საქართველოს სსრ განათლების სამინისტრო

დოც. დ. ცხაკაია

მათემატიკის ისტორია

უძველესი საუკუნეებიდან XVII საუკუნემდე

სამეცნიერო-მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა

თბილისი 1948

მნავთობიური ინდიკო

პ/მგ. რედაქტორი დოც. შლ. ჯეღიძე

256 გვ. ნახ. 21. ცხ. 18 ყდით.

წინასიტყვაობა

მათემატიკის ისტორიის ვრცელი კურსი მრავალი იქმნა დაწერილი უცხო და რუსულ ენებზე. ყველაზე უფრო მდიდარ მასალას შეიცავს მორიც კანტორის ოთხტომიანი შრომა. მაგრამ ეს უკანასკნელიც ზოგ მნიშვნელოვან საკითხს სრულებით არ შეიცავს, ზოგი საკითხი კი უკვე მოძველებულია. მაგალითად, იქ არაა მოხსენებული არქიმედეს შრომა „სწავლება მეთოდის შესახებ“, ვინაიდან ეს უკანასკნელი უფრო გვიან იქმნა აღმოჩენილი. მიმდინარე საუკუნეში, განსაკუთრებით მის მეორე მეოთხედში, მეტად მნიშვნელოვანი გამოკვლევები გამოქვეყნდა მათემატიკის ისტორიკოსების ბობინინის, ვილაიტნერის, ნოიგებაუერის და ვიგოდსკისა. ნოიგებაუერის და ვიგოდსკის გამოკვლევებმა შესცვალეს ეგვიპტისა და ბაბილონის მათემატიკაზე მანამდე არსებული შეხედულებანი.

ქართულ ენაზე კი წარსულ საუკუნეების მათემატიკის ისტორიის შესახებ ჯერ-ჯერობით თითქმის არაფერი დაწერილა. წინამდებარე შრომაში ზემოხსენებული ახალი გამოკვლევების საფუძველზე მოკლედ, მაგრამ თანმიმდევრობით გადმოცემულია მთავარი საფეხურები მათემატიკის განვითარებისა XVII საუკუნემდე. ჩამატებულია აგრეთვე საკუთარი მცირე გამოკვლევები საქართველოში მათემატიკურ ცოდნათა განვითარების საკითხზე.

ისეთი უაღრესად მნიშვნელოვანი შრომა, როგორიც არის ევკლიდეს „საწყისები“, ჯერ კიდევ არ არის გადათარგმნილი ქართულ ენაზე. აუცილებლად საჭიროა მათემატიკის მასწავლებელი მას იცნობდეს. ამის გამო წინამდებარე შრომაში ევკლიდეს ზემოხსენებული შრომიდან მოყვანილია მნიშვნელოვანი ადგილები.

შრომის შესრულების დროს მე ვსარგებლობდი ევკლიდეს, არქიმედეს და დეკარტის შრომების პირველადი წყაროებით.

ამათ გარდა გამოვიყენე შრომები რაინოვის, კანტორის, კლაინის, ფ. ენგელსის, ნოიგებაუერის, ცოიტენის, ფაცარის, ზუტერის, კეჯორის, ჰაიბერგის, ვილაიტნერის, ტროფკესი, ლურიესი და დელამბრის.

დ. ცხაკაია

თავი I

თვლის სისტემები

§ 1. **რიცხვის ცნების წარმოშობა.** საკითხმა იმის შესახებ, თუ როგორ გაჩნდა ადამიანის გონებაში რიცხვის ცნება, დიდი დავა გამოიწვია, როგორც მათემატიკოსების, ისე ფილოსოფოსებს შორის. ცნობილია ორი თვალსაზრისი: ერთი ის, რომ რიცხვის ცნება ადამიანს თანდაყოლილია და მეორე კი — რიცხვის ცნებამდე ადამიანი ხანგრძლივი ცდების შედეგად მივიდა. ამომწურავი პასუხს ამ კითხვაზე ენგელსისაგან ვღებულობთ; ის ამბობს: „რიცხვისა და ფიგურის ცნებები არსაიდან არ არის ამოღებული გარდა ნამდვილი ქვეყნიერებისა. ყველაფრად შეიძლება მივიჩნიოთ ათი თითი, რომელზედაც ადამიანმა დათვალა, მაშასადამე პირველი არითმეტიკული ოპერაციების წარმოება ისწავლა, მხოლოდ არა გონების თავისუფალ ქმნილებად. ანგარიშისათვის საჭიროა არა მარტო საანგარიშო საგნები, არამედ აგრეთვე უნარი ამ საგნების განხილვის დროს უგულებელვყოთ ყველა მათი თვისება, გარდა მათი რიცხვისა. ეს უნარი კი ხანგრძლივი ისტორიული ცდითი განვითარების შედეგია. როგორც რიცხვის, ისე ფიგურის ცნებაც მხოლოდ გარეგანი ქვეყნიერებიდან არის ნასესხები და სრულიადაც წმინდა აზროვნებიდან არ წარმომდგარა თავში“.*

ეს უკანასკნელი თვალსაზრისი საკმაოდ განმტკიცებულია მათემატიკოსებს შორის. რიცხვის ცნების წარმოშობის შესახებ მათემატიკის ცნობილი ისტორიკოსი ცოიტენი ამბობს: „თუ დედას სურს თავისი შვიდი ბავშვიდან თითოეულს თითო ვაშლი მისცეს, მისთვის საჭირო არ არის რიცხვი 7-ის ცოდნა. აგრეთვე თუ მას სურს ბავშვებს ორ-ორი ვაშლი მისცეს, მას შეუძლია არ იცოდეს, რომ $2.7=14$; ის უბრალოდ იღებს ერთს ანუ ორ ვაშლს, აძლევს ჯერ ვანოს, შემდეგ ლიზას და ასე შემდეგ. ის უფრო მიუახლოვდება რიცხვის იდეას, თუ კი შეამჩნევს, რომ პირველ შემთხვევაში მან

* ფ. ე ნ გ ე ლ ს ი, ანტი-დიურინგი, გვ. 19—20, 1933.

უნდა აილოს თითო ვაშლი ერთი ხელის ყველა თითისათვის და მეორე ხელის პირველი და მეორე თითისათვის და რომ ამასთანავე თითებს არავითარი დამოკიდებულება არა აქვთ იმ საგნებთან (ამ შემთხვევაში ვაშლებთან), რომელთა რიცხვი მათი ტოლი უნდა იყოს. დედისათვის ისინი მხოლოდ ნიშნები არიან, საჭირო საგანთა რაოდენობის აღნიშვნებს წარმოადგენენ მხოლოდ“.*

მათემატიკის ისტორიკოსებს დიდი სამსახური გაუწია ფილოლოგიურ და ეთნოლოგიურ გამოკვლევებმა იმის დასამტკიცებლად, რომ ადამიანი რიცხვის ცნებამდე ცდების შედეგად მივიდა. ველური ტომების ენაზე წარმოებულ გამოკვლევებმა უჩვენეს, რომ ზოგმა ტომმა თვლა სრულებით არ იცოდა, ან და თუ იცოდა, მხოლოდ სამამდე; სამზე მეტ რიცხვს ისინი გამოსახავდნენ სიტყვით, რომელიც მრავალს ნიშნავდა. განვითარების ასეთ დაბალ საფეხურზე მყოფი ველურები თითებზე თვლას ვერ ახერხებდნენ და მათ ენაზე პირველი რიცხვების სახელწოდებას თითების სახელწოდებასთან არავითარი კავშირი არა აქვს. რიცხვების მათი სახელწოდებანი გამოსახავდნენ რომელიმე საგანს, საგანთა ჯგუფს ანდა რომელიმე მოქმედებას; ამით აიხსნება, მაგალითად, ის რომ 1) ჩინურ ენაზე „ორის“ სახელწოდება იმავე დროს ყურების სახელწოდებაა; 2) სანსკრიტული სიტყვა dvi=ორი ზმნური ფესვია და გაყოფას ნიშნავს; ამ სიტყვიდან წარმოიშვა სანსკრიტული სიტყვა dua-ra, რომელიც ორ დარაბიან კარს ნიშნავს. 3) სანსკრიტული სიტყვა trsh=სამი, როგორც ზმნა იხმარება და ნიშნავს გადასვლას-გადაადგილებას; ამ სიტყვიდან წარმოსდგება ლათინური tres, ინგლისური thres და გერმანული drei; „სამის“ ეს სახელწოდება ამბობს იმ პერიოდის შესახებ, როდესაც ადამიანმა თვლის საქმეში წინ წაიწია, ე. ი. — გააგრძელა ის ორიდან სამამდე.

განვითარების უფრო მაღალ საფეხურზე მდგომ ველურების ენის გამოკვლევამ გამოაშკარავა, რომ მათ სამზე, ან ოთხზე მეტი რიცხვებისათვის უკვე აქვთ სახელწოდებანი, რომლებიც დაკავშირებული არიან ხელის თითებთან; მაგალითად, რიცხვი ხუთის სახელწოდება იმავე დროს ცალ ხელს ნიშნავს და ათის კი — ორივე ხელებს. ეს კი იმას ამბობს, რომ ადამიანი თანდათან გადავიდა თვლაზე თითე-

* Г. Цейтен, История математики в древности и в средние века. стр. 176. 1902 год.

ზის საშუალებით. ხუთიდან ათამდე ამა თუ იმ რიცხვის სახელწოდება სანსკრიტულ, ბერძნულ, ლათინურ, ინგლისურ, გერმანულ და სხვა ენებზე, დაკავშირებულია თითებთან; მაგალითად, სანსკრიტულ duakankan (ორი ხელი) წარმოსდგა სანსკრიტულ სიტყვიდან — dvakan = ათი; უკანასკნელიდან კი ბერძნული — δέκα, ლათინური decem, გერმანული — zehn და ინგლისური — ten.

§ 2. თვლის სხვადასხვა სისტემები. უძველესი დროიდან დაწყებული ცნობილია თვლის შემდეგი სისტემები: ხუთობითი, ექვსობითი, ათობითი, თორმეტობითი, ოცობითი და სამოცობითი. ამათგან ყველაზე უფრო ხმარებაში იყო: ხუთობითი, ათობითი და ოცობითი სისტემები, რომლებიც ხელებისა და ფეხების თითების რიცხვს ეყრდნობოდნენ. ადამიანს შეეძლო თვლა 20-დე ხელებისა და ფეხების თითების საშუალებით. თითოეულ თითს ის ერთ საგანს შეუსაბამებდა. თუ კი მას სჭირდებოდა ოცის შემდეგ თვლის გაგრძელება, ის იწყებდა თვლას თავიდან ისევ თითებზე და მათი საშუალებით უკვე დათვლილ ათეულებისა და ოცეულების რიცხვს აღნიშნავდა. ამგვარად, შეკრებისა და გამრავლების საშუალებით შედგენილ იყო რიცხვები 100-დე; მაგალითად, $35 = 5 + 3 \cdot 10$; $64 = 4 + 3 \cdot 20$. ეს შეიძლება გამოისახოს ზოგადი ფორმულით: $a + b \cdot 10$ ან და $a + b \cdot 20$, სადაც 10 და 20 უფრო მაღალ რიგის ერთეულებია. თვლის ოპერაციის თანდათან გაგრძელების შედეგად, როდესაც ათეულებისა და ოცეულების რიცხვმა ათს ან ოცს გადააჭარბა, საჭირო შეიქმნა კიდევ უფრო მაღალი რიგის ერთეულების შექმნა: 10^2, $10^3 \ldots$, ან 20^2, $20^3 \ldots$ ასე რომ ასზე მეტი რიცხვები შედგენილ იქმნა შემდეგნაირად:

$$647 = 7 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2,$$

ანუ ზოგადი ფორმულით: $a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + \ldots$ კიდევ უფრო მაღალი რიგის ერთეულების შექმნა მიმდინარეობდა თანდათანობით იმის მიხედვით, თუ რამდენად ამას ეკონომიური მოთხოვნილება კარნახობდა. ამნაირად წარმოიშვა ათობითი და ოცობითი სისტემები. ხუთობითი სისტემა ათობითი სისტემისაკენ გადასასვლელი საფეხურია. ჯერ კიდევ უძველეს დროსაც ყველა სისტემაზე უფრო იყო გავრცელებული ათობითი სისტემა, რომელიც სამუდამოდ განმტკიცდა. ადამიანს ხელებზე რომ ათი თითი არ ჰქონოდა, შესაძლებელია, თვლის სისტემა სულ სხვა ყოფილიყოს.

ოცობითი სისტემის ნაშთები ახლაც დარჩენილია ზოგიერთ ხალხში, რომელიც უკვე ათობითი სისტემაზეა გადასული; ამას ადასტურებს რიცხვთა ფრანგული სახელწოდებანი quatrevingts (4·20, ანუ 80), quinze-vingts (15·20, ანუ 300). ზეპირ თვლაში ოცობითი სისტემით ახლაც სარგებლობენ კავკასიის ხალხები, გარდა სვანებისა, არჭელებისა, ხურკანელებისა, ოსებისა და ყაზიკუმუხებისა, რომლებიც ათობითი სისტემით სარგებლობენ*. თვლის ოცობითი სისტემით სარგებლობა ჩანს რიცხვთა ქართულ სახელწოდებიდან: ოც და ათი $= 20 + 10$, ორმოცი $= 2 \times 20$ და სხვა. უნდა აღინიშნოს, რომ საქართველოში ოცობითი სისტემით სარგებლობას წინ უძღოდა ათობითი სისტემით სარგებლობა; ამაში გვარწმუნებს რიცხვთა სახელწოდებანი 11-დან 19-დე: თერთ-მეტი $(1 + 10)$, თ-ორ-მეტი $(2 + 10)$, თ-სამ-მეტი $(3 + 10)$, თ-ოთხ-მეტი $(4 + 10)$ და ასე შემდეგ. ასის შემდეგ რიცხვების შედგენას კავკასიის ხალხები (თუშების გარდა) ათობითი სისტემით აწარმოებენ. ამ მხრივ თუშები გამონაკლისს წარმოადგენენ; ისინი ასის შემდეგაც ოცობითი სისტემით თვლას განაგრძობენ და ასის ნაცვლად ამბობენ ხუთი ოცი, ორასის ნაცვლად—ათი ოცი და ასე შემდეგ.

XIX საუკუნის მეორე ნახევარში გერმანელი მეცნიერი კოლი (Kohl) სწერდა, რომ თითქოს კავკასიაში ოსები სარგებლობდნენ თვლის ოთხმოცობითი სისტემით (Octodecimal-system). ასეთი სისტემით სარგებლობის შესახებ ისტორიამ არაფერი იცის და მათემატიკის ისტორიკოსი კანტორი** კოლს შემცდარად სთვლის, და ამ მხრივ კანტორი მართალია, ვინაიდან ოსები მაშინაც და ახლაც ათობითი სისტემით სარგებლობენ.

დღემდე არსებული ცნობების მიხედვით კავკასიის ხალხთა შორის თვლას წერილობით მხოლოდ ქართველები აწარმოებდნენ. რიცხვთა აღსანიშნავად ისინი ანბანის ასოებით სარგებლობდნენ. ერთიდან ათამდე უკანასკნელის ჩათვლით თითოეულ რიცხვს ასოებით აღნიშნავ-

ა ბ გ

დნენ თანმიმდევრობით. მაგალითად, 1, 2, 3, ..., შემდეგ კი რიგითი შესაბამისი ასოებით აღნიშნავდნენ მხოლოდ თითოეულ ათეულებს

---

* В. В. Бобинин, История развития счисления у кавказских народов, Труды XIII с'езда естество-испытателей и врачей. Секция математики; том VI; стр. 523. 1913 г.

** M. Cantor, Uorlesungen über Geschichte der Mathematik. ტომი I. გვ. 9. 1880.

$\overset{\text{კ}}{20}$, $\overset{\text{მ}}{40}$..., ასეულებს $\overset{\text{რ}}{100}$, $\overset{\text{ს}}{200}$,... და ათასეულებს $\overset{\text{ჩ}}{1.000}$, $\overset{\text{ც}}{2.000}$ ... მათ შორის მყოფ რიცხვებს კი შეკრების წესით ადგენდნენ. მაგალითად, $159 = 100 + 59 =$ რნთ; $803 = 800 + 3 =$ ყგ. წერილობითი თვლა ქართველებს ათობითი სისტემაზე აქვთ აგებული, ზეპირი თვლა კი (ასამდე) — ოცობითი სისტემაზე. მაგალითად, 34 გამოითქმება „ოც და თოთხმეტი" და იწერებოდა კი „ლდ" $= 30 + 4$. წერილობითი თვლის ასეთი წესი ქართველებმა ალბად გადმოიღეს ბერძნებისაგან, რომელთა თვლის სისტემას შემდეგ გავეცნობით.

თვლის თორმეტობითი სისტემა წარმოიშვა საგნების გაზომვასთან დაკავშირებით და ის ადამიანის ანატომიაზე არ არის დამყარებული. თორმეტობითი სისტემას ერთნაირი უპირატესობა აქვს ათობითი სისტემასთან შედარებით; ეს უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ რიცხვს „12" გამყოფთა რიცხვი (2, 3, 4, 6) უფრო მეტი აქვს, ვიდრე რიცხვს 10 (2,5). არითმეტიკისათვის გაცილებით უკეთესი იქნებოდა, რომ ხმარებაში ყოფილიყო არა ათობითი, არამედ თორმეტობითი სისტემა, ვინაიდან უფრო მოხერხებულია უმარტივესი და ხშირად ხმარებული $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ წილადების მნიშვნელთა ჯერადი რიცხვი 12 თვლის სისტემის საფუძველი იყოს. მაგრამ ათობითი სისტემა, როგორც ადამიანის ანატომიაზე დამყარებული, ისე განმტკიცდა, რომ მის შეცვლაზე ლაპარაკიც ზედმეტია. დაახლოებით XX საუკუნიდან II საუკუნემდე (ჩვენს ერამდე) თვლის სამოცობითი სისტემით ბაბილონელები სარგებლობდნენ. უკანასკნელი ათი წლის განმავლობაში გერმანელ მათემატიკოს ნოიგებაუერმა ბაბილონელთა მათემატიკის დარგში მეტად საინტერესო გამოკვლევები აწარმოვა; ამ გამოკვლევათა თანახმად სამოცობითი სისტემის წარმოშობის შესახებ მანამდე არსებული ჰიპოტეზები ნაკლებად დამაჯერებელია.

მ. კანტორის მიერ წამოყენებული ჰიპოტეზი შემდეგში გამოიხატება: ძველი ბაბილონელები წელიწადში 360 დღეს ითვლიდნენ (12 თვეს, თვეში 30 დღეს) ამასთან დაკავშირებით ისინი წრეს ყოფდნენ 360 ნაწილად და თითოეული ეს ნაწილი შერგვალებულ წლის მესამასსამოცე ნაწილს შეესაბამებოდა. იმავე დროს წრეს ყოფდნენ აგრეთვე ექვს ტოლ ნაწილად — სექსტანტად. ამრიგად თი-

თოეული სექტანტა იყოფოდა 60 ნაწილად. კანტორის ეს ჰიპოტეზი ნაკლებად დამაჯერებელია. მართლაც*, იმისათვის, რომ წელიწადში განისაზღვროს დღეთა რიცხვი, საჭირო იყო ნუმერაციის განვითარებული სისტემა, რომელიც საშუალებას მისცემდა რიცხვი „360"-დე ასვლისა. მაშასადამე, საჭიროა იმის დაშვება, რომ ბაბილონელებს უკვე ჰქონდათ თვლის რომელიღაც სისტემა, როდესაც ისინი თავიანთ კალენდარს აფორმებდნენ; თუ ის სისტემა სამოცობითი იყო, მაშინ კანტორის ჰიპოტეზი ზედმეტია; თუ ის ათობითი იყო, მაშინ სექსტანტის 60 ნაწილად დასაყოფად თვლის სისტემისათვის ახალი ფუძის — 60-ის შემოღება არაფრით არ იქნებოდა გამართლებული.

კევიჩის (G. Kewitsch) აზრით სამოცობითი სისტემა წარმოიშვა ორი სისტემის ერთ-მეორეში შერევის გამო: ათობითისა და ექვსობითის, რომლებიც მანამდე დამოუკიდებლად არსებობდნენ; მაგრამ ეს ჰიპოტეზი ისტორიული ფაქტებით არ არის საკმაოდ დასაბუთებული.

ნოიგებაუერის მიერ მოცემული ახსნა თვლის სამოცობითი სისტემის წარმოშობის შესახებ ყველაზე უფრო სარწმუნოა, ვინაიდან ის ეყრდნობა მატერიალურ კულტურის ისტორიის ფაქტებს**. ნოიგებაუერის აზრით თვლის სამოცობითი სისტემა წარმოიშვა ზომათა სისტემის შემოღების საფუძველზე; ზომათა სისტემის შემოღება კი, თავის მხრივ, სამეურნეო ცხოვრების, განსაკუთრებით ვაჭრობის მოთხოვნილებით იყო გამოწვეული. ბაბილონში ორი ხალხის — სუმერელების და აკადელების შეხვედრა მოხდა; თითოეულ იმათგანს თავისი წონითი ერთეული ჰქონდა და ორივენი თვლის ათობითი სისტემით სარგებლობდნენ; ამასთან ერთად ისინი სარგებლობდნენ უმარტივეს წილადებით $\frac{1}{2}$ და $\frac{1}{3}$-ით, რომლებსაც ღებულობდნენ წონითი ერთეულის ორ და სამ ტოლ ნაწილებად დაყოფით; $\frac{1}{6}$ კი წარმოიშვა ერთ მესამედის შუაზე გაყოფით. მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის გარემოება, რომ აკადელებს და სუმერელებს მონეტა არ

---

* М. Я. Выгодский, Математика древних вавилонян. Успехи математических наук; выпуск VII, стр. 110; 1940.

** О. Нейгебауер, Лекции по истории античных математических наук; том I.; стр. 120—125. 1937.

ჰქონდათ და ფულადი ანგარიშის გასწორება წონით აღებული ვერცხლით სწარმოებდა. სუმერელების წონითი ერთეული „მინა“ იყო, აკადელების კი — „შეკელი“. ამ ორ ხალხს შორის სავაჭრო ურთიერთობამ წარმოშვა მათი წონითი ერთეულების — მინა და შეკელის ეკვივალენტის დაწესების საჭიროება; მაგრამ ამ ერთეულთა შორის შეფარდება იძლეოდა შერეულ წილადს დიდი მნიშვნელით, რაც სავაჭრო ურთიერთობაში დიდ სიძნელეს ქმნიდა. ამის თავიდან ასაცილებლად იძულებული გახდნენ ამ შეფარდების გამომსახველი რიცხვი შეერგვალებინათ, რისთვისაც მიზანშეწონილად ჩასთვალეს $\frac{1}{6}$ შეფარდების აღება, ვინაიდან, თუ ზომათა ერთ სისტემის ერთეული მეორე სისტემის ერთეულთან $\frac{1}{6}$ შეფარდებაში იმყოფება, მაშინ მაღალი ზომის ერთეულის $\frac{1}{2}$ და $\frac{1}{3}$ დაბალ ზომის 3 და 2-ის ტოლი იქნება; $\frac{1}{2}$ და $\frac{1}{3}$ უმარტივესი წილადები კი მათთვის ყველაზე უფრო ხელმისაწვდომი იყო. ამასთანავე გამოიყენეს თვლის ათობითი სისტემა და მინის $\frac{1}{6}$ გაუტოლეს 10 შეკელს, რადგან ათობითი სისტემაში რიცხვი 10 მაღალ რიგის ერთეულთა შორის უმარტივესი ერთეულია.

ამრიგად მინისა და შეკელის ეკვივალენტი ასე გამოისახა: 1 მინა = 60 შეკელს. ეს ეკვივალენტი დაახლოებით ამ ზომათა შორის წონითი შეფარდებას შეესაბამებოდა. ფულების თანხას ისინი გამოსახავდნენ მინებში და შეკელებში ისე, როგორც ჩვენ გამოვსახავთ მას მანეთებში და კაპიკებში. ფულების თანხის გამოთქმის ანუ ჩაწერის შემთხვევაში ჩვენ ხშირად გამოვტოვებთ ხოლმე მანეთის ანუ კაპიკის სახელწოდებას. მაგალითად, ვიტყვით ხოლმე სამი და ათი შაური ნაცვლად სამი მანეთი და ათი შაურისა, ანუ დავწერთ ხოლმე 3.50 ნაცვლად 3 მან. 50 კაპ.-ისა. სწორედ ასე ძველ ბაბილონელებმაც თანხის ზეპირ, ან წერილობითი გამოსახვაში სიმარტივისათვის დაიწყეს „მინა“ და „შეკელი“ სახელწოდებათა გამოტოვება.

ამგვარად სამოცობითი სისტემა თანდათან სახელდებულ რიცხვებიდან განყენებულ რიცხვებზე ვრცელდება და ყალიბდება

თვლის სამოცობითი სისტემა პოზიციურ (ნიშნის მნიშვნელობა ადგილმდებარეობის მიხედვით) პრინციპზე, რომელზედაც აგებულია თვლის თანამედროვე ათობითი სისტემა. ერთიდან სამოცამდე რიცხვებისათვის ბაბილონელებს ცალ-ცალკე ნიშნები ჰქონდათ; 60-ზე მეტ რიცხვებს კი თუ თანამედროვე ნიშნებით გამოვთქვამთ, შემდეგნაირად სწერდნენ: $64=60+4=1,4$; 81 ასე იწერებოდა: $60+21$, ანუ 1,21. ადვილად ვამჩნევთ, რომ აქ ერთეულად სამოცია აღებული.

პოზიციურ პრინციპზე აგებული თვლის სამოცობითი სისტემის განვითარების საბოლოო შედეგია იმავე პრინციპზე აგებული თვლის ათობითი თანამედროვე სისტემა, რომლის წარმოშობას ჩვენ დაწვრილებით შევეხებით ინდოელების მათემატიკისადმი მიძღვნილ თავში.

თავი II

ეგვიპტელების მათემატიკა

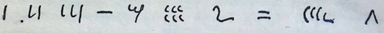
ჯერ კიდევ ხუთათასიან წლებში ჩვენს ერამდე ნილოსის ვიწრო, მაგრამ მეტად ნოყიერ ველზე ცხოვრობდა შრომის მოყვარე ეგვიპტის ხალხი. ეგვიპტის ყოველგვარი სიმდიდრე ნილოსზე იყო დამოკიდებული. თავის ნაპირებიდან ყოველწლიური პერიოდული გადმოსვლით ნილოსი აფრიკის მშრალ ნიადაგს რწყავდა და იმავე დროს ასაზრდოებდა მას თავისი ნაყოფიერი შლამით. მაგრამ წყლის თანაბრად განაწილებისათვის საჭირო იყო ხელოვნურად მოსარწყავი ქსელი, რომლის საშუალებით შესაძლებელი იქნებოდა მაღალი და მდინარესაგან შორს მდებარე მიწის ნაკვეთებისათვის წყლის მიწოდება, ზედმეტი წყლის აუზებში დაგროვება და სხვა. ეგვიპტელებს ამისათვის უხდებოდათ უზარმაზარი სამუშაოთა შესრულება; ეს უკანასკნელი კი დაკავშირებული იყო მიწის ნაკვეთების გაზომვასთან, რაც აუცილებელი იყო ნაკვეთებს შორის წალეკილ საზღვრების აღდგენისათვის. ამ გარემოებამ ხელი შეუწყო ეგვიპტეში გეომეტრიის წარმოშობას. ამავე დროს საწარმოო ძალების, ხელოსნობისა და ვაჭრობის ზრდამ გამოიწვია მექანიკისა და არითმეტიკის განვითარება. ეგვიპტე რომ გეომეტრიის სამშობლოა, ამის შესახებ ლაპარაკობენ ძველი საბერძნეთის მწერლები — ჰეროდოტესი და დიოდოროსი. მათემატიკის წარმოშობის შესახებ ენგელსი ამბობს: „სხვა მეცნიერებათა მსგავსად მათემატიკაც ადამიანის მოთხოვნილებისაგან წარმოიშვა: მიწისა და ჭურჭელის გაზომვა და გამოანგარიშებასთან დაკავშირებით და მექანიკიდან“.*

§ 1. **არითმეტიკა.** ეგვიპტელების მათემატიკური ცოდნათა შესახებ ჩვენ ვიცით 1.700 — 2.000 წლეებში (ჩვენს ერამდე) დაწერილი უმთავრესად ორი დიდი მათემატიკურ პაპირუსის მეოხებით: ერთი იმათგანი, M პაპირუსის სახელწოდებით, მოსკოვში ინახება და მეორე კი რინდის პაპირუსის სახელწოდებით, ბრიტანეთის მუზეუმშია. ეს უკანასკნელი, დაწერილი მწერალი აჰმესის მიერ, საუკეთესო წყაროს წარმოადგენს ეგვიპტელების მათემატიკის გასაცნობად. მათემატიკის

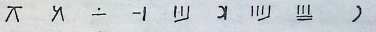
* ე ნ გ ე ლ ს ი, ანტი-დიურინგი, გვ. 20, 1933.

ამ სახელმძღვანელოდან ცხადია, რომ ეგვიპტელების მათემატიკა მოკლებულია ყოველგვარ დამტკიცებებს და ამოცანათა ამოხსნის ზოგად წესებს.

ეგვიპტელების რიცხვთა ნიშნები ორნაირია: ჰიეროგლიფური და ჰიერატული. რიცხვთა ჰიერატული ნიშნები შემდეგია:



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,



20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,

.,   ..,   •..,
200, 300, 400...

ეგვიპტელები თვლის ათობითი სისტემით სარგებლობდნენ და ზემოაღნიშნულ რიცხვებს შორის დანარჩენ რიცხვებს შეკრების წესით გამოსახავდნენ.

ჰიეროგლიფური წერის შემთხვევაში თითოეული პირველი ცხრა რიცხვთაგან გამოისახებოდა ერთეულის ნიშნის — 1 განმეორებით; ერთეულის ასეთი განმეორება ჯგუფებად იყოფოდა; თითოეული ჯგუფი კი — 4 ნიშნად იყოფოდა. ცხრაზე მეტი რიცხვებისათვის, სახელდობრ, 10, 100, 1000, 10,000, 100,000, 1.000.000, 10,000,000-სათვის ჰიეროგლიფურ წერას განსაკუთრებული ნიშნები ჰქონდა. ათეულები, ასეულები და ასე შემდეგ რიცხვები გამოისახებოდნენ ნიშნის განმეორების საშუალებით და რომელიმე რიცხვის გამოსასახავად შეკრების წესით სარგებლობდნენ. მაგალითად, 4.235 დასაწერად, ოთხჯერ მიმდევრობით დასწერდნენ ათასის ნიშანს, ორჯერ ასის, სამჯერ ათის და ხუთჯერ ერთეულის. მთელი რიცხვების ერთ-მეორეზე გადამრავლების ეგვიპტელების წესის თავისებურებას ჩვენ დავინახავთ შემდეგი მაგალითიდან *

(12 × 12)	1	12	13
	2	24	
	+ 4	48	
	+ 8	96	
	ერთად	144	

* Нейгебауер, გვ. 130.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ეგვიპტელები მიმართავდნენ თანდათანობით გაორკეცებისა და შეკრების ხერხს იმ მამრავლთა, რომლებისაგან შედგება ნამრავლის პირველი მამრავლი. გაყოფასაც ისინი ასეთი წესით აწარმოებდნენ. მაგალითად,

$$
\begin{array}{lrr}
(19:8) & 1 & 8 \\
 & +\,2 & 16 \\
 & \frac{1}{2} & 4 \\
 & +\,\frac{1}{4} & 2 \\
 & +\,\frac{1}{8} & 1,
\end{array}
$$

ე. ი.

$$19:8=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

ამ მაგალითში გამყოფი 8 ორკეცდება, რის გამო 16 მიიღება. შემდეგ კი ეს გამყოფი (8) თანდათანობით შუაზე იყოფა მანამდე, სანამ მეოთხედი და მერვედისაგან არ მიიღება დანარჩენი სამი ერთეული, რომლებიც 16 და 19-ს შორის განსხვავებას ჰქმნიან. ამ მაგალითიდან ვხედავთ, რომ $\frac{3}{8}$ წარმოდგენილია დაშლილი სახით: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. წილადებს, რომელთა მრიცხველი ერთზე ნეტია, ეგვიპტელები ისეთ ძირითად წილადებად დაშლიდნენ, რომელთა მრიცხველი ერთს უდრიდა. აჰმესის არითმეტიკის სახელმძღვანელო შეიცავს $\frac{2}{n}$ გამოსახვის დაშლის ცხრილს, სადაც n კენტი რიცხვია, დაწყებული 3-დან 99-მდე; აი ეს ცხრილი: *

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3};\ \ \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15};\ \ \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28};\ \ \frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18};$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66};\ \ \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104};\ \ldots$$

Cantor, I, გვ. 22–23.

და უკანასკნელია

$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}.$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეგვიპტელები ამ შემთხვევაში შეკრების ნიშნით არ სარგებლობდნენ და ერთიმეორის გვერდით დაწერილი რიცხვები, მათ ჯამს ნიშნავდა. მაგალითად, ჩვენი ციფრებით თუ გამოვსახავთ, $\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$ იწერებოდა $\frac{1}{66}\ \frac{1}{198}$.

თავისთავად ისმება კითხვა: რატომ არ მიმართავდნენ ეგვიპტელები ისეთ ტრივიალურ დაშლას, როგორიც არის $\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$, ან და რადგანაც $\frac{2}{n}$ შეიძლება $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$ ჯამის სახით მრავალნაირად დაიშალოს, რატომ არის გამოყენებული ყოველი n-სათვის მხოლოდ ერთი, სავსებით გარკვეული „კანონიკური“ დაშლა? ნოიგებაუერის აზრით $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)$ ტრივიალურ დაშლის გამოუყენებლობის მიზეზი მდგომარეობს იმაში, რომ ეგვიპტელების გამოთვლის ტექნიკა დამყარებულია, როგორც ეს დავინახეთ, წინათ მოყვანილ გამრავლების მაგალითზე, მიმდევრობითი გაორკეცება და შეკრებაზე; ამიტომ, თუ საჭიროა რომელიმე ძირითადი წილადის, ვთქვათ $\frac{1}{11}$-ის გახუთკეცება, იქცეოდნენ შემდეგნაირად:

$+\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}\ \frac{1}{11}$
$+\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{11}$

ყველა $\frac{5}{11}=\frac{1}{11}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{11}$.

რადგან ეგვიპტელები შესაკრებ წილადებს ერთიმეორის გვერდით სწერდნენ, ამიტომ გახუთკეცების შედეგად მიღებული გამოსახვა

წარმოადგენს $\frac{1}{11}$-ს რიგზე ხუთჯერ მიწერილს; თუ კი ამავე ოპერაციას გავაგრძელებთ $\frac{3}{n}$-ის კანონურ დაშლათა საფუძველზე, მაშინ გვექნება:

$$+\frac{1}{11}=\frac{1}{11}$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$+\frac{4}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}$$

ყველა ერთად

$$\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}.$$

თუ საჭირო იქნება გამოთვლის კიდევ გაგრძელება, მაშინ ხელახლა გამოვიყენებთ მიღებულ შედეგზე $\frac{2}{n}$ სიდიდეთა ცხრილის წესს, რის შემდეგ მიღებული შედეგის შესაკრებთა რიცხვი პირველ შედეგის შესაკრებთა რიცხვზე მეტი არ იქნება.

ტრივიალური დაშლის გამოყენების შემთხვევაში შედეგების შესაკრებთა რიცხვი საგრძნობლად შეიძლება გაიზარდოს, რაც გამოთვლას გაართულებდა. ნოიგებაუერის აზრით, არამათემატიკურად, არამედ მხოლოდ ისტორიულად შეიძლება იმისი ახსნა, თუ რატომ არის $\frac{2}{n}$ სიდიდეთა დაშლის ზემომოყვანილ ცხრილში ნებისმიერი n-ისათვის მხოლოდ ერთი, სავსებით გარკვეული კანონური ხასიათის დაშლა.

ეგვიპტელებმა იცოდნენ ისეთი ამოცანების ამოხსნა, რომლებიც თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე გამოისახებიან პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლებით $ax+bx+cx+\ldots=d$, სადაც a, b, $c, \ldots, d$ მთელ რიცხვებს, ან და ერთეულების წილებისაგან შედგენილ წილადებს წარმოადგენენ. ამ განტოლებების ამოხსნა ხდებოდა ეგრეთ წოდებული ყალბი დებულების წესის საშუალებით, რომლიც იმაში მდგომარეობს, რომ x-ის ნაცვლად უნდა ჩაისვას სასინჯი მნიშ-

ვნელობა x_1 და თუ უკანასკნელის ხმარება d-ს მაგივრად d_1-ს გვაძლევს, მაშინ $x=\frac{d}{d_1}x_1$. უცნობს ეგვიპტელები „ჰაუს“ (ქართულად — გროვა) უწოდებდნენ. პაპირუსში მოთავსებულია მაგალითები არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებზე.

§ 2. **გეომეტრია.** ეგვიპტელებმა იცოდნენ მართკუთხედის, სამკუთხედისა და ტრაპეციის ფართობთა განსაზღვრა იმგვარადვე, როგორც ახლა ეს ჩვენ ვიცით; იმავე დროს ისინი მინდვრების გასაზომად სარგებლობდნენ აგრეთვე მიახლოვებითი ფორმულებით, რომლებიც თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე შეიძლება ასე გამოისახოს:

ოთხკუთხედის ფართობი $=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$, სადაც a, b, c და d ოთხკუთხედის გვერდებია.

სამკუთხედის ფართობი $=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}$, სადაც a და b სამკუთხედის გვერდებია და c-კი მისი ფუძე.

ტრაპეციის ფართობი $=\frac{b_1+b_2}{2}\cdot a$, სადაც a არაპარალელური და ერთმანეთის ტოლი გვერდთაგანია, ხოლო b_1 და b_2 პარალელური გვერდებია.

მეტად საინტერესოა ის ფაქტი, რომ წრის ფართობის გამოსათვლელად ეგვიპტელები სარგებლობდნენ მიახლოვებითი ფორმულით:

$$S=\left(\frac{8}{9}\,d\right)^2,$$

სადაც S-ით ჩვენ აღვნიშნეთ წრის ფართობი და d-თი კი მისი დიამეტრი; ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\pi=3,1605\ldots$. აღნიშნული ფორმულა შემდეგიდან გამომდინარეობს: ეგვიპტელები დიამეტრს აკლებდნენ მის ერთ მეცხრედ ნაწილს და დარჩენილ რვამეცხრედ ნაწილზე აგებული კვადრატი წრის ტოლდიდად ჰქონდათ ჩათვლილი. თუ როგორ მივიდნენ ეგვიპტელები წრის ფართობისათვის ასეთ ფორმულამდე, დღესაც ჩვენთვის უცნობია. ეგვიპტელები მოცულობათა გამოთვლასაც აწარმოებდნენ. პაპირუსში მოყვანილია * რამდენიმე ელემენტარული ამოცანა კუბის, პარალელეპი-

* **Нейгебауер**, т. I, стр. 142.

პედისა და ცილინდრის მოცულობათა გამოთვლაზე. ცილინდრის მოცულობის გამოთვლის ამოცანას მიზნად ჰქონდა ბეღელის მოცულობის გამოთვლა. კუბის მოცულობის გამოსათვლელად ეგვიპტელები სარგებლობდნენ ფორმულით:

$$V = a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{20},$$

სადაც a კუბის წიბოა.

ეგვიპტელების მათემატიკის ბრწყინვალე მიღწევად უნდა ჩაითვალოს კვადრატულ ფუძით წარკვეთილი პირამიდის მოცულობის გამოსათვლელი სწორი ფორმულის გამოგონება:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

სადაც a და b ფუძეთა გვერდებია და h კი სიმაღლეა.

ცნობილია, რომ ეგვიპტელები შენობის კედლებს ოდნავ დახრილად აგებდნენ, რის გამო მათ ნაგებობათა კედლებს წაკვეთილი პირამიდის ფორმა ჰქონდათ; — ამიტომ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობის გამოთვლა გამოწვეული იყო მშენებლობის მოთხოვნილებით. ეგვიპტელები წაკვეთილი კონუსის მოცულობის გამოთვლასაც აწარმოებდნენ; ეს ჩანს იქიდან, რომ ეგვიპტელების პაპირუსში მოთავსებულია მოცულობის გამოთვლა წყლის საათისა, რომელსაც წაკვეთილი კონუსის ფორმა აქვს. თუ წაკვეთილი კონუსის დიდი დიამეტრი აღვნიშნეთ D-თი, მცირე დიამეტრი d-თი და სიმაღლე კი h-ით, მაშინ ეგვიპტელების მიერ მოცემული ასეთი კონუსის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა, შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$V = \frac{h}{12}\left(\frac{3}{2}(D + d)\right)^2,$$

სადაც უნდა ვიგულისხმოთ რომ 3 არის π-ს მიახლოვებითი მნიშვნელობა.

ეგვიპტელები დიდ სამხედრო მნიშვნელობას აძლევდნენ მათემატიკას. ეს ჩანს ერთერთი უძველესი პაპირუსიდან; ძველ ეგვიპტეში მწერლები დიდ როლს თამაშობდნენ სახელმწიფოს მართვა-გამგეობაში და ზემოხსენებული პაპირუსის ტექსტიდან ჩვენ დავინახავთ, თუ როგორ კიცხავს ერთი მწერალი მეორეს ამ უკანასკნელის უვი-

ცობის გამო მეტად მნიშვნელოვან საკითხებში: „აჰა, შენ მოდიხარ და მავსებ მე შენი თანამდებობით. ახლა მე მინდა აგიხსნა შენ, თუ რაშია შენი არსი, როდესაც შენ ამბობ: „მე ჯარისრწმუნებული მწერალი ვარ“, შენ გაძლევენ ტბას, რომელიც შენ უნდა ამოთხარო. მაშინ შენ მოდიხარ ჩემთან, რომ მიიღო ცნობა ჯარის კაცთა სანოვაგის შესახებ, შენ მეუბნები „გამომიანგარიშე ის“. შენ უწესივრო ხარ შენს თანამდებობაზე, და ის რომ მე უნდა გასწავლო შენ შენი მოვალეობის აღსრულება, შენივე კისერზე დაგატყდება. მოდი აქ, მე შენ გეტყვი რამეს იმის დამატებით, რაც შენ სთქვი. მე შენ გაყენებ ძნელ მდგომარეობაში, როდესაც მე გაიძულებ წარმოიდგინო შემდეგი: შენ — მეფის მწერალი ხარ, შენ მოგიყვანეს ფანჯარასთან (აუდიენციისათვის) რომელიმე შესანიშნავი საქმისათვის, მე გადაგიშლი შენ შენი ბატონის ბრძანებას. აბა უყურე, შენ — გამოცდილი მწერალი, ჯარის სათავეში მდგომი. აუცილებელია გაკეთდეს სიმაგრე 730 წყრთის სიგრძისა და 55 წყრთის სიგანის, შემდგარი 120 ყუთისაგან, რომლებიც გავსებულია კოჭებითა და ლერწამით; ზედა ნაწილში მისი სიმაღლე 60 წყრთა, შუაში 30 წყრთა... 15 წყრთა და მისი ...აქვს 15 წყრთა. ეკითხებიან გენერლებს, რამდენი აგურია საჭირო ამ სიმაგრისათვის, და შეიკრიბნენ ყველა მწერალი და არც ერთმა მათგანმა არ იცის არაფერი, ყველას შენი იმედი აქვს და გეუბნებიან: „ჩემო მეგობარო, შენ გამოცდილი მწერალი ხარ, მაშ გადასწყვიტე ეს ჩქარა ჩვენთვის“. „აი შენ განთქმული სახელი გაქვს; აბა გამოინახოს ამ ადგილას ერთი მაინც, რომელიც ყველა ოცდაათს აამაღლებს. არ დაუშვა, რომ შენზე სთქვან: „არის აგრეთვე ისეთი საგნები, რომლებიც შენც არ იცი“.

თავი III

ბაბილონელების მათემატიკა

ტიგროსსა და ეფრატს შორის მდებარე ნოყიერ ველზე — მესოპოტამიაში, დაახლოებით XXXV საუკუნეში ჩვენს ერამდე ცხოვრობდა ხალხი, სუმერებად წოდებული. სუმერებმა შექმნეს თავისი კულტურა, გამოიგონეს წერა, რომელსაც ახლა ლურსმული წერა ეწოდება და შემოიღეს რიცხვთა ნიშნები. დაახლოებით XX საუკუნეში ჩვენს ერამდე მესოპოტამიას მოევლინენ აკადელები, რომლებმაც დაიპყრეს სუმერები, შეითვისეს მათი კულტურა და კიდევ უფრო განავითარეს ის. აკადელებმა გადმოიღეს სუმერებისაგან როგორც ლურსმული წერა, ისე მათი რიცხვითი ნიშნებიც, დაახლოებით 2200 და 1950 წელთა შორის (ჩვენს ერამდე). სუმერების და აკადელების შეერთებით შეიქმნა ბაბილონელთა სახელმწიფო, რომლის დედაქალაქი ბაბილონი იყო. ქალაქი ბაბილონი მდებარეობდა სავაჭრო გზაჯვარედინზე, რის გამო ის გახდა ადმინისტრაციული, გონებრივი კულტურისა და ვაჭრობის ცენტრი. მიწის ნაკვეთის ხელოვნურად მორწყვის მიზნით, ბაბილონელები გრანდიოზულ საინჟინერო სამუშაოებს ეწეოდნენ (ცნობილია იმ პერიოდში გაყვანილი დიდი სარწყავი არხი); ამ უკანასკნელმა საქმიანობამ და ვაჭრობის ფართოდ წარმოებამ ხელი შეუწყო ბაბილონელებში მათემატიკურ მეცნიერებათა წარმოშობას და განვითარებას.

§ 1. **არითმეტიკა.** თიხის პატარა ფირფიტები და პრიზმები, მათემატიკური შინაარსის წარწერებით, დამზადებულნი დაწყებული XVIII საუკუნიდან ჩვენს ერამდე და დამთავრებული არქიმედესი ეპოქით, გვაუწყებენ ბაბილონელთა მათემატიკურ საქმიანობის შესახებ. ამ ფირფიტებზე და პრიზმებზე, ჯოხების საშუალებით ჩაჭყლეტდნენ ციფრებს და შემდეგ მათ აშრობდნენ; ამით აიხსნება ბაბილონელების რიცხვთა ნიშნების ლურსმული ფორმა. ამგვარად დაწერილ მათემატიკურ ტექსტებიდან ჩვენამდე ორას ორმოცდა ათმა მოაღწია; მათ შორის 50 შეიცავს ამოცანებს და მათ ამოხსნებს, დანარჩენები კი წარმოადგენენ ცხრილებს, რომლებიც ბაბილონელთა გამოთვლის

ტექნიკაში მეტად მომქმედ როლს ასრულებდნენ. ჩვენამდე მოსული ბაბილონელთა მათემატიკური ტექსტები წარმოადგენენ არა სამეცნიერო ტრაქტატს, არამედ ისინი, უდავოა, ემსახურებოდნენ სასწავლო მიზნებს; ეს ჩანს მოსწავლისადმი ბრძანებითი კილოთი მიმართვიდან: „მიუმატე“, „გამოაკელი“, „ასე მოიქეცი შენი ამოხსნის დროს“ და ასე შემდეგ. ხუთას ამოცანას თან დართული აქვს ამოხსნები; დანარჩენი ამოცანები კი მოთავსებულია სავარჯიშოდ. ბაბილონელთა მათემატიკურ ტექსტებში არითმეტიკულ ოპერაციათა ტექნიკა ახსნილი არ არის; მოცემულია ცალკე მოქმედებათა მხოლოდ მზა შედეგები. ეს აიხსნება * იმით, რომ ბაბილონელების გამოთვლის ტექნიკაში დიდ როლს თამაშობდნენ ცხრილები, რომელთა საშუალებით მოწაფეს ან პირდაპირ შეეძლო მზა შედეგის პოვნა, ან და მას რჩებოდა მხოლოდ მეტად უბრალო გამოთვლის მოხდენა. მთელი რიცხვის აღსანიშნავად ბაბილონელებს ორი ძირითადი სოლისებური ნიშანი ჰქონდათ: ვერტიკალური „სოლი“ — 𒁹 და ჰორიზონტალური „სოლი“ — 𒌋 . პირველი ერთეულს გამოსახავს და მეორე კი — ათეულს. ერთეულისა და ათეულის ნიშნების საშუალებით აღინიშნებიან ათობითი სისტემის მიხედვით ყველა მთელი რიცხვები 59-მდე, უკანასკნელის ჩათვლით; ესე იგი ეს ნიშნები შესაბამის რიცხვჯერ მეორდებიან. მაგალითად,

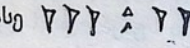
𒁹𒁹 $=2$, 𒌋𒌋𒌋 $=30$; 𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹𒁹 $=24$. რიცხვი 60 აღინიშნება ერთეულის ნიშნით (და არა ათეულის ნიშნის ექვსჯერ განმეორებით); მაგალითად 𒁹𒁹𒁹 $=62$; 𒁹𒌋𒌋𒌋 $=90$.

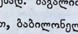
ამ მაგალითებიდან ჩანს, რომ 60-დან $2\cdot 60 - 1 = 119$-დე რიცხვები იქნება 60-ის ნიშანთან მარჯვნიდან ნაკლები რიცხვების მიწერით ისე, რომ 60-ის ნიშანსა და მიწერილ ნიშნებს შორის სათანადო მანძილი უნდა რჩებოდეს. რაც შეეხება 60-ის ჯერად რიცხვებს, ისინი

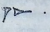
* М. Я. Выгодский, Успехи математ. наук. VII, გვ. 105, 1940.

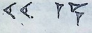
ასეთივენაირად იწერებიან; მაგალითად 3.60=180 აღინიშნება როგორც 3 და ასე შემდეგ. აქედან ცხადია, რომ 59-ის შემდეგ რიცხვები იწერებიან სამოცობითი პოზიციური სისტემის მიხედვით იგივე ნიშნების განმეორების საშუალებით, მაგრამ მათი რიცხვითი მნიშვნელობა უკვე 60-ჯერ მეტია. ბაბილონელების მიერ ასეთი სახით ხმარებული პოზიციური სისტემა განსხვავდება იმ პოზიციური სისტემისაგან, რომლითაც ჩვენ ახლა ვსარგებლობთ, ვინაიდან ბაბილონელებს ნული შემოღებული არ ჰქონდათ; მათ რიცხვითი ნიშანს მამრავლად შეიძლება დაურთოთ რიცხვი 60 ნებისმიერ ხარისხში, რაც რიცხვის წერაში არავითარ გარეგან გამოსახვას არ პოულობს. მაგალითად,

 =20 შეიძლება წაკითხულ იქნას 20 და აგრეთვე როგორც

20·60=1200; ამასთანავე ნიშანი  არა მარტო 1 ნიშნავს, არამედ ის საერთოდ ნიშნავს 60-ს ნებისმიერ ხარისხში აყვანილს (60^k). უნდა აღვნიშნოთ, რომ რიცხვთა ბაბილონელების ნუმერაციაში ნულის როლს ასრულებდა ნიშანი . მართლაც, რიცხვი 10802 ჩაწერილია ასე ;  ნიშნის გარეშე უკანასკნელი ნიშნავს არა 10802-ს, არამედ 182-ს.

ბაბილონელებმა სამოცობითი პოზიციური სისტემა გამოიყენეს წილადების გამოსასახავად ისე, როგორც ჩვენი ათობითი პოზიციური სისტემაა გამოყენებული წილადების წარმოსადგენად და ათობითი წილადების შესადგენად. მაგალითად, რიცხვი $1\frac{1}{2}$ რომელსაც ჩვენ ვწერთ 1,5-ის სახით, ბაბილონელები წარმოადგენდნენ $1\frac{30}{60}$-ის სახით და ასე სწერდნენ: , ესე იგი ისე როგორც უნდა ჩაეწერათ მთელი რიცხვი 90=1.60+30. ბაბილონელების წესის მიხედვით ერთი რიცხვის ნიშნის გვერდით მეორე რიცხვის ნიშნის დაწერა ამ რიცხვების შეკრებას ნიშნავს და შეკრება ასეთ შემთ-

ხვევაში რიცხვთა უბრალოდ მითვლაში გამოისახება. მაგრამ ამასთანავე შეკრების აღსანიშნავად* ისინი სიტყვა „ტაბ“-ს (tab) ხმარობდნენ და გამოკლების აღსანიშნავად კი სიტყვა „ლალ“-ს (lal); მაგალითად, „a ტაბ b“ ნიშნავდა $a + b$ და „a ლალ b“ ნიშნავდა $a - b$. გამოკლება აღინიშნებოდა ნიშნით  . გამოკლების მოქმედების საშუალებით რიცხვების თავისებური გამოსახვა ხდებოდა. მაგალითად, რიცხვი 19 გამოსახულია არა როგორც $10 + 9$, არამედ როგორც $20 - 1$ და დაწერილია შემდეგნაირად:

 $= 20 - 1 = 19.$

ციფრების შემდეგ დასმული სიტყვები „ტაბ“ და „ლალ“ სავსებით იგივე როლს ასრულებდნენ, რასაც თანამედროვე ნიშნები + და — ასრულებენ; აღსანიშნავია ის, რომ ბაბილონელები მათემატიკაში სარგებლობდნენ სპეციალური ნიშნებით და ტერმინებით, რომლებიც იმავე როლს ასრულებდნენ, რა როლსაც თანამედროვე მათემატიკური სიმბოლოები ასრულებენ. ამ ნიშნების წარმოშობას ნოიგებაუერი იმით ხსნის, რომ მათემატიკურ ცნებათა გამოსახვისათვის ბაბილონელები შუმერული სიტყვებით სარგებლობდნენ; ამ სიტყვებმა შემდეგ დაკარგეს სიტყვიერი — ენობრივი აზრი და მათემატიკური სიმბოლოებად გადაიქცნენ.

გამრავლების ბაბილონელთა ხერხი არსებითად ისეთივეა, როგორიცაა ჩვენი, მაგრამ ჩვენ გვიხდება დამახსოვრება გამრავლების ისეთი ცხრილის, რომელიც შეიცავს პატარა რიცხვებისაგან შემდგარს 36 შედეგს (2×2, 2×3, . . ., 2×9); ბაბილონელს კი უნდა დაემახსოვრებია ვეებერთელა რიცხვებისაგან შედგენილი 1711 შედეგი, რის გამო ის იძულებული იყო ყოველი გამოთვლის წარმოების შემთხვევაში გამრავლებისათვის მიემართა.

გამრავლებისათვის ბაბილონელები $a \cdot b$ სახის გამრავლების ცხრილით სარგებლობდნენ, ამასთანავე a და b შორის ერთი იმათგანი სასათაურო რიცხვის მოვალეობას ასრულებდა, ესე იგი ის მრავლდება თანდათანობით სხვადასხვა რიცხვებზე და ამგვარად სდგება

* Нейгебауер, I, გვ. 33.

გამრავლების ცხრილი; ამ უკანასკნელიდან ჩანს, რომ სასათაურო რიცხვებად აღებულია: 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 24, 25, 30, 36, 40, 45, 50. თუ ერთ რომელიმე სასათაურო რიცხვს ავიღებთ, მაგალითად 10-ს, მაშინ უკანასკნელის შესაბამისი გამრავლების ცხრილი ასეთი სახისაა:

10 a — rà 1 10

a — rà 2 20

a — rà 3 30 და ასე შემდეგ.

ტერმინი a — rà შეესაბამება ჩვენს სიტყვას „ელოდე".

გაყოფა სამოცობითი წილადზე გამრავლებამდე დაჰყავდათ, რა მიზნისათვისაც ჰქონდათ შედგენილი ეგრეთ წოდებული შექცეულ მნიშვნელობათა ცხრილები. ასეთი ცხრილი შედგება ორი სვეტისაგან; ერთ სვეტში მთელი რიცხვებია მოთავსებული, მეორეში კი, რომელიც პირველი სვეტის პარალელურია, მოთავსებულია სამოცობითი წილადები $\frac{1}{n}$-სათვის. რიცხვები ისეა შერჩეული, რომ ორივე სვეტის შესაბამის რიცხვთა ნამრავლი ყოველთვის სამოცის ტოლია. მაგალითად,

2	30
3	20
4	15
5	12

და ასე შემდეგ. იმისათვის, რომ b გავყოთ a-ზე, b-ს ამრავლებდნენ $\frac{1}{a}$-ზე; ეს აშკარად ჩანს ამოცანებიდან, რომლებიც მოითხოვენ ერთი რიცხვის მეორეზე გაყოფას; ტექსტი ასეთ შემთხვევაში უთითებს, რომ უნდა იქნეს შედგენილი გამყოფის შექცეული მნიშვნელობა და ეს უკანასკნელი გასაყოფზე უნდა გადამრავლდეს. მაგალითად, 8 უნდა გაიყოს 5-ზე; ტექსტში ნათქვამია: „შეადგინე 5-ს შექცეული სიდიდე; $\frac{12}{60}$-ს მიიღებ. $\frac{12}{60}$ გაამრავლე 8-ზე და $\frac{96}{60}$-ს მიიღებ". ამ შემთხვევაში შექცეულ მნიშვნელობათა ცხრილში ჯერ უნდა მოიძებნოს

არგუმენტი 5-ის შესაბამისი რიცხვი 12; შემდეგ კი გამრავლების ამ ცხრილში, რომლის სასათაურო რიცხვია 12, უნდა მოიძებნოს 8.12.

ნოიგებაუერის აზრით გამრავლების ცხრილთა შედგენის მიზანი იყო ჩვეულებრივი გამრავლების არა ფორმალურად გაადვილება, არამედ სამოცობითი სისტემაში გამოსახულ, ერთის ტოლი მრიცხველით წილადის ჯერადის ისევ სამოცობითი სისტემაში, ერთი სიტყვით, $b \cdot \frac{1}{a}$ გამოსახვის დასრულებულ სამოცობითი წილადად გარდაქმნა. ანალოგიურ ამოცანას, — სახელდობრ, ერთის ტოლი მრიცხველით წილადის ჯერადის მოძებნას, ძირითადი მნიშვნელობა აქვს ეგვიპტელების, ბერძნებისა და რომაელების მათემატიკაში თითქმის საშუალო საუკუნეების დამლევამდე, ესე იგი პოზიციურ ათობითი სისტემის შემოღებამდე.

ბაბილონელთა ზოგიერთი ამოცანების პირობები უშუალოდ პრაქტიკიდან არის აღებული; დანარჩენებში კი, როგორც მოცემული ისე მოსაძებნი სიდიდეები განყენებულ რიცხვებს წარმოადგენენ. ამასთანავე ნაწილი მათი ამოცანებისა მარტივ არითმეტიკულ ამოცანებს წარმოადგენს და შედგენილია დამწყებთათვის, ხოლო დანარჩენი უფრო რთულ და ალგებრულ ხასიათს ატარებს და, ეტყობა, შედგენილია უფრო მომზადებულ მკითხველისათვის. მარტივი ამოცანები პროცენტების გამოთვლას ემსახურება; მაგრამ კაპიტალის ნაზარდი გამოითვლება არა ასიდან, არამედ სამოციდან. მაგალითად, ფულის გასესხების შემთხვევაში 1 მინიდან (=60 შეკელს), იღებდნენ 12 შეკელს.

§ 2. ალგებრა და გეომეტრია. ბაბილონელთა მათემატიკური ტექსტები შეიცავენ ამოცანებს არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებზე. განსაკუთრებული ყურადღების ღირსია ის ფაქტი, რომ ისინი სხვაობას არითმეტიკული პროგრესიისა, რომლის წევრთა რიცხვი და ერთი წევრთაგანი მოცემულია, გამოითვლიდნენ სავსებით ისეთივე ხერხებით, რა ხერხითაც ახლა გამოითვლება. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, მივმართოთ შემდეგი ამოცანას:* „10 ძმაა; ვერცხლის $1\frac{2}{3}$ მინია; ძმა ძმაზე მაღლაა (მისი ხვედრის მიხედვით); რამდენად ის მაღლაა, მე არ ვიცი. მერვეს წილი 6 შეკელია. ძმა ძმაზე, რამდენად ის მაღლაა“.

* М. Я. Выгодский, Математика, древних вавилонян. „Успехи математических наук.“ VII. 1940. გვ. 141—143.

ამოცანის პირობა შემდეგში მდგომარეობს: ვერცხლის (100 შეკ.) $1\frac{2}{3}$ მინისაგან შემდგარი თანხა უნდა გაუნაწილოთ 10 ძმას ისე, რომ ძმების ხვედრებმა არითმეტიკული პროგრესია შეადგინონ. უნდა მოიძებნოს ამ პროგრესიის მნიშვნელი იმ პირობით, რომ მერვე ძმის წილი 6 შეკელის ტოლია. თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ამ ამოცანის ბაბილონელთა ამოხსნა შეიძლება ასე გამოისახოს:

მოვძებნოთ თითოეული ძმის ხვედრი თანხის საშუალო რაოდენობა. მთელი ქონება S-ით აღვნიშნოთ (S=100 შეკელს) და ძმათა რიცხვი აღვნიშნოთ n-ით (n=10); მაშინ საშუალო თანხა იქნება: $\frac{S}{n}=10$ შეკელს (ხვედრი წილები აღვნიშნოთ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}-ით). ვინაიდან თანაბრად დაშორებული წილების საშუალო არითმეტიკული ყველა წილების საშუალო არითმეტიკულების ტოლია, ამიტომ მერვე ძმის წილი $a_8=6$ შეკელს, მესამე ძმის ჯერჯერობით უცნობი წილთან a_3 ერთად საშუალო თანხაზე ორჯერ მეტი უნდა იყოს, $a_8+a_3=2\frac{S}{n}=20$ შეკელს. ახლა მოვძებნოთ მესამე და მერვე ძმათა წილებს შორის სხვაობა, ესე იგი a_3-a_8. ამისათვის a_8 ორჯერ უნდა გამოვაკლოთ: $2\cdot\frac{5}{n}-2a_8=$ $=20-12=8$.

ახლა რომ მოვძებნოთ ის, რითაც პირობის თანახმად „ძმა ძმაზე მაღლა იწევა“, ამისათვის $2\frac{S}{n}-2a_8=8$ უნდა გავყოთ წილთა შორის შუალედების რიცხვზე, ე.ი. — 5-ზე და მივიღებთ:

$$\frac{2\frac{S}{n}-2a_8}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{36}{60}$$

შეკელისა (სამოცობითი სისტემაში).

ცხადია, რომ ეს ამოცანა გამოიყვანება ფორმულით:

$$d=\frac{2\cdot\frac{S}{n}-2a_k}{n-[2(n-k)+1]},$$

სადაც d სხვაობაა. თვით ტექსტში ამ ამოცანის ამოხსნა შემდეგნაირად არის ჩამოყალიბებული:

„შენ შენი ხერხით: შედგენილია შექცეული 10-საგან, ადამიანთა რიცხვისაგან; მიიღება 0;6 (0,1). 0;6-ს შენ ამრავლებ ვერცხლის $1\frac{2}{3}$ მინზე (100 შეკელ.) და 10 (შეკელი) მიიღება. 10 გააორკეცე და 20 მიიღება. 6, მერვესი წილი, გააორკეცე, 12 მიიღება. 20-ს 12 გამოაკლდება და 8 მიიღება; რვა თავში იქონიე. 1 და 1 შეკრიბე და 2 მიიღება. გააორკეცე, და 4 მიიღება. 1 და 4 შენ შეკრებ და 5 მიიღება. ადამიანთა რიცხვიდან 10-სგან 5 გამოაკელი და 5 მიიღებ. 5-ის შექცეული შეადგინე და $\frac{1}{5}$-ს მიიღებ. $\frac{1}{5}$ გაამრავლე 8-ზე და $\frac{8}{5}$-ს მიიღებ. $\frac{8}{5}$ არის ის, რითაც ძმა ძმაზე მაღლა იწევა".

ახლა მოვიყვანთ კიდევ ერთ ამოცანას, რომელიც ბაბილონელთა მათემატიკის მაღალ დონეს გვიჩვენებს. აი ეს ამოცანა:

„1-დან 10 დადევი; 2-ს გადააბიჯე, შეკრიბე. 512-ს გამოაკელი 1. დარჩება 511. 511 მიუმატე 512-ს. 1023". ეს ამოცანა დაწერილია ქურუმი, ავუ აბუტირის მიერ. ამ ამოცანაში გამოთვლილია გეომეტრიული პროგრესიის 10 წევრის ჯამი პირველიდან მეათემდე. პროგრესიის მნიშვნელია 2, ვინაიდან ტექსტში ნათქვამია; „2-ს გადააბიჯე". პირველი წევრია 1, მოსაძებნია ჯამი:

$$1+2+2^2+\ldots+2^9=1+2+4+8+16+32+64+128+512.$$

ეს ჯამი გამოითვლება ასეთი ხერხით:

$$512+(512-1)=1023.$$

მაგრამ ტექსტში არ არის ნათქვამი, თუ საიდან არის მიღებული 512. ეჭვს გარეშეა*, რომ ავტორმა აიღო უკანასკნელი წევრი და მიუმატა მას ერთით ნაკლები სიდიდე. ამრიგად ეს მოქმედება შეიძლება გამოისახოს ფორმულით.

$$S=2^{n-1}+(2^{n-1}-1).$$

---

* М. Я. Выгодский, Математика древних вавилонян. „Успехи математических наук." VII, стр. 143, 1940.

უფრო ზოგადი ხასიათისაა ის ამოცანა, რომელიც პირველი ათი მთელ რიცხვების კვადრატების ჯამის პოვნას შეეხება. ეს ამოცანა შემდეგია:

„1-სგან 1-ჯერ კვადრატი, ე. ი. 1-დან, 10-ჯერ 10-მდე, ე. ი. 100-მდე. ჯამი დააწესე. 1-ზე, 0; 20 მესამედი, გადაამრავლე, 0; 20·10 0; 40-ზე, ორი მესამედი, გადაამრავლე, 6; 40·6; 40 და 0; 20 არის 7. 7 გადაამრავლე 55-ზე, 385. 385 ჯამი არის".

ამოცანის ამოხსნის მსვლელობა მოკლედ შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$S=\left(1\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{2}{3}\right)55,$$

სადაც 1 პირველი რიცხვთაგანია, კვადრატში აყვანილი, 10 უკანასკნელია, და 55 კი, წარმოადგენს ამ რიცხვთა პირველი ხარისხების ჯამს $1+2+3+\ldots+10=55$. ამ უკანასკნელი ამოცანიდან ცხადია, რომ ბაბილონელებმა იცოდნენ $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ წკრივის შეჯამება ფორმულით:

$$S_n=\frac{1+2n}{3}(1+2+3+\ldots+n);$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში $1+2+\ldots+n$-ის ნაცვლად $\frac{n(n+1)}{2}$-ს ჩავსვამთ მივიღებთ თანამედროვე ფორმულას:

$$S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

ამავე ამოცანიდან ჩანს, რომ ბაბილონელები ფართოდ იყენებდნენ ალგებრულ მეთოდს; ეს იმას გვეუბნება, რომ ალგებრის აღმოცენების ნიშნები მოსჩანს ისეთ შორეულ წარსულში, როგორიცაა ჩვენს მიერ განხილული ბაბილონელთა ხანა. ჩვენამდე მოაღწიეს აგრეთვე 1-დან 60-მდე მიმდევრობითი რიცხვების კვადრატების ბაბილონელთა ცხრილებმა შემდეგი სახით:

$$n \qquad n^2,$$

სადაც n ღებულობს ყველა მთელ მნიშვნელობას 1-დან 60-მდე; ამ

კვადრატთა ცხრილის შექცეული ცხრილის სახით მოცემულია მათემატიკურ ტექსტებში აგრეთვე კვადრატულ ფესვთა ცხრილები. ნოიგებაუერის აზრით, შესაძლებელია, რომ ბაბილონელებს რიცხვთა კუბების ცხრილიც ჰქონდათ, ვინაიდან ჩვენამდე მოაღწიეს კუბური ფესვთა ცხრილებმა, რომლებიც სავსებით იგივე წესით არის შედგენილი, როგორც კვადრატული ფესვთა ცხრილები.

ბაბილონელებს ჰქონდათ აგრეთვე ცხრილი n^3+n^2-ის სახის რიცხვებისათვის; მათ იცოდნენ კვადრატული ფესვის მიახლოებითი ამოღება; ამ ამოცანას ისინი უკავშირებდნენ მართკუთხედის დიაგონალის გამოთვლის ამოცანას; თუ მართკუთხედის გვერდებია a და b, ხოლო d — დიაგონალია, მაშინ თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ფესვის ამოღების მათი ხერხი შეიძლება ასე გამოისახოს:

$$d=a+\frac{b^2}{2b}; \text{ (თუ } d=\sqrt{a^2+b^2}\text{)}.$$

ბაბილონელთა მიღწევები მეტად მნიშვნელოვანია წრფივი განტოლებათა სისტემისა და კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნის საქმეში. ხუთი უცნობიანი ხუთ (წრფივ) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ბაბილონელთა ხერხის ცხადსაყოფად მივმართოთ შემდეგ ამოცანას:

„ტრაპეცია, მასში ორი ზოლია. 783 ზედა ფართობი 1377 მეორე ფართობი, ზედა სიგრძისათვის ქვედა სიგრძის მესამე ნაწილი. ის, რითაც ზედა სიგანე გამყოფ წირზე წამოწეულია და ის, რითაც გამყოფი წირი ქვედა სიგრძეზე წამოწეულია, ერთად შეკრებილნი, 36-ს გვაძლევენ. სიგრძეები სიგანეები და გამყოფი წირი, რას წარმოადგენენ?* ამოცანის პირობიდან ჩანს, რომ ტრაპეცია დაყოფილია ორ ნაწილად (ტრაპეციად; ნახ. 1) და მოცემულია: პირველი ტრაპეციის ფართობი $S_1=783$ (1), მეორე ტრაპეციის ფართობი $S_2=1377$ (2)

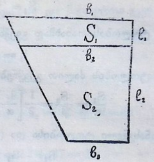
$$l_1:l_2=\alpha:\beta=1:3 \tag{3}$$

$$(b_1-b_2)+(b_2-b_3)=c=36. \tag{4}$$

უნდა მოიძებნოს b_1, b_2, b_3, l_1, l_2. მაშასადამე, ამოცანის პირობის თანახმად მოცემულია ოთხი სიდიდე და მოსაძებნია ხუთი უცნობი. ნოიგებაუერის აზრით ალბათ აქ ბაბილონელები გულისხმობდნენ

* Нейгебауер, ტ. 1, გვ. 196 — 197.

დამატებით კიდევ მეხუთე პირობას, რომელიც მოცემულ პირობიდან გამომდინარეობს; მართლაც ორივე, ტრაპეცია ერთ ტრაპეციას შეადგენენ და ამიტომ გვექნება:



ნახ. 1.

$$S_1 + S_2 = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot l_1 +$$

$$+ \frac{b_2 + b_3}{2} \cdot l_2 = \frac{b_1 + b_2}{2}(l_1 + l_2).$$

საიდანაც

$$\frac{b_1 - b_2}{l_1} = \frac{b_2 - b_3}{l_2},$$

ანუ (3) ტოლობის ძალით

$$\frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ტოლობანი.

$$b_1 - b_2 = \alpha k,$$

$$b_2 - b_3 = \beta k.$$

ამ ტოლობათა შეკრების შემდეგ (4) ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = (\alpha + \beta)k = c = 36.$$

ტექსტში გამოთვლა შემდეგნაირად სწარმოებს:

$$\frac{C}{\alpha + \beta} = k = \frac{36}{4} = 9;$$

შემდეგ 9 გადამრავლებულია 1-ზე და 3-ზე და გამოთვლილია, რომ

$$\alpha k = b_1 - b_2 = 9 \text{ და } \beta k = b_2 - b_3 = 27.$$

ამის შემდეგ ნაწარმოების გამოთვლა, თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე შემდეგნაირად შეიძლება გამოისახოს:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{l_1}{2}\,(b_1 + b_2) \\ S_2 &= \frac{l_2}{2}\,(b_2 + b_3). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(3) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$l_1 = \alpha\lambda;\ l_2 = \beta\lambda. \qquad (6)$$

(5) ტოლობის ძალით გვექნება

$$\frac{S_1}{\alpha} = \frac{S_2}{\beta} = \frac{1}{2}\left[\frac{l_1}{\alpha}\,(b_1 + b_2) - \frac{l_2}{\beta}\,(b_2 + b_3)\right];$$

უკანასკნელი ტოლობისა და (6) ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$\frac{S_1}{\alpha} - \frac{S_2}{\beta} = \frac{1}{2}\,\lambda\,(b_1 - b_3). \qquad (7)$$

მაგრამ უკვე გამოთვლილი იყო, რომ

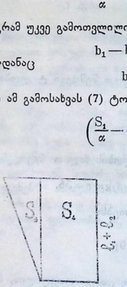
$$b_1 - b_2 = \alpha k;\ \ b_2 - b_3 = \beta k;$$

საიდანაც

$$b_1 - b_3 = (\alpha + \beta)k.$$

თუ ამ გამოსახვას (7) ტოლობაში ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$\left(\frac{S_1}{\alpha} - \frac{S_2}{\beta}\right)\frac{2}{\alpha + \beta} = \lambda k = 162.$$



ნახ. 2.

რადგანაც უკვე გამოთვლილია $k = 9$, ამიტომ $\lambda = 18$. შემდეგ 18 გადამრავლებულია 1-ზე და 3-ზე და შესაბამისად მიღებულია

$$\lambda k = l_1 = 18.\ \ \lambda\beta = l_2 = 54.$$

b_1, b_2 და b_3 — სიდიდეთა გამოსათვლელად ტრაპეცია დაყოფილია სამკუთხედად და მართკუთხედად, რომელთა ფართობები შესაბამისად გამოთვლილია (ნახ. 2):

$$S_3 = \frac{1}{2}\,(b_1 - b_2)\,(l_1 + l_2) = \frac{1}{2}\cdot 36\cdot 72 = 1296$$

და

$$S_4=(S_1+S_2)-S_3=2160-1296=864.$$

მაშასადამე, სამკუთხედის ფართობი $S_4=864$ და მისი ერთი გვერდი $l_1+l_2=72$, საიდანაც მიღებულია, რომ

$$b_3=\frac{S_4}{l_1+l_2}=12.$$

b_1 და b_2 უცნობები შემდეგნაირად მიიღება:

$$b_1=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+b_3=c+b_3=36+12=48$$

და

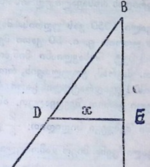
$$b_2=b_3+(b_2-b_3)=b_3+\beta k=12+27=39.$$

როგორც ვხედავთ, ამოცანა თუმცა გეომეტრიულადაა ფორმულირებული, მაგრამ უცნობთა განსაზღვრა სწარმოებს ალგებრული მეთოდით.

ბაბილონელები წყვეტდნენ აგრეთვე ისეთ ამოცანებს, რომლებიც 10 უცნობს შეიცავდნენ.

კვადრატული განტოლების ამოხსნას ისინი უკავშირებენ გეომეტრიული ამოცანის გადაწყვეტას, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მოცემულია მართკუთხოვანი სამკუთხედი ABC (ნახ. 3), რომელიც DE წრფის საშუალებით დაყოფილია ორ ნაწილად:

DBE სამკუთხედად და ADEC ტრაპეციად. მოცემულია რომ: AC-ს სიგრძე=b, ფართ. ADEC—ფართ. DBE=S. BD — AD=n. მოსაძებნია DE ნაკვეთის სიგრძე, რომელიც x-ით აღვნიშნოთ.



ნახ. 3.

ბაბილონელების მიერ მოხდენილი ამოხსნა ამ ამოცანისა შეიძლება გამოისახოს შემდეგი ფორმულით:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{s}{n}+b\right)^2+\left(\frac{s}{n}\right)^2\right]} - \frac{S}{n}.$$

მოვიყვანოთ ბაბილონელთა მათემატიკურ ტექსტიდან კიდევ ერთი ამოცანა: „ორი მინდვრის ფართობი 1800 კვადრატული გარის* ტოლია; მათი მოსავალი 1100 კას უდრის. პირველი მინდორი კვადრატულ გარიდან $\frac{2}{3}$ კას იძლევა, მეორე — $\frac{1}{2}$ კას კვადრატულ გარიდან. ვიპოვოთ თითოეული მინდვრის ფართობი და მისგან მიღებული მოსავალი“ **.

ამ ამოცანას, ლურიეს აზრით, ბაბილონელები წყვეტდნენ ყალბი დებულების წესით. თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ამ ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასე: დავუშვათ, რომ ორივე მინდორი ერთიმეორეს ტოლია; მაშინ თითოეულის ფართობი 900 კვადრატული გარის ტოლია. ამ შემთხვევაში პირველი მინდვრიდან მოსავალი უდრის $900 \cdot \frac{2}{3}$ კა $= 600$ კას, მეორე მინდვრიდან მოსავალი უდრის $900 \cdot \frac{1}{2}$ კა $= 450$ კას, ე. ი. მთელი მოსავალი 1050 კას უდრის. მაგრამ მთელი მოსავალი პირობით 1100 კას უდრის, ე. ი. 50 კათი მეტია; მიზეზი ამისა იმაში მდგომარეობს, რომ მეტ მოსავლიანი მინდორი უფრო დიდია, ვიდრე ჩვენ დავუშვით. მაგრამ, ყოველთვის, როდესაც ჩვენ ნაკლებ მოსავლიანი მინდვრის 1 კვადრატული გარი მეტი მოსავლიანი მინდვრის 1 კვადრატული გარით შევცვალეთ, ამით ჩვენ გავადიდეთ მოსავლის საერთო ჯამი შემდეგი სიდიდით: $\frac{2}{3}$ კა $- \frac{1}{2}$ კა $= \frac{1}{6}$ კა; სულ მთელი მოსავალი ჩვენს მიერ გამოთვლილზე 50 კა-თი მეტია; მაშასადამე, გამოთვლაში ჩვენ დაგვაკლდა მეტი მოსავლიანი მინდვრის $50 \cdot \frac{1}{6} = 300$ კვადრატული გარი. ამრიგად, პირველი მინდვრის ფართობი $900 + 300 = 1200$ კვადრატული გარის ტოლია და მეორესი კი 600 კვადრატული გარის.

---

* გარი დაახლოებით 6 მეტრის ტოლია.

** Нейгебауер, ტ. 1, გვ. 205. ლურიეს შენიშვნა.

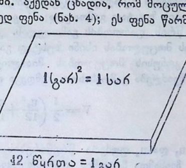
ბაბილონელებმა იცოდნენ ზოგიერთი კუბური განტოლებათა ამოხსნა, რომელთაც ისინი გეომეტრიულ ამოცანას უკავშირებდნენ. ყველა იმ ამოცანებში საერთოდ მოცემულია მოცულობა $xyz=V$, სადაც x სიგრძეა, y სიგანე და z — კი სიმაღლე („სიღრმე"). ამასთანავე უნდა აღინიშნოს ბაბილონელთა მათემატიკის ის თავისებურება, რომ სიმაღლე წყრთით იზომება, სიგრძე და სიგანე კი — გარით. (1 გარი = 12 წყრთას). განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები *:

1) მოცემულია: მოცულობა $xyz=1^1/_2$; $y=x$, $z=12\ x$; უნდა მოიძებნოს x.

კუბურ ფესვთა ცხრილების საშუალებით, რომელთა შესახებ ჩვენ უკვე ვთქვით, ბაბილონელების მიერ გამოთვლილია

$$12x^3=1\frac{1}{2};\quad x^3=\frac{1}{8};\quad x=y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2};\ z=6.$$

ეს შედეგი მიიღება ალგებრული გზით; მაგრამ ფოგელის (Vogel) აზრით ჩვენ აქ საქმე გვაქვს გეომეტრიულ ამოცანასთან, რომელშიც არსებითი როლს თამაშობს ბაბილონელთა მათემატიკის თავისებურება; ეს თავისებურება შემდეგში მდგომარეობს: მოცულობის გამოთვლის შემთხვევაში სიმაღლეს წყრთებში გამოსახავდნენ, კვეთის სიგრძეს და სიგანეს კი გარებში. აქედან ცხადია, რომ მოცულობის საზომად იყო არა კუბი, არამედ ფენა (ნახ. 4); ეს ფენა წარმოადგენს პარალელეპიპედს, რომლის ფუძის ფართობი ერთი კვადრატულ გარის ტოლია (1 კვად. გარი = 1 სარ.) და სიმაღლე კი ერთი წყრთის ტოლია. ამ ამოცანის ტექსტში ნახსენები სხეული არის კუბი, რომლის მოცულობა $V=\frac{1^1/_2}{12}$ კუბური



ნახ. 4.

გარისა. აქედან კი ცხადია, რომ კუბის გვერდი $x=\frac{1}{2}$ გარის = 6

* Kurt Vogel, Kúbishe gleichungen bei den Babyloniern. Sitrungsberichte der Akademie der Wissenchaften zu München, გვ. 87—94. 1934.

წყრთას. ამოცანის პირობა მოითხოვს კუბის კვადრატული კვეთის — x^2-ის გვერდის მოძებნას, რითაც აიხსნება ტექსტში მოყვანილი ტერმინი „კვადრატული ფესვი" კუბის გვერდისათვის.

2) მოცემულია: $xyz + xy = 1^1/_6$; $y = \frac{2}{3}x$, $z = 12x$. ამ ამოცანის ამოხსნა ბაბილონელებს დაჰყავთ $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$ სახის განტოლების ამოხსნამდე; უკანასკნელი განტოლებიდან x განსაზღვრულია $n^3 + n^2$ რიცხვებისათვის შედგენილი ცხრილის საშუალებით. $n^3 + n^2$ სიდიდეთა ცხრილი, რომლის შესახებ ჩვენ უკვე გვქონდა ლაპარაკი, შედგენილია n-ის ყველა მნიშვნელობათათვის 1-დან 60-მდე; ამ ცხრილიდან უშუალოდ ვღებულობთ 6-ს, როგორც 12-ის მნიშვნელობას; ასე რომ $x = \frac{1}{2}$.

ბაბილონელთა გეომეტრიული ამოცანები სამეურნეო ხასიათს ატარებდნენ. ისინი ეხებიან მინდვრის ფართობის გაზომვას, მიწის სამუშაოს შესასრულებლად საჭირო ადამიანთა რიცხვის გამოთვლას; მაგალითად, არხებისა და შენობებისათვის საძირკვლის ამოსათხრელად, საგუბრების ასაგებად და სხვა. ამოცანებიდან ჩანს, რომ ბაბილონელებმა იცოდნენ სამკუთხედის, მართკუთხედის და ტრაპეციის ფართობის ზუსტად გამოთვლა; მრავალი მათი ამოცანა შეიცავს აგრეთვე წრის ფართობის გამოთვლას. კუბის, პარალელეპიპედის და პრიზმის მოცულობას ისინი ზუსტად გამოითვლიდნენ ხოლმე. წაკვეთილი კონუსის მოცულობის მიახლოვებით გამოსათვლელი მათი ხერხი შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი ფორმულით:

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{u_1^2}{12} + \frac{u_2^2}{12}\right)h,$$

სადაც u_1 და u_2 ფუძეთა წრეწირების სიგრძეებია და h — კი სიმაღლე. ჩვენამდე მოაღწია აგრეთვე კვადრატული ფუძით წაკვეთილი პირამიდის მოცულობის ზუსტად გამოსათვლელ ხერხმა, რომელიც შემდეგი ზუსტი ფორმულის სახით დაიწერება

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]h$$

სადაც a და b დიდ და მცირე კვადრატულ ფუძეთა გვერდებია.

დასასრულ უნდა აღინიშნოს, რომ ბაბილონელთა მათემატიკაში რიცხვითი მხარეს გადამწყვეტი ადგილი უჭირავს. ბაბილონელთა მათემატიკის საფუძველს წარმოადგენს პრაქტიკულად მეტად მოხერხებული რიცხვთა სისტემა და საკმაოდ განვითარებული ალგებრული სიმვოლიკა. დადებითი რიცხვების დარგს ბაბილონელები სავსებით დაეუფლნენ. ამასთანავე აღსანიშნავია ის, რომ თითოეული მათემატიკური ტექსტი დაწერილია სპეციალური მიზნისათვის და ერთად აღებული ყველა ტექსტი არ წარმოადგენს მთლიან სისტემას

მათემატიკურ დამტკიცებებს დღევანდელი გაგებით და იმ გაგებითაც, როგორც ის იყო ძველ საბერძნეთში, ბაბილონელთა მათემატიკურ ტექსტებში ვერ ვპოულობთ; მაგრამ ეს არ გვაძლევს იმის თქმის უფლებას, თითქო ბაბილონელთა მათემატიკა მხოლოდ და მხოლოდ ემპირული მეცნიერებაა. ისეთი რთული ფორმულების გამოყვანა, როგორც არის წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა და სხვა, გვაიძულებს ვიფიქროთ, რომ ბაბილონელებმა იცოდნენ ისეთი ხერხები, რომელთაგან შემდეგ მათემატიკური დამტკიცება წარმოიშვა. ბაბილონელები დიდ მუშაობას ეწეოდნენ ასტრონომიაში. მათ შემოიღეს წრეწირის დაყოფა 360 გრადუსად, გრადუსის დაყოფა წუთებად და წუთებისა წამებად სამოცობითი სისტემის საფუძველზე.

თავი IV

საბერძნეთის მათემატიკა

§ 1. განვითარების პირველი პერიოდი. ძველ საბერძნეთში მათემატიკურ მეცნიერებათა განვითარების პირველ პერიოდის შესახებ სამწუხაროდ ჩვენამდე ძალიან ცოტა წყაროებმა მოაღწიეს. მაშინდელი მწერლების დიოგენის, პლუტარქის და სხვათა შენიშვნები ამ საკითხის შესახებ იმდენად ეწინააღმდეგებიან ერთი მეორეს, რომ მეტად ძნელი შეიქნა მათემატიკის ისტორიკოსებისათვის ჭეშმარიტების გარკვევა. ყველაზე უფრო სარწმუნო წყაროს წარმოადგენს მათემატიკის მაშინდელი ისტორიკოსი არისტოტელეს მოწაფის ეუდემოსის შრომები. მართალია მის შრომას ჩვენამდე ვერ მოუღწევია, მაგრამ ნაწყვეტები მისი შრომისა მოყვანილია უფრო გვიანდელი მწერლების ნაშრომებში, მაგალითად, ევკლიდეს შრომების პროკლოსის კომენტარებში და არისტოტელეს ფიზიკის სიმპლიკიოსის კომენტარებში.

ეუდემოსის გადმოცემით საბერძნეთის პირველი მათემატიკოსი (აგრეთვე პირველი ფილოსოფოსი-მატერიალისტი) მილეთელი თალესი იყო, რომელიც დაიბადა დაახლოებით 640 წელს ჩვენს ერამდე მილეთში. თალესმა შეისწავლა ეგვიპტელებისაგან ასტრონომია და გეომეტრია და ეგვიპტედან საბერძნეთში დაბრუნების შემდეგ მან ეს მეცნიერებანი საბერძნეთში გადმონერგა. თალესმა დაარსა ფილოსოფიური სკოლა, იონისის სკოლად წოდებული. მან და მისმა სკოლამ სისტემაში მოიყვანა ეგვიპტელებისაგან მიღებული მათემატიკური ცოდნა და იმავე დროს მათემატიკა გააფართოვა მრავალნაირი მიმართულებით. 585 წლის 28 მაისს ჩვენს ერამდე თალესმა მზის დაბნელება იწინასწარმეტყველა. თალესი ძველი საბერძნეთის პირველი მკვლევარი მათემატიკოსია. ეუდემოსი მას შემდეგ თეორემებს აკუთვნებს:

1. „ნახევარ წრეწირში ჩაწერილი კუთხე, მართი კუთხეა".

2. „თუ ორი წრფე ერთი მეორეს გადაკვეთს, მათ შორის შექმნილი ვერტიკალური კუთხეები ტოლნი არიან; ტოლფერდიანი სამ-

კუთხედის ფუძესთან მიმდებარე კუთხეები აგრეთვე ერთი მეორის ტოლნი არიან“.

3. „სამკუთხედი ერთი გვერდით და მასთან მიმდებარე ორი კუთხით განისაზღვრება“.

როგორც პლუტარქის ნაამბობიდან ჩანს, თალესმა გამოიგონა სიმაღლის გაზომვის ხერხი ჩრდილის საშუალებით და აგრეთვე მანვე გაზომა მანძილი ორ მიუვალ წერტილს შორის. თალესმა რიცხვი განსაზღვრა როგორც ერთეულთა ერთობლიობა და ერთეული კი — როგორც ცალკე საგნებს შეფარდებული.

თალესის მოწაფეები იყვნენ ანაქსიმანდროსი და ანაქსიმენესი; უკანასკნელის მოწაფე კი იყო ცნობილი ფილოსოფოსი ანაქსაგორი, რომელიც მოღვაწეობდა დაახლოებით 460 წლებში ჩვენ ერამდე. მეტად საინტერესოა მისი ფილოსოფიური შეხედულება სამყაროს აგებულებაზე; ის ამბობს, რომ დედამიწა ცილინდრის ფორმისაა და მოთავსებულია სამყაროს ცენტრში; ვარსკვლავები ქვებისაგან არიან შემდგარი და არ ვარდებიან მიწაზე, იმ მიზეზის გამო, რომ სწრაფ წრიულ მოძრაობაში იმყოფებიან. ანაქსაგორის ამ უკანასკნელ სიტყვებში ადვილად შევამჩნევთ იმ ძალთა ცოდნის პირველ კვალს, რომლებიც ნიუტონმა, სიმძიმის ძალასთან დაკავშირებით, 21 საუკუნის შემდეგ საფუძვლად დაუდო სამყაროს სისტემის მოძრაობას.

§ **2. პითაგორელები.** პითაგორი დაიბადა სამოსში დაახლოებით 570 წელს ჩვენს ერამდე. მეცნიერული მიზნით მას უმგზავრია ეგვიპტეში, ბაბილონში და ინდოეთში. იქიდან სამშობლოში დაბრუნებულა, მაგრამ იქ დიდხანს არ დარჩენილა და გადასახლებულა კროტონში (სამხრეთი იტალია), სადაც დაუარსებია ფილოსოფიური სკოლა. ეს სკოლა გარდა მეცნიერული მიზნებისა, აგრეთვე რელიგიურ და პოლიტიკურ მიზნებსაც ისახავდა. იმავე დროს ის მეტად კარჩაკეტილი იყო და ცდილობდა მისტიური წესების საშუალებით თავისი მოძღვრება საიდუმლოდ შეენახა. მისმა მეტად არისტოკრატიულმა ხასიათმა მისდამი ხალხის სიძულვილი გამოიწვია და დიდ საბერძნეთში დემოკრატების მიერ ძალა-უფლების ხელში ჩაგდების შემდეგ პითაგორის სკოლა დარბეულ იქნა. თვითონ პითაგორი კი მეტაპონტუმში გაიქცა, სადაც სიკვდილამდე ცხოვრობდა. პითაგორელების მთავარი დამსახურება მდგომარეობს მათემატიკის, როგორც მეცნიერების შექმნაში. თვით სიტყვა „მათემატიკა“ შემოღებულია პითაგორელების მიერ. პითაგორს შეეძლო ეგვიპტელებისაგან

შეესწავლა უბრალო გეომეტრიული ხერხები, რომლებსაც მაშინ მიწათ-მზომელები ხმარობდნენ, ვინაიდან, როგორც სახელწოდებიდან ჩანს, გეომეტრია დასაწყისში სამიწათმზომელო ხელოვნებას წარმოადგენდა. თუმცა აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ სამიწათმზომელო ხელოვნებამ უკვე არისტოტელეს დროიდან მიიღო გეოდეზიის სახელწოდება. ეგვიპტელებისაგან პითაგორმა მიიღო აგრეთვე საკმაოდ მნიშვნელო-

პითაგორი

ვანი პრაქტიკული გამოცდილება გამოთვლის ხელოვნებაში ანუ, როგორც ბერძნები უწოდებდნენ, ლოგისტიკაში. თუმცა ეგვიპტელების გეომეტრია და გამოთვლის ხელოვნება გულისხმობს გარკვეულ თეორიულ ცოდნას, მაგრამ ეგვიპტელებს მათემატიკა, როგორც მეცნიერება, არ ჰქონიათ. პითაგორელები კი განიხილავდნენ უფრო ინტელექტუალურად და განყენებულად ისეთ მათემატიკურ ცნებებს, როგორიცაა სიდიდე, წერტილი, წირი, ფართობი, სხეული, კუთხე; პითაგორელებმა გამოჰყვეს გეომეტრიისა და არითმეტიკის მეცნიე-

რული განხილვა მათი პრაქტიკული გამოყენებისაგან გეოდეზიაში და ლოგისტიკაში. უკვე დიდი ხნით ცნობილი პრაქტიკული წესები გარდაქმნილ იქნა ზოგადი მნიშვნელობის დებულებად და მათ თან დაერთო ზუსტი დამტკიცებანი. პითაგორის სკოლამ ჩამოაყალიბა თანამედროვე ელემენტარული მათემატიკის ძირითადი დებულებანი პარალელური წირების, სამკუთხედების, ოთხკუთხედების, სწორი მრავალკუთხედის და ნაწილობრივად წრის შესახებ. იმავე დროს საფუძველი ჩაუყარა დამტკიცებათა მკაცრ ფორმულირებას. მათემატიკის ის დარგი, რომელსაც ახლა რიცხვთა თეორიას უწოდებთ, პირველად შექმნეს პითაგორელებმა. ისინი სწავლობდნენ ზოგიერთ საგანგებო რიცხვებს, მაგალითად მეგობრულ და სრულყოფილ რიცხვებს. მეგობრულ რიცხვებს ისეთ რიცხვებს, უწოდებდნენ, რომელთაგან ერთი ტოლია მეორის გამყოფთა ჯამისა, მაგალითად 220 და 284;

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$$

სრულყოფილ რიცხვებს უწოდებდნენ ისეთებს, რომლებიც ტოლნი არიან ყველა თავის გამყოფების ჯამისა ერთის ჩათვლით, ხოლო თვითონ რიცხვის გამოკლებით. 6, 28, 496:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

პითაგორელები და მათ შემდეგ ძველი საბერძნეთის სხვა მათემატიკოსებიც, სიდიდეებს გეომეტრიულად გამოსახავდნენ. უწყვეტად ცვლად სიდიდეებს ისინი ნაკვეთის სიგრძით გამოსახავდნენ, ისე როგორც თანამედროვე ალგებრაში სიდიდეებს — ასოებით. სიდიდეთა გამოსახვის გეომეტრიული ხერხიდან წარმოიშვა სახელწოდება ბრტყელი რიცხვებისა ისეთი რიცხვებისათვის, რომელნიც ორ სიდიდეთა ნამრავლის სახით იყო წარმოდგენილი და ამრიგად მართკუთხის ფართობს შეადგენდა. კვადრატის ფართობის გამომსახველს ორ ტოლ რიცხვთა ნამრავლს პითაგორელები კვადრატულ რიცხვებს უწოდებდნენ. პითაგორელებმა განსაკუთრებით დაამუშავეს პროპორციათა თეორია; ისინი იცნობდნენ სამი სახის პროპორციას: — არითმეტიკულს, გეომეტრიულს და ჰარმონიულს. ბრტყელ რიცხვებს მსგავს რიცხვებს უწოდებდნენ იმ შემთხვევაში, თუ

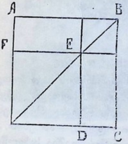
მათი მამრავლნი პროპორციული იქნებოდნენ. პითაგორელებმა შემოიღეს აგრეთვე ცნება სამკუთხოვანი რიცხვების, რასაც უწოდებდნენ ნატურალურ რიცხვთა წკრივის პირველ მიმდევრობითი რიცხვების ჯამებს; თითოეული რიცხვის ერთეულს გამოსახავდნენ წერტილით და წერტილთა სტრიქონის საშუალებით კი — თვით რიცხვს და ამის შედეგად სამკუთხედს ღებულობდნენ, მაგალითად

1

$1+2=3$

$1+2+3=6$ და ასე შემდეგ.

კენტ რიცხვებს პითაგორელები გნომონრიცხვებს უწოდებდნენ. გნომონი კი ეწოდება ისეთ ნაკვთს, რომელიც ორი კვადრატის სხვაობას წარმოადგენს, მაგალითად (ნახ. 5) ABCDEF ნაკვთი გნომონია.



ნახ. 5.

გნომონ რიცხვები, ანუ კენტი რიცხვები წარმოადგენენ ორ მეზობელ კვადრატულ რიცხვებს შორის სხვაობას ანუ კვადრატული რიცხვები წარმოადგენენ კენტი რიცხვების მიმდევრობათა ჯამებს, რაც მათთვის ცნობილი იყო; ამ უკანასკნელმა მისცა საშუალება პითაგორს გამოეგონებია მართკუთხოვანი სამკუთხედის გვერდების რაციონალური რიცხვებით შედგენის წესი, სახელდობრ,

$$a, \ \frac{a^2-1}{2} \ \text{და} \ \frac{a^2+1}{2} \ \text{რიცხვებით,}$$

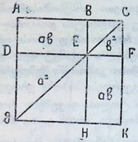
სადაც a კენტი რიცხვია; ეს უკანასკნელი ფორმულა წარმოადგენს პითაგორის განთქმული თეორემის (ჰიპოთენუზის კვადრატი კატეტების კვადრატების ჯამის ტოლია) განზოგადოებას. თანამედროვე ენით რომ ვთქვათ, პითაგორმა მოგვცა $x^2+y^2=z^2$ განუსაზღვ-

რელი განტოლების ამოხსნა მთელ რიცხვებში; თუ კენტი რიცხვია მაშინ განტოლებას აკმაყოფილებს

$$y=\frac{x^2-1}{2};\ z=\frac{x^2+1}{2}.$$

პითაგორელებს ეკუთვნის თეორემა იმის შესახებ, რომ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი ორი მართი კუთხის ტოლია ($a+b+c=2d$). პითაგორელები ბევრს მუშაობდნენ სწორი ხუთკუთხედის აგებაზე და მის შემსრულებლებს მეტად ამაყად ეჭირათ თავი. სწორი ხუთკუთხედის აგება წარმოადგენს მეორე ხარისხის განტოლების გეომეტრიულად ამოხსნის მაგალითს, რამაც პითაგორელები მიიყვანა სიდიდეთა უთანაზომობისა და ირაციონალურ სიდიდეთა აღმოჩენამდე. ჩვენამდე მოაღწია ირაციონალურ სიდიდეთა არსებობის მათმა დამტკიცებამ, სადაც ნაჩვენებია, რომ თუ კვადრატის დიაგონალი მის გვერდთან თანზომადია, მაშინ ლუწი რიცხვი იმავე დროს კენტი უნდა იყოს. ეს დამტკიცება ჩამოყალიბებულია გეომეტრიულად, მაგრამ შეიძლება აგრეთვე დაახლოებით მისი გამოთქმა შემდეგნაირად: დიაგონალი კვადრატისა, რომლის გვერდები საზომი ერთეულის ტოლად არიან მიღებული, $\sqrt{2}$-ის ტოლია. დავუშვათ რომ კვადრატის გვერდი და დიაგონალი თანზომადი არიან ე. ი., რომ $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, სადაც $\frac{m}{n}$ წილადია, შეკვეცილი რამდენადაც შესაძლებელია. მაშინ $m^2=2n^2$ საიდანაც გამომდინარეობს, m^2 და m-იც ლუწი რიცხვებია (ვინაიდან ლუწი რიცხვის კვადრატი ყოველთვის ლუწია და კენტი რიცხვის კვადრატი კი ყოველთვის კენტია); ვინაიდან $\frac{m}{n}$ უმარტივეს წილადს წარმოადგენს, ამიტომ n უნდა იყოს კენტი (იმიტომ, რომ m ლუწია და $\frac{m}{n}$ შეუკვეცავი წილადია პირობის თანახმად). მაგრამ თუ m ლუწია, მაშინ m^2 ოთხზე უნდა გაიყოს; და რადგანაც $m^2=2n^2$, ამიტომ n^2 ორზე უნდა გაიყოს, ე. ი. n უნდა იყოს ლუწი. მივიღებთ, რომ n ერთ და იმავე დროს უნდა იყოს ლუწიც და კენტიც, რაც შეუძლებელია, ამიტომ დაშვება იმისა რომ $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ შეუკვეცავი წილადია, ანუ რომ კვადრატის გვერ-

დი და დიაგონალი თანზომადი სიდიდეებია, არ არის სწორი. ირაციონალურ სიდიდეთა აღმოჩენამ პითაგორელები გარკვეულ სიძნელეთა წინაშე დააყენა; მათი სწავლება პროპორციების შესახებ, რომელიც მთელი რიცხვების შეფარდებათა ფარგლებს არ გასცილდებოდა, გეომეტრიისათვის გამოუყენებელი გამოდგა. ეს სიძნელე პითაგორელებმა ახალი მეთოდის გამოყენებით დასძლიეს, რომელიც მდგომარეობს, სიდიდეთა გეომეტრიულ გამოსახვაში. გეომეტრიულად გამოსახულ სიდიდეებზე მოქმედება ჩვენი ალგებრული ოპერაციების მსგავსია და ამიტომ ამ ოპერაციების თეორიას XIV საუკუნეში „გეომეტრიული ალგებრა“ უწოდეს. ამ ოპერაციათა თეორიის მთავარი ხერხი ფართობთა მიდებაა, რომელიც არსებითად კვადრატული განტოლების ამოხსნის გეომეტრიულ ხერხს წარმოადგენს. მაგალითად, ის, რასაც ჩვენ გამოვსახავთ განტოლებით.



ნახ. 6.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

გეომეტრიულად მტკიცდებოდა შემდეგნაირად (ნახ. 6); თუ

$$AD=HK=b \text{ და}$$
$$Dg=EH=a$$

მაშინ BF, DH, AK კვადრატების ნაცვლად გვაქვს b^2, a^2 და $(a+b)^2$ სიდიდეები და მართკუთხედები $AE+EK=2ab$. გეომეტრიული ალგებრის საშუალებით პითაგორელები სავსებით დაეუფლნენ მეორე ხარისხის განტოლებას.

სიდიდეთა უთანაზომობის აღმოჩენასთან დაკავშირებით საბერძნეთის მათემატიკოსების წინაშე წამოიჭრა უსასრულობის ცნება. ორი სიდიდე უთანაზომო აღმოჩნდებოდნენ მაშინ, როდესაც მათი საერთო უდიდესი საზომის მოსაძებნად საჭირო შეიქმნებოდა გამოთვლის უსასრულოდ გაგრძელება. ბუნებრივია, რომ აქედან ისეთ დასკვნამდე მივიდნენ, რომ საერთო უდიდესი საზომი ამ შემთხვევაში უსასრულოდ მცირეა და ერთიმეორესთან შესადარებელი სიდიდეები მას უსასრულოდ მრავალჯერ შეიცავენ. ამ შემთხვევაში საბერძნეთის მათემატიკოსები სიდიდეებს განსაზღვრავდნენ უსასრუ-

ლო რიცხვების, ანუ უსასრულოდ მიახლოვების საშუალებით. ამრიგად, უწყვეტი სიდიდეები მათ ჰქონდათ წარმოდგენილი, როგორც უსასრულოდ მრავალი, უსასრულოდ მცირე განუყოფელ ნაწილაკებისაგან შემდგარი სიდიდეები. უწყვეტ სიდიდეთა ასეთ წარმოდგენას უაზრობად სთვლიდა ელეატური ფილოსოფიური სკოლის წარმომადგენელი (V საუკუნე ჩვენს ერამდე) ძენონი; ძენონი უწყვეტობას უპირისპირებს წყვეტილობას, უსასრულობას უპირისპირებს სასრულობას; ის უგულვებელყოფს უწყვეტობისა და წყვეტილობის ერთიანობას, უსასრულობისა და სასრულობის ერთიანობას. ასეთ შემცდარ შეხედულებებს ეყრდნობიან მისი განთქმული პარადოქსები, რომლებშიც ცდილობდა მოძრაობის რეალობის უარყოფას. პირველი მისი არგუმენტი ასეთია:* ერთი ადგილიდან რომ მეორემდე მივიდეთ, სანამ ამ მეორე ადგილს მივაღწევდეთ, უნდა გავიაროთ ჯერ ამ გზის ნახევარი, შემდეგ უნდა გავიაროთ ნახევარი გზის ნახევარი და ასე შემდეგ უსასრულოდ: ეს კი გულისხმობს, რომ გზის უსასრულოდ მრავალი ნაკვეთი უნდა იქნას განვლილი, მაშასადამე, ამბობს ძენონი „მ ო ძ რ ა ო ბ ა შ ე უ ძ ლ ე ბ ე ლ ი ა“.

მისი აზრით მოძრაობა, რომელიც თავისი ბუნებით უწყვეტი უნდა იყოს, შეუძლებელია, ვინაიდან ჩვენ არ შეგვიძლია ის უწყვეტად წარმოვიდგინოთ, რადგან ჩვენ არ შეგვიძლია უწყვეტი მოძრაობა გამოვსახოთ იზოლირებულ და დაყოფილ მომენტებად მისი დაშლის საშუალებით. ძენონის აზრი მათემატიკურად ასე გაფორმდება: მანძილი ორ ადგილშორის მივიღოთ ერთის ტოლად; ჯერ უნდა იქნას განვლილი მანძილის ნახევარი, შემდეგ ამ მანძილის ნახევრის ნახევარი ანუ $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ მთელი მანძილისა; მერე მანძილის ერთი მეოთხედის ნახევარი ანუ $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ და ასე შემდეგ; მთლიანად მანძილი, რომელიც ერთის ტოლად მივიღეთ, გამოისახება უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიით:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

მაშასადამე, ძენონი ამტკიცებს, რომ ასეთი პროგრესიის წევრთა ჯამი ერთის ტოლი არ არის, ანუ ის უარყოფს ტოლობას

* Цейтен, გვ. 55 — 56.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

ძენონის მეორე არგუმენტი ცნობილია აქილესის კუს სახელწოდებით „სწრაფფეხი აქილესი ვერ დაეწევა ნელა მიმავალს კუს“, ვინაიდან ჯერ მან უნდა მიაღწიოს იმ ადგილს, რომელიც მოცემულ მომენტში კუს უჭირავს, შემდეგ უნდა გაიაროს გზის ნაჭერი, რომელიც კუმ გაიარა დროის ამ მომენტში და ასე შემდეგ უსასრულომდე; მაგრამ ეს უსასრულობა ამოუწურავია.

თუ დავუშვებთ, რომ აქილესი n-ჯერ ჩქარა მოძრაობს, ვიდრე კუ, მაშინ ძენონის ეს არგუმენტი უარყოფს ტოლობას

$$\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

მესამე არგუმენტი: „გაფრენილი ისარი უძრავია“. იმ ადგილში სადაც ის მოცემულ მომენტში იმყოფება, ის არ მოძრაობს, ვინაიდან ახლა მასში იმყოფება; ის მეორე ადგილშიც არ მოძრაობს, ვინაიდან ის მასში ჯერ კიდევ არ არის. აბა სად მოძრაობს ის? არსად. მოცემულ დროის მომენტში ის უძრავია ყოველ წერტილში, და მისი მოჩვენებითი მოძრაობა სინამდვილეში კი უძრაობის მდგომარეობათა წკრივია. რადგანაც მათემატიკოსები უსასრულობას ხსნიდნენ მხოლოდ სახელწოდებით, რომელიც შეიცავდა უარყოფით წარმოდგენას იმის შესახებ, რომ უსასრულობა შეუძლებელია მიღწეულ იქნას და არ ხედავდნენ უსასრულობისა და სასრულობის ერთიანობას; ამიტომ ძენონის არგუმენტები დამაჯერებელი ჩანდნენ, როდესაც ის ილაშქრებოდა მათ წინააღმდეგ; საბერძნეთის მათემატიკოსებმა ძენონს დაუჯერეს და უსასრულობის იდეა, როგორც დადებითად დამტკიცების საშუალება, უარყვეს. ამიტომ ევდოქსოსმა გამოიგონა „ამოწურვის მეთოდი“, რომელიც საშუალებას აძლევდა მაშინდელ მათემატიკოსებს დაემტკიცებიათ თეორემები უსასრულობის ცნების გამოუყენებლად (მას ჩვენ შემდეგში დაწვრილებით შევეხებით). პითაგორს ეკუთვნის იზოპერიმეტრული საკითხების აღმოჩენა. მან დაამუშავა აგრეთვე მუსიკის მათემატიკური თეორია; მას ეკუთვნის აზრი ტონის სიმაღლის გაზომვისა სიმის სიგრძის გაზომვის საშუალებით. დასასრულ ორიოდე სიტყვით შევეხები პითაგორელების ფილოსოფიურ მსოფლმხედველობას.

პითაგორეიზმის ძირითად ბირთვს რიცხვთა მისტიკა შეადგენს. მოძღვრება რიცხვთა შესახებ წარმოადგენს ბუნების კანონზომიერების რაოდენობათა შესახებ საკითხის დასმის ცდას. პითაგორელების ფილოსოფიის ძირითადი დამახასიათებელი დებულებანი ასეთია: ბუნებაში ყველაფერი განიზომება, ყველაფერი რიცხვს ემორჩილება, ყველა ნივთის არსებითობა რიცხვშია; შეცნობა სამყაროსი, მისი აგებულების, მისი კანონზომიერების, მისი მმართველი რიცხვების შეცნობას ნიშნავს. პითაგორელებმა მათემატიკის მეტაფიზირება მოახდინეს, მოსწყვიტეს მათემატიკა ობიექტურ რეალობას და მთელ თავის მსოფლმხედველობას რიცხვთა მისტიკა საფუძვლად დაუდვეს. პითაგორელთა იდეალიზმა სამყარო რიცხვებად და ჰარმონიად აღიარა.

რაც შეეხება პითაგორელთა როლს პოლიტიკურ საქმიანობაში, უნდა აღინიშნოს, რომ პითაგორელთა კავშირს დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა, როგორც მონათმფლობელ რეაქციონური არისტოკრატიის პოლიტიკურ ორგანიზაციას, იტალიის ბერძენთა ქალაქებში კლასიური ბრძოლის ისტორიაში. პითაგორის კროტონში დასახლებამ საფუძველი ჩაუყარა არისტოკრატიის პოლიტიკურ და იდეოლოგიურ გაერთიანებას და ყველგან სადაც პითაგორელთა კავშირის ორგანიზაცია არსებობდა, რეაქციულ არისტოკრატიასა და დემოკრატიას შორის მწვავე ბრძოლა გაჩაღდა, რომლის შედეგის შესახებ ჩვენ ზემოთ უკვე ვსთქვით.

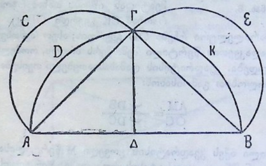
§ 3. გეომეტრიული პრობლემები V საუკუნეში (ჩვენს ერამდე). პითაგორელების შემდეგ გეომეტრია სწრაფად და ბრწყინვალედ ვითარდება. განვითარების ასეთ გზაზე ის სამ პრობლემას წააწყდა: 1. წრის კვადრატურა, 2. კუთხის დაყოფა სამ ტოლ ნაწილად (კუთხის ტრისექცია) და 3. კუბის გაორკეცება (დელოსის ამოცანა). ამ პრობლემების გადაწყვეტა იმ ელემენტარული საშუალებებით, რომლებიც მაშინ გააჩნდათ, ე. ი. სახაზავი და ფარგალის საშუალებით, შეუძლებელი გახდა. წრის კვადრატურის პრობლემაში შედის როგორც წრის ფართობის გამოთვლა *საკმაო მიახლოვებით*, ისე ფარგალისა და სახაზავის საშუალებით წრის ფართობის ტოლდიდი კვადრატის აგება, რომლის შეუძლებლობა მხოლოდ XIX საუკუნეში იქმნა დამტკიცებული მათემატიკოს ლინდელმანის მიერ. ამ საკითხზე V საუკუნის მრავალი მათემატიკოსი მუშაობდა, მათ შორის ორი სოფისტიც — ბრიზონი და ანტოფონი. ამ ამოცანის ბრიზონის ამოხსნა

მხოლოდ სოფიზმია; ის ამბობს, რომ წრის ფართობის მოსაძებნად საკმარისია შემოწერილ და ჩაწერილ მრავალკუთხედების პერიმეტრთა შორის გავავლოთ ახალი მრავალკუთხედი, და რადგანაც ახალი მრავალკუთხედი, მსგავსად წრისა, მეტია ჩაწერილი მრავალკუთხედის და ნაკლებია შემოწერილისა, ამიტომ ის წრის ტოლდიდი იქნება. ანტიფონი კი უფრო ახლო მივიდა თანამედროვე იდეასთან, გამოთქვა რა ისეთი აზრი, რომ წრე არის მრავალკუთხედი, რომლის გვერდების რიცხვი უსასრულოა; ის ამბობს: „წრეში შეიძლება ჩაწერილ იქმნას ტოლგვერდიანი სამკუთხედი და შემდეგ კი რკალის შუაზე გაყოფით, წესიერი მრავალკუთხედი, რომლის გვერდების რიცხვი მუდამ იზრდება; თუ ასეთი აგება უსაზღვროდ გავაგრძელეთ, მრავალკუთხედი წრეწირს შეუერთდება. ვინაიდან ყოველი მრავალკუთხედისათვის შეიძლება აგებულ იქნას მისი ტოლდიდი კვადრატი. ამიტომ ასეთივე კვადრატის მიღება შეიძლება წრისათვისაც“. ცხადია, რომ ანტიფონის მიერ გამოთქმული აზრი წარმოადგენს უსასრულობის იდეის არასწორად გამოყენების ნიმუშს.

წრის კვადრატურის პრობლემის გადაწყვეტისათვის წარმოებული გამოკვლევებისაგან ყველაზე უფრო საყურადღებოა V საუკუნის ნიჭიერი მათემატიკოსი ჰიპოკრატეს ქიოსელის შრომები. უპირველესად ყოვლისა ჰიპოკრატესი ამტკიცებს, რომ წრეთა მსგავსი სეგმენტების ფართობები დიამეტრთა კვადრატების პროპორციულებია (მსგავსი სეგმენტები ისეთებია, რომლებიც შესაბამის წრეების ერთ და იგივე ნაწილს შეადგენენ; მაგალითად, თუ ერთი სეგმენტი შეადგენს მეოთხედ ნაწილს შესაბამ წრისა და მეორე სეგმენტიც—მეორე წრის აგრეთვე მეოთხედ ნაწილს, მაშინ ეს სეგმენტები მსგავსები არიან). ამავე დებულების დასამტკიცებლად ჰიპოკრატესმა გამოიყენა თეორემა ორ წრეთა შესახებ, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ორი წრის ფართობები დიამეტრების კვადრატების, პროპორციული არიან. მართლაც, თუ ორი წრის ფართობი პროპორციულია დიამეტრების კვადრატებისა და მსგავსი სეგმენტების ფართობებიც შესაბამის წრეთა ფართობების პროპორციულია, ცხადია, რომ მსგავსი სეგმენტების ფართობები დიამეტრების კვადრატების პროპორციული იქნებიან. ამ თეორემის გამოყენებით ჰიპოკრატესი ამტკიცებს, რომ ნამგლები ACΓD და ΓEBK (ნახ. 7) ტოლდიდი არიან ტოლფერდიანი (AΓ=BΓ) მართკუთხოვანი AΓB სამკუთხედისა, რომელიც ჩახაზულია ნახევარწრეში და რომლის ჰიპოტენუზა AB ამ წრის დიამეტ-

რია. მართლაც, ვინაიდან $AB^2=A\Gamma^2+\Gamma B^2=2A\Gamma^2$ და AB, AΓ და ΓB-ზე აგებული ნახევარწრეების ფართობები პროპორციული არიან დიამეტრების კვადრატებისა ანუ AB^2, $A\Gamma^2$ და ΓB^2-ისა, ამიტომ ACΓ და ΓEB ნახევარწრეთა ფართობების ჯამი ტოლია AΓB ნახევარწრის ფართობისა. ანუ ფართობი ACΓ + ფართ. ΓEB = 2 ფარ. ACΓ = ფართ. ADΓKB.

ფართ. ADΓKB — (ფართ. ADΓ + ფართ. ΓKB) = ფართ. სამკ. AΓB. (ფართ. ACΓ + ფართ. ΓEB) — (ფართ. ADΓ + ფართ. ΓKB) = (ფართ. ACΓ — ფართ. ADΓ) + (ფართ. ΓEB — ფართ. ΓKB) = ფართობ. ACDΓ + ფართ. ΓEBK, ამიტომ გვაქვს,

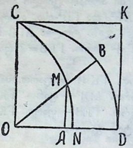


ნახ. 7.

ფართ. სამკ. AΓB = ფართ. ACDΓ + ფართ. ΓEBK, ე. ი. ჰიპოკრატესი ამით ამტკიცებს, რომ ACΓD და ΓEBK ნამგლების კვადრატურა შესაძლებელია.

ჰიპოკრატესმა იპოვა კიდევ ერთი ნამგალა, რომელიც წრესთან ერთად იძლეოდა ასეთ ნაკვთს, რომლის კვადრატურა შესაძლებელი იყო; ასე რომ წრის ფართობის მიღება შესაძლებელი გახდებოდა იმ ნაკვთისაგან უკვე ნაპოვნი ნამგალის ფართობის გამოკლებით; მაგრამ ჰიპოკრატესმა ამ ნამგალის კვადრატურა ვერ მოახდინა. ეს უკანასკნელი გამოკვლევა გახდა მიზეზი არისტოტელეს მხრივ დაშვებულ გაუგებრობისა, თითქოს ჰიპოკრატეს ეთქვას, რომ მან წრის კვადრატურის ამოცანა ამოხსნა. წრის კვადრატურისა და კუთხის ტრისექციის (სამი ტოლი ნაწილებად დაყოფა) პრობლემათა გადა-

საწყვეტად ჰიპიასმა გამოიგონა მრუდი, რომელსაც ქვადრატისას უწოდებთ. ეს მრუდი ააგო მან შემდეგნაირად: ვთქვათ მოცემულია კვადრატი (ნახ. 8) OCKD; წერტილი O-დან, როგორც ცენტრიდან შემოვწეროთ OC რადიუსით წრეწირი, რომლის მეოთხედია CD რკალი; ახლა დავუშვათ, რომ OC იწყებს თანაბარზომიერ მოძრაობას საათის ისრის მიმართულებით O წერტილის ირგვლივ და იმავე დროს ისეთივე სიჩქარით, როგორც OC და იმავე მომენტიდან იწყებს თანაბარზომიერ მოძრაობას CK გვერდი OD-კენ ისე, რომ ის მუდამ პარალელური რჩება OD გვერდის; ასეთ შემთხვევაში OC და CK-ს გადაკვეთის წერტილი შემოწერს მრუდს, რომელსაც კვადრატისა ეწოდება. კვადრატისის დამახასიათებელი თვისება შეიძლება შემდეგი ტოლობით გამოისახოს:



ნახ. 8.

$$\frac{AM}{OC}=\frac{\smile DB}{\smile DC} \tag{1}$$

რასაც ადგილი აქვს კვადრატისის ყოველი M წერტილისათვის; ანუ თუ y-ით აღვნიშნავთ კვადრატისის რომელიმე წერტილის ორდინატას მართკუთხოვანი კოორდინატთა სისტემაში და Θ აღვნიშნეთ ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის მიერ შექმნილი კუთხე აბსცისათა ღერძთან, მაშინ (1) ტოლობა ასე დაიწერება:

$$\frac{y}{a}=\frac{\Theta}{\frac{\pi}{2}} \tag{2}$$

სადაც $a=OC$ და Θ და $\frac{\pi}{2}$ წრის ცენტრალური კუთხეებია, DB და DC რკალების შესაბამისი.

დინოსტრატმა გამოაშკარავა, რომ კვადრატის აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისა ტოლია $\frac{OC^2}{\smile DC}$: ანუ

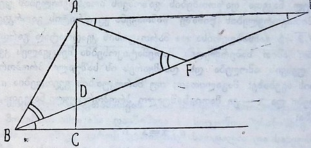
$$ON = \frac{OC^2}{\smile DC}$$

ანუ

$$\smile DC = \frac{OC^2}{ON} \qquad (3)$$

რითაც მან დაამტკიცა, რომ კვადრატისა გამოსადეგია წრის კვადრატურისათვის, ვინაიდან წრის კვადრატურის პრობლემაში შედის აგრეთვე წრეწირის სიგრძის გამოთვლა საკმაო მიახლოებით და მე-(3) ტოლობა მართლაც გამოსახავს წრეწირის მეოთხედი ნაწილის (რკალი DC) სიგრძეს.

მე-(2) ტოლობიდან ჩანს, რომ y პროპორციულია Θ-სი, რაც ადვილად არწმუნებდა დინოსტრატეს იმაში, რომ კვადრატისა გამოსადეგია კუთხის სამ ტოლ ნაწილებად დაყოფისათვის.



ნახ. 9.

კუთხის ტრისექციის პრობლემისათვის კვადრატისის გამოყენების ხერხის გარდა V საუკუნის მათემატიკოსები იყენებდნენ აგრეთვე ეგრეთ წოდებულ ჩადგმის ხერხს, რომელსაც აწარმოებდნენ მექანიკურად სახაზავის საშუალებით; ეს ხერხი საშუალებას იძლევა აიგოს მოცემული სიგრძის ნაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილები მოცემულ წრფეებზე მდებარეობენ და გაგრძელება კი მოცემულ წერტილში გაივლის. კუთხის ტრისექციისათვის ამ ხერხის გამოყენება შემდეგნაირად ხდებოდა: ვთქვათ მოცემულია ABC კუთხე (ნახ. 9), რომელიც სამ ტოლ ნაწილად უნდა დაიყოს. გავავლოთ BC- სი

პერპენდიკულარი AC და AE BC-ს პარალელურად. AC და AE-ს შორის ჩავსვათ $DE = 2AB$ ისე, რომ მის გაგრძელებამ B-ზე გაიაროს. თუ F არის DE-ს შუა წერტილი, მაშინ იქნება $AF = FE = AB$ და

$$\angle ABF = \angle AFB = 2\angle AEF = 2\angle CBD; \quad \angle CBD = \frac{1}{3}\angle ABC.$$

რაც შეეხება კუბის გაორკეცების პრობლემას, მას უწოდებენ ხოლმე დელოსის ამოცანას იმის გამო, რომ თითქოს ორაკულმა მოითხოვა კუნძულ დელოსზე მდგარი კუბური ფორმის საკურთხევლის გაორკეცება; ეს ამბავი ლეგენდად უნდა ჩავთვალოთ, ვინაიდან ხსენებული ამოცანის წარმოშობას სინამდვილეში შემდეგი გარემოება უდევს საფუძვლად: გეომეტრია წარმოიშვა სხვადასხვა ეკონომიურ მოთხოვნილებათა ნიადაგზე, მაგალითად გაზომვა სიმაღლისა, ჭურჭელთა მოცულობისა და მიწის ფართობისა და სხვა; სხვადასხვა გეომეტრიულ ნაკვთა ფართობების გაზომვის მოთხოვნილებამ ჯერ კიდევ პითაგორელების წინაშე წამოაყენა კვადრატის გაორკეცების, ანუ $\sqrt{2}$-ის განსაზღვრისა და მართკუთხის კვადრატად გარდაქმნის საკითხი; ამით საბერძნეთის მათემატიკოსებმა შესცვალეს კვადრატული ფესვის ამოღება და დაამყარეს ის საშუალო პროპორციულ ნაკვეთის აგებაზე; მაგალითად; თუ მართკუთხის გვერდებია a და b ნაკვეთები და x — კი მათი საშუალო პროპორციული ნაკვეთი, მაშინ გვექნება:

$$a : x = x : b$$

ანუ

$$x^2 = ab$$

და x-ი არის a და b გვერდებიანი მართკუთხის ტოლდიდი კვადრატის გვერდი; როდესაც $b = 2a$ მაშინ $x^2 = 2a^2$ და x ამ შემთხვევაში წარმოადგენს იმ მოსაძებნი კვადრატის გვერდს, რომლის ფართობი a გვერდიანი კვადრატის ფართობზე ორჯერ მეტია.

ბუნებრივია, რომ სიბრტყეზე ასეთი ამოცანებიდან სივრცეში შესაბამის ამოცანებზე უნდა გადასულიყვნენ და დაესვათ კუბის გაორკეცებისა ანუ $\sqrt[3]{2}$ განსაზღვრისა და პარალელეპიპედის კუბად გარდაქმნის საკითხი, რაც ჰიპოკრატესმა ორი საშუალო პროპორციული ნაკვეთების მოძებნამდე დაიყვანა; მაგალითად, თუ მოცემული გვა-

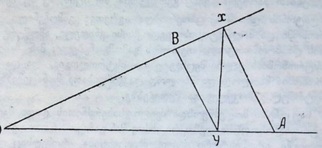
ქვს პარალელეპიპედი a^2b, რომლის ფუძე არის კვადრატი (a^2) და სიმაღლე კი b, მაშინ მისი ტოლდიდი კუბის წიბო x — შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$a:x=x:y=y:b,$$

საიდანაც

$$x^2=ay;\ y^2=xb \text{ და } x^3=a^2b;$$

როდესაც $b=2a$, მაშინ $x^3=2a^3$ და x-ი წარმოადგენს ისეთი კუბის წიბოს რომელიც a წიბოს მქონე კუბზე ორჯერ მეტია.



ნახ. 10.

ორ მოცემულ ნაკვეთისათვის ორი საშუალო პროპორციული ნაკვეთის მოძებნის ამოცანა დაამუშავა V საუკუნის შესანიშნავ მათემატიკოსმა და იმავე დროს გამოჩენილ სარდალმა და სახელმწიფო მოღვაწემ არქიტას ტარენტელმა; ეს ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:

მოცემულია ორი ნაკვეთი (ნახ. 10) OA და OB; ვიპოვოთ მათი საშუალო პროპორციული ორი ნაკვეთი. ამისათვის მან დაუშვა პერპენდიკულიარები B და X წერტილებზე OA ნაკვეთის У და A წერტილებიდან და მიიღო OX და OB ნაკვეთები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$OA : OX = OX : OУ = OУ : OB.$$

აქვე უნდა მოვიხსენიოთ აგრეთვე ფილოსოფოსი პლატონი (429 — 348), რადგანაც ის მეტად დაინტერესებული იყო მათემატიკით და

გარკვეულ მუშაობას ეწეოდა ამ დარგში. მან გამოიგონა მართკუთხოვანი სამკუთხედის გვერდების რაციონალური რიცხვებით შედგენის წესი, სახელდობრ

$$a, \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1 \text{ და } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 \text{ რიცხვებით,}$$

სადაც a ლუწი რიცხვია. პლატონი იმდენად დიდ მნიშვნელობას აძლევდა მათემატიკის შესწავლას, რომ, ამბობენ, მან უბრძანა მის მიერ დაარსებული სკოლის (რომელსაც აკადემია ეწოდება) კარებზე გაეკეთებიათ წარწერა. „ვინც გეომეტრია არ იცის, აქ ნუ შემოვა".

პლატონის დროს აქ ცხოვრობდა აგრეთვე გამოჩენილი ექიმი, ასტრონომი და მათემატიკოსი ევდოქსოსი კნიდელი, ამოწურვის მეთოდის და პროპორციათა თეორიის გამომგონებელი; მან ჩამოაშორა ასტრონომიას ყალბი მეცნიერება — ასტროლოგია, და დაამყარა ასტრონომია მხოლოდ და მხოლოდ დაკვირვებათა მონაცემებზე და გეომეტრიულ გამოკვლევათა შედეგებზე.

V საუკუნეში მოღვაწეობდა ძველი საბერძნეთის დიდი მატერიალისტი-ფილოსოფოსი დემოკრიტოსი; მან განავითარა თ ა ვ ი ს ფილოსოფიაში ატომისტური მსოფლმხედველობა, რომელსაც ლევკიპოსმა ჩაუყარა საფუძველი. დემოკრიტოსი გარკვეულ კვლევა-ძიებას აწარმოებდა მათემატიკაშიც. მას აქვს ნაწერი წრისა და სფეროს შეხებისა, ირაციონალური წირებისა და სწორი სხეულების შესახებ. მან აღმოაჩინა მნიშვნელოვანი თეორემები პირამიდისა და კონუსის მოცულობის შესახებ. უსასრულო მცირეთა აღრიცხვის დარგში მას სთვლიან არქიმედეს წინამორბედად.

V საუკუნის მათემატიკოსებმა, ამ თავის დასაწყისში ხსენებულ სამი პრობლემების დასმით, მომავლის უმაღლეს მათემატიკას განვითარების გზა დაუსახეს; გარდა ამისა უნდა აღინიშნოს ჰიპოკრატესის ის დიდი ღვაწლი, რაც გამოიხატება მის მიერ გეომეტრიის პირველ სახელმძღვანელოს შედგენაში. დიდი ფილოსოფოსი არისტოტელეც (384 — 322) დაინტერესებული იყო მათემატიკური მეცნიერებით და მისი ლოღიკური წესები განსაკუთრებით მარტივ და ზუსტ გამოყენებას პოულობდნენ მათემატიკაში. არისტოტელემ ასეთი აზრი გამოსთქვა მათემატიკის შესახებ: „მათემატიკა განზე სტოვებს სითბოს, სიმძიმეს და სხვა „გრძნობითი წინააღმდეგობებს" და

მხედველობაში აქვს „მხოლოდ რაოდენობითი" . . . „ასეთივე ნაირად შეეფარდება ის არსებულსაც".

პითაგორელებისა და პლატონის იდეალიზმის წინააღმდეგ ბრძოლაში არისტოტელე მათემატიკის მატერიალისტურად გაგების კონტურს სახავს. თუ პითაგორი და პლატონისათვის რიცხვი „ცალკე არსებას" წარმოადგენდა, არისტოტელესათვის კი რიცხვი რეალობისაგან აბსტრაქციას წარმოადგენს.

§ 4. **ევკლიდე.** პელოპონესის ომის შემდეგ საბერძნეთის დედაქალაქი და სამეცნიერო კულტურის ცენტრი — ათინა დაქვეითებისაკენ გაექანა. ქერონესის ბრძოლის (338 წ. ჩვენს ერამდე) შემდეგ ათინას სიძლიერეს სამუდამოდ ბოლო მოეღო. ამის შემდეგ სამეცნიერო ცენტრი ათინიდან ალექსანდრიაში გადადის. ალექსანდრე მაკედონელმა, რომელმაც მსოფლიოს დაპყრობა განიზრახა და დაარსა იმპერია მაკედონიიდან ინდოეთამდე და კასპიიდან ნილოსის ჩანჩქერამდე, თავისი იმპერიის დედაქალაქი, ალექსანდრია, ეგვიპტეში დაარსა. მაგრამ ალექსანდრე მაკედონელის იმპერია ძალიან მალე დაინგრა და ეგვიპტე ცალკე სახელმწიფოდ ჩამოყალიბდა; დედაქალაქად ისევ ალექსანდრია დარჩა. ის აღმოსავლეთსა და დასავლეთს შორის ვაჭრობის ცენტრი შეიქმნა. ალექსანდრიაში დაარსდა მუზეუმი, სადაც მეცნიერებს საშუალება ჰქონდათ მეცნიერული კვლევაძიების წარმოებისა; ალექსანდრია გახდა მეცნიერების ისეთ დიდ ცენტრად, საიდანაც მთელ მსოფლიოში ცოდნის სხივები იფანტებოდნენ. იქ ევკლიდეს მეთაურობით მეტად ძლიერი მათემატიკური სკოლა ჩამოყალიბდა. ამრიგად, როგორც კანტორი ამბობს გეომეტრია, გაძლიერებული და მომწიფებული დაბრუნდა იმ ქვეყანაში (ეგვიპტეში), სადაც ის წარმოიშვა („Gereift ùnd gekräftigt kehrte die Methematik nach dem Lande ihres entstehens zurük".)*

ევკლიდეს ცხოვრების შესახებ ჩვენ ცოტა რამ ვიცით; ის ალექსანდრიაში მოღვაწეობდა დაახლოებით 300-იან წლებში (ჩვენს ერამდე). ზოგი ამბობს, რომ ევკლიდე საბერძნეთიდან გადასახლდა ალექსანდრიაში იქ მათემატიკურ სკოლის დასაარსებლად მიწვევის გამო, ზოგი კი ამბობს, რომ ის ეგვიპტეში დაიბადაო. ევკლიდეს შრომების კომენტატორი პროკლოსის (V საუკუნე, ჩვენი ერა) ნაწერიდან ვიცით, რომ ეგვიპტის მეფემ, პტოლომეოსმა მოისურვა გეომე-

* Cantor. I, გვ. 222.

ტრიის შესწავლა, ევკლიდეს შრომების საშუალებით, მაგრამ ეს მას მეტად გაუძნელდა; ფუფუნებასა და საპატიო საშუალებებს დაჩვეული მეფე ევკლიდეს ეკითხება, არსებობს თუ არა უფრო ადვილი და მოკლე გზა გეომეტრიის შესასწავლად, გარდა მისი წიგნისა. მეფე ევკლიდესაგან შემდეგი პასუხს ღებულობს: მეფევ!, მეფეებისათვის

ევკლიდე

განსაკუთრებული გზები გეომეტრიაში არ არის“ (ὠ βασiλευ, μὴ εστi βασλiκή ατραποζ προζ γεωμετρiαν.).

ერთ დროს ურევდნენ ერთი მეორეში ევკლიდე-მათემატიკოსს და ევკლიდე-ფილოსოფოსს, რომელიც მეგარაში ცხოვრობდა პირველზე ერთი საუკუნით ადრე.

ჩვენამდე მოაღწიეს ევკლიდეს შემდეგ შრომებმა:

1. „ელემენტები". 2. „Data" (დატა). 3. „ნაკვეთების დაყოფის შესახებ". 4. ასტრონომიული ტრაქტატი „Phaenomena", და 5. „ოპტიკა".

დაკარგულია შრომები: 1. ოთხი წიგნი „კონიური კვეთების" შესახებ, 2. ორი წიგნი „ზედაპირული ადგილების" შესახებ. 3. „ფორიზმები" და 4. „ყალბი დასკვნების" შესახებ.

„ელემენტები" შედგება 15 წიგნისაგან, რომელთაგან მე-14-ე და მე-15-ე წიგნი ევკლიდეს მიერ არ არის დაწერილი; ისინი დასწერა ალექსანდრიის სკოლის მათემატიკოსმა, ჰიპსიკლემ, რომელიც ცხოვრობდა დაახლოებით 150 წელს ჩვენს ერამდე. ელემენტები დაყოფილია ოთხ ნაწილად; პირველი ნაწილი, რომელსაც პირველი ექვსი წიგნი შეადგენს, პლანიმეტრიას ეხება; მეორე ნაწილი (მე-7-ე, მე-8-ე და მე-9-ე წიგნი), არითმეტიკას შეიცავს; მესამე ნაწილში (მე-10-ე წიგნი), დამუშავებულია თანზომადი და არათანზომადი წირების საკითხი, და მეოთხე ნაწილი, უკანასკნელი ხუთი წიგნისაგან შემდგარი, სტერეომეტრიას შეიცავს.

როგორც პროკლოსი ამბობს, ევკლიდემ მანამდე არსებულ გეომეტრიულ შრომებს თავი მოუყარა, დაალაგა ისინი გარკვეული სისტემით და მკაცრად დაამტკიცა ის, რაც მანამდე სუსტად იყო დამტკიცებული.

ელემენტების სხვადასხვა წიგნებში მოყვანილია ის განსაზღვრები, პოსტულატები და აქსიომები, რომლებიც ევკლიდეს გეომეტრიულ ჰიპოტეზებს შეიცავენ და რომლებზედაც ევკლიდემ გეომეტრია დააფუძნა. იმისათვის რომ მკითხველს მიეცეს საშუალება „ელემენტების" დაწერილებით გაცნობისა, ჩვენ ახლა განვიხილავთ თითოეულ წიგნს ცალ-ცალკე.

პირველი წიგნი. დასაწყისში მოთავსებულია შემდეგი განსაზღვრები:* 1. წერტილი არის, ის რასაც ნაწილები არა აქვს. 2. წირი არის სიგრძე უგანოდ. 2. წირის ბოლოები წერტილებია. 4. წრფე წირი არის ის, რომელიც თავის წერტილების მიმართ ერთნაირად მდებარეობს. 5. ზედაპირი არის ის, რომელსაც მხოლოდ სიგრძე და სიგანე აქვს. 6. ზედაპირის ბოლოები წირებია. 7. ბრტყელი ზედაპირი არის ის, რომელიც მასზე მდებარე ყველა წრფე წირების მიმართ ერთნაირად მდებარეობს. 8. ბრტყელი კუთხე არის ერთი

* **Начала Евклида**, გვ. 85—87.

მეორეს მიმართ დახრა ისეთი წირებისა, რომლებიც ერთი მეორეს სიბრტყეში შეხვდებიან და სხვადასხვა მიმართულება აქვთ. 9. თუ წირები, რომლებიც კუთხეს სიბრტყეზე ჰქმნიან, წრფეწირებია, მაშინ კუთხეს წრფეწიროვანი ეწოდება. 10. თუ წრფე, რომელიც მეორე წრფეს შეხვდება, მასთან ორ მოსაზღვრე ტოლკუთხეს ჰქმნის, მაშინ, თითოეული ამ კუთხეთაგანი მართი კუთხეა და წრფეს, რომელიც მათ ჰქმნის, მეორე წრფისადმი პერპენდიკულარი ეწოდება. 11. ბლაგვი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელიც მართ კუთხეზე მეტია. 12. მახვილი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელიც მართ კუთხეზე ნაკლებია. 13. რამეს ბოლოს ზღვარი ეწოდება. 14. ფიგურა ეწოდება იმას, რაც ერთი ან რამოდენიმე ზღვრებითაა შემოსაზღვრული. 15. წრე არის ბრტყელი ფიგურა, შემოსაზღვრული ისეთი წირით, რომელსაც ეწოდება წრეწირი და რომლის შიგნით მდებარე წერტილიდან მისკენ გავლებული ყველა რადიუსებად წოდებული წრფეწირები ტოლნი არიან. 16. ამ წერტილს წრის ცენტრი ეწოდება. 17. წრის დიამეტრი არის ცენტრიდან გავლებული და ორივე მხრიდან წრეწირით შემოსაზღვრული წრფე: ეს წრფე წრეს შუაზე ყოფს. 18. ნახევარი წრე არის ფიგურა, შემოსაზღვრული დიამეტრითა და წრეწირის ტოლი ნაწილებით, რომლებად ეს დიამეტრი წრეწირს ყოფს. 19. სეგმენტი არის ფიგურა შემოსაზღვრული წრფითა და წრეწირის ერთერთი არა ტოლ ნაწილით, რომლებად ეს წრფე წრეწირს ყოფს. 20. წრფეწიროვანი ფიგურა არის ის, რომელიც წრფეწირებითაა შემოსაზღვრული. 21. სამგვერდიანი ფიგურა არის ისეთი, რომელიც სამი წრფეწირით არის შემოსაზღვრული. 22. ოთხგვერდიანი ფიგურა არის ისეთი, რომელიც ოთხი წრფეწირით არის შემოსაზღვრული. 23. მრავალგვერდიანი ფიგურა არის ისეთი რომელიც ოთხი წრფეწირზე უფრო მეტით არის შემოსაზღვრული. 24. სამგვერდიან ფიგურათა შორის ტოლგვერდიანი სამკუთხედი ისეთს ეწოდება, რომლის ყველა გვერდი ტოლნი არიან. 25. ტოლფერდიანი სამკუთხედი იმას ეწოდება, რომლის ორი გვერდი ტოლნი არიან. 26. სხვადასხვა გვერდიანი სამკუთხედი ისეთს ეწოდება, რომლის ყველა გვერდი უტოლო არიან. 27. მართკუთხოვანი სამკუთხედი ის არის, რომლის ერთი კუთხე მართია. 28. ბლაგვკუთხოვანი სამკუთხედი არის ის, რომლის ერთი კუთხე ბლაგვია. 29. მახვილკუთხოვანი სამკუთხედი არის ის, რომლის ყველა სამი კუთხე მახვილია. 30. კვადრატი არის ოთხგვერდა, რომლის ყველა გვერ-

დი ტოლნი არიან და კუთხეები მართნი. 31. რომბი არის ოთხკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი ტოლნი არიან, მაგრამ კუთხეები არ არიან მართნი. 32. პარალელოგრამი არის ოთხკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები და მოპირდაპირე კუთხეები არიან ტოლნი, მაგრამ არა მართნი. 33. ყველა დანარჩენ ოთხგვერდიან ფიგურას ტრაპეცია ეწოდება. 34. პარალელური წრფეწირები არიან ისეთები, რომლებიც იმყოფებიან რა ერთ სიბრტყეზე და ორივე მხრივ ნებისმიერ შორს გაგრძელებულნი არასოდეს ერთმანეთს არ შეხვდებიან.

ახლა საჭიროდ მიმაჩნია ორიოდე შენიშვნის გაკეთება ზემოთმოყვანილ განსაზღვრების შესახებ. წერტილის, წირისა და ზედაპირის განსაზღვრებიდან ნათლად არ ჩანს, თუ როგორ უნდა მივიდეთ მათ ცნებამდე; მაგრამ უნდა აღვნიშნოთ რომ ისინი მხოლოდ და მხოლოდ ჰიპოტეზები არიან, რომლებზედაც უნდა აიგოს შემდეგში უფრო რთული გეომეტრიული ცნებები; ისინი გულისხმობენ, რომ ჩვენ ის ცნებები დაუფლებული გვაქვს და გვესმის, თუ რას ნიშნავს წერტილისადმი 0 განზომილების მიწერა, წირისადმი 1 განზომილების, ზედაპირისადმი ორი განზომილების; ნაგულისხმევია აგრეთვე, რომ ჩვენ გვესმის, რომ წირი წერტილების გეომეტრიული ადგილია და ზედაპირი—წირების გეომეტრიული ადგილია. წრფისა და სიბრტყის განსაზღვრა ბუნდოვანია. წრფის განსაზღვრას წრეც აკმაყოფილებს; ევკლიდეს სურს წრფის განსაზღვრით აგვიწეროს ცდით მოცემული მისი ფორმა ჩვენს სივრცეში, ამიტომ მას გეომეტრიული მნიშვნელობა არა აქვს.

წრის დიამეტრის განსაზღვრაში ნათქვამია, რომ ის არა მარტო ცენტრს გაივლის, არამედ წრეს შუაზე ყოფს; ეს უკანასკნელი დამატება ზედმეტია. კუთხის განსაზღვრაც უშინაარსოა.

განსაზღვრების შემდეგ ევკლიდეს მოჰყავს პოსტულატები:

1. ერთ რომელიმე წერტილიდან მეორემდე წრფეწირი შეიძლება გაყვანილ იქმნას.

2. განსაზღვრული წრფის განუსაზღვრელად გაგრძელება შეიძლება.

3. რომელიმე წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან ნებისმიერი რადიუსით წრის შემოწერა შეიძლება.

4. ყველა მართი კუთხე ერთიმეორის ტოლია.

5. თუ წრფე წირი, რომელიც სხვა ორ წრფეს გადაკვეთს, ერთ

და იმავე მხრით შექმნის შინაგან კუთხეებს, რომელთა ჯამი ორ მართზე ნაკლებია, მაშინ ეს უკანასკნელი ორი წრფე წირი გადაკვეთენ ერთ-მეორეს თავიანთ გაგრძელებაზე იმ მხრით, სადაც კუთხეთა ჯამი ორ მართზე ნაკლებია.

„ელემენტების“ ადრინდელ გამოცემებში მე-4 და მე-5 პოსტულატები მოთავსებულია აქსიომებში (მე-10 და მე-11). ამ შეცდომის დამნაშავედ გამომცემლებს სთვლიან და „ელემენტების“ უკანასკნელ გამოცემებში ეს შეცდომა გამოსწორებულია.

აქსიომები, ევკლიდეს ჩამოყალიბებული აქვს შემდეგნაირად:

1. სიდიდეები, რომლებიც ერთ და იმავე სიდიდის ტოლნი არიან, ერთი მეორის ტოლნი არიან.

2. თუ ტოლ სიდიდეებს ტოლი სიდიდეები მიუმატეთ, ტოლ ჯამებს მივიღებთ.

3. თუ ტოლ სიდიდეებს ტოლ სიდიდეებს გამოვაკლებთ, ტოლ ნაშთებს მივიღებთ.

4. თუ უტოლო სიდიდეებს ტოლ სიდიდეებს მიუმატებთ, უტოლო ჯამებს მივიღებთ.

5. თუ უტოლო სიდიდეებს ტოლ სიდიდეებს გამოვაკლებთ, უტოლო ნაშთებს მივიღებთ.

6. ერთ და იმავე სიდიდის ორმაგი სიდიდეები ტოლნი არიან.

7. ერთი და იმავე სიდიდის ნახევრები ერთი მეორის ტოლნი არიან.

8. სიდიდეები, რომლებიც ერთი მეორეზე დადებით შეთავსდებიან, ერთი მეორის ტოლნი არიან.

9. მთელი თავის ნაწილზე მეტია.

10. ორ წრფეწირს სივრცის შემოსაზღვრა არ შეუძლია.

ახლა საჭიროა გავარკვიოთ, თუ რას უწოდებს ევკლიდე პოსტულატებს და რას უწოდებს აქსიომებს.

ყოველი ამოცანა, რომელიც წინამორბედ ამოცანათა ამოხსნას ეყრდნობა, აუცილებლად გულისხმობს რაღაც წინასწარ პირველად აგებულებას, რომლის შესრულების შესაძლებლობა ცნობილად ითვლება; სწორედ ასეთ პირველად აგებულებებს ევკლიდე პოსტულატებს, ანუ მოთხოვნილებებს უწოდებს. ასეთივე ნაირად თეორემები, რომელთა დამტკიცებები წინამორბედ თეორემებს და ამოცანებს ეყრდნობიან, აუცილებლად გულისხმობენ რაღაც პირველად მტკიცებას, რომლის სიჭეშმარიტე უშუალოდ თვალსაჩინოდ ითვლება; ევკლიდე

ამ მტკიცებას—ზოგად დაშვებას (Κoίναι ἔννoίαι) უწოდებს. შემდეგში მათემატიკოსებმა და ფილოსოფოსებმა ევკლიდეს ამ უკანასკნელი ტერმინის ნაცვლად სიტყვა „აქსიომა“ (ἀξίωματα) შემოიღეს ხმარებაში.

მტკიცება, რომ ყველა მართი კუთხე ტოლია, პოსტულატებში მოათავსეს (მეოთხე). წინათ მას შეცდომით აქსიომებში ათავსებდნენ; ახლა საჭიროა ავხსნათ, თუ რატომ გადმოიტანეს ის აქსიომებიდან პოსტულატებში;

მე-8-ე აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ თუ კუთხეები ერთი მეორეზე დადებით შეთავსდებიან, მაშინ ისინი ტოლნი არიან, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ტოლნი არ არიან. ამრიგად ყველა მართკუთხეთა ტოლობის შესახებ მტკიცება იგივეა, რაც მტკიცება, რომ ყველა მართი კუთხე ერთი მეორეზე დადებით თანამთხვეული იქნებიან. მაგრამ მე-10 განსაზღვრის თანახმად მართი კუთხე ის კუთხეა, რომელიც მისი მოსაზღვრე კუთხის ტოლია; ამიტომ მე-4-ე პოსტულატას არსი იმ მტკიცებამდე დაიყვანება, რომ წრფისა და მისი გაგრძელების მიერ შექმნილ კუთხეს განსაზღვრული სიდიდე აქვს ან და, რომ რომელიმე მოცემულ წრფის ერთი რომელიმე ბოლოდან გაგრძელება განსაზღვრულია ცალსახად.* ევკლიდეს, მეოთხე პოსტულატით რომ მართლაც ამის თქმა უნდოდა, ჩვენ დავრწმუნდებით პირველ წიგნში მოთავსებული მე-14 წინადადების დამტკიცებიდან. ეს წინადადება შემდეგია:

თუ ორი BC და BD წრფე AB წრფესთან B წერტილში ABC და ABD მოსაზღვრე კუთხეებს ჰქმნიან, რომელთა ჯამი ორი მართი კუთხის ტოლია, მაშინ BD და BC წრფეები — ერთ CD წრფეს ჰქმნიან (ნახ. 11).

*დამტკიცება.*** მართლაც. BC წრფის გაგრძელება რომ BD არ ყოფილიყო. მაშინ მაგალითად, BE იქნებოდა გაგრძელება. ასეთი დაშვების შემდეგ გვექნება (მე-13-ე თეორემის ძალით):

$$\angle CBA + \angle ABE = 2d,$$

---

* Цейтен, გვ. 91.

** ამ წიგნში ევკლიდეს თეორემების დამტკიცება გადმოცემულია მისი მსჯელობის შენარჩუნებით.

მაგრამ თანახმად თეორემისა გვაქვს

$$\angle ABC + \angle ABD = 2d$$

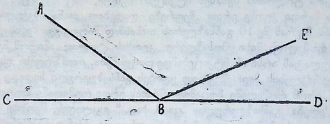
მაშასადამე (პირველი აქსიომისა და მეოთხე პოსტულატის თანახმად,

$$\angle ABC + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABE$$

თუ ორივე ნაწილს ABC კუთხეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ:

$$\angle ABD = \angle ABE$$

რაც შეუძლებელია (მეცხრე აქსიომის ძალით). მაშასადამე, BE არ შეიძლება BC წრფის გაგრძელება იყოს. ასეთივე მსჯელობა შეიძ-



ნახ. 11.

ლება გამოყენებულ იქმნას ყოველი სხვა წრფის მიმართ, რომელიც BD-საგან განსხვავდება. მაშასადამე BC და BD წრფეები ერთი მეორეს გაგრძელება არიან.

ამრიგად, მეოთხე პოსტულატი მხოლოდ მეორეს დამატებას წარმოადგენს და ადასტურებს იმას, რომ მეორე პოსტულატის ძალით წრფის გაგრძელების მოძებნა ცალსახაა.

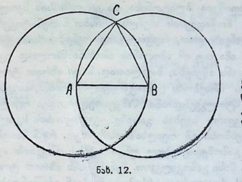
რაც შეეხება ევკლიდეს მე-5-ე პოსტულატს, საჭიროდ მიმაჩნია აღვნიშნო, რომ მრავალი მათემატიკოსი ცდილობდა მის დამტკიცებას; მაგრამ ცდა იმისა, რომ ეს პოსტულატი გამოეყვანათ ევკლიდეს გეომეტრიის სხვა აქსიომებიდან, ყოველთვის უშედეგოდ მთავრდებოდა. მეხუთე პოსტულატი შეიძლება კიდევ შემდეგი ფორმაში გამოისახოს: მოცემულ წრფის გარეთ სიბრტყეზე მდებარე მოცემულ წერტილზე შეიძლება გავავლოთ მხოლოდ ერთი წრფე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ შეხვდება. პირველი წიგნი შეიცავს 48 წინადა-

დებას, რასაც ჩვენ ახლა თეორემას (ამოცანას, ანუ პრობლემას), უწოდებთ და რასაც ევკლიდე — პროტაზისს (Πρότασις) უწოდებს. საკითხმა იმის შესახებ, თუ რამდენად შეიძლება მათემატიკური ჭეშმარიტების განხილვა როგორც თეორემისა და რამდენად როგორც პრობლემისა, დავა გამოიწვია პლატონისა და ევდოქსოსის სკოლათა შორის. პლატონის მოწაფეების თვალსაზრისით მათემატიკური ჭეშმარიტებანი უნდა განვიხილოთ, როგორც თეორემები; ისინი ეყრდნობოდნენ იმას, რომ ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნა მხოლოდ უკვე წინასწარ არსებულ საგანს აწესებს; მაგალითად, მათი აზრით ტოლგვერდიანი სამკუთხედი არსებობს დამოუკიდებლად იმისა, ააგებენ მას თუ არა, ვინაიდან ტოლგვერდიანი სამკუთხედის იდეა რეალურად არსებობს ყოველგვარი აგების გარეშე. ევდოქსოსის სკოლის წარმომადგენელი, მენეხმოსი იმ თვალსაზრისის იყო, რომ მათემატიკური ჭეშმარიტება გამომჟღავნებულ უნდა იქმნას ნაკვთის აგების საშუალებით ან და მისი გამოკვლევით. მენეხმოსის აზრით ტოლგვერდიანი სამკუთხედის რეალურად არსებობაში ჩვენ ვრწმუნდებით მხოლოდ იმის შემდეგ, როდესაც მას ავაგებთ და იმავე დროს დავამტკიცებთ, რომ ამ აგებამ დასახულ მიზნამდე მიგვიყვანა. სწორედ ასე შვრება ევკლიდეც, მიუხედავად იმისა, რომ მას თეორემები და პრობლემები გაერთიანებული აქვს ერთ სახელწოდებაში (წინადადებაში) და მის „ელემენტებში“ თეორემები და პრობლემები ერთიმეორის გვერდით იმყოფებიან, ის არ კმაყოფილდება ტოლგვერდიანი სამკუთხედის განსაზღვრით; სანამ იმით სარგებლობას დაიწყებდეს, ის რწმუნდება მის არსებობაში თავისი პირველი წიგნის პირველი წინადადებების საშუალებით, რომელშიც მან ტოლგვერდიანი სამკუთხედის აგების ამოცანა ამოხსნა; ეს წინადადება შემდეგში მდგომარეობს:

მოცემულ განსაზღვრულ წრფეზე ავაგოთ ტოლგვერდიანი სამკუთხედი (ნახ. 12).

ამოხსნა. A წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, AB რადიუსით შემოვწეროთ წრე BCD; B წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, იმავე AB რადიუსით შემოვწეროთ წრე ACE. C წერტილიდან, რომელშიც ორივე წრეები გადაიკვეთებიან, გავავლოთ A და B წერტილებისკენ CA და CB წრფეები. სამკუთხედი ABC იქნება ის, რომელიც უნდა ავაგოთ.

ტოლგვერდიანი სამკუთხედის აგების შემდეგ ევკლიდე ამტკიცებს ამ აგების სისწორეს: მართლაც, ჩვენ გვაქვს AC=AB და BC=BA საიდანაც AC = BC მაშასადამე AB-ზე აგებული სამკუთხედი ტოლგვერდიანია. ასეთი მეთოდით სარგებლობს ევკლიდე შემდეგშიც; მაგალითად, პირველი წიგნის მეათე თეორემაში აგების საშუალებით ამტკიცებს წრფეწირის შუა წერტილის არსებობას. ეს თეორემა შემდეგია:



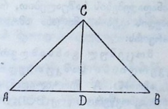
ნახ. 12.

განსაზღვრული AB წრფე გავყოთ ორ ტოლ ნაწილად (ნახ. 13).

ამოხსნა. AB-ზე ავაგოთ ტოლგვერდიანი სამკუთხედი ABC. კუთხე ACB გავყოთ DC წრფის საშუალებით ორ ტოლ ნაწილად. DC წრფე AB წრფეს შუაზე გაყოფს D წერტილში. მართლაც, ACD და BCD სამკუთხედებში, CD გვერდი საერთოა, AC=CB და ∠ACD= =∠BCD, მაშასადამე AD=BD.

მხოლოდ წრფის შუა წერტილის არსებობის დამტკიცების შემდეგ სარგებლობს ევკლიდე ამ შუა წერტილით; მაგალითად, პირველი წიგნის მეთექვსმეტე წინადადებაში, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

თუ ABC სამკუთხედში რომელიმე მის გვერდს, მაგალითად, BC-ს გავაგრძელებთ, მაშინ სამკუთხედის გარეგანი ACD კუთხე თითოეული მის შინაგან, არამოსაზღვრე CBA და BAC კუთხეებზე, მეტი იქნება (ნახ. 14.).

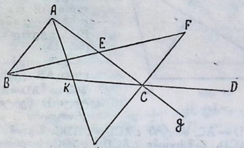


ნახ. 13.

დამტკიცება. AC გვერდი E წერტილში შუაზე გავყოთ (მეათე თეორემის ძალით).

B შევაერთოთ E-სთან და გავაგრძელოთ BE წრფე ისე, რომ $BE=EF$. FC წრფით F შევაერთოთ C-სთან. ვინაიდან $AE=EC$, $BE=EF$ და $\angle AEB=\angle FEC$, ამიტომ $\angle BAE=\angle ECF$. მაგრამ $\angle ACD>\angle ECF$, მაშასადამე

$$\angle ACD>\angle BAC.$$



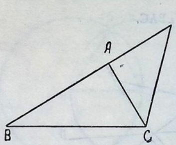
ნახ. 14.

თუ BC გვერდს შუაზე გავყოფთ და AC-ს გავაგრძელებთ, ასეთივე ნაირად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ

$$\angle BCg=\angle ACD>\angle ABC.$$

ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებისათვის გეომეტრიული აგების ძირითადი მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობდა, რომ დაემტკიცებიათ იმ ობიექტის რეალური არსებობა, რომლის გამოსახვამდი ეს აგება მიიყვანდა. აგების ეს როლი განსაკუთრებით მჟღავნდება იმ შემთხვევაში, როდესაც ზოგადი სახით დასმული რომელიმე ამოცანა ყოველთვის შესაძლო არ აღმოჩნდება, არამედ შესაძლებლობისათვის ის სპეციალურ პირობებს მოითხოვს. ასეთ შემთხვევებში ბერძნები ჯერ ამ პირობების აუცილებლობას ამტკიცებენ თეორემის დამტკიცებით, რომ განსახილველ ნაკვთს ყოველთვის აქვს თვისებები, რომლებსაც შესაძლებლობის პირობები მოითხოვენ. შემდეგ ისინი იმ ამოცანის საშუალებით, რომელიც უჩვენებს თუ როგორ უნდა იქმნას ნაკვთი აგებული პირობების შესრულებულის შემთხვევა-

ში, ამტკიცებენ, რომ ეს აუცილებელი პირობები იმავე დროს საკმარისი არიან. ამის მაგალითს წარმოადგენს „ელემენტების" პირველი წიგნის მე-20 და მე-22 წინადადება. მე-20 წინადადებაში ნათქვამია:



ნახ. 15.

ყოველ ABC სამკუთხედში რომელიმე ორი AB და AC გვერდების ჯამი მესამე BC გვერდზე მეტია (ნახ. 15).

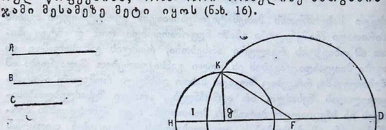
დამტკიცება: გავაგრძელოთ AB გვერდი და მოვზომოთ $AD=AC$; C წერტილი D წერტილთან შევაერთოთ.

ვინაიდან $AD=AC$, ამიტომ $\angle ACD=\angle ADC$. მაგრამ $\angle BCD>\angle ACD$, მაშასადამე $\angle ACD>\angle ADC$, საიდანაც $BD>BC$, ე. ი. $BA+AC>BC$. ამგვარადვე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$AB+BC>AC \text{ და } BC+AC>AB.$$

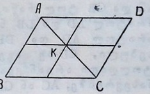
მე-22-ე თეორემა კი შემდეგია:

ავაგოთ სამკუთხედი, რომლის გვერდები ტოლი უნდა იყოს სამ მოცემულ A, B და C ისე განსაზღვრულ წრფეებისა, რომ ორი რომელიმე მათგანის ჯამი მესამეზე მეტი იყოს (ნახ. 16).



ნახ. 16.

ამოხსნა. გავავლოთ წრფე DH, რომელიც D-დან იწყება და H წერტილის მხრით განუსაზღვრელად გრძელდება. ავიღოთ DF = A; FG = B, GH = C. F წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, DF-ის ტოლი რადიუსით DKI წრე შემოვწეროთ. G წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, GH-ის ტოლი რადიუსით, KLH წრე შემოვწეროთ, რომელიც DKI წრეს K წერტილში გადაკვეთს. შევაერთოთ F-თან K და K — G-სთან; მიღებული △ KFG საძებნი სამკუთხედი იქნება. მართლაც, FD = FK; მაგრამ FD = A; მაშასადამე, FK = A. ასევე GK = GH, მაგრამ GH = C; მაშასადამე, GK = C. გარდა ამისა, გვაქვს FG = B, მაშასადამე, FGK სამკუთხედის გვერდები მოცემული A, B და C წრფეები არიან. მე-43-ე თეორემაში დამტკიცებულია, რომ ABCD პარალელოგრამში (ნახ. 17) ფართ. პარალელოგრამი BK = ფართ. პარალ. DK.



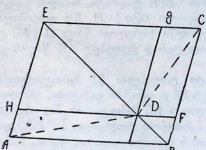
ნახ. 17.

ეს წიგნი მთავრდება პითაგორის თეორემით, რომელიც გნომონის შესახებ მე-43 თეორემასთან ერთად, გეომეტრიულ ალგებრის საფუძველს წარმოადგენს.

მეორე წიგნის დასაწყისში მოთავსებულია ორი განსაზღვრა:

1. ყოველ მართკუთხოვან პარალელოგრამის შესახებ ამბობენ, რომ ის მოთავსებულია ორ გვერდს შორის, რომლებიც მართკუთხეს ჰქმნიან.

2. გნომონი ანუ ეკერი ისეთ ABCgDH ნაკვთს (ნახ. 18.) ეწოდება, რომელიც შედგენილია AD და DC დიაგონალებზე აგებულ პარალელოგრამებისაგან.



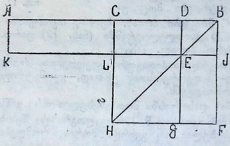
ნახ. 18.

ამ განსაზღვრების გარდა ეს წიგნი 14 წინადადებას შეიცავს.

ევკლიდე ამ წიგნში სხვადასხვა კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნის საკითხს განიხილავს გეომეტრიუ-

ლი ალგებრის მეთოდით, საშუალო პროპორციულის მოძებნისა და პროპორციათა თეორიის გამოყენების გარეშე. კვადრატული განტოლება, რომელსაც ჩვენ თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ასე გამოვსახავთ: $ax - x^2 = b^2$, ევკლიდეს ამოხსნილი აქვს ზოგადად მეხუთე წინადადებაში, რომელსაც გამოსთქვამს შემდეგნაირად:

თუ AB წრფეწირი C წერტილში დაყოფილია ორ AC და CB ტოლ ნაწილად და D წერტილში კი ორ არატოლ AD და DB ნაწილად, მაშინ მართკუთხი, არატოლ AD და DB ნაწილებს შორის მოთავსებული, CD-ზე აგებულ კვადრატთან ერთად, ტოლდიდი არიან კვადრატისა, რომელიც AB წრფის ნახევრებზე, AC ან CB-ზე არის აგებული (ნახ. 19).



ნახ. 19.

დამტკიცება: CB-ზე ავაგოთ CBFH კვადრატი, რომლის დიაგონალია BH. D წერტილში გავავლოთ $DEg \parallel CH$. BH დიაგონალის Dg-სთან გადაკვეთის E წერტილში გავავლოთ წრფე $IL \parallel BC$ და გავაგრძელოთ ის CH-ის პარალელურად გავლებულ AK წრფის გადაკვეთამდე.

ვინაიდან CE მართკუთხედი ტოლდიდია EF მართკუთხედისა, ამიტომ თუ მივუმატეთ ორივეს BE კვადრატის ფართობი, ვიპოვით, რომ DF მართკუთხედი ტოლდიდია BL მართკუთხის. მაგრამ რადგანაც $AC = CB$, ამიტომ AL მართკუთხი ტოლდიდია DF მართკუთხის. მაშასადამე, AE მართკუთხის ფართობი = ფართ. მართ. CE + ფართ. მართ. DF, ე. ი.

$$AD \cdot DE = CD.\ DE + BF \cdot BD,$$

ანუ

$$AD \cdot BD = CD.\ BD + BC \cdot BD.$$

საიდანაც:

$$AD \cdot DB + CD^2 = CB^2.$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ $AD \cdot DB = b^2$, $AB = a$ $DB = x$, მაშინ მივიღებთ:

$$b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

სადაც

$$\frac{a}{2} - x = CD \text{ და } \frac{a}{2} = CB.$$

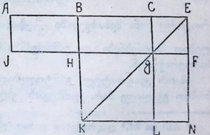
საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$b^2 = ax - x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

შემდეგ, პითაგორის თეორემის საშუალებით მოძებნიდნენ $\frac{a}{2} - x$ სხვაობას და რადგანაც a მოცემულია, ამიტომ x-ს ადვილად იპოვნიდნენ.

მე-6 წინადადებაში ევკლიდე $ax + x^2 = b^2$ სახის კვადრატული განტოლების ამოხსნას იძლევა. ეს წინადადება შემდეგში მდგომარეობს:

თუ AC წრფეს B წერტილში შუაზე გავყოფთ და მას რომელიმე CE ნაკვეთს მივუმატებთ, მაშინ მართკუთხედი, რომლის გვერდებია AE და EF = CE, AC-ს ნახევარზე აგებულ კვადრატთან ერთად, ტოლდიდია იმ კვადრატისა, რომელიც BE წრფეზეა აგებული (ნახ. 20).



ნახ. 20.

დამტკიცება. BE-ზე ავაგოთ BENK კვადრატი და გავავლოთ EK დიაგონალი. C წერტილზე გავავლოთ CL ∥ BK. EK დიაგონალის CL-თან გადაკვეთის g წერტილზე გავავლოთ FH ∥ BE და გავაგრძელოთ ის A წერტილზე BK წრფის პარალელურად გავლებულ AI წრფის გადაკვეთამდე.

ადვილად დავინახავთ რომ $BE^2=BC^2+$ ფართ. მართ. BF + ფარ. მართ. gN. მაგრამ, ვინაიდან

ფარ. მართ. Bg = ფართ. მართ. gN = ფართ. მართ. AH,

ამიტომ

ფართ. მართ. BF + ფართ. მართ. gN = ფართ. მართ. $AF=AE\cdot CE$.

მაშასადამე,

$$AE\cdot CE=BE^2-BC^2\,*. \qquad (1)$$

უკანასკნელი ტოლობა დავწეროთ ასეთი სახით:

დავუშვათ, რომ $AE\cdot CE=b^2$; $CE=x$; $AC=a$ მაშინ (1)-დან მივიღებთ:

$$b^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

სადაც

$$\frac{a}{2}+x=BE;\ \frac{a}{2}=BC.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$b^2=ax+x^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

როგორც წინა შემთხვევაში $\frac{a}{2}+x$ პითაგორის თეორემის საშუალებით მოიძებნება, და ვინაიდან a მოცემულია, x-ს ადვილად განსაზღვრავდნენ.

ამ ორ კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნის მეთოდზე დაყრდნობით ევკლიდე მართკუთხედის კვადრატად გარდაქმნას აწარმოებს

---

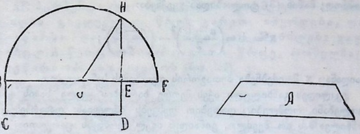
* BE^2 და BC^2 კვადრატების ფართობებს ნიშნავს და $AE\cdot CE$ — კი მართკუთხის ფართობს.

საშუალო პროპორციულობის გამოუყენებლად. ამ საკითხს მიძღვნილი აქვს მე-14 წინადადება:

ავაგოთ კვადრატი, მოცემული A წრფეწიროვანი ნაკვთის ტოლდიდი (ნახ. 21).

ამოხსნა: ავაგოთ BD მართკუთხედი, მოცემული A ნაკვთის ტოლდიდი. BE გავაგრძელოთ F წერტილამდე ისე, რომ იყოს EF=ED; BF წრფე g წერტილში შუაზე გავყოთ და g წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, gB რადიუსით BHF წრეწირი შემოვწეროთ. გავაგრძელოთ წრესთან შეხვედრამდე H წერტილში, მაშინ HE კვადრატი იქნება ნაძებნი კვადრატი.

ეყრდნობა რა ამავე წიგნის მე-5 თეორემას, ევკლიდე ამტკიცებს ამ აგების სისწორეს.



ნახ. 21.

g წერტილში BF წრფე შუაზეა გაყოფილი, E წერტილში კი ის გაყოფილია ორ არატოლ ნაწილად, ამიტომ გვაქვს:

$$gF^2=Eg^2+BE\cdot EF=gH^2. \qquad (2)$$

მაგრამ E კუთხე მართია; მაშასადამე,

$$gH^2=Eg^2+EH^2.$$

საიდანაც

$$Eg^2+BE\cdot EF=Eg^2+EH^2.$$

ორივე მხარეს თუ Eg^2-ს გამოვაკლებთ, ვიპოვით:

$$EH^2=BE\cdot EF=BE\cdot ED.$$

ეს გეომეტრიული გარდაქმნა შეესაბამება ალგებრულ განტოლებას $x^2=ab$; მართლაც, (2) ტოლობა დავწეროთ ასეთი სახით:

$$BE\cdot EF=gF^2-Eg^2.$$

ანუ ვინაიდან $EF=ED$, ამიტომ გვექნება:

$$BE\cdot ED=gF^2-Eg^2. \qquad (3)$$

დავუშვათ, რომ $BE=a$, $ED=b$; მაშინ:

$$gF=\frac{a+b}{2},\quad Eg=\frac{a-b}{2}.$$

BD მართკუთხედის ტოლდიდი კვადრატის გვერდი x-ით აღვნიშნოთ; მაშინ (3) ტოლობიდან გვექნება:

$$x^2=ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

საიდანაც x მოიძებნება პითაგორის თეორემის საშუალებით.

ევკლიდეს განხილული აქვს მეორე ხარისხის ყველა სახის განტოლებანი, რომლებიც დადებით ფესვებს იძლევიან; დანარჩენების განხილვა მას არ შეეძლო, ვინაიდან ძველ ბერძნებს უარყოფით სიდიდეებზე არავითარი წარმოდგენა არ ჰქონდათ.

4°. **მესამე წიგნი.** ამ წიგნში მოთავსებული პირველი განსაზღვრა არსებითად თეორემაა, რომლის სისწორე დაუმტკიცებლადაც აშკარაა. ეს განსაზღვრა შემდეგია:

1. ტოლი წრეები ისინი არიან, რომელთა დიამეტრები ტოლნი არიან ანდა რომელთა წრფეები, ცენტრიდან წრეწირამდე გავლებულნი, ტოლნი არიან.

წიგნში სულ 11 განსაზღვრაა მოთავსებული; იმათგან ჩვენ მოვიყვანთ მხოლოდ ნაწილს.

2. ამბობენ, რომ წრფეწირი წრეწირს ეხება, თუ ის მას შეხვდება, მაგრამ თუ გავაგრძელეთ, მას არ გადაკვეთს.

3. ამბობენ, რომ ერთი წრეწირი მეორეს ეხება, თუ ისინი შეხვდებიან, მაგრამ არ გადაიკვეთებიან.

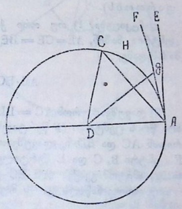
7. სეგმენტის კუთხე არის ის კუთხე, რომელიც რკალსა და წრფეს შორის მოთავსებულია.

11. მსგავსი სეგმენტები ისინია, რომლებში კუთხეები ტოლნი არიან, ან და რომლებიც ტოლ კუთხეებს შეიცავენ.

ხსენებული წიგნი 37 წინადადებას შეიცავს, რომლებშიც ჩამოყალიბებულია წრისა, წრფეების და მათ მიერ წრის შიგნით შექმნილ კუთხეთა თეორია. ყველაზე მეტ ყურადღებას იპყრობს მე-16 წინადადება, რადგან აქ გამოთქმული აზრი XVI-XVII საუკუნეების მათემატიკოსთა შორის საინტერესო დავის საგანი შეიქმნა. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ კუთხე, რომელსაც წრეწირი მხებთან ჰქმნის, წრფეთა შორის მოთავსებულ ყოველ მახვილ. კუთხეზე ნაკლებია. ამით, თუმცა არც ისე აშკარად, გამოთქმულია უსასრულოდ მცირის ცნება. ამის ნათელსაყოფად მივმართოთ თვით წინადადებას:

AE პერპენდიკულარი, წრის დიამეტრის A ბოლოდან გავლებული, წრის გარეთ იმყოფება, და წრეწირსა და წრფის შორის არ შეიძლება გავლებულ A წერტილში არც ერთი წრფე, რომელმაც წრეწირი არ გადაკვეთოს (ნახ. 22).

დამტკიცება. 1) დავუშვათ, რომ A წერტილიდან შეიძლება აღვმართოთ ისეთი პერპენდიკულარი, მაგალითად AC, რომელიც წრის შიგნით მდებარეობდეს. D ცენტრი C-სთან შევაერთოთ, მაშინ $CD = AD$, საიდანაც $\angle DCA = \angle DAC$; მაგრამ $\angle DAC$ დაშვების ძალით, მართია; მაშასადამე, DCA კუთხეც მართია; რაც შეუძლებელია. აქედან ვხედავთ, რომ პერპენდიკულარი მთლიანად წრის გარეთ მდებარეობს.



ნახ. 22.

2) წრეწირსა და AE პერპენდიკულარს შორის არ შეიძლება გაყვანილ იქნას A წერტილში არც ერთი წრფეწირი, რომელიც წრეწირს არ შეხვდეს.

დავუშვათ, რომ ასეთი წრფის გავლება შეიძლება და ასეთი წრფე AF არის. D ცენტრიდან, AF-ზე დავუშვათ პერპენდიკულარი Dg. DAg სამკუთხედში DgA კუთხე მართია აგების ძალით, მაშასადამე gAD კუთხე მართზე ნაკლებია, საიდანაც $DA > Dg$, მაგრამ $DA = DH$, მაშასადამე $DH > Dg$, რაც შეუძლებელია.

ამ თეორემიდან აშკარაა, რომ AE-სთან მარცხნით რაგინდ ახლოს იყოს AF გავლებული, ის მაინც გადაკვეთს წრეწირს, ე. ი. ის წრეწირის შიგნით მოთავსდება იმ დროს, როდესაც AE წრეწირის გარეთ არის; ამიტომ წრეწირსა და AE წრფეს შორის კუთხე ყოველთვის ნაკლები იქნება AE და AF წრფეწირთა შორის მოთავსებულ კუთხისა როგორი მცირეც არ უნდა იყოს ის.

მე-35—37-ე თეორემები წრეწირის მიმართ წერტილის ხარისხის საკითხისადმი მიძღვნილია. განვიხილოთ მე-35-ე წინადადება:

თუ ორი AC და BD ქორდა ABCD წრის შიგნით E წერტილში გადაიკვეთებიან, მაშინ $AE \cdot EC = BE \cdot ED$ (ანუ AE და EC გვერდებიანი მართკუთხის ფართობი უდრის BE და ED გვერდებიანი მართკუთხის ფართობს).

დამტკიცება. 1) თუ ორი ქორდის გადაკვეთის წერტილი წრის ცენტრია, მაშინ, $AE = CE = BE = DE$ (ნახ. 23). მაშასადამე,

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED.$$

2) დავუშვათ, რომ $AC = BD$ ქორდები გადაიკვეთებიან (ნახ. 24) არა წრის ცენტრში (F წერტილში), არამედ E წერტილში. F ცენტრიდან AC და BD-ზე დავუშვათ Fg და FH პერპენდიკულარები და F ცენტრი B, C და E წერტილებთან შევაერთოთ. ვინაიდან $Ag = Cg$, ამიტომ გვაქვს: $AE \cdot EC + gE^2 = gC^2$

თუ ორივე ნაწილს gF^2-ს მივუმატებთ, მივიღებთ:

$$AE \cdot EC + gE^2 + gF^2 = gC^2 + gF^2.$$

მაგრამ FgC კუთხე მართია, მაშასადამე

$$gC^2 + Fg^2 = FC^2 \text{ და } Fg^2 + gE^2 = FE^2.$$

საიდანაც

$$AE\cdot EC + FE^2 = FC^2 = FB^2.$$

ამგვარადვე ვიპოვით, რომ

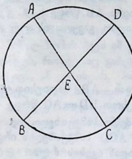
$$DE\cdot EB + FE^2 = FB^2.$$

მაშასადამე,

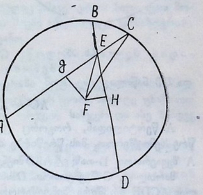
$$AE\cdot EC + FE^2 = DE\cdot EB + FE^2.$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება

$$AE\cdot EC = DE\cdot EB.$$



ნახ. 23.



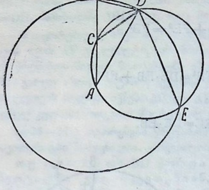
ნახ. 24.

მეოთხე წიგნის გარჩევის დროს ჩვენ დავინახავთ, რომ ეს თეორემები (35—37) გამოყენებულია ისეთი ტოლფერდიანი სამკუთხედის ასაგებად, რომელშიც წვეროსთან მდებარე კუთხე ფუძესთან მიმდებარე კუთხის ნახევრის ტოლია.

5°. მეოთხე წიგნი. ეს წიგნი შეიცავს 7 განსაზღვრას და 16 წინადადებას, სადაც დამუშავებულია სამკუთხედის, ოთხკუთხედის, ხუთკუთხედის, ექვსკუთხედის და ათკუთხედის აგების საკითხები.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მე-10 წინადადებაში განხილულია საკითხი ტოლფერდიანი სამკუთხედის აგებისა, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხე ფუძესთან მდებარე კუთხის ნახევრის ტოლია. ეს წინადადება შემდეგია:

ავაგოთ ისეთი ABD ტოლფერდიანი სამკუთხედი, რომლის ფუძესთან მდებარე თითოეული ABD და ADB კუთხეთაგანი წვეროსთან მდებარე BAD კუთხეზე ორჯერ მეტი იყოს (ნახ. 25).



ნახ. 25.

ამოხსნა. ავიღოთ ნებისმიერი AB წრფე და C წერტილში გავყოთ ის ორ AC და CB ნაწილად ისე, რომ

$$AC^2 = AB\cdot BC.$$

A წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, AB რადიუსით BD წრე შემოვწეროთ, მის წრეწირზე მოვათავსოთ $BD = AC$ წრფე და A შევაერთოთ D-თან; $\triangle ABD$ იქნება საძებნი სამკუთხედი.

მართლაც, C შევაერთოთ D-სთან და ACD სამკუთხედის ირგვლივ ACDE წრეწირი შემოვწეროთ. ვინაიდან აგების ძალით

$$AC^2 = BD^2 = AB\cdot BC,$$

ამიტომ BD წრფე ACDE წრისადმი შემხები იქნება. მაშასადამე, $\angle BDC = \angle DAC$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატებთ $\angle CDA$, მივიღებთ:

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle CDA.$$

მაგრამ $AD = AB$. მაშასადამე,

$$\angle ADB = \angle ABD.$$

ამას გარდა ჩვენ გვაქვს:

$$\angle DAC + \angle CDA = \angle BCD.$$

მაშასადამე, $\angle ADB = \angle ABD = \angle BCD$. აქედან $BD = CD = AC$. ამ უკანასკნელ ტოლობიდან მივიღებთ $\angle DAC = \angle CDA$. საიდანაც $BCD = 2\angle DAC$. ამრიგად, როგორც ADB კუთხე, ისე ABD კუთხეც $2\angle DAC$-ს ტოლია.

6°. მეხუთე წიგნი. ევდოქსისამდე პროპორციათა თეორიას ძველი ბერძნები იყენებდნენ მხოლოდ თანაზომად სიდიდეების მიმართ. ევდოქსისმა კი შექმნა პროპორციათა ზოგადი თეორია, მაგრამ ევკლიდე რატომღაც მხოლოდ ამ მეხუთე წიგნში აყალიბებს მას სისტემატურად; პირველ ოთხ წიგნში კი ის ყველა დამტკიცებას გეომეტრიულ ალგებრაზე ამყარებს. ამ წიგნის საშუალებით ჩვენ გავეცნობით იმ პროპორციათა თეორიას, რომელიც ძველი მათემატიკის საფუძველს წარმოადგენს და რომელიც იმავე დროს სიდიდეთა მომავლის ზოგად თეორიას შეიცავს. წიგნი იწყება ოცი განსაზღვრით. ჩვენ მხოლოდ რამდენიმეს მოვიყვანთ.

1. ნ ა წ ი ლ ი — ზ ო მ ა (μέρος) ე წ ო დ ე ბ ა ნ ა კ ლ ე ბ ს ი დ ი დ ე ს, რ ო მ ლ ი თ ა ც მ ე ტ ი გ ა ი ზ ო მ ე ბ ა.

ნაწილ-ზომის ქვეშ ამ განსაზღვრაში ევკლიდე გულისხმობს ისეთ სიდიდეს, რომელსაც გარკვეულ რიცხვჯერ მეორე სიდიდე უნაშთოდ შეიცავს, ან და ისეთს, რომელიც ორჯერ, სამჯერ და ასე შემდეგ აღებული, სხვა სიდიდეს იძლევა.

2. მ ე ტ ს ი დ ი დ ე ს ნ ა კ ლ ე ბ ი ს ჯ ე რ ა დ ი ე წ ო დ ე ბ ა, რ ო დ ე ს ა ც ი ს ნ ა კ ლ ე ბ ი თ გ ა ნ ი ზ ო მ ე ბ ა.

4. ა მ ბ ო ბ ე ნ, რ ო მ ო რ ს ი დ ი დ ე ს ე რ თ ი მ ე ო რ ე ს თ ა ნ შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა ა ქ ვ თ, თ უ ი მ ა თ გ ა ნ ი ნ ა კ ლ ე ბ ი ს ი მ დ ე ნ ჯ ე რ გ ა ნ მ ე ო რ ე ბ ა შ ე ი ძ ლ ე ბ ა, რ ო მ შ ე დ ე გ ი ა ნ ტ ო ლ ი დ ა ა ნ მ ე ტ ი ი ყ ო ს უ ფ რ ო დ ი დ ი ს ა.

ეს განსაზღვრა გულისხმობს, რომ სიდიდეები ერთი და იგივე ბუნების უნდა იყოს, რათა მათი შედარება შეიძლებოდეს; ამასთანავე ის გულისხმობს, რომ თითოეული მათგანის ჯერადს, გარკვეული მომენტიდან დაწყებული, მეორე სიდიდის გადაჭარბება უნდა შეეძლოს; ეს უკანასკნელი წარმოადგენს მნიშვნელოვან პირობას პროპორციათა თეორიის უთანაზომო სიდიდეებზე გავრცელებისათვის ამოწურვის მეთოდით დამტკიცების საშუალებით უსასრულოდ მცირეთა დარგში კვლევისათვის.

5. ამბობენ, რომ ოთხი სიდიდე იმყოფება იმავე ფარდობაში: პირველი მეორესთან და მესამე მეოთხესთან, როდესაც პირველისა და მესამეს ტოლჯერადი სიდიდეები, ნებისმიერ ჯერადობაში აღებულნი, ყოველთვის ან მეტი, ან ტოლი, ან ნაკლები არიან შესაბამისად მეორე და მეოთხე ტოლჯერად სიდიდეებზე, რომლებიც აგრეთვე სხვა ნებისმიერ ჯერადობაში არიან აღებული.

სიმარტივისათვის, ამ შემთხვევაში და შემდეგშიაც ჩვენ პროპორციების აღსანიშნავად თანამედროვე ალგებრულ სიმბოლოებს ვიხმართ; მაშინ მე-5 განსაზღვრა ამბობს, რომ

$$a : \mathrm{b} = \mathrm{c} : \mathrm{d}$$

იმ შემთხვევაში, თუ ადგილი აქვს $\mathrm{mc} \gtreqless \mathrm{nd}$ როდესაც მოცემულია $\mathrm{m}a \gtreqless \mathrm{nb}$.

7. თუ პირველ სიდიდის ჯერადი მეორეს ჯერადზე მეტია და მესამეს ჯერადი მეოთხეს ჯერადზე ნაკლებია, მაშინ ამბობენ, რომ პირველი სიდიდის მეორესთან ფარდობა მესამეს მეოთხესთან ფარდობაზე მეტია. ეს განსაზღვრა ამბობს, რომ

$$a : \mathrm{b} > \mathrm{c} : \mathrm{d},$$

თუ არსებობს ისეთი m და n მნიშვნელობა, რომ

$$\mathrm{m}a > \mathrm{nb}, \text{ მაგრამ } \mathrm{mc} \leqslant \mathrm{nd}.$$

ახლა გავარკვიოთ, თუ როგორ შეიძლება ამ განსაზღვრებზე ფარდობათა და პროპორციათა ზუსტი თეორიის დაფუძნება *.

წიგნი 25 თეორემას (წინადადებას) შეიცავს. 1—3 და 5—6 წინადადებებში ევკლიდე შემდეგ ლემებს აწესებს:

$$\mathrm{m}a \pm \mathrm{mb} = \mathrm{m}(a \pm \mathrm{b}), \qquad (1 \text{ და } 5)$$

$$\mathrm{m}a \pm \mathrm{n}a = (\mathrm{m} \pm \mathrm{n})a \qquad (2 \text{ და } 6)$$

$$\mathrm{n} \cdot \mathrm{m}a = \mathrm{nm} \cdot a.$$

---

* **Ц е й т е н**, გვ. 101—103.

ამ ლემებისა და მე-4 განსაზღვრის საშუალებით, ვღებულობთ შემდეგ წინადადებებს, როგორც მე-5 და მე-7 განსაზღვრების მარტივ შედეგს:

თუ

$$a : b = c : d,$$

მაშინ

$$ma : nb = mc : nd; \tag{4}$$

თუ

$$a \geq b,$$

მაშინ

$$a : c \geq b : c, \qquad (7 \text{ და } 8)$$

მაგრამ

$$c : a \leq c : b.$$

თუ

$$a : b = c : d$$

და

$$c : d = e : f,$$

მაშინ

$$a : b = e : f \tag{11}$$

და ამ ტოლ შეფარდებებთან შეიძლება შეიქმნას ასეთივე ტოლი ახალი შეფარდება, სახელდობრ:

$$(a + c + e) : (b + d + f). \tag{12}$$

მაგრამ, თუ

$$a : b = c : d$$

და

$$c : d > e : f,$$

მაშინ

$$a : b > e : f. \tag{13}$$

განვიხილოთ მე-8 წინადადება. თუ $a > b$, მაშინ უნდა მოიძებნოს ორი ისეთი m და n მთელი რიცხვი, რომ $ma > nc > mb$.

ამისათვის საჭიროა დასახელებული მოთხოვნილებანი შეიცვალოს შემდეგი პირობებით, რომლებსაც ძალა აქვთ მე-4 განსაზღვრის მიხედვით.

$$mb > c \text{ და } m(a - b) > c,$$

$$(n - 1)c < mb < nc.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$nc \angle ma.$$

მე-9 და მე-10 წინადადებები მე-7 და მე-8-ეს შექცეულ წინადადებებს წარმოადგენენ და ამიტომ მათი დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვების საშუალებით შეიძლება.

წინამავალ წინადადებათა საშუალებით მე-14 წინადადებაში მტკიცდება, რომ თუ

$$a : b = c : d,$$

მაშინ $a \gtreqless c$-საგან გამომდინარეობს. $b \gtreqless d$.

მე-12 წინადადების საშუალებით მე-15-ეში მტკიცდება, რომ

$$ma : nb = a : b.$$

მე-16 — 19 წინადადებები შეიცავს პროპორციის მთელ რიგ გარდაქმნებს:

$$a : b = c : d.$$

უკანასკნელიდან მიღებულია:

$$a : c = b : d, \tag{16}$$

$$(a - b) : b = (c - d) : d, \tag{17}$$

$$(a + b) : b = (c + d) : d, \tag{18}$$

$$a : b = (a - c) : (b - d). \tag{19}$$

მე 16 და მე-17 წინადადებები მე-5 განსაზღვრის საშუალებით მტკიცდება.

მე-17-ე წინადადებაში მოცემულ პროპორციიდან გამოჰყავთ, რომ m და n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$$mc \gtreqless (m+n)d$$

გამომდინარეობს $ma \gtreqless (m+n)\,b$-სგან;

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$m(a-b) \gtreqless nb\text{-ს}$$

შედეგად მოჰყვება

$$m(c-d) \gtreqless nd.$$

მე-18 და მე-19 წინადადება მე-16 და მე-17-ესგან მიიღება.

მე-20 — 23 წინადადებანი ფარდობათა შესახებ მნიშვნელოვან თეორიას შეიცავენ.

მე-22-ეს თანახმად, თუ

$$a : b = d : e$$

და

$$b : c = e : f,$$

მაშინ

$$a : c = d : f.$$

ამის დამტკიცებისათვის, მე-20 წინადადებაში წინასწარ წესდება, რომ მე-9 და მე-10-ეს თანახმად $a \gtreqless c$ პირობას მოყვება $d \gtreqless f$ (9 და 10 თანახმად). მოცემული პროპორციები შეიძლება გარდაიქმნას შემდეგად:

$$ma : nb = md : ne$$

და

$$nb : pe = ne : pf.$$

ამიტომ

$$ma \gtreqless pe\text{-გან}$$

მიიღება, რომ

$$md \gtreqless pf.$$

ამგვარადვე შეიძლება დამტკიცდეს მე-23 წინადადება. თუ გამოვალთ მე-21-გან:

$a:b=e:f$ და $b:c=d:e$-ს მოჰყვება $a:c=d:f$.

ამ წინადადებებისაგან გამომდინარეობს, რომ $a:c$ ფარდობა $a:b$ და $b:c$ ფარდობებისაგან არის შედგენილი; მაგრამ ძველი ბერძნების მიერ მოცემული ფარდობა თუ განვიხილეთ როგორც თანამედროვე რიცხვები, მაშინ ცხადია, რომ, ორ ფარდობისაგან შედგენილი ფარდობა იმასვე წარმოადგენს, რასაც ახლა ნაწარმოებს უწოდებენ.

მე-22 და მე-23 თეორემა შეიცავს სრულ დამტკიცებას ისეთი წინადადებებისა, რომელიც თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე შეიძლება გამოითქვას შემდეგნაირად: ნამრავლი თავისი თანამამრავლებით განისაზღვრება, ამასთანავე უკანასკნელთა დალაგების რიგი არავითარი როლს არ თამაშობს. ამრიგად უნდა აღინიშნოს, რომ ძველად ორი ხერხი იყო იმის გამოსასახავად, რასაც ახლა ნამრავლს ვუწოდებთ: ერთი—ორ ფარდობისაგან და მეორე — მართკუთხედი, რომლითაც გეომეტრიულ ალგებრაში სარგებლობდნენ ($a \cdot b$-ს ნაცვლად სარგებლობდნენ მართკუთხედით, რომლის გვერდები არის a და b).

მე-24-ე წინადადება ამბობს, რომ თუ

$$a : c = d : f$$

და

$$b : c = e : f,$$

მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(a + b) : c = (d + e) : f.$$

მე-25-ე თეორემის თანახმად, თუ მოცემულია ოთხი პროპორციული სიდიდე, მაშინ მათ შორის უდიდესის და უმცირესის ჯამი დანარჩენი ორის ჯამზე მეტია.

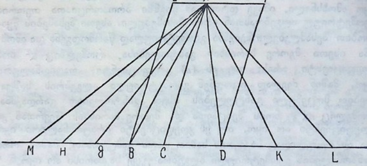
7°. მეექვსე წიგნი. ამ წიგნში გადმოცემულია პროპორციათა თეორიის გამოყენება გეომეტრიაში. აქ ხელმეორედ არის ამოხსნილი ზოგიერთი ამოცანა პროპორციათა თეორიის საშუალებით, რომელიც წინამავალ წიგნებში გეომეტრიული ალგებრის ხერხებით იყო ამოხსნილი. იმავე დროს ამ წიგნში პროპორციათა თეორია გეომეტრიულ ალგებრასთან არის შეხამებული. ასეთი შეხამების წყალობით შესაძლებელი შეიქმნა გეომეტრიულად წარმოდგენა და ამოხსნა ისეთი მეორე ხარისხის განტოლებისა, რომელშიც x^2 თან კოეფიციენტი არის; თუ ეს (a) კოეფიციენტი რაციონალური იყო, მაშინ ძველად იცოდნენ გეომეტრიული ალგებრის საშუალებით მოცემული განტოლების ისეთ განტოლებად გარდაქმნა, რომელიც ax უცნობს შეიცავდა და მეორე ხარისხის წევრთან კი კოეფიციენტი არ იყო. თუ ეს კოეფიციენტი ირაციონალური იყო და ის რომელიღაც ნაკვეთის სახით უნდა გამოესახათ, მაშინ ორი განზომილების გეომეტრიული ალგებრა უკვე საკმარისი არ იყო.

ეს წიგნი 5 განსაზღვრასა და 33 წინადადებას შეიცავს. პირველი წინადადება ამბობს: ორი სამკუთხედის ანუ ორი პარალელოგრამის ფართობები, რომლებსაც ტოლი სიმაღლეები აქვთ, ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც მათი ფუძეები (ნახ. 26).

ვთქვათ, რომ ასეთი სამკუთხედები და პარალელოგრამებია ABC და ACD, EC და CF. მათი სიმაღლე არის პერპენდიკულარი A წვეროდან BD წრფეზე დაშვებული. ევკლიდე ამბობს, რომ ორი სამკუთხედის ფართობები ერთმანეთს და ორი პარალელოგრამის ფართობები ერთმანეთს ისე შეეფარდებიან, როგორც BC ფუძე CD ფუძეს. BD წრფე გავაგრძელოთ ორივე მხრით და გადავზომოთ BC ნაკვეთის ტოლი, რამდენიც გნებავთ ნაკვეთები Bg, gH, HM და ასე შემდეგ; ასევე ავიღოთ CD ნაკვეთის ტოლი DK, KL და ასე შემდეგ. გავავლოთ წრფეები Ag, AH, AM, AK, AL. ABC, AgB, AHg, AHM სამკუთხედები ტოლდიდნი არიან. მაშასადამე რა ჯერადობის იქნება MC ფუძე BC-ს მიმართ, ისეთივე ჯერადობის იქნება AMC სამკუთხედი ABC სამკუთხედის მიმართ. იმავე მიზეზით ALC სამკუთხედი ისეთივე ჯერადობის იქნება ADC სამკუთხედის მიმართ,

როგორი ჯერადობის იქნება LC ფუძე CD ფუძის მიმართ. მაშასადამე, იმის მიხედვით იქნება თუ არა ფუძე LC $\gtreqless$ MC, ALC სამკუთხედი იქნება $\gtreqless$ AMC სამკუთხედისა. მაშასადამე,

$$\triangle ABC : \triangle ADC = BC : CD.$$



ნახ. 26.

ვინაიდან CE და CF პარალელოგრამები გაორკეცებული ABC და ADC სამკუთხედის ტოლნი არიან, ამიტომ:

$$CE : CF = BC : CD.$$

ამით ევკლიდემ მეტად მნიშვნელოვანი წინადადება დაამტკიცა. ფარდობათა ტოლობის ევკლიდეს ზოგადი განსაზღვრა ამ თეორემაში მშვენიერ გამოყენებას პოულობს.

მე-2 და მე-3 თეორემა ეხება სამკუთხედში გავლებულ პარალელურ წრფეებს და სამკუთხედის გვერდების გაყოფას მოპირდაპირე კუთხის ბისექტრისის საშუალებით.

მე-4 თეორემა ამბობს:

ტოლკუთხიანი სამკუთხედის გვერდები, რომლებიც ტოლ კუთხეების პირდაპირ მდებარეობენ, ერთმანეთის პროპორციული არიან, და შესაბამისი გვერდებია ტოლკუთხეების პირდაპირ მდებარე გვერდები.

ეს თეორემა და აგრეთვე მე-5, მე-6 და მე-7 თეორემა მსგავსი სამკუთხედების შესახებ ძირითად თეორემებს წარმოადგენენ. ისინი მაშინათვე პოულობენ გამოყენებას მე-8 თეორემაში: თუ მართკუთხოვან სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდზე (ჰიპოტენუზაზე) პერპენდიკულარს დავუშვებთ, მაშინ ის მოცემულ სამკუთხედს ორ სამკუთხედად გაჰყოფს, რომელთაგან თითოეული მთელისა და ერთმანეთის მსგავსია.

მე-9 თეორემები იხილავენ ნაკვეთის ტოლ და პროპორციულ ნაწილებად დაყოფას, მესამე პროპორციულის, მეოთხე პროპორციულის და საშუალო პროპორციულის აგებას.

მე-16-ე წინადადება ამბობს: თუ ოთხი წრფე პროპორციულია, მაშინ განაპირა წრფეებზე აგებული მართკუთხედი საშუალო წრფეებზე აგებულის ტოლდიდია და პირიქით, თუ მართკუთხედი, განაპირა წრფეებზე აგებული, საშუალო წრფეებზე აგებული მართკუთხედის ტოლდიდია, მაშინ ოთხი წრფე პროპორციულია.

ჩვენებურად რომ ვთქვათ, ეს თეორემა ამბობს, რომ პროპორციაში განაპირა წევრების ნამრავლი საშუალო წევრების ნამრავლის ტოლია.

მე-19-ე წინადადებაში მტკიცდება, რომ მსგავსი სამკუთხედების ფართობების შეფარდება შესაბამ გვერდების კვადრატების შეფარდებათა ტოლია.

მე-23-ე თეორემა წარმოადგენს ძირითად თეორემას პროპორციების თეორიის საშუალებით გეომეტრიულ ალგებრის გაფართოებისა რთულ ფარდობათა საქმეში. ის ამბობს: ტოლკუთხიანი პარალელოგრამების ფართობების ფარდობა მათი გვერდების მიერ შენადგენ ფარდობის ტოლია (ნახ. 27).

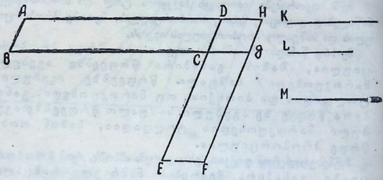
დამტკიცება. ვთქვათ, AC და CF ტოლკუთხიანი პარალელოგრამებია, რომელთა BCD და ECg კუთხეები ტოლნი არიან. მაშინ უნდა იყოს:

$$AC:CF = \frac{BC}{gC} \cdot \frac{DC}{EC}.$$

AC და CF პარალელოგრამები ისე მოვათავსოთ, რომ BC და gC გვერდები ერთ Bg წრფეს შეადგენდეს, მაშინ EC და DC გვერდები აგრეთვე ერთ ED წრფეზე მდებარეობენ. ავაგოთ Dg პარალელოგრამი და რომელიმე K წრფე ავიღოთ. L და M წრფეები ისე ავაგოთ რომ:

$$BC : gC = K : L \text{ და } DC : EC = L : M.$$

K-სი M-თან შეფარდება შედგენილია K : L და L : M ფარდობები-



ნახ. 27.

საგან. ეს უკანასკნელი ფარდობები კი BC:gC და DC:EC ფარდობების ტოლია. მაშასადამე, K:M ფარდობა პარალელოგრამის გვერდებისაგან შენადგენი ფარდობის ტოლია. მაგრამ ჩვენ გვაქვს (1 წინადადება):

$$AC : CH = BC : gC = K : L$$

და

$$CH : CF = DC : EC = L : M.$$

მაშასადამე,

$$AC : CF = \frac{BC}{gC} \cdot \frac{DC}{EC}.$$

ამ თეორემიდან ნათლად ჩანს, რომ პარალელოგრამის გვერდებს შორის ფარდობის შესადგენად, ამ გვერდებს გამოსახავენ რთული ფარდობის სახით, რომელიც შედგენილია ორი ფარდობისაგან მაგალითად, გვერდებს ეძლევა $a:\mathrm{b}$ და $\mathrm{b}:\mathrm{c}$-ს სახე, საიდანაც მათი ნამრავლი წარმოდგენილი იქნება როგორც $\frac{a}{\mathrm{c}}=\frac{a}{\mathrm{b}}\cdot\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$, ე. ი. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, იმას რასაც ჩვენ ახლა ორი სიდიდის ნამრავლს ვუწოდებთ, ძველი ბერძნები ასეთი რთული ფარდობით გამოსახავდნენ. ცხადია, რომ ეს საკითხს უფრო ართულებდა, მაგრამ, ნამრავლის ასეთნაირად გამოსახვას ერთი უპირატესობა ჰქონდა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: გეომეტრიულ ალგებრაში ორი თანამამრავლის ნამრავლს მართკუთხედის საშუალებით გამოსახავდნენ, და სამი თანამამრავლის ნამრავლს კი პარალელეპიპედის საშუალებით. ბუნებრივია, რომ ძველი ბერძნების წინაშე უნდა წამოჭრილიყო ამის განზოგადების საკითხი, ე. ი., ამ მეთოდის საშუალებით სამზე მეტი თანამამრავლისაგან შემდგარ ნამრავლის გამოსახვის საკითხი; მაგრამ რადგან გეომეტრიული ნაკვთის საშუალებით ასეთის გამოსახვა შეუძლებელი იყო, შეგვიძლია, დავუშვათ, რომ ძველების მიერ რთულ ფარდობათა საშუალებით ნამრავლის გამოსახვის გამოგონება ამ გარემოებით იყო ნაკარნახევი; ამასთან ერთად უნდა აღვნიშნოთ, რომ სამი თანამამრავლის შემთხვევაშიც ბერძნებმა რთული შეფარდებით დაიწყეს სარგებლობა კუბის გაორკეცების ამოცანის გარდაქმნასთან დაკავშირებით. ეს ამოცანა, როგორც ჩვენ ვიცით, დაიყვანეს ორი საშუალო პროპორციულის მოძებნამდე განუწყვეტელი პროპორციიდან:

$$a:\mathrm{x}=\mathrm{x}:\mathrm{y}=\mathrm{y}:\mathrm{b}. \tag{1}$$

ძველების თვალსაზრისით ეს პროპორცია გამოსახავს სამი თანამამრავლის ნამრავლს, რომელსაც ჩვენ კი დავწერდით ასეთი სახით:

$$\frac{a}{\mathrm{b}}=\left(\frac{a}{\mathrm{x}}\right)^{3}.$$

მართლაც $\frac{a}{\mathrm{y}}$, როგორც რთული ფარდობა, მიიღება $\frac{a}{\mathrm{x}}$ და $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$ ფარდობებისაგან, ე. ი.

$$\frac{a}{\mathrm{y}}=\frac{a}{\mathrm{x}}\cdot\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} \tag{2}$$

ამნაირადვე

$$\frac{x}{b}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{b};\ \text{ანუ}\ \frac{y}{b}=\frac{x}{b}\cdot\frac{y}{x} \tag{3}$$

$\frac{a}{y}$ და $\frac{y}{b}$-დან მივიღებთ $\frac{a}{b}$ რთულ ფარდობას:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{y}\cdot\frac{y}{b}.$$

აქედან და (2) ტოლობიდან მივიღებთ

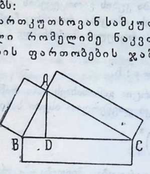
$$\frac{a}{b}=\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{b}=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}=\left(\frac{a}{x}\right)^{3}.$$

ამგვარადვე შეიძლება სამზე მეტი ხარისხის წარმოდგენა განუწყვეტელი პროპორციის პირველი და უკანასკნელი წევრების საშუალებით.

მე-30 თეორემა შეეხება ნაკვეთის დაყოფას საშუალო და განაპირა ფარდობის მიხედვით. ასეთნაირად დაყოფას ძველი ბერძნები ოქროს დაყოფას უწოდებდნენ.

მე-31 თეორემას ევკლიდეს აკუთვნებენ. ის წარმოადგენს პითაგორას თეორემის განზოგადოებას, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

მართკუთხოვან სამკუთხედში, ჰიპოტენუზაზე აგებული რომელიმე ნაკვთის ფართობი ისეთი ნაკვთების ფართობების ჯამის ტოლია, რომლებიც კათეტებზეა აგებული, მსგავსი არიან და მსგავსად მდებარეობენ (ნახ. 28).


ნახ. 28.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC არის მართკუთხოვანი სამკუთხედი, რომელშიც BAC კუთხე მართია. მაშინ BC-ზე აგებული ნაკვთი ისეთ AB და AC-ზე აგებული ნაკვთების ტოლდიდია, რომლებიც BC-ზე აგებულ ნაკვთის მსგავსი არიან და მის მიმართ მსგავსად მდებარეობენ.

A წერტილიდან BC ჰიპოტენუზაზე AD პერპენდიკულარი დავუშვათ, მაშინ ABD და ADC სამკუთხედები მსგავსი იქნებიან ერთმანეთისა და მთელი ABC სამკუთხედისა. ABC და ABD სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს:

$$BC : AB = AB : BD.$$

ვინაიდან BC, AB, BD წრფეები პროპორციული არიან, ამიტომ პირველი ისე შეეფარდება მესამეს, როგორც პირველზე აგებული ნაკვთი, მეორეზე აგებულ მსგავს და მსგავსად მდებარე ნაკვთს შეეფარდება, ე. ი.

BC : BD = BC-ზე აგებული ნაკვთი: AB-ზე აგებულ ნაკვთს. იმავე მიზეზით BC : DC = BC-ზე აგებ. ნაკვთი: AC-ზე ნაკვთს. საიდანაც BC : (BD + DC) = BC-ზე ნაკვთი: (AB-ზე ნაკვთს + AC-ზე ნაკვთი). [ეს უკანასკნელი ტოლობა გამომდინარეობს მეხუთე წიგნში ევკლიდეს მიერ დამტკიცებულ თეორემიდან: თ უ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ე ქ ვ ს ი ს ი დ ი დ ე, რ ო მ ლ ე ბ ი ც ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს პ ი რ ო ბ ა ს: I:II = III:IV და V:II = IV:VI, მ ა შ ი ნ გ ვ ე ქ ნ ე ბ ა II:(I + V) = IV:(III + VI)]. მაგრამ BC = BD + DC, მაშასადამე, BC-ზე ნაკვთი = AB-ზე ნაკვთს + AC-ზე ნაკვთი.

ამ წიგნის უკანასკნელ მე-33 თეორემაში მტკიცდება, რომ წ რ ე შ ი ჩ ა წ ე რ ი ლ ი კ უ თ ხ ე ე ბ ი შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ი რ კ ა ლ ე ბ ი ს პ რ ო პ ო რ ც ი უ ლ ი ა რ ი ა ნ.

ამ წიგნით პლანიმეტრია მთავარდება.

8°. მეშვიდე წიგნი. ეს წიგნი (და აგრეთვე მე-8 და მე-9-ეც) რომელსაც არითმეტიკულს უწოდებენ, რიცხვის შესახებ მოძღვრების გეომეტრიზაციას შეიცავს, რისთვისაც ევკლიდეს საზომი ერთეული შემოყავს და საერთოდ მთელი რიცხვები აქ გამოსახულია ნაკვთებით, რომელთა მიმართ პროპორციათა თეორიის გამოყენება ამ წიგნის შინაარს შეადგენს.

პირველ და მესამე თეორემაში მტკიცდება საერთო უდიდესი საზომის მონახვის წესი. მეოთხე თეორემაში დაწესებულია, რომ, თუ a და b მთელი რიცხვებია და m მათი საერთო უდიდესი საზომია, მაშინ შეიძლება ყოველთვის დაიწეროს $a = \mathrm{km}$, $\mathrm{b} = l\mathrm{m}$ და მაშასადამე $a = \mathrm{k}\frac{\mathrm{b}}{l}$; თუ $a < \mathrm{b}$, მაშინ $\mathrm{k} \geqslant 1$, $l > 1$; ამის თანახმად l და n ურთიერთ მიმართ პირველი რიცხვები არიან. ევკლიდეს მიერ

ჩამოყალიბებული და დაწყსებული მრავალი თეორიული წინადადება მოწმობს იმას, რომ ის ცდილობდა არითმეტიკის ზუსტ დაფუძნებას, თუმცა ამას მან ისე ვერ მიაღწია, როგორც გეომეტრიაში. ეს წიგნი მთავრდება მოცემული რიცხვების საერთო უმცირესი გამყოფის მოძებნის წესით.

9°. მერვე წიგნი. მისი შინაარსი პროპორციათა თეორიის გაგრძელებას წარმოადგენს. აქ გამოყენებულია ის გეომეტრიული ცნებები, რომელთა სახელწოდებებს ჩვენ წინამავალ წიგნებში შევხვდებით: ბრტყელი რიცხვები, მსგავსი ბრტყელი რიცხვები, კვადრატული რიცხვები და კუბიკური რიცხვები. მრავალკუთხოვანი რიცხვებიდან ევკლიდე'ს შრომებში მხოლოდ კვადრატული რიცხვებია მოხსენებული.

10°. მეცხრე წიგნი. ევკლიდე ამ წიგნში იმავე პროპორციათა თეორიის საკითხებს ამუშავებს, მხოლოდ განსაკუთრებით ყურადღებას ამახვილებს ურთიერთშორის პირველ რიცხვების საკითხზე.

მე-20 თეორემაში ამტკიცებს, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. ამ თეორემიდან დაწყებული ყველა თეორემა მიძღვნილი აქვს კენტი და ლუწი რიცხვების თვისებებისა და მათი ჯამის გამოკვლევას.

მე-35 თეორემაში განხილულია გეომეტრიული პროგრესიის შეჯამების საკითხი; ეს თეორემა ამბობს: თუ რიგ-რიგობით აღებული ნებისმიერი მრავალი რიცხვი ერთმანეთთან მუდმივ შეფარდებაში იმყოფება (ე. ი. გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენენ) და თუ მეორესა და უკანასკნელ რიცხვებს პირველის ტოლ რიცხვს გამოვაკლებთ, მაშინ პირველ რიცხვთან შედარებით მეორე რიცხვის სიჭარბე ისე შეეფარდება მეორე რიცხვს, როგორც პირველ რიცხვთან შედარებით უკანასკნელი რიცხვის სიჭარბე შეეფარდება ყველა წინამავალთ (ე. ი. ყველა წინამავალთა ჯამებს).

თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ამ თეორემის დამტკიცება შეიძლება გადმოცემულ იქნას შემდეგნაირად:

ვთქვათ მოცემული გვაქვს a, b, c, d რიცხვები, რომლებიც თეორემაში აღნიშნულ პირობებს აკმაყოფილებენ. მაშინ თანახმად დაშვებისა, გვექნება:

$$a : \mathrm{b} = \mathrm{b} : \mathrm{c} = \mathrm{c} : \mathrm{d},$$

ანუ

$$\mathrm{d} : \mathrm{c} = \mathrm{c} : \mathrm{b} = \mathrm{b} : a.$$

სათანადო გამოთვლების შედეგად აქედან ვღებულობთ:

$$(\mathrm{d} - \mathrm{c}) : \mathrm{c} = (\mathrm{c} - \mathrm{b}) : \mathrm{b} = (\mathrm{b} - a) : a;$$

ყველა წინამავალთა და შემდეგთა შეკრების შემდეგ მივიღებთ:

$$(\mathrm{d} - \mathrm{c} + \mathrm{c} - \mathrm{b} + \mathrm{b} - a) : (\mathrm{c} + \mathrm{b} + a) = (\mathrm{b} - a) : a,$$

ანუ

$$(\mathrm{d} - a) : (a + \mathrm{b} + \mathrm{c}) = (\mathrm{b} - a) : a.$$

ეს კი აღნიშნული თეორემის დამტკიცებას წარმოადგენს, რაც შეიძლება ასე დაიწეროს

$$a + \mathrm{b} + \mathrm{c} = \frac{a(\mathrm{d} - a)}{\mathrm{b} - a}.$$

ეს უკანასკნელი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამისათვის თანამედროვე ფორმულაა.

მე-36 თეორემაში მტკიცდება, რომ თუ $(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n)2^n$ ნამრავლში პირველი მამრავლი პირველი რიცხვია, მაშინ თვით ეს ნამრავლი „სრულყოფილ“ რიცხვს წარმოადგენს, ე. ი. ისეთ რიცხვს, რომელიც ყველა თავისი გამყოფთა (ერთის ჩათვლით და თვით რიცხვის გამოკლებით) ჯამის ტოლია.

11°. მეათე წიგნი. ეს წიგნი მიძღვნილია სიდიდეთა უთანაზომობის საკითხისადმი. ევკლიდეს განსაზღვრის (1 განსაზღ.) თანახმად თანზომადი სიდიდეები ისინი არიან, რომლებსაც ერთი საერთო საზომი აქვთ, უთანაზომო (2 განსაზღვრა) კი ისინი, რომლებსაც ასეთი არა აქვთ.

მესამე განსაზღვრა ამბობს: „წრფეებს ხარისხში თანზომადი ეწოდებათ, თუ მათზე აგებული კვადრატები ერთ და იგივე ფართობით განიზომებიან, ე. ი. საერთო ზომა აქვთ“. აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ ევკლიდეს გამოთქმა „ხარისხში თანზომადი“ იმას ნიშნავს, რომ ის რაციონალურ სიდიდეთა ქვეშ გულისხმობს არა მარტო ისეთ სიდიდეებს, რომლებიც ერთეულთან თანზომადი არიან, არამედ ისეთ სიდიდეებსაც, რომელთა კვადრატები ერთეულთან თანზომადი არიან.

მეექვსე განსაზღვრის თანახმად რაციონალური წირებია აგრეთვე ისინიც, რომლებიც აღებულ წრფის თანზომადი არიან სიგრძის მიხედვით და რომლებზედაც აგებული კვადრატები აღებულ წრფეზე აგებულ კვადრატთან თანზომადი არიან, ან და საკმარისია მათი თანზომადობისათვის მხოლოდ კვადრატების თანზომადობა. აღებულ წრფეზე აგებულ კვადრატის ფართობს ევკლიდე თანზომადს უწოდებს და ამ კვადრატთან თანზომადი ფართობები რაციონალურია, წინააღმდეგ შემთხვევაში — ირაციონალური.

ამ წიგნის პირველი თეორემით ევკლიდეს წამოყენებული აქვს ისეთი წინადადება, რომელიც „ამოწურვის მეთოდის" საშუალებით დამტკიცების საფუძველს წარმოადგენს. ეს თეორემა ამბობს:

თუ რომელიმე სიდიდეს მისი ნახევარი ან მის ნახევარზე მეტი სიდიდე გამოვაკელით და ეს ოპერაცია საკმაო რიცხვჯერ გავიმეორეთ, დასასრულ მივიღებთ იმავე სახის სიდიდეს, მაგრამ ყოველი ნებისმიერად მოცემულ სიდიდეზე ნაკლებს.

ამ თეორემას ევკლიდე ამყარებს მეხუთე წიგნის მეოთხე განსაზღვრაზე. დამტკიცებისათვის ის იღებს ორ, ერთმანეთის უტოლო ნაკვეთებს და მესამეს კი ნებისმიერ მცირე ნაკვეთს, რომელსაც მეტი ნაკვეთი სამჯერ შეიცავს; მეტ ნაკვეთს აკლებს მის მესამედ ნაწილს, ე. ი. მის ნახევარზე ნაკლებს, ნაკლებ ნაკვეთს კი აკლებს მისივე ნახევარზე მეტ ნაკვეთს და ამ ოპერაციას აწარმოებს ნაშთებზე მანამდე, სანამ ნაკლებ ნაკვეთისაგან მიღებული ნაშთი აღებულ ნებისმიერ მცირე ნაკვეთზე ნაკლები არ გახდება. ამ თეორემის ასეთი სახით გადმოცემა* არსებითად განსხვავდება იმ ლემისაგან, რომელიც საფუძვლად დაუდვა ამოწურვის მეთოდს მისმა გამომგონებელმა, ევდოქსოსმა. ეს ლემა ამბობს:

*„თუ ორი სიბრტყე უტოლო არიან, მაშინ შესაძლებელია ნაკლები სიბრტყის მეტ სიბრტყეზე ისე ხშირად აღება, რომ განსხვავება, რომლითაც მეტი სიბრტყე ნაკლებ სიბრტყეს აღემატება, ყოველ სასრულ სიბრტყეზე ნაკლები გახდეს".***

ამის გამო კანტორის აზრით პირველი თეორემა ალბად თვით ევკლიდეს ეკუთვნის. ევკლიდე პირველი თეორემის საფუძველზე ზო-

---

* Contor, I. გვ. 230.

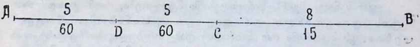
** Contor, გვ. 209.

გად გამოკვლევებს აწარმოებს ირაციონალურ სიდიდეთა შესახებ. ის ახდენს ირაციონალურ სიდიდეთა კლასიფიკაციას, ამასთანავე, რაც მთავარია, ამტკიცებს, რომ სხვადასხვა გარდაქმნების საშუალებით ირაციონალურ სიდიდეებისაგან მიღებული სიდიდეები ირაციონალური არიან. ეს წიგნი კვადრატულ ფესვთა დარგში ევკლიდეს სპეციალურ გამოკვლევებს შეიცავს. ის აწესებს რაციონალურ სიდიდეებისაგან მეოთხე ხარისხის ფესვს და გამოსახვებს:

$$a+\sqrt{b},\ \sqrt{a}+\sqrt{b},\ a-\sqrt{b},\ \sqrt{a}-b \text{ და } \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

მე-29 თეორემის შედეგად ევკლიდე იძლევა ხერხს ისეთი ორი კვადრატული რიცხვის მოძებნისა, რომელთა ჯამი კვადრატული რიცხვია. ეს შედეგი ჩამოყალიბებულია შემდეგნაირად:

ვიპოვოთ ორი კვადრატული რიცხვი, რომელთა ჯამი კვადრატული რიცხვია (ნახ. 29).



ნახ. 29.

ამოხსნა. ავიღოთ ორი მსგავსი ბრტყელი* რიცხვი ანუ ორი კვადრატული რიცხვი. ჩვენ ვნახეთ (მე-10 წიგნი), რომ ასეთი რიცხვების ნამრავლი (AB·BC) კვადრატული რიცხვია. დავუშვათ, რომ აღებული რიცხვები AB და BC ორივე კენტია, ანუ ორივე ლუწია. მათი სხვაობა AC ორივე შემთხვევაში ლუწი იქნება. ეს სხვაობა D წერტილში შუაზე გავყოთ. მაშინ გვექნება

$$AB\cdot BC+CD^2=BD^2.$$

მაშასადამე, საძებნი რიცხვების კვადრატები არის

$$AB\cdot BC \text{ და } CD^2.$$

---

* ბრტყელ რიცხვებს ევკლიდე უწოდებს ისეთებს, რომლებიც მამრავლებად დაიშლებიან, მსგავს რიცხვებს კი ისეთებს, რომელთა მამრავლები პროპორციულია.

მაგალითი: $AB=18$, $BC=8$. ეს რიცხვები მსგავსი არიან, ვინაიდან გვაქვს:

$$AB=18=3\cdot 6.\ BC=8=2\cdot 4.$$

და

$$3:6=2:4.$$

მაშასადამე,

$$AB\cdot BC=144,\ CD=5$$

და

$$144+25=169,\ 12^2+5^2=13^2.$$

აქედან ჩანს, რომ შეიძლება მოიძებნოს ორი BD^2 და CD^2 რიცხვი, რომელთა $(AB\cdot BC)$ სხვაობა კვადრატული რიცხვია.

უკანასკნელ, მე-17 წინადადებაში მტკიცდება, რომ კვადრატის დიაგონალი და გვერდი უთანაზომო წრფეებია. ეს თეორემა ორ ნაირადაა დამტკიცებული; მეორე დამტკიცებას, რომელიც ამავე წიგნის მეცხრე თეორემას (უთანაზომონაკვეთებზე აგებული კვადრატები არ შეეფარდებიან ერთი მეორეს ისე, როგორც კვადრატული რიცხვები) ეყრდნობა, ევკლიდეს აკუთვნებენ.

12°. მეთერთმეტე წიგნი. 29 განსაზღვრიდან, რომლებიც ამ წიგნის დასაწყისშია მოთავსებული, საჭიროდ ვთვლით აქ რამდენიმე მათგანი მოვიყვანოთ:

1. სხეული ეწოდება იმას, რასაც სიგრძე, სიგანე და სიღრმე აქვს.

2. სხეულის საზღვრები ზედაპირებია.

3. წრფე პერპენდიკულარულია სიბრტყის მიმართ თუ ის მართკუთხეს ჰქმნის ყველა წრფესთან, რომლებიც ამ სიბრტყეზე მდებარეობენ და რომლებიც გადაკვეთენ მას.

8. პარალელური სიბრტყეები ისეთებს ეწოდება, რომლებიც ერთმანეთს არასოდეს არ შეხვდებიან.

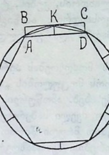
9. მსგავსი სხეულები ისეთებია, რომლებიც შემოსაზღვრული არიან ერთი და იგივე რიცხვის მსგავსი სიბრტყეებით.

შემდეგ მოყვანილია გეომეტრიული სხეულების განსაზღვრება — პირამიდის, პრიზმის, სფეროსი, კონუსის, ცილინდრის, კუბის, ტეტრაედრის, ოქტაედრის, დოდეკაედრის და იკოსაედრის. ამ წიგნით იწყება სტერეომეტრიის საკითხების დამუშავება და გრძელდება მე-12 და მე-13 წიგნში.

13°. მეთორმეტე წიგნი. ეს წიგნი შეიცავს მოძღვრებას პირამიდის, პრიზმის, კონუსის, ცილინდრის და სფეროს მოცულობის „ამოწურვის მეთოდის“ საშუალებით გაზომვის შესახებ. ამოწურვის მეთოდით, რომელსაც ჩვენ გაკვრით უკვე შევეხეთ, ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსები სარგებლობდნენ განსაკუთრებით მრუდი წირით შემოსაზღვრულ ფართობებისა და მრუდი ზედაპირებით შემოსაზღვრულ მოცულობათა გამოსათვლელად. მრუდი წირის თვისებათა გამოსარკვევად ამ წირებს განიხილავდნენ როგორც ზღვარს, რომლისაკენ მიისწრაფვიან შემოწერილი და ჩაწერილი მრავალკუთხედები, როცა მათი გვერდების რიცხვი იზრდება. ამნაირად ხდებოდა მრავალკუთხედსა და მრუდი წირს შორის მოთავსებული ფართობის ამოწურვა, რის გამო ამ მეთოდს XVII საუკუნის მათემატიკოსებმა ამოწურვის მეთოდი უწოდეს. ამასთანავე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსები მოითხოვდნენ მკაცრს დამტკიცებას, რის გამო მრუდ წირს არ განიხილავდნენ, როგორც მრავალკუთხედს, რომლის გვერდების რიცხვი დიდია. მრუდი წირის ირგვლივ შემოწერილი და მასში ჩაწერილი მრავალკუთხედები, ძველი მათემატიკოსებისათვის ცნობილ ნაკვეთებს წარმოადგენდნენ და მრუდი წირთან განუწყვეტელი მიახლოვება საშუალებას აძლევდა უფრო ნათელი წარმოდგენა ჰქონოდათ მრუდი წირის თვისებებზე.

უფრო მტკიცედ რომ დარწმუნებულიყვნენ მრუდი წირის ამ თვისებებში, „უაზრობამდე დაყვანის“ ხერხი შემოიღეს; ამ ხერხის საშუალებით ამტკიცებდნენ, რომ ყოველი დაშვება, რომელიც უარყოფს მრუდის ხსენებულ თვისებებს, უაზრობამდე მიგვიყვანს. მოკლედ რომ ვთქვათ, ამოწურვის მეთოდი უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის ჩანასახს წარმოადგენს. მრუდწირული ნაკვთების მიმართ ამოწურვის მეთოდის გამოყენებისათვის ევკლიდე წრეწირს განიხილავს, როგორც მასში ჩაწერილ მრავალკუთხედის ზღვარს და წინასწარ გვიჩვენებს, თუ როგორ შეიძლება ამისათვის გამოყენებულ იქნას მეათე წიგნის პირველი თეორემა. ის გვიჩვენებს, რომ წრეში შეიძლება ჩაიწეროს მრავალკუთხედი გვერდების ისეთი რიცხვით, რომ წრესა

და მრავალკუთხედს შორის განსხვავება შეიძლება გავხადოთ ყოველ ნებისმიერ მოცემული სიდიდეზე ნაკლები. ამ საკითხში ევკლიდეს აზრთა მსვლელობა მოკლედ შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასე: წრეში ჩავწეროთ ჯერ ექვსკუთხედი და შემდეგ გვერდების რიცხვი გავაორკეცოთ (ნახ. 30).



ნახ. 30.

ავაგოთ სეგმენტს შემოვლებული ABCD მართკუთხედი.

AKD სამკუთხედი, რომელიც AKD სეგმენტს გამოაკლდა ჩაწერილი მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვის გაორკეცების გამო, AKD სეგმენტის ნახევარზე მეტია იმიტომ, რომ AKD სამკუთხედი ABCD მართკუთხედის ნახევარია; უკანასკნელი კი AKD სეგმენტზე მეტია. გვერდების რიცხვის გაორკეცებით AKD სეგმენტს გამოაკლდა მის ნახევარზე მეტი სიდიდე, ე. ი. AKD სამკუთხედი; თუ ექვსკუთხედსა და წრეს შორის განსხვავება AKD სახის სიდიდეები იყვნენ, ახლა კი თორმეტკუთხედსა და წრეს შორის განსხვავება AK და KD სახის სეგმენტებს წარმოადგენენ, რომლებიც ორივე ერთად AKD სეგმენტზე ნაკლებია. ამ პროცესის საკმაო რიცხვჯერ განმეორება გვიჩვენებს რომ წრესა და მრავალკუთხედს შორის განსხვავება შეიძლება ყოველ ნებისმიერ აღებულ იმავე სახის სიდიდეზე ნაკლები გახდეს.

ამოწურვის მეთოდის საშუალებით ევკლიდე ამტკიცებს მეორე თეორემას, რომელიც ამბობს, რომ ორი წრის ფართობები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც მათი დიამეტრების კვადრატები. ამის დასამტკიცებლად ის ჯერ (1 თეორემა) ამტკიცებს, რომ ორ წრეში ჩაწერილი მსგავსი მრავალკუთხედები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც შესაბამის წრეთა დიამეტრების კვადრატები. მეორე თეორემის დამტკიცება თანამედროვე სიმბოლოების საშუალებით შეიძლება ასე გამოვსახოთ:

ვთქვათ მოცემულია A და B წრეების ფართობები რომელთა დიამეტრებია a და b. უნდა დამტკიცდეს, რომ

$$A : B = a^2 : b^2 \qquad (1)$$

დავუშვათ, რომ პირველ ტოლობას ადგილი არა აქვს და ადგილი აქვს:

$$a^2 : b^2 = A : C$$

ტოლობას, სადაც C რომელიმე ფართობის სიდიდეა, რომელიც B ფართობზე ან ნაკლებია, ან მეტი. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

პირველი, როდესაც $C<B$. წრეებში ჩავწეროთ წესიერი მსგავსი მრავალკუთხედები, რომელთა ფართობებია შესაბამისად A' და B'; ჩაწერილ მრავალკუთხედების გვერდების რიცხვი იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $B-B'<B-C$. მაშინ $B'>C$. ასეთ შემთხვევაში უნდა გვექნეს:

$$a^2:b^2=A:C=A':B'.$$

მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან $A>A'$, ხოლო $C<B'$.

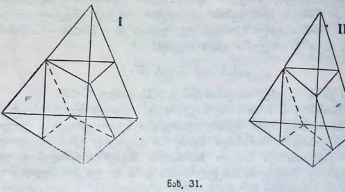
მაშასადამე, C არაა B-ზე ნაკლები; ამნაირადვე მტკიცდება, რომ C არ არის B-ზე მეტი. მესამე თეორემაში მტკიცდება, რომ ყოველი სამკუთხოვანი პირამიდა შეიძლება დაყოფილ იქნას ორ ტოლ და ერთმანეთის და მთელი პირამიდის მსგავს პირამიდებად და ორ პრიზმად, რომელთა მოცულობების ჯამი მთელი პირამიდის მოცულობის ნახევარზე მეტია.

მეოთხე თეორემაში განხილულია ერთნაირი სიმაღლის ორი სამკუთხოვანი პირამიდა, რომლებიც დაყოფილია მიმდევრობით რამდენიმე პირამიდებად და პრიზმებად, როგორც ეს ნაჩვენებია მესამე თეორემაში, და მტკიცდება, რომ ერთი (მთელი) პირამიდის ყველა პრიზმის მოცულობათა ჯამი შეეფარდება მეორე (მთელი) პირამიდის ყველა პრიზმის მოცულობათა ჯამს, როგორც ერთი პირამიდის (მთელი) ფუძის ფართობი შეეფარდება მეორე მთელი პირამიდის ფუძის ფართობს. ამ ორი უკანასკნელი თეორემის საფუძველზე ევკლიდე მეხუთე თეორემაში ამტკიცებს, რომ ერთნაირი სიმაღლის ორი სამკუთხოვანი პირამიდის მოცულობები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც მათი ფუძეთა ფართობები. დამტკიცება მან მოახდინა ამოწურვის მეთოდის საშუალებით. თანამედროვე სიმბოლოების საშუალებით კი ასე გამოვსახავთ: მოცემულია ორი სამკუთხოვანი პირამიდა (ნახ. 31). ერთნაირი სიმაღლით, რომელთა მოცულობანი აღვნიშნოთ V_1 და V_2-თი და ფუძეთა ფართობები — S_1 და S_2-თი. დასამტკიცებელია, რომ

$$S_1:S_2=V_1:V_2. \tag{1}$$

დავუშვათ, რომ (1) ტოლობა შეუძლებელია; მაშინ შეიძლება გვქონდეს

$$S_1 : S_2 = V_1 : X, \tag{2}$$



ნახ. 31.

სადაც ან $X < V_2$, ან $X > V_2$. დავუშვათ, რომ $X < V_2$. მაშინ უნდა იყოს:

$$S_1 : S_2 = V_1 : X \tag{3}$$

წიბოების შუა წერტილებზე გამავალი სიბრტყეებით დავშალოთ ორივე პირამიდა თითოეული ორ მსგავს პირამიდად და ორ ტოლ პრიზმად, თანახმად მესამე თეორემისა ისე, რომ თითოეულ პირამიდაში ორივე პრიზმის ჯამი მთელ პირამიდის ნახევარზე მეტი იყოს. ასეთივე წესით დავყოთ მცირე პირამიდებიც და ეს პროცესი გავაგრძელოთ მანამდე, სანამ, მაგალითად, II პირამიდისათვის ადგილი არ ექნება უტოლობას:

$$v_1 + v_2 < V_2 - X \tag{4}$$

სადაც v_1 და v_2 არიან უკანასკნელი დაყოფის შედეგად მიღებული პირამიდების მოცულობები. ამავე დროს ჩვენ გვაქვს

$$V_2 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = v_1 + v_2 \tag{5}$$

სადაც $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ არიან II პირამიდაში დარჩენილ პრიზმების მოცულობები. თანახმად (4) და (5) ტოლობისა მივიღებთ:

$$X < (p_1 + p_2 + \cdots + p_n). \tag{6}$$

თუ I პირამიდასაც ამნაირადვე დავყოფთ იმავე რიცხვის პირამიდებად, როგორც II პირამიდა დავყავით მაშინ მეოთხე თეორემის თანახმად გვექნება

$$S_1 : S_2 = (p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n) : (p_1 + p_2 + \dots + p_n), \qquad (7)$$

სადაც $p'_1, p'_2 \dots p'_n$ პირველ პირამიდაში მყოფი პრიზმების მოცულობანია. მაგრამ ჩვენ გვქონდა

$$S_1 : S_2 = V_1 : X. \qquad (2)$$

ამიტომ (2) და (7) ტოლობის, ძალით მივიღებთ

$$V_1 : X = (p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n) : (p_1 + p_2 + \dots + p_n). \qquad (8)$$

მაგრამ $V_1 > (p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n)$, ვინაიდან V_1 მთელი პირამიდის მოცულობაა და $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$, მასში მყოფი პრიზმების მოცულობანია. ამიტომ უკანასკნელი უტოლობისა და (8) ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$X > (p_1 + p_2 + \dots + p_n);$$

ჩვენ კი წინათ გვქონდა რომ $X < (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$; მაშასადამე, დაშვება იმისა, რომ $X < V_2$ არ არის სწორი. ასევე დამტკიცდება, რომ X მეტი არ არის V_2-ზე.

ეს უკანასკნელი და მეორე თეორემა ადვილად დაგვარწმუნებს იმაში, რომ ამოწურვის მეთოდს საფუძვლად ზღვრის ცნება უდევს, ვინაიდან ამ მეთოდით დამტკიცების შემთხვევაში ცდილობენ ზღვარსა და მიახლოვებითი მნიშვნელობის შორის სხვაობა ყოველ ნებისმიერ სიდიდეზე ნაკლები გახადონ. მაგრამ ზღვრის ცნების შემოღება ნიშნავდა უსასრულობის ცნების შემოღებას, რაც, როგორც უკვე ვიცით, ძენონთან კამათის შემდეგ ერთხელ და სამუდამოდ უარყოფილი იქმნა საბერძნეთის მათემატიკოსების მიერ. ამიტომ როგორც ამ ორ ზემოთხსენებულ თეორემიდან ჩანს, ევკლიდე იმეორებს დამტკიცების ერთ და იმავე ხერხს და ამ უკანასკნელს იმეორებდნენ ევკლიდე და სხვა ძველი მათემატიკოსები ყოველთვის, როდესაც ამას საჭიროდ დაინახავდნენ.

მეექვსე წინადადებაში მტკიცდება, რომ ერთნაირი სიმაღლის მრავალკუთხოვანი პირამიდები ერთმანეთს ისე შეეფარდებიან, რო-

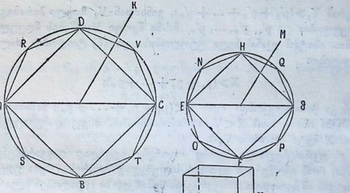
გორც მათი ფუძეთა ფართობები. მერვე თეორემით ევკლიდე ამტკიცებს, რომ მსგავსი სამკუთხოვანი პირამიდების მოცულობანი ისე შეეფარდებიან ერთი მეორეს, როგორც შესაბამის გვერდების კუბები.

მეათე, მეთერთმეტე და მეთვრამეტე თეორემები დამტკიცებულია ამოწურვის მეთოდის საშუალებით. მეათე თეორემა ამბობს, რომ თუ ერთნაირი სიმაღლის კონუსს და ცილინდრს საერთო ფუძე აქვთ, მაშინ კონუსის მოცულობა ცილინდრის მოცულობის მესამედის ტოლია.

მეთერთმეტე თეორემა ასეთია:

ერთნაირი სიმაღლის კონუსის და ცილინდრის მოცულობანი ისე შეეფარდებიან ერთი მეორეს როგორც მათი ფუძეთა ფართობები.

იმისათვის, რომ მკითხველი გაეცნოს ევკლიდეს მსჯელობას ამოწურვის მეთოდით დამტკიცების შემთხვევაში, მოვიყვანოთ ამ თეორემის დამტკიცების პირველი შემთხვევა ისე, როგორც ეს ტექსტშია (იმ განსხვავებით, რომ ბერძნულ ასოებს შევცვლით ლათინურით და შეფარდების, ტოლობის და უტოლობის ნიშნებს ვიხმართ ნაცვლად სიტყვიერი გამოთქმისა):



ნახ. 32.

დამტკიცება: „ეს რომ არ ყოფილიყო, მაშინ:

ABCD : EFgH = კონუსი AK : X (ნახ. 32)

სადაც X სხეული EM კონუსზე ან ნაკლები, ან მეტი უნდა იყოს.

პირველი შემთხვევა. ვთქვათ სხეული $X < EM$ კონუსზე ასე, რომ კონუსი $EM = X + Z$.

EFgH წრეში ჩავწეროთ EFgH კვადრატი, მაშინ ეს უკანასკნელი წრის ნახევარზე მეტია. ამ კვადრატზე EM კონუსის სიმაღლის EM პირამიდა ავაგოთ, მაშინ ის კონუსის ნახევარზე მეტია, ვინაიდან ის ტოლია ისეთივე სიმაღლის პირამიდისა, რომელიც შემოწერილ კვადრატზეა აგებული, და კონუსი კი უკანასკნელზე ნაკლებია. წრეწირის რკალები EF, Fg, ... გავყოთ შუაზე და ვაწარმოოთ ისეთივე აგება, როგორც წინამავალ წინადადების მეორე შემთხვევისათვის და შემდეგ თუ ასე გავაგრძელეთ, დასასრულ მივალთ კონუსის ისეთ ნაკვეთებამდე, რომლებიც Z-ზე ნაკლები არიან, ვთქვათ ეს ნაკვეთები არიან (აგებული) NH-ზე, ... მაშინ დარჩენილი FM პირამიდა HNE ...; ფუძეზე (აგებული), EM კონუსის. სიმაღლის, X-ზე მეტია. ABCD წრეში ჩავწეროთ DRA... მრავალკუთხედი, რომელიც მსგავსია და მსგავსად მდებარე HNE მრავალკუთხედის მიმართ და მაზე ავაგოთ AK კონუსის სიმაღლის BK პირამიდა. რადგან (12 წიგ. 1 წინად):

$$AC^2 : Fg^2 = \text{მრავალკ. } DRA \ldots : \text{მრავ. } HNE \ldots$$

და (12 წიგნი 2 წინად):

$$AC^2 : Fg^2 = \text{წრე } ABCD : \text{წრე } EFgH$$

მაშინ:

წრე ABCD წრე EFgH = მრავალკ. DRA ...: მრავალკ. HNE ... მაგრამ ჩვენ დავუშვით, რომ

$$\text{წრე } ABCD : \text{წრე } EFgH = \text{კონუსი } AK : X,$$

ამიტომ მრავალ. DRA ...: მრავ. HNE ... = კონ. AK : X, მაგრამ მრავალკ. DRA ...: მრავ. HNE ... = პირამიდა BK : პირ. FM, მაშასადამე:

$$\text{კონუსი } AK : X = \text{პირ. } BK : \text{პირ. } FM$$

მაგრამ პირამიდა კონუსის შიგნით მდებარეობს, ამიტომ კონუსი $AK >$ პირ. BK. აქედან გამომდინარეობს, რომ $X >$ პირ. FM, რაც მოცემულს ეწინააღმდეგება, რომ პირ. $FM > X$. მაშასადამე, არ შეიძლება იყოს:

წრე ABCD : წრე EFgH = კონუსი AK : X თუ კი X< კონუსი FM.

ამნაირადვე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ არ შეიძლება იყოს:

წრე EFgH: წრე ABCD= კონუსი EM : Y თუ კი Y<AK კონუსზე".

მეორე შემთხვევაში მტკიცდება, რომ X მეტი არ არის EM კონუსზე ან და Y მეტი არ არის AK კონუსზე.

მე-17 წინადადებაში ევკლიდეს გამოჰყავს ამოცანა: ორ კონცენტრულ სფეროებიდან დიდში ჩავწეროთ ისეთი მრავალწახნაგა, რომელიც თავისი ზედაპირით მცირეს არ ეხებოდეს.

ამავე წინადადების შენიშვნაში ამტკიცებს, რომ სფეროებში ჩაწერილი მსგავსი მრავალწახნაგთა მოცულობანი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც სფეროების დიამეტრების კუბები.

მე-17 წინადადების საფუძველზე მე-18 წინადადებაში ამტკიცებს, რომ სფეროების მოცულობანი ისე შეეფარდებიან ერთანეთს, როგორც მათი დიამეტრების კუბები.

ჩვენი თანამედროვე სიმბოლოების საშუალებით ეს თეორემა დამტკიცდება შემდეგნაირად:

ვთქვათ მოცემულია ორი სფერო, რომელთა მოცულობანია A და B და დიამეტრებია a და b. უნდა დამტკიცდეს, რომ

$$A : B = a^3 : b^3 \qquad (1)$$

დავუშვათ, რომ (1) ტოლობის ნაცვლად ადგილი აქვს

$$A : X = a^3 : b^3 \qquad (2)$$ ტოლობას,

სადაც X შეიძლება იყოს B-ზე ან ნაკლები და ან მეტი. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა, ე. ი. როდესაც

$$X < B$$

მე-17 წინადადების ძალით სფეროში ჩავწეროთ მსგავსი მრავალწახნაგები გვერდების იმდენად დიდი რიცხვით, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $B - B' < B - X$, სადაც B'-ით აღვნიშნეთ ერთი მრავალწახნაგას მოცულობა და A'-ით კი მეორესი. უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$X < B'.$$

მე-17 თეორემის შენიშვნის ძალით გვაქვს:

$$A' : B' = a^3 : b^3 \tag{3}$$

(2) და (3) ტოლობათა ძალით გვექნება:

$$A : X = A' : B'.$$

მაგრამ ეს უკანასკნელი ტოლობა შეუძლებელია, რადგან $A > A'$, მაგრამ $X < B'$.

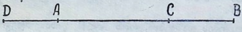
ამგვარად, იმის დაშვებამ, რომ $X < B$, წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანა, რის გამო X არ შეიძლება B-ზე ნაკლები იყოს. ასეთივე წესით მტკიცდება, რომ X არ შეიძლება B-ზე მეტი იყოს, ე. ი., საბოლოოდ $X = B$ და ამით (1) ტოლობა დამტკიცებულია.

14°. მეცამეტე წიგნი. ანალიზური და სინთეზური მეთოდები. ანალიზური და სინთეზური სისტემები. ჩვენ უკვე ვთქვით, რომ ძველი საბერძნეთის ფილოსოფიური სკოლები მათემატიკურ სკოლებთან გარკვეულ თანამშრომლობას ეწეოდნენ მათემატიკურ დამტკიცებათა მეთოდების და საერთოდ მათემატიკის გარეგნულ ფორმების გამომუშავებაში. ანალიზური მეთოდის გამომგონებლად ევდოქსოსს და პლატონს სთვლიან; მაგრამ პლატონისათვის ამ მეთოდის გამოგონების მიწერა ნაკლებად საფუძვლიანია, რადგან ანალიზურ მეთოდის შესახებ მის შრომებში ცოტაა ნათქვამი; მეტი საფუძველია იმისა, რომ ეს გამოგონება ევდოქსოსს მიეწეროს, რადგანაც მეთოდების გამომუშავების გარდა მას მათემატიკაში მეტად მნიშვნელოვანი გამოკვლევები აქვს.

ამ წიგნის პირველ წინადადებას დართულ შენიშვნაში ევკლიდე ანალიზის და სინთეზის ასეთ განსაზღვრას იძლევა: „წინადადება ანალიზურად მტკიცდება, თუ მოსაძებნს ცნობილად ჩათვლიან და აქედან გამოყვანილ შედეგების საფუძველზე ცნობილ ჭეშმარიტებებს ღებულობენ. პირიქით, წინადადება სინთეზურად არის დამტკიცებული, თუ ცნობილ ჭეშმარიტებების საშუალებით მოსაძებნამდე მივლენ“. ამის შემდეგ ევკლიდე ანალიზურად და სინთეზურად ამტკიცებს პირველ წინადადებას, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: AB წრფეწირი C წერტილში (ნახ. 33) დაყოფილია შეფარდებით:

$$AB : AC = AC : CB \tag{1}$$

და AB-ს გაგრძელებაზე აღებულია ნაკვეთი $AD=\frac{1}{2}AB$. უნდა დამტკიცდეს, რომ $CD^2=5AD^2$; თეორემის ანალიზურად დამტკიცებისათვის ევკლიდე დაუშვებს, რომ წინადადება დამტკიცებულია, ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას $CD^2=AD^2$. მაგრამ (მეორე წიგნის მეოთხე წინადადების ძალით)



ნახ. 33.

$$CD^2=AC^2+2(AC\cdot AD)+AD^2$$

ამიტომ

$$AC^2+AD^2+2AC\cdot AD=5AD^2,$$

რასაც პირველი წიგნის მესამე წინადადების ძალით ამ სახით სწერს:

$$AC^2+2AC\cdot AD=4AD^2 \qquad (2)$$

ვინაიდან $AB=2AD$, ამიტომ $2AD\cdot AC=AB\cdot AC$. აგრეთვე (1) ტოლობა გვაძლევს $AB\cdot BC=AC^2$; ამის შემდეგ (2) ტოლობიდან მიიღება:

$$AB\cdot AC+AB\cdot BC=4AD^2.$$

უკანასკნელი ტოლობა მან გარდაქმნა მეორე წიგნის მეორე წინადადებაში დამტკიცებულ ტოლობად:

$$AB\cdot AC+AB\cdot BC=AB^2$$

საიდანაც მიიღო $4AD^2=AB^2$, ანუ $AD=2AB$. ე. ი. საწყისი პირობა მიიღო.

სინთეზურ დამტკიცებას იწყებს $4AD^2=AB^2$ ტოლობიდან და შექცეული წესით იმავე თეორემებით სარგებლობს, რომლებითაც სარგებლობდა ანალიზურად დამტკიცებაში. მაგალითად: $4AD^2=AB^2$ მიჰყავს მეორე წიგნის მეორე წინადადებამდე

$$AB^2=AB\cdot AC+AB\cdot BC;$$

ეს კი პირველი წიგნის მესამე წინადადებამდე

$$AC^2 + 2\,AC \cdot AD = 4\,AD^2$$

და საბოლოოდ მეორე წიგნის მეოთხე წინადადების

$$(AC^2 + AD^2 + 2AC \cdot AD = DC^2)$$

საშუალებით ღებულობს, რომ $DC^2 = 5AD^2$. ამ თეორემიდან და ანალიზის განსაზღვრიდან აშკარაა, თუ როგორ ესმოდა ევკლიდეს ანალიზური მეთოდით დამტკიცება: დაუშვა რა თეორემის სიჭეშმარიტე, ე. ი. რომ $DC^2 = 5AD^2$, შედეგად გამოჰყავს თეორემა $AC^2 + AD^2 + 2AC \cdot AD = 5AD^2$; ამ უკანასკნელის შედეგად კი — $4AD^2 = AB \cdot AC + AB \cdot BC$ და ა. შ.

ამრიგად, ევკლიდესათვის ანალიზური მეთოდით თეორემის დამტკიცება წარმოადგენს თეორემათა განუწყვეტელი რიგის დაწესებას, დაწყებული დასამტკიცებელიდან და დამთავრებული ცნობილით. ამ რიგის თითოეულ თეორემათაგანი წინა თეორემის უშუალო შედეგია. სინთეზური მეთოდით დამტკიცებაში ევკლიდე იმეორებს იმავეს, რასაც ანალიზური მეთოდით დამტკიცებაში იძლევა, მაგრამ შექცეული გზით.

ანალიზურ მეთოდს ძველი ბერძნები მაშინ მიმართავდნენ, როდესაც უნდა შეემოწმებიათ მიხვედრის საშუალებით მოძებნილი თეორემის სისწორე. შესამოწმებელ თეორემის სისწორის დაშვების შემდეგ მოხდენილ მთელ რიგ გარდაქმნათა შედეგად მიღებული თეორემა შეიძლება აღმოჩნდეს ან ჭეშმარიტი, ან ყალბი; პირველ შემთხვევაში შეიძლება იჰქვას, რომ შესამოწმებელი თეორემა, ჭეშმარიტია თუმცა ეს არ იქნება სარწმუნო, ვინაიდან თეორემა შეიძლება ყალბი იყოს, მაგრამ მისგან გამომდინარე აუცილებელი შედეგი ჭეშმარიტი იყოს. ეს უკანასკნელი გარემოება ჯერ კიდევ არისტოტელემ შენიშნა; მაგალითად, ყალბ თეორემიდან: „ყოველ სამკუთხედში გვერდები პროპორციულია მოპირდაპირე კუთხეებისა“, გამომდინარეობს, როგორც აუცილებელი შედეგი, ისეთი ჭეშმარიტი წინადადება, რომ ყოველ ტოლ კუთხეთა პირდაპირ ტოლი გვერდები მდებარეობენ. შესამოწმებელ თეორემის სიჭეშმარიტის დასადასტურებლად ანალიზში განხილულ ყველა გარდაქმნებს გაივლიან შექცეულად მანამდე, სანამ არ დააწესებენ, რომ შედეგის სიჭეშმარიტე

იწვევს შესამოწმებელ თეორემის სიჭეშმარიტეს; თუ ეს ასეა, მაშინ შებრუნებული წესით განვლილი გარდაქმნები შესამოწმებელ თეორემის სისწორეს დამამტკიცებელი იქნებიან და მათ სინთეზური სახით ჩამოაყალიბებენ. მეორე შემთხვევაში, ე. ი. როდესაც მიღებული შედეგები ყალბია, მაშინათვე შეიძლება ისეთი დასკვნის გამოტანა, რომ შესამოწმებელი თეორემა ყალბია, ვინაიდან ჭეშმარიტი თეორემის შედეგი არ შეიძლება ყალბი იყოს.

ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსები ანალიზურ და სინთეზურ მეთოდებს იყენებდნენ აგრეთვე გეომეტრიულ ამოცანების ამოსახსნელად. ასეთი ამოცანების ამოხსნა მდგომარეობდა ფარგლის და სახაზავის საშუალებით რეალურ აგებულობის მოძებნაში; ჩვენს მიერ უკვე განხილულ მეორე ხარისხის განტოლების გეომეტრიულად ამოხსნისათვის ანალიზური მეთოდით სარგებლობდნენ. თუ ძველი საბერძნეთის მათემატიკის ფარგლებს გავცილდებით და თანამედროვე მათემატიკის სფეროში გადავალთ, ანალიზური და სინთეზური მეთოდების გამოყენება უფრო ნათლად შეიძლება ავხსნათ ისეთ ამოცანებზე, რომლებიც ალგებრულ განტოლებათა საშუალებით ამოიხსნებიან. საერთოდ, ყოველი მათემატიკური ამოცანის მიზანია ისეთი სიდიდეების მოძებნა, რომლებიც მოცემულ პირობებს აკმაყოფილებენ; ამოცანის ამოსახსნელად აუცილებელია ამ პირობების ანალიზი, მათი ნათლად წარმოდგენა, რასაც მაშინ მივაღწევთ, თუ კი წარმოვიდგენთ, რომ ამოცანა ამოხსნილია. მაგალითად, იმ ამოცანის ამოსახსნელად, რომელიც ამოიხსნება მეორე ხარისხის განტოლების საშუალებით, შემოგვაქვს უცნობ სიდიდესათვის აღნიშვნა; ამ უკანასკნელისა და ცნობილ სიდიდეების საშუალებით ვახდენთ მოცემულ პირობების გარდაქმნას, რის შედეგად ვღებულობთ მეორე ხარისხის განტოლებას; შემდეგ წარმოვიდგენთ, რომ ეს განტოლება ($x^2 + ax + b = 0$) დაკმაყოფილებულია, ე. ი. წარმოვიდგენთ, რომ ამოცანა ამოხსნილია. ამით ანალიზი მთავრდება. ამ განტოლებიდან უცნობის რიცხვითი მნიშვნელობის მოძებნა და შემდეგ იმის შემოწმება აკმაყოფილებს თუ არა უცნობის ეს მნიშვნელობა ამოცანაში მოცემულ პირობებს, სინთეზს შეადგენს.

ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ ევკლიდეს მიერ ცალკე თეორემების და ამოცანების მიმართ ანალიზური და სინთეზური მეთოდის გამოყენება. ახლა ისმება ასეთი საკითხი: რა სისტემით არის აგებული ევკლიდეს გეომეტრია მთლიანად? „ელემენტების“ თითოეულ წიგნ-

ში, აგრეთვე მთელ ამ შრომაში ამოცანები და თეორემები ისე არის დალაგებული, რომ ყოველი ახალი თეორემა წინამავალ თეორემის და ამოცანის მასალას ეყრდნობა. აქ სწარმოებს ცნობილიდან უცნობისაკენ, მარტივი და კერძოდან, რთული და ზოგადისაკენ გადასვლა; თეორემისა და ამოცანების ასეთნაირად ჩამოყალიბებას სინთეზურ სისტემას უწოდებენ და ამრიგად ევკლიდესი გეომეტრია არსებითად სინთეზურ გეომეტრიას წარმოადგენს. ანალიზურ სისტემაში კი პირიქით ხდება: ზოგადი და რთულისაგან კერძო და მარტივი მიიღება.

პირველი წინადადების გარდა ანალიზურ და სინთეზურ მეთოდებს ევკლიდე იყენებს მეორე, მესამე, მეოთხე და მეხუთე წინადადებაში. განსაკუთრებით კოხტა დამტკიცებად ითვლება მეათე თეორემის დამტკიცება; ეს თეორემა ამბობს: „წრეში ჩაწერილ სწორი ხუთკუთხედის გვერდზე აგებული კვადრატი იმავე წრეში ჩაწერილ სწორი ექვსკუთხედი და ათკუთხედის გვერდებზე აგებულ კვადრატების ჯამის ტოლია."

„ელემენტების" მე-14-ე და მე-15-ე წიგნი, როგორც დადასტურდა, ევკლიდეს არ დაუწერია; ისინი დაწერილია საბერძნეთის მათემატიკოსი ჰიპსიკლეს მიერ, რომელიც ევკლიდეს შემდეგ ცხოვრობდა (დაახლოებით ჩვენი ერას 150 წელს). თითოეული ამ წიგნთაგანი 7 წინადადებას შეიცავს და მათში განხილულია სწორი მრავალწახნაგიანი სხეულების საკითხი.

მისმა „ელემენტებმა" ევკლიდეს დიდი სახელი მოუხვეჭა. ეს შრომა გადაიქცა ისეთ სახელმძღვანელოდ, რომლითაც სწავლობდნენ ორი ათასი წლის განმავლობაში როგორც ახალგაზრდები, ისე მოზრდილებიც. ის სახელმძღვანელოები, რომელთა საშუალებით ახლა მიმდინარეობს დაწყებითი გეომეტრიის შესწავლა, არსებითად ევკლიდეს გადაკეთებულ „ელემენტებს" წარმოადგენს. „ელემენტებში" მთლიანად თავმოყრილია ბერძენთა მათემატიკური ცოდნა კონუსურ კვეთათა შესახებ მოძღვრების გარდა. ეს შრომა საბერძნეთის მათემატიკის ისტორიაში ეპოქას ქმნის. ის დიდ განძს წარმოადგენს აგრეთვე მათემატიკის ისტორიისათვის, ვინაიდან ბერძენთა მათემატიკურ ცოდნათა შესახებ ის პირველი ძეგლია, რომელმაც ჩვენამდე მოაღწია და ევკლიდემდე მათემატიკის განვითარების პერიოდის დამაბნელებელი ბურუსი გაფანტა.

15°. ევკლიდეს კომენტატორები. „ელემენტებში“ ევკლიდე ცდილობს გეომეტრიის მთელი მასალა თანმიმდევრობით მოფიქრებულ სისტემაში მოიყვანოს და გამოიყვანოს ის პატარა რიცხვის განსაზღვრებისაგან, პოსტულატებისაგან და აქსიომებისაგან; მაგრამ ყველა ეს არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ მასზე ფორმალური დასკვნები დამყარდეს, და ევკლიდე ხშირად იძულებულია ისინი ინტუიტური დასკვნებით შესცვალოს.

ინტუიცია მის შრომებში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს; ამასთანავე ევკლიდეს გეომეტრიაში სრულებით არ აქვს ადგილი ფართობების გაზომვას, ე. ი. ფ ა რ თ ო ბ ე ბ ი ს გამოსახვას რიცხვის საშუალებით; მისი გეომეტრია არ არის მეტრული. ევკლიდესათვის სიდიდის რიცხვით გამოსახვის ამოცანა უცხოა. როგორც ევკლიდეს, ისე მის შემდეგ მცხოვრები გეომეტრების (არქიმედესი და აპოლონიუსის) შრომების განსაკუთრებული თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ თითოეული პრობლემა ამოიხსნება მასთან ძალიან შეგუებულ საშუალებებით. ამაშია გეომეტრიული მეთოდის სიძლიერე, მაგრამ იმავე დროს მისი სისუსტეც, ვინაიდან ის ყოველ შემთხვევისათვის სპეციალური იარაღის დამზადებას მოითხოვს. ამის გამო ძველი საბერძნეთის გეომეტრია ჩიხს მიადგა: მასში არსებულ წინააღმდეგობათა გადალახვა შეიძლებოდა მხოლოდ საწინააღმდეგო გზით, კვლევის მძლავრი და ზოგადი ხერხების გამოგონების გზით, რაც ძალიან გვიან მოხდა; მანამდე კი, მაგალითად, მეორე საუკუნეში ჩვენს ერამდე, ევკლიდეს „ელემენტები“ უკვე კლასიკურ ნაწარმოებს წარმოადგენდა, რომლის უგულებელყოფას ევკლიდესაგან დამოუკიდებლად გეომეტრიის საფუძვლების აგებას ვერავინ ვერ ბედავდა და კმაყოფილდებოდნენ მხოლოდ განმარტებით.

ევკლიდეს კომენტატორების მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ მათ გამოააშკარავეს მისი ლოღიკური სქემების სუსტი ადგილები; ბევრმა მათგანმა „ელემენტების“ მრავალ ბუნდოვან ადგილებზე მიგვითითეს, აღნიშნეს რა მთელი რიგი თვისებები სივრცითი სახეებისა, რომლებიც გეომეტრიის ლოღიკურ სისტემას საფუძვლად უნდა დაედვას.

ევკლიდეს პირველი კომენტატორი ჰემონ როდოსელი იყო, რომელიც მეორე საუკუნეში (ჩვენს ერამდე) ცხოვრობდა. ამ მიმართულებით მუშაობდნენ აგრეთვე ჰერონი და პაპოსი, მაგრამ მათი კომენტარების უმეტეს ნაწილს ჩვენამდე არ მოუღწევია. ძველი სა-

ბერძნეთის მათემატიკოსებისაგან ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი კომენტარი პროკლოსმა დაგვიტოვა (დაახლოებით V საუკუნე ჩვენი ერისა). ეს კომენტარი გახდა კლასიკური ნაწარმოები, რომელსაც დიდი ხნის განმავლობაში ვერავინ მეტოქეობას ვერ უწევდა. პროკლოსმა პირველმა გამოსთქვა აზრი ევკლიდეს პირველ წიგნში მოთავსებულ მეხუთე პოსტულატის (ანუ მეთერთმეტე აქსიომის) გადასინჯვის შესახებ; ამით მან ბიძგი მისცა იმ და ვას და კვლევა-ძიებას, რომელიც ამ პოსტულატის ირგვლივ დიდხანს მიმდინარეობდა და რომელმაც ორი ათასი წლის შემდეგ გეომეტრიის არსზე შეხედულებები ძირფესვიანად შეცვალა. ეს პოსტულატი პარალელურ წირთა თეორიას ეხება და როგორც ჩვენ უკვე ვთქვით მარტივად ასე გამოისახება: სიბრტყეში მოცემულ წრფის გარეთ მდებარე მოცემულ წერტილზე შეიძლება გავლებულ იქნას მხოლოდ ერთი წრფე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ შეხვდება. პროკლოსიდან დაწყებული მათემატიკოსები ცდილობდნენ ამ პოსტულატის დამტკიცებას ევკლიდეს სხვა პოსტულატებისა და აქსიომების საშუალებით, ვინაიდან ის თვალსაჩინო არ არის. პროკლოსმა მეხუთე პოსტულატი უარყო და მის ნაცვლად თავისი პოსტულატი წამოაყენა, რომლის ძალით წრფე მოცემული წრფის პარალელურია, თუ კი პირველის ყველა წერტილი თანაბრად არის დაშორებული უკანასკნელისაგან*. პარალელობის განსაზღვრის ამ ხერხს XVI და XVII საუკუნის თითქმის ყველა სახელმძღვანელოში შევხვდებით. ამ განსაზღვრაში არა აშკარად არის ნაგულისხმევი, რომ მოცემულ წრფისგან თანაბრად დაშორებული წერტილები, ისევ რომელიღაც წრფეს ჰქმნიან; უკანასკნელის დამტკიცება კი ისევ მეხუთე პოსტულატის გამოყენებას მოითხოვს, ასე რომ პროკლოსმა მიზანს ვერ მიაღწია.

ევკლიდეს კომენტირება შეუწყვეტლად გრძელდებოდა საშუალო და ახალ საუკუნეებში. XIII საუკუნეში სპარსელი მათემატიკოსი ნასირ-ედინი, ცდილობდა რა ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატის დამტკიცებას, დაამტკიცა, რომ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი ორი მართის ტოლია. 1507 წელს გერმანიის მათემატიკოსი კლავი იძლევა მეხუთე პოსტულატის დამტკიცებას შემდეგი დებულების დაშვებით: სიბრტყეზე მოცემულ წრფისაგან ტოლ მანძილებით დაშორებული წერ-

* Ф. Клейн, Неевклидова геометрия .გვ. 297—302. 1936.

ტილების გეომეტრიული ადგილი — წრფეა. ინგლისის მათემატიკოსი ვალისი (1616 — 1703) ამტკიცებს. ამ პოსტულატს, გამოდის რა იმ დაშვებიდან, რომ ყოველი სამკუთხედისათვის შეიძლება ნებისმიერ დიდ მასშტაბში ავაგოთ მისი მსგავსი სამკუთხედი, ამასთანავე ის იმ აზრისაა, რომ ეს დაშვება ახალ პოსტულატს არ წარმოადგენს და მისი გამოყვანა შეიძლება ევკლიდეს სხვა პოსტულატისაგან, ანუ აქსიომებისაგან.

1733 წელს გამოვიდა იტალიის მათემატიკოსის საკჰერის (Saccheri) წიგნი სახელწოდებით: „ევკლიდე განთავისუფლებული ყოველგვარი ლაქებისაგან". საკჰერის მიზანი იყო ევკლიდეს ყველა ნაკლულოვანების გასწორება. ამ წიგნში ის პარალელების შესახებ პოსტულატს (მეხუთე პოსტულატს) ახალ მიმართულებას აძლევს; ის ცდილობს ამ პოსტულატის დამტკიცებას საწინააღმდეგოს დაშვების საშუალებით და ამისათვის 32 წინადადებას აწესებს, რომლებიც არსებითად არაევკლიდურ გეომეტრიის პირველ თავს წარმოადგენს. პარალელების შესახებ პოსტულატისაგან დამოუკიდებელი ხერხით საკჰერი ააშკარავებს, რომ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი არ შეიძლება ორ მართზე მეტი იყოს. თუ პარალელობის შესახებ პოსტულატი ძალაში დავტოვეთ, მაშინ ის ორ მართის ტოლია, თუ ეს პოსტულატი უარვყავით, მაშინ ის ორ მართზე ნაკლები უნდა იყოს. საკჰერი თავის გეომეტრიულ აგებულებებს სწორედ იმაზე ამყარებს, რომ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი ორ მართზე ნაკლებია.

ამავე მიმართულებით მუშაობდა ლამბერტი (Lamberte 1728 — 1777) რომელმაც გაცილებით უფრო წინ წაიწია, ვიდრე საკჰერმა.

1781 წელს სიმსონმა გამოსცა ევკლიდეს „ელემენტები", სადაც მან ნასირ-ედინის დამტკიცება გაიმეორა. ჟენეველ მათემატიკოსმა ბერტრანმა 1778 წელს გამოაქვეყნა პარალელობის შესახებ პოსტულატის ახალი დამტკიცება, დამყარებული დებულებაზე: ორ განუზღვრელ სივრცეთა შორის მოცული სივრცე მომცველ სივრცეზე ნაკლებია".

1794 წელს საფრანგეთის სახელგანთქმულ გეომეტრმა ლეჟანდრმა გამოუშვა წიგნი სახელწოდებით: „გეომეტრიის ელემენტები". ეს იყო პირველი შრომა, რომელშიც გეომეტრიის საფუძვლები ჩამოყალიბებულია ისეთი გეგმით, რომელიც ძლიერ განსხვავდება ევკლიდეს „ელემენტების" გეგმისაგან. ლეჟანდრმა ევკლიდეს „ელემენტებიდან" ამორიცხა ყველაფერი ის, რაც გეომეტრიას არ შეეხება და რომლის

გეერდის ახვევა შეიძლება ელემენტარულ სწავლების შემთხვევაში; მან აგრეთვე სისტემის არითმეტიზაცია მოახდინა: ყველგან მეტრიკა შემოიღო, და პროპორციათა თეორია არითმეტიკულ სქემაში ჩამოაყალიბა. ლეჟანდრის „ელემენტებში" გეომეტრიული ალგებრა უკვე აღარ არის. ყველგან ალგებრული მეთოდებია გამოყენებული. ამრიგად ალგებრის გეომეტრიზაციიდან გეომეტრიის ალგებრიზაციაზე გადავიდა. ამ ცვლილებებმა ევკლიდეს გეომეტრია ძალიან გაამარტივა; მართალია, ელემენტარული გეომეტრია ამით ლოღიკურად და მეცნიერულად უფრო სუსტ ფორმებში ჩამოყალიბდა, მაგრამ ის სამაგიეროდ ახალგაზრდა მოსწავლეთათვის უფრო ხელმისაწვდომი გახდა.

ლეჟანდრის შემდეგ ალგებრისა და უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის გამოყენება გეომეტრიაში კიდევ უფრო ფართოვდება. ამ მიმართულებით მუშაობდა გასპარ მონჟი (1776 — 1815), დიდი გეომეტრი და საფრანგეთის რევოლუციის ერთ-ერთი ბელადთაგანი.

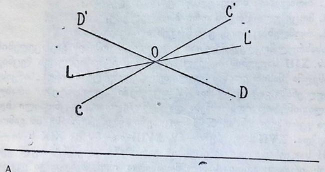
მეხუთე პოსტულატის დამტკიცების ირგვლივ მუშაობა მე-19-ე საუკუნეშიც გადადის; ამ მიმართულებით კვლევა ძიებას აწარმოებდნენ შვაიკარტი, ვახტერი და ტაურინუსი. მაგრამ ყველა მათემატიკოსის „დამტკიცებები", რომლების შესახებ ჩვენ უკვე ვილაპარაკეთ, შემცდარ დასკვნებს ემყარებოდნენ, ვინაიდან დასამტკიცებელ პოსტულატის ნაცვლად მისი ტოლ-ძალოვანი პოსტულატი შემოყავდათ. ბოლოს დარწმუნდნენ იმაში, რომ ეს პოსტულატი არ შეიძლება დამტკიცდეს ევკლიდეს სხვა პოსტულატების და აქსიომების საშუალებით და ამ მიმართულებით წარმოებული გამოკვლევა დამთავრდა XIX საუკუნის დასაწყისში ახალი გეომეტრიის გამოგონებით, რომელსაც გაუსმა არაევკლიდური გეომეტრია უწოდა. ამ გეომეტრიის გამოგონება დაკავშირებულია სამი დიდი მათემატიკოსის— გაუსის, ლობაჩევსკისა და ბოლიაის სახელებთან. ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, თითქმის ერთდროულად და სხვადასხვა ადგილას (გაუსმა — გერმანიაში, ბოლიაიმ — უნგრეთში, ლობაჩევსკიმ — რუსეთში) პარალელურ წირების შესახებ ამოცანის თავისებურად ამოხსნამდე მივიდნენ.

ამის შესახებ გაუსი შემდეგს ამბობს: „იმის დაშვებას, რომ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი 180-ზე ნაკლებია, მივყავართ თავისებურ, ჩვენი (ევკლიდეს) გეომეტრიისაგან სრულებით განსხვავებულ გეომეტრიისაკენ. ეს გეომეტრია სავსებით თანმიმდევრობითია და მე ის

სავსებით დამაკმაყოფილებლად განვავითარე ჩემთვის; ამ გეომეტრიაში მე მაქვს ის, რაც უნდა იყოს ამოცანის ამოხსნის საშუალება, გარდა რომელიღაც მუდმივის განსაზღვრისა, რომლის მნიშვნელობა, a priori არ შეიძლება დაწესებულ იქმნას. რაც უფრო მეტ მნიშვნელობას მივცემთ ამ მუდმივს, მით უფრო ახლოს მივალთ ევკლიდეს გეომეტრიასთან, და მის უსასრულოდ დიდ მნიშვნელობას ორივე სისტემები თანამთხვევისაკენ მიჰყავს. ამ გეომეტრიის დებულებანი ნაწილობრივ პარადოქსალურად გვეჩვენებიან და შეუჩვეველ ადამიანისათვის, თითქმის უაზროდ. მაგრამ მკაცრი და დამშვიდებული მოფიქრების შემდეგ აღმოჩნდება, რომ ისინი შეუძლებელს არაფერს შეიცავენ. ასე მაგალითად, სამკუთხედის ყველა სამი კუთხე ნებისმიერ მცირე შეიძლება გავხადოთ, თუ კი საკმაოდ დიდ გვერდებს ავიღებთ; სამკუთხედის ფართობს არ შეუძლია აღემატოს და არც კი მიაღწიოს რომელიღაც ზღვარს, რა დიდიც არ უნდა იყოს მისი გვერდები. ამ „არა ევკლიდეს“ გეომეტრიაში წინააღმდეგობათა პოვნის ყველა ჩემი ცდა უნაყოფოდ დარჩა; ერთად ერთი რაც ამ სისტემაში ჩვენს გონებას ეწინააღმდეგება, ეს ის არის, რომ სივრცეში ეს სისტემა სამართლიანი ყოფილიყო, უნდა არსებულიყო თავისთავად განსაზღვრული, თუმცა ჩვენთვის უცნობი, რომელიღაც სიდიდე, მაგრამ მე მგონია, რომ ჩვენ სივრცის არსის შესახებ, გარდა არაფრის გამომსახველი მეტაფიზიკის სიტყვიერი სიბრძნისა, ძალიან ცოტა რამ ვიცით, ან და კიდეც არაფერი არ ვიცით. ჩვენ არ შეგვიძლია ის, რაც არაბუნებრივად გვეჩვენება, აბსოლუტურად შეუძლებელს მივაკუთვნოთ“.

ამ სიტყვებით გაუსმა არაევკლიდეს გეომეტრიის იდეები გამოსთქვა, მაგრამ დარწმუნებული იმაში, რომ ევკლიდეს გეომეტრიას სავსებით შეზრდილ ხალხში ეს იდეები წინააღმდეგობას გამოიწვევდნენ, მათი გამოქვეყნება ვერ გაბედა. მისი ახალგაზრდობის მეგობარმა ვოლფგანგ ბოლიამ მთელი თავისი სიცოცხლე შესწირა წირთა პარალელობის თეორიის შესწავლას, მაგრამ არსებით შედეგებს ვერ მიაღწია; ამიტომ ის თავის შვილს, იოჰანეს ამ დარგში მუშაობას უკრძალავდა. მაგრამ ახალგაზრდა ბოლიაი, ჯერ კიდევ 1823 წელს დიდი აღტაცებით იწყებს ამ დარგში მუშაობას და ბრწყინვალე შედეგებს ღებულობს. ასეთივე შედეგებს ღებულობს ლობაჩევსკი და ნაწილობრივ ტაურინუსიც. სამივე გაუსს უგზავნიან, თავის შრომებს სათანადო დასკვნისათვის; მაგრამ გაუსს შეეშინდა მათი შრომებისა-

თვის, რომლებიც ცოტად თუ ბევრად მის იდეებს უახლოვდებოდნენ, საჯაროდ შეფასების მიცემისა, თუმცა ის მათ ძალიან აფასებდა. ეს გარემოება ტაურინუსი და ბოლიაისათვის საბედისწერო შეიქმნა; ის ამბავი, რომ გაუსი მათ შრომებს საჯაროდ შეფასებას არ აძლევს, მათთვის ისეთი თავზარის დამცემი შეიქმნა, რომ ორივემ გონება დაჰკარგა. ლობაჩევსკის კი უფრო მეტი ნებისყოფა და გამბედაობა აღმოაჩნდა და მან პირველმა გამოაქვეყნა 1829 წელს არაევკლიდური გეომეტრიის სისტემატური ჩამოყალიბება თავის შრომაში „წარმოსახვითი გეომეტრია". მან ყურადღება არ მიაქცია თავისი თანამედროვეების დაცინვას და მთელ თავის სიცოცხლეში განაგრძობდა გეომეტრიის დამუშავებას. ლობაჩევსკის აღმოჩენის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატის საწინააღმდეგოს დაშვება არა თუ ლოღიკურ წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანს ევკლიდეს გეომეტრიის წინამავალ დებულების მიმართ, არამედ პირ-



ნახ. 34.

იქით, თავისებურ, თანმიმდევრო და მწყობრ სისტემამდე მიგვიყვანს. ლობაჩევსკის დაშვება იმაში მდგომარეობს, რომ სიბრტყეში (ნახ. 34) წრფის გარეთ მდებარე O წერტილიდან შეიძლება გავლებულ იქნას არა ერთი, არამედ რამდენიმე წრფე, რომლებიც მოცემულ წრფეს არ შეხვდებიან. თუ OAB სიბრტყეში O წერტილზე გამავალი OC და OD წრფეები AB წრფეს არ შეხვდებიან, მაშინ მას არ შეხვდებიან OL წრფეები, რომლებიც გაივლიან ამ ორ

წრფეთა შორის D'OC და C'OD ვერტიკალურ კუთხეებში. ამის გამო წრფეთა მთელი კონა, რომლებიც ჩვენს სიბრტყეში O წერტილზე გაივლიან, ორ „ქვეკონებად" დაიყოფა. წრფეები, რომლებიც ზემოთ ნაჩვენები კუთხეების გარეთ მდებარეობენ, AB-სთან „იკრიბებიან" ე. ი. გადაკვეთენ მას რომელიღაც „შეკრებადობის" წერტილში; OL სახის წრფეები კი AB-ს შორდებიან. OC და OD წრფეები კი ერთ ქვეკონას მეორე ქვეკონისაგან გამოყოფენ. ამ OC და OD წრფეებს, რომლებიც არც ერთ და არც მეორე მხრივ AB-ს არ შეხვდებიან, ლობაჩევსკი AB წრფის პარალელურებს უწოდებს. აქედან ჩანს, რომ ამ გეომეტრიულ სისტემაში მოცემულ AB წრფის გარეთ მოცემულ O წერტილში შეიძლება გავლებულ იქმნას ორი, OC და OD პარალელები. ამრიგად, სიბრტყეში მოცემულ წრფის გარეთ მდებარე მოცემულ წერტილში გამავალი წრფეები სამ კლასად დაიყოფა.

1. რომლებიც მოცემულ წრფეს შეხვდებიან,
2. მოცემული წრფის ორი პარალელური,
3. რომლებიც მოცემულ წრფეს არ შეხვდებიან.

დასასრულ მოკლედ შევეხოთ ევკლიდეს შრომების გავრცელების საკითხს. XIII საუკუნის პირველ ნახევარში აღმოსავლეთის მეცნიერმა სპარსელმა ნასირ-ედინმა ევკლიდეს „ელემენტები" ანუ „საწყისები" არაბულ ენაზე გადათარგმნა. XV საუკუნეში „ელემენტები" არაბულიდან ლათინურად ითარგმნება და ევროპელთათვის ცნობილი ხდება. ყველა ევროპულ ენაზე XVI საუკუნეში „ელემენტების" 80 გამოცემა დაიბეჭდა. XVII საუკუნეში—59, XVIII-ში—50 და XIX ს-ში—115. XVIII საუკუნემდე „ელემენტები" ევროპაში ელემენტარულ გეომეტრიის ერთად ერთი სახელმძღვანელო იყო, შემდეგ კი ევკლიდეს შრომების საფუძველზე შედგენილი სახელმძღვანელოების, ან და „ელემენტების" გადაკეთებული სახით გამოცემა დაიწყეს. ამრიგად, ევკლიდეს „ელემენტები" წარმოადგენს იმ წყაროს, რომლიდანაც მთელ მსოფლიოში მომდინარეობს მათემატიკური ცოდნა და რომლებზედაც აღიზარდა ამ მეცნიერების ყველა კორიფეი.

§ 5. არქიმედე

1°. არქიმედეს ბიოგრაფია. არქიმედე დაიბადა დაახლოებით 287 წელს ჩვენს ერამდე, სიცილიის მთავარ ქალაქში—სირაკუზში. მისი ცხოვრების შესახებ ცოტა რამ ვიცით. თუმცა მისი ცხოვრება ჰერა-

კლიტეს ჰქონდა აღწერილი, მაგრამ იმ აღწერას, სამწუხაროდ, ჩვენამდე არ მოუღწევია. არქიმედეს შესახებ ჩვენ ვიცით პლუტარქის, პოლიბის, ციცერონისა და ლივიუსის ნაამბობებიდან. როგორც ამ ნაამბობებიდან ჩანს არქიმედეს სწავლისადმი არაჩვეულებრივი გულმოდგინეობა ახასიათებდა და ხანდახან მას რომელიმე საკითხის შესწავლა იმდენად გაიტაცებდა, რომ ჭამა-სმასაც ავიწყებდა. როდესაც მას

არქიმედე

აბანოში ძალით წაათრევდნენ ხოლმე, ის იქ ნაცარზე გეომეტრიულ ნაკვთებს ხაზავდა და ზეთით დაფარულ ტანზე კი ხაზებს ივლებდა. როგორც ჩანს მას ეგვიპტეში უმოგზაურია და ალექსანდრიაში დაუყვია რამდენიმე ხანი. ეგვიპტეში მისი მოგზაურობა მოხდა იმის შემდეგ, როდესაც მან გამოიგონა განთქმული ხრახნი, რომელიც ცნო-

ბილია დღეს „არქიმედეს ხრახნის“ სახელწოდებით; ამ ხრახნს შემდეგ ეგვიპტელები ხმარობდნენ მდინარე ნილოსის ნაპირებიდან წყლის გადასაყვანად და მის გასანაწილებლად ისეთი ადგილებისთვის, სადაც ნილოსის ჩვეულებრივი ადიდების შემთხვევაში, წყალი ვერ აღწევდა. ალექსანდრიიდან ის მალე დაბრუნდა სირაკუზში, სადაც მთელი თავისი სიცოცხლე გაატარა. ალექსანდრიაში ყოფნისას ის გაეცნო იქაურ მათემატიკოსებს და განსაკუთრებით დაუმეგობრდა ევკლიდეს უშუალო მიმდევრებს კონონსა და დოზითეს. სირაკუზში დაბრუნების შემდეგ ორივესთან წერილობითი კავშირი გააბა და ეწეოდა მათთან მეცნიერულ საკითხების ირგვლივ აზრთა გაცვლა-გამოცვლას; ეს ჩანს იმ წერილიდან, რომელსაც ის წერს დოზითეს კონონის სიკვდილის გამო; წერილი მოთავსებულია იმ შრომის დასაწყისში, რომელიც პარაბოლის კვადრატურას ეხება. არქიმედე შემდეგს წერს: „მე მივიღე ცნობა, რომ კონონი, ერთი ჩემი მეგობართაგანი, გარდაიცვალა. მე ვიცი, რომ შენ მჭიდრო კავშირში იყავი მასთან და ძალიან დაახლოვებული ხარ გეომეტრიასთან. ღრმად დამწუხრებული იმ ადამიანის სიკვდილით, რომელიც ჩემი მეგობარი იყო და რომელსაც ჰქონდა გეომეტრიის განსაკუთრებული ნიჭი, გადავწყვიტე გამოგიგზავნო, ისე როგორც ამას ვიზამდი მის მიმართ, ერთი გეომეტრიული თეორემა, რომელიც ჯერ კიდევ არავის არ განუხილავს და რომლის ცდაც მე მოვისურვე“ (Oeuvres A'Archimède გვ. 318). თუ ვინ იყო არქიმედეს მასწავლებელი, ჩვენთვის დღესაც უცნობია. არქიმედე თავის შრომებს ალექსანდრიაში აგზავნიდა ხოლმე; ალექსანდრიის მეცნიერებმა განიზრახეს არქიმედეს ზოგიერთ აღმოჩენათა მითვისება ამ აღმოჩენების თავისი საკუთარი დამტკიცების გამოძებნის საშუალებით. მაგრამ არქიმედემ ისინი სრულიად მოულოდნელად გააბრიყვა იმით, რომ გაუგზავნა მათ ყალბი თეორემები; ისინი კი შეეცადნენ მოეძებნათ მათი დამტკიცება. საბერძნეთის მწერალი პოლიბის თქმით, ახლა არქიმედეს პრინციპად წოდებული დებულება: „სითხეში ჩაშვებული ყოველი სხეული წონაში კარგავს იმდენს, რამდენსაც იწონის მის მიერ გამოდევნილი სითხე“, არქიმედემ აბანოში ყოფნისას აღმოაჩინა, რის გამო გახარებული იმწამსვე აბანოდან ამოხტა, ტიტველი ქუჩაში გამოვარდა და გაიქცა ბინისაკენ ყვირილით: „ვიპოვე! ვიპოვე!“ არქიმედემ საფუძველი ჩაუყარა უმაღლეს გეომეტრიას და მექანიკას (სტატიკას); მეცნიერების ეს დარგები მან განვითარების ისეთ მაღალ წერტილამდე აიყვანა,

რომ ცხრამეტი საუკუნის განმავლობაში დეკარტამდე და გალილეიმდე Ⴈისი ჯობნა ვერავინ ვერ შესძლო. ძველი დროის ეს უდიდესი მათემატიკოსი იმავე დროს მთელი რიგი სანხედრო მანქანების გამომგონებელი და ამგებია. არქიმედეს შეეძლო მის მიერ გამოგონილი მანქანებით უზარმაზარი ტვირთის აწევა; ამბობენ, რომ ერთხელ მან ჭანჭიკების საშუალებით მგზავრებით სავსე ნავი ნავსადგურიდან ზღვაში ჩაუშვა; ამით განცვიფრებულ მაყურებლებს მან განუცხადა: „მე ჩვენს დედამიწას ადგილიდან დავძრავ, თუ რომ მე თვითონ სხვა ადგილას ვიდგომები“ (ე. ი. არქიმედეს აზრით მას რომ ჰქონოდა დასაყრდენი წერტილი დედამიწის გარეშე, ის დედამიწას ადგილიდან დასძრავდა). ხაზი უნდა გაუსვა იმ გარემოებას, რომ მათემატიკის არც ერთი ისტორიკოსი არ ამბობს, რომ არქიმედეს თავისი სამხედრო გამოგონებანი მეფის სამსახურისათვის მიეცეს; თუმცა, ამბობენ, რომ ის სირაკუზის მეფე ჰეირონთან მეგობრულ დამოკიდებულებაში იყო და უკანასკნელმა მას დაავალა გამოეგონებია მისთვის ისეთი მანქანები, რომლებიც მას მისცემდა როგორც შეტევის, ისე თავდაცვის საშუალებას. სირაკუზის ხალხი აჯანყდა მეფის ბატონობის წინააღმდეგ; მეფე ჰიერონიმი, რომელიც ტახტზე ავიდა მისი მამის ჰიერონის სიკვდილის შემდეგ, იძულებული გახდა, სარდალ ჰიპარქის დახმარებით კართაგენში გაქცეულიყო. მეფის უღლისაგან განთავისუფლებული სირაკუზის ხალხის დასაპყრობად რომის სენატმა, რომელიც გაბატონებული იყო შუა აზიასა და სამხრეთ იტალიაში, ჯარები გაგზავნა მარცელიუსის მეთაურობით. ახლა კი არქიმედე ევლინება სირაკუზელებს, როგორც მეცნიერი, რომელიც გმირულად იბრძვის სამშობლოს დასაცავად. 75 წლის მოხუცი, მთელ თავის ძალღონეს და ცოდნას დაუზოგავად ახმარს რომის იმპერიის ჯარების წინააღმდეგ ბრძოლას, ვინაიდან მათ განიზრახეს მისი სამშობლოსი და თავისუფლება მოპოებული ხალხის დამონება. მის მიერ გამოგონილი სამხედრო მანქანებით არქიმედე გმირულად და ეფექტიურად იბრძვის მისი სამშობლოს ქალაქის, სირაკუზის, დასაცავად. ამბავი იმის შესახებ, რომ არქიმედემ მის მიერ გამოგონილი ცეცხლის გამჩენი სარკეების საშუალებით რომაელების ფლოტს დიდი მანძილიდან ხანძარი გაუჩინა, ნაკლებად დასაჯერებელია და ლეგენდად უნდა ჩაითვალოს. ზოგიერთი ძველი მწერალი ამბობს რომაელების ფლოტში გაჩენილი ხანძრის შესახებ, მაგრამ არქიმედეს ცეცხლის გამჩენ სარკეების შესახებ კი არაფერს ამბობენ. ისტორიკოსი

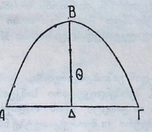
მონტუკლას აზრით ეს ლეგენდა წარმოიშვა იმის გამო, რომ რომაელების ფლოტში ხანძრის გაჩენა დაუკავშირეს არქიმედეს მიერ ცეცხლის გამჩენი სარკის გამოგონებას, რადგანაც ეს ორი მოვლენა მოხდა ერთ და იმავე დროს. სამი წლის განმავლობაში ომის წარმოების შემდეგ, რომაელებმა მაინც აიღეს სირაკუზი. იმპერიის ჯარებმა აღებული ქალაქის ძარცვა და ცეცხლით განადგურება დაიწყეს. არქიმედე იმ დღეს მეტად გატაცებული იყო რომელიღაც თეორემის განხილვით. ის იჯდა ქუჩაში და იმდენად ღრმად ჩაფიქრებული დასცქეროდა სილაზე დახაზულ ნაკვთებს, რომ არც კი გაუგია რომაელების მიერ ქალაქის აღება. როდესაც მან დაინახა მისკენ მიმავალი რომაელი ჯარისკაცი, დაუყვირა მას: „არ გაბედო ჩემი წრეების გაფუჭება"-ო; ჯარისკაცმა, იგრძნო რა თავი შეურაცხყოფილად, მოკლა არქიმედე.

არქიმედემ დაავალა თავის მეგობრებს მის სასაფლაოს ქვაზე ამოეჭრათ სფერო ირგვლივ შემოწერილი ცილინდრით, რადგანაც ის დიდ მნიშვნელობას აძლევდა მის მიერ დამტკიცებულ თეორემას, „სფეროს მოცულობა და ზედაპირი ისეთი ცილინდრის მოცულობისა და ზედაპირის 2/3-ის ტოლია, რომლის ფუძე სფეროს დიდი წრეა და სიმაღლე კი სფეროს დიამეტრი". მისი თხოვნა შესრულებული იქნა. 150 წლის განვლის შემდეგ ციცერონმა, სიცილიაში კვესტორად ყოფნისას, სწორედ ამ გეომეტრიული ნაკვთის საშუალებით აღმოაჩინა არქიმედეს საფლავი. სირაკუზელებმა სრულიად დაივიწყეს არქიმედე, თუმცა მისი ხსოვნის აღსანიშნავად ქალაქ სირაკუზის ფულზე გამოსახული იყო სწორედ ის გეომეტრიული ნაკვთი, რომელიც მის სასაფლაოს ქვაზე იყო ამოჭრილი. მათ არც კი სჯეროდათ, რომ არქიმედე ოდესმე არსებობდა, რომ არ ეუწყებინა მათთვის არქიმედეს შესახებ ციცერონს, ალპინიდან მოსულ ადამიანს და არ ეჩვენებინა უშესანიშნავესი, მათ მოქალაქეთა შორის ყველაზე ჭკვიანი და ნიჭიერი ადამიანის საფლავი.

არქიმედეს შრომებიდან ჩვენამდე მოაღწია:

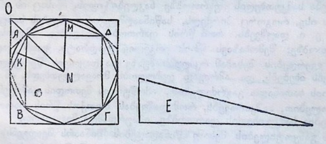
1. ბრტყელი ნაკვთების წონასწორობათა შესახებ; 2. წრის გაზომვის შესახებ; 3. პარაბოლის კვადრატურის შესახებ; 4. სფეროსა და ცილინდრის შესახებ; 5. ხვიათა შესახებ; 6. კონოიდებისა და სფეროიდების შესახებ; 7. სილის აღრიცხვის შესახებ; 8. მცურავი ტანების შესახებ; 9. მოძღვრება მეთოდის შესახებ. აღნიშნულების გარდა არსებობს არაბული ენიდან ლათინურად 15 ლემის თარგმანი, თუმცა ყველას მათ არქიმედეს არ აკუთვნებენ.

2°. არქიმედეს შრომების მოკლე მიმოხილვა. შრომა „ბრტყელ ნაკვთების წონასწორობათა შესახებ“ შედგება ორი წიგნისაგან: 1-ლი წიგნი შეიცავს 24 წინადადებას; ამ წიგნში არქიმედე განსაზღვრავს პარალელოგრამის, სამკუთხედისა და ტრაპეციის სიმძიმის ცენტრებს. მეორე წიგნის მე-8-ე წინადადებაში ამტკიცებს თეორემას: „წრფის ნაკვეთსა და პარაბოლს შორის მოთავსებული სეგმენტის სიმძიმის ცენტრი გაყოფს დიამეტრს ისე, რომ ნაწილი, რომელიც იმყოფება წვეროს ახლოს, ტოლია იმ ნაწილის $^3/_2$-ისა, რომელიც ფუძის ახლოს იმყოფება“. $B\Theta = {}^3/_2\, \Theta\Delta$ — სადაც Θ პარაბოლის სეგმენტის სიმძიმის ცენტრია (ნახ. 35).



ნახ. 35.

შრომაში „წრის გაზომვის შესახებ“, რომელიც სამი წინადადებისაგან შედგება, პირველ წინადადებაში ამტკიცებს შემდეგს: წრის ფართობი ისეთი მართკუთხოვანი სამკუთხედის ფართობის ტოლია, რომლის ერთი კათეტი რადიუსის ტოლია და მეორე კათეტი კი წრე წირის ტოლია.



ნახ. 36.

ამ თეორემის დამტკიცება წარმოადგენს ამოწურვის მეთოდის გამოყენების ერთ ერთ ნიმუშს. მოცემულია წრე და მოცემულია მართკუთხოვანი სამკუთხედი, რომლის ერთი კათეტი მოცემული წრის რადიუსის ტოლია და მეორე კათეტი კი წრეწირის ტოლია (ნახ. 36).

თანამედროვე მათემატიკური ენით ეს დამტკიცება შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: დავუშვათ, რომ წრის ფართობი სამკუთხედის ფართობზე მეტია. ჩავწეროთ წრეში კვადრატი, გავყოთ კვადრატის გვერდები შუაზე და ავაგოთ რვაკუთხედი; უკანასკნელის გვერდები შუაზე გავყოთ და ეს ოპერაცია გავაგრძელოთ მანამდე, სანამ წრის ფართობისა და მრავალკუთხედის ფართობს შორის განსხვავება, ანუ სეგმენტების ფართობების ჯამი წრის ფართობსა და აღებული სამკუთხედის ფართობს შორის განსხვავებაზე ნაკლები არ დარჩება. აღვნიშნოთ წრის ფართობი C-თი, სამკუთხედის ფართობი T-თი, მრავალკუთხედის ფართობი M-ით; მაშინ გვექნება:

$$C - M < C - T \tag{1}$$

(1)-დან გამომდინარეობს, რომ $M > T$ (2); მეორე მხრით გვაქვს: NK პერპენდიკულარი სამკუთხედის ერთ კათეტზე ნაკლებია, რადგან ის კათეტი წრის რადიუსის ტოლია, და მრავალკუთხედის პერიმეტრი კი მეორე კათეტზე ნაკლებია; ამიტომ გვექნება: $M < T$ (3); თუ შევადარებთ ერთმანეთს (3) და(2) უტოლობებს, ვნახავთ, რომ ერთდაიმავე დროს $M > T$ და $M < T$, რაც შეუძლებელია. აქედან ის დასკვნა გამომდინარეობს, რომ ჩვენი დაშვება, რომ წრის ფართობი სამკუთხედის ფართობზე მეტია არ არის სწორი. წინადადების მეორე ნაწილში არქიმედე ამტკიცებს, რომ წრის ფართობი არ შეიძლება სამკუთხედის ფართობზე ნაკლები იყოს. ამასაც ის ამტკიცებს ისე, როგორც პირველს, საწინააღმდეგოს დაშვების საშუალებით ე. ი. დაუშვებს, რომ წრის ფართობი ნაკლებია სამკუთხედის ფართობზე; შემოხაზავს წრის ირგვლივ კვადრატს, ყოფს კვადრატის გვერდების შესაბამ რკალებს შუაზე და დაყოფის წერტილებზე ავლებს მხებებს, და ამრიგად ღებულობს მრავალკუთხედს. ამ ოპერაციის სათანადო გაგრძელებით, ამოწურვის მეთოდის გამოყენების საშუალებით, ააშკარავებს, რომ დაშვებას თითქოს წრის ფართობი ნაკლებია სამკუთხედის ფართობზე, აბსურდამდე მივყავართ.

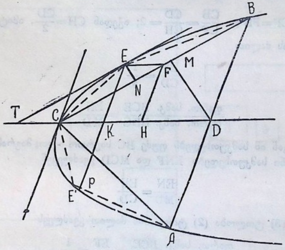
ამ განყოფილების მესამე წინადადების შინაარს შეადგენს ის, რომ არქიმედე წრეწირის სიგრძის დიამეტრთან შეფარდებისათვის პოულობს ორ საზღვარს, რომელთა შორის მას სურს ეს სიდიდე მოათავსოს

$$\frac{P}{d} < 3\frac{1}{7}; \quad \frac{P}{d} > 3\frac{10}{71}$$

სადაც P წრეწირის სიგრძეა და d კი დიამეტრია.

„პარაბოლის კვადრატურის შესახებ“ შრომა 24 წინადადებას შეიცავს. მე-6-დან მე-17 წინადადებაში მექანიკურად და 23—24 წინადადებაში კი გეომეტრიულად, ამოწურვის მეთოდის გამოყენებით არქიმედე ამტკიცებს თეორემას „ყოველი სეგმენტი, პარაბოლასა და წრფეს შორის მოთავსებული, ტოლია ისეთი სამკუთხედის $^4/_3$-სა, რომელსაც იგივე ფუძე და სიმაღლე აქვს, რაც პარაბოლს“.

თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე ამ თეორემის გეომეტრიული დამტკიცება მოკლედ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: პარაბოლის რომელიმე C წერტილზე (ნახ. 37) გავავლოთ მხე-



ნახ. 37.

ბი. გავავლოთ ამ მხების პარალელური ქორდა AB; მისი შუა წერტილი D შევაერთოთ C წერტილთან; მივიღებთ პარაბოლის დიამეტრს CD-ს; უნდა განვსაზღვროთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პარაბოლის რკალსა და AB ქორდას შორის; ავიღოთ წერტილები E და E', რომლებზედაც გავლებული მხებნი შესაბამისად CB და AC ქორდების პარალელური არიან. გავავლოთ მხები ET, რომელიც გადაჭრის CD-ს T წერტილში, დიამეტრი EF-ს

და ქორდა AB-ს პარალელები EK და FH; მე-5 წინადადებაში არქიმედე ამტკიცებს პარაბოლის თვისებას, რომლის ძალით $\frac{CK}{CT} = \frac{KP}{KE}$; ვინაიდან KP = KE ამიტომ CT = CK.

ამის გარდა, როგორც ორი პარალელური ნაკვეთი ორ პარალელების შორის TC = EF, ამიტომ CK = EF და KH = EF; მაგრამ უკანასკნელი ორი ტოლობის შეკრებით მივიღებთ:

$$EF = \frac{CK + KH}{2} = \frac{CH}{2} \qquad (1);$$

მაგრამ CF = FB და $\frac{CB}{CF} = \frac{CD}{CH} = 2$; აქედან $CH = \frac{CD}{2}$, ამიტომ (1) ტოლობის ძალით

$$\frac{EF}{CD} = \frac{1}{4} \qquad (2)$$

$$\frac{\text{ფართ. სამკ. } BCE}{\text{ფართ. სამკ. } BDC} = \frac{EN}{MD} \qquad (3)$$

რადგან ამ სამკუთხედებს ფუძე BC საერთო აქვთ; მაგრამ მართკუთხოვანი სამკუთხედები ENF და MCD გვაძლევენ

$$\frac{EN}{MD} = \frac{EF}{CD}$$

ამიტომ (3) ტოლობა (2) ტოლობის ძალით გვაძლევს

$$\frac{\text{ფართ. სამკ. } BCE}{\text{ფართ. სამკ. } BDC} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{4}$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ BDC სამკუთხედის ფართ. = 4 ფართ. სამკ. BCE.

ასევე ფართ. ADC = 4ACE'.

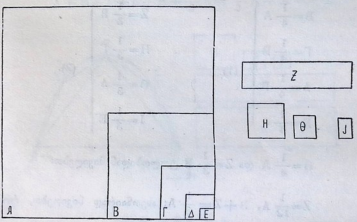
თუ ასეთ მოქმედებას ვაწარმოებთ თითოეულ BE, CE, CE' და E'D ქორდებზე, მაშინ მივიღებთ 4 ახალ სამკუთხედს. პროცესი შეგვიძლია მსგავსი გზით შემდგომაც განვაგრძოთ.

პარაბოლის სეგმენტის ფართობი ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც მიღებულ სამკუთხედების ფართობების ჯამი:

ფართ. სეგმ. $ABC =$ ფართ. სამკ. $ABC +$ ფართ. სამკ. $BCE +$ $+$ ფართ. სამკ. $ACE' \ldots$ და ასე შემდეგ; ანუ ფართ. სეგმ. $ABC =$ ფართ. სამკ. $ABC + \frac{1}{4}$ ფართ. სამკ. $ABC + \frac{1}{16}$ ფართ. სამკ. $ABC =$ ფართ. სამკ. $ABC \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = {}^4/_3$ ფართ. სამკ. ABC.

საბოლოოდ გვაქვს:

ფართ. სეგმენტი $ABC = {}^4/_3$ ფართ. სამკუთხედისა ABC. მიუხედა-



ნახ. 38.

ვად იმისა, რომ ეს დამტკიცება მეტად გონებამახვილია მისი განზოგადოება შეუძლებელია, რადგანაც ის ეყრდნობა პარაბოლის თვისებას, რაც სხვა მრუდი წირებს არ ახასიათებთ.

ჩამოვაყალიბეთ რა თეორემის დამტკიცება თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე, გავარჩიოთ ახლა ამ თეორემის თვითონ არქიმედეს ზედმიწევნით კოხტა დამტკიცება. არქიმედე წინასწარ ამტკიცებს, რომ პარაბოლის სეგმენტსა და მასში ჩაწერილ სამკუთხედების ჯამს შორის განსხვავება შეიძლება გახდეს ყოველი ნებისმიერი სიდიდეზე ნაკლები.

მე-23 წინადადებაში ამტკიცებს ასეთ თეორემას (Oeuvres d' Archimede. გვ. 343 — 344) „თუ მოცემულია რამოდენიმე სიდიდე (ნაკვთი), რომლებიც ისეთებია, რომ თითოეული მათგანი შემდეგზე ოთხჯერ მეტია, მაშინ ყველა ეს ერთად აღებული სიდიდე (ნაკვთები) თუ მას მიუმატეთ კიდევ უმცირესის ერთი მესამედი, უდიდესზე (ნაკვთზე) ერთი მესამედით მეტი იქნება" (ნახ. 38), თანამედროვე ალგებრული ნიშნების საშუალებით, ეს თეორემა შეიძლება ასე დამტკიცდეს:

ვთქვათ მოცემულია სიდიდეები A, B, Γ, Δ, E და Z, H, Θ, I; ამასთანავე მოცემულია, რომ

$$\left.\begin{aligned} B&=\frac{1}{4}A\\ \Gamma&=\frac{1}{4}B\\ \Delta&=\frac{1}{4}\Gamma\\ E&=\frac{1}{4}\Delta \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} Z&=\frac{1}{3}B\\ H&=\frac{1}{3}\Gamma\\ \Theta&=\frac{1}{3}\Delta\\ I&=\frac{1}{3}E \end{aligned}\right\} (2).$$

$B=\frac{1}{4}A$ და $Z=\frac{1}{3}B$ ტოლობიდან მივიღებთ:

$Z=\frac{1}{12}A$, $B+Z=\frac{1}{3}A$; ასეთნაირად მივიღებთ, რომ

$\Gamma+H=\frac{1}{3}B$; $\Delta+\Theta=\frac{1}{3}\Gamma$; $E+I=\frac{1}{3}\Delta$; ამ ტოლობათა შეკრების შემდეგ გვექნება:

$$B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+I=\frac{1}{3}(A+B+\Gamma+\Delta) \qquad (3)$$

მე-(2)-ე ტოლობიდან მივიღებთ:

$$Z+H+\Theta=\frac{1}{3}(B+\Gamma+\Delta) \qquad (4)$$

ამიტომ მე-(3)-ე და მე-(4)-ე ტოლობებიდან გვექნება:

$$B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+I=Z+H+\Theta+\frac{1}{3}A$$

ანუ

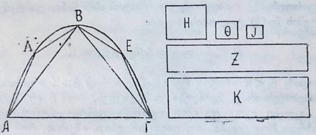
$$B+\Gamma+\Delta+E+I=\frac{1}{3}A$$

და ვინაიდან

$$I=\frac{1}{3}E$$

ამიტომ

$$A+B+\Gamma+\Delta+E+\frac{1}{3}E=\frac{1}{3}A+A=\frac{4}{3}A$$



ნახ. 39.

ანუ

$$S_1+\frac{1}{3}E=\frac{4}{3}A \tag{5}$$

სადაც

$$S_1=A+B+\Gamma+\Delta+E.$$

ამის შემდეგ მე-24-ე წინადადება შეიცავს შემდეგი თეორემის დამტკიცებას:

პარაბოლური სეგმენტის ფართობი ერთი მესამედით მეტია ისეთი სამკუთხედის ფართობზე, რომელიც სეგმენტშია ჩაწერილი და რომლის ფუძე სეგმენტის შემომსაზღვრელი წრფეა და სიმაღლე კი — სეგმენტის სიმაღლის ტოლია (ნახ. 39). თანამედროვე აღნიშვნების საშუალებით ამ თეორემის დამტკიცება შეიძლება ასე გამოვსახოთ:

S-ით აღვნიშნოთ სეგმენტის ფართობი; $AB\Gamma$ სამკუთხედის ფართობის $\frac{4}{3}$ აღვნიშნოთ K-თი; ჩაწერილი ყველა სამკუთხედების ფართობების ჯამი კი — S_1-ით. დავუშვათ, რომ $S>K$; მაშინ, თუ სამკუთხედების ჩაწერას უსასრულოდ გავაგრძელებთ, დადგება ისეთი მომენტი, რომ გვექნება უტოლობა

$$S - S_1 < S - K$$

საიდანაც გამომდინარეობს რომ

$$S_1 > K,$$

მაგრამ ეს უკანასკნელი შეუძლებელია იმიტომ, რომ თითოეული ჩაწერილი სამკუთხედი შემდეგ სეგმენტებში ჩაწერილი სამკუთხედების ფართობებზე ოთხჯერ მეტია, ამიტომ ამის წინათ დამტკიცებულ თეორემის მე-(5) ტოლობის ძალით:

$$S_1 < \frac{4}{3} \text{ ფართი სამკ. } AB\Gamma = K$$

მაშასადამე $S_1 < K$, ამიტომ ჩვენი დაშვება რომ $S>K$ არ არის სწორი. ასეთივენაირად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ S არ შეიძლება K-ზე ნაკლები იყოს და ამით თეორემა დამტკიცებულია. არქიმედეს აზრთა მსვლელობას თუ დავაკვირდებით, აშკარაა, რომ ის ჯერ მე-20-ე წინადადების დამატებაში ამტკიცებს, რომ პარაბოლის სეგმენტის ფართობსა და ჩაწერილ სამკუთხედების ფართობთა ჯამს შორის განსხვავება შეიძლება გახდეს ყოველი ნებისმიერი ფართობზე ნაკლები. მას თვალსაჩინოდ წარმოდგენილი აქვს რომ ეს განსხვავება დასასრულ ქრება და სამკუთხედების ფართობების ჯამი პარაბოლის სეგმენტის ფართობის ტოლი გახდება თუ სამკუთხედების ჩაწერას უსასრულოდ გავაგრძელებთ; მაგრამ სიტყვა „უსასრულოდ"-ს ის გაურბის და მის ნაცვლად ამბობს „სულ მუდამ ვაგრძელებ სამკუთხედების ჩაწერას".

შემდეგ არქიმედე ეყრდნობა რა მის მიერ დამტკიცებულ თეორემას იმის შესახებ, რომ ჯამი ისეთ სიდიდეთა, რომლებისაგან ყოველი სიდიდე შემდეგ სიდიდეზე ოთხჯერ მეტია, ტოლია მათ შორის უდიდესის, გამოკლებული უმცირესის ერთი მესამედი, აშკარა-

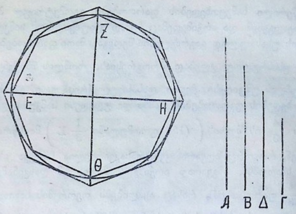
ვებს, რომ ჩაწერილი სამკუთხედების ფართობთა ჯამიც ტოლია უდიდესი სამკუთხედის ფართობის, გამოკლებული უმცირესი სამკუთხედის ფართობის ერთი მესამედი:

$$S=\frac{4}{3}\text{ ფართ. } AB\Gamma-\frac{1}{3}\text{ ფართ. } E \quad \text{(E უმცირესი სამკუთხედის ფართობია)} \qquad (5)$$

ჩაწერილი სამკუთხედების ფართობები გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენენ და არქიმედემაც ჩუმად დაუშვა, რომ სამკუთხედის ჩაწერის უსასრულოდ გაგრძელების შედეგად მათი ფართობები შეადგენენ უსასრულოდ კლებად პროგრესიას, რომლის მნიშვნელია $\frac{1}{4}$ და რომლის უმცირესი წევრი დასასრულ ქრება ე. ი. განსხვავებაც სამკუთხედების ფართობების ჯამსა და უდიდესი სამკუთხედის ფართობის $\frac{4}{3}$-ის შორის $\left((15)\text{ ფორმულაში } \frac{1}{3}E\right)$ მიისწრაფის ნულისაკენ, როგორც ზღვარისაკენ (რასაკვირველია სიტყვა „ზღვარს“ ის არ ხმარობს). ამგვარად არქიმედე მიდის იმ დასკვნამდე, რომ $S=\frac{4}{3}$ ფართ. $AB\Gamma$, რასაც აყალიბებს თეორემის სახით; მიღებული შედეგის სისწორეში რომ დარწმუნდეს, ე. ი. მკაცრად დამტკიცდეს თეორემა, რომ სეგმენტის ფართობი ტოლია $AB\Gamma$ ფართობის $\frac{4}{3}$-ის, უსასრულობის და ზღვრის ცნებათა გამოუყენებლად, არქიმედე ამოწურვის მეთოდს მიმართავს, რომლის საშუალებით ამტკიცებს, რომ სეგმენტის ფართობი შეუძლებელია იყოს ან მეტი და ან ნაკლები ჩაწერილი უდიდესი სამკუთხედის ფართობის $\frac{4}{3}$-ზე.

3°. სფეროსა და ცილინდრის შესახებ. შრომა შედგება ორი წიგნისაგან. პირველი წიგნი შეიცავს 50 წინადადებას, მეორე კი 10 წინადადებას. ორივე წიგნის დასაწყისში მოთავსებულია დოზითესადმი წერილი, რომლის შემდეგ პირველ წიგნში მოთავსებულია რამდენიმე განსაზღვრები, აქსიომები და პრინციპები, რიცხვით 16; მაგალითად, ერთი მათგანი ასეთია: ორ წერტილს შორის უმოკლესი

მანძილი წრფეა. ამის შემდეგ პირველი წიგნის 7 წინადადება ეხება ამოწურვის მეთოდს, მაგალითად, მე-6: „მოცემული არის წრე და ორი არა ტოლი სიდიდე; შეიძლება ისეთი ორი მრავალკუთხედი ავაგოთ, ერთი შემოწერილი წრის ირგვლივ და მეორე წრეში ჩაწერილი, რომ პირველის მეორესთან შეფარდება ნაკლები იქნება მეტი სიდიდის ნაკლებ სიდიდესთან შეფარდებაზე“.



ნახ. 40.

მე-35 წინადადებაში დამტკიცებულია, რომ სფეროს ზედაპირი მისი დიდი წრის გაოთხკეცებულ ფართობის ტოლია.

თანამედროვე მათემატიკური ენაზე ეს დამტკიცება შეიძლება მოკლედ ასე გამოვთქვათ: აღვნიშნოთ სფეროს ზედაპირი S-ით და დიდი წრის გაოთხკეცებული ფართობი A-თი (ნახ. 40).

დავუშვათ, რომ $S > A$. ავიღოთ ორი სიდიდე B და Γ ისე რომ, იყოს

$$\frac{B}{\Gamma} < \frac{S}{A}; \tag{1}$$

ავიღოთ მესამე სიდიდე Δ ისე, რომ

$$\frac{B}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Gamma} \tag{2}$$

გადავკვეთოთ სფერო ცენტრში გამავალი სიბრტყით და მიღებული EZHΘ წრის ირგვლივ და მასში შემოვსწეროთ ისეთი ორი ერთმანეთის მსგავსი მრავალკუთხედი, რომელთა ორი შესაბამისი გვერდი P_1 და P_2 აკმაყოფილებდეს შემდეგი უტოლობას:

$$\frac{P_1}{P_2} < \frac{B}{\Delta} \tag{3}$$

რაც სავსებით შესაძლებელია არქიმედეს მე-4 წინადადების ძალით: აქედანვე იქნება

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 < \left(\frac{B}{\Delta}\right)^2 \tag{4}$$

მაგრამ

$$\frac{B}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Gamma}; \quad \frac{B}{\Gamma} = \left(\frac{\Delta}{\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{B}{\Delta}\right)^2$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \left(\frac{B}{\Delta}\right)^2 \quad (5) \quad \text{და} \quad \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}, \tag{6}$$

თანახმად არქიმედესი მე-24 წინადადებისა, სადაც S_1 და S_2 სფეროს ირგვლივ შემოწერილი და სფეროში ჩაწერილი ტანების ზედაპირებია. (4) და (5) გვაძლევს

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 < \frac{B}{\Gamma} \tag{7}$$

(7) და (1) გვაძლევს

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 < \frac{S}{A} \tag{8}$$

(8) და (6)-დან კი მივიღებთ:

$$\frac{S_1}{S_2} < \frac{S}{A} \tag{9}$$

უკანასკნელი უტოლობა კი შეუძლებელია, ვინაიდან

$$S_1 > S$$

და

$$S_2 < A$$

თანახმად მე-26 წინადადებისა. ამიტომ შეუძლებელია რომ S მეტი იყოს A-ზე. ასევე დამტკიცდება რომ S ნაკლები არ არის A-ზე. მაშასადამე

$$S = A$$

სადაც A დიდი წრის გაოთხკეცებულ ფართობის ტოლია და თეორემა დამტკიცებულია.

როგორც ვხედავთ, არქიმედემ ამოწურვის მეთოდის საშუალებით გამოითვალა სფეროს ზედაპირი, დაიყვანა რა ეს გამოთვლა წრის ფართობის გამოთვლამდე, რომელიც მას უკვე გაკეთებული ჰქონდა. სფეროს ზედაპირის ამგვარი გამოთვლა ცოტათი განსხვავდება იმ გამოთვლებისაგან, რომელიც ახლა მოცემულია ჩვენს სახელმძღვანელოებში. ინტეგრირების დარგში არქიმედეს დიდ მოღვაწეობად ჩაითვლება სწორედ სფეროს ზედაპირის ასეთი გამოთვლა.

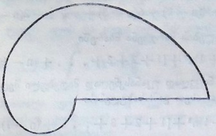
მე-36 წინადადებაში კი მტკიცდება, რომ სფეროს მოცულობა ტოლია გაოთხკეცებულ კონუსის, რომლის ფუძე დიდი წრეა და სიმაღლე კი რადიუსი.

მე-37 წინადადებაში მტკიცდება სწორედ ის თეორემა, რომლის ნაკვთი არქიმედეს საფლავის ქვაზეა ამოჭრილი და რომლის შესახებ ჩვენ უკვე ვთქვით.

4° ხვიათა შესახებ. წიგნი შეიცავს 28 წინადადებას. ამ წიგნში არქიმედე ხვიას შემდეგნაირად განმარტავს: თუ წრფეს ერთ მის დამაგრებულ წერტილის ირგვლივ თანაბარზომიერად ვამოძრავებთ სიბრტყეზე სანამ ის მისი საწყის მდებარეობას არ დაუბრუნდება და იმავე დროს ამ წრფეზე ვამოძრავებთ თანაბარზომიერად რომელიმე წერტილს, დაწყებული უძრავი წერტილიდან, მაშინ ეს უკანასკნელი ხვიას შემოწერს (ნახ. 41). ეს ხვია დღესაც ცნობილია არქიმედეს ხვიას სახელწოდებით. არსებობდა შემცდარი აზრი იმის შესახებ, რომ თითქოს ეს ხვია ეკუთვნის არა არქიმედეს, არამედ მის მეგობარს კონონს.

მე-10 წინადადებაში არქიმედე გეომეტრიულად ამტკიცებს ტოლობას:

$$3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2] =$$
$$= (n + 1)(na)^2 + a(a + 2a + 3a + \ldots + na) \qquad (1)$$



ნახ. 41.

(a, $2a$, $3a$, ... na გამოსახულნი არიან ნაკვეთებით).

დავუშვათ, რომ $a = 1$ და მოსაძებნი ჯამი კვადრატებისა აღვნიშნოთ S-ით

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

მაშინ (1) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2] =$$
$$= (n + 1)n^2 + [1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + (n - 1) + n] \qquad (2)$$

არქიმედეს დამტკიცება შეიძლება ასე გამოვსახოთ: $(n + 1)n^2$ შეიძლება ჯამის სახით წარმოვადგინოთ, მაგალითად:

$$n^2 = [(n - 1) + 1]^2$$

ანუ

$$n^2 = [(n - 2) + 2]^2$$

და ასე შემდეგ, ისე რომ

$$(n + 1)n^2 = n^2 + [(n - 1) + 1]^2 + [(n - 2) + 2]^2 + \ldots +$$
$$+ [2 + (n - 2)]^2 + [1 + (n - 1)]^2 + n^2 = n^2 + (n - 1)^2 + 2(n - 1) +$$

$$+1^2+(n-2)^2+4(n-2)+2^2+\ .\ .\ .\ +2^2+4(n-2)^2+1^2+$$
$$+2(n-1)+(n-1)^2+n^2=(1^2+2^2+3^2+\ .\ .\ .\ +n^2)+$$
$$(1^2+2^2+3^2+\ .\ .\ .\ +n^2)+2(n-1)+4(n-2)+$$
$$+6(n-3)+\ .\ .\ .\ +2(n-1)=2S+2(n-1)+$$
$$+4(n-2)+6(n-3)+\ .\ .\ .\ +2(n-1).1.$$

მე (2) განტოლების მარჯვენა მხარეში

$$(n+1)n^2+[1+2+3+\ .\ .\ .\ +(n-1)+n]\text{-ში}$$

$(n+1)n^2$-ის ნაცვლად უკანასკნელად მიღებული შედეგის ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ასეთ გამოსახულებას:

$$(n+1)n^2+[1+2+3+\ .\ .\ .\ +(n-1)+n]=$$
$$=2S+2(n-1)+4(n-2)+6(n-2)+\ .\ .\ .\ +$$
$$+2(n-1)+1+2+\ .\ .\ .\ +(n-2)+(n-1)+n=$$
$$=2S+n+3(n-1)+5(n-2)+\ .\ .\ .\ +2(n-1). \qquad (3)$$

მაგრამ

$$n+3(n-1)+5(n-2)+\ .\ .\ .\ +2(n-1)\cdot 1=S$$

მართლაც

$$n^2=n+\frac{2n(n-1)}{2}=n+2[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1];$$
$$(n-1)^2=(n-1)+2[(n-2)+(n-3)+(n-4)+\ .\ .\ .\ +1]$$
$$(n-2)^2=(n-2)+2[(n-3)+(n-4)+\ .\ .\ .\ +1].$$

ტოლობათა ორივე მხარეების შეკრების შემდეგ მივიღებთ:

$$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ .\ .\ .\ +3^2+2^2+1^2=$$
$$=n+3(n-1)+5(n-2)+\ .\ .\ .\ +2(n-1)\cdot 1$$

მაგრამ მარცხენა მხარე კი ტოლია S-ის, ამიტომ მარჯვენაც=S; მაშასადამე ტოლობა (2) დამტკიცებულია.

ამის შემდეგ, ეყრდნობა რა (2) ტოლობას, არქიმედე, ამტკიცებს თეორემას:

$$\frac{n^3}{3}a^2 < a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}a^2 \quad (4)$$

თუ ამ უტოლობაში a-ს მუდამ ვამცირებთ და n-ს უსაზღვროდ გავზრდით ისე, რომ na ყოველთვის რომელიმე განსაზღვრული x მნიშვნელობის ტოლი იყოს და კიდევ თუ მას $a = dx$-ზე გავამრავლებთ, მაშინ მივიღებთ: $\int\limits_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

ლაიბნიცი მართალი იყო როდესაც თქვა: „როდესაც არქიმედეს შრომებს ყურადღებით კითხულობ, უკვე აღარ გაკვირვებს გეომეტრების ყველა უახლესი აღმოჩენა“.

5° კონოიდებისა და სფეროიდების შესახებ. წიგნი იწყება დოზითესადმი წერილით.

შესავალში არქიმედე გეომეტრიულად ამტკიცებს თეორემას

$$\frac{n^2}{2}a < a + 2a + 3a + \ldots + na < \frac{(n+1)^2}{2}a$$

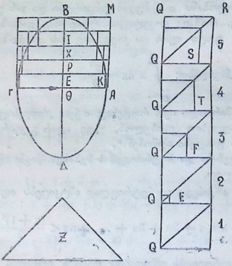
არქიმედე კონოიდებს უწოდებდა ღერძის ირგვლივ პარაბოლის ან ჰიპერბოლის ბრუნვით შექმნილ სხეულს. სფეროიდს კი უწოდებდა ელიპსის ბრუნვით მიღებულ სხეულს. თუ სფეროიდი შექმნილი იყო ელიპსის ბრუნვით დიდი ღერძის ირგვლივ, მაშინ მას უწოდებდა მოგრძო სფეროიდს; თუ მცირე ღერძის ირგვლივ — მაშინ უწოდებდა ბრტყელ სფეროიდს. ამ წიგნში არქიმედეს დამუშავებული აქვს სივრცის გეომეტრიის საკითხები.

მე-29 წინადადებაში ის ამტკიცებს შემდეგ თეორემას: „ცენტრში გამავალი და ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყით მოკვეთილი რომელიმე სფეროიდის ნახევრის მოცულობა ორჯერ მეტია ისეთი კონუსის მოცულობისა, რომელსაც იგივე ფუძე და იგივე ღერძი აქვს, რაც სფეროიდის სეგმენტს“ (ნახ. 42). მოკლედ ამ თეორემის დამტკიცება ჩვენი აღნიშვნების საშუალებით ასე ჩამოყალიბდება.

სფეროიდის ნახევრის მოცულობა V_1-ით აღვნიშნოთ, კონუსის მოცულობის გაორკეცებული სიდიდე Z-ით. დავუშვათ, რომ

$$V_1 > Z \tag{1}$$

სფეროიდის ნახევარში ჩავწეროთ და ირგვლივ შემოვწეროთ ერთი



ნახ. 42.

და იმავე სიმაღლის ცილინდრებისაგან შემდგარი სხეულები, ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ უტოლობას:

$$V_2 - V_0 < V_1 - Z \tag{2}$$

სადაც V_0 ჩაწერილი სხეულის მოცულობაა და V_2 კი შემოწერილის მოცულობაა.

ამასთანავე გვაქვს რომ

$$V_2 > V_1 \tag{3}$$

მე-(2) და მე-(3)-ს ძალით გვექნება

$$V_1 - V_0 < V_1 - Z$$

აქედან კი

$$V_0 > Z$$

АГ-ზე როგორც დიამეტრზე აგებული ცილინდრის მოცულობა, რომლის სიმაღლეა $B\Theta$, აღვნიშნოთ V_3-თი და იმავე ფუძის და სიმაღლის კონუსის მოცულობა აღვნიშნოთ C-თი

$$V_3 = 3C \tag{4}$$

რასაც არქიმედე ამტკიცებს შრომაში „სფეროსა და ცილინდრის შესახებ".

იმავე დროს

$$Z = 2C \tag{5}$$

ამიტომ (4) და (5) ტოლობა გვაძლევს:

$$V_3 = \frac{3}{2} Z \text{ ანუ რადგან } V_0 > Z \text{ ამიტომ } V_3 < \frac{3}{2} V_0; \tag{6}$$

შემდეგ არქიმედე აგებს მთელ რიგ გნომონებს (ნახ. 42) რომელნიც ჩვენ შეგვიძლია ასე გამოვსახოთ:

$$\text{აღვნიშნოთ } \Theta A = a, \quad \Theta B = b; \Theta E = \frac{b}{n} = h.$$

პირველ კვადრატს: b^2-ს არქიმედე ტოვებს უცვლელად; მეორე კვადრატს (b^2-ს) აკლებს h^2-ს და ღებულობს გნომონს: $b^2 - h^2$. მესამე კვადრატს (b^2-ს) აკლებს $(2h)^2$ და ღებულობს გნომონს $b^2 - (2h)^2$ და ასე შემდეგ; ამრიგად გნომონები არიან:

$$b^2,\ b^2 - h^2,\ b^2 - (2h)^2,\ .\ \ .\ \ .\ b^2 - [(n-1)h]^2.$$

შემდეგ გვაქვს:

$$\frac{\text{ГМ ცილინდრში მოთავსებული 1 ცილინდრი}}{\text{ჩაწერილი სხეულში მოთავსებ. 1 ცილინდრი}} = \frac{A\Theta^2}{EK^2} = \frac{B\Theta \cdot \Delta\Theta}{BE\ E\Delta}; \tag{7}$$

ეს ტოლობა არქიმედეს გამოყავს მისთვის ცნობილი ელიპსის თვისებიდან

$$\frac{A\Theta^2}{\Theta B \cdot \Theta\Delta} = \frac{EK^2}{BE \cdot E\Delta} = \text{მუდმივ სიდიდეს} \tag{8}$$

რაც ჩვენ შეიძლება გამოვიყვანოთ ელიპსის განტოლებიდან

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1;$$

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-x^2)$$

$$\frac{y^2}{b^2-x^2}=\frac{a^2}{b^2}\ (\text{მუდმ. სიდ.}) \tag{9}$$

$$\frac{y^2}{(b+x)(b-x)}=\text{ მუდმ. სიდ.}$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$\Theta E=x \text{ და } EK=y.$$

მაშინ

$$BE\cdot E\Delta=(b-x)(b+x),$$

$$\frac{EK^2}{BE\cdot E\Delta}=\text{ მუდ. სიდ.}$$

მაშასადამე, დადასტურებულია, რომ

$$\frac{A\Theta^2}{\Theta B\cdot\Theta\Delta}=\frac{EK^2}{BE\cdot E\Delta}.$$

აქედან კი

$$\frac{A\Theta^2}{EK^2}=\frac{\Theta B\cdot\Theta\Delta}{BE\cdot E\Delta}$$

და (7) ტოლობა დამტკიცებულია.

არქიმედე აღნიშნავს, რომ მთელი ცილინდრის ყველა ცილინდრი ისე შეეფარდება ყველა სხვა ცილინდრს (იგულისხმება ჩაწერილ სხეულში მყოფი ცილინდრები), როგორც ყველა კვადრატი შეეფარდება მათ გამოკლებულ გნომონებს. ჩვენი აღნიშვნის მიხედვით გვექნება

$$\frac{\Gamma M\text{ ცილინდრში მოთავს. რომელიმე ცილინდრი}}{\text{ჩაწერილი სხეულში მოთავს. რომელიმე ცილინდრი}}=\frac{b^2}{b^2-(m_i\cdot h)^2};$$

ამ ტოლობის მრიცხველები და მნიშვნელები შეგვიძლია შევცვალოთ შესაბამისად ცილინდრების ჯამებით, კვადრატების ჯამებით და გნომონების ჯამებით, მივიღებთ:

$$\frac{\text{მთელი ცილინდრი } \Gamma M}{\text{ჩაწერილი სხეული}} = \frac{nb^2}{(n-1)b^2 - \sum\limits_{i}^{n-1} (m_i h)^2} \qquad (10)$$

ანუ

$$\frac{V_3}{V_0} = \frac{nb^2}{(n-1)b^2 - \sum\limits_{i}^{n-1} (m_i h)^2} \qquad (11)$$

სადაც V_3 და V_0 ჩვენი აღნიშვნით ΓM ცილინდრის და ჩაწერილი სხეულის მოცულობებია. ამის შემდეგ გადავალთ იმ ადგილზე, სადაც არქიმედე ამბობს: „რადგანაც ყველა კვადრატი ნაკლებია პირველებისაგან გამოკლებული სხვა კვადრატების გასამკეცებულის, ამიტომ ცხადია, რომ ისინი ერთად აღებულნი მეტია ვიდრე დანარჩენთა ერთ ნახევარი სიდიდე და ამნაირად ყველა ერთად აღებული ისინი მეტია ვიდრე გნომონების ერთ ნახევარი".

ამ აზრს შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბებთ:

„ხვიათა შესახებ" შრომაში არქიმედეს მიერ დამტკიცებულ მე-10-ე წინადადების თანახმად გვაქვს:

$$nb^2 < 3\{nb^2 - [(n-1)b^2 - \Sigma (mh)^2]\} \qquad (12)$$

სადაც ჩვენი აღნიშვნით nb^2 არის კვადრატების ჯამი და

$$[(n-1)b^2 - \Sigma (mh)^2]$$

კი გნომონების ჯამია. აქედან [(12)-დან]

$$nb^2 < 3nb^2 - 3[(n-1)b^2 - \Sigma (mh)^2]$$

$$nb^2 - 3nb^2 < -3[(n-1)b^2 - \Sigma (mh)^2];$$

$$-2nb^2 < -3[(n-1)b^2 - \Sigma (mh)^2];$$

$$2nb^2 > 3[(n-1)b^2 - \Sigma (mh)^2];$$

$$nb^2 > \frac{3}{2}\left[(n-1)\,b^2 - \Sigma\,(mh)^2\right]; \tag{13}$$

(11) ტოლობის და (13) უტოლობის ძალით

$$\frac{V_3}{V_0} > \frac{3}{2} \tag{14}$$

აქედან

$$V_3 > \frac{3}{2}\,V_0 \tag{15}$$

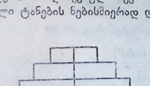
მაგრამ (6) ტოლობაში გვქონდა

$$V_3 < \frac{3}{2}\,V_0 \tag{16}$$

მაშასადამე იმის დაშვებამ, რომ სფეროიდის ნახევარი Z კონუსზე მეტია, აბსურდამდე მიგვიყვანა. დამტკიცების მეორე ნაწილი ისეთივე სახისაა, როგორც პირველი ნაწილი, ამიტომ ჩვენ არ შევუდგებით მის ახსნა-განმარტებას, მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ იქაც, როგორც პირველ ნაწილში მტკიცდება, რომ

$$nb^2 > \frac{3}{2}\left[nb^2 - \Sigma\,(mh)^2\right]; \tag{17}$$

როდესაც არქიმედე სფეროიდის გარშემო და შიგნით ცილინდრებისაგან შემდგარ კიბისებური სხეულების შემოწერას და ჩაწერას ახდენს, მას დაშვებული აქვს შესაძლებლობა შემოწერილი და ჩაწერილი ტანების ნებისმიერად დაახლოებისა (ნახ. 43).



ნახ. 43.

ადვილად დავინახავთ, რომ განსხვავება ამ ორ (შემოწერილი და ჩაწერილი) სხეულებს შორის დაიყვანება ცილინდრამდე, რომლის დიამეტრია ΓA და სიმაღლე კი ΘE. ეს ცილინდრი კი არქიმედეს აზრით ΘE სიმაღლის შემცირებით შეიძლება გახდეს ყოველი ნებისმიერი სიდიდეზე ნაკლები. აქ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ სფეროიდი ჩაწერილი სხეულების ზღვარია. მკითხველისათვის ახლა აშკარა უნდა

იყოს, რომ აქ არქიმედეს მეთოდი არსებითად ინტეგრირების მეთოდის უსასრულოდ მცირეთა გამოყენებით. ეს მით უფრო ნათელი იქნება, თუ შევნიშნავთ, რომ არქიმედე ამ შემთხვევაში აწარმოებს შეჯამებას პატარა ცილინდრებისას, რომელთა მოცულობანი ზოგადი სახით ტოლია $\pi y^2 h$, სადაც y რომელიმე პატარა ცილინდრის რადიუსია და h — ამ ცილინდრის სიმაღლეა. $\pi y^2 h$-ში ჩავსვათ მნიშვნელობა.

$$y = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$$

მივიღებთ:

$$\frac{\pi h a^2}{b^2}[b^2 - x^2];$$

ამ გამოსახვაში ჩავსვათ x-ის ნაცვლად $mh = x$; გვექნება:

$$\frac{\pi h a^2}{b^2}[b^2 - (mh)^2]. \tag{18}$$

ეს არის რომელიმე პატარა ცილინდრის მოცულობის ზოგადი სახე; თუ (19)-ში მიმდევრობით ჩავსვამთ $m = 1, 2, 3, \ldots n-1$, მივიღებთ ჩაწერილ სხეულში მდებარე პატარა ცილინდრების მოცულობებს, რომელთა ჯამი მოგვცემს ჩაწერილი სხეულის მოცულობას:

$$V_0 = \frac{\pi h a^2}{b^2}\{[(b^2 - h^2)] + [b^2 - (2h)^2] + [b^2 - (3h)]^2 + \ldots + b^2 -$$

$$- [(n-1)h]^2\} = \frac{\pi h a^2}{b^2}\{(n-1)b^2 - h^2[1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2]\} =$$

$$= \frac{\pi h^3 a^2}{b^2}\left\{n^2(n-1) - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\} =$$

$$= \frac{\pi h^3 a^2}{b^2}\left\{\frac{6n^2(n-1) - (n-1)n(2n-1)}{6}\right\} =$$

$$= \frac{\pi h^2 a^2}{6b^2}\{n(n-1)[6n - 2n + 1]\} =$$

$$= \frac{\pi h^3 a^2}{6b^2} n(n-1)(4n+1) =$$

$$= \frac{\pi\left(\frac{b}{n}\right)^3 a^2}{6b^3} n(n-1)(4n+1) =$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{6n}(n-1)(4n+1) =$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{6n}(n-1)(4n+1) =$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right) \tag{19}$$

შენიშვნა: ჩვენ ჩავსვით

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ .\ .\ . + (n-1)^2\text{-ის}$$

ნაცვლად მისი ტოლი სიდიდე

$$\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6};$$

არქიმედე თავის შრომაში „ხვიათა შესახებ“ ამტკიცებს, რომ

$$(n-1)(n-1)^2 + (n-1)^2 + [1 + 2 + 3 + \ .\ .\ . + (n-1] =$$
$$= 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ .\ .\ . + (n-1)^2]; \tag{20}$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს რიცხვთა კვადრატების ჯამის მნიშვნელობა. მართლაც: არქიმედემ იცოდა არითმეტიკული პროგრესიის ჯამის მნიშვნელობა. ჩავსვათ (20)-ში

$$1 + 2 + \ldots + (n-1)\text{-ის მნიშვნელობა } \frac{1}{2}n(n-1)..$$

მივიღებთ:

$$(n-1)^2(n-1+1) + \frac{1}{2}n(n-1) =$$
$$= 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2];$$

$$n(n-1)^2 + \frac{1}{2}n(n-1) = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2];$$

$$\frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)=3[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2];$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

შემოწერილი სხეულის მოცულობას მივიღებთ თუ (18) გამოსახ-ვაში ჩავსვამთ მიმდევრობით $m=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1$ და მიღებულ მნიშვნელობებს შევკრებთ. გვექნება:

$$V_2=\frac{\pi a^2 h}{b^2}\{b^2+(b^2-h^2)+[b^2-(2h)^2]+\ldots+b^2-[(n-1)h]^2\}=$$

$$=\frac{\pi a^2 h}{b^2}\{nb^2-h^2[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]\}=$$

$$=\frac{\pi a^2 h^3}{b^2}\left[n^3-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right]=$$

$$=\frac{\pi a^2 h^3}{6b^2}n(n+1)(4n-1)=$$

$$=\frac{\pi a^2 b}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right); \qquad (21)$$

ამრიგად მივიღებთ, რომ

$$V_0=\frac{\pi a^2 b}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)$$

და

$$V_2=\frac{\pi a^2 b}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)$$

თუ n-ს მივასწრაფებთ ∞-კენ დავინახავთ რომ ჩაწერილი და შემო-წერილი სხეულების მოცულობათა მნიშვნელობანი ზღვარში გვაძლე-ვენ ერთიდაიგივე სიდიდეს $\frac{2}{3}\pi a^2 b$, ე. ი. სფეროიდის ნახევარის მოცულობას. არქიმედეს მიერ მიღებული ეს შედეგები ჩვენ შევვიძ-

ლია დავწეროთ თანამედროვე მათემატიკური ენაზე. ჩვენ გვქონდა

$$\frac{n^3}{3}a^2 < a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \dots + (na)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}a^2,$$

ანუ თუ a-ს მაგივრად h-ს ჩავსვამთ და n-ის მაგივრად (n — 1)-ს, გვექნება:

$$\frac{(n-1)^3}{3}h^2 < h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (nh)^2 < \frac{n^3}{3}h^2 \qquad (22)$$

მე-(20) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{\pi h a^2}{b^2}\{(b^2 - h^2) + [b^2 - (2h)^2] + [b^2 - (3h)^2] + \dots + b^2 - [(n-1)h]^2\} =$$

$$= \frac{\pi h a^2}{b^2}\{(n-1)b^2 - [h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + [(n-1)h]^2\}. \quad (23)$$

მე-(22) უტოლობისა და მე-(23) ტოლობის ძალით გვექნება:

$$\frac{\pi h a^2}{b^4}\left[(n-1)b^2 - \frac{(n-1)^3}{3}h^2\right] < \frac{\pi h a^2}{b^2}\{(n-1)b^2 - [h^2 + (2h)^2 + $$

$$\dots + [(n-1)h]^2\} < \frac{\pi h a^2}{b^2}\left[(n-1)b^2 - \frac{(n-2)^3}{3}h^2\right]$$

ანუ

$$\frac{\pi h a^2}{b^2}\left[(n-1)b^2 - \frac{(n-1)^3}{3}h^2\right] <$$

$$< \pi\left\{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - h^2)\cdot h + \frac{a^2}{b^2}[b^2 - (2h)^2]h + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{b^2}[b^2 - (n-1)^2h^2\cdot h]\right\} < \frac{\pi h b^2}{b^2}\left[(n-1)b^2 - \frac{(n-2)^3}{3}\cdot h^2\right]. \quad (24)$$

თუ მე-(24) უტოლობაში h-ს უსასრულოდ ვამცირებთ და იმავე დროს n-ს უსაზღვროთ ვზრდით ისე, რომ nh ყოველთვის x-ის რომელიმე განსაზღვრულ მნიშვნელობის ტოლია და მამრავლს h-ს კი მივიღებთ dx-ის ტოლად (h = dx), მაშინ მივიღებთ ინტეგრალს,

რომელიც სფეროიდის ნახევრის მოცულობას V_1-ს გამოსახავს:

$$V_1 = \pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \pi a^2 \int_0^b dx - \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^b x^2 dx = \pi a^2 b - \frac{\pi a^2 b}{3} = \frac{2}{3}\pi a^2 b.$$

მე-30 წინადადებაში არქიმედე ამტკიცებს, რომ თუ რომელიმე სფეროიდი ღერძის არაპარალელური ცენტრში გამავალი სიბრტყით არის გადაკვეთილი, მაშინ სფეროიდის ნახევარი ორჯერ მეტი იქნება ისეთი კონუსის სეგმენტისა, რომელსაც იგივე ფუძე და ღერძი აქვს, როგორიც სეგმენტს აქვს.

მე-31 წინადადება: „სეგმენტი, რომელიც მოკვეთილია ცენტრში არგამავალი ღერძის პერპენდიკულიარული სიბრტყით, ისე შეეფარდება იმავე ფუძისა და იმავე სიმაღლის კონუსს, როგორც სფეროიდის ნახევარი ღერძისა და უდიდესი სეგმენტის ღერძისაგან შემდგარი წრფე შეეფარდება უდიდესი სეგმენტის ღერძს".

მე-32 წინადადება: „თუ სფეროიდი მოკვეთილია ისეთი სიბრტყით, რომელიც ცენტრში არ გადის და ღერძის პერპენდიკულარულია, მაშინ მცირე სეგმენტი ისე შეეფარდება იმავე ფუძის და იმავე ღერძის მქონე კონუსს, როგორც წრფე, შედგენილი გადამკვეთი სიბრტყის მიერ შექმნილი სეგმენტების წვეროების გამაერთიანებელი წრფის ნახევრისაგან და მცირე სეგმენტის ღერძისაგან, შეეფარდება დიდი სეგმენტის ღერძს".

მე-33 წინადადება „რომელიმე სფეროიდის დიდი სეგმენტი, რომელიც მოკვეთილია ცენტრში არა გამავალი და ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყით, ისე შეეფარდება იმავე ფუძის და ღერძის მქონე კონუსს, როგორც წრფე, შედგენილი სფეროიდის ნახევარი ღერძისაგან, შეეფარდება მცირე სეგმენტის ღერძს".

6°. **ქვიშის მარცვლების რიცხვის შესახებ.** ამ შრომაში არქიმედე მიზნად ისახავს ქვიშის მარცვალთა რიცხვის განსაზღვრას, რომელსაც შეიცავს სამყაროს სიდიდის მასა. სამყაროს რადიუსი მას აღებული აქვს, როგორც 10.000.000.000 სტადიებზე ნაკლები რიცხვის ტოლი; და-

დაუშვებს რა, რომ სილის 10.000 მარცვლის მოცულობა ყაყაჩოს ერთ თესლზე მეტი არ არის და ყაყაჩოს ერთი თესლი კი თითის სისქის $\frac{1}{40}$ ნაწილზე მეტი არ არის, და იმავე დროს ღებულობს რა მხედველობაში, რომ სფეროები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც მათი რადიუსების კუბები, არქიმედე პოულობს, რომ სამყაროში მყოფი სილის მარცვალთა რიცხვი 10^{63}-ზე ნაკლებია.

მცურავი ტანების შესახებ შრომა ორი წიგნისაგან შედგება. პირველი წიგნი შეიცავს 9 წინადადებას. პირველი წიგნის მეორე წინადადებაში არქიმედე ამტკიცებს, რომ მყარ მდგომარეობაში მყოფი ყოველი სითხე სფერიული ფორმისაა და ამ სფერიული ზედაპირის ცენტრი იგივეა, რაც დედამიწის ცენტრი.

მეცხრე წინადადება შემდეგია: თუ სითხეზე უფრო მჩატე სფერული სეგმენტი მოთავსებულია ამ სითხეში ისე, რომ ფუძე მთლიანად სითხეშია, ის სეგმენტი დადგება ისე, რომ სეგმენტის ღერძს ვერტიკალური მდებარეობა ექნება.

მეორე წიგნი შეიცავს 10 წინადადებას, რომლებიც ეხებიან სითხეში მოთავსებული პარაბოლოიდის სეგმენტის წონასწორობის საკითხს. ეს საკითხი დაკავშირებული იყო ზღვაოსნობასთან, რის გამო გახდა არქიმედეს საკვლევი საგანი.

7°. **მოძღვრება მეთოდის შესახებ.** განვლო 2118 წელმა არქიმედეს სიკვდილის შემდეგ, და კაცობრიობისათვის ცნობილ მის უკვდავ შრომებს ერთი კიდევ შესანიშნავი შრომა დაემატა — „მოძღვრება მეთოდის შესახებ", რომელმაც XVII საუკუნის სახელგანთქმულ მათემატიკოსების, კეპლერისა და კავალიერის მეთოდის ორიგინალობა ზოგიერთების წინაშე კითხვის ქვეშ დააყენა, თუმცა არავითარი საფუძველი არ არსებობს იმის საფიქრებლად, რომ კეპლერს, კავალიერის და საერთოდ XVII საუკუნის მათემატიკოსებს სცოდნოდათ არქიმედეს ეს მეთოდი.

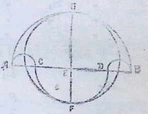
1906 წელს, კონსტანტინოპოლში, ბერძენთა ერთ-ერთ მონასტერში მათემატიკის ისტორიკოსმა, კოპენჰაგენის უნივერსიტეტის პროფესორმა ჰაიბერგმა აღმოაჩინა და მზის სინათლეზე გამოიტანა არქიმედეს დაკარგული წერილი მისი მეგობარი ერატოსფენესადმი, რომელიც შეიცავს სწორედ ხსენებულ მოძღვრებას მეთოდის შესახებ. ამ წერილში გამოაშკარავდა, რომ არქიმედე იყენებდა „განუყოფელთა“ მეთოდს სწორედ იმავე სახით, რა სახითაც კავალიერი

და კეპლერი იყენებდნენ მას უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ასაგებად. განუყოფელთა მეთოდის მიხედვით, რომელსაც, როგორც ჩანს არქიმედეს ამ შრომიდან, დემოკრიტი იყენებდა მოცულობათა გამოსათვლელად, წირი განხილულია როგორც წერტილებისაგან შემდგარი და სხეული, როგორც ზედაპირებისაგან შემდგარი. თავის ამ ნაშრომში არქიმედეს, დემოკრიტის მსგავსად, სამკუთხედი წარმოდგენილი აქვს როგორც ერთი გვერდის პარალელური ნაკვეთებისაგან შედგენილი და ცილინდრი კი ფუძის პარალელური წრეებისაგან „გავსებული“.

უკვე გავარკვიეთ, რომ არქიმედე თავის შრომაში ცილინდრისა და სფეროს შესახებ აწარმოებს ჯერ სფეროს ზედაპირის გამოთვლას და სფეროს მოცულობის გამოთვლაზე კი შემდეგ გადადის. შრომაში „მოძღვრება მეთოდის შესახებ“ კი ჯერ სფეროს მოცულობას გამოთვლის და შემდეგ კი, წარმოადგენს რა ამ მოცულობას, როგორც სფეროს ცენტრში წვეროების მქონე უსასრულოდ თხელი და უსასრულოდ მრავალი პირამიდების მოცულობათა ჯამს, ადვილად პოულობს სფეროს ზედაპირს.

იმ ლემებისაგან, რომელნიც არქიმედეს ეკუთვნიან, განვიხილოთ ტალღისებური ნაკვთის სალინონის (σαλινον) ფართობის გამოთვლა, რომლის გადმოცემა ადვილია თანამედროვე მათემატიკური ენაზე (ნახ. 44).

მოცემულია AB წრფე, რომლის შუა წერტილია E. AB ნაკვეთიდან მოვსჭრათ ორი ტოლი ნაკვეთი AC და BD; AB, AC და BD-ზე, როგორც დიამეტრებზე ავაგოთ AB-ს ერთ მხარეზე ნახევარი წრეები; აგრეთვე AB-ს მეორე მხარეზეც, CD-ზე, როგორც დიამეტრზე ავაგოთ ნახევარი წრე; მიღებულ ნაკვთს AgBDFCA არქიმედე სალინონს უწოდებს. სალინონის ფართობი ტოლია ისეთი წრის ფართობის, რომლის დიამეტრია FG. ამის დასამტკიცებლად არქიმედე აღნიშნავს, რომ



ნახ. 44.

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2(\overline{ED}^2 + \overline{EB}^2). \qquad (1)$$

უკანასკნელი უტოლობა ასე შეგვიძლია დავამტკიცოთ: გვაქვს

$$AD = 2ED + DB.$$

აქედან

$$\overline{AD}^2 = 4\overline{ED}^2 + 4\,ED \cdot DB + \overline{DB}^2.$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 4\overline{ED}^2 + 4\,ED \cdot DB + 2\,\overline{DB}^2 =$$

$$= 2\overline{ED}^2 + 2(\overline{ED}^2 + 2ED \cdot DB + \overline{DB}^2) =$$

$$= \overline{2ED}^2 + 2(ED + DB)^2 = 2\overline{ED}^2 + 2\overline{EB}^2 = 2(\overline{ED}^2 + \overline{EB}^2)$$

და ამით (1) ტოლობა დამტკიცებულია. ვინაიდან $FG = AD$ ამიტომ (1) ტოლობა ასე დაიწერება

$$\overline{FG}^2 + \overline{DB}^2 = 2(\overline{ED}^2 + \overline{EB}^2). \quad (2$$

$CD = 2ED$; $AB = 2EB$, ამიტომ (2) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(\overline{ED}^2 + \overline{EB}^2) = 2(\overline{FG}^2 + \overline{DB}^2) \quad (3)$$

არქიმედე ეყრდნობა რა თეორემას იმის შესახებ, რომ წრის ფართობები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც მათი კვადრატების დიამეტრები, მე-(3) ტოლობას ავრცელებს შესაბამ წრეთა ფართობებზე;

აღვნიშნოთ S_1-ით წრის ფართ. რომლის დიამეტრია AB
" S_2 " " " " CD
" S_3 " " " " FG
" S_4 " " " " DB.

მაშინ გვექნება მე-(3) ტოლობის ძალით

$$S_1 + S_2 = 2(S_3 + S_4)$$

ანუ

$$\frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{2} = S_3 + S_4.$$

$$\frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{2} - S_4 = S_3.$$

$$\frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{2} - S_4$$

არის სალინონის ფართობი, ვინაიდან S_4 არის ფართობი წრისა, რომლის დიამეტრებია DB ანუ ის არის ფართობი ორი ნახევარი წრეთა, რომელთა დიამეტრია AC და BD (AC=BD). S_3 კი აღნიშვნის ძალით, ისეთი წრის ფართობია, რომლის დიამეტრია FG. ამით თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

ამ თეორემის დამტკიცებით არქიმედე ცდილობდა გამოერკვია, თუ რამდენად შესაძლებელია რომელიმე მრუდი წირით შემოსაზღვრული არეს ფართობის გამოთვლა დაყვანილ იქნას წრის ფართობამდე.

არქიმედეს როლი მათემატიკური მეცნიერების განვითარებაში კიდევ უფრო ნათელი გახდება თუ ზოგად ხაზებში დავახასიათებთ მის განსაკუთრებულ თვისებებს ძველი საბერძნეთის სხვა მათემატიკოსებთან შედარებით, კერძოდ ევკლიდესთან, რომელიც ერთ-ერთი ცენტრალური ფიგურაა საბერძნეთის მათემატიკოსთა შორის.

უპირველესად ყოვლისა არქიმედე ახალი ფაქტების უდიდესი მკვლევარია. ევკლიდის შრომა „საწყისები“ წარმოადგენს უმთავრესად უკვე არსებული მასალის სისტემაში მოყვანას. არქიმედეს შრომები კი უმთავრესად დაკავშირებულია ახალი ფაქტების აღმოჩენასთან. არქიმედეს თითოეული შრომა მეცნიერების ნაბიჯით წინ წაწევაა. არქიმედეს გამოკვლევები უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დარგში მტკიცე საფუძველს წარმოადგენენ ამ დარგის შემდეგ განვითარებისათვის. როდესაც XVII საუკუნის მეცნიერებმა ხსენებულ დარგში გამოკვლევებს მიმართეს, ისინი განსაკუთრებით არქიმედეს შრომებს ეყრდნობოდნენ. უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დარგიდან ხვიასადმი მხების მოძებნის არქიმედეს მეთოდი დიდი ყურადღების ღირსია. არქიმედე ამისათვის განიხილავს სწორედ ისეთ უსასრულოდ მცირე სამკუთხედს, რომელსაც დღესაც ხმარობენ მხების მოსაძებნად პოლარულ კოორდინატებით გამოსახულ მრუდი წირებისადმი.

არქიმედე ინტეგრირების ოპერაციის წამომწყებია. სხვადასხვა გეომეტრიული ამოცანის გადასაწყვეტად ის მიმართავს იმ უსასრულოდ მცირე რაოდენობათა უსასრულო ჯამებს, რომელთაც დღეს უკავშირებთ განზღვრულ ინტეგრალს. სფერული ზედაპირის მისმა გამოანგარიშებამ მეცნიერებს ძიებათა ფართო სარბიელი გადაუშალა. გარდა ამისა ეს გამოანგარიშება პრაქტიკულ გამოყენების საშუალებას იძლევა და გამოყენებას პოულობდა სხვა მეცნიერებებში,

მაგალითად, გეოგრაფიაში. გამონგარიშების ამ მეთოდით სარგებლობდნენ აგრეთვე სფეროს ზედაპირზე ხვიით შემოსაზღვრულ ფართობის გამოსათვლელად.

არქიმედეს გამოკვლევები დახრილი კონუსის წრიულ განკვეთათა შესახებ გამოყენებას პოულობს ასტრონომიაში და სტერეოგრაფიული პროექცია ამ გამოკვლევათა უშუალო შედეგად შეიძლება ჩაითვალოს.

არქიმედე უსასრულო წკრივის შეჯამების წამომწყებია. ის კუბური განტოლების შემდგენია. საფუძვლის ჩაყრა ისეთი მნიშვნელოვანი მეცნიერებისათვის, როგორიც არის მექანიკა, საკმარისია რომ არქიმედეს მეცნიერთა შორის საპატიო ადგილი მიეკუთვნოს.

არქიმედეს შრომების დალაგების ფორმა დიდად განსხვავდება ევკლიდის შრომის დალაგების ფორმისაგან. თუ უკანასკნელის შრომაში გამეფებულია გაძვალებული დანაწილება წინადადებებად, დამტკიცებებად, განსაზღვრებად და სხვა, არქიმედეს შრომებში კი, განსაკუთრებით შრომაში „მოძღვრება მეთოდის შესახებ“, დალაგების ფორმა ზუსტად შეესაბამება იმ ხერხს, რომელსაც დღეს ჩვენ სწავლებაში ვხმარობთ. აქ მასალა გენეტიკურ ფორმაშია მოცემული.

არქიმედე დიდ ინტერესს იჩენდა მათემატიკის გამოყენებისადმი სხვადასხვა მეცნიერებასა და ტექნიკაში. ის მეტად მნიშვნელოვანი საკითხების დამუშავებას ეწეოდა ფიზიკაში, ჰიდროსტიკაში. მის მიერ აღმოჩენილი ჰიდროსტატიკის ძირითადი პრინციპი მან გამოიყენა შენადნობთა შემადგენლობის გამოსარკვევად ხვედრითი წონის საფუძველზე. მან ხრახნი გამოიგონა სოფლის მეურნეობაში გამოსაყენებლად (მინდვრების მოსარწყავად).

აგრეთვე ის გამომგონებელია მთელი რიგი მანქანების, განსაკუთრებით სამხედრო დანიშნულების, რომლებითაც ის ეფექტიურად და გმირულად იბრძვის მისი სამშობლო ქალაქის სირაკუზის დასაცავად.

სითხეში ჩაძირულ პარაბოლოიდის სეგმენტის წონასწორობის საკითხის მის მიერ დამუშავება მთლიანად ზღვაოსნობის საქმით არის ნაკარნახევი. უდავოა, რომ მათემატიკის პრაქტიკაში გამოყენება გამოთვლის განვითარებასთან არის დაკავშირებული, ამიტომ არქიმედე დიდ მიდრეკილებას იჩენს რიცხვითი გამოთვლებისადმი. ის პოულობს π-სათვის მიახლოვებითი მნიშვნელობას $\frac{22}{7}$-ს. არქიმედეს

შრომაში მოთავსებულია $\sin\frac{\pi}{n}$-ის ქვედა ზღვრების და $tg\frac{\pi}{n}$-ის ზედა ზღვრების გამოთვლა, როდესაც $n = 6, 12, 24, 48, 96$. თავის შრომაში „სილის აღრიცხვის შესახებ“ არქიმედეს მიზნათ აქვს დასახული გაამარტივოს შესამჩნევად რიცხვთა გამოთქმა, ამასთანავე ის გეომეტრიული ამოწურვის მეთოდს არითმეტიკულ დამატებას უკეთებს. მას სურს გვიჩვენოს, რომ უსასრულო მცირის მოპირდაპირე ცნება უსასრულოდ დიდია (რასაკვირველია ის სიტყვა „უსასრულოს“ არ ხმარობს), და რომ ისინი ორივე ერთად უსასრულოთა აღრიცხვას წარმოადგენენ. ვინაიდან ჩვენი მხედველობის ფარგლებში სივრცე შემოსაზღვრულია, არქიმედე ცდილობს უსასრულოდ დიდის ცნება რიცხვების საშუალებით გახადოს ადვილად წარმოსადგენი. არქიმედე გვიჩვენებს, რომ ყოველ მოცემულ რიცხვს, რაც არ უნდა დიდი იყოს ის, შეიძლება გადავაჭარბოთ სხვა რიცხვის საშუალებით, რომ ჯერ კიდევ შორს მყოფ საზღვარს შეიძლება როგორც ახლოს მყოფს გადავაბიჯოთ. ხსენებულ შრომაში მას რიცხვთა ხარისხის საკითხი აქვს დამუშავებული. ევკლიდეს კი სრულებით არ აინტერესებს რიცხვითი გამოთვლა. ევკლიდე მაშინდელ მათემატიკოსებსა და ზოგიერთ ფილოსოფოსებს შორის გამეფებულ აზრს იზიარებს; ის მეცნიერების პრაქტიკაში გამოყენებას მეორე ხარისხოვან საქმედ, ხელოსნობად სთვლის. ევკლიდეს შემდეგაც საბერძნეთის მათემატიკოსები ამ თვალსაზრისზე იდგნენ და არქიმედეს არ მიბაძეს. გამოყენებითი მათემატიკის ასეთი ანგარიშგაუწევლობამ, ამ საქმეში არქიმედეს მაგალითის უგულებელყოფამ, დიდი ზიანი მიაყენა ძველ საბერძნეთში თვით მათემატიკის განვითარებას.

არქიმედეს ცნობილ აქსიომას: ორ მონაკვეთს შორის უმცირესის საკმაოდ ბევრჯერ აღებით შეიძლება უდიდესი იყოს გადაჭარბებული, ძირითადი მნიშვნელობა აქვს გაზომვის თეორიაში და აგრეთვე გეომეტრიის მთელ რიგ საკითხებში.

არქიმედეს ჰიდროსტატიკულ კანონს უდიდესი მნიშვნელობა აქვს მეცნიერების ამ დარგში. ეს კანონი გამოიყენება ტექნიკაში გემების, დირიჟაბლების და სხვ. აგებისათვის. არქიმედემ გამოიგონა მზის ხილული დიამეტრის გასაზომი იარაღი და ააგო პლანეტარიუმი. არქიმედეს შემოქმედებისათვის, როგორც ზემოთაც აღნიშნულია, დამახასიათებელია მიდრეკილება გამოყენებითი მათემატიკისადმი. თითოეულ შრომას არქიმედე ანვითარებს ისეთივე მტკიცე ლოგი-

კური სიმტკიცით, როგორც საზოგადოდ დამახასიათებელია საბერძნეთის გეომეტრიისათვის. ის იცავს მაღალ ლოგიკურ სიმკაცრეს ისეთი დარგების დამუშავების დროსაც, როგორიც არის თეორიული და პრაქტიკული მექანიკა, ფიზიკა და საინჟინერო ხელოვნება. მის ყურადღებას იზიდავს ძნელი პრაქტიკული პრობლემები, რომელთა ამოხსნას ის უდიდეს აღმოჩენებისაკენ მიყავს. ისეთ ამოცანასაც კი, რომელიც პირველი შეხედვით ფანტასტიურია და მდგომარეობს მთელ სამყაროში სილის რაოდენობის აღრიცხვაში, მიზნად აქვს მეტად დიდი რიცხვების გამომსახველი პრაქტიკული საშუალებათა პოვნა.

§ 6. აპოლონიუსი პერგელი. 240 წელს ჩვენს ერამდე პერგაში დაიბადა აპოლონიუსი, ძველად „დიდი გეომეტრად“ წოდებული, მომავალი მიმდევარი არქიმედესი და ევკლიდესი.

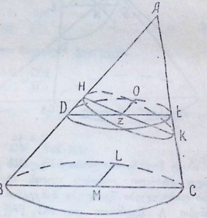
მათემატიკური განათლება მან მიიღო ალექსანდრიაში ევკლიდეს სკოლაში. შრომა კონუსურ კვეთათა შესახებ მას უდიდეს გეომეტრთა გვერდით სვამს. ეს შრომა საბერძნეთის გეომეტრიის ბრწყინვალე დასასრულია; მისი განვითარების უმაღლესი საფეხურია და ძველთა უკანასკნელ მათემატიკურ ცოდნას შეიცავს. ის, რაც ამ შრომებში აპოლონიუსის მიერ არის დამუშავებული, უშუალოდ მისი საკუთარი ნიჭის ნაყოფია.

შრომა კონუსურკვეთათა შესახებ შედგება რვა წიგნისაგან, რომელთაგან ჩვენამდე შვიდმა მოაღწია; მათშორის პირველ ოთხმა ბერძნულ ენაზე და დანარჩენმა სამმა — არაბულ თარგმანებში. პირველი ოთხი წიგნი შეიცავს კონუსურ კვეთათა თეორიის ელემენტებს, ე. ი. იმას რაც აპოლონიუსამდე იყო ცნობილი, ვინაიდან კონუსური კვეთათა საკითხებს ამუშავებდა აგრეთვე ევდოქსოსის მოწაფე — მენეხმოსი; უკანასკნელი სამი წიგნი უმთავრესად აპოლონიუსის გამოკვლევებს შეიცავს. XVII საუკუნემდე აპოლონიუსის მხოლოდ პირველი ოთხი წიგნი იყო ცნობილი დანარჩენი კი დაკარგული ეგონათ; გოლიუსმა და ბორელმა, პირველმა აღმოსავლეთში და მეორემ ფლორენციის ერთ-ერთ ბიბლიოთეკაში იპოვეს არაბული ხელნაწერი მეხუთე, მეექვსე და მეშვიდე წიგნის, რომელთა თარგმანი 1661 წელს ფლორენციაში გამოვიდა.

აპოლონიუსამდე ელიპსს, ჰიპერბოლს და პარაბოლს ღებულობდნენ როგორც მახვილკუთხოვანი, მართკუთხოვანი და ბლაგვკუთ-

ხოვანი კონუსების კვეთას შემქმნელის პერპენდიკულარული სიბრტყით. აპოლონიუსი კი ამ სამ მრუდეს ღებულობს როგორც წრიული ფუძიანი ნებისმიერი კონუსის ნებისმიერი სიბრტყესთან კვეთას. ამავე დროს მას შემქმნელი წარმოდგენილი აქვს როგორც უსასრულომდე ორივე მხრივ გაგრძელებული, რაც მას ჰიპერბოლის შესახებ თეორემების ჩამოყალიბებიის საშუალებას აძლევს. პირველ წიგნში აპოლონიუსი დახრილი კონიუსის წრიულ კვეთას განიხილავს, რაც მოკლედ თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე შეიძლება ასე გამოვთქვათ:

მოცემულია დახრილი კონუსი, რომლის წვეროა A და ფუძე BC წრეა (ნახ. 45). კონუსი BC გადავკვეთოთ წრის პერპენდიკულარული და კონუსის ღერძზე გამავალი სიბრტყით; კვეთა ABC სამკუთხედი იქნება კონუსი გადავკვეთოთ კიდევ ABC სამკუთხედის პერპენდიკულარული სიბრტყით ისე, რომ მოჭრილი AKH სამკუთხედი მსგავსი იყოს ABC სამკუთხედისა და $\angle AKH = \angle ABC$. უნდა დამტკიცდეს, რომ კონუსის ზედაპირის სიბრტყესთან გადაკვეთა HOK წრეწირია. HOK და BC წრეების ნებისმიერი O და L წერტილებიდან გავავლოთ პერპენდიკულარები ABC სამკუთხედის სიბრტყისადმი და მივიღებთ ერთმანეთის პარალელურ ZO და LM წრფეებს; Z წერტილზე გავავლოთ DZE წრფე BC წრფის პარალელურად; ZO და DE-ზე გავლებული სიბრტყე, კონუსის ფუძის პარალელურია და ამიტომ მისი გადაკვეთა კონუსის ზედაპირთან წრეწირია, რომლის დიამეტრია DE; რადგანაც ის წრეწირია, ამიტომ აპოლონიუსი წერს წრეწირის დეფინიტორულ თვისებას, რაც ჩვენ ასე შეგვიძლია დავწეროთ:



ნახ. 45.

$$\overline{OZ}^2 = DZ \cdot ZE, \quad \text{ანუ} \quad \frac{\overline{OZ}^2}{DZ \cdot ZE} = 1.$$

იმავე დროს სამკუთხედების მსგავსებიდან აშკარაა, რომ

$$\frac{DZ}{HZ}=\frac{ZK}{ZE},$$

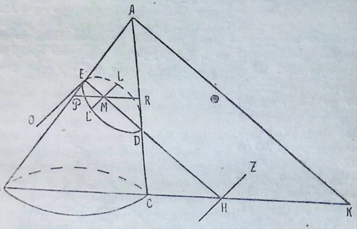
ანუ

$$DZ\cdot ZE=HZ\cdot ZK.$$

მაშასადამე, HOK-ს ნებისმიერი წერტილისათვის გვექნება

$$\overline{OZ}^2=HZ\cdot ZK,$$

ე. ი. HOK წირი აკმაყოფილებს წრეწირის დეფინიტორულ თვისებას რის გამო ის წრეწირია.



ნახ. 46.

ამავე წიგნში აპოლონიუსი ელიპსს განსაზღვრავს როგორც დახრილი წრიული კონუსის კვეთას. ახლანდელად ეს თეორემა და მისი დამტკიცება შეიძლება შემდეგნაირად გამოითქვას: მოცემულია კონუსი A წვეროთი და BC წრე ფუძით (ნახ. 46). გადავკვეთოთ ეს კონუსი ღერძში გამავალი სიბრტყით; კვეთა იქნება სამკუთხედი ABC. ეს კონუსი გადავკვეთოთ კიდევ ისეთი სიბრტყით, რომელიც გადაკვეთს ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდებს და რომელიც არ არის კონუსის ფუძის პარალელური და მის მიერ მოჭ-

რილი სამკუთხედი ABC სამკუთხედის მსგავსი არ არის. წირი DL′E კვეთა იქნება კონუსის ზედაპირზე. უკანასკნელი სიბრტყის კონუსის ფუძის სიბრტყესთან გადაკვეთა კი არის ZH, რომელიც BC-სი პერპენდიკულარულია; კვეთის დიამეტრია ED. გავავლოთ AK წრფე ED-ს პარალელურად და EO წრფე — პერპენდიკულარულად ED-სი ისე, რომ EO აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\frac{\overline{AK}^2}{BK\cdot KC}=\frac{DE}{EO}; \tag{1}$$

გადაკვეთის წირზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი L და გავავლოთ L წერტილიდან LM წრფე ZH-ის პარალელურად. M წერტილიდან გავავლოთ PMR წრფე BC-ს პარალელურად. (1) ტოლობა ასე დავწეროთ

$$\frac{DE}{EO}=\frac{AK}{KB}\cdot\frac{AK}{KC}. \tag{2}$$

ABK და EMP სამკუთხედების მსგავსების გამო გვაქვს:

$$\frac{AK}{BK}=\frac{EM}{PM}, \tag{3}$$

AKC და DMR სამკუთხედების მსგავსება გვაძლევს;

$$\frac{AK}{KC}=\frac{DM}{MR} \tag{4}$$

მე-(3) და მე-(4) ტოლობის ძალით მე-(2) ტოლობა შეიძლება ასე დაიწეროს

$$\frac{DE}{EO}=\frac{EM}{PM}\cdot\frac{DM}{MR}=\frac{EM\cdot MD}{PM\cdot MR}. \tag{5}$$

აქედან მივიღებთ:

$$\frac{PM\cdot MR}{EM\cdot MD}=\frac{EO}{ED}. \tag{6}$$

LM და PR წრფეებზე გავავლოთ სიბრტყე; რადგან PR პარალელურია BC-სი და LM პარალელურია ZH-ის, ამიტომ უკანასკნელი სიბრტყე პარალელური იქნება კონუსის ფუძისა და მაშასადამე, მისი

კვეთა კონუსის ზედაპირზე წრეწირი იქნება. წრეწირის დეფინიტორული თვისება კი არის:

$$LM^2 = PM \,.\, MR. \tag{7}$$

ამიტომ (6) ტოლობა მე-(7)-ეს ძალით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{LM^2}{EM \cdot DM} = \frac{EO}{ED} = \text{const}, \tag{8}$$

ვინაიდან EO და ED მუდმივი სიდიდეებია; L კი ნებისმიერი წერტილია მრუდისა, რომელზედაც ის გადაინაცვლებს; (8) ტოლობა წარმოადგენს ელიპსის დეფინიტორულ თვისებას და ამით აპოლონიუსმა ელიპსი სავსებით განსაზღვრა; ადვილად დავინახავთ, რომ ელიპსის ეს თვისება წარმოადგენს წრეწირის დეფინიტორულ თვისების განზოგადოებას, რადგან როგორც (7) ტოლობიდან ჩანს, წრეწირის დეფინიტორულ თვისების გამომსახველ ტოლობაში const=1. ელიპსის დეფინიტორულ თვისებას ამავე სახით ჩვენ შევხვდით არქიმედეს შრომაში „კონოიდების და სფეროიდების“ შესახებ.

მეორე წიგნში დამუშავებულია შეუღლებული დიამეტრების და ასიმპტოტების ძირითადი თვისებები; აქვე განხილულია შეუღლებული ჰიპერბოლები, მოთავსებული ასიმპტოტების მიერ შექმნილი სხვადასხვა კუთხეებში.

მესამე წიგნში აპოლონიუსი განიხილავს ფართობთა თეორემას რომლის საშუალებით მრუდს განიხილავს ორ არაშეუღლებულ დიამეტრების მიმართ; ფართობთა თეორემიდან მას გამოყავს მრუდის წერტილთა თვისებები დიამეტრების და ღერძებისაგან დამოუკიდებლად.

მეხუთე წიგნი შეიცავს სამი და ოთხი წრფის მიმართ გეომეტრიული ადგილების მოძებნის საკითხს; აქვე დამუშავებულია ამოცანა მოცემული წერტილიდან კონუსური კვეთისადმი ნორმალის გავლების შესახებ.

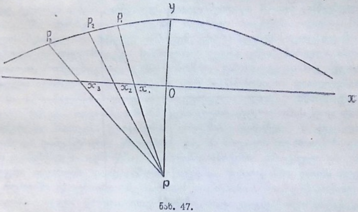
მეექვსე წიგნში განხილულია კონუსური კვეთების მსგავსების და კონგრუენტობის საკითხი.

მეშვიდე წიგნი შეიცავს შემდეგ თეორემას: შეუღლებული დიამეტრების კვადრატების ჯამი ან სხვაობა მუდმივია; ორი შეუღლებული დიამეტრის და მათი ბო-

ლოების გამაერთიანებელი ქორდის მიერ შექმნილი სამკუთხედის ფართობი მუდმივია.

მეშვიდე წიგნში აპოლონიუსს დამუშავებული აქვს კონუსურ კვეთათა დამახასიათებელი თვისებები, განსაკუთრებით დიამეტრებისა და ღერძების მიმართ.

აპოლონიუსი ამუშავებდა აგრეთვე ფესვების გაორკეცების და მათი გეომეტრიულად ამოხსნის პრობლემას. ჩვენამდე მოაღწია აგრეთვე აპოლონიუსის გეომეტრიულ შრომამ „შეფარდებათა გაყოფის შესახებ“, რომელთაც 1708 წელს გამოაქვეყნა ჰალლეიმ ლათინურ ენაზე.



ნახ. 47.

აპოლონიუსის შრომებს მრავალი კომენტატორი აღმოაჩნდა; მათ შორის ყველაზე უფრო შესანიშნავი არიან ჰიპატია, ევტოკიოსი და პაპოსი. ჩვენამდე მხოლოდ უკანასკნელი ორის კომენტარებმა მოაღწია. არაბებმა აპოლონიუსის შრომები რამდენმეჯერ გადათარგმნეს.

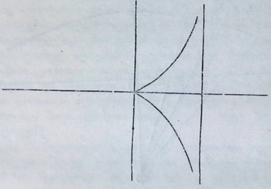
§ 7. ძველი საბერძნეთის დანარჩენი მათემატიკოსები და ასტრონომები. საბერძნეთის არითმეტიკა. 250 და 100 წლების (ჩვ. ერამდე) შორის ცხოვრობდა ნიკომედე, რომლის მიერ აღმოჩენილ მრუდს დღეს ვიცნობთ კონხოიდას სახელწოდებით. კონხოიდას შემდეგი თვისება ახასიათებს (ნახ. 47):

თუ P წერტილიდან გავავლებთ Pp_1, Pp_2, Pp_3, ... წრფეებს, მაშინ ნაკვეთები p_1x_1, p_2x_2, p_3x_3, ... მოთავსებულნი მრუდსა და აბსცისთა ღერძს შორის, ტოლნი არიან, ანუ

$$p_1x_1 = p_2x_2 = p_3x_3 = \dots$$

ნიკომედემ კონხოიდა გამოიგონა კუთხის სამ ტოლ ნაწილად დაყოფისათვის.

პროკლოსის ნაწერებიდან ვგებულობთ მათემატიკოსი დიოკლესის შესახებ, რომელიც მოღვაწეობდა დაახლოებით 200 წელს (ჩვენს ერამდე). მის მიერ გამოგონებული მრუდი წირი ცნობილია დღეს დიოკლესის ცისოიდის სახელწოდებით (ნახ. 48).



ნახ. 48.

ძველი საბერძნეთის ასტრონომთა შორის დიდი ყურადღების ღირსი არიან არისტარქოს სამოსელი, ერატოსფენე, ჰიპპარქოსი, მენელაოსი და პტოლომეოსი.

არისტარქოსი მოღვაწეობდა ალექსანდრიაში დაახლოებით 280 წელს ჩვენს ერამდე. მისი შეხედულება სამყაროს აგებულებაზე იმაში მდგომარეობს, რომ ვარსკვლავები და მზე უძრავია, დედამიწა კი მზის გარშემო მოძრაობს და მოძრაობის ტრაექტორია წრეწირია; სწორედ არისტარქოსის ეს ჰიპოტეზა თვრამეტი საუკუნის შემდეგ კოპერნიკმა დამოუკიდებლად აღმოაჩინა და დაამტკიცა. არისტარქოსის მიმდევარი იყო ალექსანდრიის სკოლის დიდი მეცნი-

ერი ერატოსფენე, რომელიც 276 წელს (ჩვენს ერამდე) დაიბადა. ერატოსფენე დედამიწის სიდიდის გაზომვას აწარმოებდა, რისთვისაც მან გაზომა მანძილი ერთ მერიდიანზე მდებარე ისეთი ორი ადგილს შორის, რომელთა სიგანედები ცნობილია; მან იპოვა, რომ გრადუსი 126.000 მეტრის ტოლია. მეტად მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ასტრონომიის განვითარებაში ერატოსფენეს შრომებმა მათემატიკურ გეოგრაფიაში. იმავე დროს ის გამოჩენილი მათემატიკოსიც იყო; მარტივ რიცხვთა მოძებნის მისი ხერხი ცნობილია ერატოსფენეს ცხრილის სახელწოდებით ეს ხერხი შემდეგში მდგომარეობს: ამოწერავენ ყველა მთელ რიცხვთა რიგს იმ რიცხვამდის, რომელამდიც სურთ გამოკვლევა; შემდეგ ამოშლიან ყოველ მეორე რიცხვს 4-დან დაწყებული, ყოველ მესამეს 6-დან დაწყებული, ყოველ მეოთხეს 8-დან დაწყებულ, ყოველ მეხუთეს 10-დან დაწყებული და ა. შ.; დარჩენილი რიცხვები მარტივი რიცხვები იქნება. 80 წლის შესრულების შემდეგ, ამბობენ, ერატოსფენეს სიცოცხლე მობეზრდა და თავი მოიკლა სიმშილით. ძველი დროს პირველი ასტრონომი, რომელმაც თავის ასტრონომიულ გამოკვლევებს საფუძვლად დაუდო გეომეტრიის დებულებანი, იყო ჰიპპარქოსი; ის დაახლოებით 160—120 წლებში (ჩვ. ერამდე) კუნძულ როდოსზე აწარმოებდა დაკვირვებებს. საბერძნეთის ამ გენიალური ასტრონომის დიდ დამსახურებად ითვლება უმთავრესად ორი მისი აღმოჩენა 1. დღე ტოლის და ღამე ტოლის პრეცესია და, 2. მთვარის მოძრაობის გზა. ეს უკანასკნელი აღმოჩენა ჰიპარქოსს ანიჭებს განთქმული ეპიციკლური თეორიის ფუძემდებლის წოდებას. ჰიპარქოსის დროს ალექსანდრიაში ცხოვრობდა მექანიკოსი კტეზიბიოსი, რომლის მოწაფე— ჰერონი ძველი დროის დიდ მექანიკოსად ითვლებოდა არქიმედეს შემდეგ. მას ეკუთვნის სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა: ფართ. $\triangle ABC = \sqrt{p(a-p)(b-p)(c-p)}$. ჩვენი ერას დასაწყისში ალექსანდრიაში მოღვაწეობდნენ ასტრონომები მენელაოსი და პტოლომეოსი. მენელაოსმა, რომელიც ცხოვრობდა დაახლოებით 100 წელს (ჩვენი ერა) დაწერა შრომა „სფერული ასტრონომიის შესახებ“, რომელიც სამი წიგნისაგან შედგება და რომლებმაც ჩვენამდე მოაღწიეს; რაც შეეხება მის შრომას „ქორდების შესახებ“, (შედგარს 6 წიგნისაგან) ის დაკარგულია.

ისტორიკოსების დასკვნით ეს უკანასკნელი ალბად ტრიგონომეტრიული შრომა იყო; ის ალბად ტრიგონომეტრიული ცხრილის აგე-

ბულების შესავალი იყო, ვინაიდან თეონი ალექსანდრიელის ჩვენებით, ასეთი ცხრილი უკვე ჰიპპარქოსის მიერ იყო შედგენილი და ის იმით სარგებლობდა ასტრონომიულ გამოთვლებში. მართლაც, ჰიპპარქოსის შრომებში პოულობენ კუთხეთა სიდიდის განსაზღვრისათვის ქორდათა შეფარდებას; ეს მოვლენა საბერძნეთის მათემატიკაში ტრიგონომეტრიის პირველი ნაბიჯების მაჩვენებელია. მენელაოსი აგრეთვე ეგრეთ წოდებული ტრანსვერსალობის კანონის აღმომჩენია,

პტოლომეოსი

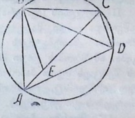
რომელზედაც შემდეგ პტოლომეოსმა თავისი სფერული ტრიგონომეტრია დააფუძნა. საბერძნეთის დიდი ასტრონომი პტოლომეოსი, მოღვაწეობდა ალექსანდრიაში დაახლოებით 125—160 წლებში (ჩვ. ერა). მისი შრომა „დიდი აგებულება“ (Μεγαλη συνταξις), რომელიც შედგება 13 წიგნისაგან, ცნობილია „ალმაგესტ“-ის სახელწოდებით; „ალმაგესტი“ მას არაბებმა უწოდეს, რომლებმაც ის დაახლოებით 827 წელს გადათარგმნეს არაბულ ენაზე. „ალმაგესტში“ გადმოცე

მულია მთლიანად ბერძენთა ასტრონომიული ცოდნანი და დიდი ნაწილი ამ შრომისა წარმოადგენს იმას, რაც პტოლომეოსის წინაპრებმა უკვე იცოდნენ.

„ალმაგესტი“ ლათინურ ენაზე იქმნა გადათარგმნილი და პირველად დაიბეჭდა 1541 წელს.

პტოლემეოსმა დასწერა აგრეთვე 8 წიგნისაგან შემდგარი გეოგრაფია, რომელიც შეიცავს რუკის შედგენის მეთოდსაც.

პტოლემეოსს ეკუთვნის წრეში ჩაწერილი ოთხკუთხედის ფართობზე თეორემაც, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ მოცემულია (ნახ. 49) წრეწირი, რომელშიც ჩაწერილია ნებისმიერი ABCD ოთკკუთხედი; გავავლოთ დიაგონალები AC და BD. უნდა დამტკიცდეს, რომ AC და BD გვერდებიანი მართკუთხედის ფართობი AB და DC გვერდებიანი მართკუთხედის ფართობისა და AD და BC გვერდებიან მართკუთხედის ფართობის ჯამის ტოლია, ანუ თანამედროვე მათემატიკური ნიშნებით ასე გამოიხატება:



$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

ნახ. 49.

პტოლემეოსი ამ თეორემას ასე ამტკიცებს:

ავაგოთ ABE კუთხე, რომელიც DBC კუთხის ტოლია. თუ მათ მიუმატეთ საერთო EBD კუთხე, მაშინ $\angle ABD = \angle EBC$; აგრეთვე გვაქვს რომ $\angle BDA = \angle BCE$, რადგან ისინი ერთ და იგივე რკალს ეყრდნობიან. მაშასადამე, ABD სამკუთხედის კუთხეები BCE სამკუთხედის კუთხეების ტოლი არიან; აქედან გამომდინარეობს რომ

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BC}{CE}; \text{ ანუ } BC \cdot AD = BD \cdot CE.$$

ABE და BCD სამკუთხედებს ტოლი კუთხეები აქვთ, ვინაიდან $\angle ABE = \angle DBE$; $\angle BAE = \angle BDC$; მაშასადამე

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}, \text{ ანუ } AB \cdot DC = BD \cdot AE.$$

მაგრამ დამტკიცებული იყო, რომ $BC \cdot AD = BD \cdot CE$;

უკანასკნელ ტოლობათა შეკრებით მივიღებთ:

$$AB\cdot DC+BC\cdot AD=BD\cdot AE+BD\cdot CE=BD(AE+EC)=BD\cdot AC.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

პტოლემეოსმა შეადგინა ქორდათა ცხრილი, რომელიც შეესაბამება სინუსების თანამედროვე ცხრილს. პტოლემეოსი ამტკიცებს აგრეთვე ისეთ თეორემას, რომელიც შეესაბამება ორი კუთხის ჯამის კოსინუსის თანამედროვე ფორმულას.

II საუკუნეში (ჩვენი ერა) ქალაქ გერასაში ცხოვრობდა შესანიშნავი მათემატიკოსი ნიკომახი. ჩვენამდე მოაღწია ორი წიგნისაგან შემდგარმა მისმა შრომამ სახელწოდებით „არითმეტიკის შესავალი". ეს შრომა შესანიშნავია იმით, რომ მასში გადმოცემულია ძველი ბერძნების ცოდნა არითმეტიკაში.

III საუკუნის (ჩვ. ერა) მეორე ნახევარში, ალექსანდრიაში მოღვაწეობდა დიდი მათემატიკოსი პაპოსი. ჩვენამდე მოაღწია მისმა შრომამ: „მათემატიკის კრებული", რომელიც 8 წიგნისაგან შედგება. ამ შრომას დიდი მნიშვნელობა აქვს არა მარტო იმიტომ, რომ ის შეიცავს თვით პაპოსის მეტად მნიშვნელოვან გამოკვლევებს, არამედ იმიტომაც, რომ ის შეიცავს ისეთი დიდი მათემატიკოსების შრომების კომენტარებს, რომლებსაც ჩვენამდე არ მოუღწევიათ.

IV წიგნში პაპოსი პითაგორის ცნობილ თეორემას ანზოგადოებს: მართკუთხოვანი სამკუთხედის კატეტებზე აგებული კვადრატების ფართობების ჯამი ჰიპოტენუზაზე აგებულ კვადრატის ფართობის ტოლია. ამ თეორემის განზოგადოებამდე, ჩვენის აზრით, შემდეგი გზით მივიდა:

ვთქვათ მოცემულია მართკუთხოვანი სამკუთხედი ABC (ნახ. 50) რომლის გვერდებზე ავაგოთ კვადრატები; ცნობილია, რომ

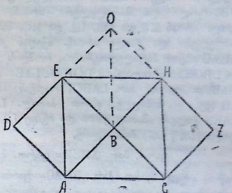
$$AC^2=AB^2+BC^2$$

გავაგრძელოთ DE და HZ გვერდები ერთმანეთის გადაკვეთამდე და მათი გადაკვეთის O წერტილი B-სთან შევაერთოდ; მაშინ $OB=AC$ და (1) ტოლობა შეიძლება ასე დაიწეროს

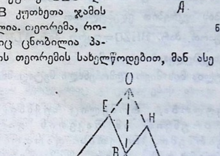
$$OB^2=AB^2+BC^2 \text{ ე. ი.}$$

ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე აგებული კვადრატების ფართობების ჯამი OB-ზე აგებული კვადრატების ფართობის ტოლია; ამის შემდეგ პაპოსმა აიღო ნებისმიერი ABC სამკუთხედი

(ნახ. 51)* და მის გვერდებზე ააგო ADEB, BHZC პარალელოგრამები; გააგრძელა DE და ZH ნაკვეთები მათი ერთმანეთის გადაკვეთამდე, მათი გადაკვეთის O წერტილი B წვეროსთან შეაერთა და გააგრძელა OB ნაკვეთი AC გვერდთან გადაკვეთამდე K წერტილში; შემდეგ ააგო ALMC პარალელოგრამი ისე, რომ მათი გვერდები ტოლია AC და OB-სი და მათ შორის კუთხე BAC და DOB კუთხეთა ჯამის ტოლია. თეორემა, რომელიც ცნობილია პაპოსის თეორემის სახელწოდებით, მან ასე ჩამოაყალიბა: ABDE და BCZH პარალელოგრამების ფართობების ჯამი AC და OB ნაკვეთებზე აგებულ პარალელოგრამის ფართობის ტოლია, თუ კი AC და OB ნაკვეთებს ისე დავალაგებთ, რომ მათ შორის კუთხე, BAC და DOB კუთხეთა ჯამის ტოლი იყოს.



ნახ. 50.



ნახ. 51.

ამ თეორემას პაპოსი შემდეგნაირად ამტკიცებს: A და C წერტილებზე გავავლოთ OK-ს პარალელურად

* Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, გვ. 79-80

AL და CM ნაკვეთები და გავავლოთ L და M წერტილებზე LM ნაკვეთი; რადგან ALOB პარალელოგრამია, ამიტომ AL და OB ტოლი და პარალელური არიან. ასევე პარალელური და ტოლი არიან MC და OB, LA და MC. მაშასადამე LM და AC პარალელური და ტოლი არიან. აქედან კი გამომდინარეობს რომ, ALMC ისეთი პარალელოგრამია, რომლის კუთხე LAC = ∠BAC + ∠DOB. მართლაც, ∠DOB = ∠LAB. ფართობი პარალელოგრ. DABE = ფართ. პარ. LABO, რადგან მათ აქვთ ერთი და იგივე AB ფუძე და სიმაღლე. ფართ. პარალ. LABO = ფართ. პარალ. LAKN რადგან ამათაც ერთი და იგივე LA ფუძე და სიმაღლე აქვთ ტოლი (LA ∥ OK) მაშასადამე,

ფართ. პარ. ADEB = ფართ. პარ. LAKN

ასევე ფართ. პარ. BHZC = ფართ. პარ. NKCM.

უკანასკნელი ორი ტოლობის შეკრებით ვღებულობთ

ფართ. პარ. ADEB + ფართ. პარ. BHZC = ფართ. პარ. ALMC.

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

VII წიგნში მოთავსებულია მის მიერ აღმოჩენილი მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა:

ი მ ს ხ ე უ ლ ი ს მ ო ც უ ლ ო ბ ა, რ ო მ ე ლ ი ც შ ე ქ მ ნ ი ლ ი ა ბ რ უ ყ ე ლ ი ნ ა კ ვ ე თ ი ს ბ რ უ ნ ვ ი თ ა მ ნ ა კ ვ ე თ ი ს გ ა რ ე თ მ დ ე ბ ა რ ე წ რ ფ ი ს გ ა რ შ ე მ ო, ნ ა კ ვ ე თ ი ს ფ ა რ თ ო ბ ი ს ა დ ა მ ი ს ი ს ი მ ძ ი მ ი ს ც ე ნ ტ რ ი ს მ ი ე რ შ ე მ ო წ ე რ ი ლ ი წ რ ე წ ი რ ი ს ს ი გ რ ძ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.

ეს თეორემა ხელმეორედ იქმნა აღმოჩენილი XVII საუკუნეში ჰულდენის მიერ, ამიტომ მას ახლა ჰულდენის თეორემა ეწოდება.

იმავე VII წიგნში პაპოსი სვამს ამოცანას, რომელმაც მიიპყრო დეკარტის ყურადღება და რომელიც მისი ანალიზური გეომეტრიის ერთ-ერთი გამოსავალი წერტილი შეიქნა. ეს ამოცანა, რომელიც ახლაც პაპოსის ამოცანის სახელწოდებითაა ცნობილი, შემდეგში მდგომარეობს:

ვიპოვოთ ისეთი მრუდი, რომლის რომელიმე წერტილის და ნებისმიერ რაოდენობით მოცემულ წრფეებამდე მანძილების ნაწარმოებთა შორის შეფარდებას რომელიღაც მუდმივი მნიშვნელობა ქონდეს.

საბერძნეთის დიდ ასტრონომთა ხანა პტოლომეოსით მთავრდება, ხოლო დიდ გეომეტრთა კი — აპოლონიუსით.

საბერძნეთის გეომეტრია, რომელიც როგორც დავინახეთ, ბრწყინვალედ განვითარდა და აყვავდა, აპოლონიუსის შემდეგ დაცემას განიცდის. მიზეზი ამისა თვით საბერძნეთის მათემატიკის სტრუქტურაშია. საბერძნეთის გეომეტრებმა, მისდევდნენ რა დამტკიცების ლოღიკურ სიმკაცრეს და აბსოლუტურ სიზუსტეს, განდევნეს მათემატიკის დარგიდან ის, რაც ამ პირობებს არ აკმაყოფილებდა; ე. ი. უარყოფილ იქნა წმინდა გეომეტრების მიერ მიახლოვებითი გამოთვლა, როგორც არა მეცნიერული. ცხადია, რომ მათემატიკის პრაქტიკაში გამოყენება დამყარებულია მიახლოვებით გამოთვლაზე და საბერძნეთის მათემატიკოსებმა კი სათანადოდ ვერ შეაფასეს გამოყენებითი მათემატიკის მნიშვნელობა. გეომეტრია, რომელიც წარმოიშვა ეკონომიურ მოთხოვნილებათა ნიადაგზე (მიწის გაზომვა, მშენებლობის წარმოება და სხვა) საბერძნეთის გეომეტრებმა, მოსწყვიტეს მის პრაქტიკულად გამოყენების, მის მასაზრდოებელს და განვითარების სტიმულის მიმცემ ნიადაგს; ეს კი შეიქნა გეომეტრიის დაცემის მთავარი მიზეზი. მაგრამ ასტრონომიაშიც მათემატიკის გამოყენებამ დიდი მათემატიკოსების მოღვაწეობის პერიოდის შემდეგშიაც განვითარების ახალი ბიძგი მისცა მათემატიკურ მეცნიერებას, სახელდობრ, არითმეტიკას. უფრო გვიან საბერძნეთში ჩვენ ვხედავთ დიდ მკვლევარს არითმეტიკაში და ალგებრის გამომგონებელს,—დიოფანტეს. ძველი ბერძნები არითმეტიკას უწოდებდნენ რიცხვთა თეორიას, ხოლო გამოყენებით არითმეტიკას ანუ თვლას, — ლოგისტიკას უწოდებდნენ. მათი რიცხვითი ნომენკლატურა ათობით სისტემაზე იყო დამყარებული და ნებისმიერ დიდი რიცხვების დასათვლელად, ეგრეთ წოდებულ აბაკუსს (დასათვლელ დაფას) ხმარობდნენ; ამ დაფაზე გავლებული იყო რამდენიმე ვერტიკალური წირი, რომლებზედაც ქვებს ალაგებდნენ; პირველ წირზე მოთავსებული თითოეული ქვა ერთეულს გამოსახავდა, მეორეზე — ათეულს, მესამეზე — ასეულს და ასე შემდეგ. აბაკუსის ხმარება მეტად გავრცელებული იყო აღმოსავლეთის ხალხებში და რომაელებში; ბერძნებმა ეს იარაღი აღმოსავლეთიდან გადმოიღეს. ერთიდან ათამდე, უკანასკნელის ჩათვლით, თითოეული რიცხვისათვის ბერძნებს შემოღებული ჰქონდათ საკუთარი სახელწოდება, შემდეგ კი სახელწოდება ჰქონდათ მხოლოდ ასის, ათასის და ათი-ათასისათვის, რომელსაც

მირიადას უწოდებდნენ. ათი ათასის შემდეგ კი ითვლიდნენ ასე: ათი მირიადა, ასი მირიადა, მირიადათა მირიადა (ასი მილიონი). რიცხვების აღსანიშნავად ბერძნები ანბანის ასოებს ხმარობდნენ; ერთეულების თითოეული მთელი რიცხვისათვის; ათეულისა და ასეულისათვის საკუთარი ასოები ჰქონდათ შემოღებული:

1 α, 2 β, 3 γ, 4 δ, 5 ε, 6 ς, 7 ζ, 8 η, 9 ϟ,

10 ι, 20 κ, 30 λ, 40 μ, 50 ν, 60 ξ, 70 ο, 80 π, 90 , ,

100 ρ, 200 σ, 300 τ, 400 υ, 500 φ, 600 χ, 700 ψ, 800 ω, 900 ϡ.

დანარჩენ რიცხვებს, რომლებიც აღნიშნულ რიცხვთა შუალედში იმყოფებიან, შეკრების ხერხით გამოსახავდნენ, მაგალითად, რიცხვი 537 ასე გამოისახებოდა: φλζ; ჰორიზონტალურ ხაზს ავლებდნენ ზევით იმისათვის, რომ რიცხვი გაენსხვავებიათ სიტყვისაგან. რიცხვებს 1000, 2000, 3000, 9000, აღნიშნავდნენ პირველი ათი რიცხვის აღსანიშნავ ასოებით, რომლებსაც მარცხნიდან ქვემოთ მცირე ხაზს უსვამდნენ, მაგალითად 1000 ͵α; 2000 ͵β, 3000 ͵γ და ასე შემდეგ. 10000-ს, ანუ მირიადას, აღნიშნავდნენ $\overset{\alpha}{M}$-თი, ორ მირიადას ანუ 20000-ს $\overset{\beta}{M}$-თი და ასე შემდეგ 9999 მირიადამდე, რომელსაც ჩვენ ახლა ვწერთ — 99990000 თუ ციფრთა რიგში ცარიელი ადგილი შეხვდებოდათ, ე. ი. ჩვენი 0, ბერძნები ცარიელ ადგილს შეცვლიდნენ ხოლმე სიტყვა „Οὐδὲν"-ის (არაფერი) პირველი O ასოთი; მაგალითად $0^0\ 24'\ 16''$-ს პტოლომეოსი ასე სწერდა: O^0, κδ′. ις″ *). წილადებს ბერძნები წერდნენ, წილადების ჩვენ აღნიშვნასთან შედარებით, შექცეულად, ე. ი., მრიცხველს მნიშვნელის ქვეშ სწერდნენ, მაგალითად: $\frac{\eta\delta}{\lambda\beta} = \frac{32}{84}$; ბერძნებმა იცოდნენ შემდეგი პროპორციები: არითმეტიკული, გეომეტრიული და ჰარმონიული; ჰარმონიულ პროპორციას კი უწოდებდნენ ისეთს, რომელშიაც პირველ წევრსა და პირველ საშუალოს შორის სხვაობა ისე შეეფარდება მეორე წევრსა და მეორე საშუალოს შორის სხვაობას, როგორც პირველი წევრი მეოთხეს შეეფარდება, ე. ი. $a:b=c:d$

---

* M. Delambre, De l'arithmetique des grecs; გვ. 11. 1807 წ.

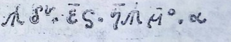
პროპორცია ჰარმონიულია თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d}.$$

ბერძნები აწარმოებდნენ რიცხვების შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას, გაყოფას და მთელ რიცხვებიდან კვადრატული ფესვის ამოღებას; თუმცა ამ ოპერაციების აღსანიშნავად არავითარი ნიშანი შემოღებული არ ჰქონდათ. კვადრატული ფესვის ამოღებას აწარმოებდნენ თითქმის ისე, როგორც ახლა, თუმცა ამ მოქმედებისათვის არც ერთ ბერძენ მათემატიკოსს არავითარი წესი არ გამოუმუშავებია. უარყოფით სიდიდეებზე მათ წარმოდგენა არ ჰქონდათ. ასტრონომიულ გამოთვლებისათვის შემოღებული ჰქონდათ სამოცობითი წილადები; ამიტომ ისინი წრეწირს ყოფდნენ 360 ტოლ ნაწილებად ანუ გრადუსებად, გრადუსებს კი ყოფდნენ 60 ტოლ ნაწილებად ანუ წუთებად და ასე შემდეგ.

საბერძნეთის არითმეტიკის მთელ შინაარს ჩვენ ვიცნობთ დიოფანტეს შრომიდან დიოფანტე მოღვაწეობდა III საუკუნეში (ჩვენი ერა) ალექსანდრიაში. მან დაწერა შრომა სახელწოდებით „არითმეტიკის პრობლემები“, რომელიც 13 წიგნისაგან შედგება; აქედან ჩვენამდე მხოლოდ პირველ 6 წიგნმა მოაღწია.

დიოფანტე რიცხვის აღსანიშნავ ასოს არასოდეს მარტო არ წერდა, არამედ მას წინ უწერდა ნიშანს μ^0, სადაც μ არის პირველი ასო ერთეულის ბერძნული სახელწოდებისა. ის რიცხვ 10-ს ასე წერდა: $\mu^0\iota$ (10 ერთეული). დიოფანტეს შრომებს დიდი მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე იმიტომ, რომ მათი საშუალებით ჩვენ ვეცნობით ბერძნების ცოდნას ალგებრაში; მართალია, მათ არ იცოდნენ ის ალგებრა, რომელშიაც ცნობილი სიდიდეები ასოებითაა შეცვლილი, მაგრამ მათ იცოდნენ ისეთი ალგებრა, სადაც უცნობი სიდიდეები ნებისმიერ შერჩეულ ასოებით შეიცვლებიან. დიოფანტეს შრომა შეიცავს უმთავრესად ორგვარ საკითხებს: ერთს, რომლებიც სწყდებიან განსაზღვრულ განტოლებათა საშუალებით და მეორეს კი — განუზღვრელ განტოლების საშუალებით. უცნობს დიოფანტე აღნიშნავს ς ნიშნით ზემოდან მძიმეთი (ς'). რიცხვის კვადრატს აღნიშნავს Δ^{υ}-თი, კუბს — K^{υ}-თი, მეოთხე ხარისხს — $\Delta\Delta^{\upsilon}$-თი; მიმატებას ის არავითარი ნიშნით არ გამოსახავს; გამოკლებას კი გამოსახავს $\pitchfork$ — ნიშნით. დიოფანტე x^3-5x^2+8x-1 მრავალწევრს შემდეგნაირად წერს:



ტოლობის აღსანიშნავად ბერძნებს არავითარი ნიშანი არ ჰქონდათ და ამ ცნებას სიტყვიერად გადმოცემდნენ. დიოფანტემ იცოდა განტოლებათა გარდაქმნა წევრების ერთ მხარედან მეორეში გადატანის საშუალებით. დიოფანტეს შრომებში დიდი ყურადღების ღირსია განუზღვრელ ამოცანათა გადაწყვეტა, რომელთათვის ის რაციონალურ ამოხსნებს პოულობს. განვიხილოთ, მაგალითისათვის, დიოფანტეს IV წიგნში მოთავსებული მე-27-ე ამოცანა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ვიპოვოთ ისეთი ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი, მიმატებული ერთერთს ამ ორი რიცხვთაგანს, კუბი იყოს. თუ თანამედროვე ნიშნებს ვიხმართ და სავსებით დავიცავთ დიოფანტეს მსჯელობას, ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: ავიღოთ რომელიმე უცნობი სიდიდე და გავამრავლოთ ის რომელიმე კუბურ რიცხვზე — მაგალითად 8-ზე; გვექნება $8x$, რომელიც ჩავთვალოთ მოსაძებნ პირველ რიცხვად; მეორე რიცხვი იქნება x^2-1, ვინაიდან მათი ორივესი ნამრავლი $8x^3-8x$ არის, რომელიც მიმატებული პირველს, ე. ი. $8x$-ს კუბური რიცხვს ($8x^3$-ს) მოგვცემს.

მაგრამ $8x^3-8x$-ის და მეორე რიცხვის x^3-1-ის ჯამი $8x^3+x^2-8x-1$ კუბური რიცხვი უნდა იყოს; ამისათვის ავიღოთ ტოლობა $(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$; და უკანასკნელი ორი გამოსახვანი ერთმანეთს გაუტოლოთ:

$$8x^3+x^2-8x-1=8x^3-12x^2+6x-1$$

ანუ აქედან გვექნება:

$$13x=14; \quad x=\frac{14}{13};$$

ამრიგად პირველი რიცხვია $8 \cdot \frac{14}{13}=\frac{112}{13}$; და მეორე რიცხვი კი არის

$$\left(\frac{14}{13}\right)^2-1=\frac{27}{169}.$$

V წიგნი მთელ რიგი არითმეტიკული ხასიათის ეპიგრამებს (ამოცანებს) შეიცავს ზოგიერთი მათემატიკოსის ასაკის გამოცნობის შესახებ. ამიტომ ძველი საბერძნეთის ერთერთ პოეტმა დიოფანტეს

საფლავზე ლექსად დააწერა შემდეგი შინაარსის ამოცანა: დიოფანტეს სიცოცხლის ერთი მეექვსედი ბავშვობის პერიოდი იყო, ერთი მეთორმეტედი ახალგაზრდობისა და ერთი მეშვიდედი უოჯახობის პერიოდი, რომლის შემდეგ ცოლი შეირთო და ხუთი წლის შემდეგ ვაჟი შეეძინა; ის ვაჟი გარდაიცვალა, როდესაც გახდა იმდენ წელთა ნახევრის ასაკისა, რამდენ წელსაც იცხოვრა მამამ; მამამ კი შვილის სიკვდილის შემდეგ ოთხი წელი იცოცხლა; გამოიცანით თუ რამდენი წელი უცხოვრია დიოფანტეს. თუ x-ით აღვნიშნეთ დიოფანტეს სიცოცხლის წელთა რიცხვი, გვექნება

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

საიდანაც ჩანს რომ დიოფანტე 84 წლის ასაკის გარდაიცვალა.

დიოფანტეს შრომებში ჩვენ ვხვდებით რაღაც ახალს არითმეტიკაში, რომელიც გაცილებით უფრო საინტერესოა, ვიდრე მისი წინაპრების გამოკვლევები. მართალია, დიოფანტეს შრომის თეორიული საფუძველი და გამოკვლევათა მიზანი იგივეა, რაც ევკლიდესი, ე. ი. ირაციონალურ სიდიდეთა თავიდან აცილება, მაგრამ დიოფანტეს მისი მეთოდი გაცილებით უფრო მეტ საშუალებას აძლევს ისეთი განზღვრული ამოცანების შედგენისა, რომლებიც სხვადასხვანაირად დაიყვანებიან რაციონალურ ამოხსნებიან განტოლებებამდე; იმავე დროს მისი მეთოდის საშუალებით დიოფანტემ წამოაყენა მთელი რიგი განუზღვრელი განტოლებანი, რომელთათვის ყოველთვის რაციონალური ამოხსნა უნდა მოიძებნოს. დიოფანტეს მეთოდსა და მისი წინაპრების მეთოდს შორის მთავარი განსხვავება მდგომარეობს შემდეგში: დიოფანტე მუშაობდა სპეციალურ რიცხვითი ამოცანებზე, და მათი გადაწყვეტისათვის მხოლოდ რიცხვითი ოპერაციებით სარგებლობდა; ის ზოგად თეორემებს არასოდეს არ აწესებდა. მათემატიკის განვითარებაში დიოფანტეს შრომებმა დიდი როლი ითამაშა იმის წყალობით, რომ პირველი და მეორე ხარისხის განსაზღვრული განტოლებანი დიოფანტეს მიერ რიცხვითი წესით იქნენ გამოსახული; ისინი გახდნენ გაცილებით უფრო ხელმისაწვდომი, ვიდრე იმ აბსტრაქტულ გეომეტრიული სახით, როგორც ეს ევკლიდეს აქვს გადმოცემული. ამიტომ დიოფანტეს შრომებმა ხელი შეუწყო საბერძნეთის ალგებრის არაბების მიერ შესწავლას, რომელთა წყალობით მეცნიერებათა აღორძინების ხანაში ალგებრა ევროპა-

ში ვრცელდება. არაბეთის მათემატიკოსებმა დაიწყეს ალგებრაში მუშაობა დიოფანტეს მეთოდით. ევროპაში დიოფანტეს შრომების შესწავლით (უმთავრესად ფერმას მიერ) რიცხვთა თეორიის დარგში გამოკვლევათათვის აყვავების ახალი ხანა იწყება.

დიოფანტეს შრომების კომენტატორი იყო ჰიპატია, საბერძნეთის ცნობილი მათემატიკოსი, თეონ ალექსანდრიელის ქალიშვილი. ჰიპატია ცხოვრობდა IV საუკუნის უკანასკნელ და V საუკუნის პირველ წლებში; ის იყო მეტად განათლებული ქალი და დიდი მცოდნე არა მარტო მათემატიკისა, არამედ ფილოსოფიისაც; ის უკეთებს კომენტარებს აგრეთვე აპოლონიუსის შრომებსაც. ჰიპატია ქრისტიანებმა ვერაგულად მოკლეს წარმართებთან ბრძოლაში.

V (ჩვენი ერა) საუკუნეში ათინაში ცხოვრობდა ფილოსოფოსი პროკლოსი, რომელიც ევკლიდეს პირველი წიგნის კომენტატორია.

VI საუკუნეში ცხოვრობდა ევტოკიოსი, არქიმედეს და აპოლონიუსის შრომების კომენტატორი.

დასასრულ უნდა აღინიშნოს, რომ საბერძნეთის ზოგიერთი მათემატიკოსების შრომებმა ჩვენამდე არ მოაღწია; მთავარი მიზეზი ამისა იმაში მდგომარეობს, რომ მათემატიკოსების დიდი ნაწილი ალექსანდრიაში მოღვაწეობდნენ და მათი შრომებიც ალექსანდრიის დიდ ბიბლიოთეკაში ინახებოდა; ეს ბიბლიოთეკა კი ჯერ კიდევ 391 წელს (ჩვ. ერა) ნაწილობრივად ქრისტიანებმა გაანადგურეს, როგორც წარმართული სარწმუნოების ხალხის ნაწერები და ქრისტიანული სარწმუნოების საწინააღმდეგო აზრების შემცველი. შემდეგ კი, 640 წელს, ალექსანდრია არაბებმა დაიპყრეს; როგორც ამბობენ ალექსანდრიის ბიბლიოთეკა დასწვეს არაბეთის მეფე ომარის, ბრძანებით, რომელმაც თურმე თქვა: „თუ იმ წიგნებში ის სწერია რაც ყურანში, მაშინ ისინი ზედმეტია, და თუ სხვა რამე სწერია, მაშინ ისინი მავნე არიან; ორივე შემთხვევაში ისინი უნდა დაიწვას“.

საბერძნეთის მათემატიკის მიმოხილვის დასასრულ უნდა აღვნიშნოთ რომ, ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა საფუძველი ჩაუყარეს იმ უდიდეს სამეცნიერო შენობას, რომელიც შემდეგ, ახალი დროში აგებული იქნა XVI და XVII საუკუნეებში. მათემატიკა საკმაოდ ხანგრძლივი შეჩერების შემდეგ, იმავე საფუძვლებს დაუბრუნდა; შეიძლება უფრო მეტიც ითქვას: არამც თუ XVI—XVII საუკუნეებში, არამედ XIX საუკუნეშიც იმისათვის, რომ არჩეულ არითმეტი-

ქულ გზით მათემატიკას მიეღწია იგივე უეჭველობისათვის, რასაც ბერძნებმა გეომეტრიაში მიაღწიეს და ამით უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის საფუძვლები უნაკლო გაეხადა, იძულებული გახდა დაბრუნებოდა იმ ლოღიკურ პრინციპებს, რომლებსაც ბერძნები დიდად აფასებდნენ და რომლებიც მათ უაღრესად განავითარეს.

ინდოელების შემდეგ, ყველა დანარჩენ ხალხებზე ადრე, საბერძნეთის მათემატიკურ კულტურას კავკასიის ხალხები ეცნობიან; ამას ადასტურებს VII საუკუნეში მცხოვრები სომეხი ანანია შირაქელის ამოცანათა კრებული,* რომლის ნაწილმა ჩვენამდე მოაღწია. ეს კრებული შედგება 24 ამოცანისაგან, რომლებიც თითქმის ყველა ერთი და იგივე ტიპის არიან; მათ აშკარად ეტყობათ დიოფანტეს არითმეტიკის გავლენა; ვინაიდან ისინი შედგენილია იმავე წესით, რა წესითაც შედგენილია დიოფანტეს მე-5-ე წიგნში მოთავსებული არითმეტიკული ამოცანები; მაგალითად, შირაქელის კრებულში მოთავსებული მე-12-ე ამოცანა ასეთია: მე მოვისურვე ნავის აგება და მქონდა სულ რაღაც სამი დრამი და მეტი არაფერი არ მქონდა; და მე უთხარი ჩემს ახლობლებს „მომეცით თითოეულმა ცოტა ფული რომ ავაგო ნავი“ ერთმა მომცა ღირებულების მესამედი, ერთმა მეოთხედი, ერთმა — მეექვსედი, ერთმა — მეშვიდედი და ერთმაც ოცდამერვედი და მე კი გამოვართვი მათ და ნავი ავაგე. მაშ, გამოიცანით სულ რამდენი დრამი ღირებულა ნავი“.

თუ x-ით აღვნიშნეთ ნავის ღირებულება, გვექნება

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{7}x+\frac{1}{28}x+3=x; \quad x=42$$

მე-24 ამოცანა გადმოღებულია ბერძნულიდან. იმ ამოცანის პასუხში $\frac{6}{11}$-ის ნაცვლად ნათქვამია:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{22};$$

ეს იმით აიხსნება, რომ ძველი ბერძნები, ისე როგორც ეგვიპტელები, ერთზე მეტ მრიცხველიან წილადს, ჩვეულებრივად წარმოადგენენ ისეთი წილადების ჯამის სახით, რომლების მრიცხველი ერთეულია.

* თარგმნილი და გამოცემული პროფ. ივ. ორბელის მიერ 1918 წელს.

თავი V

რომაელების მათემატიკა

§ 1. **რომაელების არითმეტიკა.** საბერძნეთის მათემატიკური კულტურა რომში თითქმის არ გავრცელებულა, თუ არ მივიღებთ მხედველობაში რომის მწერალ ბოეციუსის (გარდაიცვალა 524 წ.) ნაწერს არითმეტიკაში (De Institutione Arithmetica), რომელიც არსებითად ნიკომახის არითმეტიკას თარგმანს წარმოადგენს. რომაელები სრულებით არ იცნობდნენ ევკლიდეს, არქიმედეს და აპოლონიუსის შრომებს და ის ცოდნა, რომელიც მათ გააჩნდათ პრაქტიკულ გეომეტრიაში, ისტორიკოსების აზრით ეტრუსებისაგან გადმოღებულ ცოდნათა განვითარებაა. რიცხვთა რომაული აღნიშვნებიც აგრეთვე ეტრუსული წარმოშობისაა. რომაელები 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 რიცხვებს შესაბამისად აღნიშნავდნენ ასოებით: I, V, X, L, C, D, M; დანარჩენი რიცხვების აღნიშვნას აწარმოებდნენ ამავე ასოების საშუალებით შეკრება-გამოკლების და გამრავლების წესით; დიდი რიცხვის მარჯვნივ დასმული მცირე რიცხვის ნიშანი იმას ნიშნავს, რომ პირველი რიცხვი უნდა მიემატოს უკანასკნელ რიცხვს; მაგალითად, XV = 15; მცირე რიცხვის ნიშანი კი დიდი რიცხვის ნიშნის მარცხნივ დასმული ნიშნავს იმას, რომ მცირე რიცხვი დიდ რიცხვს უნდა გამოაკლდეს, მაგალითად: XL = 40. მაგრამ ეს უკანასკნელი წესი M ნიშანზე არ ვრცელდება, ვინაიდან M ნიშნის მარცხნივ მცირე რიცხვის ნიშანი იმას ნიშნავს, რომ M უნდა გამრავლდეს იმ მცირე რიცხვზე, მაგალითად: XM = 10000, CM = 100000; ათასების აღსანიშნავად აგრეთვე ხმარობდნენ ნიშანთა ჯგუფის ზევით გავლებულ ჰორიზონტალურ ხაზს; მაგალითად:

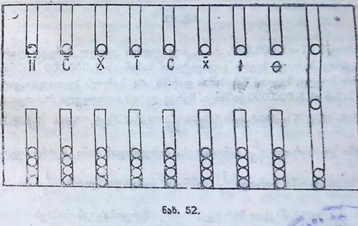
$$\overline{\mathrm{XXX}} = 30000, \quad \overline{\mathrm{C}} = 100000, \quad \overline{\mathrm{M}} = 1000\,000$$

რომაელები თორმეტობითი წილადებს ხმარობდნენ; ეს იმით აიხსნება, რომ წონა და ზომათა საკითხების გადასაწყვეტად უფრო ხშირად ერთეულის დაყოფა ხდება 2, 3, 4, 6, ტოლ ნაწი-

ლად და თორმეტობითი წილადების საშუალებით ეს ნაწილები უფრო ადვილად გამოისახებიან მეთორმეტე წილებში; ეს ნაწილები წარმოადგენენ მთელის $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$; ათობით წილებში კი ეს ნაწილები არიან

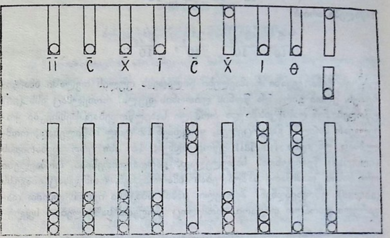
$$\frac{5}{10},\ \frac{3^1/_3}{10},\ \frac{2^1/_2}{10},\ \frac{1^2/_3}{10}.$$

უმეტეს შემთხვევაში რომაელები წილადებს ფულის თვლაში ხმარობდნენ. ერთი გირვანქა წონის ლითონის ფულს, რომელსაც ასს (as) უწოდებდნენ დასაწყისში და რომელი სახელწოდებაც შემდეგში ყოველგვარ მთელზე გაავრცელეს, ყოფდნენ 12 ტოლ ნაწილებად, რომლებსაც უნციებს (uncial) უწოდებდნენ; 16 ასი ერთ დენარიუსს (denarius) შეადგენდა. სათვლელად, გარდა თითებისა, რომაელები ორი სახის დამხმარე საშუალებას ხმარობდნენ, რომელსაც აბაკუსს (abacus) უწოდებდნენ. პირველი სახის აბაკუსი იყო მტვერით დაფარული უბრალო ფიცარი, რომელიც წრფეთა საშუალებით სვეტებად იყო დაყოფილი. მეორე სახის აბაკუსი წარმოადგენდა ლითონის დაფას მოგრძო ღეროებით, რომლებშიც მოთავსებული იყო თავისუფლად მოძრავი ბირთვები (იხ. ნახ. 52); რომაული რიცხვები



ნახ. 52.

გვიჩვენებენ თითოეული ბირთვის მნიშვნელობას შესაბამის ქვედა ღარში, კი მცირე ზედა ღარში ბირთვი ხუთჯერ მეტს ნიშნავს. ასეთი აბაკუსის საშუალებით შეიძლებოდა ყველა რიცხვის გამოსახვა 1-დან 9,999.999-მდე და აგრეთვე ზოგიერთი წილადებისაც. როგორც ჩანს



ნახ. 53.

ნახაზიდან 11=1.000.000, ე. ი. თუ უფრო გრძელ პირველ ღარში მარცხნივ ბირთვს ზევით გადავიტანთ მაშინ ის 1.000.000 ნიშნავს; უფრო მოკლე, ზევითა შესაბამის ღარში თუ ბირთვს ზევით გადავიტანთ, მაშინ ის 5.000.000 ნიშნავს. მერვე ღარის თითოეული ბირთვთაგანი, მარცხნიდან დაწყებული ქვევით $\frac{1}{12}$ გამოსახავს, ზედა შესაბამის ღარში კი ბირთვი $\frac{6}{12}$ გამოსახავს. მარჯვნიდან სამი მცირე სვეტების ზედა ღარში ბირთვი $\frac{1}{24}$ ნიშნავს, საშუალო ღარში $\frac{1}{48}$. და ქვედაში $\frac{1}{72}$. მე-52 ნაკვთი ბირთვების მდგომარეობას გამოსახავს ოპერაციების დაწყებამდე, და მე-53 ნაკვთი კი 852 $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ გამოსახავს.

ამ ნახაზიდან ადვილად შევამჩნევთ რომ მნიშვნელობა აქვს C(=500)-ს ზევით მხოლოდ ერთ ბირთვს და C(=300)-ს ქვევით — სამ ბირთვს, ერთ ბირთვს X(=50) ზევით, ორ ბირთვს I(=2)-ს ქვევით, 4 ბირთვს წერტილის ქვევით $\left(=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\right)$ და დასასრულს ერთ ბირთვს მცირე ღარში ზევიდან მარჯვნივ, რომელიც $\frac{1}{24}$ ნიშნავს. ახლა დავუშვათ, რომ შესაკრებია ორი რიცხვი $10318\ \frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{48}$ და $852\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}$. თვლის დაწყება ნებისმიერად შეიძლება უმცირესი ანუ უდიდესი რიგის ერთეულებისაგან; სიძნელეს წარმოადგენს წილადების შეკრება. წერტილის ზევით ბირთვი, რომელიც $\frac{1}{48}$ ნიშნავს და წერტილის ზევით სამი ბირთვი გადაიტანება ზევით შესაბამის ღარში და გვიჩვენებს ჯამს:

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{48}=\frac{3}{4}\,\frac{1}{48}.$$

8-ს მიუმატებთ რა 2-ს, 10 ვღებულობთ და 2 ბირთვს, რომელიც 1-ს ქვევით ღარის ზევით იმყოფება, ქვევით გადავიტანთ (ნახ. 52) და შემდეგ კი X-ის ქვედა ღარზე ბირთვს ზევით გადავიტანთ; იმავე ღარზე მეორე ბირთვს ზევით გადავიტანთ, რათა ამით X-ი მივუმატოთ 800-ს; რომ 300 მივუმატოთ ამისათვის C-ს ზევით მყოფი ღარში ჩამოუშვებთ ერთ ბირთვს და ორ ბირთვს კი შესაბამის ქვედა ღარში ჩამოვუშვებთ, დავტოვებთ რა მასში ზევით მხოლოდ ერთ ბირთვს; I ქვევით ღარში ზევით გადავიტანთ ერთ ბირთვს. დასასრულ 10.000 რომ მიუმატოთ, X-ის ქვევით მყოფ ქვედა ღარზე ზევით გადავიტანთ ერთ ბირთვს და მივიღებთ ჯამს — $11170\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{23}$.

გამოკლებასაც ასეთივე წესით აწარმოებდნენ. გამრავლების მათი წესის გასაშუქებლად დავუშვათ რომ $25\,{}^1/_3$ უნდა გადამრავლდეს $33\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}$-ზე; აბაკუსი ამ შემთხვევაში მნიშვნელობებს უჩვენებს:

$$600(=20\cdot 30),\quad 760(=600+20\cdot 8);\quad 770\left(=760+\frac{1}{2}\,20\right),$$

$$770\frac{10}{12}\left(=770+\frac{1}{24}\cdot 20\right);\ 920\frac{10}{12}\left(=770\frac{10}{12}+30\cdot 5\right);$$

$$960\frac{10}{12}\left(=920\frac{10}{12}+8\cdot 5\right);\ 963\frac{1}{3}\left(=960\frac{10}{12}+\frac{1}{2}\cdot 5\right);$$

$$963\frac{1}{2}\frac{1}{24}\left(=963\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\cdot 5\right);\ 973\frac{1}{2}\frac{1}{24}\left(=963\frac{1}{2}\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\cdot 30\right);$$

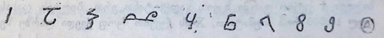
$$976\frac{2}{12}\frac{1}{24}\left(=973\frac{1}{2}\frac{1}{24}+8\frac{1}{3}\right);\ 976\frac{1}{3}\frac{1}{24}$$

$$\left(=976\frac{2}{12}\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right);$$

$$976\frac{1}{3}\frac{1}{24}\frac{1}{72}\left(=976\frac{1}{3}\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{24}\right).$$

აბაკუს იყენებდნენ აგრეთვე იმისათვის, რომ ეჩვენებიათ ნაშთი, მიღებული გამყოფის გამოკლებით.

§ 2. რომაელების გეომეტრია. რომაელების მათემატიკოსებში ყურადღების ღირსია ბოეციუსი, რომელმაც გარდა ზემოხსენებულ არითმეტიკისა აგრეთვე გეომეტრია დასწერა. ბოეციუსის წიგნში მოთავსებულია 1-დან 9-მდე რიცხვთა შემდეგი აღნიშვნები:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ეს ციფრები ინდური წარმოშობის არიან და მათგან წარმოიშვა ჩვენი ციფრები, რომელთაც შეცდომით არაბულს უწოდებდნენ. რადგანაც ბოეციუსის ციფრები ძალიან გვანან დასავლეთის არაბების ციფრებს.

რომში მიწათმზომელობა დიდ პატივცემაში იყო და გეომეტრიას იმდენად სწავლობდნენ და იცოდნენ, რამდენადაც ამ საქმეში მარტივ გამოყენებას პოულობდა. რომაელების გეომეტრია მოკლებული იყო დამტკიცებებს და ვიწრო პრაქტიკულ ხასიათს ატარებდა; წესები გამოყავდათ რიცხვთა მაგალითებზე და რომის მიწათ მზომელები (agrimensores) მათი საშუალებით მხოლოდ და მხოლოთმარტივი ნაკვეთების ფართობის გამოთვლას აწარმოებდნენ. სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელად ისინი ხმარობდნენ აგრეთვე ჰერონის ფორმულას.

თავი VI

ინდოელები

ბერძნების შემდეგ მათემატიკურ მეცნიერების განვითარებაში დიდი წვლილი შეიტანეს ინდოელებმა. როგორც ვთქვით, ბერძენ მათემატიკოსებმა გეომეტრიის განვითარებაში გენიალობა გამოიჩინეს, მაგრამ ინდოელი მათემატიკოსებიც არანაკლებ გენიოსებად ჩაითვლებიან მხოლოდ არა გეომეტრიაში, არამედ არითმეტიკა და ალგებრაში. ინდოელები დამტკიცებაზე სრულებით არ ზრუნავდნენ, მაგრამ რიცხვთა მეცნიერებაში, ალგებრაში, მათ გაცილებით უფრო მეტ შედეგებს მიაღწიეს ვიდრე ბერძნებმა, რომლებიც დამტკიცებას არსებითი მნიშვნელობას აძლევდნენ. ინდოელები უმთავრესად ასტრონომიაში მუშაობდნენ და მათემატიკა მათთვის ამ დარგში გამოყენებითი ხასიათისა იყო, რის გამო მათ უფრო განავითარეს მათემატიკის ის დარგები, რომლებიც უშუალოდ გამოთვლებს ეყრდნობიან; ამით აიხსნება ის მდგომარეობა, რომ ინდოელები, მიუხედავად იმისა, რომ გეომეტრიაში ბერძნების იქით არ წასულან, ტრიგონომეტრიაში კი მეტად მნიშვნელოვან გამოკვლევათა ავტორები არიან. ინდოელების მათემატიკური შრომები უმთავრესად მათ ასტრონომიულ ტრაქტატებშია, სადაც ეს შრომები მოთავსებულია ან განყოფილების სახით, ან და ცალკე შენიშვნის სახით. მათემატიკური ხასიათის ცნობებს შეიცავს IV ან V საუკუნის (ჩვენი ერა) წიგნი „სურია სიდჰანტა“, რომლის ავტორი უცნობია. ინდოელების დიდი ასტრონომები და მათემატიკოსებია.

1) არიაბჰატა, რომელიც დაიბადა 476 წელს პატალიპუტრაში; მისი ასტრონომიული ტრაქტატის ერთი თავი მიძღვნილია მათემატიკისადმი.

2) ბრაჰმაგუპტა, რომელიც 598 წელს (ჩვენი ერა) დაიბადა, მისი დიდი ასტრონომიული ტრაქტატის მე-12 და მე-13 თავები მათემატიკური შინაარსისაა.

3) ბჰასკარა, რომელიც 1114 წელს დაიბადა. მისი ასტრონომიული შრომის — „სიდჰანტას რომანის“ ორი თავი სახელწოდებით, „ლილავათი“ (ანუ ლამაზი ქალი) და „ვიჯაგანატა“ (ანუ ფესვების ამოღება), მიძღვნილია არითმეტიკას და ალგებრისადმი.

4. კრიდჰარა.

§ 1. **ინდოელების არითმეტიკა.** ინდოელების უდიდეს დამსახურებას წარმოადგენს ნულის ნიშნისა და იმ რიცხვითი აღნიშვნების შემოღება, რომელშიც ყოველი ციფრის მნიშვნელობა მისი ადგილმდებარეობით განისაზღვრება და რომელსაც პოზიციური სისტემა ეწოდება. წერილობით ნუმერაციაში ნულისა და პოზიციური სისტემის შემოღებამ გაადვილა რიცხვებზე ოპერაციების წარმოება. მიმატებას და გამრავლებას ინდოელები აწარმოებდნენ მარცხნიდან მარჯვნივ; მაგალითად, 485 და 549-ის შეკრებას ისინი შემდეგნაირად მოახდენდნენ: $4+5=9$, $8+4=12$; რადგან ცხრა ათით უნდა შეცვლილიყო, ამიტომ 9-ს წაშლიდნენ, 10-ს დასწერდნენ და გვერდით კი 2-ს მიუწერდნენ; $5+9=14$, რაც წინათ 2-ს 3-ად გადააქცევს და ამრიგად ღებულობდნენ ჯამს — 1034. გამრავლებასაც მარცხნიდან იწყებდნენ და თანდათანობით წინათ დაწერილი ციფრებს ასწორებდნენ; გამოკლებას თითქმის ისეთივე ნაირად აწარმოებდნენ, როგორც ჩვენ ახლა ვაწარმოებთ; კვადრატული ანუ კუბური ფესვების ამოსაღებად ინდოელები შემდეგი ფორმულებით სარგებლობდნენ:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

არითმეტიკული პრობლემების გადასაწყვეტად ისინი სარგებლობდნენ ორი ყალბი დებულების წესით და შებრუნების მეთოდით. ორი ყალბი დებულების წესის საშუალებით, სარგებლობდნენ რა ორი სასინჯავი მნიშვნელობით, სწყვეტდნენ ამოცანებს, რომლებიც დამოკიდებული იყვნენ პირველი ხარისხის*

$$f(x)=ax+b=k$$

სახის განტოლებისაგან; თუ მარცხენა მხარეზე $x=\alpha$ და $x=\beta$ ჩასმის შემდეგ ჩვენ მივიღებთ k-სგან განსხვავებულ $f(\alpha)$ და $f(\beta)$ მნიშ-

* Г. Г. Цейтен, История математики в древности и в средние века, стр. 183 1902.

ვნელობას, მაშინ x-ის მიღება შეიძლება $k-f(\alpha)$ და $k-f(b)$ სხვაობისაგან. x ამ წესის მიხედვით შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$x=\frac{\beta[k-f(\alpha)]-\alpha[k-f(\beta)]}{[k-f(\alpha)]-[k-f(\beta)]}.$$

ეს წესი იგივეა, რასაც ჩვენ ახლა მარტივ-ინტერპოლაციას ვუწოდებთ.

შებრუნების მეთოდი კი შემდეგში მდგომარეობს: თუ მოსაძებნია რიცხვი, რომელზედაც წარმოებული მოქმედებანი გვაძლევენ რომელიმე ცნობილ რიცხვს, მაშინ ამ უკანასკნელ რიცხვებზე უნდა ვაწარმოოთ შებრუნებული გზით პირველად წარმოებული მოქმედებების შებრუნებული მოქმედებანი. ბჰასკარას თავის შრომაში „ლილავათი"-ში მოთავსებული აქვს შებრუნების მეთოდით ამოსახსნელი შემდეგი ამოცანა: „ბრწყინავ თვალებიანო ლამაზო ქალო, თუ შენ კარგად გესმის შებრუნების მეთოდი, მითხარი რომელია ის რიცხვი, რომელიც 3-ზე გამრავლებული, ამ ნაწარმოების $\frac{3}{4}$-ით გადიდებული, 7-ზე გაყოფილი, განაყოფის $\frac{1}{3}$-ით შემცირებული, თავის თავზე გამრავლებული, 52-ით შემცირებული, შემდეგ ამოღებული კვადრატული ფესვი, მიმატებული 8, გაყოფილი 10-ზე, გვაძლევს 2-ს"? ამ მეთოდის ძალით 2-ზე უნდა ვაწარმოოთ მოქმედებები შებრუნებული გზით შემდეგნაირად:

$$2\cdot10=20;\ 20-8=12;\ 12^2=144;\ 144+52=196;\ \sqrt{196}=14;$$

$$14\cdot\frac{3}{2}=21;\ 21\cdot7=147;\ 147\cdot\frac{4}{7}=84;\ 84:3=28.$$

ინდოელები გამოთვლას აწარმოებდნენ წითელ სილით დაფარულ თეთრ ფიცარზე, რომელზედაც ციფრებს ჯოხის საშუალებით სწერდნენ; ამიტომ მარცხნიდან მარჯვნით მოქმედების წარმოებით ციფრის წაშლა და მეორეთი შეცვლა არავითარ უხერხულობას არ იწვევდა. ჩვენამდე მოაღწია ეგრეთ წოდებულ ბაჰშალიის წიგნმა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გავეცნოთ ინდოელების არითმეტიკას; ამ წიგნში წილადი გამოსახულია ისე, როგორც ჩვენ ახლა გამოვსახავთ,

მხოლოდ უხაზოდ, მაგალითად $\frac{1}{4} = \begin{matrix}1\\4\end{matrix}$; მთელი რიცხვი დაწერილია როგორც წილადი, რომლის მნიშვნელი ერთეულის ტოლია. შერეული წილადი შემდეგნაირადაა დაწერილი $\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix} = 1^1/_3$. ჩვენი ტოლობის ნიშნის = ნაცვლად ინდოელები ხმარობდნენ სიტყვა „ფა“-ს, რომელიც არის შეკვეცილი სიტყვა „ფალამი“; შეკრების აღსანიშნავად „უი“ სიტყვას ხმარობდნენ, რომელიც არის შემცირებული „უიტა“ სიტყვა; მაგალითად:

$$\boxed{\begin{matrix}5 & & 7\\ 1 & \text{უი} & 1\end{matrix}}\ \text{ფა}\ 12,\ \text{ესე იგი}\ \frac{5}{1}+\frac{7}{1}=12.$$

გამოკლებას გამოსახავდნენ ჩვენი მიმატების ნიშნით $+$; გამრავლებისათვის ცალკე ნიშანი არ ქონდათ და მამრავლებს ერთმანეთის შემდეგ სწერდნენ; მაგალითად.

$$\boxed{\begin{matrix}\frac{5}{8} & \frac{32}{1}\end{matrix}}\ \text{ფა}\ 20,\ \text{ესე იგი}\ \frac{5}{8}\times\frac{32}{1}=20.$$

გაყოფას გამოსახავდნენ „ბჰა“ სიტყვით, რომელიც არის შეკვეცილი სიტყვა „ბჰაგა“, რაც ნაწილს ნიშნავს.

ინდოელების ყველა არითმეტიკული ამოცანა ლექსად არის გამოთქმული. ამოცანების სასიამოვნო პოეტურ ფორმაში გამოთქმა დაკავშირებული იყო იმ ფაქტთან, რომ საერთოდ ამოცანები ინდოელებისათვის ერთ-ერთ სასიამოვნო საზოგადოებრივ გასართობ საგანს წარმოადგენდა; ამას ადასტურებს ბრაჰმაგუპტას სიტყვები: „როგორც მზე თავისი ბრწყინვალებით ვარსკვლავებს აბნელებს, ისე მეცნიერ ადამიანს შეუძლია სხვათა ბრწყინვალების დაბნელება სახალხო კრებებზე ალგებრული ამოცანების მიცემით და, მით უმეტეს, მათი გადაწყვეტით“. ინდოელებმა იცოდნენ მარტივი და რთული სამობითი წესები პროცენტების გამოთვლით. არიაბჰატა სამობითი წესს იყენებს ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად: 16 წლის მონა ქალი 32 ნიშკა ღირს, რა ღირს 20 წლის მონა ქალი? არიბახტა ამბობს, რომ ამოცანა შექცეული პროპორციის საშუალებით გამოიყვანება რადგან

„ცოცხალ არსებათა ღირებულება (მონათა და პირუტყვთა) მათი ასაკის მიხედვით წესდებაო“;

§ 2. **ალგებრა.** ინდოელებმა შესანიშნავი განძი შეიტანეს ალგებრაში. ბერძნებს წარმოდგენა არ ქონდათ უარყოფით რიცხვებზე, ინდოელებმა კი შემოიღეს უარყოფითი რიცხვები; დადებით რიცხვს ისინი განმარტავდნენ როგორც შემოსავალს და უარყოფით რიცხვს კი როგორც გასავალს; ამასთანავე დადებით რიცხვს წარმოადგენდნენ როგორც სიგრძეს ერთ მიმართულებით და უარყოფითს კი — საწინააღმდეგო მიმართულებით. უცნობ სიდიდეს ინდოელები სუნიას უწოდებდნენ და მსხვილი წერტილით აღნიშნავდნენ. სიტყვა „სუნია“ ცარიელს ნიშნავს და ამით აგრეთვე ნულსაც გამოსახავდნენ, რომელიც აგრეთვე წერტილით აღინიშნებოდა. რაც შეეხება წილადს, რომლის მნიშვნელი ნულია, ბჰასკარა ამბობს, რომ ასეთი წილადი არ შეიცვლება რაც არ უნდა დიდი სიდიდე მას მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ მსგავსად იმისა, რომ არავითარი ცვლილება უსასრულობაში არ ხდებაო. ამ სიტყვებიდან ჩანს რომ $\frac{a}{0}$ სიმბოლოს ინდოელები უსასრულობას უწოდებდნენ. ინდოელების ალგებრა დიოფანტეს ალგებრას გავს იმ მხრივ, რომ ალგებრა განთავისუფლებულია გეომეტრიულად წარმოდგენის ხერხიდან და რიცხვები განხილულია როგორც ასეთები. მაგრამ დიოფან ე მეორე ხარისხის განტოლებაში მხოლოდ ერთ ფესვს უჩვენებდა, ინდოელები კი ორ ფესვს: დადებითს და უარყოფითს. მაგალითად, ბჰასკარა $x^2 - 45x = 250$ განტოლებისათვის ორ ფესვს პოულობს: $x = 50$ და $x = -5$; მაგრამ უარყოფითი ფესვით ინდოელები არ სარგებლობდნენ.

კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნის ინდოელების მეთოდში ემჩნევა ასეთი განტოლების ამოხსნის ბერძნული ხერხები; სახელდობრ, ჰერონი ალექსანდრიელისა და დიოფანტესი; მაგალითად, $ax^2 + bx = c$ განტოლებას ბრაჰმაგუპტა სწყვეტს ისეთი წესით, რომელიც მიიყვანა შემდეგ ფორმულამდე:

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{3}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

ბრაჰმაგუპტას ეს წესი კრიდჰარამ გააუმჯობესა; მან მოცემული გან-

ტოლება გაამრავლა $4a$-ზე; $ax^2+bx=c$ განტოლებიდან მან მიიღო

$$4a^2x^2+4abx=4ac, \text{ ანუ } (2ax)^2+4b(ax)=4ac.$$

ასე რომ

$$(2ax+b)^2=4ac+b^2$$

და

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}\text{*}.$$

უაღრესად მნიშვნელოვან მიღწევად უნდა ჩაითვალოს ინდოელების მიერ სამი შემთხვევის ერთ წესში გაერთიანება:

$$ax^2+bx=c,\ bx+c=ax^2,\ ax^2+c=bx.$$

ბჰასკარა გვიჩვენებს, თუ როგორ უნდა გამოისახოს კვადრატული ფესვი რაციონალური და ირაციონალური რიცხვებისაგან ამ ფორმულის საშუალებით **

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

ამის შემდეგ ბჰასკარა მე-3 ხარისხის განტოლებაზე გადადის, მაგალითად, $x^3+12x=6x^2+35$; ამ განტოლების ორივე მხარეს $6x^2+8$-ს გამოაკლებს და ღებულობს: $x^3-6x^2+12x-8=27$, რომლის ორივე მხარე შეიძლება კუბების სახით წარმოვიდგინოთ, სახელდობრ შემდეგნაირად: $(x-2)^3=3^3$; აქედან კი $x-2=3$; $x=5$.

ინდოელებმა იცოდნენ $xy+ax+by=c$ განტოლების ამოხსნა; მათი მეთოდი ამ განტოლების ამოხსნისა იგივეა, რაც ეილერის, რომელმაც XVIII საუკუნეში აღმოაჩინა ხსენებულ განტოლების ამოხსნის მეთოდი. ინდოელების მეთოდი მაშინ არ იყო ცნობილი. ინდოელები აღნიშნულ განტოლებას $(x+b)(y+a)=c+ab$ განტოლებად გარდაქმნიდნენ და შემდეგ კი $c+ab$-ს წარმოადგენდნენ ორ მთელ სიდიდეთა ნამრავლის სახით. ინდოელები აგრეთვე მეორე ხარისხის განუზღვრელ განტოლებას იყვანდნენ; დიოფანტე განუზღვრელ განტოლებათა რაციონალური ამოხსნებით კმაყოფილდება. ინ-

* Cantor, I გვ. 530 — 531.

** Cantor, I, გვ. 531.

დოელები კი ამით არ კმაყოფილდებოდნენ და მათ ამოხსნას მთელ რიცხვებში ეძებდნენ. მათ გამოჰყავდათ

$$y^2 = ax^2 + b \tag{1}$$

სახის განტოლება; მათი მეთოდის გამოსააშკარავებლად მივმართოთ (1) განტოლების კერძო შემთხვევას, როდესაც $b=1$, ე. ი.

$$y^2 = ax^2 + 1 \tag{2}$$

განტოლებას, რომელიც ინდოელებს განუზღვრელ განტოლებათა ძირითად ამოცანად მიაჩნდათ; ეს (2) განტოლება გაცილებით უფრო გვიან ევროპის მათემატიკოსების საკვლევი საგანი გახდა და ის ცნობილი იყო პელის განტოლების სახელწოდებით. ინდოელების ხერხი ამ განტოლების ამოხსნისა შეიძლება შემდეგნაირად გადმოვცეთ:* შევადგინოთ ჯერ განტოლებები:

$$\left.\begin{aligned} ax_1^2 + b_1 = y_1^2 \\ ax_2^2 + b_2 = y_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

სადაც b_1 და b_2 განსაზღვრისათვის აღებულია ნებისმიერი x_1, y_1, x_2 და y_2 სიდიდეები. თუ ამ განტოლებებს b_1 და b_2-ს მიმართ ამოვხსნით, მაშინ ამ ორ სიდიდეთა ნამრავლი შემდეგ ნაირად შეიძლება დაიწეროს: $b_1b_2 = (y_1^2 - ax_1^2)(y_2^2 - ax_2^2)$; გავხსნათ ბრჩხილები და მარჯვენა მხარეს მივუმატოთ და გამოვაკლოთ $2ax_1x_2y_1y_2$ მივიღებთ: $b_1b_2 = (ax_1x_2 + y_2y_1)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2$; ეს კი გვაძლევს შემდეგი განტოლებას:

$$\left.\begin{aligned} & ax_3^2 + b_3 = y_3^2 \\ \text{სადაც} \\ & b_3 = b_1b_2,\ x_3 = x_1y_2 + x_2y_1;\ y_3 = ax_1x_2 + y_1y_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(3)-ის ორივე განტოლების იგივურად განტოლების შემდეგ მივიღებთ (4) ტოლობებიდან:

$$a(2x_1y_1)^2 + b^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2,$$

ანუ

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}\right)^2 \tag{5}$$

---

* Г. Г. Цейтен, გვ. 188—189.

აქედან კი ცხადია, $y=\frac{ax_1^2+y_1^2}{b}$ და $x=\frac{2x_1y_1}{b}$ და ამრიგად ჩვენ გვაქვს (2) განტოლების რაციონალური ამოხსნა; თუ x_1 და y_1-ის ნებისმიერი მნიშვნელობების ჩასმას გავაგრძელებთ, ხანდისხან მივიღებთ x და y-ის მნიშვნელობებს მთელ რიცხვებში. საჭიროა აღინიშნოს ის კერძო შემთხვევა, როდესაც $b=\pm 1$ ანუ $b=\pm 2$. თუ $b=1$, მაშინ ასეთივენაირად შეიძლება მივიღოთ (2) განტოლების ერთი რომელიმე ამოხსნისაგან ახალი ამოხსნა და შემდეგ კი ამოხსნათა ნებისმიერი რიცხვი; თუ $b=-1$ ანუ $b=\pm 2$ მაშინ (5) გვაძლევს თავის მხრივ (2) განტოლების ამოხსნას მთელ რიცხვებში, რადგან $y_1^2=ax_1^2\pm 2$ განტოლებიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ, რომ $ax_1^2+y_1^2=2ax_1^2\pm 2$, ე. ი. ლუწი რიცხვის ტოლია. იმავე დროს (2) განტოლების ერთი ამოხსნის ცოდნა (4) განტოლების წყალობით, (1) განტოლების ერთი ამოხსნიდან განუზღვრელი რაოდენობის ამოხსნათა მიღების საშუალებას გვაძლევს. თუ a-ს რომელიმე მოცემულ მნიშვნელობისათვის თანდათანობით სინჯვამ არ მიგვიყვანა (1) სახის განტოლებამდე, რომლისათვის $b=\pm 1$ ანუ $b=\pm 2$, მაშინ მიმართავენ ეგრეთ წოდებულ ციკლურ მეთოდს b-ს მნიშვნელობის მისაყვანად, რომელიც XVIII საუკუნეში ხელმეორედ იქნა აღმოჩენილი ლაგრანჟის მიერ. მაგალითად, დავუშვათ, რომ მოცემულია განტოლება:

$$ax_1^2+b_1=y_1^2,$$

რომელშიც b უკვე იმდენად მცირეა, რამდენად ეს შესაძლებელი გახდა სინჯვის საშუალებით; სინჯვა კი, ვთქვათ, მდგომარეობს $\frac{y_1}{x_1}$-სათვის $\sqrt{a}$-ს მიახლოვებითი მნიშვნელობის მიწერაში; ამ შემთხვევაში x_1 და b_1 ერთმანეთშორის მარტივი არიან, რადგან მათ რომ საერთო მამრავლი ჰქონდეთ, ასეთი მამრავლი მოცემული განტოლების ორივე მხარეში კვადრატულ მამრავლად იქნება, და შესაძლებელი იქნებოდა იმავე სახის უფრო მარტივი განტოლების მიღება. შემდეგ აიღებენ განტოლებას

$$\frac{x_1z+y_1}{b_1}=x_2,$$

რომლიდანაც x_2 და z-ის მთელ მნიშვნელობების განსაზღვრა შეიძ-

ლება; აქედან შეარჩევენ ისეთებს, რომელთათვის $z^2 - a$ შეძლებისამებრ მცირეა; თუ დავუშვებთ

$$\frac{z^2 - a}{b_1} = b_2,$$

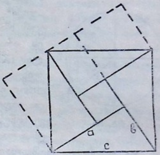
მაშინ b_2 მთელი რიცხვია და $ax_2^2 + b_2$ — ახალი კვადრატული რიცხვი y_1^2; ამას ინდოელები არ ამტკიცებენ; ეს შემდეგ ლაგრანჟმა დაამტკიცა.

უნდა აღინიშნოს რომ ინდოელებმა იცოდნენ არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიების ჯამის პოვნა, იცოდნენ ნატურალური რიგის პირველ რიცხვთა კვადრატების და კუბების ჯამის ფორმულა, და იცოდნენ აგრეთვე გადანაცვლებათა და ჯუფთებათა რიცხვის მოძებნის წესები. შეიძლება ითქვას, რომ ჩვენი დროის ელემენტარული ალგებრა არსებითად ინდურია და არა ბერძნული.

§ 3. გეომეტრია. თუ შევადარებთ ინდოელების გეომეტრიას ბერძნებისასს, დავრწმუნდებით, რომ ინდოელებს რამდენიმე ნაწილი თავისი გეომეტრიული შრომებისა გადმოღებული აქვთ ბერძნებისაგან. უნდა ითქვას, რომ ინდოელების გეომეტრია გაცილებით უფრო დაბლა დგას ბერძნების გეომეტრიასთან შედარებით; ინდოელების გეომეტრიაში ჩვენ არ ვხვდებით დამტკიცებათა მკაცრ დიალექტურ ფორმას, რომელიც საბერძნეთის გეომეტრიას ახასიათებს. ინდოელების გეომეტრია მოკლებულია განსაზღვრებს და პოსტულატებს და თითოეული თეორემა განკერძოვებულია, მაგრამ ინდოელებს პრაქტიკულ ცხოვრებაში გამოსაყენებლად საკმაოდ ჰქონდათ შესწავლილი გეომეტრიული ნაკვეთთა შორის მეტრული მიმართებანი. ბრაჰმაგუპტას შრომაში მოყვანილია ქვათა გროვისა და მარცვალთა გროვის მიახლოვებითი გაზომვის წესები. მისი შრომის—„ვიჯაგანიტას" V თავში ბჰასკარა ეყრდნობა რა სამკუთხედების მსგავსებას, აყალიბებს პითაგორის თეორემას: საამისოდ ის ჯერ ახსნა-განმარტებას იძლევა, თუ როგორ უნდა აიგოს ნაკვეთი (ნახ. 54) და შემდეგ ამბობს: „დაალაგე რა ნაკვეთის იგივე ნაწილები სხვადასხვანაირად, იხილე" (სხვანაირი დალაგება ჩემს მიერ ნაჩვენებია ნახაზზე პუნქტირებით).

ამის შემდეგ მას მოყავს წესი. „კატეტების გაორკეცებული ნამრავლი, მათ სხვაობათა კვადრატთან შეკრებილი, მათი კვადრატების ჯამის ტოლია სავსებით ისე, როგორც ორ უცნობ რაოდენობისათვის", ე. ი. მისი აზრით ისე როგორც

$$c^2 = 2ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2.$$



ნახ. 54.

ინდოელებმა იცოდნენ π-ის მეტად მიახლოვებითი მნიშვნელობა; არიაბჰატას გამოთვლით $\pi = \frac{31416}{10000} = 3{,}1416$, ბჰასკარას გამოთვლით კი $\pi = \frac{754}{240} = 3{,}141666$*....

სამკუთხედის ფართობისათვის ჰერონ ალექსანდრიელის ფორმულა ბრაჰმაგუპტამ ოთხკუთხედის ფართობზე გაავრცელა; თანახმად ბრაჰმაგუპტას ამ თეორემისა ყოველი ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, სადაც a, b, c და d ოთხკუთხედის გვერდებია და

$$S = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

ბჰასკარამ მოგვცა რომელიმე მოცემული რკალის შესაბამისი ქორდის გამოსათვლელი მიახლოვებითი ფორმულა, რომელიც შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს.

$$K = 4d \frac{b(p-b)}{{}^5\!/\!_4\, p^2 - b(p-b)},$$

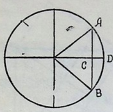
სადაც d — წრეწირის დიამეტრია, p — მისი სიგრძეა და b — რკალის სიგრძეა.

§ 4. ტრიგონომეტრია. ინდოელებმა ტრიგონომეტრიაში გაცილებით უფრო მეტ შედეგებს მიაღწიეს, ვიდრე ბერძნებმა. ასტრონომიულ გამოთვლებში ტრიგონომეტრიის გამოყენების შემთხვევაში ბერძნები

---

* Cantor, I. გვ. 556.

მთელი AB ქორდათი (ნახ. 55) სარგებლობდნენ; ინდოელებმა კი AC ნახევარი ქორდა ანუ სინუსი შემოიღეს ხმარებაში. AB ქორდას ინდოელები ჯივას უწოდებდნენ და მის ნახევარს, ე. ი. AC-ს, კი არდხაჯიას უწოდებდნენ. არაბებმა სიტყვა „ჯივა“ ანუ ჯიბას ნაცვლად „ჯეიბ“-სიტყვის ხმარება დაიწყეს, რაც უბეს ნიშნავს; ეს არაბული სიტყვა პლატონ ტივოლელის (XII საუკ.) მიერ გადათარგმნილია ლათინურ ენაზე სიტყვა sinus-ით. ამრიგად sinus-ი ინდური წარმოშობისაა. სინუსის გარდა ინდოელებმა შემოიღეს ხმარებაში აგრეთვე სინუსვერზუსი (sinus versus) რაც რადიუსსა და კოსინუსის ხაზს შორის სხვაობას ნიშნავს, და კოსინუსი, რომელსაც კოტიჯიას (Kotjya) უწოდებდნენ.*



ნახ. 55.

ინდოელებიც, ისე როგორც ბერძნები და ბაბილონელები, წრეწირს ყოფდნენ 360 ტოლ ნაწილად (გრადუსად) და თითოეულ ნაწილს კი ყოფდნენ 60 ტოლ ნაწილად (წუთები). ინდოელები წრეს ყოფდნენ ოთხ ტოლ ნაწილად ანუ კვადრატებად და თითოეულ კვადრანტს კი ყოფდნენ 24 ტოლ ნაწილად; ასე რომ თითოეული ეს უკანასკნელი ნაწილი 225 წუთს შეიცავს (ანუ 3° 45′). ბერძნები არასოდეს არ აიღებდნენ წრფის ნაკვეთის გასაზომად რკალის ერთეულს და ამიტომ ისინი რადიუსს ყოფდნენ 60 ტოლ ნაწილად; ინდოელები კი დაუშვებდნენ რა, რომ $\pi=3{,}1416$ და $2\pi r=21600$ წუთს, რადიუსს განსაზღვრავდნენ 3438 წუთის ტოლად. ინდოელებმა გამოითვალეს სინუსები იმ კუთხეებისათვის, რომლებიც ერთმეორესაგან 3°45′-ით განსხვავდებიან, და შეადგინეს სინუსების ცხრილი მეტად მარტივი მეთოდით: $\sin 90°$ ჩათვალეს რადიუსის ტოლად ანუ 3438-ის ტოლად; $\sin 30°$ კი, ცხადია, რადიუსის ნახევრის ტოლია, ანუ 1719 წუთის ტოლია. შემდეგ გამოიყენეს რა მათთვის ცნობილი ფორმულა $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=r^2$, მიიღეს, რომ $\sin 45°=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=2431$ წუთს; $\cos\alpha$-ს ნაცვლად მისი ტოლი $\sin(90°-\alpha)$-ს ჩასმით $\alpha=60°$ დაშვებით ინდოელებმა მიიღეს, რომ

* Cantor, I. გვ. 560.

$\sin 60° = \sqrt{\frac{3r^2}{3}} = 2978$ წუთს. 90°, 60°, 45° და 30°-ის სინუსების საშუალებით მათ თანდათანობით გამოითვალეს ნახევარი რკალების სინუსები შემდეგი ფორმულის საშუალებით: $\operatorname{sinvers} 2\alpha = 2\sin^2\alpha$; sin 22° 30′ და sin 11° 15′ გამოითვალეს sin 45°-გან და sin 15° კი — sin 30°-გან. მათი საშუალებით ისინი აწარმოებდნენ მათი დამატებითი კუთხეების სინუსების, ე. ი. sin 67° 30′, sin 78° 45′, sin 75°, sin 82° 30′, sin 86° 15′-ის გამოთვლას, შემდეგ ამ რკალების ნახევრის სინუსებს, შემდეგ ისევ მათი დამატებითი რკალებს, შემდეგ ასეთივენაირად უკანასკნელი რკალების ნახევრების და ასე შემდეგ სინუსების ცხრილებიდან ინდოელებმა გამოიყვანეს შემდეგი წინადადება: თუ a, b და c ისეთი სამი ერთმანეთის მიმდევნო რკალებია, რომ ორი მათგანს შორის სხვაობა 3° 45′-ის ტოლია, მაშინ შემდეგი ტოლობა გვაქვს:

$$\sin a - \sin b = (\sin b - \sin c) - \frac{\sin b}{225}.$$

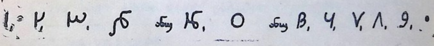
ასეთი საინტერპოლაციო ფორმულის საშუალებით მათ ხელახლა შეეძლოთ სინუსების ცხრილის შედგენა. ბჰასკარა იძლევა უფრო ზუსტ მნიშვნელობებს $\sin 3° 45' = \frac{100}{1529}$, $\cos 3° 45' = \frac{466}{467}$, რომლებიც მათი ჭეშმარიტი მნიშვნელობებისაგან განსხვავდებიან რადიუსის 0,00000001-ზე ნაკლებით. ის გვიჩვენებს აგრეთვე $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ ფორმულის საშუალებით 1°-იანი ინტერვალით ზრდადი რკალების სინუსების ცხრილის შედგენის ხერხს, დაუშვებს რა $\sin 1° = \frac{10}{573}$ და $\cos 1° = \frac{6568}{6569}$.

თავი VII

არაბები

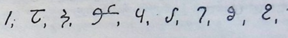
არაბები ასტრონომიაში მუშაობდნენ და მათემატიკაში მათი შრომები უმთავრესად ასტრონომიაში გამოყენების მიზანს ემსახურებოდნენ. მათი მეცნიერებაში მოღვაწეობა იწყება VIII საუკუნიდან და გრძელდება XVI საუკუნემდე. გამოჩენილი მათემატიკოსი და მათემატიკის ისტორიკოსი შალი შემდეგს ამბობს: „არაბებმა მათემატიკისადმი დიდი მზრუნველობა და მიდრეკილება გამოიჩინეს; მათ სავსებით იცოდნენ ბერძენ გეომეტრების შრომები და შესანიშნავად განავითარეს ტრიგონომეტრია, მისცეს რა მას ახალი ფორმა“. არაბებმა შეისწავლეს ბერძნების მათემატიკა და გაადიდეს ის თავის მიღწევებით და უფრო გასაგები გახადეს; ამასთანავე მას დაურთეს ინდოელების არითმეტიკა. არაბების დიდ დამსახურებად ჩაითვლება აგრეთვე საბერძნეთის მათემატიკოსების შრომების გათარგმნა არაბულ ენაზე, ვინაიდან ზოგიერთი ამ შრომების დედნები დაიკარგა და ჩვენამდე მხოლოდ არაბების ნათარგმნმა მოაღწია; გადათარგმნეს ევკლიდეს „ელემენტები“, პტოლომეოსის „ალმაგესტი“ და აგრეთვე არქიმედეს, აპოლონიუსის, დიოფანტეს და ჰერონის შრომები. ამ შრომების გარდა გადათარგმნეს ინდოელების ასტრონომიული შრომები, რომელთა საშუალებით არაბებმა ინდოელებისაგან სინუსის ხმარება და არითმეტიკა გადმოიღეს.

§ 1. **არითმეტიკა და ალგებრა.** რიცხვთა აღნიშვნები არაბებმა ინდოელებისაგან გადმოიღეს; უნდა აღინიშნოს რომ აღმოსავლეთის და დასავლეთის არაბების ნიშნები განსხვავდებიან ერთი მეორისაგან; მაგალითად, აღმოსავლეთის არაბების ნიშნებია:



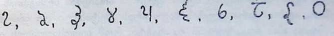
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

დასავლეთის არაბებისა კი — შემდეგი



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

იმავე დროს ადვილად შესამჩნევია, რომ არც აღმოსავლეთის და არც დასავლეთის არაბების ნიშნები არ გვანან თანამედროვე ინდურ ნიშნებს, რომელთაც „დევანგარი" ციფრები ეწოდებათ და შემდეგი სახის არიან:



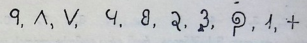
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9 0

მეცნიერ ვოეპკეს აზრით ამის მიზეზი შემდეგში მდგომარეობს: ინდოელების რიცხვთა ნიშნები, დაწყებული II საუკ. მხოლოდ ცხრა ციფრისაგან შედგებოდა და მათში ნული არ შედიოდა. შემდეგ ეს ნიშნები ცვლილებას განიცდიდნენ და ნულიც შემოღებული იქმნა; VIII საუკუნეში უკვე შეცვლილი სახით და ნულით ინდოელების ნიშნების ხმარება პირველად აღმოსავლეთის არაბებმა დაიწყეს, მათგან კი დასავლეთის არაბებმა გადმოიღეს; მაგრამ იმისათვის, რომ მათი ციფრები აღმოსავლეთის არაბების ციფრებისაგან განსხვავებული ყოფილიყო, ცხრა ციფრის ძველი ინდური ფორმა დატოვეს და ნული კი, რომელსაც არაბები ციფრა̃ს უწოდებდნენ (ციფრა — არაბული სიტყვაა და ცარიელს ნიშნავს), წრის სახით აიღეს. დასავლეთის არაბებმა თავის რიცხვთა ნიშნებს, ნიშნად მათი ინდიური წარმოშობისა, „გუბარ" ციფრები ანუ „სილის" ციფრები უწოდეს, ვინაიდან ინდოელები გამოთვლას აწარმოებდნენ სილით დაფარულ დაფაზე.

არაბებისაგან რიცხვთა ნიშნები ევროპელებმა გადმოიღეს XVIII საუკუნის პირველ ნახევარში*. ქართველებს ეს ნიშნები გადმოუღიათ აღმოსავლეთის არაბებისაგან X საუკუნეში; ამას ადასტურებს

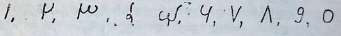
* Contor, II. გვ. 8.

საქართველოს მუზეუმში შენახული ხელნაწერი, რომელიც დაწერილია ქართულად 974 წელს; ამ ხელნაწერში მოთავსებულია ქრონოლოგიური ცხრილი და ცხრილის ქვეშ არის ჩანაწერი:



რაც ნიშნავს 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

ადვილად შევამჩნევთ ამ ნიშნების მსგავსებას აღმოსავლეთის არაბების ნიშნებთან; მაგრამ ზოგიერთი ცვლილებანი, რომელთაც ადგილი აქვთ ამ ნიშნებში აღმოსავლეთის არაბების ნიშნებთან შედარებით, ალბათ ქართველების მიერ არის შეტანილი და არა არაბების მიერ; ამას ადასტურებს ის ფაქტი, რომ აღმოსავლეთის არაბებმა თავიანთი ნიშნები ინდოელებისაგან გადმოიღეს VIII საუკუნის დამლევს და თანამედროვე არაბული ნიშნები კი შემდეგია:



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

არაბეთის ყველა მათემატიკოსთა შორის პირველი ადგილი უჭირავს მუჰამედი იბნ მუსა ალჰოვარეზმს (IX საუკ.) რომელმაც არითმეტიკაში შრომა დასწერა. ჩვენამდე მოაღწია ალჰოვარეზმის არითმეტიკის მხოლოდ ლათინურ ენაზე თარგმანმა, რომელიც იწყება სიტყვებით: „სთქვა ალგორითმა“ (Dixit Algorithmi); აქ ავტორის სახელი — ალჰოვარეზმი გადმოცემულია სიტყვა — „ალგორითმი“-თ; აქედან წარმოიშვა ჩვენი თანამედროვე სიტყვა ალგორითმი, რომელიც გარკვეული წესით გამოთვლის ხელოვნებას ნიშნავს. ალჰოვარეზმის არითმეტიკა პოზიციურ სისტემაზე და თვლის ინდოელების მეთოდზეა აგებული. შეკრება და გამოკლებას ალჰოვარეზმი მარცხნიდან მარჯვნივ ახდენს; წიგნში არ არის ახსნილი თუ როგორ უნდა მოხდეს გამოკლება იმ შემთხვევაში, როდესაც მეტი ციფრი ნაკლებ ციფრს უნდა გამოაკლდეს. გამრავლების შემთხვევაში თითოეული კერძო ნაწარმოები მამრავლის შესაბამი ციფრის ზევით იწერება;

გაყოფას ალჰოვარეზმი შემდეგი წესით აწარმოებს: გამყოფს გასაყოფის ქვევით წერს, განაყოფს კი — მის ზევით; განაყოფის ზევით წერს აგრეთვე იმ ცვლილებებს, რომლებიც გამომდინარეობენ არასრულ ნაწარმოებთა გამოკლებისაგან. გაყოფის პროცესში გამყოფი არ რჩება მუდამ გასაყოფის ქვევით არამედ ერთი ადგილით გადაიწევა მარცხნიდან მარჯვნივ. ამ მოქმედების სიაშკარესათვის ალჰოვარეზმს მოყავს მაგალითი:* $46468:324=143\frac{136}{324}$ და მოქმედებას ალაგებს შემდეგნაირად:

136
24
110
22
140
143
46468
324
344
324

სადაც 143 განაყოფია და 140, 110 და 136 ნაწილებისაგან თანმიმდევარი გამოკლებით არიან მიღებული.

არაბებს წილადები ორ ჯგუფად ქონდათ დაყოფილი**: 1. გამოსათქმელი წილადები (Aùssprechharen Brüche), რომელთა მრიცხველი ერთის ტოლია და მნიშვნელები კი წარმოადგენენ რიცხვებს 2-დან 9-მდე; მაგალითად $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} : \cdots \frac{1}{9}$;

2. მუნჯი წილადები (Stumme Brüche), რომელთა მნიშვნელობა 2-დან 9-მდე რიცხვთა ნამრავლს წარმოადგენენ: მაგალითად $\frac{1}{5 \cdot 6}=\frac{1}{30}$.

არაბების არითმეტიკა შეიცავს „ყალბდებულების" წესს, „ორმაგი დებულების" წესს, კვადრატული და კუბური ფესვის ამოცანების წესებს. წილადებს არაბები წერდნენ ისე, როგორც ინდოელები. მეტად მნიშვნელოვანია ალჰოვარეზმის ალგებრა; ეს პირველი შრომაა, რომელშიც ვპოულობთ სიტყვა „ალგებრას", რის გამო ალჰოვა-

* Contor, გვ. 1, 615.
** იქვე.

რეზმი ალგებრის გამომგონებელი ეგონათ; მაგრამ ალჰოვარეზმი წერს, რომ არაბეთის მეფემ ალმამუნმა მას დაავალა შრომის დაწერა „ალჯებრა“-ში და „ალმუკაბალა“-ში; ეს ორი სიტყვა გამოსახავდნენ, როგორც ჩანს, რაღაც მანამდეც ცნობილს, ვინაიდან ალჰოვარეზმი საჭიროდ არ სთვლის ამ სიტყვების ახსნას. სიტყვა „ალჯებრე“ ნიშნავს განტოლების მეორე მხარეზე უარყოფითი წევრების გადატანის ოპერაციას ისე, რომ ორივე მხარე მხოლოდ დადებითი წევრებს შეიცავდეს; სიტყვა „ალმუკაბალა“ კი ნიშნავს მსგავს წევრების მიყვანის ოპერაციას. მაგალითად განტოლება

$$4x^2-3x+25=2x^2+8x+2$$

ალჯებრეს საშუალებით

$$4x^2+25=2x^2+11x+2$$

განტოლებად გადაიქცევა და ალმუკაბალას საშუალებით კი მივიღებთ განტოლებას

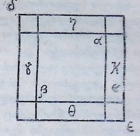
$$2x^2+23=11x.$$

სახელწოდება „ალჯებრე“ შემდეგში გავრცელებულ იქნა მეცნიერებაზე განტოლებათა შესახებ — ალგებრაზე. ალჰოვარეზმის ალგებრა მოკლებულია ყოველგვარ სიმბოლიურ აღნიშვნებს და ყველაფერი გამოთქმულია სიტყვიერად; აქ განხილულია როგორც პირველი, ისე მეორე ხარისხის განტოლება; განტოლების უცნობს ალჰოვარეზმი ფესვს ანუ ნივთს უწოდებს. ალჰოვარეზმს გარჩეული აქვს ექვსი სახის განტოლება, რომლებიც ჩვენი სიმბოლოების საშუალებით შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$x^2=bx+c;\quad ax^2=bx,\quad ax^2=c,\quad bx=c,\quad x^2+bx=c,\quad x^2+c=bx;$$

თითოეულ ამ განტოლებისათვის მას ჩამოყალიბებული აქვს ამოხსნის წესები, რომლებსაც რიცხვითი მაგალითებზე იყენებენ. ავიღოთ მაგალითად $x^2+c=bx$ განტოლების ამოხსნის ალჰოვარეზმის წესი; თანამედროვე ნიშნების საშუალებით თუ გამოვსახავთ, ალჰოვარეზმი პოულობს, რომ $x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$; სადაც x-ს აქვს ორი მნიშვნელობა, თუ $\left(\frac{b}{2}\right)^2>c$, და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა

$x = \frac{b}{2}$ როდესაც $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$. როდესაც $c > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ალჰოვარეზმი ამბობს, რომ ამოცანის ამოხსნა შეუძლებელიაო. ზემოთმოყვანილ განტოლებათა ამოხსნის შემდეგ, ამოხსნათა სისწორის დასადასტურებლად, ალჰოვარეზმი გეომეტრიულ ხერხს მიმართავს. ამ ხერხის ცხადსაყოფად ჩვენ მივმართავთ მხოლოდ ერთ განტოლების $x^2 + 10x = 39$ რიცხვითი მაგალითს, რომლის ამოხსნას ალჰოვარეზმი გეომეტრიულად შემდეგნაირად გამოხატავს.* ავაგოთ $\alpha\beta$ კვადრატი (ნახ. 56). და მის ყოველ გვერდებზე მართკუთხედი ავაგოთ; და თუ კიდევ მას მივუმატებთ კუთხეებთან შექმნილ ოთხ მცირე კვადრატს, მივიღებთ $\delta\varepsilon$ დიდ კვადრატს; თუ $\alpha\beta$ ნაკვთი არის x^2 და γ, η, $\varkappa$, θ მართკუთხედები $10\,x$-ს წარმოადგენენ, მაშინ თითოეული მართკუთხედის სიგანე $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$-ის ტოლია და კუთხეებთან მოთავსებული ოთხი კვადრატი ერთად $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$; ამრიგად დიდი $\delta\varepsilon$ კვადრატი $x^2 + 10x + 25$-ის ანუ 64-ის ტოლია, ვინაიდან $x^2 + 10x = 39$; მაშასადამე, დიდი კვადრატის გვერდი $\sqrt{64} = 8$ ს ტოლია; იმავე დროს ეს გვერდი $x + 2 \cdot \frac{5}{2}$-ის, ანუ $x + 5$-ის ტოლია ე. ი. $x + 5 = 8$; საიდანაც $x = 3$, რაც შეიძლება დაიწეროს შემდეგი ფორმულის სახით:



ნახ. 56.

$$x = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} \text{ ანუ } x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}.$$

დაახლოებით 1000 წელს არაბების დედაქალაქ ბაგდადში არითმეტიკის და თვლის ორ სისტემას ჰქონდა ადგილი, რომელთაგან ერ-

* Cantor, I, 617—618.

თი აგებულია ინდურზე და მეორე კი ბერძნულზე. პირველ ფაქტს ადასტურებს იმ ეპოქის მათემატიკოსის ალნასავის შრომა, სადაც სავსებით გამოყენებულია ინდური ნუმერაცია; მეორე ფაქტს კი ადასტურებს იმავე დროს და იმავე ადგილას მცხოვრები შესანიშნავი მათემატიკოსის ალკარხის მიერ დაწერილი არითმეტიკა, რომელშიც ინდური ნუმერაციის კვალსაც ვერ იპოვით, და სადაც რიცხვები გამოთქმულია სიტყვიერად. მათემატიკის ისტორიკოსის ცოიტენის* აზრით ეს მოვლენა შეიძლება შემდეგნაირად აიხსნას: ალნასავის და ალკარხის სხვადასხვა ამოცანები ჰქონდათ დასმული; ალნასავის სურდა პრაქტიკულად გამოსაყენებელ გამოთვლათა მარტივი წესების დაწერა, ალკარხის კი სურდა რიცხვთა შესახებ მეცნიერული შრომის დაწერა, ამიტომ მას საფუძველი ჰქონდა მიემართა ბერძნებისათვის და არა ინდოელებისათვის. ამ მხრივ საინტერესოა აგრეთვე ალკარხის ალგებრის ტრაქტატი, რომელიც ცნობილია „ალფახრი"-ს სახელწოდებით; ამ ტრაქტატიდან ჩანს, რომ ის დიოფანტეს გამოჩენილი მოწაფეა, რომელიც იმავე დროს თავის მნიშვნელოვან შრომებსაც იძლევა. დიდი ღირებულებისაა აგრეთვე ალკარხის მიღწევები მეთოდოლოგიის დარგში: ის გარკვევით ამბობს, რომ ალგებრული წესების გასაგებად საჭიროა არითმეტიკის ზოგადი წესების წინასწარ გაცნობა, რომლებიც მას წინა შრომაში აქვს მოცემული. ალკარხი, თავის შრომაში „ალფახრში" იძლევა თეორემას შემდეგი მწკრივთა ჯამის შესახებ:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+3+\ldots+n).$$

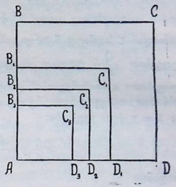
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

პირველს ალკარხი ვერ ამტკიცებს, საიდანაც ჩანს, რომ ის არქიმედეს დამტკიცებას არ იცნობდა. მეორეს კი ამტკიცებს გეომეტრიულად შემდეგნაირად:**

მოცემულია ABCD კვადრატი (ნახ. 57), რომლის გვერდი $AB=$ $=1+2+3+\ldots+n$ და დავუშვათ, რომ $BB_1=n$, $B_1B_2=n-1$, $B_2B_3=n-2$ და ასე შემდეგ. თუ ავაგებთ კვადრატებს AB_1, AB_2,

* Цейтен, გვ. 200.
** Contor, I, გვ. 660.

AB_3 . . . გვერდებით, მივიღებთ გნომონს $BC_1D = BB_1 \cdot BC + DD_1 \cdot D_1C_1 = n(BC + D_1C_1)$, მაგრამ $BC = \frac{1}{2}n(n+1)$, $D_1C_1 = \frac{1}{2}n(n-1)$, ამიტომ $BC + D_1C_1 = n^2$, ასე რომ გნომონი $BC_1D = n^3$. ასეთივე ნაირად დამტკიცდება, რომ გნომონი $B_1C_1D_1 = (n-1)^3$, გნომონი $B_2C_3D_2 = (n-2)^3$ და ასე შემდეგ. ამრიგად ABCD კვადრატი, რომელიც $(1+2+\ldots+n)^2$-ის ტოლია, დაიშლება გნომონებად: $n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots + 1^3$.



ნახ. 57.

XV საუკუნეში არაბეთის მათემატიკოსმა ალკაშიმ იპოვა, რომ

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \left[\frac{1+2+\ldots+n)-1}{5} + (1+2+3+\ldots+n)\right](1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

რაც არაბებს არსებითი მიღწევად უნდა ჩაეთვალოს.

არაბებმა, შეისწავლეს რა ბერძნების არითმეტიკა და ალგებრა, შემდეგ შესამჩნევად განავითარეს ისინი. ამას ადასტურებს აგრეთვე XI საუკუნის გამოჩენილი მათემატიკოსის, პოეტისა და ფილოსოფოსის — ომარი ალხაიამის ალგებრა; დიოფანტე მოითხოვდა, რომ განტოლების არითმეტიკული ამოხსნა რაციონალური ყოფილიყო, ალხაიამი კი ამით არ კმაყოფილდება და მოითხოვს მთელრიცხვიან ამოხსნას.

ყურადღების ღირსია აგრეთვე ალხოჯანდის (1000 წ.) დამტკიცება იმისა, რომ $x^3 + y^3 = z^3$ განტოლების ამოხსა რაციონალურ რიცხვებში შეუძლებელია. არაბები ბევრს მუშაობდნენ მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნაზე, მაგრამ რადიკალებში ზოგადი ამოხსნა ვერ იპოვეს; ისინი იძულებული გახდნენ დაკმაყოფილებულიყვნენ კონკრეტულ განტოლებათა მიახლოვებითი ამოხსნით. ჩვენამდე მო-

აღწია კუბური განტოლების ფესვის რიცხვითი განსაზღვრის მეტად კოხტა ნიმუშმა; ამ გამოთვლით სარგებლობდნენ XV საუკუნეში არაბეთის ასტრონომის ულუღბეგის ტრიგონომეტრიული ცხრილის ასაგებად*. ამოცანა ასეა დასმული: ვიპოვოთ $\sin 1^\circ$ თუ ცნობილია $\sin 3^\circ$; ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი სახის განტოლების ამოხსნამდე.

$$x^3 + Q = Px$$

ვინაიდან x საკმაოდ მცირეა, ამიტომ ის შეიძლება გარკვეულ მიახლოვებით $\frac{Q}{P}$-ს ტოლად ჩავთვალოთ; ამ სიდიდისათვის ისეთი მიახლოვებითი a მნიშვნელობას გამოითვლიან, რომ გაყოფით მიღებული R ნაშთი იგივე რიგის მცირე იყოს, როგორიცაა a^3. დავუშვებთ რა $x = y + a$, გვექნება:

$$a + y = \frac{(a + y)^3 + Q}{P}$$

საიდანაც

$$y = \frac{(a + y)^3 + R}{P}.$$

ვინაიდან R ნაშთი, რომელიც a^3-ის რიგისაა, a^2y-თან შედარებით დიდია, ამიტომ მიახლოვებითი გამოთვლის შემთხვევაში შეიძლება ჩამოვაცილოთ ის წევრები, რომლებიც მრიცხველში y-ს შეიცავს და ჩვენ მაშინ ვღებულობთ ახალ მიახლოვებით:

$$y = \frac{a^3 + R}{P} = b + \frac{S}{P};$$

შემდეგ ზუსტ განტოლებაში სვამენ $y = b + z$, სადაც z-ს თავის მხრივ ასეთივენაირად განსაზღვრავენ მიახლოვებით და ასე შემდეგ; აქ ნახმარია სამოცობითი წილადები.

§ 2. **ტრიგონომეტრია.** მათემატიკაში არაბების საუკეთესო ორიგინალური შრომა ტრიგონომეტრიის განვითარებაშია. მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანეს ტრიგონომეტრიაში IX საუკუნის ასტრონომმა ალბატანიმ, აბულ ვაფამ (940 — 988), XI საუკუნის ასტრონომმა

* Цейтен, გვ. 204.

ჯაბირ იბნ აფლამ, რომელიც ცნობილია გებერის სახელწოდებით (მუშაობდა ესპანეთში), და ნასირ-ედინმა, რომელიც სპარსეთში მუშაობდა. ალბატანიმ პტოლომეოსის შრომები დაწვრილებით შეისწავლა და პტოლემეოსის ქორდების სისტემა ინდოელების სინუსების სისტემით შესცვალა. გარდა ამისა მან ის გააუმჯობესა შეიტანა ბერძნების ტრიგონომეტრიაში, რომ გეომეტრიული წინადადების სახით წარმოდგენილი თეორემები ალგებრული ფორმულების სახით წარმოადგინა; მაგალითად ალბატანი φ-ის მნიშვნელობას $\frac{\mathrm{siu}\,\varphi}{\cos\varphi} = D$ განტოლებიდან პოულობს $\sin\varphi = \frac{D}{\sqrt{1 + D^3}}$ ფორმულის საშუალებით. $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ შეფარდება ალბატანისათვის გარკვეულ როლს თამაშობს; ვთქვათ φ მზის სიმაღლის კუთხეა, h ვერტიკალური გნომონის (სვეტის) სიმაღლეა, l კი ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მყოფი მისი ჩრდილის სიგრძეა; φ არის h-ის მოპირდაპირე კუთხე მართკუთხოვანი სამკუთხედის, რომლის კათეტებია h და l, მაშინ $l = h\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, ალბატანი დაუშვებს რა, რომ $h = 12$, l-ის მნიშვნელობათა გამოთვლას აწარმოებს როდესაც $\varphi = 1°, 2°, 3° \ldots$ და ამრიგად კოტანგესების ცხრილს ღებულობს. ალბატანიმ არა თუ იცოდა ყველა ფორმულა სფერული სამკუთხედისათვის, რომლებსაც პტოლომეოსი იყენებდა, არამედ მან დაუმატა მათ მნიშვნელოვანი ფორმულა ირიბკუთხოვანი სფერული სამკუთხედისათვის:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A;$$

იცოდა აგრეთვე მისი გარდაქმნა შემდეგი ფორმულად

$$\sin\operatorname{vers} A = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}$$

აბულ ვაფამ გამოიგონა სინუსების ცხრილის ასაგები მეთოდი, რომელიც იძლევა ნახევარ გრადუსის სინუსს მეცხრე ათობით ნიშნამდე სიზუსტით. ამ მეთოდს ის იწყებს უტოლობიდან:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha - \beta).$$

ამ ტოლობას ის აგრძელებს როგორც მარცხნით ისე მარჯვნივ და ღებულობს

$$\mathrm{siu}(\alpha+3\beta)-\sin(\alpha+2\beta)<\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha+\beta)<\sin(\alpha+\beta)-$$
$$-\sin\alpha<\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)<\sin\alpha(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-2\beta)<$$
$$<\sin(\alpha-2\beta)-\sin(\alpha-3\beta),$$

საიდანაც.

$$\sin(\alpha+3\beta)-\sin(\alpha+2\beta)<\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\sin\alpha-\mathrm{siu}(\alpha-\beta);$$

$$\sin(\alpha+2\beta)-\mathrm{siu}(\alpha+\beta)<\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-2\beta);$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\sin(\alpha-2\beta)-\sin(\alpha-3\beta);$$

ამ სამი სახის უტოლობათა შეკრებით ვღებულობთ.

$$\sin(\alpha+3\beta)-\sin\alpha<3[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]<\sin\alpha-\sin(\alpha-3\beta)$$

ანუ საბოლოოდ

$$(1)\quad \frac{1}{3}[\sin(\alpha+3\beta)-\sin\alpha]<\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<$$
$$<\frac{1}{3}[\sin\alpha-\sin(\alpha-3\beta).$$

კვადრატულ ფესვის ამოღებით შეიძლება $\sin 36^\circ$ და $\sin 60^\circ$ პოვნა ნებისმიერი მიახლოვებით და იმავე წესით თანდათანობით მათი ნახევრების სინუსების პოვნა ნებისმიერი მიახლოვებით; ასე რომ შეიძლება გადასვლა $\frac{36^\circ}{64}$ და $\frac{60^\circ}{128}$ სინუსისაგან $\frac{18^\circ}{32}$ და $\frac{45^\circ}{32}$ სინუსებისაკენ, რომელთა შორის იმყოფება $\sin\frac{16^\circ}{32}=\mathrm{siu}\ 30'$, შემდეგ დავუშვებთ რომ $\alpha=\frac{15^\circ}{32}$, $\beta=\frac{1^\circ}{32}$ და ამ მნიშვნელობათა ჩასმის შემდეგ (1) უტოლობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{1}{3}\left[\sin\frac{18^\circ}{32}-\sin\frac{15^\circ}{32}\right]<\sin 30'-\sin\frac{15^\circ}{32}<$$
$$<\frac{1}{3}\left[\sin\frac{15^\circ}{32}-\sin\frac{12^\circ}{32}\right].$$

ამ უტოლობაში გარდა 30′ უცნობია აგრეთვე $\sin\frac{12^\circ}{32}$, რომლის გამოთვლა შეიძლება ნებისმიერ მიახლოვებით $\frac{12}{32}=4\left(\frac{18}{32}-\frac{15}{32}\right)$ და ამრიგად გვექნება ახალი უტოლობა

$$\sin\frac{15^\circ}{32}+\frac{1}{3}\left[\sin\frac{18^\circ}{32}-\sin\frac{15^\circ}{32}\right]<\sin 30'<\sin\frac{15^\circ}{32}+$$
$$+\frac{1}{3}\left[\sin\frac{15^\circ}{32}-\sin\frac{12^\circ}{32}\right]$$

აქედან კი აბულ ვაფამ sin 30′ მნიშვნელობად აიღო შემდეგი:

$$\sin 30'=\sin\frac{15^\circ}{2}+\frac{1}{6}\left[\sin\frac{18^\circ}{32}-\text{siu}\frac{12^\circ}{32}\right].$$

აბულ ფაფას ეკუთვნის აგრეთვე ახალი ტრიგონომეტრიული ფუნქცია — ტანგენსის შემოღება, რაც ჩანს მის მიერ გადაწყვეტილი შემდეგი ამოცანიდან*: როგორც ამის წინათ აღვნიშნეთ, $l=h\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ ტოლობის საშუალებით, როცა $h=12$ აღბატანიმ გამოითვალა ჩრდილის სიგრძე (umbra recta) რომელსაც იძლევა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე დამაგრებული ვერტიკალური გნომონი; აბულ ვაფამ კი გამოითვალა ჩრდილის სიგრძე $l=h\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, რომელსაც იძლევა ვერტიკალურ სიბრტყეზე დამაგრებული ჰორიზონტალური გნომონი, თუ კი $h=60$. ამრიგად აბულ ვაფა ღებულობს ტანგენს, რომელსაც ის ჩრდილს უწოდებს და მას შემდეგნაირად განმარტავს:

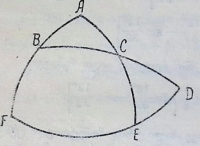
„რკალის ერთ ბოლოდან სინუსის პარალელურად გავლებული ნაკვეთი, მოთავსებული რკალის ამ ბოლოსა და წრის ცენტრიდან რკალის მეორე ბოლომდე გამავალ წრფეს შორის, ამ რკალის ტანგენსია". ამის შემდეგ ის აგრეთვე კოტანგენსს და სეკანს განმარტავს, და ტანგენსების ცხრილს ადგენს.

ჯაბირ იბნ აფლამ ანუ გებერმა დასწერა ცხრა წიგნისაგან შემდგარი დიდი ასტრონომიული შრომა, რომლის პირველი წიგნი

---

* Contor, I, 642.

მთლიანად მიძღვნილია ტრიგონომეტრიისადმი. მრავალ ტრიგონომეტრიულ თეორემათა დამტკიცებებში გებერი პტოლომეოსს კი არ ბაძავს, არამედ იძლევა თავის დამტკიცებებს. მან შეავსო მართკუთხოვანი სფერული სამკუთხედისათვის პტოლომეოსის ფორმულა და მან მოგვცა ზუსტად დამტკიცებული სფერული სამკუთხედის ძირითადი ფორმულა: $\cos A = \cos a \cdot \sin C$; ეს ფორმულა მან დააწესა იმავე ნაკვთის (ნახ. 58) საშუალებით, რომელსაც პტოლომეოსი ხმარობდა, სადაც DEF დიდი წრეა, რომლის პოლუსი მართკუთხოვანი ABC სამკუთხედის A წვეროზე მდებარეობს, DEC მართკუთხოვანი სამკუთხედს ABC სამკუთხედთან საერთო C კუთხე აქვს; $DE = 90° - A$, $CD = 90° - a$ აქედან კი გამომდინარეობს ხსენებული ძირითადი ფორმულა. გებერმა და ნასირ ედინმა დაამუშავეს ტრიგონომეტრია ასტრონომიის დამოუკიდებლად, როგორც გარკვეული ნაწილი წმინდა მათემატიკისა. ნასირ ედინმა შესანიშნავად დაამუშავა როგორც ბრტყელი, ისე სფერული ტრიგონომეტრია; მეტად მნიშვნელოვანია სამკუთხედის სამი კუთხის საშუალებით გვერდების განსაზღვრის ხერხი, რომლითაც ახლა ჩვენ ვსარგებლობთ.



ნახ. 58.

არაბულ მათემატიკურ სკოლას ეკუთვნის აგრეთვე ულუღ ბეგი, რომელიც 1394 წელს დაიბადა. ის 17 წლისა იყო, როდესაც მისმა მამამ შაჰრუხმა ის დანიშნა ერთერთი ოლქის სრულუფლებიან მმართველად. ოლქის მმართველობა და მტრების წინააღმდეგ მრავალჯერ გამართული ლაშქრობა ულუღ-ბეგს ბევრ დროსართმევდა, მაგრამ ის მაინც ახერხებდა მეცნიერულ მუშაობას; მას, ისტორიკოსების გადმოცემით, ხელს უწყობდა არაჩვეულებრივი მეხსიერება, რომლითაც ის დაჯილდოებული იყო. ზუსტ მეცნიერებას ულუღბეგი ღვთისმეტყველებასა და ლიტერატურაზე მაღლა აყენებდა; მისი აზრით ზუსტ მეცნიერებათა დასკვნები ინარჩუნებენ თავის მნიშვნელობას ყოველ დროს და ყოველი ხალხისათვის, დამოუკიდე-

ბლად რელიგიისა. დაახლოებით 1420 წელს მან ააშენა სამარყანდში ასტრონომიული ობსერვატორია. სადაც თვითონ აწარმოებდა დაკვირვებებს. ულულ-ბეგის მასწავლებელი იყო სალაჰ-ად-დინ მუსა იბნმაჰმად ყაზი-ზადე რუმი. ამ უკანასკნელის რჩევით ულუღ-ბეგმა ქაშანიდან მიიწვია თავის ობსერვატორიაში სამუშაოდ ასტრონომი ღიას-ად-დინ ჯემშიდი.

როგორც ისტორიკოსი ბარტოლდი გადმოგვცემს, ულუღ-ბეგს ეხმარებოდნენ ასტრონომიული ცხრილის შედგენაში ყაზი-ზადე და ღიას-ადდინი. თუ ბარტოლდის მიერ მოცემულ ცნობებს დავუჯერებთ, ღიას-ადდინმა, რომელიც ყაზი-ზადეზე ადრე გარდაიცვალა, შეადგინა მათემატიკური შრომა ულუღ-ბეგის ბიბლიოთეკისათვის; ამ შრომის წინასიტყვაობაში მოხსენებულია ღიას-ად-დინის სხვა შრომები და მათ შორის მის მიერ შედგენილი ასტრონომიული ცხრილიც, რომელსაც ჩვენამდე არ მოუღწევია. ამიტომ, როგორც ბარტოლდი ამბობს, გამოურკვეველია, თუ რამდენად განსხვავდება ღიას-ად-დინის ცხრილი ულუღ ბეგის ცხრილისაგან. იმავე ბარტოლდის გადმოცემით, ულუღ-ბეგს ეხმარებოდა ცხრილების შედგენაში ერთ-ერთი მისი კარის კაცთაგანი, მაშინ განთქმული ასტრონომი ალ-ად-დინ ალი იბნმაჰმად კუჩი.

ულუღ-ბეგის ტრაქტატი თვით ულუღ-ბეგის ტრიგონომეტრიულ შრომასაც შეიცავს, სახელდობრ მის მიერ შედგენილი სინუსებისა და ტანგენსების ცხრილებს და, გარდა ამისა, ამ შრომაში მოცემულია საერთოდ არაბთა ტრიგონომეტრიის საფუძვლები.

ტრიგონომეტრიის მასწავლებლები ევროპელებისა არაბები იყვნენ. დაახლოებით XIII საუკუნიდან არაბთა ტრიგონომეტრია ვრცელდება ევროპაში.

უშუალოდ არაბებისაგან ტრიგონომეტრიის გადმოღება ქართველებსაც დაუწყიათ XVII საუკუნის დამლევიდან ან XVIII საუკუნის დასაწყისიდან (თუ უფრო ადრე არა). ამას ადასტურებს ორი შრომა ქართულ ენაზე ასტრონომიული ხასიათისა. ერთი მათგანი (ხელნაწერი), ცნობილია როგორც ულუღ-ბეგის შრომის თარგმანი, თუმცა ის კომპილაციური შრომაა. ეს უკანასკნელი შეიცავს ულუღ-ბეგის ტრიგონომეტრიულ ცხრილებს და საერთოდ არაბულ ტრიგონომეტრიის საფუძვლებს.*

---

* დ. ც ხ ა კ ა ი ა, „ახლო აღმოსავლეთის ხალხთა ტრიგონომეტრია ასტრონომიულ ლიტერატურის ერთერთ ქართულ ძეგლში. თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტის შრომები. ტ. XIII, 1944.

თავი VIII

ქართული ქრონოლოგიური გამოთვლები X, XI და XII საუკუნეებში

§ **1. მზიური კალენდრის პირველი ქართული ფორმულა.** მ. ბროსემ საკმაოდ ვრცელი შრომა დაწერა საყოველთაო და კერძოდ ქართული საეკლესიო ტექნიკური ქრონოლოგიის შესახებ. თავის შრომას მან დაურთო სამი ქართული ხელნაწერის ფრანგული თარგმანი:

1) იოანე შავთელის მიერ შედგენილი ასურელთა კინოკლოსი ანუ კალენდარი.

2) ვახუშტი ბატონიშვილის კალენდარი (1755 წ.)

3) X საუკ. ქრონოლოგიური ტრაქტატი.

პირველი ამათგანი შედგენილია XII საუკუნის პოეტის იოანე შავთელის მიერ და გადაწერილია 1233 წელს.

ზემოხსენებული ტრაქტატების გარდა ჩვენს მიერ დასმული საკითხის გაშუქებისათვის ძირითად წყაროს წარმოადგენს კიდევ ერთი ქართული ხელნაწერი ასტრონომიული შინაარსისა (საქ. მუზეუმის ხელნაწერი A — 38). ის დაწერილია 1008 წელს, რაც ჩანს ავტორის შემდეგი სიტყვებიდან: „დასაბამითგან რომელი წელნი გარდასულარიან ესრე იცნობების: ჯვარცმამდე უფლისა ჩვენისა იესუ ქრისტესა Ⴝ:Ⴔ:Ⴊ:Ⴃ შემდგომად ჯვარცმისა ვიდრე აქამდე Ⴘ:Ⴍ:Ⴃ" ე. ი. ჯვარცმამდე გასულა 5534 წელი და ჯვარცმიდან შრომის დაწერის წლამდე 974 წელი. ავტორს წელთაღრიცხვის საფუძვლად აღებული აქვს ალექსანდრის ანუ იულიუს აფრიკანუსის (იულიუს აფრიკანუსი — III საუკუნის ალექსანდრიის მათემატიკოსია) ერა 5500 წლიანი და ამიტომ შრომის დაწერის წელი იქნება $974 + 34 = 1008$ წელი.

XI საუკუნის ტრაქტატის (1008 წლის, რომელიც ბროსეს მიერ გამოცემული არაა) მე-237—238 ფურცლებზე ვკითხულობთ: „ხოლო დადგომასა იანვრისა წლითი წლად დაერთვის ერთი ნიადაგად რიცხვსა მას ერთი რიცხვად ყოველნი წელიწადნი. როდეს გინდოდეს

ძიება Ⴊ ეულისა იპყრნ დასაბამითგანნი წელნი ვიდრე წელიწადამდე რომელსაც ზედა დგეს და ႩႨ ეულად გაუტევე და რომელ უმცრო დაგრჩეს Ⴃ აღრიცხვე, თუ ႣႣ ოდენი იყოს ცანლა ნაკი არს მას წელსა, თუ Ⴃ სა უმცრო იყოს, არ არს ნაკი და რაოდენი ოთხი იყოს ეგდენი თითო დაურთე და შვიდეულდ გაუტევე და რაჲ დაგრჩეს ეგდენი იყოს შვიდეული მის წლისაჲ

ႠႡႢႤ ႅႦႠႢ ႣႤႅႠ ႡႢႣႅ ႦႠႡႣ ႤႅႦႡ ႢႣႤႦ

ეს არს Ⴊ ეული.

დღესაძიებელი რომელი დაერთვის თვედ თვედ ესრეთ არის: იანვარი ႪႠ დღესაძიებელი არა, თებერვალი სამ წელ ႩႨ მეოთხესა წელსა ႩႧ დღესაძიებელი Ⴂ, მარტი ႪႠ დღესაძიებელი Ⴂ, აპრილი Ⴊ, დღესაძიებელი Ⴂ, მაისი ႪႠ დღესაძიებელი Ⴀ, ივნისი Ⴊ დღესაძიებელი Ⴃ, ივლისი ႪႠ, დღესაძიებელი Ⴅ, აგვისტო ႪႠ, დღესაძიებელი Ⴁ, სექტემბერი Ⴊ, დღესაძიებელი Ⴄ, ოქტომბერი ႪႠ, დღესაძიებელი არა, ნოემბერი Ⴊ, დღესაძიებელი Ⴂ, დეკემბერი ႪႠ, დღესაძიებელი Ⴄ.

უკვე თუ გინდის ცნობაჲ დღისა იპყრნ დღენი მის თვისა მას დღემდე რომელსა ეძიებდე და დაურთე დღესაძიებელნი მის თვისაჲ და შვიდეული მის წლისა და შვიდეულდ გაუტევე და რაჲ დაგრჩეს იგი იყოს დღეჲ, თუ ერთი დაგრჩეს კვირიაკეჲ არს, თუ ორი ორშაბათი და ესრეთ ყოველნი დღენი"...

ქართველები, ისე როგორც ებრაელები და ბერძნები კვირეულის დღეებს ციფრებით აღნიშნავდნენ: კვირა — 1, ორშაბათი — 2, სამშაბათი — 3, ოთხშაბათი — 4, ხუთშაბათი — 5, პარასკევი — 6 და შაბათი — 7; ამ ციფრებს ჩვენ ვუწოდებთ „დღეთა ნომრებს“. ქართულ ტრაქტატებში „წლის შვიდეული“ ნიშნავს წლის დასაწყისი დღის ნომერს. XI საუკუნის ტრაქტატის ავტორს წლის დასაწყისად ჯერ პირველი იანვარი აუღია, მაგრამ 28 წლიანი მზის ციკლის წლების შვიდეულების მიმდევრობისა და ნებისმიერი წლის შვიდეულის მოსაძებნი წესის შესადგენად მას დაუშვია, რომ წელიწადი იწყება პირველ მარტს. მართლაც, ციკლის პირველი წლის საწყისია Ⴀ=1 (კვირა), მეორე წლის — Ⴁ=2 (ორშაბათი), მესამე წლის — Ⴂ=3 (სამშაბათი), მეოთხე წლის — Ⴄ=5 (ხუთშაბათი); რადგან მეოთხე წელი

ნაკიანია და მან მეოთხე წლის საწყისი ნომერი ორი ერთეულით მეტი აიღო მესამე წლის საწყისის ნომერთან შედარებით, ეს იმას ნიშნავს, რომ მან მესამე წლის ბოლოს ე. ი. თებერვალს დაუმატა ერთი დღე, ჩასთვალა რა ის თვე 29 დღიანად; ეს კი იმას ადასტურებს, რომ მას წლის საწყისად ნამდვილად აუღია პირველი მარტი. ასეთი დაშვება მას უადვილებს ყოველი წლის შვიდეულის ანუ ყოველი წლის საწყისი დღის ნომრის გამოთვლას. საამისოდ XI საუკუნის ტრაქტატში ჩამოყალიბებული წესი მოითხოვს დასაბამითგან წელთა რიცხვის „ოცდარვეულად განტევებით“ ნაშთის მოძებნას. თუ როგორ უნდა შესრულდეს ეს მოქმედება, ამის შესახებ ამ ტრაქტატში არაფერია ნათქვამი. ის XII საუკუნის ტრაქტატში შემდეგნაირადაა ახსნილი:

„ოცდარვეულად ესრეთ განუტევე, ოცდაათისაგან ორთა აიღებდი და სამოცისაგან ოთხთა წელიწადთა და ასისაგან და ასისაგან თექუსმეტსა და თექუსმეტსა და ათასისა და ათასისაგან ოცსა და ოცცსა და რაჲ ასად გახდებოდეს მაშინაც თექუსმეტსა წელიწადსა აიღებდი ოცდრვეულსა დანამატებად და ამით რიცხვთა როდენ წლეული წელიწადი გეპოვნების დასაბამით აღსასრულამდე, რაოდენიცა გინდეს, გინა გარდასული, გინა წინამდებარე; დაღაცათუ შვიდ ათასთა მეტი არა დაბადებულ არს განა შენ ამით საქმითა დასაბამითგან და აღსასრულსა აღმა ბევრის ბევრეულსაც შეიგებ უკეთუ ბუნებასა რადმე შეაქცევდე და რიცხვისა სიმართლესა უკეთუ ცხადყოფს და შეუცილებლობასა რაოდენ გინდა დიდნი წელიწადნი გამოიძივნე; თუ მაშინ ესე ყოველივე ვითა ყოფილაო და ათჯერ ათასსა ვინაჲთგან ბევრი ჰქჳან, რაოდენისაც ბევრისა დასაბამთაგან გწადდეს, თუ მაშინ ვითა იქნებისა თვითო ბევრეულისაგან ექუსსა და ექუსსა აიღებდი და მასცა ცხრამეტულად განუტევებდი და ოცდარვეულსა განსატევებლად ბევრეულისაგან ოთხოთხსა წელიწადსა აიღებდი და მასცა ოცდარვეულად განუტევებდი“ (A — 85, ფურც. 326).

6837 რიცხვის „ოცდარვეულად განტევება“ ანუ 28-ს ჯერადის ჩამოცალებით უმცირესი ნაშთის მოძებნას ქართველი გამომთვლელი აწარმოებს ძველი საბერძნეთის (III საუკუნის) მათემატიკოსის დიოფანტეს მიერ ხმარებულ მიმდევრობით გამოკლების ხერხით. თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე რიცხვის „ოცდარვეულად განტევება“ შეიძლება ასე გადმოვცეთ:

მოცემულია რიცხვი 6837.

$$
\begin{array}{rcll}
7 & \equiv & 7 & (\mathrm{mod}\ 28) \\
30 & \equiv & 2 & \text{„} \quad \text{„} \\
100 & \equiv & 16 & \text{„} \quad \text{„} \\
800 & \equiv & 128 & \text{„} \quad \text{„} \\
128 & \equiv & 16 & \text{„} \quad \text{„}
\end{array}
$$

უკანასკნელი ორიდან გამომდინარეობს $800 \equiv 16 \ (\mathrm{mod}\ 28)$.

$$
\begin{array}{rcll}
1000 & \equiv & 20 & (\mathrm{mod}\ 28) \\
6000 & \equiv & 120 & \text{„} \quad \text{„} \\
120 & \equiv & 8 & \text{„} \quad \text{„}
\end{array}
$$

უკანასკნელი ორიდან — $6000 \equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 28)$

საბოლოოდ გვექნება

$$
\begin{array}{rcll}
7 & \equiv & 7 & (\mathrm{mod}\ 28) \\
30 & \equiv & 2 & \text{„} \quad \text{„} \\
800 & \equiv & 16 & \text{„} \quad \text{„} \\
6000 & \equiv & 8 & \text{„} \quad \text{„} \\
\hline
6837 & \equiv & 33 & (\mathrm{mod}\ 28); \quad 33 \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 28)
\end{array}
$$

ე. ი. $6837 \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 28)$

ქართველი გამომთვლელი ამ ხერხს მიმართავს იმიტომ, რომ მაშინ ცნობილი არ იყო ახლანდელი გაყოფის წესი, რომელიც ინდოელებისა და არაბების მიერ ხმარებულ გაყოფის წესის განვითარებაა.

აქედან აშკარაა, რომ XI — XII საუკუნის ქართველ გამომთვლელებს სცოდნიათ ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსის დიოფანტეს არითმეტიკა და რიცხვთა თეორიის ელემენტები.

XI საუკუნის ტრაქტატში ჩამოყალიბებული წესის საშუალებით ვიპოვოთ 1947 „წლის შვიდეული“ ანუ ამ წლის საწყისი დღის ნომერი იმ დაშვებით, რომ წელი იწყება 1 მარტს იულიანური კალენდარით.

დასაბამითგან წელთა რიცხვი $= 5534 + 1947 = 7481$.

$$7481 \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 28); \left[\frac{5}{4}\right] = 1; \ 5 + 1 = 6$$

ე. ი. 1 მარტი იულიანური კალენდარით (ძველი სტილით) ანუ 14

მარტი გრიგორიანული კალენდარით (ახალი სტილით) — პარასკევია. ამის შემდეგ XI საუკუნის ტრაქტატის ავტორი გვაძლევს დღესაძიებლების ცხრილს: იანვრის დღესაძიებელი — 0, თებერვლის — 3, მარტის — 3, აპრილის — 6, მაისის — 1, ივნისის — 4, ივლისის — 6, აგვისტოს — 2, სექტემბრის — 5, ოქტომბრის — 0, ნოემბრის — 3, დეკემბრის — 5 (რომელიმე თვის დღესაძიებელს ქართველი ქრონოლოგები უწოდებდნენ იანვრიდან დაწყებული აღებულ თვემდე ყოველ თვეში 28-ს ჭარბი დღეთა რიცხვის ჯამის უმცირეს დადებით ნაშთს მოდულით შვიდი). ამის შემდეგ ჩამოყალიბებულია მოცემული წლის ნებისმიერი თვის ნებისმიერი დღის ნომრის მოსაძებნი წესი, რომელიც მდგომარეობს „წლის შვიდეულის," თვის „დღესაძიებლისა" და იმავე თვის დღეთა რიცხვის (პირველიდან იმ დღემდე უკანასკნელის ჩათვლით, რომლის ნომერსაც ვეძებთ) ჯამის „შვიდეულად განტევებში". ეს საბოლოო წესი სავსებით ზუსტ შედეგებს იძლევა მხოლოდ მაშინ, თუ „წლის შვიდეულად" აღებულია პირველი იანვრის ნომერი. ავტორმა, როგორც ზემომოყვანილ ციტატიდან ჩანს, ტრაქტატის დასაწყისშივე აღნიშნა, რომ წლის საწყისი პირველი იანვარია; დღესაძიებლების გამოთვლასაც აწარმოებს პირველ იანვრიდან და არა პირველ მარტიდან. ხოლო გამოთვლის გამარტივებისათვის მას დაუშვია წლის საწყისად პირველი მარტი და მოუცია ამ დღის ნომრის გამოსათვლელი წესი. საბოლოო წესში კი ავტორი აუცილებლად გულისხმობს, რომ წლის შვიდეული არის პირველ იანვრის დღის ნომერი, რადგან პირველი მარტის დღის ნომერი თუ ცნობილია, პირველ იანვრის დღის ნომერი ადვილად მოიძებნება (ამისათვის საჭიროა პირველი მარტის დღის ნომრის მხოლოდ სამით შემცირება).

კალენდრის შესადგენი ეს ქართული წესი შევადაროთ გრიგორიანულ კალენდრისათვის მოცემულ ცელერის ფორმულას:

$$f \equiv k - 1 + [2{,}6\,m + 0{,}8] + D + \left[\frac{D}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] - 2C \pmod 7$$

სადაც f-ით აღნიშნულია N-ური წლის m-ური თვისა და k-ური დღის შესაბამი ნომერი (ნომრებით 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, აღნიშნულია კვირა, ორშაბათი, სამშაბათი, ოთხშაბათი, ხუთშაბათი, პარასკევი და შაბათი). C ასწლეულების რიცხვია. $D<100$

$$S_m = [2{,}6\,m + 03]$$

როდესაც m გაივლის თვეების: მარტის, აპრილის და ა. შ. თებერვლის შესაბამ რიცხვებს:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$$

სახელდობრ

$$S_1=3,\ S_2=6,\ S_3=8,\ S_4=11,\ S_5=13,\ S_6=16,$$
$$S_7=19,\ S_8=21,\ S_9=24,\ S_{10}=26,\ S_{11}=29,\ S_{12}=32.$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ ქართული „დღესაძიებელი“ იგივეა, რაც ცელერის ფორმულაშია S_1, $S_2 \ldots$ და S_{10}, გარდა S_{11} და S_{12}-სი, რადგან ცელერის ფორმულაში წლის დასაწყისად დაშვებულია პირველი მარტი. ხოლო, როდესაც $S>7$, მაშინ დღესაძიებელი მიიღება S-გან 7-ის ანუ 7-ის ჯერადის ჩამოცილებით.

ქართული წესი (XI საუკუნის ტრაქტატისა) შეიძლება გავაფორმოთ მათემატიკურად. ამისათვის f-ით აღვნიშნოთ N-ური წლის, ნებისმიერი თვის და ნებისმიერი დღის ნომერი. K-თი აღვნიშნოთ დღეთა რიცხვი პირველ იანვრიდან იმ დღემდე, რომლის ნომერსაც ვეძებთ.

„წლის შვიდეულის“ ანუ პირველი მარტის დღის ნომერის მოსაძებნად საჭიროა ჯერ მოიძებნოს $5534+N$-ის არაუარყოფითი უმცირესი ნაშთი მოდულით 28; მაგრამ $5534+N$-ის ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ $N+18$, თანახმად ისევ ქართველ გამომთვლელების ხერხისა ($5534+N+18-18=5516+N+18$; 5516 ჯერადია 28-ისა).

ქართველი გამომთვლელები რომ ასეთ ხერხს მიმართავდნენ, ეს ცხადია ვახუშტის მიერ შედგენილ ქართულ კალენდარიდან: „თუ გენებოს მზის მოქცევის პოვნა ქრისტეს აქათით, მოიტანე იმ წლის ქრისტეს აქათი, მიუმატე მას 20, გაყავ 28“ (ამ შემთხვევაში გამოყენებულია 5503 წლიანი ბერძნული ერა და ტრაქტატის დაწერის წელი 1755; $5508+1755=5508+1755+20-20=5488+1755+20$; 5488 ჯერადია 28-სა). $N+18$-ის არაუარყოფითი უმცირესი ნაშთი მოდულით 28 აღვნიშნოთ a-თი; ე. ი. $a \equiv N+18 \pmod{28}$; მაშინ „წლის შვიდეულ“ ანუ 1 მარტის დღის ნომერი იქნება $a+\left[\frac{a}{4}\right]$ ან $a+\left[\frac{a}{4}\right]$-ის არაუარყოფითი უმცირესი ნაშთი

მოდულით 7, როდესაც $a+\left[\frac{a}{4}\right]>7$. რადგან XI საუკუნის ტრაქტატში მოთავსებულ საბოლოო წესში წლის დასაწყისად იანვარია ნაგულისხმევი, ამიტომ „წლის შვიდეული“ ანუ 1 იანვრის დღის ნომერი იქნება $a+\left[\frac{a}{4}\right]-3$ ანდა $a+\left[\frac{a}{4}\right]-3$-ის არაუარყოფითი უმცირესი ნაშთი მოდულით 7 როდესაც $a+\left[\frac{a}{4}\right]-3>7$ $\left(\text{ანდა } a+\left[\frac{a}{4}\right]+4 \text{ ანუ მისი უმცირესი ნაშთი მოდულით } 7\right)$.

ამრიგად სამოქალაქო ქართული კალენდარის შესადგენი წესი ანუ ნებისმიერი თვის ნებისმიერი დღის ნომერის მოსაძებნი წესი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$f \equiv k+a+\left[\frac{a}{4}\right]-3 \pmod{7}.$$

ამ ფორმულას ვუწოდოთ ქართული კალენდარის პირველი ფორმულა.

ამ შემთხვევაში 1 მარტის დღის ნომერი მეტია 1 იანვრის დღის ნომერზე; მაგრამ შეიძლება ისეთი შემთხვევაც იყოს, როდესაც 1 მარტის ნომერი ნაკლებია 1 იანვრის ნომერზე, მაშინ ფორმულა იქნება შემდეგი სახის:

$$f \equiv k+a+\left[\frac{a}{4}\right]+4 \pmod{7}.$$

მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ ერთი შემთხვევით ანუ ამ ორი ფორმულის ნაცვლად დავტოვოთ მხოლოდ პირველი, რადგან ორივე შემთხვევაში უმცირესი ნაშთი მოდულით 7 ერთი და იგივე რიცხვი იქნება.

ჩვენი აღნიშვნის თანახმად ამ ფორმულაში k — დღეთა რიცხვია 1 იანვრიდან იმ დღემდე (უკანასკნელის ჩათვლით), რომლის ნომერს ვეძებთ, თანახმად ისევ ქართული წესისა, რომელიც მოცემულია XII საუკუნის ტრაქტატში: „ამისაგან შეიქმნება დღის საძიებელი თვეთანი; უკეთუ ზეპირ დასწავლად დაგვიწყდებოდეს ამითვე სათვალავითა ჰპოებდი, რომლისა დღისსაძიებელი გინდეს და თუ გეწადოს ესეცა იქნების, რომლისაცა წმინდისა დღესასწაულსა ეძიებ-

დე, გინა საუფლოსა, რაოდენსაცა თვისსა რომელიცა იყოს ერთით-გან და ვიდრე გარდამოვლამდე მას ეგზომსა ზედა იანვრისა დაწ-ყებითგან გარდასულნი ყოველნი დღენი წინაჲსთა თვეთანი ზედა-დაათვალავენ და ერთბაშად შვიდეულად განუტევენ ნაცვლად დღის საძიებელისა და ხარებაჲ ცა ზედავე დაათვალე მის წელიწადისაჲ და რაჲცაოდა მას დაჰმეტდეს იგი დღე იქნების მისთვის მაგზომი" (A — 85. ფურც. 323).

საბოლოოდ პირველი ქართული ფორმულა დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$f \equiv k + a + \left[\frac{a}{4}\right] - 3 \pmod 7$$

სადაც $a \equiv N + 18 \pmod{28}$.

ეს უკანასკნელი ზუსტ შედეგს იძლევა ყველა წლისათვის, გარდა იულიანურ კალენდრით ნაკიანი წლების შემდეგი პირველი წლები-სათვის; მაგალითად 1945, 1949 და ასე შემდეგ წლებისათვის. ამ წლებში ამ ფორმულით მიღებული შედეგი ერთით განსხვავდება იმისაგან, რაც სინამდვილეში უნდა იყოს. ამიტომ იულიანური კა-ლენდრით ნაკიანი წლის შემდეგი პირველი წლისათვის ფორმულა იქნება ასეთი:

$$f \equiv k + a + \left[\frac{a}{4}\right] - 2 \pmod 7$$
$$a \equiv N + 18 \pmod{28}$$

მიზეზი ამისა შემდეგია: იულიანურ და გრიგორიანულ კალენდრებ-ში ნაკიანია ჩვენი ერას ისეთი წლები, რომლებიც ოთხზე გაიყო-ფიან უნაშთოდ, ხოლო XI საუკუნის ტრაქტრატში მოთავსებულ კალენდარში ნაკიანი წლებია ისეთები $5534 + N$ (N ჩვენი ერას წელთა რიცხვია) წლები, რომლებიც გაიყოფიან ოთხზე უნაშთოთ. მაგალითად ნაკიანი წლებია, რომლებიც ჩვენი ნაკიანი წლებზე ორი წლით ადრე დადგებიან, ე. ი. წელნი 1942, 1946, 1950 და ასე შემდეგ. 1945 წლისათვის 1 მარტის დღის ნომერია $a + \left[\frac{a}{4}\right] = 3 + \left[\frac{3}{4}\right] = 3$, ხოლო 1946 წლისათვის კი $a + \left[\frac{a}{4}\right] = 4 + \left[\frac{4}{4}\right] = 5$

რადგან 1946 წელი ნაკიანია XI საუკუნის ტრაქტატის მიხედვით. სხვაობა 1946 წლის და 1945 წლის 1 მარტის დღის ნომრებს შორის $=5-3=2$; ასეთივე იქნება სხვაობა ორივე წელთა 1 იანვრის დღის ნომრებს შორის; მაგრამ 1945 წ. და 1946 წელი ორივე უბრალო წლებია იულიანური კალენდარის მიხედვით და მათი 1 მარტის ან 1 იანვრის დღის ნომრებთა შორის სხვაობა უნდა უდრიდეს არა ორს, არამედ ერთს. თუ კი 1947 წლის (ასევე 1946 წლის) 1 იანვრის დღის ნომერია $a+\left[\frac{a}{4}\right]-3$, მაშინ 1945 წლის 1 იანვრის დღის ნომერი უნდა ავიღოთ ერთით მეტი ე. ი. $a+\left[\frac{a}{4}\right]-2$ რომ ამით სხვაობას 1946 და 1945 წელთა 1 იანვრის დღის ნომრებს შორის შევამციროთ ერთით, ე. ი. გავხადოთ ერთის ტოლი, ნაცვლად ორისა. ასეთივე მდგომარეობაა 1948 და 1949 წლებშიც. 1949 წლის 1 მარტის ნომერია $7+\left[\frac{7}{4}\right]=8$; 1948 წლის კი — $6+\left[\frac{6}{4}\right]=7$; სხვაობა მათ შორის $=1$; ასეთივე იქნება სხვაობა 1 იანვრის დღის ნომრებს შორის ამ წლებისა; მაგრამ იულიანური ან გრიგორიანული კალენდარით 1948 წელი ნაკიანია და 1949 წელი კი უბრალოა და ამიტომ მათი 1 იანვრის დღის ნომრებს შორის სხვაობა უდრის ორს; ამის გამო თუ ჩვენ 1948 წლის 1 იანვრის დღის ნომერი ავიღეთ $a+\left[\frac{a}{4}\right]-3$, მაშინ 1949 წლის 1 იანვრის ნომერი უნდა ავიღოთ ერთით მეტი ე. ი. $a+\left[\frac{a}{4}\right]-2$, რომ ამით სხვაობა 1949 წლის 1 იანვრის და 1948 წლის 1 იანვრის ნომრებს შორის გავადიდოთ ერთით ანუ ეს სხვაობა, რომელიც ერთის ტოლი იყო, გავხადოთ ორის ტოლი.

ფორმულების $f \equiv k+a+\left[\frac{a}{4}\right]-3 \pmod{7}$

$$a \equiv N+18 \pmod{28} \text{ და}$$

$$f \equiv k+a+\left[\frac{a}{4}\right]-2 \pmod{7}$$

$$a \equiv N+18 \pmod{28}$$

სისწორე ჩვენ შევამოწმეთ 1945, 1946 და 1947, 1948 წლებისათვის ე. ი. იმ ოთხწლედისათვის, რომელიც ერთ ნაკიან წელს შეიცავს; რადგან ნაკიანი წელი მეორდება პერიოდულად ყოველ ოთხ წელში, ამიტომ ეს ფორმულები სამართლიანია ყველა დანარჩენ ოთხწლედში, ანუ ისინი სამართლიანია ნებისმიერი წლისათვის.

$$f \equiv k + a + \left[\frac{a}{4}\right] - 2 \pmod 7$$
$$a \equiv N + 18 \pmod{28}$$

ფორმულა ჩვენ შევადგინეთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც 1 მარტის ნომერი მეტია 1 იანვრის ნომერზე, მაგრამ როდესაც პირიქითაა, მაშინ ფორმულა იქნება

$$f \equiv k + a + \left[\frac{a}{4}\right] + 5 \pmod 7$$
$$a \equiv N + 18 \pmod{28}.$$

მაგრამ შეიძლება დავკმაყოფილდეთ მათგანიდან მხოლოდ ერთით ჩვენს მიერ უკვე ზემოთქმულ მოსაზრების გამო.

მაგალითი: 1) გამოვთვალოთ 1947 წლის 8 აპრილის დღის ნომერი

$$k = 98;\ N = 1947;\ N + 18 = 1965.$$

$$1965 \equiv 5 \pmod{28};\ a = 5;\ a + \left[\frac{a}{4}\right] = 6.$$

ჩავსვათ პირველ ქართულ ფორმულაში: მივიღებთ:

$$f \equiv 98 + 6 - 3 \pmod 7;\ f = 3$$

ე. ი. 1947 წლის 8 აპრილი სამშაბათია.

მაგალითი 2) გამოვთვალოთ 1948 წლის 3 დეკემბრის დღის ნომერი

$$k = 338;\ N + 18 = 1966;\ 1966 \equiv 6 \pmod{28}$$

$$a = 6;\ a + \left[\frac{a}{4}\right] = 7;\ f \equiv 338 + 7 - 3 \pmod 7$$

$f = 6$; ე. ი. 1948 წლის 3 დეკემბერი პარასკევია.

მაგალითი 3) გამოვთვალოთ 1946 წლის 1 მაისის დღის ნომერი:

$$k=121, \ N=1946; \ N+18=1964; \ 1964 \equiv 4 \pmod{28};$$

$$a=4; \ a+\left[\frac{a}{4}\right]=5; \ f \equiv 121+5-3 \pmod{7}; \ f=4$$

ე. ი. ოთხშაბათი. რაც შეეხება 5534 წლიან ერას, ის მიღებულია იულიუს აფრიკანუსის მიერ შემოღებული 5500 წლიან ერას გადაკეთებით. რიცხვი 5534 შერჩეულია საგანგებოდ ისეთი 28 წლიანი მზის ციკლის შესადგენად, რომელშიც წელიწადი იწყება 1 მარტს, რითაც უფრო ადვილდება გამოთვლა. დაუმატა რა 34 წელი (დაბადებამდე) 5500 წლიან ერას, მიღებულ 5534 წლიან ერას ქართველ ქრონოლოგმა დაარქვა ერა „ჯვარცმამდე“ (ცნობილია, რომ ჩვენი ერას შემომღებმა, ბერმა დიონისემ, რომელმაც გამოაცხადა, რომ თითქოს ქრისტე დაიბადა 532 წლის წინათ, მან რიცხვი 532 იმიტომ აიღო, რომ ის განსაკუთრებით მოხერხებულია ყოველგვარი საკალენდარო გამოთვლების დროს: $532=28 \cdot 19$ სადაც 28 — მზის ციკლთა და 19 — მთვარის ციკლია).

ცნობილია, რომ ქართველებს ჰქონდათ საკუთარი 5604 წლიანი ერა; აგრეთვე ხმარობდნენ 5508 წლიან ბერძნულ ერას. ცნობილია აგრეთვე 5520 წლიანი სირიული ერა და 3761 წლიანი ებრაული ერა. 5534 წლიანი ერაც, ჩემის აზრით, შემოღებულია ქართველ გამომთვლელის მიერ, რადგან მას ჩვენ ვპოულობთ მხოლოდ ქართულ ტრაქტატებში. ბროსე, რომელიც დაწვრილებით იძლევა იმის ახსნას, თუ რომელი ხალხის მიერ არის შემოღებული, 5534 წლიან ერას ავტორს არ ასახელებს; ჩემის აზრით ის თავს იკავებს ამ ერას ავტორად ქართველების დასახელებისაგან იმის გამო, რომ ზემოხსენებულ ორი ტრაქტატიდან ბროსე იცნობდა მხოლოდ ერთს — X საუკუნის ტრაქტატს.

§ 2. **მზიური კალენდრის მეორე ქართული ფორმულა.** 5604 წლიანი ქართული ერას მიხედვით წელიწადი იწყება 25 მარტს. ეს რიცხვი — 5604, შერჩეულია საგანგებოდ ამ მიზნისათვის და ამ ერას შემოღების მიზეზია ისეთი სამოქალაქო კალენდრის შედგენის მოთხოვნილება, რომელიც 25 მარტიდან იწყება. ასეთ დასკვნა უშუალოდ გამომდინარეობს XII საუკუნის ტრაქტატიდან: „ბერძნული საუფალავი და ქართული ამან მიზეზმან განყო რაიმელ დასაბამითგან ოცდარვეულად განტევებითა ხარება იპოვნების ვითა ზემოკთ მით-

ქუამს დანამატებსა ზედა ნაკთაცა ზედა დათულითა და მისთა შვი-დეულად განტევებითა და ბერძენი ესრევე ოცდარვეულად განუტევე-ბენ და ესრევე დანამატებსა ზედა ნაკთა დათუალავენ და მას განუ-ტევებენ შვიდეულად და ამით ხარებისა წინა დღესა ჰპოებენ და მას იპყრობენ შვიდეულად მის წელიწადისად" (A — 85, ფურ-ცელი 321).

„წლის შვიდეულის" მოძებნის წესიც, რომელიც XII საუკუნის ტრაქტატშია ჩამოყალიბებული, გვარწმუნებს იმაში, რომ გამოთვ-ლების დროს თუ საფუძვლად ავიღებთ 5604 წლიან ერას, მაშინ „წლის შვიდეულად" მივიღებთ 25 მარტის (ძველი სტილით) ანუ 7 აპრილის (ახალი სტილით) დღის ნომერს.

ქართველებს რომ ისეთი კალენდარიც ჰქონდათ, რომელშიც წლის დასაწყისი 25 მარტია, ამაში გვარწმუნებს XII საუკუნის ტრაქ-ტატიდან სიტყვები: „შვიდეული მის წლისაჲ რომელ არს ხარებაჲ" A — 85. ფურცელი 320), ანდა კიდევ: „დღესასწაულსა ზედა შვი-დეულსა დაურთავდი მის წელიწადისასა რომელ არს ხარებაჲ" (ფურ-ცელი 321).

XII საუკუნის ტრაქტატში მოცემული წლის შვიდეულის ანუ 25 მარტის დღის ნომრის მოსაძებნი წესი ისეთივეა, როგორიცაა ამავე მიზნით XI საუკუნის ტრაქტატში მოცემული წესი, რომლის მიხედ-ვით, „წლის შვიდეულად" აღებულია 1 მარტი ძველი სტილით. მარ-თლაც, XII საუკუნის ტრაქტატში ვკითხულობთ შემდეგს:

„უკეთუ ხარებაჲცა შეგცილდებოდეს მის წლისაჲ, ესრევე სოფ-ლისა დასაბამითგან ყოველნივე ოცდარვეულად განუტევენ და უკეთუ ერთი დაჰმეტდეს კვირა დღე არს ხარება და თუ ორი—ორშაბათსა არს და თუ სამი დაჰმეტდეს სამშაბათსა და თუ ოთხი დაჰმეტდეს და მას წალმა რაოდენიცალა ოცდარვამდე ოთხეულთაგან თვითო დღეს ზე აიღებდი და მასვე ზედა დაჰმატებდი რაჲ სთენიცალა ოც-დარველუსა დაჰმეტებდეს და მას შვიდეულად განუტევებდი დანამა-ტებსა ნაკებითურთ და რაჲცალა შვიდეულსა დაჰმეტდეს იგი დღე არს ხარებაჲ" (A — 85, ფურცელი 326).

გამოვთვალოთ ამ წესის საშუალებით 1947 წლის 25 მარტის (ძველი სტილით) ანუ 7 აპრილის (ახალი სტილით) დღის ნომერი

$$5604 + 1947 = 7551; \; 7551 \equiv 19 \pmod{28}$$

$$\left[\frac{19}{4}\right] = 4; \; 19 + 4 = 23; \; 23 \equiv 2 \pmod{7}$$

ე. ი. 1947 წლის 25 მარტი (ძველი სტილით) ანუ 7 აპრილი (ახალი სტილით) ორშაბათია (2).

5604 წლიან ერაზე დამყარებული ნებისმიერი წლის, ნებისმიერი თვის, ნებისმიერი დღის ნომრის მოსაძებნი წესი, რომელიც მოთავსებულია XII საუკუნის ტრაქტატის 323-ე ფურცელზე და, რომელიც ჩვენ მოვათავსეთ წინამდებარე შრომის 208 — 209-ე გვერდებზე, შეიძლება გადმოვცეთ შემდეგი სახის ფორმულით

$$\mathrm{f} \equiv \mathrm{k} + a + \left[\frac{a}{4}\right] + 1 \pmod{7}$$
$$a \equiv \mathrm{N} + 4 \pmod{28}$$

ამ ფორმულას ვუწოდოთ ქართული კალენდრის მეორე ფორმულა. აქ K-თი აღნიშნულია დღეთა რიცხვი 1 იანვრიდან იმ დღემდე (უკანასკნელის ჩათვლით), რომლის ნომერს ვეძებთ. N-ით აღნიშნულია ჩვენი ერას წელთა რიცხვი. 5604 + N-ის ნაცვლად ავიღეთ N + 4 თანახმად ქართველი გამომთვლელების მიერ ხმარებულ ხერხისა

$$[5604 + \mathrm{N} + 4 - 4 = 5600 + \mathrm{N} + 4;\ 5600 \equiv 0 \pmod{28}].$$

ერთს იმიტომ უმატებთ, რომ XII საუკუნის ტრაქტატის ავტორს ქართული კალენდარი, რომელშიც წლის დასაწყისი 25 მარტია, მიყვანილი აქვს იულიანურ კალენდარზე, რომელიც იწყება 1 იანვრიდან. ეს ჩანს ავტორის სიტყვებიდან: იანვრითგან გარდასულნი ყოველნი დღენი". ანდა კიდევ: „დალაცათუ დასაბამად წელიწადისად დადგომაჲ სექტემბრისაჲ დადებულ არს, გარნა ესე ვითარსა სათვალავისა გამოძიებისათვის და ამის ყოვლისათვის რომლისა წერასა შინა ვარ იანვარსა დაწყება დადებულ არს წელიწდისა დასაბამად"...

უნაკო წელს 1 იანვარი ერთი დღით წინ არის 25 მარტთან შედარებით, რის გამოც ფორმულაში ერთი ემატება, ხოლო ნაკიან წელს 1 იანვარი და 25 მარტი კვირეულის ერთდაიმავე დღეს არის ხოლმე, რის გამო ნაკიანი წლისათვის მეორე ქართული ფორმულა იქნება შემდეგი:

$$\mathrm{f} \equiv \mathrm{k} + a + \left[\frac{a}{4}\right] \pmod{7}$$
$$a \equiv \mathrm{N} + 4 \pmod{28}$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ 1947 წლის 8 აპრილის დღის ნომერი

$$k=98;\ N=1947;\ N+4=1951;$$

$$1951\equiv 19 \pmod{28};\ a=19;\ a+\left[\frac{a}{4}\right]=23.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები ფორმულაში:

$$f\equiv k+a+\left[\frac{a}{4}\right]+1 \pmod 7$$

$$a\equiv N+4 \pmod{28}.$$

მივიღებთ: $f\equiv 98+23+1 \pmod 7$; აქედან $f=3$; ე. ი. 8 აპრილი სამშაბათია.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ 1948 წლის 1 იანვრის დღის ნომერი

$$k=1;\ 1948+4=1952;\ 1952\equiv 20 \pmod{28};\ a=20$$

$$a+\left[\frac{a}{4}\right]=25.$$

რადგან 1948 წელი ნაკიანია, ამიტომ ჩავსვათ ფორმულაში

$$f\equiv k+a+\left[\frac{a}{4}\right] \pmod 7$$

$$a\equiv N+4 \pmod{28}.$$

მივიღებთ: $f\equiv 1+25 \pmod 7$; $f=5$; ე. ი. 1948 წლის 1 იანვარი ხუთშაბათია.

როგორც ჩანს საქართველოში წელიწადის დასაწყისად მიღებული იყო 1 მარტი, 1 სექტემბერი, 1 იანვარი და 25 მარტი; ნამდვილი ქართული კალენდარია ის, რომელიც იწყება 25 მარტიდან (ძველი სტილით).

XII საუკუნის ტრაქტატის ავტორი ჯერ იძლევა ქართული კალენდარის შესადგენ წესს და შემდეგ კი ეს კალენდარი გადაყავს იულიანურ კალენდარზე, რომელიც 1 იანვარს იწყება. როგორც ზემოთ ვთქვით, კალენდარს, რომელიც იწყება პირველ ან 25 მარტს, უპირატესობა აქვს დანარჩენ კალენდარებთან იმის გამო, რომ გამოთვლა უფრო ადვილდება, რადგან ნაკიანი წლის ერთი ზედმეტი

დღე მესამე წლის ბოლოს ემატება. ცელერმა, რომელმაც თავისი ფორმულა მიიღო XIX საუკუნეში, ამ მოვლენას გაუწია ანგარიში, რაკი მან ფორმულაში წლის დასაწყისად დაუშვა მარტი.

ჩვენს მიერ ზემოთმოყვანილ მოსაზრებებიდან და XII საუკუნის ტრაქტატის ავტორის — იოანე შავთელის სიტყვებიდან დავასკვნით, რომ საქართველოში წლის დასაწყისად დაშვებული იყო 25 მარტი. ბროსეს გადმოცემით წელიწადს იწყებდნენ 25 მარტს ფლორენციელები და ფრანგები XVI საუკუნემდე. საქართველოში კი, მისი აზრით, ამ მხრივ მხოლოდ ცდას ჰქონდა ადგილი. აი რას სწერს ამის შესახებ:

„დასასრულ 25 მარტის ანუ ხარების აღნიშვნა, რომელიც ყველაზე უფრო ლოღიკურია, გავრცელდა და დიდხანს არსებობდა სხვადასხვა ხალხში, მაგალითად ფლორენციაში, შემდეგ სხვადასხვა ფრანგულ პროვინციებში 1563 წლამდე, როდესაც ახალი წელი 1 იანვარს სავალდებულო გახდა კარლოს IX დეკრეტის ძალით. 25 მარტი გონიერად იყო დაფუძნებული ქრისტიანულ ხალხთათვის და დიონისე მადლობის ღირსია თავის განსხეულების ერასი მასთან დაკავშირების გამო. მე მგონია, რომ საქართველოსაც ჰქონია ცდა ამ მიმართულებით". *

მაშინ, როდესაც 5604 წლიანი ერა შერჩეულია საგანგებოდ იმისათვის, რომ თანახმად „წლის შვიდეულის" გამოთვლის წესისა, მან მოგვცეს წლის დასაწყისად 25 მარტი, არ იქნებოდა სწორი იმის თქმა, რომ წელიწადის 25 მარტიდან დაწყების მხოლოდ ცდას ჰქონდა ადგილი საქართველოში. ცნობილი ჭეშმარიტებაა, რომ 5604 წლიანი ერა მხოლოდ ქართველებს ჰქონდათ და ბროსეს მიერაც არა ერთხელ წოდებულია ის ქართულ ერად. ამ ერათი ქართველები სარგებლობდნენ, თუ უფრო ადრე არა VIII საუკუნიდან მაინც, და აქედან ცხადია, რომ ქართველები წლის დასაწყისად 25 მარტს ხმარობდნენ ფლორენციელებზე და ფრანგებზე ადრე. შესაძლებელია, რომ 25 მარტს წლის დაწყება პირველად ქართველებმა შემოიღეს.

ქართველები სარგებლობდნენ 5503 წლიანი ბერძნული ერათი. საერთოდ ცნობილია და ბროსეც აღნიშნავს, რომ სირიელები, მაკედონელები, ებრაელები და ბერძნები წელიწადს სექტემბრიდან იწ-

---

* De la chronologie technique géorgiene eclesiastiqie et civile. Par. M. Brosse. 1875. გვ. 68.

ყებდნენ. იოანე შავთელის გადმოცემით ბერძნები წელიწადს იწყებდნენ 24 მარტს; 1 სექტემბერი და 24 მარტი ყოველთვის კვირეულის ერთი და იგივე დღესაა. „წლის შვიდეული“ გამოთვლილი 5508 წლიან ერას საშუალებით, არის 1 სექტემბრის ნომერი ძველი სტილით (14 სექტემბრის ახალის სტილით) ან 24 მარტის ნომერი ძველი სტილით (6 აპრილის ახალი სტილით). მართლაც, მოვძებნოთ 1947 „წლის შვიდეული“.

$$5508 + 1947 = 7455; \; 7455 \equiv 7 \pmod{28}; \; 7 + \left[\frac{7}{4}\right] = 8$$

$$8 \equiv 1 \pmod{7}.$$

ე. ი. 1 სექტემბერი ძველი სტილით ანუ 14 სექტემბერი ახალი სტილით კვირა დღეა (კვირა დღეა აგრეთვე 24 მარტი ძველი სტილით, ანუ 6 აპრილი ახალი სტილით).

ბროსეს აზრით წლის ყველა დასაწყისი დამყარებულია რელიგიაზე ან კულტზე. მე მგონია, რომ ეს ასე არ არის. წელიწადი ჯერ კიდევ უძველეს დროიდან განსაზღვრული იყო როგორც მზის ეკლიპტიკზე სრული მოქცევა. წლის დასაწყისად უფრო მოხერხებული იყო აეღოთ მზის ეკლიპტიკზე ყოფნის ისეთი მომენტები, როგორიცაა მზებუნიობისა და ნაბუნიობის მომენტები; ეს უკანასკნელნი სწორედ მარტში, სექტემბერში და დეკემბერშია. მაგრამ მზებუნიობის და ნაბუნიობის მომენტები ახლანდელი სიზუსტით ყოველთვის არ განისაზღვრებოდა და მზებუნიობისა და ნაბუნიობის დღეები ცვალებადობდნენ თვის 18 რიცხვიდან 24-მდე. მაგალითად: მზებუნიობისა და ნაბუნიობის დღეებად XI საუკუნის ტრაქტატში მოცემულია 20 მარტი, 19 ივნისი, 18 სექტემბერი და 19 დეკემბერი, ნაცვლად ახლანდელ 21 მარტისა, 22 ივნისისა, 23 სექტემბრისა და 22 დეკემბრისა.

ბროსე ყველაზე უფრო გონიერად და ლოღიკურად სთვლის 25 მარტს წელიწადის საწყისად; მართლაც, ეს ასეა, მაგრამ არა იმიტომ, რომ 25 მარტი „ხარებაა“ ე. ი. მისი აზრით ამისათვის სხვა საეკლესიო დღესასწაულებზე უფრო მნიშვნელოვანი საეკლესიო დღესასწაულია. გონიერი და ლოღიკურია წლის დაწყება მზებუნიობისა და ნაბუნიობიის დღიდან, მაგრამ კიდევ უფრო ლოღიკურია დაწყება საგაზაფხულო მზებუნიობიდან, რადგან ეს დღე გაზაფხულის დასაწყისია. საკალენდარო გამოთვლისათვის, როგორც ზემოთ აღვნიშ-

ნეთ, წლის მარტიდან დაწყება უფრო მოხერხებული და მათემატიკურად უფრო გამართლებულია. როდესაც წლის დასაწყისად 25 მარტი აიღეს, შესაძლებელია, რომ მაშინდელი ასტრონომების გამოთვლით ეს დღე იყო საგაზაფხულო მზებუნიობის დღედ დაწესებული. ასედაც რომ არ ყოფილიყო, წლის დასაწყისის გადატანა საგაზაფხულო მზებუნიობის დღიდან — 20 ან 21 მარტიდან 25 მარტს, მაინც გამართლებული იქნებოდა, რადგან 25 მარტი და 1 იანვარი ყოველთვის კვირეულის ერთი და იგივე დღესაა ნაკიან წლების შემთხვევაში; ეს კი აადვილებს გადასვლას ისეთი კალენდარიდან, რომელიც იწყება 25 მარტს, იულიანურ კალენდარზე, რომელიც 1 იანვარს იწყება. რომ ასეთი გადასვლა ხდებოდა აშკარაა XI და XII საუკუნეების ტრაქტატებში მოცემულ წესებიდან და თვით ცელერის ფორმულიდანაც ჩანს.

თავი VIII

ევროპის მათემატიკა XVI საუკუნემდე

§ 1. მათემატიკის განვითარება ევროპაში XVI საუკუნემდე. ბოეციუსის სიკვდილის შემდეგ საშუალო საუკუნეების ევროპაში მათემატიკური აზროვნება X საუკუნემდე მეტად დაბალ დონეზე იდგა. ძველი საბერძნეთის მეცნიერული მემკვიდრეობას მოწყვეტილი მაშინდელი ევროპა რელიგიის სიბნელემ მოიცვა. მეცნიერებას განვითარების გზას სქოლასტიკა უკეტავდა. თუ ძველ საბერძნეთის ფილოსოფოსები, არისტოტელე და სხვები, მათემატიკურ მეცნიერებათა განვითარებაში გაცხოველებულ მონაწილეობას ღებულობდნენ და მათემატიკურ დამტკიცებების ლოღიკურ წესების გამომუშავებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეჰქონდათ, საშუალო საუკუნოების ფილოსოფოსები კი ხშირად ცარიელ, მეტაფიზიკურ და სამღვთომეტყველების საკითხებზე მსჯელობდნენ და დავობდნენ ისეთ უაზრობაზე, თუ რამდენი „ანგელოზი“ შეიძლება ნემსის წვერზე მოთავსდეს. მათემატიკის მნიშვნელობაც კი არ ესმოდათ და ასტროლოგს და მარჩიელს მათემატიკოსს უწოდებდნენ. კიდევ უფრო მეტიც შეიძლება ითქვას: რომის ეკლესია და არისტოკრატია იმდენად ცუდ მნიშვნელობას აძლევდნენ მათემატიკურ მეცნიერებას და იბრძოდნენ მის წინააღმდეგ, რომ იმპერატორი იუსტინიანის კოდექსის ერთ-ერთ კანონს ჰქონდა სათაური: „ბოროტმომქმედთა, მათემატიკოსთა და დანარჩენ მსგავსთა შესახებ“ (De maleficiis et mathematicis et ceteris similibis) და აწესებს: „მათემატიკის დანაშაულებრივი ხელოვნება სრულიად აკრძალულია“ (Ars autem mathematica demnabilis interdicta estomnio). ის მცირე მათემატიკური ცოდნა, რომელიც მაშინ გააჩნდათ, გამოყენებას პოულობდა საეკლესიო დღესასწაულის „აღდგომის“ დღის განსაზღვრისათვის; ეს უკანასკნელი მეტად აღელვებდა რომის ეკლესიას და მათთვის ამ დიდად მნიშვნელოვან „პრობლემის“ გადასაწყვეტად ყოველ მონასტერში თითო ბერი მაინც ჰყავდათ, რომლებიც თითებზე თვლის

მეთოდის საშუალებით ამ „პრობლემას“ სწყვეტდნენ და კალენდარს ადგენდნენ. მაგრამ X საუკუნიდან უვიცრობისა და სიბნელის ბურუსი ევროპაში თანდათან იფანტება; ევროპის სხვადასხვა ქვეყნებში ბერძნების არითმეტიკა და სათვლელი იარაღი — აბაკუსი თანდათანობით ვრცელდება.

X საუკუნეში (940 წ.), ქალაქ ოვერნში, ღარიბ ოჯახში დაიბადა დიდი მათემატიკოსი გერბერტი. მან დაწვრილებით შეისწავლა ბერძნების არითმეტიკა და აბაკუსში გაუმჯობესება შეიტანა; ეს გაუმჯობესება იმაში მდგომარეობდა, რომ აბაკუსის სხვადასხვა სვეტებში რიცხვითი ნიშნები ჩასწერა; გერბერტის შრომები უმთავრესად აბაკუსის საშუალებით თვლას ეხებიან. მან რეიმსში დააარსა მათემატიკური სკოლა, რომელიც მეცნიერულ კვლევა-ძიებას ეწეოდა არა მარტო პრაქტიკულ არითმეტიკაში, არამედ გეომეტრიაშიც. იმ სკოლაში გერბერტის ირგვლივ თავს იყრიდნენ მოწაფეები არა მარტო გერმანიიდან, არამედ საფრანგეთიდან და იტალიიდანაც; გერბერტის გავლენა მთელ დასავლეთ ევროპაში გავრცელდა, რაც თითქმის XII საუკუნის დამლევამდე გაგრძელდა; გერბერტის მიმდევრებს აბაცისტებს უწოდებდნენ, ვინაიდან ისინი აბაკუსზე თვლის ბერძნულ-რომაული მეთოდის გამგრძელებელი იყვნენ.

XII საუკუნეში რუსეთშიც იწყებენ მათემატიკის შესწავლას. რუსეთის მაშინდელ მათემატიკოსების მასწავლებლები ბერძნები იყვნენ, მაგრამ საბერძნეთის მათემატიკოსებისაგან ძალიან ცოტა რამ ჰქონდათ გადმოღებული, სახელდობრ გადმოიღეს არითმეტიკა და მიწათმზომლობის ძირითადი წესები. 1134 წელს ნოვგოროდის ბერმა კირიკემ დასწერა შრომა ქრონოლოგიურ გამოთვლათა შესახებ. რუსული ნუმერაცია, რომელიც XI საუკუნეში 10.000-ს არ აღემატებოდა, XII საუკუნეში 10.000 000-მდე აღწევს და XVI საუკუნეში კი მე-50 რიგის ერთეულებამდე მიაღწია. შემოღებულ იქნა აგრეთვე რიცხვთა აღნიშვნა რუსული ანბანის ასოების საშუალებით.

XII საუკუნეში ევროპელები იწყებენ არაბთა მათემატიკოსების ხელნაწერების თარგმნას. გადათარგმნეს ალჰოვარიზმის ალგებრა და არითმეტიკა და ალბატანის ასტრონომია. თვლის ინდურ-არაბული (ალგორითმული) მეთოდი, ნულით და პოზიციური სისტემით, თანდათანობით მტკიცდება. ამრიგად ევროპაში მთავრდება აბაცისტების ეპოქა და ალგორითმიკოსების ეპოქა იწყება. ალგორითმიკოსების ეპოქის დასაწყისი დაკავშირებულია ევროპის XII საუკუნის მეტად

ნიჭიერი მათემატიკოსთან — ლეონარდო ფიბონაჩთან (ფიბონაჩი ანუ ბონაჩის შვილი), რომელიც XII საუკუნის მეორე ნახევარში ქალაქ პიზაში დაიბადა. ბავშვობიდანვე მან აბაკუსზე თვლა ისწავლა, რამაც გაუღვიძა მას მათემატიკაში მუშაობის დიდი სურვილი. სამსახურის საქმეების გამო მან იმოგზაურა ეგვიპტეში. საბერძნეთში, სირიაში და სიცილიაში; მან ისარგებლა ამ შემთხვევით და იმ ქვეყნებში გაეცნო გამოთვლის სხვადასხვა ხერხებს და დიდი მათემატიკური ცოდნა შეიძინა არაბებისაგან და ბერძნებისაგან. შედეგად ამისა მან ვრცელი შრომა „Liber abaci" დასწერა; ეს შრომა არაბთა არითმეტიკული და ალგებრული ცოდნათა თითქმის მთელ ერთობლიობას შეიცავს. მასში გადმოცემულია თვლის მანამდე არსებული ყველა სახე, სახელდობრ, პოზიციური სისტემის საფუძველზე წარმოებული მთელი რიცხვებით თვლა და წილადებით თვლა. „Liber abaci" აგრეთვე შეიცავს: ამოცანებს რომლებიც პირველი ხარისხის განტოლების საშუალებით ამოიხსნებიან და რომლებსაც ის სწყვეტს ყალბი დებულებისა და ინდოელების შებრუნებული მეთოდის საშუალებით, ამოცანებს, რომლებიც არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებზე დაიყვანებიან, და ამოცანებს რომლებიც კვადრატული და კუბური ფესვების ამოღებაზე და მეორე ხარისხის განზღვრულ და განუზღვრელ განტოლებებზეა დამოკიდებული. ამასთანავე მეორე ხარისხის განტოლებები ამოხსნილი არიან არაბული მეთოდის საშუალებით გეომეტრიული გზით. ლეონარდომ ძალიან ნათლად და გასაგებად ჩამოაყალიბა მის შრომაში არაბთა მათემატიკა, მაგრამ ამით მათემატიკა მაინც ვერ შეიქმნა გასაგები იმ ევროპელთათვის, რომლებიც მაშინ გარკვეულ მუშაობას ეწეოდნენ მათემატიკაში. ლეონარდოს მეთოდის გასაცნობად ჩვენ მოვიყვანთ მის მიერ ამოხსნილ რამდენიმე ამოცანას.

ლეონარდო შემდეგ ამოცანას სვამს: რიცხვი 10 გავყოთ ისეთ ორ ნაწილად, რომ თუ მეტ ნაწილს მისი ფესვის გაორკეცებულ სიდიდეს გამოვაკლებთ, და ნაკლებ ნაწილს აგრეთვე მისი ფესვის გაორკეცებულ სიდიდეს მივუმატებთ, ტოლ შედეგებს მივიღებთ.

თუ თანამედროვე ნიშნებს ვიხმართ, ამ ამოცანის ლეონარდოს ამოხსნა შემდეგნაირად გამოითქმება: აღვნიშნოთ რიცხვი 10-ის ეს ნაწილები $(5+x)$ და $(5-x)$-ით, მივიღებთ განტოლებას:

$$5+x-2\sqrt{5+x}=5-x+2\sqrt{5-x},$$

საიდანაც

$$x=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x};$$

თუ უკანასკნელ განტოლებას ორჯერ ავამაღლებთ კვადრატში მივიღებთ

$$x^4=16x^2;\ \ x=4$$

ამრიგად ათის ასეთი ნაწილებია 9 და 1.

ფილოსოფოს თეოდორემ ლეონარდოს შემდეგი ამოცანა დაუსვა, რომელიც უკანასკნელმა არაჩვეულებრივი სისწრაფით ამოხსნა: მოიძებნოს ისეთი რიცხვი x რომ x^2+5 და x^2-5 ორივე იყვნენ კვადრატული რიცხვები; ლეონარდომ მიიღო შემდეგი პასუხი: $x=3\frac{5}{12}$ ვინაიდან $(3\,{}^5/_{12})^2+5=(4\,{}^1/_{12})^2$, $(3\,{}^5/_{12})^2-5=(2\,{}^7/_{12})^2$. ამის შემდეგ თეოდორემ მას კიდევ დაუსვა ამოცანა, რომელიც $x^3+2x^2+10x=20$ განტოლების ამოხსნაში მდგომარეობს. ლეონარდომ იპოვა ამ განტოლების ფესვის მიახლოვებითი მნიშვნელობა, რომელიც მან სამოცობითი წილადებში გამოსახა

$$x=1^0\ 22^{I}\ 7^{II}\ 4^{III}\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI}.$$

თუ ეს წილადი ათობით წილადად გადავაკეთეთ, მაშინ ამოხსნა სწორია მეცხრე ათობითი ნიშნამდე.

ნოტარიუს ჯიოვანმა მას ასეთი ამოცანა დაუსვა: „სამ პიროვნებას აქვთ უცნობი t თანხა; პირველის წილი $\frac{1}{2}\,t$ არის, მეორესი $\frac{1}{3}t$, მესამესი კი $\frac{1}{6}\,t$; მათ მოისურვეს ამ ფულის გადადება სანდო ადგილში და თითოეულმა მისი გარკვეული რაოდენობა თან წაიღო; პირველმა წაიღო ფულის x რაოდენობა და $\frac{1}{2}x$-ი გადადვა, მეორემ y წაიღო და $\frac{1}{3}\,y$ გადადვა, მესამემ z წაიღო და $\frac{1}{6}\,z$ გადადვა. იმისათვის, რომ თითოეულმა მისი ხვედრი წაიღოს, საჭიროა რომ თითოეულმა წაიღოს გადადებული თანხის მესამედი. უნდა მოიძებნოს x, y, z“ ლეონარდომ გამოარკვია რომ ეს ამოცანა განუზღვრელია; მან 7-ის ტოლად დაუშვა ის თანხა, რომელიც თითოეულს

უნდა აელო გადადებული თანხიდან და იპოვა რომ $t=47$, $x=33$; $y=13$; $z=1$. ორ ყალბ დებულებათა წესის საშუალებით ლეონარდო კუბური ფესვის მიახლოვებით გამოთვლას აწარმოებს. თუ $\sqrt[3]{a^3+r}$ მოსაძებნი კუბური ფესვია, და a უდიდესი მთელი რიცხვს წარმოადგენს, რომელსაც ეს ფესვი შეიცავს, მაშინ მიახლოვებითი მნიშვნელობა იქნება:

$$a+\frac{r}{3a^3+3a+1}.$$

Liber abaci შეიცავს აგრეთვე ამოცანას, რომელიც საინტერესოა ისტორიული თვალსაზრისით, ვინაიდან ეს ამოცანა, ცოტა სხვანაირად აჰმესს დასმული ჰქონდა 3.000 წლის წინათ. ეს ამოცანა შემდეგია: „შვიდი დედაბერი რომს მიემგზავრება, თითოეულს შვიდი ჯორი მიჰყავს, თითოეულ ჯორს შვიდი ტომარა მიაქვს, თითოეული ტომარაში შვიდი პურია, თითოეულ პურში შვიდი დანაა და თითოეული დანა შვიდ ქარქაშშია. სულ რამდენი საგნებია?“

ლეონარდომ იპოვა ამ ამოცანის პასუხი:

$$7+49+343+2401+16807+11749=137256.$$

ლეონარდომ შრომა დასწერა სახელწოდებით „Practica geometriae“ (პრაქტიკული გეომეტრია). ის იცნობდა ევკლიდეს და საბერძნეთის სხვა მათემატიკოსთა შრომებს უშუალოდ არაბების ხელნაწერებიდან და ჰერარდი კრემონელისა და პლატონი ტიბოლელის ნათარგმნების საშუალებით. მისი შრომა Practca geometriae საინტერესოა არა მარტო ავტორის ორიგინალური გამოკვლევების თვალსაზრისით, არამედ დამტკიცებათა მოხდენილობით, სიმკაცრის თვალსაზრისითაც. ლეონარდო განსაზღვრავს წრეში ჩაწერილ 96 გვერდიან სწორი მრავალკუთხედის პერიმეტრს ისეთი ხერხით, რომელიც არქიმედეს ხერხზე უფრო მოკლეა; ის პოულობს ორ ზღვარს:

$$\frac{1440}{458\,^1/_5} \text{ და } \frac{1440}{458\,^4/_9},$$

საიდანაც პოულობს π-ის მიახლოებითი მნიშვნელობის საშუალოს

$$\pi=\frac{1440}{458\,^1/_3}=3{,}141\,818$$

ლეონარდოს თანამედროვე იყო გერმანელი მათემატიკოსი იორდანე ნემორარიუსი, რომელსაც ექვსამდე შრომას აკუთვნებდნენ. მისი შრომა „არითმეტიკა“ შემდეგი ნაწილებისაგან შედგება: 1. რიცხვების ზოგადი თვისებები, 2. შეფარდებათა შესახებ. 3. მარტივი და რთული რიცხვების შესახებ. 4. იმ რიცხვების შესახებ, რომელნიც ერთმანეთთან მუდმივ შეფარდებაში იმყოფებიან. 5. რთულ შეფარდებათა შესახებ. 6. კვადრატული, კუბური და ერთმანეთის მსგავსი რიცხვების შესახებ. 7. ლუწი და კენტი რიცხვების შესახებ. 8. მრავალკუთხოვანი და სხეულითი რიცხვების (Körperlichen Zahlen) შესახებ. 9. ტოლობა და უტოლობის შესახებ. 10. არითმეტიკული, გეომეტრიული და ჰარმონიული საშუალოთა შესახებ. ეს შრომა წარმოადგენს არითმეტიკა და ალგებრის ტრაქტატს; ამ შრომაში მოთავსებულ ნემორარიუსის მიერ არითმეტიკა და ალგებრაში შეტანილ სიახლეთა შორის აღსანიშნავია ნებისმიერი რიცხვების ასოებით აღნიშვნის წესი, თუმცა ეს იმნაირადაა ნაწარმოები, რომ იმისაგან არ შეიძლებოდა ასოებითი აღრიცხვა წარმოშობილიყო.

ნემორარიუსმა დასწერა აგრეთვე გეომეტრიაში შრომა, რომელიც 4 წიგნისაგან შედგება და რომელიც შეიცავს თვით ავტორის რამდენიმე გამოკვლევებს.

საშუალო საუკუნეების დიდ მათემატიკოსად ითვლება როქერ ბეკონი, რომელიც დაიბადა ილჩესტერში 1214 წ. და გარდაიცვალა 1294 წ. ოქსფორდში, სადაც მუშაობდა მათემატიკის და ასტრონომიის პროფესორად. ის ძალიან უწყობდა ხელს მეცნიერებისა და ხელოვნების აღორძინებას. მან განიზრახა მაშინდელი კალენდარის შესწორება და მის მერ შედგენილ კალენდარში პირველად ვხვდებით არაბულ ციფრების ხმარებას. ოპტიკაში ბეკონს აქვს მრავალი თეორიული ხასიათის აღმოჩენი და მანვე გამოიგონა აგრეთვე ამ დარგისათვის საჭირო მრავალი ხელსაწყო.

XIII საუკუნის მათემატიკოსთა შორის, ყურადღების ღირსია ჯიოვანე კამპანო, რომელმაც გადათარგმნა არაბულიდან ევკლიდეს XIV და XV წიგნი, რამაც ხელი შეუწყო ევროპაში გეომეტრიის გავრცელებას. ამ თარგმანს კამპანომ თავის კომენტარები დაურთო, სადაც მოთავსებულია მისი საკუთარი გამოკვლევა ვარსკვლავისებური ხუთკუთხედის კუთხეთა ჯამის მოძებნის შესახებ. ერთი საუკუნის შემდეგ ინგლისელ მათემატიკოსმა ბრადვარდინმა, დაეყრდნო რა კამპანოს ამ გამოკვლევას, შეადგინა ზოგადი თეორემა ვარსკვლავი-

სებური მრავალკუთხედთა კუთხეების ჯამის შესახებ, რომელიც მისი გეომეტრიულ შრომაშია (Geometria Speculativa) მოთავსებული. გარდა ამისა ამ შრომაში მოთავსებულია აგრეთვე იზოპერიმეტრულ ნაკვთთა თეორია შემდეგი თეორემებით: 1) იზოპერიმეტრულ ნაკვთთა შორის უდიდესი ფართი იმას აქვს, რომელსაც კუთხეთა რიცხვი მეტი აქვს. 2) იმ იზოპერიმეტრულ მრავალკუთხედთა შორის, რომლებსაც წვეროთა რიცხვი ერთნაირი აქვთ, ტოლ კუთხიანს უდიდესი ფართობი აქვს. 3) ტოლკუთხიანი და იზოპერიმეტრულ მრავალკუთხედთა შორის, რომლებსაც წვეროთა რიცხვი ერთნაირი აქვთ, ტოლფერდიანს უდიდესი ფართობი აქვს. 4) ყველა იზოპერიმეტრულ ნაკვთთა შორის წრეს უდიდესი ფართობი აქვს. ევროპაში პირველად ბრადვარდინმა შემოიღო ტრიგონომეტრიულ გამოთვლებში კოტანგენსის და ტანგენსის ხმარება umbra reeta და umbra versa-ს სახელწოდებით.

XIV საუკუნეში ნორმანდიაში მოღვაწეობდა მათემატიკოსი ნიკოლოზი ორესმი (Oresme). თავის გამოკვლევებში ის ხმარობს წირებს, რომლებიც მართკუთხოვანი კოორდინატების სახეს წარმოადგენენ; ამ წირებს ის სიგრძედს და სიგანედს უწოდებს. ამ წირებით ორესმი გამოსახავს აგრეთვე მრუდის საშუალებით დროსთან ერთად სითბოს ცვალებადობის გრაფიკს. ამავე დროს ის იძლევა მეტად მნიშვნელოვან შენიშვნას იმის შესახებ რომ მაქსიმუმის და მინიმუმის ახლოს ცვალებადობა უმცირესია. მისი წიგნიდან Algorismus proportionum ვგებულობთ, რომ მას შემოყავს ხარისხები წილადიანი მაჩვენებლებით და ასეთი ხარისხების გამოსათვლელად ჩამოყალიბებული აქვს მარტივი წესები. ასეთი ხარისხების აღსანიშნავად ის ხმარობს აღნიშვნებს, რომლებიც მანამდე არავის არ უხმარია. მაგალითად, $4^{1^1/_2}$-ის აღსანიშნავად ის წერს: $\boxed{1\ p\ \frac{1}{2}}$ 4 ანუ $\boxed{\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}$ 4.

ამრიგად ორესმა გაავრცელა მთელ მაჩვენებლიანი ხარისხების გამოთვლის წესები წილადებიან მაჩვენებლებზე, რის გამო ორესმი რამოდენიმედ შეიძლება ჩაითვალოს ლოგარითმული აღრიცხვის გამოგონების წინამავლად.

XV საუკუნის პირველ ნახევარში ცხოვრობდა ნიკოლოზი კუზანელი, რომლის მათემატიკური შრომები ყურადღების ღირსია. მან

განსაზღვრა წრის დიამეტრი, როგორც ჩაწერილ მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვისა და ამავე მრავალკუთხედის პერიმეტრის ფუნქცია. კუზანელის მიერ მიღებული შედეგი შეიძლება მოკლედ გამოისახოს შემდეგი ფორმულით:

$$d = \frac{p}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

სადაც d წრის დიამეტრია, p პერიმეტრია და n ჩაწერილი სწორი მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვია. ის განსაზღვრავს აგრეთვე მრუდის რკალს მოცემული ქორდის საშუალებით. მისი გამოთვლა შეიძლება გამოისახოს ფორმულით,

$$\alpha = \frac{3 \sin \alpha}{2 + \cos \alpha}.$$

ვენის უნივერსიტეტის პროფესორმა, გიორგი პეიერბახმა, რომელიც დაიბადა 1423 წელს და გარდაიცვალა 1461 წელს, შემოიღო პტოლომეოსის და არაბების ტრიგონომეტრია და შეადგინა სინუსების ახალი ცხრილი, რაც მას დიდ დამსახურებად უნდა ჩაეთვალოს. აგრეთვე მისი არითმეტიკული ხასიათის შრომებში მან გააღრმავა და განავითარა მთელი რიცხვების თვლა. თავისი ტრიგონომეტრიული ნაშრომით მან ნიადაგი მოუმზადა იოჰანე მიულერის ძვირფას შრომებს.

იოჰანე მიულერი, რომელსაც რეგიომონტანუსს უწოდებენ, დაიბადა კენიგსბერგში 1436 წელს. ის სწავლობდა ვენის უნივერსიტეტში, სადაც მისი მასწავლებელი პეირბახი იყო. ის ხშირად მოგზაურობდა გერმანიაში და იტალიაში, სადაც მან ბერძნული ენა შეისწავლა. რეგიომონტანუსი იყო პირველი პიროვნება ევროპაში, რომელიც კითხულობდა ევკლიდეს, არქიმედეს, აპოლონიუსის, მენელაოსის და დიოფანტეს შრომებს მათ ორიგინალურ ენაზე; მათი შრომებიც მან გადათარგმნა უფრო ზუსტად, ვიდრე არაბებმა გადათარგმნეს. რეგიომონტანუსი ძალიან დაინტერესებული იყო რიცხვთა თეორიით და საკმაო დროს უთმობდა მის შესწავლას, რის შედეგად მან საკმაოდ რთული ამოცანები დასვა ამ დარგიდან. მაგალითად: 1) ვიპოვოთ ისეთი სამი კვადრატული რიცხვი, რომლებიც ჰარმონიულ პროგრესიას ქმნიან, 2) ვიპოვოთ ისეთი ოთხი კვადრატული

რიცხვი, რომელთა ჯამი აგრეთვე კვადრატია. 3) ვიპოვოთ ისეთი ოცი კვადრატული რიცხვი, რომელთა ჯამი კვადრატული რიცხვია და 300000-ზე მეტია. ამ ამოცანების ამოხსნა მას არ მოუცია, მაგრამ უნდა ვიფიქროთ რომ, ის მან იცოდა. ტრიგონომეტრიისათვის თანამედროვე სახის მიცემაში რეგიომონტანუსს დიდი ღვაწლი მიუძღვის. მან შეადგინა ტრიგონომეტრიული ცხრილები, რომლების შესადგენად პირველად მან იხმარა ათობითი სისტემა. მანვე შეადგინა სინუსების ცხრილი ყოველი წუთისათვის, აიღო რა რადიუსი 10 მილიონის ტოლად. მისი შრომა Detriangulis omnimodis liloriquinque ტრაქტატს წარმოადგენს ბრტყელ და სფერულ ტრიგონომეტრიაში. პირველი ორი წიგნი შეეხება წრფოვან სამკუთხედებს და შეიცავს თვით ავტორის მიერ შედგენილ მრავალ ამოცანას სამკუთხედის ელემენტების განსაზღვრაზე, როცა მოცემულია სამი მათგანი; მაგალითად, ერთერთი ამოცანა ასეთია: მოცემულია ფუძე$=20$, სიმაღლე$=5$ და ორი გვერდის შეფარდება$=\frac{3}{5}$; ეს ამოცანა მას გამოყავს ალგებრის საშუალებით; უცნობად აიღო სხვაობა ორ ნაკვეთთა შორის, რომლებსაც ფუძისაგან სიმაღლე მოსჭრის და გეომეტრიულ მსჯელობათა საშუალებით მიიღო განტოლება, რომელიც ჩვენი ნიშნების საშუალებით იქნება $16x^2 + 2000 = 680x$. მისი მეოთხე წიგნი სფერული ტრიგონომეტრიის საკითხებს ეხება, სადაც ის უშუალოდ განსაზღვრავს სფერული სამკუთხედის კუთხეს, რომლის გვერდები მოცემულია, შემდეგი წესით:

$$\frac{\text{sinvers}\,A}{\text{sin versa} - \text{sinvers}\,(b - c)} = \frac{r^2}{\sin b \cdot \sin c}$$

რეგიომონტანუსის ეს წესი შეესაბამება კოსინუსების თანამედროვე ფორმულებს და ვრცელდება ყოველგვარ სფერულ სამკუთხედზე; ამ განზოგადოებაშიც მდგომარეობს რეგიომონტანუსის დამსახურება. იმის იმედით, რომ ნიურენბერგში მას მიეცემოდა მყუდრო ცხოვრების საშუალება ასტრონომიული დაკვირვებათა წარმოებისათვის, მან 1474 წელს მოაწყო იქ ასტრონომიული ობსერვატორია; აგრეთვე განზრახული ჰქონდა ძველ მათემატიკოსთა შრომებისა და საკუთარი შრომების გამოცემაც, რისთვისაც მან ნიურენბერგში სტამბაც მოაწყო. მაგრამ მისი მყუდრო ცხოვრება მალე დაარღვია რომ-

ში მის მიწვევამ კალენდარის გადასაკეთებლად, რის შემდეგ გარდაიცვალა (1476 წელს).

ლოგარითმული აღრიცხვის წინამავლად ორესმთან ერთად ნიკოლოზი შუკე (Chuquet) შეიძლება ჩაითვალოს. შუკე დაიბადა ლიონში და პარიზში მიიღო უმაღლესი სამედიცინო განათლება. 1484 წელს მან დაამთავრა მისი შრომა Le Triparty en la science des nombres, რომელიც სამი ნაწილისაგან შედგება *. პირველი ნაწილი ეხება რაციონალური რიცხვებით გამოთვლას, მეორე ნაწილი ირრაციონალური რიცხვებით გამოთვლას და მესამე კი განტოლებათა შესახებ სწავლებას შეიცავს. ორესმისაგან დამოუკიდებლად, შუკეს მის შრომაში დამუშავებული აქვს წილადიანი მაჩვენებლებით ხარისხის საკითხი, რაც ჩანს მის შრომაში მოთავსებულ ამოცანებიდან: 1) მგზავრი გაივლის პირველ დღეს 1 მილს, მეორე დღეს — 3 მილს, მესამე დღეს 9 მილს და ასე შემდეგ; სულ რამდენს გაივლის ის $5\frac{1}{2}$ დღეში? შუკე იძლევა ამ ამოცანის ამოხსნას, გულისხმობს რა, რომ სიჩქარე იზრდება განუწყვეტლივ და იმავე კანონით როგორც ერთი დღიდან მეორემდე. 2) ჭურჭელს აქვს ნახვრეტი, რომლითაც დღეღამეში გამოდის მასში მოთავსებული სითხის $\frac{1}{10}$; რამდენ დღეში გამოდინდება მასში მყოფი სითხის რაოდენობის ნახევარი?

ამ ამოცანის ამოსახსნელად შუკე სარგებლობს ორი ყალბი დებულების წესით, რომელსაც იყენებს ორი სასინჯი (6 და 7) მნიშვნელობისათვის და პოულობს პასუხს $6\frac{31441}{531441}$.

თავის შრომაში შუკე იძლევა ლოგარითმულ აღრიცხვის ერთ ძირითად წესთაგანს, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ის იღებს რიცხვი 2-ის ხარისხთა და მათ მაჩვენებელთა მწკრივებს და გვიჩვენებს, რომ პირველი მწკრივის ორ რიცხვთა ნამრავლი გამოიხატება იმავე მწკრივის რიცხვით, რომელიც შეესაბამება გადასამრავლებელ რიცხვთა მაჩვენებლების (ე. ი. მეორე მწკრივის შესაბამის რიცხვთა) ჯამს.

შუკემ ხმარებაში შემოიღო მიმატების აღსანიშნავი ნიშანი $\overline{\text{p}}$ ($\overline{\text{p}}$lus) და გამოკლების — $\overline{\text{m}}$ (minus); მანვე შემოიღო უცნობის ხა-

* Cantor, II. გვ. 319.

რისხების აღსანიშნავი ნიშნები; მაგალითად, ის წერს: 12^0, 12^1, 12^2, 12^3 და ასე შემდეგ ნაცვლად 12, $12x$, $12x^2$ $12x^3$, და ასე შემდეგ. თუ მაჩვენებელი უარყოფითია, ის აღნიშნავს $\overline{m}$-ით; მაგალითად შუკე $7x^{-3}$-ს წერს შემდეგნაირად $7^{3\overline{m}}$. ფესვის აღსანიშნავად მან შემოიღო ნიშანი R, მაგალითად, ის ასე წერს: $R' \cdot 12\,(=12)$; $R^2 \cdot 16\,(=\sqrt{16})$ და ასე შემდეგ. თავის შრომაში შუკე ამბობს, რომ მან გამოიგონა $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ მარტივი საშუალო სიდიდის შექმნის წესი მოცემულ ორი სიდიდეთა $\frac{a_1}{b_1}$ და $\frac{a_2}{b_2}$ შორის.

XV საუკუნეში ალგებრა განსაკუთრებით იტალიაში ვითარდება, საიდანაც ის გავრცელდა გერმანიაშიც. ხსენებული საუკუნის გერმანიაში ალგებრაში მომუშავე პირებს კოსისტები (cossisten) დაერქვათ; ეს სახელწოდება წარმოიშვა იტალიური სიტყვა cosa — ნივთი-საგან; cosa ანუ ნივთს უცნობს უწოდებდნენ. კოსისტებისაგან ყურადღებას იპყრობს იოჰანე ვიდმანი და ადამ რიზე. იოჰანე ვიდმანმა დასწერა შრომა „თვლის ჩქარი და ლამაზი ხერხი ყოველგვარი ვაჭრობისათვის“ (Behende und hübsche Rechunng auf allem Kauffmannshaft).

ეს შრომა, დაწერილი გერმანულად, დაიბეჭდა ლაიპციგში 1489 წელს. ამ შრომაში ჩვენ პირველად ვხედავთ — და + ნიშნებს. ვიდმანის შრომის გამოქვეყნებისთანავე ამ ნიშნების ხმარება დაიწყო იტალიის უდიდესმა მხატვარმა ლეონარდო და-ვინჩიმ, რომელიც დიდ ინტერესს იჩენდა მათემატიკისა და ფიზიკისადმი და მეტად ინტენსიურად სწავლობდა მათ. ის განსაკუთრებით ამუშავებდა იმ გეომეტრიულ თეორიებს, რომელნიც ხატვაში პოულობდნენ გამოყენებას. როგორც ინჟინერი ის იცნობდა აგრეთვე სტატიკასაც. პირამიდის სიმძის ცენტრი მან განსაზღვრა.

ამავე პერიოდის მათემატიკოსად შეიძლება ჩაითვალოს აგრეთვე სახელგანთქმული მხატვარი ალბრეხტი დიურერი, რომელიც თავის შრომაში გვაძლევს ეპიციკლოიდისა, სხვიათა და სხვა მრავალ რთულ მრუდთა აგების წესებს.

დასასრულ შევეხებით იტალიის ნიჭიერ მათემატიკოსს ლუკა პაჩიოლოს. 1494 წელს ვენეციაში დაიბეჭდა მისი შრომა:

Summa de Arithmetica geometria Proportioni ef Proportionalita.

ეს შრომა შესანიშნავია იმით, რომ მან ხელი შეუწყო ინდოელების ალგებრის ბერძნების გეომეტრიასთან დაკავშირებას; ის შეიცავს არითმეტიკას, ალგებრას და გეომეტრიას და იქ მოთავსებულია ოპერაციებისათვის ნიშანთა წესები; შეკრებისათვის ეს წესი ასე გამოითქმება:

პლუსი პლუსთან შეერთებული, ყოველთვის პლუსს იძლევა. მინუსი, მინუსთან შეერთებული, ყოველთვის მინუსს იძლევა. პლუსი მინუსთან შეერთებული ყოველთვის გამოიყოფა და მეტის სახელწოდებას იძლევა.

კვადრატული განტოლებათა ამოხსნისათვის პაჩიოლო სამ შემთხვევას განიხილავს, რომელიც თანამედროვე ალგებრულ ენაზე გამოთქმული, შემდეგი იქნება:

$$1)\ x^2+mx=n;\ x=-\frac{1}{2}m+\sqrt{\frac{1}{4}m^2+n}$$

$$2)\ x^2-mx=n;\ x=+\frac{1}{2}m+\sqrt{\frac{1}{4}m^2+n}$$

$$3)\ x^2-mx=-n;\ x=+\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{1}{4}m^2-n}$$

პაჩიოლოს შრომის ამ ნაწილმა დიდი როლი ითამაშა ალგებრის განვითარებაში შემდეგ საუკუნეებში, ვინაიდან ის შეიქმნა დასაყრდენი წერტილი ალგებრის განვითარების მთავარი ინიციატორებისათვის. თავის შრომის გეომეტრიულ ნაწილში ის შემდეგ ამოცანას სწყვეტს:

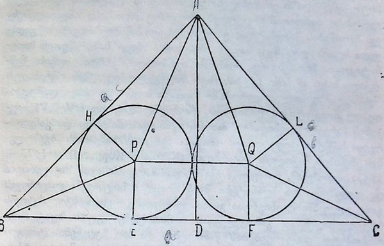
(ნახ. 59). „სამკუთხედში ჩავწეროთ ორი ტოლი და ერთ-მეორეს მხები წრე, ამასთანავე ისინი უნდა ეხებოდეს ორ გვერდს“.

ამ ამოცანის პაჩიოლოს ამოხსნა შემდეგია:

AB, BC და CA გვერდები აღვნიშნოთ a, b და c-თი (ნახ. 59), სამკუთხედის სიმაღლე h-ით აღვნიშნოთ და x ით აღვნიშნოთ ორი წრეთა რადიუსი, გვექნება

$$\triangle ABC=\frac{ah}{2},\quad \triangle APQ=x(h-x),\quad \triangle APB=\frac{cx}{2};$$

$$\triangle AQC = \frac{bx}{2},\ \triangle BPE + \triangle QFC = \frac{(a-2x)x}{2}.$$



ნახ. 59.

მართკუთხედი $PQEF = 2x^2$

ისე რომ

$$\frac{ah}{2} = x(h-x) + \frac{cx}{2} + \frac{bx}{2} + \frac{(a-2x)x}{2} + 2x^2 = \left(h + \frac{a+b+c}{2}\right)x$$

საიდანაც

$x = \dfrac{ah}{2h+a+b+c}$. პაჩიულო გულისხმობს რომ $a=15$, $b=13$; $c=14$; $h=11^1/_5$.

§ 2. ევროპის მათემატიკა XVI საუკუნეში. ზემოთ თქმულიდან აშკარაა, რომ XVI საუკუნემდე დასავლეთ ევროპაში მათემატიკაში გარკვეული შემოქმედებითი მუშაობა მიმდინარეობდა. ეს პერიოდი

არა მარტო ხელოვნებისა და ჰუმანიტარულ მეცნიერებათა აღორძინების დასაწყისია, არამედ მათემატიკისაც. მაგრამ ამ პერიოდში დასავლეთ ევროპის მათემატიკოსთა საქმიანობა უმთავრესად ბერძნების, ინდოელებისა და არაბების მათემატიკის თარგმნაში და ინტენსიურ შესწავლაში გამოიხატებოდა. არაბების წყალობით დასავლეთ ევროპაში თანდათან ვრცელდება როგორც მათი, ისე ინდოელებისა და ბერძნების მათემატიკა; ეს უკანასკნელი ნაწილობრივად იქ გადავიდა სტამბოლიდანაც, სადაც ინახებოდა ძველ საბერძნეთის მათემატიკოსთა შრომები ისე, რომ მათ შერჩენილი ჰქონდათ თავისი ნამდვილი სახე. ამ სამი ხალხის მიერ მიღწეული შედეგების ინტენსიურ შესწავლამ დასავლეთ ევროპაში ნიადაგი მოუმზადა ახალ, დამოუკიდებელ მათემატიკის დასაწყისს, რომელიც მკაფიოდ ჩანს XVI საუკუნის პირველ წლებიდანვე. მათემატიკის აღორძინებისა და განვითარების საქმეში დიდი როლი ითამაშა აგრეთვე სამყაროს აგებულების შესახებ ნიკოლოზ კოპერნიკის (Nikolaus Koppernikus 1473—1543) აღმოჩენამ, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ მზე უძრავია და დედამიწა და პლანეტები მზის ირგვლივ ბრუნავენ. კოპერნიკის გამოკვლევებმა მეცნიერება გაანთავისუფლა ეკლესიის სქოლასტიკის ბრჭყალებიდან. ეს გამოკვლევები მოითხოვდნენ უფრო ზუსტ ასტრონომიულ დაკვირვებების წარმოებას და მათ შედეგების ტრიგონომეტრიულ დამუშავებას; ეს კი ხელს უწყობდა არა მარტო ტრიგონომეტრიის განვითარებას არამედ ალგებრისა და მათემატიკის განვითარებასაც და საერთოდ მათემატიკაში „ახალი დროსი", „ახალი პერიოდის" ჩასახვას.

მათემატიკის განვითარების ამ ბრწყინვალე პერიოდის დასაწყისს საფუძველი ჩაეყარა აღორძინების ხანის სამშობლოში — ჩრდილოეთ იტალიაში. ეს პერიოდი იწყება მეტად მნიშვნელოვანი საქმის შესრულებით — მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნით, რაც ვერ შესძლეს ბერძნებმა, ინდოელებმა და არაბებმა. ქ. ბოლონიეში, პროფესორმა სციპიონე ფერომ (Scipione del Ferro, გარდაიცვალა 1526 წ.) გადაწყვიტა $x^3 + px = q$ სახის განტოლება. ამის შესახებ მან უამბო მხოლოდ თავის სიძეს ანიმალეს და თავის მოწაფეს ფიორეს. მიზეზი ფეროს მიერ განტოლების ამოხსნის საიდუმლოდ შენახვისა

დღესაც უცნობია; ზოგიერთი ისტორიკოსების აზრით მას უნდოდა ამ მიმართულებით უფრო ღრმა კვლევითი მუშაობის წარმოება და იმიტომ არ ამჟღავნებდა მას.

იმ პერიოდში იტალიაში ხშირად იმართებოდა ხოლმე საჯარო მათემატიკური პაექრობა; ასეთ პაექრობაზე გამარჯვებულად ჩაითვლებოდა ხოლმე ის, ვინც მოწინააღმდეგის მიერ მიცემულ ამოცანებიდან მეტ რაოდენობას ამოხსნიდა. ფიორე არ იყო მათემატიკის კარგი მცოდნე და არც დიდი ნიჭით დაჯილდოვებული. მაგრამ ის პაექრობაზე იმარჯვებდა იმის წყალობით, რომ მას ჰქონდა $x^3 + px = q$ განტოლების ამოხსნის ფეროს ხერხი, რასაც ფიორეც საიდუმლოდ ინახავდა. ეს ამბავი გაიგონა ქ. ბრესჩიაში მცხოვრებმა, მეტად ნიჭიერმა მათემატიკოსმა ნიკოლო ტარტალიამ (Nicolo Tartaglia, 1500 — 1557). იტალია-საფრანგეთის ომის დროს ბრესჩია აიღო 1512 წელს საფრანგეთის ჯარმა. ექვსი წლის ნიკოლო ნახევრად ცოცხალი, დასახიჩრებული (ყბა და ენა გაჭრილი) იპოვეს მისი მამის გვამის გვერდით. ჭრილობამ მას სამუდამოდ დაუკარგა ნორმალურად ლაპარაკის უნარი, რის გამო მას დაარქვეს მეტსახელად tartaglia—ბლუ. ჯერ კიდევ ანბანის შესწავლაც არ ჰქონდა მას დამთავრებული, როდესაც დედამისმა სიღარიბის გამო სკოლიდან გამოიყვანა. მაგრამ ტარტალიამ მისით შეისწავლა ლათინური, ბერძნული ენები და მათემატიკა. ამ უკანასკნელს ის იმდენად დაეუფლა, რომ 23 წლისამ უკვე მათემატიკის მასწავლებლობა დაიწყო და იმით თავს ირჩენდა. 1535 წელს ტარტალიამ მიიღო მათემატიკის კათედრა ვერონას უნივერსიტეტში; ამავე წლის 22 თებერვალს მან გამოიწვია პაექრობაზე ფიორე; მათ ერთიმეორესათვის უნდა მიეცათ ოცდაათი ამოცანა, რომლებიც უნდა ამოეხსნათ ორმოცდაათი დღის განმავლობაში. ვინც ამ ვადაში იმ ოცდაათი ამოცანიდან უფრო მეტ რაოდენობას ამოხსნიდა, ის ჩაითვლებოდა გამარჯვებულად და ფულად ჯილდოსაც მიიღებდა.

ტარტალიამ გაიგო, რომ ფიორეს აქვს $x^3 + px = q$ სახის განტოლების ამოხსნის ხერხი; ის დარწმუნდა, რომ ფიორე აუცილებლად მას მისცემს ისეთ ამოცანებს, რომლებიც ამ განტოლების ამოხსნის ხერხით ამოიხსნებიან; მისთვის კი ეს ხერხი უცნობი იყო. თუმცა ტარტალია მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნის საკითხზე ნამუშევარი იყო, მაგრამ რაიმე მნიშვნელოვანი შედეგი არ მიუღია (იპოვა მხოლოდ $x^3 + px^2 = q$ განტოლების ერთერთი კერძო სახი

ამოხსნის ხერხი). $x^3+px=q$ განტოლების ამოხსნის ხერხის მოძებნა მეტად რთულ ამოცანად ითვლებოდა და ტარტალია ხედავდა, რომ ის დამარცხების საფრთხის წინაშე დგას. მაგრამ მან დაძაბა მთელი მისი ძალღონე და უნარი და 10 დღით ვადამდე ადრე იპოვა

$$x^3+px=q \tag{1}$$

ნიკოლო ტარტალია

განტოლების ამოხსნის ხერხი.

თანამედროვე ალგებრის ენაზე ეს ამოხსნა შემდეგნაირად გამოიხატება: ტარტალიამ დაუშვა, რომ განტოლების ფესვი იქნება

$$x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}, \tag{2}$$

სადაც u და v უცნობებია და უნდა იქნას განსაზღვრული მოცემული p

და q-ს საშუალებით; ამისათვის ტარტალიამ დაუშვა, რომ

$$3\sqrt[3]{uv}=p, \tag{3}$$

ანუ

$$uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{4}$$

მოცემულ $x^3+px=q$ განტოლებაში x და p-ს ნაცვლად (1) და (2) ტოლობებიდან აღებული მათი მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ გვექნება

$$\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)^3+3\sqrt[3]{uv}\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)=q.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$u-v=q; \tag{5}$$

(4) და (5) ტოლობები განსაზღვრავენ u და v-ს მნიშვნელობებს. მართლაც (5) ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში ავამაღლოთ და ორივე მხარეს მივუმატოთ $4uv=4\left(\frac{p}{3}\right)^3$; მაშინ მივიღებთ:

$$(u+v)^2=q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

ანუ

$$u+v=2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}. \tag{6}$$

(4) და (6) ტოლობების საშუალებით შევადგენთ კვადრატულ განტოლებას:

$$z^2-2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\cdot z+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

აქედან·

$$z_1 = u = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}, \quad z_2 = v =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}. \tag{7}$$

(7) ტოლობიდან u და v-ს მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ (1) ტოლობაში, მივიღებთ ტარტალიას მიერ მოძებნილ $x^3 + px = q$ განტოლების ამოხსნას თანამედროვე ალგებრულ აღნიშვნების საშუალებით:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} -$$

$$- \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

მეორე დღესვე ტარტალიამ კიდევ ამოხსნა მეორე სახის კუბური განტოლება:

$$x^3 = px + q; \tag{8}$$

ამისათვის ტარტალიამ დაუშვა, რომ უკანასკნელ განტოლებას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახის ფესვი

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}, \tag{9}$$

სადაც u და v განისაზღვრებიან

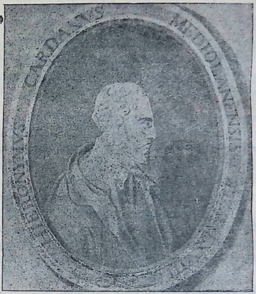
$$u + v = q; \; uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

პირობებიდან, მის მიერ მოცემული (8) განტოლების ამოხსნის წესი თანამედროვე სიმბოლოების საშუალებით ასე იქნება:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}}. \tag{10}$$

შეიარაღებული ასეთი დიდი შედეგებით, 22 თებერვალს ტარტალია გამოცხადდა პაექრობაზე და მამაცად წარდგა მისი მოწინააღმდეგეს წინაშე; ფიორეს მიერ მიცემული ყველა 30 ამოცანა მან ორი საათის განმავლობაში ამოხსნა, ხოლო ფიორემ კი ტარტალიას მიერ მიცემული ამოცანები 50 დღის განმავლობაშიც კი არც ერთი ვერ ამოხსნა. იმ დღიდან ტარტალიამ მთელ იტალიაში სახელი გაითქვა. მიუხედავად ამისა ამ ბრწყინვალე შედეგებს ტარტალია მაინც საიდუმლოდ ინახავდა; ის ამზადებდა დასაბეჭდად დიდ სამეცნიერო შრომას ალგებრაში და გადაწყვეტილი ჰქონდა ეს შედეგებიც იმ შრომაში გამოექვეყნებია. მაგრამ მას გზა გადაუჭრა მისმა თანამედროვემ და თანამემამულემ, ნიჭიერმა მაგრამ ცბიერმა მათემატიკოსმა ჯიროლამო კარდანომ (Girolamo Cardano, 1501 — 1576). კარდანოს მოღვაწეობა მრავალფეროვანია: ის ფილოსოფოსიცაა, მათემატიკოსიც და ფარმაცევტიც; მისი მშფოთარე წინააღმდეგობებით სავსე ცხოვრება და ხასიათი ადასტურებენ, რომ ის აღორძინების ეპოქის პირმშო შვილია. მეცნიერების მეტად თაყვანისმცემელი კარდანო იმავე დროს თავზე ხელაღებული მოთამაშეა; ხან მეტად გარყვნილ ცხოვრებას ეწევა, ხან კი მეტად თავდაჭერილია და სავსებით გატაცებულია მეცნიერული მუშაობით. კარდანო ფილოსოფიაში ცხარედ იცავს იმ თვალსაზრისს, რომ ცოდნა ცდას უნდა ემყარებოდეს, მაგრამ იმავე დროს ის დიდად აფასებს ასტროლოგიას და საკმაო დროს და ენერგიას ხარჯავს მასზე მუშაობით. ამბობენ, რომ კარდანომ იწინასწარმეტყველაო მისი სიკვდილის დღე და დიდებული ასტროლოგის სახელი რომ დარჩენოდაო სწორედ იმ დღეს თავი მოიკლაო.

კარდანო მუშაობდა მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნის საკითხზე, მაგრამ მნიშვნელოვან შედეგს ვერ მიაღწია. როდესაც მან გაიგო ტარტალიას აღმოჩენის შესახებ, მას მისი გაცნობის დიდი



ჯერონიმო კარდანო

სურვილი დაებადა. ამ მიზნით კარდანო მიემგზავრება ტარტალიასთან და სთხოვს გააცნოს მას კუბური განტოლების ამოხსნის ხერხი; კარდანო ფიცს სდებს ტარტალიას წინაშე, რომ არ გაამჟღავნებს საიდუმლოებას, მაგრამ ტარტალია მტკიცე უარით ისტუმრებს. კარდანო მაინც არ მოეშვა და ტარტალია მილანში მიიპატიჟა, სადაც ეშმაკობითა და მუხანათობით გამოსტყუა მას ზოგიერთი ცნობები კუბური განტოლების ამოხსნის შესახებ; კარდანომ ფიცი დასდო ტარტალიას წინაშე, რომ ის მათ არ გამოაქვეყნებდა. უხერხულ მდგომარეობაში ჩავარდნილმა ტარტალიამ გააცნო მას $x^3+px=q$ და $x^3=px+q$ განტოლებათა ამოხსნის ხერხი მხოლოდ სიტყვიერად და ლექსის სახით.

შეწუხებული იმის გამო, რომ მან თავისი საიდუმლოება კარდანოს გადასცა, ტარტალია იმ დღესვე გაემგზავრა მილანიდან და იმის შემდეგ კარდანოს თავისდღეში აღარ შეხვედრია.

როდესაც კარდანო შეუდგა ტარტალიას ხერხის გარჩევას, შეამჩნია, რომ (8) განტოლების ამოხსნა შეუძლებელია, როდესაც

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{11}$$

?

ეს შეუძლებელი იყო მაშინდელი მათემატიკოსების თვალსაზრისით, ვინაიდან წარმოსახვითი ფესვებზე მაშინ წარმოდგენა არ ჰქონდათ. (11) უტოლობის შემთხვევაშიც (8) განტოლებას დადებითი ფესვი აქვს და ისინი მხოლოდ ასეთს ეძებდნენ. ასეთ შემთხვევას ჩვეულებრივად დაუყვანელ შემთხვევას უწოდებენ, ვინაიდან მესამე ხარისხის განტოლების დაყვანა შეუძლებელია მეორე ხარისხის განტოლებამდე; მართლაც, მეორე ხარისხის განტოლებას ამ შემთხვევაში ასეთი სახე ექნება:

$$z^2 - qz + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

რომლის ფესვი წარმოსახვითია.

კარდანომ რამდენიმეჯერ სთხოვა ტარტალიას, რომ მას მიეცა განმარტება მისი ხერხის გამოყენების შესახებ დაუყვანელ შემთხვევაში. გასცა თუ არა პასუხი ტარტალიამ კარდანოს ამ შეკითხვაზე, გამოურკვეველია, რადგან ისტორიკოსების ცნობები ამის შესახებ ერთმანეთს ეწინააღმდეგებიან: ზოგი ამბობს გასცაო, ზოგი კი ამბობს, თითქოს ტარტალიას შეეშინდა იმისა, რომ კარდანო მას გაასწრებდა მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნის უფრო ღრმად დამუშავებაშიო და ამიტომ შესწყვიტა პასუხის გაცემაო; თუმცა უნდა ითქვას, რომ კარდანო ამ საკითხში ტარტალიაზე წინ არ წასულა. ტარტალიამ არათუ კავშირი გასწყვიტა კარდანოსთან, არამედ გადაიქცა მის მოსისხლე მტრად იმის შემდეგ, რაც კარდანომ ფიცი დაარღვია და გამოაქვეყნა მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნის ხერხი შრომაში „ალგებრული წესების დიდი ხელოვნება" („Ars magna de rebus algebraicis"). ამ შრომაში, რომელიც გამოვიდა 1545 წელს, კარდანომ შესაფერისად მოიხსენია ტარტალია, მაგრამ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ტარტალია თვითონ ამზადებდა დასაბეჭდად ალ-

გებრაში შრომას, რომლის საუკეთესო ნაწილი იყო მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნის მისი ხერხი; ტარტალია მეტად შეურაცყოფილი დარჩა კარდანოს ასეთი მოქცევით. მისი შრომის შემამკობელი თაიგულის მოტაცებისათვის ტარტალიამ შურისძიება განიზრახა და კარდანო პაექრობაზე გამოიწვია. კარდანოს გვერდში ამოუდგა მისი ნიჭიერი მოწაფე ლუიჯი ფერარი (Luigi Ferrari 1522–1565). მოწინააღმდეგე მხარეებმა ერთმანეთს მისცეს 31 ამოცანა, რომლებიც უნდა ამოეხსნათ ხუთი დღის განმავლობაში. ტარტალიამ ამ ვადის განმავლობაში ამოცანათა მეტი ნაწილი ამოხსნა; მისმა მოწინააღმდეგეებმა კი ამოხსნები წარადგინეს რამოდენიმე თვის შემდეგ. მაგრამ ტარტალიამ ამ ამოხსნებში შეცდომები აღმოაჩინა და ამიტომ დისპუტი მათ შორის დიდხანს გაჭიანურდა. დავას რომ ბოლო მოღებოდა ტარტალია მილანში მიემგზავრება და იქ იწვევს მათ საჯარო დისპუტზე, რომელზედაც მხოლოდ ფერარი გამოცხადდა; კარდანომ არ მიიღო მონაწილეობა. როგორც ჩანს ისტორიკოსების გადმოცემიდან, დისპუტმა არც ერთ მხარეს არ მიანიჭა გამარჯვებულის სახელი. უნდა აღინიშნოს რომ კუბური განტოლების ამოხსნის წესი ახლაც ცნობილია ალგებრაში მხოლოდ კარდანოს წესის სახელწოდებით, რაც უსამართლობად უნდა ჩაითვალოს.

კარდანოს შრომა „Ars magna“ შედგება 40 თავისაგან. ის უაღრესად მნიშვნელოვანია იმ მხრივ, რომ მასში მოთავებულად მოცემულია განტოლებათა თეორია. გარდა ამისა იქ ადგილი აქვს იმ სიახლეს, რომ კარდანოს შემოყავს კვადრატულ და კუბურ განტოლებათა უარყოფითი ფესვების ცნება. კუბური განტოლების ამოხსნის წესი გამოსახულია სიმბოლოების საშუალებით; მაგალითად x^3+ $+6x=20$ ჩაწერილია შემდეგნაირად:

$$\text{cubus } \bar{p} \text{ 6 rebus aequalis 20}$$

(კუბს მიმატებული 6 უცნობი უდრის 20)

ამ განტოლების ამოხსნა კი ასეა ჩაწერილი:

$$\text{R. v. cu. R. } 108\ \overline{\text{p.}}\ 10/\text{m R. v. cu. R. } 108\ \overline{\text{m}}\ 10,$$

სადაც R ანუ radix ფესვის ნიშანია, $\bar{p}$ პირველი ასოა სიტყვა plus-ის და m კი — სიტყვა minus-ის; ეს უკანასკნელი თანამედ-

როვე ნიშნების საშუალებით შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10},$$

ანუ

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

„Ars magna"-ში მოთავსებულია აგრეთვე მეოთხე ხარისხის განტოლების ამოხსნის წესი, რაც, როგორც კარდანო ამბობს, ეკუთვნის მის ახალგაზრდა მოწაფეს — ფერარის. ეს წესი გამოიყენება ისეთი მეოთხე ხარისხის განტოლებისათვის, რომელიც მესამე ხარისხის წევრს არ შეიცავს, მაგალითად, შემდეგი სახის განტოლებისათვის

$$x^4+ax^2+bx+c=0 \tag{12}$$

სადაც a, b და c შეიძლება იყოს ან დადებითი, ან უარყოფითი. ეს განტოლება ჯერ უნდა გარდაიქმნას ისე, რომ მარცხენა ნაწილში სრული კვადრატი იყოს, მარჯვენა ნაწილში კი — გამოსახვა, რომლის ხარისხი მეორე ხარისხს არ აღემატება; ხერხი, რომლის საშუალებით უნდა ვაწარმოოთ ეს გარდაქმნა, თანამედროვე ნიშნების საშუალებით შეიძლება ასე გამოვსახოთ: (12) განტოლებიდან ვღებულობთ

$$\left(x^2+\frac{a}{2}\right)^2=x^4+ax^2+\frac{a^2}{4}=-bx-c+\frac{a^2}{4}.$$

ორივე ნაწილი კვადრატებად რომ გადავაქციოთ, ამისათვის მივუმატოთ ორივე ნაწილს

$$2\left(x^2+\frac{a}{2}\right)t+t^2,$$

სადაც t ჯერ უცნობი სიდიდეა; მივიღებთ

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2=2tx^2-bx+t^2+at+\frac{a^2}{4}-c,$$

რომელშიც მარჯვენა ნაწილიც კვადრატი იქნება

$$\left(\sqrt{2t}\,x-\sqrt{t^2+at+\frac{a^2}{4}-c}\right)^2,$$

თუ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$b^2=2t(4t^2+4at+a^2-4c).$$

ამ უკანასკნელი მესამე ხარისხის განტოლებიდან t განისაზღვრება და შემდეგ x-ის მოძებნა დაიყვანება კვადრატულ ფესვის ამოღების საშუალებით მეორე ხარისხის განტოლებამდე.

ფერარის ეს აღმოჩენა მეცნიერების ამ დარგის უკანასკნელი სიტყვაა, ვინაიდან, როგორც XIX საუკუნეში დამტკიცდა, შეუძლებელია მეხუთე და მეექვსე ხარისხის და საერთოდ მეოთხე ხარისხზე უფრო მაღალ ხარისხის განტოლებათა ამოხსნის ზოგადი წესის მოძებნა.

1572 წელს გამოვიდა აგრეთვე რაფაელ ბომბელის ალგებრა (Rafael Bombelli), სადაც განხილულია ისევ მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნის საკითხი. ბომბელი ამუშავებს $x^3=px+q$ განტოლების ზოგადი ამოხსნის საკითხს დაუყვანელ შემთხვევაში და იძლევა იმის ახსნას, რომ ამ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ნამდვილი ფესვი იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ის ფესვი გამოისახება წარმოსახვითი სიდიდეებიდან კუბური ფესვის საშუალებით. ალგებრაში ნიჭიერ მკვლევართა შორის თვალსაჩინო ადგილი უჭირავს გერმანიის მათემატიკოსს მიხაელ შტიფელს (Michael Stifel 1487—1567). ახალგაზრდობიდანვე ის მწირად შევიდა მონასტერში და მალე მიემხრო იმ მოძრაობას, რომელსაც ლიუტერი მეთაურობდა. შტიფელი ძალიან თამამად და თავისუფლად გამოსთქვამდა თავის აზრებს, რის გამო ის იძულებული გახდა მონასტერიდან გაქცეულიყო და დამალულიყო ვიტტენბერგში. აქ ის ლიუტერმა მოაწყო ჯერ დიაკვნად და შემდეგ სოფლის მღვდლად. პირველ ხანებში მისი მეცნიერული მუშაობა უნაყოფო იყო, ვინაიდან ის ეწეოდა რიცხვებზე მისტიურ ხასიათის კვლევა-ძიებას; ამ უკანასკნელმა ის ისეთ დასკვნამდე მიიყვანა, რომ 1533 წლის 19 ოქტომბრისათვის სამყაროს დასასრული იწინასწარმეტყველა, რაც სამარცხვინო გამოუვიდა. ამის

შემდეგ შტიფელმა ზურგი შეაქცია მეცნიერებაში ყალბ მიმართულებას და დაიწყო ჭეშმარიტი მეცნიერული კვლევა-ძიება. 1544 წელს გამოვიდა მისი ვრცელი შრომა „არითმეტიკის კურსი“ და 1545 წელს კი — „გერმანული არითმეტიკა“. ამ შრომებში შტიფელმა მოგვცა ზოგადი არითმეტიკული წესები და კვადრატული განტოლების ამოხსნის ზოგადი წესი, ვინაიდან მანამდე ასეთს ევროპელი მათემატიკოსები არ იცნობდნენ და ყოველ ცალკე შემთხვევისათვის საგანგებო წესებით სარგებლობდნენ. შტიფელმა აგრეთვე ლოგარითმების გამოგონებას ნიადაგი მოუმზადა. მან ერთმანეთს შეადარა არითმეტიკული პროგრესია: 0, 1, 2, 3, 4, ... და გეომეტრიული: $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ და გამოაშკარავა, რომ გეომეტრიულ პროგრესიის წევრებზე გამრავლებას, გაყოფას, ხარისხში აყვანას და ფესვის ამოღებას შეესაბამება არითმეტიკული პროგრესიის წევრებზე მიმატება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა. მაგალითად, მან აიღო კერძოდ პროგრესიები:

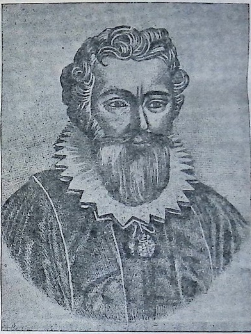
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \ldots$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $\sqrt[3]{64}$, ავიღებთ 64-ის ზევით მდგომ რიცხვს 6 და გავყოფთ მას ფესვის მაჩვენებელზე: $6:3=2$; 2-ის ქვეშ ვპოულობთ საძებნ ფესვს, ესე იგი 4-ს. არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს „მაჩვენებლები“ უწოდა, რაც ახლაც ხმარებაშია; ამასთანავე აღნიშნულია, რომ ერთეულის შესაბამისი მაჩვენებელი ნულია, ე. ი. $a^0=1$.

დიდი ღვაწლი მიუძღვის ალგებრისა და საერთოდ მათემატიკის წინ წაწევის საქმეში საფრანგეთის დიდ მათემატიკოსს ფრანსუა ვიეტას (Francois Vieta 1540 — 1603). ვიეტამ იურიდიული განათლება მიიღო და 19 წლის იყო, რომ ადვოკატობა დაიწყო, რაც მისი ძირითადი პროფესია იყო მთელ მის სიცოცხლეში. ის დიდ დროს ანდომებდა იურიდიულ საქმეებს, მაგრამ იმავე დროს მეტად მნიშვნელოვანი მრავალი მათემატიკური გამოკვლევების ავტორია. ამბობენ, რომ ის ისეთი არაჩვეულებრივი ენერგიის პატრონი იყო, რომ შეეძლო სამი დღე და ღამე განუწყვეტლად ემუშავა იმ გამოკვლევაზე, რომელიც მას აინტერესებდა.

ჯერ ის მეცნიერულ მუშაობას ეწეოდა თავის მშობლიურ ქალაქში. პარიზის მათემატიკოსების გაცნობის მიზნით და თავისი ტრიგონომეტრიული შრომის დაბეჭდვისათვის ვიეტა 1571 წელს პარიზში გადასახლდა, სადაც ისევ ადვოკატობას ეწეოდა. 1573 წელს ის მუშაობდა ბრეტანიაში პარლამენტის მრჩეველად და შემდეგ კი

საფრანგეთის მეფის ჰენრიხ მესამის კერძო მრჩეველად. უკანასკნელის სიკვდილის შემდეგ ვიეტა სამსახურში გადადის საფრანგეთის მეფესთან ჰენრიხ მეოთხესთან. ამ უკანასკნელთან ფონტენებლოში ყოფნისას 1594



ფრანსუა ვიეტა

წელს, როგორც ამბობენ, ვიეტას შემთხვევა მიეცა სახელი გაეთქვა მთელს მსოფლიოში. შემთხვევა ასეთი იყო: ქ. ლვოვის პროფესორმა რომანუსმა (Romanus) მსოფლიოს ყველა მათემატიკოსი, განსაკუთრებით კი ზოგიერთი, რომელთა რიცხვში ვიეტა არ შედიოდა, გამოიწვია მეორმოცდახუთე ხარისხის განტოლების ამოხსნაზე; ეს განტოლება შემდეგია:

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 +$$
$$+ 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} -$$
$$- 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} +$$

$$+483841800x^{21}-378658800x^{23}+236030652x^{25}-$$
$$-117679100x^{27}+46955700x^{29}-14945040x^{31}+$$
$$+3764565x^{33}-740259x^{35}+111150\,x^{37}-$$
$$-12300x^{39}+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=a.$$

რომანუსი მოითხოვდა ამ განტოლების ამოხსნას იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$a=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}};$$

მაგრამ ამოცანის გასაადვილებლად მან თან დაურთო ამოხსნა

$$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}}$$

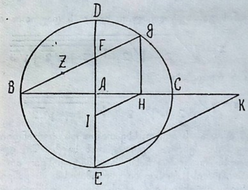
იმ შემთხვევაში როდესაც

$$a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

რომანუსის ამ ამოცანას შეეხო, სხვათაშორის, ჰოლანდიის ელჩი საფრანგეთის მეფესთან ჰენრიხ მეოთხესთან საუბარში; ელჩმა აღნიშნა, რომ საფრანგეთს, როგორც ჩანს, მათემატიკოსები არ ჰყავს, ვინაიდან იმ პირებს შორის, რომლებიც რომანუსმა საგანგებოდ გამოიწვია, არც ერთი ფრანგი არ არის. მეფემ უპასუხა, რომ საფრანგეთს ძალიან გამოჩენილი მათემატიკოსი ჰყავს და დაუძახა ვიეტას. მივიდა თუ არა ვიეტა, ელჩი მას აძლევს რომანუსის ამოცანას. ვიეტამ წაკითხვისთანავე დაწერა ამოცანის ამოხსნა და ელჩს მეორე დღეს გაუგზავნა კიდევ სხვა 22 ამოხსნა. რომანუსთან პაექრობაში ვიეტამ კიდევ მეორეთ ისახელა თავი; მან თავის მხრივ მისცა რომანუსს ამოცანა: „ავაგოთ წრეწირი, რომელიც მოცემულ სამ წრეწირს ეხება“: ასეთი წრეწირი, როგორც საბერძნეთის მათემატიკოს პაპოსისაგან ვიცით ააგო აპოლონიუსმა, მაგრამ არ ვიცით როგორ, ვინაიდან მისი შრომა „შეხების შესახებ“, რომელშიც იყო მოთავსებული ეს აგება, დაკარგულია. ამ აგების შესრულებას ვიეტა მოითხოვდა მხოლოდ სახაზავი და ფარგალის საშუალებით, რაც თვითონ ძალიან ლამაზად შეასრულა; რომანუსმა კი მხოლოდ კონუსური კვეთების საშუალებით მოახერხა. ამ გამარჯვებამ ვიეტას „გალთა აპოლონიუსის“ სახელწოდება მიანიჭა. რომანუსი კი ამის შემდეგ მას მეტად აფასებდა და ხშირად მიდიოდა მასთან. ვიეტა მრავალი მა-

თემატიკური შრომის ავტორია; მისი შრომები მან გამოსცა რვა წიგნად 1593 წელს; მაგრამ ეს მხოლოდ მცირე ნაწილი იყო მისი შრომებისა; მათი მეტი ნაწილი გამოცემული იქნა ვიეტას სიკვდილის შემდეგ მისი მოწაფის, ანდერსონის მიერ. ჩვენ აქ ვიეტას მხოლოდ რამდენიმე შრომებს შევეხებით. ვიეტამ წრის გაზომვის არქიმედეს მეთოდთან შედარებით უფრო გაღრმავებით გამოიანგარიშა π-ის მნიშვნელობა, რაც თანამედროვე მათემატიკური ენით შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს:

წრეში (ნახ. 60) გავავლოთ ერთმანეთის პერპენდიკულარული BC



ნახ. 60.

და DE დიამეტრები. AD რადიუსის შუა წერტილზე F-ზე გავავლოთ Bg წრფე და g წერტილიდან კი გავავლოთ $gH \parallel DE$. მოვზომოთ $FZ=FA$ და $EI=BZ$. გავავლოთ IH და EK პარალელები. მაშინ AK-ს სიგრძე დაახლოებით უდრის წრეწირის მეოთხედის სიგრძეს, ანუ $AK=\frac{\pi d}{4}$ სადაც d დიამეტრის სიგრძეა. ვინაიდან $AB=2AF$ ამიტომ $BH=2gH$; აგრეთვე ვიცით რომ $gH^2=BH\cdot HC$ ანუ $gH^2=2gH\cdot HC$. ე. ი. $gH=2HC$, $BH=4HC=\frac{4}{5}d$; $AH= =\frac{4}{5}d-\frac{1}{2}d=0,3d$;

შემდეგ

$$FB=\sqrt{AB^2+AF^2}=\frac{d}{4}\sqrt{5}\ ;\ BZ=EI=\frac{d}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$AI=AE-EI=\frac{d}{4}(3-\sqrt{5})$$

მაგრამ

$$AI:AE=AH:AK$$

ამიტომ

$$AK=\frac{AE\cdot AH}{AI}=\frac{\frac{d}{2}\cdot\frac{3d}{10}}{\frac{d}{4}(3-\sqrt{5})}=\frac{3}{20}d(3+\sqrt{5})$$

მაგრამ

$$AK=\frac{\pi d}{4}$$

ამიტომ

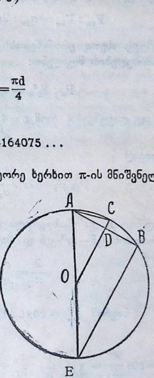
$$\frac{3}{20}d(3+\sqrt{5})=\frac{\pi d}{4}$$

აქედან კი

$$\pi=\frac{18+\sqrt{180}}{10}=3{,}14164075\ \ldots$$

შესანიშნავია აგრეთვე ვიეტას მეორე ხერხით π-ის მნიშვნელობის გამოყვანა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

ვთქვათ $AB=a_n$ (ნახ. 61) გვერდია წესიერი n — კუთხედისა, რომლის ფართობს F_n-ით აღვნიშნოთ; $AC=a_{2n}$ გვერდია წესიერი 2n კუთხედისა, რომლის ფართობია $F_{2n}\cdot OC=r$ რადიუსია და $BE=a_n$ ქორდას ვიეტა აპოტომს (Apotome) უწოდებს. ცხადია, რომ



ნახ. 61.

$$\triangle ABE \backsim \triangle ADO$$

ამიტომ

$$BE : AE = OD : OA$$

ანუ

$$\frac{OD}{r} = \frac{\alpha_n}{2r};$$

შემდეგ გვაქვს

$$\triangle OAC = \frac{1}{2n} \cdot F_{2n}, \ \triangle OAD = \frac{1}{2n} F_n,$$

$$F_n : F_{2n} = \triangle OAD : \triangle OAC = OD : OC = \alpha_n : 2r.$$

ასეთივენაირად დამტკიცდება რომ

$$F_{2n} : F_{4n} = \alpha_{2n} : 2r; \ F_{4n} : F_{8n} = \alpha_{4n} : 2r \text{ და ასე}$$

შემდეგ. ასეთი ერთმანეთის მიმდევნო რიცხვის პროპორციათა გადამრავლებით მივიღებთ:

$$F_n : F_{2^k n} = \alpha_n \cdot \alpha_{2n} \dots \alpha_{2^{k-1} n} : (2r)^k.$$

თუ დავუშვებთ რომ $n=4$ მივიღებთ $F_4 = 2r^2$ და $2^k{}_n = 2^{k+2}$, $2^{k-1}{}_n = 2^{k+1}$.

ამრიგად

$$F_{2^k+2} = 2r^2 . \frac{2r}{\alpha_4} \cdot \frac{2r}{\alpha_8} \dots \frac{2r}{\alpha_{2^{k+1}}};$$

როდესაც K განუსაზღვრელად იზრდება, F_{2k+2} მიისწრაფის წრის ფართობისაკენ—πr^2-კენ და მივიღებთ შემდეგი გამოსახვას

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\alpha_4}{2r} \cdot \frac{\alpha_8}{2r} \cdot \frac{\alpha_{16}}{2r} \dots$$

მაგრამ $\frac{\alpha_n}{2r} = \cos \angle AEB = \cos \frac{360°}{2n}$ და ამიტომ

$$\frac{\alpha_4}{2r} = \cos \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \ \frac{\alpha_8}{2r} = \cos \frac{90°}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\frac{\alpha_{16}}{2r}=\cos\frac{90^\circ}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}$$ და ასე შემდეგ

საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{90^\circ}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ}{4}\cdot\cos\frac{90^\circ}{8}=\dots$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\dots$$

ეს გამოსახვა შესანიშნავია იმით, რომ წრის ფართობი განხილულია როგორც ზღვარი და ამ გამოსახვაში ჩვენ ვხედავთ უსასრულო ნამრავლის გამოყენების პირველი ნაბიჯს. ვიეტას მიერ ალგებრაში შეტანილ სიახლეთა შორის აღსანიშნავია მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნის ანალიზური ხერხი, ვინაიდან ტარტალიასა და კარდანოს მიერ ასეთი განტოლებათა ამოხსნა მოცემული იყო მხოლოდ სინთეზური წესის სახით. ეს თვალსაჩინო შემდეგი მაგალითიდან, რომელიც თანამედროვე აღნიშვნების საშუალებით იქნება

$$x^3+3ax=2b. \tag{13}$$

ვიეტამ დაუშვა, რომ

$$a=t^2+xt \tag{14}$$

ასეთი დაშვების საშუალებით (13) განტოლების მარცხენა მხარე გარდაიქმნება სრული კუბის პირველ სამ წევრად $x^3+3x^2t+3xt^2$. (14) განტოლებიდან აღებულ x-ის მნიშვნელობა ვიეტამ ჩასვა (13) განტოლებაში და ამით x გამორიცხა, შედეგად მიიღო განტოლება

$$(t^3)^2+2bt^3=a^3; \tag{15}$$

(15) განტოლებიდან t განსაზღვრა და შემდეგ x იპოვა დამხმარე

(14) განტოლებიდან. ვიეტა იკვლევდა აგრეთვე იმას, თუ რამდენი დადებითი ფესვი აქვს მესამე ხარისხის განტოლებას. ეს გამოკვლევა მან დაიწყო მეორე ხარისხის განტოლებიდან და მისგან შეადგინა სამ წევრიანი უმაღლესი ხარისხის განტოლებები ისე, რომ დადებითი ფესვის რიცხვი არ გადიდებულა; ვიეტამ ამისათვის გამოიყენა შემდეგი ხერხი:

$$x^2+ax=b \qquad (16)$$

განტოლება კვადრატში აამაღლა და მიიღო

$$x^4+2ax^3+a^2x^2=b^2 \qquad (17)$$

ამ უკანასკნელ განტოლებაში მეორე და მესამე ხარისხის წევრები დაიყვანა პირველ ხარისხის წევრებამდე მოცემულ (16) განტოლების საშუალებით შემდეგნაირად:

(17) განტოლება წარმოვიდგინოთ ასე:

$$x^4+x^2(2ax+a^2)=b^2$$

ამ უკანასკნელში x^2-ის ნაცვლად ჩავსვათ (16) განტოლებიდან აღებული მნიშვნელობა $x^2=b-ax$ მივიღებთ

$$x^4+(b-ax)(2ax+a^2)=b^2$$

ანუ

$$x^4+2abx+a^2b-2a^2x^2-a^3x=B^2$$

სადაც x^2-ის ნაცვლად $(b-ax)$-ის ხელმეორედ ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$x^4+(a^3+2ab)x=b^2+a^2b;$$

უკანასკნელ განტოლებას იგივე და მხოლოდ იგივე დადებითი ფესვები აქვს, როგორც მოცემულს (16).

ვიეტას მეორე მაგალითი შემდეგია:

$$ax-x^2=ab.$$

განტოლებას თუ $(x+b)$-ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$(a-b)x^2-x^3=ab^2$$

უკანასკნელს იგივე დადებითი ფესვები აქვს, როგორც მოცემულს. ვიეტა განიხილავს აგრეთვე განტოლებას

$$ax^m - x^{m+n} = b$$

რომელსაც ორი ფესვი შეიძლება ჰქონდეს და კოეფიციენტებს ისე განსაზღვრავს, რომ ფესვებს ჰქონდეს მოცემული მნიშვნელობა. თუ ეს ფესვები y-ით და z-ით აღვნიშნეთ, გვექნება:

$$a = \frac{y^{m+n} - z^{m+n}}{y^m - z^m}, \quad b = \frac{y^{m+n}z^m - y^m z^{m+n}}{y^m - z^m};$$

a-ს და b-ს ეს გამოსახვანი დაკავშირებულია გეომეტრიული მწკრივის შეჯამებასთან; ვიეტამ შეადგინა სხვადასხვა სამწევრიანი განტოლებები, რომლებიც მოცემული სიდიდეები და ნამდვილი ფესვები სხვადასხვანაირად არიან დამოკიდებული გეომეტრიული წკრივებისაგან, მაგალითად, თუ a_1, a_2, a_3, ... a_n გეომეტრიულ წკრივს შეადგენენ, მაშინ განტოლებას

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1} - x^n = a_1(a_2 \dots + a_n)^{n-1}$$

აქვს ამოხსნა

$$x = \begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}, \\ a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{cases}$$

იმ განტოლებისათვის, რომლებსაც მხოლოდ დადებითი ფესვები აქვს, ვიეტა გვაძლევს მათი კოეფიციენტების გამოსახვას ფესვების საშუალებით; მაგალითად მან აიღო ორი განტოლება:

$$y^3 = ay + b; \quad x^3 + b = ax;$$

$y^3 + b = ay$

თუ პირველი განტოლების დადებითი ფესვი y_1-ით აღვნიშნეთ და მეორესი დადებითი ფესვები x_1 და x_2-თი, მაშინ ვიეტა გვიჩვენებს, რომ $y_1 = x_1 + x_2$; $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = a$; $x_1x_2(x_1 + x_2) = b$.

ვიეტას ეკუთვნის ალგებრაში ასოებით აღრიცხვის შემოღება, ე. ი. მოცემული სიდიდეების ასოებით აღნიშვნა; ამ ასოებით აღრიცხვას მან logistica speciosa უწოდა; რიცხვების არითმეტიკას კი ვიეტა logistica nuimerosa-ს უწოდებდა. მაგრამ ვიეტა დადებითი და რაციონალურ რიცხვებს აღნიშნავდა ასოებით, ვინაიდან მისი აზრით მხო-

ლოდ ასეთი რიცხვების მიმართ შეიძლება ოპერაციის წარმოება.

გამოსახვას

$$(a+\mathrm{b})^3 = a^3 + 3a^2\mathrm{b} + 3a\mathrm{b}^2 + \mathrm{b}^3$$

ვიეტა შემდეგნაირად წერს

$\overline{a+\mathrm{b}}$ cubo aequalia a cubus + b in a quadr 3 +
+ ain b quadr. 3 + b cubo.

განტოლებას

$$\mathrm{x}^3 - 8\mathrm{x}^2 + 16\mathrm{x} = 40$$

ვიეტა შემდეგნაირად გამოსახავს

$$1\mathrm{C} - 8\,\mathrm{Q} + 16\mathrm{N} \text{ aequalia } 40$$

სადაც C ნიშნავს უცნობის მესამე ხარისხს. Q მეორე ხარისხს და N—კი პირველ ხარისხს.

ალგებრაში ასოებით აღრიცხვის შემოღებამ ვიეტა მიიყვანა გეომეტრიაში ალგებრის გამოყენებამდე; ზოგიერთი გეომეტრიული ამოცანის გადასაწყვეტად ის ალგებრით სარგებლობს, საიდანაც ჩანს, რომ ანალიზური გეომეტრიის პირველი დამწყები ვიეტაა; ამიტომ ის ანალიზური გეომეტრიის შემქმნელის—დეკარტის წინამორბედად უნდა ჩაითვალოს. მეორე და მესამე ხარისხის განტოლებებში შემავალ ასოებს ვიეტა გეომეტრიულ მნიშვნელობას ანიჭებს;

მაგალითად, განტოლებას, რომელიც თანამედროვე ფორმულით იქნება:

$$3\mathrm{mx}^2 - \mathrm{nx} + \mathrm{x}^3 = \mathrm{r}^3$$

ვიეტა შემდეგნაირად წერს:

B 3 in A quadr. – D plano in A + A cubo aequalia z solido.

ე. ი. 3 B გამრავლებული A-ს კვადრატზე — ფართობი D გამრავლებული A-ზე + A კუბი უდრის Z მოცულობას.

ვიეტა იმ დასკვნამდე მიდის, რომ მესამე ხარისხის განტოლების შედგენა ნიშნავს ძველი პრობლემების — კუბის გაორკეცებისა და კუთხის სამ ტოლ ნაწილად დაყოფის ამოხსნას, რომელთა ამოხსნა

მანამდე შეიძლებოდა მხოლოდ კონუსური კვეთებისა და უმაღლესი რიგის მრუდეების საშუალებით. ვიეტა პოულობს, რომ კუბის გაორკეცების ამოცანა (ე. ი. ამოცანა: მოცემული კუბის გვერდის საშუალებით ავაგოთ გვერდი ისეთი კუბისა, რომლის მოცულობა მოცემულ კუბის მოცულობაზე ორჯერ მეტი იქნება) მდგომარეობს ყოველი ისეთი კუბურ განტოლების ამოხსნაში, რომელიც კარდანოს წესის მიხედვით დაიყვანება ნამდვილ ფესვიან კვადრატულ განტოლებამდე; მეორე ამოცანა კი — კუთხის სამ ტოლ ნაწილად დაყოფა — დაუყვანელ შემთხვევას ეკუთვნის (ე. ი. ამ ამოცანის ამოხსნა მდგომარეობს ისეთი კუბური განტოლების ამოხსნაში, რომელიც წარმოსახვითი ფესვიან კვადრატულ განტოლებამდე დაიყვანება). ვიეტა ბევრს მუშაობდა აგრეთვე ტრიგონომეტრიაში ალგებრის გამოყენების საკითხზე. უნდა აღინიშნოს, რომ ვიეტას ამ შრომას უნაყოფოდ არ ჩაუვლია; პირიქით: ალგებრის მეთოდებით ტრიგონომეტრიული საკითხების განხილვამ ვიეტას საშუალება მისცა ბევრი რამეს აღმოჩენისა და ტრიგონომეტრიის განვითარების საქმეში დიდი წვლილის შეტანისა. $\cos(x+y)$ და $\sin(x+y)$ გამოსახვათა საშუალებით ვიეტა პოულობს ჯერადი კუთხეების სინუსებისა და კონუსებისათვის შემდეგ ფორმულებს:

$$\cos mx = co^{m}x - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2}x\sin^{2}x + \dots$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1}x\,\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3}x\sin^{3}x + \dots$$

ვიეტას ეკუთვნის აგრეთვე შემდეგი ფორმულები:

$$\cos mx = 2\cos x\cos(m-1)x - \cos(m-2)x;$$

$$\sin mx = 2\cos x\sin(m-1)x - \sin(m-2)x;$$

$$\sin mx = 2\sin x\cos(m-1)x + \sin(m-2)x;$$

$$\cos mx = -2\sin x\cdot\sin(m-1)x + \cos(m-2)x.$$

ვიეტას შემდეგ XVI საუკუნის მეტად გამოჩენილი მათემატიკოსი იყო ჰოლანდიელი სიმონ სტევინი (Simon Stevini 1548 — 1620), რომელიც ქალაქ ბრიუგეში დაიბადა. სტევინი ჯერ ვაჭარი იყო, შემდეგ კი ინჟინერი გახდა. სტევინი დიდ ყურადღებას აქცევდა მა-

თემატიკის პრაქტიკულ მხარეს და მის პოპულარიზაციას. მათემატიკის პოპულარიზაცია იმაში გამოიხატებოდა, რომ ის მათემატიკურ შრომებს სწერდა ჰოლანდიურ ენაზე და რაც მთავარია, მათემატიკურ ტერმინებს მშობლიურ ენაზე თარგმნიდა და ამით ცდილობდა ნაციონალურ მათემატიკურ ტერმინოლოგიის დანერგვას. სტევინს ეკუთვნის არითმეტიკაში ათწილადი ნაწევრების შემოღება; ეს გამოკვლევა მოთავსებულია მის წიგნში „ალგებრა“, რომელიც დაიბეჭდა 1585 წელს. გარდა ამისა სტევინს დიდი ღვაწლი მიუძღვის ალგებრული სიმბოლოების დამუშავებაში, თუმცა უნდა ითქვას, რომ მისი სიმბოლოები იმდენად მოხერხებული არ არის, როგორც ვიეტასი. სტევინის შემდეგი ამოცანებიდან ნაწილობრივად გავეცნობით მის სიმბოლიურ აღნიშვნებს: „მოცემულია სამი გამოსახვა, რომლებიდან პირველია — ② , მეორე ① ⓪ მესამე— ნებისმიერი ალგებრული რიცხვი; ვიპოვოთ შესაბამისი მეოთხე წევრი“. აქ ② 2 ნიშნავს x^2-, ① — x, და ⓪ — მუდმივს; ① ⓪ კომბინაცია კი $(ax+b)$-ს ნიშნავს; ამოცანა მდგომარეობს $x^2 = ax + b$ განტოლების ამოხსნაში.

როგორც დავინახეთ, XVI საუკუნეში მათემატიკა სწრაფად განვითარდა და ბრწყინვალე შედეგებს მიაღწია. მაგრამ ამ საუკუნეში წამოჭრილი მრავალი პრობლემა გადაიჭრა მხოლოდ XVII საუკუნეში, რომელიც ლოგარითმების გამოგონებით იწყება და ხასიათდება უაღრესად მნიშვნელოვანი აღმოჩენით გეომეტრიაში და უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის დარგში.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თავი VII

არაბები

თავი VIII

ქართული ქრონოლოგიური გამოთვლები X, XI და XII საუკუნეებში.

თავი IX

ევროპის მათემატიკა XVII საუკუნემდე

ტექრედაქტორი გ. ნადარეიშვილი

* * *

გადაეცა წარმოებას 1948 წ. 21/IV. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 1948 წ. 26/VII. ქაღალდის ზომა 84 x 120. წიგნის ანაწყობის ზომა 6 x 9,5. ტირაჟი 2000. გამომც. შეკვ. № 25. სტამბის შეკვეთის № 712 უე 10396.

* * *

საავტორო ფორმათა რაოდენობა 11.34.
სასტამბო ფორმათა რაოდენობა 16.

* * *

საქ. სსრ მინისტრთა საბჭოსთან არსებულ პოლიგრაფიისა და გამომც. 1-ლი სტამბა ორჯონიკიძის ქ. 50.