დ. ცხაკაია

მათემატიკის ისტორია

„მეცნიერება"
1965

АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

Д. Г. ЦХАКАЯ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

С XVII ВЕКА ДО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ XIX ВЕКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МЕЦНИЕРЕБА»
Тбилиси
1965

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია

დ. ცხაკაია

მათემატიკის ისტორია

XVII საუკუნიდან XIX საუკუნის მეორე ნახევრამდე

გამომცემლობა „მეცნიერება“
თბილისი
1965

51(09)
ც 972

წინამდებარე ნაშრომი გაგრძელებაა ამავე ავტორის წიგნისა „მათემატიკის ისტორია უძველესი საუკუნეებიდან XVII საუკუნემდე“, რომელიც ქართულ ენაზე გამოიცა 1948 წელს.

ნაშრომი დაწერილია მასში მოხსენიებული მათემატიკოსების პირველ წყაროთა საფუძველზე. ავტორის მიერ გამოკვლეული მასალების მიხედვით გადმოცემულია აგრეთვე XVII საუკუნიდან XIX საუკუნის მეორე ნახევრამდე საქართველოში მათემატიკის განვითარების შესახებ. ავტორი სარგებლობდა მათემატიკის ისტორიკოსების—კანტორის, ზუტერის, ცეიტენის, ვილეიტნერის, კლაინის, გნედენკოს, კოლმანის, ვიგოდსკისა და იანოვსკაიას — ნაშრომებით.

ამ წიგნის გამოყენება შეუძლიათ მათემატიკური მეცნიერების ისტორიის სპეციალისტებს, მათემატიკის მასწავლებლებს, სტუდენტებსა და მათემატიკის მოყვარულთ.

თავი I

ასტრონომია და მექანიკა ახალი დროის დასაწყისში

აღორძინების ეპოქა მათემატიკაში დაიწყო მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნით (ფერრო და ტარტალია), ხოლო ასტრონომიაში — სამყაროს ჰელიოცენტრული სისტემის აღმოჩენით, რომელიც კოპერნიკმა გადმოსცა თავის ნაშრომში: „De revolutionibus orbium coelestium“ — „ციური წრეების მოქცევის შესახებ“. კოპერნიკის მოძღვრება ეწინააღმდეგება დაბადებაში (ბიბლიაში) გადმოცემულ მთელ რიგ ამბებს; მაგალითად, დაბადების მეათე თავში ლაპარაკია „სასწაულზე“, თითქოს, იესო ნავინის ბრძანებით მზე შეჩერდა, რომ „ღვთის მიერ არჩეულ ხალხს“ შესაძლებლობა ჰქონოდა დღის სინათლეზე გაენადგურებინა მტერი. „მაშ, — აცხადებს ეკლესია, — დაბადებაში ნათქვამია, რომ მზე მოძრაობსო, კოპერნიკი კი საწინააღმდეგოს ამბობს“.

ეკლესიამ სასტიკი ბრძოლა დაიწყო კოპერნიკის მოძღვრების წინააღმდეგ და მისი ნაშრომი „ციური წრეების მოქცევის შესახებ“ აკრძალულ წიგნთა სიაში მოათავსა. მაგრამ კოპერნიკს აღმოაჩნდა მიმდევარი, — გალილეო გალილეი, — რომელმაც კოპერნიკის მოძღვრების გავრცელებაში დიდი ნიჭი და ენერგია გამოიჩინა და თავისი უაღრესად მნიშვნელოვანი აღმოჩენებით კიდევ უფრო განავითარა კოპერნიკის ნაშრომში მოცემული იდეები. გალილეი არ იყო მაშინ ერთადერთი: კოპერნიკის შრომამ ევროპელებში მეტად გააძლიერა ასტრონომიისადმი ინტერესი. გამოჩნდნენ შესანიშნავი ასტრონომები: ტიხო ბრაჰე და კეპლერი. კოპერნიკის იდეების საფუძველზე ასტრონომიამ სწრაფად დაიწყო განვითარება, ამის შედეგად კი ვითარდება მექანიკა და მათემატიკა. ასტრონომიამ მოითხოვა გამოთვლების უფრო მოქნილი ხერხი, ამ მოთხოვნას მათემატიკამ უპასუხა ლოგარითმების გამოგონებით.

1. ტიხო ბრაჰე

XVI საუკუნის დიდი ასტრონომი ტიხო ბრაჰე (1546—1601) დაიბადა შონენში (დანია), სწავლობდა კოპენჰაგენის უნივერსიტეტში. უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ

გაგზავნეს საზღვარგარეთ, რომ მომზადებულიყო სახელმწიფო სამსახურისათვის. საზღვარგარეთ ყოფნა მან გამოიყენა უმთავრესად ასტრონომიის შესასწავლად და საკუთარი გამოკვლევების წარმოებისათვის. პირველმავე შრომამ „ახალი ვარსკვლავის შესახებ“ ტიხო ბრაჰეს სახელი გაუთქვა არა მარტო თავის სამშობლოში, არამედ საზღვარგარეთაც. 1576 წელს ტიხო ბრაჰე გადასახლდა კუნძულ გვინეაში, რომ იქ ეწარმოებინა ასტრონომიული დაკვირვებები. 20 წლის ნაყოფიერი მუშაობის შედეგად თავის მრავალ მოწაფესთან ერთად მან მიაღწია დაკვირვებათა ისეთ სიზუსტეს, რომელსაც მანამდე არსად ადგილი არ ჰქონია. ამ დაკვირვებებმა გზა გაუკაფეს ტიხო ბრაჰეს დიდ თეორიულ მიღწევებს და სანიმუშონი გახდნენ შემდგომი დაკვირვებებისათვის.

ტიხო ბრაგე იყო ერთ-ერთი იმ პიონერთაგანი, რომლებიც ცდილობდნენ ბუნების შესწავლას ცდისა და დაკვირვებათა საფუძველზე. ამ მხრივ იგი ითვლება გალილეისა და კეპლერის წინამორბედად, თუმცა მთლიანად არ იზიარებდა კოპერნიკის მოძღვრებას. მან სამყაროს აგებულების შესახებ შექმნა თავისი სისტემა, რომელშიც დედამიწა უძრავ სამყაროდ აღიარა. კოპერნიკის სისტემის უპირატესობა ტიხო ბრაჰემ შეინარჩუნა იმით, რომ მზე ჩათვალა დედამიწის გარშემო მოძრავად, ხოლო პლანეტები — მზის გარშემო. ამრიგად, მზიური სისტემის ყოველი სხეულისათვის ფარდობითი მოძრაობა რჩება ისეთივე, როგორიცაა კოპერნიკის სისტემაში.

ტიხო ბრაჰეს დიდი ღვაწლი მიუძღვის ტრიგონომეტრიის განვითარებაში; მის ნაშრომში ვპოულობთ მოცემული სამი ელემენტის საშუალებით ბრტყელი და სფერული სამკუთხედების ამოხსნის წესებს.

2. გალილეო გალილეი

გალილეი (1564 — 1642) დაიბადა პიზაში. მამა გამოჩენილი მუსიკოსი იყო და თვითონ მასაც უყვარდა ეს ხელოვნება. ბავშვობაში ის ეწეოდა მანქანების გამოგონებას და მათ კონსტრუირებას. მამის რჩევით გალილეი შევიდა უნივერსიტეტის სამედიცინო ფაკულტეტზე, მაგრამ იგი მალე მიატოვა და დაიწყო ფილოსოფიის, ფიზიკის, მათემატიკისა და ასტრონომიის შესწავლა. 1589 წელს მან პიზას უნივერსიტეტში მიიღო პროფესორის წოდება და მათემატიკის კათედრას განაგებდა. 1592 წელს გალილეი გადავიდა პადუას უნივერსიტეტში, ვინაიდან მას იქ შეუქმნეს მუშაობი-

სათვის გაცილებით უკეთესი პირობები. ამასთან ერთად პადუაში და საერთოდ ვენეციის რესპუბლიკაში უფრო მეტი მეცნიერული თავისუფლება იყო, ვიდრე მის სამშობლოში, რომელიც მთლიანად ეკლესიის გავლენის ქვეშ იმყოფებოდა. პადუაში მას ჰქონდა თავისი აზრების გავრცელების სრული შესაძლებლობა თავისი მოწაფეებისა და წერილების საშუალებით. საჭვრეტი მილის გამოგონებამ, რომელმაც გალილეის მეტად გაუთქვა სახელი, მას ახალი აღმოჩენების საშუალება მისცა. ამ აღმოჩენებს მეცნიერებისათვის დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა; მათ მთელი მსოფლიო განცვიფრებაში მოიყვანეს. ამ აღმოჩენებითვე გალილეიმ დაამტკიცა კოპერნიკის შეხედულებათა სისწორე. რამდენიმე თვის განმავლობაში მან თავისი საჭვრეტი მილის საშუალებით გამოიკვლია მთვარის ზედაპირი, აღმოაჩინა რამდენიმე ასეული ახალი ვარსკვლავი, ახსნა მთვარის ნაცრისფერი სინათლე, აღმოაჩინა მუშთარის თანამგზავრები და გამოააშკარავა ირადიაციის ფაქტი. ყველა ამ აღმოჩენას დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა კოპერნიკის შეხედულებათა დამტკიცებებისათვის.

1610 წელს გალილეის მისცეს „დიდი ჰერცოგი ტოსკანელის პირველი ფილოსოფოსისა და მათემატიკოსის" თანამდებობა და გადაიყვანეს ფლორენციაში. იმავე წელს მან ყველა თავისი ზემოხსენებული აღმოჩენა გამოაქვეყნა ნაშრომში „ვარსკვლავის მოამბე". რამდენად დაინტერესებული იყო საზოგადოება გალილეის აღმოჩენებით მჟღავნდება იმით, რომ გალილეის ეს ნაშრომი, გამოცემული 550 ცალად, რამდენიმე დღეში გაიყიდა, ისიც ლათინურ ენაზე, მაშინ როცა მისი შინაარსი ხელმისაწვდომი იყო სპეციალური განათლების მქონეთათვის. გალილეიმ ამ წიგნში გაკვრით, მაგრამ გარკვეულად, გამოთქვა აზრი კოპერნიკის დასაცავად.

ამრიგად, გალილეიმ პირველი გადამწყვეტი ნაბიჯი გადადგა კოპერნიკის სისტემის დასაცავად და თუ მაინც ის პიზას უნივერსიტეტში ლექციების კითხვის დროს პტოლომეოსის სისტემას ეყრდნობოდა, ეს იყო გამოწვეული მხოლოდ ეკლესიის შიშით. კოპერნიკის ნაშრომის აკრძალულ წიგნთა სიაში მოთავსების შემდეგაც გალილეიმ უკან არ დაიხია და 1632 წელს გამოაქვეყნა თავისი ნაშრომი „დიალოგი სამყაროს აგებულების ორი სისტემის, პტოლომეოსისა და კოპერნიკის შესახებ", რომელშიც უფრო ვრცელი არგუმენტების მოშველიებით იცავს კოპერნიკის სისტემას. ამ ნაშრომს გაბაასების ფორმა აქვს. მასში გადმოცემულია პტოლომეოსისა და კოპერნიკის სისტემათა საწინააღმდეგო თუ სასარგებლო არგუმენტები,

რომლებსაც მივყავართ იმ დასკვნამდე, რომ კოპერნიკის სისტემა ჭეშმარიტია; დასკვნა გალილეის აშკარად არ გამოჰყავს. იქვე ამბობს, რომ თუმცა იტალიელებს ესმით დამტკიცებები კოპერნიკის სისტემის სასარგებლოდ, მაგრამ მაინც თავს იკავებენ მათი მიღებისაგან რელიგიური მოსაზრებით.

ნაშრომის გამოქვეყნების შემდეგ გალილეი რომში გამოიძახეს ინკვიზიციისათვის. 69 წლის მოხუცი, წამების მუქარით დაშინებული, იძულებული გახდა ფიცით უარეყო თავისი შეხედულებანი კოპერნიკის მოძღვრების შესახებ, რომელიც ყალბ მოძღვრებად აღიარეს. გალილეის ესეც არ აკმარეს და სამი წლით დაპატიმრება და საეკლესიო აღსარება მიუსაჯეს. მართალია, ის არ დაუპატიმრებიათ, მაგრამ მთელი თავისი სიცოცხლე მეთვალყურეობის ქვეშ გაატარა. სიცოცხლის უკანასკნელ წლებში გალილეი დაბრმავდა და სწორედ სიბრმავის პერიოდში გააკეთა უაღრესად მნიშვნელოვანი ნაშრომი, რომლითაც საფუძველი ჩაუყარა მეცნიერულ დინამიკას; რასაკვირველია, ის დაეყრდნო ახალგაზრდობის დროს წარმოებულ დაკვირვებებსა და გამოკვლევებს. ეს ნაშრომი — „საუბრები და მათემატიკური დამტკიცებები, რომლებიც ეხებიან ორ ახალ მეცნიერებას", დაიბეჭდა 1638 წელს ჰოლანდიაში, რადგანაც იტალიაში ცენზურას შეეძლო მისი გამოცემა შეეფერხებინა. ნაშრომში გადმოცემულია მრავალი დაკვირვება და ცდა, რომლებსაც ეყრდნობა გალილეის მიერ დაწესებული კანონები; ეს ნაშრომი ახალი ექსპერიმენტული ფიზიკის განვითარების გამოსავალი წერტილია. გალილეის მათემატიკურად გამოჰყავს შედეგები უკვე ექსპერიმენტების საშუალებით დაწესებული წინაპირობებისაგან, რის გამო ამ ნაშრომს მათემატიკისთვისაც დიდი მნიშვნელობა აქვს. უნდა აღინიშნოს, რომ ის მათემატიკის განვითარებისთვის ახალ მეთოდებს სახავს; იბადება საჭიროება უსასრულოდ მცირე სიდიდეების განხილვისა. ახალი მეცნიერება მოძრაობის შესახებ მათემატიკას უსახავს განვითარების ახალ გზას; მათემატიკა უკვე დგება უწყვეტად ცვლად სიდიდეთა ცნების შემოყვანის საჭიროების წინაშე.

ამ ნაშრომის მესამე განაასხაში გალილეი იკვლევს თანაბრად აჩქარებულ წრფივ მოძრაობას; ამ შემთხვევაში ყოველ მომენტში მოძრავი წერტილის სიჩქარე მოძრაობის დასაწყისიდან განვლილი დროის პროპორციულია, ესე იგი

$$v=gt,$$

სადაც t დრო, v—სიჩქარე და g კი მუდმივი მამრავლია. გალილეი ამტკიცებს, რომ t მომენტისათვის განვლილი გზის სიდიდეა

$$x = \frac{1}{2} g t^2$$

ანუ, როგორც ის ამბობს, ტოლია გზის, რომელიც განვლილია იმავე დროის განმავლობაში $\frac{v}{2}$-ის ტოლი მუდმივი სიჩქარით. ამის გეომეტრიულად დამტკიცებისათვის გალილეი კოორდინატებს ხმარობს. t დრო აბსცისად არის მიღებული, v კი—ორდინატად. თუ v-ს მუდმივ სიდიდედ ჩავთვლით, მაშინ ორდინატის ბოლო წერტილი გაივლის აბსცისათა ღერძის პარალელს და განვლილი გზა გამოსახება იმ მართკუთხედის ფართობით, რომელიც მოთავსებულია პარალელსა და აბსცისათა ღერძს შორის. განვლილი მანძილის გამოსახვას ფართობის საშუალებით გალილეი ავრცელებს იმ შემთხვევაზე, როდესაც v სიჩქარე ცვლადი სიდიდეა. გალილეის მიერ განხილულ შემთხვევაში, როდესაც ორდინატის ბოლო წერტილი გაივლის წრფეს, განვლილი გზა x გამოისახება იმ სამკუთხედის ფართობით, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ წრფით, t აბსცისით და $v = gt$ ორდინატით; ეს სამკუთხედი, გალილეის მტკიცებით, ტოლდიდია მართკუთხედის t ფუძით და $\frac{1}{2} v$ სიმაღლით.

მეოთხე გაბაასებაში გალილეი იკვლევს რომელიმე ჰორიზონტალური საწყისი სიჩქარით ტყორცნილ მძიმე წერტილის მოძრაობას; ვინაიდან ჰორიზონტალური მიმართულებით გადაადგილება, რომელსაც ჩვენ აქ განვიხილავთ როგორც x აბსცისას, დროის შესაბამი შუალედის პროპორციულია, ხოლო ვერტიკალზე y გადაადგილება ამ შუალედის კვადრატის პროპორციულია, ამიტომ წერტილის ტრაექტორია იქნება პარაბოლა. მის პარამეტრს გალილეი განსაზღვრავს როგორც ვარდნის გათხკეცებულ სიმაღლეს, რომელიც საჭირო იქნებოდა წერტილისათვის საწყისი ჰორიზონტალური სიჩქარის ტოლი სიჩქარის მისაცემად. მართლაც, განტოლებანი

$$x = ut, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

გვაძლევენ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მოძრაობისათვის (თუ t-ს გამოვრიცხავთ)

$$y = \frac{1}{2} \frac{g}{u^2} x^2, \tag{2}$$

სადაც პარამეტრი $\frac{2u^2}{g}$ სწორედ ტოლია გაოთხკეცებული გზისა, რომლისთვისაც შეიძლებოდა მიეღწია ვარდნის სიჩქარეს. (1)-დან მივიღებთ (მეორე განტოლების პირველზე გაყოფით)

$$\frac{gt}{u}=\frac{2y}{x};$$

თუ ამ განტოლებაში $2y$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ (2) განტოლებიდან განსაზღვრულ მის მნიშვნელობას $\frac{gx^2}{u^2}$ და $\frac{2u^2}{g}$ პარამეტრს $2p$-თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$\frac{gt}{u}=\frac{gx^2}{u^2x}=\frac{gx}{u^2}=\frac{x}{p};$$

ესე იგი ვერტიკალური სიჩქარის gt-ს შეფარდება u ჰორიზონტალურ სიჩქარესთან $\frac{x}{p}$-ს ტოლია.

ეს შედეგი მოყვანილია გალილეის ნაშრომში. ამავე ნაშრომში დაადგინა აგრეთვე, რომ ტყორცნილი სხეულის ქროლის უდიდესი სიშორე მიღწეული იქნება, თუ მიმართულება საწყისი სიჩქარისა, რომლის სიდიდე განხილულია მოცემულად, ჰორიზონტალურ გეგმილთან ჰქმნის 45°-იან კუთხეს.

თ ა ვ ი II

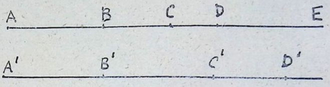
ლოგარითმების გამოგონება

1. ჯონ ნეპერი

XVI საუკუნის მათემატიკოსმა შტიფელმა ნიადაგი მოუმზადა ლოგარითმების გამოგონებას. შტიფელის იდეის განვითარებამ ნეპერი და ბიურგი, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, ლოგარითმების გამოგონებამდე მიიყვანა.

ნეპერი დაიბადა 1550 წელს ქ. მერჩისტონში, მემამულის ოჯახში (როდესაც ის დაიბადა, მამამისი 16 წლის იყო). საზღვარგარეთ მოგზაურობის დროს გაეცნო რეგიომონტანუსის ტრიგონომეტრიულ ნაშრომებს. ნეპერი პირველად ღვთისმეტყველებაში მუშაობდა და მისი ნაშრომიც ამ დარგში გადაითარგმნა გერმანულ და ჰოლანდიურ ენებზე. მუშაობდა აგრეთვე სამხედრო და სამიწათმოქმედო იარაღების გამოგონებაზე; 1614 წელს გამოქვეყნდა მისი „განსაცვიფრებელი ლოგარითმების ტაბულების აღწერა“, რომელშიც მოცემულია ლოგარითმების ტაბულის ხმარების ახსნა-განმარტება. ნეპერის სიკვდილის (1617 წელი) ორი წლის შემდეგ გამოსცეს კიდევ მეორე ნაშრომი „განსაცვიფრებელი ლოგარითმების ტაბულების აგება“. ხერხი, რომლითაც ნეპერი ლოგარითმების ტაბულებს განსაზღვრავს, ჰქმნის საუკეთესო დამხმარე საშუალებას გამოთვლებისათვის და ამავე დროს შეიცავს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის იდეის ჩანასახს. ლოგარითმების განსაზღვრაში ნეპერის აზრთა მსვლელობა შეიძლება ასე გადმოვცეთ: ვთქვათ, AE წრფე (ნახ. 1) განსაზღვრული სიგრძისაა, ხოლო $A'D'$ წრფე უსასრულოა. დავუშვათ, რომ ამ წრფეებზე ორი წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას; ერთი მოძრაობს A-დან E-კენ, მეორე კი გამოდის A'-დან და მოძრაობს $A'D'$-ზე. დავუშვათ, რომ მათი მოძრაობის სიჩქარე პირველ მომენტში ერთი და იგივეა, $A'D'$ წრფეზე წერტილის მოძრაობა იყოს თანაბარი, ხოლო AE წრფეზე მოძრავი წერტილის სიჩქარე ყოველ მომენტში ისე შეეფარდება

$A'D'$ წრფეზე მოძრავი წერტილის სიჩქარეს, როგორც AE წრფეზე ყოველ მომენტში წერტილის მიერ გაულელი მანძილი შეეფარდება მთელ მანძილს; ესე იგი AE წრფეზე მოძრავი წერტილის სიჩქარე კლებულობს. თუ AE წრფეზე წერტილი გაივლის AC მანძილს იმ დროს, როდესაც $A'D'$ წრფეზე წერტილი გაივლის $A'C'$ მანძილს, მაშინ $A'C'$-ს ნეპერი უწოდებს CE-ს ლოგარითმს. ნეპერის აზრის ნათელსაყოფად ორივე წრფეზე მოძრავი წერტილების საწყისი სიჩქარე ავღნიშნოთ v-თი. დავუშვათ,



ნახ. 1.

რომ $v=AE$ და ის ძალიან დიდია. წამი გავყოთ v ნაწილად, ესე იგი დროის თითოეული მომენტი უდრის $\dfrac{1}{v}$-ს. რადგან $A'D'$ წრფეზე წერტილის მოძრაობა თანაბარია, ამიტომ თითოეულ მომენტში ის გაივლის $v\cdot\dfrac{1}{v}=1$ მანძილს. AE წრფეზე წერტილი იწყებს მოძრაობას იმავე $v=AE$ სიჩქარით, ხოლო პირველი მომენტის დასასრულს ანუ B წერტილზე მისი სიჩქარე ავღნიშნოთ v'-ით, მეორე მომენტის დასასრულს ანუ C წერტილზე — v''-ით, მესამე მომენტის დასასრულს ანუ D წერტილზე — v'''-ით და ასე შემდეგ. პირველი მომენტის განმავლობაში AE წრფეზე წერტილი გაივლის მანძილს, რომელიც ძალიან ახლოა ერთთან და გაუვლელი მანძილი ამ წრფეზე იქნება

$$BE=v-1=v\left(1-\frac{1}{v}\right).$$

მაშინ AE წრფეზე წერტილის სიჩქარე v' განისაზღვრება ტოლობიდან $\dfrac{v'}{v}=\dfrac{v-1}{v}$ ანუ $v'=v-1=v\left(1-\dfrac{1}{v}\right)$. მეორე მომენტის განმავლობაში AE წრფეზე წერტილის სიჩქარე ძალიან მცირედ განსხვავდება $v'=v\left(1-\dfrac{1}{v}\right)$-გან, ამიტომ განვლილი მანძილი BC

იქნება $\frac{1}{v}\cdot v\left(1-\frac{1}{v}\right)=1-\frac{1}{v}$ (დრო $\frac{1}{v}$ გამრავლებული $v\left(1-\frac{1}{v}\right)$ სიჩქარეზე). მეორე მომენტის დასასრულს გაუვლელი მანძილი იქნება

$$CE=v\left(1-\frac{1}{v}\right)-\left(1-\frac{1}{v}\right)=v\left(1-\frac{1}{v}\right)\left(1-\frac{1}{v}\right)=$$
$$=v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2;$$

მეორე მომენტის დასასრულს AE წრფეზე წერტილის სიჩქარე v'' განისაზღვრება ტოლობიდან $v'':v=v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2:v$; ესე იგი $v''=\left(1-\frac{1}{v}\right)^2$. მესამე მომენტის განმავლობაში AE წრფეზე წერტილის სიჩქარე ძალიან მცირედ განსხვავდება $v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2$ სიდიდისაგან, ამიტომ მესამე მომენტის განმავლობაში განვლილი მანძილი იქნება $CD=\frac{1}{v}\cdot v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2=\left(1-\frac{1}{v}\right)^2$; მესამე მომენტის დასასრულს გაუვლელი მანძილი იქნება

$$DE=v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2-\left(1-\frac{1}{v}\right)^2=v\left(1-\frac{1}{v}\right)^3.$$

ამგვარად, რომელიმე v-ური მომენტისათვის გაუვლელი მანძილი იქნება

$$v\left(1-\frac{1}{v}\right)^v.$$

საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ ორი პროგრესია: პირველი— გეომეტრიული, მეორე—არითმეტიკული.

$$v,\quad v\left(1-\frac{1}{v}\right),\quad v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2,\quad v\left(1-\frac{1}{v}\right)^3,\ \ldots,\ v\left(1-\frac{1}{v}\right)^v,$$
$$0,\qquad 1\qquad,\qquad 2\qquad,\qquad 3,\qquad \ldots,\qquad v;$$

გეომეტრიული პროგრესიის წევრებია AE წრფეზე წერტილის მიერ მიმდევრობითი მომენტების დასასრულს გაუვლელი

მანძილები, ხოლო არითმეტიკული პროგრესიის წევრები $A'D'$ წრფეზე წერტილის მიერ განვლილი მანძილები შესაბამი დროის მომენტების დასასრულს. არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს ნეპერმა უწოდა შესაბამისად გეომეტრიული პროგრესიის წევრების ლოგარითმები ანუ „ლოგოს არითმოს" (შეფარდებათა რიცხვები, λόγος ἀριθμος). ნეპერის ამ აზრთა მსვლელობაში ადვილად შევამჩნევთ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის იდეის ჩანასახს. მართლაც, თუ $A'D'$ წრფეზე მოძრავი წერტილის მანძილს D' წერტილამდე აღვნიშნავთ x-ით და AE წრფეზე მოძრავი წერტილის მანძილს E წერტილამდე — y-ით, მაშინ ამ წერტილების სიჩქარეთა შეფარდება რომელიმე მომენტში იქნება $\dfrac{dy}{dx}$ და მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{v}, \qquad (v = AE),$$

რადგან, როდესაც $x=0$, მაშინ $y=v$, ამიტომ ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება მოგვცემს

$$\frac{1}{v}\int_0^x dx = -\int_v^y \frac{dy}{y}; \qquad \frac{x}{v} = -\ln\frac{y}{v},$$

სადაც ln აღნიშნავს ნატურალურ ლოგარითმს. ამრიგად, ნეპერის ნაშრომი წარმოადგენს ერთგვარ სამზადისს დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის შექმნისათვის.

ნეპერის დაშვებით $v=10^7$; მაშინ უკანასკნელი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{x}{10^7} = -\ln\frac{y}{10^7},$$

ხოლო ზემოაღნიშნული პროგრესიები —

$$10^7,\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right),\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2,\ \ldots,10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7};$$

$$0,\qquad 1,\qquad 2,\qquad 3,\ \ldots,\qquad 10^7;$$

როგორც ვხედავთ, 10^7-ის ნეპერის ლოგარითმი ნულს უდრის. წინამორბედი განტოლებიდან ვღებულობთ ნეპერისა და ნატურალურ ლოგარითმებს შორის დამოკიდებულებას: $x=$ ნეპერის ლოგარითმს $y = 10^7 \times$ ნატურ. ლოგარითმი $\frac{10^7}{y}$. ნეპერი სრულებით არაფერს არ ამბობს ლოგარითმების ფუძის შესახებ; ის მხოლოდ ორი პროგრესიის — არითმეტიკულისა და გეომეტრიულის — ერთმანეთთან შედარების შესახებ გვეუბნება. იმისათვის, რომ გავარკვიოთ, თუ რომელი რიცხვია ნეპერის ლოგარითმების ფუძე, საჭიროა ორივე პროგრესიის ყველა წევრი გავყოთ 10^7-ზე, რის შემდეგ მივიღებთ ჩვენს რიცხვებს და მათ ლოგარითმებს:

$$1, \quad \left(1-\frac{1}{10^7}\right), \quad \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2, \; \ldots, \quad \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7};$$

$$0, \quad \frac{1}{10^7}, \quad \frac{2}{10^7}, \quad \ldots, \quad 1.$$

როგორც ვხედავთ, ნეპერის ლოგარითმების სისტემაში ფუძეა $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, რომელიც დაახლოებით $\frac{1}{e}$-ს უდრის, სადაც $e=2,718281\ldots$ ესე იგი ნეპერის ლოგარითმების ფუძე დაახლოებით უდრის ნატურალური ლოგარითმების ფუძის შექცეულ სიდიდეს.

ნეპერის უახლესი მიზანი იყო ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მიღება. $AE=v=10^7$ არის წრის რადიუსი; თუმცა ტრიგონომეტრიული ტაბულების გამოთვლის დროს რადიუსი ერთის ტოლად იყო ჩათვლილი და ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოთვლა წარმოებდა ერთეულის ნაწილებში, მაგრამ ნაწილებს ნეპერი წერდა მთელი რიცხვების სახით.

2. ბიურგი, ბრიგი. XVIII საუკუნეში საქართველოში ლოგარითმების ხმარების შესახებ

ნეპერთან ერთად ლოგარითმების გამომგონებელია შოტლანდიელი მესაათე იოსტი ბიურგი (1552—1632), მაგრამ თავის გამოგონებას იგი დიდ ხანს ინახავდა საიდუმლოდ. ბიურგი მუშაობდა კასელის ობსერვატორიაში მესაათედ და მექანიკოსად. მას არავითარი სამეცნიერო განათლება არ ჰქონდა მიღებული. ბიურგმა ლოგარითმები თავისი იშვიათი ნიჭის წყალობით ნეპერზე უფრო ადრე გამოიგონა, თუმცა ნეპერმა თავისი ნაშრომი მასზე 6 წლით

ადრე გამოაქვეყნა. 1620 წელს გამოვიდა ბიურგის ნაშრომი: „არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიათა ტაბულები“. მისი ლოგარითმები ხალხში ვერ გავრცელდა, რადგანაც უფრო სრულყოფილად და სახმარად ადვილ ფორმაში მოცემული ნეპერის ლოგარითმები უკვე გავრცელებული იყო. ბიურგს უმთავრესად ტრიგონომეტრიული გამოთვლები ჰქონდა მოცემული და ამიტომ მისი ლოგარითმების ტაბულები უფრო რთული აგებულებისა იყო, ვიდრე ნეპერისა. ბიურგის ტაბულების ფუძეა $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$, რომელიც დაახლოებით 2,7184 უდრის. 0, 10, 20, ... 5000 ... არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს ბიურგი უპირისპირებს 100 000 000, 100 010 000, 100 020 001, ... გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს.

ნეპერმა შეამჩნია იმის საჭიროება, რომ ლოგარითმები დაკავშირებული უნდა იყოს თვლის ათობით სისტემასთან; მან აგრეთვე შეამჩნია, რომ ნებისმიერად შეიძლება შერჩევა იმ რიცხვის, რომლის ლოგარითმი ნულის ტოლია და მივიდა იმ დასკვნამდე, რომ მოეცა ისეთი ლოგარითმების სისტემა, რომელშიც $\log 1=0$ და $\log 10=10\,000\,000\,000$ ანუ $\log 10=1$. მაგრამ ამის გაკეთება მასთან შეთანხმებით წილად ხვდა მის თანამედროვე მათემატიკოსს, ოქსფორდის პროფესორს ჰ ე ნ რ ი ბ რ ი გ ს (1556 — 1630) რომელმაც ერთმანეთს დაუპირისპირა პროგრესიები:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 10, & 10^2, & 10^3, & 10^4 \dots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \dots \end{array}$$

ერთის ტოლი სხვაობით არითმეტიკული პროგრესიის წევრები მიიღო ლოგარითმებად გეომეტრიული პროგრესიის წევრების ათის ტოლი მნიშვნელით.

რიცხვების ლოგარითმები 1-დან 1000-მდე ბრიგმა გამოსცა 1617 წელს, ნეპერის გარდაცვალების წელს. ლოგარითმების 14-ნიშნიანი ტაბულები 1-დან 20000-მდე და 90 000-დან 100 000-მდე, მათი შედგენის ახსნა-განმარტებით, ბრიგმა გამოაქვეყნა თავის ნაშრომში „ლოგარითმული არითმეტიკა“. 1628 წელს ბრიგის ტაბულები შეავსო ჰოლანდიელმა მათემატიკოსმა ვლაკმა, რის შემდეგ ამ ტაბულებმა მიიღეს ჩვეულებრივი ლოგარითმების სახელწოდება.

ნატურალური ლოგარითმები პირველად შემოიღო ხმარებაში ჯონ სპაიდელმა, რომლის შესახებ 1619 წელს გამოაქვეყნა ნაშრომი: „ახალი ლოგარითმები“. ლოგარითმების ფუძედ მიიღო 2,718...

საქართველოში ლოგარითმების ხმარება იწყება მე-18 საუკუნის პირველი ნახევრიდან; ამას ადასტურებს საქართველოს მუზეუმის ერთ-ერთი ხელნაწერი H-2200 (ავტორის ვინაობა უცნობია), სადაც ვკითხულობთ: „თავი 3. ლოღარითმათათვის. ლოღარითმნი (ბერძნულიდგან ლოღოს სიტყვა, არითმოს რიცხვი) ეწოდებიან ხელოვნებითთა რიცხვთა, რომელთა გამო ყოველი განმრავლება შეკრებად და განყოფა გამოკლებად შეიცვლების. იგინი არიან მაჩუენებელნი რიცხვთა ხარისხთანი ყოვლისა ღეომეტრიულისა წარმატებისა, რომელ იგი დაიწყების ერთისაგან.

მაგალითისამებრ — რიცხვნი ღეომეტრიულისა წარმატებისა; იგი დაიწყების ერთისაგან, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 და სხვა რომლისაგან შესაძლო არს ვითარ იგი ზემორე მაჩუწნებელი ყოველ რიცხვთა ხარისხთათვის გამოღებად ესრეთ:

$$2^0, \quad 2^1, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4, \quad 2^5, \quad 2^6$$

და სხუანი.

მაჩუენებელთა ხარისხისა 2-თა რიცხვთასა ეწოდების ლოღარითმად, ვითარცა ჯერ არს, რიცხვთა

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad 64$$

და სხვა. ესე იგი

$$2^0, \quad 2^1, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4, \quad 2^5, \quad 2^6$$

და ლოღარითმანი

0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 (უნდა იყოს 6 დ. ც.).

აგრეთვე რიცხვთა

1, 3, 9, 27, 81···

ესე იგი 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4,

ლოღარითმნი, 0, 1, 2, 3, 4···“

ამის შემდეგ გადმოცემულია ნამრავლისა და განაყოფის ლოგარითმის განსაზღვრა. კვადრატისა და კუბის ლოგარითმის შესახებ წერია: „გაორებული ლოღარითმოსი რიცხვისა თანასწორ არს ლოღარითმისა ოთხკუთხისა რიცხვისა მისისა; გამესამებული ლოღარითმოსი რიცხვისა თანასწორ არს ექვსკუთხედისა ლოღარითმისა“. შენიშვნის სახით გადმოცემულია $a^0=1$ ტოლობის შემდეგი დამტკიცება: „მაგალითისამებრ $3^0=1$ ვინაიდგან $3^0:1=3^0:1$; $3^0:1$ განმრავლებით მეორესა შეცუასა 3^1 ზედა იქმნების $3^0:1 = 3^0 \times 3':3'$; მაშინ იქმნების $3^0:1=3':3'=1$; ამისამებრ $3^0=1$“.

საკმაოდ დაწვრილებით არის განმარტებული ათობითი სისტემის ლოგარითმები და მათი ტაბულების ხმარების წესი.

თავი III

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ძირითადი მეთოდებისა და ალბათობათა თეორიის აღმოცენება. გეომეტრიისა და არითმეტიკის განვითარება

1. იოჰან კეპლერი

იოჰან კეპლერი (1571 — 1630) დაიბადა ვაილში (ვიურტენბერგში). დაწყებითი განათლება მიიღო თავის სამშობლოში, მონასტრის სკოლაში, სადაც ის სწავლობდა არითმეტიკასა და სფერულ ასტრონომიას. შემდეგ ის სწავლობდა ტიუბინგენში. აქ მისი მათემატიკის და ასტრონომიის მასწავლებელი იყო მესტლინი — კოპერნიკის სისტემის მომხრე, თუმცა თვითონ, ეშინოდა რა ეკლესიისა, ლექციებს პტოლომეოსის სისტემის მიხედვით კითხულობდა.

კეპლერი თვითონ მორწმუნე იყო, მაგრამ იმის გამო, რომ ის ეკლესიის დესპოტობას არ ემორჩილებოდა, თავის სამშობლოში სამუშაო ადგილის შოვნის იმედი დაჰკარგა და გადასახლდა გრაცში, სადაც 1594 წელს დაიწყო „მათემატიკისა და მორალის“ პროფესორად მუშაობა. ეკლესიამ ის იქიდანაც განდევნა და 1600 წელს ასტრონომ ტიხო ბრაჰეს მიწვევით პრაღაში გაემგზავრა. ტიხო ბრაგე იმპერატორის სასახლის ასტრონომად მუშაობდა, ხოლო კეპლერი — მის თანაშემწედ. ტიხო ბრაგეს სიკვდილის შემდეგ კი კეპლერმა მისი ადგილი დაიკავა.

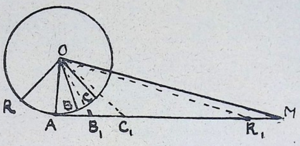
1612 წელს კეპლერი ლინცში გადაიყვანეს. აქაც ის იმპერატორის სასახლის ასტრონომად დარჩა, მაგრამ არ აძლევდნენ იმდენ ხელფასს, რამდენიც ეკუთვნოდა, ამიტომ იძულებული იყო საარსებო საშუალება მოეპოვებია სხვადასხვა წვრილმანი ასტრონომიული და ასტროლოგიური ხასიათის სამუშაოთი. ამასთანავე იგი აქაც განიცდიდა ეკლესიისაგან დევნას. რადგან იმპერატორმა არ დააკმაყოფილა კეპლერის სამართლიანი მოთხოვნები ხელფასის საკითხში, ის იძულებული გახდა იმპერატორის სასახლეში სამსახურისათვის თავი დაენებებია და გადასულიყო ვალენშტეინთან, რომელსაც ასტრონომია აინტერესებდა იმდენად, რამდენადაც ის მის ასტროლოგიულ ცრუმორწმუნოებას აკმაყოფი-

ლებდა. კეპლერი გარდაიცვალა რეგენსბურგში, სადაც იგი გაემგზავრა, იმპერატორისაგან თავისი კუთვნილი ხელფასის მისაღებად რეიხსტაგის საშუალებით.

ინტეგრალური აღრიცხვის გამოგონებამდე ინტეგრების საქმეში ძველი დროის მათემატიკოსებიდან პირველი ნაბიჯი არქიმედემ გადადგა. სიმძიმის ცენტრის მოძებნის, ფართობებისა და მოცულობების გამოთვლის ხერხებით მან ინტეგრალური აღრიცხვის მეთოდებს დაასწრო. ახალი დროის მათემატიკოსებიდან პირველად კეპლერმა დაიწყო ინტეგრების საშუალებით ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა. მან შეისწავლა არქიმედეს ნაშრომები, მაგრამ მის მიერ გამოყენებული ხერხები არ მოეწონა და საკუთარი მეთოდით ამოხსნა ის ამოცანებიც, რომლებიც არქიმედეს ამოხსნილი ჰქონდა ამოწურვის მეთოდით. კეპლერის აზრით, ამოწურვის მეთოდით დამტკიცება მეტად გრძელი და მოსაბეზრებელია; ამიტომ მას სავსებით უვლის გვერდს და უშუალოდ შემოჰყავს უსასრულოდ მცირე სიდიდეები. უარყოფს რა ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსების დამტკიცების მკაცრ მეთოდს, კეპლერი კმაყოფილდება ისეთი მსჯელობით, რომელიც ამა თუ იმ წინადადების „ალბათობას“ აწესებს. თავის ნაშრომში — „ღვინის კასრების სტერეომეტრია“ — სინამდვილეს წრის ფართობის შესახებ არქიმედეს თეორემისა: „წრის ფართობი უდრის ისეთი მართკუთხა სამკუთხედის ფართობს, რომლის ერთი კათეტი წრის რადიუსის ტოლია, მეორე კი წრეწირის სიგრძის“ — კეპლერი შემდეგნაირად გვიჩვენებს: წრეწირს იმდენი ნაწილი აქვს, რამდენი წერტილიცაა მასზე, სახელდობრ, უსასრულოდ მრავალი. თითოეულ ნაწილს განვიხილავთ როგორც ფუძეს ტოლფერდა სამკუთხედისას. რომელსაც წვერო ცენტრში აქვს. დამტკიცების ნაცვლად კეპლერი, როგორც სხვა შემთხვევებში, აქაც ეყრდნობა თვალსაჩინოებას. გავჭრათ წრე OA რადიუსის გასწვრივ (ნახ. 2) და მოვახდინოთ მისი დეფორმირება ისე, რომ წრის მცირე სამკუთხედი OAB გარდაიქმნას OAB_1 სამკუთხედად, OBC სამკუთხედი — OB_1C_1 სამკუთხედად და ასე შემდეგ; დასასრულს ORA სამკუთხედი — OR_1M სამკუთხედად; ამრიგად, წრე უშუალოდ გარდაიქმნება OAM სამკუთხედად.

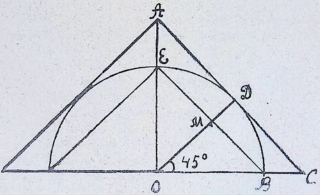
ამგვარად პოულობს კეპლერი სფეროს მოცულობასაც. ის ამბობს, რომ „თითქოს“ სფერო შეიცავს უსასრულოდ მრავალ კონუსს, რომელთა წვეროები ცენტრში მდებარეობენ, ფუძეები კი სფეროს ზედაპირზე. კეპლერის მიერ წარმოებული სფეროს ზედა-

პირის გამოთვლაც ეყრდნობა ზუსტ დამტკიცებას კი არა, არამედ „ალბათობას“; ის ამბობს: „ნახევარსფეროს ზედაპირი ალბათ უდრის დიდი წრის გაორკეცებულ ფართობს, ვინაიდან ჩახაზული წრიული კონუსის გვერდის ზედაპირი უდრის $\sqrt{2}$-სა და დიდი წრის ფართობის ნამრავლს, ხოლო შემოხაზული კონუსის—



ნახ. 2.

$2\sqrt{2}$-სა და დიდი წრის ფართობის ნამრავლს; რადგან სფეროს ნახევრის ზედაპირი მათ შორის მდებარეობს, ამიტომ, ბუნებრივია, რომ ის ტოლია ამ ორ სიდიდეთა შორის საშუალო პროპორციულის“; მართლაც, ნახევარსფეროს ზედაპირი S-ით აღვნიშნოთ, ჩახაზული კონუსის გვერდის ზედაპირი — S_1-ით, ხოლო შემოხაზული კონუსის გვერდის ზედაპირი — S_2-თი (ნახ. 3), მაშინ:



ნახ. 3.

$$AC = 2R; \quad AO : OD = EO : OM; \quad OC : OD = OB : OM;$$

$$S_1 = \sqrt{2}\,\pi R^2; \quad AD = DC = R; \quad OB = EO;$$

$$AO : OD = OC : OD; \quad OC = AO;$$

$$OC^2 + AO^2 = 2OC^2 = AC^2 = 4R^2;$$

$$OC = \sqrt{2}\,R; \quad S_2 = \pi \cdot OC \cdot AC =$$

$$= \pi \sqrt{2}\,R \cdot 2R = 2\sqrt{2}\,\pi R^2; \qquad 2\sqrt{2}\,\pi R^2 : S = S : \sqrt{2}\,\pi R^2;$$

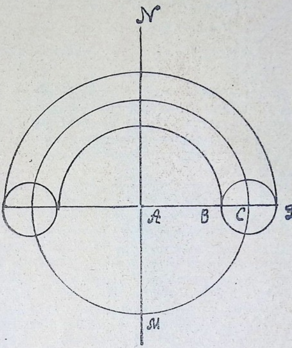
$$S = 2\pi R^2.$$

„ღვინის კასრების ახალი სტერეომეტრიის“ იმ ნაწილში, რომელსაც უწოდებს „არქიმედესადმი დამატებას“, კეპლერი განსაზღვრავს მოცულობას ეგრეთ წოდებულ ტორის ანუ სხეულისა, რომელიც შექმნილია წრის ბრუნვით ისეთი ღერძის (MN) გარშემო (ნახ. 4), რომელიც ამ წრეს არ გადაკვეთს (შეიძლება ეხებოდეს მხოლოდ).

კეპლერი ამტკიცებს, რომ ტორის მოცულობა უდრის ისეთი ცილინდრის მოცულობას, რომლის ფუძე არის მბრუნავი წრე და სიმაღლე უდრის ამ წრის ცენტრით შემოხაზული წრეწირის სიგრძეს. ამის დასამტკიცებლად ის ტორს ჰყოფს მერიდიანული სიბრტყეების საშუალებით უსასრულოდ მრავალ წაკვეთილ ცილინდრებად. თითოეულ ასეთ ცილინდრს სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვა სისქე აქვს; ეს სისქე იმდენად კლებულობს წრის C ცენტრიდან B წერტილამდე ტორის ცენტრის A-ს მიმართულებით, რამდენადაც ის მატულობს ტორის წრეწირის D წერტილამდე. ამის გამო მან დაუშვა, რომ ელემენტარულ ცილინდრებს ყველა წერტილში აქვს ერთი და იგივე სისქე, რომელიც უდრის საშუალო სისქეს ანუ მბრუნავი წრის ცენტრის სისქეს. ამგვარად მიღებულ უსასრულოდ მცირე სიმაღლის ელემენტარული ცილინდრების შეჯამება იძლევა ტორის ტოლდიდ ცილინდრს.

კეპლერი რამდენიმე წელი ცხოვრობდა ლინცში, დუნაის ნაპირზე. იქ ამზადებდნენ ღვინის კასრებს და ხშირად აკვირდებოდა, თუ როგორ განსაზღვრავდნენ კასრების გამყიდველები ჭოგრის საშუალებით კასრის მოცულობას; ეს ხერხი კეპლერს გაცილებით უფრო არაზუსტად მოეჩვენა, ვიდრე რეინში ხმარებული, და გადაწყვიტა, თვითონ გამოეგონებია კასრის მოცულობის განსაზღვრის უფრო ზუსტი საშუალება. ამ ნიადაგზე წარმოიშვა მისი ნაშრომი „ღვინის კასრების ახალი სტერეომეტრია“.

ამ ნაშრომის შესავალში კეპლერი განიხილავს სხეულის რამდენიმე ბრუნვის ზოგად ფორმებს, მათ შორის ერთს უწოდებს „ვაშლს", რომელიც მიიღება ნახევარ წრეზე მეტი წრის სეგმენტის ბრუნვით თავისი ქორდის გარშემო. ვაშლის მოცულობის გამოსათვლელად

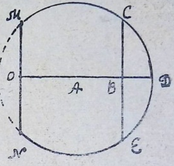


ნახ. 4.

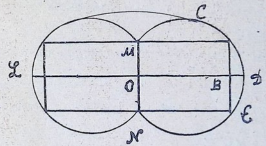
კეპლერი ორ ხერხს ხმარობს. პირველი ხერხის საშუალებით ვაშ-ლი დეფორმირებულია ცილინდრულ ტანად, მაგრამ ამ უკანასკნე-ლის მოცულობა კეპლერმა ვერ განსაზღვრა და ამიტომ შედეგს არავითარი პრაქტიკული ღირებულება არა აქვს, მეორე ხერხი კი უფრო გასაგებია და ამავე დროს გამოსადეგი, მისი გადმოცემა შემდეგნაირად შეიძლება:

MN ქორდის გარშემო მბრუნავი წრის CE ქორდა (MN-ის პარალელური) შემოხაზავს ცილინდრულ ზედაპირს (ნახ. 5). ვაშლი (ნახ. 6) მთლიანად შედგება ასეთი ზედაპირებისაგან ანუ, რო-

გორც მათ კეპლერი უწოდებს, ტუნიკებისაგან (tunicae), რომლებიც შეიძლება განხილულ იქნან როგორც „განუყოფელები". ამ ზედაპირების სისქეს კეპლერი უგულვებელყოფს. თუ ვაშლს გავჭრით (ნახ. 6) და ქორდას ხელუხლებლად დავტოვებთ $NMCDE$ სიბრტყეში, ხოლო ზედაპირს გავშლით სიბრტყის მართობულ სიბრტყეზე, მივიღებთ მართკუთხედს, რომლის ფუძე იქნება CE, სიმაღლე კი OB-რადიუსიანი წრეწირის სიგრძის ტოლი იქნება. ყველა ეს მართკუთხედი, ერთმანეთის გვერდით დადგმული, ცილინდრულ მონაკვეთს შექმნის. კეპლერის ეს გარდაქმნა გამოსადეგია იმისათვის, რომ თანამედროვე სიმბოლოების საშუალებით გამოვთვალოთ ვაშლის მოცულობა და აღვნიშნოთ V-თი. კოორდინატთა სათავედ



ნახ. 5.



ნახ. 6.

მივიღოთ O წერტილი (ნახ. 5), აბსცისათა ღერძად მივიღოთ OD და ორდინატთა ღერძად — NM; C წერტილის მიმდინარე კოორდინატები აღვნიშნოთ x-ით და y-ით. ვთქვათ, $OA = d$ და $AD = r$, მაშინ წრეწირის განტოლება იქნება

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2;$$

თითოეული ტუნიკის ანუ ზედაპირის ფართობი იქნება

$$2y \cdot 2x\pi = 4\,xy\pi.$$

ვაშლის V მოცულობას მივიღებთ როგორც ყველა ტუნიკის ჯამს; ასე რომ,

$$V = 4\pi\int_{0}^{r+d} xy dx = 4\pi\int_{0}^{r+d} x\sqrt{r^2-(x-d)^2}\,dx.$$

დავუშვათ, რომ $x-d=\zeta$, მაშინ $dx = d\zeta$ და

$$V = 4\pi\int_{-d}^{r} (\zeta+d)\,(r^2-\zeta^2)^{1/2}\,d\zeta =$$

$$= -2\pi\int_{-d}^{r}(r^2-\zeta^2)^{1/2}(-2\zeta d\zeta) + 4d\pi\int_{-d}^{r}(r^2-\zeta^2)^{1/2}\;d\zeta =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[(r^2-\zeta^2)^{3/2}\right]_{-d}^{r} + \frac{1}{2}\ \text{სეგმ. } NMCDE;$$

$\left(2\int_0^r (r^2-x^2)^{1/2}\,dx\right.$ არის წრის ნახევრის ფართობი, ხოლო

$2\int_{-d}^{r}(r^2-\zeta^2)^{1/2}d\zeta$ არის $NMCDE$ სეგმენტის ფართობი$\Big)$;

$$V = \frac{4\pi}{3}\,(r^2-d^2)^{3/2} + 2d\pi\cdot\text{ფართ}\cdot\text{სეგმ. } NMCDE =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\,OM^2 + 2d\pi\cdot\text{ფართ. სეგმ. } NMCDE.$$

აქ პირველი შესაკრები სფეროს მოცულობაა, ხოლო მეორე — ცილინდრის სეგმენტის. აღვნიშნოთ კიდევ $NMCDE$ სეგმენტის სიმძიმის ცენტრი P-თი და დავუშვათ, რომ $OP = p$; $2y$. x წარმოადგენს ცალ-ცალკე აღებული თითოეული განუყოფელი სეგმენტის

ანუ MN ქორდის პარალელური თითოეული ქორდის მომენტს სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრის თანახმად

$$\text{სეგმ. } NMCDE \times p = 2\int\limits_0^{r+d} xydx;$$

მაგრამ ჩვენ გვქონდა, რომ ვაშლის მოცულობა

$$V = 4\pi \int\limits_0^{r+d} xydx,$$

საიდანაც

$$2\int\limits_0^{r+d} xydx = \frac{V}{2\pi}.$$

ამიტომ ვაშლის მოცულობა

$$V = \text{სეგ: } NMCDE \times 2\pi p,$$

ესე იგი ვაშლის მოცულობა უდრის მბრუნავი სეგმენტის ფართობს გამრავლებულს იმ წრეწირის სიგრძეზე, რომელსაც შემოხაზავს სეგმენტის სიმძიმის ცენტრი.

ასეთივე ხერხით განსაზღვრავს კეპლერი აგრეთვე წრის ნახევარზე ნაკლები სეგმენტის ბრუნვით (ქორდის გარშემო) მიღებული სხეულის ანუ, როგორც მას უწოდებს, „ლიმონის“ მოცულობას. ადვილად შევამჩნევთ, რომ თუ ამ სხეულებს — ვაშლსა და ლიმონს — ბოლოებს წავაჭრით, მივიღებთ სხეულებს, რომელთაც ექნებათ კასრის ფორმა.

კეპლერმა გამოთვალა $\int\limits_0^x \sin x dx$. ამისათვის მან შეადგინა $\sin 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\sin 3^\circ \cdots \sin 90^\circ$ მნიშვნელობების ტაბულები და მათი შეჯამების საშუალებით იპოვა, რომ $x = 90^\circ$ მნიშვნელობისათვის ინტეგრალი ერთის ტოლია, ხოლო დანარჩენ მნიშვნელობათათვის — $1 - \cos x$-ის, ესე იგი, ჩვენებურად თუ ჩავწერთ, მან იპოვა, რომ

$$\int\limits_0^x \sin x dx = 1 - \cos x.$$

1 — $\cos x$-ის მაშინდელი სახელწოდება იყო sinusversus (სინუსვერზუსი), ასე რომ, კეპლერის გამოთვლით,

$$\int_0^x \sin x dx = \sin \mathrm{ver\,sus}.$$

XVI — XVII საუკუნეების მათემატიკოსებმა მხების გავლებისა და მაქსიმუმსა და მინიმუმზე ამოცანების ამოხსნით ნიადაგი მოუმზადეს დიფერენციალური აღრიცხვის გამოგონებას. ამ საქმეში კეპლერსაც გარკვეული ღვაწლი მიუძღვის. თავის ნაშრომში, „ღვინის კასრების ახალი სტერეომეტრია", მას მიზნად ჰქონდა დასახული ღვინის კასრების ისეთი ფორმის მოძებნა, რომ მათ ჰქონოდათ შესაძლო უდიდესი ტევადობა, ხოლო მათზე დახარჯული ხის მასალა რაც შეიძლება მცირე ყოფილიყო. ამან მიიყვანა ის საერთოდ მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობათა გამოკვლევამდე.

ზემოთ ვთქვით, რომ, კეპლერის გამოთვლით, ვაშლის მოცულობა უდრის მბრუნავი სეგმენტის ფართობს გამრავლებულს იმ წრეწირის სიგრძეზე, რომელსაც სეგმენტის სიმძიმის ცენტრი შემოხაზავს; ეს ხომ პაპოსის თეორემაა და ის, მათემატიკის ისტორიკოსის ცეიტენის გადმოცემით, ხელმეორედ გულდინმა აღმოაჩინა (იხ. Г. Г. Цейтен, „История математики в древности и в средние века". 1938, გვ. 249).

2. პაულ გულდინი

პაულ გულდინი (1577—1643) შვეიცარიელი მათემატიკოსია, დაიბადა სენ-გალენში. 1609 წელს დაინიშნა მათემატიკის მასწავლებლად რომში. რომიდან ის გრაცში გადავიდა, სადაც გარდაიცვალა. გულდინი ეწეოდა ისეთ გამოკვლევებს, რომელნიც ახლა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დარგს მიეკუთვნებიან. ამ საკითხებში ის კეპლერთან და კავალიერისთან ოპოზიციაში იდგა. მისი მთავარი შრომის: „სიმძიმის ცენტრის შესახებ" ოთხი ტომი გამოიცა 1635—1641 წლებში.

პაპოსის თეორემის შესახებ, რომელსაც შემდეგ გულდინის წესი ეწოდა და რომელიც აგრეთვე გამომდინარეობს კეპლერის თეორემიდან ვაშლის მოცულობაზე, მათემატიკის ისტორიკოსი ვილეიტნერი შემდეგს წერს: „პ. გულდინმა გამოაქვეყნა ის დიდ შრომაში: „De centro gravitatis" (Viennae 1635—1641), რომელიც, სხვათა შორის, შეიცავდა აგრეთვე კეპლერის „ახალი სტე-

ოემეტრიის“ კრიტიკას; მაგრამ ამ შრომაში სრულებით არაფერია ნათქვამი იმ თითქმის სარწმუნო გარემოებაზე, რომ გულდინმა ეს თეორემა იპოვა პაპოსის VII წიგნში „Synagoge“-ში. რომ კეპლერმა ეს თეორემა არ იცოდა, ეს, ჩემი აზრით, ნათელია ზემოთ მოყვანილი დამტკიცებიდან, რომელიც სულ სხვა ხასიათს ატარებს“ (იხ. Г. Вилейтнер. Хрестоматия по истории математики, перевод П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича, издание второе. 1935 г. გვ. 238 — 239).

„თითქმის სარწმუნო გარემოება“, — როგორც ამას ვილეიტნერი გამოთქვამს, — არ არის საკმარისი იმის დასამტკიცებლად, რომ გულდინმა ეს თეორემა იცოდა. ვილეიტნერი, ბრალს სდებს რა გულდინს პაპოსის თეორემის მითვისებაში, ამავე დროს კეპლერის დამცველადაც გამოდის, აცხადებს, რომ კეპლერმა პაპოსის ეს თეორემა არ იცოდაო. ვილეიტნერი არ ამბობს, თუ რაში გამოიხატება „თითქმის სარწმუნო გარემოება“, რომელიც თითქოს ადასტურებდეს იმას, რომ გულდინმა ეს თეორემა იცოდა; ამის დამადასტურებელი საბუთი ჯერჯერობით არავის აღმოუჩენია და დღესაც ეს თეორემა გულდინისა და პაპოსის სახელს ატარებს, მაგრამ ვილეიტნერისგან ამ საკითხში კეპლერის დაცვა ალბათ, პატრიოტული გრძნობით არის ნაკარნახევი და იმავე დროს ეს დაცვა სრულიად ზედმეტია, ვინაიდან კეპლერს პაპოსის თეორემის მითვისებაში არავინ არ სდებს ბრალს. ჩემი აზრით, ვილეიტნერი არ არის მართალი, როდესაც ამბობს, რომ ეს თეორემა კეპლერმა არ იცოდაო. კეპლერი თავის ნაშრომში გარკვეულად ამბობს, რომ მას არქიმედესა და პაპოსის დამტკიცებები არ მოსწონს და მათ თეორემებს თავისებურად ამტკიცებს, მაგალითად, არქიმედეს თეორემას წრის ფართობის შესახებ. აქედან აშკარაა, რომ კეპლერს პაპოსის შრომები წაკითხული ჰქონდა, მათ შორის—ეს თეორემაც, მით უმეტეს, რომ პაპოსის ნაშრომების კრებული არც ისე დიდი მოცულობისაა და ეს თეორემაც მის თეორემებში ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესია. კეპლერი რომ პაპოსის ნაშრომებს იცნობდა, ამას მათემატიკის სხვა ისტორიკოსებიც აღნიშნავენ. მაგალითად, კოპენჰაგენელი ცეიტენი წერს: „კეპლერი უარს ამბობს არქიმედესა და პაპოსის დამტკიცებებზე, უწოდებს რა მათ მეტისმეტად ღრმას, მაგრამ გასაგებად ძნელს“ (იხ. Г. Г. Цейтен. История математики в XVI и XVII веках, перевод П. Новикова, 1938 г. გვ. 258). კეპლერის მიერ მოცემული ვაშლის მოცულობის შესახებ თეორემის დამტკიცება, ვილე-

იტნერის თქმით, სულ სხვა ხასიათს ატარებს; ეს ასეც უნდა იყოს, ვინაიდან კეპლერს არქიმედესა და პაპოსის თეორემები ხელმძღვ კი არ აღმოუჩენია, არამედ ხელმეორედ დაამტკიცა ისინი საკუთარი მეთოდით; ასე რომ, ვილეიტნერის ეს საბუთიც გამოუსადეგარია იმისათვის, რაც მას სურს დაამტკიცოს.

3. ბონავენტურა კავალიერი

ბონავენტურა კავალიერი დაიბადა მილანში. ახალგაზრდობაში მიიღო ძალიან კარგი ჰუმანიტარული განათლება და ახალგაზრდობაშივე იერონიმისტთა მონასტერში შევიდა. იერონიმის მონასტერი კავალიერის მამის სახლის მეზობლად იყო და იმ ბერებმა, რომლებსაც კავალიერი ხშირად ხვდებოდა, დიდი გავლენა იქონიეს მის განვითარებაზე (ანტიური კულტურის კერად მილანში მაშინ მხოლოდ მონასტრები იყო). 1616 წელს კავალიერი გადავიდა პიზაში იერონიმის მონასტერში, ახალგაზრდობაში იგი გატაცებული ყოფილა ზუსტი მეცნიერებებით და კითხულობდა ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსების შრომებს. პიზაში ყოფნის დროს კავალიერი დაუახლოვდა მაშინ ცნობილ მათემატიკოსს ბერ კასტელის. უკანასკნელი დარწმუნდა კავალიერის იშვიათ მათემატიკურ ნიჭში და ურჩია მას გეომეტრიის საფუძვლიანად შესწავლა. ძალიან მოკლე დროში კავალიერიმ შეისწავლა არქიმედე, პაპოსი, აპოლონიუსი და სხვები; ამის შემდეგ კასტელიმ მას დროებით მიანდო თავისი მათემატიკის კათედრა, გააცნო გალილეი; გალილეი აღტაცებული იყო კავალიერის ნიჭით და რამდენიმე ხანს ხელმძღვანელობდა მას მათემატიკისა და ასტრონომიის შესწავლაში. მალე კავალიერიმ იმდენად ძლიერად იგრძნო თავი მათემატიკაში, რომ თავისი კანდიდატურა წარადგინა ბოლონიაში განთავისუფლებული მათემატიკის ლექტორის ადგილზე; ის თავის თავს მათემატიკის პროფესორსა და გალილეის მოწაფეს უწოდებდა და უთითებდა იმ ფაქტზე, რომ იგი კასტელის მაგივრობას ეწეოდა პიზაში. გალილეიმ მხარი დაუჭირა კავალიერის კანდიდატურას მათემატიკის პროფესორის კათედრაზე ბოლონიაში, მაგრამ კავალიერის კანდიდატურა მაინც არ გავიდა.

კავალიერი მხურვალე მონაწილეობას ღებულობდა მუშთარის თანამგზავრებსა და ზოჰალზე დაკვირვებებში, რომლებსაც მაშინ აწარმოებდნენ გალილეი და კასტელი. 1620 წელს კავალიერი მილანში დაბრუნდა. იმ დროს იქ ჩავიდა კარდინალი ბორომეო,

რომელსაც ჰქონდა კარგი ტელესკოპი, და კავალიერიმ ისევ განაგრძო დიდი ინტერესით ის დაკვირვებები, რომელსაც აწარმოებდა გალილეისა და კასტელისთან ერთად. კავალიერი მტკიცედ დარწმუნდა კოპერნიკის სისტემის უპირატესობაში პტოლომეოსის სისტემასთან შედარებით; იგი კოპერნიკისა და გალილეის მეცნიერებას ღვთისმეტყველურ და სქოლასტურ მეცნიერებაზე გაცილებით მაღლა აყენებდა, მაგრამ აშკარად მაინც ვერ გამოდიოდა ახალი მეცნიერების დასაცავად, რადგანაც მღვდელი იყო.

1623 წლიდან 1625 წლამდე კავალიერი მილანის მახლობლად მდებარე ქალაქ ლოდში იმყოფება. აქ ის მუშაობს ფართობებისა და მოცულობათა განსაზღვრის საკითხებზე და განუყოფელთა თეორიაზე, რომელსაც კავალიერი „გეომეტრიულ პრინციპებს" უწოდებს.

1626 წლის დასაწყისში კავალიერი რომში ჩავიდა. იქ ჩასვლისთანავე ის მოექცა იქაური დიდი თანამდებობის პირისა და იმავე დროს გალილეის თაყვანისმცემლის — ჯიოვანი ჩიამპოლის — საზოგადოებაში. ჩიამპოლი აღტაცებაში მოვიდა კავალიერით, როდესაც მან ჩიამპოლი გააცნო გალილეის მეცნიერების მთელ სისტემას. ჩიამპოლი მთელ თავის სიცოცხლეში კავალიერის მფარველი იყო, რის გამოც კავალიერიმ მას მიუძღვნა თავისი ნაშრომი განუყოფელების შესახებ. კავალიერიმ რომში ყოფნის დროს გაიგო, რომ კასტელიმ თავი დაანება პიზას უნივერსიტეტში მასწავლებლობას და მისი კათედრა გათავისუფლდა. იგი დახმარებას თხოვს გალილეის იმ კათედრის მიღებისათვის და სწერს: „ჩემთვის ეს გაცილებით უფრო სასიამოვნო იქნებოდა, ვიდრე რომში ჯდომა და თავის მტვრევა იმაზე, რომ გამოვიგონო რამე ისეთი, რაც ცხოვრების მეტად მაძღარ ამ ბატონების მადას შეეფერება". მაგრამ კავალიერის მაინც მოუხდა რომში დარჩენა.

1629 წელს ბოლონიეში გათავისუფლდა მათემატიკის კათედრა. გალილეის რეკომენდაციით და კავალიერის ნაშრომის „განუყოფელთა გეომეტრიის" საფუძველზე, რომელიც წარდგენილი იყო ხელნაწერის სახით, კავალიერი აირჩიეს ამ კათედრაზე და დარჩა მთელი თავისი სიცოცხლის მანძილზე. მას აქ პატივს სცემდნენ მეტად და ხელს უწყობდნენ სამეცნიერო მუშაობაში; იგი მიიწვიეს პიზას უნივერსიტეტშიც, მაგრამ მან ბოლონიეში მოღვაწეობა არჩია. მღვდლის თანამდებობა მას საშუალებას აძლევდა მთელი თავისი დრო სამეცნიერო მუშაობისათვის მოეხმარებინა.

მიუხედავად ასეთი იშვიათი ხელსაყრელი პირობებისა, ის მაინც უკმაყოფილო იყო და თავის თავს უბედურად თვლიდა; იგი

მთელ თავის სიცოცხლეში დაავადებული იყო ნიკრისით. 1647 წელს კავალიერი გარდაიცვალა. მისი ასტრონომიული და მათემატიკური შინაარსის შვიდ ნაშრომთაგან ყველაზე უფრო შესანიშნავია „ახალი ხერხით გადმოცემული გეომეტრია უწყვეტის განუყოფელთა საშუალებით“ (პირველად დაიბეჭდა 1635 წელს, მეორედ — 1653 წელს) და „ექვსი გეომეტრიული ცდა“, გამოქვეყნებული 1647 წელს. უაღრესად მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ კავალიერის ხმარებაში შემოჰყავს კოორდინატთა სისტემა; ამით მან პირველი ნაბიჯი გადადგა ანალიზური გეომეტრიის შექმნის საქმეში.

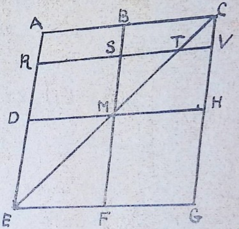
კავალიერი შეკრული წირის ორ წერტილზე ავლებს ორ ერთი მეორის პარალელურ მხებს და უწოდებს წყვილ მხებებს, შეხების წერტილებს კი — წვეროებს; ამასთან ამ წვეროებს ის განიხილავს როგორც იმ მხებების პარალელურ რომელიმე წრფის მიმართ აღებულს. ამ უკანასკნელ წრფეს ის „რეგულას“ უწოდებს და განსაზღვრავს ასე: „სიბრტყის შემთხვევაში რეგულა ეწოდება იმ წრფეს, რომლის პარალელურად გავლებულია რომელიმე წრფეები... წინამორბედ განსაზღვრებში ასეთი რეგულა იყო წრფე, რომლის მიმართ აღებული იყო წვეროები ან წყვილი მხებები“... რეგულას კავალიერი უწოდებს იმას, რასაც ჩვენ ორდინატთა ღერძს ვუწოდებთ. აბსცისათა ღერძს ის უწოდებს ინციდენტას და ასე განსაზღვრავს: „წირებს, რომლებიც წყვილ მხებებს გადაკვეთენ და გადაკვეთის წერტილებში მთავრდებიან, ეწოდებათ ნაკვეთებისა და მათი წყვილი მხებების ინციდენტები“.

ნახ. 7.

კავალიერის თვალსაზრისით, წირები „განუყოფელი“ ელემენტებია და მათი ერთობლიობა — ნაკვთი; სივრცეში კი „განუყოფელებია“ სიბრტყეები და მათი ერთობლიობა სხეულია. ძირითადი ცნება, რომლითაც კავალიერი სარგებლობს ინტეგრებისათვის არის „ყველა წირი“ ანუ „ყველა ორდინატი“; თუ დავუშვებთ, რომ ამ განუყოფელებს აქვთ მინიმალური სისქე dx, მაშინ გამოთქმა „ყველა წირი“ თანამედროვე ტრანსკრიპციაში იქნება: $\int_0^a y dx$, როდესაც ინციდენტას სიგრძე a-ს ტოლია. კავალიერი

ეძებს აგრეთვე ყველა აბსცისის ჯამს, ესე იგი იხილავს იმ შემთხვევას, როდესაც $y = x$ ანუ გამოთვლის $\int\limits_0^a xdx$; $y = x$ ადგილი აქვს ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში, რომლის ერთი კათეტი არის ინციდენტა და მეორე — რეგულა; ამ სამკუთხედის ფართობი $\frac{a^2}{2}$-ს უდრის; ესე იგი ყველა აბსცისა $\frac{a^2}{2}$-ის ტოლია ანუ $\int\limits_0^a xdx = \frac{a^2}{2}$.

$\int\limits_0^a x^2dx$-ის, უფრო სწორად რომ ვთქვათ, ამ ინტეგრალის a^3-თან შეფარდების მოძებნისადმი მიძღვნილია მისი 24-ე თეორემა: „მოცემულია რომელიმე პარალელოგრამი და მასში გავლებულია დიაგონალი. მაშინ პარალელოგრამის ყველა კვადრატი ისე შეეფარდება იმ ნებისმიერი სამკუთხედების ყველა კვადრატს, რომლებიც შექმნილნია ნაჩვენები დიაგონალით, როგორც 3 შეეფარდება 1. ამასთანავე საერთო რეგულად აღებულია პარალელოგრამის ერთ-ერთი გვერდი“.



ნახ. 8.

კავალიერის მიერ მოცემული ამ თეორემის დამტკიცება შეიძლება ასე გადმოვცეთ: აქ რეგულა არის რომელიმე გვერდი, მაგალითად, EG (ნახ. 8); ამის გამო $ACEG$ პარალელოგრამის ყველა განუყოფელი AC გავლებულია EG-ს პარალელურად. იგულისხმება, რომ ყველა განუყო-

ფუძეზე აგებულია კვადრატი. BF წრფე ყოფს პარალელოგრამს შუაზე. დავუშვათ, რომ

$$RT = x; \quad TV = y; \quad AC = RV = a;$$

მაშინ

$$RS = b = \frac{1}{2}a; \quad ST = z;$$

$$x = b + z; \quad y = b - z;$$

$$x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2. \tag{1}$$

აღვნიშნოთ $ACGE$ და $ABFE$ პარალელოგრამების ყველა განუყოფელი კვადრატის ჯამი $\Sigma\, ACGE$-თი და $\Sigma\, ABFE$-თი; ACE, CEG, BCM და FEM სამკუთხედების ყველა განუყოფელის კვადრატების ჯამი — $\Sigma\, ACE$-თი, $\Sigma\, GEC$ $\Sigma\, BCM$ და $\Sigma\, FEM$-ით. თუ ავიღებთ ყველა ჯამს $x^2 + y^2$-ისა, როდესაც x კლებულობს AC-დან E წვერომდე და y იზრდება C წვეროდან EG-მდე, მაშინ z გაივლის ორივე CBM და EMF სამკუთხედს; იმავე დროს b გაივლის $ABFE$ პარალელოგრამს და, თანახმად კავალიერისა, (1) ტოლობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\Sigma\, ACE + \Sigma\, CEG = 2\Sigma\, ABFE + 4\Sigma\, BCM \tag{2}$$

ანდა

$$\Sigma\, ACE = \Sigma\, CEG$$

ტოლობის ძალით

$$2\Sigma\, ACE = 2\Sigma\, ABFE + 4\Sigma\, BCM$$

ანუ

$$ACE = \Sigma ABFE + 2\Sigma\, BCM. \tag{3}$$

რადგან

$$ABFE = \frac{1}{2}\, ACGE,$$

ამიტომ

$$\Sigma\, ABFE = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Sigma\, ACGE = \frac{1}{4}\, \Sigma\, ACGE.$$

შემდეგ კავალიერი დაუმტკიცებლად წერს, რომ $\Sigma\, BCM = \frac{1}{8}\, \Sigma\, ACE$; ამ ტოლობის სამართლიანობაში დავრწმუნდებით, თუ წარმოვიდგენთ, რომ BC და AC განუყოფელებზე აგებულია კვადრატები, ხოლო კვადრატებზე, როგორც ფუძეებზე, — პირამიდები, რომელთა წვეროებია M და E წერტილები. თუ (3) ტო-

ლობაში $\Sigma\, ABFE$ და $\Sigma\, BCM$-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$\Sigma\, ACE = \frac{1}{4}\,\Sigma\, ACGE + \frac{1}{4}\,\Sigma\, ACE;$$

$$\frac{3}{4}\,\Sigma\, ACE = \frac{1}{4}\,\Sigma\, ACGE;$$

$$\Sigma\, ACE = \frac{1}{3}\,\Sigma\, ACGE. \qquad (4)$$

ამრიგად, კავალიერიმ იპოვა

$$\int\limits_0^a x^2dx = \frac{1}{3}\,a^3.$$

შემდეგ მან გამოთვალა $\int\limits_0^a x^4dx = \frac{a^5}{5}$; ეს შედეგი მიიღო პარაბოლის რკალის მისივე ქორდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ანუ ეგრეთ წოდებული პარაბოლური „ჩერიასი“ კუბატურასთან დაკავშირებით; ამ შემთხვევაში მან პარაბოლური სეგმენტის განუყოფელების კვადრატები პარალელოგრამსა და სამკუთხედში შეცვალა ბიკვადრატებით. ამის შემდეგ იგი მივიდა იმ დასკვნამდე, რომ ამ მეთოდით შეიძლება $\int\limits_0^a x^n dx$-ის გამოთვლა, რომლის შედეგი $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ მოყვანილია მის „ექვს ეტიუდში“.

4. რენე დეკარტი

რენე დეკარტი დაიბადა 1596 წლის 31 მარტს ტურენში (საფრანგეთი), აზნაურის ოჯახში. დედა ჭლექით გარდაიცვალა დეკარტის დაბადების რამდენიმე დღის შემდეგ; თვითონაც ბავშვობაში მეტად სუსტი ყოფილა. 8 წლის დეკარტი შეიყვანეს იეზუიტთა სკოლაში, სადაც ასწავლიდნენ სქოლასტურ ფილოსოფიას და

ბუნებისმეტყველებას; განსაკუთრებულ ინტერესს იგი იჩენდა მათემატიკისადმი. ცხრა წლის განმავლობაში იქ სწავლის ნაყოფს დეკარტი მაინც და მაინც დიდად არ აფასებდა. მაშინდელმა მეცნიერებამ ის სკეპტიციზმამდე მიიყვანა. თეოლოგიისადმი დეკარტი არავითარ მოწოდებას არ გრძნობდა, ამიტომ ფილოსოფიას მიმართა. აქაც მალე დარწმუნდა, რომ საუკუნეთა განმავლობაში ჭეშმარიტისათვის ფილოსოფიას არ მიუგნია; ამასთან იგი არც მასთან დაკავშირებულ მეცნიერებათა წარმატებაშია დარწმუნებული. ერთადერთი საგანი, რაშიც დეკარტიმ იპოვა კმაყოფილება, მათემატიკა იყო, თუმცა მათემატიკის შესახებაც გაკვირვებით ამბობდა, თუ რატომ არ არის აგებული გრანიტისებური სიმტკიცის ასეთ საფუძველზე უფრო მაღალი რამ, ვიდრე მისი პრაქტიკულ მექანიკაში გამოყენება. სასკოლო განათლებას დეკარტიმ ზურგი შეაქცია და გადაწყვიტა, არ ეძებნა სხვა მეცნიერება, გარდა იმისა, რომელსაც ის იპოვიდა თავის თავში ან „სამყაროს წიგნში“. ამისათვის მან ბევრი დრო მოანდომა მოგზაურობას, რომ თავისი თავი გამოეცადა სხვადასხვა მდგომარეობაში. აგრეთვე, უხდებოდა რა სხვადასხვა ხალხში ყოფნა, სწავლობდა მათ ყოფაცხოვრებას და აგროვებდა გამოცდილებას.

იეზუიტთა სკოლის დამთავრებისას (1612 წელს) დეკარტს მომავლისათვის გარკვეული გეგმა არ ჰქონია. იგი, როგორც წარმოშობით აზნაური, იძულებული იყო, მაშინდელი ტრადიციის ძალით, სამხედრო კარიერისათვის მომზადებულიყო. ამის გამო ის დიდ დროს ანდომებდა ფიზიკურ ვარჯიშს, რათა გაემაგრებინა თავისი ჯანმრთელობა და გამოეწრთო ორგანიზმი. მალე დეკარტი მიემგზავრება პარიზში, სადაც არაწესიერ ცხოვრებას ეწევა მოქეიფე და ქალებთან მოსიერინე ახალგაზრდათა წრეში. პარიზში დეკარტი შეხვდა თავის სკოლის ამხანაგს, მერსენს. ამ დროისათვის მერსენი უკვე ბერი იყო და ეწეოდა მეცნიერულ კვლევა-ძიებას. მან დეკარტსაც გაუღვიძა მეცნიერებისადმი თითქმის მიყრუებული ინტერესი. დეკარტს მალე მობეზრდა უქნარა საზოგადოებაში ყოფნა და მოულოდნელად გაქრა თავისი ნაცნობების წრიდან; მამამაც კი არ იცოდა, თუ სად იმყოფებოდა შვილი ორი წლის განმავლობაში. დეკარტი განცალკევებულად დასახლდა პარიზის გარეუბანში. აქ მეცნიერებაში ჩაფლულ ახალგაზრდას ხელს არ უშლიდა დიდი ქალაქის ხმაური, მაგრამ მეცნიერული მუშაობაც მალე მობეზრდა და გაემგზავრა ჰოლანდიაში მოხალისედ მორიც ორანელის ჯარში.

ჯარში ყოფნის დროს დეკარტს ბევრი თავისუფალი დრო ჰქონდა და ხშირად უხდებოდა ქალაქში გასეირნება. და აი, ერთხელ დეკარტის ყურადღება მიიპყრო ქუჩაში კედელზე გაკრული განცხადების წინ მდგომმა ჯგუფმა. განცხადება დაწერილი იყო დეკარტისათვის უცხო, ფლამანდურ ენაზე. მან ერთ-ერთ გამვლელთაგანს თხოვნით მიმართა, რომ მისთვის გადაეთარგმნა განცხადების შინაარსი; განცხადება საჯარო გამოწვევა იყო რომელიღაც გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნაზე. ეს უცნობი გამვლელი, რომელსაც დეკარტიმ მიმართა, აღმოჩნდა მათემატიკის პროფესორი ბეკმანი, მან დეკარტს ირონიით უპასუხა, რომ გადაუთარგმნის ამოცანის შინაარსს, თუკი განიზრახავს მის ამოხსნას. დეკარტიმ მეორე დღესვე მიუტანა ბეკმანს ამოხსნილი ამოცანა და ამის შემდეგ მან დაიწყო ბეკმანის ხელმძღვანელობით მათემატიკაში მეცადინეობა, რომელიც გრძელდებოდა ჰოლანდიაში ყოფნის ორი წლის განმავლობაში.

უკვე დაწყებული ოცდაათწლიანი ომის სისხლისმღვრელ ბრძოლებში მონაწილეობის მიღების სურვილი აიძულებს დეკარტს დატოვოს მშვიდობიანი ჰოლანდია. ის ჩაეწერა ბოჰემიაში მიმავალ ბავარიის ჯარში და მონაწილეობა მიიღო პრაღასთან ბრძოლაში. მეორე დღესვე დეკარტიმ დატოვა გამარჯვებული ჯარი, 1621 წელს კი სამხედრო სამსახურს სულ დაანება თავი, განაცხადა რა, რომ ბევრს სამხედრო სამსახურში იზიდავს უქმად ყოფნა და გარყვნილებაო. მიუხედავად ამისა, დეკარტიმ სამხედრო სამსახურის პერიოდშიც უაღრესად დიდი საქმე გააკეთა მეცნიერებაში; მაგალითად, ზამთარში მიყრუებულ პატარა ქალაქ ნეიბურგში უსაქმოდ ყოფნა გამოიყენა მეცნიერული მუშაობისათვის და სწორედ იქ, როგორც თვითონ ამბობს, 1619 წლის 10 ნოემბერს უეცრად მიაგნო თავის ანალიზურ მეთოდს, რომლის პირველი ნაყოფი ანალიზური გეომეტრია იყო.

სამხედრო სამსახურიდან წასვლის შემდეგ დეკარტი მიემგზავრება ბრიუსელსა და ჰააგაში, გაივლის საფრანგეთში, რომ იქ გაყიდოს შთამომავლობით მიღებული მამული, იქიდან კი მიემგზავრება იტალიაში. 1625 წელს დეკარტი დაბრუნდა პარიზში, რომელიც მაშინ სამეცნიერო ცენტრი იყო. მერსენის გარშემო თავმოყრილ მეცნიერთა ჯგუფმა უკვე შეადგინა მომავალი აკადემიის ჩანასახი და დეკარტიც ამ ჯგუფის ერთ-ერთი საქმიანი წევრი გახდა. რამდენიმე ხნის შემდეგ მუდამ ახალ შთაბეჭდილებათა მაძიებელი დეკარტი მონაწილეობას ღებულობს ჰუგენოტების უკანასკ-

ნელი ციხე-სიმაგრის — ლა-როშელის — ალყასა და მეფის ამალასთან ერთად აღებულ ქალაქში შესვლაში.

დეკარტის ახალი იდეების მიმდევართა წრე თანდათან ფართოვდება. მისი მეგობარი მეცნიერები დაჟინებით მოითხოვენ, რომ დეკარტს მალე გამოექვეყნებინა სისტემა, რომლისაგან ისინი მოელოდნენ ფილოსოფიის განახლებას და მეცნიერების რეფორმას. მაგრამ პარიზის ღვთისმეტყველების ფაკულტეტი მტრულად იყო განწყობილი დეკარტის იდეების მიმართ და იმუქრებოდა კიდეც. ამის გამო 1629 წელს დეკარტმა დატოვა საფრანგეთი და გადასახლდა ჰოლანდიაში, რომ იქ, თანახმად მისი დევიზისა: „კარგად იცხოვრა იმან, ვინც კარგად დაიმალა", — გაეგრძელებინა მეცადინეობა უფრო მშვიდობიან პირობებში.

გადასახლების ოთხი წლის შემდეგ დეკარტი წერს შრომას: „სამყარო ანუ ტრაქტატი სინათლის შესახებ". მაგრამ ეკლესიის შიშით მან ეს შრომა ვერ გამოაქვეყნა, რადგან ის შეიცავდა ეკლესიის დოგმების საწინააღმდეგო აზრებს; ნაშრომი გამოქვეყნდა მხოლოდ მისი სიკვდილის შემდეგ. თავისუფალი აზროვნებისათვის ეკლესიის მხრივ დევნისაგან დეკარტს ძალიან იცავდა მერსენი. როდესაც დეკარტი უკვე სახელგანთქმული გახდა მთელ ევროპაში, მასსა და შვეციის მეფე ქრისტინეს შორის გაიმართა ფილოსოფიური შინაარსის მიწერ-მოწერა, რის შემდეგ მეფემ დეკარტი მიიწვია თავისთან — სტოკჰოლმში. დეკარტი პირველ ხანებში არ თანხმდებოდა გამგზავრებაზე და ამბობდა: „ის ადამიანი, რომელიც ტურენის ბაღებში დაიბადა და ახლა ცხოვრობს ისეთ ქვეყანაში, სადაც თაფლი თუ არა, რძე მაინც დის იმაზე მეტი, ვიდრე ალთქმის ქვეყანაში, ძნელად გადაწყვეტს წასვლას დათვების ქვეყანაში, რათა იქ იცხოვროს კლდეებსა და ყინულებში". მიუხედავად ამ პიტყვებისა, დეკარტი მაინც დათანხმდა და 1649 წელს გაემგზავრა სტოკჰოლმში, სადაც ის მეტად გულთბილად მიიღეს. მეფე ქრისტინეს უნდოდა დეკარტი სამუშაოდ დაეტოვებინა შვეციაში და მას სამეფოს საუკეთესო ადგილას დიდი მამულიც აჩუქა. მან დეკარტი მიიწვია იმ ანგარიშით, რომ დეკარტს მისთვის გაკვეთილები მიეცა ახალ ფილოსოფიაში და დახმარებოდა სტოკჰოლმში მეცნიერებათა აკადემიის დაარსებაში.

დეკარტი ბევრს მუშაობდა სტოკჰოლმში აკადემიის დაარსების საკითხებზე; გარდა ამისა, ის ყოველ დღე, დილის ხუთ საათზე უნდა გამოცხადებულიყო სასახლის ბიბლიოთეკაში მეფე ქრისტინესთან სამეცადინოდ. ყინვიან ზამთარში სახლიდან ისე ადრე

გამოსვლამ ძალიან ცუდად იმოქმედა დეკარტის ისედაც სუსტ ჯანმრთელობაზე; ამის გამო ერთხელ მას უთქვამს: „ვისაც უნდა კარგი მათემატიკოსი იყოს და მასთან ერთად ჯანმრთელობა შეინარჩუნოს, დილით არ უნდა ადგეს მანამდე, სანამ კარგად არ გამოიძინებს და თვითონაც არ იგრძნობს ლოგინის დატოვების სურვილს“.

იქაურმა პირველმავე ზამთარმა დაღუპა დეკარტის ჯანმრთელობა: 1650 წლის თებერვალში იგი ფილტვების ანთებით გარდაიცვალა. გარდაცვალების 16 წლის შემდეგ საფრანგეთის მთავრობამ, რომელიც დეკარტის სიცოცხლეში მასზე ძალიან ცოტას ზრუნავდა, მოითხოვა მისი ნეშტის სამშობლოში გადმოსვენება; იგი ზარ-ზეიმით დაკრძალეს პარიზში, ახლანდელ პანთეონში, მაგრამ მაინც ქებათა-ქების შესხმა ყველას სასტიკად აუკრძალეს.

ჰოლანდიაში ყოფნის დროს 1637 წელს დეკარტმა გამოაქვეყნა თავისი ნაშრომი „ფილოსოფიური ცდები“, რომელიც ოთხ თხუზულებას შეიცავს: 1) „მსჯელობა მეთოდზე“, 2) „მეტეორები“, 3) „დიოპტრიკა“ და 4) „გეომეტრია“. უკანასკნელის გარდა დეკარტის მათემატიკურ ნაშრომებს ვპოულობთ სხვადასხვა პირთან მიწერ-მოწერაში.

მათემატიკის განვითარებაში დეკარტის დიდი დამსახურება ნათელი რომ გახდეს მკითხველისათვის, საჭიროა ორიოდე სიტყვით შევეხოთ იმ დამახასიათებელ პირობებსა და მიზეზებს, რომლებმაც გავლენა იქონიეს მათემატიკურ მეცნიერებათა განვითარებაში, განსაზღვრეს მათემატიკის შინაარსი.

ისტორიკოს ცეიტენის გადმოცემით, ძველი საბერძნეთის გეომეტრიამ განვითარების უმაღლეს საფეხურს მიაღწია ძველი ერას დასასრულს. მისი აზრით, გეომეტრიამ განვითარება შეწყვიტა ჩვენი ერადან. ამის მთავარ მიზეზებად ცეიტენი თვლის:

1) ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსების მიერ გამოყენებითი მათემატიკის უგულებელყოფას.

2) თვით მეცნიერული კვლევითი მეთოდის უვარგისობას.

პირველი მიზეზი არ შეიძლება სავსებით მართებულად ჩაითვალოს: მართალია, ევკლიდე უგულებელჰყოფდა მათემატიკის გამოყენებით მხარეს, მაგრამ არქიმედე ამ მხრივ დიდ მუშაობას ეწეოდა. ის ხომ სტატიკის ფუძემდებელია და საერთოდ ყოველი მის მიერ ამოხსნილი ამოცანა გამოყენებითი ხასიათისაა?

მეორე მიზეზი კი აუცილებლად მხედველობაში მისაღებია. ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსების მიერ ხმარებული დამტკი-

ცების — ამოწურვის — მეთოდი მეტად ვეებერთელა და უმარჯვო იყო, მათ გეომეტრიაში გააკეთეს ყველაფერი, რისი გაკეთებაც ამ მეთოდის საშუალებით შეიძლებოდა. შემდეგში, გეომეტრიის განვითარებისათვის აუცილებელი იყო მეთოდის შეცვლა, ეს კი ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა ვერ შეძლეს. დეკარტმა კი ახალი მეთოდი გამოიგონა, რომელსაც ის „ანალიზურ მეთოდს" უწოდებს; ეს მეთოდი ზოგადი ფილოსოფიური თვალსაზრისით იმაში მდგომარეობს, რომ თეორიული სიძნელე უნდა დაიშალოს მის შემადგენელ ნაწილებად და შემდეგ უადვილესსა და უმარტივესიდან ვიაროთ უფრო რთულისაკენ. დეკარტის გეომეტრია წარმოადგენს მისი ზოგადი ანალიზური მეთოდის გამოყენებას.

საკითხი იბადება, რატომ ვერ შეძლეს ძველმა ბერძნებმა თავიანთი ამოწურვის მეთოდის შეცვლა სხვა მეთოდით? სხვა შესაძლო მიზეზებთან ერთად ამის ერთ-ერთი მთავარი მიზეზია თვით ამოწურვის მეთოდის გამოგონების მიზეზი. ისტორიკოსების გადმოცემით, ამოწურვის მეთოდის მიზანი იყო უსასრულობის ცნების გარეშე თეორემების დამტკიცება, თუმცა ამ მეთოდით დამტკიცებისას ძველი ბერძნები მაინც იძულებული იყვნენ ამ ცნებას დაყრდნობოდნენ, მაგრამ შენიღბულად, სიტყვა „უსასრულობის" გვერდის ახვევით.

რამ აიძულა ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსები, რომ ასეთი მეთოდი გამოეგონებინათ? ისტორიკოსების გადმოცემით, მათემატიკოსებსა და სოფისტებს შორის დავა მიმდინარეობდა უსასრულობის ცნების და საერთოდ მოძრაობის რეალობის გარშემო. ძენონი სავსებით უარყოფდა მოძრაობის ფიზიკურ რეალობას, მისი ცნობილი სოფიზმები ამტკიცებს მოძრაობის შეუძლებლობას; რადგან საბერძნეთის მათემატიკოსებმა ძენონის სოფიზმები ვერ დაარღვიეს, ამიტომ ძენონს დაუჯერეს და მოძრაობის რეალობაზე და მასთან დაკავშირებული უსასრულობის ცნებაზე სამუდამოდ ხელი აიღეს. ამრიგად, ძველი საბერძნეთის მათემატიკის განვითარების საქმეს სოფისტებმა დიდი ზიანი მიაყენეს. რადგან მოძრაობის რეალობა უარყოფილ იქნა, ძველ საბერძნეთში მექანიკის განვითარება სტატიკის იქით არ წასულა; გეომეტრიაც კი იმდენად განვითარდა, რამდენადაც ამას სტატიკა მოითხოვდა. გეომეტრიის განვითარებაზე რომ სტატიკას ჰქონდა გავლენა, ამაში გვარწმუნებს არქიმედეს ნაშრომები. სტატიკის ყოველ ამოცანას არქიმედე

წყვეტს სათანადო გეომეტრიული თეორემების გამოყენებით. არქიმედე არა თუ გეომეტრიას იყენებდა სტატიკაში, არამედ, პირიქით, სტატიკას იყენებდა გეომეტრიული ამოცანების ამოსახსნელად (მაგალითად, პარაბოლური სეგმენტის კვადრატურის მექანიკური ხერხი).

ამრიგად, გეომეტრიის განვითარება უნდა შესუსტებულიყო, რადგან მექანიკის განვითარება შეჩერდა.

უნდა აღინიშნოს, რომ პირველი ნაბიჯი მათემატიკაში, სახელდობრ გეომეტრიაში, მოძრაობის ცნების შეყვანის საქმეში ისევ ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა გადადგეს; ეს ემჩნევა არქიმედეს მიერ ზოგიერთი მრუდის, კერძოდ ხვიას, განსაზღვრას: „თუ წრფეს მის ერთ დამაგრებულ ბოლო წერტილის გარშემო თანაბრად ვამოძრავებთ სიბრტყეზე მანამდე, სანამ ის მის საწყის მდებარეობას არ დაუბრუნდება და იმავე დროს ამ წრფეზე დამაგრებული ბოლო წერტილიდან თანაბრად ვამოძრავებთ რომელიმე წერტილს, მაშინ ეს წერტილი ხვიას შემოწერს“ (იხ. Oeuvres d'Archimede, traduites par F. Peyrard 1807, გვ. 236). არქიმედე აგრეთვე განიხილავდა ნაკვთის ბრუნვით შექმნილ სხეულებსაც.

დინამიკის გამოგონების ჩანასახს ძველ საბერძნეთშიც ვხედავთ, მაგალითად, პაპოსის თეორემაში, რომელიც შემდეგში გულდენმა ხელმეორედ აღმოაჩინა (იხ. გვ. 26).

გალილეის მიერ დინამიკის გამოგონებამ გამოიწვია აუცილებელი საჭიროება გეომეტრიის განვითარებისა ანუ ისეთი ახალი გეომეტრიისა, რომელიც მოძრაობისა და ცვლადი სიდიდის ცნებაზე უნდა ყოფილიყო აგებული. სწორედ ასეთია დეკარტის ანალიზური გეომეტრია. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ გამოგონებაში დეკარტის დახმარება გაუწია ისევ ძველი საბერძნეთის მათემატიკოს პაპოსის ნაშრომმა, რომელშიც მოცემული ოთხი წრფისადმი გეომეტრიული ადგილის განზოგადება ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი გამოსავალი წერტილი გახდა დეკარტის ანალიზური გეომეტრიისათვის.

დეკარტის უაღრესად დიდი ღვაწლი იმაშია, რომ მან შემოიყვანა ასოებრი ალგებრა და ცვლადი სიდიდე, რომლებიც სრულიად უცხო იყო ძველი საბერძნეთის მათემატიკისათვის, მოახდინა გეომეტრიის არითმეტიზაცია; მისი გეომეტრიის პირველსავე გვერდზე ის წერს: „მე უშიშრად შემოვიყვან ამ არითმეტიკულ ტერმინებს გეომეტრიაში“. დეკარტმა მოგვცა გეომეტრიისადმი ალგებრის გამოყენება კოორდინატთა მეთოდთან დაკავში-

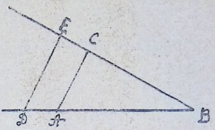
რეპით, რომელსაც ჩვენ ახლა ახალიზურ გეომეტრიას ვუწოდებთ. ამ რეფორმებით დეკარტმა თამამად გადადგა პირველი ნაბიჯი უმაღლესი მათემატიკის შექმნისაკენ.

მოძრაობისა და ცვლადი სიდიდის მათემატიკაში შეყვანამ უსასრულობის მათემატიკის წარმოშობაზედაც გავლენა იქონია. უსასრულობის ცნება, რომელიც სოფისტების გავლენით ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა უარჰყვეს, თავის ადგილს იჭერს მათემატიკაში, ამის შემდეგ, ბუნებრივია, აუცილებლად უნდა წარმოშობილიყო დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა. ამას ადასტურებს აგრეთვე ენგელსის სიტყვები: „დეკარტის ცვლადი სიდიდე მათემატიკაში მობრუნების წერტილი იყო. მისი წყალობით მათემატიკაში შევიდა მოძრაობა და დიალექტიკა და მისივე წყალობით დაუყოვნებლივ აუცილებელი შეიქნა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, რომელიც მაშინვე წარმოდგა და რომელიც ნიუტონმა და ლაიბნიცმა კი არ გამოიგონეს, არამედ ზოგადად და მთლიანად დაამთავრეს" (იხ. Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1948, გვ. 208).

დეკარტის გეომეტრია სამი წიგნისაგან შედგება. პირველი წიგნის—„იმ ამოცანების შესახებ, რომლებიც შეიძლება ავაგოთ მხოლოდ წრისა და წრფეწირების საშუალებით"—დასაწყისში დეკარტი ამბობს, რომ გეომეტრიის ყველა ამოცანის მიყვანა შეიძლება ისეთ ტერმინებამდე, რომ მათ ასაგებად საჭირო იქნება რომელიღაც წრფეწირების მხოლოდ სიგრძის ცოდნა. ალგებრას დეკარტი უკავშირებს გეომეტრიას სიდიდეთა გამომსახველი ნაკვეთების საშუალებით. არითმეტიკული მოქმედებების გეომეტრიულ აგებულებებთან ურთიერთობას დეკარტი ხსნის შემდეგნაირად: „ისე როგორც არითმეტიკა შედგება მხოლოდ ოთხი ან ხუთი მოქმედებისაგან, სახელდობრ, შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა და ფესვის ამოღება, რომელიც შეიძლება ჩაითვალოს რომელიღაც გვარის გაყოფად, ამის მსგავსად გეომეტრიაში საძებნი წირების განსაზღვრისათვის საჭიროა ამ წირებს მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ სხვები; ანდა, თუ გვაქვს წირი, რომელსაც რიცხვებთან უფრო მჭიდრო კავშირის დასამყარებლად ვუწოდებთ ერთეულს და რომლის შერჩევა ჩვეულებრივად შეიძლება ნებისმიერად, და თუ გვაქვს კიდევ ორი სხვა წირი, საჭიროა ვიპოვოთ მეოთხე წირი, რომელიც ისე შეეფარდება ამ ორთაგან ერთს, როგორც ერთეული მეორეს; ეს კი იგივეა, რაც გამრავლება. ანდა ვიპოვოთ მეოთხე წირი, რომელიც ისე შეეფარ-

დება ამ ორთაგან ერთს, როგორც ერთეული მეორეს; ეს კი იგივეა, რაც გაყოფა, ანდა, დასასრულ, ვიპოვოთ ერთი ან ორი, ან რამდენიმე საშუალო პროპორციულები ერთეულსა და რომელიმე მეორე წირს შორის; ეს კი იგივეა, რაც კვადრატული ან კუბური ფესვის ამოღება“.

ამასთან ერთად დეკარტი გვაძლევს ახსნას, თუ როგორ უნდა ავაგოთ ეს მოსაძებნი წირები. შემდეგ ის განიხილავს გეომეტრიაში ასოებრი აღნიშვნის ხმარების საკითხს: „ხშირად საჭირო არ არის ამ წირების ქაღალდზე გავლება, არამედ საკმარისია მათი აღნიშვნა ასოებით, თითოეული წირი თითო ასოთი, ასე, BD წირი რომ მივუმატოთ



ნახ. 9.

GH წირს, ერთ მათგანს ვუწოდებ a-ს, მეორე — b-ს და ვწერ $a+b$; ვწერ $a-b$, როდესაც a-ს გამოვაკლებ b-ს, ხოლო ab-ს — მათი გადამრავლების შემთხვევაში; a-ს b-ზე გაყოფის დროს ვწერ $\frac{a}{b}$ და aa ანუ a^2, როდესაც a-ს თავის თავზე ვამრავლებ; a^3, — როდესაც მას კიდევ a-ზე ვამრავლებ და ასე უსასრულოდ; $\sqrt{a^2+b^2}$ ვწერ, როდესაც a^2+b^2 გამოსახულებიდან კვადრატულ ფესვს ამოვიღებ, და $\sqrt{C\cdot a^3-b^3+abb}$, — როდესაც კუბურ ფესვს ამოვიღებ, a^3-b^3+abb გამოსახულებიდან და ასე შემდეგ“.

ამოცანის ამოსახსნელი განტოლების მიღების შესახებ დეკარტი ამბობს: „თუ რომელიმე ამოცანის ამოხსნა გვსურს, საჭიროა ჯერ მისი განხილვა, როგორც ამოხსნილის, და სახელების მინიჭება ყველა წირისათვის როგორც ცნობილი, ისე უცნობისათვის, რომლებიც საჭიროა ამოცანის ასაგებად. შემდეგ კი, არ გავატარებთ რა არავითარ განსხვავებას ამ ცნობილებსა და უცნობებს შორის, უნდა გავითვალისწინოთ სიძნელე, მივსდიოთ რა იმ წესს, რომელიც უფრო ბუნებრივად გვიჩვენებს, თუ როგორ არიან ისინი ერთმანეთისაგან დამოკიდებული მანამ, სანამ არ იქნება მოძებნილი ერთისა და იმავე სიდიდის ორგვარად გამოსახვის საშუალება: ეს არის ის, რასაც განტოლება ეწოდება, ვინაიდან ამ

ორი ხერხიდან ერთის საშუალებით მიღებული წევრები უდრის მეორეს საშუალებით მიღებულთ“. ამის შემდეგ დეკარტი გვიჩვენებს, თუ როგორ უნდა ავაგოთ მხოლოდ წრფისა და წრის საშუალებით (ანუ სახაზავისა და ფარგლის საშუალებით) განტოლებები:

$$z^2 \infty az + bb,$$

$$yy \infty -ay + bb$$

$$x^4 \infty -ax^2 + b^2,$$

$$z^2 \infty az - bb.$$

მათ ამოხსნებს დეკარტი წერს შემდეგი სახით:

$$z \infty +\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}\ ;$$

$$y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}\ ;$$

$$x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

$$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}.$$

(∞ არის მის მიერ შემოყვანილი ტოლობის ნიშანი).

იქვე მოცემულია სათანადო ოთხი ნაკვთი.

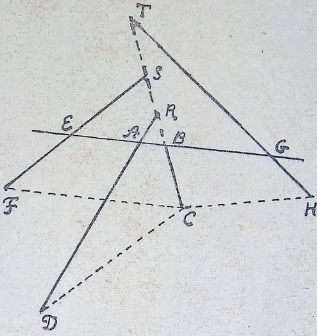
დაბოლოს დეკარტი წერს: „იგივე ფესვები შეიძლება უამრავი სხვა ხერხით მოვძებნოთ; ამ სხვა ხერხების მოყვანა მსურდა მხოლოდ მათი სიმარტივის გამო და იმის ჩვენების მიზნით, რომ ჩვეულებრივი გეომეტრიის ყველა ამოცანა შეიძლება ავაგოთ ისე, რომ არ მივმართოთ სხვას, გარდა იმისა, რასაც შეიცავს ჩემ მიერ ახსნილი ოთხი ნაკვთი. მე მგონია, ძველებმა ვერ შეამჩნიეს ეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში ისინი არ დაწერდნენ იმდენ სქელ წიგნებს, რომლებშიც მარტო წინადადებათა მიმდევრობა გვიჩვენებს, რომ მათ არ გააჩნდათ ჭეშმარიტი მეთოდი, რომელიც საშუალებას მისცემდა ყველაფერი ეპოვნათ“.

ამის შემდეგ დეკარტს მოყავს პაპოსის წიგნიდან გრძელი ციტატა: „აი, როგორია ის ადგილი — სამი ან ოთხი წრის მიმართ, რომლის შესახებ აპოლონიუსი თავის თავზე დიდ ქებას ფლანგავს, არ ამჟღავნებს რა არავითარ მადლობას მისი წინაპრე-

ბის მიმართ. თუ მოცემულია სამი წრფე და ამ წრფეებისადმი ერთისა და იმავე წერტილიდან გავლებულია მოცემული კუთხით სამი წრფე და აგრეთვე მოცემულია გავლებულ ორ წრფეზე აგებული მართკუთხედის შეფარდება მესამეს კვადრატთან, მაშინ წერტილი იმყოფება მდებარეობით მოცემული სხეულის ადგილზე, ესე იგი სამი კონუსური კვეთიდან ერთ-ერთზე. შემდეგ, თუ მოცემული ოთხი წრფისადმი მოცემული კუთხით გავავლებთ სხვა ოთხ წრფეს და მოცემულია ორ გავლებულ წრფეზე მართკუთხედის შეფარდება ორ სხვა წრფეზე მართკუთხედთან, მაშინ წერტილი იმყოფება მდებარეობით მოცემულ კონუსურ კვეთზე. მეორეს მხრივ, თუ მხოლოდ ორი წრფე იქნება, მაშინ დადგენილია, რომ ადგილი ბრტყელი იქნება"... აშკარაა, ეს უკანასკნელი არის ახლა ჩვენ მიერ ხმარებული ირიბკუთხა კოორდინატების მიმართ წირის განხილვა. სწორედ პაპოსის ამ სიტყვებმა მისცა დეკარტს კოორდინატების შემოღებისა და ანალიზური გეომეტრიის გამოგონების საბაბი. დეკარტი ავითარებს პაპოსის აზრს და ამ უკანასკნელის ამოცანას აყალიბებს ალგებრული მეთოდით: დავუშვათ, რომ (ნახ. 10) AB, AD, EF, GH და ასე შემდეგ მდებარეობით მოცემული წრფეებია. უნდა მოიძებნოს რაიმე წერტილი, მაგალითად C, რომლიდან შეიძლება გავავლოთ თითო წრფე მოცემული კუთხით თითოეული მოცემული წრფისადმი ისე, რომ საძიებნი წერტილიდან გავლებული ორი წრფის ან მეტის ნამრავლს ჰქონდეს მოცემული შეფარდება დანარჩენის ნამრავლთან, მაგალითად $CB \cdot CD : CH \cdot CF = a$, სადაც a მოცემულია. პაპოსის ამ ამოცანისადმი, რომელიც, მისი სიტყვით, სავსებით ვერ ამოხსნა ვერც ევკლიდემ და ვერც აპოლონიუსმა, დეკარტიმ გამოიყენა ალგებრული ანალიზი. მან დაუშვა, რომ ამოცანა უკვე ამოხსნილია და მოცემული EG და მოსაძებნი BC მიიღო მთავარ წრფეებად. ვთქვათ, პირველის მონაკვეთი $AB = x$ და მეორისი $BC = y$. ვინაიდან ABR სამკუთხედის ყველა კუთხე ცნობილია, ამის გამო ცნობილია მისი გვერდების შეფარდებაც, მაგალითად $AB : BR$, რომელსაც დეკარტი აღნიშნავს $z : b$, ასე რომ, $BR = \frac{bx}{z}$ და $CR = y + \frac{bx}{z}$. ცნობილია აგრეთვე DRC სამკუთხედის კუთხეები და, მაშასადამე, მისი გვერდების შეფარდებაც $CR : CD = z : c$, აქედან

$$CD = \frac{CR \cdot c}{z} = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2};$$

ამგვარად შეიძლება გამოისახოს x-ით და y-ით C წერტილიდან გავლებული ყველა წირი CB, CH, CF. თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ ტოლობაში $CB \cdot CD : CH \cdot CF = a$, რომელიც ამოცანის მოთხოვნილებას გამოსახავს, მივიღებთ x და y-ის დამაკავშირებელ განტოლებას. ამ განტოლებიდან y-ის მოცემული მნიშვნელობით შეიძლება x-ის განსაზღვრა და მოსაძებნი C წერტილის მდებარეობაც მოიძებნება. მაგრამ y სიდიდე შეიძლება ნებისმიერად აღებულ იქნას; y-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება



ნახ. 10.

რად აღებულ იქნას; y-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება x-ის განსაზღვრული მნიშვნელობა და მოსაძებნი წერტილის გარკვეული მდებარეობა. ამ წერტილის ყველა შესაძლო მდებარეობა, რომელიც ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს, შეადგენს გარკვეულ გეომეტრიულ ადგილს ანუ გარკვეულ მრუდს. x და y, რომლებიც განსაზღვრავენ მისი ყოველი წერტილის მდებარეობას, აკმაყოფილებს განტოლებას $CB \cdot CD : CH \cdot CF = a$, რომელიც წარმოდგენილია $F(a, y) = 0$ სახით, არის მრუდის განტოლება.

დეკარტის მეორე წიგნში „მრუდი წირების ბუნების შესახებ“ უფრო დაწვრილებით არის განხილული მრუდები, რომელთა კერძო სახეებია უკვე მოძებნილი გეომეტრიული ადგილები. ეს წიგნი მოცულობით უფრო დიდია და მას დეკარტი თვლიდა ამ შრომის მთავარ ნაწილად. ამ წიგნში დეკარტი ამტკიცებს, რომ მეორე ხარისხის განტოლება კონუსურ კვეთას წარმოადგენს და რომ სამი და ოთხი წრფის მიმართ ადგილები, მეორე ხარისხის განტოლებით გამოსახულნი, კონუსური კვეთები არიან. y-ის მიმართ განტოლების ამოხსნით დეკარტი ღებულობს გამოსახულებას:

$$y = ax + b + \sqrt{cx^2 + dx + e}.$$

აქ $y - ax - b$ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეზე გამრავლებულ მანძილს $y = ax + b$ წრფიდან; x სიდიდეები პროპორციულია მონაკვეთებისა, რომლებსაც ორდინატები მოკვეთენ ამ წირზე. ამიტომ კოორდინატთა ახალ სისტემაში, რომელშიც აბსცისთა ღერძად აღებულია $y = ax + b$ წრფე, ხოლო ორდინატის მიმართულებად დატოვებულია წინანდელი, მრუდი გამოისახება განტოლებით

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C.$$

ალგებრულ მრუდთა კლასიფიკაციის შემოყვანა მათი განტოლებების ხარისხის მიხედვით დეკარტს ეკუთვნის. $2n + 1$ და $2n$ ხარისხის განტოლებებით წარმოდგენილ მრუდებს დეკარტი აერთიანებს ერთ „გვარში“ (genre). ასეთ არასწორ დაშვებამდე დეკარტი მიიყვანა იმ მოსაზრებამ, რომ, თუ ერთუცნობიანი მე-4 ხარისხის განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნას მე-3 ხარისხის განტოლებამდე, ასევე მე-6 ხარისხის განტოლებაც დაიყვანება მე-5 ხარისხის განტოლებამდე და ასე შემდეგ. ვინაიდან დეკარტიმ ვერ ააგო მესამე და უმაღლესი რიგის მრუდების თეორია, ამიტომ მან ჯერ მოძებნა ისეთი მრუდები, რომელთა მექანიკურად აგება ადვილია, ხოლო შემდეგ ისეთები, რომლებიც განიხილებიან როგორც უმარტივესი ნიმუშები მოცემული გვარისა. ორივე ამ მოთხოვნილებას აკმაყოფილებს მრუდი

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy.$$

დეკარტი უჩვენებს, რომ ეს მრუდი არის გეომეტრიული ადგილი 5 წრფისადმი და ეკუთვნის იმ მრუდთა კლასს, რომელთა აგება შეიძლება შემდეგი ზოგადი ხერხის საშუალებით.

დავუშვათ, რომ წრფე ბრუნავს უძრავი $(0, b)$ წერტილის გარშემო. ამ წრფისა და აბსცისათა ღერძის გადაკვეთის წერტილთან დაკავშირებით მოძრაობს რომელიღაც მრუდი $f(x^1, y) = 0$, სადაც x^1 აბსცისას ვთვლით მბრუნავი წრფის აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილიდან. ვთქვათ, საძებნი წირი გეომეტრიული ადგილია მბრუნავი წრფისა და მოძრავი წირის გადაკვეთის წერტილებისა. მის განტოლებას ვიპოვით, თუ მოძრავი წირის განტოლებაში ჩავსვამთ მნიშვნელობას $x^1 = \frac{xy}{b-y}$. ზემოთ დაწერილი განტოლება მიიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც $b = 2a$ და პარაბოლა $y^2 = a(a-x^1)$ მოძრავი წირია. ამგვარად აგებული წირის განზოგადებას დეკარტი ღებულობს ერთი მხრივ ირიბკუთხოვანი კოორდინატების გამოყენებით, მეორე მხრივ უძრავ წრფეთა შორის სხვადასხვა მანძილის აღებით. აგების ხერხი აღებულია კონქოიდის აგების ხერხიდან, რომლისთვის მოძრავი წირია წრეწირი ცენტრით მბრუნავი წრფისა და აბსცისათა ღერძის გადაკვეთის წერტილზე. თუ მოძრავ წირს წრფით შევცვლით, მიიღება ჰიპერბოლა, რომლის განტოლებას დეკარტი იძლევა.

განტოლებათა თეორიაში დეკარტის მიერ შეტანილი არსებითად ახალი რამ ისაა, რომ მან პირველად დაიწყო განტოლების ჩაწერა ნულის ტოლი მარჯვენა ნაწილით, ნაცვლად ტოლობის ორივე მხარეზე დადებითკოეფიციენტებიანი წევრების დალაგებისა. დეკარტს ეკუთვნის აგრეთვე თეორემები ფესვების კოეფიციენტებთან კავშირის და განტოლების ფესვების რიცხვის შესახებ.

დეკარტს ამავე წიგნში მოცემული აქვს განუზღვრელკოეფიციენტების ხერხი. იგი მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ, მოცემულია ტოლობა

$$\begin{aligned} & a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ & = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0; \end{aligned}$$

აქ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m$ მუდმივი კოეფიციენტებია, დამოუკიდებელნი x ცვლადისაგან, რომლებსაც შეუძლიათ ყოველგვარი მნიშვნელობის მიღება. ვინაიდან მოცემულ განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს x-ის ყოველი მნიშვნელობა, ამიტომ მას აკმაყოფილებს $x = 0$ მნიშვნელობაც; ამ მნიშვნელობის განტოლებაში ჩასმა განტოლების ორივე ნაწილის ყველა წევრს ნულად გადააქცევს, გარდა პირველებისა, და მივიღებთ $a_0 = b_0$. დარჩება განტოლება

$$a^m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x =$$
$$= b_m x^m + b_n x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + bx$$

ანუ x-ზე შეკვეცის შემდეგ გვექნება

$$a_m x^{m-1} + a_{m-1}x^{m-2} + \cdots + a_2 x + a_1 =$$
$$= b_m x^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2} + \cdots + b_2 x + b_1,$$

ეს ტოლობა კი უნდა დააკმაყოფილოს $x = 0$ სიდიდემ და მივიღებთ $a_1 = b_1$ და ასე შემდეგ.

დეკარტი უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის ფუძემდებელია. წირისადმი მოცემულ წერტილში მხების გავლების ამოცანა დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ამოცანაა; დეკარტიმ მოგვცა ნორმალის გავლების ხერხი. ცხადია, ნორმალის მიმართულება აგრეთვე განსაზღვრავს მხების მიმართულებას. მეორე წიგნში დეკარტი წერს:

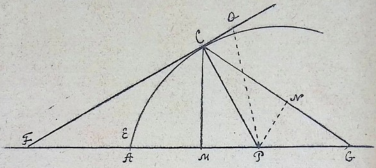
„რაც საჭიროა წირთა მოძღვრებაზე საწყისებიდან, აქ მოვიყვან ყველაფერს იმის შემდეგ, როცა მივცემ ისეთ წრფეთა გავლების ზოგად ხერხს, რომლებიც მართი კუთხით გადაკვეთენ მრუდ წირებს ნებისმიერ წერტილებში. და ვბედავ იმის თქმას, რომ ეს ამოცანა გაცილებით უფრო სასარგებლო და ზოგადია არა მარტო ჩემთვის ცნობილ ამოცანებში, არამედ ყველა იმ ამოცანაში, რომლის ცოდნა გეომეტრიაში ოდესმე მსურდა".

ამ სიტყვების შემდეგ, რომლებითაც მან დიფერენციალური აღრიცხვის წარმოშობა იწინასწარმეტყველა, მოჰყავს „ზოგადი ხერხი იმ წრფეთა მოძებნისა, რომლებიც მოცემულ წირებს ანდა მათ მხებებს გადაკვეთენ მართი კუთხით.

დავუშვათ, რომ CE მრუდი წირია (ნახ. 11) და C წერტილში უნდა გავავლოთ წრფე, რომელიც მასთან მართ კუთხეს ქმნის. დავუშვებ, რომ ეს უკვე გაკეთებულია და საძიებელია წირი CP. მას გავაგრძელებ P წერტილამდე, სადაც ის შეხვდება GA წრფეს, რომელსაც ვთვლი იმ წრფედ, რომლის წერტილებს უფარდებენ CE წირის ყველა წერტილს; ასე რომ, დავუშვებ რა MA ანუ $CB \infty y$ და CM ანუ $BA \infty x$ (ნახ. 12), მაქვს რომელიღაც განტოლება, x-სა და y-ს შორის შეფარდების გამომსახველი. შემდეგ დავუშვებ $PC \infty s$ და $PA \infty v$ და, მაშასადამე, $PM \infty v - y$; შემდეგ PMC მართკუთხა სამკუთხედიდან მაქვს, რომ ss ფუძის კვადრატი უდრის $xx + vv - 2vy + yy$ ორი გვერდის კვადრატებს; ე. ი. მაქვს, რომ

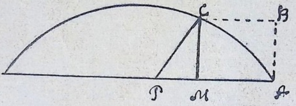
$$x \infty \sqrt{ss - vv + 2vy - yy} \quad \text{ანუ} \quad y \infty v + \sqrt{ss - xx}.$$

ვსარგებლობ ამ განტოლებით, და ერთ-ერთს ორი განუზღვრელი x ანუ y სიდიდეებიდან ვაშორებ იმ განტოლებას, რომელიც ჩემთვის გამოსახავს CE წრფის ყველა წერტილის ფარდობას GA წრფის წერტილებისადმი. ამის გაკეთება ადვილია; თუ მსურს x-ის მოშორება, ყველგან x-ის ნაცვლად ჩავსვამ $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$,



ნახ. 11.

ამ გამოსახვის კვადრატს—xx-ის ნაცვლად და კუბს—x^3-ის ნაცვლად და ასე შემდეგ; თუ მსურს y-ის მოშორება, მის ნაცვლად ჩავსვამ $v + \sqrt{ss - xx}$, და ამ გამოსახვის კვადრატსა და კუბს



ნახ. 12.

yy-ისა და y^3-ის ნაცვლად და ასე შემდეგ. ამრიგად, ყოველთვის მიიღება განტოლება, რომელშიც იქნება მხოლოდ ერთი განუსაზღვრელი სიდიდე x ან y.

მაგალითად (ნახ. 12), თუ MA არის ელიფსის დიამეტრის მონაკვეთი, რომლისთვის CM შეუღლებული ორდინატია,

r მისი წრფივი გვერდია და q — განივი, მაშინ აპოლონიუსის პირველი წიგნის მე-13 თეორემის თანახმად

$$xx \infty ry - \frac{r}{q}\, yy.$$

აქედან x-ის გამორიცხვის შემდეგ დარჩება:

$$ss - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{r}{q}\, yy.$$

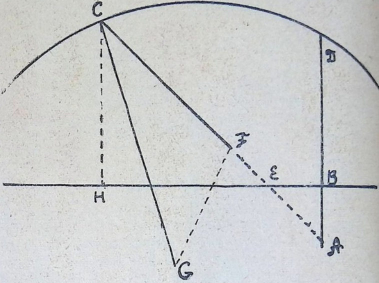
ანუ

$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r} \text{ უდრის არაფერს,}$$

ვინაიდან აქ უკეთესია მთელი გამოსახვის ერთად განხილვა, ვიდრე ერთი მისი ნაწილის მეორესთან გატოლება“...

ნორმალის გავლების ეს მეთოდი დეკარტიმ გადმოსცა ვრცლად და ჩვენ მას მისი აზრის მსვლელობის დაურღვევლად მოკლედ გადმოვცემთ. ვთქვათ, $C(x_1, y_1)$ არის მრუდის წერტილი და $P(x_2, 0)$ ის წერტილია, რომელშიც $C(x_1, y_1)$ წერტილიდან მრუდისადმი გავლებული ნორმალი აბსცისათა ღერძს გადაკვეთს. ასეთ შემთხვევაში წრეწირს $P(x_2, 0)$ ცენტრით და $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2}$ რადიუსით უნდა ჰქონდეს მრუდთან ერთ $P(x_2, 0)$ წერტილში შეერთებული ორი საერთო წერტილი. თუ აბსცისათა ღერძზე $P(x_1, 0)$ წერტილს ნებისმიერად ავიღებთ, მაშინ მრუდისა და $P(x_2, 0)$ ცენტრით და $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2}$ რადიუსით წრეწირის გადაკვეთის წერტილების აბსცისები განისაზღვრებიან იმ განტოლებიდან, რომელსაც მივიღებთ y-ის გამორიცხვით მრუდისა და წრეწირის განტოლებიდან. თუ ამ განტოლების ყველა წევრს მარცხენა მხარეზე გადავიტანთ, მაშინ ამ ნაწილში მამრავლად შევა $x - x_1$, ვინაიდან $x - x_1$ იძლევა ერთ-ერთ გადაკვეთის წერტილს. მაგრამ რადგან $P(x_2, 0)$ წერტილი მრუდის ნორმალზე უნდა მდებარეობდეს, ამიტომ გადაკვეთის მეორე წერტილი პირველს უნდა დაემთხვეს, ესე იგი $x = x_1$ იქნება განტოლების ორჯერადი ფესვი, და მარცხენა მამრავლად უნდა შევიდეს $(x - x_1)^2$. ეს მოთხოვნა საზღვრავს x_2 სიდიდეს ერთი პირობით, რომელსაც ის უნდა აკმაყოფილებდეს. x_2-ს მოძებნის შემდეგ ნორმალზე მდებარეობას განვსაზღვრავთ და, მაშასადამე, მხების მდებარეობასაც. x_2-ს განმსაზღვრელი განტოლების მისაღებად დეკარტი იყენებს განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდს. თუ მრუდის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისების განმსაზღვრელი n ხარისხის გან-

ტოლებაა, მაშინ დეკარტი დაუშვებს, რომ განტოლების მარცხენა ნაწილი იგივურად ტოლია $(x-x_1)^2$-ისა და $(n-2)$ ხარისხის განუსაზღვრელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ნამრავლისა. მაშინ x_2-ის განსაზღვრისათვის განტოლება მიიღება განუზღვრელი კოეფიციენტების გამორიცხვით, რომლებსაც მივიღებთ შესაბამი კოეფიციენტების გატოლებით ორივე n ხარისხის იგივურ გამოსახულებებში.



ნახ. 13.

დასასრულს, დეკარტი გვაძლევს ნორმალის გავლების ზოგადი მეთოდის გამოყენების მაგალითს, სახელდობრ, კონქოიდისადმი ნორმალის გავლების მოკლე და მარტივ ხერხს.

ასე, მაგალითად (ნახ. 13), თუ DC არის ძველთა პირველი კონქოიდი, A მისი პოლუსია და BH სახაზავი. ასე რომ, A-კენ მიმართული და CD წირსა და BH წრფეს შორის მოთავსებული ყველა წრფე, როგორიცაა DB და CE, ტოლია და თუ საჭიროა CG წირის მოძებნა, რომელიც წირს გადაკვეთს მართი კუთხით C წერტილში, მაშინ, აქ მოცემული მეთოდის თანახმად, BH წირის იმ წერტილის მოსაძებნად, რომელშიც უნდა გაიაროს CG წირმა,

დაგვჭირდებოდა ისეთივე გამოთვლების ჩატარება, შესაძლებელია უფრო ვრცელისაც, ვიდრე წინათ. მაგრამ იმის აგება, რომელსაც ამ გამოთვლებიდან მივიღებთ, ძალიან მარტივია. საჭიროა მხოლოდ CA წრფეზე ავიღოთ CH-ის ტოლი CF, სადაც CH არის HB-ს მართობული, შემდეგ F წერტილში გავავლოთ FG, BA-ს პარალელური და EA-ს ტოლი. ამგვარად მიიღება G წერტილი, რომელშიც უნდა გაიაროს CG საძიებელმა წირმა“.

დეკარტი განსაზღვრავს ციკლოიდის წერტილში ნორმალს, გაავლებს რა მას მგორავი წრისა და ციკლოიდის შეხების წერტილში. მოყვანილი დამტკიცება იმაში მდგომარეობს, რომ წრე განხილულია, როგორც უსასრულო რიცხვის გვერდებიანი მრავალკუთხედი. ამ დამტკიცების გამოყენება შეიძლება გორვის დროს შემოხაზული კიდევ სხვა წირებისადმი.

გაგრძელებული და შემოკლებული ციკლოიდებისადმი დეკარტიმ ააგო ნორმალები. უკანასკნელ შემთხვევაში ეს აგება მას საშუალებას აძლევს მიიღოს წირის გადაღუნვის წერტილები; დეკარტი უჩვენებს, რომ ნორმალი, გავლებული გადაღუნვის წერტილში, შეეხება, იმ წრეწირს, რომელზედაც იმყოფება შემოკლებული ციკლოიდის შემომწერი წერტილი.

5. ჟერარ დეზარგი

ჟერარ დეზარგი დაიბადა 1593 წელს ლიონში, იყო არქიტექტორი და ინჟინერი და, როგორც სამხედრო ინჟინერი, მონაწილეობას იღებდა ლაროშელის ალყაში, სადაც 1628 წელს ინახულა დეკარტიმ. 1626 წლიდან 1650 წლამდე დეზარგი იმყოფებოდა პარიზში. აქ ის ხშირად ესწრებოდა მათემატიკოსთა და ფიზიკოსთა საზოგადოების სხდომებს.

1630 წელს დეზარგმა გამოსცა თავისი მოძღვრება პერსპექტივაზე. უფრო გვიან დეზარგის მეთოდები შევსებული სახით გადმოცემული იყო მისი მოწაფის — ბოსეს — ნაშრომში.

დეზარგის იდეის სიახლეზე გვეუბნება, ერთი მხრივ, მისი ნიჭიერი მოწაფეების მიერ ამ იდეების მხურვალედ აღიარება და, მეორე მხრივ, ძლიერი წინააღმდეგობა იმ მრავალი პრაქტიკოსის მხრივ, რომლებსაც არ ესმოდათ დეზარგის მოძღვრება და არ სურდათ უარყოფა ჩვეულებრივი, ნაკლებად მიზანშეწონილი და ხშირად არასწორი მეთოდისა. ასეთ მოწინააღმდეგებთან ბრძოლა ძნელი იყო, რადგანაც მათ წამოყენებული არგუმენტების გაგე-

ბაც კი არ შეეძლოთ. ბოსე სამხატვრო აკადემიის ლექციებზე დეზარგის იდეის პროპაგანდას ეწეოდა. რამდენიმე მხატვარიც კი მიიმხრო, მაგრამ წინააღმდეგობა იმდენად ძლიერი იყო, რომ ბოლოს და ბოლოს ბოსეს აეკრძალა დეზარგის მეთოდებით სარგებლობა, რის გამო იგი იძულებული იყო აკადემიაში მუშაობიდან გათავისუფლება ეთხოვნა.

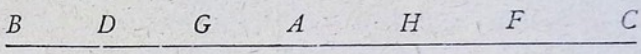
დეზარგის დამსახურება არა მარტო აგებათა პრაქტიკული წესების მოცემასა და მათ ზუსტ გეომეტრიულ დამტკიცებაშია. მისმა პრაქტიკულმა წესებმა ფართო გამოყენება ჰპოვეს გეომეტრიის განვითარებაში, რომლის შესახებ გადმოსცემს 1639 წელს დაბეჭდილ ნაშრომში „თავდაპირველადი მონახაზი იმის გარკვევის ცდისა, თუ რა მიიღება კონუსის სიბრტყესთან შეხვედრისას". ეს ნაშრომი ღრმად გაგებული და აღიარებული იქნა იმ დროის დიდი მათემატიკოსების — დეკარტის და ფერმას მიერ, მაგრამ უფრო ფართოდ კი ვერ გავრცელდა ძირითადი აზრების გაუგებრობის გამო, ხოლო დეზარგის სიკვდილის (1662 წელი) შემდეგ იგი სავსებით დაივიწყეს. მხოლოდ XIX საუკუნეში, როდესაც ამ ნაშრომში მოცემული აზრები ისევ აღმოცენდნენ, განვითარდნენ და განმტკიცდნენ, მისი დაბეჭდვა მოუხდათ ხელნაწერის ასლის საშუალებით, რომელიც მათემატიკოსმა და მათემატიკის ისტორიკოსმა მ. შალმა იპოვა პარიზის ერთ-ერთ ბუკინისტთან.

როგორც სათაურიდან ჩანს, დეზარგს ეს ნაშრომი მხოლოდ მონახაზად მიაჩნდა. მაგრამ აქ კონუსურ კვეთებზე მოძღვრების კარგად დამუშავებულ საფუძვლებთან ერთად ჩვენ ვპოულობთ მრავალ ახალს და მასთან ერთად ძალიან ზოგად წინადადებებსაც, რომლებიც დაუმტკიცებლადაა მოყვანილი; დეზარგის ახალი მეთოდების საშუალებით მათი დამტკიცება ადვილია, ხოლო მათ გარეშე ძალიან გაძნელდებოდა.

დეზარგის მიზანმიმართულებას სავსებით ზოგადი პროექციულ-გეომეტრიული ხასიათი აქვს. ის არა თუ პარალელურ წრფეებს განიხილავს როგორც გადამკვეთების კერძო შემთხვევას, როდესაც გადაკვეთის წერტილი უსასრულოდ დაშორებულია, არამედ სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებს განიხილავს როგორც ერთ უსასრულოდ დაშორებული წრფის წერტილებს. ცილინდრს დეზარგი განიხილავს როგორც კონუსის კერძო შემთხვევას. საერთო დიამეტრის მქონე პარაბოლების შესახებ დეზარგი ამბობს, რომ ისინი ერთმანეთს ეხება უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში, ხოლო საერთო ასიმპტოტიანი ჰიპერბოლები ერთმანეთს ეხება ორ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში; დე-

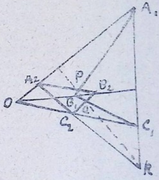
ზარგი უსასრულოდ ახლო ელემენტებსაც განიხილავს როგორც ზოგად თანაშეფარდებათა კერძო შემთხვევებს. მაგალითად კონუსური კვეთისადმი მხები განხილულია როგორც მკვეთი, რომლის გადაკვეთის წერტილები ემთხვევა ერთმანეთს და ამრიგად თავის შეხების წერტილის პოლარას წარმოადგენს. ყველა ეს წინადადება დეზარგმა მიიღო პერსპექტულად გადატანის მეთოდით; დეზარგი უჩვენებს, რომ ამ მეთოდით სარგებლობა ორნაირად შეიძლება: 1) პოლუსი შეიძლება აღებულ იქნას წრის ცენტრში. ამ შემთხვევაში დამტკიცება ეყრდნობა იმას, რომ ორდინატები მათი დიამეტრების მართობულია 2) ნებისმიერი დიამეტრი ჩავთვალოთ პოლარად.

დეზარგი ცდილობს ყველაფერი ეს უეჭველი გახადოს, მაგრამ მაინც ახალი შედეგების მიღებაში მისი ნაყოფიერი მსჯელობა ყოველთვის ვერ ტარდება ისე, რომ მასთან ერთად მოგვცეს სრული დამტკიცება.



ნახ. 14.

ცალკე წინადადებათა დამტკიცებები არ არის უშუალოდ დაკავშირებული პერსპექტულ განზოგადებებთან, არამედ ზოგად თეორიასთან, რომლის საფუძვლების განვითარება მოცემულია შრომის დასაწყისში. აქ დეზარგი გვაძლევს წრფის წყვილ წერტილთა ინვოლუციაზე სრულ მოძრაობას. თვით ტერმინი „ინვოლუცია“ დეზარგს ეკუთვნის და განსაზღვრავს შემდეგნაირად: „ი ნ ვ ო ლ უ ც ი ა. და ამრიგად, თუ AH წრფეზე (ნახ. 14) მოცემულია წერტილთა სამი წყვილი B, H; C, G; D, F იმ თვისებისა, რომ ორივე წერტილი თითოეულ წყვილში ან შერეულია, ან განცალკევებული ყოველი მეორე წყვილის ორივე წერტილის მიმართ და თუ ერთმანეთის შესაბამისი მართკუთხედები, შედგენილი ამ წერტილებს შორის მონაკვეთებისაგან, ერთმანეთს ისე შეეფარდებიან, როგორც



ნახ. 14 ა.

მათი ტყუპები, თუ კი მათ ავიღებთ იმავე რიგზე, მაშინ წრფეზე წერტილთა სამი წყვილის ასეთ განლაგებას „ინვოლუციას“ ვუწოდებთ“.

დეზარგმა, როგორც არქიტექტორმა და ინჟინერმა, გამოსცა აგრეთვე რამდენიმე ნაშრომი, რომლებშიც მისი თეორიები პრაქტიკულ გამოყენებას პოულობს ხელოვნებასა და ხელოსნობაში.

საყურადღებოა აგრეთვე პერსპექტივაზე მოძღვრებისადმი დამატება, რომელიც შეიცავს სამ წმინდა გეომეტრიულ წინადადებას. ეს წინადადებები იძლევა ერთ სიბრტყეზე პერსპექტულ აგებულებათა შესრულების საშუალებას. უაღრესად მნიშვნელოვანია დეზარგის შემდეგი თეორემა: თუ ორ $A_1 B_1 C_1$ და $A_2 B_2 C_2$ სამკუთხედებში წრფეები, რომლებიც აერთებენ შესაბამის წვეროებს, გადიან ერთ O წერტილში, მაშინ შესაბამისი გვერდების გადაკვეთის სამი წერტილი P, Q, R მდებარეობს ერთ წრფეზე.

6. პიერ დე-ფერმა

პიერ დე-ფერმა დაიბადა 1601 წელს მონტობანში (საფრანგეთი), ვაჭრის ოჯახში. სწავლობდა ტულუზში იურიდიულ მეცნიერებას; რამდენიმე წელი იქ ადვოკატად მუშაობდა, შემდეგ კი იქვე პარლამენტის მრჩეველად დაინიშნა. ამ თანამდებობაზე დარჩა მთელი თავისი სიცოცხლე. აქ მას საკმაო დრო რჩებოდა მეცნიერული მუშაობისათვის. მათემატიკის ყველა დარგში ფერმამ უაღრესად მნიშვნელოვანი შედეგები მიიღო. ის კარგად იცნობდა ძველი თაობის მათემატიკას, რაც ხშირად ფერმას გამოკვლევების გამოსავალ წერტილს წარმოადგენდა. რიცხვთა თეორიაში მისი მუშაობის შედეგები ცნობილი გახდნენ იმ დროის მათემატიკოსებისადმი გაგზავნილი წერილებისა და დიოფანტეს ნაშრომებზე გაცემულ ბაშეს შენიშვნების წყალობით. მათემატიკის სხვა დარგში თავის შედეგებს ფერმა ხშირად უგზავნიდა პარიზის მათემატიკოსებს და ამგვარად ისინი ცნობილი ხდებოდნენ არა მარტო საფრანგეთში, არამედ უცხოეთშიც. თავის სიცოცხლეში ფერმამ გამოაქვეყნა ნაშრომების მხოლოდ ნაწილი და ისიც მეგობრების დაჟინებითი მოთხოვნის შემდეგ. ფერმას დანარჩენი ნაშრომები მრავალ მეცნიერულ წერილებთან ერთად 1679 წელს გამოსცა მისმა შვილმა სათაურით „სხვადასხვა თხზულებები“. უფრო გვიან კი გამოიცა ფერმას ნაშრომების სრული კრებული: „ფერმას თხზულებები“. დიდი გავლენა

მოახდინა ფერმამ მათემატიკის ყველა დარგზე: რიცხვთა თეორიაზე, გეომეტრიასა და ალგებრაზე. დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა აგრეთვე ფერმას შრომებს დიფერენციალური აღრიცხვის შექმნისათვის.

1637 — 1638 წლებში ფერმასა და დეკარტს შორის პოლემიკამ მწვავე ხასიათი მიიღო. ფერმამ მკაცრად გააკრიტიკა დეკარტის „დიოპტრიკა“ და მასთან ერთად გაუგზავნა დეკარტს თავისი ნაშრომი „მაქსიმუმებისა და მინიმუმების შესახებ“. ამ ნაშრომში ფერმა ფაქტიურად აწარმოებს ოპერაციას, რომელსაც ახლა დიფერენცირება ეწოდება, და იყენებს მას არა მხოლოდ მაქსიმუმსა და მინიმუმზე ამოცანების ამოსახსნელად, არამედ მრუდისადმი მხების გავლების ამოცანების ამოსახსნელადაც. დეკარტიმ ცხარე და არასამართლიანი კრიტიკით უპასუხა ფერმას. ამ დავაში ფერმას მხარეზე გამოდიოდნენ რობერვალი და პასკალი. მოდავენი მაინც მორიგდნენ მერსენის შუამავლობით და თვით ფერმას შემარიგებლური ქცევით. როგორც გადმოგვცემენ, ფერმამ ამ დავაში გამოავლინა თავისი თავი ისეთ ადამიანად, რომელიც თავისუფალია ყოველგვარი წვრილმანი მედიდურობისაგან.

დეკარტთან ერთდროულად, მაგრამ სრულიად დამოუკიდებლად, ფერმასაც შემოჰყავს კოორდინატები. ეს აშკარად ჩანს მისი ნაშრომიდან „Jsagoge“: „...ამიტომ ჩვენ გამოვიყენებთ მეცნიერების ამ დარგისადმი (სახელდობრ, ადგილებზე მოძღვრებისადმი) საგანგებოდ და მისთვის შესაფერ ანალიზს იმისათვის, რომ მომავალში მისი შესწავლა ყველასათვის მისაწვდომი იყოს.

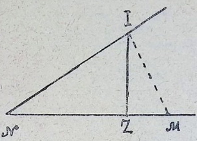
თუ რომელიმე დასკვნით განტოლებაში გვაქვს ორი უცნობი სიდიდე, მაშინ გვაქვს ადგილი და ერთი სიდიდის ბოლო წერტილი შემოხაზავს წრფეს ან მრუდ წირს...

მაგრამ განტოლებებს შეგვიძლია მივცეთ თვალსაჩინო სახე, თუკი ორივე უცნობ სიდიდეს მოვათავსებთ რომელიმე მოცემულ კუთხეში, რომელსაც, მეტ ნაწილად, მივიღებთ მართი კუთხის ტოლად, და თუ მოცემულია მდებარეობა და ერთ-ერთი სიდიდის ბოლო წერტილი...

NZM იყოს მდებარეობით მოცემული წრფე (ნახ. 15) და მასზე უცვლელი *N* წერტილი. ვთქვათ, *NZ* უდრის *A* უცნობ სიდიდეს და *ZI* მონაკვეთი, რომელიც მასთან ქმნის მოცემულ *NZI* კუთხეს, მეორე *E* უცნობი სიდიდის ტოლია. თუ შემდეგ *DA*-ზე უდრის *B*-ს *E*-ზე, მაშინ *I* წერტილი იმყოფება მდებარეობით მოცემულ

წრფეზე. მართლაც, როგორც B შეეფარდება D-ს, ისე A შეეფარდება E-ს. ამიტომ A-ს E-სთან შეფარდება მოცემულია (უცვლელია), გარდა ამისა, მოცემულია Z-თან კუთხე, ამიტომ NIZ სამკუთხედის სახე ცნობილია და, მაშასადამე, INZ კუთხეც. მაგრამ N წერტილი მოცემულია და NZ წრფე მდებარეობით ცნობილია. მაშასადამე, NI-ის მდებარეობა მოცემულია და სინთეზის მოხდენა ადვილია.

ამ განტოლებამდე შეიძლება დაყვანა ყველა განტოლებისა, რომელთა წევრები ნაწილობრივ მოცემულია, ნაწილობრივად შეიცავენ A და E უცნობებს, დამოუკიდებლად იმისა, გამრავლებულია ეს უკანასკნელი სიდიდეები რომელიმე მოცემულ სიდიდეებზე, თუ მოცემულია უბრალოდ.



ნახ. 15.

ვთქვათ Z pl. — D A-ზე უდრის B-ს E-ზე. თუ დავუშვებთ, რომ D R-ზე ტოლია Z pl.-ის, მაშინ როგორც B შეეფარდება D-ს, ისე $R - A$ შეეფარდება E-ს.

თუ ჩვენ მივიღებთ, რომ MN ტოლია R-ის, მაშინ M წერტილი მოცემული იქნება და, მაშასადამე, MZ უდრის $R - A$-ს. ამიტომ ცნობილია MZ-ის ZI-თან შეფარდება. მაგრამ რაკი Z-თან კუთხე ცნობილია, ამიტომ IZM სამკუთხედის სახე ცნობილია და დავასკვნით, რომ MI წრფე მდებარეობით მოცემულია. მაშასადამე, I წერტილი მდებარეობით მოცემულ წრფეზე იმყოფება. იგივე ადვილად მიიღება ყოველი განტოლებისათვის. რომელშიც წევრები გვხვდება A და E სიდიდეებით.

ეს არის ადგილის მარტივი და პირველი განტოლება, რომლის დახმარებით შესაძლებელია ყველა წრფივი ადგილის პოვნა".

როგორც ვხედავთ, აქ ფერმას წამოყენებული აქვს დებულება იმის შესახებ, რომ ორუცნობიანი პირველი ხარისხის განტოლება წრფეს წარმოადგენს და გვაძლევს აგრეთვე ამ დებულების დამტკიცებასაც. ამ მიზნისათვის მან აიღო ერთი ღერძი აბსცისებისათვის და მასზე გამოსავალი წერტილი მათ ასათვლელად, შემდეგ ორდინატთა მიმართულება, რომლებიც გაავლო აბსცისათა ღერძის ყოველი შესაბამი წერტილიდან ცალ-ცალკე; ვინაიდან მას

ორდინატთა ღერძი ჯერ კიდევ არ შემოუყვანია. არ შემოუყვანია აგრეთვე უარყოფითი აბსცისები და ორდინატები. ამ უკანასკნელებს იყენებდნენ, ასე ვთქვათ, შეუგნებლად, რამდენადაც ცნობილ მრუდებს მთლიანად ხაზავდნენ, არ იმტვრევდნენ რა მაზე თავს, შეიძლება თუ არა ერთისა და იმავე განტოლებით ყველა ნაწილის გამოსახვა. უცნობი მრუდის შემთხვევაში ხშირად ალმოცენდებოდა გაუგებრობა.

თუ A და E ასოების ნაცვლად, რომლითაც ფერმა სარგებლობს, შემოვიყვანთ x და y, მაშინ ფერმას განტოლება იქნება

$$Dx = By \text{ ანუ } x : y = B : D.$$

N წერტილი კოორდინატთა სათავეა, NI მასში გამავალი წრფეა, რომლის განტოლება სწორედ ზემომოყვანილი განტოლებაა.

შემდეგ ფერმა გვიჩვენებს, რომ ყოველი ზოგადი სახის წრფივი განტოლება წრფეს გამოსახავს. ეს განტოლებაა

$$Z - Dx = By;$$

Z pl. ნიშნავს Z planum, ესე იგი ფართობს; რადგან Dx და By ფართობებს ნიშნავენ, ამიტომ მათი ჯამიც Z ფართობი უნდა იყოს. ფერმას დაშვებით. $Z = DR$ და განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

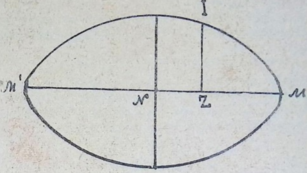
$$D(R - x) = By.$$

ამის შემდეგ ფერმა გვაძლევს ელიფსის განტოლების პირველ ფორმას: „თუ $Bq. - Aq.$ აქვს $Eq.$-თან მოცემული შეფარდება, მაშინ I წერტილი ელიფსზე იმყოფება.

ავიღოთ MN, B-ს ტოლი, და გავავლოთ ელიფსი M წვეროთი, NM დიამეტრითა და N ცენტრით (ნახ. 16), რომლის ორდინატები ZI წრფის პარალელურია და ვთქვათ, რომ ორდინატების კვადრატებს აქვს მოცემული შეფარდება დიამეტრის მონაკვეთებზე აგებულ მართკუთხედთან. მაშინ I წერტილი იმყოფება ასეთ ელიფსზე. მართლაც, NM-ის კვადრატს გამოკლებული NZ-ის კვადრატი ტოლია დიამეტრის მონაკვეთებზე აგებული მართკუთხედისა.

ამ განტოლებამდე მიიყვანება მსგავსი განტოლებები, რომლებსაც აქვთ ერთ მხარეზე $Aq.$, მეორეზე—$Eq.$ საწინააღმდეგო ნიშნით, ამასთან ამ წევრებს აქვთ სხვადასხვა კოეფიციენტები. მართლაც, კოეფიციენტები რომ ერთმანეთის ტოლნი იყვნენ და კუთხე მართი, მაშინ ადგილი იქნება, როგორც უკვე

ვთქვით, წრეწირი. თუკი კუთხე მართი არ არის, მაშინ ადგილი იქნება ელიფსი, როდესაც კოეფიციენტები ტოლია. ამის გარდა, თუ განტოლებაში გვაქვს კიდევ წევრები მოცემული სიდიდეების A-ზე და E-ზე ნამრავლით, მაშინ დაყვანა შეიძლება ნაჩვენები ხერხით".



ნახ. 16.

როგორც ფერმა ამბობს, ორდინატების კვადრატებს აქვს მოცემული შეფარდება (რომელსაც აღვნიშნავთ k-თი) დიამეტრის მონაკვეთებზე აგებული მართკუთხედის ფართობთან, ესე იგი

$$\frac{ZM \cdot ZM'}{ZI^2} = k.$$

თუ I წერტილის კოორდინატებს x-ით და y-ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$\frac{(B - x)(B + x)}{y^2} = k$$

ანუ

$$\frac{B^2 - x^2}{y^2} = k;$$

ესე იგი ელიფსის განტოლებას ფერმა გვაძლევს შემდეგი სახით:

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{\frac{B^2}{k}} = 1.$$

ჰიპერბოლის შემთხვევაში გვაძლევს განტოლებას

$$\frac{\frac{y^2}{B^2}}{k} - \frac{x^2}{B^2} = 1,$$

ხოლო პარაბოლის შემთხვევაში —

$$x^2 = Dy \quad \text{და, აგრეთვე,} \quad y^2 = Dx.$$

შემდეგ ფერმა განიხილავს II ხარისხის განტოლების სხვა სახეებსაც და დაჰყავს ისინი წინათ განხილულ სახემდე კოორდინატთა ღერძების გარდაქმნის საშუალებით. იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლება შეიცავს xy-იან წევრს, ფერმა მაგალითზე გვიჩვენებს იმ ხერხს, რომელიც ასეთ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ. განტოლება

$$2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$

შეიძლება გარდაიქმნას განტოლებად

$$(x + y)^2 + x^2 = a^2.$$

თუ კოორდინატთა ახალ ღერძებად ავიღებთ წრფეებს $x + y = 0$ და $x = 0$, მაშინ ნახაზიდან ჩანს, რომ ახალი კოორდინატები იქნება $x_1 = x\sqrt{2}$ და $y_1 = x + y$; მათ შორის განტოლება იქნება

$$\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2;$$

ეს გამოსახავს ელიპს, რომელშიც კოორდინატთა ახალ ღერძებად შეუღლებული დიამეტრებია.

ფერმა განიხილავს აგრეთვე II ხარისხის ერთგვაროვან განტოლებას x და y შორის. მან დაუშვა, რომ ამ შემთხვევაში წირს აქვს საწყისის გარდა კიდევ ერთი წერტილი, შემდეგ გვიჩვენა, რომ ის სავსებით შეიცავს ამ წერტილის გამაერთიანებელ წრფეს ამრიგად, ფერმას ნაშრომში ჩვენ ვპოულობთ სიბრტყეზე პარალელურ კოორდინატებს შორის I და II ხარისხის განტოლების სრულ გარჩევას; მაგრამ მაინც რთულ ადგილებში ფერმა იძულებულია თავისი ანალიზური გეომეტრია ააგოს ძველების გეომეტრიაზე. მართლაც, როდესაც ლაპარაკია იმაზე, რომ განტოლება

$$ax^2 \pm by^2 = c$$

წარმოადგენს კონუსურ კვეთს იმ შემთხვევაშიც, როდესაც კოორდინატები ირიბკუთხოვანია, მაშინ აუცილებლად დაშვებულია,

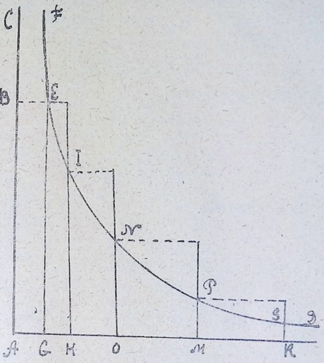
რომ აქ ლაპარაკია იგივე წირებზე, როგორც მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში, ანდა რომ ყოველთვის არსებობს უსასრულო წყვილი შეუღლებული დიამეტრებისა, რომელთაგან ერთი ქმნის მართ კუთხეებს. ეს დაშვება ფერმას გადმოღებული აქვს აპოლონისაგან.

ფერმას ნაშრომიდან „შესავალი ზედაპირული ადგილების შესწავლისათვის“ ჩანს, რომ ის თავის ანალიზურ გეომეტრიას იყენებდა აგრეთვე სივრცეში გეომეტრიული ადგილების განსაზღვრისათვის. მაგრამ ის არ სარგებლობს სივრცითი კოორდინატებით, არამედ ზედაპირებს განსაზღვრავს მათი ნებისმიერ სიბრტყესთან გადაკვეთის წირთა თვისებების გამოკვლევის საშუალებით. განსაკუთრებული კმაყოფილებით აღნიშნავს ფერმა ერთ-ერთი თავისი წინადადების გავრცელებას სივრცით შემთხვევაზე: იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილების კვადრატებს სივრცეში მოცემულ წერტილებამდე აქვს მოცემული ჯამი ანდა, უფრო ზოგად შემთხვევაში, აკმაყოფილებს პირველი ხარისხის განტოლებას, არის სფერული ზედაპირი. მართლაც, თუ ავიღებთ რომელიმე სიბრტყეზე მოცემული წერტილების გეომეტრული ადგილის წერტილებამდე მანძილის პროექციას, მაშინ გვემილების კვადრატები აკმაყოფილებს იმავე სახის განტოლებას. ასე რომ, სიბრტყის მიერ კვეთი იქნება წრე. ფერმა ასევე პოულობს, რომ გეომეტრიული ადგილი წერტილებისა, რომელთა მანძილები მოცემულ სიბრტყეებამდე აკმაყოფილებს პირველი ხარისხის განტოლებას, არის სიბრტყე. თუ ეს მანძილები აკმაყოფილებს მეორე ხარისხის განტოლებას, მაშინ გეომეტრიული ადგილი არის ზედაპირი, რომლის გადაკვეთა ნებისმიერი სიბრტყით არის კონუსური კვეთი ან წრფეები.

აქვე უნდა მოვიყვანოთ ფერმას დიდი თეორემა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: განტოლება $x^n + y^n = z^n$, როცა $n > 2$, არ ამოიხსნება მთელ რიცხვებში. ეს თეორემა ჯერ კიდევ არ არის დამტკიცებული n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. მისი სამართლე $n = 3$-თვის ცნობილი იყო საშუალო საუკუნოების არაბი მათემატიკოსი ალ-ხოჯანდისთვის. დამტკიცებას $n = 4$-თვის შეიცავს თვითონ ფერმას მიერ მოცემული თეორემის დამტკიცება: „არ არსებობს ისეთი მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის გვერდები იყოს მთელი რიცხვები, ხოლო ფართობი — კვადრატი“. ფერმას დიოფანტეს წიგნის გვერდებზე გაუკეთებია შენიშვნა, რომ მას აქვს, მართლაც, საუცხოო დამტკიცება (n-ის ყველა მნიშვნე-

ლობისათვის), მაგრამ მინდორი იმდენად ვიწროა, რომ იქ არ დაეტევა. კუმერმა შეძლო ფერმას თეორემის დამტკიცება ყველა $n < 100$ მარტივი რიცხვისათვის.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ფერმას შრომებს დიდი მნიშვნელობა ჰქონდათ უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის წარმოშობის



ნახ. 17.

საქმეში. ამ მხრივ განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მისი ორი ნაშრომი: 1) „უმაღლესი რიგის ყველა ჰიპერბოლის კვადრატურა“ და 2) „მაქსიმუმებისა და მინიმუმების შესახებ“.

პირველ ნაშრომში ფერმა ამტკიცებს, რომ ფართ. $EGHI +$ + ფართ. $IHON+$ფართ. $NOMP+$ფართ. $PSRM+\cdots=$ ფართ. მართკ. BG (ნახ. 17). ამისათვის ფერმა მიმართავს შეფარდებებს და ამბობს: „მე ვამტკიცებ, რომ გეომეტრიულ შეფარდებათა დახ-

შარებით შეიძლება ვიპოვოთ ყველა ამ უსასრულოდ მრავალი ჰიპერბოლის კვადრატურა, გარდა ერთისა — აპოლონის ანუ პირველის — ერთნაირი და ყველასადმი გამოსაყენებელი ხერხით". შეფარდებათა შესახებ ის წერს: „*AH* წრფის რომელიმე ხარისხი ისე შეეფარდება *AG* წრფის იმავე ხარისხს, როგორც იგივე ანუ განსხვავებული წინამორბედისაგან *GE* წრფის ხარისხი შეეფარდება *HI* წრფის იმავე ხარისხს"; ესე იგი ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ შეფარდებას:

$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI} \text{ და ასე შემდეგ}$$

ან, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს,

$$AG = x_0, \qquad GE = y_0,$$
$$AH = x_1, \qquad HI = y_1,$$
$$AO = x_2, \qquad ON = y_2,$$
$$AM = x_3, \qquad MP = y_3,$$
$$AR = x_4, \qquad RS = y_4,$$

მაშინ დაშვების თანახმად,

$$x_1^2 : x_0^2 = y_0 : y$$

ანუ

$$y_1 x_1^2 = y_0 x_0^2 = \text{const},$$

ანდა, თუ მუდმივი ავიღეთ ერთის ტოლად, გვექნება

$$yx^2 = 1.$$

დავუშვათ, რომ $x_1 = \varepsilon x_0, \quad x_2 = \varepsilon x_1 = \varepsilon^2 x_0; \quad x_3 = \varepsilon x_2 = \cdots = \varepsilon^3 x_0$ და ასე შემდეგ, ამასთანავე $\varepsilon > 1$ და იმავე დროს ისეთია, რომ სხვაობები

$$x_1 - x_0 = x_0(\varepsilon - 1)$$
$$x_2 - x_1 = x_0\varepsilon(\varepsilon - 1)$$
$$x_3 - x_2 = x_0\varepsilon^2(\varepsilon - 1) \qquad \text{და ასე შემდეგ,}$$

რომლებიც შეადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას იგივე მნიშვნელით, როგორსაც თვითონ აბსცისები, ძალიან ახლო არიან ერთმანეთთან. აქედან გამომდინარეობს:

$$\frac{\text{პარ.}\, EH}{\text{პარ.}\, IO} = \frac{\text{პარ.}\, IO}{\text{პარ.}\, NM} = \cdots =$$
$$= \frac{y_0(x_1 - x_0)}{y_1(x_2 - x_1)} = \cdots = \frac{x_1^2}{x_0^2 \varepsilon} = \varepsilon.$$

ამ თეორემას ფერმამ წაუმძღვარა გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის შესახებ თეორემა, რომელშიც ამბობს:

$$(v-u):u = a:(S-a),$$

სადაც a არის პირველი წევრი; $\frac{u}{v}q$ — პროგრესიის მნიშვნელი, $q < 1$; აქედან მივიღებთ:

$$S-a=a\cdot\frac{u}{v-u} = a\,\frac{q}{1-q}; \qquad S=\frac{a}{1-q};$$

აქ პროგრესიის წევრებია პარალელოგრამები EH, IO, NM... მაშასადამე,

$$a = \text{პარ. } EH = y_0(x_1-x_0)\sin A;$$

$$q = \text{პარ. } IO:\text{პარ. } EH = \frac{1}{\varepsilon}$$

და, მაშასადამე,

$$S=\frac{a\varepsilon}{\varepsilon-1} = \frac{y_0x_0(\varepsilon-1)\sin A}{\varepsilon-1} = x_0y_0\sin A = \text{პარ. } AGEB.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $A=90°$, მაშინ ფერმას ეს პირველი შედეგი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$S=\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{x_0}.$$

ფერმას მეორე მაგალითში $yx^3=1$ და შედეგი ასეთია:

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx=\frac{1}{2}\,x_0y_0=\frac{1}{2x_0^2}.$$

დასასრულ, ჰიპერბოლისათვის $y^nx^m=1$ $(m>n)$ ფერმას ზოგადი თეორემა ამბობს, რომ

$$S=\int_{x_0}^{\infty}x^{-m/n}\,dx=\frac{n}{m-n}\,x_0y_0=$$

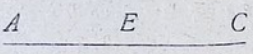
$$=\frac{n}{m-n}\,x_0x_0^{-m/n}=\frac{n}{m-n}\,x_0^{\frac{n-m}{m}}.$$

ამ თეორემიდან აშკარაა, რომ ფერმა ნამდვილ ინტეგრებას აწარმოებს, რაც მის დიდ მიღწევად უნდა ჩაითვალოს. უეჭველად მნიშვნელოვანია აგრეთვე ფერმას გამოკვლევები ფუნქციის მაქსი-

მუმისა და მინიმუმის განსაზღვრის დარგში. ამის გარკვევისათვის მივმართოთ თვითონ ფერმას მსჯელობას: „უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობათა გამოკვლევის მეთოდი. მთელი სწავლება უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობათა მოძებნის შესახებ ეყრდნობა იმას, რომ მიიღებენ ორ უცნობს და იყენებენ შემდეგ ერთადერთ წესს:

დავუშვათ, რომ A არის რომელიმე (უცნობი) გამოსაკვლევი სიდიდე — ზედაპირი ანუ სხეული, ანდა სიგრძე შესაბამისად ამოცანის პირობისა, და გამოვსახოთ მაქსიმუმი და მინიმუმი წევრებით, რომლებიც A-ს შეიცავენ ამა თუ იმ ხარისხში. შემდეგ ავიღოთ წინანდელი სიდიდისათვის მნიშვნელობა $A+E$ და ხელახლა გამოვსახოთ მაქსიმუმი და მინიმუმი წევრებით, რომლებიც A და E-ს შეიცავენ ამა თუ იმ ხარისხში. დავუშვათ, რომ ორივე ერთობლიობა, რომელიც უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს გამოსახავს, როგორც დიოფანტე ამბობს, მიახლოებით ერთმანეთის ტოლია, ორივე მხარეზე მოვაცილოთ ერთნაირი წევრები; მაშინ თითოეული წევრი მარჯვნივ ან მარცხნივ იქნება ან E, ან რომელიმე მისი ხარისხი. შემდეგ გავყოთ ყველა წევრი E-ზე ან რომელიმე მის ხარისხზე ისე, რომ ერთი წევრი მაინც რომელიმე მხარეზე სრულიად თავისუფალი იყოს E მამრავლისაგან. მერმე ორივე მხარეზე წავშალოთ ის, რომელიც E-ს ან მის ხარისხს შეიცავს, რაც დარჩება, ერთმანეთის ტოლად ჩავთვალოთ, ანდა, თუ ერთ მხარეს არაფერი დარჩება, უარყოფითი წევრები გავუტოლოთ დადებითებს. უკანასკნელი განტოლების ამოხსნა A-ს მნიშვნელობას მოგვცემს; როდესაც უკანასკნელი ცნობილია, მაშინ მაქსიმუმი და მინიმუმი მიიღება წინათ ჩატარებული ამოხსნის საფუძველზე.

მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი: AC მონაკვეთი ისე გაყვოთ E წერტილით, რომ AEC მართკუთხედი იყოს უდიდესი (ნახ. 18).



ნახ. 18.

AC მონაკვეთი B-თი აღვნიშნოთ, B-ს ერთ ნაწილს A ვუწოდოთ, ასე რომ, მეორე ნაწილი იქნება $B-A$, ხოლო მონაკვეთებზე მართკუთხედი იქნება B გამრავლებული $A - Aq$-ზე და მას უნდა ჰქონდეს უდიდესი მნიშვნელობა. ახლა დავუშვათ B-ს ერთი ნაწილი $A+E$-ს ტოლად, ასე რომ, მეორე იქნება $B - A - E$ და მონაკვეთებზე მართკუთხედი იქნება B გამრავლებული $A - Aq + B$, გამრავლებული E-ზე $- 2A$ გამრავლებული $E - Eq$-ზე, რაც მიახლოებით უნდა უდრიდეს B გამრავლებული $A - Aq$-ზე მართკუთხედს.

ერთნაირ წევრებს თუ მოვაცილებთ, მივიღებთ, რომ B გამრავლებული E-ზე მიახლოებით უდრის $2A$-ს გამრავლებულს

$E + Eq$-ზე, და თუ ყველა ამას გავყოფთ E-ზე, მივიღებთ, რომ B მიახლოებით უდრის $2A$-ს. ამრიგად, ამოცანის ამოხსნას წარმოადგენს B-ს შუაზე გაყოფა და ამოხსნის უფრო ზოგადი მეთოდი არც შეიძლება არსებობდეს“.

ფერმას მიერ აქ დასმული ამოცანა ასეთია: მოცემული რიცხვი (ანუ მონაკვეთი) გავყოთ ისეთ ორ ნაწილად, რომ მათ ნამრავლს (ანუ ფართობს) ჰქონდეს უდიდესი მნიშვნელობა. დამტკიცება მოკლედ შეიძლება შემდეგნაირად გადმოვცეთ: აღვნიშნოთ მოცემული რიცხვი a-თი; ერთი მისი ნაწილი x-ით აღვნიშნოთ, მაშინ მეორე იქნება $a - x$; მათი ნამრავლი $y = x(a - x)$; უნდა მოიძებნოს x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვის y მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას. თუ x არის სწორედ ის საძებნი მნიშვნელობა, მაშინ, მივცემთ რა მას მცირე ნამატს Δx, ამით ჩვენ ძალიან ცოტათი შევცვლით y სიდიდეს. ამგვარად, $(x + \Delta x)(a - x + \Delta x)$ თითქმის ტოლია $x(a - x)$-სა. თუ თითქმის ერთისა და იმავე სიდიდის ამ ორ გამოსახულებას ერთმანეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ მიახლოებით განტოლებას

$$x(a - x) = (x + \Delta x)(a - x - \Delta x);$$

ის მიიყვანება $\Delta x(a - 2x - \Delta x) = 0$ სახემდე ანუ, Δx-ზე შეკვეცის შემდეგ,

$$a - 2x - \Delta x = 0.$$

Δx სიდიდე შეიძლება შემცირდეს და კიდეც უნდა შევამციროთ ნულამდე; პირველი წევრი $a - 2x$ მისგან დამოკიდებული არ არის და, მაშასადამე, ისიც ნულის ტოლი უნდა იყოს. მივიღებთ განტოლებას

$$a - 2x = 0,$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ $x = \frac{a}{2}$. უდიდეს ნამრავლს გვაძლევს მოცემული რიცხვის ორი ნაწილი, როდესაც ისინი ერთმანეთის ტოლია; თუ ამ შედეგს გამოვიყენებთ გეომეტრიაში, მოცემული პერიმეტრის ყველა მართკუთხედს შორის კვადრატს უდიდესი ფართობი აქვს.

ამ მეთოდს შემდეგ ფერმა იყენებს პარაბოლისადმი მხების გასავლებად. დასასრულ ამბობს, რომ ეს მეთოდი უტყუარია და მისი საშუალებით მშვენიერი პრობლემების გადაწყვეტა შეიძლება და ამის შესახებ შესაძლებელია კიდევ გიამბოთო „თუ მექნა დას-

ვენება“. აქედან ჩანს, რომ უაღრესად მნიშვნელოვანი პრობლემები დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვისათვის მას მხოლოდ სამსახურიდან თავისუფალ დროს დაუმუშავებია.

7. ბლეზ პასკალი

ბლეზ პასკალი დაიბადა 1623 წელს კლერმონ-ფერანში (საფრანგეთი). მამა — ეტიენი — სპეციალობით იურისტი იყო და მუშაობდა სასამართლოს თავმჯდომარედ. მიუხედავად ამისა, ის მათემატიკითაც იყო დაინტერესებული. მამამ შეამჩნია შვილს განსაკუთრებული ნიჭი მათემატიკაში და დაუწყო ტარება მათემატიკოსთა სხდომებზე. ბ. პასკალი ძალიან ადრე განვითარდა: 16 წლის იყო, როდესაც დაწერა სავსებით ორიგინალური ნაშრომი კონუსური კვეთების შესახებ. ეს ნაშრომი აღიარებული იქნა დეკარტისა და დეზარგის მიერ. 18 წლის ბლეზმა არითმომეტრი გამოიგონა, დაინტერესებული იყო აგრეთვე ფიზიკის საკითხებითაც და ავტორია მეტად მნიშვნელოვანი გამოკვლევების. პასკალი ფერმასთან ერთად მუშაობდა ალბათობათა თეორიის საკითხებზეც. მათემატიკის ამ დარგში კვლევა მაშინ მხოლოდ იწყებოდა. პასკალის ყურადღება ამ დარგისადმი მიაპყრო აზარტულმა მოთამაშემ დე-მერემ.

პასკალის მეცნიერული მოღვაწეობის უაღრესად აღმავლობის პერიოდში მასში მოხდა უეცარი გარდატეხა, რამაც მის მოღვაწეობას მისცა სრულიად საწინააღმდეგო მიმართულება. იგი გახდა უაღრესად მორწმუნე, თავისი წარსული ცხოვრება და მოღვაწეობა დიდ ცოდვად ჩათვალა და სასტიკი ასკეტური ცხოვრება დაიწყო. პასკალი არა თუ სასმელ-საჭმელისაგან და სხვა სიამოვნებისაგან იკავებდა თავს, არამედ თვითწამებასაც მიმართავდა, ხოლო მათემატიკასა და ფიზიკაში კვლევითი მუშაობაც შეწყვიტა, მაგრამ თავის მოწოდებას პასკალმა თავი მაინც ვერ დააღწია და 1658 წელს აღმოაჩინა ციკლოიდის ზოგიერთი თვისება. პასკალის ბიოგრაფიაში, რომელიც მისმა დამ დაწერა, ნათქვამია, რომ ციკლოიდის თვისებების შესახებ აზრები პასკალს ევლინებოდნენ როგორც ნაძალადევი იდეები ღამით, როცა მას არ ეძინებოდათ კბილის ტკივილის გამო. ამით დას უნდოდა ბოდიში მოეხადა ძმის

ნაცვლად იმის გამო, რომ პასკალმა ბოლომდე ვერ შეიკავა თავი და ისევ მათემატიკას დაუბრუნდა.

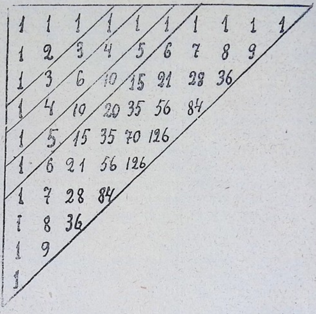
თავის მიერ აღმოჩენილი ციკლოიდის თვისებათა საფუძველზე პასკალმა რამდენიმე ამოცანა შეადგინა და მათი ამოხსნისათვის საჯაროდ ჯილდო დანიშნა. პასუხები წარადგინეს იეზუიტ ლალუფერმა და ვალისმა, მაგრამ ისინი ჯილდოს ღირსნი არ იყვნენ. გამოჩენილი მათემატიკოსების — ჰიუგენსის, სლიუზისა და რენის მიერ წარმოდგენილი პასუხები დასმულ კითხვას არ პასუხობდნენ: ისინი წარმოადგენდნენ ციკლოიდის მათ მიერ აღმოჩენილ სხვა თვისებებს. წარმოდგენილი საკითხებიდან ყველაზე მეტ შთაბეჭდილებას ტოვებდა რენის გამოკვლევა ციკლოიდის გაწრფევების შესახებ.

ამის შემდეგ პასკალმა გამოაქვეყნა „რულეტის ისტორია“ და დაბეჭდა რამდენიმე წერილი, რომლებიც შეიცავდნენ ციკლოიდის თვისებების არა მარტო დამტკიცებებს, არამედ ინტეგრების ზოგად მეთოდსაც. 1662 წელს პასკალი გარდაიცვალა.

პასკალის გარდაცვალების სამი წლის შემდეგ გამოქვეყნდა მისი ნაშრომი: „ტრაქტატი არითმეტიკული სამკუთხედის შესახებ“ („traité du triangle arithmetique“). მასში მოცემულია არითმეტიკული სამკუთხედის გამოყენება შეერთებათა და ალბათობათა თეორიებში.

$(a+b)^n$-ის დაშლის კოეფიციენტები ხარისხის სხვადასხვა მაჩვენებლისათვის პასკალმა დაალაგა სამკუთხედის სახით (ნახ. 19). პირველ ჰორიზონტალურ სტრიქონზე მან ერთიმეორის გვერდით დაწერა რამდენიმე ერთეული, მაგალითად, 10 ერთეული, თითოეული ერთეულის ქვეშ, მეორე სტრიქონში მოათავსა ამ ერთეულისა და მის მარცხნივ დაწერილი ყველა ერთეულის ჯამი და ამგვარად შეადგინა მეორე სტრიქონი. ასეთივე წესით შეადგინა დანარჩენი სტრიქონებიც; მაგალითად, მეორე სტრიქონის ყოველი რიცხვის ქვეშ დაწერა ისეთი რიცხვი, რომელიც ზემოთ დაწერილი მეორე სტრიქონის რიცხვისა და ამ უკანასკნელის მარცხნივ დაწერილი ყველა რიცხვის ჯამია. მაგალითად, მესამე სტრიქონის მეოთხე რიცხვი 10 უდრის. მეორე სტრიქონის პირველი ოთხი რიცხვის — 1, 2, 3, 4 — ჯამს. ამრიგად, $(a+b)^2$-თვის კოეფიციენტებია (1, 2, 1), $(a+b)^3$-თვის — (1, 3, 3, 1), ხოლო (1, 4, 6, 4, 1) არის $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ დაშლის კოეფიცენტები (ეს კოეფიციენტები ხაზგასმულია ნახაზზე).

პასკალი ფერმასთან ერთად ალბათობათა თეორიის ფუძემდებელია. მათემატიკის ეს დარგი წარმოიშვა აზარტული თამაშისაგან, რომელიც მოითხოვდა ალბათობათა გამოთვლას. პასკალს მისმა მეგობარმა, აზარტულმა მოთამაშემ მერემ, დაუსვა შემდეგი ამოცანა: როგორ უნდა განაწილდეს ჩასული თანხა მოთამაშე-



ნახ. 19.

თა შორის, თუკი თამაში, რომელიც რამდენიმე პარტიისაგან შედგება, დაუმთავრებელი დარჩა? ამ ამოცანის ამოხსნამ პასკალი მიიყვანა ალბათობათა თეორიის ძირითადი დებულების შექმნამდე.

პასკალის სამკუთხედში მოცემული კოეფიციენტებით სარგებლობდნენ კამათლებით თამაშის დროს მათი სხვადასხვანაირად დაჯდომათა რიცხვის განსასაზღვრავად. როდესაც ერთი კამათელია გაგორებული, მაშინ მისი დაჯდომის სხვადასხვა შემთხვევის რიცხვი 6-ის ტოლია, თუ ორია გაგორებული — $6+5+4+3+2+1 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$. ეს რიცხვი (21, პასკალის სამკუთხედისა) გვიჩ-

ვენებს, თუ რამდენ ყველა სხვადასხვა დაჯდომას შეიძლება ჰქონდეს ადგილი, როდესაც ერთდროულად გაგორებულია ორი კამათელი; მათ შორის ორივე კამათლის ექვს-ექვსი დაჯდომა შეიძლება იყოს ერთი და იმავე რიცხვით (ორივეზე იაქე ან ორივეზე დუ, ან ორივეზე სე და ასე შემდეგ), ესე იგი 1 და 1, 2 და 2 და ასე შემდეგ 6 და 6. ალბათობის მათემატიკურ საზომად აღებული იყო მოსალოდნელი მოვლენის ყველა ხელშემწყობი შემთხვევის რიცხვის შეფარდება ყველა შესაძლო შემთხვევის რიცხვთან. განხილულ მაგალითში ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვია 6 და ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი—21. ალბათობა იმისა, რომ კამათლების გაგორებისთანავე რიცხვები თანატოლად დაჯდება, ტოლია $\frac{6}{21}$.

1658 წელს პასკალმა მიიღო ფსევდონიმი „ამოსი დეტონვილი“ და 1659 წელს გამოსცა „ა. დეტონვილის წერილები ზოგიერთი გეომეტრიული აღმოჩენის შესახებ“. ნაშრომში მოცემულია გამოკვლევები ინტეგრების დარგში. პასკალს მიზნად ჰქონდა მოეძებნა საჭირო საშუალებები სხვადასხვა კვადრატურისა, კუბატურისა და სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრისა, რომელშიც დაკავშირებულია ციკლოიდასთან და ამ უკანასკნელის ბრუნვით მიღებულ ბრუნვის სხეულებთან. მიღებული შედეგები არსებით მიღწევას წარმოადგენს თვით ინტეგრების მეთოდში.

პასკალის ამ ნაშრომში ჩვენ ვპოულობთ ინტეგრალის გამოსახვის უფრო ზუსტ ხერხს, ვიდრე მის წინამორბედთა შრომებში. მრუდის უსასრულოდ დიდი რაოდენობის ორდინატთა ჯამში პასკალი გულისხმობს ფართობთა ჯამს იმ მართკუთხედებისას, რომლებიც შექმნილია ორდინატებისა და ამ ორდინატებით აბსცისთა ღერძზე მოკვეთილი უსასრულოდ მცირე ტოლი მონაკვეთების მიერ, რასაც ჩვენ ახლა $\int ydx$-ით აღვნიშნავთ. მრუდის ორდინატს პასკალი ამ მრუდის სინუსს უწოდებს. უსასრულოდ დიდი რაოდენობის ასეთი სინუსების ჯამში ის გულისხმობს ნამრავლს ორდინატებისა, რომლებიც აბსცისთა ღერძიდან მოჭკვეთენ ერთმანეთის ტოლ უსასრულოდ მცირე რკალებს, და რკალების ნამრავლს, რასაც ახლა ასე ჩავწერთ: $\int yds$; თუ რკალი არის ერთეულრადიუსიანი წრის რკალი, მაშინ $y = \sin\alpha$; $ds = Rd\alpha$; $ds = d\alpha$ და იქნება $\int \sin\alpha \, d\alpha$.

ინტეგრალების გამოთვლისადმი და მათი ზოგიერთი თვისე-ბის დადგენისათვის პასკალმა გამოიყენა არითმეტიკული ხერხები.

მაგალითად, $\sum\limits_{1}^{n} y_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ ჯამებიდან, სადაც $y_1, y_2, \cdots, y$-ის მნიშვნელობებია, რომლებიც x არგუმენტის $x_1, x_2, \cdots$ მნიშვნელობებს შეესაბამება, შეადგინა სამკუთხოვანი ჯამი

$$\sum_{1}^{n} y_k + \sum_{2}^{n} y_k + \cdots + \sum_{n-1}^{n} y_k + y_n,$$

რომელიც, ცხადია, უდრის:

$$\sum_{1}^{n} k y_k.$$

მაგალითად,

$$\sum_{1}^{5} y_k + \sum_{2}^{5} y_k + \sum_{3}^{5} y_k + \sum_{4}^{5} y_k + \sum y_k =$$

$$= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 +$$

$$+ y_3 + y_4 + y_5 + y_4 + y_5 + y_5 =$$

$$= y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 = \sum_{1}^{5} k y_k.$$

ასეთი სამკუთხოვანი ჯამების ჯამს:

$$\sum_{1}^{n} k y_k + \sum^{n} (k-1) y_k + \cdots + \sum_{n-1}^{n} (k - n + 2) y_k + y_n$$

პასკალი უწოდებს „პირამიდალურ ჯამს“, რომელიც, ცხადია, უდრის:

$$\sum_{1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} y_k.$$

მაგალითად,

$$\sum_1^5 ky_k + \sum_2^5 (k-1)y_k + \sum_3^5 (k-2)y_k +$$

$$+ \sum^5 (k-3)y_k + \sum_5^5 (k-y)y_k =$$

$$= (y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5) + (y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5) +$$

$$+ (y_3 + 2y_4 + 3y_5) + (y_4 + 2y_5 + y_5) =$$

$$= y_3 + 3y_2 + by_3 + 10y_4 + 15y_5 = \sum_1^5 \frac{k(k+1)}{2} y_k.$$

ამგვარად შეადგინა მან ყოველი ახალი ჯამი და ამასთანავე გაამრავლა თითოეული ეს ჯამი არგუმენტის მიმდევრობით მნიშვნელობათა შორის მუდმივ სხვაობაზე და განიხილა არგუმენტის მნიშვნელობათა უსასრულოდ დიდი რიცხვი ისე, რომ $x_1 = 0$ და $x_n = a$. ამრიგად, სამკუთხოვანი ჯამებისაგან პასკალმა მიიღო $\int xydx$ სახის ინტეგრალი და გარკვეცებული პირამიდალური ჯამებისაგან კი — $\int x^2ydx$ სახის ინტეგრალი.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა დიფერენციალური აღრიცხვის შექმნაში პასკალის უსასრულოდ მცირე სამკუთხედმა, რომელსაც შემდეგში ლაიბნიცმა დამახასიათებელი სამკუთხედი უწოდა. ასეთ სამკუთხედს პასკალი ხმარობს მისი ზემოხსენებული ნაშრომის ერთ-ერთ მეტად საინტერესო თავში, რომელიც მიძღვნილია ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ინტეგრებისადმი. პასკალმა აიღო წრის მეოთხედი და წრეწირის ნებისმიერ D წერტილში გაავლო მხები, რომელზედაც აიღო E წერტილები (ნახ. 20) და მათზე გაავლო AC რადიუსისადმი მართობები ER; აგრეთვე D წერტილიდან გაავლო DAC კუთხის სინუსის წირი DI. ის ამტკიცებს, რომ DI სინუსის წირზე და EE მხებზე აგებული მართკუთხედი ტოლდიდია RR მონაკვეთსა და AB რადიუსზე აგებული მართკუთხედისა. ამისათვის ის სარგებლობს EKE და AID სამკუთხედების მსგავსებით, საიდანაც გამოჰყავს, რომ:

$$\frac{AD}{DI} = \frac{EE}{EK},$$

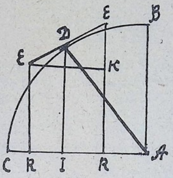
ანუ

$$\frac{AD}{DI} = \frac{EE}{RR},$$

საიდანაც

$$AD \times RR = DI \times EE.$$

პასკალი აქვე განიხილავს იმ შემთხვევას, როდესაც RR და EE, რომლებსაც შესაძლოა ჰქონდეთ ნებისმიერი სიდიდე, უსასრულოდ მცირე ხდებიან, რის გამო EEK სამკუთხედიც უსასრულოდ მცირე გახდება. ამ უსასრულოდ მცირე EEK სამკუთხედზე, რომელსაც დამახასიათებელ სამკუთხედს უწოდებენ, ლაიბნიცმა შემდეგში ააგო თავისი დიფერენციალური აღრიცხვა.



ნახ. 20.

ამის შემდეგ პასკალი ამტკიცებს თეორემას: სინუსების წირებისა და შესაბამისი მცირე რკალების ნამრავლების ჯამი უდრის განაპირა სინუსების წირებს შორის მოთავსებული ღერძის (რადიუსის) მონაკვეთისა და რადიუსის ნამრავლს. ვინაიდან თითოეული

$$DI \times EE = AB \times RR$$

(ნახ. 21), ამიტომ მართკუთხედები, რომელთა ფართობები $DI \times EE$ ტოლია, სადაც EE ყველა მართკუთხედისათვის ერთი და იგივე სიდიდისაა, ყველა ერთად აღებული (ანუ მათი ჯამი) ტოლია $AB \times RR$ სიდიდეთა ჯამისა (ანუ ყველა ერთად აღებულისა). ვინაიდან $EE = DD$ და RR მანძილების ჯამი უდრის AO, ამიტომ სინუსების წირებისა და შესაბამისი მცირე რკალების ნამრავლების ჯამი უდრის $AO \times AB$ ანუ

$$DI \times EE = AB \times RR.$$

თუ პასკალის მსჯელობას ჩვენს ენაზე გადმოვიყვანთ, ესე იგი შემოვიყვანთ კოორდინატებსა და დიფერენციალური აღრიცხვის აღნიშვნებს, მივიღებთ

$$yds = rdx.$$

რადგან პასკალის ეს თეორემა ინტეგრებას გამოსახავს, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_0^s y\,ds = r\int_0^x dx.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\angle BAD=\alpha$, გვექნება

$$y = r\cos\alpha;\quad s = r\alpha,\quad x = r\sin\alpha,$$

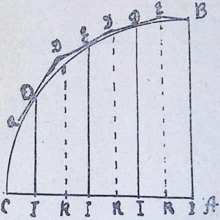
და, მაშასადამე,

$$\int_0^\alpha r\cos\alpha\, d(r\alpha) = r\int_0^\alpha d(r\sin\alpha)$$

ანუ

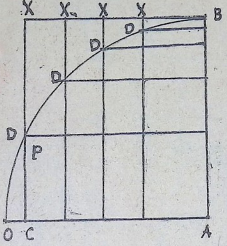
$$\int_0^\alpha \cos\alpha\, d\alpha = \int_0^\alpha d(\sin\alpha) = \sin\alpha.$$

ამის შემდეგ პასკალი გადმოსცემს ამ თეორემის შედეგს: „DX სინუსვერზუსების ჯამი უდრის იმას, რითაც BP რკალი ჭარბობს AO წრფეს AB-ზე გამრავლებულს“ (ნახ. 22). დამტკიცებას პასკალი იწყებს ასეთი განმარტებით: „მართლაც, სინუსვერზუსები არიან ისეთი მონაკვეთები, რომლითაც რადიუსი ჭარბობს პირდაპირ სინუსებს“, ესე იგი, პასკალის განმარტებით, სინუსვერზუსია რადიუსისა და სინუსის წირს შორის სხვაობა. ეს საკითხი განმარტებას საჭიროებს, ვინაიდან სინუსვერზუს არის არა რადიუსსა და სინუსის წირს შორის სხვაობა ანუ 1 — sin, არამედ რადიუსსა და კოსინუსის წირს შორის სხვაობა ანუ 1 — cos. როდესაც პასკალი წერს „სინუსი“, მას



ნახ. 21.

მხედველობაში აქვს სინუსის წირი, ვინაიდან XIX საუკუნემდე განიხილებოდა მხოლოდ ტრიგონომეტრიული წირები და არა მათი შეფარდებები რადიუსთან. სინუსვერზუსი იხმარებოდა თითქმის XIX საუკუნის დამლევამდე; სხვა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან ერთად სინუსვერზუსი ევროპელებმა არაბებისაგან გადაიღეს; არაბები მას „საჰმ“-ს (ქართულად „ისარი“) უწოდებდნენ და როგორც არაბები, ისე სხვა მუსულმანი მათემატიკოსები — შუააზიელები და ირანელები — შემდეგნაირად განსაზღვრავდნენ მას: „რკალის შუაწერტილიდან ქორდის შუაწერტილამდე დაშვებული მართობი იმ რკალის ნახევრის ისარია“ (ამუდი ქა აზ მუნთასაფ ყოუს ბერ მუნთასაფ ვათარ აიედ საჰმ ნესფ ან ყოუს ბაშედ).

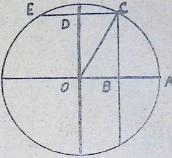


ნახ. 22

სინუსვერზუსის განსაზღვრას ჩვენ ვპოულობთ აგრეთვე XVII საუკუნის ქართულ ასტრონომიულ ხელნაწერში: „ბოძთადარი მშვილდის საბელსა და მშვილდის შუა რომ მოვა, იმ მშვილდის ნახევრის ისარი არის“ (ბოძთადარი — მართობი, მშვილდი — რკალი, მშვილდის საბელი — ქორდა).

ამ განსაზღვრებიდან აშკარაა, რომ სინუსვერზუსი არის არა რადიუსსა და სინუსის წირს შორის სხვაობა, არამედ რადიუსსა და კოსინუსის წირს შორის სხვაობა; AB არის AC რკალის „ისარი“ (ნახ. 23) (სინუსვერზუსი), ე. ი. რადიუსსა და AC რკალის კოსინუსის წირის OB შორის სხვაობა, ხოლო DE — შევსებითი CE რკალის ისარი (სინუსვერზუსი) ანუ რადიუსსა და შევსებითი CE რკალის — კოსინუსის წირის OD შორის სხვაობა. რომ ევროპელებმა არაბულ „საჰმ“-ს ანუ ისარს უწოდეს „სინუსვერზუსი“ (sinusversus) ანუ „შექცეული სინუსი“

და არა შექცეული კოსინუსი, ეს იმით აიხსნება, რომ მაშინ სახელწოდება „კოსინუსი" არ იყო შემოღებული და მის ნაცვლად ხმარობდნენ „შევსებითი რკალის სინუსს", ამითვე აიხსნება ის, რომ პასკალი სინუსვერზუსს განსაზღვრავს როგორც რადიუსსა და სინუსის წირს შორის სხვაობას.



ნახ. 23.

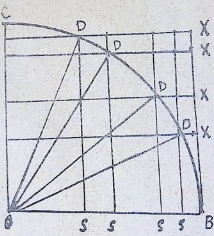
პასკალის მიერ მოცემული ზემოთ ხსენებული შედეგის დამტკიცება (ნახ. 24) გადავიყვანოთ თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე.

$\angle PAB = \alpha$; რადიუსი $= r$;

ყოველი კოსინუსის წირი $AS = r\cos\alpha$; ყოველი სინუსვერზუსი

$$DX = r\cos\alpha.$$

მაშინ ყველა სინუსვერზუსის ჯამი გამოისახება შემდეგი ტოლობით



ნახ. 24.

$$\int_0^\alpha (r - r\cos\alpha)\,d(r\alpha) = r(r\alpha - r\sin\alpha)$$

ანუ

$$r^2\int_0^\alpha (1 - \cos\alpha)\,d\alpha = r^2(\alpha - \sin\alpha).$$

აქედან

$$\int_0^\alpha (1 - \cos\alpha)\,d\alpha = \alpha - \sin\alpha.$$

პასკალის სახელს ატარებს ახლაც მისი შემდეგი თეორემა: „მეორე რიგის მრუდში ჩახაზულ ყოველ ექვსკუთხედში მოპირდაპირე გვერდების გადაკვეთის სამი წერტილი მდებარეობს ერთ წრფეზე".

§ 8. ქრისტიან ჰიუგენსი

ქრისტიან ჰიუგენსი დაიბადა 1629 წელს ქ. ჰააგაში და აქვე გარდაიცვალა 1695 წელს. მამა — კონსტანტინე — განათლებით იურისტი, მუშაობდა დიპლომატად; იგი აგრეთვე პოეტიც იყო და მათემატიკური განათლებაც ჰქონდა. თავის შვილს, ქრისტიან ჰიუგენს, მან ადრე მიაღებინა კარგი განათლება. 16 წლის ჰიუგენსი შევიდა ლაიდენის უნივერსიტეტის იურიდიულ ფაკულტეტზე, მაგრამ იურიდიულ მეცნიერებაზე მეტად დაინტერესდა მათემატიკითა და ფიზიკით, რის გამო იგი თავისი მეგობრისა და მასწავლებლის მათემატიკოს სკოუტენის საშუალებით დეკარტს დაუკავშირდა.

უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ ჰიუგენსი ჰააგაში დაბრუნდა; იქ გულმოდგინედ დაიწყო მეცნიერული გამოკვლევების წარმოება და ბრწყინვალე შედეგები მიიღო ფიზიკასა და მათემატიკაში. მისი ნაშრომი „აზარტულ თამაშში გამოთვლების შესახებ“ საფუძვლად დაედო ალბათობათა თეორიას. ჰიუგენსმა მიიღო მრავალი მნიშვნელოვანი შედეგი, რომელიც ახლა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვას ეკუთვნის და რომელსაც მან მიაღწია ძველი ბერძნების გეომეტრიაში არსებული ხერხების უაღრესად კოხტად გამოყენებით. ჰიუგენსმა გამოიგონა ქანქარიანი საათი, რომლის თეორია გადმოგვცა თავის მთავარ მათემატიკურ ნაშრომში: „ქანქარიანი საათის შესახებ“, რომელიც გამოვიდა 1673 წელს. ამ ნაშრომში მოცემულია აგრეთვე მათემატიკური გამოკვლევა დრეკადი სხეულების დარტყმის, ქანქარის სიგრძის, ციკლოიდის დაცემისა და ევოლუტების შესახებ.

1663 წელს ჰიუგენსი გახდა ინგლისის ეგრეთ წოდებული „სამეფო საზოგადოების“ წევრი, ხოლო 1666 წელს ის მიიწვიეს საფრანგეთის მეცნიერებათა აკადემიის პირველ თავმჯდომარედ, რის გამო პარიზში გადასახლდა და იქ მოღვაწეობდა 1681 წლამდე. 1681 წელს ჰიუგენსი სამშობლოში დაბრუნდა ჯანმრთელობის გამოკეთების მიზნით; შემდეგში იგი ისევ პარიზში დაბრუნებას აპირებდა, მაგრამ, სანამ დაბრუნდებოდა, გარდაიცვალა. მისი მოწაფე იყო ახალგაზრდა რუსი მეცნიერი პაპინი, რომელიც შემდეგ გახდა ორთქლის მანქანის ერთ-ერთი გამომგონებელი.

ქ. ჰიუგენსი ნაშრომში—„ქანქარიანი საათის შესახებ“—სვამს შემდეგ ამოცანას: მოვძებნოთ მათემატიკური ქანქარის სიგრძე, რომელსაც ქანაობის იგივე პერიოდი აქვს, რაც მოცემულ ფიზიკურ ქანქარს, ანუ მოვძებნოთ იმ ფიზიკური ქანქარის სიგრძე, რომე-

ლიც ქანაობს ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო სიმძიმის ძალის მოქმედებით. ჰიუგენსი გამოდის იმ პრინციპიდან, რომ თუ იმ მომენტში, როდესაც ქანქარის სიმძიმის ცენტრი აღწევს უმდაბლეს მდგომარეობას, ფიზიკური ქანქარის ცალკეული ნაწილები უცბად გათავისუფლდება მათი ბმებისაგან, და ყველა განაგრძობს ქანაობას იმავე ღერძის გარშემო იმ სიჩქარით, რომელიც მას ჰქონდა ამ მომენტში, მაშინ სიმძიმის საერთო ცენტრი მიაღწევდა იმავე სიმაღლეს, რა სიმაღლიდანაც ის დაეცა საერთო მოძრაობის დროს. თუ კუთხურ სიჩქარეს აღვნიშნავთ ω-თი იმ მომენტში, როდესაც საქანი გადის თავის წონასწორობის მდგომარეობას, მაშინ m ნაწილაკს, რომელიც ღერძიდან იმყოფება r მანძილზე, ამ მომენტში აქვს ωr სიჩქარე და, თუ შემდეგშიც იმოძრავებს ამავე სიჩქარით, შეუძლია მიაღწიოს $\dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$ სიმაღლეს იმ მდგომარეობასთან შედარებით, რომელიც მას ამ მომენტში უჭირავს.

ამრიგად, თუ ყველა ნაწილაკი იმოძრავებს ღერძის გარშემო ერთიმეორესთან დამოუკიდებლად, სიმძიმის ცენტრი აიწევა სიმაღლეზე

$$\frac{\sum \dfrac{\omega^2 m r^2}{2g}}{\sum m},$$

სადაც m-ით აღნიშნულია ცალკე ნაწილაკების მასა. ეს სიმაღლე ტოლი უნდა იყოს იმ სიმაღლისა, რომლიდანაც დაეცა სიმძიმის ცენტრი ქანქარის საერთო მოძრაობის დროს, ე. ი. უნდა იყოს ტოლი $(1 - \cos\alpha).a$, სადაც α არის კუთხე, შექმნილი ღერძზე და სიმძიმის ცენტრის საწყის მდგომარეობაზე გამავალი სიბრტყის მიერ ვერტიკალურ სიბრტყესთან, რომელიც ღერძზე გაივლის, ხოლო a არის მანძილი ღერძსა და სიმძიმის ცენტრს შორის. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს

$$(1 - \cos\alpha)a \sum m = \frac{\omega^2}{2g} \sum m r^2.$$

l სიგრძიანი შესაბამი მათემატიკური ქანქარისათვის უნდა გვქონდეს

$$1 - \cos\alpha = \frac{\omega^2}{2g} l;$$

აქედან

$$l = \frac{\sum m r^2}{a \sum m}.$$

თუ ყველა ნაწილაკი ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარეობს და ეს სიბრტყე ღერძზე გაივლის, მაშინ ეს გამოსახვა შეიძლება ასე დაიწეროს: $l = \frac{\sum mr^2}{\sum mr}$. ამ გამოკვლევით ჰიუგენსმა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ახალი ამოცანა დასვა, სახელდობრ $\sum mr^2$-ის (ანუ, რასაც შემდეგში ინერციის მომენტი უწოდეს) სიდიდის განსაზღვრა, რომელსაც ახლა ჩვენ $\int r^2 dm$-ით აღვნიშნავთ (dm — მასის უსასრულოდ მცირე ნაწილაკია და r მისი მანძილია ღერძამდე). ჰიუგენსი განსაზღვრავს ამ სიდიდის შეფარდებას მასასთან, ესე იგი განსაზღვრავს სიდიდეს

$$\int \frac{r^2 dm}{dm}.$$

ამ სიდიდის გამოსათვლელად ის გვაძლევს ზოგად წესებს იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ქანქარა წარმოადგენს ერთგვაროვან ბრტყელ ნაკვთს, რომელიც ბრუნავს სიბრტყეში მდებარე წრფის გარშემო.

ჰიუგენსი ჯაჭვწილადების თეორიის შემქმნელია.

9. ჯონ ვალისი

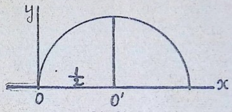
ჯონ ვალისი დაიბადა 1616 წელს ქენტში (ინგლისი) და გარდაიცვალა 1703 წელს. მამა მღვდელი იყო და შვილსაც სასულიერო განათლება მიაღებინა; ჯონმაც სამოღვაწეოდ პირველად მღვდლობა აირჩია. მართალია, ვალისს კლასიკური განათლება კარგი ჰქონდა, მაგრამ არითმეტიკას იგი შემთხვევით გაეცნო და მუშაობდა დასვენების დროს პირადი სიამოვნებისათვის. ვალისს რიცხვების დამახსოვრების არაჩვეულებრივი უნარი ჰქონდა. ერთ უძილო ღამეს მან აზრით გამოთვალა 53-ნიშნიანი რიცხვიდან კვადრატული ფესვის 27 ციფრი და დილით გაიმეორა. ვალისი მათემატიკაში ეწეოდა თვითგანვითარებას და კითხულობდა მათემატიკურ ნაშრომებს, რომლებსაც ის შემთხვევით წააწყდებოდა ხოლმე. პირველად გაეცნო კავალიერის უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საკითხებს, შემდეგ კი დეკარტის „გეომეტრიას", ხოლო ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსების ნაშრომებს გაეცნო უფრო გვიან. რამდენიმე წლის შემდეგ მან მღვდლობას თავი დაანება და კემბრიჯში მოეწყო უმცროს მასწავლებლად; მალე მან ამ თანამდებობაზეც უარი თქვა, დაქორწინდა და რამდენიმე ხანი ცხოვრობდა ლონდონში საკუთარი სახსრებით. აქ ვალისი მეცნიერთა წრეში მოექცა და განაგრძო მათემატიკაში

მუშაობა. მონაწილეობას იღებდა პოლიტიკურ ცხოვრებაშიც, თუმცა პოლიტიკაში მას უპრინციპობა ახასიათებდა: რევოლუციონერებთანაც კარგად იყო და რეაქციონერებთანაც. 1649 წელს ვალისი პროფესორი გახდა და ოქსფორდში მიიღო გეომეტრიის კათედრა. ამ თანამდებობასთან ერთად მან მიიღო მეფის სასახლის მღვდლის თანამდებობაც. ვალისი აგრეთვე გამოჩენილი ლინგვისტიც იყო.

ვალისის მთავარი ნაშრომი: „უსასრულო სიდიდეთა არითმეტიკა“ გამოქვეყნდა 1665 წელს. იმ გამოსახვის გამოთვლა, რომელსაც ჩვენ ახლა ვწერთ $\dfrac{\int\limits_0^x x^n dx}{x^{n+1}}$ სახით, ვალისს მოჰყავს

$$\lim \frac{0^n + 1^n + 2^n + \cdots + n^n}{m^n + m^n + \cdots + m^n}$$

გამოთვლამდე, როდესაც m უსაზღვროდ იზრდება და იმავე დროს მნიშვნელის წევრთა რიცხვზე ყოველთვის 1-ით ნაკლები რჩება. $n = 2$ და $n = 3$ მნიშვნელობებისათვის ვალისი თანდათანობით იღებს m-ის მეტ და მეტ მნიშვნელობებს და ინდუქციური ხერხით გვიჩვენებს, რომ წილადი უდრის $\dfrac{1}{n+1}$-ს მიმატებული ის სიდიდე, რომელიც m-ის გადიდებით ყოველ მოცემულ სიდიდეზე ნაკლები ხდება.



ნახ. 25.

ეს შედეგი მან გაავრცელა n-ის წილად და უარყოფით მნიშვნელობებზე და ჩაატარა ისე, რომ წილადი და უარყოფითი მაჩვენებლების აღნიშვნები არ გამოუყენებია.

შესანიშნავია ვალისის π-ის გამოთვლის მეთოდი. ეს საკითხი მას მიჰყავს $\int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$-ის გამოთვლისაკენ, ესე იგი ისეთი

ინტეგრალისა, რომელიც ერთის ტოლი დიამეტრით ნახევარი წრის ფართობს წარმოადგენს და ამის გამო $\frac{\pi}{8}$-ს უდრის:

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

ვალისმა ამას საფუძვლად დაუდვა ის რომ, როცა $y=x^n$, მაშინ

$$1)\quad \int_0^x ydx = \int_0^x x^n dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} = \frac{1}{n+1}\,xy,$$

$$2)\quad \int_0^y xdy = \int_0^y y^{1/n}\,dy = \frac{n}{n+1}\,y^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}\,xy.$$

ეს ორი ინტეგრალი წარმოადგენს ორ ფართობს, რომლებზედაც პარაბოლა $y=x^n$ გაჰყოფს xy მართკუთხედს. მეორე ფართობს მივიღებთ, თუ xy-ს გამოვაკლებთ პირველს.

ვალისი იწყებს იქედან, რომ კოეფიციენტებს ალაგებს xy-თან ინტეგრალებში $\int ydx$ (სადაც $y=x^{p/q}$) ტაბულის სახით, რომლის სვეტები შეესაბამება p მაჩვენებლის მნიშვნელობებს 0, 1, 2, 3,..., ხოლო სტრიქონები q-ს მნიშვნელობებს 1, 2, 3, ...

ტაბულა ასე იწყება

	0	1	2	3	$4\cdots p\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	
3 :	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$		
q :	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$			
	$\frac{5}{5}$				

$\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$ გამოთვლას ვალისი იწყებს $\int\limits_0^1 (x-x^2)dx$-ის გამოთვლიდან, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია. ვალისი პოულობს:

$$\int\limits_0^1 (x-x^2)^0\,dx = 1,$$

$$\int\limits_0^1 (x-x^2)^1\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3},$$

$$\int\limits_0^1 (x-x^2)^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} =$$

$$= \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5},$$

$$\int\limits_0^1 (x-x^2)^3 dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} =$$

$$= \frac{1}{140} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5}\cdot\frac{9}{6\cdot 7}$$

და ასე შემდეგ; ვალისი, მისთვის ჩვეული ინდუქციის საშუალებით, დაასკვნის, რომ საზოგადოდ, როდესაც n მთელი დადებითი რიცხვია,

$$\int\limits_0^1 (x-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

$\int\limits_0^1 (x-x^2)^{1/2}\,dx$ მნიშვნელობის ანუ $\frac{\pi}{8}$-ის განსაზღვრისათვის იგი ეძებს მთელი დადებითი n-თვის ცნობილ $\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{n^2}{(2n)!}$ სიდიდეებიდან ინტერპოლირებულ მნიშვნელობას, როდესაც $n=\frac{1}{2}$,

ე. ი.

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\,!\right)^2}{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)!}=\frac{\pi}{8}$$

ანუ

$$\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}\,!\right)^2}=\frac{4}{\pi}.$$

აღნიშვნა π მათემატიკაში შემოიყვანა უფრო გვიან ეილერმა და ამიტომ ვალისი $\frac{4}{\pi}$ სიდიდეს აღნიშნავს ნაკვთით $\square$. სიდიდეები $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, რომელთა შორის უნდა მოხდეს ინტერპოლირება, ბინომიალური კოეფიციენტებია, სახელდობრ შუა წევრის კოეფიციენტები, როდესაც მაჩვენებელი $2n$-ის ტოლია. ყველა ბინომიალური კოეფიციენტი ანუ რიცხვი, რომლებსაც ახლა ჩავწერთ $\frac{(p+q)!}{p!\,q!}$ სახით და რომლებსაც ვალისი ინტერპოლაციისათვის იყენებს, ძირითადად მოცემულია პასკალის ტაბულაში (არითმეტიკული სამკუთხედის შესახებ ნაშრომში). ამ ტაბულებს ვალისი აფართოებს, სვამს რა p და q-ს მთელ დადებითმნიშვნელობებიან სტრიქონებსა და სვეტებში კიდევ ახალ სტრიქონებს და სვეტებს, რომლებიც შეესაბამებიან მნიშვნელობებს $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$,... და აფართოებს მათ შექცეული მხრითაც, უმატებს რა სტრიქონს $p=-\frac{1}{2}$ და სვეტს $q=-\frac{1}{2}$. გაფართოებული ტაბულის ახალი რუბრიკები თანდათან ივსება რიცხვებით, რომლებსაც ვალისი ადგენს საწყის ტაბულაში მოცემული კანონის განზოგადებით.

ვინაიდან p და q-ს მთელი და დადებითი მნიშვნელობებისათვის

$$\frac{(p+q)!}{p!\,q!}=\frac{(p+q)(p+q-1)}{q(q-1)\ldots 2\cdot 1},$$

ამიტომ აქ გვაქვს ის კანონი, რომელიც გამოიყენება იმ შემთხვევებში, რომლებშიც p და q რიცხვებიდან მთელია მხოლოდ ერთი. ასე მაგალითად, სტრიქონს, რომელიც $p=\frac{1}{2}$ შეესაბამება მნიშვნელობებს

$$q = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\dots$$

შეესაბამება რიცხვები:

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4},\quad \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6},\quad \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8},\dots$$

აქ გამოყენებული ხერხიდან აშკარაა, რომ

$$\frac{(p+q+1)!}{p!\,(q+1)!} = \frac{p+q+1}{q+1}\cdot\frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

ეს შედეგი სამართლიანია ტაბულის არა მარტო სტრიქონებისათვის, რომლებიც შეესაბამებიან p-ს სრულად შედგენილ მთელ მნიშვნელობებს, არამედ უკვე შედგენილი სტრიქონის ნაწილისათვის, რომელიც $p=\frac{1}{2}$ შეესაბამება. ვალისმა ის გაავრცელა აგრეთვე იმ სტრიქონის წევრებზეც, რომლებიც შეესაბამებიან q-ს წილად მნიშვნელობებს, რადგან $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ გვაძლევენ მოსაძებნ სიდიდეს $\frac{4}{\pi}$, ამიტომ სიდიდეებისათვის

$$q = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\dots$$

მივიღებთ სიდიდეებს

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi},\quad \frac{4}{\pi},\quad \frac{4}{3}\,\frac{4}{\pi},\quad \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\,\frac{4}{\pi},\quad \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{4}{\pi},\dots$$

ამ წევრებს დაკავებული აქვთ $p=\frac{1}{2}$ შესაბამ სტრიქონში იმ წევრების ადგილი, რომლებიც შეესაბამებიან q-ს მთელ მნიშვნელობებს.

ამის შემდეგ ვალისი სარგებლობს იმით, რომ ორ მომდევნო წევრს შორის შეფარდება კლებულობს და მიისწრაფვის 1-კენ. ამას ადგილი აქვს $p=\frac{1}{2}$ შესაბამი სტრიქონის ორივე მწკრივში, ვინაიდან ყოველი წევრი შედგება წინამორბედის-

გან $\dfrac{n+1}{n}$ სახის რიცხვზე გამრავლებით. თუ x, y, z, u ამ სტრიქონის ოთხი თანმიმდევრული წევრია, მაშინ

$$\frac{y}{x} > \frac{z}{y} > \frac{u}{z},$$

საიდანაც

$$\sqrt{\frac{z}{x}} > \frac{z}{y} > \sqrt{\frac{u}{y}}.$$

თუ აქ x, y, z, u სიდიდეებად ჩავთვალეთ წევრები, რომლებიც შეესაბამებიან $q=\dfrac{5}{2}$, 3, $\dfrac{7}{2}$, 4, მივიღებთ

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{8}{7}} > \frac{4}{\pi} > \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{9}{8}}.$$

თუ სტრიქონზე სვლას განვაგრძობთ, მაშინ კვადრატული ფესვი ორივე გამოსახვაში, რომელთა შორის იმყოფება $\dfrac{4}{\pi}$, მიისწრაფვის 1-კენ და მივიღებთ

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\ldots}.$$

თავისი „არითმეტიკული“ მეთოდი ვალისმა გამოიყენა ცისოიდითა და მისი ასიმპტოტით შემოსაზღვრული ფართობის გამოსათვლელად. ეს ამოცანა მოითხოვს $\int\limits_0^1 \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\,dx$ ინტეგრალის გამოთვლას. ვალისი იწყებს გამოთვლას უფრო ადვილი ინტეგრალისას $\int\limits_0^1 \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,dx$ (ახლა ამ ინტეგრალს ადვილად ვხსნით რაციონალიზაციის ხერხით:

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = z; \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx =$$

$$= \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} - \sqrt{x-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\Big),$$

ამისათვის ვალისმა ჯერ გამოთვალა $\int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)^n\, dx$, როდესაც $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, და შედეგების არითმეტიკული გარდაქმნე-ბისა და მისი ინდუქციის საშუალებით იპოვა, რომ

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{2n+3}{2n} \int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)^n\, dx.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით, როდესაც $p = \frac{1}{2}$, ვალისმა მიიღო

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

შემდეგ მან გამოთვალა $\int_0^1 \sqrt{x^3}\,(1-x)^n\, dx$, როდესაც $n = 0, 1, 2, 3, 4$, და ამ ინტეგრალის მნიშვნელობებისაგან ჩვეულებ-რივი ინდუქციის საშუალებით მიიღო, რომ

$$\int_0^1 \sqrt{x^3}\,(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{2n+5}{2n} \int_0^1 \sqrt{x^3}\,(1-x)^n\, dx.$$

ეს კი, როდესაც $n = \frac{1}{2}$, გვაძლევს

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\, dx = \frac{3}{8}\pi,$$

ესე იგი საძიებელი ფართობი სამჯერ მეტია იმ წრის ფართობზე, რომელიც აღებულია ცისოიდის აგების დროს (ახლანდელი ხერხით ეს ინტეგრალი ასე ამოიხსნება:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{x\cdot x^{1/2}}{\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{1/2}(x-1+1)}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{1/2}dx}{\sqrt{1-x}} - \int_0^1 x^{1/2}\sqrt{1-x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx - \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi \Big).$$

ვალისი დამტკიცებებში სათანადო სიმკაცრეს არ იცავდა, მაგრამ თავისი მეთოდით მაინც ბევრი რამ გააკეთა. ინტეგრების დარგში რეკურენტული ფორმულები მან მიიღო ინდუქციისა და ანალოგიის მიხედვით დასკვნების საშუალებით.

მათემატიკის შემდგომი განვითარებისათვის ვალისის ნაშრომებს დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა. XVIII საუკუნის მათემატიკას ძლიერად ემჩნევა ვალისის გავლენა, რაც გამოიხატება იმაში, რომ XVIII საუკუნის მათემატიკოსებს დასკვნები გამოჰყავთ ვალისის არასარწმუნო ხერხების მიბაძვით. მისი განზოგადებანი მათემატიკურ სიმბოლიკას შემდგომი განვითარების გზას უჩვენებდნენ. ვალისმა სავსებით მოამზადა ნიადაგი ხარისხის ცნების გაფართოებისათვის, რომელიც შემდეგ ნიუტონმა გააკეთა, შემოიყვანა რა წილადი და უარყოფითი მაჩვენებლები. ნიუტონის მიერ შესრულებული ბინომის ფორმულის გაფართოება დაკავშირებულია ვალისის გამოკვლევებთან.

ვალისი ეილერის წინამორბედია ფაქტორიალის ცნების გაფართოების საქმეში. ზღვრის ცნების განსაზღვრა პირველად ვალისმა მოგვცა: „ეს მუდმივი სიდიდეა, რომელსაც ცვლადი ისე უახლოვდება, რომ მათ შორის სხვაობა შეიძლება გახდეს ყოველ მოცემულ სიდიდეზე ნაკლები“.

10. ისააკ ბაროუ

ისააკ ბაროუ, ვალისის მოწაფე და ნიუტონის მასწავლებელი, დაიბადა 1630 წელს ლონდონში და იქვე გარდაიცვალა 1677 წელს. მამა იყო ფართლით მოვაჭრე, გარდაიცვალა მანამდე,

სანამ მისი შვილი სწავლას დაამთავრებდა. ისააკიმ სხვების დახმარებით წარჩინებით დაამთავრა კემბრიჯის უნივერსიტეტი და იმედი ჰქონდა, თუმცა ძალიან ახალგაზრდა იყო, იქვე დარჩენილიყო ბერძნული ენის პროფესორის თანამდებობაზე, მაგრამ მისი პოლიტიკური რწმენის გამო უარი ეთქვა. ი. ბაროუ ძველ ენებთან ერთად მათემატიკასაც სწავლობდა. მათემატიკას ის თვლიდა თეოლოგიაში გამოსაყენებელ საგნად; ის ამბობდა: „იმისათვის, რომ კარგი ღვთისმეტყველი იყო, უნდა იცოდე ქრონოლოგია, რომელიც მოითხოვს ასტრონომიის ცოდნას, უკანასკნელი კი — გეომეტრიის ცოდნას“.

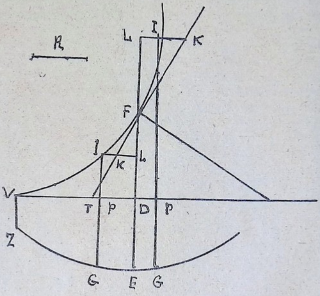
სამშობლოში ცხოვრების ცუდმა პირობებმა ი. ბაროუ აიძულა ოთხი წელი მოგზაურობაში გაეტარებინა, იქიდან დაბრუნებისთანავე მღვდლად ეკურთხა, ხოლო, როგორც კი პოლიტიკური მდგომარეობა შეიცვალა, მაშინვე მიიღო ბერძნულ ენაში პროფესორობა ოქსფორდის უნივერსიტეტში, შემდეგ — გეომეტრიის პროფესორობა ლონდონში და დასასრულს მათემატიკის პროფესორობა კემბრიჯში. კემბრიჯის უნივერსიტეტში ბაროუმ თავის მოწაფეს — ნიუტონს — შეამჩნია მათემატიკაში არაჩვეულებრივი ნიჭი და, როდესაც ნიუტონი მესამე კურსზე გადავიდა, ბაროუ დარწმუნდა, რომ ნიუტონი მასზე ძლიერია; ამის გამო ბაროუმ კათედრის გამგებლობაზე და მათემატიკის ლექტორობაზე უარი განაცხადა და თავისი თანამდებობა ნიუტონს დაუთმო; ასეთი უჩვეულო მოქმედების მოტივად ბაროუს მოჰყავს ის, რომ თითქოს მას ძალიან ტვირთავს მღვდლის თანამდებობა; ამით ბაროუს პირველ ხანებში მატერიალურად ძალიან გაუჭირდა, მაგრამ მდგომარეობა მალე გამოუსწორდა იმით, რომ კარლოს II-მ იგი აიყვანა სასახლეში მქადაგებლად. როგორც მქადაგებელმა, ბაროუმ დიდი სახელი მოიხვეჭა თავის სამშობლოში.

ი. ბაროუ იყო გამოჩენილი მათემატიკოსი; მან თავისი მათემატიკური აღმოჩენებით დიდად შეუწყო ხელი მათემატიკის განვითარებას. უნივერსიტეტში მასწავლებლობის დროს დაწერა მეტად მნიშვნელოვანი ნაშრომი: „ლექციები მათემატიკაში“. ამ ნაშრომს დიდი მნიშვნელობა აქვს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის წინა ისტორიისათვის.

ბაროუმ ამ შრომაში მკაცრად დაამტკიცა ურთიერთშექცეულობა იმ ამოცანებისა, რომელნიც ახლა ამოიხსნებიან დიფერენცირებისა და ინტეგრების საშუალებით და გვიჩვენა ამ შექცეულობის გამოყენება ეგრეთ წოდებულ მხებებზე შექცეული ამოცანების

ამოხსნისადმი. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითად ამოცანას, ე. ი. მრუდისადმი მხების გავლების ამოცანას, რომელიც ნებისმიერი მრუდისათვის პირველად ბაროუმ ამოხსნა, ის გადმოგვცემს შემდეგნაირად.

მოცემულია ნებისმიერი მრუდი ZGE თავისი VD ღერძით (ნახ. 26). ვთქვათ, VZ, PG და DE მართობები ანუ ორდინატები როგორმე იზრდებიან. დავუშვათ, რომ კიდევ მეორე ნე-



ნახ. 26.

ბისმიერი მრუდი VIF ისეთი თვისებისაა, რომ DF-ზე რომელიმე მოცემულ R მონაკვეთზე აგებული მართკუთხედის ფართობი ტოლია მრუდის რკალითა და ღერძით შემოსაზღვრული $VDEZ$ ფართობისა. ამის გარდა, დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას: $DE:DF=$ $=R:DT$. მაშინ, თუ TF წრფეწორი მხები იქნება VIF მრუდისადმი. ამის დასამტკიცებლად ბაროუმ VIF მრუდზე აიღო რომელიმე I წერტილი ჯერ F წრტილის მარცხნივ V წერტილის მიმართ და გაავლო IG წრფე VZ წრფის პარალელურად და KI წრფე VD პარალელურად.

მაშინ

$$LF : LK = DF : DT = DE : R$$

ანუ

$$LF \times R = LK \times DE.$$

მაგრამ

$$LF \times R = PDEG \text{ ფართობს,}$$

თანახმად მრუდის თვისებისა, რომელსაც ბაროუ პირობით ანიჭებს VIF მრუდს. მაშასადამე, $LK \times DE = PDEG < DP \times DE$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $LK < DP$ ანუ $LK < LI$.

შემდეგ ბაროუმ I წერტილი აიღო F წერტილის მარჯვნივ და იგივე მსჯელობით დაამტკიცა, რომ $LK > LI$. აქედან დაასკვნის, რომ $TKEK$ წრფე მთლიანად იმყოფება $VIFI$ მრუდის შიგნით ან გარეთ. ამასთანავე დასძენს, რომ თუ ორდინატები განუწყვეტლად მცირდება, მაშინაც იგივე დასკვნას მივიღებთ.

დასასრულს, ბაროუ შენიშნავს, რომ $DE \times DT =$ ფართ. $VDEZ$ (ეს გამომდინარეობს ტოლობებიდან: $DE : DF = R : DT$ და $DF \times R =$ ფართ. $VDEZ$).

უნდა ვიგულისხმოთ, რომ აქ DP მარცხნიდან და მარჯვნიდან აღებულია მეტად მცირე; მაშინ KLF სამკუთხედი, რომლის ზღვარია ILF სამკუთხედი, დამახასიათებელი ანუ, როგორც ბაროუ უწოდებს, „დიფერენციალური“ სამკუთხედია და მხების განსაზღვრის ამოცანა დაყვანილია მცირე ნაზრდების FL და KL შეფარდების ზღვრის მოძებნამდე, რასაც ბაროუ აკეთებს მთელ რიგ მაგალითში ალგებრული გზით.

ბაროუს მსჯელობა ახლანდელ მათემატიკურ ენაზე შეიძლება ასე გადმოვცეთ: დავუშვათ, რომ $VD = x$; $DP = dx$, $DF = y$; $FL = dy$; $DE = z$; $R = 1$ და ZGE მრუდის განტოლება იყოს $z = f(x)$. ვინაიდან ფართ. $PDEG$ პირველ შემთხვევაში ნაკლებია $DP \times DE$-ზე და მეორე შემთხვევაში — მეტი, ამიტომ

$$\text{ფართ. } VDEZ = \int_0^x z dx = DF \cdot R = y \cdot 1 = y.$$

ვინაიდან $DP = LI \approx LK$, ამიტომ

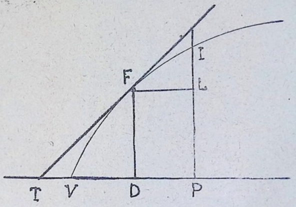
$$DE \times DP = DE \times LK = LF \times R = LF,$$

ანუ $z dx = dy$; აქედან კი $z = \frac{dy}{dx}$, ე.ი. განტოლება $y = \int_0^x z dx$-დან

გამომდინარეობს განტოლება $\frac{dy}{dx} = z$. ეს კი არის დამოკიდებულება დიფერენცირებასა და ინტეგრებას შორის. გარდა ამისა, ტოლობიდან $DE : DF = R : DT$ ვღებულობთ $DI \times DE = DF \times R$ ანუ $DF \cdot Z = y$ ანუ მხებქვეშა $DT = y : \frac{dy}{dx}$, ე. ი. მხების განსაზღვრისათვის ბაროუმ განსაზღვრა მხებქვეშა.

ამრიგად, როგორც ვხედავთ, ბაროუ იძლევა მხების განსაზღვრის ზოგად ხერხს, ე. ი. არა მარტო რომელიმე კერძო მრუდისათვის, არამედ საერთოდ ყველა მრუდისათვის (უნდა ვიგულისხმოთ ყველა დიფერენცირებადი მრუდი).

კერძო შემთხვევისათვის, ესე იგი, ვთქვათ, პარაბოლისათვის, ბაროუს ხერხი შეიძლება თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე გადმოცემულ იქნას ასე: ვთქვათ, მოცემულია პარაბოლი და მასზე წერტილი F (ნახ. 27) და ამ უკანასკნელზე პარაბოლისადმი გავლებულ უნდა იქნას მხები. ამისათვის ბაროუ განსაზღვრავს DT



ნახ. 27.

მხებქვეშას სიგრძეს. FI უსასრულოდ მცირე რკალია, რომელსაც ბაროუ წრფედ თვლის. FLI „დიფერენციალური“ სამკუთხედია (მართკუთხოვანი), რომლის კათეტები FL და LI აბსცისებისა და ორდინატების სხვაობებია და მათ ბაროუ შესაბამისად აღნიშნავს: $FL = e$, $LI = a$; FLI და TFD სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{a}{e} = \frac{FD}{TD}.$$

ამ შეფარდებას პირველად ბაროუმ უწოდა მხების „კუთხური კოეფიციენტი“.

$y^2 = qx$ პარაბოლის განტოლებაში ჩავსვათ I წერტილის კოორდინატები ($x + e$ და $y + a$), მივიღებთ $(y + a)^2 = q(x + e)$, აქედან კი

$$2ay + a^2 = qe, \quad \frac{a}{e}(2y + a) = q;$$

a, როგორც უსასრულოდ მცირე შესაკრები, ჩამოცილდება და განტოლებიდან

$$2y \frac{a}{e} = q$$

მივიღებთ მხების კუთხურ კოეფიციენტს

$$\frac{a}{e} = \frac{q}{2y} = \frac{FD}{TD} = \frac{y}{TD};$$

აქედან მხებქვეშა

$$TD = \frac{2y^2}{q} = 2x.$$

ი. ბაროუს მთავარი მიზანი იყო, როგორც თვითონ ამბობს-მისი მეთოდის გამოყენება არა მხებებზე პირდაპირი ამოცანებისადმი (ანუ მოცემული მრუდისადმი წერტილზე მხების განსაზღვრისადმი), არამედ, პირიქით, მხებებზე შექცეული ამოცანებისადმი; მხებებზე შექცეული ამოცანა მდგომარეობს ისეთი მრუდების განსაზღვრაში, რომლებისადმი ყველა მხებს უნდა ჰქონდეს მოცემული თვისება. ბაროუმ მრავალი ამოცანა ამოხსნა; მათ შორის ზოგიერთი არის მხებებზე შექცეული ამოცანა, ზოგი კი ისეთი სახითაა მოცემული, რომ თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ისინი გამოისახებიან დიფერენციალური განტოლებებით.

ი. ბაროუ ნიუტონისა და ლაიბნიცის წინამორბედია დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამოგონების საქმეში.

თ ა ვ ი IV

დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამოგონება და განვითარება XVII საუკუნეში

1. ისააკ ნიუტონი

ისააკ ნიუტონი დაიბადა 1643 წელს ლინკოლნშირში, მოიჯარადრის ოჯახში. ისააკის მამა გარდაიცვალა შვილის დაბადებამდე და იგი მამინაცვლის მზრუნველობით იზრდებოდა, მაგრამ მამინაცვალიც მალე გარდაიცვალა და ნიუტონი იძულებული იყო სწავლისათვის თავი დაენებებია, შინ დაბრუნებულიყო და მამის მეურნეობას ჩასდგომოდა სათავეში. მაგრამ ეს უკანასკნელი ნიუტონს არ იზიდავდა. იგი მეცადინეობდა მათემატიკაში, მექანიკასა და ასტრონომიაში. ამასთან ერთად ის ძველ ენებსაც სწავლობდა და 1661 წელს შევიდა კემბრიჯის უნივერსიტეტში. აქ ნიუტონი გულმოდგინედ შეუდგა მათემატიკის შესწავლას. დაიწყო ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსების ნაშრომების, კერძოდ ევკლიდეს, შესწავლა; ევკლიდეს მიერ ხმარებულმა დამტკიცების მკაცრმა ფორმებმა ნიუტონი აღტაცებაში მოიყვანა. მას ძალიან მოეწონა აგრეთვე დეკარტის გეომეტრია, რომელსაც პირველად უწოდა „ანალიზური".

ნიუტონმა შეისწავლა აგრეთვე ვალისის ნაშრომები და 1663 წლიდან ისმენდა ბაროუს ლექციებს. ჭირის ეპიდემიამ ნიუტონი აიძულა შეეწყვიტა უნივერსიტეტში მეცადინეობა და დაბრუნებულიყო შინ, სადაც მან ორი წელი დაჰყო. ამ ორი წლის განმავლობაში ნიუტონმა არა თუ შეწყვიტა მუშაობა მათემატიკაში, არამედ კიდევ უფრო გააძლიერა შემოქმედებითი მუშაობა და სწორედ იმ წლებში დააფუძნა თავისი უმნიშვნელოვანესი აღმოჩენები, როგორიცაა ბინომის ფორმულის გავრცელება წილად- და უარყოფითმაჩვენებლიან ხარისხებზე, უსასრულო მწკრივები, თავისი მხებთა მეთოდი ანუ „ფლუქსიათა" აღრიცხვა და, დასასრულ, ფლუქსიათა შექცეული აღრიცხვის ანუ „დიფერენცირებისა" და „ინტეგრების" ურთიერთშექცეულობის გამოყენება კვადრატურათა მოძებნაში. იმავე წლებში ნიუტონი ინტენსიურად მუშაობდა ციურ მექანიკაში და აღმოაჩინა მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. ამასთანავე ნიუტონმა აღმოაჩინა, რომ ის ძალა, რომელიც მთვარეს

აკავებს ორბიტაზე, უნდა იყოს იგივე, რაც ვაშლს აიძულებს ჩამოვარდეს ხიდან.

ისააკ ნიუტონის „ტრაქტატი მრუდების კვადრატურის შესახებ“ გამოქვეყნდა 1704 წელს. მეორე ნაშრომი: „ანალიზი უსასრულოდ ბევრწევრებიან განტოლებათა საშუალებით“ მან დაწერა 1665 წელს, მაგრამ დაიბეჭდა მხოლოდ 1711 წელს: ამ ნაშრომში ნიუტონი გადმოსცემს თავის მოძღვრებას უსასრულო მწკრივთა შესახებ და ფლუქსიათა პირდაპირი და შექცეული აღრიცხვის ძირითად პრინციპს. 1669 წელს გამოქვეყნდა მერკატორის „ლოგარითმოტექნიკა“, რომელიც შეიცავდა უსასრულო მწკრივთა მეთოდის ერთ კერძო გამოყენებას. ამ ფაქტმა ნიუტონს ინტერესი დაუკარგა თავის გაცილებით უფრო ზოგად ნაშრომზე, ვინაიდან ფიქრობდა, რომ მერკატორსა და მის მკითხველებს შეეძლოთ მისი ყველა შედეგის მიღება. როდესაც ნიუტონმა თავისი ხელნაწერი ბაროუს უჩვენა, მან ურჩია მისი სასწრაფოდ გაგზავნა გამომცემელ კოლინთან, რათა ამ უკანასკნელის დახმარებით ეს შრომა გამხდარიყო ფართოდ ცნობილი. 1676 წელს ლაიბნიცმა ეს ნაშრომი გადაათვალიერა კოლინთან. საერთოდ ნიუტონი ზედმეტ სიფრთხილეს იჩენდა თავისი შრომების დაბეჭდვაში; მთავარი მათემატიკური ნაშრომი: „ფლუქსიათა და უსასრულო მწკრივთა მეთოდი“ დაიბეჭდა მისი სიკვდილის შემდეგ. ამ ნაშრომში განხილულია ფლუქსიათა პირდაპირი და შექცეული აღრიცხვა და მისი გამოყენება (მხების განსაზღვრაში, მაქსიმუმისა და მინიმუმის ძიებნაში და კვადრატურებში), აგრეთვე განტოლებები ფლუქსიებით, რომლებიც ახლანდელ დიფერენციალურ განტოლებებს შეესაბამებიან.

ლაიბნიცს სურვილი აღეძრა ნიუტონის ნაშრომების უფრო დაწვრილებით გაცნობისა. ნიუტონმა მას ზოგი ნაშრომი თვითონ გააცნო მიწერ-მოწერით. ამ წერილებმა და კოლინთან შენახულმა ნაშრომმა ლაიბნიცს მისცა სრული წარმოდგენა ნიუტონის გამოკვლევებზე უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დარგში, თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ ამ წერილებში ნიუტონის მეთოდები მოცემულია ორ ანაგრამაში, რომლის გამოყენებას მკითხველი ვერ შესძლებდა. პირველი ანაგრამა ნიუტონმა ძალიან გვიან გაშიფრა: „როდესაც მოცემულია განტოლება ფლუენტების ნებისმიერი რიცხვით, მოვძებნოთ ფლუენტები და პირიქით“. მეორე: „ერთი მეთოდი მდგომარეობს ფლუენტების განტოლებიდან მიღებაში, რომელიც აგრეთვე ფლუქსიებს შეიცავს; მეორე—მხოლოდ იმაში, რომ დაშვებულია მწკრივის არსებობა ერთუცნობიანისათვის, საიდანაც ად-

ვილად შეიძლება დანარჩენების გამოყვანა, და განტოლების შესაბამ წევრთა ისეთ შედარებაში, რომ შეიძლება მათი გამოყენება დაშვებული მწკრივის წევრების მოსაძებნად". ნიუტონს არ უნდოდა თავის „ფლუქსიათა მეთოდის" გამოქვეყნება მანამდე, სანამ მას არ გადმოსცემდა უნაკლოდ და ამიტომ მიმართა მან ანაგრამებით სარგებლობის ხერხს. (საერთოდ ანაგრამებს მიმართავდნენ იმ შემთხვევაში, როდესაც ავტორს უნდოდა მისთვის უზრუნველეყო მომავალში იმის აღიარება, რომ მას მოცემულ მომენტში ჰქონდა ზოგიერთი შედეგი, და როდესაც ის ცნობას აძლევდა ვისმეს ამ შედეგებთან ერთად ისეთი რაიმის შესახებ, რომელიც ჯერ კიდევ არ იყო სავსებით მზად). საერთოდ, უნდა აღინიშნოს, რომ ნიუტონმა თავისი ფლუქსიათა მეთოდი არ გადმოსცა ისე სრულად, როგორც ეს საჭირო იყო. ამის მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ ნიუტონი მაინცადამაინც ხალისით არ ეწეოდა ამ საკითხებზე კვლევა-ძიებას, რომლებზეც სხვებიც მუშაობდნენ. ნიუტონს ეშინოდა კრიტიკის და თავისი ნაშრომის გამოქვეყნება ძალიან ეძნელებოდა; ფლუქსიათა შესახებ მოძღვრებას იგი იმის შემდეგაც მალავდა, რაც ლაიბნიცმა თავისი დიფერენციალური აღრიცხვა გამოაქვეყნა.

ბაროუს შემდეგ 1669 წელს ნიუტონმა მიიღო პროფესორის თანამდებობა კემბრიჯის უნივერსიტეტში. აქ ის კითხულობდა, სხვათა შორის, ლექციებს ზოგად არითმეტიკაში ანუ ალგებრაში, რომლის კონსპექტი გამოსცა მისმა მოწაფემ 1707 წელს, ხოლო 1722 წელს ის შესწორებულად გამოსცა თვითონ ნიუტონმა. მოკლე ხანში დაწერა და 1686 — 1688 წწ. გამოაქვეყნა დიდი ნაშრომი: „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები". ამაში ნიუტონი გადმოსცემს თავის გამოკვლევებს მსოფლიო მიზიდულობის შესახებ. ამ ნაშრომს ფუნდამენტალური მნიშვნელობა აქვს არა მარტო მექანიკისათვის, არამედ თვით მათემატიკისათვის, განსაკუთრებით უსასრულოდ მცირეთა მათემატიკისათვის. ამ შრომის გამოცემის შემდეგ ნიუტონი ცნობილი გახდა მთელს ინგლისში. 1689 წელს ის პარლამენტის წევრადაც კი აირჩიეს. საერთოდ უნდა აღინიშნოს, რომ ნიუტონი პოლიტიკურ და რელიგიურ საკითხებში კონსერვატორობას იჩენდა. 1696 წელს ნიუტონმა სამსახური დაიწყო სამონეტო სასახლეში, ხოლო სამი წლის შემდეგ ის დანიშნეს იმავე სასახლის გამგედ. ამ თანამდებობაზე მუშაობის შედეგად მის დიდ დამსახურებად თვლიან სრულფასოვანი მონეტის შემოღებას. ეს სამუშაო მას ბევრს დროსართმევდა, მაგ-

რამ მიუხედავად ამისა მაინც დაწერა „სხვაობათა მეთოდი" და გამოაქვეყნა 1711 წელს.

განსაკუთრებით ღლიდა ნიუტონს ის დავა, რომელიც ატყდა მისსა და ლაიბნიცის მომხრეებს შორის უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის გამოგონების პირველობის შესახებ. ამ დავაში ორივე ეს დიდი მათემატიკოსი მონაწილეობას ღებულობდა ხან ირიბად, ხან პირდაპირ. 1713 წელს ნიუტონმა თავისი „საწყისების" მეორე გამოცემაში აღიარა, რომ 1677 წელს ლაიბნიცს ჰქონდა მისივე მეთოდის მსგავსი უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მეთოდი; ამასთან ნიუტონი სრულიადაც არ ეხებოდა საკითხს იმის შესახებ, თუ რამდენად ისარგებლა ლაიბნიცმა თავისი დიფერენციალური აღრიცხვის დამუშავების დროს მისი ცნობებით. მაგრამ, როდესაც გამოჩნდა ბრალდება იმის შესახებ, რომ, პირიქით, ნიუტონმა ისარგებლა თავისი მეთოდის დამუშავების დროს ლაიბნიცის ცნობებით, ნიუტონმა „საწყისების" მესამე გამოცემაში ამოაგდო ყოველგვარი ხსენება ლაიბნიცის შესახებ და აღნიშნა, რომ ამ მეთოდებით ის უფრო ადრე სარგებლობდა.

ნიუტონი გარდაიცვალა ლონდონში 1727 წელს. მისი ლექციები ზოგად არითმეტიკაში ანუ ალგებრაში, რომელიც დაიბეჭდა სახელწოდებით „Arithmetica universalis", უაღრესად საყურადღებოა, ვინაიდან ამ ნაშრომმა დიდი როლი ითამაშა ალგებრის, როგორც მეცნიერებისა და როგორც სასკოლო სწავლების საგნის, განვითარების საქმეში. ნაშრომი ხელმეორედ დაიბეჭდა ლათინურ ენაზე 1728 წელს, ხოლო 1729 წ. გამოვიდა მისი ინგლისური თარგმანი, 1802 წელს კი ის თარგმნეს ფრანგულ ენაზე.

ნიუტონის ეს ნაშრომი იწყება ნიშნებისა და ტერმინების ახსნაგანმარტებით, შემდეგ დაწვრილებით გადმოგვცემს მიმატების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფის, ამოფესვის წესებს; ამის შემდეგ მოცემულია წილადებსა და რადიკალებზე მოქმედების წესები და დაწვრილებით გადმოცემულია მარტივ განტოლებათა ამოხსნები, განტოლებათა შედგენის წესები და, დასასრულ, განტოლებათა ზოგადი თეორია, მათი ფესვების გეომეტრიული ამოხსნა და განტოლებათა ზღვრების საკითხი.

ნიუტონის ალგებრაში მეტად მნიშვნელოვანია მისი არითმეტიკული ხასიათი. ალგებრის არითმეტიზაციის ძირითადი ფაქტი იმაში მდგომარეობს, რომ ნიუტონი გვაძლევს ნამდვილი რიცხვის ახალ განსაზღვრას. მთელი, წილადი და ირაციონალური ოდენობანი მან გააერთიანა რიცხვთა ერთ კატეგორიაში.

ჩვენ უკვე ვთქვით, რომ პასკალმა მოგვცა წესი (პასკალის არითმეტიკული სამკუთხედი), რომლის საშუალებით შესაძლებელია დაიწეროს ნებისმიერი ხარისხის ბინომის გამოსახვა მთელი და დადებითი მაჩვენებლით. ნიუტონმა კი მოგვცა $(a+b)^n$-ის გამოსახვა ზოგადი შემთხვევისათვის და პირველად მან იხმარა ხარისხის ასოებრივი მაჩვენებლები. მთავარი ის არის, რომ ნიუტონმა ბინომის ფორმულა

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

გაავრცელა n მაჩვენებლის წილად და უარყოფით მნიშვნელობათა შემთხვევებზე. მაგალითად, როდესაც $n = \frac{1}{2}$, გვაქვს:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + $$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x -$$

$$- \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots;$$

როდესაც $n = -1$ მივიღებთ:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + (-1)(-x) +$$

$$+ \frac{(-1)(-1-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ბინომის დაშლის ფორმულის განზოგადებამ ნიუტონი მიიყვანა უსასრულო მწკრივებთან (იხ. И. Ньютон, Математические работы, перевод Мордухай-Болтовского 1937, გვ. 233 — 239).

ნაშრომში: „ანალიზი უსასრულოდ ბევრწევრებიანი განტოლების საშუალებით" ნიუტონი გვაძლევს მოცემული ალგებრული ფუნქციისათვის ისეთ მნიშვნელობას, რომელსაც ჩვენ ახლა ამ ფუნქციის პირვანდელ ანუ განუსაზღვრელ ინტეგრალს ვუწოდებთ.

პირველი მისი წესი ასეთია: თუ მოცემულია ფუნქცია $y = ax^{\frac{m}{n}}$, მაშინ $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ არის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = ax^{\frac{m}{n}}$ მრუდით (იხ. И. Ньютон, Математические работы, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, 1937, გვ. 3), ე. ი.

$$\int_0^x ax^{\frac{m}{n}} dx = \frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}.$$

ი. ნიუტონი დასაწყისშივე ამბობს, რომ ეს მეთოდი, ოდესაც მის მიერ გამოგონებული ფართობების განსაზღვრისათვის უსასრულო მწკრივების საშუალებით, გულმოდგინეთ დამტკიცებულია, მაგრამ დამტკიცება მოყვანილი არ არის; ზემოხსენებული პირველი წესის შესახებ ნიუტონი ამბობს, რომ იგი მაგალითების საშუალებით აიხსნება და მოჰყავს რამდენიმე მაგალითი. იქვე მოცემული მეორე წესი იგივეა, რაც ჩვენ მიერ ახლა ხმარებული წესი: ალგებრული ჯამის ინტეგრალი უდრის ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს.

მერკატორმა ჰიპერბოლური ფართობისათვის $z = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$ პირველად მიიღო მწკრივი

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

ნიუტონმა კი იპოვა ამ მწკრივის შექცეული მწკრივი

$$x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{120} + \cdots$$

(იხ. И. Ньютон, Математические работы, გვ. 18).

ამ მწკრივის კოეფიციენტების შედგენის კანონს ნიუტონი ცხადად უჩვენებს. რადგან ჰიპერბოლური ფართობი $1 + x$-ის ლოგარითმის პროპორციულია, ამიტომ $1 + x$ არის იგივე, რასაც ჩვენ ახლა e^z ფუნქციას ვუწოდებთ და ნიუტონმა ის გამოსახა მწკრივით

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

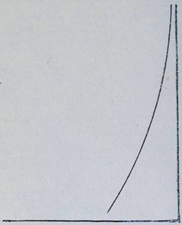
ჰიპერბოლის კვადრატურისათვის ანუ $y=\sqrt{a^2+x^2}$ მრუდით შემოსაზღვრული ფართობის მოსაძებნად (ნახ. 28) ნიუტონმა ფუნქცია დაშალა ფესვის ამოღების საშუალებით შემდეგ მწკრივად:

$$a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-$$

$$-\frac{5x^8}{128a^7}+\cdots$$

(იხ. И. Ньютон, Математические работы, გვ. 7—8).

ნიუტონი ამ მწკრივში თითოეული წევრის ნაცვლად სვამს მათ პირვანდელებს და ღებულობს ჰიპერბოლური ფართობის მნიშვნელობას შემდეგი მწკრივის სახით:



ნახ. 28

$$ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}+\cdots,$$

ესე იგი, თანამედროვე მათემატიკური ენით რომ ვთქვათ, ამ უკანასკნელ მწკრივს ის ღებულობს წინა მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით; ამგვარად, ნიუტონი გვაძლევს $\int\limits_0^x \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ ინტეგრალის მწკრივად დაშლას:

$$\int\limits_0^x \sqrt{a^2+x^2}\,dx=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\cdots$$

შემდეგ ნიუტონი გადადის წრის ფართობის კვადრატურაზე, რისთვისაც ის გვაძლევს ორი ფუნქციის $\sqrt{a^2-x^2}$ და $\sqrt{x-x^2}$-ის მწკრივებად დაშლას:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128\,a^7} - \ldots$$

და

$$\sqrt{x - x^2} = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{8} - \frac{x^{7/2}}{16} - \frac{5x^{9/2}}{128} - \ldots$$

იმავე ხერხით, როგორც წინა შემთხვევაში, გვაძლევს

$$\int\limits_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad \text{და} \quad \int\limits_0^x \sqrt{x - x^2}\,dx$$

ინტეგრალების დაშლას:

$$\int\limits_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40\,a^3} - \frac{x^7}{112\,a^5} - \frac{5x^9}{1152\,a^7} - \ldots$$

და

$$\int\limits_0^x \sqrt{x - x^2}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{3/2} - \frac{1}{5}\,x^{5/2} - \frac{1}{28}\,x^{7/2} -$$

$$- \frac{1}{72}\,x^{9/2} - \frac{5}{704}\,x^{11/2} - \ldots,$$

რომლებიც წრის ნაწილის ფართობს გამოსახავენ.

ელიპსის რკალის სიგრძის გამოსათვლელად ნიუტონი მიმართავს $\frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}}$ ფუნქციას; მრიცხველსა და მნიშვნელს ცალ-ცალკე დაშლის მწკრივებად და გაყოფის შედეგად ღებულობს მის დაშლას შემდეგი მწკრივის სახით:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\right) bx^2 + \left(\frac{1}{8}\,a^2 + \frac{1}{4}\,ab + \frac{3}{8}\right) b^2x^4 +$$

$$+ \left(\frac{1}{16}\,a^3 - \frac{1}{16}\,a^2b + \frac{3}{16}\,ab^2 + \frac{5}{16}\right) b^3x^6 + \cdots,$$

რომლიდანაც წინათ აღნიშნული ხერხის საშუალებით ღებულობს ელიპსის რკალის სიგრძეს ანუ $\int\limits_0^x \frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}}\,dx$-ის დაშლას მწკრივად:

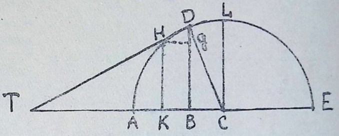
$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}\,dx = x + \left(\frac{1}{6}\,a + \frac{1}{6}\right) bx^3 +$$

$$+ \left(\frac{1}{40}\,a^2 + \frac{1}{20}\,ab + \frac{3}{40}\right) b^2x^5 + \cdots$$

(იხ. И. Ньютон, Математические работы, გვ. 8).

ნიუტონმა ფუნქციის უსასრულო მწკრივად დაშლის ხერხი გამოიყენა წრეწირის რკალის სიგრძის განსაზღვრისათვის (იხ. И. Ньютон, დასახ. ნაშრ., გვ. 16—17).

AD რკალის s სიგრძე (ნახ. 29) მან გამოსახა ამ რკალის $AB=x$ გეგმილით დიამეტრზე, რომლის სიგრძე ჩათვალა ერთის



ნახ. 29

ტოლად ($AE = 1$). ამისათვის შეადგინა პროპორცია, რომელშიც $BK = gH$, და უწოდა $AB = x$-ის მომენტი, ხოლო HD-ს უწოდა AD რკალის მომენტი (ნიუტონი რკალის მომენტს უწოდებს იმას, რასაც ჩვენ რკალის ელემენტს ანუ დიფერენციალს ვუწოდებთ). ეს პროპორციაა:

$$\frac{gH}{HD} = \frac{BT}{DT} = \frac{BD}{DC}\,;$$

BD-ს განსაზღვრავს წრის დეფინიტორული თვისებიდან:

$$BD^2 = AB \cdot BE = x(1-x);$$

$$BD = \sqrt{x - x^2}\,; \qquad DC = \frac{1}{2}\,.$$

$$\frac{gH}{HD}=\frac{\sqrt{x-x^2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x-x^2},$$

$$HD=gH\,\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

gH მომენტს ის ახლა უწოდებს წერტილოვან ერთეულს და ერთს უტოლებს ($gH=1$), ამბობს რომ, „მე არ მეშინია წერტილოვანი ერთეულის ანუ უსასრულო მცირე წირის თქმის“. ამიტომ

$$HD=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{\sqrt{x-x^2}}{2x-2x^2}.$$

ფესვის ამოღებისა და გაყოფის შედეგად ღებულობს ამ გამოსახულების უსასრულო მწკრივად დაშლას:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{4}x^{1/2}+\frac{3}{16}x^{3/2}+\frac{5}{32}x^{5/2}+$$
$$+\frac{33}{256}x^{7/2}+\frac{63}{512}x^{9/2}+\cdots$$

ამ მწკრივის ყოველი წევრის ნაცვლად მისი პირვანდელის ჩასმით ანუ, თანამედროვე მათემატიკური ენით რომ ვთქვათ, ინტეგრებით, ნიუტონი პოულობს AD რკალის სიგრძეს:

$$s=\int\limits_0^x\frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}}=x^{1/2}\left(1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\right.$$
$$\left.+\frac{33}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5+\cdots\right).$$

ნიუტონი, დაუშვებს რა, რომ რადიუსი $AC=1$ და $CB=x$, ამავე ხერხით პოულობს DL რკალის z სიგრძეს:

$$z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots \qquad (1)$$

ამის შემდეგ ნიუტონმა ამოხსნა შექცეული ამოცანა, ესე იგი მოცემული რკალის სიგრძის საშუალებით განსაზღვრა ამავე რკალის სინუსი; ამისათვის მან (1) განტოლების მარჯვენა ნაწილში მოთავსებულ უსასრულო მწკრივიდან ამოიღო კვადრატული ფესვი და მიიღო

$$x = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7$$

ან თუ კოორდინატთა სათავეს C წერტილში გადავიტანთ, ისე რომ $BC = x$, რაც LD რკალის სინუსია ანუ $x = \sin z$, და თუ $CD = 1$, მაშინ

$$\sin z = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \cdots$$

აქედან კი იპოვა კოსინუსიც (აიყვანა ეს მწკრივი კვადრატში, ერთს გამოაკლო და ამოიღო კვადრატული ფესვი) შემდეგი სახით:

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{720} z^6 + \cdots$$

ლაიბნიცთან ერთად ნიუტონი დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამომგონებელია. ეს ნათლად ჩანს მისი: „ფლუქსიათა და უსასრულო მწკრივთა მეთოდიდან", რომელშიც ვკითხულობთ:

„I. განვლილი გზის სიგრძე მუდამ (ესე იგი დროის ყოველ მომენტში) მოცემულია; უნდა მოიძებნოს მოძრაობის სიჩქარე მოცემულ დროში.

II. მოძრაობის სიჩქარე მუდამ მოცემულია; უნდა მოიძებნოს მოცემულ დროში განვლილი გზის სიგრძე.

თუ, მაგალითად, $xx = y$ განტოლებაში y წარმოადგენს გზის სიგრძეს, რომელიც განვლილია დროის განსაზღვრული მომენტისათვის, დრო კი იზომება და წარმოიდგინება შემოწერილად სხვა x სივრცის საშუალებით, რომელიც იზრდება თანაბარი $\dot{x}$ სიჩქარით, მაშინ $2x\dot{x}$ წარმოადგენს სიჩქარეს, რომლის საშუალებით გაივლის y გზას დროის ამ მომენტში და პირიქით. ამიტომ შემდეგში სიდიდეებს განვიხილავ როგორც უწყვეტად ზრდის საშუალებით წარმოშობილს, მსგავსად გზისა, რომელსაც შემოხაზავს ტანი ანდა რომელიმე მოძრავი ნივთი.

მაგრამ რადგანაც დრო შემოგვყავს განხილვისათვის იმდენად, რამდენადაც ის გამოისახება და იზომება ადგილობრივი თანაბარი მოძრაობით, და რადგან ამის გარდა ერთიმეორესთან შედარება შეიძლება მხოლოდ ერთი გვარის სიდიდეებისა და აგრეთვე სიჩქარეებისაც, რომლითაც ისინი იზრდებიან ან მცირდებიან, ამიტომ ქვემოთ განვიხილავ დროს, არა როგორც ასეთს, არამედ ვგულისხმობ, რომ მოცემულ სიდიდეთაგან ერთი, რომელიც მეორესთან ერთგვაროვანია, თანაბარი დენადობის წყალობით

იზრდება, ყველა დანარჩენი კი აღებულია მის მიმართ ისე როგორც დროის მიმართ. ამიტომ ანალოგიის გამო ამ სიდიდეს შეიძლება შევუნარჩუნოთ დროის სახელწოდება. ამგვარად, ყველგან, სადაც შეგვხვდება სიტყვა დრო (მე კი მას ძალიან ხშირად ვხმარობ სიცხადისათვის), უნდა ვიგულისხმოთ არა დრო მისი ფორმალური მნიშვნელობით, არამედ მხოლოდ დროისაგან განსხვავებული ის სიდიდე, რომლის თანაბარი ზრდის ანუ დენადობის საშუალებით დრო გამოისახება და გაიზომება.

შემდეგში ფლუენტას ანუ მიმდინარე სიდიდეებს ვუწოდებ იმ სიდიდეებს, რომლებსაც განვიხილავ როგორც თანდათან და განუზღვრელად ზრდადებს და აღვნიშნავ ანბანის u, y, x და z ასოებით, რომ შესაძლებელი იყოს ისინი განვასხვაოთ სხვა სიდიდეებისაგან, რომლებიც განტოლებებში განიხილებიან როგორც ცნობილები და რომლებიც აღინიშნებიან ანბანის პირველი ასოებით a, b, c და ასე შემდეგ; სიჩქარეებს, რომლითაც იზრდება ცალკეული ფლუენტები მათი წარმომშობი მოძრაობის გამო (რომლებსაც ვუწოდებ ფლუქსიებს ანუ უბრალოდ სიჩქარეებს, ანუ სისწრაფეებს), აღვნიშნავ იმავე ასოებით, მაგრამ პუნქტირებულით, მაგალითად $\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{x}$, ესე იგი u სიდიდის სიჩქარისათვის ვწერ $\dot{u}$, ანალოგიურად სხვა x, y, z სიდიდეების სიჩქარისათვის შესაბამისად ვწერ $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

წარუმძღვარე რა ეს, ახლავე შევუდგები საგნის გადმოცემას და უწინარეს ყოვლისა ვიძლევი ჩემ მიერ ახლახან მოწოდებულ ორი პრობლემის ამოხსნას.

პრობლემა 1

ფლუენტებს შორის მოცემული დამოკიდებულების საშუალებით განვსაზღვროთ ფლუქსიებს შორის დამოკიდებულება.

ამოხსნა

განტოლება, რომელიც მოცემულ დამოკიდებულებას გამოსახავს, დაალაგე მასში შემავალი სიდიდეებისაგან რომელიმეს ხარისხის მიხედვით (მაგალითად x) და მისი წევრები გაამრავლე რომელიმე არითმეტიკულ პროგრესიაზე და შემდეგ $\frac{\dot{x}}{x}$-ზე. ეს მოქმედება აწარმოე დენადი სიდიდეებიდან ყველასათვის ცალ-ცალკე. შემდეგ ყველა ამ ნამრავლის ჯამი გაუტოლე ნულს და მიიღებ საძიებელ განტოლებას.

მაგალითი I.

თუ x და y მიმდინარე სიდეებს შორის დამოკიდებულება გამოისახება განტოლებით

$$x^3 - axx + axy - y^3 = 0,$$

მაშინ პირველად დაალაგე წევრები x-ის მიხედვით, შემდეგ კი y-ის და ისინი გაამრავლე ისე, როგორც ქვემოთ არის ნაჩვენები.

გაამრავლე	$x^3 - axx + axy - y^3$	$-y^3 + axy \substack{-axx \\ +x^3}$
სიდიდეებზე	$\frac{3\dot{x}}{x};\ \frac{2\dot{x}}{x};\ \frac{\dot{x}}{x};\ 0$	$\frac{3\dot{y}}{y};\ \frac{\dot{y}}{y};\ 0$
ეს მოგვცემს	$3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y_*$	$-3yy\dot{y} + ax\dot{y}_*.$

ნამრავლთა ჯამია

$$3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ayx - 3yy\dot{y} + ax\dot{y} = 0,$$

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რა დამოკიდებულება არსებობს $\dot{x}$ და $\dot{y}$ ფლუქსიათა შორის. მართლაც, თუ x-ს ნებისმიერად ავიღებთ, მაშინ განტოლება $x^3 + axy - axx - y^3 = 0$ მოგვცემს y-ს, რომლის განსაზღვრის შემდეგ მივიღებთ:

$$\dot{x} = \dot{y} : : 3yy - ax : 3xx - 2ax + ay“.$$

(იხ. И. Ньютон,... გვ. 45 — 46).

ამის შემდეგ ნიუტონს ამ პრობლემაზე კიდევ ოთხი მაგალითი აქვს მოყვანილი, ხოლო დასასრულს გადმოცემულია ამავე პრობლემის შემდეგი დამტკიცება:

ამოხსნის დამტკიცება

მიმდინარე სიდიდეთა მომენტები (ე. ი. მათ განუსაზღვრელად მცირე ნაწილები, რომელთა მიმატების წყალობით დროის განუსაზღვრელად მცირე ნაწილში უწყვეტად იზრდება თვითონ სიდიდეები) იმავე შეფარდებაში იმყოფება, რა შეფარდებაშიცაა მათი სიჩქარეები, რომლითაც ისინი იზრდებიან.

ამიტომ თუ ერთი მათგანის მომენტი (მაგალითად x-ის) გამოვსახეთ მისი $\dot{x}$ სიჩქარისა და განუსაზღვრელად მცირე სიდიდის ნამრავლით (ე. ი. $\dot{x}o$-ით), მაშინ u, y, z მომენტები გამოისახება $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, ვინაიდან $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ და $\dot{z}o$ ერთმანეთს ისე შეეფარდება, როგორც $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ და $\dot{z}$.

რადგან მომენტები, მაგალითად $\dot{x}o$ და $\dot{y}o$, განუსაზღვრელად მცირე ნაზრდებია, რომლებზედაც იზრდება მიმდინარე სიდიდეები x და y დროის განუსაზღვრელად მცირე შუალედებში, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ ეს სიდიდეები x და y დროის განუსაზღვრელად მცირე შუალედის გავლის შემდეგ გაიზრდება $x+\dot{x}o$ და $y+\dot{y}o$-მდე. ამიტომ განტოლება, ყოველ დროში ტოლად გამომსახველი მიმდინარე სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება, უნდა გამოსახავდეს აგრეთვე დამოკიდებულებას $x+\dot{x}o$, $y+\dot{y}o$ შორის ისე, როგორც x და y შორის. ასე რომ x და y-ის მაგიერ ამ განტოლებაში შეიძლება ჩავსვათ $x+\dot{x}o$ და $y+\dot{y}o$.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია განტოლება

$$x^3 - axx + axy - y^3 = 0.$$

ჩასვით მასში x და y-ის ნაცვლად $x+\dot{x}o$ და $y+\dot{y}o$. მიიღებთ

$$\left.\begin{aligned} & x^3 + 3xx\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 \\ & - axx - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o \\ & + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \\ & + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \\ & + ax\dot{y}o \\ & - y^3 - 3yy\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 \end{aligned}\right| = 0,$$

მაგრამ დაშვების თანახმად

$$x^3 - axx + axy - y^3 = 0.$$

ამიტომ ამოშალეთ ეს წევრები, დანარჩენები კი o-ზე გაჰყავით. ამასთან დაგრჩებათ

$$3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o +$$

$$+ a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0.$$

მაგრამ რადგანაც დავუშვით o უსასრულოდ მცირე სიდიდედ იმისათვის, რომ მას გამოესახა სიდიდეთა მომენტები, ამიტომ ის წევრები, რომლებიც მასზე გამრავლებულია, შეიძლება არაფრად ჩავთვალოთ სხვებთან შედარებით. ამიტომ მათ არ მივიღებ მხედველობაში და დარჩება

$$3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0,$$

როგორც ზემოთ ვიპოვეთ პირველ მაგალითში.

აქ შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ყოველთვის ქრება როგორც ის წევრები, რომლებიც o-ზე არ მრავლდებიან, ისე ის წევრებიც, რომლებიც მრავლდებიან o-ზე მეორე ანუ უმაღლეს ხარისხში. დანარჩენი წევრები o-ზე გაყოფის შემდეგ ყოველთვის მიიღებს იმ სახეს, რომელიც მათ უნდა ჰქონდეთ, თანახმად ზემომოყვანილი წესისა, რაც იყო დასამტკიცებელი. (იხ. И. Ньютон... გვ. 49 — 50).

ნიუტონი იქვე სვამს შექცეულ პრობლემას:

„მოცემული განტოლებით, რომელიც ფლუქსიას შეიცავს, ვიპოვოთ დამოკიდებულება ფლუენტებს შორის".

ნიუტონის „ფლუენტა" შეესაბამება თანამედროვე „ფუნქციას", მაგრამ სავსებით არ ემთხვევა მას, ვინაიდან ფლუენტა არის დროში ცვლადი სიდიდე, ხოლო ფუნქციის ცვლადობა წარმოიდგინება დროის გარეშე.

ნიუტონის „ფლუქსიაც" სავსებით არ ემთხვევა თანამედროვე „წარმოებულს". ის არის „ფლუენტის" ცვლადობის სიჩქარე, თუკი ფლუენტა არის განვლილი სივრცე.

$\dot{x}o$ და $\dot{y}o$ — ნიუტონის „მომენტები" გამოისახება $\dfrac{dx}{dt}$ და $\dfrac{dy}{dt}$ სიჩქარეების საშუალებით, გამრავლებულები უსასრულოდ მცირე სიდიდე o-ზე. რადგან ეს მომენტები იგივეა, რაც განვლილი გზები, მცირე დროის განმავლობაში, რომელსაც ჩვენ dt-ს ვუწოდებთ, ამიტომ, ჩვენი აღნიშვნით, ისინი ტოლია $\dfrac{dx}{dt}dt=dx$ და $\dfrac{dy}{dt}dt = dy$.

ნიუტონის x და y ფლუენტების ახალ მნიშვნელობებს $x+\dot{x}o$ და $y+\dot{y}o$-ს შეესაბამება ჩვენი $x+dx$ და $y+dy$.

გაწარმოების ძირითადი ფორმულებიდან ნიუტონს აქვს მხოლოდ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

ნიუტონის ძირითადი წესი იგივეა, რაც $f(x, y)$ პოლინომის წარმოებულების მოძებნა t-ს მიმართ, როდესაც x და y არის t დროის ფუნქციები, ესე იგი, თუ

$$f(x,y) = x^3 + ax^2 + axy - y^3 = 0,$$

მაშინ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,x' + \frac{\partial f}{\partial y}\,y' = 0$$

სადაც

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2ax + ay, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax - 3y^2.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} x'$ და $\dfrac{\partial f}{\partial y} y'$ ნიუტონი შემდეგნაირად პოულობს: x^3, x^2, x და $\dot{x}$-იან წევრებს ამრავლებს $\dfrac{3x'}{x}$, $\dfrac{2x'}{x}$, $\dfrac{x'}{x}$, $\dfrac{o}{x}$-ზე, ხოლო y^2, y და $\dot{y}$-იან წევრებს $-\dfrac{2y'}{y}$, $\dfrac{y'}{y}$, $\dfrac{o}{y}$.

ამასთან საყურადღებოა ის, რომ მარცხენა ნაწილს ამრავლებს 3, 2, 1, 0 პროგრესიაზე, ხოლო მარჯვენა ნაწილს—3, 1, 0-ზე, მაგრამ წესში კი ამბობს: „გავამრავლოთ რომელიმე პროგრესიაზე"; ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ, მაგალითად, მოცემულია

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \cdots + a_n(y),$$

მაშინ $\dfrac{\partial f}{\partial x} x'$-ის მოსაძებნად წევრები უნდა გავამრავლოთ

$$\frac{nx'}{x}, \quad \frac{(n-1)\,x'}{x}, \ldots, \quad \frac{ox'}{x}\text{-ზე.}$$

ნიუტონის მიერ მოყვანილი $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ განტოლების დიფერენცირებიდან აშკარად ჩანს ფუნქციის გაწარმოების მისი წესი ანუ ფლუქსიის მოძებნისა, რაც მდგომარეობს შემდეგში: იმისათვის რომ იპოვოს x^n ფუნქციის წარმოებული, ის x-ის ნაცვლად სვამს $x + \dot{x}o$ (ესე იგი x-ისა და $\dot{x}o$ მომენტის ჯამს ანუ, ჩვენი სიტყვით რომ ვთქვათ, x ცვლადის ახალ მნიშვნელობას) და ღებულობს

$$(x + \dot{x}o)^n - x^n = nx^{n-1}\cdot\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot(\dot{x}o)^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}(\dot{x}o)^3 + \cdots$$

ანუ თუ დავუშვებთ, რომ x დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ $\dot{x} = 1$ (ნიუტონით x არის t დროის ფუნქცია) და ტოლობის ორივე ნაწილის o-ზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{(x+o)^n - x^n}{o} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot o +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}o^2+\cdots$$

ამის შემდეგ ნიუტონი დაუშვებს, რომ მისი „უსასრულოდ მცირე სიდიდე“ o ნულის ტოლია და ამით მარცხენა ნაწილის ყველა წევრი ნულის ტოლია და ღებულობს, რომ

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

ცხადია, იმის დაშვებით, რომ $0=o$, მან დაუშვა, რომ მისი „მომენტიც“ $\dot{x}o$ ნულის ტოლია. დასაწყისში ნიუტონს „მომენტი“ ჩათვლილი ჰქონდა ნულისაგან განსხვავებულ სიდიდედ, ხოლო შემდეგ ნულის ტოლად, რაც ჰქმნიდა ერთგვარ გაუგებრობას, თუმცა შედეგი მიიღო აბსოლუტურად ზუსტი, მაგრამ მათემატიკურად არასწორი გზით. ნიუტონის მეთოდის ამ სუსტმა მხარემ საბაბი მისცა იდეალისტ ბერკლის გაელაშქრებინა მათემატიკოსების წინააღმდეგ. ოდესღაც ეპისკოპოს ბერკლის ერთ-ერთმა მეგობარმა სიკვდილის წინ მღვდლის სამსახურზე უარი განაცხადა იმ მოტივით, რომ ქრისტიანობის პრინციპებს არა აქვთო მეცნიერების ისეთი დამამტკიცებელი ძალა, როგორიც, მაგალითად, მათემატიკას. ბერკლიმ გადაწყვიტა გალაშქრება მეცნიერების შემოტევის წინააღმდეგ და შეეცადა იმის დამტკიცებას, რომ „მეცნიერებათა მეფე“ — მათემატიკა — დამყარებულია ისეთივე მერყევ ფუძეზე, როგორზედაც ქრისტიანული რელიგიაა, მაგრამ ამით მათემატიკა არ კარგავს არც თავის პრაქტიკულ მნიშვნელობას, არც შედეგების სისწორეს.

ბერკლი წერდა, რომ ზოგიერთი მათემატიკოსი ცდილობს თავის მეგობრებს შეუქმნას სკეპტიკური განწყობილება სარწმუნოების იმ დოგმატების წინააღმდეგ, რომლებიც მკაცრად არ მტკიცდებიან. ბერკლის აზრით, უსასრულოდ მცირეთა ახალი აღრიცხვის დოგმატები კიდევ უფრო ნაკლებად მტკიცდებიან, ვიდრე სარწმუნოებისა. მას გაუგებრად მიაჩნია ნიუტონის ფლუქსია. ის წერს, რომ ნიუტონი ამბობს მოცემულ მომენტში წერტილში მოძრაობის სიჩქარეზე, მაგრამ წერტილი ხომ უსივრცოა არის და მომენტი — უდროვოო; სადაც სივრცე და დრო არ არის, იქ მოძრაობაც არ არისო. მაშ, რომელ სიჩქარეზეა ლაპარაკი? ამაზე ბერკლის რომელიღაც მათემატიკოსმა უპასუხა: სხეულის სიჩქარე, რომელიც მოძრაობს მუდმივად მოქმედი ძალის გავლენით, ერთი და იგივე არ არის განვლილი გზის ყოველ ორ წერტილში და იცვლება ადგილის ოდნავ ცვლილებასთან ერთად. ბერკლიმ უპა-

სუხა: როგორ? თუ ორ წერტილში არ შეიძლება იყოს ერთი და იგივე სიჩქარე, განა შეიძლება ერთ წერტილში ადგილი ჰქონდეს ერთ სიჩქარეს? არის თუ არა ეს ისეთივე დასკვნა, რომ გვეთქვა: ერთი და იგივე კაცი არ შეიძლება იმყოფებოდეს ორი თხილის ნაჭუჭში, მაშასადამე, ის შეიძლება იყოს ერთი თხილის ნაჭუჭში“.

ბერკლი სვამს კითხვას: „მაშ როგორ გამოჰყავს ნიუტონს ფლუქსია x^n-სათვის?“ — და თვითონვე პასუხობს: „ფოკუსის“ საშუალებით. მან შეფარდებიდან

$$\frac{(x+o)^n - x^n}{o} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} o + \cdots$$

მიიღო nx^{n-1}, დაუშვა რა $o=0$. მაგრამ ამის უფლება მას არ აქვს. თუკი x-მა დინების დროს მიიღო ნამატი o, მაშინ ეს ნამატი უნდა იქნეს შენარჩუნებული, და არ შეიძლება შემდეგ იმის დაშვება, რომ $o=0$, ესე იგი მისი განხილვა როგორც სრულიად არარსებულის“.

ბერკლი, ცხადია, მართალი არ არის იმაში, რომ ის დიფერენციალური აღრიცხვისათვის ერთადერთ შესაძლოდ თვლიდა იმ ფორმას, რომელიც მას ჰქონდა ნიუტონით (და აგრეთვე ლაიბნიცითაც, ვინაიდან ლაიბნიცის მეთოდიც იგივეა რაც ნიუტონის, იმ განსხვავებით, რომ ნიუტონის „მომენტს“ $\dot{x}o$ შეესაბამება ლაიბნიცის დიფერენციალი dx).

საქმე იმაშია, რომ დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ფუძემდებელმა ნიუტონმა (და ლაიბნიცმაც) არ იზრუნა იმაზე, რომ თავისი ძირითადი პრინციპები დაემტკიცებინა. პრაქტიკაში იგი სარგებლობდა უსასრულოდ მცირე სიდიდეზე წარმოდგენით, რომლის ანგარიშში მიღება ხან აუცილებელი საჭირო იყო, როგორც სასრული და ნულისაგან განსხვავებული სიდიდის, ხან კი შეიძლებოდა მისი ჩამოცილება, არ ირღვევოდა რა ამით შედეგის აბსოლუტური სიზუსტე. ნიუტონი ცდილობდა ეს წარმოდგენა გაემართლებინა მეტაფიზიკური მოსაზრებებით. ძირითადი მიზეზი ამისა ის იყო, რომ ნიუტონისათვის (ლაიბნიცისათვისაც) უცნობი იყო ზღვარისაკენ გადასვლის ხერხი, რომლითაც ნიუტონის ეს ნაკლი შემდეგში გამოასწორეს დალამბერმა და ლაგრანჟმა.

კ. მარქსი ნიუტონის „ფლუქსიათა მეთოდს“ და ლაიბნიცის დიფერენციალურ აღრიცხვას თავის მათემატიკურ ხელნაწერებში

„მისტიურ დიფერენციალურ აღრიცხვას“ უწოდებს. მართლაც, ნიუტონის „მომენტი“ ან არ არის ნული, მაშინ მისი ჩამოცილება უკანონო ოპერაციაა, ანდა თუ ის ნულია, მაშინ გამოსახვიდან

$$(x+\dot{x}o)^n - x^n = nx^n(\dot{x}o) + \cdots$$

ვღებულობთ

$$o = 0.$$

ყოველ შემთხვევაში რაღაც სასწაულია, რომ შედეგი მიიღება სავსებით ზუსტი. ამრიგად, ნიუტონის მომენტს არ შეუძლია იყოს ნული და არ იყოს ნული და ნიუტონს (ლაიბნიცსაც) სხვა არაფერი დარჩა გარდა იმისა, რომ თავის „მომენტს“ მიაწეროს განსაკუთრებული არსებობა, როგორც სხვა მათემატიკური სიდიდეებისაგან განსხვავებულ მისტიურ არსებას.

ამის შესახებ კ. მარქსი წერს: „იმათმა არ იცოდნენ, რომ ეს მათემატიკურად სწორი შედეგი დამყარებულია იმდენივე მათემატიკურად ყალბ საფუძველსა და წინადადებაზე, სახელდობრ დასაწყისიდანვე $x_1 - x = \Delta x$-ის შეცვლით $x_1 - x = \dot{x}$-ით ანუ $x_1 - x = dx$-ით... ასე რომ, თვითონ სწამდათ მისტიური ხასიათი ახლად აღმოჩენილი აღრიცხვისა, რომელიც იძლეოდა სწორ (ამასთანავე გეომეტრიულ გამოყენებაში პირდაპირ გასაოცარს) შედეგს მათემატიკურად არასწორი გზით...

მისტიური დიფერენციალური აღრიცხვა $x+\Delta x$-ს ერთბაშად გადააქცევს $x+dx$-ად ან, ნიუტონის მიხედვით, $x+\dot{x}$-ად. ამის გამო ჩვენ მარჯვენა, ალგებრულ მხარეზეც ერთბაშად ვღებულობთ ბინომებს $x+dx$ ანუ $x+\dot{x}$, რომლებსაც შემდეგ ექცევიან, როგორც ჩვეულებრივ ბინომებს. Δx-ის გადაქცევა dx-ად ანუ $\dot{x}$-ად a priori იგულისხმება ნაცვლად იმისა, რომ გამოყვანილ იქნას მათემატიკურად; აქედან — წევრების შემდგომი მისტიური უკუგდება ბინომის დაშლაში“ (იხ. კ. მარქსი, მათემ. ხელნაწერი., გვ. 24 და 65, ჟურნ. «Под знаменем марксизма» 1933 г.).

ამ დეფექტის თავიდან აცილებისათვის მარქსი გვაძლევს ნაწარმოების თავის მეთოდს. ვთქვათ, მოცემულია $y=x^3$ ფუნქცია. მარქსი იღებს არგუმენტისა და ფუნქციის ნამატებს, როგორც ახალსა და ძველ მნიშვნელობათა შორის სხვაობებს $x_1 - x$ და $y_1 - y$; შეფარდებას $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ ის უწოდებს „წინასწარ წარმოებულს“ და წარმოადგენს მას შემდეგი სახით:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1 - x^3}{x_1 - x} = \frac{(x_1 - x)(x_1^2 + xx_1 + x^2)}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2;$$

„წინასწარი წარმოებული“ $x_1^2 + x_1 x + x^2$ არსად არ შეიცავს მზა სახით საბოლოო წარმოებულს $3x^2$. ეს უკანასკნელი მიიღება, თუ $x_1 = x$.

ნიუტონის „ფლუქსიისაგან ფლუქსია“ შეესაბამება ჩვენს მეორე რიგის წარმოებულს. ამ შემთხვევაში ნიუტონი x-ს თვლის დამოუკიდებელ ცვლადად და ღებულობს $\dot{x}=1$. მაშასადამე, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}$; ამ სიდიდეს ის z-ით აღნიშნავს და მის ფლუქსიას — $\dot{z}$-ით. ფლუქსიისაგან ფლუქსიის აღსანიშნავად ის ხმარობს ორ წერტილს, ასე რომ, $\ddot{y}$ შეესაბამება ჩვენს $\frac{d^2y}{dx^2}$-ს.

დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების საქმეში პირველი ნაბიჯი ნიუტონმა გადადგა. თავის ნაშრომში „მრუდების კვადრატურის შესახებ“ ნიუტონი სვამს შექცეულ ამოცანას: „მოიძებნოს მოცემული ფლუქსიის ფლუენტი“, ესე იგი, თუ მოცემულია განტოლება:

$$M\dot{x} + N\dot{y} = 0,$$

უნდა მოიძებნოს საწყისი გამოსახვა, რომელიც x და y-ს შეიცავს და რომლისაგან მიღებულია ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი. ნიუტონი განიხილავს მხოლოდ იმ შემთხვევებს, როდესაც M და N წარმოადგენენ x და y-ის მთელ რაციონალურ ფუნქციებს. გამოსახულების

$$\int Mdx + \int Ndy$$

ორივე ინტეგრალში შემავალი წევრები მან მხოლოდ ერთხელ აიღო. თუ $M\dot{x} + N\dot{y}$ მართლაც შექმნილია x და y-ის შემცველი გამოსახულების დიფერენცირებით, მაშინ ეს გამოსახულება წარმოადგენს სწორედ იმას, რომელსაც ვეძებდით. ამასთანავე ნიუტონი აღნიშნავს, რომ ასეთი გამოსახულება ყოველთვის როდი არსებობს და მოძებნილი შედეგი ყოველთვის უნდა შემოწმდეს. იმ შემთხვევებში, როდესაც, ამ ხერხის გამოყენება შეუძლებელია, ნიუტონი მიმართავს მწკრივად დაშლას. ის ჯერ ამოხსნის $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$-ის ანდა $\dot{y}$-ის მიმართ მოცემულ განტოლებას, რომელიც ფლუქსიებს შეიცავს, ამასთან დაუშვებს, რომ $\dot{x}=1$. თუ ამგვარად მიღებული გამოსახულება არ არის მთელი და რაციონალური x და y-ის მიმართ, მაშინ ნიუტონი ასეთ

გამოსახულებას წარმოადგენს უსასრულო სახით მწკრივად დაშლის გზით დადებითი და ზრდადი მაჩვენებლებით x და y-თან. თუ ამის უშუალოდ გაკეთება შეუძლებელია, მაშინ დაშლა უნდა მოხდეს ცვლადთა გარდაქმნის გზით. ეს გარდაქმნა წარმოადგენს მხოლოდ ახალი ცვლადების შემოყვანას. განტოლების უფრო მოხერხებულ სახემდე მიყვანის შემდეგ რომ მიღებულ იქნას y-ის დაშლა x-ის ზრდადი ხარისხების მიხედვით, ნიუტონი ხანდახან სარგებლობს განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.

ნიუტონი ამბობს, რომ ფლუქსიათა მეთოდით მან იპოვა უმნიშვნელოვანესი დებულებები თავისი ნაშრომისა: „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები". ამ შრომამ, რომელიც გამოვიდა 1686 — 1687 წლებში, ნიუტონს სახელი გაუთქვა მთელს მსოფლიოში. იგი მათემატიკურად ამტკიცებს იმას, რომ კეპლერის კანონები აღწერენ პლანეტების სწორედ ისეთ მოძრაობას, როგორიც უნდა წარმოებდეს მზის ცენტრისაკენ მათი მიზიდულობის შედეგად ისეთი ძალით, რომელიც შექცეულად პროპორციულია მანძილების კვადრატისა, და რომ მთვარის მოძრაობა და სიმძიმის ძალა დედამიწის ზედაპირზე პოულობენ ისეთივე ზოგად ახსნას დედამიწის ცენტრისაკენ მიზიდულობაში. „საწყისებმა", ეყრდნობოდა რა უსასრულო მცირეთა აღრიცხვას, იმავე დროს დიდად შეუწყო ხელი ამ აღრიცხვის განვითარებას. ნიუტონმა თავის „საწყისებს" საფუძვლად დაუდვა უკვე დამზადებული „ფლუქსიათა მეთოდი". „საწყისებში" ნიუტონი სისტემატურად იყენებს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის მეთოდს და აწესებს ზოგად ცნებებს, რომლებიც შეესაბამებიან ზღვართა თეორიის ძირითად ცნებებს; მაგალითად, ნიუტონს მოჰყავს წინადადება, რომელიც მათემატიკური ენით ნიშნავს იმას, რომ რკალის სიგრძისა და მისი მომჭიმავი ქორდის სიგრძის ფარდობის ზღვარი, როცა რკალის ერთი ბოლო წერტილი მეორე წერტილისაკენ მისწრაფვის, ერთის ტოლია. შეფარდების ზღვარს ნიუტონი უწოდებს „უკანასკნელს" ან „პირველ შეფარდებას", ხოლო ცვლადი სიდიდის რომელიმე ზღვარისაკენ მიახლოებას ახასიათებს იმით, რომ მათ შორის სხვაობა შეიძლება გავხადოთ ნებისმიერად მოცემულ სიდიდეზე ნაკლები.

2. გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცი

გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცი, წარმოშობით პოლონელი, დაიბადა ლაიპციგში 1646 წელს. 6 წლისას გარდაეცვალა მამა. ბავ-

შეობიდანვე დაეწაფა წიგნების კითხვას მამის ბიბლიოთეკაში; განსაკუთრებული ინტერესით კითხულობდა ძველ ავტორებს.

1661 წელს ლაიბნიცი შევიდა ლაიპციგის უნივერსიტეტის იურიდიულ ფაკულტეტზე. სტუდენტობის დროს დეკარტის შრომების კითხვამ ლაიბნიცი მიიყვანა იმ გადაწყვეტილებამდე, რომ ზურგი შეექცია სასკოლო სქოლასტიკისთვის და დაეწყო ბუნების დიდი მექანიზმისა და მისი მათემატიკური საფუძვლების შესწავლა. 17 წლისამ დისერტაცია დაიცვა ბაკალავრის ხარისხის მოსაპოვებლად თემაზე: „მეტაფიზიკური მსჯელობა ინდივიდუაციის შესახებ". სამი წლის შემდეგ უკვე ფილოსოფიის მაგისტრი იყო, ხოლო 1667 წელს მიიღო „ორივე სამართლის დოქტორის" ხარისხი.

მაშინდელი ერთ-ერთი პოლიტიკური მოღვაწის — ბოინებურგის — გავლენით ლაიბნიცი პოლიტიკით დაინტერესდა. ფრანკფურტში ყოფნისას, 1671 წელს, მან დაწერა ნაშრომი მოძრაობათა შესახებ მოძღვრებაზე, რომლის ერთი ნაწილი — კონკრეტული მოძრაობის შესახებ — გადაუგზავნა სამეცნიერო საზოგადოებას, რომელსაც ერქვა „სამეფო საზოგადოება", ხოლო მეორე ნაწილი — აბსტრაქტული მოძრაობა — გადაუგზავნა პარიზის აკადემიას. ამ ნაშრომის დაწერისას ლაიბნიცს ეგონა, რომ მან პერპეტუმ მობილე იპოვა, რაც მოწმობს იმას, თუ რამდენად სუსტად იცოდა მაშინ მექანიკა. უფრო მომწიფებულ ასაკში კი ლაიბნიცი, თანახმად მისი მოძღვრებისა ცოცხალი ძალის შენარჩუნების შესახებ, მთელ სამყაროს განიხილავდა როგორც პერპეტუმ მობილეს.

1672 წელს ლაიბნიცი პარიზში ჩავიდა როგორც კურფიურსტი მაინცელის დიპლომატიური ელჩი. მას დავალებული ჰქონდა ისე ემოქმედნა, რომ გამოეწვია საფრანგეთის თავდასხმა ეგვიპტეზე და ამის შედეგად — საფრანგეთსა და ოსმალეთს შორის ომი. მაგრამ ეს საქმე არ მოხერხდა, სამაგიეროდ პარიზში ყოფნისას ლაიბნიცს საშუალება მიეცა დაახლოებოდა საფრანგეთის მეცნიერებას, რომელიც მაშინ განიცდიდა თავის ბრწყინვალე პერიოდს. აქ მას ჰიუგენსმა აჩუქა თავისი გამოქვეყნებელი ნაშრომი ქანქარიანი საათის შესახებ, რომელიც აგრეთვე შეიცავდა მნიშვნელოვან აღმოჩენებს ინფინიტეზიმალური გეომეტრიის დარგში. როდესაც ლაიბნიცი ამ ნაშრომს გაეცნო, პირველად შეამჩნია, რომ მან მათემატიკა კარგად არ იცის და გადაწყვიტა მისი საფუძვლიანად შესწავლა. ჰიუგენსმა მას მიუთითა მთელ რიგ შესაფერის წიგნებზე, კერძოდ პასკალის ნაშრომებზე. ლაიბნიცმა ღრმად დაამუშავა დეკარტისა და კავალიერის გეომეტრიები და ვალისის ნაშრომები.

1673 წელს ლაიბნიცს შემთხვევა მიეცა მოკლე ვადით გამგზავრებულიყო ინგლისში, სადაც იწყებოდა მეცნიერების არანაკლები აყვავება. აქ ლაიბნიცს საშუალება მიეცა სამეფო საზოგადოებისათვის ეჩვენებინა არითმომეტრი, რომელიც მან გამოიგონა იმის შემდეგ, რაც პასკალის არითმომეტრს გაეცნო. ლონდონში ლაიბნიცმა ვერ შეძლო ნიუტონის შრომების გადათვალიერება უსასრულო მწკრივების შესახებ, რადგან მაშინ კოლინი იქ არ იყო; აქ ლაიბნიცმა ბაროუს ლექციები იშოვა და შეუდგა მათ შესწავლას. ლაიბნიცმა იმდენად კარგი შთაბეჭდილება მოახდინა ინგლისელ მეცნიერებზე, რომ ის აირჩიეს სამეფო საზოგადოების წევრად.

დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვათა გამოგონებაში ლაიბნიცისათვის გამოსავალ წერტილს წარმოადგენდა პასკალის უსასრულოდ კლებადი სამკუთხედი; იმ მოვლენამ, რომ ამ სამკუთხედის გვერდების ნულისაკენ მისწრაფებისდა მიუხედავად მათ შეფარდებას აქვს განსაზღვრული ზღვრული მნიშვნელობანი, რომლებიც მსგავსი სამკუთხედებიდან მიიღებიან, ლაიბნიცს დაებადა აზრი, გამოეყენებინა ასეთი სამკუთხედი მხების მოძებნის სრულიად ზოგადი ამოცანისადმი. ამ სამკუთხედს მან „დამახასიათებელი სამკუთხედი" უწოდა და, გამოდიოდა რა მისგან, 1673 წელს გამოიმუშავა მხებთა ზოგადი მეთოდი. მალე მან შეამჩნია აგრეთვე ურთიერთშექცეულობა იმ ოპერაციებისა, რომლებსაც შემდეგში დიფერენცირება და ინტეგრება ეწოდა. 1675 წელს ლაიბნიცმა შემოიღო ნიშანი d იმ სიდიდის უსასრულოდ მცირე ნამატის აღსანიშნავად, რომლის წინ ის იყო დასმული dx, dy; ამავე დროს მან შემოიღო ახლანდელი ინტეგრალის ნიშანი $\int$ შენიშვნით: „$\int$ ნიშნავს ჯამს, d — სხვაობას".

დამახასიათებელი სამკუთხედის ხმარებაში ლაიბნიცის მეთოდი ახლოა ბაროუს მეთოდთან, რაც ლაიბნიცმა თავის დროზე ვერ შეამჩნია, მაგრამ იგი თავისი გამოკვლევებით ბაროუზე გაცილებით წინ წავიდა.

პარიზში ყოფნის დროს ლაიბნიცი ჩირნჰაუზთან ერთად ამუშავებდა ისეთი მრუდე წირების მოძებნის მეთოდს, რომელთა კვადრატურა შესაძლებელია და მიიღო იმ მრუდების განტოლებები სწორედ იმ ოპერაციის საშუალებით, რომელსაც ჩვენ დიფერენცირებას ვუწოდებთ; მისთვის ცხადი იყო, რომ დიფერენცირება არის საწყისი ოპერაცია, რომელზედაც უნდა აიგოს მისი შექცეული კვადრატურა ანუ ინტეგრება. ეს საკითხი ნიუტონს ათი წლის წინათ ჰქონდა გაგებული, რაც მისივე შრომიდან ჩანს, რომელიც კოლინთან ინახებოდა.

ლაიბნიცისათვის დამახასიათებელია ის, რომ იგი სარგებლობს საგანგებო სიმბოლოებით და მათ უკავშირებს გარკვეულ წესებს. ლაიბნიცი იმდენად შორს წავიდა ამ საქმეში, რომ არავითარ ვალდებულებას არ გრძნობდა ნიუტონის წინაშე იმაში, რაც თავის დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვას განსაკუთრებულ ღირებულებას ანიჭებდა. თავის ნაშრომებს ლაიბნიცი აქვეყნებდა ჟურნალში „Acta Eruditorum" („მეცნიერთა შრომები"), რომელიც 1682 წლიდან ლაიპციგში გამოდიოდა; ამ ჟურნალში გამოქვეყნდა მისი შრომები: „ნაკვთების სიდიდეთა მოძებნის შესახებ", „ახალი მეთოდი მაქსიმუმებისა და მინიმუმების მოძებნის შესახებ", „ფარული გეომეტრიისა და განუყოფელ უსასრულოთა ანალიზის შესახებ" და სხვა. ამ უკანასკნელში მან პირველად იხმარა ინტეგრალის ნიშანი, ხოლო სიტყვა „ინტეგრალის" ხმარება ლაიბნიცმა დაიწყო იმის შემდეგ, რაც ის შემოიღო იაკობ ბერნულიმ.

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის გამოყენება, რომელიც თვითონ ლაიბნიცს ეკუთვნის, ვერც მრავალნაირობით და ვერც მოცულობით ვერ შეედრება ნიუტონის„ საწყისებში" მოცემულ გამოკვლევებს. ეს გამოკვლევები თავისი ბუნებით ინფინიტეზიმალურია, თუმცა შეუძლებელი იყო მათი წარმოდგენა აღრიცხვის მზა მეთოდის გამოყენებით. სწორედ ამით აიხსნება, რომ ნიუტონი იმ საქმეში განცალკევებული რჩებოდა: მისი თანამედროვეები კარგად ერკვეოდნენ მის უაღრესად მნიშვნელოვან შედეგებში, მაგრამ მაინც არ ჰქონდათ იმის საშუალება, რომ თვითონ ეწარმოებინათ ესა თუ ის გამოკვლევა. ლაიბნიცმა კი, პირიქით, სწრაფად შეძლო სკოლის შექმნა. იგი აგრეთვე ფუძემდებელია დეტერმინანტთა თეორიისა, რაც ჩანს ნაშრომიდან „ალგებრაში ახალი წინსვლა". ლაიბნიცმა დააწესა მათემატიკაში უწყვეტობის პრინციპი. მან შექმნა ზოგადი სიმბოლოები სინთეზური გეომეტრიისათვის; ამ საკითხს ნაწილობრივად მიეძღვნა მისი ნაშრომი „გეომეტრიული დამახასიათებელი".

1700 წელს ლაიბნიცი აირჩიეს პარიზის აკადემიის წევრად და იმავე წელს დააარსა აკადემია ბერლინში. მუშაობდა აგრეთვე მსოფლიო აკადემიის დაარსების გეგმაზე.

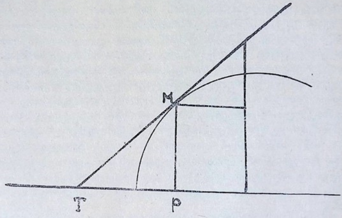
ლაიბნიცი იყო არა მარტო მათემატიკოსი, არამედ ფილოსოფოსი, ისტორიკოსი, იურისტი, ენათმეცნიერი და პოლიტიკური მოღვაწე. თავისი სიცოცხლის უკანასკნელი ორი წელი ყველასაგან მიტოვებულმა, ავადმყოფობაში გაატარა. 1716 წელს ლაიბნიცი გარდაიცვალა ჰანოვერში.

თავისი დიფერენციალური აღრიცხვა ლაიბნიცმა პირველად გამოაქვეყნა ნაშრომში: „უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობათა მო-

ძებნის და მხებების განსაზღვრის ახალი მეთოდი უცვლელი წილადისა და ირაციონალურ სიდიდეთა შემთხვევაში და მათი გამოთვლის სპეციალური ხერხი“. დაიბეჭდა იგი 1684 წელს „აქტა ერუდიტორუმში“ („Acta Eruditorum“).

ლაიბნიცის ცნობილი ეს ნაშრომი შეიქნა მათემატიკის განვითარებაში ახალი ხანის დასაწყისი. შრომის სულ 6 გვერდზე მეტად მოკლედაა გადმოცემული დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი პრინციპები, არ არის მოცემული არც განსაზღვრები და არც დამტკიცებები. ნაშრომი ატარებს შავად დაწერილის ხასიათს და სტოვებს ისეთ შთაბეჭდილებას, თითქოს ავტორი ჩქარობდეს, რომ აღმოჩენაში პირველობა შეინარჩუნოს.

ლაიბნიცის მოკლედ მოცემული განსაზღვრა შემდეგში მდგომარეობს: თუ მრუდის M წერტილზე MT მხებს გავავლებთ (ნახ. 30) და თუ M წერტილის კოორდინატებია x და y, მაშინ ნებისმიერ მონაკვეთს ვუწოდებთ dx-ს და მეორე მონაკვეთს, რომელიც ისე შეეფარდება dx-ს, როგორც y შეეფარდება PT-ს, ვუწოდებთ dy-ს; აქვე შენიშნავს, რომ dx და dy „მეყისებური სხვაობებია და „ორ წერტილს შორის უსასრულოდ მცირე სხვაობას აღნიშნავს“ dv-თი.



ნახ. 30

1686 წელს გამოქვეყნებულ თავის ნაშრომში: „ფარული გეომეტრიისა და განუყოფელთა ანალიზისა და სასრულ სიდიდეთა შესახებ“ ლაიბნიცმა პირველად გამოაქვეყნა თავისი ინტეგრების

ხერხის მოკლე მითითებები. როგორც აღვნიშნეთ, ამ ნაშრომში იხმარა მან პირველად ინტეგრალის ნიშანი $\int$. დასაწყისში ის ხმარობდა სიტყვა „omnia"-ს, ესე იგი „ყველა"; მაგალითად, განტოლება შემდეგნაირად აქვს ჩაწერილი:

$$\text{omn. } \overline{xl}\, \text{II}\, x.\ \overline{\text{omn. } l} - \overline{\text{omn. omn. } l}\ ;$$

აქ ტოლობის ნიშნის ნაცვლად ნახმარია II და ჩვენი y-ის ნაცვლად—l. მაგრამ შემდეგ ლაიბნიცი ამბობს, რომ სიტყვა „omnia"-ს ნაცვლად $\int$ ნიშნის ხმარება ჯობიათ და იგივე განტოლება ასე ჩაწერა:

$$\int xl = x \int l - \int\int l.$$

აქვე ლაიბნიცმა დაადგინა შემდეგი:

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}, \quad \int \frac{a}{b}\, x = \frac{a}{b} \int x \text{ და}$$

$$\int (u + v) = \int u + \int v.$$

ამ ნაშრომში ლაიბნიცმა მოკლედ და ნათლად გადმოსცა მის მიერ დამუშავებული წესები, რომლებიც დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალის dv ნიშნის მიხედვით საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ, იზრდება თუ კლებულობს ეს დამოუკიდებელი ცვლადი; ასევე, მეორე დიფერენციალის ddv საშუალებით შეიძლება ვიმსჯელოთ იმ მრუდის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შესახებ, რომელიც გამოსახულია განტოლებით x და y შორის. ამის საშუალებით ლაიბნიცისათვის შესაძლებელი ხდება $dv = 0$ საერთო პირობით განსაზღვრული მაქსიმუმი გავარჩიოთ მინიმუმისაგან; აქედანვე გამომდინარეობს, რომ პირობა $ddv = 0$ განსაზღვრავს გადაღუნვის წერტილს.

მიუხედავად იმისა, რომ ლაიბნიცმა მისი შედეგები დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამოგონების საქმეში გამოაქვეყნა სათანადო წესების დაუმტკიცებლად, ისინი უდავოდ იქნენ მიღებული. მოთხოვნილება ისეთ ალგორითმში, როგორიც იყო ლაიბნიცის მიერ მოცემული, მეტად დიდი იყო. მისი დიფერენციალური აღრიცხვა ძალიან მალე (1685 წელს) ინგლისშიც ცნობილი ხდება და საფუძვლად ედება იმავე წელს გამოქვეყნებულ შრომებს, მიუხედავად იმ მწვავე დავისა, რომელიც გაჩაღდა ნიუტონის ინგლისელ მოწაფეებსა და დასავლეთ ევროპაში ლაიბნიცის მიმდევ-

რებს შორის აღმოჩენის პირველობის გარშემო. ამ დავის შედეგად ზოგი ინგლისელი მათემატიკოსი XVIII საუკუნის დამლევამდეც კი ხმარობდა წარმოებულისა და დიფერენციალის ნიუტონის აღნიშვნებს.

ლაიბნიცმა ყველა ნაშრომის გამოქვეყნება ვერ მოასწრო. ზოგი მათგანი მისი სიკვდილის შემდეგ გამოსცეს. მათ შორის მეტად საყურადღებოა წრის „არითმეტიკული კვადრატურა", რომელიც შემდეგ ჰერგარდტმა გამოაქვეყნა („ლაიბნიცის ნაშრომების კრებული"). ამ ნაშრომში ლაიბნიცი გვაძლევს

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{1}$$

ტოლობის დამტკიცებას. „არითმეტიკულ კვადრატურაში" ლაიბნიცი გულისხმობს წრის ფართობის განსაზღვრას რაციონალური რიცხვების საშუალებით. ამისათვის მან აიღო წრე, რომლის რადიუსი=1; ჯერ იპოვა $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$-ის დაშლა მწკრივად და შემდეგ $x=1$ დაშვებით იპოვა ზემოთ მოყვანილი π-ის გამოსათვლელი ფორმულა.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, საერთოდ ლაიბნიცის ნაშრომებისათვის დამახასიათებელია მოცემული წესების დაუმტკიცებლად გადმოცემა და ერთგვარი ბუნდოვანება. (1) ტოლობა ლაიბნიცს დამტკიცებული აქვს საკმაოდ გრძელი გზით.

3. XVII საუკუნის ევროპის სხვა მათემატიკოსების შესახებ

დ ა ნ ი ე ლ ი შ ვ ე ნ ტ ე რ ი (1585—1636) დაიბადა ნიურენბერგში და მუშაობდა ალტდორფში მათემატიკისა და აღმოსავლური ენების პროფესორად. მას ეკუთვნის შრომები „პრაქტიკული გეომეტრია" და „ფიზიკა-მათემატიკური გართობანი".

ტ ო მ ა ს ფ ი ნ კ ე დაიბადა 1561 წელს, ფლენსბურგში (დანია). 1591 წლიდან მუშაობდა ჯერ მათემატიკის, შემდეგ ფარმაციის პროფესორად. გარდაიცვალა 95 წლის. თავისი ნაშრომები მათემატიკაში მან საზღვარგარეთ სწავლის პერიოდში დაწერა.

ტ. ფინკეს ნაშრომებიდან ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია მისი „მრგვალის გეომეტრია". ამ ნაშრომიდან ჩანს, რომ პირველად ფინკემ გამოთქვა ტანგენსების თეორემა და გადმოცემულია მოძღვრება წრისა და სფეროს შესახებ ბრტყელი და სფერული ტრიგონომეტრიის ჩართვით: თუ რომელიმე სამკუთხედში მოცემულია ორი

გვერდი და მათ შორის კუთხე, მაშინ ცნობილია მისი დანარჩენი ორი კუთხის ჯამი და მათი სინუსების შეფარდება, ხოლო პტოლომეოსს (II საუკ. ჩვ. წ. აღ.) უკვე ამოხსნილი აქვს ორი კუთხის მოძებნის ამოცანა მათი ჯამისა და სინუსების შეფარდების საშუალებით. რეგიომონტონუსმა (1464 წელს) კი ეს ამოცანა კიდევ უფრო წინ წასწია. ფინკე მათ ორივეს იხსენიებს, მაგრამ იმავე დროს იძლევა თავის ახალ ამოხსნასაც. მისი ამოხსნის ორიგინალობა იმაშია, რომ მან ეს ამოცანა გამოიყენა ირიბკუთხოვანი სამკუთხედის შემთხვევაში, რომლისათვის რეგიომონტონუსი იძლევა არამოხერხებულ ამოხსნას სიმაღლის დაშვების გზით.

ფინკეს ეკუთვნის სახელწოდებების „tangens“ და „secans“-ის შემოყვანა (ლათინურად ეს სიტყვები ნიშნავს აგრეთვე მხებსა და გამკვეთს, seco — გაკვეთა).

კოფუნქციათა სახელწოდებების (cosinus, cotangens, cosecans) ხმარება პირველად დაიწყო ედმუნდ გუნტერმა (1581 — 1626). კოსინუსსა და კოტანგენს საშუალო საუკუნეების არაბები (ტანგენსი და კოტანგესი გამოგონებულია შუა აზიაში მცხოვრები არაბული მათემატიკური სკოლის მუსულმანი მათემატიკოსების მიერ) უწოდებდნენ „შევსებითი რკალის სინუსს“ და „შევსებითი რკალის ტანგენსს“ („ჯეიბ თამამ ან ყოუს“ და „ზილ თამამ ან ყოუს“). ევროპელებმა ამ ორი ფუნქციის არაბული სახელწოდებები გადათარგმნეს ლათინურ ენაზე: complementi sinus (შევსებითის სინუსი) და complementi tangens (შევსებითის ტანგენსი). გუნტერმა ნაცვლად complementi sinus-ისა დაიწყო ხმარება შემოკლებულად ჯერ co. sinus-ის და შემდეგ კი — cosinus-ის. ამგვარად წარმოიშვა სახელწოდებები — cotangens და cosecans. შემოკლებული აღნიშვნების sin, cos ხმარება დაიწყო იოჰან ბერნულიმ.

ო ლ ა ფ რ ო მ ე რ ი (1644 — 1710) დანიელი ასტრონომი და მათემატიკოსი იყო. თავის სამშობლოში მან მრავალი ასტრონომიული სამუშაოები შეასრულა; ფრანგ პიკართან ერთად ხელმეორედ განსაზღვრა ურანიენბურგის გეოგრაფიული მდებარეობა. 1672 წელს რომერი პარიზში გაემგზავრა, რათა თვით ეზრუნა ტიხო ბრაჰეს ნაშრომების დაბეჭდვაზე. პარიზში მან ასისტენტის ადგილი მიიღო ობსერვატორიაში, იქ რომერი დაკვირვებებს აწარმოებდა მუშთარის თანამგზავრებზე, რამაც ის მიიყვანა სინათლის სიჩქარის განსაზღვრამდე. ეს აღმოჩენა რომერმა წარუდგინა პარიზის მეცნიერებათა აკადემიას, სადაც ის იმყოფებოდა მოქმედ წევრად; ამასთან ერთად ის ინჟინრადაც მუშაობდა. 1681

წელს როემერი სამშობლოში დაბრუნდა და მიიღო პროფესორობა ასტრონომიაში. მისმა ბრწყინვალე ნიჭმა ტექნიკაში სამშობლოში გამოყენება ჰპოვა და მას მთელ რიგ საინჟინრო სამუშაოებს ავალებდნენ. მიუხედავად ამისა, როემერი მაინც პოულობდა საკმაო დროს ახალი ასტრონომიული ინსტრუმენტების გამოგონებისათვის. ამ ინსტრუმენტებმა დღემდე შეინარჩუნეს თავიანთი მნიშვნელობა. როემერის საკუთარი ინსტრუმენტები და დიდი ნაწილი მისი დაკვირვებებისა დაიღუპა 1728 წელს კოპენჰაგენის დიდი ხანძრის დროს.

პ ა ვ ლ ე გ უ ლ დ ი ნ ი (1577 — 1643) დაიბადა სენ-გალენში (შვეიცარია). 20 წლის ასაკში იეზუიტი გახდა. 1609 წლიდან ასწავლიდა მათემატიკას იეზუიტთა სკოლებში ჯერ რომში და შემდეგ გრაცში, სადაც ის გარდაიცვალა. გამოკვლევებს აწარმოებდა ისეთ დარგში, რომელიც ახლა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვას ეკუთვნის და ამ საკითხებში ოპოზიციაში იყო კეპლერთან და კავალიერისთან. გულდინმა დაწერა ოთხტომიანი ნაშრომი „სიმძიმის ცენტრის შესახებ“, რომელიც მის ნაშრომთაგან ყველაზე მთავარია. გულდინმა ხელმეორედ აღმოაჩინა პაპოსის (IV საუკ.) თეორემა: „იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შექმნილია ბრტყელი ნაკვთის ბრუნვით ამ ნაკვთის სიბრტყეში მდებარე რომელიმე წრფის გარშემო, ტოლია ნაკვთის ფართობისა და მისი სიმძიმის ცენტრით შემოხაზული წრეწირის სიგრძის ნამრავლისა“.

ა ლ ბ ე რ ტ ჟ ი რ ა რ ი (1595 — 1633) დაიბადა ლოტარინგიაში, მაგრამ უფრო მეტ ხანს ცხოვრობდა ჰოლანდიაში; იქ ის იმალებოდა როგორც პროტესტანტი. ჟირარი გამოჩენილი მათემატიკოსი იყო. მისი მთავარი ნაშრომია „ალგებრაში ახალი აღმოჩენა“, რომელიც შეიცავს ახალ არსებით შედეგებს. მან ტრიგონომეტრიაშიც გამოაქვეყნა ნაშრომები.

კ ლ ო დ მ ი დ ო რ ჟ ი (1585 — 1647) ფრანგი მათემატიკოსია. იყო მაღალი წოდების სახელმწიფო მოხელე, მაგრამ თანამდებობა ეჭირა ნომინალურად და ცხოვრობდა საკუთარი სახსრებით. მიდორჟი დეკარტის მეგობარი იყო და ეხმარებოდა დიოპტრიული ცდებისთვის მინების დამზადებაში. მისი მთავარი ნაშრომი „თხზულებანი კონუსური კვეთების შესახებ“ დაიბეჭდა 1631 — 1639 წლებში. ამ ნაშრომის გაგრძელება, როგორც ჩანს, დაკარგულა. ხელნაწერის სახით ჩვენამდე მოაღწია მისმა მრავლად შედგენილმა ამოცანებმა, რომლებიც შეეხებიან კონუსური კვეთების თეორიას; ამ ამოცანების ნაწილი ამოიხსნება სახაზავისა და

ფარგლის საშუალებით, ნაწილი კი უნდა ამოიხსნას მიახლოებით. ამ ამოცანებიდან კ. მიდორჯი ზოგიერთის ამოხსნას იძლევა.

ჟილ პერსონი (1602 — 1675) დაიბადა რობერვალში (საფრანგეთი) და ამის გამო სახელადაც რობერვალი ერქვა. მუშაობდა მათემატიკის პროფესორად საფრანგეთის კოლეჯში და იყო აგრეთვე საფრანგეთის აკადემიის ძირითადი წევრი. მისი უმნიშვნელოვანესი ნაშრომები დაბეჭდილია აკადემიის შრომებში. მეტად მნიშვნელოვანია რობერვალის გამოკვლევები უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დარგში, მაგრამ ნიჭთან ერთად რობერვალს ახასიათებდა მედიდურობაც, რის გამო ხშირად ჩხუბი მოსდიოდა იმათთან, ვინც გაუსწრებდა მას აღმოჩენებში. დეკარტი რობერვალს ხშირად ირონიით იხსენიებს, როგორც მათემატიკის ოფიციალურ წარმომადგენელს და კიდევაც დასცინის მას იმის გამო, რომ რობერვალმა მასწავლებლობის დროს არა თუ სათანადო ადგილი დაუთმო დეკარტის ახალ შეხედულებებს, არამედ გააკრიტიკა მისი „გეომეტრიის“ ზოგიერთი ადგილი. ზოგჯერ რობერვალიც მართალი იყო.

გრიგორი სენ-ვენცენტიუსი (1584 — 1667) დაიბადა ბრიუგში (ბელგიაში), სწავლობდა რომში და შემდეგ პრაღაში მუშაობდა პროფესორად. პრაღის დაპყრობის დროს დაჰკარგა თავისი მათემატიკური ხელნაწერები. მალე ის ვენაში გადავიდა, შემდეგ კი თავის სამშობლოში დაბრუნდა და სიკვდილამდე მუშაობდა ქ. გენტში. აქ სენ-ვენცენტიუსმა გამოსცა დიდი ნაშრომი: „გეომეტრიული ნაშრომი“. ნაშრომში ძირითადად გამოყენებული აქვს პრაღაში დაკარგული ხელნაწერები, რომლებიც ათი წლის შემდეგ იპოვა. ნაშრომის მთავარ შინაარს შეადგენს წრისა და კონუსური კვეთების კვადრატურა.

ვალტერ ჩირნჰაუზი დაიბადა 1651 წელს პერილში (გერმანიაში), მემამულის ოჯახში. სწავლა-განათლება მიიღო ჰერლიცში და აქვე თვითონ სწავლობდა მათემატიკას. 1668 წლიდან სწავლა გააგრძელა ლაიდენში, მაგრამ მეცადინეობა შეაწყვეტინა ჭირმა და ომმა. მონაწილეობა მიიღო საფრანგეთის წინააღმდეგ ომში. თავისი ხშირი მოგზაურობის დროს ის გაეცნო მათემატიკოსებს — ნიუტონს, ჰიუგენსს და სხვებს. 1675 წელს ლაიბნიცთან ერთად პარიზში იყო. 1682 წელს ჩირნჰაუზი გახდა პარიზის აკადემიის წევრი. იმავე წელს დაბრუნდა სამშობლოში, დაქორწინდა და დაეუფლა მამის ქონებას. მიუხედავად იმასა,

რომ მას საზღვარგარეთ იწვევდნენ და სთავაზობდნენ კარგ პირობებს, მან მაინც სამშობლოში დარჩენა არჩია. მისი მათემატიკური ნაშრომები გამოიცა 1682 წლიდან ლაიპციგში ჟურნალ „აქტა ერუდიტორუმში" („Acta Eruditorum"). გარდაიცვალა 1708 წელს.

ჯ ე მ ს გ რ ე გ ო რ ი (1638—1675) დაიბადა აბერდინის მახლობლად (ინგლისში), მღვდლის ოჯახში. თავის ნაშრომში „წინ წაწეული ოპტიკა" მან პირველად წამოაყენა სარკიანი ტელესკოპის კონსტრუქციის იდეა. 1664—1667 წწ. მან პადუაში დაჰყო, სადაც გამოსცა საკუთარი ნაშრომი „წრისა და ჰიპერბოლის ჭეშმარიტი კვადრატურა". ამის შემდეგ კიდევ გამოსცა ნაშრომი: „გეომეტრიის ზოგადი ნაწილი". 1668 წელს გრეგორი გახდა სამეფო საზოგადოების წევრი.

რ ე ნ ე დ ე - ს ლ უ ზ ი (1622—1685) დაიბადა ლიეჟის (ბელგია) მახლობლად. სწავლობდა რომში და მუშაობდა ლიეჟში. უმნიშვნელოვანესი მისი ნაშრომი „შუა ადგილის მოძებნა" გამოქვეყნდა ორჯერ—ერთხელ 1659 წელს და მეორედ, უფრო გაფართოებულად, 1668 წელს. ორი საშუალო გეომეტრიულის განსაზღვრას ის განიხილავს კონუსური კვეთების საშუალებით. აქვე სლუზი განიხილავს აგრეთვე უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საკითხებს. მხებთა მეთოდი, რომელიც მას უკვე ჰქონდა 1652 წელს და უფრო გვიან გააუმჯობესა, ძალიან მოკლედ დაიბეჭდა 1672 წ. ინგლისის სამეფო საზოგადოების ჟურნალში და ისიც ამ საზოგადოების მდივნის დაჟინებითი მოთხოვნით. სლუზი იყო აგრეთვე ცნობილი ფილოლოგი, ისტორიკოსი და იურისტი. აღმოსავლური ენების კარგად ცოდნამ მას საშუალება მისცა გაცნობოდა აპოლონიუსის შრომების ახლად აღმოჩენილ, მაგრამ მანამდე დაკარგულ არაბულ გამოცემას.

მ ი შ ე ლ რ ო ლ ი (1652—1719) იყო პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილი წევრი. 1690 წელს გამოვიდა მისი „ალგებრის კურსი", რომელშიც განაზოგადა და განავითარა დეკარტის მიერ მიღებული შედეგები. მ. როლიმ გამოიყენა დეკარტის მეთოდი $x^n = a$ განტოლებისადმი და უჩვენა, რომ $\sqrt[n]{a}$ აქვს n მნიშვნელობა: თუ მაჩვენებელი n კენტია, მაშინ ყველა ფესვი, ერთის გარდა, წარმოსახვითია; თუ n ლუწია, მაშინ ან ყველა წარმოსახვითია, ანდა, გარდა ორისა, ფესვები წარმოსახვითია. ამ თეორემის დამტკიცება როლის არ მოუცია, ფაქტიურად გაარჩია მხოლოდ კუბური განტოლების შემთხვევა. ზოგადი განტოლება $x^n - 1 = 0$ გამოიკვლია ინგლისელმა მათემატიკოსმა პ. კოტესმა (1682—1716).

ვ ი ლ ი ა მ ბ რ ო უ ნ კ ე რ ი (1620 — 1684) იყო ინგლისის სამეფო საზოგადოების პირველი თავმჯდომარე. მათემატიკას სწავლობდა ოქსფორდში და რესტავრაციის შემდეგ ეკავა სხვადასხვა მაღალი თანამდებობა. მან გამოაქვეყნა ნაშრომი ჰიპერბოლის კვადრატურის შესახებ. რაც შეეხება მის ნაშრომებს რიცხვთა თეორიაში და მათ გამოყენებას უსასრულოდ უწყვეტ წილადებში, ისინი ვალისის ნაშრომებშია გადმოცემული.

ქ რ ი ს ტ ო ფ ვ რ ე ნ ი (1632 — 1723) მუშაობდა ასტრონომიის პროფესორად ლონდონის კოლეჯში, შემდეგ ასტრონომიის კათედრის პროფესორად ოქსფორდში. მან პირველად გამოთვალა ციკლოიდის რკალის სიგრძე და გამოიყენა ის ეგრეთ წოდებული კეპლერის ამოცანისადმი. 1669 წელს გამოაქვეყნა სამეფო საზოგადოების ჟურნალში თავისი ცდები დრეკადი სხეულების დარტყმის შესასწავლად. 1680 — 1682 წლებში იყო სამეფო საზოგადოების თავმჯდომარე და ამ საზოგადოების ერთ-ერთ სხდომაზე თავის სიტყვაში გადმოსცა მისი საქმიანობის სრული პროგრამა. იყო აგრეთვე ხუროთმოძღვარიც.

რ ო ბ ე რ ტ გ უ კ ი (1635 — 1703) ინგლისელი ფიზიკოსი და მათემატიკოსია, რომელმაც ადრე გამოიჩინა დიდი ნიჭი. იყო დაუღალავი ექსპერიმენტატორი და იდეებით მდიდარი მკვლევარი. გუკი ხშირად წინასწარ ხვდებოდა იმას, რასაც სხვები უფრო გვიან აფუძნებდნენ მკაცრად. ამის გამო მას ხშირად მოსდიოდა დავა სხვებთან ავტორობის შესახებ, კერძოდ ნიუტონთანაც.

ჟ ა ნ დ ე - ვ ი ტ ი (1623 — 1672) ჰოლანდიელი მათემატიკოსია. 1641 — 1645 წლებში სწავლობდა ლაიდენში, იყო რესპუბლიკანური პარტიის ლიდერი და სამშობლოს მმართველობის სათავეშიც მოექცა. ჟან-დე-ვიტს ახასიათებენ როგორც ჭკვიანს, შორსმჭვრეტელ და მოუსყიდავ პიროვნებას; ყველა ამის წყალობით მან შეძლო ბოლო მოეღო ლუდოვიკო XIV-ის ლაშქრობისათვის ჩრდილოეთის დასაპყრობად, მაგრამ, როდესაც ლუდოვიკო XIV-ს შემდგომმა გამარჯვებამ დე-ვიტის სამშობლო საფრთხის წინაშე დააყენა, დე-ვიტი ვერაგულად მოჰკლულეს მისივე თანამემამულეებმა. მათემატიკაში მისი მოღვაწეობა გამოიხატება იმაში, რომ მან მათემატიკოს ჰუდესთან ერთად დაწერა დეკარტის „გეომეტრიის" დამატებები, რომლებიც შეეხებიან განტოლებების დაყვანას და მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს.

იოჰან ჰუდე (1628 — 1704) დაიბა და ამსტერდამში. სპეციალობით იურისტი იყო, მაგრამ მათემატიკაშიც მუშაობდა. ამ უკანასკნელს იყენებდა პრაქტიკაში — მუშაობდა დამბების აგებაზე. გარდა ამისა ჰუდე საქმიან მონაწილეობას ღებულობდა ამსტერდამის საქალაქო მმართველობაში და ცხრამეტჯერ იყო არჩეული ქალაქის თავად.

თავი V

უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის შემდგომი განვითარება XVIII საუკუნეში და მისი გამოყენება მათემატიკურ მეცნიერებათა სხვადასხვა დარგში

1. ლაიბნიცის სკოლა. ლოპიტალი. ბერნულები. ტეილორი. მაკლორენი

ლაიბნიცის მოკლედ დაწერილმა ნაშრომმა, რომელიც 1684 წელს გამოქვეყნდა, ახალი ეპოქა გახსნა მათემატიკის ისტორიაში. ამ ნაშრომმა საფუძველი ჩაუყარა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ნამდვილ დასაწყისს, მოგვცა რა საკმაოდ მარტივი წესები, რომელთა კომბინაცია შემდგომი მუშაობის საშუალებას იძლეოდა. თვითონ ლაიბნიცი წინათაც ფართოდ სვამდა და ხსნიდა უსასრულოთა აღრიცხვის გაცილებით უფრო მეტ საკითხს, ვიდრე ისინი, რომლებიც მოცემულია 1684 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომში. მან განაზოგადა თავისი დიფერენციალური აღრიცხვის ზოგიერთი ძირითადი ფორმულა; მაგალითად, ერთ-ერთი ფორმულა ასეთია:

$$d^m(xy) = d^m x d^0 y + \frac{m}{1}\, d^{m-1} x dy + \frac{m\,(m-1)}{1 \cdot 2}\, d^{m-2} x d^2 y + \cdots$$

ამ ფორმულაში მან პირველად იხმარა d-თან მაჩვენებელი დიფერენცირების რიგის აღსანიშნავად, d-ს განმეორების ნაცვლად, რასაც ის წინათ აკეთებდა. ეს ფორმულა ლაიბნიცმა გადმოსცა მხოლოდ იოჰანე ბერნულისადმი გაგზავნილ წერილში. 1695 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომში მოგვცა:

$$d\,(m^n) = m^n \ln m dn + n m^{n-1} dm.$$

როდესაც ლაიბნიცმა თავისი ნაშრომი გამოაქვეყნა დიფერენცირების შესახებ, მისთვის ნათელი იყო ის მნიშვნელობა, რომელიც აქვს დიფერენცირების შედეგების დაწვრილებით შესწავლას შექცეული ოპერაციის შესასრულებლად, რომელსაც შემდეგ ძმებმა ბერნულებმა ინტეგრება უწოდეს. მოცემული დიფერენციალების ინტეგრებისათვის უკვე ლაიბნიცი ხმარობდა $\int$ ნიშანს, რომელიც მან დი-

ფერენცირების ნიშანზე უფრო ადრე შემოიყვანა. პირველი დაბეჭდილი ნაშრომი, რომელშიც მან გამოიყენა $\int$ ნიშანი, არის ეგრეთწოდებული „დაფარული გეომეტრია“. ლაიბნიცი აქვე აღნიშნავს, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ აუცილებლად საჭიროა dx მამრავლის დაწერა.

ლაიბნიცს მალე გაუჩნდნენ მიმდევრები და თანამშრომლები, რომლებმაც ენერგიული მონაწილეობა მიიღეს შემდგომ მუშაობაში. უპირველეს ყოვლისა მათ შორის აღსანიშნავია მ. ლოპიტალი (1661 — 1704). ლოპიტალი ჯერ ოფიცერი იყო და შემდეგ მთლიანად გადავიდა სამეცნიერო მუშაობაზე. იგი ადრე გაეცნო ლაიბნიცის ნაშრომს დიფერენციალურ აღრიცხვაში; 1692 წლიდან მიწერ-მოწერა ჰქონდა ლაიბნიცთან და ხვდებოდა მისი სკოლის მოწაფეს — იოჰანე ბერნულს, როდესაც ეს უკანასკნელი პარიზში ცხოვრობდა. 1696 წელს ლოპიტალმა გამოაქვეყნა ნაშრომი: „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზი“, რომელშიც სავსებით გადმოსცა ლაიბნიცის დიფერენციალური აღრიცხვა. ამ ნაშრომში ლოპიტალი თვითონვე ამბობს, რომ ის გადმოსცემს იმას, რაც მას ასწავლეს ლაიბნიცმა და ძმებმა ბერნულებმა. ამ ნაშრომში გადმოცემული ლოპიტალის შედეგები შეეხება დიფერენცირების გამოყენებას ისეთი გამოსახვის ზღვრის მოძებნაში, რომელიც $\frac{0}{0}$ სახეს ღებულობს.

XVIII საუკუნის დასაწყისიდან მათემატიკა სწრაფად ვითარდება. მათემატიკის სწრაფი განვითარება დაკავშირებულია ლაიბნიცის სკოლის მოწაფეების ენერგიულ მოღვაწეობასთან.

ნაყოფიერ მუშაობას ეწეოდნენ მათემატიკაში ქ. ბაზელის (შვეიცარია) მცხოვრებლები, ლაიბნიცის სკოლის 8 მოწაფე—ბერნულები: 1) იაკობ I (1654 — 1705), 2) იოჰან I (1667 — 1748), იაკობ I-ის ძმა და მოწაფე, ლოპიტალის მასწავლებელი, 3) ნიკოლოზ I (1687 — 1759) იაკობ I-ისა და იოჰან I ბიძაშვილი, 4) ნიკოლოზ II (1695—1726), 5) დანიელი (1700—1782) და 6) იოჰან II იოჰან I-ის შვილები, 7) იოჰან III (1744 — 1807) და 8) იაკობ II (1759 — 1789) იოჰან II-ის შვილები. თითოეულ მათგანს პროფესორის ან აკადემიკოსის თანამდებობა ეჭირა ევროპის სხვადასხვა ცენტრალურ ქალაქში (პეტერბურგში, ბერლინში, ბაზელში, პადუასა და გრონინგენში). ამათ შორის უფრო გამოჩენილი მათემატიკოსებია ძმები იაკობი და იოჰანე და უკანასკნელის შვილი დანიელი.

იაკობ ბერნული იყო ბაზელის ქალაქის საბჭოს წევრის ნიკოლოზის შვილი; დაიბადა 1654 წლის 27 დეკემბერს. მამის

რჩევით იაკობი შეუდგა თეოლოგიის შესწავლას და 1676 წელს სათანადო გამოცდების ჩაბარების შემდეგ გახდა თეოლოგი. ამასთან ერთად იგი მალულად მათემატიკასაც სწავლობდა. 1676 წელს იმოგზაურა შვეციაში, ჰოლანდიაში, ინგლისსა და საფრანგეთში; მოგზაურობის დროს რამდენიმე ხნით შეჩერდა ბორდოში. აქ იგი თავს ირჩენდა კერძო გაკვეთილების საშუალებით. აქვე შეადგინა მან მზიური ტაბულები საათისათვის. შემდეგ იაკობი ბაზელში დაბრუნდა და 1680 წელს დიდი კომეტის გამოჩენის გამო 1681 წელს კომეტების თეორია დაწერა. ჰოლანდიასა და ინგლისში მოგზაურობის დროს ის გაეცნო იქაურ მათემატიკოსებს. მოგზაურობიდან დაბრუნების შემდეგ იაკობი ბაზელში კითხულობდა ლექციებს ექსპერიმენტულ ფიზიკაში და 1687 წელს გახდა მათემატიკის პროფესორი უნივერსიტეტში.

1687 წელს იაკობმა დაამუშავა ლაიბნიცის ნაშრომი მექანიკაში. დამუშავების პროცესში მას წინ ეღობებოდა ზოგიერთი სიძნელე, რის გამო წერილობით მიმართა ლაიბნიცს მისი ახალი მეთოდის ანუ დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის მეთოდის შესახებ. მაგრამ ლაიბნიცმა პასუხი მიიღო მხოლოდ ჰანოვერიდან დაბრუნების შემდეგ, 1690 წელს. იაკობმა კი მანამდე თვითონვე დაძლია ის სიძნელეები და ლაიბნიცის მეთოდის გამოყენებით ამოხსნა „იზოქრონის“ ამოცანა, რომელიც ლაიბნიცის მიერვე იყო დასმული 1687 წელს. „იზოქრონის“ (ισόχρονος ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს „თანაბარ ხანგრძლივობას“) ანუ „ტავტოქრონის“ (ταυτόχρονος ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს „ერთდროულს“) ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: „ვიპოვოთ მრუდი, რომელზედაც ვარდნილი სხეულის მიერ დროის ტოლ შუალედებში განვლილი მანძილების პროექციები ვერტიკალურ წრფეზე ტოლნი არიან. ამ ამოცანის ამოხსნა ბერნულიმ გამოაქვეყნა 1690 წელს ჟურნალში „Acta Eruditorum“-ში.

იაკობსა და მის ძმას — იოჰანეს — შორის მწვავე დავა ჩაჩაღდა; ამ დავის მიზეზი იყო ის შუღლი, რომელიც მეცნიერული უპირატესობის ნიადაგზე ჩამოვარდა მათ შორის; უმცროსი ძმა — იოჰანე — თავის დამსახურებად თვლიდა იმას, რაც იაკობის დამსახურებას შეადგენდა; იაკობმა ეს დავა საქვეყნოდ გაახმაურა: თავის ერთ-ერთ ნაშრომში, რომელიც 1695 წელს „Acta Eruditorum“-ში დაიბეჭდა, გაილაშქრა იოჰანეს წინააღმდეგ ძალიან მძაფრად. საერთოდ, იოჰანეს შურიანობა ახასიათებდა და გამოამჟღავნა არა

მარტო მისი ძმის მეცნიერულ მიღწევათა მიმართ, არამედ საკუთარი შვილის მიმართაც კი.

იაკობი (და იოჰანეც) მრავალი მეცნიერული საზოგადოების წევრი იყო და ურთიერთობაში იმყოფებოდა ყველა ქვეყნის უაღრესად გამოჩენილ მათემატიკოსებთან. იგი იყო უაღრესად ნიჭიერი მათემატიკოსი და მისგან მოსალოდნელი იყო კიდევ მრავალი მნიშვნელოვანი ნაშრომის მიღება, რომ ნაადრევ სიკვდილს (51 წლის ასაკში) არ მოეწყვიტა ის მეცნიერული მოღვაწეობისგან. გარდაიცვალა იაკობი 1705 წლის 16 აგვისტოს. 1744 წელს დაიბეჭდა მისი ნაშრომების კრებული ორ ტომად ლათინურ ენაზე (Opera Jacobi Beroulli).

იოჰან ბერნული დაიბადა 1667 წლის 27 ივლისს ქ. ბაზელში. ის ჯერ ემზადებოდა იმისათვის, რომ ვაჭარი გამხდარიყო, მაგრამ მერე, მისი ძმის იაკობის რჩევით, დაიწყო მეცადინეობა მათემატიკასა და მედიცინაში. 1690 წელს მიიღო სამკურნალო პრაქტიკის ნებართვა და დაიწყო მოგზაურობა. რამდენიმე ხანი პარიზში დაჰყო, სადაც მასწავლებლობდა და სწავლობდა კიდეც. აქ მან დაწერა ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი, რომელიც 1742 წელს დაიბეჭდა. ის იყო პირველი სახელმძღვანელო ინტეგრალურ აღრიცხვაში. აქვე შეხვდა ის ლოპიტალს, რომელსაც დაუწყო მათემატიკის სწავლება. ლოპიტალის სიკვდილის შემდეგ იოჰანემ წამოაყენა მის მიმართ დაუსაბუთებელი ბრალდება, თითქოს ლოპიტალმა თავის ნაშრომში „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზში ისარგებლა მისგან არა მარტო ზეპირად მიღებული ცნობებით, არამედ იმ ცნობებითაც, რომლებიც მას უკვე დაწერილი ჰქონდა.

18 წლის იოჰანემ ფილოსოფიის დოქტორობა მიიღო. 1692 წელს ბაზელში დაბრუნდა და იქ 1694 წელს მედიცინის დოქტორი გახდა. შემდეგ წელს ჰიუგენსის რეკომენდაციით გრენინგენში მიიღო ფიზიკის პროფესორის ადგილი. 1705 წელს ის ისევ ბაზელში დაბრუნდა, სადაც ჯერ ბერძნული ენის პროფესორის ადგილი მიიღო და იმავე წელს, ძმის სიკვდილის შემდეგ, — მათემატიკის პროფესორის ადგილი. ამ თანამდებობაზე ის სიკვდილამდე დარჩა. ბაზელში იოჰანეს მრავალი მოწაფე ჰყავდა, მათ შორის ყველაზე უფრო ჩანდა მისი სამი შვილი და ლეონარდ ეილერი. როგორც ექიმი, იოჰანე მნიშვნელოვანი ნაშრომების ავტორია ფიზიოლოგიაში. მისი მრავალი ნაშრომი მათემატიკაში გაფანტული იყო მაშინდელ ჟურნალებში. კრამერმა ყველა ამათ თავი მოუყარა და 1742 წელს გამოსცა იოჰანე ბერნულის ნაშრომების

კრებული ოთხ ტომად. იოჰანე იყო პეტერბურგის, ბერლინის, ლონდონისა და პარიზის აკადემიებისა და სამეცნიერო საზოგადოებების წევრი.

იაკობ ბერნულიმ მათემატიკოსებს დაუსვა ეგრეთ წოდებული ჯაჭვწირის ამოცანა: განისაზღვროს ის მრუდი, რომლის ფორმას მიიღებს ორ წერტილს შორის თავისუფლად ჩამოკიდებული მძიმე, ერთგვაროვანი და ღუნვადი ძაფი. ეს ამოცანა ამოხსნეს ლაიბნიცმა, ჰიუგენსმა და იოჰანე ბერნულიმ და მათი ამოხსნები გამოქვეყნებული იქნა 1691 წელს „Acta Eruditorum“-ში. ლაიბნიცისა და ბერნულის ამოხსნაში გამოყენებულია ახალი მეთოდი ანუ ანალიზის მეთოდი, ხოლო ჰიუგენსმა, რომელიც ჯერ კიდევ უნდობლად უცქერდა ამ მეთოდს, ამოცანა ამოხსნა ანალიზის მეთოდის გამოუყენებლად, რაც ერთხელ კიდევ ადასტურებს მის განსაკუთრებულ ნიჭს მათემატიკაში. სამივე ამოხსნის შედეგების დამთხვევას გადამწყვეტი მნიშვნელობა მიეცა ახალი მეთოდის მიმართ გამოწვეული ყოველგვარი ეჭვების გაფანტვაში. თვით ჰიუგენსმა აღიარა ამ მეთოდის უპირატესობა და ლოპიტალისადმი წერილში ის გაკვირვებასა და აღტაცებას გამოთქვამს ამ მეთოდის დიდი ნაყოფიერების გამო.

იოჰან ბერნულიმ ამ ამოცანის ამოხსნის დროს მიიღო დიფერენციალური განტოლება

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

რომლის ინტეგრება ვერ შეძლო. ასე რომ, ჯაჭვწირის განტოლება მან ვერ მიიღო, მაგრამ ეს მრუდი ააგო ტოლფერდა ჰიპერბოლის საშუალებით.

1691 წელს იოჰანე პარიზში ჩავიდა. აქ დაუახლოვდა მათემატიკოსებს, განსაკუთრებით ლოპიტალს. ლოპიტალი დაინტერესებული იყო მათემატიკით და სათანადო ნიჭითაც დაჯილდოებული, იგი იწყებს მათემატიკის შესწავლას იოჰანესთან. ამ უკანასკნელმა ლოპიტალს დაუწერა 59 ლექცია ინტეგრალურ აღრიცხვაში („ლექციები მათემატიკაში ინტეგრალის მეთოდის შესახებ“). ამ ლექციებში მოცემულია ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენების მრავალი მშვენიერი მაგალითი. ლექციები შეიცავს ახალი აღრიცხვის სრულ სისტემას, რის გამო იოჰანეს ინტეგრალური აღრიცხვის ფუძემდებელს უწოდებენ. ალგებრულ ფუნქციათა ინტეგრების დროს იოჰანე ცდება, როდესაც

$$d\,\frac{x^{p+1}}{p+1} = x^p dx$$

გამოსახვიდან, როცა $p = -1$, გამოჰყავს, რომ

$$\int \frac{dx}{x} = \infty.$$

ამ ლექციების დიდი ღირებულება მდგომარეობს იოჰანეს მიერ ამოხსნილ კვადრატურაზე მრავალი ამოცანის ამოხსნაში და აგრეთვე იმ ძნელი პრობლემების ამოხსნაში, როგორიც არიან ჯაჭვწირის, იზოქრონის, ევოლუტის, ეპიციკლოიდისა და სხვების პრობლემები.

მეტად საინტერესოა იოჰანეს ლექციებში ის ნაწილი, რომელიც მიძღვნილია დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების საკითხისადმი. ამ საქმის პირველი წამოწყება ნიუტონს ეკუთვნის. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრებას იოჰანემ შექცეულ მხებთა მეთოდი უწოდა. დასაწყისში ის გადმოსცემს სხვადასხვა დიფერენციალურ ფორმას, რომელთა საშუალებით მარტივ განტოლებათა ინტეგრება შეიძლება. მაგალითად,

$$d\,\frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$d\,\frac{y^2}{x} = \frac{2xydy - y^2dx}{x^2},$$

$$d\,\frac{y^3}{x} = \frac{3y^2xdy - y^3dx}{x^2}$$

და ასე შემდეგ. ვინაიდან იოჰანესთვის მაშინ უცნობი იყო ტოლობა $\int \frac{dx}{x} = \log x$, ამიტომ $ydx - 2xdy = 0$ ტოლობის ამოხსნისათვის ის სარგებლობს მეორე ფორმით. ამ განტოლებას, როგორც ვიცით, უნდა მიეცეს $\frac{dx}{x} = 2\,\frac{dy}{y}$ სახე და შემდეგ კი მისი ინტეგრებიდან მივიღებთ $\lg x = 2 \lg y = \lg y^2$; $y^2 = x$, ესე იგი პარაბოლის განტოლებას. იოჰანე კი ამ განტოლებას აძლევს $2xdy - ydx = 0$ სახეს, შემდეგ ამრავლებს მას $\frac{y}{x^2}$-ზე და ღებულობს სრულ დიფერენციალს $\frac{2xydy - y^2dx}{x^2}$, რომლის ინტეგრალი $\frac{y^2}{x}$ გატოლებული

რომელიმე b მუდმივს, $\frac{y^2}{x}=b$, არის პარაბოლის განტოლება. იმ დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში, რომლებიც მიიყვანებიან უმაღლესი რიგის პარაბოლებამდე, ის სარგებლობს მესამე, მეოთხე და ასე შემდეგ ფორმებით.

1695 წელს ჟურნალ „აქტა ერუდიტორუმში" იაკობმა დაუსვა მათემატიკოსებს $\frac{dy}{dx}=Py+Qy^n$ (სადაც P და Q მხოლოდ x-ის ფუნქციებია) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ამოცანა, რითაც მან არსებითი ხასიათის ნაბიჯი გადადგა დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის დამუშავებაში. ამ განტოლების ამოხსნა მანვე მოგვცა, მაგრამ გეომეტრიული წესით. 1697 წელს კი იოჰანმაც გამოაქვეყნა ამ განტოლების ამოხსნა იმ ხერხით, რომლითაც ახლა ჩვენ ვსარგებლობთ ($z=y^{-n+1}$-ის ჩასმით, როცა $n\neq0,\neq1$). ამ განტოლებას ახლა ბერნულის განტოლება ეწოდება.

1697 წელს იოჰანმე მოახერხა $\int\frac{dx}{x}$-ის მნიშვნელობის პოვნა, ესე იგი $\int\frac{dx}{x}=\log x$ ტოლობის დამტკიცება. ეს შედეგი მან გამოაქვეყნა ჟურნალი „აქტა ერუდიტორუმის" 1697 წლის მარტის ნომერში.

გამოთვლებში წარმოსახვითი სიდიდე პირველად იოჰანმე შემოიყვანა.

რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრების ხერხი ფუნქციის მარტივი წილადების საშუალებით, რომლითაც ჩვენ ახლა ვსარგებლობთ, მოგვცეს იოჰანე ბერნულიმ და ლაიბნიცმა; ეს ხერხი ორივემ ერთდროულად 1702 წელს გამოაქვეყნეს — იოჰანმე მეცნიერებათა აკადემიის მემუარებში და ლაიბნიცმა ჟურნალ „აქტა ერუდიტორუმში".

1694 წელს იოჰანმე იპოვა $\int f(x)\,dx$-ის დაშლა მწკრივად, რომელსაც ახლა ბერნულის მწკრივი ეწოდება. ამისათვის მან აიღო მწკრივი

$$f(x)\,dx=f(x)\,dx+xd[f(x)]-xd[f(x)]-$$
$$-\frac{x^2d^2[f(x)]}{1\cdot2\cdot dx}+\frac{x^2d^2[f(x)]}{1\cdot2\cdot dx}+\frac{x^3d^3[f(x)]}{1\cdot2\cdot3\cdot dx^2}-\dots$$

ანუ

$$f(x)\,dx = f(x)\,dx + xd\,[f(x)] - \left\{ xd\,[f(x)] + \frac{x^2 d^2\,[f(x)]}{1\cdot 2\cdot dx} \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{x^2 d^2\,[f(x)]}{1\cdot 2\cdot dx} + \frac{x^3 d^3\,[f(x)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^2} \right\} + \cdots$$

და მოახდინა ამ ტოლობის ინტეგრება. რადგან $f(x)dx + xd[f(x)] = d[xf(x)]$-ის ინტეგრალია $xf(x)$, $\left\{ xd\,[f(x)] + \frac{x^2 d^2\,[f(x)]}{1\cdot 2\cdot dx} \right\}$-ის ინტეგრალია $\frac{x^2\,df(x)}{1\cdot 2\cdot dx}$ და $\left\{ \frac{x^2 d^2\,[f(x)]}{1\cdot 2\cdot dx} + \frac{x^3 d^3\,[f(x)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^2} \right\}$-ის კი $\frac{x^3 d^2\,[f(x)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^2}$, ამიტომ გვექნება ტოლობა

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{d\,[f(x)]}{dx} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^2[f(x)]}{dx^2} - \ldots$$

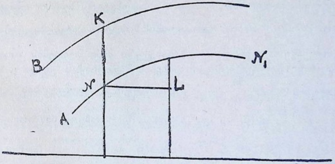
ანალიზური და გეომეტრიულ-მექანიკური ხასიათის იმ პრობლემათა შორის, რომლებიც XVII საუკუნის დამლევს და XVIII-ის დასაწყისში დასვეს დიდმა მათემატიკოსებმა, ყველაზე ძნელი იყო ცნობილი „ბრაქისტოქრონისა“ და „იზოპერიმეტრის“ პრობლემები („ბრაქისტოქრონი--βραχόστος-χρόνιος—ბერძნულად ნიშნავს მოკლედროიანს, „იზოპერიმეტრი“—ტოლ პერიმეტრს: ισο—ტოლი და πέριμετρος — პერიმეტრი).

ბრაქისტოქრონის პრობლემა დასვა იოჰანემ 1696 წელს „აქტა ერუდიტორუმში“. ეს პრობლემა მდგომარეობს შემდეგში: მოიძებნოს ისეთი მრუდი, რომელზედაც ეცემა სხეული უმოკლეს დროში ერთი წერტილიდან მეორე წერტილამდე, რომელიც პირველზე დაბლაა და მასთან ერთ ვერტიკალზე არ მდებარეობს. თვით ამ მრუდს ეწოდება ბრაქისტოქრონის მრუდი. რომ ეს მრუდი არის ციკლოიდა, იოჰანეს გარდა, მისმა ძმამ იაკობმა, ლაიბნიცმა, ნიუტონმა და ლოპიტალმა იპოვეს და მიიღეს ამ ამოცანის ამოხსნა.

1697 წელს იაკობმა დასვა უფრო ზოგადი ხასიათის ამოცანა — ეგრეთ წოდებული იზოპერიმეტრული პრობლემა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ყველა იმ მრუდს შორის, რომელთა რკალებს ორ მოცემულ წერტილს შორის აქვს ტოლი სიგრძეები, მოიძებნოს მრუდი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: ფართობს, შემოსაზღვრულს მრუდით, რომლის ყოველი ორდინატი

შეადგენს განსაზღვრულ ჯერადს (იმავე აბსცისის) შესაბამი ორდინატისა ანუ საძებნი მრუდის რკალის სიგრძისა, ბოლო წერტილებში ორდინატებით და ამ ორდინატებს შორის მდებარე აბსცისათა ღერძის მონაკვეთით, უნდა ჰქონდეს მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა.

იოჰანე შეეცადა ამ ამოცანის ამოხსნას, მაგრამ ვერ შეძლო. სწორი და ზოგადი ამოხსნა მოგვცა იაკობმა თავის ნაშრომებში, რომლებიც გამოქვეყნა 1700—1701 წლებში. ამ ორი პრობლემის დასმით და ამოხსნით ბერნულებმა საფუძველი ჩაუყარეს უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ისეთ მნიშვნელოვან დარგს, რომელსაც ახლა ვარიაციათა აღრიცხვა ეწოდება. ამ დარგის სისტემაში მოყვანა ძმებმა ბერნულებმა ვერ შეძლეს. ვარიაციათა აღრიცხვა, როგორც ცალკე დარგი, შემდგომ ჩამოაყალიბეს ეილერმა და ლაგრანჟმა. ვარიაციათა აღრიცხვა გულისხმობს ფუნქციონალური დამოკიდებულების უფრო ზოგად პროცესს, ვიდრე ეს დიფერენციალურ აღრიცხვაშია, სადაც იცვლება ფუნქციის მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობა, ხოლო მისთვის დამახასიათებელი მიმართება, რომელიც მას არგუმენტთან აკავშირებს, უცვლელი რჩება.



ნახ. 31

თუ dy-ის მნიშვნელობა არის ორდინატის ნამატი, როდესაც მოცემულ AN წირზე წერტილი უსასრულო მცირედ გადაიწევა (ნახ. 31), მაშინ δy ვარიაცია არის ორდინატის ნამატი N წერტილიდან, რომელიც ერთ მრუდზე მდებარეობს იმ K წერტილისაკენ გადასვლისას, რომელიც სხვა BK მრუდზეა პირველთან უსასრულოდ ახლოს: $\delta y = NK$, თუ $dy = LN_1$.

როგორც აღვნიშნეთ, ალბათობათა თეორიის ფუძემდებლებია ფერმა და პასკალი. ალბათობათა თეორიის საფუძვლებში მუშაობდა აგრეთვე ჰიუგენსი. მისი ნაშრომი, რომელიც გამოქვეყნდა 1697 წელს, შეიცავს ამ თეორიის ძირითად თეორემებს და მათ გამოყენებას. იაკობ ბერნულის ნაშრომმა შექმნა ეპოქა ალბათობათა თეორიის ისტორიაში, დაიბეჭდა 1713 წელს, ავტორის გარდაცვალების 8 წლის შემდეგ. ნაშრომი ოთხი ნაწილისაგან შედგება: პირველ ნაწილში გადმოცემულია ჰიუგენსის ნაშრომი, მეორეში—მოძღვრება კომბინატორიკის შესახებ, მესამე შეიცავს ალბათობათა თეორიის მრავალი პრობლემის ამოხსნას და მეოთხე კი — ამ თეორიის გამოყენებას მორალისა და პოლიტიკის საკითხებში.

უაღრესად მნიშვნელოვანია იაკობ ბერნულის შემდეგი თეორემა: „დიდ რიცხვჯერ ცდის შემთხვევაში ძალიან ახლოა სარწმუნოსთან ალბათობა იმისა, რომ სიხშირის ალბათობისაგან გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ გადააჭარბებს ძალიან მცირე სიდიდეს“.

თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ამ თეორემის დამტკიცება შეიძლება ასე გადმოვცეთ: ვთქვათ, μ-ჯერ ცდის შემთხვევაში E ხდომილობა m-ჯერ მოხდა, მისი საწინააღმდეგო F ხდომილობა კი — n-ჯერ. მაშინ $\frac{m}{\mu}$ არის E ხდომილობის მოხდენის ფარდობითი სიხშირე. მარტივი E ხდომილობის შემთხვევაში მისი მოხდენის p ალბათობა უდრის ხელშემწყობი m შანსების შეფარდებას ყველა μ შანსებთან, ესე იგი $p=\frac{m}{\mu}$, და საწინააღმდეგო F ხდომილობის ალბათობა $q=\frac{n}{\mu}$; $m+n=\mu$ და $p+q=1$. ფარდობითი სიხშირის ალბათობისაგან განსხვავება ანუ გადახრა $x=\frac{m}{\mu}-p$ (ალბათობა à posteriori—ანუ ფარდობითი სიხშირე $\frac{m}{\mu}$ და ალბათობა à priori ანუ p).

იაკობს გამოჰყავს, რომ ალბათობა იმისა, რომ μ-ჯერ ცდის შემთხვევაში E ხდომილობა m-ჯერ მოხდება და F ხდომილობა კი —n-ჯერ, უდრის

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots \mu}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\,p^m q^n$$

ანუ, თუ ამ გამოსახულებას P_m-ით აღვნიშნავთ, იქნება

$$P_m = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,p^m q^n,$$

თუ ამას დავუმატებთ, რომ $P_0 = q^\mu$, $P_\mu = p^\mu$, მაშინ, ცხადია, გამოსახვა $\frac{\mu!}{m!\,n!}\,p^m q^n$ არის $(p+q)^\mu$ ნიუტონის ბინომის ფორმულის ზოგადი წევრი:

$$(p+q)^m = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_m.$$

ამ ჯამის თითოეული წევრი გამოსახავს იმას, რომ μ-ჯერ ცდის შემთხვევაში E ხდომილობა არ მოხდება (P_0), E ხდომილობა მოხდება ერთჯერ (P_1), E ხდომილობა მოხდება ორჯერ (P_2) და ასე შემდეგ.

თუ ამ შესაკრებებში P_m შესაკრები დანარჩენებზე მეტია, მაშინ μ-ჯერ ცდის დროს m არის E ხდომილობის მოხდენის უალბათესი რიცხვი და მისი შესაბამი $\frac{m}{\mu}$ არის E ხდომილობის მოხდენის რიცხვის ყველა ცდის რიცხვთან შეფარდების უალბათესი სიდიდე.

ვთქვათ k და l ორი რიცხვია მწკრივისა

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, \mu,$$

ამასთანავე

$$k < l.$$

შევადგინოთ ჯამი

$$P_k + P_{k+1} + P_{k+2} + \cdots + P_l = \mathop{\mathrm{S}}_{m=k}^{m=l} P_m. \tag{1}$$

ალბათობათა შეკრების თეორემის თანახმად, ეს ტოლობა გამოსახავს ალბათობას იმისას, რომ μ-ჯერ ცდის დროს E ხდომილობა მოხდება ან k-ჯერ, ან $k+1$-ჯერ, ან $k+2$-ჯერ..., ანუ l-ჯერ, ესე იგი E მოხდება არანაკლებ k-ჯერ და არანაკლებ l-ჯერ. ვინაიდან m-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $\frac{m}{\mu}$-ს გარკვეული მნიშვნელობა და $x = \frac{m}{\mu} - p$-ს გარკვეული მნიშვნელობა, ამიტომ ჯამი (1) გამოსახავს ალბათობას იმისას, რომ μ-ჯერ ცდის დროს გადახრა x არ იქნება $a = \frac{k}{\mu} - p$-ზე ნაკლები და არ იქნება $b = \frac{l}{\mu} - p$-ზე მეტი, ესე იგი (1) სიდიდე არის ალბათობა იმისა,

რომ გადახრა x იმყოფება a და b საზღვრებს შორის. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$y = \mu P_m, \quad dx = \frac{1}{\mu}$$

და ჯამი (1) წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\mathop{S}_{x=a}^{x=b} y\,dx,$$

სადაც შესაკრებები შეესაბამება x ცვლადის მნიშვნელობებს:

$$a, \; a+dx, \quad a+2dx, \quad a+3dx, \ldots, b.$$

აქ y არის ფუნქცია, აღებული საინტერპოლაციო მრუდის განტოლებიდან $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} l^{-h^2x^2}$, რომლის ორდინატებია P_0, P_1, P_2, P_3, $\ldots, P_m$; $h = \sqrt{\frac{\mu}{2pq}}$ და მას ეწოდება სიზუსტის საზომი.

$$\lim \mathop{S}_{x=a}^{x=b} y\,dx = \int_a^b y\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2x^2} dx.$$

μ-ის დიდი მნიშვნელობის შემთხვევაში, როდესაც dx ნულთან ახლოა, მაშინ სიდიდე $\mathop{S}_{x=a}^{x=b} y\,dx$ ახლოა თავის ზღვართან $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2x^2} dx$; ამიტომ ეს უკანასკნელი მიახლოებით გამოსახავს $\mathop{S}_{x=a}^{x=b} y\,dx$-ს; ესე იგი $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2x^2} dx$ მიახლოებით უდრის იმის ალბათობას, რომ μ-ჯერ ცდის დროს გადახრა x იმყოფება a და b საზღვრებს შორის.

დავუშვათ, $a = -\alpha$, $b = +\alpha$, სადაც α არის რაიმე დადებითი რიცხვი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-h^2x^2} dx.$$

აქედან

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\alpha} e^{-h^2x^2} dx,$$

თუ გარდავქმნით x ცვლადს $hx = t$ ჩასმით, გვექნება

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\alpha} e^{-t^2} dt.$$

ასეთია მიახლოებითი მნიშვნელობა ალბათობა იმისა, რომ μ-ჯერ ცდის შემთხვევაში გადახრა

$$x = \frac{m}{\mu} - p$$

იმყოფებოდეს $-\alpha$ და $+\alpha$ შორის, ესე იგი აბსოლუტური სიდიდით არ აღემატება α-ს. ამ სიდიდეს იაკობმა უწოდა ალბათობა იმისა, რომ ფარდობითი სიხშირის ალბათობისაგან გადახრის საზღვარი არის α.

თუ $\Phi(x)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ გამოსახვას

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-h^2x^2} dx,$$

მაშინ გვექნება

$$P = \Phi(h\alpha).$$

თუ γ-თი აღვნიშნეთ ისეთი რიცხვი, რომ $\Phi(\gamma)$ შეიძლება ჩავთვალოთ 1-ის ტოლად, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია სარწმუნოდ ჩავთვალოთ ის, რომ გადახრა x-ის აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება $h\alpha$ სიდიდეს, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$h\alpha = \gamma$$

ანუ

$$\alpha = \frac{\gamma}{h};$$

ეს სიდიდე α, როდესაც μ დიდია ანუ h დიდია $\left(h=\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}\right)$, ძალიან მცირე იქნება.

$$\alpha = \frac{\gamma}{h}$$

ტოლობა გამოსახავს ბერნულის თეორემას.

ბ რ ო კ ტ ე ი ლ ო რ ი დაიბადა ედმონტონში (ინგლისი) 1685 წელს და გარდაიცვალა ლონდონში 1731 წელს. იგი დიდხანს მუშაობდა მდივნის თანამდებობაზე Royal society-ში.

ტეილორი (კ. მაკლორენიც) ცდილობდა ნიუტონის ფლუქსიათა მეთოდის ღრმად და მკაცრად დაფუძნებას, რასაც მიუძღვნა თავისი შრომა: „Methodus incrementorum directa etinversa" (პირდაპირი და შექცეული ნამატების მეთოდი). ნაშრომი ორი ნაწილისაგან შედგება: პირველ ნაწილში მოცემულია დაფუძნება და მთავარი თეორემები, მეორე ნაწილი კი შეიცავს ფლუქსიათა მეთოდის გეომეტრიასა და ფიზიკაში გამოყენების საკითხს. ტეილორი განასხვავებს ნამატებს ნიუტონის ფლუქსიისაგან (შესაბამება ჩვენს წარმოებულს) და ამ უკანასკნელს განიხილავს როგორც აღმომცენად და ქრობად ნამატებს. გამოთვლებს აწარმოებს ნამატების საშუალებით, მაგრამ შემდეგში მათ ნაცვლად სვამს ფლუქსიებს ისე, როგორც ამას ჩადიოდა ნიუტონი „მომენტების" (შეესაბამება ჩვენს დიფერენციალს) მიმართ. ფლუქსიებისაგან რომ განასხვაოს, ტეილორი ნამატებს აღნიშნავს $x, y, z,..$ და ასე შემდეგ. მესამე თეორემაში ტეილორი ამტკიცებს წინადადებას, რომელიც ახლა მის სახელს ატარებს და რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ თუ x არის z-ის ფუნქცია და ეს უკანასკნელი $z+v$ მნიშვნელობას გაივლის, მაშინ x მიიღებს მნიშვნელობას:

$$f(z+v) = x + \frac{v}{1}\cdot\frac{\dot{x}}{\dot{z}} + \frac{v^2}{1\cdot 2}\,\frac{\ddot{x}}{\dot{z}^2} + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\dddot{x}}{\dot{z}^3} + \cdots$$

ანუ, როგორც ახლა ჩვენ ვწერთ:

$$f(z+v) = f(z) + \frac{v}{1}f'(z) + \frac{v^2}{1\cdot 2}f''(z) + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(z) + \cdots$$

ნაშრომის მეორე ნაწილში ტეილორს ამოხსნილი აქვს მთელი რიგი საინტერესო პრობლემებისა კვადრატურაზე, ასტრონომიულ რეფრაქციებზე და სხვა.

კოლინ მაკლორენი დაიბადა კილმოდანში (შოტლანდია) 1698 წელს; მუშაობდა მათემატიკის პროფესორად აბერდინსა და ედინბურგში. გარდაიცვალა 1746 წელს იორკში.

მაკლორენის ნაშრომი ფლუქსიათა შესახებ გამოქვეყნდა 1742 წელს. ნაშრომის პირველ ორ წიგნში იგი განიხილავს ნიუტონის ფლუქსიათა მეთოდს და მისი ძირითადი დებულებების დაფუძნებას ახდენს. მაკლორენი წყვეტს მრუდთა თეორიის და მათემატიკური ფიზიკის უძნელეს პრობლემებს, რითაც ის ამჟღავნებს თავის დიდ მათემატიკურ ნიჭს. თეორემა, რომელიც ახლა მის სახელს ატარებს, ტეილორის თეორემის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს. მეორე წიგნში მაკლორენი განიხილავს ნიუტონის ბინომის თეორემას და ამის შემდეგ გამოჰყავს ტოლობა

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \cdots$$

2. ლეონარდ ეილერი

ლეონარდ ეილერი დაიბადა ბაზელში (შვეიცარია) 1707 წლის 15 აპრილს. ბავშვობა ლეონარდმა მამის სოფელში — რიენში — გაატარა. დაწყებითი განათლება მამისგან მიიღო. მამა — პავლე ეილერი — სოფლის მღვდელი და იაკობ ბერნულის ყოფილი მოწაფე იყო. პავლე დიდად აფასებდა მათემატიკას და იცოდა კიდეც ის. ამიტომ შვილსაც მათემატიკას ასწავლიდა, თუმცა ლეონარდი მას სასულიერო წოდებისათვის ჰყავდა მიჩნეული.

შინაური აღზრდის შემდეგ ახალგაზრდა ლეონარდი ბაზელში გააგზავნეს, რათა მას იქ საშუალო სკოლის (მაშინდელი გიმნაზიის თუ სემინარიის) უფროსი კლასების, ეგრეთ წოდებული ფილოსოფიური კლასების, კურსი გაევლო. თავისი არაჩვეულებრივი მეხსიერების წყალობით ლეონარდი ადვილად სძლევდა სემინარიის სქოლასტიკურ სიბრძნეს და თავისუფალ დროს ესწრებოდა უნივერსიტეტში ლექციებს მათემატიკაში, სადაც პროფესორად იყო განთქმული იოჰან ბერნული. უკანასკნელმა მალე შეაფასა ჭაბუკი მოწაფის ნიჭი და ცალკე მეცადინეობაც კი დაიწყო მასთან შაბათობით.

1723 წელს თექვსმეტი წლის ეილერმა გამოცდა ჩააბარა ხელოვნების მაგისტრის ხარისხზე. მამამისის დაჟინებით ლეონარდმა დაიწყო ღვთისმეტყველებისა და ძველი ებრაული ენის შესწავლა, მაგრამ მალე ისევ, მამის ნებართვით, მთლიანად მათემატიკის შეს-

წავლა დაიწყო იოჰანე ბერნულის ხელმძღვანელობით და დაუმეგობრდა მის შვილებს — ნიკოლოზსა და დანიელს.

1725 წელს პეტერბურგში დაარსდა მეცნიერებათა აკადემია. ახალგაზრდა ძმები ნიკოლოზი და დანიელი მიიწვიეს იქ წევრებად ანუ პროფესორებად. ისინი ეილერსაც ურჩევდნენ აკადემიაში გადასვლას, როგორ კი ასეთი შესაძლებლობა იქნებოდა და, რადგან მოსალოდნელი იყო ფიზიოლოგიის კათედრის გახსნა, ურჩიეს ეილერს ამ საგანში მეცადინეობა. ლეონარდმა ძალიან გულმოდგინედ დაიწყო მედიცინის შესწავლა, მაგრამ იმავე დროს არა თუ შეწყვიტა მათემატიკაში მეცადინეობა, პირიქით, დაიცვა დისერტაცია კანდიდატობის უფლების მოპოვებისათვის, რომ ბაზელის უნივერსიტეტში ფიზიკის კათედრა დაეკავებინა. მან აგრეთვე წარადგინა პარიზის აკადემიის მიერ გამოცხადებულ კონკურსზე ნაშრომი გემზე ანძების განლაგების შესახებ. ამ ნაშრომმა მიიღო საპატიო შეფასება და აკადემიამ დაბეჭდა ის პრემირებული ნაშრომების კრებულში.

ლეონარდი 20 წლის იყო, როდესაც დანიელ ბერნულის მიწვევით პეტერბურგში გადავიდა და დაიწყო აკადემიაში მუშაობა მათემატიკის დარგში ადიუნკტის თანამდებობაზე. თავისი ნაშრომების წყალობით, რომლებიც იბეჭდებოდა აკადემიის ჟურნალში, ეილერმა მალე დაიკავა საპატიო ადგილი იმ დროის სახელგანთქმულ მათემატიკოსებს შორის.

1741 წელს ეილერმა დატოვა პეტერბურგი და გაემგზავრა ბერლინში, სადაც ის მიიწვიეს აკადემიის პრეზიდენტის თანამდებობაზე. ბერლინში მან დაჰყო 25 წელი. ამ ხნის განმავლობაში მან ასეული ნაშრომი მოათავსა ბერლინის აკადემიის ჟურნალში, როგორც თეორიულ მათემატიკაში, ისე გამოყენებითში, გამოსცა სამ ტომად ის ნაშრომები, რომლებიც აკადემიის ჟურნალში არ გამოქვეყნებულა: ანალიზის შესავალი, ვარიაციული აღრიცხვის შესახებ და მთვარის თეორიის შესახებ. 1766 წელს ეილერი ისევ პეტერბურგს დაბრუნდა. 1738 წელს მან მარჯვენა თვალი დაჰკარგა, ხოლო 1766 წელს, რუსეთში დაბრუნებისთანავე, ავად გახდა და მარცხენა თვალიც დაჰკარგა. მიუხედავად სრული სიბრმავისა, ეილერი სიკვდილამდე განაგრძობდა მეცნიერულ მოღვაწეობას. მას ჰყავდა ბევრი შვილი; მათ შორის ერთერთი ვაჟიშვილი — ალბერტი — შესანიშნავი მათემატიკოსი იყო; ის იყო ბერლინის, პეტერბურგისა და პარიზის აკადემიების წევრი. 1766 წლიდან 1783 წლამდე ლეონარდმა ალბერტსა და თავის მოწაფეებს, აკადემიის წევრებს — კრაფტუს, ლევსელსა და ფაუსს —

უკარნახა ასეული მეცნიერული წერილი და ათი დიდი ტომი თეორიულ და გამოყენებით მათემატიკაში. 1783 წლის 18 სექტემბერს ეილერს, როცა ის თავის ხუთი წლის შვილიშვილს ეთამაშებოდა, დამბლა დაეცა და უცბად გარდაიცვალა.

ეილერი იყო საფუძვლიანი ცოდნის ნამდვილი ენციკლოპედისტი და ღრმა ერუდიციის პატრონი თავის სპეციალობაში. მისი თანამედროვეები განცვიფრებული იყვნენ ეილერის მრავალნაირი და მრავალმხრივი ცოდნით. მათივე გადმოცემით, ეილერმა კარგად იცოდა ძველი ქვეყნის საუკეთესო მწერლები, ძველი ლიტერატურა მათემატიკაში, ძველი აღმოსავლეთის, თანამედროვე ევროპისა და მათ შორის რუსული ენები; იცოდა აგრეთვე ბოტანიკა, ქიმია, ფიზიკა, ანატომია და მედიცინა. მეცნიერების ამ მრავალ დარგში მუშაობასთან ერთად ეილერისათვის ძირითადი მაინც მათემატიკა იყო.

ეილერმა ჯერ კიდევ ყმაწვილობიდანვე გადაწყვიტა მთელი თავისი ძალ-ღონე სამეცნიერო და საპროფესორო მოღვაწეობისათვის მიეძღვნა. მან მაშინვე დაინახა უქონლობა სახელმძღვანელოებისა, რომელთა საშუალებით შესაძლო იქნებოდა „ახალი მათემატიკის", ესე იგი უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის სავსებით შესწავლა, რომ იმის გამოყენება შესაძლებელი ყოფილიყო მეცნიერების სხვა დარგებში: მექანიკაში, ფიზიკასა და ასტრონომიაში. ეილერმა განიზრახა ამ ნაკლოვანების აღმოფხვრა და მართლაც შეასრულა, შექმნა რა არაჩვეულებრივი ღირსების სახელმძღვანელოები; იმავე დროს იმ სახელმძღვანელოებში მოგვცა აგრეთვე თვით მეცნიერების ახალი სისტემატური განვითარება. ეს სახელმძღვანელოები მათემატიკურ ანალიზში შემდეგია:

1. უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის შესავალი, 2 ტომი, 1748 წ.
2. დიფერენციალური აღრიცხვა, 1 ტომი, 1755 წ.
3. ინტეგრალური აღრიცხვა, 3 ტომი, 1768 — 1770 წ.
4. ინტეგრალური აღრიცხვისადმი დამატება, 1 ტომი, 1794 წ.

ამათ გარდა ეილერმა, როდესაც იგი სავსებით ბრმა იყო, უკარნახა მრავალი ტომი: ალგებრა—1 ტომი, მექანიკა — 2 ტომი, არითმეტიკა გიმნაზიებისთვის — 2 ტომი და სხვა. ეილერის კალამს ეკუთვნის 783 ნაშრომი, რომლებიც გამოცემულია 23 ტომად. მისი ნაწერები შეადგენენ 16 000 გვერდს.

ლ. ეილერის „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის შესავალის" პირველი ტომი შედგება შემდეგი თავებისაგან: 1) ფუნქციათა

შესახებ საერთოდ. 2) ფუნქციათა გარდაქმნის შესახებ, 3) ფუნქციათა გარდაქმნა ჩასმის საშუალებით, 4) ფუნქციათა გამოსახვა უსასრულო მწკრივების საშუალებით. 5) ორი და ორზე მეტი ცვლადების ფუნქციები. 6) მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ოდენობათა შესახებ. 7) მაჩვენებლებიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გამოსახვა უსასრულო მწკრივების საშუალებით. 8) ტრანსცენდენტული სიდიდეები, რომლებიც მიიღებიან წრისაგან. 9) სამწევრა მამრავლების გამოკვლევა. 10) მოძებნილი მამრავლების გამოყენების შესახებ უსასრულო მწკრივების ჯამის განსაზღვრისადმი. 11) რკალისა და სინუსის სხვა უსასრულო გამოსახულებათა შესახებ. 12) წილადი ფუნქციების ნამდვილ კერძო წილადებად დაშლა. 13) რეკურენტული მწკრივების შესახებ. 14) კუთხეთა გამრავლებისა და გაყოფის შესახებ. 15) მამრავლთა გადამრავლების დროს აღმოცენებული მწკრივების შესახებ. 16) რიცხვების შესაკრებებად დაშლის შესახებ. 17) რეკურენტული მწკრივების გამოყენების შესახებ განტოლებათა ფესვების მოძებნისადმი. 18) უწყვეტი წილადების შესახებ.

პირველი თავის გადმოცემას ეილერი იწყებს მუდმივის, ცვლადის, ფუნქციის ძირითადი ცნებების დაწესებიდან და ფუნქციათა კლასიფიკაციიდან.

ფუნქციას ეილერი შემდეგნაირად განსაზღვრავს: „ცვლადი ოდენობის ფუნქცია არის ანალიზური გამოსახვა როგორმე შედგენილი ამ ცვლადი ოდენობისა და რიცხვებისაგან ანუ მუდმივი ოდენობებისაგან“. ფუნქციის აღნიშვნა $f(x)$ შემოიყვანა ეილერმა (სიტყვა „ფუნქცია“ შემოიყვანა ლაიბნიცმა). ამის შემდეგ ეილერი გადმოგვცემს ალგებრული, ტრანსცენდენტული, რაციონალური, ირაციონალური, ცხადი, არაცხადი, ცალსახა, ორსახა, სამსახა, ოთხსახა და მრავალსახა ფუნქციების განსაზღვრებს. ეხება რა წილადი ფუნქციის დაშლის საკითხს, ეილერი ამბობს, რომ წილადი ფუნქცია $\frac{M}{N}$ შეიძლება დაიშალოს იმდენ მარტივ წილადებად $\frac{A}{p-qz}$ სახისა, რამდენი მარტივი, ერთიმეორის არატოლი მამრავლები აქვს N მნიშვნელს. განიხილავს იმ შემთხვევას, როდესაც $\frac{M}{N}$ წესიერი წილადია, M და N z-ის მთელი ფუნქციებია. ეილერი ამბობს, რომ როდესაც N მნიშვნელი დაშლილი იქნება თავის მარ-

ტივ მამრავლებად და უკანასკნელნი ერთიმეორისადმი არატოლი აღმოჩნდებიან, მაშინ გამოსახულება $\frac{M}{N}$ დაიშლება იმდენ წილადად, რამდენ მარტივ მამრავლსაც შეიცავს მნიშვნელი N, ვინაიდან ყოველი მამრავლი წავა კერძო წილადის მნიშვნელში. N მნიშვნელის ყოველი კერძო $p - qz$ მამრავლიდან მიიღება მარტივი წილადი $\frac{A}{p - qz}$. ყველა ასეთი წილადის ჯამი მოცემული $\frac{M}{N}$ წილადის ტოლი იქნება. ამის ცხადსაყოფად ეილერი გადმოგვცემს $\frac{1 + z^2}{1 + z^3}$ დაშლას სავსებით იმგვარად, როგორც ახლა ჩვენ დავშლით ხოლმე. აგრეთვე გადმოგვცემს დაშლის წესს იმ შემთხვევაშიც, როდესაც მნიშვნელი N შეიცავს $(p - qz)^n$ სახის მამრავლს.

მესამე თავში ეილერი გადმოცემს ირაციონალურ ფუნქციათა რაციონალიზაციისათვის ჩასმას, რომლებიც ახლა მის სახელს ატარებენ.

მეოთხე თავი მიძღვნილია ფუნქციის მწკრივად დაშლის საკითხს. ეილერი ამბობს, რომ რაციონალური წილადის დაშლა შეიძლება განუწყვეტლად გაყოფის მოქმედების შესრულებით. ამ წესით მან დაშალა $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ მწკრივად

$$\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} \text{ და ასე შემდეგ;}$$

იქვე შენიშნავს, რომ ვინაიდან გაყოფა მოსაბეზრებელია, შეიძლება ფუნქცია $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots$$

A, B, C... კოეფიციენტებს განსაზღვრავს „განუზღვრელი კოეფიციენტების დეკარტის ხერხით“. ამავე წესით აწარმოებს ეილერი აგრეთვე $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma z^2}$ სახის ფუნქციის დაშლას მწკრივად.

აღსანიშნავია ის, რომ ეილერი სრულებით არ ეხება საკითხს იმის შესახებ, რომ მიღებული მწკრივები კრებადია თუ არა; ამ მწკრივებს

ის განიხილავს, როგორც ფუნქციების წარმოდგენის ხერხს და არა როგორც მათი რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლის ხერხს.

ირაციონალური ფუნქციები კი, — ამბობს ეილერი, — გარდაიქმნება მწკრივებად შემდეგი უნივერსალური თეორემით:

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 +$$

$$+ \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \cdots$$

მეშვიდე თავში გადმოცემულია მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციათა დაშლა მწკრივებად. ეილერი გვაძლევს შემდეგ დაშლას

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

ამ ტოლობის გამოყვანისათვის ეილერი გამოდის ტოლობიდან $a^0 = 1$, მსჯელობს რა შემდეგნაირად: მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად ხარისხი იზრდება, თუ $a > 1$ და თუ ω უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, მაშინ $a^\omega = 1 + \psi$, სადაც ψ-ც უსასრულოდ მცირეა; დავუშვათ, რომ $\psi = k\omega$, მაშინ

$$a^\omega = 1 + k\omega;$$

აქედან

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i,$$

სადაც i ნებისმიერი რიცხვია. ტოლობის მარჯვენა ნაწილს დაშლის ნიუტონის ბინომის ფორმულის მიხედვით, დაუშვებს რა, რომ $i = \frac{z}{\omega}$ ანუ $\omega = \frac{z}{i}$ და i-ს თვლის უსასრულოდ დიდ სიდიდედ; მაშინ $\frac{i-1}{i}$ ჩათვალა ერთის ტოლად და ბინომის დაშლის კოეფიციენტებიდან ღებულობს ტოლობებს:

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$$

იმის შემდეგ, როდესაც ტოლობაში

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}\,k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\,k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,k^3\omega^3,$$

ω-ს ნაცვლად ჩასვამს $\frac{z}{i}$.

ეილერის თქმით, ჰიპერბოლურ ანუ ნატურალურ ლოგარითმებს ის თვისება აქვს, რომ $\log(1+\omega)=\omega$, როდესაც ω უსასრულოდ მცირეა; ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ $k=1$ და წინა მწკრივიდან k-ს ნაცვლად ერთის ჩასმის შემდეგ მივიღებთ მწკრივს.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

მერვე თავი ეილერმა მიუძღვნა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საკითხს. დასაწყისში მოთავსებულია მის მიერ გამოთვლილი π-ის მნიშვნელობა

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841\\ 971693993751058209749445923078164062862\\ 089986280348253421170679821480865132823\\ 066470938446\ldots$$

ეილერს შემოჰყავს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების აღნიშვნები, რომლითაც ჩვენ ახლა ვსარგებლობთ, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ წერტილს არ ვსვამთ; სახელდობრ, ეილერის აღნიშვნებია $\sin\cdot z$, $\cos\cdot z$ და ასე შემდეგ. პირველად მან შემოიყვანა შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, რომლებიც ამ თავშია მოთავსებული; მაგალითად, ის ამბობს: „თუ დავუშვებთ $\operatorname{tg} z = t$, ისე რომ z იყოს რკალი, რომლის ტანგენსი არის t, რასაც ჩვენ აღვნიშნავთ $A\cdot\operatorname{tang} t$, მაშინ

$$z = A\cdot\operatorname{tang} t;$$

A ამ ტოლობაში არის პირველი ასო სიტყვა „Arcus"-ის (რკალის).

ამ თავში ეილერი გადმოგვცემს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მწკრივებად დაშლის საკუთარ ხერხს. ის გამოდის ტოლობიდან $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, რომელსაც შემდეგი სახით წარმოადგენს:

$$(\cos z + \sqrt{-1}\cdot\sin z)(\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z) = 1.$$

ამის შემდეგ გამოჰყავს ტოლობები

$$(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \\ = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z);$$

$$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) =$$
$$= \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z).$$

ამ ტოლობებიდან ჯერ ღებულობს ტოლობას:

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z,$$

შემდეგ კი მის განზოგადებას

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

ვინაიდან აქ ორმაგი ნიშნებია, ცალ-ცალკე ნიშნების აღებით და მიღებული ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მიიღო

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

და

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}};$$

ნიუტონის ბინომის ფორმულით მრიცხველების გაშლის შედეგად მიიღო:

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} z \sin^2 z +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} z \sin^4 z - \cdots$$

და

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} z \sin^3 z + \cdots$$

დაუშვა, რომ z უსასრულოდ მცირე რკალია, რის გამო $\sin z = z$ და $\cos z = 1$; n კი უსასრულო დიდია, ისე რომ nz იყოს სასრულო $\left(\frac{n-1}{n} = 1, \text{ რადგან } n \text{ უსასრულოდ დიდია}\right)$; აგრეთვე დაუშვა, რომ $nz = v$; ვინაიდან $\sin z = z = \frac{v}{n}$, ამიტომ

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

და

$$\sin v = v - \frac{v^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots$$

ამის შემდეგ ტანგენსისა და კოტანგენსის დაშლას მწკრივებად გამოსახავს წილადებით, რომელთა მრიცხველები და მნიშვნელები სინუსისა და კოსინუსის გამომსახველი მწკრივებია.

ეილერი იძლევა აგრეთვე არკტანგენსის მწკრივად დაშლას. ამისათვის ის სარგებლობს წინა თავში გამოყვანილი ტოლობით

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \dots,$$

რომელშიც დაუშვებს, რომ $x = \sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z$ და ღებულობს ტოლობას:

$$\log\frac{1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z}{1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z} = \frac{2\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z}{1} +$$

$$+ \frac{2(\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z)^3}{3} + \frac{2(\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z)^5}{5} + \dots$$

მაგრამ ამაზე წინ მან გამოიყვანა, რომ რკალი გამოისახება მისივე ტანგენსით შემდეგნაირად:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z}{1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z};$$

თუ ამ ტოლობიდან აღებულ $\log\dfrac{1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z}{1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} z}$ მნიშვნელობას ჩავსვამთ წინა ტოლობაში, მივიღებთ:

$$z = \frac{\operatorname{tg} z}{1} - \frac{\operatorname{tg}^3 z}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 z}{5} - \dots;$$

დაუშვა რა, რომ $\operatorname{tg} z = t$, საიდანაც $z = \operatorname{arctg} t$ მიიღო,

$$\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots$$

ამის შემდეგ ეილერმა მიიღო მისი განთქმული ფორმულები, რომლებშიც π-ის ლუწი ხარისხები გამოსახულია ნატურალურ რიცხვთა შებრუნებული ლუწი ხარისხების ჯამით; მაგალითად:

$$\frac{6}{\pi^2} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} \cdots$$

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} + \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots$$

$$\frac{15}{\pi^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{15} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} - \cdots$$

XV თავში განავითარა კავშირი უსასრულო ნამრავლებსა და მწკრივებს შორის და მიიღო მისი განთქმული ფორმულა

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{121}{120} \cdot \frac{169}{168} \cdots$$

უკანასკნელ სამ თავში და კიდევ სხვა ნაშრომებში: „ზოგადი არითმეტიკა“ და „ალგებრის ელემენტები“, რომლებიც ცალკეა დაბეჭდილი 1768--1769 წლებში, ეილერს დამუშავებული აქვს რიცხვთა თეორიის საკითხები. ამ ნაშრომებიდან ჩანს, რომ მას ისეთივე დიდი დამსახურება აქვს რიცხვთა თეორიის განვითარებაში, როგორიც უსასრულო მცირეთა ანალიზის განვითარებაში. ეილერამდე რიცხვთა თეორია, როგორც მეცნიერება, არც კი არსებობდა. იყო მხოლოდ რიგი წინადადებებისა, რომლებიც აღმოაჩინა ეილერის წინაპარმა ფერმამ. მაგრამ ფერმას თავისი გამოკვლევები არ გამოუქვეყნებია; ამიტომ გზები, რომელთა საშუალებით თავის თეორემათა შეცნობამდე მივიდა, და აგრეთვე მათი დამტკიცების მეთოდები ჩვენთვის უცნობია. ეილერმა არა თუ დაამტკიცა ფერმას თითქმის ყველა თეორემა, არამედ გამოიყენა კიდეც რიცხვთა თეორიის უძნელესი საკითხების ამოხსნისათვის — დიდი რიცხვების მარტივ მამრავლებად დაშლისათვის. გარდა ამისა, მან აღმოაჩინა მრავალი ახალი ფაქტი და უჩვენა გზები, რომელთა სვლით უფრო გვიანდელმა მეცნიერებმა შექმნეს ის, რასაც დღეს რიცხვთა კლასიკური თეორია ეწოდება.

ზემოთ ხსენებულ უკანასკნელ ორ ნაშრომში 50 მემუარი მიძღვნილია ეგრეთ წოდებულ დიოფანტეს ანალიზისადმი, ესე იგი განუ-

საზღვრელ განტოლებათა ამოხსნისადმი მთელ რიცხვებში. ამ მემუარებში ეილერმა განიხილა ამოხსნები მთელ x, y რიცხვებში $x^2-ay^2=1$ განტოლებისა, რომელსაც მან პელეს განტოლება უწოდა. რიცხვით მაგალითებზე ეილერი ამჟღავნებს პერიოდულობას უწყვეტი წილადისას, რომელშიც დაიშლება a (მოცემული რიცხვი, კვადრატის არატოლი), უჩვენებს აგრეთვე ამ უწყვეტი წილადის კავშირს $x^2-ay^2=1$ განტოლების ამონახსენთან და იძლევა $x^2-ay^2=1$ განტოლების უმცირესი ამონახსნების ტაბულას a-ს ყველა მნიშვნელობისათვის 100-მდე. ეილერმა ვერ მოახერხა უწყვეტი წილადის პერიოდულობის დამტკიცება ყოველი $\sqrt{a}$-თვის (ეს გააკეთა ლაგრანჟმა და ამით დაამთავრა პელეს განტოლების ამოხსნის პრობლემა). ეილერი მუშაობდა აგრეთვე ორუცნობიანი ზოგადი განტოლების $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ამოხსნაზე მთელ რიცხვებში. ეილერის ერთ-ერთი ნაშრომი შეეხება ფერმას დიდ თეორემას, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ განტოლებას $x^n+y^n=z^n$ არა აქვს ამონახსნი x, y, z მთელ რიცხვებში, როდესაც n მეტია 2-ზე. ეილერმა ეს თეორემა დაამტკიცა კერძო შემთხვევებისათვის $n=3$ და $n=4$. შესანიშნავია ის მეთოდი, რომელსაც ეილერი ხმარობს ამ დამტკიცებებში. ეს მეთოდი, განუზღვრელად დაშვების მეთოდად წოდებული, შემდეგში მდგომარეობს: დავუშვებთ რა მოცემული განტოლების რომელიღაც x, y, z ამონახსნების არსებობას, სხვადასხვა გარდაქმნის გზით მივიღებთ იმავე განტოლების სხვა x', y', z' ამონახსნებს ნაკლები რიცხვებით.

ეილერმა განიხილა კიდევ განტოლება $x^3+1=y^2$ და დაამტკიცა ამ განტოლების ამოუხსნადობა რაციონალურ x და y რიცხვებშიც კი, გარდა $x=0$ და $x=2$. ეილერს მიძღვნილი აქვს ნაშრომები ფერმას ერთი პრობლემის ამოხსნისა და მისი განზოგადებებისადმი. ფერმას პრობლემა შემდეგია: ვიპოვოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის გვერდები გამოისახებოდეს მთელი რიცხვებით, ამასთანავე ჰიპოტენუზა და კათეტები უნდა იყვნენ კვადრატები; ეს ამოცანა მიიყვანება $x+y=v^2$, $x^2+y^2=u^4$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე.

ეილერი ფუძემდებელია თანამედროვე რიცხვთა თეორიის უაღრესად მნიშვნელოვანი მეთოდის, რომელსაც ანალიზური მეთოდი ეწოდება. ეს მეთოდი მდგომარეობს უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის — უსასრულო მწკრივების, წარმოებულების და ინტეგრალების — გამოყენებაში რიცხვთა თეორიის თეორემების მოძებნისა და დამტკიცებისათვის. ამ მეთოდის შექმნას შეეხება მისი ერთ-ერთი ნაშრომი „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის შესავალი“, რომელშიც ეილერი გვაძლევს ევკლიდეს კლასიკური თეორემის —

მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის—დამტკიცებას. ანალიზური მეთოდი ეილერმა გამოიყენა აგრეთვე მეტად ორიგინალური თეორემების გამოსაყვანად, რომლებსაც ეწოდება: „რიცხვთა განლაგება“ და რომელსაც ის გადმოგვცემს „ანალიზური შესავლის“ XVI თავში (მემუარებშიც). მარტივი გარდაქმნით ეილერი ამტკიცებს იგივეობას:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)}\cdots,$$

რომლიდან x^n-თან კოეფიციენტების შედარებით მიიღება.

თეორემა. ყოველი რიცხვი n წარმოიდგინება სხვადასხვა მთელი შესაკრების ჯამის სახით იმდენი ხერხით, რამდენი ტოლი ან სხვადასხვა კენტი შესაკრების ჯამით წარმოიდგინება იგივე რიცხვი n.

მაგალითად, ვთქვათ, $n=6$, მაშინ $6=1+2+3$; $6=1+5$; $6=2+4$; $6=6$, ესე იგი რიცხვი 6 წარმოიდგინება ოთხი ხერხით რამდენიმე სხვადასხვა მთელი შესაკრების ჯამის სახით. მეორე მხრივ, $6=1+1+1+1+1+1$; $6=1+1+1+3$, $6=1+5$, $6=3+3$, ესე იგი რიცხვი 6 წარმოიდგინება აგრეთვე ოთხი ხერხით როგორც ერთისა და იმავე ანუ სხვადასხვა კენტი შესაკრების ჯამი. ამ საკითხებით მთავრდება „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის შესავლის“ პირველი ტომი.

მეორე ტომში გადმოცემული ანალიზური გეომეტრია მეტად თავისებური და ორიგინალურია. ეილერი არ სარგებლობს წირების გეომეტრიული თვისებებით იმისათვის, რომ იპოვოს მათი განტოლება, არამედ თვით განტოლების საშუალებით ეწევა ამ თვისებების შესწავლას. პირველი ხარისხის განტოლება მას აძლევს წრფეწირს, მეორე ხარისხის განტოლება—ორ გადამკვეთ ანუ ორ პარალელურ წრფეთა კონას, წრეს, ელიფსს, ჰიპერბოლას და პარაბოლას, ისე როგორც ეს ახლაც კეთდება. მრუდეთა უსასრულო შტოებისა და ასიმპტოტების განხილვის შემდეგ ეილერი გადადის მესამე რიგის მრუდებისაკენ, მათ კლასიფიკაციას ახდენს უსასრულო შტოების ხასიათის მიხედვით და ამგვარად დაჰყავს ამ მრუდეთა 72 სახე 16 გვარამდე. ამავე მეთოდს იყენებს მეოთხე რიგის მრუდებისადმი. ეილერი გვაძლევს ზოგად მოძღვრებას მრუდების მხებებზე, სიმრუდის წრეზე და შემდეგ განიხილავს ზოგიერთი ტრანსცენდენტული მრუდის თვისებებს, მაგალითად, ციკლოიდის, და, დასასრულ, გადადის სამგანზომილებიან სივრცით გეომეტრიაზე. აქ ეილერი პირველი იძლევა მეორე რიგის ზედაპირების კლასიფიკაციას.

ეილერის ნაშრომი „დიფერენციალური აღრიცხვა" გამოსცა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიამ 1755 წელს. ამ ნაშრომის შესავალში ეილერი ამბობს, რომ დიფერენციალური აღრიცხვის განსაზღვრისათვის საჭიროა მისი საწყისი საფუძვლების საკმაოდ გაშუქება. ამ მიზნით ის განმარტავს, თუ როგორ სიდიდეს ეწოდება მუდმივი და როგორს — ცვლადი; მაგალითზე ხსნის ცვლად სიდიდეებს შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას და შემდეგ გადადის ფუნქციის, დიფერენციალური აღრიცხვისა და ინტეგრალური აღრიცხვის განსაზღვრისაკენ.

ფუნქციას განსაზღვრავს კიდევ მეორეჯერ (პირველად შესავალში): „როდესაც რაიმე რაოდენობა სხვა რაოდენობაზეა დამოკიდებული იმგვარად, რომ უკანასკნელის ცვალებადობის დროს თვითონაც იცვლება, მაშინ პირველს ეწოდება მეორის ფუნქცია".

დიფერენციალურ აღრიცხვას ეილერი ასე განსაზღვრავს: „ეს არის იმ ქრობადი ნამატების ფარდობის განსაზღვრის მეთოდი, რომელსაც მიიღებს რომელიმე ფუნქცია, როდესაც ცვლად სიდიდეს, რომლის ფუნქციებიცაა, მიეცემა ქრობადი ნამატი".

ამის შემდეგ მოყვანილია ინტეგრალური აღრიცხვის განსაზღვრა: „ინტეგრალური აღრიცხვა არის მეთოდი, რომლის საშუალებით ქრობადი ნამატების ცნობილი ფარდობით პოულობენ იმ ფუნქციებს, რომლებსაც ეს ნამატები ეკუთვნიან".

„ქრობად ნამატს" ეილერი უწოდებს „დიფერენციალს". იმავე დროს „ქრობად ნამატს" უწოდებს აგრეთვე „უსასრულოდ მცირეს", რადგან, როგორც თვითონ ამბობს, ის ურაოდენობოა. იქვე დასძენს, რომ სახელწოდება „უსასრულოდ მცირე" ისე უნდა გავიგოთ, რომ ქრობადი ნამატი ანუ დიფერენციალი ჩვენ სრული აზრით ჩათვლილი გვაქვს ნულად. ამასთანავე მხედველობაში უნდა გვქონდეს ის, რომ რადგან დიფერენციალები თავისთავად ნულია, ამიტომ მათგან არ შეიძლება არაფრის გამოყვანა, გარდა მათი ურთიერთშეფარდებისა, რომლებიც აუცილებლად სასრულ რაოდენობებს იძლევიან. ამ ფარდობათა ცოდნა კი, ამბობს ეილერი, თავისთავად უაღრესად მნიშვნელოვანია, მაგრამ, გარდა ამისა, ისინი იმდენად საჭირო არიან მრავალი და ამასთანავე უძნელესი საკითხის ამოხსნის დროს, რომ მათ დაუხმარებლად ამ საკითხებში არაფრის გაგება არ შეიძლება.

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ ეილერის ნაშრომებში ზღვრის ცნებას ვერსად ვერ ვიპოვით. ეილერი წინააღმდეგია იმ მათემატიკოსების, რომლებმაც საჭიროდ დაინახეს დიფერენციალსა და

აბსოლუტურ ნულს შორის განსხვავების შემოყვანა და საგანგებო კატეგორიის უსასრულოდ მცირე სიდიდის დაწესება, მაგრამ ისეთის, რომელიც ყოველ მოცემულ სიდიდეზე ნაკლები იქნება.

ეილერის „დიფერენციალური აღრიცხვა“ შედგება ორი ნაწილისაგან. პირველი ნაწილი შედგება შემდეგი თავებისაგან: 1) სასრულო სხვაობათა შესახებ, 2) სხვაობათა გამოყენება მწკრივთა შესახებ მოძღვრებაში. 3) უსასრულოთა და უსასრულოდ მცირეთა შესახებ. 4) ნებისმიერი რიგის დიფერენციალების ბუნების შესახებ. 5) იმ ალგებრულ ფუნქციათა დიფერენცირების შესახებ, რომლებიც ერთ ცვლადს შეიცავენ. 6) ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა დიფერენცირების შესახებ. 7) იმ ფუნქციების დიფერენცირების შესახებ, რომლებიც ორი ან ორზე მეტი რიცხვის ცვლადებს შეიცავენ. 8) დიფერენციალურ გამოსახვათა განმეორებითი დიფერენცირების შესახებ და 9) დიფერენციალურ განტოლებათა შესახებ.

მეორე ნაწილი შეიცავს თავებს: 1) მწკრივთა გარდაქმნის შესახებ. 2) შეჯამებადი მწკრივების მოძებნის შესახებ. 3) სასრული სხვაობათა მოძებნის შესახებ. 4) ფუნქციათა მწკრივებით წარმოდგენის შესახებ. 5) ზოგადი წევრის საშუალებით მწკრივის ჯამის მოძებნა. 6) პროგრესიათა შეჯამების შესახებ უსასრულო მწკრივის საშუალებით. 7) ზემოთ გადმოცემული შეჯამების მეთოდის შემდგომი განვითარება. 8) დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენების შესახებ მწკრივთა შედგენისათვის. 9) დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენების შესახებ განტოლებათა ამოხსნისათვის. 10) მაქსიმუმისა და მინიმუმის შესახებ. 11) მრავალსახა ფუნქციებისა და მრავალი ცვლადის ფუნქციათა მაქსიმუმისა და მინიმუმის შესახებ. 12) დიფერენციალების გამოყენების შესახებ განტოლების ნამდვილი ფესვების მოძებნისთვის. 13) წარმოსახვითი ფესვების ნიშნების შესახებ. 14) ფუნქციათა დიფერენციალების შესახებ ზოგიერთ საგანგებო შემთხვევაში. 15) იმ ფუნქციათა მნიშვნელობათა შესახებ, რომლებიც ზოგიერთ შემთხვევაში განუსაზღვრელებად გვეჩვენება. 16) წარმოუდგენელ ფუნქციათა დიფერენცირების შესახებ. 17) მწკრივთა ინტერპოლირების შესახებ და 18) დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენების შესახებ წილადების დაშლისათვის.

პირველ ნაწილში ეილერი გადმოსცემს დიფერენციალური აღრიცხვის თეორიას ანუ საფუძვლებს, მეორეში მის გამოყენებას ანალიზის საკითხებისადმი, სახელდობრ, მაქსიმუმისა და მინიმუმის თეორიისადმი, მწკრივთა თეორიისადმი, უმაღლესი ალგებრისადმი და სხვა. წინასიტყვაობის დასასრულში ეილერი ამბობს, რომ ის

სრულიად არ ეხება დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენებას გეომეტრიაში. მან პირველმა განიზრახა ანალიზის აბსტრაქტულად გადმოცემა, ამბობს რა, რომ მისი წიგნი დაწერილია წმინდა ანალიზის ფარგლებში და ყველა წესის გადმოცემისათვის მას არც-ერთი ნახაზი არ დაჭირებია.

სასრულ სხვაობათა აღრიცხვა, რომელსაც ეილერმა პირველი ორი თავი მიუძღვნა, წარმოადგენს საფუძველს, რომელზედაც შემდგომ ააგო დიფერენციალური აღრიცხვა. ამ ორ თავში მოცემული მასალა ახალი არ არის; მას ნიუტონისა და ტეილორის ნაშრომებიც შეიცავს, მაგრამ მოცემული მასალა იმდენად ხელმისაწვდომადაა გადმოცემული და იმდენი კარგად შედგენილი მაგალითებია თანდართული, რომ მკითხველი აქ პირველად იპოვის სასრულ სხვაობათა აღრიცხვის საფუძვლების მოკლე და ნათელ გადმოცემას. აქ ნახმარი ნამატის Δ ასოთი აღნიშვნა, რომელსაც ახლა ვხმარობთ, ეილერს ეკუთვნის.

მე-15 პარაგრაფში ეილერი წერს ფორმულებს $y = x^n$ ფუნქციის სასრულ სხვაობას მთელი და დადებითი ხარისხებისათვის, დაწყებული 1-დან m-მდე უკანასკნელის ჩათვლით. მე-17 და მე-18 პარაგრაფებში ამ ფორმულებს ავრცელებს წილადი და უარყოფითი მაჩვენებლის შემთხვევაზე.

საერთოდ, პირველ თავში, დაწყებული 1-ლი პარაგრაფიდან 23-ე პარაგრაფამდე უკანასკნელის ჩათვლით ეილერი პოულობს სხვადასხვა ელემენტარული ფუნქციების სასრულ სხვაობათა ჯერ მხოლოდ გამოსახვას, რომლებსაც არ ეყრდნობა დიფერენციალური აღრიცხვის ფორმულების გამოყვანის დროს; ამავე თავის ბოლოს, 24-ე პარაგრაფიდან 36-ე პარაგრაფამდე უკანასკნელის ჩათვლით ის გადმოსცემს სასრულ სხვაობათა შედგენის შებრუნებულ ოპერაციებს, ესე იგი მოცემული სხვაობით თვითონ იმ ფუნქციის მოძებნა, რომლისგანაც აღებულია ეს სხვაობა. ამ ფუნქციას ეილერი ჯამს უწოდებს და 25-ე პარაგრაფში ამტკიცებს, რომ ის მართლაც იძლევა მოცემულ სხვაობათა ჯამს.

მეორე თავში (§ 44) ეილერს გამოჰყავს ზოგადი წევრის გამოსახვა მწკრივისა, რომლის რომელიმე რიგის სასრული სხვაობები ნულებად გადაიქცევა. მიღებული გამოსახვა არის საინტერპოლაციო ფორმულა:

$$a + \frac{x-1}{1}\, b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}\, c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, d +$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}e\ldots,$$

სადაც a მწკრივის პირველი წევრია და b, c, d, $e\ldots$ — სხვაობათა პირველი წევრები. ინტერპოლირებისათვის ამ ფორმულის გამოყენების შესაძლებლობას ეილერი უჩვენებს ამავე თავის 52-ე პარაგრაფში. მაგალითებს ის აქ არ განიხილავს, რადგან მწკრივთა ინტერპოლირების საკითხისადმი მიძღვნილია მეორე ნაწილის მე-16 და მე-17 თავები. პირველი ნაწილის მეორე თავში განიხილავს „სუმაციურ წევრებს", ესე იგი მწკრივის პირველი x წევრების ჯამისათვის გამოსახვას.

მესამე თავში: „უსასრულოთა და უსასრულოდ მცირეთა შესახებ" ეილერი განიხილავს პრინციპულ საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია დიფერენციალური აღრიცხვის დაფუძნებასთან. ეილერი ამბობს, რომ ამ თავში მას განზრახული აქვს ყველა ბუნდოვნებათა თავიდან მოშორება, რომლებიც დაკავშირებულია სიტყვა „უსასრულობასთან", როგორც უსასრულოდ დიდის, ისე უსასრულოდ მცირის მიმართ. მაგრამ ეილერი არა თუ აღწევს მიზანს, არამედ საწინააღმდეგოს ღებულობს. მიზეზი ამისა იმაში მდგომარეობს, რომ ეილერი არსად არ იძლევა მათემატიკური ცნებების — ცვლადი სიდიდისა და მისი ზღვრის — შესახებ საკმაოდ ზუსტ განსაზღვრას. ცვლადი სიდიდისათვის ეილერი გვაძლევს ტავტოლოგიურ განსაზღვრას: „ცვლადი სიდიდე არის ისეთი სიდიდე, რომელიც მოცემული საკითხის განხილვისას, იზრდება ან მცირდება რა, იცვლება". ზღვრის ცნება, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მას სრულებით არ შემოჰყავს; ამის გამო უსასრულოდ მცირედ ის გულისხმობს არა ცვლად სიდიდეს, არამედ თითქოს მუდმივ სიდიდეს, რომელიც ყოველ სიდიდეზე ნაკლებია, ხოლო უსასრულოდ დიდ სიდიდედ ისეთ მუდმივს, რომელიც ყოველ სიდიდეზე მეტია. აქედან ცხადია, რომ უსასრულოდ დიდი არ არსებობს და უსასრულოდ მცირე ნულის ტოლია. მართლაც, ეილერი ამბობს, რომ ყოველი სიდიდე შეიძლება იმდენჯერ შემცირდეს გაყოფის საშუალებით, რომ ის სავსებით გაქრეს და არარად გადაიქცეს. იმ კითხვაზე, თუ რა არის მათემატიკაში უსასრულოდ მცირე სიდიდე, ჩვენ ვუპასუხებთ, — ამბობს ეილერი, — რომ ის ზუსტად ნულის ტოლია. აქედან ცხადია, რომ ეილერი უსასრულოდ მცირე სიდიდეს განიხილავს არა როგორც ცვლადს, არამედ როგორც მუდმივს, რომელიც ყოველ სხვა მუდმივზე ნაკლები უნდა იყოს, ხოლო უსა-

სრულოდ დიდი — ყოველ სხვა მუდმივზე მეტი. ამის გამო ეილერი ყოველი ცვლადი სიდიდის დიფერენციალს ნულის ტოლად თვლის, მაგრამ იმავე დროს უთითებს, რომ სხვადასხვა ცვლადების დიფერენციალების ფარდობა შეიძლება ყოველ რიცხვს უდრიდეს. ამის დასადასტურებლად ის 85-ე პარაგრაფში ამბობს: „ეს სავსებით ნათელია მარტივი არითმეტიკიდან; ყველასათვის ცნობილია, რომ ნებისმიერ რიცხვზე გამრავლებული ნული გვაძლევს ნულს, ესე იგი $n \cdot 0=0$ და ამიტომ $n:1=0:0$. აქედან ცხადია, რომ ორ ნულს ერთმანეთთან შეიძლება ჰქონდეს ყოველი გეომეტრიული ფარდობა, თუმცა არითმეტიკული თვალსაზრისით მათი ფარდობა არის ტოლების ფარდობა. ამრიგად, რამდენადაც ნულებს შორის შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ყოველ ფარდობას, ამიტომ იმისათვის, რომ ეს სხვადასხვა ფარდობა გამოსახონ, განგებ სარგებლობენ სხვადასხვა სიმბოლოთი, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც საჭიროა ორი სხვადასხვა ნულის გეომეტრიული ფარდობის განსაზღვრა; მაგრამ უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვაში სხვა არაფერი კეთდება, გარდა იმისა, რომ იძებნება ფარდობა სხვადასხვა უსასრულოდ მცირეთა შორის. ამიტომ, თუ ჩვენ არ ვისარგებლებთ მათ აღსანიშნავად სხვადასხვა ნიშნით, მივიღებთ დიდ არევდარევას, რომელსაც ვერაგზით ვერ დავაღწევთ თავს“.

მესამე თავის უკანასკნელ პარაგრაფში ეილერი იძლევა უსასრულო მწკრივებზე ძირითად ცნებებს. მე-100 პარაგრაფში ის განიხილავს ჰარმონიულ მწკრივს და ცდილობს ახსნას პარადოქსი, რომელიც დაკავშირებულია უსასრულოდ დიდი რიცხვის ცნებასთან. ჰარმონიული მწკრივის ზოგად წევრში $\frac{1}{x}$ ეილერი x-ს აძლევს ნულიდან დაწყებულ მთელ დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებს და ღებულობს მწკრივის შემდეგ სახეს

$$\ldots, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{0}, +\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, \ldots$$

$\frac{1}{0}$, რომელსაც ეილერი უსასრულოდ დიდს უწოდებს, მისივე თქმით, საზღვარია, რომლის გავლის შემდეგ დადებითი წევრები უარყოფითი ხდებიან ან პირიქით. შემცდარად თვლის იმ შეხედულე-

ზას, თითქოს უარყოფითი რიცხვების განხილვა შეიძლება როგორც უსასრულობაზე უფრო მეტი, იმის გამო, რომ განხილულ ჰარმონიულ მწკრივში ზრდადი წევრები, იმის შემდეგ, რაც ისინი მიაღწევენ უსასრულობას, უარყოფითი ხდებიან. ამის უარსაყოფად ეილერმა აიღო მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია $\frac{1}{x^2}$ და ამბობს, რომ უსასრულობაზე გადასვლის შემდეგ, ჩვენ ისევ გვექნება დადებითი წევრები

$$\cdots, +\frac{1}{9}, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{1}, +\frac{1}{0}, +\frac{1}{1}, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{9} \ldots,$$

რომელთა შესახებ ვერავინ ვერ იტყვის, რომ ისინი უსასრულობაზე მეტია. არსებითად ასეთი ახსნა არაფერს არ არკვევს.

102-ე პარაგრაფიდან დაწყებული ამ თავში ეილერი განიხილავს მწკრივს

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

ის ყურადღებას აქცევს იმას, რომ ამ მწკრივის n წევრის ჯამი $\frac{1}{1-x}$-გან განსხვავდება $\frac{x^n}{1-x}$ სიდიდით და, მაშასადამე, აღებული წევრების რიცხვის n-ის ზრდისას ეს ჯამი მხოლოდ მაშინ უახლოვდება $\frac{1}{1-x}$ მნიშვნელობას, როდესაც ნაშთი $\frac{x^n}{1-x}$ ნულს უახლოვდება, ესე იგი, როდესაც x ნაკლებია 1-ზე. ამრიგად, ეილერი ამჩნევს, რომ x-ის მხოლოდ წილადი მნიშვნელობისათვის მივიღებთ მწკრივის ჯამის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას.

108-ე პარაგრაფში ეილერი განიხილავს ნიშანცვლად მწკრივს:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots,$$

რომელშიც მიმდევრობით დაუშვებს, რომ $x=1, 2, 3, \ldots$ და უჩვენებს, რომ თუ მწკრივს ნაშთს ჩამოვაშორებთ, მივიღებთ ტოლობებს:

$$1-1+1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2},$$

$$1-2+4-8+16-32+\cdots = \frac{1}{3},$$

$$1-3+9-27+81-243+\cdots=\frac{1}{4}$$ და ა. შ.

აქვე ეილერი სამართლიანად შენიშნავს, რომ ეს ტოლობები არ არიან მართებული, ვინაიდან მეორე მწკრივში პირველი წევრების ჯამი მით უფრო განსხვავდება $\frac{1}{3}$-გან, რაც უფრო მეტ წევრებს ავიღებთ, იმ დროს, როდესაც მწკრივის ჯამი უნდა იყოს ის ზღვარი, რომელსაც ვუახლოვდებით, რაც უფრო მეტ წევრებს ავიღებთ. იმ მწკრივს, რომლის წევრები კლებულობს, ეილერი კრებადს უწოდებს, ხოლო, რომლის წევრები იზრდება, — განშლადს; ეს განსხვავდება მწკრივის განშლადობისა და კრებადობის ახლანდელი გაგებისაგან. ეილერი სწორად თვლის იმ აზრს, რომ განშლად მწკრივს განსაზღვრული ჯამი არა აქვს, მაგრამ როდესაც განშლადი მწკრივის შემთხვევაშიც სარგებლობს „მწკრივის ჯამით", ის ამ გამოთქმას მიაწერს უფრო გაფართოებულ აზრს, რაც ჩანს მისი სიტყვებიდან: „ჩვენ ვიტყვით, რომ რომელიმე უსასრულო მწკრივის ჯამი არის სასრული გამოსახვა, რომლის დაშლისაგან წარმოდგება ეს მწკრივი".

ეილერის ამ აზრების არასწორად გაგებამ მრავალი მათემატიკოსი შეცდომაში შეიყვანა, სარგებლობდნენ რა მწკრივებით იმის გამოუკვლეველად, კრებადია თუ არა მწკრივი. ამ შეცდომას შემდეგში ბოლო მოუღეს გაუსმა და სხვებმა.

მეოთხე თავი — „ნებისმიერი რიგის დიფერენციალების ბუნების შესახებ" — მიძღვნილია დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი საკითხებისადმი. დასაწყისში შემოჰყავს დიფერენციალის ცნება, რასაც ის უწოდებს უსასრულო მცირე სხვაობას, და აღნიშვნა d. ეილერი შენიშნავს, რომ ეს აღნიშვნა მას შემოჰყავს Δ ასოს ნაცვლად, რითაც ის წინათ სხვაობას აღნიშნავდა. აქვე მოცემულია უმაღლესი რიგის დიფერენციალების აღნიშვნები: d^2y, d^3y და ასე შემდეგ. შემდეგ პარაგრაფში (§ 115) მოყვანილია დიფერენციალური აღრიცხვის განსაზღვრა: „აღრიცხვას, რომლის საშუალებით მოიძებნება და გამოიყენება დიფერენციალები, ეწოდება დიფერენციალური აღრიცხვა".

139-ე პარაგრაფში ეილერს შემოჰყავს ინტეგრების ცნება, როგორც დიფერენცირების შებრუნებული: „როგორც დიფერენციალურ აღრიცხვაში ყოველი სიდიდისათვის იძებნება მისი დიფერენციალი, აგრეთვე არსებობს აღრიცხვის სახე იმ სიდიდის მოსაძებნად, რო-

მლის დიფერენციალი მოცემულია, მას ეწოდება ინტეგრალური აღრიცხვა. ასეთი სახელწოდების მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ თუ დიფერენციალი შეიძლება განიხილოს როგორც სიდიდის უსასრულოდ მცირე ნაწილი, რომელზეც ის იზრდება, მაშინ თვით ეს სიდიდე მისი ნაწილის მიმართ შეიძლება განიხილოს, როგორც მთელი, რის გამო მას ეწოდება იმის ინტეგრალი".

მეცხრე თავის, „დიფერენციალურ განტოლებათა შესახებ", პირველი ორი პარაგრაფი შეიცავს არაცხად ფუნქციათა დიფერენცირების საკითხს. ეილერი იწყებს განტოლებიდან

$$y^2 + Py + Q = 0$$

მისი დიფერენცირებით მიღებულ შედეგს გადმოგვცემს შემდეგი სახით:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yp + q}{2y + P},$$

სადაც $p = \dfrac{dP}{dx}$ და $q = \dfrac{dQ}{dx}$; ამასთან უნდა აღვნიშნოთ, რომ გამოსახულებას $\dfrac{dy}{dx}$ ეილერი უწოდებს დიფერენციალების ფარდობას და არა წარმოებულს, ვინაიდან სიტყვა „წარმოებული" ეილერის შემდეგ იქნა შემოყვანილი.

308-ე პარაგრაფში ეილერი ამბობს, რომ ყოველი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც მხოლოდ ორ ცვლადს შეიცავს, ყოველთვის განსაზღვრულ თანაშეფარდებას გამოსახავს მათ შორის. სამცვლადიანი განტოლებისთვის ამას ყოველთვის არა აქვს ადგილი. 316-ე პარაგრაფში ეილერი აწესებს ამოხსნის არსებობის აუცილებელ პირობას, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

თუ განტოლება

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

ამ პირობას, რომელიც, მისი აზრით, საკმარისია, აკმაყოფილებს, მაშინ ეილერი ამ განტოლებას „ნამდვილს" უწოდებს, და თუ არ აკმაყოფილებს, მაშინ — „წარმოსახვითს".

1768 — 1770 — 1794 წლებში რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიამ გამოსცა ეილერის „ინტეგრალური აღრიცხვა" 4 ტომად, რომლის მოცულობა 2040 გვერდს შეადგენს. ეს ნაშრომი წარმოადგენს

პირველ სრულ სახელმძღვანელოს ინტეგრალურ აღრიცხვაში და შეიცავს ბევრ ახალს.

ინტეგრალურ აღრიცხვას ეილერი ასე განსაზღვრავს: „ინტეგრალური აღრიცხვა არის მეთოდი, რომლის საშუალებით მოიძებნება თანაფარდობა სიდიდეებს შორის, თუკი მოცემულია თანაფარდობა მათ დიფერენციალებს შორის“.

პირველ ტომს ეილერი იწყებს ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრებიდან და აწესებს იმ კლასებს, როდესაც ინტეგრება სასრული სახით შესრულდება. ეილერის გადმოცემა დღემდე სავსებით შენარჩუნებულია და ამ დარგში არსებითად არაფერი არ დამატებია 150 წლის განმავლობაში. ამავე ტომში ეილერი მოკლედ გადმოსცემს განსაზღვრული ინტეგრალების მიახლოებით გამოთვლის ხერხს; აქვე მოცემულია ისეთი ინტეგრალების მაგალითები, რომლებიც მოიძებნებიან საზღვრების მხოლოდ ზოგიერთ კერძო მნიშვნელობებისათვის. ყველა ეს ინტეგრალი კლასიკური გახდა.

ეს ტომი შეიცავს აგრეთვე დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების შესახებ მოძღვრებას. აქ მოცემულია მაინტეგრებელი მამრავლისა და ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა შეკრების შესახებ მოძღვრება, რომლებიც მთლიანად ეილერს ეკუთვნიან. აქვე მოყვანილია მისი განთქმული ინტეგრება განტოლებისა, რომელსაც მივყავართ ელიპსური ინტეგრალების შეკრებად. გადმოცემულია აგრეთვე მიახლოვებითი რიცხვითი ინტეგრების მეთოდი.

ამ ტომში მოთავსებულია ინტეგრალი, რომელიც ახლა ეილერის სახელს ატარებს:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{და} \quad \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx.$$

ეილერმა შემოიყვანა აგრეთვე ორმაგი ინტეგრალის ცნება.

მეორე ტომში დამუშავებულია მეორე და უმაღლესი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების საკითხი. ყველაფერი, რაც ამ ტომშია გადმოცემული, კლასიკური გახდა.

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება პირველად ეილერმა განიხილა. ასეთ განტოლებათა ინტეგრების საკითხი მან მესამე ტომში მოათავსა. ამავე ტომშია მოთავსებული გამოკვლევები ვარიაციათა აღრიცხვის დარგში. ვარიაციათა აღრიცხვა, შეიძლება ითქვას, ეილერმა შექმნა.

ეილერმა პირველად მოგვცა ფარდობით მაქსიმუმსა და მინიმუმზე ამოცანების ამოხსნის მეთოდი, რომელსაც ახლა ვარიაციათა აღრიცხვაში ეილერის წესები ეწოდება. 1744 წელს ცალკე დაიბეჭდა ეილერის განთქმული ტრაქტატი „Methodus inveniendi", სადაც მან თავი მოუყარა ყველა თავის გამოკვლევას ვარიაციათა აღრიცხვის დარგში. აქ ეილერი კვლევის მთავარ ამოცანად სვამს აბსოლუტური და ფარდობითი ექსტრემუმების მოსაძებნი მეთოდების განვითარებას. ეილერი აწესებს, რომ სიდიდეს, რომელიც ექსტრემალური მრუდისათვის აღწევს უდიდესს ან უმცირესს მნიშვნელობას, უნდა ჰქონდეს ინტეგრალის სახე

$$W = \int_{x_1}^{x_2} z dx,$$

რომელშიც zdx-ის ინტეგრება შეიძლება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა x და y-ს შორის არსებობს სავსებით განზღვრული დამოკიდებულება. ასეთ W სიდიდეს ეილერი უწოდებს განუზღვრელ ინტეგრალურ სიდიდეს. შემდეგ ეილერს შემოჰყავს ცნება წერტილში მრუდის ვარირების შესახებ და განიხილავს ორ მრუდს, რომელიც უსასრულო მცირედ განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

ეილერის გენიალობა ჩანს არა მარტო მისი ნაშრომებიდან ანალიზის დარგში, მან უაღრესად დიდი წვლილი შეიტანა მეცნიერების სხვა დარგშიც, სახელდობრ, მექანიკაში.

ეილერმა მეცნიერული მოღვაწეობა მექანიკიდან დაიწყო. 1736 წელს რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიამ გამოსცა მისი „ანალიზურად გადმოცემული მექანიკა", რომელიც შემდგომ საბოლოოდ ჩამოაყალიბა ლაგრანჟმა. ეს ნაშრომი ორი ტომისაგან შედგება. პირველ ტომში განხილულია თავისუფალი წერტილის მოძრაობა, მეორეში კი—არათავისუფალისა. თითოეული ტომი დაყოფილია ორ ნაწილად. პირველ ნაწილში განხილულია მოძრაობა სიცარიელეში, მეორე ნაწილში კი — წინაღობიან გარემოში. პირველი ტომის პირველ თავში ეილერი აწესებს ძირითად განსაზღვრებს და ძირითად ცნებებს სხეულის მოძრაობის შესახებ, გულისხმობს რა ამ სიტყვაში უსასრულოდ მცირე სიდიდის სხეულს, ესე იგი იმას, რასაც ახლა მატერიალური წერტილი ეწოდება. ეილერი ჯერ განიხილავს წერტილის წრფივ მოძრაობას სხვადასხვა ძალით გამოწვეული და ამოცანების ამოხსნა დაჰყავს

მეორე რიგის იმ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნამდე, რომლის რიგი დაიწევა. ყველა ამოცანა, რომელიც არსებითად ეილერს განუხილავს გარდა მძიმე სხეულის თავისუფლად ვარდნისა და ჰარმონიული მოძრაობისა, უფრო განტოლებებისა და ფუნქციების ინტეგრების მაგალითებია, ვიდრე მექანიკის ამოცანები. შემდეგ ეილერი განიხილავს წრფივ მოძრაობას წინაღობიან გარემოში. ეს განყოფილება საინტერესოა უფრო მათემატიკის თვალსაზრისით, ვიდრე მექანიკისა.

პირველი ტომის ორი უკანასკნელი განყოფილება ეხება სიცარიელეში და წინაღობიან გარემოში წერტილის მრუდწირულ მოძრაობას. ამასთანავე ეილერი არ სარგებლობს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემით, არამედ წერტილზე მოქმედი ძალა დაშალა ტანგენციალურ და ნორმალურ მდგენელად და შეადგინა ეგრეთ წოდებული „მოძრაობის ბუნებრივი განტოლებანი".

მეორე ტომი ეძღვნება წერტილის არათავისუფალ მოძრაობას და შეიცავს ქანქარას თეორიას; მოცემულია მრავალი ამოცანა დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრებაზე, აგრეთვე ამოცანები ვარიაციათა აღრიცხვის დარგიდან და ისეთი ამოცანებიც კი, რომლებიც მიიყვანებიან განტოლებამდე, რომელსაც ახლა ინტეგრალურ განტოლებას უწოდებენ. ეს ტომი საინტერესოა აგრეთვე იმით, რომ აქ ეილერი გვაძლევს ზედაპირების დიფერენციალური გეომეტრიის საფუძვლებს.

ამრიგად, ეილერმა, გამოიყენა რა მათემატიკური ანალიზი მექანიკის საკითხების ამოსახსნელად, პირველმა წარმოადგინა მექანიკა, როგორც წმინდა მათემატიკური მეცნიერება, რომელიც იკვლევს წარმოდგენითი წერტილის მოძრაობას ბუნებაში არარსებული წარმოდგენითი ძალების მოქმედებით.

მყარი სხეულის მექანიკა, როგორც კინემატიკა, ისე დინამიკა, შეიძლება ითქვას, ეილერმა შექმნა. მოძრაობის სიჩქარის, აჩქარების, ძალის დაშლა სამი ურთიერთმართობული მიმართულებებით პირველად ეილერმა მოგვცა. პირველად ეილერმა მოგვცა აგრეთვე სიჩქარისა და აჩქარების გამოსახულება პოლარულ კოორდინატებში. მანვე პირველად შეამჩნია, რომ ამოცანაში უძრავი ცენტრისადმი მიზიდულობის შესახებ წერტილის სიჩქარე დამოკიდებულია მხოლოდ ცენტრამდე მანძილისაგან.

ეილერს მნიშვნელოვანი ნაშრომები აქვს ასტრონომია-შიც. ამათგან ყველაზე თვალსაჩინო ადგილი უჭირავს „მთვარის მოძრაობის თეორიას“, რომელიც გამოაქვეყნა 1753 და 1772 წლებში.

3. ჟოზეფ ლუი ლაგრანჟი

1736 წლის 25 იანვარს ტურინში სამხედრო ხაზინადრის, წარმოშობით ფრანგის, ჟოზეფ ლუი ლაგრანჟის ოჯახში დაიბადა მეთერთმეტე ბავშვი, რომელსაც დაარქვეს მამის სახელი — ჟოზეფ ლუი. მისი მშობლები შეძლებულები იყვნენ, მაგრამ მამა ხარისკო სპეკულაციაში გაება და დაკარგა თავისი და ცოლის ქონება. ამის გამო ახალგაზრდა ჟოზეფი ალსაზრდელად მიაბარეს საარტილერიო სასწავლებელში. მათემატიკურ მეცნიერებებში მას განსაკუთრებული წარმატებები ჰქონდა, რამაც უფროსების ყურადღება მიიპყრო და სასწავლებლის დამთავრებისთანავე, 19 წლის ასაკში, იგი იმავე სასწავლებელში დატოვეს მათემატიკის მასწავლებლად. მალე მან თავი მოუყარა თავის ნიჭიერ მოწაფეებს, დააინტერესა ისინი მათემატიკით და მისდამი სიყვარული ჩაუნერგა. ამ მეგობრული საზოგადოებიდან წარმოიშვა ტურინის აკადემია, რომლის ნაშრომების პირველი ტომი გამოვიდა 1759 წელს. ამ ტომში წერილების უმრავლესობა ლაგრანჟს ეკუთვნის, დანარჩენი დაწერილია მისი მოწაფეების მიერ. ამ ტომში მოთავსებული ლაგრანჟის წერილებიდან განსაკუთრებით შესანიშნავია დიდი მემუარი „ბგერის გავრცელების შესახებ“, რომლის 300 გვერდი შეიცავს სავსებით ორიგინალურ გამოკვლევებს.

ტურინის აკადემიის ნაშრომების შემდეგ ტომში მოთავსებულია ლაგრანჟის მემუარი: „ინტეგრალების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოსაძებნი ხერხის შესახებ“. ასეთივე ხერხი გეომეტრიული ფორმით გადმოსცა ეილერმა 15 წლის წინათ, მაგრამ ლაგრანჟმა თავის მეთოდს მისცა წმინდა ანალიზური სახე. წერილის გამოსვლამდე ლაგრანჟმა აცნობა თავისი მეთოდის შესახებ ეილერს, რომელიც მაშინ ბერლინის აკადემიის პრეზიდენტი იყო. ეილერისაგან მან მიიღო აღფრთოვანებული წერილი, რომელშიც აუწყებდა ლაგრანჟს, რომ იგი (ლაგრანჟი) არჩეულია ბერლინის აკადემიის წევრად ეილერის წარდგენით.

შემდეგ წლებში ლაგრანჟი მონაწილეობას ღებულობს პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის მიერ მოწყობილ კონკურსებში; მისი ნაშრომები: „მთვარის ლიბრაციის შესახებ“ და „იუპიტერის თანამგზავრე-

ბის თეორიის შესახებ" — პირველ პრემიას ღებულობენ და 30 წლის ასაკში ლაგრანჟს მისი დროის პირველი მათემატიკოსის სახელს უხვეჭენ.

ტურინში ლაგრანჟი ენერგიულად განაგრძობს მეცნიერულ მუშაობას და ერთი მეორეზე მიყოლებით აქვეყნებს ბრწყინვალე ნაშრომებს. 1766 წელს ეილერი გადადის ბერლინიდან პეტერბურგში და თავის ნაცვლად ბერლინის აკადემიის პრეზიდენტის თანამდებობაზე მეფე ფრიდრიხ მეორეს ლაგრანჟის კანდიდატურას სთავაზობს. ამ საკითხზე მეფე შეუთანხმდა დალამბერს, რომელმაც აგრეთვე მხარი დაუჭირა ლაგრანჟის კანდიდატურას. ამრიგად, 1766 წელს ლაგრანჟმა დაიკავა ბერლინის მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტის ადგილი. ამ ადგილზე ლაგრანჟი დარჩა 1787 წლამდე. ბერლინის აკადემიის ნაშრომების კრებული („ბერლინის აკადემიის მოამბე") ლაგრანჟმა გაამდიდრა თავისი აღმოჩენებით მათემატიკაში, ციურ მექანიკასა და სფერულ ასტრონომიაში. ყველა ამ გამოკვლევაში ლაგრანჟი ყოველთვის იყენებს ზოგად ანალიზურ მეთოდებს და გაურბის გეომეტრიულ თვალსაჩინოებას.

ფრიდრიხ II-ის გარდაცვალების შემდეგ ლაგრანჟს აღარ უნდოდა გერმანიაში დარჩენა. პარიზის მეცნიერებათა აკადემიამ დააჩქარა ლაგრანჟის არჩევა აკადემიის ნამდვილ წევრად. 1787 წელს ლაგრანჟი პარიზში გადავიდა და სიკვდილამდე — 1813 წლამდე — იქ მუშაობდა.

1788 წელს გამოვიდა ლაგრანჟის განთქმული ნაშრომი „ანალიზური მექანიკა", რომელიც დაწერა ბერლინში ყოფნის დროს და დაბეჭდა პარიზში. 1795 წელს პარიზში დაარსდა „ნორმალური სკოლა" სახალხო სასწავლებლების მასწავლებლებისა და პროფესორების მოსამზადებლად. ლაგრანჟი (ლაპლასიც) აქ კითხულობდა ელემენტარული მათემატიკის კურსს. ის აგრეთვე მიიწვიეს მათემატიკის პროფესორად პოლიტექნიკურ სკოლაში, რომელიც გაიხსნა მონჟის პროექტით, აქ კითხულობდა ანალიზის საკუთარ კურსს. ამ კურსის პირველი ნაწილი გამოსცეს სათაურით „ანალიზურ ფუნქციათა თეორია", მეორე — „ფუნქციათა აღრიცხვა".

ეილერმა სწრაფად შეაფასა ლაგრანჟის გენიალობა და ხელი შეუწყო მის წინწაწევას და მისთვის სამეცნიერო მუშაობისათვის პირობების შექმნაზე იზრუნა. ამ მხრივ ლაგრანჟიც ეილერის მიმდევარი გახდა. ერთხელ, გამოკითხვის დროს, მისმა ერთ-ერთმა

მოწაფემ ლექციაზე ლაგრანჟის მიერ გადმოცემული ერთი თეორემა დაამტკიცა სავსებით ორიგინალურად და უფრო მოკლედ, ვიდრე თვითონ ლაგრანჟმა. კითხვაზე, თუ საიდან მოიტანა მან ასეთი დამტკიცება, მოწაფემ უპასუხა, რომ იგი ისწავლა თავისი ამხანაგის პუასონისაგან. ლაგრანჟი დაინტერესდა პუასონით, ესაუბრა კიდეც მას რამდენჯერმე და დარწმუნდა, რომ პუასონი დაჯილდოვებულია დიდი მათემატიკური ნიჭით. ლაგრანჟმა სკოლის საბჭოს წინაშე დასვა საკითხი, რათა პუასონი გაეთავისუფლებიათ ყოველგვარი სხვა სამუშაოდან გარდა მათემატიკაში მეცადინეობისა. მართლაც, ლაგრანჟი არ შემცდარა — პუასონი გახდა მისი დროის მეტად განთქმული მათემატიკოსი.

საფრანგეთში ლაგრანჟს, რომელი მთავრობაც არ უნდა ყოფილიყო, ყველა პატივისცემით ეპყრობოდა. ნაპოლეონიც კი აფასებდა მას: გახადა ის სენატორი, გრაფი და უზრუნველყო დიდი ხელფასითა და პენსიით.

ლაგრანჟის თხზულებათა სრული კრებული, რომელიც 14 ტომს შეადგენს, გამოსცეს 1867 — 1894 წლებში საფრანგეთის მთავრობის განკარგულებით. მისი ნაშრომებიდან ყველაზე უფრო განთქმულია „ანალიზური მექანიკა", რომლის პირველი გამოცემა გამოვიდა 1788 წელს, მეორე, გადამუშავებული და შევსებული, — 1813 — 1816 წწ., ორ ტომად. მესამე გამოცემა ბერტრანის რედაქციით გამოვიდა 1853 წ. და, დასასრულ, მეოთხე, დარბუს რედაქციით, შევიდა ლაგრანჟის თხზულებათა სრულ კრებულში. ამ ნაშრომის წინასიტყვაობაში ლაგრანჟი ამბობს, რომ მას მიზნად აქვს მექანიკის თეორია და მისი ამოცანების ამოხსნის ხელოვნება დაიყვანოს ზოგად ფორმულებამდე. მთელ მექანიკას ყოფს ორ ნაწილად: სტატიკა ანუ თეორია წონასწორობის შესახებ და დინამიკა ანუ თეორია მოძრაობის შესახებ. ამასთანავე ამბობს, რომ მისი მეთოდი მოითხოვს ალგებრულ ოპერაციებს და რომ ამით მან მექანიკა ანალიზის დარგი გახადა და გააფართოვა იგი. თვით სახელწოდებიდან: „ანალიზური მექანიკა" აშკარაა, რომ ლაგრანჟი მექანიკას განიხილავს როგორც მათემატიკური ანალიზის დარგს და არა როგორც ფიზიკის დარგს.

ლაგრანჟის ეს ნაშრომი სტატიკიდან იწყება, რომელსაც პირველ ტომში 206 გვერდი უჭირავს და დაყოფილია 8 განყოფილებად. შესავალში ანუ პირველ განყოფილებაში ლაგრანჟი გადმოსცემს სტატიკის განვითარების ისტორიას, დაწყებულს არქიმედედან იოჰანე ბერნულამდე. ლაგრანჟი ძალას უწოდებს იმ მიზეზს,

რომელიც ცდილობს სხეული აამოძრაოს; ამის გამო ძალა ფასდება მოძრაობის რაოდენობით. აქ ლაგრანჟი არ განსაზღვრავს იმას, თუ რა არის მოძრაობის რაოდენობა; ამ განსაზღვრას ის გადმოსცემს მხოლოდ დინამიკის დასაწყისში შემდეგი სახით: „ეს არის სხეულის მასის ნამრავლი სიჩქარეზე, რომელსაც ჩვეულებრივად ეწოდება მოძრაობის რაოდენობა“.

მეორე განყოფილებაში ლაგრანჟი გადმოსცემს „შესაძლო გადაადგილებათა საწყისის“ მის განთქმულ დამტკიცებას. ეს დამტკიცება დამყარებულია ბლოკებისა და პოლისპატების სისტემის თვისებათა განხილვაზე. ლაგრანჟის დამტკიცება მარტივი და მოკლეა (უჭირავს მხოლოდ ორი გვერდი); ყოველი ინჟინერი და ტექნიკოსისათვის ის ცხადი და დამაჯერებელია. მათემატიკოსები კი ამ დამტკიცებას თვლიან არამკაცრ დამტკიცებად და, მაშასადამე, არადამაჯერებლად და უპირატესობას ანიჭებენ ფურიეს დამტკიცებას, რომელსაც 40 გვერდი უჭირავს.

შესაძლო გადაადგილებათა საწყისი, ანალიზურად გამოსახული, წარმოადგენს საყოველთაო ფორმულას, რომელშიც მოქცეულია მთელი სტატიკა. ამ ფორმულაში მოცემული დამტკიცებიდან ჩანს, რომ „ძალა“, რომლის შესახებ არის ლაპარაკი, არის სწორედ ის, როგორადაც წარმოდგენილი ჰქონდათ ძველებს და როგორადაც მას ახლაც წარმოიდგენს ყოველი. ამ ფორმულიდან ლაგრანჟი ავითარებს ძალთა წონასწორობის ზოგად თვისებებს და იძლევა სტატიკის მთავარი ამოცანების ამოხსნას.

პირველი ტომის მეორე ნახევარი და მთლიანად მეორე ტომი მიძღვნილია დინამიკისადმი. აქაც დინამიკის პირველ განყოფილებაში ლაგრანჟი გადმოსცემს დინამიკის აღმოცენების და განვითარების ისტორიას. ამ მეცნიერებას ის ასე განსაზღვრავს: „დინამიკა არის მეცნიერება ამაჩქარებელ და შემანელებელ ძალთა და ცვლადი მოძრაობების შესახებ, რომლებსაც ისინი აწარმოებენ“.

ამავე განყოფილებაში ლაგრანჟი ამბობს, რომ მოძრაობაში მყოფი სხეულების ძალის განსაზღვრისათვის, მივიღებთ რა მხედველობაში მათ მასას და სიჩქარეს, აუცილებელია ახალი პრინციპის შემოყვანა. ეს პრინციპი იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემული მასისადმი სიჩქარის მინიჭებისათვის რომელიმე მიმართულებით, იქნება ეს მასა უძრავი თუ მოძრავი, აუცილებელია ძალა, რომლის სიდიდე პროპორციულია მასისა და სიჩქარის ნამრავლისა და რომლის მიმართულება იგივეა, რაც ამ სიჩქარისა. ამ ნამრავლს ლაგრანჟი მოძრაობის რაოდენობას უწოდებს და, მისი თქმით, ძალები იზომება მოძრაობის რაოდენობით.

დინამიკის მეორე განყოფილებაში ლაგრანჟმა დაადგინა ის ზოგადი ფორმულა, რომელიც იძლევა ნებისმიერი სისტემის მოძრაობის განტოლებათა შედგენის ხერხს წრფივ და მართკუთხოვან კოორდინატებში. ამ დადგენას მან წაუმძღვარა რამდენიმე წინასწარი ახსნა. იმათ, რომელთაც ახლა მექანიკაში ეწოდებათ „აჩქარება“ და „ძალა“, ლაგრანჟი უწოდებს „ამაჩქარებელ ძალას“ და „მამოძრავებელ ძალას“.

დალამბერის პრინციპისა და შესაძლო გადაადგილების საწყისების გამოყენებით ლაგრანჟმა შეადგინა სხეულთა ნებისმიერი სისტემისათვის განტოლება:

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta x\right)+$$

$$+\sum\left(P\,\delta p+Q\,\delta q+R\,\delta r+\cdots\right)m=0,$$

სადაც $P, Q, R, \ldots$ უწოდებს ამაჩქარებელ ძალებს, სხვა სიტყვით, ძალებს, რომლებიც მოქმედებენ სხეულების მასის ერთეულზე. ეს ფორმულა შეიცავს მთელ სტატიკასა და დინამიკას, შემდეგ მოდის ამ ძირითადი განტოლების წმინდა ანალიზური განვითარება.

პირველად ლაგრანჟმა დაადგინა ეგრეთ წოდებული „მექანიკის საწყისები“, ე. ი. სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა, ფართობთა საწყისი, ცოცხალ ძალთა საწყისი და სხვა; გზა და გზა გამოჰყავს მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის ძირითადი თვისებები.

მეოთხე განყოფილებაში ლაგრანჟი ისევ უბრუნდება ძირითად განტოლებებს და მათ გარდაქმნის წრფივი და მართკუთხოვანი კოორდინატებიდან ნებისმიერ დამოუკიდებელ ცვლადებში ანუ კოორდინატულ პარამეტრებში და ღებულობს ეგრეთ წოდებულ დინამიკის განტოლებათა მეორე ფორმულას.

მეხუთე განყოფილებაში გადმოსცემს დინამიკის ამოცანათა ამოხსნისას მიმდევრობითი მიახლოების ზოგად მეთოდს, დამყარებულს ნებისმიერი მუდმივების ცვალების ხერხზე.

მეექვსე განყოფილებაში გადმოცემულია მოძღვრება მცირე რხევათა შესახებ.

მეშვიდე განყოფილებას უჭირავს მეორე ტომის თითქმის ნახევარი და ეძღვნება თავისუფალი სხეულების მოძრაობის მოძღვრებას მათი ურთიერთმიზიდულობის მოქმედებით, ესე იგი გადმოცემულია ციური მექანიკის საფუძვლები.

მერვე განყოფილებაში გადმოცემულია მოძღვრება არათავისუფალი მოძრაობის შესახებ.

მეცხრე განყოფილება შეიცავს მოძღვრებას მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შესახებ, ხოლო მეათე, მეთერთმეტე და მეთორმეტე განყოფილებები შეიცავენ მოძღვრებას სითხის მოძრაობის შესახებ.

ლაგრანჟმა რამდენიმე ნაშრომი დაწერა აგრეთვე რიცხვთა თეორიასა და ალგებრაში. შეიძლება ითქვას, რომ ლაგრანჟამდე რიცხვთა თეორია არსებობდა მხოლოდ როგორც ცალკეული ამოცანების კრებული და მხოლოდ ლაგრანჟმა და გაუსმა პირველად შექმნეს რიცხვთა თეორია როგორც მეცნიერება თავისი განსაზღვრული მეთოდით. ლაგრანჟის მიერ რიცხვთა თეორიაში მიღებული ძირითადი შედეგები შემდეგია:

1) ორუცნობიან განუსაზღვრელ კვადრატულ განტოლებათა სრული ამოხსნა როგორც რაციონალურ, ისე მთელ რაციონალურ რიცხვებში.

2) კვადრატულ ირაციონალობათა დაშლის პერიოდულობის დამტკიცება და უწყვეტი წილადები.

3) იმ ფაქტის დამტკიცება, რომ ყოველი ნატურალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ ოთხი კვადრატული ნატურალური რიცხვის კვადრატების ჯამის სახით.

4) ვილსონის თეორემის დამტკიცება.

პირველი ამ შედეგთაგანი წარმოადგენს დიოფანტეს შემდეგ პირველ, უმნიშვნელოვანეს არითმეტიკულ ზოგად შედეგს. ლაგრანჟის მეთოდები შემდეგში საფუძვლად დაედვა რიცხვთა თეორიის აგებისათვის როგორც მეცნიერება.

ალგებრაში ლაგრანჟის შედეგები ასეთია:

1) აპარატის მომზადება რადიკალებში განტოლებათა ამოხსნის ზოგადი თეორიისათვის ეგრეთ წოდებულ „ასოებრი განტოლებათა“ გამოკვლევა.

2) ალგებრულ განტოლებათა ფესვების მიახლოებით ამოხსნის ხერხი უწყვეტი წილადების საშუალებით.

3) ალგებრულ განტოლებათა ფესვების გამოყოფის პირველი მეთოდი.

4) განტოლებათა სისტემიდან ცვლადების გამორიცხვის მეთოდი.

5) ასოებრი განტოლებათა ფესვების მწკრივად დაშლა.

განტოლებათა რადიკალებში ამოხსნის ამოცანას ეძღვნება ლაგრანჟის ერთი დიდი მემუარი. იგი ოთხ ნაწილად იყოფა. პირველ ნაწილში ლაგრანჟი ანალიზს უკეთებს კუბურ განტოლებათა მანამდე არსებულ ამოხსნებს; მეორე ნაწილში — მეოთხე

ხარისხის განტოლებებს; მესამეში — უმაღლესი ხარისხის განტოლებებს; მეოთხე ნაწილში ლაგრანჟი თეორიულ დასკვნებს აკეთებს განხილული მასალიდან. ლაგრანჟამდე არსებულ ყველა მეთოდს საკითხი დაჰყავდა ამა თუ იმ დამხმარე განტოლებათა ამოხსნამდე, რომელთა ფესვებია საწყისი განტოლების ფესვები. ამასთან ფუნქციის სახე არავითარ როლს არ თამაშობს და არსებითია, თუ რამდენ მნიშვნელობას ღებულობს ეს ფუნქცია. ფუნქციებს, რომლებიც არ იცვლებიან ერთისა და იმავე ჩასმისას, ლაგრანჟი მსგავს ფუნქციებს უწოდებს და ერთ-ერთი ძირითადი თეორემა — „მსგავსი ფუნქციები რაციონალურად გამოისახება ერთიმეორეთი და განტოლების კოეფიციენტით", — ლაგრანჟის სახელს ატარებს.

შემდეგ ლაგრანჟმა ააგო ასეთი გვარის სხვადასხვა ფუნქცია და შემოიღო სიმბოლიკა იმის აღსანიშნავად, თუ ფუნქცია რომელი ჩასმის შემთხვევაში რჩება უცვლელი. ლაგრანჟის მიერ ამგვარად აგებულ ფუნქციათა დიდი ნაწილი არ იცვლება იმ ჩასმებით, რომლებიც სიმეტრიულ ჯგუფებს ქმნიან ფესვთა ცალკე სისტემების მიმართ: ფესვთა ცალკე სისტემები კი ერთად ქმნის მოცემული განტოლების სრულ სისტემას. თუ, მაგალითად, m ხარისხის განტოლების m ფესვს დავანაწილებთ ორ სისტემას შორის, რომლებიდანაც ერთი შედგება ω ფესვისაგან და მეორე m ფესვისაგან, მაშინ განტოლებას, რომელსაც აკმაყოფილებს შესაბამისი ფუნქცია, აქვს ხარისხი

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \omega\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots (m-\omega)}\,.$$

მესამე განყოფილებაში ლაგრანჟი განიხილავს კერძო ტიპის განტოლებებს, რომლებიც რადიკალებში ამოიხსნებიან და უჩვენებს, რომ ისინი მიიყვანებიან იმ $1\cdot 2\cdot 3\cdots (m-2)$ ხარისხის განტოლებების აგებამდე, რომლებსაც რაციონალური ფესვები აქვთ.

ლაგრანჟი ემპირიულად დარწმუნდა, მაგრამ ვერ დაამტკიცა, რომ, როდესაც $m>5$, შეუძლებელია იმ ფესვების რაციონალური ფუნქციის აგება, რომელიც აკმაყოფილებს უფრო დაბალი ხარისხის განტოლებას, ვიდრე m.

ლაგრანჟის მიღწევები რადიკალებში განტოლებათა ამოხსნის თეორიაში, შემდეგია:

1) ფესვების იმ რაციონალური ფუნქციების შესწავლის მნიშვნელობის მითითება, რომლებიც ფესვების გადანაცვლებისას მიიღებენ ამა თუ იმ მნიშვნელობებს.

2) ლაგრანჟმა უჩვენა, რომ „მსგავსი“ ფუნქციები გამოისახება რაციონალურად ერთიმეორეთი და მოცემული განტოლების კოეფიციენტებით. ეს შედეგი ახლაც ატარებს ლაგრანჟის სახელს.

3) ლაგრანჟის მიერ ჩატარებულ ანალიზს ასოებრი ეწოდება; ამით მითითებულია, რომ განტოლების კოეფიციენტები უნდა ჩაითვალოს დამოუკიდებლებად, მაგრამ ლაგრანჟი მაინც აღნიშნავს, რომ უმაღლესი ხარისხის განტოლებებს ზოგიერთ შემთხვევაში აქვს რადიკალებში ამოხსნა, როდესაც განტოლების ფესვებს შორის გარკვეული თანაფარდობაა.

4) ლაგრანჟი ემპირიულად მივიდა ფესვების რაციონალური ფუნქციების შესწავლის აუცილებლობისადმი.

5) ლაგრანჟმა მოგვცა იმ განტოლებების ამოხსნის ხერხი, რომლებსაც ახლა ციკლური განტოლებები ეწოდებათ. ამ ხერხს ახლაც ლაგრანჟის მეთოდი ეწოდება და ძირითად როლს ასრულებს რადიკალებში განტოლებების ამოხსნის თანამედროვე თეორიაში.

6) ლაგრანჟი განიხილავს ისეთ განტოლებებს, რომელთა ფესვები მოცემული განტოლების ფესვების წრფივი ფუნქციებია და რომლის თითოეული ფესვით რაციონალურად გამოისახება მოცემული განტოლების ფესვები.

ლაგრანჟმა მოგვცა განტოლების ნამდვილი ფესვების რიცხვითი მნიშვნელობის მოძებნის ახალი ხერხი, რომელიც თეორიულად ძალიან საინტერესოა და პრაქტიკულადაც გამოსაყენებელი. ამ ხერხის გამოყენებისათვის საჭიროა ვიცოდეთ ინტერვალის მოძებნა ორი მომდევნო მთელი რიცხვისაგან, რომელთა შორის იმყოფება მოსაძებნი ფესვი. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის ლაგრანჟი გვაძლევს ფესვების გამოყოფის ხერხს, რომელიც ლაგრანჟამდე არავის მოუცია. მანვე მოგვცა აგრეთვე ორი განტოლების სისტემიდან ცვლადის გამორიცხვის ახალი მეთოდი ანუ, ასე ვთქვათ, რეზულტანტის აგების მეთოდი. ამ მეთოდს არავითარი პრაქტიკული უპირატესობა არ აქვს სხვა ცნობილ მეთოდებთან შედარებით, მაგრამ ის საყურადღებოა თავისი თეორიული სიღრმით, რომელიც საშუალებას იძლევა რეზულტანტის ცნების განზოგადებას ტრანსცენდენტულ განტოლებებზე.

ლაგრანჟმა განიზრახა მათემატიკური ანალიზიდან უსასრულოდ მცირის ცნების ამოღება და, როდესაც ის ბერლინის აკადემიის პრეზიდენტი იყო, მისი წინადადებით ბერლინის აკადემიამ 1784 წელს მიმართა მსოფლიოს ყველა მეცნიერს

წინადადებით: „უმაღლესი გეომეტრია ხშირად ხმარობს უსასრულოდ დიდ და უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს; ძველი მეცნიერნი დაბეჯითებით გაურბოდნენ „უსასრულოს“ და ჩვენი დროის ზოგიერთი ანალისტი აღიარებს, რომ სიტყვა „უსასრულო სიდიდე“ წინააღმდეგობას შეიცავს. აკადემია წინადადებას გაძლევთ, ახსნათ, როგორ გახდა შესაძლებელი წინააღმდეგობებიანი დებულებიდან ამდენი სწორი დასკვნის მიღება; მოგვეცით მტკიცე და ცხადი საფუძველი იმ ცნებისა, რომლითაც შესაძლებელი იქნება შეიცვალოს უსასრულობა, ამასთანავე არ უნდა იყოს საჭირო მისი მეტად ძნელად და გრძლად გამოთვლა“.

აკადემიას ბევრმა წარუდგინა თავისი მოსაზრება, ერთმა პრემიაც კი მიიღო, მაგრამ ლაგრანჟს ეს საკითხი გადაწყვეტილად მაინც არ მიაჩნდა და ამის გამო ააგო თავისი თეორია; ეს თეორია მან გადმოსცა გენიალურ ნაშრომებში: „ანალიზურ ფუნქციათა თეორიაში“ და „ფუნქციათა აღრიცხვაში“.

ლაგრანჟის თეორიაში ძირითადია ის, რომ მან ანალიზიდან უსასრულოდ მცირის ცნების განდევნის მიზნით შემოიღო ფუნქციის ცვალების სიჩქარე, „ფლუქსიის“ ნაცვლად — „წარმოებულის“ ცნება. მანვე აღნიშნა წარმოებული y', $f'(x)$ სიმბოლოებით და განსაზღვრა წმინდა ალგებრულად, ფორმალურად, როგორც ფუნქციის უსასრულო მწკრივად დაშლის მეორე წევრის კოეფიციენტი; თვით ეს დაშლა და მწკრივთა თეორია მთლიანად ეყრდნობა ზღვრის თვისებებს და, მაშასადამე, გულისხმობს მასთან აუცილებლად დაკავშირებულ ცნებას უსასრულოდ მცირეზე. ლაგრანჟმა [ჯერ ფუნქცია განიხილა თავისთავად, მისი გეომეტრიული და მექანიკური მნიშვნელობის დამოუკიდებლად.

„ანალიზურ ფუნქციათა თეორია“ შედგება სამი ნაწილისაგან. პირველი ნაწილი შეიცავს საერთოდ მოძღვრებას ფუნქციებზე და მათ წარმოებულებზე; მეორე ნაწილი მიძღვნილია ფუნქციათა თეორიის გამოყენებისადმი გეომეტრიაში და მესამე ნაწილი — ამ თეორიის გამოყენებისადმი მექანიკაში.

პირველ ნაწილს ლაგრანჟი იწყებს იმით, რომ განიხილავს x-ის ნებისმიერ ფუნქციას, როგორიცაა $f(x)$, სვამს მასში x-ის ნაცვლად $x+k$, სადაც k არის ნებისმიერი განუსაზღვრელი სიდიდე. ამრიგად მიღებულ ფუნქციას $f(x+k)$ დაშლის მწკრივად

$$f(x+k)=f(x)+kp+k^2q+k^3r+\cdots,$$

სადაც კოეფიციენტები p, q, r,... წარმოებულებია $f(x)$-ის და k-ზე დამოუკიდებელი x-ის ფუნქციებია.

ლაგრანჟი აღნიშნავს, რომ ნებისმიერი ფუნქციის ასეთ მწკრივად დაშლა შეიძლება მხოლოდ k-ს მთელი და დადებითი მაჩვენებლებისათვის; ამ დაშლის სისწორეს ის შემდეგნაირად უჩვენებს:

$$f(x+k) = f(x) + kP.$$

მაშასადამე,

$$f(x+k) - f(x) = kP.$$

k-ზე გაყოფის შემდეგ გვექნება

$$P = \frac{f(x+k) - f(x)}{k}.$$

P არის x-ისა და k-ს ფუნქცია. $k=0$ მნიშვნელობისათვის P-ს მნიშვნელობას აღნიშნავს p-თი და მიახლოებითი ტოლობის $f(x+k) = f(x) + kp$ ანალოგიურად წერს ტოლობას

$$P = p + kQ,$$

სადაც kQ არის P მნიშვნელობის ის ნაწილი, რომელიც გაქრება, როცა $k=0$.

ამის მსგავსად მან გააგრძელა მოქმედება და მიიღო

$$Q = q + kR,$$

სადაც q არის Q-ს მნიშვნელობა, როცა $k=0$ და kR არის Q-ს ის ნაწილი, რომელიც გაქრება, როცა $k=0$.

ამგვარად მიიღო კიდევ ტოლობა

$$R = r + kS$$

და ასე შემდეგ, ესე იგი

$$f(x+k) = f(x) + kP = f(x) + kp + k^2Q =$$
$$= f(x) + kp + k^2q + k^3R = \cdots$$

და საბოლოოდ ლაგრანჟი წერს:

$$f(x+k) = f(x) + kp + k^2q + k^3r + \cdots$$

დავუშვათ, რომ $f(x) = \frac{1}{x}$, მაშინ იქნება

$$f(x+k) = \frac{1}{x+k}.$$

მაშასადამე,

$$kP = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x} = -\frac{k}{x(x+k)}, \quad P = -\frac{1}{x(x+k)};$$

$$p = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}; \quad kQ = -\frac{1}{x(x+k)} + \frac{1}{x^2} = \frac{k}{x^2(x+k)},$$

$$Q = \frac{1}{x^2(x+k)}, \quad q = \frac{1}{x^3}; \quad kR = \frac{1}{x^2(x+k)} - \frac{1}{x^3} =$$

$$= -\frac{k}{x^3(x+k)}, \quad R = -\frac{1}{x^3(x+k)}, \quad r = -\frac{1}{x^4}$$

და ა. შ. მაშასადამე,

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x(x+k)} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2(x+k)} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^3(x+k)} \quad \text{და ა. შ.}$$

ლაგრანჟმა შეამჩნია, რომ კოეფიციენტები $p, q, r, \ldots$ დამოკიდებულია $f(x)$ ფუნქციისაგან და რომ

$$f(x) + pk + qk^2 + rk^3 + \cdots$$

მწკრივში k შეიძლება ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ მწკრივის ნებისმიერი წევრი შემდეგ ყველა ჯამზე მეტი იქნება.

$f(x+k)$-ში ჩავსვათ k-ს ნაცვლად $k+e$, სადაც e არის რომელიმე განუსაზღვრელი, k-გან დამოუკიდებელი სიდიდე; მივიღებთ $f(x+k+e)$-ს; ახლა თუ $f(x+k)$-ში x-ის ნაცვლად $x+e$-ს ჩავსვამთ, მივიღებთ ისევ $f(x+k+e)$-ს; ორივე შემთხვევაში $f(x+k+e)$ ერთი და იგივე სიდიდე იქნება.

პირველ შემთხვევაში $f(x+k+e)$ დაიშლება მწკრივად (როცა $f(x+k) = f(x) + pk + qk^2 + rk^3 + \cdots$-ში k-ს ნაცვლად ვსვამთ $k+e$-ს)

$$f(x+k+e) = f(x) + p(k+e) + q(k+e)^2 + r(k+e)^3 + \ldots$$

ანუ

$$f(x+k+e) = f(x) + pk + qk^2 + rk^3 + \cdots +$$
$$+ pe + 2qke + 3rk^2e + \cdots \qquad (1)$$

მეორე შემთხვევაში (როცა $f(x+k) = f(x) + pk + qk^2 + rk^3 \cdots$-ში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $x+e$-ს) $f(x+k+e)$-ს დაშლა მწკრივად იქნება

$$f(x+k+e) = f(x+e) + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots, \qquad (2)$$

მაგრამ $f(x+e)$ შეიძლება დავშალოთ მწკრივად e-ს ხარისხების მიხედვით და ამ დაშლაში წევრებთან კოეფიციენტებს ლაგრანჟი აღნიშნავს $f'(x)$-ით, $f''(x)$-ით, $f'''(x)$-ით და ასე შემდეგ; ესე იგი

$$f(x+e) = f(x) + ef'(x) + e^2 f''(x) + e^3 f'''(x) + \ldots,$$

ამავე დროს $p, q, r, \ldots$ x-ის ფუნქციებია და როცა x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $x+e$-ს, მაშინ ვღებულობთ $p, q, r, \ldots$ ახალ მნიშვნელობებს: $p(x+e)$, $q(x+e)$, $r(x+e), \ldots$

მაშინ (2) ტოლობა შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$f(x+k+e) = f(x+e) + p(x+e)k + q(x+e)k^2 + r(x+e)k^3 + \ldots \qquad (3)$$

და $p(x+e)$, $q(x+e)$, $r(x+e), \ldots$ დაშლა მწკრივად იქნება:

$$p(x+e) = p + p'e + p''e^2 + \ldots$$
$$q(x+e) = q + q'e + q''e^2 + \ldots$$
$$r(x+e) = r + r'e + r''e^2 + \ldots$$

($p', p'', \ldots, q', q'', \ldots$ ლაგრანჟი აღნიშნავს დაშლის წევრებთან კოეფიციენტებს).

ახლა, თუ (3) ტოლობაში $f(x+e)$, $p(x+e)$, $q(x+e)$, $r(x+e), \ldots$ ნაცვლად ჩავსვამთ მათ დაშლას, მივიღებთ

$$f(x+k+e) = f(x) + f'(x)e + \cdots + (p + p'e + \cdots)k + (q + q'e + \cdots +)k^2 + \cdots + (r + r'e + \cdots)k^3 + \cdots$$

ანუ

$$f(x+k+e) = f(x) + pk + qk^2 + rk^3 + \cdots + f'(x)e + p'ke + q'k^2e + \cdots \qquad (4)$$

რადგან $f(x+k+e)$ ორ შემთხვევაში ერთი და იგივე სიდიდეა, ამიტომ (1) და (4) ტოლობების მარჯვენა ნაწილები იგივურად ტოლია და ამ წევრების ერთმანეთთან გატოლებით, რომლებიც e, ke, k^2e-ს შეიცავენ, მივიღებთ: $p = f'(x)$; $2q = p'$, $3r = q$ და ასე შემდეგ.

ლაგრანჟმა შეამჩნია, რომ კოეფიციენტი $f'(x)$ ანუ p არის $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე ანუ ის, რასაც ნიუტონი ფლუქსიას უწოდებს; ლაგრანჟმა მას წარმოებული უწოდა; აგრეთვე $f''(x)$ ანუ p' არის $f'(x)$-ის წარმოებული, $f'''(x)$ არის $f''(x)$-

ის წარმოებული და ასე შემდეგ; ამრიგად, ლაგრანჟი წერს ტოლობებს:

$$p = f'(x), \quad q = \frac{p'}{2} = \frac{f''(x)}{2}, \quad r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''(x)}{2 \cdot 3}, \ldots$$

ამ მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ ტოლობაში

$$f(x+k) = f(x) + kp + k^2q + k^3r + \cdots$$

მიიღო

$$f(x+k) = f(x) + kf'(x) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \cdots$$

„ტურინის ჩანაწერებში“ მოთავსებული იყო ლაგრანჟის მემუარი: „ინტეგრალების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოსაძებნი ხერხის შესახებ“. ლაგრანჟმა შემოიყვანა სამმაგი ინტეგრალის ცნება.

1785 წელს ლაგრანჟმა გამოაქვეყნა ბერლინის მემუარებში ნებისმიერი ცვლადის პირველი რიგის წრფივი კერძო დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის თავისი მეთოდი. ზოგადი სახე პირველი რიგისა და პირველი ხარისხის კერძო დიფერენციალური განტოლებისა შემდეგია:

$$P\frac{dz}{dt} + Q\frac{dz}{dx} + R\frac{dz}{dy} = S,$$

სადაც P, Q, R და S არიან t, x, y და z-ის ნებისმიერი ფუნქციები. ამ განტოლების ინტეგრება ლაგრანჟმა მიიყვანა სამი ზოგადი დიფერენციალური განტოლების

$$Pdz - Qdt = 0,$$

$$Pdy - Rdt = 0,$$

$$Pdz - Sdt = 0$$

ამოხსნამდე.

1774 და 1798 წლებში გამოქვეყნებული ნაშრომები ლაგრანჟმა სფერულ ტრიგონომეტრიას მიუძღვნა. ერთ-ერთ მათგანში ლაგრანჟი განიხილავს მწკრივთა საშუალებით ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნას და მიღებულ შედეგებს იყენებს სფერული სამკუთხედის ამოხსნისთვის. ლაგრანჟი იწყებს $\operatorname{tg} x = \cos \omega \operatorname{tg} y$ განტოლების ამოხსნიდან მწკრივის საშუალებით:

$$x = y - \mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}\sin 2y + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^4\frac{\omega}{2}\sin 4y - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^6\frac{\omega}{2}\sin 6y + \dots,$$

რომელიც ლაგრანჟმა წინათ აღმოაჩინა და რომელმაც ფართო გამოყენება პოვა ასტრონომიაში.

ანალოგიურ ამოხსნას ლაგრანჟი გვაძლევს უფრო ზოგადი სახის განტოლებებისათვის, მაგალითად,

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\cos\omega\,\mathrm{tg}\,y}{\cos\varphi}; \quad \mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,\varphi};$$

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{a\sin y}{\cos y + p}; \quad \mathrm{tg}\,x = \frac{a\sin 2y + b\sin y}{\cos 2y + p\cos y + q}.$$

ეს შედეგები შეიძლება გამოვიყენოთ სფერული სამკუთხედის ამოსახსნელად. ვთქვათ, მაგალითად, სამკუთხედში ცნობილია გვერდები b, c და მათ შორის A კუთხე. ასეთ შემთხვევაში C კუთხის გამოსათვლელად გამოდგება ფორმულა

$$C = \left(\mathrm{tg}\frac{b}{2} + \mathrm{ctg}\frac{b}{2}\right)\mathrm{tg}\frac{c}{2}\sin A - \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2\frac{b}{2} - \mathrm{ctg}^2\frac{b}{2}\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{tg}^2\frac{c}{2}\sin 2A + \frac{1}{3}\left(\mathrm{tg}^3\frac{b}{2} + \mathrm{ctg}^3\frac{b}{2}\right)\mathrm{tg}^3\frac{c}{2}\sin 3A - \dots$$

თუ c გვერდი ძალიან მცირეა, ხოლო b გვერდი ახლოა 90°-თან, მაშინ ეს ფორმულა უფრო მოხერხებულია, ვიდრე ის, რომელსაც ჩვეულებრივად იყენებენ.

მეორე ნაშრომში ლაგრანჟი მიზნად ისახავს მოგვცეს ახალი, რამდენადაც შეიძლება მარტივი და ზოგადი გადმოცემა სფერული ტრიგონომეტრიისა, რომელსაც ის ანალიზურად განიხილავს. ლაგრანჟი უჩვენებს, რომ სფერული ტრიგონომეტრიის დაფუძნებისათვის საკმარისია მხოლოდ ერთი ფორმულის გამოყვანა გეომეტრიულად, მაგალითად კოსინუსების თეორემისა

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

რის შემდეგ ყველა დანარჩენი ფორმულა მიიღება ანალიზურად მეტად მარტივად.

4. დანიელ ბერნული, ჟან ლერონ დალამბერი. მექანიკის შემდგომი განვითარება

დანიელ ბერნული დაიბადა 1700 წელს გრონინგენში. 1725 წელს უკვე რუსეთის აკადემიის ნამდვილი წევრი იყო და მუშაობდა პეტერბურგში. 1733 წელს ბერნული დაბრუნდა თავის სამ-

შობლოში და მუშაობდა ბაზელის უნივერსიტეტში ჯერ ანატომიისა და ბოტანიკის, შემდეგ ფიზიკის პროფესორად; გარდაიცვალა 1782 წელს.

დანიელი იყო იოჰანეს შვილი. მამასა და ბიძა იაკობთან ერთად უაღრესად მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა მათემატიკურ მეცნიერებათა განვითარებაში. დანიელის მთავარი დამსახურება იმაშია, რომ მან დაამუშავა მათემატიკის ფიზიკაში გამოყენების საკითხები. მისი უმნიშვნელოვანესი ნაშრომია „ჰიდროდინამიკა", რომელიც 1738 წელს დაიბეჭდა. ამ ნაშრომის უმეტესი ნაწილი ემყარება ცოცხალი ძალის შენარჩუნების პრინციპს.

ჟან ლერონ დალამბერი დაიბადა 1717 წელს. ახალგაზრდობაში მიიღო მრავალმხრივი განათლება, მაგრამ ყველა სხვა მეცნიერებაზე მეტად მას მათემატიკური მეცნიერებები უყვარდა. 1741 წელს ის უკვე პარიზის აკადემიის წევრი იყო. 1763 წელს გერმანიის მეფის ფრიდრიხის განკარგულებით დალამბერი მიიწვიეს ბერლინის აკადემიის პრეზიდენტად, მაგრამ უარი განაცხადა და ამ თანამდებობაზე მიიწვიეს ლაგრანჟი. 1764 წელს დალამბერი აირჩიეს პეტერბურგის აკადემიის წევრად. გარდაიცვალა 1783 წელს.

დალამბერი არის საფრანგეთში ბურჟუაზიული რევოლუციის სამზადისის პერიოდის განმანათლებელი. 1751 წლიდან ის დიდროსთან ერთად მუშაობდა „მეცნიერებათა, ხელოვნებათა და ხელობათა ენციკლოპედიის" შექმნაზე. 1751 წელს ენციკლოპედიის პირველ ტომში მოათავსა შესავალი წერილი „მეცნიერებათა წარმოშობისა და განვითარების ნარკვევი". ამ წერილში იგი გადმოსცემს მეცნიერებათა კლასიფიკაციას და მრავალ საინტერესო ცნობას მათემატიკის ისტორიიდან.

ენციკლოპედიის ფიზიკისა და მათემატიკის განყოფილებას დალამბერი ხელმძღვანელობდა და ამ დარგებს მრავალი წერილი მიუძღვნა. მან აქ პირველად იხმარა სახელწოდებები „რიცხვითი ანუ ჩვეულებრივი ალგებრა" და „ასოებრი ანუ სპეციალური ალგებრა", ნაცვლად ვიეტას მიერ ხმარებული „რიცხვითი ლოგისტიკისა" და „ასოებრი ანუ სპეციალური ლოგისტიკისა". ენციკლოპედიის პირველ ტომში დალამბერი გადმოსცემს ასიმპტოტის შემდეგ განსაზღვრას: „ეს არის წრფე, რომელიც, განუსაზღვრელად გაგრძელებული, განუწყვეტლად უახლოვდება მრუდს ან მრუდის

ნაწილს ისე, რომ მანძილი ამ წრფესა და მრუდს შორის არასოდეს არ გახდება ნულის ტოლი, მაგრამ ყოველ ნებისმიერ სიდიდეზე ნაკლებია“.

დალამბერმა ვერ აიტანა რეაქციის დევნა და 1757 წელს ენციკლოპედიის გამოცემას ჩამოშორდა. 1743 წელს დაიბეჭდა მისი დიდი ნაშრომი „ტრაქტატი დინამიკის შესახებ“. ამ ნაშრომში დალამბერმა პირველად ჩამოაყალიბა ნებისმიერი მატერიალური სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების შედგენის ზოგადი წესი, დაიყვანა რა დინამიკის ამოცანები სტატიკის ამოცანამდე. ეს პრინციპი, ახლა დალამბერის პრინციპად წოდებული, შემდეგში მდგომარეობს: საერთოდ, მატერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკის ზოგადი კანონის თანახმად, სისტემის წერტილებზე მოდებული ძალები შეიძლება დაიშალოს „მოქმედ“ ძალებად, რომლებიც იწვევენ სისტემის აჩქარებას, და „დაკარგულ“ ძალებად, რომლებიც სისტემას წონასწორობაში ტოვებენ. თავისუფალი წერტილების სისტემის დინამიკაში წერტილზე მოდებული მოცემული F_i ძალა არის იმავე დროს „მამოძრავებელი“ ძალა, რომელიც უდრის m_i წერტილის მასისა და მისი w_i აჩქარების ნამრავლს; ამ შემთხვევაში დაკარგული ძალა ნულის ტოლია.

დალამბერის პრინციპში არსებითად ახალია არათავისუფალი სისტემის შემთხვევაში მოცემულ და მამოძრავებელ ძალებს შორის განსხვავებაზე მითითება. არათავისუფალი სისტემის წერტილების აჩქარებები დამოკიდებულია არა მარტო მოცემული ძალებისაგან, არამედ ბმათა რეაქციების N_i მოქმედებებისაგან, რომლებიც სიდიდით ტოლი და დაკარგული P_i ძალების საწინააღმდეგო მიმართულების არიან. მართლაც, არათავისუფალი სისტემის წერტილების მოძრაობის განტოლებიდან

$$m_i w_i = F_i + N_i \tag{1}$$

გამომდინარეობს, რომ

$$P_i = F_i - m_i w_i = F_i - (F_i + N_i) = -N_i. \tag{2}$$

„ტრაქტატში დინამიკის შესახებ“ დალამბერს არ შემოჰყავს ბმათა ცნება, მაგრამ უკვე განასხვავებს ერთმანეთისაგან, მაგალითად, მიზიდულ სხეულებს — „იმ სხეულებისაგან, რომლებიც ერთმანეთს იზიდავენ ძაფების ანდა მყარი ღერძების საშუალებით“. „დაკარგული“ ძალების ცნება საჭირო შეიქნა მაშინ, როდესაც მექანიკამ წინამავალი ეპოქის ასტრონომიული ამოცანებიდან გადასვლა დაიწყო უკვე ჩასახული სამანქანო ტექნიკის საკითხებისადმი.

დალამბერის ძირითადი მათემატიკური გამოკვლევები მიეკუთვნება დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიას. მან იპოვა ამოხსნა კერძოწარმოებულებიანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისა, რომელიც გამოსახავს სიმის განივ რხევას ორი ნებისმიერი ფუნქციების ჯამის სახით და ეგრეთ წოდებული სასაზღვრო პირობების საშუალებით შეძლო ერთი მათგანის გამოსახვა მეორეთი.

დალამბერის ეს ნაშრომები და ეილერისა და ბერნულის შემდგომი ნაშრომები მათემატიკური ფიზიკის საფუძვლებს წარმოადგენს. ჰიდროდინამიკაში დალამბერს შეხვდა კერძოწარმოებულებიანი ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნისას პირველად გამოიყენა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები.

დალამბერმა ძვირფასი შედეგები მიიღო მუდმივკოეფიციენტებიან ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში.

დალამბერის სახელწოდებას ატარებს დიფერენციალური განტოლება

$$y = x\varphi(y') + f(y'),$$

სადაც φ და f დიფერენცირებადი ფუნქციებია. ეს განტოლება პირველად დალამბერმა გამოიკვლია 1748 წელს. იგი ცნობილია აგრეთვე ლაგრანჟის განტოლების სახელწოდებით.

უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვას დალამბერი აფუძნებდა ზღვართა თეორიის საშუალებით. მანვე მოგვცა მწკრივის კრებადობის ნიშანი, რომელიც ახლაც მის სახელს ატარებს.

ალგებრაში დალამბერმა პირველად მოგვცა ყოველი ალგებრული განტოლების ფესვის არსებობის შესახებ ძირითადი თეორემის დამტკიცების ცდა.

თავი VI

დიფერენციალური გეომეტრიის აღმოცენება და მათემატიკური ანალიზის შემდგომი განვითარება. კლერო, მონჟი და მენიე

1. კლოდ კლერო

კლოდ კლერო დაიბადა 1713 წლის 13 მაისს პარიზში. იგი 12 წლის იყო, როცა მეოთხე რიგის ალგებრული წირები გამოიკვლია და მათ შესახებ ნაშრომი დაწერა. 16 წლისამ დაწერა „გამოკვლევა ორმაგი სიმრუდის წირთა შესახებ“. 18 წლის კლერო პარიზის მეცნიერებათა აკადემიამ ადიუნქტად (მეცნიერ თანამშრომლად) დაამტკიცა და 1732 წელს, ე. ი. 19 წლისა, აკადემიის წევრად აირჩია, მიუხედავად იმისა, რომ, ზოგადი წესის თანახმად, აკადემიაში ასარჩევი პირი 20 წელზე ნაკლების არ უნდა ყოფილიყო. 1736 წელს კლერო მონაწილეობას ღებულობდა ექსპედიციაში, რომელიც ლაპლანდიაში გაემგზავრა მერიდიანის რკალის გასაზომად, ხოლო 1743 წელს გამოაქვეყნა ნაშრომი: „დედამიწის ფიგურის თეორია, დამყარებული ჰიდროსტატიკის საწყისებზე“. ეს ნაშრომი შეიცავს კლეროს თეორიებს, რომლებიც უმაღლესი გეოდეზიის საფუძვლებს წარმოადგენს და რომლებიც კავშირს ამყარებენ დედამიწის ზედაპირზე სიმძიმის ძალის განაწილებასა და ზოგიერთ პარამეტრს შორის, რომლებიც ახასიათებენ დედამიწის ფორმას და მისი ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს. ამ ნაშრომში კლერომ პირველად შემოიღო წირითი ინტეგრალები.

1751 წელს პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის მიერ გამოცხადებულ კონკურსზე კლერომ წარმოადგინა გამოკვლევა „მთვარის მოძრაობის თეორია“. რომელსაც პეტერბურგის აკადემიამ პრემია მიანიჭა და დაბეჭდეს 1752 წელს პეტერბურგში. 1754 წელს კლერო აირჩიეს პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრად. 1759 წელს გამოიკვლია კომეტა ჰალეის მოძრაობა მზის გარშემო მისი მოქცევის უკანასკნელ პერიოდში (1682—1759) და განსაზღვრა პერიჰელიუმში დაბრუნების დროს.

მათემატიკურ ანალიზში კლერომ შექმნა რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალის ცნება და 1739 წელს ეილერთან ერთდროულად მოგვცა ორისა და სამის ცვლადის წრფივი დიფერენციალური ფორმების ინტეგრების პირობები. კლეროს სახელს ატარებს პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$y = xy' + f(y'),$$

სადაც f მოცემული დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ეს განტოლება კლერომ განიხილა 1734 წელს. კლეროს განტოლება ინტეგრებადია სასრული სახით. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია წრფეთა ოჯახი: $y = Cx + f(C)$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. კლეროს განტოლებას აქვს განსაკუთრებული ამონახსნი:

$$x = f'(p), \quad y = -pf'(p) + f(p),$$

რომელიც წრფეთა ოჯახის მომვლებია. კლერომ ამ განტოლების მაგალითზე შექმნა პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნის ცნება. მისი განტოლება არის ლაგრანჟის განტოლების კერძო შემთხვევა.

მექანიკაში კლერო ფარდობითი მოძრაობის დინამიური თეორიის შემქმნელია. მანვე შემოიყვანა წირითი ინტეგრალის ცნება.

ზემოხსენებული ნაშრომის „ორმაგი სიმრუდის წირთა გამოკვლევის" მიხედვით კლერო ჩაითვლება დიფერენციალური გეომეტრიის ერთ-ერთ ფუძემდებლად. როგორც ნაშრომის სათაურიდან ჩანს, აქ ლაპარაკია სივრცითი წირების შესახებ. ტერმინი „ორმაგი სიმრუდე" კლეროს ესმის იმ აზრით, რომ სივრცითი წირი განისაზღვრება ორი ბრტყელი წირით — სივრცითი წირის გეგმილებით კოორდინატთა სიბრტყეებზე. მაგრამ სივრცითი წირები არ განიხილება მრუდე ზედაპირებისაგან იზოლირებულად. პირიქით, გამოსავალ გეომეტრიულ სახეს წარმოადგენს ზედაპირი, განსაზღვრული ერთი განტოლებით მისი წერტილების კოორდინატებს შორის. ამ ზედაპირის მეორესთან გადაკვეთა გვაძლევს წირს, რაც, ამგვარად, გამოისახება ორი განტოლებით.

ბუნებრივია, რომ წირთა თეორიის გადმოცემას კლერომ წარუმძღვარა ზოგიერთი დებულება, რომელიც ზედაპირების თეორიას შეეხება. ის გვაძლევს სფეროს, კონუსური ზედაპირის, ბრუნ-

ვის პარაბოლოიდის და სხვა კერძო კლასების ზედაპირთა განტოლებებს. შემდეგ გამოჰყავს სივრცითი წირისადმი მხებისა და ნორმალის განტოლებები. ამასთან დაკავშირებით მან ამოხსნა მრავალი კერძო ამოცანა, მაგალითად, ამოცანა კოორდინატთა სიბრტყით გადაკვეთის წირის განსაზღვრის შესახებ. შემდეგ მოცემულია წირის სიგრძისათვის ზოგადი ფორმულა $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, განსაზღვრულია ფართობები ცილინდრული ზედაპირების ნაწილებისა, რომლებიც შემოსაზღვრულია კერძო სახის წირებით, და ამოხსნილია ამოცანები კერძო სახის ზედაპირებით შემოსაზღვრული მოცულობებზე.

კლეროს ნაშრომები შეიცავს საკმაოდ მრავალ შედეგს, რომელიც უაღრესად ზოგადი ხასიათისაა ანდა უშუალოდ მივყავართ განმაზოგადებელ დასკვნამდე. კლეროს შედეგები არ ეხება იმ პრობლემებს, რომლებიც სპეციფიკურია სივრცითი გეომეტრიისათვის, განსხვავებით სიბრტყითი გეომეტრიისაგან. მართლაც, კლეროს მიერ ამოხსნილი ამოცანები წარმოადგენს ბრტყელი გეომეტრიის ამოცანების უშუალოდ გავრცელებას და მათი ამოხსნა ძირითადად მოითხოვს ორი ცვლადის უშუალოდ შეცვლას სამი ცვლადით. ამ მხრივ მეტად დამახასიათებელია ის, რომ კლერო განიხილავს წირის ნორმალებიდან მხოლოდ ერთს, ესე იგი არსებითად პოულობს ნორმალს ზედაპირისისა, რომელზედაც მდებარეობს წირი. სწორედ ეს ამოცანა წარმოადგენს წირის ნორმალის მოძებნის ამოცანის უბრალო გავრცელებას.

ამრიგად, კლეროს მრავალი და ზოგადი შედეგის მიღება მოითხოვდა ბრტყელი დიფერენციალური გეომეტრიის კარგად შესწავლილი მეთოდების მხოლოდ გადატანას სამგანიზომილებიან სივრცეზე. ამასთანავე მხედველობაშია მისაღები ის გარემოება, რომ კლერომ ეს გადატანა განახორციელა ისეთი სისრულით, რომელიც მოულოდნელია არა თუ ახალგაზრდისგან, არამედ უფრო მომწიფებული ასაკის ადამიანისგანაც. მართლაც, განვლო 40 წელმა, სანამ მიიღებდნენ არსებითად ახალ შედეგებს სივრცითი წირების თეორიაში, გამოქვეყნდა კიდევ უფრო გვიან, ოთხმოციანი წლების დასაწყისში. ასე რომ, 50 წლის განმავლობაში კლეროს გამოკვლევებმა შეინარჩუნეს თავისი სიახლე მთლიანად და წარმოადგენდა ერთადერთ სახელმძღვანელოს სივრცითი წირების დიფერენციალურ გეომეტრიაში.

2. გასპარ მონჟი და ჟან-ბაპტისტ-მარი-შარლ მენიე

გ. მონჟი დაიბადა 1746 წელს ქ. ბონში (საფრანგეთი), წვრილი ვაჭრის ოჯახში, წარმოშობით გლეხის. საშუალო განათლება მონჟმა მიიღო ქ. ბონის სასწავლებელში. მისმა ნიჭმა ხელმძღვანელების ყურადღება მიიპყრო, რამაც საშუალება მისცა ადვილად შესულიყო ქ. ლიონის უმაღლეს სასწავლებელში. 18 წლისამ დაამთავრა სასწავლებელი და რამდენიმე ხანს აქვე დარჩა ფიზიკის პროფესორად. მონჟს წინადადება მისცეს მიეღო მღვდლობა და ამ მიმართულებით ემუშავა, მაგრამ ამაზე უარი განაცხადა და სამშობლოში დაბრუნდა. აქ იგი დიდ ხანს არ დარჩენილა. ერთ-ერთი მაღალი თანამდებობის პირის დახმარებით ადგილი მიიღო მეზიერის სამხედრო-საინჟინრო სკოლაში, რომელიც მაღალი კვალიფიკაციის ინჟინრებს ამზადებდა. იქ მუშაობის პირველ წლებში მონჟი კვალიფიციური მოსამსახურის როლს ასრულებდა, ეხმარებოდა რა სტუდენტებს პრაქტიკულ მუშაობაში ფიზიკაში, მათემატიკაში, ხაზვასა და სხვა. 1769 წლიდან მონჟმა მიიღო პროფესორის თანამდებობა მეზიერის სკოლაში. დაახლოებით ამ დროიდან იწყება მონჟის შემოქმედებითი მუშაობა. მეცნიერულ მუშაობას ეწევა მათემატიკაში, ფიზიკასა და ქიმიაში. პროფესორული მოღვაწეობის პირველ რვა წელს მონჟი უფრო მათემატიკურ საკითხებს ამუშავებს და სწორედ ამ წლებში მივიდა იმ იდეებამდე, რომლებიც შემდგომ განავითარა და გამოაქვეყნა.

პირველი მისი აღმოჩენა, რომელმაც მას დიდი სახელი მოუხვეჭა, იყო ახალი მეცნიერების—მხაზველობითი გეომეტრიის შექმნა. თვით იდეა ორ ურთიერთმართობულ სიბრტყეზე ობიექტის დაგეგმილებისა ახალი არ იყო. ამით სარგებლობდნენ XV—XVI საუკ. მხატვრები. მაგრამ ეს იყო ტექნიკური ხერხი, მეცნიერულად სრულიად დაუმუშავებელი და შემდეგში დავიწყებული. მონჟი ამ იდეამდე მივიდა, ალბათ, სავსებით დამოუკიდებლად. ეს იდეა მან განავითარა სისტემატურ სწავლებაში ისე, რომ მის მიერ შედგენილი კურსით ახლაც შეიძლება გავეცნოთ მხაზველობითი გეომეტრიის ძირითად მეთოდებს. ეს კურსი დაიბეჭდა მხოლოდ 1795 წელს; მის უფრო ადრე გამოქვეყნებას ხელს უშლიდა სამხედრო ხელისუფლება, რომელსაც სურდა ამ აღმოჩენის საიდუმლოდ შენახვა. მონჟი, მაინც, თავის კურსს ყოველწლიურად კითხულობდა და ასეული ფრანგი ინჟინერი მისი მეთოდით სარგებლობდა ნაშრომის დაბეჭვდამდე.

მხაზველობითი გეომეტრია მონჟის საყვარელი საგანი იყო. მის გამოყენებით მნიშვნელობას დიდად აფასებდა და მოითხოვდა მისი სწავლების ფართოდ გავრცელებას, რაც მას აუცილებლად საჭიროდ მიაჩნდა საფრანგეთის მრეწველობის განვითარებისათვის.

მონჟი ამბობდა: იმისათვის, რომ საფრანგეთის ხალხი გათავისუფლდეს უცხოეთის ინდუსტრიაზე დამოკიდებულებიდან, რომელშიც ის დღემდე იმყოფება, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა სახალხო განათლებას მიეცეს მიმართულება ისეთი საგნების სწავლებისაკენ, რომლებიც სიზუსტეს მოითხოვენ". ასეთი სიტყვებით იწყებს მონჟი თავის „მხაზველობით გეომეტრიას". მაგრამ ის არასოდეს არ უყურებდა მხაზველობით გეომეტრიას, როგორც მხოლოდ გამოყენებით მეცნიერებას; მასში ხედავდა სივრცითი სახეების წმინდა გეომეტრიულად გამოკვლევის მეთოდს. შემთხვევითი არ არის, რომ მონჟის სკოლიდან გამოვიდნენ ახალი სინთეზური გეომეტრიის შემქმნელები — კარნო და პონსელე.

დიდად აფასებს რა სინთეზურ მეთოდებს, მონჟი იმავე დროს წირებისა და ზედაპირების შესწავლის ანალიზურ ხერხებს სრულყოფს. თავისი პრაქტიკული ინტერესები მონჟს საშუალებას აძლევს დიფერენციალურ-გეომეტრიულ ამოცანებს მიუდგეს ახალი თვალსაზრისით. ეს თვალსაზრისი, რომელიც დამახასიათებელია მონჟის სკოლისათვის, შეიძლება ზოგად ხაზებში ასე დავახასიათოდ. მონჟი განიხილავს ზედაპირის აღმოცენების დინამიკას, მისი შექმნის ხერხს, მის წარმოშობას. წირებისა და ზედაპირების კლასიფიკაციას ახდენს არა მათი განტოლებების რიგის მიხედვით დეკარტის ან სხვა სისტემის კოორდინატებში, არამედ მათი შემქმნელის მოძრაობის ხასიათის მიხედვით. მაგალითად, განიხილავს რა ზედაპირს როგორც მოძრავი წირის გეომეტრიულ ადგილს, მონჟი ყურადღებას აქცევს როგორც მოძრავი წირის თვისებებს, ისე განსაკუთრებით მოძრაობის კანონს. შემდეგ მონჟი განაგრძობს ეილერის დაწყებულ ზედაპირის შესწავლას როგორც ერთ ან ორ პარამეტრზე, და ზედაპირის შესწავლას როგორც მახასიათებელს წირთა ოჯახის უკუქცევის წიბოსი.

ასეთი მიგდომის წყალობით პირველ რიგზე გამოდის განტოლებები კერძო წარმოებულებით და მათი ინტეგრების პრობლემა. სწორედ მონჟიდან აღმოცენდა მახასიათებელთა მეთოდი. პირველი რიგის განტოლებებისათვის ორი ცვლადის შემთხვევა მონჟმა დაიყვანა ბოლომდე, თუ სიმკაცრის მიხედვით არა, ყოველ

შემთხვევაში მეთოდის ჩვენებით მაინც. მონჟი კიდევ უფრო წინ წავიდა, შეისწავლა რა მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი განტოლებები. აქ მან პირველი ნაბიჯები გადადგა ამ განტოლებათა იმ ტიპის შესწავლისათვის, რომელიც ახლაც მის სახელს ატარებს. ყველა ამ ნაშრომში ხელმძღვანელ როლს გეომეტრიული ხასიათის მოსაზრებები ასრულებენ. ისინი მონჟს აძლევენ კერძო სახის განტოლებების ინტეგრალებს.

მონჟის პედაგოგიური მოღვაწეობა მეზიერის სკოლაში მეტად ნაყოფიერი იყო. მან თავის მოწაფეებში მათემატიკისადმი ინტერესი და სიყვარული აღძრა და დამოუკიდებელი შემოქმედებითი მუშაობისთვის წააქეზა. მონჟის მოწაფეთა რიცხვს ეკუთვნიან კარნო და მენიე. სწორედ მონჟის გავლენით და ხელმძღვანელობით წარმოიშვა მენიეს თეორემა, რომელიც ახალი განძი იყო ზედაპირების სიმრუდის თეორიაში. სამოცდაათიანი წლების დასასრულს მონჟის მეცნიერული ინტერესები იწყებს მობრუნებას ფიზიკისა და ქიმიისაკენ, რომლებიც მალე მისი გამოკვლევების მთავარ საგნად ხდება, თუმცა დროგამოშვებით მონჟი მათემატიკაშიც მუშაობდა. სწორედ 1775—1785 წლებში გამოქვეყნდა მისი ძირითადი მათემატიკური ნაშრომები. გარეგანი ბიძგი, რომელმაც მონჟს ხელი შეუწყო ფიზიკისა და ქიმიისაკენ მობრუნებაში, იყო ის, რომ ცოლის შერთვის შემდეგ გახდა მეტალურგიული ქარხნის მფლობელი. მან დაიწყო მეტალურგიული წარმოების ტექნიკის შესწავლა და ჩაეფლო ექსპერიმენტულ და თეორიულ მუშაობაში, რამაც ის მიიყვანა მთელ რიგ შედეგებამდე ლითონის ფიზიკის, სითბოგამტარობის, ნივთიერების ქიმიური დაშლის, ელექტრობის თეორიისა და სხვა დარგებში. მონჟი გახდა გამოჩენილი ფიზიკოსი და ქიმიკოსი და მას იხსენიებენ ლავუაზიესა და ბერტოლესთან ერთად, რომლებთანაც მონჟს არაერთი ნაშრომი გაუკეთებია.

1780 წელს მონჟი პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრად აირჩიეს. ამის გამო მან 1784 წელს დატოვა მეზიერის სკოლა და გადასახლდა პარიზში. აკადემიაში მრავალმხრივი მუშაობის გარდა მონჟი პედაგოგიურ მუშაობასაც ეწეოდა სამხედრო-საზღვაო სასწავლებელში. მალე მან მიიღო კიდევ გამომცდელის თანამდებობა საზღვაო სამინისტროს პროვინციულ სასწავლებლებში. თავისი მოვალეობის შესრულებისათვის მონჟი, როგორც გამომცდელი, ყოველწლიურად შემოივლიდა ზღვის სანაპირო ქალაქებს და გზაგზა ეცნობოდა ფლოტისა და ნავსადგურის საწარმოთა სამუშაოების

ორგანიზაციას, ტექნიკას. მაგრამ ძირითადად ის პარიზში იმყოფებოდა, სადაც მოუსწრო 1789 წლის რევოლუციამ. მართალია, მონჟი რევოლუციის პირველ წლებში პოლიტიკას ნაკლებ დროსა და ყურადღებას უთმობდა, მაგრამ მაინც რევოლუციის პირველი დროიდანვე რევოლუციის მხარეზე დადგა. 1792 წლის 10 აგვისტოს პირველ რესპუბლიკურ მთავრობაში მონჟმა მიიღო საზღვაო მინისტრის თანამდებობა. ამის შემდეგ მონჟის პოლიტიკური შეხედულება უფრო მკაფიო გახდა: იგი მიემხრო რადიკალურ იაკობინელებს. საზღვაო მინისტრის თანამდებობაზე მონჟი დარჩა რესპუბლიკის არსებობის პირველ 8 თვეს. მის დაძაბულ მოღვაწეობას მაინც არ ჰქონდა არსებითი მიღწევები რესპუბლიკის საზღვაო ძლიერების საქმეში. მონჟს, როგორც საზღვაო მინისტრს, თავს ესხმოდნენ როგორც მარჯვნიდან, ისე მარცხნიდანაც, ამიტომ მან ორჯერ ითხოვა განთავისუფლება ამ თანამდებობიდან და 1793 წლის აპრილში მონჟი გაათავისუფლეს.

მონჟი ჟირონდელებმაც აირჩიეს თავიანთ აღმასრულებელ საბჭოში. იაკობინელთა დიქტატურის დაწყების შემდეგ მონჟს ეძლევა ფრიად პასუხსაგები დავალებები. 1793 წლის დამლევს მას დაევალა საფრანგეთის სამხედრო მრეწველობის ორგანიზაცია. ის განაგებს თოფ-წამლისა და ზარბაზნების ქარხნებს, ასწავლის ხელოსანთა ახალ კადრებს ზარბაზნების ჩამოსხმას და ადგენს ინსტრუქციას ჩამომსხმელი ქარხნების მუშებისათვის. მონჟმა გამოუშვა სახელმძღვანელო „ზარბაზნების ჩამოსხმის ხელოვნება", რომელიც შესანიშნავია თავისი პედაგოგიური და მეცნიერული ხასიათით. მონჟმა მოახდინა თვით წარმოების პროცესის რეორგანიზაცია და ამით პარიზისა და პროვინციების ქარხნების ნაყოფიერება საშუალოდ ათჯერ გაზარდა. იმ დროს, როდესაც მისი მოწაფე კარნო რევოლუციური ჯარების სათავეში იდგა, მონჟი, სხვა მეცნიერ იაკობინელებთან ერთად (ბერტოლე, ფურკრუა და სხვა), განაგებდა ჯარის მომარაგების მეტად მნიშვნელოვან უბანს. რევოლუციური ჯარების გამარჯვებაში წილი მიუძღვის არა მარტო კარნოს, არამედ მის დიდ მასწავლებელ მონჟსაც.

1794 წლის შემოდგომიდან მონჟის მოღვაწეობის ახალი ეტაპი იწყება. ჯერ კიდევ იაკობინელების დიქტატურის დროს, 1794 წლის 11 მარტს, კონვენტმა დაადგინა „საზოგადოებრივ სამუშაოთა ცენტრალური სკოლის" დაარსება, რომელსაც უნდა მოემზადებინა უმაღლესი კვალიფიკაციის სამოქალაქო და სამხედრო ინჟინრები. ეს სკოლა დაარსდა იმავე წლის შემოდგომაზე,

ხოლო შემდეგ წელს მან მიიღო „პოლიტექნიკური სკოლის“ სა-
ხელწოდება, გასპარ მონჟი იყო ამ სკოლის ერთ-ერთი დამაარსებელთაგანი და მისი ფაქტიური ხელმძღვანელი ოცი წლის განმავლობაში. ის ადგენდა ამ სკოლის კურსის პროგრამებს, ხელმძღვანელობდა მის სასწავლო და სამეცნიერო ცხოვრებას და ასწავლიდა იქ სხვადასხვა საგნებს, უმთავრესად მხაზველობით, ანალიზურ და დიფერენციალურ გეომეტრიებს. მისი ლექციები საფუძვლად დაედო მის უკვდავ ნაშრომს: „მხაზველობით გეომეტრიას“ და „ანალიზის ფურცლები და მისი გამოყენება გეომეტრიაში“. ეს უკანასკნელი პირველად ნაწილ-ნაწილად დაიბეჭდა. ამ ნაშრომის მესამე გამოცემა გამოვიდა 1805 წელს სახელწოდებით: „ანალიზის გამოყენება გეომეტრიაში“, რომლის რუსული თარგმანი დაიბეჭდა 1936 წელს პროფესორ მ. ვიგოდსკის რედაქციით, წინასიტყვაობითა და კომენტარებით.

პოლიტექნიკურ სკოლაში აღიზარდა საფრანგეთის მეცნიერთა ახალი თაობა. XIX საუკუნის პირველი ნახევრის თითქმის ყველა გამოჩენილი ფრანგი მეცნიერი ამ სკოლის მოწაფეა და სკოლის დამთავრების შემდეგაც არ გაუწყვეტიათ მასთან კავშირი. აქ გაიზარდა და გაფორმდა „მონჟის სკოლა“, რომლის ყველაზე უფრო გამოჩენილი წარმომადგენლები არიან დიუპენი და პონსელე.

საფრანგეთიდან დიდი ხნით გამგზავრების გამო მონჟი იძულებული გახდა შეეწყვიტა მუშაობა პოლიტექნიკურ სკოლაში. საფრანგეთის მთავრობამ იგი იტალიაში მიავლინა როგორც კომისიის წევრი, რომელსაც უნდა შეერჩია მხატვრული ნაწარმოებები და საბიბლიოთეკო ფონდი, როგორც დამარცხებულ სახელმწიფოზე დადებული სამხედრო კონტრიბუცია. იტალიაში მონჟი მოექცა საფრანგეთის არმიის სარდლის გენერალ ბონაპარტეს განკარგულებაში. პირველი შეხვედრისთანავე გამოირკვა, რომ ბონაპარტე მონჟს იცნობდა, როცა ეს უკანასკნელი საზღვაო მინისტრი იყო, და კიდეც მიუმართავს მისთვის თხოვნით, რათა ბონაპარტე, რომელიც მაშინ უმცროსი ოფიცერი (ლეიტენანტი) იყო, მიეღო სამსახურში. ბონაპარტე მონჟზე კარგი შეხედულების ყოფილა წარსულში და მონჟი დაუახლოვდა ფრანგების ამ მომავალ იმპერატორს, რომელიც იმ დროს გამოდიოდა რევოლუციის წარმომადგენლად. ბონაპარტე მას ხელს უწყობდა. 1797 წლის სექტემბერს, როცა პარიზში გენერალ ბონაპარტეს ხელის შეწყობით ლიკვიდაცია უყვეს როიალისტების შეთქმულებას და შეცვალეს დირექტორიის შემადგენლობა, დირექტორის პოსტზე მონჟის

კანდიდატურა იქნა წარდგენილი მაგრამ უხუცესთა საბჭომ არ დაამტკიცა მისი კანდიდატურა მხოლოდ იმიტომ, რომ მონჟი მაშინ საფრანგეთში არ იყო.

1797 წლის ოქტომბერს, შეასრულა რა დაკისრებული მისია იტალიაში, მონჟი საფრანგეთში დაბრუნდა. აქ ის პატივცემით მიიღეს და კიდევ ახალი, მაგრამ დიპლომატიური ხასიათის დავალება მისცეს. ის ისევ იტალიაში გაგზავნეს კომისრად ახლად შექმნილ რომის რესპუბლიკის ნაციონალურ მთავრობასთან. იტალიაში მეორედ ყოფნის დროს მონჟი მჭიდრო კავშირში იყო გენერალ ბონაპარტესთან და, როდესაც ეს უკანასკნელი გაემგზავრა ეგვიპტის განთქმულ ლაშქრობაში, მონჟიც, ბონაპარტეს მიერ მოწვეულ სხვა მეცნიერებთან ერთად, ამ ექსპედიციას შეუერთდა. ეგვიპტეში მონჟი აქტიურ მონაწილეობას ღებულობდა ქაიროს ინსტიტუტის შექმნაში. როდესაც ბონაპარტემ სირიაზე გაილაშქრა, მონჟიც მასთან ერთად გემით გაემგზავრა. 18 ბრიუმერის გადატრიალების შემდეგ მონჟი გახდა სენატის წევრი, სასახლეებისა და მამულების მფლობელი, საპატიო ლეგიონის ორდენის კავალერი და იმპერიის გრაფი.

ამრიგად, მონჟი რესპუბლიკელიდან მთლიანად ბონაპარტელი გახდა. მონჟი 68 წლისა იყო, როდესაც მოკავშირეთა ჯარი პირველად შევიდა პარიზში. მონარქიულმა რეაქციამ არ შეიბრალა ადამიანი, რომელმაც სახელი გაუთქვა საფრანგეთს თავისი მეცნიერული ნაშრომებით: პოლიტექნიკური სკოლის დამაარსებელსა და ხელმძღვანელს არათუ წაართვეს ქონებრივი და მოქალაქეობრივი უფლებები, არამედ პოლიტექნიკური სკოლიდან და მეცნიერებათა აკადემიიდანაც განდევნეს. მაგრამ მონჟს ცხოვრებისაგან უკვე ცოტა რამ უნდოდა. 1815 წლის დასაწყისში ის იმდენად დაქანცული იყო და მისი ჯანმრთელობა იმდენად შერყეული, რომ მეცნიერებაში უკვე ვერაფერს ვერ აკეთებდა. მალე ცნობის უნარიც დაჰკარგა და 1815 წლის 28 ივლისს დიდი გეომეტრი წუთისოფელს გამოესალმა.

გ. მონჟის გამოკვლევები დიფერენციალურ გეომეტრიაში გადმოცემულია მის ნაშრომში „ანალიზის გამოყენება გეომეტრიაში". მასში, რომელიც 27 პარაგრაფისაგან შედგება, განხილულია შემდეგი საკითხები: მრუდე ზედაპირებისადმი მხები სიბრტყეებისა და ნორმალების შესახებ; ცილინდრული ზედაპირების შესახებ; კონუსური ზედაპირების შესახებ; ბრუნვის ზედაპირების შესახებ; მუდამ ერთსა და იმავე ვერტიკალზე გამავალი და ყოველთვის

ჰორიზონტალური წრფის მოძრაობით შექმნილი ზედაპირების შესახებ; იმ ზედაპირების შესახებ, რომლებიც უსასრულო რიცხვის სხვა ზედაპირების მომვლებებია; მახასიათებლებისა და უკუქცევის წიბოების შესახებ; იმ მილების ზედაპირთა შესახებ, რომელთა ღერძი რომელიმე ბრტყელი და ჰორიზონტალური წირია და ღერძის მართობული კვეთები მუდმივრადიუსიანი წრეებია; იმ ზედაპირების შესახებ, რომელთა უდიდესი ჩაშვების წირი არის მუდმივი დახრილობის წრფე; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომელიც მომვლებია სივრცისა, რომელსაც გაირბენს მუდმივი ფორმის რაიმე მრუდე ზედაპირი, . რომელიც არაბრუნვით მოძრაობს რომელიღაც ორმაგი სიმრუდის მრუდზე; ყოველთვის z ღერძზე გამავალი წრფის მოძრაობით შექნილი ზედაპირის შესახებ; იმ ზედაპირის შესახებ, რომელიც შექმნილია წრფის მოძრაობით, რომელიც მუდმივი სიბრტყის პარალელური რჩება; განფენადი ზედაპირების შესახებ; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომელიც მომვლებია სივრცის, გამრბენის მეორე მოცემული მუდმივი ფორმის ზედაპირისა, რომელიც არ ბრუნავს და ისე მოძრაობს სრულიად ნებისმიერი ორმაგი სიმრუდის წირის გასწვრივ; იმ ზედაპირის შესახებ, რომელიც შექმნილია მუდმივი ფორმის მოცემული ორმაგი სიმრუდის იმ მრუდის მოძრაობით, რომელიც არ ბრუნავს და ისე მოძრაობს რომელიღაც მეორე სავსებით ნებისმიერი მრუდის გასწვრივ; მრუდე ზედაპირის ორმაგი სიმრუდის შესახებ; ელიფსოიდის ზედაპირის სიმრუდის წირების შესახებ; იმ მრუდე ზედაპირის წარმოქმნის შესახებ, რომლის ერთ-ერთი სიმრუდის ყველა წირი მოთავსებულია რომელიღაც მოცემული სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეზე; იმ ზედაპირის შესახებ, რომლის ერთ-ერთი სიმრუდის რადიუსი მუდმივია; იმ ზედაპირის შესახებ, რომლის სიმრუდის ორივე რადიუსი ყოველ წერტილში ერთმანეთის ტოლია და მიმართულია ერთი მხრივ; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომელიც წარმოქმნილია რომელიღაც მრუდის ყოველგვარი მოძრაობით; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომლის ორივე სიმრუდის რადიუსი ერთმანეთის ტოლია და საწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომელიც მომვლებია ცვლადრადიუსიანი და რაიმე წირზე მდებარე ცენტრებიანი სფეროების მიმდევრობისა; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომლის ყველა ნორმალი სფეროს ზედაპირის მხებია; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომლის ყველა ნორმალი ნებისმიერი ფუძით კონუსური ზედაპირის მხებია; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ,

რომლის ყველა ნორმალი რომელიმე განფენადი ზედაპირის მხებია; იმ მრუდე ზედაპირის შესახებ, რომელიც მომვლებია სივრცისა, რომელსაც გაირბენს ცვლადრადიუსიანი სფერო, რომლის ცენტრი გაირბენს ორმაგი სიმრუდის ნებისმიერ მრუდს; ორმაგი სიმრუდის წირების ევოლუტების რადიუსებისა და სხვადასხვაგვარ გადაღუნვათა შესახებ.

აქედან აშკარაა, რომ მონჟმა პირველმა მიუძღვნა ასეთი ვრცელი ნაშრომი დიფერენციალური გეომეტრიის საკითხებს. კლეროს გარდა მონჟს კიდევ ჰყავდა წინამორბედები დიფერენციალური გეომეტრიის დამუშავებაში. ჯერ კიდევ ფერმამ და დეკარტიმ ამოხსნა იმ სხივების ოჯახთა მომვლების მოძებნის ამოცანა, რომლებიც მიღებულია ერთი წერტილიდან გამოსულ სხივთა კონის გარდატეხით ოპტიკურ მინაში. თვით უსასრულოთა ანალიზის აღმოცენება გამოწვეული იყო უმთავრესად წინამორბედ ბრტყელ მრუდთა დიფერენციალური გეომეტრიის განვითარებით. ნიუტონის, ლაიბნიცისა და ძმები ბერნულების მიერ ამოხსნილი იყო ისეთი ამოცანები, როგორიცაა ბრტყელი მრუდის სიმრუდის ცენტრის, სიმრუდის რადიუსის, ევოლუტისა და ევოლვენტის პოვნა. ეს ყველაფერი შევიდა ლოპიტალის სახელმძღვანელოში.

XVIII საუკუნის დასაწყისისათვის ბრტყელი დიფერენციალური გეომეტრია, რომელმაც უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვა წარმოშვა, გახდა ანალიზის გამოყენების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგი და ანალიზთან ერთად შექმნა ერთი განუყრელი და მთლიანი დარგი. ახალი ნაბიჯები დიფერენციალური გეომეტრიის განვითარებაში, სამგანზომილებიან სივრცეში გადასვლა, დაკავშირებულია იმ ახალ ბიძგთან, რომელიც, უპირველეს ყოვლისა, გამომდინარეობდა გეოდეზიისა და კარტოგრაფიის დარგიდან; მათმა განვითარებამ მოითხოვა არა მარტო ბრტყელი კონტურების, არამედ რელიეფის შესწავლაც, რის გამოც გეომეტრიაში აღმოცენდა მრავალი ამოცანა, რომლებიც დაკავშირებულია მრუდე ზედაპირების განხილვასთან. პირველი ასეთი ამოცანა იყო ზედაპირის ორი წერტილის შემაერთებელი უმოკლესი მრუდის მოძებნის საკითხი. ამ ამოცანაზე პირველად იოჰან ბერნული მუშაობდა და მიიღო ნებისმიერ ზედაპირზე აღებული გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება. ეილერმა ამოხსნა გეოდეზიური წირის ამოცანა ამ წირის მინიმალური თვისებების საშუალებით. მანვე დაამუშავა ზედაპირთა თეორიის საკითხები თავის ნაშრომში: „გამოკვლევა ზედაპირების სიმრუდის შესახებ“. ბრტყელ

მრუდთა თეორიაში ეილერმა ახალი ნაბიჯები გადადგა, შემოიყვანა რა განხილვაში ბრტყელი მრუდის ნატურალური განტოლება და მოგვცა ნატურალური განტოლებიდან მართკუთხოვან კოორდინატებში განტოლებისაკენ გადასვლის მეთოდი. ზედაპირების თანამედროვე თეორიაში ერთ-ერთი ძირითადი თეორემა „ეილერის თეორემის" სახელწოდებას ატარებს.

მონჟი ამბობს, რომ მახასიათებლის განტოლება ყველა შემთხვევაში შეიძლება ანალიზურად გამოვიყვანოთ მომვლების განტოლებიდან. გამოყვანა შემდეგში მდგომარეობს: z-ის კერძო დიფერენციალებს აღნიშნავს p და q-თი და წერს ნებისმიერი ზედაპირის განტოლებას:

$$dz = pdx + qdy.$$

რადგან მომვლები ეხება ყველა თავის წერტილში ერთ-ერთ მოვლებულთაგანს და ამ ორ ზედაპირს შეხების წერტილში აქვს ერთი და იგივე მხები სიბრტყე, ამიტომ შეხების წერტილისათვის ხუთი—x, y, z, p, q—სიდიდე ერთი და იგივეა როგორც იმ შემთხვევაში, როცა განსახილველ წერტილს მივაკუთვნებთ მომვლებს, აგრეთვე იმ შემთხვევაშიც, როცა მას მივაკუთვნებთ მოვლებულს. ამრიგად, ყველა მომვლების განტოლება

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = a^2,$$

რომელიც ამის წინ გამოიყვანა მონჟმა და რომელიც საერთოდ შედგენილია იმ ხუთი სიდიდისაგან, ეკუთვნის არა მარტო სხვადასხვა მომვლებს, არამედ ყველა მოვლებულს. მონჟი ამბობს, რომ ამ განტოლებას ვუყუროთ ჯერ როგორც მომვლებთა განტოლებას.

შემდეგ მონჟი ამბობს, რომ x, y, z, p, q სიდიდესთან მხოლოდ p და q შეიძლება იყოს სხვადასხვა ორ სხვადასხვა მომვლებათ განტოლებაში; მაშასადამე, მხოლოდ ისინი არიან დამოკიდებული α სიდიდის მნიშვნელობაზე, რომელიც ერთისა და იმავე მომვლებისათვის უჩვენებს ინდივიდუალური მოვლებულის მდებარეობას. მაგრამ ჩვენ ვნახეთ, რომ მახასიათებლის განტოლების მისაღებად საჭიროა მოვლებულის განტოლების გაწარმოება, ჩავთვლით რა α-ს ერთადერთ ცვლადად. მაშასადამე, თუ

$$Pdp + Qdq = 0$$

განტოლებით წარმოვადგენთ განტოლებას, მიღებულს

$$dz^2 = a^2 \ (dx^2 + dy^2) \qquad (a)$$

განტოლების გაწარმოებით, დავუშვებთ რა, რომ იცვლება მხოლოდ p და q, მაშინ (a) განტოლების გაწარმოებით მიღებული განტოლება იქნება

$$P\frac{dp}{d\alpha} + Q\frac{dq}{d\alpha} = 0;$$

მაგრამ მეორე მხრივ გვაქვს:

$$dz = pdx + qdy$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{dp}{d\alpha}\,dx + \frac{dq}{d\alpha}\,dy = 0.$$

$\frac{dp}{d\alpha}$ და $\frac{dq}{d\alpha}$-ს გამორიცხვის შემდეგ მივიღებთ მახასიათებლის განტოლებას:

$$Pdy - Qdx = 0.$$

მონჟამდე სიმრუდის რადიუსს განიხილავდნენ მხოლოდ ბრტყელ მრუდთა თეორიაში. ბრტყელი მრუდის ევოლუტის განხილვა, როგორც ნორმალთა მომვლებისა, დაკავშირებული იყო მოცემული ბრტყელი მრუდის, როგორც წირის, რომელსაც შემოხაზავს მრუდზე დახვევის დროს გაჭიმული ძაფის ბოლო, ევოლვენტის განხილვასთან. გამოკვლეული იყო აგრეთვე, რომ ევოლუტი წარმოადგენს ბრტყელი მრუდის სიმრუდის ცენტრების გეომეტრიულ ადგილს. ამ ცნებათა და პროცესების გავრცელება სივრცით მრუდზე ადვილი არ იყო. მონჟი იყო პირველი, რომელმაც ეს სიძნელეები დაძლია. მან მოგვცა ნათელი სურათი იმ თანაფარდობებისა, რომლებსაც ადგილი აქვს ორმაგი სიმრუდის მრუდებისათვის. მან დაიწყო „პოლუსების წირების“ შემოყვანით, ესე იგი, თანამედროვე ტერმინოლოგიით, სიმრუდის ღერძით, ვინაიდან სწორედ სიმრუდის ღერძი და არა სივრცითი მრუდის სიმრუდის ცენტრი შეესაბამება ბრტყელი მრუდის სიმრუდის ცენტრს. მონჟი გეომეტრიულად უჩვენებს, რომ პოლუსების წირებით შექმნილი ზედაპირი სიბრტყეზე გაიშლება.

მონჟი გადმოსცემს აგრეთვე თეორემას: „რომელიმე ბრტყელ ან ორმაგი სიმრუდის მრუდს აქვს უსასრულოდ მრავალი ევოლუტი, რომელთა გეომეტრიული ადგილი არის აგრეთვე ამ მრუდის პოლუსების ზედაპირი".

შემდეგ გადმოცემაში მონჟი მიმართავს ორიგინალურ ხერხს. ეს ხერხი მას აძლევს გენიალურად მარტივ დამტკიცებას, რომ თითოეული ევოლუტთაგანი უმოკლესია ყველა იმ წირში, რომლის გავლება შეიძლება პოლუსების ზედაპირზე ევოლუტის ორ წერტილს შორის.

მონჟის აზროვნებისა და შემოქმედებისათვის დამახასიათებელია „თავისუფლად ღუნვის" იდეა. ეს იდეა, შეიცავს რა ზედაპირის ზოლის გეოდეზიური სიმრუდის იდეის ჩანასახს, წინ უსწრებს ღუნვის თანამედროვე თეორიას და ახლოა ეილერის იდეასთან, მაგრამ ეილერს მონჟზე გავლენა არ მოუხდენია, ვინაიდან მონჟის ნაშრომი უკვე მზად იყო, როდესაც ეილერის ნაშრომი გამოვიდა (1771 წ.), ამასთან, მონჟის აზრების მსვლელობაც რამდენადმე განსხვავდება ეილერის აზრების მსვლელობისაგან.

ხელმძღვანელობს რა პლასტიურობის ინტუიციით, მონჟი თავს არ იწუხებს იმაზე, რომ „წიბოს" ცნება ზუსტად განსაზღვროს ანდა შეაფასოს ორ „ტოლ" სიდიდეს შორის სხვაობის სიმცირის რიგი. თუმცა იმავე „ღუნვის" მეთოდის საშუალებით მონჟმა მიიღო ნებისმიერი ზედაპირის გეოდეზიური წირის განტოლება. შრომის ეს ნაწილი არ შესულა მის ნაშრომში „ანალიზის გამოყენება გეომეტრიაში". არ შესულა აგრეთვე მონჟის ის ნაშრომიც, სადაც განხილულია განფენადი ზედაპირის ევოლუტა. ამ ტერმინით მონჟი აღნიშნავს მოცემული განფენადი სიბრტყის უკუქცევის წიბოს გამწრფევ სიბრტყეს. ისეთივე მარტივი გეომეტრიულ-ინფინიტეზიმალური მოსაზრებებით, რომელიც გამოყენებულია მემუარის ძირითად ნაწილში, მონჟი ამტკიცებს შემდეგ წინადადებებს:

1) განფენადი ზედაპირის უკუქცევის წიბო უმოკლესი წირია ევოლუტის ზედაპირზე.

2) განფენადი ზედაპირის „ელემენტი" შეიძლება განხილული იქნას როგორც იმ კონუსის ზედაპირის ელემენტი, რომლის წვეროა უკუქცევი წიბოს შესაბამი წერტილი, ღერძი კი არის ევოლუტის წრფივი მსახველი.

3) თუ ევოლუტა ცილინდრულ ზედაპირს წარმოადგენს, მაშინ გამოსავალი განფენადი ზედაპირის მსახველები ჰქმნიან მუდმივ კუთხეს ევოლუტის შესაბამ მსახველთან.

ჩვენ უკვე ვხედავთ, თუ მონჟის მემუარმა მეთოდებისა და იდეების რა სიმდიდრე შემოიყვანა მათემატიკაში. მის წამ-ყვან ხაზს წარმოადგენს ღრმა გეომეტრიული ინტუიცია. მონჟი არ იყო კმაყოფილი ეილერის მეთოდით, თუმცა მის შედეგებს მონჟი მეტად აფასებდა. ამიტომ მონჟი ურჩევს თავის მოწაფეს მენიეს, რომ ეილერის მიერ მიღებული შედეგები მან მიიღოს სხვა მეთოდით. ეს მენიემ ბრწყინვალედ შეასრულა და ეილერზე კიდევ უფრო შორს წავიდა.

ჟ ა ნ-ბ ა პ ტ ი ს ტ-მ ა რ ი-შ ა რ ლ მ ე ნ ი ე დაიბადა 1754 წელს. მეზიერის სამხედრო სკოლის დამთავრების შემდეგ შევიდა საფრანგეთის არმიის საინჟინრო კორპუსში და ჯერ კიდევ რევოლუციამდე დივიზიის მეთაურად დანიშნეს. რევოლუციამდე იქნა აგრეთვე არჩეული აკადემიის წევრად, რევოლუციის შემდეგ იგი თავის მასწავლებელ მონჟთან მუშაობდა ზომა-წონის კომისიაში. მალე გენერალი გახდა და ფრონტზე გაემგზავრა. ის იქ რევოლუციური არმიის წინა რიგებში იბრძოდა და გულადი სარდლის სახელი გაითქვა. მანიცის გმირულმა დაცვამ პრუსიელების წინააღმდეგ მენიეს სახელი კი გაუთქვა, მაგრამ საფრანგეთს დაუკარგა გენერალ-აკადემიკოსი, იგი მძიმედ დაიჭრა და მალე გარდაიცვალა, 1793 წელს.

მენიე 22 წლის იყო, როდესაც აკადემიას წარუდგინა „მემუარი ზედაპირების სიმრუდის შესახებ“, მაგრამ დაიბეჭდა მხოლოდ ცხრა წლის შემდეგ. მან გამოსავალ წერტილად აიღო ის დებულება, რომ ზედაპირის სიმრუდე სავსებით განისაზღვრება კერძო წარმოებულებით მეორე რიგამდე ამ უკანასკნელთა ჩათვლით. u, v, t კოორდინატთა სისტემა მან ისე შეარჩია, რომ სათავე დამთხვეული იყო ზედაპირის საკვლევ წერტილზე, uv სიბრტყე კი მხებ სიბრტყეზე ამ წერტილში. მაშინ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია, და ზედაპირი შეიძლება შეიცვალოს პარაბოლოიდით

$$t = \frac{cu^2 + 2euv + fv^2}{2},$$

რომლის სიმრუდე (0, 0, 0) წერტილში იგივეა, რაც ზედაპირის სიმრუდე. კოორდინატთა სისტემის მობრუნებით მენიეს ეს განტოლება მიჰყავს შემდეგ სახემდე:

$$t = \frac{Au'^2 + Bv'^2}{2}.$$

შემდეგ მენიეს აზრი ასეთი მიმართულებით ვითარდება: ბრტყელი მრუდის სიმრუდის რადიუსი მისი შემცველი წრის რადიუსია. ცხადია, რომ $v'=0$ და $u'=0$ კვეთებში მიიღება ორი პარაბოლი, სხვადასხვა წრით აპროქსიმირებული. ასე რომ, ზედაპირი არ შეიძლება შეიცვალოს სფეროთი, მაგრამ შეიძლება თუ არა შეიცვალოს იგი ზედაპირით, რომელიც მიიღება ერთ-ერთი ამ წრეთაგანის ბრუნვით მისსავე სიბრტყეში მყოფ რაიმე ღერძის გარშემო. სწორედ მენიემ მიიღო გამოსახვა წრის სიმრუდის r რადიუსისა და ρ რადიუსისათვის იმ წრეწირისა, რომელსაც შემოწერს შეხების წერტილი წრის პარაბოლოიდთან, როდესაც წრე ბრუნავს ღერძის გარშემო.

r და ρ სიდიდეები გამოისახება ჯერ A და B-თი და რადგან უკანასკნელების გამოსახვა c, e და f-ით ცნობილია, ამიტომ მენიე წერს შემდეგ ფორმულებს:

$$\frac{1}{r}=\frac{c+f+\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}{2},$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{c+f-\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}{2}.$$

ნიშნის შეცვლა რადიკალისა, რომელიც ამ გამოსახვაში შედის, შეესაბამება $u'=0$ კვეთიდან $v'=0$ კვეთზე გადასვლას და, ამგვარად, რადიუსი ρ არის პარაბოლოიდის მეორე კვეთის სიმრუდის რადიუსი. ამიტომ მენიე r-სა და ρ-ს უწოდებს ზედაპირის ელემენტის „სიმრუდის რადიუსს"; ეს ტერმინი პირველად მან შემოიღო.

შემდეგ მენიემ გამოთვალა სიმრუდის რადიუსი ნებისმიერი კვეთისა, რომელიც გაივლის ზედაპირის მოცემულ წერტილში, განსაზღვრა ამ კვეთის მდებარეობა მისი $(u'\,v')$ სიბრტყისადმი დახრილობის ω კუთხით და π კუთხით, რომელსაც $(u'\,v')$ სიბრტყეზე კვეთის კვალი ჰქმნის u' ღერძთან. პარამეტრების ამ შერჩევის მიზანშეწონილობა და ზედაპირის ზემოხსენებული წარმოდგენა პარაბოლოიდით, მიმართული სათანადოდ შერჩეულ კოორდინატთა სისტემისადმი, კარგად განასხვავებენ მენიეს ნაშრომს ეილერის ნაშრომისგან. ამიტომ მენიემ მიიღო შედეგები, რომლებიც გაცილებით შორს მიდიან ეილერის შედეგებთან შედარებით. მართალია, ეილერმა მოგვცა ნებისმიერი კვეთის რადიუსის გამოსახულება, მაგრამ მისმა სირთულემ არ მისცა მას საშუალება იმ კანონის დადგენისა, რომელიც მენიემ მოგვცა. ეილერი შეჩერდა იმის

მითითებაზე, რომ ყველა კვეთიდან, რომელიც გაივლის ზედაპირზე მოცემულ მიმართულებაზე, ნორმალურ კვეთს აქვს უდიდესი სიმრუდე. მენიე კი პირდაპირ გვაძლევს ნებისმიერი კვეთის სიმრუდის რადიუსისათვის გამოსახულებას

$$R = \frac{r \rho \sin \omega}{r \sin^2 \pi + \rho \cos^2 \pi} = \frac{2 r \rho \sin \omega}{(r + \rho) - (r - \rho) \cos^2 \pi}.$$

ამ გამოსახულებიდან პირველს უკვე აქვს თითქმის თანამედროვე ფორმა; დიუპენს მხოლოდ ისღა დარჩა, რომ გადაებრუნებია წილადი, რომელიც იძლევა R-ს, და ამით მიეღო $\frac{1}{R}$. მეორე გამოსახულება კი, თუ დავუშვებთ, რომ $\omega = 90^\circ$, გვაძლევს, როგორც მენიე შენიშნავს, ეილერის ფორმულას. ზოგადი შემთხვევისათვის ის გამოსახავს თეორემას, რომელსაც ახლაც მენიეს თეორემა ეწოდება და ავტორის მიერ ასე არის ფორმულირებული: „თუ ზედაპირის ელემენტს გადავკვეთთ ამ ელემენტის მართობული სიბრტყით და შემდეგ წარმოვიდგენთ სფეროს, რომელიც ამ სიბრტყეს ეხება და აქვს ხსენებული კვეთის სიმრუდის რადიუსის ტოლი რადიუსი და თუ გამკვეთი სიბრტყის მხებ სიბრტყესთან გადაკვეთაში გავავლებთ სხვა ნებისმიერ სიბრტყეს, მაშინ უკანასკნელი შექმნის სფეროზე და ზედაპირის ელემენტზე ერთისა და იმავე სიმრუდის კვეთებს“.

ამ შედეგებიდან მენიემ ამოხსნა მრავალი კერძო საკითხი. მაგალითად, ის განსაზღვრავს ზედაპირზე იმ მიმართულებებს, რომელთათვის $R = \infty$, ე. ი., თანამედროვე ტერმინოლოგიით, ზედაპირის ასიმპტოტური წირების მიმართულებებს; ის განსაზღვრავს იმ ზედაპირებს, რომელთათვის $r = \rho$, და უჩვენებს, რომ ამ გვარის ერთადერთი ზედაპირი არის სფერო. ამ ნაშრომის დასკვნითი ნაწილი მენიემ მიუძღვნა წრფოვანი ზედაპირების გამოკვლევას, რის შედეგად გამოჰყავს, რომ ირიბი განფენადი ზედაპირისათვის r და ρ-ს სიდიდეებს აქვს სხვადასხვა ნიშანი, ხოლო განფენადი ზედაპირისათვის მიიღება მისი ზოგადი დიფერენციალური განტოლება იმ პირობიდან, რომ r და ρ სიდიდეებიდან ერთ-ერთი უსასრულოდ დიდი გახდება. მინიმალური ზედაპირის განტოლება ლაგრანჟმა მიიღო ვარიაციათა აღრიცხვის მეთოდით, მენიემ კი—გეომეტრიულად.

თავი VII

მათემატიკა რუსეთსა და საქართველოში XVII—XVIII საუკუნეებში

1. მათემატიკა რუსეთში

XVII საუკუნეში რუსეთში მათემატიკის ცოდნის შესახებ ცნობები მოიპოვება ამავე საუკუნის ხელნაწერებში, რომელთა შორის მხოლოდ ორი-სამი ხელნაწერია მიძღვნილი რომელიმე ერთი საგნისადმი — არითმეტიკის ან გეომეტრიისადმი; დანარჩენი წარმოადგენს კრებულებს, რომლებიც შეიცავენ არა მარტო არითმეტიკულ-გეომეტრიულ, არამედ საერთოდ საბუნებისმეტყველო-სამეცნიერო ცნობებსაც. ამ ხელნაწერებიდან საყურადღებოა სამხედრო საქმისადმი მიძღვნილი 1607 და 1621 წლების ხელნაწერი (Устав ратных дел), რომელიც შეიცავს გეომეტრიულ ცნობებს. ეს ცნობები უმთავრესად წარმოადგენენ რეცეპტებს მანძილების განსაზღვრაზე ამოცანების ამოსახსნელად, ხოლო მოცემული წესების არავითარი დამტკიცებები არ არის მოყვანილი. ზოგიერთი წესი ამ ხელნაწერში ისე ბუნდოვნად და გაუგებრად არის გადმოცემული, რომ, ეტყობა, თვითონ შემდგენელსაც არ ესმოდა ის.

შემდეგ, 1629 წლის გეომეტრიულ ხელნაწერში (Книга сошного письма) გადმოცემულია მიწის გაზომვის ხერხები. აქ მოცემული ყველა ცნობა შეეხება ფართობების გამოთვლას (სამკუთხედის, მართკუთხედისა და ტოლფერდა ტრაპეციის), თუმცა ტრაპეციისა და სამკუთხედის ფართობები არასწორადაა განსაზღვრული. სამკუთხედის ფართობად ჩათვლილია უმცირესი გვერდის ნახევრისა და უდიდესი გვერდის ნამრავლი; ტოლგვერდა ტრაპეციის ფართობი, მოცემული ცნობის მიხედვით, უდრის ფუძეების ჯამის ნახევრისა და დიდი ფუძის ნამრავლს.

სხვა გეომეტრიულ ხელნაწერებში მოცემულია მხოლოდ ის ცნობები, რომლებიც დასჭირდება მკითხველს ყოველდღიურ საქმიანობაში, სახელდობრ, წესები ფართობების, მანძილებისა და იმ მარტივი სხეულების მოცულობათა გამოსათვლელად, რომელთათვისაც განხილულია მრავალი მაგალითი. გადმოცემულ წესებში არის ბევრი შეცდომაც; მაგალითად, ორ A და B ადგილებს შორის, მანძილი, იმ პირობით, რომ მოცემულია მათი მანძილები C ადგილამდე,

გამოთვლილია ისე, რომ თითქოს *ABC* სამკუთხედი ყოველთვის იყოს მართკუთხა.

XVII საუკუნის არითმეტიკულ ხელნაწერებს ჰქონდათ უტილიტარული და ზოგადი განათლების ხასიათი. წესები მოცემულია რეცეპტების სახით; როგორ დადგინდა ესა თუ ის წესი, არსაიდან ჩანს. თითოეული წესის შემდეგ მოყვანილია მრავალი მაგალითი. ხელნაწერებში ნახმარია არაბული (ანუ ინდური) ნუმერაცია, რომელსაც ახლა ვხმარობთ. სლავური ანბანური ნუმერაცია ნახმარია მხოლოდ პრაქტიკული ხასიათის მაგალითების განხილვის დროს. ხელნაწერებში გადმოცემულია აგრეთვე მთელ რიცხვებსა და წილადებზე მოქმედებათა წესები და სამობითი წესი.

XVII საუკუნეში რუსული გამოცემებიდან ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია მაგნიცკის „არითმეტიკა“, რომელიც 1703 წელს მოსკოვში დაიბეჭდა.

ლ ე ო ნ ტ ი მ ა გ ნ ი ც კ ი იყო, როგორც ზოგადი განათლებით, ისე მათემატიკის ცოდნით, გამოჩენილი პიროვნება რუსეთში. პირველდაწყებითი განათლება მიიღო მოსკოვის სლავურ-ბერძნულლათინურ აკადემიაში, სადაც შეისწავლა გერმანული, იტალიური და ჰოლანდიური ენები. დამოუკიდებლად შეისწავლა მათემატიკა გაცილებით უფრო მეტი მოცულობით, ვიდრე მოცემული იყო XVII საუკუნის რუსულ მათემატიკურ ხელნაწერებში.

მაგნიცკის „არითმეტიკა“ კომპილაციური ნაშრომია, მაგრამ მასალის დალაგება, განმარტებითი ტექსტები, ზოგადი ფილოსოფიური მსჯელობანი, მაგალითები და მეთოდური ხერხები ამ ნაშრომში თვითონ მაგნიცკის გონების ნაყოფია. თუმცა ამ ნაშრომის სახელწოდებაა „არითმეტიკა“, ის შეიცავს აგრეთვე მნიშვნელოვან ცნობებს ალგებრიდან, გეომეტრიიდან, ტრიგონომეტრიდან მეტეოროლოგიიდან, ასტრონომიიდან და ნავიგაციიდან. მაგნიცკის ეს თხზულება, რომელიც ორი წიგნისაგან შედგება, მრავალი წლის განმავლობაში ითვლებოდა რუსეთში ძირითად მათემატიკურ სახელმძღვანელოდ. მრავალი თაობა რუსი განათლებული ადამიანებისა მაგნიცკის „არითმეტიკაზე“ აღიზარდა. სახელგანთქმული რუსი მეცნიერი მიხეილ ლომონოსოვი მეტად აფასებდა ამ წიგნს. ამბობენ, რომ მან არა თუ შეისწავლა მაგნიცკის „არითმეტიკა“, არამედ ზეპირადაც კი იცოდა.

არითმეტიკას მაგნიცკი ასე განსაზღვრავს: „არითმეტიკა ანუ მრიცხველობა არის მხატვრობა პატიოსანი, არასახარბიელო, ყველასათვის ადვილად გასაგები, დიდად სასარგებლო, დიდად საქე-

ბი, უძველეს და უახლეს დროს მცხოვრებ არითმეტიკოსთა მიერ გამოგონებული და გადმოცემული".

რუსულ მათემატიკურ ლიტერატურაში ასეთი განსაზღვრა პირველად არის მოცემული. ამის შემდეგ მაგნიცკის შემოჰყავს ცნება ათობითი სისტემის ნუმერაციაზე, რიცხვების აღნიშვნები და მათი სახელწოდებები. ნულს ის უწოდებს ციფრას. რიცხვთა ტაბულა, რომელიც ამ წიგნშია მოთავსებული, მთავრდება 10^{24} რიცხვით. ამის შემდეგ მაგნიცკი ამბობს, რომ რიცხვთა მწკრივი უსასრულოაო.

მაგნიცკის ეს სახელმძღვანელო გაყოფილია ორ წიგნად. პირველი წიგნი ეძღვნება თვით არითმეტიკას, აგრეთვე პროგრესიებსა და კვადრატულ და კუბურ ფესვებს.

პირველი წიგნის პირველი ნაწილი ეხება მთელ რიცხვებსა და მათზე მოქმედებებს, მეორე ნაწილი—წილადებს, ძველ წონათა და მონეტათა აღწერას, მათ შეფარდებას არსებულთან. მესამე ნაწილში გადმოცემულია სამთა წესი. მეოთხე ნაწილი ეძღვნება ყალბ წესს და მეოთხე—პროგრესიებს და კვადრატულ და კუბურ ფესვებს.

მეორე წიგნი დაყოფილია სამ ნაწილად: 1) არითმეტიკა ალგებრაიკა, 2) გეომეტრიული საკითხები არითმეტიკის მეშვეობით, 3) დედამიწის გაზომვის შესახებ.

წიგნში მოცემულია არითმეტიკულ მოქმედებათა ლათინურ სახელწოდებებთან ერთად რუსულიც. ყოველი ახალი წესი იწყება მარტივი მაგალითით, შემდეგ მოცემულია ზოგადი ფორმულირება და, დასასრულ, ყველა ამის მტკიცედ შეთვისებისათვის მოცემულია უმთავრესად პრაქტიკული ხასიათის ამოცანები დიდი რაოდენობით. ყოველ მოქმედებას თან ერთვის შესამოწმებელი წესი. მაგნიცკის „არითმეტიკაში" ყველა ძირითადი ცნება ისეა გადმოცემული, რომ ის დაკავშირებულია ყოფა-ცხოვრების საკითხებთან. მაგალითად, კითხვაზე, თუ რა არის წილადი, მაგნიცკი უპასუხებს: „ტეხილი რიცხვი არის ნივთის მხოლოდ ნაწილი, რიცხვად გამოცხადებული, ასე მაგალითად, ათშაურიანი არის მანეთის ნახევარი და იწერება 1/2 მანეთი ან მეხუთედი ნაწილი — 1/5, ან ორი მეხუთედი ნაწილი—2/5, და ნივთის ყოველი ნაწილი გამოცხადებულია რიცხვად, ესე იგი ტეხილ რიცხვად". მრავალი ცნება, როგორიცაა: ათწილადები, პროგრესიები, კვადრატული განტოლებები და სხვა, რუსულ ლიტერატურაში პირველად მოგვცა მაგნიცკიმ.

მაგნიცკიმ მოძღვრება პროგრესიებზე, კვადრატულ და კუბურ ფესვებზე მოათავსა არა იმ ნაწილში, რომელიც ალგებრისადმია მიძღვნილი, არამედ არითმეტიკულ ნაწილში. ამის ახსნა-განმარტებას მაგნიცკი იძლევა წინასიტყვაობაში. ის ამბობს, რომ პროგრესიებს გამოყენება აქვს სამოქალაქო საკითხებში და ამიტომ ის არითმეტიკის განყოფილებაში მოათავსა, ხოლო ალგებრა ძნელიაო და მხოლოდ ნიჭიერებისათვის არის ხელმისაწვდომი.

ალგებრულ ნაწილს მაგნიცკი იწყებს შემდეგი სიტყვებით: „ალგებრულ ნიშნებს წარმოადგენს ხმოვანი ასოები, რომლებითაც აღინიშნება უცნობი სიდიდეები, და თანხმოვანი ასოები, რომლებითაც აღინიშნება მოცემული ანუ ცნობილი სიდიდეები“.

მაგნიცკის მოჰყავს კვადრატულ და ბიკვადრატულ განტოლებათა ამოხსნის წესები, ბრტყელი და სფერული ტრიგონომეტრიის საწყისები, ცნობები ნაკვეთების ფართობებისა და სხეულების მოცულობათა გამოთვლის შესახებ. მოყვანილია კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნა მხოლოდ სამი შემთხვევისათვის:

$$ax^2+bx=c,\quad ax^2=bx+c,\quad ax^2+c=bx.$$

2. მათემატიკა საქართველოში

საინტერესოა სახელგანთქმული ქართველი მეცნიერის სულხან-საბა ორბელიანის (1658—1725) ლექსიკონი. ლექსიკონის პირველ გვერდებზე მოთავსებულია ქართული ანბანური ნუმერაციის ცხრილი და მის შესაბამისად არაბულ-ინდური ანუ თანამედროვე ნუმერაციის ცხრილი. გარდა ამისა, საბას ლექსიკონში ვპოულობთ ევკლიდეს „საწყისებიდან“ ამოღებულ წერტილის, წირის, სიბრტყისა და სხეულის განსაზღვრებს. სხვადასხვა ევროპულ წყაროდან მოყვანილია მათემატიკის, გეომეტრიისა და არითმეტიკის განსაზღვრები და ზოგიერთი საინტერესო ცნობა ასტრონომიიდან. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია საბას ცნობები ქართული საზომების შესახებ.

შემდეგ ცნობებს საქართველოში მათემატიკის ცოდნის შესახებ ვპოულობთ საბას მოწაფის ვახტანგ VI (1675—1735) ნაწერებში. მათ შორის ჩვენთვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ასტრონომიული ნაშრომი „ვარსკვლავთ მრიცხველობა“ (საქ. მუზეუმის ხელნაწერი 3—161), დაწერილი ვახტანგისა და მისი თანაშემწეების

მიერ. აღნიშნული ნაშრომი შეიცავს XV საუკუნის დიდი უზბეკი ასტრონომის ულუღ-ბეკის ასტრონომიული ნაშრომის სრულ თარგმანს ირანულიდან. ვახტანგის გადმოცემით, ულუღ-ბეკის ნაშრომი „ზიჯი“ თვითონ თარგმნა ქართულად. ქართული ნაშრომი „ვარსკვლავთმრიცხველობა“ ორიგინალურია, რადგან ულუღ-ბეკის ნაშრომის გარდა ის სხვა ასტრონომიულ ცნობებსაც შეიცავს. მეტად მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ულუღ-ბეკის ნაშრომში მოყვანილია 834 ქალაქის გეოგრაფიული კოორდინატები, ხოლო ვახტანგის ნაშრომში — 1275 ქალაქი. როგორც სათაურიდან ჩანს, ნაწილის, ესე იგი 1033 ქალაქის გეოგრაფიული კოორდინატების შესახებ ცნობები ვახტანგს ამოღებული აქვს ბერძნული, დასავლეთევროპული და რუსული წყაროებიდან. მათ შორის ვპოულობთ ქ. გორის კოორდინატებს, რაც ულუღ-ბეკის ნაშრომში არ არის და რაც იმას მოწმობს, რომ XVII საუკუნეში ქართველებმა იცოდნენ ადგილების გეოგრაფიული კოორდინატების განსაზღვრა.

დასავლეთ ევროპულ ენაზე ულუღ-ბეკის ნაშრომი პირველად გადათარგმნეს 1853 წელს (ფრანგულად თარგმნა სედილომ). ამრიგად, ულუღ-ბეკის ნაშრომი ქართულ ენაზე უფრო ადრე ითარგმნა, ვიდრე ევროპულზე. ამასთანავე უნდა აღინიშნოს, რომ ულუღ-ბეკის ნაშრომი მთლიანად შეიცავს ეგრეთ წოდებულ არაბების ტრიგონომეტრიას. სათანადო წყაროებიდან ჩანს, რომ არაბი ასტრონომის იბნ-აფალის ტრიგონომეტრიულმა ნაშრომმა, რომელიც 1534 წელს ჰერგარდ კრემონელმა თარგმნა ლათინურ ენაზე, ვერ მიიპყრო ევროპელების ყურადღება, ვიდრე 1851 წელს ბონკამპანიმ არ გამოსცა ნაშრომი ამ თარგმანის შესახებ. სხვა არაბი მათემატიკოსების ნაშრომები უფრო გვიან ითარგმნა ევროპულ ენებზე. ყველაფერი ეს იმას ამბობს, რომ არაბების ტრიგონომეტრიული ნაშრომები უფრო გვიან თარგმნეს ევროპულ ენებზე, ვიდრე ქართულზე. ცნობილია, რომ ევროპელებმა ტრიგონომეტრიის საფუძვლები არაბებისაგან გადაიღეს. მაშასადამე, ცხადია, ქართველებმა ტრიგონომეტრიის საფუძვლები პირველად გადაიღეს არა ევროპელებისაგან, არამედ არაბებისაგან.

თუ უფრო ადრე არა, XVII საუკუნეში მაინც ქართველები რომ არაბულ ტრიგონომეტრიას სწავლობდნენ, ამას ადასტურებს აგრეთვე მეორე ასტრონომიულ-ასტროლოგიური ნაშრომი „ქმნილებისა ცოდნა“, რომელიც ქართველებს უთარგმნიათ ვახტანგ VI-ის ხელმძღვანელობით ირანულიდან (ჰიდაიათ ილ-ნუჯუმიდან) და

დაუბეჭდავთ თბილისის სტამბაში 1721 წელს. ნაშრომი შეიცავს არაბული ტრიგონომეტრიის საფუძვლებს.

ეს ორი ნაშრომი („ვარსკვლავთ მრიცხველობა“ და „ქმნილებისა ცოდნა“) მეტად საინტერესოა იმ თვალსაზრისითაც, რომ მათში მოცემულია სეკანსის განსაზღვრა სწორედ ისე, როგორც ეს მოგვცა მისმა გამომგონებელმა აბულ-ვაფამ (X საუკუნის შუა აზიის მათემატიკოსი).

„ვარსკვლავთ მრიცხველობაში“ სეკანსის განსაზღვრა გადმოცემულია ასე: „შესატყობის თავ დამე იმის ჩრდილის თავამდის ერთი ხაზი რომ ფიქრით გავაბა, იმ ჩდილის კენტრი ჰქვიან“. „ქმნილების ცოდნაში“ კი — „საცნობელის თავიდამ ერთი ხაზი ჩდილის თავამდე ფიქრით გავაბამთ, იმას იმ ჩდილის კენტრი ჰქვიან“. ორივე განსაზღვრა ერთი და იგივეა. „შესატყობი“ ანუ „საცნობელი“ არის ვერტიკალურ კედელზე ჰორიზონტალურად დამაგრებული ჭოგრი, რომელსაც არაბი ასტრონომები „მეყიასს“ უწოდებდნენ; „ჩდილი“ (ჩრდილი) არის ტანგენსის წირი ანუ ტანგესი, რომელსაც არაბები „ზილს“ უწოდებდნენ. „კენტრი“ ანუ „კენტორი“ ქართულად ეწოდებოდა დიამეტრს (ჩვენი აზრით, ეს სიტყვა სახესხვაობაა ბერძნული სიტყვის — „კენტრონის“, რაც ბერძნულად „ცენტრს“ ნიშნავს). არაბი მათემატიკოსები კი დიამეტრს „ყოთრს“ უწოდებდნენ. „მეყიას“, “ზილ“ და „ყოთრ“ არაბული სიტყვებია, მაგრამ ისინი სპარსულშიც იხმარებოდნენ როგორც ასტრონომიული და მათემატიკური ტერმინები. თვით აბულ-ვაფას მიერ სეკანსის განსაზღვრა, რომელსაც ჩვენ ულუღ-ბეკის ხელნაწერშიც ვპოულობთ, შემდეგია: „ხაზს, რომელიც გავლებულია საცნობელის წვეროსა და ჩრდილის წვეროს შორის, ჩრდილის დიამეტრი ეწოდება“ (ხათი ქა ვასელ ბაშედ მიან სარ მეყიას ვა სარ ზილ ანრა ყოთრ ზილ ხანენდ). ეს, თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე რომ გადმოვცეთ, იქნება: „წრფეს, რომელიც გავლებულია ჭოგრის წვეროსა და ტანგენსის წირს შორის, სეკანსის წირი ეწოდება“. როგორც ვხედავთ, ქართულ ხელნაწერში მოყვანილი აბულ-ვაფას სეკანსის განსაზღვრა განსხვავდება სპარსულ ხელნაწერში მოცემულისაგან მხოლოდ იმით, რომ ქართულში ჩამატებულია სიტყვა „ფიქრით“ (ანუ აზრით).

უნდა აღინიშნოს, რომ სეკანსის განსაზღვრას, რომელიც მოცემულია მისივე გამომგონებლის მიერ, ევროპელი მათემატიკის ისტორიკოსების ნაშრომებში ვერ ვპოულობთ. მათემატიკის ისტორიისადმი მიძღვნილ ისეთ ვრცელ ნაშრომში, როგორიცაა მ. კანტო-

რის ნაშრომი „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", სადაც აბულ-ვაფას ნაშრომის ლათინური თარგმანიდან (აბულ-ვაფამ ის სპარსულ ენაზე დაწერა) მოყვანილია ტანგენსის განსაზღვრა, სეკანსის შესახებ არაფერია ნათქვამი, ხოლო გ. ფაცარის ნაშრომში აღნიშნულია მხოლოდ, რომ სეკანსი გამოიგონა აბულ-ვაფამ და მოყვანილია ლათინური სახელწოდება diameter umbrae, გადმოთარგმნილი არაბული „ყოთრ ზილიდან".

ქართველების მიერ ევროპელთა ტრიგონომეტრიის გაცნობის პირველი საბუთია 1725 წელს ვახტანგ VI-ის რედაქციით მიხეილ ელიევიჩის (ელიაშვილის) რუსულიდან ნათარგმნი ნაშრომი „სივაკის ზომა ანუ პლანიმეტრია", რომლის ხელნაწერი საქართველოს მუზეუმში ინახება (*S*—167). ნაშრომი ძირითადად წარმოადგენს პრაქტიკულ გეომეტრიას (გეომეტრია პრაქტიკა), მაგრამ შეიცავს აგრეთვე არითმეტიკის საკითხებსაც, ტრიგონომეტრიის ძირითად ფორმულებს და მათ გამოყენებას სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნისათვის. საერთოდ საქართველოში ევროპული მათემატიკური კულტურის გადმოღება, შესაძლებელია, ხდებოდა უფრო ადრეც, მაგრამ ჩვენამდე მოაღწია არითმეტიკული შინაარსის ხელნაწერებმა, რომლებიც დაწერილია XVIII საუკუნის პირველი წლებიდან (საქ. მუზეუმის ხელნაწერები: „*H*—2115, *S*—167, *H*—2795, *H*—2204, *H*—2200, *H*—2280, *H*—252, *S*—1531, *H*—2180, *H*—2796, *H*—229, *S*—4950 და სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის აღმოსავლეთმცოდნეობის ინსტიტუტის *K* 1, *G* 187). *H*—2114 ხელნაწერის ავტორია დიმიტრი ციციშვილი, თუმცა ციციშვილი წინასიტყვაობაში წერს, რომ მას ფრანგულიდან უთარგმნია, მაგრამ რამდენადაც ამ ხელნაწერში მოცემულია აგრეთვე ცნობები ქართულ საზომთა სისტემის შესახებ, ამიტომ შეიძლება ის კომპილაციად ჩაითვალოს. ხელნაწერი 124 გვერდს შეიცავს და 13 თავად არის დაყოფილი. პირველ თავში ხმარებული მათემატიკური ტერმინებიდან ჩანს, რომ ეს ტერმინები ნათარგმნია გერმანულიდან (ლუწის ნაცვლად ნახმარია „სწორი", კენტის ნაცვლად — „მრუდი" და სხვა), რაც იმას ამტკიცებს, რომ ნაშრომი ციციშვილს უთარგმნია არა ფრანგულიდან, არამედ გერმანულიდან (წარსულ საუკუნეებში ქართველები საერთოდ „ფრანგებს" უწოდებდნენ დასავლეთ ევროპის ხალხებს). ამავე თავში განხილულია „ბრტყელი" და „სივრცითი" რიცხვები და მათი თვისებები. შემდეგ ოთხ თავში გადმოცემულია არითმეტიკული მოქმედების წესები, მაგალითე-

ბი და ამოცანები. ხელნაწერში არსად არ არის ნახმარი ნიშნები +, —, =, მიუხედავად იმისა, რომ ისინი ევროპაში შემოიღეს XV საუკუნეში. შეკრების მოქმედება შესრულებულია ინდო-არაბული წესით, მარცხნიდან მარჯვნივ, და იქვეა მოცემული სიტყვიერადაც. აქ გადმოცემული გაყოფის წესი იხმარებოდა მხოლოდ XVIII საუკუნემდე. დანარჩენ თავებში განხილულია საზომები, პროგრესიათა წესები, კვადრატული და კუბური ფესვის ამოღების წესები, სამთა წესი და მარტივ და ათობით წილადებზე მოქმედების წესები.

არითმეტიკის საკითხებს ვპოულობთ აგრეთვე იმ ხელნაწერშიც, რომელიც რუსულიდან უთარგმნია 1735 წელს მიხეილ ელიაშვილს ვახტანგ VI-ის რედაქციით.

საყურადღებოა აგრეთვე ხელნაწერი $H-2200$, რომელიც მხოლოდ ლოგარითმებს შეიცავს. ავტორი უცნობია; ალბათ მან ალგებრის სრული კურსი დაწერა, მაგრამ, როგორც ჩანს, დანარჩენი ნაწილი დაკარგულია: ხელნაწერი აუკინძავია და პირველი გვერდი იწყება მესამე თავიდან: „თავი 3. ლოღარითმათათვის". ნაშრომი კომპილაცია უნდა იყოს; ახლაც ხმარებული უცხო მათემატიკური ტერმინები მას ქართულით შეუცვლია, მაგალითად, „პროგრესიის" ნაცვლად ხმარობს „წარმატებას". ლათინური ასოები შეუცვლია ქართული—ხუცური—ანბანის ასომთავრულით. პირველ გვერდზე მოყვანილია ლოგარითმის განსაზღვრა: „ლოღარითმანი" (ბერძნულიდან ლოღოს—სიტყვა, არითმოს—რიცხვი) ეწოდებიან ხელოვნებითა, რომელთა გამო ყოველი განმრავლება შეკრებად და განყოფა გამოკრებად შეიცვლების. ისინი არიან მაჩუენებელნი რიცხვთა ხარისხთანი ყოვლისა ღეომეტრიულისა წარმატებისა, რომელ იგი დაიწყების მაგალითისამებრ, რიცხვი ღეომეტრიულის წარმატებისა 1,2,4,8,16,32,64, რომელისაც შესაძლო არს ვითარ იგი ზემორე მაჩუენებელი ყოველ რიცხვთა ხარისხისათვის გამოღებად ესრეთ: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ და სხუანი მაჩუენებელთა ხარისხისა 2 რიცხვთასა იწოდების ლოღარითმად, ვითარცა ჯერ არს რიცხვთა 1,2,4,8,16,32,64 და ასე შემდეგ"...აქედან აშკარაა, რომ ხელნაწერის ავტორისათვის უცნობი ყოფილა ის, რომ სიტყვა „ლოღოს" (λόγος) ნიშნავს არა მარტო „სიტყვას", არამედ „შეფარდებას". სახელწოდება „ლოგარითმები" ნეპერმა სწორედ ამ გაგებით შემოიღო, ესე იგი ნეპერის ტერმინი „ლოგარითმები" ნიშნავს „რიცხვთა შეფარდებას" და არა „სიტყვა რიცხვს". ხელნაწერის ავტორს მოჰყავს $3^0=1$ ტოლობის დამტკიცება.

უცნობია აგრეთვე H—2280 ამოცანათა კრებულის ავტორი. როგორც ჩანს, ამ კრებულის შედგენის დროს ის სარგებლობდა არა მარტო რუსული ლიტერატურით, არამედ უცხო ლიტერატურითაც. არითმეტიკულ მოქმედებათა სახელწოდებები მოცემულია ჯერ ფრანგულად და შემდეგ მათი ქართული თარგმანი. ხელნაწერის პირველ გვერდზე მოყვანილია რიცხვთა ფრანგული და გერმანული სახელწოდებები ასამდე. ამის შემდეგ გადმოცემულია მაგალითები ოთხ არითმეტიკულ მოქმედებაზე, კვადრატული და კუბური ფესვის ამოღებაზე და სხვადასხვა ამოცანა. ზოგი ამ ამოცანათაგანი შედგენილია თვით ხელნაწერის ავტორის მიერ. ეს იქიდან ჩანს, რომ ამოცანათა პირობები შედგენილია ქართული საზომების საფუძველზე; იქვე მოცემულია ამოცანათა ამოხსნებიც.

H—252 ხელნაწერის პირველი 8 გვერდი მიძღვნილია ფილოსოფიური საკითხებისადმი, ხოლო მე-9 გვერდიდან იწყება მათემატიკა სათაურით: „თავის მათემატიკისა საზოგადოდ", რომელიც დაწერილია ხუცური ანბანის ასომთავრულით. ამ ხელნაწერის ავტორიც უცნობია. დასაწყისში მოყვანილია მათემატიკის განსაზღვრა: „სწავლა განზომისათვის სიდიდეისა სახელიდების მათემატიკად". ამის შემდეგ ნათქვამია, რომ მათემატიკა ორ ნაწილად იყოფა: წმინდა და გამოყენებით („აღრეული"). წმინდა მათემატიკას ავტორი მიაკუთვნებს არითმეტიკას, ალგებრას, გეომეტრიასა და ტრიგონომეტრიას, ხოლო გამოყენებით ანუ „აღრეულ" მათემატიკას—მექანიკას, ოპტიკას, აკუსტიკას, მუსიკას, აეროსტატიკას, გნომონიკას, ასტრონომიას, გეოგრაფიას, არქიტექტურას და არტილერიას (ფორტიფიკაციით).

შემდეგ გადმოცემულია იმის ახსნა-განმარტება, თუ რატომ უწოდებენ მათემატიკის ერთ ნაწილს წმინდა მათემატიკას და მეორეს —გამოყენებითს (აღრეულს), ეს განმარტება შემდეგია: არითმეტიკას, ალგებრას, გეომეტრიასა და ტრიგონომეტრიას იმიტომ ეწოდებათ წმინდა მათემატიკა, რომ მათი საშუალებით განისაზღვრება სიდიდე ანუ რაოდენობა საგნებისა და არა სხვა რაიმე მათი თვისებები (ფერი, მასალა და სხვა); იმ მათემატიკას, რომელიც გვასწავლის, თუ როგორ უნდა გაიზომოს საგნები წმინდა მათემატიკის საშუალებით, ეწოდება გამოყენებითი (აღრეული) მათემატიკა.

შემდეგ მოყვანილია გამრავლების ტაბულა და ცნობები საზომთა შესახებ. სიგრძის საზომებად მოცემულია რუსული, ხოლო წონის, სითხისა და მარცვლეულის საზომებად — ქართული. მე-12

ფურცლიდან იწყება არითმეტიკა, სახელდობრ, არითმეტიკულ მოქმედებათა წესები მთელ რიცხვებზე და წილადებზე, კვადრატული და კუბური ფესვების ამოღების წესები, შეფარდებათა და პროპორციათა თეორია და სამთა წესი. ამას მოსდევს გეომეტრიული ნაწილი.

1800 წელს გიორგი თ ა რ ხ ნ ი შ ვ ი ლ ს დაუმთავრებია მათემატიკის სახელმძღვანელოს წერა (S—1531). ხელნაწერი ორი ნაწილისაგან შედგება; პირველ ნაწილს ავტორი „არითმეტიკას“ უწოდებს, მეორე—„არითმეტიკის ვაჭრობის საქმეში გამოყენებას“. შესავალში გადმოცემულია არითმეტიკის განსაზღვრა. იქვე ნათქვამია, რომ არითმეტიკა ორგვარი არისო: „არითმეტიკა ლოგისტიკა“ და „არითმეტიკა პოლიტიკა“. უნდა აღინიშნოს, რომ სახელწოდება „არითმეტიკა ლოგისტიკაში“ ერთ-ერთი სიტყვა ზედმეტია; იმას, რასაც ჩვენ და თარხნიშვილიც არითმეტიკას ვუწოდებთ, ძველი ბერძნები „ლოგისტიკას“ უწოდებდნენ, ხოლო „არითმეტიკას“ ისინი უწოდებდნენ იმას, რასაც ჩვენ ახლა „რიცხვთა თეორიას“ ვუწოდებთ („რიცხვთა თეორია“ გაუსმა უწოდა, ხოლო „თეორიული არითმეტიკა“—ლეჟანდრმა).

„არითმეტიკა პოლიტიკას“ გ. თარხნიშვილი ასე განსაზღვრავს: „არითმეტიკა პოლიტიკა არს მრიცხველობა, დაწესებული ესეთისა უკვე ადვილისა სახით, რომელ ყოველთა ძალუძთ აღრიცხვად ყოვლისა აღსარიცხველისა, მრავალისა და მცირისა გასყიდვა და მოსყიდვა, ზომისა და წონისა და ყოვლისა საზოგადოსა ფასისა“. ამის შემდეგ ჩამოთვლილია „არითმეტიკა პოლიტიკას“ ნაწილები: „1) რიცხვთათვის მთელისა, 2) რიცხვთათვის შემუსვრილთა და დანაწილებულისა, 3) განწესებულთათვის შესაფერთა, სამთა, ხუთთა და შვიდჯუმალთასა, 4) განწესებულთათვის ტყუილთა. ესე არს გამოსაცნობი, 5) განწესებულთათვის რადიქს კვადრატისა და კუბიკსთა ღეომეტრიათა შესაფერთ“.

ასეთი შინაარსი სრულიადაც არ შეესაბამება მის სახელწოდებას—„არითმეტიკა პოლიტიკა“. ეს ტერმინი XVIII საუკუნეში აღნიშნავდა სოციალური მოვლენების თეორიულ გამოკვლევას რაოდენობის თვალსაზრისით. პოლიტიკური არითმეტიკის ავტორი იყო ვილიამ პეტი. მისი ნაშრომისაგან „Political Arithmetic“, რომელიც 1691 წელს გამოქვეყნდა, წარმოიშვა ტერმინი „პოლიტიკური არითმეტიკა“. პეტის ნაშრომი წარმოადგენს მოძღვრებას მიწის ნაკვთების სიდიდეებზე და მათ ღირებულებაზე, მოსახლეობაზე, ვაჭრობაზე, პროცენტებსა და გადასახადებზე. ეილერმა „პოლიტი-

კური არითმეტიკა“ უწოდა ისეთ სპეციალურ სამუშაოს, რომელსაც მიზნად ჰქონდა ალბათობათა თეორიის საშუალებით მოსახლეობის შესწავლა სიცოცხლის დაზღვევისა და საპენსიო სალაროების მოწყობის მიზნით. იმას, რასაც მაშინ პოლიტიკურ არითმეტიკას უწოდებდნენ, ახლა მათემატიკურ სტატისტიკას უწოდებენ. ამრიგად, პოლიტიკური არითმეტიკა არ ეწოდება საგანს იმ შინაარსით, რა შინაარსითაც გადმოცემულია თარხნიშვილის ხელნაწერში; უკანასკნელს უფრო შეესაბამება სახელწოდება „კომერციული არითმეტიკა“. თარხნიშვილის ნაშრომის მეტი ნაწილი მიძღვნილია სამთა წესისადმი და ცნობილია, რომ სამთა წესი შეადგენს კომერციული არითმეტიკის ძირითად შინაარსს.

ხელნაწერის პირველ ნაწილში მოცემულია სხვადასხვა არითმეტიკული წესი, ხოლო მეორე ნაწილში მოთავსებულია ამოცანები ამ წესების ვაჭრობის საქმეში გამოყენებისათვის. ზოგი ამ ამოცანათაგან შედგენილია თვითონ თარხნიშვილის მიერ; სახელდობრ, 133-ე გვერდზე მოყვანილი ამოცანა: „ერთმა ვინმე ზემოვერმა საქართველოს ჩინებულთაგან მან აზნაურმა განიზრახა დღესა შობისა მისისასა განცხრომა მეგობართა თანა და უბრძანა მონათა ხუთრიგთა ღვინოთა სყიდვა 19 მილანთუნისა და 10 შაურისა, რათა იყოს ხუთი იგი ღვინო სწორნი საწყანი. მონანი იგი წარვიდნენ ქალაქს, მოვიდეს, მოართვეს ხუთი ეს ჭაშნიკ: ატენური 14 ფულა საწყა, ახმეტური—13 ტად, კასპური—9 ად, მანაური—8 ად და თელაური 6 ფულად. აზნაური იგი ჰკითხავს მონათ მათ, თუ რამდენი საწყა არს თითო ღვინთაგანი, და ვერა მცნობელნი ამისა მონანი იგი მივიდეს მწუხარედ წინაშე უფლისა თვისა; და განრისხნა უფალმა იგი მონათა ზედა და გაიანგარიშა თვითონ ესრეთ, ვითარცა იხილე ქმნილთა ამათ“...; შემდეგ მოყვანილია ამ ამოცანის ამოხსნა.

ქართული მათემატიკური ხელნაწერებიდან ყველაზე ვრცელია ხელნაწერი *H*—2180, რომელიც დაწერილი უნდა იყოს იოანე ბატონიშვილის მიერ (1767—1830). თუმცა ხელნაწერის ავტორი არ წერს იმას, რომ ნაშრომი ორიგინალურია თუ ნათარგმნი, მაგრამ შინაარსიდან ჩანს, რომ ეს ნაშრომი რომელიღაც რუსულ ენაზე დაწერილი სახელმძღვანელოს თარგმანი უნდა იყოს.

ხელნაწერი შეიცავს არითმეტიკას, ალგებრას, გეომეტრიას, ტრიგონომეტრიას და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტებს. არითმეტიკისადმი მიძღვნილი პირველი ნაწილის პირველ თავში არაბულ ნუმერაციასთან ერთად გადმოცემულია რომაული და სლავუ-

რი ნუმერაციები. დაწვრილებით არის გადმოცემული ზომათა სისტემები—ინგლისური და ბერძნული, ხოლო ქართული—ძალიან მოკლედ. შემდეგ გადმოცემულია არითმეტიკულ მოქმედებათა წესები, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროპორციები, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები და ნაკვთითი რიცხვები (სამკუთხოვანი, კვადრატული, ხუთკუთხოვანი და პირამიდული რიცხვები). ხელნაწერის ქართველი ავტორი გვაძლევს აგრეთვე თავის ახსნა-განმარტებას, თუ რომელ რიცხვებს ეწოდებათ უსასრულოდ დიდი რიცხვები.

ამ ხელნაწერში გადმოცემულია რიცხობრივი ანუ ჩვეულებრივი ალგებრა (როგორც მას უწოდებს დალამბერი) და არა ასოებრი (იმავე დალამბერით) ალგებრა, ვინაიდან სიდიდეები გამოსახულია რიცხვებით და არა ასოებით, თუმცა სიდიდეების ასოებით გამოსახვა შემოღებულია ევროპაში უკვე XVII საუკუნეში.

მართალია, ხელნაწერი S—4950 დაწერილია უფრო გვიან, 1821 წელს, მაგრამ ზედმეტი არ იქნება ამის შესახებაც ორიოდე სიტყვა ვთქვათ. ამ ხელნაწერის ავტორია იოსებ ფოცხვერაშვილი. ნაშრომი უნდა იყოს არა ნათარგმნი, არამედ კომპილაცია, ვინაიდან ფოცხვერაშვილი ამბობს „დავწერეო". ხელნაწერი შედგება 80 გვერდისაგან; პირველი 47 გვერდი ეძღვნება გეოგრაფიას, დანარჩენი კი არითმეტიკას. არითმეტიკული ნაწილი მთავრდება შეფარდებათა და პროპორციათა თეორიით.

საყურადღებოა აგრეთვე ლენინგრადის აღმოსავლეთმცოდნეობის ინსტიტუტში შენახული ხელნაწერი K. 1. G 187. ხელნაწერი წარმოადგენს რუსულ ენაზე დაწერილ არითმეტიკის სახელმძღვანელოს თარგმანს. ყოველი გვერდი დაყოფილია ორ ნაწილად: მარცხენა მხარეზე მოთავსებულია რუსული ტექსტი, ხოლო მარჯვენაზე—მისი ქართული თარგმანი. დაწერილია კითხვა-პასუხის სახით.

3. გეომეტრია. ტრიგონომეტრია და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

XVIII საუკუნეზე ადრე ქართულ ლიტერატურაში გეომეტრიული ცნობები არ ჩანს, თუ არ მივიღებთ მხედველობაში იოანე პეტრიწის (XII ს.) ნაშრომში გადმოცემულ წერტილის, წირის, ზედაპირის, სხეულისა და ანალიზური და სინთეზური მეთოდების განსაზღვრებს. მათ შესახებ ცნობები ამოღებულია ევკლიდეს „საწყისებიდან", ვინაიდან ევკლიდეს კომენტატორი

იყო პროკლოსი. ამ უკანასკნელის კომენტირებისადმია მიძღვნილი იოანე პეტრიწის ნაშრომი.

1725 წელს მიხეილ ელიაშვილს რუსულიდან ქართულად (ვახტანგ VI რედაქციით) უთარგმნია მათემატიკის სახელმძღვანელო „სივაკის ზომა ანუ პლანიმეტრია“. ხელნაწერში არსად არ არის ნახსენები ორიგინალის ავტორი. ნაშრომის სახელწოდება არ შეესაბამება მის შინაარს, ვინაიდან პლანიმეტრიის გარდა გადმოცემულია არითმეტიკა (რომლის შესახებ ჩვენ უკვე ვთქვით) და ტრიგონომეტრიის ელემენტები. ყველაფერი ეს შეადგენს ნაშრომის პირველ ნაწილს, ხოლო მეორე ნაწილში მოყვანილია მათემატიკური ამოცანები სამხედრო საქმეში, განსაკუთრებით ბალისტიკაში გამოყენებისათვის.

გიორგი თარხნიშვილს (რომლის ნაშრომს არითმეტიკაში ჩვენ უკვე შევეხეთ) გეომეტრიაშიც აქვს ნაშრომი, მაგრამ შენახულა მხოლოდ მისი 16 გვერდი. შესავალში თარხნიშვილი ეხება გამოყენებითი მათემატიკის მნიშვნელობის საკითხს და აღნიშნავს, რომ თეორიული მათემატიკა გამოყენებითი მათემატიკის გარეშე გამოუსადეგარია.

იოანე ბატონიშვილის ხელნაწერი (*H*—2180), რომლის არითმეტიკულ და ალგებრულ ნაწილებს ჩვენ უკვე შევეხეთ, საკმაოდ ვრცლად შეიცავს გეომეტრიის და ტრიგონომეტრიის, ხოლო ძალიან მოკლედ ანალიზური გეომეტრიის ელემენტებს, სახელდობრ, კონუსური კვეთების შესახებ მოკლე ცნობებს. ამ ხელნაწერში საყურადღებოა ზოგიერთი ამოცანა აგებაზე, თეორემები, ამოღებული ევკლიდეს „საწყისებიდან“, სახელდობრ, ამოცანები ორი მოცემული მონაკვეთის საშუალო პროპორციული მონაკვეთის აგებაზე, მართკუთხედის კვადრატად გარდაქმნაზე და სხვა. მოყვანილია აგრეთვე რამდენიმე აქსიომა ევკლიდეს „საწყისებიდან“.

მე-200 ფურცელზე გადმოცემულია წრის ტოლდიდი კვადრატის აგების ამოცანის ყალბი ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნის შეუძლებლობა, როგორც ცნობილია, დაამტკიცა ლინდემანმა XIX საუკუნის მეორე ნახევარში, რაც ქართული ხელნაწერის ავტორისათვის, ცხადია, არ იქნებოდა ცნობილი. შეცდომა ამ ამოცანის აგებაში, რომელიც დაუშვა ხელნაწერის ავტორმა და მოეჩვენა, თითქოს ამოცანა ამოხსნა, მდგომარეობს იმაში, რომ დაშვებულია სამართლიანობა ტოლობისა $\frac{S}{d^2}=\frac{11}{14}$, სადაც S

წრის ფართობია, d კი — დიამეტრი. ესე იგი ის ეყრდნობა წრის გაზომვის შესახებ არქიმედეს ნაშრომში მოყვანილ მეორე თეორემას, რომელიც ამბობს, რომ წრის ფართობის დიამეტრის კვადრატთან შეფარდება უდრის $\frac{11}{14}$ მიახლოებით და არა ზუსტად, როგორც ეს დაუშვა ხელნაწერის ავტორმა..

ხელნაწერში გადმოცემულია აგრეთვე არქიმედეს **თეორემა**. სფეროს მოცულობა უდრის ისეთი ცილინდრის 2/3 მოცულობას, რომლის ფუძე სფეროს დიდი წრეა, სიმაღლე კი სფეროს დიამეტრი.

ნაშრომში „სფეროსა და ცილინდრის შესახებ“ არქიმედე ამტკიცებს ამ თეორემას (37-ე წინადადება) ამოწურვის მეთოდით, ეყრდნობა რა ევდოქსის თეორემას (კონუსის მოცულობა მესამედია ისეთი ცილინდრის მოცულობისა, რომელსაც ფუძე და სიმაღლე იგივე აქვს, რაც კონუსს. ამ თეორემის შესახებ არქიმედე ამბობს ამ ნაშრომის წინ მოთავსებულ დოზითესადმი წერილში) და მის მიერ დამტკიცებულ 36-ე დებულებას: სფეროს მოცულობა ოთხჯერ მეტია ისეთი კონუსის მოცულობაზე, რომლის ფუძე სფეროს დიდი წრის ტოლია, სიმაღლე კი — სფეროს რადიუსისა.

ქართულ ხელნაწერში გადმოცემული არქიმედეს თეორემის დამტკიცება არსებითად განსხვავდება ამ თეორემის არქიმედეს დამტკიცებისაგან. ქართულ ხელნაწერში თეორემა დამტკიცებულია „განუყოფელთა“ მეთოდის საშუალებით; თუმცა ეს დამტკიცებაც ეყრდნობა ევდოქსის თეორემას (ევდოქსი აქ არ არის ნახსენები), მაგრამ სფერო, მის გარშემო შემოხაზული ცილინდრი და მასში ჩახაზული კონუსი წარმოდგენილია როგორც შესაბამის წრეთა, ანუ იმ „განუყოფელთა“ ერთობლიობა, რომლებიც მიღებულია ამ სხეულების გადაკვეთით ერთიმეორის პარალელური სიბრტყეებით. შემდეგ ავტორმა, გამოიყენა რა, რომ წრეთა ფართობები ისე შეეფარდება ერთიმეორეს, როგორც მათი რადიუსების კვადრატები, ადვილად მიიღო, რომ ცილინდრის „განუყოფელი“ უდრის სფეროსა და კონუსის „განუყოფელთა“ ჯამებს, რის შედეგად დაასკვნის, რომ ნახევარცილინდრის მოცულობა უდრის ნახევარსფეროს მოცულობას, მიმატებულს კონუსის მოცულობა; აქედან კი მიიღო ის, რაც თეორემის პირობაშია ნათქვამი. დამტკიცების დროს გამოყენებულია ახლანდელი სიმბოლოები, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ლათინური ასოების ნაცვლად ხმარობს ქართულ

ასოიბს (ასომთავრულ ხუცურს). ეს დამტკიცება არსებითად განსხვავდება აგრეთვე არქიმედეს თეორემის ვალერიოს (XVII ს.) დამტკიცებისაგან.

ამავე ხელნაწერში საკმაოდ დაწვრილებით არის გადმოცემული ევროპელთა ტრიგონომეტრია.

ანალიზური გეომეტრიის საკითხებიდან ხელნაწერში ვპოულობთ კონუსური კვეთების შესახებ ზოგიერთ ცნობას. ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა აქ განხილულია როგორც წრიული კონუსის კვეთები. ისინი განსაზღვრულია შემდეგნაირად: პარაბოლა, როდესაც გამკვეთი სიბრტყე კონუსის მსახველის პარალელურია. ელიფსი, როდესაც გამკვეთ სიბრტყესა და კონუსის სიმაღლეს შორის კუთხე მეტია კონუსის სიმაღლესა და მის მსახველს შორის კუთხეზე. პირველ ორ შემთხვევაში განხილულია პირდაპირი წრიული კონუსის ერთი ღრუ, რომელსაც ის პირველ კონუსს უწოდებს და მის შესაბამისს შტოს — „პირველ მრუდს". მესამე შემთხვევაში კი განხილულია ორღრუიანი კონუსი, რომელიც გადაკვეთილია იგივე მიმართულების სიბრტყით, როგორც პირველ ორ შემთხვევაში. მიღებულ მრუდს უწოდებს „პირველი მრუდის წინააღმდეგ მდებარე მრუდს" (სახელწოდება, რომელიც აპოლონიიმ მიანიჭა ჰიპერბოლას და რომელმაც გადაკვეთა დახრილი წრიული კონუსი და არა პირდაპირი წრიული კონუსი, როგორც ეს ქართულ ხელნაწერშია). ამის შემდეგ გამოკვლეულია მხოლოდ ელიფსი და გამოყვანილია მისი განტოლება შემდეგი სახით

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{aa - xx} \ .$$

როგორც ვხედავთ, XVIII საუკუნის ქართული ხელნაწერების რიცხვი საკმაოდ დიდია. ეს ამბობს იმ საუკუნის საქართველოში მათემატიკისადმი ინტერესის გამოცოცხლებაზე, რაც უეჭველად რუსეთისა და საერთოდ ევროპული ქვეყნების გავლენით აიხსნება.

თავი VIII

მათემატიკა XVIII—XIX საუკუნის მიჯნაზე

1. პიერ სიმონ ლაპლასი

ლაპლასი დაიბადა 1749 წლის 23 მარტს ნორმანდიის პატარა ქალაქში ბომონ-ან-ოჟში, ღარიბი გლეხის ოჯახში. იგი ჯერ 20 წლისაც არ იყო, რომ გამოაქვეყნა მრავალი ნაშრომი ინტეგრალურ აღრიცხვაში და ამით გამოჩენილი მათემატიკოსის სახელი გაითქვა. ამის შემდეგ ლაპლასი დანიშნეს მათემატიკის მასწავლებლად ჯერ თავის სამშობლო ქალაქში, შემდეგ პარიზის სამხედრო სკოლაში.

არაჩვეულებრივი მათემატიკური ნიჭით დაჯილდოებული ლაპლასი უმთავრესად მუშაობს თეორიული ასტრონომიის პრობლემებზე. მისი გამოკვლევების წყალობით თეორიულმა ასტრონომიამ შეძლო მოეცა ჩვენი პლანეტების სისტემაში შემჩნეული საუკუნოებრივი ცვლილების დამაკმაყოფილებელი ახსნა. იმ დროს, როცა ზოგიერთი ასტრონომი პლანეტების მოძრაობაში შემჩნეული მთელი რიგი მოვლენების ახსნის დროს იხრებოდა იმ აზრისაკენ, რომ ნიუტონის მიზიდულობის კანონი არის მხოლოდ მიახლოებითი მნიშვნელობის, ლაპლასმა, დაეყრდნო რა ეილერის ნაშრომებს, დაამტკიცა, რომ სამი სხეულის პრობლემის თვალსაზრისით ეს მოჩვენებითი გამონაკლისები მას მხოლოდ ადასტურებენ. ნიუტონმა გამოიკვლია მხოლოდ ერთი პლანეტის მზის ირგვლივ მოძრაობის ამოცანა და უჩვენა, რომ ეს მოძრაობა უნდა ხდებოდეს ერთ-ერთ კონუსურ კვეთზე. სამი სხეულის პრობლემა დაისვა დედამიწის მზის ირგვლივ ბრუნვის განხილვის დროს, როდესაც მზის გავლენა მხედველობაში მისაღები შეიქნა, რათა მიღწეული ყოფილიყო თეორიისა და დაკვირვებას შორის თანხმობა. ამ საკითხებზე მუშაობდა ეილერი და მიიღო ის თეორიული შედეგები, რომლებიც საფუძვლად დაედო მთვარის ტაბულებს. ლაპლასის მთავარი დამსახურება იმაშია, რომ მან გაავრცელა სამი სხეულის პრობლემა პლანეტებსა და კომეტებზე და შექმნა შერყევათა თეორია, ესე იგი ელიფსური ორბიტისაგან გადახრის, რომლებსაც განიცდიან ეს ციური

სხეულები მათი ურთიერთმიზიდულობის გავლენით. მაგრამ ლაპლასს არ შეეძლო მოეცა სამი სხეულის პრობლემის მკაცრი ამოხსნა, რომელიც ახლაც აღემატება უმაღლესი ანალიზის ძალებს.

თეორიულ ასტრონომიაში თავის ერთ-ერთ ადრინდელ ნაშრომში ლაპლასმა დაამტკიცა მნიშვნელოვანი თეორემა, რომ პლანეტების მანძილები მზემდე თუმცა იცვლება, მაგრამ საშუალოდ მუდმივი რჩება. მალე ამის შემდეგ 24 წლის ლაპლასი მეცნიერებათა აკადემიის წევრად აირჩიეს. აგრეთვე მალე მიიღო პროფესორობა ნორმალურ სკოლაში და დაიწყო უაღრესად აქტიური მონაწილეობა იმ დიდი ამოცანების გადაწყვეტაში, რომელთა ამოხსნაზე მუშაობდნენ მაშინ ფრანგები. ლაპლასი იყო აკადემიკოსებისაგან შემდგარ ზომა-წონათა კომისიის თავმჯდომარე. 1790 წელს ამ კომისიამ მიიღო ნაციონალური კრებისაგან დავალება: შეექმნათ ზომათა და წონათა ახალი სისტემის საფუძვლები. ლაპლასის წინადადებით, კომისიამ გამოსავალ წერტილად აიღო მერიდიანის მეოთხედი. ამიტომ აკადემიამ 1791 წელს დაადგინა, რომ ზომის ერთეულად მიღებულ იქნას მერიდიანის მეოთხედის მეათმილიონედი ნაწილი მეტრის სახელწოდებით. ლაპლასის ხელმძღვანელობით იქნა აგრეთვე გარდაქმნილი პოლიტექნიკური სკოლა — ფრანგული მეცნიერებისა და ტექნიკური აზროვნების ეს განთქმული ლაბორატორია.

ნაპოლეონი დიდად აფასებდა ლაპლასს და დანიშნა ის შინაგან საქმეთა მინისტრად და გრაფის წოდებაც მიანიჭა. რესტავრაციის შემდეგაც ლაპლასი დიდ პატივისცემაში იყო.

1827 წლის 5 მაისს ლაპლასი გარდაიცვალა. სიკვდილის წინ მან უკანასკნელად თქვა: „რაც ჩვენ ვიცით, უმნიშვნელოდ ცოტაა და რაც ჩვენ არ ვიცით, უსაზღვროდ დიდია“.

ლაპლასის ნაშრომები გამოიცა სახელმწიფო ხარჯზე. ამ გამოცემის პირველი ხუთი ტომი შეიცავს ლაპლასის მთავარ ნაწარმოებს — ციურ მექანიკას (გამოდიოდა 1799 წლიდან 1825 წლამდე). შემდეგ, გამოჰყავს რა მიზიდულობის კანონიდან ციური სხეულების მოძრაობის ზოგადი განტოლებები, ლაპლასი ამ ნაშრომში ავითარებს ზემოხსენებულ შერყევათა თეორიას. ლაპლასს მისი თეორიული გამოკვლევებისათვის საფუძველი მისცა, ჯერ ერთი, დაკვირვებებმა მსხვილ პლანეტებზე — მუშთარსა და ზოჰალზე, რომელთა უტოლობა მან დაიყვანა ამ სხეულთა ერთი მეორეზე გავლენამდე, და შემდეგ მუშთარის თანამგზავრებზე დაკვირვებებმა. ვინაიდან მუშთარის თანამგზავრები თავის ცენტრალურ პლანეტას-

თან ერთად ქმნის სისტემას, რომელიც ძალიან გავს ჩვენს პლანეტურ სისტემას, მაგრამ ამასთან მათი მოქცევა მუშთარის ირგვლივ შედარებით უფრო მოკლე დროში ხდება: ამიტომ ლაპლასს შეეძლო მოკლე ხანში შეესწავლა ყველა ის დიდი ცვლილება, რომელიც ხდება საპლანეტო სისტემაში საუკუნეთა განმავლობაში. იმ დროს, როდესაც ნიუტონი იხრებოდა იმ აზრისაკენ, რომ მზიურ სისტემაში შემჩნეული მდგრადობა ზებუნებრივი ძალის მოქმედებისათვის მიეწერა, ლაპლასმა შეძლო ეს მდგრადობა გამოეყვანა მიზიდულობის კანონიდან და ამრიგად საბოლოოდ ამოხსნა ციური მექანიკის პრობლემა.

„ციური მექანიკის“ გამოსვლის რამდენიმე წლით ადრე ლაპლასმა სცადა ასტრონომიული მეცნიერების შედეგების გადმოცემა საყოველთაოდ ხელმისაწვდომ ფორმაში. ასე აღმოცენდა მისი წიგნი „სამყაროს სისტემის გადმოცემა“, რომელშიც მან, სხვათაშორის, განავითარა თავისი შეხედულებები სამყაროს წარმოშობაზე, რომ იგი წარმოიშვა პირველადი ქაოსური ბურუსისაგან. ამ წიგნში ლაპლასი ჯერ უჩვენებს, რომ, თუმცა მზიური სისტემის პლანეტები დამოუკიდებელნი არიან, ისინი ამჟღავნებენ მეტად შესანიშნავ ურთიერთქმედებას, რომელთა საშუალებით შეიძლება აიხსნას ამ სისტემის წარმოშობა. მართლაც, შემჩნეული იყო, რომ ყველა პლანეტა ბრუნავს მზის ირგვლივ თითქმის ერთსა და იმავე სიბრტყეში დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ. შემდეგ, თანამგზავრები მოიქცევიან პლანეტების ირგვლივ იმავე მიმართულებით და თითქმის იმავე სიბრტყეში.

დასასრულ, მზე, პლანეტები და თანამგზავრები ბრუნავენ თავიანთი ღერძის გარშემო ერთი და იმავე მიმართულებით და თითქმის იმავე სიბრტყეში, რომელშიც ხდება მათი მოქცევის მოძრაობა. ასეთი გამონაკლისი მოვლენა არ შეიძლება იყოს შემთხვევის თამაში, არამედ უჩვენებს რომელიღაც საერთო მიზეზზე. ამ შესანიშნავ კანონზომიერებათა ასახსნელად ბიუფონმა დაუშვა, რომ ოდესღაც მზეზე დაცემულმა კომეტამ მოსწყვიტა მისგან მატერიის ღვარი, რომელიც შემდეგ შეიკუმშა ცოტად თუ ბევრად დიდ ბირთვებად, რომლებიც მდებარეობენ მზისაგან სხვადასხვა მანძილზე; ლაპლასის აზრით, ეს ჰიპოთეზა ახსნის ზემოთ ჩამოთვლილი მოვლენებისაგან მხოლოდ ერთს. მართლაც, ცხადია, რომ ყველა ამგვარად შექმნილი სხეული უნდა მოძრაობდეს დაახლოებით სიბრტყეში, რომელიც გაივლის მზის ცენტრსა და ტრაექტორიაში მატერიალური ღვარისა, რომლისგანაც შეიქმნა ეს სხეულები; სხვა მოვლენები, როგორც ლაპლასმა უჩვენა, არ

შეიძლება აიხსნას ბიუფონის ჰიპოთეზის საფუძველზე. პლანეტთა ორბიტების მცირე ექსცენტრისიტეტები ამ ჰიპოთეზის წინააღმდეგ ლაპარაკობენ, ვინაიდან ცენტრალური ძალების თეორიის თანახმად, მზის გარშემო მოძრავი სხეული და ამასთან მისი ზედაპირის შემხები, ყოველი მოქცევის დროს ამ უკანასკნელს უნდა უბრუნდებოდეს. მაშასადამე, პლანეტები რომ თავდაპირველად მზეს მოსწყვეტოდნენ, მაშინ ისინი ყოველი მოქცევის შემდეგ თითქმის უნდა შეხებოდნენ მზეს. ამ შემთხვევაში მათი ორბიტები იქნებოდა ძალიან ექსცენტრიული და არა ახლოს წრეწირებთან, როგორც ამას ადგილი აქვს სინამდვილეში.

როგორიც არ უნდა იყოს პლანეტებისა და თანამგზავრების მოძრაობის გამომწვევი მიზეზი, იგი საერთო უნდა ყოფილიყო ყველა ამ სხეულისათვის. თუ მხედველობაში მივიღებთ იმ დიდ მანძილებს, რომელნიც პლანეტებს ყოფენ ერთი მეორესაგან, მაშინ ეს მიზეზი, როგორც ლაპლასი ამბობს, მდგომარეობს მხოლოდ სითხეში, რომელიც დიდ მანძილზეა გავრცელებული, ამ სითხეს რომ შესძლებოდა პლანეტებისათვის მიენიჭებინა თითქმის წრიული და ერთნაირად მიმართული მოძრაობა მზის გარშემო, მაშინ ის უნდა ყოფილიყო მზის გარემოცვა ატმოსფეროს მსგავსად. ასეთი მსჯელობების საშუალებით ლაპლასი მიდის ჰიპოთეზამდე, რომ მზის ატმოსფერო თავდაპირველად ვრცელდებოდა ყველა პლანეტის ორბიტის იქით, შორს, და თანდათან შეიკუმშა თავის ახლანდელ მოცულობამდე. ამავე შედეგამდე მიჰყავდა ლაპლასი კომეტების ორბიტების ექსცენტრიულობის მნიშვნელოვან ფაქტს. მისი აზრით, კომეტები წარმოადგენს ციურ სხეულებს, რომლებიც პლანეტების შექმნის ეპოქაში იმყოფებიან ზემოხსენებული სითხის გარეთ. პლანეტების ორბიტები იმდენად სხვადასხვაა, რომ თითქმის გაშვებულია ალალბედზე, არ განიცდიან რა მზიური ატმოსფეროს არავითარ გავლენას მოძრაობის დროს. იმისათვის, რომ თავისი ჰიპოთეზის საფუძველზე აეხსნა პლანეტების მოქცევა და ბრუნვა, ლაპლასმა დაუშვა, რომ პლანეტები შეიქმნა ზემოხსენებული ატმოსფეროს მიმდევრობით აღმოცენებულ საზღვრებზე იმ სარტყლების შესქელების წყალობით, რომლებიც უნდა შექმნილიყვნენ ეკვატორულ სიბრტყეში გაცივებისა და შეკუმშვის პროცესების გავლენით. ანალოგიურად შეიქმნა შესაბამი ატმოსფეროებისაგან პლანეტების თანამგზავრები. ამრიგად, ყველა ცნობილი მოვლენა ძალდაუტანებლად გამომდინარეობს ლაპლასის ჰიპოთეზისაგან, რომელმაც შემდეგ დასტური ჰპოვა ზოჰალის რგოლებში.

შრომაში „ციური მექანიკა“ ლაპლასს ამოხსნილი აქვს ელიფსოიდის განთქმული პრობლემა. მან პირველმა გამოიყენა ლაგრანჟის ფუნქცია მთლიან მასებზე და განსაზღვრა მიზიდულობა, რომელსაც ეწევა სამღერძა ელიფსოიდი მის გარეთ მდებარე წერტილზე. ლაპლასმა ლაგრანჟის ფუნქციის მეორე კერძო წარმოებულებისათვის მიიღო განტოლება, რომელსაც ახლაც ლაპლასის განტოლება ეწოდება, და გამოისახება ასე:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

სადაც ლაპლასმა v-თი აღნიშნა ლაგრანჟის ფუნქცია (დაბეჭდა პარიზის აკადემიამ 1782 წელს).

ჯერ კიდევ 1773 წელს ლაპლასმა მოახდინა ინტეგრება კერძოწარმოებულებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისა

$$\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{dy} + R = 0, \tag{1}$$

სადაც P არის x და y-ის ფუნქცია, R კი — x, y, z-ისა. ახალი u ცვლადის შემოღების შემდეგ (1) გარდაიქმნება ასე:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx} + P\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dy} + R = 0,$$

ამასთან u განისაზღვრება ტოლობებიდან:

$$\frac{du}{dx} + P\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{და} \quad \frac{dz}{dx} + R = 0.$$

აქვს რა u-ს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა x და y-ში, რომელიც პირველ განტოლებას აკმაყოფილებს, ამ მნიშვნელობიდან y-ს განსაზღვრავს როგორც u და x-ის ფუნქციას და y-ის ამ მნიშვნელობას სვამს მეორე განტოლებაში და მის ინტეგრებას ახდენს, განიხილავს რა u-ს როგორც მუდმივს, და ამრიგად ღებულობს განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

$\frac{du}{dx} + P\frac{du}{dy} = 0$ განტოლების ინტეგრალი ადვილად მოიძებნება ამ განტოლებიდან განსაზღვრული $\frac{du}{dx}$ - ის მნიშვნელობის

სრულ დიფერენციალურ განტოლებაში $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ ჩასმით, მივიღებთ: $du = \frac{du}{dy}(dy - Pdx)$. დავუშვათ, რომ μ არის ის მამრავლი, რომლის $dy - Pdx$ გამოსახვას ინტეგრებადად გადააქცევს, მაშინ $\mu(dy - Pdx)$ იქნება სრული ინტეგრალი; მაგალითად, dv. მაშინ $du = \frac{du}{\mu dy} \cdot dv$. ამის ინტეგრებისათვის კი საჭიროა, $\frac{du}{\mu dy}$ იყოს v-ს ფუნქცია და ამრიგად $\frac{du}{dx} + P\frac{du}{dy} = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს მივიღებთ $u = \varphi(v)$ განტოლების სახით. ახლა, თუ დავუშვებთ, რომ $u = v$, მივიღებთ y-ის მნიშვნელობას x და u ცვლადებში; ჩავსვამთ მათ განტოლებაში $\frac{dz}{dx} + R = 0$ და მოვახდენთ ინტეგრებას, განვიხილავთ რა u-ს როგორც მუდმივს, მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას: $S = C$, სადაც S არის x, y და z-ის ფუნქცია, ხოლო C მუდმივია, მაგრამ უნდა განიხილოს როგორც u-ს ნებისმიერი ფუნქცია, მაგალითად $F(u)$; ამაში, თუ u-ს ნაცვლად ჩავსვამთ v-ს, მაშინ მას მივიღებთ როგორც მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს: $S = F(v)$, სადაც F ნებისმიერი ფუნქციაა.

დიდი ღვაწლი მიუძღვის ლაპლასს ალბათობათა თეორიის განვითარებაში. მისი ნაშრომი: „ალბათობათა ანალიზური თეორია“ (Thèorie analitique des probabilités) შედგება სამი მთავარი ნაწილისაგან:

1) ალბათობათა ფილოსოფიური არსი (Essai philosophique sur les probabilitès);

2) მწარმოებელი (გენერატრისი) ფუნქციათა აღრიცხვის შესახებ (Du calcul des fonctions génératrices);

3) ალბათობათა ზოგადი თეორია (Thèorie générale des probabilites).

პირველი ნაწილი წარმოადგენს შესავალს. ის არის უაღრესად ღრმა და მდიდარი აზრების შემცველი ნაშრომი. მასში ფილოსოფიური თვალსაზრისით, მათემატიკური ანალიზის გამოუყენებლად, დამუშავებულია ალბათობათა თეორიის გამოყენება პოლიტიკური და სოციალური მოვლენებისათვის.

მეორე ნაწილში გადმოცემულია მათემატიკური ანალიზის გამოყენება ალბათობათა თეორიაში. პირველად ლაპლასმა შემოიღო წარმომშობი ფუნქცია და გამოიყენა ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი პრობლემის ამოსახსნელად. $f_0, f_1, f, \ldots, f_n, \ldots$ მიმდევრობის წარმომშობი ფუნქცია არის

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots + f_n t^n + \ldots$$

იმის დაშვებით, რომ ეს ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $t \neq 0$-ს ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც. მიმდევრობა $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ შეიძლება იყოს როგორც რიცხვითი, ისე ფუნქციონალური; უკანასკნელ შემთხვევაში წარმომშობი ფუნქცია დამოკიდებულია არა მარტო t-გან, არამედ f_n ფუნქციის არგუმენტებისაგან, მაგალითად, $f_n = aq^n$, სადაც a და q მუდმივებია, მაშინ წარმომშობი ფუნქცია

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a(qt)^n = \frac{a}{1-qt}.$$

თუ f_n ფიბონაჩის რიცხვებია 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,..., რომლებიც ემორჩილებიან შემდეგ წესს:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \ldots$$

მაშინ წარმომშობი ფუნქცია

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 5t^5 + 8t^6 + \cdots =$$

$$= \frac{1}{1-t+t^2}.$$

ამავე თავში ლაპლასი გადმოსცემს ანალიზური გამოსახულებების აპროქსიმაციულ განსაზღვრებს, სახელდობრ, განსაზღვრული ინტეგრალებისა, რომლებიც ალბათობათა თეორიაშია წარმოდგენილი.

მესამე ნაწილი თერთმეტ თავს შეიცავს. პირველი თავი ეხება ალბათობათა აღრიცხვის ზოგად საფუძვლებს. მეორე თავში დამუშავებულია აღრიცხვის ცნობილი პრობლემები, უმთავრესად აზარტული თამაში. მესამეში დამუშავებულია ისეთივე საკითხები, უმთავრესად ბერნულის თეორემა, ესე იგი ალბათობათა განსაზღვრა, მაშინ როდესაც მოცემულ რიცხვჯერ ცდის დროს მომხდარ ხდომილობათა რიცხვი განსაზღვრულ საზღვრებს შორის იმყოფება. ამ ნაწილის უმნიშვნელოვანესი თავია მეოთხე თავი, სადაც გადმოცე-

მულია უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. ჯერ განსაზღვრულია იმის ალბათობა, რომ მთელ რიგ დაკვირვების შემთხვევაში ცთომილებათა ჯამი და აგრეთვე საშუალო ცთომილება განსაზღვრულ საზღვრებში იმყოფება. აქედან გამომდინარე ნაჩვენებია, რომ ალბათობათა აღრიცხვა უჩვენებს, რომ ის საშუალო მნიშვნელობებია გამოსადეგი და ჭეშმარიტ შედეგთან უახლოესია ცთომილებათა კვადრატების ჯამის მინიმუმი. ეს თავი ყველა თავებზე უფრო რთულ ნაშრომს შეიცავს.

მეექვსე თავში ლაპლასს დამუშავებული აქვს ალბათობა áposteriori-ს საკითხი. იგი ალბათობისათვის მოსალოდნელი მოვლენის, რომელიც დაკვირვებულ მოვლენასთან გარკვეულ დამოკიდებულებაში იმყოფება, პოულობს შემდეგ ფორმულას:

$$P = \frac{\int\limits_0^1 yz\,dz}{\int\limits_0^1 y\,dx},$$

სადაც x-ით აღნიშნულია მარტივ ხდომილობათა ალბათობები, y-ით — დაკვირვებათა რიცხვი და z-ით — მოსალოდნელი შედეგები. უნდა განისაზღვროს ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე ხდომილობა, რომელიც m-ჯერ ზედიზედ დადგა, ის ისევ დადგება n-ჯერ; როდესაც x არის მარტივ ხდომილობათა ალბათობა, მაშინ $y = x^m$ არის დაკვირვებათა რიცხვი და $z = x^n$ არის მოსალოდნელი მოვლენები. ამის გამო

$$P = \frac{\int\limits_0^1 x^{m+n}\,dx}{\int\limits_0^1 x^m\,dx} = \frac{m+1}{m+n+1}$$

არის სრული ალბათობა მოსალოდნელი ხდომილობებისა, განხილულების როგორც დაკვირვებათა მიზეზი. შემდეგ ლაპლასმა ეს შედეგი გამოიყენა იმის ალბათობის მოსაძებნად, რომ განსაზღვრული დროის განმავლობაში ბიჭებისა და გოგონების დაბადების რიცხვი მუდმივია. ასეთ დასკვნამდე ის მიიყვანა იმ დაკვირვებამ, რომ პარიზ-

ში, ლონდონსა და ნეაპოლის სამეფოში განსაზღვრულ წელთა განმავლობაში მამაკაცების დაბადების რიცხვი უფრო მეტია დედაკაცების დაბადების რიცხვზე.

მეტად საინტერესოა მერვე და მეცხრე თავები, სადაც დამუშავებულია სიცოცხლის ხანგრძლივობის, სიკვდილიანობის, სიცოცხლის დაზღვევისა და რენტის საკითხები. მეათე თავში გადმოცემულია ზნეობრივი ლოდინის საკითხი. მეთერთმეტე თავი მიძღვნილია მოწმეთა ჩვენებებს.

2. ანდრიენ მარი ლეჟანდრი

ფრანგი მათემატიკოსი ლეჟანდრი დაიბადა 1752 წელს და გარდაიცვალა 1833 წელს. 1785 წლიდან ლეჟანდრი იყო პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი. მან დააფუძნა და განავითარა გეოდეზიურ გაზომვათა თეორია და პირველად აღმოაჩინა (1805—1806 წლებში) უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. მათემატიკურ ანალიზში მან შემოიყვანა უმარტივესი სფერული ფუნქციები და გამოიკვლია ეილერის ინტეგრალები. ლეჟანდრმა იხმარა პირველად გამოთქმა „ელიფსური ინტეგრალები", მაგრამ ამ სახელწოდებას ის ხმარობდა არა თანამედროვე გაგებით, არამედ აღნიშნავდა ისეთ ინტეგრალებს, რომლებიც გამოსახავდნენ ელიფსისა და ჰიპერბოლის რკალებს. ლეჟანდრი ამ საკითხზე მუშაობდა ათეული წლის განმავლობაში და, როცა ამ თეორიის შემდგომი განვითარება შეუძლებლად დაინახა, შეაჯამა ის თავის ვრცელ ნაშრომში: „ტრაქტატი ელიფსურ ფუნქციათა შესახებ" (Traité des fonctions elliptiques), რომელიც 1827 წელს დაიბეჭდა. ნაშრომში ლეჟანდრმა დაამტკიცა, რომ ელიფსური ინტეგრალი მიიყვანება კანონიკურ ფორმებამდე, ესე იგი ინტეგრალი

$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

მიიყვანება სამ ელიფსურ ინტეგრალამდე:

$$1) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = F(k, \varphi),$$

$$2) \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1+k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi)\, d\varphi = E(k, \varphi),$$

3) $$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + l\sin^2\varphi)\sqrt{1 + k^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + l\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} = \pi(k,\ l,\ \varphi).$$

მან შეადგინა აგრეთვე დაწვრილებით ტაბულები $\int \frac{dz}{\sqrt{f'(z)}}$ ინტეგრალისთვის.

ლეჟანდრის მიერ შემოყვანილი სფერული მრავალწევრები, რომლებიც ახლა ცნობილია „ლეჟანდრის მრავალწევრების“ სახელწოდებით, წარმოადგენს მიმდევრობით ზრდადი ხარისხების მრავალწევრთა სპეციალურ სისტემას. ლეჟანდრის მრავალწევრები $P_n(x)$, $(n=1, 2, \ldots)$ შეიძლება განისაზღვროს წარმომშობი ფუნქციის

$$g(t,\ x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

საშუალებით როგორც ამ ფუნქციის t-ს ხარისხებად დაშლაში n-ური ხარისხის კოეფიციენტები. ლეჟანდრის მრავალწევრებს კიდევ სხვანაირად განსაზღვრავენ ეგრეთ წოდებულ როდრიგის ფორმულით:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1)^n.$$

კერძოდ,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \ldots$$

$P_n(x)$ მრავალწევრის ყველა ნული ნამდვილია და ძირითად $(-1,\ +1)$ შუალედში მდებარეობს. ლეჟანდრის მრავალწევრები ორთოგონალურია 1 წონით $[-1,\ +1]$ მონაკვეთზე და ქმნის სრულ სისტემას, რითაც შეპირობებულია $[-1,\ +1]$ მონაკვეთზე ნებისმიერი ინტეგრებადი ფუნქციის მწკრივად დაშლის შესაძლებლობა ლეჟანდრის მრავალწევრების მიხედვით:

$$f(x) \approx \sum a_n P_n(x),$$

სადაც

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx.$$

ლეჟანდრის მრავალწევრები მნიშვნელოვან როლს ასრულებს პოტენციალის თეორიაში და მათემატიკური ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნის საქმეში. ისინი გამოყენებას პოულობენ ემპირიულად მოცემულ ფუნქციათა ინტერპოლირების დროს უმცირეს კვადრატთა მეთოდით და მიახლოებით ინტეგრებისას.

ლეჟანდრის გარდაქმნას, რომელიც ახლაც მის სახელს ატარებს, შემდეგი სახე აქვს:

$$X = y'(x), \quad Y(X) = xy'(x) - y(x), \quad Y'(X) = x.$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ პირიქითაც,

$$x = Y'(X); \quad y(x) = XY'(X) - Y(X), \quad y'(x) = X.$$

ამრიგად, ლეჟანდრის გარდაქმნა ორადულია. ამ გარდაქმნას გადაჰყავს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

განტოლებაში

$$F(Y', XY' - Y, X) = 0, \tag{2}$$

რომელიც ხანდახან უფრო მარტივად ინტეგრდება, ვიდრე გამოსავალი განტოლება. თუ ვიცით (2) განტოლების ამოხსნა, შეიძლება მივიღოთ (1) განტოლების ამოხსნა. ლეჟანდრის გარდაქმნა იხმარება აგრეთვე ჰიდროდინამიკის დიფერენციალური განტოლების განხილვის დროს.

პირველად ლეჟანდრმა გადმოგვცა მისი დროის რიცხვთა თეორია მიმდევრობით და სრულად—თავის ნაშრომში „რიცხვთა თეორია“ (Théorie des nombres). უაღრესად მნიშვნელოვანია რიცხვთა თეორიაში მისი „ურთიერთობის წესი“, რომლის საშუალებით გამოიკვლია x^2+ay^2 გამოსახულების გამყოფების საკითხი. ეს წესი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ, p და q ორი ნებისმიერი კენტი მარტივი რიცხვია და სიმბოლოები $\left(\frac{p}{q}\right)$ და $\left(\frac{q}{p}\right)$ აღნიშნავენ შესაბამისად ნაშთებს $p^{\frac{q-1}{2}}$-ს გაყოფისაგან q-ზე და $q^{\frac{p-1}{2}}$-ს — p-ზე, რომლებიც არ შეიძლება იყვნენ რაიმე სხვა, გარდა $+1$ და -1-ისა, მაშინ გვექნება

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right), \qquad (1)$$

როცა ორივე მარტივი რიცხვი $4x+3$ სახის არ არის; პირიქით,

$$\frac{p}{q} = -\left(\frac{q}{p}\right), \qquad (2)$$

როცა ორივე მარტივი რიცხვი $4x+3$-ის სახისაა. (1) და (2) ტოლობები გვაძლევს

$$\frac{p}{q} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right).$$

ვარიაციათა აღრიცხვაში ლეჟანდრმა დაადგინა ექსტრემუმის არსებობის ნიშანი.

1785 წელს მან შემოიღო $\left(\frac{a}{p}\right)$ სიმბოლო, რომელიც აღნიშნავს a რიცხვის კუთვნილებას კვადრატული ნაშთების ერთობლიობისადმი p მარტივი კენტი მოდულით; ეს აღნიშვნა ახლაც მის სახელს ატარებს.

XVIII საუკუნის დამლევს გამოცოცხლდა მიდრეკილება სიმკაცრისადმი, რასაც ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსები იცავდნენ მათემატიკური დამტკიცებების დროს. ეს გამოცოცხლება თავის პირველ გამოსახვას პოულობს 1794 წელს დაწერილ ლეჟანდრის გეომეტრიის სახელმძღვანელოში: „გეომეტრიის ელემენტები“ (Elèments de la géométrie). თუმცა ეს ნაშრომი არ აკმაყოფილებს სიმკაცრის ჩვენს თანამედროვე მოთხოვნილებას, მაგრამ, როგორც პირველ ცდას, წამოწყებულს დიდი ხნის წინ, მას მეცნიერების ისტორიაში დიდი მნიშვნელობა აქვს.

3. კარლ ფრიდრიხ გაუსი

გაუსი დაიბადა 1777 წლის 30 აპრილს ბრაუნშვეიგში (გერმანია), ხელოსნის ოჯახში. მამა მეტად ენერგიული და მტკიცე ნებისყოფის ადამიანი იყო. დედაც წარმოშობით წვრილი ხელოსნის ოჯახს ეკუთვნოდა; იგი იყო შრომისმოყვარე და მზრუნველი დიასახლისი. მშობლებმა სიღარიბის გამო ვერ შეძლეს ადრე მომწიფებული შვილისათვის შეექმნათ ცხოვრებისათვის კარგი პირობები. გაუსი ბავშვობიდანვე გამოირჩეოდა არაჩვეულებრივი ნი-

ქით და, მიუხედავად ცუდი პირობებისა, ის მაინც პოულობდა დროს გონების განვითარებისათვის. მისმა ნიჭმა მიიპყრო ჰერცოგი ფერდინანდ ბრაუნშვეიგის ყურადღება, რომელმაც გაუსს საშუალება მისცა ესწავლა ჯერ გიმნაზიაში და შემდეგ უნივერსიტეტში. თავის სამშობლო ქალაქში მან დაამთავრა გიმნაზია და კარლოსის სასწავლებელი, რის შემდეგ, 1795 წელს, შედის გეტინგენის უნივერსიტეტში და სწავლობს 1798 წლამდე, შემდეგ კი ისევ სამშობლოში ბრუნდება. აქ, ბრაუნშვეიგში, 1798 წლიდან 1807 წლამდე გაუსი ეწევა დიდ შემოქმედებით მუშაობას და ეს წლებია მისი დიდი ფუნდამენტალური აღმოჩენების პერიოდი. 1807 წლიდან გაუსი მუშაობს ობსერვატორიის დირექტორად და გეტინგენის უნივერსიტეტის ორდინარულ პროფესორად; ამ თანამდებობებზე იგი რჩება სიკვდილამდე, უარი განაცხადა რა ბერლინსა და პეტერბურგში მიწვევაზე. 1855 წელს გაუსი გარდაიცვალა. მისი ხსოვნის აღსანიშნავად მეფის ბრძანებით შედგენილ მედალს აქვს წარწერა: „მათემატიკოსთა მეფეს“, ხოლო გაუსის ანდერძის თანახმად, ძეგლზე დახაზულია წრეში ჩახაზული წესიერი ჩვიდმეტკუთხედი.

გაუსი თავის მოღვაწეობას მათემატიკაში იწყებს არითმეტიკით. პირველ რიგში ის მიმართავს არითმეტიკას, ალგებრასა და ანალიზს. ერთმა დიდმა აღმოჩენამ წააქეზა გაუსი იმაში, რომ მთელი თავისი მოღვაწეობა მიეძღვნა მათემატიკისადმი. ამ დროს გაუსი 19 წლისაც არ იყო. იგი მუშაობდა ერთეულისაგან ფესვების დაჯგუფებაზე ($x^n=1$) თავის „პრიმიტიული“ ფესვების თეორიის საფუძველზე. ერთხელ, დილით (1796 წლის 30 მარტს), გამოიღვიძა თუ არა, გაუსი უეცრად ნათლად და მკაფიოდ მიხვდა, რომ მისი თეორიიდან გამომდინარეობს წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის აგება. იგი ამ სიხარულსა და კმაყოფილებას გამოხატავს აღტაცებული წამოძახებებით და ქების ეპიტეტებით აჯილდოებს თავის თავს. იმ დღიდან გაუსმა გადაწყვიტა იმუშაოს მხოლოდ მათემატიკაში და არა ფილოლოგიაში, რომლისადმი ისეთივე მისწრაფება ჰქონდა, როგორიც მათემატიკისადმი. ასე რომ, იმ დღეს გაუსმა შეძლო იმის დამტკიცება, რომ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეიძლება წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის აგება ანუ, სხვა სიტყვებით, განტოლება

$$x^{17}-1=0 \text{ ანუ } x^{16}+x^{15}+x^{14}+\cdots+x+1=0$$

ამოიხსნება კვადრატულ რადიკალებში. ამ აღმოჩენამ ერთის დაკვრით შორს წასწია წესიერი მრავალკუთხედების აგების პრობლემა,

რომელიც 2000 წლის განმავლობაში უმოძრაოდ იყო. უფრო მეტი, ეს პრობლემა გაუსმა ბოლომდე ამოხსნა, ვინაიდან მან მალე მოახერხა მოეცა ნებისმიერი წესიერი n-კუთხედის აგების შესაძლებლობის კრიტერიუმი, უჩვენა რა, რომ ამოცანის ამოხსნა დამოკიდებულია n-ის მხოლოდ რიცხვით თეორიული თვისებებისაგან: თუ n მარტივი რიცხვია, მაშინ ის უნდა .იყოს $n = 2^{2k} + 1$ სახის.

ამ განსაცვიფრებელი აღმოჩენით ახალგაზრდა, შეუხედავმა და ოდნავ მოუხეშავმა სტუდენტმა, რომელიც გეტინგენში ცხოვრობდა მეტად განმარტოებულად და მხოლოდ პირადი სამუშაოთი იყო შთანთქმული, სწრაფად მიიპყრო საზოგადოების ყურადღება. 1796 წელს ციმერმანმა მოკლე ცნობა გამოაქვეყნა გაუსის ნაშრომის შესახებ, რომელშიაც აღნიშნა გაუსის განსაკუთრებული დამსახურება. ეს იყო გაუსის პირველი გამოქვეყნებული ნაშრომი, თუმცა გამოუქვეყნებელი სამეცნიერო ნაშრომები მას მანამდეც ჰქონდა. ამის შემდეგ გამოქვეყნდა მისი დისერტაცია, რომელიც მიძღვნილი იყო ალგებრის ძირითადი თეორემის დამტკიცებისადმი. გაუსს არ უყვარდა თავისი გამოკვლევების გახმაურება და, როგორც ერთ-ერთმა მისმა თანამედროვემ აღნიშნა, ის დიდ ხანს ხეტიალობდა განცალკევებულ, ადამიანებისათვის მიუწვდომელ სიმაღლეზე. მეცნიერულ შემოქმედებასთან შედარებით აკადემიურ საქმიანობას გაუსი უკანა რიგში აყენებდა. მას მოწაფეები ცოტა ჰყავდა, ვინაიდან მისი მიყოლა შეეძლო მხოლოდ ერთეულებს. მისი თხზულებები ნაკლებ ყურადღებას იპყრობდნენ მის თანამედროვე სპეციალისტებშიც კი. მნიშვნელოვანი გამოკვლევების უმრავლესობა გაუსს შენახული ჰქონდა ათეული წლის განმავლობაში თავისი საწერი მაგიდის უჯრებში. ასეთი უცნაური თავდაჭერილობა გაუსს თვითონაც ხშირად აღუნიშნავს და არა ერთხელ უთქვამს, რომ ის თავის მეცნიერულ გამოკვლევებს ეწევა მხოლოდ თავისი სიამოვნებისათვის და მისთვის მეორეხარისხოვანი მნიშვნელობა აქვს იმას, გამოქვეყნდება თუ არა მისი ნაშრომები და გამოდგება თუ არა სხვებისათვის სასწავლად. გაუსს არასოდეს არ გამოუქვეყნებია ისეთი რამ, რომელიც მას ბოლომდე არ მიეყვანოს. ამიტომ ყოველი მისი ნაშრომი წარმოადგენს ხელოვნების დასრულებულ ნაწარმოებს, შენობას, რომელშიც ხის მასალა სრულებით არ ჩანს. ამ გარემოებამ მეტად გააძნელა გაუსის შემოქმედების შესწავლა. როცა მას უსაყვედურეს მისი ნაშრომების არაჩვეულებრივ სიძნელეზე, მან განაცხადა, რომ მზა შენობაში ხის მასალა არ უნდა ჩანდეს. ამაზე მას სწორად უპასუხეს, რომ ყოველ შემთხვევაში,

სასურველია ჩანდეს კარი, საიდანაც შეიძლება ამ შენობაში შესვლა.

1801 წელს დაიბეჭდა გაუსის დიდი ნაშრომი „არითმეტიკული გამოკვლევები“ (Disquisitiones arithmeticae). მასში გაუსმა შექმნა თანამედროვე რიცხვთა თეორია და წინასწარ განსაზღვრა მისი შემდგომი განვითარება. ამ დარგში მას უკვე ჰქონდა თავისი გამოკვლევების უმეტესი ნაწილი, სანამ გეტინგენში ყოფნის დროს გაეცნობოდა ეილერის, ლაგრანჟისა და ლეჟანდრის ნაშრომებს, რომლებმაც მას უფრო მეტი ინტერესი გაუღვივეს იმისადმი, რაც თვითონ შექმნა.

გაუსის ეს ნაშრომი სამ ნაწილად იყოფა. პირველში განიხილავს კვადრატიკული ნაშთების საკითხს და ურთიერთობის კვადრატიკული კანონის პირველ დამტკიცებას შეიცავს. თუ $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$ ტოლობით გამოვსახეთ ის ფაქტი, რომ q არის რომელიღაც კვადრატის ნაშთი p მოდულით, და $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ტოლობით — ის ფაქტი, რომ ამას არა აქვს ადგილი (q არის „არანაშთი“ p მოდულით), მაშინ ურთიერთობის კანონი შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = -(1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}},$$

ესე იგი $\left(\frac{q}{p}\right)$ და $\left(\frac{p}{q}\right)$-ს აქვთ საერთო ნიშანი იმ შემთხვევის გარდა, როცა ორივე რიცხვს აქვს $4n + 3$-ის სახე. გაუსი გრძნობდა ამ თეორემის დიდ მნიშვნელობას და მას დაარქვა „ოქროს თეორემა“ (theorema aureum). გაუსმა ეს თეორემა იპოვა ჯერ წმინდა ინდუქციური გზით, რიცხვებზე დაკვირვებებით და მხოლოდ დაბეჭდილი შრომის შემდეგ იპოვა მისი დედუქციური დამტკიცება.

„არითმეტიკული გამოკვლევების“ მეორე ნაწილში გაუსი გადმოსცემს კვადრატული ფორმების თეორიას, ე. ი. საკითხს იმის შესახებ, თუ რა მნიშვნელობის მიღება შეუძლია m და n-ის მთელი მნიშვნელობის $am^2 + 2bmn + cn^2$ გამოსახულებებს, სადაც a, b, c მთელი რიცხვებია.

მესამე ნაწილში მოცემულია წრის დაყოფის $x^n = 1$ განტოლების კვადრატულ რადიკალებში ამოხსნადობის საკითხი.

ალგებრაში გაუსი უმთავრესად მუშაობდა ძირითად თეორემაზე ($x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + n = 0$ განტოლებას აქვს m ფესვი, ანუ განტოლების მარცხენა ნაწილი

დაიშლება m მამრავლად $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$,... რომელთა ნამრავლი მარცხენა ნაწილის ტოლია), რომელსაც ის არაერთხელ დაუბრუნდა. მან ამ თეორემის დამტკიცება მოგვცა პირველად 1799 წელს თავის სადოქტორო დისერტაციაში, შემდეგ, 1815 წელს —სულ სხვა დამტკიცება, 1818 წელს კიდევ სხვა, დამყარებული ახალ მეთოდზე. 1849 წელს სადოქტორო ხარისხის მიღების ორმოცდაათი წლისთავთან დაკავშირებით გაუსი ისევ დაუბრუნდა 1799 წლის დამტკიცებას. უმნიშვნელოვანესი პროგრესი დეტერმინანტთა თეორიაში გაკეთდა გაუსის მიერ, რომელსაც ეკუთვნის თვით ტერმინი „დეტერმინანტი".

რიცხვთა თეორიაში გაუსის მთავარი ყურადღება მიმართული იყო ძირითადი პრობლემისაკენ—„ოქროს თეორემისაკენ", რომლის ექვსი სხვადასხვა დამტკიცება მოგვცა. ყველა ისინი გამოქვეყნებულია 1808 და 1817 წლებში დაბეჭდილ ნაშრომებში; მათში მოცემულია აგრეთვე მითითებები კუბური და ბიკვადრატული ნაშთების შესახებ. ბიკვადრატული ნაშთების შესახებ თეორემები, რომლებიც შეესაბამებიან „ოქროს თეორემას", მოთავსებულია 1825 და 1831 წწ. ნაშრომებში; ამასთანავე ეს ნაშრომები ძალიან აფართოვებს რიცხვთა თეორიის დარგს $a+bi$ (სადაც a და b მთელი რიცხვებია) სახის რიცხვების შემოყვანით.

რაც შეეხება გაუსის ნაშრომებს ანალიზში, უპირველეს ყოვლისა აღსანიშნავია 1812 წელს გამოქვეყნებული მისი წერილი ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის შესახებ

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1),\ \beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots,$$

რომლის განსაკუთრებული მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ ის კერძო შემთხვევების სახით შეიცავს ჩვენთვის ცნობილი მწკრივებისაგან ძალიან ბევრს.

ლემნისკატის პერიოდსა და არითმეტიკულ-გეომეტრიულ საშუალოს შორის კავშირს გაუსი გამოსახავს ფორმულით

$$\omega_1 = \frac{1}{\mu(m,\ n)} = \int_0^{360^\circ} \frac{dt}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 t + n^2\sin^2 t}}\,.$$

გაუსი აქაც ისევ უკიდურეს თავდაჭერილობას იჩენს, მაგრამ მაინც მისმა გამოუქვეყნებელმა შედეგებმაც კი ამ დარგში თანამედროვეებზე დიდი შთაბეჭდილება მოახდინა როგორც სიახლითა და მათი

მათემატიკური შინაარსის მნიშვნელობით, ისე გადმოცემის საუცხოო სიმკაცრით. მხოლოდ შემდგომმა თაობამ შეძლო გამოვლინება იმ მეცნიერული სიმდიდრისა, რომელიც დაგვიტოვა ამ არაჩვეულებრივმა გენიოსმა, რომლის წინაშე იმსხვრეოდა ყველა სიძნელე და დაბრკოლება.

1811 წელს ერთ-ერთ თავის წერილში გაუსი განიხილავს ინტეგრალს $\int\frac{dx}{x}$ კომპლექსური ცვლადის სიბრტყეზე და იძლევა ამ ინტეგრალის მნიშვნელობას $\oint\frac{dx}{x}=2k\pi i$ ისეთი სახის კონტურზე, რომელიც k-ჯერ უვლის კოორდინატთა სათავეს. ტერმინი „კომპლექსური რიცხვი“ და ნიშანი i შემოიყვანა გაუსმა.

ერთ-ერთი პირველი საკითხი, რომელმაც გაუსს გაუღვიძა შემოქმედების წყურვილი, იყო ეგრეთ წოდებული არითმეტიკულ-გეომეტრიული საშუალოს შესახებ. იმისათვის, რომ გააერთიანოს თითოეულის უპირატესობა ორი საშუალოთაგანის:

$$m'=\frac{m+n}{2} \quad \text{და} \quad n'=\sqrt{mn}$$

მათი შერევის გზით, გაუსი განაგრძობს მათი შედგენის პროცესს და დაუშვებს

$$m''=\frac{m'+n'}{2}, \qquad n''=\sqrt{m'n'},$$

და ასე შემდეგ.

დაუშვა რა, რომ $m=1$, $n=\sqrt{2}$, გაუსმა შენიშნა, რომ ეს პროცესი იკრიბება რომელიღაც ზღვარისაკენ და გამოითვალა ის ათობითი ნიშნების დიდი რიცხვით. გაუსს მაშინ არც კი შეუმჩნევია, თუ როგორ მნიშვნელობას მიიღებდა ეს ფაქტი შემდეგში ელიფსურ ფუნქციათა თეორიაში. მაგრამ ჩვენ აქ ვხვდებით შესანიშნავ და უეჭველად არაშემთხვევით მოვლენას. ყველა ეს ადრინდელი გამოკვლევა, გამოგონებული მხოლოდ გონების გართობისა და საკუთარი სიამოვნებისათვის, წარმოადგენს მისასვლელს მნიშვნელოვან, მხოლოდ გვიან შეგნებულ, მიზნამდე. მართლაც, 1795 წელს გაუსმა, როგორც თვითონ ამბობს გამოიგონა უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, შემდეგ დაიწყო ლემნისკატის შესწავლა და 1797 წლის 19 მარტს აღმოაჩინა ლემნისკატის განტოლებაში n^2 მაჩვენებლის წარმოშობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ მან, ისარგებლა რა კომპლექსური არეთი, აღმოაჩინა ლემნისკატის რკალისათვის ინტეგრალის

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-ix)(1+ix)}}$$

ორმაგი პერიოდულობა.

ელიფსურ ინტეგრალს გაუსი გვაძლევს შემდეგი სახით:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

გაუსი განსაკუთრებულ ხერხს იყენებს ამ ელიფსური ინტეგრალის პერიოდებიდან ერთ-ერთის გამოსათვლელად, სახელდობრ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

სხვა მიახლოებითი მეთოდების ნაცვლად გაუსი სარგებლობს მიმდევრობითი კვადრატიკული გარდაქმნით, ე. ი. ის მიმდევრობით აორკეცებს ინტეგრებადი ფუნქციის პერიოდების მართკუთხედს, ისე რომ ზღვარში პერიოდების მართკუთხედი გადაიქცევა წრიული ფუნქციის პერიოდულობის ზოლად, რომლის სიმაღლე იძლევა განსახილველი ინტეგრალის ზღვრულ მნიშვნელობას. ყოველი ასეთი კვადრატიკული გარდაქმნის დროს მოცემული ინტეგრალი გადადის იმავე სახის ახალ ინტეგრალში:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos^2\varphi' + n'^2\sin^2\varphi'}},$$

სადაც

$$m' = \frac{m+n}{2},$$

$$n' = \sqrt{mn},$$

ასე რომ, ზღვარში მიიღება

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi^{(\infty)}}{2\pi\mu\sqrt{\sin^2\varphi^{(\infty)} + \cos^2\varphi^{(\infty)}}} = \frac{1}{\mu},$$

რაც კავშირს ამყარებს არითმეტიკულ-გეომეტრიულ საშუალოსა და ელიფსური ინტეგრალების თეორიას შორის. ეს დამოკიდებულება

ლემნისკატის შემთხვევაში (როცა $m^2=1$ და $n^2=2$) გაუსმა მიიღო 1799 წლის 23 დეკემბერს. დასრულებული სახით ეს შედეგი მან გამოაქვეყნა მხოლოდ 1818 წელს მის „საუკუნეებრივ შერყევათა თეორიაში“.

როგორც აღვნიშნეთ, მათემატიკურ დამტკიცებათა სიმკაცრის გამომუშავებაში პირველი ცდა ლეჟანდრს ეკუთვნის. გაუსი ამ მიმართულებით ენერგიულად იწყებს მუშაობას და 1801 წელს თავის „არითმეტიკულ გამოკვლევებში“ იძლევა მანამდე უცნობ, მკაცრ და უხარვეზო გადმოცემას, რომელიც შორს უსწრებს თანამედროვეობას და გაუსის მეთოდებს მტკიცედ უხვევს სახელს, როგორც უდავოსა და გადაუჭარბებელს. „წარმოსახვითი რაოდენობის“ ცნების შემოყვანისას, რომლის კანონზომიერება ხშირად ეჭვს იწვევდა თანამედროვეებში, გაუსი იჩენს დიდ კეთილსინდისიერებას. 1799 წელს თავის დისერტაციაში იგი ძალიან ფრთხილსა და შენიღბულ ფორმაში ეხება ამ პრობლემას, რომელმაც 1800 წელს დააინტერესა ძალიან ბევრი მათემატიკოსი. მაგრამ რამდენიმე ხნის შემდეგ, გადალახა რა ყველა ლოგიკური ეჭვი, გაუსი ნათლად გამოთქვამს თავის თვალსაზრისს, განსაკუთრებით გადმოცემის სიცხადის მხრივ, კლასიკურ რეზიუმეში „ბიკვადრატული ნაშთების შესახებ“. ის აქ დაბეჯითებით გაურბის ყველა იმას, რასაც შეეძლო აღრიცხვის ამ ახალი დარგისათვის ოდნავ მიეცა მისტიციზმისა და ფანტასტიური შინაარსი, განსაკუთრებით აღნიშვნების მხრივ. მან მეცნიერებაში შემოჰყავს ტერმინი „კომპლექსური რიცხვი“ და დაჟინებით მოითხოვს მის მიღებას.

მრავალი წლის განმავლობაში ობსერვატორიის დირექტორად მუშაობამ გაუსი წააქეზა ასტრონომიაში კვლევითი მუშაობისადმი.

1801 წლის 1 იანვარს პიაციმ აღმოაჩინა ახალი პლანეტა ცერერა, მაგრამ ამ პლანეტის ორბიტის დაკვირვება ძალიან მოკლე დროის შუალედით იყო განსაზღვრული; დაახლოებით 9° მანძილზე მასზე დაკვირვების შემდეგ ცერერა გაქრა მზის სხივებში და აღარ გამოჩენილა დილის ცაზე. დაისვა ამოცანა: ამ პლანეტის ორბიტის გამოთვლა ეწარმოებინათ რამდენიმე დაკვირვების საშუალებით. აქ არ შეიძლებოდა გამოეყენებინათ ორბიტის განსაზღვრის ადრინდელი მეთოდები, ვინაიდან ისინი ეყრდნობოდნენ მრავალ და მუდმივად შემოწმებულ დაკვირვებათა მასალებს, რომლებიც ეხებოდნენ უკვე ძველი დროიდან ცნობილ დიდ პლანეტებს.

გაუსმა დაუსვა თავის თავს ამოცანა კეპლერის მოძრაობის გამოთვლა სამი სრული დაკვირვების მიხედვით (დრო, პირდაპირი აღმოსვლა და დახრილობა). მათემატიკურად

ეს ნიშნავს სივრცეში განსაზღვრას კონუსური კვეთისა, რომლის ერთი ფოკუსი — მზე — ცნობილია და რომელიც გადაკვეთს სივრცეში მოცემულ სამ წრფეს (მხედველობის სხივები, რომლებიც მიმართულია ელიფსზე მოძრავ დედამიწიდან განსახილველ პლანეტამდე), თუ ამ წრფეებს შორის რკალს პლანეტა გაირბენს კეპლერის მეორე კანონის თანახმად დროის ცნობილ შუალედებში. ამოცანას მიჰყავს მერვე ხარისხის განტოლებამდე, რომლის ერთი ამონახსნი (სახელდობრ, დედამიწის ორბიტა) ცნობილია.

ამ ამოცანის ამოხსნა გაუსის დიდი დამსახურებაა (გაუსი მაშინ 24 წლის იყო). ამისათვის ის ძალიან ფართოდ სარგებლობდა მიახლოებითი მეთოდებით, რომლებიც მან გამოიგონა ამ მიზნისათვის. შემდეგში გაუსმა ორბიტა განსაზღვრა ოთხი არასრული დაკვირვების საფუძველზე და ორივე შედეგი დაუკავშირა ერთმანეთს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საშუალებით. ეს მეთოდი იმ დროისათვის ჯერ კიდევ არ იყო გამოქვეყნებული, მაგრამ მას უკვე ჰქონდა 1795 წლიდან. ამრიგად, მან მიიღო ისეთი ზუსტი შედეგები, რომელთა მითითებით ცერერა ისევ იპოვეს და ამასთან არა ნაკლებ 7°-ით აღმოსავლეთით იმ ადგილიდან, სადაც ის უნდა ეძებნათ. ამ ბრწყინვალე მიღწევამ, რომელიც ფართო საზოგადოებისთვისაც იყო მისაწვდომი, პირველად გაუთქვა სახელი ახალგაზრდა გაუსს. დაეყრდნო რა იმ ნაშრომებს, რომლებიც ცერერას შეეხებოდნენ და განავითარა რა მათში გამოყენებული მეთოდები, გაუსმა შექმნა ვრცელი ნაშრომი „ციურ სხეულთა მოძრაობის თეორია“ (Theoria motus). ეს ნაშრომი მიიღეს, როგორც გამოთვლითი ასტრონომიის კანონთა კრებული, რადგანაც მასში სანიმუშოდ არის გადმოცემული ციური მექანიკის ამოცანები და ბოლომდეა დაყვანილი მათი რიცხვითი ამოხსნები.

თავისი ასტრონომიული ნაშრომების მეორე ჯგუფი გაუსმა მიუძღვნა შეშფოთებათა თეორიას. ამ ნაშრომებზე საბაბი იყო გაუსის მამის მეგობრის ოლბერსის მიერ პალადის აღმოჩენა 1802 წლის 28 მარტს. ეს პლანეტა, რომელიც აგრეთვე ასტეროიდებს ეკუთვნის, განსხვავდება თავისი ორბიტის განსაკუთრებით დიდი ექსცენტრისიტეტით $\left(e=\dfrac{1}{5}\right)$ და თავისი ორბიტის დახრილობით ($i=34°$). ამის გამო სხვა პლანეტების შემოყვევი გაელენა განსაკუთრებით ძლიერია და ისინი ხდიან ამ პლანეტის შესწავლას განსაკუთრებით საინტერესოდ, მაგრამ ამასთან ერთად მეტად ართულებენ მისი ორბიტის გამოთვლას. პარიზის მეცნიერებათა აკადემიამ არაერთხელ სცადა პრემიების დანიშ-

ვნით ყურადღება მოეპყრო ამ პრობლემის დამუშავებისათვის, მაგრამ უშედეგოდ. საჭირო იყო გაუსის ვირტუოზული გამოთვლითი ხელოვნება, მისი შეუპოვარი და დაჟინებითი ენერგია, მაგრამ, საუბედუროდ, გაუსმაც ვერ მოახერხა საბოლოო შედეგის მიღება და, მიუხედავად დიდი ჯაფისა, დაუმთავრებლად წყდება მასზე მუშაობა.

საკითხი ისმება, თუ რატომ შეწყვიტა გაუსმა პალადის ორბიტის გამოთვლა, რომელსაც ის ასე ენერგიულად და წარმატებით აწარმოებდა? ამას ხსნიან იმით, რომ გაუსს იმ პერიოდში დაეტყო სულიერად დაცემა. ამის დამამტკიცებლად მოჰყავთ მის ნაშრომებში აღმოჩენილი ფანქრით მიწერილი ფრაზა: „ასეთ სიცოცხლეს სიკვდილი მირჩევნია". ეს, როგორც ამბობენ, გამოწვეული იყო იმ უხეირო პირობებით, რომელიც მაშინ გაუსს ჰქონდა. გეტინგენში მას ახალი თანამდებობა ჯერ კიდევ არავითარ შემოსავალს არ აძლევდა და ამასთან ფრანგებმა მას ისეთი კონტრიბუცია დაადევს, რომ უმწეო მატერიალურ მდგომარეობაში ჩააყენეს (ის მაშინ ცხოვრობდა ცუდ ბინაში). მის გარშემო მყოფნი და უპირველეს ყოვლისა მისი საკუთარი ოჯახი არ ამჟღავნებდნენ არავითარ შეგნებას იმ გიგანტურ და, უვიცების თვალსაზრისით, სავსებით „უაზრო" და „უმიზნო" შრომას, რომელმაც გაუსი მოსწყვიტა ყველა დანარჩენ ინტერესს. მას მწარედ უსაყვედურებდნენ კიდეც და ზოგიერთი კი არასავსებით ნორმალურ ადამიანად სთვლიდა.

თუმცა პალადის ორბიტის გამოთვლის პრობლემა გაუსმა ბოლომდე ვერ მიიყვანა, მაგრამ წარმოებულმა მუშაობამ მაინც მდიდარი მეცნიერული ნაყოფი გამოიღო მათემატიკის დარგში. ამას ადასტურებს მისი ნაშრომები:

1) „ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის შესახებ" (Über die hypergeometriche Reihe, 1812).

2) „მექანიკური კვადრატურების შესახებ" (Über mechaniche Quadratur, 1814).

პირველი ნაშრომი შეიცავს ზოგიერთ დაშლას მწკრივებად, ტერმინს „კრებადობას" გაუსი ხმარობს ისეთი მნიშვნელობით, რომელიც თანამედროვე მნიშვნელობისგან განსხვავდება. გაუსი მწკრივს უწოდებს კრებადს, თუ მისი წევრები, დაწყებული განსაზღვრული ადგილიდან, უსაზღვროდ მცირდება; ჩვენ კი კრებადობაში ვგულისხმობთ, რომ მწკრივის კერძო ჯამები მიისწრაფვიან განსაზღვრული ზღვარისაკენ. გაუსმა პირველმა მიაქცია ამ განსხვავებას ყურადღება და მანვე მოგვცა კრებადობის პირველი კრიტერიუმი ამ სიტყვის თანამედროვე მნიშვნელობით. ერთიცა და მეორეც გაკეთებულია გაუსის ამ ნაშრომში.

მეორეში თავმოყრილია ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის შესახებ ნაშრომები სათაურით: „ინტეგრალების მნიშვნელობათა მიახლოებითი გამოთვლის ახალი მეთოდი" (Methodus nova integralium valoresper approximationem inveniendi). ეს ნაშრომები აღმოცენდნენ იმ მწკრივთა ცალკე წევრების კოეფიციენტების რიცხვითი მნიშვნელობების განსაზღვრის მოთხოვნილებიდან, რომლებსაც გაუსი ხვდებოდა შერყევათა გამოთვლების დროს; ისინი იძლევიან ზოგად მოსაზრებებს, რომლით ხელმძღვანელობა მიზანშეწონილია პრაქტიკული გამოთვლების დროს.

კერძოდ, „გაუსის მეთოდი" საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ ამოცანა მრუდით, ორი ორდინატითა და აბსცისათა ღერძით შემოსაზღვრული ფართობის საუკეთესო მიახლოების შესახებ ორდინატთა მნიშვნელობების რაც შეიძლება მცირე რიცხვის საშუალებით; ამასთან ეს მეთოდი ორდინატთა მნიშვნელობების ყოველი წინასწარ მოცემული რიცხვისათვის იძლევა აბსცისების უფრო მიზანშეწონილ შერჩევას.

უაღრესად მნიშვნელოვანია გაუსის გამოკვლევები აგრეთვე გეოდეზიაში. ამოცანა, რომელიც მის წინაშე იდგა პირველ რიგში, წმინდა პრაქტიკული ხასიათის იყო. უნდა ეწარმოებიათ ჰანოვერის სამეფოს გეოდეზიური აგეგმვა.

ზუსტი გეოდეზიური გაზომვები დედამიწის ფორმის გამოსარკვევად პირველად აწარმოეს XVII—XVIII საუკუნეებში წმინდა მეცნიერული ინტერესით. უპირველეს ყოვლისა ზუსტი გრადუსული გაზომვების საშუალებით უნდა ამოხსნილიყო სადავო საკითხი იმის შესახებ, რომ დედამიწა ბრუნვის შეკუმშული ელიფსოიდია თუ წაგრძელებული. იმის შემდეგ, რაც საბოლოოდ დარწმუნდნენ პირველი დაშვების სამართლიანობაში, XIX საუკუნეში დაიწყეს დედამიწის ფორმის უფრო დეტალური შესწავლა. ამ შესწავლამ მეცნიერები მიიყვანა იმ წარმოდგენამდე, რომ დედამიწის ზედაპირი არაწესიერი ზედაპირია, რომელსაც ლისტინგმა „გეოიდი" უწოდა. გაუსმაც უკვე იცოდა, რომ ბრუნვის ელიფსოიდი წარმოადგენს დედამიწის ჭეშმარიტი ფორმისადმი მხოლოდ მიახლოებას.

გეოდეზიის განვითარების ეს წმინდა მეცნიერული ხასიათი ირღვევა XVIII საუკუნის დამლევს ცხოვრების ყველა დარგში დიდი გადატრიალების გამო. სტრატეგიული მიზნებისათვის და გარეორგანიზებული დასახადების განაწილებისათვის საჭირო იყო ზუსტი გეოგრაფიული რუკები, რომელთა შედგენა შეიძლებოდა შესაბამისი ადგილების მხოლოდ გეგმაშეწონილი და ზუსტი გაზომვების საფუძველზე. ამ ამოცანის სისტემატურად ჩატარებას იწყებენ ცალკეული ქვეყნები.

1816 წელს მთავრობამ დაავალა გაუსს ჰანოვერის ტოპოგრაფიული აგეგმვა, რომელსაც დასჭირდა 24 წლის მუშაობა. 1821—1827 წლებში გაუსი მთლიანად ამ საქმით იყო დაკავებული და ამ ხნის განმავლობაში განსაზღვრა არა ნაკლები 2578 უძრავი წერტილის მდებარეობა. ამ პრაქტიკულ საქმიანობაზე უფრო მნიშვნელოვანია ის, რომ ტრიანგულაციასთან დაკავშირებით გაუსმა ახალი გეოდეზიური მეთოდები შექმნა. ამის შესახებ თვითონ გაუსი შენიშნავს, რომ მან შემოიღო ახალი, ჩვეულებრივისგან განსხვავებული, მეთოდები არა მარტო გაზომვების წარმოების ხერხების საკითხში, არამედ კიდევ უფრო მეტად მათი შემდგომი მათემატიკურად დამუშავების საკითხში.

უმაღლესი გეომეტრიის პრობლემებთანაა დაკავშირებული გაუსის ორი მათემატიკური ნაშრომი. ერთი ნაშრომი მჭიდროდაა დაკავშირებული კარტოგრაფიის ამოცანებთან, რომლის შედგენის საბაბი იყო 1822 წელს კოპენჰაგენის სამეცნიერო საზოგადოების მიერ გამოცხადებული პრემია. მასში მოცემულია შემდეგი ამოცანის ზოგადი ამოხსნა: უნდა გადაისახოს მოცემული ზედაპირის ნაწილები მეორე მოცემულ ზედაპირზე ისე, რომ გადასასახავი მცირე ნაწილები იყოს ასახული ნაკვთის მსგავსი. ამ ამოცანის ზოგადი ამოხსნა შეძლო გაუსმა. ასახვის მოთხოვნილ სახეს გაუსმა „კონფორმული“ უწოდა. იძლევა რა პრობლემის ზოგად ამოხსნას, გაუსი შემდეგ განიხილავს ზოგიერთ კერძო შემთხვევას. ის იკვლევს სიბრტყის ნაწილების კონფორმულ გადასახვას ერთი მეორეზე და უჩვენებს, რომ თუ ცნობილია წესიერი მდებარეობა ცნობილი რიცხვის წერტილებისა, როგორ შეიძლება გავაუმჯობესოთ რუკა, რომელიც კერძოდ კარგია, მაგრამ მთლიანად განხილული რამდენადმე დამახინჯებულია. შემდეგ გაუსი ასახავს კონუსს სიბრტყეზე, სფეროსა და ბრუნვის ელიფსოიდს. დასასრულ მოცემულია ბრუნვის ელიფსოიდის ასახვა სფერულ ზედაპირზე.

უმაღლესი გეოდეზიის პრობლემებთან არის დაკავშირებული გაუსის 1827 წელს გამოქვეყნებული დიდი ნაშრომი: „ზოგადი გამოკვლევები მრუდე ზედაპირების შესახებ“ (Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827). გამოდის რა ნებისმიერი ზედაპირების სფერული ასახვიდან, ამ ნაშრომში გაუსმა შემოიღო ცნება სიმრუდის ზომის შესახებ ზედაპირის მოცემულ წერტილში $\left(\frac{1}{R_1R_2}\right.$, სადაც R_1 და R_2 აღნიშნავენ ზედაპირის ამ წერტილში სიმრუდის მთავარ რადიუსებს$\left.\right)$. შემდეგ მოცემულია ძირი-

თადი თეორემა სიმრუდის მუდმივობის შესახებ ზედაპირის ნებისმიერად მოღუნვისას (შეკუმშვისა და გაჭიმვის გარეშე).

ამავე ნაშრომში გაუსი განიხილავს აგრეთვე მრუდ ზედაპირებზე ნაკვთების აგებას, კუთხეებსა და ფართობებს ასეთივე ნაკვთებისას, წერტილების გაერთიანებას უმოკლესი წირების საშუალებით და სხვა, ესე იგი განიხილავს გეოდეზიისათვის მნიშვნელოვან ამოცანებს; განსაკუთრებით ეს შეეხება სამკუთხედების გამოკვლევებს, რომლებიც შექმნილია უმოკლესი წირებით. ამ გამოკვლევამ მნიშვნელოვანი ბიძგი მისცა სფერული ტრიგონომეტრიის განვითარებას. ზემოაღნიშნულ წირებს ეწოდათ გეოდეზიური წირები და მათ მიერ შექმნილ სამკუთხედებს — გეოდეზიური სამკუთხედები. გეოდეზიური წირებისა და სამკუთხედების შესახებ გაუსის თეორემებიდან განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემდეგი: 1) თუ მრუდე ზედაპირზე მოცემული წერტილიდან გავავლეთ ტოლი სიგრძის გეოდეზიური წირების სისტემა, მაშინ მათი ბოლო წერტილების გამაერთიანებელი წირი მართობულია სისტემის ყველა წირისა. 2) თუ მრუდე ზედაპირზე გავავლეთ ნებისმიერი წირი და შემდეგ ამ წირიდან მართი კუთხით გავავლეთ ერთსა და იმავე მხარეს ერთისა და იმავე სიგრძის გეოდეზიური წირები, მაშინ წირი, რომელიც აერთებს ბოლო წერტილებს, გადაკვეთს ყველა ამ გეოდეზიურ წირს მართი კუთხით.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია აგრეთვე თეორემა იმის შესახებ, რომ გეოდეზიური სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის ჭარბი ორ მართზე ტოლია ამ სამკუთხედის სრული სიმრუდისა.

1822 წელს გაუსმა გამოიყვანა თეორემა სიმრუდის ინვარიანტობის შესახებ მოღუნვისას რკალის ელემენტის ფორმიდან

$$ds^2 = m^2(dt^2 + du^2).$$

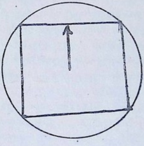
ამავე ნაშრომში გადმოცემულია გაუსის ფორმულა

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2.$$

გაუსის ამ ნაშრომმა დიდი როლი ითამაშა დიფერენციალური გეომეტრიის განვითარების საქმეში.

რაც შეეხება გეომეტრიის საფუძვლებს, გაუსს ამ დარგში თავისი ნაშრომებიდან არც ერთი არ გამოუქვეყნებია. 1792 წლიდან დაწყებული, გაუსი უშედეგოდ ცდილობდა პარალელობის შესახებ თეორემის დამტკიცებას მოცემული აქსიომების საფუძველზე. მან უარყო ყველა „დამტკიცება“, რომელიც მას გაუგზავნეს,

გაუსი თანდათან მიდის იმ აზრამდე, რომ საჭიროა არაევკლიდური გეომეტრიის შექმნა. ასეთ გეომეტრიაში ის წინააღმდეგობას ვერ პოულობს. 1808 წელს შუმახერისადმი გაგზავნილ წერილში ის გამოთქვამს იმ აზრს, რომ არაევკლიდური წანამძღვარებიდან გამომდინარეობს სივრცეში სიგრძის აბსოლუტური ერთეულის არსებობა. არაევკლიდურ გეომეტრიას გაუსი არ თვლიდა უბრალოდ გონების სათამაშოდ. გაუსმა მიიღო ჰერლინგისაგან ვინმე შვეიკარტის — სპეციალობით იურისტის — მოკლე ჩანაწერი, რომელიც 1812—1816 წლებში ხარკოვში ცხოვრობდა (შემდეგ მარბურგსა და კენიგსბერგში). შვეიკარტი ამტკიცებდა, რომ მან აღმოაჩინა ახალი „ასტრალური" გეომეტრია. სინამდვილეში ის ლაპარაკობდა გაუსის არაევკლიდური გეომეტრიის შესახებ, რაც გაუსმა დიდი სიხარულით დაადასტურა. შვეიკარტი, როგორც გაუსი, მივიდა იმ დასკვნამდე, რომ სივრცეში არსებობს სიგრძის აბსოლუტური ერთეული და აკეთებს შემდეგ საინტერესო შენიშვნას: ეს აბსოლუტური ერთეული დედამიწის სფეროს რადიუსის ტოლი რომ იყოს, მაშინ წრფე, რომელიც აერთებს ორ ვარსკვლავს, დედამიწის ცენტრიდან 90° კუთხით ხილულებს, სწორედ დედამიწის ზედაპირს უნდა ეხებოდეს. ამ შენიშვნით შვეიკარტს უნდოდა ეჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება ემპირიული გზით იმის დაწესება, რომ სხვადასხვა გეომეტრიიდან რომელი გეომეტრია არსებობს რეალურ სინამდვილეში. ამასთან მას მოჰყავს ნაკვთი, რომელიც ძალიან ჰგავს გაუსის ნაკვთს. სიგრძის ერთეული მოცემულია მართობით, რომელიც დაშვებულია ცენტრიდან იმ კვადრატის გვერდზე, რომელიც ჩახაზულია რომელიღაც ძირითად წრეში ანუ აბსოლუტში, ვამბობთ რა ამას პროექციული ზომის განსაზღვრის თვალსაზრისით. გაუსი ძალიან მგრძნობიარედ გამოეხმაურა შვეიკარტის იდეებს, მაგრამ მის გამოქვეყნებას არ ურჩევდა. იგი აბსოლუტურად სდუმდა ამ საკითხზე იმიტომ, რომ ერთი შეხედვით ეს ამდენად პარადოქსული თეორიები, მისი აზრით, ფართო მასისათვის გაუგებარი იქნებოდა. გაუსს არა ერთხელ უთქვამს, რომ „კრაზანის ბუდეს" ხელს ნუ ახლებთ, თორემ ის მწარედ დაკბენს ყველას, ვინც შეეცდება მის შეხებას. ამ საკითხზე გაუსი დაწვრილებით წერს ტაურინუსს, მაგ-



ნახ. 32.

რამ იმავე დროს სთხოვს მას ყოველივე ამის ფრიად საიდუმლოდ შენახვას. ამის შესახებ მან ბესელსაც მისწერა. უკანასკნელი მაშინვე დადგა პრაქტიკულ თვალსაზრისზე, რამდენადაც საკითხი ეხებოდა დედამიწის სფეროს ზედაპირზე გეომეტრიულ ნაკვთებს. მაგრამ მალე დადგა საიდუმლოების გამომჟღავნების დრო ახალგაზრდა გამომგონებელთა მხრიდან. 1832 წელს გამოქვეყნდა იანოშ ბოლიაის შედეგები თავისი მამის შრომისადმი დანართის სახით. ამის შემდეგ გაუსი წერს ბოლიაის მამას მისი შვილის ნაშრომის შესახებ და გამოთქვამს აღტაცებას იმის გამო, რომ ამ ახალგაზრდამ თვით მისი უძვირფასესი აღმოჩენა საყოველთაოდ მისაწვდომი გახადა. მაგრამ ახალგაზრდა ბოლიაის მეტად ეწყინა იმის გაგება, რომ მასზე ადრე იგი გაუსს აღმოუჩენია. ბოლიაი იქამდე მივიდა, რომ ლობაჩევსკის ნაშრომის გამოქვეყნება გაუსის მოწყობილად ჩათვალა, რომ ამით გაუსს მისთვის შეურაცხყოფა მიეყენებია, მაგრამ ლობაჩევსკის ნაშრომებს გაუსი გაეცნო 1841 წელს, მაშინ როცა ლობაჩევსკიმ ისინი 1829 წელს გამოაქვეყნა.

4. ნიკოლოზ ივანეს ძე ლობაჩევსკი

ნიკოლოზ ივანეს ძე ლობაჩევსკი დაიბადა 1792 წლის 20 ნოემბერს (2 დეკემბერს) ქ. ნიჟნი-ნოვგოროდში (გორკში). ზუსტად არ არის ცნობილი მისი მამის პროფესია: ერთი ცნობით ის იყო არქიტექტორი, მეორეთი — მიწის მზომელი. ამასთან არის ცნობა, რომ ის იყო უღარიბესი ოჯახიდან. 1797 წელს ხუთი წლის ნიკოლოზს მამა გარდაეცვალა; ნიკოლოზი და მისი ორი ძმა დარჩნენ დედის მზრუნველობის ქვეშ. შვილებისათვის უკეთესი განათლების მისაღებად დედამ გადაწყვიტა ქ. ყაზანში გადასვლა. ცნობილი არ არის, თუ როდის გადავიდნენ ყაზანში და რა სახსრებით ცხოვრობდნენ ისინი იქ. ლობაჩევსკიმ ბავშვობიდანვე მთელი თავისი სიცოცხლე ყაზანში გაატარა. 1802 წლის 5(17) ნოემბერს დედამ ნიკოლოზი ყაზანის გიმნაზიაში შეიყვანა, სადაც ის იმყოფებოდა სახელმწიფო ხარჯზე —პანსიონში. გიმნაზიაში ის კარგად სწავლობდა და დაამთავრა 1806 წელს, ხოლო 1807 წელს შევიდა ყაზანის უნივერსიტეტში. იგი დაუშვეს ჯერ ლექციების მოსასმენად, ხოლო ერთი თვის შემდეგ გადაიყვანეს სტუდენტად. ასე რომ, ლობაჩევსკი 15 წლისაც არ იყო, როცა ის უნივერსიტეტის სტუდენტი გახდა. უნივერსიტეტში სწავლის პირველსავე წელს ნიკოლოზი უკვე კი-

თხულობდა მეცნიერულ ნაშრომებს ლათინურ, ფრანგულ და გერმანულ ენებზე. ის მათემატიკური ნაშრომები, რომლებსაც ლობაჩევსკი პირველ წელს კითხულობდა, იმდენად სერიოზული იყო, რომ ახლაც იმის კითხვა და გარჩევა შეუძლია მხოლოდ კარგად მომზადებულ სტუდენტს, ლობაჩევსკი კი მაშინ მხოლოდ 15 წლის იყო. მისი მასწავლებლის, პროფესორი ბარტელსის მიერ მიცემული კარგი დახასიათების გამო ლობაჩევსკის მადლობა გამოუცხადა განათლების მინისტრმა, მანვე აღძრა შუამდგომლობა უნივერსიტეტის საბჭოს წინაშე ლობაჩევსკის მაგისტრად გადაყვანის შესახებ; საბჭომ ეს წინადადება მიიღო და 1811 წლის 7 აგვისტოდან ლობაჩევსკის მიენიჭა მაგისტრის ხარისხი. ლობაჩევსკის სტუდენტობის წლები ფაქტიურად დამთავრდა, თუმცა ფორმალურად მაგისტრები მაშინ ჯერ ისევ სტუდენტებად ირიცხებოდნენ. ლობაჩევსკიმ გაიარა ძალიან კარგი სკოლა, შეიძინა ვრცელი, მრავალმხრივი ცოდნა არა მარტო მათემატიკაში, არამედ ფიზიკასა და ასტრონომიაშიც. მან შეიძინა მეგობრები და ხელმძღვანელები თავის მასწავლებლებიდან, რომლებიც მეცნიერებისადმი სიყვარულით იყვნენ გამსჭვალულნი და ცდილობდნენ შეექმნათ მტკიცე მათემატიკური სკოლა. პირველი მოწაფე ამ სკოლისა ლობაჩევსკი იყო და დარჩა კიდეც მის სახელოვან წარმომადგენლად.

უნივერსიტეტის წესდებით, მაგისტრები, ერთი მხრივ, უნდა მომზადებულიყვნენ სამეცნიერო და საპროფესორო მოღვაწეობისათვის, მეორე მხრივ უნდა ყოფილიყვნენ პროფესორების თანაშემწეები. ორივე საქმეში ლობაჩევსკიმ მეტად ენერგიულად დაიწყო მუშაობა. ყაზანის უნივერსიტეტთან გაიხსნა საზაფხულო კურსები ჩინოვნიკებისათვის, რომლებიც უკვე მსახურობდნენ, მაგრამ ესაჭიროებოდათ კვალიფიკაციის ამაღლება. 1812 წელს ლობაჩევსკის დაევალა ამ კურსებზე ლექციების წაკითხვა არითმეტიკასა და გეომეტრიაში. 1814 წლის 26 მარტს ლობაჩევსკის მიენიჭა ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა ადიუნქტის (დოცენტის) წოდება. ამ მომენტიდან დაწყებული ლობაჩევსკი სტუდენტებს უკითხავდა საპასუხისმგებლო კურსებს: ელემენტარულ მათემატიკას (არითმეტიკას, ალგებრას, გეომეტრიას, ბრტყელ და სფერულ ტრიგონომეტრიას, რიცხვთა თეორიას), დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვას. ორი წლის განმავლობაში კითხულობდა აგრეთვე ფიზიკასა და ასტრონომიას. შეადგინა სახელმძღვანელოები — „გეომეტრია“ და „ალგებრა ანუ სასრულოთა აღრიცხვა“. 1816 წელს ლობაჩევსკის ამტკიცებენ ექსტრაორდინარულ პროფესორად, ხოლო

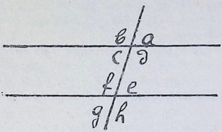
1820 წელს მას ირჩევენ ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დეკანის თანამდებობაზე, რაზედაც მან იმუშავა 7 წელი. ლობაჩევსკი მეტად აქტიურ მონაწილეობას იღებდა უნივერსიტეტის ყოველგვარ საქმიანობაში; მას ავალებენ უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკის ხელმძღვანელობას, შეჰყავთ უნივერსიტეტის მშენებლობის კომიტეტში და შემდეგ მას ირჩევენ ამ კომიტეტის თავმჯდომარედ. ლობაჩევსკის ავალებენ აგრეთვე უნივერსიტეტის ჟურნალის „მეცნიერული ჩანაწერების“ რედაქტორობას; ის შეჰყავთ აგრეთვე უნივერსიტეტთან არსებულ სასწავლებელთა კომიტეტში. ასე რომ, ლობაჩევსკი გახდა ყაზანის უნივერსიტეტის ცენტრალური ფიგურა. ის იყო ერთადერთი ადამიანი, რომელსაც სრული ნდობით და სიყვარულით ეპყრობოდა მთელი უნივერსიტეტის კოლეგია.

ყაზანის სასწავლო ოლქის მზრუნველმა წინადადება მისცა ყაზანის უნივერსიტეტის პროფესორებს, რომ წარედგინათ თავიანთი შედგენილი სასწავლო წიგნები ანდა ლექციების კონსპექტები დასაბეჭდად; ამ წინადადებას გამოეხმაურა ლობაჩევსკი და კიდევ რამდენიმე პროფესორი. 1823 წლის ზაფხულში ლობაჩევსკიმ წარადგინა გეომეტრიის კურსი. უნივერსიტეტის რექტორმა ხელნაწერი გადაუგზავნა ოლქის მზრუნველს დასაბეჭდად, ამ უკანასკნელმა კი იგი გადაუგზავნა დასკვნისათვის აკადემიკოს ფუსს, რომელმაც ლობაჩევსკის ამ ნაშრომს მისცა უარყოფითი დასკვნა. ოლქის მზრუნველმა წინადადება მისცა ლობაჩევსკის ან გაესწორებია ეს ნაშრომი, ანდა მიეცა ახსნა-განმარტება ფუსის შენიშვნებზე, მაგრამ ამით შეურაცყოფილმა ლობაჩევსკიმ არ მოისურვა არც ერთი და არც მეორე. ამის შემდეგ მას უარი ეთქვა წიგნის დაბეჭდვაზე, ხოლო თავისი ნაშრომი მას უკან არ წაუღია და 1898 წლამდე, ვიდრე მას იპოვნიდნენ მზრუნველის კანცელარიის არქივში, „გეომეტრიის“ ხელნაწერი დაკარგული ეგონათ. ეს იყო პირველი თავზარი, რომელიც ლობაჩევსკის დასცეს სამეცნიერო მუშაობაში. ლობაჩევსკის „გეომეტრია“ არის ელემენტალური გეომეტრიის მოკლე მიმოხილვა, შედგენილი იმათთვის, ვინც უკვე შეითვისა გეომეტრიის ძირითადი კურსი, პირველ რიგში იმ სტუდენტებისათვის, რომლებსაც ლობაჩევსკი უკითხავდა გეომეტრიის კურს.

1822 წლის 25 თებერვალს ლობაჩევსკი აირჩიეს ორდინარულ პროფესორად და 1827 წლის 3 მაისს კი ყაზანის უნივერსიტეტის რექტორად და ამ თანამდებობაზე განუწყვეტლივ მუშაობდა 1846 წლის 14 აგვისტომდე, ე. ი. ყაზანის სასწავლო

ოლქის მზრუნველის თანაშემწედ დანიშვნამდე. 1855 წლის 12 ნოემბერს ავადმყოფობის გამო ლობაჩევსკი სამსახურიდან გაათავისუფლეს. სიცოცხლის უკანასკნელ წლებში ლობაჩევსკი დაბრმავდა და 1856 წლის 12(24) თებერვალს გარდაიცვალა.

სანამ ლობაჩევსკის გეომეტრიის არსს შევეხებოდეთ, საჭიროა მოკლედ შევეხოთ მოძღვრებას პარალელურ წრფეთა შესახებ ლობაჩევსკამდე. ეს მოძღვრება ევკლიდემ ააგო პირველი წიგნის მე-16 წინადადებაზე: „ყოველ სამკუთხედში გარეგანი კუთხე მეტია თითოეულ მის არამოსაზღვრე შინაგან კუთხეზე“.



ნახ. 33.

ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი წრფის მესამესთან გადაკვეთით შეიქმნება 8 კუთხე, რომლებიც წყვილ კომბინაციაში ღებულობენ სხვადასხვა სახელწოდებას.

თუ შინაგანი ჯვარედინად მდებარე კუთხეებიდან რომელიმე ორი ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. თუ

$$c = e \quad \text{ან} \quad \partial = f, \qquad (1)$$

მაშინ წრფეები პარალელურია. მართლაც, ეს წრფეები რომ ერთმანეთს კვეთდნენ, მაშინ შეიქმნებოდა სამკუთხედი, რომელშიც გარეგან კუთხეთაგან ერთი ტოლი იქნებოდა შინაგანის, მასთან არა მოსაზღვრის, რაც მე-16 წინადადებას ეწინააღმდეგება. აქედან გამომდინარეობს, რომ წრფეები პარალელურია, თუ ორი გარეგანი ჯვარედინად მდებარე კუთხე ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. თუ ადგილი აქვს ერთ-ერთს ტოლობებიდან:

$$a=g \quad \text{ან} \quad b=h, \tag{2}$$

ან თუ ტოლია ორი შესაბამისი კუთხე

$$a=e \quad \text{ან} \ b=f, \ \text{ან} \ c=g, \ \text{ან} \ \partial=h, \tag{3}$$

ან თუ რომელიმე ორი შინაგანი ან ორი გარეგანი, ცალმხრივი კუთხეები ერთად $2d$-ს შეადგენს, ე. ი. თუ

$$c+f=2d \quad \text{ან} \quad \partial+e=2d, \quad \text{ან} \quad a+h=2d, \quad \text{ან} \quad b+g=2d. \tag{4}$$

თითოეული ამ 12 ტოლობიდან (1) — (4) გამომდინარეობს ყველა დანარჩენი 11 ტოლობის მართებულობა. ამგვარად, ვღებულობთ თეორემას, რომელიც უმთავრესად გამომდინარეობს (1) ტოლობასთან დაკავშირებული წინადადებისაგან:

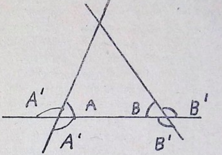
თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი წრფის მესამესთან გადაკვეთით ადგილი აქვს (1) — (4) ტოლობებიდან ერთ-ერთს, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.

ეს თეორემა ევკლიდეს დაყოფილი აქვს ორ წინადადებად — პირველი წიგნის 27-ე და 28-ე წინადადებებად; 27-ე წინადადებაა: „თუ წრფე, რომელიც ორ წრფეს კვეთს, ქმნის ერთმანეთის ტოლ ჯვარედინად მდებარე კუთხეებს, მაშინ ეს ორი წრფე ერთმანეთის პარალელურია“. 28-ე წინადადება: „თუ წრფე, რომელიც ორ წრფეს კვეთს, ქმნის გარეგან კუთხეს იმავე მხრივ წინააღმდეგ მდებარე შინაგანი კუთხის ტოლს, ანუ შინაგან ცალმხრივ კუთხეებს, ერთად ორი მართის ტოლს, მაშინ ეს ორი წრფე ერთმანეთის პარალელურია“.

ეს ორი თეორემა ერთად ქმნის ეგრეთ წოდებულ პარალელური წრფეების პირდაპირ თეორიას; ის აწესებს 12 ტოლობას, რომელთაგან თითოეული საკმარისია იმისათვის, რომ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი წრფე პარალელური იყოს. ის მტკიცდება წინამავალი წინადადებების, უმთავრესად მე-16 წინადადების საფუძველზე. ისმება შებრუნებული საკითხი: თუ ცნობილია, რომ ორი წრფე პარალელურია, მაშინ შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ ადგილი აქვს (1)—(4) ტოლობებს? შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ თითოეული ამ ტოლობათაგანი გამოსახავს არა მხოლოდ საკმარისს, არამედ ორი წრფის პარალელობის აუცილებელ პირობასაც. სამართლიანია თუ არა წინა თეორემის შებრუნებული თეორემა? შებრუნებული თეორემის დამტკიცება იმავე საშუალებით, რომლითაც დამტკიცებულია წინამავალი 27-ე წინადადება ევკლიდეს საწყისებში, მათემატიკოსებისათვის მიუწვდომელი ამოცანა გახდა. ევკლიდემ შებრუნებული წინადადება პოსტულატად მიიღო. ამრიგად, როცა ორ პარალელურ წრფეს მესამე წრფე კვეთს,

აუცილებლად ადგილი უნდა ჰქონდეს (1)—(4) ტოლობებს ან უნდა მივიღოთ მხოლოდ ის, რომ ორი პარალელური წრფის მესამესთან გადაკვეთის შემთხვევაში ადგილი ჰქონდეს (1)—(4) ტოლობებიდან ერთს მაინც, ვინაიდან თითოეული მათგანი იწვევს დანარჩენებს.

ევკლიდემ მიიღო, რომ ორი პარალელური წრფის მესამესთან გადაკვეთის შემთხვევაში ადგილი აქვს (4) ტოლობებიდან ერთს რომელიმეს. ამრიგად, ევკლიდემ პოსტულატად მიიღო ის, რომ ორი პარალელური წრფის მესამესთან გადაკვეთის შემთხვევაში შინაგან ცალმხრივ კუთხეთა ჯამი $2d$-ს ტოლია ანუ, რაც აშკარად იგივეა, თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი წრფის მესამესთან გადაკვეთის შემთხვევაში შინაგანი ცალმხრივი კუთხეების ჯამი ორ მართს არ უდრის, მაშინ ეს წრფეები არ არიან პარალელური და ისინი აუცილებლად გადაიკვეთებიან. ასეთია ის პოსტულატი, რომელიც ევკლიდემ შემოიღო და რომლითაც ის სარგებლობს პირველი წიგნის 29-ე წინადადებიდანვე.



ნახ. 34.

საჭიროა გავაკეთოთ ერთი შენიშვნა. ევკლიდეს გარეგანი კუთხის შესახებ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედის ორი კუთხის ჯამი არასოდეს არ აღემატება $2d$-ს. მე-17 წინადადების (I წიგნი) შინაარსია: „ყოველ სამკუთხედში რომელიმე ორი კუთხე ერთად აღებული, ორ მართზე ნაკლებია". მართლაც, თუ A და B შიგა კუთხეებია ABC სამკუთხედის AB ფუძესთან A' და B' შესაბამისი მოსაზღვრე კუთხეებია (ნახ. 34), მაშინ ოთხივე კუთხის ჯამი

$$A + A' + B + B' = 4d, \qquad (5)$$

მაგრამ რადგან $A < B'$, $B < A'$ (16-ე წინად.), ამიტომ $A + B$ ჯამზე მოდის ოთხივე კუთხის ჯამის ნახევარზე ნაკლები, ე. ი. $A + B < 2d$. ეს შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: თუ ორი AB და BC წრფე გადაიკვეთებიან C წერტილში, მაშინ გადაკვეთას ადგილი აქვს ყოველთვის AB გამკვეთის იმ მხარეზე, რომელ მხარეზეც შინაგან ცალმხრივ კუთხეთა ჯამი $2d$-ზე ნაკლებია.

ამრიგად წარმოიშვა ევკლიდეს „საწყისებში" მოთავსებული მე-5 პოსტულატი: „თუ წრფე, რომელიც ორ წრფეს კვეთს, ქმნის შიგა ცალმხრივ კუთხეებს, რომელთა ჯამი ორ მართზე ნაკლებია, მაშინ საკმაოდ გაგრძელებული ეს წრფეები გადაიკვეთება იმ მხარეს, სადაც ეს ჯამი ორ მართზე ნაკლებია".

ეს პოსტულატი გეომეტრიის განშტოების გამოსავალი წერტილი შეიქნა. ევკლიდეს „საწყისების" პირველ წიგნში პირველი წინადადებები მტკიცდება ამ პოსტულატის დაუხმარებლად, 28-ე წინადადების შემდეგ წინადადებათა დიდი უმრავლესობა დამტკიცებულია ან მე-5 პოსტულატის საშუალებით, ანდა ამავე პოსტულატით დამტკიცებული სხვა წინადადებების საშუალებით.

ამრიგად, 29-ე წინადადებიდან დაწყებული გეომეტრია გაიყოფა ორ ნაწილად; პირველ ნაწილს ქმნის ის წინადადებები, რომლებიც მე-5 პოსტულატისაგან დამოუკიდებელი არიან. მათ ერთობლიობას ახლა უწოდებენ აბსოლუტურ გეომეტრიას; მეორეს შეადგენს ის წინადადებები, რომელთა დამტკიცება მე-5 პოსტულატის გარეშე შეუძლებელია. ეს წინადადებები ქმნიან ეგრეთ წოდებულ საკუთრივ ევკლიდურ გეომეტრიას; ასე რომ, მე-5 პოსტულატი გეომეტრიას ყოფს ორ ნაწილად.

მრავალი მათემატიკოსი ამაოდ ცდილობდა ამ პოსტულატის დამტკიცებას. ლეჟანდრიც შეეცადა მის დამტკიცებას, რაც, ცხადია, ვერ შეძლო, და მოგვცა მხოლოდ ორი თეორემის დამტკიცება:

1) „სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი ორ მართს არ აღემატება", ე. ი. ეს ჯამი ან უდრის, ან ნაკლებია ორ მართზე.

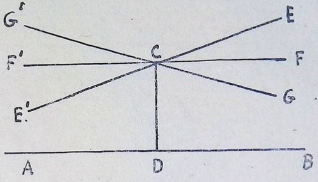
2) „თუ სამკუთხედის შიგა კუთხეთა ჯამი ორ მართს უდრის, მაშინ ადგილი აქვს პარალელების შესახებ პოსტულატს", ე. ი. ადგილი აქვს მთელ ევკლიდურ გეომეტრიას.

ამრიგად, ევკლიდეს პოსტულატი ტოლფასია იმ დაშვებისა, რომ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი ორი მართის ტოლია.

ლობაჩევსკის ნაშრომში „გეომეტრია", რომლის დაბეჭდვა ნებადართული არ იყო, პირველად არის მკაფიოდ გამოყოფილი აბსოლუტური გეომეტრია საკუთრივ ევკლიდურისაგან. ევკლიდეს მე-5 პოსტულატის ნაცვლად ლობაჩევსკიმ მიიღო, რომ AB წრფის გარეთ მდებარე C წერტილზე ABC სიბრტყეზე გაივლის ერთ წრფეზე მეტი, რომელიც AB-ს არ შეხვდება (წრფეები $E'E$, $F'F$, $G'G$, ნახ. 35). პირველი შეხედვით მოსალოდნელი იყო, რომ ასეთი უაზრო დაშვებით მიღებული დასკვნა მიგვიყვანდა აბსურდამდე, აბსოლუტურ გეომეტრიასთან წინააღმდეგობამდე, მაგრამ ლობაჩევსკის დასკვნები ისე ღრმად არის დამუშავებული, რომ არ იწვევს

ასეთ წინააღმდეგობას. მართალია, ამ დასკვნებს მივყავართ ინტუიციასთან, წინააღმდეგობამდე, მაგრამ არ არის არავითარი ლოგიკური წინააღმდეგობა. პირიქით, მიმდევრობით ჩატარებული დასკვნები თანდათან ლაგდება როგორც დასრულებული ჰარმონიული მთელი, რომელსაც ლობაჩევსკიმ უწოდა „წარმოსახვითი“ და გაუსმა „არაევკლიდური“ გეომეტრია.

1826 წლის 11(23) თებერვალს ლობაჩევსკიმ ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სხდომაზე გააკეთა მოხსენება, რომელიც



ნახ. 35.

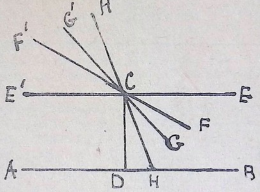
დასაბეჭდად იყო გამზადებული სახელწოდებით: „გეომეტრიის საწყისების ძირითადი განმარტება პარალელურ წრფეთა თეორემის მკაცრი დამტკიცებით“. ფაკულტეტმა ეს ნაშრომი სარეცენზიოდ კომისიას გადასცა; კომისიამ უარყოფითი დასკვნა გამოიტანა, მაგრამ იგი ფაკულტეტს არ წარუდგინა, არ უნდოდა რა ეწყენინებია ლობაჩევსკისათვის; არც ნაშრომი დაუბრუნებიათ უკან და დღესაც უგზო-უკვლოდ დაკარგულად ითვლება. 1829 წელს ლობაჩევსკიმ მაინც გამოაქვეყნა უნივერსიტეტის ჟურნალ „ყაზანის მოამბეში“ სახელწოდებით: „გეომეტრიის საწყისების შესახებ“. იგი შეიცავს ლობაჩევსკის მიერ შექმნილ ახალი არაევკლიდური გეომეტრიის საწყისების გადმოცემას, მაგრამ რუსეთში ის ვერავინ გაიგო. ამიტომ ლობაჩევსკიმ შეადგინა მცირე თხზულება, სადაც უფრო გასაგებად იყო გადმოცემული ახალი გეომეტრიის მხოლოდ საწყისები. ეს ნაშრომი, შესრულებული 1840 წელს, მან გამოაქვეყნა ბერლინში გერმანულ ენაზე, ცალკე ბროშურად, სათა-

ურით: „გეომეტრიული გამოკვლევები პარალელურ წირთა თეორიაში“.

ამ ნაშრომით ლობაჩევსკიმ მიზანს მიაღწია, ე. ი. მან შეძლო გაეცნო მათემატიკური სამყაროსათვის თავისი იდეები, რომელშიც ადვილად გაერკვევა ყოველი ადამიანი, რომელსაც ზოგადი მათემატიკური განათლება აქვს.

„გეომეტრიული გამოკვლევები“ იწყება მოკლე შესავლით. შემდეგ ჩამოთვლილია აბსოლუტური გეომეტრიის 15 მნიშვნელოვანი დებულება, რომლებითაც ის სარგებლობს შემდეგ გადმოცემაში. მოვიყვანოთ ამ ნაშრომიდან ლობაჩევსკის მსჯელობა.

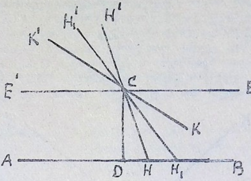
C წერტილიდან AB წრფეზე დავუშვათ CD მართობი (ნახ. 36) და მისკენ იმავე სიბრტყეში C წერტილიდან გავავლოთ $E'CE$ მართობი. წრფეს ხშირად აღვნიშნავთ სამი ასოთი, რომ ამით აღინიშნოს ორი სხივი, რომელთაგან შედგება



ნახ. 36

CE და CE'. დაშვება, რომელსაც ლობაჩევსკი აკეთებს აბსოლუტური გეომეტრიისადმი დამატებაში, მისი ჩამოყალიბების შესაბამისად მდგომარეობს იმაში, რომ იმავე ACB სიბრტყეში C წერტილში, $E'CE$-ს გარდა (ევკლიდეს პარალელი), გაივლის ერთი $G'CG$ წრფე მაინც, რომელიც აგრეთვე არ შეხვდება AB-ს. ცხადია, ასეთი დაშვების დროს ყოველი $F'CF$ წრფე, რომელიც გაივლის C წერტილში $E'CE$ და $G'CG$ წრფეებს შორის (ე. ი. ECG და $E'CG'$ ვერტიკალურ კუთხეებს შიგნით), აგრეთვე არ შეხვდება AB-ს. ამ-

რიგად, დაშვებას ლობაჩევსკი მიჰყავს იქამდე, რომ C წერტილში გაივლის იმავე სიბრტყეზე მდებარე უსასრულოდ მრავალი წრფე, რომელნიც AB-ს არ შეხვდებიან. თუ შევჩერდებით წრფეებზე, რომლებიც პირველ კვადრანტში გადიან (ე. ი. DCE მართ კუთხეში), ისინი დაიყოფიან $H'CH$ სახის წრფეებად, რომლებიც AB წრფეს შეხვდებიან, და $F'CF$ სახის წრფეებად, რომლებიც მას არ შეხვდებიან; პირველნი (პირველ კვადრანტში) მოთავსებულია CD მართობთან ახლოს, მეორენი — CE-თან. წრფეთა კონის უწ-

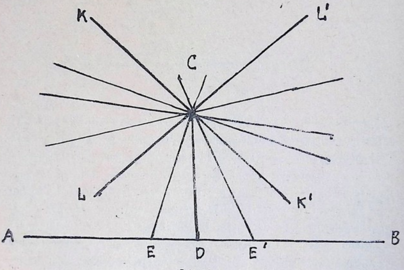


ნახ. 37.

ყვეტობის გამო ამ კვადრანტებში უნდა არსებობდეს წრფე, რომელიც გამოჰყოფს ერთი კატეგორიის წრფეებს მეორე კატეგორიის წრფეებისაგან, მაგრამ (ნახ. 37) წრფეს შემხვედრი უკანასკნელი ამ კონაში არ შეიძლება იყოს. მართლაც, როგორიც არ უნდა იყოს გადამკვეთი $H'CH$ წრფე, ავიღებთ რა H_1 წერტილს H წერტილის შემდეგ, მივიღებთ H'_1CH_1 წრფეს, რომელიც $H'CH$-ის შემდეგ მდებარეობს და რომელიც კიდევ ხვდება AB-ს. ამიტომ სასაზღვრო წრფე $K'CK$ იქნება პირველი წრფე, რომელიც AB-ს არ ხვდება. ვინაიდან IV კვადრანტში ადგილი ექნება იგივეს, რასაც პირველ კვადრანტში, ამიტომ მთელი სურათი წარმოგვიდგება იმ სახით, როგორც ეს გამოსახულია 38-ე ნახაზზე:

აქ CE და CE' წრფეები AB-ს შეხვდებიან, დანარჩენები კი არა; KK' და LL' გამოყოფენ წრფეებს, რომლებიც AB-ს

შეხვდებიან, იმ წრფეებისაგან, რომლებიც მას არ შეხვდებიან. KK' და LL' წრფეებს ლობაჩევსკი უწოდებს AB-ს პარალელებს; მათ შორის გამავალი წრფეები AB-ს არ შეხვდება. სიბრტყეს, რომელშიც განხორციელდება ლობაჩევსკის დაშვებები, ლობაჩევსკის სიბრტყეს უწოდებენ; ამავე აზრით ამბობენ ლობაჩევსკის სივრცის შესახებაც. მაშასადამე, ლობაჩევსკის სიბრტყეში AB წრფის გარეთ მდებარე C წერტილში გაივლის მისი პარალელური ორი წრფე ($K'CK$ და $L'CL$). ისინი ქმნიან ორ წყვილ ვერტიკალურ კუთხეს. წრფეები, რომლებიც გაივლიან KCL და $K'CL'$ ვერტიკალურ კუთხეებს გარეთ, AB-ს ხვდება, ლობაჩევსკის ტერმინოლოგიით, AB-თან თავს იყრის, ხოლო წრფეები, რომლებიც $K'CL$ და KCL' კუთხეებს შიგნით გაივლიან, ლობაჩევსკის ტერმინოლოგიით, AB-ს სცილდება. თუ გვაქვს ორი წრფე AB და CC', მაშინ მეორე, გამოსული თავისი ნებისმიერი C წერტილიდან, ან თავს იყრის AB-სთან, ან პარალელურია მისი, ან სცილდება მას. ამასთან თუ წრფე CG რომელიმე მის C წერტილში AB-თან თავს იყრის (ე. ი.

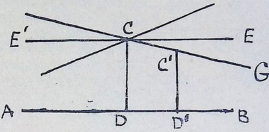


ნახ. 38.

გამოსული ამ წერტილიდან AB-თან თავს იყრის), პარალელურია მისი ან სცილდება მას, მაშინ ყოველ თავის სხვა წერტილში იგივე ფუნქციებს ასრულებს. დაწვრილებით ეს ნიშნავს:

თუ რომელიმე წრფე CC' (ნახ. 39) C წერტილში AB-ს სცილდება, მაშინ მეორე თავის C' წერტილშიც AB-ს სცილდება. თუ ის C წერტილში მისი პარალელურია, მაშინ ყოველ სხვა თავის წერტილში ის მისი პარალელურია.

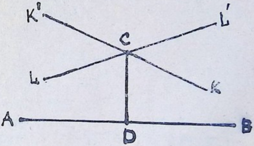
ამგვარად, ვღებულობთ შესაძლებლობას ვთქვათ მარტივად: CC' წრფე თავს იყრის AB-თან, მისი პარალელურია, მას სცილდება (არ ვაკუთნებთ რა პარალელობას ან დაცილებას ამ



ნახ. 39.

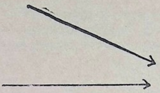
წრფის განსაზღვრულ C წერტილს). ერთი წრფის ასეთი ქცევა მეორე წრფის მიმართ ყოველთვის საურთიერთოა. ცხადია, რომ „ევკლიდეს პარალელი“ CE ახლა ეკუთვნის წრფეთა რიცხვს, რომელიც AB-ს სცილდება.

იმ CK პარალელის (ნახ. 40) შესახებ, რომელიც CD მართობთან ქმნის DCK მახვილ კუთხეს DB-ს მხრიდან, ამბობენ, რომ ის AB-ს პარალელურია AB-ს მხრიდან, იმ დროს, როცა მეორე პარალელი CL მისი პარალელურია BA-ს მხრიდან. პარალელიზმის ასეთი გაგების შემთხვევაში შენარჩუნებულია პარალელების ძირითადი თვისება ევკლიდურ გეომეტრიაში: ორი წრფე, რომელიც მესამის პარალელურია ერთი და იმავე მხრიდან, ერთმანეთის პარალელებია იმავე მხარეზე. ევკლიდეს გეომეტრიაში წრფის ორივე პა-

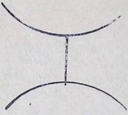


ნახ. 40.

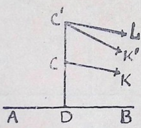
რალელი გაერთიანებულია ერთ წრფეში. ვერტიკალური კუთხეები KCL და $K'CL'$ გაიშლება თითოეულ ორ წრფეში, ხოლო მათი მოსაზღვრე კუთხეები $K'CL$ და KCL' ნულად იქცევა. თითოეულ DCK და DCL ტოლ მახვილ კუთხეებს, რომლებსაც ქმნიან პარალელები CD მართობთან ორივე მხრიდან, ლობაჩევსკი უწოდებს პარალელობის კუთხეს C წერტილში AB წრფის მიმართ. ევკლიდეს გეომეტრია იმით განსხვავდება, რომ იქ პარალელობის კუთხე ყოველთვის მართი კუთხეა. მაშასადამე, თუ დაშვებულია ლობაჩევსკის გეომეტრიის არსებობა, ე. ი. გეომეტრიის, რომელშიც მის პოსტულატებს გამოსავალი ადგილი აქვს, მაშინ ევკლიდეს გეომეტრია შეადგენს მის კერძო შემთხვევას, შესაბამისად იმისა, რომ პარალელობის კუთხეს აქვს მუდმივი მნიშვნელობა და ყოველთვის მართი კუთხის ტოლია. დადგა რა წარმოსახვითი, არაევკლიდური გეომეტრიის ნიადაგზე, ლობაჩევსკი უყვედრელი სიმკაცრით ამტკიცებს, რომ ორი ერთმანეთის პარალელური წრფე აქ განუსაზღვრელად უახლოვდება ერთი მეორეს პარალელობის მხარეზე, თითქოს ისინი თავს იყრიან სადღაც უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში (ნახ. 41); საწინააღმდეგო მხარეზე ისინი ერთი მეორეს შორდებიან. ორ ერთმანეთს დაცილებულ წრფეებს კი ყოველთვის აქვთ საერთო მართობი, რომელიც მათ შორის უმოკლეს მანძილს წარმოადგენს და რომლიდანაც ისინი ერთმანეთს სცილდებიან, განუსაზღვრელად შორდებიან რა ერთი მეორეს ორივე მხრიდან (ნახ. 42). ეს შედეგი, აღმოცენებული არაევკლიდური გეომეტრიის შესწავლის დასაწყისშივე, ბევრისათვის



ნახ. 41.



ნახ. 42.



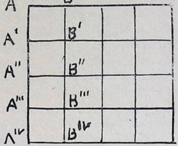
ნახ. 43.

დიდხანს წარმოადგენდა გადაულახავ სიძნელეს შეთვისებისა და აღიარებისთვის.

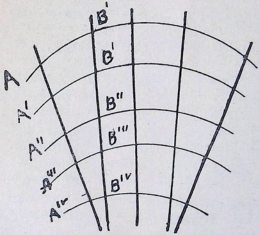
არაევკლიდურ გეომეტრიაში პარალელობის კუთხე ყოველთვის მახვილი კუთხეა და ამასთან ცვლადი. ვთქვათ (ნახ. 43), CD არის AB-ს მართობი, CK არის AB-ს პარალელური, KCD არის პარალელობის კუთხე C წერტილში AB წრფის მიმართ. ავიღოთ წერტილი C' იმავე CD მართობზე C წერტილის ზევით. თუ გავავლებთ $C'L$ წრფეს CD მართობისადმი იმავე კუთხით, როგორიც არის $CK (\angle DC'L = \angle DCK)$, მაშინ CK და $C'L$, როგორც ევკლიდეს პარალელები, ერთმანეთს სცილდება. $C'K'$ წრფე, CK-ს და AB-ს პარალელური იმავე მხარეზე უნდა იყოს მართობთან უფრო ახლოს, ვიდრე $C'L$, ე. ი. პარალელობის კუთხე C' წერტილში ნაკლებია, ვიდრე C წერტილში ($\angle K'C'D < \angle KCD$). პარალელობის კუთხე C წერტილში AB წრფის მიმართ, ამრიგად, დამოკიდებულია AB წრფიდან C წერტილის მანძილზე და წარმოადგენს ამ მანძილის ფუნქციას. თუ ამ CD მანძილს x-ით აღვნიშნავთ, მაშინ C წერტილში პარალელობის კუთხე არის x-ის ფუნქცია, რომელიც ლობაჩევსკიმ აღნიშნა $\Pi(x)$ სიმბოლოთი. მტკიცდება, რომ ეს ფუნქცია კლებადია. ლობაჩევსკი უჩვენებს, რომ $\Pi(x)$ კუთხე უახლოვდება მართ კუთხეს, როცა x უახლოვდება ნულს; ეს იმას ნიშნავს, რომ როგორი მცირეც არ უნდა იყოს კუთხე ε, $\Pi(x)$-ის მნიშვნელობა განსხვავდება მართი კუთხისგან ε-ზე უფრო მცირით, როცა x გახდება საკმაოდ მცირე.

ახლა განვიხილოთ წრეწირი და მის ცენტრზე გამავალი წრფეთა „კონა". წრეწირი გადაკვეთს ამ კონის ყველა წრფეს ორთოგონალურად, ე. ი. წრეწირი არის ორთოგონალური ტრაექტორია იმ წრფეთა კონისა, რომლებიც გაივლიან წრეწირის ცენტრში. ეს ერთნაირად ხდება როგორც ევკლიდურ, ისე არაევკლიდურ სიბრტყეზე. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ კონის ცენტრი შორდება კონის ერთ-ერთ წრფეს, მაშინ წრფეები, რომლებიც კონას შეადგენენ, თითქოს პარალელიზმს უახლოვდებიან. თუ იმ წრფეთა კონას, რომელიც საერთო წერტილში გადაიკვეთება, შევცვლით პარალელების კონად, მაშინ ევკლიდურ სიბრტყეზე მისი ორთოგონალური ტრაექტორიები იქნება წრფეები (ნახ. 44); ტრაექტორიაზე ათვლილი ორ პარალელს შორის მანძილი მთელ განფენილობაზე ერთი და იგივეა. ლობაჩევსკის სიბრტყეში საქმე

სხვაგვარადაა. რადგან პარალელები ერთმანეთს უახლოვდება, ამიტომ ორთოგონალური ტრაექტორიები თავისებური მრუდებია (ნახ. 45), რომლებსაც ლობაჩევსკი ზღვრულ წრეწირებს ანუ, უბრალოდ, ზღვრულ წირებს უწოდებს. თუ წარმოვიდგენთ, რომ კონის პარალელები თავს იყრის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში, მაშინ, შეიძლება ითქვას, ზღვრული წირი არის წრეწირი, რომლის ცენტრი უსასრულობაში მდებარეობს. პარალელებს შორის მანძილს სხვადასხვა წერტილებში გავზომავთ მათ შორის გამავალი ზღვრული წირების რკალებით AB', $A'B'$, $A''B''$,... (ნახ. 45). განსხვავება ევკლიდურ და ლობაჩევსკის გეომეტრიებს შორის იმაში მდგომარეობს, რომ პირველში პარალელებს შორის ეს მანძილი ერთი და იგივეა; ლობაჩევსკის გეომეტრიაში ის მცირდება პარალელიზმის მხრით. ად-



ნახ. 44.



ნახ. 45.

ვილი საჩვენებელია, რომ ამ მანძილების, ე. ი. ზღვრული AB და AB' რკალების ფარდობა აქ დამოკიდებულია მხოლოდ იმაზე, რამდენადაა ეს რკალები ერთმანეთს დაშორებული, ე. ი. $AA' = BB'$

ნაკვეთების სიგრძისაგან. გვაქვს რა ეს მხედველობაში, ავიღოთ პარალელებს შორის ორი ზღვრული რკალი AB, $A'B'$, რომლებიც ერთმანეთს დაშორებულია $AA' = BB'$ ერთის ტოლი მანძილით (ვთქვათ 1 სანტიმეტრით); $AB : A'B'$ ფარდობა წარმოადგენს რომელიღაც განსაზღვრულ რიცხვს, რომელიც ერთზე ნაკლებია. აღვნიშნოთ ის q-თი. თუ გავიწევით პარალელიზმის მხრით მანძილით

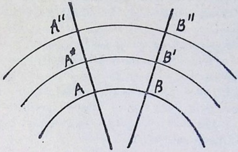
$$AA' = A'A'' = A''A''' = \cdots = 1,$$

მაშინ

$$AB : A'B' = q, \quad A'B' : A''B'' = q, \quad A''B'' = A'''B''' = q,$$

$$AB : A''B'' = q^2, \qquad AB : A'''B''' = q^3. \tag{6}$$

თუ პარალელურ l და l_0 რკალებს შორის მანძილი შეადგენს სიგრძის n ერთეულს, მაშინ ამ რკალების სიგრძეთა ფარდობა $l : l_0 = q^n$,



ნახ. 46.

ე. ი. $l = l_0 q^n$. ჩვეულებრივი ხერხებით ძნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ ეს ფარდობა ძალაში რჩება, როდესაც რკალებს შორის მანძილი გამოისახება არა მთელი რიცხვით, არამედ ნებისმიერი x რიცხვითაც კი. ყოველთვის

$$l = l_0 q^x. \tag{7}$$

მთელი არსი აქ შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, AB, $A'B'$, $A''B''$ ნებისმიერი სამი ზღვრული რკალია, რომლებიც იმავე ღერძებს შორის იმყოფება; x და y მათ შორის მანძილებია, ღერძზე ათვლილი ($x = AA'$, $y = A'A''$). აღვნიშნოთ $\varphi(x)$ სიმბოლოთი იმ ზღვრული რკალების ფარდობა, რომლებიც ღერძზე ერთმანეთს დაშორებული არიან x მანძილით. მაშინ (ნახ. 46)

$$A'B' = AB\,\varphi(x), \quad A''B'' = A'B'\,\varphi(y), \quad A''B'' = AB\,\varphi(x+y),$$

და ამიტომ

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y). \tag{8}$$

ამრიგად, $\varphi(x)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციონალურ განტოლებას (8). კოშიმ უჩვენა, რომ ერთადერთი უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც მას აკმაყოფილებს არის q^x, სადაც q დადებითი რიცხვია. დამოკიდებულება (8) მთელი მეტრიკის საფუძველია, ე. ი. გაზომვის ყველა სიდიდის, ლობაჩევსკის გეომეტრიაში.

რა მნიშვნელობა აქვს ამ q მუდმივს? უპირველეს ყოვლისა, ცხადია, ევკლიდეს გეომეტრიაში, სადაც ყოველთვის $AB = A'B' = A''B''$, $q = 1$, ლობაჩევსკის გეომეტრიაში კი $q > 1$. თავისი ზღვრული სამკუთხედების სიბრტყეზე სათანადო დაგეგმილებით ლობაჩევსკი მივიდა წარმოსახვით სივრცეში წრფივი სამკუთხედის ტრიგონომეტრიამდე, ე. ი. დაადგინა განტოლებები, რომლებიც აკავშირებენ წრფივი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს წარმოსახვით გეომეტრიაში.

როგორ გამოიყურებიან ეს განტოლებები? ვთქვათ, a და b კათეტებია, c ჰიპოტენუზაა, A და B მახვილი კუთხეებია წრფივი ABC სამკუთხედის. თითოეულ a, b, c მონაკვეთებს შეესაბამება პარალელობის კუთხის მნიშვნელობა: $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$. შეასრულა რა გამოთვლები იმ რიგზე, როგორც ეს ზემოთაა ნაჩვენები, ლობაჩევსკი მივიდა წრფივი ABC სამკუთხედის შემდეგ ტრიგონომეტრიულ განტოლებებამდე:

$$\operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\sin A, \tag{12}$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(b) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\sin B, \tag{13}$$

$$\sin\Pi(a)\sin\Pi(b) = \sin\Pi(c). \tag{14}$$

აქ კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს აქვს იგივე მნიშვნელობა, რაც იმავე კუთხისათვის (გრადუსულ გამოსახვაში) ჩვეულებრივ გეომეტრიაში. თუ დავაკვირდებით ამ განტოლებებს, დავინახავთ, რომ პირველი ორი განსხვავდება ჩვეულებრივი ტრიგონომეტრიის შესაბამი განტოლებებიდან იმით, რომ სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების ყველა a, b, c სიგრძის ნაცვლად აქ არის $\operatorname{ctg}\Pi(a)$, $\operatorname{ctg}\Pi(b)$, $\operatorname{ctg}\Pi(c)$. უფრო მეტი თავისებური სახე აქვს (14) თანაფარდობას, გამომსახველს მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებსა და ჰიპოტენუზას შორის კავშირს და, ამგვარად, ევკლიდური გეომეტრიის

პითაგორის თეორემის შემცველს. განტოლებებიდან (12), (13), (14) უკვე შეიძლება წმინდა ალგებრულად მივიღოთ განტოლებები:

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A, \quad \cos \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \operatorname{tg} B. \tag{15}$$

ეს განტოლებები განსაზღვრავენ სამკუთხედის კათეტს მეორე კათეტით და მახვილი კუთხით, რომელიც პირველი კათეტის მოპირდაპირედ მდებარეობს; განტოლებები

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos B, \quad \cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos A \tag{15'}$$

განსაზღვრავენ კათეტს ჰიპოტენუზითა და ამ კათეტის მიმდებარე მახვილი კუთხით. (12), (13) განტოლებებს ჩვეულებრივად უწოდებენ განტოლების სინუსების თეორემას; (14) კი — კოსინუსების თეორემას.

თუმცა განტოლებები (12), (13), (14) თითქოს საკმარისია მართკუთხა სამკუთხედის ამოსახსნელად, მაგრამ, ფაქტიურად სარგებლობა ჯერ არ შეგვიძლია. ეს შესაძლებელი იქნებოდა მაშინ, თუკი ჩვენ შეგვეძლებოდა a, b, c მოცემულებით შესაბამისი კუთხეების მნიშვნელობების $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$-ს განსაზღვრა და შექცეულადაც. ამრიგად, ჩვენ მივადგებით $\Pi(x)$ ფუნქციის ანალიზური გამოსახვის x არგუმენტით მოძებნის ამოცანას, $\Pi(x)$ ფუნქციის მოძებნას, როგორც ლობაჩევსკი ამბობს. მას კარგად ესმოდა, რომ (12), (13), (14) განტოლებები კონკრეტულ მნიშვნელობებს მიიღებს მხოლოდ იმის შემდეგ, როცა ეს ფუნქცია იქნება მოძებნილი. ამას იგი მთავარ ყურადღებას აქცევდა და შესძლო კიდეც მისი შესრულება, დაეყრდნო რა (12), (13), (14) განტოლებებს, ლობაჩევსკიმ უჩვენა, რომ ფუნქცია $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x)$ აკმაყოფილებს იმავე (8) ფუნქციონალურ განტოლებას, რომლითაც ის განისაზღვრება; სახელდობრ, x-ის ყველა მნიშვნელობასთან

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = q^{x}, \tag{16}$$

სადაც q მუდმივს აქვს იგივე მნიშვნელობა, რაც (7) განტოლებაში. (16) განტოლებას ჩვეულებრივად უწოდებენ ლობაჩევსკის გეომეტრიის ძირითად განტოლებას, რომლის საშუალებით ამოიხსნება მეტრული გეომეტრიის ყველა საკითხი; როდესაც ეს განტოლება მოძებნილი იქნა, დაწესდა ახალი „წარმოსახვითი გეომეტრიის“ ელემენტები. ლობაჩევსკის დარჩა q მუდმივის მნიშვნელობის მოძებნა. ამ

საკითხის გარდა კიდევ სხვა საკითხებიც აღმოცენდნენ, რომლებიც გაშუქებულ იქნენ ლობაჩევსკის შემდეგ მისი გეომეტრიის შემდგომი განვითარების პროცესში. რაც შეეხება q-ს მნიშვნელობას, ლობაჩევსკი ამ საკითხს სვამს „გეომეტრიის საწყისების" მეორე ნაწილში. ის აქ არჩევს ისარგებლოს K მუდმივით, რომელიც დაკავშირებულია q-თან და წარმოადგენს ამ უკანასკნელის ნატურალური ლოგარითმის შექცეულ რიცხვს, ასე რომ

$$K=\frac{1}{\ln q}, \qquad q=e^{\frac{1}{K}} \tag{17}$$

ევკლიდეს გეომეტრია შეესაბამება $q=1$ მნიშვნელობას, ე. ი. $K=\infty$ მნიშვნელობას. (16) განტოლება მიიღებს სახეს:

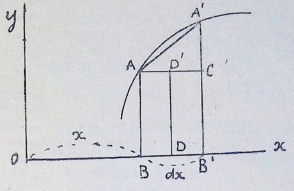
$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\,\Pi(x)=e^{\frac{x}{K}}. \tag{18}$$

შემდეგი მსჯელობები გამოდის იმ ფაქტიდან, რომ პარალელობის კუთხე $\Pi(x)$ განუსაზღვრელად უახლოვდება მართ კუთხეს, როდესაც x მიისწრაფის ნულისაკენ.

აქვს თუ არა ადგილი ჩვენს სივრცეში „წარმოსახვით" გეომეტრიას, ლობაჩევსკიმ ცდით შეამოწმა, გამოვიდა რა შემდეგი პრინციპიდან: ჩვენ ვიცით, რომ დილემა ევკლიდეს და ლობაჩევსკის არაევკლიდურ გეომეტრიებს შორის ექვივალენტურია იმისა, მართკუთხა სამკუთხედის შიგა კუთხეთა ჯამი $2d$-ს უდრის, თუ ნაკლებია $2d$-ზე. ამის შემოწმება უნდოდა ლობაჩევსკის ექსპერიმენტულად. ამისათვის იგი დაეყრდნო სამი უძრავი ვარსკვლავის პარალაქსებს და გამოთვალა კუთხეთა ჯამი სამკუთხედში, რომლის წვეროები იმყოფება დედამიწის ორბიტის ბოლოებში და ამ ვარსკვლავთაგან ერთ-ერთში. კერძოდ, შესრულა რა გამოთვლა იმ შემთხვევისათვის, როცა სამკუთხედის მესამე წვერო არის ვარსკვლავი სირიუსი, ლობაჩევსკი მივიდა იმ დასკვნამდე, რომ ეს ჯამი $2d$-გან განსხვავდება $0{,}000372''$-ზე ნაკლებით. ამ გამოთვლაში მას შეცდომა გაეპარა, ეს განსხვავება 100-ჯერ ნაკლებია. ასე რომ, ეს შედეგი საფუძვლად არ გამოდგება საკითხის ამოხსნისათვის, თუკი მხედველობაში მივიღებთ სამყაროს ზომას. ამდენად ევკლიდეს გეომეტრიის მართებულობაში რწმენა უკვე შეირყა.

მრუდის სიგრძის ელემენტის (დიფერენციალის) გამოსათვლელად ლობაჩევსკი განიხილავს, როგორც ეს ხდება ჩვეულებრივ გეომეტრიაში, მრუდის ორ ძალიან ახლო წერტილს A და A' (ნახ.

47) და გამოდის იქიდან, რომ AA' რკალის სიგრძისა და მისი მომჭიმავი ქორდის სიგრძის ფარდობა მიისწრაფის ერთისაკენ, როდესაც ისინი მიისწრაფვიან ნულისაკენ. ახლა ავაგოთ $A(x, y)$ და $A'(x+dx, y+dy)$ წერტილების პროექციები აბსცისათა ღერძზე AB და $A'B'$ მართობების საშუალებით. აბსცისის ნამატი BB' აღვნიშნოთ dx-ით. $B'A'$-ზე მოვზომოთ მონაკვეთი $B'C=BA$ ისე, რომ მონაკვეთი CA' გვაძლევდეს ორდინატის შესაბამის dy ნამატს. მონაკვეთი AC აღვნიშნოთ dx'. ოთხკუთხედი $ABB'C$ არსებითად განსხვავდება ევკლიდეს სიბრტყის მართკუთხედისაგან. BB' ფუძესთან კუთხეები მართია, მაგრამ AC ფუძესთან — მახვილი, რადგან ისინი ტოლია და მათი ჯამი $2d$-ზე ნაკლებია. ამასთან ერთად $dx' > dx$, ვინაიდან



ნახ. 47.

აბსცისისადმი AB და AB' მართობები ერთმანეთს შორდება, რადგანაც შორდება აბსცისათა ღერძს. თუ მართკუთხედის BB' და AC ფუძეების შუა წერტილებს D და D' შევაერთებთ, მაშინ ადვილად შევამჩნევთ, რომ DD' წრფე მართობია როგორც BB'-ის, ისე CA-სი. ამასთან ერთად $DD'CB'$ ოთხკუთხედი თავისი აგებულებით არ განსხვავდება $DD'AB$ ოთხკუთხედისაგან; მონაკვეთები $DB'=\frac{1}{2}\,dx$ და $D'C=\frac{1}{2}\,dx'$ აქ ცვლიან x და x'.

ლობაჩევსკის გამოჰყავს ასეთი ტოლობა:

$$\cos \Pi\left(\frac{1}{2}\,dx\right) = \cos \Pi\left(\frac{1}{2}\,dx'\right) \sin \Pi(y'),$$

სადაც y' არის DD' მონაკვეთი. რამდენადაც dx და dx' მონაკვეთები უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ

$$dx = dx' \sin \Pi(y').$$

თუ dx მონაკვეთი ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ y' აშკარად მიისწრაფვის y-კენ და ფარდობა $dx' : dx$ მიისწრაფვის $\frac{1}{\sin \Pi(y)}$ ზღვარისაკენ, ამიტომ მეორე რიგის უსასრულო მცირემდე სიზუსტით

$$dx' = \frac{dx}{\sin \Pi(y)} . \tag{19}$$

მეორე მხრით, როდესაც dx ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ ჩვენ ოთხკუთხედის A და C წვეროებთან კუთხეებიდან თითოეული მიისწრაფვის d-კენ. ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ACA' როგორც მართკუთხა სამკუთხედი უსასრულოდ მცირე გვერდებით. აღვნიშნავთ რა AA'-ს ds-ით, ამასთან შესაბამისად გვექნება

$$ds^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}, \text{ ანუ } ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}} . \tag{22}$$

მსგავს მსჯელობით ლობაჩევსკი გვაძლევს აგრეთვე ფართობისა და მოცულობის ელემენტებს შემდეგი სახით: ფართობის ელემენტი

$$d\sigma = \frac{dx\, dy}{\sin \Pi(y)} ; \tag{23}$$

მოცულობის ელემენტი

$$dv = \frac{dx\, dy\, dz}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} .$$

5. ჟოზეფ ფურიე და პუასონი

გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი ფურიე (1768 — 1830) მუშაობდა პოლიტექნიკურ სკოლაში 1796 წლიდან 1798 წლამდე. მონაწილეობა მიიღო ნაპოლეონის მიერ მოწყობილ ეგვიპტის ექსპედიციაში. 1802 წელს გახდა იზერის დეპარტამენტის პრეფექტი. 1817 წელს დაბრუნდა პარიზში, სადაც მეცნიერულ მოღვაწეობას ეწეოდა; აქ მან თავის გარშემო შემოიკრიბა ნიჭიერი ახალგაზრდობა, რომელთა შორის იყო აგრეთვე დირიხლე.

ფურიეს კლასიკურ ნაშრომს წარმოადგენს „სითბოს ანალიზური თეორია“, რომლის წერა დაიწყო 1807 წელს, მაგრამ გამოაქვეყნა მხოლოდ 1822 წელს. ნაშრომში ნახმარია ტრიგონომეტრიული მწკრივები და ინტეგრალები, რომლებსაც მისმა მოწაფეებმა მის პატივსაცემად უწოდეს ფურიეს მწკრივები და ინტეგრალები. მას გამოჰყავს აგრეთვე სითბოგამტარობის განტოლება

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

და ახდენს მის ინტეგრებას სხვადასხვა კერძო სასაზღვრო პირობებში; საზღვრებზე შეიძლება იყოს მოცემული ან v-ს მნიშვნელობები, ან $\frac{\partial v}{\partial n}$-ის მნიშვნელობები, ან $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial n}$-ის მნიშვნელობები. ამ განტოლების ინტეგრებისათვის იძებნება შესაფერი კერძო ამონახსნები, რომელთა ჯამი წარმოადგენს ზოგად ამონახსნს; ამრიგად, მუდამ გამოყენებულია მწკრივად დაშლის მეთოდი. ახლაც ფურიეს სახელს ატარებს ჩვეულებრივი ტრიგონომეტრიული მწკრივები

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

თუმცა ესენი ცნობილი იყვნენ და იყენებდნენ ფურიემდეც. ფურიე იყენებდა უფრო რთულ მწკრივებსაც, მაგალითად

$$f(x) = \sum (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x),$$

სადაც λ განისაზღვრება უფრო რთული პირობით, როგორიცაა $\operatorname{tg} \lambda\pi = a\lambda$ (a დადებითი მუდმივია); ამ პირობას აკმაყოფილებს λ-ს უსასრულოდ მრავალი მნიშვნელობა. ფურიეს სახელს ატარებს აგრეთვე მოცემული ფუნქციის გამოსახვა ინტეგრალის საშუალებით, რომელიც მიიღება მწკრივიდან როგორც ზღვარი ინტერვალის გადიდებისას:

$$f(x) = \int [a(\varkappa) \cos \varkappa x + b(\varkappa) \sin \varkappa x]\, dx.$$

ფურიეს წამოწყებულმა გამოკვლევებმა დღემდე შეინარჩუნეს თავიანთი მნიშვნელობა მათემატიკურ ფიზიკასა და თეორიულ მათემატიკაში.

ს ი მ ო ნ დ ე ნ ი პ უ ა ს ო ნ ი (1781 — 1840) იყო პოლიტექნიკური სკოლის ჯერ მოწაფე და შემდეგ პროფესორი. მის „მექანიკის

კურსს“ დღესაც არ დაუკარგავს თავისი მნიშვნელობა. მას ეკუთვნის გადასვლა ლაგრანჟის მიერ ხმარებული q_i სიჩქარის კოორდინატებიდან იმპულსის $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial q_i}$ კოორდინატებისაკენ, რომლებმაც გაცილებით უფრო მოხერხებული სახე მისცეს მექანიკის ყველა დამოკიდებულებას. ზოგი რამ მისი აღმოჩენებიდან დღესაც მის სახელს ატარებს: პუასონის ფრჩხილი მექანიკაში, პუასონის კონსტანტები დრეკადობის თეორიაში, პუასონის ინტეგრალი პოტენციალის თეორიაში, პუასონის განტოლება $\Delta V = -4\pi\rho$, რომელიც მან დაადგინა მიზიდული სხეულის შიგნით მოთავსებული სივრცისათვის, განაზოგადა რა ლაპლასის განტოლება $\Delta V=0$, სამართლიანი გარეგანი სივრცისათვის. პუასონის კალამს ეკუთვნის 300 შრომა.

6. ოგიუსტენ ლუი კოში

ოგიუსტენ ლუი კოში დაიბადა პარიზში 1789 წელს. ახალგაზრდობა იქვე გაატარა. სწავლობდა პოლიტექნიკურ სკოლაში, რომლის დამთავრების შემდეგ მუშაობდა გზათა ინჟინრად შერბურგში. შერბურგიდან დაბრუნდა პარიზში 1813 წელს. 1816 წლიდან კოში მუშაობდა პარიზის აკადემიის წევრად და პოლიტექნიკური სკოლის პროფესორად, მაგრამ ივლისის რევოლუციის შემდეგ, 1830 წელს, იძულებული გახდა, როგორც კლერიკალურ-ლოიალისტურად განწყობილი პოლიტიკურ საკითხებში, გამგზავრებულიყო ემიგრაციაში ბურბონებთან ერთად. ემიგრანტობა მან გაატარა პრაღასა და ტურინში, სადაც პირველ ხანებში ჰერცოგ ბორდოსელის აღმზრდელი იყო. 1838 წელს კოში ისევ პარიზში დაბრუნდა, მაგრამ სახელმწიფო თანამდებობის დაკავება არ შეეძლო, რადგანაც ახალ რეჟიმთან ცუდ დამოკიდებულებაში იყო, ამიტომ იძულებული გახდა დაკმაყოფილებულიყო მხოლოდ მასწავლებლობით იეზუიტთა სკოლაში. მხოლოდ ახალი რევოლუციის შემდეგ, 1848 წელს, მიიღო ადგილი სორბონში. გარდაიცვალა კოში 1857 წელს.

მათემატიკაში მისი ბრწყინვალე შედეგების გამო ფელიქს კლაინმა კოში დააყენა გაუსის გვერდით. კოშის დაწერილი აქვს 789 ნაშრომი. გასულ საუკუნეში პარიზის მეცნიერებათა აკადემიამ გამოსცა კოშის ნაშრომების სრული კრებული ორ სერიად, რომელიც დაახლოებით 12 ათას გვერდს შეიცავს (Oeuvres complètes d'Augistin Cau hy).

პირველ რიგში შევეხოთ მის „ანალიზის კურსს“ ანუ „ალგებრულ ანალიზს“ [Cours d'analyse de L'École Royale Polytechnique (Analyse algebrique). Oeuvres.., IIRe série—tome III. Paris, 1821].

ნაშრომი შეადგენს მთლიანად მესამე ტომს. წინასიტყვაობაში კოში წერს: „ზოგიერთმა პირმა, რომლებიც ხელმძღვანელობას მიწევდნენ სამეცნიერო კარიერისაკენ პირველი ნაბიჯების გადადგმის დროს, რომელთა შორის მადლობით ვიხსენიებ ლაპლასსა და პუასონს, მოისურვეს პოლიტექნიკური სკოლისათვის ჩემი „ანალიზის კურსის“ გამოქვეყნება. მე გადავწყვიტე ისე დამეწერა ეს კურსი, რომ ის მეტად სასარგებლო ყოფილიყო მოსწავლეთათვის. ამ ნაშრომს ვუწოდებ აგრეთვე ალგებრულ ანალიზს“...

„ანალიზის კურსი“ შედგება 12 თავისაგან.

თავი I — ნამდვილი ფუნქციები. თავი II — უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე სიდიდეები, უწყვეტ ფუნქციათა შესახებ; ფუნქციათა ერთადერთი მნიშვნელობები ზოგიერთ კერძო შემთხვევებში. თავი III — სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ფუნქციები, ამ ფუნქციათა გამოყენება რამდენიმეუცნობიანი პირველი ხარისხის განტოლების ამოხსნაში, ჰომოგენური ფუნქციები. თავი IV — მთელ ფუნქციათა განსაზღვრა იმის შემდეგ, რაც რამდენიმე კერძო მნიშვნელობა ცნობილია. თავი V — განსაზღვრა ერთი ცვლადის ფუნქციისა, რომელიც აკმაყოფილებს რაღაც პირობებს. თავი VI — კრებადი და განშლადი მწკრივები (ნამდვილი), კრებადობის წესი, რომელიმე კრებადი მწკრივის შეჯამება. თავი VII — კომპლექსურ სიდიდეთა და მათი მოდულების გამოსახვა. თავი VIII — ცვლადებისა და წარმოსახვით ფუნქციათა შესახებ. თავი IX — კრებადი და განშლადი წარმოსახვითი მწკრივები; ზოგიერთი წარმოსახვითი კრებადი მწკრივის შეჯამება; აღნიშნებით სარგებლობა იმ წარმოსახვითი ფუნქციების გამოსასახავად, რომლებსაც პოულობენ ამავე მწკრივების შეჯამების დროს. თავი X — ნამდვილი ანუ წარმოსახვითი ფესვების შესახებ იმ ალგებრული განტოლებებისა, რომელთა პირველი წევრი არის ერთი ცვლადის რაციონალური და მთელი ფუნქცია; ამგვარი ფუნქციების ამოხსნა ალგებრაში ან ტრიგონომეტრიაში. თავი XI — რაციონალური წილადის დაშლა. თავი XII — რეკურენტული მწკრივები.

ამის შემდეგ მოთავსებულია „შენიშვნები ალგებრული ანალიზისადმი“. შენიშვნა I — დადებით და უარყოფით სიდიდეთა თეო-

რიის შესახებ. შენიშვნა II — იმ ფორმულების შესახებ, რომლებიც გამომდინარეობენ $>$ ან $<$ ნიშნების გამოყენებიდან და მრავალ სიდიდეს შორის საშუალოების შესახებ. შენიშვნა III — განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნა. შენიშვნა IV — ფუნქციის შესახებ. შენიშვნა V — ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა. შენიშვნა VI — ნაკვთითი რიცხვები. შენიშვნა VII — ორმაგი მწკრივები. შენიშვნა VIII — იმ ფორმულების შესახებ, რომელთა საშუალებით სინუსი ან კოსინუსი გადაიქცევა რკალის მრავალწევრად, რომლის სხვადასხვა წევრის კოეფიციენტებია იმავე რკალის სინუსი ან კოსინუსი აღმავალ ხარისხში.

პირველ თავში განხილულია ელემენტარული ფუნქციები. აქ მოთავსებულია ფუნქციის განსაზღვრა, რომელიც კოშიმ პირველად მოგვცა იმ სახით, რა სახითაც მას ახლა ვხმარობთ: „თუ ორი ცვლადი სიდიდე ისეა ერთმანეთთან შებმული, რომ ერთი მათგანის მოცემული მნიშვნელობისათვის შეიძლება მეორის მნიშვნელობის გამოყვანა ანუ, მარტივად რომ ვთქვათ, ეს სიდიდეები შეიძლება გამოისახოს ერთი მათგანის საშუალებით, რომელიც დამოუკიდებელი ცვლადის სახელწოდებას მიიღებს; მეორე სიდიდე კი გამოისახება დამოუკიდებელი ცვლადით, რომელსაც ეწოდება ამ ცვლადის ფუნქცია".

მეორე თავის პირველ პარაგრაფში (გვ. 37) მოცემულია უსასრულოდ მცირის მკაცრი განსაზღვრა: „ამბობენ, რომ ცვლადი სიდიდე უსასრულოდ მცირეა, თუ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა იცვლება ისე, რომ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როგორც ზღვარისაკენ" (On dit qu'une quantitè variable devient infiniment petite, lorsque sa valeure numerique decroit indèfiniment de manière à converger vers la limite zèro).

ამავე თავში (გვ. 38) მოცემულია აგრეთვე უსასრულოდ დიდის განსაზღვრა: „ამბობენ, რომ ცვლადი სიდიდე უსასრულოდ დიდია, თუ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა იზრდება ისე, რომ მიისწრაფვის ∞-კენ, როგორც ზღვარისაკენ".

ამის შემდეგ რამდენიმე თეორემა მიძღვნილია უსასრულოდ მცირის თვისებებისადმი.

მეორე პარაგრაფის 43-ე გვერდზე მოცემულია ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრა: „ფუნქცია უწყვეტია x-ის მნიშვნელობისათვის მოცემულ საზღვრებს შორის, თუ ამ საზღვრებს შორის ცვლადის უსასრულოდ მცირე ნამატი ყოველთვის წარმოშობს ამ ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნამატს" (La fonctions $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle — même). ეს განსაზღვრა მას განმეორებული აქვს მეორე სერიის XIV ტომში (368-ე გვერდზე).

მეექვსე თავში გადმოცემულია მწკრივების შესახებ მოძღვრების თანამიმდევრობითი განვითარება. კოში მწკრივს უწოდებს უსასრულო მიმდევრობას u_0, u_1, u_2, u_3,... მოცემულია კრებადობის სხვადასხვა მკაცრი კრიტერიუმი. ამ თავში, როგორც კლაინი აღნიშნავს, კოში არც ერთხელ არ მიმართავს მაშინ გავრცელებულ ბუნდოვან ცნებებს უსასრულო ჯამების შესახებ და სხვა. მას საქმე აქვს სასრულ რიცხვით ჯამებთან, რომლებიც უახლოვდებიან განსაზღვრულ მნიშვნელობას ხარისხში, რომელიც შეიძლება ზუსტად გაიზომოს მკაცრად შეფასებადი ნაშთი წევრის საშუალებით. ამ თავის პირველი პარაგრაფი იწყება საერთოდ მწკრივის, მისი ჯამის, კრებადი და განშლადი მწკრივის განსაზღვრით. განხილულია უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია, როგორც ერთ-ერთი კრებადი და ჰარმონიული მწკრივი, როგორც განშლადი მწკრივი. ეს პარაგრაფი მთავრდება შემდეგი არასწორი თეორემით (რაც კლაინმა შენიშნა პირველად), თუ $u_0, u_1, u_2,\ldots$ მწკრივის წევრები x ცვლადის ფუნქციებია, რომლებიც უწყვეტია ამ ცვლადის რომელიმე კერძო მნიშვნელობის მიდამოში, რომლისათვის მწკრივი კრებადია, მაშინ მწკრივის ჯამიც ამ კერძო მნიშვნელობის მიდამოში x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია იქნება". ცხადია, კოშის მიერ მოცემული ამ თეორემის დამტკიცება არ არის სწორი.

მეორე პარაგრაფში კოში განიხილავს დადებითწევრებიან მწკრივებს და პირველი თეორემის სახით მოჰყავს დადებითწევრებიანი მწკრივის კრებადობის ნიშანი: „მოვძებნოთ ზღვარი ან ზღვრები, რომლისაკენ მიისწრაფვის გამოსახულება $(u_n)^{1/n}$, როცა n განუზღვრელად იზრდება, და აღვნიშნოთ K-თი ამ ზღვრებიდან უდიდესი. მწკრივი u_0, u_1, u_2, ..., u_n კრებადი იქნება, თუ $K<1$ და — განშლადი, თუ $K>1$ (გვ. 121).

ეს თეორემა და მისი დამტკიცება განმეორებულია მეორე სერიის X ტომის 49-ე გვერდზე: „ვთქვათ Ω არის ზღვარი ანუ უდიდესი იმ ზღვრებთაგან, რომლებისაკენ მიისწრაფვის, როცა n

უსასრულოდ იზრდება, n-ური ხარისხის ფესვი u_n-დან $(u_n)^{1/n}=\sqrt[n]{u_n}$. მწკრივი კრებადი იქნება, თუ $\Omega < 1$ და — განშლადი, თუ $\Omega > 1$“.

მწკრივის კრებადობის ზოგად ნიშანს კი კოში გვაძლევს მეორე სერიის VII ტომში 267-ე გვერდზე: „ვთქვათ,

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots \tag{1}$$

მწკრივის წევრებია ნამდვილი ანუ წარმოსახვითი და

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \tag{2}$$

არის პირველი n წევრების ჯამი, n აღნიშნავს რომელიმე მთელ რიცხვს. თუ n-ის ზრდადი მნიშვნელობისათვის s_n ჯამი უსაზღვროდ უახლოვდება რომელიმე s ზღვარს, მაშინ ვამბობთ, რომ მწკრივი კრებადია და ეს ზღვარი იქნება ის, რასაც ეწოდება მწკრივის ჯამი. პირიქით, როცა n უსასრულოდ იზრდება, s_n ჯამი არ უახლოვდება არავითარ ზღვარს, მწკრივი განშლადი იქნება და ჯამი არ ექნება. ამ დებულების შემდეგ, (1) მწკრივი რომ კრებადი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, ჯამების მნიშვნელობები

$$s_n,\quad s_{n+1},\quad s_{n+2},\ldots$$

შესაბამისი n-ის ძალიან დიდი მნიშვნელობების, ძალიან მცირედ განსხვავდებოდნენ ერთი მეორისაგან; სხვა სიტყვებით, აუცილებელი და საკმარისია, რომ სხვაობა

$$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+m-1}$$

რაგინდ მცირე გახდეს, როცა n რიცხვს მივანიჭებთ საკმაოდ დიდ მნიშვნელობას, ხოლო m არის ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. (Oéuvres... tome VII, გვ. 267).

დავუბრუნდეთ ახლა ისევ პირველი სერიის მესამე ტომს. მესამე თეორემაში კოში ამტკიცებს, რომ, თუ მწკრივი

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots u_n,\ldots, \tag{1}$$

რომლის ყოველი წევრი მის წინა წევრზე ნაკლებია, კრებადია, მაშინ

$$u_0,\ 2u_1,\ 4u_3,\ 8u_7,\ 16u_{15},\ldots \tag{2}$$

მწკრივიც კრებადია; და თუ (1) მწკრივი განშლადია, მაშინ (2) მწკრივიც განშლადია.

ამ თეორემის შედეგად განხილულია

$$1,\ \frac{1}{2\mu},\ \frac{1}{3\mu},\ \frac{1}{4\mu},\ldots$$

მწკრივის კრებადობისა და განშლადობის შემთხვევები.

მესამე პარაგრაფში, რომელიც მიძღვნილია ნიშანცვლადი მწკრივებისადმი, დამტკიცებულია ექვსი თეორემა. განხილულია ნიშანცვლადი მწკრივი

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,u_n,\ldots \tag{1}$$

და მისი წევრების აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ldots,\rho_n,\ldots. \tag{2}$$

პირველი თეორემა შემდეგია: „(1) მწკრივის ზოგადი u_n წევრის აბსოლუტური სიდიდე იყოს ρ_n და K-თი აღვნიშნოთ $(\rho_n)^{1/n}$ გამოსახულების უდიდესი ზღვარი, როცა n უსასრულოდ იზრდება. (1) მწკრივი კრებადი იქნება, თუ $K<1$, და — განშლადი, თუ $K>1$“.

მეოთხე თეორემა იმაში მდგომარეობს, რომ, თუ დადებით-წევრებიანი მწკრივი

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ldots,\rho_n,\ldots$$

კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება მწკრივები

$$\rho_0\cos\theta_0,\ \ \rho_1\cos\theta_1,\ \ \rho_2\cos\theta_2,\ldots,\rho_n\cos\theta_n,\ldots,$$

$$\rho_0\sin\theta_0,\ \ \rho_1\sin\theta_1,\ \ \rho_2\sin\theta_2,\ldots,\rho_n\sin\theta_n,\ldots$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2,\ldots\theta_n,\ldots$ მნიშვნელობები. ეს თეორემა მოყვანილია დაუმტკიცებლად.

მეხუთე თეორემაში კოში ამტკიცებს, რომ თუ ორი

$$\begin{aligned} &u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,u_n,\ldots,\\ &v_0,\ v_1,\ v_2,\ldots v_n,\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

კრებადი მწკრივის ჯამებია შესაბამისად s და s', მაშინ

$$u_0+v_0,\ \ u_1+v_1,\ \ u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n,\ldots \tag{2}$$

იქნება ახალი კრებადი მწკრივი, რომლის ჯამი იქნება $s+s'$.

მეოთხე პარაგრაფი მიძღვნილია ხარისხოვანი მწკრივისადმი

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ldots a_nx^n,\ldots, \tag{1}$$

სადაც კოეფიციენტები

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n$$

ან დადებითია, ან უარყოფითი. დალამბერის ნიშნის გამოყენებით კოშის გამოჰყავს ამ მწკრივის კრებადობის ნიშანი რომელიმე შუალედში. შემდეგ, როგორც კერძო შემთხვევები, განხილულია რამდენიმე ხარისხოვანი მწკრივი და მოძებნილია მათი კრებადობის შუალედი.

მესამე თეორემაში დაუმტკიცებლად მოყვანილია, რომ თუ მწკრივები

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2, \ldots, a_nx^n, \ldots,$$
$$b_0,\ b_1x,\ b_2x^2, \ldots, b_nx^n, \ldots$$

კრებადია x ცვლადის რომელიმე მნიშვნელობისათვის და მათი ჯამია შესაბამისად s და s', მაშინ მწკრივი

$$a_0+b_0,\ (a_1+b_1)x,\ (a_2+b_2)x^2, \ldots, (a_n+b_n)x^n, \ldots$$

კრებადია და მისი ჯამი იქნება $s+s'$.

ეს თავი მთავრდება ფუნქციათა მწკრივად დაშლის პრობლემებით. მოცემულია e^x, A^x, $\ln(1+x)$ და $\ln\frac{1}{1-x}$ ფუნქციების მწკრივად დაშლა. ამასთან საგულისხმოა, რომ კოში აღნიშნავს, რომ

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots \quad (x=\pm\infty) \qquad (1)$$

ტოლობამდე მისვლა შეიძლება, თუ კი მწკრივს

$$1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1\cdot2},\ \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}, \ldots \qquad (2)$$

განვიხილავთ როგორც კრებადს x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის და მოვძებნით x-ის ფუნქციას, რომელიც ამ მწკრივის ჯამს წარმოადგენს. ამისათვის კოში დაუშვებს, რომ $\varphi(x)$ არის იმ მწკრივის ჯამი, რომლის ზოგადი წევრია

$$\frac{x^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n};$$

$\varphi(y)$ იქნება იმ მწკრივის ჯამი, რომლის ზოგადი წევრია

$$\frac{y^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}.$$

ამ ორი ჯამის ნამრავლი იქნება ახალი მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\,\frac{y}{1}+\cdots+\frac{x}{1}\,\frac{y^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}+$$
$$+\frac{y^n}{1\cdot 2\cdots n}=\frac{(x+y)^n}{1\cdot 2\cdots n}.$$

მაშასადამე, ეს კი ტოლია $\varphi(x+y)$-ის და თუ ვიგულისხმებთ, რომ

$$\varphi(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\varphi(x)\,\varphi(y)=\varphi(x+y),$$

ამ განტოლების ამოხსნის შემდეგ დავასკვნით,

$$\varphi(x)=[\varphi(1)]^x=\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{12}+\frac{1}{1\cdot 23}+\cdots\right)^x,$$

ესე იგი

$$\varphi(x)=e^x.$$

მეშვიდე თავი მიძღვნილია კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისადმი. პირველი პარაგრაფი იწყება „სიმბოლური გამოსახვის“ (expression symbolique) განსაზღვრით. გამოსახულებას $a+b\sqrt{-1}$, რომელსაც ჩვენ ახლა ვუწოდებთ კომპლექსურ რიცხვს, კოში უწოდებს „წარმოსახვით გამოსახულებას“ (expression imaginaire). კოში არ სარგებლობს გაუსის შემოყვანილ i ნიშნით $\sqrt{-1}$-ის აღსანიშნავად. ამ თავში და აგრეთვე მერვე თავშიც გადმოცემული ყველა საკითხი ცნობილი იყო კოშამდე, ხოლო მეცხრე თავში ვპოულობთ კოშის შემოქმედებითი მუშაობის შედეგებს, დაწყებულს მეორე პარაგრაფიდან (გვ. 239, 240 და სხვ.): „ერთი ცვლადის წარმოსახვითი მწკრივები ზრდადი ხარისხების მთელი მაჩვენებლებით“. განხილულია მწკრივი

$$a_0+b_0\sqrt{-1},\ (a+b\sqrt{-1})x,\ (a_2+b_2\sqrt{-1})x^2,\ \ldots,(a_n+b_n\sqrt{-1})x^n,$$

სადაც

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n,\ \ldots,b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,b_n,\ \ldots$$

მუდმივებია. იმ შემთხვევაში, როცა $b_0==b_1=\cdots=b_n=\cdots=0$, მაშინ მწკრივს ექნება სახე:

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ \ldots,a_nx^n,\ \ldots \tag{1}$$

თუ დავუშვებთ,

$$x = z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \tag{2}$$

სადაც z აღნიშნავს ნამდვილ ცვლადს და θ ნამდვილ რკალს, მწკრივი მიიღებს სახეს:

$$a_0, \quad a_1 z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \quad a_2 z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta), \ldots,$$
$$a_n z^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta), \ldots \tag{3}$$

ვთქვათ, A არის უდიდესი იმ ზღვრებში, რომლებისაკენ მიისწრაფვის n-ური ხარისხის ფესვი a_n-ის მოდულიდან. უდიდესი იმ ზღვრებში, რომლისაკენ მიისწრაფვის

$$a_n x^n = a_n z_n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta)$$

გამოსახულების მოდულის n-ური ფესვი ეკვივალენტური იქნება Az ნამრავლის რიცხვითი მნიშვნელობისა. ამის გამო (3) მწკრივი იქნება კრებადი ან განშლადი იმის მიხედვით, თუ Az-ის რიცხვითი მნიშვნელობა ნაკლები ან მეტია ერთზე. აქედან, როგორც კოში ამბობს, უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 1. მწკრივი (3) კრებადია z-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აღებულია

$$z = -\frac{1}{A}, \quad z = +\frac{1}{A}$$

საზღვრებს შორის და განშლადია z-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც ამ საზღვრებს გარეთ არიან. ესე იგი (1) მწკრივი კრებადია ან განშლადი, თუ x-ის წარმოსახვითი მოდული ნაკლებია ან მეტი $\frac{1}{A}$-ზე. როგორც ვხედავთ, ამ თეორემით კოში ადგენს, რომ ხარისხოვან მწკრივს კომპლექსურ არეში აქვს თავისი კრებადობის წრე.

ამის შემდეგ, როგორც ამ თეორემის პირველი შედეგი, მოყვანილია, რომ თუ (1) მწკრივი კრებადია x ცვლადის რომელიმე ერთი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, მაშინ ის კრებადია x-ის ყველა წარმოსახვითი მნიშვნელობისათვის, რომელთა მოდული ნაკლები იქნება ამ ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტურ სიდიდეზე. თვით თეორემის ამ შედეგის გამოყენებას კოში უჩვენებს ოთხ მაგალითზე:

$$1, \ x, \ x^2, \ \cdots, \ x^n, \ldots \tag{4}$$

$$1, \ \frac{\mu}{1}x, \ \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2, \ldots, \ \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n, \ldots \tag{5}$$

$$1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1\cdot 2},\ldots,\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},\ldots \tag{6}$$

$$x,\ -\frac{x^2}{2},\ldots,\ \pm\frac{x^n}{n},\ldots \tag{7}$$

(5)-ში μ აღნიშნავს რომელიმე სიდიდეს. (4), (5) და (7) მწკრივები კრებადია x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია $x=-1$ და $x=+1$ შორის; (6) მწკრივი კი კრებადია x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის. თუ ამ მწკრივებში x-ის ნამდვილი მნიშვნელობის ნაცვლად ჩავსვამთ

$$x = z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

მაშინ მიღებული მწკრივებიდან პირველი ორი და უკანასკნელი კრებადი იქნება z-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია

$$z=-1 \text{ და } z=+1 \text{ შორის.}$$

უკანასკნელის წინა მწკრივი კი ყოველთვის კრებადი იქნება, როგორიც არ უნდა იყოს z-ის ნამდვილი მნიშვნელობა. იმ შემთხვევაში, როცა ცვლადი ღებულობს მნიშვნელობას $z=-1$ და $z=+1$ შორის, კოში პოულობს, რომ

$$1+\frac{\mu}{1}z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}z^2(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta)+$$

$$+\cdots=[1+z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^{\mu};\quad z=-1,\quad z=+1.$$

ამის შემდეგ, იპოვა რა ტოლობა

$$1+\frac{z}{1}(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)+\frac{z^2}{1\cdot 2}(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta)+\cdots=$$

$$=e^z\cos\theta\,[\cos(z\sin\theta)+\sqrt{-1}\sin(z\sin\theta)]$$

$$(z=-\infty,\quad z=+\infty),$$

იგი გვაძლევს სინუსისა და კოსინუსის დაშლას მწკრივად.

მეათე თავში კოში მკაცრად ამტკიცებს ალგებრის ძირითად თეორემას.

მრავალი ნაშრომი მიუძღვნა კოშიმ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის ამოცანას. ეს დარგი მან მრავალმხრივ და სხვა-

დაახვა მიმართულებით დაამუშავა. მან პირველმა მოგვცა დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისა და კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა ამონახსნების არსებობის დამტკიცების მკაცრი მეთოდები. ამ მეთოდებში უაღრესად მნიშვნელოვანია მის მიერ „ზღვართა აღრიცხვად“ წოდებული მეთოდი. ეს უკანასკნელი გადმოცემულია პირველი სერიის VII ტომში მოთავსებულ სამ ნაშრომში: 1) „მემუარი ზღვართა ახალი აღრიცხვის გამოყენების შესახებ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრებაში“ (გვ. 5, „Mémoires sur l’emploi du nouveau calcul, appele calcul des limites, dans l’intégration d’un systeme d’equations différentielles“). 2) „მემუარი ზღვართა აღრიცხვის გამოყენების შესახებ კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა ინტეგრებაში“ (გვ. 17, „Mémoire sur l’emploi du calcul des limites dans ’integration des équations aux dérivées partiells“). 3) „მემუარი ზღვართა აღრიცხვის გამოყენების შესახებ კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა სისტემის ინტეგრებაში“ (გვ. 33, „Mémoire sur l’application du calcul de limites à l’integration d’un système d’équations aux dérivées partielles“).

თეორემა 11. 1-ლი თეორემის თანახმად, ξ, η, ζ-ს და თვით $F(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ მნიშვნელობები კრებად მწკრივად დაიშლება $(\tau-t)$-ს აღმავალი ხარისხების მიხედვით, თუ $(\tau-t)$-ს მოდული i აკმაყოფილებს პირობას

$$tI\left(I-\frac{i}{I}\right)<\int_0^r\left(I-\frac{\chi}{X}\theta\right)\left(I-\frac{\tau}{Y}\theta\right)\left(I-\frac{L}{Z}\theta\right)\ldots d\theta, \qquad (14)$$

მაშინ, იმის შემდეგ, რაც ვიპოვით იმ მწკრივის რამდენიმე წევრს, რომელიც $F(\xi, \eta, \zeta\ldots)$-ს დაშლას წარმოადგენს $(\tau-t)$-ს აღმავალი ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ ნაშთს, რომლის მოდული ნაკლები იქნება იმ შესაბამის მწკრივის ნაშთზე, რომელიც ω-ს დაშლას წარმოადგენს i-ს აღმავალი ხარისხების მიხედვით.

ახლა განვიხილოთ კოშის უაღრესად მნიშვნელოვანი ნაშრომი, რომელიც მოთავსებულია მეორე სერიის IV ტომში. „ლექციები უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვაში“ („Résume de leçons, donneés a l’École Royale Polytechniqu esur le calcul infinitésimal II^e série“, tome IV, 1823) შედგება ორმოცი ლექციისაგან. აქ გადმოცემულია დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა.

დიფერენციალური აღრიცხვა. 1) ცვლადები, მათი ზღვრები და უსასრულოდ მცირე სიდიდეები. 2) უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციები. უწყვეტი ფუნქციების გეომეტრიული გამოსახულება. 3) ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებული. 4) ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალი. 5) რამდენიმე ფუნქციის ჯამის დიფერენციალი არის ამ ფუნქციების დიფერენციალების ჯამი. წარმოსახვითი ფუნქციების დიფერენციალი. 6) ფუნქციების დიფერენციალებითა და წარმოებულებით სარგებლობა მრავალი პრობლემის ამოხსნაში. ერთი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი. იმ წილადების მნიშვნელობა, რომლებიც ღებულობენ $\frac{0}{0}$ სახეს. 7) იმ ზოგიერთი გამოსახულების მნიშვნელობა, რომლებიც ღებულობენ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0,.. სახეს. 8) მრავალცვლადის ფუნქციის დიფერენციალი. კერძო წარმოებული და კერძო დიფერენციალი. 9) კერძო წარმოებულების გამოყენება რთულ ფუნქციათა გაწარმოებაში, არაცხადი ფუნქციების გაწარმოება. 10) თეორემა ერთგვაროვან ფუნქციათა შესახებ. მრავალცვლადის ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი. 11) განუსაზღვრელი კოეფიციენტების გამოყენება მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნაში. 12) ერთი ცვლადის ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებული და დიფერენციალი, დამოუკიდებელი ცვლადის შეცვლა. 13) მრავალცვლადის ფუნქციის სხვადასხვა რიგის დიფერენციალები. 14) საკუთარი მეთოდები მრავალი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალის მარტივად მოძებნისათვის. ამ დიფერენციალების სიმბოლური მნიშვნელობა. 15) დამოკიდებულება, რომელიც არსებობს ერთი ცვლადის ფუნქციისა და მისი სხვადასხვა რიგის წარმოებულს ანუ დიფერენციალს შორის. ამ დიფერენციალის გამოყენება მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნაში. 16) სხვადასხვა რიგის დიფერენციალების გამოყენება მრავალცვლადის ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნაში. 17) პირობა, რომელიც უნდა შესრულდეს რომელიმე სრული დიფერენციალისათვის ნიშნის შეუცვლელად იმ დროს, როცა იცვლება მნიშვნელობები, მიღებული დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალის მიერ. 18) იმ მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალი, რომლის არგუმენტები წარმოადგენენ სხვა ცვლადების წრფივ ფუნქციებს. ფუნქციათა დაშლა პირველი ან მეორე ხარისხის მარტივ

მამრავლებად. 19) სხვადასხვა რიგის წარმოებულებისა და დიფერენციალების გამოყენება მთელი ფუნქციების დაშლაში. 20) რაციონალური ფუნქციების დაშლა.

ინტეგრალური აღრიცხვა. 21) განსაზღვრული ინტეგრალი. 22) ფორმულები განსაზღვრული ინტეგრალის ზუსტი ან მიახლოებითი განსაზღვრისათვის. 23) განსაზღვრული ინტეგრალის დაშლა სხვა ინტეგრალებად. წარმოსახვითი განსაზღვრული ინტეგრალი. ნამდვილი განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული გამოსახულება. $\int$ ნიშნის ქვეშ ფუნქციის დაშლა ორის ნამრავლად, რომელთაგან ერთი ყოველთვის ინარჩუნებს იმავე ნიშანს. 24) განსაზღვრული ინტეგრალები, რომელთა მნიშვნელობები უსასრულოა ან განუსაზღვრელია. განუსაზღვრელი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა. 25) მარტივი განსაზღვრული ინტეგრალი. 26) განუსაზღვრელი ინტეგრალი. 27) განუსაზღვრელი ინტეგრალების სხვადასხვა თვისება. ამ ინტეგრალების მნიშვნელობათა განსაზღვრის მეთოდი. 28) იმ განუსაზღვრელი ინტეგრალების შესახებ, რომლებიც შეიცავენ ალგებრულ ფუნქციებს. 29) ინტეგრებისა და დიფერენციალური ბინომის მიყვანის შესახებ და იმავე გვარის ზოგიერთი სხვა დიფერენციალური ფორმულები. 30) იმ განუსაზღვრელი ინტეგრალების შესახებ, რომლებიც შეიცავენ მაჩვენებლიან, ლოგარითმულ და წრიულ ფუნქციებს. 31) განსაზღვრა და მიყვანა განუსაზღვრელი ინტეგრალისა, რომელშიც $\int$ ნიშნის ქვეშ ფუნქცია არის ორთა ნამრავლი, ტოლი სინუსისა და კოსინუსისა რომელიღაც ხარისხში. 32) განუსაზღვრელი ინტეგრალიდან გახსაზღვრულ ინტეგრალზე გადასვლა. 33) $\int$ ნიშნის ქვეშ გაწარმოება და ინტეგრება. ინტეგრება დიფერენციალური ფორმულისა, რომელიც შეიცავს მრავალ დამოუკიდებელ ცვლადს. 34) შედარება ორი მარტივი სახის ინტეგრალისა, რომლიდან ზოგიერთ შემთხვევაში მიიღება ორმაგი ინტეგრალი. 35) განსაზღვრული ინტეგრალის დიფერენციალი ერთი ცვლადის მიმართ, აღებული $\int$ ნიშნის ქვეშ ფუნქციაში და საინტეგრაციო საზღვრებში. სხვადასხვა რიგის ინტეგრალები ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის. 36) x ან $x+h$-ის რომელიმე ფუნქციის გარდაქმნა მთელ ფუნქციად x-ის ან h-ისა, რომლებზედაც დიდდება განსაზღვრული ინტეგრალები. ამ ინტეგრალის ტოლფასი გამოსახვა. 37) ტეილორისა და მაკლორენის თეორემები. ამ თეორემების გავრცელება მრავალცვლადის ფუნქციებზე. 37) მწკრივთა კრებადობის წესი. ამ წესის გამოყენება მაკლორენის მწკრივისადმი. 38) წარმოსახვითი მაჩვენებლები და ლოგარითმები. ამ მაჩვენებლე-

ბის გამოყენება განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალების განსაზღვრაში. 40) მწკრივის ინტეგრება. დამატება. 41) ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულების შესახებ.

შემდეგ კოში ისევ დიფერენციალურ აღრიცხვას უბრუნდება.

საერთოდ ეს ნაშრომი (ლექციები უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის შესახებ) მიძღვნილია უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დაფუძნების საკითხებისადმი. ის შეიცავს ამ დარგის მკაცრ გადმოცემას, „განთავისუფლებულს ყოველგვარი მეტაფიზიკისაგან და დაფუძნებულს ცნებაზე ზღვარზე გადასვლის შესახებ. საკითხები განხილულია მხოლოდ ნამდვილ არეში. პირველ ლექციაში დამტკიცებულია

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{და} \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e.$$

მეორე ლექციაში, რომელიც მიძღვნილია ფუნქციის უწყვეტობის და წყვეტილობის საკითხისადმი, კოში განსაზღვრავს ფუნქციის უწყვეტობას მოცემულ შუალედში: „როდესაც $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს ერთადერთ და სასრულ მნიშვნელობას x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, აღებულს ორ მოცემულ საზღვარს შორის, და სხვაობა

$$f(x+i)-f(x)$$

უსასრულოდ მცირე სიდიდეა i-სთან ერთად, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ არის x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია მოცემულ საზღვრებს შორის“ (გვ. 20.)

ამ ნაშრომში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მეშვიდე ლექციაში გადმოცემული თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ. ლექციაში განუსაზღვრელობათა სახეების განხილვის შემდეგ კოში გვაძლევს თეორემას: ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=x_0$ და $x=X$ საზღვრებს შორის. A-თი აღვნიშნოთ უმცირესი და B-თი უდიდესი იმ მნიშვნელობებიდან, რომლებსაც მიიღებს ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$ ამ შუალედში; მაშინ სასრული სხვაობათა ფარდობა

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \tag{1}$$

აუცილებლად იმყოფება A და B-ს შორის. სიმკაცრის თვალსაზრისით საინტერესოა ამ თეორემის კოშისეული დამტკიცება. ვთქვათ, δ და ε ძალიან მცირე სიდიდეებია და პირველი

მათგანი შერჩეულია ისე, რომ i-ს რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც δ-ზე ნაკლებია, და x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის, რომელიც იმყოფება x_0 და X საზღვრებს შორის, ფარდობა

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

ყოველთვის მეტი რჩება $f(x)-\varepsilon$-ზე და ნაკლები $f(x)+\varepsilon$-ზე. x_0 და X შორის ავიღოთ x-ის $n-1$ ახალი მნიშვნელობები

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-1},$$

მაშინ სხვაობა $X-x_0$ დაიყოფა ელემენტებად

$$x_1-x_0,\ \ x_2-x_1, \ldots, X-x_{n-1},$$

რომლებსაც აქვთ იგივე ნიშანი და δ-ზე ნაკლები რიცხვითი მნიშვნელობები; წილადები

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \ldots, \frac{f(x)-f(x_{n-1})}{x-x_{n-1}} \tag{2}$$

იმყოფება პირველი $f'(x_0)-\varepsilon$, $f'(x_0)+\varepsilon$ საზღვრებს შორის, მეორე $f'(x_1)-\varepsilon$, $f'(x)+\varepsilon$ საზღვრებს შორის,..., ყველა იქნება მეტი $A-\varepsilon$-ზე და ნაკლები $B+\varepsilon$-ზე. მაშინ (2) წილადების, რომელთა მნიშვნელებს აქვთ ერთი და იგივე ნიშანი, მრიცხველების ჯამი რომ გავყოთ მათი მნიშვნელების ჯამზე, მივიღებთ საშუალო წილადს; 1) გამოსახულება იმყოფება $A-\varepsilon$ და $B+\varepsilon$ საზღვრებს შორის. თუ ε-ს საკმაოდ მცირეს ავიღებთ, შეიძლება ვთქვათ, რომ (1) გამოსახულება იმყოფება A და B-ს შორის.

როგორც ამ თეორემის შედეგს, კოში შემდეგს გადმოსცემს: თუ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული უწყვეტია $x=x_0$, $x=X$ საზღვრებს შორის, როცა x იცვლება x_0-დან X-მდე, მაშინ $f'(x)$ ისე იცვლება, რომ ის ყოველთვის რჩება A და B მნიშვნელობებს შორის და შუალედებში მიმდევრობით მიიღებს ყველა მნიშვნელობას. მაშასადამე, მაშინ A და B შორის ყოველი სიდიდე იქნება $f'(x)$-ის მნიშვნელობა შესაბამისი x-ის მნიშვნელობისა, მოთავსებული x_0 და x_0+h საზღვრებს შორის, ანუ x-ის მნიშვნელობას ექნება სახე

$$x_0+\theta h = x_0+\theta(X-x_0),$$

სადაც $\theta<1$. გამოვიყენებთ რა ამ შენიშვნას (1) გამოსახულებისადმი, დავასკვნით, რომ 0 და 1 საზღვრებს შორის არსებობს θ-ს ერთი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}=f'[x_0+\theta(X-x_0)],$$

ანუ

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h), \tag{3}$$

ანუ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h). \tag{4}$$

თუ h-ის ნაცვლად ჩავსვამთ Δx, გვექნება

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

სადაც $0<\theta<1$. ასეთია საბოლოო სახე, რომელიც კოშიმ მისცა საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას. ეს თეორემა კოშიმდეც იყო ცნობილი (ლაგრანჟის დროიდან), მაგრამ მისი მკაცრი დამტკიცება, რომელიც ჩვენ ახლა გადმოვეცით, კოშის დამსახურებას წარმოადგენს.

ამის შემდეგ 47-ე გვერდიდან დაწყებული 122 გვერდამდე გადმოცემულია მრავალცვლადის ფუნქციის წარმოებულისა და დიფერენციალის საკითხები.

122-ე გვერდიდან იწყება ინტეგრალური აღრიცხვა განსაზღვრული ინტეგრალის ცნების განსაზღვრით, მოცემულია ამ ინტეგრალის არსებობის არითმეტიკული დამტკიცება. კოში გულისხმობს, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=x_0$ და $x=X$ საზღვრებს შორის. აღვნიშნოთ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$-ით ამ საზღვრებს შორის x-ის მნიშვნელობები, რომლებიც ყველა შეიძლება ან იზრდებოდეს, ან კლებულობდეს პირველი საზღვრიდან დაწყებული მეორემდე. მაშინ $X-x_0$ სხვაობას x-ის მნიშვნელობები დაყოფენ ელემენტებად

$$x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ x_3-x_2,\ \ldots,\ X-x_{n-1}, \tag{1}$$

რომლებსაც ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ. შევადგინოთ შემდეგი ჯამი:

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1}), \tag{2}$$

რომელიც, ცხადია, დამოკიდებულია: 1) იმ ელემენტების რიცხვისაგან, რომლებადაც დაყოფილია $X-x_0$ სხვაობა, 2) ამ ელემენტების მნიშვნელობისაგან, მაშასადამე, დაყოფის წესისაგან. ამასთან შევნიშნავთ, რომ თუ ელემენტების რიცხვითი მნიშვნელობები ძალი-

ან მცირე ხდება და რიცხვი n ძალიან იზრდება, მაშინ დაყოფის წესს არა აქვს შესამჩნევი გავლენა S-ის მნიშვნელობაზე.

დავუშვათ, რომ

$$S=(X-x_0)f(x_0). \tag{3}$$

პირიქით, როცა (1) გამოსახულებებს ავიღებთ $X-x_0$ სხვაობის ელემენტებად, მაშინ S-ის მნიშვნელობა, განსაზღვრული ამ შემთხვევაში (2) ტოლობით, ტოლია ელემენტების ჯამისა, რომლებიც გამრავლებულია კოეფიციენტების საშუალოზე

$$f(x_0),\;\; f(x_1),\;\; f(x_2),\ldots, f(x_{n-1});$$

მაშინ ამ კოეფიციენტების კერძო მნიშვნელობას ექნება სახე

$$f\,[x_0+\theta\,(X-x_0)\,],$$

სადაც $0<\theta<1$. მაშინ (2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$S=(X-x_0)\,f[x_0+\theta\,(X-x_0)\,], \tag{4}$$

სადაც $\theta<1$.

იმისათვის, რომ წინათ ხმარებული დაყოფის წესიდან სხვა წესზე გადავიდეთ, რომელშიც $X-x_0$-ის ელემენტების რიცხვითი მნიშვნელობები ძალიან მცირეა, საკმარისია დავყოთ თითოეული (1) გამოსახულებათაგანი ახალ ელემენტებად. მაშინ (2) ტოლობაში ნამრავლი $(x_1-x_0)\,f(x_0)$ წარმოგვიდგება როგორც ნამრავლი, რომელსაც ექნება სახე

$$(x_1-x_0)\,f[x_0+\theta_0\,(x_1-x_0)\,],\text{ სადაც } \theta_0<1.$$

ამგვარადვე გვექნება

$$(x_2-x_1)\,f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)\,],$$

სადაც $\theta_1<1$; თუ ასე გავაგრძელებთ, მივიღებთ, რომ

$$S=(x_1-x_0)\,f\,[x_0+\theta\,(x_1-x_0)\,]+(x_2-x_1)\,f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)\,]+$$
$$+\cdots+(X-x_{n-1})\,f[\,(x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})\,].$$

დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned} f\,[x_0+\theta_0\,(x_1-x_0)\,]&=f(x_0)\pm\varepsilon_0\\ f\,[x_1+\theta_1(x_2-x_1)\,]&=f(x_1)\pm\varepsilon_1\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\ f\,[x_{n-1}+\theta_{n-1}\,(X-x_{n-1})\,]&=f(x_{n-1})\pm\varepsilon_{n-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

მაშინ გვექნება

$$S=(x_1-x_0)[f(x_0)\pm\varepsilon_0]+(x_2-x_1)[f(x_1)\pm\varepsilon_1]+\\ +\cdots+(X-x_{n-1})[f(x_{n-1})\pm\varepsilon_{n-1}] \tag{6}$$

ანუ

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})\pm\\ \pm\varepsilon_0(x_1-x_0)\pm\varepsilon_1(x_2-x_1)\pm\cdots\pm\varepsilon_{n-1}(X-x_{n-1}). \tag{7}$$

თუ ელემენტების $x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ldots,\ X-x_{n-1}$ რიცხვითი მნიშვნელობა ძალიან მცირეა და თითოული $\pm\varepsilon_0,\ \pm\varepsilon_1,\ldots,\ \pm\varepsilon_{n-1}$ სიდიდეები ძალიან ახლოა ნულთან, მაშინ თვით ჯამი

$$\pm\varepsilon_0(x_1-x_0)\pm\varepsilon_1(x_2-x_1)\pm\cdots\pm\varepsilon_{n-1}(X-x_{n-1})$$

ტოლფასია $X-x_0$-ის ნამრავლისა და ამ სიდიდეთა საშუალოსი. თუ შევადარებთ ერთმანეთს (2) და (7) ტოლობებს, დავინახავთ, რომ S-ის მნიშვნელობა, გამოთვლილი ისეთი წესით, როცა $X-x_0$ სხვაობის ელემენტების რიცხვითი მნიშვნელობები ძალიან მცირეა, საგრძნობლად არ განსხვავდება S-ის იმ მნიშვნელობიდან, როცა დაყოფას ვაწარმოებთ მეორე წესით, რომლის საშუალებით თითოულ ელემენტს დავყოფთ კიდევ სხვა მრავალ ელემენტად. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ $X-x_0$ სხვაობის დაყოფის ორივე განხილული წესი ისეთია, რომ დაყოფით მიღებულ ელემენტებს ძალიან მცირე რიცხვითი მნიშვნელობები აქვს; ეს ორი წესი შეიძლება შევადაროთ მესამე წესს ისე შერჩეულს, რომ თითოული ელემენტი, პირველი წესით არის ის მიღებული თუ მეორეთი, შეიცავდეს უამრავ ელემენტს, მესამე წესით მიღებულს. ეს პირობა რომ სრული იყოს, საკმარისია, x-ის ყველა მნიშვნელობა, მოთავსებული პირველი ორი წესის საშუალებით x_0, X საზღვრებს შორის, გამოიყენებოდეს მესამეში და აშკარაა, რომ S-ის მნიშვნელობა ძალიან მცირედ შეიცვლება, როცა გადავდივართ პირველი ან მეორე წესიდან მესამეზე. მაშასადამე, პირველიდან მეორეზე გადასვლის დროსაც. ესე იგი, როცა $X-x_0$ სხვაობის ელემენტები უსასრულოდ მცირე ხდება, გაყოფის წესი არ მოახდენს შესამჩნევ გავლენას S-ის მნიშვნელობაზე; თუ განუსაზღვრელად იზრდება ელემენტების რიცხვი, მაშინ S-ის მნიშვნელობა მიისწრაფვის ზღვარისაკენ და ამ ზღვარს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი. x-ის ნამატი აღვნიშნოთ $\Delta x=h=dx$. მაშინ ნამრავლები

$$(x_1-x_0)f(x_0),\quad (x_2-x_1)f(x_1),\ldots$$

მიიღებს ზოგად სახეს

$$hf(x) = f(x)\,dx,$$

სადაც დაშვებულია, რომ

$$x = x_0 \text{ და } h = x_1 - x_0,$$
$$x = x_1 \text{ და } h = x_2 - x_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

მაშასადამე, შეიძლება ითქვას, რომ S არის (8) გამოსახულების მსგავს ნამრავლთა ჯამი, ესე იგი

$$S = \sum hf(x) = \sum f(x)\,\Delta x. \tag{8}$$

ამის შემდეგ კოში ასე მსჯელობს: „როდესაც გვაქვს განსაზღვრული ინტეგრალი, რომლისაკენ მიისწრაფვის S სიდიდე და იმავე დროს $X - x_0$ სხვაობის ელემენტები ხდება უსასრულოდ მცირე, შევთანხმდეთ იმაში, რომ გამოვსახოთ ჩანაწერით $\int hf(x)\,dx$ ან $\int f(x)\,dx$-ით, რომელშიც ნიშანი $\int$, ჩასმული $\sum$ ნიშნის ნაცვლად, უკვე აღარ არის ნამრავლთა ჯამი, მსგავსი (8) გამოსახულებისა, არამედ ზღვარია ამავე გვარის ჯამისა“ (გვ. 126).

ამის შემდეგ კოში განსაზღვრულ ინტეგრალს წარმოადგენს სამი სახით

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \qquad \int f(x)\,dx \left[\frac{x_0}{X}\right], \qquad \int f(x)\,dx \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = X \end{array}\right].$$

ამასთან აღნიშნავს, რომ პირველი და უფრო მარტივი სახე გამოიგონა მ. ფურიემ. აქვე მოცემულია ორი კერძო შემთხვევა:

$$\int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X - x_0), \qquad \int_{x_0}^{X} dx = X - x_0.$$

36-ე ლექციიდან დაწყებული კოში განიხილავს ფუნქციის ტეილორის მწკრივად დაშლის საკითხს; მხედველობაში აქვს მიღებული ზუსტად შეფასებადი ნაშთითი წევრი და საკითხი დამუშავებულია მოცემული ფუნქციის პრაქტიკულად მიახლოებით წარმოდგენის თვალსაზრისით.

392-ე გვერდზე კოში გვაძლევს ტეილორისა და მაკლორენის მწკრივების ნაშთებს შემდეგი სახით:

$$(1 - \theta)^{n-1} f^{(n)}(x + \theta h),$$

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

კოშის ძირითად ფორმულას და ინტეგრალს, რომელიც ახლა ცნობილია კოშის ინტეგრალის სახელწოდებით, ჩვენ ვპოულობთ პირველი სერიის VI ტომში მოთავსებულ ნაშრომში: „იმ ნაშთის კრებადობის შესახებ, რომელიც ტეილორის მწკრივს ავსებს ახალ მწკრივამდე" („Sur le dévoloppement du reste qui complète la série du Taylor en une série nouvelle" გვ. 347).

ამ ნაშრომს კოში იწყებს შემდეგი სიტყვებით: „ერთ-ერთ ადრინდელ მემუარში მოცემული მაქვს იმ მწკრივთა კრებადობის წესი, რომლებიც აღმოჩნდებიან ცხადი ან არაცხადი ფუნქციების დაშლის დროს და დამტკიცებული მაქვს, რომ ეს მწკრივები რჩება საერთოდ კრებადი, როცა თვით ფუნქცია და მისი პირველი რიგის წარმოებული უწყვეტია. ამასთან ის დებულებები, რომლებიდანაც გამომყავს ეს თეორემა 1831 წლის მემუარში, შესრულდება მრავალი ფუნქციის მწკრივად დაშლის დროს, კერძოდ ლაგრანჟის, ტეილორისა და მაკლორენის მწკრივად. ახლა გამომყავს იგივე დებულება ახალ ფორმულაში, რომელიც შეიძლება გამოყენებული იქნას უპირატესობით სხვადასხვა პრობლემის ამოხსნის შემთხვევაში, ამასთან ტეილორის მწკრივი მოქმედების ისეთი შესანიშნავი თვისებით, რომ თუ მოცემული წევრი განსაზღვრულია, ადვილად გამოითვლება ცდომილების ზღვარი, რომელიც მიიღება შემდეგი წევრების ჩამოშორების გამო".

ამის შემდეგ კოში განიხილავს $f(x)$ ფუნქციას და

$$\zeta = z e^{pi}$$

კომპლექსურ ცვლადს, რომლის მოდული z მეტია x-ის მოდულზე. თუ $f(x)$ ფუნქცია და მისი პირველი რიგის წარმოებული სასრულია და უწყვეტი x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომლის მოდული z-ზე ნაკლებია, მაშინ

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta-x}\,dp.$$

ამას შეიძლება ადვილად მიეცეს თანამედროვე სახე:

$$d\zeta = z i e^{pi} dp = \zeta i dp; \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta-x}\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\zeta i}{\zeta-x}\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta.$$

1825 წელს კოშიმ გამოაქვეყა „მემუარი იმ განსაზღვრული ინტეგრალის შესახებ, რომელიც აღებულია წარმოსახვით საზღვრებს შორის“. ამ ნაშრომში კოში გადმოგვცემს მის განთქმულ თეორემას ცალსახა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის წირითი ინტეგრალის შესახებ:

$$\int\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum k,$$

სადაც k ნაშთებია წყვეტის ცალკეული წერტილებისა, რომლებსაც გარს უვლის C მრუდი.

1831 წელს გამოქვეყნებულ „ტურინის მემუარებში“ მოცემულია თეორემა კომპლექსური ცვლადის ნებისმიერი ფუნქციის დაშლის შესახებ, რომლის კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება უახლოეს განსაკუთრებულ წერტილამდე მანძილით.

დრეკადობის თეორიაში კოშის ეკუთვნის მოვლენის ფენომენოლოგიური აღწერა, რომელიც სხეულს განიხილავს როგორც კონტინუუმს და ოპერირებას ეწევა ორივე „ტენზორით“: ძაბვითა და დეფორმაციით. შემდეგ კოშიმ ეს გამოკვლევა გაავრცელა კრისტალურ არეზე და ამის საფუძველზე შექმნა მათემატიკური დაფუძნება ფრენელის ოპტიკის მარტივი დებულებებისა.

7. შარლ დიუპენი, ჟან ვიქტორ პონსელე და მიშელ შალი

შარლ დიუპენი დაიბადა 1784 წელს. ის ერთდროულად იყო თეორეტიკოსიც, პრაქტიკოსიცა და ორგანიზატორიც. როგორც საზღვაო ინჟინერი, დაინტერესებული იყო უმთავრესად გეომეტრიულობით. დიუპენმა იმოგზაურა ინგლისში ადგილობრივი მრეწველობის შესასწავლად, მუშაობდა აგრეთვე საფრანგეთის ხელოვნებათა და ხელოსნობათა მუზეუმის პროფესორად და 1819 წელს დააარსა სახალხო უნივერსიტეტი. ამ უნივერსიტეტის საშუალებით ფართოდ გავრცელდა დიუპენის იდეები საფრანგეთის ტექნიკის, მრეწველობისა და ეკონომიკის დარგში. დიუპენი გარდაიცვალა 1873 წელს.

დიუპენი მეტად ნიჭიერი გეომეტრი იყო. 1813 წელს გამოაქვეყნა დიდი ნაშრომი: „გეომეტრიული მსჯელობანი“, რომელიც შეიცავს მრავალ ახალ თეორემასა და მსჯელობას. განთქმულია დიუპენის ციკლოიდა, რომელიც წარმოადგენს სამ უძრავ სფეროს

შემხებ ყველა სფეროს მომვლებს. დღესაც მის სახელს ატარებს თეორემა, რომელიც ამბობს, რომ ორთოგონალური სისტემის ზედაპირები ურთიერთგადაიკვეთებიან სიმრუდის წირებით. დღესაც იხმარება დიუპენის ინდიკატორი დიფერენციალურ გეომეტრიაში.

ჟან ვიქტორ პონსელე დაიბადა 1788 წელს მეტცში. 1810 წელს დაამთავრა პოლიტექნიკური სკოლა. მუშაობდა ლეიტენანტად ინჟინერთა ჯარში და 1812 წლის დასაწყისში გაიწვიეს ნაპოლეონის არმიაში; 1812 წლის ნოემბერში რუსეთში გალაშქრების დროს პონსელე ტყვედ ჩავარდა. ორი წელი გაატარა სარატოვში როგორც სამხედრო ტყვემ. მიუხედავად იმისა, რომ ორი წლის განმავლობაში მოწყვეტილი იყო სამეცნიერო მუშაობისათვის ყოველგვარ დამხმარე საშუალებებს, მაინც ამ იძულებითმა უსაქმურობამ პონსელე მიიყვანა გენიალურ შემოქმედებამდე — პროექციული გეომეტრიის შექმნამდე. თავის ახალ იდეებს ის აცნობდა პოლიტექნიკური სკოლის ყოფილ მოწაფეთა პატარა წრეს, რომელიც მასთან ერთად იმყოფებოდა ტყვედ. ტყვეობიდან განთავისუფლების შემდეგ, 1815 წლიდან, ის მუშაობდა მეტცის არსენალში სამხედრო ინჟინრად. 1815 წელს დაიბეჭდა პონსელეს წიგნი: „ტრაქტატი ნაკვთების პროექციულ თვისებათა შესახებ“, რომელშიც გამოქვეყნებულია ტყვეობის დროს მიღებული შედეგები. საზოგადოებრივი მოღვაწეობა მას დიდ დროსართმევდა და ხელს უშლიდა წმინდა მეცნიერულ მუშაობაში. 1825 წლიდან 1835 წლამდე მუშაობდა მეტცში გამოყენებითი სკოლის პროფესორად. უცხო ქვეყნების შესწავლის მიზნით მან ხანგრძლივად იმოგზაურა. 1826 წელს გამოაქვეყნა „მექანიკის კურსი“. მასში გადმოცემული პონსელეს გამოკვლევები გვაძლევს იმის უფლებას, რომ ის ჩავთვალოთ ტექნიკური მექანიკის ერთ-ერთ ფუძემდებლად. 1835 წლიდან პონსელეს ეჭირა მაღალი სამხედრო თანამდებობები პარიზში, იყო თავდაცვის კომიტეტის წევრი; 1838 წლიდან 1848 წლამდე მუშაობდა ფიზიკური და გამოყენებითი მექანიკის პროფესორად სორბონში, შემდეგ კი პოლიტექნიკური სკოლის უფროსად. 1851 წელს პონსელე არჩეულ იქნა საფრანგეთის წარმომადგენლად პირველ საერთაშორისო გამოფენაზე ლონდონში და ჟიურის თავმჯდომარედ; მონაწილეობას იღებდა აგრეთვე პარიზის საერთაშორისო გამოფენის მომზადებაში 1855 წელს. პონსელე უკმაყოფილო იყო იმისა, რომ მას არ ჰქონდა საშუალება მთელი თავისი დრო და ენერგია მიეძღვნა მხოლოდ მათემატიკაში სამეცნიერო მუშაობისათვის; ეს ჩანს მისი „მექანი-

ქის კურსის“ 1866 წლის ახალი გამოცემიდან, სადაც პონსელე, უკვე ღრმა მოხუცი, უჩივის თავის ბედს, რომელმაც იძულებული გახადა მიეტოვებინა მისთვის საყვარელი საქმე. 1867 წელს პონსელე გარდაიცვალა.

მიშელ შ ა ლ ი დაიბადა 1793 წელს ეპორნონში, პარიზის მახლობლად. სწავლობდა პოლიტექნიკურ სკოლაში და მოწაფეობის დროს, 1813 წელს, დაბეჭდა ამ სკოლის ჟურნალში საინტერესო ნაშრომი ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წარმოქმნის შესახებ. მაგრამ შემდეგში მან სავსებით შეწყვიტა მეცნიერული მუშაობა, დაბრუნდა თავის სამშობლოში და დასახლდა სოფელში. იქ შალი ეწეოდა საბანკო საქმიანობას და რამდენიმე წლის განმავლობაში დიდი ქონება შეიძინა. მხოლოდ 1837 წელს, ე. ი. როცა ის უკვე 44 წლის იყო, გამოაქვეყნა ნაშრომი: „გეომეტრიული მეთოდების წარმოშობა და მათი განვითარების ისტორიული მიმოხილვა“. 1841 წელს ის გახდა პოლიტექნიკურ სკოლაში მანქანათმშენებლობის პროფესორი. 1845 წელს სპეციალურად მისთვის შექმნილი იყო უმაღლესი გეომეტრიის კათედრა. შალიმ შექმნა მათემატიკური სკოლა და დიდად შეუწყო ხელი ფრანგული გეომეტრიის განვითარებას. იცოცხლა 87 წელი — გარდაიცვალა 1880 წელს. შალის ნაშრომების ნაწილი შეეხება უმაღლესი რიგის ალგებრული სახეების გამოკვლევას. ამით ის გახდა შემქმნელი საგახგებო მიმართულებისა, რომელსაც ახლა ეწოდება „გამოთვლითი გეომეტრია“.

1852 წელს შალმა გამოაქვეყნა „უმაღლესი გეომეტრიის კურსი“. მასში ვეცნობით იმ სიახლეს, რომელიც შალმა შეიტანა პირველი და მეორე რიგის სახეების შესწავლაში, და აგრეთვე სინთეზური პროექციული გეომეტრიის შალის აგებულებას და მასში მეტრული გეომეტრიის ჩართვას. შალი ადგენს და მკაცრად ატარებს მიმართული მონაკვეთების შეკრების წესს, გამოყოფს ცნებას ოთხი წერტილის ან წრფის ორმაგი შეფარდების შესახებ, დამუშავებული აქვს კოლინეაციის ზოგადი თეორია და ორადობის პრინციპი; შალს შესწავლილი აქვს კონუსური კვეთების პროექციული აგება პროექციული კონების ანუ წერტილთა რიგის საშუალებით.

შალის ნაშრომებში ვლინდება სრულიად ახალი მიმართულება, რომელიც მდგომარეობს მეცნიერების ისტორიული განვითარების გამოაშკარავებისადმი მისწრაფებაში. შალმა გამოაშკარავა მრავალი მათემატიკოსი, რომლებიც წარსულში ახალ გეომეტრიაში მუშაობდნენ და დავიწყებული იყვნენ, და დაუბრუნა მათ კუთვნილი ადგილი. ასეთია, მაგალითად, მეჩვიდმეტე საუკუნის გეომეტრი დეზარგი. გან-

საკუთრებით დიდად მნიშვნელოვანია შალის დამსახურება ევკლიდეს დაკარგული სამი წიგნის, ეგრეთ წოდებული „ფორიზმების“ საკითხში; მან გამოთქვა აზრი, რომ ეს წიგნები შეიცავს უმარტივეს პროექციულ დამოკიდებულებებს, რაც შემდგომმა გამოკვლევებმა სავსებით დაადასტურეს. შალი იყო მათემატიკის პირველი ისტორიკოსი ევროპაში. მისი გავლენით განვითარდა გამოკვლევები მათემატიკის ისტორიაში და ბევრ ძვირფას შედეგსაც მიაღწიეს. შალმა ავტოგრაფების დიდ კოლექციას მოუყარა თავი და იქიდან ბეჭდავდა ამონაწერებს, რაც დიდ ინტერესს იწვევდა.

შალის ნაშრომიდან მოვიყვანთ ერთ დამტკიცებულ თეორემას, რომლის თანახმად მეორე რიგის კონფოკალური ზედაპირები არიან ზედაპირები, ჩახაზული სფერულ წრეწირთან ერთად ერთ და იმავე წარმოსახვით განფენად ზედაპირში, რომლის ერთადერთ ნამდვილ ნაწილს წარმოადგენს ორი ორმაგი მრუდი, შემდგარი ფოკალური მრუდების ოჯახისაგან. F_2 კონფოკალურ ზედაპირებზე მდებარე წერტილების განტოლებას ერთგვაროვან კოორდინატებში აქვს სახე

$$\frac{\xi^2}{a^2-\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2-\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2-\lambda}=\tau^2.$$

ერთგვაროვანი ტანგენციალური კოორდინატების შემოღების შემდეგ ეს ოჯახი მოცემული იქნება განტოლებით

$$(a^2-\lambda)u^2+(b^2-\lambda)v^2+(c^2-\lambda)w^2=\omega^2$$

ანუ

$$(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-\omega^2)-\lambda(u^2+v^2+w^2)=0.$$

ვინაიდან $u^2+v^2+w^2=0$ არის სფერული წრეწირის განტოლება ტანგენციალურ კოორდინატებში, ამიტომ გვექნება მეორე კლასის ზედაპირების ოჯახი, სფერული წრეწირის ჩათვლით, როცა $\lambda=\infty$. ყველა ამ ზედაპირს აქვს საერთო გეომეტრიული სახე

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-\omega^2=0,$$

$$u^2+v^2+w^2=0,$$

რომელიც წარმოადგენს განფენად ზედაპირს. ამ დამოკიდებულებებისაგან შალი ადვილად ღებულობს თეორემას, რომლითაც არა მარტო F_2 კონფოკალური ზედაპირებია ორთოგონალური, არამედ მათი კონტურებიც, განხილული ნებისმიერი წერტილიდან, გადაიკვეთება მართი კუთხით.

8. მებიუსი, გრინი, შტეინერი, შტაუდტი, პლიუკერი და გუდერმანი

ავგუსტ ფერდინანდ მ ე ბ ი უ ს ი დაიბადა 1790 წლის 17 ნოემბერს შულცპფორგში, თავადების სკოლის ცეკვის მასწავლებლის ოჯახში. ის იყო გაუსის მოწაფე და სწავლობდა მასთან ასტრონომიულ დაკვირვებებსა და გამოთვლებს, ამით გაუსმა მას მისცა გარკვეული პროფესია; მიუხედავად იმისა, რომ გაუსი ყოველდღიურ ურთიერთობაში იყო მებიუსთან, მაინც ვერ შეატყო, რომ იგი დაჯილდოვებულია გეომეტრიული ნიჭით. 1816 წლიდან მებიუსი მუშაობდა ჯერ დამკვირვებლად და შემდეგ პლეისენბურგის ასტრონომიული ობსერვატორიის დირექტორად. სიცოცხლის უკანასკნელ წლებში მუშაობდა უნივერსიტეტში. მებიუსი გარდაიცვალა 1868 წელს.

მებიუსი ერთ-ერთი გვიან დამწიფებული ტალანტია. მან თავისი პირველი და ფუნდამენტალური ნაშრომი „ბარიცენტრული აღრიცხვა“ დაწერა 37 წლის ასაკში.

ამ ნაშრომის ძირითადი იდეა მდგომარეობს სიმძიმის ცენტრის ცნების გეომეტრიული გამოყენებაში. თუ სიბრტყეში ვრჩებით, მაშინ რაიმე წერტილის კოორდინატებად მიიღება იმ ტვირთების წონა p_1, p_2, p_3, რომლებიც უნდა მოვათავსოთ რომელიმე მუდმივი სამკუთხედის წვეროებში, რომ მათი სიმძიმის ცენტრი მოხვდეს P წერტილში. ეს არის ერთგვაროვანი კოორდინატების პირველი მაგალითი, ე. ი. ისეთი კოორდინატებისა, რომლებიც განსაზღვრავენ ობიექტს მხოლოდ თავიანთი ფარდობებით: (λp_1, λp_2, λp_3 გვაძლევენ იმავე სიმძიმის ცენტრს, რასაც p_1, p_2, p_3). მაგრამ ესენი ჯერ კიდევ არ არიან ზოგადი სახის ერთგვაროვანი კოორდინატები, რომლებიც პლიუკერმა შემოიყვანა. ამისათვის საჭირო იყო კიდევ ერთი განზოგადება, რომელიც მიიღება, თუ კოორდინატთაგან თითოეულს მივცემთ ნებისმიერ მამრავლებს λ_1, λ_2, λ_3. ე. ი., მაგალითად, შემოვიღოთ წარმოდგენა იმის შესახებ, რომ სამკუთხედის წვეროებში მოთავსებული ტვირთები, იზომება თითოეული თავისი საზომით. უსასრულოდ დაშორებული წრფის განტოლებას მებიუსი წარმოადგენს შემდეგი სახით: $\lambda p_1+\lambda p_2+\lambda p_3=0$. თუმცა კოორდინატების ეს ახალი სისტემა უფრო მოქნილია, ვიდრე ჩვეულებრივი, ვინაიდან ის შეიცავს ექვს ნებისმიერ მუდმივს, მაგრამ თავის ღირებულებას ღებულობს მხოლოდ იმის წყალობით, რომ მისი საშუალებით მებიუსი ავითარებს მთელ რიგ ახალ იდეებს. მებიუსის ამ ახალ იდეებს ფ. კლაინი მოკლედ გადმოგვცემს ასე:

1. მებიუსი პირველია, რომელიც სავსებით თანამიმდევრობით სარგებლობს გეომეტრიაში ნიშნების პრინციპით, თანაც არა მარტო მონაკვეთების გასაზომად, არამედ ფართობებისა და მოცულობების გასაზომადაც, რომლის დროს განასხვავებს „შემოვლის მიმართულებას“.

2. გაუტოლა რა p_1, p_2, p_3 სივრცეში წერტილის კოორდინატები პარამეტრების რაციონალურ ფუნქციებს, მებიუსი ღებულობს მრუდეთა და ზედაპირთა ახალ გამოსახულებას, რომელსაც მიჰყავს უწინდელისაგან სავსებით განსხვავებულ მათ კლასიფიკაციამდე. ამასთან მებიუსმა აღმოაჩინა მესამე რიგის სივრცითი მრუდები.

3. ორი სივრცის წერტილოვანი ასახვის იდეის საშუალებით მებიუსი ქმნის ცნებას ამ სივრცეთა შორის „სიახლოვის“ ხარისხის შესახებ: ტოლობას, რომელსაც ახლა ჩვეულებრივად კონგრუენტობას უწოდებენ, მსგავსებას, აფინურობას, კოლინეაციას; ამ უკანასკნელი ტერმინით ის აღნიშნავს შესაბამისობის ზოგად ტიპს, რომელსაც წრფეწირები გადაჰყავს ისევ წრფეწირებში.

4. ამ კლასიფიკაციას ის უკავშირებს უშუალოდ იმ გამოსახულებების მოძებნის იდეას, რომლებიც უცვლელი რჩებიან ამ შესაბამისობებისგან რომელიმეს განხორციელებისას. აქ პირველადაა მოცემული სრული თეორია წრფის ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობისა, რომელიც შესაძლებელი გახდა მხოლოდ მონაკვეთის ნიშნის შემოღების შემდეგ.

5. კოლინეაციის განხორციელებას ის ახერხებს არა რაიმე მეტრული განსაზღვრების დახმარებით, არამედ მხოლოდ სიბრტყეში ოთხი ურთიერთშესაბამისი წერტილის დამყარებისა და მათი წრფით შეერთების საშუალებით; ამას ახლა უწოდებენ „მებიუსის ქსელს“.

შესანიშნავია აგრეთვე მებიუსის მეორე წიგნი „სტატიკის სახელმძღვანელო“, რომელიც ორ ტომად გამოვიდა 1837 წელს. ეს წიგნი შეიცავს გეომეტრიულ გამოყვანას მრავალი დამოკიდებულებებისა, რომლებსაც ადგილი აქვს მყარ სხეულზე ძალების ერთად მოქმედების შემთხვევაში.

ღრმა მოხუცებულობამდე შერჩა მებიუს კვლევითი უნარი. ის თავის ნაშრომებს აქვეყნებდა საქსონიის სამეფო საზოგადოების ანგარიშებში. მისი ნაშრომების კრებული ოთხი ტომისგან შედგება. მებიუსი 68 წლის იყო, როცა ძირითადი აღმოჩენა გააკეთა; ეს ნაშრომი მან წარადგინა პარიზის აკადემიაში პრემიის მისაღებად, მაგრამ იგი დამარხულ იქნა აკადემიის ქაღალდებში 1865 წლამდე,

ვიდრე არ გამოაქვეყნა მებიუსმა. ეს იყო აღმოჩენა ცალპირა ზედაპირებისა და მრავალწახნაგების, რომელთათვისაც „წიბოთა კანონი“ გამოყენებას ჰკარგავს და რომელთაც არა აქვთ არავითარი მოცულობა, რომლის განსაზღვრა შესაძლებელი იყოს.

ჯ ო რ ჯ გ რ ი ნ ი დაიბადა 1793 წელს ნოტინგენში, ღარიბი მეპურის ოჯახში. იმის შემდეგ, რაც მან მეცნიერებაში გაითქვა სახელი, მიიწვიეს კათედრის გამგედ კემბრიჯში. გარდაიცვალა 1841 წელს.

კლაინის გადმოცემით, იგი იყო თვითნასწავლი მათემატიკოსი. 1828 წელს გრინმა ნოტინგენში გამოაქვეყნა შესანიშნავი ნაშრომი: „მათემატიკური ანალიზის გამოყენების ცდა ელექტრობისა და მაგნეტიზმის თეორიაში“, რომელშიც მოგვცა პოტენციალის თეორიის პირველი საწყისები. 1871 წელს ლონდონში დაიბეჭდა გრინის ნაშრომების ერთტომეული, კემბრიჯში გამოაქვეყნა თავისი ნაშრომები, რომელთა შორის მეტად მნიშვნელოვანია 1835 წელს დაბეჭდილი გამოკვლევა ე ლ ი პ ს ო ი დ ი ს მ ი ზ ი დ უ ლ ო ბ ი ს შ ე ს ა ხ ე ბ.

გრინი ხმარობდა გამოთქმას „პოტენციალური ფუნქცია“ იმ ფუნქციისათვის, რომელსაც ლაპლასი აღნიშნავდა V სიმბოლოთი და რომელსაც შემდეგში გაუსმა უწოდა პოტენციალი. გრინმა სცადა გამოეყენებია პოტენციალის თეორია ელექტრობასა და მაგნეტიზმში. ამ საკითხში გრინის წინამორბედი იყო მხოლოდ პუასონი, რომელმაც ანალიზური გზით განსაზღვრა ელექტრობის განაწილება მავთულების ზედაპირზე და სცადა აგრეთვე ანალიზის გავრცელება მაგნეტიზმის არეზე. თავის გამოკვლევებში გრინი მიემხრო პუასონის ამ ნაშრომებს და ლაგრანჟის მერ მიღებულ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა მნიშვნელობა ნიუტონის კანონით მოქმედ ყველა ძალისათვის მან ნათლად გაიგო. გრინს სურდა მათემატიკური ოპერაციებისადმი დაემორჩილებია ისეთი უნივერსალური ძალა, როგორიც არის ელექტრობა.

გრინის თვალსაზრისით, ყოველ მიმზიდველ და განმზიდველ ძალას აქვს შემდეგი თვისება: თუ რომელიმე სხეული მოქმედებს მატერიალურ წერტილზე, მაშინ ამ წერტილზე გარკვეული მიმართულებით მომქმედი ძალა გამოისახება გარკვეული ფუნქციის კერძო წარმოებულებით იმ კოორდინატების მიმართ, რომლებიც იძლევიან ამ წერტილის მდებარეობას

სივრცეში. ამ ფუნქციას დიდი მნიშვნელობა აქვს მრავალი გამოკვლევისათვის; ამიტომ გრინმა მიანიჭა განსაკუთრებული სახელწოდება. გრინი გამოდის ლაპლასის განტოლებიდან

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

რომელიც გამოიყენება სხეულის გარეთ მდებარე ყოველი წერტილისათვის კოორდინატებით x, y, z. ამ განტოლების აღსანიშნავად გრინმა შემოიყვანა უფრო მოკლე სიმბოლო $dV = 0$ და ჯერ უჩვენა, რომ სხეულის შიგნით მდებარე წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $dV + 4\pi\rho = 0$ და, მაშასადამე, dV-ს ამ შემთხვევაში აქვს მნიშვნელობა $-4\pi\rho$. ამასთან ρ-თი ნაგულისხმევია ელექტრული სიმკვრივე P წერტილში. გარე წერტილისათვის ლაპლასის განტოლება, ამრიგად, მხოლოდ კერძო შემთხვევა აღმოჩნდა ახალი განტოლებისა $dV + 4\pi\rho = 0$, ვინაიდან გარე წერტილისათვის $\rho = 0$. ზედაპირზე გავლის დროს პოტენციალური ფუნქცია ნახტომს აკეთებს $4\pi\rho$-ში. გრინის გამოკვლევის შედეგად წარმოიშვა დებულება, რომ ელექტრული სიმკვრივის გამოთვლა შეიძლება პოტენციალური ფუნქციის საფუძველზე, ამ უკანასკნელის კი, პირიქით, — ელექტრული სიმკვრივის საფუძველზე.

გრინმა დაადგინა ელექტრობის თეორიის უმეტესად ზოგადი თეორიები და ამასთან დაკავშირებით ფუნქციათა თეორიაში აღმოაჩინა მრავალი თეორემა. მათ შორის უმნიშვნელოვანესია „გრინის თეორემად“ წოდებული. ეს თეორემა ახლაც დიდ როლს ასრულებს პოტენციალის თეორიის გამოყენებისას. ის შეეხება x, y, z-ის ორი U და V ფუნქციის შემთხვევას, რომელთა მნიშვნელობები რომელიმე სივრცითი არის შიგნით მდებარე წერტილისათვის შეიძლება ჩაითვალოს მოცემულად. იმის დაშვების შემდეგ, რომ ფუნქციები U და V და მათი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები განსახილველი არის შიგნით სასრული და უწყვეტი არიან, გრინი ადგენს ტოლობას:

$$\iiint dx\,dy\,dz\,U\,dV + \int d\sigma\,U\left(\frac{dV}{dw}\right) =$$

$$= \iiint dx\,dy\,dz\,V\,dU + \int d\sigma\,V\left(\frac{dU}{dw}\right).$$

აქ dV და dU ცნობილი შეკვეცებია ლაპლასის განტოლებისათვის,

$d\sigma$ ზედაპირის ელემენტია, ხოლო dw — წირითი ელემენტი, განხილული როგორც დადებითი მართობი $d\sigma$-ადმი სხეულის შიგნით.

ამის შემდეგ გრინი გადადის ზოგიერთი კერძო შემთხვევისაკენ და უწინარეს ყოვლისა იხილავს ლაიდენის ქილას. ამისათვის მან მიიღო შემდეგი თეორემა: თუ მრუდი წირით შემოვსაზღვრეთ შიგა შემონაფენი ნაჭერი და თუ შემდეგ ამოვჭერით გარშემონაფენის შესაბამისი ნაჭერი, ამისათვის აღვმართეთ ხსენებული მრუდის ყველა წერტილისადმი ნორმალები, მაშინ ამ შესაბამის მოედნებზე დატვირთვების ჯამი ნულის ტოლია, ვინაიდან ამ მოედნებს აქვთ ტოლი და საწინააღმდეგო დატვირთვები, რომლებიც ზუსტად ანეიტრალებენ ერთმანეთს.

გრინის ნაშრომებს შესანიშნავი ბედი ეწვია: გრინი ცხოვრობდა სოფელში განმარტოებით და სამეცნიერო სამყაროსათვის უცნობად დარჩა; ამის გამო მისი ნაშრომებისათვის ყურადღება არ მიუქცევიათ არც ინგლისში და, მით უმეტესს, არც ინგლისს გარეთ. ის დაივიწყეს როგორც მეცნიერი, სანამ გაუსმა ხელახლად არ აღმოაჩინა მისი დიდი შედეგები. მხოლოდ მაშინ ფიზიკოსმა ვ. ტომსონმა, რომელსაც უნდოდა მისი თანამემამულესათვის შეენარჩუნებინა პრიორიტეტი, ყურადღება მიაქცია გრინის მემუარებს და ხელმეორედ გამოსცა მისი ზოგიერთი უმნიშვნელოვანესი გამოკვლევა.

იაკობ შტეინერი იყო შვეიცარიელი გლეხის შვილი. დაიბადა 1796 წლის 18 მარტს უტცენდორფში. 19 წლამდე შტეინერი მიწაზე მუშაობდა, შემდეგ კი (1815 წელს) მას აღეძრა ძლიერი სურვილი მასწავლებლობისა, რის გამოც მან ენერგიულად დაიწყო სწავლა და მალე მიაღწია მასწავლებლობას პედაგოგიურ ინსტიტუტში, რომელიც პესტალოციმ დაარსა ინფერტენში. შტეინერი მთელ თავის სიცოცხლეში ცდილობდა პესტალოცის იდეების გატარებას ცხოვრებაში. მალე პედაგოგიური ინსტიტუტი დაიხურა და შტეინერიც 1818 წელს გადავიდა ჰაიდელბერგში, რათა იქ თავის თავზე ემუშავა და გაეღრმავებინა სამეცნიერო განათლება. იგი თვითონ, სხვების დაუხმარებლად, სწავლობდა ფრანგ გეომეტრებს. სიღარიბის გამო იგი იძულებული იყო ლუკმა პური ეშოვნა კერძო გაკვეთილების მიცემით. რადგან ბერლინში დაინტერესებული იყვნენ პესტალოცის მეთოდით, შტეინერი იქ გადავიდა მასწავლებლის თანამდებობაზე. იგი მიიწვიეს აგრეთვე ბერლინის უნივერსიტეტში ექსტრაორდინარული პროფესორის თანამდებობაზე.

ამის შემდეგ ის აკადემიის წევრიც გახდა. გარდაიცვალა შტეინერი 1863 წლის 1 აპრილს.

შტეინერი ახალი სინთეზური გეომეტრიის ფუძემდებელია. მისი ნაშრომები გამოსცა ბერლინის აკადემიამ ორ ტომად. მთავარი ნაშრომია: „გეომეტრიული სახეების ერთმანეთისაგან დამოკიდებულების სისტემატური განვითარება". იგი ხუთი ნაწილისაგან შედგება, მაგრამ 1832 წელს ბერლინში გამოქვეყნდა მხოლოდ პირველი ნაწილი. გეომეტრიის წმინდა სინთეზურად აგება ემყარება ძირითად იდეას პროექციულ წარმოქმნაზე. შტეინერის ნაშრომის პირველ ნაწილში ეს შესრულებულია მხოლოდ კონუსური კვეთებისათვის და ცალკალთა ჰიპერბოლოიდისათვის. „შტეინერის პრინციპი", რომელიც მდგომარეობს მაღალი სახეების დაბალი სახეებისაგან თანამიმდევრობით შექმნაში, ანალიზურად შესაბამება განსაზღვრული მატრიცების დეტერმინანტების ნულთან გატოლებაში. მაგალითად, მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირის პროექციული წარმოქმნა ხორციელდება იმ დეტერმინანტების ნულთან გატოლებით, რომლებიც სიბრტყეთა განტოლებებიდან მიიღება და რომელთა დაჯგუფება ორნაირად შეიძლება.

ტოლობა

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = 0$$

იძლევა

$$— \mu q = 0,$$

$$p' — \mu q' = 0$$

ანუ

$$p — \lambda p' = 0,$$

$$q — \lambda q' = 0,$$

როგორც მსახველთა ორი ოჯახის განტოლებებს.

1833 წელს გამოვიდა შტეინერის კიდევ მეორე წიგნი: „გეომეტრიული აგებანი, რომლებიც განხორციელდებიან წრფისა და მუდმივი წრეწირის საშუალებით". შტეინერის ცალკეული ნაშრომიდან აღსანიშნავია აგრეთვე „ბრტყელი მონაკვეთების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების შესახებ". ის შეიცავს იმ მრავალრიცხოვანი პრობლემების დამუშავებას, რომლებიც ეხებიან მაქსიმუმებსა და მინიმუმებს.

ქრისტიან ფონ-შტაუდტი დაიბადა 1798 წელს როტენბურგში. ის იყო გაუსის მოწაფე, რომელმაც ურჩია მას ემუშავა ასტრონომიასა და რიცხვთა თეორიაში. მაგრამ მას უფრო გეომეტრია აინტერესებდა და ამ დარგში დაიწყო ინტენსიური მუშაობა. 1822 წლიდან 1825 წლამდე შტაუდტი მუშაობდა ვიუცბურგის უნივერსიტეტსა და გიმნაზიაში. შემდეგ, 1825 წლიდან 1835 წლამდე მუშაობდა ნიურენბერგის უნივერსიტეტში, გიმნაზიასა და პოლიტექნიკურ სასწავლებელში. 1835 წელს შტაუდტი გახდა ერლანგენის უნივერსიტეტის პროფესორი და ამ თანამდებობაზე დარჩა სიკვდილამდე — 1868 წლამდე.

ქრისტიან შტაუდტის ძირითადი ნაშრომებია:

1. „მდებარეობის გეომეტრია", რომელიც 1847 წელს ნიურენბერგში დაიბეჭდა.

2. „განძი მდებარეობის გეომეტრიაში".

იულიუს პლიუკერი დაიბადა 1801 წლის 13 აგვისტოს ელბერფელდში. დიუსელდორფის გიმნაზიის დამთავრების შემდეგ იყო სტუდენტად ჯერ ბონში და შემდეგ პარიზში. პლიუკერი 24 წლის იყო, როცა სადოქტორო დისერტაცია დაიცვა ბონში, სადაც 1828 წელს გახდა ექსტრაორდინალური პროფესორი. 1832 — 1834 წლებში მუშაობდა ექსტრაორდინალურ პროფესორად ბერლინში და იმავე დროს ასწავლიდა გიმნაზიაში. 1836 წელს პლიუკერი ისევ ბონში მიიწვიეს, სადაც დაიკავა მათემატიკისა და ფიზიკის კათედრები და ამ თანამდებობაზე დარჩა სიკვდილამდე — 1868 წლის 22 მაისამდე.

პლიუკერის გეომეტრიული ნაშრომებია:

1. „ანალიზურ-გეომეტრიული გამოკვლევები"; ორი ტომი, 1831 წ.

2. „ალგებრული მრუდების თეორია", 1839 წ.

3. „ანალიზური გეომეტრიის სისტემა" (სიბრტყეზე), 1834 წ.

4. „ანალიზური გეომეტრიის სისტემა სივრცეში", 1846 წ.

5. „სივრცის ახალი გეომეტრია, დაფუძნებული წრფის, როგორც სივრცის ელემენტის განხილვაზე", 1868 — 1869 წწ.

პლიუკერის მიღწევას გეომეტრიაში წარმოადგენს ანალიზური გეომეტრიის ახალი აგება. პლიუკერი მისდევდა აგებისა და ანალიზური ფორმულის სრული შეზრდის მეთოდს. მის გეომეტრიაში ფორმულების მარტივი კომბინირება გადაყვანილია გეომეტრიულ დამოკიდებულებათა ენაზე. გამოთვლებს პლიუკერი

შეძლებისამებრ ტოვებს, სამაგიეროდ ავითარებს და ფართოდ იყენებს შინაგანი აღქმის სიმახვილეს, ანალიზური განტოლებების გეომეტრიულ ახსნას.

ბრტყელი ალგებრული მრუდების ზოგადი თეორიის დარგში პლიუკერის მთავარ მიღწევად უნდა ჩაითვალოს მისი ფორმულები, რომლებიც აკავშირებენ n რიგის მრუდებს k კლასთან და მარტივ განსაკუთრებულ წერტილებთან. უპირველეს ყოვლისა პლიუკერმა იპოვა დამოკიდებულება $k = n(n-1) - 2d - 3r$, სადაც d არის ორმაგი წერტილების რიცხვი და r — უკუქცევის წერტილთა რიცხვი. ამ ტოლობის დუალიზირება n და k სიდიდეების უბრალო გადანაცვლებით შეუძლებელი იყო. ორადობის პრინციპის დაკმაყოფილება შეიძლებოდა მხოლოდ ეგრეთ წოდებულ „წრფივი განსაკუთრებულობის" აღმოჩენისა და შემოყვანის წყალობით. d ორმაგ წერტილებს დუალურად შეესაბამება ორმაგი მხებები t; r უკუქცევის წერტილებს, ი. ე. w გადაღუნვის მხებები, რომელთა შეხების წერტილებს ეწოდებათ გადაღუნვის წერტილები. ამ წერტილების რიცხვისათვის პლიუკერმა იპოვა დამოკიდებულება $w = 3n(n-2)$, რომელიც განსაკუთრებული წერტილების არსებობის შემთხვევაში გადადის დამოკიდებულებაში

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

ეს იძლევა მასალას, რომლიდან დუალიზირების გზით მიიღება მრუდის განსაკუთრებული ადგილებისათვის ფორმულების სრული სისტემა:

$$k = n(n-1) - 2d - 3r; \quad n = k(k-1) - 2t - 3w;$$

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r; \quad r = 3k(k-2) - 6t - 8w.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $n=3$, $d=0$, $r=0$, მივიღებთ $w=9$. წინათ ცნობილი იყო მესამე რიგის ზოგადი C_3 მრუდის მხოლოდ სამი გადაღუნვის წერტილი. პლიუკერმა უჩვენა, რომ ცხრა წერტილიდან ექვსი ყოველთვის წარმოსახვითი უნდა იყოს. შტეინერმა შენიშნა, რომ პლიუკერმა შეცდომა დაუშვა მეოთხე რიგის ზოგადი C_4 მრუდის 28 ორმაგი მხებების განლაგების დროს. გამოდიოდა რა ნებისმიერი მუდმივებიდან, პლიუკერი სწორად ასკვნის, რომ მისი განტოლება შეიძლება მიყვანილ იქნას $\Omega^2 - \mu pqrs = 0$ სახემდე, სადაც $\Omega = 0$ არის კონუსური კვეთა, ხოლო $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ არიან წრფეები, რომლებიც C_4 მრუდის ორ-

შაგ მხებებს წარმოადგენენ. მაგრამ აქედან მას მცდარად გამოჰ-ყავს წინადადებები იმის შესახებ, რომ თითოეული ოთხი ორმაგი მხების შეხების წერტილები მდებარეობს ერთ კონუსურ კვეთაზე, იმ დროს, როცა მტკიცება მართებულია მხოლოდ ოთხი მხების სათანადოდ შერჩევის დაპირისპირების შემთხვევაში. p, q, r, s წრფეების თავისუფლად შერჩევა არ შეიძლება; ორის შერ-ჩევის შემდეგ ორი დანარჩენი შეიძლება შეირჩეს მხოლოდ ხუთი სხვადასხვა ხერხით.

გ უ დ ე რ მ ა ნ ი დაიბადა 1798 წელს ვინენბურგში. მასწავ-ლებლობდა გიმნაზიებში ჯერ კლევეში და შემდეგ მიუნსტერში, სადაც გარდაიცვალა 1852 წ. მან სავსებით დამოუკიდებლად და-ამუშავა ელიფსური ფუნქციებისა და ინტეგრალების თეორია. ინ-ტეგრალს

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} ,$$

რომელიც შეიცავს k მოდულს, ის უწოდებს მოდულარულ ინტეგ-რალს, შექცეულ ფუნქციას კი მოდულარულ ფუნქციას.

გუდერმანმა შეადგინა ჰიპერბოლური ფუნქციების ტაბულე-ბი, რომელთაც გამოყენება აქვთ ასტრონომიულ, ფიზიკურ და ტექნიკურ გამოთვლებში.

9. ბერნანდ ბოლცანო

ბერნანდ ბოლცანო დაიბადა 1781 წელს პრაღაში, ვაჭრის ოჯახში. 1796 წელს დაამთავრა გიმნაზია და იმავე წელს შე-ვიდა პრაღის უნივერსიტეტის ფილოსოფიურ ფაკულტეტზე; აქ ის სამი წლის განმავლობაში სწავლობდა მათემატიკას, ფიზიკასა და ფილოსოფიას. დასაწყისში ბოლცანო ადვილად ვერ ერკვეოდა მათემატიკის საკითხებში და ხშირად მიმართავდა თავის ამხანა-გებს ახსნა-განმარტებისათვის. სამაგიეროდ მეცნიერებას ითვი-სებდა ღრმად კრიტიკულად, შემოქმედებითად. გაეცნო თუ არა პარალელობის შესახებ პოსტულატს, ბოლცანო მაშინვე შეეცადა მის დამტკიცებას. ასე წარმოიშვა მისი პირველი მათემატიკური ნაშრომი: „ჩანაფიქრები ელემენტარული გეომეტრიის ზოგიერთი საგნის შესახებ“, რომელიც დაწერა 1804 წელს, როცა ის 23 წლისა იყო. 1800 წელს დაამთავრა ფილოსოფიური ფაკულ-ტეტი წარჩინებით და მამის სურვილით ვაჭრობა უნდა დაეწყო, მაგრამ ბოლცანოს ეს საქმე სრულებით არ იზიდავდა; ამიტომ მან დედის სურვილს გაუწია ანგარიში და მღვდლად წავიდა, წინას-წარ სწავლობდა რა ღვთისმეტყველების ფაკულტეტზე სამ წელს.

1805 წელს მთავრობამ გადაწყვიტა პრაღის უნივერსიტეტის ფილოსოფიურ ფაკულტეტთან შეექმნათ რელიგიის ფილოსოფიის კათედრა. 24 წლის ბოლცანომ მონაწილეობა მიიღო კონკურსში, მაგრამ, როგორც ღვთისმეტყველების ფაკულტეტის ახალდამთავრებულს, ცოტა შანსები ჰქონდა ამ კათედრის მიღებისა; ამის გამო მან ერთდროულად მიიღო მონაწილეობა მათემატიკის კათედრაზე კონკურსშიც. მიუხედავად იმისა, რომ ბოლცანო შეუფერებელი კანდიდატი იყო, იგი მაინც აირჩიეს რელიგიის ფილოსოფიის კათედრის ხელმძღვანელად. მათემატიკის კათედრის ხაზით მას მხარი დაუჭირა მათემატიკოსმა გერსტნერმა, რომელიც დიდი ავტორიტეტით სარგებლობდა, მაგრამ თვითონ ბოლცანომ არავითარი აქტიურობა არ გამოიჩინა და მთავრობამ არ დაადასტურა პრაღის უნივერსიტეტის წინადადება, ხოლო მათემატიკის კათედრა ჩააბარა ბოლცანოს მეგობარს იანდერს, რომელიც უკვე სამი წელი ასწავლიდა აქ მათემატიკას. არჩევის შემდეგ, ორი კვირის განმავლობაში ბოლცანომ მიიღო ფილოსოფიის დოქტორის ხარისხი და შეუდგა ლექციების კითხვას.

თავისუფალმა აზროვნებამ, სოციალურმა შეხედულებებმა, რომლებიც ბოლცანომ გამოამჟღავნა 1813 წელს დაბეჭდილ თავის წიგნში, ხელი შეუწყვეს მის უნივერსიტეტიდან განდევნას. იმპერატორ ფრანცის ბრძანებით ბოლცანოს აეკრძალა სახელმწიფო დაწესებულებებში სამსახური, საჯაროდ სადმე გამოსვლა სიტყვით და თავისი ნაშრომების დაბეჭდვა. ბოლცანო დააყენეს პოლიციის ზედამხედველობის ქვეშ, დაუნიშნეს მცირე პენსია და აიძულეს, სოფელში ეცხოვრა. სოფელში ცხოვრების 18 წელი ბოლცანომ გაატარა მეცნიერულ მუშაობაში. მის გარშემო თავი მოიყარეს მისმა თანამოაზროვნე „ბოლცანისტებმა". მაგრამ მიყრუებულ სოფელში ცხოვრება, მეცნიერებთან კავშირის გაწყვეტა და ახალი ლიტერატურის გაცნობის შეუძლებლობა ზღუდავდა ბოლცანოს და მის შემოქმედებით ნიჭს სრული გაშლის საშუალებას არ აძლევდა. 1848 წელს ბოლცანო გარდაიცვალა.

ბოლცანომ თავის სიცოცხლეში მხოლოდ ხუთი მათემატიკური ნაშრომი დაბეჭდა. მისმა თანამედროვეებმა ვერ შეაფასეს, თუ რა გააკეთა მან მეცნიერებისათვის. ბოლცანოს სიკვდილის მხოლოდ რამდენიმე ათეული წლის შემდეგ გამოსცეს არქივიდან ამოღებული მისი შესანიშნავი ნაშრომი „მოძღვრება ფუნქციათა შესახებ". ამრიგად, ბოლცანოს სიკვდილის რამდენიმე წლის შემდეგ იქნა აღიარებული მისი დამსახურება მათემატიკაში.

პირველი ნაშრომი, რომელიც ბოლცანომ 1804 წელს გამოაქვეყნა, იყო: „მოსაზრებანი ელემენტარული გეომეტრიის ზოგიერთი საგნის შესახებ“. ამ ნაშრომში ბოლცანო ცდილობს დაამტკიცოს პოსტულატი პარალელობის შესახებ. იგი კუთხეს ასე განსაზღვრავს: „ერთი წერტილიდან გამომავალი ორი მიმართულების სისტემას კუთხე ეწოდება“.

თავის ნაშრომებში ბოლცანო გეომეტრიისა და ანალიზის დაფუძნების საკითხს ამუშავებს; ამ საქმეში იგი მეტად მნიშვნელოვან როლს ანიჭებს მსგავსების ცნებას, რომელსაც ასე განსაზღვრავს: „ორი სივრცითი საგანი მსგავსია, თუ ყველა ნიშანი, რომელიც გამომდინარეობს ერთის ნაწილების ერთმანეთთან შედარებიდან, ორივეში ერთი და იგივეა ანდა თითოეულის ნაწილების ერთმანეთთან ყოველ შესაძლო შედარების დროს შეუძლებელია არა ერთისა და იმავე ნიშნების გამომჟღავნება“. ამ პრინციპის საშუალებით ის ცდილობს დაამტკიცოს თეორემა, რომ წრფეწირი უმოკლესი მანძილია ორ წერტილს შორის.

მსგავსების პრინციპიდან გამოჰყავს მას 1816 წელს გამოქვეყნებულ „ბინომურ თეორემაში“ თეორემა, რომელსაც ის „უმაღლეს სამობით წესს უწოდებს“. ეს თეორემა შემდეგში მდგომარეობს: „თუ ცნობილი $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ფუნქციებიდან რომელილაც არასავალდებულოდ ცნობილი კანონით გამოიყვანება ცნობილი ფუნქცია Φ და თუ მოცემულია ფუნქციები $f_1, f_2, \ldots$, საიდანაც იმავე კანონით გამოიყვანება უცნობი ფუნქცია F, მაშინ უკანასკნელის განსაზღვრა შეიძლება“. ამის საშუალებით ბოლცანო გადადის სივრცეში ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულიდან სივრცითი მრუდის რკალის დიფერენციალის ფორმულისაკენ. ამავე ნაშრომში ის ამტკიცებს თეორემას: „თუ უსასრულო მწკრივს, რომლის წევრები x-ის უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ შუალედში, აქვს ამ შუალედში ნულის ტოლი ჯამი და ყველა მის წევრს აქვს წარმოებულები, მაშინ ამ წარმოებულებისაგან შემდგარ უსასრულო მწკრივს აქვს ნულის ტოლი ჯამი“.

ნაშრომში: „მათემატიკის უფრო საფუძვლიანად გადმოცემისათვის“ (გამოქვეყნებულია 1810 წელს) ბოლცანომ დაწვრილებით გადმოსცა ამოცანები, რომლებიც მან თავის თავს დაუსვა, როცა მათემატიკაში მეცადინეობა დაიწყო. ამის შესახებ იგი შესავალში წერს, რომ 15 წლის განმავლობაში მათემატიკა იყო მისთვის ერთ-ერთი

საყვარელი საგანი, მაგრამ უმთავრესად მის სპეკულატურ ნაწილში, როგორც ფილოსოფიის შტო და როგორც სწორად აზროვნებისათვის სავარჯიშო საშუალება. იქვე დასძენს, რომ მათემატიკის გაცნობის შემდეგ მან შეამჩნია რამდენიმე ნაკლოვანება, რომლის აღმოფხვრისათვის თავისუფალ საათებში იმუშავა და ნაწილობრივ მიზანსაც მიაღწია. ამავე ნაშრომში ბოლცანო ცდილობს მოგვცეს შეკრებისათვის ორი ნატურალური რიცხვის შეკრების დამტკიცება ჯუფთებათა კანონის საშუალებით.

ბოლცანო ითვლება მათემატიკის არითმეტიზაციის ერთ-ერთ ფუძემდებლად. უმნიშვნელოვანესი საკითხები ანალიზის არითმეტიზაციისა მან ჩამოაყალიბა 1817 წელს დაბეჭდილ ნაშრომში: „თეორემის წმინდა ანალიზური დამტკიცება, რომ ყოველ იმ ორ მნიშვნელობას შორის, რომლებიც იძლევიან საწინააღმდეგო ნიშნის შედეგებს, მდებარეობს განტოლების ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი". ნაშრომის წინასიტყვაობაში ბოლცანო გადმოსცემს თეორემას: „უცნობის იმ ორ ნებისმიერ მნიშვნელობას შორის, რომლებიც იძლევიან საწინააღმდეგო ნიშნის შედეგებს, ყოველთვის უნდა მდებარეობდეს განტოლების ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი" და ამბობს, რომ ამ თეორემის აქამდე არსებულ დამტკიცებათა მეთოდები (კესტნერის, ლაგრანჟის, კლეროსა და სხვების) არ არის საკმარისი, რადგანაც ისინი ეყრდნობიან გეომეტრიიდან ნასესხებ თეორემას: „მარტივი სიმრუდის ყოველი უწყვეტი წირი, რომლის ორდინატები ჯერ დადებითია და შემდეგ უარყოფითი, აუცილებლად უნდა გადაკვეთდეს აბსცისათა ღერძს რომელიმე წერტილში, რომელიც ამ ორდინატებს შორის იმყოფება". ბოლცანოს აზრით, დამტკიცების მეთოდი არ ვარგა, თუკი მისი საშუალებით გამოჰყავთ წმინდა (ზოგადი) მათემატიკის, არითმეტიკის, ალგებრის ანუ ანალიზის ჭეშმარიტებები იმ მოსაზრებებიდან, რომლებიც ეკუთვნიან მათემატიკის მხოლოდ გამოყენებით ნაწილს, სახელდობრ, გეომეტრიას.

ბოლცანოს აზრით, ნამდვილ მეცნიერულ დამტკიცებად ანუ „ობიექტურ დაფუძნებად" ჭეშმარიტებისა, რომელიც მართალია ყველა სიდიდისათვის, მიუხედავად იმისა, იმყოფებიან თუ არა ისინი სივრცეში, ყოვლად შეუძლებელია იყოს ჭეშმარიტება, რომელიც მართებულია მხოლოდ სივრცეში მყოფ სიდიდეთათვის. თუმცა ზემომოყვანილი გეომეტრიული ჭეშმარიტება სავსებით თვალსაჩინოაო და, მაშასადამე, არ საჭიროებს დამტკიცებას დამაჯერებლობისათვის, იგი დაფუძნებას საჭიროებსო. ბოლცანოს აზრით,

ობიექტური საფუძველი იმისა, რომ წირი აბსცისათა ღერძს გადაკვეთს, მდგომარეობს იმ ზოგად ჭეშმარიტებაში, რომ x-ის ყოველი უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც x-ის ერთი მნიშვნელობისათვის დადებითი ხდება და მეორე მნიშვნელობისათვის უარყოფითი, უნდა გახდეს ნული x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის, რომელიც მათ შორის მდებარეობს; ეს არის სწორედ ის ჭეშმარიტება, რომელიც აქ უნდა დამტკიცდესო. პირველი უნდა იყოს გამოყვანილი მეორესაგან და არა პირიქითო.

ბოლცანომ პირველმა მოგვცა უწყვეტი ფუნქციის ცნების მკაცრი განსაზღვრა, რასაც უაღრესად დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის შექმნისათვის. ეს განსაზღვრა შემდეგია: „$f(x)$ ფუნქცია იცვლება უწყვეტობის კანონით x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც მოთავსებულია ცნობილი საზღვრების შიგნით ან გარეთ, თუ x არის რომელიმე ამ მნიშვნელობათაგანი, მაშინ სხვაობა $f(x+\omega)-f(x)$ შეიძლება ნაკლები გავხადოთ, ნებისმიერად მოცემულ სიდიდეზე, თუკი ω შეიძლება მივიღოთ იმდენად მცირედ, რამდენადაც გვინდა“. აქვე დისძენს, რომ უწყვეტი ფუნქცია არასოდეს არ აღწევს უმაღლეს მნიშვნელობას ისე, რომ არ გაიაროს ყველა დაბალი.

უწყვეტობის ამ განსაზღვრაზე დაყრდნობით, ბოლცანო ამტკიცებს თეორემას: „თუ x-ის ორ უწყვეტ ფუნქციას $f(x)$ და $\varphi(x)$ აქვს ის თვისება, რომ $x=\alpha$-თვის $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$ და $x=\beta$-თვის $f(\beta)>\varphi(\beta)$, მაშინ x-ის მნიშვნელობა ყოველთვის უნდა იყოს α და β-ს შორის, რომლისთვის იქნება $f(x)=\varphi(x)$“.

დამტკიცება ასეთია: თუ $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$, მაშინ უწყვეტობის კანონის გამო აგრეთვე იქნება $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$, თუკი i-ს ავიღებთ საკმაოდ მცირეს. მაშასადამე, სიმცირის თვისება ეკუთვნის i-ს $f(\alpha+i)$ ფუნქციას i-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც ნაკლებია განსაზღვრულ მნიშვნელობაზე. მაგრამ ეს თვისება არ ეკუთვნის $f(\alpha+i)$ ფუნქციას i-ს ყველა მნიშვნელობისათვის განუსაზღვრელად, სახელდობრ i-ს არა იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც $\beta-\alpha$ სხვაობის ტოლია, ვინაიდან $f(\beta)$ უკვე $>\varphi(\beta)$. ამის შემდეგ ბოლცანო გამოთქვამს თეორემას: „როდესაც ცნობილი M თვისება ეკუთვნის i ცვლადის ყველა მნიშვნელობას, რომლებიც ნაკლებია მოცემულ სიდიდეზე, მაგრამ არ ეკუთვნის საერთოდ ყველა მის მნიშვნელობას, მაშინ არსებობს ყოველთვის რომელიღაც უდიდესი მნიშვნელობა u, რომლის შესახებ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ

ყველა i-ს, რომლებიც $< u$, აქვთ M თვისება. i-ს სწორედ ამ მნიშვნელობისათვის არ შეიძლება $f(\alpha + u)$ იყოს $< \varphi(\alpha + u)$, ვინაიდან უწყვეტობის თანახმად, აგრეთვე იქნებოდა $f(\alpha + u + \omega) < \varphi(\alpha + u + \omega)$, თუკი ω-ს ავიღებდით საკმაოდ მცირეს. მაშასადამე, არ იქნებოდა მართებული, რომ u არის უდიდესი იმ მნიშვნელობებიდან, რომელთა მიმართ მართებულია მტკიცება, რომ i-ს ყველა მნიშვნელობა, მასზე ქვევით მყოფნი, ქმნის $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, ხოლო $u + \omega$ კიდევ უფრო მეტი მნიშვნელობა იქნებოდა, რომლის მიმართაც მართებულია იგივე. მაგრამ კიდევ უფრო ნაკლები შეიძლება იყოს $f(\alpha+u) > \varphi(\alpha+u)$, ვინაიდან მაშინ იქნებოდა აგრეთვე, რომ $f(\alpha + u - \omega) > \varphi(\alpha + u - \omega)$, თუკი ω-ს ავიღებდით საკმაოდ მცირეს, და, მაშასადამე, არ იქნებოდა მართებული, რომ i-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც $< u$-ზე, გვაქვს $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$. ამრიგად, უნდა იყოს $f(\alpha + u) = \varphi(\alpha + u)$, ესე იგი α და β-ს შორის არსებობს x-ის მნიშვნელობა, სახელდობრ, $\alpha + u$, რომლისათვის $f(x)$ და $\varphi(x)$ გახდებიან ერთმანეთის ტოლი. ამ თეორემის დამტკიცებისათვის უჩვენებთ, რომ მნიშვნელობები, რომლებსაც აქვთ M თვისება და რომლებსაც ეს თვისება არა აქვთ, შეიძლება ნებისმიერად დაუახლოვოთ ერთმანეთს“.

ამის შემდეგ ბოლცანო ამტკიცებს თეორემას: „თუ M თვისება არ ეკუთვნის x ცვლადის ყველა მნიშვნელობას, ხოლო ის ეკუთვნის ყველა იმათ, რომლებიც ნაკლებია, ვიდრე ცნობილი u, მაშინ ყოველთვის არსებობს U სიდიდე, რომელიც უდიდესია იმათთაგან, რომელთა შესახებ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ ყველას, რომელნიც ნაკლებია U-ზე, აქვთ M თვისება“. ამის დამტკიცებას გადმოვცემთ ისე, როგორც ეს ბოლცანოს აქვს გადმოცემული.

რადგან M თვისებას ადგილი აქვს ყველა x-თვის, რომლებიც u-ზე ნაკლებია, მაგრამ საერთოდ არა ყველა x-თვის, მაშინ ნამდვილად არსებობს რომელიღაც სიდიდე $V = u + D$ (სადაც D რომელიღაც დადებითი სიდიდეა), რომლის შესახებ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ M არ ეკუთვნის ყველა x-ს, რომლებიც ნაკლებია $V = U + D$-ზე. თუ ახლა საკითხს დავსვამთ, ეკუთვნის თუ არა M ყველა x-ს, რომლებიც ნაკლებია $u + \frac{D}{2^m}$-ზე და მივცემთ m მაჩვენებელს რიგრიგობით მნიშვნელობებს 0, 1, 2 და ასე შემდეგ, მაშინ ჩვენ მიერ დასმულ პირველ საკითხზე მივიღებთ უარყოფით

პასუხს. მართლაც, საკითხი, ეკუთვნის თუ არა M ყველა x-ს, რომლებიც $< u + \frac{D}{2^0}$, იგივეა იმ საკითხთან, ეკუთვნის თუ არა M ყველა x-ს, რომლებიც $< u + D$-ზე, რაც, თანახმად დაშვებისა, უნდა უარვყოთ. საქმე იმაშია, რომ, უარყოფითად ვუპასუხებთ თუ არა ყველა მომდევნო კითხვაზე, რომლებიც აღმოცენდებიან, როდესაც დავუშვებთ m-ს თანდათანობით უფრო დიდს. ამას რომ ადგილი ჰქონოდა, მაშინ აშკარაა, რომ თვითონ u არის უდიდესი იმ მნიშვნელობათაგან, რომელთა მიმართ მართალია, რომ ყველა x-ს, რომლებიც ნაკლებია u-ზე, აქვთ M თვისება.

პირიქით, თუ ზემომოყვანილ კითხვაზე ერთხელ მივიღებთ დადებით პასუხს და თუ m არის განსაზღვრული მნიშვნელობა მაჩვენებლისა, რომელთანაც პირველად ვღებულობთ დადებით პასუხს (m შეიძლება აღნიშნავდეს 1-საც, მაგრამ არა 0-ს), მაშინ M თვისება ეკუთვნის ყველა x-ს, რომლებიც $< u + \frac{D}{2^m}$, მაგრამ ის უკვე აღარ ეკუთვნის ყველა იმათ, რომლებიც $< u + \frac{D^*}{2^{m-1}}$. მაგრამ $u + \frac{D}{2^{m-1}}$ და $u + \frac{D}{2^m}$ შორის სხვაობა უდრის $\frac{D}{2^m}$, თუ ახლა სხვაობას $\frac{D}{2^m}$ მოვეპყრობით ისე, როგორც მოვეპყარით D სხვაობას, ე. ი. თუ დავსვამთ კითხვას, ეკუთვნის თუ არა M ყველა x-ს, რომლებიც $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$, და n მაჩვენებელს მივცემთ მნიშვნელობებს მიმდევრობით 0, 1, 2 და ასე შემდეგ, მაშინ დავრწმუნდებით, რომ პირველ კითხვაზე პასუხი მაინც უარყოფითი იქნება. მართლაც, კითხვა იმის შესახებ, ეკუთვნის თუ არა M ყველა x-ს, რომლებიც $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+0}}$, ნიშნავს კითხვას, ეკუთვნის თუ არა ყველა x-ს, რომლებიც $< u + \frac{D}{2^{m-1}}$,

* რუსულ თარგმანში შეცდომით წერია: $< u + \frac{D}{2^{m+1}}$, მაგრამ სხვაობა $u + \frac{D}{2^m}$ და $u + \frac{D}{2^{m+1}}$ შორის უდრის $\frac{D}{2^m}$. (იხ. К о л ь м а н., Бернанд Больцано, Издательство АН СССР, გვ. 193. 1955).

რაზედაც უკვე გაცემული იყო უარყოფითი პასუხი. თუ უარყოფით პასუხებს მივიღებთ ყველა შემდეგ კითხვაზე, როგორადაც არ უნდა გავადიდოთ n, მაშინ, როგორც წინათ, ცხადი იქნება, რომ $u + \frac{D}{2^m}$ არის უდიდესი მნიშვნელობა ანუ იქნება U, რომლის მიმართ მართებულია მტკიცება, რომ ყველა x-ს, მის ქვევით მყოფს, აქვს M თვისება.

ასევე M ეკუთვნის ყველა x-ს, რომლებიც ნაკლებია $u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$-ზე, მაგრამ არა ყველას, რომლებიც $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n-1}}$. სხვაობა ამ ორ სიდიდეს შორის $= \frac{D}{2^{m+n}}$ და მას მოვეპყრობით ისე, როგორც $\frac{D}{2^m}$-ს და ასე შემდეგ.

თუ ამ ხერხით მსჯელობა გავაგრძელეთ მანამდე, სანამდეც გვსურს, მაშინ დავინახავთ, რომ შედეგი, რომელსაც მივიღებთ, უნდა იყოს ორიდან ერთი.

1) ან ვიპოვით მნიშვნელობას სახისა

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\cdots+r}},$$

რომელიც აღმოჩნდება უდიდესი იმათთაგან, რომელთა შესახებ მართებულია მტკიცება, რომ ყველა x-ს, მასზე ნაკლებს, აქვს M თვისება. ეს მოხდება იმ შემთხვევაში, როცა კითხვაზე, ეკუთვნის თუ არა M ყველა x-ს, რომლებიც

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\cdots+r+s}},$$

მივიღებთ უარყოფით პასუხს s-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

2) ან ყოველ შემთხვევაში ვიპოვით, რომ თუმცა M ეკუთვნის ყველა x-ს, რომლებიც

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\cdots+r}},$$

მაგრამ უკვე არა ყველას, რომლებიც

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\cdots+r-1}},$$

ამასთან შეგვიძლია ამ ორ სიდიდეში სურვილისამებრ გავადიდოთ წევრთა რიცხვი, დავსვამთ რა სულ ახალ-ახალ საკითხებს.

თუ პირველ შემთხვევას აქვს ადგილი, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია; მეორე შემთხვევაში სიდიდე

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

წარმოადგენს მწკრივს, რომლის წევრთა რიცხვი შეიძლება ნებისმიერად გავადიდოთ. თუმცა ბოლცანო არ ხმარობს ტერმინებს „კრებადობა“ და „ზღვარს“, მაგრამ მისი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ეს მწკრივი კრებადია და მის ჯამს აღნიშნავს U-თი, მაშინ M თვისებას ადგილი ექნება ყველა x-თვის, რომლებიც $< U$. მართლაც, თუ ამას ადგილი არ ექნებოდა ყველა x-თვის, რომლებიც $< U$, მაგალითად $U - \delta$-თვის, მაშინ სიდიდე

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

ყოველთვის უნდა ინარჩუნებდეს δ მანძილს U-დან, ვინაიდან M თვისება უნდა ჰქონდეს ყოველ x-ს, რომლებიც მასზე ნაკლებია. მაგრამ ყოველ x-ს, რომელიც უდრის

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega,$$

აქვს M თვისება, რა მცირეც არ უნდა იყოს ω; პირიქით $x = U - \delta$-ს არ უნდა ჰქონდეს ეს თვისება. მაშასადამე, უნდა იყოს

$$U - \delta > u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega$$

ანდა

$$U - \left[u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}\right] > \delta - \omega.$$

ამრიგად, სხვაობა U-სა და მწკრივს შორის არ გახდებოდა ისე მცირე, როგორც ჩვენ გვსურს, ვინაიდან $\delta - \omega$ ვერ გახდება ნებისმიერად მცირე, რადგან δ არ იცვლება და ω-ს შეუძლია გახდეს მოცემული სიდიდეზე ნებისმიერად ნაკლები. ასევე M-საც არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ყველა x-თვისაც, რომლებიც $< U + \varepsilon$-ზე. მართლაც, ვინაიდან

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$$

მწკრივის მნიშვნელობა შეიძლება გავხადოთ ნებისმიერად ახლოს

$$u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots+\frac{D}{2^{m+n+\dots+r}}$$

მწკრივის მნიშვნელობასთან, რამდენადაც მათ შორის სხვაობა უდრის მხოლოდ $\frac{D}{2^{m+n+\dots+r}}$-ს, და ასე შემდეგ უკანასკნელი მწკრივის მნიშვნელობა შეიძლება მიუახლოვდეს U სიდიდეს ნებისმიერად, მაშინ პირველი მწკრივის მნიშვნელობა და U ერთმანეთთან ნებისმიერად ახლოს იქნებიან. მაშასადამე,

$$u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots+\frac{D}{2^{m+n+\dots+r-1}}$$

ნამდვილად შეიძლება გახდეს $< U+\varepsilon$. მაგრამ, დაშვების თანახმად, M-ს ადგილი არა აქვს ყველა x-თვის, რომლებიც

$$< u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots+\frac{D}{2^{m+n+\dots+r-1}},$$

და, მაშასადამე, მით უფრო ყველა x-თვის, რომლებიც $< U+\varepsilon$. მაშასადამე, U არის უდიდესი მნიშვნელობა, რომლის შესახებ მართებულია მტკიცება, რომ ყველა x-ს, მის დაბლა მყოფს, აქვს M თვისება.

ამ თეორემას თანდართული აქვს ორი შენიშვნა. პირველ შენიშვნაში ნათქვამია, რომ ეს თეორემა მეტად მნიშვნელოვანია და მას გამოყენება აქვს მათემატიკის ყველა დარგში. აქვე ნათქვამია, რომ ამ თეორემის ნაცვლად წინათ ხმარობდნენ არასწორ თეორემას: „თუ M თვისებას ადგილი არა აქვს ყველა x-თვის, ხოლო ადგილი აქვს ყველა იმათთვის, რომლებიც განსაზღვრულზე ნაკლები არიან, მაშინ ყოველთვის არსებობს უდიდესი x, რომელსაც აქვს M თვისება“. ბოლცანო ასე მსჯელობს: თუ გვაქვს რომელიმე U სიდიდე, რომელიც უდიდესია იმათგან, რომელთა შესახებ შეიძლება ითქვას, რომ ყველა x-ს, რომლებიც დგანან მის ქვევით, აქვთ M თვისება, სწორედ ამიტომ არ არსებობს არავითარი უდიდესი x, რომელსაც ეს თვისება აქვს, თუკი x არის ან თავისუფალი, ანდა უწყვეტი ცვალებადი სიდიდე. ვინაიდან ყოველი თავისუფალი ანდა, უწყვეტობის კანონის მიხედვით, ცვალებადი სიდიდისათვის არ არსებობს არასოდეს უდიდე-

სი მნიშვნელობა, რომელიც ნაკლებია რომელიღაც U საზღვარზე, რამდენადაც, რაგინდ ახლოს იყოს იგი ამ საზღვართან, ის ყოველთვის შეიძლება კიდევ უფრო მიუახლოვდეს მას.

ამის ასახსნელად ბოლცანო მიმართავს ტოლფერდა ჰიპერბოლის მაგალითს.

ამ ნაშრომში ბოლცანოს გამოჰყავს ნამდვილწევრებიანი მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა: „თუ მწკრივის პირველი n, $n+1$, $n+2$, $\cdots$,$n+r$ წევრების ჯამი რიგრიგობით აღვნიშნავთ $F_n(x)$, $F_{n+1}(x)$, $F_{n+2}(x)$, $\ldots$,$F_{n+r}(x)$, მაშინ სიდიდეები

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x), \ldots ,\ F_n(x), \ldots ,\ F_{n+r}(x), \ldots$$

წარმოადგენს ახალ მწკრივს (წინამორბედი მწკრივის ჯამად წოდებული). დაშვების თანახმად, ამ მწკრივს აქვს ის განსაკუთრებული თვისება, რომ სხვაობა მისი n-ური წევრისა $F_n(x)$ და ყოველი შემდეგი $F_{n+r}(x)$-ს შორის, რა შორსაც არ უნდა იყოს n-ურისაგან, ნაკლები რჩება, ვიდრე ნებისმიერი მოცემული სიდიდე, თუკი ჩვენ დასაწყისშივე ავიღეთ n საკმაოდ დიდად. ეს სხვაობა წარმოადგენს ნამატს, რომელსაც განიცდის პირვანდელი მწკრივი, მისი n-ური წევრის იქით გაგრძელების გამო, ეს ნამატი კი, დაშვების თანახმად, უნდა რჩებოდეს ნებისმიერად მცირე, თუკი n აღებულია საკმაოდ დიდად.

ამის შემდეგ ის გადმოსცემს მწკრივის კრებადობის საკმარის პირობას შემდეგი თეორემის სახით:

„თუ სიდიდეთა მწკრივს $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots$, $F_{n+r}(x)$ აქვს ისეთი თვისება, რომ მისი n-ური $F_n(x)$ წევრისა და ყოველი შემდეგი $F_{n+r}(x)$-ს შორის სხვაობა, როგორადაც იყოს ის დაშორებული პირველისაგან, ყოველ მოცემულ სიდიდეზე ნაკლები რჩება, თუ n ავიღეთ საკმაოდ დიდი, მაშინ ყოველთვის არსებობს განსაზღვრული მუდმივი სიდიდე, და ამასთან მხოლოდ ერთი, რომელსაც სულ უფრო და უფრო უახლოვდება ამ მწკრივის წევრები და რომლისაკენ მათ შეუძლიათ მისვლა ნებისმიერად ახლოს, თუ ჩვენ მწკრივს გავაგრძელებთ საკმაოდ შორს“.

ამ თეორემიდან აშკარაა, რომ პირველად ბოლცანომ მოგვცა მიმდევრობის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის ფორმულირება.

ბოლცანოს მათემატიკურ ნაშრომებს ძალიან გვიან მიაქციეს სათანადო ყურადღება. მხოლოდ 1920 წელს მ. იაშეკმა იპოვა ვენის

ბიბლიოთეკაში ბოლცანოს ვრცელი ნაშრომის „მოძღვრება ფუნქციათა შესახებ“ ხელნაწერი, დაწერილი 1830 წელს. 1921 წელს იაშეკმა გამოაქვეყნა ხელნაწერის შესახებ მოკლე ცნობა ჩეხურ მეცნიერებათა საზოგადოების მოამბეში, ხოლო 1922 წელს ჩეხურ ჟურნალში „მათემატიკისა და ფიზიკის წაქეზებისათვის“ გამოაქვეყნა ორი წერილი ბოლცანოს შესანიშნავი ნაშრომის ფუნქციათა შესახებ. დასასრულ, 1930 წელს, ე. ი. მისი დაწერის ასი წლის შემდეგ, „მოძღვრება ფუნქციათა შესახებ“ გამოსცეს ჩეხურ მეცნიერებათა საზოგადოებამ.

ნაშრომი „მოძღვრება ფუნქციათა შესახებ“ შეიცავს ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის სისტემატურ გადმოცემას. ის შედგება შესავალისა და ორი ნაწილისაგან. შესავალი შეიცავს 36 პარაგრაფს. პირველ სამ პარაგრაფში მოცემულია ფუნქციის განსაზღვრა. ბოლცანო ფუნქციას განსაზღვრავს, როგორც დამოკიდებულებას, მოცემულს ნებისმიერი, ცნობილი ან უცნობი, კანონით, რომლითაც ერთ-ერთი ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას უნდა შეესაბამებოდეს მეორის განსაზღვრული მნიშვნელობა. მე-4 — 15 პარაგრაფებში განხილულია სხვაობა ანუ ნამატი ერთი და მრავალი ცვლადის ფუნქციისა. მე-12 პარაგრაფში ბოლცანო ამტკიცებს, რომ ფუნქციის ცალსახობიდან გამომდინარეობს მისი სხვაობის ცალსახობა. შემდეგ გადმოცემულია ცნება უმაღლესი რიგის სხვაობათა შესახებ. შემდეგ პარაგრაფებში გადმოცემულია მოძღვრება ფუნქციათა ჯამების შესახებ, მოძებნილია ჯამის, ნამრავლისა და წილადის სხვაობები და მათი ზღვრები.

პირველი ნაწილი მიძღვნილია უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციების საკითხებისადმი და შედგება 82 პარაგრაფისაგან. პირველ სამ პარაგრაფში ბოლცანო უჩვენებს, რომ შეიძლება არსებობდეს ფუნქციები, რომლებიც წყვეტილი არიან არა მარტო ცალკეულ წერტილებზე, არამედ დამოუკიდებელი ცვლადის ცვალებადობის შუალედის ყველა წერტილზე. მაგალითისათვის მას მოჰყავს ფუნქცია $W = ax$ ყველა $x = \dfrac{2m+1}{2^n}$ -თვის და $W = ax + b$, $(b \neq 0)$ ყველა $x \neq \dfrac{2m+1}{2^n}$-თვის.

მე-4 — 8 პარაგრაფებში დამტკიცებულია რაციონალურ ფუნქციათა უწყვეტობა, ხოლო მე-9 — 11 პარაგრაფებში — წყვეტილი ფუნქციების სხვადასხვა შემთხვევა. მე-15 — 16 პარაგრაფებში

ნაჩვენებია შემთხვევები, როცა უწყვეტობის თვისებათა საფუძველზე შეიძლება ფუნქციის მნიშვნელობის განსაზღვრა. ასე, მაგალითად,

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

უსასრულო მწკრივის მნიშვნელობა $x = 1$-თვის წესდება იმ მოსაზრებიდან, რომ ეს მწკრივი, კრებადი $|x| < 1$-თვის, უდრის $\frac{1}{1+x}$, რომელიც უწყვეტი ფუნქციაა. აქედან გამომდინარეობს, რომ $1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}$. ბოლცანომ თავისი თვალსაზრისი ამ საკითხზე შემდეგში შეცვალა.

მე-17 — 18 პარაგრაფებში გამოკვლეულია ის შემთხვევა, როდესაც $[a, b]$ შუალედში უწყვეტი $F(x)$ ფუნქცია დაიყვანება მუდმივ სიდიდემდე. ბოლცანო ამტკიცებს, რომ ამ შუალედის იმ M წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვის $F(x) = C$ (თუ ის უსასრულოა) არ უნდა ჰქონდეს ამ შუალედში დაგროვების წერტილები, ვინაიდან მაშინ იქნება $F(x) = C$ ამ შუალედის ყველა x-თვის. ბოლცანოს ეს მტკიცება სწორი არ არის. შეიძლება სათანადო მაგალითის მოყვანა.

მე-19 — 23 პარაგრაფებში ამტკიცებს თეორემებს: თუ ფუნქცია $F(x)$, როცა $x \to c$, უსასრულოდ იზრდება, მაშინ ის წყვეტილია $x = c$ წერტილში. თუ $F(x)$ უწყვეტია დახურულ $[a, b]$ შუალედში, მაშინ ის აქვე შემოსაზღვრულია. 24 — 26-ე პარაგრაფი შეიცავს იმის დამტკიცებას, რომ დახურულ $[a, b]$ შუალედში უწყვეტი $F(x)$, ფუნქცია ღებულობს მასში უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს და აგრეთვე აქ ის ღებულობს არანაკლებ ერთხელ ყველა მნიშვნელობას $F(a)$ და $F(b)$ შორის. 46-ე პარაგრაფამდე უკანასკნელის ჩათვლით განხილულია რთულ ფუნქციათა და მრავალცვლადის ფუნქციათა უწყვეტობა. 47-ე და 48-ე პარაგრაფებში მტკიცდება, რომ თუ $F(x)$ ღებულობს დახურულ $[a, b]$ შუალედში ყველა მნიშვნელობას $F(a)$ და $F(b)$ შორის, აქედან კიდევ არ გამომდინარეობს, რომ $F(x)$ ამ შუალედში უწყვეტია. ის გვაძლევს მითითებებს, რომლის საშუალებით შეიძლება ფუნქციის აგება, რომელიც $[-1, +1]$ შუალედში ღებულობს ყველა მნიშვნელობას -1-დან $+1$-მდე, მაგრამ წყვეტილია ამ შუალედის ყოველ წერტილში.

49 — 64-ე პარაგრაფებში შესწავლილია მონოტონური ფუნქციები და მაქსიმუმები და მინიმუმები. მტკიცდება, რომ ყოველი მონოტონური ფუნქცია ღებულობს ყოველ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთჯერ. დადგენილია კავშირი მონოტურ და უწყვეტ ფუნქციებ-

სა და იმ ფუნქციებს შორის, რომლებიც ღებულობენ ყოველ მნიშვნელობებს ორ მოცემულს შორის. განხილულია აგრეთვე კავშირი ფუნქციის ექსტრემალურ მნიშვნელობებსა და უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის.

75-ე პარაგრაფში ბოლცანომ ააგო ფუნქცია, რომელსაც შემდეგში მისი სახელი ეწოდა. ეს ფუნქცია, თუმცა უწყვეტია, მაგრამ არ არის მონოტონური არც ერთ, რა გინდ მცირე, შუალედში.

76—78-ე პარაგრაფებში ბოლცანო განიხილავს მაქსიმუმებისა და მინიმუმების ერთმანეთისადმი მიმდევრობას და ამ განყოფილების შემდეგ პარაგრაფებში მოჰყავს რამდენიმე თეორემა წყვეტი წერტილების შესახებ.

მეორე ნაწილი ნაშრომისა „მოძღვრება ფუნქციათა შესახებ“ მიძღვნილია „ფუნქციის წარმოებულებისადმი“.

ეს ნაწილი 99 პარაგრაფისაგან შედგება. პირველ სამში შემოყვანილია ცნებები პირველი და უმაღლესი რიგის წარმოებულებისა, კერძო წარმოებულების და პირვანდელი ფუნქციისა. ამასთან განსხვავებულია მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები. აქ ბოლცანო აღნიშნავს, რომ $\frac{1}{1-x}$ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული $x = 1$ მნიშვნელობისათვის და რომ მისი წარმოებული ფუნქცია უსასრულოდ დიდი ხდება $x = 1$-თვის.

მე-4 —8 პარაგრაფებში ნაჩვენებია, რომ წარმოებული შეიძლება იყოს ან მუდმივი, ან ცვლადი და თუ ის არსებობს, განსაზღვრულია ცალსახად. აქ დამტკიცებულია თეორემა: „თუ $f(x) = F'(x)$ და $\varphi(x) = F'(x)$ მოცემული შუალედის x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, მაშინ ამავე შუალედში $f(x) = \varphi(x)$. შემდეგ სამ პარაგრაფში ბოლცანო ამტკიცებს, რომ ორი ფუნქციის ტოლობიდან გამომდინარეობს მათი წარმოებულების ტოლობა და არა პირიქით, და რომ მუდმივის წარმოებული ნულია. მე-12 — 14 პარაგრაფებში გარჩეულია საკითხი გაწარმოებისა და უწყვეტობის შორის კავშირის შესახებ. ბოლცანო ამტკიცებს, რომ თუ $F(x)$ ფუნქციას აქვს x წერტილში წარმოებული, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში, მაგრამ შებრუნებული თეორემა არ არის მართებული; ის განიხილავს შემთხვევებს, როდესაც წერტილში უწყვეტ ფუნქციას არა აქვს ამ წერტილში წარმოებული. ამასთან აღნიშნავს კოშის შეცდომას, რომელიც დაუშვა ნაშრომში „ანალიზის კურსი“; ეს შეცდომა იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი y ცვლადი, რომელიც ქრება მეორე x ცვლადთან, შეიძლება გამოისახოს ასე: $y = kx(1 \pm \varepsilon)$, ($\varepsilon \to 0$, როცა $x \to 0$), სადაც k იმავე რიგისაა,

ან ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია, ანდა ისეთი სიდიდე, რომელიც აგრეთვე ქრება x-თან ერთად.

მე-19 პარაგრაფი მიძღვნილია ბოლცანოს ფუნქციისადმი. აქ დამტკიცებულია, რომ ამ ფუნქციას, თუმცა უწყვეტია დახურულ $[a, b]$ შუალედში, არა აქვს წარმოებული ამ შუალედის წერტილთა თავის თავში მკვრივ სიმრავლეში. ნამდვილად კი ეს ფუნქცია არსად არ არის წარმოებადი.

მე-20—23-ე პარაგრაფებში ბოლცანო განიხილავს ფუნქციებს, რომლებსაც აქვს ან მარცხენა, ან მარჯვენა წარმოებული და ამტკიცებს, რომ თუ $F(x)$ აქვს $[a, b]$ შუალედის ყველა x-თვის ეს ორივე უწყვეტი წარმოებული, მაშინ მას ამ შუალედში ყველგან აქვს წარმოებული. ეს დებულება სწორია, მაგრამ ბოლცანოს დამტკიცება არაა სწორი. ამის შემდეგ ბოლცანო ეხება თეორემას საშუალო მნიშვნელობის შესახებ. ის ცდილობს დააზუსტოს კოშის დამტკიცება, უჩვენებს რა, რომ საკმარისია გამოვიდეთ $F(x)$-ის უწყვეტობიდან დახურულ $[a, b]$ შუალედში და სასრული ან განსაზღვრული უსასრულო წარმოებულის არსებობიდან ღია (a, b) შუალედში; უკანასკნელის არსებობა და უწყვეტობა დახურულ $[a, b]$ შუალედში არ არის სავალდებულო.

36 — 58-ე პარაგრაფებში გამოყვანილია რაციონალური ფუნქციების, რთული და შექცეული ფუნქციების გაწარმოების წესები; განხილულია აგრეთვე უმაღლესი რიგის წარმოებულები და მრავალცვლადის ფუნქციები.

1816 წელს დაიბეჭდა ბოლცანოს ნაშრომი „ბინომიალური თეორემა“. ამ ნაშრომში ის ამტკიცებს თეორემას: „თუ უსასრულო მწკრივს, რომლის წევრები უწყვეტი ფუნქციებია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც (a, b) შუალედში იმყოფებიან, ყოველთვის აქვს ამ მნიშვნელობებისათვის ნულის ტოლი ჯამი, და თუ ყველა მის წევრს აქვს წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულებისაგან შექმნილ უსასრულო მწკრივს აქვს აგრეთვე ამავე მნიშვნელობებისთვის ნულის ტოლი ჯამი“. მაგრამ ეს თეორემა საზოგადოდ მართებული არაა.

1804, 1815 და 1817 წლებში გამოქვეყნდა ბოლცანოს გეომეტრიული ნაშრომები: 1) „მოსაზრებები ელემენტარული გეომეტრიის ზოგიერთი საგნის შესახებ“. 2) „სივრცის სამი განზომილების შესახებ სწავლების ობიექტურად დაფუძნების ცდა“. 3) „წრფევადობის, ფართობებისა და მოცულობების გამოთვლის სამი პრობლემა“.

ბოლცანოს ნაშრომი „უსასრულობის პარადოქსები“ მიძღვნილია მათემატიკის ძირითადი ცნებების გაშუქებისადმი, განსაკუთრებით მათემატიკური უსასრულობის ცნებისადმი. მე-5 — 8 პარაგ-

რაფებში შემოჰყავს „სიდიდის“, „ჯამისა“ და „მწკრივის“ ცნებები; ამის შემდეგ მოჰყავს „სასრული სიმრავლის“ და მთელი რიცხვის ცნება. მწკრივის ქვეშ ის გულისხმობს „ერთობლიობას საგნებისა, A, B, … , M, N, … , რომელსაც აქვს ისეთი თვისება, რომ ყოველი M-თვის შეიძლება ვუჩვენოთ მხოლოდ ერთი N ისეთი გვარის, რომ შეგვიძლია ყველა ელემენტისათვის ერთნაირი კანონის საშუალებით განვსაზღვროთ M-ის N-თან დამოკიდებულება (მწკრივის შედგენის კანონი). ასეთ შემთხვევაში მთელი რიცხვის ცნება მას ასე შემოჰყავს: „წარმოვიდგინოთ მწკრივი, რომლის პირველი წევრი A გვარის ერთეულია, ხოლო თითოეული შემდეგი წევრი შედგენილია თავისი წინამორბედისაგან ისე, რომ თუ ავიღებთ მის ტოლ საგანს, შევუერთებთ მას ახალ ერთეულს A გვარისა და შევქმნით მათ ჯამს, მაშინ ამ მწკრივში შემავალი ყველა ერთეული, პირველის გამორიცხვით, რომელიც წარმოადგენს A მწკრივის მარტივ ერთეულს, იქნება რაოდენობა. ისინი უნდა წარმოადგენდნენ, სახელდობრ, იმ რაოდენობებს, რომლებსაც ვუწოდებ სასრულოებს ან აღრიცხვად რაოდენობებს ან, პირველი წევრის ჩათვლით, რიცხვებსაც კი, უფრო გარკვევით: მთელ რიცხვებს“.

ამ ნაშრომში ბოლცანო განიხილავს ორი სახის უსასრულობას: 1) უსასრულოდ ზრდად ცვლად სიდიდეს ანუ „პოტენციალურ“ უსასრულობას. 2) „აქტუალურ“ უსასრულობას. სიმრავლის ქვეშ ბოლცანო გულისხმობს ერთეულების ერთობლიობას, მათი მიმდევრობის რიგისაგან დამოუკიდებლად.

თ ა ვ ი IX

მათემატიკა XIX საუკუნის პირველ ნახევარში

1. მიხეილ ვასილის ძე ოსტროგრადსკი

მიხეილ ოსტროგრადსკის ბიოგრაფია და მისი მოღვაწეობა დაწვრილებით აღწერა ბ. გნედენკომ.

მიხეილ ოსტროგრადსკი დაიბადა 1801 წელს პოლტავის გუბერნიაში კოჰელიაკის მაზრაში, მემამულის ოჯახში. რვა წლის მიაბარეს პოლტავის გიმნაზიასთან არსებულ პანსიონში, რომელსაც ეწოდებოდა ღარიბი ბავშვების აღსაზრდელი სახლი. გიმნაზია არ დაუმთავრებია, რადგანაც მამამ ის გამოიყვანა მესამე კლასიდან; მამას (და მასაც) სურდა, რომ ის სამხედრო პირი ყოფილიყო. 1816 წელს ოსტროგრადსკი წაიყვანეს პეტერბურგში ერთ-ერთ გვარდიელთა პოლკში ჩასარიცხად, მაგრამ გზიდანვე უკან დააბრუნეს ერთ-ერთი ნათესავის რჩევით: მიხეილი უნივერსიტეტში შეეყვანათ. 1817 წელს ოსტროგრადსკიმ სწავლა განაგრძო ხარკოვის უნივერსიტეტში. იგი დიდ ხანს ოცნებობდა სამხედრო სამსახურზე, არ მოსწონდა მომავალი სამოქალაქო კარიერა და ცუდად სწავლობდა. მაგრამ უნივერსიტეტში სწავლის მეორე წლის დასასრულს მან მკვეთრად შეიცვალა აზრი. დაიწყო მუშაობა და მალე იგრძნო მათემატიკისადმი მოწოდება. ამის საბაბი იყო ოსტროგრადსკის საცხოვრებლად გადასვლა უნივერსიტეტის მათემატიკის მასწავლებლის პავლოვსკის ბინაში; პავლოვსკიმ გაუღვიძა მას ინტერესი და სიყვარული მათემატიკისადმი, რის შემდეგ დაიწყო ისე ენერგიულად სწავლა, რომ ორი თვის შემდეგ პავლოვსკი გააკვირვა თავისი მიღწევებით. წლის ბოლოს მან ჩააბარა გამოცდები უნივერსიტეტის კურსზე. 1820 წელს ოსტროგრადსკიმ მოისურვა უნივერსიტეტის დამთავრების გაფორმება. ამისათვის საჭირო იყო გამოცდების ჩაბარება, რაც მან ბრწყინვალედ შეასრულა. უნივერსიტეტის რექტორმა ოსიპოვსკიმ წამოაყენა წინადადება ოსტროგრადსკისათვის პირველი სამეცნიერო ხარისხის — მეცნიერებათა კანდიდატის ხა-

რისხის მინიჭების შესახებ. მაგრამ ხარკოვის უნივერსიტეტის პროფესურის რეაქციული ნაწილი იმდენს ეცადა, რომ ოსტროგრადსკის წაერთვა უფლება უნივერსიტეტის დამთავრების დიპლომის მიღებისა, ბრალს სდებდნენ რა მას თავისუფალი აზროვნებისა და ღვთისმეტყველების ლექციებზე დაუსწრებლობაში.

1822 წელს ოსტროგრადსკი პარიზში გაემგზავრა და ისმენდა გამოჩენილი მათემატიკოსების: კოშის, ლაპლასისა და პუასონის ლექციებს. 1825 წელს კოში ერთ-ერთ თავის მემუარში ქებით იხსენიებს ოსტროგრადსკის გამოკვლევებს, რომლებიც მიძღვნილია ინტეგრალების გამოთვლისადმი. 1826 წელს ოსტროგრადსკიმ წარადგინა პარიზის აკადემიაში თავისი პირველი მემუარი „ცილინდრულ ჭურჭელში სითხის ტალღისებური მოძრაობის შესახებ". პარიზში ოსტროგრადსკი პედაგოგიურ მუშაობას ეწეოდა ჰენრიხ IV-ის კოლეჯში. 1828 წელს კი პეტერბურგში დაბრუნდა; ჩასვლისთანავე პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიამ მას მიანიჭა ადიუნქტის წოდება, ხოლო ორი წლის შემდეგ — აკადემიკოსის წოდებაც გამოყენებით მათემატიკაში.

პეტერბურგში ოსტროგრადსკი სამეცნიერო-კვლევით მუშაობასთან ერთად ეწეოდა პედაგოგიურ მუშაობასაც. იგი მასწავლებლობდა მთავარ პედაგოგიურ ინსტიტუტში, საგზაო ინსტიტუტში, საზღვაო კორპუსში, საარტილერიო აკადემიაში. 1856 წელს პარიზის მეცნიერებათა აკადემიამ იგი აირჩია წევრ-კორესპონდენტად.

1861 წელს ოსტროგრადსკი გარდაიცვალა პოლტავაში, როცა იგი ბრუნდებოდა თავისი მამულიდან პეტერბურგში.

ოსტროგრადსკიმ მნიშვნელოვანი განძი შეიტანა მექანიკაში. ჰამილტონისაგან დამოუკიდებლად მან დაადგინა მექანიკის ერთი უმნიშვნელოვანესი დებულება, ეგრეთ წოდებული უმცირესი მოქმედების პრინციპი, და აგრეთვე ზოგადი სახით ჩაწერა შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი, მოაცილა რა ამ დებულების ავტორის ლაგრანჟის—ზედმეტი განსაზღვრები და გაასწორა ამ უკანასკნელის დაშვებული შეცდომები დინამიკის განტოლებების გამოყვანაში.

არსებითი შედეგები ოსტროგრადსკიმ მიიღო ვარიაციათა აღრიცხვაში. ამ საკითხისადმი მიძღვნილი მისი მემუარი დაიბეჭდა პეტერბურგის აკადემიის ნაშრომებში 1834 წელს, 1861 წელს გამოვიდა მისი სრული თარგმანი, როგორც დამატება მათემატიკოსისა და მათემატიკის ისტორიკოსის ტოდგენტერის წიგნისა, მიძღვნილი ვარიაციათა აღრიცხვის ისტორიისადმი. ამ მემუარში უკვე ამოხსნილი პრობლემის ექვსი წლის შემდეგ პარიზის

აკადემიამ ამავე პრობლემაზე პრემია გამოაცხადა და იგი მიენიჭა ფრანგ მათემატიკოსს სარიუს. ამავე მემუარში ოსტროგრადსკის მოცემული აქვს უმნიშვნელოვანესი ფორმულა ჯერადი ინტეგრებისა, რომელსაც n-ჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა დაჰყავს $n-1$-ჯერადი ინტეგრალის გამოთვლამდე. მათემატიკურ ფიზიკაში ის შეეხო მრავალნაირ საკითხს: სითბოს გავრცელებას, სითხის ზედაპირზე ტალღების გავრცელებას, დარტყმის თეორიას, დრეკადი სხეულის მოძრაობის განტოლებას.

ოსტროგრადსკის რამდენიმე ნაშრომი მიძღვნილია ბალისტიკისადმი. ამ ნაშრომებმა და აგრეთვე გამოკვლევებმა ციურ მექანიკაში ოსტროგრადსკი მიიყვანეს მიახლოვებით გამოთვლამდე და მოგვცა მნიშვნელოვანი ფორმულები. ალგებრულ ფუნქციათა დარგში ოსტროგრადსკიმ გამოაქვეყნა მრავალი საკუთარი გამოკვლევა. რაციონალური ფუნქციიდან ინტეგრალის ალგებრული ნაწილის გამოყოფის მეთოდი ოსტროგრადსკიმ იპოვა ალგებრულ ფუნქციათა თეორიის დამუშავებასთან დაკავშირებით. მისი რამდენიმე ნაშრომი მიძღვნილია ალბათობათა თეორიისადმი. ოსტროგრადსკი ითვლება რუსეთში მათემატიკური სკოლის ერთ-ერთ დამაარსებლად.

რუსეთში მათემატიკური კულტურის განვითარების საქმეში ოსტროგრადსკიმ დიდი განძი შეიტანა. თავისი საჯარო ლექციებით მას რუსეთში გადმოჰქონდა დასავლეთის მაღალი მათემატიკური კულტურა, განსაკუთრებით საფრანგეთის. უმაღლეს ალგებრაში წაკითხული ლექციები დაიბეჭდა სახელწოდებით „ლექციები ალგებრული ანალიზში“; ეს ლექციები შეიცავს, სხვათა შორის, გაუსის ხერხს ორწევრა განტოლების ამოხსნისათვის და აბელის დამტკიცებას მეოთხეზე უფრო მაღალი ხარისხის განტოლების რადიკალებში ზოგადად ამოხსნის შეუძლებლობის შესახებ.

2. ნილს ჰენრიხ აბელი

ფ. კლაინი აბელის ბიოგრაფიის გადმოცემას იწყებს შემდეგი სიტყვებით: „აბელის სახით ჩვენ ვხვდებით დიდს, ჩვენი მეცნიერების თავისებურ გენიას“.

აბელი დაიბადა 1802 წლის 5 აგვისტოს მეტად ღარიბ ოჯახში, ნორვეგიის პატარა დაბაში ფინჰოში. ბუნებით აბელი იყო მორცხვი, სიღარიბისა და გაჭირვებისაგან დაჩაგრული, სულიერად დაავადებული. 1822 წლიდან აბელი ესწრებოდა ლექციებს

ქრისტიანიის უნივერსიტეტში, მაგრამ მათემატიკაში აქ ლექციები არ იკითხებოდა, მა'შინ აბელმა თვითონ დაიწყო მეცადინეობა მათემატიკაში მისთვის ხელმისაწვდომი წიგნების საშუალებით და 1823 წელს საზოგადოება გააკვირვა თავისი მცდარი გამოკვლევით. აბელს ეგონა, რომ იპოვა მეხუთე ხარისხის განტოლების ამოხსნა რადიკალებში, მაგრამ ძალიან მალე მიხვდა, რომ ასეთი ამოხსნა შეუძლებელია და ამ შეუძლებლობის დამტკიცება გამოაქვეყნა ცალკე ბროშურის სახით 1824 წელს. ამის შემდეგ მან კიდევ ერთი ნაშრომი გამოაქვეყნა ალგებრულ გამოსახულებათა ინტეგრების შესახებ. ყოველგვარ სახსრებს მოკლებულ აბელისათვის ამ ორი ნაშრომის გამოქვეყნება მეტად სასარგებლო და სასიხარულო შეიქნა: მას დაენიშნა სტიპენდია საზღვარგარეთ სამეცნიერო მიზნით გამგზავრებისათვის. იგი ჯერ გაემგზავრა ბერლინში, სადაც ცხოვრობდა 1825 წლის სექტემბრიდან 1826 წლის თებერვლამდე.

ბერლინში ჩასვლისთანავე აბელი გაეცნო კრელს, რომელიც აპირებდა ჟურნალის გამოცემას. პირველივე საუბრისას კრელმა ამ გამოუცდელ ახალგაზრდაში შეიცნო გენია და მაშინვე მიიწვია თავისი ჟურნალის თანამშრომლად. შემდეგშიაც კრელი დარჩა აბელის ერთგული და მზრუნველი მეგობარი; თავის მხრივ აბელიც მეტად ენდობოდა კრელს. მან გულითადად მიიღო კრელის წინადადება ჟურნალში თანამშრომლობის შესახებ და პირველსავე ნომერში დაიბეჭდა მისი ექვსი ნაშრომი.

1826 წლის თებერვალში აბელი შეუერთდა რამდენიმე ნორვეგიელ მეგობარს, რომლებიც იტალიაში მიემგზავრებოდნენ. მათთან ერთად მან რამდენიმე თვე გაატარა ვენეციაში, ივლისში კი გადავიდა პარიზში, სადაც წლის ბოლომდე დარჩა. აქ იგი მარტოობას განიცდიდა და ამის გამო იტანჯებოდა კიდეც; აკადემიურ წრესთან მას არავითარი კავშირი არ ჰქონდა. 30 ოქტომბერს აბელმა პარიზის აკადემიას გადასცა თავისი დიდი ნაშრომი: „მემუარი ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა ერთი მეტად ვრცელი კლასის შესახებ“, რომელიც შეიცავს „აბელის თეორემას“ და განსახილველად გადაეცა კოშის, რომლის ქაღალდებში ეს ხელნაწერი დაიკარგა. 1830 წელს, კოშის გადასახლების დროს, ხელნაწერი იპოვეს და შესანახად გადაეცა ჟერგონს, მაგრამ დაიბეჭდა მხოლოდ 1841 წელს, ე. ი. აბელის გარდაცვალების შემდეგ და ისიც ნორვეგიის მთავრობის დაჟინებითი მოთხოვნის

შემდეგ. მიუხედავად დიდი მეცნიერული მიღწევებისა, აბელს ნაღვლიანობა მაინც არ მოშორებია ბერლინში დაბრუნების შემდეგაც. აქ მას პირველად შეუტია მისმა მძიმე ავადმყოფობამ.

1827 წლის მაისში აბელი ქრისტიანიაში დაბრუნდა, სადაც კიდევ უფრო უმწეო მდგომარეობა შეექმნა; სამუშაო ადგილის პოვნის იმედიც დაკარგა და, როგორც თვითონ ამბობდა, ეკლესიის თაგვივით სიღარიბეში უნდა ეცხოვრა. 1828 წელს იგი დანიშნეს უნივერსიტეტში პროფესორის მოადგილედ, მაგრამ მალე ისევ შეიპყრო მძიმე ავადმყოფობამ და 1829 წლის 6 აპრილს გარდაიცვალა. ეს მოხდა რამდენიმე დღით ადრე ბერლინში მისი მიწვევის ცნობის მოსვლამდე. გარდაცვალების ერთი წლის შემდეგ, 1830 წელს, მას მიანიჭეს პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის დიდი პრემია, ხოლო ნორვეგიის მთავრობამ აბელის ძეგლი დადგა ქრისტიანიაში.

აბელის პირველი ნაშრომი ეხებოდა მეხუთე ხარისხის განტოლების რადიკალებში ამოხსნის შეუძლებლობის საკითხს, რასაც დღემდე არ დაუკარგავს თავისი კლასიკური მნიშვნელობა. აქ დაშვებულია, რომ განტოლების კოეფიციენტებს შეიძლება შევხედოთ როგორც სავსებით თავისუფალ ცვლად სიდიდეებს. კვლევის გზა იმაში მდგომარეობს, რომ შედგენილია რაც შეიძლება ზოგადი გამოსახვები, რომლებიც რადიკალებს შეიცავენ, და მოყვანილია დამტკიცება იმისა, რომ მათ არავითარ შემთხვევაში არ შეუძლიათ დააკმაყოფილონ ზოგადი ტიპის მეხუთე ხარისხის განტოლება.

მეორე ნაშრომი ბინომური მწკრივებისადმია მიძღვნილი; ამით აბელმა უაღრესად მნიშვნელოვანი განძი შეიტანა ანალიზის მკაცრად დაფუძნებაში. საკითხი ასეა დასმული: როგორ ფუნქციას გამოსახავს მწკრივი

$$1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \ldots$$

თუ ის კრებადია? ჩვენ უკვე ვთქვით, რომ კოშიმ შეცდომა დაუშვა უწყვეტ ფუნქციათა მწკრივის კრებადობის საკითხში. კლაინის ვარაუდით აბელი, ალბათ, გაეცნო კოშის ამ ნაშრომს და შეეცადა შეცდომის გამოსწორებას. მართლაც, აბელმა შეავსო კოშის ნაშრომის ხარვეზი, დაუპირისპირა რა მის არასწორ დებულებას თავისი მტკიცება, რომელსაც ახლაც ეწოდება აბელის თეორემა უწყვეტობის შესახებ და რაც შემდეგში მდგომარეობს:

თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია რომელიმე წერტილში კრებადობის წრის შიგნით, მაშინ ის

თანაბრად კრებადია ამ წერტილის შესაბამის მთელ რადიუსზე. ასე, რომ, ფუნქციას, გამოსახულს კრებადობის წრის შიგნით ხარისხოვანი მწკრივით, მოცემული წერტილისაკენ რადიალურად მიახლოვების დროს აქვს მწკრივის ჯამის ტოლი ზღვარი. კოშისათვის უცნობი იყო მწკრივის თანაბრად კრებადობის ცნება, აბელმა კი ეს ცნება პირველად შემოიღო და ამით გამოასწორა დაშვებული შეცდომა. ზემოხსენებულ აბელის შემუარში მოცემული თეორემა წარმოადგენს ძალიან ფართო განზოგადებას ელიფსური ინტეგრალების შეკრების თეორემისა, რომელიც ძირითადად ეილერს ეკუთვნის. აბელის ინტეგრალში $\int R(x, y)dx$ x და y სიდიდეები დაკავშირებულია ალგებრული განტოლებით $F(x, y)=0$, თუმცა ასეთი ინტეგრალების ჯამის გამოსახვა შეუძლებელია ამავე ტიპის ერთი ინტეგრალით, მაგრამ მისი წარმოდგენა შეიძლება ასეთი ინტეგრალების განსაზღვრული p რიცხვით, p კი დამოკიდებულია $F(x, y) = 0$ ალგებრული დამოკიდებულების ბუნებისაგან. ამაში მდგომარეობს აბელის თეორემა. დაბალი ხარისხის ჰიპერელიფსური ინტეგრალების შემთხვევაში გვაქვს $F= y^2 - f(x)$, ამასთან $p = 2$. ამრიგად,

$$\int_0^a R(x, \sqrt{f_6(x)})\, dx + \int_0^b + \cdots + \int_0^h R(x, \sqrt{f_6(x)})dx =$$

$$= \int_0^A R(x, \sqrt{f_6(x)})\, dx + \int_0^B R(x, \sqrt{f_6(x)})dx +$$

$$+ R_1(a, \sqrt{f_6(a)}; \ldots; h, \sqrt{f_6(h)};\ A, \sqrt{f_6(A)};\ B, \sqrt{f_6(B)} +$$

$$+ \sum \mathrm{const}\cdot \ln\ R_2(a,\ \sqrt{f_6(a)};\ \ldots;\ h,\ \sqrt{f_6(h)};\ A,\ \sqrt{f_6(A)};$$

$$B,\ \sqrt{f_6(B)}\ ).$$

პარიზში აბელმა დაიწყო პირველი რიგის ელიფსური ინტეგრალების

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$$

შექცევადობის საკითხის დამუშავება.

1826 წლის დეკემბერში მან წერილობით აცნობა კრელს ლემნისკატის დაყოფისა და კომპლექსური რიცხვების შესახებ. ამ მასა-

ლებიდან წარმოიშვა შემდეგ წლებში მისი ნაშრომი: „გამოკვლევები ელიპსურ ფუნქციათა შესახებ“, რომელიც ორ ნაწილად დაიბეჭდა კრელის ჟურნალში 1827—1828 წლებში. ეს იყო პირველი ფუნდამენტალური ნაშრომი, საიდანაც იწყება ელიფსურ ფუნქციათა თეორია, ლეჟანდრის ელიფსური ინტეგრალების თეორიისაგან განსხვავებული. პერიოდულობის უკეთესად გამოვლინებისათვის აბელი წერს პირველი გვარის ინტეგრალს შემდეგი სახით:

$$\alpha = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

მან განიზრახა ამ ინტეგრალის შექცევა და $x = \varphi(x)$ ფუნქციის განხილვა. ორმაგი პერიოდულობიდან იგი მივიდა ელიფსური ფუნქციების გამრავლება-გაყოფამდე და, დასასრულ, ზღვარისაკენ გადასვლით გამოსახა $\varphi(x)$ ფუნქცია როგორც ორი უსასრულო ორმაგი ნამრავლის განაყოფი.

3. ვილიამ როუენ ჰამილტონი და კარლოს გუსტავ იაკობ იაკობი

ვილიამ ჰამილტონი დაიბადა 1805 წელს დუბლინში. სწავლობდა კოლეჯში და ბრწყინვალედ დაამთავრა. 1827 წელს ჰამილტონი დანიშნეს ობსერვატორიის დირექტორად დუბლინის მახლობლად დენსინკში და მიანიჭეს ირლანდიის სამეფო ასტრონომის წოდება. ჰამილტონის ბრწყინვალე და მრავალმხრივი ნიჭი ადრე გამოვლინდა. ათი წლისამ უკვე ზეპირად იცოდა ჰომეროსი და დაიწყო არაბული და სანსკრიტული ენების შესწავლა; რამდენიმე წლის შემდეგ მან იცოდა და სავსებით დაეუფლა ცამეტ ენას, ამასთან ერთად მას ძლიერი მიდრეკილება ჰქონდა ხელოვნებისადმი (იყო ნაყოფიერი პოეტი). გრეივსმა დაწერა სამი ტომისაგან შემდგარი ჰამილტონის ბიოგრაფია, მაგრამ რადგანაც გრეივსი არ იყო მათემატიკოსი, ამიტომ მასში გაშუქებულია უფრო ჰამილტონის პიროვნება. ბიოგრაფიაში სრულებით არაფერია ნათქვამი ჰამილტონის ცხოვრების უკანასკნელი პერიოდის შესახებ, ხოლო ფ. კლაინის გადმოცემით, ჰამილტონი ძალიან უცნაურად იქცეოდა სიცოცხლის უკანასკნელ წლებში: ნაადრევმა გონებრივმა განვითარებამ იგი მალე გადაღალა. მის ნაშრომებში ყველგან ვპოულობთ ბრწყინვალე ახალ იდეებს. ჰამილტონის მათემატიკური შემოქმედება ძალიან ადრე დაიწყო. წმინდა მათემატიკის დარგში მისი პირვე-

ლი ხაშრომია: „შეუღლებული ფუნქციების ანუ ალგებრული წყვილის თეორია; ალგებრა წინასწარი და ელემენტარული ცდით აქ რიცხვის ცნება გააზრებულია როგორც ისეთი რამ, რომლისთვისაც არსებითია დრო და არა სივრცე, ვინაიდან ჯერ ხდება მხოლოდ მიმდევრობის იდეის გამოკვლევა. რაოდენობითი, სივრცითი, ჰამილტონის წარმოდგენით, დგება მხოლოდ გამოკლების ოპერაციის შემოყვანის შემდეგ, რის წყალობით შესაძლებელი ხდება გაზომვაც. ამის შემდეგ ის განიხილავს კომპლექსურ რიცხვებს $x+iy$, როგორც რიცხვების (x, y) წყვილს, რომელზეც დადგენილია მოქმედებების განსაზღვრული პირობითი წესები.

ჰამილტონი დიდი ინტერესით ეძებს კომპლექსური რიცხვების ისეთ ახალ სისტემას, რომელიც დაუშვებს სასარგებლო გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას მსგავს იმისას, რომელიც აქვს კომპლექსურ $x + iy$ რიცხვებს სიბრტყეში. დაუღალავმა ძიებამ დასასრულ ჰამილტონი მიიყვანა 1843 წელს კვატერნიონების, ე. ი საგანგებო ოთხწევრა კომპლექსური რიცხვების სისტემის აღმოჩენამდე. რომელიც მან განსაკუთრებით დაამუშავა და გაავრცელა. ამ რიცხვების თეორიას მიუძღვნა ორი ვრცელი ნაშრომი:

1. ლექციები კვატერნიონების შესახებ.

2. კვატერნიონების თეორიის ელემენტები.

კვატერნიონებმა სწრაფად მიიპყრო დუბლინის მათემატიკოსების ყურადღება და ისინი გადააქციეს საგნად, რომელშიც დაწესებული იყო სპეციალური გამოცდა და რომლის ცოდნის გარეშე კოლეჯის დამთავრება შეუძლებელი გახდა. ფ. კლაინი გადმოცემს შემდეგს: „თვით ჰამილტონისათვის ისინი გახდნენ ძირითადი საკითხები მისი მათემატიკური credo-სი და ნაძალადევად აკავშირებდა კვატერნიონებს ყველა თავის გეომეტრიულ და სხვა ნაშრომებს; კვატერნიონების თეორიის ეს ფანატიკური რწმენა უნივერსალურ მნიშვნელობაში იზრდებოდა მით უფრო სწრაფად, რაც უფრო გახდებოდა მისი სიცოცხლის დასასრულს მისივე ინტერესების ცალმხრივობა და დაღონება მისი სულისკვეთებისა ალკოგოლის გავლენით“. ჰამილტონის გარშემო შეიქმნა სკოლა, რომელმაც ფანატიკურობაში თავის მასწავლებელს გადააჭარბა; ამან გამოიწვია მათემატიკოსების უმრავლესობის წინააღმდეგობა კვატერნიონების თეორიისადმი. ამიტომ ამ თეორიამ მათემატიკაში შეაღწია ფიზიკის მეშვეობით ვექტორული ანალიზის სახით, რაც უწინარეს ყოვლისა საჭირო იყო დინამიკაში. კვატერ-

ნიონების შესახებ ფ. კლაინი ჰამილტონის აზრს ასე გამოთქვამს: „კვატერნიონები კარგია და გამოსაყენებელია თავის ადგილას, მაგრამ მათ არა აქვთ მაინც ისეთი მნიშვნელობა, როგორიც აქვს ჩვეულებრივ კომპლექსურ რიცხვებს“.

ახლა გადმოვცემთ ჰამილტონის კვატერნიონების თეორიას დაახლოებით ისე, როგორც ეს ფ. კლაინს აქვს გადმოცემული.

როგორც ცნობილია, $x+iy$ რიცხვი წარმოადგენს როგორც წერტილს კოორდინატებით (x, y), ისე მონაკვეთს, რომელიც ამ წერტილს აერთებს კოორდინატთა სათავესთან. შეკრებას

$$(x+iy)+(a+ib)=(x+a)+i(y+b)$$

შეესაბამება ორი მიმართული მონაკვეთების შეკრება და, მაშასადამე, პარალელური გადაადგილება მთელი სიბრტყისა $a+ib$ მონაკვეთის გასწვრივ. გამრავლება

$$(x+iy)(a+ib)=(x+iy)\cdot\rho\cdot e^{i\varphi}$$

შეესაბამება მთელი სიბრტყის ბრუნვას O წერტილის ირგვლივ φ კუთხეზე და ერთდროულ გაგრძელებას ყველა ზომის $1:\rho$ ფარდობით, ე. ი. მსგავს გარდაქმნას და ბრუნვას ანუ ბრუნვით გაჭიმვას.

ამრიგად, შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შეიცავენ სიბრტყეზე ყველა შესაძლო მოძრაობის ერთობლიობას. აქედან გამომდინარეობს ალგებრული გამოთვლების გამოყენების მიზანშეწონილობა ჩვეულებრივ კომპლექსურ რიცხვებთან მეტრული გეომეტრიის საკითხებში. როგორ შეიძლება შესაბამისი გარდაქმნის ინტერპრეტაცია განხორციელდეს სივრცეში? რიცხვი $ix+jy+kz$ უნდა გამოსახავდეს წერტილს კოორდინატების x, y, z, ანდა ამ წერტილის ნულთან გამაერთიანებელ მონაკვეთს, რომლისათვის ჰამილტონმა შემოიყვანა ტერმინი „ვექტორი“. ისე როგორც სიბრტყეში, ასეთი ორი ვექტორის შეკრებას შეესაბამება მთელი სივრცის პარალელური გადაადგილება, მაგრამ გამრავლების შემთხვევაში საქმე სხვაგვარადაა. ნულოვანი წერტილის ირგვლივ ბრუნვა განსაზღვრავს სივრცეში რომელიღაც ღერძს, ამიტომ ბრუნვა გაჭიმვით, დახასიათებული სიბრტყეში ორი კონსტანტით, შეიძლება სივრცეში დახასიათდეს მხოლოდ ოთხი პარამეტრით: ორი მათგანი განსაზღვრავს ბრუნვის ღერძის მიმართულებას: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ამასთან $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, მესამე განსაზღვრავს ბრუნვის კუთხეს ω; მეოთხეს საშუალებით განისაზღვრება r გაჭიმვა. ჰამილტონმა შეადგინა ოთხწევრა კომპლექსური რიცხვი — კვატერნიონი

$$r\cos\frac{\omega}{2}+ir\sin\frac{\omega}{2}\cos\alpha+jr\sin\frac{\omega}{2}\cos\beta+kr\sin\frac{\omega}{2}\cos\gamma=$$

$$=t+ix+jy+kz.$$

კვატერნიონის წმინდა რიცხვით t ნაწილს ჰამილტონი უწოდებს კვატერნიონის სკალარულ ნაწილს, მიმართულ ნაწილს $ix+jy+$ $+kz$-ს — ვექტორულ ნაწილს. თუ $r\cos\frac{\omega}{2}=0$, მაშინ მივიღებთ წმინდა ვექტორს; ამ თეორიაში მას შეესაბამება ან მონაკვეთი, ან გაჭიმვა და ბრუნვა 180° კუთხეზე, რომლებსაც უწოდა „გაჭიმვა გადაბრუნებით".

წმინდა ვექტორის მეორე ინტერპრეტაცია იძლევა კიდევ ერთ ახსნას იმისას, რომ სივრცეში ბრუნვის გამოსახვისათვის გაჭიმვით საკმარისი არ არის ვექტორი, ესე იგი სამწევრა კომპლექსური რიცხვი. ვექტორი შეესაბამება მხოლოდ ბრუნვას 180°-ზე; გაჭიმვით ყველა შესაძლო ბრუნვის წარმოდგენისათვის აუცილებელია კვატერნიონები, რომელშიც შედის სკალარული ნაწილი. გაჭიმვით ორი ბრუნვის შეკრების საკითხს ჰამილტონი უკავშირებს თავის კვატერნიონების ფორმალურ გამრავლებას

$$i^2=j^2=k^2=-1,$$

$$jk=i,\quad ki=j,\quad ij=k,$$

$$kj=-i,\quad ik=-j,\quad ji=-k.$$

შემდეგ, დისტრიბუტიულობის კანონის საშუალებით ღებულობს

$$(d+ia+jb+kc)\cdot(t+ix+iy+kz)=$$

$$=dt-ax-by-cz+i\,(at+dx+bz-cy)+$$

$$+\,j(bt+dy+cx-az)+k(ct+dz+ay-bx).$$

ორი ვექტორის გადამრავლების შედეგად მიიღება,

$$(ia+jb+kc)\cdot(ix+jy+kz)=-(ax+by+cz)+i(bz-cy)+$$

$$+\,j(cx-az)+k\,(ay-bx).$$

ამ კვატერნიონის სკალარულ ნაწილს შეცვლილი ნიშნით უწოდებენ ორივე ვექტორის შიგა ნამრავლს, ვექტორულ ნაწილს — გარე ნამრავლს.

ჰამილტონმა შემოიყვანა „ველის" ცნება.

ჰამილტონი გამოდის იმ მოსაზრებიდან, რომ კვატერნიონის ორივე ნაწილი წერტილის ფუნქციებია; მას წარმოდგენილი აქვს,

რომ სივრცის ყოველ წერტილში მოდებულია კვატერნიონი, ე. ი. ერთი სკალარი და ერთი ვექტორი. $t(x, y, z) + iu(x, y, z) + jv(x, y, z) + kw(x, y, z)$ კვატერნიონების ამგვარი ველისადმი იყენებს განსაზღვრულ ოპერაციებს და შედეგად ღებულობს ახალ ველებს. ამ ოპერაციებს ჰამილტონი აძლევს ეგრეთ წოდებულ „სიმბოლურ აღნიშვნებს“. არსი ამ აღნიშვნებისა მდგომარეობს წმინდა ფორმალურ შეკვეცაში, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ყველა სიმბოლო, გაწარმოების აღმნიშვნელებიც კი, ღებულობს ალგებრული სიდიდის როლს. მაგალითად, კემბრიჯის სკოლაში მიღებული იყო ტეილორის მწკრივის ჩაწერა სახით

$$f(x + h) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x),$$

სადაც $e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$ იგულისხმება გაშლილ მწკრივად, ხოლო მასში შემავალი ნამრავლები $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\nu} f(x)$ აღნიშნავდნენ წარმოებულებს $\frac{\partial^{\nu} f(x)}{\partial x^{\nu}}$.

ამის მსგავსად ჰამილტონმაააგო ეგრეთ წოდებული სიმბოლური „ოპერატორები“ კერძოწარმოებულებიდან ველის წერტილის კოორდინატებით. ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია მათ შორის ოპერატორი, რომელიც ჰამილტონმა აღნიშნა ∇ და დაარქვა მას „ნაბლა“ (რაც ძველი ებრაული მუსიკალური ინსტრუმენტის სახელწოდებაა და ჰგავს ამ ინსტრუმენტს):

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

ნაბლაზე ფორმალური ოპერაციები წარმოებს ისე, რომ თითქოს ის იყოს ვექტორი; ამ ოპერაციების გამოყენებისას კვატერნიონების ველისადმი მაშინვე მიიღებიან უმნიშვნელოვანესი, ვექტორული ანალიზიდან ჩვენთვის ცნობილი, ცნებები. თუ t სკალარია, მაშინ

$$\nabla t = i \frac{\partial t}{\partial x} + j \frac{\partial t}{\partial y} + k \frac{\partial t}{\partial z} = \mathrm{grad}\, t.$$

ეს ვექტორია „t სკალარის გრადიენტი“, რომელიც გვაძლევს ველის ყოველ წერტილში t-ს უდიდესი ცვლილების სიდიდესა და

მიმართულებას. თუ გამოვიყენებთ ∇ ოპერაციას $iu + jv + kw$ ვექტორისადმი, მივიღებთ

$$\nabla(iu + jv + kw) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$
$$+ j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

კვატერნიონების საშუალებით ადვილად და კოხტად მიიღება ღრმა შინაარსის თეორემები. ამით აიხსნება ის, რომ კვატერნიონისტები, აღტაცებული თავიანთი სისტემით, აჭარბებდნენ ამ სისტემის მნიშვნელობას და მის გამოყენებაში სცილდებოდნენ ყოველგვარ საზღვრებს, რასაც ზიანი მოჰქონდა არა მარტო მათემატიკისათვის, არამედ თვით კვატერნიონების თეორიისათვის. კვატერნიონების თეორიის საფუძველზე უნდა აგებულიყო ალგებრა; იყო და ახლაც არის მიზნად დასახული კვატერნიონებისათვის ფუნქციათა თეორიის შექმნის ცდები, რომლისაგან მოელოდნენ სრულიად ახალ, უაღრესად ფართო შედეგებს მთელი მათემატიკისათვის. ამ მიზნით 1895 წელს დაარსდა „კვატერნიონების ხელშემწყობი მსოფლიო კავშირი“, რომელსაც არავითარი ნაყოფი არ მოუცია.

მოკლედ შევეხოთ ჰამილტონის მიღწევებს გეომეტრიულ ოპტიკასა და მექანიკაში. პირველს ჰამილტონმა მიუძღვნა ოთხი ძირითადი ნაშრომი: 1. „სხივების სისტემის შესახებ“, 2. „დამატებები I და II“. 3. „დამატება III“.

ფ. კლაინის აზრით, ეს ნაშრომები წუნდაუდებელია და შეიცავენ ძალიან მდიდარ აზრებს.

მექანიკას ჰამილტონმა მიუძღვნა ორი ნაშრომი, რომლებიც გამოქვეყნებული იყო ლონდონის სამეფო საზოგადოების ჟურნალში, 1834 — 1835 წწ. ორივეში განვითარებულია ჰამილტონის ორიგინალური იდეა და მდგომარეობს შემდეგში: უმცირესი მოქმედების პრინციპში შემავალი ინტეგრალი უნდა განიხილოს მისი გამოთვლის შემდეგ როგორც მისი საზღვრების ფუნქცია.

პირველ ნაშრომში ჰამილტონი გამოდის ფორმულიდან

$$\delta W = \delta \int_{q^0_1,\dots,q^0_n}^{q'_1,\dots,q'_n} \sqrt{2(h - U) \sum a_{\alpha\beta} + dq_\alpha \, dq_\beta} = 0,$$

სადაც

$$T = \sum a_{\alpha\beta} \dot{p}_\alpha \dot{q}_\beta , \qquad T + U = h = \text{const.}$$

იმის შემდეგ, რაც $\delta W = 0$ პრობლემის დიფერენციალური განტოლებები ინტეგრება მოხდენილია, ფუნქცია $W(q_1^1, \ldots, q_n^1, q_0^1, \ldots, q_n^0, h)$ განიხილება როგორც მექანიკური პრობლემის მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა. q^1, q^0 საზღვრების ვარირების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{\partial W}{\partial q^1{}_\alpha} = p^1{}_\alpha , \quad - \frac{\partial W}{\partial q^0{}_\alpha} = p^0{}_\alpha ,$$

სადაც

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} .$$

არის იმპულსის კომპონენტი, შესაბამისი $\dot{q}_\alpha$. შემდეგ

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t^1 - t^0 .$$

ამრიგად, თუ შევადგენთ $W(q^1, q^0)$ ფუნქციას, წინასწარ განვსაზღვრავთ რა მექანიკური პრობლემის ტრაექტორიას, მაშინ ეს განტოლებები იძლევა მრავალი მიზნისათვის სასარგებლო გამოსახულებას თვით ტრაექტორიებისა და დროისას, რომლის განმავლობაში ისინი გაირბენენ. უფრო მეორე ხარისხოვანია $T + U = h$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარე შედეგი, რომ p_α და, მაშასადამე, $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ აკმაყოფილებენ ცნობილ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებს. იმისათვის, რომ შევიყვანოთ $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$ გამოსახულებაში $T = \sum a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$ -თვის, საჭიროა სწორედ იმ გარდაქმნის გამოყენება, რომელიც ჩვეულებრივად გამოიყენება წერტილოვანი კოორდინატებიდან სიბრტყეებისადმი გადასვლისას. T-თვის გამოსახულება ამასთან აღმოჩნდება ორი დეტერმინანტის ფარდობის ტოლი, რომლიდანაც ერთი „მოჩარჩოებულია" p_α სიდიდეებით:

$$T = \frac{- \begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & p_\alpha \\ p_\alpha & 0 \end{vmatrix}}{| a_{\alpha\beta} |} .$$

რადგანაც

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \quad \text{და} \quad T + U = h,$$

ამიტომ q_α პარამეტრების ზედა და ქვედა მნიშვნელობებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებებს W-თვის

$$\frac{-\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & \dfrac{\partial W}{\partial q^1_\alpha} \\ \dfrac{\partial W}{\partial q^1_\beta} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{\alpha\beta}|} + U = h; \qquad \frac{-\begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & \dfrac{\partial W}{\partial q^0_\alpha} \\ \dfrac{\partial W}{\partial q^0_\beta} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{\alpha\beta}|} + U = h.$$

მეორე ნაშრომი დაკავშირებულია მოქმედების ინტეგრალის სხვა ფორმასთან

$$S = \int\limits_{q^0_1, \ldots, q^0_n,\ t^0,}^{q^1_1, \ldots, q^1_n,\ t'} (T - U) dt,$$

სადაც $T - U$ არის ლაგრანჟის ფუნქცია, ამასთან პირობაში $\delta S = 0$ დაშვებულია, რომ საზღვრები მუდმივებია. თუ ამ პირობიდან განვსაზღვრავთ q სიდიდეებს როგორც t-ს ფუნქციებს, მაშინ ფუნქცია

$$S(q^1_1, \ldots, q_n;\ q^0_1, \ldots, q^0_0\ ;\ t^1,\ t^0)$$

შეიძლება შემოყვანილ იქნას როგორც მექანიკური პრობლემის მთავარი ფუნქცია და გამოყენებული ინტეგრალების გამოსახვისათვის. ადგილი აქვს დამოკიდებულებებს

$$\frac{\partial S}{\partial q'_\alpha} = p'_\alpha\ ; \quad - \frac{\partial S}{\partial q^0_\alpha} = p^0_\alpha\ ;$$

$$\frac{\partial S}{dt^1} = - h, \quad \frac{\partial S}{\partial t^0} = h.$$

W მახასიათებელი ფუნქციის სავსებით ანალოგიურად S ფუნქციაც აკმაყოფილებს ორ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელთაგან თითოეული n განტოლებას შეიცავს.

ჰამილტონის მეორე ნაშრომში მნიშვნელოვანია აგრეთვე მექანიკის დიფერენციალური განტოლებების გამარტივება. აქ ლაპარაკია იმ გარდაქმნაზე, რომელსაც მათემატიკის სხვა დარგებში ხშირად უწოდებენ „ლეჟანდრის გარდაქმნას", ე. ი. ლაპარაკია $\dot{q}_\alpha$ სიჩქარეების ნაცვლად იმპულსის p_α კომპონენტების შემოყვანაზე.

რადგანაც T ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ ეილერის თეორემის გამოყენებით ჰამილტონმა მიიღო

$$2T = \sum p_\alpha q_\alpha .$$

თუ ზოგად ენერგიას, განხილულს როგორც p_α და q_α -ს ფუნქციებს, აღვნიშნავთ $-H(p_\alpha , -q_\alpha)$ სიმბოლოთი მივიღებთ

$$T - U - \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha = -T - U = H(p_\alpha q_\alpha)$$

და H ფუნქციის დიფერენციალისათვის ვღებულობთ გამოსახულებას

$$dH = \sum \frac{\partial T}{q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \sum \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} dq_\alpha -$$

$$- \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha = \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \dot{q}\, dp_\alpha .$$

მაგრამ რადგან ლაგრანჟის დიფერენციალური განტოლებების თანახმად

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{dp_\alpha}{dt} = \dot{p}_\alpha ,$$

ამიტომ მექანიკის დიფერენციალური განტოლებებისათვის გვექნება მეტად მარტივი ფორმულა

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha , \quad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = - \dot{q}_\alpha .$$

ამ განტოლებებს ეწოდებათ ჰამილტონის დიფერენციალური განტოლებები.

კარლ გუსტავ იაკობ იაკობი დაიბადა 1804 წლის 10 დეკემბერს (22 დეკემბერს), პოტსდამის ბანკირის ოჯახში. როგორც შეძლებული ოჯახის შვილი, იგი იზრდებოდა კარგ პირობებში და მიიღო მრავალმხრივი განათლება. საშუალო სკოლა ბრწყინვალედ დაამთავრა და შევიდა ბერლინის უნივერსიტეტში. აქ ისმენდა ლექციებს მათემატიკაში და თვითონაც ამ დარგში ბევრს მუშაობდა დამოუკიდებლად. მათემატიკის გარდა იგი გატაცებული იყო აგრეთვე კლასიკური ენებით და აქტიურ მონაწილეობას იღებდა კლასიკური ფილოლოგიის სემინარებში.

1825 წელს იაკობიმ დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია და 1826 წელს კენიგსბერგში გაემგზავრა. აქ მან 17 წელი იმუშავა

ჯერ დოცენტად, შემდეგ კი პროფესორად. კენიგსბერგში იაკობი ეწეოდა მეტად მრავალმხრივ და ენერგიულ მოღვაწეობას, რის გამოც იგი ძალიან მოიქანცა და იძულებული გახდა წელიწადნახევარი დაესვენა იტალიაში. ამის შემდეგ ის მიიწვიეს ბერლინში და შესთავაზეს აკადემიური თანამდებობა ყოველგვარ პედაგოგიურ მოვალეობათა გარეშე. მიუხედავად მყუდრო ცხოვრებისა, იაკობის უკვე აღარ დაუბრუნდა ადრინდელი შრომისუნარიანობა. რევოლუციის მომხრე იაკობი საეჭვო გახდა მეფის მთავრობისათვის, რამაც მის ცხოვრებაზე ცუდი გავლენა იქონია. 1851 წელს იაკობი გარდაიცვალა ბლატერნეში.

იაკობი იმდენად მრავალმხრივი ბუნებისა იყო, რომ არ დაუტოვებია მათემატიკის თითქმის არც ერთი დარგი შეუხებლად. იაკობის მიღწევებში ყველაზე უფრო ორიგინალურია მისი შემოქმედება ელიფსურ ფუნქციათა დარგში. სხვა დარგებსაც ის ინტენსიურად ავითარებდა; მუშაობდა გამოყენებითი მათემატიკის საკითხებზეც. იაკობიმ ვრცელი ნაშრომები მიუძღვნა მექანიკას, პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებს და ვარიაციათა აღრიცხვას. განსაკუთრებით საინტერესოა მისი შემოქმედება წმინდა მათემატიკის დარგში, კერძოდ ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა თეორიაში. როგორც აღვნიშნეთ, იაკობის ყველაზე უფრო დიდი მიღწევაა ელიფსური ფუნქციების დამუშავება თეტა-მწკრივებიდან და მათი დამახასიათებელი იგივეობებიდან. ϑ ასოთი, რომელიც იაკობის შემდეგ საყოველთაოდ მიღებული გახდა, აღნიშნავენ შემდეგი ტიპის ფუნქციას

$$\sum_{V=-\infty}^{\infty} e^{a\nu^2 + 2b\nu}, \text{ სადაც } a = \frac{\pi i \omega_1}{\omega_2}, \quad b = \frac{\pi i u}{\omega_2}.$$

ელიფსური ფუნქციების ასეთი აღნიშვნიდან იაკობი გადადის „აბელის ფუნქციებზე“. „ყველგან სასრული“ ინტეგრალების

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_1 \quad \text{და} \quad \int^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_2$$

შექცევას იგი მიჰყავს ოთხმაგ პერიოდულ ფუნქციამდე $x(u_1)$ და $x(u_2)$, რომელთა ყოფა-ქცევა გაუგებარია. იაკობიმ უჩვენა, რომ ოთხი პერიოდიდან შეიძლება შევადგინოთ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნამატი, რომელიც აგრეთვე პერიოდია; ასე რომ, ფუნქციები $x(u_1)$ და $x(u_2)$ ყოველ წერტილში მიიღებენ ყოველ ნებისმიერად

მოცემულ მნიშვნელობას. აქედან დაასკვნა, რომ ეს ფუნქციები „წარმოუდგენელებია“ და რომ ამ გზით არ შეიძლება თეორიაში არავითარი შეღწევა. აბელის თეორემის საშუალებით იაკობიმ შეადგინა ორი ჯამი ორი ყველგან სასრული ინტეგრალებისა

$$\int^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} + \int^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_1$$

$$\int^{x_1} \frac{xdx}{\sqrt{f_6(x)}} + \int^{x_2} \frac{xdx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_2$$

და ამბობს, რომ სიმეტრიული ფუნქციები ზედა საზღვრებისა $x_1 + x_2$ და $x_1 x_2$ ოთხჯერადი პერიოდული ფუნქციებია ადრინდელი აზრით, ე. ი. ორი u_1 და u_2 ცვლადის ცალსახა ფუნქციები. ამ შემთხვევისთვისაც მათ უწოდებენ აბელის ფუნქციებს. ამ საკითხის დასმას ჩვენ ვპოულობთ იაკობის ორ ნაშრომში:

1. ორი ცვლადის „ოთხმაგად პერიოდული ფუნქციების შესახებ, რომლებამდეც მიგვიყვანს აბელის ტრანსცენდენტულობის თეორია“.

2. „ზოგადი მოსაზრებანი აბელის ტრანსცედენტულობის შესახებ“.

სწავლება დეტერმინანტების შესახებ იაკობიმ მიიყვანა სრულ განვითარებამდე. ამ საკითხს მიუძღვნა ორი ნაშრომა:

1. „დეტერმინანტების წარმოქმნისა და თვისებების შესახებ“,
2. „ფუნქციონალური დეტერმინანტების შესახებ“.

დეტერმინანტებს იაკობი აღნიშნავდა $\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ სიმბოლოთი, რასაც ჩვენ ახლა მოკლედ ავღნიშნავთ $|a_{ik}|$. იაკობის გამოკვლევები ამ დარგში შემდეგში მდგომარეობს:

დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1}, & a_{22} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

არის ინვარიანტი n წრფივი ფორმების

$$\sum_{i=0}^{n} a_{1i} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{3i} x_i, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i.$$

ეს იმას აღნიშნავს, რომ თუ ამ ფორმებში ვიგულისხმებთ $x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} y_i$ და განვიხილავთ ამ გარდაქმნის შემდეგ მიღებულ n წრფივ ფორმას სახისას

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{1i}\; y_i, \sum_{i=1}^{n} a'_{2i}\; y_i, \sum_{i=1}^{n} a'_{3i}\; y_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a'_{n}\; y_i,$$

მაშინ ახალი დეტერმინანტი $D' = |a'_{ik}|$ დაკავშირებულია ძველ დეტერმინანტთან $D = |a_{ik}|$ დამოკიდებულებით $D' = D$, სადაც $r = |\alpha_{ik}|$ არის გარდაქმნის დეტერმინანტი. ამის განზოგადებას წარმოადგენს ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი. აქ განიხილება ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქციები $f, g, h\ldots$ და დეტერმინანტი, შედგენილი მათი კერძო წარმოებულებისაგან $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \ldots f_n \\ g_1 & g_2 & g_3 \ldots g_n \\ h_1 & h_2 & h_3 \ldots h_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}$$

ეს გამოსახულება არის ინვარიანტი ამ სიტყვის ზოგადი მნიშვნელობით, სახელდობრ, ის არის ინვარიანტი ცვლადების ნებისმიერი გარდაქმნის მიმართ.

ახლა შევეხოთ იაკობის მიღწევებს მექანიკის დარგში. 1837 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომებში ის ავითარებს უმთავრესად მექანიკის ანალიზურ მხარეს და ეხება შემდეგ საკითხებს:

1. კანონიკური ცვლადების ზოგადი ცნება.

დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებებს ჰამილტონმა მისცა მარტივი სახე, რომელსაც იაკობიმ კანონიკური უწოდა:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

აქ ფუნქცია $H(p_\alpha, q_\alpha)$ არის უარყოფითი ნიშნით აღებული ზოგადი ენერგია. იაკობიმ პირველმა დასვა საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორია უზოგადესი კანონიკური ჩასმები, ე. ი. ჩასმები

$$p_\alpha^1 = \varphi_\alpha (q_1^0, \ldots, q_n^0;\; p_1^0, \ldots, p_n^0),$$
$$q_\alpha^1 = \psi_\alpha (q_1^0, \ldots, q_n^0;\; p_1^0, \ldots, p_n^0),$$

რომლებსაც გადაჰყავთ კანონიკური დიფერენციალური განტოლებები ისევ კანონიკურში. ამ პრობლემას დიდი მნიშვნელობა აქვს ასტრონომიასა და მათემატიკური ფიზიკისათვის. დასვა რა პრობლემა, იაკობიმ ერთდროულად მოგვცა მისი პირველი ამოხსნა ეგრეთ წოდებული წამყვანი ფუნქციების საშუალებით, მან გვიჩვენა, რომ p^1, q^1 სიდიდეები ყოველთვის დაკავშირებულია p^0, q^0 სიდიდეებთან კანონიკური გარდაქმნით იმ შემთხვევაში, თუ შეიძლება დავუშვათ

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q_\alpha^0} = - p_\alpha^0 , \quad \frac{\partial\Omega}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1,$$

სადაც Ω არის q_α^0 ,q_α^1-ის წარმოებადი ფუნქცია.

2. ჰამილტონის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების მეთოდები.

ჰამილტონის თეორემის თანახმად, ფუნქცია

$$W(q^1,\ q^0;\ h) = \int_{q^0}^{q^1} \sqrt{(h - U) \sum a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, q_\beta}\ ,$$

რომლისაგან

$$\frac{\partial W}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_\alpha^0} = - p_\alpha^0$$

ტოლობათა საშუალებით შეიძლება მივიღოთ იმპულსის კოორდინატები,

$$H(q_1, \ldots, q_n, \ldots, p_n) + h = 0$$

ტოლობის ძალით ორჯერ აკმაყოფილებს რაიმე დიფერენციალურ განტოლებას კერძო წირმოებულებით

$$H\left(q_1^0 , \ldots , q_n^0 ;\quad \frac{\partial W}{\partial q_1^0}, \ldots , \frac{\partial W}{\partial q_n^0} \right) + h = 0,$$

$$H\ \left(q_1^1 , \ldots ,\ q_n;\quad \frac{\partial W}{\partial q_1^1}, \ldots , \frac{\partial W}{\partial q_n^1} \right) + h = 0.$$

ამ მდგომარეობიდან გამოსულმა იაკობიმ უჩვენა, რომ თუ მოძებნილია რომელიმე საკმარისი ზოგადი ამონახსნი ჰამილტონის განტოლებისა კერძო წარმოებულებში, ეგრეთ წოდებული „სრული ამოხსნა“, ე. ი. ამონახსნი $n—1$ n-ის დამოუკიდებელი მუდმივით, მაშინ

ეს საკმარისია იმისათვის, რომ ასეთი ზოგადი ამონახსნის საშუალებით შეიძლებოდა პრობლემის ტრაექტორიის მიღება ინტეგრებულ ფორმაში. იაკობიმ მიიღო დინამიკის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების ზოგადი თეორია და ძლიერი ბიძგი მისცა ანალიზური მექანიკის სპეციალური პრობლემების გამოკვლევას, საკუთარი მეთოდით ამოხსნა მექანიკისა და ასტრონომიის მრავალი უმნიშვნელოვანესი პრობლემა. მაგალითად, მის ლექციებში ვპოულობთ სამგანზომილებიან სივრცეში ორი სხეულის პრობლემის ამოხსნას, ორი უძრავი ცენტრისადმი მიზიდულობის პრობლემას, სამღერძა ელიფსოიდზე გეოდეზიური წირების აგებას. ეს უკანასკნელი პრობლემა ამ მეთოდით პირველად იყო ამოხსნილი. კერძო შემთხვევებისათვის იაკობიმ თავისი თეორია კიდევ უფრო განავითარა. კერძოდ, ის მუშაობდა საკითხზე იმის შესახებ, თუ რა უპირატესობას იძლევა მექანიკის ძირითადი განტოლებების ინტეგრებისას ამ განტოლებების ზოგიერთი ინტეგრალების ცოდნა. ამ გამოკვლევების განვითარების შედეგად იაკობიმ იპოვა მრავალი შესანიშნავი და ღრმა წინადადება, მაგალითად, თუ განტოლებათა სისტემისათვის ადგილი აქვს ფართობთა ორ ინტეგრალს, მაშინ ადგილი აქვს მესამესაც.

4. ლეჟენ დირიხლე და მაკ-კლორენი

ლეჟენ დირიხლე დაიბადა ფრანგი ემიგრანტის ოჯახში 1805 წელს. მამა იყო ფოსტის მოსამსახურე დიურენში. 1822 წლიდან 1827 წლამდე პარიზში ცხოვრობდა და მასწავლებლად მუშაობდა ერთ-ერთ ოჯახში; აქ ის დაუახლოვდა ფურიეს. 1827 წელს მუშაობდა ბრესლავში დოცენტად; 1829 წელს იგი გადავიდა ბერლინში, სადაც განუწყვეტლად იმუშავა 26 წელი ჯერ დოცენტად, შემდეგ 1831 წლიდან ექსტრაორდინარულ და, დასასრულ, 1839 წლიდან ორდინარულ პროფესორად. ამავე დროს ის ენერგიულად მასწავლებლობდა სამხედრო და საშენებლო აკადემიებში. 1855 წელს ის მიიწვიეს გეტინგენში.

დირიხლე გარდაიცვალა 1859 წელს.

პირველ რიგში ჩვენ შევეხებით დირიხლეს მოღვაწეობას რიცხვთა თეორიის დარგში. დირიხლე იყო პირველი მკითხველი გაუსის ნაშრომისა რიცხვთა თეორიაში. დირიხლეს უმნიშვნელოვანეს ნაშრომებს რიცხვთა თეორიაში წარმოადგენენ:

1. „უსასრულოდ მრავალი მარტივი რიცხვის არსებობის დამტკიცება ყოველ პროგრესიაში, რომლის პირველი წევრი და სხვაობა ურთიერთმარტივი რიცხვებია".

2. „მოცემული დეტერმინანტით ბინარული კვადრატული ფორმების კლასების რიცხვის განსაზღვრა“.

3. „უმაღლესი ხარისხის ალგებრული რიცხვების თეორიის დამუშავება“. დირიხლემ უჩვენა რიცხვთა თეორიის შემდგომი განვითარების გზები. მისი დიდი მიღწევა იმაშია, რომ მან გამოიყენა ანალიზური ფუნქციები არითმეტიკული პრობლემებისადმი; კერძოდ, მეტად მნიშვნელოვანია $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ სახის მწკრივები, რომლებსაც ახლა დირიხლეს მწკრივებს უწოდებენ. უმნიშვნელოვანეს აღმოჩენას წარმოადგენს აგრეთვე ხერხი, რომლის საშუალებით ის გამოჰყოფს თავისი მწკრივებიდან მისთვის საინტერესო შემადგენელ ნაწილებს, იყენებს რა ერთეულისაგან ფესვებს. ალგებრულ რიცხვთა თეორიაში დირიხლემ პირველმა გააფართოვა გამოკვლევა კვადრატული ირაციონალობებისა და ალგებრული რიცხვების საზღვრებს გარეთ, რომლებიც მიიღებიან წრის დაყოფას, თუ მივიღებთ მხედველობაში ცნებას სიდიდეებზე, რომლებიც განისაზღვრებიან განტოლებით

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + p = 0$$

და თუ დავსვამთ საკითხს იმ ერთეულების შესახებ, რომლებიც მდებარეობენ ამ განტოლებით განსაზღვრულ „ველში“. „ერთეული“ არის მთელი ალგებრული რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + 1 = 0.$$

დირიხლემ სულ მარტივად შეძლო ველში დამოუკიდებელი ერთეულების რიცხვის განსაზღვრა. დირიხლეს ამ ნაშრომებისათვის განსაკუთრებით დამახასიათებელია მისი პირველად გამოყენებული არსებობის დამტკიცების მეთოდი.

რაც შეეხება დირიხლეს გამოკვლევებს მათემატიკურ ანალიზში, მან განსაკუთრებით გაამდიდრა თავის ლექციებში მწკრივთა თეორია და განზღვრული ინტეგრალები. აქ პირველად არის მოცემული ზუსტი ფორმულირება მწკრივის პირობითი კრებადობის ცნებისა და ნაჩვენებია მაგალითებზე, რომ კრებადი მწკრივის წევრების გადაჯგუფებით მწკრივის ჯამი შეიძლება ნებისმიერი გავხადოთ. დირიხლემ უფრო მტკიცე საფუძვლებზე დააყენა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობა,

ვიდრე ამას ადგილი ჰქონდა ფურიეს ნაშრომებში. დირიხლემ მკაფიოდ და ზუსტად განსაზღვრა უბან-უბან უწყვეტი და მონოტონური ფუნქციების ცნება მოგვცა მისი გამოსახვის შესაძლებლობის მკაცრი დამტკიცება ტრიგონომეტრიული მწკრივის საშუალებით. დირიხლე იყენებდა ვარიაციათა აღრიცხვას არსებობის თეორემების დამტკიცებაში. დირიხლეს შემდეგ ეს მეთოდი რიმანმა გადმოიღო და დაარქვა მას „დირიხლეს პრინციპი". ეს მეთოდი იძლევა იმის დასკვნის საშუალებას, რომ არსებობს საძებნი v ამონახსნი იმ გარემოების საფუძველზე, რომ ყველა v ფუნქციას შორის, რომლებიც საზღვარზე ღებულობენ მოცემულ სასაზღვრო მნიშვნელობებს საძებნი ამონახსნი ანიჭებს მინიმუმს ინტეგრალს

$$\int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dk.$$

დღესაც დირიხლეს სახელს ატარებს ინტეგრალები („დირიხლეს ინტეგრალები"), რომლებიც შემდეგში მდგომარეობენ.

ვთქვათ გამოსათვლელია სამჯერადი ინტეგრალი

$$\iiint x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s \, dx dy dz,$$

აღებული იმ ტეტრაედრის შიგნით, რომელიც განსაზღვრულია სიბრტყეებით

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x + y + z = \xi, \quad y + z = \xi\eta, \quad z = \xi\eta\zeta,$$

სადაც ζ, η, ξ — ახალი ცვლადებია; ეს ფორმულები შეიძლება წარმოდგენილი იქნან ასე

$$\xi = x + y + z, \quad \eta = \frac{y + z}{x + y + z}, \quad \zeta = \frac{z}{y + z}.$$

შებრუნებით, $x = \xi(1 - \eta)$, $y = \xi\eta(1 - \zeta)$, $z = \xi\eta\zeta$. თუ x, y, z დადებითებია და ჯამი $x + y + z$ ერთზე ნაკლებია, მაშინ ξ, η, ζ მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის; პირიქით, თუ ξ, η, ζ მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის, მაშინ $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ და $x + y + z < 1$. ამრიგად, ტეტრაედრი შეიცვალა კუბით. ფუნქციონალური დეტერმინანტის გამოსათვლელად, დავუშვათ $X = \xi$, $Y = \xi\eta$, $Z = \xi\eta\zeta$, საიდანაც გვაქვს $x = X - Y$, $y = Y - Z$, $z = Z$, მაგრამ

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)} \cdot \frac{D(X, Y, Z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \xi^2\eta$$

და სამჯერადი ინტეგრალი ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს სახეს

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s\eta^{p+r+1}(1-\eta)^p\zeta^r(1-\zeta)^2 d\zeta.$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ფუნქცია წარმოადგენს ნამრავლს ξ-ის ფუნქციისა η-ს ფუნქციაზე და ζ-ს ფუნქციაზე. მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი ტოლია სამი ინტეგრალის ნამრავლისა.

Γ ფუნქციის შემოყვანის შემდეგ მივიღებთ სამჯერადი ინტეგრალისათვის გამოსახულებას:

$$\frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \times \frac{\Gamma(p+q+2)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)}$$

საერთო მამრავლთა შეკვეცის შემდეგ იქნება

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

დირიხლემ მნიშვნელოვანი განძი შეიტანა მექანიკასა და მათემატიკურ ფიზიკაში. მას ეკუთვნის თეორემა იმის შესახებ, რომ წერტილთა სისტემის მდგრად წონასწორობას ადგილი აქვს მაშინ, როცა სისტემის პოტენციალური ენერგია ნამდვილ მინიმუმს აღწევს. დირიხლე ხშირად კითხულობდა ლექციებს პოტენციალის თეორიაში, აქ მან განიხილა სასაზღვრო ამოცანა, რომელსაც საფრანგეთში ახლაც „დირიხლეს ამოცანას" უწოდებენ; დირიხლე ამტკიცებს ამ ამოცანის ამონახსნის ცალსახეობას.

დირიხლე მეტად ინტენსიურად და ნაყოფიერად ეწეოდა პედაგოგიურ მუშაობას. ლექციებს უმთავრესად კითხულობდა რჩეულ მსმენელთა წრეში. იგი არასოდეს არ შედიოდა საგამოცდო კომისიებში და არასოდეს არ ღებულობდა მონაწილეობას მათემატიკური სემინარის ხელმძღვანელობაში. საერთოდ დირიხლე იყო თავდაჭერილი და მხდალი. გარდაცვალების შემდეგ მისმა მოწაფეებმა გამოაქვეყნეს მისი ნაშრომები:

1) „რიცხვთა თეორია",

2) „განსაზღვრული ინტეგრალები",

3) „იმ ძალების შესახებ, რომლებიც მოქმედებენ მანძილების კვადრატების უკუპროპორციულად".

მ ა კ - კ ე ლ ო ხ ი დაიბადა 1809 წელს და მუშაობდა დუბლინში, დაჯილდოვებული იყო გეომეტრიული ტალანტით, მაგრამ მისი საკმარისად გამოვლინება ვერ შეძლო: 38 წლის ასაკში თავი მოიკლა. განსაკუთრებით შესანიშნავია მისი ნაშრომი: „არეკვლისა და გარდატეხის დინამიური თეორიის ცდა". ამ ნაშრომში მან გააკეთა პოტენციალი, დამოკიდებულად სამ სიდიდეზე, რომლებიც განსაზღვრავენ ვექტორს, დაუშვა რა, მაგალითად, კრისტალებისათვის

$$V = a^2\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

სადაც ფრჩხილებში მოთავსებული სხვაობები 2-ზე გადამრავლების შემდეგ წარმოადგენს მოცულობის ელემენტის ბრუნვას. აღმოჩნდა, რომ ასეთის დაშვების საშუალებით მხოლოდ ანალიზური მექანიკის წესების ოპერირებით შესაძლებელია კრისტალებში სინათლის არეკლვისა და გარდატეხის ფრენელის კანონების ზუსტად დაკმაყოფილება. მაგრამ მაკ-კელოხის იდეები მძაფრ წინააღმდეგობას შეხვდნენ და მის ნაშრომებს პირველ ხანებში არავინ არ აფასებდა.

5. ევარისტ გალუა

ხანმოკლე მაგრამ ნაყოფიერი იყო სიცოცხლე ამ შესანიშნავი მათემატიკოსისა, რომლის იდეებმა გარდაქმნეს ალგებრა და გადამწყვეტი ზეგავლენა მოახდინეს გეომეტრიისა და ანალიზის განვითარებაზე.

ევარისტ გალუა დაიბადა 1811 წლის 25 ოქტომბერს ქ. ბურლა-რეინში პარიზის მახლობლად, ქალაქის თავის ოჯახში. 1823 წელს შეიყვანეს ქ. რეიმსის ლიცეიში, აქ მან მასწავლებლების ყურადღება მიიპყრო განსაკუთრებული მათემატიკური ნიჭით. მათემატიკით გატაცებამ გალუას აღუძრა პოლიტექნიკურ სკოლაში შესვლის სურვილი. ლიცეიში სწავლის დროს იგი მოემზადა პოლიტექნიკურ სკოლაში შესასვლელი გამოცდებისათვის, მაგრამ მარცხი განიცადა, რამაც ის ძალიან დაამწუხრა.

პოლიტექნიკური სასწავლებელი საუკეთესო მათემატიკური სკოლა იყო, იმავე დროს რევოლუციის შვილი და, პრინციპებისა

და მეფეების ყოველგვარი ღონისძიების მიუხედავად — დაემორჩილებინათ იგი თავიანთი დინასტიისადმი — იგი რევოლუციის ერთგული დარჩა ბოლომდის. გალუა წინასწარ გრძნობდა, რომ პოლიტექნიკურ სკოლაში შესძლებდა თავისი ნიჭის გაშლას, ამიტომ იყო, რომ იგი ხელმეორედ შეეცადა, ჩაებარებინა გამოცდები იმავე სკოლაში, მაგრამ ბედმა ამჯერადაც უმუხთლა: „მაღალი ინტელექტუალობის კანდიდატი ჩაჭრა დაბალი ინტელექტის გამომცდელმა“, როგორც ეს ნათქვამია მათემატიკურ ჟურნალ „Nouvelles Annales de Mathematiques“-ში, რომელიც გალუას გარდაცვალებიდან 20 წლის შემდეგ გამოქვეყნდა.

გალუა იძულებული გახდა შესულიყო ნორმალურ სკოლაში 1829 წელს. აქ მალე გამომჟღავნდა მისი დიდი ნიჭი მათემატიკაში და მიანიჭეს მათემატიკის ბაკალავრის ხარისხი. ამავე წელს მან გამოაქვეყნა თავისი პირველი მემუარი: „პერიოდული უწყვეტი წილადების შესახებ თეორემის დამტკიცება“. ნაშრომი გადასცეს კოშის, რომელსაც დაავიწყდა მისი განხილვა და ხელნაწერი დაეკარგა.

1830 წელს დაიბეჭდა გალუას სამი მემუარი: 1) „ერთ-ერთი მემუარის ანალიზი განტოლებების ალგებრულად ამოხსნის შესახებ“, 2) „შენიშვნა რიცხვითი განტოლებების ამოხსნის შესახებ“ 3) „მემუარი რიცხვთა თეორიაში“. ამ უკანასკნელი მემუარის თანდართულ შენიშვნაში მითითებული იყო, რომ ის შეადგენს გალუას გამოკვლევების ნაწილს გადანაცვლებათა თეორიასა და ალგებრულ განტოლებებში. ყველა ეს გამოკვლევა წარადგინეს მეცნიერებათა აკადემიაში საკონკურსოდ. ხელნაწერი გადასცეს აკადემიის სწავლულ მდივანს ფურიეს, მაგრამ ნაშრომის განხილვამდე ფურიე გარდაიცვალა და ეს მემუარიც დაიკარგა.

1830 წელს გალუა ჩაება რევოლუციურ მოძრაობაში. იგი გახდა ხალხის მეგობრის საზოგადოების წევრი. ამავე წლის დეკემბერში, მასწავლებლად დანიშვნის რამდენიმე დღის შემდეგ, გალუა გარიცხეს ნორმალური სკოლიდან. იგი მაშინვე შევიდა ნაციონალური გვარდიის არტილერიაში და რესპუბლიკანური პარტიის ყველაზე უფრო მოქმედი ფრაქციის წევრი გახდა. ექვსი თვის განმავლობაში გალუა მონაწილეობას ღებულობდა პარიზში მომხდარ ყველა გამოსვლაში.

მიუხედავად იმისა, რომ გალუა ნორმალური სკოლიდან გარიცხეს, პუასონი მაინც დაინტერესებული იყო მისი ნიჭით და ურჩია მას აღედგინა ფურიესთან დაკარგული ხელნაწერი, პირდებოდა რა მის წარდგენას აკადემიაში. გალუამ პუასონს გადასცა

მემუარი „განტოლებების ზოგადი ამოხსნის ერთ-ერთი საკითხის შესახებ“. პუასონმა მემუარს უწოდა გაუგებარი და უკანვე დაუბრუნა ოთხი თვის შემდეგ. ამით შეურაცყოფილმა გალუამ თავი მიანება მათემატიკაში მუშაობას და მთლიანად ეზიარა პოლიტიკას.

ნაციონალური გვარდიის არტილერია დაშალეს, ხალხისადმი იარაღის გადაცემაში ეჭვმიტანილი ოფიცრები სასამართლოს გადასცეს. ეს პროცესი ცნობილია „ცხრამეტთა პროცესის“ სახელწოდებით. სასამართლომ დამნაშავენი გაამართლა. ამის აღსანიშნავად რესტორანში გამართეს ბანკეტი, რომელსაც ესწრებოდა ორასამდე რესპუბლიკანელი, მათ შორის გალუაც. აქ გალუამ წარმოთქვა სადღეგრძელო, საიდანაც ჩანდა, რომ მას უცდია მეფე ლუი-ფილიპის მოკვლა. ამის გამო გალუა დააპატიმრეს და საპყრობილეში მოათავსეს, მაგრამ სასამართლომ ბრალდება ვერ დაუმტკიცა და რამდენიმე თვის შემდეგ გაათავისუფლა. ერთი თვის შემდეგ გალუა ისევ დააპატიმრეს: 1831 წლის 14 ივლისისათვის რესპუბლიკანური პარტია მანიფესტაციის მოსაწყობად ემზადებოდა. წინადღით პოლიციის უფროსმა გამოაცხადა, რომ მანიფესტაციას ჩასთვლიდა აჯანყებად და წინააღმდეგობას გაუწევდა მას. წინასწარ გამაფრთხილებელ ღონისძიებათა შორის გალუას დაპატიმრებაც იყო, რომელსაც ბრალად სდებდნენ მეფისადმი ღალატს. დასაპატიმრებლად მასთან კვარტალის პოლიციის კომისარიც მოვიდა, მაგრამ იმ დროს გალუა სახლში არ აღმოჩნდა. დაახლოებით ღამის პირველ საათზე ახალგაზრდათა ჯგუფი გაემგზავრა იმ მოედნისაკენ, სადაც მანიფესტაცია იყო დანიშნული. ამ ჯგუფს სათავეში ედგა ნაციონალური გვარდიის არტილერისტის ფორმაში ჩაცმული და კარაბადინებით შეიარაღებული გალუა და მისი მეგობარი. პოლიციამ ახალგაზრდობის ჯგუფი გაფანტა, ხოლო მათი მეთაურები დააპატიმრა. გალუას დაპატიმრება მთელ საფრანგეთში გამოაცხადეს როგორც დიდი გამარჯვება. 1831 წლის 23 ოქტომბერს გალუა გაასამართლეს და მიუსაჯეს პატიმრობა 1832 წლის 29 აპრილამდე. მაგრამ 16 მარტს საპატიმროდან იგი საავადმყოფოში გადაიყვანეს. იქ მას შეუყვარდა ქალი, რომლის გამო უსიამოვნება მოუვიდა პოლიციის მიერ შეჩენილ თითქოს იმ ქალის საქმროსთან, რომელმაც გალუა დუელში გამოიწვია. სასიკვდილოდ დაჭრილი გალუა ვიღაც გლეხმა საავადმყოფოში მიიყვანა, 12 საათის შემდეგ, 1832 წლის 31 მაისს იგი გარდაიცვალა.

გაზეთმა „ტრიბუნამ“ გალუას დაკრძალვის შესახებ ასე გამოაცხადა: „პარიზის ნაციონალური გვარდიის არტილერისტისა და ხალხის მეგობრის საზოგადოების წევრის ევარისტ გალუას და-

საფლავება მოხდება შაბათს მიმდინარე თვის 2-ში. პროცესია გამოვა „კოშენის“ საავადმყოფოდან დილის 11 საათსა და 30 წუთზე“. სამი ათასამდე რესპუბლიკანელი შეთანხმდა, რომ უკანასკნელი ვალი მოეხადა გალუას წინაშე; ხალხთა მეგობრობის საზოგადოების ლიდერებმა, პლანილიომ და შარლ პინელმა, სიტყვები წარმოსთქვეს მის ცხედართან. დაასაფლავეს იგი საერთო სასაფლაოზე. ახლა გალუას საფლავის კვალიც აღარსად ჩანს.

20 წლის ასაკში დაღუპულ გალუას ასე ახასიათებს ფ. კლაინი: „დაახლოებით 1830 წელს საფრანგეთში მათემატიკურ ჰორიზონტზე მოულოდნელად აკაშკაშდა ახალი ვარსკვლავი და მეტეორის მსგავსად სწრაფად ჩაქრა. ეს იყო ევარისტ გალუა... არ გაგონილი ნაადრევი სიმწიფე, დაუცხრომელი ტემპერამენტი, ყოველგვარი წესის დაუმორჩილებელი ბუნება გალუას ქმნის ტიპიური ფრანგული გენიის დაულაგებელ წარმომადგენლად“.

20 წლის გალუა ნაჩქარევად და მოკლედ გადმოსცემს მიღებულ ყველა შედეგს მათემატიკაში და ავალებს შევალიეს, საჯაროდ სთხოვოს იაკობს ან გაუსს—მისცენ მის თეორემებს დასკვნა არა სამართლიანობაზე, არამედ მათ სიდიადეზე: „იმედი მაქვს, აღმოჩნდებიან ადამიანები, რომლებიც ამ ქაოსის გაშიფვრაში სარგებლობას ნახავენ. ამ სიტყვებით დაამთავრა თავისი მეგობრის შევალიესადმი უკანასკნელი წერილი, რომელიც სიკვდილის წინა დღით დაწერა (1832 წლის 29 მაისს).

ე. გალუამ გადატრიალება მოახდინა მათემატიკაში, მისი ჯგუფის ცნება შეიჭრა თანამედროვე მათემატიკის ყველა დარგში და ძირფესვიანად შეცვალა მისი სახე. მან შექმნა „რაციონალობის არის“ ცნება და ირაციონალობათა პირველი ღრმა კლასიფიკაცია, რომლებიც ალგებრული განტოლებებით განისაზღვრებიან; ამ მოძღვრებას ახლა გალუას თეორია ეწოდა.

გალუას ძირითადი თეორემა ასეთია: მოცემული $f(x)=0$ განტოლებისათვის და მოცემული რაციონალობის არესათვის ყოველთვის არსებობს განტოლების x_1, $x_2, \ldots, x_n$ ფესვების გადანაცვლებათა ჯგუფი, რომლის ყოველი „რაციონალური“ ფუნქცია $R\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ე. ი. ყოველი ფუნქცია, რაციონალურად აგებული ფესვებისაგან და რაციონალობის არის სიდიდეებისაგან, რომელიც ამ ჯგუფის გადანაცვლების დროს რიცხობრივად მუდმივი რჩება, წარმოადგენს „რაციონალურს“, ე. ი. ეკუთვნის რაციონალობის არეს, და პირიქით: ყოველი $R\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია, რომელსაც „რაცინალური“ მნიშვნელობა აქვს, რიცხობრივად უცვლელი რჩება ამ ჯგუფის გადანაცვლების დროს.

გალუამ სიცოცხლეში თავისი ნაშრომების მხოლოდ ნაწილის გამოქვეყნება მოასწრო. პირველი ნაშრომი „ერთი თეორემის დამტკიცება“ უწყვეტი წილადების თეორიიდან გამოაქვეყნა ჟურნალ „Annales Mathematiques de M. Gergone“-ში. მან დაამტკიცა თეორემა: „თუ რომელიმე ხარისხის განტოლების ერთი ფესვი წარმოადგენს წმინდა პერიოდულ წილადს, მაშინ განტოლებას აუცილებლად აქვს მეორე პერიოდული ფესვი, რომელიც მიიღება უარყოფითი ერთეულის გაყოფით უწყვეტ წილადზე“.

იმავე ჟურნალში დაიბეჭდა მეორე ნაშრომი: „შენიშვნები ანალიზის ზოგიერთ პუნქტზე“.

ლიტერატურა

1. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der mathematik B. II, III, IV, 1892, 1907—1908.
2. В. Ф. Каган, Лобачевский, 1944.
3. H. Suter, Geschichte der mathematischen wissenchaften, 1875.
4. В. П. Шереметевский, Очерки по истории математики, 1940.
5. Феликс Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии, I, 1937.
6. Г. Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII веках, 1938.
7. Б. В. Гнеденко, Очерки по истории математики в России. 1946.
8. М. Я. Выгодский, Галилей и инквизиция.
9. Э. Кольман, Бернанд Больцано, 1955.
10. Исаак Ньютон, Математические работы, 1937.
11. Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, 1936; Дифференциальное исчисление, 1949; Интегральное исчисление, 1956; Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти, 1935.
12. Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, 1932.
13. J. L. Lagrange, Oeuvres, t. I, II, III, 1867.
14. P. S. Laplace, Oeuvres, 1878.
15. Oeuvres complètes d'Augustin Caychy. I[e] Serie, tome VI, II[e] serie, tome III, 1821; tome IV, 1823.
16. Карл Маркс, Математические рукописи, „Под знаменем Марксизма" № 1, 1933.
17. С. Яновская, О математических рукописях Маркса. „Под Знаменем Марксизма", № 1, 1933.
18. Leibnizens ges. Werke. Mathematik, B. 4, 1859.
19. Г. В. Лейбниц, Избранные отрывки из математических сочинений, Успехи Матем. наук, 1948, т. 3, вып. 1.
20. А. М. Лежандр, Основания геометрии, 1837.
21. Бонавентура Кавальери, Геометрия, 1949.
22. Соловьев, Карл Фридрих Гаусс, 1858.
23. К. Ф. Гаусс, Общая теория поверхностей, 1895.
24. Ренэ Декарт, Геометрия, 1938.
25. Эварист Галуа, Сочинения, 1936.
26. Д. Г. Цхакая, История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX века, 1959.
27. Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des scienes, des artes et des métiers... par M. Diderot et... par M. D'Alembert; t. I, 1751, t. II, 1752; t. III, 1753.

სარჩევი

Доменти Георгиевич Цхакая

История математики с XVII века до второй половины XIX века

დაიბეჭდა საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის
სარედ.-საგამომც. საბჭოს დადგენილებით

*

რედაქტორი ვ. ჭ ე ლ ი ძ ე

გამომცემლობის რედაქტორი ე. ქ ვ ა რ ი ა ნ ი
ტექრედაქტორი ე. ბ ო კ ე რ ი ა
კორექტორი ნ. ე ბ რ ა ლ ი ძ ე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 27.XII.1965; ნაბეჭდი თაბახი 21;
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 17.82;
უე 02276; ტირაჟი 1000; შეკვეთა 1395;
ფასი 1 მან. 65 კაპ.

გამომცემლობა „მეცნიერება“, თბილისი, ძერჟინსკის ქ. № 8
Издательство «Мецниереба», Тбилиси, ул. Дзержинского № 8

გამომცემლობა „მეცნიერების“ სტამბა, თბილისი, გ. ტაბიძის ქ. № 3/5
Типография Издательства «Мецниереба», Тбилиси, ул. Г. Табидзе 3/5