Труды Тбилисского университета
166

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

Тбилиси 1976

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
166

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

თბილისი 1976 TBILISI

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
166

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ

ТБИЛИСИ 1976

თბილისის უნივერსიტეტის შრომებზე, დაწყებული 160-ე ტომიდან, აღინიშნება მხოლოდ ერთი—მზარდი ნომერი (საერთო ნუმერაცია „შრომების“ დაარსებიდან დღემდე).

Труды Тбилисского университета, начиная со 160-го тома, будут выходить только под одним нарастающим номером (общая нумерация с основания „Трудов“ по н/время).

From volume 160 Proceedings of Tbilisi University will be issued under only one increasing number (general numeration from the foundation of „Proceedings“ up to now).

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

О РЕШЕНИИ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО БИКАЛОРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

П. К. ЗЕРАГИЯ

1. Простейший параболический оператор

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

назовем калорическим, а оператор

$$\delta^2 u = \delta(\delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

бикалорическим.

Однородное бикалорическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\delta^2 u = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (*)$$

Если функция $u(x, y)$ регулярна в некоторой области, т. е. если она непрерывна со своими частными производными до четвертого порядка по x и до второго порядка по y включительно и удовлетворяет внутри области уравнению (*), тогда ее будем называть бикалорической функцией в этой области.

В настоящей статье мы будем рассматривать нелинейное бикалорическое дифференциальное уравнение вида

$$\delta^2 u = \lambda f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right), \qquad (1)$$

где λ—постоянный параметр, f—известная функция своих аргументов, удовлетворяющая определенным условиям (см. ниже).

2. Пусть R—некоторая ограниченная замкнутая область на плоскости $0xy$. Будем считать, что начало координат лежит внутри R. Обозначим через S некоторую область, лежащую внутри R, ограниченную отрезками AB и DC характеристик $y=0$, $y=l$ (значение l подберем ниже), а слева и справа—двумя дугами Γ_1 и Γ_2, каждая из которых может пересекаться с характеристикой $y=\text{const}$ только в одной точке и уравнение которых суть соответственно:

$$x = \chi_1(y), \quad x = \chi_2(y),$$

при этом

$$\chi_2(y) > \chi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant l.$$

Возьмем какую-нибудь точку $E(x, y)$ внутри S с ординатой $y \leqslant l$ и допустим, что M_1M_2 есть отрезок характеристики, проходящей через E, заключенный между дугами Γ_1 и Γ_2. Пусть Γ есть совокупность Γ_1, Γ_2 и отрезка AB характеристики $y=0$. Обозначим через S_y область ABM_2M_1A.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Найти решение уравнения (1), регулярное внутри области S и удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям:

$$u=0, \quad u_y=0, \quad \text{при} \quad y=0, \tag{2}$$

$$u=0, \quad u_x=0 \quad \text{при} \quad x=\chi_i(y), \; i=1, 2, \tag{3}$$

$$\left(u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Легко показать, что выбор однородных краевых условий (2) и (3) не ограничивает общности.

Обозначим через $U(x, y; \xi, \eta)$ фундаментальное решение калорического уравнения (уравнения теплопроводности):

$$U(x, y; \xi, \eta)=(y-\eta)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right), \; y>\eta.$$

Тогда легко видеть, что функция

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta)=(y-\eta)\, U(x, y; \xi, \eta)=(y-\eta)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)$$

удовлетворяет бикалорическому уравнению (*).

Пусть $g(x, y; \xi, \eta)$ внутри области S—бикалорическая функция, удовлетворяющая следующим начальным и граничным условиям:

$$g=-\Gamma(x, y; \xi, \eta), \; g_y=-\Gamma_y(x, y; \xi, \eta), \quad \text{при} \quad y=0, \tag{4}$$

$$g=-\Gamma(x, y; \xi, \eta), \; g_x=-\Gamma_x(x, y; \xi, \eta) \; \text{при} \; x=\chi_i(y), \; i=1, 2. \tag{5}$$

Такая бикалорическая функция существует и единственна [1, 2]. Поэтому в области S существует единственная функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ однородного бикалорического уравнения (*), имеющая вид

$$G(x, y; \xi, \eta)=\Gamma(x, y; \xi, \eta)+g(x, y; \xi, \eta), \tag{6}$$

и удовлетворяющая однородным начальным и граничным условиям:

$$G(x, y; \xi, \eta)=0, \quad G_y(x, y; \xi, \eta)=0, \quad \text{при} \quad y=0, \tag{7}$$

$$G(x, y; \xi, \eta)=0, \quad G_x(x, y; \xi, \eta)=0, \; \text{при} \; x=\chi_i(y), \; i=1, 2. \tag{8}$$

Далее, если функция $F(x, y)$ в области S относительно y удовлетворяет условию Гёльдера, тогда, следуя M. Gevrey [3], можно доказать, что функция

$$v(P)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint\limits_{S_y} G(P; Q)\, F(Q)\, dQ, \quad (P=(x, y), \; Q=(\xi, \eta)), \tag{9}$$

внутри области S удовлетворяет неоднородному бикалорическому уравнению

$$\delta^2 v(P)=F(P) \tag{10}$$

и однородным начальным и граничным условиям (2), (3).

3. Теперь предположим, что функция $f(P, \vec{u})$, где $\vec{u}(P)$ — вектор в шестимерном пространстве, удовлетворяет условиям:

(A). Функция $f(P, \vec{u})$ непрерывна относительно всех своих аргументов в замкнутой области Ω:

$$\Omega=\{P\in \overline{S},\ \ \|\vec{u}\|\leqslant N\},$$

где $\|\vec{u}\|$ означает норму вектора $\vec{u}$, а N—положительная постоянная.

(B). Функция f удовлетворяет в области Ω условию Липшица:

$$|f(P, \vec{u}_1)-f(P, \vec{u}_2)|\leqslant L\,\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|, \tag{11}$$

где L—положительная постоянная.

Пусть M такая положительная постоянная, что

$$\max_{\Omega}|f(P, \vec{u})|\leqslant M. \tag{12}$$

Покажем, что при вышеуказанных условиях уравнение (1) имеет в области S единственное регулярное решение, удовлетворяющее условиям (2) и (3).

Для этого рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение, эквивалентное уравнению (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3):

$$u(P)=-\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}}\iint_{S_y} G(P;Q)f\left(Q, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}, \frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}\right)dQ. \tag{13}$$

Очевидно, имеем

$$\iint_{S_y}\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|dQ\leqslant \iint_{S_y}\frac{|x-\xi|}{2(y-\eta)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)dQ+\iint_{S_y}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|dQ, \tag{14}$$

$$\iint_{S_y}\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|dQ\leqslant \iint_{S_y}\left[\frac{1}{2(y-\eta)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\right]\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)dQ+$$
$$+\iint_{S_y}\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|dQ, \tag{15}$$

$$\iint_{S_y}\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right|dQ\leqslant \iint_{S_y}\left[\frac{1}{2(y-\eta)^{\frac{1}{2}}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(x-\xi)}{4(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}\right]\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)dQ+\iint_{S_y}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|dQ, \tag{16}$$

$$\iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\right|dQ\leqslant\iint\limits_{S_y}\left[\frac{|x-\xi|}{4(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|x-\xi|^3}{8(y-\eta)^{\frac{5}{2}}}\right]\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)dQ+\iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right|dQ, \tag{17}$$

$$\iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right|dQ\leqslant\iint\limits_{S_y}\left[\frac{3\,|x-\xi|}{4(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|x-\xi|^3}{8(y-\eta)^{\frac{5}{2}}}\right]\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)dQ+\iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial^3 g}{\partial x^2}\right|dQ. \tag{18}$$

Но $g(x, y; \xi, \eta)$ является регулярной бикалорической функцией в области $\overline{S}$. Поэтому интегралы:

$$\iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|dQ,\quad \iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|dQ,\quad \iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|dQ,\quad \iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right|dQ,\quad \iint\limits_{S_y}\left|\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right|dQ$$

являются ограниченными величинами. Остальные члены в правых частях неравенств (14)—(18) являются интегралами вида

$$I_{p,q}=\iint\limits_{S_y}\frac{|x-\xi|^p}{(y-\eta)^q}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)dQ, \tag{19}$$

сходящимися при $p>-1$ и $q<\frac{1}{2}(p+3)$, в чем легко убедиться, если в (19) сделать подстановку $y-\eta=t$, $\xi-x=2\sqrt{st}$.

Таким образом, интегралы в левых частях неравенств (14)—(18) ограничены.

4. Теперь возвращаемся к уравнению (13). Очевидно имеем:

$$u_i(P)=-\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}}\iint\limits_{S_y}K_i(P, Q)f(Q, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)dQ, \tag{20}$$

$$i=1,\dots,6$$

где

$$u_1(P)=u(P),\ u_2=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_3=\frac{\partial u}{\partial y},\quad u_4=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u_5=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad u_6=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

$$K_1(P;\ Q)=G(P;\ Q),\ K_2=\frac{\partial G}{\partial x},\quad K_3=\frac{\partial G}{\partial y},\quad K_4=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2},$$

$$K_5=\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y},\quad K_6=\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}.$$

Ясно, что систему уравнений (20) можно представить в виде одного векторного уравнения:

$$\vec{u}(P) = -\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{S_y} \vec{K}(P;\ Q)\, f(Q,\ \vec{u})\, dQ, \tag{21}$$

где $\vec{u}(P)$—вектор с компонентами: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6$, а $\vec{K}(P;\ Q)$ — вектор с компонентами: $K_1(P;\ Q),\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5,\ K_6$.

Пусть V—множество непрерывных вектор-функций $\{\vec{u}(P)\}$, заданных в области $\overline{S}$ и удовлетворяющих условию

$$\| \vec{u}(P) \| \leqslant N \quad \text{при} \quad P \in \overline{S}.$$

Введем на множестве V метрику

$$\rho(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2) = \sup_{P \in \overline{S}} \| \vec{u}_1(P) - \vec{u}_2(P) \|. \tag{22}$$

Очевидно, что множество V—полное метрическое пространство.

На множестве V определим оператор

$$A\vec{u} = -\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{S_y} \vec{K}(P;\ Q)\, f(Q,\ \vec{u})\, dQ \equiv \vec{W}(P), \tag{23}$$

Из (23) имеем, что

$$\| \vec{W}(P) \| \leqslant \frac{|\lambda| M}{2\sqrt{\pi}} \left| \iint\limits_{S_y} \| \vec{K}(P;\ Q) \|\, dQ \right| < |\lambda|\, MK^*, \tag{24}$$

где

$$K^* = \max_{P \in \overline{S}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \iint\limits_{S_y} \| \vec{K}(P;\ Q) \|\, dQ \right| > 0.$$

Поэтому, если $|\lambda|\, MK^* \leqslant N$, то $\| \vec{W}(P) \| \leqslant N,\ P \in \overline{S}$, и оператор A отображает пространство V в себя.

Далее, из (23) следует, что

$$\rho(A\vec{u}_1,\ A\vec{u}_2) = \sup_{P \in \overline{S}} \| A\vec{u}_1 - A\vec{u}_2 \| \leqslant |\lambda|\, K^* L \sup_{P \in \overline{S}} \| \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \|,$$

или

$$\rho(A\vec{u}_1,\ A\vec{u}_2) \leqslant |\lambda|\, K^* L\, \rho(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2).$$

Поэтому, если $|\lambda|\, K^* L < 1$, то оператор A будет сжимающим. Следовательно, уравнение $A\vec{u} = \vec{u}$ будет иметь единственное решение.

Из сказанного легко следует, что если λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \min \left\{ \frac{1}{K^* L},\ \frac{N}{K^* M} \right\},$$

то уравнение (1), при условиях (2), (3), имеет единственное решение.

Наконец отметим, что некоторые задачи другого типа рассматривались в работах [4, 5, 6].

Кафедра общей
математики

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Pini, Randiconti del seminario matematico della universita di Padova, 1953, 190—206.
2. M. Nicolescu, Studii si cercetâri Matematice, 3—4, 1954, 243—332.
3. M, Gevrey, Journ. de Math. pures et appl. (6), 9, 1913, 305—371; (6), 105, 1914, 105—148.
4. П. К. Зерагия, Труды Тбил. математич. ин-та АН ГССР, т. XXIV, 1957, 195—222.
5. П. К. Зерагия. Труды ТГУ, т. 76, 1959.
6. Г. И. Сулханишвили, Сообщения АН ГССР, 55, № 3, 1969, 29—32.

პ. ზერაგია

ერთი არაწრფივი ბიკალორული განტოლების ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შესახებ

რეზიუმე

ვთქვათ Oxy სიბრტყეზე მოცემულია S არე, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი მახასიათებლის $y=0$, $y=l$ მონაკვეთებით და ორი რკალით Γ_1 და Γ_2, რომლებიც მოთავსებულია ამ მახასიათებლებს შორის და რომელთა განტოლებებია $x=\chi_1(y)$ და $x=\chi_2(y)$ $[\chi_2(y)>\chi_1(y)]$.

განვიხილოთ შემდეგი სახის არაწრფივი ბიკალორული განტოლება:

$$\eth^2 u=\lambda f\left(x,\ y,\ u,\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right), \tag{1}$$

სადაც λ—მუდმივი პარამეტრია და f მოცემული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს, ხოლო

$$\eth u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y},\ \eth^2 u=\eth(\eth u)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

სტატიაში მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა:

ვიპოვოთ $\overline{S}$ არეში რეგულარული ფუნქცია $u(x,\ y)$, რომელიც ამ არეს შიგნით აკმაყოფილებს (1) განტოლებას და შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებს:

$$u=0,\quad u_y=0,\quad \text{როცა}\quad y=0 \tag{2}$$

$$u=0,\quad u_x=0,\quad \text{როცა}\quad x=\chi_i(y),\ i=1,\ 2, \tag{3}$$

$$\left(u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

P. ZERAGIA

ON THE SOLUTION OF THE MAIN BOUNDARY PROBLEM OF ONE NON-LINEAR BICALOR EQUATION

Summary

Let S be the domain on the plain oxy bounded by two characteristic curves $y=0$, $y=l$ and by two curves Γ_1 and Γ_2 with equations $x=\chi_1(y)$ and $x=\chi_2(y)$ $[\chi_2(y)>\chi_1(y)]$ between these characteristics.

Let's consider non-linear bicalor equation:

$$\delta^2 u=\lambda f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right), \tag{1}$$

λ is constant, f is a given function, satisfying certain conditions and

$$\delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \delta^2 u=\delta(\delta u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^4}-2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

In the present paper we solve the following boundary problem:

We must find the function $u(x, y)$, regular in domain $\vec{S}$, satisfying in this domain equation (1) and the following initial and boundary conditions:

$$u=0, \quad u_y=0, \quad \text{when} \quad y=0 \tag{2}$$

$$u=0, \quad u_x=0, \quad \text{when} \quad x=\chi_i(y), \quad (i=1, 2) \tag{3}$$

$$\left(u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

О СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. П. ГРИГОЛИЯ

Рассмотрим систему квазилинейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{I}$$

в области

$$D = \{(x, y): \ 0 < x \leqslant a, \quad 0 < y \leqslant b\},$$

где u—искомая n-мерная вектор-функция, а f—n-мерная вектор-функция, заданная и непрерывная в области DxE^{3n} (a и b—некоторые положительные постоянные, E^k—k-мерное евклидово пространство).

Для системы (1) ниже исследуется следующая

Задача Гурса. Найти непрерывное в $\overline{D}$ ($\overline{D}$—замыкание области D) решение $u(x, y)$ системы (1), имеющее непрерывные частные производные $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ в D и удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{2}$$

В случае, когда f непрерывна в $D \times E^{3n}$, задача (1), (2) изучена достаточно хорошо (см. напр. [1]). Следует также отметить работы [2], [3], [4], посвящённые изучению задачи Гурса для линейных гиперболических уравнений с параболическим вырождением вдоль некоторой прямой.

В настоящей статье рассматривается случай, когда f имеет сингулярности при $x=0$ и $y=0$ и вообще не интегрируема как по x, так и по y в окрестности нуля.

§ 1. Формулировка теорем существования и единственности

Всюду в дальнейшем приняты следующие обозначения:

1) $L = (\lambda_{ik})_{i,k=1}^n$ и $l = (\lambda^i)_{i=1}^n$, соответственно, $n \times n$-матрица и n-мерный вектор-столбец с элементами λ_{ik} и λ^i $(i, k = 1, \ldots, n)$,

$$|L| = (|\lambda_{ik}|)_{i,k=1}^n, \quad |l| = (|\lambda^i|)_{i=1}^n$$

$$\| L \| = \sum_{i,k=1}^{n} | \lambda_{ik} |, \quad \| l \| = \sum_{i=1}^{n} | \lambda^i |.$$

2) Если $L_j = (\lambda_{jik})_{i,k=1}^n$ и $l_j = (\lambda_j^i)_{i=1}^n$ $(j=1, 2)$, то записи $L_1 \leqslant L_2$ и $l_1 \leqslant l_2$ означают, что

$$\lambda_{1ik} \leqslant \lambda_{2ik}, \quad \lambda_1^i \leqslant \lambda_2^i \ (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

Теорема 1.1. Пусть $f(x, y, u_1, u_2, u_3)$ непрерывна в области $D \times E^{3n}$ и удовлетворяет неравенствам

$$| f(x, y, u_1, u_2, u_3) | \leqslant$$

$$\leqslant l_0 x^\alpha y^\beta + \frac{1}{xy} L_1(x, y) \, | u_1 | + \frac{1}{y} L_{20}(x, y) \, | u_2 | + \frac{1}{x} L_{30}(x, y) \, | u_3 | \quad (1.1)$$

и

$$| f(x, y, u_1, u_2, u_3) - f(x, y, u_1, v_2, v_3) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{y} L_{21}(x, y) \, | u_2 - v_2 | + \frac{1}{x} L_{31}(x, y) \, | u_3 - v_3 |, \quad (1.2)$$

где $\alpha > -1$, $\beta > -1$, l_0—неотрицательный постоянный n-мерный вектор, а $L_1(x, y)$, $L_{2i}(x, y)$ и $L_{3i}(x, y)$ $(i=0, 1)$—непрерывные в $\overline{D}$ неотрицательные $n \times n$-матрицы, элементы которых не убывают по x и по y. Далее, спектры матриц

$$\frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} L_1(0, 0) + \frac{1}{1+\beta} L_{20}(0, 0) + \frac{1}{1+\alpha} L_{30}(0, 0), \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{1+\beta} L_{2i}(a, 0), \quad \frac{1}{1+\alpha} L_{3i}(0, b) \quad (i=0, 1)$$

расположены внутри единичного круга. Тогда задача (1), (2) имеет решение $u(x, y)$ такое, что

$$\sup \left\{ \frac{\| u(x, y) \|}{x^{1+\alpha} y^{1+\beta}} + \frac{\left\| \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right\|}{x^\alpha y^{1+\beta}} + \frac{\left\| \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|}{x^{1+\alpha} y^\beta} : (x, y) \in D \right\} < +\infty. \quad (1.4)$$

Замечание 1. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$, l_0—положительный постоянный n-мерный вектор, а L_i $(i=1, 2, 3)$—неотрицательные постоянные $n \times n$-матрицы. Как это следует из теоремы 1.1. если спектр матрицы

$$L = \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} L_1 + \frac{1}{1+\beta} L_2 + \frac{1}{1+\alpha} L_3 \quad (1.5)$$

расположен внутри единичного круга, то задача (1), (2) разрешима какова бы ни была непрерывная в $D \times E^{3n}$ n-мерная вектор-функция $f(x, y, u_1, u_2, u_3)$, удовлетворяющая неравенствам

$$|f(x, y, u_1, u_2, u_3)| \leqslant$$
$$\leqslant l_0 x^\alpha y^\beta + \frac{1}{xy} L_1 |u_1| + \frac{1}{y} L_2 |u_2| + \frac{1}{x} L_3 |u_3| \tag{1.6}$$

и

$$|f(x, y, u_1, u_2, u_3) - f(x, y, u_1, v_2, v_3)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{y} L_2 |u_2 - v_2| + \frac{1}{x} L_3 |u_3 - v_3| \tag{1.7}$$

Покажем теперь, что, если спектр матрицы (1.5) не расположен внутри единичного круга и

$$f(x, y, u_1, u_2, u_3) = x^\alpha y^\beta l_0 + \frac{1}{xy} L_1 |u_1| + \frac{1}{y} L_2 |u_2| + \frac{1}{x} L_3 |u_3|,$$

то задача (1), (2) не имеет решения, хотя условия (1.6) и (1.7) соблюдаются. В самом деле, если допустим, что задача имеет решение $u(x, y)$, то по индукции легко доказать, что

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \geqslant \frac{x^\alpha y^{1+\beta}}{1+\beta} [J + L + \cdots + L^k] l_0,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \geqslant \frac{x^{1+\alpha} y^{1+\beta}}{1+\alpha} [1 + L + \cdots + L^k] l_0,$$

$$u(x, y) \geqslant \frac{x^{1+\alpha} y^{1+\beta}}{(1+\alpha)(1+\beta)} [J + L + \cdots + L^k] l_0 \quad (k=0, 1, \cdots).$$

Отсюда следует

$$\lim_{k \to +\infty} \| J + L + \cdots + L^k \| \leqslant \frac{(1+\alpha)(1+\beta) \| u(a, b) \|}{a^{1+\alpha} b^{1+\beta} \| l_0 \|} < +\infty.$$

Но это невозможно, поскольку спектр матрицы (1.5) не расположен внутри единичного круга. Тем самым мы доказали, что задача (1), (2) не имеет решения. Следовательно, требование о расположении спектра матрицы (1.5) внутри единичного круга является существенным и его нельзя ослабить.

Теорема 1.2. Пусть в области $D \times E^{3n}$ соблюдается неравенство

$$|f(x, y, u_1, u_2, u_3) - f(x, y, v_1, v_2, v_3)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{xy} L_1(x, y) |u_1 - v_1| + \frac{1}{y} L_2(x, y) |u_2 - v_2| +$$
$$+ \frac{1}{x} L_3(x, y) |u_3 - v_3|, \tag{1.8}$$

где $L_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3)$—непрерывные в $\overline{D}$ неотрицательные $n \times n$-матрицы, элементы которых не убывают по x и y. Далее, спектры матриц

$$\frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} L_1(0, 0)+\frac{1}{1+\beta} L_2(0, 0)+\frac{1}{1+\alpha} L_3(0, 0),$$

$$\frac{1}{1+\beta} L_2(a, 0), \quad \frac{1}{1+\alpha} L_3(0, b), \tag{1.9}$$

где $\alpha>-1$, $\beta>-1$ расположены внутри единичного круга. Тогда задача (1), (2) имеет не более одного решения, удовлетворяющего условию (1.4).

Замечание 2. В условиях теоремы 1.2 задача (1), (2) может иметь бесконечное множество решений, не удовлетворяющих условию (1.4). В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\lambda}{xy} u \tag{1.10}$$

где λ—некоторое положительное число. Согласно теореме 1.2, если $\alpha>-1$ и $(1+\alpha)(1+\beta)>\lambda$, то уравнение (1.10) имеет только тривиальное решение, удовлетворяющее условию (1.4); с другой стороны задача (1.10), (2) имеет бесконечное множество решений

$$u(x, y)=cx^{1+\alpha_0} y^{1+\beta_0},$$

где c—произвольная постоянная, $\alpha_0>-1$ и $(1+\alpha_0)(1+\beta_0)=\lambda$.

Замечание 3. Пусть $L_i (i=1, 2, 3)$—неотрицательные постоянные $n\times n$ матрицы. Согласно теореме 1.2, если спектр матрицы (1.5), где $\alpha>-1$ и $\beta>-1$, расположен внутри единичного круга, то задача (1), (2) имеет не более одного решения, удовлетворяющего условию (1.4) какова бы ни была вектор-функция $f(x, y, u_1, u_2, u_3)$, удовлетворяющая в $D\times E^{3n}$ неравенству

$$| f(x, y, u_1, u_2, u_3)-f(x, y, v_1, v_2, v_3) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{xy} L_1 | u_1-v_1 | + \frac{1}{y} L_2 | u_2-v_2 | + \frac{1}{x} L_3 | u_3-v_3 |. \tag{1.11}$$

Предположим теперь, что спектр матрицы (1.5) не расположен внутри единичного круга. Тогда найдётся такое $\varepsilon \in (0, 1]$, что матрица εL имеет собственное число, равное единице. Пусть c_0—собственный вектор матрицы εL, соответствующий числу 1. Очевидно, что

$$f(x, y, u_1, u_2, u_3)=\frac{\varepsilon}{xy} L_1 u_1+\frac{\varepsilon}{y} L_2 u_2+\frac{\varepsilon}{x} L_3 u_3$$

удовлетворяет неравенству (1.11). С другой стороны, при $\gamma \in (-\infty, +\infty)$. вектор-функция $u(x, y)=\gamma c_0 x^{1+\alpha} y^{1+\beta}$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\varepsilon}{xy} L_1 u+\frac{\varepsilon}{y} L_2 \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\varepsilon}{x} L_3 \frac{\partial u}{\partial y},$$

удовлетворяющим условиям (2) и (1.4). Следовательно, требование о расположение спектра матрицы (1.5) внутри единичного круга является существенным.

Теорема 1.3. Пусть $f(x, y, u_1, u_2, u_3)$ непрерывна в $D\times E^{3n}$, удовлетворяет условиям теоремы 1.2 и, кроме того,

$$\sup\{x^{-\alpha}y^{-\beta}\,\|\,f(x, y, 0, 0, 0)\,\|\,:(x, y)\in D\}<+\infty. \tag{1.12}$$

Тогда задача (1), (2) имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее условию (1.4).

Из теоремы 1.3, в частности, получается теорема А.Фуриоли Мартинолли [5].

§ 2. Некоторые леммы

Приведём хорошо известную лемму Гроноулла ([1], стр. 14—15).

Лемма 2.1. Пусть $\xi(x)\geqslant 0$ непрерывна, а $\eta(x)\geqslant 0$ суммируема на $[x_1, x_2]$ и

$$\xi(x)\leqslant\gamma+\int\limits_{x_1}^{x}\eta(t)\,\xi(t)dt \text{ при } x_1\leqslant x\leqslant x_2,$$

где γ—неотрицательная постоянная. Тогда

$$\xi(x)\leqslant\gamma\exp\left[\int\limits_{x_1}^{x}\eta(t)\,dt\right] \text{ при } x_1\leqslant x\leqslant x_2.$$

Лемма 2.2. Пусть функции $\xi_i(x, y)\geqslant 0$ $(i=1, 2, 3)$ непрерывны в области $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ и в этой области удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}\xi_1(x, y)\leqslant\gamma_1+\eta_1\int\limits_{x_1}^{x}ds\int\limits_{y_1}^{y}[\xi_1(s, t)+\xi_2(s, t)+\xi_3(s, t)]\,dt,\\ \xi_2(x, y)\leqslant\gamma_2+\eta_2\int\limits_{y_1}^{y}[\xi_1(x, t)+\xi_2(x, t)+\xi(x, t)]dt,\\ \xi_3(x, y)\leqslant\gamma_3+\eta_3\int\limits_{x_1}^{x}[\xi_1(s, y)+\xi_2(s, y)+\xi_3(s, y)]ds,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где γ_i и η_i $(i=1, 2, 3)$—неотрицательные числа. Тогда

$$\sum_{i=1}^{3}\xi_i(x, y)\leqslant(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\exp\left[\frac{\eta_1}{2}(x+y-x_1-y_1)^2+\right.$$
$$\left.+(\eta_2+\eta_3)(x+y-x_1-y_1)\right] \tag{2.2}$$

$$\text{при } x_1\leqslant x\leqslant x_2,\ y_1\leqslant y\leqslant y_2.$$

Доказательство. Положим

$$\xi(t)=\max\left\{\sum_{i=1}^{3}\xi_i(x,\ y): x\geqslant x_1,\quad y\geqslant y_1,\ x+y\leqslant t\right\}.$$

Тогда из неравенств (2.1) получим

$$\xi(x,\ y)\leqslant\gamma_1+\eta_1(x-x_1)\int\limits_{y_1}^{y}\xi(x+t)\,dt\leqslant\gamma_1+\eta_1\int\limits_{x_1+y_1}^{x+y}(t-x_1-y_1)\,\xi(t)dt,$$

$$\xi_2(x,\ y)\leqslant\gamma_2+\eta_2\int\limits_{y_1}^{y}\xi(x+t)\,dt\leqslant\gamma_2+\eta_2\int\limits_{x_1+y_1}^{x+y}\xi(t)dt$$

и

$$\xi_3(x,\ y)\leqslant\gamma_3+\eta_3\int\limits_{x_1}^{x}\xi(y+s)\,ds\leqslant\gamma_3+\eta_3\int\limits_{x_1+y_1}^{x+y}\xi(t)dt.$$

Следовательно,

$$\xi(x+y)\leqslant\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\int\limits_{x_1+y_1}^{x+y}[\eta_1(t-x_1-y_1)+\eta_2+\eta_3]\xi(t)dt.$$

Отсюда, согласно лемме 2.1, вытекает, что

$$\xi(x+y)\leqslant(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\exp\left[\frac{\eta_1}{2}(x+y-x_1-y_1)^2+(\eta_2+\eta_3)(x+y-x_1-y_1)\right].$$

Этим справедливость неравенства (2.2) доказана,

Лемма 2.3. Пусть $L_i(x.\ y)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ непрерывные в $\overline{D}$ неотрицательные $n\times n$-матрицы элементы которых не убывают по x и по y. Далее, спектры матриц (1.9), где $\alpha>-1$ и $\beta>-1$, расположены внутри единичного круга. Тогда найдётся такое положительное число r, что каковы бы ни были $l_0\in E^n$ и непрерывные в D n-мерные вектор-функции $u_i(x,\ y)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma(u_1,\ u_2,\ u_3)=\sup\left\{\frac{\|u_1(x,\ y)\|}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}+\frac{\|u_2(x,\ y)\|}{x^{\alpha}y^{\beta+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\|u_3(x,\ y)\|}{x^{\alpha+1}y^{\beta}}: (x,\ y)\in D\right\}<\infty \tag{2.3}$$

и

$$|u_1(x,y)|\leqslant\int\limits_0^x ds\int\limits_0^y W(s,\ t)dt,\quad |u_2(x,y)|\leqslant\int\limits_0^y W(x,t)dt \tag{2.4}$$

$$|u_3(x,y)|\leqslant\int\limits_0^x W(s,y)\,ds\quad\text{при } (x,y)\in D,$$

где

$$W(x, y)=l_0 x^{\alpha} y^{\beta}+\frac{1}{xy} L_1(x, y) \mid u_1(x, y) \mid +\frac{1}{y} L_2(x, y) \mid u_2(x, y) \mid +$$

$$+\frac{1}{x} L_3(x, y) \mid u_3(x, y) \mid , \tag{2.5}$$

будем иметь

$$\gamma(u_1, u_2, u_3) \leqslant r \, \| l_0 \| . \tag{2.6}$$

Доказательство. Поскольку спектры матриц (1.9) расположены внутри единичного круга, найдётся такое $\delta \in (0, a) \cap (0, b) \cap (0, 1)$, что спектры матриц

$$G_1=\frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} L_1(\delta, \delta)+\frac{1}{1+\beta} L_2(\delta, \delta)+\frac{1}{1+\alpha} L_2(\delta, \delta), \tag{2.7}$$

$$G_2=\frac{1}{1+\beta} L_2(a, \delta) \quad G_2=\frac{1}{1+\alpha} L_3(\delta, b) \tag{2.8}$$

также будут расположены внутри единичного круга.

Пусть

$$u_i(x, y)=(u_i^j(x, y))_{j=1}^{n} \ (i=1, 2, 3).$$

Положим

$$v^j(x, y)=\max\left\{\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{x^{1+\alpha} y^{1+\beta}} \mid u_1^j(x, y) \mid ,\right.$$

$$\left.\frac{1+\beta}{x^{\alpha} y^{1+\beta}} \mid u_2^j(x, y) \mid , \ \frac{1+\alpha}{x^{1+\alpha} y^{\beta}} \mid u_3^j(x, y) \mid \right\}$$

$$v_0^j=\sup\{v^j(x, y); \ 0<x\leqslant\delta, \ 0<y\leqslant\delta\}$$

и

$$v_0=(v_0^j)_{j=1}^n.$$

Тогда, согласно (2.4), (2.5) и (2.7), находим

$$W(x, y) \leqslant x^{\alpha} y^{\beta}(l_0+G_1 v_0) \text{ при } 0<x, \ y\leqslant\delta$$

и

$$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{x^{1+\alpha} y^{1+\beta}} \mid u_1(x, y) \mid \leqslant l_0+G_1 v_0, \quad \frac{1+\beta}{x^{\alpha} y^{1+\beta}} \mid u_2(x, y) \mid \leqslant l_0+G_1 v_0,$$

$$\frac{1+\alpha}{x^{1+\alpha} y^{\beta}} \mid u_3(x, y) \mid \leqslant l_0+G_1 v_0 \text{ при } 0<x, \ y\leqslant\delta.$$

Следовательно

$$(J-G_1) v_0 \leqslant l_0,$$

где J—единичная матрица. Поскольку G_1—неотрицательна и её спектр расположен внутри единичного круга, то существует $H_1=(J-G_1)^{-1}$ и она неотрицательна. Умножая обе части последнего неравенства на H_1 получим

$$v_0 \leqslant H_1 l_0.$$

Тем самым мы доказали, что

$$W(x,\ y)\leqslant Hl_0x^\alpha y^\beta \quad \text{при} \quad 0<x\leqslant\delta \tag{2.9}$$

и

$$\| u_1(x,\ y)\| \leqslant r_0 \| l_0 \| x^{1+\alpha}y^{1+\beta}, \quad \| u_2(x,\ y)\| \leqslant r_0 \| l_0 \| x^\alpha y^{1+\beta}, \tag{2.10}$$
$$\| u_3(x,\ y)\| \leqslant r_0 \| l_0 \| x^{1+\alpha}y^\beta \quad \text{при} \quad 0<x,\ y\leqslant\delta,$$

где

$$r_0 = \| H_1 \| \left[\frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} + \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} \right].$$

Положим

$$v_1^j(x) = \sup\left\{ \frac{|u_1^j(x,\ y)|}{x^{1+\alpha}y^{1+\beta}} + \frac{|u_3^j(x,\ y)|}{x^{1+\alpha}y^\beta} : 0<y\leqslant\delta \right\},$$

и

$$v_2^j(x) = \sup\left\{ \frac{1+\beta}{x^\alpha y^{1+\beta}} \, |u_2^j(x,\ y)| : 0<y\leqslant\delta \right\}$$

$$v_i(x) = (v_i^j(x))_{j=1}^n \quad (i=1,\ 2).$$

Тогда в области $\delta\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant\delta$, согласно (2.5), (2.8) и (2.9), из (2.4) получим следующие неравенства

$$|u_1(x,\ y)| \leqslant \int_0^\delta ds \int_0^y W(s,\ t)dt + \int_\delta^x ds \int_0^y W(s,\ t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{1+\alpha}y^{1+\beta}}{(1+\alpha)(1+\beta)} H_1 l_0 + \frac{y^{1+\beta}}{1+\beta} \int_\delta^x s^\alpha [l_0 + L^* v_1(s) + G_2 v(s)] ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^{1+\alpha}y^{1+\beta}}{(1+\alpha)(1+\beta)} (H_1+J) l_0 + \frac{y^{1+\beta}}{1+\beta} \int_\delta^x s^\alpha [L^* v_1(s) + G_2 v_2(s)] ds,$$

$$|u_2(x,\ y)| \leqslant \frac{y^{1+\beta}x^\alpha}{1+\beta} [l_0 + L^* v_1(x) + G_2 v_2(x_2)]$$

и

$$|u_3(x,\ y)| \leqslant \int_0^\delta W(s,\ y)ds + \int_\delta^x W(s,\ y)ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^{1+\alpha}y^\beta}{1+\alpha} (H_1+J) l_0 + y^\beta \int_\delta^x s^\alpha [L^* v_1(s) + G_2 v_2(s)] ds,$$

где $L^* = L_1(a,\ b) + L_2(a,\ b)$. Отсюда ясно, что

$$v_1(x) \leqslant \frac{2+\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)} (H_1+J) l_0 + \frac{2+\beta}{1+\beta} \int_\delta^x \frac{1}{s} [L^* v_1(s) + G_2 v_2(s)] ds$$

$$\text{при} \quad \delta\leqslant x\leqslant a$$

и

$$(J-G_2)\,v_2(x)\leqslant l_0+L^*v_1(x) \quad \text{при} \quad \delta\leqslant x\leqslant a,$$

Так как спектр матрицы G_2 расположен внутри единичного круга, то

$$\| v_2(x) \| \leqslant \| (J-G_2)^{-1} \| \left(\| l_0 \| + \| L^* \| \; \| v_1(x) \| \right) \text{ при } \delta\leqslant x\leqslant a \tag{2.11}$$

и

$$\| v_1(x) \| \leqslant c \, \| l_0 \| + c\int_\delta^x \frac{1}{s} \| v_1(s) \| \, ds \quad \text{при } \delta\leqslant x\leqslant a, \tag{2.12}$$

где

$$c=\frac{2+\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)} \| H_1+J \| + \frac{2+\beta}{1+\beta} \| G_2(J-G_2)^{-1} \| \ln\frac{a}{\delta} +$$

$$+\frac{2+\beta}{1+\beta} \| L^* \| \, [1+G_2(J-G_2]^{-1} \| \,].$$

Согласно лемме 2.1, из неравенства (2.12) вытекает, что

$$\| v(x) \| \leqslant c\left(\frac{a}{\delta}\right)^c \| l_0 \| \quad \text{при } \delta\leqslant x\leqslant a. \tag{2.13}$$

Пусть

$$r_1=\frac{2+\beta}{1+\beta}\, c \left(\frac{a}{\delta}\right)^c + \frac{2+\beta}{1+\beta} \| (J-G_2)^{-1} \| \left[\, 1+\| L^* \| \, c\left(\frac{a}{b}\right)^c \right]$$

Тогда, согласно определению $v_i(x)$ $(i=1,\ 2)$, из (2.11) и (2.13) следует

$$\begin{gathered} \| u_1(x,\ y) \| \leqslant r_1 \| l_0 \| \, x^{1+\alpha}y^{1+\beta}, \quad \| u_2(x,\ y) \| \leqslant r_1 \| l_0 \| \, x^{\alpha}y^{1+\beta}, \\ \| u_3(x,\ y) \| \leqslant r_1 \| l_0 \| \, x^{1+\alpha}y^{\beta} \quad \text{при} \quad \delta\leqslant x\leqslant a \;\; 0<y\leqslant\delta. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Совершенно аналогично покажем, что

$$\begin{gathered} \| u_1(x,\ y) \| \leqslant r_2 \| l_0 \| \, x^{1+\alpha} y^{1+\beta}, \quad \| u_2(x,\ y) \| \leqslant r_2 \| l_0 \| \, x^{\alpha}y^{1+\beta} \\ \| u_3(x,\ y) \| \leqslant r_2 \| l_0 \| \, x^{1+\alpha}y^{\beta} \quad \text{при} \quad 0<x\leqslant\delta,\ \delta\leqslant y\leqslant b, \end{gathered} \tag{2.15}$$

где r_2—не зависящая от $u_i(x,\ y)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ постоянная.

В области $\delta\leqslant x\leqslant a$, $\delta\leqslant y\leqslant b$, согласно (2.10), (2.14) и (2.15) из (2.4) и (2.5) имеем следующие неравенства

$$\| u_1(x,\ y) \| \leqslant \eta \, \| l_0 \| + \eta \int_\delta^x ds \int_\delta^y \left(\| u_1(s,\ t) \| + \| u_2(s,\ t) \| + \| u_3(s,\ t) \| \, dt, \right.$$

$$\| u_2(x,\ y) \| \leqslant \eta \, \| l_0 \| + \int_\delta^y \left(\| u_1(x,\ t) \| + \| u_2(x_2\ t) \| + \| u_3(x,\ t \| \right) dt,$$

$$\| u_3(x,\ y) \| \leqslant \eta \, \| l_0 \| + \int_\delta^x \left(\| u_1(s,\ y) \| + \| u_2(s,\ y) \| + \| u_3(s,\ y) \| \, ds, \right.$$

где η—постоянная, зависящая лишь от $a, b, \alpha, \beta, r_i (i=0, 1, 2)$ и $L_i(a, b)$ $(i=1, 2, 3)$ Из этих неравенств, в силу леммы 2.2, вытекает

$$\| u_i(x, y) \| \leqslant \eta^* \| l_0 \| \quad \text{при} \quad \delta \leqslant x \leqslant a, \ \delta \leqslant y \leqslant b \ (i=1, 2, 3)$$

где

$$\eta^* = 3\eta \exp\left[\frac{\eta}{2}(a+b)^2 + 2\eta(a+b)\right].$$

Следовательно,

$$\| u_1(x, y) \| \leqslant r_3 \| l_0 \| x^{1+\alpha} y^{1+\beta}, \quad \| u_2(x, y) \| \leqslant r_3 \| l_0 \| x^{\alpha} y^{1+\beta},$$
$$\| u_3(x, y) \| \leqslant r_3 \| l_0 \| x^{1+\alpha} y^{\beta} \quad \text{при} \quad \delta \leqslant x \leqslant a, \ \delta \leqslant y \leqslant b, \tag{2.16}$$

где

$$r_3 = \eta^* \delta^{-2-\alpha-\beta} + \eta^* \delta^{-1-\beta} \max\{x^{-\alpha} : \delta \leqslant x \leqslant a\} + \eta^* \delta^{-1-\alpha} \{y^{-\beta} : \delta \leqslant y \leqslant b\}.$$

Ввиду (2.10), (2.14), (2.15) и (2.16), из (2.3) вытекает оценка (2.6), где

$$r = 3 \max\{r_i : i=0, 1, 2, 3\}.$$

Так как r не зависит от $u_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3)$, справедливость леммы 2.3 очевидна.

Лемма 2.4. Пусть $f(x, y, u_1, u_2, u_3)$ непрерывна в области $\overline{D} \times E^{3n}$ и в этой области удовлетворяет неравенствам

$$\| f(x, y, u_1, u_2, u_3) \| \leqslant \rho (1 + \| u_1 \| + \| u_2 \| + \| u_3 \|),$$
$$\| f(x, y, u_1, u_2, u_3) - f(x, y, u_1, v_2, v_3) \| \leqslant \rho \| u_2 - v_2 \| + \| u_3 - v_3 \|,$$

где ρ—положительная постоянная. Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение $u(x, y)$, непрерывное в $\overline{D}$ вместе с $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$.

Доказательство этой леммы содержится в [1] (см. [1], стр. 161).

§ 3. Доказательство теорем существования и единственности

Доказательство теоремы 1. 1. Подберём $\delta \in (0, a) \cap (0, b) \cap (0, 1)$, $\alpha_0 \in (-1, \alpha)$ и $\beta_0 \in (-1, \beta)$ таким образом, чтобы спектры матриц

$$H_1 = \frac{1}{1+\beta_0} L_{21}(a, \delta), \ H_2 = \frac{1}{1+\alpha_0} L_{31}(\delta, b) \tag{3.1}$$

были расположены внутри единичного круга.

Пусть

$$\delta_k = \frac{\delta}{k+1} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Согласно лемме 2.4, при любом натуральном k система (1) имеет решение $u_k(x, y)$, непрерывное вместе с $\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u_k(x, y)}{\partial x \partial y}$ в области $\delta_k \leqslant x \leqslant a$, $\delta_k \leqslant y \leqslant b$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u_k(\delta_k, y)=0 \quad \text{при} \quad \delta_k \leqslant y \leqslant b, \quad u_k(x, \delta_k)=0 \quad \text{при} \quad \delta_k \leqslant x \leqslant a. \tag{3.2}$$

Положим

$$u_{1k}(x, y)=u_k(x, y), \quad u_{2k}(x, y)=\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x}, \quad u_{3k}(x, y)=\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y}$$
$$\text{при} \quad \delta_k \leqslant x \leqslant a, \quad \delta_k \leqslant y \leqslant b,$$

$$u_{1k}(x, y)=0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta_k \text{ и } 0 \leqslant x \leqslant \delta_k \quad \delta_k \leqslant y \leqslant b,$$

$$u_{2k}(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant \delta_k \\ \left(\frac{x}{\delta_k}\right)^{\beta} u_{2k}(\delta_k, y) & \text{при} \ 0 \leqslant x \leqslant \delta_k, \ \delta_k < y \leqslant b \end{cases}$$

и

$$u_{3k}(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \delta_k, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \\ \left(\frac{y}{\delta_k}\right)^{\beta} u_{3k}(x, \delta_k) & \text{при} \ \delta_k < x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant \delta_k. \end{cases}$$

В силу 1.1, следует, что при любом натуральном k

$$\sup\left\{\frac{\| u_{1k}(x, y) \|}{x^{1+\alpha} y^{1+\beta}}+\frac{\| u_{2k}(x, y) \|}{x^{\alpha} y^{1+\beta}}+\frac{\| u_{3k}(x, y) \|}{x^{1+\alpha} y^{\beta}} : (x, y) \in D\right\}<+\infty$$

и

$$| u_{1k}(x, y) | \leqslant \int_0^x ds \int_0^y W(s, t) dt, \qquad | u_{2k}(x, y) | \leqslant \int_0^y W_k(x, t) dt$$

$$| u_{3k}(x, y) | \leqslant \int_0^x W(s, y) ds \quad \text{при} \quad (x, y) \in D,$$

где

$$W_k(x, y)=l_0 x^{\alpha} y^{\beta}+\frac{1}{xy} L_1(x, y) \,| u_{1k}(x, y) |+\frac{1}{y} L_{20}(x, y) \,| u_{2k}(x, y) |+$$
$$+\frac{1}{x} L_{30}(x, y) \,| u_{3k}(x, y) | .$$

Отсюда, в силу леммы 2.3, следует существование такого не зависящего от k положительного числа ρ_0, что

$$\| u_{1k}(x, y) \| \leqslant \rho_0 x^{1+\alpha} y^{1+\beta}, \quad \| u_{2k}(x, y) \| \leqslant \rho_0 x^{\alpha} y^{1+\beta},$$
$$\| u_{3k}(x, y) \| \leqslant \rho_0 x^{1+\alpha} y^{\beta} \tag{3.3}$$
$$\text{при} \quad (x, y) \in D \ (k=1, 2, \ldots),$$

Из (3.3) следует, что при любом $\lambda \in (0, \delta)$ последовательности $\{u_{ik}(x, y)\}_{k=1}^{+\infty}$ $(i=1, 2, 3)$ равномерно ограничены в области

$$D_\lambda = \{(x, y): \ \lambda \leqslant x \leqslant a, \quad \lambda \leqslant y \leqslant b\}.$$

Покажем, что они равностепенно непрерывны в D_λ.

Согласно (3.2),

$$u_{1k}(x, y) = \int_{\delta_k}^{x} ds \int_{\delta_k}^{y} f(s, t, u_{1k}(s, t), u_{2k}(s, t), u_{3k}(s, t))dt,$$

$$u_{2k}(x, y) = \int_{\delta_k}^{y} f(x, t, u_{1k}(x, t), u_{2k}(x, t), u_{3k}(x, t))\,dt, \tag{3.4}$$

$$u_{3k}(x, y) = \int_{\delta_k}^{x} f(s, y, u_{1k}(s, y), u_{2k}(s, y), \ u_{3k}(s, y))ds \text{ при } (x, y) \in D_{\delta_k}.$$

В силу условия (1.1) и (3.3), отсюда вытекает, что

$$\| u_{1k}(x_1, y_1) - u_{1k}(x_2, y_2) \| \leqslant \rho_1 (| x_1^{1+\alpha} - x_2^{1+\alpha} | + | y_1^{1+\beta} - y_2^{1+\beta} |) \tag{3.5}$$

$$\text{при } \ (x_i, y_i) \in D_{\delta_k} \ (i=1, 2).$$

$$\| u_{2k}(x, y_1) - u_{2k}(x, y_2) \| \leqslant \rho_1 x^\alpha \, | y_1^{1+\beta} - y_2^{1+\beta} | \tag{3.6}$$

$$\text{при } \ (x, y_i) \in D_{\delta_k} \ (i=1, 2)$$

и

$$\| u_{3k}(x_1, y) - u_{3k}(x_2, y) \| \leqslant \rho_1 y^\beta \, | x_1^{1+\alpha} - x_2^{1+\alpha} | \tag{3.7}$$

$$\text{при } \ (x_i, y) \in D_{\delta_k} \ (i=1, 2).$$

где ρ_1—не зависящая от k положительная постоянная.

Из (3.5) очевидно, что последовательность $\{u_{1k}(x, y)\}_{k=1}^{+\infty}$ равностепенно непрерывна в D_λ. Покажем равностепенную непрерывность $\{u_{2k}(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$.

Положим $c_\lambda = \rho_0 \max\{x^\alpha + x^{1+\alpha} : \lambda \leqslant x \leqslant a\}$,

$$R_\lambda(y) = \{(x, u_1, u_2, u_3) : \lambda \leqslant x \leqslant a, \ \| u_i \| \leqslant c_\lambda y^{1+\beta} \ (i=1, 2), \ \| u_3 \| \leqslant c_\lambda y^\beta\},$$

$$\omega_\lambda(s, y) = y^{-1-\beta_0} \max\{ \| f(x_1, y, u_1, u_2, u_3) -$$

$$- f(x_2, y, u_{12}, u_2, u_3) \| : (x_i, u_{1i}, u_2, u_3) \in R_\lambda(y) \quad (i=1, 2),$$

$$| x_1 - x_2 | + \| u_{11} - u_{12} \| \leqslant s$$

и

$$\omega_\lambda(s) = \int_0^b \omega_\lambda(s, y)dy.$$

Очевидно, что при любом $y \in (0, b)$

$$\lim_{s \to 0} \omega_\lambda(s, y) = 0.$$

С другой стороны, в силу (1.1)

$$\omega_\lambda(s,\ y)=\chi_\lambda y^{\beta^*} \quad \text{при} \quad s>0,\ 0<y\leqslant b,$$

где $\beta^*=\beta-\beta_0-1>-1$, а χ_λ—постоянная, зависящая лишь от λ. Поэтому

$$\lim_{s\to 0}\omega_\lambda(s)=0.$$

Пусть k_λ настолько большое натуральное число, что

$$\delta_k<\lambda, \qquad \text{при} \quad k>k_\lambda.$$

Если, $k>k_\lambda$, то ввиду (1.2), (3.1), (3.3)—(3.5) и (3.7), имеем

$$y^{-1-\beta_0}\ |\ u_{2k}(x_1,\ y)-u_{2k}(x_2, y)\ |\leqslant\overline{\omega}_\lambda(\ |\ x_1-x_2\ |\ +\rho_1\ |\ x_1^{1+\alpha}-x_2^{1+\alpha}|)+$$

$$+\ |\ x_1^{1+\alpha}-x_2^{1+\alpha}\ |\ \overline{\eta}_\lambda+(1+\beta_0)^{-1-\beta_0}H_1\int_{\delta_k}^{y}\frac{1}{y}\ |\ u_{2k}(x_1,\ t)-u_{2k}(x_2,\ t)\ |\ dt \quad (3.8)$$

$$\text{при} \quad \lambda\leqslant x_i\leqslant a \quad (i=1,\ 2), \quad \delta_k\leqslant y\leqslant\lambda,$$

где $\overline{\omega}_\lambda(s)$—$n$-мерная вектор-функция с компонентами $\omega_\lambda(s)$, а $\overline{\eta}_\lambda$—не зависящий от k постоянный вектор.

Поскольку спектр матрицы H_1 расположен внутри единичного круга, из (3.8) нетрудно получить неравенство

$$y^{-1-\beta_0}\ |\ u_{2k}(x_1,\ y)-u_{2k}(x_2,\ y)\ |\leqslant$$

$$\leqslant(J-H_1)^{-1}[\overline{\omega}_\lambda(\ |\ x_1-x_2\ |\ +\rho_1\ |\ x_1^{1+\alpha}-x_2^{1+\alpha}\ |\ )+\ |\ x_1^{1+\alpha}-x_2^{1+\alpha}\ |\ \overline{\eta}_\lambda]$$

$$\text{при} \quad \lambda\leqslant x_i\leqslant a\ (i=1,\ 2) \quad \delta_k\leqslant y\leqslant\lambda.$$

Следовательно,

$$\|\ u_{2k}(x_1,\ \lambda)-u_{2k}(x_2,\ \lambda)\ \|\leqslant\omega_\lambda^*(\ |\ x_1-x_2\ |\ +\rho_1\ |\ x_2^{1+\alpha}-x_2^{1+\alpha}\ |\ ) \quad (3.9)$$

$$\text{при} \quad \lambda\leqslant x_i\leqslant a\ (i=1,\ 2),\ k>k_\lambda,$$

где

$$\omega_\lambda^*(s)=\|\ (J-H_1)^{-1}\ \|\ (n\,\omega_\lambda(s)+\|\ \overline{\eta}_\lambda\ \|\ s)$$

и

$$\lim_{s\to 0}\omega_\lambda^*(s)=0. \quad (3.10)$$

Согласно (1.2), (3.5), (3.7) и (3.9), из равенства

$$u_{2k}(x,\ y)=u_{2k}(x,\ \lambda)+\int_\lambda^y f(x,\ t,\ u_{1k}(x,\ t),\ u_{2k}(x,\ t),\ u_{3k}(x,\ t))dt$$

$$\text{при} \quad (x,\ y)\in D_\lambda, \quad k\geqslant k_\lambda$$

находим

$$\|\ u_{2k}(x_1, y)-u_{2k}(x_2, y)\ \|\leqslant\mu_\lambda\omega_\lambda^*(\ |\ x_1-x_2\ |\ +\rho_1\ |\ x_1^{1+\alpha}-x_2^{1+\alpha}\ |\ )+$$

$$+\mu_\lambda\int_\lambda^y\|\ u_{2k}(x_1,\ t)-u_{2k}(x_2,\ t)\ \|\ dt \ \text{при} \ (x_i, y)\in D_\lambda\ (i=1,\ 2),\ k\geqslant k_\lambda,$$

где μ_λ—не зависящая от k постоянная. Из этого неравенства, согласно лемме 2·1, вытекает

$$\| u_{2k}(x_1, y) - u_{2k}(x_2, y) \| \leqslant \mu^*_\lambda \omega^*_\lambda (| x_1 - x_2 | + \rho_1 | x_1^{1+\alpha} - x_2^{1+\alpha} |) \tag{3.11}$$

$$\text{при} \quad (x_i, y) \in D_\lambda \ (i=1, 2), \ k \geqslant k,$$

где $\mu^*_\lambda = \mu_\lambda \exp(\mu_\lambda b)$.

Согласно (3.6) и (3.11),

$$\| u_{2k}(x_1, y_1) - u_{2k}(x_2, y_2) \| \leqslant \rho_1 (\lambda^\alpha + a^\alpha) | y_1^{1+\beta} - y_2^{1+\beta} | +$$

$$+ \mu^*_\lambda \omega^*_\lambda (| x_1 - x_2 | + \rho_1 (x_1^{1+\alpha} - x_2^{1+\alpha} |) \text{ при } (x_i, y_i) \in D_2 \ (i=1, 2), \ k > k_\lambda.$$

Отсюда, в силу условия (3.11), очевидно, что последовательность $\{u_{2k}(x, y)\}_{k=1}^{+\infty}$ равностепенно непрерывна в D_λ.

Совершенно аналогично доказывается равностепенная непрерывность $\{u_{3k}(x, y)\}_{k=1}^{+\infty}$.

Итак, мы доказали, что последовательности $\{u_{ik}(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ ($i=1, 2, 3$) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в области D_λ при любом $\lambda \in (0, \delta)$. Поэтому, применяя лемму Арцела-Асколи, легко показать, что эти последовательности содержат подпоследовательности $\{u_{ik_m}(x, y)\}_{m=1}^{+\infty}$ ($i=1, 2, 3$), равномерно сходящиеся в D_λ при любом $\lambda \in (0, \delta)$.

Положим

$$u(x, y) = \lim_{m \to +\infty} u_{1k_m}(x, y).$$

Ясно, что

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{m \to +\infty} u_{2k_m}(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \lim_{m \to +\infty} u_{3k_m}(x, y).$$

Поэтому, из (1.1), (3.3) и (3.4) вытекает, что

$$u(x, y) = \int_0^x ds \int_0^y f\left(s, t, u(s, t), \frac{\partial u(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} \right) dt$$

$$\text{при} \quad (x, y) \in D$$

и соблюдается условие (1.4). Следовательно, $u(x, y)$ является искомым решением задачи (1), (2). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Допустим, что задача (1), (2) имеет два решения $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условию (1.4). Положим

$$u_1(x, y) = u(x, y) - v(x, y), \quad u_2(x, y) = \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x}, \quad u_3(x, y) = \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial y}$$

Тогда, учитывая (1.8), получим неравенства (2.3) и (2.4), где

$$W(x, y) = \frac{1}{xy} L_1(x, y) \, | u_1(x, y) | + \frac{1}{y} L_2(x, y) \, | u_2(x, y) | +$$

$$+\frac{1}{x}L_3(x,\ y)\ |\ u_3(x,\ y)\ |\ .$$

Поэтому, согласно лемме (2.3), имеем $u(x,\ y)=v(x,\ y)$. Следовательно, задача (1), (2) не может иметь двух различных решений. Теорема доказана.

§ 4. О зависимости решения задачи (1), (2) от правой части системы (1)

Теорема 4.1. Пусть $\{f_k(x, y, u_1, u_2, u_3)\}_{k=0}^{+\infty}$ — последовательность непрерывных в $D\times E^{3n}$ n-мерных вектор-функций, удовлетворяющих неравенствам

$$| f_k(x,\ y,\ u_1,\ u_2,\ u_3)-f_k(x,\ y,\ v_1,\ v_2,\ v_3)\ | \leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{xy}L_1(x,\ y)\ |\ u_1-v_1|+\frac{1}{y}L_2(x,\ y)\ |\ u_2-v_2\ |\ +$$
$$+\frac{1}{x}L_3(x,\ y)\ |\ u_3-v_3\ | \quad (k=0,\ 1,\dots)$$

и

$$\| f_k(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0) \| \leqslant r_0x^{\alpha}y^{\beta} \quad (k=0,\ 1\dots), \tag{4.2}$$

где $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $r_0\geqslant 0$, а $L_i(x,\ y)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ — непрерывные и неотрицательные в $\overline{D}$ $n\times n$-матрицы, элементы которых не убывают по x и по y, при этом α, β, r_0 и $L_i(x,\ y)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ не зависят от k и спектры матриц (1.9) расположены внутри единичного круга. Далее, для любого $r\in(0,\ +\infty)$.

$$\begin{gathered}\varepsilon_k(r)=\sup\{x^{-\alpha}y^{-\beta}\ \|\ f_k(x,\ y,\ u_1,\ u_2,\ u_3)-f_0(x,\ y,\ u_1,\ u_2,\ u_3)\ \|\ :\\ \|\ u_1\ \|\ +x\ \|\ u_2\ \|\ +y\ \|\ u_3\ \|\leqslant rx^{1+\alpha}y^{1+\beta},\ (x,y)\in D\}\to 0 \text{ при } k\to+\infty.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Тогда равномерно в области D соблюдаются равенства

$$\begin{gathered}\lim_{k\to\infty}x^{-1-\alpha}y^{-1-\beta}\ \|\ u_k(x,y)-u_0(x,y)\ \|=\lim_{k\to\infty}x^{-\alpha}y^{-1-\beta}\left\|\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial x}-\frac{\partial u_0(x,\ y)}{\partial x}\right\|=\\ =\lim_{k\to\infty}\ x^{-1-\alpha}y^{-\beta}\left|\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial y}-\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial y}\right|=0\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $u_k(x,\ y)$ — решение системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_k\left(x,\ y,\ u,\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

удовлетворяющее условиям (2) и (1.4).

Доказательство. В силу (4.1) и (4.2),

$$\begin{gathered}|\ u_{1k}(x,\ y)\ |\leqslant\int_0^x ds\int_0^y W_k(s,\ t)dt,\ |\ u_{2k}(x,\ y)\ |\leqslant\int_0^y W_k(x,\ t)dt,\\ |\ u_{3k}(x,\ y)\ |\leqslant\int_0^x W_k(s,\ y)ds \quad \text{при } (x,\ y)\in D\ (k=1,\ 2,\dots),\end{gathered} \tag{4.5}$$

где

$$u_{1k}(x,\ y)=u_k(x,\ y),\quad u_{2k}(x,y)=\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial x},\quad u_{3k}(x,\ y)=\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial y},$$

$$W_k(x,\ y)=l_k x^\alpha y^\beta+\frac{1}{xy}L_1(x,\ y)\mid u_{1k}(x,\ y)\mid+$$

$$+\frac{1}{y}L_2(x,\ y)\,|\,u_{2k}(x,y)\,|+\frac{1}{x}L_3(x,\ y)\mid u_{3k}(x,\ y)\mid \tag{4.6}$$

и $\| l_k \| \leqslant r_0$. Поэтому, согласно лемме 2.3, найдётся такая не зависящая от k положительная постоянная r, что

$$\| u_k(x,y) \| + x\left\|\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial x}\right\| + y\left\|\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial y}\right\| \leqslant r x^{1+\alpha} y^{1+\beta} \tag{4.7}$$

$$\text{при } (x,\ y)\in D\quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Из (4.1), (4.3) и (4.7) легко следует, что функции

$$u_{1k}(x,\ y)=u_k(x,\ y)-u_0(x,\ y),\quad u_{2k}(x,\ y)=\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial x}-\frac{\partial u_0(x,\ y)}{\partial x}$$

и

$$u_{3k}(x,\ y)=\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial y}-\frac{\partial u_0(x,\ y)}{\partial y}$$

удовлетворяют неравенствам (4.5), где $W_k(x,\ y)$ определённая равенством (4.6) функция и $\| l_k \| \leqslant \varepsilon_k(r)$. Поэтому, ввиду леммы (2.3), найдётся такая не зависящая от k положительная постоянная ρ, что

$$\| u_k(x,\ y)-u_0(x,\ y) \| + x\left\|\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x}\right\|+$$

$$+y\left\|\frac{\partial u_k(x,\ y)}{\partial y}-\frac{\partial u_0(x,\ y)}{\partial y}\right\|\leqslant\rho\varepsilon_k(r)x^{1+\alpha}y^{1+\beta}\quad \text{при } (x,\ y)\in D\ (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, равномерно в D соблюдаются равенства (4.4). Теорема доказана.

§ 5. Построение решения задачи (1), (2) методом последовательных приближений

В этом параграфе рассматривается вопрос о представлении решения задачи (1), (2) как равномерного предела следующей последовательности

$$u_0(x,y)=0,\ u_k(x,y)=\int_0^x ds\int_0^y f\left(s,t,u_{k-1}(s,t),\left(\frac{\partial u_{k-1}(s,\ t)}{\partial s},\ \frac{\partial u_{k-1}(s,\ t)}{t\partial}\right)dt\right.$$

$$(k=1,\ 2,\cdots) \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. Пусть $f(x, y, u_1, u_2, u_3)$ непрерывна в $D\times E^{3n}$ и удовлетворяет условиям (1.11) и (1.12), где $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $L_i (i=1, 2, 3)$—неотрицательные постоянные $n\times n$-матрицы и спектр матрицы (1.5) расположен внутри единичного круга. Тогда задача (1), (2) имеет одно и только одно решение $u(x, y)$, удовлетворяющее условию (1.4) и равномерно в области D соблюдаются равенства

$$\lim_{t\to+\infty} x^{-1-\alpha}y^{-1-\beta} \| u(x, y)-u_k(x, y) \| =$$

$$=\lim_{k\to+\infty} x^{-\alpha}y^{-1-\beta} \left\|\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x}\right\|=$$

$$=\lim_{k\to+\infty} x^{-1-\alpha}y^{-\beta} \left\|\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}-\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y}\right\|=0.$$

Доказательство. Существование единственного решения $u(x, y)$, удовлетворяющего условию (1.4) вытекает из теоремы 1.3.

В силу (1.11) и (1.12), из (5.1) легко следует, что при любом k функции $u_k(x, y)$, $\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в D и

$$\sup\left\{\frac{\| u_k(x, y)\|}{x^{1+\alpha}y^{1+\beta}}+\frac{\left\|\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x}\right\|}{x^{\alpha}y^{1+\beta}}+\frac{\left\|\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y}\right\|}{x^{1+\alpha}y^{\beta}} : (x, y)\in D\right\}<+\infty.$$

Полагая

$$u(x, y)-u_k(x, y)=v_k(x, y)=(v_k^j(x, y))_{j=1}^n,$$

$$r_k^j(x, y)=\max\left\{\frac{| v_k^j(x, y)|}{x^{1+\alpha}y^{1+\beta}}, \frac{\left|\frac{\partial v_k^j(x, y)}{\partial x}\right|}{x^{\alpha}y^{1+\beta}}, \frac{\left|\frac{\partial v_k^j(x, y)}{\partial y}\right|}{x^{1+\alpha}y^{\beta}}\right\},$$

$$r_k^j=\sup\{r_k^j(x, y) : (x, y)\in D\}, \quad r_k=(r_k^j)_{j=1}^n$$

и

$$L=\frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)}L_1+\frac{1}{1+\beta}L_2+\frac{1}{1+\alpha}L_3,$$

в силу (1.12) и (5.1), находим

$$x^{-1-\alpha}y^{-1-\beta} | v_k(x, y) | \leqslant Lr_{k-1}, \quad x^{-\alpha}y^{-1-\beta}\left|\frac{\partial v_k(x, y)}{\partial y}\right|\leqslant Lr_{k-1},$$

$$x^{1-\alpha}y^{-\beta}\left|\frac{\partial v_k(x, y)}{\partial y}\right|\leqslant Lr_{k-1} \quad \text{при } (x, y)\in D \ (k=1, 2,\ldots).$$

Следовательно,

$$r_k\leqslant Lr_{k-1} \quad (k=1, 2,\ldots)$$

и

$$r_k \leqslant L^k r_0 \quad (k=1,\ 2,\cdots). \tag{5.2}$$

Поскольку спектр матрицы L расположен внутри единичного круга, из (5.2) вытекает, что

$$\lim_{k\to+\infty} \| r_k \| = 0$$

Теорема доказана.

Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Walter, Differential and integral inequalities, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1970.
2. В. Н. Врагов, Дифференц. уравнения, 8, № 1, 1972, 7—16,
3. Т. Ш. Кальменов, Дифференц. уравнения, 8, № 1. 1972, 41—54.
4. М. Мередов, Дифференц. уравнения, 9, № 7 1973, 1326—1333.
5. A. Furioli Martinolli, Rend. Ist. Lombardo Accad. sci. e. lett., 1970., A 104, № 4, 680—689,

მ. გრიგოლია

გურსას სინგულარული ამოცანის შესახებ ჰიპერბოლური განტოლებებისათვის

რეზიუმე

დადგენილია (1), (2) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობისათვის საკმარისი პირობები იმ შემთხვევაში, როცა (1) სისტემის მარჯვენა მხარე საზოგადოდ არაა ინტეგრებადი x-სა და y-ის მიმართ ნულის მიდამოში.

M. GRIGOLIA

ON THE GOURSAT SINGULAR PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

Summary

The sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of boundary value problem (1), (2) are established in the case when the right hand side of system (1) is not, in general, integrable with respect to x and y in the neighbourhood of zero.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕШНОСТИ КРУГА И СФЕРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИИ ГРИНА

Д. Г. НАТРОШВИЛИ

В настоящей статье в явном виде построена функция Грина и при ее помощи эффективно (в квадратурах) решена основная бигармоническая задача для внешности круга и сферы.

Под регулярным решением бигармонического уравнения

$$\Delta^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{1}$$

в бесконечной области D^- будем подразумевать функцию

$$u \in C^3(D^- \cup S) \cap C^4(D^-),$$

имеющую интегрируемые частные производные до четвертого (включительно) порядка в D^-, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям в окрестности бесконечно удаленной точки:

I°. В случае двумерной области:

$$u(x_1, x_2)=a_1x_1+a_2x_2+v(x_1, x_2)+v_0(x_1, x_2),$$

$$v(x_1, x_2)=0(1), \quad v_0(x_1, x_2)=0(\ln\rho),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=a_k+v_1(x_1, x_2), \quad v_1(x_1, x_2)=0(\rho^{-1}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_j}=(\rho^{-2}),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_k\partial x_j\,\partial x_p}=0(\rho^{-3}), \quad k, j, p=1, 2;$$

II°. В случае трехмерной области

$$u(x_1, x_2, x_3)=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+v_2(x_1, x_2, x_3), \; v_2(x_1, x_2, x_3)=0(1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=b_k+v_3(x_1, x_2, x_3), \; v_3(x_1, x_2, x_3)=0(\rho^{-2}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_j}=0(\rho^{-3}),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_k\partial x_j\partial x_p}=0(\rho^{-4})$$

или

$$u=0\,(1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=0(\rho^{-1}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}=0(\rho^{-2}),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_j \partial x_p}=0\,(\rho^{-3}),\ \ k,\ j,\ p=1,\ 2,\ 3.$$

где $\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$—оператор Лапласа, S—граница области D^-, a_k, b_i ($k=1,\ 2;$ $i=1,\ 2,\ 3$)—действительные постоянные, $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$, m—размерность пространства.

Как известно, основная бигармоническая задача ставится следующим образом:

Найти в области D^- регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_S=f\,(y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=F\,(y),\ \ y\in S, \tag{2}$$

где f и F—заданные на S функции.

Функцию двух точек

$$G\,(x,\ y)=g\,(x,\ y)+V\,(x,\ y) \tag{3}$$

назовем функцией Грина для основной бигармонической задачи в области D^- если:

1°. $$\Delta^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G(x,\ y)=0,\quad \text{при}\quad y\neq x,$$

2°. $$G\,(x,\ y)=0,\ \ \frac{\partial G\,(x,\ y)}{\partial n\,(y)}=0,\quad \text{при}\ x\in D^-,\ y\in S,$$

где $g\,(x,\ y)$—фундаментальное решение уравнения (1), а $V\,(x,\ y)$—регулярная в области D^- бигармоническая функция относительно точки y.

Функция $g\,(x,\ y)$ имеет следующий вид:

1°. Для двумерной бесконечной области:

$$g\,(x,\ y)=\frac{r^2}{4}\ln r-\frac{R^2}{4}\ln R-\frac{\rho^2}{4}\ln\rho+\left(1+\frac{x_1y_1+x_2y_2}{2}\right)\ln R\rho.$$

где

$$x=(x_1,\ x_2),\quad y=(y_1,\ y_2),\quad \rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\quad R=\sqrt{x_1^2+x_2^3},$$

$$r\equiv r\,(x,\ y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

2°. Для трехмерной бесконечной области

$$g(x, y)=\frac{1}{2}(r-R-\rho),$$

где

$$x=(x_1, x_2, x_3),\ y=(y_1, y_2, y_3),$$

$$\rho=\sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2},\quad R=\sqrt{\sum_{k=1}^{3} y_k^2},\ r=\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k-y_k)^2}.$$

При помощи функции Грина решение основной бигармонической задачи (1)—(2) выражается формулой:

1°. На плоскости

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_S\left\{\frac{\partial}{\partial n(y)}\Delta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G(x, y)\ f(y)-\right.$$

$$\left.-\ \Delta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G(x, y)\ F(y)\right\}d_yS, \tag{4}$$

2°. В пространстве

$$u(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{\partial}{\partial n(y)}\Delta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G(x, y)\right]f(y)-$$

$$-\ \Delta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)G(x, y)\ F(y)\Big\}d_yS, \tag{5}$$

где $n(y)$—внешняя нормаль относительно S в точке y.

Пусть $D^-=\{x,\ x_1^2+\cdots+x_m^2>a^2\}$, где m—размерность пространства. Применяя следующие разложения:

$$\ln r(x, y)=\ln\sqrt{a^2-2a\rho\cos\theta+\rho^2}=\ln\rho-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n\cos\theta\quad(\rho>a), \tag{6}$$

$$\frac{1}{r(x, y)}=\frac{1}{\sqrt{a^2-2a\rho\cos\gamma+\rho^2}}=\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n P_n(\cos\gamma)\quad(\rho>a), \tag{7}$$

$$r(x, y)=\sqrt{a^2-2a\rho\cos\gamma+\rho^2}=\rho-a\cos\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{\rho^{n+1}}\frac{P_n(\cos\gamma)}{2n+3}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{\rho^{n+1}}\frac{P_{n+2}(\cos\gamma)}{2n+3}\quad(\rho>a), \tag{8}$$

можно доказать, что любая регулярная бигармоническая функция представится следующим рядом:

1°. Вне круга радиуса a:

$$u(x)=C_0\ln\rho+\rho\,(C_1\cos\psi+D_1\sin\psi)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n-2}(C_n\cos n\psi+D_n\sin n\psi)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(A_n\cos n\psi+B_n\sin n\psi); \tag{9}$$

2°. Вне сферы радиуса a:

$$u\,(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n-1}Z_n\,(\theta_1,\varphi_1)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1}Y_n(\theta_1,\ \varphi_1), \tag{10}$$

где в формулах (6) и (9)

$$x_1=\rho\cos\psi,\quad x_2=\rho\sin\psi,\quad y_1=a\cos\varphi,\quad y_2=a\sin\varphi;$$

$\theta=\varphi-\psi$, и коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k—произвольные действительные постоянные, а в формулах (7), (8) и (10)

$$x_1=\rho\cos\varphi_1\sin\theta_1,\ \ x_2=\rho\sin\varphi_1\sin\theta_1.\quad x_3=\rho\cos\theta_1;$$

$$y_1=a\cos\varphi_2\sin\theta_2,\quad y_2=a\sin\varphi_2\sin\theta_2,\quad y_3=a\cos\theta_2;$$

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

A_0—постоянное число, $P_n(\xi)$—полином Лежандра порядка n, $Z_n(\theta_1,\ \varphi_1)$ и $Y_n(\theta_1,\ \varphi_1)$—произвольные сферические функции n-го порядка [1].

Применяя разложения (9) и (10) доказывается, что для бесконечной плоскости с круговым отверстием функция Грина имеет следующий вид:

$$G\,(x,\ y)=\frac{r^2}{4}\ln\frac{r}{r_1}+\frac{R^2}{4}\ln\frac{\rho}{a}+\frac{\rho^2}{4}\ln\frac{R}{a}+\frac{a^2}{4}\ln\frac{a}{R\rho}-\frac{a^2}{2}\ln\frac{R}{a}\ln\frac{\rho}{a}, \tag{11}$$

а для внешности сферы

$$G\,(x,\ y)=\frac{r-r_2}{2}+\frac{(a^2-R^2)\,(a^2-\rho^2)}{4a^2r_2}+\frac{(R-a)^2(\rho-a)^2}{2aR\rho}, \tag{12}$$

где

$$r_1=\sqrt{a^2-2R\rho\cos\theta+\frac{\rho_2R^2}{a^2}},$$

$$r_2=\sqrt{a^2-2R\rho\cos\gamma+\frac{\rho^2R^2}{a^2}}.$$

Подставляя (11) и (12) соответственно в формулы (4) и (5), получим решение основной бигармонической задачи (1)—(2):

1°. Для внешности круга радиуса a

$$u\,(x)=-\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{(\rho^2-a^2)^2\,(a-\rho\cos\theta)\,f\,(\varphi)}{a^2(a^2-2a\rho\cos\theta+\rho^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\left[\ln\frac{\rho}{a}+\frac{(a^2-\rho^2)\,(a-\rho\cos\theta)}{a(a^2-2a\rho\cos\theta+\rho^2)}\right]F\,(\varphi)\right\}d\varphi,\quad x\in D^-; \tag{13}$$

2°. Для внешности сферы радиуса

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left\{\left[\frac{3(\rho^2-a^2)^3}{4a^3r^5}-\frac{(\rho^2-a^2)^2}{4a^3r^3}+\frac{(\rho-a)^2}{a^3\rho}\right]f(y)-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{(\rho^2-a^2)^2}{2ar^3}+\frac{(\rho-a)^2}{a^2\rho}\right]F(y)\right\}d_yS,\qquad x\in D^-. \tag{14}$$

Легко доказывается следующая

Теорема. Функция, определенная формулой (13) (соответственно (14)), при $f\in C^{1,\alpha}(S)$, $F\in C^0(S)$, является решением основной бигармонической задачи (1)—(2) для бесконечной плоскости с круговым отверстием (для бесконечного пространства с шаровой полостью).

Основная бигармоническая задача для круга и шара решена в [2], [3], [4].

Кафедра дифференциальных и
интегральных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, часть II, М., 1956.
2. А. И. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1966.
3. H. Bremekamp, Indagationes Mathematicae, vol, VIII. fasc. 2, 1945, p. 188—199
4. K. Schröder, Math. Zeitschrift, 49, 1943, p. 110—147.

დ. ნატროშვილი

წრისა და სფეროს გარე არეებისათვის ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანის ეფექტური ამოხსნა გრინის ფუნქციების გამოყენებით

რეზიუმე

სტატიაში წრისა და სფეროს გარე არეებისათვის ცხადი სახითაა აგებული გრინის ფუნქციები და მათი გამოყენებით ეფექტურადაა (კვადრატურებში) ამოხსნილი ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანა.

D. NATROSHVILI

A GENERAL BIHARMONIC PROBLEM FOR THE OUTER DOMAINS OF A CIRCLE AND A SPHERE

Summary

Green's functions of the general biharmonic problem are effectively constructed for the outer domains of a circle and a sphere and the solutions of the boundary value problems are obtained in quadratures.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ОСНОВНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Л. П. БИЦАДЗЕ

Пусть неоднородное трансверсально-изотропное тело занимает всё пространство E_3 и состоит из двух однородных частей, одна из которых занимает полупространство $x_3>0$ (область D_1), а другая—полупространство $x_3<0$ (область D_0). Упругие постоянные, участвующие в законе Гука, обозначим, соответственно в D_k, через

$$c_{11}^{(k)},\ c_{33}^{(k)},\ c_{44}^{(k)},\ c_{66}^{(k)},\ c_{13}^{(k)}.\quad k=0,\ 1. \tag{1}$$

Рассмотрим следующую задачу:

Определить в областях D_0 и D_1 регулярный вектор $u(x)$

$$u(x)=\begin{cases} u^{(1)}(x), & x\in D_1\\ u^{(0)}(x), & x\in D_0\end{cases}$$

удовлетворяющий уравнению

$$C^{(k)^*}(\partial x)\,u^{(k)}(x)=0,\quad x\in D_k,\quad k=0,\ 1 \tag{2}$$

и контактным условиям на S (плоскость $x_3=0$):

$$\begin{aligned}&[u^{(1)}]^+-[u^{(0)}]^-=\psi(z_2,\ z_2);\\ &[T^{(1)}u^{(1)}]^+-[T^{(0)}u^{(0)}]^-=\varphi(z_1,\ z_2);\end{aligned} \tag{3}$$

где $\varphi(z_1,\ z_2)$ и $\varphi(t_1,\ t_2)$—заданные векторы на S из класса $C^{1,\alpha}(S)$,

$$\varphi=0(R^{-(1+\alpha)}),\quad \psi=0(R^{-\alpha}),\quad \alpha>0,\quad R=\sqrt{z_1^2+z_2^2},\quad R\gg1,$$

$T^{(k)}(\partial_x v)u^{(k)}$—вектор напряжения с компонентами

$$\tau_{13}^{(k)}=c_{44}^{(k)}\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_1}\right);$$

$$\tau_{23}^{(k)}=c_{44}^{(k)}\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_2}\right);$$

$$\tau_{33}^{(k)}=c_{13}^{(k)}\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2}\right)+c_{33}^{(k)}\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_3};$$

$$k=0,\ 1,$$

$u^{(k)}(x_1,\ x_2,\ x_3)=(u_1^{(k)},\ u_2^{(k)},\ u_3^{(k)})$—вектор смещения, $C^{(k)}(\partial x)=\|\ C_{ij}^{(k)}\ \|_{3\times3}$—матричные дифференциальные операторы в различных упругих средах (см. [1], формула 1.4.2, стр. 14).

Решение поставленной задачи ищем в виде потенциала простого слоя:

$$u^{(k)}(x)=\frac{1}{2\pi}\iint_S M^{(k)}(x,\ y)\,g^{(k)}(y)\,dy_1\,dy_2. \tag{4}$$

$$x\in D_k,\quad k=0,\ 1.$$

Здесь $g^{(k)}$—пока неизвестные векторы, которые определяются из контактных условий, а ядро $M^{(k)}$ имеет вид

$$M^{(k)}=-\sum_{l=1}^{3}\left\|\begin{matrix}\dfrac{\beta_l^{(k)}}{r_l^{(k)}}+\alpha_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1^2}, & \alpha_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\partial x_2}, & \delta_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\partial x_3}\\ \alpha_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\partial x_2}, & \dfrac{\beta_l^{(k)}}{r_l^{(k)}}+\alpha_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_2^2}, & \delta_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_2\partial x_3}\\ \gamma_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\partial x_3}, & \gamma_l^{(k)}\dfrac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_2\partial x_3}, & \varepsilon_l^{(k)}\dfrac{1}{r_l^{(k)}}\end{matrix}\right\|.$$

$$r_l^{(k)}=\sqrt{a_l^{(k)}[x_1-y_1]^2+(x_2-y_2)^2]+x_3^2},$$

$$\Phi_l^{(k)}=(-1)^{k+1}x_3\ln[(-1)^{k+1}x_3+r_l^{(k)}]-r_l^{(k)},$$

где коэффициенты имеют значения

$$\beta_l^{(k)}=\frac{a_1^{(k)}}{c_{44}^{(k)}}\delta_{1l},\quad \alpha_1^{(k)}=\frac{1}{c_{44}^{(1)}},\ \delta_1^{(k)}=0,\ \varepsilon_1^{(k)}=0\ \ \gamma_1^{(k)}=0,$$

$$\alpha_l^{(k)}=(-1)^l\alpha_0\left[c_{11}^{(k)}\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_3^{(k)}}+c_{13}^{(k)}\right]\sqrt{\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}},\quad l=2,\ 3,$$

$$\gamma_l^{(k)}=(-1)^l\alpha_0(c_{11}^{(k)}a_l^{(k)}+c_{13}^{(k)})\sqrt{\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}},\quad l=2,\ 3,$$

$$\delta_l^{(k)}=(-1)^l\alpha_0\left(c_{11}^{(k)}\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}+c_{13}^{(k)}\right)\sqrt{a_l^{(k)}}.\ l=2,\ 3,$$

$$\alpha_0=(\sqrt{a_2^{(k)}}-\sqrt{a_3^{(k)}})^{-1}(c_{11}^{(k)}c_{33}^{(k)}-\overset{2}{c}{}_{13}^{(k)})^{-1},$$

$$\varepsilon_l'^{(k)}=(-1)^k\alpha_0\sqrt{a_l^{(k)}}\,(c_{11}^{(k)}a_l^{(k)}+c_{13}^{(k)}),$$

δ_{1l}—символ Кронекера.

Пусть

$$g^{(k)}(y_1,\ y_2)=\frac{1}{2\pi}\iint_S G^{(k)}(p_1,\ p_2)\exp\left(-i\sum_{j=1}^{2}p_jy_j\right)dy_1dy_2, \tag{5}$$

$$\psi(y_1,\ y_2)=\frac{1}{2\pi}\iint_S\Psi(p_1,\ p_2)\exp\left(-i\sum_{j=1}^{2}p_jy_j\right)dp_1dp_2, \tag{6}$$

$$\varphi(y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \Phi(p_1, p_2)\exp\left(-i\sum_{j=1}^{2} p_j y_j\right)dp_1dp_2. \tag{7}$$

Подставим последние выражения в (4) и, интегрируя по y_1, y_2 от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$u^{(k)}(x)=\frac{1}{2\pi}\iint_S\sum_{l=1}^{3}\left\| \overset{(k)}{N}{}_{ij}^{(l)}\right\|_{3\times 3}\frac{G^{(k)}}{\rho}\exp\left[(-1)^k\frac{x_3\rho}{\sqrt{a_l^{(k)}}}\right]\exp i(px)\,dp_1dp_2,$$

$$\overset{(k)}{N}{}_{11}^{(l)}=-\frac{\beta_l^{(k)}}{\sqrt{a_l^{(k)}}}+\alpha_l^{(k)}\sqrt{a_l^{(k)}}\frac{p_1^2}{\rho^2},\quad \overset{(k)}{N}{}_{12}^{(l)}=\overset{(k)}{N}{}_{21}^{(l)}=\alpha_l^{(k)}\sqrt{a_l^{(k)}}\frac{p_1p_2}{\rho^2},$$

$$\overset{(k)}{N}{}_{22}^{(l)}=-\beta_l^{(k)}\sqrt{a_l^{(k)-1}}+\alpha_l^{(k)}\sqrt{a_l^{(k)}}\frac{p_2^2}{\rho^2},\quad \overset{(k)}{N}{}_{13}^{(l)}=(-1)^k\delta_l^{(k)}\frac{ip_1}{\rho},$$

$$\overset{(k)}{N}{}_{23}^{(l)}=(-1)^k\delta l^{k}\frac{ip_2}{\rho},\quad \overset{(k)}{N}{}_{31}^{(l)}=(-1)^k\gamma_l^{(k)}\frac{ip_1}{\rho},$$

$$\overset{(k)}{N}{}_{32}^{(l)}=(-1)^k\gamma_l^{(k)}\frac{ip_2}{\rho},\quad \overset{(k)}{N}{}_{33}^{(l)}=-\varepsilon_l^{(k)}\sqrt{a_l^{(k)-1}},\quad \rho^2=p_1^2+p_2^2.$$

Учитывая значения $u^{(k)}(x)$ и контактные условия получим систему

$$\begin{cases} A^{(1)}G^{(1)}-[A^{(0)}],\ G^{(0)}=\rho\Psi \\ G^{(1)}+G^{(0)}=\Phi \end{cases} \tag{8}$$

$$A^{(k)}=\left\| \begin{matrix} \sigma^{(k)}+\omega^{(k)}\dfrac{p_1^2}{\rho^2}, & \omega^{(k)}\dfrac{p_1p_2}{\rho^2}, & (-1)^k\mu^{(k)}\dfrac{ip_1}{\rho}, \\ \omega^{(k)}\dfrac{p_1p_2}{\rho^2}, & \sigma^{(k)}+\omega^{(k)}\dfrac{p_2^2}{\rho^2}, & (-1)^k\mu^{(k)}\dfrac{ip_2}{\rho}, \\ (-1)^{k+1}\mu^{(k)}\dfrac{ip_1}{\rho}, & (-1)^{x+1}\mu^{(k)}\dfrac{ip_2}{\rho}, & -\nu^{(k)} \end{matrix} \right\|$$

$$\sigma^{(k)}=-\frac{\sqrt{a_1^{(k)}}}{c_{44}^{(k)}},\quad \mu^{(k)}=\frac{1}{c_{13}^{(k)}+\sqrt{c_{11}^{(k)}c_{33}^{(k)}}},$$

$$\omega^{(k)}=-\sigma^{(k)}-\sqrt{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}\nu^{(k)},\quad \nu^{(k)}=\frac{c_{11}^{(k)}\left(\sqrt{a_2^{(k)}}+\sqrt{a_3^{(k)}}\right)}{c_{11}^{(k)}c_{33}^{(k)}-(c_{13}^{(k)})^2}$$

$[A^{(0)}]'$—транспонированная матрица.

Детерминант системы (8) отличен от нуля и имеет вид

$$\Delta=(\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)})\delta=(\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)})\left[\left(\sqrt{\frac{c_{33}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}}}+\sqrt{\frac{c_{33}^{(1)}}{c_{11}^{(1)}}}\right)\nu^{(0)}\nu^{(1)}+\right.$$

$$\left.+2\mu^{(0)}\mu^{(1)}+\delta^{(0)}+\delta^{(1)}\right]\neq 0,\qquad \delta^{(k)}=\frac{c_{44}^{(k)}+\sqrt{c_{11}^{(k)}c_{33}^{(k)}}}{c_{44}^{(k)}\left[c_{11}^{(k)}c_{33}^{(k)}-(c_{43}^{(k)})^2\right]};$$

Определяя векторы $G^{(k)}$ из уравнений (8), принимая во внимание соотношение (5) и совершая обратное преобразование Фурье, окончательно получим решение поставленной задачи (2), (3) в квадратурах.

$$u^{(k)}(x)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\sum_{l=1}^{3}\|\overset{(k)}{S}{}_{ij}^{(l)}\|_{3\times 3}\psi(y_1,\ y_2)dy_1dy_2+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\sum_{l=1}^{3}\|\overset{(k)}{R}{}_{ij}^{(l)}\|_{3\times 3}\varphi(y_1,\ y_2)dy_1dy_2,$$

$$x\in D_k,\quad k=0,\ 1,$$

$$\overset{(k)}{S}{}_{11}^{(l)}=\beta'^{(k)}_l\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r_l^{(k)}}+c_l^{(k)}\frac{\partial^3\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1^2\partial x_3};\qquad \overset{(k)}{S}{}_{12}^{(l)}=\overset{(k)}{S}{}_{21}^{(l)}=c_l^{(k)}\frac{\partial^3\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3};$$

$$\overset{(k)}{S}{}_{2}^{(l)}=\beta'^{(k)}_l\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r_l^{(k)}}+c_l^{(k)}\frac{\partial_3\Phi_l^{(k)}}{\partial x_2^2\partial x_3};\qquad \overset{(k)}{S}{}_{13}^{(l)}=b_l^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{r_l^{(k)}};$$

$$\overset{(k)}{S}{}_{23}^{(l)}=b_l^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r_l^{(k)}},\qquad \overset{(k)}{S}{}_{31}^{(l)}=s_l^{(k)}\frac{3}{\partial x_1}\frac{1}{r_l^{(k)}},\quad s_1^{(k)}=0,\quad b_1^{(k)}=0$$

$$\overset{(k)}{S}{}_{32}^{(l)}=s_l^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r_l^{(k)}},\qquad \overset{(k)}{S}{}_{33}^{(l)}=d_l^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r_l^{(k)}};\quad d_1^{(k)}=0,$$

$$\overset{(k)}{R}{}_{11}^{(l)}=\varepsilon_l^{(k)}\frac{1}{r_l^{(k)}}-h_l^{(k)}\frac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1^2},\qquad \overset{(k)}{R}{}_{12}^{(l)}=\overset{(k)}{R}{}_{21}^{(l)}=-h_l^{(k)}\frac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$\overset{(k)}{R}{}_{13}^{(l)}=-g_l^{(k)}\frac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\,\partial x_3},\qquad \overset{(k)}{R}{}_{23}^{(l)}=-g_l^{(k)}\frac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_2\,\partial x_3},$$

$$\overset{(k)}{R}{}_{31}^{(l)}=f_l^{(k)}\frac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_1\,\partial x_3},\qquad \overset{(k)}{R}{}_{32}^{(l)}=f_l^{(k)}\frac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_2\,\partial x_3},$$

$$\overset{(k)}{R}{}_{22}^{(l)}=\varepsilon_l^{(k)}\frac{1}{r_l^{(k)}}-h_l^{(k)}\frac{\partial^2\Phi_l^{(k)}}{\partial x_2^2},\qquad \overset{(k)}{R}{}_{33}^{(l)}=-k_l^{(k)}\frac{1}{r_l^{(k)}},$$

$$\beta'^{(k)}_l=-\frac{\sigma^{(k)}a_l^{(k)}}{\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)}}\delta_{1l},\qquad c_1^{(k)}=-\frac{\sigma^{(k)}}{\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)}},$$

$$c_l^{(k)}=(-1)^{l+1}\alpha'^{(k)}_l\sqrt{a_l^{(k)}}\,t_l^{(k)}\qquad l=2,\ 3,$$

$$b_l^{(k)}=(-1)^{l+1}\alpha'^{(k)}_l\ a_l^{(k)}\ T_l^{(k)}\qquad l=2,\ 3,$$

$$s_l^{(k)}=(-1)^{l+1}\gamma'^{(k)}_l\sqrt{a_l^{(k)}}\ t_l^{(k)},\quad l=2,\ 3,$$

$$d_l^{(k)}=(-1)^{l+1}\gamma'^{(k)}_l a_l^{(k)}T_l^{(k)},\qquad l=2,\ 3,$$

$$t_l^{(k)}=\frac{1}{\delta\left(\sqrt{a_2^{(k)}}-\sqrt{a_3^{(k)}}\right)}\left[\frac{\mu^{(0)}\mu^{(1)}}{\mu^{(k)}}+\alpha'^{(k)}_l+\sqrt{\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}}\frac{\nu^{(0)}\nu^{(1)}}{\nu^{(k)}}\right],$$

$$T_l^{(k)}=\frac{1}{\delta(\sqrt{a_2^{(k)}}-\sqrt{a_3^{(k)}})}\left[\sqrt{a_2^{(0)}a_3^{(0)}}\sqrt{\frac{a_2^{(1)}a_3^{(1)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}}\frac{\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}}{\gamma^{(k)}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}}\left(\frac{\mu^{(0)}\mu^{(1)}}{\mu^{(k)}}+\gamma'^{(k)}_l\right)\right].$$

$$\varepsilon_l^{(k)}=\frac{\sigma^{(0)}\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)}}\sqrt{a_1^{(k)}}\delta_{1l},\quad h_1^{(k)}=-\frac{\sigma^{(0)}\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)}}\frac{1}{\sqrt{a_1^{(k)}}},$$

$$g_1^{(k)}=0,\quad f_1^{(k)}=0,\quad k_1^{(k)}=0,\quad k=0,\ 1,$$

$$h_l^{(k)}=(-1)^l\alpha'^{(k)}_l F_l^{(k)},\quad f_l^{(k)}=(-1)^{l+1}\gamma'^{(k)}_l F_l^{(k)},\quad l=2,\ 3$$

$$g_l^{(k)}=(-1)^l\,\alpha'^{(k)}_l\sqrt{a_l^{(k)}}\,m_l^{(k)},\ k_l^{(k)}=(-1)^l\,\gamma'^{(k)}_l\sqrt{a_l^{(k)}}\,m_l^{(k)}$$

$$f_l^{(k)}=\frac{1}{\delta(\sqrt{a_2^{(k)}}-\sqrt{a_3^{(k)}})}\left[\sqrt{\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}}\left(\frac{\delta^{(0)}\delta^{(1)}}{\delta^{(k)}}-\frac{\mu^{(0)}\mu^{(1)}}{\mu^{(k)}}\gamma'^{(k)}_l\right)\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{a_2^{(0)}a_3^{(0)}}\sqrt{a_2^{(1)}a_3^{(1)}}\;\alpha'^{(k)}_l}{\sqrt{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}\,\gamma^{(k)}}\gamma^{(0)}\gamma^{(1)},$$

$$k_l^{(k)}=\frac{1}{\delta(\sqrt{a_2^{(k)}}-\sqrt{a_3^{(k)}})}\left[\frac{\delta^{(0)}\delta^{(1)}}{\delta^{(k)}}-\frac{\mu^{(0)}\mu^{(1)}}{\mu^{(k)}}\alpha'^{(k)}_l+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}}\frac{\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}}{\gamma^{(k)}}\gamma'^{(k)}_l\right]$$

$$\gamma'^{(k)}_l=\frac{c_{11}^{(k)}a_l^{(k)}+c_{13}^{(k)}}{c_{11}^{(k)}c_{33}^{(k)}-c_{13}^{2(k)}},\quad \alpha'^{(k)}_l=\frac{c_{11}^{(k)}\dfrac{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}{a_l^{(k)}}+c_{13}^{(k)}}{c_{11}^{(k)}c_{33}^{(k)}-c_{13}^{2(k)}}.$$

Кафедра дифференциальных
и интегральных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили, Т. Б. Бурчуладзе, Трехмерные задачи математической теории vпругости, Тб., 1968.

ლ. ბიწაძე

ძირითადი საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნა ტრანსვერსალური იზოტროპული დრეკადი ტანისათვის

რეზიუმე

მოცემულია ძირითადი საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნა კვადრატურებში არაერთგვაროვანი ტრანსვერსალური იზოტროპული დრეკადი სხეულისათვის.

L. BITSADZE

BASIC CONTACT PROBLEM FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC BODY

Summary

The solution of the basic contact problem for a transversely isotropic body in quadratures is given.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

О МЕРАХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

З. Г. ГОРГАДЗЕ

В работе рассматриваются вероятностные меры (распределения) в банаховых пространствах измеримых функций. Особое внимание уделяется гауссовым мерам. Выясняется взаимосвязь между такими мерами и случайными функциями, почти все реализаци которых принадлежат рассматриваемым пространствам.

С использованием понятия ковариационного оператора приводится необходимое условие того, что данная мера сосредоточена в данном функциональном пространстве. Получена полная характеризация гауссовых мер в сепарабельных пространствах Орлича.

Пусть X—действительное банахово пространство, Y—замкнутое в метрической топологии тотальное подпространство в сопряженном к X пространстве X^*. Через $B_Y(X)$ будем обозначать наименьшую σ-алгебру подмножеств пространства X, относительно которой все функционалы $y \in Y$ измеримы. (Ω, F, P) будет обозначать основное вероятностное пространство (которое предполагается полным). Случайным элементом со значениями в X называется отображение $\xi : \Omega \to X$ такое, что скалярные функции $\langle y, \xi \rangle$ измеримы для всех $y \in Y$. Случайный элемент ξ называется гауссовым, если указанные скалярные функции являются гауссовыми случайными величинами.

Каждый случайный элемент порождает на $B_Y(X)$ вероятностную меру μ. Характеристический функционал этой меры определяется равенством:

$$\varkappa(y) = E\exp[i\langle y, \xi\rangle] = \int_X \exp[i\langle y, x)]\mu(dx).$$

Если для случайного элемента ξ имеем, что $\langle y, \xi\rangle \in L_2(\Omega, P)$ для всех $y \in X$, то равенством

$$\langle Ry, z) = E\langle y, \xi\rangle\langle z, \xi\rangle - E\langle y, \xi\rangle \quad E\langle z, \zeta\rangle \; y, z \in Y$$

можно определить ковариационный оператор $R: Y \to Y^* \to$ (R—линейный ограниченный оператор (см. [1], стр. 136). Характеристический функционал гауссового случайного элемента имеет вид:

$$\chi(y) = \exp\left(iu(y) - \frac{1}{2}\langle Ry, y\rangle\right),$$

где

$$u(y)=E\langle y,\ \xi\rangle$$

и R—ковариационный оператор ξ.

Рассмотрим тройку $(T,\ \Sigma,\ \nu)$, где T—множество, Σ—σ-алгебра подмножеств T и ν—σ—конечная мера на Σ. Ниже мы всегда будем предполагать, что X—банахово пространство ν-измеримых скалярных функций x, определенных на T, т. е. $X\subset S(T,\ \nu)$, где $S(T,\ \nu)$ обозначает пространство ν-измеримых скалярных функций (точнее, классов эквивалентности функций), определенных на T.

Пространство X называется предидеальным, если из того, что $|x_1(t)|\leqslant|x_2(t)|$, $t\in T$, где $x_2\in X$ и $x_1\in S(T,\ \nu)$, вытекает, что $x_1\in X$, при этом $\|x_1\|\leqslant\|x_2\|$.

Пусть X предидеально. Определим пространство

$$X^1=\left\{y:\ |\langle x_1\ y\rangle|\equiv\left|\int\limits_T x(t)\,y(t)\,\nu\,(dt)\right|<+\infty,\quad \forall(x)\in X\right\}.$$

Пространство X^1 с нормой $\|y\|_1=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\langle x,\ y\rangle$ является замкнутым тотальным подпространством в сопряженном пространстве X^*. Таким образом, билинейная форма $\langle\ \ ,\cdot\rangle$ приводит пространства X и X^1 в двойственность, для которой мы введем обозначение $\langle X,\ X^1\rangle$.

Случайной функцией мы будем называть измеримое по паре переменных $(t,\ \omega)$ отображение $\zeta:\Omega\times T\to R^1$. Мы будем говорить, что мера μ на σ-алгебре $B_Y(X)$ порождается случайной функцией ζ, если $\zeta(\cdot,\ \omega)\in X$ для почти всех $\omega\in\Omega$, отображение

$$\xi(\omega)=\begin{cases}\zeta(\cdot,\ \omega), & \text{если } \zeta(\cdot,\ \omega)\in X,\\ 0 & \text{если } \zeta(\ \ ,\omega)\overline{\in}X^-.\end{cases}$$

$(F,\ B_Y(X))$—измеримо и

$$\mu(A)=P\{\xi^{-1}(A)\}=P\{\omega:\zeta(\cdot,\ \omega)\in A\}$$

для всех $A\in B_Y(X)$.

Случайная функция ζ называется гауссовой, если для произвольного n и произвольных $t_1,\cdots,t_n$, $t_i\in T$, $i=1,\cdots,n$ случайные величины $\zeta(t_1,\ \cdot),\cdots$ $\cdots,\zeta(t_n,\ \cdot\cdot)$ имеют совместное гауссово распределение,

Функция $r:T\times T\to R^1$, определенная равенством

$$r(t,\ s)=E\zeta(t,\ \ )\,\zeta(s,\ \cdot),$$

называется корреляционной функцией случайной функции ζ.

Ниже мы будем пользоваться обозначением:

$$(\delta f)(t)=f(t,\ t),\ t\in T,$$

где $f:T\times T\to R^1$.

Пусть X—сепарабельное предидеальное пространство и пусть $R:X^1\to X^{1*}$—ковариационный оператор меры μ, порожденный случайной функцией ζ. Естественно было бы предположить, что R является интегральным оператором, ядром которого служит корреляционная функция v. Ясно, что в том случае, когда $T=\{1, 2, \ldots\}$ и ν—считающая мера, это предположение верно, но в общем случае это не так. В самом деле, в сепарабельном $L_2(T, \nu)$ существует случайный элемент с единичным ковариационным оператором (см. [1], стр. 145). Однако такой оператор не является интегральным в „обычном" смысле.

Вместе с тем, имеет место следующее

Предложение 1. Пусть X—предидеальное банахово пространство. Пусть далее, ζ—измеримая случайная функция с корреляционной функцией r, такая, что $\zeta(\ \ , \omega)\in X$ для почти всех $\omega\in\Omega$ и $\delta r^{1/2}\in X$. Случайный элемент ξ, порожденный случайной функцией ζ, имеет интегральный ковариационный оператор, ядром которого служит r.

Доказательство. Покажем, что ξ имеет второй порядок в слабом смысле, т. е. $E\langle y, \xi\rangle^2<+\infty$ для всех $y\in X^1$. Действительно,

$$E\langle y, \xi\rangle^2=E\left(\int_T \zeta(t, \ .\ )\, y(t)\,\nu(dt)\right)^2=$$

$$=\int_T\int_T r(t, s)\, y(t)\, y(s)\,\nu(dt)\,\nu(ds)\leqslant\left(\int_T r^{1/2}(t, t) y(t)\,\nu(dt)\right)^2<+\infty$$

для всех $y\in X^1$.

Возможность изменения порядка интегрирования есть следствие теоремы Фубини, с учетом того, что „сложный" процесс

$$\eta(t, s, \omega)=\eta(t, \omega)\zeta(s, \omega)\, y(t)\, y(t)\, y(s).$$

измерим и

$$\int_T\int_T E\mid\eta(t, s, \ .\ )\mid \nu(dt)\,\nu(ds)\ <+\infty$$

(см. [2]. стр. 214).

Покажем теперь интегральность оператора R. Нетрудно видеть, что для всех $y, z\in X^1$ имеем:

$$\langle y, Rz\rangle=E\langle y, \xi\rangle\langle z, \xi\rangle=$$

$$=\int_T\int_T r(t, s)\, y(t)\, z(s)\,\nu(dt)\,\nu(ds) \tag{*}$$

Рассмотрим функцию $g_z(t)=\int r(t, s)\, z(s)\,\nu(ds)$, $t\in T$. Очевидно, что $\mid\langle y, g_z\rangle>\mid<+\infty$ для любого $y\in X^1$, т. е. для любого $z\in X^1$ имеем $g_z\in X^{11}$. С другой стороны, из $(*)$ ясно, что $Rz\in X^{11}$, т. е. $RX^1\subset X^{11}\subset\subset X^{1*}$.

Равенство $\langle y, Rz\rangle=\langle y, g_z\rangle$, справедливое для любого $y\in X^1$, показывает, что $Rz=g_z$, т. е. R—интегральный оператор.

Предложение 2. В предположениях предложения 1 случайные величины $\eta=<\langle\zeta(\ .\ ,\ \ ), y\rangle$—гуассовы для каждого $y\in X^1$.

Доказательство. Выше мы показали, что $E\eta^2<+\infty$, т. е. $\eta\in L_2(\Omega, P)$. Поэтому η можно представить в виде суммы $\eta=\eta_1+\eta_2$, где $\eta_1\in H$, $\eta_2\in H^{\perp}$ и H—гильбертово пространство, натянутое на семейство $\{\zeta(t, \cdot)\}_{t\in T}$.

По теореме Фубини с учетом условия $\delta r^{1/2}\in X$ нетрудно видеть, что $Eh\eta=0$ для произвольного $h\in H^{\perp}$.

В частности, по определению H, $0=E\eta_2\eta=E\eta_2^2$, т. е. $\eta_2=0$ почти всюду (см. также [10]).

Теорема. 1. Пусть X—совершенное $(X''=X)$ сепарабельное пространство, ζ—гауссова случайная функция и $\zeta(\ ,\omega)\in X$ для почти всех $\omega\in\Omega$. Тогда отображение $\zeta(\cdot, \omega)$ $(F, B_{X'}(X))$-измеримо и порожденная на $B_{X_1}(X)$ мера гауссова.

Доказательство. $(F, B_{X'}(X))$-измеримость отображения $\zeta(\cdot, \omega)$ легко следует из сепарабельности X и теоремы Фубини. Ясно, что в силу σ-конечности меры ν достаточно показать, что случайные величины $\eta=\langle\zeta(\ ,\cdot), y\rangle$—гауссовы для произвольного $y\in X'$ при $\nu(T)<+\infty$.

Пусть $y\in X^1$ фиксирован; рассмотрим множества

$$Y_k=\{t\in T:\ |r^{1/2}(t, t)y(t)|\leqslant k\},\quad k=1, 2,\ldots$$

Видно, что $Y_k\uparrow T$ при $k\to\infty$ и случайные величины $\eta_k=\langle I_{Y_k}\zeta, y\rangle$ сходятся на Ω к η (I_A—индикатор множества $A\in\Sigma$), Но случайная функция $I_{Y_k}\zeta$—гауссова и для её корреляционной функции r_k имеем $\delta r_k^{1/2}\in X^{11}=X$. С учетом предложения 2 и произвольности y теорема доказана.

Возникает вопрос: обратима ли теорема 1, т. е. каждая ли гауссова мера на $B_{X'}(X)$ порождается некоторой измеримой случайной функцией? В случае сепарабельных пространств $L_p(T, \nu)$ ответ положительный (см. [3]). Так же обстоит дело в случае сепарабельных пространств Орлича (см. [9]). Аналогичными рассуждениями можно показать, что ответ положительный и для произвольных предидеальных пространств, поскольку метрическая топология этих пространств сильнее топологии сходимости по мере.

Предложение 3. Гауссова случайная функция ζ задает гауссову меру на σ-алгебре $B_{L\infty}$ сепарабельного $L_1(T, \nu)$ тогда и только то тогда, когда $\delta r^{1/2}\in L_1(T, \nu)$.

Доказательство. Пусть ξ—порожденный ζ случайный элемент. Хорошо известно, что норма гауссового элемента в сепарабельном банаховом пространстве интегрируема (см. [3], [4]). Очевидные равенства

$$\int\limits_T r^{1/2}(t, t)\nu(dt)=\int\limits_T E\,|\zeta(t, \cdot)|\,\nu(dt)=E\int\limits_T|\zeta(t, \cdot)|\,\nu(dt)=E\,\|\xi\|_{L_1}$$

доказывают предложение (см. также [5]).

Следующая теорема показывает, что предложение 3 в части необходимости остается верным для произвольного совершенного банахова пространства.

Теорема 2. Пусть $\langle X, X^1\rangle$—двойственность, X—совершенное банахово пространство. Предположим, что $L_1(T, \nu)$ сепарабельно. Если измеримая гауссова случайная функция ζ порождает на $B_{X'}(X)$ гауссову меру, то $\delta r^{1/2} \in X$.

Доказательство. Так как $\zeta(\cdot, \omega) \in X$ для почти всех $\omega \in \Omega$. то по определению пространства X^1 имеем, что все реализации случайной функции $\eta_y(t, \omega)=\zeta(t, \omega)\, y(t)$ лежат в $L_1(T, \nu)$. Поскольку это последнее сепарабельно, то η_y порождает гауссову меру в $L_1(T, \nu)$. Из предложения имеем $y\delta r^{1/2}=(E\eta_y^2)^{1/2} \in L_1(T, \nu)$ для каждого $y \in X^1$. Тем самым $\delta r^{1/2} \in X$.

Без дополнительных предположений об X обратное утверждение теоремы 2, вообще говоря, не верно.

Пример. Пусть $T=\{1, 2, \ldots\}$. Σ—σ-алгебра всех подмножеств T и ν—считающая мера. Рассмотрим последовательность $\{\xi_k\}$ независимых гауссовых случайных величин. $E\xi_k=0$, $E\xi_k^2=r_{kk}=(\log\log(k+2))^{-1}$ (основание $\log$ равно e). Очевидно, что $\{r_{kk}^{1/2}\} \in l_\infty$. Вместе с тем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{r_{kk}} \exp(-\varepsilon/r_{kk}) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} [\log(k+2)]^{-\varepsilon-\frac{1}{2}} = +\infty$$

для любого $\varepsilon>0$. Таким образом, $\{\xi_k\} \overline{\in} l_\infty$ для $\omega \in G$, $P\{G\}>0$ (см. [1], стр. 73).

В заключение мы рассмотрим пространства Орлича.

Пусть Φ и Ψ—дополнительные друг к другу N-функции (см. [6], [7]). Определим функционал:

$$L_\Phi(x)=\int_T \Phi(x(t))\, \nu(dt),$$

где x—ν-измеримая функция на T. Класс функций

$$L_\Phi(T, \nu)=\left\{x: \left|\int_T x(t)\, y(t)\, \nu(dt)\right| < +\infty,\ \rho_\Psi(y)<+\infty\right\}$$

с нормой

$$\|x\|_\Phi=\sup\left\{\left|\int_T x(t)\, y(t)\, \nu(dt)\right|;\quad \rho_\Psi(y)\leqslant 1\right\}$$

есть банахово пространство, которое называется пространством Орлича. Мы будем предполагать, что Φ удовлетворяет условию:

$$\Phi(2x)\leqslant C\,\Phi(x),\ c>0 \qquad (\Delta_2)$$

и что мера ν сепарабельна. В этих предположениях $L_\Phi(T, \nu)$ сепарабельно (см. [7]), $\langle L_\Phi(T, \nu), L_\Psi(T, \nu)\rangle$—двойственность относительно билинейной формы

$$\langle x, y\rangle=\int_T x(t)\,y(t)\,\nu(dt).$$

Для сепарабельных $L_\Phi(T, \nu)$ имеем

$$L^*_\Phi(T, \nu)=L^1_\Phi(T, \nu)=L_\Psi(T, \nu)$$

и поэтому B_L совпадает с борелевской σ-алгеброй пространства $L_\Phi(T, \nu)$.

Лемма. Если Φ удовлетворяет условию (Δ_2) и ξ гауссова случайная величина с $E\xi^2=0$ и $E\xi^2=\sigma^2$, то

$$E\Phi(\xi)\leqslant C\Phi(\sigma)$$

Доказательство. Нетрудно показать, что для произвольного λ имеем:

$$\Phi(\lambda x)\leqslant C\,|\lambda|^{\log_2 C}\Phi(x),$$

где C—постоянная в условии (Δ_2). Далее:

$$E\Phi(\xi)=\int_R \Phi(t)\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e(-t^2/2\sigma^2)dt=$$

$$=\int_R \Phi(\sigma\tau)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\tau^2/2)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\Phi(\sigma)C_1\int_R |\tau|^{\log_2 C}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\tau^2/2)d\tau=C\,\Phi(\sigma).$$

Предложение 4. Пусть $L_\Phi(T, \nu)$ сепарабельно. Если для ковариационной функции гауссовой случайной функции ζ имеем $\delta r^{1/2}\in L_\Phi(T, \nu)$, то $\zeta(\ \ , \omega)\in L_\Phi(T, \nu)$ для почти всех $\omega\in\Omega$.

Доказательство. Покажем, что для почти всех $\omega\in\Omega$ $\rho_\Phi(\zeta)\cdot, \omega))<<+\infty$. Для этого достаточно показать, что $E\rho_\Phi(\zeta(\cdot, \cdot))<+\infty$. Действительно, используя лемму, получаем:

$$E\rho_\Phi(\zeta(\ \ , .)=E\int_T\Phi(\zeta(t,\ .))\,\nu(dt)=\int_T[E\Phi(\zeta(t,\ .))]\,\nu(dt)\leqslant$$

$$\leqslant C\int_T \Phi(r^{1/2}(t, t))\,\nu(dt)\ <+\infty.$$

Соединяя теорему 2 и предложение 4, получаем следующую теорему (см. [9]):

Теорема 3. Для того, чтобы интегральный оператор $R{:}L_\Psi(T, \nu)\to L_\Phi(T, \nu)$ с ядром r задавал гауссову меру на σ-алгебре B_{L_Ψ} сепарабельного $L_\Phi(T_1\nu)$ необходимо и достаточно, чтобы $\delta r^{1/2}\in L_\Phi(T, \nu)$.

Очевидно, что при надлежащем подборе функции ф и пространства с мерой (T, Σ, ν) можно получить все пространства l_p, $L_p(1<p<\infty)$. Таким образом, в этих случаях сформулированная теорема обобщает результаты, полученные Н. Н. Вахания (см. [8]) и Б. Раджпутом (см. [5]).

Общий вид характеристического функционала гауссовой меры показывает. что теорему 3 можно переформулировать следующим образом (см. [9]):

Теорема 4. Функционал $X: L_\Psi(T, \nu) \to C$ (C—поле комплексных чисел) является характеристическим функционалом некоторой гауссовой меры в $L_\Phi(T, \nu)$ тогда и только тогда, когда он имеет вид:

$$X(y) = \exp\left[i\langle m, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ry, y\rangle,\right] \quad y \in L_\Psi(T, \varkappa),$$

где

$$m, \; \tilde{\sigma} r^{1/2} \in L_\Phi(T, \nu).$$

Проблемная лаборатория передачи и переработки информации в больших системах

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Вахания, Вероятностные распределения в линейных пространствах. Тб. 1971.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов. т. I, М., 1971.
3. А. В. Скороход, Теория вероятностей и её применения, 15 (1970), 519—520
4. X. S. Fernique, C. R. Acad. Sci., Paris, 270 (1970); 1698—1699.
5. B. S. Rajput, J. Multivar, Analysis, 2, N 4, 1972, 382—403.
6. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.
7. A. C. Zaanen, Linear Analysis, Amsterdam-Groningen, 1953.
8. N. Vakhania, C. R. Acad. Sci., Paris, 260, № 5. 1965, 1334—1336.
9. З. Г. Горгадзе, В. И. Тариеладзе, Сообщения АН ГССР, 74—3, 1974.
10. B. S. Rajput, S. Cambanis, Ann. of Math., 43, № 6, 1972, 1944—1952.

ზ. გორგაძე

ზომადი ფუნქციების განახის სივრცეებში ზომების შესახებ

რეზიუმე

განხილულია ალბათური განაწილებები ზომადი ფუნქციების სრულყოფილ სივრცეებში. განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა გაუსის განაწილებებს. გამორკვეულია ასეთ განაწილებებსა და მოცემულ სივრცეში მნიშვნელობების მქონე შემთხვევით ელემენტებს შორის შესაბამისობა. კოვარიაციული ოპერატორის ცნების გამოყენებით მოყვანილია აუცილებელი პირობა იმისა, რომ მოცემული გაუსის ზომა თავმოყრილია მოცემულ სრულყოფილ ფუნქციონალურ სივრცეში.

მიღებულია გაუსის ზომების სრული დახასიათება ორლიჩის სეპარაბელური სივრცეებისათვის. ეს შედეგები აზოგადებს ადრე ცნობილ შედეგებს l_p და $L_p (1 < p < +\infty)$ სივრცეებისათვის,

Z. GORGADZE

ON MEASURES IN BANACH SPACES OF MEASURABLE FUNCTIONS

Summary

The probability distributions in perfect spaces of measurable functions are considered. Special attention is paid to the Gaussian measures. A correspondence between these distributions and random elements taking values from such spaces is discovered. The necessary condition for the Gaussian measure to be supported by a given perfect functional space by employing the concept of covariance operator is given.

A complete characterization of Gaussian measures in separable Orliĉs spaces is obtained. These results generalize the results known earlier for l_p and $L_p (1 < p < +\infty)$ spaces.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РАДИКАЛА ГРУППЫ

Д. И. ЦЕЙТЛИН

Под радикальным классом здесь понимается радикальный класс в смысле Куроша (см. [1]). Если G—группа, **X**—радикальный класс, то через $\mathbf{X}(G)$ обозначается X-радикал группы G.

В статье [2] доказана теорема: если **X**—радикальный класс в классе абелевых групп, то для каждой абелевой группы G подгруппа $\mathbf{X}(G)$ сервантна в G. В настоящей заметке это утверждение обобщается при дополнительном условии замкнутости класса **X** по нормальным делителям.

Нам понадобятся следующие определения (см. [3]). Подгруппа A группы G называется *изолированной*, если для каждого натурального числа n из разрешимости в группе G уравнения

$$x^n = a, \tag{1}$$

где $a \in A$, следует разрешимость этого уравнения в подгруппе A (В случае абелевых групп изолированную подгруппу принято называть *сервантной*). Группа G называется *полной*, если уравнение (1) разрешимо в ней для любого натурального n и любого $a \in G$. Если же (1) разрешимо для любого $a \in G$ при $n=p$ (p—простое число), то группа G называется p-*полной*. Группа называется *полной в смысле Черникова*, если для каждого натурального числа n она порождается n-ми степенями своих элементов. Аналогично, назовем группу p-*полной в смысле Черникова*, если для каждого натурального числа k она порождается p^k-ми степенями своих элементов.

Мы используем следующие обозначения:

C_p—циклическая группа порядка p;

G^n—подгруппа в G, порожденная n-ми степенями элементов из G;

B—класс бэровских групп (групп, в которых каждая циклическая подгруппа достижима).

Ясно, что каждая p-полная группа является p-полной в смысле Черникова, а для абелевых групп эти понятия совпадают. Известна следующая теорема (см. [3, 4]): если ZA—группа полна в смысле Черникова, то она полна.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 1. *Если ZA-группа p-полна в смысле Черникова, то она p-полна.*

Теорема. Пусть **X**—радикальный класс в классе групп Σ, замкнутом по фактор-группам и нормальным делителям. Если X замкнут по нормальным делителям, $\Sigma \subseteq \mathbf{B} \cap (\mathrm{ZA})$, $G \in \Sigma$, то $\mathbf{X}(G)$—изолированная подгруппа в G.

Доказательство. Обозначим $A = \mathbf{X}(G)$, и пусть

$$x^{p^m} = a, \tag{2}$$

где $a \in A$, $x \in G$, p—простое число, m—натуральное. Докажем сначала следующее утверждение:

Лемма 2. Если $C_p \in \mathbf{X}$, то $x \in A$; если C_p не принадлежит **X**, то A является p-полной группой.

Доказательство леммы 2. 1) Пусть $C_p \in \mathbf{X}$. Через $\overline{G}$ обозначим фактор-группу G/A, а через $\overline{x}$—образ элемента x в этой фактор-группе. Из (2) имеем $\overline{x}^{p^m} = \overline{1}$. Если $m=0$, то $\overline{x} = \overline{1}$ и $x \in A$. Пусть теперь $m>0$. Тогда $(\overline{x}^{p^{m-1}})^p = \overline{1}$. Положим $F = \langle \overline{x}^{p^{m-1}} \rangle$. Если $\overline{x}^{p^{m-1}} \neq \overline{1}$, то $F \simeq C_p$. Следовательно, $F \in \mathbf{X}$. Кроме того, F достижима в $\overline{G}$, так как $\overline{G}$—бэровская группа. Значит, $F \subseteq \mathbf{X}(\overline{G})$, откуда следует неединичность подгруппы $\mathbf{X}(\overline{G})$, что противоречит радикальности класса **X**. Поэтому $\overline{x}^{p^{m-1}} = \overline{1}$. Продолжая эти рассуждения, получим $\overline{x}^{p^{m-2}} = \overline{1}$, и т. д.; и наконец, $\overline{x} = \overline{1}$, откуда $x \in A$.

2) Пусть теперь C_p не принадлежит **X**. Пусть k—произвольное натуральное число. Если $A \neq A^{p^k}$, то рассмотрим группу $B = A/A^{p^k}$. B—группа экспоненты p^k, следовательно, она содержит подгруппу H, изоморфную C_p. Кроме того, B—бэровская (так как A—бэровская). Значит H—достижима в B. Далее, $B \in \mathbf{X}$ (так как $A \in \mathbf{X}$ и **X** замкнут по гомоморфизмам). Значит, ввиду замкнутости **X** по нормальным делителям, $H \in \mathbf{X}$. Итак, получили $C_p \in \mathbf{X}$, что противоречит предположению. Значит $A = A^{p^k}$. Следовательно, ввиду произвольности k, A является p-полной в смысле Черникова. Кроме того, A является ZA-группой. Теперь, по лемме 1, A p полна. Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Рассмотрим уравнение (1), где $x \in G$, $a \in A$, n—произвольное натуральное число. Разложим n на множители: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ (p_i—простые числа, k_i—натуральные), и рассмотрим соответствующие группы $C_{p_1}, C_{p_2}, \cdots, C_{p_m}$. Часть из них (возможно, пустая) принадлежит **X**, а остальные не принадлежат $\in$ **X**. Без ограничения общности, можно считать, что $C_{p_1} C_{p_2}, \cdots, C_{p_n} \in \mathbf{X}$: $C_{p_{n+1}}, \cdots, C_{p_m}$ не принадлежит **X**. Обозначим $n_1 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$, $n_2 = p_{n+1}^{k_{n+1}} \cdots p_m^{k_m}$. Тогда из первой части леммы 2 легко получить что $x^{n_2} \in A$. Пусть

$$x^{n_2} = a_1 \ (a_1 \in A). \tag{3}$$

По второй части леммы 2 A является p_i-полной группой ($i = n+1, n+2, \ldots, m$), откуда легко видеть, что существует элемент $a_2 \in A$, такой, что

$$a_2^{n_2} = a_1. \tag{4}$$

Теперь из (1), (3) и (4) получаем $a_2^n = a_1^{n_1} = x^n = a$, т. е. уравнение (1) разрешимо в A. Значит, A—изолированная подгруппа в G, ч. т. д.

Кафедра алгебры
и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Сиб. матем. журн.. 3, № 6, 1962, 912—931.
2. B. J. Gardner. Comment. Math. Univ. Carol., 13, № 3, 1972, 419—430.
3. А. Г. Курош, Теория групп, М., 1967.
4. С. Н. Черников, Матем. сборн., 18, 1946, 397—422.

Დ. ᲪᲔᲘᲢᲚᲘᲜᲘ

ᲯᲒᲣᲤᲘᲡ ᲠᲐᲓᲘᲙᲐᲚᲘᲡ ᲔᲠᲗᲘ ᲗᲕᲘᲡᲔᲑᲘᲡ ᲨᲔᲡᲐᲮᲔᲑ

რეზიუმე

დამტკიცებულია, რომ გარკვეულ პირობებში ჯგუფის რადიკალი არის იზოლირებული ქვეჯგუფი.

D. ZEITLIN

ON A PROPERTY OF THE RADICAL OF A GROUP

Summary

It is proved that under certain conditions the radical $X(G)$ of a group G is an isolated subgroup in G. This is a generalization of the main theorem of Gardner [2].

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ КРАТНОСТЯМИ ВЕСОВ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Э. Т. САМСОНАДЗЕ

Пусть L—полупростая алгебра Ли с корнями $\pm\vec{\alpha}_1, \pm\vec{\alpha}_2, \ldots, \pm\vec{\alpha}_n$, а M—полупростая алгебра Ли с корнями $\pm\vec{\alpha}_1, \pm\vec{\alpha}_2, \cdots, \pm\vec{\alpha}_r$, где $r<n$, $\vec{\alpha}_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

Имеет место

Теорема. Пусть $T_L=\bigcup\limits_{j=1}^{p} T_{M_i}$, где T_L—множество вершин решётки неприводимого представления алгебры L со старшим весом представления $\vec{\lambda}$, а T_{M_i}—множество вершин решётки неприводимого представления алгебры M со старшим весом $S_i(\vec{\lambda})$, где S_i $(i=1, 2, \cdots p)$—элемент из группы Вейля W_L алгебры L. Тогда кратность $m_L(\vec{\lambda}; \vec{\mu})$ веса $\vec{\mu}$ в неприводимом представлении алгебры L со старшим весом представления $\vec{\lambda}$ выражается через кратности весов неприводимых представлений алгебры M следующим образом:

$$\vec{m}_L(\vec{\lambda}; \vec{\mu})=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\det S_i \sum_{(k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_n)} m_M \left[S_i(\vec{\lambda}+\vec{\sigma})-\vec{\delta}', \vec{\mu}+\vec{\delta}-\vec{\delta}'+\sum_{j-r+1}^{n} k_j\vec{\alpha}_j \right], \qquad (1)$$

где $m_M(\vec{\gamma}, \vec{\beta})$ означает кратность веса $\vec{\beta}$ неприводимого представления алгебры M со старшим весом представления $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$—полусумма положительных корней алгебры L, $\vec{\delta}'$—полусумма положительных корней алгебры M, символ $\sum\limits_{(k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_n)}$ означает суммирование по всем векторам $(k_{r+1}, k_{r+2}, \cdots, k_n)$ с целыми неотрицательными координатами.

Доказательство. Обозначим через $P(\vec{\beta})$ число целых неотрицательных решений $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ уравнения $\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n$, а через $\vec{P}'(\vec{\beta})$—число целых неотрицательных решений уравнения

$$\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_r\vec{\alpha}_r$$

Константом (см. [1]) было показано, что

$$m_L(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{S\in W_L}(\det S)P[S(\vec{\lambda}+\vec{\delta})-(\vec{\mu}+\vec{\delta})], \tag{2}$$

где суммирование берётся по всем преобразованиям S из группы Вейля алгебры L.

Отсюда получаем

$$m_L(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{i=1}^{p}\sum_{S'\in W_M}(\det(S'S_i))P[S'S_i(\vec{\lambda}+\vec{\delta})-(\vec{\mu}+\vec{\delta})], \tag{3}$$

где суммирование производится по всем преобразованиям S' группы Вейля W_M алгебры M.
Но

$$P(\vec{\beta})=\sum_{(k_{r+1},k_{r+2},\ldots,k_n)}P'\left(\vec{\beta}-\sum_{i=r+1}^{n}k_i\vec{\alpha}_i\right).$$

Поэтому из формулы (3) получаем

$$m_L(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{i=1}^{p}\det S_i\sum_{(k_{r+1},\ldots,k_n)}\sum_{S'\in W_M}(\det S')P'\Bigg[S'S_i(\vec{\lambda}+\vec{\delta})-$$
$$-\left(\vec{\mu}+\vec{\delta}+\sum_{j=r+1}^{n}k_j\vec{\alpha}_j\right)\Bigg] \tag{4}$$

Из формул (4) и (2) вытекает доказываемая формула (1).

Отметим, что при заданных $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ в правой части формулы (1) имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых, ввиду того, что $m_M(\vec{\lambda};\ \vec{\mu}')=0$ при $\vec{\mu}'>\vec{\lambda}'$.

Полученная формула (1) позволяет выразить кратности весов неприводимых представлений лиевой полупростой алгебры через кратности весов неприводимых представлений алгебр Ли меньшего ранга; кратности весов неприводимых представлений особых алгебр Ли через кратности весов неприводимых представлений классических алгебр Ли.

Применим формулу (1) для получения зависимостей между кратностями весов неприводимых представлений классических алгебр Ли.

Для симплектической лиевой алгебры C_n с корнями

$$\pm 2\vec{l}_i, \pm\vec{l}_k\pm\vec{l}_j, \qquad (i=1,\ldots n;\ j=1\ldots,n;\ k=1,\ldots,n;\ j<k),$$

где $\vec{l}_1,\ \vec{l}_2,\ldots,\vec{l}_n$ — ортонормированный базис, и ортогональной алгебры D_n с корнями $\pm\vec{l}_k\pm\vec{l}_j$ $(k=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n;\ k<j)$ из формулы (1) получаем

$$m_{C_n}(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{l=0}^{1}(-1)^l\sum_{(k)}m_{D_n}\left[(-1)^l(a_n+1)\vec{l}_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_i+1)\vec{l}_i;\right.$$

$$\left.\vec{\mu}+\sum_{i=1}^{n}(1+2k_i)\vec{l}_i\right],$$

где $\vec{\lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\vec{l}_i$; символ $\sum\limits_{(k)}$ означает суммирование по всем векторам $(k_1,\ k_2,\dots,k_n)$ с целыми неотрицательными координатами.

Аналогично для ортогональной алгебры B_n с корнями

$$\pm\vec{l}_i,\quad \pm\vec{l}_k\pm\vec{l}_j,\quad (i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n:\ k<j)$$

имеем

$$m_{B_n}(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{l=0}^{1}(-1)^l\sum_{(k)}m_{D_n}\left[(-1)^l\left(a_n+\frac{1}{2}\right)\vec{l}_n+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i+\frac{1}{2}\right)\vec{l}_i;\quad \vec{\mu}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+k_i\right)\vec{l}_i\right].$$

Введем следующие преобразования весов:

$$S_{i_1},\dots,_{i_l}(a_1,a_2,\dots,a_n)=(c_1,c_2,\dots,c_n),$$

где $a_j=c_j$ при $j\neq i_1\ j\neq i_2,\dots,j\neq i_l$ и $a_j=-c_j$ в остальных случаях;

$$T(c_1,\ c_2,\dots,c_n)=(c_{j_1},\ c_{j_2},\dots,c_{j_n}),$$

где $(j_1,\ j_2,\dots,j_n)$—такая перестановка из $1,\ 2,\dots,n$, что $(c_{j_1}\ c_{j_2},\dots,c_{j_n})\geqslant$ $\geqslant(c_{p_1},\ c_{p_2},\dots,c_{p_n})$ для произвольной перестановки $(p_1,\ p_2,\dots,p_n)$ из $1,\dots,n$.

Тогда кратности весов неприводимых представлений лиевых алгебр C_n и B_n выразятся через кратности весов неприводимых представлений унимодулярной алгебры A_{n-1} с корнями $\vec{l}_i-\vec{l}_j\,(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n;\ i\neq j)$ следующим образом:

$$m_{C_n}(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{(i)}\det TS_{i_1,\dots,i_l}\sum_{(k)}m_{A_{n-1}}(\vec{\lambda}',\ \vec{\mu}_k),$$

$$m_{B_n}(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{(i)}\det TS_{i_1,\dots,i_l}\sum_{(k)}m_{A_{n-1}}(\vec{\lambda}'',\ \vec{\mu}_k'),$$

где

$$\vec{\lambda}'=TS_{i_1},\dots,_{i_l}(\vec{\lambda}+\vec{\delta}_{C_n})-\vec{\delta}',\quad \vec{\delta}_{C_n}=\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\vec{l}_i,$$

$$\vec{\delta}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}-i\right)\vec{l}_i,$$

$$\vec{\mu}'_k=\vec{\mu}+\vec{\delta}_{Cn}-\vec{\delta}'+2\sum_{i=1}^{n}k_i\vec{l}_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}k_{ij}(\vec{l}_i+\vec{l}_j),$$

$$\vec{\lambda}'=TS_{i_1},\ldots,_{i_l}(\vec{\lambda}+\vec{\delta}_{Bn})-\vec{\delta}',\quad \vec{\delta}_{Bn}=\sum_{i=1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\vec{l}_i,$$

$$\mu''_k=\vec{\mu}+\vec{\delta}_{Bn}-\vec{\delta}'+\sum_{i=1}^{n}k_i\vec{l}_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}k_{ij}(\vec{l}_i+\vec{l}_j);$$

символ $\sum\limits_{(k)}$ означает суммирование по всем векторам $(k_1, k_2,\cdots,k_n, k_{1,2}, k_{1,3},\cdots,k_{n-1,n})$ с целыми неотрицательными координатами, а символ $\sum\limits_{(i)}$ означает суммирование по всем сочетаниям $(i_1,\cdots,i_l)$ из $1, 2,\cdots,n$ по l $(0\leqslant l\leqslant n)$. Аналогично

$$m_{Dn}(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{(i)}\det TS_{i_1},\cdots,_{i_l}\sum_{(k)}m_{An-1}(\vec{\lambda}',\ \vec{\mu}'_k),$$

где

$$\vec{\lambda}'=TS_{i_1},\cdots,_{i_l}(\vec{\lambda}+\vec{\delta})-\vec{\delta}',\quad \vec{\delta}=\sum_{i=1}^{n}(n-i)\vec{l}_i,\quad \vec{\delta}'=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}-i\right)\vec{l}_i,$$

$$\vec{\mu}'_k=\vec{\mu}+\vec{\delta}-\vec{\delta}'+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}k_{ij}(\vec{l}_i+\vec{l}_j),$$

символ $\sum\limits_{(k}$ означает суммирование по всем векторам $(k_{12}, k_{13},\cdots k_{n-1,n})$ с целыми неотрицательными координатами, символ $\sum\limits_{(i)}$ означает суммирование по всем сочетаниям $(i_1,\cdots,i_l)$ из $1.\cdots,n.$ по l, где l—чётное число.

Введём следующее преобразование весов:

$$T_{i_1},\cdots,_{i_n}(a_1,\ a_2,\cdots,a_n)=(a_{i_1},\ a_{i_2},\cdots,a_{i_n}),$$

где $(i_1,\cdots,i_n)$—перестановка из $1, 2,\cdots,n$.

Тогда кратности весов неприводимого представления алгебры C_n выразятся через кратности весов неприводимых представлений прямой суммы n унимодулярных алгебр $A_1+\cdots+A_1$ с корнями $\pm 2\vec{l}_i\ (i=1,\cdots,n)$ следующим образом;

$$m_{Cn}(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{(i)}\det T_{i_1},\cdots,_{i_n}\sum_{(k)}m_{A1+\cdots+A1}(\vec{\lambda}',\ \vec{\mu}'_k),$$

где

$$\vec{\lambda}'=T_{i_1},\cdots,_{i_n}(\vec{\lambda}+\vec{\delta}_{Cn})-\vec{\delta}',\quad \vec{\delta}'=\sum_{i=1}^{n}\vec{l}_i,$$

$$\vec{\mu}_k=\vec{\mu}+\vec{\delta}_{C_n}-\vec{\delta}'+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} k_{ij}(\vec{l}_i+\vec{l}_j)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} k'_{ij}(\vec{l}_i-\vec{l}_j),$$

символ $\sum\limits_{(k)}$ означает суммирование по всем векторам $(k_{12}, k_{13},\cdots,k_{n-1,n}, k'_{12},\cdots k'_{n-1,n})$ с целыми неотрицательными координатами, а символ $\sum\limits_{(i)}$ — суммирование по всем перестановкам $(i_1,\cdots,i_n)$ из $1, 2,\cdots,n$.

Аналогично, кратности весов неприводимого представления алгебры B_n выразятся через кратности весов неприводимого представления алгебры $A_1+\cdots+A_1$ с корнями $\pm\vec{l}_i\,(i=1,\ldots,n)$ следующим образом:

$$m_{B_n}(\vec{\lambda};\ \vec{\mu})=\sum_{(i)}\det T_{i_1,\cdots,i_n}\sum_{(k)} m_{A_1+\cdots+A_1}(\vec{\lambda}'', \vec{\mu}''_k),$$

где

$$\vec{\lambda}''=T_{i_1,\cdots,i_n}(\vec{\lambda}+\vec{\delta}_{B_n})-\vec{\delta}'',\quad \vec{\delta}''=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\vec{l}_i,$$

$$\vec{\mu}''_k=\vec{\mu}+\vec{\delta}_{B_n}-\vec{\delta}''+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} k_{ij}(\vec{l}_i+\vec{l}_j)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} k'_{ij}(\vec{l}_i-\vec{l}_j).$$

Кафедра алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, „Мир", 1964.

ე. სამსონაძე

ზოგიერთი ნახევრადმარტივი ლის ალგებრების დაუყვანადი წარმოდგენების წონების ჯერადობებს შორის კავშირის შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია ფორმულები, რომლებიც გამოსახავენ ლის ნახევრადმარტივი ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენის წონას ისეთი ალგებრის დაუყვანადი წარმოდგენების წონების საშუალებით, რომლის ფესვების სიმრავლე წარმოადგენს მოცემული ალგებრის ფესვების ქვესიმრავლეს.

E. SAMSONADZE

ON THE DEPENDENCE BETWEEN WEIGHT MULTIPLICITIES OR IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF SOME SEMISIMPLE ALGEBRAS

Summary

Formulae are obtained which express the weight of a nonreducible representation of a semisimple Lie algebra by means of weights of nonreducible representations whose set of roots constitutes a subset of the roots of the given algebra.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

О $\mathfrak{m}$-ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Г. Т. САМСОНАДЗЕ

Пусть $\mathfrak{m}$ – произвольное кардинальное число. Систему подгрупп L группы G назовем $\mathfrak{m}$-локальной системой подгрупп, если любой элемент этой группы содержится в некоторой подгруппе из L и для любой подсистемы подгрупп из L, мощность которой не превосходит $\mathfrak{m}$, в системе L найдется подгруппа, содержащая все подгруппы этой подсистемы. Обычную локальную систему подгрупп [1] можно определить как m-локальную систему, когда $\mathfrak{m}\geqslant 2$ и конечно.

Скажем, что группа $\mathfrak{m}$ локально обладает свойством Σ, если она обладает m-локальной системой из Σ-подгрупп.

По аналогии с локальной теоремой Мальцева [1] скажем, что для класса групп Σ справедлива $\mathfrak{m}$-локальная теорема, если всякая группа, m-локально обладающая свойством Σ, сама является Σ-группой.

В произвольной группе G через G_δ обозначам δ-ый член убывающей цепи коммутантов [1] группы G. Скажем, что группа G есть RK-группа ступени δ, если $G_\delta=E$, а для всех $\beta<\delta$ $G_\beta\neq E$. Класс всех RK-групп ступени не больше δ будем обозначать через RK_δ. Аналогично определяется ступень ZD-группы: G есть ZD-группа ступени δ, если δ—наименьшее порядковое число, для которого $G^\delta=E$, где G^δ—δ-ый член нижней центральной цепи [1] группы G. Класс всех ZD-групп ступени не больше δ обозначим через ZD_δ, а мощность порядкового числа δ будем обозначать через $\overline{\delta}$.

Теорема 1. *Если $\overline{\delta}\leqslant\mathfrak{m}$, то для класса ZD_δ-групп справедлива $\mathfrak{m}$-локальная теорема.*

Доказательство. Пусть $L=[A_\alpha,\ \alpha\in\Gamma]$—$\mathfrak{m}$-локальная система ZD_δ-подгрупп $(\overline{\delta}\leqslant\mathfrak{m})$ группы G. Индукцией по β покажем, что для всех порядковых $\beta\,(\overline{\beta}\leqslant\mathfrak{m})$ система подгрупп $L^\beta=[A^\beta_\alpha,\ \alpha\in\Gamma]$ является $\mathfrak{m}$-локальной системой подгрупп группы G^β. Попутно будет доказано, что из включения $A_{\alpha_1}\subset A_{\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2\in\Gamma$, следует включение $A^\beta_{\alpha_1}\subset A^\beta_{\alpha_2}$. Пусть для всех $\beta<\gamma\,(\overline{\gamma}\leqslant\mathfrak{m})$ это справедливо. Возможны 2 случая:

1. γ—непредельное порядковое число. Тогда $\gamma=\nu+1$ и $\nu<\gamma$, поэтому $A^\gamma_{\alpha_1}=A^{\nu+1}_{\alpha_1}=[A_{\alpha_1}, A^\nu_{\alpha_1}]\subset[A_{\alpha_2}, A^\nu_{\alpha_2}]=A^{\nu+1}_{\alpha_2}$. Если $g\in G^\gamma=G^{\nu+1}=[G, G^\nu]$, то $g=[b_1, d_1]^{\varepsilon_1}[b_2, d_2]^{\varepsilon_2}\ldots[b_k, d_k]^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_i=\pm1$, $b_i\in G$, $d_i\in G^\nu$ $(i=1, 2,\ldots,k)$. Согласно предположению индукции найдутся такие подгруппы A_α и

A_α^ν, $\alpha \in \Gamma$, что $b_i \in A_\alpha$, $d_i \in A_\alpha^\nu$ $(i=1, 2, \dots, k)$, поэтому $g \in [A_\alpha, A_\alpha^\nu] = A_\alpha^{\nu+1} = A_\alpha^\gamma$.

2. γ—предельное порядковое число. В этом случае $A_{\alpha_1}^\gamma = \bigcap\limits_{\beta<} A_{\alpha_1} \subset \bigcap\limits_{\beta<\gamma} A_{\alpha_2}^\beta = A_{\alpha_2}^\gamma$. Пусть $g \in G^\gamma = \bigcap\limits_{\beta<\gamma} G^\beta$. Тогда в каждой подгруппе G^β, где $\beta<\gamma$, найдется такая подгруппа $A_{\alpha_\beta}^\beta$ $(\alpha_\beta \in \Gamma)$, что $g \in A_{\alpha_\beta}^\beta$. Так как мощность множества $\{\alpha_\beta \mid \beta<\gamma\}$ не превосходит $\mathfrak{m}$, найдется такое $\alpha' \in \Gamma$, что для всех $\beta<\gamma$ $A_{\alpha_\beta}^\beta \subset A_{\alpha'}^\beta$. Поэтому $g \in \bigcap\limits_{\beta<\gamma} A_{\alpha_\beta}^\beta \subset \bigcap\limits_{\beta<\gamma} A_{\alpha'}^\beta = A_{\alpha'}^{\gamma}$.

По условию теоремы $A_\alpha^\delta = E$ для всех $\alpha \in \Gamma$. Так как система подгрупп $L^\delta = [A_\alpha^\delta \mid \alpha \in \Gamma]$ покрывает группу G^δ, то $G^\delta = E$. Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Если $\overline{\delta} \leqslant \mathfrak{m}$, то для класса $RK\delta$-групп справедлива $\mathfrak{m}$—локальная теорема.*

Следствие. *Для RK-и ZD-групп фиксированной ступени δ $(\overline{\delta} \leqslant \mathfrak{m})$ справедливы $\mathfrak{m}$-локальные теоремы.*

Из справедливости локальной теоремы Мальцева (т. е. $\mathfrak{m}$-локальной теоремы, когда $\mathfrak{m} \geqslant 2$ и конечно) следует справедливость $\mathfrak{m}$-локальной теоремы для произвольного $\mathfrak{m} \geqslant 2$. Обратное не всегда верно: как показывает пример [2] локально конечной p-группы, совпадающей со своим коммутантом, для классов групп $ZD\delta$ и $RK\delta$, когда $\overline{\delta}$ бесконечно, локальная теорема Мальцева не справедлива.

Через $J(\Sigma)$ обозначим класс всех групп, порождаемых системой своих инвариантных Σ-подгрупп, а через $J_m(\Sigma)$-класс всех групп, порождаемых системой своих инвариантных Σ-подгрупп, мощность которой не превосходит $\mathfrak{m}$. Если $G \in J(\Sigma)$, то подгруппы, порождаемые системой инвариантных в G Σ-подгрупп, мощность которой не превосходит $\mathfrak{m}$, при бесконечном $\mathfrak{m}$ составляют $\mathfrak{m}$-локальную систему. Поэтому, если $J_m(\Sigma) = \Sigma$ и для класса групп Σ справедлива $\mathfrak{m}$-локальная теорема, то $J(\Sigma) = \Sigma$.

Отметим, что в произвольной группе G все подгруппы, мощность которых не превосходит $\mathfrak{m}$, составляют $\mathfrak{m}$-локальную систему подгрупп группы G. Поэтому, если класс Σ замкнут по подгруппам, группа G тогда и только тогда $\mathfrak{m}$-локально обладает свойством Σ, когда все вышеуказанные подгруппы принадлежат классу Σ.

Усилением теорем 1 и 2 является

Теорема 3. *Для класса $ZD(RK)$ групп ступени строго меньше δ, где $\overline{\delta} \leqslant \mathfrak{m}$, справедлива $\mathfrak{m}$-локальная теорема.*

Доказательство. Сохраняя обозначения теоремы 1 допустим, что для всех $\gamma<\delta$ $G^\gamma \neq E$. Тогда, как видно из доказательства теоремы 1, для каждого $\gamma<\delta$ можно выбрать такое $\alpha \in \Gamma$, что $A_\alpha^\gamma \neq E$. Если A_{α_0}—подгруппа из

L, содержащая все выбранные A_α, то $A^{\gamma}_{\alpha_0} \neq E$ для всех $\gamma < \delta$, что противоречит условиям теоремы.

Через $S_0(\Sigma)$ обозначим класс всех таких групп, каждая подгруппа которых принадлежит классу Σ, а через $Q_0(Z)$—класс всех таких групп, гомоморфный образ которых есть Σ группа. В работе [3] доказано, что если для Σ справедлива локальная теорема, то она справедлива и для $S_0(\Sigma)$ и $Q_0(\Sigma)$. Аналогичный результат можно получить и для $\mathfrak{m}$-локальных теорем.

Теорема 4. Если для класса групп Σ справедлива $\mathfrak{m}$-локальная теорема, то она справедлива и для классов групп $S_0(\Sigma)$ и $Q_0(\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $L=[G_\alpha \mid \alpha \in \Gamma]$ — $\mathfrak{m}$-локальная система $Q_0(\Sigma)$-подгрупп группы G и G_0/A—её фактор-группа. Непосредственно проверяется, что система $L=[G_\alpha A/A \mid \alpha \in \Gamma]$ является $\mathfrak{m}$-локальной системой подгрупп группы G/A. В то же время $G_\alpha A/A \simeq G_\alpha / G_\alpha \cap A \in \Sigma$, т. к. $G_\alpha \in Q_0(\Sigma)$. Поэтому $G/A \in \Sigma$. Аналогично доказывается справедливость $\mathfrak{m}$-локальной теоремы для $S_0(\Sigma)$.

Классы ZD_δ и SK_δ при бесконечном δ не замкнуты по фактор-группам, поэтому $Q_0(ZD_\delta) \neq ZD_\delta$ и $Q_0(RK_\delta) \neq RK_\delta$ и из теорем 1, 2 и 4 получаем

Следствие. Если $\bar{\delta} \leq \mathfrak{m}$, то для классов групп $Q_0(ZD_\delta)$ и $Q_0(RK_\delta)$ справедливы $\mathfrak{m}$-локальные теоремы.

Кафедра алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1967.
2. О. Ю. Шмидт, Математич. сборник, 17, 1945, 145—162.
3. Ш. С. Кемхадзе, Труды объединения математических кафедр педагогических институтов Центральной зоны РСФСР, т. I, вып. 1—2, Иваново, 1972.

გ. სამსონაძე

m-ლოკალური თეორემის შესახებ

რეზიუმე

შემოტანილია $\mathfrak{m}$-ლოკალური თეორემის ცნება ($\mathfrak{m}$—ნებისმიერი კარდინალური რიცხვი), რომელიც არის მალცევის ლოკალური თეორემის განზოგადება. როცა $\mathfrak{m}$-უსასრულოა, არსებობს ჯგუფთა კლასები, რომელთათვის $\mathfrak{m}$-ლოკალური თეორემა სამართლიანია, მაგრამ მალცევის ლოკალური თეორემა სამართლიანი არ არის.

G. SAMSONADZE

ABOUT AN m-LOCAL THEOREM

Summary

The notion of $\mathfrak{m}$-local theorem is introduced, where $\mathfrak{m}$ is an arbitrary cardinal number. $\mathfrak{m}$-local theorems for some classes of groups are proved.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ВЫБОРОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ НА ЭВМ

Р. Л. ХОМЕРИКИ

Распределение Ферми является квантовой статистикой с полуцелым спином. Волновая функция, описывающая систему из нескольких ферми частиц антисимметрична относительно перестановки любой пары частиц. Из этого следует, в частности, что в случае системы, состоящей из невзаимодействующих друг с другом ферми частиц, в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы.

В распределении Ферми, согласно принципу Паули, возможны только два значения n_i, которые дают количество частиц, находящихся в собственных состояниях с энергиями ε_i. Функция распределения в данном случае имеет вид

$$\overline{n}_j=\frac{1}{\exp[(\varepsilon i-\mu)/\tau]+1}, \quad \text{или} \quad f(\varepsilon)=\frac{1}{\exp[(\varepsilon-\mu)/\tau]+1},$$

$f(\varepsilon)$—вероятность того, что состояние с энергией ε_i занято.

Распределению n частиц по энергетическим уровням можно поставить в соответствие следующую модель: энергетическим уровням ε_i поставим в соответствие определенные ячейки общим количеством N. Каждая из n частиц может находиться в каждой ячейке с вероятностью $\frac{1}{N}$. Допустим, надо найти вероятность того, что в определенных n ячейках окажется по одной частице. Согласно статистике Ферми в каждой ячейке может находиться либо одна частица, либо не находиться ни одна. Образуя группы равновероятных событий, получаем для искомой вероятности следующее выражение:

$$p=\frac{(N-n)!n!}{N!}.$$

Хотя в данном случае возможно определение вероятностей классическим методом, в более сложных задачах выделение равновозможных случаев трудно или невозможно.

Описанная модель была перенесена на ЭВМ и упомянутая вероятность была подсчитана экспериментально. Для данной задачи эксперимент позволил проверить правильность машинной модели, поскольку априорный подсчет вероятности не вызывал никаких сомнений.

С целью проверки правильности модели, которая доказывает принципиальную возможность проведения таких экспериментов, на ЭВМ БЭСМ-4 созданы и опробованы десять программ. Для каждой из основных программ проделано свыше полмиллиона испытаний с датчиком псевдослучайных чисел, который имел практически бесконечный период [2].

Программа Р—10. Для статистики Ферми находится вероятность того, что в определенных n ячейках окажется по одной частице. Теоретически эта вероятность приближенно равна $P \approx 0{,}00014$, для случая $N=36$, $n=3$. В программе генератор псевдослучайных чисел вырабатывает 36 чисел. Из них трем минимальным присваивается значение $\langle 1 \rangle$, в остальные ячейки засылаются нули. Таким образом, из 36 ячеек в трех окажется единица. Это соответствует случаю $N=36$, $n=3$. Подвергаемые испытаниям числа располагаются в ячейках 6201—6244. В программе число $\langle 1 \rangle$ сравнивается с первыми тремя ячейками 6201, 6202, 6203. В случае трех совпадений фиксируется благоприятный исход. Счетчик 0233 подсчитывает количество благоприятных исходов, а счетчик 0234—общее количество испытаний. Испытания проводились в 22 серии. Общее количество испытаний 538279. Количество благоприятных исходов 78. Статистическая вероятность дала хорошее приближение к теоретической.

Известно, что критерий χ^2 применяется тогда, когда по наблюденным частотам нужно проверить некоторую гипотезу, относительно вероятности. Результат $P \approx 0{,}00014$, полученный теоретическим путем, примем за гипотезу (программа Р-10) и проверим эту гипотезу по первой серии. Количество опытов $n=32986$, событие наступило $x_1=6$ раз, а предполагаемая вероятность этого события равняется $p_1=0.00014$, тогда $q_1=1-$ $-p_1=0{,}99986$ и по критерию χ^2 получим

$$\chi^2 = \frac{(x_1 - np_1)^2}{np_1q_1} = \frac{[6-(32986 \cdot 0{,}00014)]^2}{32986 \cdot 0{,}00014 \cdot 0{,}99986} \approx 0{,}413.$$

Число степеней свободы в этой задаче $f=2-1=1$ и по специальной таблице для χ^2 гипотеза полностью подтверждается.

В дальнейшем был применен обобщенный критерий χ^2 для всех 22 серий. Пусть некоторое событие в первых n_1 опытах наступило x_1 раз и не наступило y_1 раз, во второй серии из n_2 опытов оно наступило x_2 раза и не наступило y_2 раза и т. д. Нужно проверить одинаковы ли вероятности этого события во всех сериях или нет. В эксперименте были получены следующие результаты:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	6	8	3	4	5	4	4
y_i	32980	21724	19203	32899	34820	32825	32811
n_i	32986	21732	19206	32903	32825	32829	32815

8	9	10	11	12	13	14	15
6	8	3	3	3	2	3	3
32807 32813	32789 32797	32816 32819	19798 19801	22047 22050	18089 18091	18066 18069	19142 19145

16	17	18	19	20	21	22
1	4	0	1	3	3	1
19646 19647	18014 18018	17519 17519	21751 21752	21193 21196	19545 19548	19716 19717

Обозначим $\sum_{i=1}^{22} n_i = N$. Нужно проверить, могут ли вероятности p, q быть одинаковыми для всех серий. Наилучшими оценками для p, q являются общие частоты

$$\widetilde{p} = \frac{\sum_{i=1}^{22} x_i}{N}, \quad \widetilde{q} = \frac{\sum_{i=1}^{22} y_i}{N}.$$

Тогда гипотеза о том, что вероятности не меняются, проверяется критерием χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{22} \frac{(x_i - n_i \widetilde{q})^2}{n_i \widetilde{p}} + \sum_{i=1}^{22} \frac{(y_i - n_i \widetilde{q})^2}{n_i \widetilde{q}}$$

со степенями свободы $f = 21$. Соответствующий подсчет, проведенный на ЭВМ, показал, что гипотеза о том, что вероятности не меняются, верна.

Проведенный эксперимент и проверка результатов методами математической статистики доказывают, что принципиально возможно моделировать на ЭВМ процессы, связанные с распределением Ферми. Хотя рассмотренная задача не отличается сложностью, но она может послужить для создания моделей для более сложных процессов, в том числе и тех процессов, для которых классические методы не разработаны.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., 1964.
2. Р. Л. Хомерики, Сборник трудов ТГУ, А 10 (158),

რ. ხომერიკი

ფერმის განაწილების მახასიათებლების შერჩევითი განსაზღვრა ელექტრონულ მანქანაზე

რეზიუმე

შრომაში განხილულია ფერმის განაწილებისათვის გარკვეული პარამეტრების შეფასების შესაძლებლობა. გამოყენებულია ფერმის განაწილების მანქანური მოდელი და სტატისტიკური ცდების მეთოდი. განსაზღვრულია შერჩევითი პარამეტრები. მიღებული შედეგები შემოწმებულია სტატისტიკური ჰიპოთეზების კრიტერიუმით.

R. CHOMERIKI

SELECTIVE ESTIMATES OF FERMI DISTRIBUTION CHARACTERISTICS ON ELECTRONIC COMPUTER

Summary

The experiment carried out and checking of results by the mathematical statistics methods are prove that modelling of processis on electronic computer connected with Fermi distribution is principally possible.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ОБОБЩЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

Н. Н. ПАТАРАЯ

Как известно, вариационные методы Ритца и Галеркина успешно применяются при решении граничных задач механики для конечных областей. В случае бесконечных областей они не находят практического применения из-за трудностей, связанных с построением для таких областей, полных систем функции. При решении гидродинамических задач, связанных с движением твердых тел в жидкости или их обтеканием жидкостью, приходится определять искомые функции во внешних областях, содержащих бесконечно удаленные точки. В этой статье мы ставим себе задачу с помощью соответствующего преобразования переменных привести внешние граничные задачи гидродинамики к внутренним. Это позволит нам применить вариационные методы к полученным конечным областям. Обратный переход от преобразованных переменных к первоначальным даст приближенное решение поставленной гидродинамической задачи.

§ 1. Некоторые сведения из гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости

Рассмотрим совместное движение твердых тел в безграничном по всем направлениям объема идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности.

Полагая движение потенциальным, как это вытекает при соблюдении условий теоремы Лагранжа, для потенциала скорости φ (x, y, z, t) в случае пространственной задачи будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

и граничные условия

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}_{(s_k)}=u_{kx}\cos\widehat{nx}+u_{ky}\cos\widehat{ny}+u_{kz}\cos\widehat{nz}\quad (k=1,\ 2\cdots n)\qquad(1.1)$$

$$\lim_{r\to\infty}\operatorname{grad}\varphi=0$$

где (s_k)—поверхность k-го тела, $\vec{u}_k$—скорость движения в жидкости k-го тела, $\vec{n}$—направление внешней $k(s_k)$ нормали и $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ — расстояние от начала координат.

При обтекании указанных тел безграничным по всем направлениям потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющим скорость $\vec{v}_\infty$ в бесконечности, будем иметь

$$\Delta\varphi=0, \quad \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}_{(s_k)}=0, \quad \lim_{r\to\infty}\operatorname{grad}\varphi=\vec{u}_\infty\cdot$$
$$(k=1,\ 2\cdots n)$$

После определения φ, давление можно определить по известной формуле Лагранжа-Коши:

$$p=\rho u^*-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\rho}{2}\operatorname{grad}^2\varphi+\chi(t) \tag{1.2}$$

где u^*—потенциал внешних массовых сил, ρ—плотность жидкости, $x(t)$—некая функция времени, для определения которой требуется задание давления в произвольной фиксированной точке. Для главного вектора и главного момента гидродинамической реакции, действующей на поверхности (s_k), получим:

$$\vec{R}_k=-\iint\limits_{(s_k)}\left\{-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\rho}{2}\operatorname{grad}^2\varphi+\rho u^*+\chi(t)\right\}\vec{n}ds$$

$$\vec{L}_k=\iint\limits_{(s_k)}[\vec{r},\ \vec{n}]\left\{+\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\rho}{2}\operatorname{grad}^2\varphi-\rho u^*-\chi(t)\right\}ds \tag{1.3}$$

где $\vec{n}$—единичный вектор внешней $k(s_k)$ нормали, $\vec{r}$—радиус вектор точек (s_k), $\chi(t)$ —произвольная функция времени.

При решении граничных задач для плоских бесконечных областей, что соответствует плоскопараллельным движениям твердых тел, для $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$ будем иметь:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \quad \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}_{(s_k)}=u_{kx}\cos\widehat{nx}+u_{ky}\cos\widehat{ny},$$
$$(k=1,\ 2\cdots n)$$

Остальные уравнения и граничные условия сохраняют прежний вид.

§ 2. Замена переменных и приведение внешних граничных задач для потенциала скорости жидкости к внутренним

Внешние граничные задачи для потенциала скорости жидкости изложенные в § 1, можно привести к внутренним, которые можно приближенно решить с помощью вариационных методов. Обратный переход к старым переменным даст решение первоначально поставленных задач. С этой целью начало системы прямоугольных декартовых координат возьмем в центре объема (или площади в случае плоской задачи) движущегося в жидкости или неподвижного в случае обтекания жидкостью k-го тела—(τ_k). Обозначим через R_k наименьшее расстояние от центра объема (τ_k) до точек поверхности (s_k) (или до точек контура (s_k) в случае плоской задачи) и рассмотрим переменные ξ, η, ζ, которые связаны с переменными x, y, z с помощью формул

$$\xi=\frac{R_k^2x}{x^2+y^2+z^2},\quad \eta=\frac{R_k^2y}{x^2+y^2+z^2},\quad \xi=\frac{R_k^2z}{x^2+y^2+z^2} \tag{2.1}$$

или формул

$$\xi=\frac{R_k^2x}{x^2+y^2},\quad \eta=\frac{R_k^2y}{x^2+y^2}, \tag{2.2}$$

применяемых при плоскопараллельном движении в жидкости цилиндрических тел.

Легко усмотреть, что область пространства (D), расположенная вне (s_1), (s_2),,$\cdots(s_n)_z$ и содержащая бесконечно удаленную точку, отобразится на конечную область (G), расположенную внутри поверхности (σ_k) и вне поверхностей (σ_1), $(\sigma_2)\cdots,(\sigma_{k-1})\,(\sigma_{k+1})\cdots,(\sigma_n)$, где (σ_1), $(\sigma_2),\cdots,(\sigma_n)$—отображения с помощью (2.1) поверхности (s_1), $(s_2),\cdots(s_n)$.

Преобразование (2.1) бесконечно удаленную точку пространства (D) переводит в начало координат системы отчета $0\xi\eta\zeta$ в (G).

Между областями (D) и (G) можно установить взаимно однозначное точечное соответствие при помощи (2.1) и соответствующих им формул обратного перехода от переменных ξ, η, ζ к переменным x, y, z, которые имеют вид

$$x=\frac{R_k^2\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\quad y=\frac{R_k^2\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\quad z=\frac{R_k^2\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \tag{2.3}$$

или вид

$$x=\frac{R_k^2\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad y=\frac{R_k^2\eta}{\xi^2+\eta^2} \tag{2.4}$$

в случае плоских областей.

Все сказанное выше для трехмерных областей распространится и на двухмерные области, только в этом случае (s_1), $(s_2),\cdots,(s_n)$ будут представлять собой контуры на плоскости движения жидкости, а (D)—плоская область вне (s_1), $(s_2),\cdots,(s_n)$. При этом (σ_1), $(\sigma_2),\cdots,(\sigma_n)$ будут представлять собой отображения (s_1), $(s_2)\cdots,(s_n)$ с помощью (2.2), а (G)—плоскую область, расположенную внутри (σ_k) и вне (σ_1), $(\sigma_2)\cdots(\sigma_{k-1})$, $(\sigma_{k+1}),\cdots,(\sigma_n)$ контуров.

§ 3. Уравнения и граничные условия для преобразованной области

Сначала будем заниматься трехмерной областью (G). Выразим произвольные по x, y, z через производные по ξ, η, ζ. что даст для $\varphi(x, y, z, t)$ уравнение:

$$\Delta_{x,\,y,\,z}\varphi(x,y,z,t)=\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\xi^2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\eta^2}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\zeta^2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial \zeta}\right)^2\right]+$$

$$+2\frac{\partial^2\overrightarrow{\varphi}}{\partial\eta\partial\xi}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right]+$$

$$+2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\xi\partial\zeta}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]+2\frac{\partial^2\overrightarrow{\varphi}}{\partial\eta\partial\zeta}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]+$$

$$+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\Delta_{x,y,z}\,\xi+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\Delta_{x,y,z}\,\eta+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\Delta_{x,y,z}\zeta \qquad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) значения производных ξ, η, ζ по x, y, z, после простых преобразований получим

$$\Delta\varphi(x,y,z,t)=\left(\frac{\partial_2\overline{\varphi}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\zeta^2}\right)\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}{R_k^4}-$$

$$-2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\frac{\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{R_k^4}-2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\frac{\eta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{R_k^4}-2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\frac{\zeta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{R_k^4}, \qquad (3{,}2)$$

которое в переменных ξ, η, ζ примет вид:

$$\Delta'\overline{\varphi}=\frac{2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\xi+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\eta+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\zeta\right), \qquad (3.3)$$

где

$$\Delta'\overline{\varphi}=\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\zeta^2}.$$

Преобразуем граничное условие (1.1) для переменных ξ, η, ζ. Перепишем равенство (1.1) в виде:

$$\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-u_{kx}\right)\cos\widehat{nx}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-u_{ky}\right)\cos\widehat{ny}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-u_{kz}\right)\cos\widehat{nz}\right\}_{(s_k)}=0. \qquad (3.4)$$

$$(k=1.\ 2,\cdots,n)$$

Так как

$$\{\cos\widehat{nx}\}_{(s_k)}=\frac{\dfrac{\partial F_k}{\partial x}}{|\operatorname{grad}F_k|},\quad \{\cos\widehat{ny}\}_{(s_k)}=\frac{\dfrac{\partial F_k}{\partial y}}{|\operatorname{grad}F_k|}, \qquad (3.5)$$

$$\{\cos\widehat{nz}|_{(s_k)}=\frac{\dfrac{\partial F_k}{\partial z}}{|\operatorname{grad}F_k|},\quad (k=1,\ 2,\cdots,n)$$

де $F_k(x,y,z)=0$—уравнение поверхности k-го тела (s_k), то после подстановки (3.5) в (3.4) будем иметь:

$$\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-u_{kx}\right)\frac{\partial F_k}{\partial x}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-u_{ky}\right)\frac{\partial F_k}{\partial y}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-u_{kz}\right)\frac{\partial F_k}{\partial z}\right\}_{(s_k)}=0 \qquad (3.6)$$

$$(k=1,\ 2,\ldots n)$$

Выражение $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F_k}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F_k}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial F_k}{\partial z}\right)$ в переменных $\xi,\ \eta,\ \zeta$ примет вид:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F_k}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F_k}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial F_k}{\partial z}\right)_{\xi,\eta,\zeta}=$$

$$=\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial\bar F_k}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\bar F_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\bar F_k}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{\xi,\eta,\zeta}+\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{\xi,\eta,\zeta}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\bar F_k}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\bar F_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\bar F_k}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{\xi,\eta,\zeta}+\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)_{\xi,\eta,\zeta}\cdot\left(\frac{\partial\bar F_k}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\bar F_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\bar F_k}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)_{\xi,\eta,\zeta}=$$

$$=\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\xi}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2\right\}_{\xi,\eta,\zeta}+$$

$$+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\eta}\left\{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2\right\}_{\xi,\eta,\zeta}+$$

$$+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\zeta}\left\{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right\}_{\xi,\eta,\zeta}+$$

$$+\left[\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\eta}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\xi}\right]\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right]_{\xi,\eta,\zeta}+$$

$$+\left[\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\zeta}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\xi}\right]\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]_{\xi,\eta,\xi}+$$

$$+\left[\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\zeta}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\eta}\right]\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]_{\xi,\eta,\zeta},$$

которое приведется к виду:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F_k}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F_k}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial F_k}{\partial z}\right)_{\xi,\eta,\zeta}=$$

$$=\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{R_k^4}\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\eta}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar F_k}{\partial\zeta}\right), \qquad (3.7)$$

где индекс $\xi,\ \eta,\ \zeta$ при скобках означает, что выражение, стоящее в скобках, рассматривается как функция $\xi,\ \eta,\ \zeta.\ t$. В силу очевидных равенств:

$$\left\{\frac{\partial F_k}{\partial x}\right\}_{\xi,\eta,\zeta}=\left(\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{\xi,\eta,\zeta}=$$

$$=\left\{\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{R_k^2(y^2+z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{2\overline{E}_k}{\partial \eta}\frac{R_k^2\,xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}\frac{R_k^2\,xz}{(x^2+y^2+z^2)}\right\}_{\xi,\eta,\zeta}=\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{\xi^2+\eta^2-\zeta^2}{R_k^2}-$$

$$-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{\xi\eta}{R_k^2}-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}\frac{\xi\zeta}{R_k^2},$$

$$\left\{\frac{\partial F_k}{\partial y}\right\}_{\xi,\eta,\zeta}=\left\{\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right\}_{\xi,\eta,\zeta}= \tag{3,8}$$

$$=\left\{-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{R_k^2\,xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{R_k^2(x^2+z^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}\frac{R_k^2\,yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right\}=-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{\xi\eta}{R_k^2}+$$

$$+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{\xi^2+\zeta^2-\eta^2}{R_k^2}-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}\frac{\eta\zeta}{R_k^2},$$

$$\left\{\frac{\partial F_k}{\partial z}\right\}_{\xi,\eta,\zeta}=\left\{\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right\}_{\xi,\eta,\xi}=$$

$$=\left\{-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{R_k^2\,xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{yz\cdot R_k^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}R_k^2\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right\}_{\xi,\eta,\zeta}=-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \xi}\frac{\xi\zeta}{R_k^2}-$$

$$-2\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \eta}\frac{\eta\zeta}{R_k^2}+\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial \zeta}\frac{\xi^2+\eta^2-\xi^2}{R_k^2},$$

подставив (3.7) и (3.8) в (3.6), после несложных преобразований граничное условие потенциала скорости $\overline{\varphi}(\xi,\eta,\zeta,t)$ для преобразованных поверхностей (σ_1), (σ_2),....(σ_n), приведем к виду:

$$\left\{\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{n}}\right\}_{(\sigma k)}=\frac{R_k^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\left\{\left[\overline{u}_{kx}(\eta^2+\zeta^2-\xi^2)-2u_{ky}\xi\eta-\right.\right.$$

$$-2\overline{u}_{kz}\,\xi\zeta\,]\cos\widehat{n\xi}+[\,\overline{u}_{ky}(\xi^2+\zeta^2-\eta^2)-2\overline{u}_{kx}\,\xi\zeta-$$

$$-2\overline{u}_{kz}\,\eta\zeta]\cos\widehat{n\eta}+[\overline{u}_{kz}(\xi^2+\zeta^2-\eta^2)-$$

$$\left.-2\,\overline{u}_{kx}\,\xi\zeta-2\overline{u}_{ky}\,\eta\zeta]\cos\widehat{n\zeta}\right\}_{(\sigma k)}\quad(k=1,\ 2,\ldots,n) \tag{9.3}$$

где $\vec{n}$—нормаль к поверхности (σ_k).

Обозначим через $\vec{u}_{0k}$ скорость полюса, а через $\vec{\omega}_k$ — угловую скорость k-го тела. По известной формуле кинематики твердого тела будем иметь:

$$\begin{aligned} u_{kx} &= u_{0kx} + \omega_{kx} z' - \omega_{kz} y' \\ u_{ky} &= u_{0ky} + \omega_{kz} x' - \omega_{kx} z' \\ u_{kx} &= u_{0kz} + \omega_{kx} y' - \omega_{kz} x' \end{aligned} \tag{3.10}$$

где x', y', z' — координаты точек (s_k) относительно полюса, а $\overline{u}_{kx}$, $\overline{u}_{ky}$, $\overline{u}_{kz}$ в (3.9) надо рассматривать как функции переменных ξ, η, ζ.

В формуле (3.9) предполагается существование нормали во всех точках (σ_k).

Заметим, что в переменных ξ, η, ζ будем иметь:

$$\begin{aligned} \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}_{\xi,\eta,\zeta} &= \frac{1}{R_k^2}\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}(\eta^2+\zeta^2-\xi^2) - 2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\xi\eta - 2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\xi\zeta\right], \\ \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}_{\xi,\eta,\zeta} &= \frac{1}{R_k^2}\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}(\zeta^2+\xi^2-\eta^2) - 2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\xi\eta - 2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\eta\zeta\right], \\ \left\{\frac{z\varphi}{\partial z}\right\}_{\xi,\eta,\zeta} &= \frac{1}{R_k^2}\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}(\xi^2+\eta^2-\zeta^2) - 2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\xi\zeta - 2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\eta\zeta\right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Как известно, $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} \to 0$ как $\frac{1}{r^3}$, поэтому из (3.11) вытекает, что $\left\{\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}, \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}, \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\right\} \to 0$ как $[\xi^2+\eta^2+\zeta^2]^{-\frac{1}{2}}$; следовательно, математическая задача определения скорости $\overline{\varphi}(\xi, \eta, \zeta, t)$ в конечной области сводится к определению решения (3.3) при граничных условиях (3.9). В случае плоской задачи $\Delta_{xy}\xi=0$, $\Delta_{xy}\eta=0$, и, следовательно, $\Delta_{\xi,\eta}=0$ (инвариантность уравнения Лапласа по отношению к преобразованию (2.2)). Граничные условия плоской задачи можно получить из (3.9), положив $\zeta=0$, $\overline{u}_{kz}=0$, $\cos\widehat{n\zeta}=0$, что даст:

$$\left\{\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\right\}_{(\sigma_k)} = \frac{R_k^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\{[\overline{u}_{kx}(\eta^2-\xi^2) - 2\overline{u}_{ky}\xi\eta]\cos\widehat{n\xi} + $$

$$+ [\overline{u}_{ky}(\xi^2-\eta^2) - 2\overline{u}_{kx}\xi\eta]\cos\widehat{ny}\}_{(\sigma_k)} \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{3.12}$$

Докажем, что если существует решение задачи Неймана для области (D), то будет существовать решение задачи Неймана с граничным условием (3.12) для области (G). С этой целью докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \oint_{(\sigma_k)} \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Как известно, необходимым условием существования решения задачи Неймана является выполнение равенства:

$$J=\sum_{k=1}^{n}\oint_{(s_k)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds=0.$$

Заметим, что

$$J=\sum_{k=1}^{n}\oint_{(s_k)}\frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F_k}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F_k}{\partial y}\right]ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_k}{\partial y}\right)^2}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(\sigma k)}\frac{\xi^2+\eta^2}{R_k^2}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\frac{d\sigma}{|f'(z)|} \qquad (*)$$

где $|f'(z)|=\frac{d\sigma}{ds}$ —модуль производной функции комплексного переменного

$$\xi+i\eta=f(z)=R_k^2\frac{x+iy}{x^2+y^2} \text{ по } z=x+iy.$$

Вычисление показывает, что в переменных ξ, η модуль этой производной равен

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{R_k^2}\left[\text{ибо}\quad f'(z)=R_k^2\frac{y^2-x^2-2ixy}{(x^2+y^2)^2}\right].$$

Подставив $\frac{1}{|f'(z)|}=\frac{R_k^2}{\xi^2+\eta^2}$ в $(*)$, J приведем к виду

$$J=\sum_{k=1}^{n}\oint_{(\sigma k)}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}d\sigma$$

и так как $J=0$, то будем иметь $\sum_{k=1}^{n}\oint_{(\sigma k)}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}d\sigma=0$, что и является необходимым условием разрешимости задачи Неймана в (G).

§ 4. Уравнения и граничные условия при совмест обтекании твердых тел жидкостью

Допустим, что рассматривается совместное обтекание n твердых тел безграничным по всем направлениям потоком идеальной несжимаемой жидкости, движущейся со скоростью $\vec{u}_\infty$ в бесконечности. Для определенности примем, что скорость $\vec{U}_\infty$ параллельна оси $0x$. Потенциал скорости жидкости представим как сумму потенциала однородного потока, равного Ux, и потенциала возмущения $\varphi'(x, y, z)$.

Полагая

$$\varphi(x, y, z)=Ux+\varphi'(x, y, z), \qquad (4.1)$$

для потенциала возмущения будем иметь

$$\Delta_{x, y, z} \varphi\,(x,\ y,\ z)=0,\ \left\{\frac{\partial\varphi'(x,\ y,\ z)}{\partial n}\right\}_{(s_k)}=u\cos\widehat{nx}. \tag{4·2}$$

В переменных ξ, η, ζ (4.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}'(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}'(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}'(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\partial\zeta^2}=$$

$$=\frac{2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}'}{\partial\xi}\xi+\frac{\partial\overline{\varphi}'}{\partial\eta}\eta+\frac{\partial\overline{\varphi}'}{\partial\zeta}\zeta\right) \tag{4.3}$$

(в области (G)),

$$\left\{\frac{\partial\overline{\varphi}'}{\partial n}\right\}_{(\sigma k)}=\frac{R_k^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\{-U(\eta^2+\zeta^2-\xi^2)\cos\widehat{n\xi}+$$

$$+2\overline{U}\,\xi\eta\cos\widehat{n\eta}+2U\,\xi\zeta\cos\widehat{n\zeta}\}_{(\sigma k)}\quad (k=1,\ 2,\cdots,n) \tag{4.4}$$

Прп обтекании бесконечно длинных цилиндрических тел плоскопараллельным устанавившимся потоком жидкости будем иметь:

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}'}{\partial\eta^2}=0\ \text{ в } (G), \tag{4.5}$$

$$\left\{\frac{\partial\overline{\varphi}'}{\partial n}\right\}_{(\sigma k)}=\frac{R_k^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\{-U(\eta^2-\xi^2)\cos\widehat{n\xi}+2u\xi\,\eta\,\cos\widehat{n\eta}\}_{(\sigma k)} \tag{4.6}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots,n)$$

§ 5. Применение вариационных методов к решению задач, поставленных в § 3 и § 4

В § 3 и § 4 путем замены переменных внешние граничные задачи гидродинамики идеальной жидкости приведены к внутренним. Конечная область (G), в которой ищется потенциал скорости жидкости, расположена внутри (σ_k) и вне (σ_1), (σ_2), $\cdots$, (σ_{k-1}), (σ_{k+1}), $\cdots$, (σ_n) поверхностей. Для такой конечной области решение граничной задачи можно свести к нахождению минимума некоторого интеграла. При этом данное дифференциальное уравнение должно служить уравнением Эйлера-Лагранжа. Как известно, для решения задач вариационного исчисления наряду с уравнением Эйлера-Лагранжа применяются еще т. н. прямые методы, которые, в силу наложенных обстоятельств, могут послужить при решении граничных задач некоторых дифференциальных уравнений. Такими прямыми методами, более распространенными, являются методы Ритца и Галеркина. Мы не будем здесь излагать идею методов Ритца и Галеркина, поскольку ей посвящена обширная литература. Мы коснемся некоторых вопросов, связанных с применением этих методов к граничным задачам, изложенным нами в § 3 и § 4.

Как известно, задача определения гармонической функции, нормальная к контуру области, производная которой равняется наперед заданной функции точек контура (задача Неймана) сводится к вопросу о минимуме интеграла

$$J=\iint\limits_{(G)}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right]d\xi d\eta-\sum_{k=1}^{n}\oint\limits_{(\sigma k)}2\varphi(\sigma)\,\psi(\sigma)\,d\sigma \tag{5.1}$$

при свободных граничных условиях, где положено:

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}_{(\sigma k)}=\psi(\sigma).$$

Для применения метода Ритца или Галеркина нужно иметь систему функции $F_k(\xi,\ \eta)$, удовлетворяющую условию полноты. Последнее свойство сводится к возможности апроксимирования любой функции с непрерывными частными производными до второго порядка. Разыскивая n-ое приближение в виде

$$\varphi_n(\xi,\ \eta)=\sum_{k=1}^{n}a_kF_k(\xi,\ \eta), \tag{5.2}$$

подставляя (5.2) в (5.1) и приравнивая производные по a_j нулю, для определения a_j получим следующую систему уравнений

$$\iint\limits_{(G)}\left\{\frac{\partial^2\overline{\varphi}_N}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}_N}{\partial\eta^2}\right\}F_j\,d\xi d\eta-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{(\sigma k)}\left\{\frac{\partial\overline{\varphi}_N}{\partial n}-\psi(\sigma)\right\}d\sigma=0 \tag{5.3}$$

$$(j=1,\ 2,\dots,n)$$

где ψ—правая часть (3.9).

Если уравнения поверхностей (контуров) (σ_k) можно записать соответственно в виде

$$H_1(\xi_1,\ \eta,\ \zeta)=0,\quad H_2(\xi,\ \eta,\zeta)=0,\dots,H_n(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0$$

для пространственной задачи, или в виде

$$H_1(\xi,\ \eta)=0,\quad H_2(\xi,\ \eta)=0,\dots,H_n(\xi,\ \eta)=0$$

то, как известно, в качестве полной системы функции в (G) можно положить:

$$\begin{gathered}F_0=\pm H_1H_2\cdots H_n,\ F_1=\pm H_1H_2\cdots H_n\xi,\ F_2=\pm H_1H_2\cdots H_n\eta,\\ F_3=\pm H_1H_2\cdots{}_nH\xi^2,\ F_4=\pm H_1H_2\cdots H_n\eta^2,F_5=\pm H_1H_2\cdots H_n\zeta^2,\dots,\end{gathered} \tag{5.4}$$

Для трехмерного пространства будем иметь аналогичные формулы. Рассмотрим вкратце граничную задачу для потенциала $\overline{\varphi}(\xi,\eta,\zeta,t)$, сформулированную в § 3. Уравнение для $\overline{\varphi}$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\zeta^2}=\frac{2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\xi+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\eta+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\zeta\right),$$

что можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta_2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\right)=0 \quad (5.5)$$

Легко усмотреть, что уравнение (5.5) и граничная задача (3.9) эквивалентны задаче о минимуме интеграла:

$$J=\iiint\limits_{(G)}\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left[\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\right)^2\right]d\xi d\eta d\zeta-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{(\sigma k)}\frac{2\overline{F}_k(\sigma)\,\overline{\varphi}(\sigma)d\sigma}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \quad (5.6)$$

при свободных граничных условиях. Здесь $F_k(\sigma)$ представляют собой правую часть уравнения (3.10).

Действительно, пусть $\overline{\varphi}$—решение вариационной задачи (5.6), тогда

$$\delta J=\left[\frac{d}{d\alpha}\,J\,\overline{\varphi}+\alpha\omega\,(\xi\eta,\,\zeta)\right]_{\alpha=0}=$$

$$=\left\{2\iiint\limits_{(G)}\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\right]d\xi d\eta d\zeta-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{(\sigma k)}2\overline{F}_k(\sigma)\,\frac{\overline{\omega}(\sigma)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}d\sigma\right\}=0 \quad (5.7)$$

где $\omega\in C^2(G)$—произвольная функция. Применяя формулу Грина, получим:

$$\delta J=2\left\{\iiint\limits_{(G)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\,\omega\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\,\omega\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\,\omega\right)\Bigg]d\xi d\eta\,d\zeta-\iiint\limits_{(G)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\right)\Bigg]\omega\,d\xi d\eta d\zeta-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{(\sigma k)}\overline{F}_k(\sigma)\frac{\omega\,(\sigma)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}d\sigma=-2\iiint\limits_{(G)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)+\right. \quad (5.8)$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\Bigg)\Bigg\}d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+2\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{(\sigma k)}\left\{\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}-F_k(\sigma)\right\}\frac{\omega\,(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}d\sigma=0$$

Полагая $\omega(\xi, \eta) \in C^2(G)$, т. е. произвольной функцией, с непрерывными производными до второго порядка в (G), получим:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\right)=0$$

$$\left\{\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\right\}_{(\sigma_k)}=\{\overline{F}_k(\xi, \eta, \zeta)\}_{(\sigma_k)} \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Покажем достаточность условия, т. е. покажем, что если $\overline{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)$ представляет решение уравнения (5.5) с соответствующим граничным условием, тогда она дасг интегралу минимальное значение в классе функции $C^2(G)$. Для доказательства рассмотрим произвольную функцию $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ из класса $C^2(G)$.

Полагая $\psi=\overline{\varphi}+\omega$ и рассматривая разность $\Delta J(\overline{\varphi})=J(\varphi)-J(\overline{\varphi})$, получим:

$$\Delta J(\overline{\varphi})=J(\psi)-J(\overline{\varphi})=\iiint\limits_{(G)}\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left[\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}+\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}+\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\xi d\eta d\zeta-$$

$$-\iiint\limits_{(G)}\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left[\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\xi d\eta d\zeta-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{\sigma_k}2\frac{\overline{F}_k}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}[\overline{\varphi}(\sigma)+w(\sigma)]\,d\sigma_k+\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{(\sigma_k)}\frac{2\overline{F}_k}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\overline{\varphi}\,d\sigma=$$

$$=2\iiint\limits_{(G)}\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\zeta}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\right)d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\iiint\limits_{(G)}\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\xi d\eta d\zeta-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{(\sigma_k)}\frac{\overline{F}_k(\sigma)\omega(\sigma)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}d\sigma \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{5.9}$$

Применяя к первому слагаемому правой части (5.9) формулу Грина и полагая что $\overline{\varphi}$ представляет решение уравнения (5.7) с граничным условием, будем иметь

$$\Delta J=\iiint\limits_{(G)}\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\right)^2\right\}d\xi d\eta d\zeta>0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Приближенно определяя $\overline{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)$ в конечной области (G), достаточно осуществить обратный переход от переменных ξ, η, ζ к переменным x, y, z, чтобы получить приближенное решение граничной задачи в бесконечной области (D).

Кафедра теоретической
механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа. М., 1962.
2. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, М., 1948,
3. Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, М., 1965.

ნ. პატარაია

ვარიაციული მეთოდების განზოგადება უსასრულო არეებისათვის და მათი გამოყენება სითხეში მყარი სხეულების ერთობლივი მოძრაობის ამოცანებში

რეზიუმე

როგორც ცნობილია, რიტცის და გალიორკინის ვარიაციული მეთოდები გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას სასრული არეების შემთხვევაში. უსასრულო არეების შემთხვევაში სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის დროს ისინი ვერ პოულობენ გამოყენებას ასეთ არეებში ფუნქციათა სრული სისტემის აგებასთან დაკავშირებული მათემატიკური სირთულეების გამო. იმ ჰიდროდინამიკური ამოცანების ამოხსნისას, რომლებიც დაკავშირებულია მყარი სხეულების მოძრაობასთან სითხეში, ან მათი სითხით გარსდენასთან, გვიხდება სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა გარე არეებისათვის, რომლებიც შეიცავენ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებს.

ამ შრომაში ცვლადთა სათანადო გარდაქმნით გარე სასაზღვრო ამოცანა დაიყვანება შიგა ამოცანებზე, რაც საშუალებას იძლევა მათი ამოხსნისას ვარიაციული მეთოდების გამოყენებისა. უკუ გადასვლა გარდაქმნილი ცვლადებიდან ძველზე მოგვცემს ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას უსასრულო არეში.

N. PATARAIA

GENERALIZATION OF VARIATION METHODS FOR INFINITE AREAS AND THEIR APPLICATION TO PROBLEMS OF JOINT MOVEMENT OF SOLIDS IN LIQUID

Summary

As is known, variation methods of Ritz and Galyorkin are applied in solving the boundary problems of mathematical physics in cases of

limited areas. In cases of boundless areas, when solving boundary problems, it would be impossible to apply them due to mathematical difficulties of arranging a complete system of function in such areas. When solving hydrodynamic problems dealing with the movement of solids in liquid or their ambience, we have to solve boundary problems for external areas which include infinitely remote points.

In the present paper, the external boundary problem is turned into an internal one by an appropriate change of variables, thus enabling us to apply variation methods in solving them. Reversing from the changed variables to the old ones will give solution to the principal boundary problem in boundless areas.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ ОДНОРОДНЫХ И СОСТАВНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ

Л. Г. ШАВЛИАШВИЛИ

Задача об изгибе поперечной силой анизотропного цилиндра, обладающего в каждой точке одной плоскостью упругой симметрии, когда начало системы координат $0xyz$ и точка приложения силы совпадают с центром инерции основания цилиндра, а оси $0x$ и $0y$ являются главными осями инерции этого основания для однородного тела изучена С. Г. Лехницким [1], а для составного тела—К. Борш [2].

В данной статье решена общая задача об изгибе поперечной силой, приложенной в произвольной точке основания однородного или составного анизотропных цилиндров, когда начало и оси $0x$ и $0y$ системы координат расположены произвольно в плоскости основания.

Рассмотрим цилиндрическое тело длины l. Начало и оси $0x$ и $0y$ прямоугольной системы декартовых координат $0xyz$ расположены произвольно в плоскости одного из оснований цилиндра, названного условно „левым", а ось $0z$ направлена параллельно его образующим.

Предполагается, что тело ограничено плоскостями $z=0$ и $z=l$ $(l>0)$ и цилиндрической поверхностью

$$\Phi(x, y)=0. \tag{1.1}$$

Рассматривается анизотропный цилиндр, обладающий в каждой точке одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси $0z$.

Тогда закон Гука будет иметь следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11}X_x+\sigma_{12}Y_y+\sigma_{13}X_y-\sigma_1 Z_z),\\
e_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{12}X_x+\sigma_{22}Y_y+\sigma_{23}X_y-\sigma_2 Z_z),\\
e_{xy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{13}X_x+\sigma_{23}Y_y+\sigma_{33}X_y-\sigma_3 Z_z),\\
e_{yt} &= \frac{1}{N_*}(MY_z-NX_z), \quad e_{xz}=\frac{1}{N_*}(LX_z-NY_z),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где E, σ_j и σ_{jk} связаны между собой известными соотношениями [1], а коэффициент N_* определен равенством $N_*=LM-N^2>0$.

Предполагается, что деформации малы. т. е. имеют место соотношения

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{1.3}$$

$$e_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

где u, v, w—компоненты смещения.

Рассмотрим задачу о деформации анизотропного цилиндра, когда усилия, приложенные к его „правому“ основанию, статически эквивалентны поперечной силе $\vec{W}(W_x, W_y, 0)$, приложенной в произвольной точке (x_0, y_0, l) этого основания.

Компоненты напряжения $X_x, Y_y, \cdots X_z$ и деформации $e_{xx}, e_{yy}, \cdots, e_{xz}$ должны удовлетворять во всей области, занятой телом, следующим уравнениям равновесия и условиям совместимости Сен-Венана:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\cdots,\cdots, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\,\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y},\cdots,\cdots, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\cdots,\cdots.$$

Так, как боковая поверхность (1.1) свободна от внешних усилий, то в ее точках должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &X_x\cos(n, x)+X_y\cos(n, y)=0,\\ &X_y\cos(n, x)+Y_y\cos(n, y)=0.\\ &X_z\cos(n, x)+Y_z\cos(n, y)=0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где n—нормаль к поверхности (1.1).

Для того, чтобы компоненты напряжения на торце $z=l$ были статически эквивалентны поперечной силе с составляющими W_x и W_y, приложенными в произвольной точке (x_0, y_0) этого торца в любом поперечном сечении бруса, на расстоянии z от начала координат, должны быть выполнены следующие условия

$$\iint\limits_S X_z ds=W_x,\quad \iint\limits_S Y_z ds=W_y,\ \iint\limits_S Z_z ds=0,\quad \iint\limits_S (yZ_z-zZ_y)ds=-lW_y,$$

$$\iint\limits_S (zZ_x-xZ_z)ds=lW_x,\quad \iint\limits_S (xZ_y-yZ_x)ds=x_0W_y-y_0W_x, \tag{1.7}$$

где s—нормальное сечение бруса.

2. В данном параграфе рассматривается задача об изгибе однородного анизотропного цилиндрического тела.

Аналогично, как и в изотропном теле [3], нормальное напряжение к площадкам, перпендикулярным оси $0z$, будет определено равенством

$$Z_z^0=(z-l)\left[a_1E(x-a_3)+a_2E(y-a_4)\right], \tag{2.1}$$

где

$$a_3=J_{13}J_{33}^{-1},\quad a_4=J_{23}J_{33}^{-1} \tag{2.2}$$

через $J_{\alpha\beta}$ обозначены величины

$$J_{\alpha\beta}=\iint\limits_S Ex^{(\alpha)}x^{(\beta)}ds\quad (\alpha,\ \beta,=1,\ 2,\ 3) \tag{2.3}$$

а постоянные a_1 и a_2 подлежат определению.

Будем считать, что $X_x^0=X_y^0=Y_y^0=0$.

Принимая во внимание указанные значения компонентов Z_z^0, X_x^0, X_y^0 и X_y^0, легко видеть, что уравнения (1.4) будут удовлетворены, если принять

$$\begin{aligned} X_z^0&=-a_2Exy+\frac{1}{2}E(a_1a_3+a_2a_4)x+\frac{\partial\Omega}{\partial y},\\ Y_z^0&=-a_1Fxy+\frac{1}{2}E(a_1a_3+a_2a_4)y-\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где дважды дифференцируемая функция $\Omega(x,\ y)$ подлежит определению.

Составив компоненты деформации, соответствующие напряжениям и подставив их значения в условия совместимости Сен-Венана (1.5), получим, что функция Ω должна быть решением дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta_2\Omega=2N_*(a_1\sigma_2y-a_2\sigma_1x-\tau)+N_*\sigma_3(a_1x-a_2y)+\\ +E(a_2L_x-a_1M_y)+NE(a_2y-a_1x),\end{aligned} \tag{2.5}$$

где τ—произвольная постоянная, а оператор Δ_2 определен равенством

$$\Delta_2=M\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2N\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+L\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2.6}$$

Найдя частное решение уравнения (2.6) и, аналогично, как и в изотропном случае [3], введя вместо Ω функцию кручения φ и функции изгиба χ_1 и χ_2, получим следующий вид искомых компонентов напряжения:

$$X_x^0=X_y^0=Y_0^0=0,\quad Z_z^0=(z-l)\left[a_1E(x-a_3+a_2E(y-a_4))\right],$$

$$X_z^0=M\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)+N\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)+Ma_1\left[\frac{\partial\chi_1}{\partial x}-y^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(\sigma_1x^2-\sigma_2y^2)\right]+Na_1\left[\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial y}-\sigma_2xy-\frac{1}{2}\sigma_3x^2-2xy\right)+\right.$$

$$+Ma_2\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x}-\sigma_1xy-\frac{1}{2}\sigma_3y^2-2xy\right)+$$

$$+Na_2\left[\frac{\partial\chi_2}{\partial y}-x^2-\frac{1}{2}(\sigma_2y^2-\sigma_3x^2)\right]+(a_1a_3+a_2a_4)\left[M\left(x+\sigma_1x+\frac{1}{2}\sigma_2y\right)+\right.$$

$$\left.+N\left(y+\sigma_2y+\frac{1}{2}\sigma_3x\right)\right], \tag{2.7}$$

$$Y_z^0=L\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)+N\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)+La_1\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial y}-\sigma_2xy-\frac{1}{2}\sigma_3x^2-2xy\right)+$$

$$+Na_1\left[\frac{\partial\chi_1}{\partial x}-y^2-\frac{1}{2}(\sigma_1x^2-\sigma_2y^2)\right]+$$

$$+La_2\left[\frac{\partial\chi_2}{\partial y}-x^2-\frac{1}{2}(\sigma_2y^2-\sigma_1x^2)\right]+$$

$$+Na_2\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x}-\sigma_1xy-\frac{1}{2}\sigma_3y_2-2xy\right)+$$

$$+(a_1a_3+a_2a_4)\left[L\left(y+\sigma_2y+\frac{1}{2}\sigma_3x\right)+N\left(x+\sigma_1x+\frac{1}{2}\sigma_3y\right)\right],$$

где φ, χ_1 и χ_2 в области s должны удовлетворять уравнениям:

$$\Delta_2\varphi=0,\quad \Delta_2\chi_1=-(E-M\sigma_1-L\sigma_2-N\sigma_3-2L)x+$$

$$+a_3[E-M(1+\sigma_1)-L(1+\sigma_2)-N\sigma_3]\equiv\alpha_1^0, \tag{2.8}$$

$$\Delta_2\chi_2=-(E-M\sigma_1-L\sigma_2-N\sigma_3-2M)y+4Nx+$$

$$+a_4[E-M(1+\sigma_1)-L(1+\sigma_2)-N\sigma_3]\equiv\alpha_2^0,$$

Компоненты смещения, соответствующие компонентам напряжения (2.7) можно представить в виде:

$$u=-\tau yz+a_1\left[\frac{1}{2}(l-z)(\sigma_1x^2-\sigma_2y^2)+\frac{1}{2}lz^2-\frac{1}{6}z^3\right]+$$

$$+a_2(l-z)\left(\sigma_1xy+\frac{1}{2}\sigma_3y^2\right)-(a_1a_3+a_2a_4)(l-z)\left(\sigma_1x+\frac{1}{2}\sigma_3y\right),$$

$$v=\tau xz+a_1\left(\sigma_2xy+\frac{1}{2}\sigma_3x^2\right)(l-z)+a_2\left[\frac{1}{2}(l-z)(\sigma_2y^2-\sigma_1x^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}lz^2-\frac{1}{6}z^3\right]-(a_1a_3+a_2a_4)(l-z)\left(\sigma_2y+\frac{1}{2}\sigma_3x\right), \tag{2.9}$$

$$w=\tau\varphi+a_1\left[\chi_1-\left(lz-\frac{1}{2}z^2\right)x-xy^2\right]+$$

$$+a_2\left[\chi_2-\left(lz-\frac{1}{2}z^2\right)y-yx^2\right]+$$

$$+(a_1a_3+a_2a_4)\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\left(lz-\frac{1}{2}z^2\right)\right]$$

Подставив значение компонентов напряжения, данные равенствами (2·7), в граничные условия (1.6) получим, что функции φ, χ_1 и χ_2 должны удовлетворять в точках кривой L-границы области s, следующим условиям

$$\frac{d\varphi}{dn_*}=[M\cos(n,\ x)+N\cos(n,\ y)]y-[N\cos(n,\ x)-L\cos(n,\ y)]x\equiv\beta_0^0$$

$$\frac{d\chi_j}{dn_*}=[M\cos(n,\ x)+N\cos(n,\ y)]P_{j1}+[N\cos(n,\ x)- +L\cos(n,\ y)]P_{j2}\equiv\beta_j^0, \tag{2.10}$$

где

$$\frac{d}{dn_*}\equiv\left(M\frac{\partial}{\partial x}+N\frac{\partial}{\partial y}\right)\cos(n,x)+\left(L\frac{\partial}{\partial x}+N\frac{\partial}{\partial y}\right)\cos(n,\ y),$$

$$P_{11}=\frac{1}{2}(\sigma_1x^2-\sigma_2y^2)+y^2-a_3\left(x+\sigma_1x+\frac{1}{2}\sigma_3y\right),$$

$$P_{12}=(2+\sigma_2)xy+\frac{1}{2}\sigma_3x^2-a_3\left(y+\sigma_2y+\frac{1}{2}\sigma_3x\right), \tag{2.11}$$

$$P_{21}=(2+\sigma_1)xy+\frac{1}{2}\sigma_3y^2-a_4\left(x+\sigma_3x+\frac{1}{2}\sigma_3y\right),$$

$$P_{22}=\frac{1}{2}(\sigma_2y^2-\sigma_1x^2)+x^2-a_4\left(y+\sigma_2y+\frac{1}{2}\sigma_3x\right).$$

Необходимое и достаточное условие существования решения граничных задач для функции χ_j, удовлетворяющих уравнениям (2·8) и (2·10), состоит в следующем [4]

$$\iint_S \alpha_j(y,\ y)ds=\int_L \beta_j(s)ds \quad (j=1,\ 2). \tag{2.12}$$

Учитывая значения (2.2), легко видеть, что эти условия, как и аналогичное условие для функции φ, будут удовлетворены тождественно.

Теперь проверим условия (1.7). Принимая во внимание, что

$$\iint_S X_zds=\int_L x[X_z\cos(n,\ x)+Y_z\cos(n,\ y)]dL+\iint_S x\frac{\partial Z_z}{\partial z}ds, \tag{2.13}$$

на основании равенств (1·8) и (2·8) будем иметь

$$\iint_S X_zds=\iint_S xE[a_1(x-a_3)+a_2(y-a_4)]ds. \tag{2.14}$$

Аналогично получим

$$\iint_S Y_zds=\iint_S yE[a_1(x-a_3)+a_2(y-a_4)]ds. \tag{2.15}$$

Учитывая значения (2.2) и (2.3), первые два уравнения системы (1.7) примут вид:

$$a_1(J_{11}J_{33}-J_{13}^2)+a_2(J_{12}J_{33}-J_{13}J_{23})=J_{33}W_x,$$
$$a_1(J_{12}J_{33}-J_{13}J_{23})+a_2(J_{22}J_{33}-J_{23}^2)=J_{33}W_y. \qquad (2.16)$$

Простые выкладки показывают что определитель этой системы можно привести к определителю третьего порядка, элементами которого будут величины $J_{\alpha\beta}$, данные равенствами (2.2); следовательно, $\Delta>0$, как дискриминант следующей положительно определенной квадратичной формы

$$A(\xi,\ \xi)=\iint\limits_S E(\xi_1x+\xi_1y+\xi_3)^2dxdy.$$

Поэтому из системы (2.16) можно определить коэффициенты a_1 и a_2, что обеспечит выполнение первых двух уравнений системы (1.7).

Учитывая значение Z_z, данное равенством (2.1), и обозначения из (2.3), на основании уравнений (2.16) легко получить, что

$$\iint\limits_S yZ_zds=(z-l)W_y,\quad \iint\limits_S xZ_zds=(z-l)W_x. \qquad (2.17)$$

Поэтому, согласно равенствам (2.15) и значениям коэффициентов a_3 и a_4, данных равенствами (2.2), легко видеть, что третье, четвертое и пятое уравнения системы (1.7), будут удовлетворены тождественно.

Используя равенства (2.7), последнее уравнение системы (1.7) можно представить в виде:

$$\tau D+a_1D_1+a_2D_2=x_0W_y-y_0W_x, \qquad (2.18)$$

где

$$D=\iint\limits_S\left[L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2+M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+2N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]ds,$$

$$D_j^0=\iint\limits_S\left[(Lx-Ny)\left(\frac{\partial\chi_j}{\partial y}-P_{j2}\right)+(Nx-My)\left(\frac{\partial\chi_j}{\partial x}-P_{j1}\right)\right]ds\ (j=1,\ 2),$$

где полиномы P_{jk} определены равенствами (2.11).

Очевидно $D>0$, как положительно определенная квадратичная форма, так как $N^\circ=LM-N^2>0$.

Тогда из (2.18) можно определить постоянное τ, что обеспечит выполнение последнего уравнения системы (1.7).

Таким образом, компоненты напряжения (2.7) удовлетворяют всем уравнениям (1.4)—(1.7) и они являются решением общей задачи изгиба однородного анизотропного цилиндрического тела.

3. Рассмотрим сплошные, параллельные друг другу, анизотропные цилиндрические брусья, окруженные упругой анизотропной средой, заполняющей пространство между брусьями и цилиндрической поверхностью

$$\Phi_{m+1}(x,\ y)=0, \qquad (3.1)$$

образующие которой параллельны образующим брусьев. Предполагается, что упругие брусья склеены с окружающей упругой средой вдоль их цилиндрических поверхностей

$$\Phi_j(x, y)=0 \quad (j=1, 2, \ldots, m). \tag{3.2}$$

Эти поверхности называются поверхностями раздела материалов, а полученное кусочно-однородное тело—составным брусом.

Обозначим через $V_1, V_2, \ldots V_w$ области, занятые упругими брусьями, а через V_0—область, занятую окружающей упругой средой.

Нормальное сечение составного бруса будет представлять собой кусочно-однородную плоскую область S, состоящую из областей $S_1, S_2, \cdots, S_m$, соответствующих брусьям, и области S_0, соответствующей окружающей упругой среде.

Обозначим границы областей $S_1, S_2, \cdots, S_m$ соответственно через $L_1, L_2, \cdots, L_m$, которые являются не касающимися и не пересекающимися друг с другом замкнутыми контурами.

Тогда границей области S_0 будут кривые $L_1, L_2, \cdots, L_{m+1}$, из которых последняя содержит внутри себя все предыдущие. При этом каждая область $S_j (j=1, 2, \ldots, m)$ будет склеена с областью S_0 вдоль кривой $L_j (j=1, 2, \cdots, m)$.

Пусть начало прямоугольной системы координат $0xyz$ помещено в произвольной точке „левого“ основания составного бруса, оси $0x$ и $0y$, расположенные в плоскости этого основания, направлены произвольно, а ось $0z$—параллельна образующим поверхностей (1.1)—(1.2).

Предполагается, что основаниями составного бруса являются плоские области, полученные сечением цилиндрической поверхности (3.1) плоскостями $z=0$ и $z=l$ $(l>0)$.

Подразумевается, что анизотропные брусья и окружающая анизотропная среда в каждой точке обладают одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси $0z$. Поэтому закон Гука будет дан равенствами (1.2)—(1.3). Упругие постоянные брусьев обозначим через $E^{(j)}, \sigma_k^{(j)}, \ldots, (j=1, 2, \ldots, m)$, а упругие постоянные окружающей среды—через $E^{(0)}, \sigma_k^{(0)}, \ldots,$.

Построение компонентов напряжения, соответствующих общей задаче изгиба составного анизотропного бруса, производится аналогично, как и для изотропного бруса [3].

Предварительно приведем некоторые вспомогательные предложения, которые будут использованы в дальнейшем.

Рассмотрим компоненты напряжения

$$X_x^{(j)},\ Y_y^{(j)},\ X_y^{(j)},\ Z_z^{(j)}=\sigma_1 X_x^{(j)}+\sigma_2 Y_y^{(j)}+\sigma_3 X_y^{(j)},\ X_z^{(j)}=Y_z^{(j)}=0, \tag{3.3}$$

которые являются решением следующих трех вспомогательных задач о плоской деформации анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии, рассмотренных К. Борш [2].

$$[X_x^{(\alpha)}\cos(n,\ x)+X_y^{(\alpha)}\cos(n,\ y)]=0,\quad [X_y^{(\alpha)}\cos(n,\ x)+Y_y^{(\alpha)}\cos(n,\ y)]=0,$$

в точках кривой L_{m+1}

$$\begin{gathered}[X_x^{(\alpha)}\cos(n,\ x)+X_y^{(\alpha)}\cos(n,\ y)]_j-[\text{ident}]_0=0,\\ [X_y^{(\alpha)}\cos(n,\ x)+Y_y^{(\alpha)}\cos(n,\ y)]_j-[\text{ident}]_0=0,\\ [u^{(\alpha)}]_j-[u^{(\alpha)}]_0=g_{(\alpha)},\quad [(v^{(\alpha)}]_j-[v^{(\alpha)}]_0=h_{(\alpha)}\end{gathered}\tag{3.4}$$

в точках кривой L_j $(j=1,\ 2,\dots,m)$, где

$$g_1=\frac{1}{2}[(\sigma_1^{(j)}-\sigma_1^{(0)})\,x^2-(\sigma_2^{(j)}-\sigma_2^{(0)})y^2],\quad g_2=(\sigma_1^{(j)}-\sigma_1^{(0)})xy+\frac{1}{2}(\sigma_3^{(j)}-\sigma_3^{(0)})y^2,$$

$$g_3=(\sigma_1^{(j)}-\sigma_1^{(0)})x+\frac{1}{2}(\sigma_3^{(j)}-\sigma_3^{(0)})y,\quad h_1=(\sigma_2^{(i)}-\sigma_2^{(0)})xy+\frac{1}{2}(\sigma_3^{(j)}-\sigma_3^{(6)})x^2,$$

$$h_2=\frac{1}{2}[(\sigma_2^{(j)}-\sigma_2^{(0)})y^2-(\sigma_1^{(j)}-\sigma_1^{(0)})\,x^2],$$

$$h_3=(\sigma_2^{(j)}-\sigma_2^{(0)})y+\frac{1}{2}(\sigma_3^{(j)}-\sigma_3^{(0)})x,\tag{3.5}$$

где $\sigma_k^{(j)}$—значения коэффициентов σ_k в областях S_j $(j=0,\ 1,\dots,m)$, а $u^{(\alpha)}$ и $v^{(\alpha)}$ являются смещениями, соответствующими компонентам напряжения $X_x^{(\alpha)}Y_y^{(\alpha)}$ и $X_y^{(\alpha)}$.

Символы $[\ \ ]_j$ и $[\ \ ]_0$ обозначают предельные значения в точках поверхностей (2.2) выражений, заключенных в квадратные скобки, взятых соответственно из областей $S_j\,(j=1,\ 2,\dots,m)$ и S_0.

Доказательство существования решения плоских задач для составного анизотропного тела дано М. К. Башелейшвили [5].

Аналогично, как и для изотропного тела [6], вводятся обозначения [2]

$$K_{\alpha\beta}=\iint\limits_S x^{(\alpha)}Z_z^{(\beta)}ds\qquad(\alpha,\beta=1,\ 2,\ 3),\tag{3.6}$$

где $x^{(1)}=x$, $x^{(2)}=y$, $x^{(3)}=1$, а $Z_z^{(\beta)}=\sigma_1X_k^{(\beta)}+\sigma_2Y_y^{(\beta)}+\sigma_3X_y^{(\beta)}$ $(\beta=1,\ 2,\ 3)$— решение трех вспомогательных задач. Здесь и в дальнейшем под S будет подразумеваться сумма $S=\sum\limits_{j=0}^{m}S_j$.

Аналогично, как и для изотропного тела [6], [7], доказывается, что [2]:

$$K_{\alpha\beta}=K_{\beta\alpha},\quad J_{jj}+K_{jj}>9\quad(\alpha,\ \beta,\ j=1,\ 2,\ 3),\tag{4.7}$$

где $J_{\alpha\beta}$ имеют вид (2.3).

Когда начало и оси $0x$ и $0y$ системы координат совпадают с приведенным центром инерции и с приведенными главными осями инерции основания цилиндра, тогда [2]

$$J_{\alpha\beta}+K_{\alpha\beta}=0\quad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3;\ \alpha\neq\beta).\tag{3.8}$$

В случае произвольно расположенных осей $0x$ и $0y$ в плоскости основания задача о растяжении и изгибе парами сил составного анизотропного бруса изучена К. Борш [2].

Изучим задачу о деформации составного анизотропного бруса, когда усилия, действующие на его „правое“ основание, статически эквивалентны поперечной силе $\vec{W}(W_x, W_y, 0)$, приложенной в произвольной точке (x_0, y_0, l) этого основания.

При этом, как указывалось выше, начало и оси $0x$ и $0y$ прямоугольной системы координат $0xyz$ расположены произвольно в плоскости „левого“ основания составного бруса. Искомые компоненты напряжения $X_x, X_y, \cdots, X_z$ должны удовлетворять в каждой из областей V_j $(j=0, 1, \ldots, m)$ уравнениям равновесия (1.6) и условиям совместимости Сан-Венана (1.7), в точках внешней боковой поверхности (3.1)—граничным условиям (1.8), а для любой части бруса, заключенной между сечением $z(z<l)$ и основанием $z=l$—условиям (1.9).

Для составного бруса, кроме перечисленных условий. в точках поверхности раздела материалов (3.2) должны еще выполняться граничные условия, обеспечивающие непрерывность векторов напряжения и смещения при переходе через поверхности раздела материалов.

Поэтому искомые компоненты должны еще удовлетворять в точках поверхности (3.2) условиям

$$
\begin{aligned}
&[X_x \cos(n, x) + \mathrm{X}_y \cos(n, y)]_j - [\mathrm{ideut}]_0 = 0,\\
&[X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y)]_j - [\mathrm{ident}]_0 = 0,\\
&[X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, z)]_j - [\mathrm{ident}]_0 = 0,\\
&[u]_j - [u]_0 = 0, \quad [v]_j - [v]_0 = 0, \quad [w]_j - [w]_0 = 0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

о символах $[\ \ ]_j$ и $[\ \ ]_0$ было сказано выше.

Для нахождения компонентов напряжения $X_x \cdots, X_z$ можно использовать способ, предложенный для составного изотропного бруса в работе [3], сущность которого состоит в следующем: составляется сумма решений задач об изгибе составного анизотропного тела парами, расположенными в плоскостях $0xz$ и $0yz$, и задач растяжения двумя различными силами, когда начало и оси $0x_1$ и $0x_2$ совпадают с приведенными центром инерции и главными осями основания цилиндра [2].

Интегрированием этой суммы по переменной z получаются значения компонентов X_x, Y_y, X_y и Z_z. Подставляя эти величины в уравнения (1.6)—(1.7), для определения компонентов X_z и Y_z получаем определенные уравнения, которые можно решить эффективно.

Но в данном случае удобнее использовать способ, предложенный Н. И. Мусхелишвили [6] для изотропного тела, в котором компоненты смещения для составного тела строятся из такого расчета, чтобы они оставались непрерывными при переходе через поверхности раздела материалов и, как частный случай, из них получаются смещения для однородного тела.

Поэтому, ввиду того, что упругие постоянные составляющих материалов различны, искомые компоненты смещения u, v и w должны представлять собой сумму смещений однородного тела u°, v° и w°, данных равенствами (2.10), и определенных выражений (дополнительных смещений), устраняющих скачок (в выражениях u°, v° и w°) при переходе через поверхности раздела материалов (3.2).

Легко видеть, что аналогично, как и для изотропного тела [3], искомые компоненты u, v и w можно представить в виде суммы

$$
\begin{aligned}
&u=u^\circ+(z-l)\,[a_1u^{(1)}+a_2u^{(2)}-(a_1a_3+a_2a_4)u^{(3)}],\\
&v=v^\circ+(z-s)\,[a_1v^{(1)}+a_2v^{(2)}-(a_1a_3+a_2a_4)v^{(3)}],\\
&w=w^\circ
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

где $u^{(\alpha)}$ и $v^{(\alpha)}$—решения трех вспомогательных задач, удовлетворяющих граничным условиям (3.4), u°, v° и w° имеют вид (2.10).

Компоненты напряжения, соответствующие смещениям (3.10), можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
&X_x=(z-l)\,[a_1X_x^{(1)}+a_2X_x^{(2)}-(a_1a_3+a_2a_4)\,X_x^{(3)}],\\
&Y_y=(z-l)\,[a_1Y_y^{(1)}+a_2Y_y^{(2)}-(a_1a_3+a_2a_4)Y_y^{(3)}],\\
&X_y=(z-l)\,[a_1X_y^{(1)}+a_2X_y^{(2)}-(a_1a_3+a_2a_4)X_y^{(3)}],\\
&Z_z=Z_z^0+(z-l)\,[a_1Z_z^{(1)}+a_2Z_z^{(2)}-(a_1a_3+a_2a_4)Z_z^{(3)}],\\
&X_z=X_z^0+a_1\,(Mu^{(1)}+Nv^{(1)})+a_2\,(Mu^{(2)}+Nv^{(2)})-\\
&\qquad-(a_1a_3+a_2a_4)\,(Mu^{(3)}+Nv^{(3)}),\\
&Y_z=Y_z^0+a_1\,(Lv^{(1)}+Nu^{(1)})+a_2\,(Lv^{(2)}+Nu^{(2)})-(a_1a_3+a_2a_4)\,(Lv^{(3)}+Nu^{(3)}),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

где X_j^0, Y_j^0, Z_j^0 имеют вид (2.7).

Отметим, что коэффициенты a_j и функции φ, χ_1 и χ_2, входящие в выражения (2.7), (2.9), (3.10) и (3.11), подлежат определению.

Подставив выражения (3.10) и (3.11) в уравнения (1.6) и (1.7) и граничные условия (1.8) и (3.9), получим, что функции φ, χ_1 и χ_2 должны быть решениями следующих граничных задач:

$$
\Delta_2\varphi=0,\quad \Delta_2\chi_k=\alpha_k\,(x,\ y)\quad (k=1,\ 2),
\tag{3.12}
$$

в каждой из областей S_j $(j=0,\ 1,\cdots,m)$,

$$
\frac{d\varphi}{dn_*}=\beta_0^0,\qquad \frac{d\chi_k}{dn_*}=\beta_k\quad (k=1,\ 2),
\tag{3.13}
$$

в точках кривой L_{m+1},

$$
\left[\frac{d\varphi}{dn_*}\right]_j-\left[\frac{d\varphi}{dn_*}\right]_0=[\beta_0^0]_0-(\beta_0^0]_j;
\tag{3.14}
$$

$$\left[\frac{d\chi_k}{dn_*}\right]_j - \left[\frac{d\chi_k}{dn_*}\right]_0 = [\beta_k]_0 - [\beta_k]_j,$$

$$[\varphi]_j - [\varphi]_0 = 0; \ [\chi_k]_j - [\chi_k]_0 = 0.$$

где

$$\alpha_k = \alpha_k^0 - (M+G)\frac{\partial}{\partial x}(u^{(k)} - a_{2+k}u^{(3)}) - (L+F)\frac{\partial}{\partial y}(v^{(k)} - a_{2+k}v^{(3)}) -$$

$$-(N+T)\left[\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}\right) - a_{2+k}\left(\frac{\partial u^{(3)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x}\right)\right], \tag{3.15}$$

$$\beta_k = \beta_k^0 - [M(u^{(k)} - a_{2+k}u^{(3)}) + N(v^{(k)} - a_{2+k}v^{(3)})]\cos(n, x) -$$

$$-[L(v^{(k)} - a_{2+k}v^{(3)}) + N(u^{(k)} - a_{2+k}x^{(3)})]\cos(n, y);$$

β_0^0, β_k^0 и α_k^0 —операторы Δ_2 и $\dfrac{d}{dn_*}$ определены равенствами (2.6) и (2.8), (2.10) и (2.11).

Для существования решения граничных задач для функций изгиба χ_1 и χ_2, удовлетворяющих уравнениям (3.12), (3.14), должно быть выполнено [2].

$$\iint\limits_S \alpha_k(x, y)\,ds = \int\limits_{L_{m+1}} \beta_k dL + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{L_j} \{[\beta_k]_j - [\beta_k]_0\} dL \ (k=1, 2) \tag{3.16}$$

Учитывая значения (3.15), легко видеть, что для выполнения условия (3.16) постоянные a_3 и a_4 должны быть определены равенствами

$$a_{2+\gamma} = (J_{33} + K_{33})^{-1}(J_{\gamma 3} + K_{\gamma 3}) \ (k=1, 2) \tag{3.17}$$

Очевидно, условие вида (3.16) для функции кручения φ выполняется тождественно.

Теперь проверим выполнение условий (1.7).

Произведя преобразования при помощи аналогичных формул для составных областей, как и в случае изотропии [3], получим

$$\iint\limits_S X_z ds = -(a_1a_3 + a_2a_4)\iint\limits_S (E + Z_z^{(3)})x ds + a_1\iint\limits_S (E + Z_z^{(1)})x ds +$$

$$+ a_2\iint\limits_S (E + Z_z^{(2)})x ds,$$

$$\iint\limits_S Y_z ds = -(a_1a_3 + a_2a_4)\iint\limits_S (E + Z_z^{(3)})y ds +$$

$$+ a_1\iint\limits_S (Ex + Z_z^{(1)})y ds + a_2\iint\limits_S (Ey + Z_z^{(3)})y ds.$$

Учитывая эти равенства, первые два уравнения системы (1.7), согласно обозначениям (2.3) и (3.6), примут точно такой же вид, как и в изотропном случае [3]:

$$
\begin{gathered}
(Y_{33}+K_{33})^{-1}\{a_1[(J_{13}+K_{13})^2+(J_{33}+K_{33})(J_{11}+K_{11})]+\\
+a_2[(J_{23}+K_{23})(J_{13}+K_{13})-(J_{33}+K_{33})(J_{12}+K_{12})]\}=-W_x,\\
(J_{33}+K_{33})^{-1}\{a_1[(J_{13}+K_{13})(J_{23}+K_{23})-(J_{33}+K_{33})(J_{22}+K_{22})]+\\
+a_2[(J_{23}+K_{23})^2-(J_{33}+K_{33})(J_{22}+K_{22})]\}=-W_y.
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

Определитель этой системы сводится к определителю третьего порядка ∇^*, элементами которого будут величины $J_{\alpha\beta}+K_{\alpha\beta}$. Поэтому этот определитель будет дискриминантом следующей положительно определенной квадратичной формы [2], [3]:

$$
A(\xi,\ \xi)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}(J_{\alpha\beta}+K_{\alpha\beta})\xi_\alpha\xi_\beta
$$

и $\nabla^*>0$.

Итак, система (3.18) разрешима относительно постоянных a_1 и a_2, что обеспечивает выполнение первых двух уравнений (1.7).

Принимая во внимание значения коэффициентов a_3 и a_4, легко показать, что третье уравнение системы (1.7) будет удовлетворено тождественно.

Учитывая равенства (3.11), легко получить, что

$$
\begin{gathered}
\iint_S yZ_z ds=(l-z)(J_{33}+K_{33})^{-1}\{a_1[(J_{13}+K_{13})(J_{23}+K_{23})-\\
-(J_{12}+K_{12})(J_{33}+K_{33})]+a_2[(K_{23}+J_{23})^2+(J_{22}+K_{22})(J_{33}+K_{33})]\}.
\end{gathered}
$$

На основании уравнений (3.18) отсюда получим

$$
\iint_S yZ_z\, ds=(z-l)W_y,
$$

что показывает, что четвертое уравнение системы (1.9) будет удовлетворено тождественно.

Аналогичное утверждение имеет место для пятого уравнения, а третье уравнение этой системы приводится к виду:

$$
\tau D+a_1D_1+a_2D_2=x_0W_y-y_0W_x, \tag{3.19}
$$

где $D>0$—жесткость при кручении—определено равенством (2.18), в котором надо подразумевать $S=S_0+S_1+\cdots+S_m$

$$
\begin{gathered}
D_k=D_k^0+\iint_S\{x[L(v^{(k)}-a_{2+k}v^{(3)})+N(u^{(k)}-a_{2+k}u^{(2)})-\\
-y[M(u^{(k)}-a_{2+k}u^{(3)})+N(v^{(k)}-a_{2+k}v^{(3)})]\quad (k=1,\ 2),
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

а D_k^0 определено равенствами (2.18).

Из (3.19) определится коэффициент τ, что обеспечит выполнение шестого уравнения системы (1.9).

Таким образом, компоненты напряжения и смещения, определенные равенствами (3.10) и (3.11), удовлетворяют уравнениям (1.4)—(1.7) и (3.9), а поэтому являются решением общей задачи изгиба поперечной силой составного анизотропного бруса.

Кафедра теоретической
механики ГПИ им. В. И. Ленина

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела. М.-Л., 1950.
2. C. J. Borš, Teoria elasticitătii corpulirol anizotrope, Bucuresti, 1970.
3. Л. Г. Шавлиашвили, Тр. Инст. прикл. математики Тбилисск. гос. университета, т. 4, 1975.
4. К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
5. М. О. Башалейшвили, Тр. ГПИ, т. II. 1965.
6. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.
7. А. К. Рухадзе. Тр. ГПИ, т. 19, 1949.

ლ. შავლიაშვილი

ზოგადი ამოცანა ერთგვაროვანი და შედგენილი ანიზოტროპული ცილინდრული ძელების განივი ძალით ღუნვის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია სენ-ვენანის ამოცანა ერთგვაროვანი და სხვადასხვა მასალისაგან შედგენილი ანიზოტროპული ცილინდრული სხეულისათვის, როდესაც მის ფუძეზე მოქმედ ძალთა სისტემა სტატიკურად ეკვივალენტურია მღუნავი ძალისა.

ადრე ცნობილი შედეგებისაგან განსხვავებით, ნაშრომში ძალის მოდების წერტილი, ფუძის სიბრტყეში განლაგებული საკოორდინატო სისტემის სათავე და $0x$ და $0y$ ღერძების მდებარეობა შეზღუდული არ არის ($0z$ ღერძი ცილინდრის მსახველების პარალელურია).

განსახილავი სამგანზომილებიანი ამოცანა დაყვანილია ორგანზომილებიან სასაზღვრო ამოცანაზე ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის.

დადგენილია აღნიშნული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის არსებობის პირობების შესრულება.

L. SHAVLIASHVILI

A GENERAL PROBLEM OF BENDING DUE TO SHEARING FORCE FOR HOMOGENEOUS AND COMPOSITE ANISOTROPIC BEAMS

Summary

The problem indicated in the title is considered for the case when the point of application of the shearing force, the origin of the system $0x_1x_2x_3$ and the axes $0x_i$ and $0x_2$ are situated arbitrarily on one of the planes of the base of the cylindrical beam.

The problem under consideration is reduced to a plane boundary problem for elliptical-type differencial equations.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ПЛАСТИНКА, ПОДКРЕПЛЕННАЯ РАЗОМКНУТЫМИ РЕБРАМИ

И. А. ЗОНЕНАШВИЛИ

Пусть упругое тело S занимает бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием и пусть $L_1=a_1b_1$, $L_2=a_2b_2$—симметричные дуги контура L, ограничивающего упругое тело S, обозначенные так, что проходя L в положительном направлении точки a_1, b_1, a_2, b_2 встречаются в указанной последовательности. Пусть $L'=L_1+L_2$, а L''—остальная часть контура L. Предположим, что по L' пластинка усилена тонким упругим ребром из другого материала, обладающего переменной жесткостью на растяжение $G_1=2\mu hR\delta_1(\theta)$ и изгиб в своей плоскости $G_2=2\mu hR^3\delta_2(\theta)$, а на L'' заданы внешние напряжения.

Без ограничения общности можем считать, что L'' свободна от внешних напряжений.

Решение задачи строится таким образом, что предполагается известным решение смешанной задачи для рассматриваемой области, когда на L' заданы (пока неизвестные) составляющие вектора смещения $g(t)$, а на L''—внешние напряжения. Другими словами, для смешанной задачи считается известным алгоритм, по которому можно вычислить комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ и определить напряжения, обладающие соответствующими особенностями на концах дуг L_j через функции $g(t)$.

Отобразим область S на круг $|\zeta|<1$ в плоскости ζ.

Отображающая функция имеет вид:

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta\right). \tag{1}$$

Окружность этого круга мы обозначим через γ и в качестве положительного направления на ней выберем направление, обратное движению часовой стрелки. Обозначим через α_k и β_k $(k=1,\ 2)$ точки окружности γ, соответствующие точкам a_k, b_k контура L, через γ'—часть окружности, соответствующую L', а через γ''—остальную её часть.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{gathered}\delta_1(\theta_j)\,U(\theta_j)-F_2(\theta_j)-\frac{1}{\rho(\theta_j)}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_j}|\omega'(\sigma)|\,F_1(\theta)d\theta=q_1(\theta_j),\\ \left[\delta_1(\theta_j)+\frac{\delta_2(\theta_j)R^2}{\rho^2(\theta_j)}\right]U(\theta_j)-F_2(\theta_j)-\frac{\delta_2(\theta_j)R^2}{|\omega'(\sigma_j)|\,\rho(\theta_j)}V'(\theta_j)=f_1(\theta_j),\\ (j=0,\ 1,\ 2,\cdots,N)\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$g(\sigma)=\frac{R}{2\mu}\int_1^{\sigma}(U+iV)\,\omega'(\sigma)d\sigma, \tag{3}$$

$$iF_1-F_2=\frac{\overline{\omega'(\sigma)\sigma^{-1}}}{|\omega'(\sigma)|}\left[(1+\varkappa)\,\varphi(\sigma)-2\mu g(\sigma)\right]; \tag{4}$$

$\rho(\theta)$—радиус кривизны, $q_1(\theta)$ и $f_1(\theta)$—известные функции внешней нагрузки. Функции $U(\theta)$ и $V(\theta)$ будем искать в следующем виде:

$$U(\theta)=2\sum_{k=0}^{N}a_{2k}\cos 2k\theta,\qquad V(\theta)=\sum_{k=1}^{N}b_{2k}\sin 2k\theta. \tag{6}$$

В силу равенства (3), функция $g(\sigma)$ примет вид:

$$g(\sigma)=\frac{R}{2\mu}\sum_{k=0}^{N}\Bigg[(a_{2k}+b_{2k})\left(\frac{m\sigma^{2k+1}}{2k+1}-\frac{\sigma^{2k-1}}{2k-1}\right)-$$
$$-(a_{2k}-b_{2k})\left(\frac{m\sigma^{-(2k-1)}}{2k-1}-\frac{\sigma^{-(2k+1)}}{2k+1}\right)\Bigg]. \tag{7}$$

Граничное условие основной смешанной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}&\varkappa\varphi(\sigma)-\omega(\sigma)\overline{\Phi(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}=2\mu g(\sigma)\quad \text{на } \gamma',\\ &\varphi(\sigma)+\omega(\sigma)\overline{\Phi(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=C(\sigma)\quad \text{на } \gamma'',\end{aligned} \tag{8}$$

где $C(\sigma)=C_j$ на $\gamma_j\,(j=1,\,2)$—неизвестные постоянные, одну из которых можно выбрать произвольно. Легко видеть, что, в силу симметрии, можем взять $C_1=C_2=0$,

Граничное условие (3) легко преобразуется в следующее условие:

$$\varphi^{+}(\sigma)=G(\sigma)\,\varphi^{-}(\sigma)+f(\sigma)\quad \text{на}\quad \gamma; \tag{9}$$

где

$$G(\sigma)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\varkappa} & \text{на } \gamma',\\ 1 & \text{на } \gamma''.\end{cases}\qquad f(\sigma)=\begin{cases}\dfrac{2\mu g(\sigma)}{\varkappa} & \text{на } \gamma',\\ 0 & \text{на } \gamma''.\end{cases} \tag{10}$$

Решение задачи (9) класса h_4, имеющей полюс первого порядка в точке $\zeta=0$ с главной частью $\dfrac{\Gamma R}{\zeta}$, а также имеющей полюс первого порядка в точке $\zeta=\infty$, имеет вид:

$$\varphi(\zeta)=\frac{2\mu\chi_4(\zeta)}{2\pi i\varkappa}\int_{\gamma'}\frac{g(\sigma)d\sigma}{\chi_4^{+}(\sigma)(\sigma-\zeta)}+\frac{\chi_4(\zeta)\Gamma R}{\chi_4(0)\zeta}, \tag{11}$$

где

$$\chi_4(\zeta)=\prod_{k=1}^{2}(\zeta-\alpha_k)^{\frac{1}{2}-i\beta}\cdot(\zeta-\beta_k)^{\frac{1}{2}+i\beta}$$

каноничное решение, $\beta=\dfrac{l_n\varkappa}{2\pi}$. Для вычисления интеграла (11) нам понадобится разложение в ряд функции $\chi_4^{-1}(\zeta)$.

Имеем

$$\chi_4^{-1}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} d_{2k}\zeta^{-(2k+2)}, \tag{12}$$

где

$$d_{2k}=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{\prod\limits_{n=1}^{j}\sqrt{\left(\frac{1}{2}-n\right)^2+\beta^2}\cdot\prod\limits_{n=1}^{k-j}\sqrt{\left(\frac{1}{2}-n\right)^2+\beta^2}}{j!\,(k-j)!}\times$$

$$\times\cos\left[\sum_{n=1}^{k-j}\operatorname{arctg}\frac{2\beta}{2n-1}-\sum_{n=1}^{j}\operatorname{arctg}\frac{2\beta}{2n-1}+2(2j-k)\theta_0\right], \tag{13}$$

где θ_0—аргумент точки α_1, $d_0=1$ $(k=1, 2,\ldots N)$.

Обозначим через $Q(\sigma)$—часть, содержащую положительные степени σ в разложении функций $\chi_4(\sigma)/g(\sigma)$.

Будем иметь

$$Q(\sigma)=\frac{R}{2\mu}\sum_{\nu=1}^{N}P_{2\nu}\sigma^{2\nu-1}, \tag{14}$$

где

$$P_{2\nu}=\sum_{k=0}^{N}(a_{2k}+b_{2k})M_{k,\nu}, \tag{15}$$

$$M_{k,\nu}=\begin{cases}0 & \text{для}\quad k=0,\ 1,\ldots,\nu-1\\ \dfrac{md_{2k-2\nu}}{2k+1}-\dfrac{d_{2k-2\nu-2}}{2k-1} & \text{для}\ k=\nu,\ \nu+1,\ldots,N,\ \text{причем}\ d_{-2}=0.\end{cases} \tag{16}$$

Пользуясь известной формулой вычисления интеграла типа Коши [1], имеем

$$\varphi(\zeta)=\frac{2\mu}{1+\varkappa}\{g(\zeta)-\chi_4(\zeta)Q(\zeta)\}+\frac{\Gamma R\chi_4(\zeta)}{\chi_4(0)\,\zeta}. \tag{17}$$

В силу равенств (14) и (17), получаем

$$(1+\varkappa)\,\varphi(\sigma)-2\mu g(\sigma)=-\chi_4(\sigma)R\left\{\sum_{\nu=1}^{N}P_{2\nu}\sigma^{2\nu-1}-\frac{(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)\sigma}\right\}. \tag{18}$$

Для вычисления функций $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ воспользуемся равенством (4). Будем иметь:

$$iF_1-F_2=\frac{R^2\chi_4(\sigma)(m-\sigma^2)}{|\omega'(\sigma)|}\left\{-\sum_{\nu=1}^{E}P_{2\nu}\sigma^{2\nu-2}+\frac{(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)\sigma^2}\right\}, \qquad (19)$$

Введем обозначение

$$T_{2\nu}(\sigma)=T'_{2\nu}(\theta)+iT''_{2\nu}(\theta)=\chi_4(\sigma)(m-\sigma^2)\sigma^{2\nu-2}. \qquad (20)$$

В силу (20), равенство (19) примет вид:

$$iF_1(\theta)-F_2(\theta)=\frac{R^2}{|\omega'(\sigma)|}\left\{-\sum_{1=1}^{N}T_{2\nu}(\sigma)P_{2\nu}+\frac{(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}T_0(\tau)\right\}. \qquad (21)$$

Функцию $\chi_4(\sigma)$ можно записать:

$$\chi_4(\sigma)=R_1(\theta)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)\right], \qquad (22)$$

где

$$R_1(\theta)=2_e^{2\beta\theta_0}\sqrt{|\sin(\theta-\theta_0)\sin(\theta+\theta_0)|}, \qquad (23)$$

$$\vartheta(\theta)=\theta+\beta\ln\left|\frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\sin(\theta-\theta_0)}\right|. \qquad (24)$$

В силу равенства (22), из равенства (20) будем иметь:

$$\begin{aligned}T'_{2\nu}(\theta)&=R_1(\theta)\{\sin(2\nu\theta+\vartheta)-m\sin[(2\nu-2)\theta+\vartheta]\},\\ T''_{2\nu}(\theta)&=R_1(\theta)\{m\cos[(2\nu-2)\theta+\vartheta]-\cos(2\nu\theta+\vartheta)\}.\end{aligned} \qquad (25)$$

Из равенства (21) получаем:

$$F_1(\theta)=\frac{R^2}{|\omega'(\sigma)|}\left\{-\sum_{\nu=1}^{N}T''_{2\nu}(\theta)P_{2\nu}+\frac{(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}T''_0(\theta)\right\}, \qquad (26)$$

$$F_2(\theta)=\frac{R^2}{|\omega'(\sigma)|}\left\{\sum_{\nu=1}^{N}T'_{2\nu}(\theta)P_{2\nu}-\frac{(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}T'_0(\theta)\right\}.$$

Далее, имеем:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_j}|\omega'(\sigma)|F_1(\theta)d\theta=-R^2\sum_{\nu=1}^{N}H_{2\nu}(\theta_j)P_{2\nu}+\frac{(1+\varkappa)\Gamma R^2}{\chi_4(0)}H_0(\theta_j), \qquad (27)$$

где

$$H_{2\nu}(\theta_j)=\int_{\theta_0}^{\theta_j}T''_{2\nu}(\theta)d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_j}R_1(\theta)\{m\cos[(2\nu-2)\theta+\vartheta]-\cos(2\nu\theta+\vartheta)\}d\theta. \qquad (28)$$

В силу равенств (2), (6), (26), (27) и (14), получаем систему уравнений:

$$2\delta_1(\theta_j)\sum_{k=0}^{N} a_{2k}\cos 2k\theta_j+\sum_{\nu=1}^{N} A_{2\nu}(\theta_j)P_{2\nu}+\frac{1}{\rho(\theta_j)}b_0=B_1(\theta_j);$$

$$2\left[\delta_1(\theta_j)+\frac{\delta_2(\theta_j)R^2}{\rho^2(\theta_j)}\right]\sum_{k=0}^{N} a_{2k}\cos 2k\theta_j-\frac{4\delta_2(\theta_j)R^2}{|\omega'(\sigma_j)|\rho(\theta_j)}\sum_{k=1}^{N} kb_{2k}\cos 2k\theta_j-$$

$$-\frac{R^2}{|\omega'(\sigma_j)|}\sum_{\nu=1}^{N} T'_{2\nu}(\theta_j)P_{2\nu}=B_2(\theta_j); \tag{29}$$

$$P_{2\nu}=\sum_{\nu=0}^{N} M_{k,\nu}(a_{2k}+b_{2k}):$$

$$(k=0,\ 1,\ldots,N;\quad \nu=1,\ 2\ldots,N;\quad j=0,\ 1,\ 2,\ldots,N),$$

где

$$A_{2\nu}(\theta_j)=-\frac{R^2}{|\omega'(\sigma_j)|}T'_{2\nu}(\theta_j)+\frac{R^2}{\sigma(\theta_j)}H_{2\nu}(\theta_j) \tag{30}$$

$$B_1(\theta_j)=q_1(\theta_j)-\frac{(1+\varkappa)\Gamma R^2}{\chi_4(0)}\left\{\frac{T'_0(\theta_j)}{|\omega'(\sigma_j)|}-\frac{H_0(\theta_j)}{\rho(\theta_j)}\right\},$$

$$B_2(\theta_j)=f_1(\theta_j)-\frac{(1+\varkappa)\Gamma R^2}{|\omega'(\sigma_j)|\chi_4(0)}T'_0(\theta_j).$$

Систему уравнений (29) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{N}\{A_{k,\nu j}a_{2k}+B_{k,\nu j}b_{2k}+C_{k,\nu j}P_{2k}\}=F_{\nu j}, \tag{31}$$

где

$$A_{k,\nu j}=M_{k,\nu},\quad B_{k,\nu j}=M_{k,\nu},\quad C_{k,\nu j}=\begin{cases}-1, & \text{при } k=\nu,\\ 0, & \text{при } k\neq\nu,\end{cases}$$

$$\text{для } \nu=1,\ 2,\ldots N.$$

и $F_{\nu,j}=0$

$$A_{k,N+1,j}=2\delta_1(\theta_j)\cos 2k\theta_j,\quad B_{0,N+1,j}=\frac{1}{\rho(\theta_j)},\ B_{k,N+1,j}=0,\ C_{k,N+1,j}=A_{2k}(\theta_j),$$

$$A_{k,N+2,j}=2\left[\delta_1(\theta_j)+\frac{\delta_2(\theta_j)R^2}{\rho^2(\theta_j)}\right]\cos 2k\theta_j;\quad B_{0,N+2,j}=0,$$

$$B_{k,N+2,j}=-\frac{4\delta_2(\theta_j)R^2}{|\omega'(\sigma_j)|\rho(\theta_j)}k\cos 2k\theta_j \tag{32}$$

$$C_{0,N+2,j}=0,\quad C_{k,N+2,j}=-\frac{R^2T'_{2k}(\theta_j)}{|\omega'(\sigma_j)|},\ E_{N+1,j}=B_1(\theta_j),\ F_{N+2,j}=B_2(\theta_j)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots,N,\ j=0,\ 1,\ 2,\ldots,N).$$

$$\rho(\theta_j)=\frac{R(m^2-2m\cos 2\theta_j+1)^{3/2}}{m^2-1},\quad |\omega'(\sigma_j)|=R(m^2-2m\cos 2\theta_j+1)^{1/2}.$$

Решая систему (31), находим значения постоянных a_{2k}, b_{2k}, P_{2k}, $(k=0,\ 1,\ 2,\dots,N)$.

Напряжения определяются из следующих равенств:

$$\widehat{\rho\rho}=-\frac{R^2}{|\omega'(\sigma)|^2}\left\{\sum_{\nu=1}^{N}2P_{2\nu}\left[L'_{2\nu+2}(\theta)-lL'_{2\nu}(\theta)+\frac{2\nu-1}{2}T'_{2\nu}(\theta)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}\left[L'_2(\theta)-lL'_0(\theta)-\frac{1}{2}T'_0(\theta)\right]\right\},\tag{33}$$

$$\widehat{\rho\Theta}=-\frac{R}{|\omega'(\sigma)|^2}\left\{\sum_{\nu=1}^{N}2P_{2\nu}\left[L''_{2\nu+2}(\theta)-lL''_{2\nu}(\theta)+\frac{2\nu-1}{2}T''_{2\nu}(\theta)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}\left[L''_2(\theta)-lL''_0(\theta)-\frac{1}{2}T''_0(\theta)\right]\right\},\tag{34}$$

$$\widehat{\Theta\Theta}=\frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}\widehat{\rho\rho}+\frac{8}{1+\varkappa}\sum_{k=0}^{N}a_{2k}\cos 2k\theta,\quad \text{на } \gamma'.\tag{35}$$

$$\widehat{\rho\rho}=0,\quad \widehat{\rho\Theta}=0,\tag{36}$$

$$\widehat{\Theta\Theta}=\frac{4}{1+\varkappa}\left\{\sum_{k=0}^{N}2a_{2k}\cos 2k\theta-\right.$$

$$-\frac{R^2}{|\omega'(\sigma)|^2}\left[\sum_{\nu=1}^{N}2P_{2\nu}\left(L'_{2\nu+2}(\theta)-lL'_{2\nu}(\theta)+\frac{2\nu-1}{2}T'_{2\nu}(\theta)\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}\left(L'_2(\theta)-lL'_0(\theta)-\frac{1}{2}T'_0(\theta)\right)\right]\right\}\quad \text{на } \gamma'',\tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}L'_{2\nu}(\theta)&=R_2(\theta)\{-\sin[(2\nu+2)\theta-\vartheta]+m\sin(2\nu\theta-\vartheta)\},\\ L''_{2\nu}(\theta)&=R_2(\theta)\{\cos[(2\nu+2)\theta-\vartheta]-m\cos(2\nu\theta-\vartheta)\},\end{aligned}\tag{38}$$

$$R_2(\theta)=\frac{\exp[-2\beta\theta_0]}{2\sqrt{|\sin(\theta-\theta_0)\sin(\theta+\theta_0)|}},\tag{39}$$

$$l=\cos 2\theta_0-2\beta\sin 2\theta_0.\tag{40}$$

Для определения предельных значений внешних напряжений в случае хрупкого материала имеем следующее равенство

$$\lim_{r\to 0}\left\{r\cdot\widehat{\Theta\Theta}^*\right\}=\frac{K}{\pi},\tag{41}$$

где r—есть расстояние точек тела, расположенных в окрестности точки $\alpha_1=\exp[i\theta_0]$.

$$r = |\sigma - \alpha_1| = 2\left|\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\right| \tag{42}$$

$\widehat{\theta\theta}^*$—есть значение $\widehat{\theta\theta}$ при максимальной нагрузке, K—модуль сцепления.

Компоненту разрывающих упругих напряжений $\widehat{\theta\theta}$ в окрестности точки $\theta=\theta_0$ можно представить так:

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{N_0}{\sqrt{|\sin(\theta-\theta_0)|}} + O(1), \tag{43}$$

где N_0—коэффициент интенсивности напряжения $\widehat{\theta\theta}$ в окрестности рассматриваемого конца $\alpha_1=\exp[i\theta_0]$, $O(1)$—ограниченная часть компоненты напряжения $\widehat{\theta\theta}$ при $r\to 0$. В силу (41), (37), (38) и (39), имеем

$$N_0 = \frac{4}{1+\varkappa}\,\frac{R^2\exp[-2\beta\theta_0]\sqrt{K_1^2(\theta)+K_2^2(\theta)}}{|\omega'(\sigma)|^2\sqrt{|\sin(\theta+\theta_0)|}}\,|\cos[\vartheta(\theta)+\vartheta^*(\theta)]|, \tag{44}$$

где

$$K_1(\theta) = \sum_{\nu=1}^{N} P_{2\nu}\{\sin(2\nu+4)\theta - m\sin(2\nu+2)\theta + l[-\sin(2\nu+2)\theta + m\sin 2\nu\theta]\} +$$

$$+\frac{(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}[-\sin 4\theta + m\sin 2\theta + l\sin 2\theta], \tag{45}$$

$$K_2(\theta) = -\sum_{\nu=1}^{N} P_{2\nu}\{\cos(2\nu+4)\theta - m\cos(2\nu+2)\theta + l[-\cos(2\nu+2)\theta +$$

$$+m\cos 2\nu\theta]\} + \frac{(1+\varkappa)\Gamma}{\chi_4(0)}[-\cos 4\theta + m\cos 2\theta + l\cos 2\theta],$$

$$\vartheta^*(\theta) = \arccos\frac{K_1(\theta)}{\sqrt{K_1^2(\theta)+K_2^2(\theta)}} \tag{46}$$

В силу равенств (42) и (43) из (41), будем иметь;

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\left\{\sqrt{2\left|\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\right|}\cdot\frac{N_0}{\sqrt{\sin(\theta-\theta_0)|}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{1+\varkappa}\,\frac{R^2\exp[-2\beta\theta_0]\sqrt{K_1^2(\theta)+K_2^2(\theta)}}{|\omega'(\alpha)|^2\sqrt{|\sin(2\theta_0|}} = \frac{K}{\pi}. \tag{47}$$

(предполагается, что $\theta\to\theta_0$ по γ'').

Из равенства (47) определяется предельное значение внешней нагрузки.

В заключение отметим, что без принципиальных усложнений построенное здесь решение обобщается на случай анизотропной пластинки, край эллиптического отверстия которой частично подкреплен изотропными тонкими элементами.

При $m=0$ получается решение задачи для плоскости с круговым отверстием.

Кафедра теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1954.
2. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман, Пластинки и оболочки с ребрами жесткости, Киев, 1964.
3. Н. Х. Арутунян, П. М. М., 32, в. 4, 1968.
4. Н. Х. Арутунян, С. М. Мхитарян, П. М. М., т. 35. в. 5. 1969.
5. Г. А. Морерь, Г. Я. Попов, П. М. М., т. 35, в. I, 1971,
6. А. С. Хачикян, Известия АН Арм. ССР, механика, т. XXIII № 3, 1970.
7. Д. В. Грилицкий, Т. Г. Сулим, Прикладная механика, т. VIII, в. II, 1972.
8. В. В. Панасюк, Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, 1968.

ი. ზონენაშვილი

უბან-უბან გამაგრებული ფირფიტა

რეზიუმე

განხილულია იზოტროპიული ფირფიტა, რომელსაც უკავია უსასრულო სიბრტყე ელიფსური ხვრელით. საზღვრის ორი სიმეტრიული ნაწილი გამაგრებულია ცვლადი სიხისტის მქონე დრეკადი ძელებით. დანარჩენ ნაწილზე კი ცნობილია დაძაბულობა. უსასრულობაში ფირფიტაზე მოქმედებს მუდმივი ინტენსივობის დატვირთვა.

ამოცანის ამოხსნა აიგება კოლოკაციის მეთოდის გამოყენებით. მიღებულია დაძაბულობების გამომსახველი ფორმულები, გამმაგრებელი ძელების ბოლო წერტილების მახლობლობაში ინტენსივობის კოეფიციენტის მნიშვნელობა, აგრეთვე უსასრულობაში ფირფიტის ზღვრული დატვირთვის განსაზღვრის პირობები.

I. ZONENASHVILI

A PLATE SUPPORTED BY OPEN EDGES

Summary

An isotropic plate occupying an infinite plane will an elliptic hole is considered. Along some arcs of the boundary the plate is supported by thin elastic rods of variable longitudinal and flexural rigidity. The remainder of the boundary is free from stresses. At infinity the plate is subjected to uniform stress.

The solution is constructed by the method of collocation making use of the classical mixed problem of the plane theory of elasticity for a plane with an elliptic hole.

The formulas are derived for stresses and for coefficients of stress intensity in the neighbourhood of the end of the supporting element. The condition is obtained for determining the limit value of tensile internal forces at infinity.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

Л. П. ГОКИЕЛИ

4 января 1975 года скончался один из блестящих представителей теории обоснования математики и логики, член-корреспондент Академии наук Грузинской ССР, заслуженный деятель науки, заведующий кафедрой обоснования и истории математики, профессор Леван Петрович Гокиели.

Л. Гокиели родился 3 декабря 1901 года в г. Кутаиси. В 1919 г., после окончания Кутаисской мужской гимназии, он поступил в Тбилисский государственный университет, который окончил в 1924 году по специальности «математика». В тот год состоялся первый выпуск грузинских математиков.

Уже с 1927-1928 учебного года Л. Гокиели параллельно с А. М. Размадзе читал курс математического анализа. Этот курс лег в основу созданного им учебника — «Дифференциальное исчисление», который вместе с его же «Введением в математический анализ» на протяжении ряда лет являлся одним из основных руководств по математическому анализу.

С 1930 года Л. Гокиели работал профессором и заведующим кафедрой. Он читал курсы по обоснованию математики, теории множеств, теории функций действительного переменного и т. д. Особо следует отметить его заслуги в деле развития в Грузии математической логики.

Оргинальные лекции и учебники Л. Гокиели являлись блестящим образом логического изложения математической теории.

Весьма примечательным явлением в творчестве Л. Гокиели было одно из первых и значительных исследований математических рукописей Карла Маркса, изданных в виде отдельной монографии в 1948 году.

Перу Л. Гокиели принадлежит около пятидесяти научных трудов, в том числе монографии: «Вопросы обоснования теории множеств», «О понятии числа», «Основания математики», «О природе логического» и «Логика» — в двух томах. В последних книгах сделана попытка реализации известного тезиса В. И. Ленина о тождестве диалектики, логики и теории познания. Эту попытку автор осуществил в виде разработки определенной диалектической теории логики, в основу которой положил свое понятие т. н. коренного вывода.

Одним из центральных вопросов обоснования математики, исследованием которых Л. Гокиели занимался на протяжении ряда лет, является проблема парадоксов теории множеств; он выработал оригинальную точку зрения на решение этой сложнейщей проблемы.

Л. Гокиели является членом многих международных научных организаций, его труды широко известны и за пределами нашей страны.

Ученый вел многостороннюю общественную и организаторскую деятельность. В разное время он был деканом механико-математического факультета, заведующим отделением логики в Институте философии АН Грузинской ССР, президентом Грузинского математического общества и т. д. Многие годы руководил семинаром по философии математики.

Заслуги Л. Гокиели перед Родиной отмечены правительственными наградами, в том числе — орденом Ленина.

Ушел от нас добрый и отзывчивый человек, крупный мыслитель, пламенный патриот Родины. Светлый образ Л. Гокиели вечно останется в сердцах его многочисленных учеников, коллег и друзей.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
166, 1976

ლ. გოკიელი

საბჭოთა მეცნიერებამ დიდი დანაკლისი განიცადა. 1975 წლის 4 იანვარს გარდაიცვალა მათემატიკის დაფუძნების თეორიისა და ლოგიკის ერთ-ერთი ბრწყინვალე წარმომადგენელი, საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი, მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწე, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის დაფუძნებისა და ისტორიის კათედრის გამგე პროფესორი ლევან პეტრეს ძე გოკიელი.

ლევან გოკიელი დაიბადა 1901 წლის 3 დეკემბერს ქ. ქუთაისში. ქუთაისის ვაჟთა გიმნაზიის დამთავრების შემდეგ 1919 წელს შევიდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, რომელიც 1924 წელს დაამთავრა მათემატიკის სპეციალობით. ეს იყო ქართველ მათემატიკოსთა პირველი გამოშვება.

უკვე 1927—1928 სასწავლო წლიდან ლ. გოკიელი ა. რაზმაძის პარალელურად კითხულობდა მათემატიკური ანალიზის კურსს. ეს კურსი საფუძვლად დაედო მის სახელმძღვანელოს—„დიფერენციალურ აღრიცხვას“, რომელიც, მისივე „მათემატიკური ანალიზის შესავალთან“ ერთად, წლების მანძილზე წარმოადგენდა ერთ-ერთ ძირითად სახელმძღვანელოს მათემატიკურ ანალიზში.

ლ. გოკიელი 1930 წლიდან მუშაობდა უნივერსიტეტის პროფესორად და კათედრის გამგედ. კითხულობდა კურსებს მათემატიკის დაფუძნებაში, სიმრავლეთა თეორიაში, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში და სხვა. განსაკუთრებით აღსანიშნავია მისი ღვაწლი საქართველოში მათემატიკური ლოგიკის განვითარების საქმეში. ლ. გოკიელი თავის ორიგინალურ ლექციებსა და სახელმძღვანელოებში იძლეოდა მათემატიკური თეორიის ლოგიკურად ზუსტი დასაბუთების ბრწყინვალე ნიმუშს, რითაც სტუდენტებს უნერგავდა მათემატიკურ მსჯელობაში ლოგიკური სიმკაცრის დაცვის შეგნებას.

ღირსშესანიშნავი მოვლენა იყო ლ. გოკიელის შემოქმედებაში კარლ მარქსის მათემატიკური ხელნაწერების ერთ-ერთი პირველი და მნიშვნელოვანი გამოკვლევა, გამოცემული ცალკე მონოგრაფიის სახით 1948 წელს.

ლ. გოკიელის კალამს ეკუთვნის 50-მდე სამეცნიერო ნაშრომი, მათ შორის მონოგრაფიები: „სიმრავლეთა თეორიის დაფუძნების საკითხები“, „რიცხვის ცნების შესახებ“, „მათემატიკის საფუძვლები“, „ლოგიკურის ბუნების შესახებ“ და „ლოგიკის“ ორტომეული. უკანასკნელ წიგნებში მოცემულია დიალექტიკის ლოგიკის და შემეცნების თეორიის იგივეობის შესახებ ლენინის ცნობილი თეზისის რეალიზაციის ცდა. ავტორმა ეს ცდა განახორციელა ლოგიკის გარკვეული დიალექტიკური თეორიის შემუშავების სახით, რომელსაც საფუძვლად დაუდო მის მიერ შემოღებული ძირეული დასკვნის ცნება.

მათემატიკის დაფუძნების ერთ-ერთი ცენტრალური საკითხი, რომელსაც მრავალი წლის განმავლობაში იკვლევდა ლ. გოკიელი, არის სიმრავლეთა თეო-

რიის პარადოქსების პრობლემა; მან შეიმუშავა ორიგინალური თვალსაზრისი ამ ურთულესი პრობლემის გადასაწყვეტად.

ლ. გოკიელი მრავალი საერთაშორისო სამეცნიერო ორგანიზაციის წევრი იყო, მისი შრომები ფართოდ არის ცნობილი ჩვენი ქვეყნის საზღვრებს გარეთაც. იგი ეწეოდა მრავალმხრივ საზოგადოებრივ და ორგანიზაციულ მოღვაწეობას, სხვადასხვა დროს იყო მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დეკანი, ლოგიკის განყოფილების გამგე საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ფილოსოფიის ინსტიტუტში, საქართველოს მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდენტი და სხვა. წლების მანძილზე ხელმძღვანელობდა მათემატიკის ფილოსოფიის სემინარს.

ლ. გოკიელის დამსახურება სამშობლოს წინაშე აღნიშნულია ლენინის ორდენით და მთავრობის სხვა ჯილდოებით.

კეთილი და გულისხმიერი ადამიანის, დიდი მოაზროვნის, სამშობლოს მგზნებარე პატრიოტის ლ. გოკიელის სპეტაკი სახე მარად დარჩება მისი მრავალრიცხოვანი აღზრდილების, კოლეგებისა და მეგობრების გულში.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

П. К. Зерагия — О решении основной граничной задачи одного нелинейного бикалорического уравнения 5
М. П. Григолия — О сингулярной задаче Гурса для гиперболических уравнений 13
Д. Г. Натрошвили — Эффективное решение основной бигармонической задачи для внешности круга и сферы с применением функции Грина . . 31
Л. П. Бицадзе — Основная контактная задача для трансверсально-изотропного тела 37
З. Г. Горгадзе — О мерах в банаховых пространствах измеримых функций 43
Д. И. Цейтлин — Об одном свойстве радикала группы 51
Э. Т. Самсонадзе — О зависимости между кратностями весов неприводимых представлений некоторых полупростых алгебр Ли 55
Г. Т. Самсонадзе — О m-локальной теореме 61
Р. Л. Хомерики — Выборочные оценки характеристик распределения Ферми на ЭВМ 65

Механика

Н. Н. Патарая — Обобщения вариационных методов для бесконечных областей и их приложения к задачам совместного движения твердых тел в жидкости 69
Л. Г. Шавлиашвили — Общая задача об изгибе поперечной силой однородных и составных анизотропных цилиндрических брусьев 83
И. А. Зоненашвили — Пластинка, подкрепленная разомкнутыми ребрами 97
Леван Петрович Гокиели (некролог) 105

შინაარსი

მათემატიკა

პ. ზ ე რ ა გ ი ა — ერთი არაწრფივი ბიკალორული განტოლების ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შესახებ 10
მ. გ რ ი გ ო ლ ი ა — გურსას სინგულარული ამოცანის შესახებ ჰიპერბოლური განტოლებებისათვის 30
დ. ნ ა ტ რ ო შ ვ ი ლ ი — წრისა და სფეროს გარე არეებისათვის ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანის ეფექტური ამოხსნა გრინის ფუნქციების გამოყენებით . . 35
ლ. ბ ი წ ა ძ ე — ძირითადი საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნა ტრანსვერსალური იზოტროპული დრეკადი ტანისათვის 41
ზ. გ ო რ გ ა ძ ე — ზომადი ფუნქციების ბანახის სივრცეებში ზომების შესახებ . . 49
დ. ც ე ი ტ ლ ი ნ ი — ჯგუფის რადიკალის ერთი თვისების შესახებ 53
ე. ს ა მ ს ო ნ ა ძ ე — ზოგიერთი ნახევრადმარტივი ლის ალგებრების დაუყვანადი წარმოდგენების წონების ჯერადობებს შორის კავშირის შესახებ 59
გ. ს ა მ ს ო ნ ა ძ ე — m-ლოკალური თეორემის შესახებ 63
რ. ხ ო მ ე რ ი კ ი — ფერმის განაწილების მახასიათებლების შერჩევითი განსაზღვრა ელექტრონულ მანქანაზე 68

მექანიკა

ნ. პ ა ტ ა რ ა ი ა — ვარიაციული მეთოდების განზოგადება უსასრულო არეებისათვის და მათი გამოყენება სითხეში მყარი სხეულების ერთობლივი მოძრაობის ამოცანებში 81
ლ. შ ა ვ ლ ი ა შ ვ ი ლ ი — ზოგადი ამოცანა ერთგვაროვანი და შედგენილი ანიზოტროპული ცილინდრული ძელების განივი ძალით ღუნვის შესახებ 95
ი. ზ ო ნ ე ნ ა შ ვ ი ლ ი — უბან-უბან გამაგრებული ფირფიტა 104
ლ ე ვ ა ნ გ ო კ ი ე ლ ი (ნეკროლოგი) 107

CONTENTS

Mathematics

P. Zeragia—On the solutions of the boundary problems of one non-linear bicalor equation 11
M. Grigolia—On the Goursat singular problem for hyperbolic equations 30
D. Natroshvili—A general biharmonic problem for the outer domains of the circle and the sphere 35
L. Bitsadze—Basic contact problem for a transversel isotropic body . . 42
Z. Gorgadze—On measures in Banach spaces of measurable functions . . 57
D. Zeitlin—On a property of the radical of a group 53
E. Samsonadze—On the dependence between weight multiplicities of irreducible representations of some semisimple algebras 60
G. Samsonadze—About an m-local theorem 64
R. Khomeriki—Selectives estimates of Fermi distribution characteristics on electronic computers 68

Mechanics

N. Pataraia—Generalization of variation methods for infinite areas and their application to problems of joint movement of solids in liquid . 81
L. Shavliashvili—The general problem of bending due to shearing forcefor homogeneous and composite anisotropic beams 96
I. Zonenashvili—A plate supported by open edges 104

Редактор издательства Л. И. Абуашвили
Техредактор И. В. Хуцишвили
Корректор В. Д. Долидзе

Сдано в производство 23/IV-75 г.
Подписано в печать 18/II-76
Формат бумаги 70×108/16
Печатных л. 9,8
Учетно-издательских л. 6,72

Заказ 734 УЭ 06513 Тираж 300
Цена 78 коп.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14

Типография Тбилисского университета,
Тбилиси 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.

86-1976.

ЦЕНА 78 коп.