.1942 г. в Совете Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР).

[4] Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Изв. Казанск. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те, сер. 3, т. XIV, 1949, стр. 75—160.

[5] О краевой задаче Римана для системы n пар функций, Докл. АН СССР, т. LXVII, № 4, 1949, стр. 601—606.

[6] О краевой задаче Римана для системы n пар функций с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. LXXIII, № 2, 1950, стр. 261—264.

[7] Об особенных случаях краевой задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 80, № 5, 1951, стр. 705—708.

[8] Особые случаи краевой задачи Римана для системы n пар функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, № 2, 1952, стр. 147—156.

[9] Краевая задача Римана для системы n пар функций, Успехи матем. наук, т. 7, вып. 4, 1952, стр. 3—54.

[10] Краевые задачи, М., 1958; второе издание, М., 1963.

[11] Краевая задача Римана и некоторые другие задачи, сводящиеся к ней, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 359—375.

[12] О новых типах интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 101—113.

[13] Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши, Дифференциальные уравнения, т. 11, № 4, 1966, стр. 533—543.

Гахов Ф. Д. и Крикунов Ю. М. [1] Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 2, 1956, стр. 207—240.

Гахов Ф. Д. и Хасабов Э. Г. [1] Краевая задача Гильберта для многосвязной области, Изв. высших учебных заведений, Математика, № 1(2), 1958, стр. 12—23.

Гахов Ф. Д. и Чибрикова Л. И. [1] О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, стр. 107—110.

[2] О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Матем. сб., т. 35, 1954, стр. 395—436.

[3] Решение задач механики сплошной среды сведением к краевым задачам для автоморфных функций, Приложения теории функций в механике сплошной среды (Труды Международного симпозиума в Тбилиси), т. 2, «Наука», М., 1965, стр. 208—218.

Гегелиа (Гегелия) Т. Г. [1] О некоторых сингулярных интегральных уравнениях частного вида, Сообщ. АН ГрузССР, т. XIII, № 10, 1952, стр. 581—586.

[2] Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров, Сообщ. АН ГрузССР, т. XV, № 2, 1954, стр. 69—76.

[3] Дифференциальные свойства некоторых интегральных преобразований, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVI, 1959, стр. 195—225.

[4] О свойствах многомерных сингулярных интегралов в пространстве $L_p(S, \rho)$, Докл. АН СССР, т. 139, № 2, 1961.

[5] О регуляризации сингулярных интегральных операторов. Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIX, 1963, стр. 229—237.

[6] Некоторые специальные классы функций и их свойства, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXXII, 1966, стр. 94—139.

Геронимус Я. Л. [1] О касательной производной логарифмического потенциала простого слоя, Докл. АН СССР, т. 91, № 6, 1953, стр. 1257—1260.

[2] О некоторых интегральных уравнениях, Докл. АН СССР, т. 98, № 1, 1954, стр. 5—7.

[3] О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге, Докл. АН СССР, т. 98, № 6, 1954, стр. 889—891.

[4] О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе, Матем. сб., т. 38, № 3, 1956, 319—330.

[5] О дифференциальных свойствах некоторых функций, представляемых сингулярными интегралами, Изв. АН СССР сер. матем., т. 20, № 6, 1956, стр. 775—782.

Говоров Н. В. [1] О краевой задаче Римана с бесконечным индексом, Докл. АН СССР, т. 154, № 6, 1964, стр. 1247—1249.

[2] Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом, Докл. АН СССР, т. 159, № 5, 1964, стр. 961—964.

Голубев В. В. [1] Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ.-матем., вып. 29, 1916, (см. также В. В. Голубев, Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961).

Голузин Г. М. и Крылов В. И. [1] Обобщение формулы Carleman'а и приложение ее к аналитическому продолжению функций, Матем. сб., т. 40, № 2, 1933, стр. 144—149.

Гольденвейзер А. Л. [1] О применении решений задачи Римана — Гильберта к расчету безмоментных оболочек, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 2, 1951, стр. 149—166.

Гордадзе Э. Г. [1] О сингулярных интегралах с ядром Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVII, № 3, 1965, стр. 521—526.

[2] О задаче Римана — Привалова в случае негладкой граничной линии, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР (Сборник работ, посвященных 60-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа), т. XXXIII, 1967, стр. 25—31.

Гохберг И. Ц. [1] О линейных уравнениях в нормированных пространствах, Докл. АН СССР, т. LXXVI, № 4, 1951, стр. 477—480.

[2] О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, Докл. АН СССР, т. LXXVIII, № 4, 1951, стр. 629—632.

[3] Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям, Успехи матем. наук, т. 7, вып. 2 (48), 1952, стр. 149—156.

[4] О системах сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 55—60.

[5] О числе решений однородного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 122, № 3, 1958, стр. 327—330.

[6] Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, т. 19, вып. 1, 1964, стр. 71—124.

[7] К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 133, № 6, 1960, стр. 1279—1282.

Гохберг И. Ц. и Замбицкий М. К. [1] О нормально разрешимых операторах в пространстве с двумя нормами, Изв. АН МолдССР, сер. физ.-матем. и техн. н., № 6, 1964, стр. 80—84.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. [1] Об устойчивой системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций, Докл. АН СССР, т. 119, № 5, 1958, стр. 854—857.

[2] Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, Успехи матем. наук, т. 13, вып. 2, 1958, стр. 3—72.

Гусейнов А. И. [1] Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 12, № 2, 1948, стр. 193—212.

[2] К теории линейных сингулярных интегральных уравнений, Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., т. 3, 1953, стр. 65—84.

Давыдов Н. А. [1] Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области, Докл. АН СССР, т. LXIV, № 6, 1949, стр. 759—762.

Данилюк И. И. [1] Задачи Гильберта с измеримыми коэффициентами, Сибирск. матем. ж., т. 1, № 2, 1960, стр. 171—197.

[2] К теории одномерных сингулярных уравнений, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 135—144.

Джанашия Г. А. [1] Об уравнениях типа свертки для полуоси с ограниченной правой частью, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVI, № 1, 1964, стр. 11—18.

Джваршейшвили А. Г. [1] Об особом интеграле, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 84, 1961, стр. 161—184.

[2] О существовании сингулярного интеграла, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 3, 1964, стр. 529—534.

[3] Сингулярный интеграл и его некоторые применения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР (Сборник работ по теории функций). т. XXXI, 1966, стр. 71—90.

[4] О функциях, аналитических в полуплоскости, там же, стр. 91—109.

[5] О преобразованиях Гильберта и интегралах типа Коши, там же, стр. 110—121.

Драчинский А. Э. [1] О граничной задаче Римана — Привалова в классе суммируемых функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXII, № 2, 1963, стр. 271—276.

[2] О задаче Римана — Привалова с заданным смещением в классе суммируемых функций, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 8 (93), 1963, стр. 53—56.

[3] Об одной разрывной задаче линейного сопряжения, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 8 (93), 1963, стр. 32—52.

[4] Об одной граничной задаче Римана — Привалова для круга, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 1, 1964, стр. 31—35.

[5] Разрывная граничная задача линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций и ее приложение к системам сингулярных интегральных уравнений, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 4 (97), 1964, стр. 3—9.

Дун Гуан-чан. [1] Задача Римана — Гильберта для многосвязной области, Acta math. sinica, vol. 8, № 2, 1958, стр. 290—304.

Дыбин В. Б. [1] Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки в классе обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 161, № 4, 1965, стр. 753—756.

Дыбин В. Б. и Карапетянц Н. К. [1] Об интегральных уравнениях типа свертки в классе обобщенных функций, Сибирск. матем. ж., т. VII, № 3, 1966, стр. 531—545.

Дынин А. С. [1] Сингулярные операторы произвольного порядка на многообразии, Докл. АН СССР, т. 141, № 1, 1961, стр. 21—23.

Зверович Э. И. [1] О сведении задачи Гильберта для многосвязной области к задаче Гильберта с рациональным коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 157, № 4, 1964, стр. 777—780.

[2] Краевая задача типа задачи Карлемана для многосвязной области, Докл. АН СССР, т. 156, № 6,1964, стр. 1270—1272.

[3] Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановских поверхностях, Докл. АН СССР, т. 157, № 1, 1964, стр. 26—29.

Зверович Э. И. и Литвинчук Г. С. [1] Краевая задача Римана для двух пар функций с вырожденной матрицей коэффициентов, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, вып. 19, 1963, стр. 149—153.

[2] Односторонние краевые задачи теории аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 5, 1964, стр. 1003—1036.

Иванов В. В. [1] Приближенное решение особых интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 110, № 1, 1956, стр. 15—18.

[2] Некоторые свойства особых интегралов типа Коши и их приложения, Докл. АН СССР, т. 121, № 5, 1958, стр. 793—794.

[3] Некоторые свойства особых интегралов, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 4, 1958, стр. 89—95.

[4] Приближенное решение краевой задачи Римана для систем n пар функций, Докл. АН СССР, т. 129, № 1, 1959, стр. 27—29.

[5] Методы приближенного решения систем сингулярных интегральных уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 3, № 4, 1963, стр. 664—682.

[6] Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений, сб. «Математический анализ. 1963», Итоги науки, Ин-т научн. информ. АН СССР, М., 1965, стр. 125—177.

Исаханов Р. С. [1] Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и ее применение к теории интегро-дифференциальных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XX, № 6, 1958, стр. 659—666.

[2] О некоторых дифференциальных граничных задачах теории аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 1, 1958, стр. 11—18.

[3] Об одном классе дифференциальных граничных задач, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXV, № 5, 1960, стр. 517—524.

[4] Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, т. 132, № 2, 1960, стр. 264—267.

[5] О некоторых граничных задачах линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVIII, 1962, стр. 73—84.

[6] О союзных дифференциальных граничных задачах теории функций комплексного переменного, Тр. Грузинск. политех. ин-та, № 3 (96), 1964, стр. 23—32.

Какичев В. А. [1] О некоторых уравнениях Фредгольма, разрешимых в особых интегралах Коши, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 4 (23), 1961, стр. 25—38.

[2] О некоторых уравнениях Фредгольма, разрешимых в интегралах Гильберта, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6 (25), 1961, стр. 32—42.

Какичев В. А. и Рогожин В. С. [1] Об одном обобщении уравнения Чандрасекара, Дифференциальные уравнения, т. II, № 3, 1966, стр. 1264—1270.

Каландия А. И. [1] Решение основной n-гармонической задачи в случае бесконечной области, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 169—189.

[2] Основная n-гармоническая задача для многосвязных областей. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, № 2, 1951, стр. 185—198.

[3] Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки, Прикл. матем. и мех., т. XVI, вып. 3, 1952, стр. 271—282.

[4] Общая смешанная задача изгиба упругой пластинки, Прикл. матем. и мех., т. XVI, вып. 5, 1952, стр. 513—532.

[5] Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости, Матем. сб., т. 42, № 2, 1957, стр. 249—272.

[6] О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 125, № 4, 1959, стр. 715—718.

Канторович Л. В. и Крылов В. И. [1] Приближенные методы высшего анализа, изд. 3-е, М.—Л., 1950.

Карцивадзе И. Н. [1] О поведении интеграла типа Коши вблизи концов пути интегрирования, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1951, стр. 257—263.

[2] Об одной формуле перестановки интегралов, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI, № 1, 1955, стр. 3—10.

[3] О сингулярном интегральном операторе с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 109, № 3, 1956, стр. 450—452.

Карцивадзе И. Н. и Хведелидзе Б. В. [1] Об одной формуле обращения, Сообщ. АН ГрузССР, т. X, № 10, 1949, стр. 587—591.

[2] Об интеграле типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XX, 1954, стр. 211—244 (на груз. яз., с подробным русск. резюме).

Кванталиани К. И. [1] Некоторые задачи для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIX, № 3, 1965, стр. 519—525.

Квеселава Д. А. [1] Сингулярные интегральные уравнения с разрывными коэффициентами, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XIII, 1944, стр. 1—27 (на груз. яз., с подробным русск. резюме).

[2] Задача Римана — Гильберта для многосвязной области, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 8, 1945, стр. 581—590 (на груз. яз.).

[3] Решение одной граничной задачи теории функций, Докл. АН СССР, т. 53, № 8, 1946, стр. 683—686.

[4] Об одной граничной задаче теории функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VII, № 9—10, 1946, стр. 609—614.

[5] Решение одной граничной задачи Т. Карлемана, Докл. АН СССР, т. 55, № 8, 1947, стр. 683.

[6] Некоторые граничные задачи теории функций, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVI, 1948, стр. 39—90.

[7] Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 1—27.

Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А. [1] Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, Ann. scient. École norm. supér., t. 54, f. 1, 1937, p. 1—38.

[2] О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости, Труды конференции по теории волнового сопротивления, изд. ЦАГИ, М., 1937, стр. 31—64.

Келдыш М. В. и Седов Л. И. [1] Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций, Докл. АН СССР, т. XVI, № 1, 1937, стр. 7—10.

Керимов Т. М. [1] Об одной краевой задаче для эллиптических уравнений, Уч. зап. Азерб. ун-та, физ.-матем. и хим. сер., № 4, 1959, стр. 9—20.

[2] Основные теоремы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, содержащие комплексно сопряженные неизвестные, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. н., № 2, 1965, стр. 15—19.

Клабукова Л. С. [1] Приближенный метод решения задач Гильберта и Пуанкаре, Вычислительная математика, № 3, 1958, 34—87.

[2] О приближенном методе решения задачи Римана — Гильберта в многосвязной области, Вычислительная математика, № 7, 1961, стр. 115—132.

Коган Х. М. [1] Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении, Успехи матем. наук, т. 20, вып. 3, 1965, стр. 243—244.

Колмогоров А. Н. [1] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, Fundam. math., t. 7, 1925, p. 23—29.

[2] Sur un procédé d'integration de M. Denjoy, Fundam. math., t. 11, 1928, p. 27—28.

Кордзадзе Р. А. [1] Основные теоремы для сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, Докл. АН СССР, т. 154, № 6, 1964, стр. 1250—1253.

[2] О сингулярных интегральных уравнениях со сдвигом, Докл. АН СССР, т. 160, № 6, 1965, стр. 1242—1243.

[3] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, Докл. АН СССР, т. 168, № 6, 1966, стр. 1245—1248.

Косулин А. Е. [1] Особый случай в теории сингулярных уравнений, Вестник ЛГУ, 1962, № 19, стр. 142—148.

[2] Одномерные сингулярные уравнения в обобщенных функциях, Докл. АН СССР, т. 163, № 5, 1965, стр. 1054—1057.

[3] Одномерные сингулярные уравнения в обобщенных функциях. Случай разомкнутых контуров, Вестн. Ленингр. ун-та, № 7, 1966, стр. 157—160.

Крейн М. Г. [1] Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук, т. 13, вып. 5, 1958, стр. 3—120.

Крикунов Ю. М. [1] О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, стр. 191—199.

[2] О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Докл. АН СССР, т. 85, № 2, 1952, стр. 269—272.

[3] Обобщенная краевая задача Римана и линейное интегро-дифференциальное уравнение, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 3—29.

[4] Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций, Краевые задачи теории функций комплексного переменного (сборник), изд. Казанского ун-та, 1962, стр. 17—24.

Купрадзе В. Д. [1] О некоторых сингулярных интегральных уравнениях математической физики, Успехи матем. наук, вып. 2, 1936, стр. 196—237.

[2] К решению задачи Дирихле для многосвязной области, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. 1, № 8, 1940, стр. 569—571.

[3] К теории интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 1—2, 3, 7, 1941, стр. 23—28, 227—231, 587—596; Изв. АН СССР, сер. матем., т. 5, № 3, 1941, стр. 255—262.

[4] О проблеме эквивалентности в теории особых интегральных уравнений. Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 9, 1941, стр. 793—798.

[5] Об одной формуле композиции сингулярных интегралов, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXIII, 1942, стр. 159—164.

[6] Некоторые новые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 42, 1951, стр. 2—23.

[7] Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen, Berlin, 1956.

Лаврентьев М. А. [1] Sur la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme, Матем. сб., т. 36, № 2, 1929, стр. 112—115.

[2] О построении потока, обтекающего дугу заданной формы, Тр. ЦАГИ, вып. 118, М., 1932.

[3] О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций, Матем. сб., т. 1 (43), № 6, 1936, стр. 815—846.

Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. [1] Методы теории функций комплексного переменного, 3-е изд., М., 1965.

Лехницкий С. Г. [1] О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит, Прикл. матем. и мех., т. II, № 2, 1938, стр. 181—210.

Литвинчук Г. С. [1] Об одном типе особых функциональных уравнений и краевых задач со сдвигом для аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 6, 1961, стр. 871—886.

[2] Об индексе и нормальной разрешимости одного класса функциональных уравнений, Докл. АН СССР, т. 149, № 5, 1963, стр. 1029—1032.

[3] О некоторых системах сингулярных интегральных уравнений, Успехи матем. наук, т. 18, № 2, 1963, стр. 139—144.

Литвинчук Г. С. и Хасабов Э. Г. [1] К теории сингулярных интегральных уравнений, подчиняющихся альтернативе Фредгольма, Докл. АН СССР, т. CXL, № 1, 1961, стр. 48—51.

[2] Один класс сингулярных интегральных уравнений и обобщенная краевая задача типа задачи Карлемана, Сибирск. матем. ж., т. V, № 4, 1964, стр. 858—880.

[3] Об индексе обобщенной краевой задачи Гильберта, Успехи матем. наук, т. 20, вып. 6, 1965, стр. 124—130.

Лузин Н. Н. [1] Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915.

Магнарадзе Л. Г. [1] Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 6, 1942, стр. 503—508.

[2] Об одной системе линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 1, 1943, стр. 3—9.

[3] Теория одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее применения к задаче колебания крыла аэроплана конечного размаха, удара о поверхность воды и аналогичным, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 108—110.

[4] Об одном обобщении теоремы Племеля—Привалова, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 8, 1947, стр. 509—516.

[5] Об одной линейной граничной задаче Римана — Гильберта, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9—10, 1947, стр. 525—590.

[6] О касательной производной логарифмического потенциала простого слоя, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9—10, 1947, стр. 591—596.

[7] Об одной линейной граничной задаче теории функций комплексного переменного. Докл. АН СССР, т. LXIV, № 1, 1949, стр. 17—20.

[8] Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применениях к некоторым линейным граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям, Докл. АН СССР, т. XVIII, № 4, 1949, стр. 657—660.

[9] О неравенстве Зигмунда для обобщенных сопряженных функций, представимых сингулярными интегралами Стильтьеса, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 117, 1966, стр. 369—381.

Манджавидзе Г. Ф. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 5, 1950, стр. 269—274.

[2] Об одной системе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 6, 1950, стр. 351—356.

[3] Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 3, 1951, стр. 279—296.

[4] О приближенном решении граничных задач теории функций комплексного переменного, Сообщ. АН ГрузССР, т. XIV, № 10, 1953, стр. 577—582.

[5] О приближенном решении граничных задач теории аналитических функций, Тр. Третьего Всесоюзного матем. съезда, т. I, 1956, стр. 88.

[6] Приближенное решение граничных задач теории аналитических функций. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного (сборник статей под редакцией А. И. Маркушевича), М., 1960, стр. 365—370.

[7] Сингулярные интегральные уравнения как аппарат решения смешанных задач плоской теории упругости, Приложения теории функций в механике сплошной среды (Труды Международного симпозиума в Тбилиси), т. I, 1965, стр. 237—247.

[8] Граничная задача линейного сопряжения общего вида со смещениями, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР (Сборник работ, посвященный 60-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа), т. XXXIII, 1967, стр. 77—81.

Манджавидзе Г. Ф. и Хведелидзе Б. В. [1] О задаче Римана — Привалова с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 123, № 5, 1958, стр. 791—794.

[2] О задаче линейного сопряжения в сингулярных интегральных уравнениях с ядром Коши с непрерывными коэффициентами, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVIII, 1962, стр. 85—105.

Маркушевич А. И. [1] Об одной граничной задаче теории аналитических функций, Уч. зап. МГУ, т. I, вып. 100, 1946, стр. 20—29.

(2) Несколько замечаний об интегралах типа Коши, Уч. зап. МГУ, т. I, вып. 100, 1946, стр. 31—33.

[3] Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.

[4] Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций, Историко-математические исследования, вып. III, М.—Л., 1950, стр. 399—406.

Мельник И. М. [1] Исключительный случай краевой задачи Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. 24, 1957, стр. 149—162.

[2] О краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами, Изв. высших учебных заведений, № 2 (9), 1959, стр. 158—166.

[3] Поведение интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности и особый случай краевой задачи Римана, Уч. зап. физ-матем. фак. Ростовск.-н/Д. ун-та, т. 43, № 6, 1959, стр. 59—71.

[4] О краевой задаче Гильберта, Докл. АН СССР, т. 138, № 3, 1961, стр. 537—540.

Месис А. В. [1] Задача Римана над полем алгебраических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, стр. 51—60.

[2] О краевой задаче Римана над полем алгебраических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 9, 1952, стр. 3—16.

[3] О краевой задаче Римана над полем алгебраических функций для системы n пар функций, Укр. матем. ж., т. 8, 1956, стр. 441—449.

Михайлов Г. К. и Пыхтеев Г. Н. [1] Решение некоторых задач плоского потенциального течения жидкости со свободными поверхностями сведением их к краевым задачам со сдвигом, Приложения теории функций в механике сплошной среды (Труды Международного симпозиума в Тбилиси), т. 2, М., 1965, стр. 331—332.

Михайлов Л. Г. [1] Общая краевая задача о бесконечно малых изгибаниях склеенных поверхностей, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 5 (18), 1960, стр. 99—102.

[2] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Докл. АН СССР, т. 139, № 2, 1961, стр. 294—297.

[3] Общая задача сопряжения аналитических функций и ее применения, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, № 5, 1963, стр. 969—992.

[4] Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1963.

Михлин С. Г. [1] Об одной задаче теории сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 15, № 8, 1937, стр. 429—432.

[2] Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений, Матем. сб., т. 3 (45), № 1, 1938, стр. 121—141.

[3] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. XXIV, № 4, 1939, стр. 315—317.

[4] Об одной теореме Ф. Нетера, Докл. АН СССР, т. 43, № 4, 1944, стр. 143—145.

[5] О разрешимости линейных уравнений в гильбертовом пространстве, Докл. АН СССР, т. 57, № 1, 1947, стр. 11—12.

[6] Сингулярные интегральные уравнения с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 59, № 3, 1948, стр. 435—438.

[7] Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, т. 3, вып. 3(25), 1948, стр. 29—112.

[8] Об интегральном уравнении F. Tricomi, Докл. АН СССР, т. 59, № 6, 1948, стр. 1053—1056.

[9] Интегральные уравнения, М.—Л., 1949.

[10] Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962.

[11] О вычислении индекса системы одномерных сингулярных уравнений, Докл. АН СССР, т. 168, № 6, 1966, стр. 1248—1250.

Мусхелишвили Н. И. [1] Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathématique, Тбилиси, изд. Тбилисского ун-та, 1922.

[2] О решении задачи Дирихле на плоскости, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. 1, № 2, 1940, стр. 99—106.

[3] Замечания относительно основных граничных задач теории потенциала, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. I, № 3, 1940, стр. 169—170; Исправление погрешности, там же, № 7, стр. 567.

[4] О решении основных граничных задач теории ньютонова потенциала, Прикл. матем. и мех., т. IV, № 4, 1940, стр. 3—26.

[5] Об основной смешанной краевой задаче теории логарифмического потенциала для многосвязных областей. Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 4, 1941, стр. 309—313.

[6] Приложение интеграла типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 1—43.

[7] Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 10, 1942, стр. 987—994.

[8] Замечание к статье «Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши», Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 99—101.

[9] Некоторые основные задачи математической теории упругости, Л., 1933; 5-е изд., М., 1966.

Мусхелишвили Н. И. и Авазашвили Д. З. [1] О решении основных контурных задач теории логарифмического потенциала, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. 7, 1940, стр. 1—24.

Мусхелишвили Н. И. и Векуа Н. П. [1] Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций и ее приложение к системам сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XII, 1943, стр. 1—46.

Мусхелишвили Н. И. и Квеселава Д. А. [1] Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XI, 1942, стр. 141—172.

Никольский С. М. [1] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 7, № 3, 1943, стр. 147—166.

Оболашвили Е. И. [1] Безмоментные оболочки положительной кривизны под действием разрывных внешних сил, Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961, стр. 250—253.

[2] Об одном обобщении принципа симметрии Римана — Шварца и его применения, Докл. АН СССР, т. 157, № 5, 1964, стр. 1051—1054.

Пааташвили В. А. [1] Об одной разрывной задаче линейного сопряжения с суммируемым коэффициентом, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 3, 1964, стр. 519—524.

[2] О разрывной задаче линейного сопряжения, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVI, № 3, 1964, стр. 539—540.

[3] О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVII, № 1, 1965, стр. 31—36.

Парасюк О. С. [1] О «парных» интегральных уравнениях в классе обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 110, № 6, 1956, стр. 957—958.

Пламеневский Б. А. [1] О сингулярных интегральных операторах на группе, Докл. АН СССР, т. 164, № 1, 1965, стр. 47—50.

Показеев В. И. [1] Задача Римана для одного класса аналитических функций, определенных на фундаментальном многоугольнике, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 123, № 9, 1964, стр. 58—70.

[2] Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника, там же, стр. 40—57.

[3] Краевая задача Гильберта на рассеченной римановой поверхности с краем, там же, стр. 71—85.

Пресдорф З. [1] Операторы, допускающие неограниченную регуляризацию, Вестн. Ленингр. ун-та, № 13, 1965, стр. 59—67.

[2] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с вырождающейся символической матрицей, I и II, Вестн. Ленингр. ун-та, № 19, 1965, стр. 58—73 и № 7, 1966, стр. 68—75.

[3] Об устойчивости индекса одномерного сингулярного оператора с обращающимся в нуль символом, Проблемы математического анализа (сборник), изд. Ленингр. ун-та, 1966, стр. 70—79.

[4] Индекс одномерного сингулярного оператора с обращающимся в нуль символом в пространстве C (Г), Вестн. Ленинград. ун-та, № 7, 1966, стр. 154—156.

[5] О линейных уравнениях в пространствах основных и обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 166, № 4, 1966, стр. 802—805.

Привалов И. И. [1] Sur les fonctions conjuguées, Bull. Soc. math. France, t. 44, № 2—3, 1916, p. 100—103.

[2] Интеграл Cauchy, Изв. Саратовского ун-та, физ.-матем. фак-т, вып. 1, 1918; отд. издание, Саратов, 1919.

[3] Об одной граничной задаче в теории аналитических функций, Матем. сб., т. 41, № 4, 1934, стр. 519—526.

[4] Об интегралах типа Коши, Докл. АН СССР, т. XXIII, № 9, 1939, стр. 859—862.

[5] Об интеграле типа Коши — Стильтьеса, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, № 3, 1940, стр. 261—276.

[6] Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 8-е, М.—Л., 1948.

[7] Граничные свойства однозначных аналитических функций, изд. 2-е (под ред. А. И. Маркушевича), М., 1950.

Пыхтеев Г. Н. [1] Решение одной смешанной краевой задачи со сдвигом и формулы обращения для некоторых сингулярных интегральных уравнений первого рода, Сибирск. матем. ж., т. 4, 1963, стр. 845—861.

[2] Решение одной задачи Дирихле со сдвигом и некоторых сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, Сибирск. матем. ж., т. 6, № 4, 1965, стр. 900—917.

Рогожин В. С. [1] Один класс бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, Докл. АН СССР, т. 114, №3, 1957, стр. 486—489.

[2] Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложение, Докл. АН СССР, т. 135, № 4, 1960, стр. 791—793.

[3] Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщенных функций, Сибирск. матем. ж., т. 2, № 5, 1961, стр. 734—745.

[4] Краевая задача Римана в пространстве обобщенных функций и многочлены Фабера, Докл. АН СССР, т. 152, № 6, 1963, стр. 1308—1311.

[5] Краевая задача Римана в классе обобщенных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 6, 1964, стр 1325—1344.

[6] Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 164, № 2, 1965, стр. 277—280.

[7] О некоторых новых интегральных представлениях аналитических функций, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6, 1964, стр. 143—152.

Рогожина И. С. [1] Задача Гильберта для кусочно-аналитической функции, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, вып. 19, 1963, стр. 259—263.

[2] Об одной краевой задаче со смещением для кусочно-аналитической функции, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 2, 1965, стр. 139—151.

Родин Ю. Л. [1] Об условиях разрешимости краевых задач Римана и Гильберта на римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 129, № 6, 1959, стр. 1234—1237.

[2] О задаче Римана на замкнутых римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 132, № 5, 1960, стр. 1038—1040.

[3] Краевые задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях конечного рода, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1960, стр. 436—442.

[4] О краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами на римановых поверхностях, Уч. зап. Пермск. ун-та, т. 17, № 2, 1960, стр. 79—81.

[5] Краевая задача Римана для дифференциалов на замкнутых римановых поверхностях, Уч. зап. Пермск. ун-та, т. 17, № 2, 1960, стр. 83—85.

[6] О краевой задаче Римана на замкнутых римановых поверхностях, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 419—428.

Самко С. Г. [1] Общее сингулярное уравнение в исключительном случае, Дифференциальные уравнения, т. I, № 8, 1965, стр. 1108—1116.

Седов Л. И. [1] Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.—Л., 1950; 2-е изд., М., 1966.

[2] Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со сбегающими вихрями, Труды ЦАГИ, вып. 252, 1936.

Сербин А. И. [1] Об одной краевой задаче на конечной римановой поверхности, Краевые задачи теории функций комплексного переменного (сборник), Казань, 1962, стр. 25—39.

[2] Об одной обобщенной краевой задаче Римана на конечной римановой поверхности, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 128, № 9, 1964, стр. 86—94.

[3] Об общей краевой задаче на конечной римановой поверхности, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 128, № 9, 1964, стр. 95—105.

Симоненко И. Б. [1] Краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 124, № 2, 1959, стр. 278—282.

[2] Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 135, № 3, 1960, стр. 538—541.

[3] Краевые задачи Римана и Римана — Газемана с непрерывным коэффициентом, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 380—389.

[4] Краевая задача Римана для n пар функций с непрерывными коэффициентами, Изв высш. учебн. заведений, Математика, № 1 (20), 1961, стр. 140—145.

[5] Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее приложение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 2, 1964, стр. 277—306.

[6] Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, № 3 и 4, 1965, стр. 567—586, 756—782.

Смирнов В. И. [1] Sur les valeurs limites des fonctions régulières a l'intérieur d'un cercle, Ж. Ленингр. физ.-матем. о-ва, т. 2, 1928, стр. 22—37.

[2] Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 3, 1932, стр. 337—372.

[3] Ueber die Rānderzuordnung bei konformer Abbildung, Math. Ann., Bd. 107, 1932, S. 313—323.

[4] Курс высшей математики, 5 томов, М., 1957—1959.

Смирнов М. М. [1] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа, Вестн. Ленингр. ун-та, сер. матем., мех. и астр., № 1, 1957, стр. 80—96.

Соболев С. Л. [1] Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и ее применении к отражению плоских упругих волн, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 11, 1930, стр. 1—9.

Софронов И. Д. [1] О некоторых свойствах сингулярных операторов и решений сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 110, № 6, 1956, 940—942.

[2] К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 37—39.

Сохоцкий Ю. В. [1] Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды, С.-Петербург, 1873.

Тумаркин Г. Ц. [1] Об интегралах типа Коши — Стильтьеса, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 4, 1956, 163—166.

[2] Свойства аналитических функций представимых интегралами типа Коши — Стильтьеса и типа Коши — Лебега, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., т. XVI, № 5, 1963, 25—45.

Ульянов П. Л. [1] Некоторые вопросы A-интегрирования, Докл. АН СССР, т. 102, № 6, 1955, стр. 1077—1080.

[2] Об A-интеграле Коши, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 5, 1956, стр. 223—229.

[3] Об A-интегралах Коши для контуров, Докл. АН СССР, т. 112, № 3, 1957, стр. 383—385.

[4] Об интегралах типа Коши, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 60, 1961, стр. 262—281.

У Сюе-моу [1] Интеграл Коши и его применение, Ханьшулунь яньцзю баогао, № 1, 1958, стр. 49—53 (на кит. яз.).

Фельд Я. Н. [1] Парные системы бесконечных линейных алгебраических уравнений, связанные с бесконечными периодическими структурами, Докл. АН СССР, т. 106, № 2, 1956, стр. 215—218.

Фихтенгольц Г. М. [1] Sur l'intégrale de Poisson et quelques questions qui s'y rattachent, Fundam math, t. 13, 1929, p. 1—33.

[2] Курс дифференциального и интегрального исчисления, 3 тома, М.—Л., 1947—1949.

Фрейдкин С. А. [1] Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 13—17.

[2] Оператор сингулярного интегрирования по разомкнутому контуру в пространствах с весом, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 19—27.

[3] Области Нетера и Фредгольма сингулярного оператора, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 17, 1955, стр. 17—25.

[4] Области постоянства индекса сингулярных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 24, 1956, стр. 95—104.

[5] Краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами в случае счетного множества интервалов, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 70, 1964, стр. 27—38.

Фрейдкин С. А. и Прокупец М. В. [1] Области постоянства индекса некоторых сингулярных операторов, Уч. зап. Кишиневск, ун-та, т. 54, 1960, стр. 37—41.

Фридман М. М. [1] Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жестко закрепленной щели, Докл. АН СССР, т. LX, № 7, 1948, стр. 1145—1148.

[2] Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного разреза, свободного от напряжений, Докл. АН СССР, т. LXVI, № 1, 1949, стр. 21—24.

Хавин В. П. [1] Граничные свойства интегралов типа Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей. Матем. сб., т. 68, № 4, 1965, стр. 499—517.

Хайруллин И. Х. [1] О некоторых бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Докл. АН СССР, т. 123, № 5, 1958, стр. 795—798.

Халилов З. И. [1] Общая краевая задача для системы обобщенных полигармонических уравнений, Докл. АН СССР, т. 51, № 3, 1946, стр. 167—169.

[2] Краевые задачи для эллиптических уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, № 4, 1947, стр. 345—362.

[3] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Баку, 1949.

Харазов Д. Ф. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, ядро которых — мероморфная функция параметра, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XIII, 1944, стр. 139—152.

Харазов Д. Ф. и Хведелидзе Б. В. [1] Некоторые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXVIII, № 2, 1962, стр. 129—135.

Хасабов Э. Г. [1] Краевая задача типа задачи Карлемана, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 2, 1963, стр. 124—133.

Хведелидзе Б. В. [1] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала, Докл. АН СССР, т. XXX, № 3, 1941, стр. 195—198.

[2] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 7 и 10, 1941, 571—578, 865—872.

[3] Задача Пуанкаре для линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XII, 1943, стр. 47—77 (на груз. яз., с подробным русск. резюме).

[4] Об одной линейной граничной задаче Римана для системы аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 4, 1943, стр. 289—296.

[5] Некоторые свойства особых интегралов в смысле главного значения Коши — Лебега, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 5, 1947, стр. 283—290.

[6] Сингулярные интегральные уравнения в особых интегралах Коши — Лебега, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 7, 1947, стр. 427—434.

[7] О задаче Римана в теории аналитических функций и о сингулярных интегральных уравнениях с ядром типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 2, 1951, стр. 69—76.

[8] О задаче линейного сопряжения в теории аналитической функции, Докл. АН СССР, т. LXXVI, № 2, 1951, стр. 177—180.

[9] О линейных сингулярных интегральных уравнениях с особым ядром типа Коши, Докл. АН СССР, т. LXXVI, № 3, 1951, стр. 367—370.

[10] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XV, № 7, 1954, стр. 401—405.

[11] Некоторые формулы композиций сингулярных интегралов и их приложения к обращению интеграла типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI, № 2, 1955, стр. 81—88.

[12] Об одной разрывной задаче Римана — Привалова в теории аналитических функций, Докл. АН СССР, т. 102, № 6, 1955, стр. 1081—1084.

[13] О задаче Римана — Привалова в теории аналитических функций, Успехи матем. наук, т. 10, вып. 3, 1955, стр. 165—171.

[14] О разрывной граничной задаче Римана — Привалова с коэффициентом, имеющим критические точки, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 40—43.

[15] Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши в классе функций, суммируемых с весом, Докл. АН СССР, т. 111, № 2, 1956, стр. 304—307.

[16] О разрывной задаче Римана — Привалова для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVII, № 10, 1956, стр. 865—872.

[17] О системах сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVIII, № 2, 1957, стр. 129—136.

[18] Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIII, 1957, стр. 3—158.

[19] Замечание к моей работе «Линейные разрывные граничные задачи теории функций...», Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 2, 1958, стр. 129—130.

[20] О разрывной задаче Римана — Привалова с заданным смещением, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 4, 1958, стр. 385—389.

[21] Граничная задача Римана — Привалова с кусочно-непрерывным коэффициентом, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 1 (81), 1962, стр. 11—29.

Хускивадзе Г. А. [1] Об A-интегралах типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXVII, № 6, 1961, стр. 663—670.

[2] О сопряженных функциях и особых интегралах Коши, Докл. АН СССР, т. 140, № 6, 1961, стр. 1270—1273.

[3] О сопряженных функциях и интегралах типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXII, № 2, 1963.

[4] О сопряженных функциях и интегралах типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXXI (Сборник работ по теории функций, 1), 1966, стр. 5—54.

Чакветадзе С. С. [1] Решение одной граничной задачи Газемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 11, № 8, 1951, стр. 449—455.

Чеботарев Г. Н. [1] О решении матричного уравнения $e^Be^C = e^{B+C}$, Докл. АН СССР, т. 96, № 6, 1954, стр. 1109—1112.

[2] К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 31—58.

[3] Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 3, 1956, стр. 199—202.

Чеботарев Н. Г. и Гахов Ф. Д. [1] О краевой задаче Римана для системы n пар функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, стр. 45—50.

Черепанов Г. П. [1] Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости, Прикл. матем. и механ., т. 26, № 5, 1962, стр. 907—912.

[2] Задача Римана — Гильберта для внешности разрезов вдоль прямой или вдоль окружности, Докл. АН СССР, т. 156, № 2, 1964, стр. 275—278.

[3] Об одном интегрируемом случае краевой задачи Римана для нескольких функций, Докл. АН СССР, т. 161, № 6, 1965, стр. 1285—1289.

Черский Ю. И. [1] Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свертки, Матем. сб., т. 41, № 3, 1957, стр. 277—296.

[2] О сведении смешанных граничных задач к краевой задаче Римана, Докл. АН СССР, т. 116, № 6, 1957, стр. 927—929.

[3] К решению краевой задачи Римана в классе обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 125, № 6, 1959, стр. 500—503.

[4] Сведение периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши, Докл. АН СССР, т. 140, № 1, 1961, стр. 69—72.

[5] Вопросы, связанные с приведением граничных задач для дифференциальных уравнений к задаче Римана, Исследования по совр. проб. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 392—399.

[6] Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVIII, 1962, стр. 209—246.

[7] Задача сопряжения в одном классе обобщенных функций, Успехи матем. наук, т. 20, вып. 5, 1965, стр. 246—250.

[8] К решению смешанных задач для уравнений в частных производных, Дифференциальные уравнения, т. I, № 5, 1965, стр. 647—662.

Чибрикова Л. И. [1] Особые случаи обобщенной задачи Римана, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1954, стр. 129—154.

[2] О краевой задаче Римана для автоморфных функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 59—109.

[3] Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружностей, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 117, кн. 2, 1957, стр. 22—26.

[4] Решение краевой задачи Римана для автоморфных функций в случае групп, характеризующихся двумя инвариантами, Докл. АН СССР, т. 141, № 1, 1961, стр. 47—50.

[5] Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6, 1961, стр. 121—131.

[6] Письмо в редакцию, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 3, 1962, стр. 195—196.

[7] О краевой задаче Гильберта на конечной римановой поверхности, Краевые задачи теории функций комплексного переменного (сборник), Казань, 1962, стр. 59—72.

[8] Об одном особом случае задачи Римана для автоморфных функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 122, № 3, 1962, стр. 81—94.

[9] Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 123, № 9, 1964, стр. 3—14.

Чибрикова Л. И. и Рогожин В. С. [1] О сведении некоторых краевых задач к обобщенной задаче Римана. Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, стр. 123—127.

Чикин Л. А. [1] Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, стр. 57—105.

[2] Об устойчивости краевой задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 44—46.

Шерман Д. И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов. Докл. АН СССР, т. XXVII, № 4, 1940, стр. 330—334.

[2] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях, Докл. АН СССР, т. XXVII, № 9, 1940, стр. 911—914.

[3] Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей, Докл. АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940, стр. 29—32.

[4] Некоторые замечания к задаче Дирихле, Докл. АН СССР, т. XXIX, № 4, 1940, стр. 286—287.

[5] К общей задаче теории потенциала, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 10, № 2, 1946, стр. 121—134.

[6] Об одном случае в теории сингулярных уравнений, Докл. АН СССР, т. LIX, № 4, 1948, стр. 647—650.

[7] О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. XII, вып. 4, 1948, стр. 423—452.

[8] К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха, Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 5, 1948, стр. 595—600.

[9] Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 1, 1951, стр. 75—82.

[10] О связи основной задачи теории упругости с одним особым случаем задачи Пуанкаре, Прикл. матем. и мех., т. XVII, 1953, стр. 685—692.

Шмульян Ю. Л. [1] Задача Римана с положительно определенной матрицей, Успехи матем. наук, т. 8, вып. 2, 1953, стр. 143—145.

[2] Задача Римана с эрмитовой матрицей, Успехи матем. наук, т. 9, вып. 4, 1954, стр. 243—248.

Штаерман И. Я. [1] Контактная задача теории упругости, М., 1949.

Юров П. Г. [1] Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 2, 1966, стр. 158—163.

Юрченко С. И. [1] Смешанная задача о колебаниях бесконечной пластинки единичной ширины, Прикл. матем. и мех., т. 27, № 5, 1963, стр. 951—956.

Atiyah M. F. and Bott R. [1] The index problem for manifolds with boundary, Differential analysis, Bombay Colloquium, 1964. Oxford University Press, 1964, p. 175—186.

Atiyah M. F. and Singer I. M. [1] The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69, № 3, 1963, p. 422—433.

Berg L. [1] Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen I, Math. Nachr., Bd. 15, H. 4—6, 1956, S. 193—212.

[2] Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen II, Wiss. Z. Univ. Rostock, Math.-Nat. Reihe, Bd. 4, H. 3, 1954/55, S. 381—391.

[3] Über die Resolvente einer singulären Integralgleichung, Math. Nachr., Bd. 15, H. 5—6. 1956, S. 339—352.

Bertrand G. [1] Équations de Fredholm à intégrales principales au sens de Cauchy, C. r. Acad. sci. Paris, t. 172, 1921, p. 1458—1461.

[2] Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche, Bull. sci. math., 2 sér., t. XLVII, 1923, p. 282—288 et 298—307.

[3] La théorie des marées et les équations intégrales, Ann. scient. École norm. supér., 3 sér., t. XL, 1923, p. 151—258.

Birkhoff G. D. [1] A theorem on matrices of analytic functions, Math. Ann., Bd. 74, H. 1, 1913, S. 122—133; Coll. Math. Papers, vol. 1, 1950, p. 240—251.

[2] The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., vol. 49, 1913, p. 521—568; Coll. Math. Papers, vol. 1, 1950, p. 259—306.

Calderón A. P. [1] On theorems of M. Riesz and Zygmund, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 1, № 4, 1950, p. 533—535.

[2] Singular integrals, American Mathematical Society, 1965.

Calderón A. and Zygmund A. [1] On singular integrals, Amer. J. Math., vol. 78, № 2, 1956, p. 289—309.

[2] Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., vol. 79, № 4, 1957, p. 901—921.

Carleman T. [1] Sur la résolution de certaines équations intégrales, Arkiv för mat., astr. och fys., Bd. 16, № 26, 1922, p. 1—19.

[2] Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl. des Internat. Math. Kongr. Zürich, Bd. 1, 1932.

Casorati F. [1] Alcuni riflessioni relative alla teoria generale delle funzioni di variabili affatto libere, ossia complesse, Rend. del R. Istituto Lombardo, cl. sc. mat. nat., vol. III, 1866, p. 337—350.

Dragos L. [1] Asupra ecuatiei integro-diferentiale a lui Prandtl, Com. Acad. R. P. Romine, t. VIII, № 5, 1958, p. 451—459.

Elliott J. [1] On some singular integral equations of the Cauchy type, Ann. Math. vol. 54, № 2, 1951, p. 349—369.

[2] On an integro-differential operator of the Cauchy type, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 7, № 4, 1956, p. 616—626.

Fatou P. [1] Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math., t. 30, 1906, p. 335—400.

Fichera G. [1] Una introduzione alla teoria della equazioni integrali singolari, Rend. mat. e applic., vol. XVII, № 1—2, 1958, p. 82—191.

[2] Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity. «Partial Differential Equations and Continuum Mech.», Madison, Wisconsin Parss, 1961, p. 55—80.

Garnier R. [1] Sur le problème de Riemann — Hilbert, C. r. Acad. sci. Paris, t. 221, № 10—13, 1945, p. 276—278.

Gellerstedt S. [1] Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, Arkiv för mat., astr. och fys., Bd., 26, № 1, 1938, p. 1—32.

Giraud G. [1] Équations à intégrales principales étude suivie d'une application, Ann. scient. École norm. supér., 3 sér., t. 51, f. 3—4, 1934, p. 251—372.

[2] Sur une classe d'équations linéaires ou figurent des valeurs principales d'untégrales simples, Ibid., 3 sér., t. 56, f. 2, 1939, p. 119—172.

[3] Équations et systémes d'équations où figurent des valeurs principales d'intégrales, C. r. Acad. sci. Paris, t. 204, № 9, 1937, p. 628—630.

Gladwell G. M. L. [1] Some mixed boundary value problems in isotropic thin plate theory, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. XI, № 2, 1958, p. 159—171.

[2] Some mixed boundàry value problems of aeolotropic thin plate theory, Quart. J. Mech. and Apll. Math., vol. XII, № 1, 1959, p. 72—81.

Goursat É. [1] Cours d'analyse mathématique, t. III, 4, édit., Paris, 1927. Русский перевод; Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, М.—Л., 1933.

Hardy G. H. [1] The elementary theory of Cauchy's principal values, Proc. London Math. Sec., vol. 34, № 1, 1901, p. 16—40.

[2] The theory of Cauchy's principal values (Second Paper: The use of principal values in some of the double limit problems of the integral calculus), Ibid., p. 55—91.

[3] The theory of Cauchy's principal values (Third Paper: Differentiation and integration of principal values), Ibid., vol. 35, № 1, 1902, p. 81—107.

[4] The theory of Cauchy's principal values (Fourth Paper: The integration of principal values — continued — with applications to the inversion of definite integrals), Ibid., ser. 2, vol. 7, № 2, 1908, p. 181—208.

Hardy G. H. and Littlewood J. E. [1] Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series, Duke Math. J., vol. 2, №, 2, 1936, p. 354—382.

Harnack A. [1] Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrals, Ber. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Klasse, Bd. 37, 1885, S. 379—398. Перепечатано в Math. Ann., Bd. 35, 1899, S. 1—18.

Haseman C. [1] Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben, Göttingen, 1907.

Hellinger E. und Toeplitz O. [1] Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Sonderausgabe aus der Encykl. d. Math. Wiss. (II C 13), 1928.

Hilbert Q. [1] Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie, Verhandl. des III. Internat. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.

[2] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig — Berlin, 1912 (2 Aufl., 1924).

Hörmander L. [1] Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta math., vol. 104, № 1—2, 1960, p. 93—140. Русский перевод: Л. Хермандер, Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962.

Horváth J. [1] Singular integral operators and spherical harmonics, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 62, № 1, 1956, p. 52—63.

Hurwitz W. A. [1] On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, p. 405—413.

Jacob C. [1] Sur le problème de la dérivée oblique de Poincaré et sa connexion avec le problème de Hilbert, Bull. math. Soc. Roumaine sci., t. 42, № 2, 1941, p. 9—47.

[2] Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Bucarest — Paris, 1959.

[3] Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites, Paris, 1935.

[4] Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de Dirichlet, Mathematica, t. XV, 1939, p. 12—24.

[5] Sur le problème de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications à l'Hydrodynamique, J. math. pures et appl., t. XVIII, fasc. IV, 1939, p. 363—383.

Kellogg O. D. [1] Unstetigkeiten in der linearen Integralgleichungen, Math. Ann. Bd. 58, 1904, S. 441—456.

[2] Harmonic functions and Green's integral, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, p. 109—132.

[3] Foundations of potential theory, Berlin, 1929.

Kohn J. J. [1] Singular integral equations for differential forms on Riemannian manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 42, № 9, 1956, p. 650—653.

Koppelman W. [1] On the spectral theory of singular integral operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 44, № 12, 1958, p. 1252—1254.

[2] The Riemann — Hilbert problem for finite Riemann surfaces, Comm. Pure and Appl. Math., vol. XII, № 1, 1959, p. 13—35.

[3] Spectral multiplicity theory for a class of singular integral operators, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 113, № 1, 1964, p. 87—100.

Koppelman W. and Pincus J. D. [1] Spectral representations for finite Hilbert transformations, Math. Z., Bd. 71, H. 4, 1959, S. 399—407.

Lauwerier H. A. [1] The Hilbert problem for generalized functions, Arch. Ration. Mech. and Analysis, vol. 13, № 2, 1963, p. 157—166.

Leehey P. [1] The Hilbert problem for an airfoil in unsteady flow, J. Math. and Mech., vol. 6, № 4, 1957, p. 427—453.

Liénard A. [1] Problème plane de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel, J. de l'École polytechnique, III sér., № 5—7, 1938, p. 35—158, 177—226.

Loomis L. [1] A note on Hilbert's transform, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52, № 12, 1946, p. 1082—1086.

Love E. [1] Repeated integrals involving Cauchy principal values, J. London Math. Soc., vol. 25, № 99, 1950, p. 184—189.

MacCamy R. C. [1] On singular integral equations with logarithmic or Cauchy kernels, J. Math. and. Mech., vol. 7, № 3, 1958, p. 335—375.

Malgrange B. [1] Opérateurs intégraux singuliers et unicité et du problème de Cauchy, Séminaire Schwartz, Secrétariat mathématique, 4-ème année 1959/1960, Paris, 1960, exposés 1—10. Русский перевод: Б. Мальгранж, Сингулярные интегральные операторы и единственность задачи Коши, Математика, 6:5, 1962, стр. 87—129.

Miranda C. [1] Gli integrali principali nella teoria del potenziale, Rend. Seminario Mat. e Fis. di Milano, vol. 24, 1952, p. 107—122.

Morera G. [1] Intorno all'integrale di Cauchy, Rend. del R. Istituto Lombardo, ser. II, vol. XXII, 1889, p. 191—200.

Nickel K. [1] Lösung eines speziellen Minimumproblems, Math. Z., Bd. 53, H. 1, 1950. S. 21—52.

[2] Lösung eines Integralgleichungssystem aus der Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 54, H. 1, 1951, S. 81—96.

Noble B. [1] Methods based on the Wiener—Hopf technique for the solution of partial differential equations, London, 1958. Русский перевод: Б. Нобл, Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1962.

Noether F. [1] Über eine Klase singulärer Integralgleichungen, Math. Ann., Bd. 82, H. 1—2, 1920. S. 42—63.

Osgood W. F. [1] Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, Leipzig — Berlin, 1912.

Picard É. [1] Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, Paris, 1927.

Piechocki W. and Zorski H. [1] Thermoelastic problem for a wedge, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. techn., vol. VII, № 10, 1959, p. 555—565.

Pincus J. D. [1] On the spectral theory of singular integral operators, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 113, № 1, 1964, p. 101—128.

Plemelj J. [1] Ein Ergänzungssatz zur Cauchy'schen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. für Math. und Phys., XIX, Jahrgang, 1908, S. 205—210.

[2] Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiergruppe, Ibid., S. 211—245.

[3] Potentialtheorische Untersuchungen, Leipzig, 1911.

Pogorzelski W. [1] Über die Transformationen einiger iterierten uneigentlichen Integrale und ihre Anwendung zur Poincaré'schen Randwertaufgabe, Math. Z., Bd. 44, H. 3, 1939, S. 427—444.

[2] Sur l'équation intégrale singulière non-linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés J. Math. and Mech., vol. 7, № 4, 1958, p. 515—532.

[3] Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés Ann. scient. École norm. supér., t. LXXV, f. 3, 1958, p. 201—222.

[4] Sur certaines classes de fonctions complexes définies sur les arcs non fermés, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VII, № 2, 1959, p. 57—62.

[5] Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VII, № 6, 1959, p. 311—317.

[6] Sur une propriété principale d'une classe de fonctions discontinues pour le système des arcs, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VIII, № 6, 1960, p. 359—364.

[7] Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques, J. Math. and Mech., vol. 9, № 4, 1960, p. 583—606.

Poincaré H. [1] Leçons de Mécanique Céleste, t. III, Paris, 1910, Chap. X.

Przeworska—Rolewicz D. [1] Sur les opérations satisfaisant à une identité polynomiale, Studia math., 22, № 1, 1962, p. 43—58.

[2] Équations avec opérations algébriques, Studia math., vol. 22, № 3, 1963, p. 337—367.

[3] Sur les équations avec opérations presque algébriques, Studia math., vol. 25, № 2, 1965, p. 163—180.

Putnam C. R. [1] Commutators, absolutely continuous spectra, and singular integral operators, Amer. J. Math., vol. 86, № 2, 1964, p. 310—316.

Radon J. [1] Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential, Sitzungsber. Akad. Wiss. in Wein, Math.-naturwiss Kl. Abt. IIa, Bd. 128, H. 7, 1919, S. 1123—1167.

Reimann B. [1] Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse, Göttingen, 1851, Werke, Leipzig, 1876, S. 3—43. Русский перевод: Б. Риман, Сочинения, М., 1948, стр. 49—87.

[2] Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten, Werke Leipzig, 1876, S. 357—369. Русский перевод: Б. Риман, Сочинения, М., 1948, стр. 176—186.

Riesz M. [1] Sur les fonctions conjuguées, Math. Z., Bd. 27, H. 2, 1927, S. 218—244.

Schaefer H. [1] Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen, Math. Z., Bd. 66, H. 2, 1956, S. 147—163.

Schauder J. [1] Potentialtheoretische Untersuchungen, Erste Abhandl., Matz. Z., Bd. 33, H. 4, 1931, S. 602—640.

Schmidt H. [1] Strenge Lösungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Linie, Z. angew. Math. und Mech., Bd. 17, H. 2, 1937, S. 101—115.

Schröder K. [1] Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie, Stizungsber. Preuss. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, Bd. XXX, 1938, S. 345—362.

[2] Über die Prandtlsche Integro-Differentialgleichung der Tragflügeltheorie, Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wiss. Math-naturwiss. Klasse, 1939, № 16.

Schubert H. [1] Über eine lineare Integrodifferentialgleichung mit Zusatzkern, Vorträge der 3. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt. Institut für Math. und angewandte Mech., H. 2, 1966, S. 117—148.

Schwartz J. [1] Some results on the spectra and spectral resolutions of a class of singular integral operators, Comm. Pure and Appl. Math., vol. 15, № 1, 1962, p. 75—90.

Seeley R. T. [1] Regularization of singular integral operators on compact manifolds, Amer. J. Math., vol. 83, № 2, 1961, p. 265—275.

[2] The index of elliptic systems of singular integral operators, J. Math. Anal. and Apll., vol. 7, № 2, 1963, p. 289—309.

Sewell W. E. [1] Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princeton, 1942.

Shinbrot M. [1] On singular integral operators, J. Math. and Mech., vol. 13, № 3, 1964, p. 395—406.

Signorini A. [1] Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa, Ann. mat. pura ed appl., Ser. III, t. XXV, 1916, p. 253—273.

Söhngen H. [1] Die Lösungen der Integralgleichung

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)\,d\xi}{x-\xi}$$

und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 45, H. 2, 1939, S. 245—264.

[2] Zur Theorie der endilichen Hilbert-Transformation, Math Z., Bd. 60, H. 1, 1954, S. 31—51.

[3] Luftkräfte an einem schwingenden Gitter, Z. angew. Math. und Mech., Bd. 35, H. 3, 1955, S. 81—88.

Stein E. M. [1] Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 8, № 2, 1957, p. 250—254.

[2] On the theory of harmonic functions of several variables, Acta math., vol. 106, № 3—4, 1961, p. 137—174.

Stein E. M. and Weiss G. [1] On the theory of harmonic functions of several variables, Acta math., vol. 103, № 1—2, 1960, p. 25—62.

Tamarkin J. D. [1] On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter, Ann. Math., Ser., 2, vol. 28, № 2, 1927, p. 127—152.

Titchmarsh E. C. [1] On conjugate functions, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, vol. 29, Part. I, 1929, p. 49—80.

Tricomi F. [1] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Mem. d. R. Accademia dei Lincei, ser. V, vol. XIV, fasc. VII, 1923, p. 133—247. Русский перевод: Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[2] Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio, Math. Z., Bd., 27, H. 1, 1927, S. 87—133.

[3] On the finite Hilbert transformation, Quart. J. Math., vol. 2, № 7, 1951, p. 199—211.

[4] Equazioni integrali singolari del tipo di Carleman, Ann. mat. pura ed appl., Ser. quarta, t. XXXIX, 1955, 229—244.

[5] Sull'inversione dell'ordine di integrali «principali» nel senso di Cauchy, Rend. Acc. Lincei, vol. XVIII, fasc. I, 1955, p. 3—7.

[6] Integral equations, New York —London, 1957. Русский перевод: Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960.

Trjitzinsky W. J. [1] Singular integral equations with Cauchy kernels, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 60, № 2, 1946, 167—214.

[2] Multidimensional principal integrals, boundary value problems and integral equations, Acta math., vol. 84, № 1—2, 1950, p. 1—128.

Veltkamp G. W. [1] The drag on a vibrating aerofoil in incompressible flow, Indagationes math., vol. XX, fasc. 3, 1958, p. 278—297.

Walsh J. L. and Sewell W. E. [1] Sufficient conditions for various degreess of approximation by polynomials, Duke Math. J., vol. 6, № 3, 1940, p. 658—705.

Warschawski S. [1] Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, Math. Z., Bd. 35, H. 3, 1932, S. 321—456.

[2] Bemerkung zu meiner Arbeit «Über das Randverhalten der Ableitung u. s. w.», Math. Z., Bd. 38, H. 5, 1934, S. 669—683.

Weissinger J. [1] Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 47, H. 1, 1940, S. 16—33.

Widom H. [1] Singular integral equations in L_p, Trans. Amer. Math. Scc., vol. 97, № 1, 1960, p. 131—160.

Wolfersdorf L. [1] Zum Problem der Richtungsableitung für die Tricomi-Gleichung, Mathematische Nachrichten, Bd. 25, H. 2, 1963, S. 111—127.

[2] Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung, Math. Nachr., Bd. 29, H. 3—4, 1965, S. 161—178.

[3] Berichtigung zur Arbeit «Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung», Math. Nachr., Bd. 32, H. 3—4, 1966, S. 246.

Woods L. C. [1] The theory of subsonic plane flow, Cambridge, 1961.

Zakowski W. [1] Sur une généralisation de la transformation de Poincaré—Bertrand, Ann. polon. math., t. X, № 2, 1961, p. 115—122.

Zorski H. [1] Plates with discontinuous supports, Arch. mech stosowanej, t. X, № 3, 1958, p. 271—313.

[2] A semi-infinite strip with discontinuous boundary condition, Arch. mech. stosowanej, t. X, № 3, 1958, p. 371—398.

[3] Plates with discontinuous supports, I, II, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. techn., vol. VI, № 3, 1958, p. 127—132 and p. 133—140.

[4] Some cases of bending of anisotropic plates, Arch. mech. stosowanej, t. XI, № 1, 1959, p. 71—91.

Zygmund A. [1] Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la série de Fourier, Prace Matematyczno-Fizyczne, vol. 33, 1924, p. 125—132.

[2] Trigonometric series, vol. I, II. Cambridge, 1959. Русский перевод: А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. I, II, М., ИЛ, 1966.

[3] On singular integrals, Rend. mat. appl., ser. 5, vol. 16, № 3—4, 1957, p. 468—505.

[4] Intégrales singulières, Publications du Sèminaire de mathématiques d'Orsay, 4-ème année, 1964—1965, p. 1—56.

მესამე რუსული გამოცემის შემდეგ გამოქვეყნებული მონოგრაფიული ხასიათის შრომების ბიბლიოგრაფია

Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М., 1981.

Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2-е изд. — М., 1970.

Габдулхаев Б. Г., Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань, 1980.

Габдулхаев Б. Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. — Сб.: Итоги науки и техники, математический анализ, т. 18, 1980.

Гахов Ф. Д. Краевые задачи, 3-е изд. — М., 1977.

Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки, — М., 1978.

Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев, 1973.

Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. — М., 1971.

Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. — М., 1980.

Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. — М., 1975.

Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. — Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР, т. 60, 1979.

Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее приложение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. — Киев, 1968.

Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. — М., 1973.

Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М., 1977.

Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск, 1977.

Оболашвили Е. И. Преобразование Фурье и его применения в теории упругости. — Тбилиси, Мецниереба, 1979.

Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. — М., 1977.

Пихтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. — Новосибирск, 1980.

Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений, пер. с нем., — М., 1979.

Хведелидзе Б. В. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. — Сб.: Современные проблемы математики, т. 7. — М., 1975.

Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций.— Казань, 1977.

Чибрикова Л. И. Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях. — Сб.: Итоги науки и техники, математический анализ, т. 18. — М., 1980.

Michlin S. G., Prößdorf. Singuläre Integraloperatoren. — Berlin, 1980.

Przeworska—Rolewicz D. Equations with transformed argument. An algebraic approach.—Warsawa, 1973.

შინაარსი

თავი პირველი

კოშის ტიპის ინტეგრალების ძირითადი თვისებები

I. ზოგიერთი განსაზღვრა და დამხმარე დებულება

II. კოშის ტიპის ინტეგრალები

III. ზოგიერთი უშუალო გამოყენება

თავი მეორე

შეუღლების ამოცანა და სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები გლუვი შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევაში

I. შეუღლების ამოცანა გლუვი შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტის შემთხვევაში

II. რიმან—ჰილბერტის ამოცანა

III. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები გლუვი შეკრული კონტურებისა და უწყვეტი კოეფიციენტების შემთხვევაში

თავი მესამე

გამოყენებანი ზოგიერთ სასაზღვრო ამოცანაში

I. დირიხლეს ამოცანა

თავი მეოთხე

შეუღლების ამოცანა ზოგად შემთხვევაში. ზოგიერთი გამოყენება

თავი მეხუთე

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი ზოგად შემთხვევაში. ზოგიერთი გამოყენება

I. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი ზოგად შემთხვევაში

II. გამოყენება დირიხლეს ამოცანაში და მის ანალოგიურ ამოცანებში

III. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები მასში შემავალი კომპლექსურად შეუღლებული უცნობებით

IV. გამოყენებანი დრეკადობის თეორიის ზოგიერთ შერეულ ამოცანაში

V. მოკლე ცნობები ზოგიერთი სხვა შედეგის შესახებ

თავი მეექვსე

სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემები და შეუღლების ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის

I. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემები

II. შეუღლების ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის

III. გამოყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების გამოკვლევაში

Николай Иванович Мусхелишвили

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике

(На грузинском языке)

ИБ 1733

დაიბეჭდა საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს დადგენილებით

გამომცემლობის რედაქტორი გ. ბოკუჩავა
ტექრედაქტორი ე. ბოკერია
მხატვარი ა. დუმბაძე
კორექტორი ლ. აბჟანდაძე

გადაეცა წარმოებას 25.3.81; ხელმოწერილია დასაბეჭდად 5.6.82;
ქაღალდის ზომა $70 \times 108^1/_{16}$; ქაღალდი № 1; ნაბეჭდი თაბახი 52,5;
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 39,5;

ტირაჟი 1000; შეკვეთა 1146;

ფასი 4 მან. 65 კაპ.

გამომცემლობა „მეცნიერება", თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Издательство «Мецниереба», Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Типография АН Груз. ССР, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19