

# თბილისის უნივერსიტეტის უ რ ო მ ე ბ ი

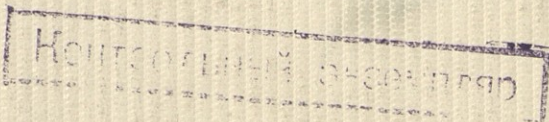
Труды Тбилисского  
университета

Proceedings  
of Tbilisi University

A 1 (137)

ფიზიკა-მათემატიკისა და საზოგადოებრივი მეცნიერებანი

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ  
PHYSICO-MATHEMATICAL AND NATURAL SCIENCES



თბილისი Тбилиси Tbilisi

1971



# თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского  
университета

Proceedings  
of Tbilisi University

A 1 (137)

ფიზიკა-მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებანი  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ  
PHYSICO-MATHEMATICAL AND NATURAL SCIENCES

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
TBILISI UNIVERSITY PRESS

1971





თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები 1970 წლიდან გამოდის ორ სერიად: A— ფიზიკა-მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებანი და B—ჰუმანიტარული მეცნიერებანი, თითოეული წელიწადში ოთხჯერ.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета с 1970 года издаются в двух сериях: А — Физико-математические и естественные науки и В — Гуманитарные науки, каждая четыре раза в год.

Since 1970 proceedings of Tbilisi University are published in two series: A — Physico-mathematical and natural sciences, B—Humanitarian sciences.

Proceedings come out four times a year.



### სარედაქციო კოლეგია

ი. გვერდწითელი, ნ. ვახანია, თ. კობალეიშვილი, ლ. მაღნარაძე, ლ. ნათაძე,  
ნ. სხირტლაძე, ჯ. შარიკაძე (მდივანი), ა. ხარაძე (მთავარი რედაქტორი).

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н. Н. Вахания, И. М. Гвердцители, Т. И. Копалеишвили, Л. Г. Маг-  
нарадзе, Л. Р. Натадзе, Н. И. Схиртладзе, А. К. Харадзе (главный  
редактор), Д. В. Шарикадзе (секретарь).

### EDITORIAL BOARD

I. Gverdtsiteli, A. Kharadze (editor in chief), T. Kopaleishvili,  
L. Magnaradze, L. Natadze, J. Sharikadze (secretary), N. Skhirtladze,  
N. Vakhania.



## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С ВОСЕМЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ \*

Р. И. БЕРИДЗЕ

§ 1. Пусть  $r(n; f)$  обозначает число представлений натурального числа  $n$  формой

$$f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_8 x_8^2 \quad (1.1)$$

при заданных натуральных коэффициентах  $a_1, a_2, \dots, a_8$ .

В работах [1], [2] нами получены точные формулы для числа представлений целых чисел некоторыми формами вида (1.1). Все эти формулы содержат так называемые дополнительные члены, определенные лишь как коэффициенты Фурье некоторых произведений тэта-функций с характеристиками.

В настоящей работе, при помощи некоторых результатов работы [3], мы выявляем арифметический смысл упомянутых выше коэффициентов Фурье.

Положив

$$\vartheta_{gh}(\tau; 0, N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{hk} Q^{\frac{1}{8N}(2Nk+g)^2} \quad (1.2)$$

( $g, h$  — целые числа,  $N$  — натуральное число,  $\tau$  — комплексная переменная с  $\text{Im } \tau > 0$ ,  $Q = \exp(2\pi i \tau)$ ), получим

$$\prod_{k=1}^8 \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n; f) Q^n. \quad (1.3)$$

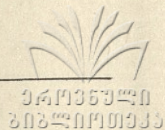
Теперь положим

$$\theta(\tau; f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n; f) Q^n, \quad (1.4)$$

где  $\rho(n; f)$  — сингулярный ряд, соответствующий форме  $f$  вида (1.1).

\* Все результаты этой статьи вошли в кандидатскую диссертацию автора, защищенную в Тбилисском государственном университете в 1965 г., однако они до сих пор не были опубликованы.





В дальнейшем мы будем применять следующие две леммы:

Лемма 1 (см., напр., [4], стр. 10, лемма 2). Целая модулярная форма  $F(\tau)$  размерности  $-r$ , присоединенная к подгруппе  $\Gamma_0(N)$ , и делителя  $N$  тождественно равна нулю, если ее коэффициенты Фурье  $A_n = 0$  для всех

$$n \leq \frac{r}{12} N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Лемма 2 ([3], стр. 258, лемма 2). Имеют место разложения

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}(\tau; 0, N) \vartheta_{01}(\tau; 0, N) \vartheta_{N_0}(\tau; 0, N) = \\ & = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (2k+1) Q^{\frac{N}{8}(2k+1)^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}(\tau; 0, N) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, N) \vartheta_{N_0}^4(\tau; 0, N) = \\ & = 4 \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} (-1)^{k_2} (k_1^2 - k_2^2) Q^{\frac{N}{2}(k_1^2 + k_2^2)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}(\tau; 0, N) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, N) \vartheta_{N_0}(\tau; 0, N) = \\ & = \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} \{(2k_1+1)^2 - 4k_2^2\} Q^{\frac{N}{8}\{(2k_1+1)^2 + 4k_2^2\}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

§ 2. В этом параграфе рассматривается представление чисел формами

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2(x_7^2 + x_8^2), \\ f_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), \\ f_3 &= x_1^2 + x_2^2 + 2(x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2). \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть  $n = 2^\alpha u$ ,  $(u, 2) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f_1) &= 8\sigma_3(u) + 4 \sum_{\substack{2n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, x > 0, y > 0}} (x^2 - 4z^2), \quad \text{если } \alpha = 0, \\ &= 64 \sigma_3(u), \quad \text{если } \alpha = 1, \\ &= \frac{29 \cdot 2^{3\alpha+1} - 240}{7} \sigma_3(u), \quad \text{если } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Доказательство. В теореме 1а работы [2] доказано, что

$$r(n; f_1) = 8\sigma_3(u) + \nu(n), \quad \text{если } \alpha = 0, \quad (2.1)$$

где  $\nu(n)$  обозначает коэффициент при  $Q^n$  в разложении функции  $\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 4) \vartheta_{40}^2(\tau; 0, 4)$  по степеням  $Q$ .



Из (1.7) и (1.2) следует

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_{00}^2(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{01}^4(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{40}^2(\tau; 0, 4) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} \{(2k_1+1)^2 - 4k_2^2\} Q^{\frac{1}{2} \{(2k_1+1)^2 + 4k_2^2 + 4k_3^2 + (2k_4+1)^2\}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \nu(n) &= \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+4z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y}} (x^2 - 4z^2) = 4 \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+4z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, x > 0, y > 0}} (x^2 - 4z^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует первая формула теоремы.

Вторая и третья формулы доказаны в работе [2].

Теорема 2. Пусть  $n = 2^\alpha u$ ,  $(u, 2) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f_2) &= 4\sigma_3(u) + 4 \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+4x^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, x > 0, y > 0}} (x^2 - 4z^2), & \text{если } \alpha = 0, \\ &= 32\sigma_3(u), & \text{если } \alpha = 1, \\ &= \frac{240}{7} (2^{3\alpha-3} - 1) \sigma_3(u), & \text{если } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассуждая почти так же, как и в лемме 23 работы [4], можно показать, что функция

$$\begin{aligned} \psi(\tau; f_2) &= \mathfrak{D}_{00}^4(\tau; 0, 2) \mathfrak{D}_{00}^4(\tau; 0, 4) - \theta(\tau; f_2) \\ &- \Lambda \mathfrak{D}_{00}^2(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{01}^4(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{40}^2(\tau; 0, 4) \end{aligned} \quad (2.3)$$

при постоянной  $\Lambda$  является целой модулярной формой размерности  $-4$ , присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(8)$ , и делителя 8. Следовательно, согласно лемме 1, функция (2.3) будет тождественно равна нулю, если удастся так подобрать постоянную  $\Lambda$ , чтобы коэффициенты при  $Q^n$  для всех  $n \leq 4$  в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  равнялись нулю.

На стр. 311 работы [1] показано, что

$$\mathfrak{D}_{00}^4(\tau; 0, 2) \mathfrak{D}_{00}^4(\tau; 0, 4) = 1 + 8Q + 32Q^2 + 96Q^3 + 240Q^4 + \dots, \quad (2.4)$$

$$\theta(\tau; f_2) = 1 + 4Q + 32Q^2 + 112Q^3 + 240Q^4 + \dots, \quad (2.5)$$

а на стр. 80 работы [2] показано, что

$$\mathfrak{D}_{00}^2(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{01}^4(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{40}^2(\tau; 0, 4) = 4Q - 16Q^3 - 8Q^5 + \dots \quad (2.6)$$

Теперь постоянную  $\Lambda$  подберем так, чтобы коэффициент при  $Q$  в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  был равен нулю, то есть, согласно (2.3) — (2.6), так, чтобы

$$8 - 4 - 4\Lambda = 0.$$

Взяв  $\Lambda = 1$  и приняв во внимание (2.3) — (2.6), нетрудно проверить, что все коэффициенты при  $Q^n$  ( $n \leq 4$ ) в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  равны нулю.



Таким образом, получаем

$$\mathfrak{D}_{00}^4(\tau; 0, 2) \mathfrak{D}_{00}^4(\tau; 0, 4) = \theta(\tau; f_2) + \mathfrak{D}_{00}^2(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{01}^4(\tau; 0, 4) \mathfrak{D}_{40}^2(\tau; 0, 4),$$

откуда, согласно (1.3) и (1.4),

$$r(n; f_2) = \rho(n; f_2) + \nu(n), \quad (2.7)$$

где  $\nu(n)$  имеет то же значение, что и в формуле (2.1).

Из (2.7), (2.2) и формул (4.2) и (4.3) работы [1] следует утверждаемое.

**Теорема 3.** Пусть  $n = 2^\alpha u$ ,  $(u, 2) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f_3) &= 2\sigma_3(u) + 2 \sum_{\substack{2n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 \\ 2|x, 2|y, x > 0, y > 0}} (x^2 - 4z^2), \quad \text{если } \alpha = 0, \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2^{3\alpha+4} - 240}{7} \sigma_3(u), \quad \text{если } \alpha > 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** В теореме 2а работы [2] доказано, что

$$r(n; f_3) = 2\sigma_3(u) + \frac{1}{2} \nu(n), \quad \text{если } \alpha = 0, \quad (2.8)$$

где  $\nu(n)$  имеет то же значение, что и в формуле (2.1).

Следовательно, из (2.8) и (2.2) следует первая формула теоремы.

Вторая формула доказана в работе [2].

**§ 3.** В этом параграфе рассматривается представление чисел формами

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 3(x_7^2 + x_8^2),$$

$$f_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 3(x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2),$$

$$f_3 = x_1^2 + x_2^2 + 3(x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2).$$

**Теорема 4.** Пусть  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u$ ,  $(u, 6) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f_1) &= \frac{4}{65} (3^{3\beta+4} + 10) \sigma_3(u) + \frac{32}{5} \sum_{\substack{2n = x^2 + y^2 + 6z^2 + 6t^2 \\ 2|x, 2|y, x > 0, y > 0}} (-1)^{\frac{xy-1}{2} + z} xy + \\ &+ \frac{36}{5} \sum_{\substack{2n = x^2 + y^2 + 6z^2 + 6t^2 \\ 2|x, 2|y}} (-1)^{\frac{x+y}{2} + t} (z^2 - t^2), \quad \text{если } \alpha = 0, \\ &= \frac{12}{455} (2^{3\alpha+1} + 5) (3^{3\beta+4} + 10) \sigma_3(u) + \frac{48}{5} \sum_{\substack{4n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2 \\ 2|x, 2|y, 2|z, 2|t \\ x > 0, y > 0, z > 0, t > 0}} (-1)^{\frac{xz-1}{2}} xz, \quad \text{если } \alpha > 0. \end{aligned}$$



Доказательство. В теореме 3а работы [2] доказано, что

$$r(n; f_1) = \frac{4}{65} (3^{3\alpha+4} + 10) \sigma_3(u) + \frac{8}{5} \nu_1(n) + \frac{9}{5} \nu_2(n), \quad \text{если } \alpha = 0,$$

$$= \frac{12}{455} (2^{3\alpha+1} + 5)(3^{3\alpha+4} + 10) \sigma_3(u) + \frac{3}{5} \nu_3(n), \quad \text{если } \alpha > 0, \quad (3.1)$$

где  $\nu_1(n)$ ,  $\nu_2(n)$ ,  $\nu_3(n)$ , соответственно, обозначают коэффициенты при  $Q^n$  в разложениях функций

$$\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{01}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{40}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6),$$

$$\vartheta_{01}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}^4(\tau; 0, 6),$$

$$\vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}^2(\tau; 0, 6)$$

по степеням  $Q$ .

Из (1.5) и (1.2) следует

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{01}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{40}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+k_4} (2k_1+1)(2k_2+1) Q^{\frac{1}{2} \{ (2k_1+1)^2 + (2k_2+1)^2 + 6k_3^2 + 6k_4^2 \}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\nu_1(n) = \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+6z^2+6t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y}} (-1)^{\frac{x-1+y-1}{2}+z} xy = 4 \sum_{\substack{xy=4 \\ 2n=x^2+y^2+6z^2+6t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, x > 0, y > 0}} (-1)^{\frac{xy-1}{2}+z} xy. \quad (3.2)$$

Из (1.6) и (1.2) следует

$$\begin{aligned} & \vartheta_{01}^2(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}^4(\tau; 0, 6) = \\ & = 4 \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+k_4} (k_3^2 - k_4^2) Q^{\frac{1}{2} \{ 4k_1^2 + 4k_2^2 + 6k_3^2 + 6k_4^2 \}}, \end{aligned}$$

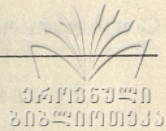
откуда

$$\nu_2(n) = 4 \sum_{\substack{x+y+t \\ 2n=x^2+y^2+6z^2+6t^2 \\ 2 \mid x, 2 \mid y}} (-1)^{\frac{x+y+t}{2}} (z^2 - t^2). \quad (3.3)$$

Из (1.5) и (1.2) получаем

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}^2(\tau; 0, 6) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} (2k_1+1)(2k_2+1) Q^{\frac{1}{4} \{ (2k_1+1)^2 + 3(2k_2+1)^2 + (2k_3+1)^2 + 3(2k_4+1)^2 \}} \end{aligned}$$





откуда

$$v_3(n) = \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, 2 \nmid z, 2 \nmid t \\ x>0, y>0, z>0, t>0}} (-1)^{\frac{x-1+y-1}{2}} xz = 16 \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, 2 \nmid z, 2 \nmid t \\ x>0, y>0, z>0, t>0}} (-1)^{\frac{xz-1}{2}} xz. \quad (3.4)$$

Из (3.1) — (3.4) следует утверждаемое.

Теорема 5. Пусть  $n=2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u$ ,  $(u, 6)=1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f_3) &= \frac{4}{65} (3^{3\beta+1} + 10) \sigma_3(u) + \frac{16}{5} \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+6z^2+6t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, x>0, y>0}} (-1)^{\frac{xy-1}{2}+z} xy + \\ &+ \frac{8}{5} \sum_{\substack{2n=x^2+y^2+6z^2+6t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y}} (-1)^{\frac{x+y}{2}+t} (z^2-t^2), \quad \text{если } \alpha=0, \\ &= \frac{12}{455} (2^{3\alpha+1} + 5) (3^{3\beta+1} + 10) \sigma_3(u) - \frac{16}{5} \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, 2 \nmid z, 2 \nmid t \\ x>0, y>0, z>0, t>0}} (-1)^{\frac{xz-1}{2}} xz, \quad \text{если } \alpha>0. \end{aligned}$$

Доказательство. В теореме 4а работы [2] доказано, что

$$\begin{aligned} r(n; f_3) &= \frac{4}{65} (3^{3\beta+1} + 10) \sigma_3(u) + \frac{4}{5} v_1(n) + \frac{2}{5} v_2(n), \quad \text{если } \alpha=0, \\ &= \frac{12}{455} (2^{3\alpha+1} + 5) (3^{3\beta+1} + 10) - \frac{1}{5} v_3(n), \quad \text{если } \alpha>0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $v_1(n)$ ,  $v_2(n)$  и  $v_3(n)$  имеют те же значения, что и в формуле (3.1).

Таким образом, утверждаемое следует из (3.5) и (3.2) — (3.4).

Теорема 6. Пусть  $n=2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u$ ,  $(u, 6)=1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f_2) &= (-1)^n \frac{2^{3z+3} - 15}{35} \cdot \frac{16 \cdot 3^{3\beta+2} - 40}{13} \sigma_3(u) + \\ &+ \frac{32}{5} \sum_{\substack{4n=x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid z, 2 \nmid y, 2 \nmid t \\ x>0, z>0}} (-1)^{\frac{xz-1}{2}} xz. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассуждая почти так же, как и в лемме 23 работы [4], можно показать, что функция

$$\begin{aligned} \psi(\tau; f_2) &= \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 6) - \theta(\tau; f_2) - \\ &- A \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}(\tau; 0, 6) \end{aligned} \quad (3.6)$$



при постоянной  $A$  является целой модулярной формой размерности 4, присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(12)$ , и делителя 12. Таким образом, согласно лемме 1, функция (3.6) будет тождественно равна нулю, если удастся так подобрать постоянную  $A$ , чтобы коэффициенты при  $Q^n$  для всех  $n \leq 8$  в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  равнялись нулю.

На стр. 313 и 314 работы [1] показано, что

$$\vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 6) = 1 + 8Q + 24Q^2 + 40Q^3 + 88Q^4 + 240Q^5 + 376Q^6 + 448Q^7 + 984Q^8 + \dots \quad (3.7)$$

$$\theta(\tau; f_2) = 1 + \frac{8}{5}Q + \frac{56}{5}Q^2 + \frac{296}{5}Q^3 + \frac{568}{5}Q^4 + \frac{1008}{5}Q^5 + \frac{2072}{5}Q^6 + \frac{2752}{5}Q^7 + \frac{4664}{5}Q^8 + \dots \quad (3.8)$$

Из (1.2) следует

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}(\tau; 0, 6) = \\ & = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{k^2} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{k^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{\frac{1}{4}(2k+1)^2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{3k^2} \right)^2 \times \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k Q^{3k^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q^{\frac{3}{4}(2k+1)^2} = 4Q + 8Q^2 - 12Q^3 - 16Q^4 + 24Q^5 - \\ & - 24Q^6 - 64Q^7 + 32Q^8 + \dots \quad (3.9) \end{aligned}$$

Постоянную  $A$  подберём так, чтобы коэффициент при  $Q$  в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  был равен нулю, то есть, согласно (3.6)–(3.9), так, чтобы

$$8 - \frac{8}{5} - 4A = 0.$$

Взяв  $A = \frac{8}{5}$  и приняв во внимание (3.6)–(3.9), нетрудно проверить, что все коэффициенты при  $Q^n$  ( $n \leq 8$ ) в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  равны нулю.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 6) = \theta(\tau; f_2) + \\ & + \frac{8}{5} \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}(\tau; 0, 6), \end{aligned}$$

откуда, согласно (1.3) и (1.4),

$$r(n; f_2) = \rho(n; f_2) + \frac{8}{5} \nu(n), \quad (3.10)$$





где  $\nu(n)$  обозначает коэффициент при  $Q^n$  в разложении функции  $\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}^2(\tau; 0, 6)$  по степеням  $Q$ .

Из (1.5) и (1.2) следует

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{01}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{20}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{01}^2(\tau; 0, 6) \vartheta_{60}^2(\tau; 0, 6) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} (2k_1+1) (2k_2+1) Q^{\frac{1}{4} \{(2k_1+1)^2 + 3(2k_2+1)^2 + 4k_3^2 + 12k_4^2\}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\nu(n) = 4 \sum_{\substack{4n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2 \\ 2|x, 2|z, 2|y, 2|t \\ x > 0, z > 0}} (-1)^{\frac{xz-1}{2}} xz. \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) и формулы (5.5) работы [1] следует утверждаемое.

§ 4. В этом параграфе рассматривается представление чисел формами

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 4(x_7^2 + x_8^2),$$

$$f_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4(x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2),$$

$$f_3 = x_1^2 + x_2^2 + 4(x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2).$$

Теорема 7. Пусть  $n = 2^\alpha u$ ,  $(u, 2) = 1$ . Тогда

$$r(n; f_1) = 3\sigma_3(u) + 9 \sum_{\substack{n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \\ 2|x, x > 0}} (x^2 - 4y^2), \quad \text{если } n \equiv 1 \pmod{4},$$

$$= 5\sigma_3(u) + 20 \sum_{\substack{n = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 \\ 2|x, 2|y, 2|z \\ x > 0, y > 0, z > 0}} (x^2 - 4t^2), \quad \text{если } n \equiv 3 \pmod{4},$$

$$= 32\sigma_3(u) + 28 \sum_{\substack{n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 \\ 2|x, 2|y, x > 0, y > 0}} (x^2 - 4z^2), \quad \text{если } \alpha = 1,$$

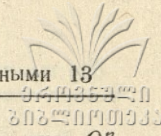
$$= 256 \sigma_3(u), \quad \text{если } \alpha = 2,$$

$$= \frac{16}{7} (2^{3\alpha-6} \cdot 113 - 15) \sigma_3(u), \quad \text{если } \alpha > 2.$$

Доказательство. В теореме 5а работы [2] доказано, что

$$\begin{aligned} r(n, f_1) &= 3\sigma_3(u) + \frac{9}{2} \nu_1(n), \quad \text{если } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= 5\sigma_3(u) + \frac{5}{2} \nu_3(n), \quad \text{если } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ &= 32\sigma_3(u) + 7\nu_2(n), \quad \text{если } \alpha = 1, \end{aligned} \quad (4.1)$$





где  $\nu_1(n)$ ,  $\nu_2(n)$ ,  $\nu_3(n)$ , соответственно, обозначают коэффициенты при  $Q^n$  в разложениях функций  $\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 8)$   $\vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8)$   $\vartheta_{80}(\tau; 0, 8)$ ,

$\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 8)$   $\vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8)$   $\vartheta_{80}^2(\tau; 0, 8)$  и  $\vartheta_{00}(\tau; 0, 8)$   $\vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8)$   $\vartheta_{80}^3(\tau; 0, 8)$

по степеням  $Q$ .

Из (1.7) и (1.2) следует

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}(\tau; 0, 8) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} \{ (2k_1+1)^2 - 4k_2^2 \} Q^{(2k_1+1)^2 + 4k_2^2 + 4k_3^2 + 4k_4^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\nu_1(n) = 2 \sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, x > 0}} (x^2 - 4y^2). \quad (4.2)$$

Из (1.7) и (1.2) имеем

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^2(\tau; 0, 8) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} \{ (2k_1+1)^2 - (2k_2)^2 \} Q^{(2k_1+1)^2 + 4k_2^2 + 4k_3^2 + (2k_4+1)^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\nu_2(n) = 4 \sum_{\substack{n=x^2+y^2+4z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, x > 0, y > 0}} (x^2 - 4z^2). \quad (4.3)$$

Из (1.7) и (1.2) получаем

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^3(\tau; 0, 8) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 = -\infty}^{\infty} \{ (2k_1+1)^2 - (2k_2)^2 \} Q^{(2k_1+1)^2 + 4k_2^2 + (2k_3+1)^2 + (2k_4+1)^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\nu_3(n) = 8 \sum_{\substack{n=x^2+y^2+z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, 2 \nmid z \\ x > 0, y > 0, z > 0}} (x^2 - 4t^2). \quad (4.4)$$

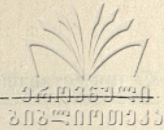
Из (4.1) — (4.4) следуют первые три формулы теоремы. Последние две формулы теоремы доказаны в работе [2].

**Теорема 8.** Пусть  $n = 2^{\alpha} u$ ,  $(u, 2) = 1$ . Тогда

$$r(n; f_2) = \sigma_3(u) + 7 \sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, x > 0}} (x^2 - 4y^2), \quad \text{если } n \equiv 1 \pmod{4},$$

$$= \sigma_3(u) + 4 \sum_{\substack{n=x^2+y^2+z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, 2 \nmid z \\ x > 0, y > 0, z > 0}} (x^2 - 4t^2), \quad \text{если } n \equiv 3 \pmod{4},$$





$$\begin{aligned}
 &= 12\sigma_3(u) + 12 \sum_{\substack{n=x^2+y^2+4z^2+4t^2 \\ 2+x, 2+y, x>0, y>0}} (x^2 - 4z^2), & \text{если } \alpha=1, \\
 &= 32\sigma_3(u), & \text{если } \alpha=2, \\
 &= \frac{15}{7}(2^{3\alpha-2} - 16)\sigma_3(u), & \text{если } \alpha>2.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Рассуждая почти так же, как и в лемме 23 работы [4], можно показать, что функция

$$\begin{aligned}
 \psi(\tau; f_2) &= \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 8) - \theta(\tau; f_2) - \\
 &- A_1 \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}(\tau; 0, 8) - A_2 \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^2(\tau; 0, 8) - \\
 &- A_3 \vartheta_{00}(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^3(\tau; 0, 8)
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

при постоянных  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  является целой модулярной формой размерности  $\frac{1}{4}$ , присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(16)$ , и делителя 16. Следовательно, согласно лемме 1, функция (4.5) будет тождественно равна нулю, если удастся так подобрать постоянные  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , чтобы коэффициенты при  $Q^n$  для всех  $n \leq 8$  в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  равнялись нулю.

На стр. 315 и 316 работы [1] показано, что

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 8) &= 1 + 8Q + 24Q^2 + 32Q^3 + 32Q^4 + \\
 &+ 112Q^5 + 288Q^6 + 320Q^7 + 240Q^8 + \dots,
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 \theta(\tau; f_2) &= 1 + Q + 12Q^2 + 28Q^3 + 32Q^4 + 126Q^5 + 336Q^6 + \\
 &+ 344Q^7 + 240Q^8 + \dots;
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

точно так же на стр. 90 работы [2] показано, что

$$\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}(\tau; 0, 8) = 2Q - 4Q^5 - 22Q^9 + \dots \quad (4.8)$$

$$\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^2(\tau; 0, 8) = 4Q^2 - 16Q^6 - 8Q^{10} + \dots \quad (4.9)$$

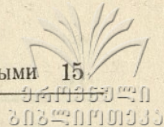
$$\vartheta_{00}(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^3(\tau; 0, 8) = 8Q^3 - 48Q^7 + 88Q^{11} + \dots \quad (4.10)$$

Теперь постоянные  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  подберем так, чтобы коэффициенты при  $Q$ ,  $Q^2$  и  $Q^3$  в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  были равны нулю, то есть, согласно (4.5) — (4.10), так, чтобы

$$8 - 1 - 2A_1 = 0, \quad 24 - 12 - 4A_2 = 0, \quad 32 - 28 - 8A_3 = 0.$$

Следовательно, взяв  $A_1 = \frac{7}{2}$ ,  $A_2 = 3$ ,  $A_3 = \frac{1}{2}$  и приняв во внимание (4.5) — (4.10), нетрудно проверить, что все коэффициенты при  $Q^n$  ( $n \leq 8$ ) в разложении  $\psi(\tau; f_2)$  по степеням  $Q$  равны нулю.





Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 8) &= \theta(\tau; f_2) + \frac{7}{2} \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}(\tau; 0, 8) + \\ &+ 3\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^2(\tau; 0, 8) + \\ &+ \frac{1}{2} \vartheta_{00}(\tau; 0, 8) \vartheta_{01}^4(\tau; 0, 8) \vartheta_{80}^3(\tau; 0, 8), \end{aligned}$$

откуда, согласно (1.3) и (1.4),

$$r(n; f_2) = \rho(n; f_2) + \frac{7}{2} \nu_1(n) + 3\nu_2(n) + \frac{1}{2} \nu_3(n), \quad (4.11)$$

где  $\nu_1(n)$ ,  $\nu_2(n)$  и  $\nu_3(n)$  имеют те же значения, что и в формуле (4.1).

Из (4.11), (4.2) — (4.4) и формул (6.5) работы [1] следует утверждаемое.

**Теорема 9.** Пусть  $n = 2^\alpha u$ ,  $(u, 2) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f_3) &= \frac{1}{2} \sigma_3(u) + \frac{7}{2} \sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, x > 0}} (x^2 - 4y^2), & \text{если } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= 0, & \text{если } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ &= 2\sigma_3(u) + 2 \sum_{\substack{n=x^2+y^2+4z^2+4t^2 \\ 2 \nmid x, 2 \nmid y, x > 0, y > 0}} (x^2 - 4z^2), & \text{если } \alpha = 1, \\ &= 16\sigma_3(u), & \text{если } \alpha = 2, \\ &= \frac{16}{7} (2^{3\alpha-3} - 15) \sigma_3(u), & \text{если } \alpha > 2. \end{aligned}$$

**Доказательство.** В теореме 6а работы [2] доказано, что

$$\begin{aligned} r(n; f_3) &= \frac{1}{2} \sigma_3(u) + \frac{7}{4} \nu_1(n), & \text{если } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= 2\sigma_3(u) + \frac{1}{2} \nu_2(n), & \text{если } \alpha = 1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\nu_1(n)$  и  $\nu_2(n)$  имеют те же значения, что и в формуле (4.1).

Следовательно, из (4.12), (4.2) и (4.3) следуют первая и третья формулы теоремы. Остальные формулы теоремы доказаны в работе [2].



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. И. Беридзе, Труды ТГУ, 110, 1965, стр. 303—322.
2. Р. И. Беридзе, Труды ТГУ, 117, 1966, стр. 77—101.
3. Г. А. Ломадзе, Сообщения АН ГССР, 41:2, 1966, стр. 257—263.
4. Г. А. Ломадзе, Труды ТГУ, 117, 1966, стр. 7—43.

რ. ბერიძე

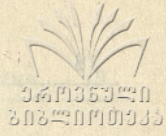
 კონსვოტა წარმოდგენის უმსახვო ზოგნიერთი კვაცვლადინი  
 კვადრატული ფორმით

(რ ე ზ ი უ მ ე)

[1] და [2] ნაშრომებში ჩვენს მიერ მიღებულია ზუსტი ფორმულები მთელი რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის (1.1) სახის ფორმებით. ეს ფორმულები შეიცავს ე. წ. დამატებით წევრებს, რომლებიც წარმოადგენს გარკვეულ თეტა-ფუნქციათა ნამრავლების ფურციეს კოეფიციენტებს.

წინამდებარე ნაშრომში გ. ლომადის [3] ზოგნიერთი შედეგის გამოყენებით გამოვლენილია ფურციეს ამ კოეფიციენტების არითმეტიკული აზრი.





## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ БИНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Т. В. ВЕПХВАДЗЕ

§ 1. Пусть  $r(n; a, b, c)$  обозначает число представлений натурального числа  $n$  положительной бинарной квадратичной формой  $f = ax^2 + bxy + cy^2$ , т. е. число решений уравнения  $n = ax^2 + bxy + cy^2$  в целых числах  $x, y$  при заданных целых  $a, b, c$ .

Хорошо известно, что вполне элементарно можно получить формулы для  $r(n; a, b, c)$  в тех случаях, когда формы  $f$  принадлежат одноклассным родам.

В этом направлении лишь частично изучены формы  $f$ , принадлежащие многоклассным родам. Первую работу посвятил этому вопросу Ван дер Блей [1], который получил формулы для числа представлений чисел формами  $x^2 + xy + 6y^2$ ,  $2x^2 + xy + 3y^2$  и  $2x^2 - xy + 3y^2$ , принадлежащими одному и тому же роду. Г. А. Ломадзе [3] дал общий подход к нахождению точных формул для числа представлений чисел бинарными диагональными квадратичными формами. В частности, он получил формулы для числа представлений чисел формами:

$$x^2 + 11y^2, \quad x^2 + 17y^2, \quad 4x^2 + 5y^2, \quad x^2 + 20y^2.$$

В настоящей статье почучены формулы для числа представлений чисел всеми бинарными квадратичными формами дискриминантов — 44, — 68 и — 80.

§ 2. В этом параграфе для удобства ссылок будут приведены некоторые известные результаты.

Лемма 1 (Дирихле, см., напр., [2], стр. 163). Пусть  $\Psi(n; \delta)$  обозначает число представлений числа  $n$  совокупностью всех коренных классов отрицательного дискриминанта  $\delta$ . Тогда

$$\Psi(n; \delta) = w \sum_{d|n} \left( \frac{\delta}{d} \right), \quad \text{при } (n, \delta) = 1,$$

где  $\left( \frac{\delta}{d} \right)$  — символ Кронекера, а  $w$  — число единиц коренной формы дискриминанта  $\delta$  и, как известно,  $w = 2$  при  $\delta < -4$ .

Лемма 2 ([3], стр. 306). Пусть  $n = 2^\alpha 11^\beta u$ ,  $(u, 22) = 1$ , Тогда





საქართველოს  
აкадеმიის

$$\begin{aligned}
 r(n; 1,0,11) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \left( \frac{u}{11} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{d}{11} \right) + \frac{2}{3} \nu(n) \quad \text{при } \alpha=0, \\
 &= \left( 1 + \left( \frac{u}{11} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{d}{11} \right) \quad \text{при } 2 \nmid \alpha, \alpha > 0, \\
 &= 0 \quad \text{при } 2 \nmid \alpha,
 \end{aligned}$$

где  $\nu(n)$  обозначает коэффициент при  $Q^n$  в разложении одной из ветвей функции

$$\{ 2\mathfrak{D}_{00}(\tau; 0,2)\mathfrak{D}_{01}(\tau; 0,2)\mathfrak{D}_{20}(\tau; 0,2)\mathfrak{D}_{00}(\tau; 0,22)\mathfrak{D}_{01}(\tau; 0,22)\mathfrak{D}_{22,0}(\tau; 0,22) \}^{\frac{1}{3}}$$

по степеням  $Q = \exp 2\pi i \tau$ . Здесь и в дальнейшем  $\mathfrak{D}_{gh}(\tau; 0, N)$  обозначает тэта-функцию (см., напр., [3], стр. 288), а  $\tau$  — комплексную переменную с  $\text{Im} \tau > 0$ .

Лемма 3 ([3], стр. 308). Пусть  $n = 2^{\alpha} 17^{\beta} u$ ,  $(u, 34) = 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 r(n; 1,0,17) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{u}{17} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-17}{d} \right) + \nu_1(n) + \nu_2(n) - \nu_3(n) - \nu_4(n) \\
 &= 0 \quad \begin{array}{l} \text{при } u \equiv 1 \pmod{4}, \\ \text{при } u \equiv 3 \pmod{4}, \end{array}
 \end{aligned}$$

где  $\nu_1(n)$ ,  $\nu_2(n)$ ,  $\nu_3(n)$  и  $\nu_4(n)$ , соответственно, обозначают коэффициенты при  $Q^n$  в разложениях функций

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{D}_{40}(\tau; 0,34)\mathfrak{D}_{16,0}(\tau; 0,34), \quad \mathfrak{D}_{80}(\tau; 0,34)\mathfrak{D}_{32,0}(\tau; 0,34), \\
 &\mathfrak{D}_{12,0}(\tau; 0,34)\mathfrak{D}_{20,0}(\tau; 0,34) \quad \text{и} \quad \mathfrak{D}_{24,0}(\tau; 0,34)\mathfrak{D}_{28,0}(\tau; 0,34)
 \end{aligned}$$

по степеням  $Q$ .

Лемма 4 ([3], стр. 310, 311). Пусть  $n = 2^{\alpha} 5^{\beta} u$ ,  $(u, 10) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 r(n; 4,0,5) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) - \nu(n) \quad \text{при } \alpha=0, u \equiv 1 \pmod{4}, \\
 &= \left( 1 + \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) \quad \begin{array}{l} \text{при } 2 \nmid \alpha, \alpha > 0, \\ u \equiv 1 \pmod{4}, \end{array} \\
 &= \left( 1 - \left( \frac{u}{5} \right) \right) \left( \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) \right) \quad \begin{array}{l} \text{при } 2 \nmid \alpha, \alpha > 1, \\ u \equiv 3 \pmod{4}, \end{array} \\
 &= 0 \quad \text{при } 2 \mid \alpha, u \equiv 3 \pmod{4}, \quad \text{при } \alpha=1 \text{ и при } 2 \nmid \alpha, \alpha > 1, \\
 &\quad \quad \quad u \equiv 1 \pmod{4};
 \end{aligned}$$

$$r(n; 1,0,20) = \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) + \nu(n) \quad \text{при } \alpha=0, u \equiv 1 \pmod{4},$$

$= r(n; 4,0,5)$  в остальных случаях.



Здесь  $\nu(n)$  обозначает коэффициент при  $Q^n$  в разложении функции  $\vartheta_{41}(\tau; 0, 20)\vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20)$  по степеням  $Q$ .

§ 3 Известным методом (см., напр., [2], § 62) можно показать, что квадратичные формы дискриминанта  $-44$  образуют три коренных класса, которые соответствуют приведенным формам:

$$x^2 + 11y^2, \quad 3x^2 + 2xy + 4y^2 \quad \text{и} \quad 3x^2 - 2xy + 4y^2.$$

Согласно лемме 1, имеем

$$\Psi(n; -44) = 2 \sum_{d|n} \left( \frac{d}{11} \right) \quad \text{при} \quad (n, 22) = 1. \quad (1)$$

Очевидно, что

$$r(n; 3, 2, 4) = r(n; 3, -2, 4). \quad (2)$$

Следовательно, положив  $(n, 22) = 1$ , согласно (1), получим

$$r(n; 1, 0, 11) + 2r(n; 3, 2, 4) = 2 \sum_{d|n} \left( \frac{d}{11} \right). \quad (3)$$

Пусть, теперь,  $n$  — нечетное, делящееся на 11, и пусть  $(x, y)$  есть представление числа  $n$  формой  $x^2 + 11y^2$ , т. е.  $x^2 + 11y^2 = 11u$ .

Так как  $11 | x$ , то положив  $x = 11Y$ ,  $y = -X$ , получим

$$X^2 + 11Y^2 = u.$$

Таким образом,

$$r(11^3 u; 1, 0, 11) = r(u; 1, 0, 11) \quad \text{при} \quad (u, 22) = 1. \quad (4)$$

Также, если  $3x^2 + 2xy + 4y^2 = 11u$ , то

$$3(x+4y)^2 = 11u + 11(4y^2 + 2xy), \quad 4(y+3x)^2 = 11u + 11(3x^2 + 2xy).$$

Так как числа  $X = -\frac{x+4y}{11}$  и  $Y = \frac{y+3x}{11}$  — целые, то положив  $x = X + 4Y$ ,  $y = -3X - Y$ , получим

$$3X^2 + 2XY + 4Y^2 = u.$$

Таким образом,

$$r(11^3 u; 3, 2, 4) = r(u; 3, 2, 4) \quad \text{при} \quad (u, 22) = 1. \quad (5)$$

Согласно (4) и (5), формула (3) справедлива для любых нечетных  $n$ .

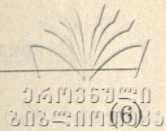
Наконец, пусть  $n$  — четное, т. е.  $n = 2^\alpha u$  ( $\alpha > 0$ ,  $2 \nmid u$ ), и пусть  $3x^2 + 2xy + 4y^2 = 2^\alpha u$ .

Так как числа  $X = 2y + \frac{x}{2}$  и  $Y = \frac{x}{2}$  — одинаковой четности, то положив  $x = 2Y$ ,  $y = \frac{X - Y}{2}$ , получим

$$X^2 + 11Y^2 = 2^\alpha u.$$

Таким образом,





$$r(2^{\alpha}u; 3, 2, 4) = r(2^{\alpha}u; 1, 0, 11).$$

Из формул (2), (3), (6) и леммы 2 следует

Теорема 1. Пусть  $n = 2^{\alpha}11^{\beta}u$ ,  $(u, 22) = 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} r(n; 3, \pm 2, 4) &= \frac{1}{6} \left( 5 - \left( \frac{u}{11} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{d}{11} \right) - \frac{1}{3} \nu(n) \quad \text{при } \alpha = 0, \\ &= \left( 1 + \left( \frac{u}{11} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{d}{11} \right) \quad \text{при } 2|\alpha, \alpha > 0, \\ &= 0 \quad \text{при } 2 \nmid \alpha \end{aligned}$$

( $\nu(n)$  определено в лемме 2).

§ 4. Квадратичные формы дискриминанта  $-68$  образуют четыре коренных класса, которые соответствуют приведенным формам:

$$x^2 + 17xy^2, \quad 2x^2 + 2xy + 9y^2, \quad 3x^2 + 2xy + 6y^2 \quad \text{и} \quad 3x^2 - 2xy + 6y^2.$$

Пусть пара целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$2x^2 + 2xy + 9y^2 = n. \quad (7)$$

Так как числа  $X = y + 2x$  и  $Y = y - x$  — целые, то, положив  $x = \frac{1}{2}(X - Y)$ ,  $y = Y$ , получим

$$X^2 + 17Y^2 = 2n. \quad (8)$$

Из (7) и (8), согласно лемме 3, следует

Теорема 2. Пусть  $n = 2^{\alpha}17^{\beta}u$ ,  $(u, 34) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; 2, 2, 9) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{u}{17} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-17}{d} \right) + \nu_1(2n) + \nu_2(2n) - \nu_3(2n) - \nu_4(2n) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{при } u \equiv 1 \pmod{4}, \\ \text{при } u \equiv 3 \pmod{4}. \end{array}$$

( $\nu_1(n)$ ,  $\nu_2(n)$ ,  $\nu_3(n)$ ,  $\nu_4(n)$ ) определены в лемме 3).

Лемма 5. Имеет место равенство

$$\left( 1 - \left( \frac{t}{u} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{t}{d} \right) = 0,$$

где  $\left( \frac{t}{u} \right)$  — символ Якоби.

Доказательство. Это очевидно при  $\left( \frac{t}{u} \right) = 1$ .

При  $\left( \frac{t}{u} \right) = -1$ , в разложении  $u = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$  найдется такой множитель  $p_s^{r_s}$ , что



$$2 \nmid r_s \quad \text{и} \quad \left(\frac{t}{p_s}\right) = -1.$$

Поэтому

$$\left(\frac{t}{1}\right) + \left(\frac{t}{p_s}\right) + \dots + \left(\frac{t}{p_s^{r_s}}\right) = 0,$$

отсюда следует, при любом натуральном  $m$ ,

$$\left(\frac{t}{p_v^m}\right) + \left(\frac{t}{p_s p_v^m}\right) + \dots + \left(\frac{t}{p_s^{r_s} p_v^m}\right) = 0,$$

следовательно

$$\sum_{\substack{0 \leq m_1 \leq r_s \\ 0 \leq m_2 \leq r_v}} \left(\frac{t}{p_s^{m_1} p_v^{m_2}}\right) = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{d|u} \left(\frac{t}{d}\right) = \sum_{0 \leq m_i \leq r_i} \left(\frac{t}{p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}}\right) = 0.$$

Согласно лемме 1, имеем

$$\Psi(n; -68) = 2 \sum_{d|n} \left(\frac{-17}{d}\right) \quad \text{при} \quad (n, 34) = 1. \quad (9)$$

Очевидно

$$r(n; 3, 2, 6) = r(n; 3, -2, 6). \quad (10)$$

Следовательно, положив  $(n, 34) = 1$ , согласно (9), получим

$$r(n; 1, 0, 17) + r(n; 2, 2, 9) + 2r(n; 3, 2, 6) = 2 \sum_{d|n} \left(\frac{-17}{d}\right). \quad (11)$$

Рассуждая почти так же, как и в § 3, и положив  $(u, 34) = 1$ , получим

$$r(17^{\beta}u; 1, 0, 17) = r(u; 1, 0, 17), \quad r(17^{\beta}u; 3, 2, 6) = r(u; 3, 2, 6), \quad (12)$$

$$r(17^{\beta}u; 2, 2, 9) = r(u; 2, 2, 9).$$

Согласно (12), формула (11) справедлива для любых нечетных  $n$ .

Пусть теперь  $n$  — четное и пусть пара чисел  $(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$3x^2 + 2xy + 6y^2 = 2^{\alpha}u \quad (\alpha > 0, 2 \nmid u).$$

Так как здесь  $x$  — четное, то, положив  $x = 2Y$ ,  $y = X$ , получим

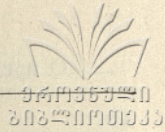
$$3X^2 + 2XY + 6Y^2 = 2^{\alpha-1}u.$$

Таким образом,

$$r(2^{\alpha}u; 3, 2, 6) = r(2^{\alpha-1}u; 3, 2, 6). \quad (13)$$

Положив  $(u, 34) = 1$ , из формул (11), (12), (13), леммы 3 и теоремы 2 получим





$$\begin{aligned}
 r(2^\alpha 17^\beta u; 3, 2, 6) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{-17}{u} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-17}{d} \right) - \frac{1}{2} \nu_1(n) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \nu_1(2n) - \frac{1}{2} \nu_2(n) - \frac{1}{2} \nu_2(2n) + \frac{1}{2} \nu_3(n) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \nu_3(2n) + \frac{1}{2} \nu_4(n) + \frac{1}{2} \nu_4(2n) \quad \text{при } u \equiv 1 \pmod{4}, \quad (14) \\
 r(2^\alpha 17^\beta u; 3, 2, 6) &= \sum_{d|u} \left( \frac{-17}{d} \right) \quad \text{при } u \equiv 3 \pmod{4}.
 \end{aligned}$$

Здесь, согласно лемме 5, имеем

$$\left( 1 - \left( \frac{-17}{u} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-17}{d} \right) = 0. \quad (15)$$

Далее, нетрудно проверить, что коэффициенты  $\nu_1(n)$ ,  $\nu_2(n)$ ,  $\nu_3(n)$  и  $\nu_4(n)$  удовлетворяют следующим тождествам

$$\begin{aligned}
 \nu_1(n) &= \nu_3(2n), & \nu_2(n) &= \nu_4(2n), \\
 \nu_3(n) &= \nu_1(2n), & \nu_4(n) &= \nu_2(2n).
 \end{aligned} \quad (16)$$

Из (14), (15) и (16) следует

**Теорема 3.** Пусть  $n = 2^\alpha 17^\beta u$ ,  $(u, 34) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 r(n; 3, \pm 2, 6) &= 0 \quad \text{при } u \equiv 1 \pmod{4}, \\
 &= \sum_{d|u} \left( \frac{-17}{d} \right) \quad \text{при } u \equiv 3 \pmod{4}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что первое из этих равенств тривиально. Действительно,

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 2xy + 6y^2 &\equiv 3 + 2xy + 6 \equiv 3 \pmod{4} \quad \text{при } 2 \nmid x, 2 \nmid y, \\
 3x^2 + 2xy + 6y^2 &\equiv 3 \pmod{4} \quad \text{при } 2 \nmid x, 2 \mid y,
 \end{aligned}$$

т. е.

$$r(17^\beta u; 3, 2, 6) = 0 \quad \text{при } u \equiv 1 \pmod{4}. \quad (17)$$

Из (13) и (17) следует утверждаемое.

§ 5. Квадратичные формы дискриминанта  $-80$  образуют четыре коренных класса, которые соответствуют приведенным формам:

$$x^2 + 20y^2, \quad 4x^2 + 5y^2, \quad 3x^2 + 2xy + 7y^2 \quad \text{и} \quad 3x^2 - 2xy + 7y^2.$$

Согласно лемме 1, имеем

$$\Psi(n; -80) = 2 \sum_{d|n} \left( \frac{-5}{d} \right) \quad \text{при } (n, 10) = 1. \quad (18)$$

Очевидно, что

$$r(n; 3, 2, 7) = r(n; 3, -2, 7). \quad (19)$$

Следовательно, положив  $(n, 10) = 1$ , согласно (18), получим



$$r(n; 3, 2, 7) = \sum_{d|n} \left( \frac{-5}{d} \right) - \frac{1}{2} r(n; 4, 0, 5) - \frac{1}{2} r(n; 1, 0, 20). \quad (20)$$

Рассуждая почти так же, как и в § 3, и положив  $(u, 10) = 1$ , получим

$$\begin{aligned} r(5^3 u; 4, 0, 5) &= r(u; 1, 0, 20), & r(5^3 u; 1, 0, 20) &= r(u; 4, 0, 5), \\ r(5^3 u; 3, 2, 7) &= r(u; 3, 2, 7). \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь, положим

$$3x^2 + 2xy + 7y^2 = 2^\alpha u \quad (\alpha > 0, 2 \nmid u).$$

Так как здесь целые числа  $x$  и  $y$  одинаковой четности, то числа

$$X = \frac{y-x}{2} \text{ и } Y = \frac{x+y}{2} \text{ будут целыми и, положив } x = -(X-Y),$$

$$y = X+Y, \text{ получим } 8X^2 + 8XY + 12Y^2 = 2^\alpha u.$$

Таким образом,

$$r(2u; 3, 2, 7) = 0. \quad (22)$$

Пусть  $\alpha > 1$ . Тогда  $16X^2 + 16XY + 24Y^2 = 2^{\alpha+1}u$ , т. е.  $4X_1^2 + 5Y_1^2 = 2^{\alpha+1}u$ , где  $X_1 = 2X+Y$ ,  $Y_1 = 2Y$ .

Следовательно,

$$r(2^\alpha u; 3, 2, 7) = r(2^{\alpha+1}u; 4, 0, 5) \text{ при } \alpha > 1. \quad (23)$$

Из (19)–(23) и леммы 4 следует

Теорема 4. Пусть  $n = 2^\alpha 5^3 u$ ,  $(u, 10) = 1$ , Тогда

$$\begin{aligned} r(n; 3, \pm 2, 7) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) \text{ при } \alpha = 0, u \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= \left( 1 + \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) \text{ при } 2 \nmid \alpha, \alpha > 1, u \equiv 1 \pmod{4}, \\ &= \left( 1 - \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) \text{ при } 2 | \alpha, \alpha > 0, u \equiv 3 \pmod{4}, \\ &= \sum_{d|u} \left( \frac{-5}{d} \right) \text{ при } \alpha = 0, u \equiv 3 \pmod{4}, \\ &= 0, \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

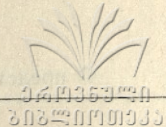
(Представлено 5. II 1968)

Кафедра алгебры  
и геометрии

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. van der Blij, Indag. math., 14, 1952, стр. 498–503.
2. Л. Е. Диксон, Введение в теорию чисел. Обработанный перевод с англ. А. З. Валь-фиша, Тб., 1941.
3. Г. А. Ломадзе, Математический сборник, 68:2, 1965, стр. 282–312.





თ. ვეფხვაძე

**რიცხვითა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ბინაკული კვადრატული ფორმით**

(რეზიუმე)

(18) მოცემულია ფორმულები ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის ყველა ბინარული კვადრატული ფორმით, რომელთა დისკრიმინანტია  $-44$ ,  $-68$  და  $-80$ .



## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С ЧЕТЫРЬМА ПЕРЕМЕННЫМИ

М. С. ГЕЛАШВИЛИ

§ 1. В настоящей работе будут применяться следующие обозначения:  $N, a, d, n, r, \omega$  — натуральные числа;  $b, u, v$  — нечетные натуральные числа;  $p$  — простые числа;  $c, g, h, j, k, m, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  — целые числа;  $z, \tau$  — комплексные числа, причем  $\text{Im } \tau > 0$ ;  $e(z) = \exp 2\pi iz$ ;  $Q = e(\tau)$ .

Положим

$$\vartheta_{gh}(\tau; c, N) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \equiv c \pmod{N}}}^{\infty} (-1)^{\frac{h(m-c)}{N}} e\left(\frac{\left(m + \frac{1}{2}g\right)^2}{2N} \tau\right) \quad (1.1)$$

(тэта-функция с характеристиками  $g, h$ ),

откуда

$$\vartheta_{gh}(\tau; 0, N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{hk} Q^{\frac{\left(Nk + \frac{1}{2}g\right)^2}{2N}}. \quad (1.2)$$

Пусть  $r(n; a, a')$  обозначает число представлений  $n$  формой

$$f = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a'x_4^2. \quad (1.3)$$

Из (1.2) следует

$$\vartheta_{00}^3(\tau; 0, 2a) \cdot \vartheta_{00}(\tau; 0, 2a') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n; a, a') Q^n. \quad (1.4)$$

Положим

$$\theta(\tau) = \theta(\tau; a, a') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n; a, a') Q^n, \quad (1.5)$$

где  $\rho(n; a, a')$  — сингулярный ряд, соответствующий формам вида (1.3) и определяемый следующим образом:

$$\rho(n; a, a') = \frac{\pi^2}{a(a a')^{1/2}} n \sum_{q=1}^{\infty} A(q),$$



$$A(q) = q^{-1} \sum_{\substack{h \bmod q \\ (h, q) = 1}} e\left(-\frac{hm}{q}\right) \cdot S^3(ah, q) S(a'h, q),$$

где  $S(ah, q)$  — сумма Гаусса.

Пусть  $\Gamma$  — модулярная группа, т. е. группа линейных подстановок

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

где  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .

$\Gamma_0(N)$  обозначает ту подгруппу группы  $\Gamma$ , подстановки которой удовлетворяют сравнению

$$\gamma \equiv 0 \pmod{N}.$$

Известно (см., напр., [3]), что

$$\mathfrak{F}_{g+2j, h}(\tau; c, N) = \mathfrak{F}_{gh}(\tau; c+j, N), \quad (1.6)$$

$$\mathfrak{F}_{gh}(\tau; c+N_j, N) = (-1)^{hj} \mathfrak{F}_{gh}(\tau; c, N), \quad (1.7)$$

$$\mathfrak{F}_{-gh}(\tau; 0, N) = \mathfrak{F}_{gh}(\tau; 0, N). \quad (1.8)$$

Лемма 1 ([3], лемма 18). Пусть  $g_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) — четные,

$$N_k | aa', \quad 4 | aa' \sum_{k=1}^4 \frac{h_k^2}{N_k},$$

$$4 | \sum_{l=1}^m \sum_{k=s_l}^{s_l} \frac{g_k^2}{4N_{s_l}} \quad (s_0=0, s_m=4). \quad \sum_{k=s_{l-1}+1}^{s_l} \frac{g_k^2}{4N_{s_l}} \text{ — целые.} \quad (1.9)$$

Далее, пусть для всех  $\alpha$  и  $\delta$ , удовлетворяющих условию

$$\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4aa'},$$

$$\prod_{k=1}^4 \left\{ \left( \frac{N_k}{|\delta|} \right) \mathfrak{F}_{\alpha g_k, h_k}(\tau; 0, 2N_k) \right\} = \left( \frac{aa'}{|\delta|} \right) \prod_{k=1}^4 \mathfrak{F}_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k). \quad (1.10)$$

Тогда функция  $\prod_{k=1}^4 \mathfrak{F}_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k)$  будет целой модулярной формой размерности — 2, присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(4aa')$ , и делителя  $4aa'$ .

Примечание. В частности, функция  $\prod_{k=1}^4 \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 2a_k)$  при любых  $a_k$  является целой модулярной формой размерности — 2, присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(4aa')$ , и делителя  $4aa'$ .

Г. А. Ломадзе [2] показал, как можно получить точные формулы для числа представлений  $n$  формами вида (1.3) и, в частности, получил точные формулы для числа представлений при  $a=1, a'=5, 6, 7, 9, 10$ .



Впоследствии Р. И. Беридзе [1] получила точные формулы в случаях, когда  $a=6, a'=1; \alpha=2, a'=3; a=3, a'=2; a=7, a'=1$ .

В настоящей работе методом, развитым в [3], получены точные формулы для числа представлений  $n$  формами вида (1.3) при  $a=10, a'=1; a=2, a'=5$  и  $a=5, a'=2$ .

§ 2. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$10(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_4^2.$$

Лемма 2. Функция

$$\begin{aligned} \psi(\tau; 10, 1) = & \vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 20) - \theta(\tau; 10, 1) - \\ & - A \vartheta_{00}(\tau; 0, 20) \vartheta_{01}(\tau; 0, 10) \vartheta_{41}(\tau; 0, 20) \vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20) \end{aligned} \quad (2.1)$$

при постоянной  $A$  является целой модулярной формой размерности  $-2$ , присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(40)$ , и делителя 40.

Доказательство. Согласно примечанию к лемме 1 и лемме 3 работы [4], первые два слагаемых в правой части (2.1) являются целыми модулярными формами размерности  $-2$ , присоединенными к подгруппе  $\Gamma_0(40)$ , и делителя 40. Непосредственно видно, что третье слагаемое удовлетворяет условиям (1.9) леммы 1. Покажем, что для всех  $\alpha$  и  $\delta$ , удовлетворяющих условию  $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{40}$ , имеет место равенство (1.10).

Действительно, из  $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{40}$  следует

$$\begin{aligned} \alpha & \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9 \pmod{20}, \\ \delta & \equiv \pm 1, \pm 2, \mp 2, \mp 1 \pmod{5}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Согласно (1.6) — (1.8), имеем

$$\vartheta_{4\alpha,1}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12\alpha,1}(\tau; 0, 20) = \vartheta_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20)$$

при  $\alpha \equiv \pm 1 \pmod{20}$ ,

$$\vartheta_{4\alpha,1}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12\alpha,1}(\tau; 0, 20) = -\vartheta_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20)$$

при  $\alpha \equiv \pm 3 \pmod{20}$ , (2.3)

$$\vartheta_{4\alpha,1}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12\alpha,1}(\tau; 0, 20) = -\vartheta_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20)$$

при  $\alpha \equiv \pm 7 \pmod{20}$ ,

$$\vartheta_{4\alpha,1}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12\alpha,1}(\tau; 0, 20) = \vartheta_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20)$$

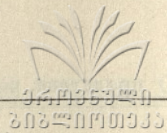
при  $\alpha \equiv \pm 9 \pmod{20}$ .

Далее, имеем

$$\prod_{k=1}^4 \left( \frac{N_k}{|\delta|} \right) = \left( \frac{2}{|\delta|} \right), \quad \left( \frac{aa'}{|\delta|} \right) = \left( \frac{2}{|\delta|} \right) \left( \frac{|\delta|}{5} \right), \quad (2.4)$$

$$\left( \frac{|\delta|}{5} \right) = \begin{cases} 1, & \text{при } \delta \equiv \pm 1 \pmod{5}, \\ -1, & \text{при } \delta \equiv \pm 2 \pmod{5}. \end{cases} \quad (2.5)$$





Из (2.3) — (2.5) следует справедливость равенства (1.10).

Таким образом, согласно лемме 1, и третье слагаемое в правой части (2.1) является целой модулярной формой размерности  $-2$ , присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(40)$ , и делителя 40.

Теорема 1.

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}(\tau; 0, 2) \cdot \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 20) = \theta(\tau; 10, 1) + \\ & + \frac{12}{7} \vartheta_{00}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{01}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Доказательство. Согласно лемме 2 работы [3], функция  $\psi(\tau; 10, 1)$  будет тождественно равна нулю, если возможно так подобрать постоянную  $A$ , чтобы коэффициенты при  $Q^n$  в разложении  $\psi(\tau; 10, 1)$  по степеням  $Q$  равнялись нулю для всех

$$n \leq \frac{2}{12} \cdot 40 \prod_{p|40} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 12.$$

Положив в леммах 31, 32 и 33 работы [2]

$$a=10, \quad b=5, \quad a'=b'=1, \quad \gamma=1, \quad \gamma'=0, \quad v=5^\beta,$$

т. е.

$$n=2^\alpha \cdot 5^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 10}} p^\beta, \quad r=1, \quad \omega=10,$$

получим

$$\rho(n; 10, 1) = \frac{2^\alpha \cdot 5^\beta \pi^2}{10^{3/2}} \chi_2 \chi_5 L^{-1}(2, 10) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{10}{d_1}\right) d_2, \quad (2.7)$$

где

$$L(2, 10) = \frac{7\pi^2}{2 \cdot 10^{3/2}}, \quad (2.8)$$

$$\chi_2 = \left(2^{2\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{2}{u}\right)\right) 2^{-\alpha-1}, \quad (2.9)$$

$$\chi_5 = \left(5^\beta + (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{u}{5}\right)\right) 5^{-\beta}. \quad (2.10)$$

Из (2.7) — (2.10) следует

$$\begin{aligned} \rho(n; 10, 1) &= \frac{1}{7} \left\{ 2^{2\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{2}{u}\right) \right\} \times \\ &\times \left\{ 5^\beta + (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{u}{5}\right) \right\} \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{10}{d_1}\right) d_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вычислив значения  $\rho(n; 10, 1)$  для всех  $n \leq 12$  по формулам (2.11) и подставив их в (1.5), получим



$$\begin{aligned} \theta(\tau; 10, 1) = & 1 + \frac{2}{7} Q + 2Q^4 + \frac{12}{7} Q^5 + \frac{24}{7} Q^6 + \\ & + \frac{26}{7} Q^9 + \frac{18}{7} Q^{10} + \frac{60}{7} Q^{11} + \frac{60}{7} Q^{14} + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (1.2) следует

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 2) \cdot \mathfrak{F}_{00}^3(\tau; 0, 20) = & 1 + 2Q + 2Q^4 + 2Q^9 + \\ & + 6Q^{10} + 12Q^{11} + 12Q^{14} + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{01}(\tau; 0, 10) \cdot \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 20) \cdot \mathfrak{F}_{41}(\tau; 0, 20) \mathfrak{F}_{12,1}(\tau; 0, 20) = \\ = Q - Q^5 - 2Q^6 - Q^9 + 2Q^{10} + 2Q^{11} + 2Q^{14} + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Постоянную  $A$  в (2.1) подберем так, чтобы коэффициент при  $Q$  в разложении  $\psi(\tau; 10, 1)$  по степеням  $Q$  был равен нулю, т. е., согласно (2.12) — (2.14), так, чтобы

$$2 - \frac{2}{7} - A = 0.$$

Следовательно, взяв  $A = \frac{12}{7}$  и приняв во внимание (2.1) и (2.12) —

(2.14), нетрудно проверить, что все коэффициенты при  $Q^n$  ( $n \leq 12$ ) в разложении  $\psi(\tau; 10, 1)$  по степеням  $Q$  равны нулю. Итак, тождество (2.6) доказано.

Теорема 1а. Пусть  $n = 2^\alpha 5^\beta u$ ,  $(u, 10) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} r(n; 10, 1) = & \frac{1}{7} \left\{ 5^\beta + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right\} \left\{ 2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{2}{u} \right) \right\} \times \\ & \times \sum_{d_1 d_2 = u} \binom{10}{d_1} d_2 + \frac{12}{7} \nu_1(n), \end{aligned}$$

где  $\nu_1(n)$  обозначает коэффициент при  $Q^n$  в разложении функции  $\mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 20) \mathfrak{F}_{01}(\tau; 0, 10) \mathfrak{F}_{41}(\tau; 0, 20) \mathfrak{F}_{12,1}(\tau; 0, 20)$  по степеням  $Q$ .

Доказательство. Приняв во внимание (1.4), (1.5) и (2.11), из тождества (2.6) непосредственно получим утверждаемое.

§ 3. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 5x_4^2.$$

Лемма 3. Функция

$$\begin{aligned} \psi(\tau; 2, 5) = & \mathfrak{F}_{00}^3(\tau; 0, 4) \cdot \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 10) - \theta(\tau; 2, 5) - \\ & - A \mathfrak{F}_{01}(\tau; 0, 2) \cdot \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 4) \cdot \mathfrak{F}_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \mathfrak{F}_{12,1}(\tau; 0, 20) \end{aligned} \quad (3.1)$$

при постоянной  $A$  является целой модулярной формой размерности — 2, присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(40)$ , и делителя 40.

Доказательство дословно совпадает с доказательством леммы 2.



Теорема 2.

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 4) \cdot \vartheta_{00}(\tau; 0, 10) = \theta(\tau; 2, 5) - \\ & - \frac{12}{7} \vartheta_{01}(\tau; 0, 2) \cdot \vartheta_{00}(\tau; 0, 4) \cdot \vartheta_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \vartheta_{12,1}(\tau; 0, 20). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. Согласно лемме 2 работы [3], функция  $\psi(\tau; 2, 5)$  будет тождественно равна нулю, если возможно так подобрать постоянную  $A$ , чтобы коэффициенты при  $Q^n$  в разложении  $\psi(\tau; 2, 5)$  по степеням  $Q$  равнялись нулю для всех  $n \leq 12$ .

Положив в леммах 31, 32 и 33 работы [2]

$$a=2, b=1, a'=b'=5, \gamma=1, \gamma'=0, v=5^\beta,$$

т. е.

$$n=2^\alpha 5^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 10}} p^3, \quad r=1, \quad \omega=10,$$

получим

$$\rho(n; 2, 5) = \frac{2^\alpha 5^\beta \pi^2}{2 \cdot 10^{1/2}} \chi_2 \chi_5 L^{-1}(2, 10) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{10}{d_1} \right) d_2, \quad (3.3)$$

где

$$L(2, 10) = \frac{7\pi^2}{2 \cdot 10^{3/2}}, \quad (3.4)$$

$$\chi_2 = \left( 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{2}{u} \right) \right) 2^{-\alpha-1}, \quad (3.5)$$

$$\chi_5 = \left( 5^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) 5^{-(\beta+1)}. \quad (3.6)$$

Из (3.3) — (3.6) следует

$$\begin{aligned} \rho(n; 2, 5) &= \frac{1}{7} \left( 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{2}{u} \right) \right) \left( 5^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \times \\ & \times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{10}{d_1} \right) d_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вычислив значения  $\rho(n; 2, 5)$  для всех  $n \leq 12$  по формулам (3.7) и подставив их в (1.5), получим

$$\begin{aligned} \theta(\tau; 2, 5) &= 1 + \frac{12}{7} Q + \frac{18}{7} Q^2 + \frac{24}{7} Q^3 + \frac{36}{7} Q^4 + \frac{26}{7} Q^5 + \\ & + \frac{80}{7} Q^6 + \frac{108}{7} Q^7 + \frac{90}{7} Q^8 + \frac{156}{7} Q^9 + \frac{120}{7} Q^{10} + \\ & + \frac{40}{7} Q^{11} + 24 Q^{12} + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$



Из (1.2) следует

$$\mathfrak{F}_{00}^3(\tau; 0, 4) \cdot \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 10) = 1 + 6Q^2 + 12Q^4 + 2Q^5 + 8Q^6 + \\ + 12Q^7 + 6Q^8 + 24Q^9 + 24Q^{10} + 16Q^{11} + 24Q^{12} + \dots \quad (3.9)$$

и

$$\mathfrak{F}_{01}(\tau; 0, 2) \cdot \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 4) \cdot \mathfrak{F}_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \mathfrak{F}_{12,1}(\tau; 0, 20) = \\ = Q - 2Q^2 + 2Q^3 - 4Q^4 + Q^5 + 2Q^6 + 2Q^7 + 4Q^8 - \\ - Q^9 - 4Q^{10} - 6Q^{11} + 6Q^{14} + \dots \quad (3.10)$$

Постоянную  $A$  в (3.1) подберем так, чтобы коэффициент при  $Q$  в разложении  $\psi(\tau; 2, 5)$  по степеням  $Q$  был равен нулю, т. е., согласно (3.8) — (3.10), так, чтобы

$$A + \frac{12}{7} = 0.$$

Следовательно, взяв  $A = -\frac{12}{7}$  и приняв во внимание (3.1) и (3.8) —

(3.10), нетрудно проверить, что все коэффициенты при  $Q^n$  ( $n \leq 12$ ) в разложении  $\psi(\tau; 2, 5)$  по степеням  $Q$  равны нулю. Итак, тождество (3.2) доказано.

Из тождества (3.2) следует

Теорема 2а. Пусть  $n = 2^\alpha 5^\beta u$ ,  $(u, 10) = 1$ . Тогда

$$r(n; 2, 5) = \frac{1}{7} \left( 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{2}{u} \right) \right) \left( 5^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \times \\ \times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{10}{d_1} \right) d_2 - \frac{12}{7} \nu_2(n),$$

где  $\nu_2(n)$  обозначает коэффициент при  $Q^n$  в разложении функции  $\mathfrak{F}_{01}(\tau; 0, 2) \cdot \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 4) \cdot \mathfrak{F}_{41}(\tau; 0, 20) \cdot \mathfrak{F}_{12,1}(\tau; 0, 20)$  по степеням  $Q$ .

§ 4. В настоящем параграфе рассматривается представление чисел формой

$$5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_4^2.$$

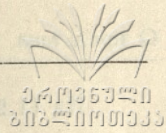
Лемма 4. Функция

$$\psi(\tau; 5, 2) = \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 4) \cdot \mathfrak{F}_{00}^3(\tau; 0, 10) - \theta(\tau; 5, 2) - \\ - A \mathfrak{F}_{00}(\tau; 0, 10) \cdot \mathfrak{F}_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \mathfrak{F}_{61}(\tau; 0, 10) \cdot \mathfrak{F}_{20,0}(\tau; 0, 20) \quad (4.1)$$

при постоянной  $A$  является целой модулярной формой размерности  $-2$ , присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(40)$ , и делителя 40.

Доказательство. Согласно примечанию к лемме 1 и лемме 3 работы [4], первые два слагаемых в правой части (4.1) являются целыми модулярными формами размерности  $-2$ , присоединенными к подгруппе  $\Gamma_0(40)$ , и делителя 40. Непосредственно видно, что третье слагаемое удовлетворяет условиям (1.9) леммы 1. Покажем, что для всех  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющих условию  $\alpha\beta \equiv 1 \pmod{40}$ , имеет место равенство (1.10).





Действительно, из  $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{40}$  следует

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9 \pmod{20}, \\ \delta &\equiv \pm 1, \pm 2, \mp 2, \mp 1 \pmod{5}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Согласно (1.6) — (1.8), имеем

$$\begin{aligned} \vartheta_{2\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{6\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20\alpha,0}(\tau; 0, 20) &= \\ = \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{61}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20,0}(\tau; 0, 20) & \\ \text{при } \alpha \equiv \pm 1 \pmod{20}, & \\ \vartheta_{2\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{6\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20\alpha,0}(\tau; 0, 20) &= \\ = -\vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{61}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20,0}(\tau; 0, 20) & \\ \text{при } \alpha \equiv \pm 3 \pmod{20}, & \\ \vartheta_{2\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{6\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20\alpha,0}(\tau; 0, 20) &= \\ = -\vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{61}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20,0}(\tau; 0, 20) & \\ \text{при } \alpha \equiv \pm 7 \pmod{20}, & \\ \vartheta_{2\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{6\alpha,1}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20\alpha,0}(\tau; 0, 20) &= \\ = \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{61}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20,0}(\tau; 0, 20) & \\ \text{при } \alpha \equiv \pm 9 \pmod{20}. & \end{aligned} \quad (4.3)$$

Далее, здесь также имеют место равенства (2.4) и (2.5).

Из (4.3), (2.4) и (2.5) следует справедливость равенства (1.10).

Таким образом, согласно лемме 1, и третье слагаемое в правой части (4.1) является целой модулярной формой размерности  $-2$ , присоединенной к подгруппе  $\Gamma_0(40)$ , и делителя 40.

Теорема 3.

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(\tau; 0, 4) \cdot \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 10) &= \theta(\tau; 5, 2) - \\ - \frac{12}{7} \vartheta_{00}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{61}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20,0}(\tau; 0, 20). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Доказательство. Согласно лемме 2 работы [3], функция  $\psi(\tau; 5, 2)$  будет тождественно равна нулю, если возможно так подобрать постоянную  $A$ , чтобы коэффициенты при  $Q^n$  в разложении  $\psi(\tau; 5, 2)$  по степеням  $Q$  равнялись нулю для всех  $n \leq 12$ .

Положив в леммах 31, 32, 33 работы [2]

$$a=b=5, \quad a'=2, \quad b'=1, \quad \gamma'=1, \quad \gamma=0, \quad v=5^5,$$

т. е.

$$n=2^\alpha 5^\beta u, \quad u = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 5}} p^\beta, \quad r=1, \quad \omega=10,$$

получим

$$\rho(n; 5, 2) = \frac{2^\alpha \cdot 5^\beta \pi^2}{5 \cdot 10^{1/2}} \chi_2 \chi_5 L^{-1}(2, 10) \cdot \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{10}{d_1} \right) d_2, \quad (4.5)$$



где

$$L(2, 10) = \frac{7\pi^2}{2 \cdot 10^{3/2}}, \quad (4.6)$$

$$\chi_2 = \left( 2^{z+2} + (-1)^{z+\beta} \left( \frac{2}{u} \right) \right) 2^{-2-z}, \quad (4.7)$$

$$\chi_5 = \left( 5^z - (-1)^{z+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) 5^{-\beta}. \quad (4.8)$$

Из (4.5) — (4.8) следует

$$\begin{aligned} \rho(n; 5, 2) &= \frac{1}{7} \left( 2^{z+2} + (-1)^{z+\beta} \left( \frac{2}{u} \right) \right) \times \\ &\times \left( 5^\beta - (-1)^{z+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{10}{d_1} \right) d_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Вычислив значения  $\rho(n; 5, 2)$  для всех  $n \leq 12$  по формулам (4.9) и подставив их в (1.5), получим

$$\begin{aligned} \theta(\tau; 5, 2) &= 1 + 2Q^2 + \frac{24}{7} Q^3 + \frac{18}{7} Q^5 + \frac{60}{7} Q^7 + \frac{62}{7} Q^8 + \\ &+ \frac{36}{7} Q^{10} + \frac{120}{7} Q^{12} + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из (1.2) следует

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(\tau; 0, 4) \cdot \vartheta_{00}^3(\tau; 0, 10) &= 1 + 2Q^2 + 6Q^5 + 12Q^7 + \\ &+ 2Q^8 + 12Q^{10} + 24Q^{12} + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

и

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{61}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20,0}(\tau; 0, 20) &= \\ = 2Q^3 - 2Q^5 - 2Q^7 + 4Q^8 - 4Q^{10} - 4Q^{12} + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Аналогично предыдущему, постоянную  $A$  в (4.1) подберем так, чтобы коэффициент при  $Q^3$  в разложении  $\psi(\tau; 5, 2)$  по степеням  $Q$  был равен нулю, т. е., согласно (4.10) — (4.12) так, чтобы

$$2A + \frac{24}{7} = 0.$$

Следовательно, взяв  $A = -\frac{12}{7}$  и приняв во внимание (4.1) и (4.10) — (4.12), нетрудно проверить, что все коэффициенты при  $Q^n$  ( $n \leq 12$ ) в разложении  $\psi(\tau; 5, 2)$  по степеням  $Q$  равны нулю. Итак, тождество (4.4) доказано. Из тождества (4.4) следует





Теорема 3а. Пусть  $n=2^{\alpha}5^{\beta}u$ ,  $(u, 10)=1$ . Тогда

$$r(n; 5, 2) = \frac{1}{7} \left( 2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{2}{u} \right) \right) \times \\ \times \left( 5^{\beta} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{10}{d_1} \right) d_2 - \frac{12}{7} \nu_3(n), \quad (4.13)$$

где  $\nu_3(n)$  обозначает коэффициент при  $Q^n$  в разложении функции  $\vartheta_{00}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{21}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{01}(\tau; 0, 10) \cdot \vartheta_{20,0}(\tau; 0, 20)$  по степеням  $Q$ .

(Представлено 17. VI. 1968)

Кафедра общей математики № 2

#### ლიტერატურა

1. Р. И. Беридзе, Труды ТГУ, 102, 1964, стр. 221—233.
2. Г. А. Ломадзе, Труды ТГУ, 76, 1959, стр. 107—159.
3. Г. А. Ломадзе, Труды ТГУ, 117, 1966, стр. 7—43.
4. Г. А. Ломадзе, Сообщения АН ГССР, 50: 2, 1968, стр. 295—300.

მ. ს. გელაშვილი

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ოთხკვლადიანი  
კვადრატული ფორმით

(რ ე ზ ი უ მ ე)

ნაშრომში მიღებულია ფორმულები ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის  $10(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_4^2$ ,  $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 5x_4^2$  და  $5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_4^2$  კვადრატული ფორმებით.



## ОБ ОБОБЩЕННЫХ СПЕКТРАХ ЛАГРАНЖА

П. Г. КОГОНИЯ

Пусть  $\theta$  обозначает любое иррациональное число интервала  $(0, 1)$ , а

$$\theta = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \quad (1)$$

— его разложение в арифметическую непрерывную дробь;

$$\frac{p_k}{q_k} = [0; a_1, a_2, \dots, a_k], \quad r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots] \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2)$$

Как известно из элементов теории непрерывных дробей [1],

$$p_1 = 1, \quad p_2 = a_2, \quad p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots) \quad (3)$$

$$q_1 = a_1, \quad q_2 = a_1 a_2 + 1, \quad q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}$$

$$\theta = \frac{r_{k+1} p_k + p_{k-1}}{r_{k+1} q_k + q_{k-1}}. \quad (k=2, 3, \dots) \quad (4)$$

Пусть  $L(\theta)$  обозначает точную верхнюю грань множества всех  $m > 0$ , для которых неравенство

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m} \quad (5)$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах  $p, q (q > 0)$ .

Как известно [2],  $\{L(\theta) \mid 0 < \theta < 1\} = [2, \infty]$ .

Пусть  $R_L = \{\theta \mid L(\theta) = L\}$ ; тогда для множества всех иррациональных чисел интервала  $(0, 1)$  будет иметь место разбиение

$$J = \cup_{L \in [2, \infty]} R_L.$$

Для любого  $\theta \in R_L$  обозначим через  $\lambda(\theta; L)$  точную верхнюю грань множества всех  $c > 0$ , для которых неравенство

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c q^L} \quad (7)$$

имеет бесконечное множество решений в целых  $p, q (q > 0)$ .

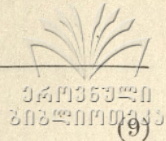
Для любого фиксированного  $L > 2$  множество

$$E_L = \{\lambda(\theta, L) \mid \theta \in R_L\} \quad (8)$$

называется обобщенным спектром Лагранжа [3] ( $E_2 = \{\lambda(\theta; 2) \mid \theta \in R_2\}$  — спектр Лагранжа).

Как известно [2],





$$L(\theta) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} + 1,$$

где  $\{q_k\}$  — последовательность знаменателей  $q_k$  подходящих дробей  $\frac{p_k}{q_k}$  числа  $\theta$ .

Функция  $\lambda(\theta; L)$  ( $L > 2$ ) может быть представлена формулой (см. [3])

$$\lambda(\theta; L) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} q_k \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} - L + 1 = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} q_k \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} - \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} \quad (10)$$

В работах [3], [4] была сделана попытка исследования структуры множества  $E_L$  — обобщенного спектра Лагранжа; при этих исследованиях исходным пунктом служили формулы (9), (10).

Настоящая работа посвящена дальнейшему обсуждению этой же задачи, причем отправным пунктом и здесь служат формулы (9), (10).

В силу (9)

$$R_L = \left\{ \theta \left| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} = L - 1 \right. \right\}. \quad (11)$$

Итак, последовательность  $\{q_k\}$  знаменателей подходящих дробей любого числа  $\theta \in R_L$  удовлетворяет соотношению

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} = l \quad (l = L - 1 > 1). \quad (12)$$

В силу (8) множество (класс)  $R_L$  служит областью определения функции  $\lambda(\theta; L)$ , откуда очевидна важность нахождения общего выражения для чисел  $\theta$  этого класса.

Ясно, что тогда как любому  $\theta \in R_L$  соответствует единственная последовательность  $\{q_k\}$  натуральных чисел (знаменателей подходящих дробей этого числа), удовлетворяющая соотношению (12), не всякая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая соотношению (12), является последовательностью знаменателей подходящих дробей какого-нибудь числа  $\theta$ , так как последовательность знаменателей подходящих дробей любого иррационального числа удовлетворяет известным дополнительным условиям (см. ниже), вытекающим из рекуррентных соотношений (3).

Итак, множество последовательностей знаменателей подходящих дробей всех иррациональных чисел  $\theta$  класса  $R_L$  является подмножеством множества всех последовательностей натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению (12).

Таким образом, в первую очередь требуется решить соотношение (12), т. е. найти множество всех последовательностей натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению (12).

Но в результате присутствия символа „ $\overline{\lim}$ “ в соотношении (12),



общее его решение будет иметь выражение с большой степенью неопределенности, делающей его мало пригодным для дальнейшего применения.

Поэтому вместо соотношения (12) рассмотрим такое, в котором присутствует обычный символ предела, точнее говоря, ограничимся рассмотрением только тех чисел  $\theta$  из  $R_L$ , для которых существует предел выражения  $\frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Обозначим множество всех таких  $\theta$  через  $R_L^*$ ; тогда имеем

$$R_L^* = \left\{ \theta \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} = l \right\} \quad (R_L^* \subset R_L), \quad (11^*)$$

$$E_L^* = \{ \lambda(\theta; L) \mid \theta \in R_L^* \} \quad (E_L^* \subset R_L) \quad (8^*)$$

Итак, вместо (12) будет рассматриваться соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} = l = L - 1. \quad (12^*)$$

Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда последовательность  $\{q_k\}$  имеет вид [3]

$$q_k = e^{k \ln l + \varphi(k)}, \quad \Delta \varphi(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k) = o(1). \quad (13)$$

Итак, (13) дает все решения равенства (12<sup>\*</sup>) относительно  $\{q_k\}$ , т. е. множество всех последовательностей действительных чисел, удовлетворяющих соотношению (12<sup>\*</sup>); но мы, согласно нашей цели, будем интересоваться только такими решениями  $\{q_k\}$  соотношения (12<sup>\*</sup>), члены которых суть натуральные числа.

Из (3) непосредственно следует, что последовательность  $\{q_k\}$  знаменателей подходящих дробей любого иррационального числа  $\theta \in (0, 1)$  удовлетворяет условиям

$$q_1 = a_1, \quad q_2 \equiv 1 \pmod{q_1}, \quad q_{k+1} \equiv q_{k-1} \pmod{q_k} \quad (k=2, 3, \dots). \quad (14)$$

Очевидно, что, наоборот, любая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям (A):  $q_1$  — любое натуральное число,  $q_2 \equiv 1 \pmod{q_1}$ ,  $q_{k+1} \equiv q_{k-1} \pmod{q_k}$  ( $k \geq 2$ ) является последовательностью знаменателей подходящих дробей некоторого иррационального числа.

Любую последовательность  $\{q_k\}$  натуральных чисел, удовлетворяющую условиям (A), назовем A-последовательностью; множество всех A-последовательностей обозначим через Q; тогда

$$Q = \bigcup_{L \in [2, \infty]} Q_L, \quad Q_L = \left\{ \{q_k\} \mid \{q_k\} \in Q, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} = L - 1 = l \right\},$$

$$Q^* = \bigcup_{L \in [2, \infty]} Q_L^*, \quad Q_L^* \subset Q_L, \quad Q_L = \left\{ \{q_k\} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} = L - 1 = l \right\}.$$

Итак, последовательность  $\{q_k\}$  натуральных чисел является последова-



тельностью знаменателей подходящих дробей некоторого иррационального числа тогда и только тогда, когда она —  $A$ -последовательность.

Если через  $N^\infty$  обозначить множество всех последовательностей натуральных чисел, то алгоритм непрерывных дробей устанавливает взаимнооднозначное соответствие между  $N^\infty$  и  $Q$  ( $Q \subset N^\infty$ ).

В самом деле, каждой последовательности  $\{a_k\} \in N^\infty$ , в силу соотношений (3), ставится в соответствие единственная последовательность  $\{q_k\}$ , которая, как показывают соотношения (24), удовлетворяет условиям (A), т. е. принадлежит  $Q$ ; наоборот, если  $\{q_k\} \in Q$ , то ей ставится в соответствие последовательность  $\{a_k\} \in N^\infty$ , определяемая из условий (A):

$$a_1 = q_1, \quad a_2 = \frac{q_2 - 1}{q_1}, \quad a_{k+1} = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k} \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (15)$$

С другой стороны, тот же алгоритм непрерывных дробей устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множествами  $J$  и  $N^\infty$ .

Таким образом, алгоритм непрерывных дробей устанавливает взаимнооднозначные соответствия между множествами  $J$ ,  $Q$ ,  $N^\infty$ .

Обозначим через  $S_L^*$  множество всех последовательностей натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению (12\*), т. е. всех последовательностей натуральных чисел, представимых в виде (13). Легко видеть, что если  $\{q_k\}$  — любая последовательность действительных чисел, удовлетворяющая соотношению (12\*) (представимая в виде (13)), то и последовательность  $\{\bar{q}_k\}$  действительных чисел удовлетворяет тому же соотношению, если

$$\bar{q}_k = c_k q_k, \quad 0 < a < c_k < A \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где  $a$  и  $A$  — постоянные относительно  $k$ .

В частности, если  $\{q_k\}$  удовлетворяет соотношению (12\*), то и  $\{\{q_k\}\}$  удовлетворяет тому же соотношению, где  $\{q_k\}$  — целая часть  $q_k$ . Но  $\{\{q_k\}\}$  — последовательность натуральных чисел.

Итак, любая последовательность действительных чисел вида (13) порождает аналогичную последовательность натуральных чисел, определяемых с помощью взятия целой части.

Пусть  $\{q_k\}$  — любая последовательность из  $S_L^*$ ; поставим ей в соответствие число

$$\lambda(\{q_k\}; L) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} q_k \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} - 1 = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} q_k \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k}. \quad (16)$$

Функция (функционал)  $\lambda(\{q_k\}; L)$  определена на  $S_L^*$ , тем более, на  $Q_L^*$  ( $Q_L^* \subset S_L^*$ ). Если последовательность  $\{q_k\}$  из  $S_L^*$  принадлежит  $Q$ , следовательно, некоторому  $Q_L$ , т. е. если  $\{q_k\}$  —  $A$ -последовательность, то



она является последовательностью знаменателей подходящих дробей некоторого (однозначно ею определяемого) иррационального числа  $\theta \in (0, 1)$  и, в силу (10), имеет место равенство

$$\lambda(\theta; L) = \lambda(\{q_k\}; L) = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k \frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} - L. \quad (17)$$

Последнее равенство, в частности, справедливо, если  $\{q_k\}$  принадлежит  $Q^*$ , следовательно, некоторому  $Q_L^*$ .

Из определений непосредственно следует, что  $\theta \in R_L^*$  тогда и только тогда, когда  $\{q_k\} \in Q_L$ .

Основная наша цель — исследование множества значений функций  $\lambda(\theta; L)$  (обобщенного спектра Лагранжа) при любом фиксированном  $L > 2$ . Областью определения этой функции служит множество  $R_L$ , но, как было отмечено выше, с целью получения более или менее удобного для применения выражения этой функции, нам пришлось сузить область изменения аргумента  $\theta$  до  $R_L^*$ , являющегося множеством всех  $\theta \in (0, 1)$ , для которых выполняется соотношение (12\*).

Из (8), (8\*) и определений  $Q_L$ ,  $Q_L^*$  следует, что

$$\{\lambda(\{q_k\}; L) \mid \{q_k\} \in Q_L\} = \{\lambda(\theta; L) \mid \theta \in R_L\} = E_L, \quad (18_1)$$

$$\{\lambda(\{q_k\}; L) \mid \{q_k\} \in Q_L^*\} = \{\lambda(\theta; L) \mid \theta \in R_L^*\} = E_L^*. \quad (18_2)$$

Если положить

$$F_L^* = \{\lambda(\{q_k\}; L) \mid \{q_k\} \in S_L^*\}, \quad (19)$$

то очевидно, что

$$E_L^* \subset E_L, \quad E_L^* \subset F_L^* \quad (L \in (2, \infty)). \quad (20)$$

Из последних включений следует, что было бы естественно, в первую очередь, заняться исследованием множества  $F_L^*$ , чему и посвящена настоящая работа.

В силу (10), (13) и (16), имеем

$$\lambda(\{q_k\}; L) = e^{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \cdot \Delta\varphi(k) \cdot e^{\varphi(k)}}, \quad \Delta\varphi(k) = 0(1). \quad (21)$$

Итак, задача сводится к исследованию множества всех значений выражения

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \cdot \Delta\varphi(k) \cdot e^{\varphi(k)}, \quad (22)$$

когда  $\varphi(k)$  пробегает множество всех функций, удовлетворяющих условию

$$\Delta\varphi(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k) = 0(1). \quad (23)$$

Очевидно, что последовательность  $k \ln l + \varphi(k)$  и, следовательно,  $\{q_k\}$  возрастает, начиная с некоторого  $k > k_0$ .

Лемма. Какова бы ни была последовательность  $\{q_k\}$  действительных чисел, удовлетворяющая условию (12\*), имеет место равенство

$$\lambda(\{q_k\}; L) = \lambda(\{[q_k]\}; L). \quad (18)$$



Доказательство. Из равенства

$$q_k = [q_k] + (q_k) = [q_k] + \alpha_k \quad (0 \leq \alpha_k < 1) \quad (19)$$

следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln [q_{k+1}]}{\ln [q_k]} = L - 1 = l, \quad (20)$$

т. е. последовательность натуральных чисел  $\{[q_k]\}$  принадлежит  $S_L^*$ . Итак, имеют место равенства

$$q_k = e^{e^{k \ln l + \varphi(k)}}, \quad \Delta \varphi(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k) = o(1), \quad (21_1)$$

$$t_k = [q_k] = e^{e^{k \ln l + \psi(k)}}, \quad \Delta \psi(k) = \psi(k+1) - \psi(k) = o(1). \quad (21_2)$$

Из (21<sub>1</sub>) и (21<sub>2</sub>) непосредственно следует, что

$$\frac{\ln q_{k+1}}{\ln q_k} = l e^{\Delta \varphi(k)}, \quad \frac{\ln t_{k+1}}{\ln t_k} = l \cdot e^{\Delta \psi(k)}. \quad (22)$$

Из (16), (21<sub>1,2</sub>) и (22) вытекает, что

$$\lambda(\{q_k\}; L) = e^{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \Delta \varphi(k) e^{\varphi(k)}}, \quad (23_1)$$

$$\lambda(\{t_k\}; L) = e^{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l \Delta \psi(k) e^{\psi(k)}}. \quad (23_2)$$

Из (19) имеем

$$[q_k] = t_k = q_k - \alpha_k = q_k \left(1 - \frac{\alpha_k}{q_k}\right). \quad (24)$$

С другой стороны, (21<sub>1</sub>) и (21<sub>2</sub>) дают

$$\varphi(k) = \ln \ln q_k - k \ln l, \quad \psi(k) = \ln \ln t_k - k \ln l. \quad (25)$$

Из (24) и (25) получаем

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \ln \ln \left[ q_k \left(1 - \frac{\alpha_k}{q_k}\right) \right] - k \ln l = \\ &= \ln \left[ \ln q_k + \ln \left(1 - \frac{\alpha_k}{q_k}\right) \right] - k \ln l = \ln \ln q_k + \ln \left[ 1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{\alpha_k}{q_k}\right)}{\ln q_k} \right] - k \ln l = \\ &= \varphi(k) + o\left(\frac{1}{q_k \ln q_k}\right) = \varphi(k) + \omega(k). \end{aligned}$$

Последнее равенство, вместе с (23<sub>2</sub>), дает

$$\begin{aligned} \lambda(\{t_k\}; L) &= \lambda(\{[q_k]\}; L) = e^{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l^k (\Delta \varphi + \Delta \omega) e^{\varphi(k) + \omega(k)}} = \\ &= e^{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (l^{k+1} \cdot \Delta \varphi \cdot e^{\varphi(k) + \omega(k)} + l^{k+1} \cdot \Delta \omega \cdot e^{\varphi(k) + \omega(k)})} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \cdot \Delta \varphi(k) \cdot e^{\varphi(k)} \\ & = e^{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varphi(k)} = \lambda(\{q_k\}; L), \end{aligned}$$

так как, в силу соотношения  $\omega(k) = 0 \left( \frac{1}{q_k \ln q_k} \right)$ , имеют место равенства

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \cdot \Delta \omega(k) \cdot e^{\varphi(k) + \omega(k)} = 0,$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \cdot \Delta \varphi(k) \cdot e^{\varphi(k) + \omega(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \cdot \Delta \varphi(k) \cdot e^{\varphi(k)}.$$

Лемма доказана.

Если через  $S_L$  обозначим множество всех последовательностей действительных чисел, удовлетворяющих соотношению (12\*), то, в силу вышедоказанной леммы, имеем

$$\{\lambda(\{q_k\}; L) \mid \{q_k\} \in S_L\} = \{\lambda(\{q_k\}; L) \mid \{q_k\} \in S_L^*\}. \quad (26)$$

Таким образом, при исследовании множества значений функционала  $\lambda(\{q_k\}; L)$  можно ограничиться последовательностями из  $S_L^*$ , т. е. последовательностями натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению (12\*), имеющих вид (13). Для таких последовательностей, как было установлено выше,  $\lambda(\{q_k\}; L)$  выражается формулой (21), в силу чего исследование множества значений функционала  $\lambda(\{q_k\}; L)$  сводится к исследованию множества значений выражения (22), когда  $\varphi(k)$  пробегает множество всех функций, удовлетворяющих условию (13).

**Теорема.** Функция (функционал)  $\lambda(\{q_k\}; L)$  принимает любое значение из сегмента  $[0, \infty]$ , когда  $\{q_k\}$  пробегает множество  $S_L$ , т. е.

$$\{\lambda(\{q_k\}; L) \mid \{q_k\} \in S_L\} = [0; \infty]. \quad (27)$$

**Доказательство.** а) Если положить, что  $\varphi(k) = \text{const}$ , т. е.  $\Delta \varphi(k) = 0$ , то для соответствующей последовательности  $q_k = e^{e^k \ln l} = e^{l^k}$  будем иметь, согласно формуле (21),

$$\lambda(\{q_k\}; L) = \lambda(\{e^{e^k \ln l}\}; L) = 1. \quad (28_1)$$

б) Если выражение

$$l^{k+1} \Delta \varphi(k) \cdot e^{\varphi(k)} \quad (29)$$

неограничено сверху, что то же самое  $l^{k+1} \Delta \varphi(k)$  неограничено сверху, то для соответствующей последовательности  $\{q_k\}$

$$\lambda(\{q_k\}; L) = \infty. \quad (28_2)$$

в) Пусть  $\varphi(k)$  такова, что выражение (29) имеет конечный предел, отличный от нуля

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \Delta \varphi(k) \cdot e^{\varphi(k)} \neq 0. \quad (30)$$



Из (30) следует, что существуют конечные пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = c, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} l^{k+1} \Delta \varphi(k) = a. \quad (31)$$

В силу последнего равенства имеем

$$l^{k+1} \Delta \varphi(k) = a + o(1), \quad \Delta \varphi(k) = \frac{a}{l^{k+1}} + \frac{o(1)}{l^{k+1}} = \frac{a}{l^{k+1}} + \frac{\beta_k}{l^{k+1}}, \quad (32)$$

откуда ( $\varphi(1) = 0$ ,  $k \geq 2$ )

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \Delta \varphi(i) = a \sum_{i=1}^{k-1} l^{-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i l^{-i-1} = \\ &= \frac{a(l^{k-1} - 1)}{l^k(l-1)} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i l^{-i-1} \quad (\beta_k = o(1)), \\ c &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = \frac{a}{l(l-1)} + b = am + b, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$m = \frac{1}{l(l-1)}, \quad b = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i l^{-i-1}, \quad (\beta_k = o(1)). \quad (34)$$

Очевидно, что число  $b$  не зависит от  $a$  и может иметь любое действительное значение.

Из (21), (31), (33) и (34) следует, что для последовательности  $\{q_k\}$  вида (13), для которой предел (30) существует, имеет место равенство

$$\lambda(\{q_k\}; L) = e^{e^* b^{am+b}} = e^{f(a, b)}. \quad (35)$$

Очевидно, что

$$\{f(a, b) \mid -\infty < a, b < \infty\} = (0, \infty),$$

откуда следует, что

$$\{\lambda(\{q_k\}; L)\} = \{e^{f(a, b)}\} = (0, \infty).$$

Теорема доказана.

Таким образом, если  $a$  — любое действительное число, а  $\beta_k = o(1)$  — любая нулевая последовательность ( $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ ), то для последовательности

$\{q_k\}$ , определяемой формулой

$$q_1 = e^l, \quad q_k = e^{k \ln l + \frac{a(l^{k-1} - 1)}{l^k(l-1)} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i l^{-i-1}} \quad (k \geq 2), \quad (36)$$

имеет место равенство (35), где  $b$  определено согласно (34). Итак, любому действительному числу  $a$  и любой нулевой последовательности  $\{\beta_k\}$  по формуле (36) сопоставляется последовательность действительных чисел  $\{q_k\}$ , для которой справедливо равенство (35).



Так как для любого фиксированного  $a$  и фиксированной  $\{\beta_k\}$

$$\ln l + \frac{a}{l^{k+1}} + \frac{\beta_k}{l^{k+1}} > 0 \quad \text{при } k > k_0(a, \{\beta_k\}),$$

то каждая последовательность (36) возрастает с  $k > k_0$ .

(Представлено 10. XII. 1968)

Кафедра  
общей математики № 2

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М.—Л., 1949.
2. I. F. Koksma, Diophantische Approximationen. Berlin, 1936.
3. П. Г. Когония, Труды ТГУ, 56, 1955, стр. 105—120.
4. П. Г. Когония, Труды ТГУ, 84, 1961, стр. 143—149.

პ. გ. კოლონია

ლაგრანჟის განზოგადებულ სპექტრა შესახებ

(რეზიუმე)

შრომაში მოცემულია ჩვენს მიერ ამავე თემაზე მუშაობისას ადრე მიღებულ შედეგთა განზოგადება; კერძოდ, მონახულია ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების სიმრავლეზე განსაზღვრული ერთ-ერთი ფუნქციონალის მნიშვნელობათა სიმრავლე.



**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С БЕСКВАДРАТНЫМИ  
ПЕРЕМЕННЫМИ (СУММИРОВАНИЕ ОСОБОГО РЯДА)**

А. П. ЛУРСМАНАШВИЛИ

**§ 1. Введение**

Пусть  $k, n, t$  и  $q$  — натуральные числа,  $k \geq 5$ ,  $p$  — простое число,  $\mu(t)$  — функция Мебиуса,  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число,

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\alpha, \beta=1}^k a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \text{ — целочисленная положительно определенная квадратичная форма определителя } d.$$

Следует отметить, что  $f(x_1, \dots, x_k)$  — квадратичная форма определителя  $d$ .

Следуя И. М. Виноградову [1], будем писать  $A \ll B$ , если найдется такое постоянное  $c$ , что  $|A| \leq cB$ . В дальнейшем постоянное  $c$ , входящее в знак  $\ll$ , будем считать зависящим только от квадратичной формы  $f(x_1, \dots, x_k)$ .

Далее, для нечетного  $N$ ,

$$\left(\frac{m}{N}\right) \text{ — символ Якоби, если } (m, N) = 1, N > 1,$$

$$\left(\frac{m}{N}\right) \text{ — ноль, если } (m, N) > 1,$$

$$\left(\frac{m}{N}\right) = 1; \text{ если } N = 1.$$

$$\exp(z) = e^z; \quad e(z) = \exp(2\pi i z);$$

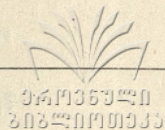
$$S(h; q) = \sum_{a \pmod q} e\left(\frac{ha^2}{q}\right); \quad (1.1)$$

$$S(h, b, q) = \sum_{a \pmod q} e\left(\frac{ha^2 + ab}{q}\right); \quad (1.2)$$

$$S(hf(t_1^2, \dots, t_k^2); q) = \sum_{l_1, \dots, l_k=0}^{q-1} e\left(\frac{h}{q} f(t_1^2 l_1, \dots, t_k^2 l_k)\right); \quad (1.3)$$

$$G(hf; q) = \sum_{t_1, \dots, t_k=1}^{\infty} \frac{\mu(t_1) \dots \mu(t_k)}{t_1^2 \dots t_k^2} S(hf(t_1^2, \dots, t_k^2); q). \quad (1.4)$$





В данной работе суммируется особый ряд

$$\sigma(f, h) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum'_{h \bmod q} \frac{G(hf; q)}{q^k} e\left(-\frac{nh}{q}\right). \quad (1.5)$$

Результат суммирования дается в теореме 5.

Следующие леммы общеизвестны:

Лемма 1.1. Пусть  $q$ —нечетное число и  $(h, q)=1$ . Тогда

$$S(h; q) = \left(\frac{h}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1.2. Пусть  $q$ —целое положительное число,  $h$ —целое число, простое с  $q$ ,  $c$ —целое число. Тогда

$$S(h, 2c; q) = e\left(-\frac{h^{-1 \bmod q} e^2}{q}\right) S(h; q).$$

Лемма 1.3. Пусть  $\psi = 2a_1x^2 + 2a_2xy + 2a_3y^2$ , где  $a_1, a_2, a_3$ —целые числа и  $a_2$ —нечетно,  $d = 4a_1a_3 - a_2^2$ ,  $t$ —целое положительное число. Тогда

$$S(\psi; 2^t) = \left(\frac{2}{d}\right)^{t-1} 2^{t+1}.$$

Лемма 1.4. Если  $h$ —нечетное число, то

$$S(h; 2^t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t=1, \\ (1+i^h) 2^{\frac{t}{2}}, & \text{при четном } t, \\ e\left(\frac{h}{8}\right) 2^{\frac{t+1}{2}}, & \text{при нечетном } t > 1. \end{cases}$$

Лемма 1.5. Если  $q$ —четное положительное число,  $a$ —целое положительное число, взаимно простое с  $q$ , то

$$S(a; q) = \begin{cases} \left(\frac{q}{a}\right) (1+i^a) q^{\frac{1}{2}}, & \text{если } q \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0, & \text{если } q \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

(Доказательство этих лемм см., напр., в [2]).

## § 2. Представление особого ряда $\sigma(f, n)$ в виде произведения

Лемма 2.1. Пусть  $q$ —целое положительное число. Тогда

$$\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^k G(f; q) = \prod_{p|q} (1-p^{-2})^{-k} \sum_{d_1|q, \dots, d_k|q} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_k)}{d_1^2 \dots d_k^2} S(f(d_1^2, \dots, d_k^2); q). \quad (2.1)$$

Доказательство. Функцию  $G(f; q)$ , определенную равенством (1.4), преобразуем следующим образом:



$$G(f; q) = \sum_{d|q} \sum_{\substack{t=1 \\ (t, q)=d}}^{\infty} \frac{\mu(t)}{t^2} \sum_{t_2, \dots, t_{k-1}}^{\infty} \frac{\mu(t_2) \dots \mu(t_k)}{t_2^2 \dots t_k^2} S(f(t_1^2, t_2^2, \dots, t_k^2); q).$$

В правой части этого равенства можем предполагать, что  $t$  принимает только бесквадратные значения. Поэтому, написав  $dt_1$ ,  $(t_1, d)=1$  вместо  $t$ ,  $(t, q)=d$ , получим

$$G(f; q) = \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{t_2, \dots, t_k=1}^{\infty} \frac{\mu(t_2) \dots \mu(t_k)}{t_2^2 \dots t_k^2} \times \\ \times S(f(d^2, t_2^2, \dots, t_k^2); q) \sum_{\substack{t_1=1 \\ (t_1, q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(t_1)}{t_1^2}.$$

Отсюда, в силу равенства

$$\sum_{\substack{t=1 \\ (t, q)=1}}^{\infty} \mu(t) t^{-2} = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p|q} (1 - p^{-2})^{-1},$$

имеем

$$G(f; q) = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p|q} (1 - p^{-2})^{-1} \sum_{d_1|q} \frac{\mu(d_1)}{d_1^2} \sum_{t_2, \dots, t_k=1}^{\infty} \frac{\mu(t_2) \dots \mu(t_k)}{t_2^2 \dots t_k^2} \times \\ \times S(f(d_1^2, t_2^2, \dots, t_k^2); q).$$

Аналогичным преобразованием сумм по  $t_2, \dots, t_k$  получаем равенство (2.1).

Пусть

$$T_1(q) = q^{-k} \prod_{p|q} (1 - p^{-2})^{-k}, \tag{2.2}$$

$$T_2(q) = T_2(f; q) = \sum_{d_1|q, \dots, d_k|q} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_k)}{d_1^2 \dots d_k^2} S(f(d_1^2, \dots, d_k^2); q) \tag{2.3}$$

и

$$T(f; q) = T_1(q) T_2(f; q). \tag{2.4}$$

В силу (2.1)—(2.4)

$$q^{-k} \left( \frac{\pi^2}{6} \right)^k G(f; q) = T(f; q). \tag{2.5}$$

Примем

$$A(q; n) = A(f; q; n) = \sum'_{h \bmod q} T(hf; q) e\left(-\frac{nh}{q}\right), \tag{2.6}$$

где штрих над суммой обозначает, что  $h$  пробегает приведенную систему вычетов по  $\bmod q$ .





Тогда, согласно определению  $\sigma(f, n)$ , в силу (2.5) и (2.6)

$$\begin{aligned} \sigma(f, n) &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum'_{h \bmod q} \frac{G(hf; q)}{q^k} e\left(-\frac{nh}{q}\right) = \\ &= \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum'_{h \bmod q} T(hf; q) e\left(-\frac{nh}{q}\right) = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k \sum_{q=1}^{\infty} A(f; q; n), \end{aligned}$$

т. е.

$$\sigma(f; n) = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k \sum_{q=1}^{\infty} A(f; q; n). \quad (2.7)$$

Согласно (2.2), при  $(q_1, q_2) = 1$ ,

$$T_1(q_1, q_2) = T_1(q_1) T_1(q_2). \quad (2.8)$$

Кроме того, известно, что при  $(q_1, q_2) = 1$ ,

$$S(f; q_1 q_2) = S(q_1 f; q_2) S(q_2 f; q_1). \quad (2.9)$$

Лемма 2.2. Если  $(q_1, q_2) = 1$ , то

$$T_2(f; q_1 q_2) = T_2(q_1 f; q_2) T_2(q_2 f; q_1).$$

Доказательство. Из (2.3), в силу (2.9), при  $(q_1, q_2) = 1$  получаем

$$\begin{aligned} T_2(f; q_1 q_2) &= \sum_{d_1 | q_1, \dots, d_k | q_1} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_k)}{d_1^2 \dots d_k^2} \sum_{d'_1 | q_2, \dots, d'_k | q_2} \frac{\mu(d'_1) \dots \mu(d'_k)}{d_1'^2 \dots d_k'^2} \times \\ &\quad \times S(f(d_1^2 d_1'^2, \dots, d_k^2 d_k'^2); q_1 q_2) = \\ &= \sum_{d_1 | q_1, \dots, d_k | q_1} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_k)}{d_1^2 \dots d_k^2} S(q_2 f(d_1^2, \dots, d_k^2); q_1) \times \\ &\quad \times \sum_{d'_1 | q_2, \dots, d'_k | q_2} \frac{\mu(d'_1) \dots \mu(d'_k)}{d_1'^2 \dots d_k'^2} S(q_1 f(d_1'^2, \dots, d_k'^2); q_2) = \\ &= T_2(q_2 f; q_1) T_2(q_1 f; q_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. Если  $(q_1, q_2) = 1$ , то

$$T(f; q_1 q_2) = T(q_1 f; q_2) T(q_2 f; q_1).$$

Доказательство следует из (2.4), (2.8) и леммы 2.2.

Лемма 2.4. Если  $(q_1, q_2) = 1$ , то

$$A(q_1 q_2; n) = A(q_1; n) A(q_2; n).$$

Доказательство. В силу (2.6)

$$A(q_1 q_2; n) = \sum'_{h \bmod q_1 q_2} T(hf; q_1 q_2) e\left(-\frac{nh}{q_1 q_2}\right).$$



Пусть  $h = h_1 q_2 + h_2 q_1$ . Тогда, если  $h_1$  пробегает приведенную систему вычетов по  $\text{mod } q_1$ , и  $h_2$  — приведенную систему вычетов по  $\text{mod } q_2$ , то  $h$  пробегает приведенную систему вычетов по  $\text{mod } q_1 q_2$ . Отсюда, в силу леммы 2.3, имеем

$$\begin{aligned} A(q_1 q_2; n) &= \sum'_{h_1 \text{ mod } q_1} \sum'_{h_2 \text{ mod } q_2} T((h_1 q_2 + h_2 q_1) f; q_1 q_2) e\left(-\frac{(h_1 q_2 + h_2 q_1) n}{q_1 q_2}\right) = \\ &= \sum'_{h_1 \text{ mod } q_1} \sum'_{h_2 \text{ mod } q_2} T((h_1 q_1 q_2 + h_2 q_1^2) f; q_2) T((h_1 q_2^2 + h_2 q_1 q_2) f; q_1) \times \\ &\quad \times e\left(-\frac{n(h_1 q_2 + h_2 q_1)}{q_1 q_2}\right) = \sum'_{h_1 \text{ mod } q_1} T(h_1 f; q_1) e\left(-\frac{nh_1}{q_1}\right) \times \\ &\quad \times \sum'_{h_2 \text{ mod } q_2} T(h_2 f; q_2) e\left(-\frac{nh_2}{q_2}\right) = A(q_1; n) A(q_2; n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В силу (1.3), (2.2)–(2.4) и (2.6).

$$A(1, n) = 1. \quad (2.10)$$

Далее, как известно [3], при  $(h_1 q) = 1$

$$G(hf; q) \ll q^{\frac{k}{2} + \varepsilon}.$$

Поэтому, согласно (2.3) и лемме 1.1, при  $(h, q) = 1$

$$T_2(hf; q) \ll q^{\frac{k}{2} + \varepsilon}.$$

Отсюда, в силу (2.2) и (2.4), при  $(h, q) = 1$

$$T(hf; q) \ll q^{-\frac{k}{2} + \varepsilon}.$$

Следовательно, из (2.6) получаем тривиальную оценку

$$A(f; q; n) \ll q^{-\frac{k}{2} + 2 + \varepsilon}.$$

Из этой оценки следует, что при  $k \geq 5$  ряд (2.7) сходится абсолютно. Отсюда, в силу леммы 2.4 и формул (2.7) и (2.10), получаем

$$\sigma(f, n) = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k \prod_p \chi(p), \quad (2.11)$$

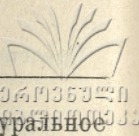
где

$$\chi(p) = \sum_{l=0}^{\infty} A(p^l; n). \quad (2.12)$$

### § 3. Вычисление $\chi(p)$ для нечетного простого $p$

В данном параграфе всюду, кроме леммы 3.5, предполагается, что  $p$  — нечетное простое число.





Лемма 3.1. Пусть  $p$  — нечетное простое число,  $t$  — натуральное число и  $f(x_1, \dots, x_k)$  — положительно определенная квадратичная форма. Тогда существует целочисленная подстановка, определитель которой взаимно простой с  $p$ , с помощью которой форма  $f$  приводится к виду:

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv \sum_{\alpha=1}^s p^{l_\alpha} \varphi_\alpha \pmod{p^t}, \quad (3.1)$$

где  $l_1, \dots, l_s$  — целые числа,  $0 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_s < t$ ,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$  — целочисленные формы с попарно непересекающимися переменными, числа их переменных —  $n_1, n_2, \dots, n_s$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_s = r \leq k$ , их определители  $d_1, d_2, \dots, d_s$  взаимно просты с  $p$ ;

$$\varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} a_{\alpha\beta} x_\beta^2, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (3.2)$$

где  $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \dots, a_{\alpha n_\alpha}$  — целые числа, взаимно простые с  $p$ .

(Доказательство см., напр., в [2]).

Лемма 3.2. Пусть  $p$  — нечетное простое число,  $t$  — натуральное число и  $l_1$  — целое число, определенное леммой 3.1. Тогда, если  $t - l_1 > 3$ , то

$$A(f; p^t, n) = 0.$$

Доказательство. Пусть  $(h, p) = 1$ . Тогда, согласно (2.3), (1.3) и лемме 3.1

$$\begin{aligned} T_2(hf; p^t) &= \sum_{d_1 | p, \dots, d_k | p} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_k)}{d_1^2 \dots d_k^2} S(hf(d_1^2, \dots, d_k^2); p^t) = \\ &= \sum_{d_1 | p, \dots, d_k | p} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_k)}{d_1^2 \dots d_k^2} \sum_{x_1, \dots, x_k \pmod{pt}} e\left(\frac{h(p^{l_1} \varphi_1 + \dots + p^{l_s} \varphi_s)}{p^t}\right) = \\ &= p^{t(k-r)} (1 - p^{-2})^{k-r} \sum_{d_1 | p, \dots, d_r | p} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_r)}{d_1^2 \dots d_r^2} \times \\ &\quad \times \sum_{x_1, \dots, x_r \pmod{pt}} e\left(\frac{h(p^{l_1} \varphi_1 + \dots + p^{l_s} \varphi_s)}{p^t}\right), \quad (3.3) \end{aligned}$$

где, согласно (3.1) — (3.2),

$$\varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} a_{\alpha\beta} d_\beta^4 x_\beta^2, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) и (1.1) получаем



$$\begin{aligned}
 T_2(hf; p^t) &= (1 - p^{-2})^{k-r} p^{t(k-r)} \prod_{\alpha=1}^s \sum_{d_1 | p_1, \dots, dn_\alpha | p} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(dn_\alpha)}{d_1^2 \dots d_{n_\alpha}^2} \times \\
 &\times \sum_{x_1, \dots, x_{n_\alpha} \bmod p^t} e\left(\frac{hp^{e_\alpha} \varphi_\alpha}{p^t}\right) = (1 - p^{-2})^{k-r} p^{t(k-r) + \sum_{\alpha=1}^s l_\alpha n_\alpha} \prod_{\alpha=1}^s \times \\
 &\times \sum_{d_1 | p, \dots, dn_\alpha | p} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(dn_\alpha)}{d_1^2 \dots d_{n_\alpha}^2} \sum_{x_1, \dots, x_{n_\alpha} \bmod p^{t-e_\alpha}} e\left(\frac{h \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} a_{\alpha\beta} d_\beta^2 x_\beta^2}{p^{t-l_\alpha}}\right) = \\
 &= (1 - p^{-2})^{k-r} p^{t(k-r) + \sum_{\alpha=1}^s n_\alpha l_\alpha} \prod_{\alpha=1}^s \prod_{\beta=1}^{n_\alpha} \sum_{d_\beta | p} \frac{\mu(d_\beta)}{d_\beta^2} S(ha_{\alpha\beta} d_\beta^4; p^{t-l_\alpha}). \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 T_2(hf; p^t) &= (1 - p^{-2})^{k-r} p^{t(k-r) + \sum_{\alpha=1}^s l_\alpha n_\alpha} \times \\
 &\times \prod_{\alpha=1}^s \prod_{\beta=1}^{n_\alpha} \{S(ha_{\alpha\beta}; p^{t-l_\alpha}) - p^{-2} S(ha_{\alpha\beta} p^4; p^{t-l_\alpha})\}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Теперь, в силу (3.6), (2.2) — (2.4), получаем

$$\begin{aligned}
 T(hf; p^t) &= (1 - p^{-2})^{-r} p^{-tr + \sum_{\alpha=1}^s l_\alpha n_\alpha} \times \\
 &\times \prod_{\alpha=1}^s \prod_{\beta=1}^{n_\alpha} \{S(ha_{\alpha\beta}; p^{t-l_\alpha}) - p^{-2} S(ha_{\alpha\beta} p^4; p^{t-l_\alpha})\}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Для сумм Гаусса известно, что

$$S(a; h^2q) = hS(a; q), \quad (h, 2a) = 1.$$

Поэтому, если  $t - l_\alpha \geq 4$ , в силу  $(2a_{\alpha\beta}h, p) = 1$ , имеем

$$S(ha_{\alpha\beta}; p^{t-l_\alpha}) - p^{-2} S(ha_{\alpha\beta} p^4; p^{t-l_\alpha}) = 0.$$

Следовательно, если  $(h, p) = 1$ , то из (3.7) следует

$$T(hf; p^t) = 0, \quad \text{если } t - l_\alpha \geq 4.$$

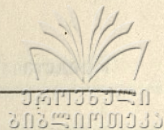
Ввиду того, что  $l_1 < l_\alpha$ ,  $\alpha = 2, \dots, s$ , доказательство леммы следует из (3.8) и (2.6).

Лемма 3.3. Пусть  $n = p^w n_1$ ,  $p \nmid n_1$ . Тогда

$$A(p^t; n) = 0, \quad \text{если } t > w + 1.$$

Доказательство. В силу (2.6), (2.2) — (2.4), (1.3), (3.1), (3.2) и (3.5)





$$A(p^t; n) = (1 - p^{-2})^{-r} p^{-tr + \sum_{\alpha=1}^s l_{\alpha} n_{\alpha}} \sum'_{h \bmod p^t} e\left(-\frac{nh}{pt}\right) \times \\ \times \prod_{\alpha=1}^s \prod_{\beta=1}^{n_{\alpha}} \sum_{d_{\beta} | p} \frac{\mu(d_{\beta})}{d_{\beta}^2} S(h a_{\alpha\beta} d_{\beta}^4; p^{t-l_{\alpha}}). \quad (3.9)$$

Пусть

$$\varepsilon(\beta) = \varepsilon(d_{\beta}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \nmid d_{\beta}, \\ 4, & \text{если } p \mid d_{\beta}. \end{cases}$$

и

$$\sigma(t, \alpha, \beta) = \sigma(\alpha, \beta) = \min(t - l_{\alpha}, \varepsilon(d_{\beta})). \quad (3.10)$$

Так как  $(h a_{\alpha\beta}, p) = 1$  и, согласно лемме 3.2,  $t - l_{\alpha} \leq 3$ , то в силу леммы 1.1 и (3.10), следует

$$S(h a_{\alpha\beta} d_{\beta}^4; p^{t-l_{\alpha}}) = \\ = p^{\frac{t-l_{\alpha} + \sigma(\alpha, \beta)}{2}} \left(\frac{h a_{\alpha\beta}}{p}\right)^{t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta)} \left(\frac{p-1}{2}\right)_i^{t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta)}$$

Поэтому из (3.9) получаем

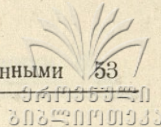
$$A(p^t; n) = p^{-tr + \sum_{\alpha=1}^s l_{\alpha} n_{\alpha}} (1 - p^{-2})^{-r} \sum'_{h \bmod p^t} e\left(-\frac{nh}{p^t}\right) \times \\ \times \prod_{\alpha=1}^s \sum_{d_1 | p, \dots, d_{n_{\alpha}} | p} \frac{\mu(d_1) \dots \mu(d_{n_{\alpha}})}{d_1^2 \dots d_{n_{\alpha}}^2} p^{\sum_{\beta=1}^{n_{\alpha}} \frac{t-l_{\alpha} + \sigma(\alpha, \beta)}{2}} \times \\ \times \left(\frac{h}{p}\right)_{\beta=1}^{n_{\alpha}} \sum_{i}^{t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta)} \left(\frac{p-1}{2}\right)_i^{n_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{n_{\alpha}} (t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta))^2 \prod_{\beta=1}^{n_{\alpha}} \left(\frac{a_{\alpha\beta}}{p}\right)^{t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta)}. \quad (3.11)$$

Преобразуем внутреннюю сумму по  $d_1, \dots, d_{n_{\alpha}}$  следующим образом (см. [3], теорема 2):

$$\sum_{d_1 | p, \dots, d_{n_{\alpha}} | p} \dots = \sum_{c_{\alpha}=0}^{n_{\alpha}} \sum_{\substack{d_1 | p, \dots, d_{n_{\alpha}} | p \\ \varphi(d_1, \dots, d_{n_{\alpha}}; p) = c_{\alpha}}} \frac{\mu(p_1) \dots \mu(d_{n_{\alpha}})}{d_1^2 \dots d_{n_{\alpha}}^2} p^{\sum_{\beta=1}^{n_{\alpha}} \frac{t-l_{\alpha} + \sigma(\alpha, \beta)}{2}} \times \\ \times \left(\frac{h}{p}\right)_{\beta=1}^{n_{\alpha}} \sum_{i}^{t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta)} \left(\frac{p-1}{2}\right)_i^{n_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{n_{\alpha}} (t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta))^2 \prod_{\beta=1}^{n_{\alpha}} \left(\frac{a_{\alpha\beta}}{p}\right)^{t-l_{\alpha} - \sigma(\alpha, \beta)}, \quad (3.12)$$

где  $\varphi(d_1, \dots, d_{n_{\alpha}}; p)$  — число чисел  $d_1, \dots, d_{n_{\alpha}}$ , кратных  $p$ .





При условии  $\varphi(d_1, \dots, d_{n_\alpha}; p) = c_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} \frac{(t-l_\alpha + \sigma(\alpha, \beta))}{2} &= \frac{(t-l_\alpha)(n_\alpha + c_\alpha)}{2}; \\ \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} (t-l_\alpha - \sigma(\alpha, \beta))^2 &= (t-l_\alpha)^2 (n_\alpha - c_\alpha); \\ \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} (t-l_\alpha - \sigma(\alpha, \beta)) &= (n_\alpha - c_\alpha)(t-l_\alpha). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Кроме того

$$\sum_{\beta=1}^{n_\alpha} \left(\frac{a_{\alpha\beta}}{p}\right)^{t-l_\alpha-\sigma(\alpha, \beta)} = \prod_{\substack{\beta=1 \\ p \nmid d_\alpha}}^{n_\alpha} \left(\frac{a_{\alpha\beta}}{p}\right)^{t-l_\alpha} = \left(\frac{d_\alpha c_\alpha}{p}\right)^{t-l_\alpha} = \pm 1. \quad (3.14)$$

Следовательно, из (3.12)–(3.14) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{d_1 | p, \dots, d_{n_\alpha} | p} &= \sum_{c_\alpha=0}^{n_\alpha} (-1)^{c_\alpha} p^{\frac{(t-l_\alpha)(n_\alpha+c_\alpha)}{2} + 2c_\alpha} \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (n_\alpha - c_\alpha)(t-l_\alpha)^2 \times \\ &\times \left(\frac{h}{p}\right)^{(n_\alpha - c_\alpha)(t-l_\alpha)} \left(\frac{d_\alpha c_\alpha}{p}\right)^{t-l_\alpha}. \end{aligned}$$

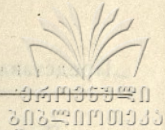
На основании этого из (3.11) получаем

$$\begin{aligned} A(p^t; n) &= p^{-rt + \sum_{\alpha=1}^s c_\alpha n_\alpha} (1-p^{-2})^{-r} \sum_{c_1=0}^{n_1} \dots \sum_{c_s=0}^{n_s} \times \\ &\times (-1)^{\sum_{\alpha=1}^s c_\alpha} p^{\sum_{\alpha=1}^s \frac{(t-l_\alpha)(n_\alpha+c_\alpha) - 4c_\alpha}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \sum_{\alpha=1}^s (n_\alpha - c_\alpha)(t-l_\alpha)^2 \times \\ &\prod_{\alpha=1}^s \left(\frac{d_\alpha c_\alpha}{p}\right)^{t-l_\alpha} \sum'_{h \bmod p^t} \left(\frac{h}{p}\right)^{\sum_{\alpha=1}^s (n_\alpha - c_\alpha)(t-l_\alpha)} e\left(-\frac{nh}{p^t}\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Пусть  $n = p^w \cdot n_1$ ,  $p \nmid n_1$  и  $l$  — целое число. Тогда, как известно (см., например, [2]),

$$\sum'_{h \bmod p^t} \left(\frac{h}{p}\right)^l e\left(-\frac{nh}{p^t}\right) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } t > w+1, \\ -p^{t-1} & , \text{ если } t = w+1 \text{ и } l \equiv 0 \pmod{2}, \\ (p-1)p^{t-1} & , \text{ если } t < w+1 \text{ и } l \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 & , \text{ если } t < w+1 \text{ и } l \equiv 1 \pmod{2}, \\ \left(-\frac{n_1}{p}\right)_i \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 p^{w+\frac{1}{2}} & , \text{ если } t = w+1 \text{ и } l \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad (3.16)$$





Справедливость леммы очевидна в силу (3.15) и первой строки (3.16).

Пусть для нечетного простого  $p$

$$N = N_p = N(f; p; n) = \min(3 + l_1, w + 1). \quad (3.17)$$

Тогда из лемм 3.2 и 3.3 следует

Лемма 3.4. Если  $t > N$ , то

$$A(f; p^t, n) = 0.$$

Лемма 3.5. Пусть  $N$  — натуральное число, определенное равенством (3.17),  $l$  — целое число,  $0 \leq l \leq N$ . Тогда для любого простого  $p \geq 2$ ,

$$p^{Nk} (1 - p^{-2})^k T(f; p^{N-l}) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \bmod p^N \\ p^2 \nmid m_i}} e \left\{ \frac{p^l f(m_1, \dots, m_k)}{p^N} \right\}. \quad (3.18)$$

Доказательство. Если  $l = N$ , то справедливость равенства (3.18) проверяется непосредственно, если заметить, что, в силу (1.3), (2.2) — (2.4),  $T(f; 1) = 1$ . Поэтому считаем, что  $l < N$ . Тогда, в силу (1.3) и (2.2) — (2.4),

$$\begin{aligned} & p^{Nk} (1 - p^{-2})^k T(f; p^{N-l}) = \\ & = p^{(k-1)l} \sum_{d_2 | p, \dots, d_k | p} \frac{\mu(d_2) \dots \mu(d_k)}{d_2^2 \dots d_k^2} \left\{ p^l \sum_{m_1, \dots, m_k \bmod p^{N-l}} \times \right. \\ & \times e \left( \frac{f(m_1, d_2^2 m_2, \dots, d_k^2 m_k)}{p^{N-l}} \right) - p^{l-2} \sum_{m_1, \dots, m_k \bmod p^{N-l}} \times \\ & \times e \left( \frac{f(0, d_2^2 m_2, \dots, d_k^2 m_k)}{p^{N-l}} \right) \left. \right\} = p^{(k-1)l} \sum_{d_2 | p, \dots, d_k | p} \frac{\mu(d_2) \dots \mu(d_k)}{d_2^2 \dots d_k^2} \times \\ & \times \sum_{m_2, \dots, m_k \bmod p^{N-l}} e \left\{ \frac{f(0, d_2^2 m_2, \dots, d_k^2 m_k)}{p^{N-l}} \right\} M(f; p), \quad (3.19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M(f; p) &= p^l \sum_{m_1 \bmod p^{N-l}} e \left( \frac{a_1 m_1^2 + 2m_1 \sum_{\alpha=2}^k a_{1\alpha} d_\alpha^2 m_\alpha}{p^{N-l}} \right) - \\ & - p^{l-2} \sum_{m_1 \bmod p^{N-l}} e \left( \frac{a_{11} (p^2 m_1)^2 + 2(p^2 w_1) \sum_{\alpha=2}^k a_{1\alpha} d_\alpha^2 m_\alpha}{p^{N-l}} \right) = \\ & = \sum_{m_1 \bmod p^N} e \left\{ \frac{p^l (a_{11} m_1^2 + 2m_1 \sum_{\alpha=2}^k a_{1\alpha} d_\alpha^2 m_\alpha)}{p^N} \right\} - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m_1 \bmod p^{N-2}} e \left\{ \frac{p^l [a_{11} (p^2 m_1)^2 + 2 (p^2 m_1) \sum_{\alpha=2}^k a_{1\alpha} d_\alpha^2 m_\alpha]}{p^N} \right\} = \\
 &= \sum_{\substack{m_1 \bmod p^N \\ p^2 \nmid m_1}} e \left\{ \frac{p^l (a_{11} m_1^2 + 2 m_1 \sum_{\alpha=2}^k a_{1\alpha} d_\alpha^2 m_\alpha)}{p^N} \right\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (3.19), имеем

$$\begin{aligned}
 & p^{Nk} (1 - p^{-2})^k T(f; p^{N-l}) = \\
 &= p^{(k-1)l} \sum_{d_2 | p, \dots, d_k | p} \frac{\mu(d_2) \dots \mu(d_k)}{d_2^2 \dots d_k^2} \sum_{\substack{m_1 \bmod p^N \\ p^2 \nmid m_1}} \sum_{m_2, \dots, m_k \bmod p^{N-l}} \times \\
 & \quad \times e \left\{ \frac{f(m_1, d_2^2 m_2, \dots, d_k^2 m_k)}{p^{N-l}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным рассуждением относительно сумм  $\sum_{d_2 | p}, \dots, \sum_{d_k | p}$  получим

равенство (3.18).

**Теорема 1.** Пусть  $p$  — нечетное простое число и  $p | d$ , где  $d$  — определитель формы  $f$ ;  $N$  — натуральное число, определенное равенством (3.17), и  $\rho(f; p^N; n)$  — число решений сравнения

$$f(m_1, \dots, m_k) \equiv n \pmod{p^N} \quad (3.20)$$

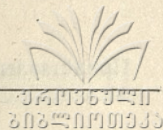
в целых неделящихся на  $p^2$  числах  $m_1, \dots, m_k$ . Тогда

$$\chi(p) = p^{-(k-1)N} (1 - p^{-2})^{-k} \rho(f; p^N; n). \quad (3.21)$$

**Доказательство.** В силу равенств (2.12) и (2.6) и лемм 3.4 и 3.5,

$$\begin{aligned}
 \chi(p) &= \sum_{l=0}^N A(f; p^l; n) = \sum_{l=0}^N A(f; p^{N-l}; n) = \\
 &= \sum_{l=0}^N \sum'_{h \bmod p^{N-l}} T(hf; p^{N-l}) e \left( -\frac{nh}{p^{N-l}} \right) = \\
 &= p^{-Nk} (1 - p^{-2})^{-k} \sum_{l=0}^N \sum'_{h \bmod p^{N-l}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \bmod p^N \\ p^2 \nmid m_v, v=1, \dots, k}} e \left\{ \frac{kp^l [f(m_1, \dots, m_k) - n]}{p^N} \right\} =
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= p^{-Nk} (1-p^{-2})^{-k} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \bmod p^N \\ p^2 \nmid m_v, v=1, \dots, k}} \sum_{l=0}^N \sum_{h \bmod p^{N-l}} e^{\left\{ \frac{p^l h [f(m_1, \dots, m_k) - n]}{p^N} \right\}} = \\
 &= p^{-Nk} (1-p^{-2})^k \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \bmod p^N \\ p^2 \nmid m_v, v=1, \dots, k}} \sum_{b \bmod p^N} \chi \left\{ \frac{b [f(m_1, \dots, m_k) - n]}{p^N} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь внутренняя сумма по  $b$  равна нулю, если сравнение (3.20) не имеет решения в целых, неделающихся на  $p^2$  числах  $m_1, \dots, m_k$  и равна  $p^N$ , если сравнение (3.20) разрешимо. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда нечетное простое число  $p$  не делит определитель формы  $f$ :  $p \nmid d$ .

Имеет место

Теорема 2. Существует положительное число  $c > 0$ , такое что

$$\prod_{\substack{p > 2 \\ p \nmid d}} \chi(p) \geq c.$$

Доказательство. Оценим функцию  $T(hf; p^t)$ , при  $(h, p) = 1$ . Эта функция приведена к виду (3.7). Согласно (3.8), при оценке этой функции можем считать, что  $t - l\alpha \leq 3$ . Отсюда, с одной стороны,

$$S(h\alpha_{\alpha\beta} p^t; p^{t-l\alpha}) = p^{t-l\alpha},$$

а с другой, ввиду того, что  $(h\alpha_{\alpha\beta}, p) = 1$ , из леммы 1.1 имеем

$$|S(h\alpha_{\alpha\beta}; p^{t-l\alpha})| = p^{\frac{t-l\alpha}{2}}.$$

Ввиду этого из (3.7) получаем

$$\begin{aligned}
 |T(hf; p^t)| &\leq (1-p^{-2})^{-r} p^{-tr} \prod_{\alpha=1}^s l_\alpha n_\alpha \prod_{\alpha=1}^s \prod_{\beta=1}^{n_\alpha} \left( p^{-\frac{t-l\alpha}{2}} + p^{t-l\alpha} \right) = \\
 &= (1-p^{-2})^{-r} \prod_{\alpha=1}^s \prod_{\beta=1}^{n_\alpha} \left( p^{-\frac{t-l\alpha}{2}} + p^{-2} \right). \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Пусть теперь  $p \nmid d$ . Тогда, согласно лемме 3.1,  $s=1$ ,  $l_1=0$ ,  $n_1=r=k$ . Поэтому, из (3.22) получим

$$|T(hf; p^t)| \leq (1-p^{-2})^{-k} (p^{-\frac{t}{2}} + p^{-2})^k.$$

Отсюда, в силу неравенства

$$(1-p^{-2})^{-1} (p^{-\frac{t}{2}} + p^{-2}) < 1, \quad p \geq 3,$$

для  $k \geq 5$  имеем

$$|T(hf; p^t)| \leq (1-p^{-2})^{-5} (p^{-\frac{t}{2}} + p^{-2})^5.$$



Следовательно, для  $k \geq 5$  из (2.6) следует

$$|A(p^t; n)| \leq p^{t-1}(p-1)(1-p^{-2})^{-5}(p^{-\frac{t}{2}} + p^{-2})^5. \quad (3.23)$$

Пусть

$$\xi(p) = \sum_{t=1}^3 p^{t-1}(p-1)(1-p^{-2})^{-5}(p^{-\frac{t}{2}} + p^{-2})^5. \quad (3.24)$$

Тогда

$$\xi(p) < 1, \text{ для } p \geq 3$$

и

$$\xi(p) \leq p^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.25)$$

Из (2.12), (2.10), (3.17), (3.23), (3.24) и леммы 3.4 получаем

$$|\chi(p) - 1| \leq \xi(p). \quad (3.26)$$

Согласно (3.21),  $\chi(p)$  — вещественное число. Кроме того, согласно (3.25), если

$$c = \prod_{p>2} (1 - \xi(p)), \quad (3.27)$$

то

$$c > 0.$$

Теперь из (3.26) и (3.27) следует, что

$$\prod_{\substack{p>2 \\ p|d}} \chi(p) \geq c.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $d$  — определитель формы  $f$ . Тогда, если для каждого нечетного простого делителя  $p$  определителя  $d$  сравнения (3.20) разрешимы в целых неделющихся на  $p^2$  числах  $m_1, \dots, m_k$ , то

$$\prod_{p \geq 3} \chi(p) > 0,$$

в противном случае

$$\prod_{p \geq 3} \chi(p) = 0.$$

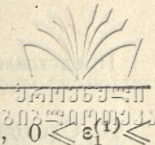
Доказательство следует из теорем 1 и 2.

#### § 4. Вычисление $\chi(2)$ .

**Лемма 4.1.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_k)$  — целочисленная положительно определенная квадратичная форма  $k$  переменных и  $l$  — неотрицательное целое число. Тогда существует целочисленная подстановка нечетного определителя, при помощи которой форма  $f$  приводится к виду:

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv \sum_{\alpha=1}^s 2^{l\alpha} \varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^n 2^{\varepsilon_\beta(1)} a_\beta x_\beta^2 + \\ + \sum_{\beta=n'+1}^{n'+n''} 2^{\varepsilon_\beta(2)} \psi_\beta(x_\beta, x_{n''+\beta}), \quad (\text{mod } 2^l),$$





где  $\varepsilon_{\beta}^{(1)}, \beta=1, \dots, n', \varepsilon_{\beta}^{(2)}, \beta=n'+1, \dots, n'+n''$  — целые числа,  $0 \leq \varepsilon_1^{(1)} \leq \dots \leq \varepsilon_n^{(1)} < l, -1 \leq \varepsilon_{n'+1}^{(2)} \leq \dots \leq \varepsilon_{n'+n''}^{(2)} < l, n'+2n''=r \leq k$

и

$$\psi_{\beta}(x_{\beta}, x_{n'+\beta}) = 2a'_{\beta} x_{\beta}^2 + 2a''_{\beta} x_{\beta} x_{n'+\beta} + 2a'''_{\beta} x_{n'+\beta}^2, \beta=n'+1, \dots, n'+n''.$$

При этом  $a_{\beta}, \beta=1, \dots, n'$  — нечетные и  $a'_{\beta}, a''_{\beta}$  и  $a'''_{\beta}, \beta=n'+1, \dots, n'+n''$  целые числа, где  $a'_{\beta}$  и  $a''_{\beta}$  (или  $a'''_{\beta}$  и  $a'''_{\beta}$ ) — нечетные. (Доказательство см., напр., в [2]).

Пусть для целого  $l \geq 0$  и  $\varepsilon_{n'+1}^{(2)} = \varepsilon^{(2)}$

$$N = N(f; l) = \min(5 + \varepsilon_1^{(1)}, 4 + \varepsilon_1^{(2)}). \quad (4.1)$$

Тогда имеет место

Лемма 4.2. Если  $h$  — нечетное целое число, то

$$T(hf; 2^l) = \begin{cases} 0, & \text{если } l > N, \\ \neq 0, & \text{если } l \leq N. \end{cases}$$

Доказательство. В силу (1.3) и леммы 4.1,

$$\begin{aligned} & S(f(d_1^2, \dots, d_k^2); 2^l) = \\ & = 2^{l(k-r)} \sum_{x_1, \dots, x_r \bmod 2^l} \prod_{\beta=1}^{n'} e\left(\frac{2^{\varepsilon_{\beta}^{(1)}} a_{\beta} d_{\beta}^4 x_{\beta}^2}{2^l}\right) \times \\ & \times \prod_{\beta=n'+1}^{n'+n''} e\left\{\frac{2^{\varepsilon_{\beta}^{(2)}} \psi_{\beta}(d_{\beta}^2 x_{\beta}, d_{n'+\beta}^2 x_{n'+\beta})}{2^l}\right\} = \\ & = 2^{l(k-r)} \prod_{\beta=1}^{n'} S(2^{\varepsilon_{\beta}^{(1)}} a_{\beta} d_{\beta}^4; 2^l) \prod_{\beta=n'+1}^{n'+n''} S(2^{\varepsilon_{\beta}^{(2)}} \psi_{\beta}(d_{\beta}^2, d_{n'+\beta}^2); 2^l). \end{aligned}$$

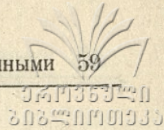
Отсюда, в силу (2.3),

$$\begin{aligned} T_2(hf; 2^l) & = 2^{l(k-r)} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-r} \prod_{\beta=1}^{n'} \sum_{d_{\beta}^2} \frac{\mu(d_{\beta})}{d_{\beta}^2} S(2^{\varepsilon_{\beta}^{(1)}} h a_{\beta} d_{\beta}^4; 2^l) \times \\ & \times \prod_{\beta=n'+1}^{n'+n''} \sum_{d_{\beta}^2} \frac{\mu(d_{\beta}) \mu(d_{n'+\beta})}{d_{\beta}^2 d_{n'+\beta}^2} S(2^{\varepsilon_{\beta}^{(2)}} \psi_{\beta}(d_{\beta}^2, d_{n'+\beta}^2); 2^l). \quad (4.2) \end{aligned}$$

Примем:  $d_{\beta} = d, \varepsilon_{\beta}^{(1)} = \varepsilon, a_{\beta} = a, \beta=1, \dots, n', a$  — нечетно. Тогда

$$\sum_{d_{\beta}^2} \frac{\mu(d_{\beta})}{d_{\beta}^2} S(2^{\varepsilon_{\beta}^{(1)}} h a_{\beta} d_{\beta}^4; 2^l) =$$





$$\begin{aligned}
 &= \sum_{d|2} \frac{\mu(d)}{d^2} S(2^\varepsilon h a d^4; 2^l) = 2^\varepsilon \sum_{d|2} \frac{\mu(d)}{d^2} S(a h d^4; 2^{l-\varepsilon}) = \\
 &= 2^\varepsilon \left\{ S(a h; 2^{l-\varepsilon}) - \frac{1}{4} S(a h 2^4; 2^{l-\varepsilon}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Если  $l - \varepsilon \geq 6$ , то, согласно лемме 1.4, при нечетном  $h$

$$S(a h; 2^{l-\varepsilon}) - \frac{1}{4} S(a h 2^4; 2^{l-\varepsilon}) = 0.$$

Следовательно, при нечетном  $h$

$$\sum_{d_\beta|2} \frac{\mu(d_\beta)}{d_\beta^2} S(2^{\varepsilon_\beta^{(1)}} h a_\beta d_\beta^4; 2^l) = 0, \text{ если } l \geq 6 + \varepsilon^{(1)}. \quad (4.3)$$

Поэтому, при вычислении  $T_2(hf; 2^l)$ , будем считать, что  $l - \varepsilon_1^{(1)} \leq 5$ .

При нечетном  $h$

$$\begin{aligned}
 \sum_{d_\beta|2} \frac{\mu(d_\beta)}{d_\beta^2} S(h a_\beta d_\beta^4; 2^{l-\varepsilon_\beta^{(1)}}) &= -\frac{1}{2}, \text{ если } l - \varepsilon_\beta^{(1)} = 1, \\
 &= 2 \left( \frac{1}{2} + i^{h a_\beta} \right), \text{ если } l - \varepsilon_\beta^{(1)} = 2, \\
 &= 4 \left( e \left( \frac{h a_\beta}{8} \right) - \frac{1}{2} \right), \text{ если } l - \varepsilon_\beta^{(1)} = 3, \\
 &= 4 i^{h a_\beta}, \text{ если } l - \varepsilon_\beta^{(1)} = 4, \\
 &= 8 e \left( \frac{h a_\beta}{8} \right), \text{ если } l - \varepsilon_\beta^{(1)} = 5.
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

В силу (4.3) и (4.4), при нечетном  $h$  будем иметь

$$\prod_{\beta=1}^{n'} \sum_{d_\beta|2} \frac{\mu(d_\beta)}{d_\beta^2} S(h a_\beta 2^{\varepsilon_\beta^{(1)}} d_\beta^4; 2^l) = \begin{cases} = 0, & \text{если } l - \varepsilon_\beta^{(1)} \geq 6 \\ \neq 0, & \text{если } l - \varepsilon_\beta^{(1)} \leq 5. \end{cases} \quad (4.5)$$

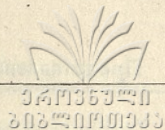
Далее,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{d|2, c|2} \frac{\mu(d)\mu(c)}{d^2 c^2} S(2^\varepsilon h \psi(d^2, c^2); 2^l) = \\
 &S(2^\varepsilon h \psi(1, 1); 2^l) - \frac{1}{4} S(2^\varepsilon h \psi(4, 1); 2^l) - \\
 &- \frac{1}{4} S(2^\varepsilon h \psi(1, 4); 2^l) + \frac{1}{16} S(2^\varepsilon h \psi(4, 4); 2^l).
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть  $D = 4a'a'' - a'^2$ . Тогда, при нечетном  $h$ , согласно лемме 1.3,

$$S(2^\varepsilon h \psi(1, 1); 2^l) = \begin{cases} \left( \frac{2}{D} \right)^{l-3-1} 2^{l+1+\varepsilon}, & \text{если } l \geq 1 + \varepsilon, \\ 2^l, & \text{если } l \leq 1 + \varepsilon, \end{cases} \quad (4.7)$$





$$S(2^\varepsilon h \psi(4, 4); 2^l) = \begin{cases} \left(\frac{2}{D}\right)^{l-1-\varepsilon} 2^{5+l+\varepsilon}, & \text{если } l \geq 5+\varepsilon, \\ 2^{2l} & \text{, если } l \leq 5+\varepsilon. \end{cases} \quad (4.8)$$

Теперь докажем, что для нечетного  $h$

$$S(2^\varepsilon h \psi(4, 1); 2^l) = \begin{cases} 2^{2l} & \text{, если } l \leq 1+\varepsilon, \\ 0 & \text{, если } l = 2+\varepsilon \text{ или } 4+\varepsilon, \\ 2^{5+\varepsilon}(1+i^{a'''h}) & \text{, если } l = 3+\varepsilon, \\ \left(\frac{2}{D}\right)^{l-\varepsilon-1} 2^{l+3+\varepsilon} & \text{, если } l \geq 5+\varepsilon. \end{cases} \quad (4.9)$$

Справедливость первой строки (4.9) очевидна. Поэтому будем считать, что  $l > 1+\varepsilon$ . Имеем

$$\begin{aligned} S(2^\varepsilon h \psi(4, 1); 2^l) &= \sum_{xy \bmod 2^l} e \left\{ \frac{2^2 h (16 \cdot 2a'x^2 + 4 \cdot 2 \cdot a''xy + 2a'''y^2)}{2^l} \right\} = \\ &= 2^{2(\varepsilon+1)} \sum_{x, y \bmod 2^{l-\varepsilon-1}} e \left\{ \frac{h(16a'x^2 + 4a''xy + a'''y^2)}{2^{l-\varepsilon-1}} \right\} = \\ &= 2^{2(\varepsilon+1)} \sum_{x \bmod 2^{l-1-\varepsilon}} e \left( \frac{16ha'x^2}{2^{l-\varepsilon-1}} \right) \sum_{y \bmod 2^{l-1-\varepsilon}} e \left\{ \frac{h(a'''y^2 + 4a''xy)}{2^{l-1-\varepsilon}} \right\}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 1.2, для внутренней суммы по  $y$  получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{y \bmod 2^{l-1-\varepsilon}} e \left\{ \frac{h(a'''y^2 + 4a''xy)}{2^{l-1-\varepsilon}} \right\} = \\ &= e \left\{ -\frac{(2a''hx)^2 (a'''h)^{-1 \pmod{2^{l-1-\varepsilon}}}}{2^{l-1-\varepsilon}} \right\} S(a'''h; 2^{l-\varepsilon-1}). \end{aligned}$$

Поэтому

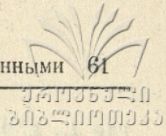
$$\begin{aligned} &S(2^\varepsilon h \psi(4, 1); 2^l) = \\ &= 2^{4+2\varepsilon} S(a'''h; 2^{l-1-\varepsilon}) S((4a'h - a''^2h^2(a'''h)^{-1 \pmod{2^{l-1-\varepsilon}}})^{-1} \pmod{2^{l-\varepsilon-3}}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если  $l = 2+\varepsilon$  или  $l = 4+\varepsilon$ , то очевидно, правая часть (4.10) равна нулю. Отсюда следует вторая строка равенства (4.9). Если  $l = 3+\varepsilon$ , то третья строка равенства (4.9) получается из (4.10) на основе леммы 1.4.

Докажем равенство (4.9) при  $l \geq 5+\varepsilon$ . Согласно лемме 1.5 из (4.10), получаем

$$\begin{aligned} S(2^\varepsilon h \psi(4, 1); 2^l) &= 2^{l+2\varepsilon} \left( \frac{2^{l-1-\varepsilon}}{a'''h} \right) (1+i^{a'''h}) \times \\ &\times \left( \frac{2^{l-\varepsilon-3}}{4a'h - a''^2h^2(a'''h)^{-1 \pmod{2^{l-1-\varepsilon}}}} \right) (1+i^{-a''^2h^2(a'''h)^{-1 \pmod{2^{l-1-\varepsilon}}}}) = \end{aligned}$$





$$= 2^{l+2+\varepsilon} \left(\frac{2}{D}\right)^{l-1-\varepsilon} (1+i^{a'''h})(1+i^{-(a'''h)^{-1}} \pmod{2^{l-1-\varepsilon}}) =$$

$$= \left(\frac{2}{D}\right)^{l-1-\varepsilon} 2^{l+3+\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

Перестановкой коэффициентов  $a'$  и  $a'''$  из  $S(2^\varepsilon h \psi(4, 1); 2^l)$  получаем  $S(2^\varepsilon h \psi(1, 4); 2^l)$ .

Для нечетных  $h$  имеем

$$\prod_{\beta=n'+1}^{n'+n''} \sum_{d_\beta | 2, d_{n''+\beta} | 2} \frac{\mu(d_\beta) \mu(d_{n''+\beta})}{d_\beta^2 d_{n''+\beta}^2} S(h 2^{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_\beta(d_\beta^2, d_{n''+\beta}^2); 2^l) =$$

$$= 0, \text{ если } l \geq 5 + \varepsilon_1^{(2)},$$

$$\neq 0, \text{ если } l \leq 4 + \varepsilon_1^{(2)}. \tag{4.11}$$

Доказательство леммы следует из (4.11), (4.5), (4.2), (4.1) и (2.4).

Из лемм 4.2 и формулы (2.6) получаем

$$A(f; 2^l; n) = 0, \text{ если } l > N.$$

Поэтому, в силу (2.12),

$$\chi(2) = \sum_{l=0}^N A(f; 2^l; n). \tag{4.12}$$

Теорема 4. Пусть  $N$  определено согласно (4.1) и  $\rho(f; 2^N; n)$  — число решений сравнения

$$f(m_1, \dots, m_k) \equiv n \pmod{2^N}, \tag{4.13}$$

в целых, неделящихся на 4 числах  $m_1, \dots, m_k$ . Тогда

$$\chi(2) = (2^{N-2} 3)^{-k} 2^N \rho(f; 2^N; n),$$

т. е.  $\chi(2) > 0$ , если существуют целые, неделящиеся на 4, числа  $m_1, \dots, m_k$ , которые удовлетворяют сравнению (4.13), и  $\chi(2) = 0$  в противном случае.

Доказательство. В силу (2.6) и леммы 3.5, из (4.12) получаем

$$\chi(2) = (3 \cdot 2^{N-2})^{-k} 2^N \rho(f; 2^N; n).$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть  $f(x_1, \dots, x_k)$  — положительно определенная квадратичная форма,  $k \geq 5$ ,  $d$  — определитель этой формы.

Пусть для каждого нечетного простого делителя  $p$  определителя  $d$   $w$  определено следующим образом:  $n = p^N n_1$ ,  $p \nmid n_1$ .

Определим  $N = N(p) = N(f, p, n)$  для каждого нечетного простого делителя  $p$  определителя  $d$  и для  $p = 2$  следующим образом:

$$N = \begin{cases} \min(5 + \varepsilon_1^{(1)}, 4 + \varepsilon_1^{(2)}), & \text{для } p = 2, \\ \min(3 + l_1, w + 1), & \text{для нечетного } p, p | d, \end{cases}$$





где  $l_1$ ,  $\varepsilon_1^{(1)}$  и  $\varepsilon_1^{(2)}$  — целые числа, определенные леммами 3.1 и 3.2.

Тогда, если для любого нечетного простого делителя  $p$  определителя  $d$  и для  $p=2$  разрешимо сравнение

$$f(m_1, \dots, m_k) \equiv n \pmod{p^{Np}}$$

в целых, не делящихся на  $p^2$  числах  $m_1, \dots, m_k$ , то  $\sigma(f, n) > 0$ . В противном случае  $\sigma(f, n) = 0$ .

Доказательство следует из теорем 3, 4 и формулы (2.11).

(Представлено 26.XII.1969)

Кафедра  
общей математики № 2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виноградов, Избранные труды, М., 1952.
2. А. В. Малышев, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 65, 1962, стр. 1—210.
3. А. П. Лурсманашвили, Сообщения АН ГССР, 48, 1, 1967, стр. 7—12.

ა. ლურსმანაშვილი

ნატურალურ რიცხვთა წარმოდგენა კვადრატული ფორმებით უკვადრატო ცვლადებში. (სინგულარული მწკრივის შეჯამება)

(რეზიუმე)

ნაშრომში შეჯამებულია სინგულარული მწკრივი  $\sigma(f, n)$ , რომელიც დაკავშირებულია ნატურალურ რიცხვთა წარმოდგენებთან კვადრატული ფორმებით უკვადრატო ცვლადებში.



## $C_{\alpha\beta}$ -СУММИРУЕМОСТЬ ДВОЙНОГО ЛАКУНАРНОГО РЯДА ФУРЬЕ

Н. Р. ТЕВЗАДЗЕ

Последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}$  называется лакунарной, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1.$$

Далее, двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} A_{m_j n_k}(x, y), \quad (1)$$

где

$$A_{m_j n_k} = a_{jk} \cos m_j x \cos n_k y + b_{jk} \sin m_j x \cos n_k y + c_{jk} \cos m_j x \sin n_k y + \\ + d_{jk} \sin m_j x \sin n_k y,$$

будем называть лакунарным, если  $\{m_j\}$  и  $\{n_k\}$  являются лакунарными.

Обобщая теорему Кюшпа, В. Г. Челидзе установил, что если ряд Фурье суммируемой функции  $f(x, y)$   $C_{\alpha+1, \beta+1}$ -суммируем к числу  $S$ , а двойная последовательность  $\{\sigma_{mn}^{\alpha\beta}\}$  медленно колеблется, то этот ряд также  $C_{\alpha\beta}$ -суммируем к числу  $S$  [1].

Вопрос о сходимости двойного лакунарного ряда Фурье положительно решен в [2].

Ниже доказывается, что для лакунарного ряда Фурье последовательность

$$\{\sigma_{mn}^{\alpha\beta}\}, \quad \alpha, \beta > -1$$

медленно колеблется почти везде и, следовательно, на основании теоремы В. Г. Челидзе, справедлива

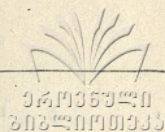
**Теорема 1.** Если двойной ряд Фурье суммируемой функции  $f(x, y)$  окажется лакунарным и этот ряд  $C_{\alpha+1, \beta+1}$ -суммируем к значению  $f(x, y)$  почти везде, то он почти везде  $C_{\alpha\beta}$ -суммируем к функции  $f(x, y)$ .

Предварительно докажем несколько лемм.

**Лемма 1.** Если  $\{n_k\}$  — лакунарная последовательность, то при  $\alpha > -1$ ,  $n_{m+1} > n \geq n_m$  справедливы следующие соотношения:

$$a) \sum_{n_k \leq n} A_{n_k}^{\alpha} = O(A_n^{\alpha});$$





$$b) \sum_{j=0}^m A_{nm-nj}^{\alpha} = O(m A_{nm}^{\alpha});$$

$$c) \sum_{j=0}^m n_j A_{nm-nj}^{\alpha} = O(n_m A_{nm}^{\alpha}) = O(A_{nm}^{\alpha+1});$$

$$d) \sum_{j=0}^m j A_{nm-nj}^{\alpha} = O(m^2 A_{nm}^{\alpha}),$$

где  $A_n^{\alpha}$  определяется формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} x^n = (1-x)^{-\alpha-1}.$$

Доказательство. Пусть  $n = n_m$ ,  $k \leq m$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{A_{n_m}^{\alpha}}{A_{n_k}^{\alpha}} &= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n_m)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n_k)} \frac{n_k!}{n_m!} = \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{n_k+1}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha}{n_m}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \lg \frac{A_{n_m}^{\alpha}}{A_{n_k}^{\alpha}} &= \sum_{s=n_k+1}^{n_m} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{s}\right) = \sum_{s=n_k+1}^{n_m} \left[ \frac{\alpha}{s} + O(s^{-2}) \right] = \\ &= \alpha \ln \frac{n_m}{n_k} + O\left(\frac{1}{n_k}\right). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\frac{A_{n_m}^{\alpha}}{A_{n_k}^{\alpha}} = \left(\frac{n_m}{n_k}\right)^{\alpha} e^{\frac{c}{n_k}}, \quad A_{n_k}^{\alpha} = \left(\frac{n_k}{n_m}\right)^{\alpha} A_{n_m}^{\alpha} \cdot e^{-\frac{c}{n_k}},$$

и

$$a) \sum_{k=1}^m A_{n_k}^{\alpha} = \frac{1}{n_m^{\alpha}} A_{n_m}^{\alpha} \sum_{k=1}^m n_k^{\alpha} e^{-\frac{c}{n_k}} = O(A_{n_m}^{\alpha}),$$

ибо

$$\sum_{k=1}^m n_k^{\alpha} = O(n_m^{\alpha}), \quad \{c = \text{const}\}.$$

Далее,

$$\frac{A_n^{\alpha}}{A_{n-n_j}^{\alpha}} = \left(1 + \frac{\alpha}{n-n_j+1}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$$



и

$$\ln \frac{A_n^\alpha}{A_{n-n_j}^\alpha} = \sum_{k=n-n_j+1}^n \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{k} \right) = \sum_{k=n-n_j+1}^n \left[ \frac{\alpha}{k} + O(k^{-2}) \right] =$$

$$\cong a \ln \frac{n}{n-n_j}.$$

Пусть  $\alpha > 0$ , тогда

$$0 \leq \ln \frac{A_n^\alpha}{A_{n-n_j}^\alpha} \leq \alpha \frac{n_j}{n} < \alpha,$$

т. е.

$$1 \leq \frac{A_n^\alpha}{A_{n-n_j}^\alpha} \leq e^\alpha, \quad e^{-\alpha} \leq \frac{A_{n-n_j}^\alpha}{A_n^\alpha} \leq 1, \quad (4)$$

$$e^{-\alpha} A_n^\alpha \cdot m \leq \sum_{j=0}^m A_{n-n_j}^\alpha \leq A_n^\alpha \cdot m.$$

Значит

$$\sum_{j=0}^m A_{n-n_j}^\alpha = O(m A_n^\alpha).$$

Если  $\alpha < 0$ , то

$$0 \geq \ln \frac{A_n^\alpha}{A_{n-n_j}^\alpha} \geq \alpha, \quad 1 \geq \frac{A_n^\alpha}{A_{n-n_j}^\alpha} \geq e^\alpha,$$

т. е.

$$m A_{n_m}^\alpha \leq \sum_{j=0}^m A_{n-n_j}^\alpha \leq e^{-\alpha} m A_{n_m}^\alpha.$$

Следовательно, для любого  $\alpha$  будем иметь,

$$b) \sum_{j=1}^m A_{n-n_j}^\alpha = O(m A_{n_m}^\alpha).$$

Умножая неравенства (4) на  $n_j$  (далее на  $i$ ) и складывая почленно, получаем равенства  $c$  и  $d$ .

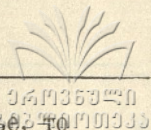
Теперь рассмотрим ряд Фурье функции  $f(x, y) \in L$ ,

$$\sigma[f(x, y)] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y) \quad (5)$$

и чезаровские средние

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} = (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_{m-i}^\alpha A_{n-k}^\beta A_{ik}(x, y).$$





Лемма 2. Если ряд (5) является лакунарным рядом Фурье, то

$$\sum_{j=0}^m \lambda_{in} A_{in}(x, y) = O(1)$$

для всех  $m, n$  и фиксированной точки  $(x, y)$ .

Доказательство. Пусть

$$f_{\mu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos \mu y dy,$$

$$\varphi_{\mu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \sin \mu y dy.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sigma[f_n(x)] = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{in} (a_{in} \cos ix + b_{in} \sin ix), \quad (6)$$

$$\sigma[\varphi_n(x)] = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{in} (c_{in} \cos ix + d_{in} \sin ix). \quad (7)$$

Если (5) — лакунарный ряд, тогда и ряды (6), (7) также будут лакунарными.

Поэтому почти везде на  $[0, 2\pi]$  будем иметь

$$\sigma[f_n(x)] = f_n(x),$$

$$\sigma[\varphi_n(x)] = \varphi_n(x)$$

и

$$f_n(x) \cos ny + \varphi_n(x) \sin ny = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{in} A_{in}(x, y). \quad (8)$$

Обозначим частные суммы рядов (8), (6), (7), соответственно, через  $w_{mn}$ ,  $w_{mn}^1$ ,  $w_{mn}^2$ .

Ясно, что

$$w_{mn} = w_{mn}^1 \cos ny + w_{mn}^2 \sin ny$$

и значит

$$|w_{mn}| \leq |w_{mn}^1| + |w_{mn}^2|.$$

Отсюда следует, что для доказательства леммы достаточно доказать равенство

$$w_{mn}^1 = O(1), \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Положим

$$\sigma_{mn}^1 = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m w_{in}^1$$



и рассмотрим разность

$$w_{mn}^1 - \sigma_{mn}^1 = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m i (a_{in} \cos ix + b_{in} \sin ix).$$

В силу лакулярности, получаем (имея в виду, что  $a_{mn} = O(1)$ ,  $b_{mn} = O(1)$ ):

$$w_{mn}^1 - \sigma_{mn}^1 = O\left(\frac{1}{m} \sum_{m \leq m_i} \right) = O(1).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{mn}^1 - f_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_n(x+u) - f_n(x)] k_m(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt dt \left[ \int_0^{2\pi} \{f(x+u, t) - f(x, t)\} k_m(u) du \right]. \end{aligned}$$

Как известно [3],

$$|\sigma_{mn}^1 - f_n| < \varepsilon, \text{ при } m > N(\varepsilon) \quad (n=1, 2, \dots),$$

т. е.

$$\sigma_{mn}^1 - f_n = O(1) \quad m > N, \quad (n=1, 2, \dots).$$

Кроме того  $f_n(x) \rightarrow 0$ , поэтому для фиксированной точки  $x$

$$f_n(x) = O(1)$$

и, следовательно,

$$w_{mn}^1 = (w_{mn}^1 - \sigma_{mn}^1) + (\sigma_{mn}^1 - f_n) + f_n = O(1).$$

Лемма 4. Если ряд Фурье (4) окажется лакулярным, то  $\{\sigma_{mn}^{\alpha\beta}\}$  медленно колеблется к  $f(x, y)$ .

Доказательство. Достаточно показать, что  $\{\sigma_{mn}^{\alpha\beta}\}$ ,  $\alpha, \beta > -1$  медленно колеблется по строкам. Пусть  $t > 1$ ,  $\mu = [n \cdot t]$

$$\sigma_{m\mu}^{\alpha\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha\beta} = \sum_{k=n+1}^{\mu} \{\sigma_{mk}^{\alpha\beta} - \sigma_{mk-1}^{\alpha\beta}\} = \sum_{k=n+1}^{\mu} I_k,$$

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{i=0}^m A_{m-i}^\alpha \left( \frac{1}{A_k^\beta} \sum_{j=0}^k A_{k-j}^\beta A_{ij} - \frac{1}{A_{k-1}^\beta} \sum_{j=0}^{k-1} A_{k-1-j}^\beta A_{ij} \right) = \\ &= \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{i=0}^m A_{m-j}^\alpha \left( \frac{1}{A_k^\beta} \sum_{j=0}^k A_{k-j}^\beta A_{ij} - \frac{\beta+k}{A_k^\beta \cdot k} \sum_{j=0}^k A_{k-j}^\beta \frac{k-j}{\beta+k-j} A_{ij} \right). \end{aligned}$$



Легко проверить, что

$$A_{k-1}^\beta = A_k^\beta \frac{k}{\beta+k}, \quad \frac{A_{k-\nu}^\beta}{\beta+k-\nu} = \frac{1}{\beta} A_{k-\nu}^{\beta-1},$$

$$1 - \frac{(\beta-k)(k-j)}{h(\beta+k-j)} = \frac{\beta j}{k(\beta+k-j)}.$$

Применяя эти равенства, получаем, что

$$I_k = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{i=0}^m A_{m-i}^\alpha \frac{1}{A_k^\beta} \sum_{j=0}^k \frac{j}{k} A_{k-j}^{\beta-1} A_{ij} = \frac{1}{k} I_k^x,$$

где

$$I_k^x = \frac{1}{A_m^\alpha A_k^\beta} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k j A_{m-i}^\alpha A_{k-j}^{\beta-1} A_{ij} = \frac{1}{A_m^\alpha A_k^\beta} \sum_{i=0}^m A_{m-i}^\alpha \sum_{j=0}^k j A_{k-j}^{\beta-1} A_{ij}.$$

Но, в силу лакунарности,  $k=k_s$ . Следовательно,

$$I_{k_s}^x = \frac{1}{A_m^\alpha A_{k_s}^\beta} \sum_{i=0}^m A_{m-i}^\alpha \sum_{j=1}^s k_j A_{k_s-h_j}^{\beta-1} A_{ik_j} =$$

$$= \frac{1}{A_m^\alpha A_{k_s}^\beta} \sum_{j=0}^s k_j A_{k_s-n_j}^{\beta-1} \sum_{i=0}^m A_{m-i}^\alpha A_{ik_s} = \frac{1}{A_m^\alpha A_{k_s}^\beta} \sum_{j=0}^s k_j A_{k_s-n_j}^{\beta-1} \sum_{i=0}^m A_{m-i}^{\alpha-1} w_{ik_j},$$

где

$$w_{ik_j} = \sum_{r=0}^i A_{rk_j} = O(1).$$

В силу леммы 2,

$$I_{k_s}^x = O\left(\frac{1}{A_m^\alpha A_{k_s}^\beta} \sum_{i=0}^m A_{m-i}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^s k_j A_{k_s-k_j}^{\beta-1}\right) = O(1).$$

Следовательно,

$$I_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

и при  $t \rightarrow 1$

$$\sigma_{m\mu}^{\alpha\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha\beta} = \sum_{k=n+1}^{\mu} I_k = O\left(\ln \frac{\mu}{n}\right) \rightarrow 0.$$

Лемма доказана. Отсюда мгновенно следует справедливость теоремы 1.

(Представлено 28. VI. 1969)

Кафедра функций  
действительной переменной  
и функционального анализа



ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Челидзе, Труды I и II республиканских конференций математиков вузов ГССР, 1964.
2. Н. Р. Тевзадзе, Труды ТГУ, 102, 1964.
3. Н. Р. Тевзадзе, Труды ТГУ, 129, 1968.

ბ. თევზაძე

ფურიეს ორმაგი ლაკუნალური მწკრივის  $C_{\alpha\beta}$ -შეჯამებადობა

(რეზიუმე)

დამტკიცებულია, რომ თუ ჯამებადი  $f(x, y)$  ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ლაკუნარულია და  $C_{\alpha+1, \beta+1}$ -შეჯამებადია  $f(x, y)$  ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან, მაშინ იგი ამავე დროს თითქმის ყველგან  $C_{\alpha\beta}$ -შეჯამებადიც იქნება.



## СХОДИМОСТЬ ПОВТОРНЫХ РЯДОВ И ЛАКУНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧАСТНЫХ СУММ ДВОЙНОГО РЯДА ФУРЬЕ ФУНКЦИИ, СУММИРУЕМОЙ С КВАДРАТОМ

Н. Р. ТЕВЗАДЗЕ

В теории кратных рядов немаловажное значение для установления сходимости двойного ряда имеют сходимость повторных рядов и сходимость одномерных подпоследовательностей частных сумм этого двойного ряда, в частности и сходимость лакунарных последовательностей частных сумм.

Рассмотрим  $2\pi$ -периодическую, суммируемую с квадратом функцию  $f(x, y)$ , заданную на сегменте  $R=[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ . С помощью этой функции определим две последовательности функций следующим образом:

$$f_{\mu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos \mu y dy, \quad (1)$$

$$\varphi_{\mu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \sin \mu y dy. \quad (2)$$

Нетрудно установить, что функции последовательностей (1) и (2) принадлежат классу  $L_2[0, 2\pi]$ .

Разлагая функции  $f(x, y)$ ,  $f_{\mu}(x)$ ,  $\varphi_{\mu}(x)$  в ряды Фурье и обозначая коэффициенты их, соответственно, через  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\gamma_{ik}$ ,  $\delta_{ik}$ ;  $a_i(k)$ ,  $b_i(k)$  и  $c_i(k)$ ,  $d_i(k)$ , легко установить между ними следующие взаимоотношения:

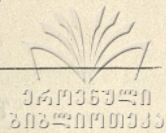
$$\alpha_{ik} = a_i(k), \quad \beta_{ik} = b_i(k), \quad \gamma_{ik} = c_i(k), \quad \delta_{ik} = d_i(k).$$

На основании этого замечания ряды Фурье функций  $f_{\mu}(x)$ ,  $\varphi_{\mu}(x)$  можно записать следующим образом:

$$\sigma[f_{\mu}(x)] = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{i\mu} (\alpha_{i\mu} \cos ix + \beta_{i\mu} \sin ix),$$

$$\sigma[\varphi_{\mu}(x)] = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{i\mu} (\gamma_{i\mu} \cos ix + \delta_{i\mu} \sin ix),$$





где

$$\lambda_{00} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_{0\mu} = \lambda_{\nu 0} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{\mu\nu} = 1, \quad (\mu, \nu \geq 1).$$

Согласно теореме Карлесона, почти везде на  $[0, 2\pi]$  будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma[f_\mu(x)] &= f_\mu(x), \\ \sigma[\varphi_\mu(x)] &= \varphi_\mu(x), \quad \mu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, почти везде по  $x$  и для любого значения  $y$  справедливо равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{i\nu} A_{i\nu}(x, y) = f_\nu(x) \cos \nu y + \varphi_\nu(x) \sin \nu y,$$

где

$$A_{i\nu} = \alpha_{i\nu} \cos ix \cos \nu y + \beta_{i\nu} \sin ix \cos \nu y + \gamma_{i\nu} \cos ix \sin \nu y + \delta_{i\nu} \sin ix \sin \nu y.$$

Ясно, что для фиксированного значения  $x$  последовательности чисел  $\{f_\nu(x)\}$  и  $\{\varphi_\nu(x)\}$  являются коэффициентами Фурье функции  $f(x, y)$  (от переменного  $y$ ), суммируемой с квадратом. Поэтому, согласно теореме Рисса-Фишера, будем иметь

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \{f_\nu^2(x) + \varphi_\nu^2(x)\} < \infty$$

почти для всех точек из  $[0, 2\pi]$ . Таким образом, выражение

$$f_\nu(x) \cdot \cos \nu y + \varphi_\nu(x) \sin \nu y$$

является общим членом ряда Фурье некоторой функции от  $y$ , суммируемой с квадратом и, следовательно, почти для всех  $x$  ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \{f_\nu(x) \cdot \cos \nu y + \varphi_\nu(x) \sin \nu y\}$$

сходится к некоторой функции  $F_x(y)$  почти везде относительно  $y$ , т. е. почти везде на  $R$  будем иметь

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{ik} A_{ik}(x, y) = F_x(y).$$

Другими словами, повторный ряд двойного ряда Фурье функции  $f(x, y) \in L_2(R)$

$$\sigma[f(x, y)] = \sum_{i, k=0}^{\infty} \lambda_{ik} A_{ik}(x, y)$$

сходится почти везде на  $R$ .



Аналогично доказывается сходимость почти везде на  $R$  другого повторного ряда. Легко обобщается известная теорема А. Н. Колмогорова.

Теорема 1. Если  $f(x, y) \in L_2(R)$  и  $\{m_i\}, \{n_k\}$  — лакунарные последовательности, то почти везде на  $R$

$$\lim_{i, k \rightarrow \infty} S_{m_i n_k}^{(x, y)} = f(x, y)$$

Доказательство. Пусть  $f(R, y) \in L_2(R)$ , тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{ik}^2 < \infty,$$

где

$$\rho_{ik}^2 = \alpha_{ik}^2 + \beta_{ik}^2 + \gamma_{ik}^2 + \delta_{ik}^2.$$

Очевидно, что для любой подпоследовательности  $\{\rho_{m_i, n_k}\}$  будем иметь

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{m_i n_k}^2 < \infty. \quad (3)$$

Можно считать, не ограничивая общности, что  $m_0 = n_0 = 0$ ,  $m_{i+1} \geq \lambda m_i$ ,  $n_{k+1} \geq \lambda \cdot n_k$ ,  $\lambda > 1$ .

Положим

$$W_{00} = \frac{1}{4} A_{00}, \quad W_{0\nu} = \frac{1}{2} \sum_{k=n_{\nu-1}+1}^{n_{\nu}} A_{0k},$$

$$W_{\mu 0} = \frac{1}{2} \sum_{i=m_{\mu-1}+1}^{m_{\mu}} A_{i0}, \quad W_{\mu\nu} = \sum_{i=m_{\mu-1}+1}^{m_{\mu}} \sum_{k=n_{\nu-1}+1}^{n_{\nu}} A_{ik}, \quad (\mu > 0, \nu > 0).$$

Рассмотрим следующие ряды:

$$T_0 = \sum_{\mu=0, \nu=0}^{\infty} W_{2^{\mu}, 2^{\nu}}, \quad T_1 = \sum_{\mu=0, \nu=0}^{\infty} W_{2^{\mu+1}, 2^{\nu}},$$

$$T_2 = \sum_{\mu=0, \nu=0}^{\infty} W_{2^{\mu}, 2^{\nu+1}}, \quad T_3 = \sum_{\mu=0, \nu=0}^{\infty} W_{2^{\mu+1}, 2^{\nu+1}}.$$

В этих рядах группы членов  $W_{\mu\nu}$  выписаны в развернутом виде. Они разделяются группами членов с нулевыми коэффициентами. В силу неравенства (3), полученные таким образом ряды являются рядами Фурье функций класса  $L_2(R)$ .

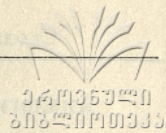
Пусть эти функции будут

$$f_j(x, y), \quad (j=0, 1, 2, 3),$$

т. е.

$$\sigma[f_j(x, y)] = T_j.$$





Ясно, что

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = f(x, y).$$

Обозначим через  $S_{mn}^j(f_j)$  частную сумму ряда  $T_j$ ; нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\mu=m_i-1}^{m_{i+1}} \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} \left[ S_{\mu\nu}^j - f_j(x, y) \right] = \\ &= (m_{i+1} - m_i)(n_{k+1} - n_k) \left[ S_{m_i n_k}^j - f_j(x, y) \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем [3]

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\mu=0}^{m_{i+1}} \sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} - \sum_{\mu=0}^{m_i} \sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} - \sum_{\mu=0}^{m_{i+1}} \sum_{\nu=0}^{n_k} + \sum_{\mu=0}^{m_i} \sum_{\nu=0}^{n_k} = \\ &= (m_{i+1} + 1)(n_{k+1} + 1)(\sigma_{m_{i+1} n_{k+1}}^j - f_j) - (m_i + 1)(n_{k+1} + 1)(\sigma_{m_i n_{k+1}}^j - f_j) - \\ &\quad - (m_{i+1} + 1)(n_k + 1)(\sigma_{m_{i+1} n_k}^j - f_j) + (m_i + 1)(n_k + 1)(\sigma_{m_i n_k}^j - f_j) = \\ &= (m_{i+1} - m_i) n_{k+1} (\sigma_{m_{i+1} n_{k+1}}^j - f_j) + m_i n_{k+1} (\sigma_{m_{i+1} n_{k+1}}^j - \sigma_{m_i n_k}^j) - \\ &\quad - (m_{i+1} - m_i) n_k (\sigma_{m_{i+1} n_k}^j - f_j) - m_i n_k (\sigma_{m_{i+1} n_k}^j - \sigma_{m_i n_k}^j), \end{aligned}$$

где через  $\sigma_{mn}^j$  обозначены арифметические средние частных сумм рядов Фурье функции  $f_j(x, y)$ . В силу лакунарности последовательностей  $\{m_i\}$  и  $\{n_k\}$ , имеем

$$(\lambda - 1) m_{i+1} \leq \lambda(m_{i+1} - m_i), \quad (\lambda - 1) n_{k+1} \leq \lambda(n_{k+1} - n_k).$$

Согласно теореме Марцинкевича-Зигмунда [2], ряд Фурье функции  $\varphi(x, y) \in L_2(R)$  почти везде на  $R$  суммируется к функции  $\varphi(x, y)$ . На основании этой теоремы и равенств (а) и (б) получаем, что почти везде на  $R$

$$S_{m_i n_k}^j \rightarrow f_j(x, y).$$

Следовательно, почти везде на  $R$

$$S_{m_i n_k} \rightarrow f(x, y), \quad (4)$$

так как

$$S_{m_i n_k} = S_{m_i n_k}^0 + S_{m_i n_k}^1 + S_{m_i n_k}^2 + S_{m_i n_k}^3.$$

Из соотношения (4) вытекает, что

$$\lim_i \lim_k S_{m_i n_k} = f(x, y), \quad (5)$$

а из существования повторного предела, т. е. из

$$\lim_m \lim_n S_{m_n} = S(x, y),$$



закключаем, на основании (5), что почти везде на  $R$

$$S(x, y) = f(x, y),$$

т. е. справедлива

**Теорема 2.** Повторные ряды функции  $f(x, y) \in L_2(e)$  почти везде на  $R$  сходятся к функции  $f(x, y)$ .

(Представлено 28.VI.1969).

Кафедра функций  
действительной переменной  
и функционального анализа

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Челидзе, Труды Тбилисского математического института, 7, 1939.
2. Iessen, Marcinkiewich and Zygmund, Fund. Mathem., XXV, 1933.
3. Г. Х. Харди и В. В. Рогозинский, Ряды Фурье, Физматгиз, М., 1959.

6. თეზისი

კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი  
მწკრივის განმეორებითი მწკრივებისა და კერძო  
ჯამების ლაკუნარულ ქვემიმდევრობათა კრებადობა

(რეზიუმე)

დამტკიცებულია კვადრატით ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს  
მწკრივის განმეორებითი მწკრივების კრებადობა თითქმის ყველგან.

განზოგადებულია ნ. კოლმოგოროვის თეორემა კერძო ჯამების ლაკუნარული  
ქვემიმდევრობის კრებადობის შესახებ.



## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Т. КИГУРАДЗЕ

В настоящей статье устанавливаются новые достаточные условия существования решения краевой задачи

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, u_2) \quad (k=1, 2), \quad (1)$$

$$u_1(0) + a_1 u_2(0) = b_1, \quad u_1(1) + a_2 u_2(1) = b_2. \quad (2)$$

Аналогичные задачи для одного дифференциального уравнения второго порядка исследовались многими авторами (см. напр. [1], [2], [3], [4]). Интересные результаты о разрешимости задачи (1)–(2) содержатся в работе А. И. Перова [5].

Всюду ниже предполагается, что

$$a_1 \leq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_2 - a_1 \neq 0, \quad (3)$$

а функции  $f_k(t, u_1, u_2)$  ( $k=1, 2$ ) определены в области  $0 < t < 1$ ,  $-\infty < u_1, u_2 < +\infty$  и удовлетворяют локальным условиям Каратеодори, т. е. измеримы по  $t$ , непрерывны по  $u_1, u_2$  и

$$\sup \{ |f_k(t, u_1, u_2)| : |u_1| + |u_2| \leq r \} \in L(0, 1) \quad (k=1, 2)$$

при любом  $r \in (0, +\infty)$ .

Введем следующее

Определение. Пусть  $\{\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x)\}$  — пара определенных в области  $t_1 < t < t_2$ ,  $0 \leq x < +\infty$  неотрицательных функций, удовлетворяющих локальным условиям Каратеодори. Скажем, что эта пара принадлежит множеству  $B_j(t_1, t_2)$ , где  $j \in \{1, 2\}$ , если для любого  $\rho \in (0, +\infty)$  найдется такое  $M_\rho \in (0, +\infty)$ , что

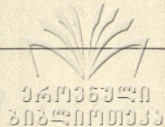
$$|u_2(t)| \leq M_\rho \quad \text{при} \quad \min \{t_0, t_j\} \leq t \leq \max \{t_0, t_j\},$$

каковы бы ни были число  $t_0 \in [t_1, t_2]$  и абсолютно непрерывные в промежутке  $[t_1, t_2]$  функции  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , удовлетворяющие неравенствам

$$u_1'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq \varphi_2(t, |u_2(t)|), \quad u_2'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq -\varphi_2(t, |u_2(t)|),$$

$$|u_1'(t)| \leq \rho \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad |u_2(t_0)| < \rho.$$





Теорема 1. Пусть

$$-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty, \quad \sigma_1 \leq b_k \leq \sigma_2, \quad (k=1,2), \quad (4)$$

$$f_1(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \sigma_1 \leq u_1 \leq \sigma_2, \quad (5)$$

$$(-1)^k f_2(t, \sigma_k, 0) \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (k=1,2) \quad (6)$$

и

$$|f_k(t, u_1, u_2)| \leq \Psi(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \sigma_1 \leq u_1 \leq \sigma_2, \quad |u_2| < +\infty, \quad (7)$$

где  $\Psi(t) \in L(0,1)$ . Тогда задача (1)–(2) имеет решение  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  такое, что

$$\sigma_1 \leq u_1(t) \leq \sigma_2 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть соблюдаются условия (4) и (6), и в области  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\sigma_1 \leq u_1 \leq \sigma_2$ ,  $-\infty < u_2 < +\infty$  имеем

$$f_1(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq \omega(t, |u_2|) \quad \text{при} \quad 0 < t < 1, \quad (9)$$

$$f_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq -\omega_1(t, |u_2|) \quad \text{при} \quad 0 < t < \beta,$$

$$f_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \leq \omega_2(t, |u_2|) \quad \text{при} \quad \alpha < t < 1, \quad (10)$$

где  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ ,

$$\{\omega(t, x), \omega_1(t, x)\} \in B_1(0, \beta) \quad \text{и} \quad \{\omega(t, x), \omega_2(t, x)\} \in B_2(\alpha, 1), \quad (11)$$

причем  $\omega(t, x)$  не убывает по  $x$  и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \omega(t, x) dt > \sigma_2 - \sigma_1. \quad (12)$$

Тогда задача (1)–(2) имеет решение  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , удовлетворяющее условию (8).

Следствие 1. Пусть соблюдаются условия (4) и (6), и в области  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\sigma_1 \leq u \leq \sigma_2$ ,  $-\infty < u_2 < +\infty$  выполняются неравенства (9) и (10), где  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ ,

$$\omega_k(t, x) = \Psi_k(t) \omega_0(x) [\Psi_0(t) + \omega(t, x)]^{\frac{1}{q_k}} \quad (k=1,2), \quad (13)$$

функции  $\Psi_k(t)$  ( $k=0, 1, 2$ ) неотрицательны,

$$\Psi_0(t) \in L(0,1), \quad \Psi_k(t) \in L^{p_k}(0,1), \quad 1 \leq p_k \leq +\infty, \quad \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1, \quad (k=1,2). \quad (14)$$

$\omega_0(x)$  непрерывна и положительна в промежутке  $[0, +\infty)$  и

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\omega_0(x)} = +\infty, \quad (15)$$



а функция  $\omega(t, x)$  неотрицательна, не убывает по  $x$  и удовлетворяет условию (12). Тогда задача (1)–(2) имеет решение  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , удовлетворяющее условию (8).

Следствие 2. Пусть соблюдаются условия (4) и (6), и в области  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\sigma_1 \leq u_1 \leq \sigma_2$ ,  $-\infty < u_2 < +\infty$  имеем

$$f_1(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq \Psi_0(t) |u_2|^{\lambda_0} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1, \quad (16)$$

$$f_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq -\Psi_1(t)(1 + |u_2|)^\lambda \quad \text{при } 0 \leq t \leq \alpha, \quad (17)$$

$$f_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \leq \Psi_2(t)(1 + |u_2|)^{1+\lambda_0} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1,$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \lambda_0 < +\infty$ ,  $1 < \lambda < +\infty$ , функции  $\Psi_k(t)$  ( $k=0,1,2$ ) положительны,

$$\Psi_k(t) \in L(0,1) \quad (k=0,1), \quad \Psi_2(t) [\Psi_0(t)]^{-\frac{1}{q}} \in L^p(0,1), \quad 1 \leq p \leq +\infty,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (18)$$

и

$$\int_0^\alpha \Psi_0(t) \left[ \int_0^t \Psi_1(\tau) d\tau \right]^{-\frac{\lambda_0}{1-\lambda}} dt = +\infty. \quad (19)$$

Тогда задача (1)–(2) имеет решение  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , удовлетворяющее условию (8).

Следствие 3. Пусть соблюдаются условия (4) и (6), и в области  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\sigma_1 \leq u_1 \leq \sigma_2$ ,  $-\infty < u_2 < +\infty$  имеем

$$f_1(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq \Psi_0(t) |u_2|^{\lambda_0} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1,$$

$$f_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq -\Psi_1(t) (1 + |u_2|)^{1+\frac{\lambda_0}{q}} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1,$$

$$f_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \leq \Psi_2(t)(1 + |u_2|)^\lambda \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1,$$

где  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $0 < \lambda_0 < +\infty$ ,  $1 < \lambda < +\infty$ , функции  $\Psi_k(t)$  ( $k=0,1,2$ ) положительны.

$$\Psi_k(t) \in L(0,1), \quad (k=0,2), \quad \Psi_1(t) [\Psi_0(t)]^{-\frac{1}{q}} \in L^p(0,1), \quad 1 \leq p \leq +\infty,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

и

$$\int_\alpha^1 \Psi_0(t) \left[ \int_t^1 \Psi_2(\tau) d\tau \right]^{-\frac{\lambda_0}{1-\lambda}} dt = +\infty.$$

Тогда задача (1)–(2) имеет решение  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , удовлетворяющее условию (8).

Доказательство теоремы 1. Предположим сперва, что вместо (5) соблюдается условие





$f_1(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 > 0$  при  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\sigma_1 \leq u_1 \leq \sigma_2$ ,  $u_2 \neq 0$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

где 
$$\frac{du_k}{dt} = f_{kj}(t, u_1, u_2) \quad (k=1,2), \quad (20)$$

$$f_{1j}(t, u_1, u_2) = \begin{cases} f_1(t, \sigma_1, u_2) & \text{при } u_1 < \sigma_1, \\ f_1(t, u_1, u_2) & \text{при } \sigma_1 \leq u_1 \leq \sigma_2, \\ f_1(t, \sigma_2, u_2) & \text{при } u_1 > \sigma_2, \end{cases} \quad (21)$$

$$f_{2j}(t, u_1, u_2) = \begin{cases} f_2(t, \sigma_1, 0) & \text{при } u_1 \leq \sigma_1, \\ \frac{j}{\sigma_2 - \sigma_1} (u_1 - \sigma_1) f_2(t, \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j}, u_2) + \\ + \frac{j}{\sigma_2 - \sigma_1} \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j} - u_1 \right) f_2(t, \sigma_1, 0) & \text{при} \\ \sigma_1 < u_1 < \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j}, \\ f_2(t, u_1, u_2) & \text{при } \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j} \leq u_1 \leq \sigma_2 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j}, \\ \frac{j}{\sigma_2 - \sigma_1} (\sigma_2 - u_1) f_2(t, \sigma_2 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j}, u_2) + \\ + \frac{j}{\sigma_2 - \sigma_1} \left( u_1 - \sigma_2 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j} \right) f_2(t, \sigma_2, 0) & \text{при} \\ \sigma_2 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{j} \leq u_1 \leq \sigma_2, \\ f_2(t, \sigma_2, 0) & \text{при } u_1 > \sigma_2. \end{cases} \quad (22)$$

Ввиду (7), из (21) и (22) очевидно, что

$$|f_{kj}(t, u_1, u_2)| \leq \Psi(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1, \quad -\infty < u_1, u_2 < +\infty \quad (j=1, 2, \dots). \quad (23)$$

Пусть  $C^2(0,1)$ —пространство непрерывных на отрезке  $[0,1]$  двумерных вектор функций  $\vec{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$  с нормой

$$\|\vec{u}(t)\| = \max \{|u_1(t)| + |u_2(t)| : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Положим

$$S = \{\vec{u}(t) \in C^2(0,1) : \|\vec{u}(t)\| \leq r\}, \quad (24)$$

$$H_j \vec{u}(t) = \{H_{1j} \vec{u}(t), H_{2j} \vec{u}(t)\},$$

$$H_{kj} \vec{u}(t) = B_k + \sum_{i=1}^2 A_{ik} \int_0^1 f_{ij}(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) d\tau + \\ + \int_0^t f_k(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) d\tau, \quad (k=1,2), \quad (25)$$



где

$$A_{11} = -a_1 A_{21}, \quad A_{12} = -a_1 A_{22}, \quad A_{21} = \frac{1}{a_1 - a_2}, \quad A_{22} = \frac{a_2}{a_1 - a_2},$$

$$B_1 = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}, \quad B_2 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \quad (26)$$

и

$$r = |B_1| + |B_2| + (2 + \sum_{i,k=1}^2 |A_{ik}|) \int_0^1 \Psi(t) dt. \quad (27)$$

Ввиду (23), (24), (25) и (27), легко проверим, что при любом натуральном  $j$ ,  $H_j$  является вполне непрерывным оператором, преобразующим множество  $S$  в себя. Поэтому, согласно известной теореме Шаудера [6], для любого  $j$  найдется такая вектор-функция  $\{u_{1j}(t), u_{2j}(t)\} \in S$ , что

$$u_{kj}(t) = B_k + \sum_{i=1}^2 A_{ik} \int_0^1 f_{ij}(\tau, u_{1j}(\tau), u_{2j}(\tau)) d\tau + \int_0^t f_k(\tau, u_{1j}(\tau), u_{2j}(\tau)) d\tau$$

$$(k=1,2). \quad (28)$$

Отсюда, в силу (26), непосредственно вытекает, что  $u_{1j}(t), u_{2j}(t)$  является решением системы (20), удовлетворяющим краевым условиям (2).

Покажем, что

$$\sigma_1 \leq u_{1j}(t) \leq \sigma_2 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (j=1,2,\dots). \quad (29)$$

Допустим обратное. Тогда найдется такой номер  $j$  и такие числа  $t_1$  и  $t_2$ , что

$$(-1)^k [u_{1j}(t) - \sigma_k] > 0 \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2, \quad (30)$$

где  $k=1$  или  $2$ . При этом без ограничения общности можем считать, что если  $0 < t_i < 1$ , где  $i=1$  или  $2$ , то  $u_{1j}(t_i) = \sigma_k$ .

Согласно (6), (22) и (30), будем иметь

$$(-1)^k u'_{2j}(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (32)$$

Отсюда очевидно, что либо

$$(-1)^k u_{2j}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (33)$$

либо

$$(-1)^k u_{2j}(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t^* \leq t \leq t_2, \quad (34)$$

где  $t_1 \leq t^* < t_2$ .

Предположим сперва, что соблюдается условие (33).

Тогда, в силу (5'), (20) и (30), будем иметь

$$(-1)^k u'_{1j}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t < t_2,$$

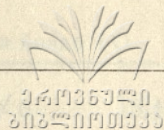
и, следовательно,

$$(-1)^k [u_{1j}(t_1) - \sigma_k] > 0. \quad (35)$$

Из (31), (33) и (34) ясно, что  $t_1 = 0$  и

$$(-1)^k [u_{1j}(0) - \sigma_k] > 0, \quad (-1)^k u_{2j}(0) < 0.$$





Поэтому, согласно (3) и (4), имеем

$$(-1)^k [u_{1j}(0) + a_{1j} u_{2j}(0) - b_1] = (-1)^k [u_{1j}(0) - \sigma_k] + (-1)^k u_{2j}(0) + (-1)^k (\sigma_k - b_1) > 0,$$

что невозможно, так как  $u_{1j}(t)$ ,  $u_{2j}(t)$  удовлетворяют краевым условиям (2). Следовательно, неравенство (33) не имеет места. Совершенно аналогично докажем, что не имеет места и неравенство (34). Тем самым и доказывается справедливость оценки (29).

Ввиду (23), из (28) легко следует, что  $\{u_{kj}(t)\}_{j=1}^{\infty}$  ( $k=1,2$ ) являются последовательностями равномерно ограниченных и равномерно непрерывных в промежутке  $[0,1]$  функций. Поэтому, согласно лемме Арцела-Асколи, без ограничения общности можем считать, что они равномерно сходятся. Положим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{kj}(t) = u_k(t) \quad (k=1,2). \quad (36)$$

В силу (21), (29) и (36), ясно, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{1j}(t, u_{1j}(t), u_{2j}(t)) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)) \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1 \quad (37)$$

и соблюдается условие (8).

Докажем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{2j}(t, u_{1j}(t), u_{2j}(t)) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)) \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1. \quad (38)$$

Согласно (22), (29) и (36), для этого достаточно показать, что если

$$u_1(t_0) - \sigma_k = 0, \quad (39)$$

где  $t_0 \in (0,1)$ ,  $k=1$  или  $2$ , то

$$u_2(t_0) = 0.$$

Допустим противное, что для некоторого  $t_0 \in (a, b)$  соблюдается условие (39) и

$$u_2(t) \neq 0 \quad \text{при } t_0 - \delta < t < t_0 + \delta,$$

где  $\delta > 0$ . Тогда, ввиду (5'), (8) и (37), будем иметь

$$u_1'(t) \neq 0 \quad \text{при } t_0 - \delta < t < t_0 + \delta. \quad (40)$$

Но (39) и (40) противоречат условию (8). Полученное противоречие доказывает справедливость условия (38).

Перейдя к пределу в равенствах (28), когда  $j \rightarrow \infty$ , согласно (36), (37) и (38), найдем

$$u_k(t) = B_k + \sum_{i=1}^2 A_{ik} \int_0^1 f_i(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) d\tau + \int_0^t f_k(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) d\tau \quad (k=1,2).$$

Отсюда, в силу (26), вытекает, что  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  является решением задачи (1)–(2). Таким образом, справедливость теоремы 1, в случае, когда вместо условия (5) соблюдается условие (5'), доказана.



Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда условие (5) не выполняется. Согласно вышеуказанному, при любом натуральном  $j$  система дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2) + \frac{u_2}{j(1 + |u_2|)}, \quad \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

имеет решение  $u_{1j}(t), u_{2j}(t)$ , удовлетворяющее крайевым условиям (2) и условию (29). Из (3), (7) и (29) вытекает, что  $\{u_{kj}(t)\}_{j=1}^{\infty}$  ( $k=1,2$ ) являются последовательностями равномерно ограниченных и равномерно непрерывных в промежутке  $[0,1]$  функций. Поэтому без ограничения общности можем считать, что они равномерно сходятся. Полагая  $u_k(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{kj}(t)$

( $k=1,2$ ), нетрудно убедиться, что  $u_1(t), u_2(t)$  является решением задачи (1)–(2). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Из (12) ясно существование такого положительного числа  $\rho$ , что

$$\rho > \sigma_2 - \sigma_1 \quad \text{и} \quad \int_{\alpha}^{\beta} \omega(t, \rho) dt > \sigma_2 - \sigma_1. \quad (41)$$

Согласно введенному выше определению и условиям (11), найдется такое положительное число  $M_\rho$ , что каковы бы ни были функции  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , абсолютно непрерывные в промежутке  $[0,1]$  и удовлетворяющие неравенствам

$$u_1'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq \omega(t, |u_2(t)|) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (42)$$

$$u_2'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq -\omega_1(t, |u_2(t)|) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \beta, \quad (43)$$

$$u_2'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \leq \omega_2(t, |u_2(t)|) \quad \text{при} \quad \alpha \leq t \leq 1, \quad (44)$$

$$|u_1(t)| \leq \rho \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (45)$$

$$\min \{ |u_2(t)| : \alpha \leq t \leq \beta \} \leq \rho, \quad (46)$$

будем иметь

$$|u_2(t)| \leq M_\rho \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (47)$$

Положим

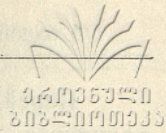
$$h(t) = \sup \{ |f_2(t, u_1, u_2)| : |u_1| \leq \rho, |u_2| \leq 2M_\rho \}, \quad (48)$$

$$M = \rho + M_\rho + \int_a^b h(\tau) d\tau, \quad (49)$$

$$\tilde{f}_1(t, u_1, u_2) = \begin{cases} f_1(t, u_1, -M) & \text{при } u_2 < -M, \\ f_1(t, u_1, u_2) & \text{при } |u_2| \leq M, \\ f_1(t, u_1, M) & \text{при } u_2 > M, \end{cases} \quad (50)$$

$$\tilde{f}_2(t, u_1, u_2) = \begin{cases} f_2(t, u_1, u_2) & \text{при } |u_2| \leq M_\rho, \\ 2 \left( 1 - \frac{|u_2|}{2M_\rho} \right) f_2(t, u_1, u_2) & \text{при } M_\rho < |u_2| < 2M_\rho, \\ 0 & \text{при } |u_2| > 2M_\rho. \end{cases} \quad (51)$$





Нетрудно проверить, что система

$$\frac{du_k}{dt} = \tilde{f}_k(t, u_1, u_2) \quad (k=1,2) \quad (52)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому она имеет решение  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , удовлетворяющее крайним условиям (2) и неравенству (8). Наша задача — доказать, что  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  является решением системы (1).

Покажем, прежде всего, что соблюдается неравенство (46).

Допустим обратное. Тогда, ввиду (9), (49) и (50), будем иметь

$$u_1'(t) \operatorname{sign} u_2(0) \geq \omega(t, \rho) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Отсюда, согласно (8), получим

$$\sigma_2 - \sigma_1 \geq \int_{\alpha}^{\beta} \omega(t, \rho) dt,$$

что противоречит условию (41). Тем самым справедливость неравенства (46) доказана.

Согласно (46), для некоторого  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  имеем

$$|u_2(t_0)| \leq \rho. \quad (53)$$

В силу (48), (49), (51) и (53), из (52) получим

$$|u_2(t)| = |u_2(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{f}_2(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) d\tau| \leq \rho + \int_a^b h(\tau) d\tau \leq M, \quad (54)$$

при  $0 \leq t \leq 1$ .

Из (8), (9), (10), (41), (54), (50) и (51) следуют неравенства (42) — (45). Но, как было отмечено выше, из (42)—(45) вытекает неравенство (47).

Ввиду (47) и (54) из (50) и (51), очевидно, что  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  является решением системы (1). Теорема доказана.

Доказательство следствия 1 теоремы 2. Согласно теореме 2, для доказательства следствия достаточно показать, что соблюдаются условия (11).

В силу (14) и (15), для любого  $\rho \in (0, +\infty)$  найдется такое  $M_\rho \in (0, +\infty)$ , что

$$\int_{\rho}^{M_\rho} \frac{dx}{\omega_0(x)} = (\|\Psi_0\|_1 + 2\rho)^{q_1} \|\Psi_1\|_{p_1}, \quad (55)$$

где  $\|\Psi_0\|_1 = \int_0^1 \Psi_0(t) dt$ , а  $\|\Psi_1\|_{p_1}$  — норма функции  $\Psi_1(t)$  в пространстве

$L^{p_1}(0,1)$ .

Пусть  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  — некоторые функции, абсолютно непрерывные в промежутке  $[0, \beta]$  и удовлетворяющие неравенствам



$$|u_1(t)| \leq \rho, \quad u_1'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq \omega(t), \quad |u_2(t)| \quad \text{при } 0 \leq t \leq \beta, \quad (56)$$

$$u_2'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq -\Psi_1(t) \omega_0(|u_2(t)|) [\Psi(t) + \omega(t, |u_2(t)|)]^{\frac{1}{q_1}} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \beta, \quad (57)$$

и

$$|u_2(t_0)| \leq \rho, \quad (58)$$

где  $t_0 \in (0, \beta]$ . Докажем, что

$$|u_2(t)| \leq M\rho \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0 \quad (59)$$

Допустим обратное. Тогда, ввиду (58), найдутся такие числа  $t_1 \in (0, t_0)$  и  $t_2 \in (t_1, t_0]$ , что

$$|u_2(t_1)| > M\rho, \quad |u_2(t_2)| = \rho, \quad u_2(t) \neq 0 \quad \text{при } t_1 \leq t \leq t_2. \quad (60)$$

Согласно (60), из (56) и (57) следует, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega(t, |u_2(t)|) dt \leq |u_1(t_2) - u_1(t_1)| \leq 2\rho, \quad (61)$$

и

$$\int_{\rho}^{M\rho} \frac{dx}{\omega_0(x)} \leq \int_{\rho}^{|u_2(t_1)|} \frac{dx}{\omega_0(x)} \leq \int_{t_1}^{t_2} \Psi_1(t) [\Psi_0(t) + \omega(t, |u_2(t)|)]^{\frac{1}{q_1}} dt. \quad (62)$$

В силу неравенства Гёльдера и условия (61), находим

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_1(t) [\Psi_0(t) + \omega(t, |u_2(t)|)]^{\frac{1}{q_1}} dt \leq (\|\Psi_0\|_1 + 2\rho)^{\frac{1}{q_1}} \|\Psi_1\|_{p_1},$$

согласно чему из (62) следует

$$\int_{\rho}^{M\rho} \frac{dx}{\omega_0(x)} < (\|\Psi_0\|_1 + 2\rho)^{\frac{1}{q_1}} \|\Psi_1\|_{p_1}.$$

Полученное неравенство противоречит условию (55). Тем самым и доказана справедливость оценки (59). Из этого обстоятельства, согласно введенному выше определению и равенствам (13), следует, что

$$\{\omega(t, x), \omega_1(t, x)\} \in B_1(0, \beta).$$

Совершенно аналогично можно показать, что

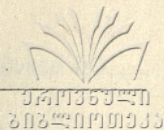
$$\{\omega(t, x), \omega_2(t, x)\} \in B_2(\alpha, 1),$$

Следствие доказано.

Доказательство следствия 2 теоремы 2. Согласно (19), найдутся такие положительные числа  $\epsilon, \beta$  и  $\gamma$ ,  $\beta < \gamma < \alpha$ , что

$$M(t) = [\epsilon\lambda^{-1} + (\lambda - 1) \int_0^t \Psi_1(\tau) d\tau]^{\frac{1}{1-\lambda}} - 1 > 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq \gamma. \quad (63)$$





и

$$\int_{\beta}^{\gamma} [M(t)]^{\lambda_0} \Psi_0(t) dt > \sigma_2 - \sigma_1. \quad (64)$$

Полагая

$$\tilde{f}_2(t, u_1, u_2) = \begin{cases} f_2(t, u_1, \chi(u_2)) & \text{при } 0 \leq t \leq \beta, \\ f_2(t, u_1, u_2) & \text{при } \beta < t \leq 1, \end{cases} \quad (65)$$

где

$$\chi(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{sign} x & \text{при } |x| > \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases} \quad (66)$$

из (17) и (18) заключим, что

$$\tilde{f}_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \geq -\tilde{\Psi}_1(t) \text{ при } 0 \leq t \leq \beta, \quad (67)$$

$$\tilde{f}_2(t, u_1, u_2) \operatorname{sign} u_2 \leq \tilde{\Psi}_2(t)(1 + |u_2|) [\Psi_0(t) + \Psi_0(t) |u_2|^{\lambda_0}]^{\frac{1}{q}} \\ \text{при } 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$\tilde{\Psi}_1(t) = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda} \Psi_1(t) \in L(0,1); \\ \tilde{\Psi}_2(t) = 2^{\frac{\lambda_0}{q}} \Psi_2(t) [\Psi_0(t)]^{-\frac{1}{q}} \in L^p(0,1) \quad (68)$$

Ввиду (16), (67) и (68) из следствия 1 вытекает, что система

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = \tilde{f}_2(t, u_1, u_2)$$

имеет решение  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , удовлетворяющее краевым условиям (2) и условию (8).

Согласно (16), (17) и (67), имеем

$$u_1'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq \Psi_0(t) |u_2(t)|^{\lambda_0} \text{ при } 0 \leq t \leq 1 \quad (69)$$

и

$$u_2'(t) \operatorname{sign} u_2(t) \geq -\Psi_1(t) (1 + |u_2(t)|)^{\lambda} \text{ при } 0 \leq t \leq \alpha. \quad (70)$$

Если предположить, что

$$|u_2(t)| > M(t) \text{ при } \beta \leq t \leq \gamma,$$

то, в силу (8), (63) и (64), из (69) найдем

$$\sigma_2 - \sigma_1 \geq |u_1(\gamma) - u_1(\beta)| \geq \int_{\beta}^{\gamma} [M(t)]^{\lambda_0} \Psi_0(t) dt > \sigma_2 - \sigma_1.$$

Полученное противоречие доказывает, что для некоторого  $t_0 \in [\beta, \gamma]$  соблюдается неравенство



$$|u_2(t_0)| \leq M(t_0).$$

Согласно (63) и (71), из (70) получим

$$(1 + |u_2(t)|)^{1-\lambda} \geq (1 + M(t_0))^{1-\lambda} - (\lambda - 1) \int_t^{t_0} \Psi_1(\tau) d\tau > \varepsilon^{\lambda-1} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0.$$

Следовательно,

$$|u_2(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \beta.$$

В силу последнего неравенства из (66) и (67) очевидно, что  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  является решением системы (1). Следствие доказано.

Совершенно аналогично доказывается и следствие 2 теоремы 2.

(Представлено 20.XI.1969)

Кафедра дифференциальных и  
интегральных уравнений

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, М., ИЛ, 1954.
2. Н. Epheser, Math. Z., 61, № 4, 1955, стр. 435 — 454.
3. Ю. А. Клоков, Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики, Рига, 1963.
4. И. Т. Кигурадзе, Дифф. уравнения, 4, № 10, 1968, стр. 1753—1773.
5. А. И. Перов, ДАН СССР, 144, № 3, 1962, стр. 493—496.
6. J. Schauder, Studia Mathem., 2, 1930, стр. 171—180.

0. კილურაძე

ერთი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ ორი დიფერენციალური  
განტოლების სისტემისათვის

(რეზიუმე)

დადგენილია

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, u_2) \quad (k=1,2),$$

$$u_1(0) + a_1 u_2(0) = b_1, \quad u_1(1) + a_2 u_2(1) = b_2$$

სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობისათვის საკმარისი პირობები.



## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. А. ТОРОШЕЛИДЗЕ

Рассмотрим систему

$$\frac{d\zeta}{dx} = A(x)\zeta + f(x, \zeta), \quad (1)$$

где  $A(x)$  —  $n$ -мерная действительная функциональная матрица, элементы которой суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка  $[x_0, +\infty)$ , а  $f(x, \zeta)$  удовлетворяет условиям Каратеодори на любом конечном параллелепипеде области  $x_0 \leq x < +\infty$ ,  $\|\zeta\| < +\infty$ .

Для дальнейших рассуждений удобно ввести следующее

Определение 1. Любое нетривиальное решение  $\zeta(x)$  уравнения (1), имеющее вид

$$\zeta(x) = z(x) + o_n(\|z(x)\|),^1$$

где  $z(x)$  — нетривиальное решение уравнения

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z, \quad (2)$$

назовем решением типа (Л). Далее, дифференциальное уравнение (1) назовем уравнением типа (Л<sub>0</sub>), если каждое нетривиальное решение этого уравнения, начальное значение которого достаточно мало по норме, является решением типа (Л), и назовем уравнением типа (Л), если каждое его нетривиальное решение есть решение типа (Л).

В статье [6] установлены условия, при выполнении которых уравнение (1) имеет решение типа (Л). В настоящей статье устанавливаются достаточные условия того, чтобы система (1) была типа (Л<sub>0</sub>) или типа (Л).

### § 1. Некоторые определения и вспомогательные предложения

Ниже элементы матрицы  $A$  и вектора  $z_h$  обозначаются через  $A_{ij}$  и  $z_{jh}$ , соответственно, а их нормы понимаются как

<sup>1</sup> Через  $o_n(f(x))$  обозначается  $n$ -мерная вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\|o_n(f(x))\|}{|f(x)|} = 0.$$



$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|, \quad \|z_k\| = \sum_{j=1}^n |z_{jk}|.$$

Введем следующее

Определение 2. Пусть

$$z_1(x), z_2(x), \dots, z_p(x) \quad (3)$$

какая-либо система  $n$ -мерных вектор-функций, определенных в промежутке  $x_0 \leq x < \infty$ . Скажем, что система (3) удовлетворяет условию  $(L_k)$ , если найдется номер  $k$ ,  $1 \leq k \leq p$ , такой, что при каждом  $j$ ,  $(j=1, 2, \dots, p)$  либо

$$W_{jk}(x, x_0) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ и } W_{jk}(x, t) \leq \eta \text{ при } x \geq t \geq x_0, \quad (4)$$

либо

$$W_{jk}(x, t) \geq \frac{1}{\eta} \text{ при } x \geq t \geq x_0, \quad (5)$$

где  $\eta \geq 1$  — некоторое действительное число, а  $W_{jk}(x, t)$  определяется равенством

$$W_{jk}(x, t) = \frac{\|z_j(x)\|}{\|z_j(t)\|} \left[ \frac{\|z_k(x)\|}{\|z_k(t)\|} \right]^{-1}, \quad (6)$$

Легко доказывается следующая

Лемма 1. Если система (3) при каждом  $k$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ) удовлетворяет условию  $(L_k)$ , то найдется номер  $l$ ,  $1 \leq l \leq p$ , такой, что

$$W_{jl}(x, t) \leq c \text{ при } x \geq t \geq x_0 \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (7)$$

где  $c$  — положительная постоянная. Пусть  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$  (8)

— фундаментальная система решений уравнения (2), а  $Z(x)$  — фундаментальная матрица, составленная из этой системы. Введем обозначения

$$K(x, t) = Z(x)Z^{-1}(t), \quad (9)$$

$$\sigma(x) = e^{-\int_{x_0}^x S_p A(t) dt} \prod_{j=1}^n \|z_j(x)\|. \quad (10)$$

Определение 3. Скажем, что фундаментальная система (8) удовлетворяет условию  $(L)$ , если она при каждом  $k$  удовлетворяет условию  $(L_k)$  и если, кроме того, функция  $\sigma(x)$ , определенная равенством (10), ограничена в промежутке  $[x_0, \infty)$ .

Определение 4. Скажем, что уравнение (2) удовлетворяет условию  $(L)$ , если найдется фундаментальная система его решений, удовлетворяющая условию  $(L)$ .

Лемма 2. Если фундаментальная система (8) удовлетворяет условию  $(L)$ , то

$$\frac{\|K(x, t)\|}{\|Z(x)\|} \leq \frac{m}{\|Z(t)\|} \text{ при } x \geq t \geq x_0, \quad (11)$$



где  $Z(x)$  — фундаментальная матрица, составленная из системы (8), а  $m$  — положительная постоянная.

Доказательство. Так как система (8) удовлетворяет условию  $(L_k)$ , то, не ограничивая общности, можно считать, что при  $j \leq k-1$  соблюдается условие (4), а при  $j \geq k$  — условие (5).

Согласно обозначению (9),

$$K_{lv}(x, t) = \sum_{j=1}^n z_{lj}(x) d_{vj}(t) \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

где

$$d_{vj}(t) = (-1)^{\nu+i} c_0 e^{-\int_{x_0}^t S_p A(\tau) d\tau} \begin{vmatrix} z_{11}(t) \dots z_{1j-1}(t) & z_{1j+1} \dots z_{1n}(t) \\ \dots & \dots \\ z_{\nu-11}(t) \dots z_{\nu-1j-1}(t) & z_{\nu-1j+1}(t) \dots z_{\nu-1n}(t) \\ z_{\nu+11}(t) \dots z_{\nu+1j-1}(t) & z_{\nu+1j+1}(t) \dots z_{\nu+1n}(t) \\ \dots & \dots \\ z_{n1}(t) \dots z_{nj-1}(t) & z_{nj+1}(t) \dots z_{nn}(t) \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$$c_0 = \frac{1}{\text{Det} |Z(x_0)|} \neq 0.$$

Так как

$$|z_{pq}(t)| \leq \|z_q(t)\| \quad (p, q=1, 2, \dots, n),$$

то из (13) непосредственно следует, что

$$|d_{vj}(t)| \leq \frac{(n-1)! |c_0|}{\|z_j(t)\|} \sigma(t) \quad (\nu, j=1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

В силу (14), из (12) имеем

$$\|K(x, t)\| \leq n! |c_0| \sum_{j=1}^n \frac{\|z_j(x)\|}{\|z_j(t)\|} \sigma(t) \quad \text{при } x, t \geq x_0. \quad (15)$$

Согласно лемме 1, можем считать, что

$$W_{jn}(x, t) \leq c \quad \text{при } x \geq t \geq x_0 \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (16)$$

а в силу последнего из (15) получаем

$$\|K(x, t)\| \leq n! n |c_0| c \frac{\|z_n(x)\|}{\|z_n(t)\|} \sigma(t) \quad \text{при } x \geq t \geq x_0. \quad (17)$$

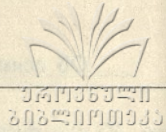
Согласно (6), из (16) имеем

$$\|z_n(x)\| \geq \frac{1}{c_1} \|z_j(x)\| \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

где

$$c_1 = c \sum_{j=1}^n \frac{\|z_j(x_0)\|}{\|z_n(x_0)\|}.$$





Следовательно,

$$\|z_n(x)\| \geq \frac{1}{nc_1} \|Z(x)\|. \quad (18)$$

Учитывая, что  $\sigma(t)$  — ограниченная функция, согласно (18), из (17) непосредственно заключаем, что справедливо (11). Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть фундаментальная система (8) удовлетворяет условию (L). Тогда, каково бы ни было решение  $z_0(x)$  уравнения (2), если функции

$$z_1(x), z_2(x), \dots, z_{l-1}(x), z_0(x), z_{l+1}(x), \dots, z_n(x) \quad (19)$$

линейно независимы, и если, кроме того,

$$\|z_0(x)\| \leq m \|z_l(x)\| \quad \text{при } x \geq x_0, \quad (20)$$

где  $m$  — положительная постоянная, то система (19) также удовлетворяет условию (L), причем

$$\|z_0(x)\| \geq \delta \|z_l(x)\| \quad \text{при } x \geq x_0, \quad (21)$$

где  $\delta$  — положительная постоянная.

**Доказательство.** Сперва докажем, что справедлива оценка (21). Допустим противное. Тогда найдется такая числовая последовательность  $\{x_k\}$ , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|z_0(x_k)\|}{\|z_l(x_k)\|} = 0. \quad (22)$$

Так как функции (19) линейно независимы, то, в силу обозначения (10), будем иметь

$$\begin{vmatrix} \frac{z_{11}(x_k)}{\|z_1(x_k)\|} & \dots & \frac{z_{1,l-1}(x_k)}{\|z_{l-1}(x_k)\|} & \frac{z_{10}(x_k)}{\|z_l(x_k)\|} & \frac{z_{1,l+1}(x_k)}{\|z_{l+1}(x_k)\|} & \dots & \frac{z_{1n}(x_k)}{\|z_n(x_k)\|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_{n1}(x_k)}{\|z_1(x_k)\|} & \dots & \frac{z_{n,l-1}(x_k)}{\|z_{l-1}(x_k)\|} & \frac{z_{n0}(x_k)}{\|z_l(x_k)\|} & \frac{z_{n,l+1}(x_k)}{\|z_{l+1}(x_k)\|} & \dots & \frac{z_{nn}(x_k)}{\|z_n(x_k)\|} \end{vmatrix} = \frac{c_0}{\sigma(x_k)}, \quad (23)$$

где  $c_0$  — отличная от нуля постоянная.

Из (20) очевидно, что норма каждого вектора-столбца определителя, стоящего в левой части этого равенства, ограничена. Поэтому, согласно (22), из (23) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma(x_k)} = 0,$$

что невозможно, ибо  $\sigma(x)$  — ограниченная функция. Полученное противоречие доказывает справедливость оценки (21).

Покажем теперь, что фундаментальная система (19) удовлетворяет условию (L). Введем обозначения:

$$z_j^*(x) = \begin{cases} z_j(x) & \text{при } j \neq l, \\ z_0(x) & \text{при } j = l; \end{cases} \quad (24)$$



$$\sigma^*(x) = \prod_{j=1}^n \|z_j^*(x)\| e^{-\int_{x_0}^x S_p A(t) dt} ; \quad (25)$$

$$W_{jk}^*(x, t) = \frac{\|z_j^*(x)\|}{\|z_j^*(t)\|} \left[ \frac{\|z_k^*(x)\|}{\|z_k^*(t)\|} \right]^{-1} \quad (j, k=1, 2, \dots, n). \quad (26)$$

Согласно (20) и (24), из (25) имеем

$$\sigma^*(x) \leq m\sigma(x), \quad (27)$$

а, согласно (20), (21) и (26), простыми приемами получаем

$$\delta_1 W_{jk}(x, t) \leq W_{jk}^*(x, t) \leq \delta_2 W_{jk}(x, t) \quad (j, k=1, 2, \dots, n), \quad (28)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — положительные постоянные, а функция  $W_{jk}(x, t)$  определена равенством (6).

Учитывая теперь, что фундаментальная система (8) удовлетворяет условию (L), в силу (27) и (28), легко убедиться, что система (19) также удовлетворяет условию (L). Лемма доказана.

Лемма 4. Если фундаментальная система (8) удовлетворяет условию (L), то каково бы ни было нетривиальное решение

$$z_0(x) = \sum_{j=1}^n c_j z_j(x)$$

уравнения (2), будем иметь

$$\sum_{j=1}^n |c_j| \|z_j(x)\| \leq c_0 \|z_0(x)\| \quad \text{при } x \geq x_0, \quad (29)$$

где  $c_0$  — положительная постоянная.

Доказательство. Так как  $\sum_{j=1}^n |c_j| \neq 0$ , то, не ограничивая общности, можем считать, что

$$z_0(x) = \sum_{j=1}^l c_j z_j(x), \quad c_j \neq 0 \quad (j=1, 2, \dots, l), \quad (30)$$

где

$$l \geq 1, \quad c_j \neq 0 \quad (j=1, 2, \dots, l). \quad (31)$$

Так как система функций  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_l(x)$  при каждом  $k(k=1, 2, \dots, l)$  удовлетворяет условию  $(L_k)$ , то, согласно лемме 1, можем считать, что

$$\|z_j(x)\| \leq c \|z_k(x)\| \quad (j=1, 2, \dots, l) \quad \text{при } x \geq x_0. \quad (32)$$





Согласно (32), из (30) следует, что соблюдается условие (20), где

$$m = \sum_{j=1}^l |c_j| c.$$

С другой стороны, из (30) и (31) очевидно, что (19) является системой линейно независимых функций. Следовательно, согласно лемме 3, соблюдается условие (21). Далее, согласно (21), (30) и (32), выполняется

условие (29), где  $c_0 = \frac{c}{\delta} \sum_{j=1}^l |c_j|$ . Лемма доказана.

**Лемма 5.** Если уравнение (2) удовлетворяет условию (L), то найдется действительная фундаментальная система решений этого уравнения, удовлетворяющая условию (L).

**Доказательство.** Так как уравнение (2) удовлетворяет условию (L), то найдется (вообще говоря, комплексная) фундаментальная система (8) этого уравнения, удовлетворяющая условию (L). Пусть

$$z_j(x) = z_j^*(x) + iz_j^{**}(x) \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Через  $\tilde{z}_1(x)$  обозначим ту из функций  $z_1^*(x)$  и  $z_1^{**}(x)$ , для которой система функций

$$\tilde{z}_1(x), z_2(x), z_3(x), \dots, z_n(x) \quad (33)$$

линейно независима. Так как  $\|\tilde{z}_1(x)\| \leq \|z_1(x)\|$ , то, согласно лемме 3 очевидно, что (33) удовлетворяет условию (L). Далее, обозначая через  $\tilde{z}_2(x)$  ту из функций  $z_2^*(x)$  и  $z_2^{**}(x)$ , для которой система функций

$$\tilde{z}_1(x), \tilde{z}_2(x), z_3(x), \dots, z_n(x) \quad (34)$$

линейно независима, согласно лемме 3, убеждаемся, что система функций (34) удовлетворяет условию (L). Продолжая таким образом, получаем фундаментальную систему

$$\tilde{z}_1(x), \tilde{z}_2(x), \dots, \tilde{z}_n(x),$$

удовлетворяющую условию (L), причем каждая функция  $\tilde{z}_j(x)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) действительна. Лемма доказана.

**Лемма 6.** Если уравнение (2) удовлетворяет условию (L), то каково бы ни было его действительное нетривиальное решение  $z_0(x)$ , найдется фундаментальная система действительных решений этого уравнения, содержащая решение  $z_0(x)$  и удовлетворяющая условию (L).

**Доказательство.** Пусть (8) — фундаментальная система, составленная из действительных решений уравнения (2). Такая система существует согласно лемме 5. Не ограничивая общности, можем считать, что соблюдены условия (30), (31) и (32). Но тогда из леммы 3 следует, что фундаментальная система (19) решений уравнения (2) удовлетворяет условию (L). Это доказывает лемму.

**Определение 5.** Пусть (8) — фундаментальная система решений



уравнения (2). Скажем, что эта фундаментальная система устойчива, если любая система функций

$$\zeta_1(x), \zeta_2(x), \dots, \zeta_n(x), \quad (35)$$

удовлетворяющая условию

$$\frac{\|\zeta_j(x) - z_j(x)\|}{\|z_j(x)\|} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (36)$$

линейно независима в промежутке  $[x_0, \infty)$ .

Лемма 7. Если фундаментальная система (8) удовлетворяет условию (L), то она устойчива.

Доказательство. Согласно (36), имеем, что

$$\left| \frac{\zeta_{ij}(x)}{\|z_j(x)\|} - \frac{z_{ij}(x)}{\|z_j(x)\|} \right| \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Так как

$$\left| \frac{z_{ij}(x)}{\|z_j(x)\|} \right| < 1,$$

то найдется такая числовая последовательность  $\{x_k\}$ , что последовательности  $\left\{ \frac{z_{ij}(x_k)}{\|z_j(x_k)\|} \right\}_{k=1}^{\infty}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) будут сходящимися. Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_{ij}(x_k)}{\|z_j(x_k)\|} = b_{ij}. \quad (38)$$

В силу (37), отсюда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\zeta_{ij}(x_k)}{\|z_j(x_k)\|} = b_{ij}. \quad (39)$$

Рассмотрим определитель

$$d(x_k) = \begin{vmatrix} \zeta_{11}(x_k) & \dots & \zeta_{1n}(x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta_{n1}(x_k) & \dots & \zeta_{nn}(x_k) \end{vmatrix}$$

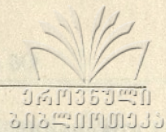
Очевидно, что

$$d(x_k) = \begin{vmatrix} \zeta_{11}(x_k) & \dots & \zeta_{1n}(x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta_{n1}(x_k) & \dots & \zeta_{nn}(x_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11}(x_k) & \dots & z_{1n}(x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(x_k) & \dots & z_{nn}(x_k) \end{vmatrix} + \\ + \prod_{j=1}^n \|z_j(x_k)\| \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\zeta_{11}(x_k)}{\|z_1(x_k)\|} & \dots & \frac{\zeta_{1n}(x_k)}{\|z_n(x_k)\|} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\zeta_{n1}(x_k)}{\|z_1(x_k)\|} & \dots & \frac{\zeta_{nn}(x_k)}{\|z_n(x_k)\|} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{z_{11}(x_k)}{\|z_1(x_k)\|} & \dots & \frac{z_{1n}(x_k)}{\|z_n(x_k)\|} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_{n1}(x_k)}{\|z_1(x_k)\|} & \dots & \frac{z_{nn}(x_k)}{\|z_n(x_k)\|} \end{vmatrix} \right\}.$$

В силу (38) и (39), отсюда получаем

$$d(x_k) = c_0 e^{\int_{x_0}^{x_k} S_p A(t) dt} + o(1) \prod_{j=1}^n \|z_j(x_k)\|.$$





Следовательно,

$$d(x_k) = \prod_{j=1}^n \|z_j(x_k)\| \left[ \frac{c_0}{\sigma(x_k)} + o(1) \right], \quad c_0 \neq 0.$$

Так как  $\sigma(x)$  — ограниченная функция, то из последнего равенства следует, что при больших  $k$  определитель  $d(x_k)$  отличен от нуля, а это означает линейную независимость системы (35). Лемма доказана.

## § 2. Системы типов $(L_0)$ и $(L)$

Теорема 1. Пусть уравнение (2) удовлетворяет условию  $(L)$ . Пусть далее

$$f(x, \zeta) = B(x) \zeta \quad (40)$$

и

$$\int_{x_0}^{\infty} \|B(x)\| dx < \infty. \quad (41)$$

Тогда каждое нетривиальное решение  $\zeta(x)$  уравнения (1) имеет вид

$$\zeta(x) = z(x) + o_n(\|z(x)\|), \quad (42)$$

где  $z(x)$  — какое-либо нетривиальное решение уравнения (2).

Доказательство. Пусть (8) — фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая условию  $(L)$ . Ввиду (40) и (41) из теоремы, доказанной в работе [6] следует, что уравнение (1) имеет систему решений  $\zeta_1(x), \zeta_2(x), \dots, \zeta_n(x)$  такую, что

$$\zeta_k(x) = z_k(x) + o_n(\|z_k(x)\|) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (43)$$

Так как (8) — устойчивая фундаментальная система (см. лемму 7) то (43) будет фундаментальной системой решений уравнения (1).

Пусть  $\zeta(x)$  — какое-либо нетривиальное решение уравнения (1). Очевидно,

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^n c_k \zeta_k(x), \quad (44)$$

где  $\sum_{k=1}^n |c_k| \neq 0$ . Введем обозначение

$$z(x) = \sum_{k=1}^n c_k z_k(x). \quad (45)$$

Согласно лемме 4, имеем

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \|z_k(x)\| \leq c_0 \|z(x)\|. \quad (46)$$

Согласно (43), (45), (46), из (44) вытекает, что справедливо представление (42). Теорема доказана.



Замечание. Из представления (43) очевидно, что теорему 1 можно сформулировать и так: если соблюдены условия теоремы 1, то каждое нетривиальное решение  $\zeta(x)$  уравнения (1) имеет вид

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^n c_k [z_k(x) + o_n(\|z_k(x)\|)], \quad (47)$$

где  $\sum_{j=1}^n |c_j| \neq 0$ , а  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$  — фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая условию (L).

Теорема 2. Пусть уравнение (2) удовлетворяет условию (L), и пусть для некоторой фундаментальной матрицы  $Z(x)$  этого уравнения

$$\|f(x, \|Z(x)\|y)\| \|Z(x)\|^{-1} \leq \psi(x) \|y\| \quad \text{при } x_0 \leq x < \infty, \quad \|y\| \leq \delta, \quad (48)$$

где  $0 < \delta \leq \infty$ , а  $\psi(x)$  — неотрицательная в промежутке  $x_0 \leq x < \infty$  функция, причем

$$\int_{x_0}^{\infty} \psi(x) dx < \infty. \quad (49)$$

Если, кроме того, уравнение (1) при нулевом начальном условии имеет лишь тривиальное решение, то оно является уравнением типа  $\mathbb{L}_0$ .

Доказательство. Пусть  $Z^*(x)$  — какая-либо другая фундаментальная матрица уравнения (2). Тогда найдется такая невырожденная матрица  $C$ , что

$$Z^*(x) = C Z(x).$$

Так как

$$\frac{\|Z^*(x)\|}{\|Z(x)\|} \leq \|C\|,$$

то из (48) будем иметь

$$\begin{aligned} & \|f(x, \|Z^*(x)\|y)\| / \|Z^*(x)\| = \\ & = \frac{\|Z(x)\|}{\|Z^*(x)\|} \|f(x, \|Z(x)\| \frac{\|Z^*(x)\|}{\|Z(x)\|} y)\| / \|Z(x)\| \leq \\ & \leq \frac{\|Z(x)\|}{\|Z^*(x)\|} \psi(x) \frac{\|Z^*(x)\|}{\|Z(x)\|} \|y\| = \psi(x) \|y\| \quad \text{при } \|y\| \leq \delta_1 = \frac{\delta}{\|C\|}, \quad x_0 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой фундаментальной матрицы уравнения (2) соблюдается условие, аналогичное условию (48). Поэтому, не ограничивая общности, ниже можем считать, что  $Z(x)$  — фундаментальная матрица, составленная из системы решений, удовлетворяющей условию (L).

В силу леммы 2,

$$\frac{\|K(x, t)\|}{\|Z(x)\|} \leq \frac{m}{\|Z(t)\|} \quad \text{при } x \geq t \geq x_0, \quad (50)$$



где  $m$  — положительная постоянная.

В силу (49),  $x_1$  можно взять столь большим, чтобы

$$\int_{x_1}^{\infty} \psi(x) dx < \frac{1}{2m}. \quad (51)$$

Согласно теореме о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных (см., напр., [3], стр. 70—73), найдется такое положительное число  $\eta$ , что каждое решение  $\zeta(x)$  уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\|\zeta(x_0)\| \leq \eta, \quad (52)$$

определено в промежутке  $[x_0, x_1]$  и удовлетворяет неравенству

$$\|\zeta(x)\| < \frac{\delta}{2m+1} \min_{x_0 \leq x \leq x_1} \|Z(x)\| \quad \text{при } x_0 \leq x \leq x_1.$$

Таким образом,

$$\frac{\|\zeta(x)\|}{\|Z(x)\|} < \frac{\delta}{2m+1} \quad \text{при } x_0 \leq x \leq x_1. \quad (53)$$

Покажем теперь, что каждое решение  $\zeta(x)$  уравнения (1), удовлетворяющее условию (52), удовлетворяет также условию

$$\|\zeta(x)\| < \delta \|Z(x)\| \quad (54)$$

на всем промежутке  $[x_0, \infty)$ .

Допустим противное. Тогда, согласно (53), найдется число  $x_2, x_1 < x_2 < \infty$  такое, что

$$\|\zeta(x_2)\| = \delta \|z(x_2)\|,$$

а в промежутке  $x_0 \leq x \leq x_2$  соблюдается неравенство (54). Если, кроме того, учесть (48), (50), (51) и (53), то из равенства

$$\zeta(x_2) = K(x_2, x_1)\zeta(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, t) f(t, \zeta(t)) dt$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta \leq m \frac{\|\zeta(x_1)\|}{\|Z(x_1)\|} + m \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\|Z(t)\|} \psi(t) \|\zeta(t)\| dt < m \frac{\delta}{2m+1} + \\ + m\delta \int_{x_1}^{x_2} \psi(t) dt < \delta. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает, что всюду в промежутке  $x_0 \leq x < \infty$  соблюдено условие (54).

В завершение доказательства теоремы покажем, что для любого не тривиального решения  $\zeta(x)$  уравнения (1), удовлетворяющего условию (52),



найдется такое нетривиальное решение  $z(x)$  уравнения (2), что будет иметь место представление (42).

Если через  $B(x)$  обозначим матрицу, элементы которой определяются равенствами

$$B_{kj}(x) = f_k(x, \zeta(x)) \frac{\text{Sgn } \zeta_j(x)}{\|\zeta(x)\|} \quad (k, j=1, 2, \dots, n), \quad (55)$$

то, очевидно,  $\zeta(x)$  будет решением уравнения

$$\frac{d\zeta}{dx} = A(x)\zeta + B(x)\zeta. \quad (56)$$

Поэтому, чтобы доказать справедливость (42), в силу теоремы 1, достаточно показать, что соблюдено условие (41).

Из (55) имеем

$$\|B(x)\| = n \|f(x, \zeta(x))\| / \|\zeta(x)\|.$$

Отсюда, согласно (48) и (54), получаем

$$\|B(x)\| \leq n \psi(x),$$

откуда, согласно (49), вытекает справедливость (41). Теорема доказана.

Учитывая замечание к теореме 1, легко убедиться, что справедлива следующая

**Теорема 2'.** Если соблюдены условия теоремы 2, то любое нетривиальное решение  $\zeta(x)$  уравнения (1), начальное значение которого достаточно мало по норме, имеет вид (47), где

$\sum_{j=1}^n |c_j| \neq 0$ , а  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$  — фундаментальная система решений

уравнения (2), удовлетворяющая условию (L).

**Теорема 3.** Пусть уравнение (2) удовлетворяет условию (L) и пусть для некоторой фундаментальной матрицы  $Z(x)$  этого уравнения

$$\|f(x, \|Z(x)\|y)\| / \|Z(x)\| \leq \psi(x, \|y\|) \quad \text{при } x_0 \leq x < \infty, \|y\| < \infty, \quad (57)$$

где  $\psi(x, \rho)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1 из [6], причем

$$\psi(x, \rho) \leq \psi(x)\rho \quad \text{при } x_0 \leq x < \infty, 0 \leq \rho \leq 1, \quad (58)$$

и соблюдается условие (49). Если, кроме того, для любой положительной постоянной  $m$  каждое решение уравнения

$$\frac{d\rho}{dx} = m\psi(x, \rho) \quad (59)$$

ограничено в промежутке  $x_0 \leq x < \infty$ , то (1) является уравнением типа (Л).

Для доказательства этой теоремы мы используем следующую лемму.





Лемма 8. Пусть функция  $\psi_1(x, \rho)$  удовлетворяет условиям Каратеодори в любом конечном прямоугольнике области  $x_0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ , а  $\bar{\rho}(x)$  — верхнее решение задачи

$$\frac{d\rho}{dx} = \psi_1(x, \rho), \quad \rho(x_1) = \rho_0 > 0,$$

определенное в некотором промежутке  $[x_1, x_2]$ . Тогда для любой непрерывной функции  $\mu(x)$ , удовлетворяющей условию

$$\mu(x) \leq \rho_0 + \int_{x_1}^x \psi_1(t, \mu(t)) dt \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2.$$

имеем

$$\mu(x) \leq \bar{\rho}(x) \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2.$$

(Доказательство см., напр., в [2]).

Доказательство теоремы 3. Так же, как и выше, при доказательстве теоремы 2, не ограничивая общности, можем считать, что фундаментальная матрица  $Z(x)$  составлена из системы решений, удовлетворяющей условию (L) и, следовательно, соблюдается неравенство (50).

Прежде всего покажем, что каждое решение  $\zeta(x)$  уравнения (1) определено в промежутке  $x_0 \leq x < \infty$  и удовлетворяет условию

$$\|\zeta(x)\| \leq \bar{\rho}(x) \|Z(x)\| \quad \text{при } x \geq x_0, \quad (60)$$

где  $\bar{\rho}(x)$  — верхнее решение уравнения (59) с начальным условием

$$\rho(x_0) = \rho_0 = m \frac{\|\zeta(x_0)\|}{\|Z(x_0)\|}. \quad (61)$$

Введем обозначение

$$\mu(x) = \frac{\|\zeta(x)\|}{\|Z(x)\|}. \quad (62)$$

Тогда, согласно (50) и (57), из равенства

$$\zeta(x) = K(x, x_0)\zeta(x_0) + \int_{x_0}^x K(x, t) f(t, \zeta(t)) dt$$

получаем

$$\mu(x) \leq \mu(x_0) + m \int_{x_0}^x \psi(t, \mu(t)) dt,$$

откуда, согласно (61) и (62), имеем

$$\mu(x) \leq \rho_0 + m \int_{x_0}^x \psi(t, \mu(t)) dt.$$

Согласно лемме 8 и обозначению (62), отсюда вытекает справедливость оценки (60).



Так как функция  $\bar{\rho}(x)$  ограничена в промежутке  $[x_0, \infty)$ , то из (60) получаем, что

$$\|\zeta(x)\| \leq \rho \|Z(x)\| \quad \text{при } x \geq x_0, \quad (63)$$

где  $\rho$  — положительная постоянная

Очевидно, что  $\zeta(x)$  является решением уравнения (56), где  $B(x)$  — матрица, определенная равенствами (55). В завершение доказательства теоремы покажем, что соблюдается условие (41). Согласно (57), из (55) следует

$$\begin{aligned} \|B(x)\| &\leq n \frac{\|Z(x)\|}{\|\zeta(x)\|} \left\| f(x, \|Z(x)\| \frac{\zeta(x)}{\|Z(x)\|}) \right\| / \|Z(x)\| \leq \\ &\leq n \frac{\psi(x, \frac{\|\zeta(x)\|}{\|Z(x)\|})}{\frac{\|\zeta(x)\|}{\|Z(x)\|}}. \end{aligned}$$

В силу (58) и (63), отсюда получаем

$$\|B(x)\| \leq n\psi(x) + n\psi(x, \rho),$$

откуда, на основании (2.2) из [6] и (49), вытекает справедливость (41).

Учитывая замечание к теореме 1, становится ясным, что справедлива следующая

Теорема 3'. Если соблюдены условия теоремы 3, то каждое нетривиальное решение  $\zeta(x)$  уравнения (1) имеет вид (47), где

$\sum_{j=1}^n |c_j| \neq 0$ , а  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$  — фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая условию (L).

(Представлено 2. XI.1968)

Кафедра высшей математики

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1954.
2. И. Т. Кигурадзе, Сообщ. АН ГССР, 39, № 3, 1965, стр. 513—518.
3. Э. Л. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958.
4. М. Matell, Asymptotische Eigenschaften gewisser linearer Differentialgleichungen. Uppsala, Appelbergs Boktrickeri Aktiebolag, 1924.
5. И. М. Раппопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Киев, 1954.
6. И. А. Торошелидзе, Труды Грузинского политехнического института им. В. И. Ленина, № 5(133), 1969, стр. 117—125.



ი. ტოროშელიძე

**ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა კვაზიწივი  
სისტემების ამოხსნების ასიმპტოტური წაკარგვის შესახებ**

(რეზიუმე)

განხილულია სისტემა

$$\frac{d\zeta}{dx} = A(x)\zeta + f(x, \zeta), \quad (1)$$

სადაც  $A(x)$  არის  $n$  რივის ფუნქციონალური მატრიცა, ხოლო  $f(x, \zeta)$   $n$ -განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქცია.

(1) განტოლების არატრიალურ  $\zeta(x)$  ამოხსნას ეწოდება (II) ტიპის, თუ მოიძებნება

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z$$

განტოლების ისეთი არატრიალური  $z(x)$  ამოხსნა, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\|\zeta(x) - z(x)\|}{\|z(x)\|} = 0.$$

შრომაში დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ ა) (1) განტოლების ყოველი არატრიალური ამოხსნა საკმარისად მცირე საწყისი მნიშვნელობებით იყოს (II) ტიპის; ბ) (1) განტოლების ყოველი არატრიალური ამოხსნა იყოს (I) ტიპის.



## О ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Н. Н. ВАХАНИЯ

Математическое описание случайных элементов основано на использовании понятия распределения вероятностей. Распределение случайного элемента есть нормированная мера в соответствующем выборочном пространстве, составленном из возможных реализаций случайного элемента. В том случае, когда случайным элементом является случайная вещественная последовательность, за выборочное пространство естественно взять пространство всех вещественных числовых последовательностей. Удобно считать это пространство наделенным обычной линейной структурой и тихоновской топологией. Обозначим получаемое таким образом линейное топологическое пространство через  $R^N$ . Под распределением в  $R^N$  будем понимать борелевское распределение, т. е. заданную на классе всех борелевских множеств вполне конечную нормированную меру. Каждая случайная последовательность характеризуется своим распределением и, наоборот, каждое распределение в  $R^N$  есть распределение некоторой случайной последовательности. Поэтому изучение вещественных случайных последовательностей равносильно изучению распределений в  $R^N$ .

В этой работе мы концентрируем внимание на гауссовских случайных последовательностях, т. е. на гауссовских распределениях в  $R^N$ , и исследуем задачу нахождения условий, при которых гауссовское распределение в  $R^N$  будет сосредоточено на том или ином линейном подпространстве  $X \subset R^N$ . Наибольший интерес представляют обычно рассматриваемые подпространства  $l_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ),  $c_0$  и  $l_\infty$ . Первое из них включает в себя, в силу теоремы Рисса-Фишера, случай общего сепарабельного гильбертова пространства. Второй и третий случаи могут быть рассмотрены как модельные для важных нерешенных задач об условиях непрерывности почти наверное и, соответственно, ограниченности почти наверное гауссовских случайных процессов.

Рассматриваемая задача допускает также другую интерпретацию. Нетрудно показать, что борелевские множества указанных выше подпространств  $X$ , рассматриваемых как банаховы пространства по своим обычным нормам, являются борелевскими также и в тихоновской топологии — как подмножества в  $R^N$ . Поэтому, если некоторое распределение  $\mu$  сосредоточено на  $X$ , т. е.  $\mu(X) = 1$ , то оно будет распределением также и в  $X$ .





Обратно, каждое распределение  $\mu$  в  $X$  можно мыслить как сужение распределения  $\tilde{\mu}$  в  $R^N$ , сосредоточенного в  $X$ . Далее можно показать, что распределение  $\mu$  в  $X$  будет гауссовским тогда и только тогда, когда соответствующее распределение  $\tilde{\mu}$  в  $R^N$  будет гауссовским. Из сказанного следует, что решение поставленной задачи об условиях, обеспечивающих сосредоточение на  $X$  гауссовского распределения в  $R^N$ , даст также и полное описание всех гауссовских распределений в  $X$ , если известно полное описание всех гауссовских распределений в  $R^N$ . А эта последняя задача решается весьма просто, если воспользоваться понятием характеристического функционала. Прежде чем сформулировать соответствующий результат, отметим, что гауссовость распределения в  $R^N$  и в  $X$  понимается в естественном смысле—как гауссовость всех конечномерных проекций (гауссовость совместных распределений любого конечного числа координат) и такое понимание согласуется с общим определением гауссовости распределения в линейных топологических пространствах. Незначительное дополнительное рассуждение, которое надо провести для случая пространства  $l_\infty$ , также очевидно.

Теперь сформулируем теорему об общем виде характеристических функционалов всех гауссовских распределений в  $R^N$ . Через  $R_0^N$  обозначается часть  $R^N$ , состоящая из всех таких последовательностей, каждая из которых имеет лишь конечное число отличных от нуля координат.

**Теорема 1** (см [1]). Характеристический функционал любого гауссовского распределения в  $R^N$  имеет вид

$$\chi(f) = \exp \left\{ i \sum f_k a_k - \frac{1}{2} \sum s_{ij} f_i f_j \right\}, \quad f \in R_0^N, \quad (1)$$

в котором  $\{a_k\} \in R^N$  и бесконечная матрица  $\|s_{ij}\|$  симметрическая и неотрицательно определенная (двойная сумма в выражении (1) неотрицательна для любого  $f \in R_0^N$ ).

Обратно, при этих условиях выражение (1), рассматриваемое как функционал в  $R_0^N$ , есть характеристический функционал некоторого (единственного) гауссовского распределения в  $R^N$ .

**З а м е ч а н и е.** Вероятностный смысл параметров  $a_k$  и  $s_{ij}$  легко понять:  $a_k$  есть математическое ожидание координаты  $x_k$ , имеющей, очевидно, гауссовское распределение, и  $s_{ij}$  есть ковариация координат  $x_i, x_j$ , совместное распределение которых, очевидно, гауссовское.

Таким образом, гауссовские распределения в  $R^N$  задаются двумя параметрами: последовательностью  $\{a_k\}$  и матрицей  $\|s_{ij}\|$  и задача, которую мы рассматриваем, заключается в нахождении таких дополнительных условий на эти параметры, при которых данное гауссовское распределение сосредоточено на подпространстве  $X$ .

Случай  $X = l_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) подробно исследован в наших работах [1], [2], в настоящей работе мы рассмотрим случаи  $X = c_0$  и  $X = l_\infty$ . Однако



сначала для полноты изложения сформулируем результат относительно  $X = l_p$ .

**Теорема 2.** Для того, чтобы гауссовское распределение в  $R^N$  с параметрами  $\{a_k\}$  и  $\|s_{ij}\|$  было сосредоточено в  $l_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\{a_k\} \in l_p, \quad \{s_{kk}\} \in \dot{c}_{p/2}.$$

Переходим теперь к случаю пространств  $c_0$  и  $l_\infty$ . Докажем предварительно следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Пусть числа  $\alpha_k^{(r)}$  удовлетворяют условию  $0 < \alpha_k^{(r)} < 1$  ( $r > 0$ ;  $k=1, 2, \dots$ ) и пусть\*

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(r)} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \alpha_j^{(r)}).$$

Если  $\varphi(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(r)} < +\infty$  для всех значений  $r$ ,

начиная с некоторого.

Доказательство легко получается использованием элементарного тождества.

$$\prod_{j=1}^k (1 - \alpha_j^{(r)}) - \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \alpha_j^{(r)}) = -\alpha_k^{(r)} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \alpha_j^{(r)}).$$

Суммируя эти тождества по  $k$  от 1 до  $N$ , упрощая левую часть получаемого соотношения и переходя затем к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получим соотношение

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - \alpha_j^{(r)}) = 1 - \varphi(r). \quad (2)$$

Если при некотором значении  $r=r_0$  ряд  $\sum_k \alpha_k^{(r)}$  расходится, то при

том же значении  $r=r_0$  бесконечное произведение в левой части равенства (2) расходится к нулю и поэтому имеем:  $\varphi(r_0)=1$ . Но по предположению  $\varphi(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и, следовательно, таких значений  $r$ , при которых  $\varphi(r)=1$ , не может быть дальше некоторого натурального числа. Это и доказывает лемму.

Перейдем теперь непосредственно к характеристике гауссовских распределений. Рассмотрим сначала случай пространства  $c_0$ . Предположим, что  $\mu$  есть гауссовское распределение в  $R^N$ , имеющее параметры  $\{a_k\}$  и  $\|s_{ij}\|$ . Пусть выполнены условия

$$\{a_k\} \in c_0, \quad (3)$$

\* Если верхний индекс меньше нижнего, произведение считается равным единице.



$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{s_{kk}} e^{-\frac{\varepsilon}{s_{kk}}} < +\infty \text{ для любого } \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Докажем, что при выполнении этих условий  $\mu(c_0) = 1$ . Заметим предварительно, что если

$$\mu \{ x : \lim_{j \rightarrow \infty} (x_j - a_j) = 0 \} = 1,$$

то, согласно условию (3), будем также иметь равенство

$$\mu \{ x : \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0 \} = 1$$

и поэтому, не ограничивая общности, будем с самого начала считать, что  $a_j = 0$  для всех  $j$ .

Записав в символах словесное определение сходимости последовательности к нулю, получим следующее представление пространства  $c_0$ :

$$c_0 = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k > n} \{ x : |x_k| < \varepsilon \}.$$

Здесь пересечение по всем положительным  $\varepsilon$  можно, конечно, заменить счетным пересечением по всем  $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Учтя это, перейдем к дополнению пространства  $c_0$ . Заметим, что мера счетного объединения множеств равна нулю тогда и только тогда, когда мера каждого множества равна нулю и, наконец, используем свойство непрерывности меры (мера пересечения последовательности вложенных множеств равна пределу мер). Тогда легко убедимся в том, что требуемое условие  $\mu(c_0) = 1$  равносильно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k > n} \{ x : |x_k| \geq \varepsilon \} \right) = 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0. \quad (5)$$

Оценим теперь меру объединения множеств  $\{ x : |x_k| \geq \varepsilon \}$  суммой мер, вспомним, что  $x_k$  есть гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией  $s_{kk}$  и используем известную (см., напр., [3], стр. 183) оценку сверху неопределенного интеграла от гауссовской плотности. Тогда получим, что если выполнено условие (4), то будет справедливо соотношение (5) и, следовательно, достаточность условий (3) и (4) для сосредоточенности распределения  $\mu$  в  $c_0$  доказана.

Являются ли эти условия также и необходимыми? Относительно условия (3) ответ утвердительный. Этот факт есть простое следствие доказанного в работе [4] общего утверждения о существовании математического ожидания любого гауссовского распределения в произвольном сепарабельном банаховом пространстве, так как, если  $\mu(c_0) = 1$ , то, как было отмечено в начале настоящей работы,  $\mu$  будет гауссовским распределением в  $c_0$ .



Необходимость же условия (4) в общем случае не имеет места, в чем можно убедиться рассмотрением гауссовского случайного элемента  $\{x_k(\omega)\} \in c_0$ , где  $x_k(\omega) = \lambda_k x(\omega)$ ,  $x(\omega)$  — нормированная гауссовская случайная величина и  $\lambda_k^2 \rightarrow 0$  настолько медленно, что условие (4) не выполняется.

Однако в том случае, когда ковариационная матрица распределения диагональна, т. е. координаты рассматриваемого гауссовского случайного элемента независимы в совокупности, необходимость условия (4) имеет место. Для доказательства этого факта используем элементарную формулу

$$\mu \left( \bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j \right) = \mu(A_{n+1}) + \mu(A_{n+2} A_{n+1}^c) + \mu(A_{n+3} A_{n+2}^c A_{n+1}^c) + \dots,$$

которую в предположении независимости совокупности рассматриваемых событий  $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$  можно переписать в виде

$$\mu \left( \bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n+k}) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \mu(A_{n+j})). \quad (6)$$

Допустим, что сосредоточенный в  $c_0$  гауссовский случайный элемент имеет диагональную ковариационную матрицу ( $s_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ ). Не ограничивая общности, будем считать, что математические ожидания координат равны нулю и координаты невырождены ( $s_{ii} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ). Диагональность ковариационной матрицы означает независимость совокупности координат и поэтому, обозначая для произвольно заданного  $\varepsilon > 0$  через  $A_j = A_j(\varepsilon)$  событие  $\{x : |x_j| \geq \varepsilon\}$ , можем воспользоваться формулой (6). Применяя также доказанную здесь лемму (для  $\alpha_k^{(n)} = \mu(A_{n+k})$ ) и условие (5), получаем сходимость ряда  $\sum \mu(A_k)$  и остается только использовать известную (см. [3], стр. 183) оценку снизу для неопределенного интеграла от гауссовской плотности.

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 3.** Пусть  $\mu$  — гауссовское распределение в  $R^N$ . Если выполнены условия (3) и (4), то  $\mu(c_0) = 1$ . Обратно, если  $\mu(c_0) = 1$ , то условие (3) выполнено и, в предположении диагональности ковариационной матрицы, выполнено также и условие (4).

Теперь перейдем к случаю пространства  $l_\infty$ . Пусть  $\mu$  по-прежнему обозначает гауссовское распределение в  $R^N$  с параметрами  $\{a_j\}$  и  $\|s_{ij}\|$  и пусть выполнены следующие условия:

$$\{a_j\} \in l_\infty, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{s_{kk}} e^{-\frac{r}{s_{kk}}} < +\infty \text{ для какого-нибудь } r > 0. \quad (8)$$

Докажем, что при выполнении этих условий  $\mu(l_\infty) = 1$ . Основываясь на условии (7), мы опять с самого начала будем считать, не теряя при этом общности, что  $a_j = 0$  при всех  $j$ .





Записав пространство  $l_\infty$  в виде

$$l_\infty = \bigcup_{r>0} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x_k : |x_k| < r\},$$

переходя к дополнению, учитывая, что пересечение по всем  $r > 0$  можно заменить счетным пересечением по всем  $r_n = n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и пользуясь опять свойством непрерывности меры, получаем, что доказываемое утверждение  $\mu(l_\infty) = 1$  равносильно соотношению

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : |x_k| \geq r\} \right) = 0,$$

которое, таким образом, должно быть следствием условия (8). Оценивая меру объединения суммой мер и используя цитированную уже оценку сверху неопределенного интеграла от гауссовской плотности, легко убедиться в том, что это на самом деле так.

Необходимость условия (7) имеет место. Докажем этот факт. Допустим, что распределение  $\mu$  сосредоточено в  $l_\infty$  и тем не менее  $\{a_j\} \notin l_\infty$ . Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, не ограничивая общности, что  $a_j \rightarrow +\infty$ . На координаты  $x_j$  можем смотреть как на вещественные случайные величины  $x_j = x_j(x)$ , заданные в вероятностном пространстве  $(R^N, \mu)$ . Обозначим через  $A_j$  событие  $\{x : |x_j(x)| \geq a_j\}$ . Очевидно, что если при некотором  $x = x^{(0)}$  неравенство  $|x_j(x^{(0)})| \geq a_j$  имеет место для бесконечного множества индексов  $j$ , то числовая последовательность  $x_1(x^{(0)})$ ,  $x_2(x^{(0)})$ , ... не является ограниченной. Следовательно, вероятность того, что последовательность  $x_1(x)$ ,  $x_2(x)$ , ... неограничена, не меньше вероятности верхнего предела последовательности событий  $A_1, A_2, \dots$ . Но

$$\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \geq \mu(A_n) \geq \frac{1}{2},$$

так как  $\mu \{x : |x_j| \geq a_j\} \geq \mu \{x : x_j > a_j\} = \frac{1}{2}$  в силу гауссовости распределения.

Таким образом, последовательность  $x_1, x_2, \dots$  не ограничена на множестве положительной вероятности и, следовательно, ожидаемое противоречие получено.

Необходимость условия (8) в общем случае не имеет места. Простейший пример дается распределением последовательности  $(x, x, \dots)$ , где  $x$  — некоторая гауссовская случайная величина с нулевым средним. Однако в предположении диагональности ковариационной матрицы необходимость условия (8) имеется. Это можно доказать так же, как аналогичное утверждение в теореме 3 — нужно опять использовать соотношение (6) и доказанную выше лемму, полагая теперь  $\alpha_k^{(r)} = \mu \{x : |x_k| \geq r\}$ .

Таким образом, доказана следующая



Теорема 4. Пусть  $\mu$ —гауссовское распределение в  $R^N$ . Если выполнены условия (7) и (8), то  $\mu(l_\infty)=1$ . Обратно, если  $\mu(l_\infty)=1$ , то выполнено условие (7) и, в предположении диагональности ковариационной матрицы, выполнено также условие (8).

(Представлено 20.V.1970)

Кафедра высшей математики

ლიტერატურა

1. Н. Н. Вахания, Труды ВЦ АН СССР, № 1, 1965, стр. 5—32.
2. N. Vakhania, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, 260, № 6, 1965, стр. 1560—1562.
3. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том I, изд-во „Мир“, Москва, 1967.
4. Н. Н. Вахания, Studia Mathematica, 29, № 3, 1968, стр. 243—249.

ბ. შახანია

გაუსის შემთხვევით მიმდევრობათა შესახებ

(რ ე ზ ი უ მ ე)

განხილულია გაუსის განაწილებები რიცხვით მიმდევრობათა  $R^N$  სივრცეში და მოძებნილია იმის პირობები, რომ მოცემული გაუსის განაწილება თავმოყრილი იყოს სივრცის ამა თუ იმ ქვესივრცეზე.



## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НОВОЙ КОНФИГУРАЦИИ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА ДИНАМОМЕТРА МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

М. Н. КУКУЛАДЗЕ, Р. А. КАЧАРАВА, О. Е. АНДЖАПАРИДЗЕ,  
Г. Г. ШЕЛИАВА

Исследование распределения напряжений в упругом элементе динамометра имеет большое практическое значение, поскольку эти данные необходимы для расчетов пластической прочности динамометров, а также сопротивления рабочей части динамометра многократному действию нагрузки (т. е. усталостной поломке).

На практике известны наиболее распространенные конструкции упругих элементов динамометров, как, например, типа кольца Ольсона и Вацау, конструкции Хаберера, упругий элемент сложной конфигурации конструкции Токаря и т. п. Упругие элементы этих динамометров имеют форму круглого или эллиптического кольца, кривого бруса, вытянутого ромба и др. Такая конфигурация дается с целью увеличения деформации и повышения чувствительности прибора.

В литературе [2] рассматривается экспериментальное определение распределения напряжений в упругом элементе указанных динамометров.

Выбор надежной формы упругого элемента связан с исследованием распределения напряжений в этом элементе. Целесообразно, чтобы в выбранной форме концентрация напряжений была сведена к минимуму и напряжения по всему контуру распределялись более равномерно.

Целью исследования является нахождение концентраций напряжений при осевой нагрузке и выбор оптимальной формы упругого элемента динамометра. Наиболее пригодным для исследования напряжений в упругом элементе динамометра является метод фотоупругости; большинство имеющихся на практике данных по коэффициентам концентрации напряжений получено именно методом фотоупругости.

Эксперименты были проведены в лаборатории оптических методов исследования напряжений на кафедре теоретической механики механико-математического факультета Тбилисского государственного университета, совместно с СКБ при Тбилисском филиале ВНИИМ им. Д. И. Менделеева.

### § 1. Основные положения метода фотоупругости

Как известно, оптический метод исследования напряжений основан на том, что:



1. Под действием нагрузки некоторые прозрачные оптически изотропные материалы приобретают свойство двойного лучепреломления.

2. Направления поляризации в каждой точке нагруженной модели совпадают с направлениями главных нормальных напряжений.

При этом, если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  главные нормальные напряжения в плоскости пластинки, ( $\delta$  — оптическая разность хода), то между этими величинами существует следующая зависимость:

$$\delta = ch(\sigma_1 - \sigma_2),$$

где  $h$  — толщина пластинки,  $c$  — оптический коэффициент материала.

3. Распределение напряжений для плоского напряженного состояния не зависит от механических характеристик материалов. Это верно для односвязных областей или для многосвязных областей, когда система сил, действующих на каждый граничный контур, статически эквивалентна нулю.

4. Результаты эксперимента, полученные методом фотоупругости, можно перенести на натуру с помощью моделирования напряжений.

На основании моделирования для напряжений имеем следующую расчетную формулу:

$$\sigma_N = \frac{k_1}{k_2 k_3} \sigma_H,$$

где  $k_1 = \frac{P_H}{P_M}$  — коэффициент силового подобия;  $P_H, P_M$  — усилие, действующее на натуру и на модель;  $K_2 = \frac{l_H}{l_M}$  — коэффициент геометрического подобия;  $l_H, l_M$  — геометрические размеры натуры и модели;  $K_3 = \frac{t_H}{t_M}$  —

коэффициент подобия толщин;  $t_H, t_M$  — толщина элементов натуры и модели.

## § 2. Исследование распределения напряжений в моделях упругих элементов динамометров

Эксперименты данной работы проводились на моделях, изготовленных из оптически активного материала „ЭД6-М“ и органического стекла. Заготовки-пластинки из эпоксидной смолы „ЭД6-М“ изготавливались на месте.

Материал модели „ЭД6-М“ характеризуется следующими оптическо-механическими показателями:

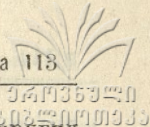
Модуль продольной упругости  $E = 30000$  кг/см<sup>2</sup>.

Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,21$ .

Оптическая постоянная материала  $\sigma^{(1,0)} = 10,5$  кг/см<sup>2</sup> полосы.

Эти характеристики получены в результате испытания серии образцов при комнатной температуре.





Исходя из анализа исследований уже существующих форм упругих элементов, были созданы новые конфигурации этих элементов (вид и размеры моделей упругих элементов представлены на рис. 1); будем называть их моделями № 1, № 2, № 3.

Упругий элемент динамометра состоит из двух симметричных частей, представляющих собою плоские кривые брусья переменной высоты. Длина рабочей части соизмерима с остальными размерами. Известная величина внешней нагрузки в дальнейшем была использована для сопоставления теоретических эпюр изгибающих моментов с фото-диаграммами напряжений.

Модели рабочей части динамометра были изготовлены в масштабе 1:4 из материала „ЭД6-М“.

Модель устанавливалась на пресс УП-4 и загружалась растягивающими силами с помощью реверсора. Исследование производилось на поляризационной установке „ППУ-4“ и „БСП-5“.

Исследования выполнялись как в белом, так и монохроматическом свете. При анализе картины полос было установлено, что наибольшие напряжения находятся у свободного контура модели. Определение напряжений на сво-

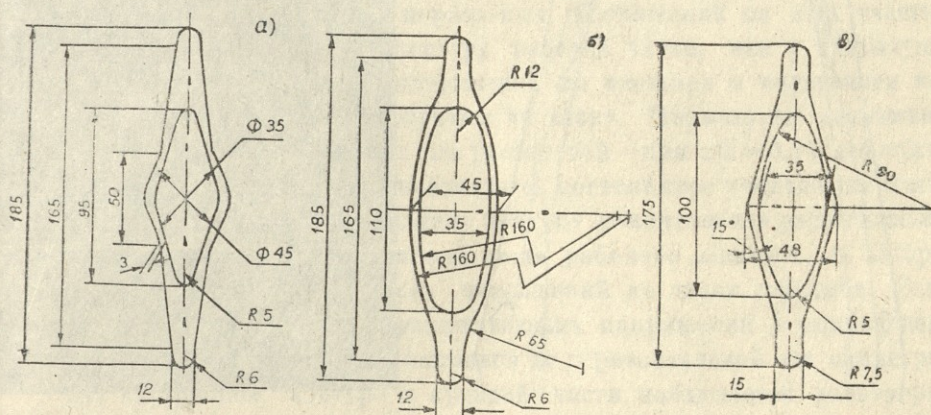


Рис. 1. Модели новых конструкций динамометров

бодном контуре, которое не представляет трудностей, было выполнено методом полос. На основании анализа полученных эпюр напряжений с моделями № 1 и № 2 была изменена форма упругого элемента динамометра (модель № 3) (рис. 1 в), с целью уменьшения контурных напряжений и приведения их к приблизительно одинаковой величине на внутреннем и наружном контурах, т. к. усталостная стойкость элемента непосредственно связана с контурными напряжениями.

Дальнейшие исследования показали правильность выбранного способа.

Для определения касательных и нормальных напряжений по сечениям и по контурам выреза для каждой модели были построены картины по-



лос и семья изоклин. Для получения семейства изоклин на модели были сняты фотоснимки на пленках.

Полностью обработанная картина изоклин для модели № 3, полученная на основании фотосъемки и визуального наблюдения, дана на рис. 2.

Картина полос была получена с помощью ртутной лампы с фильтром  $S=546 \text{ м}\mu$  для разных нагрузок  $P=5, 7,5; 10$  и  $15 \text{ кг}$ .

Картина полос для модели № 3, полученная скрещением положений призм николя, при  $P=15 \text{ кг}$  дана на рис. 3.

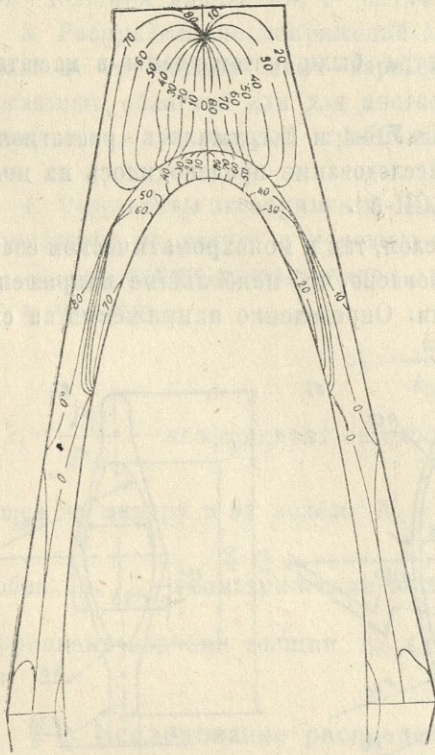


Рис. 2. Обработанная картина изоклин для модели № 3

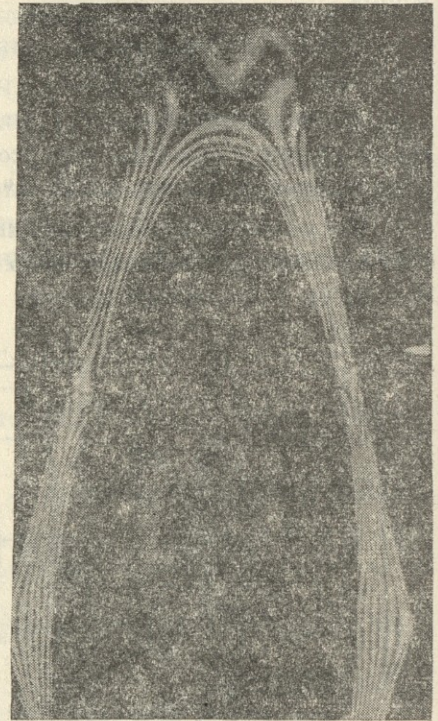


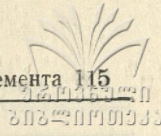
Рис. 3. Картина полос для модели № 3.

На основании картины полос и лабораторных зарисовок построены эпюры контурных напряжений (рис. 4).

В таблице приведены значения средних ординат распределения контурных напряжений на высоте рабочей части упругого элемента динамометра в зависимости от  $a/h$ , отсчитываемого от горизонтальной оси симметрии.

Анализируя полученные данные, отметим следующее: в модели № 1 наибольшее напряжение имеется на внутреннем контуре рабочей части. Эти напряжения растягивающие и достигают своего максимума в точках горизонтальной оси симметрии. Далее наблюдается резкое уменьшение





интенсивности контурных напряжений до точки перегиба, вслед за которым имеем более равномерное распределение контурных сжимающих напряжений.

На внешнем контуре рабочей части максимальное сжимающее напряжение имеется по горизонтальной оси симметрии, убывая почти по прямой линии до точки перегиба, вслед за которым наблюдается плавное нарастание растягивающих напряжений до точки  $a/h=0,8$  после которого напряжения вновь убывают.

В модели № 2 имеем иное распределение контурных напряжений.

Здесь на внешнем контуре рабочей части динамометра наибольшее растягивающее напряжение наблюдается в крайних частях элемента при  $a/h=1,0$ ; вслед за этим в обе стороны напряжение убывает до точки перегиба, после которого имеется равномерное распределение контурных сжимающих напряжений.

На внутреннем контуре растягивающее напряжение достигает максимального значения при  $a/h=0,3$ .

В средней части наблюдается почти равномерное распределение контурных напряжений. Нарастание сжимающих напряжений имеется на внутреннем контуре, на крайних частях рабочей части.

В модели № 3 изменение формы конструкций способствовало более равномерному распределению нормальных напряжений на всех участках по внешнему и внутреннему контуру рабочей части, чем у предыдущих моделей. Здесь максимальное напряжение на внешнем и внутреннем контуре равны по величине и обратны по знаку. Нормальные напряжения достигают максимума в точках: для растянутой — при  $a/h=0,15$ , для сжатой — при  $a/h=0,22$ . Вслед за этим наблюдается постепенное уменьшение интенсивности напряжений. По внешнему контуру максимальное растягивающее напряжение наблюдается в крайней части рабочего элемента, за которым идет уменьшение растягивающих напряжений до точки перегиба. Затем наблюдается плавный переход растягивающих напряжений к сжимающему, с постепенным нарастанием и убыванием до горизонтальной оси симметрии.

На внутреннем контуре в крайней части наблюдается равномерное распределение сжимающих напряжений. В средней части распределение контурных напряжений менее равномерно. Максимальное значение имеется в точках при  $a/h=0,22$ .

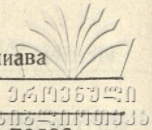
Отметим, что концентрация напряжений во всех участках данной модели сведена к минимуму.

Для каждой модели были выделены наиболее примечательные зоны: „А“ — соответствующая участкам приложения нагрузки; „Б“ — соответствующая участкам перегиба и „В“ — соответствующая участкам наибольшего напряжения.

Ниже приводятся результаты анализа напряжений, имеющих место в рабочей части моделей № 1, № 2 и № 3.

Модель № 1 — (рис. 1 а). В зоне „А“ рабочей части напряжение невелико, оптическая разность хода достигает 2-х единиц в числе полос,





№ №	Расчетная схема	Эпюры контурных напряжений в числе полос	
		Внутренний контур	Внешний контур
Модель № 1			
Модель № 2			



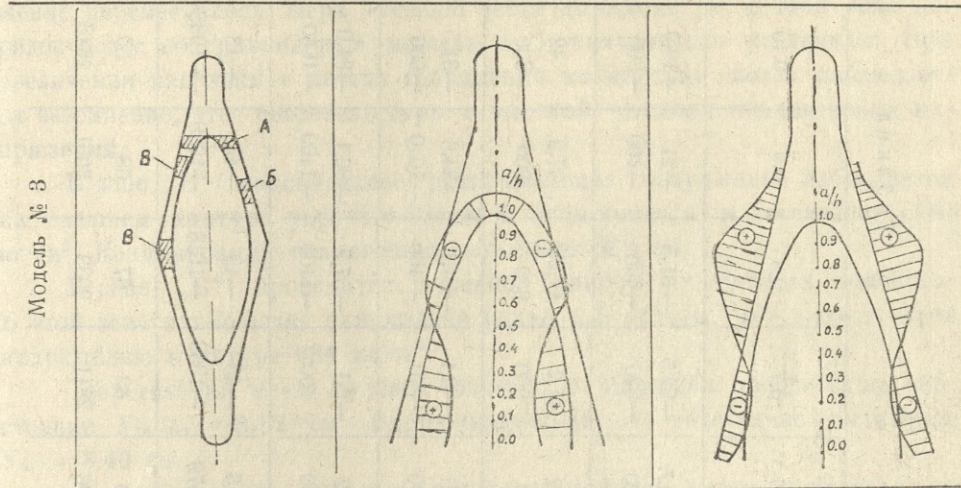


Рис. 4. Распределение напряжений в упругих динамометрах

что соответствует напряжению на модели  $21 \text{ кг/см}^2$ . На контуре окружности концентрация напряжений не наблюдается.

Конфигурация на контурах рабочей части упругого элемента способствует равномерному распределению напряжений. Сопряжение дуги окружности с прямой по внутреннему контуру обеспечивает одноосное напряжение по ветви модели, чем достигается равномерное распределение нормальных напряжений по поперечному сечению ветви рабочей части динамометра. На участке „А“ максимальное напряжение и, соответственно, величина разности хода равны 4,2 единицы в числе полос, что соответствует напряжению на модели  $44,1 \text{ кг/см}^2$ , а при пересчете на натуру напряжение составляет  $1927 \text{ кг/см}^2$ .

В зоне „Б“ происходит перемена знаков изгибающих моментов и контурных напряжений, картина полос сильно изменяется. На окрестности этой точки на незначительном участке модель от осевой нагрузки остается мало напряженной. Нейтральная линия прижимается к контурам и делит модель на две части.

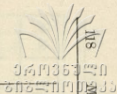
Для нахождения точки перегиба проведен расчет методом теории упругости. Теоретически место перегиба находится на расстоянии от горизонтальной оси симметрии  $У_{\text{пер.}} = 3,52 \text{ см}$ , экспериментально— $У_{\text{пер.}} = 3,40 \text{ см}$ .

В зоне „В“ имеем максимальное растягивающее напряжение. Эти напряжения наблюдаются на внутреннем контуре рабочей части динамометра. Величина напряжений составляет 1,5 единицы в числе полос, что соответствует напряжению на модели  $89 \text{ кг/см}^2$ , а при пересчете на натуру напряжение составляет  $390 \text{ кг/см}^2$ ; концентрация напряжений составляет  $K=3$ .

Модель № 2 (рис. 1 б). В зоне „А“ гальтель плавно сопрягается с дугой окружности, что способствует благоприятной картине распределения контурных напряжений. Изменение формы упругого элемента способствует изменению перераспределения напряжений. Максимальное напря-



Таблица



ИИМ

УрФУ

ИИМ

М. Н. Кукундзев

Р. А. Качарова

О. Е. Анджапаридзе

Г. Г. Шениава

Модель №	контур	напряжения	a/h										
			0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,10
Модель № 1	внутрен.	в модели кг/см <sup>2</sup>	89,7	82,95	54,6	42,5	22,05	-10,5	-32,5	-32,5	-31,5	-21	-18,9
		в натуре кг/см <sup>2</sup>	1640	1550	1040	810	-420	-200	-620	-620	-600	-400	-300
	внешн.	в модели кг/см <sup>2</sup>	54,6	-50,4	-37,8	-21	0	23,1	46,2	47,2	47,2	47,2	42
		в натуре кг/см <sup>2</sup>	-1040	-960	-720	-400	0	440	880	900	900	900	800
Модель № 2	внутрен.	в модели кг/см <sup>2</sup>	57,7	57,7	57,7	63	52,5	36,7	21	-2,1	-24,1	-34,6	-31,5
		в натуре кг/см <sup>2</sup>	1100	1100	1100	1200	1000	700	400	-40	-460	-1040	-600
	внешн.	в модели кг/см <sup>2</sup>	-31,5	-31,5	-31,5	-31,5	29,4	13,6	4,2	-2,1	-57,7	-86,1	-84,0
		в натуре кг/см <sup>2</sup>	-600	-600	-600	-600	560	260	80	400	-1100	-1460	-1600
Модель № 3	внутрен.	в модели кг/см <sup>2</sup>	59	59	67	64	43	-16	-13	-43	-43	-43	-43
		в натуре кг/см <sup>2</sup>	2648	268	5033	2890	1933	-722	-578	-1938	-1938	-1938	-1938
	внешн.	в модели кг/см <sup>2</sup>	-21	-45	-45	-35	-21	11	43	63	67	68	59
		в натуре кг/см <sup>2</sup>	-963	-2022	-2022	-1539	-963	481	1926	2841	3033	3081	2648



жение переместилось вверх внешней части динамометра. В этой зоне порядок полос по сравнению с моделью № 1 значительно увеличился. При увеличении нагрузки в местах сопряжения на картине полос наблюдается затемнение, что свидетельствует о высокой степени концентрации напряжений.

В зоне „В“ максимальное растягивающее напряжение наблюдается на внешнем контуре упругого элемента динамометра и составляет  $3760 \text{ кг/см}^2$ . Концентрация напряжений составляет  $K=2,5$ .

В зоне „Б“ происходит перемена знаков изгибающих моментов. В этой зоне наибольшее напряжение равно  $1,5$  полосы, что соответствует напряжению в натуре  $684 \text{ кг/см}^2$ .

Теоретически место нулевой точки, т. е. перегиба, находится на расстоянии  $U_{\text{теорет.}} = 3,52 \text{ см}$ . Экспериментально это расстояние составляет  $U_{\text{экс.}} = 3,40 \text{ см}$ .

Средняя зона рабочей части упругого элемента динамометра находится в самом выгодном состоянии. Здесь интерференционные полосы строго параллельны, что подтверждается картинами полос и изохром.

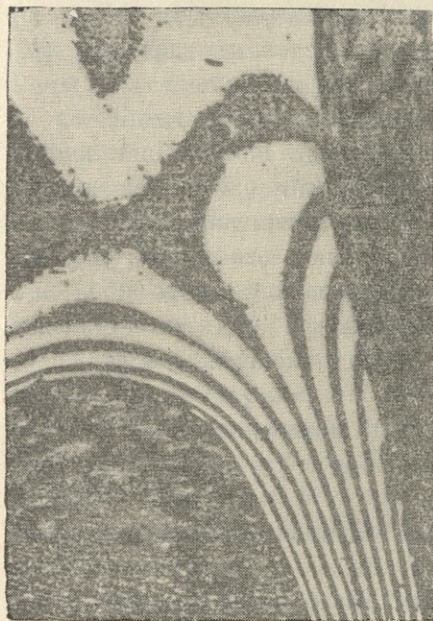


Рис. 5. Картина полос для модели № 3, зона „А“

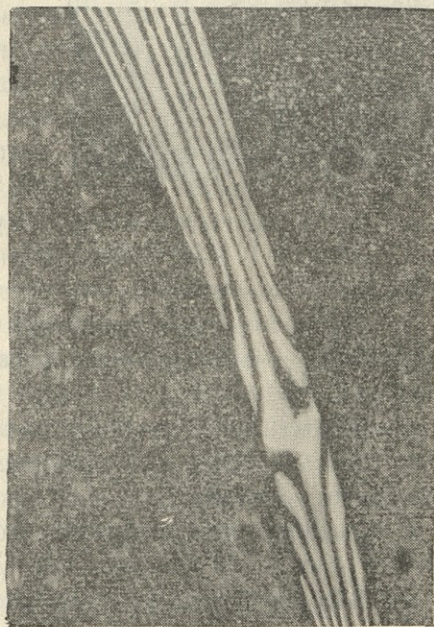


Рис. 6. Картина полос для модели № 3, зона „Б“

Это явление свидетельствует о том, что в этой зоне напряжение соответствует чистому изгибу, траектории главных напряжений остаются прямолинейными, т. е. среднюю часть элемента можно рассматривать как область постоянной изоклины, где  $Q = \text{const}$ .



Модель № 3 (рис. 1 в). Отметим, что контурное напряжение во всех участках данной модели распределено значительно равномернее, чем у двух предыдущих моделей.

Форма рабочей части модели № 3 была изменена в соответствии с контурными напряжениями, вследствие чего в этой модели концентрации контурных напряжений не наблюдаются. Из картины полос явствует, что по всей высоте упругого элемента полосы интерференции строго параллельны, что свидетельствует о том, что участок испытывает чистый изгиб. Участок в зоне „А“ как в верхней, так и нижней части модели характеризуется равномерной оптической разностью хода и составляет 4,0 единицы в числе полос (рис. 5), что соответствует напряжению на модели  $42 \text{ кг/см}^2$ , а в пересчете на натуру— $1931 \text{ кг/см}^2$ .

На контуре этой зоны концентрация напряжений не наблюдается.

В зоне „В“ происходит перемена знаков контурных напряжений.

Нейтральная линия прижимается к контурам, выступает на внешний контур и делит модель на две части. На промежуточном участке имеем напряжение одного знака. На границе этой зоны разность хода составляет 2 полосы, что соответствует напряжению в натуре  $969 \text{ кг/см}^2$ .

Расстояние точки перегиба от горизонтальной оси симметрии по формулам теорий упругости равно  $U_{\text{теорет.}} = 2,5 \text{ см}$ , экспериментально получено  $U_{\text{эксп.}} = 2,6 \text{ см}$ .

Максимальное напряжение наблюдается на внутреннем контуре зоны „В“ при  $a/h = 0,22$ , а на внешнем контуре при  $a/h = 0,8$  (рис. 7). Они равны по величине.

Величина разности хода составляет 6,5 единиц в числе полос, что соответствует при пересчете на натуру  $3129 \text{ кг/см}^2$ .

В средней части модели имеем чистый изгиб, т. е. картины полос параллельны между собой.

### Заключение

На основании проведенных исследований по выявлению закономерностей изменения напряжений в рабочей части упругого элемента динамометра в зависимости от формы можно сделать следующие выводы:

1. Изменение внешней и внутренней формы существенно влияет на



распределение нормальных напряжений по всему контуру рабочей части, что согласуется с результатами, полученными другими авторами.

2. Сопряжением дуг окружности в гальтелях нижней и верхней части моделей достигается равномерное распределение внешней интенсивности по дуге окружности, а также нормальная работа средней части динамометра.

3. Максимальные напряжения по абсолютному значению в моделях № 1 и № 2 отличаются незначительно, хотя в распределении нормальных напряжений по контуру имеется значительное расхождение.

В модели № 1, по сравнению с моделью № 2, более благоприятная картина распределения напряжений наблюдается в крайних частях внутреннего контура упругого элемента. В модели № 2 благоприятные условия работы имеются на участке чистого изгиба, в то время как в модели № 1 этот участок является самым опасным.

4. Максимальные напряжения для моделей № 1 и № 2 растягивающие; они равны по величине и достигают наибольшего значения для модели № 1 на внутреннем контуре в точках горизонтальной оси симметрии, а для модели № 2—на внешнем контуре в сечениях сопряжения с гальтелью. Эти напряжения характеризуются оптической разностью хода 8,2 единицы в числе полос, что соответствует напряжению на модели 86,1 кг/см<sup>2</sup>, а при пересчете на натуру составляет 3662 кг/см<sup>2</sup>.

5. Концентрация напряжений в модели № 2 меньше, чем в модели № 1, т. е. в модели № 2 наблюдается более равномерное распределение напряжений, хотя они малы по величине. По нашим данным, отношение максимального напряжения к минимальному для модели № 2 не превосходит 2,5, а для модели № 1 это соотношение равно 3,0.

6. Экспериментальное исследование хорошо согласуется с теоретическими расчетами в отношении определения точки перегиба.

7. Нормальные контурные напряжения в модели № 3 существенно отличаются от напряженного состояния в модели № 1 и № 2 как по абсолютному значению, так и по распределению. В модели № 3 наблюдается снижение контурных напряжений в средней части упругого элемента по сравнению с моделью № 1 на 40% и с моделью № 2—на 20%. Одновременно в модели № 3 наблюдается перераспределение нормальных напряжений по контуру.

8. Максимальные растягивающие напряжения в модели № 3 на внешнем и внутреннем контурах равны по величине и знаку.

На внешнем контуре напряжение достигает наибольшего значения при  $a/h = 0,85$ , на внутреннем контуре—при  $a/h = 0,22$ .

Эти максимальные напряжения в модели № 3 по сравнению с моделью № 1 меньше на 21%, а с моделью № 2—на 18%, т. е. видоизменением формы рабочей части упругого элемента динамометра достигается понижение максимальных напряжений в среднем на 19%.

9. В модели № 3 концентрация напряжений значительно уменьша-





ეტყ. На внешнем контуре концентрация напряжений не превосходит 1,4, а на внутреннем она не наблюдается.

В заключение отметим, что, с доведением модели до разрушения, первые затемнения обнаружены в зонах наибольшего напряжения, т. е. в точках концентрации напряжений.

С нарастанием нагрузки темнота на модели увеличивалась по сечению до появления шарнира текучести. Разрушение произошло для модели № 1 при нагрузке  $P=186$  кг, для модели № 2 при  $P=310$  кг, для модели № 3 при  $P=400$  кг.

(Представлено 10.II.1969)

Кафедра  
теоретической механики

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Исследования в области механических измерений. Труды ВНИИМ, вып. 37 (97), 1959, стр. 29
2. Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 1967, № 11, стр. 125

მ. კუკულაძე, რ. კაჭარავა,  
ო. ანჯაფარიძე, გ. შელიავა,

დინამომეტრის ახალი კონფიგურაციის დამაკადი ელემენტის დაბალური  
მდგომარეობის გამოკვლევა ფოტოდამაკადრის თეორიის  
გამოყენებით

(რეზიუმე)

ნაშრომში მოცემულია დინამომეტრის სამი ახალი კონფიგურაციის დრეკადი ელემენტი. თითოეული ელემენტისათვის აგებულია კონტურული ძაბვის ეპიურები. დატვირთვის სხვადასხვა სიდიდისათვის შესწავლილია მაქსიმალურად დაძაბული კვეთები და გადაღუნვის წერტილები. განსაზღვრულია თითოეული დრეკადი ელემენტის სიმტკიცის ზღვარი.

განსახილავი ზონებისათვის მოცემულია იზოქრომების სურათი.

ჩატარებული ანალიზის შედეგად დადგენილია დინამომეტრის ოპტიმალური ფორმის დრეკადი ელემენტი (მოდელი № 3).



## О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ШВАРЦА К ЗАДАЧЕ О СОВМЕСТНОМ ОБТЕКАНИИ ДВУХ КОНТУРОВ

Н. Н. ПАТАРАЯ

Допустим, что рассматривается обтекание двух тел, имеющих форму бесконечных цилиндров с образующими, перпендикулярными плоскости потока в безграничном по всем направлениям объеме идеальной несжимаемой жидкости.

Как известно, эту задачу можно свести к эквивалентной задаче плоскопараллельного движения цилиндров с постоянной скоростью, направленной перпендикулярно к образующим. Пусть скорость обтекающего потока в бесконечности равна  $u$  и параллельна оси  $OX$ . Если через  $\psi'(x, y)$  обозначим потенциал скорости обтекающего потока, а через  $\varphi(x, y)$  — потенциал плоскопараллельного потока жидкости, вызванного совместным движением цилиндров параллельно оси  $OX$  со скоростью  $u$  в безграничном объеме жидкости, покоящейся в бесконечности, то можем положить:

$$\varphi' = ux + \varphi.$$

При этом  $\Delta\varphi = 0$  и для предельных значений  $\varphi$  будем иметь граничные условия

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{C_1} = -u \cos nx, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{C_2} = -u \cos nx, \quad (1)$$

где  $C_1, C_2$  — контуры поперечных сечений цилиндров,  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к контурам. Если внешнюю по отношению к  $C_1$  и  $C_2$  область на плоскости  $OXY$  обозначим через  $(D)$ , внешность к  $C_1$  — через  $(D_1)$  и к  $C_2$  — через  $(D_2)$ , то можно утверждать, что потенциал  $\varphi$  будет, вообще говоря, многозначной функцией (циркуляционное обтекание).

Рассмотрим циркуляции скорости потока

$$\Gamma_1 = \oint_{C_1} v_x dx + v_y dy = \oint_{C_1} d\varphi, \quad \Gamma_2 = \oint_{C_2} v_x dx + v_y dy = \oint_{C_2} d\varphi.$$

Для комплексного потенциала  $w(z) = \varphi + i\psi$  будем иметь

$$w(z) = \sum_{k=1}^2 \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_k) + w^*(z), \quad (2)$$

где  $w^*(z)$  — регулярная однозначная в  $(D)$  функция, удовлетворяющая граничным условиям:



$$I_m \{w^*(z)\}_{C_1} = -uy - \sum_{k=1}^2 \frac{\Gamma_k}{2\pi} \ln |z - z_k| + c_1,$$

$$I_m \{w^*(z)\}_{C_2} = -uy - \sum_{k=1}^2 \frac{\Gamma_k}{2\pi} \ln |z - z_k| + c_2,$$

(3)

где  $z_k$  — афики произвольно фиксированных в  $C_k$  точек, а  $c_1, c_2$  — постоянные, одну из которых можно зафиксировать произвольно.

Поскольку  $I_m \{w^*(z)\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} w^*(z) \right\}$ , приходим к выводу, что

$\frac{1}{i} w^*(z)$  определится как решение видоизмененной задачи Дирихле с граничными условиями (3) (см. [3]).

Целью настоящей статьи является выяснение некоторых обстоятельств, связанных с применением альтернирующего метода. Метод Шварца нельзя применить к внешней задаче Дирихле, так как получающиеся при этом ряды гармонических функций расходятся, что легко объяснить поведением гармонических функций на плоскости, принимающих постоянные значения на границе области. Эти функции остаются постоянными во всей внешней области ( $D$ ), включая бесконечность.

Что касается пространства трех измерений, то, как известно, регулярные гармонические функции, принимающие на замкнутой поверхности постоянные значения, стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , что и обеспечивает сходимость знаменитого алгоритма Шварца (см. [2]).

Решение задачи Неймана, в отличие от задачи Дирихле, определяется с точностью до постоянного слагаемого. Это позволяет потребовать стремление к нулю решения при  $r \rightarrow \infty$  ( $r$  — расстояние от начала координат).

На примере внешней по отношению к двум кругам плоской области мы выведем достаточные условия равномерной сходимости рядов гармонических функций, соответствующих решению задачи Неймана по методу Шварца. Пусть во внешней по отношению к двум замкнутым аналитическим контурам  $C_1$  и  $C_2$  требуется найти однозначную регулярную гармоническую функцию, которая удовлетворяет граничным условиям:

$$\left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial n} \right)_{C_1} = f_1(M), \quad \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial n} \right)_{C_2} = f_2(M), \quad (4)$$

где  $M$  — точки контуров. От функций  $f_1$  и  $f_2$  потребуем выполнения следующих условий:

$$\oint_{C_1} f_1(M) d\sigma_1 = 0, \quad \oint_{C_2} f_2(M) d\sigma_2 = 0,$$









Рассмотрим этот вопрос в случае внешности двух кругов и выведем достаточные условия равномерной сходимости (6). Радиусы кругов обозначим через  $R_1$  и  $R_2$ , а наименьшее расстояние от центров кругов  $C_1$ ,  $C_2$  до  $C_2$  и  $C_1$ , соответственно, через  $r_1^*$  и  $r_2^*$  (см. рис. 1). Очевидно, что рас-

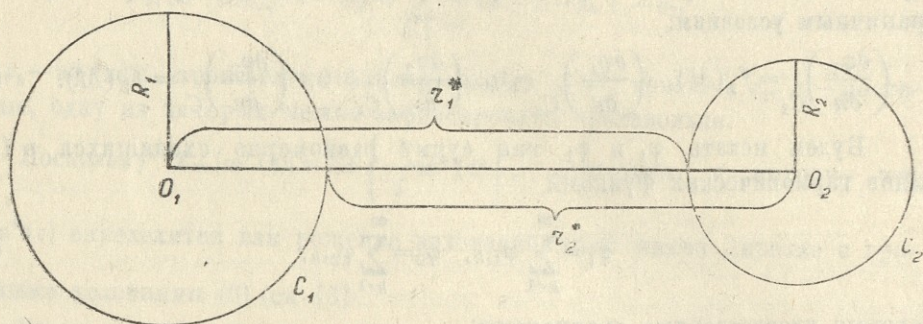


Рис. 1.

стояние между их центрами— $r_{12}$  можно выразить через  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $r_1^*$ ,  $r_2^*$  равенством:

$$r_{12} = r_1^* + R_2 = r_2^* + R_1.$$

Наибольшее из  $R_1$ ,  $R_2$  обозначим через  $R$ , а наименьшее из  $r_1^*$ ,  $r_2^*$ — через  $r^*$ .

Как известно, в рассматриваемом случае можем положить:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1} &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta_1 + b_k \sin k\theta_1) \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k, \\ \varphi_{2,1} &= \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\theta_2 + d_k \sin k\theta_2) \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^k, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $(r_1, \theta_1)$  и  $(r_2, \theta_2)$ —полярные координаты при полюсах  $O_1$  и  $O_2$ .

Коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  определяются формулами

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{R_1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\psi) \cos k\psi d\psi, & b_k &= -\frac{R_1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\psi) \sin k\psi d\psi, \\ c_k &= -\frac{R_2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\psi) \cos k\psi d\psi, & d_k &= -\frac{R_2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\psi) \sin k\psi d\psi. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим сопряженные с  $\varphi_{1,1}$  и  $\varphi_{2,1}$  гармонические функции  $\psi_{1,1}$  и  $\psi_{2,1}$ , стремящиеся к нулю в бесконечности.

Они представляются рядами

$$\psi_{1,1} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos k\theta_1 - a_k \sin k\theta_1) \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k,$$





$$\psi_{2,1} = \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \cos k\theta_2 - c_k \sin k\theta_2) \left( \frac{R_2}{r_2} \right)^k. \quad (10)$$

Регулярная гармоническая функция  $\psi_{1,2}$  в  $(D_2)$ , принимающая на окружности  $C_2$  значение, равное  $(\psi_{1,1})_{C_2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{1,1}(\theta_2) d\theta_2$ , будет стремиться к нулю в бесконечности и представится рядом

$$\psi_{1,2} = \sum_{k=1}^{\infty} (b'_k \cos k\theta_2 - a'_k \sin k\theta_2) \left( \frac{R_2}{r_2} \right)^k, \quad (11)$$

где

$$b'_k = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{1,1} \cos k\theta_2 d\theta_2, \quad a'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{1,1} \sin k\theta_2 d\theta_2.$$

Сопряженную с  $\psi_{1,2}$  гармоническую функцию  $\varphi_{1,2}$  можем написать в виде:

$$\varphi_{1,2} = \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos k\theta_2 + b'_k \sin k\theta_2) \left( \frac{R_2}{r_2} \right)^k. \quad (12)$$

Очевидно

$$\left( \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial n} \right)_{C_2} = \left( \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial \sigma} \right)_{C_2} = - \left( \frac{\partial \psi_{1,1}}{\partial \sigma} \right)_{C_2} = - \left( \frac{\partial \varphi_{1,1}}{\partial n} \right)_{C_2},$$

где  $\sigma$ —длина дуги на  $C_2$ , отсчитанная от произвольной точки.

Если  $k$ —произвольный индекс, то можно определить последовательно пару сопряженных гармонических функций в  $(D_1)$  или в  $(D_2)$ , в зависимости от четности  $k$ .

При четном  $k$  будем иметь

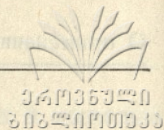
$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi_{1,k}}{\partial n} \right)_{C_2} &= - \left( \frac{\partial \varphi_{1,k-1}}{\partial n} \right)_{C_2}, \\ (\psi_{2,k})_{C_2} &= -(\psi_{1,k-1})_{C_2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{1,k-1}(\theta_2) d\theta_2, \end{aligned}$$

а при нечетном  $k$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi_{1,k}}{\partial n} \right)_{C_1} &= - \left( \frac{\partial \varphi_{1,k-1}}{\partial n} \right)_{C_1}, \\ (\psi_{1,k})_{C_1} &= -(\psi_{1,k-1})_{C_1} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{1,k-1}(\theta_1) d\theta_1. \end{aligned}$$

Они представимы следующими рядами:





$$\begin{aligned}\psi_{1,n} &= \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{(n-1)} \cos k\theta_2 - a_k^{(n-1)} \sin k\theta_2) \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^k, \\ \varphi_{1,n} &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(n-1)} \cos k\theta_2 + b_k^{(n-1)} \sin k\theta_2) \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^k\end{aligned}\quad (13)$$

при четном  $n$ , и

$$\begin{aligned}\psi_{1,n} &= \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{(n-1)} \cos k\theta_1 - a_k^{(n-1)} \sin k\theta_1) \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k, \\ \varphi_{1,n} &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(n-1)} \cos k\theta_1 + b_k^{(n-1)} \sin k\theta_1) \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k\end{aligned}\quad (13')$$

при нечетном  $n$ ,

где  $a_k^{(n-1)}$  и  $b_k^{(n-1)}$  — коэффициенты Фурье функции  $\varphi_{1,n-1}$ .

Рассматривая вопрос о сходимости рядов

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{1,k}, \quad \varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{1,k},\quad (14)$$

заметим, что коэффициенты  $a_k^{(n-1)}$  и  $b_k^{(n-1)}$  удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned}|a_k^{(n-1)}| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{1,n-1}(\theta_1)| |\cos k\theta_1| d\theta_1 \leq \\ &\leq \frac{\max |\varphi_{1,k-1}(\theta_1)| c_1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos k\theta_1| d\theta_1 = \frac{4}{\pi} \max |\varphi_{1,n-1}(\theta_1)| C_1\end{aligned}$$

при нечетном  $n$ , и

$$|a_k^{(n-1)}| \leq \frac{4}{\pi} \max |\varphi_{1,n-1}(\theta_1)| C_2$$

при четном  $n$ .

Легко также заметить, что справедлива оценка

$$|a_k^{(n-1)}| \leq \frac{4}{\pi} \max |\psi_{1,n-1}(\theta_1)|_{C_1}, \quad \text{при нечетном } n, \text{ и}$$

$$|a_k^{(n-1)}| \leq \frac{4}{\pi} \max |\psi_{1,n-1}(\theta_2)|_{C_2}, \quad \text{при четном } n.$$

Для  $|b_k^{(n-1)}|$  будем иметь такие же оценки.

Из (13) и (13') вытекают оценки

$$\begin{aligned}|\psi_{1,n}| &\leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\psi_{1,n-1}(\theta)|_{C_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^k < \\ &< \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\psi_{1,n-1}(\theta_1)|_{C_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r^*}\right)^k,\end{aligned}$$



$$|\varphi_{1,n}| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\varphi_{1,n-1}(\theta_1)| C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^k <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\varphi_{1,n-1}(\theta_1)| C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r^*}\right)^k$$

при нечетном  $n$ , и

$$|\psi_{1,n}| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\psi_{1,n-1}(\theta_2)| C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\psi_{1,n-1}(\theta_2)| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r^*}\right)^k,$$

$$|\varphi_{1,n}| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\varphi_{1,n-1}(\theta_2)| C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \max |\varphi_{1,n-1}(\theta_2)| C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r^*}\right)^k$$

при четном  $n$ .

Из этих рекуррентных соотношений непосредственно следуют оценки:

$$|\psi_{1,n}| < \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{R}{r^* - R}\right)^{n-1} \max |\psi_{1,1}|,$$

$$|\varphi_{1,n}| < \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{R}{r^* - R}\right)^{n-1} \max |\varphi_{1,1}|.$$

Отсюда следует, что общие члены рядов (14) гармонических функций меньше, чем

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{R}{r^* - R}\right)^{n-1} \max |f_1(M)|$$

и ряды будут сходиться при условии

$$\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{R}{r^* - R} < 1. \quad (15)$$

Такой же результат можно получить, рассматривая вопрос о сходимости рядов

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2,k}, \quad \psi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{2,k}.$$

Условие (15) является достаточным для сходимости альтернирующего процесса Шварца для задачи Неймана, когда областью ( $D$ ) является внешность двух кругов на плоскости.

(Представлено 27.VI 1968)

Кафедра  
механики сплошных сред



## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы анализа, Физматгиз, 1962.
2. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.
3. С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1949.
4. ბ. პატარაია, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, 48, 1953.

## ბ. პატარაია

 ორი კონტურის ერთობლივი გარსდენისათვის შვარცის მეთოდის  
 გამოყენების შესახებ

(რეზიუმე)

სტატიაში განხილულია ორი კონტურის ერთობლივი გარსდენის ამოცანა, რომლის ამოხსნა მიყვანილია დირიხლეს სახეშეცვლილი ამოცანის ამოხსნაზე. როგორც ცნობილია, შვარცის მეთოდის გამოყენება დირიხლეს ამოცანის ამოსახსნელად მრავლადბმულ გარე არეებისათვის სიბრტყეზე გვაძლევს განშლად მწკრივებს, რაც დაკავშირებულია შეკრულ კონტურზე მუდმივი მნიშვნელობის მქონე ჰარმონიული ფუნქციის მთელ არეში მუდმივობასთან.

რაც შეეხება ნეიმანის ამოცანას, სტატიაში ნაჩვენებია, რომ მეთოდის გამოყენების შესაძლებლობას განსაზღვრავს არის ზასიათი. სტატიაში გამოყვანილია საკმარისი პირობა, რომელიც განსაზღვრავს შვარცის მეთოდის გამოყენების შესაძლებლობას ორი წრიული კონტურის გარე არის შემთხვევაში სიბრტყეზე.



## ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ СЛАБОПРОВОДАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Д. В. ШАРИКАДЗЕ

Известно, что уравнения Навье-Стокса допускают точные решения в случае, когда составляющие скорости течения не зависят от координаты  $x$  в направлении, параллельном стенке [1]. В случае непроводящей жидкости для таких течений при произвольном задании внешней скорости, зависящей только от времени, в работе [2] было найдено точное решение, которое было затем исследовано Ватсоном [3].

Исходя из этого, в [4] была решена задача обтекания бесконечной изолированной пластинки, подверженной равномерному отсосу потоком вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, находящейся во внешнем поперечном магнитном поле при отсутствии электрического поля и при осциллирующем во времени по закону  $u_{\infty}(t) = u_0(1 + \varepsilon e^{i\omega t})$  скорости свободного потока.

В настоящей работе найдено точное решение задачи нестационарного течения слабопроводящей жидкости, находящейся в скрещенных электрическом и магнитном полях, для любого значения скорости свободного потока, когда слабопроводящая жидкость течет вдоль пористой плоской бесконечно протяженной пластинки, подверженной равномерному отсасыванию.

В плоскости пластинки проведем ось  $Ox$ , параллельно скорости набегающего потока, ось  $Oy$  — перпендикулярно пластинке и параллельно внешнему магнитному полю и ось  $Oz$  — противоположно направлению электрического поля.

Уравнения движения для такого течения имеют вид

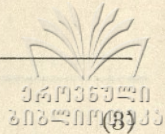
$$\frac{\partial u}{\partial t} - v_0 \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u + \frac{\sigma B_0}{\rho} E, \quad (1)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

где  $v_0$  — скорость отсасывания, а остальные обозначения общепринятые. В этих уравнениях продольный перепад давления определяется из уравнения свободного потока

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\sigma}{\rho} E B_0 + \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 u_{\infty}(t) + \frac{du_{\infty}}{dt}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим окончательно





$$\frac{\partial u}{\partial t} - v_0 \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u = \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u_\infty + \frac{du_\infty}{dt}.$$

Искомая скорость  $u(y, t)$  должна удовлетворять следующим предельным условиям:

$$u(y, 0) = u_\infty(0), \quad u(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) = u_\infty(t), \quad (4)$$

где  $u_\infty(t)$  — скорость свободного потока.

Если искать решение задачи (3)–(4) в виде

$$u(y, t) = u_\infty(t) - \varphi(y, t) e^{-\frac{v_0}{2\nu} y - M^2 t}, \quad (5)$$

то для определения функции  $\varphi(y, t)$  получим уравнение

$$\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

и следующие предельные условия

$$\varphi(y, 0) = 0, \quad \varphi(0, t) = u_\infty(t) e^{M^2 t}, \quad \varphi(\infty, t) = 0, \quad (7)$$

где  $M^2 = \frac{v_0^2}{4\nu} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho}$  — обобщенный коэффициент взаимодействия с учетом пористости.

Пользуясь теоремой Дюамеля [5], легко получить решение (6)–(7). Оно имеет вид

$$\varphi(y, t) = \int_0^t u_\infty(\tau) e^{M^2 \tau} \frac{\partial}{\partial t} F(y, t - \tau) d\tau,$$

где

$$F(y, t - \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}} e^{-\xi^2} d\xi,$$

а

$$\frac{\partial}{\partial t} F(y, t - \tau) = \frac{y}{2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)^3}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)}\right].$$

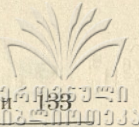
Следовательно, решение нашей задачи можно записать в следующем виде

$$u(y, t) = u_\infty(t) - e^{-\frac{v_0 y}{2\nu}} \int_0^t u_\infty(\tau) e^{-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)} - M^2(t-\tau)} \frac{y d\tau}{2\sqrt{\pi\nu(t-\tau)^3}}. \quad (8)$$

Положив  $\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} = \eta$ , получим  $t - \tau = \frac{y^2}{4\tau\eta^2}$ , и

$$u(y, t) = u_\infty(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_0}{2\nu} y} \int_0^\infty u_\infty\left(t - \frac{y^2}{4\tau\eta^2}\right) e^{-\eta^2 - \frac{M^2 y^2}{4\tau\eta^2}} d\eta. \quad (9)$$





Отсюда ясно, что наше решение удовлетворяет дифференциальному уравнению (3), а также предельным условиям (4).

Из формулы (9), в некоторых частных заданиях скорости свободного потока, легко получить соотношения, выраженные через затабулированные функции.

1. Пусть пористая пластинка обтекается с постоянной скоростью  $u_\infty(t) = u_0 = \text{const}$ . Тогда из (9) получим, что

$$u(y, t) = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_0}{2\nu} y} \int_0^\infty e^{-\eta^2 - \frac{M^2 y^2}{4\nu\eta^2}} d\eta \right\} \cdot \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Несложные выкладки, для вычисления интеграла в этой формуле, дают окончательно

$$u(y, t) = u_0 - \frac{u_0}{2} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - M\sqrt{t} \right) + \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} - \frac{M}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + M\sqrt{t} \right) \right\}. \quad (10)$$

Предельный переход  $t \rightarrow \infty$  в этой формуле дает решение соответствующей стационарной задачи:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = u_0 \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \right).$$

В формуле (10)  $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$ , где  $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha$  — функция ошибок.

Из этой же формулы легко получить выражение для силы трения при обтекании пористой пластинки с постоянной скоростью

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu u_0 \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M}{\sqrt{\nu}} \operatorname{erf} M\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}} e^{-M^2 t} \right), \quad (11)$$

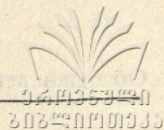
где  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости. Это выражение по величине совпадает с формулой, приведенной в работе [6], а при  $v_0 = 0$  переходит в формулу, полученную в работе [7].

2. Если скорость свободного потока — осциллирующая функция времени с частотой  $\omega$ , выраженная формулой  $u_\infty(t) = E e^{i\omega t}$ , то

$$u(y, t) = E e^{i\omega t} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M_1}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - M_1 \sqrt{t} \right] + \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} - \frac{M_1}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + M_1 \sqrt{t} \right] \right] \right\}, \quad (12)$$

где  $M_1 = \sqrt{M^2 + i\omega}$ , а  $E = \text{const}$ .





Как известно, функция ошибок с комплексным аргументом затабулирована и, таким образом, функции (11)—(12) могут быть выражены графически.

Сила трения, соответствующая (12), имеет вид

$$\tau = \mu E e^{i\omega t} \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M_1}{\sqrt{\nu}} \operatorname{erf} M_1 \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-M_1^2 t} \right). \quad (13)$$

3. Если скорость свободного потока пропорциональна времени, т. е. дается выражением  $u_\infty(t) = Kt$ , где  $K = \text{const}$ , то

$$\begin{aligned} u(y, t) = Kt - \frac{Kt}{2} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - M\sqrt{t} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} - \frac{M}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + M\sqrt{t} \right] \right\} + \\ + \frac{Ky}{4M\sqrt{\nu}} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - M\sqrt{t} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[ - \left( \frac{v_0}{2\nu} - \frac{M}{\sqrt{\nu}} \right) y \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + M\sqrt{t} \right] \right\}, \end{aligned}$$

а соответствующая сила трения выражается формулой

$$\tau = \mu Kt \left( \frac{v_0}{2\nu} + \frac{M}{\sqrt{\nu}} \operatorname{erf} M\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-M^2 t} \right) + \frac{K\mu}{2M\sqrt{\nu}} \operatorname{erf} M\sqrt{t}.$$

Из сравнения выражений сил трения (11) и (13) с выражением, полученным в упомянутой работе [7], заключаем, что сила трения при учете пористости пластинки складывается из силы трения без учета пористости с обобщенным коэффициентом взаимодействия  $M$ —если скорость свободного потока постоянна или  $M_1$ —если скорость свободного потока—осциллирующая функция и члена, обусловленного пористостью.

Эти формулы дают возможность рассчитать и теплопередачу при обтекании пористой пластинки.

(Представлено 20.VII.1970)

Кафедра  
механики сплошных сред

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, М., 1969.
2. J. T. Stuart, Proc. Roy. Soc., A 231, № 1184, 1955.
3. J. Watson, Quart. J. Mech. Appl. Math., II, 1958.
4. U. Suryarajakasaraо, ZAMM, 42, № 4—5, 1962.
5. Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, М., 1964.
6. Д. В. Шарикадзе. Сообщ. АН ГССР, 58. 2, 1970.
7. V. J. Rossow, NASA TN, № 3971, 1957.



წ. შარიშაძე

**სუსტადგამტარი სითხის არასტაციონარული მოძრაობის  
განტოლების ერთი ამოხსნის შესახებ**

(რეზიუმე)

შრომში მიღებულია ბლანტი უკუში სუსტადგამტარი სითხის არასტაციონარული მოძრაობის განტოლების ერთი ზუსტი ამოხსნა ფოროვანი ფირფიტის გარსდენის ამოცანისათვის.



## ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ, КРОМЕ ФАКТОРИЗУЮЩИХСЯ ПОТЕНЦИАЛОВ, СОДЕРЖИТ КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Г. А. ЧИЛАШВИЛИ

Как известно, для изучения рассеяния нуклонов при малых энергиях был разработан весьма полезный метод, называемый приближением эффективного радиуса. Этот метод дает возможность установления параметров потенциала взаимодействия при низких энергиях путем сравнения с экспериментальными данными.

Поскольку в современной ядерной физике пока еще не установлено строго определенного потенциала, определение параметров потенциала взаимодействия имеет решающее значение.

Ниже дается вывод формул приближений эффективного радиуса для заряженных частиц, взаимодействующих с двухчастичными нелокальными факторизующимися потенциалами, способными порождать ядерное отталкивание на малых расстояниях.

Если в случае взаимодействия протонов при низких энергиях ядерное отталкивание не играет никакой роли, этого нельзя сказать о случае  $\alpha-\alpha$  рассеяния. Хорошо известно, что  $S$ -фаза  $\alpha-\alpha$  рассеяния меняет знак при довольно низких энергиях, а это означает, что на малых расстояниях  $\alpha$ -частицы сильно отталкивают друг друга.

Следовательно, в случае  $\alpha-\alpha$  рассеяния, даже в приближении эффективного радиуса, необходимо учесть ядерное отталкивание на малых расстояниях.

Для изучения кластерного строения ядер важно знать потенциалы взаимодействия между различными кластерами, поэтому определение параметров  $\alpha-\alpha$  рассеяния имеет большое значение. Отсюда очевидна важность поставленной задачи для выяснения структуры атомных ядер.

Рассмотрим потенциал взаимодействия двух заряженных частиц следующего вида

$$V(r, r') = \lambda_1 g_1(r) g_1(r') + \lambda_2 g_2(r) g_2(r') + \frac{z_1 z_2 e^2}{r} \quad (1)$$

Первые два члена этого взаимодействия являются нелокальными факторизующимися потенциалами и в случае  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  порождают отталкивание на малых расстояниях, а третий член представляет кулоновское отталкивание двух точечных зарядов.



Можно показать, что для взаимодействия (1)  $S$ -фаза рассеяния определяется следующей формулой [1, 2]

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{2\pi}{\mu} \frac{1 + \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{22} + \lambda_1 \lambda_2 (x_{11} x_{22} - x_{12}^2)}{\lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{22} + \lambda_1 \lambda_2 (A_{11} x_{22} + A_{22} x_{11} - 2A_{12} x_{12})}, \quad (2)$$

где  $\mu$ —приведенная масса,  $k = \sqrt{2\mu E}$ —волновое число, а

$$x_{ij}(k) = \left(\frac{\mu}{\pi^2}\right) p \int_0^\infty \frac{A_{ij}(q) q^2 dq}{q^2 - k^2}. \quad (3)$$

Величины  $A_{ij}(k)$ , в приближении „обрезанного потенциала“ кулоновского поля, определяются формулой

$$A_{ij}(k) = g_i^C(k) g_j^C(k) \equiv \Theta_{ij}(k) C_0^2(\eta), \quad (4)$$

где

$$C_0^2(\eta) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad \eta = \frac{z_1 z_2 \mu e^2}{k} \quad (5)$$

и

$$g_i^C(k) = \frac{4\pi}{2ik_0} \int_0^\infty g_i(r) M_{i\eta, 1/2}(2ikr) r dr, \quad (6)$$

$M_{i\eta, 1/2}(2ikr)$ —функция Уиттекера.

Заметим, что когда во взаимодействии (1) участвует только один факторизирующийся потенциал ( $\lambda_1$  или  $\lambda_2 = 0$ ), то фаза рассеяния определяется формулой [1, 3]

$$C_0^2(\eta) k \operatorname{ctg} \delta_i = -\frac{2\pi}{\mu} \frac{1 + \lambda_i x_{ii}(k)}{\lambda_i [g_i^C(k)]^2}, \quad (i=1, 2). \quad (7)$$

Учитывая формулу (7), выражение (2) можно представить в следующем виде

$$k C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta = \frac{[k C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta_1][k C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta_2] - Z_{12}^2(k)}{k C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta_1 + k C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta_2 + 2Z_{12}(k)}, \quad (8)$$

где

$$Z_{12}(k) = \frac{1}{(\Theta_{11} \Theta_{22})^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{\mu}\right) x_{12}(k). \quad (9)$$

В частном случае, когда отсутствует кулоновское поле, из выражения (8) получаются формулы, выведенные в работе [4]. Формула (8) важна в том отношении, что фаза полного рассеяния  $\delta$  вычисляется с помощью отдельных  $\delta_1$ - и  $\delta_2$ -фаз.

Рассмотрим частный случай, когда  $g_i(k)$  функция имеет форму потенциала Юкавы:  $g_i(k) = (\beta_i^2 + k^2)^{-1}$ , где  $\beta_i^{-1}$ —радиус ядерного взаимодействия.

Так как в случае потенциала Юкавы [1]:

$$g_i^C(k) = C_0(\eta) g_i(k) e^{2\eta \operatorname{arctg} \frac{k}{\beta_i}}, \quad (10)$$



то

$$x_{12}(k) = \frac{\mu}{\pi^2} p \int_0^\infty \frac{C_0^2(\eta, q) \exp \left[ 2\eta \left( \arctg \frac{q}{\beta_1} + \arctg \frac{q}{\beta_2} \right) \right] q^2 dq}{(\beta_1^2 + q^2)(\beta_2^2 + q^2)(q^2 - k^2)}. \quad (11)$$

Эти формулы заметно упрощаются в приближении, когда  $\mu z_1 z_2 e^2 / \beta_i \ll 1$ . В этом случае, входящие в  $x_{12}(k)$  экспоненты можно разложить в ряд, в результате чего получим

$$x_{12}(k) = \frac{\mu}{2\pi R} g_1(k) g_2(k) H(k, \eta), \quad (12)$$

где

$$H(k, \eta) = h(\eta) + \Omega(\beta_1, \beta_2; k^2) - \Omega(\beta_2, \beta_1; k^2), \quad (13)$$

$$\Omega(\beta_1, \beta_2; k^2) = \frac{\beta_1^2 + k^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \left[ \omega(\beta_2) + \ln \frac{2\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)}} \right] \quad (14)$$

и

$$\omega(\beta_i) = \frac{1}{\varepsilon_i} + \gamma + \ln \frac{\varepsilon_i}{2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2z_1 z_2 e^2 \mu}{\beta_i} = \frac{1}{\beta_i R}. \quad (15)$$

В этих формулах  $\gamma = 0,5772\dots$  — постоянная Эйлера, а  $h(\eta)$  — известная функция, которая определяется формулой

$$h(\eta) = \eta^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu^2 + \eta^2)} - \ln \eta - \gamma. \quad (16)$$

С помощью формулы (7) можно определить длину рассеяния  $a_i$  и эффективный радиус  $r_i$  в том случае, когда взаимодействие частиц, кроме ядерного факторизующегося потенциала в форме Юкавы, содержит кулоновский потенциал. Эти формулы имеют следующий вид [1, 3]:

$$-\frac{1}{a_i} = -\frac{1}{a_0} \left( 1 - \frac{2}{\beta_i R} \right) - \frac{1}{R} \left( \gamma + \ln \frac{2}{\beta_i R} \right), \quad (17)$$

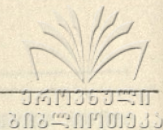
$$\frac{1}{2} r_i = \frac{1}{2} r_0 \left[ 1 - \frac{2}{\beta_i R} \right] + \frac{1}{\beta_i^2 R} \left[ 1 - \frac{2}{3\beta_i a_0} \right], \quad (18)$$

где  $a_0$  — длина рассеяния,  $r_0$  — эффективный радиус в отсутствии кулоновского поля [5]

$$-a_0^{-1} = -\frac{2\pi\beta^4}{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\beta, \quad \frac{1}{2} r_0 = -\frac{4\pi\beta^2}{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\beta. \quad (19)$$

Введем теперь аналогичные формулы в приближении эффективного радиуса в случае взаимодействия (1). Введем так называемую  $K(k)$  функцию, которая применяется в теории эффективного радиуса при наличии кулоновского поля [6]. Эту функцию для случая, когда наряду с кулоновским взаимодействием имеется один ядерный потенциал, обозначим через  $K_i(k)$ ; она имеет следующий вид:





$$K_i(k) = \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta_i}{e^{2\pi\eta} - 1} + h(\eta). \quad (20)$$

Для вычисления полного рассеяния используем  $K(k)$  функцию без индексов. При этом из формулы (8) получим:

$$K(k, \eta) = f(k^2, \eta) + h(\eta), \quad (21)$$

где

$$f(k^2, \eta) = \frac{\xi_1 \xi_2 - [RZ_{12}(k)]^2}{\xi_1 + \xi_2 + 2RZ_{12}(k)} \equiv \frac{M(k, \eta)}{N(k, \eta)}, \quad (22)$$

а

$$\xi_i(k, \eta) = K_i(k, \eta) - h(\eta) = kRC_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta_i. \quad (23)$$

Хорошо известно, что длина рассеяния и эффективный радиус с  $K(k)$  функцией связаны следующим образом:

$$\frac{K}{R} = -\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{2} r\right) k^2 - (pr^3) k^4 + \dots \quad (24)$$

Учитывая, что при малых энергиях функция

$$h(\eta) = \frac{1}{3} R^2 K^2 + \frac{2}{15} k^4 R^4 + \dots$$

будем иметь

$$\frac{K}{R} = f(0) + k^2 f'_{k^2}(0) + \frac{k^4}{2!} f''_{k^2}(0) + \dots + \frac{1}{3} k^2 R^2 + \frac{2}{15} k^4 R^4 + \dots, \quad (25)$$

откуда окончательно получим

$$-\frac{R}{a} = f(0), \quad \frac{R}{2} r = \frac{1}{3} R^2 + f'_{k^2}(0), \quad -R(pr^3) = \frac{2}{15} R^4 + \frac{1}{2} f''_{k^2}(0). \quad (26)$$

Так как  $\xi_i(0) = K_i(0) - h(\infty) = K_i(0)$ , то  $\xi_i(0) = -\frac{R}{a_i}$  и для нахождения  $f(0)$ , согласно формуле (22), достаточно найти  $Z'_{12}(0)$ . Применяя формулы (9) и (12), получим

$$RZ_{12}(0) = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)[\Omega(\beta_1, \beta_2; 0) - \Omega(\beta_2, \beta_1; 0)]. \quad (27)$$

Таким образом, функция  $f(0)$  найдена и, следовательно, можно найти  $-\frac{R}{a}$ .

Для нахождения эффективного радиуса  $r$  необходимо найти  $f'_{k^2}(0)$ .

Ясно, что

$$N(0) f'_{k^2}(0) = M'_{k^2}(0) - f(0) N'_{k^2}(0), \quad (28)$$

где

$$M'_{k^2}(0) = \xi'_1(0) \xi_2(0) - \xi_1(0) \xi'_2(0) - 2R^2 Z'_{12}(0) Z'_{12}(0) \quad (29)$$



$$N'_{k^2}(0) = \xi'_1(0) + \xi'_2(0) + 2RZ'_{12}(0). \quad (30)$$

Поскольку  $\xi_i(0) = -R/a_i$  и

$$\xi_i = K_i - h(\eta) = -\frac{R}{a_i} + \frac{R}{2} r_i k^2 + \dots - \frac{1}{12\eta^2} + \dots, \quad (31)$$

поэтому

$$\left(\frac{d\xi_i}{dk^2}\right)_{k^2=0} = \frac{1}{2} R r_i - \frac{1}{3} R. \quad (32)$$

При этом

$$RZ'_{12}(0) = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) \left[ \frac{H(0)}{3R} \left( \frac{1}{\beta_1^3} + \frac{1}{\beta_2^3} \right) + H'_{k^2}(0) \right], \quad (33)$$

где

$$H'_{k^2}(0) = \frac{1}{3} R - \frac{R}{\beta_1 + \beta_2} - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\beta_1^2\beta_2^2}. \quad (34)$$

Таким образом, мы нашли величину  $f'_{k^2}(0)$  и, следовательно, можем определить как эффективный радиус, так и длину рассеяния; найдя выражение  $f'_{k^2}(0)$ , можно найти и  $-(pr^3)$ .

Полученные формулы могут быть использованы для изучения взаимодействия заряженных частиц при низких энергиях.

(Представлено 17.IV.1970)

Кафедра  
теоретической физики

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. R. Harrington, Phys. Rev., 139, B 691, 1965.
2. Ф. Ткебучава, Г. Чилашвили, ЯФ, 7, 1968, стр. 794.
3. О. Г. Ситенко, О. В. Дробаченко, УФН, 8, 1963, стр. 5.
4. L. S. Schick, J. H. Hetherington, Phys. Rev., 156, 1967, стр. 1602.
5. Y. Yamaguchi, Phys. Rev., 95, 1954, стр. 1628.
6. Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский, ЖЭТФ, 14, 1944, стр. 269.

ბ. ზილახვილი

ეფექტური რადიუსის მიახლოების ფორმულები, როცა უკითხვითაა  
გადასახილველი კვლევების, ფიზიკის  
კვლევების კონტრინატი

(რეზიუმე)

შრომში განიხილება ეფექტური რადიუსის მიახლოება იმ შემთხვევაში, როცა ურთიერთქმედება კვლევით ველთან ერთად შეიცავს არალოკალურ ფაქტორებს პოტენციალებს. განიხილია ის შემთხვევა, როდესაც ბირთვული ურთიერთქმედება, რომელიც აღებულია ფაქტორებსა და სხვა, შედგება





ქართული

ბა ორი წევრისაგან. ერთი შეესაბამება მიზიდვის ურთიერთქმედებას, მეორე კი — განზიდვისა. ბირთვული ურთიერთქმედების ასეთი კომბინაცია, როგორც ცნობილია, საშუალებას იძლევა მცირე მანძილებზე განზიდვის ურთიერთქმედების ჩართვისა.

გამოყვანილია ზოგადი ფორმულები ეფექტური რადიუსისა და გაფანტვის სიგრძისათვის. მიღებული ფორმულების გამოყენება შეიძლება დამუხტული ნაწილაკებისათვის, რომელთაც გარდა კულონური ურთიერთქმედებისა ატომ-ბირთვული ურთიერთქმედებაც ახასიათებთ.

(88) 
$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \right]^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(89) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(90) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(91) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(92) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(93) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(94) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(95) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(96) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(97) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(98) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(99) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$

(100) 
$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1 v_2}{c^2} \right)$$



## ახალი საბადოების ბენტონიტური თიხების შესწავლისათვის

ლ. ჰელიძე

ბენტონიტური თიხები თავისი სპეციფიკური თვისებების გამო ფართო გამოყენებას პოულობენ სახალხო მეურნეობის მრავალ დარგში. ამიტომ მათ ძიებას და ფიზიკურ-ქიმიური თვისებების შესწავლას დიდი ყურადღება ექცევა, განსაკუთრებით ამ უკანასკნელ 2—3 ათეული წლის განმავლობაში.

ქუთაისის მახლობლად სოფ. გუმბრისა და მახარაძის რაიონის სოფ. ასკანის ბენტონიტური თიხები ამჟამად ფართოდ არიან გამოყენებული სხვადასხვა დანიშნულებით და მოთხოვნილება ამ თიხებზე ყოველწლიურად იზრდება.

საქართველოს სსრ მდიდარია ბენტონიტური თიხების საბადოებით, მაგრამ მათი უმრავლესობა ჯერ კიდევ შეუსწავლელია. ახალი საბადოების ბენტონიტური თიხების შესწავლას როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. ბენტონიტური თიხების გავრცელების მხრივ საინტერესოა წყალტუბოს რაიონი, სადაც უკვე ფართოდ ცნობილი სოფ. გუმბრის საბადოების გარდა მოიპოვება სხვა მნიშვნელოვანი საბადოები [1, 2].

მნიშვნელოვანია აგრეთვე ტყიბულის, ამბროლაურის რაიონის, სამეგრელოს ზოგიერთი რაიონის სხვა საბადოების ბენტონიტური თიხები, რომელთა ფიზიკურ-ქიმიური თვისებები გამოკვლეულ იქნა სხვადასხვა მეთოდების [3, 4, 5, 6] გამოყენებით.

ამჯერად გამოსაკვლევად აღებულ იქნა მაიაკოვსკის და ვანის რაიონის საბადოების ბენტონიტური თიხები სოფ. კიროვიდან, ამაღლებიდან, ტობანიერიდან და ფერსათიდან. შედარებისათვის გამოყენებული იყო გუმბრინი.

ბენტონიტური თიხებისათვის დამახასიათებელ სპეციფიკურ თვისებებს მიაწერენ მათს შემადგენლობაში თიხოვანი მინერალის—მონტმორილონიტის შემცველობას. ამ მინერალის არსებობას ბენტონიტურ თიხებში არკვევენ სხვა მეთოდებთან ერთად ფერადი რეაქციებით ბენზიდინთან [3].

ჩვენს მიერ გამოსაკვლევად აღებული ყველა ნიმუში იძლევა მონტმორილონიტისათვის დამახასიათებელ შეფერვას, რის მიხედვით შეიძლება დავასკვნათ, რომ მეტნაკლები რაოდენობით ისინი შეიცავენ ამ თიხოვან მინერალს. შეფერილობის ინტენსივობით პირველ რიგში აღსანიშნავია გუმბრინი, შემდეგ კიროვის, ამაღლების, ტობანიერისა და ბოლოს ფერსათის თიხები.

ბენტონიტური თიხების კვლევის საქმეში ამჟამად ფართო გამოყენება ჰპოვა თერმულმა ანალიზმა [6, 7]. მისი საშუალებით შეიძლება შესწავლილ იქნას ამა თუ იმ მინერალში გარდაქმნის პროცესები, რომელსაც ადვილი აქვს მათი გახურებისას.





თერმული ანალიზის შედეგად დადგენილია, რომ მინერალ მონტმორილონიტის მრუდს ახასიათებს სამი ენდოთერმული და ერთი ეგზოთერმული შეჩერება, რაც ამ მინერალში მიმდინარე პროცესების მაჩვენებელია.

პირველი ენდოთერმული ეფექტის დროს მონტმორილონიტი კარგავს არამქტიცედ დაკავშირებულ—ჰიგროსკოპულ წყალს, რომელიც 100—200° ფარგლებში მიმდინარეობს.

მეორე ენდოთერმული ეფექტი უფრო დამახასიათებელია მონტმორილონიტისათვის, იგი დაახლოვებით 550—760° შორის მუდგენდება და უბასუხებს კრისტალიზაციური წყლის გამოყოფას.

მესამე ენდოთერმულ ეფექტს ადგილი აქვს შედარებით მაღალ ტემპერატურაზე (800—900°), რომლის დროს ხდება კრისტალური ცხურის დაშლა.

უფრო მაღალ ტემპერატურაზე (1000°C) ადგილი აქვს ეგზოთერმულ ეფექტს, რომლის დროს ხდება ამ მინერალის გარდაქმნა.

საკვლევად აღებული ბენტონიტური თიხების თერმომრუდეების დახასიათება მოცემულია 1-ელ ცხრილში.

ცხრილი 1

თიხის საბადოს დასახელება	ენდოთერმული შეჩერებები °C			ეგზოთერმული შეჩერებები °C
	I	II	III	
გუმბრინი	160	570	870	970
კიროვი	155	580	860	950
ამალღება	150	550	880	960
ტობანიერი	153	560	790	955
ფერსათი	145	555	—	970

როგორც საკვლევად აღებული ბენტონიტური თიხების თერმული ანალიზი გვიჩვენებს, ყველა მათგანს ახასიათებს მონტმორილონიტისათვის დამახასიათებელი შეჩერებები, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ მათ შემადგენლობაში მეტ-ნაკლები რაოდენობით შედის ეს მინერალი.

აღსანიშნავია, რომ ბენტონიტური თიხების ქიმიურად შედგენილობა ცვალებადია არა მარტო სხვადასხვა საბადოების მიხედვით, არამედ ერთი და იგივე საბადოს სხვადასხვა ადგილზე. მაგრამ ქიმიური შედგენილობის მიხედვით შეიძლება წარმოდგენა ვიქონიოთ მათში შემავალი მთავარი თიხოვანი მინერალის—მონტმორილონიტის შესახებ, რომელსაც განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს თიხის დახასიათებისათვის [8].

ჩვენს მიერ გამოსაკვლევად აღებული თიხების ნიმუშების ქიმიური ანალიზის შედეგები მოცემულია მე-2 ცხრილში.

თიხის ყველა ნიმუშისათვის შეფარდება  $\frac{SiO_2}{R_2O_3}$  3-ს აღემატება, რაც მათ შედგენილობაში მინერალ მონტმორილონიტის არსებობაზე მიუთითებს.

როგორც ქიმიური ანალიზი გვიჩვენებს, საკვლევად აღებული თიხის ნიმუშები, ისე როგორც გუმბრინი, მიეკუთვნებიან ალუმოსილიკატებს, რომლე-



ლებიც დაახლოებით წყლის ერთნაირ რაოდენობასთან არაან დაკავშირებული. ქიმიური ანალიზის მონაცემების მიხედვით შეიძლება თიხის კომპონენტების შეფარდებისა და მის საფუძველზე საკვლევი თიხის ტიპის დადგენა.

ცხრილი 2

კომპონენტი	თიხის შედგენილობა %-ით				
	გუმბრინი	კიროვი	ამალღება	ტობანიერი	ფერსათი
SiO <sub>2</sub>	58,14	52,08	51,20	54,20	50,40
TiO <sub>2</sub>	0,25	0,28	0,50	0,40	0,55
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	13,23	17,20	18,40	17,50	19,45
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2,58	4,45	4,60	4,60	3,80
FeO	0,28	0,41	0,33	0,45	0,35
MoO	კვალი	კვალი	კვალი	კვალი	კვალი
MgO	2,24	2,28	2,76	2,80	2,90
CaO	2,44	2,75	1,85	1,70	1,96
Na <sub>2</sub> O	1,73	0,78	0,55	0,44	0,43
K <sub>2</sub> O	0,78	0,35	0,24	0,28	0,26
SO <sub>3</sub>	0,35	0,32	0,56	0,46	0,52
H <sub>2</sub> O	14,77	14,28	13,86	12,29	14,50
დ. გ. მ.	3,27	5,93	5,36	5,08	4,18

ამგვარად, როგორც ფერადი რეაქციები ბენზიდინთან, ისე თერმული და ქიმიური ანალიზის შედეგები ადასტურებს, რომ აღებული თიხის ნიმუშებში მთავარი მინერალია მონტმორილონიტი. თიხების აქტივობის შემოწმებისათვის მთავარი მინერალია მონტმორილონიტი. თიხების აქტივობის შემოწმებისათვის მთავარი მინერალია მონტმორილონიტი. თიხების აქტივობის შემოწმებისათვის მთავარი მინერალია მონტმორილონიტი.

გარკვეული მნიშვნელობა აქვს დამოკიდებულებას წყალთან, რომელსაც მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს ბენტონიტური თიხების შედგენილობაში.

ცნობილია, რომ შედარებით დაბალ ტემპერატურაზე (100—250°C) ბენტონიტური თიხები კარგავენ წყლის მნიშვნელოვან რაოდენობას, რის მიხედვით შეიძლება შეფასდეს თიხის აქტივობა.

ჩვენს მიერ აღებული ნიმუშების შეწოვა-გაჯირჯვების პროცესი შესწავლილი იქნა ე. კისტერის [5] ხელსაწყოთი, როგორც ჰაერზე მშრალი ნიმუშებისათვის, ისე მათი თერმული აქტივაციის (100—259°C) შემდეგ.

შეწოვა-გაჯირჯვების პროცესის შედეგები მოცემულია მე-3 ცხრილში.

ცხრილი 3

თიხის საბადოს დასახელება	თიხის წონა გრ.	გაჯირჯვების გარემო	ჰაერზე მშრალი თიხები		105°		150°		200° გახურების შემდეგ	
			შთანთქმული სითხე მლ-ით	გაჯირჯვების დრო წამ-ებით	შთანთქმული სითხე მლ-ით	გაჯირჯვების დრო წამ-ებით	შთანთქმული სითხე მლ-ით	გაჯირჯვების დრო წამ-ებით	შთანთქმული სითხე მლ-ით	გაჯირჯვების დრო წამ-ებით
გუმბრინი	0,5	წყალი	0,55	16	0,62	14	0,75	15	0,80	13
კიროვი	0,5	"	0,50	25	0,57	15	0,70	15	0,75	17
ამალღება	0,5	"	0,43	53	0,45	23	0,61	22	0,65	20
ტობანიერი	0,5	"	0,46	28	0,46	20	0,60	19	0,63	18
ფერსათი	0,5	"	0,42	35	0,44	30	0,62	39	0,45	35



როგორც ჩატარებული ცდების შედეგები გვიჩვენებს, აღებული თიხების წინასწარი თერმული აქტივაცია აჩქარებს შეწოვა-გაჯირჯეების პროცესს. აქტივობის მიხედვით გამოირჩევა გუმბრინი, შემდეგ კი თიხები კიროვიდან, ამალეებიდან, ტობანიერიდან და ბოლოს ფერსათიდან.

საკვლევად აღებული ბენტონიტური თიხების გამაუფერულებელი უნარის დასადგენად გამოყენებული იქნა სხვადასხვა ნავთობის ხსნარები სუფთა ნავთში. ამასთანავე თიხის ნიმუშების აქტივობა შემოწმებული იქნა როგორც ჰაერზე მშრალ მდგომარეობაში, ისე მათი წინასწარი თერმული აქტივაციის შემდეგ.

გაუფერულების ეფექტი მოწმდებოდა კოლორიმეტრულად, გაუფერულებული ხსნარის ფერის შედარებით გასაუფერულებლად აღებული ხსნარის ფერისადმი. თიხა აღებული იყო 2 გ-ის, გასაუფერულებელი ხსნარი კი 30 მლ-ის რაოდენობით.

გასაუფერულებლად აღებული იყო სურახანის ნავთობის ხსნარი სუფთა ნავთში. ცდის შედეგები მოცემულია მე-4 ცხრილში.

ცხრილი 4

თიხის საბადოს დასახელება	გაუფერულების ფაქტორი °C				
	ჰაერზე მშრალი ნიმუშებისათვის	100	150	200	250
გუმბრინი	1,54	1,60	1,74	2,01	1,90
კიროვი	1,50	1,55	1,65	1,90	1,80
ამალეება	1,45	1,50	1,60	1,80	1,70
ტობანიერი	1,40	1,45	1,55	1,70	1,65
ფერსათი	1,30	1,40	1,50	1,60	1,55

როგორც გაუფერულების ფაქტორი გვიჩვენებს, გაუფერულების ეფექტი იზრდება 200°C-მდე; 250°C-ზე კი იწყება შემცირება, მაშასადამე, გაუფერულების ოპტიმალური ტემპერატურა მათ შორის მდებარეობს.

გაუფერულების მიზნით შემოწმებული იქნა აგრეთვე სუფსის საბადოს ნავთობის ხსნარი სუფთა ნავთში. ცდების შედეგები მოცემულია თანდართულ მე-5 ცხრილში.

ცხრილი 5

თიხის საბადოს დასახელება	გაუფერულების ფაქტორი °C				
	ჰაერზე მშრალი ნიმუშებისათვის	105	150	200	250
გუმბრინი	1,6	2,2	3,0	3,5	3,2
კიროვი	1,4	2,0	2,9	3,2	3,0
ამალეება	1,3	1,7	1,8	2,1	1,9
ტობანიერი	1,2	1,5	1,6	1,9	1,7
ფერსათი	1,1	1,3	1,5	1,6	1,5

როგორც ცდების შედეგებიდან ჩანს, გაუფერულების ეფექტი მნიშვნელოვნად იზრდება თიხების თერმული აქტივაციის შემდეგ. გაუფერულების



ეფექტის ზრდა ხდება დაახლოებით  $200-250^{\circ}\text{C}$  ინტერვალში. აღნიშნული ტემპერატურის ზევით გაუფერულების ეფექტი მცირდება, ამიტომ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ გაუფერულების ოპტიმალური ტემპერატურა  $225^{\circ}\text{C}$ -ს ახლოს მდებარეობს. სუფსის ნავთობის ხსნარის გაუფერულების ეფექტის მიხედვით, აღსანიშნავია გუმბრინი, შემდეგ კიროვის, ამაღლების, ტობანიერისა და ფერსათის თიხები.

გამოსაკვლევად აღებული ბენტონიტური თიხების გამათეთრებელი აქტივობა შემოწმებული იქნა აგრეთვე საცხენისის საბადოს ნავთობის ხსნარით სუფთა ნავთში; ჩატარებული ცდების შედეგები მოცემულია თანდართულ მე-6 ცხრილში.

ცხრილი 6

თიხის საბადოს დასახელება	გაუფერულების ფაქტორი $^{\circ}\text{C}$				
	ჰაერზე მშრალი ნიმუშებისათვის	105	150	200	250
გუმბრინი	2,1	2,2	2,4	2,6	2,5
კიროვი	1,9	2,0	2,2	2,4	2,2
ამაღლება	1,7	1,9	2,0	2,2	2,0
ტობანიერი	1,4	1,7	1,8	1,9	1,7
ფერსათი	1,2	1,5	1,7	1,7	1,5

გაუფერულების აქტივობის მიხედვით აქაც პირველ რიგში დგას გუმბრინი, შემდეგ კიროვის, ამაღლების, ტობანიერის და ფერსათის თიხები.

გამოყენებული მანქანის ზეთის გასუფთავებას—რეგენერაციას დიდი მნიშვნელობა აქვს, ამიტომ ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა ცდები მისი გაუფერულების ეფექტის დასადგენად. ბენტონიტური თიხები აღებული იყო როგორც ბუნებრივ, ისე თერმული გააქტივების შემდეგ. გაუფერულება ყველა შემთხვევაში მოწმდებოდა კონტაქტური მეთოდით. ცდის შედეგები მოცემულია მე-7 ცხრილში.

ცხრილი 7

თიხის საბადოს დასახელება	გაუფერულების ფაქტორი $^{\circ}\text{C}$				
	ჰაერზე მშრალი ნიმუშებისათვის	105	150	200	250
გუმბრინი	2,0	2,5	3,5	3,7	3,6
კიროვი	1,8	2,1	3,0	3,2	3,1
ამაღლება	1,7	1,9	2,5	2,8	2,6
ტობანიერი	1,5	1,8	1,9	2,0	1,9
ფერსათი	1,4	1,6	1,8	1,9	1,8

ჰაერზე მშრალი ბენტონიტური თიხების აქტივობა საკმაოდ მაღალია, მაგრამ თიხების თერმული აქტივაცია მნიშვნელოვნად ზრდის მათ გამაუფერულებელ ეფექტს, რომელიც მაქსიმუმს აღწევს  $200-250^{\circ}\text{C}$ -ის ინტერვალში. აქტიურობის მიხედვით გუმბრინის შემდეგ გამოირჩევა კიროვის, შემდეგ ამაღლების, ტობანიერისა და ფერსათის თიხები.



## დასკვნები

1. ფერალი რეაქციებით ბენზიდინთან, თერმული და ქიმიური ანალიზებით დადგენილია, რომ გამოსაკვლევად აღებული ბენტონიტური თიხები ეკუთვნიან ბუნებრივად აქტიურ მონტომორილონიტურ თიხებს.
2. წყლის გარემოში შეწოვა-გაჯირჯვების პროცესის შესწავლა გვიჩვენებს, რომ ეს პროცესი მნიშვნელოვნად ჩქარდება თიხების წინასწარ თერმული აქტივაციის (105—250°C) შედეგად.
3. ხსნარების გაუფერულების უნარით თიხების შესწავლილი ნიმუშები, უახლოვდებიან გუმბრინს.
4. თერმული აქტივაციის შედეგად გაუფერულების უნარი საგრძნობლად იზრდება დაახლოვებით 225—250°C-მდე, რაც ამ თიხების გამაუფერულებელი უნარის ოპტიმალურ ტემპერატურად უნდა მივიჩნიოთ.
5. გამოკვლეული თიხების ყველა მონაცემი მიუთითებს მასზე, რომ ისინი შეიძლება გამოყენებულ იქნან ნავთობისა და სხვა პროდუქტების გასაწმენდად.

(წარმოდგენილია 1. II. 1968)

არაორგანული  
ქიმიის კათედრა

## ლიტერატურა

1. М. Л. Рожва, Л. А. Челидзе, Труды Кутаисского госпединститута, X, 1950, стр. 153.
2. ლ. ა. ჭელიძე, ქუთაისის სახ. პედინსტიტუტის შრომები, XII, 1954, გვ. 310; XIV, 1955, გვ. 294.
3. Н. Е. Веденеева, ЖФХ, XXI, 1947, стр. 19.
4. Г. Г. Уразов, Сб. „Отбеливающие земли СССР“, 1933, стр. 221.
5. Э. Г. Кистер, „Нефтяное хозяйство“, № 12, 1947, стр. 23.
6. Н. И. Горбунов, И. Г. Цюрюпа, Е. А. Шурьгина, Рентгенограммы, термограммы и кривые обезвоживания минералов, встречающихся в почвах и глинах, АН СССР, 1952, стр. 71.
7. Л. Г. Берг, А. В. Николаев, Е. А. Роде, Термография, 1944, стр. 115.
8. Природные ресурсы Грузинской ССР, АН СССР, II, 1959, стр. 79.

Л. А. ЧЕЛИДЗЕ

### ИССЛЕДОВАНИЕ БЕНТОНИТОВЫХ ГЛИН НОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

(Резюме)

В последнее время большое внимание уделяется использованию природных сорбентов в разных областях народного хозяйства.

Среди них значительное место занимают бентонитовые глины. Таими глинами богата Грузинская ССР, где в настоящее время известно около 200 проявлений.



Из них хорошо исследованы Гумбрийское и Асканское месторождения, глины которых широко используются в народном хозяйстве. Исследование бентонитовых глин новых месторождений имеет как теоретическое, так и практическое значение.

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых физико-химических свойств бентонитовых глин Ванского и Маяковского районов (сел. Киров, Амаглеба, Тобаниери и Персати) в сравнении с гумбрином. Цветные реакции с бензидином, термический и химический анализы указывают на то, что исследованные глины, подобно гумбрину, относятся к монтмориллонитовым глинам, которые могут быть использованы как природные адсорбенты.

Исследование отбеливающих свойств бентонитовых глин показывает, что после гумбрина активностью выделяются глины из сел. Киров, Амаглеба, Тобаниери. Установлено, что термическая активизация повышает обесцвечивающие свойства. Оптимальная температура активизации лежит около 225°C.



## ნატრიუმის არსენატების მიღება ოზონის გამოყენებით

ბ. ჯოხაძე, მ. შუშლავა, ნ. გურბენიძე

უკანასკნელ დროს დარიშხანმა და მისმა ნაერთებმა დიდი გამოყენება ჰპოვა სახალხო მეურნეობის მრავალ დარგში [1], ამიტომ დღის წესრიგში დგას როგორც დარიშხანმჟავას, ისე მისი მარილების მიღების რაციონალური მეთოდების შემუშავების საკითხი [2]. თხევად ფაზაში სამვალენტოვანი დარიშხანის დაჟანგვის არსებული მეთოდებიდან შედარებით უკეთ არის დამუშავებული აზოტმჟავათი [3] და წყალბადის ზეჟანგით დაჟანგვის მეთოდები [4]. მართალია, ეს მეთოდები წარმოებაში დანერგულია, მაგრამ მათი გამოყენება დიდ ტექნიკურ სიძნელებებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ ხსენებულ პროცესთა გაადვილების მიზნით წარმოებული მუშაობა, რა თქმა უნდა, აქტუალობას მოკლებული არ იქნება. ამ მხრივ გარკვეული მუშაობა ჩაატარა ევლოკიმოვმა [5], რომელიც სამვალენტოვანი დარიშხანის ნაერთების დასაჟანგად იყენებდა ჰაერის ჟანგბადს კატალიზატორის თანაობისას. ევლოკიმოვისაგან განსხვავებით ჩვენ მიზნად დავისახეთ შეგვესწავლა თხევად ფაზაში სამვალენტოვანი დარიშხანის ოზონით დაჟანგვის პროცესი და დაგვედგინა ნატრიუმის არსენატების მიღების შესაძლებლობა.

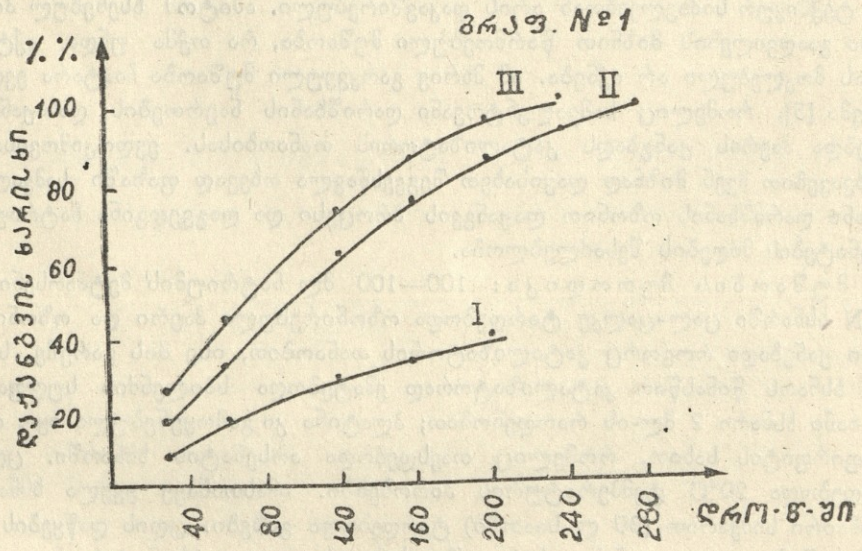
მუშაობის მეთოდიკა: 100—100 მლ ნატრიუმის მეტაარსენიტის 0,4 N ხსნარში ცალ-ცალკე ტარდებოდა ოზონირებული ჰაერი და ოზონირებული ჟანგბადი როგორც კატალიზატორის თანაობით, ისე მის გარეშე. საკვლევ ხსნარს წინასწარ კატალიზატორად ემატებოდა სპილენძის სულფატის 1%-იანი ხსნარი 2 მლ-ის რაოდენობით; პლატინა კი გამოყენებული იყო თხელი ფირფიტის სახით, რომელიც თავსდებოდა არსენატის ხსნარში. ცდები ტარდებოდა 20°C ტემპერატურის პირობებში. ამასთანავე ყველა ხსნარში ერთნაირი სიჩქარით (30 ლ საათში) ტარდებოდა გაზები. ცდის დაწყების წინ და მის შემდეგ ყოველ ნახევარ საათში ვსაზღვრავდით არსენიტის რაოდენობას და ამით ვადგენდით დაჟანგვის ხარისხს.

ცდების შედეგები მოცემულია № 1 ცხრილში და გამოსახულია გრაფიკულად (ნახ. 1). № 1 გრაფიკზე I მრუდი ასახავს ხსნარში ოზონირებული ჰაერის გატარების დროსა და დაჟანგვის ხარისხის დამოკიდებულებას კატალიზატორის გარეშე, II მრუდი ასახავს იგივეს კატალიზატორ  $\text{CuSO}_4$ -ის, ხოლო III—Pt-ის გამოყენებით. № 2 გრაფიკზე I მრუდი ასახავს ხსნარში ოზონირებული ჟანგბადის გატარების დროსა და დაჟანგვის ხარისხის დამოკიდებულებას კატალიზატორის გარეშე, II ასახავს იგივეს  $\text{CuSO}_4$ -ის, ხოლო III—Pt-ის გამოყენებით.





№№	ოზონირებული ჰაერის ტარების დრო წუთებით	კატალიზატორი	დაქანგვის ხარისხი %%-ით	№	ოზონირებული ჟანგბადის ტარების დრო წუთებით	კატალიზატორი	დაქანგვის ხარისხი %%-ით
1	0	—	0,0	17	0,0	—	0,0
2	30	—	10,0	18	50	—	10,7
3	60	—	17,5	19	60	—	18,6
4	90	—	25,2	20	90	—	26,2
5	180	—	35,6	21	180	—	37,0
6	210	—	37,5	22	210	—	40,5
7	30	CuSO <sub>4</sub>	20	23	50	CuSO <sub>4</sub>	25,0
8	60	"	32,5	24	60	"	45,0
9	180	"	77,7	25	180	"	91,5
10	240	"	92,5	26	210	"	99,0
11	270	"	100	27	240	"	100
12	30	Pt	25	28	30	Pt	30,0
13	60	"	40	29	60	"	55,0
14	180	"	87,5	30	90	"	70,8
15	210	"	94,0	31	120	"	90,6
16	240	"	100	32	150	"	100



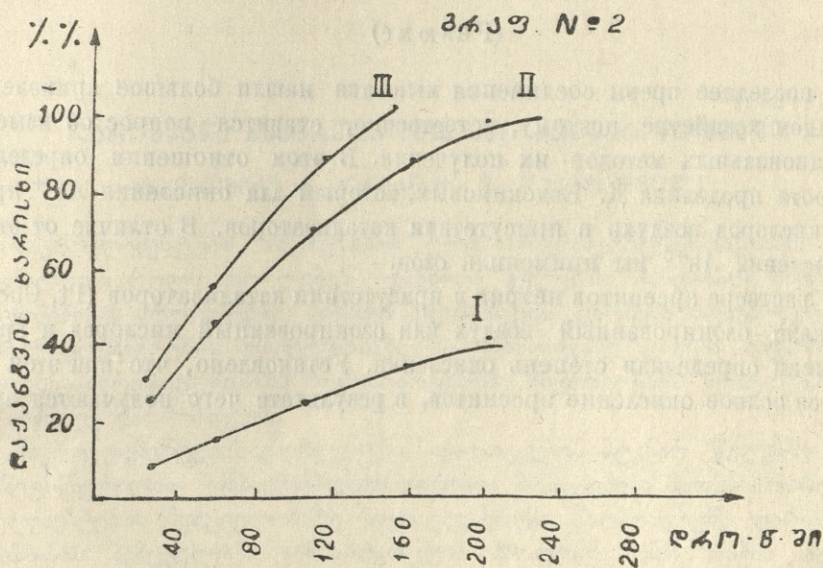
ნახ. 1.

როგორც ცხრილიდან და გრაფიკებიდან ჩანს, ოზონირებული ჰაერისა და ჟანგბადის გამოყენების შემთხვევაში კატალიზატორების CuSO<sub>4</sub>-ის და Pt-ის თანაობისას არსენიტი სრულად იქანგება 3—5 საათის განმავლობაში.

როგორც მოსალოდნელი იყო, ოზონირებული ჟანგბადით დაქანგვა უფრო სწრაფად ხდება, ვიდრე ოზონირებული ჰაერით. ამასთანავე დაქანგვა Pt-ის თანაობისას ცოტათი უფრო სწრაფად მიდის, ვიდრე CuSO<sub>4</sub>-ის თანაობისას. რაც შეეხება უკატალიზატორო დაქანგვას, იგი ნელა მიდის და სრულ დაქანგვას დიდი დრო სჭირდება, ამიტომ იგი წარმოებისათვის მიუღებელი იქნება.



ნატრიუმის მეტაარსენიტის სრული დაჟანგვის შედეგად მიღებული ნივთიერების ანალიზით დასტურდება, რომ იგი წარმოადგენს  $\text{NaAsO}_3$ -ს, ხოლო ორთოარსენიტის დაჟანგვის პროდუქტი არის  $\text{Na}_2\text{HAsO}_4$ .



ნახ. 2.

### დასკვნები

შესწავლილია ნატრიუმის არსენიტებზე ოზონირებული ჰაერის და ოზონირებული ჟანგბადის მოქმედება  $20^\circ\text{C}$  დროს როგორც კატალიზატორის, ისე მისი გამოყენების გარეშე. დადგენილია, რომ ნატრიუმის არსენიტების ხსნარში ოზონირებული ჰაერის ან ოზონირებული ჟანგბადის ტარებისას ადგილი აქვს დაჟანგვას, რომელიც მნიშვნელოვნად ჩქარდება კატალიზატორის ( $\text{CuSO}_4$  ან  $\text{Pt}$ ) გამოყენებისას.

ნატრიუმის არსენიტების დაჟანგვის პროდუქტების ანალიზიდან ირკვევა, რომ მეტაარსენიტის დაჟანგვის შედეგად მიიღება მეტაარსენატი— $\text{NaAsO}_3$ , ხოლო ორთოარსენიტის დაჟანგვის შედეგად—ჰიდროარსენატი— $\text{Na}_2\text{HAsO}_4$ .

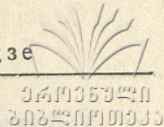
(წარმოდგენილია 28.IV.1970)

არაორგანული ქიმიის კათედრა

### ლიტერატურა

1. ა. გეგენავა, სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, X, 1965, გვ. 613.
2. Д. Фрир, Химия инсектицидов и фунгицидов, 1948.
3. М. Г. Габриелова, Производство ядохимикатов, 1953.
4. Т. Г. Плаченнов, ЖОХ, 26, 1956, стр. 2014.
5. П. С. Мамыкин, ЖНХ, 2, 1953, стр. 76.





Г. М. ДЖОХАДЗЕ, М. М. УГУЛАВА, Н. И. ГУРГЕНИДЗЕ

**ПОЛУЧЕНИЕ АРСЕНАТОВ НАТРИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ  
ОЗОНА**

(Резюме)

В последнее время соединения мышьяка нашли большое применение в народном хозяйстве, поэтому, естественно, ставится вопрос об изыскании рациональных методов их получения. В этом отношении определенная работа проделана Д. Евдокимовым, который для окисления  $As^{3+}$  предлагает кислород воздуха в присутствии катализаторов. В отличие от этого для окисления  $As^{+3}$  мы применили озон.

В растворе арсенитов натрия в присутствии катализаторов ( $Pt$ ,  $CuSO_4$ ) пропускали озонированный воздух или озонированный кислород и время от времени определяли степень окисления. Установлено, что при этом достигается полное окисление арсенитов, в результате чего получаются арсенаты.





## ღარიშხანი საქართველოს სსრ მტკნარ წყლებში

ბ. ჯონხაძე, ნ. კარსანიძე, ბ. სუპატაშვილი

მიკროელემენტები, მიუხედავად ულტრამიკროკონცენტრაციისა, მეტად მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ბუნებრივ წყლებში მიმდინარე ბიოქიმიურ და გეოქიმიურ პროცესებში. ამასთან დღეისათვის ცნობები ბუნებრივ წყლებში მიკროელემენტების შემცველობაზე და დინამიკაზე ცოტაა. ინფორმაციის სიღარიბის ძირითად მიზეზს მიკრორაოდენობა ნივთიერების ზუსტი განსაზღვრის სიძნელე წარმოადგენს.

მიკროელემენტების გავრცელება საქართველოს მტკნარ წყლებში თითქმის შეუსწავლელია. განსაკუთრებით ღარიბია მონაცემები მათში ანიონოგენუზი ელემენტების შემცველობაზე. ასეთ ელემენტს წარმოადგენს ღარიშხანიც. ღარიშხანის შემცველობა განსაზღვრულია მხოლოდ ზემო რაჭის მტკნარი წყლის რამდენიმე სინჯში [1]; ეს, ცხადია, არაა საკმარისი ამ თვალთახედვით ისეთი რთული გეოლოგიური აგებულებისა და პიდრორესურსებით მდიდარი მხარის დასახსიათებლად, როგორც საქართველოა.

1965—68 წლებში ჩვენ შევისწავლეთ ღარიშხანის გავრცელება საქართველოს სსრ ატმოსფერულ ნალექებში, მდინარეებში, წყალსაცავებსა და ტბებში (სულ 57 სინჯი). სინჯები ძირითადად აღებულია ზაფხულში. ანალიზამდე მათ ვინახავდით პოლიეთილენის ჭურჭელში. საანალიზოდ ვიღებდით 2—4 ლ. წყალს, რომელსაც კვარცის ჭიქებში წინასწარ აორთქლებით ვაკონცენტრირებდით. კონცენტრატში ღარიშხანი განსაზღვრულია კოლორიმეტრული მეთოდით [2].

მიღებული შედეგები მოტანილია 1—2 ცხრილებში.

ცხრილი 1

ღარიშხანის შემცველობა ატმოსფერულ ნალექებში

სინჯის აღების ადგილი	სინჯის აღების დრო	pH	მინერალიზაცია მგ/ლ	წყლის ინდექსი	მკგ/ლ.
ქობულეთი	ზაფხული, 1968	6,62	9,3	ClS <sub>Ca</sub>	0,0
ხეივანი	ზაფხული, 1964	6,00	9,1	S <sub>Mg</sub>	0,8
ქუთაისი	ზამთარი, 1960	4,7	7,3	S <sub>NaCa</sub>	1,5
რუისპირი	ზაფხული, 1966	6,41	12,5	Cl <sub>Ca</sub>	1,4
რუისპირი	გაზაფხული, 1968	6,64	16,5	Cl <sub>Ca</sub>	2,0
რუისპირი	ზაფხული, 1967	6,70	13,5	CS <sub>Ca</sub>	1,0
					1,1





ქართული  
საბუნების  
მეცნიერებათა  
აკადემია

დარიშხანის საშუალო შემცველობა საქართველოს ატმოსფერულ ჰაერში 1,1 მკგ/ლ-ს შეადგენს. დაახლოებით ასეთივე შედეგი მიიღო ფელენბერგმა ნალექებისათვის (2 მკგ/ლ) [3].

ატმოსფერულ ნალექებს საქართველოს თითოეულ კვ. კმ-ზე ყოველწლიურად მიაქვთ 1—2 კგ დარიშხანი. მიუხედავად სიმცირისა, ნალექების მიერ მოტანილმა დარიშხანმა შეიძლება საგრძნობი როლი შეასრულოს ზედაპირული წყლების და ნიადაგების ქიმიური შედგენილობის ფორმირებაში.

ატმოსფერულ ნალექებში დარიშხანი შეიძლება მოხვდეს ტერიგენული აეროზოლებისა და ქვანახშირის წვის პროდუქტების გამოტუტვით [3]. ატმოსფეროს დარიშხანით გაჭუჭყიანების ანტროპოგენური წყარო იმდენად ძლიერია, რომ შეიძლება მისი კონცენტრაცია სამრეწველო ცენტრის მახლობელ ნიადაგებშიც გაიზარდოს [4].

მდინარეებში, ტბებში და წყალსაცავებში დარიშხანის შემცველობა 0,0-დან 12,5 მკგ/ლ-მდე იცვლება და საშუალოდ 4,0 მკგ/ლ-ს შეადგენს (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

დარიშხანის შემცველობა საქართველოს ზედაპირულ მტკნარ წყლებში

ობიექტი-პუნქტი	სინჯვის აღების თარიღი	pH	მინერალი- ზაცია მგ/ლ	წყლის ინდექსი	მკგ/ლ
1	2	3	4	5	6
<b>აღმოსავლეთ საქართველო</b>					
მტკვარი—ვარძია	15.8.65	7,70	309,1	C <sup>Na</sup>	5,0
მტკვარი—სოლანლული	10.8.65	7,80	547,0	C <sup>Na</sup>	2,5
არაგვი—ქინვალი	8.8.65	7,90	290,2	C <sup>Ca</sup>	5,0
ქსანი—ქსანი	16.8.65	7,80	492,1	C <sup>Na</sup>	1,2
იორი—თიანეთი	6.8.66	7,90	219,5	C <sup>Ca</sup>	2,5
იორი—სიონი	7.8.66	8,30	228,2	C <sup>Ca</sup>	0,0
სიონის წყალსაცავი (საშ. 8 სინჯიდან)	1966—67	8,12	214,8	C <sup>Ca</sup>	2,7
თბილისის ზღვა	11.4.66	8,00	314,9	C <sup>Ca</sup>	2,5
					2,7
<b>მდ. რიონის აუზი</b>					
რიონი—უწერა [1]	—	—	—	—	14,0
რიონი—ამბროლაური [1]	—	—	—	—	4,0
რიონი—ყოჩეთი	18.7.67	7,95	145,0	C <sup>Ca</sup>	4,3
რიონი—ქუთაისი	27.7.67	8,05	165,0	C <sup>Ca</sup>	4,0
რიონი—ფოთი	24.7.67	8,05	185,4	C <sup>Ca</sup>	0,0
ქანჭხი—საგლოლო	22.7.67	8,10	126,7	C <sup>Ca</sup>	5,0
წყარო—ზუღალი	19.7.67	8,10	243,3	C <sup>Ca</sup>	1,2
ლუხუმი—წესი	18.7.67	8,10	141,4	C <sup>Ca</sup>	5,4
რიცეულა—შესართავი	18.7.67	8,00	61,1	C <sup>Ca</sup>	2,5
ლაჯანური—ლაჯანა	22.7.67	8,00	77,8	C <sup>Ca</sup>	7,5
ყვირილა—ვარციხე	28.7.67	8,00	166,0	C <sup>Ca</sup>	0,0
ხანისწყალი—ვარციხე	27.7.67	7,90	109,1	C <sup>Ca</sup>	8,7



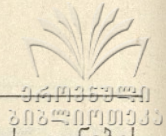
1	2	3	4	5	6
საკრაულა—საირმე	27.7.67	8,00	85,1	C <sub>Ca</sub>	5,0
კორისწყალი—როხი	25.7.67	7,90	102,4	C <sub>Ca</sub>	5,5
ნოდელა—შესართავი	24.7.67	7,90	244,1	C <sub>Ca</sub>	2,5
აბაშა—შესართავი	24.7.67	8,20	213,9	C <sub>Ca</sub>	6,2
<b>მდ. ცხენისწყლის აუზი</b>					4,7
ცხენისწყალი—ლენტეხი	22.7.67	8,05	173,0	C <sub>Ca</sub>	7,5
ცხენისწყალი—სამტრედია	24.7.67	7,95	179,0	C <sub>Ca</sub>	2,5
კვერეშურა—ზეფი	22.7.67	8,20	226,7	C <sub>Ca</sub>	8,0
<b>აფხაზეთის ასსრ</b>					6,0
რებრა—გაგრა	10.8.68	8,35	185,6	C <sub>Ca</sub>	6,2
ბზიფი—ბზიფი	10.8.68	8,00	155,8	C <sub>Ca</sub>	3,7
იუბშარა—შესართავი	15.8.68	8,15	61,2	C <sub>Ca</sub>	8,3
გეგა—შესართავი	10.8.68	8,30	142,0	C <sub>Ca</sub>	2,5
ლაშობსი—რიწის ტბა	11.8.68	7,75	67,4	C <sub>Ca</sub>	6,5
მიჩიში—შესართავი	10.8.68	8,20	217,1	C <sub>Ca</sub>	1,4
ხიტსთა—შესართავი	10.8.68	8,40	194,9	C <sub>Ca</sub>	4,3
კელასური—კელასური	17.8.68	8,05	100,5	C <sub>Ca</sub>	5,0
კოდორი—ჩხალთა	18.8.68	8,20	52,0	C <sub>Ca</sub>	3,5
კოდორი—შესართავი	19.8.68	8,10	85,7	C <sub>Ca</sub>	6,2
ჩხალთა—ჩხალთა	18.8.68	8,05	53,3	C <sub>Ca</sub>	2,5
მოქეი—შესართავი	19.8.68	8,20	182,1	C <sub>Ca</sub>	3,5
ღალიძგა—შესართავი	19.5.68	8,20	165,4	C <sub>Ca</sub>	12,5
ენგური—ანაკლია	20.8.68	8,20	138,0	C <sub>Ca</sub>	5,0
რიწის ტბა—(სათავე)	12.8.68	7,80	57,4	C <sub>Ca</sub>	3,7
რიწის ტბა—(ცენტრი)	13.8.68	7,90	55,1	C <sub>Ca</sub>	2,5
ამტყელის ტბა—ნაპირი	18.8.68	7,95	70,4	C <sub>Ca</sub>	1,2
დიდი ბებესირი—ცენტრი	20.8.68	7,85	214,0	C <sub>Ca</sub>	3,5
					4,6

დარიშხანის შემცველობით სხვადასხვა რაიონის წყლები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. დარიშხანი შედარებით მაღალი კონცენტრაციით გვხვდება მდ. ცხენისწყლის აუზის (6,0 მკგ/ლ), მდ. რიონის აუზის ზემონაწილისა (5,5 მკგ/ლ) და აფხაზეთის ასსრ (5,1 მკგ/ლ) ზედაპირულ წყლებში. აღმოსავლეთ საქართველოს ზედაპირულ წყლებში დარიშხანის შემცველობა დაახლოებით 1,8-ჯერ მცირეა, ვიდრე დასავლეთ საქართველოს წყლებში.

ასევე მცირეა დარიშხანის შემცველობა მდ. ყუბანსა და დონში (0,17—2,0 მკგ/ლ) [5].

როგორც ცნობილია, მდ. ცხენისწყლისა და რიონის აუზებში, აგრეთვე აფხაზეთის ასსრ ტერიტორიაზე ხშირად გვხვდება დარიშხანის გამაღნებები [6]. როგორც ჩვენი მონაცემებიდან ჩანს, იმავე რაიონების წყლებშია აწეული დარიშხანის შემცველობაც. ამრიგად, თუ რომელიმე რაიონის ზედაპირულ წყლებში დარიშხანის შემცველობა > 3 მკგ/ლ უნდა ვივარაუდოთ იმ რაიონში დარიშხანის საბადოს არსებობა.





მე-2 ცხრილში მოტანილი მონაცემებიდან ჩანს, რომ მდინარის დინების მიმართულებით დარიშხანის შემცველობა კლებულობს (მდ. მტკვარი, იორი, რიონი, ცხენისწყალი). ანალოგიურია დარიშხანის განაწილება წყალსაცავებში და გამდინარე ტბებში: სიონის წყალსაცავისა და რიწის ტბის ზემო ნაწილში მისი შემცველობა მეტია, ვიდრე ქვემოთ.

წყალსატევებში დარიშხანის ასეთი განაწილების მიზეზი უნდა ვეძიოთ შემდეგში: მდინარის დინების ზემო ნაწილში მექანიკური ეროზიის პროდუქტების გამოტუტვის შედეგად წყალში გადადის დარიშხანის მნიშვნელოვანი რაოდენობა. ამ რაიონის მდინარეებში დარიშხანის მნიშვნელოვანი რაოდენობა შეაქვთ მინერალურ წყლებსაც [1]. დინების მიმართულებით მდინარის წყალში მექანიკური ეროზიის პროდუქტების რაოდენობა თანდათან კლებულობს, წყალი ზავდება დარიშხანით ღარიბი ატმოსფერული ნალექებითა და ზედაპირული ნაკადებით. ამის გარდა მდინარის წყალში დინების მიმართულებით დარიშხანის შემცველობის შემცირებას აპირობებს წყლიდან მექანიკური მინარეების, კოლოიდებისა და ფსევდოკოლოიდების გამოლექვა. სედიმენტაციის პროცესში ეს ნაწილაკები მნიშვნელოვანი რაოდენობით წარიტაცებენ მიკროელემენტებს, მათ შორის დარიშხანსაც [7]. ამიტომ უნდა ვივარაუდოთ, რომ დარიშხანის შემცველობა მდინარის შლამში მეტი იქნება, ვიდრე ქანებში და ნიადაგებში.

ზედაპირულ წყლებში დარიშხანის შემცველობასა და pH შორის მეტად სუსტი პირდაპირი კავშირია, ხოლო დარიშხანის შემცველობასა და მინერალიზაციას შორის კი სუსტი არაპირდაპირი კავშირია (ცხრილი 3).

ცხრილი 3

ზედაპირულ წყლებში დარიშხანის შემცველობის კავშირი წყლის მინერალიზაციასთან და pH-თან

მინერალიზაცია მგ/ლ	სინჯის რაოდენობა	As მკგ/ლ	pH	სინჯის რაოდენობა	As მკგ/ლ
≤150	18	4,9	≤8,0	20	3,8
>150≤200	9	4,4	>8≤8,1	9	4,1
>200≤250	10	3,3	>8,1	13	4,0
>250	5	3,2			

არაპირდაპირი კავშირი ზედაპირულ წყლებში დარიშხანის შემცველობასა და მინერალიზაციას შორის ლოგიკურია. როგორც ზემოთ ვნახეთ, მდინარის დინების მიმართულებით დარიშხანის შემცველობა კლებულობს, მინერალიზაცია კი—იზრდება

**დასკვნები**

1. დარიშხანის შემცველობა საქართველოს სსრ მტკნარ ზედაპირულ წყლებში საშუალოდ 4,0 მკგ/ლ-ს შეადგენს (ექსტრემუმი 0—12,5 მკგ/ლ).
2. დარიშხანის შემცველობა საქართველოს ატმოსფერულ ნალექებში 1,1 მკგ/ლ-ის ტოლია. ყოველწლიურად ატმოსფერულ ნალექებს ნიადაგებში შეაქვთ 1—2 კგ/კმ<sup>2</sup>-ზე დარიშხანი.



3. დარიშხანის შემცველობა გაზრდილია იმ რაიონის წყლებში, სადაც გვხვდება დარიშხანის საბადოები.

4. დარიშხანის შემცველობა მდინარის წყლებში დინების მიმართულებით ცემა. ამის ერთ-ერთი მიზეზია წყლიდან მექანიკური მინარევეებისა და კოლოიდების გამოლექვა, რომელზედაც აღსორბირებულია დარიშხანი.

(წარმოდგენილია 28.1.1969)

ანალიზური ქიმიის კათედრა

### ლიტერატურა

1. ი. მოსეშვილი, გ. ჯოხაძე, თსუ შრომები, 80, 1961
2. გ. ჯოხაძე, ქუთაისის სახ. სამ. ინსტიტუტის შრომები, 2, 1957, გვ. 411.
3. Th. Fellenberg. Biochem. Zeitschrift, 218, 300, 1930.
4. გ. ჯოხაძე, თსუ შრომები, 126, 1968, გვ. 15—18.
5. А. А. Зенин, Г. С. Коновалов, Гидрохимические материалы, 20, 1953, стр. 18.
6. Природные ресурсы Грузинской ССР, АН СССР, I, 1958.
7. А. П. Виноградов, Введение в геохимию океана, „Наука“, 1967.

Г. М. ДЖОХАДЗЕ, Н. К. КАРСАНИДЗЕ Г. Д. СУПАТАШВИЛИ

### МЫШЬЯК В ПРЕСНЫХ ВОДАХ ГРУЗИНСКОЙ ССР

(Резюме)

Нами изучено содержание мышьяка в атмосферных осадках (6 проб) и поверхностных пресных водах (50 проб) Грузинской ССР.

В атмосферных осадках среднее содержание мышьяка оказалось 1,1 мг/л (экстремумы 0,0—2,0 мг/л), в поверхностных водах—4,0 мг/л (экстремумы 0,0—12,5 мг/л).

В районах с мышьяковыми проявлениями содержание мышьяка в поверхностных водах резко увеличено.

По течению реки содержание мышьяка уменьшается ввиду соосаждения с механическими взвесями и коллоидами.



**მიკროელემენტების განსაზღვრა ბუნებრივ წყლებში. ცნობა 1.**  
**Pb<sup>2+</sup>, Cu<sup>2+</sup>, Ni<sup>2+</sup> და Zn<sup>2+</sup> ექსტრაქციულ-ფოტომეტრიული მეთოდით**  
**განსაზღვრა წყლის ერთი სინჯიდან**

გ. სუკატაშვილი, ნ. კაკსანიძე

ბუნებრივ წყლებში მიკროელემენტების განსაზღვრა მრავალ სირთულესთანაა დაკავშირებული, რაც გამოწვეულია მათი დაბალი კონცენტრაციით, განსაზღვრის მეთოდების არასათანადო მგრძობიარობით და არასპეციფიკურობით. ამიტომ ჩვეულებრივ წყლებში მიკროელემენტების განსაზღვრისათვის მიმართავენ მათ კონცენტრირებას 0,5—1,0 ლ სინჯიდან, ურთიერთდაცილებას ან შენიღბვას. ცხადია, სინჯისა და დროის ეკონომისათვის მიზანშეწონილია ერთი სინჯიდან რამდენიმე მიკროელემენტის განსაზღვრა. თუ მხედველობაში არ მივიღებთ სპექტრალურ მეთოდს, ჩვეულებრივ წყლის ერთ სინჯში ისაზღვრება 2—3 მიკროელემენტი [1, 2, 3].

ჩვენ მიზანს შეადგენდა დავკემუშავებინა წყლის ერთი სინჯიდან რამდენიმე მიკროელემენტის (Pb, Cu, Ni, Zn) ექსტრაქციულ-ფოტომეტრიული მეთოდით განსაზღვრის სქემა.

მიკროელემენტების კონცენტრირება სინჯის ამოშრობით ან თანდალექვით არ გამოვადგა, რადგან მაკრო- და მიკროელემენტების თანაფარდობა კონცენტრატში არახელსაყრელი აღმოჩნდა ანალიზისათვის. ამიტომ მივმართეთ ექსტრაქციის მეთოდს, რომელიც გარდა იმისა, რომ ნაკლებ შრომატევადი და სწრაფია, საშუალებას იძლევა განსასაზღვრავი ელემენტები დავაცილოთ ზოგიერთ ხელშემშლელ იონს. ბუნებრივი წყლებიდან მიკროელემენტების კონცენტრირება ექსტრაქციით კარგადაა შესწავლილი [4—7], ამიტომ მხოლოდ არსებული მეთოდების შემოწმებით დავკამყოფილდით. ჩვენთვის ექსტრაგენტად მიზანშეწონილი გამოდგა დითიზონი და დიეთილდითიოკარბამატი. მათში კი უპირატესობა პირველს უნდა მივანიჭოთ, რადგან ექსტრაქტის ფერით ადვილია ექსტრაქციის დამთავრების დადგენა, ამასთან დითიზონატების მინერალიზირება კარბამინატებზე ადვილი აღმოჩნდა. დამატებით წყლის სინჯი შეიძლება გამოვიყენოთ იმ ელემენტების განსაზღვრისათვის, რომლებიც დითიზონით არ ექსტრაგირდებიან (Mo, Mn, Fe, Al, Ti და სხვ.).

ექსტრაქციისათვის ოპტიმალური pH 7,5—8,0. 0,5 ლ სინჯიდან მიკროელემენტების სრული კონცენტრირებისათვის საკმარისია 3-ჯერადი ექსტრაქცია 10—10 მლ დითიზონის 0,003—0,005% ხსნარით ქლოროფორმში ან ბენზოლში. სერიული განსაზღვრებისას ექსტრაქცია უმჯობესია ჩავატაროთ მექანიკურ სარეველიან გამყოფ ძაბრში [8].



წინასწარ, ორგანული კომპლექსების დასაშლელად, წყალი უნდა შემჟავდეს  $\text{HNO}_3$  და წამოდულდეს. ამ დროს ზოგიერთი ელემენტი ( $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Sn}^{2+}$ ) იჟანგება და აღარ ექსტრაგირდება დითიზონით [6].

განსასაზღვრავ ელემენტებთან ერთად დითიზონით ექსტრაგირდება სხვა კათიონებიც ( $\text{Ag}^+$ ,  $\text{Au}^{3+}$ ,  $\text{Hg}^{2+}$ ,  $\text{Bi}^{3+}$ ,  $\text{Cd}^{2+}$ ,  $\text{Co}^{2+}$ ), რომლებიც ხელს უშლიან ტყვიის განსაზღვრას. ამიტომ კონც.  $\text{H}_2\text{SO}_4$  თანაობისას დითიზონატების მინერალიზაციის შემდეგ მიღებული ნაშთიდან  $\text{PbCrO}_4$  სახით გამოვყოფთ ტყვიას. დადგენილ იქნა, რომ მინერალიზებისას მიკროელემენტების აქროლება არ ხდება და 3—5 მლ 3% ამონიუმის აცეტატის ხსნარში 1—50 მკგ ტყვია რაოდენობრივად ილექება მატარებლის ( $\text{BaCrO}_4$ ) თანაობისას და მის გარეშეც. ამასთან პრაქტიკულად ადგილი არ აქვს სხვა მიკროელემენტების დალექვას ან თანდალექვას ( $\text{PbCrO}_4$ -თან შეიძლება დაილექოს  $\text{Hg}^{2+} > 10$  მკგ,  $\text{Ag}^+ > 30$  მკგ;  $\text{Zn}^{2+}$  და  $\text{Cu}^{2+} > 150$  მკგ, და ა. შ.). ჩვეულებრივ აღნიშნული მიკროელემენტები ასეთი რაოდენობით წყლებში არ გვხვდება, ამასთან  $\text{Hg}^{2+}$  აქროლდება დითიზონატების მინერალიზირებისას.

თუ  $\text{Pb} > 5—10$  მკგ იგი შეიძლება განისაზღვროს მარტივი ფოტოტურბიდიმეტრიული მეთოდით  $\text{PbS}$ —სახით.  $\text{PbS}$  სუსპენზიის ოპტიკური სიმკვრივე, თუ  $\text{Pb} < 100$  მკგ მდგრადია დროში, ემორჩილება ბერის კანონს და ამასთან არაა დამოკიდებული ხსნარის იონური ძალისაგან, რომელიც პრაქტიკულად მუდმივია. სუსპენზიის ოპტიკური სიმკვრივე მკვეთრად დამოკიდებულია ტემპერატურაზე, რომელიც განსაზღვრისას მუდმივი უნდა იყოს.

თუ ტყვიის რაოდენობა მცირეა, იგი უნდა განისაზღვროს დითიზონით. მეთოდი ლიტერატურაში კარგადაა აღწერილი [5, 6]. ჩვენ მხოლოდ ქლოროფორში შევცვალეთ ნაკლებ დეფიციტური ბენზოლით.

$\text{PbCrO}_4$  გამოყოფის შემდეგ ხსნარში ტყვიის დიეთილდითიოკარბამატით საზღვრავენ  $\text{Cu}^{2+}$  [1, 5, 7]. კოლესნიკოვას მიერ [1] დადგენილია, რომ ამ შემთხვევაში ოპტიმალურია pH 5,5.  $\text{Cu}^{2+}$  ერთად ორგანულ ფაზაში გადავა  $\text{Ag}^+$ ,  $\text{Au}^{3+}$  და  $\text{Bi}^{3+}$  [7]. მათი გავლენა პრაქტიკულად გამორიცხებულია, რადგან მხოლოდ Bi კარბამატია სუსტად შეფერილი, ამასთან მისი შთანთქმის მაქსიმუმი (370 მმკ) განსხვავდება სპილენძის კარბამატისაგან (440 მმკ [5, 7]) დამატებით აღნიშნავთ, რომ წყლებში  $\text{Cu}^{2+} \gg \text{Bi}^{3+}$ .

ტყვიის კარბამატით  $\text{Ni}^{2+}$  არ ექსტრაგირდება [7], ამიტომ სპილენძის შემდეგ წყალხსნარში შეიძლება  $\text{Ni}^{2+}$  განსაზღვრა. სხვა კათიონებიდან იგი გამოიყოფა დიმეთილგლიოქსიმატის სახით [5, 7]. ამასთან ერთად ქლოროფორმით შეიძლება ექსტრაგირდეს მხოლოდ  $\text{Co}^{2+}$  თუ ის  $> 10$  მკგ. რადგან ნიკელის შემცველობა წყლებში მცირეა და ის დაცილებულია ხელშემშლელი იონებისაგან, მისი განსაზღვრა უმჯობესია მგრძნობიარე, თუმცა არასპეციფიკური რეაქტივით—ფორმალდოქსიმით. ნიკელის ფორმალდოქსიმატის შთანთქმის მოლური კოეფიციენტი  $\epsilon = 18400$  [10], დიმეთილგლიოქსიმატისა კი—11600 [5]. ნიკელი შეიძლება განისაზღვროს დითიზონითაც [6]. განსაზღვრის ოპტიმალური პირობების დადგენის მიზნით შევისწავლეთ რეაქტივის მომზადების წესის, ხსნარისა და რეაქტივის მოცულობის, ტემპერატურისა და დაყოვნების გავლენა Ni ფორმალდოქსიმატის ოპტიკურ სიმკვრივეზე.



ნიკელის დიმეთილგლიოქსიმატის ექსტრაქციის შემდეგ წყალფაზაში დითიზონით ისაზღვრება  $Zn^{2+}$ . მასთან ერთად წყალხსნარში შეიძლება იყოს  $Cd^{2+}$ ,  $Co^{2+}$  და  $Pb^{2+}$  (ტყვია რეაქტივიდან წყალფაზაში გადადის  $Cu^{2+}$  ექსტრაგირებისას). ამათგან  $Co^{2+}$  დიმეთილგლიოქსიმითაა შებოჭილი,  $Cd^{2+}$  და  $Pb^{2+}$  გავლენას კი იცილებენ  $Na_2S_2O_3$ -ით [1,5,6].

ამრიგად, უკვე არსებული მონაცემებისა და ჩვენი გამოკვლევის საფუძველზე დადგენილია ანალიზის შემდეგი მსვლელობა: საანალიზო წყლის 0,5 ლ ამჟავებენ 0,5—1,0 მლ კონც.  $HNO_3$ -ით და აცხელებენ ადუღებამდე. გაცივების შემდეგ ანეიტრალებენ კონც.  $NH_4OH$ -ით (ინდ. მეთილნარინჯი), გადააქვთ 1 ლ გამყოფ დაბრში, სადაც უმატებენ 10 მლ ბუფერს (pH 7,75) და 10 მლ დითიზონის 0,003—0,005% ხსნარს ქლოროფორმში, ან ბენზოლში. დაბრს ენერგიულად ანჯღრევენ 2 წუთს, ან მექანიკური სარეველით ურევენ 5 წუთს. ფაზებს აცლიან განცალკევებას და ორგანულ ფაზას გამოყოფენ. ექსტრაქციის კვლავ იმეორებენ 2-ჯერ. ექსტრაქტებს აერთებენ და ჭარბ გამხსნელს გადადენიან წყლის აბაზანზე [4]. დითიზონატები უდანაკარგოდ გადააქვთ მაღალკედლიან ფაიფურის ტიგელში, რომელშიც წინასწარ 1 მლ  $NaCl$  ნაჯერი ხსნარია ამომშრალი. ტიგელს შიგთავსის ამომშრობამდე ათავსებენ ინფრაწითელი ნათურის ქვეშ, ან სხვა ზომიერ მაცხელებელზე. ნაშთს უმატებენ 5—6 წვეთ კონც.  $H_2SO_4$  და თანდათანობით აცხელებენ ლუმელში  $SO_3$  ბოლის გამოყოფის შესვენამდე.

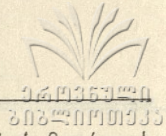
მშრალ ნაშთს 2—3-ჯერად ხსნიან ამონიუმის აცეტატის 3% ხსნარში იმ ვარაუდით, რომ ხსნარის საერთო მოცულობა იყოს 5 მლ. გამხსნელის თითოეული ჯერის დამატების შემდეგ ტიგელს მინის წკირით ურევენ და რამდენიმე წუთს აყოვნებენ. ხსნარი გადააქვთ ცენტრიფუგის 10 მლ სქელკედლიან სინჯარაში, უმატებენ 0,2 მლ  $K_2CrO_4$  1% ხსნარს, ურევენ და 30 წუთით ათავსებენ ცხელწყლიან ჭიქაში. 2—3 საათის შემდეგ ნალექს ცენტრიფუგირებით (2—3 წუთით, 3000 ბრუნე წუთში) გამოყოფენ ხსნარიდან, რომელიც სპეციალური სიფონით გადააქვთ სხვა სინჯარაში (ხსნარი A). ნალექს რეცხავენ 1 მლ წყლით, რომელსაც ანალიზურად ამორებენ ნალექს და უმატებენ A ხსნარს.

თუ  $Pb^{2+}$  ისაზღვრება  $PbS$  სახით, ნალექს ხსნიან 2 წვეთ 20%  $KOH$ , უმატებენ 4,5 მლ  $Na_2S$  0,1% ხსნარს და 10—15 წუთის შემდეგ 5 მლ კიუვეტებში ზომავენ სუსპენზიის ოპტიკურ სიმკვრივეს (ლურჯი შუქფილტრი).

თუ  $Pb^{2+}$  მცირე რაოდენობითაა (ჩვეულებრივ ასეა ბუნებრივ წყლებში), მას დითიზონით საზღვრავენ. ამისათვის ნალექს ხსნიან 2—3 წვეთ 3N  $HCl$ , ამატებენ 0,1% მეთილნარინჯის წვეთს და ანეიტრალებენ 0,5N  $NH_4OH$ . იქვე უმატებენ 5 მლ. ბუფერს (pH 9,7), კარგად ურევენ და ხსნარი გადააქვთ 50—100 მლ გამყოფ დაბრში. დაბრში შეაქვთ 10 მლ დითიზონის 0,0015% ბენზოლხსნარი და ენერგიულად ანჯღრევენ 0,5—1 წუთს. ფაზების განცალკევების შემდეგ გამოყოფენ ორგანულ ფაზას და 10 მლ კიუვეტში ზომავენ ოპტიკურ სიმკვრივეს (მწვანე შუქფილტრი).

A ხსნარს ანეიტრალებენ 3N  $HCl$  (ინდ. მეთილნარინჯი), გადააქვთ გამყოფ დაბრში და უმატებენ 5 მლ ბუფერს (pH 5,5). დაბრში შეაქვთ 5 მლ ტყვიის დიეთილდითიოკარბამატი და ენერგიულად ანჯღრევენ 1,5—2 წუთს. ორგანულ





ფაზას გამოყოფენ და 5 მლ კიუვეტში ზომავენ მის ოპტიკურ სიმკვრივეს (ლურჯი შუქფილტრი).

წყალფაზა (ხსნარი B) გადააქვთ გამყოფ ძაბრში და უმატებენ 2 მლ დიმეთილგლიოქსიმის ნაჯერ ხსნარს 10% NH<sub>4</sub>OH-ში. დიმეთილგლიოქსიმატის ექსტრაქციას ახდენენ ორჯერად 3—3 მლ ქლოროფორმით. წყალფაზას (ხსნარი C) ინახავენ, ხოლო ორგანულ ფაზას ათავსებენ გამყოფ ძაბრში და 1,5—1,5 მლ 3N HCl ორჯერად ახდენენ Ni<sup>2+</sup> რეექსტრაქციას. რეექსტრაქტებს ათავსებენ დანაყოფებიან სინჯარაში, კონც. NH<sub>4</sub>OH უმატებენ ტუტე რეაქტივამდე და წყლით ავსებენ 5 მლ-მდე. ხსნარს უმატებენ 1 მლ ფორმალდოქსიმს და 5 მლ კიუვეტში ზომავენ მის ოპტიკურ სიმკვრივეს (ლურჯი შუქფილტრი).

C ხსნარს ანეიტრალებენ 3N HCl-ით, ათავსებენ გამყოფ ძაბრში, უმატებენ 5 მლ ბუფერს (pH 5,5) 2 მლ 25% Na<sub>2</sub>S<sub>2</sub>O<sub>3</sub> და 20 მლ დითიზონის 0,0015% ბენზოლხსნარს. ძაბრს ენერგიულად ანჯღრევენ 2 წუთს, გამოყოფენ ორგანულ ფაზას და 20 მლ კიუვეტში ზომავენ მის ოპტიკურ სიმკვრივეს (მწვანე შუქფილტრი).

ორგანული ფაზების ოპტიკური სიმკვრივის გაზომვის წინ საჭიროა მათი ცენტრიფუგირება ან მშრალ ქაღალდის ფილტრში გაფილტვრა დისპერგირებული წყლის მოსაცილებლად. ხსნარების ოპტიკური სიმკვრივე იზომებოდა Φმკ—M-ზე.

Pb<sup>2+</sup>, Cu<sup>2+</sup>, Ni<sup>2+</sup> და Zn<sup>2+</sup> რაოდენობას ანგარიშობენ საკალიბრო მრუდების მეშვეობით, რომლებიც ზემოთ აღწერილ პირობებში სტანდარტული ხსნარების დამუშავებით მიღებულ შედეგებზე იგება. განსაზღვრები მიზანშეწონილია მჩხდეს სერიულად, თითოეულ სერიაში სასურველია საკონტროლო განსაზღვრის ჩატარება.

აღწერილი მეთოდი შემოწმდა ბუნებრივ წყლებზე დამატების ხერხით და მოდელურ ხსნარებზე. მიღებული შედეგები (ცხრილი 1) დამაკმაყოფილებელია.

ცხრილი 1

მოდელურ ხსნარებში მიკროელემენტების განსაზღვრის შედეგები

აღებულია მკგ				მიღებულია მკგ				სხვაობა მკგ			
Pb <sup>2+</sup>	Cu <sup>2+</sup>	Ni <sup>2+</sup>	Zn <sup>2+</sup>	Pb <sup>2+</sup>	Cu <sup>2+</sup>	Ni <sup>2+</sup>	Zn <sup>2+</sup>	Pb <sup>2+</sup>	Cu <sup>2+</sup>	Ni <sup>2+</sup>	Zn <sup>2+</sup>
0	0	0	0	0,1	0	0	0	0,1	0	0	0
1	3	5	3	1,1	2,7	4,5	3,0	0,1	0,3	0,5	0
3	3	5	3	2,8	2,9	4,4	2,7	0,2	0,1	0,6	0,3
5	5	10	3	5,2	4,9	9,2	3,2	0,2	0,1	0,8	0,2
10	10	0	10	10,3	9,3	0	9,4	0,3	0,7	0	0,6
10	10	5	10	10,7	9,5	4,4	11,0	0,7	0,5	0,6	1,0
10	10	10	10	10,8	9,7	9,0	9,5	0,8	0,3	1,0	0,5
10	10	10	10	9,8	9,8	9,6	11,1	0,2	0,2	0,4	1,1

ქიმიურ ანალიზში დითიზონის გამოყენება განსაკუთრებულ სიფაქიზეს მოითხოვს ანალიტიკოსისაგან. მიკროელემენტების განსაზღვრისათვის გამიზნული ჭურჭელი არ უნდა გამოვიყენოთ სხვა მიზნისათვის და, გარდა ჩვეუ-



ლებრივი წესისა, დითიზონის ქლოროფორმ- ან ბენზოლხსნარით უნდა გაირეცხოს. ასევე უნდა გასუფთავდეს ბიდისტილატი, ბუფერული ხსნარები და NaCl ნაჯერი ხსნარი. HCl და NH<sub>4</sub>OH სუფთავდება იზოთერმული დისტილაციით, HNO<sub>3</sub>—გადადენით.

ანალიზის მსვლელობაში გამოყენებულია ზოგიერთი რეაქტივი და ბუფერული ხსნარი, რომლებიც მზადდებიან შემდეგნაირად:

ტყვიის დიეთილდითიოკარბამატი. 100—100 მგ ტყვიის აცეტატსა და ნატრიუმის დიეთილდითიოკარბამატს ხსნიან 50—50 მლ წყალში და გამყოფ ძაბრში ერთმანეთს ურევენ. წარმოქმნილ ნალექს ხსნიან 250—300 მლ ქლოროფორმში, ფილტრავენ მშრალ ფილტრში და ქლოროფორმითვე ავსებენ 500 მლ-მდე.

ფორმალდოქსიმი. 2 გ პარაფორმალდეჰიდს უმატებენ 5 გ გოგირდ-მჟავა ჰიდროქსილამინს და ხსნიან ცხელ წყალში. გაცივების შემდეგ ფილტრავენ.

ბუფერი, pH 5,5. 10 მლ 0,2 N ძმარმჟავას უმატებენ 90 მლ 0,2 N ნატრიუმის აცეტატს.

ბუფერი, pH 7,75. 49,2 მლ 0,1 N ძმარმჟავას უმატებენ 50,8 მლ 0,1 N NH<sub>4</sub>OH.

ბუფერი, pH 9,7. 25 მლ 0,1 N ძმარმჟავას უმატებენ 75 მლ 0,1 N NH<sub>4</sub>OH.

### დასკვნა

დამუშავებულია ბუნებრივი წყლის ერთ სინჯში Pb<sup>2+</sup>, Cu<sup>2+</sup>, Ni<sup>2+</sup> და Zn<sup>2+</sup> ექსტრაქციულ-ფოტომეტრიული განსაზღვრის მეთოდი.

(წარმოდგენილია 28.1.1969)

ანალიზური ქიმიის კათედრა

### ლიტერატურა

1. Т. Х. Колесникова, Гидрохимические материалы, XXXII, 1961, стр. 165.
2. А. Д. Миллер, Р. И. Либина, ЖАХ, 6, 1958, стр. 664.
3. Т. В. Гуркина, А. М. Игошин, ЖАХ, 7, 1965, стр. 778.
4. И. Т. Климов, В. Я. Еременко, Гидрохимические материалы, XXIX, 1959, стр. 254; XXXI, 1961, стр. 191.
5. Е. Сендел, Колориметрическое определение следов металлов, „Мир“, 1964.
6. Г. Иванчев, Дитизон и его применение, ИЛ, 1961.
7. И. Стары, Экстракция хелатов, „Мир“, 1966.
8. Г. С. Коновалов, А. Д. Семенов, Гидрохимические материалы, XI, 1965, стр. 202.
9. З. Марченко, Е. Минчевски, ЖАХ, I, 1962, стр. 23.



Г. Д. СУПАТАШВИЛИ, Н. К. КАРСАНИДЗЕ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОЭЛЕМЕНТОВ В ПРИРОДНЫХ ВОДАХ.  
ЭКСТРАКЦИОННО-ФОТОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ  $Pb^{2+}$ ,  $Cu^{2+}$ ,  
 $Ni^{2+}$  и  $Zn^{2+}$  В ОДНОЙ ПРОБЕ ВОДЫ**

(Резюме)

Разработан метод последовательного экстракционно-фотометрического определения  $Pb^{2+}$ ,  $Cu^{2+}$ ,  $Ni^{2+}$  и  $Zn^{2+}$  в одной пробе воды.

Точность метода проверена на модельных растворах и природных водах методом добавки. Абсолютная ошибка метода при определении 1—10 мкг  $Pb^{2+}$ ,  $Cu^{2+}$ ,  $Ni^{2+}$  и  $Zn^{2+}$  составляет 0—1 мкг.



## ზოგიერთი უმრავლადიკალიანი ბორორგანული ნაერთის სინთეზი და ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევა

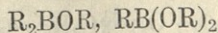
ბ. ყაჭვიშვილი, ნ. ფირცხალავა, ს. კანდელაკი, ნ. ტუფინაშვილი

უქანასკნელ წლებში ელემენტორგანულ ნაერთებს შორის მნიშვნელოვანი ადგილი ბორის ორგანულმა ნაერთებმა დაიკავა.

ბორის ატომის განსაკუთრებული აღნაგობა შესაძლებლობას იძლევა სხვადასხვა სტრუქტურისა და თვისებების მქონე ბორორგანული ნაერთების სინთეზისას.

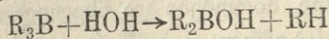
ბორორგანული ნაერთებისადმი ინტერესი კიდევ უფრო გაიზარდა მას შემდეგ, რაც მათ მრავალმხრივი გამოყენება ჰპოვეს სახალხო მეურნეობის სხვადასხვა დარგში.

ბორტრიალკილები, რომელთაც უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ბორორგანულ ნაერთთა სინთეზში, მიღებულ იქნა მეტალორგანული ქიმიის ერთ-ერთი ფუძემდებლის — ფრანკლანდის მიერ, გრინიარის რეაქტივზე ბორის ჰალოგენიდების ან ალკოქსინაერთების მოქმედებით. ბორტრიალკილები არამდგრადი სითხეებია, განსაკუთრებით აქტივობას იჩენენ ჟანგბადის მიმართ. დაჟანგვის შედეგად, შუალედ პროდუქტებად ზეჟანგების წარმოქმნით მიიღება შემდეგი ნაერთები:

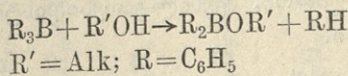


ბორტრიალილები მყარი კრისტალური ნივთიერებებია, ისინი როგორც ჟანგბადის ისე წყლისა და მაღალი ტემპერატურის მიმართ უფრო სტაბილური არიან, ვიდრე ბორტრიალკილები.

ბ. მიხაილოვის მიერ [1] დადგენილია, რომ მაღალი რიგის ბორტრიალკილები ენერგიულად რეაგირებენ წყალთან, რის შედეგად წარმოიქმნება დიალკილბორის მჟავები მათი ანჰიდრიდების სახით, და ცხიმოვანი რიგის ნახშირწყალბადები, შემდეგი სქემის მიხედვით:



ამავე პირობებში, ბორტრიალკილები მოქმედებენ ალიფატურ სპირტებთან და ფენოლთან, რეაქციის შედეგად გამოიყოფა დიალკილბორის მჟავის ალკილის ან ფენილის ეთერები [3], უჯერი ან ნაჯერი რიგის ნახშირწყალბადები და წყალბადი:



მოცემულ შრომაში მიზნად დავისახეთ W-სტიროლისა და ალკილის რადიკალების შემცველი ბორორგანული ნაერთებისა და დიზოპროპილბორის

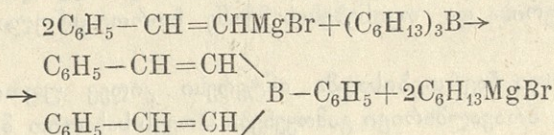




მჟავას დარიჩინის ეთერების სინთეზი და ფიზიკურ-ქიმიური [3, 4, 5].

### მსხვილიმენტული ნაწილი დი-W-სტირილჰექსილბორის სინთეზი

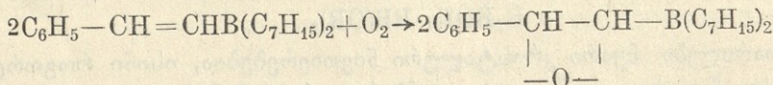
41,4 გ W-სტირილმაგნიუმბრომიდს წვეთწვეთობით დავამატეთ 33,5 გ ტრიჰექსილბორის ეთერხსნარი. რეაქცია ტარდებოდა მექანიკური მორევისა და ოთახის ტემპერატურის პირობებში. რეაქციის დამთავრების შემდეგ კოლბის შიგთავსი დავშალეთ 10% მარილის მჟავას ხსნარით და გამოვწვლილეთ ეთერით. ეთერხსნარი ორჯერ ჩავრეცხეთ გამოხდილი წყლით და გავაშრეთ  $\text{CaCl}_2$ -ზე. გამოშრობის შემდეგ მოვაცილეთ ეთერი და გადავდენეთ ვაკუუმში. მიღებული ნივთიერების ანალიზმა და ფიზიკურ-ქიმიური თვისებების შესწავლამ გვიჩვენა, რომ რეაქციის შედეგად მიღებულია დი-W-სტირილჰექსილბორი (დლ. ტემპ.  $312^\circ$ ). გამოსავლიანობა 18%. რეაქცია წარიმართა შემდეგი სქემის მიხედვით:



ანალოგიურად მიღებული იქნა W-სტირილდიჰექსილბორი და W-სტირილდიჰექტილბორი (ყველა ოპერაციას ვაწარმოებდით აზოტის არეში).

### W-სტირილალკილბორიდების დაჟანგვა

W-სტირილალკილბორიდების მოლეკულაში შემავალი ორმაგი ბმის გამო ხსენებული ნაერთები ადვილად იჟანგება ჰაერის ჟანგბადით. ჟანგბადის მოქმედებით იხლიჩება ორმაგი ბმა და წარმოიქმნება ეპოქსინაერთები. დაჟანგვის უფრო მეტად სააღბათო სქემა შემდეგია:



შესწავლილი იქნა მიღებული პროდუქტების ფიზიკურ-ქიმიური თვისებები, შედეგები მოცემულია № 1 ცხრილში.

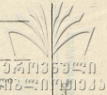
### დასკვნები

1. დადგენილია W-სტირილმაგნიუმბრომიდსა და ბორტრიალკილებს შორის რეაქციის ოპტიმალური პირობები და მსვლელობის სქემა.
2. ჩატარებულია W-სტირილალკილბორიდების დაჟანგვა ჰაერის ჟანგბადით, დადგენილია დაჟანგვის ყველაზე უფრო სააღბათო სქემა და შესწავლილია მიღებული ეპოქსინაერთების ფიზიკურ-ქიმიური თვისებები.
3. პირველადაა სინთეზირებული და აწერილი: დი-W-სტირილჰექსილბორი, W-სტირილ-დიჰექტილბორი, ჰექსილ-ეპოქსიდისტირილბორი, და დი-ჰექტილ-ეპოქსი-სტირილბორი.

(წარმოდგენილია 18.11.1969)

ზოგადი ქიმიის კათედრა





შენიშვნა	გამოსავალი %	დუღილის ტემპერატურა	$n_D^{20}$	$d_4^{20}$	MR <sub>D</sub>		ელემენტარული შედგენილობა %-ში						
					ნაზღ.	გამოთვლილი	ნაპოვნი			ფორმულა	გამოთვლილი		
							C	H	B		C	H	B
$\begin{array}{l} \text{C}_6\text{H}_{15}-\text{CH}=\text{CH} \\ \text{C}_6\text{H}_{15}-\text{CH}=\text{CH} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{C}_6\text{H}_{15}-\text{CH}=\text{CH} \\ \text{C}_6\text{H}_{15}-\text{CH}=\text{CH} \end{array}} \right\} \text{B}-\text{C}_6\text{H}_{13}$	18	312 (10 მმ)	1,5630	0,9868	99,71	91,13	86,8	8,1	3,5	$\text{C}_{22}\text{H}_{27}\text{B}$	81,4	8,1	3,7
$\text{C}_6\text{H}_5-\text{CH}=\text{CH}-\text{B} \begin{cases} \text{C}_7\text{H}_{15} \\ \text{C}_7\text{H}_{15} \end{cases}$	17	1,75 (4)	1,5050	0,9017	103,1	103,8	83,9	11,2	3,4	$\text{C}_{22}\text{H}_{37}\text{B}$	84,96	11,8	3,0
$\begin{array}{l} \text{C}_6\text{H}_5-\text{CH}-\text{CH} \\   \quad   \\ -\text{O}- \\ \text{C}_6\text{H}_5-\text{CH}-\text{CH} \\   \quad   \\ -\text{O}- \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{C}_6\text{H}_5-\text{CH}-\text{CH} \\ \text{C}_6\text{H}_5-\text{CH}-\text{CH} \end{array}} \right\} \text{B}-\text{C}_6\text{H}_{13}$	80,5	196 (4)	1,4940	0,9872	95,6	97,3	81,6	8,2	3,1	$\text{C}_{22}\text{H}_{27}\text{O}_2\text{B}$	83,2	8,5	3,2
$\begin{array}{l} \text{C}_6\text{H}_5-\text{CH}-\text{CH}-\text{B} \\   \quad   \\ -\text{O}- \end{array} \begin{cases} \text{C}_7\text{H}_{15} \\ \text{C}_7\text{H}_{15} \end{cases}$	18	201	1,5250	0,9661	101,2	104,2	79,2	10,6	3,0	$\text{C}_{22}\text{H}_{37}\text{OB}$	80,5	11,3	3,1

საქართველოს ქიმიკოსთა საზოგადოების გამომცემი



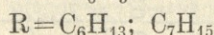
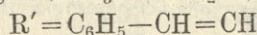
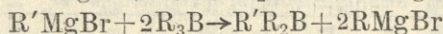
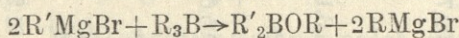
1. Б. М. Михайлов, В. А. Вавер, ДАН СССР, 126, 1959, стр. 575.
2. E. Wiberg, A. Bulz, K. Hertzog, Z. anorg. Chem., 256, 1946, стр. 177.
3. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джошвили, ЖОХ, 35, 1964, стр. 2910.
4. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джошвили, ЖОХ, 35, 1965, стр. 485.
5. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джошвили, ЖОХ, 35, 1965, стр. 1086.

Г. Е. КАЧЕЙШВИЛИ, Н. И. ПИРЦХАЛАВА,  
 С. П. КАНДЕЛАКИ, Н. А. ТУПИНАШВИЛИ

### СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННОРАДИКАЛОВЫХ БОРОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

(Резюме)

1. Установлено оптимальное условие и схема протекания реакции между W-стирилмагнийбромидом и бортриалкилами.



2. Проведено окисление W-стирилмагнийбромида кислородом воздуха, установлена наиболее вероятная схема реакции, изучены физико-химические свойства полученных эпоксилсоединений.

3. Впервые синтезированы и описаны ди-W-стирилгексилбор, W-стирил-ди-гептилбор, гексил-эпоксилстирилбор и ди-W-гептил-эпоксил-стирилбор.



## **Galanthus Woronowii A. Los.-ის დამატებითი შესწავლა ალკალოიდის შემცველობაზე**

ნ. ციციშვილი, თ. კივარჩავაძე, გ. ციციშვილი, დ. ჯაბაძე

საქართველომ ფლორის სიმდიდრით და მისი ნაირსახეობით დიდი ხანია შიიპყრო მკვლევართა ყურადღება. აქ ვხვდებით მრავალ და ძვირფასი თვისებების მქონე მცენარეთა სახეობებს, რომლებმაც პრაქტიკაში დიდი გამოყენება პპოვეს. ასეთებია ალკალოიდშემცველი მცენარეები. ბუნებრივი პირობების მთელი კომპლექსი აპირობებს საქართველოში ენდემურ სახეობათა ზრდას და მათ მოპოვებას. *Amarillidaceae*-ს ოჯახში შემავალი *Galanthus Woronowii* A. Los. სახეობა საქართველოში დიდად გავრცელებულ მცენარეთა რიცხვს მიეკუთვნება და თავისი პერსპექტიულობით მკვლევართა ყურადღებას იპყრობს [1], პირველად ვორონოვის თეთრყვავილა ალკალოიდების შემცველობაზე შესწავლეს ნ. პროსკურნინამ და ლ. არეშკინამ [2]. მათ შექლეს ამ მცენარის ბოლქვებიდან და ფოთლებიდან ორი ალკალოიდის გამოყოფა—გალანთინის  $C_{18}H_{23}O_4N$  და გალანთიდინის  $C_{16}H_{17}O_4N$ . გალანთიდინი, როგორც შემდგომმა შესწავლამ გამოავლინა, აღმოჩნდა უკვე ცნობილ და სხვა მცენარეებში შემავალი ალკალოიდ ლიკორინის იდენტური. საკვლევი მასალა მიიღეს ბათუმის ბოტანიკური ბაღიდან. 1940 წლის დეკემბერში მოკრეფილი ვორონოვის თეთრყვავილას ბოლქვებიდან გამოყოფილ ალკალოიდთა ჯამი შეადგენს 1,38%-ს მასის, როდესაც იმავე წლის მისის თვეში აღებული მცენარიდან მიიღეს ალკალოიდების ჯამი მხოლოდ 0,5% რაოდენობით. ამრიგად, ალკალოიდების რაოდენობა ვორონოვის თეთრყვავილაში განიცდის რყევადობას, რაც, მკვლევართა აზრით, მოითხოვს მოკრეფის ვადასთან დაკავშირებით შემდგომ დეტალურ შესწავლას.

1950 წელს ნ. პროსკურნინამ და ა. იაკოვლევამ [3] გაავრცელეს რა ვორონოვის თეთრყვავილას შესწავლა, აღმოაჩინეს დამატებით მესამე ალკალოიდი და უწოდეს გალანთამინი  $C_{17}H_{21}O_3N$ . საქართველოში ვორონოვის თეთრყვავილას ირგვლივ კვლევას აწარმოებდა დ. ვირსალაძე, რომელმაც ამ მცენარის სამკურნალო ნედლეულის იდენტიფიკაციის მიზნით შეისწავლა მისი ანატომიური აგებულება [4].

მცენარეში ალკალოიდების დაგროვების დინამიკის შესწავლისათვის მრავალი გამოკვლევაა ჩატარებული. ექსპერიმენტული გამოკვლევები მიუთითებენ, რომ კლიმატი, ნიადაგი, წყლის რეჟიმი, დღის ხანგრძლივობა, სიმაღლე ზღვის დონიდან, მზის რადიაციის ინტენსივობა და სხვა ბუნებრივი პირობები თვალსაჩინო გავლენას ახდენენ მცენარის ბიოქიმიზმზე, კერძოდ ალკალოიდების შემცველობაზე. მოქმედ ფაქტორთა ცვალებადობა იწვევს ალკალოიდების





არა მარტო რაოდენობრივი, არამედ ზოგჯერ თვისობრივი ხასიათის მქონე ვორონოვის თეთრყვავილას შესწავლის შემდეგ განვლო 20 წელმა. განვლილდროს შეეძლო ერთგვარი გავლენის მოხდენა ალკალოიდების შემცველობაზე. ნ. პროსკურნიანს და ა. იაკოვლევას მიერ ვორონოვის თეთრყვავილადან მესამე ალკალოიდის გამოყოფამ ჩვენ გვაფიქრებინა მისი დამატებითი შესწავლა.

ვორონოვის თეთრყვავილადან ალკალოიდების გამოყოფას ვაწარმოებდით ძირითადად ავტორების მიერ გამოყენებული მეთოდით. ჩვენ მიერადაც გამოყოფილ იქნა სამივე ალკალოიდი და დადგენილია სამივე ალკალოიდისათვის. Rf. გარდა ამისა ჩვენ შევძელით ახალი ალკალოიდის გამოყოფა, განვსაზღვრეთ მისი ზოგიერთი ფიზიკური თვისებები და Rf.

### მსხვილიშენი ნაწილი

#### ალკალოიდების გამოწვლილვა ფუძის სახით

ვორონოვის თეთრყვავილას ბოლქვები და ფოთლები გაჟღენთილი იქნა ამონიუმის ტუტის 10%-იანი ხსნარით. ალკალოიდების გამოსაწვლილად დაემატა დიქლორეთანი. 3 საათის ნჯღრევის და 1 დღის დაყოვნების შემდეგ მოშორებულ იქნა დიქლორეთანიანი გამონაწვლილი და დარჩენილი მასიდან ალკალოიდები კვლავ დიქლორეთანით გამოიწვლილა. ალკალოიდების გასუფთავების მიზნით შეგროვილ დიქლორეთანიან გამონაწვლილს დაემატა 5%-იანი მარილმჟავას ხსნარი ალკალოიდების სრულ გამოწვლილამდე.

შეგროვილ მარილმჟავიან გამონაწვლილს დაემატა ამონიუმის ტუტე, ტუტე რეაქციამდე. მცირე დაყოვნების შემდეგ გამოიყო წვრილკრისტალური ნალექი. წყლის ვაკუუმში გაფილტვრით ნალექი მოშორებულ იქნა ტუტე-ხსნარიდან.

გალანთინის გამოყოფა. გამშრალი ნალექი დამუშავდა ცხელი აცეტონით და გაუხსნელი ნალექის მოსაშორებლად ხსნარი გაიფილტრა ცხლად. აცეტონიანი ფილტრატის დაყოვნებისას გამოიყო მოყვითალო ფერის ნალექი, რომლის რამდენჯერმე გადაკრისტალებით ეთილის სპირტში მიღებულ იქნა ოდნავ მოყვითალო ფერის კრისტალები ლ. ტემპ. 132—134°. მიღებული კრისტალები გაიხსნა ეთილის სპირტში, აცეტონში, ქლოროფორმში. ძნელად ეთერში.

გალანთინის იდენტიფიკაცია ქაღალდის ქრომატოგრაფიის მეთოდით. ქრომატოგრაფირებისათვის მომზადდა სისტემა: ბუტილის სპირტი, ძმარმჟავა, წყალი (4:1:5). ქრომატოგრაფიული ქაღალდი, 1—2 წვეთი ალკალოიდის ხსნარის შეტანის შემდეგ, ჩაშვებულ იქნა წინასწარ მოძრავი ფაზით გაჟღენთილ ჰერმეტიკულად დახურულ კამერაში. ქრომატოგრაფიული ქაღალდის გაშრობისა და დრაგენდორფის რეაქტივის შესხურების შემდეგ ყვითელ ფონზე წარმოიშვა ნარინჯისფერ-წითელი ლაქა. განისაზღვრა Rf—0,59, რომელიც დაემთხვა მოწმის—ნ. პროსკურნიანსგან მიღებულ გალანთინის Rf-ს. Rf მაჩვენებელთა დამთხვევა ერთხელ კიდევ ადასტურებს მათ იდენტურობას.

გალანთინის ქლორჰიდრატის მიღება. ალკალოიდის ფუძის სპირტიან ხსნარს დაემატა მარილის მჟავას სპირტიანი ხსნარი. გაცხელებით





დაილექა წვრილი კრისტალები, რომლის რამდენჯერმე გადაკრისტალებით ეთილის სპირტში მიღებულ იქნა ნებისმიერი კრისტალები ლ. ტემპ. 197—199°.

გალანთიდინის გამოყოფა ქლორჰიდრატის სახით. აცეტონში უხსნადი ნალექის გასუფთავების მიზნით ალკალოიდი გადაყვანილ იქნა ქლორჰიდრატში მარილმჟავასა და აცეტონის დამატებით. დაყოვნების შემდეგ გამოიყო გალანთიდინის—ქლორჰიდრატის კრისტალები, რომლის გაშრობისა და რამდენჯერმე ეთილის სპირტში გადაკრისტალების შემდეგ მიღებულ იქნა კრისტალები ლ. ტემპ. 194—197°.

მიღებული გალანთიდინის ქლორჰიდრატის Rf განისაზღვრა ქაღალდის ქრომატოგრაფიის მეთოდით ზემოაღნიშნული სისტემის გამოყენებით, Rf—0,63.

გალანთამინის გამოყოფა. აცეტონით დამუშავების შემდეგ დარჩენილ ტუტიან ხსნარს დაემატა ეთერი იმ ალკალოიდების გამოყოფის მიზნით, რომლებიც არ გამოილექა მარილმჟავიან ხსნარში ტუტის დამატების დროს. ეთერიანი გამოწვლილის უწყლო ნატრიუმის სულფატით გაშრობის შემდეგ ეთერი გამოიხსნა. დარჩენილი ხსნარის დაყოვნებისას გამოიყო მოყავისფრო ნალექი, რომელიც გადაკრისტალდა ეთილის სპირტში გააქტივებულ ნახშირთან. მიღებული კრისტალების ლ. ტემპერატურა 126—127°, Rf—0,43.

ალკალოიდის გამოყოფა ფუძის სახით. ალკალოიდების მთლიანად გამოწვლილვის მიზნით ეთერით გამოწვლილვის შემდეგ დარჩენილ ტუტე ხსნარს დაემატა ქლოროფორმი. მიღებული ქლოროფორმიანი გამოწვლილიდან ქლოროფორმის გამოხდისა და დაყოვნების შემდეგ გამოიყო მოყავისფრო ნალექი, რომელიც ჯერ გადაკრისტალდა ეთილის სპირტში გააქტივებულ ნახშირთან, შემდეგ რამდენჯერმე ბენზოლში. განისაზღვრა მიღებული კრისტალების ლ. ტემპ. 110—112°, Rf—0,64. ნაპოვნია %:C 58,30; 58,79; H 8,26; 8,95, N 5,03; 5,03; C<sub>14</sub>H<sub>24</sub>O<sub>5</sub>N.

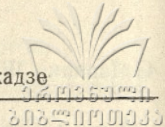
გამოყოფილი ალკალოიდის ქლორჰიდრატის მიღება. ალკალოიდის და მარილმჟავას სპირტიანი ხსნარების გაცხელებით დაილექა ალკალოიდის ქლორჰიდრატი. მიღებული ქლორჰიდრატი ეთილის სპირტში გადაკრისტალების შემდეგ გალღვა 174—180°. განისაზღვრა მიღებული კრისტალების Rf—0, 66.

რომ შეეადაროთ ჩვენ მიერ გამოყოფილი ფუძე ხასიათის ნივთიერების ზოგიერთი კონსტანტები ვორონოვის თეთრყვავილადან მიღებული უკვე ცნობილ ალკალოიდების კონსტანტების მაჩვენებელს, დავინახავთ თვალსაჩინო განსხვავებას, რაც გვაძლევს საფუძველს ვივარაუდოთ, რომ ჩვენ მიერ მიღებული ნივთიერება წარმოადგენს ახალ ალკალოიდს.

### დასკვნები

1. ვორონოვის თეთრყვავილადან გამოყოფილია ალკალოიდები: გალანთინი, გალანთიდინი და გალანთამინი. მათი იდენტიფიკაციის მიზნით ჩვენ მიერ აგრეთვე გამოყენებულია ქაღალდის ქრომატოგრაფიის მეთოდი და დადგენილია Rf. სახელდობრ: გალანთინი Rf—0,59, გალანთიდინი Rf—0,63, გალანთამინი Rf—0,43,





2. ტუტე დედანსნარის ქლოროფორმით დამუშავებით გამოყოფილია ახალი ნივთიერება. დადგენილია ზოგიერთი კონსტანტები, რომელთა შედარება წინათ გამოყოფილ ალკალოიდთა ანალოგიურ მიჩვენებლებთან გვაფიქრებინებს, რომ საქმე გვაქვს ახალ ალკალოიდთან, რომლის ყოველმხრივი შესწავლა შემდგომ კვლევას მოითხოვს.

(წარმოდგენილი 20.XI.1968)

ორგანული ქიმიის კათედრა

### ლიტერატურა

1. В. С. Соколов, Алкалоидные растения СССР, Москва—Ленинград, 1952.
2. Н. Ф. Проскурнина, Л. Я. Арешкина, ЖОХ, 17, 1947, стр. 1216.
3. Н. Ф. Проскурнина, А. П. Яковлева, ЖОХ, 22, 1952, стр. 1899.
4. დ. ვირსალაძე, ლ. ერისთავი, თბილისის სახელმწიფო სამედიცინო ინსტიტუტის შრომები, 21, 1961, გვ. 112.

Н. С. ЦИЦИШВИЛИ, Т. Н. КИПАРЕНКО,  
Г. И. ЦИЦИШВИЛИ, Д. М. ЦАКАДЗЕ

### ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ *Galanthus Woronowii* A. Los. НА СОДЕРЖАНИЕ АЛКАЛОИДА

(Резюме)

Из растения *Galanthus Woronowii* A. Los. выделены алкалоиды галантин, галантидин, галантамин, впервые найденные Н. Проскурниной, Л. Арешкиной и А. Яковлевой. На основе бумажной хроматографии для них установлены значения R<sub>f</sub>.

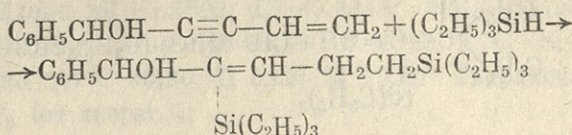
После выделения трех алкалоидов щелочной маточник обработан хлороформом и выделен алкалоид, для которого нами установлены некоторые константы, отличающиеся от показания аналогичных констант известных алкалоидов данного растения. Эти предварительные результаты дают нам повод предположить существование нового алкалоида. Однако для окончательного доказательства допущенного нами предположения требуется продолжение исследования.



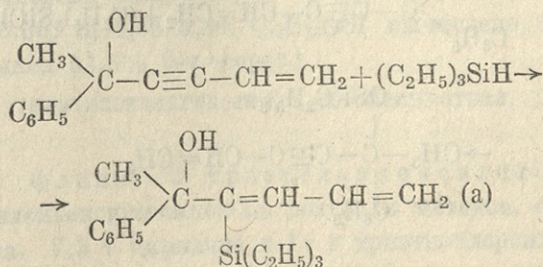
## ДЕЙСТВИЕ ТРИЭТИЛСИЛАНА НА МЕТИЛФЕНИЛВИНИЛЭТИНИЛКАРБИНОЛ В ПРИСУТСТВИИ $H_2PtCl_6$ И Pt/C

И. М. ГВЕРДЦИТЕЛИ, К. И. ЧЕРКЕЗИШВИЛИ, Л. П. АСАТИАНИ

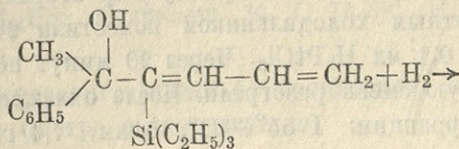
Реакция триэтилсилана с фенилвинилэтинилкарбинолом в присутствии катализаторов  $H_2PtCl_6$  и Pt/C идёт с присоединением двух молекул гидридсилана, с образованием кремнесодержащего этиленового карбинола по схеме (1):



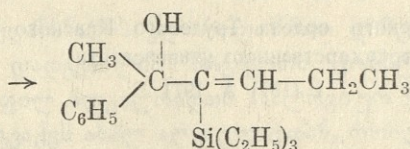
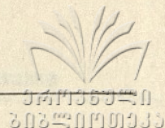
Из этой реакции видно, что винилэтинилкарбинол, содержащий ароматический радикал, в реакции с триэтилсиланом ведёт себя иначе, по сравнению с винилэтинилкарбинолами жирного ряда (2). Ещё раз для доказательства влияния бензольного ядра на ход реакции был взят жирноароматический карбинол — метилфенилвинилэтинилкарбинол, который прореагировал с триэтилсиланом, в присутствии как Pt/C так и  $H_2PtCl_6$ . Оказалось, что в этом случае, вопреки нашим ожиданиям, реакция идёт с присоединением триэтилсилана к тройной связи карбинола, аналогично жирным винилэтинилкарбинолам:



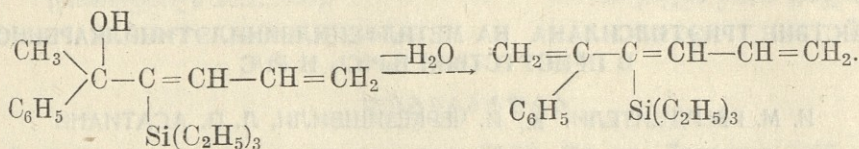
Изучены химические превращения полученного нами продукта (а). При гидрировании в присутствии никеля Ренея (а) присоединяет только одну молекулу водорода и получается этиленовый кремнесодержащий спирт:



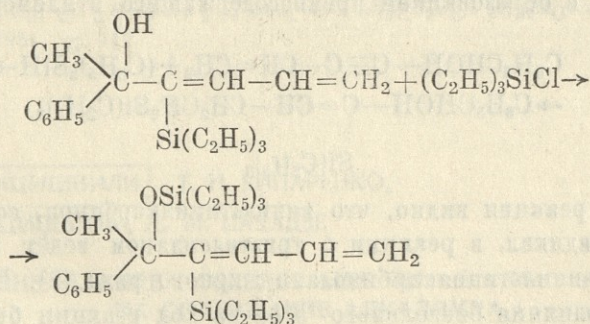




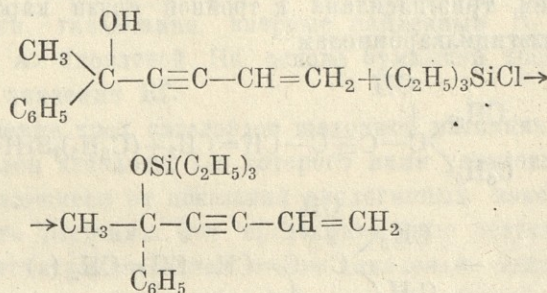
Дегидратацией с  $\text{KHSO}_4$  получается кремнесодержащий триен:



Действием триэтилхлорсилана в среде пиридина получен кремневый эфир:



Для идентификации продуктов главной реакции проведен синтез кремневого эфира, из метилфенилвинилэтинилкарбинола и триэтилхлорсилана, в среде пиридина:



### Экспериментальная часть

Действие триэтилсилана на метилфенилвинилэтинилкарбинол в присутствии  $\text{H}_2\text{PtCl}_6$ . В трёхгорлой колбе с механической мешалкой и обратным холодильником поместили 24,7 г карбинола, 17 г триэтилсилана и 0,1 мл  $\text{H}_2\text{PtCl}_6$ . Через 20 минут после начала перемешивания реакционную смесь разогрели. После охлаждения отогнали в вакууме. Получены фракции: I  $55^\circ - 62^\circ$ , 5 мм, 7,3 г; II  $70^\circ - 132^\circ$ , 3 мм,



2,2 г; III 132°—143°, 3 мм, 6,6 г; IV 143°—145°, 3 мм, 15,8 г; V 173°, 3 мм, 3 г.

Для IV фракции найдено  $n_D^{20}$ —1,5308;  $d_4^{20}$ —0,9556;  $MR_D$ —93,20; OH% 5,3 и 6,1; вычислено  $MR_D$ —92, 32; OH% 5,8; найдено %: C 75,12 75,06; H 9,91 9,49; Si 9,58 9,69;  $C_{18}H_{28}OSi$  вычислено %: C 75,00; H 9,72; Si 9,72; выход 38% (от теорет.).

2 фенил, 3 триэтилсилилгексадиен-3, 5-ол-2—зеленовато-желтая, густая жидкость.

Дегидратация 2 фенил, 3 триэтилсилилгексадиен-3, 5-ола-2. В колбе для вакуум-отгонки поместили 6,7 г вещества, 3,5 г  $KHSO_4$  и 0,1 г дитизона. Смесь нагревали в течение 15 минут ниже 100°, после чего отогнали в вакууме. Полученный продукт высушили над сульфатом натрия и опять отогнали в вакууме. Получены фракции: I 90°—95°, 2 мм, 0,6 г; II 95°—106°, 2 мм, 1 г; III 106°; 2 мм, 1,16 г. Изучена III фракция. Найдено  $n_D^{20}$ —1,5802;  $d_4^{20}$ —0,9846;  $MR_D$ —91,26; вычислено  $MR_D$ —90,30; найдено %: C 80,49 80,38; H 9,80 9,76; Si 10,47 10,40;  $C_{18}H_{26}Si$  вычислено %: C 80,80; H 9,63; Si 10,37. Гидроксил не обнаружен; выход 18,3% (от теорет.).

Полученное вещество 2 фенил, 3 триэтилсилилгексатриен-1,3,5—желтая жидкость, при стоянии закристаллизовалась t пл.—25°—27°.

Гидрирование 2 фенил, 3 триэтилсилилгексадиен-3, 5-ола-2. В колбе для гидрирования поместили 3 г вещества, растворенного в 50 мл абсолютного спирта, и никель Ренея. Было поглощено 256 мл водорода,  $V_0$ —233 мл,  $V_t$ —261 мл. Смесь отфильтровали, сперва удалили спирт, а остаток отогнали в вакууме. Получены фракции; I 138°—139°, 4 мм, 0,3 г; II 139°—142°, 4 мм, 1,65 г.

Для II фракции найдено  $n_D^{20}$ —1,5149;  $d_4^{20}$ —0,9415;  $MR_D$ —92,80; OH% 5,70 и 5,52; вычислено  $MR_D$ —92,79; OH% 5,85; найдено %: C 74,61 74,54; H 10,32 10,55; Si 9,65 9,36;  $C_{18}H_{30}OSi$  вычислено %: C 74,44; H 10,34; Si 9,65; выход 54,6% (от теорет.).

2 фенил, 3 триэтилсилилгексен-3-ол-2—бесцветная, легкоподвижная жидкость.

Синтез 2 фенил, 2 триэтилсилоксигексинена—3, 5. 2 фенил, 2 триэтилсилоксигексинен-3,5 получали методом, описанным в [1] из 15 г карбинола, 7,3 г пиридина и 14 г триэтилхлорсилана. Получены фракции: I 49°—95°, 5 мм, 5,8 г; II 95°—123°, 4 мм, 2,15 г; III 123°—125°, 1 мм, 2,25 г.

Фракция III имела  $n_D^{20}$ —1,4932;  $d_4^{20}$ —0,9342;  $MR_D$ —88,95; вычислено  $MR_D$ —90,39; выход 9% (от теорет.); найдено %: C 75,63 75,69; H 9,08 9,70; Si 9,89 9,61;  $C_{18}H_{24}OSi$  вычислено %: C 75,58; H 9,09; Si 9,79. Гидроксил не обнаружен.

2 фенил, 2 триэтилсилоксигексинен-3,5—бесцветная, легкоподвижная жидкость, при хранении быстро полимеризуется.





Синтез 2-фенил-, 2-триэтилсилокси-, 3-триэтилсиллилгексадиена-3,5. В условиях, аналогичных предыдущим, брали 3 г 2-фенил-, 3-триэтилсиллилгексадиен-3, 5-ола-2, 0,3 г пиридина и 1,5 г триэтилхлорсилана. Получены фракции: I 88°—89°, 2 мм; II 175°—176°, 6 мм, 1,4 г. Для II фракции найдено  $n_D^{20}$ —1,5438;  $d_4^{20}$ —0,9566;  $MR_D$ —132,58; вычислено  $MR_D$ —130,63; выход 33% (от теорет.), гидроксил не обнаружен. Найдено %: С 71,63 71,87; Н 10,51 10,72; Si 11,59 11,68;  $C_{24}H_{43}OSi_2$  вычислено %: С 71,46; Н 10,72; Si 11,44.

2-фенил-, 2-триэтилсилокси-, 3-триэтилсиллилгексадиен-3,5—бесцветная, легкоподвижная жидкость.

Действие триэтилсилана на метилфенилвинилэтинилкарбинол в присутствии Pt/C. В условиях, аналогичных предыдущим, описанным в [I], брали 20 г карбинола, 13 г триэтилсилана и 0,2 г Pt/C. Получены фракции: I 83°—103°, 8 мм, 2,5 г; II 103°—144°, 7 мм, 1,7 г; III 96°—126°, 3 мм, 2,5 г; IV 144°, 4 мм, 16,9 г.

IV фракция имела  $n_D^{20}$ —1,5304;  $d_4^{20}$ 0,9593;  $MR_D$ —92,74; вычислено  $MR_D$ —92,32; выход 50% (от теорет.). Найдено %: С 75,10 75,18; Н 10,28 10,42; Si 9,18 9,22;  $C_{18}H_{28}OSi$  вычислено %: С 75,00; Н 9,72; Si 9,72.

## Выводы

I. Изучено действие триэтилсилана на метилфенилвинилэтинилкарбинол в присутствии  $H_2PtCl_6$  и Pt/C.

Установлено, что в случае обоих катализаторов триэтилсилан присоединяется к тройной связи метилфенилвинилэтинилкарбинола с образованием диенового кремнесодержащего спирта—2-фенил-, 3-триэтилсиллилгексадиен-3,5-ола-2.

2. Для установления свойств синтезированного 2-фенил-, 3-триэтилсиллилгексадиен-3,5-ола-2 проведены его химические превращения: гидрирование, дегидратация, этерификация, и выделены соответствующие продукты—2-фенил-, 3-триэтилсиллилгексен-3-ол-2; 2-фенил-, 3-триэтилсиллилгексатриен-1, 3, 5; 2-фенил-, 2-триэтилсилокси-3-триэтилсиллилгексадиен-3,5.

3. Действием триэтилхлорсилана на метилфенилвинилэтинилкарбинол в среде пиридина получен 2-фенил-, 2-триэтилсилоксигексинен-3, 5.

4. В процессе работы получены и охарактеризованы пять неизвестных в литературе соединений.

(Представлено 6. I. 1969)

Кафедра органической химии

## ЛИТЕРАТУРА

- И. М. Гвердцители, К. И. Черкезишвили, Л. П. Асатиани, Труды ТГУ, 104, серия химическая, 1964, стр. 313.
- А. Д. Петров, И. М. Гвердцители, К. И. Черкезишвили, Труды ТГУ, 74, серия химическая, 1959, стр. 121; ДАН СССР, 129, № 4, 1959.



ი. მ. გვერდუთელი, ძ. ი. ჩაჩუაშვილი, ლ. პ. ასათიანი

**ტრიეთილსილანის მოქმედება მეთილფენილვინილეთინილკარბინოლზე  
Pt/C და  $H_2PtCl_6$  თანდასწრებით**

(რეზიუმე)

წარმოდგენილი შრომა ეხება ჰიდრიდსილანისა და არომატული რადიკალის შემცველი ვინილაცეტილენის რივის კარბინოლის ურთიერთქმედების საკითხს სხვადასხვა კატალიზატორების—Pt/C და  $H_2PtCl_6$  გამოყენებით. აღმოჩნდა, რომ მესამად ვინილეთინილკარბინოლებში არომატული ბირთვი არ იწვევს რეაქციის განსხვავებულ მიმართულებას. ამ შემთხვევაშიც, მსგავსად სხვა მესამადი ვინილეთინილკარბინოლებისა, რეაქცია მიდის სილიციუმშემცველი დიენური კარბინოლის წარმოქმნით.

ჩატარებულია სინთეზირებული სილიციუმშემცველი დიენური კარბინოლის ზოგიერთი ქიმიური გარდაქმნა: ჰიდრირება რენეს ნიკელის თანდასწრებით, დეჰიდრატაცია  $KHSO_4$ -ის გამოყენებით და სილიციუმოვანი ეთერის მიღება ტრიქლორსილანის მოქმედებით პირიდინის არეში.



## СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННО-РАДИКАЛОВЫХ БОРОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИЗОТОП В<sup>10</sup>

Г. Е. КАЧЕЙШВИЛИ, Н. И. ПИРЦХАЛАВА, М. Ш. АБАШМАДЗЕ

Среди химических элементов, имеющих важное значение для современного технического прогресса, особое место принадлежит бору. Ценные свойства соединений бора находят все большее применение в металлургии, медицине, сельском хозяйстве и других областях народного хозяйства.

Огромный интерес, проявляемый к органическим соединениям бора, объясняется главным образом открывающимися перспективами их дальнейшего практического использования. Ряд насыщенных и ненасыщенных органических соединений бора служит для получения топлива с высокой теплотворной способностью.

Боразолы с различными насыщенными и ненасыщенными группами у атома бора могут применяться в качестве активных ингредиентов в инсектицидах, бактерицидах и гербицидах, а также в компонентах огнестойких пластмасс и др.

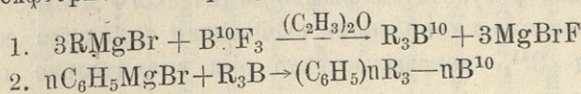
Из литературных данных известно, что изотоп В<sup>10</sup> обладает большой стабильностью против радиоактивного излучения. Надо думать, что борорганические соединения, содержащие изотоп В<sup>10</sup>, тоже будут стабильными против радиоактивного излучения.

Исходя из этих соображений мы решили синтезировать борорганические соединения, в состав которых входит изотоп В<sup>10</sup>.

В лаборатории борорганических соединений химического факультета Тбилисского государственного университета была разработана методика синтеза смешаннорадикаловых борорганических соединений [1, 2, 3, 4, 5].

По этой же методике мы начали синтез смешаннорадикаловых борорганических соединений, содержащих изотоп В<sup>10</sup>.

В данном случае, как реагент, содержащий В<sup>10</sup>, нами применялся эфират трехфтористого бора (В<sup>10</sup>Ф<sub>3</sub>). Реакция протекала по схеме:



### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

К 24 г магниевой стружки при ледяном охлаждении и механическом перемешивании постепенно добавляли 123 г эфирного раствора изопропил-





бора. К полученному магнийорганическому соединению по каплям добавляли 60 мл эфирного раствора комплекса диметилового эфира трехфтористого бора ( $B^{10}$ ) с диметилowym эфиром, после чего содержимое колбы обрабатывали 10%-ным раствором соляной кислоты. Эфирный слой отделили, водный раствор экстрагировали эфиром; соединенная эфирная вытяжка сушилась хлористым кальцием. После отгонки растворителя продукт перегоняли в вакууме. Остальные бортриалкилы получены аналогично.

### Реакция бортриалкилов ( $B^{10}$ ) с фенилмагнийбромидом и стирилмагнийбромидом

К 6 г магниевой стружки при механическом перемешивании и ледяном охлаждении в атмосфере сухого и чистого азота постепенно добавляли эфирный раствор бромбензола; реакция продолжалась до полного растворения металлического магния. После этого при вышеназванных условиях по каплям добавляли 42 мл эфирного раствора три-*n*-пропилбора ( $B^{10}$ ). Реакция протекала экзотермично. Содержимое колбы обрабатывали 10%-ным раствором соляной кислоты. Эфирный слой отделили, водный раствор экстрагировали эфиром; соединенная эфирная вытяжка сушилась хлористым кальцием. После отгонки растворителя продукт перегоняли в вакууме. Остальные соединения получены аналогично.

Константы и результаты анализа полученных соединений, а также константы ранее полученных таких же соединений, содержащих  $B^{10}$ , для сравнения приведены в таблице.

### Выводы

1. Нами впервые синтезированы и исследованы следующие бортриалкилы, содержащие изотоп бора— $B^{10}$ : три-*n*-пропилбор, три-*изо*-пропилбор, три-*n*-бутилбор.

2. Изучено взаимодействие  $B^{10}$  содержащих бортриалкилов с фенилмагнийбромидом и *w*-стирилмагнийбромидом, в результате чего получены следующие смешаннорадикаловые борорганические соединения: дифенил-*n*-пропилбор ( $B^{10}$ ), дифенил-*изо*-пропилбор ( $B^{10}$ ), ди-*w*-стирил-пропилбор ( $B^{10}$ ) и *w*-стирил-ди-пропилбор ( $B^{10}$ ).

3. Исследованы физико-химические свойства смешаннорадикаловых борорганических соединений, содержащих изотоп  $B^{10}$ .

4. Сопоставление результатов физико-химического исследования данных соединений с физико-химическими свойствами таких же соединений, содержащих изотоп  $B^{11}$ , показывает, что они значительно отличаются друг от друга.

(Представлено 16.11.1969)

Кафедра общей химии



Таблица

Соединения	Выход в процентах	Температура кипения, °С	$n_D^{20}$	$d_4^{20}$	MR <sub>D</sub>		Элементарный состав в процентах			Формула	Элементарный состав в процентах		
					Найдены	Вычислены	Найдены				Вычислены		
							С	Н	В		С	Н	В
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Три изо пропилбор (B <sup>10</sup> )	54	75 (10 мм)	1,4170	0,7232	48,98	48,53	76	15,2	7	(C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> ) <sub>3</sub> B <sup>10</sup>	77,6	15,1	7,1
Три-изо-пропилбор (B <sup>11</sup> )	65	77 (8 мм)	1,4180	0,7358	48,63	48,53	77,2	14,9	7,2	(C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> ) <sub>3</sub> B <sup>11</sup>	77,6	15,1	7,1
Три-н-пропилбор (B <sup>10</sup> )	40	80 (10 мм)	1,4160	0,7240	48,33	48,53	76,7	15,1	7,2	(H-C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> ) <sub>3</sub> B <sup>10</sup>	77,6	15,1	7,1
Три-н-пропилбор (B <sup>11</sup> )	60	96 (7 мм)	1,7818	0,7818	47,50	48,53	77,3	14,2	6,9	(H-C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> ) <sub>3</sub> B <sup>11</sup>	77,6	15,1	7,1
Три-н-бутилбор (B <sup>10</sup> )	47	114 (15 мм)	1,4170	0,7421	60,61	62,38	78,2	14,6	5,2	(H-C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> ) <sub>3</sub> B <sup>10</sup>	79,2	14,9	5,1
Три-н-бутилбор (B <sup>11</sup> )	66	120 (12 мм)	1,4200	0,8392	61,90	62,38	78,4	14,1	5,00	(H-C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> ) <sub>3</sub> B <sup>11</sup>	79,2	14,9	5,1
Дифенил-н-пропилбор (B <sup>10</sup> )	40	70 (2 мм)	1,4730	0,9231	60,00	58,64	86	8,1	4,8	C <sub>15</sub> H <sub>17</sub> B <sup>10</sup>	86,9	8,2	4,8
Дифенил-н-пропилбор (B <sup>11</sup> )	70	75 (2 мм)	1,4950	0,8815	61,10	58,64	86,2	8,3	5,04	C <sub>15</sub> H <sub>17</sub> B <sup>11</sup>	86,9	8,0	4,9
Дифенил-изо-пропилбор (B <sup>10</sup> )	55	74 (2 мм)	1,4730	1,0312	56,30	58,64	86,1	8,1	4,9	C <sub>15</sub> H <sub>17</sub> B <sup>10</sup>	86,9	8,2	4,8
Дифенил-изо-пропилбор (B <sup>11</sup> )	59	70 (2 мм)	1,4657	1,1950	56,964	58,64	86,2	8,45	5,09	C <sub>15</sub> H <sub>17</sub> B <sup>11</sup>	86,9	8	5
Ди-ω-стирил-н-пропилбор (B <sup>10</sup> )	21	78 (3 мм)	1,4720	1,2037	75,33	71,27	90	4,8	4,3	C <sub>19</sub> H <sub>21</sub> B <sup>10</sup>	86,6	8,17	5,23
Ди-ω-стирил-н-пропилбор (B <sup>11</sup> )	15	94 (4 мм)	1,4890	1,3914	74,15	71,27	90,4	4,8	3,9	C <sub>19</sub> H <sub>21</sub> B <sup>11</sup>	91	4,9	4
ω-стирил-ди-н-пропилбор (B <sup>10</sup> )	15	127 (4 мм)	1,4345	0,9326	59,28	62,30	84,2	11,8	5	C <sub>14</sub> H <sub>21</sub> B <sup>10</sup>	83,8	10,5	5
ω-стирил-ди-н-пропилбор (B <sup>11</sup> )	30	130 (2 мм)	1,4512	0,9331	59,34	62,30	82,1	12,6	6	C <sub>14</sub> H <sub>21</sub> B <sup>11</sup>	83,8	10,5	5



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джиошвили, ЖОХ, 34, 1964, стр. 2910.
2. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джиошвили, ЖОХ, 35, 1965, стр. 485.
3. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джиошвили, ЖОХ, 35, 1965, стр. 1086.
4. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джиошвили, ЖОХ, 36, II, 1966, стр. 1965.
5. Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, Г. Д. Джиошвили, Сообщения АН ГССР, II, 1966, стр. 75.

გ. ყაჭეიშვილი, ნ. ფირცხალავა, მ. აბაშმაძე

**ზოგადი ფიზიკური ნაერთის სინთეზი და ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევა**

(რეზიუმე)

პირველად სინთეზირებული და გამოკვლეული იზოტოპ  $B^{10}$ -ის შემცველი ბორტრიალკილები: ტრი-ნ-პროპილბორი ( $B^{10}$ ), ტრი-იზობროპილბორი და ტრი-ნ-ბუტილბორი ( $B^{10}$ ).

შესწავლილია  $B^{10}$  შემცველი ბორტრიალკილების ურთიერთქმედება ფენილმენიუმბრომიდთან და  $W$ -სტირილმენიუმბრომიდთან, რის შედეგადაც მიღებულია შერეულრადიკალიანი ბორორგანული ნაერთები: დიფენილ-ნ-პროპილბორი ( $B^{10}$ ), დი-ფენილ-იზობროპილბორი ( $B^{10}$ ), დი- $W$ -სტირილპროპილბორი ( $B^{10}$ ) და  $W$ -სტირილ-დი-პროპილბორი ( $B^{10}$ ).

შესწავლილია იზოტოპ  $B^{10}$  შემცველი შერეულრადიკალიანი ბორორგანული ნაერთების ფიზიკურ-ქიმიური თვისებები.

იზოტოპი  $B^{10}$  შემცველი ნაერთების თვისებების  $B^{11}$  შემცველი ნაერთების თვისებებთან შედარებით ჩანს, რომ ისინი მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.



## შინაარსი

### მათემატიკა

რ. ბერიძე — რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი რეცვილადიანი კვადრატული ფორმით	5
თ. ვეფხვაძე — რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ბინარული კვადრატული ფორმით	17
მ. გელაშვილი — რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი ოთხცივლადიანი კვადრატული ფორმით	25
პ. კოლონია — ლაგრანჟის განზოგადებულ სპექტრთა შესახებ	35
ა. ლურსმანაშვილი — ნატურალურ რიცხვთა წარმოდგენა კვადრატული ფორმებით უკვადრატო ცვლადებში (სინგულარული მწკრივის შეჯამება)	45
ნ. თევზაძე — ფურიეს ორმაგი ლაკუნარული მწკრივის $Ca\beta =$ შეჯამებადობა	63
ნ. თევზაძე — კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის განმეორებითი მწკრივებისა და კერძო ჯამების ლაკუნარულ ქვემიმდევრობათა კრებადობა	71
ი. კილურაძე — ერთი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ ორი დიფერენციალური განტოლების სისტემისათვის	77
ი. ტოროშვილი — ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა კვაზიწრფივო სისტემების ამოხსნების ასიმპტოტური წარმოდგენის შესახებ	89
ნ. ვახანია — გაუსის შემთხვევით მიმდევრობათა შესახებ	103

### მექანიკა

მ. კუკულაძე, რ. კაჭარავა, ო. ანჯაფარიძე, გ. შელიავა — დინამომეტრის ახალი კონფიგურაციის დრეკადი ელემენტის დაძაბული მდგომარეობის გამოკვლევა ფორტოდრეკადობის თეორიის გამოყენებით	111
ნ. პატარაია — ორი კონტურის ერთობლივი გარსდენისათვის შვარცის მეთოდის გამოყენების შესახებ	123
ჯ. შაქარიძე — სუსტადამტარი სითხის არასტაციონარული მოძრაობის განტოლების ერთი ამოხსნის შესახებ	131

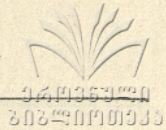
### ფიზიკა

გ. შილაშვილი — ეფექტური რადიუსის მიახლოების ფორმულები, როცა ურთიერთქმედება, გრადა ფაქტორიზებადი პოტენციალებისა, შეიცავს კულონურ პოტენციალსაც	137
--	-----

### ქიმია

ლ. ჭელიძე — ახალი საბადოების ბენტონიტური თიხების შესწავლისათვის	143
გ. ჯოხაძე, მ. უგულავა, ნ. გურგენიძე — ნატრიუმის არსენატების მიღება ოზონის გამოყენებით	151
გ. ჯოხაძე, ნ. კარსანიძე, გ. სუპატაშვილი — დარიშხანი საქართველოს სსრ მტკნარ წყლებში	155
გ. სუპატაშვილი, ნ. კარსანიძე — მიკროელემენტების განსაზღვრა ბუნებრივ წყლებში. ცნობა 1. $Pb^{2+}$ , $Cu^{2+}$ , $Ni^{2+}$ და $Zn^{2+}$ ექსტრაქციულ-ფოტომეტრიული მეთოდით განსაზღვრა წყლის ერთი სინჯიდან	161





- გ. ყაჭვიშვილი ნ. ფირცხალავა, ს. კანდელაკი ნ. ტუფინაშვილი — ზოგიერთი შერეულრადიკალანი ბორორგანული ნაერთის სინთეზი და ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევა 167
- ნ. ციციშვილი, თ. კიფარენკო, გ. ციციშვილი, დ. წაქაძე — Galanthus Woronowii A. Los.-ის დამატებითი შესწავლა ალკალიდის შემცველობაზე 171
- ი. გვერდწითელი, ქ. ჩერქეზიშვილი, ლ. ასათიანი — ტრეითილსილანის მოქმედება მეთილფენილვინილეთინილკარბინოლზე Pt/c და H<sub>2</sub>PtCl<sub>6</sub> თანდასწრებით 175
- გ. ყაჭვიშვილი, ნ. ფირცხალავა, მ. აბაშმაძე — ზოგიერთი შერეულრადიკალანი B<sup>10</sup>-ის შემცველი ბორორგანული ნაერთის სინთეზი და ფიზიკურ-ქიმიური გამოკვლევა. 181



## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

Р. И. Беридзе — О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с восемью переменными . . . . .	5
Т. В. Вепхвадзе — О представлении чисел некоторыми бинарными квадратичными формами . . . . .	17
М. С. Гелашвили — О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными . . . . .	25
П. Г. Когония — Об обобщенных спектрах Лагранжа . . . . .	35
А. П. Лурсманашвили — Представление чисел квадратичными формами с бесквадратными переменными (суммирование особого ряда) . . . . .	45
Н. Р. Тевзадзе — $S_{\alpha\beta}$ -суммируемость двойного лакунарного ряда Фурье . . . . .	63
Н. Р. Тевзадзе — Сходимость повторных рядов и лакунарных последовательностей частных сумм двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом . . . . .	71
И. Т. Кигурадзе — Об одной краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений . . . . .	77
И. А. Торошелидзе — Об асимптотическом представлении решений квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	89
Н. Н. Вахания — О гауссовских случайных последовательностях . . . . .	103

### Механика

М. Н. Кукуладзе, Р. А. Качарава, О. Е. Анджaparидзе, Г. Г. Шелиава — Исследование напряженного состояния новой конфигурации упругого элемента динамометра методом фотоупругости . . . . .	111
Н. Н. Патараия — О применении метода Шварца к задаче о совместном обтекании двух контуров . . . . .	123
Д. В. Шарикадзе — Об одном решении уравнения нестационарного движения слабopоводящей жидкости . . . . .	131

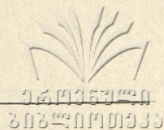
### Физика

Г. А. Чилашвили — Формулы приближения эффективного радиуса для случая, когда взаимодействие, кроме факторизирующихся потенциалов, содержит кулоновский потенциал . . . . .	137
--	-----

### Химия

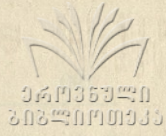
Л. А. Челидзе — Исследование бентонитовых глин новых месторождений . . . . .	143
Г. М. Джохадзе, М. М. Угулава, Н. И. Гургенидзе — Получение арсенатов натрия с применением озона . . . . .	151
Г. М. Джохадзе, Н. К. Карсанидзе, Г. Д. Супаташвили — Мышьяк в пресных водах Грузинской ССР . . . . .	155





- Г. Д. Супаташвили, Н. К. Карсанидзе — Определение микроэлементов в природных водах. Экстракционно-фотометрический метод определения  $Pb^{2+}$ ,  $Cu^{2+}$ ,  $Ni^{2+}$  и  $Zn^{2+}$  в одной пробе воды . . . . . 161
- Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, С. П. Канделаки, Н. А. Тупинашвили — Синтез и физико-химическое исследование некоторых смешаннорадикаловых борорганических соединений . . . . . 167
- Н. С. Цицишвили**, Т. Н. Кипаренко, Г. И. Цицишвили, Д. М. Цакадзе — Дополнительное исследование *Galanthus Woronowii* A. Los. на содержание алкалоида . . . . . 171
- И. М. Гвердцители, К. И. Черкезишвили, Л. П. Асатиани — Действие триэтилсилана на метилфенилвинилэтилкарбинол в присутствии  $H_2PtCl_6$  и Pt/C . . . . . 175
- Г. Е. Качейшвили, Н. И. Пирцхалава, М. Ш. Абашмадзе — Синтез и физико-химическое исследование смешаннорадикаловых борорганических соединений, содержащих изотоп  $V^{10}$  . . . . . 181





CONTENTS

Mathematics

R. Reridze—On the representation of numbers by some quadratic forms with eight variables . . . . . 5

T. Vepkhvadze—On the representation of numbers by some binary quadratic forms . . . . . 17

M. Gelashvili—On the representation of numbers by some quadratic forms with four variables . . . . . 25

P. Kogonia—On generalized spectra of Lagrange . . . . . 35

A. Lursmanashvili—On the representation of integers by quadratic forms with squarefree variables (Summation of the singular series) . . . 45

N. Tevzadze— $C_{\alpha\beta}$ -summability of the double lacunary Fourier series . . . 63

N. Tevzadze—Summability of repeated series and lacunary sequences of partial sums of the functions of the double Fourier series summable with the square . . . . . 72

I. Kiguradze—On a boundary value problem for the system of two differential equations . . . . . 77

I. Toroshelidze—On asymptotic behaviour of solutions of quasi-linear systems of ordinary differential equations . . . . . 89

N. Vakhania—On Gaussian random sequences . . . . . 103

Mechanics

M. Kukuladze, R. Kacharava, O. Anjaparidze, G. Sheliava—Investigation of a tense state of a new configuration of a dynamometer elastic element by the photoelastic method . . . . . 111

N. Pataraiia—On the application of the Shwartz method to the problem of simultaneous flow of two contours . . . . . 123

D. Sharikadze—On one solution of the non-stationary flow equation of low conductive fluid . . . . . 121

Physics

G. Chilashvili—Formulas of effective radius approximation in the case when the interaction includes factorising and Coulomb potentials . . . . 137

Chemistry

L. Chelidze—Investigation of new deposit bentonit clays . . . . . 143

G. Jokhadze, M. Ugulava, N. Gurgeniidze—Obtaining of the sodium arsenates by application of ozone . . . . . 151

G. Jokhadze, N. Karsanidze, G. Supatashvili—Arsenic in the Georgian SSR sweet waters . . . . . 155





- G. Supatashvili, N. Karsanidze—Determination of the microelements in natural waters. Bulletin I. Determination of  $Pb^{2+}$ ,  $Cu^{2+}$ ,  $Ni^{2+}$  and  $Zn^{2+}$  by the extraction-photometrical method from one sample of water . . . 161
- G. Kacheishvili, N. Pirtskhalava, S. Kandelaki, N. Tupinashvili—Synthesis of some mixedradical bororganic compounds and their physico-chemical investigation . . . 167
- N. Tsitsishvili, T. Kiparenko, G. Tsitsishvili, D. Tsakadze—Complementary investigation of the *Galanthus Woronowii* A. Los. containing the alkaloid . . . 171
- I. Gvertsiteli, K. Cherkezishvili, L. Asatiani—The action of the triethylsilane on the methylphenylvinylethynylcarbinol in the presence of  $H_2PtCl_6$  an Pt/c . . . 175
- G. Kacheishvili, N. Pirtskhalava, M. Abashmadze—Synthesis and physico-chemical investigation of the mixedradical bororganic compounds containing isotop  $B^{10}$  . . . 181





გამომცემლობის რედაქტორები: ლ. აბუაშვილი,  
დ. დელეჟვა

ტექნოლოგიური ი. ხუციშვილი  
კორექტორი ე. სულხანიშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 7/XII-70  
ჭაღალდის ფორმატი 70×108/16  
ნაბეჭდი თაბახი 16,8  
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 12,35

შეკვეთა 1125                      უფ 12338                      ტირაჟი 600.


ფასი 1 მან. 33 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,  
თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14  
Издательство Тбилисского университета,  
Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 14

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,  
თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1  
Типография Тбилисского университета,  
Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 1



~~71-279~~

  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ  
ՆԱԽԱՐԱՐԱԿԱՆ

59  

---

1971